به نام خدا

سخنرانی پیرامون کوهومولوژی موضعی

نگارش : حمیدرضا گندم زاده

(دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی – دانشگاه آزاد اسلامی واحد بیرجند)

و حسین امینی

(کارشناس ریاضی کاربردی از دانشگاه پیام نور مرکز فردوس)

مربوط به رشته ریاضی محض – گرایش جبر


بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

---

[۱]- (cohen- mecavlay)

[۲]- (Cohen- Macavlay and Goren stain rings)

[۳]- vanishing

ریاضیات جدید

سخنرانی هایی مبتنی بر کوهومولوژی موضعی

کراگ هانکه وپیوست شماره ۱ از سوی آمیلا تیلور

خلاصه

این مقاله مبتنی است بر پنج کنفرانس که از سوی مؤلف در آموزشگاه دوره تابستان ارائه شده است که شامل موضوعات ترکیبی، تئوری هومولوژی[۱] وجبر[۲] می باشدکه در دانشگاه شیکاگو ودر تاریخ ۲۶ آگوست سال ۲۰۰۴ توسط لاچو آوراموف ، دن کریستین ، بیل دویر، مایک مندلوبروک شیپلی گردآوری وتدوین شده است. این مقالات اصول بنیادین در خصوص کوهومولوژی موضعی است وکاربرد آن را برای اثبات قضیه ی گرورتندیک[۳] که درباره اتصالات گستره ی حلقه های معین است را مورد نظر قرار می دهد.

در پیوستی که توسط آمیلا تیلور نوشته شده است ، راهکار دیگری در پی اثبات قضیه ی کالک برنر واسترام فلز داده شده که درباره ایده آل های[۴] اول[۵] بر گرفته از ایده آل های بنیادین می باشد.

۱- (Homotopj theory)
۲- (Algebra)
۳- (Grothendik)
۴- Ideal
۵- prime

مقدمه

کوهومولوژی موضعی از سوی گروتندیک ودر اوایل دهه ۱۹۶۰ ودر پاسخ به حدسیات پیر ساموئل مطرح شد، این حدسیات، پیرامون موقعیت هایی است که طبق آن حلقه های جابجایی تنها عامل فاکتورگیری به شمار می آید.

گراک هانکه وپیوست شماره یک ارائه شده از سوی آمیلا تیلور:

کوهومولوژی موضعی به عنوان یک ابزار جدایی پذیر[۱] معرفی شده وموضوع مهم بسیاری از تحقیق ها قرار گرفت. در این مقاله، کاربردهای مختلفی از کوهومولوژی موضعی مطرح شده است که اثباتی بر پیشرفت بسیاری از سازه های اصلی در خصوص کوهومولوژی موضعی می باشد. تمام حلقه های ذکر شده در این مقاله، به صورت همسان حلقه هایی هستند که خاصیت جابجایی دارند ومعمولاً به خوبی در جایگاه قیاس[۲] قرار می گیرند. فرض را بر این می گذاریم که، با اصول جابجایی که شامل مفاهیمی چون ارتفاع، بُعد، عمق وتجزیه وتحلیل ابتدایی است آشنایی دارید.

۱- independable

۲- Noetherian

با توجه به صفات و ویژگیهای زیاد دیگری که وجود دارد، کوهومولوژی موضعی این امکان را به ما می دهد تا جوابگوی بسیاری از سؤالات دشوار باشیم. مثال خوبی که درباره چنین مسائلی می توان مطرح کرد این است که آیا کوهومولوژی موضعی پاسخگوی این سؤال است که چند ایده آل ژنراتور[۱] با رادیکال همراه است ؟

به طور کلی، اگر J ایده آل حلقوی R است، آیا رادیکال J ایده آل است یا نه؟

$$\sqrt{J}=\{X\in R|X^m\in J|forsomem\}$$

می گوییم ایده آل J با n عضو[۲] زیر رادیکال قرار می گیرد اگر $X_1,...X_n\in J$ باشد بنابراین $\sqrt{J}=\sqrt{(x_1,...x_n)}$ می شود. به عنوان مثال، $J\subseteq K[X,y]$ایده آلیست که توسط X^2,Xy,y^2 تولید شده که خود با دو جزء X^2,y^2در زیر رادیکال قرار گرفته است. به خاطر داشته باشید که رادیکال ایده آل I مجموعه ای است از تمام ایده آل های اول که I را شامل می شوند. هیلبرت، مشهور به نال استلنساتز می گوید حتی بیشتر نگهدارنده های مورد R، حلقه های چند جمله ای اند، رادیکال I حاصل اشتراک حداکثر ایده آل هاییست که I دارند.(شامل I هستند).

ایده آل I را که کوچکترین عدد جزء هاست باید در زیر رادیکال قرار داد یا نه؟

شاخص ترین مثالی که می توان در این باره ذکر کرد این است که فرض کنید $R=[X,Y,U,V]$ حلقه چند جمله ای با چهار متغیر است که در میدان K قرار گرفته است.\

۱- Generator

۲- element

$I=(XU,XY,YV,YU)$ را ایده آل در نظر بگیرید. این ایده آل رادیکال پوچ [1] خودش است مثلاً، $I=\sqrt{I}$. چهار ژنراتور ارائه شده از I کوچکتر هستند. از طرف دیگر، آن می تواند جزء $XU,XY,YV+YU$ که از رادیکال بدست می آید باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$(XV)^2 = XV(XV+yU)-(XU)(yV)\in(XU,yV,XV+yU)$$

آیا دو جزء،I را از زیر رادیکال خارج می کند؟ یا وجود یک جزء هم برای خارج کردن I از زیر رادیکال کافی است؟ پاسخ سؤال اخیر منفی است. عامل به دست آمدن ایده آل از رادیکال تنها یک جزء نمی باشد، (با توجه به اولین عامل بازدارنده که توسط کرول به اثبات رسید) به عبارت دیگر ارتفاع [2] ایده آل است.

فرضیه مشهور ارتفاع کرول بیان می دارد:

قضیه ۱-۱(قضیه ارتفاع کرول) ، فرض کنید R یک قیاس حلقوی است و $I=(X_1,...X_n)$ ایده آلی است که با n جزء ایجاد شده است. اگر p نسبت به I عدد اول کوچکتر باشد آنگاه ارتفاع p حداکثر n خواهد بود. در مثالی که مورد بررسی قرار دادیم، ارتفاع I، ۲ است با توجه به اینکه آن بدست آمده از ۲ بلندی و۲ ایده آل $(U,V),(X,y)$ باشد.

فرضیه ی ارتفاع کرول بیان می دارد که عدد ۲ کوچکترین عدد چند جمله ای است که منجر به بدست آمدن I از زیر رادیکال شده است. این مسئله همچنین این سؤال را مطرح می کند که آیا دو چند جمله ای $F,G\in I$ که $\sqrt{(F.G)=I}$، را ایجاد کرده اند یا خیر؟

تلاش در پی یافتن دو جمله ای مانند F,G با انجام چند تحقیق تصادفی اگر غیر ممکن نباشد سخت خواهد بود. اما اگر چند جمله ایهایی نظیر این دو جمله ای وجود داشته باشد نیز هیچ

---

[1] - nilradical
[2] - Height

تحقیق تصادفی آنها را نخواهد یافت. مشکل این است که این چند جمله ایها در شرایط عادی نیز بسیار خاص ومنحصر به فرد خواهند بود. بنا براین به حالت مکتوب درآوردن این چند جمله ایهای کلی درI ، عملی نخواهد بود. به جای آن، می خواهیم در بعضی تئوریهای کوهمولوژی عامل بازدارنده ای را که با دو جزء، I را از زیر رادیکال خارج می کند پیدا کنیم. کوهمولوژی موضعی چنین عامل های بازدارنده ای را ایجاد می کند. در حلقه ی Q وایده آل J، ما $i \geq 0$ مدول $H_j(R)$ را با موارد زیر ارتباط می دهیم.

نتیجه $\leftarrow$ $(i)H_j^i(R) = H_{\sqrt{J}}^i(R)$

اگر J توسط K جزء به دست آید بنابراین: $(ii)H_J^i(R) = 0$

در آخر برای $I = (XU, XV, YU, YU)$ اثبات کردیم که $H_I^3 \neq 0$ و بنا براین I با دوجزءاز زیر رادیکال بیرون نمی آید. مثال -۵-۵ را ببینید.

به این نتیجه رسیده ایم که اگر انگیزه ومسیر برای فراگیری روشن باشد، روند یادگیری برایمان بهتر است. هدفمند بودن فرضیه ای که خواهان درک آن هستیم نیز به روند یادگیری کمک می کند. امیدواریم خوانندگان این مقاله نیز از خواندن این مقاله اهدافی را دنبال کنند، به همین دلیل این مقاله فرضیه ی گراتندیک را مورد توجه قرار داده است. این فرضیه مبتنی بر اتصالات مجموعه های جبری خاص می باشد . نتیجه ی بدست آمده نشان داد که این فرضیه کاربرد خوب ومؤثری در فصول مشترک، گوناگونی تصویری وساده سازی مجموعه ایده آل های اولیه دارد.

تقریباً، تمام مواردی که در این مقاله به اثبات رسیدند باید در فرضیه ی گراتندیک وکاربردهای آن لحاظ شوند .از طرف دیگر، بعضی صفحات نیز اضافه شده است که اطلاعات بیشتری را

اختیار خوانندگان قرار می دهد.آن دسته از خوانندگانی که علاقه مند به مطالعه اثبات ها (برهان) دارند، از مطالعه ی این صفحات چشم پوشی می کنند. به این گروه از خوانندگان این هشدار را می دهیم که این بخشها ممکن است درمقالات بعدی ذکر نشوند.

یکی از کاربردهای فرضیه گراتندیک که به اثبات خواهد رسید، طبق گفته ی فالتون وهنسن فرضیه زیر است:

فرضیه-۲-۱ ([۱۳]) فرض کنید K نزدیک به دستگاه مجموعه ی جبری است وفرض کنید که $Y \subseteq P_K^n$ و $X \subseteq P_K^n$ متغیر های جبری است (به عبارت دیگر، بخش های جبری ساده شده وساده نشده). اگر $\dim(X)+\dim(Y) \succ n$ ، بنابراین $X \cap Y$ تهی خواهد بود. پیوستی که از سوی آمیلا تیلور نوشته شده است کاربردهای جالب دیگری از اتصالات اصولی فرضیه در ارتباط با مبانی گروبنر از ایده آل های اول را دارا می باشد.

این مقاله شامل پنج بخش است، که هر بخش موضوع یکی از پنج مقاله اصلی است.درهر بخش چند تمرین نیز آورده شده است. گاهی اوقات منابع اضافی در پایان هر بخش ذکر می شوند که معمولاً اثبات نشده وبرای اطلاعات بیشتر آمده اند،واما ضمیمه ها : اولین ضمیمه توسط آمیلا تیلور نوشته شده است که نتیجه مطالعات او بر روی فرضیه کالک برنر و استارم فلز است وضمیمه دوم درباره حلقه های گرنشتاین[۱] از رفتار «کلاسیک» است. بخش اول، تعاریف ونتایج اصلی را ارائه می دهد، بخش دوم شامل فرضیه ی دوگانگی مالتیس[۲] است، بخش سوم شامل مقدمه ی کوهن –مکالی وحلقه های گرنشتاین[۳] واثبات دوگانگی موضعی[۴] است، بخش چهارم شامل تعدادی از فرضیه های از بین رفته مهم است که این فرضیه ها مربوط به کوهومولوژی

۱- gorenstein

۲- Maltis Dvality

۳- (cohen- Macavly)

۴- (Local dualit)

موضعی می باشد در حالیکه بخش پنجم فرضیه ی مهمی را به اثبات می رساند که مربوط است به هارتشون[۱] و لیچن بام[۲] وفرضیه فالتون[۳] وهنسن[۴] و در بالا ذکر شده است را به اثبات می رساند.

۲.کوهومولوژی موضعی

این بخش را با ارائه تعاریف های معادل مدول های انژکتیو آغاز می کنیم:

حکم -۱-۲ فرض کنید R حلقه ی(جابجایی) وE مدول-R [۵] است. تعریف های زیر معادل آن هستند:

فرض کنید $m \in N$ودر نتیجه مدول –R باشد. هر همریختی ازm تا E تا عامل همریختی از N تا E گسترده شده است.

(۲) (بارکریسترین)، فرض کنید I درR ایده آل باشد هر همریختی ازI تا E به همریختی از R تا E گسترده شده است.

(۳) $Hom_R(,E)$دنباله های کوتاه دقیقی را نشان می دهد، هنگامیکه هر یک از این معادلات بیان می شود می گوییم E انژکتیو مدول-R است.

معادله(۱)،(۲)و(۳) بدیهی است. معادله دیگری نیز در زیر ذکر شده است: مدول E انژکتیو است اگر وفقط اگر $E \subseteq M$ باشد.

به عبارت دیگر: همریختی (هومومورفیزم) وجود دارد بصورت $F : M \to E$ ، بنابراین نتیجه یE درM که توسط F تشکیل شده با M همسان است. درواقع مدول های انژکتیو از تقسیم

۱- (hartshorn)
۲- (Hartshorne & Lichtenbavm)
۳- (falton)
۴- (Folton & Hansen)
۵- (R-modvle)

مدول های بزرگتری که پایه هستند ایجاد شده و E حاصل می شود و هریک از (۱) ، (۲) ، (۳) یا (۴) را مورد قبول قرار می دهد. راه حل دیگری که مشخصه ی مدول انژکتیو است باید به اثبات برسد. روشن ترین راه برای اثبات، پیرو این اصل است که هرمدول E را می توان در مدول انژکتیو I محاط کرد. بنابراین فرض E از تقسیم I حاصل می شود و E انژکتیو است بنابراین مدول های انژکتیو جمع وندهای مستقیم انژکتیو می باشد، به این شکل که انژکتیو کوچکتری در مدول داده شده تا بالاترین سطح همریختی وجود دارد برای توضیح این مدول تعریف توجه کنید:

تعریف .۲.۲) اگر $N \subseteq M$ باشد مدول های- R هستند ، پس گفته می شود که M نسبت به N ضروری تر است اگر هر زیر مدول غیر صفر T از M فصل مشترک غیر صفر با N داشته باشد.

قضیه ..۲.۳) فرض کنید R حلقه پس مدول- R باشد به معادله های زیر توجه کنید:

۱) E ماکزیمم بسط الزامی است از M به عبارت دیگر اگر $E \subseteq F$ و F نسبت به M ضروری باشد پس $E = F$ خواهد بود.

۲) E کوچکترین واحد انژکتیو شامل M است، به عبارت دیگر اگر $M \subseteq I \subseteq E$ و I انژکتیو باشد پس $I = E$ خواهد بود.

۳) E مدول انژکتیو و بسط الزامی M است.

تعریف .۲.۴) A مدول E با همه ی ویژگی هایی که در بالا ذکر شد، را انژکتیو هال از M می نامند و با نشان $E_R(M)$ نشان داده می شود. انژکتیو هال $E_R(M)$ از M تا همریختی خاص را شامل شده است. انژکتیو هال نه تنها به مدول M بلکه به حلقه ی R نیز بستگی دارد. به

طور کلی می توان گفت $E_R(M) \cong E_{R/I}(M)$ را ایده ال I با فرض IM مساوی صفر خواهد شد.

$IM = 0$

نکته قابل توجه و مهم در توضیح انژکتیو هال از مدول M به عنوان بسط الزامی ماکزیمم از M وجود دارد که از نظر ما درست بوده و بدون اظهارنظر بیشتری در این باره آنرا به کار می بریم. فرض کنید انژکتیو هال E از مدول M را تثبیت کرده ایم و بسط الزامی آن $M \subseteq N$ از M است. بنابراین نتیجه حاصل می شود که محاط کردن N در E همساز است با نتیجه ی حاصل M در E.

خاصیت انژکتیو E ، نشان از وجود همریختی دارد به شکل $F: N \to E$ که نتیجه ی $M \subseteq N$ را بسط می دهد و F لزوماً انژکتیو است به این دلیل که اگر هسته ی F را K در نظر بگیریم غیر صفر است. بنابراین فصل مشترک غیر صفر با M خواهد داشت با نقض این اصل که M در E محاط شده است. این بدین معناست که $E_R(M)$ مشمول کپی همریخت از بسط الزامی M است و آن به درستی بسط الزامی ماکزیمم خواهد بود. با ذکر مثال درباره ی مدول های انژکتیو، این امکان فراهم می شود تا روی یکی از خواص ویژه ی آن بیشتر تأمل کنیم.

تعریف .۲.۵) فرض کنید M مدول-R باشد، می گوییم M بخش پذیر است و اگر X در R مقسوم علیه غیر صفر باشد و $U \in M$ جزءهای $V \in M$ باشد آنگاه $XV = U$ خواهد بود.

نکته .۲.۶) هر مدول انژکتیو بخش پذیر است. فرض کنید E انژکتیو مدول – R و $U \in E$ باشد، انژکتیو (۱) از قضیه ی ۲.۱ برای E در نگاشت M_X از R به R به کار می رود که با ضرب X درآن به دست می آید و نگاشت F از R تا E را در u قرار می دهد. می توانیم نگاشت مورد آخر را تا همریختی بسط دهیم.

$$g: R \to E$$

بنابراین $gom_X = f$ خواهد بود. با جایگذاری عدد ۱ در این نگاشت نتیجه ی زیر حاصل

می شود: $V = g(I)$ ، $U = f(1) = g(\mu_X(1)) = g(X) = Xg(1)$

عبارت بخش پذیر چقدر به عبارت انژکتیو نزدیک است؟ به جز موارد اندک تشابه آنچنانی ندارند. در یک مورد که می توان آنها برابر دانست این است که R بعد ایده ال اصلی باشد یعنی PID که از مقاله ی بار کریترین استنباط شده است. (تمرین شماره ۳ را ببینید)

مورد دیگر این است، هر مدول که در گروه اعداد صحیح قرار داشته باشد که هم ساده و هم بخش پذیر است انژکتیو است. تمرین شماره ی یک را ببینید.

می توانیم با ذکر مواردی مثال هایی را درباره ی مدول های انژکتیو بیان کنیم.

مثال ۲.۷.) اگر R یک بعد باشد آنگاه $E_R(R) = K$ یعنی خارج قسمت مجموعه R.

این مسئله از دو اصل منشا می شود: اول اینکه اگر W مقسوم علیه غیر صفر در مدول M باشد بنابراین M_V بسط الزامی M است. دوم اینکه ، هر مدول E در بعد R که هم ساده و بخش پذیر باشد لزوماً انژکتیو است. بنابراین K نسبت به دامنه ی R الزامی و انژکتیو است در نتیجه با توجه به قضیه ی ۸.۱ (۳) انژکتیو هال از R می باشد.

مثال ۲۰۸٠) اگرR دامنه ی ایده ال اصلی باشد آنگاه یک R- مدول انژکتیو است به ویژه اگر K جزء کسر تبدیل به کسر متعارفی میدان R باشد آنگاه هر دوی K و K/R قابل تقسیم هستند اگر و تنها اگر E بخش پذیر باشد پس دنباله دقیق آن به صورت زیر خواهد بود:

$$0 \to R \to K \to K/R \to 0$$

که در آن تمام کاراکترها به جز مورد اولی مدول های-R انژکتیو هستند. به این دنباله، دنباله تفکیک پذیر انژکتیو R گویند.

تعریف .۲.۹) تجزیه ی انژکتیو E از M ، R مدول دنباله دقیق و کامل زیر است:

$$(1) \quad 0 \to M \to E^0 \xrightarrow{\delta_0} E^1 \xrightarrow{\delta_1} \dots \to E^n \xrightarrow{f/L} E^{n+1} \to \dots$$

که هر E^i مدول $-$ R انژکتیو است. دنباله تجزیه ی انژکتیو، کوچکترین دنباله تجزیه ی انژکتیو نامیده می شود اگر $E^{\cdot}$ انژکتیو هال M باشد و برای همه ی آنها $i \geq 0, E^{i+1}$ انژکتیو هال $Ker(\ell_i + 1) = \mathrm{Im}(\ell_i)$ می باشد.

نشان دادن این مطلب که همریختی دنباله های دقیق، کوچکترین دنباله ی تجزیه ی انژکتیو است کار سختی نمی تواند باشد. حال به اصلی ترین تعریف این مقاله می رسیم: فرض کنید R یک حلقه جابجایی پذیر باشد، I ایده ال R و M نیز R- مدول باشد، تعریف .۲.۱۰ یعنی $T_I(M) = \{X \in M | \overset{\text{بنابراین } n \in N \text{ وجود دارد}}{\dots\dots\dots\dots} | I_u^n = 0\}$ و فرض کنید $H_I^i(\ )$ تابع گر[۱] حقیقی مشتق شده از T_I باشد.

به یاد داشته باشید این مدول ها با تفکیک پذیری انژکتیو از Mو با استفاده از T_I و کوهمولوژی محاسبه می شوند. به همین دلیل T_I به طور دقیق به صورت زیر نوشته می شود. $H_I(M) = T_I(M)$

اگر j همانند I ایده ال دیگری با رادیکال پوچ مشابه باشد، آنگاه T_I و T_j تابع گرهای مشابه خواهند بود. در نتیجه به ازای هر i و برای تمامی مدول های $-$ R ، M خواهیم داشت

$$H_j^i(M) = H_i^i(M)$$

که این مهمترین ویژگی کوهومولوژی موضعی است.

ویژگی دیگر سطحی اما مهم مدول های کوهمولوژی موضعی این است که هر جزء در $H_i^i(M)$ با توان I از بین می رود که در تابع تعریف ارائه شده است.

۱- functor

با این وجود، ویژگی قابل ذکر دیگر این است: داده های دنباله دقیق کوتاه از مدول های-R یعنی $0 \to N \to M \to L \to 0$،

در این جا دنباله ی دقیق بلند ایجاد شده از کوهومولوژی موضعی وجود دارد و

$$0 \to H_I^0(N) \to H_I^0(M) \to H_I^0(L) \to H_I^1(N) \to H_I^1(M) \to \ldots$$

این دنباله را دنباله پیشرو یوگا از مشتق تابع گر نامند و ما آنرا در این مقاله اثبات نمی کنیم.

ما اغلب همچون کوهومولوژی موضعی از M به مدول های کوهومولوژی موضعی با حمایت از I مراجعه می کنیم. تابع گر $T_1(M)$ زیر مدول M که جزء هایش در عبارت بسته ی $V(I) \subseteq Spec(R)$ آمده است را مشخص می کند. بدین معنا که اگر $P \in Spec(R)$ و P فاقد I باشد پس $(T_i(M))_P = 0$ خواهد بود. بنابراین این جزءها در $T_i(M)$ با توان I خط می خورند. بنابراین اگر تعدادی از جزءهای I را معکوس کنیم، برابر صفر خواهند شد.

مثال ۲.۱۱.) فرض کنید P یک عدد اول است، $H_I^1(Z)$را محاسبه می کنیم اگر I ایده ال به دست آمده از P باشد بنابراین Z، PID خواهد بود .تمام مدول های بخش پذیر انژکتیو هستند و جدایی پذیری انژکتیو Z داده ای است با $0 \to Z \to Q \to Q/Z \to 0$. تابع گر T_I به راحتی تاب p^n را برای تمام n ها محاسبه می کند. با آمدن این تابع گر در جدایی پذیری انژکتیو فقط یک قسمت موثر وجود دارد که آنرا با $T_i(Q/Z)$ نشان می دهند که $T_i(Q/Z)$در پایه ی یک کوهومولوژی قرار می گیرد. بنابراین تمامی کوهومولوژی های موضعی بی اثر می شوند به جز $H_I^1(Z)$ و تا تاب p_در Q/Z همریخت می شود.

با انجام فاکتورگیری، این مدول را می توان با $Z[P^{-1}]/Z$ شناخت، در این جا $Z[P^{-1}]/Z$ حلقه ای از اعداد گویا است که مخرج کسر آن توان P است.

مثال ۲.۱۲.) مثال مشابه دیگری که هدف این مقاله است، محاسبه ی $H_I^1(M)$ می باشد که $R=K[X]$ ، K محیط، $I=(X)$ و M مدول- R متناهی است و با توجه به ساختار فرضیه برای PID، M جمع مدول های چرخه ای است. از آنجایی که کوهومولوژی موضعی با جمع مقادیر جابجا می شود، در نتیجه می توانیم کوهومولوژی موضعی $R/(g)$ را برای $g\in R$ محاسبه کنیم. ابتدا کوهومولوژی موضعی خود R را محاسبه می کنیم، به عبارتی اگر $g=0$ باشد همانطور که در بالا هم ذکر کردیم، به دلیل PID بودن R، هر مدول بخش پذیر انژکتیو است. انژکتیو هال از R کسر $K=K_{(X)}$ است و از آنجایی که K/R بخش پذیر است پس انژکتیو است. در نتیجه جدایی پذیری انژ کتیو به این صورت است:

$$0\to R\to K\to K/R\to 0$$

حال با وجود T_I کوهومولوژی موضعی را همچون کوهومولوژی مجموعه ای محاسبه می کنیم،

$$0\to T_i(K)\to T_i(K/R)\to 0$$

وقتی $H_I^{\cdot}(R)$ و $H_I^J(R)=0$ برای هر $J\succ 1$ است همچنین می توانیم نتیجه بگیریم که $T_I(K/R)=H_I^1(R)$ است همانطور که در بالا ذکر کردیم، عامل فاکتورگیری نشان می دهد که :

$$H_I^1(R)\cong R[X^{-1}]/R=K[X,X^{-1}]/K(X)$$

این مدول پایه ی K از قسمت های $\frac{1}{x^n}$ را دارد که $n\geq 1$ است با ضرب x قسمت های پایه به صورت نرمال درمی آیند $X.\frac{1}{X}=0$

برای محاسبه $g\neq 0$ از دنباله ی کوتاه دقیق زیر استفاده می کنیم،

$$0\to R\xrightarrow{g}R\to R/(g)\to 0$$

این دنباله کوتاه دقیق خود عامل ایجاد دنباله ی دقیق بلندی در زمینه ی کوهومولوژی است، با ذکر $H_I^i(R)$ تا $H_I^i(R)$ که g در آنها ضرب می شود، به همین دلیل در اینجا فقط یک کوهومولوژی موضعی موجود برای R است. دنباله چهار جمله ای در زیر آمده:

$$0 \to H_I^0(R/(g)) \to H_I^1(R) \xrightarrow{g} H_I^1(R) \to H_I^1(R/(g)) \to 0 \cdot$$

از آنجائی که هر جزء از $H_I^1(R)$ با توان I خط می خورد، اگر h تا x اول باشد در آن صورت h واحد $H_I^1(R)$ خواهد بود. در نتیجه $a,b \in R$ و $ah = 1-bx$ در نتیجه $1-bx$ واحد این مدول خواهد بود با نوشتن $g = X^n h$ اگر $(h,x)=1$ باشد ، $H_I^0(R/g)$ هسته ی ضرب با X^n در $H_I^1(R)$ است و $H_I^1(R/(g))$ هم هسته ی ضرب با X^n می باشد.

جزءها در $H_I^1(R)$ با X^n که از $\frac{۱}{x^n}$بدست آمده است پوچ می شوند، بنابراین تا (X^n) / R نتیجه می شود $H_I^1(R) = R[X^{-1}]R$ ، این مدول بر R بخش پذیر است پس جواب هم هسته صفر خواهد شد.

این نتیجه گیری ها را خلاصه می کنیم:

اگر $g=0$ پس $H_I^i(R)=0$ برای هر $i \neq 1$ و $R[X^{-1}]/R$

$H_I^1(R)$ اگر $g \neq 0$باشد پس می توان گفت $g = X^n h$ که در این صورت x ، h را تقسیم نمی کند و داریم $H_I^i(R(g))=0$برای هر $i \neq 0$ و $H_I^0(R/(g)) \cong R/(X^n)$

۲۰۱۰ دو روش مهم دیگر درباره ی کوهومولوژی موضعی : دو تعریف بسیار مهم دیگری در ارتباط با کوهومولوژی موضعی وجود دارد، اگر پایه ی حلقه ی R قیاس باشدو دو دنباله تابع گرهای کوهومولوژی، F^i و G^i بوده و منجر به ایجاد دنباله بلند دقیق از داده های مدول دنباله کوتاه شود با $i=0$ همساز بوده بنابراین $F^i(E)=G^i(E)=0$ که $i \succ 0$ و هرگاه E

انژکتیو باشد پس به راحتی اثبات می کنیم که $F^i(E)\cong G^i(M)$ که برای هر i اعمال می شود.برای ارائه ی اولین تعریف متبادل، $T_I(M)$ را واحد مستقیم از زیر مدول $0:MI^n$ می دانیم در واقع اگر $\{I_n\}$ سیستمی از ایده ال ها باشد می نویسیم: $T_I(M)=U_n(O:_M I_n)$ ،

و اگر $(o:_M I_n)=Hom_R(R/I_n.M)$ آنگاه $H_I^0(M)=T_I(M)=\xrightarrow{Lim}Hom_R(R/I_nM)$.

همانطور که در بالا ذکر کردیم از دنباله های بلند مرتبط با تابع گر Homو T این فرمول بدست می آید: $H_I^i(M)=\xrightarrow{Lim}Ext_R^i(R/I_n.M)$.

ما از درستی این فرمول به هنگام اثبات هارت شورن – لیچن باوم به اختصار (HLVT) بهره می بریم. دو راه را برای فیلتر کردن مورد توجه قرار می دهیم. اولین راه برای فیلتر کردن که راه مهمی نیز می باشد توانایی فیلتر کردن نمادین است، $\{i^{(n)}\}$. به یاد داشته باشید که $I^{(n)}$ بعد از معکوس کردن عضوها والبته نه در همه ی اعداد اول کوچکتر از I، پسرو می شود. دومین روش مهم برای فیلتر کردن در ویژگی های مثبت آن توانایی فیلتر کردن فروبنیس یعنی $\{I^{(P^e)}\}$ است، اگر $\{I^{pe}\}$ ایده الی تولید شده از تمامی توان های P^e عضوهای I باشدکه البته دومین عامل تشخیص نامحسوس تر است.

به ازای $X\in R$ فرض کنید $K(X:R)$ دلالت دارد بر مجموعه ی $0\to R\to R_X\to 0$ و این مجموعه به گونه ای درجه بندی می شود که درجه ها از مجموعه R است و R_x درجه یک می باشد.

در این جا می نویسیم R_x برای تعیین موضع، R ضرب در دسته بندی $\{X^n\}$، به عبارت دیگر $R_x=R[X^{-1}]$ اگر $X_n\in R$و ......و x_1. آنگاه فرض کنید$K^0(X_1,X_2,...X_n:R)$ بر

مجموعه ی $K^0(X_1,R)\otimes R\ldots\otimes_R K^0(x_n,R)$ دلالت دارد و به طور کلی می نویسیم اگر (C^0,d_c), (D^0,d_D)دو مجموعه باشند آنگاه حاصل این مجموعه ها$(C\otimes_R D,\Delta)$ خواهد بود. با تعریف مجموعه ای که مقدار درجه بندی آن $\sum_{j+k=i} C_J\otimes D_K$ باشد و مقدار متفاوت Δ با نگاشت مشخص می شود از$C_j\otimes D_K\to(C_{j+1}\otimes D_k)\oplus(C_j\otimes D_{K+1})$ نتیجه می شود $\Delta(X\otimes Y)=d_c(X)\otimes y+(-D_X^K\otimes d_D(y))$.مدول های ارائه شده در این مجموعه ازنوع کوهومولوژی کاس ذول[۱] می باشد،

دنباله $$0\to R\to\oplus\sum_i R_{X_i}\to\oplus\sum_{i\prec J} R_{X_iX_j}\to\ldots\to R_{XX_{21}\ldots X_n}\to 0$$

که معادلات دیفرانسیل نگاشت های طبیعی برگرفته از موضع یابی هستند. البته با علائم ذکر شده اگر M مدول – R باشد قرار می دهیم

$$K^0(X_1,X_2,\ldots X_n,M)=K^0(X_1,X_2,\ldots X_n.R)\otimes_R M$$ و

می نویسیم کوهومولوژی $K^0(X_1,X_2,\ldots X_n,M)$ $H^i(X^\infty,M)$.

(قضیه ی ۲.۱۳) فرض کنید R حلقه ای قیاس جابجا پذیر، I ایده ال و M مدول – R باشد در این صورت فرض کنید $\sqrt{(x_1,\ldots x_n)}=\sqrt{I}$ پس به ازای هر I، $H_I^i(M)\cong H^i(X^\infty,M)$ است و این همریختی تابع گرانه می باشد.

اثبات: از آنجایی که کوهومولوژی موضعی بستگی به رادیکال I دارد، می توان فرض را بر این گذاشت که I با x_i تولید می شود. کوهومولوژی موضعی کاس ذول دنباله های داده های بلند و دقیق تابع گر را از مدول های دنباله های کوچک ایجاد می کند ، اثبات می کنیم که $H^0(X^\infty,M)=H_I^0(M)$.

در تعریف آمده که$H^0(X^\infty,M)$همولوژی دنباله ای است یعنی $0\to M\to M_{X_1}\oplus\ldots\oplus M_{xn}$ ،

---

[۱] - kos zul

عضو $g \in M$ به سمت صفر میل می کند اگر و فقط اگر در هر موضعی به سمت صفر میل کند و همچین برای هر I وجود داشته باشد. در این صورت $gx_i^{ni} = 0$ خواهد بود اگر و فقط اگر N موجود باشد به این ترتیب $yI^N = 0$ است به شرط اینکه $y \in H_I^0(M)$ باشد.

به منظوراتمام اثبات مورد یک باید اثبات کنیم که $H^i(X^\infty, E) = 0$برای همه مدول های R – E و $i \succ 0$ است.

برای جمع مقادیر E ، هر x_i پوچ یا واحد است در نتیجه کوهمولوژی بزرگتر صفر خواهد شد.

به مثال اول بر می گردیم یعنی $I = (X), R = K[X]$، با داده های مـدول – R M مـی تـوانیم کوهومولـــوژی موضـــعی M را همچـــون کوهومولـــوژی دنبالـــه دار محاســـبه کنـــیم،

$$0 \to M \to M_x \to 0$$

تجسم اخیر از کوهومولوژی موضعی در بیشتر مواقع کاربرد دارد، در حال حاضر از آن برای اثبات دو قضیه ی مهم کوهومولوژی موضعی استفاده می کنیم.

قضیه ی ۲.۱۴) فرض کنید R حلقه ی قیاس باشد ، I ایده ال و M مدول – R، فرض کنید $\phi : R \to S$ همریخت باشد و همچنین فرض کنید N مدول – S باشد.

(۱) اگر Φ مسطح باشد در این صورت $H_{Is}^j(M \otimes_R S) \cong H_I^i(M) \otimes_R S$وبه طور خاص ، کوهومولوژی موضعی با موضع یابی و تکمیل آن جابجا می شود.

(۲) (استقلال پایه) $H_I^j(N) \cong H_{IS}^j(N)$ که اولین کوهومولوژی موضعی در مقایسه با حلقه ی پایه ی R محاسبه می شود.

اثبات: ژنراتورهای $x_1,...,x_N$ و از I را انتخاب کنید. اولین درخواست از این حقیقت منشا می شود که $k(x_1, x_2,...x_N, M)\otimes_R S = K^0(\delta(X_1),...(X_n), M)\propto_n S$ و اینکه S نسبت به R مسطح می باشد، دومین ادعا از این حقیقت می آید که

$$K^0(X_1,..., X_n, N) = K^0(X_1,...X_n : R)\otimes_R N = (K^0(X_1,...X_n : R)\otimes_R S)\otimes_S N$$

$$= K^0(\ell(X_1),...\ell(X_n), S)\otimes_R N = K^0(\ell(X_1),...,\ell(X_n), N)$$

از این روش های متبادل به منظور محاسبه ی کوهومولوژی موضعی در حمایت از بالاترین مقدار ایده ال از حلقه ی موضعی استفاده می کنند.

قضیه ی ۲.۱۵) فرض کنید (R, M, K, E) حلقه ی موضعی قیاس از بعد d باشد و فرض کنید M مدول – R تولید شده متناهی باشد،پس اگر $i \geq 0$ آنگاه $H_m^i(M)\cong H_{\hat{m}}^i(\hat{M})$.

اثبات: با توجه به استقلال پایه خواهیم داشت $H_{\hat{m}}^I(\hat{M})\cong H_{m\hat{R}}^i(\hat{M})$ بنابراین $H_m^i(M)\cong \xrightarrow{Lim} Ext_R^i(R/M^n, m)$ به این علت که $R^\wedge$ نسبت به R مسطح می باشد.

پس داریم:

$$H_{m\hat{R}}^i(\hat{M})\cong H_{m\hat{R}}^i(M\otimes_R \hat{R})H_m^i(M)\otimes_R \hat{R}\cong \xrightarrow{Lim} Ext_R^i(R/M^n, m)\otimes_R \hat{R}\cong \xrightarrow{Lim} Ext_R^i(R/m^n, m)$$

آخرین همریختی ذکر شده در مدول های Ext با توان ایده ال ماکزیمم خط می خورد.

۲.۲۰)موارد طبقه بندی شده

تعریف۰۲.۱۶) حلقه ی R طبقه بندی شده، اگر بنویسیم $R = \oplus_{i\geq 0} R_i$ همچون گروههای آبلی، باید افزودکه نگاشت ضرب، این طبقه بندی را حفظ می کند به عبارتی $R_i.R_j \subseteq R_{i+j}$. از آنجایی که $R.$ خود یک حلقه است (لزوماً شامل ۱ می شود)، و از آنجائی که $R_0.R_j \subseteq R_j$

و هر R_j مدول ـR است می گوییم عضو غیر صفر $X \in R$ متجانس است اگر برای هر j داشته باشیم $X \in R_i$. در این مورد j را درجه ی x می نامیم، البته که j در هر R_j وجود دارد.

تعریف۰ ۲.۱۷) فرض کنید R حلقه ی طبقه بندی شده و I ایده ال R باشد، می گوییم I متجانس است اگر و فقط اگر دو شرط معادل زیر برقرار شود:

(۱) I مانند ایده ال با عضوهای متجانس به دست آید.

(۲) اگر $F = f_i + ... + f_j \in I$ باشد وقتی $i \le j$ و $f_i \in R_i$ برای $i \le L \le j$ در آنصورت داشته باشیم $f_i \in I$ برای $i \le L \le j$.

می گوییم که حلقه ی طبقه بندی شده ی R، طبقه بندی استاندارد است اگر R_0 میدان بوده و R نسبت به R_0 با R_1 به دست آید به عبارتی می توان گفت $R = R_0[R_1]$ خواهد بود. بدین معنا که برای همه ی $i \le 1$ $R_j = (R_1)^j$ باشد . ما همچنین بیان می کنیم که R_1 مدول- R تولید شده ی متناهی است اگر $R_1 = R_{ou1} + ... R_0 \cup_n$ و R_{0un} و R طبقه بندی استاندارد باشد، در آن صورت می نگاریم که حلقه ی چندجمله ای $R_0[X_1,...X_n]$ در R با ارجاع x_i به u_i صورت می گیردو بنابراین می نویسیم برای ایده ال های I از R که متجانس نیز هستند وجود دارد $R \cong R[X_1,...X_n]/I$، تمامی این R ها با توجه به قضیه ی هایل برت بیسیس [۱] قیاس می باشد.

تعریف .۲.۱۸) فرض کنید R حلقه ی طبقه بندی شده و M مدول-R باشد. می گوییم M طبقه بندی شده است اگر همچون گروه آبلی ، $M = \oplus M_{i \in Z} M_i$ وهمچنین اثر R بر M را حفظ می کند به عبارتی $R_j . M_K \subseteq M_{J+K}$ خواهد بود.

---

۱ - Hilbert - basis

اگر چه تعریف ما در حلقه ی طبقه بندی شده فقط درجات غیر منفی است، اما برای مدول این امکان وجود دارد که از درجه های منفی و مثبت برخوردار باشند. اما در این مقاله ما به این تمرین های کلی(حضور درجات منفی) نیازی نداریم. فرض کنید R طبقه بندی شده است و M مدول- R طبقه بندی شده و I نیز متجانس است، عضوهای متجانس $X_1,...X_n$ که I را از رادیکال به دست می دهد انتخاب کنید هنگامیکه g شکلی از درجه ی t است مدول M_g داده ی طبقه بندی طبیعی را شامل می شود به این ترتیب : اگر $X \in M$ درجه ی d را داشته باشد آنگاه می توان گفت: x / g^n از درجه ی (d-nt) می باشد. در نتیجه تمامی مدول های این همبافت یعنی همبافت $K^0(X_1, X_2,...X_n, M)$، طبقه بندی شده اند و در نتیجه مدول های کوهومولوژی نیز طبقه بندی می شوند آنچه که برای ما روشن نیست اما با این حال درستی آنرا تأیید می کنیم این است که این طبقه بندی از انتخاب x_i مستقل است.

در مثال ما، مدول کوهومولوژی موضعی $H^1_{(X)}(R) = K[X, X^{-1}] / K[X]$ طبقه بندی می شود وقتی کهn- درجه ی عضو $1 / x^n$ است، این مدول عضوی با درجه های غیر منفی ندارد جز عضوی که درجه ی آن ۱- است که آنرا $\frac{1}{x}$ می نامیم. این عضو با کل ایده ال ماکزیمال متجانس از R پوچ می شود، درجه ی ماکزیمال عضوها در مدول همیشه درست است به همین دلیل ضرب عضوهای ایده ال ماکزیمال از درجه R را افزایش می دهد. به یاد داشته باشید که تاب مدول M مجموعه ی عضوهایی در M است که با ایده ال ماکزیمال پوچ شده است (یا با ایده ال متجانس ماکزیمال در مورد طبقه بندی شده از بین رفته). این مجموعه نسبت به باقیمانده ی میدان ماکزیمال ایده ال فضای برداری است.

مدول $H^1_{(x)}(R)$ تاب یک بعدی دارد که در درجه ی ۱- بدست آمده است.مدول کوهومولوژی موضعی $H^1_{(x,g)}(K[X,g])$ مثال دیگری است که در این جا ذکر می کنیم، ما همولوژی کاس ذول را برای محاسبه ی این گروه از داده ها به کار می بریم که هم هسته از نگاشت $K[X,g,X^{-1}]\oplus K[X,g,g^{-1}]\to K[X,g,X^{-1},g^{-1}]$ باشند

قسمتی از دنباله ی کوهومولوژی کاس ذول را می توان به راحتی نشان داد. خود حلقه پایه ی k از تک جمله ای های gox تشکیل شده که می توان آنرا با نکات کلیدی واقع در ربع اول تشخیص داد. معکوس x تمامی نکات کلیدی را در ربع دوم اضافه می کند و معکوس هر دوی آنها (g,x) تمام نکات کلیدی انتگرال را در سطح اضافه می کند.

هم هسته به راحتی با نقاطی در ربع سوم مشخص می شود، حلقه ی R به سمت پائین می چرخدو آن همچنین تاب تک بعدیی دارد که آن را $x^{-1}g^{-1}$ که با درجه ی ۲- باقی است می نامند یعنی بالاترین درجه ی از بین نرفته کوهومولوژی موضعی .

در این صورت در بعد بالاتری امتداد می یابد . اگر $R=K[X_1,...X_n]$ نسبت به میدان K ، حلقه ای چندجمله ای باشد بنابراین کوهومولوژی موضعی بلندتری از R وجود دارد: $H^n_m(R)\cong K[X_1^{-1},....,X_n^{-1}]$ که با ضرب x_i مطابق معمول عمل می کند با تغییر توان ها (به جز موردی که $x_i^{-1}\cdot x_i$ مساوی صفر باشد یعنی $X_i.X_i^{-1}=0$) در این مدول عضوی از درجه ی بلندتر وجود دارد که آنرا $x_1^{-1},...,X_n^{-1}$ که درجه ی آن n– است می نامیم این عضو تابی از $H^n_m(R)$ را ایجاد می کند.

۲.۳. تمرین

تمرین ۱) اثبات کنید که مدول بخش پذیر فارغ از تاب نسبت به بُعد انژکتیو است.

تمرین ۲) حوزه ی بیر را اثبات کنید فرضیه ی (۲) ۲.۱ به عبارتی اثبات کنید معادل (۲) را با فرضیه ی (۱) ۲.۱

تمرین ۳) با توجه به PID، اثبات کنید که مدول E انژکتیو است اگر و فقط اگر E بخش پذیر باشد.

تمرین ۴) اثبات کنید که T_I دقیق می باشد.

تمرین ۵) اگر فرض را بر این بگذاریم که n عدد صحیح باشد $H^i_{(n)}(Z)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۶) اثبات کنید که همریخت $H^n_m(R) \cong K[X_1^{-1},...,X_n^{-1}]$ داده ای است در متن فوق.

تمرین ۷) کوهومولوژی موضعی گروه آبلی متناهی G را با توجه به اینکه $I=(P)$ و P عدد اول است بیابید.

تمرین ۸) فرض کنید I مدول انژکتیو بوده و $I \cong E_1 \oplus E_2$ است اثبات کنید هر دو E_iها انژکتیو هستند.

۳- مدول های انژکتیو نسبت به حلقه های قیاس و دوآلیتی ماتلیس :

مطالب مهم و اساسی در ارتباط با ساختار مدول های انژکتیو نسبت به حلقه های قیاس که منجر به اثبات دوآلیتی ماتلیس می شود در این بخش ذکر شده اند.

قضیه ی ۳.۱.) فرض کنید R حلقه ی قیاس باشد، مدول –R E ،مدول انژکتیو جدائی ناپذیر خواهد بود اگر و تنها اگر برای اعداد اول P از R داشته باشیم : $E \cong E_R(R/P)$. هر زیر مدول ایجاد شده ی متناهی M از $E_R(R/P)$ فقط P را به عنوان عدد اول پیوسته دارا می باشد. هر مدول انژکتیو حاصلجمع مدول های انژکتیو جدایی ناپذیر است.

اثبات: ابتدا ثابت می کنیم که $E \cong E_R(R/P)$ جدایی ناپذیر است می نویسیم $E = E_1 \oplus E_r$ و فرض کنید $I_i = E_i \cap (R/P)$ باشد. به همین دلیل E نسبت به $I_i \neq 0, R/P$ ضروری است، پس $I_1 I_2 \neq 0$ بنابراین R/P یک دامنه است در نتیجه $I_1 \cap I_r \neq 0$ است و می گوییم $E_1 \cap E_r \neq 0$ که یک تناقض است.

ادعا می کنیم که P تنها عدد اول پیوسته از $E_R(R/P)$ است بنابراین می گوییم که اگر q عدد اول باشد و R/q در $E_R(R/P)$ محاط شود پس $q = p$ خواهد بود. فرض کنید که در این جا داریم: $E = E_R(R/q), R/q \subseteq E_R(R/P)$ محاط است بنابراین $E_R(R/q)$ نسبت به R/q ضروری است، در پی این نتیجه داریم $E_R(R/q)$ در $E_R(R/P)$ محاط می شود. پس آن مقدار، جمع مستقیم از $E_R(R/P)$ می باشد، اگر $E_R(R/P)$ جدایی ناپذیر باشد به این نتیجه می رسیم که $E \cong (R/P)$ است ما همریخت $E_R(R/q) \cong E_R(R/P)$ را بنیان قرار می دهیم، پس می توان گفت این مدول بسط ضروری از R/q و R/P است اشتراک این زیر مدولها باید غیر صفر شود. اگرچه این اشتراک با $P+q$ از بین می رود با این وجود عامل از بین برنده ی عضو غیر صفر دلخواه از $P \to R/P$ می باشد که منجر می شود به $P \subseteq q$، مشابه آن $P \subseteq q$ پس $P = q$.
فرض کنید که E انژکتیو جدایی ناپذیر دلخواهی است M را زیر مدول به دست آمده ی متناهی از E در نظر بگیرید و P را اینطور انتخاب کنید که $P \in Spec(R)$ بنابراین خواهیم داشت $P \in Ass(M)$ پس R/P در M و در E محاط می شود. از آنجایی که $E_R(R/P)$ نسبت به R/P ضروری است به این نتیجه می رسیم که $E_R(R/P)$ نیز در E محاط می شود و به این ترتیب جمع مستقیم از E خواهد بود. با توجه به اینکه E جدایی ناپذیر است نشان می دهیم که $E \cong E_R(R/P)$ است و حال فرض کنید E مدول- R انژکتیو باشد همانطور که در

پاراگراف فوق ذکر کردیم E برای $P \in Spec(R)$ شامل $E_R(R/P)$ می شود، به راحتی می توانید از هر عدد اول پیوسته از زیر مدول به دست آمده ی E استفاده کنید. مجموعه A از تمام مجموعه های $T=\{E_i, i \in I\}$ را در نظر بگیرید بنابراین E_i زیر مدول انژکتیو جدایی ناپذیر از E خواهد بود و در E ، $\sum E_i$ مساوی خواهد بود با $\oplus E_i$، در نتیجه می توانیم لم زورنس[۱] را برای بدست آوردن ماکزیمال مجموعه هایی مانند $T=\{E_i, i \in I\}$ به کار بریم فرض کنید

$N=\sum E_i \subset E$ است بنابراین N انژکتیو خواهد بود، پس ما همبافت های مستقیمی از انژکتیو ها را داریم . در اینجا R قیاس است پس $E=N \oplus N'$ است برای بعضی زیر مدول های N' از E که لزوماً انژکتیو می باشند. همانطور که در موارد فوق نیز ذکر شد $L \cong E_R(R/P)$ است که در آن $L \subset N'$ می باشد، با این حال $T \cup \{L\}$ بزرگتر است از T و در A قرار می گیردو این تناقض منجر به اثبات قضیه می شود.

این قضیه از تئوری مدول های انژکتیو نسبت به حلقه ی قیاس را کاسته و نیز این قضیه در مبحث انژکتیوهای هال از R/P که P در حیطه ی ایده آل اول از R قرار می گیرد، مطالعه می شود. این قضیه نتایج مهمی را نشان می دهد: فرض کنید $X \in P$ است پس x در $E_R(R/P)$ تعریف می شود، P تنها عدد اول پیوسته در $E_R(R/P)$ می باشد پس نتیجه می گیریم: $E_R(R/P)=0$. از طرف دیگر اگر $X \notin P$ آنگاه نتیجه می شود که $E_R(R/P)$ بر x بخش پذیر است بنابراین انژکتیو است و x نیز در این مدول به صورت انژکتیو عمل می کند. بنابراین تنها عدد اول پیوسته ی $P \leftarrow E_R(R/P)$ است بدین معنا که x در این مدول نقش واحد را دارد با این وجود خواهیم داشت $E_R(R/P)_X = E_R(R/P)$، مخصوصاً اگر E مدول انژکتیو دلخواه نسبت به حلقه ی قیاس R باشد می گوییم E نگاشته می شود در E_X و

[۱] Zorns-

مدول آخر انژکتیو است و هسته ی این نگاشت دقیقاً $T_X(E)$ خواهد بود. این مشاهدات انژکتیو موثر از دنباله ی دقیق در کوهومولوژی موضعی را بیان می دارد:

قضیه ی : ۳.۲.فرض کنید R حلقه ی قیاس و M مدول $R-$ به دست آمده ی متناهی باشد ایده ال I را در R بگذارید و $X \in P$ عضو مربوطه در نظر بگیرید، قرار دهید $J=(I,X)$ حال دنباله ی بلند و دقیقی را نظیر :

$0 \to H_J^0(M) \to H_I^0(M) \to H_I^0(M_x) \to H_J^I(M) \to H_I^1(M_I) \to ....$ خواهیم داشت.

اثبات: فرض کنید E^0 تجزیه ی انژکتیو از M باشد با توجه به دنباله ی ذکر شده در بالا و دنباله های دقیق از این تجزیه ها خواهیم داشت : $0 \to T_x(E^0) \to E^0 \to E_x^0 \to 0$.

این دنباله، دنباله ی دقیق کوتاهی است از تقسیم همبافت ها. بنابراین هر دوره در E^0، جمع مستقیم از انژکتیو جدایی ناپذیر $E_R(R/P)$ است. هر دو قسمت دیگر اگر $P \in X$ یا $X \notin P$ باشد بدست می آید، با این وجود کاربرد T_I در این دنباله بر دقت و درستی آن صحه می گذارد. در آن صورت دنباله ی دقیق کوتاهی از همبافت را خواهیم داشت یعنی :

$$0 \to T_i(T_X(E)) \to T_i(E^0) \to T_I(E^0{}_X) \to 0$$

که دنباله ی بلند دقیق این قضیه را به اثبات می رساند.

دنباله ی بلند دقیق که در بالا ذکر شد مستقیماً به دنباله ی دیگری ربط دارد که آن را دنباله کوهمولوژی موضعی از دنباله ی نظریه احتمالی[۱] گویند. ایده آل های I و J را در حلقه ی قیاسRقرار دهید. ایده آل های $\{I^n + J^n\}$ با ایده آل های $\{(I+J)^n\}$محدود می باشند ونیز $\{I^n \cap J^n\}$ با $\{(s \cap s)^n\}$ محدود می باشند. (به تمرین شماره ۱۴ مراجعه کنید) .

۱- Mayer- Vietoris

$Hom_R(,m)$را در دنباله های کوتاه دقیق به کار برده و حدهای مستقیم را از آن بدست آورید،

$$0 \to R/(I^n \cap s^n) \to R/I^n \oplus R/I^n \to R/(I^n + s^n) \to 0$$

در نتیجه دنباله ی بلند دقیقی از کوهمولوژی موضعی را به ما می دهد :

$$0 \to H^0_{I+S}(M) \to H^0_I(M) \oplus H^0_s(M) \to H^0_{I\cap S}(M) \to H^{'}_{I+S}(M) \to H^{'}_I(M) \oplus H^{'}_S(M) \to \dots$$

این دنباله را دنباله ی نظریه احتمالی می نامیم که آن مربوط است به کوهمولوژی متمم های مجموعه های $V(S),V(I)$ در کوهمولوژی متمم $V(I)\cap V(S), V(I)\cup V(J)$.

مثال۰۳۰۳) مثال مهمی که در ارتباط با دنباله ی نظریه ی احتمالی به دست می آید با فرض اینکه R حلقه و e خودتوان باشد به عبارتی اگر $e \in R$ باشد : $e^2 = e$. در اینجا داریم

$$V(e)\cap V(1-e) = \phi \text{ و } V(e)\cup V(1-e) = Spec(R) = X$$

بنابراین این مجموعه ها باز بوده و از X گسسته است که می توان انتظار آن را در صفرمین کوهمولوژی موضعی از R داشت. این گسستگی را می توان به مجموع مستقیم از کوهمولوژی موضعی نسبت داد. فرض کنید $I = R_e$ و $J = R(1-e)$ باشد آنگاه خواهیم داشت $I + S = R$ و $H^{'}_R(R) = 0$ به ازای هر I. علاوه بر این از آنجایی که $S \cap S$ و IJ رادیکال پوچ دارند و $IS = 0$ است می بینیم که $H^i_{I\cap S}(R) = 0$ برای $i \succ 0$ و این مساوی است با R برای $I = 0$. دنباله ی نظریه ی احتمالی $H^0_I(R)\oplus H^0_J(R) = R$ و $H^i_I(R) = 0$ برای هر $i \succ 0$ می دهد. مضاف بر این $H^0_I(R) = J$ و $H^0_J(R) = I$ خواهد بود.

آنچه که از اهمیت ویژه برخوردار است انژکتیوهال از باقی مانده ی حوزه ی K حلقه ی قیاس موضعی R می باشد. می نویسیم(R,M,K,E) به منظور حلقه ی موضعی قیاس R با ماکزیمال ایده آل M ،باقی مانده حوزه ی K و $E = E_R(K)$.

تعریف ۰۳۰۴ دو آل ماتلیس از مـدول R M مـی باشـد. مـدول $M^v := Hom_R(M, E_R(K))$ شکل کامل R را با $\hat{R}$نشان می دهیم.

قضیه ی ۰۳۰۵(ماتلیس دوگانگی) فرض کنید (R,M,K,E)حلقه ی موضعی قیاس باشد.

(۱) هر مدول – R آرتینی[۱] در زیر مدول E^rبرای چند عدد صحیح r همریخت می باشد.

(۲)تناظر یک به یک بین مدول های - $\hat{R}$ به دست آمده ی متناهی و مدول های –R آرتینی وجود دارد. این تناظر به این نحو نوشته می شود: اگر M به صورت متناهی به دست آمده باشد آنگاه $M^v = Hom_{\hat{R}}(M.E)$آرتینی می باشد. اگر T آرتینی باشد پس $T^v = Hom_R(T,E)$ نسبت به $\hat{R}$ به شکل متناهی به دست آمده است. علاوه براین $N^{vv} = N$، اگر N مدول بدسـت آمـده ی متناهی نسبت به $\hat{R}$ باشد، آنگاه E و $\hat{R}$ دوآل های ماتلیس می باشند.

مثال ۳۰۶) مهمترین مثال قابل ذکر در ارتباط با ماتلیس های دوآل توسط دوگانگی بین Ext و Tor ایجاد مـی شـود. فـرض کنیـد (R,M,K,E)حلقـه ی موضـعی باشـند،M و N را هـم مدول های– Rفرض کنید در نتیجه $Tor_i^R(M,N)V \cong Exit_R^i(M,N^V)$.

برای اثبات این قضیه فـرض کنیـد F از M تفکیـک پـذیر نباشـد. مـدول $Tor_i^R(M,N)$ماننـد همولوژی $F \otimes_R N$ محاسبه می شـود. همولـوژی جـای دوگـانگی E قـرار مـی گیـرد بنـابراین خواهیم داشت : $Tor_i^R(M,N)^V$،که همولوژی $(F \otimes_R N)^V \cong Hom_R(F,N^V)$می باشد . آخرین جزء همریخـت هـام - تانسـور هـم بسـته اسـت. همولـوژی آخـر دقیقـاً بـه ایـن صـورت نوشـته می شود: $Fxt_R^i(M,N)^V$. این اثبات با هر مدول انژکتیو ذکر شده به جای E نیز صـحیح اسـت. اگر M به صورت متناهی به دست آید خـواهیم داشـت: $Ext_R^i(M,N)^V \cong Tor_i^R(M,N)^V$. اثبـات قضیه را به عهده ی خود خواننده می گذاریم (به تمرین شماره ۱۲ رجوع کنید)

---

۱ - T(Artinion)

قبل از اثبات ماتلیس دوگانگی توضیح بیشتر درباره ی انژکتیوهال لازم است.

قضیه ۰۳۰۷) فرض کنید (R,M,K,E) حلقه ی قیاس باشد. هر عضو E با توان m پوچ می شود. علاوه بر این E مدول - $\hat{R}$ است وقتی $\hat{R}$ مکمل R باشد. مضاف بر این داریم: $E \cong E_{\hat{R}}(K)$.

اثبات: اگر $X \in E$ باشد پس با توجه به قضیه ی ۳۰۱ داریم $Ass(Rx)=\{m\}$ که بعضی از توان های m و x را پوچ می کند. فرض کنید $X \in E, \hat{V} \in \hat{R}$ باشد. N را به گونه ای انتخاب کنید که $m^n x = 0$ باشد سپس $r \in R$ را انتخاب کنید به گونه ای که $\hat{r} - r \in m^n$ باشد ، $\hat{r}x = rx$ را تعریف کنید. به این ترتیب تعریف خوبی از ساختار مدول - $\hat{R}$ تا E داریم که با ساختار مدول –R آن مطابقت دارد. از آنجایی که E بسط ضروری K به عنوان مدول –R است پس لزوماً بسط ضروری K به عنوان مدول - $\hat{R}$ نیز خواهد بود. پس خواهیم داشت $E \subset E' = E_{\hat{R}}(K)$ و 'E مدول - $\hat{R}$ است و بسط ضروری K به عنوان مدول - $\hat{R}$ می باشد. برای اینکه نشان دهیم E انژکتیوهال از K به عنوان مدول- $\hat{R}$ است، کافی است بدانیم که $E' = E$ می باشد و برای نشان دادن آن کافی است بگوییم 'E بسط ضروری K به عنوان مدول –R است. به همین دلیل E بسط ضروری ماکزیمال از K به عنوان مدول –R می باشد . فرض کنید $X \in E'$ است ، عضو $\hat{r} \in \hat{R}$ را به گونه ای انتخاب کنید که $\hat{r}x \in K, \hat{r}x \neq 0$ باشد. با توجه به اولین بخش این قضیه که $X, E'.\hat{R}$ را به کار برده است، N توان $\hat{M}$ است یعنی $r \in R.(\hat{M})^n X = 0$.

بنابراین $r - \hat{r} \in (\hat{m})^n$ است پس خواهیم داشت $rx \neq 0, \hat{r}x = rx \in k$ است . سپس 'E نسبت به K به عنوان مدول –R ضروری است و $E' = E$ خواهد بود.

به منظور پیشرفت بیشتر به اطلاعات خاص بیشتری درباره ی انژکتیو هال از منبعی نیازمندیم که در آن R صفر بعدی باشد . نتیجه ی بعدی، آنچه را که مورد نیاز ما است در اختیارمان قرار می دهد.

با علامت $\lambda(\ )$ طول مدول R– را نشان می دهیم و علامت M^V نشان دهنده ی $Hom_R(M,E)$ می باشد. تاکید می کنیم که $\lambda(M)$ طول فیلتر از M می باشد با بالا رفتن زنجیره ی زیر مدول ها داریم $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_n = M$. بنابراین همه ی مدول های خارج قسمت $M_{|t|} / M_i$ با K همریخت می شوند. اگر چنین فیلترهای متناهی وجود نداشته باشند، در آنصورت M را با طول نامتناهی می نامیم. این عبارت به خوبی تعریف شده و در دنباله های کوتاه دقیق لحاظ شده است. به طور خاص اگر $\lambda(M) = \lambda(N), N \subseteq M$ متناهی باشد در آنصورت خواهیم داشت $N = M$. مدول R– به دست آمده ی متناهی آرتینی است اگر و تنها اگر طول متناهی داشته باشد.

نکته ۳۸) فرض کنید $R \rightarrow S$ حلقه موضعی پوشا و همریخت از حلقه های موضعی قیاس و فرض کنید E انژکتیوهال حوزه ی K از R باشد. در آنصورت $Hom_R(S,E)$ با انژکتیوهال از حوزه ی S همریخت می شود یا همبستگی هوم- تانسور[1]، این مدول انژکتیو است اما نسبت به K نیز ضروری است. به تمرین شماره ۱۳ مراجعه کنید.

قضیه ی ۰۳۰۹) فرض کنید (R,M,K,E) حلقه ی قیاس موضعی صفر بعدی باشد.

برای هر معلول به دست آمده ی متناهی داریم:
(۱) $\lambda(M) = \lambda(M^V) : M$

(۲) $E^V = Hom_R(E,E) \cong R.$

[1] - (Hom-temor)

اثبات.(۱) را با بیان $\lambda(M)$نشان می دهیم . اگر $\lambda(M)=1$باشد خواهیم داشت $M\cong K$، اما با در نظر گرفتن نکته ی ۰۳۰۸ داریم $K^V=Hom_R(K,E)=Hom_R(K,E_R(K))\cong E_K(K)$.

می گوییم $E_K(K)=K$ که نشان می دهد $M=K$ بنابراین $Hom_R(,E)$ نشانگر دنباله های دقیق کوتاه است که در حال حاضر می گوییمi برای هر مدول M از طول متناهی، درست است. پس داریم $R^V=E$ و با استفاده از بخش (۱) دو بار خواهیم داشت $\lambda(R)=\lambda(E^V)$،بنابراین با نشان دادن اینکه $R\cong E^V$ اثبات می کنیم که نگاشت نوشته شده با توجه به $r\in R$ و ضرب r در E انژکتیو می باشد. پس داریم r غیر صفری عضو R یعنی $r\in R$ با فرمول rE=0 که در نتیجه با توجه به نکته ی ۰۳۰۸ داریم

$E\cong Hom_R(R/Rr,E)\cong E_{R/Rr}(k)$ و با توجه به بخش (۱) داریم $\lambda(E_{R/Rr}(K))=\lambda(R/Rr)\prec\lambda(R)$

که این تناقض اثبات را به اتمام می رساند. نتیجه گیریهای آتی بخش دوم قضیه ی فوق را بسط می دهد که مطلب مهمی در ارتباط با انژکتیوهال می باشد.

قضیه ی ۰۳۰۱۰) فرض کنید(R,M,K,E)حلقه ی قیاس موضعی است، در آنصورت $E^V=Hom_R(E,E)\cong\widehat{R}$ می باشد.

اثبات. مجموعه ی E_n مساوی است با $E_n=\{x\in E:m^n\times=0\}$، با توجه به قضیه ی ۳۰۱۰ $u_nE_n=E$ است. از طرف دیگر $E_n\cong Hom_R(R/m^n,E)=E_{R/m^n}(k)$ فرض کنید ($R_n=R/m^n$) باشد در این صورت اگر بگوییم $f\in E^V$،با f_n حد f تا E_n را نشان می دهیم. توجه کنید که $f_n(E_n)\subset E_n$ در آنصورت می توانیم $f_n\in Hom_R(E_n,E_n)$ در نظر بگیریم. قضیه عکس آن را می گوید یعنی هر داده که از خانواده ی $\{g_n\}$از همریخت های E_n تا E_n است، بیان می دارد

که g_n تا E_n برای $m \geq n$ است، ما می توانیم نگاشت $g \in E^V$ توسط $g(x) = g_n(x)$ هرگاه $x \in E_n$ است را تعریف کنیم. پس داریم:

$$E^V \cong \xleftarrow{\lim} (Hom_R(E_n, E_n)) \cong \xleftarrow{\lim} (Hom_{Rn}(E_n, E_n)) \cong \xleftarrow{\lim} R_n$$

با توجه به قضیه ی ۳۰۹ نگاشت های آمده در حد معکوس آخری پوشای طبیعی هستند از R_m در R_n برای $m \geq n$. بنابراین همسانی نگاشت در همساز نگاشت محدود می شود بنابراین داریم:

$$E^V \cong \xleftarrow{\lim} R_n \cong \widehat{R}$$

نکته۰۳۰۱۱)

فرض کنید (K, m, K, E) حلقه قیاس موضعی و M مدول $R-$ دلخواه باشد، اگر $mv = 0$ باشد آنگاه $m = 0$ خواهد بود.

اثبات، نکته ی اول اینکه فرض را بر این بگیرید M به صورت متناهی به دست آمده است. از ترکیب نگاشت ها داریم $M \to M/mm \to KCE$ که نگاشت m/mM تا K، در بعضی تولید کننده های مینیمال همریخت غیر صفر در M^V می باشد. اگر M به صورت متناهی به دست نمی آید، هر زیر مدول به دست آمده ی متناهی N از M و همریخت غیر صفر N تا E را در نظر بگیرید، بنابراین E انژکتیو است و آن در همریخت غیر صفر M تا E بسط پیدا می کند.

قضیه ۳۰۱۲) فرض کنید $\{M_n\}$ سری نزولی زیر مدولی های E است، بنابراین M_n در E لحاظ می شود. $E^V = \widehat{R}$ در $(M_n)^V$ نگاشت می شود. فرض کنید I_n هسته ای پوشا باشد. بنابراین $\{I_n\}$ سری صعودی ایده آل های $\widehat{R}$ بوده و تثبیت خواهد شد. اگر $I_n = I_{n+1} = \ldots$ باشد

آنگاه داریم .... = $(M_n)^V = (M_{n+1})^V$ که اگرنتیجه شود : ...... = $M_n = M_{n+1}$ ، همین مطلب برای اثبات لم کافی است.

لم ۰۳۰۱۳) فرض کنید (R,M,K,E) حلقه ی موضعی و $f: M \to N$ همریخت مدول های R– باشد، اگر $f^V : N^V \to M^V$ همریخت باشد آنگاه f نیز همریخت خواهد بود.

اثبات، فرض کنید $K = \ker(f)$ باشد ، دنباله ی دقیق $0 \to k \to M \to N$ بعد از اعمال $(\ )^V$ به صورت دنباله دقیق $N^V \to M^V \to K^V \to o$ خواهد بود. بنابراین $K^V = 0$ است که با توجه به نکته فوق داریم k=0 .حال، فرض کنید $C = c0\ker(f)$ است. بنابراین دنباله ی دقیق کوتاه، از این قرار است که:

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \to C \to 0$$

آوردن $(\ )^V$ در این دنباله، دنباله ی کوتاه دقیق زیر را در پی دارد یعنی،

$$0 \to c^v \to N^v \xrightarrow{f^v} \to M^v \to 0$$

پس $C^v = 0$ بوده و با توجه به نکته گفته شده $C = 0$ و f نیز همریخت است.

و حال می توانیم نتیجه ی مهم این بخش را که دو گانگی ماتلیس نام دارد اثبات کنیم. این قضیه متناظر با معکوس یک به یک بین مدول های به دست آمده ی متناهی، نسبت به مکمل حلقه ی موضعی قیاس R و مدول های آرتینی، نسبت به R می باشد. انژکتیوهال از حوزه ی باقی مانده برای مدول های آرتینی نقش همسانی ایفا می کند. همانطور که مکمل R برای مدول های به دست آمده و متناهی به طور همسان نقش ایفا می کند.

قضیه ی ۳۰۱۴) (دوگانگی ماتلیس) فرض کنید (R,M,K,E) حلقه ی موضعی قیاس است.

(۱) هر مدول آرتینی T برای بعضی از اعداد صحیح r در زیر مدول E^r همریخت است.

(۲) تناظر یک به یک بین مدول های $\widehat{R}-$ آرتینی وجود دارد. این تناظر به این صورت نوشته می شود که اگر M به صورت متناهی به دست آید در این اینصورت $M^{v}=Hom_{\widehat{R}}(T,E)$ آرتینی است. اگر T آرتینی است پس $T^{v}=Hom_{R}(T,E)$ نسبت به $\widehat{R}$ به صورت متناهی به دست می آید. علاوه بر این $N^{vv}=N$ است، اگر و فقط اگر N ،مدول به دست آمده متناهی نسبت به $\widehat{R}$ باشد.

اثبات: ابتدا(۱) را به اثبات می رسانیم. فرض کنید $(T)=\{X\in T: mx=0\}$ تاب V باشد. ادعا می کنیم که T بسط ضروری از V و V دارای بعد متناهی است. دومین ادعا روشن است، یعنی V از نظر بعد نامتناهی است و سریی نزولی و نامتناهی از زیرفضای متمایز V را داریم که لزوماً زیر مدول های T می باشد و با این حقیقت که T آرتینی می باشد متناقض است. فرض کنید $X\in T$ است پس R_x نیز آرتینی می باشد، در نتیجه داریم $Ass(R_x)=\{m\}$ و با در نظر گرفتن n ، $m^{n-1}X\neq 0, m^{n}X=0$ خواهد بود. پس داریم $0\neq m^{n-1}X\subset(V\cap RX)$ که در آنصورت T بسط ضروری V خواهد بود. مجموعه ی $r=\dim(V)$ است و از آنجایی که $E_R(V)=E^{r}$ و محاط کردن ضروری V در T تا محاط T در E^{r} بسط می یابد، پس (۱) را می توان به اثبات رساند. فرض کنید N مدول $\widehat{R}-$ به دست آمده ی متناهی است ، نشان می دهیم $N:(\widehat{R})^{p}\to N\to 0$ و بعد از اعمال V داریم: $N^{v}\subset(\widehat{R})^{v\oplus p}=E^{p}$.از آنجایی که E آرتینی است بنابراین E^{p} و N^{v} نیز آرتینی می باشد. اعمال V نمودار جابجایی زیر را نشان می دهد:

$$\begin{array}{ccccccc}
(\widehat{R})^{q} & \to & (\widehat{R})^{p} & \to & N & \to & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
((\widehat{R})^{vv})^{q} & \to & ((\widehat{R})^{vv})^{p} & \to & N^{vv} & \to & 0
\end{array}$$

با توجه به قضیه ی ۳۰۱۰ داریم : $\left(\hat{R}\right)^{vv} \cong \hat{R}$ که تحت نگاشت متداول و مرسوم لم ۵ تایی نشان می دهد که $N \cong N^{vv}$ است . فرض دیگر بر این است که T مدول R آرتینی می باشد . در بخش اول می توانیم T را در E^r برابر r محاط کنیم. هم هسته ی این محاط کردن نیز آرتینی است بنابراین می توانیم آن را در E^S برای $S \geq 0$ محاط کنیم. اعمال V نشان می دهد که T^V در $\left(E^v\right)^r$ نگاشته می شود . از انجایی که در قضیه ی ۳۰۱۰ بیان کردیم که $E^V \cong \hat{R}$ است پس T^V مدول $\hat{R}-$ به دست آمده ی متناهی است. اعمال V این بار نمودار جابه جا پذیر زیر

$$0 \to T \to E^r \to E^S$$

را ارائه می دهد:

$$0 \to T^{vv} \to \left(E^{vv}\right)^r \to \left(E^{vv}\right)^s$$

تمرین ۳۰۱)

تمرین ۹. مثال ۳۰۳ نشان داد که $H_I^1(R) = 0$ است با توجه به نشانه هایی که در مثال آمده است این کوهمولوژی نیز از کوهمولوژی کاس ذول چون هم هسته ی نگاشت از $R \to R_e$ است محاسبه می شود. مستقیماً توضیح دهید که چرا این نگاشت انژکتیو می باشد؟

تمرین ۱۰. فرض کنید R حلقه ی قیاس، I ایده آل و $X \in R$ باشد. ثابت کنید برای همه ی $i \geq 2$ داریم $H^i_{In(x)}(R) = H^i_I(R_x)$ و نیز توضیح دهید که چگونه این دنباله ی نظریه احتمالی همبسته ی ایده آل های I و (X) را به دنباله ی دقیق بلند در قفسه ی ۳۰۲ متصل می کند؟

تمرین ۱۱. فرض کنید(R,m) حلقه ی قیاس موضعی است . R مجموعه ی باز $U = Spec(R) \setminus \{m\}$ است. اثبات کنید که U در توپولوژی زوریسکی گسسته است اگر و فقط اگر در دو ایده آل I وJ را داشته باشیم m اول است و بنابراین I+J تا m اول است و در نتیجه $I \cap J$ پوچ می باشد.

تمرین ۱۲. فرض کنید R حلقه ی موضعی قیاس و M به صورت متناهی به دست آمده باشد. اثبات کنید که $Ext_R^i(M,N)^V \cong Tor_i^R(M,N^V)$.

تمرین ۱۳. اگر $S=R/I$ تصویر هومومورفیزم[1] از حلقه ی موضعی قیاس و M مدول –S باشد، ثابت کنید $Hom_S(M,E_S(K)) \cong Hom_R(M,E_R(K))$ و به طور خاص $E_S(K) \cong Hom_R(S,E_R(K))$.

نکته: اول نشان دهید مدول واقع در قسمت راست انژکتیو بوده و نسبت به K که مدول –S است ضروری است ، آنگاه رابطه ی آخر را به اثبات برسانید.

تمرین ۱۴. فرض کنید R حلقه ی قیاس است و فرض کنید که I و J ایده آل R اند. ثابت کنید که $\{I^n \cap J^n\}$ با $\{(S \cap S)^n\}$ محدود شده است و $\{(S+S)\}^n$ نیز با $\{L^n + J^n\}$ محدود شده است.

تمرین ۱۵- ثابت کنید که $E_Z(Z/PZ) \cong 2P/Z$

کراگ هانکه[2] و پیوست شماره یک از سوی آمیلاتیلور[3]

۴- کوهن – مکالی و حلقه های گرنشتاین[4]: در استنباط و استفاده از کوهمولوژی موضعی دو نوع حلقه ی قیاس وجود دارد. کوهن – مکالی و حلقه های گرنشتاین ، و خصوصیات این دو نوع حلقه با استفاده از کوهمولوژی موضعی به آسانی تعریف می شوند. ما تعریف غیر استانداردی از خاصیت گرنشتاین ارائه می دهیم که این تعریف منجر به استنباط بهتر قضیه ی دوگانگی موضعی می شود. دومین پیوست این مقاله اثبات های کاملتری را با ارائه ی راههای سنتی در اختیار ما قرار می دهد. در ابتدا باید بگوییم که ما حلقه های کوهن – مکالی را تعریف می کنیم.

---

[1] homomorphic-
[2] kerag hanke -
[3] Ameliye Taylor -
[4] cohen- macaulay and Gorenstein rinsst -

تعریف ۰۴۰۱) فرض کنید R حلقه ی قیاس، I ایده آلی از R و M مدول -R به دست آمده ی متناهی است، در اینصورت $IM \neq M$ خواهد بود. در تعریف می گوییم $depth_I(M)$ بزرگترین عدد صحیح I است آنگاه برای همه ی $j \prec i$ داریم $H_i^j(M)=0$.می گوییم حلقه ی موضعی (R,M) کوهن – مکالی است اگر $depth_m(R)=\dim(R)$ باشد، به عبارتی $H_m^i(R)=0$، برای هر $i \prec \dim R$ داریم عضوهای $X_1,.........,X_n$ در R، دنباله ی منظمی است در M اگر داشته باشیم $(X_1,...,X_n)M \neq M$. X_1 مقسوم علیه صفر در M نیست و برای همه ی $X_1, 2 \leq i \leq n$ مقسوم علیه صفر بر $M/(X_1,...X_{1-1})M$ نیست. این تمرین ساده ای است برای اثبات این تعریف که $depth_i(M)$ طول هر (و یا همه ی) دنباله ی ماکزیمال منظم I بر M است. به اثبات عملی بسنده می کنیم و جزئیات آن را در تمرین مطرح خواهیم کرد. اولاً، مشاهده می کنید که داریم $H_I^0(M)=0$ اگر و فقط اگر $X \in I$ بخش پذیر غیر صفر بر M باشد. کاربرد دنباله ی دقیق بلند در کوهمولوژی موضعی برای دنباله ی کوتاه دقیق $0 \to M \xrightarrow{X} M \to M/XM \to 0$ این امکان را به ما می دهد که با مشاهدات بیشتر اثبات را کامل کرده و به پایان برسانیم. مشاهداتی مبنی بر اینکه عضو $J \in I$ در کوهمولوژی موضعی مدول $H_I^J(M)$ به صورت انژکتیو عمل می کند اگر و فقط اگر $H_I^J(M)=0$ باشد، به این دلیل که همه ی عضوهای I در چنین کوهمولوژی های موضعی نقش پوچ را دارند.

حالتی از پارامترها در حلقه ی قیاس موضعی(R,m) از بعد d، حالتی از عضوهای $X_1,...,X_d$ است که $\sqrt{(X_1,...X_d)}=m$ دارد. یکی از مهمترین مشخصه های این بعد دقیقاً در این تعریف ذکر شده است: همیشه حالتی از پارامترها وجود دارد و D کوچکترین عدد از عضوهای مورد نیاز برای به دست آوردن m از زیر رادیکال است. با ذکر این تعریف $C=M.R$ است ، اگر

و فقط اگر حالتی از پارامترها ، عضو دنباله ی نکته ی ۰۴۰۲)باشد. دنباله ی بلند دقیق کوهمولوژی موضعی با دنباله ی کوتاه دقیق $0 \to R \xrightarrow{X} R \to /RX \to 0$ پیوسته است وقتی X بخش پذیر غیر صفر در حلقه ی قیاس موضعی R باشد ، به آسانی می توان اثبات کرد که R کوهن- مکالی است اگر و فقط اگر R/RX کوهن- مکالی باشد.

تعریف بعد، تعریف غیر استاندارد از حلقه ی گرنشتاین می باشد.

تعریف ۰۴۰۳) می گوییم حلقه ی قیاس موضعی از بعد d ،(R,M,K,E)گرنشتاین‌است اگر R کوهن- مکالی و $H_m^d(R) \cong E$ (یا معادل آن یعنی دوآل ماتلیس $H_m^d(R)$ که $\widehat{R}$است) باشد.

قضیه ی بعدی نشان می دهد که حلقه ی گرنشتاین چقدر کاربرد دارد.

قضیه ی ۰۴۰۴) (دوگانگی موضعی) فرض کنید (R,M,K,E)حلقه ی موضعی گرنشتاین از بعد d باشد. فرض کنید M R – مدول به دست آمده متناهی است آنگاه

(۱) $\forall 0 \le i \le d, H_m^{d-i}(M) \cong Ext_R^i(M,R)^V$

اگر R کامل باشد و $0 \le i \le d$باشد، آنگاه $Ext_R^i(M,R) \cong \left(H_m^{d-i}(M)\right)^V$(۲)

به عبارت دیگر $Ext_R^i(M,R), H_m^{d-i}(M)$دوآل های ماتلیس اند اگر R کامل باشد.

اثبات. از آنجایی که R کوهن- مکالی است برای $i \succ d$ داریم $H_m^i(R)=0$. حالتی از پارامترهای $X_1,......,X_d$ را برای R انتخاب کنید آنگاه مجموعه ی $K^0(X_1,.....,X_d,R)$تجزیه ی مسطحی است از $H_m^d(R) \cong E$. با توجه به نکته ی ۳۰۶، داریم $Ext_R^i(M,R)^V \cong Tor_i^R(M,E)$، آنگاه Torرا با استفاده از تجزیه مسطح $K^0(X_1,....X_d.R)$از E محاسبه می کنیم. همولوژی در نقطه ی X ام کوهمولوژی $K^0(X_1,...X_d : R) \otimes_R M$ در نقطه ی $(d-i)$ام می باشد. (اثبات (۱)) . دلیل اهمیت دوگانگی موضعی این است که این امکان فراهم می شود تا سوال هایی که پیرامون

کوهمولوژی موضعی(علی الخصوص بی اثرها) مطرح می شوند را به سوال هـایی مشـابه Ext تغییر دهیم. این تغییر بسیار مفید است به این دلیل که اگر M به صورت متناهی به دست آید، مـدول هـای Ext نیـز بـه صـورت متنـاهی بـه دسـت خواهنـد آمـد. دلیـل دیگـر را نیـز می توان موضعی کردن کوهمولوژی موضعی دانست. فرض کنید شخصی مـی خواهـد $H_m^i(M)$ را برای مدول M که متناهی است نسبت به حلقـه ی R گورسـتنین موضـعی از بعـدd مـورد مطالعه قرار دهد. استفاده از حلقه ی R_P برای ایده آل اول $P \neq m$ مهم است و اما بـا توجـه بـه $\left(H_m^i(M)\right)_p = 0$ هر عضو $H_m^i(M)$ با توان m پوچ می شود. پس تمام اطلاعات نیز پوچ می شود. اما دوگانگی موضعی $H_m^i(M)$ دوآل ماتلیس $Ext_R^{d-i}(M,R)$ است و این مدول به صورت موضـعی قرار می گیرد یعنی $Ext_R^i(M,R)_p \cong Ext_{R_p}^i\left(M_p, R_p\right)$ البته همه ی این ویژگی ها بی معنا خواهد بود. مگر اینکه حلقه هایگرنشتاینزیادی وجود داشته باشد که خوشـبختانه وجـود دارد. کـاربرد مهم دیگر دوگانگی موضعی این است که کوهمولوژی موضـعی بـا ایـده آل ماکزیمـال همیشـه آرتینی است.

فرضیه ۰۴۰۵) فرض کنید(R,M,K,E)حلقه ی موضعی قیاس باشد و فرض کنید R,M مدول به دست آمده ی متناهی است . برای هر $H_m^i(M), i \geq 0$ آرتینی است.

اثبات: با توجه به فرضیه ی ۲۰۱۵ فرض می کنیم که R کامل اسـت . اصـلی کـه آن را مـورد توجه قرار می دهیم نتیجه ی قضیه ی ساختار کوهن برای حلقه های موضعی کامل اسـت . در این جا اثبات را مطرح می کنیم اما آنچه که مورد نیازمان است را بیان می کنیم:

هر حلقه ی موضعی کاملR تصویر همریخت است از حلقه ی موضعی منظم (A, M_A).

(A,M_A) حلقه ی موضعی منظم از بعد d که در R نگاشـته شـده اسـت را انتخـاب کنیـد. بـا استقلال از پایه داریم $H_{mA}^i(M) \cong \left(Ext_A^{d-i}(M,A)\right)^V$ که d مساوی اسـت بـا dimA $d = \dim A$.
مدول $Ext_A^{d-i}(M,A)$ به عنوان A– مدول متناهی به دست آمده است دراین صورت با مـاتلیس دوگانگی $H_m^i(R)$ به عنوان A مدول آرتینی است و در نتیجه به عنوان R– مدول نیـز آرتینـی می باشد. اشتراک کامل حلقه ی موضعی R است که بعد از تکمیل، خارج قسمت حلقـه ی یـا آخرین حد $m,(f_1,....f_m)$ باشد . فرضیه بعد این واقعیت را به اثبات می رساند.

موضعی منظم همراه با دنباله منظمی است . همه ی این حلقه هاگرنشتاینمی باشند.

طبق اصل جابه جایی جبری داریم: منظم $\leftarrow$ اشتراک کامل $\leftarrow$ گرنشتاین $\leftarrow$ کوهن- مکال

در این مقاله از اشتراک های کامل بهره مـی بـریم. در قسـمت هـای مشـخص بیشـتر داریـم، حلقه ی چند جمله ای $K[X_1,...X_n]$ نسبت به حوزه ی K به طور موضعی منظم است. حلقه ای مانند $K[X_1,....X_n]/(f_1,...f_m)$ بـه طـور موضـعی یـک اشـتراک کامـل اسـت اگـر $f_1,...,f_m$ از دنباله های منظم باشد یا آخرین حد $m,(f_1,...,f_m)$ باشد فرضیه بعد ایـن واقعیـت را بـه اثبـات می رساند.

فرضیه ۰۴۰۶ فرض کنید R حلقه ی موضعی قیاس باشد و فـرض کنیـد $X_1,...,X_s$ دنبالـه ای منظم در R باشد. آنگاه Rگرنشتاین است اگر و تنهـا اگـر $R/(X_1,...X_s)$ حلقـه ی گرنشـتاین باشد.

اثبات: فرض کنید Rگرنشتاین باشد. با استقرار I اثبات می کنیم کـه $R/(X_1,...X_i)$ گرنشـتاین است. آنگاه ثابت می کنیم که اگر (S,M) حلقه ی موضعی گرنشتاین و X بخـش پـذیر غیـر صفر در S باشد آنگاه S/Sx گرنشتاین است در این صورت با توجـه بـه نکتـه ی ۴۰۲ کـوهن-

مکالی نیز است. دنباله ی بلند دقیق در کوهمولوژی موضعی به دنباله ی دقیق کوتاه، پیوسته

است یعنی $0 \to S \to S \to S/Sx \to 0$

از آنجایی که داریم $H_m^i(S)=0$ برای $i \neq d = \dim(S)$ و $(\dim(s/sx)=d-1)H^d(s/xs)=0$

دنباله ی کوتاه دقیق از این قرار است: $0 \to H_m^{d-1}(s/sx) \to H_m^d(S) \xrightarrow{X} H_m^d(S) \to 0$. اگر انژکتیو هال حوزه ی S را دوگانه کنیم، آنگاه Sگرنشتاین خواهد بود که آن ماتلیس دوآل آخرین حد کوهمولوژی موضعی، از S را با $\hat{S}$مشخص می کند ، تکمیل S ماتلیس دوآل $H_m^{d-1}(S/Sx)$را با تکمیل S/Sxمشخص می کند . آنگاه S/Sx گرنشتاین است که این دوآل را ایجاد کرده است و آن ماتلیس دوآل این مدول، نسبت به حلقه ی S/Sxمی باشد. حکم های کلی را در تمرین ها(تمرین ۲۳) ببینید. با آوردن $\otimes - Hom$اگر $S=R/I$ تصویر همریخت حلقه ی موضعی قیاس و M ، S- مدول باشد، آنگاه داریم:

$$Hom_s(M,E_S(K)) \cong Hom_R(M,E_R(K))$$

و به طور خاص داریم $E_s(K) \cong Hom_R(S,E_R(K))$. فرض دیگر بر این مبنا است که $R/(X_1,...X_S)$ گرنشتاین می باشد. با اثبات اینکه Rگرنشتاین است این قضیه را که $S=1$ است به اثبات می رسانیم. X را مساوی X_1 قرار دهید $X=X_1$، از آنجایی که X بخش پذیر بر غیر صفر بوده و R/xR کوهن- مکالی است ، به این نتیجه می رسیم که R کوهن- مکالی است . به طور خاص داریم: $H_m^i(R)=0$برای $i \prec d = \dim R$ و $H_m^i(R/xR)=0$ برای $i \prec d-1$ (با توجه به استقلال از پایه، در کوهمولوژی موضعی آخری این مطلب که ایده آل ماکزیمال از R یا R/xRباشد، مورد توجه نیست.) همانطور که در بالا ذکر کردیم، دنباله ی دقیق به صورت $0 \to H_m^{d-1}(R/R_x) \to H_m^d(R) \xrightarrow{X} H_m^d(R) \to 0$می باشد. می بینید که:

$Hom_R\left(H_m^{d-1}(R/Rx),E\right)=Hom_R\left(H_m^{d-1}(R/Rx)\otimes_R (R/Rx),E\right)\cong$ و

$Hom_{R/Rx}\left(H_m^{d-1}(R/Rx),Hom_R(R/Rx,E)\right)\cong Hom_{R/Rx}\left(H_m^{d-1}(R/Rx)\right)$ و

$H_m^{d-1}(R/Rx)\cong E_{R/Rx}(K)$.فرض کنید : $E_{R/Rx}(K)\cong R/R\widehat{x}$ و

$Hom_{R/Rx}\left(E_{R/Rx}(K),E_{R/Rx}(K)\right)\cong R/R\widehat{x}$

مجددا فرض کنید که $M=Hom_R\left(H_m^d(R),E\right)$، مدول تولید شده ی متناهی نسبت به $\widehat{R}$است. با در نظر گرفتن دوآل های ماتلیس مدول ها در دنباله ی دقیق بالا، دنباله ی دقیق زیر را داریم:

$$.0\to M\xrightarrow{X}M\to R/R\widehat{s}\to 0$$

اگر بخواهیم اثبات کنیم R گرنشتاین است باید اثبات کنیم که $M\cong\widehat{R}$است. لم ناکایاما بیان می دارد که M چرخه ای است، بنابراین برای چند ایده آل ۲ می توان نوشت $M\cong\widehat{R}/I$. دنباله ی دقیق ثابت می کند که X بخش پذیر غیر صفر بر I است و علاوه بر این $I\subseteq\widehat{R}X$ می باشد. فرض کنید $y\in I$است، بنویسید $y=xz$، بنابراین X بخش پذیر غیر صفر بر $\widehat{R}/I$است و $z\in I$بوده و در نتیجه $I=XI$ خواهد بود. کاربرد دیگر لم ناکایاما نشان می دهد که $I=0$ و $M\cong\widehat{R}$ است و درنتیجه R گرنشتاین می باشد.

فرضیه ۴۰۶ این امکان را به ما می دهد تا با استفاده از حلقه های قبلی، حلقه های جدیدگرنشتاین را ایجاد کنیم. اما از کجا شروع کنیم؟ برای شروع به حلقه یگرنشتاین نیاز داریم . هر حلقه ی موضعی منظم گرنشتاین است و مطالعه ی فرضیه ی ۴۰۶ به ما می گوید اشتراک های کامل نیزگرنشتاین می باشند. مطالعه ی فرضیه همچنین می گوید اشتراک های کامل نیزگرنشتاین می باشدو نیز می گوید که برای دانستن اینکه آیا R حلقه ی موضعی

کوهن- مکالی گرنشتاین است یا نه، به راحتی می توانیم بررسی کنیم که آیا $R/(X_1,...X_d)$ گرنشتاین است یا نه؟ حال با قبول این شرط که $X_1,...X_d$ حالتی از پارامترها است و حلقه ی $R/(X_1,...X_d)$ ایده آل اولی دارد که ماکزیمال و آرتینی است ، این سوال مطرح می شود که چه موقع حلقه ی موضعی آرتینی گرنشتاین است؟

فرضیه ۴۰۷۰) فرض کنید (R,M,K,E) حلقه ی موضعی آرتینی و مشمول حوزه K است. آنگاه E تا $Hom_K(R,K)$ همریخت است.

اثبات: کافی است بدانیم که $Hom_K(R,K)$ نسبت به حوزه ی $K=R/m$ ضروری و انژکتیو است. برای اثبات انژکتیو بودن آن، باید اثبات کنیم که $Hom_R(,Hom_K(R,K))$ در دنباله های کوتاه دقیق، R- مدول دقیق است. با در نظر گرفتن اتصال هام- تانسور این تابع گر به مانند $Hom_K(\otimes_R R,K)$ می باشد که مانند K حوزه دقیق است. اگر بخواهیم اثبات کنیم که $Hom_K(R,K)$ نسبت به K ضروری است، ابتدا کپی K درون مدول را معین می کنیم.

R را در K با هسته ی m می نگاریم و $Hom_K(K,K)$ را به کار می بریم. این مطلب $Hom_K(K,K)=K$ را در $Hom_K(R,K)$ محاط می کند. شیوه ی دیگر این است که همچون فضای بردار $R\cong K\oplus m$ به همراه کپی از K ،که با یک تولید شده است، به دست آید. تولید کننده ی $Hom_K(R,K)$ یک را به یک می دهد و m را تا صفر به دست می آورد. بنابراین نسبت، R است به K . فرض کنید $N\subseteq Hom_K(R,K)$ R- زیر مدول از $Hom_K(R,K)$ باشد. هر $F\in N$ را که غیر صفر است انتخاب کنید . باید اثبات کنیم که وجود دارد $r\in R$ که در آنصورت ، N ماکزیمال را انتخاب کنید به نحوی که داشته باشیم عضو $r\in m^n$ با $f(r)\neq 0$.

$rf \in Hom_K(R,K)$ را در نظر بگیرید. اگر $Z \in m$ آنگاه داریم: $(rf)(z)=F(rz)=0$. بنابراین $rf \in Hom_K(K,K)$اثبات می کند که $Hom_K(R,K)$ نسبت به K ضروری است. وقتی در مطالعات خود می بینیم حلقه ی آرتینی گرنشتاین است، مسئله ی مهمی که باید به آن توجه کنیم مجموعه ای از عضوهای حلقه است که با ایده آل ماکزیمال از بین رفته اند.

تعریف ۰۴۰۸ فرض کنید (R,m) حلقه ی موضعی است تاب از R، ایده آل $0:m:=\{r \in R / rm=0\}$ است. فرض کنید R حلقه ی طبقه بندی شده ی صفر بعدی است ، آنگاه داریم $R=K \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus .... \oplus R_s$. چه هنگام Rگرنشتاین است؟ جواب این سوال سخت است. اگر چه با توجه به قضیه ی فوق، توجه کنیدکه شرایطی که Rگرنشتاین است هیچ است، اما می گوییم: $R=H_m^0(R)\cong(K)\cong Hom_K(R,K)$، از آنجایی که فضاهای بردار $Hom_K(R,K), R$همریخت اند و همریختی نیز به R− مدول هایی نیاز دارد . شرط ضروری این است که بعد R_S دقیقاً یک باشد. در واقع، از آنجایی که R تا $E_R(K)$همریخت است، تاب R باید یک بعدی باشد. کپی K واقع در E به وضوح در تاب وجود دارد. اگر بعد تاب به عنوان فضای برداری حداقل دو باشد، آنگاه می توان زیر فضای خطی از تاب E متناقض با این حقیقت که E نسبت به K ضروری است را یک انتخاب کرد. آنگاه بعد تاب از E دقیقاً یک است. اگر R همانطور که در بالا ذکر کردیم حلقه ی طبقه بندی شده ی صفر − بعدی باشد، R_S در تاب قرار می گیرد،بنابراین $R_1R_S \subset R_{S+1}=0$ خواهد بود. برای گرنشتاین بودن R ضروری است که داشته باشیم $\dim_K(R_S)=1$. محدودیت های بیشتری در تابع هیلبرت[۱] از حلقه ی گرنشتاین صفر بعدی R همچون $Hom_K(R,K)$،که ساختار طبقه بندی را زیر و رو

۱- Hilbert

می کند، وجود دارد. حتی در آخرین حد بعد نیز محدودیت های قابل توجهی اتفاق مـی افتـد که خلاصه ی آن را در زیر ذکر کرده ایم.

اگر R حلقه ی طبقه بندی استاندارد باشد،در تعریف می گـوییم $H_R(t)=\Sigma_{i=0}^{\infty}\dim_K(R_n)t^n$، کـه تابعی زایشی برای تابع هیلبرت از R است. اگر $\dim R=d$ باشد، این مجموعه های تـوان دار را می توان همچون تابعی از اعداد گویا نوشـت: $H_R(t)=\frac{ho+h_1tt...h_st^s}{(1-t)^d}$.در جـایی کـه Rآرتینـی است، $d=0$ وh_i از بعد فضای بردار R_i است. دنباله ی $(h_0,....,h_s)$ را h-بردار ازR می نامیم.

به عنوان مثال، یک تمرین ساده نشـان مـی دهـد کـه اگـر $R=K[X_1,...,X_d]$ حلقـه ی چنـد جمله ای باشد، آنگاه خواهیم داشت $H_R(t)=\frac{1}{(1-t)^d}$. در این مـورد Rگرنشـتاین اسـت و ایـن مجموعه های توان دار معادله ی تابع اصلی را ایجاد می کند.

قضیه ۰۴۰۹ فرض کنید R نسـبت بـه K جبـر طبقـه بنـدی اسـتاندارد اسـت. فـرض کنیـد Rگرنشـــتاین از بعـــد d اســـت. آنگـــاه عـــددی صـــحیح خواهـــد بـــود بـــه طـــوری کـــه : $t^aH_R\left(\frac{1}{t}\right)=(-1)^dHR(t)$. به عنوان مثال می دانیم که $R=K[X_1,......,X_d]$ گرنشـتاین اسـت، در این مورد $H_R\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{t^d}{(t-1)^d}$ است، آنگاه $t^{-d}H_R\left(\frac{1}{t}\right)=(-1)^dH_R(t)$، ممکن است فرض کنیم ایـن معادله ی تابعی حلقه های گرنشتاین را مشخص می کند اما اینطـور نیسـت. بـه عنـوان مثـال می توانیم جبرهای صفر بعدی را با تابع هیلبرت داشته باشیم، به عبارتی داریم 1,n,1 که یک گرنشتاین است و دیگری نه، $R=K[X,Y]/(Xy,X^2-y^2)$ با $H_R(t)=1+2t+t^2$ گرنشتاین نیست.

حال داریم: $Hs(t)=1+2t+t^2$

اگر چه معادله ی بالا که درباره ی مجموعه های هلیبرت از حلقه ی گرنشتاین طبقه بندی شده است دلیل و مدرک کافی برای اثبات اینکه حلقه گرنشتاین است، نمی باشد. اما در بسیاری از موارد دلیلی بر این ادعا است. قضیه ی ریچارد استانلی[1] که در زیر آمده است (۳۷) ۰۱۲۰۷ جالب است :

قضیه ۰۴۱۰ فرض کنید R نسبت به حوزه ی K دامنه ی طبقه بندی استاندارد است. اگر R کوهن- مکالی و از بعد d باشد، آنگاه Rگرنشتاین است اگر و تنها اگر عددی صحیح باشد به صورت :

$$t^a H_R\left(\frac{1}{t}\right) = (-1)^d H_r(t)$$

تمرین ۰۲۰۱۱ را برای مثال آن ببینید.

مثال ۴۰۱۱ در مورد $S=2$ که در بالا ذکر کردیم برای ارائه ی شرایط گرنشتاین ها دشوار نخواهد بود. داریم $R = K \oplus V \oplus K$ که $V = R_1$ و دومین کپی از K دردرجه ی ۲ قرار می گیرد . برای تعیین ساختار حلقه ی جابجایی پذیر در چنین فضای برداری، فقط باید بگوییم که چطور دو عضو درجه یک را ضرب کنیم. برای هر درجه با حداقل ۳، صفر است و ضرب کپی K در درجه ی صفر، به طور معمول ساختار فضای بردار در هر جزء طبقه بندی می باشد.

ضرب دو درجه ی یک عضوی باید در کپی K در درجه ۲ قرار گیرد. آنگاه دو خطی متقارن $\prec 0 \succ$ با ضرب مشخص می شود. فرض کنید V نسبت به فضای بردار n– بعدی است، به یاد داشته باشید که شکل دو خطی متقارن در V جفت $V \times V \to K$ است که با $(V,W) \to \prec V,W \succ \in K$ به دست می آید. بنابراین $\prec 0 \succ$در هر متغیر خطی متقارن است به

[1] Richard stanley-

عبارتی برای هر $V,W \in V$ داریم $\prec V,W \succ = \prec W,V \succ$. با تعریف ضرب دو عضوی $u,v \in V$ با $\prec u,v \succ$ در درجه ی دو ،می توانیم حلقه ی جابه جایی پذیر $R = K \oplus V \oplus K$ را ایجاد کنیم. سوالی که باید بپرسیم این است که چه موقع چنین حلقه ای در شکل دو خطی متقارن گرنشتاین است؟ جواب آن در زیر آمده است.

به خاطر داشته باشید که $R \cong K[X_1,...,X_n]/I$ است که I ایده آل متجانس است در اینصورت داریم $m^3 \subseteq I$. اکنون R گرنشتاین است اگر و فقط اگر $0:Rm = Socle(R)$ فضای K– بردار تک بعدی باشد . از آنجایی که $m^3 = 0$ است می بینیم که $m^2 \subseteq Socle(R)$ خواهد بود. آنگاه Rگرنشتاین است اگر و فقط اگر $m^2 = socle(R)$ باشد. به عبارت دیگر Rگرنشتاین است اگر و فقط $R_1 \cap socle(R) = 0$ باشد یعنی $socle(R)$ هر گونه فرم خطی را شامل نمی شود. برای زیر فضای $w \subseteq V$ تعریف می کنیم: $W^1 = \{v \in V : \prec w,v \succ = 0 \forall w \in W\}$

و می گوییم شکل $\prec , \succ$از بین نمی رود. اگر $V^1 = 0$باشد با توجه به اینکه $R_1 \cap socle(R) = 0$ است پس گرنشتاین است.

یعنی Rگرنشتاین است اگر و فقط اگر $\prec , \succ$شکل دو خطی متقارن در R_1 باشد. فرض کنید $\{V_1,...,V_n\}$پایه ی K برای V است . با ارائه ی شکل دو خطی متقارن $\prec , \succ$ در V می توانیم آن را مانند مثال زیر، با ماتریس متقارن بنویسیم: $(\prec V_i,V_j) \leftrightarrow \prec , \succ$.

$\prec , \succ$ ایجاد نمی شود اگر و فقط اگر ماتریس $(\prec V_i,V_j \succ)$ معکوس پذیر باشد.

با ارائه ی مثال خاص به این مورد توجه کنید که تابع هیلبرت از R ۱و۳و۱می باشد. فرض کنید V فضای بردار سه بعدی نسبت به حوزه ی K است، ماتریس مربوطه به صورت

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$$

خواهد بود. تطابق حلقه $R = K \oplus R_1 \oplus R_2$ گرنشتاین است که $R_1 = K.X \oplus K.y \oplus K.Z, R_2 = K\Delta$

با توجه به اینکه $xz = 0, yz = 0, xy = 0.X^2 = y^2 = Z^2 = \Delta$ است به عبارتی می توان گفت:

$R \cong K[X,Y,Z]/(x^2 - y^2, x^2 - z^2, xy, yz, xz)$ گرنشتاین است.

نکته ۰۴۰۱۲ حلقه های گرنشتاین با تابع هیلبرت I,n,n,I طبقه بندی شده نیست. در واقع سوال های زیادی درباره ی حلقه های گرنشتاین طبقه بندی شده ی صفر بعدی وجود دارد. احتمال چارنی – دیویس [1] ([10])از ترکیبات یک است. فرض کنید Δمجموعه ی ولت[2] حوزه ی همولوژی (d-1) بعدی باشد.

F برداری می باشد مانند $(f_{-1}, f_0, ... f_{d-1})$که f_i ، عدد صورت های I بعدی است. بنویسید $f(t) = \Sigma_{i=0}^{d} f_{i-1} t^i$ و تعریف کنید :h را با معادله ی تابع $t_h^d(t) = [t^d f(t^{-1})]_{t \to t-1}$.

احتمال چارنی –دیویس بیان می دارد که اگر Δحوزه ی همولوژی متحرک باشد و d زوج باشد آنگاه داریم $(-1)^{\frac{d}{2}} h(-1) \geq 0$ و می توان گفت مجموعه ی Δ مجموعه ی متحرک است اگر زیر همبافت های مینیمال از راس ها که گسترده نمی شوند همگی عدد صحیح دو داشته باشند .

می توانیم این احتمال را با استفاده از ایده آل استانلی- ریسنر[3] به همراه Δ $I = I_\Delta$ به جبر با خاصیت جابجاپذیری ترجمه کنیم. ایده آل I ایده آلی است که با تک جمله ای های فارغ از مربع $X_{j1}.X_{j2}...X_{jr}$ که $\{j_1,...,j_r\}$در Δ ضلع ندارد، تولید می شود.

حوزه های همولوژی، کوهن- مکالی هستند بنابراین S/I کوهن- مکالی خواهد بود که S حلقه ی چند جمله ای $K[X_1,...,X_n]$در راس های Δ نسبت به حوزه ی K است. علاوه بر این

[1] (charny – Davis)-
[2] Vlating
[3] (stonley-Reisner)-

S/I گرنشتاین است . این فرضیه که Δ همبافت شناور است بدین معنا می باشد کـه I توسـط مربع ها تولید می شود. در این مورد h(t) مجموعه های هیلبرت برای ایـن حلقـه انـد و حـال احتمال چارنی- دیویس را به صورت سوال های کلی طرح می کنیم:

سوال: فرض کنید R حلقه ی گرنشتاین طبقه بندی شده ی صفر بعدی باشـد و فـرض کنیـد $h_i=\dim_k R_i$ اسـت. در نظـر داشـته باشـید کـه $h_d\neq 0, h_{d+1}=0$ و d زوج اسـت . آیـا داریـم؟ $(-1)^{\frac{d}{2}}h(-1)\geq 0$.

این سوال حتی برای $d=4$ نیز به صورت کلی مطرح مـی شـود. در ایـن مـورد مجموعـه هـای هیلبرت شکل $I,n,m,n,1$ است و در سوال مطرح می شود که آیا $m\geq 2n-2$ می باشد؟

۰۴۰۱ تمرین.

تمرین ۱۶. از دنباله ی ملیر - ویکتوریس[۱] برای اثبات نتیجه ی هارت شورن[۲] که در زیر آمـده بهره ببرید. اگر (R,m) حلقـه ی قیـاس موضـعی بـا عمـق حـداقل دو باشـد، آنگـاه دامنـه ی $spec(R)\setminus\{m\}$ چگونه وصل می شود.

تمرین ۱۷. این مطلب را تایید کنید که حلقه ی موضعی منظم، حلقه ی گرنشتاین است، کـه در این مورد داریم $R=K[X_1,\dots,X_n]$ با توجه به همریخت مشخص که در تمرین ۶ آمده اسـت

---

۱ -mayer-victions

۲ - Hart shorne

یعنـــی $H_m^n(R)\cong K\left[X_1^{-1},\dots.X_n^{-1}\right]$ اثبــات کنیــد کــه $H_m^n(R)$انژکتیــو هــال حــوزه ی R اســت (به عنوان حلقه ی طبقه بندی)

تمرین ۱۸- فرض کنید X بخش پذیر غیر صفر در حلقه ی قیاس R است. با توجه به تعریـف ۰۴۰۱ ثابت کنید که R کوهن- مکالی است اگر و فقط اگر R/Rx کوهن- مکالی باشد.

تمــرین ۱۹- فــرض کنیــد $R=K[xv,xV,yv,yV]$زیــر حلقــه ی، حلقــه ی چنــد جملــه ای $K[x,y,u,V]$است. این حلقه، دامنه ی کوهن- مکالی است و بـا ایـن داده اثبـات کنیـد کـه آن گرنشتاین است، با استفاده از قضیه ی استانلی و بـا ارائـه ی ایـن مطلـب کـه مجموعـه هـای هیلبرت از R $H_R(t)=\dfrac{t+1}{(1-t)^d}$ می باشند.

تمرین ۲۰- فرض کنید (R,m)حلقه ی موضـعی قیـاس،I ایـده آل مناسـب و M R- مـدول تولید شده ی متناهی است. قرار دهید $t=dept_I M$. ثابت کنید که t طول بلند ترین دنبالـه ی منظم $X_1,\dots X_2\in I$ در M است.

۵- قضایای بی اثر و ساختار $H_m^d(R)$

در این بخش در مورد قضایای بی اثر مربوط به کوهمولوژی موضعی به بحث می پردازیم . بعـد کوهمولوژی I در R که توسط $cd(R,S)$ نشان داده شده است، کوچکترین عدد صحیح n اسـت به گونه ای که مدول های کوهمولوژی موضعی $H_s^q(M)=0$ برای همه ی R– مـدول هـا M و $q\prec n$می باشد.

در این تعریف کافی است M را با R مساوی بگیرید یعنی $m=R$ (تمرین ۲۱).

سه نتیجه ی مهم درباره ی قضایای بی اثر وجود دارد: اولـین برداشـت رسـیدن بـه نتیجـه ی فوری با استفاده از شناخت کوهمولوژی کاس ذول با همبافت موضعی مـی باشـد . امـا توجیـه خود قضیه مهم تر است.

تعریف ۰۵۰۱ فرض کنید I حلقه ی قیاس جابه جا پذیر ایـده آل اسـت. (I) رابـا کـوچکترین عدد صحیح n مساوی می گیریم. این I می تواند به وسـیله ی معـادلات n از رادیکـال تولیـد شود.

آخرین حد قضیه ی کرول[۱] (قضـیه ی ۱۰۱ را ببینیـد) ثابـت مـی کنـد کـه در هـر حلقـه ی قیاس، $ara(I)\geq ht(I)$ است.

مثال ۵۰۲ : فرض کنید K حوزه و مجموعه $R=K[x,y,z]/(x^2-yz)$ است .R یک حلقـه ی دو بعدی است با آخـرین حـد عـدد اولP کـه $P=(x,y)$از دو عضـو تولیـد مـی شـود هـر چنـد $ara(p)=1$است و منجر به تولید P از رادیکال می شود.

مثال ۵۰۳۰ : با ارائه ی مثالی، هسته ی P از هم ریخت پوشا از $K[x,y,z]$ به $K[t^3,t^4,t^5]$ را در نظر بگیرید که x,y,z را به ترتیب به t^3,t^4,t^5می فرستد. آخرین حد عدد اول P دو است $(\dim K[t^3,t^4,t^5]=1)$ و به طور مینیمال با سه معادله ی z^3-x^2y, y^2-xz, x^3-yz که مینورهای 2×2ماتریس اند تولید می شوند. $A=\begin{pmatrix} xyz \\ yzx^2 \end{pmatrix}$

ماتریس 3×3را که از A به دست می آید در نظر بگیریـد، بـا تبـدیل A بـه مـاتریس متقـارن بدست می آید:

---

[۱] - Krull

$$.B=\begin{pmatrix} xyz \\ yzx^2 \\ zx^2 0 \end{pmatrix}$$

فرض کنید Δ مبین این ماتریس است، رادیکال P از Δ و y^2-xz تولید شده است از اینرو $ara(p)\leq 2$ است. از انجایی که آخرین حد P دو است پس دو کمترین مقدار ممکن می باشد.

به یک نتیجه کلی نیز می توان رسید: اگر A یک nباشد که به وسیله ی $n+1$ ماتریسی که اولین ستون های n آن، n را با n ماتریس متقارن C می دهد ، آنگاه به دنبال هم قرار گرفتن ترانهاده های آن و پر کردن $n+1$به وسیله ی ماتریس $n+1$با 0 ،به منظور ایجاد ماتریس B داریم $\det(C),\det(B)$ که ایده آلی را از رادیکال با همه ی مینورهای ماکزیمال A تولید می کند. (تمرین ۲۲ را ببینید)

قضیه ی ۰۵۰۴ فرض کنید R حلقه ی قیاس جابجایی پذیر و I ایده آل R باشد. آنگاه $H_I^{'}(M)=0$ برای هر $i\succ ara(I)$ و برای همه R– مدول های M است.

اثبات: از این حقیقت منشاء می گیرد که ممکن است کوهمولوژی موضعی را به وسیله ی انتخاب عضوهای $ara(I)$ که I از رادیکال، تولید می شود محاسبه کنیم و از کوهمولوژی کاس ذول در این عضوها به منظور محاسبه ی کوهمولوژی موضعی بهره بگیرید.

این قضیه برای $ara(I)$ حد پایین تری را می دهد. دو مثال مهم را در این باره ذکر می کنیم. اولین مثال که مربوط است به هارت شورن نشان می دهد که دو خط مورب در فضا توسط دو معادله از رادیکال تعریف نمی شود.

مثال ۰۵۰۵(دو خط مورب درR^3) فرض کنید K دامنه و مجموعه $R=K[x,y.u,V]$و $I=(x,y)\cap(U,V)$ است. آخرین حد این ایده آل دو است که با چهار عضو xu,xv,yv,yv تولید

می شود و می تواند از رادیکال با سه عضو $xv, yv, xv+yu$ تولید شود، آیا می تواند با دو معادله از رادیکال تعریف شود؟

از دنباله ی مایر- ویکتوریس استفاده می کنیم تا ثابت کنیم نمی توان بوسیله ی دو عضو آن را از رادیکال تولید کرد. قسمتی از دنباله ی مایر – دیکتوریس از اینروست.

$$H^3_{(x,y)}(R)\oplus H^3_{(u,v)}(R)\to H^3_I(R)\to H^4_m(R)\to \dots$$

که $m=(x,y)+(u,v)$ است. دو قسمت که در سمت چپ این دنباله آمده است صفر است. به همین دلیل سومین کوهمولوژی موضعی، از ایده آل ها ی تولید شده ی دو عضوی گرفته شده است . آخرین قسمت با توجه به قضیه ی ۴۰۹ که در زیر آمده است غیر صفر می باشد. بنابراین $H^3_I(R)\neq 0$ است که می دهد $ara(I)\succ 2$. با توجه به قضیه ی ۵۰۴.

مثال ۵۰۶ . $R=C\left[{}^{x}_{ij}\right], 1\le i\le 2, 1\le j\le 3$ است. فرض کنیدI ایده آلی است تولید شده با مینورهای 2×2از ماتریس 2×3 x ، توسط X_{ij}. این ایده آل سه تولید کننده دارد . آیا با دو عضو، از رادیکال، تولید می شود و اگر اینچنین است، قضیه ی فوق نشان می دهد که $H^3_I(R)=0$ با اینکه می دانیم این مدول غیر صفر است . با این وجود I با دو عضو از رادیکال تولید نمی شود. از طرف دیگر با توجه به خصوصیات مثبت آن داریم: $H^3_I(R)=0$. همانطور که می بینیم با استفاده از کوهمولوژی ایتیل[۱] و حتی با توجه به مشخصات P، ایده آل با دو عضو از رادیکال تولید نمی شود.

با چند اثبات نشان می دهیم که $H^3_I(R)$ صفر نیست. این اثبات از توپولوژی تحلیلی مکمل I که در (۱۸) آمده است، استفاده می کند. ابتدا ، اطلاعات مربوط به توپولوژی که بوسیله ی بی اثر شدن کوهمولوژی موضعی گردآوری شده است را بیان می کنیم.

---

[۱] - Etale

نسـبت بـه اعـداد n حلقه ی چند جمله ای است با متغیرهـای $R = C[X_1,....,X_n]$ فرض کنید است. قضـیه ای کـه در ادامـه مـی آیـد بـی اثـر شـدن R ایـده آل Iهمبافت و فرض کنید کوهمولوژی موضعی را به کوهمولوژی منفرد که همان فضای تحلیلی است ربط می دهد.

قضیه ی ۰۵۰۷ فرض کنید $R = C[X_1,....,X_n]$ حلقه ی چند جمله ای با متغیرهای n نسبت به اعداد همبافت و I ایده آل R است. مجموعه ی X مساوی خواهد بود با $X = spec(R)\backslash V(I)$اگر برای همه ی $i \succ r$باشد $H_I^i(R)=0$،آنگاه برای همه ی $i \succ n+r-1$ داریـم $H_{\sin g}^i(X,C)$. اثبـات این قضیه با گذر از تشخیص کوهمولوژی منفرد از X با کوهمولوژی درهم[1] جبری ورای گستره ی این یادداشت ها است. از این تشخیص می توانیم به منظور اثبات $H_I^3(R)\neq 0$استفاده کنیم.

قضیه ی ۰۵۰۸ فرض کنید R حلقه ی قیـاس جابجـایی پـذیر، I ایـده آل و M R- مـدول تولید شده ی متناهی است. آنگاه برای $i \prec depth_I(M)$ و برای $i \succ \dim(M)$ داریم $H_I^i(M)=0$.

اثبات: اولین حکم تاکیدی است بر تعریف عمـق. بـرای اثبـات دومـین حکـم، ممکـن اسـت از تصفیه ی عدد اول M به منظور جایگزین کردن M با R/P برای عدد اول P اسـتفاده کنـیم. سپس مـی تـوانیم بـا اسـتفاده از اسـتقلال پایـه، جـایگزین کنـیم R را بـه وسـیله ی R/Pو جایگزینی به وسیله ی تصویر آن در R/P. در آخر، کافی است تا موضعی بی اثر را ثابت کنیم. همانطور که کوهمولوژی موضعی با موضع سازی جا بـه جـا مـی شـود مـی تـوانیم بگـوییم R موضعی نیست. دومین ادعا کم اهمیت تر می شود . این ادعا مبنی است بر اثبات این قضیه که اگر(R,M,K,E) دامنه ی قیاس موضعی از بعـد d باشـد، آنگـاه بـرای همـه ی $j \succ d$ خـواهیم داشت $H_I^j(R)=0$.$ara(I)\leq d$و اولین قضیه ی ما فوراً به صورت ادعایی مطرح می شـود . اگـر چه این ادعا برای همه ی خوانندگان شناخته شده نیست ولی دلیل و برهـان متبـادلی را ارائـه

[1] - derham

می دهیم که از دامنه های مایر- ویکتوریس که در بخش اول آمده است استفاده می کنیم . ما با دامنه ی R و دومین قیاس از بعد R/I آشنا می شویم. اگر $\dim(R/I)=0$ باشد، آنگاه $\sqrt{I}=m$ و با در نظر گرفتن تعریف دامنه، $ara(m)=d$ ، این ادعا را اثبات می کنیم.

اگر $\dim(R/I)\succ 0$ باشد، انتخاب کنید $X\in E$ به این شرط که X جزء اعداد اول مینیمال از I نباشد. آنگاه خواهد بود $\dim(R/(I,X))\prec\dim(R/I)$ اما برای $j\succ\dim(R_X)$ استنتاج اثبات می کند که $H_I^j(R_X)=0$ است . آنگاه دنباله ی مایر – ویکتوریس نشان می دهد که $H_{(I,X)}^j(R)$ برازش می شود از $H_I^J(R)$ و دومین استنتاج اثبات را به پایان می رساند.

قضیه ی ۰۵۰۹ فرض کنید (R,M,K,E) حلقه ی قیاس موضعی از بعد d باشد.

(۱) برای هر $H_m^i(R)$ مدول آرتینی وجود دارد.

(۲) $H_m^d(R)\neq 0$ است.به طور کلی تر برای m ، R- مدول تولید شده ی متناهی از بعد t $H_m^t(M)\neq 0$.

اثبات بخش دوم به دنبال دوگانگی موضعی می آید. حلقه ی موضعی منظم (A,m_A) را در R با استفاده از قضیه ی ساختاری کوهن بنگارید. به صورتیکه برای ایده آل I از آخرین حد h بنویسیم $R=A/I$ دنباله ی منظم ماکزیمال $X_1,...,X_n\in I$ را انتخاب کنید و مجموعه ی $B=A/(X_1,...X_n)$ در نظر بگیرید . آنگاه B اشتراک کامل وگرنشتاین است. B در R نگاشته می شود و بعد B همانند بعدR، d قرار می گیرد. دوگانگی موضعی که نشان غیر صفر است نشان می دهد که $H_m^d(R)=H_{mb}^d(R)=\left(Ext_B^0(R,B)\right)^V=Hom_B(R,B)$ است اما $Hom_B(R,B)$ غیر صفر است. از آنجایی که $R=B/J$ است که $J=I/(X_1,...X_n)$،آخرین حد 0 را دارد پس $Hom_B(R,B)$ را می توان با $o:BI$ تشخیص داد که غیر صفر است.

ادعای عام تر برای مدول M به طور مشابه بیان می شود . مجموعه ی $J = o :_R M$ را پوچ ساز M در نظر بگیرید. همانطور که در پاراگراف فوق ذکر شده است B را انتخاب کنید. علاوه بر این، دنباله ی منظم ماکزیمال $Z_1,...,Z_n$ را در J انتخاب کنید و مجموعه ی $C = B/(Z_1,...,Z_n)$ را در نظر بگیرید. از دوگانگی موضعی داریم: $H_m^t(M) = H_{mc}^t(M) = \left(Ext_c^{\dim c - t}(M,C)\right)^V$.

با وجود اینکه $\dim C - t = \dim B - h - t = \dim R - h - t = 0$ و داریم: $t = \dim M = \dim R - h$ آنگاه کافی است ثابت کنیم که $(Hom_C(M,C))_P \neq 0$ در این مورد C_p حلقه ی گرنشتاین صفر بعدی است و $M_p \neq 0$ می باشد. بنابراین همریخت غیر صفر از M_p تا C_p با دوگانگی ماتلیس وجود دارد.

آخرین زیر بخش ها ی این بخش اطلاعات بیشتری بدون اثبات در ارتباط با ساختار کوهمولوژی موضعی در اختیار ما قرار می دهد. اگر خواننده بخواهد می توان این زیر بخش ها را حذف کرد. این زیر بخش ها در بقیه ی مقاله نمی آیند.

۱۰۵۰ بازنگری مورد طبقه بندی شده.

فرض کنید $R = \oplus \geq 0R:$ نسبت به حوزه ی $K = R_0$ حلقه ی قیاس طبقه بندی شده است. مجموعه ی m را که مساوی است با ایده آل تولید شده توسط همه ی عضوهای درجه ی مثبت به این ایده آل، گوییم ایده آل بی ربط . اما آن از نوع بی ربط ضعیف است. دقیقاً همانطور که در اثبات بالا نیز نشان دادیم $H_m^d(R)$ آرتینی است (برای حلقه یA از حلقه ی چند جمله ای برازش شده در R که با دنباله ی منظم ماکزیمال فاکتور شده است، در پوچ ساز R همچون مدولی نسبت به حلقه ی چند جمله ای استفاده کنید به همین دلیل $H_m^d(R)$ آرتینی است.)پس درجه ی ماکزیمالی که عضو غیر صفر دارد نیز باید وجود داشته

باشد. می توان این ادعا را با توجه به نزول سری زیر مـدول هـای M_i تولیـد شـده از همـه ی عضوهایی با حداقل درجه ی I لحاظ کرد. آن را باید برای I بزرگتر تثبیت کرد. اما آن منجر به بی اثر شدن زیر مدول ها مـی شـود. آخـرین حـد درجـه را واریـانس -a R مـی نامنـد کـه مهمترین واریانس حلقه است.

با توجه به محاسباتی که قبلاً انجام دادیم. اکنون می توانیم بگوییم کـه واریـانس -a حلقـه ی چنـد جملـه ای $K[X]$منفـی یـک (۱-) مـی باشـد، در حـالی کـه واریـانس -a مجموعـه ی $K[x,y]$منفی دو (۲-) است. می توان بـه راحتـی حـدس زد کـه واریـانس -a حلقـه ی چنـد جمله ای در متغیرهای n، n- است اما با این نگرش منفی دچار اشـتباه نشـوید. هنگـامی کـه واریانس -a منفی است در خیلی از روش ها حلقه مطلوب است. در بعضـی حالـت هـا، بیشـتر حلقه ها واریانس -a مثبت دارند. به عنوان مثال اگر $R = K[X_1,...,X_n]$ یک ابـر سـطح باشـد ، جایی که F درجه ی d دارد، واریانس -a R دقیقاً (d-n) است (تمرین ۲۳) ذکـر مثـالی از رفتار خوب حلقه ها با واریانس -a منفی توسط نتیجه ی باچ ویتز به دست آمـده اسـت. بـرای بیان آن یـه یـاد داشـته باشـید کـه سـاختار هیلبـرت از حلقـه ی قیـاس طبقـه بنـدی شـده $R = \oplus R_i$،نسبت به دامنه ی $R_0 = K$،تابعی است که n را به بعد حامـلR_n مـی فرسـتد . ایـن تابع n چند جمله ای است برای n بزرگ که یک درجه کمتر از بعـد کـرول R دارد کـه آن را چند جمله ای هیلبرت از R نامند.

قضیه ی ۰۵۰۱۰ فـرض کنیـد $R = R_0[R_1]$ حلقـه ی طبقـه بنـدی اسـتاندارد روی دامنـه ی $K = R_0$ باشد. فرض کنید R کـوهن- مکـالی اسـت و داریـم $a(R) \prec 0$،پـس چنـد جملـه ای هیلبرت و تابع هیلبرت همان ارزش را برای همه ی $n \geq 0$ ها دارد.

اثبات را در تمرین (۳۰) ببینید.

یکی از مهمترین و اساسی ترین قضایای بی اثر در علم هندسه ی جبری، قضیه ی بی اثر کودایرا[۱] است که یکی از نتایج آن درباره ی بی اثر بودن قسمت های طبقه بندی شده ی کوهمولوژی موضعی است. اثبات آن فرای حوزه ی این نکته هاست.

قضیه ی ۰۵۰۱۱ (نوسان و تغییری در قضایای صفر شونده ی کودیرا) فرض کنید S جبر طبقه بندی شده ی استاندارد روی اعداد همبافت باشد با ایده آل m آیروانت[۲] و فرض کنید S دامنه ی بسته ی انتگرالی است. S_p برای هر عدد اول P مناسب است و برابر با ایده آل m آیروانت نیست. برای همه ی $i \prec \dim(S)$ و برای همه ی $J \succ 0$ داریم: $\left[H_m^i(S)\right]_j = 0$.

۰۵۰۲ ساختار بیشتر: کوهومولوژی موضعی به عنوان o– مدول .

ما رفتار لییوبیزنیک را دنبال می کنیم(۳۶) . فرض کنید $R = K[X_1,...,X_n]$ یا $R = K[X_1,...,X_n]$، یک حلقه ی چند جمله ای با توان سری های حلقه بر حلقه ی پایه ای K باشد، دیفرانسلی متفاوت را تعریف کنید. $D_{i,t} = \frac{1}{t_i}\frac{\delta^t}{\delta X_i^t}$دیفرانسل گیری جزئی از ترتیب t با توجه به X_i حتی اگر t_i معکوس پذیر نباشد. این بیان رسمی اپراتور درستی را می دهد اگر t_i معکوس پذیر نباشد. از آنجایی که دیفرانسل گیری یک ضریب بخش پذیر روی اعداد صحیح توسط t_i را می دهد و این ضریب عدد صحیح همان چیزی است که توسط تقسیم بر t_i به دست می آوریم، می توان گفت: این اپراتورها در داخل $Hom_K(R,R)$ قرار می گیرند. همانطور که در ضرب عضوهای R قرار می گیرند. این ریز حلقه ها توسط این اپراوترها و توسط ضرب عضو R که o نامیده می شود تولید می شوند.

---

۱ -Kodaira

۲ - irrevont

O به گونه ای قرار می گیرد تا حلقه ی همه ی اپراتورهای K دیفرانسیل هـای R باشـد. اگـر چه در این جا به این اصل توجهی نمی کنیم. موضع سازی های R نیز مدول هـای D هســتند با امتداد و گسترش عملیات و با استفاده از قانون خارج قسمت. سرانجام استفاده از کوهمولوژی کاس ذول به منظور محاسبه ی کوهمولوژی موضعی نشان می دهـد کـه بـرای همـه ی I هـا $H_I^i(R)$، D- مدول می باشند.

این مدول های کوهمولوژی موضعی به صورت متناهی تولید شده اسـت، اگـر چـه معمـولاً بـه صورت نامتناهی همچون مدول های R به وجود آمده اند. از این دیدگاه برای اثبات بســیاری از نتایج که به کوهمولوژی موضعی مربوط می شوند (از سوی یولی ولتر[۱] (۴۰) و سایرین به کـار گرفته شده است) تا از الگوریتمی به منظور محاسبه ی کوهمولـوژی موضـعی بهـره مـی برنـد. موردی را که باید مورد توجه قرار داد این است کـه D– مـدول هـای R همانـند R در فـوق هستند. این حقیقت که D– مدول به طور متناهی بدست مـی آیـد، نشـان مـی دهـد کـه آن چرخه است. اگر $\frac{1}{F^K}$ کوچکترین توان منفی F در یک مجموعه ی زایشی باشد آنگاه بایـد آن را توان های بالاترF دانست که می تواند با ضرب در عضوهای R بـه دسـت آیـد. بـا توجـه بـه ویژگی های 0 و توان دقیق F که این موضع سازی را D– مدول می سازد، می توان گفـت آن بستگی دارد به پایه های چند جمله ای معین، کـه آن را چنـد جملـه ای براسـتین – سـاتر[۲] نامیده می شود. با توجه به خصوصـیات مثبـت P و بـرای حلقـه ی چنـد جملـه ای آلـوارس-

---

۱- Uli Waltler

۲- Berstrin-sater

مونتانر[1]، بلایکلی[2]و (۱) لیبوبزنیک[3] به این نتیجه ی عجیب می توان رسید کـه $\frac{1}{F}$، R_f را بـه عنوان یک D– مدول تولید کرده است.

تمرین ۰۵۰۳

تمرین ۰۲۱ فرض کنید (R,m)حلقه ی موضعی قیاس و I ایده آل باشد. اگر $H_I^q(R)=0$ باشد، آنگاه برای همه ی $q\succ n$ ثابـت کنیـد $H_I^q(M)=0$، بـرای همـه ی R مـدول هـای M و بـرای همه ی $q\succ n$.

تمرین ۲۲. توسط ماتریس $n+1$ که اولین ستون n است و n را با n ماتریس متقارن می دهدو همچنین فرض کنید A ، n باشد. A و ترانهادهای آن را به دنبـال هـم بیاوریـد . ایـن $n+1$را توسط ماتریس $n+1$با 0 تکمیل می کند تا ماتریس B را بسازد. ثابت کنید کـه $\det(C),\det(B)$ ایده آلی را از رادیکال تولید می کند که توسط همـه ی مینورهـای ماکزیمـال A تولیـد شـده است.

تمرین ۲۳. فرض کنید O حوزه باشد و $R=K[X_1,...,X_n]/(F)$ یک ابر سطح است. کـه F چنـد جمله ای متجانس از درجه ی d است. ثابت کنید واریانس -a از R ، $d-n$ است.

تمرین ۲۴. فرض کنید R حلقه ی قیاس وI ایده آل R و مجموعه ی $n=cd(R,I)$ است. بـرای هر R– مدول M ثابت کنید : $H_I^n(M)\cong H_I^n(R)\otimes_R M$.

تمرین ۲۵. فرض کنید حلقه ی قیاس موضعی از دامنه ی d باشد و فرض کنید $I\subseteq j$ ایده آل باشد. ثابت کنید $H_J^d(R)$در $H_I^d(R)$نگاشـته مـی شـود. (از دنبالـه ی قضـیه ی ۲۰۲ اسـتفاده کنید.)

---

[1] Alvares-mantoner-

[2] Blickle-

[3] lyubeznik -

تمرین ۲۶. فرض کنید R حلقه ی کوهن- مکالی موضعی باشد. ثابت کنید بلندترین مدول کوهمولوژی موضعی $H_m^d(R) \neq 0$ (d بعدی از R است) حالتی از پارامترهای $X_1,...,X_d$ را انتخاب کرده و از این اصل استفاده کنید که آن ها دنباله ی متناوبی را تشکیل می دهند. با تشخیص $H_m^d(R)$ با کوهمولوژی موضعی کاس ذول و با توجه به $X_1,...,X_d$، ثابت کنید که تصویر $\frac{1}{X_1,...,X_d}$ در این کوهمولوژی غیر صفر است.

تمرین ۲۷. از تمرین ۲۲ استفاده کنید به منظور اثبات این قضیه که ایده آل P در $K[X_1,X_2,X_3,X_4]$ مکعب چرخشی $K[t^3,t^2s,ts^2,s^3]$، با دو عضو تعریف می کند و از رادیکال به دست می آید.

تمرین ۲۸۰ فرض کنید R حلقه ی قیاس موضعی از دامنه ی و $X_1,...,X_s$ عضوهای R تولید کننده ی ایده آل I هستند. ثابت کنید $H_I^s(R)=0$ اگر و تنها اگر شرایط اخیر ایجاب شود و برای همه ی $P \succ 0$ و q داریم: $(X_1,...X_S)^q \in (X_1^{p+q},...,X_S^{p+q})$

(نکته : فکر کنید تصویر عضو $\frac{1}{(X_1,...X_S)^P}$ در آخرین حد کوهمولوژی کاس ذول که صفر شود چه معنایی دارد)

تمرین ۲۹. ثابت کنید برای چند جمله ای های اختیاری داریم $f,g,h \in k[x,y]=R$

(حوزه ی K,) . $(f,h)^2 \in (f^3,g^3,h^3)$ با فرض بر این، ثابت کنید که $H_{(f,g,h)}^3(R)=0$ است . به تمرین ۲۸ رجوع کنید.

تمرین۳۰. فرضیه ی ۵۰۱۰ را ثابت کنید.

۶- قضایای بی اثر II

در این بخش دو قضیه مهم و اصلی را ثابت می کنیم. اولی شرایط کافی و لازم برای بی اثر شدن کوهمولوژی موضعی $H_I^d(R)$ را می دهد، جایی که d یک بعد از حلقه ی موضعی R است و سپس این قضیه را با آگاهی از ساختار $H_m^d(R)$به کار می گیریم تا قضیه ی به هم پیوسته ای را که به گروتلندزیک [۱] نسبت داده می شود را ثابت کنیم. اولین نتیجه را قضیه ی بی اثر هارت شورن – لیچتن بام[۲] می نامیم. (به اختصار می نویسیم HLVT)(۱۶) را ببینید. در (۱۷) نیز بحث خوبی مطرح شده است ،

بخش III . اثباتی که این جا ارائه می دهیم از صفحه ی(۶) است.

قضیه ی ۰۶۰۱ (HLVT) فرض کنید (R,m)حلقه ی قیاس موضعی و I ایده آل R باشد مجموعه ی $d=\dim(R)$ را داریم. آنگاه جملات زیر معادل آن می باشند.

(۱) $H_I^d(R)=0$

برای همه ی اعداد اول P از $\widehat{R}$با (۲)

$\dim(\widehat{R}/P)=\dim(R),\dim(\widehat{R}/I\widehat{R}+P)\succ 0$

اثبات . مسیر ساده ی آن (۲) ⟵ (۱) می باشد . با فرض اینکه(۲) برقرار نباشد، با در نظرگرفتن کلیت می توانیم فرض کنیم R کامل است و مینیمال عدد اول P از بعد ماکزیمال در R وجود دارد. در اینصورت I+P ایده آل ماکزیمال اول است . با استقلال از پایه و با توجه به قضیه ی ۰۵۰۹ داریم $H_{(I,P)/p}^d(R/P)=H_{m/p}^d(R/P)\neq 0$.

این کوهمولوژی موضعی مشابه $H_I^d(R/P)$ است. اما R در R/P نگاشته می شود و آنگاه دنباله ی دقیق بلند در کوهمولوژی موضعی ثابت می کند که $H_I^d(R)$ در $H_I^d(R/P)$ نگاشته

⟶

[۱] Grotlandieck-

[۲] Hartshorne-lichtenbam -

می شود . با توجه به اینکه هسته، در $(d+1)^{st}$ مدول کوهمولوژی موضعی محاط مـی شـود کـه می دانیم صفر می باشد. بنابراین با $H_I^d(R)\neq 0$ متنـاقض اسـت. مسـیر دشـوارتر (۱) (۲) است.

برای آسانی کار، اثباتی را در این باره که حلقه شامل میدان است ارائه می دهیم. بـا توجـه بـه اینکه موردهای کلی تر دشـوارتر نیسـت . ابتـدا ایـن مـورد را کـه در آن R دامنـه ی کامـل و $I=P$ آخرین حد عدد اول d-1 است را کمتر مورد توجه قرار می دهیم. با توجه به تناقض فرض کنید کـه تحـت شـرایط(۲) داریـم $H_I^d(R)\neq 0$. در نتیجـه $H_{I\hat{R}}^d(\hat{R})=H_I^d(R)\otimes_R \hat{R}$ بیـان می دارد که $H_{I\hat{R}}^d(\hat{R})\neq 0$ است. بنابراین می توانیم ابتدا R را کامل کنیم. با توجه بـه $H_I^d(R)\neq 0$ به راحتی می توان مشاهده کرد که مدول چند عدد اول مینیمال R از بعـد ماکزیمـال درسـت است.

(تمرین ۳۴) بنابراین می توان فرض کرد که R یک دامنه ی موضعی کامل است. ماکزیمـال I را به گونه ای انتخاب کنید که $H_I^d(R)\neq 0$ باشد. اما $\dim(R/S)\succ 0$ است اگر I عـدد اول بعـد ۱ نباشد و می توانیم $X\notin I$ را به گونه ای انتخاب کنیم که $\dim(R/(I,X))\succ 0$ باشد . در این جـا دنباله ی دقیق ما $\ldots\to H_{(I,X)}^i(R)\to H_I^i(R)\to H_{IX}^i(R_X)\to\ldots$ خواهد بود.

$i=d$ نشان می دهد که $(\dim R_X \prec d)H_{(I,X)}^d(R)\neq 0$ که با ماکزیمال بودن I متناقض است. سپس این مورد را که R حلقه ی گرنشتاین است را کمتر مورد توجه قرار می دهیم . فرض کنید K ضریب حوزه ی R باشد، به عبارتی زیر حوزه ی R، به صورت همریخت در حوزه ی مانده ها نگاشته می شود . $X_1,\ldots.X_d\in P$ را انتخاب کنید بطوریکه داشته باشیم $p=\sqrt{(X_1)\ldots(X_d)}$. $X_1,\ldots X_d$ را می توان به طریق زیر انتخاب کرد. ابتدا $X_1,\ldots.X_{d-1}$ را در P

مانند $ht(X_1,....X_{d-1}) = d-1$ انتخاب کنید. X_d را در P انتخاب کنید که در مجموعه ی دیگر اعداد اول مینیمال شامل $X_1,....X_{d-1}$ نیست و مشخصاً داریم $\sqrt{(X_1,...X_d)} = P$. در این مورد از آنجایی که تنها اعداد اول، شامل $X_1,...,X_{d-1}$ اند، ایده آل ماکزیمال و اعداد اول مینیمال نسبت به ایده آل آن تولید می شود. $y \in P$ را در نظر بگیرید آنگاه $X_1,...,X_{d-1}$ و y حالت کاملی است از پارامترها. مجموعه ی $A = K[[X_1,...,X_{d-1},y]]$ را در نظر بگیرید. A حلقه ی منظم موضعی است و R A- مدول متناهی می باشد. در آخر فرض کنید داریم $B = A[X_d]$،از آنجایی که $A \subseteq B \subseteq R$ است، B ضرورتاً نسبت به A متناهی است. بنابراین هر دو کامل و موضعی هستند. علاوه بر این B گرنشتاین است. پس حلقه ای ابر سطح خواهد بود. حلقه ی چند جمله ای $A[T]$ را در B با فرستادن T به X_d نگارش کنید. هسته، عدد اول ایده آل P از $A[T]$ است و آخرین حد p باید دقیقاً یک باشد. بنابراین دامنه ی B دقیقاً مشابه دامنه ی A است. اما A ، UFD است . پس $A[T]$ آخرین حد عدد اول در UFD می باشد . بنابراین $P = (F)$ بنیادی است و $B = A[T]/(F)$،ابر سطح وگرنشتاین می باشد. مجموعه ی $\phi = p \cap B$ است. در نظر داشته باشید که $H_p^d(R) = H_{(X_1,...X_d)}^d$است. همانطور که $P = \sqrt{(X_1,...,X_d)}$است بر این ادعا هستیم که $\phi = \sqrt{X_1,...X_d}B$ می باشد. مطمئناً ϕ شامل $(X_1,...,X_d)B$می شود، بنابراین کافیست ثابت کنیم که هر عدد اول در B که شامل$(X_1,...,X_d)B$باشد ϕرا هم شامل می شود. فرض کنید ϕ'چنین عددی باشد . همانطور که حلقه ی ممتد R نسبت به B مدول متناهی است. عدد اولی مانند P' موجود است که با ϕ' با توجه به قضیه ی فوق در تناقض است. از آنجایی که P' شامل $(X_1,...,X_d)R$است. پس آیا باید P باشد یا m . اگر P باشد پس با φ متناقض است . در نتیجه $\phi' = \phi$خواهد بود. در غیر اینصورت ϕ' ایده آل ماکزیمال B

است و φ را شامل می شود. از آنجایی که $H_V^d(B)=H^d_{(X,\dots,X_{d1})}B^{(B)}$است اگر $O=H^d_\phi(B)$ ، آنگاه $O=H^d_{(X_1,\dots,X_d)B}(B)$ است و

$$.O=H_{(X_1,\dots,X_d)B}(B)\otimes_B R\cong H^d_{(X_1,\dots,X_d)R}(R)=H^d_p(R)$$

(میانه ی همریخت که تنسور[1]نام دارد دقیق می باشد و برای هر ایده آل J از B و هر B- مدول M داریم $H_J^j(M)=0$ برای $j\succ d$. کافی است ثابت کنیم که $O=H_V^d(B)$ می باشد.

فرض کنید R گرنشتاین و P ایده آل اول آخرین حد d-1 باشد. باید ثابت کنیم که $H_P^d(R)=0$ است. می نویسیم $P^n=P^{(n)}\cap J_n$ که J_n m- اول و $P^{(n)}=P^nR_p\cap R$ است. از آنجایی که R دامنه است ، داریم $n_{n\geq 0}P^{(n)}=(0)$.

قضیه ی چوالی[2]نشان می دهد که هر J_n شامل چند $P^{(K)}$است که نشان می دهد $\{P^n\}$,$\{P^{(n)}\}$ کافینال[3]است. بنابراین $H_P^d(R)=\xrightarrow{\lim} Ext_R^d(R/P^{(n)},R)=0$ به دلیل اینکه مدول دوآل ها ماتلیس $H_m^0(R/P^{(n)})$ هستند . با توجه به تعریف توان های نمایدن، تمامی این مدول ها 0 می باشند.

مثال ۶۰۲۰ برای به تصویر کشیدن این قضیه، فرض کنید K حوزه ای با مشخصه ی صفر است و فرض کنید $R=(K[X,Y,U,V]/f_m)$ که در آن $F=Xy-ux^2-vy^2$ و $m=(x,y,u,v)$ باشد . مجموعه ی $P=(y,u,v)R$ است، به راحتی می توان ثابت کرد که R دامنه ی سه بعدی و P ایده ال آخرین حد دو عدد اول R است. آیا $H_P^3(R)=0$ صحیح است. بعد از پاسخ به آن می توان فاکتورهای f را در دو سری توانی $F=(X-vy+\dots)(y-ux+\dots)$ ثابت کرد. جایی که هر قسمت $X-Xy+\dots$،در (y,u,v)قرار می گیرد به جز اولین قسمت X . بدین معنا که این

---
[1]- tensor
[2]- chevalley
[3]- cofinal-

دو عدد اول مینیمال دو نسبت به 0 در $\hat{R}$ هستند و $P\hat{R}+(X-xy+...)=m$ است. HCVT بیان می دارد که $H_p^3(R)\neq 0$ است.

ذکر این موارد ارائه ی کلیت هایی است از قضایای بی اثر. با ذکر مثالی یکی از این کلیت ها را بیان می کنیم. قضیه ۶۰۳۰ (۵۰۵ III {۳۳۶} cor ۲۱۱۰ {۳۲} را ملاحظه کنید) فرض کنید $R=K[[X_1,...,X_n]]$ سری توانی نرمال نسبت به دامنه ی بسته ی مجزای K باشد و فرض کنید I ایده آل مناسبی از R باشد. پس معادل های زیر را داریم:

$cd(R,I)\prec n-1$ (۱) اصطلاحاً به آن مرتبط گویند

(۲) $\dim(R/I)\succ 1, spec(R)\setminus\{m\}$

قضیه ی ۶۰۱ کاربرد جالبی از مشخصات مرتبط spec دارد که در زیر آمده است. فرض کنید (R,m) حلقه ی موضعی و X طیف پانکچر[۱] باشد. به عبارتی داریم $\{m\}$ / $spec(R)$، ابتدا تئوری ایده آل را مورد بررسی قرار می دهیم که برای مجموعه ی باز این جا منقطع می باشد. اگر این مجموعه منقطع باشد مجموعه های محصور شده ای که تهی نیستند نظیر $w\subseteq X, u\subseteq X$ وجود دارند، در نتیجه $U\cup W=X, U\cap W=\phi$ است . در تعریف برای ایده آل های I و J در R داریم: $W=V(J)\cap X, U=V(I)\cap X$.

مجموعه $U\cap W$ به وسیله ی $X\cap V(I+J)$ داده می شود. در حالیکه مجموعه ی $U\cup W$ با $V(I\cap J)\cap X$ داده شده است. این شرایط حاکی از این است که ($mI+J$)اول و $I\cap J$ رادیکال پوچ R است. به عبارتی در هر ایده آل اول از R وجود دارد. این شرط که U و W تهی نیستند بدین معناست که نه I و نه J هیچکدام m– اول نمی باشند.

۱- punctured

قضیه ۰۶۰۴ (قضیه ی مرتبط) فرض کنید(R,m,K) از جایگاه تحلیل حلقه ی موضعی تجزیه ناپذیر از بعد n است و فرض کنید U ایده آل R تولید شده توسط اکثر عضوهای $n-2$ است. آنگاه طیف پانکچر از $specR\setminus U$ مرتبط است.

نکته ۰۶۰۵ به شرایطی نیاز نداریم که در آن υ توسط $n-2$یا عضوهای کمتری تولید شود: تمام آنچه که نیاز داریم $H_{21}^{n-1}(R)=H_{21}^{n}(R)=0$است و شرایط ثانویه به طور خود به خود به وجود می آید اگر R دامنه ی موضعی کامل و F m– اول نباشد.

در (۷) اثباتی داده شده است که در این جا به ذکر آن می پردازیم.

اثبات. اگر I و J را ایده آل هایی که منجر به قطع می شوند فرض نکنیم در آنصورت $I\cap J$رادیکال مشابهی همچون F را خواهد داشت. $I+J$ تا m عدد اول است اما هیچ یک از I یا J تا m اول نمی باشند. دنباله ی مایر- ویکتوریس[1] برای کوهمولوژی موضعی بیان می دارد که: $\ldots\to H_{I\cap J}^{n-1}(R)\to H_{I+J}^{n}(R)\to H_{I}^{n}(R)\oplus H_{J}^{n}(R)\to H_{I\cap J}^{n}(R)\to\ldots$

اولین و آخرین قسمت هایی که نشان داده شده نا صفر می باشند. بنابراین $I\cap J$رادیکالی شبیه ایده آل با $n-2$ تولید کننده دارد. $I+J$تا m اول است و دنباله همریخت زیر را به دنبال دارد: $H_{m}^{n}(R)\cong H_{I}^{n}(R)\oplus H_{J}^{n}(R)$. اما قضیه ی بی اثر هارتشون – لیچن بام نشان می دهد که هم $H_{I}^{n}(R)$ و$H_{J}^{n}(R)$صفر هستند. آنگاه R دامنه ی کامل است وI و J هیچکدام m– اول نمی باشند. با توجه به قضیه ی ۵۰۹، $H_{m}^{n}(R)\neq 0$ این تناقض اثبات را کامل می کند.

۶۰۱. کاربرد اشتراک های قضایای گوناگون جبری :

در این بخش به کاربرد کوهمولوژی موضعی به منظور تحلیل موضعی مجموعه های جبری معین اشاره می کنیم . مهمترین نتیجه ای که می توان گرفت نتیجه فالتون و هانس است.

[1] - mager-victonis

قضیه ی ۶۰۶. فرض کنید K دامنه ی بسته ی جبری است و $X \subseteq P_K^n, y \subseteq P_K^n$،گوناگونی جبری نامیده می شود. اگر $\dim(X)+\dim(y) \succ n$ باشد آنگاه $x \cap y$ مرتبط است.

نتیجه دیگری که با توجه به کالک برنر و استارم فلز[۱]گرفته می شود و درباره ی تحلیل موضعی مجموعه های جبری معین است به این صورت است که: فرض کنید $P \subseteq K[X_0,...,X_n]$ ایده آل اول متجانس باشد. قسمتی را با توجه به تک جمله ای ها در نظر بگیرید و فرض کنید $(P)=I$اولین ایده آل P است. قضیه ی کالک برنر و استارم فلز بیان می دارد که (۲۲ ، قضیه ۱) :

قضیه ۶۰۷۰. فرض کنید $P \subseteq R = K[X_1, X_2,...,X_r]$ ایده آل اول و کوچکتر از هر تک جمله ای باشد. آنگاه $R/\sqrt{\prec(P)}$هم بعد است.

پیوست ۱ که از سوی آمیلاتیلور نوشته شده است او اثباتی متفاوت از قضیه ای که از سوی کالک برنر و استارهم فلز بیان شده است دارد که در قضیه ی اصلی مرتبط وجود دارد.

محدودیت دامنه در قضیه ی فالتون و هانسن به وضوح به چشم می خورد، اگر $\dim(X)+\dim(y) \prec n$ باشد، آنگاه به طور کلی نمی توان انتظار داشت که X و Y وجود داشته باشد، اگر چه فضا برای هر دو آن ها در مجموعه ی بعد یک زیاد است، اگر $\dim(X)+\dim(Y)=n$باشد، در کل $X \cap Y$در مجموعه ی بعد 0 وجود خواهد داشت. به عبارتی، اگر بیش از یک نقطه وجود داشته باشد. این مجموعه غیر مرتبط خواهد بود.

اثبات: در قضیه ی فالتون و هانسن زبان هندسی را به جملات جبریی تغییر می دهیم که شامل شکل P_K^n مجموعه ای از همه ی اعداد اول متجانس از حلقه ی چند جمله ای $K[X_0,...X_n]$است به جز $m=(X_0,...,X_n)$. مجموعه های بسته به عنوان تحلیل موضعی

[۱] kalkbernner & sturmfels-

زاریسکی[۱] تعریف شده اند. اما در آن جا فقط از ایده آل های متجانس استفاده می کنیم. به همین دلیل می توان از قضیه به عنوان جمله ی موضعی خالص برداشت کرد. فرض کنید X مجموعه ای از اعداد اول متجانس که شامل P عدد اول ثابت متجانس و Y مجموعه ای از اعداد اول متجانس که شامل ϕعدد اول ثابت متجانس است باشد . حلقه ی متجانس X حلقه ی $K[X_0,...,X_n]/P$ $K[X_0,...,X_n]/\phi.y,K[X_0,...,X_n]/P$می باشد که از بعد کرول $K[X_0,..,X_n]/P$یکی کوچکتر است، آنگاه ایده آل ماکزیمال را نیز از نظر گذرانده ایم. به همین ترتیب، بعد y یکی کوچکتر از بعد $K[X_0,...,X_n]/\phi$است. ایده آلی که مجموعه ی $X \cap Y$ را تعریف می کند ایده آل $P+\phi$است . وقتی می گوییم منقطع است ، منظور این است که ایده آل های متجانس I و J وجود دارد ، همانطور که $I+J$اعداد m– اول هستند، داریم $P+\phi \subseteq I \cap J, \sqrt{P+\phi} = \sqrt{I \cap J}$است اما نهI و نه J m– اول نمی باشند.

حال در ادامه اثبات این قضیه داریم :

حلقه ی مختصات متجانس که پیوست XوY است رادر نظر بگیرید، مخصوصاً حلقه ی مختصات متجانس مربوط به آن هایی را که $R = K[X_0,...,X_n]/P \otimes_K K[X_0,...,X_n]/\phi$ است.

R دامنه است در نتیجه K از لحاظ جبری بسته است.

(تمرین ۳۸) مجموعه ی $L_i = X_i - y_i$ را داریم بنابراین ایده آلی که از این اشکال خطی حاصل شده است پراکندگی را تعریف می کند. بعد R : $\dim(X)+1+\dim(y)+1 \succ n+2$می باشد. توجه داشته باشید که $R/(L_0,...,L_n) \cong K[X_0,...,X_n]/(P+U)$ است . فرض کنید که $X \cap Y$ منقطع است و فرض کنید I و J همانند فوق می باشد اما در R از طریق همریختی $R/(L_0,...Ln) \cong K[X_0,...,X_n]/(P+\phi)$ وجود دارد. همچنین ایده آل های R و I و J در زیر آمده

---

[۱] - Zariski

است $I+J$ تا m_R اول است. $(L_0,...,L_n)\subseteq I\cap J$ است و رادیکال پوچ مشابه دارد. هیچکدام از I یا J در ایده آل متجانس ماکزیمال m_R اول نمی باشد. بعد از کامل کردن R در m_R این مشخصات درست خواهند ماند. این حلقه را با S نشان می دهیم . با استفاده از طبقه بندی ثابت می کنیم که S یک دامنه است . این اثبات صحیح است به این علت که حلقه ی طبقه بندی متناظر S درست مانند حلقه ی طبقه بندی متناظر R است البته با در نظر گرفتن m_R . این حلقه تا R همریخت است در نتیجه R طبقه بندی شده و با فرم های یک تولید می شود (تمرین ۳۵ و پیوست ۱ را ببینید)

در نتجه S دامنه ی موضعی کامل از بعدی است که معادل بعد R است. علاوه بر این با توجه به ساختار آن می توان گفت طیف پانکچر از $S/(L_0,...,L_n)S$ منقطع است . در نتیجه داریم $(n+1)2=n+3\le \dim(S)$،با کاربرد قضیه های مرتبط می توان تناقض را حس کرد. دو زیر بخش بعدی نتایج بیشتری درباره ی کوهمولوژی موضعی بی اثر از موقعیت طبقه بندی شده ی چند تایی وجود دارد و خصوصیات مثبتی را ارائه می دهد. در این بخش ها به اثبات نمی پردازیم.

۶۰۲ مورد طبقه بندی شده ی چند تایی.

در سال های اخیر علاقه ی قابل توجه به کوهمولوژی موضعی در حلقه های چند تایی با حفظ ایده آلی که از تک جمله ای ها حاصل می شود وجود داشته است. این علاقه برآمده از میان کلیه ی فرضیاتی است که از مطالعه ی گوناگونی های چنبری[۱] به دست می آید. دراین جا می توان حلقه را به عنون طبقه بندی چند تایی در نظر گرفت و می توان کوهمولوژی موضعی را از طریق همبافت شبه کال زول که تفکیک پذیری تیلور نامیده می شود مورد

[۱] - Toric

مطالعه قرار داد. پس دوگانگی آشکار می گردد. نتیجه ای را بیان می کنیم(مثال (۳۵) را ببینید):

قضیه ی ۰۶۰۸ فرض کنید I ایده آلی است از تک جمله ای های فارغ از مربع در حلقه ی R چند جمله ای، نسبت به حوزه آن. فرض کنید m ایده آل بی ربط باشد. آنگاه $H_I^{'}(R)=0$ اگر و تنها اگر $H_m^{n-j}(R/I)=0$ باشد.

توجه داشته باشید که کوهمولوژی موضعی $H_I^J(R)$ فقط به رادیکال I بستگی دارد، بنابراین در جایگزین کردن ایده آل تک جمله ای، به وسیله ی رادیکالش که همیشه از تک جمله ای های فارغ از مربع حاصل می شود، کلیت قضیه از دست نخواهد رفت، اگر چه طرف راست کوهمولوژی در قضیه بالا به طور کلی به رادیکال I بستگی دارد.

۰۶۰۳ مشخصه های مثبت .

حال فرض کنید (R,m) حلقه ی موضعی منظم از p با مشخصه های مثبت است. نگاشت فروبنیس $f:R\rightarrow R$ ،همریختی است که عضو را به توان P ام می رساند. این واقعیت اساسی است که نگاشت درون ریخت گویند.

همچنین فروبنیس بر موضع سازی R عمل می کند . بنابراین عملکرد آن بر کوهمولوژی اعداد همبافت کاس ذول است که ارائه دهنده ی تعریف ثانویه از کوهمولوژی موضعی است.

در بسیاری از روش های اعمال فروبنیس و ایجاد موقعیت، برای ایده آل های تک جمله ای برابری و همسانی وجود دارد. به این علت که می توان روابط را تا توان P اجزاء افزایش داد ، از این طریق می توان به اطلاعات خاص و منحصر به فردی دست یافت. نتیجه ی لیپوبز نیک به قضیه ی طبقه بندی چند تایی فوق نزدیک است.

قضیه ی ۰۶۰۹ فرض کنید (R,m)حلقه ی موضعی منظم با مشخصه P و بعد n باشدو نیز فرض کنید I ایده آل R است و مجموعه ی $A=R/I$ باشد. آنگاه $H_I^J(R)=0$اگر وفقط اگر عدد صحیح مانند S موجود باشد به طوریکه نگاشتی که با عدد صحیح S از فروبنیس داده می شود از قرار $f^S:H_m^{n-J}(A)\to H_m^{n-J}(A)$ با نگاشت صفر باشد.

اهمیت این قضیه و قضیه ای که در بخش طبقه بندی چند تایی مطرح شد این است که آن سوال دشوار در زمینه ی بی اثر شدن کوهمولوژی موضعی با حفظ ایده آل دلخواه I به سوالی که قابلیت پی گیری آن وجود دارد تبدیل می شود. با توجه به کوهمولوژی موضعی از حلقه ی خارج قسمت و با در نظر گرفتن ایده آل ماکزیمال، آنگاه دو گانگی موضعیی را داریم که این سوال را به سوالی درباره ی مدول های Ext تغییر می دهد که به صورت متناهی به دست می آیندو می توان آن را جدا از تفکیک حلقه و خارج قسمت نسبت به حلقه ی پایه ی منظم مورد مطالعه قرار داد. رسیدن به این نتایج به طور همزمان قابل انتظار نیست. همانطور که در بالا هم ذکر شده دو آل ماتلیس، $Ext_I^j(R/I,R),H_m^{n-j}(A)$ می باشد. و این مدول در مدول کوهمولوژی موضعی $H_I^j(R)=\xrightarrow{\lim} Ext_R^j(R/I^n,R)$نگاشته می شود. در هر دو قضیه ی لیبوبرنیک و مورد طبقه بندی چند تایی عملکرد شبه فروبنیس در تفکیک ناپذیری از R/I ایده آل هایی را که توان های I هستند ارائه می دهد و در محاسبه ی $H_I^j(R)$ به کار می رود. اگر چه آنچه که ذکر کردیم اثبات نیست اما دلیل نتیجه گیری از این قضایا را بیان می کند.

قضیه ی ۰۶۰۱۰ فرض کنید (R,m) حلقه ی موضعی منظم با مشخصه ی P و بعد n است. فرض کنید I در R ایده آل است. مجموعه ی $t=depth(A)$ را داریم. پس به ازای هر $j\succ n-t$

داریم $H_I^j(R)=0$. به طور خاص اگر A کوهن- مکالی باشد، آنگاه به ازای هر $j\neq C$ داریم $H_I^j(R)=0$ که در آن C ارتفاع I است. اثبات اولین بخش این قضیه بستگی دارد به سطح پردازش فروبنیس نسبت به حلقه های منظم موضعی با مشخصه های مثبت آن.

بخش دوم به دنبال قسمت اول می آید و این اصل را که به ازای هر $i\prec C$ ، $H_I^j(R)=0$ به عنوان عمق I از R مساوی C است را به اثبات می رساند .

۶۰۴۰ تمرین:

تمرین ۳۱. نتیجه ی چوالی را ثابت کنید : اگر (R,m) دامنه ی موضعی کامل و $\{I_n\}$ زنجیره ی کاهشی ایده آل ها باشد در آنصورت $\cap_n I_n=0$ خواهد بود. آنگاه خواهیم داشت $I_n\subseteq m^{k(n)}$ که $K(n)$ به سمت نامتناهی بودن میل می کند .

تمرین ۳۲. ادعای مثال ۴۰۲ را با در نظر گرفتن فاکتور گیری $xy-ux^2-vy^2$ در سری های توانی به اثبات برسانید.

تمرین ۳۳. فرض کنید $R=K[[x,y,u,v]]/(xu-yv)$ باشد و $I=(x,y)R$. ثابت کنید که $H_I^3(R)=0$ است اما $H_I^2(R)\neq 0$ می باشد.

تمرین ۳۴. فرض کنید R حلقه ی نوتری موضعی از بعدd است و فرض کنید I ایده آل R باشد. اگر $H_I^d(R)\neq 0$ باشد ثابت کنید که آن مدول درستی ازاعداد اول مینیمال R از بعد ماکزیمال است.

تمرین ۳۵. در متن این ادعا را ثابت کنید که اگر R جبر طبقه بندی شده ی استاندارد با ایده آل m باشد ، آنگاه حلقه ی طبقه بندی شده ی پیوسته R تا R همریخت است.

تمرین ۳۶. فرض کنید (R,m)حلقه ی موضعی نوتری است. اگر حلقه ی طبقه بندی شده ی پیوسته R یک دامنه باشد ، ثابت کنید که R دامنه است.

تمرین ۳۷. فرض کنید R دامنه ی نوتری، I ایده آل و $u = spec(R) \setminus V(I)$ است. دنباله ی دقیق کوتاه زیر را ثابت کنید در صورتی که $S = \cap_{p \in u} R_P$باشد.

$$O \to R \to S \to H_1^1(R) \to 0$$

تمرین ۳۸. فرض کنید K حوزه ی بسته ی جبری،RوS دو K– جبر تولید شده متناهی که دامنه نیز می باشند، هستند. ثابت کنید که $R \otimes_K S$ نیز یک دامنه است.

۷. پیوست ۱- استفاده از کوهمولوژی موضعی برای اثبات نتیجه کالکبرنک و استرم فلز(ارائه شده از سوی امیلیا تیلور)

۰۷۰۱ مقدمه.

فرض کنید I در $R = K[X_1, X_2, \ldots X_3]$ ایده آل است . تک جمله ای $order \prec R$ مرتبه کاملی درتک جمله ای های R است که $1 \le m$. برای هر تک جمله ای m در R و اگر a,b,c تک جمله ای های R هستند و $a \prec b$،آنگاه داریم $ca \prec cb$. مرتبه ی تک جمله ای در یک حلقه چند جمله ای با چندین متغیر، مفهوم درجه برای حلقه ی یک جمله ای در یک متغیر را عمومیت می بخشد. اولین عبارت از یک عضو $f \in R$ در $\prec(F)$نشان داده شده است، با توجه به ترتیب تک جمله ای ثابت، بزرگترین عبارت F ، ایده آل I از R را می دهد، که ایده آل اول در $(I) = (\{in(F) : F \in I\})$ است. مرتبه های تک جمله ای مختلف ممکن است به ایده آل های اولیه مختلف منتهی شود، بنابراین هرگاه یک ایده آل اول، به آن اشاره داشته باشد، فرض می کنیم که مرتبه تک جمله ای ، ثابت شده است.

در سال ۱۹۸۸ کردل[1] و ویسیفینگ[2] این احتمال را می دادند که اگر P یک ایده آل اول در R باشد، آنگاه $R/\sqrt{in \prec (P)}$، هم بعد خواهد بود. در سال ۱۹۹۵ کالک برنر و استرم فلز قضیه قوی تر زیر را اثبات کرده اند.

قضیه ۷۰۱(۲۲، قضیه ۱) فرض کنید $P \subseteq R = K[X_1, X_2, ... X_3]$ یک ایده آل اول و کوچکتر از هر مرتبه تک جمله ای باشد. پس $R/\sqrt{in \prec (P)}$ هم بعد است و در یک هم بعد به هم مربوط می شوند. برای یک ایده آل تک جمله ای فارغ از مجذور، ایده آل تک جمله ای $R/I, I \subseteq R$ کاهش می یابد و ایده آل های اول تک جمله ای از R/I بوسیله ی زیر مجموعه های متغیر ها تولید می شوند. در این متن R/I در هم بعد $K[X_1, ... X_2 ... X_3]/I$،زنجیره هایی از ایده آل های اول مینیمال $P_1 = Q_1, Q_2, ... Q_3 = P_2$ می باشند. مانند $co\dim(Q_i, Q_i + 1) = co\dim(Q_i)$ برای $1 \le i \le s-1$ است.

کالک برنر ، استرم فلز، کردل و ویسیفنیگ از زبان همبافت های ساده در نوشته هایشان استفاده می کنند و ما آن زبان را اینجا معرفی می کنیم. یک همبافت متناهی ساده کوتاه و اگر $V \subseteq U, V \in \Delta$ باشدآنگاه $V \in \Delta$ خواهد بود. این نام بر این اصل تاکید دارد که نگاشت هایی که معمولاً با همبافت های ساده در ارتباط هستند در اینجا هیچ نقشی ایفا نمی کنند. اگر نیاز باشد می توان نگاشت های معمولی را فرض کرد و از آنجایی که روی این نکته در جبر جابجایی پذیر اشتباه پیش می آید، آنها معمولاً همبافت های ساده نامیده می شوند. فرض کنید I یک ایده آل باشد در $[X_1, ..., X_2 ..., X_r]$یک مجموعه $U \subseteq \{X_1 ..., X_2\} = X$ مد مستقل نامیده می شود، اگر $I \cap K(u) = (0)$ باشد. می گوییم این مجموعه ها مستقل هستند، زیرا این

1- Kredel

2- weispfenning

مفهوم برای ایده آل ها یک عمومیت بخشی از ناوابسته های خطی در یک فضای برداری است. مجموع همه زیر مجموعه های X که باقیمانده ناوابسته I هستند $\Delta(I)=\{u : I \cap K[u]=(0)\}$ یک همبافت ساده را تشکیل می دهند که همبافت مستقل I نامیده می شود با دادن یک همبافت ساده Δ در $X=\{X_1,...X_r\}$، ایده آلی که بوسیله $I_\Delta=\{X_1...X_4/\{X_1.....,X_1\}\not\in\Delta\}$ تعریف می شود یک ایده آل تک جمله ای و فاقد مجذور است. حلقه $K[X]/I_\Delta$ را حلقه دید یا حلقه استنلی- ریسنر[1] برای Δ گویند.

این دو ساختار باعث انطباق بین همبافت های ساده و ایده آل های تک جمله ای فاقد مجذور می شود. خصوصاً برای هر همبافت ساده $\Delta(I_\Delta)=\Delta$ و برای هر ایده آل تک جمله ای بدون مجذور $I_\Delta(I)=I$، مجموعه های Δ ،صورتها نامیده می شود. یک صورت(وجه) اگر بطور مناسب در صورت دیگر شامل نشود ماکزیمال است. صورتهای ماکزیمال معمولاً سطوح کوچک نامیده می شوند. فرض بگیرید $F=\{X_i,...X_{iL}\}$ یک وجه از همبافت ساده باشد، پس $(X\setminus\{X_{iL},...X_{iL}\})$یک ایده آل اول مینیمال برای $I\Delta$است. فرض بگیرید $I_\Delta \neq (X\setminus\{X_{iy},...X_{il}\})$ است. پس یک تک جمله ای m در I وجود دارد مثال X_iو m را برای بعضی از $1\leq y\leq t$ تقسیم می کند. در این مورد $m\in I_\Delta\cap K[F]$ و این اصل را که F در Δ است ، نقض می کند. اکنون فرض کنید $(X\setminus\{Xi_L,...Xi_i\})$مینیمال نیست پس برای بعضی $ij, I\leq t,t,X_i j$ هیچ موردی از I_Δ را تقسیم نمی کند. از آنجایی که $K[F\cup\{Xi_j\}]\cap I_\Delta=(0)$ و F یک وجه در Δ نیست پس یک تناقض پیش می آید.

بنابراین وجه ها در Δ با ایده آل های مینیمال اول روی I_Δ تطابق دارند.

مشابه مینیمال های ایده آل اول روی I که با وجه ها تطابق دارند.

[1] stanly-Reisner-

یک همبافت ساده خالص نامیده می شود، اگر همه ی وجه ها، اعداد اصلی مشابهی داشته باشند و تقریباً به هم مرتبط می باشند، اگر در وجه $F,G \in \Delta$ داده شده باشند. زنجیره ای از وجه های $F = F_0, F_1, ..., F_s = G$ در Δ وجود دارد مثل $\leq S$، انطباقی که در بالا برای وجه ها داده شده و ایده آل های اول مینیمال می گوید که اگر I یک ایده آل تک جمله ای بدون مجذور باشند، آنگاه $K[X_1, X_2 ..., X_r]/I$ هم بعد خواهد بود و در همبعد ۱(یک) به هم وصل می شوند اگر و فقط اگر $\Delta(I)$ خالص باشد و قویاً مرتبط شده باشد. به بیان دیگر یک همبافت ساده Δ خالص است و قویا مرتبط می شود اگر و فقط اگر حلقه استنلی- رینر ، $K[X_1, X_2, ... X_r]/I_\Delta$ همبعد باشد و در بعد یک مرتبط شود. جمله اصلی در نوشته های استرم فلز و کالک برنر این است که همبافت های مستقل از نخستین ایده آل (ایده آل اول) خالص است و قویاً مرتبط می شود. نتیجه کالک برنر و استرم فلز به اولین ایده آل، ایده آل اعداد اول را در نظر می گیرد و از آنجایی که ایده آل های نخستین، به مرتبه ای که انتخاب شده بستگی دارد، مرتبه انتخاب شده می تواند بر هندسه یا ساختار تحلیلی ایده آل های اولی تاثیر بگذارد. از آنجایی که نتایجشان بدون توجه به مرتبه های تک جمله ای بیان شده است، هر اثباتی از این نتیجه باید مستقل از مرتبه تک جمله ای آن استفاده شود. در اثباتشان آنجا نخست نتیجه بردارهای وزنی را که وابسته به ایده آل است و با مرتبه ی تک جمله ای خاص برابری می کند را بیان می دارند و به آنها این امکان را می دهد که فرض کنید ایده آل اول داده شده، متجانس باشد. یک مرحله کلیدی و مهم در مورد اول، قضیه ارتباط ایتانسن- فالتون[۱]است . آنها پس از این مورد در اثباتی که اینجا داده شده، تنها نیاز است جایی که گمان می بریم که ایده آل شبه همولوژی است آن را ساده کنیم. بنابراین مستقیماً بردارهای حامل اختیاری را

[۱] Fulton-itanson-

اثبات می کنیم و یکبار در مورد شبه متجانس، قضیه ی ارتباط ۶۰۴۰ را به کار می بریم.

۰۷۰۲ شبه همگون سازی.

ما با برخی از نتایج اساسی روی بردارهای حامل شروع می کنیم. فرض بگیرید $F \in K[X_1,...X_2]$ و $W \in N$ تعریف کنید $in_W(F)$ که بعنوان یک چند جمله ای در t ضریب اصلی $F(t^w X_1^1,...,t^w X_2)$ باشد . توجه داشته باشید که در $w(F)$ یک عضو از $K[X_1,...X_2]$ می باشد و لزوماً یک تک جمله ای نیست. فرض بگیرید $in_w(I)=\{in_w(F):F \in I\}$ برداری $w \succ$ برای ایده آل I اگر $in \prec (I)=in_w(I)$ باشد. برای هر مرتبه تک جمله ای $\succ$ و هم ایده آل $I \subset R=K[X_1,...X_2]$ یک بردار عدد صحیح نام منفی $w \in N^n$ وجود دارد مثل w که $\prec$ را نمایش می دهد (۳۸- فرضیه ی ۱۱-۱)

۷۰۲ لم (۲۲). فرض کنید $G=\{g_t,...,g_m\}$ پایه گروبنر کاهش یافته ای برای I باشد . با توجه به مرتبه تک جمله ای کوچکتر، یک بردار $\succ W \in N^2$ را برای I نمایش می دهد. اگر و فقط اگر $in \prec (g_i)=in_w(g_i)$ برای $1 \le i \le m$.

اثبات. فرض کنید w نمایانگر $\succ$ است برای ایده آل I ، پس

$$in_w(I)=in \prec (I)=(in \prec (g_1)...,in \prec (g_m))$$

از آنجایی که $g_1,...g_m$ پایه گروبنر کاهش یافته را تشکیل می دهد، هیچ عبارتی از g_i بوسیله $in \prec (g_j)$ به ازای هر $i \neq j$ ها برای $in_w(g_i) \in in_w(I)$ که $i,1 \le i \le m$ ثابت . بنابراین $F_1,...F_m \in R$ مانند $in_w(g_i)=F_1 in(g_t)+...+F_m in \prec (gm)$، در حالیکه $in_w(g_i)$ ممکن نیست در $\prec (g_i)$ باشد. معادله بالا بیان می دارد که هر عبارت از $in_w(g_i)$ با بعضی از $in \prec (g_j)$بخش پذیر است. از

آنجایی که $in_w(g_i)$ شامل عباراتی از g_i و G است. به یک پایه گروبنر بیس است ، فقط در صورتی اتفاق می افتد که $in_w(g_i)=in\prec(g_i)$ از آنجایی که I اختیاری بوده و در $in\prec(g_i)=in_w(g_i)$ می باشد برای $1\le i\le m$ معکوس ، فرض بگیرید $in\prec(g_i)=in_w(g_i)$ برای $1\le i\le m$. از آنجایی که

$$in\prec(I)=(in\prec(g_t)..in\prec(g_m))=(in_w(g_1),...in_w(g_m))،$$

کافی است ثابت کنید که $in_w(I),in_w(g_1),...in_w(g_m)$ را به دست می آورد. فرض کنید $F\in I$است آنجا $1\le j\le m,h_j\in R$ خواهد بود مثل اینکه $F=\sum_j^w=1^h j^g j$. از آنجایی که G یک پایه گروبنر برای I است، توانهای موزون عبارت F را در نظر بگیرید. برای هر $h_j g_j$عبارات با بزرگترین توانهای موزون مجموعی از چنین عبارات خواهد بود. مگر اینکه ، عباراتی که شامل $in_w(g_j)=in\prec(g_i)$ برای $1\le j\le m$باشد که مستلزم این است که $in\prec(F)\notin ink^{(I)}$ یک تناقض باشد. بنابراین $in_w(F)\in(in_w(g_1),...in_w(g_{lm}))$

برای $F\in K[X_1,...X_2],w\in N^r$ ،پس توان موزون F را تعریف می کنیم که خواهد بود :

یک عبارت از F است $\max\{a.w|X^a...X_r^{\alpha r}|\}$.

فرض بگیرید $WF=F(X_1/t_1^w,...X_r/t^{wr})t^s$ جایی است که S مینیمال است مثل $W_f\in K[X_1,X_2,...X_r,t]$، پس عدد S با توان موزون F برابر است و ^wF را شبه متجانس F می نامیم. فرض کنید $^WI=(\{F^w:F\in I\})$، شبه متجانس ایده آل I باشد.

شبه همگون ساز عضو F و ایده آل I با توجه به همگون سازی و غیر همگون سازی عمل می کنند. از برخی معادلات برای تشریح این مساله استفاده می کنیم. فرض بگیرید $F\in I$ در این صورت $^wF\in^W I$,$w_F(X_1,...X_r,1)=F(1^w...X_2/1^{wr})1^S=F(X_1...,X_2)$. فرض کنید

$F(X_1,...,X_r,t)\in^w I$ باشد، F را بعنوان $t^L G(X_1,...X_r,t)$ در نظر بگیرید. جایی که t ، G را تقسیم نمی کند. فرض بگیرید S نشاندهنده توان موزون $G(X_1...,X_r,I)$است از انجایی که t را تقسیم نمی کند داریم: $G(X_1/t^w 1...,X_r/t_r^w,1)t^s=(X_1...,X_r,t)$ و

$$t^1\left({}^wF(X_1,...X_r,1)\left({}^wF_i(X_1,...X_r,1)\right)\right)$$

$$=t^1G(X_1,...X_r,t)=f(X_1,...X_r,t)$$

حال اگر $F\in^W I$ باشد آنگاه وجود دارد $r_\tau...,r_m\in K[X_1,X_2,...,X_r,t],F_1,...F_m\in I$ بطوریکه $F=\sum_i^m=t^r i^w F_i$ خواهد بود. در این صورت

$$F(X_1,...X_r,1)=\sum_i^m=(X_1,...X_r,1)\left({}^wF_i(X_1,...X_r,1)\right)$$

$$=\sum_i^m=(X_1,...X_r,1)F_i(X_1,...X_r)\in I$$

لم ۰۷۰۳ فرض کنید ایده آل در $K[X_1,...X_r]$ باشد و کوچکتر از هر قسمت. فرض کنید $W\in N^r$ نشان دهنده ی $\prec$است برای $\prec,W,P$را تا $K[X_1,X_2,...X_r,t]$ امتداد می بخشد و با دادن $X_i\succ t$ برای $1\le i\le r$، به t یک (۱) می دهد . مجموعه $d=\dim(K[X_1,...X_r]/P)$ در این صورت ۱- ایده آل P ایده آل اول است در $R=K[X_1,...X_r]$اگر و فقط اگر ${}^WP$یک ایده آل اول در $R[t]$ باشد.

۲- اگر $\{g_1,...g_m\}$ پایه ی گروبنر برای p باشد . آنگاه $\{{}^Wg_1,...{}^wg_m\}$ پایه ی گروبنر برای wp خواهد بود. و $\dim(K[X_1,X_2...,X_r,t]/{}^wP)=d+1$ می باشد.

۳- اگر P یک ایده آل اول باشد آنگاه در $(P)+(t)={}^wp+(t)\prec$خواهد بود

اثبات ۰۱۰ ابتدا ما اثبات می کنیم کـه $^{W}(Fg)=({}^{w}F)({}^{w}g)$.فـرض کنیـد s,r,q توانهـای کامـل Fog و F_g را به ترتیب نشان می دهد بنابراین $S=r+q$ خواهد بود. آنگاه با توجـه بـه تعریـف شبه همگون سازی داریم $^{W}F=F(X_1/t^{w1},...X_r/t^{wr})t^q, {}^{W}g=g(X_1/t^{w1},...X_r/t^{wr})t^r$

وهمچنین داریم $^{w}(Fg)=(Fg)(X_1/t^{w1},...X_r/t^{wr})t^s$

پس اگر $(Fg)(X_1/t^{w1},...X_r/t^{wr})t^s$ آنگاه

$$=(wf)(wg)\ F(r_1/t^{w1},...X_r/t^{wr})t^r g(X_1/t^{w1},...X_r/t^{wr})t^r$$

فرض کنید P یک ایده آل اول است و همچنین فرض کنید کـه $F,G\in K[X_1,X_2,...X_r,t]$ مثـل اینکه $FC\in^{w}P$، پس آنگاه معادله می گوید کـه $F(X_1...,X_n,1)G(X_1,...X_n,1)\in P$ از آنجـا کـه P یک ایده آل اول است یا $F(X_1,...X_n,1)\in P$ است ویـا $G(X_1...X_n,1)\in P$ بـدون تغییـر در کلیـت، اثبات می کنید $F(X_1,...X_n,1)\in P$ است. پس $F=(X_1,...X_n,1)t^s\in^{w}P$ است برای بعضی از S ها بنابراین w_P یک ایده آل اول است.

از طـرف دیگـر w_P را یـک ایـده آل اول در نظـر بگیریـد. فـرض کنیـد $F_g\in P$ اسـت پـس $({}^{w}F)({}^{w}g)=({}^{w}Fg)\in^{w}P$ بنابراین یا $^{w}F\in^{w}P$ یا $^{w}g\in^{w}P$ و از آنجـایی کـه w_P یـک ایـده آل اول است. فرض کنید $W_F\in^{w}P$

۲. از آنجایی که $\prec W$ را نمایش می دهد

$in\prec({}^{w}g_j)=in\prec(in_w(g_1))=in\prec(g_i)$ برای $1\le i\le m$،

فرض کنید $F\in^{W}P$ است پس $F(X_1,...X_r,1)\in P$ آنگاه $F(X_1,...X_r,1)=\sum_i^m=1^h i^g i$ برای بعضی $h_1,...h_m\in K[X_1,...X_r]$ و از آنجایی که $g_1,...g_m$ یک پایه گروبنر برای P تشکیل می دهد ، بنابراین برای بعضی $S\in N$، $F(X_1,...X_r,t)=t^s({}^{w}F(X_1,...X_r,1))=t^s({}^{W}(\sum_{i=1}^m h_i g_j))$.

پس $in \prec (F) = t^s in \prec \left({}^w F(X_1..., X_2, 1)\right) = t^s in \prec \left({}^w \left(\sum_{i=1}^m h_i g_i\right)\right)$

و از آنجایی که W نشاندهنده $\prec$ است و در نتیجه $in \prec \left(\sum_i^m = h_i g_i\right) = in \prec \left(in_w \left(\sum_{i=1}^m h_i g_i\right)\right)$

بنابراین عبارت اصلی $\sum_i^m = 1^h i^g i$ بزرگترین توان وزنی را دارد. این نشاندهنده این است که در $\left(\sum_i^m = 1^h i^g i\right)^W$ این عبارت هیچ ts در آن ندارد و بنابراین عبارت اصلی، $^w\left(\sum_i^m = 1^{higi}\right)$ است از

اینرو با استفاده از معادله بالا داریم $in \prec \left({}^w \left(\sum_{i=1}^m = 1^{h_i g_i}\right)\right) = n(in \prec (g_t)) = n(in \prec ({}^w g_i))$

برای بعضی تک جمله ایهای $n \in K[X_1, ... X_r]$ و برای بعضی I است. بنابراین $in({}^w P) = (in({}^w g_1), ... in({}^w g_m))$. فرض کنید $s = K[X_1, X_2, ... X_r, t], R = K[X_1, ... X_r]$ است اثبات بالا و این حقیقت که $\dim(R/P) = \dim(R/in(P))$ بطور منحنی می گوید که :

$$\dim(s/wp) = (S/in({}^w p)) = \dim(S/in(P)S) = \dim(R/P) + 1 = d + 1$$

۳. فرض کنید G نشاندهنده پایه گروبنر کاهشی است برای L.P .با توجه به $\prec$همچنین فرض کنید $g \in G$، از آنجایی که W نشاندهنده $\prec$ است برای هر $g \in G, in \prec (g) = in_w(g)$ می باشد، از اینرو $W_g = in \prec (g) + h$ جایی که $h \in (t)K[X_1, X_2, ... X_r, t]$ است، بنابراین $in \prec (g) = W_g - h \in w_p + (t)$ است و $in \prec (P) \subseteq W_p + (t)$ علاوه بر این

$$W_g = in \prec (g) + h \in in \prec (P) + (t) S o W_p \subseteq in \prec (P) + (t)$$

۷۰۳. قضیه اصلی. ابتدا ما قضیه ارتباط را بیان می کنیم و بعد یک لم را که از نتایج استاندارد دنبال می شود اثبات می کنیم اما این لم برای اثبات قضیه ی کالک برنر و استرم فلز کلیدی است.

۷۰۴. (قضیه ارتباط قضیه ۶۰۴) فرض کنید(R,m,K) یک حلقه موضعی ساده نشدنی تحلیلی از بعد n باشد و نیز فرض کنید μ یک ایده آل از R باشد که حداکثر از دو عنصر $n-2$ بدست می آید. آنگاه طیف پانکچر از $specR/\mu$ مربوط می شود.

لم ۰۷۰۵ فرض کنید R دامنه ی قیاس طبقه بندی شده مثبت باشد. $R=R_0(g_1,...g_m)$ را در نظر بگیرید و مجموعه $w_i=\deg(g_i)\geq 1$ است برای $1\leq i\leq m$. اگر $m=(g_1,...g_m)$نشاندهنده یک ایده آل نامربوط باشد پس m اتمام R,R^m یک دامنه است.

اثبات . فرض کنید I_n ایده آلی باشد که از همه اشکال توان متجانس بزرگتر یا برابر $I_n=(f\in R_j \setminus j\geq n),n$ که بوسیله ساختار $I_0=R,I_n+1\subseteq I_n$ بدست می آید . فرض کنید $b\in I_m,a\in I_n$ باشد هر عبارت از ab توانی بزرگتر یا برابر با $n+m$ دارد که بیانگر اینست که: $ab\in I_{n+m}$ و در نتیجه $I_nI_m\subseteq I_{n+m}$ بنابراین $\left[{}_n^I\right]n\geq 0$ صافی می باشد. فرض کنید $\Im$ بیانگر صافی است . ما می خواهیم قضایای ذیل را ثابت کنیم.

۱) $R\approx gr\Im(R)$

۲) $gr\Im(R)\approx gr\Im\left(R^{\hat{\Im}}\right)=\otimes_n\geq 0\left(I_nR^{\hat{\Im}}/I_n+1R\hat{\Im}\right)$

۳) اگر $gr\Im(R)\approx\oplus_n\geq 0(I_n/I_{n+1})$ باشد آنگاه R یک دامنه است .

۴) $R^{\hat{\Im}}\approx R^{\hat{m}}$

اگر R یک دامنه باشد۱) بیانگر اینست که $gr\Im(R)$یک دامنه است، و r بیانگر اینست که $gr_{\Im}\left(R^{\hat{\Im}}\right)$ نیز یک دامنه است. با توجه به شماره ۳، از آنجایی که $R^{\hat{\Im}},gr\Im\left(R^{\hat{\Im}}\right)$ دامنه می باشد، از اینرو شماره ۴ نیز $R^{\hat{m}}$ یک دامنه است و کافیست ۴-۱ را ثابت کنیم.

۱- (۵ مثال no.۳ .۲ III و ۴)

۲- { ۳۰ صفحه ۹۳}

۳- از آنجایی که $n_n \geq 0, I_n = 0$ است ، اثبات همان را که در لم داده شده دنبال می کند.

۴- کافیست ثابت کنید قضیه صافی (filteration) $\{m^n\},\{I_n\} \leftarrow cofinal$ هستند. فرض کنید j داده شده باشدو I_j از همه اجزای متجانس R از توان بزرگتر یا مساوی با j تولید شود و m^j از حاصل شکل $g^{\propto_1^1}\ldots g^{\propto_m^m}$ جایی که $\propto_1 + \ldots . \propto_m = j$ تولید شده باشد. توان چنین حاصلی برابر $\propto_1 w_1 + \ldots . + \propto_m w_m \geq j$ است بنابراین $m^j \subseteq I$. مجموعه $w = \max\{w. \propto \int \propto_1 + \ldots + \propto_m = j\}$ پس هم عضو متجانس از توان بزرگتر یا برابر با W در m^j می باشد . از اینرو $I_W \subseteq m^j$ است. بنابراین دو صافی کافینال نیز می باشند و $R^{\hat{\Im}} \approx m^j$ خواهد بود.

قضیه ۰۷۰۶ فرض کنید $P \subseteq R = K[X_1, \ldots X_r]$ یک ایده آل اول باشد و کوچکتر از هر مرتبه تک جمله ای .

اثبات: فرض کنید $Q_1 \ldots Q_\Im$ اعداد اول مینیمال (P) باشند. به منظور عدم تناقض از آنجایی که R متناوب است کافیست ثابت کنیم $\dim(R/Q_i) = \dim(R/Q_j)$ به ازای $i = j$ می باشد. از انجاییکه $Q_i \subseteq K[X_1, \ldots X_r]$ ایده آل اول مینیمال (p) است، پس (Q_iوt) یک ایده آل اول مینیمال روی $(in(P), t)$ نیز خواهد بود. به ازای $1 \leq i \leq S$ ،مینیمال ایده آل اول روی (t) در $R/^w P$ دقیقاً هم بعد یک هستند. بنابراین (Q_iوt) دقیقاً هم بعد یک در $R/^w P$ خواهد بود برای $1 \leq i \leq S$. از آنجایی که R یک حلقه کوهن – مکالی است $co\dim(Q_i, t) = co\dim(Q_j, t)$ بیانگر اینست که $K[X_1, X_2, \ldots X_r, t]/(Q_i, t) \approx K[X_1, X_2 \ldots X_r, t]/(Q_j, t)$ همچنین $Q_i \subseteq K[X_r \ldots, X_r]$ برای $1 \leq i \leq s$ بیانگر اینست که

$K[X_1, X_2 \ldots, X_r, t]/(Q_i, t) \approx K[X_1, \ldots X_r]/Qi$است برای $1 \leq i \leq s$،

بنابراین $\dim(K[X_1,...X_r]/Qi)=\dim(K[X_1,...X_2]Q_j)$ برای $1\le i,j\le s$. ما ثابت می کنیم که $R/\sqrt{in(P)}$ در بعد یک متصل شده است. فرض کنیم $s=K[X_1,X_2,...X_r,t]$ است و $m=(X_1,...X_r,t)$ از آنجایی که $(in({}^wP),t)=(in(P),t)=({}^WP,t)$ است ما می توانیم فرض کنیم که $P\subseteq s$ یک ایده آل اول متجانس است و در $t\notin p,(P)\subseteq K[X_1,...X_r]=R$ می باشد یعنی $(in(P),t)=(P,t)$ می باشد. فرض کنید $Q_1,...Q_s$ ایده آل اول مینیمال در (P)باشد . با توجه به به ایده آل، Q_j یک مینیمال ایده آل اول است روی ایده آل تک جمله ای و بنابراین متوسط زیر مجموعه $y_L\subseteq\{X_1,...X_r\}$ کاردینال $r-d$ می باشد. فرض کنید $\underline{L}\{L_1,...L_{d-2}\}$

با انتخاب $\underline{L}$ موارد ذیل برابر هستند:

۱- $co\dim((Y_i,Y_j,t,\underline{L}))=r$

۲- $|y_i\setminus y_j|=1$

۳- $(Y_i,Y_j,t,\underline{L})\neq m$

۴- $V(Y_i,t,L)nV(Vj,t,\underline{L})\neq\phi$

بنابراین $U_{i=1}^{S}V(Y_i,t,\underline{L})=(V_j^s=1^v(Y_i))nv(t,L)$ در فضای افزایشی به هم متصل می شوندو بیانگر $R/\sqrt{in(P)}$ است که در بعد یک (۱) به هم متصل می شوند از آنجایی که واریته $U_i^s=1^v(Y_i,t,\underline{L})$ با مجموعه ایده آل های اول که شامل $(in(P),t,\underline{L})\subseteq m$و فاقد ایده آل ماکزیمال است، برابری می کند، کافی است ثابت کنید که در فضایی به هم متصل می شوند.

با توجه به لم ۷۰۳ و این اصل که P شبه متجانس است. بنابراین $P\subseteq m$ خواهد بود.

$$\frac{S_m}{(in(P),t,\underline{L})}=\frac{S_m}{(P,t,\underline{L})}$$

بنابراین ما می توانیم ارتباط $Spec\left(\frac{S_m}{(P,t,L)}\right)\setminus\left\{\frac{m}{(P,tmL)}\right\}$ را مد نظر بگیریم.

بوسیله لم ۰۷۰۵ $\left(\frac{\widehat{S}_m}{P}\right)$ یک دامنه از بعد $d+1$ است، از آنجایی کـه $P \subseteq S$ یـک ایـده آل اول شبه متجانس است و بنابراین $\frac{S_m}{P}$ از لحاظ تحلیلی غیر قابل تبدیل است مجموعـه $t,\underline{L}$ در m کشیده می شود و ارتفاع $d-1 \leq (d+1)-2$ دارد بنابراین قضیه ارتباط می گوید که:

$$Spec\left(\frac{S_m}{(P,t,\underline{L})}\right) \backslash \left\{\frac{m}{(P,t,\underline{L})}\right\}$$

به هم وصل می شودو $Spec\left(\frac{S_m}{(in(P),t,\underline{L})}\right) \backslash \left\{\frac{m}{(in(P),t,\underline{L})}\right\}$ نیز همانطور کـه لازم اسـت بـه هـم وصل می شود.

۸- پیوست ۲. اعداد بیس[۱] و حلقه های گرنشتاین:

در اولین مرحله به ضابطه ای نیاز داریم تا به کمک آن بتوانیم بررسـی کنـیم کـه تجزیـه ی انژکتیو، تک جمله ای است یا نه؟ برای به دسـت آوردن ایـن ضـابطه کـافی اسـت ضـابطه ای همولوژیکی برای گسترش مدول های R به دسـت آوریـم. در ایـن بخـش اگـر P عـدد اول از حلقه ی R باشد حوزه ی باقیمانده ی R_P را با $K(P)$ نشان می دهیم.

قضیه ۰۸۰۱ فرض کنید که $F: M \to N$ یک حلقه ی انژکتیو از مدول های R است، پـس N یک بسط ضروری و لازم از $F(M)$ می باشد. اگر و فقط اگر برای هر $P \in Spec(P)$ نگاشـت القـا شده ی $F_P: HomR_P(K(P),M_P) \to HomR_P(K(P),N_P)$ همریخت باشد.

اثبات . از آنجایی که موضع سازی دقیق است و $Hom(K(P),)$ دقیقاً در سمت چپ اسـت و F_P همیشه انژکتیو می باشد، ابتدا فرض کنید که N نسبت به $F(m)$ ضروری است و فـرض کنیـد $y \in HomR_p(K(P),N_P)$، از آنجایی که R/P بطور محدود ارائه شـده ،Y تـا یـک واحـد از R_P

[۱] - Bass

بوسـیله $\propto \in Hom_R(R/P,N)$ اعمـال مـی شـود. مجموعـه $X=\propto(1)$ اسـت، فـرض کنیـد E انژکتیوهال از M باشـد. پـس E نسـبت بـه M ضـروری است بخـاطر اینکـه یـک $r\in R$ بـا $rx\neq 0, r_2\in(M)$. همچنین $r\notin P$ ، در نتیجه $P_X=0$ خواهد بـود. بنـابراین $y(1)\in f(M)_p$ اسـت که نشان می دهد F_P پوشا است و بنابراین همریخت می باشد. پس فرض کنید که F_P همیشه یک همریخت است و فرض کنید $X\in N$ است. انتخاب کنیـد هـر $P\in Ass(RX)$ پـس خـواهیم داشـت $y=rx$ ،بنـابراین $lann_R y=P$ یـک همریخـت $y\in Hom_R(R/P,N)$ اسـت و بوسـیله $y(1)=y$ تعریف کنید. پس با مفهوم y_p نگاشت از y با موضع سازی در p القا می شود که آن با همریختی از $K(P)$ تا M_P استنباط می شود و بیانگر ایـن اسـت کـه $y/L\in F(M_P)$ و بنـابراین وجود دارد یک $S\notin P$ مثل $sy\in F(M)$. از آنجایی که $ann_R y=P$ که ثابت می کنند N نسـبت به $F(M)$ ضروری است.

نتیجه ۲۰۸۰ فرض کنید R حلقه ی قیاس و M مدول -R با تجزیه ی انژکتیو E^* است. پـس E^* تجزیـه ی انژکتیـو مینیمـال اسـت اگـر و فقـط اگـر بـرای همـه $P\in Spec(R)$ و همـه I نگاشت های القا شده $HomR_P(K(P),E_p^i)\to Hom_P^R(K(P),E_P^{i+1})$ صفر باشند.

اثبات: فرض کنیـد $Z^i=Ker(\ell_i+1)=\mathrm{Im}(\ell_i)$ اسـت. E^* مینیمـال اسـت اگـر و فقـط اگـر E^i انژکتیوهال از z^1 بوده . E^i بسط ضروری از Z^i باشد اگر و فقـط اگـر نگاشـت هـای القـا شـده $Hom_p^R(K(P),(Zi)_P)\to Hom_P^R(K(P),(E^i)_P)$ همریخت باشند. از آنجایی که دنبالـه هـای دقیـق $0\to Z^i\to E^i\to E^{i+1}$ است و $HomR_P(K(P),)$ دقیقاً چپ است شرایط دوم صدق می کند اگر و فقط اگر نگاشت های القا شده نتیجه(۱) همریخت باشند.

قضیه ی فرعی ۰۸۰۳ اگر R حلقه ی قیاس و M مدول R با تجزیه ی انژکتیو مینیمال E^* باشند، آنگاه برای همه $P \in Spec(R), E_P$ تجزیه ی انژکتیو، مینیمال از M_P است.

اثبات: ما می دانیم که E_P^i انژکتیو است به عنوان مدول R_p ،بنابراین ما ممکن است قضیه ۸۰۲ را اعمال کنیم. نیاز است نشان دهیم که نمودارهای القا شده $HomR_q(K(q),(E_P^i)q) \to HomR_q(K(q)(E_p^{i+1}))$ برای همه $q \subset P$ صفر است. از آنجایی که $(E_p^i)_q = E_q^i$ ،مینیمال بودن E^* همراه با تبصره ۸۰۲ نشان می دهد که این نمودارها صفر هستند.

تعریف ۰۸۰۴ فرض کنید R حلقه ی قیاس باشد و M نیز مدول R است. با تجزیه انژکتیو مینیمال E اعداد $M(P,m)Bass$ تعریف می شوند که اعداد کپی های $E_R(R/P)$ در حاصلجمع وانهش مستقیم E^i در مدول های انژکتیو، تجزیه ناپذیر باشد. اگر R با ایده آل ماکزیمال m موضعی باشد آنگاه فرض می کنیم که $\mu_i(M) = \mu_i(m.M)$ است.

نکته۰۸۰۵ اعداد بیس به تجزیه ی انژکتیو مینیمال و به حاصل جمع وانهش مستقیم خاصی از E^i بستگی ندارند.

قضیه ی فرعی ۰۸۰۶ فرض کنید R حلقه ی قیاس و M مدول R باشد. آنگاه $\mu_i(P,M) = \mu_i(P_P, M_p)$ است به ازای هر i .

اثبات: تجزیه ی انژکتیو مینیمال E از M را ثابت کنید. بوسیله تبصره ۸۰۳ و اینکه E_P یک تجزیه انژکتیو مینیمال از M_p است، می نویسیم ← $E^1 = \oplus ER(R/P)^{\mu_i(P,M)}$. کافی است ببینیم $(E_R(R/q))_P \cong E_R(R_P \setminus q_p)$ برای $q \subset P$ و برابر با صفر است اگر q شامل P نشود که ساده است.

قضیه ۸۰۷ . فرض کنید R حلقه ی قیاس و m مدول R باشد آنگاه:

$\mu(P,M)=\dim_{K(P)}\left(Ext^{i}\left(K(P),M_{P}\right)\right)$.

خصوصاً اگر M بطور محدود حاصل شود همه اعداد بیس متناهی هستند.

اثبات: بوسیله قضیه ۸۰۶ ، کافی است که در این مورد جایی که (R,m,K)یک حلقه موضعی قیاس است و $p=m$ ،فرض کنید E تجزیه مینیمال انژکتیو M باشد. پس $Ext^{i}(K,M)$همولوژی i ام و $Hom_{R}(K,E)$ همبافت می باشدکه بوسیله کوچک کردن تجزیه نمودارها در این همبافت صفر هستند. بنابراین $Ext^{i}(K,m)=Hom_{R}(K,E^{i})$. برای تمام کردن اثبات کافی است نشان دهید که $Hom_{R}(K,E_{R}(R/P))=0$ اگر $P\neq m$ و K است اگر $p=m$ باشد. جمله بعدی دنبال می شود از آنجایی که $Hom_{R}(K,E_{R}(k))\cong E_{K}(K)=K$ و با توجه به آن اگر $P\neq m$ پس یک عضو x از m در p وجود ندارد و این عضو بعنوان یک واحد در $E_{R}(R/P)$ عمل می کند. هر عضو ℓ در $Hom_{R}(K,E_{R}(R/P))$ باید یک را به وسیله X به یک عضو برساند بنابراین صفر است.

نکته ۰۸۰۸ این یک اصل بارز است که اگر R یک حلقه موضعی متناوب متشکل از یک دامنه نا متناوب است متناهی هستند، حتی اگر این مدول ها در کل نامتناهی حاصل شوند. این دو اصل ابتدا در مشخصات مثبت ثابت در مشخصات مساوی در (۲۵) و در موردی با مشخصات مرکب(۲۷) آمده است. صفحه ۲۶ را برای مرور این بحث ببینید زیرا به این نوشته ها مربوط می شوند.

تعریف ۰۸۰۹ فرض کنید R حلقه ی قیاس و M مدول R باشد، بعد انژکتیو M بوسیله $id_R M$ نشان داده می شود ارتفاع یک تجزیه انژکتیو مینیمال M است. حلقه قیاس موضعی Rگرنشتاین است، اگر $id_R(R) \prec \infty$ باشد.

بعداً ثابت خواهیم کرد که تعریف ذکر شده یک مورد معمولی است و با تعریف گرنشتاین همخوانی دارد. در متن اصلی مشخص است.

ما سعی داریم چندین اصل اساسی مربوط به حلقه های گرنشتاین را ثابت کنیم، در میان آنها این اصل که آنها همیشه کوهن- مکالی هستند صدق می کند، ابتدا ما این مورد را در جایی که بعد R صفر است انجام خواهیم داد .

قضیه ۰۸۰۱۰ فرض کنید(R,m,K) حلقه ی موضعی قیاس با ابعاد صفر(0) باشد پس موارد زیر با هم برابر می باشند:

۱- R ،گرنشتایناست.

۲- $id_R(R)=0$

۳- $R \cong ER(K)$

۴- $\dim_K(Socle(R))=1(hereSocle(N)=\{x \in N : mx=0\})$

اثبات. بطور واضح مورد ۲ و ۳ با هم مساوی هستند و و مورد یک را بیان می کند. فرض کنید مورد یک صدق می کند از آنجایی که $E=E_R(K)$ تنها مدول انژکتیو تجزیه ناپذیر است ، R یک تجزیه مینیمال انژکتیو به این شکل دارد $0 \to R \to E_1^b \to .... \to E^b n \to 0$.

$V=HomR(,E)$ را برای این دنباله در نظر بگیرید. دنباله دقیق زیر را داریم:

$$0 \to R^b n \to ... \to R^b 1 \to E \to 0$$

از اینرو $P_R^d(E) \prec \infty$ و بوسیله فرمول بوچس باوم- اوس لاندر[۱] E آزاد است. از اینرو E غیر قابل تجزیه است. ما بدست می آوریم که $E \cong R$ که مورد ۳و ۲ را ثابت می کند.

اکنــون مــورد ۳ را در نظــر بگیریــد. بوســیله قضــیه ۳۰۹ ، $\lambda(K^V) = \lambda(K) = 1$. بنــابراین $\lambda(Hom_R(K,E)) = 1$ از آنجایی که $R \cong E$ است پس $\lambda(Hom_R(K,R)) = 1$. این Hom طبیعتاً بـا Socle® شناخته می شود که مورد ۴ را ثابت می کند.

سرانجام فرض کنید مورد ۴ صدق می کند. ما ادعا می کنیم که R یک امتداد ضروری است از Socle® ، زیرا I هر ایده آلی از $R, m^n I = 0$ است. برای بعضی از n ها اگر ما این n را انتخـاب کنیم پس $m^{n-1} / Csocle(R) \cap I$ و غیر صفر است. اگر $Socle(R) \cong K$ است پس R یـک امتـداد حتمی از K است و بنابراین در E محاط می شـود. بـا قضـیه ۰۳۰۹ داریـم $\lambda(R) = \lambda(E)$.پـس $R \cong E$ است. بطور واضح اگر $i_R^d(M) \prec \infty$ باشد پس بعد انژکتیـو توسـط اعـداد بـیس مشـخص می شوند. ما می خواهیم نشان دهیم که آن حتی با اسـتفاده از X آخـرین عـدد بـیس، بـرای ایده آل ماکزیمال مشخص، غیر صفر شونده می شوند. برای اثبات به لم اصلی نیاز داریم.

لـم ۸۰۱۱. فـرض کنیـد R یـک حلقـه نـوتری باشـد و M یـک R - مـدول متنـاهی و نیـز $P \subset q$ ایده آل اول R باشـد بـا $ht(q/P) = S$. اگـر $\mu_i(P,M) \neq 0$ باشـد آنگـاه $\mu_i + S(q,m) \neq 0$ خواهد بود.

اثبات: با معرفی S کافی است که این مورد را جایی که $S = 1$ است بگیرید، سپس ممکن اسـت در q موضع سازی کنیم تا فرض کنیم که $q = m$ و ماکزیمال ایده آل R باشد. جایی که اعداد بیس تحت موضع سازی تغییری نمی کنند. فـرض کنیـد کـه $\mu_i + 1(m,R) = 0$ اسـت. بوسـیله قضیه ۸۰۷ $Ext_R^{i+1}(K,R) = 0$ می باشد. با یک استنباط آسان ما به این نتیجـه مـی رسـیم کـه

---

۱ - Auslander-Buchsbaum

$Ext_R^{i+1}(L,R)=0$ برای هر مدول L از ارتفاع متناهی می باشد. اکنون یک $X\notin P$ انتخاب کنید و

این دنباله کوتاه دقیق را در نظر بگیرید: $0\to R/P\xrightarrow{X}R/P\to R/(P,X)\to 0$.

$Hom(,R)$ را بکار برده و بگویید که $R/(P,X)$ ارتفاع متناهی دارد . ما می بینیم که

$Ext_R^i(R/P,R)=XExt_R^i(R/P,R)$ است بنابراین توسط لم ناکایاما این Ext صفر است و در

نتیجه $\mu_i(P,R)=0$ با توجه به قضیه ی ۸۰۷ که لم را ثابت می کند .

لم ۸۰۱۲ فرض کنید (R,m,K) حلقه ی نوتری موضعی است و فرض کنید که $X\in m$ مقسوم

علیه غیر صفر در R و نیز E تجزیه ی انژکتیو مینیمال از R باشد پس $Hom_R(R/Rx,E^i)_{i\geq 1}$

یک تجزیه انژکتیو مینیمال از R/Rx است بعنوان یک مدول R/Rx.

اثبات. مدول های $\leftarrow C^{i-1}=Hom_R(R/Rx,E^i)$ مدول های انژکتیو R/Rx هستند. ادعا

می کنیم که $Hom_R(R/Rx,E^0)=0$. به اثبات می رسد اگر نشان دهیم X در $\mathrm{NZD}\ E^0$

می باشد ، NZD X روی E^0 امتداد ضروری از R می باشد. اگر چه $0=r(xy)=x(ry)$

متناقض با فرض ماست. از آنجایی که این Hom صفر است . هسته ی نگاشت از C^0 تا C'

دقیقاً $Ext_R^{'}(R/Rx,R)\cong R/Rx$ می باشد(در نتیجه x، NZD می باشد) بنابراین

$0\to R/Rx\to C^0\to C^1\to\ldots\to C^n\to\ldots$ تجزیه انژکتیو R/Rx است به عنوان R/Rx مدول. از

آنجایی که $Ext_R^i(R/Rx,R)=0$ است برای $i\geq 2$ بعنوان $Pd_R(R/Rx)=1$، باید نشان دهیم که

تجزیه ی انژکتیو مینیمال از R/Rx است. از ضابطه ی تبصره ی ۰۸۰۲ استفاده می کنیم.

فرض کنید $P\in Spec(R/Rx)$ است نمودار $Hom(R/Rx)_p(K(P),C_p^i)$ تا $Hom(R/Rx)_P(K(P),C_P^{i+1})$

می باشد. بعد از استفاده از رابطه ضمیمه هوم - تانسور به سادگی نگاشت از

$HomR_p\left(K(P),E_p^{i+1}\right)LH,mR_P\left(K(P),E_P^i\right)$ که با مینیمال کردن E صفر است به دست مـی آیـد.

چندین تبصره خوب برای این لم که خیلی مفید و پر کار بوده است نیز وجود دارد.

تبصره ۰۸۰۱۳ فرض کنید (R,m,K)حلقه ی نوتری موضعی باشدو نیز فرض کنید که $X\in m$ یک NZD است. آنگاه $id_R(R)=id_{R/Rd}(R/Rx)+1$ خواهد بود.

اثبات. فرض کنید E^* تجزیه ی انژکتیو مینیمال از R بعنوان R– مدول باشد لم ۸۰۱۲ نشـان مـی دهـد کـه در هـر مـورد $id_R(R)\geq id_{R/Rx}(R/Rx)+1$ مـی باشـد. ابتـدا فـرض کنیـد کـه $id_R(R)=n\prec\infty$.

لم ۸۰۱۱ نشان می دهد که E^n باید حاصلجمع مستقیم از کپی های $E=E_R(K)$باشد. پس $Hom_R\left(R/Rx,E^n\right)\cong Hom_R\left(R/Rx,E\right)^n\cong E_{R/Rx}(K)^n$ است . با استفاده از یادداشت برداری از لم ۸۰۱۲ به این نتیجه می رسیم که $C^{n-1}\neq 0$است بنابراین $id_{R/Rx}(R/Rx)+1=n$ است اگر $id_R(R)=\infty$ باشد. پس دوباره لم ۸۰۱۱ نشان می دهد که یک n بزرگ اختیاری برای $\mu_m(R)\neq 0$وجود دارد. نکته هایی شبیه به پاراگراف بالا، ثابت می کند که $\mu_{n-1}(R/Rx)\neq 0$ است (همچون R/Rx - مدول) در نتیجه $id_{R/Rx}(R/Rx)=\infty$ خواهد بود.

تبصره ۸۰۱۴ . فرض کنید (R,m,K)یک حلقه موضعی باشد و $X\in m$ ،NZD روی R است. فرض کنید که $Xm=0$ باشد. پس (R,m,K) $Ext_R^i(M,R)\cong Ext_{R/Rx}^{i-1}$ خواهد بود.

اثبات: برای حساب کردن اولین Ext می توانیم تجزیه ی انژکتیو مینیمال را در نظر بگیریم.

قضیه ۰۸۰۱۵ فرض کنید (R,m,K) حلقه ی نوتری موضعی از دامنه d باشد. شرایط زیر با هم برابر (یکسان) است:

۱- Rگرنشتاین است.

۲- $id_R(R)=d$است.

۳- R کوهن – مکالی است و اگر $X_1,...X_d$ هر کدام از S. o. P باشد، یک ایده آل I حاصل می شود آنگاه $\dim_K(Socle(R/I))=1$ خواهد بود.

۴- R کوهن- مکالی است و $H_m^d(R)\cong E_R(K)$است.

اثبات: نخست ثابت می کنیم که موارد ۱ و ۲ و ۳ با هم یکی است. به وضوح مورد ۲ همان مورد ۱ را بیان می کند . بطور کلی ما می گوییم که اگر M به طور متناهی حاصل شود و $id_R(M)=n\prec\infty$ باشد آنگاه $n\leq depth(R)$است. فرض کنید $t=depth(R)\prec n$ و نیز $X_1,...X_t$ یک دنباله R ماکزیمال و تولید کننده ی ایده آل y است.حال فرض کنید اگر $Ext_R^n(R/j,m)$باشد از آنجایی که $Pd_R(R/j)=t\prec n$است این مدول صفر است. از طرف دیگر از آنجایی که $dept(R/j)=0$دنباله دقیق خواهد بود: $0\to K\to R/j\to N\to 0$.

$Hom(,M)$را اعمال کنید: دنباله ی دقیق به صورت

$Ext_R^n(R/J,M)\to Ext_R^n(K,M)\to Ext_R^{n+1}(N,M)$خواهد بود.

با توجه به دنباله ی فوق، Ext سمت چپ صفر است . در حالیکه Ext سمت راست نیز صفر می باشد در نتیجه $id_R(M)=n$است بنابراین $Ext_R^n(K,M)=0$و در نتیجه $\mu_n(M)=0$ که متناقض است با اصل $id_R(M)=n$(لم ۸۰۱۱ همیشه باید یک کپی از $E_R(K)$در آخرین مدول انژکتیو تجزیه ی انژکتیو متناهی وجود داشته باشد.)

از سوی دیگر $id_R(R)=Max_i\{\mu_i(R)\neq 0\}=\max_i\{Ext_R^i(K,R)\neq 0\}$ است در حالیکه $depth(R)=Mini_i\{Ext_R^i(K,R)\neq 0\}$،از اینرو $id_R(R)\geq depth(R)$.اگر این را با مورد بالا نامساوی قرار دهید و نتیجه می گیریم که $id_R(R)=depth(R)$ خواهد بود.

فرض کنید $t = id_R(R)$ و یک دنباله R ماکزیمال در R انتخاب کنید به صورت $X_1,...,X_t$ است.

توسط تبصره ۸۰۱۳ فرض می کنیم $S = R/(X_1,...X_t), id_R(R) - t = 0$،بنابراین S انژکتیو است.

از آنجایی که S در بردارنده یک کپی از K است ، S باید شامل یک کپی از $E_S(K)$باشد.

بنابراین $\dim(R) = t = id_R(R)$ خواهد بود.

مورد ۲ را در نظر بگیرید ، بوسیله $id_R(R) = depth(R)$ که در بالا آمده وهمچنین از ۲ داریم $C-M, R$است. فرض کنید $X_1,....,X_d$ یک S.O.P از R و نیز $S = R/(X_1,...,X_d)$. توسط تبصره ۸۰۱۳ کافیست دقت داشته باشید که Sگرنشتاین است.

قضیه ۸۰۱۰ می گوید که $\dim_K(Hom_S(K,S)) = 1$ که مورد ۲ را ثابت می کند.

در آخر فرض کنید که مورد ۳ اعمال شود و $X_1,....,X_d$ دنباله ی منظم ماکزیمال در R باشد همچنین فرض کنید $S = R/(X_1,...,X_d)$، توسط تبصره ۸۰۱۳ کافیست دقت داشته باشید که Sگرنشتاین است.

سپس مورد ۴ را اثبات می کنیم که با مورد ۳ برابر است. برای هر دو تای آنها ما ممکن است فرض کنیم R کامل و کوهن- مکالی باشد. ما از استنباط روی دامنه d از R برای هر دوی آنها استفاده می کنیم. دومین دستورالعمل این اصل که R کوهن – مکالی است به ما دنباله ی کوتاه دقیق زیر را می دهد.

$$0 \to H_m^{d-1}(R/xR) \to H_m^d(R) \xrightarrow{x} H_m^d(R) \to 0$$

جایی که X هم، بخش پذیر غیر صفر از R می باشد.

ابتدا مورد (۴) را در نظر بگیرید. دنباله بالا $H_m^{d-1}(R/xR)$را با پوچ ساز X در $H_m^d R = ER(K)$مشخص می کند.

اما این پوچ ساز $Hom_R(R/XRE_R(K)) = E_{(R)}Rx(K) = E_{(R)}Rx(K)$ است با استنباط R/Rxشرایط ایجاب می شود. و مورد ۳ با فرض گرفتن $x = x_1$ دنبال می شود. پس مورد ۳ را در نظر بگیرید، با قرار دادن ماتلیس دوآل ها در دنباله بالا دنباله ی کوتاه دقیق زیرحاصل می شود.

$$0 \to M \xrightarrow{x} M \to R/xR \to 0$$

جایی که M ماتلیس دوآل هایی از $H_m^d(R)$است و جایی که با استنباط ما R/Rxرا با ماتلیس دوآل هایی از $H_m^{d-1}(R/xR)$ شناسایی می کنیم. این دنباله نشان می دهد که $M/xM \cong R/xR$ و به آسانی $M \cong R$ را به دنبال دارد. دوباره ماتلیس دوآل ها را در نظر می گیریم . نتیجه می گیریم که $H_m^d(R) = M^V = R^V = E_R(K)$است.

اثبات (۴) شرایط ۴ در قضیه بالا یک تعریف غیر استاندارد است که ما برای یک حلقه گرنشتاین بیان می کنیم . این قضیه ثابت می کند که تعریف ما با نوع معمولی موافق و برابر خواهد بود.

منابع و مآخذ:

1. J. Alvarez-Montaner, M. Blickle, and G. Lyubeznik, *Generators of D-modules in positive characteristic*, Math. Rese. Letters **12**, 2005, 459-473.
2. M. Atiyah and I. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., New York, 1969.
3. T. Becker and V. Weispfenning, *Gröbner Bases*, Graduate Texts in Mathematics 141. Springer-Verlag, New York, 1993.
4. N. Bourbaki, *Commutative Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1989.
5. M. Brodmann, *Einige Ergebnisse aus der Lokalen Kohomologie theorie und Ihre Anwendung*, Osnabrücker Schriffen zur Mathematik, Heft 5, 1983.
6. M. Brodmann and C. Huneke, *A quick proof of the Hartshorne-Lichtenbaum vanishing theorem*, Algebraic gemoetry and its applications, Springer, New York, 1994, 305–308.
7. M. Brodmann and J. Rung, *Local cohomology and the connectedness dimension in algebraic varieties*, Comment. Math. Helvetici **61** (1986), 481–490.
8. M. Brodmann and R. Sharp, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **60** (1998), Cambridge University Press, Cambridge.
9. F. W. Call and G. Lyubeznik, *A simple proof of Grothendieck's theorem on the parafactoriality of local rings*, Commutative algebra: syzygies, multiplicities, and birational algebra (South Hadley, MA, 1992), Contemp. Math., **159** (1994), 15–18.
10. R. Charney and M. Davis, *Euler characteristic of a nonpositively curved, piecewise Euclidean manifold*, Pac. J. Math. **171** (1995), 117-137.
11. G. Faltings, *Uber lokale Kohomologiegruppen hoher Ordnung*, J. fur d. reine u. angewandte Math. **313** (1980), 43–51.
12. G. Faltings, *Some Theorems about Formal Functions*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **16** (1980), 721–737.
13. W. Fulton and J. Hansen, *A connectedness theorem for projective varieties, with applications to intersections and singularities of mappings*, Annals of Math. **109** (1979), 159–166.
14. A. Grothendieck (notes by R. Hartshorne),*Local Cohomology, Springer Lecture Notes in Math., 41*, Springer-Verlag,1966.
15. A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux SGA2*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
16. R. Hartshorne, *Cohomological Dimension of Algebraic Varieties*, Annals of Math. **88** (1968).
17. R. Hartshorne, *Ample Subvarieties of Algebraic Varieties*, Lecture Notes in Mathematics **156**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1970).
18. M. Hochster, *Local cohomology*, unpublished notes.
19. C. Huneke and R. Sharp, *Bass numbers of local cohomology modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), 765-779.
20. C. Huneke and G. Lyubeznik, *On the vanishing of local cohomology modules*, Invent. math.,**102** (1990), 73-93.
21. C. Huneke and K.E. Smith, *Tight closure and the Kodaira vanishing theorem*, J. fur die reine und Angewandte Math., **484** (1997), 127–152.
22. M. Kalkbrenner and B. Sturmfels, *Initial complexes of prime ideals*, Advances in Math., **116** (1995), 365–376.
23. H. Kredel and V. Weispfenning,*Computing dimension and independent sets for polynomial ideal*, J. Symbolic Computation, **6** (1988), 210–248.
24. S. Lichtenbaum,
25. G. Lyubeznik, *Finiteness properties of local cohomology modules (an application of D-modules to Commutative Algebra)*, Invent. Math., **113** (1993), 41–55.
26. G. Lyubeznik, *Survey of local cohomology in Local Cohomology and its Applications*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker**226** (2002).
27. G. Lyubeznik, *Finiteness properties of local cohomology modules for regular local rings of mixed characteristic: the unramified case*, Comm. Alg. **28** (2000), 5867-5882.
28. E. Matlis, *Injective modules over noetherian rings*, Pacific J. Math. **8** (1958), 511–528.
29. E. Matlis, *Modules with descending chain condition*, Transactions Amer. Math. Soc. **97** (1960), 495–508.
30. H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, New York, 1986.
31. T. Mora and L. Robbiano,*The Gröbner fan of an ideal*, J. Symbolic Computation, **6** (1988), 183–208.
32. A. Ogus, *Local cohomological dimension of algebraic varieties*, Annals Math.,**98** (1973), 327–365.
33. C. Peskine and L. Szpiro, *Dimension projective finie et cohomologie locale*, I.H.E.S. **42** (1973), 323–395.
34. V. Reiner and V. Welker, *On the Charney-Davis and Neggers-Stanley conjectures*, J. Comb. Theory, **109** (2005), 247-280.
35. A. R. Richardson *A technique for explicit computation of local cohomology with respect to monomial ideals*, preprint.
36. E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
37. R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Birkhäuser, Boston, 1983.
38. B. Sturmfels *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, AMS University Lecture Series, vol. 8, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
39. I. Swanson, *A note on analytic spread* Comm. Algebra **22** (1994), 407–411.
40. U. Walther, *Algorithmic computation of local cohomology and the local cohomological dimension of algebraic varieties*, J. Pure Appl. Alg., **139** (1999), 303–321.