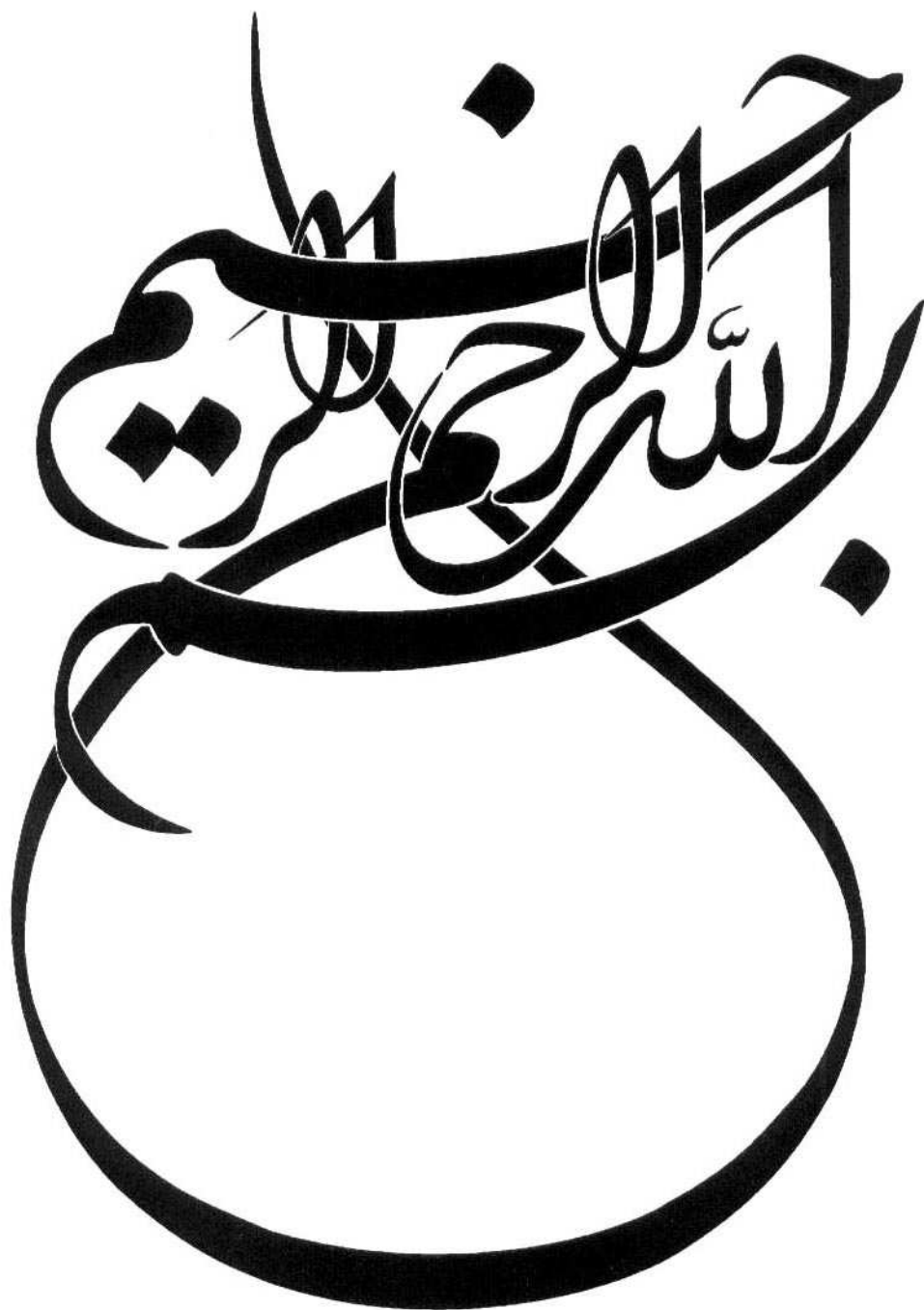


## مقدمه‌ای بر طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها

علی نوراله



## فهرست مطالب

۱	پیش گفتار.....	
۲	یادآوری.....	۱-۱
۲	مروری بر روشهای مرتب سازی و پیچیدگی آنها.....	۱-۱-۱
۲	مرتب سازی درجی (Insertion Sort).....	۱-۱-۱
۳	الگوریتم مرتب سازی ادغامی (Merge Sort).....	۲-۱-۱
۴	مرتب سازی سریع (Quick Sort).....	۳-۱-۱
۵	مرتب سازی توده ای (Heap Sort).....	۴-۱-۱
۶	درخت پوشای مینیمم.....	۲-۱
۶	الگوریتم راشال (Kruskal).....	۱-۲-۱
۷	الگوریتم پریم (Prim).....	۲-۲-۱
۷	پیمایش و جستجوی گرافها.....	۳-۱
۷	جستجو و پیمایش عمقی (DFS).....	۱-۳-۱
۷	جستجو و پیمایش ردیفی (BFS).....	۲-۳-۱
۹	تحلیل الگوریتمها.....	۲
۹	نمادهای مجانبی.....	۱-۲
۱۱	تحلیل حالت متوسط الگوریتم.....	۲-۲
۱۵	روابط بازگشتی.....	۳-۲
۱۵	روابط بازگشتی درجه ۱.....	۱-۳-۲
۱۵	روابط بازگشتی درجه ۲ (همگن).....	۲-۳-۲
۱۶	قضیه اصلی (Master Theorem).....	۴-۲
۱۹	روش حریصانه (Greedy).....	۳
۲۰	مسئله کوله پشتی ساده یا کسری (Knapsack).....	۱-۳
۲۲	مسئله ادغام دودویی و بهینه فایلهای (یا آرایه های مرتب).....	۲-۳

۲۴	.....کدینگ Huffman	۳-۳-
۲۵	.....درخت پوشای مینیمم	۴-۳-
۲۵	.....الگوریتم راشال (kruskal)	۱-۴-۳-
۲۷	.....الگوریتم Prim	۲-۴-۳-
۲۷	.....مقایسه الگوریتم Prim و Kruskal	۳-۴-۳-
۲۷	.....تعداد درختهای پوشای $K_n$	۴-۴-۳-
۳۳	.....کوتاهترین مسیرهای هم مبدأ	۵-۳-
۳۷	.....انتخاب بهینه فعالیتها (Activity Selection)	۶-۳-
۳۹	.....روش تقسیم و حل (Divide & Conquer)	۴-
۳۹	.....محاسبه عنصر کمینه و بیشینه یک آرایه	۱-۴-
۴۱	.....ضرب دو ماتریس به روش استراسن (Strassen)	۲-۴-
۴۲	.....تعیین نزدیکترین زوج نقاط	۳-۴-
۴۲	.....تعیین نزدیکترین زوج نقاط در فضای یک بعدی	۱-۳-۴-
۴۳	.....تعیین نزدیکترین زوج نقاط در فضای دوبعدی	۲-۳-۴-
۴۴	.....تعاریف و الگوریتمهای پایه در هندسه محاسباتی	۴-۴-
۴۷	.....تولید پوش محدب (Convex Hull)	۵-۴-
۴۷	.....الگوریتم Graham	۱-۵-۴-
۴۸	.....الگوریتم Shamos	۲-۵-۴-
۵۰	.....روش برنامه سازی پویا (Dynamic Programming)	۵-
۵۱	.....مسئله کوله پستی 0/1	۱-۵-
۵۳	.....مسئله همه کوتاهترین مسیرها (APSP)	۲-۵-
۵۵	.....عدد کاتلان (Catalan Number) و مسائل وابسته	۳-۵-
۵۹	.....ضرب زنجیره ای و بهینه ماتریسها	۴-۵-
۶۱	.....مثلث بندی بهینه چند ضلعی محدب	۵-۵-
۶۳	.....طولانیترین زیر دنباله مشترک (LCS)	۶-۵-
۶۶	.....فروشنده دوره گرد	۷-۵-
۶۹	.....روش عقبگرد (Backtracking)	۶-

۷۰.....	مولد ترکیبات.....	۱-۶-
۷۲.....	مسئله $n$ وزیر.....	۲-۶-
۷۴.....	تعیین نقاط روی محور $x$ ها از روی فواصل آنها.....	۳-۶-
۷۷.....	روش انشعاب و تحدید (Branch & Bound).....	۷-
۷۷.....	فروشنده دوره گرد.....	۱-۷-
۸۱.....	جمع زیرمجموعه‌های یک مجموعه.....	۲-۷-
۸۴.....	پیچیدگی محاسبات.....	۸-
۸۶.....	مسئله تا کردن خط کش.....	۱-۸-
۸۶.....	مسئله افراز (PARTITION).....	۲-۸-
۸۸.....	منابع و مراجع.....	

## پیش گفتار

درس طراحی و تحلیل الگوریتمها از دروس اصلی دوره کارشناسی مهندسی کامپیوتر و فن آوری اطلاعات محسوب میشود که نقش بسیار اساسی در درک و فهم دروس دیگر را نیز بازی میکند. همچنین در دوره کارشناسی ارشد نیز دروسی مبتنی بر این درس وجود دارند که از آن جمله میتوان به دروسی نظیر هندسه محاسباتی، الگوریتمهای پیشرفته، الگوریتمهای ژنتیک و پردازش تکاملی، الگوریتمهای طراحی فیزیکی مدارات VLSI و الگوریتمهای گراف اشاره کرد.

در این کتاب با روشهای طراحی الگوریتمها و اصول اساسی و مبنایی تحلیل الگوریتمها آشنا میشویم. همچنین جهت آشنایی با روشهای طراحی الگوریتمها مثالهایی از الگوریتمهای هندسی نیز بیان شده است که در میان فصول کتاب به آنها اشاره شده است. این کتاب مشتمل بر ۸ فصل است که در فصل ۱ یادآوری مختصری از درس ساختمان داده ها، در فصل ۲ اصول تحلیل الگوریتمها و نمادهای مجانبی، فصل ۳ تا ۷ نیز روشهای طراحی الگوریتمها را در بر گرفته است. در فصل آخر نیز مقدمه ای بر تئوری NP بیان شده است. در اینجا لازم میدانم که از آقای محمدرضا باقری و خانم فرزانه صبحی که در جمع آوری و تنظیم اولیه کتاب زحمات فراوانی را متحمل شدند تشکر نمایم.

## ۱- یادآوری

تعریف الگوریتم: هر دستورالعملی که مراحل مختلف انجام کاری را به زبان دقیق و با جزئیات کافی بیان نماید به طوریکه ترتیب مراحل و شرط خاتمه عملیات در آن کاملاً مشخص باشد الگوریتم نام دارد.

مطالعه الگوریتمها در برگرنده موارد زیر است:

- ۱- طراحی الگوریتم
  - ۲- معتبر سازی یا اثبات درستی الگوریتم
  - ۳- بیان یا پیاده سازی الگوریتم
  - ۴- تحلیل الگوریتم
- که در این کتاب ما موارد اول و چهارم را مورد بررسی قرار میدهیم.

### ۱-۱- مروری بر روشهای مرتب سازی و پیچیدگی آنها

#### ۱-۱-۱- مرتب سازی درجی (Insertion Sort)

در مرحله  $j$  ام این الگوریتم فرض بر این است که عناصر اول تا  $j-1$  ام آرایه مرتب هستند و عنصر  $j$  ام در عناصر قبل از خود در محل مناسب درج میشود. حال به ازای  $j$  از ۲ تا  $n$  این عمل انجام میشود.

مرحله ۱:  $x[1]$  خودش به تنهایی بطور بدیهی مرتب است.

مرحله ۲:  $x[2]$  را یا قبل از یا بعد از  $x[1]$  درج می کنیم طوری که  $x[1]$  و  $x[2]$  مرتب شوند.

مرحله ۳:  $x[3]$  را در مکان صحیح در  $x[1]$  و  $x[2]$  درج می کنیم به گونه ای که  $x[1], x[2], x[3]$  مرتب شده باشند.

...

مرحله  $n$ :  $x[n]$  را در مکان صحیح خود در  $x[1], \dots, x[n-1]$  به گونه ای درج می کنیم که کل آرایه مرتب شده باشد.

```

For j ← 2 to n do
  k ← x[j]
  i ← j-1
  while x[i] > k and i > 0 do
    x[i+1] ← x[i]
    i ← i-1
  repeat
    x[i+1] ← k
  repeat

```

به راحتی قابل ملاحظه است که الگوریتم بالا در بدترین وضعیت (عناصر آرایه نزولی باشند) در مرحله  $j$ ام به ازای عنصر  $j$ ام  $j-1$  مقایسه انجام میدهد و لذا دارای مرتبه زمانی  $O(n^2)$  خواهد بود! و در بهترین وضعیت (عناصر آرایه از قبل صعودی باشند) در مرحله  $j$ ام به ازای عنصر  $j$ ام یک مقایسه با عنصر  $j-1$ ام انجام میدهد و لذا دارای مرتبه زمانی  $O(n)$  خواهد بود. این الگوریتم بطور متوسط نیز دارای مرتبه زمانی  $O(n^2)$  خواهد بود! همچنین از لحاظ مصرف حافظه کمکی نیز چون آرایه بدون نیاز به حافظه کمکی مرتب میشوند لذا میزان مصرف حافظه کمکی برابر با  $O(1)$  خواهد بود.

نکته: مرتب سازی درجی را میتوان به صورت دیگری بازنویسی کرد که آن را مرتب سازی درجی دودویی مینامند که در آن عمل جستجو برای پیدا کردن محل عنصر  $j$ ام توسط جستجوی دودویی انجام میشود ولی زمان اجرای آن تفاوتی نخواهد کرد.

### ۲-۱-۱- الگوریتم مرتب سازی ادغامی (Merge Sort)

اگر مجموعه ای از اعداد داشته باشیم و این مجموعه را به دو بخش تقسیم کنیم و هر بخش را جداگانه مرتب کنیم و حاصل را به گونه ای ادغام کنیم که رعایت ترتیب شود آنگاه کل مجموعه اعداد مرتب خواهند شد. در این روش بعد از تقسیم کردن داده های اولیه به دو بخش، هر بخش را نیز به همین ترتیب، یعنی تقسیم به مجموعه های کوچکتر و مرتب کردن و ادغام کردن آنها با هم مرتب می کنیم. اما شکستن زیر لیست ها را تا چه زمانی انجام می دهیم؟ تا زمانی که تعداد عناصر هر لیست برابر با یک شود. آنگاه دو لیست کوچک تک عنصری را ادغام کرده و به صورت بازگشتی عمل می کنیم، مراحل کار این الگوریتم به صورت خلاصه در ذیل آمده است: اگر تعداد داده ها یکی یا کمتر است نیازی به مرتب کردن نیست، برگرد. در غیر این صورت وسط داده ها را پیدا کن

نیمه اول داده ها را به روش merge Sort (همین روش) مرتب کن  
 نیمه دوم داده ها را به روش merge Sort (همین روش) مرتب کن  
 دو نیمه مرتب شده را به گونه ای ادغام کن که حاصل مرتب باشد.

```

Procedure mergesort(A,l,u)
  If l < u then
    mid ← (l+u) / 2
    Mergesort(A,l, mid)
    Mergesort(A,mid+1, u)
    Merge(A, l, mid, u)
  endif
end.

```



$$\begin{aligned}
 T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
 &= 2\left[T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2}\right] + n = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n \\
 &= 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 3n \\
 &= 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + in \\
 &= 2^{\log n} T(1) + n \cdot \log n = c \cdot n + n \cdot \log n = O(n \cdot \log n)
 \end{aligned}$$

از این رو الگوریتم مرتب سازی ادغامی در همه حالات دارای مرتبه زمانی  $O(n \cdot \log n)$  میباشد. همچنین بدلیل بازگشتی بودن به اندازه  $O(\log n)$  از حافظه پشته استفاده میکند. ولی با غیر بازگشتی نوشتن الگوریتم میتوان حافظه مصرفی را به  $O(1)$  کاهش داد ولی زمان واقعی الگوریتم بیشتر خواهد شد!

نکته: مرتب سازی ادغامی بازگشتی را میتوان به صورتهای متفاوتی از جمله مرتب سازی ادغامی طبیعی (Natural Merge Sort) و یا مرتب سازی ادغامی غیر بازگشتی بازنویسی کرد.

### ۱-۳-۱- مرتب سازی سریع (Quick Sort)

براساس این الگوریتم نیز مجموعه اعداد یا به طور کلی داده ها به دو بخش تقسیم می شوند و هر بخش جداگانه مرتب می شوند. تفاوت های عمده بین روش مرتب سازی و مرتب سازی ادغام به صورت زیر هستند:

اول اینکه در روش مرتب سازی سریع یکی از عناصر مجموعه را به عنوان عنصر محوری انتخاب می کنیم که فرقی نمی کند کدام عنصر از مجموعه باشد.

دوم اینکه مجموعه درواقع به سه قسمت شکسته می شود الف) عنصر محوری ب) عنصر کوچکتر از عنصر محوری ج) عناصر بزرگتر از عنصر محوری

سوم اینکه در هر مرحله محل عنصر محوری در آرایه ثابت می شود و در واقع مکانش پیدا می شود و چهارم اینکه احتیاجی به ادغام هر مجموعه نیست. بلکه در حقیقت در هر مرحله اجراء محل یک عضو از آرایه ثابت می شود. (همان عضو محوری)

بعد از یافتن محل ثابت عضو محوری (Partition Phase) هر یک از دو بخش دیگر نیز به روش فوق به صورت بازگشتی مرتب می شوند (Recursion Phase).

به راحتی قابل ملاحظه است که الگوریتم بالا در بدترین وضعیت (عناصر آرایه از قبل مرتب باشند) در هر مرحله لیست را به دو قسمت با اندازه های کاملاً دور از هم تقسیم میکند و لذا دارای مرتبه زمانی  $O(n^2)$  خواهد بود! و در بهترین وضعیت (عناصر آرایه به گونه ای باشند که در هر مرحله عنصر میانه به عنوان قلم محوری انتخاب شود) در هر مرحله لیست به دو قسمت با اندازه نزدیک به هم تقسیم میشود و لذا دارای مرتبه زمانی  $O(n \cdot \log n)$  خواهد بود! این الگوریتم بطور متوسط نیز دارای مرتبه زمانی  $O(n \cdot \log n)$  خواهد بود! همچنین از لحاظ مصرف حافظه کمکی نیز به دلیل بازگشتی بودن الگوریتم در بدترین حالت برابر با  $O(n)$  و در بهترین حالت و حالت متوسط برابر با  $O(\log n)$  خواهد بود.

```

Procedure Quick_Sort( A, l, u)
  If l < u then
    Pivot ← A[l]
    i ← l
    j ← u;
    repeat
      Do i ← i + 1 until A[i] > pivot
      Do j ← j - 1 until A[j] < pivot
      If i < j then
        Swap(A[i], A[j])
      Endif
    Until i ≥ j
    Swap(A[l], A[j])
    Quick_Sort(A, l, j - 1)
    Quick_Sort(A, j + 1, u)
  endif
End.

```

### ۱-۱-۴- مرتب سازی توده ای (Heap Sort)

قبل از توضیح الگوریتم باید دو الگوریتم مورد نیاز را یادآوری کنیم:

- **Adjust:** در این الگوریتم فرض بر این است که درختی وجود دارد که از **Heap** بودن زیر درخت چپ و راست آن مطمئن هستیم ولی نظمینی بر **Heap** بودن کل درخت وجود ندارد و لذا شبیه عمل حذف عنصر بیشینه از یک **MaxHeap** عمل میکنیم و ریشه را با مقایسه با فرزندانش (در صورت وجود) تا جای مورد نیاز به سمت برگها پیش میبریم. و لذا دارای مرتبه زمانی  $O(\log n)$  خواهد بود.
- **Heapify:** در این الگوریتم یک درخت دودویی کامل به یک **Heap** تبدیل میشود. با شروع از عنصر  $n/2$  (آخرین عنصر دارای فرزند) به سمت عنصر سرلیست پیش میرویم و آن را در عناصر بعد از خود **adjust** میکنیم. مرتبه زمانی الگوریتم برابر با  $O(n)$  میباشد.

```

Procedure Adjust(A, i, n)
  j ← 2*i
  item ← A(i)
  while j ≤ n do
    if j < n and A(j) < A(j+1) then j ← j+1 endif
    if item ≥ A(j) then
      exit
    else
      A(⌊j/2⌋) ← A(j)
      j ← 2*j
    endif
  repeat
    A(⌊j/2⌋) ← item
  end.

```

```

Procedure Heapify(A, n)
  for i ← ⌊n/2⌋ to 1 do
    call adjust(A, i, n)
  repeat
end.

```

نکته: الگوریتم Heapify به دلیل زیر دارای مرتبه زمانی  $O(n)$  است.

$$\sum_{i=1}^k (k-i)2^{i-1} = \sum_{j=0}^{k-1} j \cdot 2^{k-j-1} = 2^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{2^j} \leq n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j}{2^j} \leq n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{2^j} = 2n = O(n)$$

که در آن  $i$  نشان دهنده سطح گره های درخت،  $k$  برابر با عمق درخت ( $\lceil \log(n+1) \rceil$ ) میباشد. واضح است که تعداد گره های سطح  $i$  ام درخت حداکثر برابر با  $2^{i-1}$  میباشد. در مرتب سازی توده ای ابتدا لیست یا آرایه را به یک Heap تبدیل میکنیم (به کمک الگوریتم Heapify) و سپس بعد از Heap شدن لیست عناصر سر درخت (عنصر ماکزیمم) را با عنصر انتهای لیست جابه جا کرده و دوباره بدون در نظر گرفتن عنصر جابه جا شده (در انتها) درخت را با کمک الگوریتم adjust به یک Heap تبدیل میکنیم. این عمل  $n-1$  بار صورت میگیرد و به این ترتیب عناصر از بیشینه به کمینه از انتهای آرایه به سمت ابتدای آرایه چیده خواهد شد.

برای مرتب سازی لیست، ابتدا یک heap بزرگ با استفاده از فرخوانی متوالی adjust ایجاد می کنیم و سپس  $n-1$  گذر روی لیست داریم. در هر گذر اولین رکورد heap را با آخرین رکورد تعویض می کنیم. چون اولین رکورد شامل بزرگترین کلید است، این رکورد اکنون در موقعیت مرتب شدن خودش است پس اندازه heap را کاهش می دهیم و دوباره آن را تراز می کنیم، به عنوان مثال، در اولین گذر، رکوردی با بزرگترین کلید را در  $n$  امین محل می گذاریم، در گذر دوم رکوردی با دومین کلید بزرگی را در محل  $n-1$  می گذاریم و  $i$  امین گذر رکوردی با  $i$  امین کلید بزرگی را در محل  $n-i+1$  می گذاریم.

از این رو الگوریتم مرتب سازی توده ای در همه حالات دارای مرتبه زمانی  $O(n \cdot \log n)$  میباشد! همچنین بدلیل غیر بازگشتی بودن دارای حافظه مصرفی  $O(1)$  خواهد بود.

```

Procedure HeapSort(A, n)
  call Heapify(A, n)
  for i ← n to 2 do
    Swap(A(i), A(1))
    call Adjust(A, 1, i-1)
  repeat
end.

```

## ۲-۱- درخت پوشای مینیمم

### ۱-۲-۱- الگوریتم راشال (Kruskal)

در این روش درخت پوشای با کمترین هزینه  $T$ ، لبه به لبه ساخته می شود. لبه های مورد استفاده در  $T$ ، به ترتیب صعودی وزنهای آنها باشد. یک لبه در  $T$  خواهد بود، اگر با لبه های قبل که در  $T$  بوده اند تشکیل حلقه ندهد.

### ۱-۲-۲- الگوریتم پریم (Prim)

در این روش درخت پوشای با کمترین هزینه  $T$ ، راس به راس به  $T$  که در ابتدا شامل یکی از رئوس (به دلخواه) است، اضافه میشوند. در هر مرحله یال با کمترین هزینه که یک راس مجاور آن داخل  $T$  و راس مجاور دیگرش خارج از  $T$  باشد به درخت اضافه میشود. دو الگوریتم بالا به طور کامل در فصل مربوط به روش طراحی حریصانه شرح داده خواهند شد.

### ۱-۳-۱- پیمایش و جستجوی گراف‌ها

#### ۱-۳-۱-۱- جستجو و پیمایش عمقی (DFS)

در این روش پیمایش گره‌ها در امتداد یک شاخه تا انتهای آن ادامه پیدا می‌کند و با پایان یافتن شاخه‌ها یک مرحله به عقب برگشت کرده و مجدداً بررسی میکنیم. در این روش با مشاهده یک گره جدید، پیمایش سایر فرزندان گره قبلی به تعویق افتاده و گره جدید بررسی می‌شود. در واقع در این روش با گذر از هر گره به سمت عمق درخت گره فعلی در پشته قرار داده میشود که با بازگشتی طراحی کردن الگوریتم پشته مورد نظر به صورت پنهان ساخته خواهد شد.

Procedure DFS(v)

Visit(v)

For each vertex w adjacent to v do

If not visited w then

DFS( w )

Endif

repeat

end

در الگوریتم بالا در بدترین وضعیت (گراف همبند باشد) هر یال حداکثر دو بار پیموده میشود (!) و هر راس نیز یکبار ملاقات میشود و لذا مرتبه زمانی الگوریتم  $O(n+e)$  است.

#### ۱-۳-۲- جستجو و پیمایش ردیفی (BFS)

اگر در الگوریتم قبلی به جای پشته یک صف در نظر بگیریم به الگوریتم جدیدی خواهیم رسید که BFS نام دارد. برای پیمایش کلیه گره‌ها آغاز را انتخاب می‌کنیم. در این روش بعد از دیدن هر گره کلیه فرزندان همان گره ملاقات شده و سپس فرزندان اولین فرزند گره اصلی و بعد فرزندان دومین فرزند گره اصلی و تا انتها پیش می‌رود.

بنابراین روش کار این است که نخست دومین گره را ملاقات می کنیم و سپس کلیه فرزندان آن را ملاقات کرده و در انتهای صف قرار می دهیم و سپس از داخل صف، اولین گره را برداشته و فرزندان آن را ملاقات کرده و به انتهای صف می افزاییم.

```

Procedure BFS(v)
  Visit(v)
  AddQueue(v)
  While Queue is not empty do
    DeleteQueue(v)
    For each w adjacent to v do
      If not visited w then
        Visit(w)
        AddQueue(w)
      Endif
    Repeat
  Repeat
end

```

طبق دلیل مطرح شده در الگوریتم DFS لذا مرتبه زمانی این الگوریتم نیز  $O(n+e)$  است. توسط الگوریتمهای DFS و BFS میتوان یک گراف غیر همبند را نیز پیمایش کرد. به این صورت که هر بار از یک گره ملاقات نشده شروع کرده و آن را DFS یا BFS میکنیم و لذا میتوان به الگوریتمهایی مبتنی بر پیمایش عمقی یا ردیفی رسید.

## ۲- تحلیل الگوریتمها

در این بخش به تعریف نمادهای مجانبی مورد نیاز در تحلیل الگوریتمها و بیان چند قضیه قضیه در مورد آن میپردازیم.

### ۲-۱- نمادهای مجانبی

تعریف:  $f(n) \in O(g(n))$  اگر و فقط اگر ثابت  $c$  و ثابت  $n_0$  وجود داشته باشند که برای همه مقادیر  $n \geq n_0$ ، داشته باشیم.

$$\forall n \geq n_0 : |f(n)| \leq c|g(n)|$$

تعریف:  $f(n) \in \Omega[g(n)]$  اگر و فقط اگر ثابت  $c$  و ثابت صحیح  $n_0$  وجود داشته باشد که:

$$\forall n \geq n_0 : |f(n)| \geq c|g(n)|$$

در این صورت کران پایین تعداد اعمال لازم جهت یک الگوریتم به  $|g(n)|^c$  محدود گردیده است. و بدین صورت خوانده می شود:  $f(n)$  اُمگای بزرگ  $g(n)$  است.

تعریف:  $f(n) \in \Theta[g(n)]$  اگر و فقط اگر ثابتهای  $c_1$  و  $c_2$  و ثابت صحیح  $n_0$  وجود داشته باشد به گونه ای که برای همه مقادیر  $n \geq n_0$  داشته باشیم.

$$\forall n \geq n_0 : c_1|g(n)| \leq |f(n)| \leq c_2|g(n)|$$

قضیه (۱):

$$\text{if } f(n) = a_m n^m + \dots + a_1 n + a_0 \text{ then } f(n) = \begin{cases} O(n^m) \\ \Omega(n^m) \\ \Theta(n^m) \end{cases}$$

قضیه (۲):

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$

قضیه (۳):

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

تعریف:  $f(n) \in o(g(n))$  اگر و فقط اگر ثابت  $c$  و ثابت  $n_0$  وجود داشته باشند که برای همه مقادیر  $n \geq n_0$ ، داشته باشیم:

$$\forall n \geq n_0 : |f(n)| < c \cdot |g(n)|$$

نماد  $o$  را میتوان به گونه دیگری نیز تعریف کرد:

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

مثال:

$$\frac{n}{\log n} = o(n)$$

تعریف:  $f(n) \in \omega(g(n))$  اگر و فقط اگر ثابت  $c$  و ثابت  $n_0$  وجود داشته باشند که برای همه مقادیر  $n \geq n_0$ ، داشته باشیم:

$$\forall n \geq n_0 : |f(n)| > c \cdot |g(n)|$$

نماد  $\omega$  را میتوان به گونه دیگری نیز تعریف کرد:

$$f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

نکته: مقایسه نمادهای مجانبی دو تابع  $f$  و  $g$  را با دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$  میتوان بصورت زیر بیان کرد:

$$f(n) = O(g(n)) \approx a \leq b$$

$$f(n) = o(g(n)) \approx a < b$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \approx a \geq b$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \approx a > b$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \approx a = b$$

نکته:

$$2^n \neq O(2^n)$$

## ۲-۲- تحلیل حالت متوسط الگوریتم

تحلیل حالت متوسط یک الگوریتم دارای اهمیت بیشتری نسبت بدترین حالت و بهترین حالت الگوریتم می‌باشد. اگر تعداد تکرار یک دستورالعمل در یک الگوریتم با  $n$  ورودی را در حالت متوسط با  $A(n)$  نشان دهیم آنگاه یک رابطه ساده جهت بدست آوردن حالت متوسط بصورت زیر می‌باشد:

$$A(n) = \sum_{i \in S} P(i).F(i)$$

که در آن  $S$  مجموعه حالات ممکنه،  $P(i)$  احتمال رخ دادن حالت  $i$  ام و  $F(i)$  تعداد تکرار دستور مورد نظر در حالت  $i$  ام می‌باشد.

مثال: متوسط تعداد تکرار دستورالعمل  $(x)$  را در برنامه زیر بدست آورید:

```

Procedure max (A,n,j)
  j ← 1
  for i ← 2 to n do
    if A(i) > A(j) then
      j ← i      (*)
    endif
  repeat
end.
```

تعداد تکرار دستور  $x$  در یک آرایه  $n$  تایی را بطور متوسط برابر با  $A_n$  در نظر می‌گیریم و لذا:

$$0 \leq A_n < n-1$$

تعداد تکرار دستور  $(*)$  در این زیربرنامه در صورتی صفر است که بزرگترین عنصر در ابتدای آرایه باشد.

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ A_n = \frac{n-1}{n}A_n + \frac{1}{n}(1 + A_{n-1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{1}{n} + A_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + A_1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - 1 = \Theta(\log n)$$

$$\begin{aligned} &= H_n \\ &= \ln n + \gamma + \Theta\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\gamma = 0.5772 \end{aligned}$$

تعداد تکرار دستور  $A(i) > A(j)$

$$\frac{1}{n}(n-1) + \frac{1}{n}(n-1) + \frac{1}{n}(n-1) + \dots + \frac{1}{n}(n-1) = n-1$$

پس همیشه  $n-1$  بار تکرار می‌شود.



مثال: متوسط تعداد تکرار دستورالعمل (x) را در برنامه زیر بدست آورید؟

```
Function Linear_search(A, n, x)
  for i ← 1 to n do
    if A(i) = x then (*)
      return i
    endif
  repeat
end.
```

$$\text{متوسط تکرار} = \frac{1}{n} \times 1 + \frac{1}{n} \times 2 + \frac{1}{n} \times 3 + \dots + \frac{1}{n} \times n = \frac{1}{n} \times n = \frac{1}{n} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n+1}{2}$$

نکته: در الگوریتم قبلی در هر صورت حلقه تا n اجرا می شد ولی در این مثال هرگاه که شرط برقرار باشد از حلقه خارج می شویم.

مثال: میانگین زمان اجرای الگوریتم QuickSort را بدست آورید:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & ; n = 1 \\ (n-1) + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T(i) & ; n > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(n+1) = n + \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n T(i)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} nT(n) = n(n-1) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} T(i) \\ (n+1)T(n+1) = n(n+1) + 2 \sum_{i=1}^n T(i) \end{cases} \quad * (-1) +$$

$$\Rightarrow (n+1)T(n+1) - nT(n) = 2n + 2T(n)$$

$$\Rightarrow (n+1)T(n+1) = 2n + (n+2)T(n)$$

$$\Rightarrow T(n+1) = \frac{2n}{n+1} + \frac{n+2}{n+1} T(n)$$

$$n \geq 1 \Rightarrow \frac{2n}{n+1} \leq 2$$

$$\Rightarrow T(n+1) \leq 2 + \frac{n+2}{n+1} T(n)$$

$$\Rightarrow T(n) \leq 2 + \frac{n+1}{n} T(n-1) \Rightarrow T(n) \leq 2 + \frac{n+1}{n} \left[ 2 + \frac{n}{n-1} T(n-2) \right]$$

$$\Rightarrow T(n) \leq 2 \frac{n+1}{n+1} + 2 \frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n-1} T(n-2)$$

$$\Rightarrow T(n) \leq 2(n+1) \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right) + \frac{n+1}{n-2} T(n-3)$$

$$\Rightarrow T(n) \leq 2(n+1) \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right) + \frac{n+1}{n-2} T(n-3)$$

$$\Rightarrow T(n) \leq 2(n+1) \underbrace{\left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{3} \right)}_{H_{n+1} - \frac{1}{2}} + \frac{n+1}{2} \underbrace{T(1)}_0$$

$$\Rightarrow T(n) = O(n \log n)$$

نتیجه: بدترین حالت میانگین زمان اجرای الگوریتم QuickSort برابر  $O(n \cdot \log n)$  میباشد.  
 مثال: فرض کنید یک آرایه مرتب (صعودی) و کلید  $x$  داده شده باشند. متوسط زمان اجرای الگوریتم BinarySearch را محاسبه کنید.

Function BinarySearch( A, n, x)

low  $\leftarrow$  1

high  $\leftarrow$  n

while low  $\leq$  high do

mid  $\leftarrow$   $\lfloor (low + high) / 2 \rfloor$

if  $x = A[mid]$  then

return mid

elseif  $x > A[mid]$  then

low  $\leftarrow$  mid + 1

else

high  $\leftarrow$  mid - 1

endif

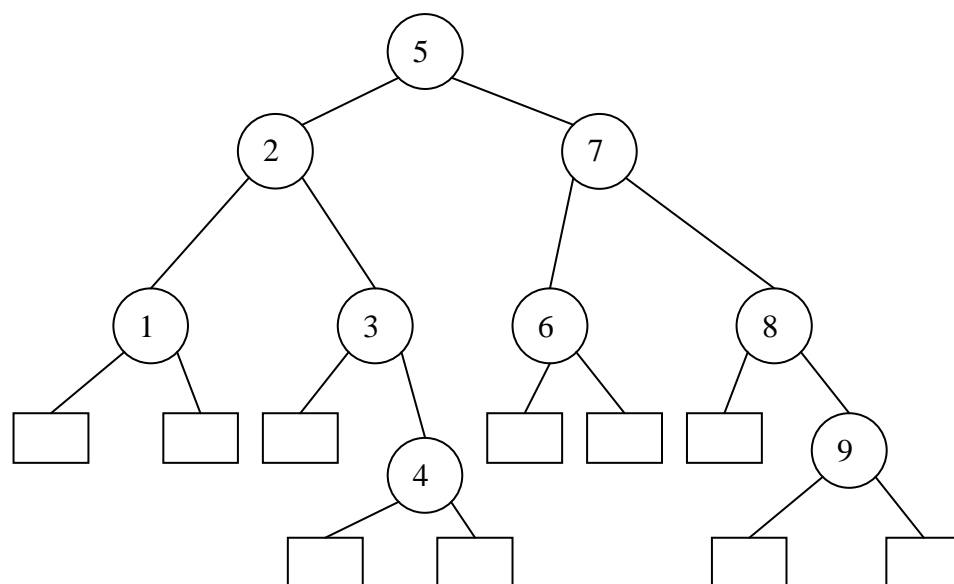
repeat

return 0

end.

در این الگوریتم اگر  $x$  داخل آرایه موجود باشد تعدادی مقایسه با عناصر آرایه صورت میگیرد و نهایتاً جستجو موفق خواهد بود و اگر  $x$  داخل آرایه موجود نباشد، تعدادی مقایسه با عناصر آرایه صورت میگیرد و نهایتاً جستجو ناموفق خواهد بود. مقایسه ها بصورت جستجو در یک درخت جستجوی دودویی انجام میشوند برای نمونه به آرایه زیر و درخت حاصل از جستجوی آن دقت کنید:

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
مقادیر	6	10	16	19	21	42	66	81	93
تعداد مقایسات در حالت موفق	3	2	3	4	1	3	2	3	4



در درخت بالا گره های خارجی با مستطیل و گره های داخلی با دایره نشان داده شده اند. درخت بالا را درخت تصمیم دودویی مینامند. جستجوهای موفق به گره های داخلی و جستجوهای ناموفق به گره های خارجی ختم میشوند.

نکته: اگر تعداد گره های خارجی را با  $n_0$  نشان داده و تعداد گره های داخلی را با  $n$  نشان دهیم آنگاه  $n_0 = n + 1$   

$$(3+2+3+4+1+3+2+3+4)/9 = 25/9 = 2.77$$
 میانگین جستجوهای موفق

نکته: فرض کنید احتمال موجود بودن  $x$  داخل عناصر مختلف آرایه و همچنین در صورت موجود نبودن  $x$  در آرایه احتمال قرار داشتن  $x$  بین عناصر آرایه مساوی است (به این معنی که احتمال قرار داشتن  $x$  در مجموعه  $[5,9]$  و  $[11,15]$  و ... مساوی است) کلاسها متساوی الاحتمالند.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
تعداد مقایسات در حالت ناموفق	3	3	3	4	4	3	3	4	4

میانگین جستجوهای ناموفق  $(3+3+3+4+4+3+3+3+4+4)/10 = 37/10 = 3.7$

قضیه: اگر  $n \in [2^{k-1}, 2^k]$  باشد، آنگاه الگوریتم جستجوی دودویی مستلزم حداکثر  $k$  مقایسه برای جستجوی موفق و  $k-1$  یا  $k$  مقایسه برای جستجوی ناموفق است.

نتیجه: جستجوی ناموفق دارای همیشه دارای مرتبه زمانی  $\Theta(\log n)$  است. جستجوی موفق در بهترین وضعیت  $\Omega(1)$  و در بدترین وضعیت  $O(\log n)$  میباشد.

حال متوسط تعداد مقایسات در جستجوی موفق را محاسبه میکنیم:

اگر  $v$  یک گره داخلی در درخت تصمیم باشد و سطح آن را با  $Level(v)$  نشان دهیم، آنگاه تعریف میکنیم:

$$d(v) = level(v) - 1$$

$$E = \sum_{v \in \text{External Nodes}} d(v)$$

$$I = \sum_{v \in \text{Internal Nodes}} d(v)$$

$$\text{قضیه: } E = I + 2n$$

راهنمایی اثبات: با استقرا اثبات کنید.

حال اگر میانگین تعداد مقایسات در جستجوی موفق در یک درخت تصمیم با  $n$  گره داخلی را با  $S(n)$  و میانگین مقایسات در جستجوی ناموفق را با  $U(n)$  نشان دهیم، آنگاه:

$$S(n) = \frac{\sum_{v \in \text{Internal Nodes}} [d(v) + 1]}{n} = \frac{I + n}{n}$$

$$U(n) = \frac{\sum_{v \in \text{External Nodes}} d(v)}{n+1} = \frac{E}{n+1}$$

حال با استناد به قضیه بالا و دو رابطه به دست آمده میتوان نتیجه گرفت که:

$$\Rightarrow S(n) = \frac{E - 2n + n}{n} = \frac{(n+1)U(n) - n}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)U(n) - 1$$

و چون قبلاً دیدیم که  $U(n) = \Theta(\log n)$  در نتیجه:

$$S(n) = \Theta(\log n)$$

### ۲-۳- روابط بازگشتی

در این قسمت به طور مختصر از حل روابط بازگشتی سخن خواهیم گفت. روابط بازگشتی را میتوان از روی درجه آن دسته بندی کرد:

#### ۲-۳-۱- روابط بازگشتی درجه ۱

این روابط به سادگی از طریق روش جایگذاری قابل حل میباشند. به این معنی که با باز کردن رابطه بصورت تو در تو میتوان رابطه را حل نمود.  
مثال:

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n-1)+1 & ; n > 0 \\ 1 & ; n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(n) = 2T(n-1)+1$$

$$= 2[2T(n-2)+1]+1 = 4T(n-2)+2+1 = 2^2 T(n-2) + 2^1 + 2^0$$

$$= 2^i T(n-i) + 2^{i-1} + \dots + 2^1 + 2^0$$

$$= 2^n T(0) + 2^{n-1} + \dots + 2^0 = \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1 = O(2^n)$$

#### ۲-۳-۲- روابط بازگشتی درجه ۲ (همگن)

این روابط به روش محاسبه معادله مشخصه قابل حل هستند.  
مثال: تعداد فراخوانی های تابع مقابل را بدست آورید؟

```
function f(n)
  if n<2 then
    return n
  else
    return f(n-1)+f(n-2)
  end if
end.
```

$A_n$  = تعداد فراخوانی های تابع  $f$  با ورودی  $n$

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + 1 \\ A_0 = 1 \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

راه حل:

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + 1$$

$$A_n + 1 = A_{n-1} + A_{n-2} + 1 + 1$$

$$*B_n = A_n + 1$$

$$*\Rightarrow B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$$

$$B_0 = 2 \quad B_1 = 2$$

$$B_n = r^n \Rightarrow r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$B_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

$$\Rightarrow B_0 = C_1 r_1^0 + C_2 r_2^0 = C_1 + C_2 = 2 \text{ if } n=0 \quad \textcircled{1}$$

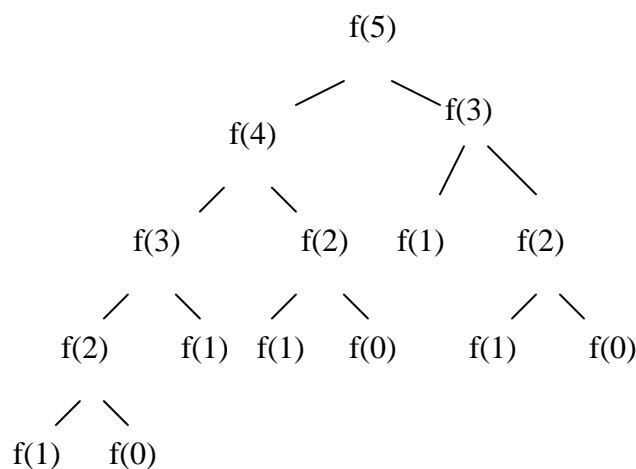
$$\Rightarrow B_1 = C_1 r_1^1 + C_2 r_2^1 = C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 2 \text{ if } n=1 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ و } \textcircled{2} \Rightarrow C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad C_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$B_n = \frac{2}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

$$A_n = B_n - 1 \equiv (1/6)^n$$

روش حل پروسیجر قبلی تقسیم و حل میباشد و یک درخت را به شکل زیر پوشش می کند این الگوریتم مقادیری را چندین بار بصورت تکراری محاسبه می کند و به همین علت مرتبه زمانی الگوریتم نمائی می باشد.  
مثال درخت فراخوانی  $f(5)$ :



این مسئله را به وسیله یک حلقه برگ‌ها به سمت ریشه با حفظ مقادیر هم می توان حل کرد که این روش پایین به بالا (bottom-up) است در این روش حالت‌های تکراری حذف می‌شود. (روش برنامه سازی پویا)

## ۲-۴- قضیه اصلی (Master Theorem)

در فصل بعدی با یکی از روشهای حل مسئله به نام روش تقسیم و حل آشنا خواهیم شد که در تحلیل مرتبه زمانی الگوریتمهای طراحی شده به آن روش به قضیه‌ای به نام قضیه اصلی نیاز خواهیم داشت و لذا در این قسمت به بیان آن خواهیم پرداخت.

قضیه اصلی:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + Cn^k \quad \text{if}$$

که در آن  $a, b, c, k$  اعداد ثابت و  $b > 1$  است آنگاه:

$$T(n) = \begin{cases} \theta\left(n^{\log_b a}\right) & a > b^k \\ \theta\left(n^k \log n\right) & a = b^k \\ \theta\left(n^k\right) & a < b^k \end{cases}$$

مثال:

زمان اجرای Binary search را به کمک قضیه اصلی به دست آورید.

$$T(n) = 1 + T\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ k = 0 \end{cases} \quad a = b^k \Rightarrow 1 = 2^0$$

$$\theta\left(n^k \log n\right) = \theta(\log n)$$

نکته: در قضیه اصلی مقدار  $C$  در زمان نهایی تأثیری ندارد.

مثال: زمان اجرای مثال‌های زیر را به کمک قضیه اصلی محاسبه کنید؟

$$T(n) = T\left(\frac{3n}{2}\right) + n^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{2}{3} \\ k = 2 \end{cases} \quad a < b^k$$

$$\theta\left(n^k\right) = \theta\left(n^2\right)$$

مثال:

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$$

$$n = 2^m \Rightarrow m = \log_2 n \quad \textcircled{1}$$

$$T(2^m) = T\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + m$$

$$T(2^m) = s(m)$$

$$s(m) = 2s\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

$$\theta(m \log m), \quad \textcircled{2} \Rightarrow \theta(\log n \cdot \log \log n)$$

مثال:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log n$$

$$\begin{cases} a = 3 & n \log n = n^{1/x} & n < n \log n < n^2 \\ b = 4 & \theta\left(n^{1/x}\right) = \theta(n \log n) \\ k = 1/x \end{cases}$$

### ۳- روش حریصانه (Greedy)

روش حریصانه، روش آزمند و یا روش دستاوردهای قدم به قدم نیز نامیده می‌شود. این روش جزو رده بزرگتری به نام روشهای بهینه‌سازی است در این روش:

۱- دنباله‌ای از انتخابها را در پیش رو داریم که باید از بین این دنباله انتخابهایی را که منجر به بهینه شدن جواب نهایی گردد انتخاب کنیم.

۲- در هر مرحله از مراحل اجرایی الگوریتم باید بخشی از جواب یا به عبارت درست‌تر مؤلفه‌ای از مؤلفه‌های جواب را به دست آوریم.

۳- نتیجه نهایی یک الگوریتم آزمند مجموعه‌ای از داده‌هاست که ممکن است ترتیب آنها نیز اهمیت داشته باشد. این مجموعه داده‌ها بیشتر مواقع زیرمجموعه داده‌های ورودی است.

۴- جواب نهایی باید تابع هدف یک عبارت را بهینه (ماکزیمم و یا مینیمم) نماید. البته باتوجه به اینکه در روش‌های آزمند آینده‌نگری وجود ندارد و به وضعیت جاری بیشتر توجه می‌شود واضح است که این بهینگی ممکن است کلی نباشد و محلی باشد و به عبارتی  $\max$  و  $\min$  فعلی حاصل می‌شود نه ماکزیمم و مینیمم سراسری.

۵- تصمیم اتخاذ شده در مورد انتخاب یا عدم انتخاب یکی از داده‌های ورودی به عنوان مؤلفه‌ای از جواب، قطعی و غیرقابل برگشت است.

۶- در این روش باید بصورت محلی بهترین انتخاب را انجام داد و امیدوار بود که بهترین انتخاب محلی منجر به بهترین انتخاب سراسری نیز خواهد شد (اگر بتوان این موضوع را اثبات کرد میتوان مسئله را به این روش حل کرد).

نکته: مسئله مهم در استفاده از روش حریصانه اثبات مورد پنجم از موارد بالا میباشد.

اجزای الگوریتم‌های حریصانه عبارتند از:

- ۱- مجموعه اولیه که مؤلفه‌های جواب از بین آنها انتخاب می‌شود.
- ۲- مجموعه مؤلفه‌هایی که تا به حال انتخاب شده‌اند (به عنوان بخشی از جواب).
- ۳- تابعی برای انتخاب مؤلفه بعدی.
- ۴- تابعی برای تعیین اینکه با انتخاب جاری و مجموعه انتخاب‌های قبلی امکان رسیدن به جواب وجود دارد یا خیر.



- ۵- تابع هدف برای ارزش دهی به جواب مسأله که هدف نهایی بهینه کردن این تابع است.
- ۶- یک تابع برای بررسی اینکه مشخص کند در نهایت جواب حاصل شده یا خیر.
- مسائلی نظیر زمانبندی برنامه‌ها، درخت پوشای مینیمم، ادغام دودویی و بهینه فایله‌ها، انتخاب فعالیتها و ... را میتوان توسط روش حریصانه حل نمود. مدل کلی روش حل مسئله با روش حریصانه بصورت زیر میباشد.

```

function Greedy(A,n)
  solution ← ∅
  for i←1 to n do
    x ← select (A)
    if feasible(x,solution) then
      solution ← union (solution,x)
    endif
  repeat
  return solution
end .

```

### ۳-۱- مسأله کوله‌پشتی ساده یا کسری (Knapsack)

در این مسئله فرض بر این است که تعداد  $n$  کیسه از اجناس مختلف به عنوان ورودی داده شده است. هر کیسه دارای وزن و سود مشخصی است. شخصی با یک کوله پشتی قصد انتخاب این اجناس را دارد. هدف، انتخاب اجناس و قرار دادن آنها در کوله پشتی به گونه‌ای است که سود حاصله بیشینه گردد.

ورودی:

$n$ : تعداد کیسه‌ها

$P_i$ : سود حاصل از انتخاب کل کیسه  $i$  ام

$W_i$ : وزن کل کیسه  $i$  ام

$M$ : گنجایش کوله پشتی

هدف: بیشینه کردن سود حاصل از انتخاب اجناس یعنی  $Max \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$

شرایط مسئله:

وزن همه کیسه‌ها روی هم از وزن کوله‌پشتی بیشتر است زیرا اگر کمتر باشد یعنی می‌توانیم همه را برداریم و انتخابی وجود ندارد همچنین مجموع وزن اجسامی که انتخاب کردیم از وزن کل کوله‌پشتی نباید بیشتر شود.

$$\sum_{i=1}^n w_i > M \quad -1$$

$$\sum_{i=1}^n x_i w_i \leq M \quad -2$$

خروجی: کسری از کیسه  $i$  ام که انتخاب می‌شود داخل عنصر  $i$  ام آرایه قرار می‌گیرد.

$X_i =$  کسری از کیسه  $i$  ام که انتخاب میشود.  $(i=1, \dots, n) (0 \leq X_i \leq 1)$

راه حل: توسط مثالهای نقضی میتوان نشان داد که انتخاب کیسه ها بصورت صعودی وزن و یا نزولی سود ممکن است منجر به جواب بهینه نگردد! و لذا راه حل بهینه به گونه ای است که باید کیسه ها را بصورت نزولی سود بر وزنشان انتخاب کرد.

راه حل بهینه این می باشد که سود حاصل از هر کیلو از اجسام را محاسبه کرده و از با ارزش ترین جسم شروع به انتخاب کنیم مادامی که کوله پشتی فضا برای جسم جدید دارد، در غیراین صورت کسری از آن جسم را انتخاب می کنیم.

به بیان دیگر ابتدا اجسام را بصورت  $\frac{P_1}{W_1} \geq \frac{P_2}{W_2} \geq \dots \geq \frac{P_n}{W_n}$  مرتب میکنیم و سپس به ترتیب انتخاب میکنیم. در الگوریتم Greedy- knapsack وزن اجسام مرتب شده براساس بیشترین سود هر کیلوی آنها می باشد. در کوله پشتی ساده  $0 \leq x_i \leq 1$ . درایه  $i$  ام آرایه  $X$  میباشد. الگوریتم مورد نظر در زیر بیان شده است.

Procedure Greedy- knapsack ( W, n, M, X )

```

cu ← M
X ← 0
for i ← 1 to n do
    (feasibility) { if w(i) > cu then Exit
                  endif
                  x(i) ← 1
                  cu ← cu - w(i)
    repeat
    x(i) ← cu/w(i)
end

```

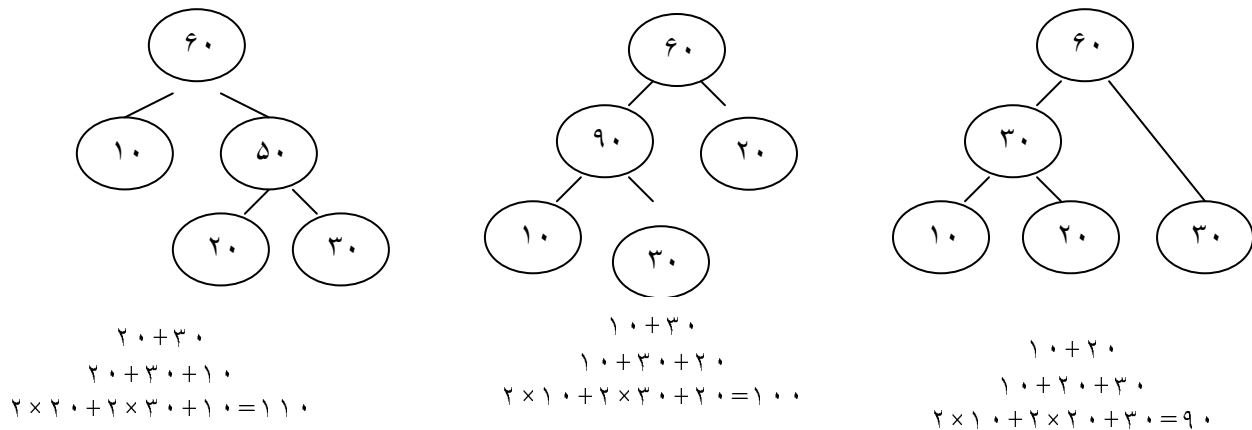
اگر شرط مقابل برقرار نباشد جسم  $i$  ام انتخاب می شود

اگر شرط برقرار شود، کسری از جسم  $i$  ام را انتخاب می کنیم تا بیشترین سود را داشته باشیم و نیز کوله کاملاً پر شود.

### ۳-۲- مسئله ادغام دودویی و بهینه فایلها (یا آرایه های مرتب)

یادآوری: میدانیم که برای ادغام دو آرایه یا فایل مرتب که هر کدام به ترتیب دارای  $m_1$  و  $m_2$  رکورد یا عنصر باشند نیاز به زمان  $O(m_1+m_2)$  میباشد. حال اگر هزینه ادغام این دو آرایه را برابر با  $m_1+m_2$  در نظر بگیریم. با فرض داشتن  $n$  فایل مرتب، هدف پیدا کردن روشی جهت ادغام دودویی و بهینه (کمترین هزینه) این  $n$  فایل میباشد. میدانیم که  $n$  فایل را به طرق مختلفی میتوان ادغام کرد که هر طریق ادغام دارای درخت ادغام مخصوص به خود است. الگوریتمی برای ساخت بهترین درخت دودویی ادغام که دارای کمترین مقایسه جهت رسیدن از برگهای درخت به ریشه آن می باشد مورد نظر است.

مثال: اگر سه فایل به اندازه های ۱۰، ۲۰ و ۳۰ داشته باشیم به ۳ طریق میتوان آنها را ادغام کرد که کمترین هزینه ادغام برابر با ۹۰ میباشد. در زیر هر سه درخت ادغام را میبینیم:



سوال: تعداد طرق ادغام  $n$  فایل به صورت دودویی را محاسبه کنید:

$$A_2 = 1$$

$$A_n = \binom{n}{2} * A_{n-1} = \binom{n}{2} \binom{n-1}{2} \binom{n-2}{2} \dots \binom{2}{2} =$$

$$= \frac{n! (n-1)! (n-2)! \dots 2! 3! 2!}{2! (n-2)! 2! (n-3)! 2! (n-4)! \dots 2! 2! 1! 2! n!} = \frac{n! (n-1)!}{2^{n-1}}$$

لذا اگر بخواهیم همه درختهای ادغام را تولید کرده و کم هزینه ترین آنها را انتخاب کنیم هزینه بسیار زیادی را باید پرداخت کرد! لذا نیاز به الگوریتمی است که در زمان چند جمله ای بهترین درخت ادغام را تولید کند.

الگوریتم ساخت درخت دودویی با کمترین هزینه:

$$\text{dist}(v_i) = \text{level}(v_i) - 1$$

تعریف: فاصله از ریشه

تعریف: مقدار هزینه ای که باید صرف کرد تا  $n$  فایل بصورت دودویی ادغام شوند (WEPL=Weighted External Path Length)

$$Wep1 = \sum_{i=1}^n \text{dist}(v_i) * \text{cost}(v_i)$$

توضیح الگوریتم: برای بدست آوردن درخت دودویی با کمترین هزینه یک نود جدید میسازیم و سپس کم ارزش ترین نود را انتخاب کرده و به عنوان فرزند چپ (left child) گره جدید درج میکنیم و آن را از لیست حذف می کنیم سپس دوباره همین کار را برای فرزند سمت راست (rightchild) انجام می دهیم. سپس گره جدید را به لیست اضافه میکنیم. تا مادامی این کار را انجام می دهیم که همه نودهای لیست (به جز آخری) از لیست حذف شوند. کد الگوریتم مورد نظر را در زیر می بینیم:

Function construct\_tree(L,n)

For  $i \leftarrow 1$  to  $n-1$  do

Get node(T)

Lchild(T)  $\leftarrow$  least(L)

Rchild(T)  $\leftarrow$  least(L)

Cost(T)  $\leftarrow$  cost(Lchild(T)) + cost(Rchild(T))

Insert(L,T)

Repeat

Return least(L)

end .

رویه least(L): در لیست کمترین مقدار را پیدا کرده آن را حذف کرده و

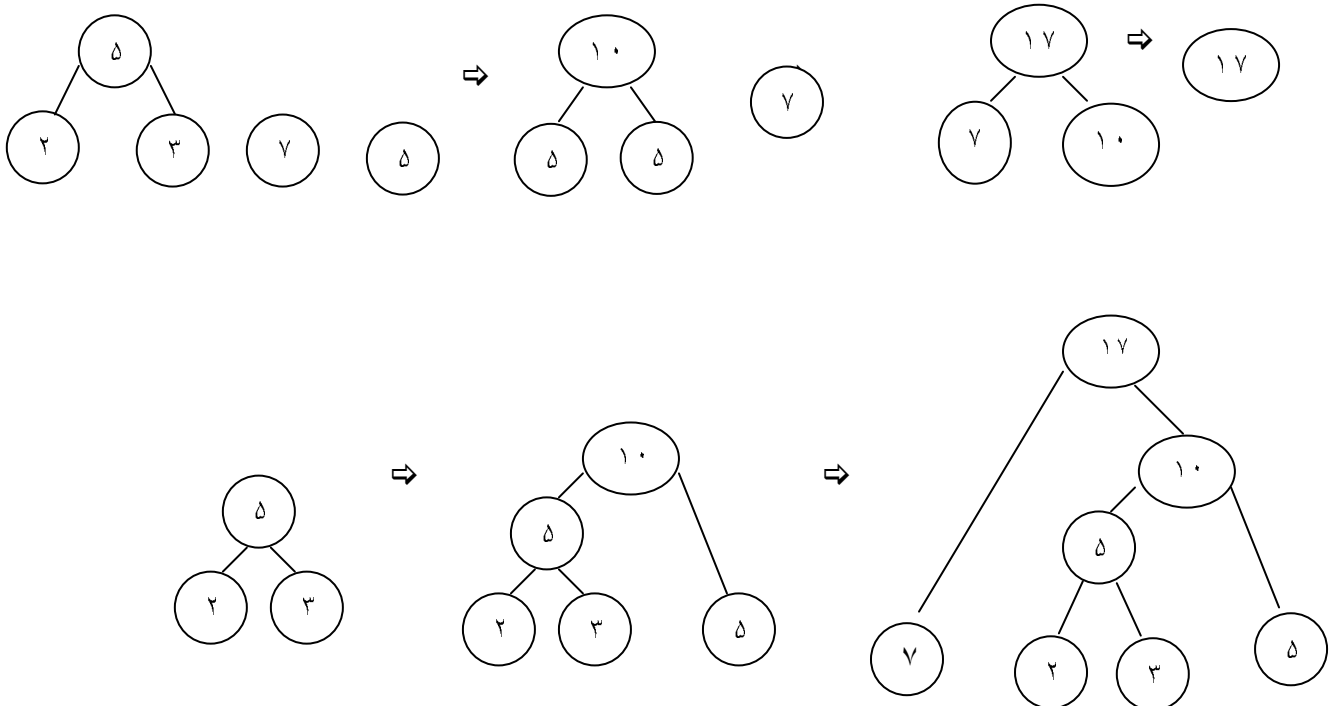
آدرسش را برمی گرداند.

Select: هر بار دو min را انتخاب میکند.

Feasibility: ندارد

Union: بعد از پیوند به گره جدید به لیست اولیه اضافه می کند.

شکل زیر روند ساخته شدن درخت دودویی ادغام بهینه را بر روی داده های ورودی ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۰ نشان میدهد.



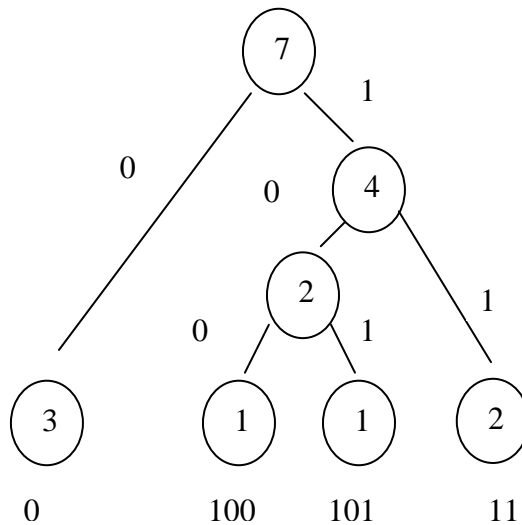
### ۳-۳- کدینگ Huffman

یکی از کاربردهای مسئله ادغام دودویی فایلها در کدینگ هافمن است که جهت فشرده سازی فایلها یا ارسال کم حجمتر اطلاعات بر روی خطوط شبکه مورد استفاده قرار میگیرد. در ابتدا یک جدول در نظر می گیریم در ستون ابتدایی مقادیر (داده ها) را وارد می کنیم در ستون دوم تعداد تکرار داده ها را محاسبه کرده و براساس آن درخت دودویی را طبق الگوریتم **Construct-tree** می سازیم سپس یالهای چپ را صفر و یالهای راست را یک در نظر می گیریم در ستون آخر جدول کدهای جدید را که برچسب یالهای درخت حاصله از ریشه تا هر برگ است را درج می کنیم. این برچسبها را کدینگ هافمن مینامیم. برچسبهای جدید کدهای جایگزین کدهای قبلی خواهند شد که در فشرده سازی فایلها حجم کمتری را به خود اختصاص میدهد. جهت بازگرداندن فایل به حالت اولیه نیز از برعکس همین روش میتوان استفاده کرد (بدیهی است که باید اطلاعاتی در فایل فشرده شده قرار داد که از روی آنها بتوان مجدداً درخت کدینگ را ساخت)!

فایل اولیه						
۱۰۰	۱۱۰	۰۱۱	۰۱۱	۱۰۰	۰۱۰	۱۰۰

کدینگ هافمن	تعداد تکرار	داده
----	۰	۰۰۰
----	۰	۰۰۱
۱۰۰	۱	۰۱۰
۱۱	۲	۰۱۱
۰	۳	۱۰۰
----	۰	۱۰۱
۱۰۱	۱	۱۱۰
----	۰	۱۱۱

فایل نهایی						
۰	۱۰۰	۰	۱۱	۱۱	۱۰۱	۰



### ۳-۴- درخت پوشای مینیمم

مسئله پیدا کردن درخت پوشای با کمترین هزینه بر روی یک گراف همبند وزندار از جمله مسائل پر کاربردی در الگوریتمهای گراف محسوب میشود. گراف همبند وزندار  $G(V,E)$  مفروض است، هدف پیدا کردن زیرگرافی از  $G$  است که دارای خواص زیر باشد:

۷- شامل همه گره های  $V$  باشد

۸- همبند و بدون حلقه باشد

۹- در بین کلیه زیرگرافهایی که شرط ۱ و ۲ را دارند دارای کمترین هزینه باشد

برای این مسئله الگوریتمهای متعددی وجود دارد که از بین آنها به بیان دو الگوریتم که روش طراحی آنها حریصانه است میپردازیم.

نکته: اگر گراف ورودی همبند نباشد، دارای درخت پوشا نیست.

نکته: درخت پوشای یک گراف با  $n$  راس دقیقاً دارای  $n-1$  یال میباشد. اگر یک یال به آن اضافه کنیم شرط بدون حلقه بودن آن نقض میشود و اگر یک یال از آن حذف کنیم شرط همبند بودن آن نقض خواهد شد. در نتیجه میتوان درخت پوشای یک گراف با  $n$  راس را به این صورت تعریف کرد: زیر درختی از گراف که دارای  $n-1$  یال میباشد.

### ۳-۴-۱- الگوریتم راشال (kruskal)

در این الگوریتم در هر مرحله یک یال با کمترین هزینه از گراف ورودی انتخاب شده و از گراف حذف شده و در صورتیکه اضافه کردن آن به درخت موجب ایجاد حلقه نشود آن را به درخت مورد نظر (که در ابتدای الگوریتم

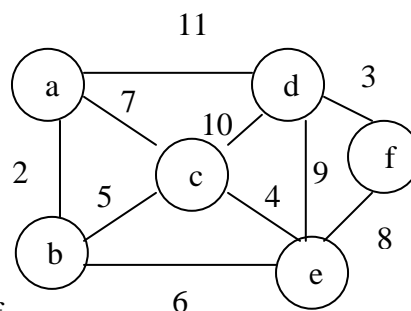
خالی است) اضافه میکنیم. این عمل تا زمانی که تعداد  $n-1$  یال به درخت اضافه نشده است ادامه میابد. شبه کد الگوریتم را در شکل زیر میبینیم.

### Procedure kruskal

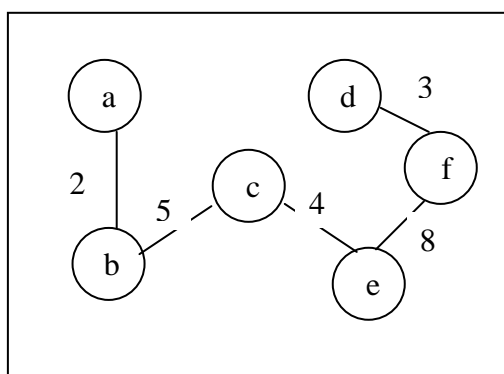
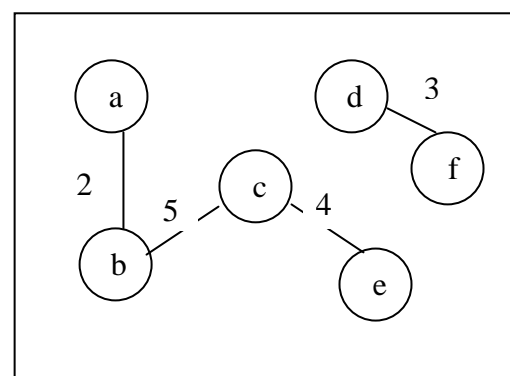
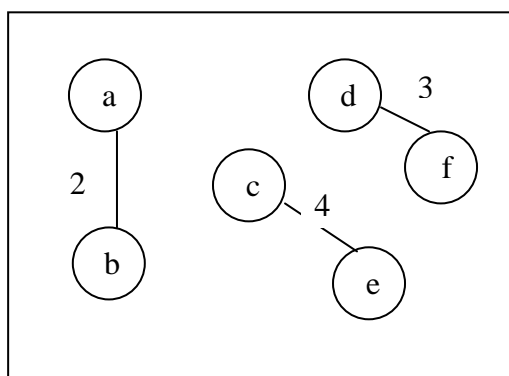
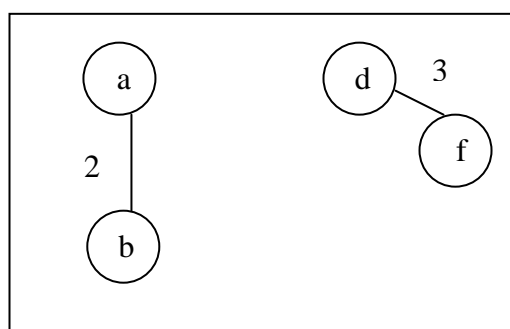
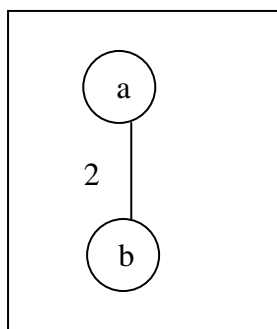
```

T ← ∅
While ( |T| < n-1 ) and ( |E| ≠ 0 ) do
  Select edge e from E with minimum cost
  Delete e from E
  If e does not create a cycle in T then
    add e to T
  endif
repeat
if |T| < n-1 then write ('no spanning Tree ') endif
end.

```



مراحل ساخت درخت:



مرتبه زمانی الگوریتم در بهترین پیاده سازی برابر با  $O(e \cdot \log n)$  می باشد!

### ۳-۴-۲- الگوریتم Prim

الگوریتم پریم، مانند الگوریتم راشال در هر زمان یک لبه از درخت پوشای با کمترین هزینه را می سازد. در الگوریتم پریم از یک رأس دلخواه شروع کرده و در هر مرحله یال با کمترین هزینه که یک رأس مجاور آن در درخت بوده و رأس دیگرش در درخت نباشد را به آن اضافه می کنیم. در هر مرحله، مجموعه لبه های انتخاب شده یک درخت را تشکیل می دهند و در هر مرحله درخت گسترش میابد. در مقابل، مجموعه لبه های انتخاب شده در الگوریتم راشال در هر مرحله یک جنگل را تشکیل می دهند. شبه کد الگوریتم را در شکل زیر می بینیم.

Procudure prim( $v, E, T$ )

$T \leftarrow \emptyset$

$T_v \leftarrow \{1\}$

While  $|T| < n-1$  do

Select  $e = (u, v)$  with minimum cost from  $E$  such that  $u \in T_v$  and  $v \notin T_v$

if there is no any such edge then این شرط در صورتی برقرار می شود که گراف اصلی ما همبند نباشد.

exit

endif

add  $e$  to  $T$

add  $v$  to  $T_v$

repeat

if  $|T| < n-1$  then write ('no spanning tree') endif

end.

مرتبه زمانی الگوریتم در بهترین پیاده سازی برابر با  $O(e \cdot \log n)$  می باشد!

در این الگوریتم:

Select : هزینه کمتر با شرایط خاص

feasibility به علت نحوه انتخاب یال ها وجود ندارد :

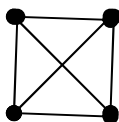
### ۳-۴-۳- مقایسه الگوریتم Prim و Kruskal

دو الگوریتم prim و kruskal در صورتی دو درخت متفاوت تولید می کنند که چندین یال با هزینه های مساوی داشته باشیم ولی همیشه هزینه درخت های تولید شده برابر و کمینه است. در الگوریتم Prim در ابتدا یک گره بوده و کم کم در حین الگوریتم گسترش میابد تا به درخت پوشای کمینه تبدیل شود در حالیکه در الگوریتم kruskal چند درخت (جنگل) وجود دارد که در انتهای الگوریتم درخت های جنگل به هم پیوند خورده تا تبدیل به درخت پوشای کمینه شوند.

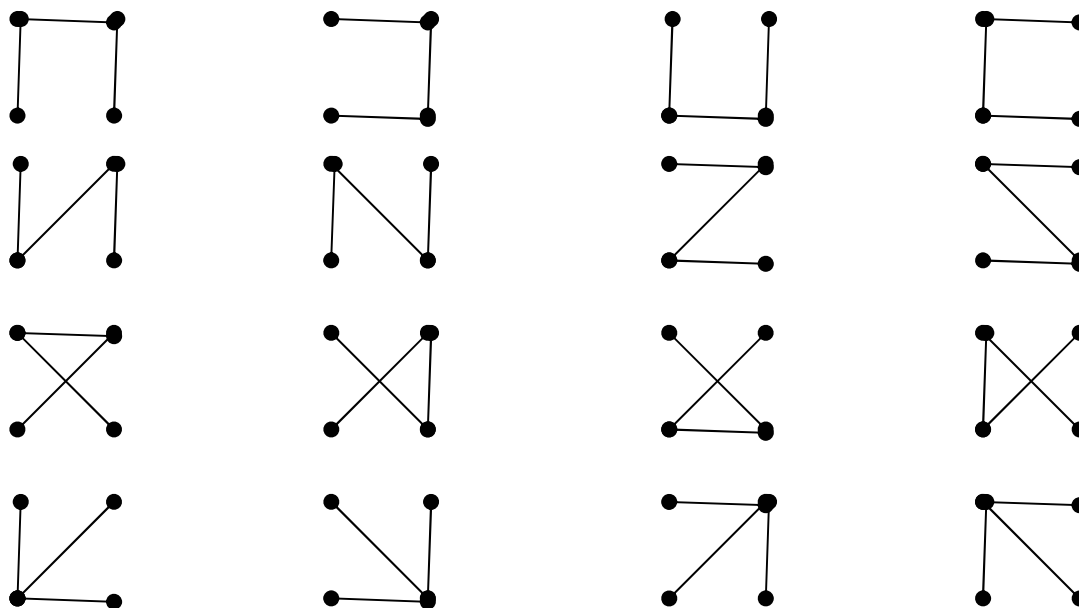
### ۳-۴-۴- تعداد درخت های پوشای $K_n$

در این بخش به بیان قضیه مهمی در مورد تعداد درخت های پوشا می پردازیم.

مثال: درخت های پوشای  $K_4$  را بدست آورید:







قضیه: ثابت کنید تعداد درختهای پوشای  $k_n$  (گراف کامل با  $n$  رأس) برابر  $n^{n-2}$  است.

اثبات: از روش زیر برای اثبات قضیه بالا استفاده می‌کنیم:

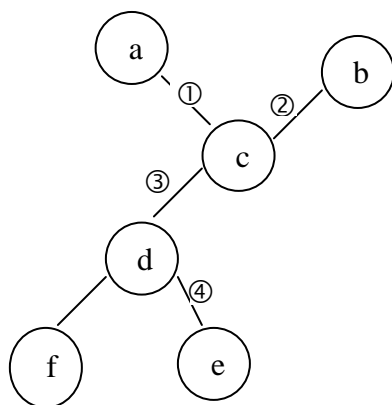
ابتدا نشان می‌دهیم که هر درخت پوشا با  $n$  رأس در تناظر یک به یک یا یک رشته  $n-2$  حرفی روی  $n$  حرف است و سپس چون تعداد رشته‌های  $n-2$  حرفی روی  $n$  حرف برابر با  $n^{n-2}$  است قضیه ثابت می‌شود. باید از هر درخت پوشا به یک رشته برسیم و برعکس. با الگوریتم زیر میتوان برای هر درخت پوشا یک رشته  $n-2$  حرفی یکتا تولید کرد.

۱- به ازای  $i$  از ۱ تا  $n-2$  مرحله ۲ را تکرار کنید:

۲- کوچکترین (از لحاظ ترتیب الفبایی یا عددی) برگ (رأس با درجه ۱) را از درخت حذف کرده و رأس

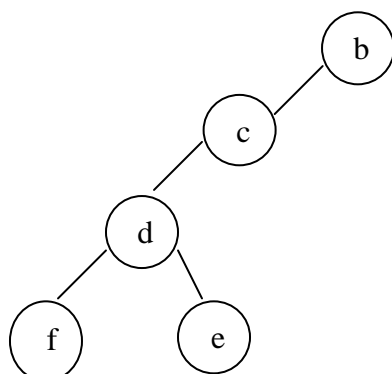
مجاور یال مربوط به آن را به عنوان  $i$  امین عنصر رشته محسوب می‌کنیم.

۱	۲	۳	۴
c	c	d	d



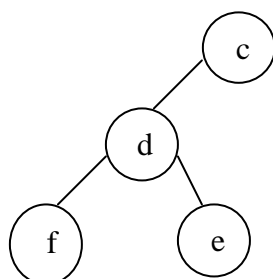
مرحله اول:

c			
---	--	--	--



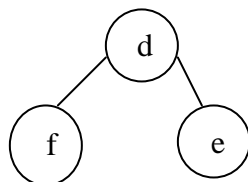
مرحله دوم:

c	c		
---	---	--	--



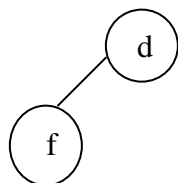
مرحله سوم:

c	c	d	
---	---	---	--



مرحله چهارم:

c	c	d	d
---	---	---	---



عکس روش بالا (رسیدن از رشته به درخت):

باتوجه به مثال بالا طول رشته موردنظر را با دو جمع کرده تعداد رئوس بدست می‌آید سپس در مرحله بعد جدولی از کلیه حروف تهیه می‌کنیم حال تعداد تکرار هر حرف در رشته را به اضافه یک می‌کنیم و در جدول قرار

می‌دهیم (قابل ذکر است که درجه هر گره در درخت پوشا برابر با یکی بیشتر از تعداد دفعات ظهور گره در رشته است).

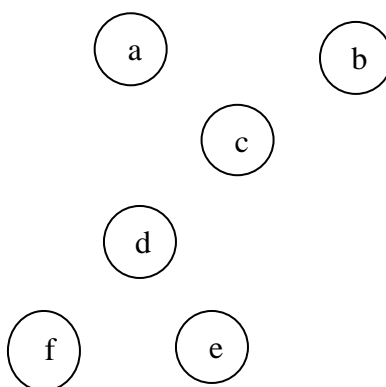
- ۱- به ازای  $i$  از ۱ تا  $n-2$  مرحله ۲ و ۳ را تکرار کنید:
- ۲- کوچکترین راس با درجه ۱ در جدول را انتخاب کرده و یالی بین آن راس و حرف  $i$  ام رشته برقرار کنید.
- ۳- از درجه دو راسی که در مرحله ۲ بین آنها یالی برقرار شد یک واحد کم کنید
- ۴- یالی بین دو راس باقیمانده برقرار کنید.

مثال:

a	b	c	d	e	f
1	1	3	3	1	1

c	c	d	d
---	---	---	---

شروع کار:

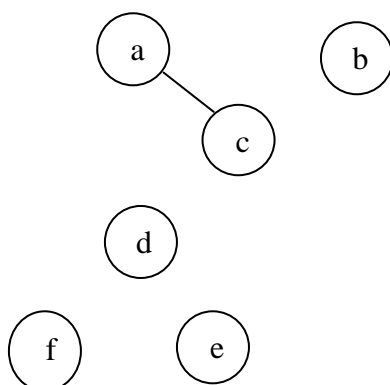


مرحله اول:

با حرکت از سر رشته (که  $c$  می‌باشد) و با توجه به جدول کوچکترین برگ را ( $a$ ) انتخاب می‌کنیم حال از درجه  $c$  یکی کم کرده و همینطور از درجه برگ که ( $a$ ) می‌باشد و این کار را برای مراحل بعد نیز انجام می‌دهیم.

a	b	c	d	e	f
1 0	1	3 2	3	1	1

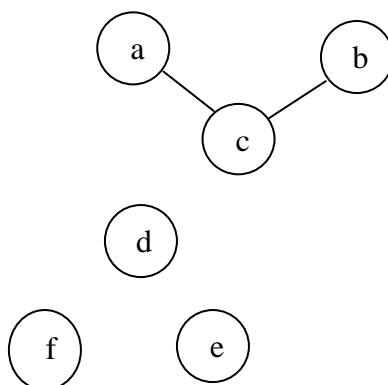
c	c	d	D
---	---	---	---



مرحله دوم:

a	b	c	d	e	f
1	1	3	3	1	1
0	0	2			
		1			

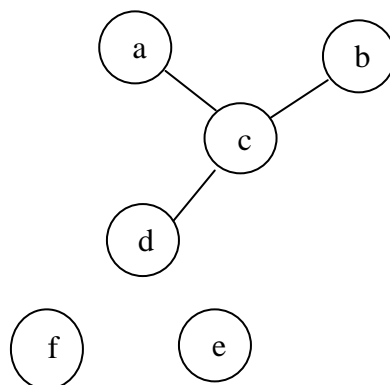
c	c	d	d
---	---	---	---



مرحله سوم:

a	b	c	d	e	f
1	1	3	3	1	1
0	0	2	2		
		1			
		0			

c	c	d	d
---	---	---	---

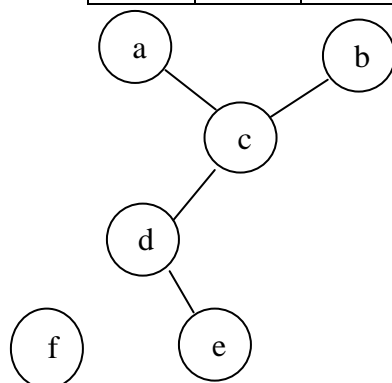


مرحله چهارم:

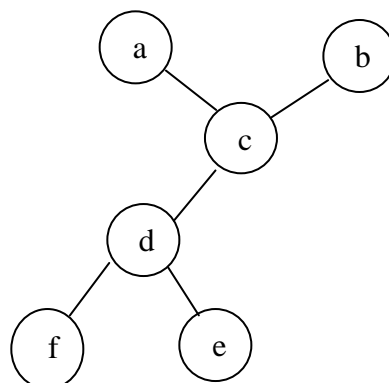
در این مرحله دو نود انتهایی را به یکدیگر وصل می‌کنیم.

a	b	c	d	e	f
1	1	3	3	1	1
0	0	2	2	0	
		1	1		
		0			

c	c	d	d
---	---	---	---



مرحله آخر:



### ۳-۵- کوتاهترین مسیرهای هم مبدا

در این قسمت به بررسی مسئله کوتاهترین مسیرهای هم مبدا (Single Source Shortest Paths) یا SSSP میپردازیم. الگوریتمهای متعددی برای محاسبه طول کوتاهترین مسیر بین دو گره در گراف وزندار وجود دارد که در این میان الگوریتم Dijkstra به روش حریصانه طراحی شده است لذا در این قسمت به بیان آن میپردازیم. در این الگوریتم هدف پیدا کردن طول کوتاهترین مسیر از یک گره مبدا نظیر  $v$  به گرههای دیگر می باشد. الگوریتم دایکسترا بر روی گرافهای وزنداری قابل اجراست که هزینه یالها نامنفی باشد.

فرضیات:

$Dist[i]$ : طول کوتاهترین مسیر از راس  $v$  به راس  $i$

$n$ : تعداد رئوس

$V$ : مبدا:

$cost$ : ماتریس هزینه ها:

$p[i]$ : راسی قبل از راس  $i$  بر راس کوتاهترین مسیر

در این الگوریتم کمترین فاصله مبدا به هر راس کم کم محاسبه شده و در هر مرحله کمتر میشود تا در پایان الگوریتم به کمترین حد خود برسد. در حین اجرای الگوریتم هر راسی که فاصله مبدا به آن بطور کامل محاسبه شده بود و مقدار آن به کمترین حد خود رسیده باشد برچسب دائمی شدن ( $s[w]=1$ ) خواهد خورد. در ابتدای کار همه رئوس به غیر از مبدا دارای برچسب موقتی هستند ( $s[w]=0$ ).

توضیح: الگوریتم دارای ۲ فاز میباشد (مرحله ۲ و ۳):

۱- مراحل ۲ و ۳ را  $n-2$  بار تکرار کنید:

۲- در هر مرحله از میان رئوسی که هنوز برچسب دائمی شدن نخورده اند راسی که دارای کمترین فاصله

نسبت به مبدا است ( $Dist$  کمترین) را انتخاب میکنیم و آن را برچسب دائمی میزنیم.

۳- مقدار  $Dist$  مابقی رئوسی را که هنوز موقتی هستند با توجه به راس دائمی شده در مرحله ۱ بروز میکنیم.

شبه کد الگوریتم در زیر آورده شده است:

```

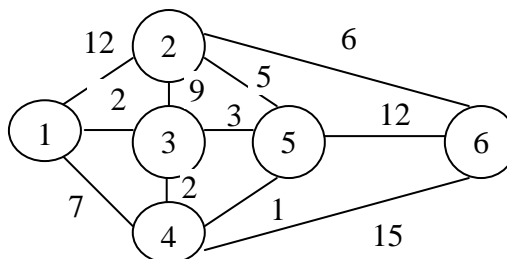
Procedure (G, n, v, cost, dist)
  For i ← 1 to n do
    dist[i] ← cost (v,i)
    p[i] ← v
    s[i] ← false
  repeat
    s[v] ← True
    for i ← 1 to n-2 do
      select vertex u such that dist (u) = min {dist(w) | s(w) = false}
      s[u] ← true
      for all vertices w in which s(w) = false do
        if dist (u) + cost (u,w) < dist (w) then
          dist (w) ← dist (u) + cost (u,w)
          p[w] ← u
        end if
      repeat
    repeat
  end.

```

(\*)

مثال:

اگر در گراف زیر راس شماره ۱ را به عنوان مبدا انتخاب کنیم آنگاه الگوریتم تغییراتی را در آرایه Dist و P با توجه به جداول زیر بوجود خواهد آورد. باتوجه به ستون dist و p میتوان کوتاهترین مسیرها را رسم کرد.



مرحله شروع:

Vertex	S	Dist	P
1	1	0	1
2	0	12	1
3	0	2	1
4	0	7	1
5	0	$\infty$	1
6	0	$\infty$	1

Vertex	S	Dist	P
1	1	0	1
2	0	11	3
3	1	2	1
4	0	4	3
5	0	5	3
6	0	$\infty$	1

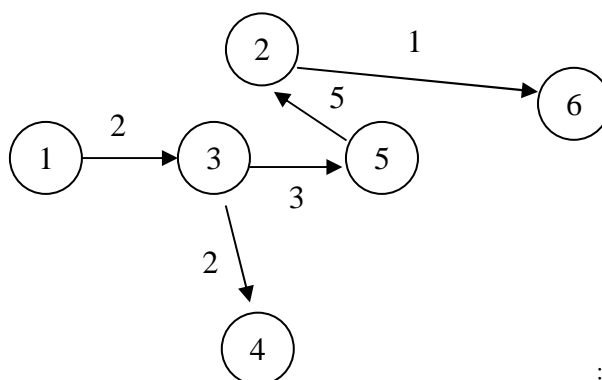
Vertex	S	Dist	P
1	1	0	1
2	0	11	3
3	1	2	1
4	1	4	3
5	0	5	3
6	0	21	4



Vertex	S	Dist	P
1	1	0	1
2	0	10	5
3	1	2	1
4	1	4	3
5	1	5	3
6	0	17	5

Vertex	S	Dist	P
1	1	0	1
2	1	10	5
3	1	2	1
4	1	4	3
5	1	5	3
6	0	16	2

در سطر ۲ آرایه p رأس ۵ قرار دارد، و این بدان معنی است که کمترین هزینه برای رفتن به رأس ۲ از طریق رأس ۵، می‌باشد در نتیجه کوتاهترین مسیر از رأس ۱ به رأس ۲ بصورت  $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2)$  می‌باشد. از روی آرایه p میتوان درختی تولید کرد که به نام درخت پوشای کوتاهترین مسیرها به مبدا (ریشه) v معروف است (SPST) (اگر گراف اولیه همبند باشد درخت حاصل از کوتاهترین مسیرها به ریشه v نیز پوشا است). شکل زیر درخت پوشای کوتاهترین مسیرها به مبدا رأس ۱ را نشان میدهد.



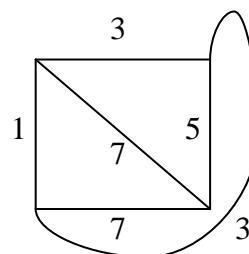
تطابق با روش حریصانه:

Select: Dist انتخاب رأس موقتی با کمترین

Feasibility: -----

Union: در برنامه (x)

نکته: با در نظر گرفتن هر یک از رئوس به عنوان مبدا و اجرای الگوریتم بیان شده میتوان به  $n$  درخت پوشای کوتاهترین مسیرها رسید که ممکن است هیچ کدام از آنها درخت پوشای کمینه نباشد. گراف زیر نشان دهنده این موضوع میباشد.



تحلیل زمانی: براحتی ملاحظه میشود که الگوریتم بالا را میتوان بصورتی پیاده سازی کرد که مرتبه زمانی آن  $O(n^2)$  گردد!

### ۳-۶- انتخاب بهینه فعالیتها (Activity Selection)

مسئله دیگری که برای آن میتوان به راحتی الگوریتمی به روش حریصانه تولید کرد، مسئله انتخاب فعالیتها نام دارد. فرض کنید  $n$  سخنران وجود دارند که هر کدام زمان شروع و پایان سخنرانی خود را به عنوان ورودی مسئله اعلام کرده‌اند. هدف انتخاب بیشترین تعداد سخنران به گونه‌ای است که هیچ دو سخنرانی با هم اشتراک بازه زمانی نداشته باشند.

نکته: جهت عدم تداخل در زمان شروع یا پایان میتوان بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کرد که پایان بازه سخنرانیها باز میباشند یعنی بصورت  $(\dots)$  میباشند.

ورودی:

$S_i$ : شروع فعالیت  $i$  ام

$F_i$ : پایان فعالیت  $i$  ام

$n$ : تعداد فعالیتها

هدف: انتخاب بیشترین تعداد فعالیت به قسمی که اشتراک بازه زمانی نداشته باشند.

توضیح الگوریتم:

۱- در ابتدا فعالیتها را براساس زمان پایان آنها مرتب کرده و سپس اولین فعالیت (زودترین زمان پایان) را انتخاب میکنیم.

۲- به ازای  $i$  از ۲ تا  $n$  مرحله ۳ را تکرار میکنیم:

۳- اگر فعالیت  $i$  ام با آخرین فعالیت انتخاب شده تداخل بازه زمانی نداشته آن را انتخاب میکنیم.

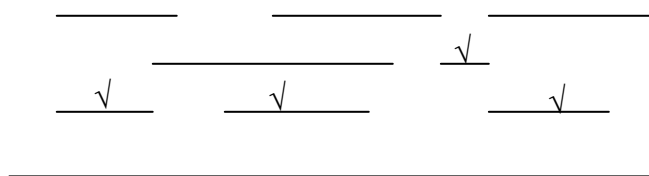
شبه کد الگوریتم را در زیر میبینیم (فرض بر این است که فعالیتها بر حسب صعودی زمان پایانشان مرتب شده‌اند):

Procedure Activity\_selector (A, S, F, n)

```

  A ← {1}
  j ← 1
  for i ← 2 to n do
    if  $S_i \geq F_j$  then
      A ← A ∪ {i}
      j ← i
    endif
  repeat
end.
```

شکل زیر نمونه ای از یک مثال را نشان میدهد.



تطابق با روش حریصانه:

select : فعالیتی که زودترین زمان پایان را داشته باشد

feasibility: با آخرین فعالیت انتخاب شده تداخل زمانی نداشته باشد

Union: اضافه کردن آن به مجموعه انتخاب شده ها

تحلیل زمانی: بیشترین زمان در الگوریتم مربوط به مرتب سازی ابتدای کار است و لذا الگوریتم دارای مرتبه زمانی

$O(n \log n)$  می باشد.

مثال:

selection	$s_i$	$f_i$
✓	1	4
-	3	5
-	0	6
✓	5	7
-	3	8
-	5	9
-	6	10
✓	8	11
-	8	11
-	2	13
✓	12	14

## ۴- روش تقسیم و حل (Divide & Conquer)

در این روش ابتدا از مسأله اصلی شروع کرده و آن را به مسائل کوچکتر تقسیم می‌کنیم. سپس هر یک از زیر مسائل را بصورت بازگشتی حل کرده و جواب حل زیر مسائل را با هم ترکیب می‌کنیم. این روش منطبق بر الگوی بالا به پایین می‌باشد (Top Down)، به این معنی که فضای حل مسئله از بالا به پایین ساخته شده تا به کوچکترین زیر مسئله برسیم و سپس از کوچکترین زیر مسائل حل شده و با هم ترکیب میشوند. مشکل این روش در این است که ممکن است زیر مسائل تکراری محاسبه شوند و لذا منجر به بالا رفتن زمان حل مسئله گردد. در هنگام تقسیم، مسأله بزرگتر به مسائل کوچکتر شکسته می‌شود اما همیشه اینطور نیست، باید تعداد تقسیمات را به گونه ای گرفت که کارایی بیشترین مقدار باشد، هرچه اندازه مسائل کوچک به هم نزدیکتر باشد معمولاً کارایی حاصل بیشتر است. بنابراین سعی می‌شود اندازه زیر مسائل تقریباً با هم مساوی باشند. شبه کد کلی روند حل مسائل در روش تقسیم و حل بصورت زیر میباشد:

```

Procudure D&C (p,q)
  if small (p,q) then
    return G(p,q)
  else
    m ← divide (p,q)
    return combine (D&C(p,m) , D&C(m+1,q))
  endif
end.

```

برای ارائه الگوریتم در این روش باید جزئیات توابع small ، G ، divide و combine را مشخص کرد. Small تصمیم گیری در مورد کوچک بودن اندازه مسئله را انجام میدهد به این معنی که در این تابع مشخص میشود که اگر اندازه مسئله به حد کافی کوچک است که دیگر نیازی به فراخوانی بازگشتی الگوریتم نباشد عمل تقسیم مسئله به زیر مسائل پایان میابد. تابع G مسئله با اندازه کوچک را حل میکند. تابع divide وظیفه تقسیم مسئله به زیر مسائل کوچکتر را به عهده دارد و تابع combine هم ترکیب جواب زیر مسائل را انجام میدهد.

### ۴-۱- محاسبه عنصر کمینه و بیشینه یک آرایه

توسط یک روش تقسیم و حل میتوان عنصر کمینه و بیشینه یک آرایه را محاسبه کرد. کد این الگوریتم در زیر آورده شده است:

```

Procedure MinMax(A, l, u, min, max)
  if l=u then
    min←A(l)
    max←A(l)
  elseif l+1=u then
    if A(l)<A(u) then
      min←A(l)
      max←A(u)
    else
      min←A(u)
      max←A(l)
    endif
  else
    mid ← (l+u)/2
    call MinMax(A, l, mid, min1, max1)
    call MinMax(A, l, mid+1, min2, max2)
    if min1<min2 then
      min←min1
    else
      min←min2
    endif
    if max1>max2 then
      max←max1
    else
      max←max2
    endif
  endif
end.

```

$$T(n) = \begin{cases} 0 & ; n = 1 \\ 1 & ; n = 2 \\ 2T(\frac{n}{2}) + 2 & ; n > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(n) = 2[2T(\frac{n}{4}) + 2] + 2 = 4T(\frac{n}{4}) + 4 + 2 = 2^2 T(\frac{n}{2^2}) + 2^2 + 2^1$$

$$= 2^i T(\frac{n}{2^i}) + 2^i + 2^{i-1} + \dots + 2^2 + 2^1$$

$$\stackrel{n=2^k}{=} 2^{k-1} T(2) + 2^{k-1} + \dots + 2^1$$

$$= \underbrace{2^{k-1}}_{\frac{n}{2}} + \underbrace{2^{k-1} + \dots + 2^1}_{2^k - 2} = \frac{n}{2} + n - 2 = \frac{3n}{2} - 2$$

### ۴-۲- ضرب دو ماتریس به روش استراسن (Strassen)

در ضرب دو ماتریس  $n \times n$ ، خروجی حاصل یک ماتریس  $n \times n$  می‌باشد، که این ماتریس دارای  $n^2$  عضو است که برای هر عضو به  $n$  ضرب نیاز داریم پس تعداد ضربهای مورد نیاز برای ضرب دو ماتریس  $n \times n$ ،  $O(n^3)$  می‌باشد. در این قسمت ضرب دو ماتریس  $n \times n$  را به وسیله روش تقسیم و حل انجام می‌دهیم، که مرتبه زمانی این روش هم  $O(n^3)$  خواهد بود. ابتدا هر ماتریس ورودی را از سطر و ستون به دو قسمت تجزیه میکنیم تا هر ماتریس ورودی به ۴ زیر ماتریس تجزیه شود.

هر کدام از زیر ماتریسها دارای  $n/2$  سطر و  $n/2$  ستون است که نشان میدهد

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

هر زیر ماتریس دارای  $n^2/4$  درایه میباشد. با کمی تامل میتوان دریافت که توسط روش زیر میتوان ۴ قسمت از ماتریس حاصلضرب را تولید کرد که این روش نیاز به ۸ فراخوانی بازگشتی تابع دارد و لذا دارای مرتبه زمانی  $O(n^3)$  میباشد.

$$C_{11} = A_{11} * B_{11} + A_{12} * B_{21}$$

$$C_{12} = A_{11} * B_{12} + A_{12} * B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21} * B_{11} + A_{22} * B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21} * B_{12} + A_{22} * B_{22}$$

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + 4 * \frac{n^2}{4} = O\left(n^{\log_2 8}\right) = n^3$$

روش استراسن: توسط یک ایده جالب میتوان معادلات بالا را (که نیاز به ۸ ضرب ماتریسی و ۴ جمع ماتریسی داشت) به گونه دیگری بازنویسی کرد که نیاز به ۷ ضرب ماتریسی و ۱۸ جمع ماتریسی داشته باشد. ۸ ضرب را به ۷ ضرب و ۱۸ جمع تبدیل می‌کند.

$$P_1 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$

$$P_2 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$

$$P_3 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$

$$P_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$$

$$P_5 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$

$$P_6 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$

$$P_7 = (A_{11} - A_{21})(B_{11} + B_{12})$$

$$C_{11} = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$$

$$C_{12} = P_1 + P_2$$

$$C_{21} = P_3 + P_4$$

$$C_{22} = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$$

بنابراین:

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + 18\frac{n^2}{4} = O\left(n^{\log_2 7}\right) = O\left(n^{2.81}\right)$$

### ۴-۳- تعیین نزدیکترین زوج نقاط

#### ۴-۳-۱- تعیین نزدیکترین زوج نقاط در فضای یک بعدی

در فضای یک بعدی فقط محور X را داریم که بر روی این محور تعداد n نقطه به عنوان ورودی داده شده است. و هدف پیدا کردن کمترین فاصله مابین نقاط است.

الگوریتم اول:

در این روش تک تک نقاط را با بقیه نقاط بررسی کرده و فاصله آنها را محاسبه کرده و بین فواصل کمترین را محاسبه میکنیم که در نتیجه نیاز به  $O(n^2)$  محاسبه دارد.

$$o(n^2) \leftarrow (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

الگوریتم دوم:

میتوان ابتدا نقاط را بر حسب مختصه X شان مرتب کرده و سپس بین فواصل نقاط متوالی کمترین فاصله را محاسبه کرد که در نتیجه الگوریتم دارای مرتبه زمانی  $O(n \log n)$  (به خاطر مرتب سازی) میباشد.

الگوریتم سوم (روش تقسیم و حل):

۱- نقاط را مرتب کنید

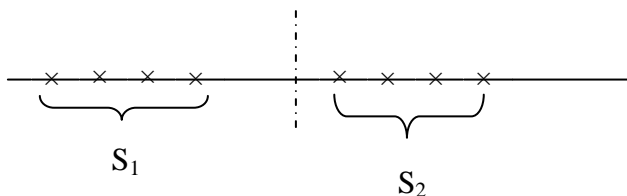
۲-  $n/2$  نقاط سمت چپ ( $p_i; i=1, \dots, n/2$ ) را بصورت بازگشتی حل کنید (کمترین فاصله بین آنها را  $S_1$  مینامیم)

۳-  $n/2$  نقاط سمت راست ( $q_i; i=1, \dots, n/2$ ) را بصورت بازگشتی حل کنید (کمترین فاصله بین آنها را  $S_2$  مینامیم)

۴- کمترین فاصله نهایی از رابطه زیر قابل تولید است:

$$\min = \{s_1, s_2, \min\{q_i\} - \max\{p_i\}\}$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = o(n)$$



در کل  $o(n \log n)$  می شود (بادر نظر گرفتن sort)

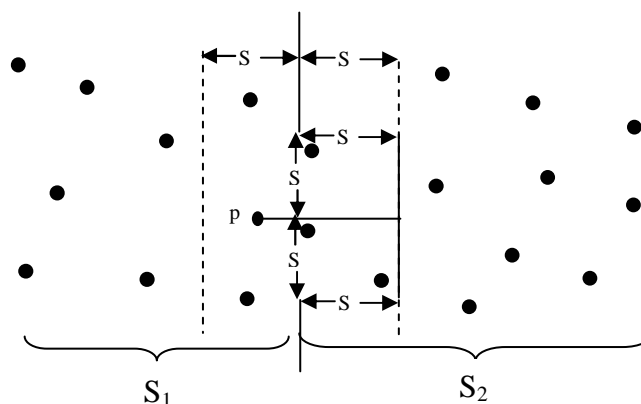
## ۴-۳-۲- تعیین نزدیکترین زوج نقاط در فضای دوبعدی

الگوریتم:

- ۱- در ابتدا نودها را در این فضا براساس مختصه  $X$  شان مرتب می‌کنیم.
- ۲- سپس با در نظر گرفتن یک خط فرضی مجموعه نقاط را به دو قسمت چپ و راست که هر کدام دارای  $n/2$  عنصر هستند تقسیم می‌کنیم.
- ۳- دو زیر مسئله چپ و راست را حل کرده تا کمترین فاصله در هر دو زیر مسئله تولید شود و سپس جواب حل دو زیر مسئله را  $S_1$  و  $S_2$  مینامیم.
- ۴-  $S = \min(S_1, S_2)$
- ۵- حال اگر شبیه روش یک بعدی فاصله نزدیکترین نقطه از نقاط چپ و راست خط را نیز در محاسبات دخیل کنیم ممکن است به جواب صحیح نرسیم. لذا در این مسئله با اضافه کردن یکسری شرایط سعی می‌کنیم تعداد مقایسه‌ها را کم کنیم. میتوان به اندازه  $S$  از خط وسط از هر دو طرف یک محدوده در نظر گرفت و نقاط داخل این باریکه را با هم مقایسه کرد که در نتیجه باز در بدترین شرایط تمام  $n/2$  نقطه سمت چپ و  $n/2$  نقطه سمت راست خط وسط در این باریکه‌ها قرار دارند و لذا مرتبه زمانی  $O(n^2)$  خواهد شد ولی میتوان برای هر نقطه واقع در باریکه سمت چپ مانند  $p$  فقط نقاط واقع در مستطیل خاصی را در نظر گرفت. این مستطیل به این صورت ساخته میشود که باید پای عمود از نقطه نسبت به خط وسط را پیدا کرده از آن به اندازه  $S$  به بالا، پایین و راست حرکت کرد تا یک ناحیه مستطیلی شکل به طول  $2S$  و عرض  $S$  حاصل شود. بدیهی است که حداکثر تعداد نقاط واقع در این ناحیه مستطیلی شکل برابر با ۶ نقطه است! و لذا برای هر نقطه در باریکه سمت چپ فقط باید فاصله آن را با ۶ نقطه در باریکه سمت راست محاسبه کرد و این فواصل را نیز در محاسبه کمترین فاصله دخیل کرد.

نکته: بدلیل اینکه پیاده سازی دایره ای با شعاع  $S$  مشکل است از یک مستطیل استفاده می‌کنیم.

نکته: فاصله دو نقطه  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  در فضای دو بعدی از رابطه  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  محاسبه میشود.





و لذا مرتبه زمانی الگوریتم بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 6\frac{n}{2} = O(n \log n)$$

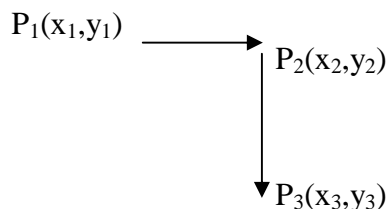
#### ۴-۴- تعاریف و الگوریتمهای پایه در هندسه محاسباتی

چندضلعی بسته: دنباله‌ای از پاره‌خطها که انتهای هرکدام به ابتدای دیگری وصل باشد و ضمناً بسته شود یعنی انتهای آخری به ابتدای اولی متصل باشد.

چند ضلعی ساده: چند ضلعی بسته‌ای که در آن هیچ یالی، یال دیگری را قطع نکند.

چند ضلعی محدب: چندضلعی ساده‌ای که زاویه‌ای بیشتر از ۱۸۰ نداشته باشد (هر دو نقطه داخل چندضلعی را به هم وصل کنیم پاره‌خط حاصل داخل چندضلعی باشد).

جهت چرخش بین سه نقطه در فضای ۲ بعدی:



$P_1, P_2, P_3 \leftarrow$  راست گرد

$P_3, P_1, P_2 \leftarrow$  راست گرد

$P_2, P_3, P_1 \leftarrow$  راست گرد

الگوریتم جهت تشخیص راست گرد یا چپ گرد بودن

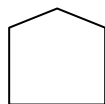
دترمینان ماتریس زیر محاسبه کرده، اگر بزرگتر از صفر بود چپ گرد است، اگر کوچکتر از صفر بود راست گرد است و اگر مساوی صفر بود ۳ نقطه هم خط هستند.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

تشخیص چپ گرد و راست گرد دارای مرتبه زمانی  $O(1)$

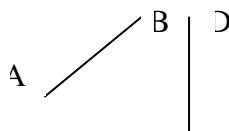
قضیه: نحوه تشخیص محدب بودن یک چندضلعی:

اگر تمامی رأس‌های متوالی نسبت به دو راس قبل از خود چپ گرد یا راست گرد باشد چندضلعی محدب است.  $O(n)$



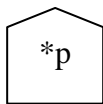
الگوریتم: چگونگی تشخیص متقاطع بودن دو پاره خط

دو پاره خط AB و CD به عنوان ورودی داده شده‌اند. اگر A نسبت به دو نقطه C و D راستگرد و B نسبت به دو نقطه C و D چپگرد باشد (و یا بالعکس) و همچنین C نسبت به دو نقطه A و B راستگرد و D نسبت به دو نقطه A و B چپگرد باشد (و یا بالعکس) آنگاه AB و CD متقاطع هستند و لذا باید در بدترین وضعیت ۴ بار الگوریتم تشخیص جهت (دترمینان بالا) محاسبه شود. از این رو الگوریتم دارای مرتبه زمانی  $O(1)$  میباشد.

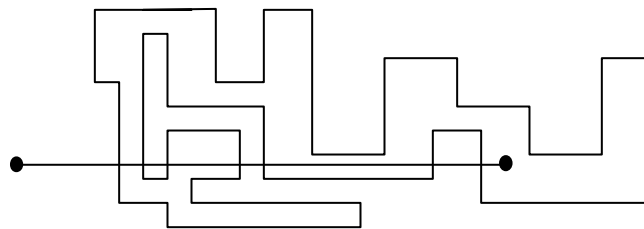


الگوریتم: نحوه پیدا کردن یک نود داخل چند ضلعی محدب  
سه رأس متوالی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم میانگین  $x$  های آنها و میانگین  $y$  های آنها  $(x, y)$  نقطه‌ای داخل چند ضلعی محدب را تولید میکنند. لذا این روش دارای مرتبه  $O(1)$  میباشد.

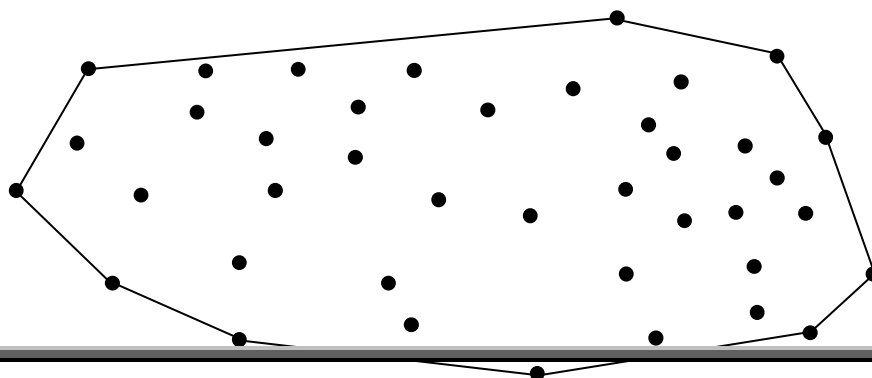
الگوریتم: تشخیص یک نقطه داخل چندضلعی محدب  
اگر تمام زوج رئوس اضلاع متوالی (در جهت خلاف چرخش عقربه های ساعت) نسبت به نقطه جدید چپ‌گرد بودند نقطه داخل چندضلعی می‌باشد در غیر این صورت خارج آن است. و لذا الگوریتم دارای زمان  $O(n)$  میباشد.



الگوریتم: تشخیص نقطه داخل چندضلعی مقعر  
یک نقطه خارج چندضلعی مقعر انتخاب می‌کنیم و به نقطه موردنظر وصل می‌کنیم اگر تعداد برخوردها با یالهای چندضلعی فرد بود داخل چند ضلعی غیر محدب می‌باشد و اگر زوج بود خارج آن است. و لذا الگوریتم دارای زمان  $O(n)$  میباشد. در شکل زیر تعداد نقاط تقاطع برابر با ۷ میباشد و لذا نقطه مورد نظر در داخل شکل قرار دارد.



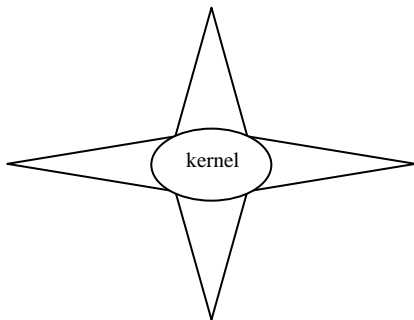
**Convex hull:** (پوسته یا پوش محدب). کوچکترین چند ضلعی محدب که شامل همه نقاط ورودی باشد.  
نکته: برای تصور شکل پوسته محدب میتوان فرض کرد که تعدادی نقطه داریم و یک کش حلقوی را باز کرده دور نقاط قرار میدهیم. شکل ساخته شده توسط کش پوسته محدب را نشان میدهد.



Extremepoint: نقاطی را که روی convexhull هستند نقاط مرزی می‌گوییم.  
نکته:

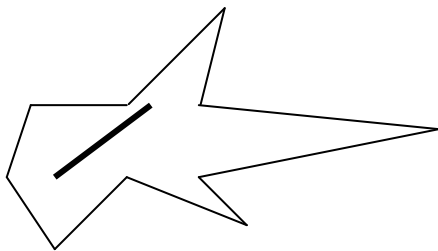
در بدترین وضعیت convex hull شامل تمام  $n$  نقطه می‌باشد.  
در بهترین وضعیت convex hull فقط شامل ۳ نقطه می‌باشد.

مسئله موزه هنری: نحوه طراحی یک موزه به قسمی که به کمترین تعداد نگهبان جهت رویت احتیاج باشد.



حل مسئله: در درجه اول بهتر است که convex hull باشد.  
در صورتی که طراحی مقعر باشد باید به شکل Star shaped باشد تا یک نگهبان برای کل موزه کافی می‌باشد..  
Kernel: فضایی در چند که از آن فضا کل چند ضلعی دیده می‌شود.  
نکته: در convex hull کل آن kernel است.

مسئله روشنایی: در convex hull یک لامپ برای روشنایی کافی است و موقعیت لامپ اهمیت ندارد در Star shaped یک لامپ برای روشنایی کافی است در صورتی که در داخل kernel قرار داشته باشد.



در شکل مقابل از یک لامپ که به شکل میله می‌باشد جهت روشن کردن کل چند ضلعی مقعر استفاده شده است.

الگوریتم محاسبه convexhull

دو روش مورد بحث قرار می‌گیرد:

۱- Greedy) Graham

۲- Shamos) (D & C

## ۴-۵- توليد پوش محدب (Convex Hull)

### ۴-۵-۱- الگوریتم Graham

- ۱- در ابتدا نودی را که دارای کمترین  $y$  می‌باشد پیدا می‌کنیم و آن را  $p_1$  می‌نامیم.
- ۲- مابقی نودها را نسبت به این نود براساس زاویه قطبی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت مرتب می‌کنیم و آنها را  $p_2$  تا  $p_n$  نامگذاری می‌کنیم.
- ۳-  $p_1$  و  $p_2$  را داخل یک پشته قرار داده و سپس چپ‌گرد بودن بقیه نودها را با دو نقطه سر پشته بررسی می‌کنیم. اگر جهت چپ‌گرد بود نقطه مورد بررسی را به پشته اضافه می‌کنیم در غیر این صورت یک نقطه از سر پشته حذف شده و دوباره بررسی را انجام می‌دهیم.

#### Procedure Graham

```

 $p_1 \leftarrow$  find the point with minimum  $y$ 
Sort the other points around  $p_1$  (CCW –Polar angle) and call them  $p_2, \dots, p_n$ 
Push ( $p_1$ )
Push ( $p_2$ )
For  $i \leftarrow 3$  to  $n$  do
    While Right (stack [top-1] , stack[top],  $P_i$ ) do
        Pop
    Repeat
        Push ( $p_i$ )
    repeat
End.
```

سرشکن شدن هزینه در الگوریتم:

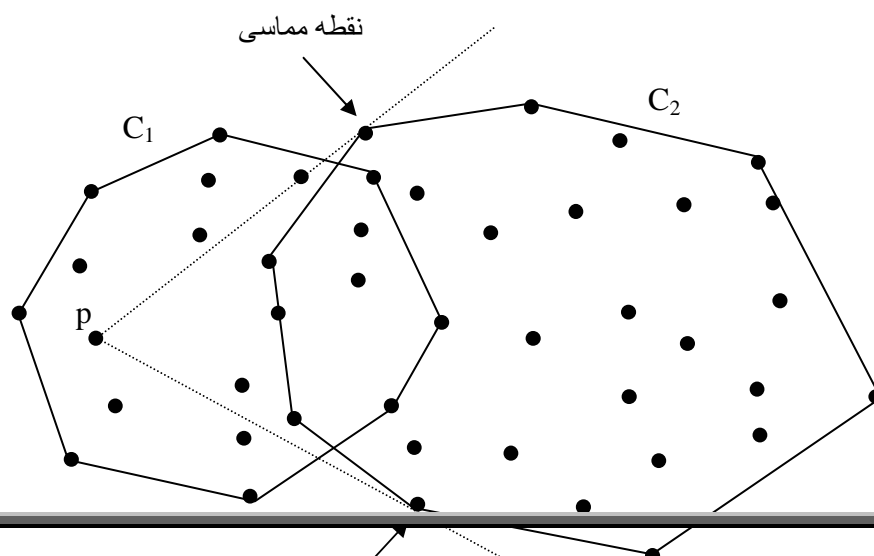
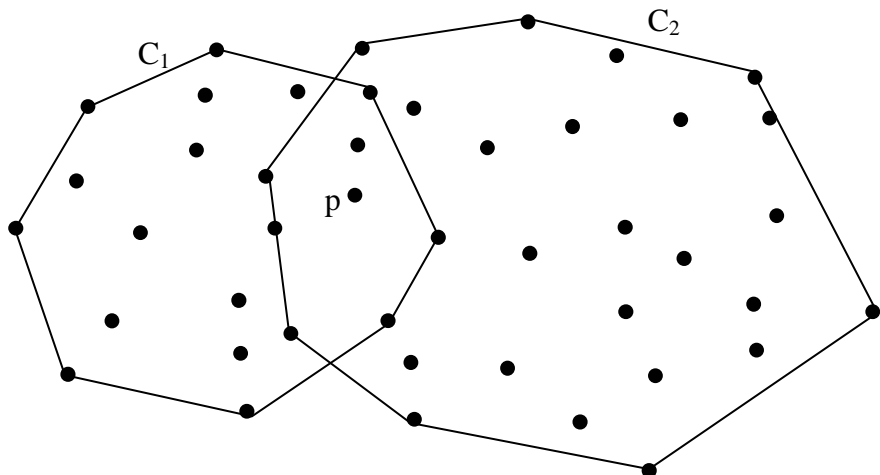
بیشترین تکرار در الگوریتم بالا مربوط به pop میباشد که برخلاف چیزی که در ظاهر نشان می‌دهد دارای مرتبه زمانی  $O(n^2)$  نیست بلکه  $O(n)$  است زیرا یک نقطه بیشتر از یک بار نمی‌تواند pop یا push شود و چون مرتبه زمانی مرتب سازی  $O(n \log n)$  است. لذا مرتبه زمانی الگوریتم  $O(n \log n)$  است.

## Shamos ۲-۵-۴

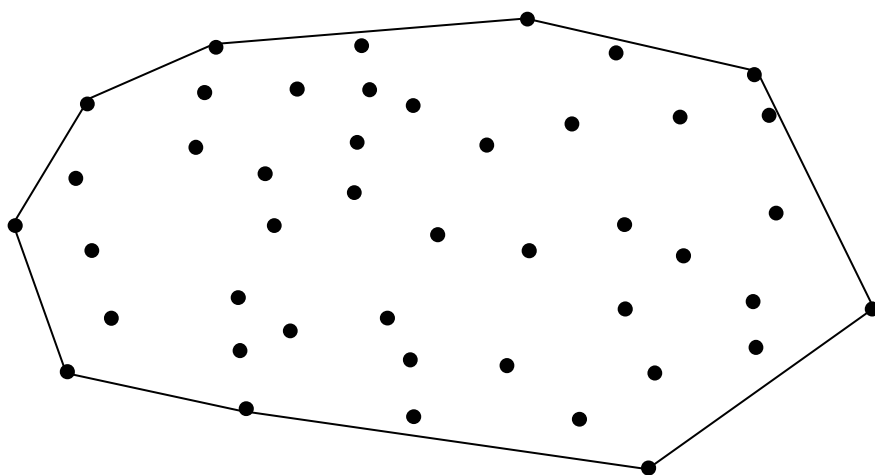
- ۱- نقاط را به دو دسته که هر دسته شامل  $n/2$  نقطه است تقسیم میکنیم.
- ۲- هر زیر مسئله را بصورت بازگشتی حل میکنیم ولذا برای هر کدام یک پوسته محدب تولید میشود. این دو پوسته را  $C_1$  و  $C_2$  مینامیم.
- ۳- یک نقطه داخل  $C_1$  در نظر گرفته و آن را  $p$  مینامیم.
- ۴- اگر  $p \in C_2$  آنگاه (نقطه  $p$  هم داخل  $C_1$  و هم داخل  $C_2$  است): دو مجموعه از نقاط  $C_1$  و  $C_2$  حول  $p$  که یک نقطه داخلی است مرتب هستند لذا میتوان آنها را ادغام کرده و سپس قسمت سوم الگوریتم گراهام را روی آنها اجرا کرد.
- ۵- اگر  $p \notin C_2$  آنگاه دو نقطه مماسی از  $p$  نسبت به  $C_2$  را محاسبه کرده لذا  $C_2$  به دو قسمت پوسته داخلی زاویه مماسی و پوسته خارجی زلویه مماسی تقسیم میشود. نقاط قسمت داخلی زاویه مماسی از  $C_2$  را حذف کرده و لذا نقاط قسمت خارجی زاویه مماسی از  $C_2$  و کل نقاط  $C_1$  حول  $p$  مرتب هستند با ادغام آنها و اجرای قسمت سوم الگوریتم گراهام میتوان پوسته محدب نهایی را تشکیل داد.

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn = O(n \cdot \log n)$$

اشکال زیر دو حالت مختلف که برای نقطه  $p$  قابل تصور است را نشان میدهد.



پوسته محدب نهایی به شکل زیر خواهد بود.



## ۵- روش برنامه سازی پویا (Dynamic Programming)

در روش تقسیم و حل دیدیم که ابتدا از مسئله اصلی شروع کرده و آن را به زیر مسائل کوچکتر تقسیم می‌کنیم و کار را تا حد ممکن پیش می‌بریم و سپس از انتها به ابتدا مسائل را حل می‌کنیم. در واقع برای شکستن مسائل الگوی بالا به پایین (top down) و در ترکیب جوابها الگوی پایین به بالا رعایت می‌گردد که منطبق بر الگوریتم‌های بازگشتی است. اما اگر در روش تقسیم و حل لازم باشد زیر مسئله خاصی را چندین مرتبه حل کنیم این تکرار کارآیی الگوریتم را پایین می‌آورد. اگر چنین زیرمسئله‌ای را یک بار حل کرده و جواب آنها را نگهداری کنیم، می‌توانیم در مراحل بعدی از آن استفاده کنیم و این اساس کار روش حل مسائلی است که به روش برنامه‌سازی پویا حل می‌شوند.

در این روش از کوچکترین مسائل شروع و همه آنها را حل می‌کنیم و جواب آنها را نگهداری می‌کنیم. سپس به سطح بعدی می‌رویم و کلیه مسائل اندکی بزرگتر را حل می‌کنیم و سپس به حل مسائل سطح بعدی می‌پردازیم و کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که مسئله اصلی حل شود. برای حل هریک از مسائل هر سطح می‌توانیم از حل کلیه سطوح پایین‌تر که لازم باشد استفاده کنیم. از روش برنامه سازی پویا زمانی میتوان استفاده کرد که اصل بهینگی برقرار باشد. این اصل بر این اساس است که برای حل مسئله بصورت بهینه از حل بهینه زیر مسائل آن میتوان استفاده کرد. در ادامه چند مسئله را که بدین روش حل می‌شوند بررسی می‌کنیم.

برنامه‌سازی پویا در مقایسه با روش تقسیم و حل: درخت حل مسئله را از پایین به بالا می‌سازیم و نتایج را در یک جدول نگهداری می‌کنیم تا در موقع لزوم بتوان از آنها استفاده کرد و دوباره آنها را حل نکرد. نکته: نوعی روش برنامه سازی پویا وجود دارد که در آن زیر فضای حل مسئله از بالا به پایین است ولی زیر مسائل حل شده در جدولی نگهداری میشوند تا از حل زیر مسائل تکراری پرهیز شود که این روش به نام روش به خاطر سپاری (memoized) شناخته میشود.

اصل بهینگی: انتخاب بهینه نهایی به انتخابهای بهینه اولیه بستگی دارد.

برای ارائه الگوریتم به روش برنامه سازی پویا ۴ مرحله را باید طراحی کرد:

۱- تعریف تابعی که حل تابع منجر به حل مسئله شود.

۲- بیان شرایط مرزی

۳- بیان جواب مسئله بر حسب تابع

۴- تعریف بازگشتی تابع

## ۵-۱- مسئله کوله پستی 0/1

مسئله کوله پستی صفر یا یک مدلی از مسئله کوله پستی است که در آن اشیاء یا بطور کامل انتخاب میشوند و یا انتخاب نمیشوند و نمیتوان فقط کسری از اشیاء را انتخاب کرد.

ورودی:

n: تعداد کیسه ها

$P_i$ : سود حاصل از انتخاب کل جسم i ام

$W_i$ : وزن کل جسم i ام

M: گنجایش کوله پستی

هدف: بیشینه کردن سود حاصل از انتخاب اجناس یعنی  $Max \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$

شرایط مسئله:

وزن همه کیسه ها روی هم از وزن کوله پستی بیشتر است زیرا اگر کمتر باشد یعنی می توانیم همه را برداریم و انتخابی وجود ندارد همچنین مجموع وزن اجسامی که انتخاب کردیم از وزن کل کوله پستی نباید بیشتر شود.

$$\sum_{i=1}^n w_i > M \quad -1$$

$$\sum_{i=1}^n x_i w_i \leq M \quad -2$$

خروجی: کسری از کیسه i ام که انتخاب می شود داخل عنصر i ام آرایه قرار می گیرد.

$X_i =$  کسری از کیسه i ام که انتخاب میشود. ( $X_i = 0$  or  $1$ ) ( $i=1, \dots, n$ )

راه حل: توسط مثالهای نقضی میتوان نشان داد که انتخاب کیسه ها بر اساس معیار مطرح شده در مسئله کوله پستی کسری ممکن است به جواب بهینه منجر نشود. توسط مثال نقضی میتوان این موضوع را نشان داد.





الگوریتم:

۱-  $g_i(y)$ : بیشترین سود حاصل از حل مسأله برای جسم  $i+1$  ام تا  $n$  ام به شرطی که گنجایش کوله  $y$  باشد.

۲-  $g_0(M)$ : بیشترین سود حاصل از حل مسئله برای کل اجسام به شرطی که گنجایش کوله  $M$  باشد.

۳- شرایط مرزی:

$g_n(y) = 0$ ، (از جسم  $n+1$  به بعد جسمی وجود ندارد که سودی داشته باشد)

$y < 0$ : گنجایش کوله منفی می باشد یعنی بیشتر از حد کوله جسم داریم در این حالت  $g_i(y)$  حالت ضرر است.

$$(g_i(y)) = -\infty$$

$$g_i(y) = \text{Max}\{g_{i+1}(y), p_{i+1} + g_{i+1}(y - w_{i+1})\} \quad \text{۴-}$$

مثال: مسئله زیر را به کمک الگوریتم بالا حل کنید؟

P	۲۰	۱۰	۳۰
w	۱۲	۱۰	۱۳

$M=30$

$$g_0(30) = \text{Max}\{g_1(30), 20 + g_1(18)\} = 50$$

$$g_1(30) = \text{Max}\{g_2(30), 10 + g_2(20)\} = 40$$

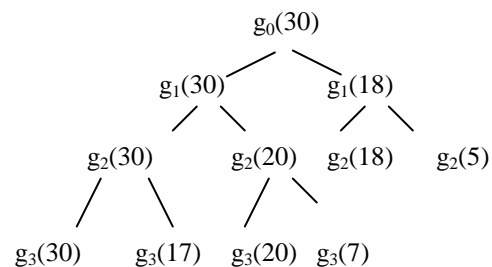
$$g_1(18) = \text{Max}\{g_2(18), 10 + g_2(8)\} = 30$$

$$g_2(30) = \text{Max}\{g_3(30), 30 + g_3(17)\} = 30$$

$$g_2(20) = \text{Max}\{g_3(20), 30 + g_3(7)\} = 30$$

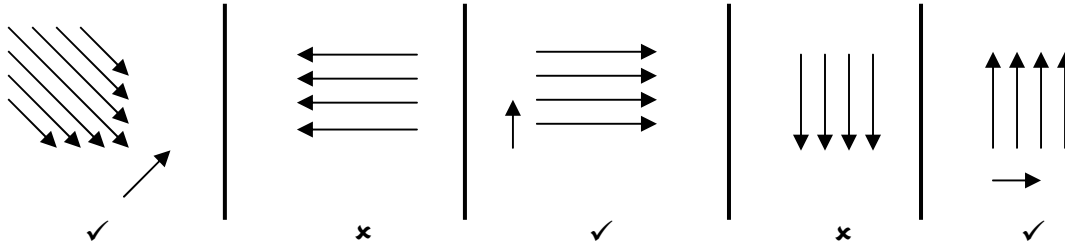
$$g_2(18) = \text{Max}\{g_3(18), 30 + g_3(5)\} = 30$$

$$g_2(8) = \text{Max}\{g_3(8), 30 + g_3(-5)\} = 0$$



g	-	0	1	2		Y		M-1	M
0	$-\infty$								جواب
1	$-\infty$								
	$-\infty$								
i	$-\infty$					$g_i(y)$			
	$-\infty$								
n-1	$-\infty$								
n	$-\infty$	0	0	0	0	0	0	0	0

نکته اساسی در روش محاسبه ماتریس جواب در این است که به کدام یک از روشهای زیر میتوان ماتریس را پر کرد. با کمی دقت در رابطه بازگشتی میتوان به جواب رسید.



```
function DP_knapsack(W,P,n,M)
  for i ← 0 to M do g[n,i] ← 0 repeat
  for i ← 0 to n do g[-,i] ← -∞ repeat
  for i = n-1 to 0
    for j = 0 to m
      g[i,j] = max { g[i+1,y], pi+1 + g[i+1,y-Wi+1] }
    repeat
  repeat
  return g[0,M]
end.
```

مرتبه زمانی این الگوریتم  $O(M.n)$  می باشد.

نکته: با اینکه مرتبه زمانی الگوریتم بالا در ظاهر چندجمله ای است ولی چون فقط به تعداد اقلام ورودی وابسته نیست بلکه به حجم کوله پشتی هم وابسته است لذا به آن شبه چند جمله ای (pseudo polynomial) گویند.

## ۵-۲- مسئله همه کوتاهترین مسیرها (APSP)

مسئله دیگری که از دسته مسائل کوتاهترین مسیرها بر روی گراف است، مسئله همه کوتاهترین مسیرها (All Pairs Shortest Paths) میباشد که هدف آن پیدا کردن طول کوتاهترین مسیر بین همه زوج رئوس گراف میباشد.

در این روش ما تمام مسیرهای ممکن از هر رأسی را به هر رأس دیگر که از رأس  $k$  بگذرد یا نگذرد را محاسبه می کنیم تا کوتاهترین مسیر بدست آید و خود  $k$  از یک تا  $n$  تغییر می کند. و وقتی  $k=n$  شد ما تمام حالات ممکن برای کوتاهترین مسیر را محاسبه کردیم. (جواب  $A(i,j)$ ) و وقتی  $k=0$  است یعنی از هیچ رأس عبور نمی کنیم مستقیماً از رأس  $i$  به  $j$  می رویم که همان  $cost(i,j)$  می باشد.

نکته: در صورتی که مسیر از  $i$  به  $j$  وجود نداشته باشد. ارزش یالهای آن برای  $\infty$  می شود.

الگوریتم :

$A^k(i,j) =$   
طول کوتاهترین مسیر از رأس  $i$  به رأس  $j$  به قسمی که از رئوس با شماره بزرگتر از  $k$  حق گذر نداشته باشیم  
 $A^n(i,j) =$   
جواب  
 $A^0(i,j) = cost(i,j)$

عبارت زیر بیان بازگشتی توضیحات بالا می باشد.

$$A^k(i, j) = \min\{A^{k-1}(i, j), A^{k-1}(i, k) + A^{k-1}(k, j)\}$$

نکته: برای محاسبه  $A^k(i, j)$  دو حالت پیش می آید. یا مسیر بهینه از راس  $k$  میگذرد که در نتیجه مسیر به دو قسمت  $i \rightarrow k$  و  $k \rightarrow j$  قابل تقسیم است (که هیچ کدام از این دو مسیر راس با شماره بزرگتر از  $k-1$  ندارند) و یا از راس  $k$  نمیگذریم که در نتیجه کلیه رئوس نمیتوانند از  $k-1$  بزرگتر باشند.

حال اگر ما بتوانیم  $A^n(i, j)$  را محاسبه کنیم کوتاهترین مسیر از  $i \rightarrow j$  را محاسبه نموده ایم.

الگوریتم مورد بحث به نام الگوریتم floyd معروف است که شبه کد آن را در زیر میبینیم:

```

procedure APSP_Floyd(cost, n, A)
  for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to n do
      A[i, j] ← cost[i, j]
      p[i, j] ← 0
    repeat
      repeat
        for k ← 1 to n do
          for i ← 1 to n do
            for j ← 1 to n do
              A[i, j] ← min{ A[i, j], A[i, k] + A[k, j] }      (*)
            repeat
              repeat
                repeat
              end.
            end.
          end.
        end.
      end.
    end.
  end.

```

تولید مسیر: اگر در الگوریتم بالا جمله (x) را با جمله زیر جایگزین کنیم آنگاه عنصر  $P[i, j]$  همیشه راس میانی بین دو راس  $i$  و  $j$  را دربردارد و لذا میتوان به کمک ماتریس  $p$  کوتاهترین مسیرها را تولید کرد:

```

if A[i, k] + A[k, j] < A[i, j] then
  A[i, j] ← A[i, k] + A[k, j]
  p[i, j] ← k
endif

```

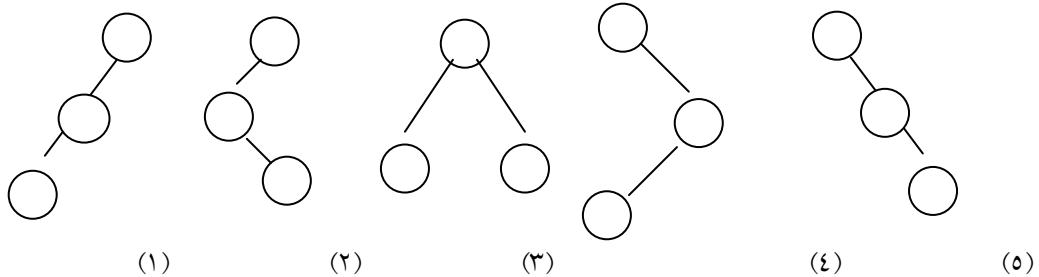
واضح است که مرتبه زمانی الگوریتم بالا  $O(n^3)$  میباشد.

۵-۳- عدد کاتلان (*Catalan Number*) و مسائل وابسته

حال به بررسی چند مسئله که همگی آنها دارای پاسخهای یکسان می باشند، میپردازیم.

۱- با  $n$  گره چند درخت دودویی می توان ساخت؟

مثال: با سه گره چند درخت دودوئی می توان ساخت؟



۲- به چند طریق می توان  $n+1$  یک ماتریس را در هم ضرب کرد؟

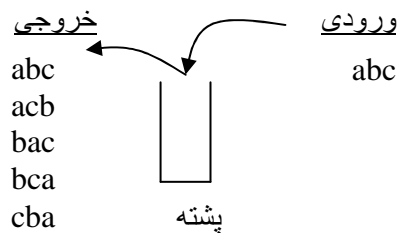
مثال: به چند طریق می توان ۴ ماتریس را در هم ضرب کرد؟

$$\begin{aligned}
 1 - & ((m_1 \times m_2) \times m_3) m_4 \\
 2 - & (m_1 \times (m_2 \times m_3)) \times m_4 \\
 3 - & ((m_1 \times m_2) \times (m_3 \times m_4)) \\
 4 - & (m_1 \times ((m_2 \times m_3) \times m_4)) \\
 5 - & (m_1 \times (m_2 \times (m_3 \times m_4)))
 \end{aligned}$$

۳- به چند طریق می توان  $n$  ورودی را به کمک یک پشته در خروجی چاپ کرد به قسمی که فقط عملیات read

push و pop قابل انجام است؟

مثال: ۳ ورودی a,b,c را به چند طریق می توان در خروجی چاپ کرد؟



ملاحظه میشود که ۳ ورودی را به ۵ طریق میتوان در خروجی قرار داد.

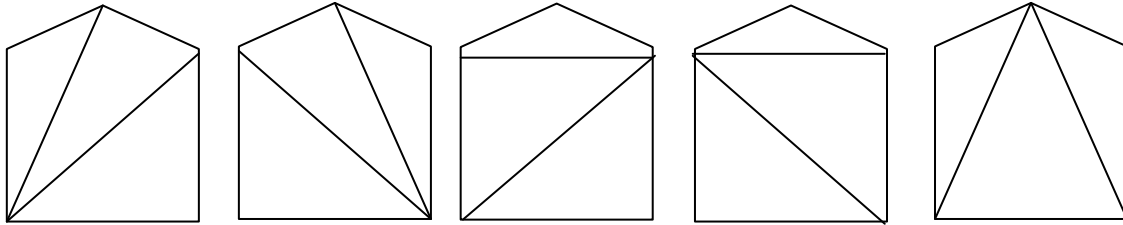
۴- به چند طریق می توان یک  $n+2$  ضلعی محدب را مثلث بندی کرد؟

ابتدا تعریفی از مثلث بندی ارائه میدهیم. اگر  $P$  یک چندضلعی محدب باشد، مثلث بندی  $P$ ، اضافه کردن قطرهایی

غیر متقاطع در داخل  $P$  است به گونه ای که  $P$  به تعدادی مثلث افراز گردد.

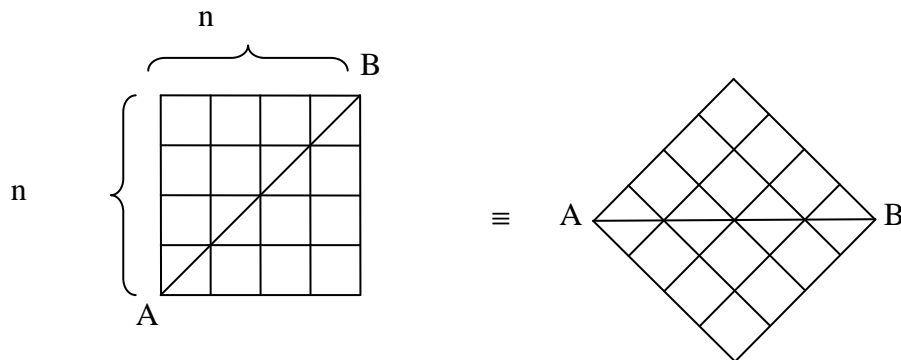
نکته: مثلث بندی  $P$  منجر به رسم بیشترین تعداد اقطار داخل  $P$  میشود به قسمی که اقطار یکدیگر را قطع نکنند.

مثال: یک ۵ ضلعی محدب را به چند طریق می توان مثلث بندی کرد؟

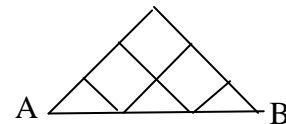


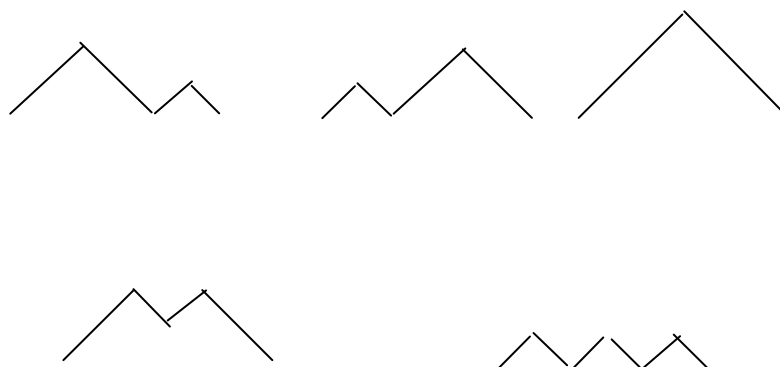
ملاحظه میشود که یک ۵ ضلعی محدب را به ۵ طریق میتوان مثلث بندی کرد.

۵- به چند طریق می توان در یک گرید که دارای  $n$  سطر و  $n$  ستون است، از پوشه پایین سمت چپ به گوشه بالا سمت راست رسید. به قسمتی که هیچگاه زیر قطر قرار نگیریم و فقط  $+90$  درجه یا  $0$  درجه حرکت کنیم (شکل سمت چپ) یا هیچگاه زیر پاره خط واصل بین  $A$  و  $B$  قرار نگیریم و فقط  $+45$  یا  $-45$  درجه حرکت کنیم (شکل سمت راست)؟



مثال: در شکل زیر به چند طریق می توان از رأس  $A$  به  $B$  رسید؟  
(به قسمتی که حرکت فقط  $+45$  و یا  $-45$  درجه باشد.)

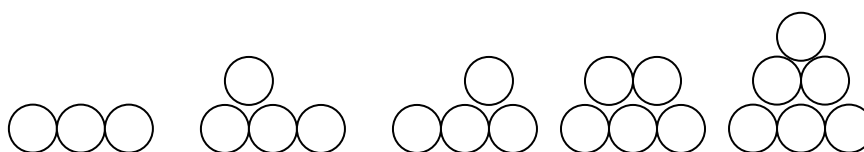




ملاحظه میشود که باز برای  $n=3$  به ۵ طریق امکان پذیر است.

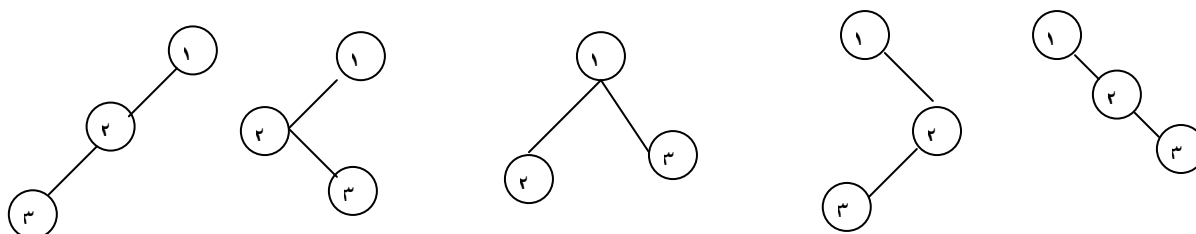
۶- به چند طریق می توان  $n$  سکه را در قاعده قرار داد و روی آن تعداد دلخواه سکه چید؟

مثال: به چند طریق می توان ۳ سکه را در قاعده قرار داد و روی آن سکه چید؟



ملاحظه میشود که باز برای  $n=3$  به ۵ طریق امکان پذیر است.

۷- اگر پیمایش preorder درخت دودویی برابر با  $1, 2, 3, \dots, n$  باشد چند inorder برای آن متصور است؟



فقط درختهای بالا است که پیمایش preorder آنها  $1, 2, 3$  است و لذا ۵ طریق inorder زیر امکان پذیر است:

- 1,2,3
- 1,3,2
- 2,1,3
- 2,3,1

3,2,1

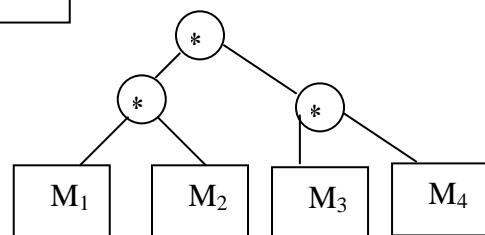
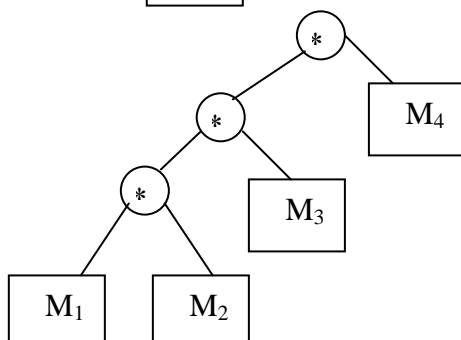
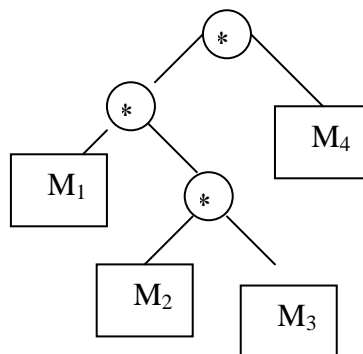
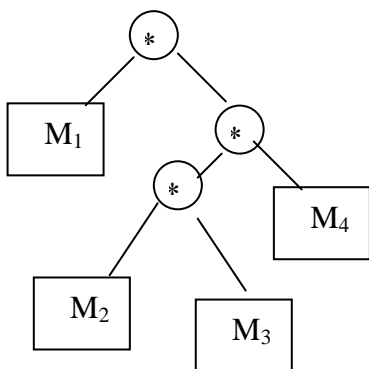
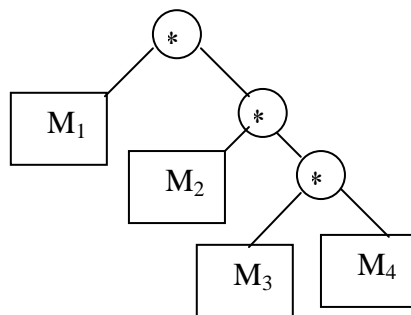
قابل اثبات است که جواب همگی این مسائل همگی برابر با عدد معروفی به نام عدد کاتالان میباشد که دارای مقدار زیر است:

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

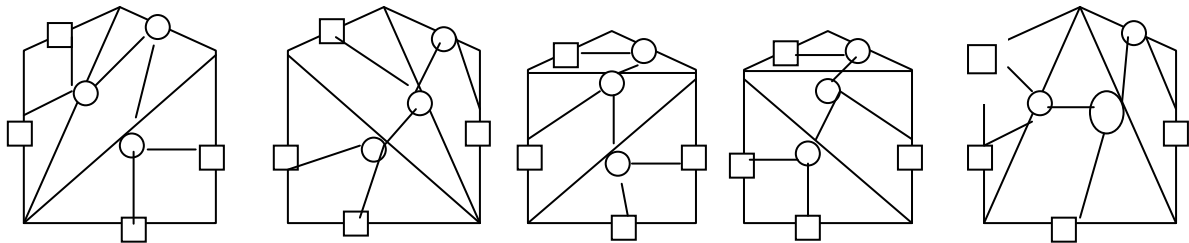
حال نکته جالب در این است که باید بتوان ثابت کرد که این مسائل همگی ذاتاً یک مسئله هستند و در نتیجه باید بتوان یک نگاشت یک به یک بین جوابهای آنها ایجاد کرد.

مثال: به بررسی رابطه‌های بین این مسئله‌ها می‌پردازیم (سعی کنید این روابط را از روی شکل ببایید).

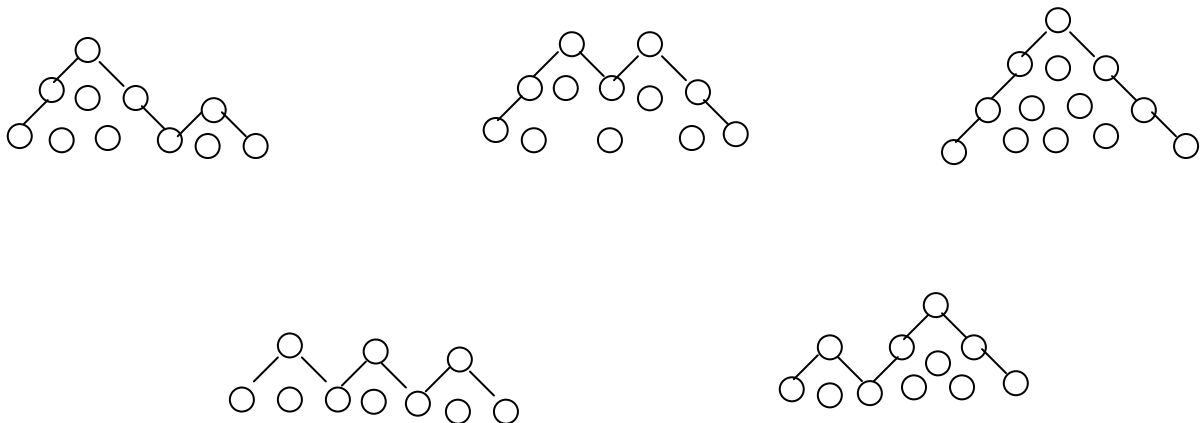
رابطه‌ای بین مسئله ۱ و ۲



رابطه بین مسئله ۴ و ۲



رابطه بین مسئله ۵ و ۶:



سعی کنید رابطه بین بقیه مسائل را خودتان بدست آورید.

#### ۵-۴- ضرب زنجیره‌ای و بهینه ماتریس‌ها

میدانیم که در ضرب دو ماتریس که اولی دارای  $m$  سطر و  $n$  ستون و دومی دارای  $n$  سطر و  $p$  ستون است باید به تعداد  $m \times n \times p$  ضرب انجام داد و لذا در این قسمت هزینه ضرب این دو ماتریس را برابر با  $m \times n \times p$  در نظر میگیریم. با این فرض به شرح صورت مسئله میپردازیم. در این مسئله فرض بر این است که  $n$  ماتریس باید در هم ضرب شوند و هدف تعیین طریقی از ضرب است که در آن هزینه کمینه گردد (میدانیم که تعداد طرق ضرب  $n$  ماتریس برابر با  $C_{n-1}$  است).



ورودی: اعداد صحیح  $p_0, p_1, \dots, p_n$

که در آن ماتریس  $p_{i-1}$  تعداد سطرها و  $p_i$  تعداد ستونها ماتریس  $i$  ام ( $M_i$ ) است.

خروجی: کمترین هزینه ضرب ماتریس های  $M_1$  تا  $M_n$

$$m_1 * m_2 * m_3 * \dots * m_n$$

روش حل:

$$\text{cost}(m_{p_i \times p_j} * m_{p_j \times p_k}) = p_i * p_j * p_k$$

مراحل برنامه سازی پویا:

$$1- m[i, j] = M_i * \dots * M_j \text{ های ماتریس ضرب هزینه}$$

$$2- m[i, i] = 0$$

$$3- m[1, n] = \text{جواب}$$

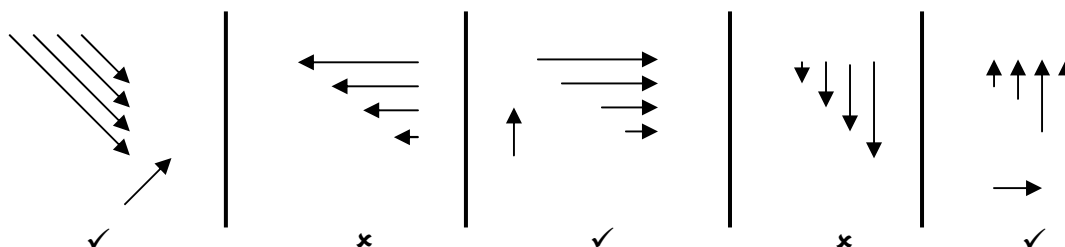
$$4- m[i, j] = \min_{i \leq k < j} \{m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1} p_k p_j\}$$

توضیح:

با کمی دقت در رابطه بازگشتی میتوان به نحوه محاسبه عناصر ماتریس  $m$  دست یافت. همچنین چون همیشه در

$m[i, j]$  فرض بر این است که  $i \leq j$  لذا فقط عناصر بالای قطر اصلی در ماتریس  $m$  باید محاسبه شوند.

m	1	2		j		n
1	0					جواب
2	x	0				
	x	x	0			
i	x	x	x	0		
	x	x	x	x	0	
n	x	x	x	x	x	0



واضح است که برای محاسبه ماتریس  $m$  باید عناصر بالای قطر اصلی محاسبه شوند و برای هر درایه نیز در بدترین وضعیت نیاز به مینیمم گیری روی  $n-1$  عضو وجود دارد (بر اساس رابطه بازگشتی در الگوریتم) و از این رو این الگوریتم دارای مرتبه زمانی  $O(n^3)$  میباشد.

مثال:

محاسبه کمترین هزینه ضرب ۴ ماتریس: (به ۵ طریق می توان ۴ ماتریس را ضرب کرد).

ورودی:

$$M_{1(2*3)} * M_{2(3*5)} * M_{3(5*4)} * M_{4(4*1)}$$

$$p_0=2, p_1=3, p_2=5, p_3=4, p_4=1$$

$$m[1,2] = \min\{m[1,1] + m[2,2] + p_0 p_1 p_2\} = 2 * 3 * 5 = 30$$

$$m[2,3] = \min\{m[2,2] + m[3,3] + p_1 p_2 p_3\} = 3 * 5 * 4 = 60$$

$$m[1,3] = \min\{m[1,1] + m[2,3] + p_0 p_1 p_3, m[1,2] + m[3,3] + p_0 p_2 p_3\} \\ = \min\{60 + 2 * 3 * 4, 30 + 2 * 5 * 4\} = 70$$

$$m[3,4] = \min\{m[3,3] + m[4,4] + p_2 p_3 p_4\} = 20$$

$$m[2,4] = \min\{m[2,2] + m[3,4] + p_1 p_2 p_4, m[2,3] + m[4,4] + p_1 p_3 p_4\} \\ = \min\{20 + 3 * 5 * 1, 60 + 3 * 4 * 1\} = 35$$

$$m[1,4] = \min\{m[1,1] + m[2,4] + p_0 p_1 p_4, m[1,2] + m[3,4] + p_0 p_2 p_4, m[1,3] + m[4,4] + p_0 p_3 p_4\} \\ = \min\{35 + 2 * 3 * 1, 30 + 20 + 2 * 5 * 1, 70 + 2 * 4 * 1\} = 41$$

نکته: برای بدست آوردن طریق بهینه ضرب باید دقت کرد که جواب بهینه بر اساس کدام انتخاب بدست آمده است. برای مثال جواب ۴۱ در مثال بالا به خاطر کمینه بودن  $35 + 2 * 3 * 1$  بدست آمده است که این مقدار نیز همان  $m[1,1] + m[2,4] + p_0 p_1 p_4$  است و لذا باید ابتدا  $M_1$  را جدا کرد و جواب بهینه  $M_2 * \dots * M_4$  را بدست آورد و این دو ماتریس را در هم ضرب کرد.  $m[2,4]$  نیز خود از روی  $m[2,2] + m[3,4] + p_1 p_2 p_4$  محاسبه شده است و لذا باید ابتدا جواب بهینه  $M_3 * M_4$  را بدست آورده و در  $M_2$  ضرب کرد. پس طبقه ضرب بهینه بصورت زیر است:

$$(M_1) * ((M_2) * ((M_3) * (M_4)))$$

## ۵-۵- مثلث بندی بهینه چند ضلعی محدب

یکی دیگر از مسئله های جالبی که توسط روش برنامه سازی پویا میتوان برای آن الگوریتم کارایی تولید کرد مسئله مثلث بندی (triangulation) بهینه یک چند ضلعی محدب نام دارد. اکنون به بیان این مسئله و روش حل آن میپردازیم.

ورودی: مختصات  $n+1$  راس از یک  $n+1$  ضلعی محدب که رئوس آن بصورت  $V_0, V_1, \dots, V_n$  میباشد.

هدف: مثلث بندی چند ضلعی به گونه ای که مجموع محیط مثلثها کمینه گردد.

قبل از ارائه الگوریتم ابتدا  $W(i,j,k)$  را بصورت هزینه مثلث  $V_i, V_j, V_k$  یا همان محیط مثلث  $V_i, V_j, V_k$  تعریف میکنیم.

الگوریتم:

شبه دیگر مسائل باید به ارائه ۴ مرحله برنامه سازی پویا بپردازیم:

$$1- \quad t[i,j] = V_{i-1}, V_i, \dots, V_j \text{ روی رئوس}$$

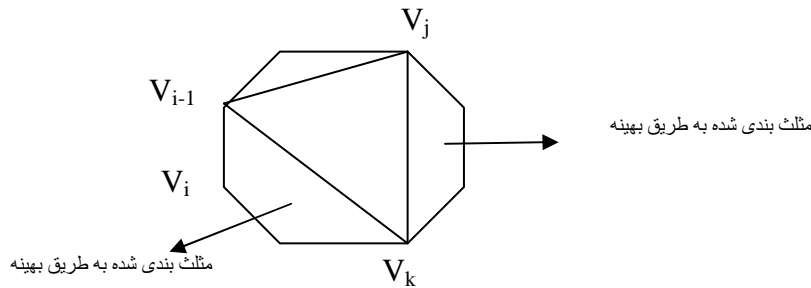
$$2- \quad t[i,i+1]=0 \text{ (بدیهی)}$$

$$3- \quad t[1,n] = \text{جواب}$$

$$4- \quad \text{رابطه بازگشتی:}$$

$$t[i,j] = \min \{ t[i,k] + t[k+1,j] + w(v_{i-1}, v_k, v_j) \}$$

$$i \leq k < j$$



رابطه بازگشتی بدین صورت نوشته شده است که در طریقه مثلث بندی بهینه رئوس  $V_{i-1}$  تا  $V_j$  راسی مثل  $V_k$  وجود دارد که هم از  $V_{i-1}$  و هم از  $V_j$  به آن قطری متصل گردیده است و همچنین  $V_{i-1}$  تا  $V_k$  و  $V_k$  تا  $V_j$  بصورت بهینه مثلث بندی شده اند. بنابراین برای پیدا کردن چنین  $k$  ای باید تمام رئوس بین  $V_{i-1}$  تا  $V_j$  را بررسی کرد.

مثال: چند ضلعی زیر را به روش بالا با کمترین هزینه مثلث بندی کنید؟

$$t[1,2] = \min \{ t(1,1) + t(2,2) + v_0 v_1 v_2 \} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$t[1,3] = \min \{ t(1,2) + t(2,3) + v_0 v_2 v_3 = 3 + \sqrt{2} + 3\sqrt{5}$$

$$t(1,2) + t(3,3) + v_0 v_2 v_3 = 2 + \sqrt{2} + 3\sqrt{5} \}$$

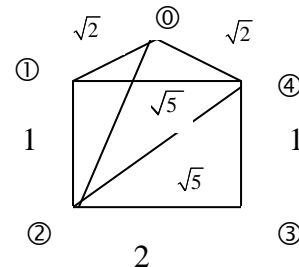
$$= 2 + \sqrt{2} + 3\sqrt{5}$$

$$t[2,3] = \min \{ t(2,2) + t(3,3) + v_1 v_2 v_3 \} = 3 + \sqrt{5}$$

$$t[3,4] = \min \{ t(3,3) + t(4,4) + v_2 v_3 v_4 \} = 3\sqrt{5}$$

$$t[2,4] = \min \{ t(2,2) + t(3,4) + v_1 v_2 v_3 = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$t(2,3) + t(4,4) + v_1 v_3 v_4 = 6 + 2\sqrt{5} \}$$



$$\begin{aligned}
 t[1,4] &= \min\{t(1,1)+t(2,4)+v_0v_1v_4 = 8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5} \quad \text{و} \\
 t(1,2)+t(3,4)+v_0v_2v_4 &= 4+4\sqrt{5}+2\sqrt{2} \quad \text{و} \\
 t(1,3)+t(4,4)+v_0v_3v_4 \} &= 4+2\sqrt{2}+4\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

### ۵-۶- طولانی ترین زیر دنباله مشترک (LCS)

در این قسمت به مسئله طولانی ترین زیر دنباله مشترک (Longest Common Subsequence) میپردازیم. ابتدا تعریفهای لازم را ارائه میدهیم.

رشته: دنباله ای از کاراکترهای پشت سرهم با ترتیبی خاص. برای مثال در زیر رشته  $X$  که دنباله ای از  $m$  حرف است دیده میشود.

پیشوند  $i$  ام  $X$ : حرف پشت سرهم از ابتدای رشته  $X$  را پیشوند  $i$  ام  $X$  گویند و با  $X_i$  نشان میدهند.  
حرف  $i$  ام:  $h$  امین حرف رشته  $X$  را با  $X_i$  نشان میدهند.

$$X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$$

$$X_i = \langle x_1, \dots, x_i \rangle$$

$$Z = \langle z_1, \dots, z_k \rangle$$

زیر دنباله: گوئیم  $Z$  زیردنباله ای از  $X$  است اگر:

$$\exists i_1, i_2, \dots, i_k \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k : \forall j : 1 \leq j \leq k \quad z_j = x_{i_j}$$

مثال:

$$X = \langle A, B, B, A, D, A, B, F \rangle$$

$$Z = \langle B, A, A, F \rangle$$

$$\begin{cases}
 i_1 = 2 \Rightarrow z_1 = x_2 \\
 i_2 = 4 \Rightarrow z_2 = x_4 \\
 i_3 = 6 \Rightarrow z_3 = x_6 \\
 i_4 = 8 \Rightarrow z_4 = x_8
 \end{cases}$$

نکته: هر رشته  $m$  حرفی دارای  $2^m$  زیردنباله است.

دراین مسئله در ورودی دو رشته به طولهای  $n, m$  وجود دارد. که هدف مسئله بدست آوردن طولانی ترین زیردنباله مشترک می باشد.

ورودی:

دو دنباله  $X$  و  $Y$  که اولی به طول  $m$  و دومی به طول  $n$  میباشد.

خروجی: طول طولانی ترین زیر دنباله مشترک  $X$  و  $Y$

یک راه حل ساده جهت حل این مسئله استفاده از تابع زیر و یک آرایه دوبعدی  $m \times n$  می باشد.

شبهه دیگر مسائل باید به ارائه ۴ مرحله برنامه سازی پویا پردازیم:

۱- طول طولانی ترین زیر دنباله مشترک  $X_i$  و  $Y_j$   $c[i,j] =$

۲-  $c[i,0]=c[0,j]=0 ; \forall i,j$  (بدیهی) وقتی یکی از رشته ها تهی باشد هیچ اشتراکی وجود نخواهد

داشت)

۳- جواب  $c[m,n]$

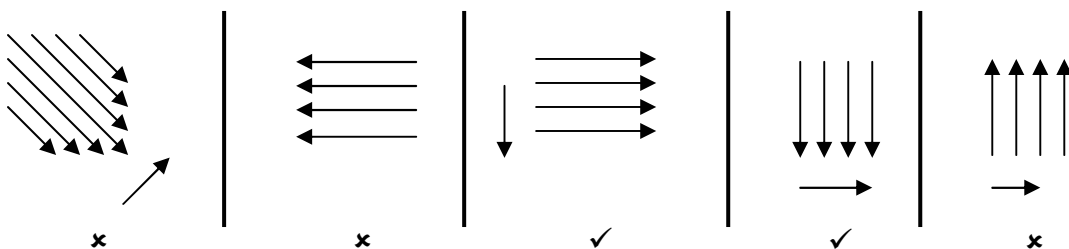
۴- رابطه بازگشتی:

$$c[i,j] = \begin{cases} c[i-1,j-1]+1 & ; x_i = y_j \\ \max\{c[i-1,j], c[i,j-1]\} & ; else \end{cases}$$

به راحتی میتوان با در نظر گرفتن یک ماتریس  $(m+1) \times (n+1)$  به جای  $c$  الگوریتم بالا را پیاده سازی نمود.

c	0	1		j		n
0	0	0	0	0	0	0
1	0					
	0		$c_{i-1,j-1}$	$c_{i-1,j}$		
i	0		$c_{i,j-1}$	$c_{i,j}$		
	0					
m	0					جواب

روش محاسبه: چون  $c_{i,j}$  برای محاسبه نیاز به  $c_{i,j-1}$  و  $c_{i-1,j}$  و  $c_{i-1,j-1}$  دارد لذا روش محاسبه بصورت زیر قابل اجرا میباشد:



در زیر شبه کد الگوریتم دیده میشود:

```

Procedure LCS (X,Y,m,n)
  For i←0 to m do c[i,0] ←0 repeat
  For j←0 to n do c[0,j] ←0 repeat
  For i←1 to m do
    For j←1 to n do
      If  $x_i=y_j$  then  $c[i,j] \leftarrow 1+c[i-1,j-1]$ ,  $b[i,j] \leftarrow '\diagdown'$ 
      elsif  $c[i-1,j] > c[i,j-1]$  then  $c[i,j] \leftarrow c[i-1,j]$ ,  $b[i,j] \leftarrow '\downarrow'$ 
      else  $c[i,j] \leftarrow c[i,j-1]$ ,  $b[i,j] \leftarrow '\rightarrow'$ 
    endif
  repeat
repeat
end.

```

واضح است که مرتبه زمانی الگوریتم  $O(m.n)$  میباشد.

حال رویه ای بازگشتی را میبینیم که توسط آن میتوان طولانی ترین رشته مشترک را چاپ کرد:

```

procedure print_LCS(X,b,i,j)
  if (i=0) or (j=0) then return endif
  if  $b[i,j] = '\diagdown'$  then
    print_LCS(X,b, i-1, j-1)
    write ( $x_i$ )
  elsif  $b[i,j] = '\rightarrow'$  then
    print_LCS(X,b,i,j-1)
  else
    print_LCS(X,b, i-1,j)
  endif
end.

```

نکته: فراخوانی اولیه رویه print\_LCS باید بصورت print\_LCS(X,b,m,n) باشد.

نکته: کمترین تعداد فراخوانی رویه print\_LCS برابر با  $\min(m,n)$  و بیشترین آنها برابر با  $m+n$  میباشد.

نکته: کمترین تعداد write در رویه print\_LCS برابر با صفر و بیشترین تعداد آن برابر با  $\min(m,n)$  میباشد.

مثال:

ورودی: دو دنباله X به طول m و Y به طول n

خروجی: طول طولانی ترین زیر دنباله مشترک X و Y

$X = \langle A, B, B, A, D, A, B, F \rangle$

$Y = \langle B, F, A, F, D, H, B \rangle$

با اجرای الگوریتم به ماتریس زیر خواهیم رسید:

جهت وضوح بیشتر هر دو ماتریس  $c$  و  $b$  در یک ماتریس نشان داده شده است.  
نکته: وقتی هر دو درایه  $c[i-1,j]$  و  $c[i,j-1]$  با هم برابر باشند هر کدام از آنها به دلخواه میتوانند به عنوان  $\max\{c[i-1,j], c[i,j-1]\}$  انتخاب شوند الگوریتم نوشته شده در بالا بصورتی است که  $c[i,j-1]$  را به عنوان پیشینه انتخاب میکند.

c,b	-	B	F	A	F	D	H	B
-	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0→	0→	1↘	1→	1→	1→	1→
B	0	1↘	1→	1→	1→	1→	1→	2↘
B	0	1↘	1→	1→	1→	1→	1→	2↘
A	0	1↓	1→	2↘	2→	2→	2→	2→
D	0	1↓	1→	2↓	2→	3↘	3→	3→
A	0	1↓	1→	2↘	2→	3↓	3→	3→
B	0	1↘	1→	2↓	2→	3↓	3→	4↘
F	0	1↓	2↘	2→	3↘	3→	3→	4↓

الگوریتم `print_LCS` مسیر مشخص شده به رنگ خاکستری را از آخر به اول طی کرده و دوباره باز میگردد (به علت بازگشتی بودن رویه) و در حین بازگشت خانه هایی که در آن فلش مورب میبیند را چاپ میکند. از این رو طولانی ترین زیر دنباله مشترک  $X$  و  $Y$  بصورت زیر چاپ خواهد شد:

$$Z = \langle B, A, D, B \rangle$$

نکته: بدون در نظر گرفتن ماتریس  $b$  هم الگوریتم `print_LCS` میتواند طولانی ترین زیر دنباله مشترک را چاپ کند!.

## ۵-۷- فروشنده دوره گرد

تعریف: دور هامیلتونی در یک گراف دوری است که از همه رئوس دقیقاً یکبار بگذرد.  
در مسئله فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem) یا TSP، هدف پیدا کردن دور همیلتونی با هزینه مینیمم در یک گراف وزن دار ورودی میباشد.  
فرض کنید گراف ورودی بصورت  $G(V,E)$  میباشد که در آن  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  است و  $c_{ij}$  نشاندهنده هزینه یال  $(i,j)$  باشد. همچنین بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید رئوس آغازین رئوس شماره ۱ باشد.

شبهه بقیه الگوریتمهایی که به روش برنامه سازی پویا ارائه شد باید ۴ مرحله را طراحی کرد:

۱- طول کوتاهترین مسیری که از راس  $i$  شروع شده و از کلیه رئوس مجموعه  $S$  دقیقاً یکبار بگذرد و به

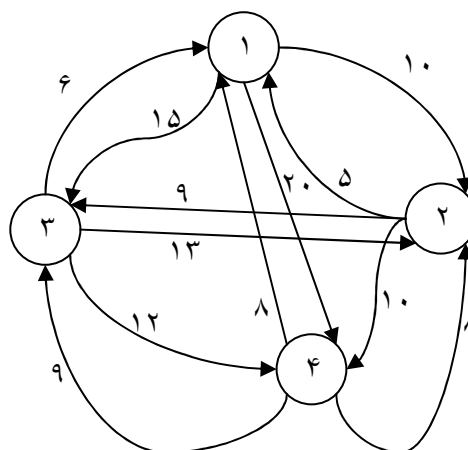
$$\text{راس } i \text{ ختم شود } g(i, S) \quad (i \notin S, 1 \notin S)$$

$$g(i, \emptyset) = c_{i,1} \quad \text{۲- (بدیهی)}$$

$$g(1, V - \{1\}) = \text{جواب} \quad \text{۳-}$$

$$g(i, S) = \min \{ c_{i,j} + g(j, S - \{j\}) \} \quad (j \in S, 1 \notin S, i \notin S) \quad \text{۴-}$$

مثال: در گراف زیر دور هامیلتونی با هزینه کمینه را پیدا کنید:



در این گراف ماتریس هزینه ها به صورت زیر میباشد:

c	1	2	3	4
1	0	10	15	20
2	5	0	9	10
3	6	13	0	12
4	8	8	9	0

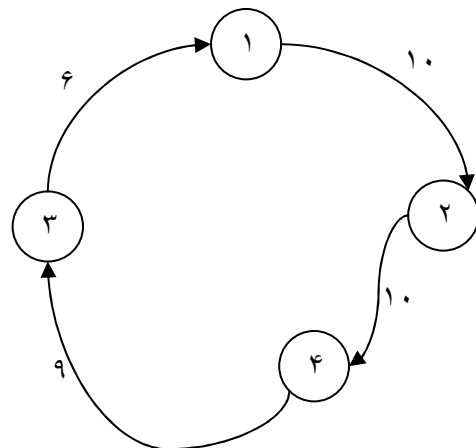


$$\begin{aligned}
 |S|=0 &\Rightarrow \begin{cases} g(2, \emptyset) = c_{2,1} = 5 \\ g(3, \emptyset) = c_{3,1} = 6 \\ g(4, \emptyset) = c_{4,1} = 8 \end{cases} \\
 |S|=1 &\Rightarrow \begin{cases} g(2, \{3\}) = c_{2,3} + c_{3,1} = 15 \\ g(2, \{4\}) = c_{2,4} + c_{4,1} = 18 \\ g(3, \{2\}) = c_{3,2} + c_{2,1} = 18 \\ g(3, \{4\}) = c_{3,4} + c_{4,1} = 20 \\ g(4, \{2\}) = c_{4,2} + c_{2,1} = 13 \\ g(4, \{3\}) = c_{4,3} + c_{3,1} = 15 \end{cases} \\
 |S|=2 &\Rightarrow \begin{cases} g(2, \{3,4\}) = \min\{c_{2,3} + g(3, \{4\}), \underbrace{c_{2,4} + g(4, \{3\})}_{\min}\} = 25 \\ g(3, \{2,4\}) = \min\{c_{3,2} + g(2, \{4\}), c_{3,4} + g(4, \{2\})\} = 25 \\ g(4, \{2,3\}) = \min\{c_{4,2} + g(2, \{3\}), c_{4,3} + g(3, \{2\})\} = 23 \end{cases} \\
 |S|=3 &\Rightarrow \begin{cases} g(1, \{2,3,4\}) = \min\{\underbrace{c_{1,2} + g(2, \{3,4\})}_{\min}, c_{1,3} + g(3, \{2,4\}), c_{1,4} + g(4, \{2,3\})\} = 35 \end{cases}
 \end{aligned}$$

تولید دور کمینه: حال با توجه به اینکه مقدار ۳۵ بر اساس کمینه بودن کدام مقدار تولید شده است به سمت عقب باز میگردیم.

$$\Rightarrow 35 = c_{1,2} + \underbrace{g(2, \{3,4\})}_{\substack{c_{2,4} + g(4, \{3\}) \\ c_{4,3} + c_{3,1}}} = c_{1,2} + c_{2,4} + c_{4,3} + c_{3,1}$$

بنابراین دور کمینه بصورت زیر است:



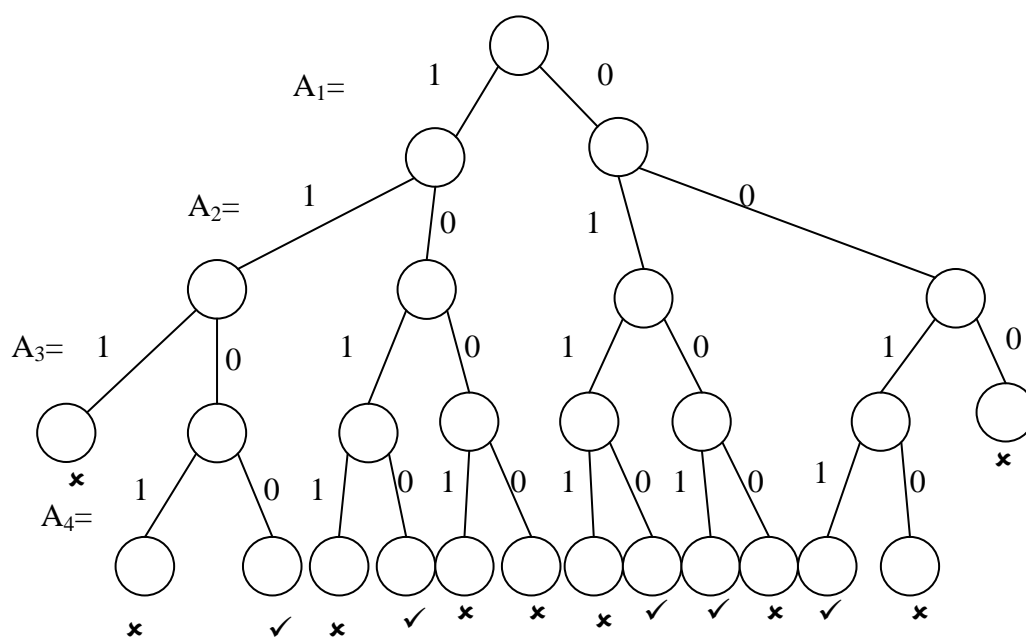
تحلیل زمانی: با کمی دقت میتوان دریافت که وقتی  $|S|=n-1$  باشد تعداد مقادیری که باید روی آنها مینیمم محاسبه کنیم  $n-1$  است و در بقیه حالات وقتی  $|S|=k$  است در رابطه  $g(i, S)$ ، تعداد حالاتی که متغیر  $i$  میتواند داشته باشد  $n-1$  حالت و تعداد حالاتی که میتوان یک مجموعه  $k$  عضوی از  $n-1$  عضو انتخاب کنیم برابر با ترکیب  $k$  از  $n-1$  میباشد. از این رو مرتبه زمانی الگوریتم برابر با مقدار زیر خواهد بود:

$$(n-1) + \sum_{k=0}^{n-2} (n-1) \binom{n-1}{k}$$

## ۶- روش عقبگرد (Backtracking)

در بعضی شرایط در هنگام حل مسئله نمیتوان از روش خاصی استفاده کرد و از این رو لازم میشود که فضای حالات بطور کامل جستجو شده تا جواب مسئله مشخص شود. در این شرایط از روش خاصی به نام روش پی-جویی به عقب یا روش عقبگرد استفاده میشود. در این روش درخت فضای حالت به روش "عمق اول" جستجو میشود به این معنی که تا زمانی که از اشتباه بودن یک مسیر مطمئن نشده‌ایم آن مسیر را ادامه داده و در صورت اطمینان از اشتباه بودن آن یک مرحله به عقب بازگشته و دوباره کار را ادامه میدهیم. این روند ادامه مییابد تا به جواب نهایی برسیم.

این روش یک روش غیرهدفمند می‌باشد که در حل مسئله باید تمام حالات را در نظر بگیریم در صورتی که بتوانیم یک سری شروط بنا به مقتضیات مسئله، اضافه کنیم تا کل فضای حالت پیمایش نشود میتوان الگوریتم با زمان واقعی کمتری بدست آورد ولی مرتبه زمانی الگوریتم کاهش نیابد.  
مثال: اعداد ۴ بیتی را پیدا کنید که تعداد یکهای آنها دقیقاً ۲ تا باشد.  
برای این مسئله فضای حالت را رسم میکنیم:



در فضای حالت هنگامی که مطمئن هستیم که این مسیر به جواب درست منجر نخواهد شد عمل عقبگرد صورت میگیرد که در شکل با علامت \* مشخص شده است. توسط کد زیر میتوان فضای حالت رسم شده در بالا را تشکیل داد و به جواب رسید:

```

procedure BT(A, i, n)
  f1 ← sum(A, n)
  if i > n then
    if f1 = 2 then write(A) endif
  else
    if f1 > 2 or 2 - f1 > n - i then return endif    (*)
    A[i] ← 1
    BT(A, i + 1, n)
    A[i] ← 0
    BT(A, i + 1, n)
  endif
end.

```

نکته: فراخوانی اولیه رویه بالا باید بصورت  $BT(A, 1, 4)$  صورت گیرد.

نکته: تابع sum در کد بالا تعداد یکهای رشته A را تا مرحله فعلی ( $i-1$ ام) محاسبه میکند.

نکته: شرط مشخص شده در (\*) بررسی میکند که در صورتی که مسیر فعلی منجر به جواب درست نخواهد شد عمل بازگشت به عقب (Backtrack) را انجام میدهد. شرط اول آن نشاندهنده بیش از حد مجاز بودن تعداد یکهاست و شرط دوم آن نشاندهنده کمتر از حد مجاز بودن تعداد بیتهای مشخص نشده تا بحال میباشد که هر دو شرط دلیل غلط بودن مسیر فعلی میباشد.

نکته: مرتبه زمانی کد بالا  $O(2^n)$  میباشد.

نکته: هرچه تعداد شرطهای دستور (\*) بیشتر باشد یعنی در درخت فضای حالت زودتر عقبگرد میکنیم و این منجر به کم شدن زمان واقعی الگوریتم خواهد شد.

حال به ارائه مثالی دیگر در این رابطه میپردازیم.

## ۶-۱- مولد ترکیبات

در این الگوریتم مجموعه با  $n \geq 1$  عضو وجود دارد و تصمیم داریم تمام ترکیبات ممکن آن را داشته باشیم. این روش دارای مرتبه زمانی  $(n!)$  می باشد. برای حل مسئله ما از روش Backtracking استفاده می کنیم.

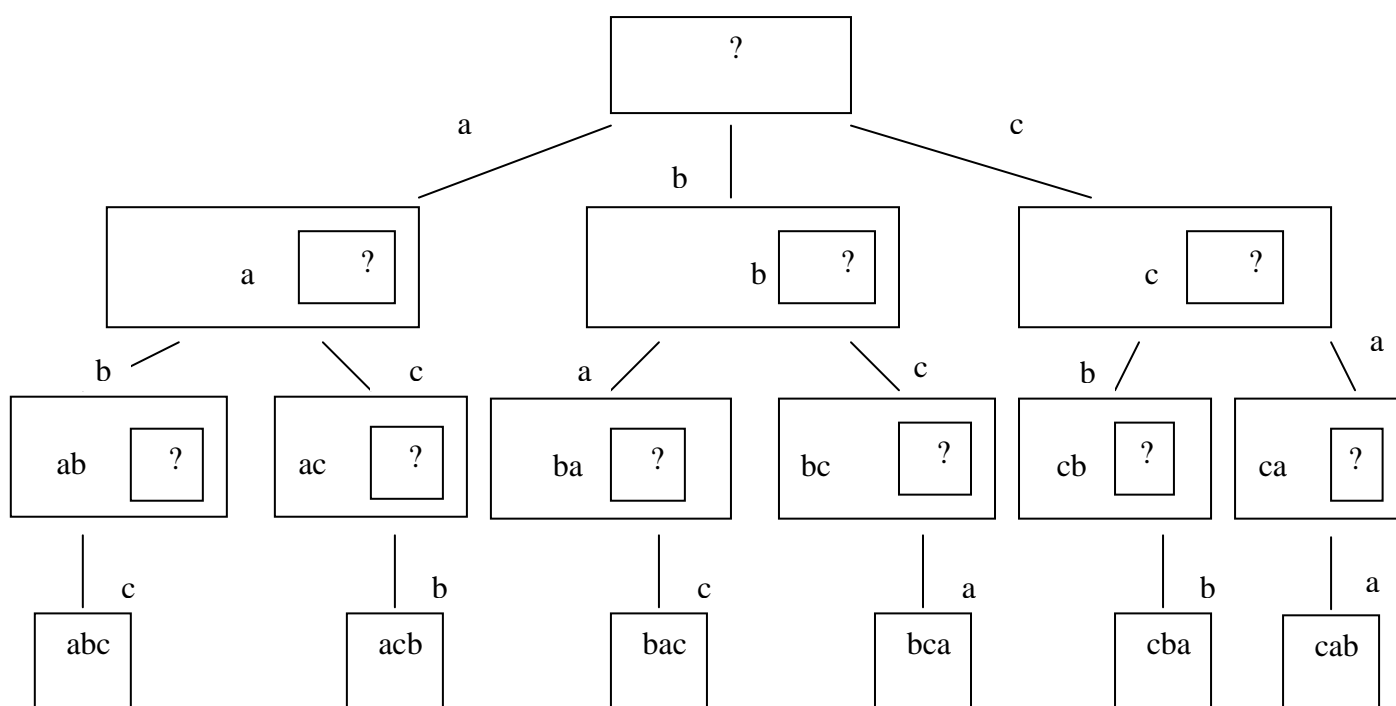
```

Procedure perm(A, k, n)
  if k = n then
    write(A)
  else
    for i ← k to n do
      swap(A[k], A[i])
      perm(A, k + 1, n)
    repeat
  endif
end.

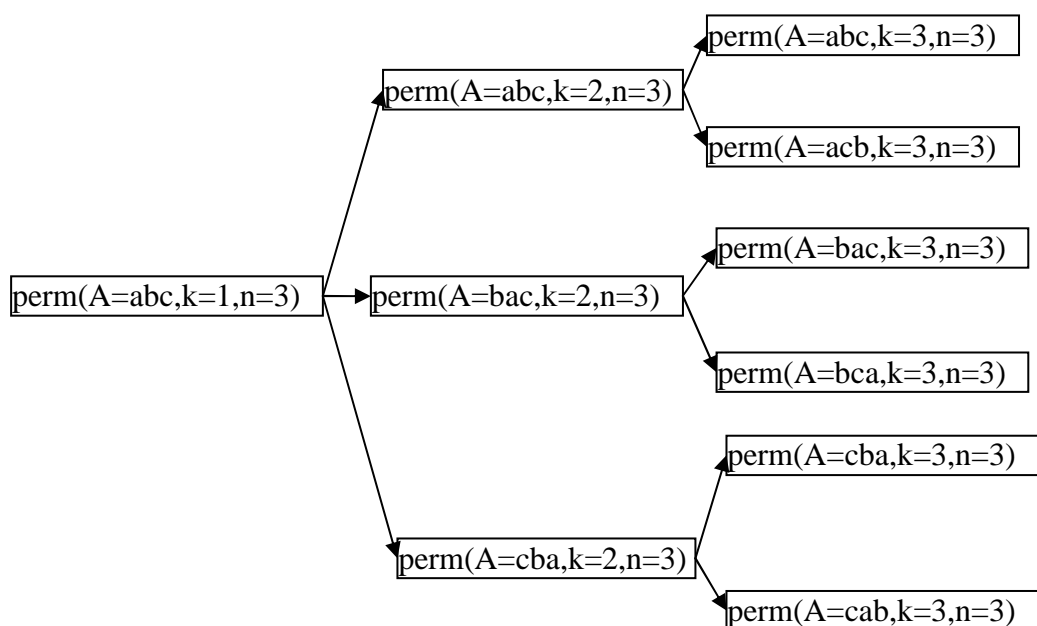
```

نکته: در فراخوانی اولیه رویه perm ابتدا باید عناصر 1 تا n را در آرایه A قرار داده و سپس  $\text{perm}(A, 1, n)$  را فراخوانی کنیم.

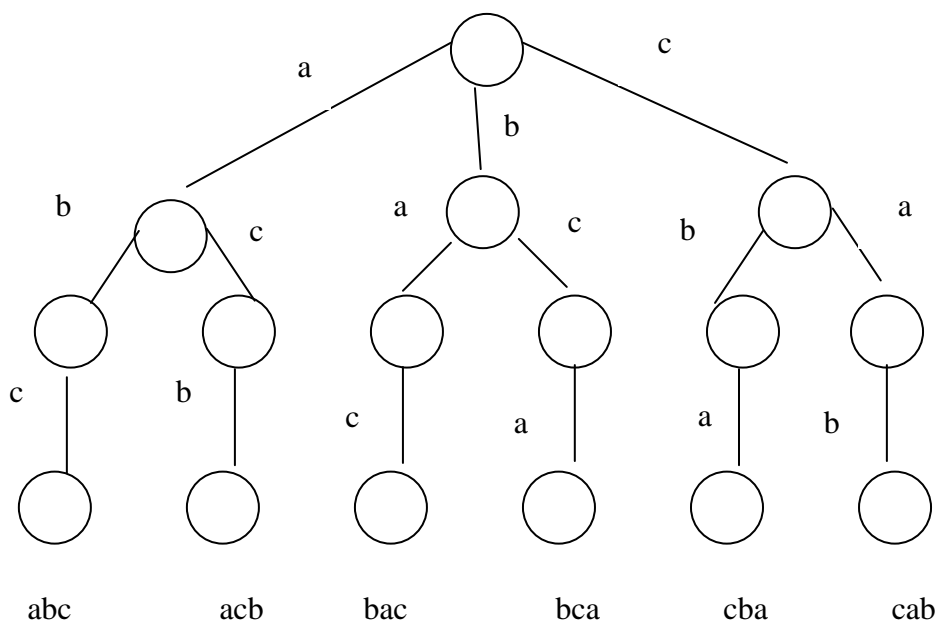
مثال: تمام ترکیبات ممکن a, b, c را به وسیله پروسیجر perm تولید کنید؟



نحوه فراخوانی بازگشتی رویه بصورت شکل زیر می باشد:



یا شکل ساده‌تر

۶-۲- مسئله  $n$  وزیر

حال به طرح مسئله‌ای می‌پردازیم که در ارائه الگوریتم برای آن از روش عقبگرد استفاده می‌کنیم. در این مسئله هدف قرار دادن  $n$  مهره وزیر در صفحه شطرنج  $(n \times n)$  به گونه‌ای است که هیچیک از وزیران دیگری را تهدید نکند. در مسئله  $n$  وزیر فرض در هیچ سطر و ستونی بیش از یک وزیر قرار نگیرد. حال با این فرض تمام جایگشت‌های ممکن را تولید می‌کنیم یعنی همان درخت حل مسئله یا فضای حالت را بوجود می‌آوریم سپس در هر مرحله بررسی می‌کنیم که مسیر فعلی در درخت با این نحوه‌ای چیدمان وزیرها آیا دارای شرایط مسئله می‌باشد یعنی وزیرها یکدیگر را تهدید می‌کنند یا خیر. برای مثال برای  $n=4$  مسئله دارای دو جواب بصورت زیر است.

جواب اول:

	×		
			×
×			
		×	

که توسط آرایه زیر قابل نمایش است:

۲	۴	۱	۳
---	---	---	---

جواب دوم:

×			
		×	
			×
	×		

که توسط آرایه زیر قابل نمایش است:

۳	۱	۴	۲
---	---	---	---

اگر  $n$  برابر ۵ باشد ۵ جواب برای مسئله وجود دارد و برای  $n=8$  ۹۲ جواب وجود دارد.

نکته: چون در هر لحظه در یک سطر و یک ستون نمیتواند بیش از یک وزیر قرار گیرد لذا استفاده از یک ماتریس مورد لزوم نیست و فقط یک آرایه یک بعدی  $n$  عنصری کفایت میکند. در این آرایه نیز اگر فرض زیر را انجام دهیم:

ستون قرار گرفتن وزیر  $i$  ام  $A[i]$

آنگاه عناصر تکراری در آرایه نباید وجود داشته باشد و از این رو میتوان از همان رویه perm برای تولید همه جایگشتها در آرایه استفاده کرد و فقط هنگام چاپ خروجی شرطی را برای چاپ در خروجی قرار می‌دهیم که همان تابع test می‌باشد که کد در زیر آورده شده است. بررسی اینکه آیا وزیرهای قرار گرفته در آرایه همدیگر را تهدید میکنند یا خیر به راحتی توسط رابطه زیر قابل انجام است. به این معنی که اگر عناصر قرار گرفته در آرایه دارای این خاصیت باشند هیچگاه دو وزیر یکدیگر را تهدید نمیکنند:

$$\forall i, j \mid i \neq j \Rightarrow |A[i] - A[j]| \neq |i - j|$$

```

Procedure Queen(A, k, n)
  if k=n then
    if test(A,n) then write(A) endif
  else
    for i←k to n do
      swap(A[k],A[i])
      perm(A,k+1,n)
    repeat
  endif
end.

```

```

function test(A,n)
  for i←1 to n do
    for j←i+1 to n do
      if | A[i] - A[j] | = | i-j | then return false endif
    repeat
  repeat
  return true
end.

```

نکته: الگوریتم Queen دارای مرتبه زمانی  $O(n!)$  می‌باشد.

### ۳-۶- تعیین نقاط روی محور $x$ ها از روی فواصل آنها

ورودی: مجموعه فواصل  $n$  نقطه  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

خروجی:  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

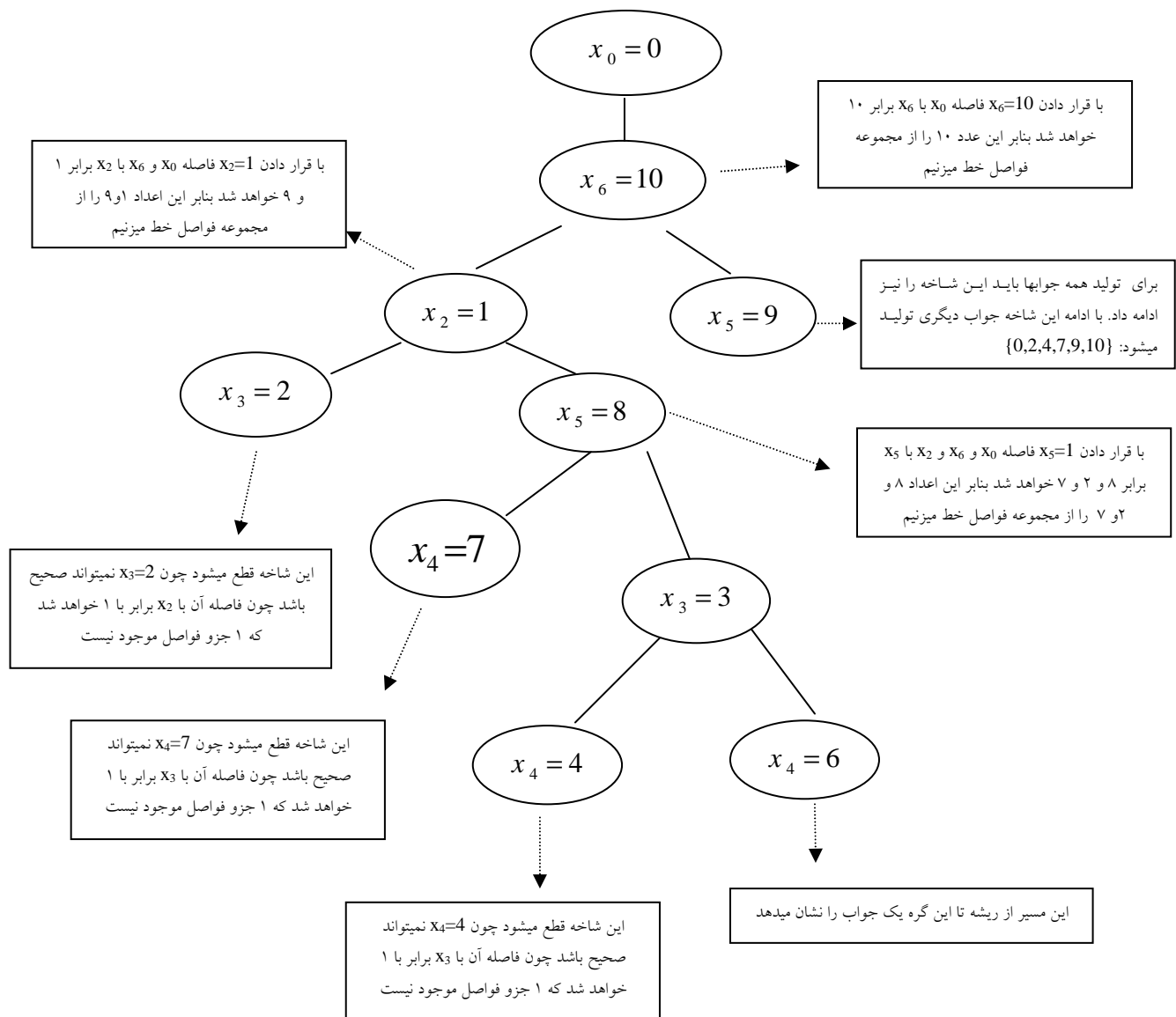
میتوان توسط رابطه زیر تعداد فواصلی که  $n$  نقطه میتوانند با یکدیگر تولید کنند را بدست آورد:

$$|D| = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

برای جلوگیری از عدم تولید جوابهای بدیهی و منفی فرض میکنیم که  $X_1=0$  و بقیه نقاط همگی مثبت هستند.

$$D = \{1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{مثال:}$$

در هر مرحله بزرگترین فاصله را از مجموعه فواصل انتخاب کرده، این عدد یا فاصله اولین نقطه  $(x_0)$  با آخرین نقطه نامعلوم و یا فاصله آخرین نقطه  $(x_6)$  با اولین نقطه نامعلوم میباشد. (در هر گره مسیر از ریشه تا آن گره نشان دهنده نقاط معلوم تا آن لحظه میباشد.) با در نظر گرفتن این دو حالت به دو نقطه معلوم جدید مرسیم و فواصل بوجود آمده توسط آن نقاط را با نقاط معلوم قبلی (در صورت وجود) از مجموعه فواصل خط میزنیم. اگر این فواصل موجود نبودند شاخه قطع شده و شاخه دیگری را ادامه میدهیم.



جواب اول:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
۰	۱	۳	۶	۸	۱۰

توضیح: نود اول را فرض می‌کنیم صفر است بزرگترین فاصله، فاصله نود اول و آخر می‌باشد. این فاصله را از مجموع فواصل حذف کرده و دوباره از مجموع فواصل باقی‌مانده ماکزیمم فاصله را پیدا می‌کنیم که ۲ حالت پیش می‌آید:

۱- فاصله رأس اول تا نود  $n-1$  ام برابر این فاصله می‌باشد.



۲- فاصله رأس آخر با نود دوم برابر این فاصله می‌باشد.  
و در هر مرحله هر فاصله‌ای که هر نقطه با نقاط دیگر پیدا می‌کند از مجموعه فواصل حذف می‌کنیم و این کار را تا تمامی این فاصله‌ها حذف شوند ادامه می‌دهیم.  
اگر فاصله‌ای در مجموع فواصل نبود مسیر را اشتباه آمده‌ایم شاخه را قطع کرده و شاخه دیگری را ادامه می‌دهیم.  
نکته: مرتبه‌ای زمانی این الگوریتم  $O(n^2)$  می‌باشد!

## ۷- روش انشعاب و تحدید (Branch & Bound)

روش دیگری که در این قسمت به آن می‌پردازیم به نام روش انشعاب و تحدید یا شاخه و حد معروف است. این روش یک روش غیرهرفمند ولی هوشمند است. در این روش برخلاف روش عقبگرد تمامی حالات در فضای حالت بررسی نمی‌شود و براساس شرطی که در مسئله قرار داده می‌شود (این شروط وابسته به نوع مسئله متفاوت است) برخی از حالت‌ها بررسی نمی‌شوند.

سه تفاوت عمده بین روش عقبگرد و روش شاخه و حد وجود دارد:

- ۱- در روش عقبگرد درخت فضای حالت بصورت عمق اول (DFS) جستجو می‌شود ولی در روش شاخه و حد ابتدا کلیه فرزندان گره فعلی ساخته می‌شود و سپس از بین آنها یکی بسته به شرایط انتخاب می‌شود و تا حدودی میتوان آن را منطبق با جستجوی ردیفی (BFS) در نظر گرفت.
- ۲- در روش شاخه و حد یک تابع محدود کننده وجود دارد که از گسترش بیش از حد و نابجای شاخه‌های درخت حل مسئله جلوگیری میکند و در موقع لزوم شاخه‌ها را قطع کرده و مسیر فعلی را ادامه نمی‌دهد. درحالی‌که در روش عقبگرد چنین معیاری وجود ندارد.
- ۳- روش شاخ و حد در مقایسه با روش عقبگرد هوشمندانه تر عمل میکند و در هنگام انتخاب شاخه جهت گسترش درخت حل مسئله، شاخه‌ای که احتمال بیشتری برای تولید جواب دارد انتخاب می‌شود. حال به ارائه الگوریتم‌هایی مبتنی بر این روش می‌پردازیم.

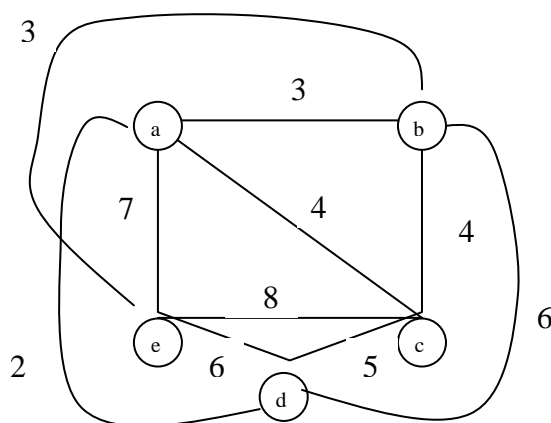
### ۷-۱- فروشنده دوره گرد

در این بخش به ارائه روشی مبتنی بر شاخه و حد برای مسئله فروشنده دوره گرد می‌پردازیم.

در یک گراف جهت‌دار تعداد دورهای هامیلتونی  $(n-1)!$  است و در یک گراف غیرجهت‌دار تعداد دورهای

$$\frac{(n-1)!}{2} \text{ هامیلتونی است!}$$

مثال: پیدا کردن کوتاهترین دور هامیلتونی در یک گراف با ۵ رأس

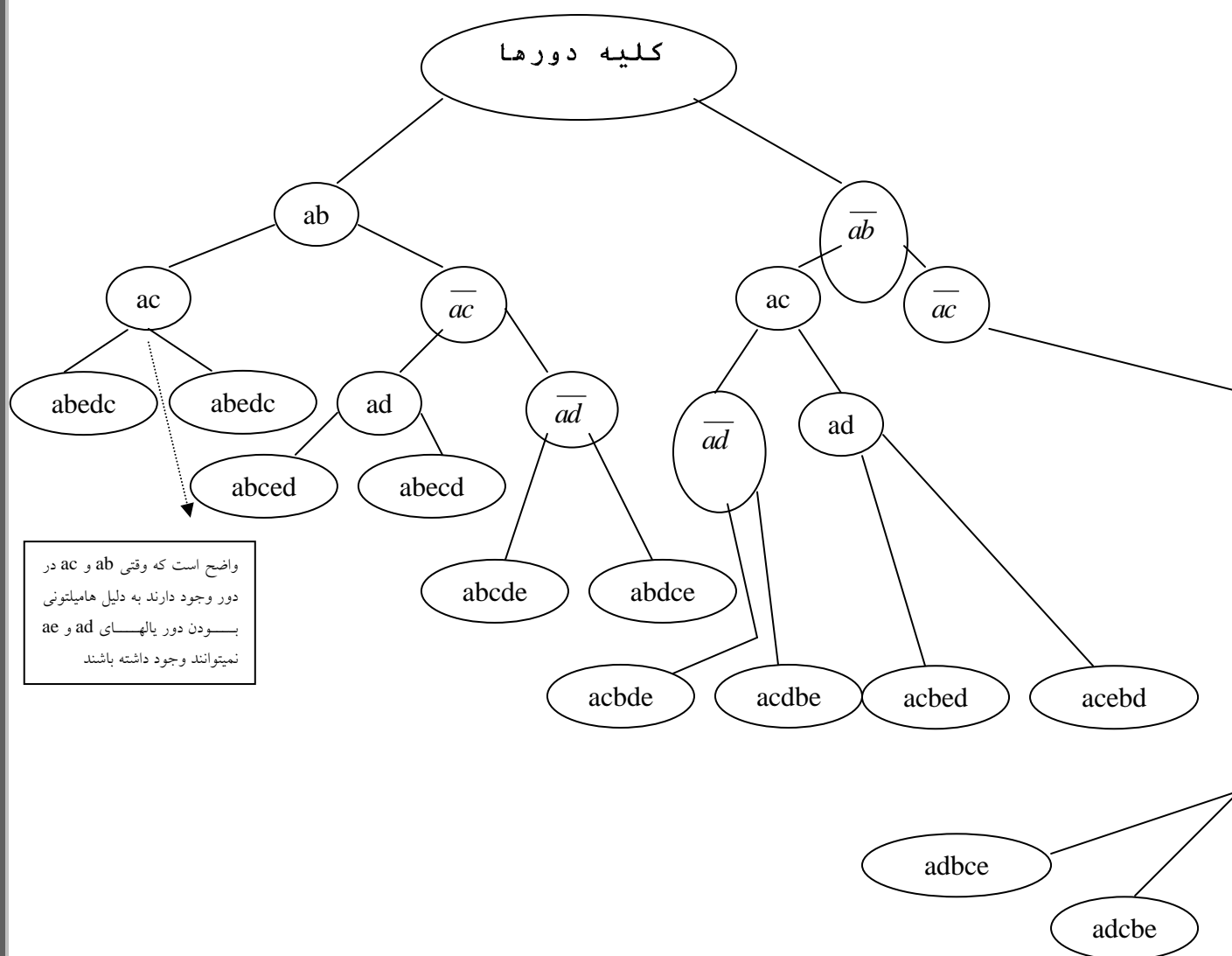


تابع محدود کننده:

$$f(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \{c(u,v) + c(v,w) : (u,v), (v,w) \text{ are two least cost edges adjacent to vertex } v\}$$

واضح است که مقدار تابع بالا در گراف  $G$ ، حد پایینی برای هزینه دورهای هامیلتونی خواهد بود چون برای هر رأس دو یال با کمترین هزینه که مجاور به آن رأس هستند را انتخاب کرده است. لذا در گسترش درخت حل مسئله هر دوری که هزینه آن به مقدار تابع بالا نزدیکتر بود زودتر جهت گسترش انتخاب میشود.

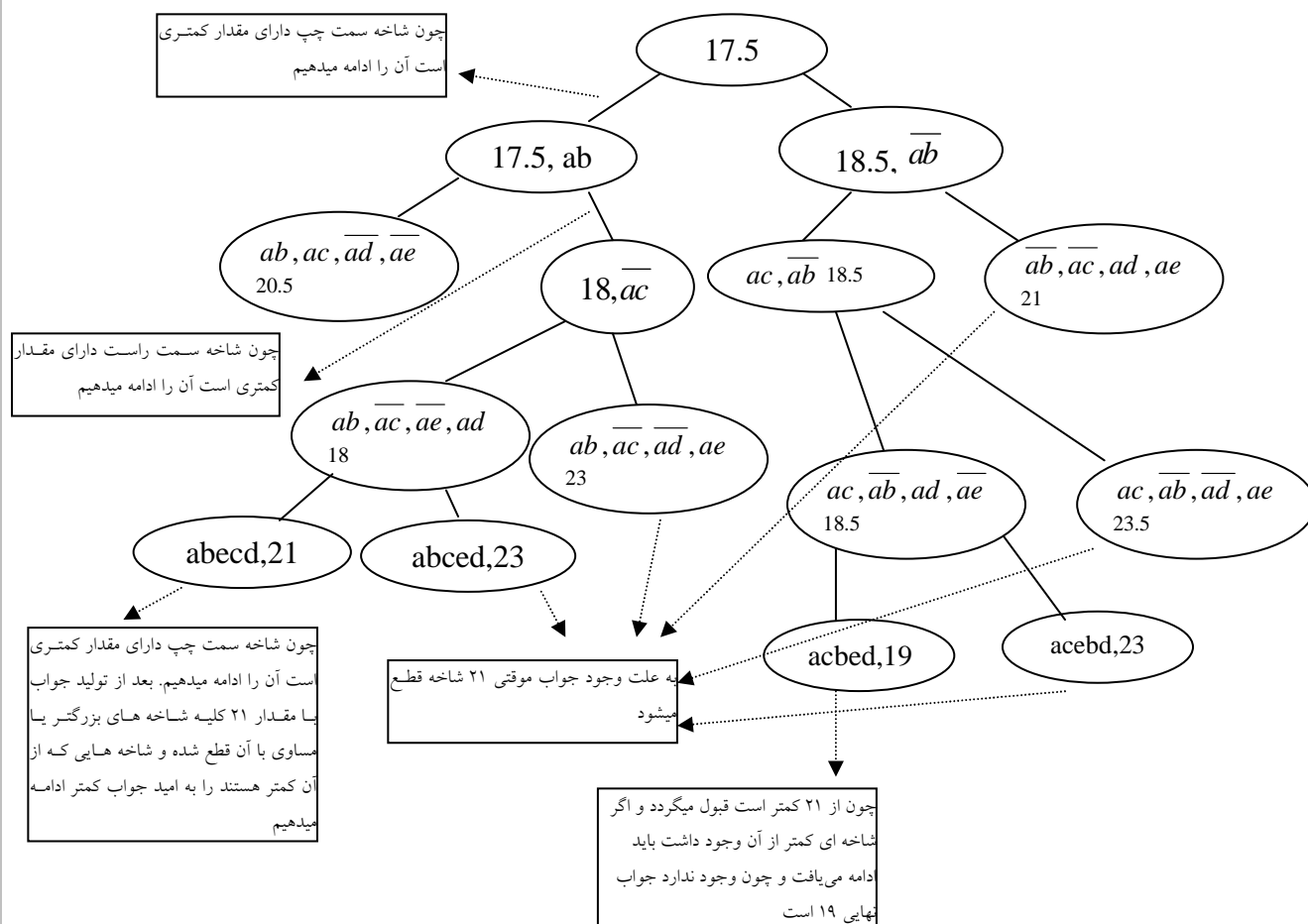
درخت فضای حالات برای گرافی با ۵ رأس در حالت کلی به شکل زیر می‌باشد:



توضیح:

در یک گراف برای هر رأس ۲ یال با کمترین هزینه را انتخاب می‌کنیم مجموع هزینه‌ها را محاسبه کرده سپس بر دو تقسیم می‌کنیم تا کمترین هزینه‌ای که ممکن است بدست آید.

دومین مینیم	اولین مینیم	راس
3	2	a
3	3	b
4	4	c
5	2	d
6	3	e
$35/2 = 17.5$		



طریقه محاسبه ارزش هر گره:

بر اساس تابع محدود کننده که در بالا شرح داده شد باید با توجه به محدودیتهای هر مسیر از ریشه تا آن گره تابع را مجدداً محاسبه کرد. به بیان دیگر با اضافه شدن شرایط جدید مقدار تابع بیشتر یا مساوی مقدار گره پدر خواهد بود.

وقتی این رویه را تا انتها ادامه دهیم دور هامیلتونی با کمترین هزینه بدست می‌آید ولی برای هوشمند شدن الگوریتم کل فضای حالات را پوشش نمی‌کنیم بلکه از بین نودهایی که داریم نودی را که دارای تفاوت کمتری تا گره ریشه است را گسترش می‌دهیم تا به برگ برسیم، در هر مرحله کوچکترین گره را ادامه می‌دهیم و با رسیدن به یک برگ (جواب موقتی) کلیه گره‌های بیشتر یا مساوی آن را قطع می‌کنیم.

نکته: الگوریتم‌های Branch & Bound از لحاظ مرتبه زمانی تفاوتی با الگوریتم‌های Backtracking ندارند ولی از زمان واقعی کمتری برخوردارند.

نکته: در درخت حل مسئله بالا فقط ۴ دور مختلف محاسبه شدند درحالی که در روش عقبگرد باید تمام ۱۲ دور مختلف را تولید میکردیم.

## ۷-۲- جمع زیرمجموعه‌های یک مجموعه

حال به بیان مسئله دیگری که توسط روش شاخه و حد میتوان برای آن الگوریتم جالبی ارائه کرد میپردازیم. در این مسئله هدف پیدا کردن زیر مجموعه‌ای از یک مجموعه مفروض است که مجموع اعضای آن مقدار مشخصی باشد. ورودی:

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

عدد مفروض  $M$

خروجی:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$x_i = 0 \text{ یا } 1 \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot s_i = M$$

فرض: عناصر آرایه  $S$  صعودی هستند.

تابع محدود کننده:

عناصر آرایه  $X$  انتخاب یا عدم انتخاب عناصر متناظر در  $S$  را نشان میدهند. فرض کنید که عناصر آرایه  $X$  تا  $k-1$  امین عنصر یعنی  $X_{k-1}$  مشخص شده اند و نوبت به مشخص شدن  $k$  امین عضو از  $X$  یعنی  $x_k$  رسیده است. باید شرایط زیر برقرار باشند. به بیان دیگر اگر در شاخه‌ای شرایط زیر برقرار نبود آن شاخه به جواب منجر نخواهد شد و باید شاخه قطع شود.

1	2	...	k-1	k		n
$x_1$	$x_2$	...	$x_{k-1}$			

$$1- \quad \sum_{i=1}^{k-1} x_i \cdot s_i + s_k \leq M \quad (\text{به دلیل صعودی بودن عناصر } S)$$

$$2- \quad \sum_{i=1}^{k-1} x_i \cdot s_i + \sum_{i=k}^n s_i \geq M$$

توضیح:

شرط ۱: بیان کننده این مطلب می باشد که اگر مجموع وزن عناصری که تاکنون انتخاب شده اند به اضافه ای وزن عنصر بعدی، از  $M$  بیشتر شود چون عناصر صعودی هستند وزن عناصر بعدی از عنصر  $k$  بیشتر است پس ادامه نمی دهیم.

شرط ۲: بیان کننده این مطلب می باشد که اگر مجموع وزن عناصری که تاکنون انتخاب شده اند به اضافه ای وزن کل عناصر باقی مانده کمتر از مقدار  $M$  باشد اگر تمام عناصر انتخاب کنیم به مقدار  $M$  نمی رسیم پس ادامه نمی دهیم.

مثال:

$$S = \{7, 10, 12, 13, 15, 18\} \quad \begin{matrix} M=30 \\ n=6 \end{matrix}$$

$S$ : مجموع وزن عناصر انتخاب شده تا به حال

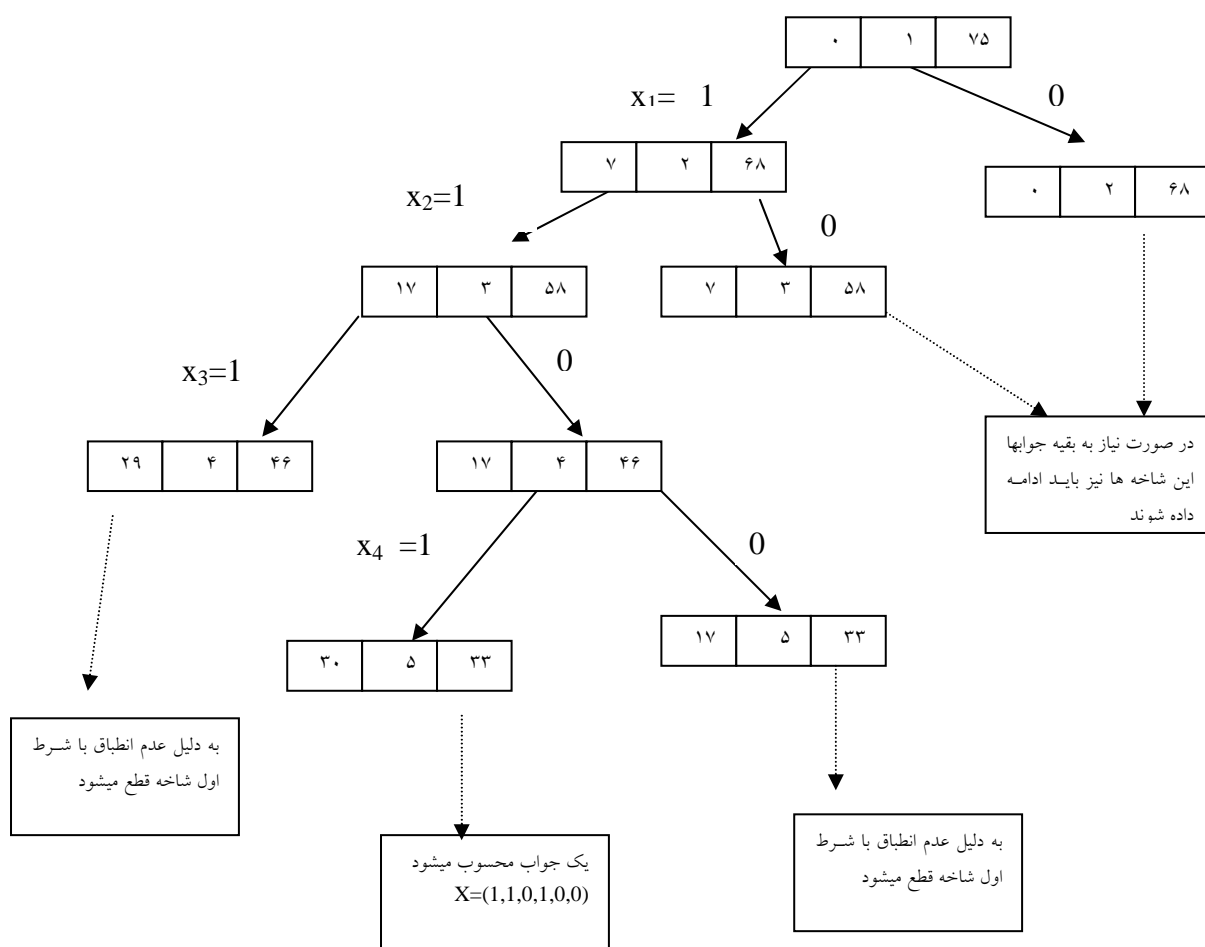
$K$ : عنصری که روی آن در حال تصمیم گیری هستیم

$x$ : مجموع هزینه های از رأس  $k$  به بعد

نکته: هر گره از درخت حل مسئله را بصورت زیر فرض میکنیم:

s	k	r
---	---	---

$$s = \sum_{i=1}^{k-1} s_i \cdot x_i \quad r = \sum_{i=k}^n s_i$$



نکته: عدد یک در شاخه ها نشان دهنده انتخاب شدن عنصر و عدد صفر نشان دهنده انتخاب نشدن عنصر میباشد.

نکته: مرتبه زمانی الگوریتم  $O(2^n)$  میباشد!



## ۸- پیچیدگی محاسبات

در این بخش به دسته بندی مسائل از لحاظ سادگی و سختی میپردازیم. ابتدا چند تعریف ارائه میدهیم:

مسائل تصمیم گیری: مسائلی که خروجی آنها دارای دو حالت باشد.

مثال: گراف وزن داری مفروض است. تشخیص اینکه آیا هزینه دور هامیلتونی مینیمم این گراف از مقدار  $k$  کمتر است یا خیر یک مسئله تصمیم گیری محسوب میشود.

کلاس P: مجموعه مسائل تصمیم گیری که برای آنها یک الگوریتم قطعی با زمان چند جمله‌ای وجود دارد.

کلاس NP: مجموعه مسائل تصمیم گیری که برای آنها یک الگوریتم غیرقطعی با زمان چند جمله‌ای وجود دارد.

مثال:

تشخیص مرتب بودن یک آرایه

تشخیص اینکه یک رشته مفروض شامل زیر رشته خاصی هست یا خیر

تشخیص همبند بودن یک گراف

همگی جزو کلاس P هستند.

مثال:

تشخیص مرتب بودن یک آرایه

تشخیص اینکه یک رشته مفروض شامل زیر رشته خاصی هست یا خیر

تشخیص همبند بودن یک گراف

تشخیص اینکه آیا بیشترین سود حاصل در مسئله کوله پشتی صفر و یک از مقدار خاصی بیشتر است

تشخیص اینکه یک مجموعه مفروض را میتوان به دو قسمت به گونه ای افراز کرد که مجموع دو قسمت مساوی باشد (این مسئله به نام PARTITION شناخته میشود).

تشخیص اینکه میتوان در یک مجموعه مفروض یک زیر مجموعه پیدا کرد که مجموع عناصر آن برابر با عدد داده شده M باشد (این مسئله به نام Sum of Subset شناخته میشود).

همگی جزو کلاس NP هستند.

نکته: هر مسئله P متعلق به NP نیز میباشد به بیان دیگر همیشه  $P \subseteq NP$ . چون اگر برای مسئله ای الگوریتم قطعی چند جمله ای وجود داشته باشد میتوان همان الگوریتم را غیر قطعی هم در نظر گرفت.

هر مسئله قطعی، غیرقطعی آن نیز وجود دارد.

مسائل بغرنج (intractable): مسائلی که ثابت شده است که متعلق به NP نیستند.

مثال: مسئله تشخیص اول بودن یک عدد n بیتی بغرنج است.

کاهش (Reduce) یا تبدیل: گوئیم مسئله A در زمان چند جمله ای به B تبدیل میشود ( $A \propto_p B$ ) اگر یک الگوریتم برای B را بتوان در زمان چند جمله ای به الگوریتمی برای A تبدیل کرد و یا به بیان دیگر یک جواب برای یک نمونه مسئله از B در زمان چند جمله ای منجر به یک جواب برای یک نمونه مسئله از A شود.

مثال:

Sorting  $\propto_p$  Convex Hull

PARTITION  $\propto_p$  Sum of Subset

مرتب کردن n عدد توسط الگوریتم پوسته محدب: اعداد ورودی را مختصه x برای n نقطه در نظر میگیریم و به عنوان مختصه y مقدار  $x^2$  را در نظر میگیریم. حال پوسته محدب n نقطه را میسازیم. قابل اثبات است که ترتیب x نقاط روی پوسته محدب مرتب شده اعداد اولیه هستند.

مثال:

۵	۳	۲	۱	۴
۲۵	۹	۴	۱	۱۶

نکته: از قابل تبدیل بودن مسئله مرتب سازی به پوسته محدب میتوان اثبات کرد که بهترین الگوریتم برای تولید پوسته محدب دارای زمان  $O(n \log n)$  میباشد! چون اگر بتوان پوسته محدب را در زمان کمتر از  $O(n \log n)$  تولید کرد پس مرتب سازی هم در کمتر از  $O(n \log n)$  امکان پذیر است که این غیر ممکن است چون مرتب سازی n عدد توسط الگوریتمهای مقایسه ای در بدترین حالت  $\Omega(n \log n)$  است.

مسئله NP-Complete:

$$A \in NPC \begin{cases} A \in NP \\ \exists B \in NPC \mid B \propto A \end{cases}$$

مثال:

مسئله کوله پشتی ۰/۱

مسئله فروشنده دوره گرد

مسئله PARTITION

مسئله وجود ویا عدم وجود دور هامیلتونی در گراف

مسئله Sum of Subset

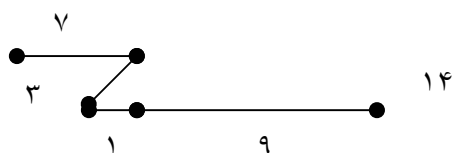
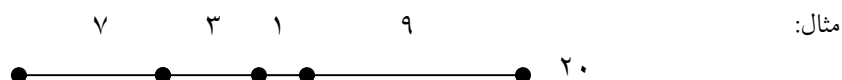
مسئله رنگ آمیزی گراف

مسئله تا کردن خط کش (Ruler Folding)

مسئله پیدا کردن مسیری به طول  $k$  در یک گراف وزن دار همگی NP-Complete هستند.

### ۸-۱- مسئله تا کردن خط کش

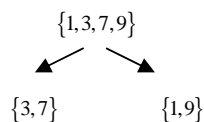
یک پاره خط با تعدادی مفصل بر روی آن داریم که هر پاره خط میتواند حول مفصل دو طرفش چرخش تا  $360^\circ$  درجه را داشته باشد. هدف کوتاهترین طول حاصل از تا کردن این پاره خطها بر روی خط افقی است.



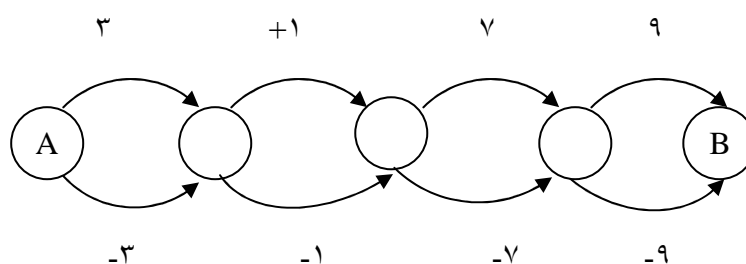
### ۸-۲- مسئله افراز (PARTITION)

در این مسئله مجموعه‌ای از اعداد داده شده است و هدف افراز مجموعه به دو قسمت به گونه ای است که مجموع عناصر دو مجموعه مساوی باشد.

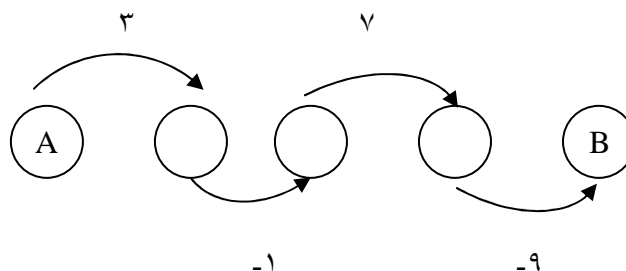
مثال: با ورودی مجموعه زیر مسئله پارتیشن به نحوه‌ای که دارای طولهای یکسانی باشند. (هزینه‌های یکسان)



مثال: ثابت کنید مسئله افراز یک مجموعه قابل تبدیل به مسئله پیدا کردن مسیری به طول  $k$  در گراف است. برای این کار گرافی میسازیم که دارای  $n+1$  راس است. بین راس  $i-1$  ام و  $i$  ام دو یال جهتدار برقرار میکنیم. یال اول دارای هزینه عنصر  $i$  ام از مجموعه اعداد داده شده و یال دوم دارای مقدار قرینه یال اول میباشد. حال پیدا کردن مسیری به طول صفر در این گراف منجر به افراز مجموعه اولیه به دو قسمت با مجموع یکسان خواهد شد! انتخاب عناصر متناظر با یالهای اول از هر راس به راس بعدی در مسیر مورد نظر منجر به افراز مورد نظر خواهد شد. فرض کنید هدف افراز مجموعه  $\{3,1,7,9\}$  میباشد. گرافی بصورت زیر ساخته و در آن مسیری از  $A$  به  $B$  به طول صفر را بررسی میکنیم:



دو مسیر با هزینه صفر وجود دارد که یکی از آنها در زیر نشان داده شده است:



میتوان نتیجه گرفت مجموعه قابل افراز به  $\{3,7\}$  و  $\{1,9\}$  میباشد.

پایان

نکته: خواهشمندم اشکالات موجود در مطالب را به آدرس [nourollah@cic.aut.ac.ir](mailto:nourollah@cic.aut.ac.ir) ارسال فرمایید.

و من الله توفیق

## منابع و مراجع

- [1] G. Brassard and P. Bratley, "Fundamentals of Algorithmic", Prentice-Hall, 1996.
- [2] Mark de Berg, Marc van Kreveld, Mark Overmars, and Otfried Schwarzkopf, "Computational Geometry: Algorithms and Applications", SpringerVerlag, 1997.
- [3] T. H. Corman, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, "Introduction to Algorithms", MIT Press and McGraw-Hill, 2001.
- [4] E. Horowitz, S. Sahni, S. Rajasekaran, "Fundamentals of Computer Algorithms", Computer Science Press, 1996.
- [5] O'Rourke, Joseph, "Computational Geometry in C", Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993.
- [6] Preparata, F. P. and M. I. Shamos, "Computational Geometry: An Introduction", Springer-Verlag, New York, 1985.