

تشریح کامل

مقاومت مصالح پویوف

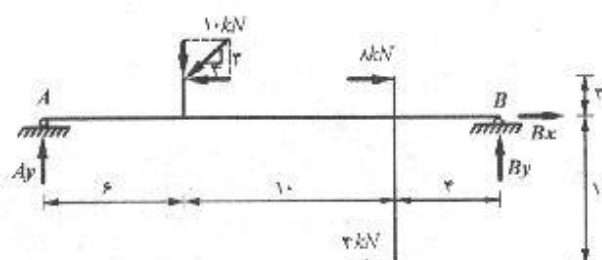
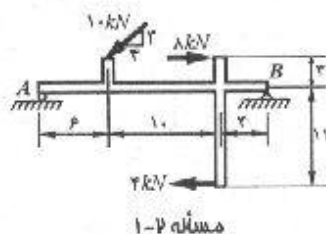
(جلد اول)

مهندس مجید بوجاریان

Prepared Pdf By Rester

مسائل فصل دوم

۱-۲ و ۲-۲. مطلوب است تعیین واکنشهای ناشی از بارگذاری برای سازه‌های صفحه‌ای نشان داده شده در اشکال.

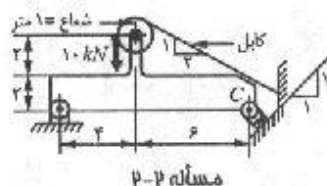


$$\sum F_x = 0 : B_x + 8 - 4 - 10 \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \Rightarrow B_x = 4 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum M_A = 0 : B_y (20) + 10 \left(\frac{3}{5} \right) (3) - 10 \left(\frac{4}{5} \right) (6) - 8(3) - 4(11) = 0$$

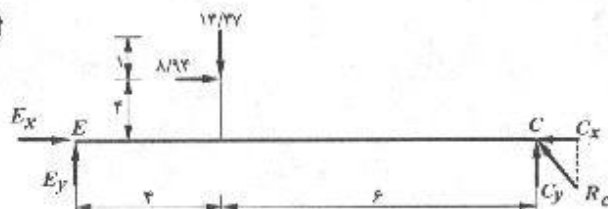
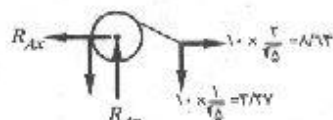
$$\Rightarrow B_y = 4 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 : A_y + B_y - 10 \left(\frac{3}{5} \right) = 0 \Rightarrow A_y = 2 \text{ kN} \uparrow$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 8/9 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 14/9 \text{ kN} \uparrow$$



نیروی برشی، لنگر خمشی / ۱۵

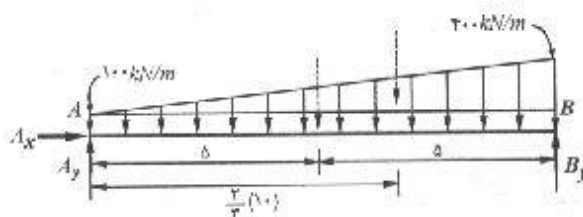
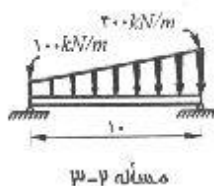
$$+\left(\sum M_E = 0 : C_y(10) - 14/27(4) - 8/92(4) = 0 \Rightarrow C_y = 9/37 \text{ kN} \uparrow\right.$$

$$\Rightarrow C_x = 9/37 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\pm \sum F_x = 0 : E_x + 8/92 - 9/37 = 0 \Rightarrow E_x = 0/37 \text{ kN} \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : E_y + C_y - 14/27 = 0 \Rightarrow E_y = 5/11 \text{ kN} \uparrow$$

۲-۳ تا ۵-۲. برای تیرهای نشان داده شده در اشکال، نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را با استفاده از روش مقطع زدن در وسط فاصله بین دو تکیه‌گاه به دست آورید.



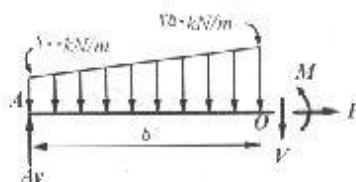
$$+\left(\sum M_A = 0 : B_y(10) - (100 \times 10)(5) - \left(\frac{1}{2} \times 200 \times 10\right)\left(\frac{2}{3} \times 10\right) = 0\right.$$

$$B_y = 1500 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : A_y + B_y - \frac{1}{2}(100 + 300)(10) = 0 \Rightarrow A_y = 1000 \text{ kN} \uparrow$$

$$\pm \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\pm \sum F_x = 0 \Rightarrow P = 0$$

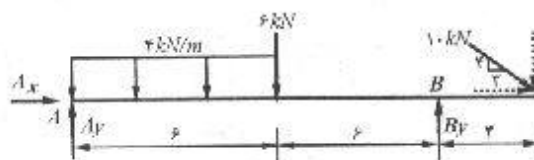
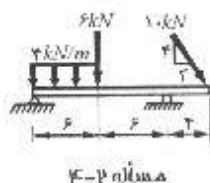


$$+\uparrow \sum F_y = 0 : A_y - V - \frac{1}{2}(100 + 250)(5) = 0$$

$$V = 125 \text{ kN} \downarrow$$

$$+\left(\sum M_o = 0 : M + (100 \times 5)\left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times 150 \times 5\right)\left(\frac{1}{3} \times 5\right) - A_y(5) = 0\right.$$

$$M = 3125 \text{ kN.m} \uparrow$$

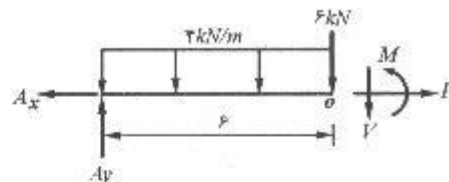


$$+\left(\sum M_A = 0 : B_y(12) - \left(10 \times \frac{3}{2}\right)(16) - 6(6) - (4 \times 6)(3) = 0 \Rightarrow B_y = 19/6 \text{ kN} \uparrow\right.$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : A_y + B_y - \left(10 \times \frac{4}{5}\right) - 6 - (4 \times 6) = 0 \Rightarrow A_y = 18/33 \text{ kN} \uparrow$$

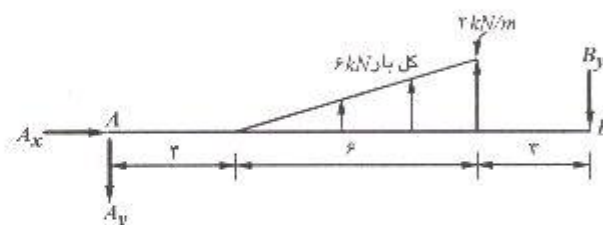
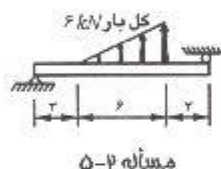
$$\rightarrow \sum F_x = 0 : A_x + \left(10 \times \frac{3}{5}\right) \Rightarrow A_x = -6 \text{ kN} \Rightarrow A_x = 6 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 : P - A_x = 0 \Rightarrow P = 6 \text{ kN} \rightarrow$$



$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : A_y - V - 6 - (4 \times 6) = 0 \Rightarrow V = -11/6 \text{ kN} \Rightarrow V = 11/6 \text{ kN} \uparrow$$

$$+ (\sum M_o = 0 : M + (4 \times 6)(3) - A_y(6) = 0 \Rightarrow M = 37/9 \text{ kN.m})$$

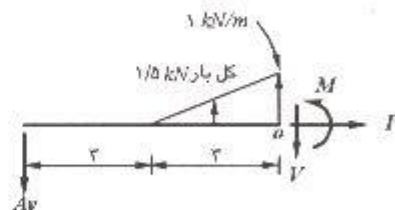


$$+ (\sum M_A = 0 : 6 \left[3 + \left(\frac{4}{3}\right)(6) \right] - B_y(12) = 0 \Rightarrow B_y = 3/5 \text{ kN} \downarrow$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : -A_y + 6 - B_y = 0 \Rightarrow A_y = 2/5 \text{ kN} \downarrow$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

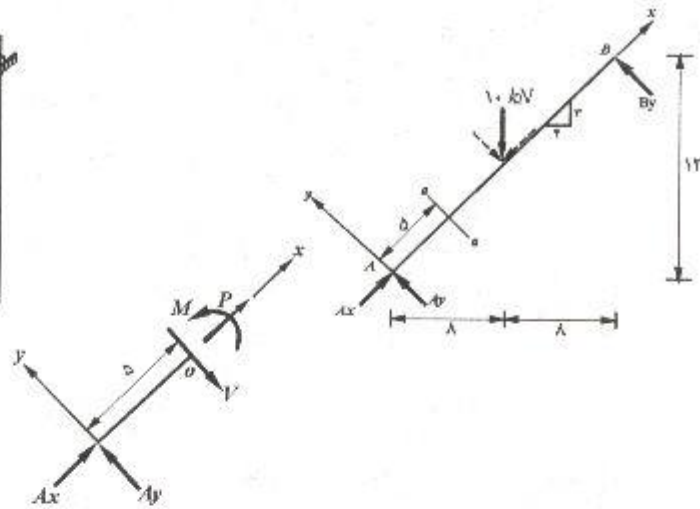
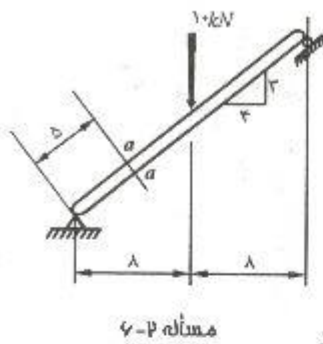
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow P = 0$$



$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : -A_y - V + 1/5 = 0 \Rightarrow V = -1 \text{ kN} \downarrow$$

$$+ (\sum M_o = 0 : M + A_y(6) - 1/5 \left(\frac{1}{3} \times 3\right) = 0 \Rightarrow M = -13/5 \text{ kN.m})$$

۶-۲ تا ۱۳-۲. برای سازه‌های صفحه‌ای نشان داده شده در اشکال، نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را در مقطع $a-a$ به دست آورید. به استثنای مسأله ۷-۲، از وزن اعضا صرف نظر نمایید. در هر حالت، ترسیم جسم آزاد قسمت جدا شده سازه را رسم نمایید و در روی آن نیروهای داخلی را با جهت صحیح نشان دهید. در حل مسائل از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید.



$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 : -A_y (20) + (10 \times \frac{20}{2}) (10) = 0 \Rightarrow A_y = 4 \text{ kN} \nearrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 : A_x - (10 \times \frac{20}{2}) = 0 \Rightarrow A_x = 9 \text{ kN} \nearrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 : A_x + P = 0 \Rightarrow P = -9 \text{ kN} \searrow$$

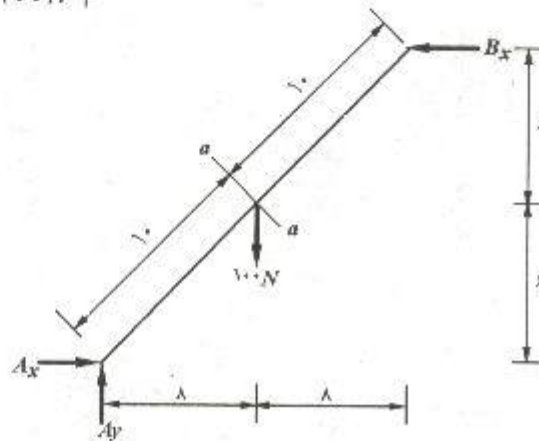
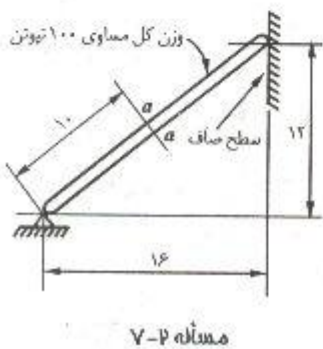
$$+\uparrow \sum F_y = 0 : A_y - V = 0 \Rightarrow V = 4 \text{ kN} \searrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 : M - A_y (5) = 0 \Rightarrow M = 20 \text{ kN.m} \quad \searrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : B_x (12) - 100 (8) = 0 \Rightarrow B_x = 96/\sqrt{N} \leftarrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 : A_x - B_x = 0 \Rightarrow A_x = 96/\sqrt{N} \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : A_y - 100 = 0 \Rightarrow A_y = 100 \text{ N} \uparrow$$

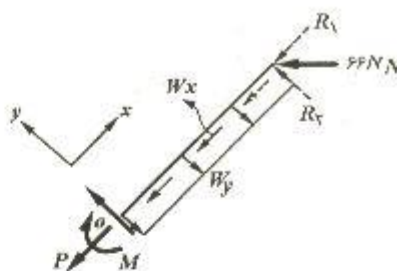


$$R_1 = 66/7 \left(\frac{16}{70} \right) = 53/4 N \nearrow$$

$$R_2 = 66/7 \left(\frac{12}{70} \right) = 40/0 N \nearrow$$

$$w_x = \left(\frac{100}{70} \right) \times \left(\frac{12}{70} \right) = 3 \frac{N}{m}$$

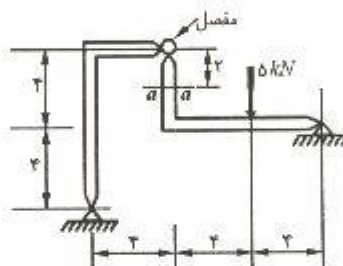
$$w_y = \left(\frac{100}{70} \right) \times \left(\frac{16}{70} \right) = 4 \frac{N}{m}$$



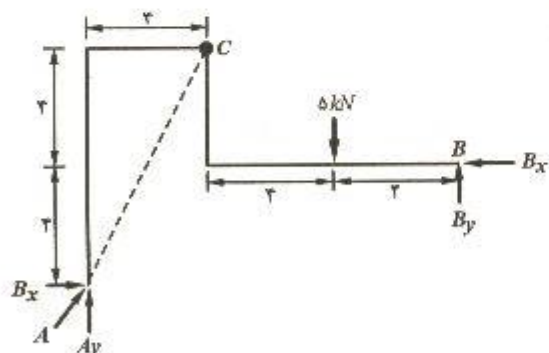
$$\uparrow + \sum F_x = 0 : -P - w_x(10) - R_1 = 0 \Rightarrow P = -83/4 N$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 : V + R_2 - w_y(10) = 0 \Rightarrow V = 0$$

$$+ (\sum M_o = 0 : -M - w_y(10)(5) + R_2(10) = 0 \Rightarrow M = 400 N.m$$



مسئله ۸-۲



چون عضو AC یک عضو دو نیرویی می باشد امتداد نیروی A باید از نقطه C بگذرد با توجه به این نکته از هندسه شکل:

$$A_x = \frac{A_y}{2}$$

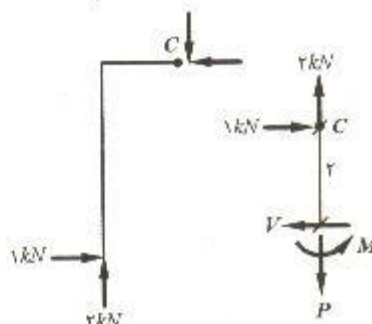
$$+ (\sum M_B = 0 : -A_y(2) + \frac{A_y}{2}(4) + 5(2) = 0$$

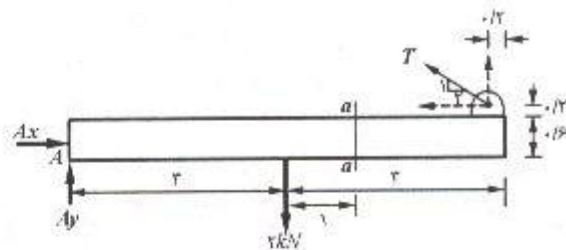
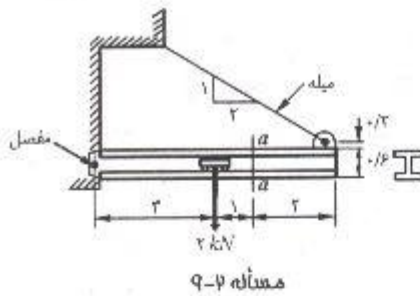
$$\Rightarrow A_y = 2 kN \text{ و } A_x = \frac{A_y}{2} = 1 kN$$

$$P = 2 kN$$

$$V = 1 kN$$

$$M = 1 \times 2 = 2 kN.m$$

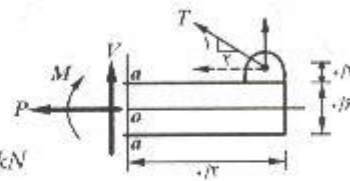




$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0: \left(T \times \frac{4}{\sqrt{5}}\right)(3 + 0/2) + \left(T \times \frac{3}{\sqrt{5}}\right)(6 - 0/2) - 7(3) = 0$$

$$T = 1/9 \text{ kN}$$

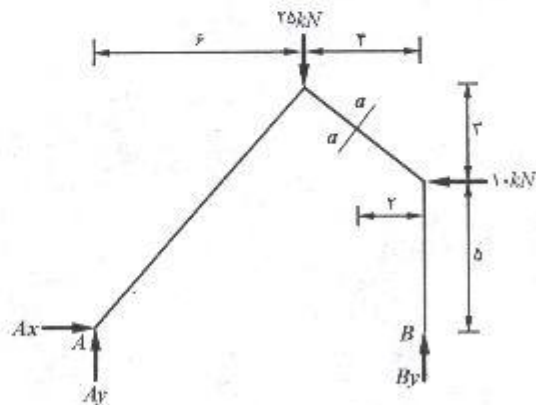
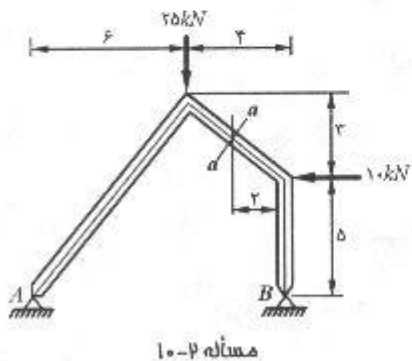
$$+\rightarrow \sum F_x = 0: -P - \left(1/9 \times \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 0 \Rightarrow P = -1/9 \text{ kN}$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0: V + \left(1/9 \times \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0 \Rightarrow V = -0/88 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0: -M + \left(1/9 \times \frac{3}{\sqrt{5}}\right)(0/2 + 0/2) + \left(1/9 \times \frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2 - 0/2) = 0$$

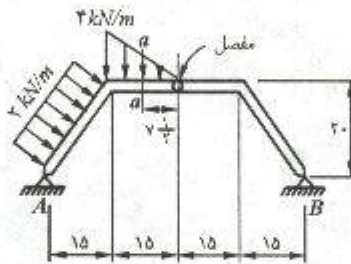
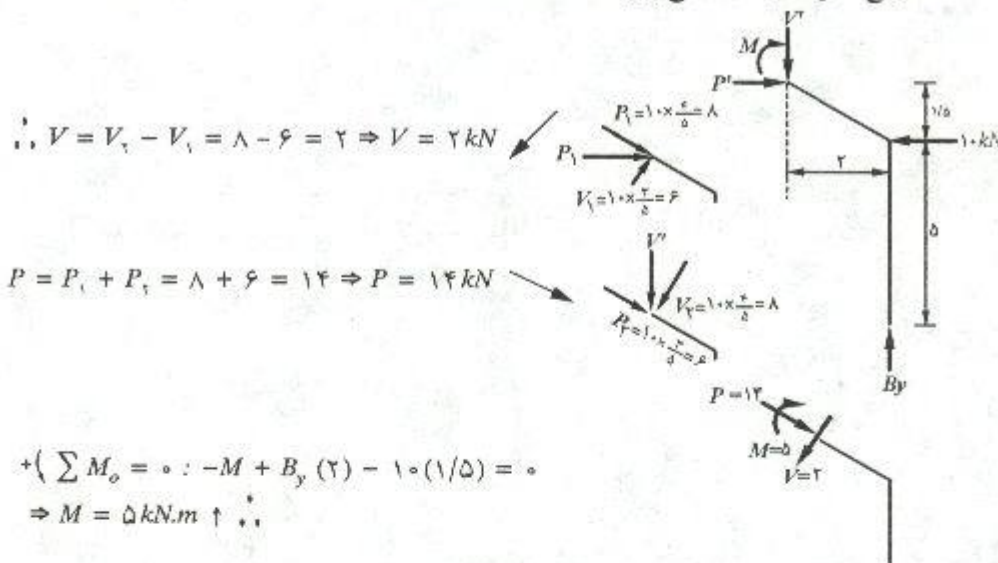
$$\Rightarrow M = 2/6 \text{ kN.m}$$



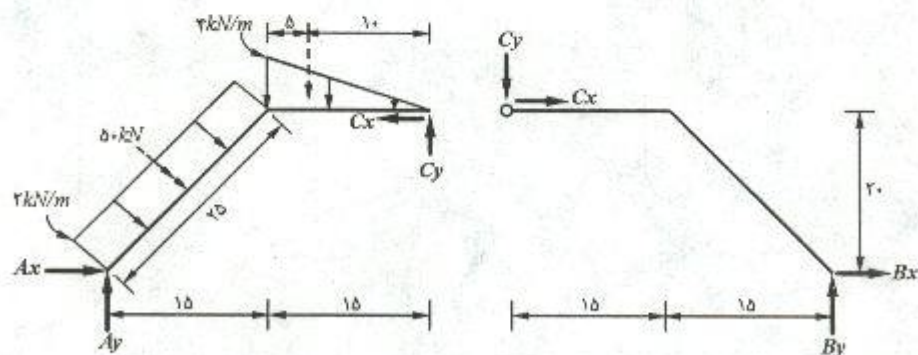
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0: B_y(10) + 10(5) - 25(6) = 0 \Rightarrow B_y = 10 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0: P' - 10 = 0 \Rightarrow P' = 10 \text{ kN} \rightarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0: B_y - V' = 0 \Rightarrow V' = 10 \text{ kN} \downarrow$$



مسئله ۱۱-۲



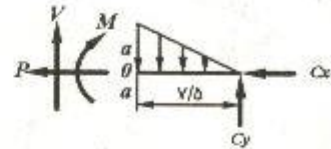
توضیح: بجای بارهای گسترده یکنواخت و مثلثی، از اثر معادل آنها بصورت نیروی متمرکز استفاده می شود.

$$\sum M_A = 0 : C_x(20) + C_y(30) - \left(\frac{4 \times 15}{2}\right)(15 + 5) - (2 \times 25)\left(\frac{25}{2}\right) = 0$$

نیروی برشی، لنگر خمشی / ۲۱

$$\begin{aligned}
 +(\sum M_A = 0 &\Rightarrow \begin{cases} C_x(20) + C_y(30) = 1225 \\ -C_x(20) + C_y(30) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} C_x &= 30/63 \\ C_y &= 20/42 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

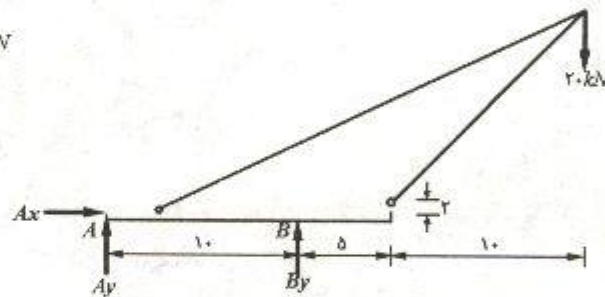
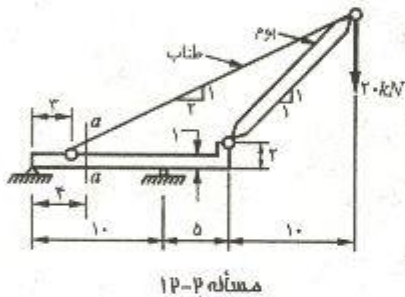
ترسیمه آزاد مقطع (a-a)
(روی قطعه سمت چپ)



(a-a) ترسیمه آزاد مقطع : $\sum F_x = 0 ; -P - C_x = 0 \Rightarrow P = -30/63 \text{ kN}$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : V + C_y - \left(\frac{2 \times v/b}{2} \right) = 0 \Rightarrow V = -12/42 \text{ kN}$$

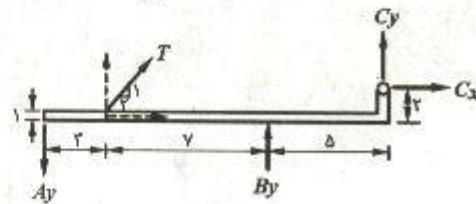
$$+(\sum M_o = 0 : -M + C_y(v/b) - \left(\frac{2 \times v/b}{2} \right) \times \left(\frac{v/b}{3} \right) = 0 \Rightarrow M = 134/4 \text{ kN.m})$$



$$+(\sum M_A = 0 : B_y(10) - 20(20) = 0 \Rightarrow B_y = 40 \text{ kN} \uparrow$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : A_y + B_y - 20 = 0 \Rightarrow A_y = -20 \text{ kN} \uparrow \Rightarrow A_y = 20 \text{ kN} \downarrow$$

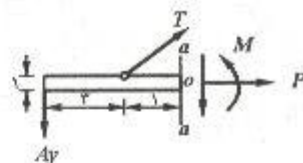


$$+(\sum M_c = 0 : A_y(10) - B_y(5) + \left(T \times \frac{2}{\sqrt{5}} \right)(1) - \left(T \times \frac{1}{\sqrt{5}} \right)(12) = 0$$

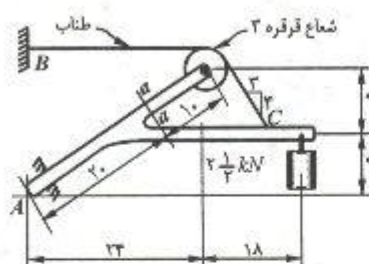
$$\Rightarrow T = 20\sqrt{5} \text{ kN}$$

a-a ترسیمه آزاد مقطع : $\sum F_x = 0 : P + T \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 0 \Rightarrow P = -40 \text{ kN}$

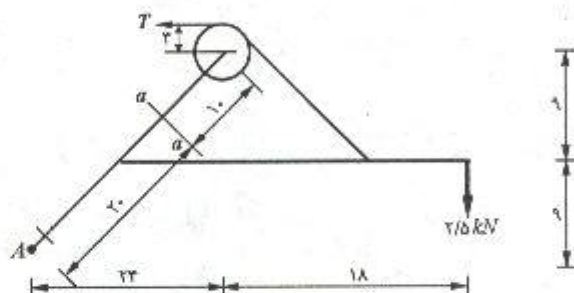
$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : -A_y - V + T \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0 \Rightarrow V = -10 \text{ kN}$$



$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 : M + A_y (4) - \left(T \times \frac{1}{\sqrt{5}} \right) (1) - \left(T \times \frac{3}{\sqrt{5}} \right) (0.5) = 0 \Rightarrow M = -8 \text{ kN.m}$$



مسئله ۱۳-۲



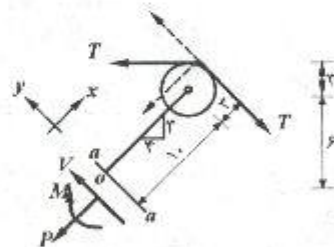
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : T (1.8 + 3) - 2/5 (2.4 + 1.8) = 0 \Rightarrow T = 5 \text{ kN} \leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 : -M - T(1.0 + 3) + T(6 + 3) = 0$$

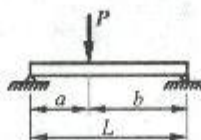
$$M = -20 \text{ kN.m}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 : -P - T \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \Rightarrow P = -4 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : V + T \left(\frac{3}{5} \right) - T = 0 \Rightarrow V = 2 \text{ kN}$$

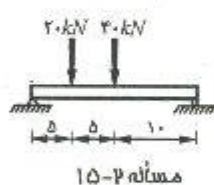
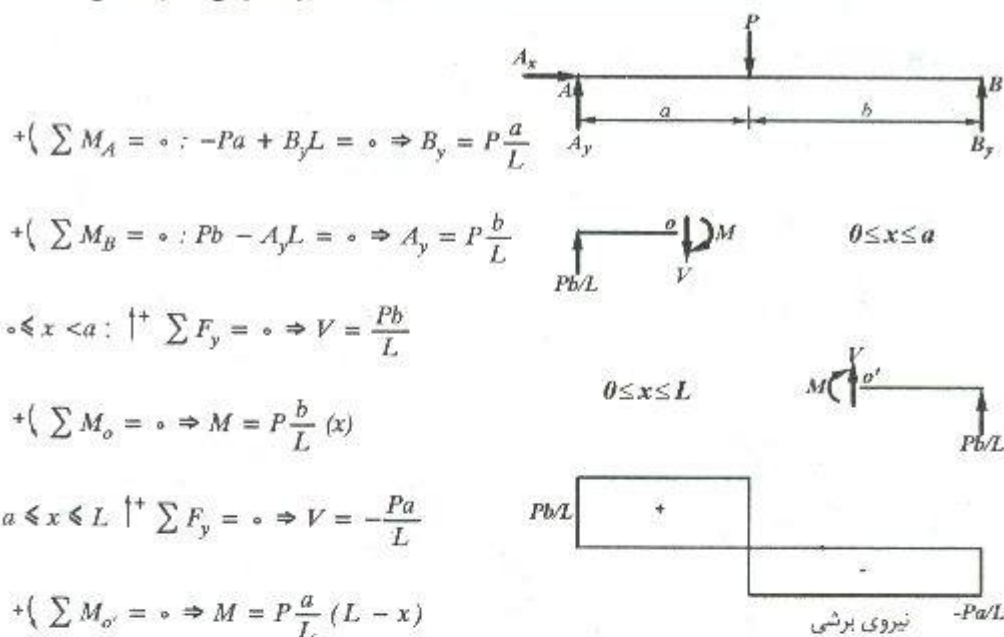


۲-۱۴ تا ۲-۱۹. برای تیرهای نشان داده شده، ترسیم تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را با استفاده از روش مقطع زدن رسم نمایید.

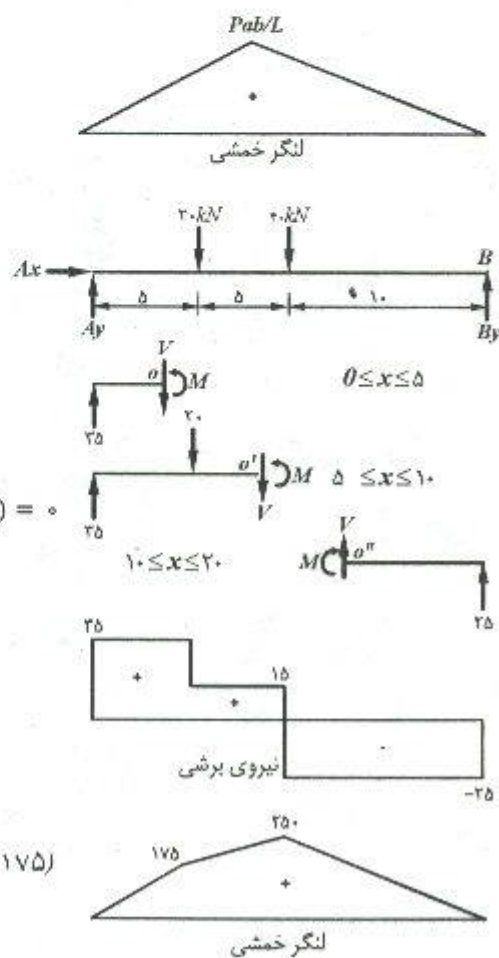


مسئله ۱۴-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$



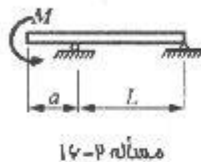
$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$
 $+\left(\sum M_A = 0 : B_y(20) - 20(5) - 40(10) = 0\right)$
 $\Rightarrow B_y = 25 \text{ kN} \uparrow$
 $\uparrow \sum F_y = 0 : A_y + B_y - 20 - 40 = 0$
 $\Rightarrow A_y = 35 \text{ kN} \uparrow$
 $0 \leq x \leq 5 \Rightarrow \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 35 \text{ kN}$
 $+\left(\sum M_o = 0 : M = 35x ; (x = 5 \Rightarrow M = 175)\right)$
 $5 < x \leq 10 \Rightarrow \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 15 \text{ kN}$



$$+\left(\sum M_o = 0 : M = 35x - 20(x - 5) = 15x + 100 : (x = 10 \Rightarrow M = 250)\right)$$

$$10 < x \leq 20 \Rightarrow \uparrow^+ \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -25 \text{ kN}$$

$$+\left(\sum M_o = 0 \Rightarrow M = 25(20 - x)\right)$$



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

$$+\left(\sum M_A = 0 : M_1 + B_y L = 0 \Rightarrow B_y = \frac{-M_1}{L}\right)$$

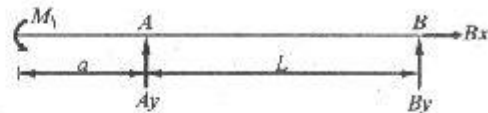
$$+\left(\sum M_B = 0 : M_1 - A_y L = 0 \Rightarrow A_y = \frac{M_1}{L}\right)$$

$$0 \leq x \leq a \Rightarrow +\left(\sum M_o = 0 \Rightarrow M = -M_1\right)$$

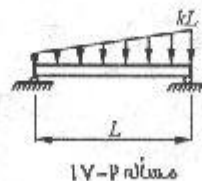
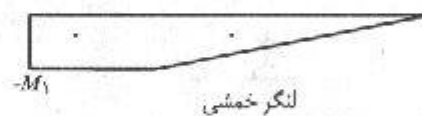
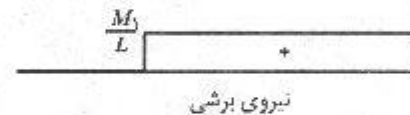
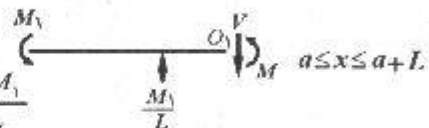
$$a \leq x \leq a + L \Rightarrow \uparrow^+ \sum F_y = 0 \Rightarrow V = \frac{M_1}{L}$$

$$+\left(\sum M_o = 0 : M = \frac{M_1}{L}(x - a) - M_1\right)$$

$$\Rightarrow M = M_1 \left(\frac{x-a}{L} - 1 \right)$$



$$\left(\frac{M_1}{L} \right) \quad 0 \leq x \leq a$$



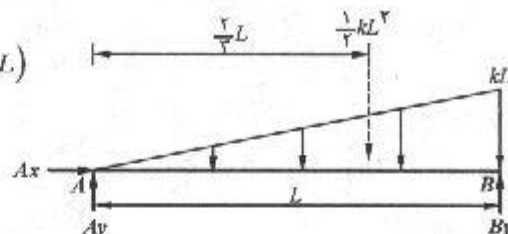
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\left(\sum M_A = 0 : B_y L - \frac{1}{2} KL \left(\frac{2}{3} L \right) = 0 \Rightarrow B_y = \frac{KL}{3}\right)$$

$$+\left(\sum M_B = 0 : -A_y L + \frac{1}{2} KL \left(\frac{1}{3} L \right) = 0 \Rightarrow A_y = \frac{KL}{6}\right)$$

$$0 \leq x \leq L \Rightarrow \uparrow^+ \sum F_y = 0 : -V - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} Kx^2\right) + \frac{KL^2}{6} = 0$$

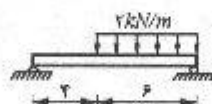
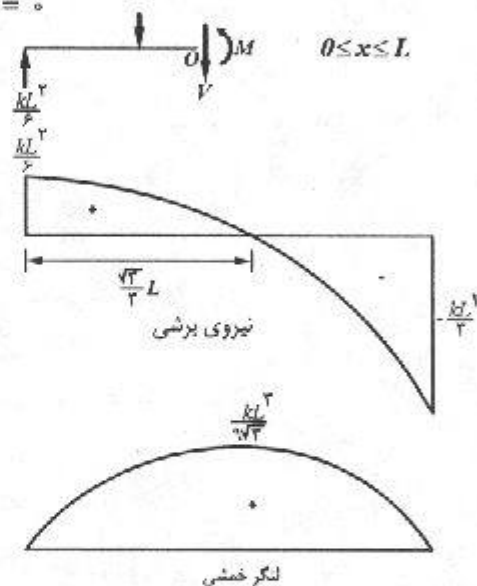
$$V = \frac{KL^2}{6} - \frac{Kx^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow (V = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} L)$$



$$\uparrow^+ (\sum M_o = 0 : M + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} Kx^2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x\right) - \frac{KL^2}{6} x = 0$$

$$M = \frac{KL^2}{6} x - \frac{Kx^3}{6}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} L \Rightarrow M_{max} = \frac{KL^2}{9\sqrt{3}}$$



مسئله ۱۸-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow^+ (\sum M_A = 0 : B_y(10) - (2 \times 7)(3 + 7) = 0 \Rightarrow B_y = 14/5 \text{ kN} \uparrow$$

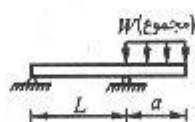
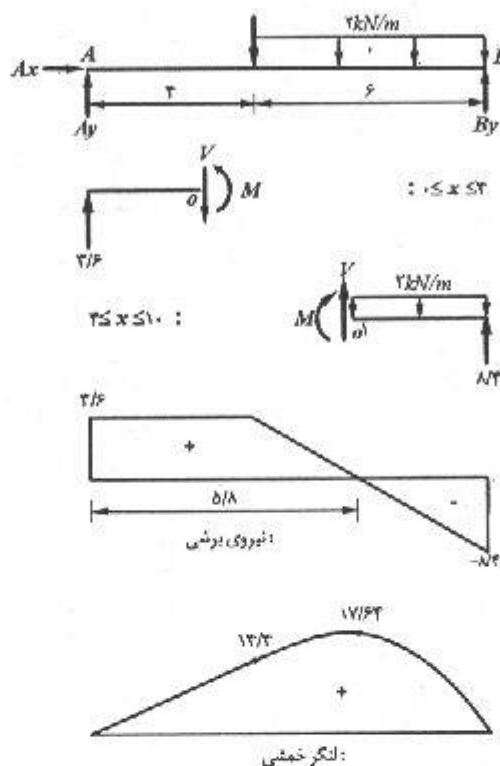
$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : A_y + B_y - (2 \times 7) = 0 \Rightarrow A_y = 3/5 \text{ kN} \uparrow$$

$$0 \leq x \leq 3 : \uparrow^+ \sum F_y = 0 : V + 14/5 - 2(10 - x) = 0 \Rightarrow V = 11/5 - 2x$$

$$3 \leq x \leq 10 : \uparrow^+ \sum F_y = 0 : V + 14/5 - 2(10 - x) = 0 \Rightarrow V = 11/5 - 2x$$

$$\uparrow^+ (\sum M_o = 0 : M + 2 \times \frac{(10 - x)^2}{2} - 14/5(10 - x) = 0 \Rightarrow M = -x^2 + 11/5x - 14$$

$$V = 0 \Rightarrow x = 5/8 \Rightarrow M_{max} = - (5/8)^2 + 11/6(5/8) - 16 = 17/64$$



مسئله ۱۹-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+ (\sum M_A = 0 : B_y L - W(L + \frac{a}{2}) = 0 \Rightarrow B_y = W(1 + \frac{a}{2L})$$

$$+ (\sum M_B = 0 : -A_y L - W \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow A_y = -W \frac{a}{2L}$$

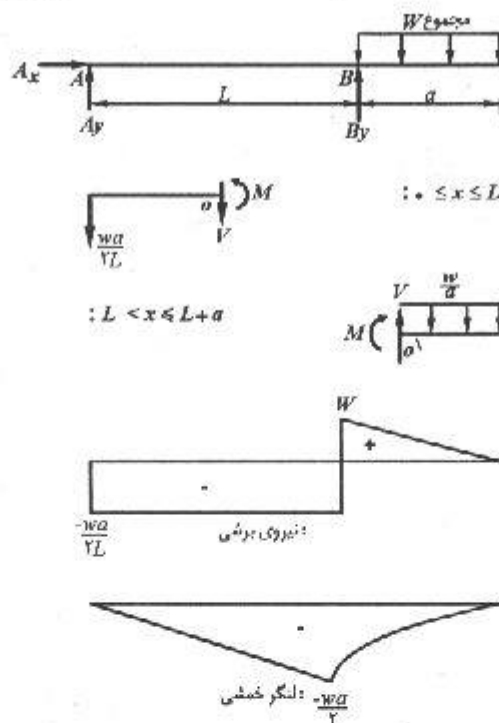
$$0 \leq x \leq L : \uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -W \frac{a}{2L}$$

$$+ (\sum M_o = 0 \Rightarrow M = -W \frac{a}{2L} x$$

$$L \leq x \leq L + a : \uparrow + \sum F_y = 0 \Rightarrow V = \frac{W}{a} (L + a - x)$$

$$+ (\sum M_o = 0 : M = -\frac{W}{a} \frac{(L + a - x)^2}{2}$$

$$x = L \Rightarrow M_{max} = -\frac{Wa}{2}$$



۲-۲۰. مطلوب است رسم ترسیمه تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر مسأله ۲-۳ با استفاده از روش مقطع زدن. از قرارداد علامت تیرها استفاده نماید.

$$0 \leq x \leq 10: \uparrow \sum F_y = 0: 1000 - V - \frac{1}{2}x \left[100 + 100 + \frac{x}{10}(300) \right] = 0$$

$$V = 1000 - \frac{1}{2}x(200 + 30x)$$

$$\Rightarrow V = -15x^2 - 100x + 1000$$

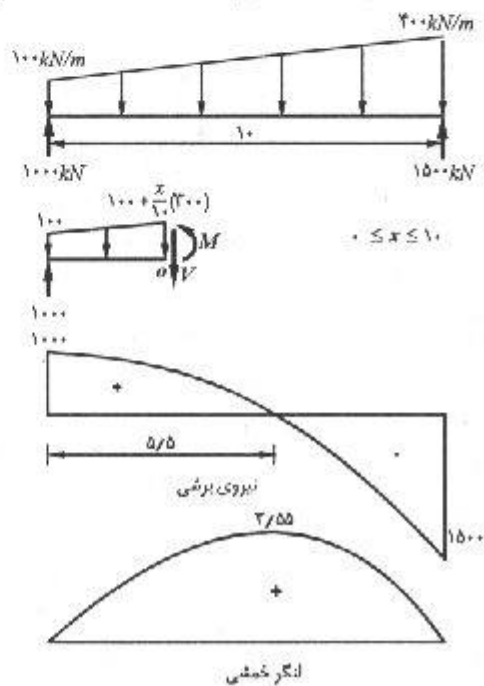
$$+\left(\sum M_o = 0 \Rightarrow M - 1000x \right.$$

$$\left. + \left[100 \frac{x^2}{2} + \left(30 \frac{x^2}{2} \right) \left(\frac{x}{3} \right) \right] = 0 \right.$$

$$M = -5x^3 - 50x^2 + 1000x$$

$$V = 0 \Rightarrow x = 5/5$$

$$\Rightarrow M_{max} = 3155 \text{ kN.m}$$



۲-۲۱. خواسته‌های مسأله ۲-۲۰ را برای تیر مسأله شماره ۲-۴ انجام دهید.

$$0 \leq x \leq 6: \uparrow \sum F_y = 0: -V - 4x + 18/33 = 0 \Rightarrow V = 18/33 - 4x$$

$$+(\sum M_o = 0: M + \frac{4x^2}{2} - 18/33x = 0 \Rightarrow M = -2x^2 + 18/33x$$

$$V = 0 \Rightarrow x = 4/6 \Rightarrow M_{max} = 42$$

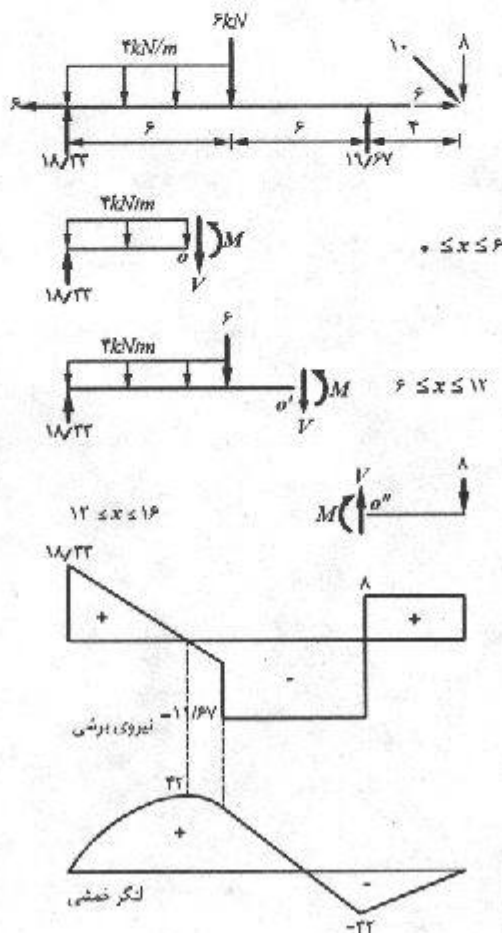
$$6 \leq x \leq 12: \uparrow \sum F_y = 0: -V - 6 - (4)(6) + 18/33 = 0 \Rightarrow V = -11/67$$

$$+(\sum M_o = 0: M + 6(x-6) + (4)(6)(x-3) - 18/33x = 0$$

$$M = -11/67x + 108 \quad (x = 12 \Rightarrow M_{12} = -32 \text{ kN.m})$$

$$12 \leq x \leq 16: \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 8 \text{ kN}$$

$$+(\sum M_o = 0: M = -8(16-x) \Rightarrow M = 8x - 128$$



۲-۲۲. خواسته‌های مسأله ۲-۲۰ را برای تیر مسأله شماره ۲-۵ انجام دهید.

$$0 \leq x \leq 3: \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = -2/5 \text{ kN}$$

$$+(\sum M_o = 0 \Rightarrow M = -2/5 x$$

$$3 \leq x \leq 9: \uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -V - 2/5$$

$$+ \left[\frac{2(x-3)}{6} \times \frac{(x-3)}{2} \right] = 0$$

$$V = \frac{1}{6} x^2 - x - 1$$

$$+(\sum M_o = 0 \Rightarrow M + 2/5 x$$

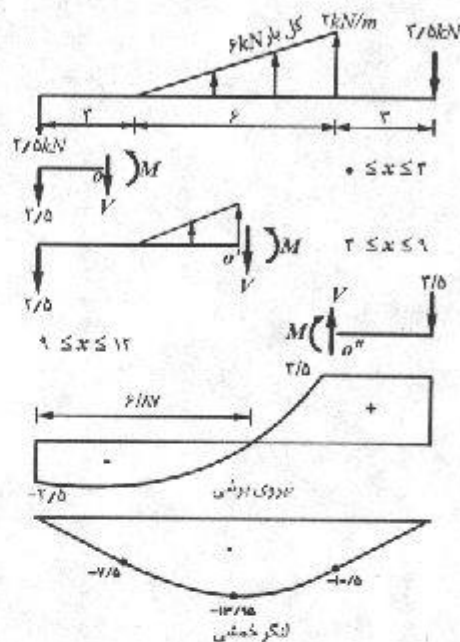
$$- \left[\frac{2(x-3)}{6} \times \frac{(x-3)}{2} \times \frac{(x-3)}{3} \right] = 0$$

$$M = \frac{(x-3)^2}{18} - 2/5 x$$

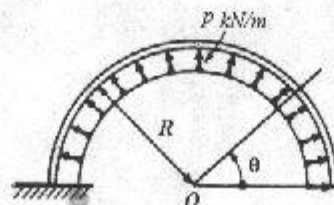
$$V = 0 \Rightarrow x = 6/87 \text{ m} \Rightarrow M_{\max} = \frac{(6/87 - 3)^2}{18} - 2/5(6/87) = -13/95$$

$$9 \leq x \leq 12: \uparrow \sum F_y = 0: V = 3/5 \text{ kN}$$

$$+(\sum M_o = 0: -M - 3/5(12-x) = 0 \Rightarrow M = 3/5 x - 42$$



۲-۲۳ و ۲-۲۴. مطلوب است رسم تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر طره‌ای نیم‌دایره‌ای که مطابق شکل تحت فشار داخلی P قرار دارد با استفاده از روش مقطع زدن. برای حل مسأله از مختصات قطبی استفاده نمایید. یعنی مقادیر P ، V و M را برحسب θ تعیین کرده و رسم نمایید (مطالعه مثال ۲-۸ مفید خواهد بود) از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید.



۲۴-۲۳

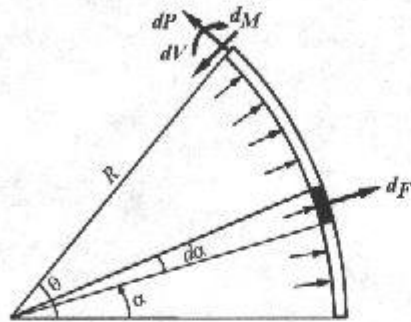
کمانی را در نظر بگیرید که روی نقطه‌ای از آن نیروی F وارد می‌شود. با توجه به شکل الف در محلی

روی کمان که نسبت به محل اثر نیرو با زاویه مرکزی φ مشخص می‌شود داریم:

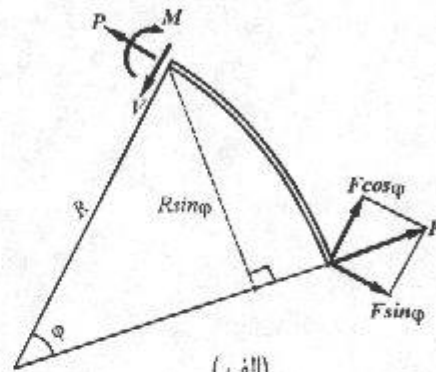
$$P = F \sin \varphi$$

$$V = F \cos \varphi$$

$$M = FR \sin \varphi$$



(ب)



(الف)

جزء نیروی وارد بر المان در شکل (ب):

$$dF = pds = pRd\alpha$$

با بکارگیری روابط (۱) برای المان:

$$dP = dF \sin(\theta - \alpha) = pRd\alpha \sin(\theta - \alpha)$$

$$dV = dF \cos(\theta - \alpha) = pRd\alpha \cos(\theta - \alpha)$$

$$dM = dFR \sin(\theta - \alpha) = pR^2d\alpha \sin(\theta - \alpha)$$

$$P = \int_0^\theta dP = \int_0^\theta pR \sin(\theta - \alpha) d\alpha = pR \cos(\theta - \alpha) \Big|_0^\theta \Rightarrow P = pR (1 - \cos \theta)$$

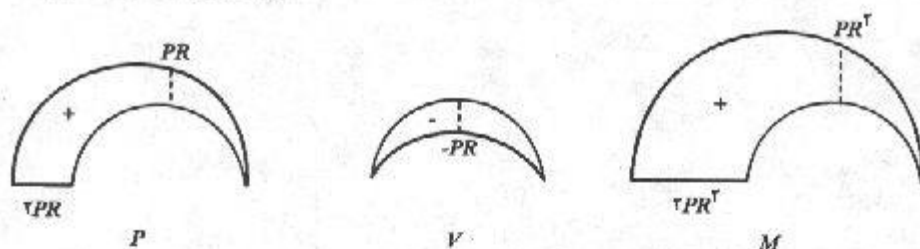
$$\theta = 0 \Rightarrow P = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = pR, \theta = \pi \Rightarrow P = 2pR$$

$$V = \int_0^\theta dV = \int_0^\theta pR \cos(\theta - \alpha) d\alpha = -pR \sin(\theta - \alpha) \Big|_0^\theta \Rightarrow V = -pR \sin \theta$$

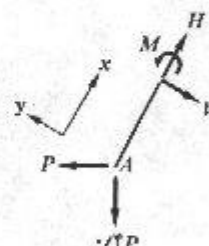
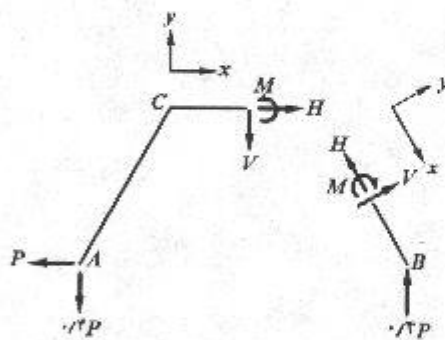
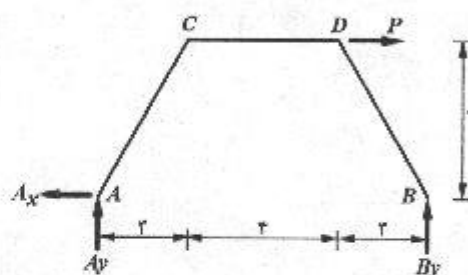
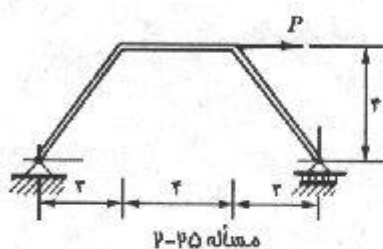
$$\theta = 0 \Rightarrow V = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V = -pR, \theta = \pi \Rightarrow V = 0$$

$$M = \int_0^\theta dM = \int_0^\theta pR^2 \sin(\theta - \alpha) d\alpha = pR^2 \cos(\theta - \alpha) \Big|_0^\theta \Rightarrow M = pR^2 (1 - \cos \theta)$$

$$\theta = 0 \Rightarrow M = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow M = pR^2, \theta = \pi \Rightarrow M = 2pR^2$$



۲-۲۵. مطلوب است رسم تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی برای قاب نشان داده شده در شکل با استفاده از روش مقطع زدن. از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید و ترسیمه‌های مثبت را در طرف فشاری قاب نشان دهید.



$$\rightarrow \sum F_x = 0 : -A_x + P = 0 \Rightarrow A_x = P \leftarrow$$

$$+ (\sum M_A = 0 : B_y(4a) - P(2a) = 0 \Rightarrow B_y = 0.5P \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = -0.5P \uparrow$$

$$A_y = 0.5P \downarrow$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 : H - (0.5P) \left(\frac{2}{5}\right) - P \left(\frac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow H = 0.4P$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : -V - (0.5P) \left(\frac{2}{5}\right) + P \left(\frac{3}{5}\right) = 0 \Rightarrow V = 0.2P$$

$$+ (\sum M_A = 0 : M - V_x = 0 \Rightarrow M = 0.2Px \quad (0 \leq x \leq 2a))$$

قطعه AC

قطعه ACD

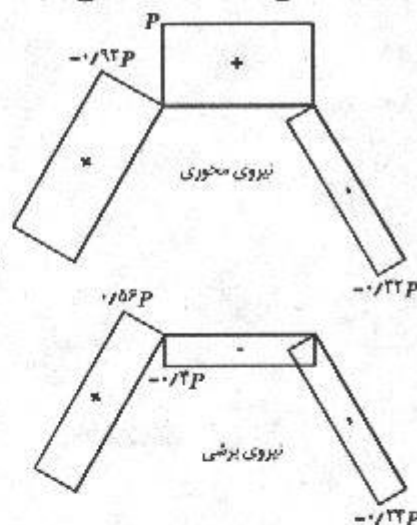
$$\rightarrow \sum F_x = 0 : H - P = 0 \Rightarrow H = P \rightarrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : -V - 0/4P = 0 \Rightarrow V = -0/4P \downarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow M - H(4) - V(3+x) = 0$$

$$M - P(4) - (-0/4P)(3+x) = 0$$

$$M = 2/8P - 0/4Px \quad (0 \leq x \leq 4)$$



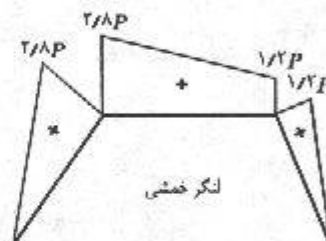
قطعه BD

$$\rightarrow \sum F_x = 0 : -H - (0/4P)(\frac{5}{8}) = 0 \Rightarrow H = -0/32P$$

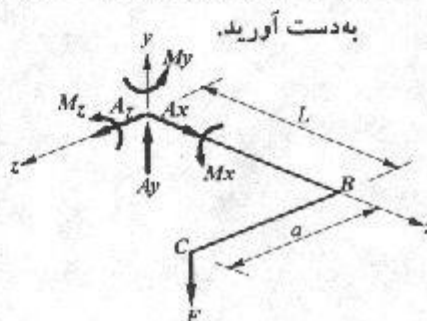
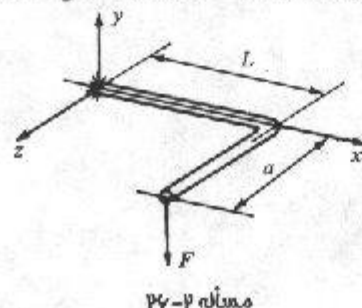
$$\uparrow \sum F_y = 0 : V + 0/4P(\frac{3}{8}) = 0 \Rightarrow V = -0/24P$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 : -M - V(5-x) = 0 \Rightarrow -M - (-0/24P)(5-x) = 0$$

$$\Rightarrow M = 0/24P(5-x) \quad (0 \leq x \leq 5)$$



۲-۲۶. میله خم شده‌ای همانند شکل مفروض است. ابتدا با صرف نظر کردن از وزن میله، رابطه تغییرات نیروی برشی V و لنگر خمشی M و لنگر پیچشی T را با استفاده از روش مقطع زدن پیدا نمایید و سپس آنها را رسم کنید. از قرارداد علامت منطبق بر محور مختصات راست استفاده نمایید. سپس با در نظر گرفتن وزن میله به مقدار P کیلونیوتن بر متر، واکنشهای تکیه‌گاهی انتهای گیردار را به دست آورید.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

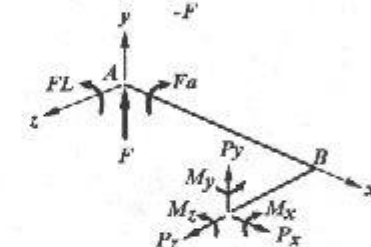
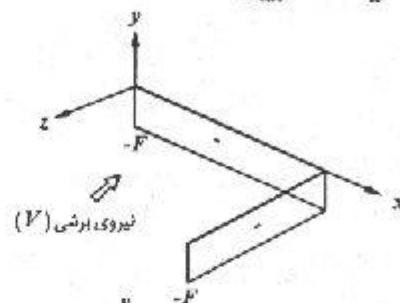
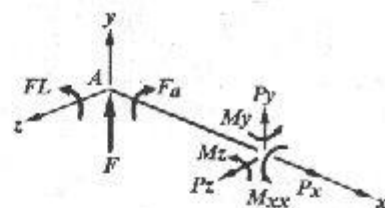
$$\sum F_y = 0 : A_y - F = 0 \Rightarrow A_y = F \uparrow$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 : M_x + Fa = 0 \Rightarrow M_x = -Fa \downarrow$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0 : M_z - FL = 0 \Rightarrow M_z = FL \uparrow$$



قطعه AB

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 : P_y + F = 0 \Rightarrow P_y = -F \uparrow = V$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow P_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 : M_x - Fa = 0 \Rightarrow M_x = Fa \downarrow = T$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0 : M_z + FL - Fx = 0 \Rightarrow$$

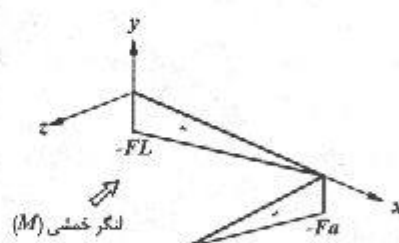
$$M_z = F(x - L) \uparrow = M \quad 0 \leq x \leq L$$

قطعه BC

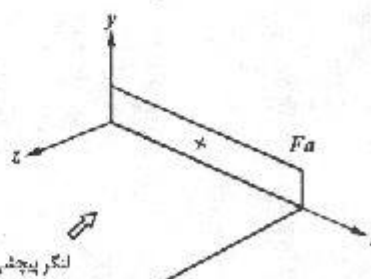
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 : P_y + F = 0 \Rightarrow P_y = -F \uparrow = V$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow P_z = 0$$



لنگر خمشی (M)



لنگر پیچشی (T)

$$+\left(\sum M_x = 0 : -M_x - Fa + Fz = 0 \Rightarrow M_{xx} = F(z - a) \downarrow = M \quad 0 \leq z \leq a\right.$$

$$+\left(\sum M_y = 0 \Rightarrow M_{yy} = 0\right.$$

$$+\left(\sum M_z = 0 : M_z + FL - FL = 0 \Rightarrow M_{zz} = 0 = T\right.$$

$$+\left(\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0\right.$$

$$+\left(\sum F_y = 0 : A_y - F - PL - Pa = 0 \Rightarrow\right.$$

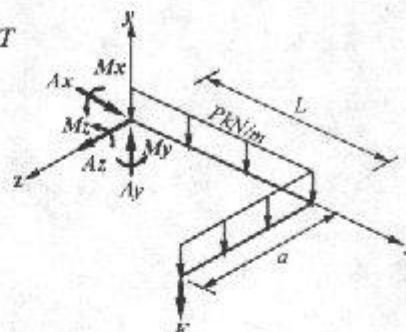
$$A_y = F + P(L + a) \uparrow$$

$$+\left(\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z = 0\right.$$

$$+\left(\sum M_{x_A} = 0 : M_{x_A} + Fa + (Pa)\left(\frac{a}{3}\right) = 0 \Rightarrow M_{x_A} = -Fa - P\frac{a^2}{3} \downarrow\right.$$

$$+\left(\sum M_{y_A} = 0 \Rightarrow M_{y_A} = 0\right.$$

$$+\left(\sum M_{z_A} = 0 : M_{z_A} - FL - (Pa)(L) - (PL)\left(\frac{L}{3}\right) = 0 \Rightarrow M_{z_A} = FL + PaL + \frac{PL^2}{3}\right)$$

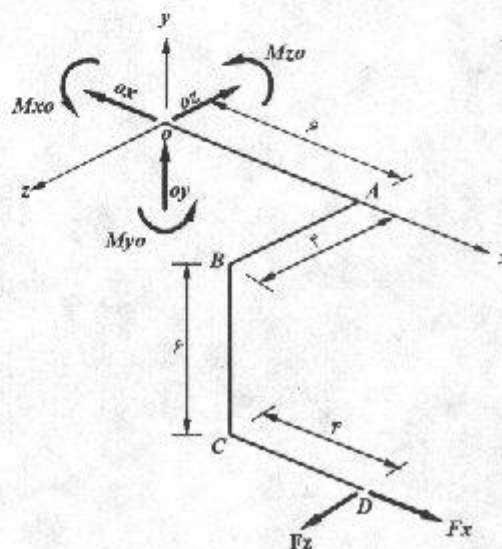
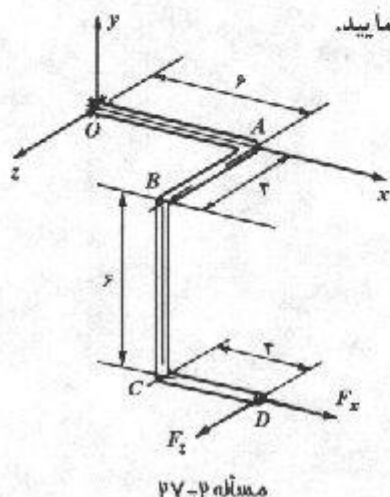


۲-۲۷. لوله‌ای مطابق شکل که دارای سه زانوی ۹۰ درجه می‌باشد، در نظر بگیرید.

(الف) رابطه کلی نیروهای داخلی P_x, P_y, P_z و M_x, M_y, M_z را در هر یک از قسمتهای آن به دست آورید. نیروی F_x را مساوی ۱۰۰ و P_z را مساوی ۵۰ کیلونیوتن در نظر بگیرید و از قرارداد علامت منطبق بر دستگاه مختصات راست استفاده نمایید.

(ب) نتایج قسمت الف را رسم نمایید.

(پ) اگر علاوه بر نیروهای وارده F_x و F_z ، وزن لوله به میزان ۱۰ کیلونیوتن بر متر در نظر گرفته شود، واکنشهای تکیه‌گاهی تکیه‌گاه گیردار O را تعیین نمایید.



نیروی برشی، لنگر خمشی / ۳۵

$$\downarrow \sum F_x = 0 : -O_x + F_x = 0 \Rightarrow O_x = F_x = 100 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow O_y = 0$$

$$\nearrow \sum F_z = 0 : -O_z + F_z = 0 \Rightarrow O_z = F_z = 50 \text{ kN}$$

$$+(\sum M_x = 0 : M_x - F_z(6) = 0 \Rightarrow M_x = 6F_z = 300 \text{ kN.m})$$

$$+(\sum M_y = 0 : M_y + F_x(4) - F_z(10) = 0 \Rightarrow M_y = 100 \text{ kN.m})$$

$$+(\sum M_z = 0 : M_z + F_x(6) = 0 \Rightarrow M_z = -6F_x = -600 \text{ kN.m})$$

قطعه MA

$$\downarrow \sum F_x = 0 : P - 100 = 0 \Rightarrow P = 100 \text{ kN}$$

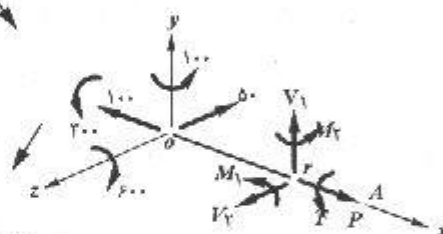
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

$$\nearrow \sum F_z = 0 : V_1 - 50 = 0 \Rightarrow V_1 = 50 \text{ kN}$$

$$+(\sum M_x = 0 : T + 300 = 0 \Rightarrow T = -300 \text{ kN.m})$$

$$+(\sum M_y = 0 : M_1 + 100 - 50x = 0 \Rightarrow M_1 = 50x - 100 ; 0 \leq x \leq 6)$$

$$+(\sum M_z = 0 : M_1 - 600 = 0 \Rightarrow M_1 = 600 \text{ kN.m})$$

قطعه AB

$$\downarrow \sum F_x = 0 : -V_1 - 100 = 0 \Rightarrow V_1 = -100 \text{ kN}$$

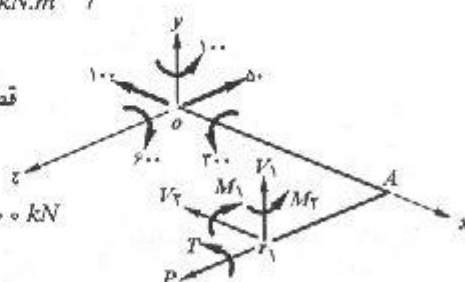
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

$$\nearrow \sum F_z = 0 : P - 50 = 0 \Rightarrow P = 50 \text{ kN}$$

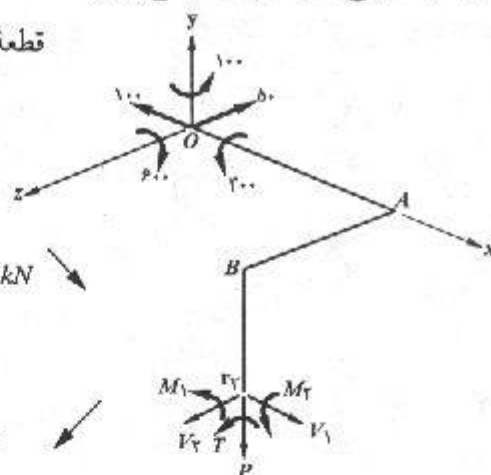
$$+(\sum M_x = 0 : -M_1 + 300 = 0 \Rightarrow M_1 = +300 \text{ kN.m})$$

$$+(\sum M_y = 0 : M_1 + 100 + 100z - 50(6) = 0 \Rightarrow M_1 = 300 - 100z ; 0 \leq z \leq 6)$$

$$+(\sum M_z = 0 : T - 600 = 0 \Rightarrow T = 600 \text{ kN.m})$$



قطعه BC:



$$\sum F_x = 0 : V_1 - 100 = 0 \Rightarrow V_1 = 100 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : -P = 0 \Rightarrow P = 0$$

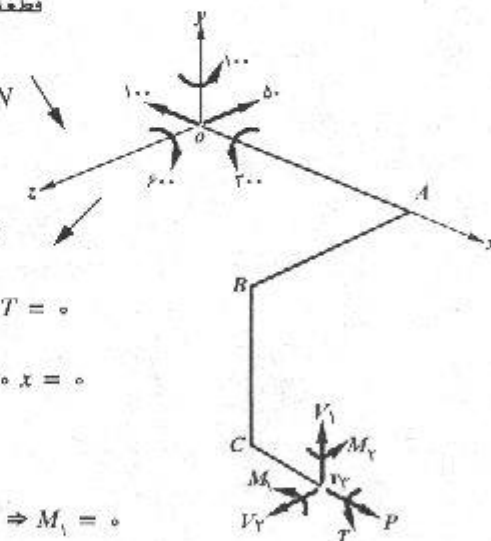
$$\sum F_z = 0 : V_1 - 50 = 0 \Rightarrow V_1 = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_{x,r} = 0 : M_1 + 300 - 50 \cdot y = 0 \Rightarrow M_1 = 50 \cdot y - 300 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 6$$

$$\sum M_{y,r} = 0 : -T + 100 - 50(6) + 100(4) = 0 \Rightarrow T = 200 \text{ kN.m}$$

$$\sum M_{z,r} = 0 : M_1 - 600 + 100 \cdot y = 0 \Rightarrow M_1 = 600 - 100 \cdot y \quad ; \quad 0 \leq y \leq 6$$

قطعه CD:



$$\sum F_x = 0 : P - 100 = 0 \Rightarrow P = 100 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

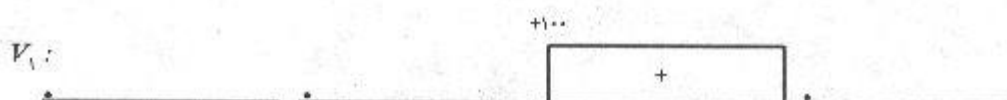
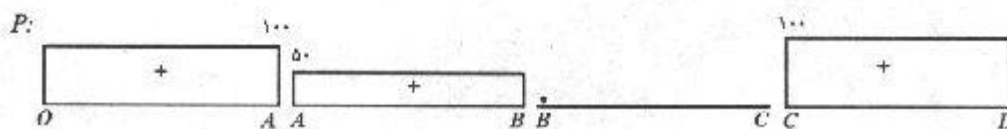
$$\sum F_z = 0 : V_1 - 50 = 0 \Rightarrow V_1 = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_{x,r} = 0 : T + 300 - 50(6) = 0 \Rightarrow T = 0$$

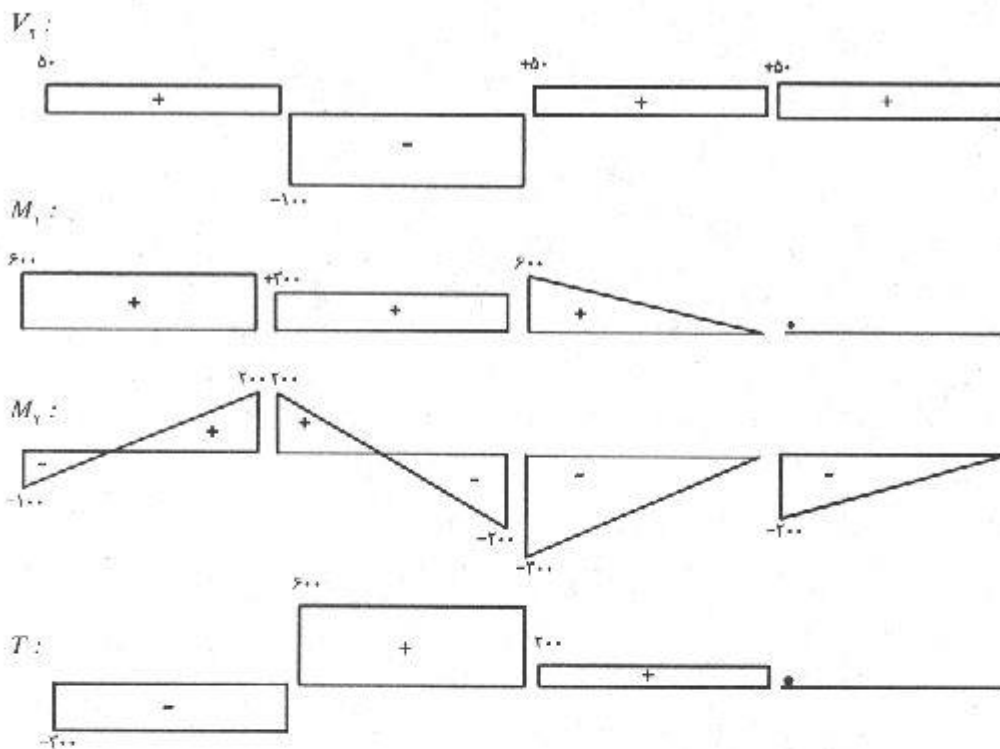
$$\sum M_{y,r} = 0 : M_1 + 100 + 100(4) - 50 \cdot x = 0$$

$$M_1 = 50 \cdot x - 500 \quad ; \quad 6 \leq x \leq 10$$

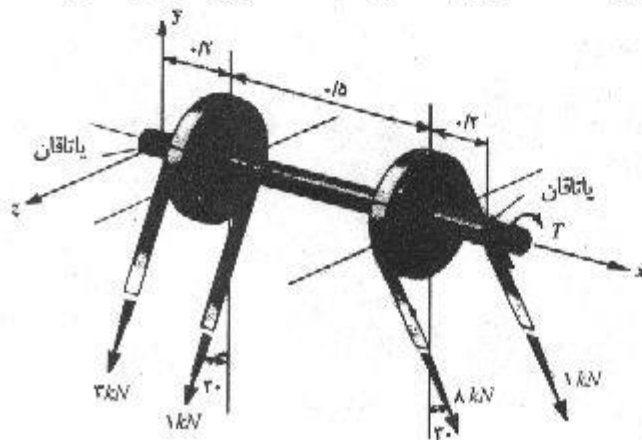
$$\sum M_{z,r} = 0 : M_1 - 600 + 100(6) = 0 \Rightarrow M_1 = 0$$



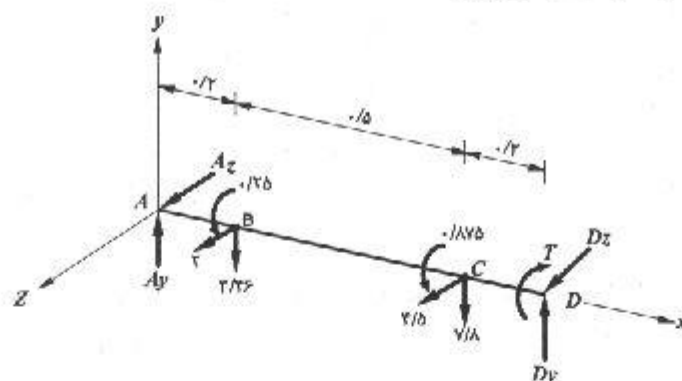
نیروی برشی، لنگر خمشی / ۳۷



۲-۲۸. موتور محوری را که دارای دو قرقره تسمه خور به قطر 25° متر می باشد، به دوران در می آورد. نیروی کششی تسمه ها معلوم هستند و مقادیر آنها در روی شکل نشان داده شده است. با استفاده از روش مقطع زدن، مطلوب است: (الف) رسم تغییرات لنگر خمشی ناشی از مؤلفه قائم نیروهایی که بر روی محور تأثیر می کنند، به عبارت دیگر رسم تغییرات لنگر خمشی برای صفحه xy (ب) رسم تغییرات لنگر خمشی ناشی از مؤلفه افقی نیروهایی که بر محور تأثیر می کنند، به عبارت دیگر رسم تغییرات لنگر خمشی برای صفحه yz (پ) رسم تغییرات لنگر پیچشی. از قرارداد علامت منطبق بر محورهای مختصات راست استفاده نمایید. (لازم به تذکر است که با استفاده از معادله $\sum M_x = 0$ و اطلاعات مربوط به کشش تسمه ها، لنگر پیچشی وارده T به دست می آید).



مسئله ۲-۲۸

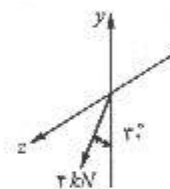


ابتدا برآیند نیروی کششی تسمه‌ها را (بصورت یک نیروی متمرکز و یک لنگر) محاسبه نموده و بر محور اثر می‌دهیم.

$$P_B = 3 + 1 = 4 \text{ kN} \Rightarrow B_y = 4 \cos 30^\circ = 3.46 \text{ kN} \downarrow$$

$$B_z = 4 \sin 30^\circ = 2 \text{ kN} \swarrow$$

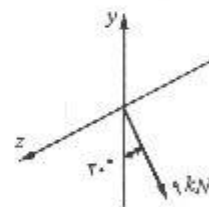
$$M_B = (3 - 1) \left(\frac{0.25}{1} \right) = 0.25 \text{ kN.m} \downarrow$$



$$P_C = 1 + 1 = 2 \text{ kN} \Rightarrow C_y = 2 \cos 30^\circ = 1.73 \text{ kN} \downarrow$$

$$C_z = 2 \sin 30^\circ = 1 \text{ kN} \swarrow$$

$$M_C = (1 - 1) \left(\frac{0.25}{1} \right) = 0 \text{ kN.m}$$



حال عکس‌العمل تکیه‌گاهها (یا تاقانهای A و D) را محاسبه می‌کنیم:

$$+\left(\sum M_{z_A} = 0 : D_y(0.9) - 1.73(0.7) - 3.46(0.2) = 0 \Rightarrow D_y = 6.84 \text{ kN} \uparrow \right.$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 : A_y + D_y - 3.46 - 1.73 = 0 \Rightarrow A_y = 4.42 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\left(\sum M_{y_A} = 0 : -D_z(0.9) + 1(0.7) - 2(0.2) = 0 \Rightarrow D_z = 3.05 \text{ kN} \swarrow \right.$$

$$+\downarrow \sum F_z = 0 : +A_z + D_z + 2 - 4/5 = 0 \Rightarrow A_z = -0.55 \swarrow$$

$$+\left(\sum M_{x_A} = 0 : -T + 0.25 + 0.175 = 0 \Rightarrow T = 0.425 \text{ kN.m} \right) + \text{ لنگر پیچشی وارده}$$

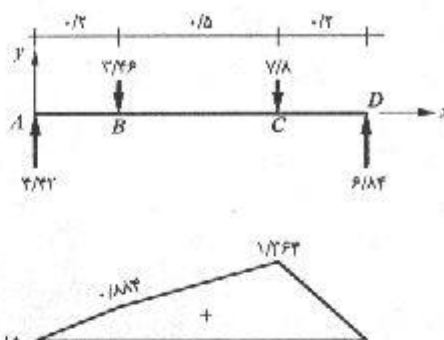
الف، رسم نمودار لنگه خمشی برای صفحه xy

مقطع AB ، $M = 4/42x$ ؛ $0 \leq x \leq 0/2$

مقطع BC ، $M = 4/42x - 3/46(x - 0/2)$

$= 0/96x + 0/692$ ؛ $0/2 \leq x \leq 0/7$

مقطع CD ، $M = 6/84(0/9 - x)$ ؛ $0/7 \leq x \leq 0/9$



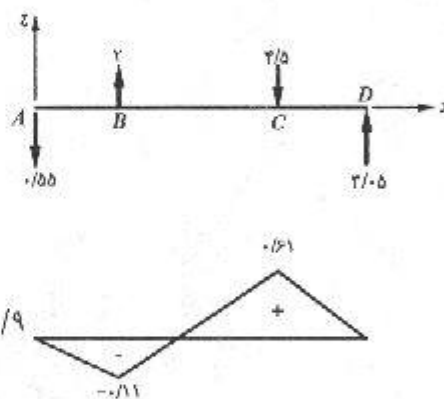
ب، رسم نمودار لنگر خمشی برای صفحه xz

مقطع AB ، $M = -0/55x$ ؛ $0 \leq x \leq 0/2$

مقطع BC ، $M = 2(x - 0/2) - 0/55x$

$= 1/45x - 0/4$ ؛ $0/2 \leq x \leq 0/7$

مقطع CD ، $M = 3/05(0/9 - x)$ ؛ $0/7 \leq x \leq 0/9$

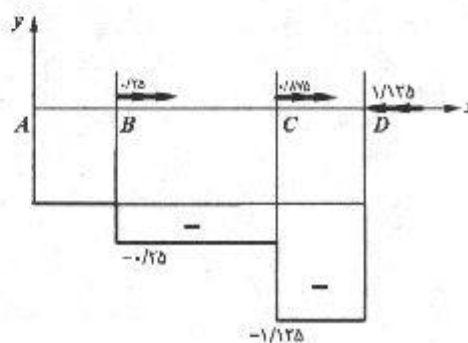


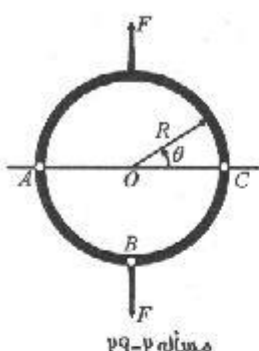
پ: رسم نمودار لنگر پیچشی،

مقطع AB ، $T = 0$

مقطع BC ، $T = -0/25$

مقطع CD ، $T = -1/125$





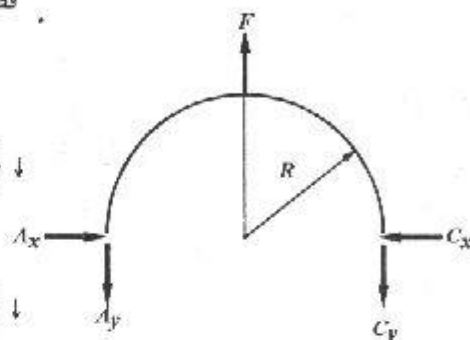
۲-۲۹. یک حلقه دایره شکل با سه مفصل در نقاط A ، B ، C تحت تأثیر بارگذاری نشان داده شده در شکل قرار دارد. مطلوب است تعیین روابط ریاضی $P(\theta)$ ، $V(\theta)$ و $M(\theta)$ برای ناحیه $0 < \theta < 90^\circ$. از قرارداد علامت تیرها استفاده نمایید.

قطعه AC

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : F \cdot R - C_y(2R) = 0 \Rightarrow C_y = \frac{F}{2} \downarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : -A_y + F - C_y = 0 \Rightarrow A_y = \frac{F}{2} \downarrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = C_x$$



قطعه BC

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 : \frac{F}{2}(R) - C_x(R) = 0 \Rightarrow C_x = \frac{F}{2} \rightarrow$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 : -P - \frac{F}{2} \sin \theta + \frac{F}{2} \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{F}{2} (\cos \theta - \sin \theta) \nearrow$$

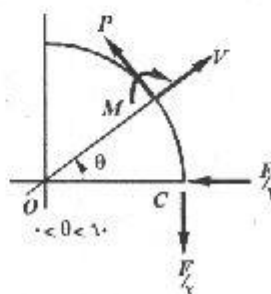
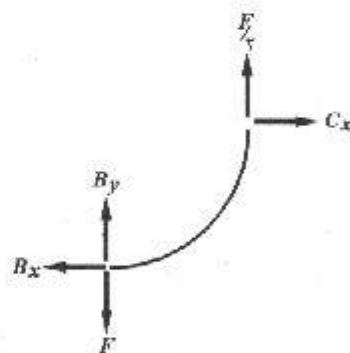
$$+\uparrow \sum F_y = 0 : V - \frac{F}{2} \cos \theta - \frac{F}{2} \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow V = \frac{F}{2} (\cos \theta + \sin \theta) \nearrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 \Rightarrow -M - \frac{F}{2} R + P \cdot R = 0$$

$$\Rightarrow M = -\frac{F}{2} R + \frac{F}{2} R (\cos \theta - \sin \theta)$$

$$M = \frac{F}{2} R (\cos \theta - \sin \theta - 1)$$



۲-۳۰. اگر جهت مثبت نیروهای داخلی P ، V ، M طبق شکل تعریف شده باشد، مطلوب است تعیین روابط ۲-۴، ۲-۵ و ۲-۶ برای آن

$$+\downarrow \sum F_z = 0 \Rightarrow -V + P \Delta x + V + \Delta V = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = -P \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = -P \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -P \quad (1)$$

$$+\circlearrowleft \sum M = 0$$

$$\Rightarrow M + \Delta M - M - P \frac{\Delta x^2}{2} - (V + \Delta V) \Delta x = 0$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{P \Delta x}{2} + (V + \Delta V) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P \frac{\Delta x}{2} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (V + \Delta V)$$

$$\therefore \frac{dM}{dx} = 0 - V \Rightarrow \frac{dM}{dx} = -V \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{dM}{dx} \right) = \frac{d(-V)}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 M}{dx^2} = +P$$

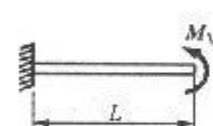
$$(1) \text{ انتگرال از رابطه } \Rightarrow V_D - V_C = \int_{x_C}^{x_D} -P dx$$

$$(2) \text{ انتگرال از رابطه } \Rightarrow M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} -V dx$$

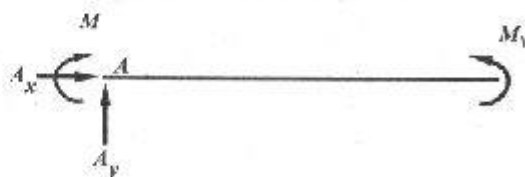
۲-۳۱-۲۵-۵۳. مطلوب است رسم ترسیمه‌های تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر

خمشی برای تیرهای نشان داده شده در شکل با استفاده از روش جمع زدن. با توجه به ترسیمه

تغییرات لنگر خمشی، منحنی ارتجاعی تیرها را نیز به طور کیفی رسم نمایید. در تمام مسائل از وزن تیرها صرف نظر نمایید و از قرارداد علامت تیرها استفاده کنید.



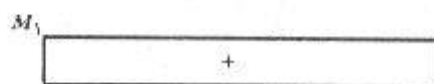
مسئله ۳۱-۲



$$+\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

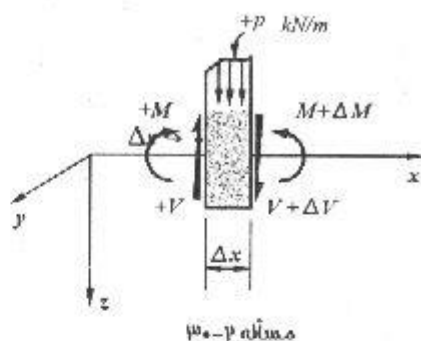
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow -M + M_1 = 0 \Rightarrow M = +M_1$$



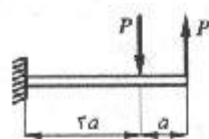
لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی



مسئله ۳۰-۲

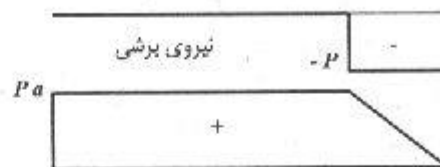
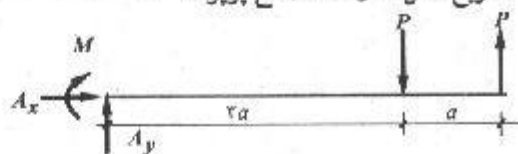


مسئله ۷-۳۳

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 0$$

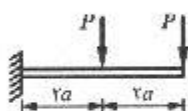
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : -M - P(2a) + P(a) = 0 \Rightarrow M = Pa$$



لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی



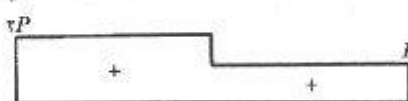
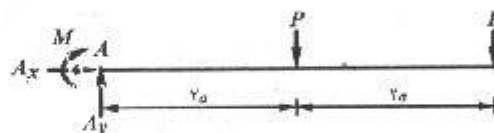
مسئله ۷-۳۴

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

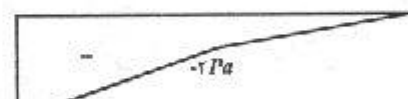
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 2P$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow -M - P(2a) - P(a) = 0 \Rightarrow M = -6Pa$$

$$M = -6Pa$$



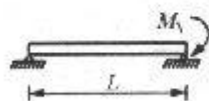
نیروی برشی



لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی



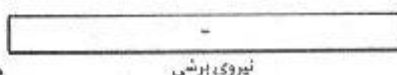
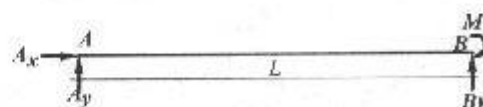
مسئله ۷-۳۵

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

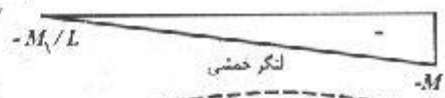
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : -M_1 + B_y L = 0 \Rightarrow B_y = \frac{M_1}{L}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow -M_1 - A_y L = 0$$

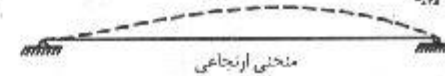
$$\Rightarrow A_y = -\frac{M_1}{L} \uparrow \Rightarrow A_y = \frac{M_1}{L} \downarrow$$



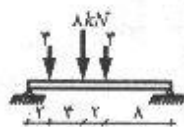
نیروی برشی



لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی



مسئله ۷-۳۵

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

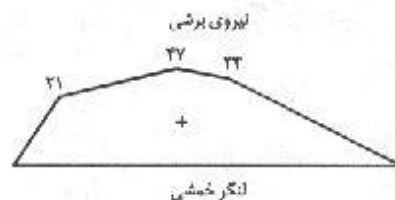
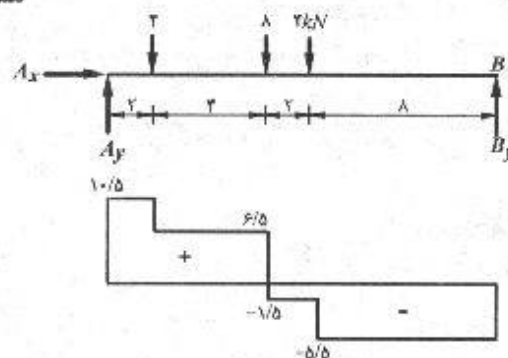
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$B_y(16) - 2(8) - 8(6) - 2(2) = 0$$

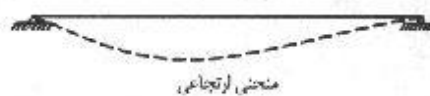
$$\Rightarrow B_y = 5/5 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -A_y(16) + 2(14) + 8(10)$$

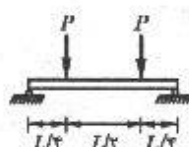
$$+ 2(8) = 0 \Rightarrow A_y = 10/5 \text{ kN} \uparrow$$



لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی



مسئله ۷-۳۶

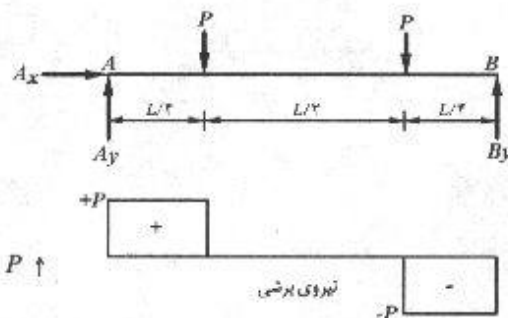
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$B_y(L) - P\left(\frac{3L}{4}\right) - P\left(\frac{L}{4}\right) = 0 \Rightarrow B_y = P \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 2P = 0$$

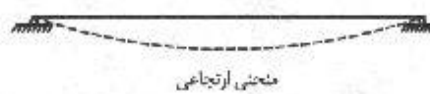
$$\Rightarrow A_y = P \uparrow$$



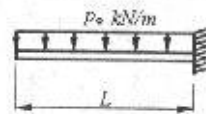
نیروی برشی



لنگر خمشی



منحنی ارتجاعی

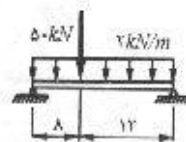
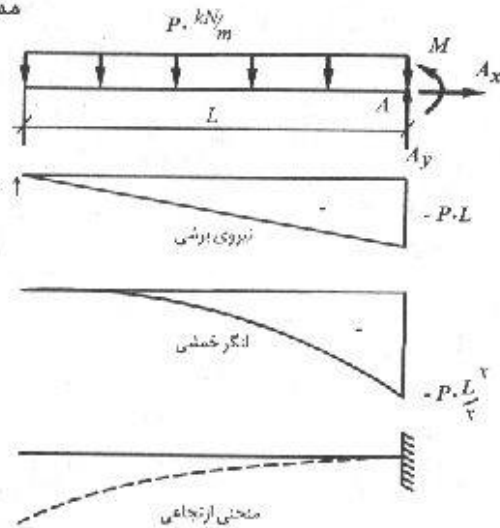


مسئله ۳۷-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : A_y - P_0 L = 0 \Rightarrow A_y = P_0 L \uparrow$$

$$\begin{aligned} +(\sum M_A = 0 \Rightarrow M + P_0 L \left(\frac{L}{2}\right) &= 0 \\ \Rightarrow M &= -\frac{P_0 L^2}{2} \end{aligned}$$



مسئله ۳۸-۲

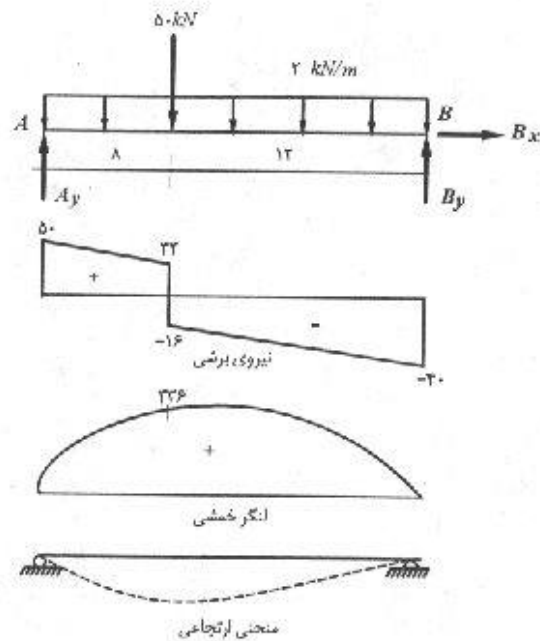
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

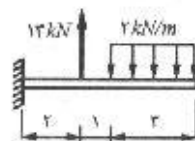
$$+(\sum M_A = 0$$

$$\Rightarrow B_y (20) - 50(8) - 2(20)\left(\frac{20}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 70 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : A_y + B_y - 50 - (2)(20) = 0 \Rightarrow A_y = 50 \text{ kN} \uparrow$$





مسئله ۳۹-۲

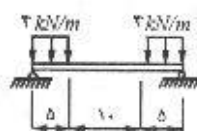
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 13 - (2)(3) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = -1 \text{ kN} \uparrow \Rightarrow A_y = 1 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M - (2)(3)\left(2 + \frac{3}{2}\right)$$

$$+ 13(2) = 0 \Rightarrow M = -1 \text{ kN.m}$$



مسئله ۴۰-۲

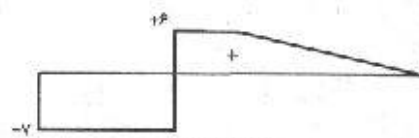
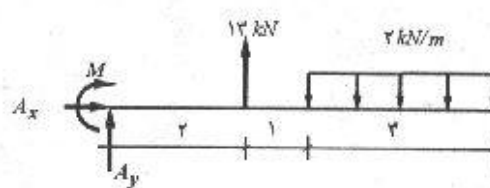
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y(20) - 2(5)(17/2)$$

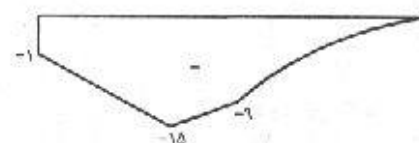
$$- 2(5)(2/2) = 0 \Rightarrow B_y = 20 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 2(5) - 2(5) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 20 \text{ kN} \uparrow$$



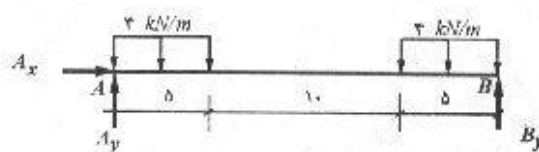
نیروی برشی



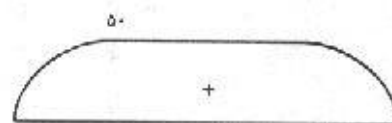
لنگر خمشی



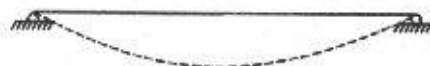
شکل مرتب‌شده



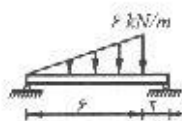
نیروی برشی



لنگر خمشی



شکل مرتب‌شده



مسئله ۱۶-۲

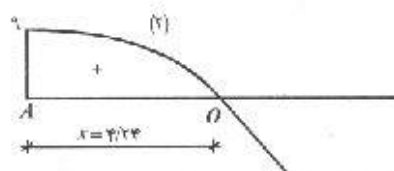
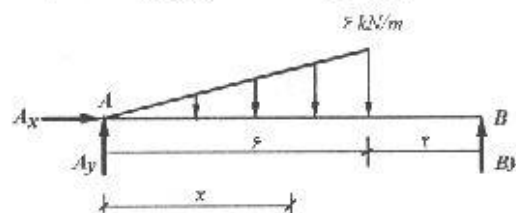
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+ (\sum M_A = 0 : B_y (6) - 6 \left(\frac{6}{2} \right) \left(\frac{7}{3} \right) (6) = 0$$

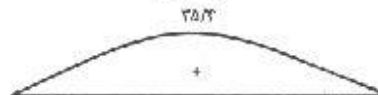
$$\Rightarrow B_y = 9 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 6 \left(\frac{6}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 9 \text{ kN} \uparrow$$



نیروی برشی



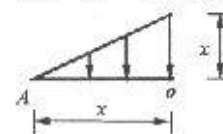
لنگر خمشی



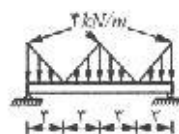
منحنی ارتعاشی

توضیح: بمنظور تعیین لنگر ماکزیمم باید سطح زیر نمودار برش در فاصله A تا O محاسبه شود:

$$\frac{1}{2} (x \cdot x) = 9 \Rightarrow x = 4/3$$



$$M_{max} = \frac{1}{3} (9) (4/3) = 25/3 \text{ kN.m}$$



مسئله ۴۲-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+ (\sum M_A = 0 : B_y (12) - \left(3 \times \frac{4}{3} \right) \left(\frac{1}{3} \times 3 \right)$$

$$- \left(6 \times \frac{4}{3} \right) (6) - \left(3 \times \frac{4}{3} \right) \left(9 + \frac{1}{3} \times 3 \right) = 0$$

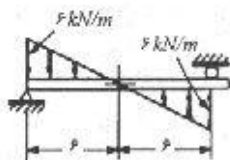
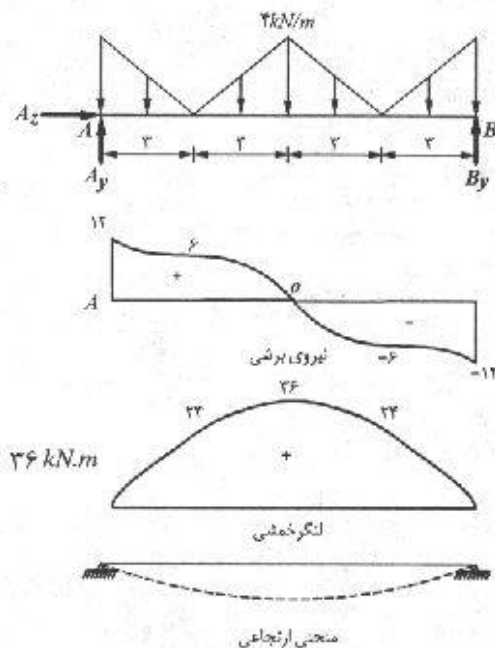
$$B_y = 12 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 2\left(3 \times \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 12 \text{ kN} \uparrow$$

سطح زیر نمودار برش از A تا 0

$$M_{\max} = 0 \Rightarrow \left[6 \times 3 + \frac{1}{3}(6 \times 3) \right] + \frac{1}{3}(6 \times 3) = 24 \text{ kN.m}$$



مسئله ۴۳-۲

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

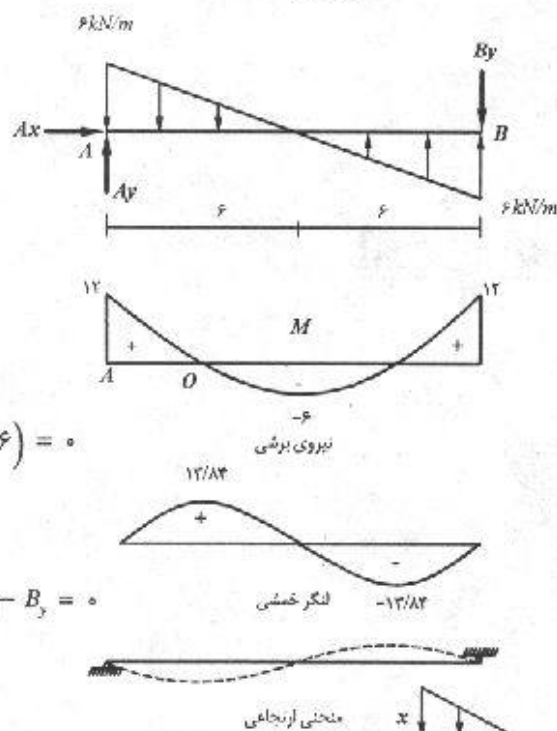
$$\uparrow^+ \sum M_A = 0 \Rightarrow -B_y(12)$$

$$- 6\left(\frac{6}{3}\right)\left(\frac{6}{3}\right) + 6\left(\frac{6}{3}\right)\left(6 + \frac{1}{3} \times 6\right) = 0$$

$$B_y = 12 \text{ kN} \downarrow$$

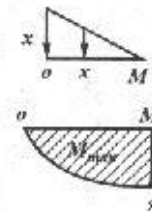
$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 : A_y + 6\left(\frac{6}{3}\right) - 6\left(\frac{6}{3}\right) - B_y = 0$$

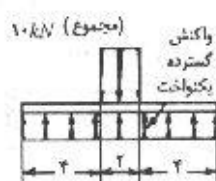
$$\Rightarrow A_y = 12 \text{ kN} \uparrow$$



$$\frac{1}{3}(x \cdot x) = 6 \Rightarrow x = 3/46$$

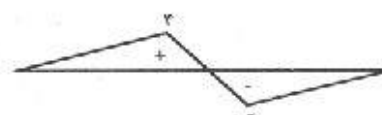
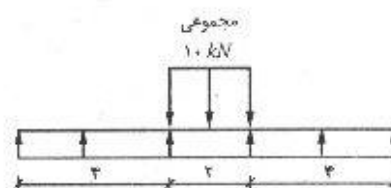
$$M_{\max} = \frac{1}{3}(6)(3/46) = 13/84$$



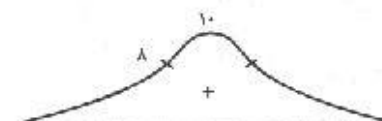


مسئله ۴۴-۵

$$\uparrow \sum F_y = 0 : R_y(10) - 10 = 0 \Rightarrow R_y = 1 \text{ kN/m}$$



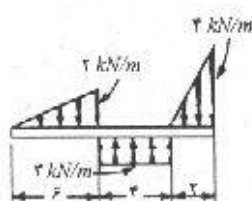
نیروی برشی



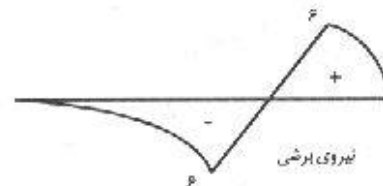
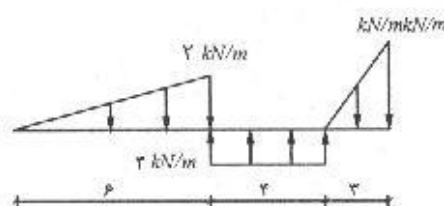
لنگر خمشی



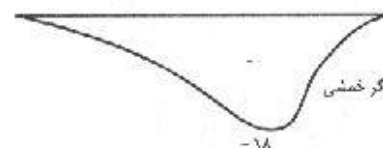
منحنی ارتعاشی



مسئله ۴۵-۵



نیروی برشی

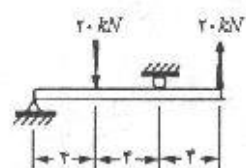


لنگر خمشی



منحنی ارتعاشی

نیروی برشی، لنگر خمشی / ۴۹



مسئله ۴۶

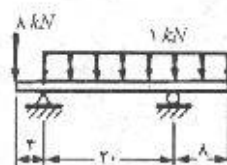
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\uparrow (\sum M_A = 0 : -B_y(4) - 20(2) + 20(6) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 20 \text{ kN} \downarrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 20 - B_y - 20 = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 20 \text{ kN} \uparrow$$



مسئله ۴۷

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

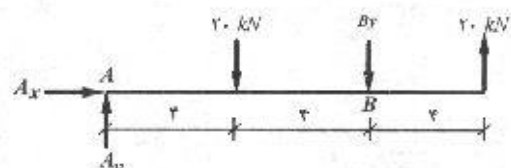
$$\uparrow (\sum M_A = 0$$

$$\Rightarrow B_y(20) + 10(2) - 1(20)\left(\frac{20}{2}\right) = 0$$

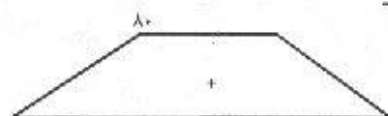
$$\Rightarrow B_y = +18 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 - 1(20) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = +18 \text{ kN} \uparrow$$



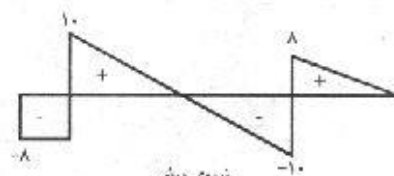
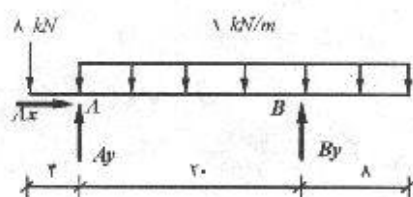
نیروی برشی



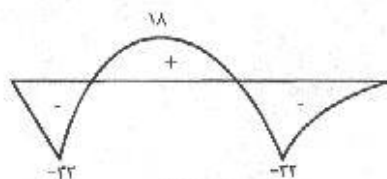
لنگر خمشی



منحنی ارتعاشی



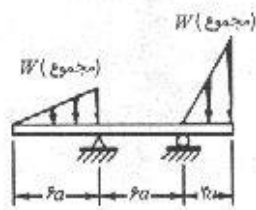
نیروی برشی



لنگر خمشی



منحنی ارتعاشی



مسئله ۴۸-۲

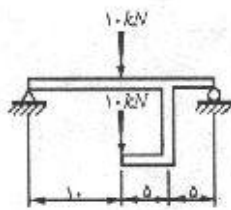
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\left(\sum M_A = 0 : B_y (6a) - W(2a + 2a) + W(2a) = 0 \right.$$

$$\Rightarrow B_y = W \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 2W = 0$$

$$\Rightarrow A_y = W \uparrow$$



مسئله ۴۹-۲

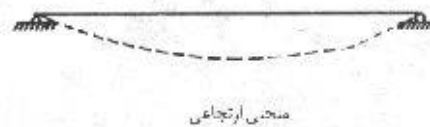
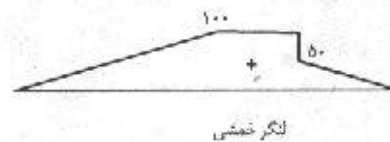
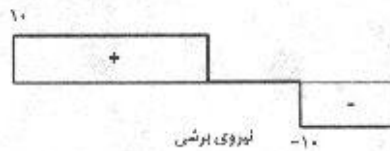
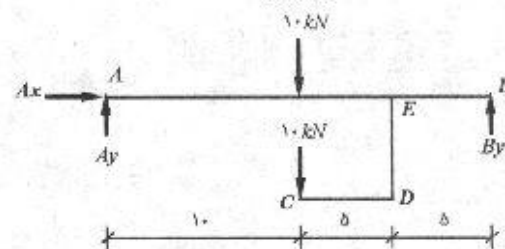
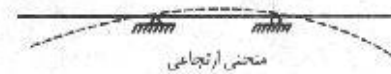
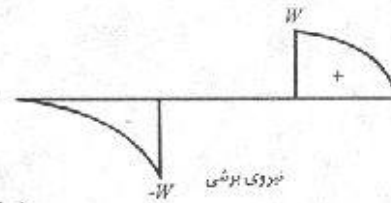
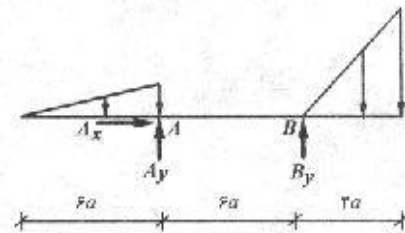
$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$+\left(\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y (2.0) - (1.0 + 1.0)(1.0) = 0 \right.$$

$$\Rightarrow B_y = 1.0 \text{ kN} \uparrow$$

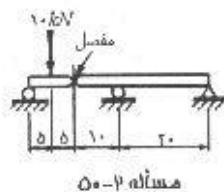
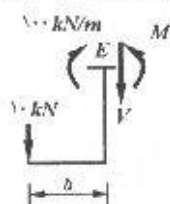
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - (1.0 + 1.0) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 1.0 \text{ kN} \uparrow$$

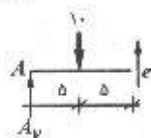


توضیح: بمنظور تعیین لنگر در نقطه E ، این قسمت را جدا می‌کنیم. (شکل زیر) لنگر در طرف چپ این قطعه معلوم و مساوی 100 kN.m می‌باشد.

بنابراین برای تعادل این قطعه باید در سمت راست لنگر برابر 50 kN.m باشد.



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$$



$$+\circlearrowleft \sum M_e = 0 \Rightarrow -A_y(10) + 10(5) = 0$$

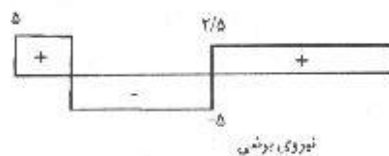
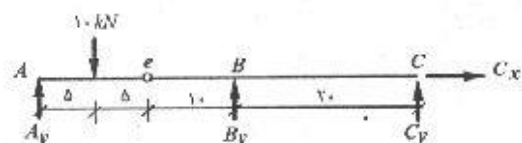
$$\Rightarrow A_y = 5 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow C_y(20) + 10(5) - 5(20) = 0$$

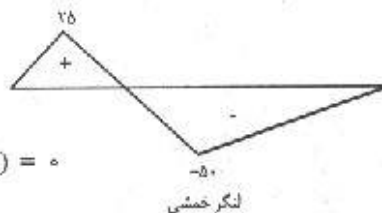
$$\Rightarrow C_y = -2/5 \uparrow \Rightarrow C_y = 2/5 \text{ kN} \downarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - C_y - 10 = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 7/5 \text{ kN} \uparrow$$



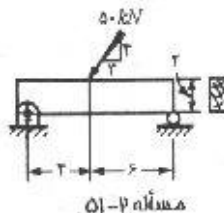
نیروی برشی



لنگر خمشی



منحنی ارتعاشی

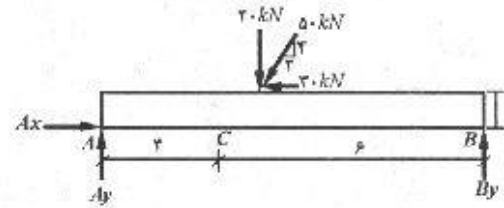


$$\rightarrow \sum F_x = 0 : A_x - 30 = 0 \Rightarrow A_x = 30 \text{ kN} \rightarrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : B_y(10) + 30(2) - 40(4) = 0 \Rightarrow B_y = 10 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 40 = 0$$

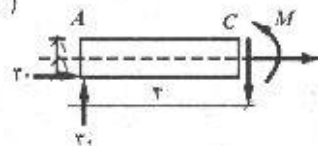
$$\Rightarrow A_y = 30 \text{ kN} \uparrow$$



توضیح: به منظور رسم نمودار لنگر خمشی توجه به این نکته ضروری است که در ناحیه AC علاوه بر لنگر ناشی از بارگذاری قائم، لنگر حاصل از نیروی افقی نیز مؤثر می‌باشد. بنابراین لنگر در سمت چپ C برابر است با:

$$+ (\sum M_C = 0 \Rightarrow M + 30(1) - 30(2) = 0$$

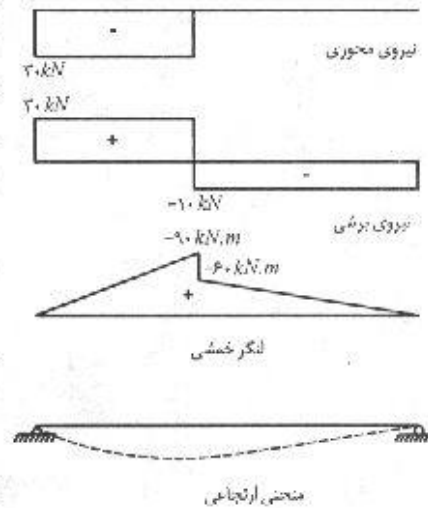
$$M = 90 \text{ kN.m})$$



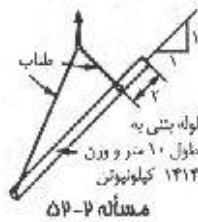
و لنگر در سمت راست C نیز برابر است با:

$$+ (\sum M_C = 0 \Rightarrow M + 30(1) + 30(1) - 30(4) = 0$$

$$M = 60 \text{ kN.m} \uparrow$$



به عبارت دیگر در نقطه C نمودار لنگر دارای جهش می‌باشد.

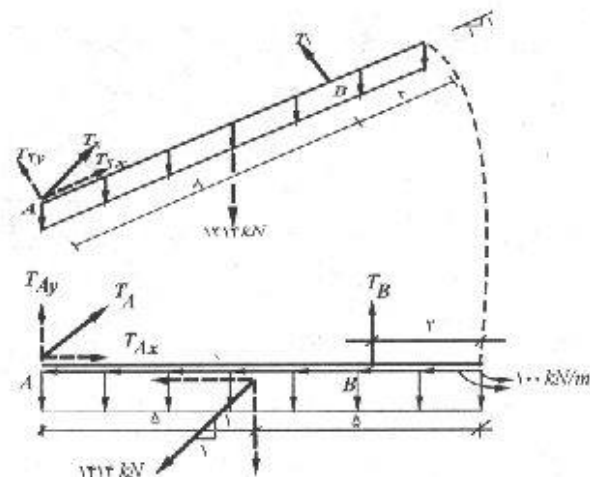


$$+ (\sum M_A = 0$$

$$\Rightarrow T_B(8) - 1414\left(\frac{10}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

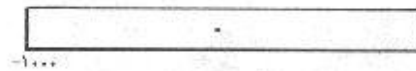
$$\Rightarrow T_B = 624/9 \approx 625$$

$$\Rightarrow T_B = 625 \text{ kN} \uparrow$$



نیروی برشی، لنگر خمشی / ۵۳

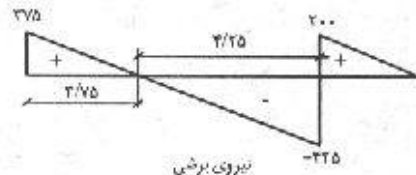
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{Ay} + T_{Ay} - 1414 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$



نیروی محوری

$$\Rightarrow T_{Ay} = 374/9 \approx 375$$

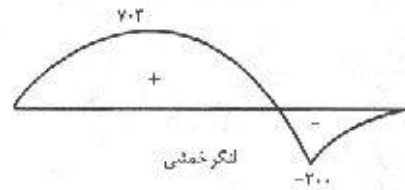
$$\Rightarrow T_{Ay} = 375 \text{ kN} \uparrow$$



نیروی برشی

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow T_{Ax} - 1414 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow T_{Ax} = 999/8 \approx 1000$$

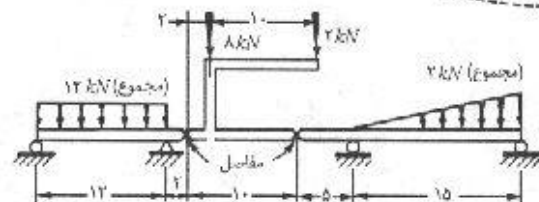


لنگر خمشی

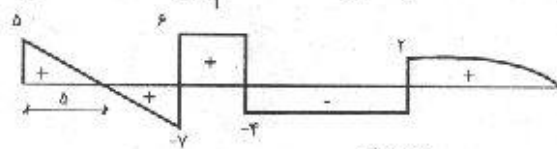
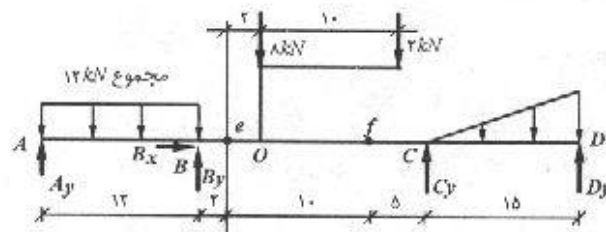
$$T_{Ax} = 1000 \text{ kN} \rightarrow$$



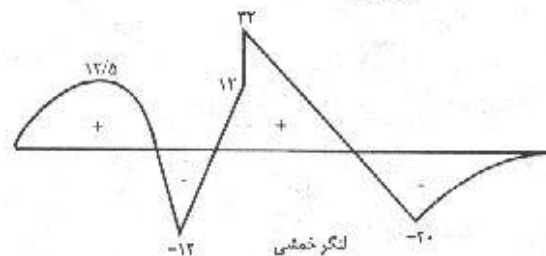
مختلبي ارتجاعی



مسئله ۲-۳۵



نیروی برشی



لنگر خمشی



$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow H_v = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_e = 0 \Rightarrow f_y(10) - 2(12) - 8(2) = 0$$

$$f_y = 4 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow e_y = 6 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow B_y(12) - e_y(14) - 12(6) = 0$$

$$B_y = 13 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 5 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \Rightarrow D_y(15) + f_y(5) - 2(10) = 0$$

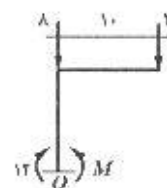
$$D_y = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = 6 \text{ kN} \uparrow$$

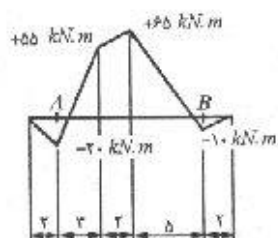
توضیح: همانند مسأله (۳-۴۹) به منظور تعیین لنگر در نقطه w این قسمت را جدا نموده با توجه به جمع سطوح برش تا این نقطه، میزان لنگر در سمت چپ نقطه w برابر $+12 \text{ kN.m}$ می باشد بنابراین باید در سمت راست نقطه w لنگر برابر $+32 \text{ kN.m}$ باشد:

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0 \Rightarrow M - 12 - 2(10) = 0$$

$$\Rightarrow M = 32 \text{ kN.m}$$



۲-۵۴ الی ۲-۵۶. منحنی تغییرات لنگر خمشی برای تیرهایی که در نقاط A و B تکیه دارند، نشان داده شده است. شکل بارگذاری این تیرها را مشخص نمایید. تمام منحنی های غیرخطی سهمی درجه ۲ می باشند. رسم ترمیم تغییرات نیروی برشی کمک خوبی برای تعیین شکل بارگذاری می باشد.



مسئله ۴-۵

مقادیر نیروی برشی را در مقاطع مختلف محاسبه می‌کنیم و از روی این مقادیر، نیروهای اعمال شده مشخص خواهند شد.

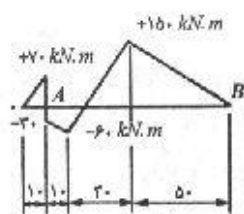
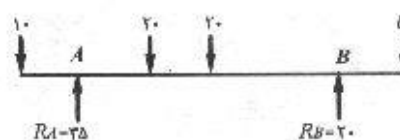
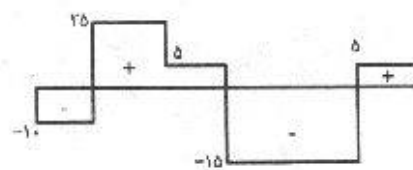
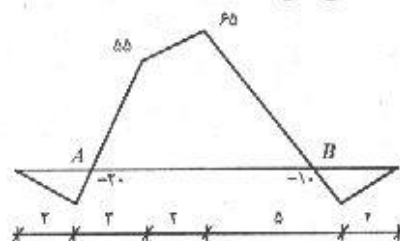
$$0 < x < 2 \quad V = \frac{-20}{2} = -10 \text{ kN}$$

$$2 < x < 4 \quad V = \frac{55 - (-20)}{3} = 25 \text{ kN}$$

$$4 < x < 7 \quad V = \frac{65 - 55}{2} = 5 \text{ kN}$$

$$7 < x < 11 \quad V = \frac{-10 - 65}{4} = -15 \text{ kN}$$

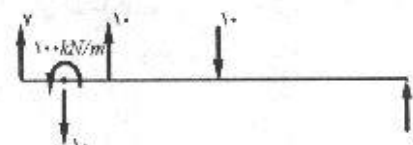
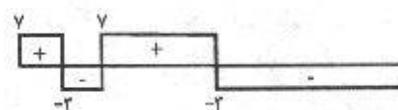
$$11 < x < 12 \quad V = \frac{0 - (-10)}{1} = 10 \text{ kN}$$



مسئله ۴-۵

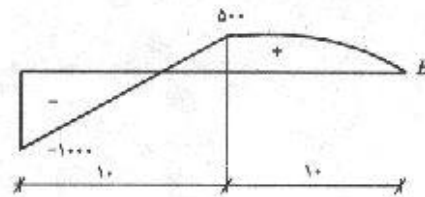
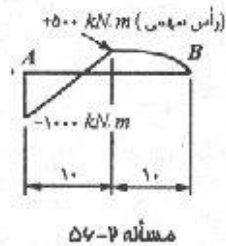
$$0 < x < 1 \quad V = \frac{70}{1} = 7 \text{ kN}$$

$$1 < x < 2 \quad V = \frac{-60 - (-30)}{1} = -3 \text{ kN}$$



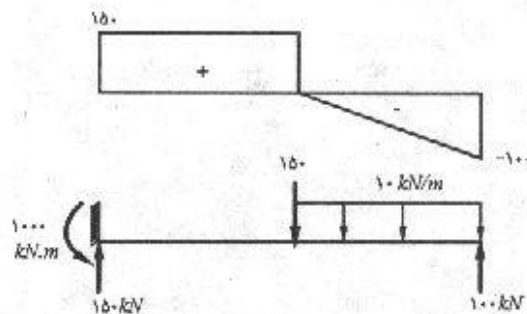
$$20 < x < 50 \quad V = \frac{150 - (-60)}{30} = 7 \text{ kN}$$

$$50 < x < 100 \quad V = \frac{0 - 150}{50} = -3 \text{ kN}$$



$$0 < x < 10 : V = \frac{500 - (-1000)}{10} = 150 \text{ kN}$$

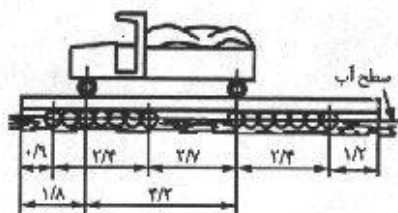
$$x = 10 : V = \tan 0 = 0$$



چون منحنی مماس خمشی سهمی است با توجه به رابطه $V = \frac{dM}{dx}$ رابطه نیروی برشی خطی خواهد بود. از طرفی مساحت زیر نمودار نیروی برشی بین دو نقطه معرف تغییر مقدار مماس خمشی بین آن دو نقطه است:

$$\frac{1}{2} \times 10 \times V_B = 0 - 500 \Rightarrow V_B = -100 \text{ kN}$$

۵۷-۲. یک کامیون به وزن ۷۵ کیلو نیوتن در روی یک کلک قرار دارد. فرض کنید که هر یک از چرخهای جلو ۱/۰ وزن کامیون و هر یک از چرخهای عقب، ۴/۰ وزن کامیون را حمل می کنند. این کلک دارای دو تیر طولی می باشد که به فاصله ۱/۸ متر از یکدیگر قرار دارند و هر یک نصف وزن کامیون را حمل می نمایند. این دو تیر طولی به نوبه خود در روی دو دسته چوب به هم بسته که شناوری کلک را تأمین می کنند، تکیه دارند. اگر فرض نماییم که نیروهای واکنش تکیه گاهی به صورت گسترده یکنواخت در روی سطح تماس وارد شوند، مطلوب است رسم ترسیم تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای هر یک از تیرها در حالی که کامیون در وضعیت نشان داده شده در شکل قرار دارد. (از روش جمع زدن استفاده نمایید).



مسئله ۵۷-۲

نقاط A و B محل برآیند عکس‌العملها در نظر گرفته شده‌اند

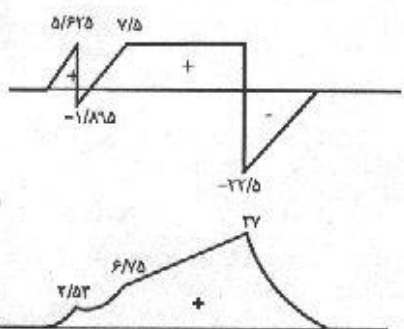
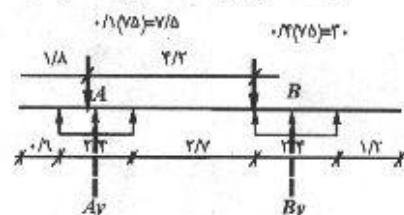
$$+\circ (\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y (2/4 + 1/2 + 1/2)$$

$$+ 7/5 \left(\frac{2/4}{2} - 0/9 \right) - 30 \left(\frac{2/4}{2} + 1/2 \right) = 0$$

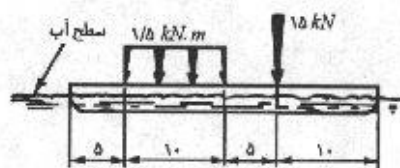
$$B_y = 22/5 \text{ kN} \Rightarrow R_B = \frac{B_y}{2/4} = 9/375 \text{ kN/m}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 7/5 - 30 = 0$$

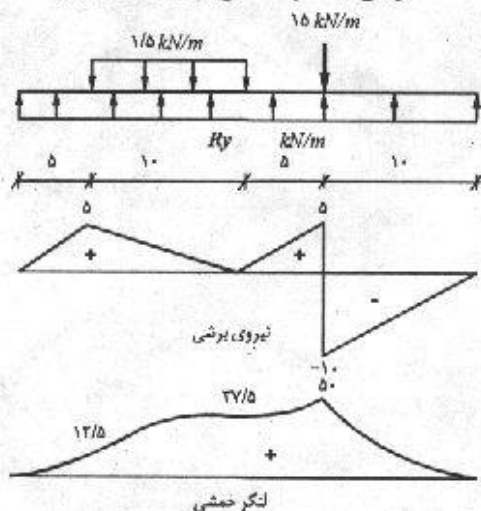
$$A_y = 15 \text{ kN} \Rightarrow R_A = \frac{A_y}{2/4} = 6/25 \text{ kN/m}$$



۵۸-۲. یک قایق باریک، همانند شکل بارگذاری شده است. مطلوب است رسم منحنی تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای بارهای وارده.



مسئله ۵۸-۲



ابتدا نیرویی را که بر هر متر طول قایق از طرف آب وارد می‌شود محاسبه می‌کنیم:

$$\uparrow + \sum F_y = 0 : R_y(30) - 15 - 1/5(10) = 0 \rightarrow R_y = 1 \text{ kN/m}$$

$$F_1 = 0$$

$$F_1 = 1 \text{ (kN/m)} \times 5 \text{ (m)} = 5 \text{ kN}$$

$$F_1 = F_1 + 1 \times 10 - 1/5 \times 10 = 0$$

$$F_1 = F_1 + 1 \times 5 = 5 \text{ kN}$$

$$F_1' = F_1 - 15 = -10 \text{ kN}$$

$$F_5 = -10 + 1 \times 10 = 0$$

$$M_1 = 0$$

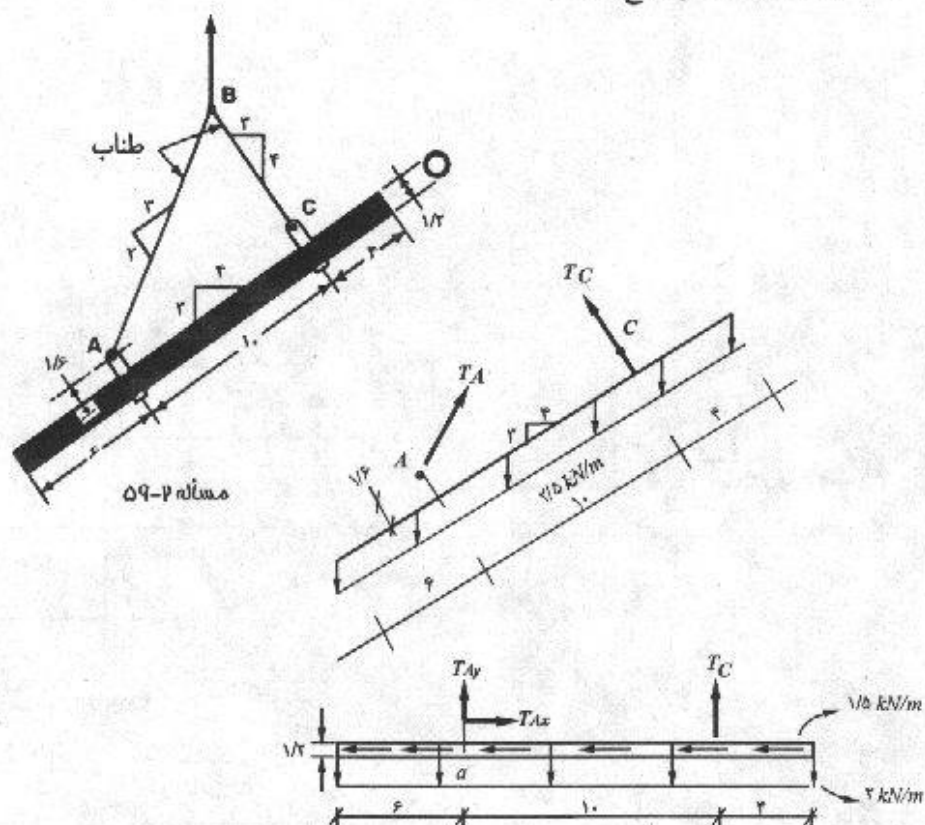
$$M_1 = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 12.5 \text{ kN.m}$$

$$M_1 = 12.5 + \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 37.5 \text{ kN.m}$$

$$M_1 = 37.5 + \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 50 \text{ kN.m}$$

$$M_5 = 50 - \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 0$$

۵۹-۲. لوله‌ای به قطر ۱۲۰ سانتی‌متر و به وزن ۲/۵ کیلونیوتن بر متر مطابق شکل توسط دو کابل نگه داشته شده است. مطلوب است رسم منحنی تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی برای لوله فوق با استفاده از روش جمع زدن.

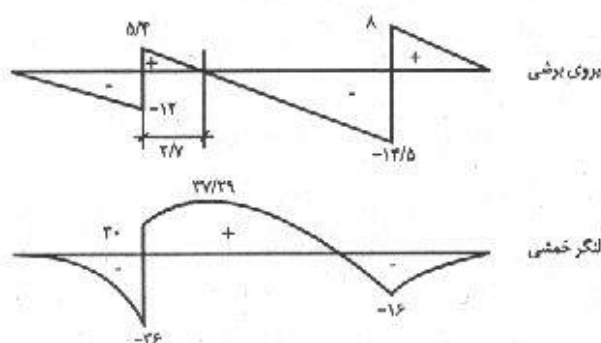


نیروی برشی، لنگر خمشی / ۵۹

$$\rightarrow \sum F_x = 0 : T_{Ax} - 1/5(20) = 0 \Rightarrow T_{Ax} = 30 \text{ kN} \rightarrow$$

$$+ (\sum M_A = 0 : T_C(10) - 2(20)(4) - 1/5(20)\left(1/6 + \frac{1/2}{2}\right) \\ T_C = 22/6 \text{ kN} \uparrow$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 : T_{Ay} + T_C - 2(20) = 0 \Rightarrow T_{Ay} = 17/3 \text{ kN} \uparrow$$



توضیح: همانند مسأله (۲-۴۹) برای تعیین لنگر در نقطه a خواهیم داشت،

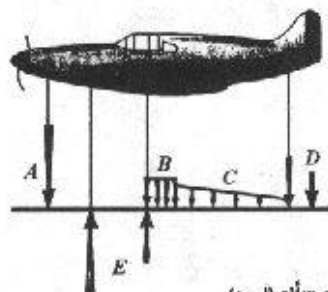
$$+ (\sum M_a = 0 \Rightarrow M + 36 - 30 \times 2/2 = 0$$

$$M = 30 \text{ kN.m})$$

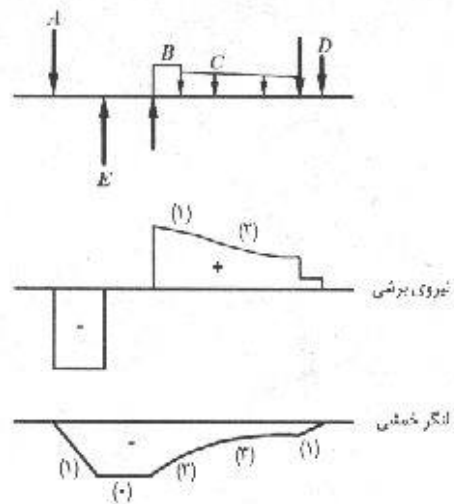


(شایان ذکر است که مقدار لنگر در سمت چپ a از جمع سطح برش حاصل شده است)

۲-۶. نیروهای وارد بر یک هواپیمای کوچک یک موتور در هنگام پرواز در شکل نشان داده شده است. در این ترسیمه، نیروی A نشان دهنده وزن موتور، نیروی گسترده B نشان دهنده وزن کابین و نیروی گسترده C نشان دهنده وزن مخزن سوخت و نیروی D نشان دهنده نیروی ناشی از سطوح کنترل دم و نیروهای به طرف بالای E نشان دهنده نیروهای بر آن که بر بال هواپیما وارد می شوند، می باشند. با استفاده از این داده ها، ترسیمه تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی را به صورت کیفی رسم کنید.



مسئله ۶-۵۰



توضیح: اعداد نشان داده شده در کنار منحنی‌ها بیانگر درجه منحنی می‌باشد.

مسائل فصل سوم

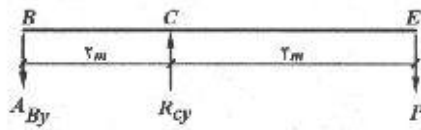
۱-۳. اگر یک نیروی محوری کششی معادل ۵۰۰ کیلونیوتن بر یک عضو که از نیمرخ IPB ۱۸۰ ساخته شده، اعمال گردد، مقدار تنش کششی چقدر خواهد بود؟ در صورتی که نیمرخ ناودانی ۳۰۰ باشد، مقدار تنش چقدر خواهد بود؟ برای دیدن سطح مقطع نیمرخهای فوق به جداول ۶ و ۸ ضمیمه مراجعه کنید.

از جداول ۶ و ۸ ضمیمه مقادیر سطح مقطع برای IPB ۱۸۰ و ناودانی ۳۰۰ به ترتیب ۶۵cm^2 و $۵۸/۸\text{cm}^2$ بدست می آید بنابراین:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{۵۰۰ \times ۱۰^۳ (\text{N})}{۶۵ \times ۱۰^۳ (\text{mm}^2)} = ۷۶/۹ \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} = \frac{۵۰۰ \times ۱۰^۳}{۵۸/۸ \times ۱۰^۳} = ۸۵/۰۳ \text{ MPa}$$

۲-۳. مثال ۱-۳ را با استفاده از داده‌های زیر مجدداً حل نمایید. فاصله BC مساوی ۲ متر، فاصله CE مساوی ۴ متر، ضخامت دیوار جان پناه مساوی ۰/۲ متر، وزنی که باید بلند شود مساوی ۸ کیلونیوتن، ابعاد تیر چوبی $۰/۳۵\text{m} \times ۰/۲۵\text{m}$ ، قطر پیچها مساوی ۱۸ میلی‌متر و سطح مقطع مؤثر آن در زیر دنده‌ها مساوی ۱۵۴ میلی‌متر مربع.

$$)+ \sum M_B = 0 : ۸ \times ۱۰^۳ \times (۲ + ۴) - R_{cy} \times ۲ = 0$$


$$\Rightarrow R_{cy} = ۲۴ \text{ kN}$$

$$)+ \sum M_C = 0 : ۸ \times ۱۰^۳ \times ۴ - R_{By} \times ۲ = 0 \Rightarrow R_{By} = ۱۶ \text{ kN}$$

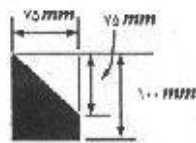
پس نیروی وارد بر هر پیچ ۸ kN خواهد بود و تنش وارد بر هر پیچ عبارتست از:

$$\sigma = \frac{۸ \times ۱۰^۳}{۱۵۴} = ۵۱/۹ \text{ MPa}$$

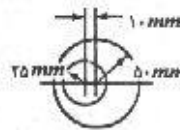
تنش لهیدگی در نقطه C:

$$\sigma_b = \frac{۲۴ \times ۱۰^۳}{۰/۲ \times ۰/۲۵} = ۴۸۰ \text{ kPa}$$

۳-۳ و ۴-۳. دو عضو کوتاه چدنی دارای سطح مقطعی مطابق شکل می‌باشند. اگر این دو عضو تحت تأثیر نیروی محوری فشاری معادل ۴۵ کیلونیوتن قرار گیرند، اولاً محل تأثیر نیروها را طوری تعیین کنید که هیچگونه لنگر خمشی در مقطع عضو ایجاد نگردد، ثانیاً مقدار تنشهای قائم را تعیین کنید. تمام ابعاد نشان داده شده برحسب میلی‌متر می‌باشند.



مساحت (۳۰۰-۳۰)



مساحت (۳۰۰-۳۰)

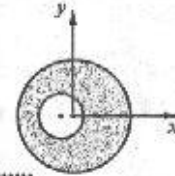
نیرو باید به مرکز سطح وارد شود تا ایجاد لنگر خمشی نکند.
مبدأ مختصات را منطبق بر مرکز دایره بزرگ در نظر می‌گیریم.

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{\pi(75)^2(0) - \pi(25)^2(-10)}{\pi(75)^2 - \pi(25)^2} \Rightarrow \bar{x} = 3/33 \text{ mm}$$

بعلت تقارن مقطع نسبت به محور x مرکز سطح روی محور x واقع می‌باشد یعنی $\bar{y} = 0$
محل اثر نیرو باید بفاصله ۳/۳۳ mm سمت راست مرکز دایره بزرگ باشد.

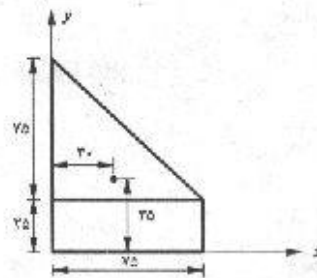
$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{45000}{\pi(75)^2 - \pi(25)^2} = 7/64 \text{ MPa}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{25 \times 75 \times \frac{25}{2} + \frac{1}{2} \times 75 \times 75 \times \left(25 + \frac{75}{3}\right)}{25 \times 75 + \frac{75 \times 75}{2}} \Rightarrow \bar{y} = 35 \text{ mm}$$



$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{25 \times 75 \times \frac{75}{2} + \frac{1}{2} \times 75 \times 75 \times \frac{75}{2}}{25 \times 75 + \frac{1}{2} \times 75 \times 75} \Rightarrow \bar{x} = 30 \text{ mm}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{45000}{4687/5} = 9/6 \text{ MPa}$$



۵-۳. لنگر پیچشی ۴۵۰ نیوتن متر توسط یک چرخ دنده به محوری به قطر ۵۰ میلی متر که توسط یک زبانه به چرخ دنده قفل شده است، انتقال داده می‌شود. طول زبانه ۵۰ میلی متر و پهنای آن ۱۲ میلی متر است. مطلوب است تعیین تنش برشی در زبانه.

$$F = \frac{T}{D} = \frac{450 \text{ (N.m)}}{0.025 \text{ (m)}} = 18 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{18000}{50 \times 12} = 30 \text{ N/mm}^2$$



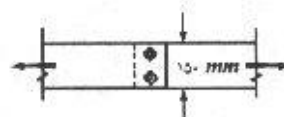
۶-۳. دو تسمه فولادی به ضخامت ۱۰ میلی‌متر و به پهنای ۱۵۰ میلی‌متر، توسط دو پیچ ۲۰ میلی‌متری که به‌طور کاملاً کیپ درون سوراخهای خود قرار دارند، متصل شده است. اگر این اتصال یک نیروی کششی معادل ۴۵ کیلو نیوتن انتقال دهد، مطلوب است: (الف) تنش متوسط قائم در ورق در مقطعی که هیچگونه سوراخی وجود ندارد (ب) تنش قائم متوسط در مقطع بحرانی (پ) تنش برشی متوسط در پیچ‌ها (ت) تنش لهدگی متوسط بین تنه پیچ‌ها و ورق.

$$\text{الف) } \sigma_{av} = \frac{P}{A} = \frac{45000}{150 \times 10} = 30 \text{ MPa}$$

$$\text{ب) } \sigma_{bb} = \frac{P}{A} = \frac{45000}{10 \times (150 - 40)} = 40/91 \text{ MPa}$$

$$\text{پ) } \tau = \frac{V}{A} = \frac{45000}{2 \times \pi \times 10} = 71/62 \text{ MPa}$$

$$\text{ت) } \sigma_{br} = \frac{P}{A} = \frac{45000}{2 \times 20 \times 10} = 112/5 \text{ MPa}$$



مسئله ۳-۶

۷-۳. در مثال ۲-۳، تنش را در ۵/۰ متری پای ستون پیدا کنید. نتیجه را در روی یک جزء کوچک نمایش دهید.

$$w = \frac{1}{7} (0/5 + 1/25) \times 1/5 \times 0/5 \times 25 = 16/406 \text{ kN}$$

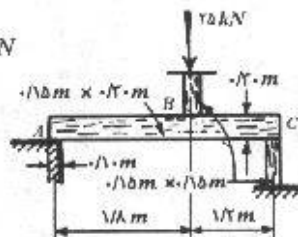
$$\sigma = \frac{P + W}{A} = \frac{5 + 16/406}{1/25 \times 0/5} = 34/25 \text{ kN/m}^2$$

۸-۳. مطلوب است تعیین تنش لهدگی ناشی از بارهای وارده در نقاط A، B و C از سازه نشان داده شده در شکل.

$$\sum M_A = 0 : 25 \times 1/8 - R_c \times 3 = 0 \Rightarrow R_c = 10 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : R_A + R_c = 25 \text{ kN} \Rightarrow R_A = 10 \text{ kN}$$

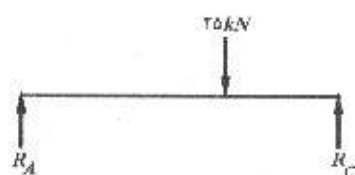
$$\sigma_A = \frac{10 \text{ (kN)}}{0/15 \times 0/1 \text{ (m)}} = 666/66 \text{ kPa}$$



مسئله ۳-۸

$$\sigma_B = \frac{25}{0.15 \times 0.15} = 1111 \text{ kPa}$$

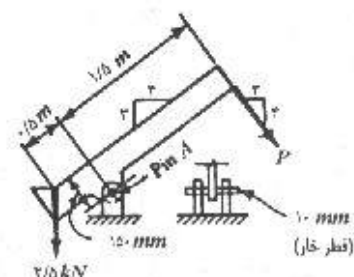
$$\sigma_c = \frac{15}{0.15 \times 0.15} = 666.66 \text{ kPa}$$



۳-۹. یک اهرم که از آن برای بلند کردن پانلهای یک پل قابل حمل نظامی استفاده می‌شود، در شکل نشان داده شده است. مطلوب است تعیین تنش برشی در خار A در اثر بار ۲/۵ کیلو نیوتنی

$$F_N = 2/5 \times \frac{4}{5} = 2 \text{ kN}$$

$$F_T = 2/5 \times \frac{3}{5} = 1/5 \text{ kN}$$



مسئله ۳-۹

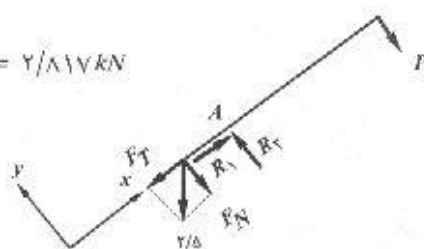
$$\sum M_A = 0 : P \times 1/5 = 2 \times 0.5 + 1/5 \times 0.15 \Rightarrow P = 0.817 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_1 = F_T = 1/5 \text{ kN}$$

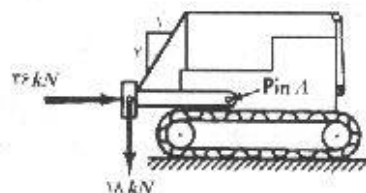
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_2 = F_N + P \Rightarrow R_2 = 2 + 0.817 = 2.817 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{(1/5)^2 + (2.817)^2} \Rightarrow R = 3.191 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{R}{A} = \frac{3.191}{2 \times \pi \times 5^2} = 20.32 \text{ MPa}$$



۳-۱۰. در صورتی که تیروهایی وارد بر یک بولدوزر مطابق شکل باشد، مطلوب است تعیین تنش برشی در خار A لازم به تذکر است که در هر طرف بولدوزر، یک خار به قطر ۴۰ میلی متر وجود دارد و خارها یک برشه می‌باشند.



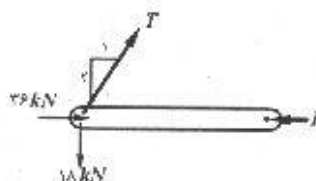
مسئله ۳-۱۰

$$T \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 18 \text{ kN} \Rightarrow T = 20.12 \text{ kN}$$

تنش / ۶۹

$$P = 36 + 27 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 48 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{1}{2} \times \frac{48000}{\pi \times 20^3} = 19 \text{ MPa}$$



۱۱-۳. یک میله فولادی به قطر ۲۰ میلی‌متر به صورت دو برشه تا لحظه خرابی بارگذاری می‌شود. بار نهایی معادل ۴۵۰ کیلو نیوتن اندازه‌گیری شده است. اگر تنش مجاز بر مبنای ضریب اطمینان ۴ قرار داشته باشد، قطر یک خار فولادی که برای تحمل بار مجازی معادل ۲۵ کیلو نیوتن به صورت یک برشه به کار می‌رود، چقدر است.

$$\tau_{ult} = \frac{V}{A} = \frac{45000}{2 \times (\pi \times 10^3)} = 716/2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{All} = \frac{\tau_{ult}}{F.S} = \frac{716/2}{4} = 179 \text{ MPa}$$

$$A = \frac{V'}{\tau_{All}} = \frac{25000}{179} = 139/6 \text{ mm}^2 \quad d = \sqrt{\frac{4 \times 139/6}{\pi}} = 13/3 \text{ mm}$$

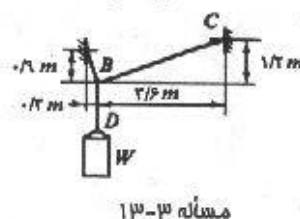
۱۲-۳. یک ستون چوبی به مقطع 150×150 میلی‌متر، نیرویی معادل ۵۰ کیلو نیوتن را همانند شکل ۸-۳ به یک شالوده بتنی منتقل می‌نماید. (الف) مطلوب است تعیین تنش لهیدگی بین چوب و بتن (ب) اگر فشار مجاز خاک ۱۰۰ کیلو نیوتن بر متر مربع باشد، مطلوب است تعیین ابعاد شالوده مربع شکل. از وزن شالوده صرف‌نظر کنید.

$$\text{الف) } \sigma_{br} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3}{150 \times 150} = 2/22 \text{ MPa}$$

$$\text{ب) } A = \frac{P}{\sigma_{All}} = \frac{50}{100} = 0/5 \text{ m}^2$$

$$A = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{A} = \sqrt{0/5} = 0/707 \text{ m}$$

۱۳-۳. یک مجموعه سه میله‌ای (مطابق شکل)، برای حمل وزنه‌ای به جرم ۵۰۰۰ کیلوگرم به کار گرفته شده است. قطر میله‌های AB و BD، ۲۰ میلی‌متر و قطر میله BC، ۱۳ میلی‌متر می‌باشد. مطلوب است تعیین تنش در میله‌ها.



مسئله ۱۳-۳

$$W = 5000 \times 9/81 = 49050 \text{ N} = 49/05 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : V_{BC} \times (2/7 + 0/3) - 49/05 \times 0/3$$

$$\Rightarrow V_{BC} = 4/905 \text{ kN}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1/2}{3/6} = 18/43$$

$$F_{BC} = \frac{V_{BC}}{\sin \alpha} = 15/51 \text{ kN}$$

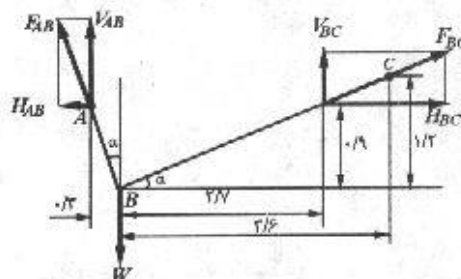
$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad V_{AB} = W - V_{BC} = ۴۴/۱۴۵ \text{ kN}$$

$$F_{AB} = \frac{V_{AB}}{\cos \alpha} = ۴۶/۵۳ \text{ kN}$$

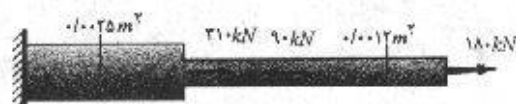
$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{۴۶۵۳۰ \text{ (N)}}{\pi(۱۰)^2 \text{ (mm}^2\text{)}} = ۱۴۸ \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{۱۵۵۱۰}{\pi(۶/۵)^2} = ۱۱۶/۸۵ \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BD} = \frac{W}{A_{BD}} = \frac{۴۹۰۵۰}{\pi(۱۰)^2} = ۱۵۶/۱ \text{ MPa}$$



۳-۱۴. یک میله با مقطع متفاوت که در یک انتها گیردار است، تحت تأثیر سه نیروی محوری مطابق شکل قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم.



مسئله ۳-۱۴

$$P_a = ۱۸۰ - ۹۰ + ۳۱۰ = ۴۰۰ \text{ kN}$$

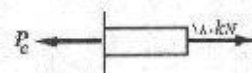
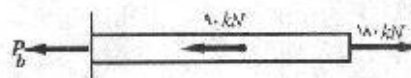
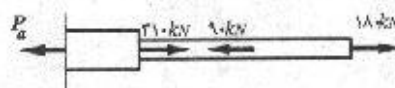
$$\sigma_a = \frac{۴۰۰ \times ۱۰^3 \text{ (N)}}{۰/۰۰۲۵ \times ۱۰^6 \text{ (mm}^2\text{)}} = ۱۶۰ \text{ MPa}$$

$$P_b = ۱۸۰ - ۹۰ = ۹۰ \text{ kN}$$

$$\sigma_b = \frac{۹۰ \times ۱۰^3}{۰/۰۰۱۲ \times ۱۰^6} = ۷۵ \text{ MPa}$$

$$P_c = ۱۸۰ \text{ kN}$$

$$\sigma_c = \frac{۱۸۰ \times ۱۰^3}{۰/۰۰۱۲ \times ۱۰^6} = ۱۵۰ \text{ MPa}$$

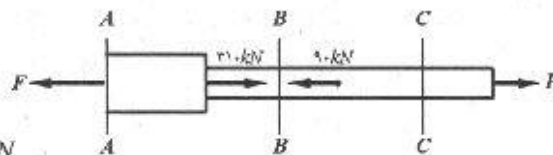


۳-۱۵. مثال قبل را با فرض اینکه مقدار نیروی انتهایی به جای ۱۸۰ کیلونیوتن، طوری باشد که تنش قائم حداکثر یکسانی در دو قطر میله ایجاد گردد، مجدداً حل نمایید. نیروهای محوری ۹۰ کیلونیوتنی و ۳۱۰ کیلونیوتنی دست نخورده باقی می‌مانند و حداکثر تنش قائم در ناحیه نازکتر میله، هم می‌تواند بین دو نیرو و هم می‌تواند در نزدیکی انتهای آزاد باشد. هر دو حالت را بررسی کنید.

$$F = P + ۳۱۰ - ۹۰ = P + ۲۲۰$$

تنش / ۷۱

$$\sigma_a = \frac{P + 220}{0/0025}, \sigma_b = \frac{P - 90}{0/0012}, \sigma_c = \frac{P}{0/0012}$$

حالت اول: $\sigma_{max} = \sigma_a = \sigma_b$ 

$$\frac{P + 220}{0/0025} = \frac{P - 90}{0/0012} \Rightarrow P = 376 \text{ kN}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{(376 + 220) \times 10^3 \text{ (N)}}{2500 \text{ (mm}^2\text{)}} = 238/4 \text{ MPa}$$

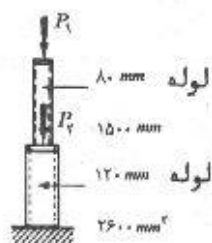
$$\sigma_c = \frac{P}{0/0012} = \frac{376 \times 10^3}{1200} = 313/3 \text{ MP}$$

همانگونه که ملاحظه می شود مقدار σ_c از σ_{max} بیشتر شده پس این حالت صحیح نمی باشد.حالت دوم: $\sigma_{max} = \sigma_a = \sigma_c$

$$\frac{P + 220}{0/0025} = \frac{P}{0/0012} \Rightarrow P = 203 \text{ kN}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_a = \frac{(203 + 220) \times 10^3 \text{ (N)}}{2500 \text{ (mm}^2\text{)}} = 169/2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \frac{P - 90}{0/0012} = 92/2 \text{ MPa} < \sigma_{max}$$

این حالت قابل قبول است پس مقدار P برابر 203 kN صحیح می باشد

مسئله ۳-۱۶

۳-۱۶. یک ستون کوتاه از دو لوله فولادی که مطابق شکل در روی یکدیگر قرار دارند، ساخته شده است. اگر تنش مجاز فشاری، 100 نیوتن بر میلی متر مربع باشد، مطلوب است: (الف) نیروی محوری مجاز P_1 اگر نیروی محوری P_2 مساوی 200 کیلو نیوتن باشد. (ب)، نیروی محوری مجاز P_1 اگر $P_2 = 80$ کیلو نیوتن باشد. از وزن لوله ها صرف نظر کنید.

$$\text{(الف)} \quad P_1 = A_1 \sigma_{all} = 1500 \times 100 = 150 \text{ kN}$$

$$P_1 + 200 \times 10^3 = A_1 \sigma_{all}$$

$$P_1 + 2 \times 10^5 = 2600 \times 100 \Rightarrow P_1 = 60 \text{ kN}$$

پس 60 kN قابل قبول است زیرا اگر P_1 از 60 kN بیشتر باشد تنش در لوله پایینی از حد مجاز فراتر خواهد رفت.

$$\text{ب) } P_1 = A_1 \sigma_{all} = 150 \text{ kN}$$

$$P_1 + 80000 = 2600 \times 100 \Rightarrow P_1 = 180 \text{ kN}$$

در این حالت مقدار 150 kN قابل قبول می باشد زیرا با گذشتن از مرز 150 kN تنش در لوله بالایی از تنش مجاز فراتر می رود.

۱۷-۳. مثال قبل را با فرض اینکه جهت P_1 معکوس شود، مجدداً حل نمایید (به عبارت دیگر، نیروی P_1 در این حالت کششی است). فرض کنید که تنش کششی مجاز نیز 100 نیوتن بر میلی متر مربع می باشد.

$$\text{الف) } P_1 = A_1 \sigma_{all} = 150 \text{ kN}$$

$$P_1 - 200000 = 2600 \times 100 \Rightarrow P_1 = 260 \text{ kN}$$

$$\text{ب) } P_1 = 150 \text{ kN}$$

$$P_1 - 80000 = 2600 \times 100 \Rightarrow P_1 = 340 \text{ kN}$$

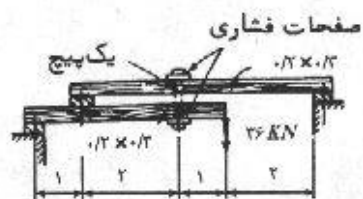
در هر دو حالت جواب 150 kN قابل قبول می باشد.

۱۸-۳. مطلوب است تعیین اندازه پیچ و سطح صفحات فشاری برای سازه نشان داده شده در شکل، در صورتی که تنش مجاز کششی 125 نیوتن بر میلی متر مربع و تنش مجاز لهیدگی $3/5$ نیوتن بر میلی متر مربع باشد از وزن تیرها صرف نظر کنید.

$$\sum M_B: F_1 \times 6 = 36 \times 2 \Rightarrow F_1 = 12 \text{ kN}$$

$$\sum F_A: F_1 \times 6 = 36 \times 4 \Rightarrow F_1 = 24 \text{ kN}$$

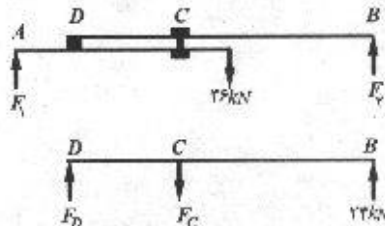
$$\sum M_D: 24 \times 5 = F_c \times 2 \Rightarrow F_c = 60 \text{ kN}$$



(تمام ابعاد بر حسب متر) مسئله ۱۸-۳

$$\sigma = \frac{F_c}{A} \rightarrow A = \frac{F_c}{\sigma} = \frac{60000}{125} = 480 \text{ mm}^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 24/7$$



اگر بخواهیم از پیچهای متریک استاندارد استفاده کنیم قطرهای 24 و 27 میلی متر موجود می باشند که باید قطر 27 میلی متر را بکار ببریم و یا می توانیم از پیچ با قطر 1 اینچ که معادل $25/4$ میلی متر می باشد استفاده کنیم.

$$A = \frac{F_c}{\sigma_{br}} = \frac{60000}{3/5} = 100000 \text{ mm}^2$$

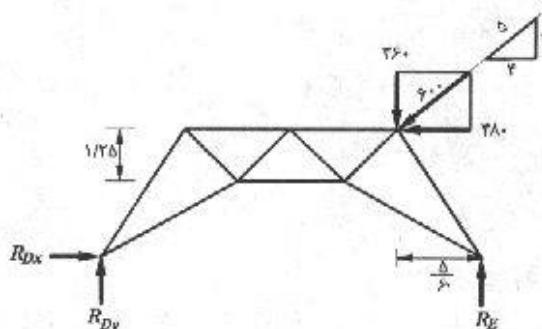
سطح صفحات فشاری:

۱۹-۳. مثال ۳-۶ را با تجدیدنظر در داده‌ها به صورت زیر، مجدداً حل نمایید، ارتفاع کل خرپا مساوی ۲/۵ متر و دهانه آن مساوی ۵ متر و بار وارده مساوی ۶۰۰ کیلونیوتن می‌باشد. تنش کششی مجاز را ۱۴۰ مگاپاسکال (نیوتن بر میلی‌مترمربع) در نظر بگیرید.

$$P_x = 600 \times \frac{2}{5} = 240 \text{ kN}$$

$$P_y = 600 \times \frac{3}{5} = 360 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : R_{Dx} = 240 \text{ kN}$$



$$\sum M_E = 0 : R_{Dy} \times 5 - 240 \times 0 - 240 \times 2/5 - 360 \times \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow R_{Dy} = 300 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : R_{Dy} + R_E = 360 \Rightarrow R_E = 60 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : F_{Fe} \times 1/25 + 300 \times \frac{1}{6} - 240 \times 1/25 = 0 \Rightarrow F_{Fe} = 80 \text{ kN}$$

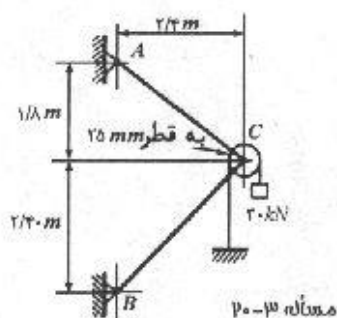
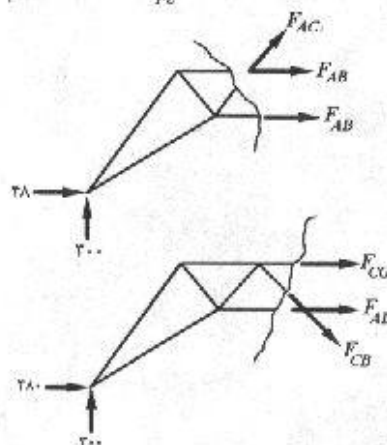
$$A_{Fe} = \frac{F_{Fe}}{\sigma_{all}} = \frac{80 \times 10^3}{140} = 571/43 \text{ mm}^2$$

$$\sum F_y = 0 : (F_{CB})_y = 300 \text{ kN}$$

$$\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1/25^2} = 1/5$$

$$F_{CB} = \frac{1/5}{1/25} \times (F_{CB})_y = 360 \text{ kN}$$

$$A_{CB} = \frac{360 \times 10^3}{140} = 2571/4 \text{ mm}^2$$



۲۰-۳. وزنه ۳۰ کیلونیوتنی توسط یک قرقره، مطابق شکل نگاه داشته می‌شود. قرقره نیز به نوبه خود توسط قاب ABC حمل می‌گردد. مطلوب است تعیین سطح مقطع لازم میله‌های AC و BC در صورتی که تنش مجاز کششی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تنش مجاز فشاری ۹۶ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد. تنش مجاز فشاری با توجه به اصول فصل چهارده تعیین شده است.

$$\sum M_B = 0 : (F_{AC})_H \times 4/2 - 60 \times 2/4 = 0$$

$$\Rightarrow (F_{AC})_H = 34/29$$

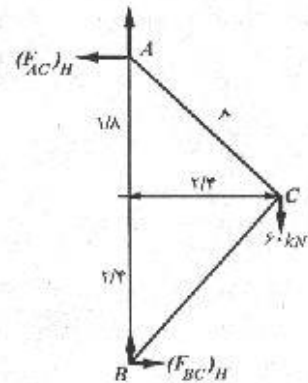
$$F_{AC} = \frac{3}{2/4} \times 34/29 = 42/85 \text{ kN}$$

$$A_{AC} = \frac{F_{AC}}{\sigma} = \frac{42850}{140} = 306 \text{ mm}^2$$

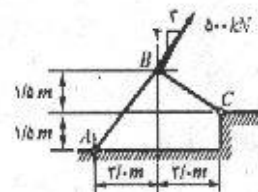
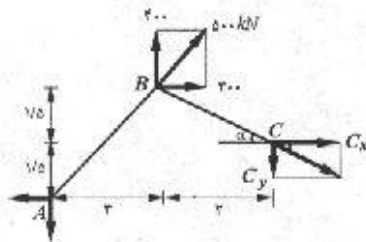
$$\sum F_x = 0 : (F_{BC})_H = 34/29$$

$$\Rightarrow F_{BC} = 34/29 \times \sqrt{2} = 48/49$$

$$A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{48490}{96} = 505 \text{ mm}^2$$



۳-۲۱. یک نیروی ۵۰۰ کیلو نیوتنی به گره B از یک سیستم دو میله ای با گره های مفصلی (مطابق شکل) وارد می گردد. مطلوب است تعیین سطح مقطع لازم میله BC در صورتی که تنش مجاز کششی ۱۰۰ نیوتن بر میلی متر مربع و تنش مجاز فشاری ۷۰ نیوتن بر میلی متر مربع باشد.



مسئله ۳-۲۱

$$\sum M_A = 0 : C_y \times 6 - C_x \times 1/5 + 300 \times 3 - 400 \times 3 = 0 \quad (1)$$

از طرفی با توجه به هندسه شکل:

$$C_x = 2C_y \quad (2)$$

با جایگزینی معادله (۲) در معادله (۱) مقدار C_y بدست می آید.

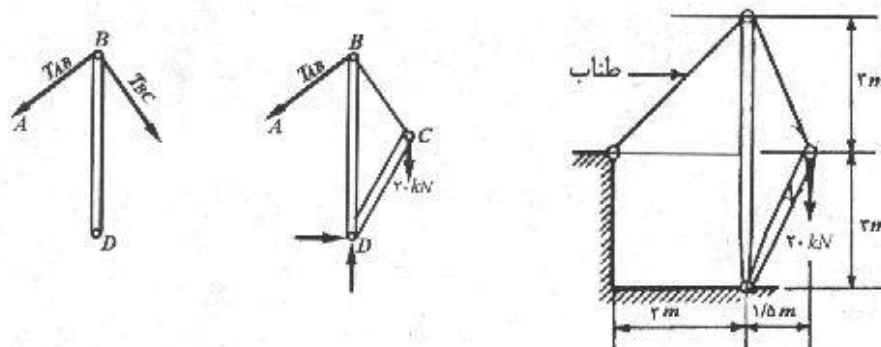
$$C_y = 33/33 \text{ kN}$$

علامت مثبت C_y مثبت بدست آمده و با توجه به جهت انتخاب شده برای آن مشخص می شود که نیروی عضو BC از نوع کششی می باشد بنابراین برای طراحی از تنش مجاز کششی استفاده می شود.

$$F_{BC} = \frac{\sqrt{1/5^2 + 3^2}}{1/5} \times C_y = 74/5 \text{ kN}$$

$$A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{74500}{100} = 745 \text{ mm}^2$$

۲۲-۳. مطلوب است تعیین تنش در اعضای فشاری دکل نشان داده شده در شکل. تمام اعضا در یک صفحه قرار دارند و اتصالات آنها مفصلی است. اعضای فشاری از لوله‌هایی به قطر ۲۰۰ میلی‌متر و سطح مقطع ۶۰۰۰ میلی‌متر مربع تشکیل شده‌اند. از وزن اعضا صرف‌نظر کنید.



مسئله ۳-۲۲

$$\sum M_D = 0 : 20 \times 1/5 - \frac{3}{\sqrt{3^2 + 3^2}} T_{AB} \times 6 = 0 \Rightarrow T_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 : \frac{1/5}{\sqrt{3^2 + 1/5^2}} T_{BC} \times 6 - \frac{3}{\sqrt{3^2 + 3^2}} T_{AB} \times 6 = 0 \Rightarrow T_{BC} = 11/18 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : F_{CD} = T_{BC} = 11/18 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{BD} - \frac{3}{\sqrt{18}} T_{AB} - \frac{3}{\sqrt{11/25}} T_{BC} = 0 \Rightarrow F_{BD} = 15 \text{ kN}$$

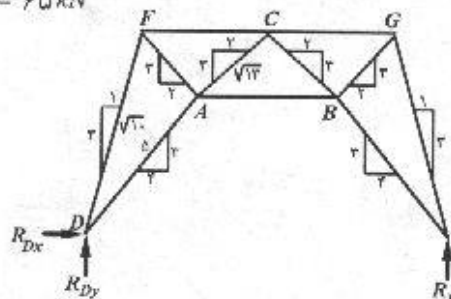
$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A} = \frac{15000}{6000} = 2/5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{DC} = \frac{F_{DC}}{A} = \frac{11180}{6000} = 1/86 \text{ MPa}$$

۲۳-۳. مطلوب است تعیین مساحت سطح مقطع کلیه اعضای کششی مثال ۳-۶. تنش مجاز کششی مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.

$$R_{Dx} = 520 \text{ kN} \quad \text{و} \quad R_{Dy} = 325 \text{ kN} \quad \text{و} \quad R_E = 65 \text{ kN}$$

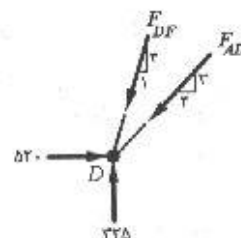
$$F_{FC} = 86/7 \text{ kN} \quad F_{CB} = 391 \text{ kN}$$



گره D:

$$\sum F_x = 0 : 520 - F_{DF} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) - F_{AD} \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

$$\sum F_y = 0 : 325 - F_{DF} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right) - F_{AD} \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$



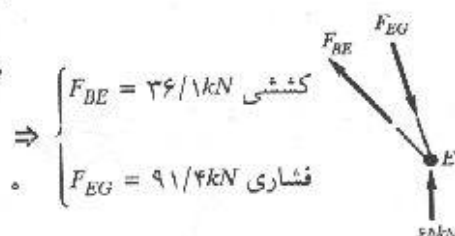
از حل معادلات فوق خواهیم داشت:
جهت نیروی F_{DF} خلاف جهتی است که در نظر گرفته ایم یعنی F_{DF} کششی می باشد.

$$F_{DF} = -91/4 \text{ kN} \quad \text{و} \quad F_{AD} = 686 \text{ kN}$$

گره E:

$$\sum F_x = 0 : -F_{BE} \left(\frac{4}{5} \right) + F_{EG} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = 0$$

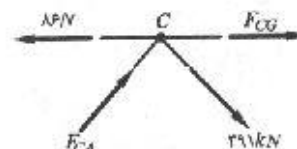
$$\sum F_y = 0 : 65 - F_{EG} \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right) + F_{BE} \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} F_{BE} = 36/1 \text{ kN} \text{ کششی} \\ F_{EG} = 91/4 \text{ kN} \text{ فشاری} \end{cases}$$

گره C:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CA} = 391 \text{ kN}$$

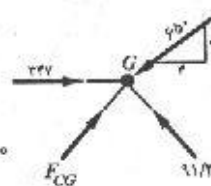


$$\sum F_x = 0 : F_{CG} + \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right) 391 \times 2 - 186/7 = 0 \Rightarrow F_{CG} = -397 \text{ kN} \text{ فشاری}$$

گره G:

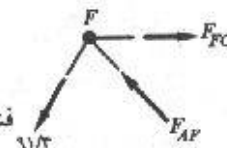
$$\sum F_x = 0 : 347 + F_{GB} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right) - 91/4 \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) - 650 \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

$$\Rightarrow F_{CB} = 364 \text{ kN} \text{ فشاری}$$



گره F:

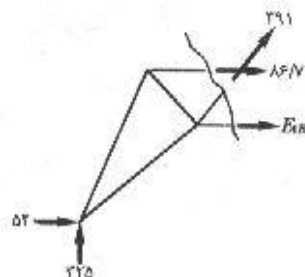
$$\sum F_y = 0 : F_{AF} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \right) - 91/4 \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right) = 0 \Rightarrow F_{AF} = 104/2 \text{ فشاری}$$



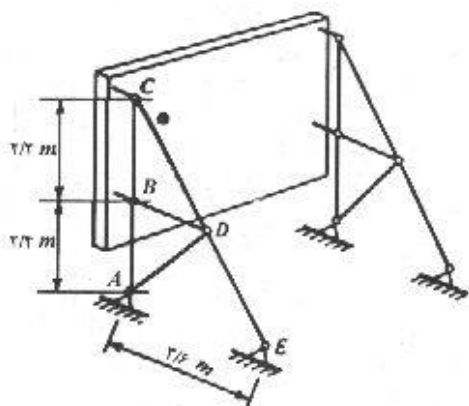
$$\sum F_x = 0 : 520 + 86/7 + F_{AF} - 391 \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right) = 0 \Rightarrow F_{AB} = -390 \text{ فشاری}$$

$$A_{DF} = \frac{F_{DF}}{\sigma_{all}} = \frac{91400}{140} = 650 \text{ mm}^2$$

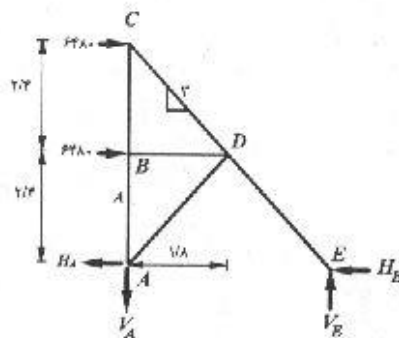
$$A_{BE} = \frac{F_{BE}}{\sigma_{all}} = \frac{36100}{140} = 260 \text{ mm}^2$$



۳-۲۴. یک تابلو علایم راهنمایی و رانندگی به ابعاد $4/5 \times 6$ متر توسط دو قاب مطابق شکل نگهداری می‌شود. سطح مقطع کلیه اعضای قاب 50×100 میلی‌متر می‌باشد. مطلوب است محاسبه تنش در اعضای قاب در اثر فشار افقی باد معادل 960 نیوتن بر مترمربع که بر روی تابلو وارد می‌گردد. فرض کنید که تمام اتصالات مفصلی می‌باشند و $1/4$ کل نیروی باد بر نقاط B و C وارد می‌شود. از کماتش احتمالی اعضای فشاری و همچنین وزن سازه صرف‌نظر کنید.



مسئله ۳-۲۴



$$F = \frac{4/5 \times 6 \times 960}{4} = 6480 \text{ N}$$

$$+ (\sum M_A = 0 : V_E \times 3/6 - 6480 \times 4/8 - 6480 \times 2/4 = 0 \Rightarrow V_E = 12960 \text{ N})$$

$$H_E = \frac{1/8}{2/4} 12960 = 9720 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 : V_E - V_A = 0 \Rightarrow V_A = 12960$$

$$+ (\sum M_D = 0 : 6480 \times 2/4 + H_A \times 2/4 - 12960 \times 1/8 = 0 \Rightarrow H_A = 3240 \text{ N})$$

$$F_{ED} = \sqrt{H_E^2 + V_E^2} = 16200 \text{ N} \quad \sigma_{ED} = \frac{16200}{100 \times 50} = 3/24 \text{ MPa}$$

$$\frac{1/\lambda}{3} \times F_{CD} = 6480 \Rightarrow F_{CD} = 10800 \text{ N}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{10800}{100 \times 50} = 2/16 \text{ MPa}$$

$$\sum F_x = 0 : F_{BD} = 6480 \text{ N}$$

$$\sigma_{BD} = \frac{6480}{100 \times 50} = 1/3 \text{ MPa}$$

$$\sum F_x = 0 : \frac{1/\lambda}{3} \times F_{AD} = H_A \Rightarrow F_{AD} = 5400 \text{ N}$$

$$\sigma_{AD} = \frac{5400}{100 \times 50} = 1/08 \text{ MPa}$$

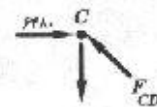
$$\sum F_y = 0 : F_{AB} + \frac{2/4}{3} F_{AD} - V_A = 0 \Rightarrow F_{AB} = 8640$$

$$\sigma_{AB} = \frac{8640}{100 \times 50} = 1/73 \text{ MPa}$$

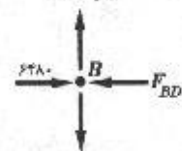
$$\sum F_y = 0 : F_{CB} = 8640 \text{ N}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{8640}{100 \times 50} = 1/73 \text{ MPa}$$

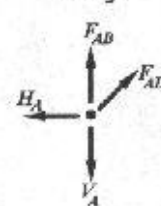
گره C:



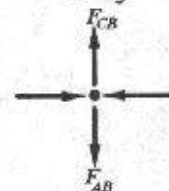
گره B:



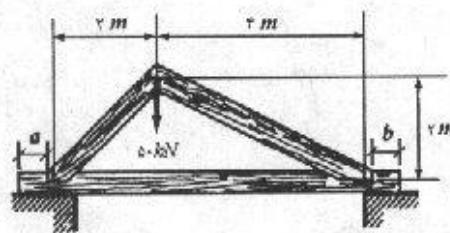
گره A:



گره B:



۳-۲۵. مطلوب است تعیین فواصل لازم a و b در خربای نشان داده شده در شکل. ابعاد سطح مقطع تمام اعضا، $0/2 \times 0/2$ متر می باشد. مقاومت برشی نهایی چوب در موازات الیاف آن $3/5$ نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. از ضریب اطمینان 5 استفاده نمایید. (چنین طرحی هیچ وقت توصیه نمی شود.)

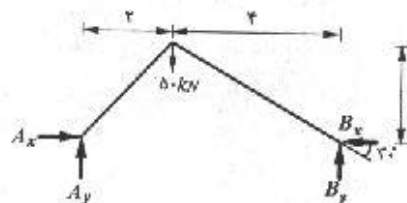


مسئله ۳-۲۵

$$\sum M_A = 0 : 50 \times 2 - B_y \times 4 = 0 \Rightarrow B_y = \frac{50}{2} \text{ kN}$$

$$B_x = \frac{B_y}{\tan 45} = 1/73 B_y = 28/87$$

$$\sum F_x = 0 : A_x - 28/87 = 0 \Rightarrow A_x = 28/87 \text{ kN}$$



$$\tau_{all} = \frac{A_x}{a.t} \Rightarrow a = \frac{A_x}{\tau.t} = \frac{28870 (N)}{\frac{3/5}{5} (N/mm^2) \times 200 (mm)} = 206/2 \text{ mm}$$

$$\tau_{all} = \frac{B_y}{b.t}$$

با توجه به یکسان بودن همه مقادیر برای طرف دیگر تیر مقدار b لازم نیز 206 mm خواهد بود
۳-۲۶. مطلوب است تعیین قطر خار B برای مکانیسم نشان داده شده در شکل. تنش برشی مجاز مساوی 100 نیوتن بر میلی متر مربع می باشد.

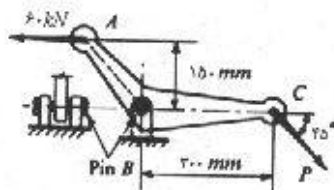
$$\sum M_B = 0 : P_y \times 300 - 60 \times 150 = 0$$

$$P_y = 30 \text{ kN}$$

$$\theta = 45^\circ \Rightarrow P_x = P_y = 30 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : B_y = P_y = 30 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : B_x + P_x - 60 = 0 \Rightarrow B_x = 30 \text{ kN}$$

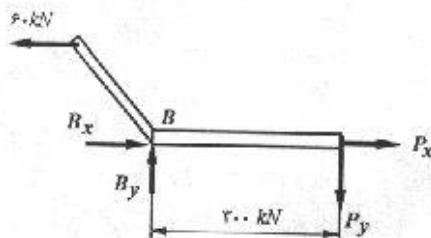


مسئله ۳-۲۶

$$R_B = \sqrt{30^2 + 30^2} = 30\sqrt{2}$$

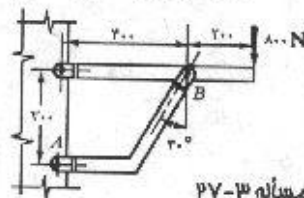
$$A = \frac{R_B}{\sigma_{all}} = \frac{30000\sqrt{2} (N)}{100} = 424/3 \text{ mm}^2$$

$$d = \left(\frac{4A}{\pi} \right)^{1/2} = 23/2 \text{ mm}$$



۳-۲۷. مطلوب است تعیین تنش برشی در پیچ A در سازه نشان داده شده در شکل. قطر پیچ مساوی 6 میلی متر می باشد و به صورت دو پرشه عمل می کند. تمام ابعاد بر حسب میلی متر می باشند.

$$\sum M_c = 0 : A_x \times 300 = 800 \times 600 \Rightarrow A_x = 1600 \text{ N}$$

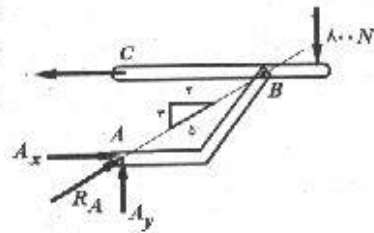


مسئله ۳-۲۷

عضو AB یک عضو دو نیرویی است، بنابراین امتداد نیروی برآیند تکیه گاه A از نقطه B عبور می کند. در

این صورت داریم: $R_A = \frac{5}{4} A_x = 2000 N$

$$\tau_A = \frac{2000}{\pi(3)^3} = 35/37 MPa$$



۲۸-۳. یک سیستم پدال برای به کار انداختن یک مکانیسم فنر در شکل نشان داده شده است. مطلوب است تعیین تنشهای برشی در خارهای A و B در اثر نیروی P به طوری که این نیرو تولید تنش معادل 70 مگاپاسکال در میله AB بکند. تمام خارها به صورت دو برشی عمل می نمایند.

$$F_{AB} = \sigma A = 70 \times \pi \times (1/5)^2 = 494/8 N$$

$$\sum M_A = 0 : -\frac{3}{5} P \times 300 + \frac{4}{5} P \times 100 + F_{AB} \times 100 = 0$$

از حل معادله فوق: $P = 494/8 N$

$$\sum F_x = 0 : A_x = \frac{3}{5} P = 296/9 N$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = \frac{4}{5} P + F_{AB} = 890/64 N$$

$$R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 938/8 N$$

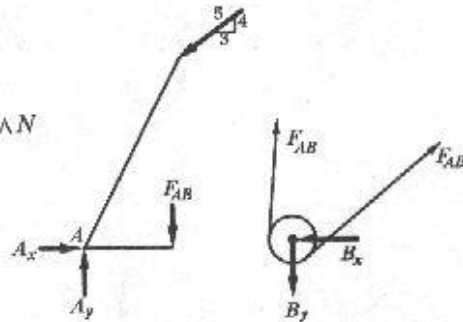
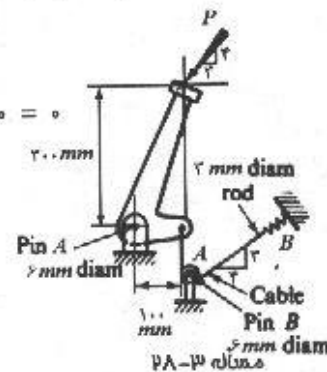
$$\tau_A = \frac{938/8}{\pi \times 3 \times 3} = 16/6 MPa$$

$$\sum F_x = 0 : B_x = \frac{4}{5} F_{AB} = 395/84 N$$

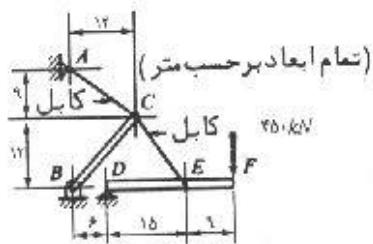
$$\sum F_y = 0 : B_y = F_{AB} + \frac{3}{5} F_{AB} = 791/68 N$$

$$R_B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 885/13 N$$

$$\tau_B = \frac{885/13}{\pi \times 3^3} = 31/3 MPa$$



۲۹-۳. یک تیر که نیرویی معادل 450 کیلونیوتن در یک انتهای آن تأثیر می نماید، توسط یک سازه کابلی مطابق شکل نگه داشته شده است. مطلوب است تعیین مؤلفه های افقی و قائم واکنشهای A و B و D . اگر تنش مجاز کششی 140 نیوتن بر میلی متر مربع و تنش مجاز فشاری 70 نیوتن بر میلی متر مربع باشد، مساحت لازم برای سطح مقطع اعضای AC ، BC ، CE را تعیین نمایید. (راهنمایی: ابتدا تیر DF را جدا نمایید).



مسئله ۳۰-۳

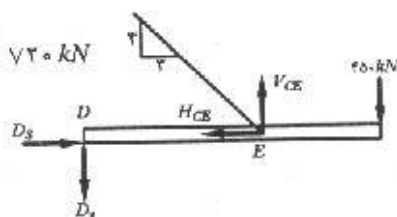
$$\sum M_D = 0 : V_{CE} \times 15 - 450 \times 24 = 0 \Rightarrow V_{CE} = 720 \text{ kN}$$

$$H_{CE} = \frac{3}{4} V_{CE} = 540 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : D_x = H_{CE} = 540 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : D_y + 250 - 720 = 0 \Rightarrow D_y = 270 \text{ kN}$$

$$F_{CE} = \frac{5}{4} \times 540 = 900 \text{ kN} \quad A_{CE} = \frac{900 \times 10^3}{140} = 6428 \text{ mm}^2$$



$$\sum M_B = 0 : 720 \times 12 + 540 \times 12 - H_{AC} \times 21 = 0 \Rightarrow H_{AC} = 720 \text{ kN}$$

$$V_{AC} = \frac{3}{4} H_{AC} = 540 \text{ kN}$$

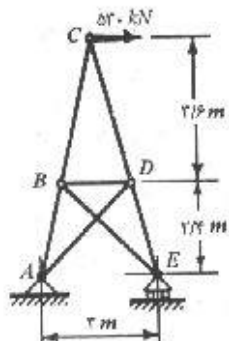
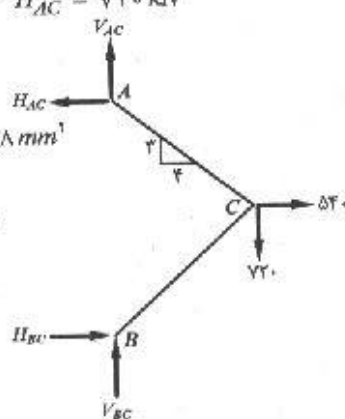
$$F_{AC} = \sqrt{V_{AC}^2 + H_{AC}^2} = 900 \text{ kN} \quad A_{AC} = \frac{900 \times 10^3}{140} = 6428 \text{ mm}^2$$

$$\sum F_x = 0 : H_{BC} - 720 + 540 = 0 \quad H_{BC} = 180 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : V_{BC} - 720 + 540 = 0 \quad V_{BC} = 180 \text{ kN}$$

$$F_{BC} = 180\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$A_{BC} = \frac{180\sqrt{2} \times 10^3}{\sqrt{2}} = 3636 \text{ mm}^2$$



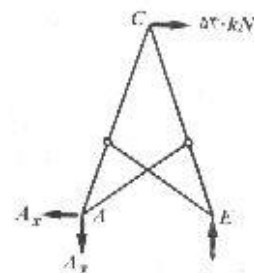
مسئله ۳۰-۳

۳-۳۰. دکل نشان داده شده در شکل، تحت تأثیر نیروی افقی ۵۴۰ کیلونیوتن قرار دارد. اگر تنش مجاز کششی ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع و تنش مجاز فشاری ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، سطح مقطع لازم اعضای دکل را معین کنید. تمام اتصالات مفصلی و تمام ابعاد نشان داده شده بر حسب متر می‌باشند.

$$\sum M_A = 0 : 540 \times 6 - E \times 3 = 0 \Rightarrow E = 1080 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = 1080 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : A_x = 540 \text{ kN}$$



پس از بدست آوردن نیروهای مربوط به اعضاء سازه نتایج زیر حاصل می‌شود

$$F_{AB} = 742/2 \text{ kN} \text{ کششی} \quad F_{BC} = 1113/2 \text{ kN} \text{ کششی}$$

$$F_{BE} = 509/1 \text{ kN} \text{ کششی} \quad F_{AD} = 509/1 \text{ kN} \text{ کششی}$$

$$F_{BD} = 450 \text{ kN} \text{ فشاری} \quad F_{CB} = 1113/2 \text{ kN} \text{ فشاری}$$

$$F_{DE} = 1484/3 \text{ kN} \text{ فشاری}$$

با توجه به تنش مجاز در حالت کشش و فشار می‌توان سطوح اعضاء را محاسبه نمود.

$$A_{AB} = \frac{742/2 \times 10^7}{140} = 5301/2 \text{ mm}^2 \quad A_{BC} = \frac{1113/2 \times 10^7}{140} = 7951/2 \text{ mm}^2$$

$$A_{BE} = \frac{509/1 \times 10^7}{140} = 3636/4 \text{ mm}^2 \quad A_{AD} = \frac{509/1 \times 10^7}{140} = 3636/4 \text{ mm}^2$$

$$A_{BD} = \frac{450 \times 10^7}{100} = 4500 \text{ mm}^2 \quad A_{CB} = \frac{1113/2 \times 10^7}{100} = 111320 \text{ mm}^2$$

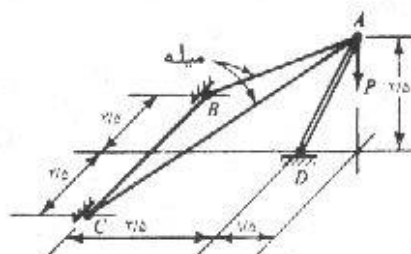
$$A_{DE} = \frac{1484/3 \times 10^7}{100} = 14843 \text{ mm}^2$$

۳-۳۱. مطلوب است تعیین قطر لازم میله‌های AB و AC از سازه فضایی نشان داده شده در شکل که برای

حمل بار $P = 180$ کیلونیوتن به کار گرفته شده است. تمام اتصالات مفصلی می‌باشد و از وزن

مردۀ سازه صرف‌نظر نمایید. تنش مجاز کششی مساوی ۱۲۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع و تمام ابعاد

نشان داده شده بر حسب متر می‌باشد.



$$V_{AB} = V_{AC}$$

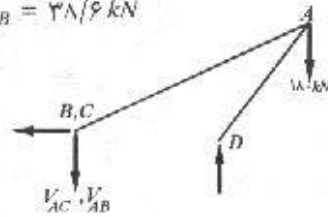
تنش / σ

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 2V_{AB} \times 3/5 - 180 \times 1/5 = 0 \Rightarrow V_{AB} = 38/6 \text{ kN}$$

$$AB = \sqrt{(2/5)^2 + (5)^2 + (3/5)^2} = 6/59 \text{ m}$$

$$F_{AB} = F_{AC} = \frac{6/59}{3/5} \times V_{AB} = 72/7 \text{ kN}$$

$$A_{AB} = A_{AC} = \frac{F_{AB}}{\sigma_{all}} = \frac{72700}{125} = 581/6 \text{ mm}^2 \quad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 27/2 \text{ mm}$$

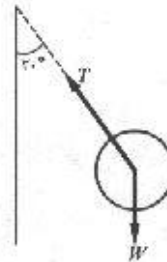


۳-۳۲. یک جرم ۵ کیلوگرمی که به انتهای یک سیم به طول ۱/۵ متر بسته شده است، در روی یک دایره افقی با چنان سرعت زاویه‌ای حرکت می‌کند که سیم زاویه‌ای مساوی ۳۰ درجه با خط قائم می‌سازد. اگر تنش مجاز کششی سیم که از فولاد اعلا ساخته شده، مساوی ۳۰۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، قطر سیم را تعیین کنید.

$$T \cos 30^\circ = W \Rightarrow T = \frac{5 \times 9/81}{\sqrt{3}/2} = 56/64 \text{ N}$$

$$A = \frac{T}{\sigma_{all}} = \frac{56/64}{300} = 0/19 \text{ mm}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0/49 \text{ mm}$$



۳-۳۳. یک قاب مفصلی که نیروی P را در گره B حمل می‌کند، در شکل نشان داده شده است. تنش قائم σ باید در هر دو عضو AB و BC یکسان باشد. مطلوب است تعیین زاویه α به طوری که وزن این سازه حداقل باشد. اعضای AB و BC دارای سطح مقطع ثابتی می‌باشند.

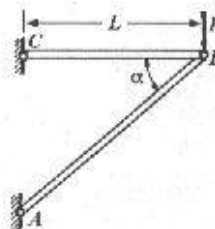
$$F_{BC} = P \cot \alpha \quad A_{BC} = \frac{F_{BC}}{\sigma} = \frac{P}{\sigma} \cot \alpha$$

$$F_{AB} = \frac{P}{\sin \alpha} \quad A_{AB} = \frac{F_{AB}}{\sigma} = \frac{P}{\sigma} \frac{1}{\sin \alpha}$$

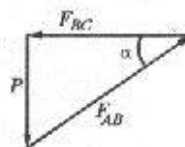
$$V = A_{BC} L + A_{AB} L_{AB} \quad \text{و} \quad L_{AB} = \frac{L}{\cos \alpha}$$

$$V = \frac{PL}{\sigma} \left(\cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)$$

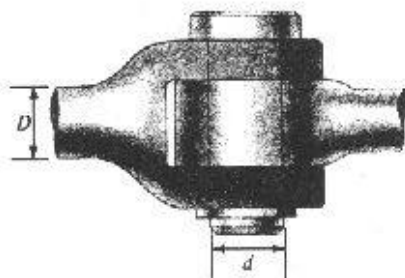
$$\frac{dV}{d\alpha} = 0 \rightarrow \cos^3 \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = 55^\circ$$



مسئله ۳-۳۳



۳-۳۴. اتصال مفصلی نشان داده شده در شکل برای حمل یک نیروی کششی به کار گرفته می‌شود. اگر قطر میله D باشد، قطر d خار را تعیین کنید. تنش برشی مجاز خار نصف تنش کششی مجاز میله می‌باشد.



مسئله ۳-۳۴

$$\sigma = \frac{P}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} = P \cdot \frac{4}{\pi D^2} \quad \text{و} \quad \tau = \frac{P/2}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} = \frac{P}{2} \cdot \frac{4}{\pi d^2}$$

بنابر فرض مسئله $\tau = \frac{\sigma}{2}$ بنابراین:

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{4}{\pi d^2} = \frac{1}{2} \left(P \cdot \frac{4}{\pi D^2} \right) \Rightarrow d = D$$

مسائل فصل چهارم

۱-۴. یک نمونه آزمایشی استاندارد فولادی به قطر ۱۳ میلی‌متر، به اندازه ۰/۲۲ میلی‌متر در طول مقیاس ۲۰۰ میلی‌متری، تحت اثر نیروی کششی ۲۹/۵ کیلو نیوتن، افزایش طول پیدا کرده است. در صورتی که در طی آزمایش، نمونه فولادی از حد ارتجاعی خارج نشده باشد، مطلوب است تعیین ضریب ارتجاعی فولاد.

$$\delta = \frac{PL}{AE} \Rightarrow E = \frac{PL}{A\delta} \Rightarrow E = \frac{(29/5 \times 10^3) \times 200}{\frac{\pi}{4} (13)^2 \times 0/22} \Rightarrow \boxed{E = 2/02 \times 10^5 \text{ MPa}}$$

۲-۴. یک میله فولادی به طول ۱۰ متر در یک مکانیسم کنترل به کار رفته است. نیروی کششی وارد بر میله در مکانیسم مورد نظر، ۵ کیلو نیوتن می‌باشد. در صورتی که حداکثر تغییر شکل مجاز میله ۳ میلی‌متر و تنش مجاز آن ۱۵۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، مطلوب است تعیین حداقل قطر لازم برای میله. ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

سطح لازم از نظر تنش مجاز:

$$\sigma = \frac{P}{A} \Rightarrow A = \frac{5 \times 10^3}{150} = 33/33 \text{ mm}^2$$

سطح لازم از نظر تغییر شکل مجاز:

$$A = \frac{PL}{\delta E} = \frac{5 \times 10^3 \times 10^3}{3 \times 2 \times 10^5} = 83/33 \text{ mm}^2$$

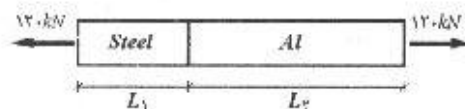
از بین مقادیر بدست آمده برای سطح، مقدار بزرگتر را انتخاب می‌کنیم تا هم جوابگوی تنش مجاز باشد و هم تغییر شکل مجاز.

$$A = 83/33 \text{ mm}^2 \Rightarrow \frac{\pi d^2}{4} = 83/33 \Rightarrow d = 10/3 \text{ mm}$$

در عمل از میله‌ای با قطر ۱۱ mm استفاده می‌کنیم.

۳-۴. یک استوانه توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر و طول ۹۰۰ میلی‌متر تحت تأثیر نیروی کششی ۱۲۰ کیلو نیوتن قرار دارد. قسمتی از این استوانه به طول L_1 از جنس فولاد و قسمت دیگر که کاملاً به قسمت فولادی چسبیده است، از جنس آلومینیوم و به طول L_2 می‌باشد. (الف) مطلوب است تعیین طولهای L_1 و L_2 به طوری که افزایش طول دو مصالح به یک اندازه باشد. (ب) اضافه طول کل استوانه چقدر می‌باشد؟ ضریب ارتجاعی فولاد 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی آلومینیوم $0/7 \times 10^5$ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.

الف) $\delta_{steel} = \delta_{Al} \Rightarrow L_1 = ?$ و $L_2 = ?$



$$\delta_{steel} = \delta_{Al} \Rightarrow \frac{PL_1}{AE_{steel}} = \frac{PL_2}{AE_{Al}}$$

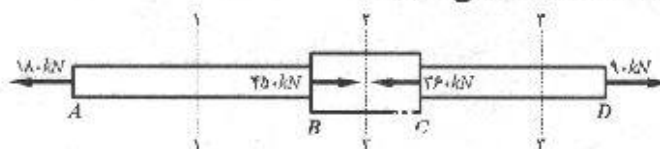
$$E_{steel} \cdot L_1 = E_{Al} \cdot L_2 \Rightarrow L_1 = \frac{E_{steel}}{E_{Al}} \cdot L_2 \Rightarrow L_1 = 2/86 L_2$$

$$\begin{cases} L_1 = 2/86 L_2 \\ L_1 + L_2 = 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 667 \text{ mm} \\ L_2 = 233 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \sum \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \Rightarrow \delta = 120 \times 10^3 \times \left(\frac{667}{\frac{\pi}{4} (50)^2 \times 2 \times 10^5} + \frac{233}{\frac{\pi}{4} (50)^2 \times 0.7 \times 10^5} \right) \\ &\Rightarrow \delta = 0.41 \text{ mm} \end{aligned}$$

۴-۴. مثال ۱-۴ را با داده‌های جدید زیر مجدداً حل نمایید:

$P_1 = 180$ کیلونیوتن، $P_2 = 450$ کیلونیوتن، $P_3 = 360$ کیلونیوتن، $P_4 = 90$ کیلونیوتن،
سطح مقطع میله از A تا B مساوی 0.0015 مترمربع و از B تا C مساوی 0.003 مترمربع و از C تا D مساوی 0.0015 مترمربع می‌باشد.



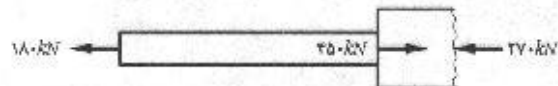
مقطع ۱-۱

$$\sum F_x = 0 : -180 + P_1 = 0 \Rightarrow P_1 = 180 \text{ kN}$$



$$\delta_{AB} = \frac{P_{AB} L_{AB}}{A_{AB} E} = \frac{(180 \times 10^3) \times (2 \times 10^3)}{(0.0015 \times 10^6) \times (2 \times 10^5)} = +1/2 \text{ mm}$$

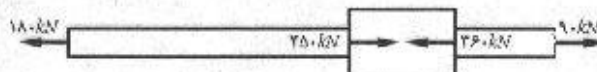
مقطع ۲-۲



$$\sum F_x = 0 : -180 + 450 + P_2 = 0 \Rightarrow P_2 = -270 \text{ kN}$$

$$\delta_{BC} = \frac{P_{BC} L_{BC}}{A_{BC} E} = \frac{(-270 \times 10^3) \times (1 \times 10^3)}{(0.003 \times 10^6) \times (2 \times 10^5)} \Rightarrow \delta_{BC} = -0.45 \text{ mm}$$

مقطع ۳-۳



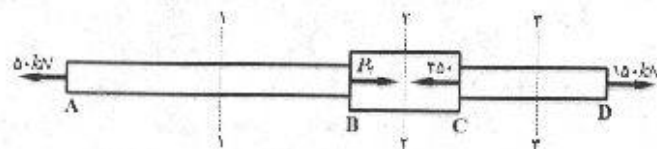
$$\sum F_x = 0 : -180 + 450 - 360 + P_3 = 0 \Rightarrow P_3 = 90 \text{ kN}$$

$$\delta_{CD} = \frac{P_{CD} L_{CD}}{A_{CD} E} = \frac{(90 \times 10^3) \times (1/5 \times 10^3)}{(0.0015 \times 10^6) \times (2 \times 10^5)} \Rightarrow \delta_{CD} = +0.45 \text{ mm}$$

$$\delta = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} = 1/2 - 0.45 + 0.45 \Rightarrow \delta = 1/2 \text{ mm}$$

۵-۴. با تعویض داده‌های مثال ۱-۴ به صورت زیر:

$P_1 = 50$ کیلونیوتن، $P_2 = 450$ کیلونیوتن، $P_3 = 150$ کیلونیوتن، مطلوب است تعیین، (الف) نیروی P_4 که برای تعادل میله لازم است. (ب) تغییر طول کلی میله AD . سطح مقطع میله از A تا B مساوی 500 میلی‌مترمربع، از B تا C مساوی 2000 میلی‌مترمربع و از C تا D مساوی 1000 میلی‌مترمربع می‌باشد.



$$\sum F_x = 0 : -50 - 450 + 150 + P = 0 \Rightarrow P = 350 \text{ kN}$$

$$\text{مقطع ۱-۱: } \sum F_x = 0 : -50 + P_1 = 0 \Rightarrow P_1 = 50 \text{ kN}$$

$$\text{مقطع ۲-۲: } \sum F_x = 0 : -50 + 350 + P_2 = 0 \Rightarrow P_2 = -300 \text{ kN}$$

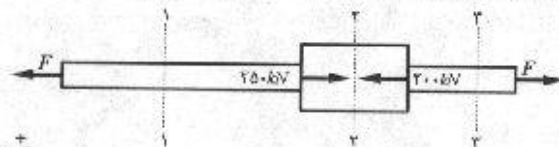
$$\text{مقطع ۳-۳: } \sum F_x = 0 : -50 + 350 - 450 + P_3 = 0 \Rightarrow P_3 = 150 \text{ kN}$$

$$\delta = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AB} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{BC} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{CD}$$

$$\delta = \frac{(50 \times 10^3) \times (2 \times 10^2)}{500 \times (2 \times 10^5)} + \frac{(-300 \times 10^3) \times (1 \times 10^2)}{2000 \times (2 \times 10^5)} + \frac{(150 \times 10^3) \times (1/5 \times 10^2)}{1000 \times (2 \times 10^5)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = 1/375 \text{ mm}}$$

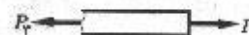
۶-۴. در مثال ۱-۴ مقدار دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت را که بر دو انتهای میله تأثیر می‌کنند، طوری تعیین نمایید که تغییر شکل کل میله مساوی صفر گردد.



$$\text{مقطع ۱-۱: } \sum F_x = 0 : -F + P_1 = 0 \Rightarrow P_1 = F$$

$$\text{مقطع ۲-۲: } \sum F_x = 0 : -F + P_2 + 250 = 0 \Rightarrow P_2 = F - 250$$

$$\text{مقطع ۳-۳: } \sum F_x = 0 : -P_2 + F = 0 \Rightarrow P_2 = F$$



$$\delta = \left(\frac{PL}{AE}\right)_{AB} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{BC} + \left(\frac{PL}{AE}\right)_{CD}$$

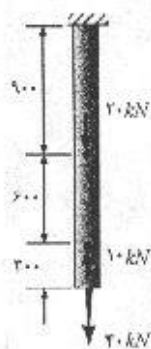
$$= \frac{F \times 2}{0.001 \times 2 \times 10^{11}} + \frac{(F - 250) \times 1}{0.002 \times 2 \times 10^{11}} + \frac{F \times 1/5}{0.001 \times 2 \times 10^{11}}$$

از حل معادله فوق مقدار F بدست می آید:

$$F = 31/25 \text{ kN}$$

۷-۴. یک تسمه به مقطع 75×5 میلی متر که به طور قائم آویزان است، از دو قسمت، یکی آلومینیوم به طول ۲ متر و دیگری فولادی به طول $2/5$ متر تشکیل شده است. این دو قسمت کاملاً به یکدیگر بسته شده اند. در انتهای پایین این تسمه، وزنه ای به وزن ۲۵ کیلو نیوتن آویزان است. با صرف نظر کردن از وزن تسمه، تغییر شکل انتهای تحتانی آن را محاسبه نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد، 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع و ضریب ارتجاعی آلومینیوم 0.7×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع می باشد.

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{(25 \times 10^2) \times 2000}{(75 \times 5) \times (0.7 \times 10^5)} + \frac{(25 \times 10^2) \times 2500}{(75 \times 5) \times (2 \times 10^5)} \Rightarrow \delta = 2/74 \text{ mm}$$



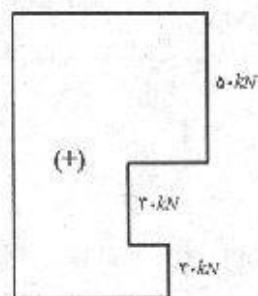
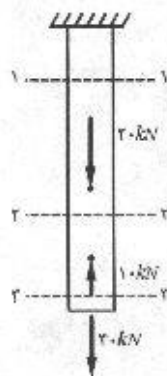
(ابعاد بر حسب میلی متر)

مسئله ۸-۴

۸-۴. مطابق شکل یک میلگرد فولادی به سطح مقطع ۳۰۰ میلی متر مربع که از انتهای فوقانی آویزان است، تحت تأثیر سه نیروی محوری قرار دارد. مطلوب است تعیین تغییر شکل انتهای آزاد این میله که در اثر این سه نیرو ایجاد می شود.

$$A = 300 \text{ mm}^2$$

$$E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$



۹۵ / کرنش، رابطه تنش - کرنش و تغییر شکل‌های محوری

$$۱-۱: \text{مقطع} \quad \sum F_y = 0 : F_1 - 20 + 10 - 40 = 0 \Rightarrow F_1 = +50 \text{ kN}$$

$$۲-۲: \text{مقطع} \quad \sum F_y = 0 : F_2 + 10 - 40 = 0 \Rightarrow F_2 = 30 \text{ kN}$$

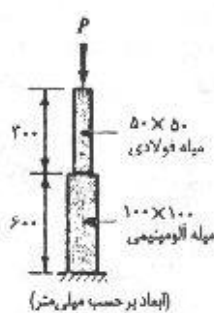
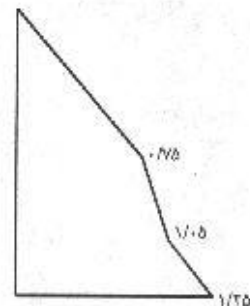
$$۳-۳: \text{مقطع} \quad \sum F_y = 0 : F_3 - 40 = 0 \Rightarrow F_3 = 40 \text{ kN}$$

$$\delta_1 = \frac{F_1 L}{AE} = \frac{50 \times 10^3 \times 900}{300 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_1 = 0.75 \text{ mm}$$

$$\delta_2 = \frac{F_2 L}{AE} = \frac{30 \times 10^3 \times 600}{300 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_2 = 0.3 \text{ mm}$$

$$\delta_3 = \frac{F_3 L}{AE} = \frac{40 \times 10^3 \times 300}{300 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_3 = 0.2 \text{ mm}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0.75 + 0.3 + 0.2 \Rightarrow \delta = 1.25 \text{ mm}$$



مسئله ۹-۴

۹-۴. یک میله فولادی و یک میله آلومینیومی با ابعاد نشان داده شده در شکل مفروض می‌باشند. مطلوب است محاسبه بار P به طوری که باعث کاهش طول کل دو میله به اندازه 0.25 میلی‌متر شود. فرض کنید توزیع تنش قائم روی تمام مقاطع عرضی دو میله یکنواخت می‌باشد و از کماتش دو میله جلوگیری شده است. ترسیم تغییر شکل محوری را رسم نمایید. ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^5 و ضریب ارتجاعی آلومینیوم را 0.7×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض کنید.

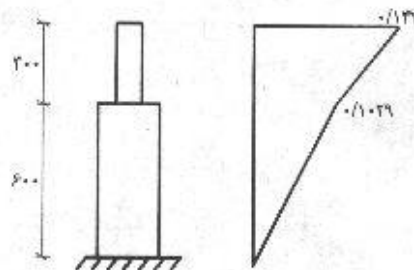
$$\delta = 0.25 \text{ mm} \quad E_{\text{steel}} = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \quad E_{\text{Al}} = 0.7 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE}$$

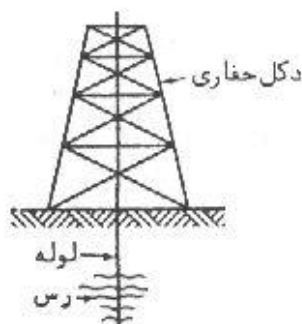
$$0.25 = \frac{P \times 900}{(50 \times 50) \times (2 \times 10^5)} + \frac{P \times 600}{(100 \times 100) \times (0.7 \times 10^5)} \Rightarrow P = 171.57 \text{ kN}$$

$$\delta_1 = \frac{(171.57 \times 10^3) \times 900}{(50 \times 50) \times (2 \times 10^5)} = 0.1029 \text{ mm}$$

$$\delta_2 = \frac{(171.57 \times 10^3) \times 600}{(100 \times 100) \times (0.7 \times 10^5)} = 0.147 \text{ mm}$$



۱۰-۴. در یکی از میدانهای نفتی جنوب کشور، لوله بسیار بلند متعلق حفاری در داخل رس سخت گیر کرده است (به شکل مسأله مراجعه کنید). لازم است تعیین گردد که این مسأله در چه عمقی

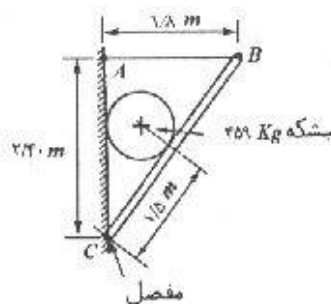


مسأله ۱۰-۴

اتفاق افتاده است. مهندس مسئول دستور می‌دهد که به این لوله نیروی کششی به طرف بالایی وارد گردد. در نتیجه این عمل لوله به صورت ارتجاعی، ۶۰۰ میلی‌متر بالا می‌آید. در همان لحظه افزایش طول مقیاس ۲۰۰ میلی‌متری، مساوی ۰/۰۳۵ میلی‌متر اندازه‌گیری می‌شود. محل گیر کردن لوله را به طور تقریبی تعیین نمایید. فرض کنید که سطح مقطع لوله ثابت است و محیطی که اطراف لوله را احاطه کرده است، اثر ناچیزی در تغییر شکل ارتجاعی لوله دارد.

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0.035}{200} = \frac{600}{L} \Rightarrow L = 3428.57 \text{ m}$$

۱۱-۴. یک لچکی (طاقچه) دیواری مطابق شکل ساخته شده است. تمام اتصالات این لچکی مفصلی می‌باشند. سطح مقطع میله فولادی AB مساوی ۵ میلی‌متر مربع و عضو BC تیر صلبی می‌باشند. (منظور از صلب بودن تیر BC این است



مسأله ۱۱-۴

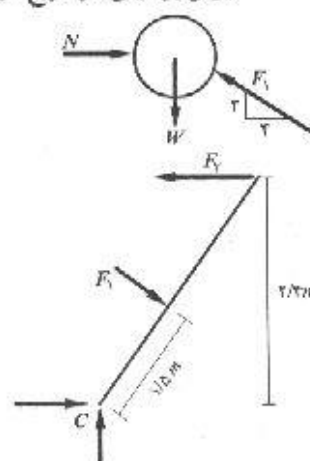
که تغییر شکل آن بسیار کوچک است به طوری که می‌توان از آن چشم‌پوشی نمود). اگر یک بشکه به قطر ۱ متر و به جرم ۴۵۹ کیلوگرم در وضعیت نشان داده شده قرار گیرد، افزایش طول میله AB را محاسبه نمایید. از اصطکاک جدار بشکه صرف‌نظر نمایید و ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

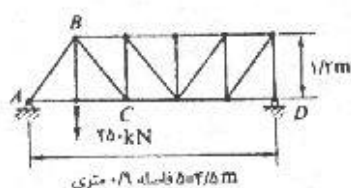
$$\sum F_y = 0 : F_1 \times \frac{4}{5} = W \Rightarrow F_1 = \frac{5}{4} \times 459 \times 9.81$$

$$\Rightarrow F_1 = 7504.65 \text{ N}$$

$$\sum M_c = 0 : F_1 \times 2.2 - F_1 \times 1.8 = 0 \Rightarrow F_1 = 469 \text{ kN}$$

$$\delta = \frac{F.L}{AE} = \frac{469 \times 10^3 \times 1.8 \times 10^3}{5 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta = 8.44 \text{ mm}$$



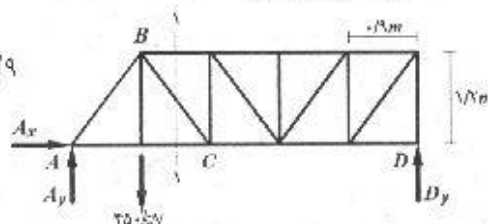


مسئله ۱۷-۴

۱۷-۴. برای خرابای نشان داده شده در شکل، مطلوب است تعیین افزایش طول میله BC تحت تأثیر نیروی $P = 450$ کیلو نیوتن. میله BC از فولاد ساخته شده و سطح مقطع آن 60 میلی متر مربع می باشد. ضریب ارتجاعی فولاد 2×10^5 میلی متر مربع می باشد.

$$\sum M_A = 0 : D_y \times (5 \times 0.9) - 450 \times 0.9$$

$$\Rightarrow D_y = 90 \text{ kN}$$

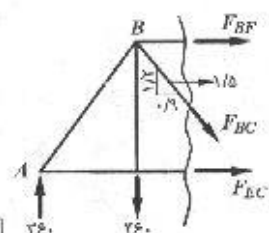


$$\sum F_y = 0 : A_y - 450 + D_y = 0 \Rightarrow A_y = 360 \text{ kN}$$

با استفاده از روش مقطع نیروی BC به راحتی محاسبه می شود:

$$\sum F_y = 0 : -F_{BC} \times \frac{1/2}{\sqrt{1/2^2 + 0.9^2}} + 360 - 450 = 0$$

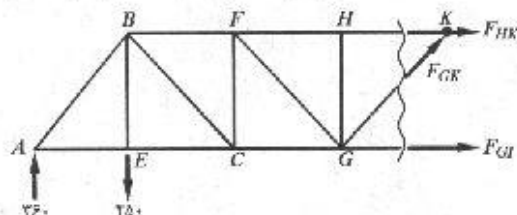
$$\Rightarrow -F_{BC} = 90 \times \frac{1/2}{1/2} \Rightarrow F_{BC} = -112.5 \text{ kN فشاری}$$



$$\delta = \frac{P.L}{AE} = \frac{(-112.5 \times 10^3) \times (1/5 \times 10^{-2})}{60 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta = -14/56 \text{ mm}$$

$$\sum M_G = 0 : -F_{HK} \times 1/2 - 360 \times (3 \times 0.9) + 450 \times (2 \times 0.9) = 0$$

$$\Rightarrow F_{HK} = -135 \text{ kN فشاری}$$

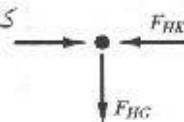


$$\sum M_K = 0 : F_{GI} \times 1/2 + 450 \times (3 \times 0.9) - 360 \times (4 \times 0.9) = 0$$

$$\Rightarrow F_{GI} = 67.5 \text{ kN کششی}$$

$$\sum F_y = 0 : F_{GK} \times \frac{1/2}{1/5} + 360 - 450 = 0 \Rightarrow F_{GK} = 112.5 \text{ کششی}$$

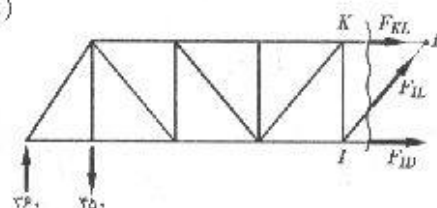
$$\sum F_y = 0 : F_{HG} = 0$$



$$\sum M_I = 0 : -F_{KL} \times 1/2 - 360 \times (4 \times 0/9)$$

$$+ 450 \times (3 \times 0/9) = 0$$

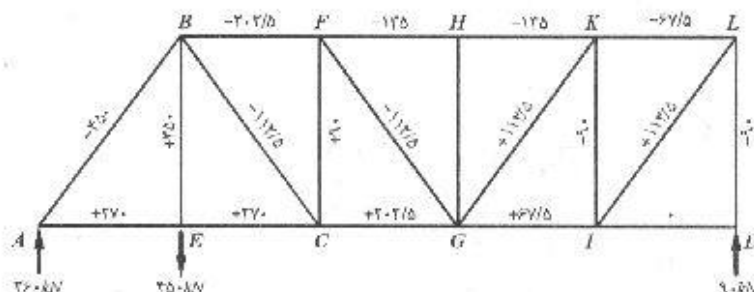
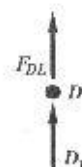
$$\Rightarrow F_{KL} = -67/5 \text{ kN فشاری}$$



$$\sum M_L = 0 : F_{ID} \times 1/2 - 360 \times (5 \times 0/9) + 450 \times (4 \times 0/9) = 0 \Rightarrow F_{ID} = 0$$

$$\sum F_y = 0 : F_{IL} \times \frac{1/2}{1/5} + 360 - 450 = 0 \Rightarrow F_{IL} = 112/5 \text{ کششی}$$

$$\sum F_y = 0 : D_y + F_{DL} = 0 \Rightarrow F_{DL} = -90 \text{ kN فشاری}$$



نیروهای وارده بر اعضا در شکل مقابل نشان داده شده‌اند. با توجه به مقدار نیروها و طول اعضا و رابطه $A = \frac{PL}{\delta E}$ کاملاً مشهود است که عضو AB بیشترین سطح را لازم دارد.

$$A = \frac{PL}{\delta E} = \frac{450 \times 10^3 \times \cancel{\text{mm}}}{(0/001 \times \cancel{\text{mm}}) \times 2 \times 10^5} \Rightarrow A = 2250 \text{ mm}$$

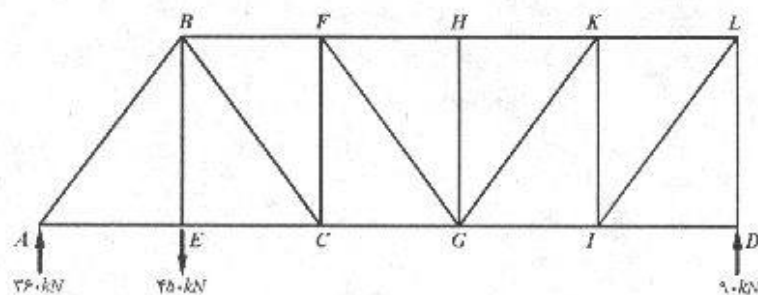
۴-۱۳. اگر تغییر شکل هر یک از اعضای مسأله ۴-۱۲ به ۰/۱ درصد طولش محدود شده باشد، کدامیک از اعضا بزرگترین سطح مقطع را لازم دارد و سطح مقطع لازم چقدر می‌باشد.

از حل مسأله قبل نیروهای تکیه گاهی را داریم:

$$A_x = 0$$

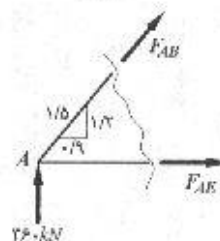
$$A_y = 360 \text{ kN و } D_y = 90 \text{ kN}$$

حال با استفاده از برشهایی در مقاطع مختلف سازه، نیروهای وارده بر اعضا را محاسبه می‌کنیم. ابتدا همه نیروها را کششی فرض می‌کنیم، بدست آمدن علامت منفی در جواب نشان‌دهنده فشاری بودن نیرو می‌باشد.



$$\uparrow + \sum F_y = 0 : F_{AB} \times \frac{1/2}{1/5} + 36 = 0 \Rightarrow F_{AB} = -45 \text{ kN} \text{ فشاری}$$

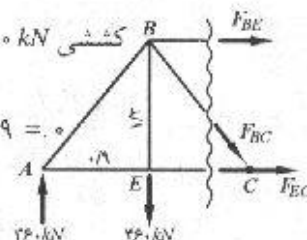
$$\rightarrow + \sum F_x = 0 : F_{AE} - F_{AB} \times \frac{0/9}{1/5} = 0 \Rightarrow F_{AE} = 27 \text{ kN} \text{ کششی}$$



$$\uparrow + \sum M_B = 0 : F_{EC} \times 1/2 - 36 \times 0/9 = 0 \Rightarrow F_{EC} = 27 \text{ kN} \text{ کششی}$$

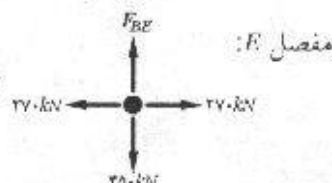
$$\uparrow + \sum M_c = 0 : -F_{BF} \times 1/2 - 36 \times (2 \times 0/9) + 45 \times 0/9 = 0$$

$$\Rightarrow F_{BF} = -202/5 \text{ kN} \text{ فشاری}$$



$$\uparrow + \sum F_y = 0 : -F_{BC} \times \frac{1/2}{1/5} + 36 - 45 = 0 \Rightarrow F_{BC} = -112/5 \text{ فشاری}$$

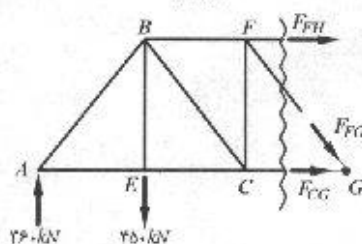
$$\uparrow + \sum F_y = 0 : F_{BE} - 45 = 0 \Rightarrow F_{BE} = 25 \text{ kN} \text{ کششی}$$



$$\uparrow + \sum M_F = 0 :$$

$$F_{CG} \times 1/2 + 45 \times 0/9 - 36 \times (2 \times 0/9) = 0$$

$$\Rightarrow F_{CG} = 202/5 \text{ kN} \text{ کششی}$$

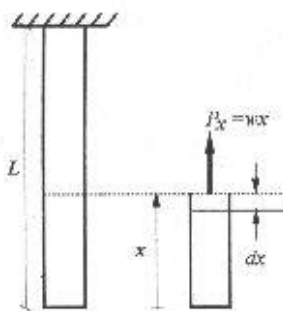


$$\uparrow + \sum M_G = 0 : -F_{FH} \times 1/2 - 36 \times (3 \times 0/9) + 45 \times (2 \times 0/9) = 0$$

$$\Rightarrow F_{FH} = -135 \text{ kN} \text{ فشاری}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 : -F_{FG} \times \frac{1/2}{1/5} - 45 + 36 = 0 \Rightarrow F_{FG} = -112/5 \text{ فشاری}$$

۴-۱۴. اگر در مثال ۴-۲ جنس میله آلومینیوم با مقطع مربع شکل به ضلع ۲۵ میلی‌متر و به وزن واحد طول $۱۷/۳$ نیوتن بر متر باشد، طول میله چقدر باید باشد تا انتهای آزاد میله تحت اثر وزن خود ۶ میلی‌متر افزایش طول پیدا کند. ضریب ارتجاعی آلومینیوم $۰/۷ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.



به فاصله x از پایین میله، المانی از میله را در نظر بگیرید.

نیروی وارد بر این المان، وزن آن قسمت از میله می‌باشد که زیر آن قرار دارد:
 $P_x = w \times x$
 که در آن w وزن واحد طول میله است.

$$\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{EA_x} = \int_0^L \frac{W \cdot x \cdot dx}{EA} = \frac{w}{EA} \int_0^L x \cdot dx \Rightarrow \delta = \frac{wL^2}{2EA}$$

$$\delta = \frac{(۱۷/۳ \times ۱۰^{-۳}) \times L^2}{2 \times (۰/۷ \times ۱۰^۵) \times (۲۵)^2} \Rightarrow \boxed{L = ۱۷۴/۲ \text{ mm}}$$

۴-۱۵. در مثال ۴-۱۲ اگر به عوض استفاده از قانون هوک، رابطه تنش - کرنش به صورت $\sigma = E\epsilon^n$ (در n عدد صحیحی است که بستگی به خواص مصالح دارد) بیان شود، تغییر مکان انتهای آزاد چقدر خواهد بود.

$$\sigma = E\epsilon^n \Rightarrow \epsilon^n = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \epsilon = \left(\frac{\sigma}{E}\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \epsilon = \left(\frac{P}{AE}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\delta = \int_0^L \epsilon dx = \int_0^L \left(\frac{wx}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} dx = \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} \int_0^L x^{\frac{1}{n}} dx$$

$$= \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) \left[x^{\frac{n+1}{n}}\right]_0^L = \left(\frac{w}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) L^{\frac{n+1}{n}}$$

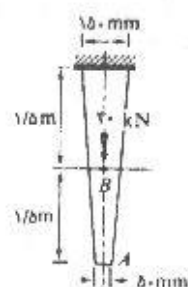
$L^{\frac{n+1}{n}}$ را به صورت $L \cdot L^{\frac{1}{n}}$ نوشته و $L^{\frac{1}{n}}$ را در پرانتز اول وارد می‌کنیم:

$$\delta = \left(\frac{wL}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) L$$

$$wL = W$$

$$\delta = \left(\frac{W}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) L$$

نتیجتاً:

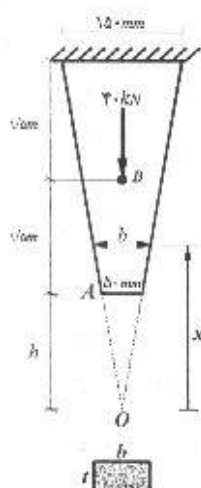


مسئله ۱۶-۴

۱۶-۴. میله ماهیچه‌ای نشان داده شده در شکل از یک ورق فولادی به ضخامت ۲۵ میلی‌متر بریده شده و در انتهای فوقانی به یک سازه صلب جوش شده است. مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای A که در اثر تأثیر نیروی ۴۰ کیلو نیوتن در نقطه B به دست می‌آید. ضریب ارتجاعی فولاد 2×10^2 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مرکز مختصات را در محل تقاطع دو ضلع جانبی در نظر بگیرید.

$$r = 25 \text{ mm} \quad F = 40 \text{ kN} \quad E = 2 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{h}{50} = \frac{h + r}{150} \Rightarrow h = 150 \text{ mm} = 150 \text{ mm}$$



$$\frac{x}{150} = \frac{b}{50} \Rightarrow b = \frac{x}{3}$$

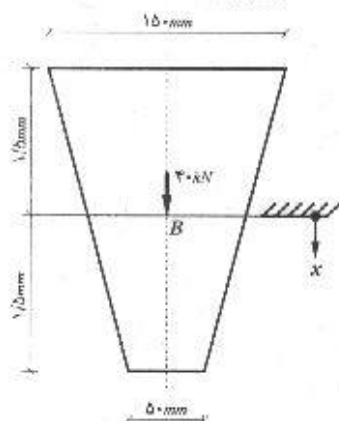
$$A = b \cdot t = \frac{x}{3} \times 25$$

$$\delta = \int_{100}^{150} \frac{P dx}{A_x E} + \int_{0}^{100} \frac{P dx}{A_x E}$$

اما در انتگرال اول مقدار P صفر است (بین A تا B نیرو وجود ندارد) بنابراین:

$$\delta = \int_{100}^{150} \frac{40 \times 10^3 dx}{\frac{x}{3} \times 25 \times E} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{30 \times 40 \times 10^3}{25 \times 2 \times 10^2} \int_{100}^{150} \frac{dx}{x} = 0.24 [\ln x]_{100}^{150} = 0.24 \times \left(\ln \frac{150}{100} \right) \Rightarrow \delta = 0.0973 \text{ mm}$$



۱۷-۴. مسئله ۱۶-۴ را با در نظر گرفتن مرکز مختصات در نقطه B مجدداً حل نمایید.

$$ds = \frac{P dx}{A_x E}$$

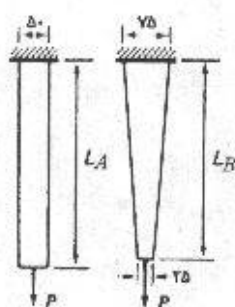
$$\delta = \int_{-100}^{100} d\delta = \int_{-100}^0 d\delta + \int_0^{100} d\delta$$

اما در فاصله صفر تا 1500 mm نیرویی وجود ندارد یعنی $P = 0$ نتیجتاً:

$$\int_0^{1500} d\delta = 0 \Rightarrow \delta = \int_{-1500}^0 \frac{P dx}{A_x E}$$

$$A = 25 \left(1000 - \frac{x}{30} \right)$$

$$\delta = \int_{-1500}^0 \frac{40 \times 10^3 dx}{2 \times 10^5 \times 25 \left(1000 - \frac{x}{30} \right)} = \frac{4}{500} \int_{-1500}^0 \frac{dx}{1000 - \frac{x}{30}} \Rightarrow \delta = 0.0973$$



(ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مسئله ۱۸-۴

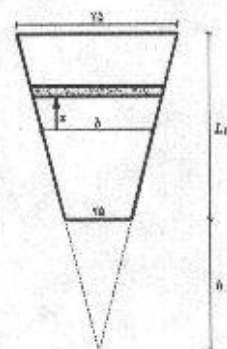
۱۸-۴. دو میله نشان داده شده در شکل از ورقی به ضخامت ۲۵ میلی‌متر بریده شده‌اند. میله A دارای پهنای ثابت ۵۰ میلی‌متر و میله B دارای پهنای متغیر مطابق شکل می‌باشد. هر دو میله‌ها تحت تأثیر نیروی یکسان P قرار دارند. نسبت L_A/L_B را طوری تعیین کنید که تغییر شکل هر دو میله یکسان باشد. از وزن دو میله صرف‌نظر نمایید.

$$\frac{h}{25} = \frac{h + L_B}{75} \Rightarrow h = \frac{L_B}{2} \quad \text{و} \quad \frac{x}{h} = \frac{b}{25} \Rightarrow b = \frac{25x}{h} = \frac{50x}{L_B}$$

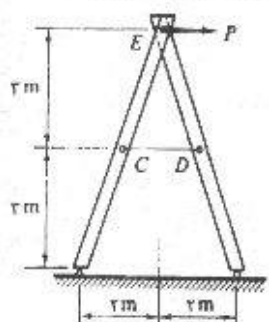
$$\delta_B = \int_h^{h+L_B} \frac{P dx}{AE} = \int_{\frac{L_B}{2}}^{\frac{3L_B}{2}} \frac{P dx}{\frac{50x}{L_B} \cdot t \cdot E} = \frac{L_B P}{50 t E} \int_{\frac{L_B}{2}}^{\frac{3L_B}{2}} \frac{dx}{x} \Rightarrow \delta_B = \frac{PL_B}{1250 E} \ln 3$$

$$\delta_A = \frac{PL}{AE} = \frac{PL_A}{1250 E}$$

$$\delta_A = \delta_B \Rightarrow L_B \ln 3 = L_A \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \ln 3 = 1.098$$

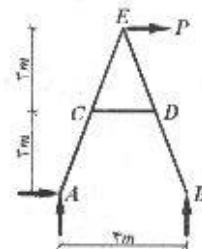


کرنش، رابطه تنش - کرنش و تغییر شکل‌های محوری / ۱۰۳



۱۹-۴. نیروی P که به گره E از قاب مفصلی نشان داده شده تأثیر می‌کند، باعث افزایش طول کابل CD به میزان $2/5$ میلی‌متر می‌شود. سطح مقطع کابل 150 میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی فولاد 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مطلوب است تعیین نیروی P

ابتدا کل جسم را به عنوان پیکر آزاد در نظر می‌گیریم. مسئله ۱۹-۴



$$\sum M_A = 0 : V_B \times 4 - P \times 6 = 0 \Rightarrow V_B = \frac{3}{2} P$$

$$\delta_{CD} = \frac{TL}{AE} \Rightarrow T = \frac{\delta_{CD} AE}{L}$$

$$T = \frac{2/5 \times 150 \times 2 \times 10^5}{2 \times 10^3} \Rightarrow T = 37.5 \text{ kN}$$

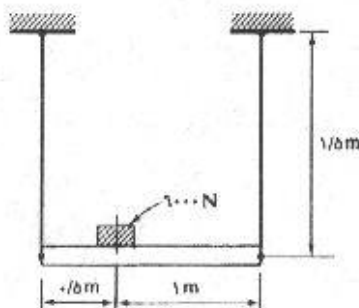
$$\sum M_B = 0 : 2 \times V_B - T \times 3 = 0$$

با توجه به رابطه (۱):

$$2 \times \frac{3}{2} P - 37.5 \times 3 = 0 \Rightarrow \boxed{P = 37.5 \text{ kN}}$$



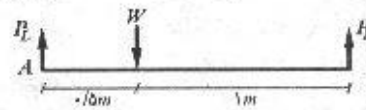
۲۰-۴. مطابق شکل، یک میله صلب که جرم 900 کیلوگرمی روی آن قرار دارد، توسط دو سیم آویزان است. سیم سمت چپ دارای سطح مقطع 60 میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع و سیم سمت راست دارای سطح مقطع 120 میلی‌متر مربع و ضریب ارتجاعی 0.7×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مطلوب است محاسبه تغییر شکل قائم جرم 900 کیلوگرمی.



مسئله ۲۰-۴

$$\sum M_A = 0 : P_R \times 1/5 = 900 \times 9/11 \times 0/5$$

$$\Rightarrow P_R = 2943 N$$



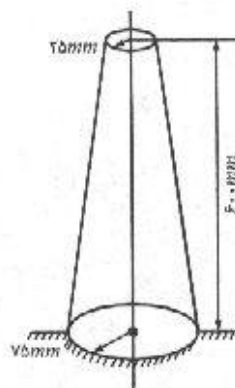
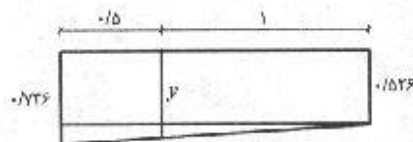
$$\sum F_y = 0 : P_L + P_R - w = 0 \Rightarrow P_L = 5886 N$$

$$\delta_L = \frac{P_L L}{A_L E_L} = \frac{5886 \times 1/5 \times 10^2}{60 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \delta_L = 0/736 mm$$

$$\delta_R = \frac{P_R L}{A_R E_R} = \frac{2943 \times 1/5 \times 10^2}{120 \times 0/7 \times 10^5} \Rightarrow \delta_R = 0/526 mm$$

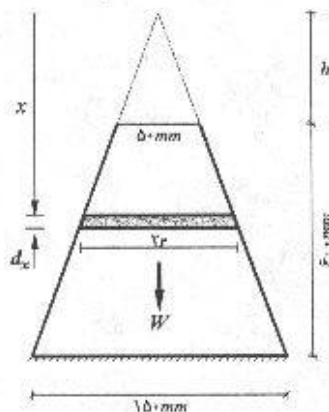
$$y = 0/526 + \frac{1}{1/5} (0/736 - 0/526)$$

$$y = 0/666 mm$$



۲۱-۴. مخروط ناقصی با ابعاد نشان داده شده، در قاعده بزرگش تکیه داده شده است. مطلوب است تعیین تغییر مکان انتهای فوقانی آن در اثر وزن مخروط. جرم مخصوص مصالح مخروط مساوی γ و ضریب ارتجاعی مصالح آن مساوی E می باشد (راهنمایی: مبدا مختصات را در رأس مخروط کاملی که از امتداد این مخروط ناقص به دست می آید، در نظر بگیرید).

مسئله ۴-۲۱



$$\frac{h}{50} = \frac{h + 600}{150} \Rightarrow h = 300 mm$$

$$\frac{x}{h} = \frac{r}{50} \Rightarrow r = \frac{x}{12} \Rightarrow A = \pi \left(\frac{x}{12} \right)^2$$

نیروی وارد بر المان dx وزن قسمتی از مخروط است که روی آن قرار دارد که برابر است با حجم آن قسمت ضرب در γg و یا:

$$P_x = V \gamma g$$

قسمتی از مخروط که روی المان قرار دارد بشکل مخروط ناقص می باشد و حجم آن بصورت زیر بدست می آید:

$$V = \frac{1}{3} A x - \frac{1}{3} \pi \times 25^2 \times h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{x}{12} \right)^2 x - \frac{1}{3} \pi \times 25^2 \times 300$$

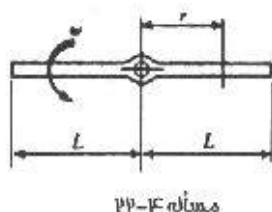
کرنش، رابطه تنش - کرنش و تغییر شکل‌های محوری / ۱۰۵

$$P_x = \frac{\pi}{3} \left[\left(\frac{x}{14} \right)^3 x - 25 \times 10^3 \right] \gamma g$$

$$\delta = \int_{x_0}^L \frac{P_x L}{A_x E} dx \Rightarrow \delta = \int_{x_0}^{100} \frac{\frac{\pi}{3} \left(\frac{x^4}{14^3} - 18/75 \times 10^3 \right) \gamma g}{\frac{\pi}{3} \left(\frac{x}{14} \right)^3 \times E} dx$$

$$\delta = \int_{x_0}^{100} \frac{\gamma g}{3E} \times (x - 14^3 \times 18/75 \times 10^3 / x^3) dx \Rightarrow \delta = 1 \times 10^5 \gamma g / E \text{ mm}$$

۲۲-۴. مطلوب است تعیین افزایش طول کل یک میله ارتجاعی با سطح مقطع ثابت A (مطابق شکل) که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω رادیان بر ثانیه در صفحه افقی دوران می‌کند. جرم مخصوص مصالح



مثال ۲۲-۴

میله مساوی γ و ضریب ارتجاعی آن مساوی E می‌باشد. از مقدار ناچیز اضافه مصالح در محل مفصل صرف‌نظر نمایید. (راهنمایی: ابتدا تنش را در مقطعی به فاصله r از مفصل با انتگرال‌گیری از اثر نیروهای ماند (اینرسی) بین L و r تعیین نمایید. به مثال ۷-۳ نیز مراجعه نمایید).

$$dP = dm \cdot r\omega^2$$

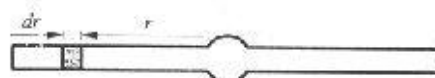
$$dm = \gamma dV = \gamma A dr \Rightarrow dP = \gamma A \omega^2 r dr$$

$$P = \int_r^L \gamma A \omega^2 r dr \Rightarrow P = \frac{\gamma A \omega^2}{2} (L^2 - r^2)$$

نیرویی برابر با همین مقدار هم در طرف دیگر میله وجود می‌آید (در خلاف جهت) بنابراین:

$$\delta = 2 \times \int_0^L \frac{P dr}{AE} = 2 \int_0^L \frac{\gamma A \omega^2}{2} \times \frac{(L^2 - r^2)}{AE} dr = \frac{\gamma \omega^2}{E} \left[L^3 r - \frac{r^4}{4} \right]_0^L$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\gamma \omega^2 L^3}{3E}$$



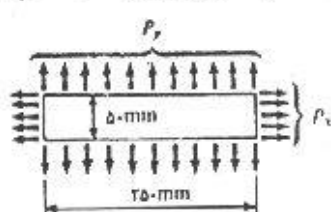
۲۳-۴. یک میله برنجی به قطر ۶۰ میلی‌متر و طول ۱۵۰ میلی‌متر توسط نیروی محوری گسترده یکنواختی معادل ۲۰۰ کیلو نیوتن تحت فشار قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین افزایش قطر ناشی از این نیروی محوری. ضریب ارتجاعی مساوی 0.85×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب پواسون مساوی 0.3 می‌باشد.

$$\epsilon_z = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} = \frac{-200 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} (60)^2 \times 0.85 \times 10^5} = -8/32 \times 10^{-2}$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_d}{\epsilon_z} \Rightarrow \epsilon_d = -\nu \epsilon_z \Rightarrow \Delta d = -d \nu \epsilon_z = -60 \times 10^{-3} \times (-8/32 \times 10^{-3})$$

$$\Rightarrow \Delta d = 0.015 \text{ mm}$$

۲۴-۴ یک ورق فولادی به ابعاد 50×250 میلی‌متر و به قطر 10 میلی‌متر تحت تأثیر تنشهای گسترده یکنواخت نشان داده شده در شکل قرار دارد. (الف) اگر $P_x = 100$ کیلو نیوتن و $P_y = 200$ کیلو نیوتن باشد، چه تغییری در ضخامت ورق در اثر



مسئله ۲۴-۴

تأثیر این نیروها به وجود می‌آید. (ب) در صورتی که همین تغییر در ضخامت را بخواهیم توسط نیروی P_x به تنهایی به وجود آوریم، مقدار لازم P_x چقدر می‌باشد. ضریب ارتجاعی مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع و ضریب پواسون مساوی 0.25 می‌باشد.

(الف)

$$\sigma_x = \frac{100 \times 10^3}{50 \times 10} \Rightarrow \sigma_x = 200 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{200 \times 10^3}{250 \times 10} \Rightarrow \sigma_y = 80 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_z = 0$$

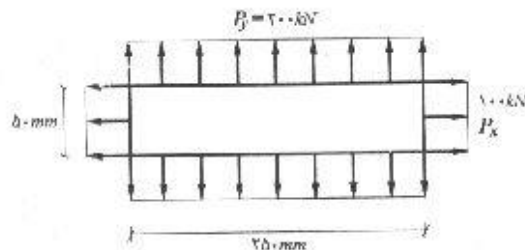
$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{2 \times 10^5} [0 - 0.25 \times (200 + 80)] = -3/5 \times 10^{-3}$$

$$\Delta L_z = \epsilon_z l = -3/5 \times 10^{-3} \times 10 \Rightarrow \Delta L_z = -3/5 \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$-3/5 \times 10^{-2} = \frac{1}{E} (-0.25 \sigma_x) \Rightarrow \sigma_x = 3/5 \times 10^{-2} \times \frac{2 \times 10^5}{0.25} = 280 \text{ N/mm}^2$$

$$P_x = A \sigma_x = (50 \times 10) \times 280 \Rightarrow P_x = 140 \text{ kN}$$

(ب)



۲۵-۴ یک قطعه مکعب مستطیل فولادی (نظیر چیزی که در شکل ۴-۲۰ الف نشان داده شده است)

دارای ابعاد $a = 50$ و $b = 75$ و $c = 100$ میلی‌متر می‌باشد. وجوه این نقطه تحت تأثیر نیروهای گسترده یکنواخت 180 کیلو نیوتن (کششی) در امتداد x 200 کیلو نیوتن (کششی) در امتداد y و 240 کیلو نیوتن (فشاری) در امتداد z قرار دارند. مطلوب است تعیین مقدار سیستم تنهایی از نیرو که فقط در امتداد y تأثیر می‌کند و همان تغییر شکلی را در امتداد y به وجود می‌آورد که سیستم نیروی اولیه به وجود می‌آورد. ν را مساوی 0.25 در نظر بگیرید.

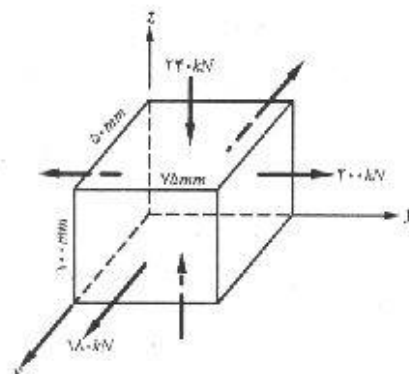
کرنش، رابطه تنش - کرنش و تغییر شکل‌های محوری / ۱۰۷

$$a = 50 \text{ mm} \quad P_x = 180 \text{ kN}$$

$$b = 75 \text{ mm} \quad P_y = 200 \text{ kN} \quad \nu = 0.25$$

$$c = 100 \text{ mm} \quad P_z = 240 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$



علامت σ_y بعلافت فشاری بودن آن منفی می‌باشد:

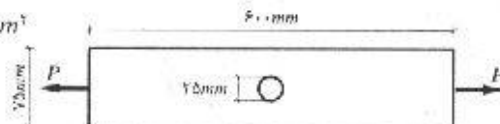
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\frac{200 \times 10^3}{50 \times 100} - 0.25 \left(\frac{180 \times 10^3}{75 \times 100} - \frac{240 \times 10^3}{50 \times 75} \right) \right] \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{50}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma'_y}{E} = \frac{P'_y}{AE} \Rightarrow 50 = \frac{P'_y}{(50 \times 100)} \Rightarrow \boxed{P'_y = 250 \text{ kN}}$$

۲۶-۴. یک تسمه فولادی با سطح مقطع 6×75 میلی‌متر و طول ۶۰۰ میلی‌متر دارای یک سوراخ دایره شکل به قطر ۲۵ میلی‌متر در مرکزش می‌باشد. مطلوب است تعیین حداکثر نیروی کششی محوری را که می‌توان در امتداد طولی بر این تسمه وارد نمود، بدون اینکه تنش حداکثر از مقدار مجاز ۲۲۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز کند. (اثر تمرکز تنش را در نظر بگیرید)

$$\text{تسمه } 600 \times 75 \times 6 \text{ mm} \quad \sigma_{\text{مجاز}} = 220 \text{ N/mm}^2$$

$$r = 25 \text{ mm}$$

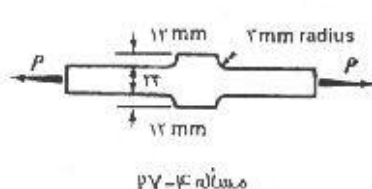


$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{25}{2} = 12.5 \text{ mm} \\ d &= 75 - 25 = 50 \text{ mm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{r}{d} = 0.25$$

$$K = 2/25$$

از نمودار شکل (۷-۴) مقدار K برابر ۲/۲۵ بدست می‌آید.

$$\sigma = K \frac{P}{A} \Rightarrow P = \frac{\sigma A}{K} = \frac{220 \times (75 - 25) \times 6}{2/25} \Rightarrow P = 29/33 \text{ kN}$$



۲۷-۴. تسمه‌ای مطابق شکل که تحت تأثیر نیروی کششی

P قرار دارد، مفروض است. تعیین نمایند که این

میله در اثر وجود زائده میانی چند درصد ضعیف

شده است. اگر تمرکز تنش را در نظر بگیرید.

$$\frac{r}{d} = \frac{3}{24} = 0.125$$

$$\frac{D}{d} = \frac{48}{24} = 2$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_{max}} = \frac{\frac{P}{A}}{K \frac{P}{A}} = \frac{1}{K} = \frac{1}{2.05} = 0.49$$

$$K = 2.05 \text{ (شکل ۷-۴)}$$

۲۸-۴. یک شکاف طولانی در تسمه‌ای فولادی به ضخامت ۲۵ و پهنای ۱۵۰ میلی‌متر و طول ۳ متر مطابق شکل ایجاد شده است. (الف) مطلوب است تعیین تنش حداکثری را که در اثر تأثیر نیروی محوری $P = 200$ کیلونیوتن در آن ایجاد می‌شود. فرض کنید که منحنی فوقانی شکل ۴-۳۱ در این مورد صادق است. (ب) برای همان حالت، تغییر طول کل میله را تعیین نمایید. از اثر موضعی تمرکز تنش صرف‌نظر نمایید و طول شکاف را مساوی ۶۰۰ میلی‌متر فرض کنید. (پ) افزایش طول همان میله را وقتی که $P = 700$ کیلونیوتن می‌باشد، تخمین بزنید. فرض کنید که فولاد تا کرنش 0.02 متر بر متر در تنش معادل ۲۸۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع جاری می‌شود. (ت) ۱ حذف نیروی حالت پ، چه تغییر شکلهای پس‌ماندی در میله به وجود می‌آید. ضریب ارتجاعی فولاد را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع فرض کنید.



مسئله ۲۸-۴

$$\frac{r}{d} = \frac{25}{150} = 0.167$$

از روی شکل (۷-۴) مقدار $K = 2.3$ بدست می‌آید

$$\sigma_{max} = K \frac{P}{A} = 2.3 \times \frac{200 \times 10^3}{(150 - 50) \times 25} \Rightarrow \sigma_{max} = 184 \text{ MPa}$$

(ب)

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{200 \times 10^3 \times (3000 - 600)}{150 \times 25 \times 2 \times 10^5} + \frac{200 \times 10^3 \times 600}{(150 - 50) \times 25 \times 2 \times 10^5} = 0.64 + 0.24$$

$$\Rightarrow \delta = 0.88 \text{ mm}$$

(پ)

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{700 \times 10^3}{25 \times 100} = 280 \text{ MPa}$$

تنش در قسمت شکافدار:

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} = \frac{700 \times 10^3}{25 \times 150} = 187 \text{ MPa}$$

تنش در قسمت بدون شکاف

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در قسمت شکاف‌دار جسم به تنش تسلیم رسیده. بنابراین با کرنش 0.02 جاری می‌شود.

$$\delta_1 = 0.02 \times 600 = 12 \text{ mm}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{187}{2 \times 10^5} = 9.35 \times 10^{-4}$$

$$\delta_2 = 9.35 \times 10^{-4} \times 2400 = 2.24 \text{ mm}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 14.24 \text{ mm}$$

کرنش، رابطه تنش - کرنش و تغییر شکلهای محوری / ۱۰۹

ت) با برداشتن بار قسمت بدون شکاف میله به شکل کاملاً ارتجاعی طول اولیه را بدست می آورد ولی قسمت شکاف دار چون تغییر طول پلاستیک داده بود یک کرنش پس ماند در آن ایجاد می شود و به طول اولیه خود بر نمی گردد:

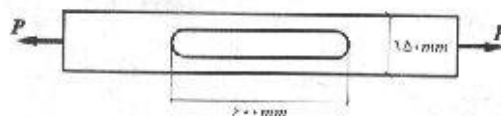
$$\delta_R = \delta_1 - \delta_e$$

δ_R کرنش پس ماند

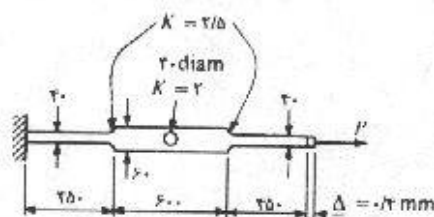
δ_e کرنش الاستیک

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{280}{2 \times 10^5} = 1/4 \times 10^{-3}$$

$$\delta_R = 12 - 1/4 \times 10^{-3} \times 600 \Rightarrow \delta_R = 11/16 \text{ mm}$$



۴-۲۹. ضخامت تسمه نشان داده شده در شکل مساوی ۲۵ میلی متر می باشد. در محلهای تغییر مقطع مقادیر تقریبی ضرایب تمرکز تنش نشان داده شده است. تحت تأثیر نیروی P تسمه به اندازه $0/4$ میلی متر افزایش طول پیدا می کند. مطلوب است تعیین حداکثر تنشی که در اثر این نیرو در تسمه به وجود می آید. در محاسبات مربوط به تغییر شکل میله از اثر تمرکز تنش چشم پوشی نمایید. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع فرض نمایید.



مسئله ۴-۲۹

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} \Rightarrow 0/4 = \frac{250 \times P}{(40 \times 25) \times 2 \times 10^5} + \frac{600 \times P}{20 \times 25 \times 2 \times 10^5} + \frac{250 \times P}{40 \times 25 \times 2 \times 10^5}$$

$$\Rightarrow 0/4 = (0/225P + 0/2P + 0/225P) \times 10^{-5} \Rightarrow P = 61/54 \text{ kN}$$

بدیهی است مقدار تنش در جایی که سوراخ وجود دارد یا نواحی که جسم تغییر ضخامت می دهد بعلاوه پدیده تمرکز تنش بیشتر از سایر نواحی خواهد بود. تنش در محلی که ضخامت جسم تغییر می کند:

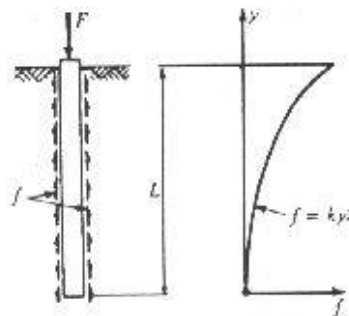
$$\sigma_1 = K_1 \frac{P}{A} = \frac{2/5 \times 61/54 \times 10^3}{40 \times 25} \Rightarrow \sigma_1 = 153/85 \text{ N/mm}^2$$

تنش در محل سوراخ:

$$\sigma_2 = K_2 \frac{P}{A} = 2 \times \frac{61/54 \times 10^3}{(60 - 40) \times 25} \Rightarrow \sigma_2 = 246/15 \text{ N/mm}^2$$

با مقایسه دو مقدار مشخص می شود که مقدار ماکزیمم تنش در محل سوراخ می باشد.

۴-۳. یک شمع چوبی با مقطع ثابت که به طول L در داخل زمین رسی کوبیده شده است، نیروی F را در انتهای خود حمل می‌کند. این نیرو تماماً توسط اصطکاک f که تغییرات آن مطابق شکل است، حمل می‌شود. (الف) مطلوب است کاهش طول کل شمع به ازای مقادیر F ، A ، L و E ؛ (ب)، اگر $P = ۴۲۰$ کیلونیوتن، $L = ۱۲$ متر و $A = ۶۴۰۰۰$ میلی‌مترمربع و $E = ۱۰۰۰۰$ نیوتن بر میلی‌مترمربع باشد، مقدار کاهش طول چقدر خواهد بود. (راهنمایی: ابتدا با استفاده از تعادل نیروها، مقدار k را تعیین نمایید).



مسئله ۴-۳

(الف)

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^L f dA = \int_0^L ky^2 (\pi r dy) = \int_0^L ky^2 \left(\pi \sqrt{\frac{A}{\pi}} dy \right) \\
 \Rightarrow F &= \frac{\pi}{4} k L^3 \sqrt{\pi A} \Rightarrow k = \frac{4}{\pi} \frac{F}{L^3 \sqrt{\pi A}} \\
 F &= \int_0^y f dA = \int_0^y ky^2 (\pi r dy) = \int_0^y k \left(\pi \sqrt{\frac{A}{\pi}} \right) y^2 dy \Rightarrow F = \frac{\pi}{4} k \sqrt{A \pi} y^3 \\
 \Delta L &= \int_0^L d(\Delta L) = \int_0^L \frac{F dy}{EA} = \int_0^L \frac{\pi k \sqrt{A \pi} y^3}{4 EA} dy \\
 &= \frac{\pi k}{4 E} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \int_0^L y^3 dy = \frac{k L^4}{4 E} \sqrt{\frac{\pi}{A}} = \frac{4 F}{4 L^3 \sqrt{\pi A}} \cdot \frac{L^4}{4 E} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \Rightarrow \boxed{\Delta L = \frac{FL}{4 EA}}
 \end{aligned}$$

(ب)

$$\Delta L = \frac{420 \times 10^3 \times 12 \times 10^3}{4 \times 1 \times 10^4 \times 64 \times 10^3} \Rightarrow \Delta L = 1/97 \text{ mm}$$

مسائل فصل پنجم

۱-۵. مطلوب است تعیین تنش برشی در تارهای خارجی یک میله استوانه‌ای توپر به قطر ۷۵ میلی‌متر تحت اثر لنگر پیچشی ۵۵۰۰ نیوتن‌متر، با فرض اینکه لنگر پیچشی در امتداد نشان داده شده در شکل ۵-۵-الف، وارد گردد، جهت تنشهای برشی محاسبه شده را در روی یک طرح مناسب نشان دهید.

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (0.075)^4}{32} = 3.11 \times 10^{-6} m^4 \quad C = \frac{d}{2} = 0.0375 m$$



$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{5500 \times 0.0375}{3.11 \times 10^{-6}} = 6.63 \times 10^7 Pa = 66.3 MPa$$

۲-۵. یک محور استوانه‌ای توخالی به قطر خارجی ۱۰۰ میلی‌متر و قطر داخلی ۸۰ میلی‌متر مفروض است. اگر تنش برشی مجاز مصالح استوانه ۵۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، لنگر پیچشی قابل حمل توسط این محور را تعیین نمایید. در صورتی که این لنگر پیچشی بر محور وارد آید، تنش برشی موجود در سطح داخلی محور را تعیین نمایید.

$$J = \frac{\pi}{32} (d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32} (100^4 - 80^4) = 5.8 \times 10^8 mm^4$$

$$T_{all} = \frac{\tau_{all} J}{c} = \frac{55 \times 5.8 \times 10^8}{50} = 6.37 \times 10^7 N.mm = 63.75/8 N.m$$

$$\tau_{inner} = \frac{\rho}{c} \tau = \frac{40}{50} \times 55 = 44 N/mm^2$$

۳-۵. یک میله استوانه‌ای از چوب داگلاس‌فیر به قطر ۲۰۰ میلی‌متر که الیاف آن به موازات محور مرکزی آن می‌باشد، مفروض است. اگر تنش برشی مجاز در امتداد الیاف این چوب ۸/۴ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، مطلوب است تعیین لنگر پیچشی مجاز قابل حمل توسط این میله استوانه‌ای.

$$J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi (0.1)^4}{2} = 1.57 \times 10^{-4} m^4$$

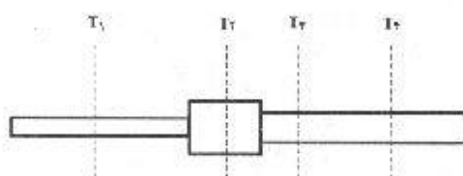
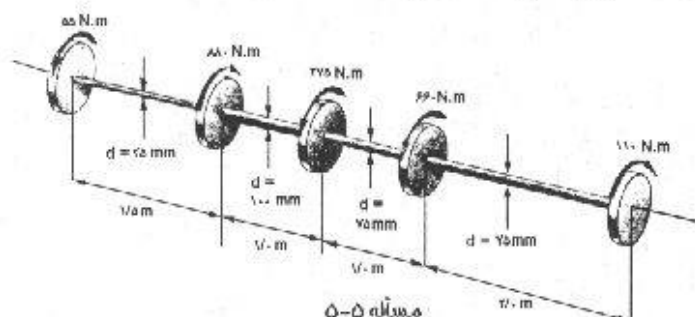
$$T = \frac{\tau J}{c} = \frac{8/4 \times 10^4 \times 1.57 \times 10^{-4}}{0.1} = 1.256 N.m$$

۴-۵. اگر از داخل یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۳۰۰ میلی‌متر، سوراخی استوانه‌ای به قطر ۲۰۰ میلی‌متر برداشته شود، چند درصد از مقاومت پیچشی این محور کم می‌شود.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\frac{\pi}{2} (r^4 - b^4)}{\frac{\pi}{2} r^4} = \frac{150^4 - 100^4}{150^4} = 0.802 = 80.2\%$$

$$100\% - 80.2\% = 19.8\%$$

۵-۵. محور استوانه‌ای نشان داده شده مفروض است. حداکثر تنش برشی پیچشی ایجاد شده در این محور چقدر است و بین کدام یک از چرخ‌دنده‌ها اتفاق می‌افتد.



با انتخاب مقاطعی در محل‌های مورد نیاز و بکارگیری معادله تعادل پیچشی کوپل پیچشی اعمال شده بر مقاطع بدست می‌آید:

$$T_1 = 55 \text{ N.m} \quad T_2 = 825 \text{ N.m} \quad T_3 = 550 \text{ N.m} \quad T_4 = 110 \text{ N.m}$$

$$\tau_1 = \frac{T_1 c_1}{J_1} = \frac{55000 \text{ (N.mm)} \times \frac{25}{2}}{\frac{\pi}{32} (25)^4} = 17/9 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{T_2 c_2}{J_2} = \frac{825000 \times 50}{\frac{\pi}{32} (100)^4} = 4/2 \text{ MPa}$$

بین مقاطع ۳ و ۴ به علت یکسان بودن سایر شرایط، مقطعی که کوپل بیشتری به آن اعمال می‌شود بحرانی‌تر است:

$$\tau_3 = \frac{T_3 c_3}{J_3} = \frac{550000 \times \frac{75}{2}}{\frac{\pi}{32} (75)^4} = 6/64 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \tau_1 = 17/9 \text{ MPa}$$

۵-۶. یک محور فولادی استوانه‌ای توپر به قطر ۱۵۰ میلی‌متر توانی معادل ۴۵۰ کیلووات را با سرعتی معادل ۱/۵ هرتز منتقل می‌نماید. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی تولید شده در محور. اگر سرعت به ۶ هرتز افزایش پیدا کند، چه تغییری در مقدار تنش برشی ایجاد می‌شود.

$$T = 9540 \frac{kW}{n} = 9540 \times \frac{450}{1/5 \times 60} = 27700 \text{ N.m}$$

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{27700 \times 10^3 \times 75}{\frac{\pi}{2} (75)^3} = 71/9 \text{ MPa}$$

$$\tau' = \frac{1/5}{6} \times 71/9 = 18 \text{ MPa} \quad \text{مقدار تغییر تنش} = 71/9 - 18 = 53/9 \text{ MPa}$$

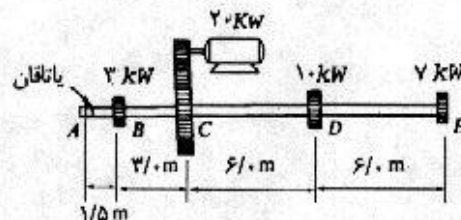
۷-۵. دو محور استوانه‌ای فولادی، یکی توخالی به قطر خارجی ۹۰ میلی‌متر و به قطر داخلی ۳۰ میلی‌متر و دیگری توپر به قطر ۹۰ میلی‌متر قرار است که هر کدام توانی معادل ۵۰ کیلووات با سرعت ۳ هرتز منتقل نمایند. حداکثر تنش برشی ایجاد شده در هر کدام از محورها را تعیین نمایید.

$$T = 9540 \times \frac{50}{3 \times 60} = 2650 \text{ N.m}$$

$$\tau_1 = \frac{Tc_1}{J_1} = \frac{2650 \times 10^3 \times 45}{\frac{\pi}{32} (90^3 - 30^3)} = 18/75 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{Tc_2}{J_2} = \frac{2650 \times 10^3 \times 45}{\frac{\pi}{32} 90^3} = 18/51 \text{ MPa}$$

۸-۵. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر حرکت یک موتور به توان ۲۰ کیلووات را به سه چرخ‌دنده با سرعت ۳ هرتز مطابق شکل انتقال می‌دهد. توان مصرفی هر کدام از چرخ‌دنده‌ها در روی شکل نوشته شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی پیچشی در مقاطعی بین DE ، CD ، BC ، AB .



مسئله ۸-۵

با دقت به مجموعه نشان داده شده در شکل ملاحظه می‌گردد که بیشترین توان انتقالی ۱۷ kW بوده که توسط قسمت CD محور منتقل می‌گردد و با توجه به یکسان بودن مشخصات در طول محور، این قسمت بحرانی‌ترین قسمت محور می‌باشد.

$$T_{max} = 9540 \times \frac{17}{3 \times 60} = 901 \text{ N.m} \quad J = \frac{\pi}{2} \times 25^3 = 0/61 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{CD} = \frac{Tc}{J} = \frac{901 \times 10^3 \times 25}{0/61 \times 10^9} = 36/9 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BC} = \frac{3}{17} \times 36/9 = 6/52 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \tau_{DE} = \frac{7}{17} \times 36/9 = 15/19 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \tau_{AB} = 0$$

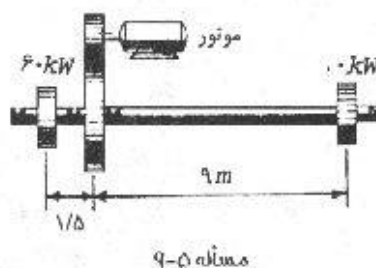
۹-۵. یک موتور توسط یک سری چرخ‌دنده محوری مطابق شکل را با سرعتی معادل ۶۳۰ دور در دقیقه می‌چرخاند. توان مصرفی هر یک از چرخ‌دنده‌ها در روی شکل نوشته شده است. در صورتی که بخواهیم محور فوق استوانه‌ای توپر با قطر ثابت باشد، با توجه به اینکه تنش برشی مجاز ۳۷ نیوتن بر میلی‌متر مربع است، قطر محور را تعیین نمایید.

$$T = ۹۵۴۰ \times \frac{۶۰}{۶۳۰} = ۹۰۸/۵۷ \text{ N.m}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{\gamma} c^2 = \frac{T}{\tau} \Rightarrow \frac{\pi}{\gamma} c^2 = \frac{۹۰۸/۵۷ \times ۱۰^۳}{۳۷}$$

$$\Rightarrow c = ۲۵ \text{ mm}$$

$$d = ۲c = ۵۰ \text{ mm}$$



۱۰-۵. مطلوب است طراحی یک محور استوانه‌ای توخالی برای انتقال ۲۰۰ کیلووات با سرعت ۷۵ دور در دقیقه بدون اینکه تنش برشی ایجاد شده در آن از ۴۳ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز کند. نسبت قطر خارجی به قطر داخلی را مساوی $۱/۲$ در نظر بگیرید.

$$T = ۹۵۴۰ \times \frac{۲۰۰}{۷۵} = ۲۵۴۴۰ \text{ N.m}$$

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau} = \frac{۲۵۴۴۰ \times ۱۰^۳}{۴۳} = ۵/۹ \times ۱۰^۵$$

$$\frac{J}{c} = \frac{\frac{\pi}{۳۲} \left[d_o^4 - \left(\frac{d_o}{1/2} \right)^4 \right]}{\frac{d_o}{2}} = ۵/۹ \times ۱۰^۵ \Rightarrow d_o = ۱۸۰ \text{ mm}$$

$$d_i = \frac{d_o}{1/2} = ۱۵۰ \text{ mm}$$

۱۱-۵. مطلوب است تعیین زاویه پیچش کل بین دو مقطع A و E از محور مسأله ۸-۵. ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

$$T_{AB} = ۰ \quad \text{و} \quad T_{CD} = ۹۰۱ \text{ N.m}$$

$$T_{BC} = \frac{۳}{۱۷} \times ۹۰۱ = ۱۵۹ \text{ N.m} \quad T_{DE} = \frac{۷}{۱۷} \times ۹۰۱ = ۳۷۱ \text{ N.m}$$

$$\varphi_A = \sum \frac{TL}{JG} \quad J = \frac{\pi(۲۵ \times ۱۰^{-۳})^4}{۳۲} = ۶/۱۴ \times ۱۰^{-۱۲} \text{ m}^4$$

$$\varphi_A = \frac{۱}{۶/۱۴ \times ۱۰^{-۱۲} \times ۰/۸۴ \times ۱۰^{۱۱}} \left[-۱۵۹ \times ۳ + ۹۰۱ \times ۶ + ۳۷۱ \times ۶ \right] = ۰/۱۳۸ \text{ rad} = ۸^\circ$$

۱۲-۵. طول یک میله استوانه‌ای توپر آلومینیومی به قطر ۵ میلی‌متر چقدر باید باشد تا بدون اینکه تنش برشی در آن از ۴۲ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز کند، بتواند یک دور کامل دوران کند. ضریب ارتجاعی برشی G مساوی 0.27×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.

$$\varphi = \frac{TL}{JG} = \frac{\tau JL}{cJG} = \frac{\tau L}{cG}$$

$$L = \frac{\varphi cG}{\tau} = \frac{2\pi \cdot (2/5 \times 10^{-2})(0.27 \times 10^{11})}{42 \times 10^8} = 10/1 m$$

۱۳-۵. یک میله استوانه‌ای توخالی به طول ۱۵۰ میلی‌متر به عنوان یک فنر پیچشی به کار گرفته می‌شود. نسبت قطر داخلی به قطر خارجی این میله $\frac{1}{4}$ می‌باشد. سختی لازم برای این فنر، $\frac{1}{84}$ درجه برای هر نیوتن متر می‌باشد. مطلوب است تعیین قطر خارجی این میله ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی 0.84×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.

$$J = \frac{TL}{\varphi G} = \frac{1000(N.m) \times 150}{\left(\frac{1}{84} \times \frac{\pi}{180}\right) \times 0.84 \times 10^5} = 8594 mm^4$$

$$J = \frac{\pi}{32} \left[c^4 - \left(\frac{c}{4} \right)^4 \right] = \frac{15\pi}{32} c^4 = 8594 \Rightarrow c = 8.74 mm$$

$$d = 2c = 17.48 mm$$

۱۴-۵. یک محور استوانه‌ای توپر آلومینیومی به طول ۱ متر و قطر خارجی ۵۰ میلی‌متر قرار است با یک محور استوانه‌ای توخالی فولادی با همان طول و همان قطر خارجی تعویض شود، به طوری که هر دو محور بتوانند لنگر پیچشی یکسانی را حمل کنند و زاویه پیچش آنها در طول کل، مساوی باشد. شعاع داخلی محور استوانه‌ای توخالی فولادی چقدر باید باشد. ضریب ارتجاعی برشی فولاد مساوی 0.84×10^5 و ضریب ارتجاعی برشی آلومینیوم مساوی 0.28×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشند.

$$\frac{\varphi_{st}}{\varphi_{Al}} = 1 \Rightarrow \frac{J_{Al} G_{Al}}{J_{st} G_{st}} = 1 \Rightarrow J_{st} = \frac{G_{Al}}{G_{st}} J_{Al}$$

$$\frac{\pi}{32} (50^4 - d_i^4) = \frac{0.28}{0.84} \times \frac{\pi}{32} 50^4$$

$$d_i^4 = 50^4 - \frac{28}{84} 50^4 \Rightarrow d_i = 45.2 mm \quad r_i = \frac{d_i}{2} = 22.6 mm$$

۱۵-۵. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۵۰ میلی‌متر و طول ۹۰۰ میلی‌متر در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد است. قرار است یک سوراخ استوانه‌ای به قطر ۳۵ میلی‌متر، هم محور با استوانه اصلی، در داخل آن از انتهای آزاد ایجاد گردد. مطلوب است تعیین طول سوراخ فوق به طوری که

زاویه پیچشی کل محور در اثر لنگر پیچشی 100 نیوتن متر، مساوی $0/12$ درجه گردد. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی $0/84 \times 10^5$ نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.

$$J_1 = \frac{\pi}{32} \times 50^4 = 613592/3 \text{ mm}^4$$

$$J_2 = \frac{\pi}{32} \times (50^4 - 35^4) = 266268/8 \text{ mm}^4$$

$$\varphi = \sum \frac{Tl}{JG} = \frac{T}{G} \left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{900 - l_1}{J_2} \right) \quad (1)$$

با قرار دادن مقادیر زیر و نیز مقادیر J_1 و J_2 محاسبه شده در بالا مقدار l_1 از معادله اخیر بدست می آید:

$$\varphi = \frac{0/12\pi}{180} \quad \text{و} \quad T = 100 \times 10^3 \text{ N.mm} \quad \text{و} \quad G = 0/84 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$(1) \Rightarrow l_1 = 568 \text{ mm} \Rightarrow l_2 = 900 - 568 = 332 \text{ mm}$$

۱۶-۵. یک موتور به قدرت 75 کیلووات توسط چرخ دنده A محوری را با سرعت $26/5$ دور در دقیقه می چرخاند. چرخ دنده های مورب B و C همزن یک مخلوط کننده سیمان لاستیکی را به دوران در می آورند. اگر توان مصرفی همزن متصل به چرخ دنده B مساوی 25 کیلووات و چرخ دنده C مساوی 50 کیلووات باشد، قطر لازم برای محور را تعیین کنید. تنش برشی مجاز محور جلوگیری شده است. اگر ضریب ارتجاعی برشی مساوی $0/84 \times 10^5$ نیوتن بر میلی مترمربع باشد، زاویه پیچش قسمت چپ محور را تعیین نمایید.

$$T_B = 9540 \times \frac{25}{26/5} = 9000 \text{ N.m}$$

$$T_A = 9540 \times \frac{50}{26/5} = 18000 \text{ N.m}$$

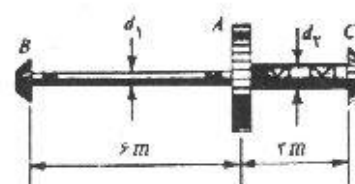
$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau} \quad \left(\frac{J}{c} \right)_{\text{left}} = \frac{9 \times 10^3 (\text{N.mm})}{40} = 225 \times 10^3$$

$$\frac{\pi}{\tau} c_1^3 = 225 \times 10^3 \Rightarrow c_1 = 52 \Rightarrow d_1 = 104 \text{ mm}$$

$$\left(\frac{J}{c} \right)_{\text{right}} = \frac{18 \times 10^3}{40} = 450 \times 10^3$$

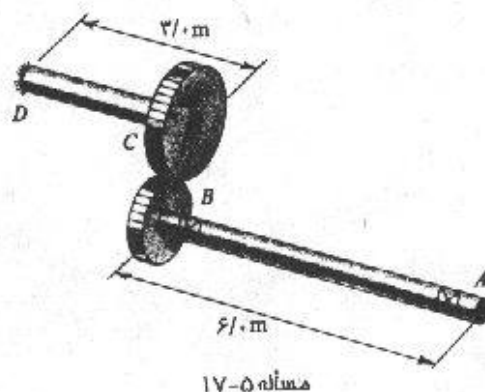
$$\frac{\pi}{\tau} c_2^3 = 450 \times 10^3 \Rightarrow c_2 = 65/9 \text{ mm} \Rightarrow d_2 = 131/8 \text{ mm}$$

$$\varphi = \frac{TL}{Jc} = 0/056 \text{ (rad)} = 3/2^\circ$$



مسئله ۵-۱۶

۱۷-۵. دو محور فولادی به قطر ۵۰ میلی‌متر، توسط یک چرخ‌دنده به یکدیگر متصل شده‌اند، چرخ‌دنده H دارای قطر ۲۰۰ میلی‌متر و چرخ‌دنده C دارای قطر ۴۰۰ میلی‌متر می‌باشد. اگر انتهای D گیردار باشد، تحت اثر یک لنگر پیچشی مساوی ۵۶۰ نیوتن متر در A ، میزان دوران انتهای A چقدر خواهد بود. ضریب ارتجاعی برشی G را مساوی $۰/۸۴ \times ۱۰^۵$ نیوتن بر میلی‌مترمربع در نظر بگیرید.



مسئله ۱۷-۵

زاویه پیچش محور AB برابر است با:

$$\varphi_{A1} = \frac{TL}{JG} = \frac{560 \times 10^3 \times 6000}{\frac{\pi}{32} (25)^4 \times 0/84 \times 10^5} = 0/064 \text{ rad}$$

اعمال لنگر ۵۶۰ $kN.m$ به قسمت AB باعث ایجاد لنگر ۱۱۲۰ $kN.m$ در CD خواهد شد.

$$T_c = \frac{400}{200} T_B = 1120$$

بنابراین زاویه پیچش محور CD عبارتست از:

$$\varphi_c = \frac{1120 \times 10^3 \times 3000}{\frac{\pi}{32} (25)^4 \times 0/84 \times 10^5} = 0/064 \text{ rad}$$

به علت وجود سیستم چرخ‌دنده بین دو شفت، دوران φ_c موجب می‌شود که شفت AB به مانند یک جسم صلب دوران کند. این دوران به نسبت قطر چرخ‌دنده‌ها می‌باشد:

$$\varphi_{A2} = 2 \varphi_c = 0/128 \text{ rad}$$

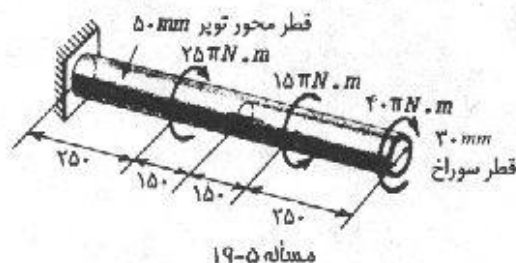
$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2} = 0/193 \text{ rad} \rightarrow \varphi_A = 11^\circ$$

۱۸-۵. در مثال ۸-۵، چه لنگری باید به تنهایی بر نقطه A اثر کند تا همان زاویه پیچشی را در A تولید کند که لنگرهای پیچشی مؤثر بر نقاط B و D ایجاد می‌کردند.

$$T = \text{Const} \quad \varphi = \sum \frac{TL}{JG}$$

$$0/0233 = \frac{T}{G} \left[\left(\frac{0/5 + 0/3}{57/5 \times 10^{-8}} \right) + \left(\frac{0/2}{3/83 \times 10^{-8}} \right) \right] \Rightarrow T = 281/86 \text{ N.m}$$

۵-۱۹. الف) مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی در محور نشان داده شده در شکل. (ب) مطلوب است تعیین زاویه پیچش دو انتهای میله نسبت به یکدیگر. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی 0.84×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.



مقاطع ۱ و ۲ دارای شرایط هندسی یکسانی هستند، بنابراین مقطع ۱ که کوپل بیشتری را تحمل می‌کند بحرانی است. همچنین بین مقاطع ۳ و ۴ نیز مقطع ۴ بحرانی است.

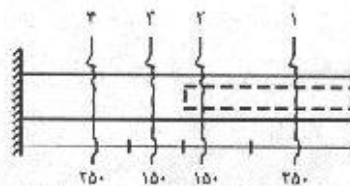
$$T_1 = 40\pi \quad T_2 = 25\pi \quad T_3 = 25\pi \quad T_4 = 50\pi$$

(الف)

$$\tau_1 = \frac{T_1 c}{J} = \frac{40\pi \times 10^3 \times 25}{\frac{\pi}{32} (50^4 - 30^4)} = 5.88 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{T_2 c}{J} = \frac{50\pi \times 10^3 \times 25}{\frac{\pi}{32} \times 50^4} = 6.4 \text{ MPa}$$

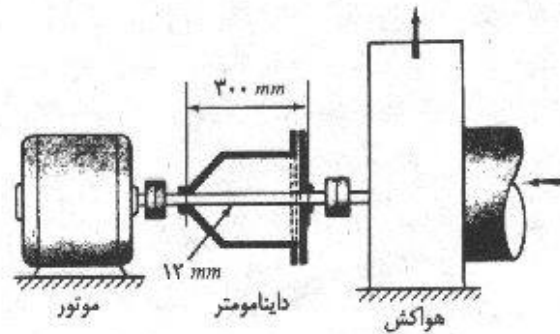
$$\tau_{max} = \tau_2 = 6.4 \text{ MPa}$$



(ب)

$$\varphi = \sum \frac{TL}{GJ} = \frac{1}{0.84 \times 10^5} \left[\frac{40\pi \times 10^3 \times 25}{\frac{\pi}{32} (50^4 - 30^4)} + \frac{25\pi \times 10^3 \times 15}{\frac{\pi}{32} (50^4 - 30^4)} + \frac{25\pi \times 10^3 \times 15}{\frac{\pi}{32} 50^4} + \frac{50\pi \times 10^3 \times 25}{\frac{\pi}{32} 50^4} \right] \Rightarrow \varphi = 1.95 \times 10^{-2} \text{ rad} = 0.11^\circ$$

۵-۲۰. برای تعیین توان لازم برای دوران پره‌های یک هواکش با سرعت ۲۰ هرتز از یک داینامومتر استفاده می‌کنیم. داینامومتر از یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۱۲ میلی متر که دو دیسک به فاصله ۳۰۰ میلی متر از یکدیگر روی آن نصب شده‌اند، تشکیل یافته است. یکی از این دیسک‌ها به صورت یک شپیوره می‌باشد که یک انتهایش به میله بسته شده است و انتهای دیگر آن در مقابل دیسک دوم قرار دارد. در حین دوران، زاویه چرخش نسبی این دو دیسک مساوی ۶ درجه اندازه‌گیری شده است. توان داده شده به پره‌های هواکش را بر حسب کیلووات تعیین کنید. ضریب ارتجاعی برشی محور را 0.84×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.



مسئله ۲۰-۵

$$T = 9540 \frac{P}{20 \times 60} \text{ N.m}$$

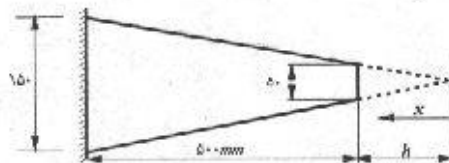
$$\varphi = \frac{TL}{JG} \Rightarrow 6 \times \frac{\pi}{180} = \frac{9540 \frac{P}{1200} \times 0.3}{\frac{\pi}{32} (0.012)^4 \times 0.84 \times 10^{11}} \Rightarrow P = 7.5 \text{ kW}$$

۲۱-۵. یک محور فولادی توپر به شکل مخروط ناقص در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر آزاد و تحت اثر لنگر پیچشی T قرار دارد (به شکل مراجعه کنید). مطلوب است تعیین زاویهٔ پیچش انتهای آزاد اگر $d_1 = 150$ میلی‌متر، $d_2 = 50$ میلی‌متر، $L = 500$ میلی‌متر و $T = 3000$ نیوتن متر می‌باشد. فرض کنید که فرضیات مربوط به



مسئله ۲۱-۵

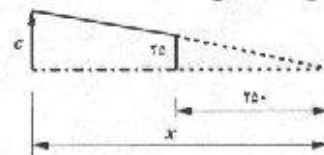
پیچش میله‌های استوانه‌ای در این حالت نیز صادق است. ضریب ارتجاعی برشی را مساوی 0.84×10^{10} نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید.



$$\frac{h + 500}{150} = \frac{h}{50} \Rightarrow h = 250 \text{ mm}$$

$$\frac{c}{25} = \frac{x}{250} \Rightarrow c = \frac{x}{10}$$

اگر c شعاع هر مقطع دلخواه باشد:

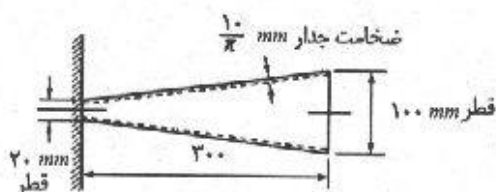


$$J = \frac{\pi}{2} c^4 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{10} \right)^4 = \frac{\pi x^4}{2 \times 10^4}$$

$$\varphi = \int \frac{T dx}{JG} = \frac{3000}{0.84 \times 10^{11}} \times \frac{2 \times 10^4}{\pi} \int_{250}^{500} \frac{dx}{x^4} \Rightarrow \varphi = 4/6 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

$$\varphi = 0.267^\circ$$

۲۲-۵. یک مخروط ناقص جدار نازک دارای ابعاد نشان داده شده در شکل می باشد. مطلوب است تعیین سختی پیچشی این عضو (سختی پیچشی عبارت است از مقدار لنگر پیچشی لازم برای دوران واحد) ضریب ارتجاعی برشی مساوی G می باشد.

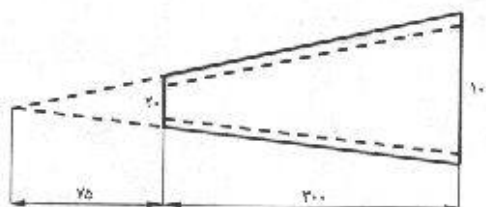


مسئله ۲۲-۵

ابعاد نامعلوم مشابه مسئله قبل محاسبه شده اند.

$$c = \frac{x}{\lambda}$$

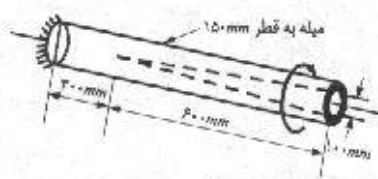
$$J = 2\pi c^3 t = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right)^3 \left(\frac{10}{\pi}\right) = \frac{5x^3}{128}$$



$$\varphi = \int \frac{T dx}{JG} = \frac{T}{G} \int_{x_0}^{x_{max}} \frac{dx}{\frac{5}{128} x^3} = \frac{T}{\left(\frac{5}{128}\right)G} (\lambda/333 \times 10^{-3})$$

$$\varphi = 1 \text{ rad} \Rightarrow T = 468075G$$

۲۳-۵. یک محور استوانه‌ای به قطر ۱۵۰ میلی متر که از مصالح ارتجاعی - خطی می باشد، دارای یک سوراخ به شکل مخروط و به طول ۶۰۰ میلی می باشد (مطابق شکل). این محور در یک انتها گیردار و در انتهای آزادش تحت اثر لنگر پیچشی T می باشد. مطلوب است تعیین حداکثر زاویه پیچش محور.

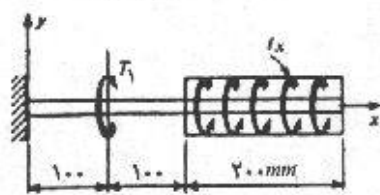


مسئله ۲۳-۵

$$\varphi = \int \frac{T dx}{JG} = \frac{T \times 0.3}{\frac{\pi (0.15)^4}{32} G} + \int_0^{0.6} \frac{T dx}{\frac{\pi}{32} \left[(0.15)^4 - \left(\frac{x}{6}\right)^4 \right] G}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1/9 \times 10^4 T}{\pi G} + \frac{32 \times 6^4 T}{\pi G} \int_0^{10} \frac{dx}{(0/9)^4 - x^4} \\
 &= \frac{1/9 \times 10^4 T}{\pi G} + \frac{32 \times 6^4 T}{\pi G} \left(\frac{1}{2 \times (0/9)^2} \right) \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{0/9 + x}{0/9 - x} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x}{0/9} \right) \right]_{0,10} \\
 &= \frac{1/9 \times 10^4 T}{\pi G} + \frac{32/96 \times 10^4 T}{\pi G} = \frac{5/86 \times 10^4 T}{\pi G}
 \end{aligned}$$

۲۴-۵. محور مته‌ای به شکل استوانه با سختی پیچشی ثابت JG ، در حین عمل سوراخ‌کاری، تحت اثر



مسئله ۲۴-۵

لنگر پیچشی متمرکز $T_1 = -100$ نیوتن متر و
لنگر پیچشی گسترده یکنواخت $T_x = 500$ نیوتن
متر بر متر مطابق شکل قرار گیرد. مطلوب است
تعیین زاویه پیچش انتهای آزاد مته. همچنین
توسیمه تغییرات لنگر پیچشی $T(x)$ و توسیمه
تغییرات زاویه پیچش $\phi(x)$ را رسم نمایید.

$$JG \frac{d\phi}{dx} = -T_x = 1000 < x - 0/1 > - 5000 < x - 0/2 >$$

$$T = JG \frac{d\phi}{dx} = 1000 < x - 0/1 > - 5000 < x - 0/2 > + c_1$$

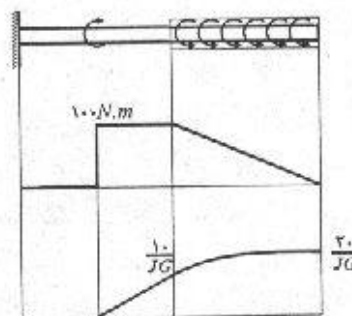
$$T(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$JG \phi = 1000 < x - 0/1 >^2 - 2500 < x - 0/2 >^2 + c_2$$

$$\phi(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$\phi(x) = \frac{1}{JG} [1000 < x - 0/1 >^2 - 2500 < x - 0/2 >^2]$$

$$\phi(0/4) = \frac{20}{JG}$$



۲۵-۵. یک لوله استوانه‌ای به قطر خارجی 50 میلی‌متر و ضخامت جداره 2 میلی‌متر در دو انتهای خود توسط فلانجهای صلب به یک محور استوانه‌ای توپر ممتد به قطر 25 میلی‌متر متصل شده است. (به شکل مسأله مراجعه کنید). اگر لوله و محور استوانه‌ای توپر هر دو از مصالح ارتجاعی - خطی یکسانی ساخته شده باشند، چه قسمت از لنگر پیچشی وارده T توسط لوله حمل می‌شود



(تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مسئله ۲۵-۵

پیچش / ۱۲۷

$$\varphi_s = \varphi_t \quad \frac{T_s L}{J_s G} = \frac{T_t L}{J_t G}$$

$$\frac{T_s}{T_t} = \frac{J_s}{J_t} = \frac{\frac{\pi(0.025)^4}{32}}{2\pi\left(\frac{0.05}{2}\right)^2(0.002)} = 0.195 \Rightarrow T_s = 0.195 T_t$$

$$T_s + T_t = T \Rightarrow 0.195 T_t + T_t = T \Rightarrow T_t = 0.837 T$$

۵-۲۶. اگر لوله خارجی مثال قبل از آلومینیوم و محور استوانه‌ای توپر از فولاد ساخته شده باشد، چه لنگر پیچشی می‌تواند به این مجموعه وارد گردد به طوری که تنش برشی در لوله آلومینیومی از 100 نیوتن بر میلی‌مترمربع تجاوز نکند. ضریب ارتجاعی برشی فولاد را 0.84×10^5 و ضریب ارتجاعی برشی آلومینیوم را 0.28×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع فرض کنید. زاویه پیچش لوله آلومینیومی در طول 500 میلی‌متری آن تحت اثر لنگر پیچشی فوق چقدر است.

$$\varphi_s = \varphi_t \Rightarrow \frac{T_s}{T_t} = \frac{J_s G_s}{J_t G_t} = 0.195 \left(\frac{0.84}{0.28} \right) = 0.586$$

$$T_s + T_t = T \Rightarrow 0.586 T_t + T_t = T \Rightarrow T_t = 0.631 T$$

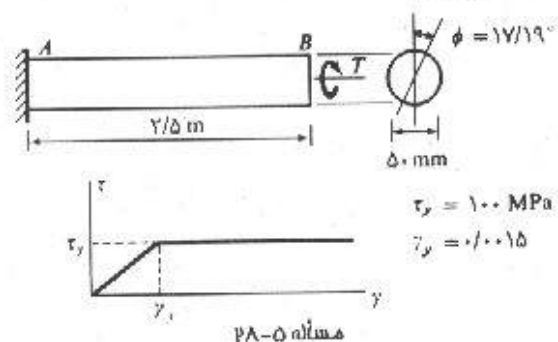
$$\tau_{max} = \frac{T_t c_t}{J_t} \Rightarrow 100 \times 10^3 = \frac{(0.631)T \times 0.025}{1/96 \times 10^{-7}} \Rightarrow T = 1/25 \text{ kN.m}$$

$$\varphi = \frac{TL}{JG} = \frac{\tau_{max} \left(\frac{L}{G} \right)}{c_t} = \frac{100 \times 10^3}{0.025} \left(\frac{0.5}{28 \times 10^4} \right) = 0.0714 \text{ (rad)} = 4.09^\circ$$

۵-۲۷. یک نمونه فولادی به شکل استوانه توپر به قطر 20 میلی‌متر و طول 450 میلی‌متر در لنگر پیچشی 900 نیوتن متر گسیخته می‌شود. اساس گسیختگی فولاد فوق در پیچش چقدر است.

$$\tau = \frac{TC}{J} = \frac{900(10 \times 10^{-2})}{\frac{\pi}{2}(10 \times 10^{-2})^4} = 5.73 \times 10^6 \text{ Pa} = 5.73 \text{ MPa}$$

۵-۲۸. یک محور استوانه‌ای به قطر 50 میلی‌متر و طول $2/5$ متر مفروض است. یک انتهای این محور گیردار و انتهای آزاد آن به اندازه $17/19$ درجه دوران نموده است. چه لنگر پیچشی T در انتهای آزاد این محور تأثیر کرده که این زاویه پیچش تولید شده است. مشخصات مکانیکی ایده‌ال مصالح در شکل نشان داده شده است.



$$0 \leq \rho \leq \rho_e : \tau = \frac{\rho}{\rho_e} \tau_y$$

$$\rho \geq \rho_e : \tau = \tau_y$$

$$\rho_e \varphi = \gamma_y L \Rightarrow \rho_e = \frac{\gamma_y L}{\varphi} = \frac{0.0015 \times 2500}{\frac{17}{19} \frac{\pi}{180}} = 12/5 \text{ mm}$$



$$\begin{aligned} T &= \int \tau \rho dA = \int \tau \rho (\pi \rho d\rho) = \int_0^{\rho_e} \tau \pi \left(\frac{\tau_y}{\rho_e} \right) \rho^2 d\rho + \int_{\rho_e}^{\rho_o} \tau_y \times \pi \rho^2 d\rho \\ &= 16\pi \int_0^{\rho_e} \rho^3 d\rho + 700\pi \int_{\rho_e}^{\rho_o} \rho^2 d\rho = 3170 \text{ N.m} \end{aligned}$$

۲۹-۵. یک محور استوانه‌ای توپر به قطر ۱۵۰ میلی‌متر در قسمتی از طولش توسط ماشین تراش داده شده به طوری که قطر آن به ۷۵ میلی‌متر رسیده است. اگر در نقطه انتقال دو قطر، ماهیچه‌ای به شعاع ۱۲ میلی‌متر تعبیه شود، حداکثر تنش برشی به وجود آمده در محور استوانه‌ای در اثر لنگر پیچشی ۲۷۰۰ نیوتن متر چقدر است؟ اگر شعاع ماهیچه به ۳ میلی‌متر کاهش یابد، حداکثر تنش برشی چقدر خواهد بود.

ضریب تمرکز تنش پیچشی را از روی شکل (۳-۵) بدست می‌آوریم:

$$r = 12 \text{ mm} \quad \frac{r}{d} = \frac{12}{75} = 0.16$$

$$\frac{D}{d} = \frac{150}{75} = 2$$

با استفاده از شکل (۳-۵): $K = 1/3$

$$\tau = K \frac{Tc}{J} = 1/3 \times \frac{27 \times 10^3 \times 37/5}{\frac{\pi}{2} (37/5)^4} = 42/37 \text{ MPa}$$

$$r = 3 \text{ mm} \quad \frac{r}{d} = \frac{3}{75} = 0.04 \text{ و } \frac{D}{d} = 2 \xrightarrow{\text{شکل (۳-۵)}} K = 1/85$$

$$\tau = \frac{1/85}{1/3} \times 42/37 = 60/37 \text{ MPa}$$

۵-۳۰. مطلوب است تعیین شعاع ماهیچه‌ای که لازم است در محل اتصال دو محور استوانه‌ای توپر به قطرهای ۱۵۰ و ۱۰۰ میلی‌متر ایجاد گردد تا این محور بتواند با تنش برشی مجاز ۵۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع، توانی معادل ۸۰ کیلووات را با سرعت ۱۰۰ دور در دقیقه انتقال دهد.

$$T = 9540 \times \frac{\Lambda^\circ}{100} = 7632 \text{ N.m}$$

$$K = \frac{\tau J}{Tc} = \frac{55 \times \frac{\pi}{2} (50)^3}{7632 \times 10^3 \times 50} = 1/42 \quad \frac{D}{d} = \frac{150}{100} = 1/5$$

با استفاده از شکل (۵-۳) و نیز مقادیر محاسبه شده K و $\frac{D}{d}$ داریم:

$$\frac{r}{d} = 0/12 \Rightarrow r = 12 \text{ mm}$$

۵-۳۱. تنش برشی حداکثر و زاویه پیچش سه میله با طول مساوی و مقطع مربع، مربع مستطیل و دایره با مساحت مساوی را مقایسه کنید. تمام میله‌ها تحت اثر لنگر پیچشی یکسانی قرار دارند. قطر مقطع دایره‌ای، ۱۰۰ میلی‌متر و پهنای مقطع مستطیل ۲۵ میلی‌متر می‌باشد. برای مقطع مربع، $\alpha = 0/208$ و $\beta = 0/141$ و برای مقطع مربع مستطیل $\frac{1}{3} \approx \beta \approx \alpha$ می‌باشد.

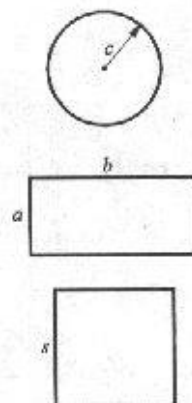
$$A_c = \pi c^2 = \pi (50)^2 = 7854 \text{ mm}^2$$

$$A_R = ab = 25 \times b = 7854 \rightarrow b = 314/2 \text{ mm}$$

$$A_s = s^2 = 7854 \rightarrow s = 88/6$$

$$\frac{\tau_c}{\tau_s} = \frac{\frac{Tc}{J}}{\frac{T}{\alpha_s s^2}} = \frac{\alpha_s s^2 c}{J} = \frac{0/208 \times (88/6)^2 \times 50}{\frac{\pi}{2} 50^3} = 0/74$$

$$\frac{\tau_R}{\tau_s} = \frac{\frac{T}{\alpha_R b a^3}}{\frac{T}{\alpha_s s^2}} = \frac{\alpha_s s^2}{\alpha_R b a^3} = \frac{0/208 \times (88/6)^2}{\frac{1}{3} \times 314/2 \times 25^3} = 2/21$$



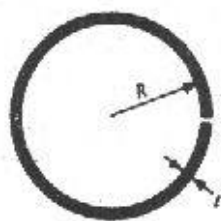
پس بین تنشهای برشی حداکثر نسبت زیر برقرار است:

$$\tau_s : \tau_c : \tau_R = 1 : 0/74 : 2/21$$

$$\frac{\varphi_c}{\varphi_s} = \frac{\frac{TL}{JG}}{\frac{TL}{\beta_s s^2 G}} = \frac{0/141 (88/6)^2}{\frac{\pi}{2} (50)^3} = 0/886$$

$$\frac{\varphi_R}{\varphi_s} = \frac{\beta_s s^2}{\beta_R a^3 b} = \frac{0/141 (88/6)^2}{\frac{1}{3} \times (25)^2 (314/2)} = 5/32$$

$$\varphi_s : \varphi_c : \varphi_R = 1 : 0/886 : 5/32$$



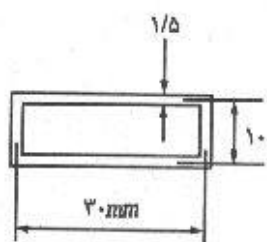
مسئله ۵-۳۲

۵-۳۲. مطلوب است مقایسه مقاومت و سختی پیچشی یک لوله جدار نازک استوانه‌ای از مصالح ارتجاعی خطی در دو حالت یکی وقتی که لوله دارای یک درز طولی می‌باشد و دیگری وقتی که این درز توسط جوش پر شده است.

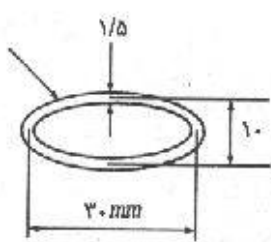
$$\frac{\tau_s}{\tau} = \frac{\frac{T}{\alpha_s b c^2}}{\frac{TR}{J}} = \frac{J}{R \alpha_s b c^2} = \frac{2\pi R^3 t}{R(0.33)(2\pi R)^2} = \frac{3R}{t}$$

$$\frac{T_s}{T} = \frac{\frac{\varphi G \beta b c^2}{L}}{\frac{\varphi G J}{L}} = \frac{\beta b c^2}{J} = \frac{0.33 \times (2\pi R) \times R^2}{2\pi R^3 t} = \frac{t}{3R}$$

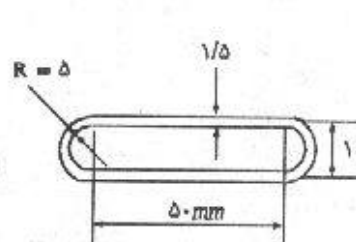
۵-۳۳ تا ۵-۳۵. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی تولید شده در اعضای با مقطع نشان داده شده در اشکال زیر تحت اثر لنگر پیچشی ۵۰ نیوتن متر. از تمرکز تنش صرف نظر کنید.



مسئله ۵-۳۳



مسئله ۵-۳۴

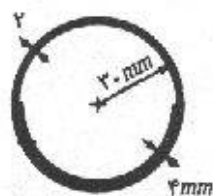


مسئله ۵-۳۵

$$\tau = \frac{T}{\gamma A t} = \frac{50 \times 10^2}{2 \times (30 \times 10) \times 1/5} = 55/55 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{\gamma A t} = \frac{50 \times 10^2}{2 \times (\pi \times 15 \times 5) \times 1/5} = 70/74 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{T}{\gamma A t} = \frac{50 \times 10^2}{2 \times [50 \times 10 + \pi(4/25)^2]} = 30 \text{ MPa}$$



مسئله ۵-۳۶

۵-۳۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی و زاویه پیچش واحد طول در عضوی با مقطع نشان داده شده در شکل زیر تحت اثر لنگر پیچشی ۱۰۰ نیوتن متر. از تمرکز تنش صرف نظر کنید. در مورد مزیت به دست آمده در اثر افزایش ضخامت جداره در قسمتی از مقطع، بحث کنید.

پیچش / ۱۳۱

$$A = \pi (30)^2 = 2827/4 \text{ mm}^2$$

$$q = \frac{T}{\tau A} = \frac{100 \times 10^3}{2 \times 2827/4} = 17/68 \text{ N/mm} \quad \tau_{max} = \frac{q}{t_{min}} = \frac{17/68}{2} = 8/84 \text{ MPa}$$

$$\theta = \frac{T}{\tau A G} \oint \frac{ds}{t} = \frac{100 \times 10^3}{4 \times (2827/4)^2 G} \left(\frac{30\pi}{2} + \frac{30\pi}{4} \right) = \frac{2/21 \times 10^{-6}}{G} \text{ rad/mm}$$

$$\theta = \frac{2/21 \times 10^{-6}}{G} \text{ rad/m}$$

۳۷-۵. اتصال لبه دار (فلانجی) یک محور انتقال دهنده لنگر پیچشی از ۶ پیچ به قطر ۲۵ میلی متر که در محیط دایره ای به قطر ۲۰۰ میلی متر قرار دارند، تشکیل یافته است. اگر این اتصال تحت اثر لنگر پیچشی ۲۰ کیلونیوتن متر قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین تنش پیچشی تولید شده در پیچها.

$$F = \frac{T}{r.n} = \frac{20}{0/1 \times 6} = 33/33 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{33330}{\frac{\pi}{4} (0/25)^2} = 67/91 \text{ MPa}$$

۳۸-۵. اتصال لبه دار (فلانجی) یک محور انتقال دهنده لنگر پیچشی از ۸ پیچ اعلا به قطر ۲۰ میلی متر که در محیط دایره ای به قطر ۲۴۰ میلی متر قرار دارند، تشکیل یافته است. (الف) مطلوب است محاسبه لنگر پیچشی قابل انتقال توسط این اتصال در صورتی که تنش مجاز برشی پیچها ۷۵۰ نیوتن بر میلی متر مربع باشد (ب)، در صورتی که محور و اتصال مزبور با سرعت ۲۵۰ دور در دقیقه دوران داشته باشند، مطلوب است تعیین توان انتقال یافته توسط اتصال بر حسب کیلووات.

$$T = \sum F.r = \sum (\tau A) . r = 8 [750 \times 10^6 \times \pi (0/01)^2] \times 0/12 = 226/2 \text{ kN.m}$$

$$T = \frac{9540.P}{n} \Rightarrow P = \frac{226/2 \times 10^3 \times 250}{9540} = 5927/5 \text{ kW}$$

۳۹-۵. اتصال لبه دار (فلانجی) یک محور انتقال دهنده لنگر پیچشی از ۶ پیچ با سطح مقطع ۱۳۰ میلی متر مربع که در محیط دایره ای به قطر ۲۰۰ میلی متر و ۶ پیچ با مقطع ۳۲۰ میلی متر مربع که در روی دایره ای به قطر ۱۲۰ میلی متر قرار دارند، تشکیل یافته است. اگر تنش برشی مجاز در پیچ ۱۱۰ نیوتن بر میلی متر مربع باشد، ظرفیت لنگر پیچشی مقطع چقدر می باشد.

ابتدا نیروی مجاز هر پیچ را برای هر دو نوع پیچ محاسبه می کنیم:

$$F = A \times \tau_{all}$$

$$F_1 = 130 \times 110 = 14300 \text{ N} \quad F_2 = \frac{60}{100} 320 \times 110 = 21120 \text{ N}$$

$$T = \sum F.r = 6 \times (14300 \times 0/1) + 6 \times (21120 \times 0/06) = 16/18 \text{ kN.m}$$

۴۰-۵. اتصال لبه‌دار (فلانجی) یک محور انتقال دهنده لنگر پیچشی از ۶ پیچ آلومینیومی به قطر ۲۰ میلی‌متر که در محیط دایره‌ای به شعاع ۱۷۵ میلی‌متر و ۶ پیچ فولادی به قطر ۲۰ میلی‌متر که در محیط دایره‌ای به شعاع ۱۲۵ میلی‌متر قرار دارند، تشکیل یافته است. ظرفیت لنگر پیچشی این اتصال چقدر می‌باشد. تنش برشی مجاز برای هر دو مصالح ۴۰ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی برشی آلومینیوم 0.28×10^5 و ضریب ارتجاعی برشی فولاد 0.84×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشند.

گرنش متناسب با فاصله از محور مرکزی می‌باشد $\gamma \propto r$

$$\frac{\tau_{st}}{\tau_{Al}} = \frac{G_{st} \cdot \gamma_{st}}{G_{Al} \cdot \gamma_{Al}} = \frac{0.84 \times 10^5 \times 125}{0.28 \times 10^5 \times 175} = 2/14$$

$$F_{st} > F_{Al}$$

$$F = \tau A$$

$$F_{st} = 40 \times \pi (10)^2 = 12567 \text{ kN}$$

$$F_{Al} = \frac{1}{2/14} \times 40 \times \pi (10)^2 = 5870 \text{ kN}$$

$$T = \sum F r = 6 \times (12567 \times 0.125 + 5870 \times 0.175) = 1559 \text{ kN/m}$$

مسائل فصل ششم

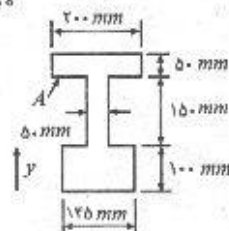
۱-۶ تا ۵-۶. مطلوب است تعیین لنگر ماند (ممان اینرسی) لیمبرخهای نشان داده شده در شکل نسبت به محور افقی مار بر مرکز هندسی سطح (محور مرکزی افقی). برای تعیین مشخصات هندسی لیمبرخهای نورد شده از جداول ضمیمه استفاده نمایید.

$$\sum Ay = 50 \times 200 \times 275 + 50 \times 150 \times 175 + 145 \times 100 \times 50$$

$$\sum Ay = 2787500 \text{ mm}^2$$

$$\sum A = 50 \times 200 + 50 \times 150 + 145 \times 100 = 32000 \text{ mm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = 150 \text{ mm}$$



شکل ۱-۶

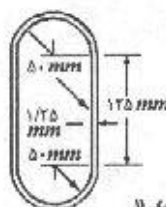
$$I = \sum (I_o + A d^2) \quad , \quad I_o = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_1 = \frac{1}{12} \times 0.2 \times (0.05)^3 + (0.01) (0.125)^2 = 1/583 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

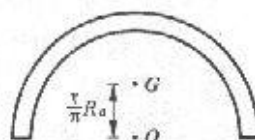
$$I_2 = \frac{1}{12} (0.05) (0.15)^3 + (7/5 \times 10^{-7}) (0.025)^2 = 1/88 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$I_3 = \frac{1}{12} (0.145) (0.1)^3 + (0.0145) (0.1)^2 = 1/571 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$I = \sum I_i = 3/34 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$



شکل ۲-۶



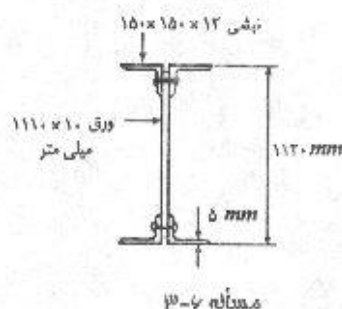
$$I_O = \frac{1}{12} \pi R_a^3 t \quad I_O = I_G + A d^2 \Rightarrow I_G = I_O - A d^2$$

$$I_G = \frac{\pi}{12} R_a^3 t - (\pi R_a t) \left(\frac{1}{\pi} R_a \right)^2 = 0.095 \pi R_a^3 t$$

$$R_a = \frac{50 + 51/25}{2} = 50.625 \text{ mm}$$

$$I = 2 \times \left[\frac{1}{12} (1/25) (125)^2 \right] + 2 \left[(0.095) \pi (50.625)^3 (1/25) \right]$$

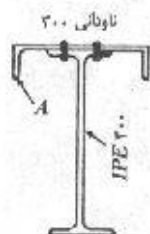
$$+ 2 \left[\underbrace{\pi (50.625) (1/25)}_A \right] \left[\underbrace{\frac{125}{2} + \frac{2(50.625)}{\pi}}_d \right]^2 = 4/0.7 \times 10^7 \text{ mm}^4$$



از جدول ۱۰ ضمیمه مقدار ممان اینرسی نیمرخ نبشی $150 \times 150 \times 12$ برابر با 737 cm^4 و سطح مقطع آن $34/8 \text{ cm}^2$ بدست می‌آید. بنابراین ممان اینرسی کل به طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$e = 4/12 \text{ cm} \quad d = \frac{1120}{2} - 41/2 = 518/8$$

$$I = \frac{1}{12} \times 10 \times (1110)^3 + 3 \times (737 \times 10^2) + 4(3480) (518/8)^2 = 4/916 \times 10^9 \text{ mm}^4$$



مشخصات مربوط به $IPE 400$ و ناودانی ۳۰۰ به ترتیب از جداول ۴ و ۸ ضمیمه استخراج می‌شود.

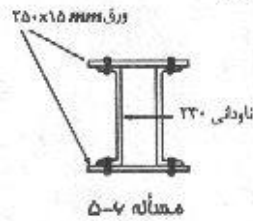
$$e = 2/7 \text{ cm} = 27 \text{ mm} \quad \text{ناودانی ۳۰۰}$$

نیمرخ	$A \text{ (mm}^2\text{)}$	$y \text{ (mm)}$	$Ay \text{ (mm}^3\text{)}$
$IPE 400$	$84/5 \times 100$	۰	۰
ناودانی ۳۰۰	$58/8 \times 100$	$200 + 10 - 27 = 183$	$10/76 \times 10^6$
Σ	۱۴۳۳۰	—	$10/76 \times 10^6$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{10/76 \times 10^6}{14330} = 70/1 \text{ mm}$$

نیمرخ	$A \text{ (mm}^2\text{)}$	$d \text{ (mm)}$	$A d^2 \text{ (mm}^4\text{)}$	$I_x \text{ (mm}^4\text{)}$
$IPE 400$	$84/5 \times 100$	۷۵/۱	$47/66 \times 10^6$	23130×10^4
ناودانی ۳۰۰	$58/8 \times 100$	۱۰۷/۹	$68/46 \times 10^6$	495×10^4
Σ	—	—	$116/12 \times 10^6$	$236/25 \times 10^6$

$$I = \Sigma (I_x + A d^2) = 358/37 \times 10^9 \text{ mm}^4$$



مشخصات ناودانی ۲۴۰ (از جدول ۸ ضمیمه):

$$A = 42/3 \text{ cm}^2 \quad I = 3600 \text{ cm}^4 \quad \text{ارتفاع} = 240 \text{ mm}$$

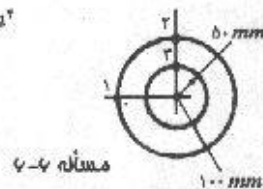
$$I = 2(3600 \times 10^2) + 2\left[\frac{1}{12} \times 250(15)^3 + (250 \times 15) \times \left(\frac{240}{2} + 7/5\right)^2\right]$$

$$= 1/94 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

۶-۶ تا ۱۰-۶. بر مقاطع و یبرخهای نشان داده شده در شکل، لنگر خمشی مثبتی معادل ۵۴۰۰۰ نیوتن متر در حول محور خنثی اثر می‌کند. مطلوب است تعیین تنشهای خمشی در نقاط نشان داده شده که توسط یک نقطه پررنگ مشخص شده‌اند.

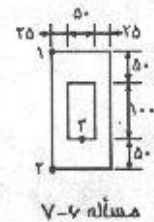
$$I = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{4} (100^4 - 50^4) = 73/63 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_1 = -\frac{My_1}{I} = 0$$



$$\sigma_2 = -\frac{My_2}{I} = -\frac{54 \times 10^6 (\text{N.mm}) \times 100 (\text{mm})}{73/63 \times 10^9 (\text{mm}^4)} = -73/34 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_r = -\frac{My_r}{I} = \frac{1}{r} \sigma_2 = -36/67 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$



$$I = \frac{1}{12} BH^3 - \frac{1}{12} bh^3$$

$$= \frac{1}{12} (100)(200)^3 - \frac{1}{12} (50)(100)^3 = 62/5 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\tau_1 = \frac{My_1}{I} = -\frac{54 \times 10^6 \times 100}{62/5 \times 10^9} = -86/4 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری}) \quad (\text{ابعاد بر حسب میلی متر})$$

$$\sigma_1 = -\frac{My_1}{I} = +86/4 \text{ MPa} \quad (\text{کششی})$$

$$\sigma_r = -\frac{My_r}{I} = \frac{1}{r} \sigma_1 = 43/2 \text{ MPa} \quad (\text{کششی})$$

خمش خالص / ۱۴۳

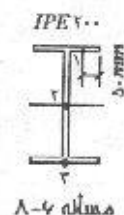
$$I = 1940 \text{ cm}^4$$

از جدول ۴ ضمیمه:

$$\sigma_1 = - \frac{54 \times 10^3 \times (100 - 8/5)}{1940 \times 10^4} = - 254/7 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

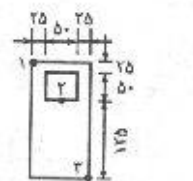
$$\sigma_y = 0 \quad (y_r = 0)$$

$$\sigma_x = - \frac{My_r}{I} = - \frac{54 \times 10^3 \times (-100)}{1940 \times 10^4} = + 278/3 \text{ MPa} \quad (\text{کششی})$$



مسئله ۸-۶

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(200 \times 100) \times 0 - (50 \times 50) \times 50}{200 \times 100 - 50 \times 50} = - 7/14 \text{ mm}$$



مسئله ۹-۶

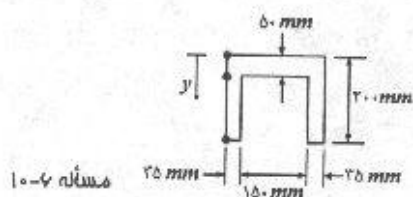
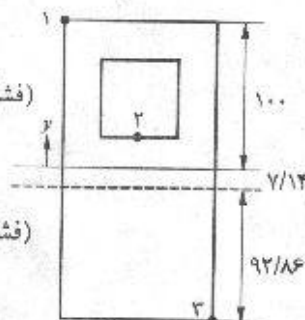
$$I = \frac{1}{12} (100)(200)^3 + (100 \times 200) (7/14)^2 - \frac{1}{12} (50 \times 50)^3 - (50 \times 50) (57/14)^2$$

$$= 59 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_1 = - \frac{My_1}{I} = - \frac{54 \times 10^3 \times 107/14}{59 \times 10^6} = - 98 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_y = - \frac{My_1}{I} = - \frac{54 \times 10^3 \times 32/14}{59 \times 10^6} = - 29/4 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_x = - \frac{My_r}{I} = - \frac{54 \times 10^3 \times (-92/86)}{59 \times 10^6} = + 85 \text{ MPa} \quad (\text{کششی})$$



مسئله ۱۰-۶

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{2 \times 35 \times 200 \times 100 + 150 \times 50 \times 25}{2 \times 35 \times 200 + 150 \times 50} = 73/8 \text{ mm}$$

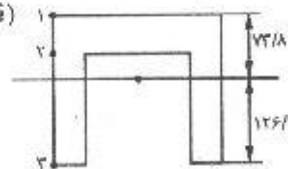
$$I = \frac{1}{12} (150)(50)^3 + (150 \times 50) (38/8)^2 + 2 \times \frac{1}{12} (35)(200)^3$$

$$+ 2 \times (35 \times 200)(26/2)^2 = 75/7 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_1 = -\frac{My_1}{I} = -\frac{54 \times 10^6 (73/8)}{75/7 \times 10^6} = -52/6 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_2 = -\frac{My_2}{I} = -\frac{54 \times 10^6 (23/8)}{75/7 \times 10^6} = -17 \text{ MPa} \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_3 = -\frac{My_3}{I} = -\frac{54 \times 10^6 (-126/2)}{75/7 \times 10^6} = +90 \text{ MPa} \quad (\text{کششی})$$



۱۱-۶. مطلوب است تعیین اساس مقطع نیمرخهای $INP260$ و $IPB300$ و ناودانی 200 براساس ابعاد آنها.

با استفاده از جداول ۳، ۶، ۸ ضمیمه مشخصات لازم استخراج می‌گردند.

$$INP260: I_{xx} = 5740 \text{ cm}^4, \quad I_{yy} = 288 \text{ cm}^4, \quad h = 260 \text{ mm}, \quad b = 113 \text{ mm}$$

$$S_{xx} = \frac{I_{xx}}{c_1} = \frac{5740}{\frac{26}{2}} = 441/5 \text{ cm}^3, \quad S_{yy} = \frac{I_{yy}}{C_1} = \frac{288}{\frac{11/3}{2}} = 50/9 \text{ cm}^3$$

$$IPB300: I_{xx} = 25170 \text{ cm}^4, \quad I_{yy} = 8560 \text{ cm}^4, \quad h = 300 \text{ mm}, \quad b = 300 \text{ mm}$$

$$S_{xx} = \frac{25170}{\frac{300}{2}} = 1678 \text{ cm}^3, \quad S_{yy} = \frac{8560}{\frac{300}{2}} = 570/7 \text{ cm}^3$$

$$200 \text{ ناودانی}: I_{xx} = 1910 \text{ cm}^4, \quad I_{yy} = 148 \text{ cm}^4, \quad h = 200 \text{ mm}, \quad b = 75 \text{ mm}$$

$$S_{xx} = \frac{1910}{\frac{70}{2}} = 191 \text{ cm}^3, \quad S_{yy} = \frac{I_{yy}}{b - e_y} = \frac{148}{7/5 - 2/0.1} = 27 \text{ cm}^3$$

۱۲-۶. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز یک تیر چوبی با مقطع مربع مستطیل 50×100 میلی‌متر در دو حالت زیر:

الف: وقتی که خمش در حول محور خنثای موازی با ضلع 50 میلی متر اتفاق می‌افتد.

ب: وقتی که خمش در حول محور خنثای موازی با ضلع 100 میلی متر اتفاق می‌افتد.

تنش مجاز چوب مساوی $8/4$ نیوتن بر میلی متر مربع (مگاپاسکال) می‌باشد.

(الف)

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} (50)(100)^3 = 4/17 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 4/17 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(8/4 \times 10^6) (4/17 \times 10^{-6})}{50 \times 10^{-3}} = 70.1 \text{ N.m}$$

خمش خالص / ۱۴۵

$$I = \frac{1}{12} (100)(50)^3 = 1/04 \times 10^9 \text{ mm}^4 = 1/04 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (\text{ب})$$

$$M = \frac{(8/4 \times 10^6)(1/04 \times 10^{-6})}{25 \times 10^{-3}} = 349 \text{ N.m}$$

۱۳-۶. مطلوب است طراحی یک تیر از نیم رخ IPB که تحت لنگر خمشی ۳۰ کیلونیوتن متر قرار دارد، در دو حالت زیر:

الف: وقتی که خمش در حول محور $x-x$ اتفاق بیفتد.

ب: وقتی که خمش در حول محور $y-y$ اتفاق بیفتد.

تنش خمشی مجاز را مساوی ۱۵۰ نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

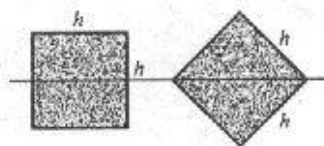
$$S = \frac{M}{\sigma} = \frac{30 \times 10^6}{150} = 2 \times 10^5 \text{ mm}^3 = 200 \text{ cm}^3$$

الف) با توجه به ستون مربوط به جدول ۶ ضمیمه IPB ۱۴۰ مناسب می باشد.

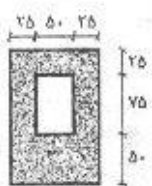
ب) با توجه به ستون مربوط به جدول ۶ ضمیمه IPB ۲۰۰ را می توان انتخاب نمود گرچه برای داشتن ضریب اطمینان می توان از IPB ۲۲۰ استفاده نمود.

۱۴-۶. یک مقطع مربع در دو حالت نشان داده شده در حول محور $x-x$ تحت خمش قرار می گیرد. مطلوب است تعیین نسبت لنگر خمشی مجاز دو حالت در صورتی که تنش خمشی مجاز برای هر دو مقطع یکسان باشد.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{M_1 c_1}{I} \rightarrow M_1 = \frac{\sigma I}{c_1} = \frac{\sigma I}{\frac{h}{2}} \\ \sigma &= \frac{M_2 c_2}{I} \rightarrow M_2 = \frac{\sigma I}{c_2} = \frac{\sigma I}{\frac{\sqrt{2}}{2} h} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \sqrt{2}$$



مسئله ۴-۱۴



مسئله ۶-۱۵

۱۵-۶. یک قطعه از ماشین چدنی، که دارای مقطعی مطابق شکل می باشد، به صورت تیری که تحت لنگر خمشی مثبت است، عمل می نماید. اگر تنش خمشی فشاری مجاز ۸۰ مگاپاسکال و تنش خمشی کششی مجاز ۲۰ مگاپاسکال باشد، مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجازی که می تواند بر تیر وارد شود. (ابعاد بر حسب میلی متر)

$$\bar{y} = \frac{(100 \times 150)(75) - (50 \times 50)(87/5)}{100 \times 150 - 50 \times 50} = 70/83 \text{ mm} \quad \text{بالای محور مرکزی}$$

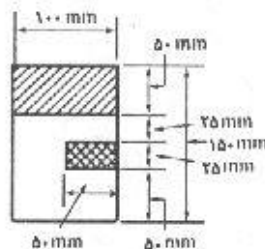
$$I = \frac{1}{12} (100)(150)^3 + (100 \times 150)(75 - 70/83)^2 - \frac{1}{12} (50)(50)^3 - (50 \times 50)(87/5 - 70/83)^2 = 25/59 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$M = \frac{\sigma I}{c}$$

$$M_T = \frac{70 \times 25/59 \times 10^9}{70/83} = 7225/7 N.m$$

$$M_C = \frac{80 \times 25/59 \times 10^9}{79/17} = 25858/3 N.m$$

پس لنگر خمشی مجاز $7225/7 N.m$ می باشد.



مسئله ۱۶-۶

۱۶-۶. یک تیر که دارای مقطع مربع مستطیل تویری مطابق با ابعاد نشان داده شده در شکل می باشد، تحت لنگر خمشی مثبت 16000 نیوتن متر در حول محور افقی قرار دارد. (الف) مطلوب است تعیین برآیند نیروهای فشاری وارد بر مقطع سایه زده شده که در اثر لنگر خمشی تولید می شود. (ب) مطلوب است تعیین برآیند نیروهای کششی وارد بر سطح چهارخانه.

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (100)(150)^3 = 28/125 \times 10^6 mm^4$$

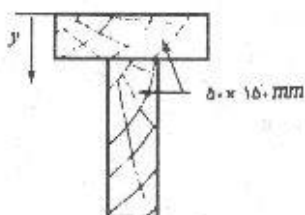
$$\sigma_{ave} = \frac{M y_{ave}}{I} = \frac{16 \times 10^3 \times 50}{28/125 \times 10^6} = 28/4 MPa$$

$$C = \sigma_{ave} \times A = 28/4 \times (50 \times 100) = 142/2 kN$$

$$\sigma_{ave} = \frac{16 \times 10^3 \times 12/5}{28/125 \times 10^6} = 7/111 MPa$$

$$T = \sigma_{ave} \times A = 7/11 \times (25 \times 50) = 8/9 kN$$

۱۷-۶. دو الوار چوبی به مقطع مستطیل 50×150 میلی متر، همانند شکل طوری به یکدیگر چسب شده اند، که تشکیل یک مقطع T بدهند. اگر به چنین مقطعی یک لنگر خمشی معادل 3100



مسئله ۱۷-۶

نیوتن متر در حول محور افقی تأثیر کند، مطلوب است تعیین، (الف) تنشهای موجود در تارهای خارجی (لنگر ماند مقطع مساوی $53/1 \times 10^6$ میلی متر به توان چهار می باشد). (ب) برآیند نیروهای فشاری ناشی از تنشهای فشاری خمشی در ناحیه بالای محور خنثی (پ) برآیند نیروهای کششی ناشی از تنشهای کششی خمشی در ناحیه پایین محور خنثی و مقایسه آن با جواب حالت (ب)

$$\bar{y} = \frac{\sum A y}{\sum A} = \frac{(150 \times 50)(25) + (50 \times 150)(125)}{2 \times 150 \times 50} = 75 mm$$

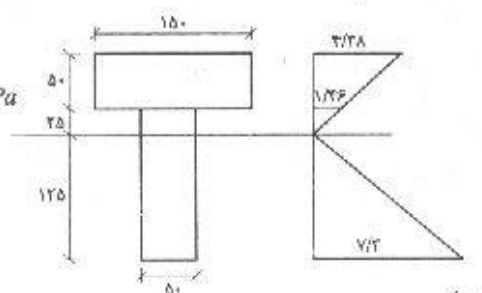
خمش خالص / ۱۳۷

$$\sigma_C = \frac{Mc_C}{I} = \frac{3100 \times 10^3 \times 75}{53/1 \times 10^9} = 4/38 \text{ MPa}$$

(الف)

$$\sigma_T = \frac{Mc_T}{I} = \frac{3100 \times 10^3 \times 125}{53/1 \times 10^9} = 7/3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{75}{75} \times 4/38 = 1/46 \text{ MPa}$$



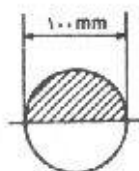
(ب)

$$C = \sum \sigma_C \cdot A = \frac{1}{2} (4/38 + 1/46) (50 \times 150) + \frac{1}{2} (1/46) (25 \times 50) = 22/8 \text{ kN}$$

(پ)

$$T = \frac{1}{2} (7/3) (50 \times 125) = 22/8 \text{ kN}$$

همانگونه که مشاهده می‌کنید برآیند نیروی فشاری با برآیند نیروی کششی در مقطع برابر است.



مسئله ۱۸-۶

۱۸-۶. اگر تیری با مقطع دایره (مطابق شکل)، تحت تأثیر لنگر خمشی منفی ۳۵۰۰ نیوتن متر در حول محور افقی قرار گیرد، مطلوب است تعیین مقدار و برآیند نیروهای به وجود آمده در ناحیه سایه خورده با استفاده از انتگرال‌گیری.

$$dT = \frac{\sigma}{r} dA$$

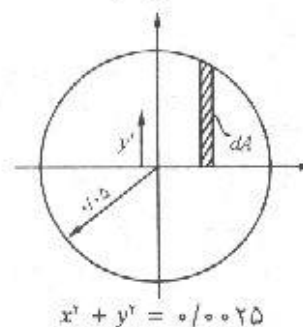
$$T = \int \frac{\sigma}{r} dA = 2 \int_{-r}^{+r} \frac{My}{rI} y dx = \frac{M}{I} \int_{-r}^{+r} (0/0025 - x^2) dx$$

$$= \frac{M}{I} \left(0/0025x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^{+r} = \frac{3500}{\frac{\pi(0/05)^3}{4}} \left[0/0025(0/05) - \frac{0/05^3}{3} \right]$$

$$\Rightarrow T = 59/4 \text{ kN}$$

$$M = T \times ry' \Rightarrow y' = \frac{M}{rT}$$

$$= \frac{3500}{2 \times 59400} = 0/029 \text{ m} = 29 \text{ mm}$$

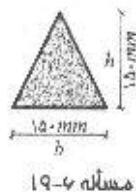
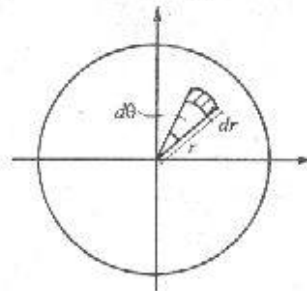


روش قطبی:

$$dT = \sigma dA = \frac{My}{I} r dr d\theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$T = \frac{M}{I} \int r \sin \theta \, r dr d\theta = \frac{M}{I} \int_0^{2\pi} \int_0^{R \sin \theta} r^2 \sin \theta dr d\theta$$

$$\Rightarrow T = 59418 \text{ N}$$



۱۹-۶. اگر تیری با مقطع مثلث (مطابق شکل)، تحت تأثیر لنگر خمشی منفی ۴۰۰۰ نیوتن متر در حول محور افقی قرار گیرد، (الف) به وسیله انتگرال گیری نشان دهید که $I_x = bh^3/36$ می باشد. (ب) مقدار و محل برآیند نیروهای فشاری و کششی ناشی از تنشهای فشاری و کششی خمشی را تعیین نماید.

$$I_{xx} = \int y^2 dA \quad x' = \frac{h-y}{h} b$$

$$dA = x' dy = b \left(\frac{h-y}{h} \right) dy = b \left(1 - \frac{y}{h} \right) dy$$

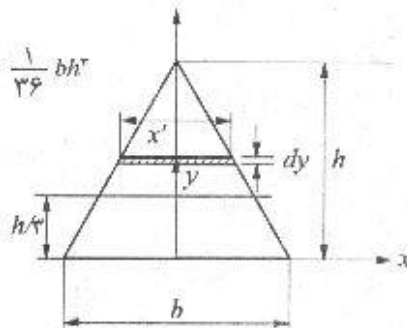
$$I_{xx} = b \int_0^h y^2 \left(1 - \frac{y}{h} \right) dy = b \left(\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4h} y^4 \right) \Big|_0^h = b \left(\frac{1}{3} h^3 - \frac{1}{4} h^3 \right) = \frac{1}{12} bh^3$$

$$I_{xx} = I_x + A d^2 \quad \Rightarrow \quad I_x = I_{xx} - A d^2$$

$$= \frac{1}{12} bh^3 - \left(\frac{1}{3} bh \right) \left(\frac{h}{3} \right)^2 = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{1}{18} bh^3 = \frac{1}{36} bh^3$$

$$T = \int \sigma dA \quad dA = x' dy$$

$$\frac{x'}{\frac{1}{3} b} = \frac{\frac{1}{3} h - y}{\frac{1}{3} h} \Rightarrow x' = b \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) dy$$

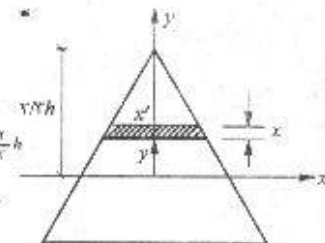


$$T = \int \left(\frac{My}{I} \right) \cdot b \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) dy$$

$$= \frac{36M}{h^3} \int_0^{\frac{1}{3}h} y \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) dy = \frac{36M}{h^3} \left(\frac{1}{3} y^2 - \frac{1}{4h} y^3 \right) \Big|_0^{\frac{1}{3}h}$$

$$= \frac{16M}{9h} = \frac{16(4000)}{9 \times 0.15} = 44444 \text{ N}$$

$$y_T = \frac{\int \sigma y dA}{\int \sigma dA}$$



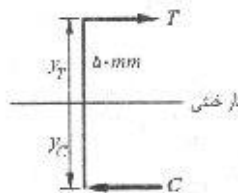
$$\int \sigma y dA = \frac{Mb}{I} \int_{-\frac{1}{3}h}^{\frac{1}{3}h} y^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right) dy = \frac{36M}{h^2} \left(\frac{2}{9} y^3 - \frac{1}{4} \frac{y^4}{h} \right) \bigg|_{-\frac{1}{3}h}^{\frac{1}{3}h} = \frac{16}{27} M = 2370/37$$

محل اثر برآیند نیروی کششی 50 mm بالای تار خنثی می‌باشد. $y_T = \frac{2370/37}{47400} = 0/05 \text{ m}$
به‌خاطر وجود تعادل مقدار نیروی فشاری با نیروی کششی مساویست.

$$C = T = 47400 \text{ N}$$

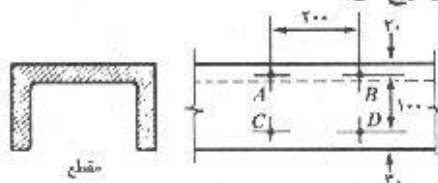
$$M = T(y_T + y_C) \Rightarrow y_T + y_C = \frac{M}{T} \Rightarrow y_C = \frac{M}{T} - y_T$$

$$y_C = \frac{4000}{47400} - 0/05 = 0/0344$$



پس محل اثر برآیند نیروی فشاری $34/4 \text{ mm}$ زیر تار خنثی می‌باشد.

۶-۲. یک تیر چدنی با مقطع ناودانی شکل (مطابق شکل)، به عنوان یک تیر افقی یک ماشین عمل می‌کند. وقتی که نیروهای قائم بر این عضو وارد می‌شوند، طول AB به اندازه $0/02$ میلی‌متر افزایش و طول CD به اندازه $0/18$ میلی‌متر کاهش پیدا می‌کند. مطلوب است تعیین، (الف) جهت لنگر وارده، (ب) تنشهای قائم به وجود آمده در تارهای خارجی. ضریب ارتجاعی مساوی 1×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.



(ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مسئله ۶-۲

چون در قسمت بالا کشش و قسمت پایین فشار ایجاد شده ممان اعمال شده منفی می‌باشد.

$$\epsilon_{AB} = + \frac{0/02}{200} = 1 \times 10^{-4} \quad \epsilon_{CD} = - \frac{0/18}{200} = -9 \times 10^{-4}$$

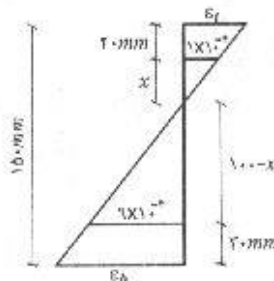
$$\frac{1 \times 10^{-4}}{9 \times 10^{-4}} = \frac{x}{100 - x} \Rightarrow x = 10 \text{ mm}$$

$$\frac{\epsilon_t}{30} = \frac{1 \times 10^{-4}}{10} \Rightarrow \epsilon_t = 3 \times 10^{-4}$$

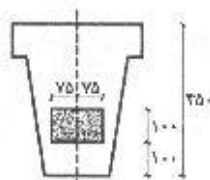
$$\sigma_t = E \epsilon_t = 1 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-4} = 30 \text{ MPa}$$

$$\frac{\epsilon_b}{120} = \frac{9 \times 10^{-4}}{90} \Rightarrow \epsilon_b = 1/2 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_b = E \epsilon_b = 1 \times 10^5 \times 1/2 \times 10^{-4} = 120 \text{ MPa}$$



۲۱-۶. یک تیر فولادی توپر که مقطع آن مطابق شکل می باشد، در آزمایشگاه تحت تأثیر لنگر خمشی خالص قرار داده می شود. خمش در حول یک محور افقی اتفاق می افتد. وسایل اندازه گیری کرنش نشان می دهند که تارهای انتهایی فوقانی به اندازه $0/0003$ میلی متر بر میلی متر کاهش



مسئله ۷-۲۱

و تارهای انتهایی تحتانی به اندازه $0/0006$ میلی متر بر میلی متر افزایش طول پیدا می کنند. مطلوب است تعیین برآیند نیروهای وارد بر سطح سایه خورده در لحظه ای که کرنشها اندازه گیری شده اند. تمام ابعاد شکل بر حسب میلی متر می باشند و ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.

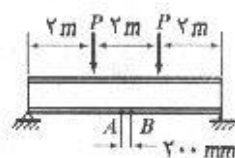
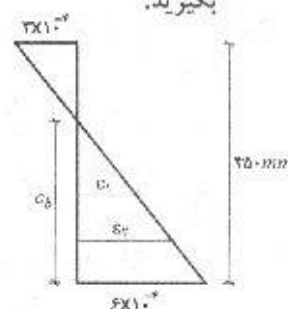
$$C_b = \frac{6}{9} \times 250 = 166.67 \text{ mm}$$

$$\sigma_t = E\varepsilon_t = (2 \times 10^5) \left(\frac{100}{166.67} \times 6 \times 10^{-4} \right) = 72 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_r = E\varepsilon_r = (2 \times 10^5) \left(\frac{90}{166.67} \times 6 \times 10^{-4} \right) = 64.8 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{ave} = \frac{72 + 64.8}{2} = 68.4 \text{ N/mm}^2$$

$$P = \sigma_{ave} \cdot A = 68.4 \times (100 \times 250) = 17100 \text{ N}$$



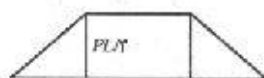
مسئله ۷-۲۲

۲۲-۶. وقتی دو بار متمرکز مطابق شکل به یک تیر با نیمرخ فولادی IPE۴۵۰ وارد می شوند، فاصله سنجی که بین دو نقطه A و B نصب شده است، افزایش طولی به میزان $0/12$ میلی متر نشان می دهد. مقدار نیروی وارده چقدر است. ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S}$$

S مدول مقطع می باشد و از مشخصات نیمرخ بوده و در جداول موجود است. برای نیمرخ IPE۴۵۰ با

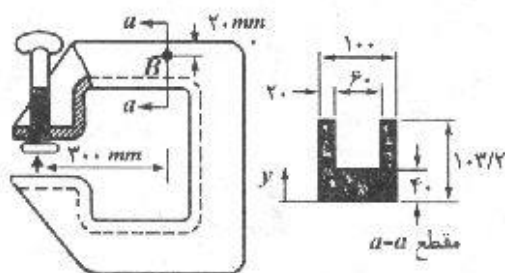
$$S = 1500 \text{ cm}^3 \quad \text{استفاده از جدول ۴ ضمیمه:}$$



$$M = \sigma S \rightarrow P \cdot \frac{L}{3} = E\varepsilon S \Rightarrow P \times 2000 = 2 \times 10^5 \times \frac{0/12}{200} \times 1500 \times 10^3$$

$$\Rightarrow P = 90 \text{ kN}$$

۲۳-۶. در گیره نشان داده شده، در اثر سفت کردن پیچ، کرنشی معادل 900×10^{-6} میلی متر بر میلی متر در نقطه B اندازه گیری شده است. به ازای این کرنش چه نیرویی در پیچ موجود است. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.



مسئله ۷-۷۳

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{(40 \times 100)(20) + 2(63/2 \times 20)(71/6)}{40 \times 100 + 2 \times 63/2 \times 20} \approx 40 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12}(100)(40)^3 + (100 \times 40)(20)^2 + 2\left[\frac{1}{12}(20)(63/2)^3 + (20 \times 63/2)(31/6)^2\right]$$

$$I = 5/5 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \times 10^5 \times 900 \times 10^{-6} = 180 \text{ MPa}$$

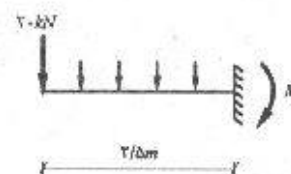
$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{P \cdot Ly}{I} \Rightarrow P = \frac{\sigma I}{Ly} = \frac{180 \times 5/5 \times 10^8}{300 \times (63/2 - 20)} = 76/39 \text{ kN}$$

۶-۲۴. در مثال ۶-۴، جهت نیروی متمرکز را عکس کنید و حداکثر تنشهای خمشی را در انتهای گیردار تیر به ازای $L = 2/5$ متر بدست آورید.

$$M = -20(2/5) - (0/75 \times 2/5)(1/25) = 52/3 \text{ kN.m}$$

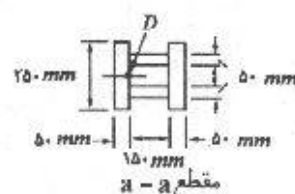
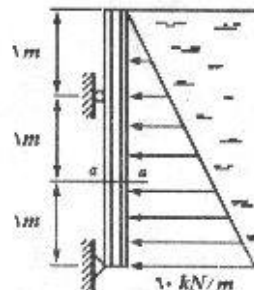
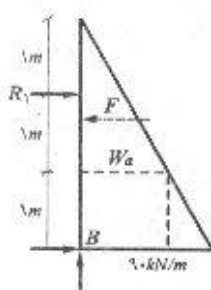
$$I_x = 16 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{52300 \times 0/2}{16 \times 10^{-8}} = 6537/5 \text{ N/m}^2$$



۶-۲۵. یکی از تیرهای تیپ یک سد کوچک، تحت تأثیر فشار ایستایی مایعات، مطابق شکل قرار دارد.

مطلوب است تعیین تنش ناشی از خمش در نقطه D از مقطع a-a



مسئله ۷-۷۵

$$\sum M_B = 0 : R_1 \times 2 = \frac{1}{4} (90)(3)(1) \rightarrow R_1 = 67.5 \text{ kN}$$

$$W_a = \frac{2}{3} (90) = 60 \text{ kN/m}$$

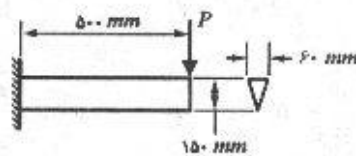
$$F = \frac{1}{4} \times 60 \times 2 = 60 \text{ kN}$$

$$M_{aa} = 67.5 \times 1 - \left(\frac{1}{4} \times 60 \times 2\right) \times \frac{2}{3} = 27.5 \text{ kN.m}$$

$$I = \frac{1}{12} (0.25)(0.25)^3 - \frac{1}{12} (0.15)(0.15)^3 = 2.83 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\sigma_D = \frac{My}{I} = \frac{27.5 \times 0.075}{2.83 \times 10^{-7}} = 7288 \text{ kN/m}^2$$

۲۶-۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش خمشی در مقطعی به فاصله ۲۵۰ میلی‌متر از تکیه‌گاه یک تیر طره‌ای که مطابق شکل بارگذاری شده است. نتایج را در روی یک جزء کوچک در امتداد تیر نشان دهید. وزن تیر تقریباً ۳۵۰ نیوتن بر متر و P مساوی ۴۵۰ نیوتن می‌باشد.

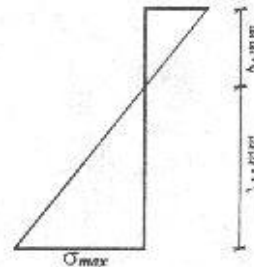


معماری ۶-۷۷

$$M = - (450)(0.25) - (350)(0.125)(0.25) = - 123 \text{ N.m}$$

$$I = \frac{1}{36} (0.6)(0.15)^3 = 5.63 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

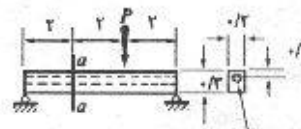
$$\sigma_{max} = \frac{123(0.1)(10^{-9})}{5.63 \times 10^{-7}} = 2.18 \text{ MN/m}^2 \text{ (MPa)}$$



۲۷-۶. در مقطع $a-a$ از تیر نشان داده شده در شکل، مطلوب است تعیین، (الف) حداکثر تنش قائم. (ب) تنش قائم در وسط ارتفاع. وزن تیر ۳ کیلو نیوتن بر متر و P مساوی ۱۰ کیلو نیوتن می‌باشد. محل محور خنثی را نسبت به محور مرکزی بدست می‌آوریم:

$$\bar{y} = \frac{0 - \frac{\pi}{4} (0.15)^2 (0.05)}{0.2 \times 0.3 - \frac{\pi}{4} (0.15)^2} = - 0.021 \text{ m}$$

$$I = \frac{1}{12} (0.2)(0.3)^3 + (0.2 \times 0.3)(0.021)^2$$



سوراخی به قطر ۰/۱۵ متر

معماری ۶-۷۷

خمش خالص / ۱۵۳

$$-\frac{\pi}{4} \left(\frac{0.15}{2} \right)^2 - \frac{\pi}{4} (0.15)^2 (0.071)^2 = 3.63 \times 10^{-2} m^2$$

$$\sum M_B = 0 \quad \therefore R_A \times 6 - P \times 2 - (3 \times 6) \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 12/3 kN$$

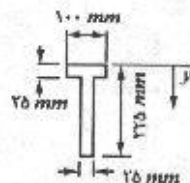
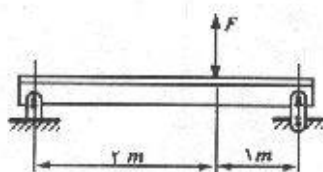
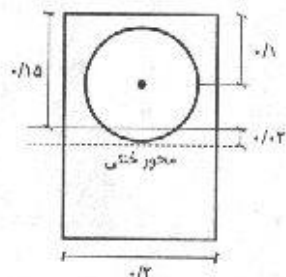
$$M_{aa} = 12/3 \times 2 - (3 \times 2) \times 1 = 18/6 kN.m$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{aa} c}{I} = \frac{18/6 \times (0.15 + 0.071)}{3.63 \times 10^{-2}} = 8762 kN/m^2$$

$$= 8.762 MPa$$

$$\sigma_m = \frac{18/6 \times 0.071}{3.63 \times 10^{-2}} = 1.076 kN/m^2$$

۶-۲۸. مطابق شکل، یک تیر با مقطع سپری از مصالحی ساخته شده است که حد تناسب کششی آن ۲۰ نیوتن بر میلی مترمربع و حد تناسب فشاری آن مساوی ۴۰ نیوتن بر میلی مترمربع می باشد. با ضریب اطمینان ۱/۵ در مقابل جاری شدن، مطلوب است تعیین حداکثر نیروی متمرکز F (جهت F می تواند هم به سمت بالا و هم به سمت پایین باشد) که می تواند بر تیر وارد شود. مسأله را فقط بر مبنای حداکثر تنشهای خمشی ناشی از F حل نمایید.



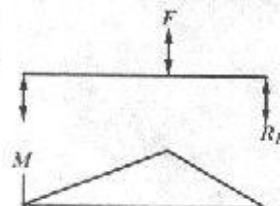
مسئله ۶-۲۸

$$\bar{y} = \frac{(100 \times 25)(12.5) + (200 \times 25)(12.5)}{100 \times 25 + 200 \times 25} = 87.5 mm \quad \text{از بالا}$$

$$I = \frac{1}{12} (100)(25)^3 + (100 \times 25)(75)^2 + \frac{1}{12} (25)(200)^3 + (25 \times 200)(37.5)^2$$

$$= 37/9 \times 10^6 mm^4$$

$$R_B = \frac{1}{3} F \quad M_{max} = \frac{1}{3} F \times 1 = \frac{1}{3} F kN.m$$



مسأله را برای دو حالت حل می کنیم:

۱- وقتی جهت F رو به بالاست:

$$\sigma_t = \frac{Mc}{I} = \frac{\left(\frac{1}{3} F \times 10^3 \right) (87.5)}{37/9 \times 10^6} = \frac{20}{1/5} \Rightarrow F = 8.66 kN$$

$$\sigma_c = \frac{\left(\frac{2}{3} F \times 10^2\right)(137/5)}{37/9 \times 10^6} = \frac{40}{1/5} \Rightarrow F = 11 \text{ kN}$$

پس حداکثر نیروی وارده در این حالت $8/66 \text{ kN}$ است.

$$\sigma_t = \frac{\left(\frac{2}{3} F \times 10^2\right)(87/5)}{37/9 \times 10^6} = \frac{40}{1/5} \Rightarrow F = 17/3 \text{ kN}$$

۲- وقتی جهت F رو به پایین است:

$$\sigma_c = \frac{\left(\frac{2}{3} F \times 10^2\right)(137/5)}{37/9 \times 10^6} = \frac{40}{1/5} \Rightarrow F = 5/51 \text{ kN}$$

نتیجتاً در این حالت حداکثر نیروی وارده $5/51 \text{ kN}$ می باشد.

۶-۲۹. اگر به عوض قانون هوک، رابطه تنش-کرنش به صورت $\sigma^n = E\varepsilon$ بیان شود، نشان دهید که حداکثر

تنش خمشی در یک تیر با مقطع مربع مستطیل مساوی: $\sigma_{max} = \left(\frac{Mc}{I}\right) \left[\frac{(2n+1)}{(3n)}\right]$ می باشد.

$$dM = \sigma dA y = (E\varepsilon)^n y b dy \quad M = 2 \int_0^c (E\varepsilon)^n y b dy$$

$$\varepsilon = \frac{y}{c} \varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} \cdot \frac{y}{c}$$

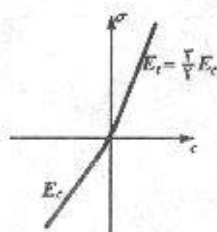
$$M = 2 \int_0^c \left[\frac{E \sigma_{max}}{Ec} y \right]^{\frac{1}{n}} y b dy = 2c^{-\frac{1}{n}} \sigma_{max} b \left(\frac{y^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} \right) \Big|_0^c$$

$$= 2c^{-\frac{1}{n}} \sigma_m b \left(\frac{n}{2n+1} \right) \left(c^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} \right) \Rightarrow M = \sigma_m b 2c^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2n+1} \Rightarrow \sigma_m = \frac{2n+1}{n} \frac{M}{2bc^{\frac{1}{n}}} \quad (1)$$

$$I = \frac{1}{12} b (2c)^3 \Rightarrow 2bc^{\frac{1}{n}} = \frac{3I}{c} \quad (2)$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می شود:

$$\sigma_m = \frac{2n+1}{3n} \cdot \frac{Mc}{I}$$



مسئله ۶-۲۹

۶-۳۰. یک مقطع مربع مستطیل به ابعاد 150×300 میلی متر، تحت

تأثیر لنگر خمشی 240 کیلو نیوتن متر در حول محور قوی اش

می باشد. مصالح تیر غیر ایزوتروپیک می باشد، به نحوی که

ضریب ارتجاعی در کشش، $1/5$ برابر ضریب ارتجاعی در فشار

است (به شکل مراجعه کنید) اگر تنشها از حد تناسب خارج

نشوند، مطلوب است تعیین حداکثر تنشهای کششی و فشاری در

تیر.

خمشی خالص / ۱۵۵

$$n = \frac{E_t}{E_c} = 1/5$$

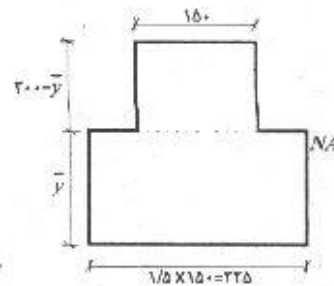
$$\sum M_{NA} = 0 : 225 \bar{y} \left(\frac{\bar{y}}{2} \right) = 150 (300 - \bar{y}) \left(\frac{300 - \bar{y}}{2} \right)$$

$$\rightarrow \bar{y} = 135 \text{ mm}, \quad 300 - \bar{y} = 165 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{3} (150)(165)^3 + \frac{1}{3} (225)(135)^3 = 4/09 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{(240 \times 10^3 \text{ (N.mm)}) (165)}{4/09 \times 10^8} = 96/8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{1/5 (240 \times 10^3) (135)}{4/09 \times 10^8} = 118/8 \text{ MPa}$$

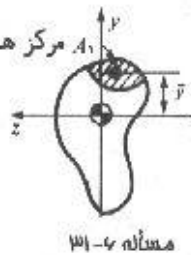


۳۱-۶. یک تیر ارتجاعی را در نظر بگیرید که تحت تأثیر لنگر خمشی M در حول یکی از محورهای اصلی‌اش که لنگر مانند مقطع نسبت به آن مساوی I می‌باشد، قرار دارد. نشان دهید که برای چنین تیری نیروی قائم F که در روی هر سطح دلخواه A_1 اثر می‌کند، برابر است با:

$$F = \frac{MQ}{I}$$

که در آن: $Q = \int_{A_1} y dA = \bar{y} A_1$ می‌باشد.

مطابق شکل لافاصله مرکز هندسی سطح A_1 تا مرکز هندسی سطح مقطع کل می‌باشد.



مسئله ۳۱-۶

$$F = \int_{A_1} \sigma dA = \int_{A_1} \frac{My}{I} dA = \frac{M}{I} \int_{A_1} y dA = \frac{MQ}{I}$$

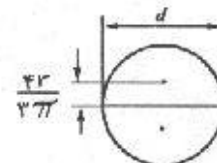
۳۲-۶ تا ۳۶-۶. مطلوب است تعیین نسبت M_{ult}/M_{yp} برای نیمرخهای نشان داده شده در شکل که در حول محور مرکزی افقی‌شان تحت تأثیر لنگر خمشی قرار دارند. از ترسیم تنش- کرنش ایده‌آل مثال ۶-۶ استفاده نمایید.

$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \frac{\sigma_y \frac{\pi r^4}{4}}{r} = \frac{\pi r^3}{4} \sigma_y$$

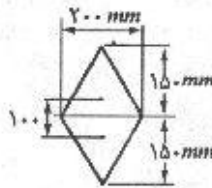
$$M_u = \sigma_y \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) \left(2 \times \frac{4r}{3\pi} \right) = \frac{4r^3}{3\pi} \sigma_y$$

F

$$M_u/M_y = \frac{16}{3\pi} = 1/7$$



مسئله ۳۲-۶



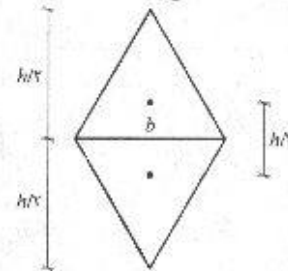
مسئله ۳۳-۶

مسئله را در حالت کلی حل می‌کنیم: با در نظر گرفتن این نکته که ممان اینرسی مثلث نسبت به قاعده برابر است با $I = \frac{1}{12}bh^3$ که در آن h قاعده و h ارتفاع مثلث می‌باشند داریم:

$$M_y = \frac{\sigma I}{c} = \frac{\sigma_y \times 2 \times \frac{1}{12} b \left(\frac{h}{2}\right)^3}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{24} \sigma_y$$

$$M_u = T \times d = (\sigma_y A) \cdot d = \left[\sigma_y \frac{1}{2} (b) \left(\frac{h}{2}\right) \right] \times \frac{h}{2} = \frac{bh^3}{12} \sigma_y$$

$$M_u/M_y = 2$$



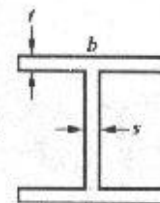
مسئله ۳۴-۶

$$\sigma_y = \frac{M_y c}{I} \Rightarrow M_y = \sigma_y S$$

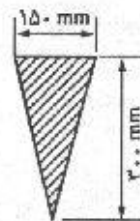
$$S = 194 \text{ cm}^3 = 194 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad \text{از جدول ۲ ضمیمه:}$$

$$M_u = \sigma_y (100 \times 150) \times 191/5 + \sigma_y (91/5 \times 5/6) \times 91/5 = 209659/6 \sigma_y$$

$$\frac{M_u}{M_y} = 1/1$$



$$\begin{aligned} b &= 100 \text{ mm} \\ s &= 5/6 \text{ mm} \\ t &= 15/5 \text{ mm} \end{aligned}$$



مسئله ۳۵-۶

$$M_y = \frac{\sigma_y}{c} I = \frac{\sigma_y}{150/2} \times \frac{1}{36} (150)(150)^3 = 5/63 \times 10^7 \sigma_y$$

$$C = T \Rightarrow \sigma_t A_t = \sigma_c A_c$$

در M_u تنش ثابت و در تمام مقطع اندازه یکسانی دارد. در نتیجه:

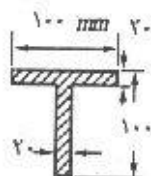
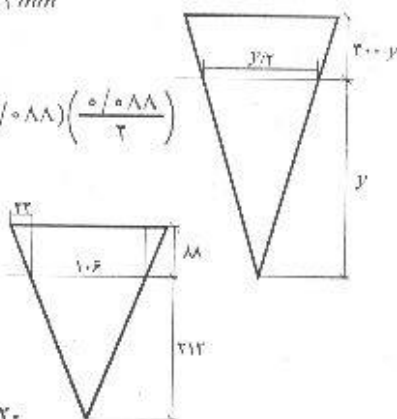
$$A_t = A_c$$

یعنی مساحت بالای محور خمشی و زیر آن باید مساوی باشند:

$$\frac{1}{2}y \left(\frac{y}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{2} + 150 \right) (300 - y) \rightarrow y = 212 \text{ mm}$$

$$M_u = \sigma_y \left[\frac{1}{2} (0/212)(0/106) \left(\frac{0/212}{3} \right) + (0/106)(0/088) \left(\frac{0/088}{2} \right) + (0/022)(0/088) \left(\frac{0/088}{2} \right) \right] = 1/29 \times 10^{-3} \sigma_y$$

$$\frac{M_u}{M_y} = \frac{1/29 \times 10^{-3} \sigma_y}{5/63 \times 10^{-3} \sigma_y} = 2/29$$



مسئله ۴-۳۳

$$\bar{y} = \frac{(100 \times 20)(10) + (80 \times 20)(60)}{100 \times 20 + 80 \times 20} = 32/2 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12} (100)(20)^3 + (100 \times 20)(32/2 - 10)^2 + \frac{1}{12} (20)(80)^3 + (20 \times 80)(60 - 32/2)^2 \Rightarrow I = 3/14 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$M_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \frac{\sigma_y \times 3/14 \times 10^6}{(100 - 32/2)} = 4/63 \times 10^3 \sigma_y$$

در حالتی که $M = M_u$ سطوح بالا و پایین محور خمشی باید برابر باشند زیرا:

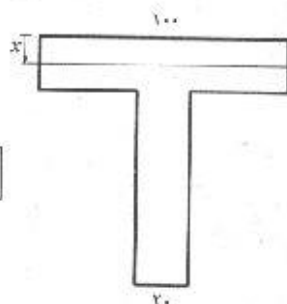
$$C = T \rightarrow \sigma A_t = \sigma A_c \rightarrow A_t = A_c$$

$$100x = 100(20 - x) + 20 \times 80 \Rightarrow x = 18 \text{ mm}$$

$$M_u = \sigma_y \left[(100 \times 18) \left(\frac{18}{2} \right) + (100 \times 2)(1) + (20 \times 80)(42) \right]$$

$$M_u = 83600 (\text{mm}^2) \sigma_y = 8/35 \times 10^{-3} \sigma_y$$

$$M_u/M_y = \frac{8/35 \times 10^{-3} \sigma_y}{4/63 \times 10^{-3} \sigma_y} = 1/8$$



۳۷-۶ تا ۳۹-۶. هر کدام از مقاطع مرکب نشان داده شده در شکل تحت تأثیر لنگر خمشی ۸۰ کیلونیوتن متر قرار دارند. مصالح به طور محکم به یکدیگر وصل شده‌اند، به طوری که تیر به صورت یکپارچه عمل می‌کند. مطلوب است تعیین تنش حداکثر در هر کدام از مصالح.

$$E_{st} = ۲/۱ \times ۱۰^۵ \text{ N/mm}^2 \quad E_{AL} = ۰/۷ \times ۱۰^۵ \text{ N/mm}^2$$

$$n = \frac{E_{st}}{E_{AL}} = \frac{۲/۱}{۰/۷} = ۳ \quad w_{AL} = ۳ \times ۷۵ = ۲۲۵ \text{ mm}$$

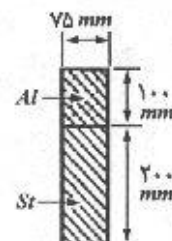
$$\bar{y} = \frac{(۲۲۵ \times ۲۰۰)(۱۰۰) + (۱۰۰ \times ۷۵)(۲۵۰)}{۲۲۵ \times ۲۰۰ + ۱۰۰ \times ۷۵} = ۱۲۱ \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12}(۲۲۵)(۲۰۰)^3 + (۲۲۵ \times ۲۰۰)(۲۱)^2 +$$

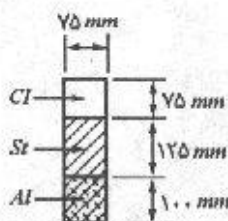
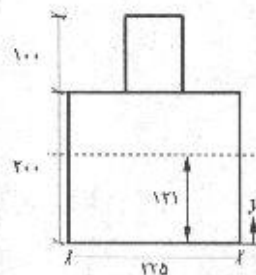
$$\frac{1}{12}(۷۵)(۱۰۰)^3 + (۷۵ \times ۱۰۰)(۲۵۰ - ۱۲۱)^2 \Rightarrow I = ۳۰۱ \times ۱۰^۶ \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{AL} = \frac{Mc}{I} = \frac{(۸۰ \times ۱۰^۶)(۳۰۰ - ۱۲۱)}{۳۰۱ \times ۱۰^۶} = ۴۷/۶ \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = n \frac{Mc}{I} = ۳ \times \frac{(۸۰ \times ۱۰^۶)(۱۲۱)}{۳۰۱ \times ۱۰^۶} = ۹۶/۵ \text{ MPa}$$



مسئله ۳۷-۶



مسئله ۳۸-۶

$$\frac{E_{CI}}{E_{AL}} = ۱/۵ \quad \frac{E_{st}}{E_{AL}} = ۳$$

$$\bar{y} = \frac{(۱۱۳ \times ۷۵)\left(\frac{۷۵}{۲}\right) + (۱۲۵ \times ۲۲۵)\left(۷۵ + \frac{۱۲۵}{۲}\right) + (۱۰۰ \times ۷۵)(۲۵۰)}{(۱۱۳ \times ۷۵) + (۱۲۵ \times ۲۲۵) + (۱۰۰ \times ۷۵)} = ۱۳۷/۵ \text{ mm}$$

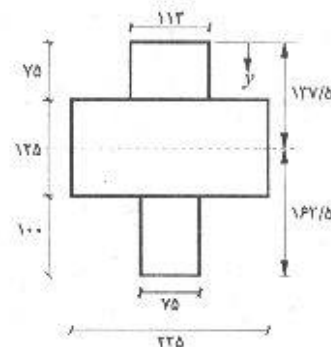
$$I = \frac{1}{12}(۱۱۳)(۷۵)^3 + (۱۱۳ \times ۷۵)\left(۱۳۷/۵ - \frac{۷۵}{۲}\right)^2 + \frac{1}{12}(۲۲۵)(۱۲۵)^3$$

$$+ \frac{1}{12}(۷۵)(۱۰۰)^3 + (۷۵ \times ۱۰۰)(۱۱۲/۵) = ۲۲۷ \times ۱۰^۶ \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{CI} = 1/5 \frac{(80 \times 10^6)(137/5)}{227 \times 10^9} = 72/68 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = 3 \frac{(80 \times 10^6)(62/5)}{227 \times 10^9} = 66/1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Al} = \frac{(80 \times 10^6)(162/5)}{227 \times 10^9} = 57/3 \text{ MPa}$$



(راهنمایی برای مسأله ۶-۳۹: لنگر مانند یک بیضی به قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$ ، در حول قطر بزرگتر مساوی $\frac{1}{4} \pi ab^2$ می باشد.)

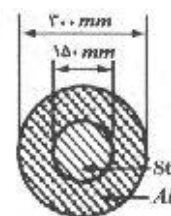
$$n = \frac{E_{st}}{E_{Al}} = 3$$

$$I = \frac{1}{4} \pi (225)(75)^2 + \frac{\pi}{4} (150^2 - 75^2)$$

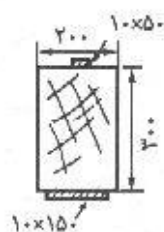
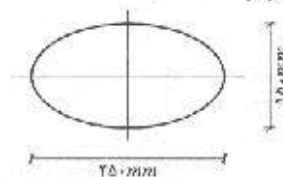
$$I = 447 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{Al} = \frac{Mc}{I} = \frac{(80 \times 10^6)(150)}{447 \times 10^6} = 26/8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = n \frac{Mc}{I} = \frac{(80 \times 10^6)(75)}{447 \times 10^6} = 40/3 \text{ MPa}$$



مسأله ۶-۳۹

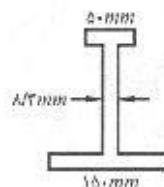


مسأله ۶-۴۰

۶-۴۰ و ۶-۴۱. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز در حول محور خنثای افقی مقاطع مرکب چوب و فولاد نشان داده شده در شکل. مصالح به طور محکم به یکدیگر وصل شده اند، به طوری که تیر به صورت یکپارچه عمل می کند. ضریب ارتجاعی فولاد مساوی 2×10^5 و ضریب ارتجاعی چوب مساوی 0.83×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع و تنش مجاز فولاد و چوب به ترتیب ۱۴۰ و $8/3$ نیوتن بر میلی متر مربع می باشد.

$$n = \frac{E_{st}}{E_w} = \frac{2 \times 10^5}{0.83 \times 10^5} = 24/1$$

$$b = \frac{200}{24/1} = 8/3$$

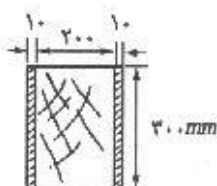


$$\bar{y} = \frac{(150 \times 10)(5) + (300 \times 8/3)(160) + (50 \times 10)(315)}{150 \times 10 + 300 \times 8/3 + 50 \times 10} = 125/5 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{12}(150)(10)^3 + (150 \times 10)(125/5 - 5)^2 \\
 &+ \frac{1}{12}(8/3)(300)^3 + (8/3 \times 300)(160 - 125/5)^2 \\
 &+ \frac{1}{12}(50)(10)^3 + (50 \times 10)(315 - 125/5)^2 = 61/4 \times 10^8 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

$$M_{st} = \frac{\sigma_{st} I}{c} = \frac{140 \times 61/4 \times 10^8}{(320 - 125/5)} = 96/6 \times 10^6 \text{ N.mm} = 96/6 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_w = \frac{1}{n} \frac{M_w c}{I} \Rightarrow M_w = \frac{96/6 \times 8/3 \times 61/4 \times 10^8}{(310 - 125/5)} = 96/6 \times 10^6 \text{ N.mm} = 96/6 \text{ kN.m}$$



$$n = \frac{E_{st}}{E_w} = 24/1$$

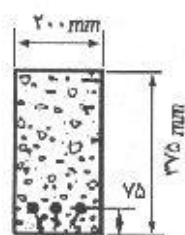
$$10 \times 24/1 = 241$$

$$b = 200 + 2 \times 241 = 682 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12}(6/682)(6/3)^3 = 1/54 \times 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$M_w = \frac{\sigma I}{c} = \frac{8/3 \times 10^8 \times 1/54 \times 10^{-2}}{6/15} = 85/2 \text{ kN.m}$$

$$M_{st} = \frac{\sigma I}{n c} = \frac{140 \times 10^8 \times 1/54 \times 10^{-2}}{24/1 \times 6/15} = 59/6 \text{ kN.m}$$



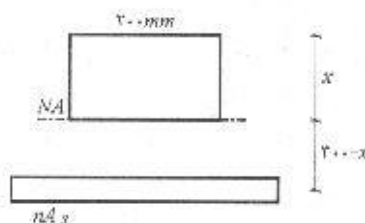
۳ میلگرد ۲۲

مسئله ۴۳-۶

$$A_s = 3 \frac{\pi}{4} (22)^2 = 1140/4 \text{ mm}^2$$

$$n A_s = 15 \times 1140/4 = 1710/6 \text{ mm}^2$$

۴۲-۶. یک تیر بتن مسلح با مقطع نشان داده شده در شکل، تحت تأثیر لنگر خمشی مثبت ۱۱ کیلونیوتن متر قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری در بتن و حداکثر تنش کششی در فولاد. n را مساوی ۱۵ فرض کنید.



خمش خالص / ۱۶۱

$$\sum M_{NA} = 0 \quad \therefore \quad 200 \times x \cdot \frac{x}{2} = nA_s (300 - x)$$

$$x = 156/6$$

از حل معادله فوق مقدار x بدست می آید:

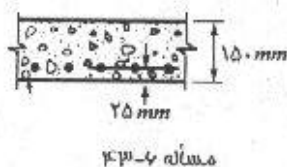
$$300 - x = 143/4$$

$$I = \frac{1}{12} (200)(156/6)^3 + (200 \times 156/6) \left(\frac{156/6}{2} \right)^2 + 17106 (143/4)^2$$

$$= 607/8 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} = \frac{11 \times 10^6 \times 156/6}{607/8 \times 10^8} = 2/83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_s = n \frac{Mc}{I} = 15 \frac{11 \times 10^6 \times 143/4}{607/8 \times 10^8} = 38/9 \text{ MPa}$$



۴۳-۶. مقطع یک دال بتن مسلح به ضخامت ۱۵۰ میلی متر مطابق شکل می باشد. مطلوب است تعیین لنگر خمشی مجاز برای یک متر پهنای دال. n را مساوی ۱۲ و تنش کششی مجاز فولاد و تنش فشاری مجاز بتن را به ترتیب مساوی ۱۵۰ و ۸ نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.

$$N = \frac{1}{80} \times 10000 = 12/5 \quad \text{تعداد میلگرد در یک متر:}$$

$$A_s = 12/5 \times \frac{\pi}{4} (10)^2 = 981/75 \text{ mm}^2$$

$$nA_s = 11781 \text{ mm}^2$$

$$1000 \times x \cdot \frac{x}{2} = 11781 \times (125 - x) \quad \therefore \quad x = 43/75 \text{ mm} \quad 125 - x = 81/3$$

$$I = \frac{1}{3} \times 1000 \times (43/75)^3 + 11781 (125 - 43/75)^2 = 105/68 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\sigma_c I}{c} = \frac{8 \times 105/68 \times 10^8}{43/75} = 19/34 \times 10^6 \text{ N.mm} = 19/34 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_s = n \frac{Mc}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma_s I}{nc} = \frac{150 \times 105/68 \times 10^8}{12 \times 81/3} = 16/2 \text{ kN.m}$$

۴۴-۶. مقطع یک تیر بتن مسلح همانند شکل به صورت جعبه ای می باشد. سطح مقطع مجموع میلگردهای کششی مساوی ۳۶۰۰ میلی مترمربع و $n = 10$ می باشد. اگر حداکثر تنش فشاری ناشی از خمش در بتن مساوی ۷ نیوتن بر میلی مترمربع باشد، تنش موجود در میلگردهای کششی و لنگر خمشی وارد بر مقطع چقدر می باشد.

$$A_s = 3600 \text{ mm}^2$$

$$nA_s = 36000 \text{ mm}^2$$

$$(400 \times 120)(x - 60) + 2 \times (100 \times x) \frac{x}{2} = 36000 \times (1120 - x)$$

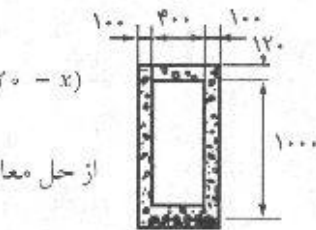
$$x = 360 \text{ mm}, 1120 - x = 760$$

$$\sigma_{st} = 10 \left(\frac{760}{360} \right) \times 7 = 147/8 \text{ N/mm}^2$$

$$I = \frac{1}{12} (400)(120)^3 + (400 \times 120)(300)^2 + 2 \left[\frac{1}{12} (100)(360)^3 \right]$$

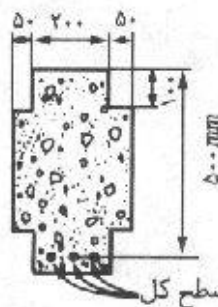
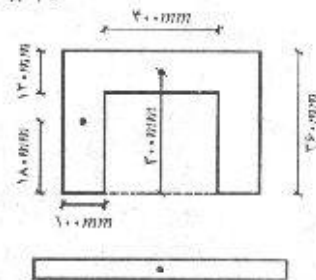
$$+ 2(100 \times 360)(180)^2 + 36000(1120 - 360)^2 = 2/83 \times 10^{10}$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{7 \times 2/83 \times 10^{10}}{360} = 549/92 \text{ kN.m}$$



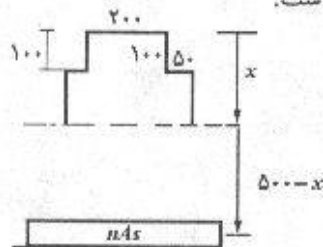
مسئله ۴-۴

(ابعاد بر حسب میلی متر)



مسئله ۴-۵

۴-۵-۶. تنش موجود در میلگردهای کششی یک تیر بتن مسلح با مقطع نشان داده شده، در اثر لنگر خمشی مثبت، مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. اگر $n = 12$ باشد، مقدار لنگر خمشی چقدر است.



$$nA_s = 12 \times 1500 = 18000 \text{ mm}^2$$

$$\left[300(x - 100) \right] \frac{(x - 100)}{2} + (200 \times 100)(x - 50) = 18000(500 - x)$$

$$x = 212/87 \text{ mm}$$

پس از حل معادله فوق:

$$I = \frac{1}{12} (300)(112/87)^3 + (300 \times 112/87) \left(\frac{112/87}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} (200)(100)^3$$

$$+ (200 \times 100)(162/87)^2 + (18000)(287/13)^2 \Rightarrow I = 21/75 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = n \frac{Mc}{I} \Rightarrow M = \frac{\sigma I}{nc} = \frac{140 \times 21/75 \times 10^8}{12 \times 287/13} = 88/4 \times 10^6 \text{ N.mm} = 88/4 \text{ kN.m}$$

۴۶-۶. مثال ۱۲-۶ را با تغییر h به ۱۰۰ میلی متر، مجدداً حل نماید.

(الف)

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{(0/05)(0/1)^2}{6} = 8/33 \times 10^{-5} m^2$$

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{2083 \times 10^{-3}}{8/33 \times 10^{-5}} = 25 MPa$$

(ب)

$$\bar{r} = 0/25 m, \quad r_o = 0/25 + 0/05 = 0/3 m, \quad r_i = 0/2 m$$

$$R = \frac{h}{\ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right)} = \frac{1}{\ln \left(\frac{0/3}{0/2} \right)} = 0/24663 m$$

$$\sigma_i = \frac{M(R - r_o)}{r_o A (\bar{r} - R)} = \frac{2083 \times 10^{-3} (0/24663 - 0/2)}{(0/2)(0/05)(0/25 - 0/24663)} = 28/8 MPa$$

$$\sigma_o = \frac{M(R - r_o)}{r_o A (\bar{r} - R)} = \frac{2083 \times 10^{-3} (0/24663 - 0/3)}{(0/3)(0/05)(0/25 - 0/24663)} = -22 MPa$$

(پ)

$$\bar{r} = 0/075 m, \quad r_o = 0/125 m, \quad r_i = 0/025 m$$

$$R = \frac{0/1}{\ln \left(\frac{0/125}{0/025} \right)} = 0/06213 m$$

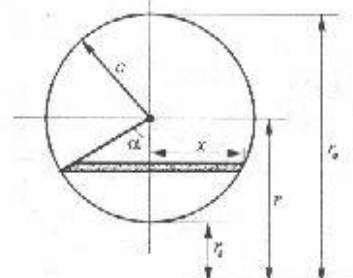
$$\sigma_i = \frac{2083 \times 10^{-3} \times (0/06213 - 0/025)}{(0/025)(0/05)(0/125 - 0/06213)} = 28/1 MPa$$

$$\sigma_o = \frac{2083 \times 10^{-3} \times (0/06213 - 0/125)}{(0/125)(0/05)(0/125 - 0/06213)} = -16/28 MPa$$

۴۷-۶. معادله ۲۳-۶ را به دست آورید.

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} \quad A = \pi c^2$$

$$\int_A \frac{dA}{r} = \int \frac{r \times dr}{r} = \int_0^{\pi} \frac{rc \sin \alpha}{r + c \cos \alpha} c \sin \alpha d\alpha$$



$$= \int_0^{\pi} \frac{\gamma c^2 (1 - \cos \alpha)}{\bar{r} + c \cos \alpha} d\alpha = \gamma \int_0^{\pi} \frac{c^2 - c^2 \cos \alpha + \bar{r}^2 - \bar{r}^2}{\bar{r} + c \cos \alpha} d\alpha$$

$$= \gamma \int_0^{\pi} \left(\frac{c^2 - \bar{r}^2}{\bar{r} + c \cos \alpha} + \bar{r} - c \cos \alpha \right) d\alpha = \gamma \pi (\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2})$$

$$R = \frac{\pi c^2}{\gamma \pi (\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2})} = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}}{\gamma}$$

۴۸-۶. مطلوب است تعیین بزرگترین لنگر خمشی که می‌تواند بر یک تیر منحنی، نظیر چیزی که در شکل ۲۵-۶ الف نشان داده شده است، با $\bar{r} = ۱۰۰$ میلی‌متر وارد گردد. سطح مقطع تیر، دایره شکل با قطر ۶۰ میلی‌متر و تنش مجاز مساوی ۷۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد.

$$R = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}}{\gamma} = \frac{۱۰۰ + \sqrt{۱۰۰^2 - ۳۰^2}}{\gamma} = ۹۷/۷ \text{ mm}$$

$$\sigma = \frac{M(R - r)}{rA(r - R)} \Rightarrow M = \frac{\sigma rA(r - R)}{R - r}$$

$$M_t = \frac{۷۰ \times ۱۳۰ \times \pi(۳۰)^2 \times (۱۰۰ - ۹۷/۷)}{۹۷/۷ - ۱۳۰} = -۱۸۳۲ \text{ N.m}$$

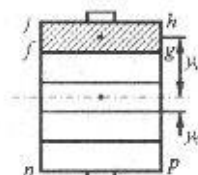
$$M_c = \frac{۷۰ \times ۷۰ \times \pi(۳۰)^2 \times (۱۰۰ - ۹۷/۷)}{۹۷/۷ - ۷۰} = ۱۱۵۰ \text{ N.m}$$

مسائل فصل هفتم

۱-۷. تیری از بهم بستن ۵ الوار، هر کدام به مقطع ۵۰×۱۵۰ میلیمتر، ساخته شده است. مقطع این تیر همانند شکل ۷-۴-الف می باشد. نشان دهید که: $A_{fghj} \bar{y}_1 = A_{fgpn} \bar{y}_1$ می باشد که در آن \bar{y}_1 فاصله مرکز هندسی سطح مقطع کل تا مرکز هندسی A_{fghj} و \bar{y}_1 همان فاصله برای سطح A_{fgpn} می باشد.

$$A_{fghj} \bar{y}_1 = \left(\frac{hb}{5} \right) \left(\frac{2}{5} h \right) = \frac{2hb^2}{25}$$

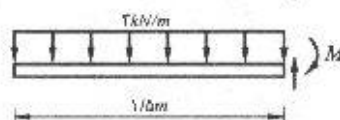
$$A_{fgpn} \bar{y}_1 = \frac{4hb}{5} \left(\frac{1}{5} h \right) = \frac{2hb^2}{25}$$



۲-۷. یک تیر طره‌ای به دهانه ۳ متر از بهم بستن ۵ الوار، هر کدام به مقطع ۵۰×۱۵۰ میلیمتر، ساخته شده است. مقطع این تیر همانند شکل ۷-۴-الف می باشد. الوارها توسط پیچهای قائم ۲۰ میلیمتر در فواصل ۱۲۰ میلیمتری، به یکدیگر بسته شده‌اند. این تیر بار گسترده یکنواختی به میزان ۳ کیلو نیوتن بر متر که شامل وزن تیر نیز است، حمل می کند. مطلوب است تعیین تنش برشی پیچی که در فاصله ۱/۵ متری از تکیه گاه قرار دارد. این کار را در هر ۴ صفحه تماس الوارها انجام دهید.

$$V = 3 \times 1/5 = 4/5 \text{ kN}$$

$$I = \frac{1}{12} (0/15)(0/25)^3 = 1/95 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



$$q_1 = q_2 = A_1 \bar{y}_1 = (0/05 \times 0/15)(0/1) = 7/5 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

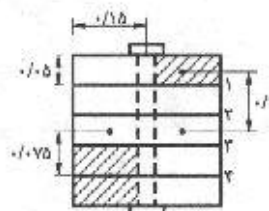
$$q_1 = q_2 = \frac{(4/5)(7/5 \times 10^{-4})}{1/95 \times 10^{-6}} = 17/3 \text{ kN/m}$$

$$\tau = \frac{q_s}{A_b} = \frac{(17/3)(0/12)}{\frac{\pi}{4}(0/02)^2} = 6608 \text{ kN/m}^2 = 6/61 \text{ MPa}$$

$$Q_1 = Q_2 = A_2 \bar{y}_2 = (0/1 \times 0/15)(0/075) = 11/25 \times 10^{-4}$$

$$q_1 = q_2 = \frac{(4/5)(11/25 \times 10^{-4})}{1/95 \times 10^{-6}} = 26 \text{ kN/m}$$

$$\tau = \frac{q_s}{A_b} = \frac{(26)(0/12)}{\frac{\pi}{4}(0/02)^2} = 9930 \text{ kN/m}^2 = 9/93 \text{ MPa}$$



۵۰ mm × ۱۰۰ mm

۵۰ mm × ۲۵۰ mm

مسئله ۷-۳

۳-۷. توسط چهار الوار، یک تیر با مقطع جعبه‌ای ساخته شده است (به شکل مراجعه کنید). در مقطع مورد مطالعه، نیروی برشی قائم مساوی ۴۶۴۰ نیوتن و لنگر خمشی مساوی

۷۰ نیوتن متر می‌باشد. اگر الوارها توسط میخهایی که نیروی برشی مجاز آنها ۲۵۰ نیوتن است، به یکدیگر وصل شوند، فاصله آنها چقدر باید باشد.

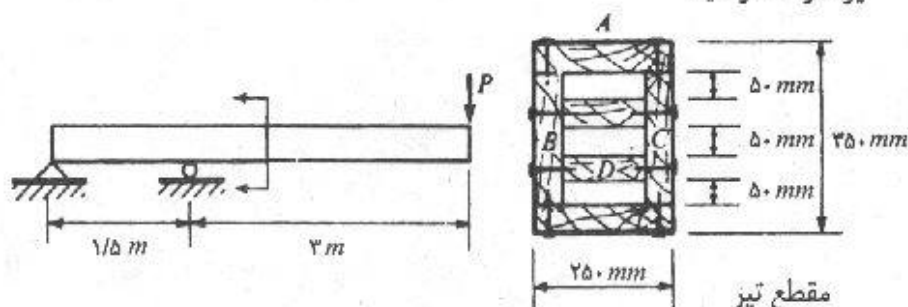
$$I = \frac{1}{12}(200)(250)^3 - \frac{1}{12}(100)(150)^3 = 232/3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q = A\bar{y} = (50 \times 50)(125 - 25) = 25 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{4640 \times 25 \times 10^3}{232/3 \times 10^6} = 5 \text{ N/mm}$$

$$F = qs \Rightarrow s = \frac{F}{q} = \frac{250}{5} = 50 \text{ mm}$$

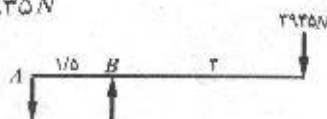
۴-۷. مطابق شکل، یک تیر بالکن دار، بار P به میزان ۳۹۴۵ نیوتن را در انتهای آزاد خود حمل می‌کند. تیر از به هم بستن ۶ الوار به ضخامت ۵۰ میلیمتر ساخته شده است. نیروی برشی هر کدام از میخهای مورد مصرف برای این کار، مساوی ۴۰۰ نیوتن می‌باشد. لنگر ماند کل مقطع تقریباً مساوی 740×10^6 میلیمتر به توان ۴ می‌باشد. مطلوب است تعیین،
الف) فواصل میخهای اتصال دهنده الوار ۱ به الوارهای B و C در ناحیه نیروی برشی حداکثر.
ب) فواصل میخهای اتصال دهنده الوار D به الوارهای B و C در همان ناحیه. در محاسبات از وزن تیر صرف نظر کنید.



مسئله ۴-۷

$$\sum M_A = 0 : 3945 \times 4/5 - R_B \times 1/5 = 0 \rightarrow R_B = 11835 \text{ N}$$

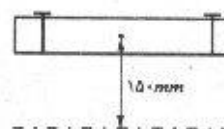
$$\sum F_y = 0 : R_A = R_B - 3945 \rightarrow R_A = 7890 \text{ N}$$



نیروی برشی ماکزیمم در فاصله AB و به میزان ۷۸۹۰ N می‌باشد.

$$Q = (250 \times 50)(175 - 25) = 18/75 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{7890 \times 18/75 \times 10^6}{740 \times 10^6} = 20 \text{ N/mm}$$



الف)

چون از دو پیچ استفاده شده نصف جریان برش بدست آمده بر هر پیچ اعمال می شود.

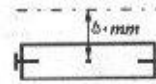
$$S = \frac{F}{\frac{1}{2}q} = \frac{400}{\frac{20}{2}} = 40 \text{ mm}$$

(ب)

$$Q = (150 \times 50)(50) = 3/75 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{7890 \times 3/75 \times 10^6}{740 \times 10^9} = 4 \text{ N/mm}$$

$$S = \frac{F}{\frac{1}{2}q} = \frac{400}{\frac{4}{2}} = 200 \text{ mm}$$



۵-۷. از به هم بستن ۴ الوار به ضخامت ۵۰ میلیمتر، می خواهیم یک تیر با مقطع جعبه ای بسازیم. دو راه ممکن برای این کار در شکل نشان داده شده است. به علاوه طرح (الف) می تواند در هنگام استفاده، ۹۰ درجه دوران یابد. (الف) طرحی که برای انتقال نیروی برشی افقی، به کمترین تعداد میخ احتیاج دارد، کدام است. (ب) اگر برشی که قرار است توسط این تیر انتقال یابد، مساوی ۳۰۲۰ نیوتن باشد، برای طرحی که در قسمت الف انتخاب شده، فاصله میخها چقدر خواهد بود. نیروی برشی مجاز میخ مصرفی را مساوی ۲۴۰ نیوتن در نظر بگیرید. ابعاد خارجی قوطی ۲۵۰ × ۲۵۰ میلیمتر می باشد.



(الف)

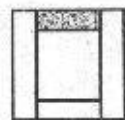


(ب)

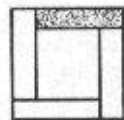
مسئله ۵-۷

با در نظر گرفتن رابطه $\tau = \frac{VQ}{It}$ عنوان مؤثر بر تنش برشی مشخص می شوند.

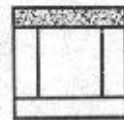
برای مسأله مطرح شده سه طرح مختلف امکان پذیر بوده که در زیر ترسیم شده اند.



(۱)



(۲)



(۳)

در این طرحها مقادیر t و I یکسان می باشد، نیروی برشی هم برای هر سه یکسان فرض شده است. بنابراین مقدار تنش برشی فقط تابع Q می باشد. از طرفی $Q = A\bar{y}$ و مقدار \bar{y} مربوط به سطوح تیره در هر سه مورد، مساوی می باشد و در نتیجه هر یک از سطوح که مساحت کمتری داشته باشد مطلوب است. با توجه به مطالب ذکر شده، طرح شماره (۱) مناسب تر می باشد.

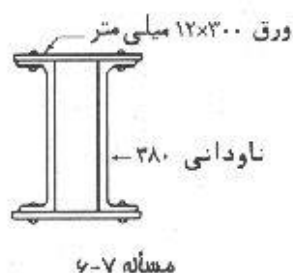
(ب)

$$Q = (150 \times 50) \times 100 = 7/5 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$I = \frac{1}{12}(250)(250)^3 - \frac{1}{12}(150)(150)^3 = 283/3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(3020)(7/5 \times 10^6)}{283/3 \times 10^6} = 8 \text{ N/mm}$$

$$S = \frac{F}{\frac{1}{2}q} = \frac{240}{\frac{1}{2} \times 8} = 60 \text{ mm}$$



۶-۷. مطابق شکل، تیری از دو نیم‌رخ ناودانی و ۲ ورق تقویتی ساخته شده است. اگر در مقطع مورد مطالعه، نیروی برشی قائم مساوی ۶۵۰ کیلو نیوتن و لنگر خمشی مساوی ۵۰ کیلو نیوتن متر باشد، فواصل پرچهای ۲۲ میلیمتری در هر ردیف چقدر خواهد بود. نیروی برشی مجاز پرچ ۲۲ میلیمتری را مساوی ۳۶/۲ کیلو نیوتن در نظر بگیرید.

$$I = 15760 \text{ Cm}^2 = 15760 \times 10^4 \text{ mm}^2 \quad \text{UNP ۳۸۰} \rightarrow \text{جدول ۸ ضمیمه}$$

$$I = 2 \times (15760 \times 10^4) + 2 \left(\frac{1}{12} \times 300 \times 12^3 \right)$$

$$+ 2 \times (12 \times 300)(190 + 6)^2 = 591/88 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(650 \times 10^3) [(12 \times 300)(196)]}{591/88 \times 10^6} = 774/9 \text{ N/mm}$$

$$S = \frac{F}{\frac{1}{2}q} = \frac{36200}{\frac{1}{2} \times 774/9} = 93/4 \text{ mm}$$



۷-۷. برای اینکه دو نیم‌رخ بال پهن نشان داده شده در شکل به صورت یکپارچه عمل نمایند، آنها را توسط دو ردیف پرچ به یکدیگر می‌بندیم. در مقطع مورد مطالعه، نیروی برشی قائم مساوی ۱۸۰ کیلو نیوتن و لنگر خمشی مساوی ۳۶۰۰ نیوتن متر می‌باشد. با استفاده از پرچهای ۲۲ میلیمتری، که نیروی برشی مجاز هر کدام از آنها مساوی ۳۰ کیلو نیوتن می‌باشد، فاصله مورد نیاز پرچها، چقدر خواهد بود.

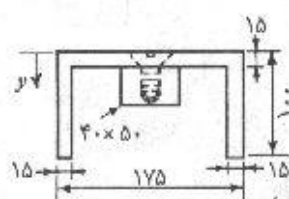
$$I = 5700 \text{ Cm}^2 \quad \text{IPB ۲۰۰} \quad A = 78/1 \text{ Cm}^2 \quad \text{با استفاده از جدول ۶ ضمیمه}$$

$$S = \frac{rF}{q} = \frac{r \times 30000}{\Delta r_0 / r_A} = 110/r_{mm}$$

الف) تنش برشی در پیچهای خزینه‌ای

(ب) تنش برشی در محل اتصال جان با بالهای ناودانی.

(ب) حداکثر تنش برشی در بالها.



(تمام ابعاد پر حسب میلے متر)

$$\sum A = 10 \times 140 + 2(100 \times 10) + 40 \times 50 = 9100 \text{ mm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{2/39 \times 10^6}{5/18 \times 10^7} = 32/9 \text{ mm}$$

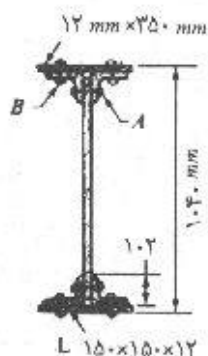
$$I = \frac{1}{12} (140)(10)^2 + (140 \times 10)(32/9 - 10)^2 + 2 \left[\frac{1}{12} (10)(100)^2 + (10 \times 100)(50 - 32/9)^2 \right] + \frac{1}{12} (50)(40)^2 + (40 \times 50)(32/9 - 50)^2 = 5/0.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{20 \times 10^{-3} \times (20 \times 50)(2/1)}{50.1 \times 10^{-6} \times 50} = 335 \times 10^{-3} \text{ N/mm}^2 = 335 \text{ kPa} \quad (\text{الف})$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{20 \times 10^7 (150 \times 15)(25/4)}{500 \times 10^8 \times 30} = 1.125 \text{ N/mm}^2 = 112.5 \text{ kPa} \quad (\text{ب})$$

$$\tau_{max} = \frac{20 \times 10^3 \left[15 \times \left(\frac{9 \times 1}{100 - 32/9} \right) \left(\frac{100 - 32/9}{2} \right) \right]}{0.01 \times 10^6 \times 30} = 2.29 \text{ N/m}^2 = 2.29 \text{ kPa}$$



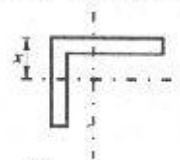


مسئله ۹-۷

۹-۷. یک تیر ورق از دو ورق بال به ابعاد 350×12 میلیمتر، یک ورق جان به ابعاد 1000×10 میلیمتر و ۴ عدد نبشی $150 \times 150 \times 12$ میلیمتر تشکیل یافته است (مطابق شکل). اگر قرار باشد که این مقطع برشی معادل ۶۵۰ کیلو نیوتن را انتقال دهد، فواصل پرچهای A و B چقدر باید باشد؟ لنگر ماند این تیر ورق حول محور خنثی مساوی 5922×10^6 میلیمتر به توان ۴ می باشد. پرچها به قطر ۲۲ میلیمتر می باشند که نیروی برشی آنها در حالت یک پرشه مساوی ۳۰ کیلو نیوتن و در حالت دو برشی مساوی ۵۹ کیلو نیوتن می باشد. نیروی لهدگی پیچهای فوق در مقابل ورق ۱۰ میلیمتر مساوی ۵۰ کیلو نیوتن است.

با استفاده از جدول ۱۰ ضمیمه مشخصات مورد نیاز $150 \times 150 \times 12$ را استخراج می کنیم:

$$x = 4/12 \text{ Cm} \quad , \quad A = 34/8 \text{ Cm}^2$$



$$Q_A = 12 \times 350 \left(\frac{1040}{2} - \frac{12}{2} \right) + 2(3440) \left(\frac{1040}{2} - 12 - 41/2 \right) = 5/4 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

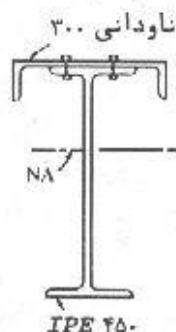
$$q_A = \frac{V_A Q_A}{I} = \frac{(650 \times 10^3) (5/4 \times 10^6)}{5922 \times 10^6} = 5/9 \times 10^2 \text{ N/mm}$$

$$s_A = \frac{F}{q} = \frac{59000}{5/9 \times 10^2} = 1 \text{ mm}$$

$$Q_B = 12 \times 350 \left(\frac{1040}{2} - \frac{12}{2} \right) = 2/16 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$q_B = \frac{V_B Q_B}{I} = \frac{(650 \times 10^3) (2/16 \times 10^6)}{5922 \times 10^6} = 2/37 \times 10^2$$

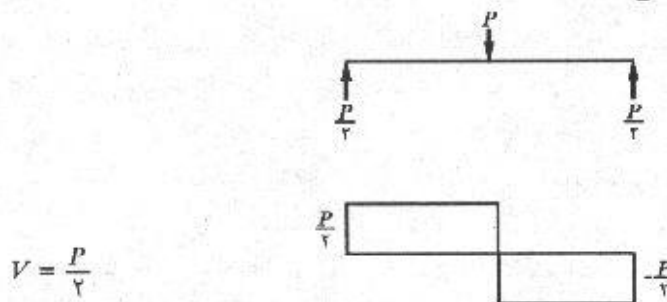
$$s_B = \frac{F}{\frac{1}{2}q} = \frac{30000}{\frac{1}{2} \times 2/37 \times 10^2} = 2/53 \text{ mm}$$



IPE ۴۵۰

مسئله ۱۰-۷

۱۰-۷. مطابق شکل، مقطع یک تیر ساده از یک ناودانی ۳۰۰ و یک نیم رخ نیم پهن ۴۵۰ تشکیل یافته است. این دو نیم رخ توسط دو ردیف پرچ ۲۰ میلیمتر که در طول تیر در فواصل ۱۵۰ میلیمتری قرار دارند، به یکدیگر متصل شده اند. اگر تیر فوق توسط یک بار متمرکز ۵۰۰ کیلو نیوتنی در وسط دهانه بارگذاری شده باشد، حداکثر تنش برشی در پرچها چقدر خواهد بود. از وزن تیر صرف نظر کنید.



$$V = \frac{P}{2}$$

مشخصات مورد نیاز نیمرخهای به کار رفته در تیر را از جدول ۴ و ۸ ضمیمه استخراج می‌کنیم:

$$IPE 450 : A = 98/8 \text{ cm}^2 \quad I = 33740 \text{ cm}^4$$

ناودانی ۳۰۰:

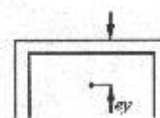
$$A = 58/8 \text{ cm}^2 \quad I = 495 \text{ cm}^4 \quad ey = 2/7 \text{ cm} \quad S = 10 \text{ mm}$$

مبنای محاسبه آنرا وسط نیمرخ IPE 450 قرار می‌دهیم.

$$d = \frac{450}{2} + 10 - 27 = 130/4$$

فاصله مرکز هندسی ناودانی تا محور خنثی:

$$\bar{y} = \frac{(9880)(0) + (5880)(130/4)}{9880 + 5880} = 77/6 \text{ mm}$$



پس محل محور خنثی 77/6 mm بالاتر از وسط نیمرخ IPE 450 می‌باشد.

$$I = \sum (I_i + Ad^2) = (33740 + 98/8 \times (7/6)^2) + 495 + 58/8 (130/4)^2$$

$$I = 50183 \text{ Cm}^4 = 50183 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$Q = 5880 \times 130/4 = 766752 \text{ mm}^3$$

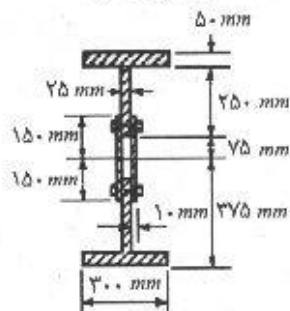
$$q = \frac{\frac{P}{2} Q}{I} = \frac{250 \times 10^3 \times 766752}{50183 \times 10^4} = 382 \text{ N/mm}$$

چون پرچها در دو ردیف و به فاصله 150 mm از یکدیگر واقع‌اند، بنابراین نیروی وارد بر هر پرچ چنین به دست می‌آید:

$$F = \frac{382 \times 150}{2} = 28650 \text{ N}$$

و در نهایت تنش وارد بر هر پرچ:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{28650}{\frac{\pi}{4} (20)^2} = 91/2 \text{ N/mm}^2$$



(ابعاد بر حسب میلی متر)

مسئله ۷-۱۱

$$Q = (50 \times 300)(350) + (25 \times 250)(200) = 6/5 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{450 \times 10^3 \times 6/5 \times 10^6}{43000 \times 10^8} = 680 \text{ N/mm}$$

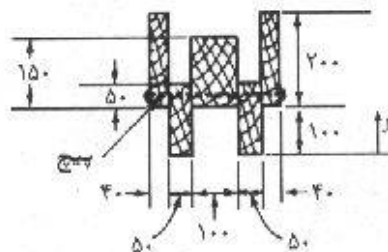
چون پرچها تحت برش مضاعف می باشند:

$$\tau = \frac{F}{2A} = \frac{qs}{2A} = \frac{680 \times 125}{2 \times \frac{\pi}{4} (22)^2} = 112 \text{ N/mm}^2$$

۷-۱۲. تیری از ۵ الوار مجزا که مطابق شکل توسط پیچ به یکدیگر متصل شده اند، تشکیل یافته است. مقطع هر پیچ مساوی ۳۲۰ میلی متر مربع و فاصله طولی آنها ۱۵۰ میلی متر می باشد. اگر دهانه این تیر مساوی ۲/۵ متر و بار وارد بر آن، شامل وزن مرده خود تیر، بار یکنواختی به شدت ۱۸ کیلو نیوتن بر متر باشد، حداکثر تنش برشی تولید شده در پیچها چقدر خواهد بود. لنگر ماند مقطع تیر مساوی 243×10^8 میلی متر به توان ۴ می باشد.

(تمام ابعاد بر حسب میلی متر)

مسئله ۷-۱۲



$$V = \frac{1}{\gamma} (wL) = \frac{1}{\gamma} (18 \times 2/5) = 22/5 \text{ kN}$$

$$\bar{y} = \frac{2 \times (50 \times 150)(75) + 2 \times (40 \times 200)(200) + (100 \times 150)(175)}{2 \times (50 \times 150) + 2 \times (40 \times 200) + (100 \times 150)}$$

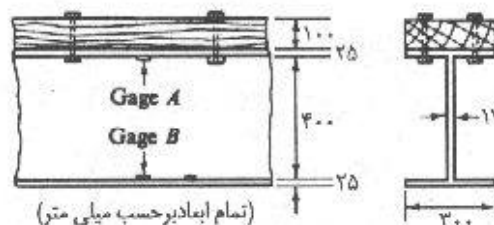
$$\Rightarrow \bar{y} = 151 \text{ mm} \text{ از پایین}$$

$$Q = (40 \times 200)(51) = 40/8 \times 10^7 \text{ mm}^2$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{22/5 \times 10^3 \times 40/8 \times 10^7}{243 \times 10^8} = 37/8 \text{ N/mm}$$

$$\tau = \frac{qs}{A} = \frac{37/8 \times 150}{320} = 17/7 \text{ MPa}$$

۷-۱۳. مقطع یک تیر ساده به دهانه 10 متر که بار یکنواختی را در تمام طول دهانه تحمل می‌کند، از یک تخته به ابعاد 100×300 میلیمتر که مطابق شکل به بال فوقانی یک تیر فولادی توسط پیچ متصل شده است، تشکیل می‌شود. توسط دو کرنش سنج A و B که در سطح داخلی دو بال نصب شده‌اند، کرنش نقطه A مساوی 420×10^{-6} و کرنش نقطه B مساوی 700×10^{-6} میلیمتر بر میلیمتر اندازه‌گیری شده است. مطلوب است تعیین، (الف) نیروی کل مؤثر بر قطعه چوبی در این مقطع (ب) اگر پیچها در دو ردیف و به فاصله طولی 600 میلیمتر قرار داشته باشند، نیروی برشی حمل شده توسط هر پیچ چقدر است؟ فرض کنید که پیچها به طور مساوی در مقابله با نیروی وارده شرکت می‌کنند ضریب ارتجاعی فولاد را 2×10^5 و ضریب ارتجاعی چوب را $10^5/1$ نیوتن بر میلیمتر مربع در نظر بگیرید. (کرنش سنجها در وسط دهانه نصب شده‌اند).



مسئله ۷-۱۳

(الف)

$$\frac{\bar{y}}{400} = \frac{420}{420 + 700} \Rightarrow \bar{y} = 150 \text{ mm}$$

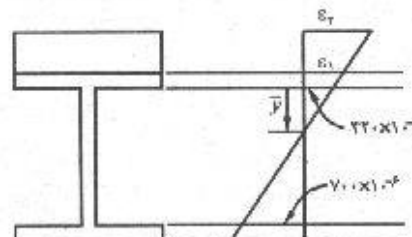
$$\frac{\epsilon_1}{175} = \frac{420}{150} \Rightarrow \epsilon_1 = 490 \times 10^{-6} \quad \sigma_1 = E_w \epsilon_1 = 4/9 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{\epsilon_2}{275} = \frac{700}{150} \Rightarrow \epsilon_2 = 770 \times 10^{-6} \quad \sigma_2 = E_w \epsilon_2 = 7/9 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = 6/3$$

$$F = \sigma_{ave} \cdot A = 6/3 \times (100 \times 300) = 189 \text{ kN}$$

$$\frac{5}{0/6} = 8/3 \approx 8 \quad \text{تعداد ردیف پیچها:}$$



یعنی در نصف طول تیر ($5m$) هشت ردیف پیچ وجود دارد.

چون در هر ردیف دو پیچ به کار رفته پس تعداد پیچها ۱۶ عدد می‌شود.

$$\frac{189}{16} = 11/8 \text{ kN} \quad \text{نیروی برشی وارد بر هر پیچ}$$

۷-۱۴. اگر تنش برشی مجاز برای چوب داگلاس فیر مساوی 70 نیوتن بر میلیمتر مربع (مگاپاسکال) باشد، مطلوب است تعیین ظرفیت نیروی برشی قائم یک تیر از این نوع چوب را

که مقطع آن به صورت مستطیل توپر به ابعاد 50×100 میلیمتر می باشد. مسأله را در دو حالت، یکی وقتی که ضلع 50 میلیمتر به صورت قائم و دیگری وقتی که ضلع 100 میلیمتری به صورت قائم قرار گرفته، حل نمایید.

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \rightarrow V = \frac{2}{3} \tau A$$

$$V = \frac{2}{3} (0.7) (50 \times 100) = 2333N$$

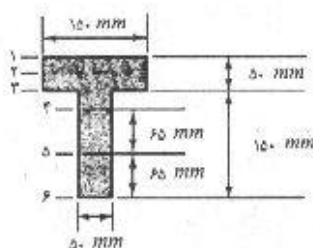
جواب هر دو حالت یکسان می باشد.

۱۵-۷. نشان دهید که حداکثر تنش برشی در یک مقطع دایره شکل توپر، تحت اثر نیروی برشی قائم V ، مساوی $\frac{4}{3} V/A$ می باشد. A مساحت مقطع دایره می باشد.

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) \left(\frac{4r}{3\pi} \right)}{\left(\frac{\pi r^4}{4} \right) (2r)} = \frac{4}{3} \frac{V}{A}$$

۱۶-۷. نشان دهید که حداکثر تنش برشی در یک مقطع لوله ای جدار نازک تحت اثر نیروی برشی قائم V مساوی $\frac{2}{3} V/A$ می باشد. A مساحت خالص مقطع لوله ای می باشد.

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V (\pi r t) \left(\frac{2r}{\pi} \right)}{(\pi r^3 t) (2t)} = \frac{2V}{\pi r t} = \frac{2}{3} \frac{V}{A}$$



مسأله ۱۷-۷

۱۷-۷. مقطع سپری یک تیر چدنی دارای ابعاد مطابق شکل می باشد. لنگر مانند مقطع مزبور مساوی $53/1 \times 10^3$ کیلو نیوتن باشد. اگر نیروی برشی قائم وارد بر این مقطع مساوی 240 کیلو نیوتن باشد، مطلوب است تعیین تنش برشی در ترازهای نشان داده شده. نتایج را به صورت ترسیمی در ارتفاع تیر نمایش دهید.

$$\bar{y} = \frac{(150 \times 50)(25) + (150 \times 50)(125)}{2 \times 150 \times 50} = 75 \text{ mm} \text{ از بالا}$$

$$Q_1 = 0 \quad \text{و} \quad \tau = \frac{VQ}{It} \Rightarrow \tau_1 = 0$$

$$Q_2 = (150 \times 25)(75 - 12/5) = 2/34 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$\tau_2 = \frac{240 \times 10^3 \times 2/34 \times 10^6}{53/1 \times 10^8 \times 150} = 7 \text{ MPa}$$

$$Q_3 = (150 \times 50)(75 - 25) = 3/75 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$\tau_r = \frac{240 \times 10^3 \times 3/75 \times 10^3}{53/1 \times 10^3 \times (150 \text{ یا } 50)} = 11/3 \text{ یا } 33/9 \text{ MPa}$$

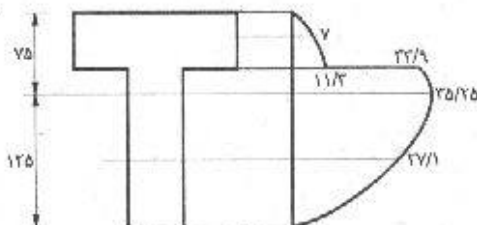
$$Q_r = (130 \times 50)(125 - 65) = 3/9 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$\tau_r = \frac{240 \times 10^3 \times 3/9 \times 10^6}{53/1 \times 10^3 \times 50} = 35/25 \text{ MPa}$$

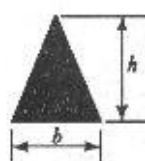
$$Q_s = (65 \times 50) \left(125 - \frac{65}{2} \right) = 3 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$\tau_o = \frac{240 \times 10^3 \times 3 \times 10^6}{53/1 \times 10^3 \times 50} = 27/1 \text{ MPa}$$

$$\tau_p = 0$$



۱۸-۷. مقطع یک تیر به صورت یک مثلث متساوی الساقین است که طول پایه b آن مساوی نصف ارتفاع h آن است. (الف) با استفاده از رابطه اصلی تنش برشی و ریاضیات، محل حداکثر تنش برشی



مسئله ۱۸-۷

ناشی از نیروی برشی قائم V را به دست آورید. نمایش تغییرات نیروی برشی در روی مقطع را به دست آورید. (ب) اگر h مساوی ۸۰ میلیمتر و h مساوی ۱۶۰ میلیمتر و تنش برشی حداکثر به ۰/۸ نیوتن بر میلیمتر مربع محدود شده باشد، حداکثر نیروی برشی قائم V که این مقطع می تواند تحمل کند چقدر است؟

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

(الف)

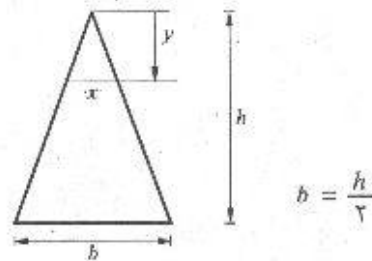
با توجه به این نکته که مقادیر I و V ثابت می باشند باید محلی را که در آن $\left(\frac{Q}{t}\right)$ بیشینه است پیدا کنیم.

$$x = \frac{b}{h} y = \frac{1}{2} y$$

$$\frac{Q}{t} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} y\right) y \left(\frac{2}{3} h - \frac{2}{3} y\right)}{\frac{1}{2} y} = \frac{1}{2} (hy - y^2)$$

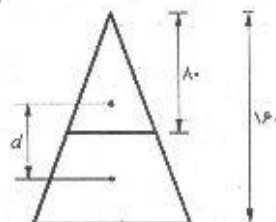
$$\frac{d\left(\frac{Q}{t}\right)}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (h - 2y) = 0 \Rightarrow y = \frac{h}{2}$$

(ب)



$$d = \frac{2}{3} \times 160 - \frac{2}{3} \times 80 = 53/3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \rightarrow V = \frac{\tau It}{Q} = \frac{0/8 \times \frac{1}{36} (80) (160)^2 (20)}{\frac{1}{2} (20) (80) (53/3)} = 3415 \text{ N}$$



۷-۱۹. مقطع یک تیر که به صورت مثلث متساوی الساقین، به پایه $b = ۱۵۰$ و به ارتفاع $h = ۴۵۰$ میلیمتر، می باشد، تحت تأثیر نیروی برشی قائم ۲۷۰۰۰ نیوتن قرار دارد. مطلوب است تعیین تنش برشی افقی در محور خنثی و وسط ارتفاع. بعد از تعیین تنش در چند نقطه دیگر، نتایج را به صورت ترسیم تغییرات تنش برشی در ارتفاع مقطع، نمایش دهید.

$$Q = \left(\frac{1}{2} \times ۱۰۰ \times ۳۰۰ \right) (۱۰۰) = ۱/۵ \times ۱۰^6 \text{ mm}^3$$

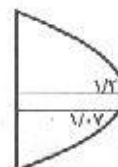
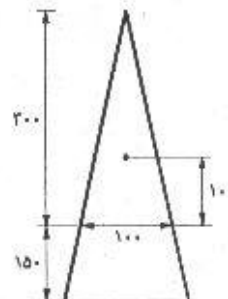
$$I = \frac{1}{36} (۱۵۰) (۴۵۰)^3 = ۳/۸ \times ۱۰^8 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{NA} = \frac{VQ}{It} = \frac{۲۷۰۰۰ \times ۱/۵ \times ۱۰^6}{۳/۸ \times ۱۰^8 \times ۱۰۰} = ۱/۰۷ \text{ MPa}$$

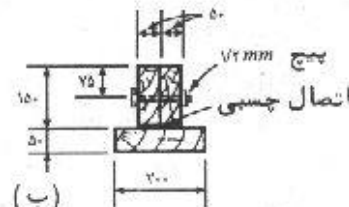
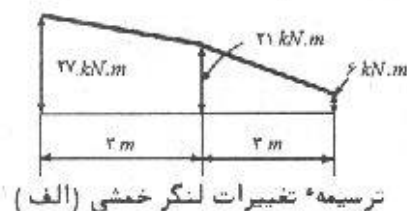
$$Q = \left(\frac{1}{2} \times ۷۵ \times ۲۲۵ \right) (۱۵۰) = ۱/۲۶۶ \times ۱۰^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{۲۷۰۰۰ \times ۱/۲۶۶ \times ۱۰^6}{۳/۸ \times ۱۰^8 \times ۷۵} = ۱/۲ \text{ MPa}$$

منحنی توزیع تنش سهمی با ماکزیمم $۱/۲$ می باشد.



۷-۲۰. تیری با مقطع نشان داده شده، طوری بارگذاری شده است که تغییرات لنگر خمشی آن مطابق شکل می باشد. مطلوب است (الف) حداکثر نیروی برشی افقی در پیچهای ۱۲ میلیمتری که به فاصله ۳۰۰ میلیمتر از یکدیگر قرار دارند. (ب) حداکثر تنش برشی در اتصال چسبی.



مسئله ۷-۲۰

(الف)

دو بلوک ۱۵۰×۵۰ میلیمتری مثل یک بلوک واحد عمل می کنند.

$$V = \frac{dM}{dx} \quad V_1 = \frac{۲۷ - ۲۱}{۳} = ۲ \text{ kN} \quad V_2 = \frac{۲۱ - ۶}{۳} = ۵ \text{ kN}$$

در نتیجه: $V_{max} = ۵ \text{ kN}$

$$\bar{y} = \frac{(۲۰۰ \times ۵۰) (۲۵) + (۱۰۰ \times ۱۵۰) (۱۲۵)}{۲۰۰ \times ۱۵۰ + ۱۰۰ \times ۱۵۰} = ۸۵ \text{ mm} \quad \text{از پایین}$$

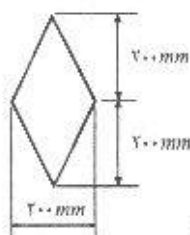
(ب)

$$I = \frac{1}{12} (200)(50)^3 + (200 \times 50)(60)^2 + \frac{1}{12} (100)(150)^3 + (100 \times 150)(40)^2$$

$$\Rightarrow I = 90/2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q = (200 \times 50)(85 - 25) = 6 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(5000)(6 \times 10^6)}{(90/2 \times 10^6) \times (100)} = 0/332 \text{ MPa} = 332 \text{ kPa}$$



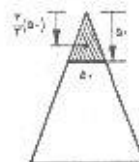
مسئله ۷-۲۱

۲۱-۷. مقطع تیری به شکل لوزی می‌باشد (مطابق شکل). بر این مقطع نیروی برشی قائمی مساوی ۵۰۰۰ نیوتن وارد می‌شود. با تعیین تنش برشی در فواصل ۵۰ میلیمتری، ترسیم تغییرات تنش برشی در ارتفاع مقطع را ترسیم نمایید.

$$I = 2 \times \frac{1}{12} (200)(200)^3 = 2/67 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad \tau_1 = 0$$

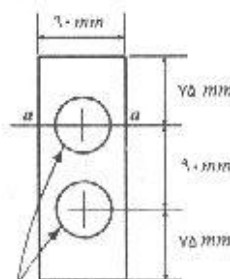
$$\tau_1 = \frac{(5000) \left[\left(\frac{1}{2} \times 50 \times 50 \right) \times \left(200 - \frac{2}{3} \times 50 \right) \right]}{(2/67 \times 10^8)(50)} = 0/0782 \text{ MPa} = 78/2 \text{ kPa}$$



$$\tau_r = \frac{(5000) \left[\left(\frac{1}{2} \times 100 \times 100 \right) \times \left(200 - \frac{2}{3} \times 100 \right) \right]}{(2/67 \times 10^8)(100)} = 125 \text{ kPa}$$

$$\tau_r = \frac{(5000) \left[\left(\frac{1}{2} \times 150 \times 150 \right) \times \left(200 - \frac{2}{3} \times 150 \right) \right]}{(2/67 \times 10^8)(150)} = 140 \text{ kPa}$$

$$\tau_0 = \frac{5000 \left[\left(\frac{1}{2} \times 200 \times 200 \right) \times \left(\frac{200}{3} \right) \right]}{(2/67 \times 10^8)(200)} = 125 \text{ kPa}$$



مسئله ۷-۲۲ سوراخ به قطر ۵۰ mm

۲۲-۷. مقطع یک تیر چدنی مطابق شکل می‌باشد. اگر تنش کششی مجاز مساوی ۵۰، تنش فشاری مجاز مساوی ۲۰۵ و تنش برشی مجاز مساوی ۵۵ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد، حداکثر نیروی برشی مجاز و حداکثر لنگر خمشی مجاز وارد بر این مقطع چقدر خواهد بود. فقط بارهای شاقولی را در نظر بگیرید و محاسبات خود را محدود به تراز $a-a$ نمایید.

تنش برشی در تیرها / ۱۸۱

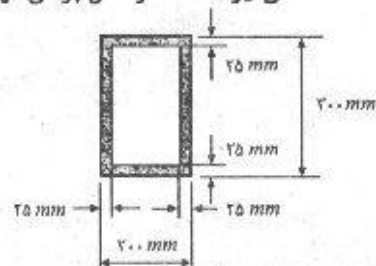
$$I = \frac{1}{12} (0/09) (0/24)^3 - 2 \left[\frac{\pi}{4} (0/025)^4 + \pi (0/025)^2 \times (0/045)^2 \right] = 9/5 \times 10^{-8} m^4$$

$$Q = (0/09 \times 0/075) \left(75 + 45 - \frac{75}{2} \right) - \frac{1}{2} \pi (0/025)^2 \times \left(0/045 + \frac{4(0/025)}{3\pi} \right) = 0/557 m^3$$

$$V = \frac{\tau R}{Q} = \frac{(55 \times 10^6) (9/5 \times 10^{-8}) (0/04)}{0/557} = 375 kN$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(50 \times 10^6) (9/5 \times 10^{-8})}{0/12} = 39/6 kN.m$$

۲۳-۷. مقطع جعبه‌ای نشان داده شده در شکل، مقطع یک تیر ساده می‌باشد. در یک ناحیه مشخص از تیر، تغییرات لنگر خمشی خطی و با شیب ۴۰۰۰ نیوتن متر بر متر در امتداد محور تیر صورت می‌گیرد. حداکثر تنش برشی تولید شده در مقطع در این ناحیه چقدر است.



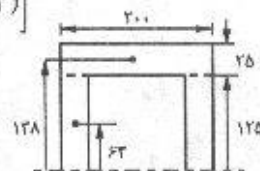
مسئله ۷-۲۳

$$V = \frac{\Delta M}{\Delta L} = 4 kN$$

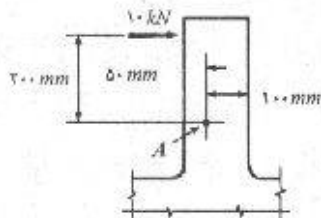
$$I = \frac{1}{12} (0/2) (0/3)^3 - \frac{1}{12} (0/15) (0/25)^3 = 2/55 \times 10^{-8} m^4$$

$$Q = \left[(0/2 \times 0/025) (0/138) + 2 (0/125 \times 0/025) (0/063) \right] = 1/08 \times 10^{-3} m^3$$

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{4 \times 1/08 \times 10^{-3}}{(2/55 \times 10^{-8}) (0/05)} = 340 kPa$$



۲۴-۷. زائده لچکی مانندی از یک ماشین که دارای مقطع مربع مستطیل ۴۰ × ۱۵۰ میلی‌متر می‌باشد،



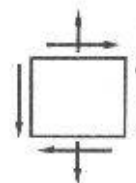
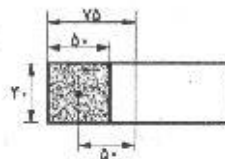
مسئله ۷-۲۴

مطابق شکل تحت اثر نیروی متمرکز ۱۰ کیلو نیوتنی قرار دارد. مطلوب است تعیین تنشهای برشی در یک جزء کوچک که در نقطه A قرار دارد. نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء کوچک نمایش دهید. از آنجایی که این جزء کوچک تحت تنش قائم نیز می‌باشد، بدون محاسبه این تنش، تنشهای قائم را با جهت صحیح در روی جزء کوچک نمایش دهید.

$$Q = (50 \times 40)(50) = 10^6 \text{ mm}^2$$

$$I = \frac{1}{12}(40)(150)^3 = 11/25 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(10 \times 10^3)(10^6)}{(11/25 \times 10^6)(40)} = 2/22 \text{ MPa}$$



۲۵-۷. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی در مقطع $A-A$ از لچکی مثال ۵-۶. نتایج را در روی یک جزء سطح نمایش دهید. آیا در روی این جزء سطح تنش خمشی نیز تأثیر می‌کند.

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

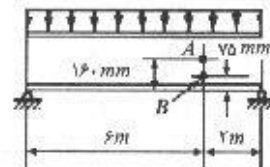
$$V = 36/3 \text{ kN}, \quad I = 5/64 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q = 2 \times 25 \times (100 - 42/5) \frac{(100 - 42/5)}{2} = 82656/3 \text{ mm}^2$$

$$\tau = \frac{36300 \times 82656/3}{(5/64 \times 10^6)(2 \times 25)} = 10/64 \text{ MPa}$$

اگر جزء سطح روی محور خمشی باشد تنش خمشی بر آن تأثیر نمی‌کند در غیر این صورت تنش خمشی نیز روی آن موجود است.

۲۶-۷. یک نیم رخ $IPE 360$ باری معادل 60 کیلو نیوتن بر متر را که شامل وزن خودش نیز می‌باشد، تحت دهانه ساده 8 متر تحمل می‌کند (مطابق شکل).

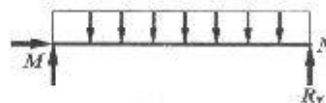


مسئله ۷-۲۶

مطلوب است تعیین تنشهای برشی در نقاط A و B . تنشهای به دست آمده را در روی یک جزء سطح با جهت‌های مربوطه نمایش دهید. اگر در روی این جزء سطحها، تنشهای خمشی نیز تأثیر می‌کند، بدون محاسبه این تنشها، آنها را با جهت صحیح در روی شکل نشان دهید.

$$\sum M_M = 0: 60 \times 8 \times 4 - R_r \times 8 = 0 \rightarrow R_r = 240 \text{ kN}$$

$$V = 240 - 60 \times 2 = 120 \text{ kN}$$

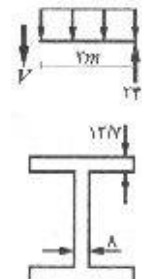


با مراجعه به جدول ۴ ضمیمه مشخصات مورد نیاز برای $IPE 360$ به دست می‌آید.

$$Q_A = 12/7 \times 170 \times (180 - 6/35) + (180 - 12/7) \times 8 \times \left(\frac{180 - 12/7}{2} \right)$$

$$Q_A = 4/87 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{(120 \times 10^3)(4/87 \times 10^6)}{(16270 \times 10^4)(8)} = 44/9 \text{ MPa}$$

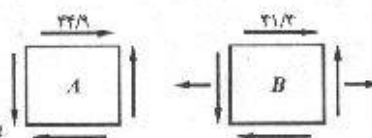


تنش برشی در تیرها / ۱۸۳

$$Q_B = 12/7 \times 170 \times (180 - 6/35) + (75 - 12/7) \times 8 \times \left(\frac{75 - 12/7}{2} \right) \times 8 \times (180 - 75)$$

$$Q_B = 4/49 \times 10^6$$

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{(120 \times 10^3)(4/49 \times 10^6)}{(16270 \times 10^4)(8)} = 41/4 \text{ MPa}$$



۲۷-۷. یک تیر با مقطع مستطیل توپر به ابعاد 200×300 میلیمتر، مطابق شکل بارگذاری شده است. از این تیر یک قطعه $50 \times 150 \times 200$ میلیمتر که در شکل به صورت سایه دار نشان داده شده است، جدا نمایید. سپس در روی ترسیمه جسم آزاد این قطعه، نقطه تأثیر، مقدار و جهت تمام نیروهای برآیند ناشی از تنشهای برشی و خمشی را نشان دهید. از وزن تیر صرف نظر کنید.

$$\sum M_A = 0 : R_B \times 3 = 100 \times 1/8 \Rightarrow R_B = 60 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : R_A = 40 \text{ kN}$$

$$I = \frac{1}{12} (0/2)(0/3)^3 = 4/5 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\sigma_L = \frac{M_L y}{I} = \frac{(40 \times 1/2)(0/15)}{4/5 \times 10^{-7}} = 16000 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_R = \frac{M_R y}{I} = \frac{(40 \times 1/25)(0/15)}{4/5 \times 10^{-7}} = 16700 \text{ kN/m}^2$$

$$F_L = \frac{1}{2} (16000)(0/15 \times 0/2) = 240 \text{ kN}$$

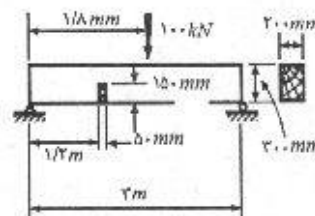
$$F_R = \frac{1}{2} (16700)(0/15 \times 0/2) = 250 \text{ kN}$$

$$Q = (0/15 \times 0/2)(0/0.75) = 2/25 \times 10^{-2}$$

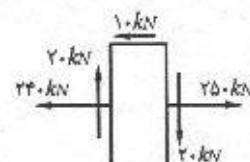
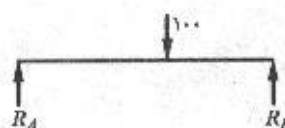
$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{40 \times 2/25 \times 10^{-2}}{4/5 \times 10^{-7} \times 0/2} = 10000 \text{ kN/m}^2 = 1 \text{ MPa}$$

$$\text{نیروی برشی} = 10000 \times (0/0.5 \times 0/2) = 10 \text{ kN}$$

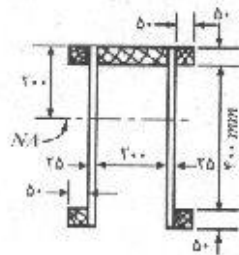
$$\text{نیروی عمودی} = \frac{V}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ kN}$$



مسئله ۷-۲۷



۲۸-۷. مطابق شکل، مقطع یک تیر از به هم چسباندن چند قطعه تخته سه لای ساخته شده است. در یک مقطع بحرانی، این مقطع باید بتواند نیروی برشی قائمی معادل ۱۵ کیلو نیوتن را تحمل کند.



مشاله ۷-۲۸

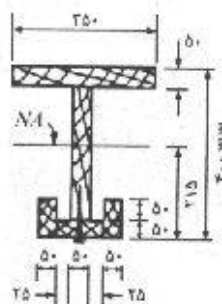
مطلوب است تعیین تنش برشی حداکثر در سطوح تماس قطعات به هم چسبیده به منظور انتخاب چسب مناسب برای کار. لنگر ماند کل مقطع در حول محور خنثی مساوی ۱۴۲۵×۱۰^۶ میلیمتر به توان ۴ می باشد.

تنش برشی در سطوح پایینی

$$\tau_a = \frac{(۱۵ \times ۱۰^۳) [(۵۰ \times ۵۰) \times ۲۷۵]}{(۱۴۲۵ \times ۱۰^۶)(۵۰)} = ۰/۱۴۴ MPa = ۱۴۴ kN/m^2$$

تنش برشی در سطوح بالا

$$\tau_b = \frac{(۱۵ \times ۱۰^۳) [(۵۰ \times ۲۰۰) \times ۱۷۵]}{(۱۴۲۵ \times ۱۰^۶) \times ۲(۵۰)} = ۰/۱۸۴ MPa = ۱۸۴ kN/m^2$$



مشاله ۷-۲۹

۲۹-۷. مقطع یک تیر چوبی مطابق شکل می باشد. اتصال بال پایینی به جان توسط میخهایی که به فاصله ۴۰ میلیمتر در امتداد طولی تیر کوبیده شده اند، تأمین می شود. اتصال دو قسمت قائم بال پایینی به قسمت افقی، توسط چسب تأمین شده است. اگر این مقطع تحت تأثیر نیروی برشی قائم ۲۵ کیلو نیوتن قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین نیروی برشی موجود در میخها و تنش برشی در چسب. لنگر ماند کل مقطع در حول محور خنثی مساوی ۱۰۳۰×۱۰^۶ میلیمتر به توان ۴ می باشد.

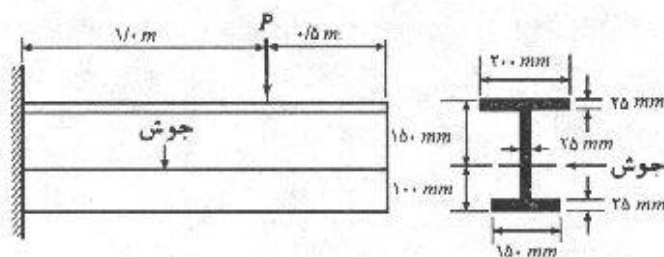
تنش برشی در چسب:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{۲۵۰۰۰ [(۱۰۰ \times ۵۰) (۲۱۵ - ۵۰)]}{(۱۰۳۰ \times ۱۰^۶)(۵۰)} = ۰/۴۰ MPa$$

$$F = qs = \frac{VQ}{I} s$$

$$F = \frac{(۲۵۰۰۰) [۲(۱۰۰ \times ۵۰) (۲۱۵ - ۵۰) + (۱۰۰ \times ۵۰) (۲۱۵ - ۲۵)]}{(۱۰۳۰ \times ۱۰^۶)} \times (۴۰) = ۲۵۲۴ N$$

۳۰-۷. مطابق شکل، مقطع یک تیر طره ای به دهانه ۱/۵ متر از جوش دادن دو نیم رخ سپری به یکدیگر ساخته شده است. مطلوب است تعیین نیروی P که تیر می تواند در وضعیت نشان داده شده تحمل کند. از وزن تیر صرف نظر کنید. تنش مجاز خمشی در فشار و کشش مساوی ۱۵۰ نیوتن بر میلیمتر مربع و تنش مجاز برشی در مصالح نیمرخها مساوی ۱۰۰ نیوتن بر میلیمتر مربع و نیروی برشی مجاز در مصالح جوش مساوی ۲ کیلو نیوتن بر میلیمتر طول جوش می باشد.



مسئله ۷-۳۰

$$\sum Ay = (0.025 \times 0.15)(0.0125) + (0.2 \times 0.025)(0.125) + (0.025 \times 0.2)(0.2375) \\ = 1/86 \times 10^{-3} m^3$$

$$\sum A = (0.025 \times 0.15) + (0.2 \times 0.025) + (0.025 \times 0.2) = 1/375 \times 10^{-3} m^2$$

$$\bar{y} = \frac{1/86 \times 10^{-3}}{1/375 \times 10^{-3}} = 0.135 m$$

$$I = \frac{1}{12} (0.2)(0.025)^3 + (0.2 \times 0.025)(0.103)^2 + \frac{1}{12} (0.025)(0.2)^3 \\ + (0.025 \times 0.2)(0.01)^2 + \frac{1}{12} (0.15)(0.025)^3 + (0.15 \times 0.025)(0.123)^2 \\ = 1/3 \times 10^{-8} m^4$$

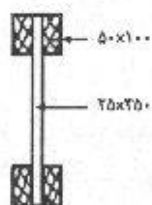
$$\sigma = \frac{M.c}{I} \Rightarrow P \times 1 = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(150 \times 10^6)(1/3 \times 10^{-8})}{0.135} = 144 kN$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} \Rightarrow P = \frac{\tau It}{Q} = \frac{(100 \times 10^6)(1/3 \times 10^{-3})(0.025)}{(0.025 \times 0.15)(0.123) + (0.025 \times 0.11)\left(\frac{0.11}{2}\right)} \\ = 531000 N = 531 kN$$

$$q = \frac{VQ}{I} \Rightarrow P = \frac{qI}{Q} = \frac{(2 \times 10^6)(1/3 \times 10^{-3})}{(0.025 \times 0.15)(0.123) + (0.025 \times 0.075)(0.0725)} = 435 kN$$

$$P = 144 kN$$

کمترین مقدار به دست آمده برای P جواب مسأله می‌باشد.



مسئله ۷-۳۱

۳۱-۷. مقطع یک تیر از چهار قطعه چوب داگلاس فیر به ابعاد 50×100 میلیمتر که به یک سه لایه داگلاس فیر به ابعاد 25×450 میلیمتر چسب شده‌اند، تشکیل شده است (مطابق شکل). مطلوب است تعیین حداکثر نیروی برشی مجاز و حداکثر لنگر خمشی مجاز در صورتی که تنش خمشی مجاز مساوی 10 نیوتن بر میلیمتر مربع و تنش برشی مجاز در مصالح چوب مساوی 0.6 نیوتن بر میلیمتر مربع و تنش

برشی مجاز در اتصال چسبی ۰/۳ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسب میلیمتر می باشند.

$$I = \frac{1}{12} (0/125)(0/45)^3 - \frac{1}{12} (0/1)(0/25)^3 = 8/19 \times 10^{-7} m^4$$

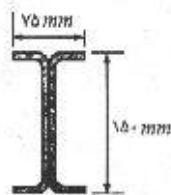
$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(10 \times 10^6)(8/19 \times 10^{-7})}{0/225} = 36400 N.m = 36/4 kN.m$$

$$V_{(ج)} = \frac{\tau I b}{Q} = \frac{(0/3 \times 10^6)(8/19 \times 10^{-7})(0/1)}{(0/05 \times 0/1)(0/175)} = 28/1 kN$$

$$V_{(د)} = \frac{(0/6 \times 10^6)(8/19 \times 10^{-7})(0/25)}{(0/125 \times 0/1)(0/175) + (0/025 \times 0/125)(\frac{0/125}{2})} = 5/16 kN$$

حداکثر نیروی برشی مجاز ۵/۱۶ kN می باشد.

۳۲-۷. مقطع یک نیمرخ نیمه سبک مطابق شکل می باشد. (الف) اگر ضخامت ورقی که پروفیل های فوق



مسئله ۳۲-۷

از آن ساخته شده مساوی ۳/۴ میلیمتر و تنش خمشی مجاز مساوی ۱۲۵ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد، حداکثر لنگر خمشی مجاز مقطع چقدر می باشد؟ (ب) اگر تنش برشی مجاز مساوی ۸۰ نیوتن بر میلیمتر مربع باشد، حداکثر نیروی برشی مجاز برای مقطع فوق چقدر است. در محاسبات از گردی گوشه های نیمرخها صرف نظر نمایید.

$$I = \frac{1}{12} (75)(150)^3 - \frac{1}{12} (75 - 2 \times 3/4)(150 - 2 \times 3/4)^3 = 4/4 \times 10^6 mm^4$$

$$M = \frac{\sigma I}{c} = \frac{(125)(4/4 \times 10^6)}{75} = 7/33 \times 10^6 N.mm = 733 kN.m$$

$$Q = (75 \times 3/4) \left(75 - \frac{3/4}{2} \right) + \left[(2 \times 3/4) \times (75 - 3/4) \times \left(\frac{75 - 3/4}{2} \right) \right]$$

$$= 36121/8 mm^3$$

$$V = \frac{\tau I b}{Q} = \frac{(80)(4/4 \times 10^6)(6/8)}{36121/8} = 66/265 kN$$

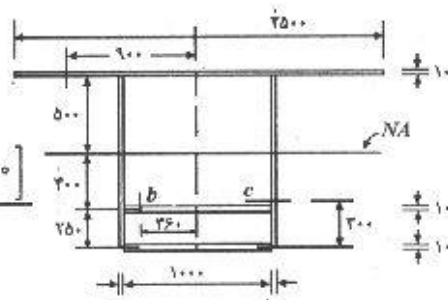
۳۳-۷. ابعاد مقطع یک تیر جعبه ای که نیروی برشی قائمی مساوی ۱۵۰۰ کیلو نیوتن را انتقال می دهد،

مطابق شکل است. مطلوب است تعیین تنش های برشی در مقاطع a، b و c. لنگر ماند مقطع حول

محور خشی مساوی 15000×10^6 میلیمتر به توان ۴ می باشد.

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

$$\tau_a = \frac{(1500 \times 10^3) \left[\left(\frac{2500}{2} - 900 \right) \times 10 \times 500 \right]}{(15 \times 10^9)(10)} = 17/5 \text{ MPa}$$



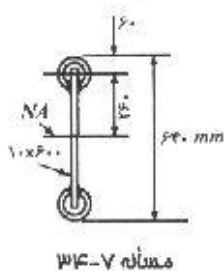
(تمام ابعاد بر حسب میلی متر)

مسئله ۷-۳۳

$$\tau_b = \frac{(1500 \times 10^3) [(360 \times 10)(400)]}{(15 \times 10^9)(10)} = 14/4 \text{ MPa}$$

$$Q_c = (1000 \times 10) \times 650 + (1000 \times 10) \times 400 + 2 \times (300 \times 10) \times \left(650 - \frac{300}{2} \right) = 13/5 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau_c = \frac{(1500 \times 10^3)(13/5 \times 10^6)}{(15 \times 10^9)(2 \times 10)} = 67/5 \text{ MPa}$$



مسئله ۷-۳۴

۷-۳۴. با شکاف دادن دو نیم رخ لوله ای به قطر ۱۲۰ و به ضخامت ۱۰ میلیمتر و سپس جوش آنها به یک ورق ۶۰۰ × ۱۰ میلیمتر، مقطعی مطابق شکل ساخته ایم. انگار ماند مقطع کل در حول محور خنثای مربوطه مساوی ۴۶۳ × ۱۰۶ میلیمتر به توان ۴ می باشد. اگر این مقطع نیروی برشی قائمی مساوی ۱۸۰ کیلونیوتن را انتقال دهد، مطلوب است تعیین تنش برشی در لوله و ورق جان در تراز می مساوی ۲۶۰ میلیمتر بالای محور خنثی.

$$A = \frac{\pi}{4} (120^2 - 100^2) = 3455/7 \text{ mm}^2$$

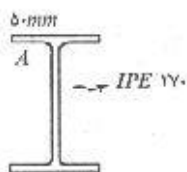
$$\bar{R} = \frac{60 + 50}{2} = 55 \text{ mm} \quad \bar{y} = 260 + \frac{2\bar{R}}{\pi} = 295 \text{ mm}$$

$$Q_p = \left(\frac{1}{2} \times 3455/7 \right) (295) = 5/1 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{pipe} = \frac{(180 \times 10^3)(5/1 \times 10^5)}{(463 \times 10^6)(2 \times 10)} = 10/53 \text{ MPa}$$

$$Q_w = (300 - 260) \times 10 \times \left(260 + \frac{300 - 260}{2} \right) = 1/12 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{web} = \frac{(180 \times 10^3)(1/12 \times 10^6)}{(463 \times 10^6)(10)} = 2/35 \text{ MPa}$$



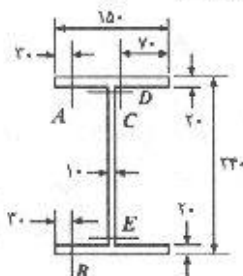
مسئله ۳۵-۷

۳۵-۷. مطلوب است تعیین تنش برشی در مقطع A از یک تیر $IPE 170$ که نیروی برشی قائمی مساوی 90 کیلونیوتن و لنگر خمشی $3/5$ کیلو نیوتن متر را حمل می‌کند.

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{(90 \times 10^3) \left[(50 \times 10/2) \left(\frac{170}{2} - \frac{10/2}{2} \right) \right]}{(5790 \times 10^4) (10/2)} = 10/1 \text{ MPa}$$

مشخصات مورد نیاز از جدول ۴ ضمیمه برداشت شده است.

۳۶-۷. تیری با مقطع نشان داده شده در شکل مفروض است. اگر در ناحیه‌ای از این تیر، نیروی برشی مثبتی مساوی 100 کیلونیوتن وجود داشته باشد، مطلوب است، (الف) جریان برش q که در هر یک از پنج مقطع نشان داده شده وجود دارد. (ب) فرض کنید که لنگر خمشی مثبتی معادل 27000 نیوتن در یک مقطع از تیر عمل می‌کند و در مقطع دیگری که به فاصله 10 میلیمتر از آن قرار دارد، لنگر خمشی بزرگتری وارد می‌شود. یک طرح سه بعدی از قطعاتی که توسط این دو مقطع عرضی و پنج مقطع A, B, C, D و E از تیر جدا می‌شوند، رسم نمایید و در روی آنها تمام نیروهای مؤثر را نشان دهید، از تنش برشی قائم در بالا صرف نظر نمایید. (تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلیمتر هستند)



(ابعاد بر حسب میلی‌متر)

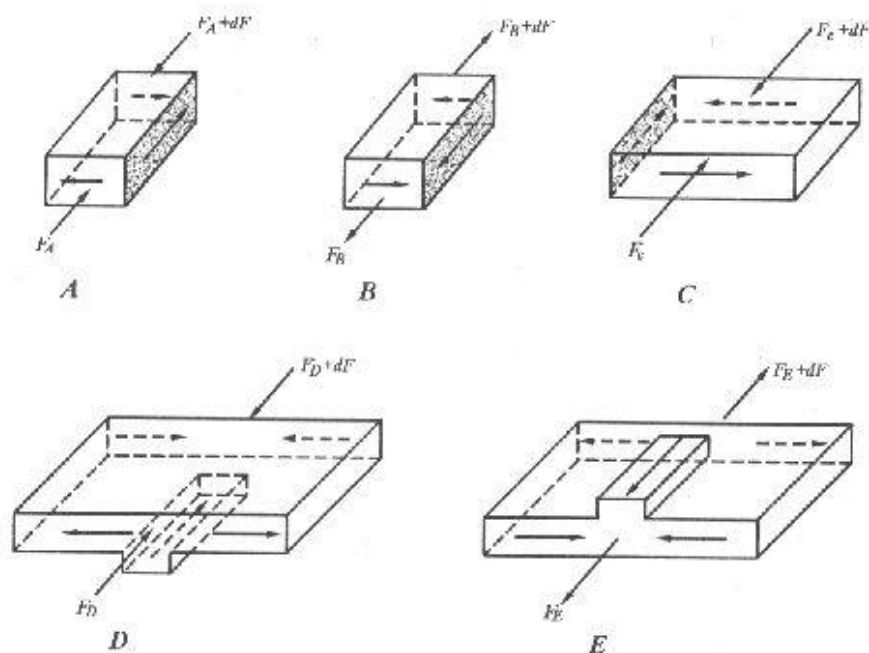
مسئله ۳۶-۷

$$I = \frac{1}{12} (0/15) (0/24)^3 - \frac{1}{12} (0/14) (0/2)^3 = 7/95 \times 10^{-5} m^4$$

$$q_A = q_B = \frac{VQ}{I} = \frac{100 (kN) \times (0/03 \times 0/02) (0/11)}{7/95 \times 10^{-5}} = 83 \text{ kN/m}$$

$$q_C = \frac{100 \times (0/07 \times 0/02) (0/11)}{7/95 \times 10^{-5}} = 194 \text{ kN/m}$$

$$q_D = q_E = \frac{100 \times (0/15 \times 0/02) (0/11)}{7/95 \times 10^{-5}} = 415 \text{ kN/m}$$



۳۷-۷. تیری با مقطع نشان داده شده در شکل، نیروی برشی قائمی مساوی ۳۰ کیلو نیوتن را که بر مرکز برش آن وارد می‌شود، انتقال می‌دهد. مطلوب است تعیین تنشهای برشی در مقاطع A، B و C و لنگر مانند در حول محور خنثی مساوی $12/2 \times 10^6$ میلیمتر به توان ۴ و ضخامت مقطع در تمام نقاط ثابت و مساوی ۱۰ میلیمتر می‌باشد.

$$Q_A = (30 \times 10) \left(75 - 10 - \frac{30}{2} \right) \rightarrow Q_A = 15000 \text{ mm}^2$$

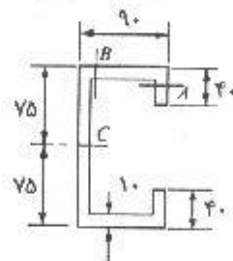
$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{(30 \times 10^3)(15000)}{(12/2 \times 10^6)(10)} = 3/4 \text{ N/mm}^2$$

$$Q_B = Q_A + (80 \times 10)(75 - 5) = 71000 \text{ mm}^2$$

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{(30 \times 10^3)(71000)}{(12/2 \times 10^6)(10)} = 17/46 \text{ N/mm}^2$$

$$Q_C = Q_B + (75 \times 10) \left(\frac{75}{2} \right) = 99125 \text{ mm}^2$$

$$\tau_C = \frac{VQ_C}{It} = \frac{(30 \times 10^3)(99125)}{(12/2 \times 10^6)(10)} = 24/37 \text{ N/mm}^2$$



(تمام ابعاد بر حسب میلی‌متر)
مسئله ۳۷-۷

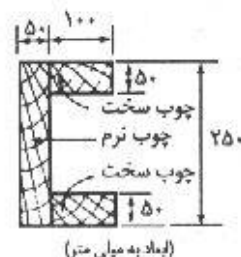
۳۸-۷. مطابق شکل، مقطع یک تیر طره‌ای به دهانه ۱/۲ متر، از به هم چسباندن سه قطعه تخت، ساخته شده است. یک نیروی متمرکز به طرف بالایی مساوی ۴۰۰۰ نیوتن قرار است که بر این تیر طوری وارد گردد که هیچ گونه لنگر پیچشی تولید نکند، محل تأثیر این نیرو، کجا باید باشد؟

فرض کنید که تخته‌ها را بتوان نازک فرض کرد. ضریب ارتجاعی چوب سخت‌تر مساوی $10^5/1$ و ضریب ارتجاعی چوب نرم‌تر مساوی $10^5/0.7$ نیوتن بر میلیمتر مربع می‌باشد. (راهنمایی: مقطع را به یک مقطع معادل که از یک ماده ساخته شده، تبدیل نمایید).

$$n = \frac{0.1}{0.07} = \frac{10}{7}$$

$$nb = \frac{10}{7} \times 100 = 143 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12} (143)(250)^3 - \frac{1}{12} (143)(150)^3 = 211 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



مسئله ۷-۳۸

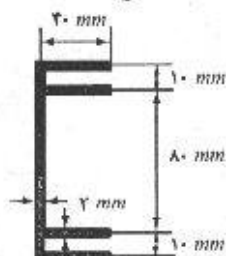
همانگونه که در بحث مرکز برش ملاحظه نمودید، رابطه مرکز برش برای این نوع مقطع به شکل زیر می‌باشد:

$$e = \frac{b^2 h^2 t}{4I} = \frac{(150)^2 (250)^2 (50)}{4 (211 \times 10^6)} = 83/3 \text{ mm}$$

$$83/3 - 250 = 60/3$$

یعنی نیرو باید در فاصله $60/3 \text{ mm}$ از لبه سمت چپ مقطع اثر کند.

۷-۳۹. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده.



مسئله ۷-۳۹

$$I = \frac{1}{12} (2)(100)^3 + 2(2 \times 40)(40)^2 + 2 \times (2 \times 40)(50)^2 = 8/23 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

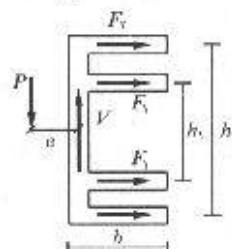
از جمله $(2)(40)(50)^2$ به خاطر ناچیز بودن در مقایسه با سایر جمله‌ها صرف نظر شده است.

$$P \cdot e = h_1 F_1 + h_2 F_2, \quad P = V$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \tau_1 A_1 = \frac{V Q_1}{2I t} A_1 = \frac{V A_1 \bar{y}_1}{2I t} A_1$$

$$F_2 = \frac{V A_2 \bar{y}_2}{2I t} A_2$$

به همین ترتیب:



نشی برشی در تیرها / ۱۹۱

$$A_y = tb = A_x$$

$$\bar{y}_1 = \frac{h_1}{2}, \quad \bar{y}_2 = \frac{h_2}{2}$$

از ترکیب روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$e = \frac{tb^3}{4I} (h_1^2 + h_2^2)$$

$$e = \frac{2(40)^3}{4(8/23 \times 10^5)} (80^2 + 100^2) = 15/9 \text{ mm}$$

۴۰-۷. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده.

$$I = \frac{1}{12} (2)(50)^3 + 2 \times (2 \times 26)(25)^3 = 8/58 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$P.e = F_r h_r - F_l h_l \quad (1), \quad h_r = h_l = 50 \text{ mm}, \quad P = V$$

$$F_r = \frac{VA_r \bar{y}_1}{2It} A_r$$

$$F_l = \frac{VA_l \bar{y}_2}{2It} A_l$$

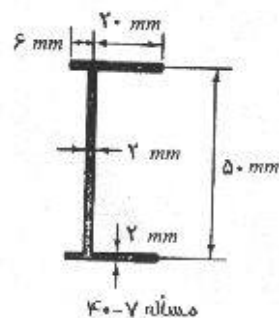
$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 25 \text{ mm}$$

$$F_r = \frac{V(2 \times 20)^2(25)}{2(8/58 \times 10^7)(2)} = 11/655 \times 10^{-2} \times V$$

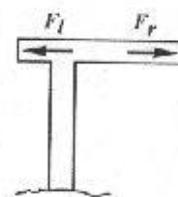
$$F_l = \frac{V(2 \times 6)^2(25)}{2(8/58 \times 10^7)(2)} = 1/049 \times 10^{-2} \times V$$

$$(1) \rightarrow e = \frac{11/655 \times 10^{-2} V \times 50 - 1/049 \times 10^{-2} V \times 50}{V}$$

$$\rightarrow e = 5/3 \text{ mm}$$



مسئله ۴۰-۷

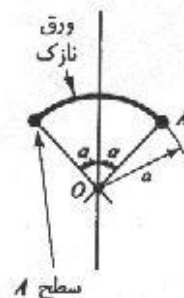


۴۱-۷. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده. فرض کنید که سطح مقطع ورق، در مقایسه با سطوح A ناچیز است.

$$I = 0 + Ad^2 = 2A(a \sin \alpha)^2$$

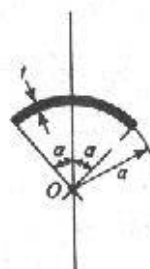
$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{VA(a \sin \alpha)}{2A(a \sin \alpha)^2} = \frac{V}{2a \sin \alpha}$$

$$P.e = Ve = \frac{2\pi a(2\alpha)}{2\pi} aq = \frac{V\alpha a}{\sin \alpha} \Rightarrow e = \frac{\alpha}{\sin \alpha} \cdot a$$



مسئله ۴۱-۷

۴۲-۷. مطلوب است تعیین مرکز برش برای مقطع نشان داده شده.



مسئله ۴۲-۷

$$I = \int y' dA = \gamma \int_0^\alpha (a \sin \theta)^2 a d\theta = \gamma a^3 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$Q = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (a \sin \theta) a d\theta = a^2 t (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V}{I} a^2 t (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$P.e = V.e = \gamma \int_0^\alpha \left(\frac{q}{t}\right) (a d\theta) a = \frac{\gamma V a^3 t}{I} \int_0^\alpha (\cos \theta - \cos \alpha) d\theta$$

$$\Rightarrow V.e = \frac{\gamma V a^3 t}{I} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow e = \frac{\gamma a (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \quad (\text{از نقطه } O)$$

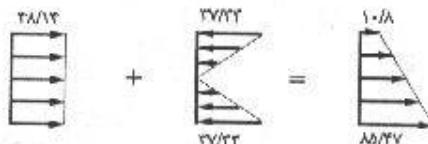
مسائل فصل هشتم

۸-۱. یک تیر ساده از نیمرخ $IPE ۳۶۰$ به طور همزمان تحت تأثیر بار گسترده یکنواختی به میزان ۳۰ کیلونیوتن بر متر (که شامل وزن تیر نیز می شود) و نیروی کششی معادل ۳۵۰ کیلونیوتن قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم اگر دهانه تیر ۳ متر باشد.

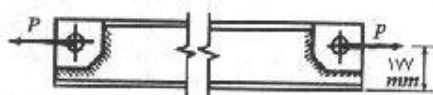
$$M_{max} = \frac{1}{8} w l^2 = \frac{1}{8} (30)(3)^2 = 33.75 \text{ kN.m}$$

از جدول ۴ ضمیمه برای $IPE ۳۶۰$: $A = 72.7 \text{ cm}^2$, $\left(S = \frac{C}{I}\right)$, $S = 90.4 \text{ cm}^3$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{350 \times 10^3}{72.7} + \frac{33.75 \times 10^3}{90.4 \times 10^{-6}} = 48/14 + 37/33 = 85/74 \text{ MPa کششی}$$

$$\sigma_{min} = 48/14 - 37/33 = 10/8 \text{ MPa کششی}$$


۸-۲. یک تیر آهن $IPE ۲۷۰$ همانند شکل زیر تحت تأثیر نیروی کششی خارج از مرکز P مساوی ۵۰۰ کیلونیوتن قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنشهای به وجود آمده در بالهای نیمرخ در وسط تیر.



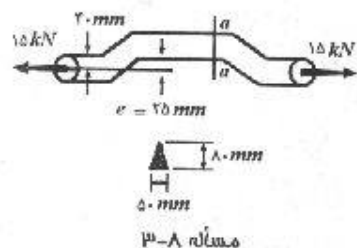
مسئله ۸-۲

با استفاده از جدول ۴ ضمیمه برای $IPE ۲۷۰$:

$$A = 45/9 \text{ cm}^2, \quad S = 429 \text{ cm}^3, \quad h = 270 \text{ mm}$$

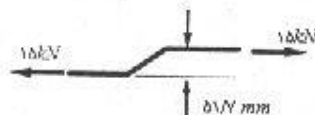
$$M = P \cdot e = 500 \times \left(177 - \frac{h}{2}\right) = 21000 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{500 \times 10^3}{45.9} + \frac{21 \times 10^3}{429 \times 10^{-6}} = 157/9 \text{ MPa}$$



مسئله ۸-۳

۸-۳. یک قطعه از ماشین که از آن برای انتقال نیروی کششی ۱۵ کیلونیوتنی استفاده می شود، در شکل نشان داده شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم به وجود آمده در ناحیه خارج از محور قطعه.



$$e = 20 + \frac{18}{3} = 51/3 \text{ mm}$$

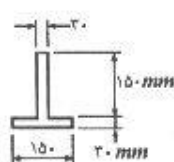
$$M = 15000 \times 0.517 = 775/5 \text{ N.m}$$

$$I = \frac{1}{36} (50)(80)^3 = 7/11 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{top} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{15000}{\frac{1}{4} (50)(80)} - \frac{775/5 \times 10^3 \times \left(\frac{4}{3} \times 80\right)}{7/11 \times 10^5} = 7/5 - 58/17 = -50/7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bottom} = \frac{15000}{\frac{1}{4} (50)(80)} + \frac{775/5 \times 10^3 \times \left(\frac{1}{3} \times 80\right)}{7/11 \times 10^5} = 7/5 + 29/1 = 36/6 \text{ MPa}$$

در نتیجه تنش ماکزیمم $50/7 \text{ MPa}$ از نوع فشاری بوده که در بالای مقطع ایجاد می‌شود.



مسئله ۴-۸

۴-۸. یک قطعه ماشین، مطابق قطعه مسئله ۳-۸، منتهی با مقطع سپری که در شکل نشان داده شده، مفروض است. در انتهای این قطعه نیروی کششی P در فاصله 90 میلی‌متری از سطح تحتانی بال تأثیر می‌کند و میزان خروج از مرکز e از خط تأثیر نیرو مساوی 60 میلی‌متر می‌باشد. در صورتی که مقدار P مساوی 175 کیلونیوتن و رفتار تیر در محدوده ارتجاعی قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم به وجود آمده در قطعه.

$$\bar{y} = \frac{(150 \times 30)(15) + (150 \times 30)(105)}{2 \times (150 \times 30)} = 60 \text{ mm}$$

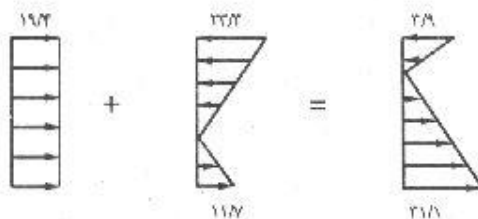
$$I = \frac{1}{12} (150)(30)^3 + (150 \times 30)(45)^2 + \frac{1}{12} (30)(150)^3 + (30 \times 150)(105 - 60)^2$$

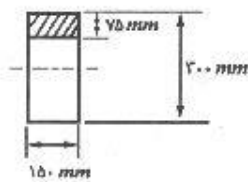
$$\Rightarrow I = 27 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$M = P \times e = 175000 \times (90 - 60) = 5/25 \times 10^7 \text{ N.mm}$$

$$\sigma_{top} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{175 \times 10^3}{2 \times 150 \times 30} - \frac{(5/25 \times 10^7)(120)}{27 \times 10^6} = 19/4 - 23/3 = -3/9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bottom} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{175 \times 10^3}{2 \times 150 \times 30} + \frac{(5/25 \times 10^7)(60)}{27 \times 10^6} = 19/4 + 11/7 = 31/1 \text{ MPa}$$





مسئله ۵-۸

۵-۸. تیری با مقطع نشان داده شده در شکل مفروض است. اگر در یک مقطع مشخص، این تیر تحت تأثیر لنگر خمشی $۲۰ + ۲۰$ کیلونیوتن متر، نیروی برشی قائم $۲۰ + ۲۰$ کیلونیوتن و نیروی کششی ۳۰ کیلونیوتن قرار داشته باشد، مطلوب است تعیین برآیند نیروهای قائم مؤثر بر قسمت سایه خورده مقطع.

$$\sigma_{axial} = \frac{P}{A} = \frac{30}{(0/15)(0/30)} = 667 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{flex(max)} = \frac{Mc}{I} = \frac{20 \times 0/15}{\frac{1}{12}(0/15)(0/3)^3} = 8890 \text{ kN/m}^2$$

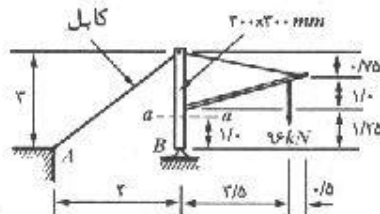
حال تنش ناشی از خمشی در پایین ناحیه سایه خورده را بدست می آوریم:

$$\sigma_{flex(low)} = \frac{My}{I} = \frac{20 \times 0/075}{\frac{1}{12}(0/15)(0/3)^3} = 4444/5 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{flex(ave)} = \frac{8890 + 4444/5}{2} = 6667/2 \text{ kN/m}^2$$

$$F = [\sigma_{axial} + \sigma_{flex(ave)}] \cdot A = [667 + 6667/2] \times (0/075 \times 0/15) = 82/5 \text{ kN}$$

۶-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری که به طور قائم بر مقطع $a-a$ از دکل شکل زیر تأثیر می کند.



مسئله ۶-۸

$$\sum M_B = 0: 96 \times 3/5 - \frac{4}{5} T \times 3 = 0 \rightarrow T = 140 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: H_x - \frac{4}{5} \times 140 = 0 \rightarrow H_x = 112 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: B_y - 96 - \frac{3}{5} \times 140 = 0 \rightarrow B_y = 180 \text{ kN}$$

$$P_{ax} = 180 \text{ kN (فشاری)} \quad M_{ax} = 112 \times 1 = 112 \text{ kN.m}$$

$$S = \frac{1}{6} bh^3 = \frac{1}{6} \times (300)(300)^3 = 4/5 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{max(فشاری)} = -\frac{P}{A} - \frac{M}{S} = -\frac{180 \times 10^3}{300^2} - \frac{112 \times 10^6}{4/5 \times 10^9} = -26/89 \text{ MPa}$$

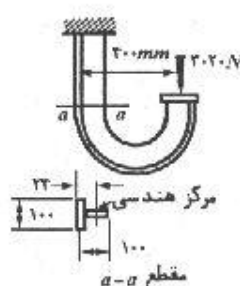
۶۶۷ kPa



۸۸۹ MPa



۴۴۴۴/۵ MPa



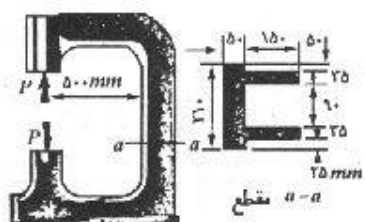
مسئله ۷-۸

۷-۸. یک قلاب بزرگ که از نیمرخ سپری ساخته شده، همانند شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین بزرگترین تنش قائمی که در انتهای گیردار به وجود می‌آید. برای نیمرخ به کار رفته در این مسئله، $A = 955$ میلی‌متر مربع و $I_D = 0.89 \times 10^6$ میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد.

$$P = 3020 \text{ N}$$

$$M = 3020(0.4 - 0.24) = 1135/5 \text{ N.m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{3020}{955} + \frac{(1135/5 \times 10^3)(100 - 24)}{0.89 \times 10^6} = 100/1 \text{ N/mm}^2$$



مسئله ۸-۸

۸-۸. قاب چدنی یک دستگاه پرس سوراخ کن، دارای مشخصات نشان داده شده در شکل می‌باشد. در صورتی که تنش مجاز کششی ۲۸ نیوتن بر میلی‌متر مربع و تنش مجاز فشاری ۸۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، مقدار نیرویی مانند P که توسط مقطع $a-a$ کنترل می‌شود، چقدر است.

$$\bar{y} = \frac{(210 \times 50)(25) + (150 \times 35)(125) \times 2}{(210 \times 50) + 2(150 \times 35)} = 75 \text{ mm}$$

$$I = \frac{1}{12} (210)(50)^3 + (210 \times 50)(50)^2 + 2 \left[\frac{1}{12} (35)(150)^3 + (35 \times 150)(50)^2 \right] = 74/36 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$M = (500 + 75)P = 575P$$

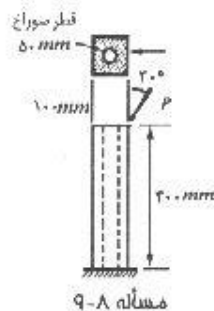
$$A = 210 \times 50 + 2(150 \times 35) = 21000 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_t = 28 = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{21000} + \frac{(575P)(75)}{(74/36 \times 10^6)} = 6/276 \times 10^{-6} P \Rightarrow P = 44617 \text{ N}$$

$$\sigma_c = 80 = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{P}{21000} + \frac{(575P)(125)}{(74/36 \times 10^6)} = 1/0.14 \times 10^{-6} P \Rightarrow P = 78880 \text{ N}$$

$$P = 44617 \text{ N}$$

تنشهای مرکب / ۲۰۳



مسئله ۹-۸

۹-۸. میله کوتاهی با مقطع مربع به ابعاد ۱۰۰ میلی‌متر که داخل آن سوراخی به قطر ۵۰ میلی‌متر ایجاد شده، تحت تأثیر نیرویی همانند شکل می‌باشد. با صرف‌نظر کردن از وزن میله، مطلوب است تعیین نیروی P به نحوی که حداکثر تنش قائم در انتهای گیردار از ۱۴۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز نکند.

$$P_x = P \sin 30^\circ \quad P_y = P \cos 30^\circ$$

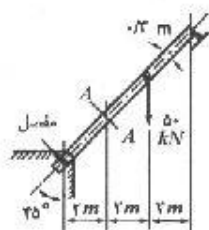
$$M = P \sin 30^\circ \times (0/4) - P \cos 30^\circ (0/0.5) = 0/157 P \text{ N.m}$$

$$A = (0/1)^2 - \frac{\pi}{4} (0/0.5)^2 = 8/0.4 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{1}{12} (0/1)^4 - \frac{\pi}{4} (0/0.25)^4 = 8/0.3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

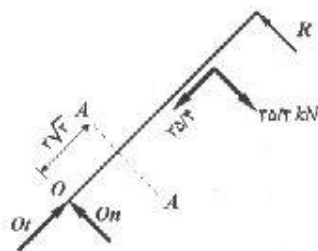
$$\sigma = 140 \times 10^6 \text{ (N/m}^2\text{)} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P \cos 30^\circ}{8/0.4 \times 10^{-2}} + \frac{0/157 P (0/0.5)}{8/0.3 \times 10^{-6}}$$

$$140 \times 10^6 = 107/7 P + 977/6 P \Rightarrow P = 129 \text{ kN}$$



مسئله ۱۰-۸

۱۰-۸. یک تیر شیب‌دار با مقطع $0/3 \times 0/2$ متر، بار متمرکز به طرف پائینی همانند شکل تحمل می‌کند. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم مؤثر بر مقطع $A-A$ از وزن تیر صرف‌نظر کنید و فرض نمایید که بارها و واکنشهای وارده هیچ گونه خروج از مرکزیتی ندارند.



$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 50 = 35/4 \text{ kN}$$

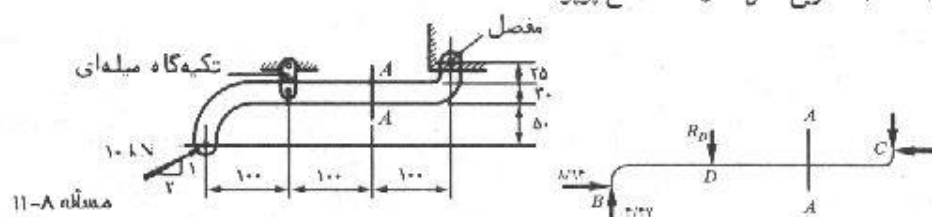
$$\sum M_o = 0 : R = \frac{3}{4} \times 35/4 = 22/6 \text{ kN}$$

$$\sum F_t = 0 : O_t = 35/4 \text{ kN}$$

$$\sum F_n = 0 : O_n = 11/8 \text{ kN}$$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = -\frac{35/4 \times 10^{-3}}{0/3 \times 0/3} - \frac{(11/8 \times 2\sqrt{3})(0/15)}{\frac{1}{12} (0/2)(0/3)^3} = -11/7 \text{ MN/m}^2 \text{ (MPa)}$$

۱۱-۸. یک قطعه ماشین با مقطعی به ابعاد 30×10 میلی‌متر، همانند شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم مؤثر بر مقطع $A-A$. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشد.



$$\sum M_c = 0: 4/47 \times 300 - 8/94 \times 100 = R_D \times 200 + R_B \times 200 \rightarrow R_D = 2/01 \text{ kN}$$

$$M_{AA} = 4/47 \times 0/2 - 8/94 \times 0/065 - 2/01 \times 0/1 = 0/112 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = -\frac{8/94 \times 10^{-2}}{(0/03 \times 0/01)} - \frac{(0/112 \times 10^{-2})(0/015)}{\frac{1}{12} (0/01) \times (0/03)^3} = -29/8 - 74/7$$

$$= -104/5 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = -29/8 + 74/7 = 44/9 \quad \text{کششی}$$

۱۲-۸. در شکل زیر، مطلوب تعیین حداکثر تنش قائم بر مقطع $A-A$ عضو BC از میله فولادی به ابعاد 150×150 میلی متر ساخته شده است. از وزن میله صرف نظر کنید.

$$C_x = C_y = \frac{707/1}{\sqrt{2}} = 500 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0: 500 \times 1 - 500 \times 0/75 - D_x \times 0/5 - D_y \times 0/75 = 0$$

$$D_x = D_y$$

از حل معادلات فوق نتیجه می شود:

$$D_x = D_y = 100 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: B_x = 600 \text{ kN}$$

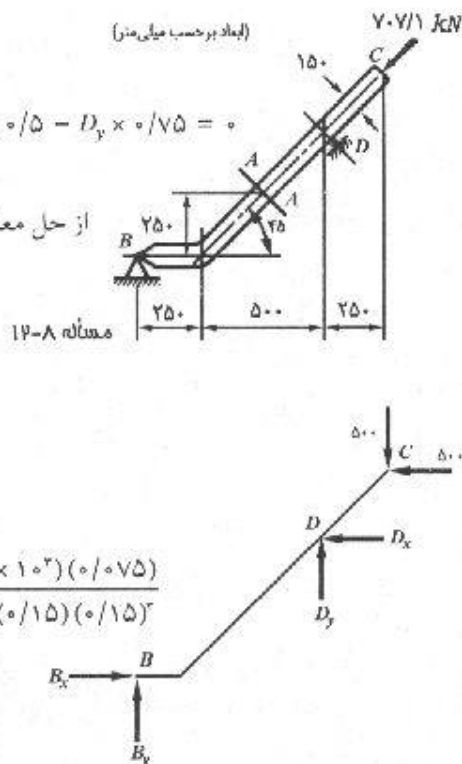
$$\sum F_y = 0: B_y = 400 \text{ kN}$$

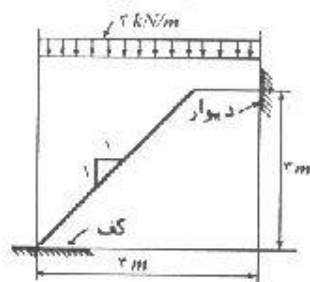
$$P = 600 \frac{\sqrt{2}}{2} + 400 \frac{\sqrt{2}}{2} = 707/1 \text{ kN},$$

$$M = 400 \times 0/5 - 600 \times 0/25 = 50 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{707/1 \times 10^3}{(0/15 \times 0/15)} - \frac{(50 \times 10^3)(0/075)}{\frac{1}{12} (0/15) (0/15)^3}$$

$$= -120/3 \text{ MPa}$$





مسئله ۸-۱۳

۸-۱۳. ابعاد پله یک کارخانه، مطابق شکل می باشد. دو تیر کناری این پله از ناودانی ۲۴۰ می باشند. اگر بار وارد بر یک ناودانی مطابق شکل باشد، مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم در مقطعی در ۱/۵ متری بالای کف. اتصال پله به کف را مفصلی فرض نمایید و هم چنین فرض کنید که دیوار فقط قادر است واکنش افقی ایجاد کند.

$$\sum M_A = 0 : R_B \times 2 - (2 \times 2)(2) = 0 \Rightarrow R_B = 4 \text{ kN}$$

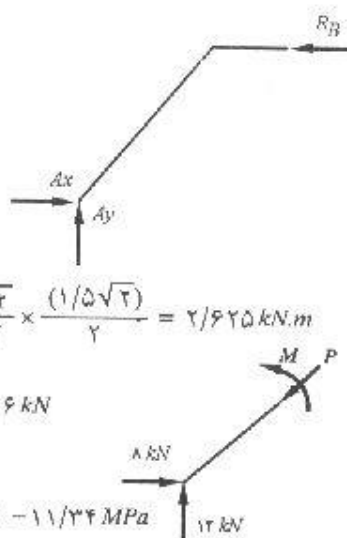
$$\sum F_x = 0 : A_x = 4 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = 2 \times 2 = 4 \text{ kN}$$

$$M_{aa} = \left(4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{1}{5}\sqrt{2} \right) - (2 \times 1/5) \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{(1/5)\sqrt{2}}{2} = 2/625 \text{ kN.m}$$

$$P = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times 1/5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P = 10/96 \text{ kN}$$

$$\sigma_m = \frac{P}{A} - \frac{M}{S} = -\frac{10/96 \times 10^3}{4230} - \frac{2/625 \times 10^3}{300 \times 10^3} = -11/34 \text{ MPa}$$



۸-۱۴. مسئله ۸-۱۳ را با فرض اینکه تکیه گاه فوقانی مفصلی و تکیه گاه تحتانی فقط واکنش قائم می تواند انتقال دهد، مجدداً حل نمایید.

$$\sum M_B = 0 : 4V_A - (2 \times 2) \times 2 = 0 \Rightarrow V_A = 6 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 : V_B = 2 \times 2 - 6 = 6 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 : H_B = 0$$

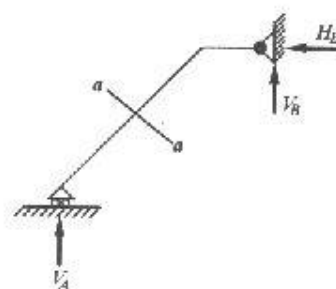
$$M_{aa} = 6 \times 1/5 - (2 \times 1/5) \times (0/5) = 5/63 \text{ kN.m}$$

$$P_{aa} = \frac{1}{\sqrt{2}} (6 - 2 \times 1/5) = 1 \text{ kN}$$

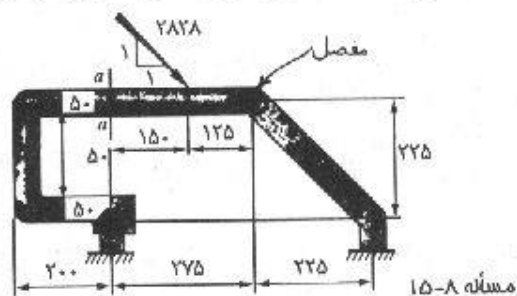
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S}$$

از جدول ۸ ضمیمه برای ناودانی ۲۴۰ : $A = 42/3 \text{ cm}^2$ و $S = 300 \text{ cm}^3$

$$\sigma_{max} = \frac{-1000}{4230} - \frac{5630 \times 10^3}{300 \times 10^3} = -19 \text{ MPa}$$



۱۵-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری در مقطع $a-a$ از سازه نشان داده شده در شکل زیر. مقطع $a-a$ به شکل دایره به قطر ۵۰ میلی متر می باشد.



$$F_x = F_y = \frac{2828}{\sqrt{2}} = 2000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: V_B \times 50 - 2000 \times 150 - 2000 \times (225 + 25) = 0$$

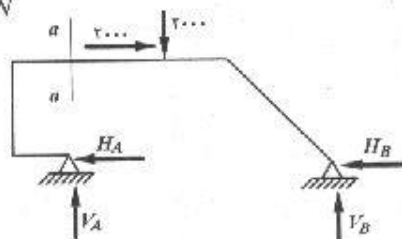
$$\rightarrow V_B = 1600 \text{ N} \quad H_B = V_B = 1600 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0: H_A = 2000 - 1600 = 400 \text{ N}$$

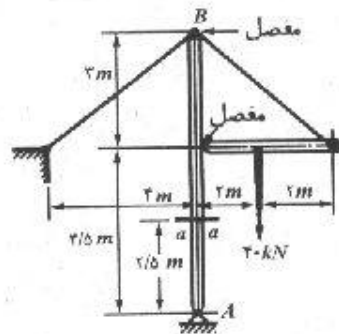
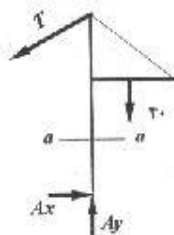
$$P_{a-a} = 400 \text{ N}$$

$$M_{a-a} = 400 \times 0.225 = 90 \text{ N.m}$$

$$\sigma_{\max(\text{فشاری})} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{400}{\frac{\pi}{4} (0.05)^2} - \frac{(90) \times (0.025)}{\frac{\pi}{4} (0.025)^3} = -7.1 \text{ MPa}$$



۱۶-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش کششی قائم مؤثر بر مقطع $a-a$ از شکل زیر. مقطع دکل به صورت دایره به قطر ۰/۳ متر می باشد.



$$\sum M_A = 0: \frac{5}{0} \times 5/5 = 40 \times 2 \Rightarrow T = 13.3 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: A_y = \frac{5}{0} T + 40 = 48 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: A_x = \frac{5}{0} T = 10.67$$

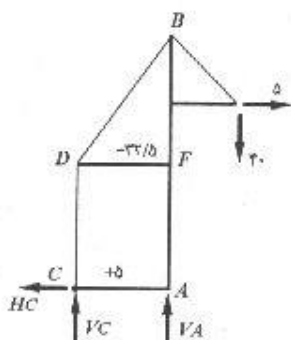
$$P_{aa} = ۴۸ \text{ kN}$$

$$M_{aa} = ۱۰/۶۷ \times ۲/۵ = ۲۶/۷ \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} = -\frac{P}{A} \pm \frac{MC}{I} = -\frac{۴۸۰۰۰}{\frac{\pi}{۴}(۰/۳)^4} \pm \frac{۲۶۷۰۰ \times (۰/۱۵)}{\frac{\pi}{۴}(۰/۱۵)^4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{max} \text{ (کششی)} = ۹/۴ \text{ MPa} \\ \sigma_{max} \text{ (فشاری)} = -۱۰/۷۵ \text{ MPa} \end{cases}$$

۱۷-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش فشاری قائم مؤثر بر مقطع $a-a$ از سازه زیر. دکل AB دارای مقطع مربع به ابعاد ۳۰۰×۳۰۰ میلی متر می باشد. از وزن سازه صرف نظر کنید.



$$\sum M_c = 0 : V_A \times 3 = 40 \times 5/5 + 5 \times 6$$

$$V_A = ۸۳/۳۳ \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : V_c = ۸۳/۳۳ - 40 = ۴۳/۳۳ \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : H_c = 5 \text{ kN}$$

با بکارگیری معادلات تعادل برای نقاط C و D داریم:

$$F_{CA} = 5 \text{ kN} \quad \text{و} \quad F_{CD} = ۴۳/۳۳ \text{ kN}$$

$$\frac{۴}{۵} F_{DB} = ۴۳/۳۳ \Rightarrow F_{DB} = ۵۴/۱۶ \text{ kN}$$

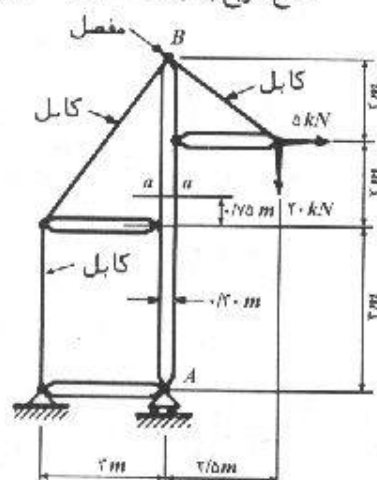
$$F_{DF} = \frac{۳}{۵} F_{DB} = ۳۲/۵ \text{ kN} \text{ فشاری}$$

$$\sum F_y = 0 : P = ۸۳/۳۳ \text{ kN}$$

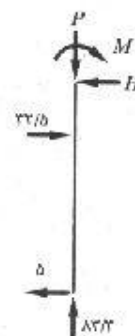
$$\sum F_x = 0 : H = ۳۲/۵ - 5 = ۲۷/۵ \text{ kN}$$

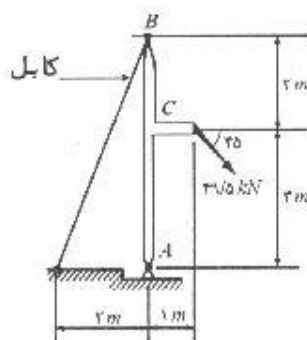
$$M - ۳۲/۵ \times ۰/۷۵ + 5 \times ۴/۷۵ = 0 \Rightarrow M = ۰/۶۲۵ \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} \text{ (فشاری)} = \frac{-۸۸۳۳۰}{(۰/۳ \times ۰/۳)} - \frac{۶۲۵ \times ۰/۳}{\frac{1}{۱۲}(۰/۳)^4} = -۱/۲۶ \text{ MPa}$$



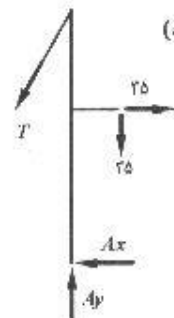
مسئله ۱۷-۸





مسئله ۱۸-۸

۱۸-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم موجود در مقطع بحرانی عضو AB از سازه زیر. عضو AB از نیمرخ $IPE ۲۰۰$ ساخته شده و گره C کاملاً گیردار است. (راهنمایی: برای تعیین مقطع بحرانی ابتدا لازم است که ترسیم تغییرات نیروی فشاری، و لنگر خمشی عضو AB رسم گردد.)



$$49/5 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 35 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : 35 \times 2 + 35 \times 1 - \frac{2}{\sqrt{5^2 + 2^2}} T \times 5 = 0$$

$$\rightarrow T = 75/4 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : A_y = 35 + \frac{5}{\sqrt{29}} \times 75/4 = 10.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : A_x + \frac{2}{\sqrt{29}} \times 75/4 - 35 = 0 \rightarrow A_x = 7 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : B_x = 35 - 7 = 28 \text{ kN}$$

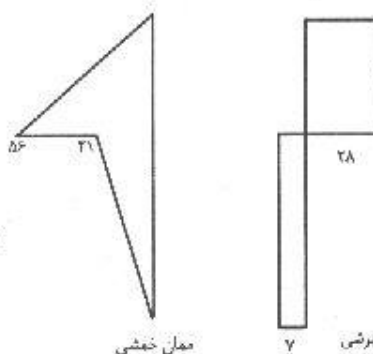
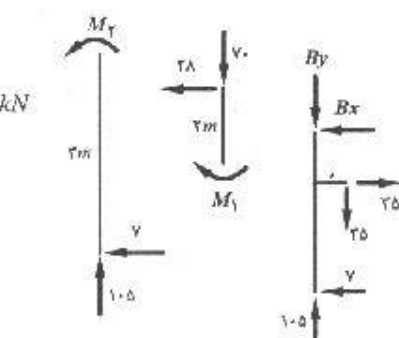
$$\sum F_y = 0 : B_y = 10.5 - 35 = 24.5 \text{ kN}$$

$$P_1 = -24.5 \text{ kN} \text{ و } M_1 = 28 \times 2 = 56 \text{ kN.m}$$

$$P_2 = -10.5 \text{ kN} \text{ و } M_2 = 7 \times 2 = 14 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{1max} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-24.5 \times 10^3}{2850} - \frac{56 \times 10^3}{194 \times 10^7} = -313/2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2max} = \frac{-10.5}{2850} - \frac{21 \times 10^3}{194 \times 10^7} = -108/3 \text{ MPa}$$

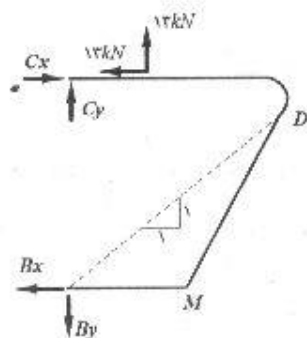


مکان خمشی

نیروی برشی

مقادیر A و S برای نیمرخ $IPE ۲۰۰$ از جدول ۴ استخراج شده‌اند.

۱۹-۸. مطلوب است تعیین حداکثر تنش قائم موجود در مقطع $A-A$ از سازه زیر. سطح مقطع $A-A$ به شکل مستطیل و به ابعاد ۳۰×۴۰ میلی‌متر می‌باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند.



$$F_x = F_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 18/\sqrt{2} = 13 \text{ kN}$$

$$\sum M_c = 0; B_x \times (450 + 750) = 13 \times 150 \rightarrow B_x = 3/71 \text{ kN}$$

چون عضو BMD یک عضو دو نیرویی است، راستای نیروی وارد بر آن در امتداد BD می باشد که با توجه به هندسه شکل دارای شیب واحد است. بنابراین:

$$B_y = B_x = 3/71 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0; C_x - 13 - 3/71 = 0 \rightarrow C_x = 16/71 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0; C_y + 13 - 3/71 = 0 \rightarrow C_y = 9/29 \text{ kN}$$

$$P_{AA} = -16/71 + 13 = -3/71 \text{ kN}$$

$$M_{AA} = 9/29 \times (0/2) - 13 \times (0/05) = 1/21 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-3710(N)}{(0/04 \times 0/03) (m^2)} - \frac{(1210)(0/02)}{\frac{1}{12} (0/03)(0/4)^3} = -154 \text{ MPa}$$

۸-۲۰. جرتقیل نشان داده شده در شکل از نیمرخ معمولی I و میله ای از فولاد اعلا ساخته شده است.

(الف) مطلوب است تعیین محل نیروی متحرک P به طوری که حداکثر لنگر خمشی در تیر ایجاد

گردد. از وزن تیر صرف نظر کنید. (ب) با

استفاده از محل به دست آمده از قسمت

الف، مقدار P چقدر می تواند باشد. فرض

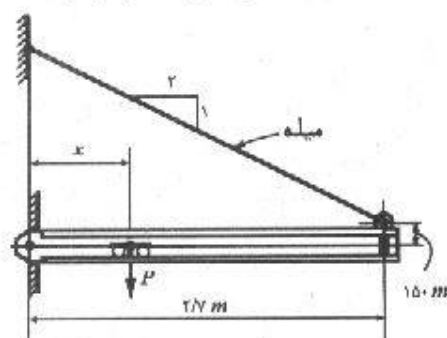
کنید که اثر برش در روی تیر ناچیز است

و تنش مجاز قائم در تیر را مساوی ۱۲۱

مگاپاسکال (نیوتن بر میلی متر مربع) در

نظر بگیرید. در روی دقت معیار برقرار

شده در قسمت الف، بحث کنید.



مسئله ۸-۲۰

مشخصات نیمرخ I مصرفی بشرح زیر است:

$$A = ۳۴۸۴ \text{ mm}^2 \quad I_x = ۲۴ \times ۱۰^۶ \text{ mm}^4 \quad I/c = ۲۳۶ \times ۱۰^۳ \text{ mm}^3$$

(الف)

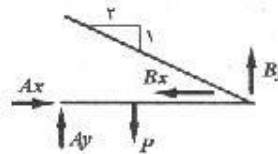
$$\sum M_A = 0 : B_y \times ۲/۷ + B_x \times ۰/۱۵ - Px = 0$$

از طرفی با توجه به هندسه شکل $B_x = ۲B_y$ در نتیجه

$$P.x = ۲/۷ B_y + ۰/۳ B_y = ۳B_y \rightarrow B_y = \frac{1}{3} P.x$$

$$B_x = ۲B_y = \frac{۲}{3} P.x$$

$$\sum F_y = 0 : A_y + B_y = P \rightarrow A_y = P - B_y = P \left(1 - \frac{x}{۳} \right) \quad (۱)$$



$$M = A_y . x = P \left(1 - \frac{x}{۳} \right) . x = P.x - \frac{P}{۳} x^2$$

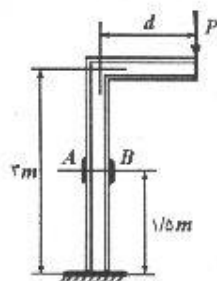
$$dM/dx = 0 \rightarrow P - \frac{۲}{۳} P.x = 0 \rightarrow x = \frac{۳}{۲} = ۱/۵ \text{ m}$$

(ب)

$$\sum F_x = 0 : A_x = B_x = \frac{۲}{۳} P.x = \frac{۲}{۳} P \times \frac{۳}{۲} = P$$

$$(۱) \rightarrow A_y = P \left(1 - \frac{۱/۵}{۳} \right) = \frac{P}{۳}$$

$$\sigma_{all} = -\frac{A_x}{A} - \frac{A_y . x}{S} = \frac{-P}{۳۴۸۴} - \frac{\frac{P}{۳} \times ۱۵۰۰}{۲۳۶ \times ۱۰^۳} = ۱۲۱ \rightarrow P = ۳۴/۹ \text{ kN}$$



مسئله ۸-۲۱

۸-۲۱. قاب نشان داده شده در شکل از نیمرخ $IPE۲۲۰$ ساخته شده است.

در فاصله $۱/۵$ متر از سطح زمین، مقدار کرنش در نقطه A واقع در

سطح خارجی بال مساوی ۲۰۰×۱۰^{-۶} میلی متر بر میلی متر و در

نقطه B واقع در سطح خارجی بال مساوی ۶۰۰×۱۰^{-۶} میلی متر

بر میلی متر اندازه گیری شده است. مقدار نیروی P و فاصله d چقدر

است؟ ضریب ارتجاعی را مساوی ۲×۱۰^۵ نیوتن بر میلی مترمربع

در نظر بگیرید.

$$\varepsilon_A = \frac{\sigma_A}{E} = \frac{1}{E} \left(\frac{-P}{A} + \frac{Pd}{S} \right)$$

$$\varepsilon_B = \frac{\sigma_B}{E} = \frac{1}{E} \left(\frac{-P}{A} - \frac{Pd}{S} \right)$$

$$A = ۳۳/۴ \text{ cm}^2 \quad \text{و} \quad S = ۲۵۲ \text{ cm}^3$$

از جدول ۴ ضمیمه مقادیر A و S بدست می آیند:

$$200 \times 10^{-6} = \frac{1}{2 \times 10^6} \left(\frac{-P}{3340} + \frac{Pd}{252000} \right)$$

$$-600 \times 10^{-6} = \frac{1}{2 \times 10^6} \left(\frac{-P}{3340} - \frac{Pd}{252000} \right)$$

با جمع کردن طرفین در رابطه اخیر داریم:

$$-400 \times 10^{-6} = \frac{-2P}{(2 \times 10^6)(3340)} \Rightarrow P = 133/6 \times 10^3 N$$

با قرار دادن مقدار بدست آمده برای P در یکی از روابط مقدار d بدست می آید: $d = 150/9 mm$

۸-۲۲. مطابق شکل، میله‌ای به ابعاد $0/1 \times 0/1$ متر، تحت تأثیر نیروی F قرار دارد تنشهای طولی در دو مقطع به فاصله $0/2$ متر از یکدیگر با استفاده از روشهای تجربی به صورت زیر اندازه‌گیری شده‌اند:

$$\sigma_A = 0 MPa, \quad \sigma_B = -30 MPa, \quad \sigma_C = -24 MPa, \quad \sigma_D = -6 MPa$$

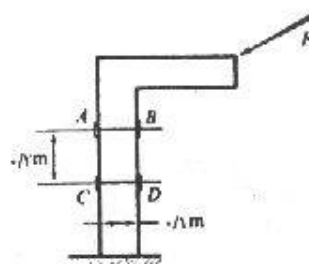
مطلوب است تعیین مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی F .

$$\sigma_A = \frac{-F_y}{A} + \frac{M_{AB}}{S} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_D = -\frac{F_y}{A} - \frac{M_{AB}}{S} = -30 \times 10^6 \quad (2)$$

$$\sigma_A - \sigma_D = \frac{2M_{AB}}{S} = 30 \times 10^6 \quad (3)$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12} (0/1)(0/1)^3}{0/05} = 1/67 \times 10^{-7} m^3$$



مسئله ۸-۲۲

با قرار دادن مقدار S در رابطه (۳) مقدار M_{AB} بدست می آید:

$$M_{AB} = 2500 N.m$$

با استفاده از رابطه (۱) مقدار F_y حاصل می شود:

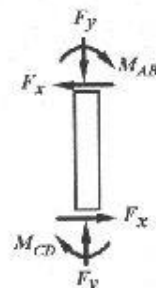
$$F_y = \frac{M_{AB}}{S} \times A = 149/7 kN$$

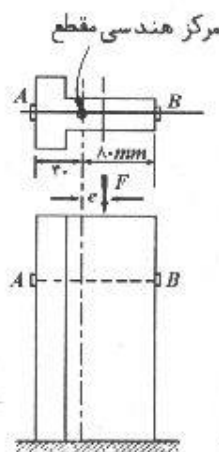
$$\sigma_C = \frac{-F_y}{A} + \frac{M_{CD}}{S} = -24 \times 10^6$$

$$\sigma_D = \frac{-F_y}{A} - \frac{M_{CD}}{S} = -6 \times 10^6$$

$$\sigma_C - \sigma_D = \frac{2M_{CD}}{S} = -18 \times 10^6 \Rightarrow M_{CD} = -150.3 N.m$$

$$M_{AB} - F_x \times 0/2 + M_{CD} = 0 \Rightarrow 2500 - 0/2 F_x - 150.3 = 0 \Rightarrow F_x = 5 kN$$





مسئله ۸-۲۳

۸-۲۳. برای تعیین مقدار نیروی قائم خارج از مرکز F که بر روی یک ستون فولادی با مقطع سپری تأثیر می‌کند، کرنش سنجهایی در نقاط A و B نصب شدند. مطلوب است تعیین نیروی F در صورتی که کرنش طولی در A مساوی 10^{-4} میلی‌متر بر میلی‌متر و در نقطه B مساوی 800×10^{-6} میلی‌متر بر میلی‌متر باشد. ضریب ارتجاعی فولاد مساوی 2×10^5 و ضریب ارتجاعی برشی آن مساوی 84×10^9 نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مساحت مقطع ستون نیز مساوی 4000 میلی‌متر مربع است.

$$P = -F \quad \text{و} \quad M = F \cdot e$$

$$\sigma_A = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-F}{A} + \frac{(F \cdot e)(40)}{I}$$

$$\sigma_A = E\epsilon = (2 \times 10^5)(-1000 \times 10^{-6}) = -20 \text{ MPa}$$

از ترکیب دو رابطه فوق داریم:

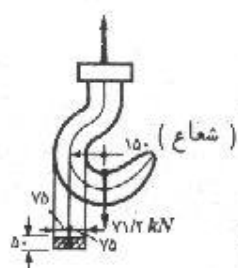
$$F = A \left(20 + 40 \frac{F \cdot e}{I} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_B = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-F}{A} - \frac{(F \cdot e)(80)}{I}$$

$$\sigma_B = E\epsilon = (2 \times 10^5)(-800 \times 10^{-6}) = -160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A - \sigma_B = \frac{120 F \cdot e}{I} = 140 \text{ MPa} \Rightarrow \frac{F \cdot e}{I} = 1/17$$

$$(1) \Rightarrow F = 4000 [20 + 40(1/17)] = 266/7 \text{ kN}$$



مسئله ۸-۲۴

۸-۲۴. مطابق شکل، یک قلاب فولادی تحت تأثیر نیروی به طرف پایین $71/2$ کیلو نیوتن قرار دارد. شعاع محور منحنی شکل تیر مساوی 150 میلی‌متر می‌باشد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش تولید شده در قلاب. تمام اندازه‌های نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند.

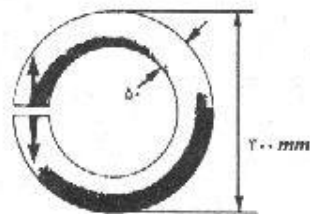
$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_o}{r_i}} = \frac{150}{\ln \frac{225}{75}} = 136/5$$

تنشهای مرکب / ۲۱۳

$$\sigma_i = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_i)}{r_i A (\bar{r} - R)} = \frac{71200}{150 \times 50} + \frac{(71200 \times 150)(136/5 - 75)}{75 \times (150 \times 50)(150 - 136/5)} = 86/5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_o)}{r_o A (\bar{r} - R)} = \frac{71200}{150 \times 50} + \frac{(71200 \times 150)(136/5 - 225)}{225(150 \times 50)(150 - 136/5)} = -41/5$$

۸-۲۵. یک میلۀ فولادی با مقطع دایره به قطر ۵۰ میلی‌متر، به صورت حلقه‌ای دایره به قطر خارجی

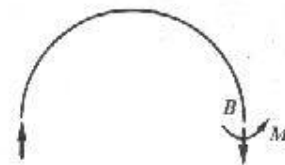


مسئله ۸-۲۵

۳۰۰ میلی‌متر در آمده. مطلوب است: (الف) تعیین حداکثر تنش ایجاد شده در حلقه در اثر نیروی ۱۰ کیلونیوتنی که مطابق شکل بر دو انتهای باز وارد می‌شود. (ب) مطلوب است تعیین نسبت تنش حداکثر به دست آمده در قسمت الف به بزرگترین تنش فشاری که به طور قائم بر همان مقطع تأثیر می‌کند.

$$M = 10 \times (3 - 0/5) = 2/5 \text{ kN.m}$$

$$R = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}}{2} = \frac{125 + \sqrt{125^2 - 25^2}}{2} = 124 \text{ mm}$$



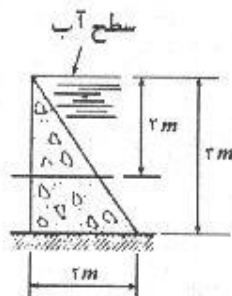
ماکزیم تنش در نقطه B رخ می‌دهد زیرا همان در این نقطه ماکزیم می‌باشد.

$$\sigma_i = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_i)}{r_i A (\bar{r} - R)} = \frac{10000}{\pi(25)^2} + \frac{2/5 \times 10^6 (\text{N.mm})(124 - 100)}{100 \times \pi(25)^2 (125 - 124)} = 310/7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = \frac{P}{A} + \frac{M(R - r_o)}{r_o A (\bar{r} - R)} = \frac{10000}{\pi(25)^2} + \frac{2/5 \times 10^6 (124 - 150)}{150 \times \pi(25)^2 (125 - 124)} = -215/6 \text{ MPa}$$

(ب)

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{comp}} = \frac{310/7}{-215/6} = 1/44$$



مسئله ۸-۲۶

۸-۲۶. ابعاد و مشخصات هندسی یک سد بتنی کوچک، همراه با

ارتفاع آب در دریاچه پشت آن، در شکل نشان داده شده است. با فرض اینکه بتن بتواند مقداری کشش تحمل نماید، مطلوب است تعیین تنشهای قائم مؤثر بر یک مقطع افقی به فاصله ۲ متر از بالای آن. جرم مخصوص آب را ۱۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و جرم مخصوص بتن را ۲۳۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و g را مساوی ۱۰ متر بر مجذور ثانیه فرض نمایید.

۲۱۴ / تشریح کامل مقاومت مصالح پوپوف

وزن واحد طول : $\text{وزن} = \text{حجم} \times \gamma = (A \times 1) \times \gamma = A \rho g$

وزن یک متر سد : $W = \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1/33 \right) \times 2300 \times 10 = 30590 \text{ N/m} = 30/59 \text{ kN/m}$

$P_V = \frac{1}{2} \times 2 \times 1/33 \times 10000 \times 10 = 13/3 \text{ kN/m}$

$P_H = 2 \times 1 \times 10000 \times 10 = 20 \text{ kN/m}$

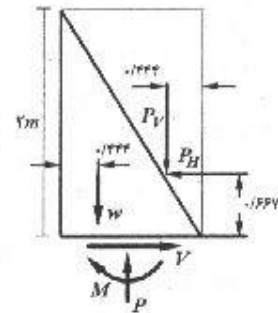
$P = -P - W = -13/3 - 30/59 = 43/9 \text{ kN/m}$

$M = 20 (0/667) + 30/59 (0/667 - 0/444) - 13/3 (0/667 - 0/444)$

$M = 17/2 \text{ kNm/m}$

$\sigma_t = \frac{P}{A} + \frac{MI}{c} = \frac{-43/9}{1/33} + \frac{17/2 \left(\frac{1/33}{2} \right)}{\frac{1}{12} (1) (1/33)^2} = 25/13 \text{ kN/m}$

$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{MI}{c} = \frac{-43/9}{1/33} + \frac{17/2 \left(\frac{1/33}{2} \right)}{\frac{1}{12} (1) (1/33)^2} = -91/3 \text{ kN/m}$



۲۷-۸. در سد زیر ارتفاع h چقدر باشد تا تنش در نقطه A مساوی صفر شود. جرم مخصوص آب را 1000 کیلوگرم بر متر مکعب و جرم مخصوص بتن را 2300 کیلوگرم بر متر مکعب و g را مساوی 10 متر بر مجذور ثانیه فرض نمایید.

وزن واحد طول : $w = A \times 1 \times \gamma = A \rho g$

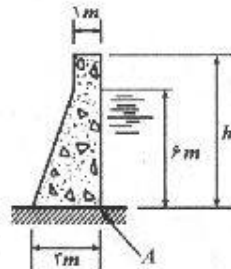
$w_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times 2300 \times 10 = 138 \text{ kN/m}$

$w_2 = (1 \times h) \times 2300 \times 10 = 23h \text{ kN/m}$

$H = \frac{1}{2} \times 6 \times (10000 \times 10) \times 6 = 180 \text{ kN/m}$

نیروی عمودی = وزن واحد طول سد :

$\rho = -(w_1 + w_2) = -161 \text{ kN/m}$



مسئله ۲۷-۸

$M = 138 \times \left(1/5 - \frac{4}{3} \right) + 23h \times 1 - 180 \times \frac{6}{3} = 23h - 237$

$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = \frac{138 + 23h}{2 \times 1} + \frac{23h - 237}{\frac{1}{6} (1) (3)^2} = 0$

$\Rightarrow 138 + 23h + 64h - 674 = 0 \Rightarrow h = 6/16 \text{ m}$

۲۸-۸. ضخامت t در سد نشان داده شده چقدر باشد تا در سطح تماس شالوده سد با زمین ایجاد کشش نگردد. وزن مخصوص آب و بتن را مثل مسئله ۲۷-۸ فرض نمایید.

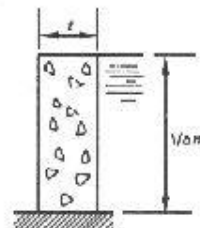
$$w = (1/5 \times t) \times 2300 \times 10 = 34/5 t \text{ kN/m}$$

$$H = \frac{1}{7} \times 1/5 \times 1/5 \times 100000 = 11/3 \text{ kN/m}$$

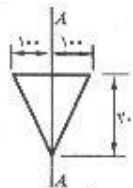
$$P = -w = -34/5 t \text{ kN/m}$$

$$M = H \times \frac{1/5}{3} = 5/65 \text{ kN.m/m}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} = 0 \Rightarrow -\frac{34/5 t}{t \times 1} + \frac{5/65}{\frac{1}{6} (1) t^2} = 0 \rightarrow t = 1 \text{ m}$$



مسئله ۲۸-۸



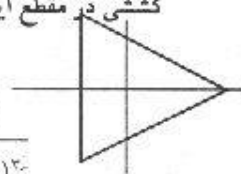
مسئله ۲۹-۸

۲۹-۸. مقطع افقی یک ستون کوتاه مطابق شکل می باشد (تمام ابعاد بر حسب میلی متر). در روی خط $A-A$ محدوده ای را تعیین نمایید به طوری که اگر یک بار قائم رو به پایین در این محدوده بر ستون وارد شود، هیچ گونه کششی در مقطع ایجاد نگردد.

(ابعاد بر حسب میلی متر)

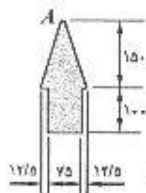
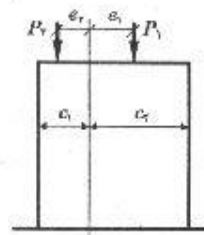
$$\sigma = \frac{-P_1}{A} + \frac{M_1 c_1}{I} = 0 \Rightarrow \frac{-P_1}{\frac{1}{7} (200)(200)} + \frac{(P_1 c_1) \left(\frac{200}{3} \right)}{\frac{1}{36} (200)(200)^3} = 0$$

$$\rightarrow e_1 = 33/3 \text{ mm}$$



$$\frac{-P_2}{A} + \frac{M_2 c_2}{I} = 0 \Rightarrow \frac{-P_2}{\frac{1}{7} (200)^2} + \frac{(P_2 e_2) \left(200 - \frac{200}{3} \right)}{\frac{1}{36} (200)^3} = 0$$

$$\rightarrow e_2 = 16/7 \text{ mm}$$



مسئله ۳۰-۸

۳۰-۸. مقطع افقی یک ستون کوتاه مطابق شکل می باشد (تمام ابعاد بر حسب میلی متر). در روی محور تقارن مقطع فوق، محدوده ای را تعیین نمایید به طوری که اگر یک بار قائم رو به پایین در این محدوده بر ستون وارد شود، هیچگونه کششی در مقطع ایجاد نگردد.

$$\bar{y} = \frac{(75 \times 100)(50) + \frac{1}{7} (150 \times 100)(150)}{75 \times 100 + \frac{1}{7} \times 150 \times 100} = 100 \text{ mm از پایین}$$

$$I = \frac{1}{12} (75)(100)^3 + (75 \times 100)(50)^2 + \frac{1}{36} (100)(150)^3 + \left(\frac{1}{7} \times 150 \times 100 \right) (50)^2$$

$$\rightarrow I = 53/125 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_A = 0 = \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{-P}{15000} + \frac{(Pe)(150)}{53/125 \times 10^6} = 0 \rightarrow e = 23/6 \text{ mm}$$

یعنی محدوده مورد نظر زیر محور خنثی و تا فاصله $23/6 \text{ mm}$ از آن می باشد.

۳۱-۸. مثال ۵-۸ را با قرار دادن نیروی P در روی ضلع AD به فاصله ۳۷۵ میلی متر از محور تقارن، مجدداً حل نمایید.

$$M_{yy} = 64 \times 0/15 = 9/6 \text{ kN.m}$$

$$M_{zz} = 64 \times 0/375 = 24 \text{ kN.m}$$

$$S_{yy} = 2/25 \times 10^{-7} \text{ m}^2, S_{zz} = 1/125 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

$$\frac{P}{A} = \frac{64}{0/3 \times 0/15} = 1422 \text{ kN/m}^2$$

$$\frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{9/6}{2/25 \times 10^{-7}} = 2267 \text{ kN/m}^2$$

$$\frac{M_{zz}}{S_{zz}} = \frac{24}{1/125 \times 10^{-7}} = 21333 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_A = -1/42 - 4/27 - 21/33 = -27 \text{ MPa}$$

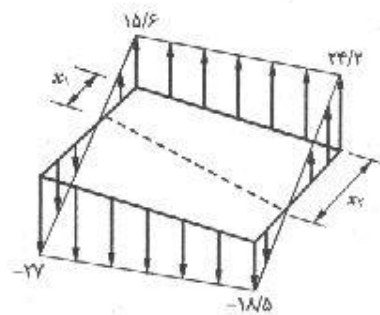
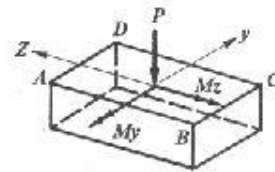
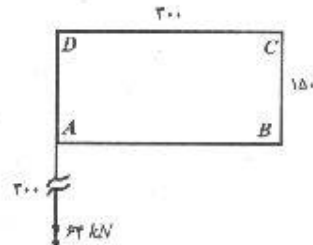
$$\sigma_B = -1/42 + 4/27 - 21/33 = -18/5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -1/42 + 4/27 + 21/33 = 24/2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -1/42 - 4/27 + 21/33 = 15/6 \text{ MPa}$$

$$\frac{x_1}{15/6} = \frac{150}{15/6 + 27} \Rightarrow x_1 = 54/9 \text{ mm}$$

$$\frac{x_1}{24/2} = \frac{150}{24/2 + 18/5} \Rightarrow x_1 = 85 \text{ mm}$$



۳۲-۸. اگر ستون کوتاه نشان داده شده در شکل ۸-۱۲-الف از فولاد با وزن مخصوص ۷۵ کیلونیوتن بر مترمکعب ساخته شده باشد، مطلوب است تعیین نیروی P به طوری که تنش در نقطه D مساوی صفر گردد. از وزن لچکی کوچکی که بار روی آن وارد می شود، صرف نظر کنید. برای همین شرایط، خط تنش صفر در روی مقطع $ABCD$ را تعیین نمایید.

$$\sigma_D = 0 = \frac{-p'}{A} - \frac{M_{yy}}{S_{yy}} + \frac{M_{zz}}{S_{zz}} = \frac{P + 75 \times 0/3 \times 0/15 \times 0/5}{0/3 \times 0/15}$$

$$- \frac{P \times 0/15}{2/25 \times 10^{-7}} + \frac{P \times 0/15}{1/125 \times 10^{-7}} \Rightarrow 44/4 P = 37/5 \rightarrow P = 0/884 \text{ kN} = 884 \text{ N}$$

تنشهای مرکب / ۲۱۷

$$\frac{P'}{A} = -\frac{0/844 + 1/688}{0/3 \times 0/15} = -56/3 \text{ kN/m}^2$$

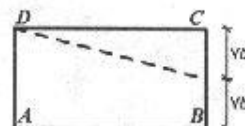
$$\frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{0/844 \times 0/15}{2/25 \times 10^{-7}} = -56/3 \text{ kN/m}^2$$

$$\frac{M_{zz}}{S_{zz}} = \frac{0/844 \times 0/15}{1/125 \times 10^{-7}} = -112/5 \text{ kN/m}^2$$

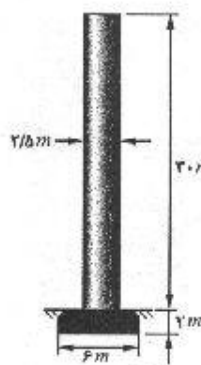
$$\sigma_A = -56/3 - 56/3 - 112/5 = -225 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_B = -56/3 + 56/3 - 112/5 = -112/5 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_C = -56/3 + 56/3 + 112/5 = 112/5 \text{ kN/m}^2$$



چون $\sigma_B = -\sigma_C$ بنابراین خط تنش صفر از وسط فاصله BC عبور می‌کند.



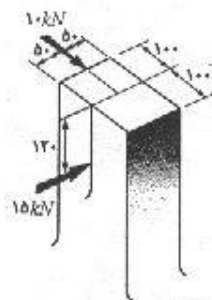
۳۳-۸. یک دودکش فولادی به قطر ۲/۵ متر که از داخل توسط آجر روکش شده است، در روی شالوده‌ای به ابعاد 6×6 متر قرار دارد. وزن دودکش با شالوده آن مساوی ۷۶/۵ کیلونیوتن می‌باشد. در صورتی که بر این دودکش بادی به موازات یکی از اضلاع شالوده آن و با فشار ۱ کیلونیوتن بر مترمربع تصویر دودکش بر روی صفحه قائم بوزد، حداکثر فشار تولید شده در روی شالوده چقدر خواهد بود.

مسئله ۳۳-۸

$$P = (30 \times 2/5)(1) = 75 \text{ kN} \quad M = 75 \times (15 + 2) = 1275 \text{ kN.m}$$

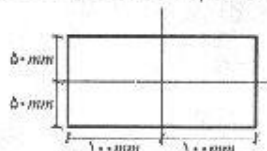
$$S = \frac{1}{6}(6)(6)^2 = 36 \text{ m}^2$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} \pm \frac{M}{S} = -\frac{75}{36} \pm \frac{1275}{36} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 33/3 \text{ kPa} \text{ کششی} \\ \sigma_2 = -37/5 \text{ kPa} \text{ فشاری} \end{cases}$$



مسئله ۳۴-۸

۳۴-۸. یک قطعه چدنی همانند شکل بارگذاری شده است. با صرف نظر کردن از وزن قطعه، مطلوب است تعیین تنشهای قائم مؤثر بر مقطعی که در فاصله ۵/۵ متری از بالای قطعه قرار دارد. هم چنین خط تنشهای صفر را نیز تعیین کنید. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی متر هستند.



$$M_{xx} = 15(0/5 - 0/12) = 5/7 \text{ kN.m}$$

$$M_{yy} = 10 \times 0/5 = 5 \text{ kN.m}$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12}(0/2)(0/1)^3 = 1/67 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}(0/1)(0/2)^3 = 6/67 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

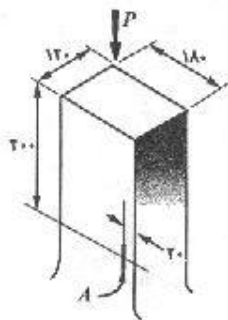
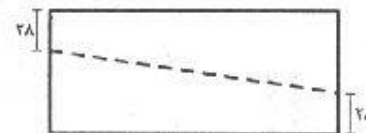
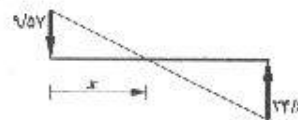
$$\sigma_A = \frac{5/7 \times 10^{-3} (\text{MN.m})(0/0.5)}{1/67 \times 10^{-3}} + \frac{5 \times 10^{-3} (\text{MN.m})(0/1)}{6/67 \times 10^{-3}} = 17/07 + 7/5 = 24/61 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = 17/07 - 7/5 = +9/57 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -17/07 - 7/5 = -24/61 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -17/07 + 7/5 = -9/57 \text{ MPa}$$

$$x = \frac{9/57}{9/57 + 24/61} \times 100 = 28 \text{ mm}$$



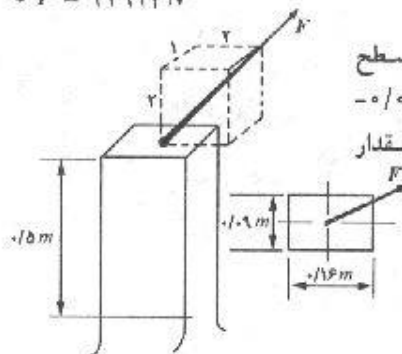
۳۵-۸. یک قطعه آلومینیومی همانند شکل بارگذاری شده است. در اثر این بار، در نقطه A کرنشی معادلی 500×10^{-6} میلی متر بر میلی متر ایجاد می شود. مطلوب است تعیین مقدار نیروی وارده P. ضریب ارتجاعی آلومینیوم مساوی $0/1 \times 10^5$ نیوتن بر میلی متر مربع می باشد و تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسب میلی متر هستند.

مسئله ۳۵-۸

$$\sigma = E\epsilon = \frac{-P}{A} + \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}c}{I_{yy}}$$

$$0/1 \times 10^5 \times 500 \times 10^{-6} = \frac{-P}{(120 \times 180)} + \frac{60P}{\frac{1}{6}(180)(120)^2} + \frac{90P \times 70}{\frac{1}{12}(120)(180)^3}$$

$$\Rightarrow P = 24923 \text{ N}$$



۳۶-۸. اگر در اثر اعمال نیروی مایل F بر مرکز هندسی سطح مقطع عضو نشان داده شده، کرنشی معادل $-0/0001$ میلی متر بر میلی متر در نقطه A ایجاد می شود. مقدار نیروی F چقدر می باشد. ضریب ارتجاعی را مساوی 2×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

مسئله ۳۶-۸

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$F_x = \frac{2}{3} F, \quad F_y = \frac{1}{3} F, \quad F_z = \frac{2}{3} F$$

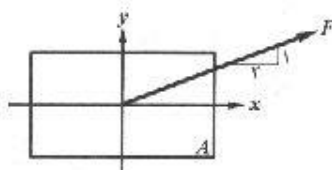
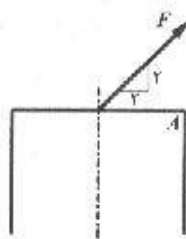
$$\sigma_A = \frac{P}{A} + \frac{M_{xx}}{S_{xx}} - \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \frac{F_y}{A} + \frac{0/5 \times F_y}{S_{xx}} - \frac{0/5 \times F_x}{S_{yy}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} F}{0/09 \times 0/16} + \frac{0/5 \times \left(\frac{1}{3} F\right)}{\frac{1}{6} (0/16)(0/09)} - \frac{0/5 \times \left(\frac{2}{3} F\right)}{\frac{1}{6} (0/09)(0/16)} = 26/3 F + 771/6 F - 868 F$$

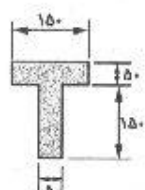
$$\rightarrow \sigma_A = -50/2 F$$

$$\sigma_A = E\varepsilon = (2 \times 10^2)(-10^{-2}) = -20 \text{ MPa}$$

$$-20 \times 10^6 = -50/2 F \Rightarrow F = 398 \text{ kN}$$

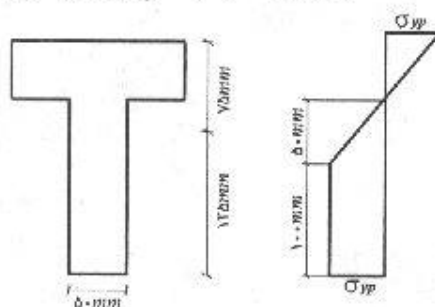


۸-۳۷. یک تیر T از مصالحی ارتجاعی - خمیری، دارای ابعادی مطابق شکل می‌باشد. (الف) اگر کرنش در بالای بال مساوی ε_{yp} و در محل برخورد بال با جان صفر باشد، نیروی محوری P و لنگر خمشی M مؤثر بر مقطع را تعیین نمایید. تنش جاری شدن را مساوی 250 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید. (ب) اگر نیروهای به دست آمده در قسمت (الف) حذف شوند، چه تنشهای پس ماندی در مقطع به وجود می‌آید.



شکل ۸-۳۷

(ابعاد بر حسب میلی متر)



(الف)

$$\bar{y} = \frac{(150 \times 50)(25) + (150 \times 50)(125)}{2 \times 150 \times 50} = 75$$

$$P = -\frac{1}{3} \sigma_{yp} \times 50 \times 150 + \frac{1}{3} \sigma_{yp} \times 50 \times 50 + \sigma_{yp} \times 100 \times 50$$

$$\Rightarrow P = 2500 \sigma_{yp} \Rightarrow P = 625 \text{ kN}$$

$$M = \frac{1}{3} \sigma_{yp} \times 150 \times 50 \times 75 + \frac{1}{3} \sigma_{yp} \times 50 \times 50 \times 8/33 + \sigma_{yp} \times 100 \times 50 \times 75$$

$$= 166/7 \times 10^6 \text{ N.mm} \Rightarrow M = 166/7 \times 10^2 \text{ N.m}$$

$$I = \frac{1}{12} (150)(50)^3 + (150 \times 50)(50)^2 + \frac{1}{12} (50)(150)^3 + (150 \times 50)(50)^2$$

$$= 53/125 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

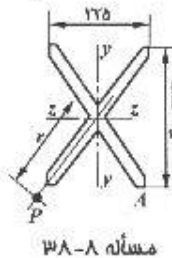
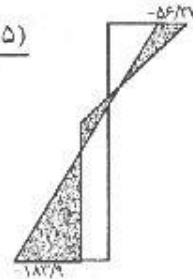
$$\sigma_{t, \text{elas}} = \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{-625 \times 10^3}{2 \times 150 \times 50} + \frac{(166/7 \times 10^6)(75)}{53/125 \times 10^6} = 193/63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{b, \text{elas}} = \frac{-P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{-625 \times 10^3}{2 \times 150 \times 50} - \frac{(166/7 \times 10^6)(125)}{53/125 \times 10^6}$$

$$= -233/9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{t, \text{res}} = -250 + 193/63 = -56/37 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{b, \text{res}} = 250 - 233/9 = -183/9 \text{ MPa}$$



۳۸-۸. یک عضو فشاری کوتاه دارای مقطعی مطابق شکل می‌باشد.

مشخصات هندسی این مقطع بدین قرار است: $I_{yy} = 247 \times 10^6 \text{ mm}^4$

و $I_{zz} = 468 \times 10^6 \text{ mm}^4$ و $A = 46000 \text{ mm}^2$ مطلوب است تعیین

فاصله z در امتداد قطر، به نحوی که اگر یک نیروی محوری P بر آن وارد شود، نقطه A در روی خط تنشهای صفر قرار گیرد، از وزن عضو

صاف نظر نمایید.

$$\sigma_A = 0 = \frac{-P}{A} - \frac{M_{zz} \times 150}{I_{zz}} + \frac{M_{yy} \times 112/5}{I_{yy}}$$

$$y = \frac{300}{225} z = 1/33 z \quad M_{zz} = Py = 1/33 Pz$$

$$M_{yy} = Pz$$

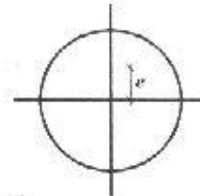
$$\sigma_A = \frac{-P}{46000} - \frac{(1/33 Pz)(150)}{468 \times 10^6} + \frac{(Pz)(112/5)}{247 \times 10^6} = 0 \Rightarrow z = 745 \text{ mm}$$

$$y = 1/33 z = 991 \text{ mm}$$

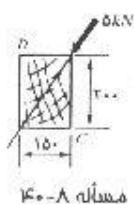
$$r = \sqrt{z^2 + y^2} = 1240 \text{ mm}$$

۳۹-۸. مطلوب است تعیین هسته مرکزی مقطعی به شکل دایره.

$$\sigma_B = 0 \Rightarrow \frac{-P}{A} + \frac{Mc}{I} = 0 \Rightarrow \frac{-P}{\pi r^2} + \frac{(Pe)r}{\frac{\pi r^4}{4}} = 0 \Rightarrow e = \frac{r}{4}$$



پس هسته مرکزی دایره‌ای به شعاع $\frac{r}{4}$ می‌باشد.



۸-۴۰. مطابق شکل، یک تیر به دهانه ۶ متر و مقطع 150×200 میلی‌متر، در وسط دهانه توسط بار متمرکز مایلی به مقدار ۵ کیلو نیوتن بارگذاری شده است. با صرف نظر کردن از وزن تیر، مطلوب است تعیین تنش حداکثر خمشی و محل محور خمشی. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشند.

$$\sigma = \pm \frac{M_{xx}}{S_{xx}} \pm \frac{M_{yy}}{S_{yy}}$$

نیروی ۵ kN با توجه به هندسه شکل به دو نیروی ۴ kN و ۳ kN در جهت محورها تجزیه می‌شود و با توجه به این که نیرو در وسط دهانه تیر وارد می‌شود، نیروهای تکیه گاهی در هر طرف، نصف این نیروها یعنی ۲ kN و ۱/۵ kN خواهد بود.

$$M_{xx} = 2 \times 3 = 6 \text{ kN.m}$$

$$M_{yy} = 1/5 \times 3 = 2/5 \text{ kN.m}$$

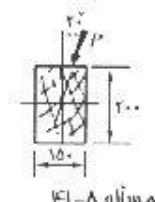
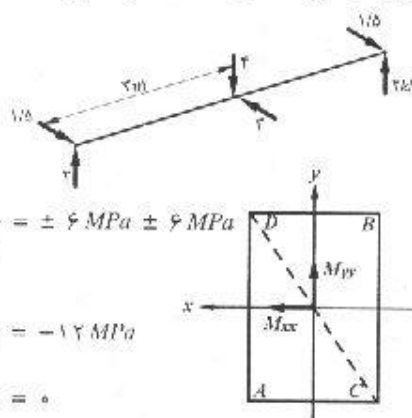
$$\sigma = \pm \frac{6000}{\frac{1}{6} (0/15)(0/2)^3} \pm \frac{2000}{\frac{1}{6} (0/2)(0/15)^3} = \pm 6 \text{ MPa} \pm 6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = 6 + 6 = 12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -6 - 6 = -12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = 6 - 6 = 0$$

$$\sigma_D = -6 + 6 = 0$$



۸-۴۱. مطابق شکل، تیری به دهانه ۶ متر و به مقطع 150×200 در وسط دهانه توسط بار متمرکز مایل P بارگذاری شده است. اگر حداکثر تنش خمشی مساوی ۸/۵ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، با صرف نظر کردن از وزن تیر، مقدار نیروی P چقدر است. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر می‌باشد.

$$R = \frac{P}{2} \text{ و } M = \frac{P}{2} x \Rightarrow M_{max} = \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{PL}{4} = 1/5 P \text{ N.m}$$

$$M_{xx} = M \cos 20^\circ \text{ و } M_{yy} = M \sin 20^\circ$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}}{S_{yy}} + \frac{1/5 P \cos 20^\circ}{\frac{1}{6} (0/15)(0/2)^3} + \frac{1/5 P \sin 20^\circ}{\frac{1}{6} (0/2)(0/15)^3}$$

$$\sigma_{max} = 8/5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

با مساوی قرار دادن σ_{max} در روابط فوق داریم:

$$P = 4060 \text{ N}$$

۴۲-۸. یک تیر طره‌ای به دهانه ۲ متر و مقطع مربع مستطیل مایل به ابعاد 50×100 میلی‌متر مفروض می‌باشد. در انتهای آزاد این تیر، نیروی قائمی مساوی ۲۷۵ نیوتن بر مرکز هندسی مقطع تیر وارد می‌گردد. مطلوب است تعیین تنشهای حداکثر خمشی و محور خنثی در مقطعی در انتهای گیردار تیر. از وزن تیر صرف نظر نمایید.

$$M = PL = 275 \times 2 = 550 \text{ N.m}$$

$$M_{xx} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times 550 = 521.8 \text{ N.m}$$

$$M_{yy} = \frac{1}{\sqrt{10}} \times 550 = 158 \text{ N.m}$$

$$S_{xx} = \frac{1}{9} (0.05)(0.1)^3 = 8.33 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$S_{yy} = \frac{1}{9} (0.1)(0.05)^3 = 4.17 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma = \pm \frac{M_{xx}}{S_{xx}} \pm \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = \pm \frac{521.8}{8.33 \times 10^{-6}} \pm \frac{158}{4.17 \times 10^{-6}}$$

$$= \pm 62.6 \pm 37.9 \text{ MPa}$$

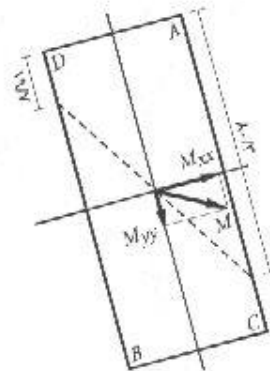
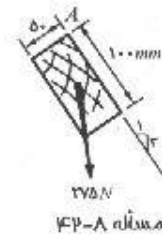
$$\sigma_A = 62.6 + 37.9 = 100.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -62.6 - 37.9 = -100.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -62.6 + 37.9 = -24.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = 62.6 - 37.9 = 24.6 \text{ MPa}$$

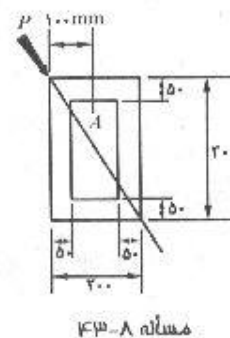
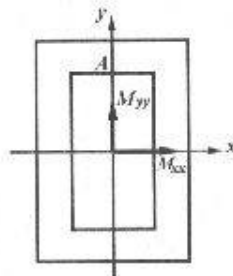
$$d_L = \frac{100.5}{100.5 + 24.6} \times 100 = 80.3 \text{ mm} \quad d_R = \frac{24.6}{100.5 + 24.6} \times 100 = 19.7 \text{ mm}$$



۴۳-۸. مطابق شکل، نیروی مایل P بر یک تیر طره‌ای عمل می‌کند. در مقطع مورد نظر، لنگر خمشی داخلی کل در صفحه نیرو مساوی 10 kN.m می‌باشد. مطلوب است تعیین تنش خمشی در نقطه A .

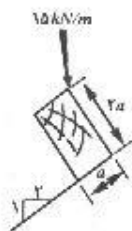
$$I_{xx} = \frac{1}{12} (0.2)(0.3)^3 - \frac{1}{12} (0.1)(0.2)^3 = 3.83 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$M_{xx} = \frac{0.3}{\sqrt{0.3^2 + 0.2^2}} \times 10000 = 8320.5 \text{ N.m}$$



با توجه به مکان نقطه A مؤلفه M_{yy} از ممان خمشی روی نقطه A تنش ایجاد نمی‌کند.

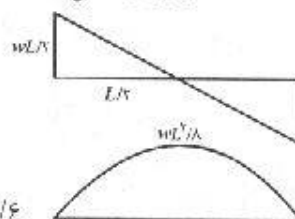
$$\sigma_A = \frac{M_{xx} c}{I_{xx}} = \frac{8320/5 \times (0/1)}{3/83 \times 10^{-7}} = 2/15 \text{ MPa}$$



مسئله ۴۴-۸

۴۴-۸. تیر ساده‌ای به دهانه ۴ متر و مقطع مربع مستطیل که نسبت اضلاع آن مساوی ۲ می‌باشد، بار گسترده یکنواختی را در وضعیت نشان داده شده در شکل حمل می‌نماید. این بار گسترده وزن تیر را نیز شامل می‌شود. (الف) ابعاد تیر را به نحوی تعیین نمایید که حداکثر تنش از ۱۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز نکند. (ب) محل محور خنثای تیر را تعیین نمایید و آن را روی شکل نشان دهید.

(الف)



$$M_{max} = \frac{1}{2} \times \frac{wL}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{wL^2}{8} = \frac{15 \times 4^2}{8} = 30 \text{ kN.m}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26/6^\circ$$

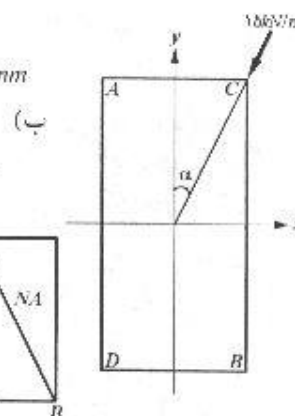
$$\begin{aligned} \sigma_D = \frac{M_{xx}}{S_{xx}} + \frac{M_{yy}}{S_{yy}} &= \frac{30 \times 10^3 \cos 26/6}{\frac{1}{6} (a) (2a)^2} + \frac{30 \times 10^3 \sin 26/6}{\frac{1}{6} (2a) (a)^2} \\ &= \frac{180000}{a^2} = 10 \times 10^6 \text{ (N/m}^2\text{)} \rightarrow a = 0/2 \text{ m} = 200 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_A = \frac{-30 \times 10^3 \cos 26/6 \text{ (N.mm)}}{\frac{1}{6} (200) (400)^2} + \frac{30 \times 10^3 \sin 26/6}{\frac{1}{6} (400) (200)^2} \\ = -5/03 + 5/03 = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_B = 5/03 - 5/03 = 0$$

$$\sigma_C = -5/03 - 5/03 = -10/06 \text{ MPa}$$

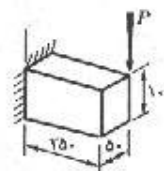
$$\sigma_D = 5/03 + 5/03 = 10/06 \text{ MPa}$$



۴۵-۸. یک تیر طره‌ای به دهانه ۲۵۰ میلی‌متر، مطابق شکل بار p را در انتهای آزاد خود حمل می‌نماید. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی در انتهای گیردار تیر در اثر برش مستقیم و لنگر پیچشی، نتایج را در روی طرحی مشابه شکل ۸-۱۵ نشان دهید. تمام اندازه‌های نشان داده شده در شکل بر حسب میلی‌متر هستند.

$$P = 50 \text{ kN} \quad M = 50 \times 0/25 = 12/5 \text{ kN.m}$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{abc} = \frac{1/25 \times 10^{-3} \text{ MN.m}}{(0/226)(0/1)(0/05)^2} = 20/3 \text{ MPa}$$



مسئله ۴۵-۸

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{50 \times 10^{-7}}{(0.1 \times 0.05)} = 15 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = 20/3 + 15 = 35/3 \text{ MPa}$$

۴۶-۸. یک فنر مارپیچ فشاری از مفتول برنز نسفیری به قطر ۳ میلی‌متر ساخته شده و قطر خارجی آن ۳۰ میلی‌متر می‌باشد. اگر تنش برشی مجاز ۲۰۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، چه نیرویی می‌تواند بر این فنر وارد گردد؟ جواب را برای تمرکز تنش تصحیح کنید.

$$m = \frac{2F}{d} = \frac{2 \left[\frac{1}{2} (30) - \frac{1}{2} (3) \right]}{3} = 9 \rightarrow K = 1/16$$

$$F = \frac{\tau_{max} \pi d^3}{16 K r} = \frac{200 \times \pi (3)^3}{16 \times 1/16 \times 13/3} = 68/7 \text{ N}$$

۴۷-۸. فنر مارپیچ شیری به قطر خارجی ۴۸ میلی‌متر، از مفتول فولادی به قطر ۶ میلی‌متر ساخته شده است. نیروی فشاری که در حین عمل به این فنر وارد می‌شود، بین حداقل ۹۰ نیوتن و حداکثر ۳۰۰ نیوتن قرار دارد. اگر ۸ مارپیچ فعال در این فنر وجود داشته باشد، میزان بازشدگی شیر و حداکثر تنش برشی فنر را در حین عمل به دست آورید. ضریب ارتجاعی برشی را 0.8×10^5 نیوتن بر میلی‌متر فرض نمایید.

$$F = \frac{48 - 6}{2} = 21$$

$$m = \frac{2F}{d} = \frac{2 \times 21}{6} = 7 \rightarrow K = 1/2$$

$$\Delta = \frac{64 F F^3 N}{G d^4} = \frac{64 \times (300 - 90) \times (21)^3 \times 8}{(0.82 \times 10^5) (6)^4} = 9/37 \text{ mm}$$

$$\tau_{max} = K \frac{16 F F^3}{\pi d^3} = 1/2 \times \frac{16 \times 300 \times 21}{\pi (6)^3} = 178/25 \text{ MPa}$$

۴۸-۸. یک فنر مارپیچی از پیچاندن مفتول فولادی به قطر ۱۲ میلی‌متر در حول میله‌ای به قطر ۱۲۰ میلی‌متر ساخته شده است. اگر ۱۰ مارپیچ فعال وجود داشته باشد، ثابت فنر چقدر می‌باشد؟ ضریب ارتجاعی برشی را 0.82×10^5 نیوتن بر میلی‌متر مربع در نظر بگیرید. چه نیرویی لازم است بر فنر وارد گردد تا طول آن ۴۰ میلی‌متر کاهش پیدا کند.

$$\Delta = 1 \quad \text{و} \quad K = F$$

$$k = \frac{G d^4}{64 F^3 N} = \frac{0.82 \times 10^5 \times 12^4}{64 (66)^3 (10)} = 9/24 \text{ N/mm} \quad (kN/m)$$

$$F = k \Delta = 9/24 \times 40 = 369/6 \text{ N}$$

۸-۴۹. اگر یک فنر ماریچ کششی، ساخته شده از مفتول فولادی به قطر ۶ میلی متر که دارای ۱۲ ماریچ فعال به قطر خارجی ۳۰ میلی متر باشد، به انتهای فنر ماریچ کششی دیگری وصل شود که از مفتول فولادی به قطر ۸ میلی متر ساخته شده و دارای ۱۸ ماریچ فعال به قطر خارجی ۴۰ میلی متر می باشد، ثابت این مجموعه فنر چقدر خواهد بود؟ حداکثر نیرویی که می توان بر فنر وارد آورد بدون اینکه تنش برشی از ۴۸۰ نیوتن بر میلی متر مربع تجاوز کند، چقدر است؟ ضریب ارتجاعی برشی را مساوی 0.82×10^5 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

$$\Delta = \frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$k = \frac{G d^4}{64 \bar{r}^3 N}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{64}{G} \left[\frac{\bar{r}_1^3 N_1}{d_1^4} + \frac{\bar{r}_2^3 N_2}{d_2^4} \right] = \frac{64}{0.82 \times 10^5} \left[\frac{12^3 \times 2}{6^4} + \frac{16^3 \times 18}{8^4} \right]$$

$$\Rightarrow k = 37/68 \text{ N/mm}$$

$$m_1 = \frac{2 \bar{r}_1}{d_1} = \frac{2 \times 12}{6} = 4 \rightarrow K = 1/37$$

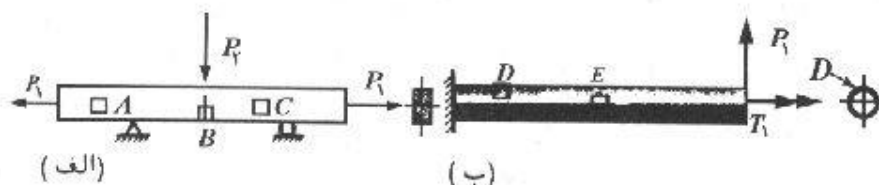
$$m_2 = \frac{2 \bar{r}_2}{d_2} = \frac{2 \times 16}{8} = 4 \rightarrow K = 1/37$$

$$F_1 = \frac{\tau_{max} \pi d_1^3}{16 K \bar{r}_1} = \frac{480 \times \pi \times 6^3}{16 \times 1/37 \times 12} = 1238 \text{ N}$$

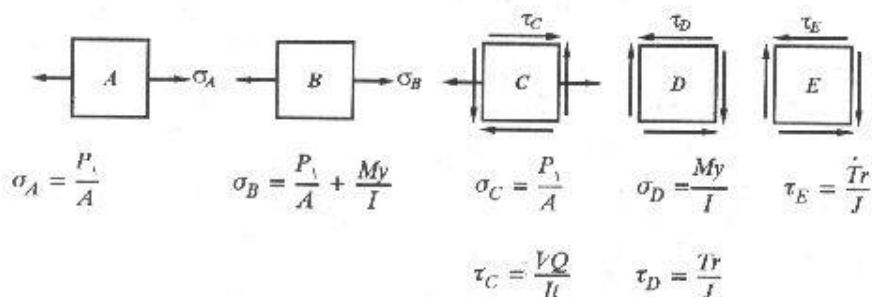
$$F_2 = \frac{480 \times \pi \times 8^3}{16 \times 1/37 \times 16} = 2201 \text{ N}$$

مسائل فصل نهم

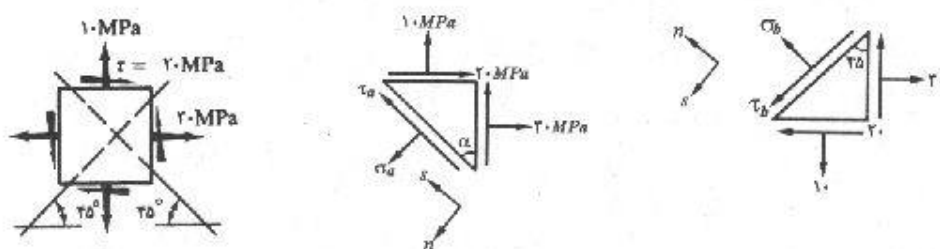
۹-۱. در دو عضو مختلف نشان داده شده در شکل، جزء سطحهای بینهایت کوچک A ، B ، C و D و E مشخص شده‌اند. هر کدام از این جزء سطحها را به طور جداگانه رسم نمایید و در روی آنها تنشهای مؤثر را نشان دهید. امتداد و جهت هر تنش را توسط یک بردار نشان دهید و رابطه‌ای را که تنش مزبور از آن به دست می‌آید، بیان کنید. از وزن اعضا صرف نظر نمایید.



مسئله ۹-۱



۹-۲ تا ۹-۵. در هر کدام از جزء سطحهای نشان داده شده، تنشهای قائم و برشی را در سطوح مایل نشان داده شده به دست آورید. برای حل مسائل از روش استاتیکی استفاده نمایید.

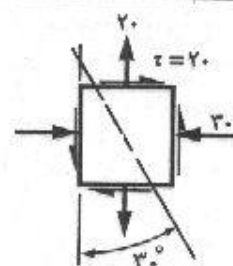
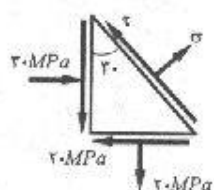


مسئله ۹-۲

اگر سطح برش خورده A فرض شود دو سطح دیگر عبارتند از $A \cos \alpha$ و $A \sin \alpha$

$$\sum F_n = 0 : \sigma_n A = (\sigma_x A \cos \alpha) \cos \alpha + (\sigma_y A \sin \alpha) \sin \alpha + \tau_{xy} A \sin \alpha \cos \alpha$$

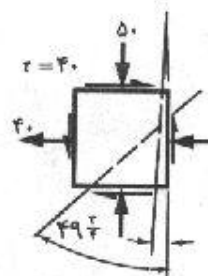
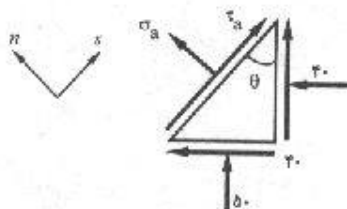
$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$



مسئله ۴-۹

$$\sum F_n = 0: \sigma \cdot A + (30 \times A \cdot \cos 30^\circ) \cos 30^\circ - (30 \times A \sin 30^\circ) \sin 30^\circ - 30 \times 30 \times A \sin 30^\circ \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow \sigma = -0.18 \text{ MPa}$$

$$\sum F_s = 0: \tau A - (30 \times A \cos 30^\circ) \sin 30^\circ - (30 \times A \sin 30^\circ) \cos 30^\circ - 30 \times A \cos 30^\circ \cos 30^\circ + 30 \times A \sin 30^\circ \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow \tau = 31.6 \text{ MPa}$$



مسئله ۵-۹

$$\sum F_n = 0:$$

$$\sigma_a A + (40 \times A \cos \theta) \cos \theta + (50 \times A \sin \theta) \sin \theta + 2 \times 40 \times A \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$\theta = 49/75 \rightarrow \sigma_a = -85/27 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

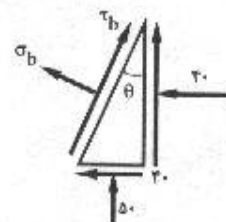
$$\sum F_s = 0:$$

$$\tau_a A - (40 \times A \cos \theta) \sin \theta + (50 \times A \sin \theta) \cos \theta + 40 (A \cos \theta) \cos \theta - 40 (A \sin \theta) \sin \theta = 0 \quad (2)$$

$$\theta = 49/75 \rightarrow \tau_a = 1/67 \text{ MPa}$$

$$(1) \quad \theta = 4/75 \rightarrow \sigma_b = -46/7 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

$$(2) \quad \theta = 4/75 \rightarrow \tau_b = -40/27 \text{ MPa}$$



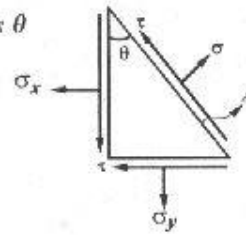
علامت منفی نشان دهنده اینست که τ_b در خلاف جهت نشان داده شده در شکل می باشد.

۶-۹. رابطه ۲-۹ را بدست آورید.

$$\sum F_x = 0 : \tau_\theta A = \sigma_y \cdot A \sin \theta \cdot \cos \theta + \tau \cdot A \cos \theta \cdot \cos \theta - \tau \cdot A \sin \theta \cdot \sin \theta + \sigma_x \cdot A \cos \theta \cdot \sin \theta$$

$$\tau_\theta = (\tau_y - \tau_x) \sin \theta \cos \theta + \tau (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

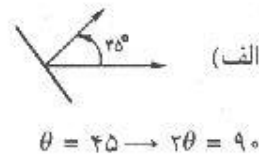
$$\tau_\theta = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta$$



۷-۹. با استفاده از معادلات ۱-۹ و ۲-۹، مسأله ۲-۹ را مجدداً حل نمایید.

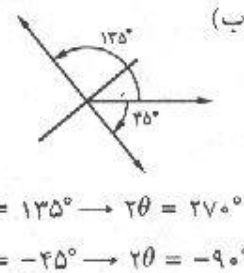
$$\sigma = \frac{30 + 10}{2} + \frac{30 - 10}{2} \cos 90^\circ + 20 \sin 90^\circ = 40 \text{ MPa}$$

$$\tau = -\frac{30 - 10}{2} \sin 90^\circ + 20 \cos 90^\circ = -10 \text{ MPa}$$



$$\sigma = \frac{30 + 10}{2} + \frac{30 - 10}{2} \cos 270^\circ + 20 \sin 270^\circ = 0$$

$$\tau = -\frac{30 - 10}{2} \sin 270^\circ + 20 \cos 270^\circ = 10 \text{ MPa}$$

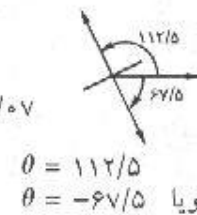


۸-۹. با استفاده از معادلات ۱-۹ و ۲-۹، مسأله ۲-۹ را مجدداً حل نمایید.

(الف)

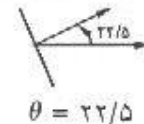
$$\sigma_a = \frac{30 + 10}{2} + \frac{30 - 10}{2} \cos (2 \times 112/5)^\circ + 20 \sin (2 \times 112/5)^\circ = -1/21 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = -\frac{30 - 10}{2} \sin (2 \times 112/5)^\circ + 20 \cos (2 \times 112/5)^\circ = -7/0.7$$



$$\sigma_b = \frac{30 + 10}{2} + \frac{30 - 10}{2} \cos (2 \times 22/5)^\circ + 20 \sin (2 \times 22/5)^\circ = 41/2 \text{ MPa} \quad (\text{ب})$$

$$\tau_b = -\frac{30 - 10}{2} \sin (2 \times 22/5)^\circ + 20 \cos (2 \times 22/5)^\circ = 7/0.7 \text{ MPa}$$



۹-۹. با استفاده از روابط به دست آمده برای تنشهای اصلی، تنشهای اصلی و صفحات اصلی را برای جزء سطحی که بر آن تنشهای زیر تأثیر می‌کنند، به دست آورید و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوط به تنشهای اصلی، نمایش دهید.

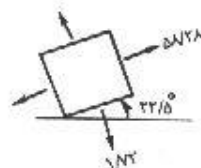
$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \sigma_y = +10 \text{ MPa} \quad \tau = +20 \text{ MPa}$$

از قرارداد علامت شکل ۴-۹ استفاده نمایید.

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{20}{\frac{1}{2}(50 - 10)} = \frac{+20}{+20} = 1 \Rightarrow 2\theta_p = 45^\circ \rightarrow \theta_p = 22.5^\circ$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{50 + 10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50 - 10}{2}\right)^2 + 20^2} = 30 \pm 28/28$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 58/28 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 2/28 \text{ MPa}$$



۱۰-۹. مسأله ۹-۹ را با استفاده از داده‌های زیر مجدداً حل نمایید:

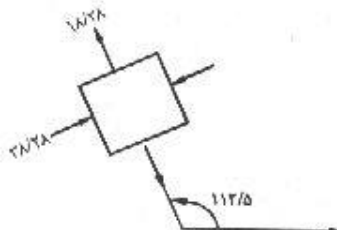
$$\sigma_x = -30 \text{ MPa} \quad \sigma_y = +10 \text{ MPa} \quad \tau = -20 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-20}{\frac{1}{2}(-30 - 10)} = \frac{-20}{-20} = +1 \Rightarrow 2\theta_p = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ \rightarrow \theta_p = 112.5^\circ$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-30 + 10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-30 - 10}{2}\right)^2 + 20^2} = -10 \pm 28/28$$

$$\sigma_1 = 18/28 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -38/28 \text{ MPa}$$

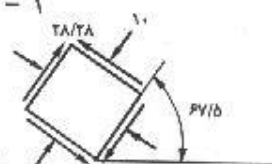


۹-۱۱. با استفاده از روابط به دست آمده برای تنش برشی حداکثر، تنش برشی حداکثر و صفحات مربوطه و تنشهای قائم همراه با آن را برای داده‌های مسأله ۹-۱۰ به دست آورید و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوط به تنش برشی حداکثر نشان دهید.

$$\tan 2\theta_s = \frac{-\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau} = \frac{-\frac{1}{2}(-30 - 10)}{-20} = \frac{20}{-20} = -1$$

$$\Rightarrow 2\theta_s = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \rightarrow \theta_s = 67.5^\circ$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{-30 - 10}{2}\right)^2 + 20^2} = 28/28 \text{ MPa}$$



تنش نرمال همراه تنش برشی:

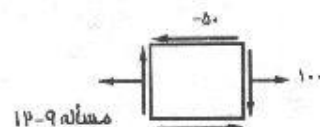
$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-30 + 10}{2} = -10 \text{ MPa}$$

۱۲-۹ تا ۱۵-۹. داده‌های مسائل ۹-۱۲ تا ۹-۱۵ از قرارداد علامت شکل ۹-۴ تبعیت می‌کنند. در هر حالت داده‌ها را در روی یک جزء سطح کوچک نشان دهید. سپس با استفاده از روابط به دست آمده برای تنشهای اصلی و تنش برشی حداکثر؛

(الف) تنشها و صفحات اصلی را به دست آورید و نتایج را به صورت ترمیمی در روی جزء سطح مربوط به تنشهای اصلی نشان دهید.

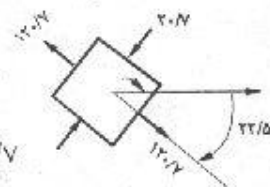
(ب) تنش برشی حداکثر و صفحات مربوط و تنشهای قائم همراه با آن را به دست آورده و نتایج را به صورت ترمیمی در روی جزء سطح مربوط به تنشهای اصلی نشان دهید.

$$\sigma_x = +100 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau = -50 \text{ MPa}$$

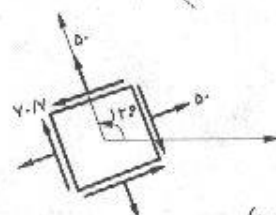


$$2\theta_p = \text{Arc tan} \frac{-50}{\frac{1}{2}(100 - 0)} = \frac{-100}{100} = -1 \rightarrow 2\theta_p = -45^\circ \rightarrow \theta_p = -22.5^\circ \quad (\text{الف})$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{100 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100 - 0}{2}\right)^2 + (-50)^2} = 50 \pm 70.7$$



$$\sigma_1 = 120.7 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -20.7 \text{ MPa}$$

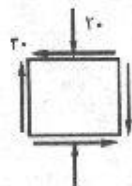


$$2\theta_s = \text{Arc tan} \frac{-\frac{1}{2}(100 - 0)}{-50} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow 2\theta_s = 180^\circ + 45^\circ \Rightarrow \theta_s = 112.5^\circ \quad (\text{ب})$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{100}{2}\right)^2 + 50^2} = 70.7 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \sigma = \frac{100 + 0}{2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -20 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \tau = -30 \text{ MPa}$$

مسئله ۹-۱۳:

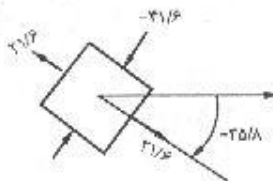


تبدیل تنش و کرنش / ۲۴۱

$$\tan 2\theta_p = \frac{-30}{\frac{1}{2}(0 + 20)} = -3 \rightarrow 2\theta_p = -71/5^\circ \rightarrow \theta_1 = -35/8^\circ \quad (\text{الف})$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{0 + 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 20}{2}\right)^2 + (-30)^2} = -10 \pm 31/6$$

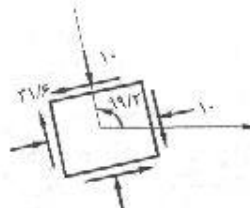
$$\rightarrow \sigma_1 = +21/6 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = -41/6$$



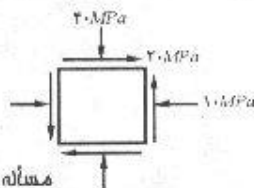
$$\tan 2\theta_s = \frac{-\frac{1}{2}(0 + 20)}{-30} = \frac{-1}{-3} \rightarrow 2\theta_s = 18^\circ + 18/4 \rightarrow \theta_s = 99/2^\circ \quad (\text{ب})$$

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 31/6 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{0 - 20}{2} = -10 \text{ MPa}$$



مسئله ۹-۱۴: $\sigma_x = -10 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = -40 \text{ MPa}$ و $\tau = +20 \text{ MPa}$

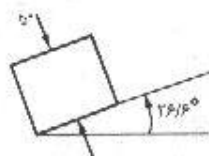


مسئله ۹-۱۴

$$\tan 2\theta_p = \frac{20}{\frac{1}{2}(-10 + 40)} = \frac{4}{3} \rightarrow \theta_p = 26/6^\circ \quad (\text{الف})$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-10 + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10 - 40}{2}\right)^2 + 20^2}$$

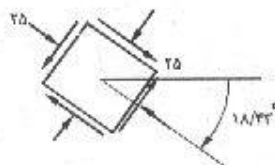
$$= -25 \pm 25 \quad \begin{cases} \sigma_1 = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -50 \text{ MPa} \end{cases}$$



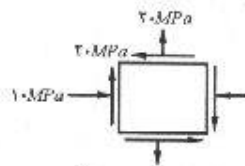
$$\tan 2\theta_s = \frac{-\frac{1}{2}(-10 + 40)}{20} = \frac{-3}{4} \rightarrow 2\theta_s = -36/87 \rightarrow \theta_s = -18/43^\circ \quad (\text{ب})$$

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{-10 + 40}{2}\right)^2 + 20^2} = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma = \frac{-10 - 40}{2} = -25 \text{ MPa}$$



مسئله ۹-۱۵: $\sigma_x = -۱۰ \text{ MPa}$ و $\sigma_y = +۲۰ \text{ MPa}$ و $\tau = -۲۰ \text{ MPa}$

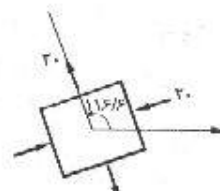
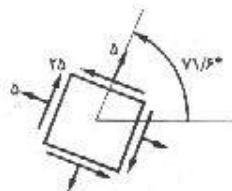


$$\tan 2\theta_p = \frac{-20}{\frac{1}{2}(-10 - 20)} = \frac{-4}{-3} \Rightarrow 2\theta_p = 180^\circ + 53.1^\circ \Rightarrow \theta_p = 116.6^\circ \quad (\text{الف})$$

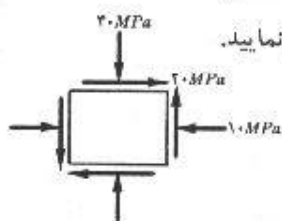
$$\sigma_{1,2} = \frac{-10 + 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + 20^2} = 5 \pm 25 \quad \begin{cases} \sigma_1 = 30 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -20 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\tan 2\theta_s = \frac{\frac{-1}{2}(-10 - 20)}{-20} = \frac{3}{-4} \Rightarrow 180^\circ - 36.87^\circ \Rightarrow \theta_s = 71.6^\circ \quad (\text{ب})$$

$$\tau_m = \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + 20^2} = 25 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \sigma = \frac{-10 + 20}{2} = 5 \text{ MPa}$$



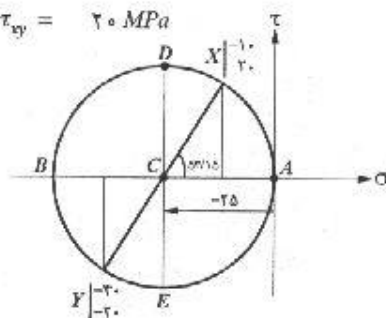
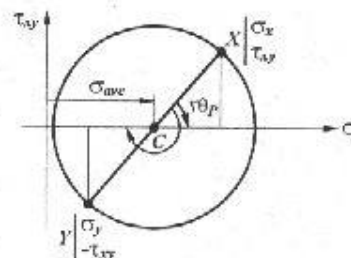
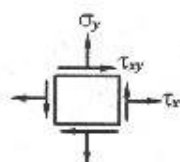
۹-۱۶. با استفاده از دایره تنش مور، قسمت الف مسئله ۹-۱۴ را حل نمایید.



$$\sigma_x = -10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = +20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -20 \text{ MPa}$$



پس از ترسیم محورهای عمود بر هم و مشخص کردن جهت مثبت تنش نرمال و تنش برشی بر روی آنها؛ محل مرکز دایره را تعیین می‌کنیم.

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-10 + 20}{2} = 5$$

در گام بعد محل نقاط $X (\sigma_x \text{ و } \tau_{xy})$ و $Y (\sigma_y \text{ و } -\tau_{xy})$ مشخص می‌شوند:

$$X (-۱۰ \text{ و } ۲۰) \quad \text{و} \quad Y (-۴۰ \text{ و } -۲۰)$$

اگر دو نقطه X و Y را به یکدیگر وصل کنیم خط واصل باید از نقطه C که همان مرکز دایره است بگذرد. حال دایره‌ای به مرکز C و شعاع CX ترسیم می‌نماییم که این دایره از نقطه L نیز عبور خواهد کرد. اینک با در دست داشتن دایره مور برای المان مربوطه، اطلاعات مورد نیاز مثل مقادیر تنشهای اصلی، تنش برشی ماکزیمم، زوایای اصلی و سایر موارد را می‌توان هم از روش محاسباتی و هم بوسیله اندازه‌گیری از روی دایره بدست آورد. البته برای استفاده از روش اندازه‌گیری باید در ترسیم، دقت کافی به عمل آید.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-۱۰ + ۴۰}{2}\right)^2 + ۲۰^2} = ۲۵$$

تنشهای اصلی:

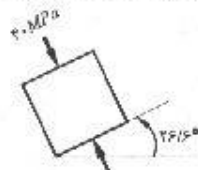
$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R = -۲۵ + ۲۵ = ۰$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{ave} - R = -۲۵ - ۲۵ = -۵۰ \text{ MPa}$$

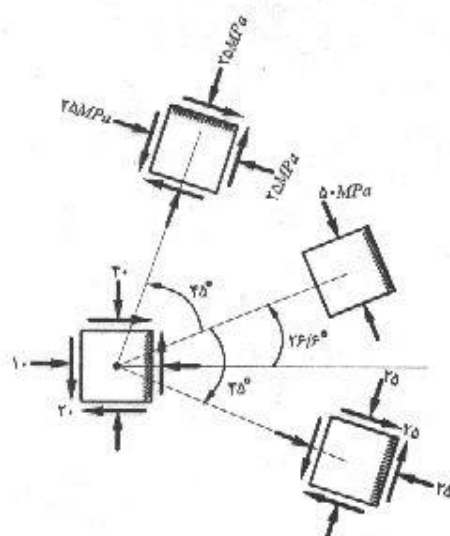
صفحات اصلی:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{۲ \times ۲۰}{-۱۰ + ۴۰} = \frac{+۴}{+۳} \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} 2\theta_p = 53/۱۵ \rightarrow \theta_p = ۲۶/۶^\circ$$

دورانی که X را روی A منطبق می‌کند در جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد، بنابراین طبق قراردادی که در درس به آن اشاره شد، اگر المان را به اندازه θ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانیم، به موقعیتی می‌رسیم که در آن تنش برشی صفر است و σ_x برابر σ_{max} می‌شود. همچنین چون با این دوران نقطه Y روی نقطه B قرار می‌گیرد، σ_y برابر σ_{min} خواهد بود. پس برای رسیدن به موقعیتی که در آن تنشهای اصلی رخ می‌دهند، کافیه المان را به اندازه $۲۶/۶^\circ$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بچرخانیم.



برای بدست آوردن صفحات تنش برشی ماکزیمم، دیگر نیازی به محاسبه زاویه نیست زیرا همانگونه که قبلاً گفته شد، صفحات تنش برشی ماکزیمم با صفحات اصلی همواره زاویه ۴۵° می‌سازند. بنابراین برای بدست آوردن موقعیت المان در حالتی که تنش برشی ماکزیمم رخ می‌دهد، کافیه المان مربوط به تنشهای اصلی را ۴۵° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم. از روی دایره



مور به وضوح مشخص است که با این عمل به نقطه D می‌رسیم که همان موقعیت تنش برشی ماکزیمم (با علامت مثبت) می‌باشد. مقدار تنش برشی ماکزیمم به اندازه شعاع دایره مور می‌باشد:

$$\tau_{max} = R$$

در این مسأله $R = 25$ بوده و در نتیجه:

$$\tau_{max} = 25 \text{ MPa}$$

اگر المان را از حالت تنشهای اصلی، به اندازه 45° خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانیم در حقیقت روی دایره مور به نقطه E رسیده‌ایم و همانگونه که مشخص است در این موقعیت،

المان باز هم در حالت تنش برشی ماکزیمم قرار دارد ولی علامت آن روی وجه مورد بررسی منفی می‌باشد و طبق قرارداد، جهت آن روی المان باید بگونه‌ای باشد که المان را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخاند. تفاوت این دو حالت در شکل کاملاً مشخص می‌باشد.

با توجه به مطالب فوق θ_s را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\theta_s = \theta_p - 45^\circ$$

۹-۱۷. با استفاده از دایره تنش مور، قسمت الف مسأله ۹-۱۵ را حل نمایید.

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-10 + 20}{2} = 5 \text{ MPa}$$

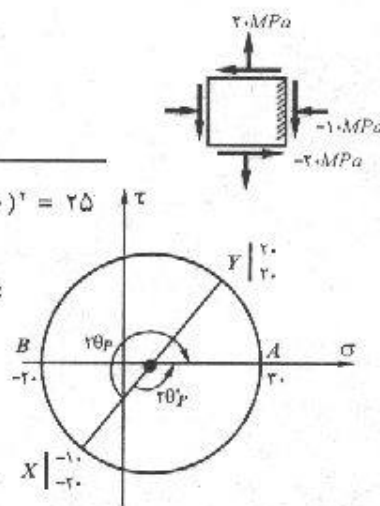
$$X = (-10 \text{ و } -20) \quad Y (20 \text{ و } 20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 25$$

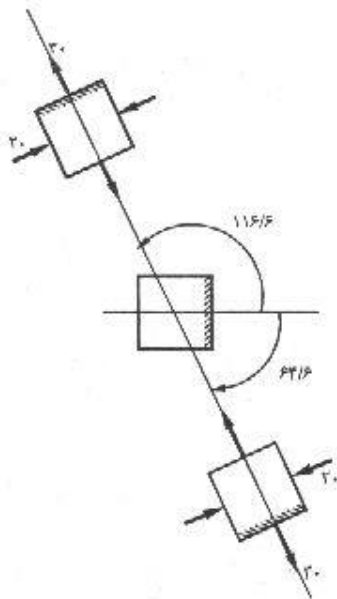
$$\sigma_1 = 5 + 25 = 30 \text{ MPa} \text{ و } \sigma_2 = 5 - 25 = -20 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times (-20)}{-30} = \frac{-4}{-3}$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} 2\theta_p = 180^\circ + 53.1^\circ \rightarrow \theta_p = 116.6^\circ$$



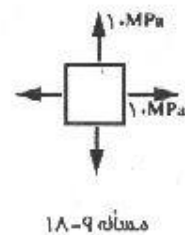
چون وتر XY با دوران به اندازه $2\theta_p$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، روی محور σ قرار می‌گیرد، خود المان را به اندازه θ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا صفحات تنشهای



اصلی مشخص شوند. با این عمل نقطه X به نقطه A مستقل می‌شود؛ بنابراین وجهی که تنش نرمال روی آن 10 MPa - بوده است اینک تحت تنش نرمال 30 MPa قرار می‌گیرد. بهمین ترتیب، تنش نرمال در وجه عمود بر آن از $20 \text{ MPa} +$ به $20 \text{ MPa} -$ می‌رسد. البته می‌توان با دوران قطر XY در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت هم به نقطه A رسید که در این صورت:

$$\begin{aligned} 2\theta'_p &= 180 - 53/1 = 126/9 \\ \Rightarrow \theta'_p &= 63/6 \end{aligned}$$

در هر دو حالت نتیجه یکسان است.



مسئله ۹-۱۸

۹-۱۸ تا ۹-۲۱. دایره تنش مور را برای هر یک از حالات تنش نشان داده شده در شکل رسم نمایید. با استفاده از این دواپرو، (الف) تنشها و صفحات اصلی را به دست آورید و نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه نشان دهید. (ب) تنشهای برشی حداکثر و صفحات مربوطه و تنشهای قائم همراه با آن را به دست آورید و نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه به تنش برشی حداکثر، نشان دهید.

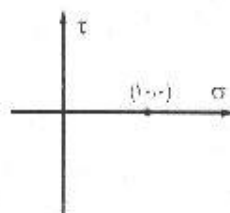
$$\sigma_x = 10 \text{ MPa} \text{ و } \sigma_y = 10 \text{ MPa} \text{ و } \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_{ave} = \frac{10 + 10}{2} = 10 \text{ MPa}$$

مرکز دایره:

$$X(10 \text{ و } 0) \text{ و } Y(10 \text{ و } 0) \quad R = \sqrt{\left(\frac{10 - 10}{2}\right)^2 + 0^2} = 0$$

ملاحظه می‌شود که نقاط X و Y و همچنین مرکز دایره بر یکدیگر منطبق می‌شوند. یعنی در این حالت دایره مور به یک نقطه تبدیل می‌شود و همانگونه که می‌بینید شعاع بدست آمده برای دایره هم صفر شده و این مطلب را تأیید می‌کند.



$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = -10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ave} = 0$$

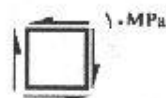
$$X(0, -10) \text{ و } Y(0, +10)$$

$$\tan 2\theta = \infty \rightarrow 2\theta = -90 \rightarrow \theta = -45^\circ$$

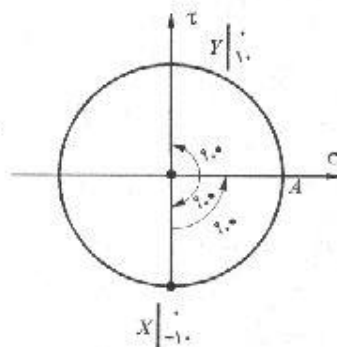
$$R = \sqrt{0^2 + (-10)^2} = 10$$

$$\sigma_1 = 0 + 10 = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0 - 10 = -10 \text{ MPa}$$

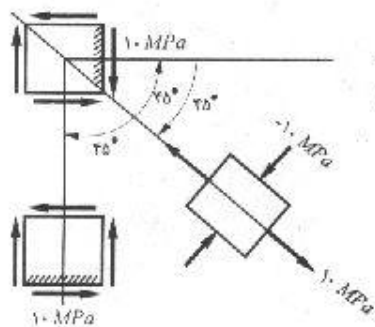


مسئله ۹-۱۹



چون روی دایره خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران صورت گرفته، المان را در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.

زوایای تنش برشی ماکزیمم به اندازه 45° با زوایای تنشهای اصلی اختلاف دارند یعنی موقعیت اولیه المان هم در حالت تنش برشی ماکزیمم می‌باشد.



$$\sigma_x = -30 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ave} = \frac{-30 + 20}{2} = -5 \text{ MPa} \quad C(-5, 0)$$

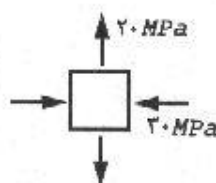
$$X(-30, 0) \text{ و } Y(20, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-30 - 20}{2}\right)^2 + 0^2} = 25$$

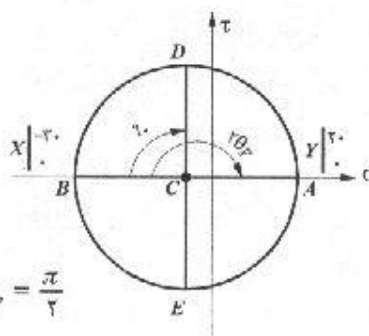
$$\sigma_1 = -5 + 25 = 20 \text{ MPa}$$

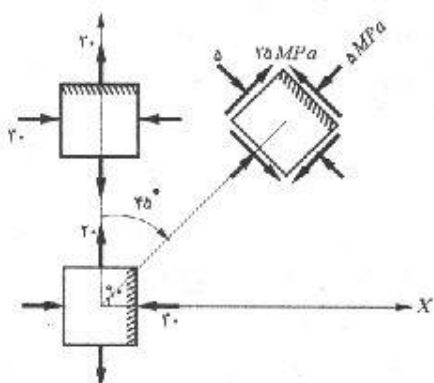
$$\sigma_2 = -5 - 25 = -30 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{0}{-50} \rightarrow 2\theta_p = \pi \rightarrow \theta_p = \frac{\pi}{2}$$

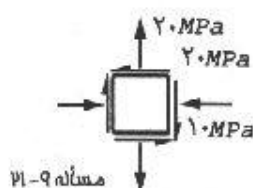


مسئله ۹-۲۰





با دوران قطر XY در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه 90° ، نقطه X به نقطه D منتقل می‌شود که در این وضعیت مقدار تنش نرمال 5 MPa بوده و تنش برشی مقدار حداکثر خود را (25 MPa) با علامت مثبت دارا می‌باشد. در وجه عمود بر آن که نقطه Y نشان‌دهنده آن است، با انتقال به E مقادیر تنش نرمال و برشی به ترتیب -5 MPa و -25 MPa می‌باشند.



$$\sigma_x = -10 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 20 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ave} = \frac{-10 + 20}{2} = 5 \text{ MPa}$$

$$X(-10 \text{ و } -20) \quad Y(20 \text{ و } 20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 25$$

$$\sigma_1 = 5 + 25 = 30 \text{ MPa}$$

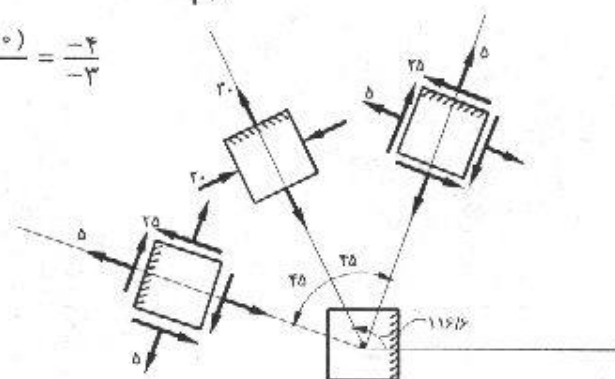
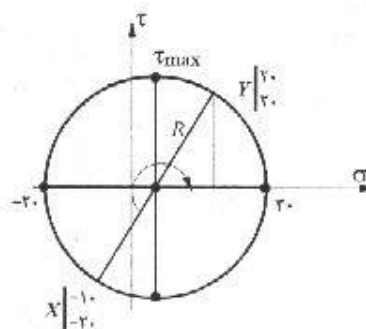
$$\sigma_2 = 5 - 25 = -20 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times (-20)}{-30} = \frac{-4}{-3}$$

$$\rightarrow 2\theta_p = 180^\circ + 53.1^\circ$$

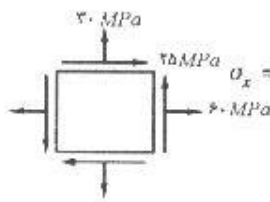
$$\rightarrow \theta_p = 116.6^\circ$$

$$\theta_s = \theta_p \pm 45^\circ$$



۲۲-۹ تا ۲۸-۹. داده‌های مسائل ۲۲-۹ تا ۲۸-۹، روی یک جزء سطح نمایش دهید. سپس با استفاده از دایره مور و اعمال مثلثاتی، (الف) تنشهای اصلی و صفحات اصلی را به دست آورید و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه نشان دهید. (ب) تنش برشی حداکثر و صفحات

مربوطه و تنشهای قائم همراه با آن را به دست آورده و نتایج را به طور ترسیمی در روی جزء سطح مربوطه نشان دهید. داده‌های مسائل به قرار زیر می‌باشند:



مسئله ۹-۲۲: $\sigma_x = +60 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = +30 \text{ MPa}$ و $\tau = +25 \text{ MPa}$

$$\text{center} = \frac{60 + 30}{2} = 45 \quad C(45, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{60 - 30}{2}\right)^2 + 25^2} = 29/15$$

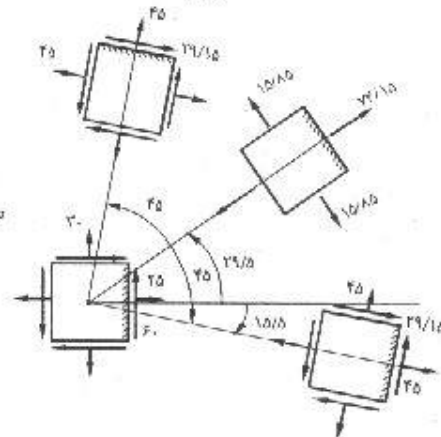
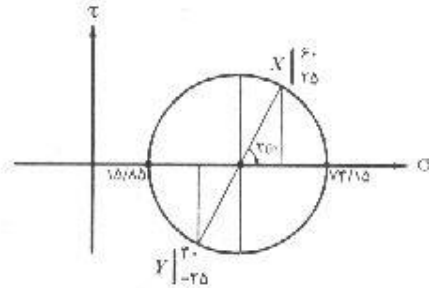
$$\sigma_1 = 45 + 29/15 = 74/15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 45 - 29/15 = 15/15 \text{ MPa}$$

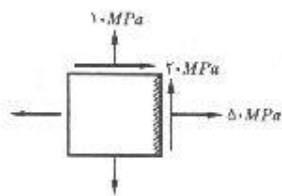
$$\tan 2\theta_p = \left(\frac{25}{60 - 30}\right) = 5/6 \Rightarrow \theta_p = 29/5^\circ$$

$$\tau_{\max} = R = 29/15 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \sigma = 45 \text{ MPa}$$

$$\theta_s = 29/5 - 45 = -15/5^\circ$$



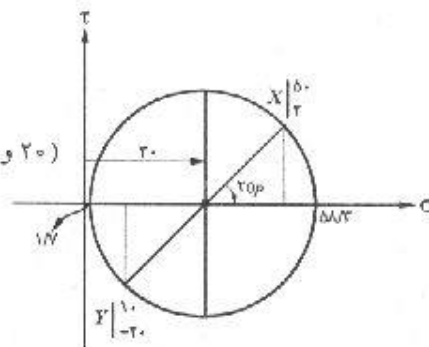
مسئله ۹-۲۳: مشابه مسئله ۹-۲۲



$$\text{center} = \frac{50 + 10}{2} = 30 \quad X(50, 20) \quad Y(10, -20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{50 - 10}{2}\right)^2 + 20^2} = 28/3$$

$$\sigma_1 = 30 + 28/3 = 58/3$$



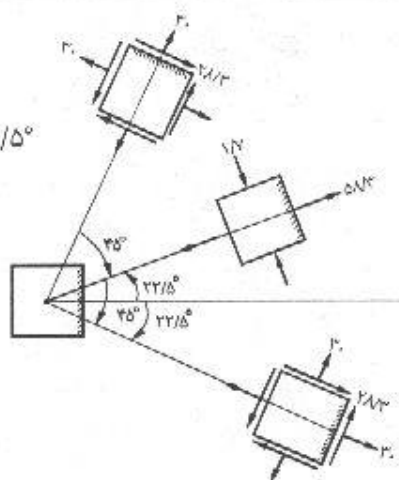
تبدیل تنش و کرنش / ۲۴۹

$$\sigma_1 = 30 - 28/3 = 1/3$$

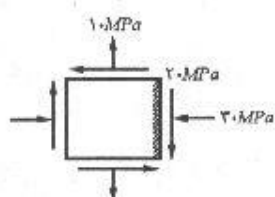
$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_o}{\sigma_o - \sigma_o} \Rightarrow 2\theta_p = 45^\circ \rightarrow \theta_p = 22.5^\circ$$

$$\tau_{max} = R = 28/3 \text{ MPa}$$

$$\theta_s = \theta_p - 45 = -22.5$$



مسأله ۹-۲۴. مشابه مسأله ۹-۱۰



$$center = \frac{-30 + 10}{2} = -10$$

$$X(-30 \text{ و } -20) \quad Y(10 \text{ و } 20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-30 - 10}{2}\right)^2 + 20^2} = 28/3$$

$$\sigma_1 = -10 + 28/3 = 18/3 \text{ MPa}$$

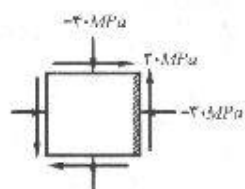
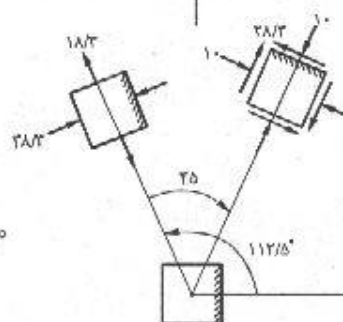
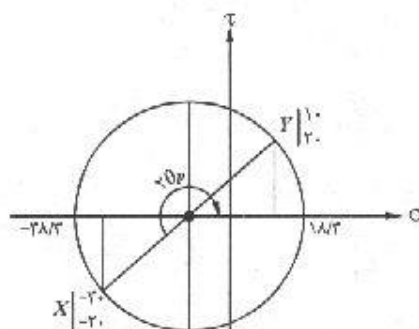
$$\sigma_2 = -10 - 28/3 = -38/3 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-20}{-30 - (-10)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\rightarrow 2\theta_p = 180^\circ + 45^\circ \rightarrow 2\theta_p = 225^\circ \rightarrow \theta_p = 112.5^\circ$$

$$\tau_{max} = R = 28/3 \text{ MPa}$$

$$\theta_s = 112.5 - 45 = 67.5$$



مسأله ۹-۲۵. $\sigma_y = -40 \text{ MPa}$ و $\tau = +30 \text{ MPa}$ و $\sigma_x = -30 \text{ MPa}$

۲۵۰ / تشریح کامل مقاومت مصالح پوپوف

$$\text{center} = \frac{-30 - 40}{2} = -35$$

$$X(-30 \text{ و } +30) \text{ و } Y(-40 \text{ و } -30)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-30 + 40}{2}\right)^2 + 30^2} = 30/2$$

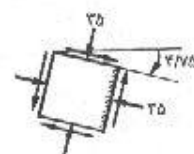
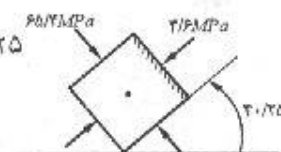
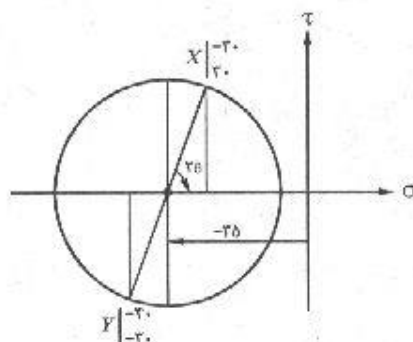
$$\sigma_1 = -35 + 30/2 = -4/6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -35 + 30/2 = -65/2 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{30}{-30 - (-35)} \Rightarrow 2\theta_p = 80/5 \rightarrow \theta_p = 40/25$$

$$\tau_{max} = R = 30/2 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad \sigma = -35 \text{ MPa}$$

$$\theta_s = 40/25 - 45 = -4/75$$

مسئله ۹-۲۶: $\sigma_x = -15 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = +35 \text{ MPa}$ و $\tau = +60 \text{ MPa}$

$$\text{center} = \frac{-15 + 35}{2} = 10 \quad C(10, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-15 - 35}{2}\right)^2 + 60^2} = 65 \quad X(-15 \text{ و } 60) \quad Y(35 \text{ و } -60)$$

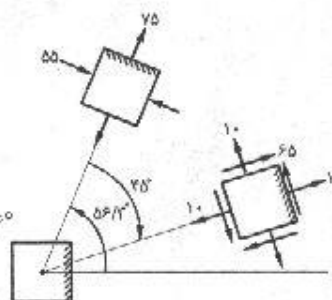
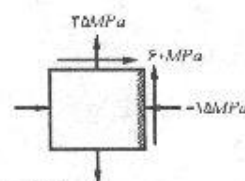
$$\sigma_1 = 10 + 65 = 75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 10 - 65 = -55 \text{ MPa}$$

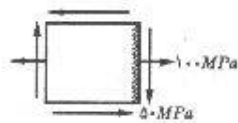
$$\tan 2\theta_p = \frac{60}{10 - (-15)} = \frac{60}{25} \Rightarrow 2\theta_p = 180^\circ - 67/40$$

$$\rightarrow 2\theta_p = 112/60 \rightarrow \theta_p = 56/30$$

$$\theta_s = \theta_p - 45^\circ = 11/30$$



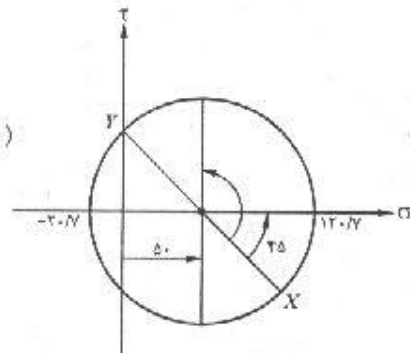
تبدیل تنش و کرنش / ۲۵۱

مسئله ۹-۲۷: $\sigma_x = +100 \text{ MPa}$ و $\sigma_y = 0$ و $\tau = -50 \text{ MPa}$ 

$$\text{center} = \frac{100 + 0}{2} = 50 \quad C(50, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{100 - 0}{2}\right)^2 + (50)^2} = 70.7$$

$$X(100, -50) \quad \text{و} \quad Y(0, 50)$$



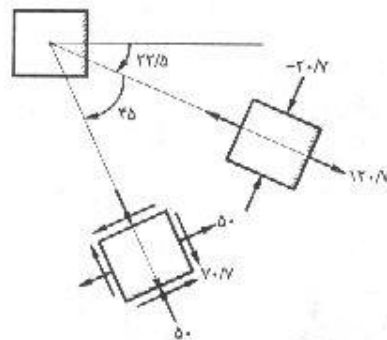
$$\sigma_1 = 50 + 70.7 = 120.7$$

$$\sigma_2 = 50 - 70.7 = -20.7$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau \times (-50)}{100 - 0} = \frac{-1}{1} = -1$$

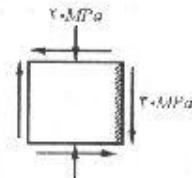
$$2\theta_p = -45^\circ \rightarrow \theta_p = -22.5^\circ$$

$$\theta_s = \theta_p - 45 = -67.5^\circ$$

مسئله ۹-۲۸: $\sigma_x = 0$ و $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$ و $\tau = -30 \text{ MPa}$

$$\text{center} = \frac{0 + (-20)}{2} = -10 \quad C(-10, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{0 + 20}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 31.6 \quad X(0, -30) \text{ و } Y(-20, 30)$$



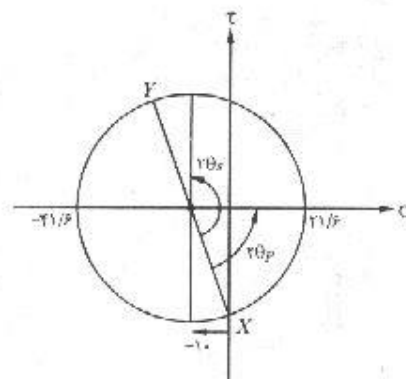
$$\sigma_1 = -10 + 31.6 = 21.6$$

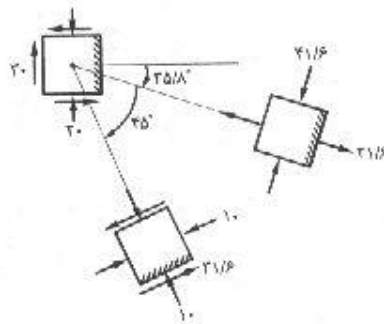
$$\sigma_2 = -10 - 31.6 = -41.6$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau \times (-30)}{0 + 20} = \frac{-60}{20} = -3$$

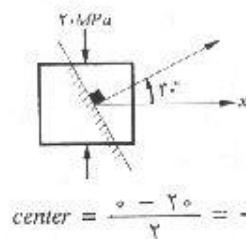
$$\rightarrow 2\theta_p = -71.6^\circ \rightarrow \theta_p = -35.8^\circ$$

$$\theta_s = -35.8^\circ - 45^\circ = -80.8^\circ$$





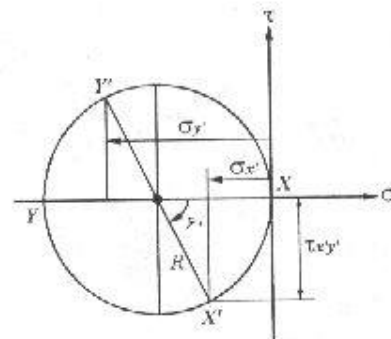
۹-۲۹. اگر $\sigma_x = \sigma_y = -20$ و $\sigma_z = \sigma_t = 0$ مگاپاسکال (نیوتن بر میلی متر مربع) باشند؛ با استفاده از دایره تنش مور، تنش را در روی صفحه‌ای که توسط زاویه $\theta = +30^\circ$ درجه تعریف می‌شوند، به دست آورید.



$$\text{center} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -10 \quad C(-10, 0)$$

$$X(0, 0) \quad Y(-20, 0)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 10$$

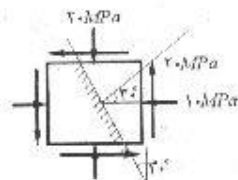
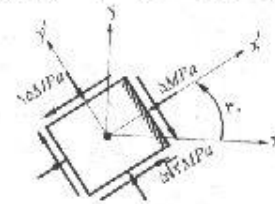


همانگونه که ملاحظه می‌شود، المان در وضعیتی است که تنشهای اصلی بر آن اعمال می‌گردند و موقعیت نقطه X نشان‌دهنده وضعیت تنش روی وجه سمت راست المان می‌باشد. اگر بخواهیم وضعیت تنش را روی صفحه‌ای از المان که با زاویه 30° مشخص می‌شود تعیین کنیم، روی دایره، قطر XY را به اندازه 60° دوران می‌دهیم.

$$\sigma_{x'} = -R + R \cos 60^\circ = -10 + 10 \times \frac{1}{2} = -5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -R \sin 60^\circ = -5\sqrt{3}$$

$$\sigma_{y'} = -R - R \cos 60^\circ = -10 - 10 \times \frac{1}{2} = -15 \text{ MPa}$$



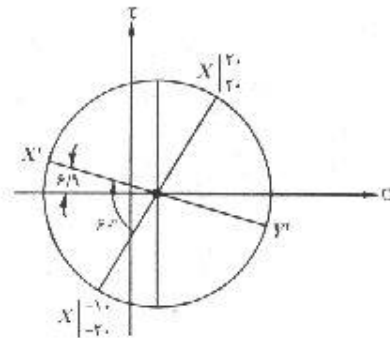
۹-۳۰. با استفاده از دایره تنش مور، برای داده‌های مسأله ۹-۲۹، تنش را در روی صفحه‌ای که با زاویه $\theta = 30^\circ$ درجه مشخص می‌شود، به دست آورید.

تبدیل تنش و کرنش / ۲۵۳

$$center = \frac{-10 + 20}{2} = 5 \quad C(5, 0)$$

$$X(-10 \text{ و } -20) \quad Y(20 \text{ و } 20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 25$$



برای تعیین تنشها روی صفحه‌ای که با زاویه $+30^\circ$ مشخص می‌شود قطر XY را به اندازه 60° حول مرکز دایره دوران می‌دهیم.

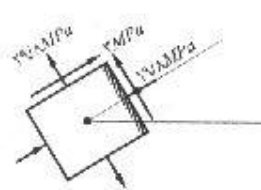
$$\tan 2\alpha_x = \frac{20}{10 + 5} = \frac{20}{15} \rightarrow \alpha_x = 53/1^\circ$$

$$2\alpha = 60 - 53/1 = 6/9^\circ$$

$$\sigma_x = 5 - 25 \cos 6/9^\circ = -19/8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 25 \sin 6/9^\circ = 3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 5 + 25 \cos 6/9^\circ = 29/8 \text{ MPa}$$



۹-۳۱. مسأله ۹-۳۰ را برای صفحه‌ای با $\theta = 20^\circ$ درجه مجدداً حل نمایید.

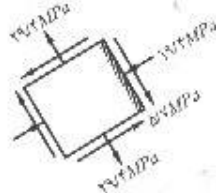
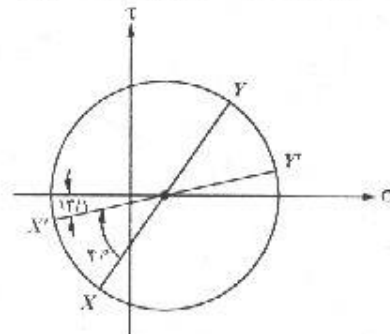
$$2\alpha_x = 53/1^\circ \quad \text{از مسأله قبلی:}$$

$$2\alpha = 53/1^\circ - 40^\circ = 13/1^\circ$$

$$\sigma_x = 5 - 25 \cos 13/1^\circ = -19/4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -25 \sin 13/1^\circ = -5/7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 5 + 25 \cos 13/1^\circ = 29/4 \text{ MPa}$$



۳۲-۹. با استفاده از دایره تنش مور، مسأله ۳-۹ را مجدداً حل نمایید.

$$center = \frac{\sigma_0 + \sigma_1}{2} = \sigma_0 \quad C(20, 0)$$

$$X(30 \text{ و } 20) \text{ و } Y(10 \text{ و } -20)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_0 - \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau_0^2} = 22/36$$

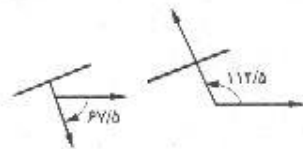
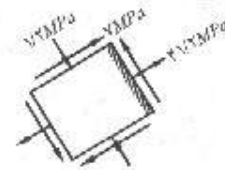
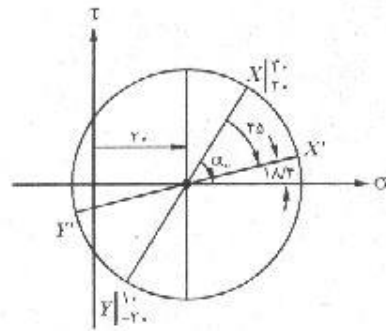
$$\tan \alpha_1 = \frac{\tau_0}{\sigma_0 - \sigma_1} = 2 \rightarrow \alpha_1 = 63/4^\circ$$

$$2\alpha = 63/4^\circ - 45^\circ = 18/4^\circ$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_0 + 22/36 \times \cos 18/4^\circ = 41/2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = 22/36 \times \sin 18/4^\circ = 5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_0 - 22/36 \times \cos 18/4^\circ = -1/2 \text{ MPa}$$



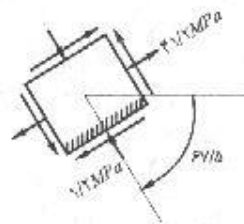
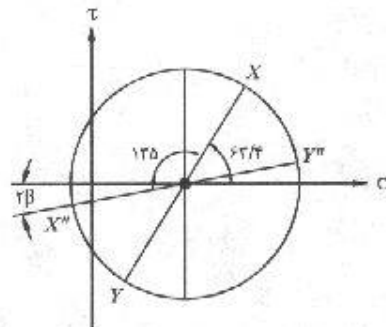
صفحه دیگر نسبت به مبدأ زاویه $112/5 + 67/5$ یا $179/5$ می‌سازد. اگر زاویه $67/5$ را در نظر بگیریم روی دایره باید به اندازه 135° ($2 \times 67/5 = 135^\circ$) قطر XY را دوران دهیم.

$$2\beta = 63/4 + 135 - 180 = 18/4^\circ$$

$$\sigma_{x''} = \sigma_0 - 22/36 \times \cos 18/4^\circ = -1/2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y''} = -22/36 \times \sin 18/4^\circ = -5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{y''} = \sigma_0 + 22/36 \times \cos 18/4^\circ = 41/2$$



۳۳-۹. در یک نقطه مشخص از یک عضو چوبی، حالت تنش مطابق شکل می‌باشد. الیاف چوب زاویه‌ای مساوی 30° با محور x ها می‌سازند. تنش برشی مجاز چوب در صفحاتی به موازات الیاف مساوی ۱ مگاپاسکال می‌باشد. آیا حالت تنش نشان داده شده، مجاز می‌باشد؟ مسأله را

هم از روش ترسیمی مور و هم با استفاده از معادلات حل نمایید.

$$center = \frac{\tau - 1}{\tau} = 0/5 \quad C(0/5 و 0)$$

$$X(2 و -0/5) \quad Y(-1 و 0/5)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\tau + 1}{\tau}\right)^2 + 0/5^2} = 1/58$$

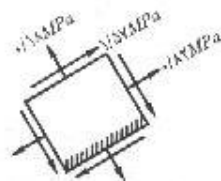
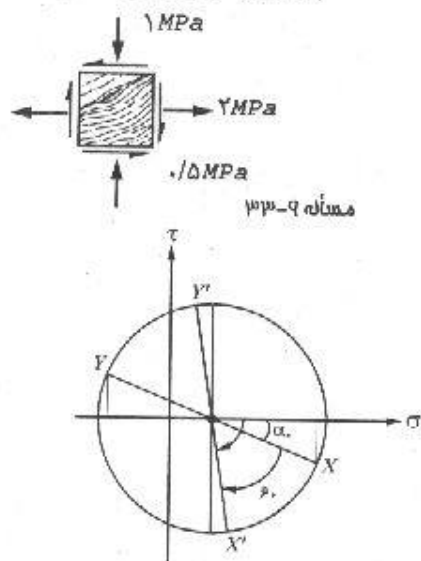
$$\tan 2\alpha = \frac{0/5}{\tau - 0/5} = \frac{1}{\tau} \rightarrow 2\alpha = 18/4$$

$$2\alpha = 18/4^\circ + 60^\circ = 78/4^\circ$$

$$\sigma_{x'} = 0/5 + 1/58 \cos 78/4^\circ = 0/82 MPa$$

$$\tau_{x'y'} = -1/58 \sin 78/4^\circ = -1/55 MPa$$

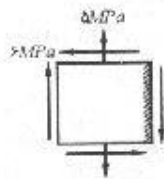
$$\sigma_{y'} = 0/5 - 1/58 \cos 78/4^\circ = 0/18 MPa$$



با توجه به اینکه تنش برشی در امتداد الیاف $1/57 MPa$ بوده و از تنش برشی مجاز بیشتر است در نتیجه حالت تنش نشان داده شده مجاز نمی باشد.

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= -\frac{\tau + 1}{\tau} \sin 60^\circ + (-0/5) \cos 60^\circ = -1/55 \end{aligned}$$

۹-۳۴. مطابق شکل، توسط یک اتصال پنجه‌ای، نیروی P به لچکی نشان داده شده انتقال می‌یابد. محاسبات تنش لچکی، مؤلفه‌های تنش زیر را در روی جزء سطح A نشان می‌دهند، 10 مگاپاسکال در اثر لنگر خمشی، 15 مگاپاسکال در اثر نیروی محوری، 6 مگاپاسکال در اثر نیروی برشی (توجه داشته باشید که اطلاعات داده شده فقط مقدار تنش‌ها را نشان می‌دهند، امتداد و جهت آنها باید با بررسی فیزیکی مسأله تعیین شوند). (الف) نتایج به دست آمده را در روی یک جزء سطح مجزا نمایش دهید. (ب) با استفاده از دایره تنش مور، تنشها و صفحات اصلی و تنش برشی حداکثر و صفحه مربوط و تنش قائم همراه با آن را به دست آورید و نتایج را به صورت ترسیمی نشان دهید.



$$\sigma = 10 - 5 = 5 \text{ MPa}$$

$$\text{center} = \frac{0 + 5}{2} = 2.5 \quad C(2.5, 0)$$

$$X(0, -6) \quad \text{و} \quad Y(5, 6)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{0 - 5}{2}\right)^2 + 6^2} = 6.5$$

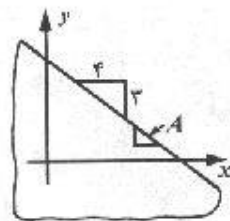
$$\sigma_1 = 2.5 + 6.5 = 9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 2.5 - 6.5 = -4 \text{ MPa}$$

$$\tan \alpha = \frac{6}{2.5} \Rightarrow \alpha = 67.4^\circ$$

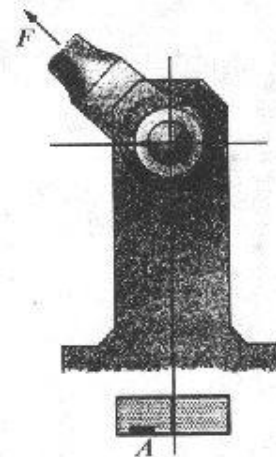
$$2\theta_p = 180^\circ - 67.4^\circ = 112.6^\circ \rightarrow \theta_p = 56.3^\circ$$

$$\theta_s = 56.3^\circ + 45^\circ$$

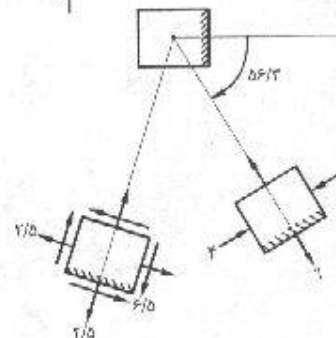
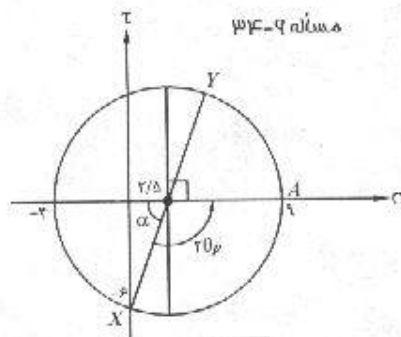


مسئله ۹-۳۵

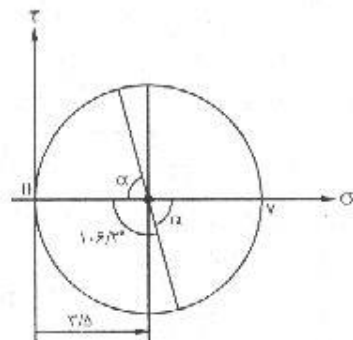
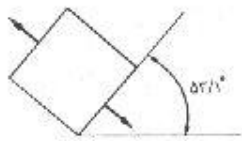
$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \alpha = 53.1^\circ$$



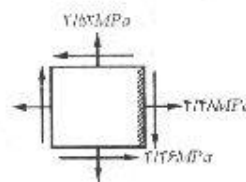
مسئله ۹-۳۴



۹-۳۵. در نقطه جسم A در روی لبه مورب و بارگذاری نشده یک ارتجاعی، حداکثر تنش برشی مساوی ۳/۵ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشد. مطلوب است، (الف) تنشهای اصلی، (ب) حالت تنش در روی جزء سطحی که اضلاع آن به موازات محورهای x و y می‌باشند. نتایج را به صورت ترسیمی نشان دهید. (راهنمایی: حل مسأله با رسم دایره مور ساده‌تر می‌شود).



چون نقطه A روی لبه جسم قرار دارد و بار خارجی هم روی آن اعمال نمی‌شود، روی وجه بیرونی آن هیچگونه تنشی وجود ندارد؛ بنابراین روی ضلع مقابل آن هم تنش موجود نخواهد بود و روی هیچیک از اضلاع هم تنش برشی وجود ندارد؛ یعنی فقط به موازات لبه، تنش بر المان وارد می‌شود. چون تنش برشی روی المان وارد نمی‌شود، المان در وضعیت تنشهای اصلی قرار دارد و با در نظر گرفتن اینکه $\sigma_1 = 0$ و $\sigma_2 = R = 3/5$ دایره مور به شکلی که ملاحظه می‌کنید خواهد بود.



$$\sigma_1 = \tau R = \tau \text{ MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{0 + \tau}{\tau} + \frac{0 - \tau}{\tau} \times \cos(-106/2) + 0 = 4/48 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{0 + \tau}{\tau} - \frac{0 - \tau}{\tau} \times \cos(-106/2) + 0 = 2/52 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{0 - \tau}{\tau} \sin(-106/2) + 0 = -3/36 \text{ MPa}$$

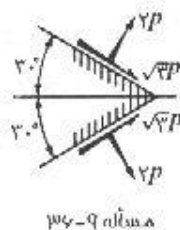
البته با استفاده از دایره مور هم همین نتایج بدست خواهد آمد.

$$2\theta = 2(-53/1) = -106/2 \quad \alpha = 180 - 106/2 = 73/8$$

$$\sigma_x = \sigma_M + R \cos \alpha = 3/5 + 3/5 \cos 73/8 = 4/48 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \sigma_M - R \cos \alpha = 3/5 - 3/5 \cos 73/8 = 2/52 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -R \sin \alpha = -3/5 \sin 73/8 = -3/36$$



۹-۳۶. مقدار و امتداد تنشهای مؤثر بر دو صفحه متقاطع در شکل نشان داده شده‌اند. مطلوب است تعیین امتداد و مقدار تنشهای اصلی در نقطه تقاطع دو صفحه. نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطح مربوط به تنشهای اصلی نشان دهید.

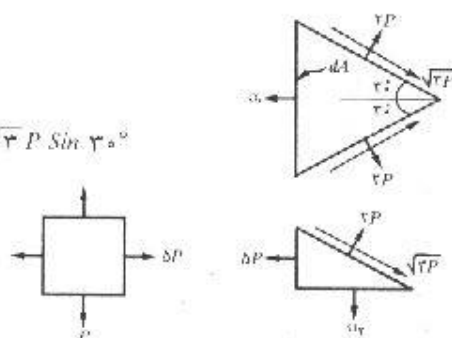
$$\sum F_x = 0 : \sigma_x dA = \tau \times (\tau p \sin 30 + \sqrt{3} p \cos 30) dA \Rightarrow \sigma_x = 5P$$

(با توجه به هندسه شکل سطوح هر سه وجه با یکدیگر مساویند)

$$\sum F_y = 0; \tau = 0$$

$$\sigma F_y = 0; \sigma_x (dA \cos \varphi_0) = \tau P \cos \varphi_0 - \sqrt{3} P \sin \varphi_0$$

$$\Rightarrow \sigma_x = P$$



۳۷-۹. رابطه ۹-۱۳ را با فرض اینکه ابتدا تغییر شکلهای برشی و سپس تغییر شکل در امتداد y دست آخر تغییر شکل در امتداد x رخ می‌دهد، مجدداً به دست آورید.

BB_1 : کرنش برشی

B_1B_2 : کرنش در جهت y

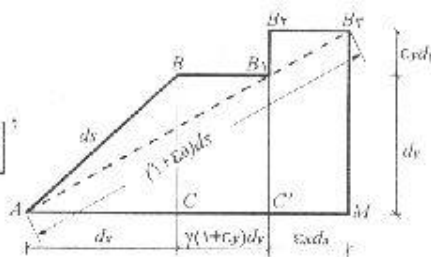
B_2B_3 : کرنش در جهت x

$$AB_1 = (1 + \epsilon_\theta) ds$$

$$(AB_1)^2 = (AM)^2 + (MB)^2$$

$$= \left[\gamma(1 + \epsilon_y) dy + (1 + \epsilon_x) dx \right]^2 + \left[(1 + \epsilon_y) dy \right]^2$$

$$(AB_1)^2 = \left[(1 + \epsilon_\theta) ds \right]^2 \quad \text{از طرفی:}$$



از مساوی قرار دادن روابط اخیر و تقسیم بر ds^2 نتیجه می‌شود:

$$(1 + \epsilon_\theta)^2 = \left[(1 + \epsilon_x) \frac{dx}{ds} + \gamma(1 + \epsilon_y) \frac{dy}{ds} \right]^2 + \left[(1 + \epsilon_y) \frac{dy}{ds} \right]^2$$

اما می‌دانیم که: $\frac{dx}{ds} = \cos \theta$ و $\frac{dy}{ds} = \sin \theta$ پس:

$$\epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma \sin \theta \cos \theta$$

۳۸-۹. با کمک شکل ۹-۱۵ نشان دهید که:

$$\beta = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta$$

چون زاویه خیلی کوچک است مقدار آن بر حسب رادیان با مقدار تانژانت آن برابر است یعنی:

$$\begin{aligned} \beta \approx \tan \beta &= \frac{-\beta' \beta'' \cos \theta + \beta' \beta'' \sin \theta + \beta'' \beta''' \cos \theta}{dy'} \\ &= \frac{-\epsilon_x dx \cos \theta + \epsilon_y dy \sin \theta + \gamma_{xy} dy \cos \theta}{dy'} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dy'} = \sin \theta \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dy'} = \cos \theta$$

$$\beta = -\varepsilon_x \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta$$

$$\beta = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta$$

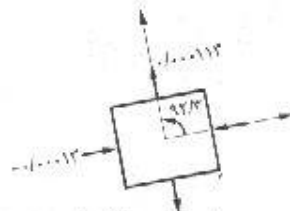
۹-۳۹. اگر کرنشهای نقطه‌ای به صورت، $\varepsilon_x = -۰/۰۰۰۰۱۲$ و $\varepsilon_y = +۰/۰۰۰۱۱۲$ و $\gamma = -۰/۰۰۰۰۲۰$ اندازه‌گیری شده باشند، مطلوب است تعیین کرنشهای اصلی و امتدادهای مربوطه. مسأله را هم به وسیله روابط جبری و هم به وسیله روش ترسیمی دایره مور حل نمایید.

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-۰/۰۰۰۰۱۲ + ۰/۰۰۰۱۱۲}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-۰/۰۰۰۰۱۲ - ۰/۰۰۰۱۱۲}{2}\right)^2 + \left(\frac{-۰/۰۰۰۰۲۰}{2}\right)^2}$$

$$= ۰/۰۰۰۰۵ \pm ۰/۰۰۰۶۳$$

$$\rightarrow \varepsilon_1 = ۰/۰۰۰۰۱۱۳ \quad \text{و} \quad \varepsilon_2 = -۰/۰۰۰۰۱۳$$



$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{-۰/۰۰۰۰۲۰}{-۰/۰۰۰۰۱۲ - ۰/۰۰۰۱۱۲} \Rightarrow 2\theta_p = ۱۸۰ + ۴/۵۸^\circ = ۱۸۴/۵۸$$

$$\theta_p = ۹۲/۳$$

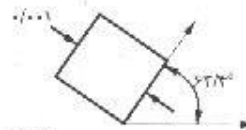
توجه کنید که پیکانهای نشان داده شده روی اضلاع نشان‌دهنده جهت تغییر شکل می‌باشند.

۹-۴۰. اگر کرنشهای نقطه‌ای به صورت، $\varepsilon_x = -۰/۰۰۰۰۸۰$ و $\varepsilon_y = -۰/۰۰۰۰۲۰$ و $\gamma = +۰/۰۰۰۰۸۰$ اندازه‌گیری شده باشند، مطلوب است تعیین کرنشهای اصلی و امتدادهای مربوطه. مسأله را هم به وسیله روابط جبری و هم به وسیله روش ترسیمی دایره مور حل نمایید.

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{-۰/۰۰۰۰۸۰ - ۰/۰۰۰۰۲۰}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-۰/۰۰۰۰۸۰ + ۰/۰۰۰۰۲۰}{2}\right)^2 + \left(\frac{۰/۰۰۰۰۸۰}{2}\right)^2}$$

$$= -۰/۰۰۰۰۵ \pm ۰/۰۰۰۰۵$$

$$\varepsilon_1 = ۰ \quad \text{و} \quad \varepsilon_2 = -۰/۰۰۰۱$$



$$\tan 2\theta_p = \frac{۰/۰۰۰۰۸}{-۰/۰۰۰۰۸۰ - ۰/۰۰۰۰۲۰} \Rightarrow 2\theta_p = ۱۸۰ - ۵۳/۱ = ۱۲۶/۹$$

$$\theta_p = ۶۳/۴۵$$

۴۱-۹. اگر کرنشهای اندازه‌گیری شده در مسأله قبل مربوط به یک عضو فولادی با ضریب ارتجاعی 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون $0/3$ باشد، مطلوب است تعیین تنشهای اصلی و امتدادهای مربوطه.

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_1 - \nu \epsilon_2] = \frac{2 \times 10^5}{1-(0/3)^2} [0 - 0/3(0/001)] = -65/9 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_2 - \nu \epsilon_1] = \frac{2 \times 10^5}{1-(0/3)^2} [-0/001 - 0] = -220 \text{ Mpa}$$



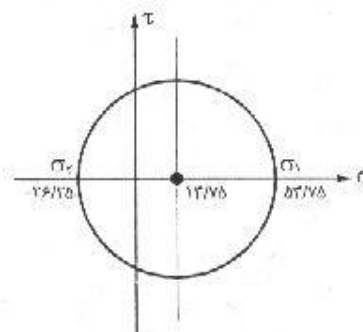
۴۲-۹. در نقطه‌ای از یک صفحه ارتجاعی تحت تنش، اطلاعات زیر در دست است: حداکثر کرنش برشی مساوی 5×10^{-2} و مجموع تنشهای قائم در روی دو صفحه عمود بر هم مار بر نقطه مزبور، مساوی $27/5$ نیوتن بر میلی‌مترمربع می‌باشند. ضریب ارتجاعی ورق 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب ارتجاعی برشی آن مساوی $0/8 \times 10^5$ نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون مساوی $0/25$ می‌باشد. مطلوب است محاسبه مقدار تنشهای اصلی در نقطه مزبور.

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{27/5}{2} = 13/75 \text{ Mpa}$$

$$\tau_{max} = \gamma_{max} = (0/8 \times 10^5)(5 \times 10^{-2}) = 40 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_1 = 13/75 + 40 = 53/75 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_2 = 13/75 - 40 = -26/75 \text{ Mpa}$$



۴۳-۹. اطلاعات به دست آمده از یک گل کرنش 45 درجه که به یک عضو فولادی تحت تنش وصل شده، به قرار زیر است:

$$\epsilon_1^\circ = -0/00022 \text{ و } \epsilon_2^\circ = +0/00012 \text{ و } \epsilon_3^\circ = +0/00022$$

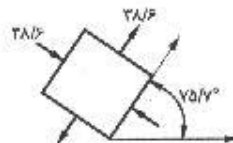
مطلوب است تعیین تنشها و امتدادهای اصلی. ضریب ارتجاعی فولاد 2×10^5 نیوتن بر میلی‌مترمربع و ضریب پواسون مساوی $0/3$ می‌باشد.

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{\theta_0} - (\epsilon_1 + \epsilon_2) = 2(0/00012) - (-0/00022 + 0/00022) = 0/00024$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \frac{-0/00022 + 0/00022}{2}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{-0/00022 - 0/00022}{2}\right)^2 + \left(\frac{0/00024}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \pm 0/000251$$



$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) = \frac{2 \times 10^5}{1-0/3^2} \left[0/000251 + 0/3(-0/000251) \right] = 28/6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -28/6 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{0/00024}{-0/00022 - 0/00022} = \frac{24}{-44} \rightarrow 2\theta_p = 180 - 28/6 \rightarrow \theta_p = 75/7$$

۴۴-۹. اطلاعات به دست آمده از یک گل کرنش ۶۰ درجه که به یک عضو آلومینیومی تحت تنش وصل شده، به قرار زیر است:

$$\varepsilon_{\theta=0} = +0/00040, \varepsilon_{\theta=60} = +0/00040, \varepsilon_{\theta=120} = -0/00060$$

مطلوب است تعیین تنشها و امتدادهای اصلی. ضریب ارتجاعی آلومینیومی $0/7 \times 10^5$ نیوتن بر میلی مترمربع و ضریب پواسون مساوی $0/25$ می باشد.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{\theta=0} = 0/0004$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{3} (2\varepsilon_{\theta=60} + 2\varepsilon_{\theta=120} - \varepsilon_{\theta=0}) = \frac{1}{3} (2(0/0004) + 2(0/0006) - 0/0004) = -0/000267$$

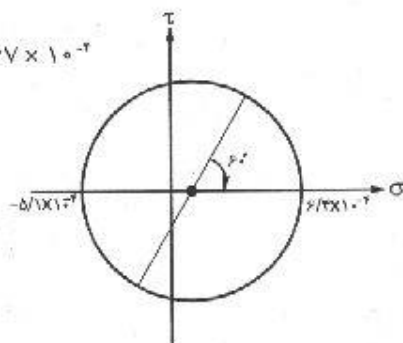
$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_{\theta=60} - \varepsilon_{\theta=120}) = \frac{2}{\sqrt{3}} (0/0004 - 0/0006) = 0/001155$$

$$\text{center} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{0/0004 - 0/000267}{2} = 0/67 \times 10^{-4}$$

$$R = \frac{\gamma_{xy}}{2} = 0/77 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_1 = 0/67 \times 10^{-4} + 0/77 \times 10^{-4} = 6/4 \times 10^{-4}$$

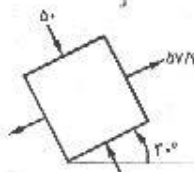
$$\varepsilon_2 = 0/67 \times 10^{-4} - 0/77 \times 10^{-4} = -0/1 \times 10^{-4}$$



$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_1 - \nu \varepsilon_2] = \frac{0/7 \times 10^5}{1-(0/25)^2} [0/00064 - (0/25)(-0/00051)] = 57/3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_1 - \nu \epsilon_2] = \frac{0/7 \times 10^5}{1 - (0/25)^2} \left[-0/00051 - (0/25)0/00064 \right] = -50 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{0/0001155}{0/0004 + 0/000267} \Rightarrow 2\theta = 60^\circ \rightarrow \theta_p = 30^\circ$$



۴۵-۹. اطلاعات به دست آمده از یک گل کرنش چهار شاخه که به یک عضو آلومینیومی تحت تنش وصل شده، به قرار زیر است:

$$\epsilon_{1,2} = -0/00012 \text{ و } \epsilon_{3,4} = +0/00040 \text{ و } \epsilon_{1,3} = +0/00012 \text{ و } \epsilon_{2,4} = +0/00060$$

سازگاری اطلاعات به دست آمده را تحقیق کنید. سپس تنشها و امتدادهای اصلی را تعیین نمایید. ضریب ارتجاعی و ضریب پواسون را مطابق مسأله ۹-۴۴ در نظر بگیرید.

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} - (\epsilon_1 + \epsilon_2) = 2 \times 4 \times 10^{-4} - (-1/2 + 11/2) \times 10^{-4} = -2 \times 10^{-4}$$

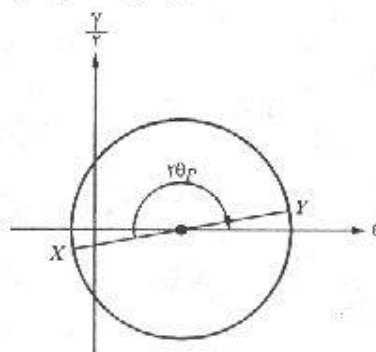
$$\epsilon_x = \epsilon_1 = -1/2 \times 10^{-4} \quad \epsilon_y = \epsilon_2 = 11/2 \times 10^{-4}$$

$$\text{center} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{-1/2 + 11/2}{2} \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-4}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-1/2 - 11/2}{2}\right)^2 + (-1)^2} = 6/3 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_1 = (5 + 6/3) \times 10^{-4} = 11/3 \times 10^{-4}$$

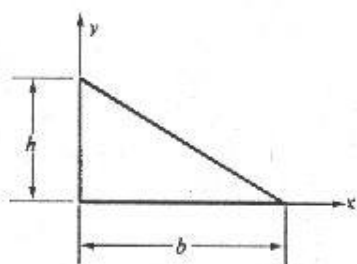
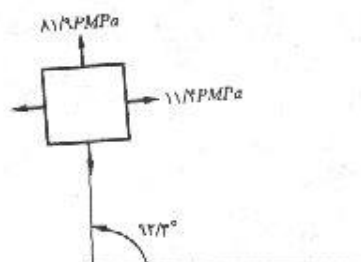
$$\epsilon_2 = (5 - 6/3) \times 10^{-4} = -1/3 \times 10^{-4}$$



$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{-1}{-1/2 - 11/2} = \frac{-1}{-12/2} \Rightarrow 2\theta_p = 180^\circ + 2/6^\circ \Rightarrow \theta_p = 92/3^\circ$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 - \nu \epsilon_2) = \frac{0/7 \times 10^5}{1 - (0/25)^2} \left[11/3 \times 10^{-4} - (0/25)(-1/3 \times 10^{-4}) \right] = 81/9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_2 - \nu \epsilon_1) = \frac{0/7 \times 10^5}{1 - (0/25)^2} \left[-1/3 \times 10^{-4} - (0/25)(11/3 \times 10^{-4}) \right] = 11/4 \text{ MPa}$$



مسئله ۹-۴۶

۹-۴۶. (الف) مطلوب است تعیین حاصل ضرب ماند برای مثلث نشان داده شده در شکل نسبت به محوره‌های x و y . (ب) پس با استفاده از قضیه محوره‌های موازی (فصل ششم) و نتایج به دست آمده از قسمت الف، حاصل ضرب ماند را نسبت به محوره‌های افقی و قائم مار بر مرکز هندسی، تعیین نمایید.

(الف)

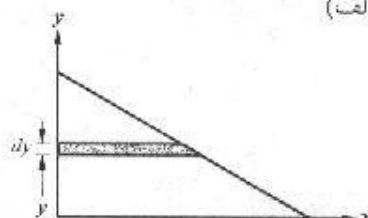
$$\frac{h-y}{h} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \frac{b}{h} (h-y) = b \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$$I_{xy} = \int xy \, dA = \int_0^h \frac{b}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 y \, dy$$

$$= \frac{b}{h} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{2}{3} h^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) = \frac{b^3 h^3}{24}$$

$$I_{x,y_c} = I_{xy} - A d_x d_y$$

$$I_{x,y_c} = \frac{b^3 h^3}{24} - \frac{1}{3} b h \left(\frac{b}{3}\right) \left(\frac{h}{3}\right) = -\frac{b^3 h^3}{12}$$



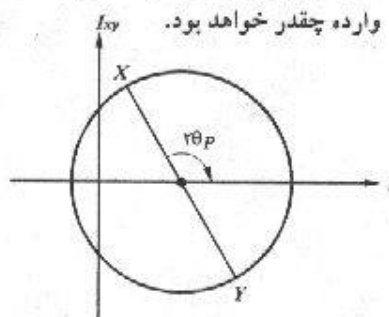
(ب)

۹-۴۷. اگر در مسأله بالا $b = 200$ و $h = 100$ میلی‌متر باشد، مطلوب است تعیین محوره‌های اصلی مار بر مرکز هندسی سطح و لنگرهای ماند اصلی نسبت به محوره‌های مزبور. از نتایج قسمت (ب) مسأله قبل و جدول مشخصات هندسی موجود در پیوست کتاب، می‌توانید کمک بگیرید. (ب) اگر تیری که دارای مقطع فوق می‌باشد، تحت تأثیر یک لنگر خمشی در حول محور اصلی حداکثر قرار بگیرد و تنش خمشی مجاز مساوی ۱۰۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، مقدار لنگر وارده چقدر خواهد بود.

$$I_x = \frac{1}{36} (0/2)(0/1)^3 = 5/55 \times 10^{-6} \, m^4$$

$$I_y = \frac{1}{36} (0/1)(0/2)^3 = 22/22 \times 10^{-6} \, m^4$$

$$I_{xy} = \frac{1}{36} (0/2)^2 (0/1)^2 = 16/67 \times 10^{-6} \, m^4$$



$$center = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{(5/55 + 22/22) \times 10^{-9}}{2} = 13/89 \times 10^{-9}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{5/55 - 22/22}{2}\right)^2 + (16/67)^2} = 18/64 \times 10^{-9}$$

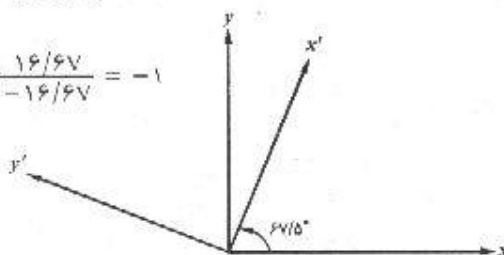
$$I_x = 13/89 \times 10^{-9} + 18/64 \times 10^{-9} = 32/53 \times 10^{-9} m^4$$

$$I_y = 13/89 \times 10^{-9} - 18/64 \times 10^{-9} = -4/75 \times 10^{-9} m^4$$

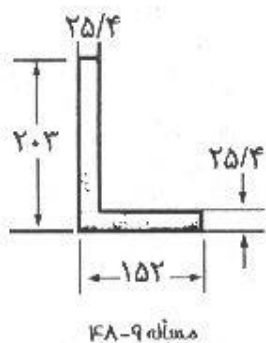
$$\tan 2\theta_p = \frac{I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{16/67}{5/55 - 22/22} = \frac{16/67}{-16/67} = -1$$

$$\Rightarrow 2\theta_p = 180 - 45 \Rightarrow \theta_p = 67/5$$

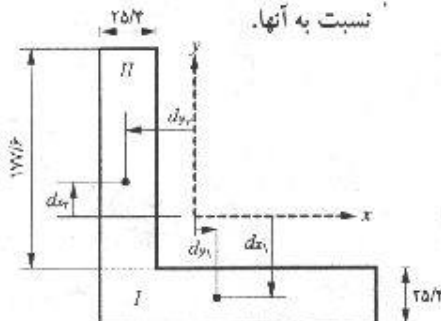
$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$



۴۸-۹. مطلوب است تعیین محورهاى اصلی مار بر مرکز هندسى نبشی نشان داده شده و لنگرهای مانند اصلی نسبت به آنها.



شکل ۹-۴۸



$$\bar{x} = \frac{(152 \times 25/4)(76) + (177/6 \times 25/4)(12/7)}{152 \times 25/4 + 177/6 \times 25/4} = 42 mm$$

$$\bar{y} = \frac{(152 \times 25/4)(12/7) + (177/6 \times 25/4)\left(25/4 + \frac{177/6}{2}\right)}{152 \times 25/4 + 177/6 \times 25/4} = 67/4$$

برای قسمت I:

$$d_{x1} = \frac{25/4}{2} - 67/4 = -54/7 mm$$

$$d_{y1} = \frac{152}{2} - 42 = 34 mm$$

$$I_{xy1} = I_{xy} + A d_{x1} d_{y1} = 0 + (152 \times 25/4)(-54/7)(34) = -7/18 \times 10^{-9} mm^4$$

برای قسمت II:

$$d_{x_1} = \frac{203}{7} - 67/4 = 34/1 \text{ mm}$$

$$d_{y_1} = \frac{25/4}{7} - 42 = -29/3 \text{ mm}$$

$$I_{xy_1} = I_{xy} + A d_{x_1} d_{y_1} = 0 + (177/6 \times 25/4)(34/1)(-29/3) = -4/5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy_1} = -7/18 \times 10^6 - 4/5 \times 10^6 = -11/68 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_1} = \frac{1}{12} (152)(25/4)^2 + (152 \times 25/4)(54/7)^2 = 11/76 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{12} (25/4)(152)^2 + (152 \times 25/4)(34)^2 = 11/9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

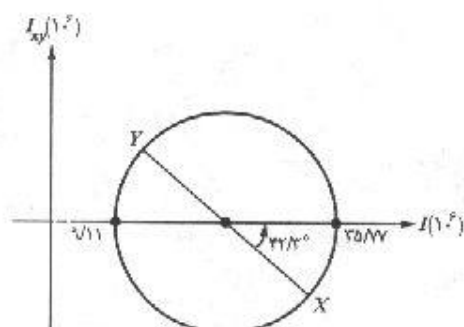
$$I_{x_1} = \frac{1}{12} (25/4)(177/6)^2 + (177/6 \times 25/4)(34/1)^2 = 17/1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{12} (177/6)(25/4)^2 + (177/6 \times 25/4)(29/3)^2 = 4/12 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} = 28/86 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = 16/52 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\text{center} = \frac{I_x + I_y}{7} = 22/44 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



$$R = \sqrt{\left(\frac{28/86 - 16/52}{7}\right)^2 + \left(11/68\right)^2} \times 10^6 = 13/33 \times 10^6$$

$$I_x = (22/44 + 13/33) \times 10^6 = 35/77 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = (22/44 - 13/33) \times 10^6 = 9/11 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{-11/68}{12/84} \Rightarrow 2\theta_p = -42/3^\circ \rightarrow \theta_p = -21/1^\circ$$

۴۹-۹. یک نبشی $12 \times 150 \times 150$ فولادی که یک ساق آن افقی و ساق دیگرش قائم و رو به پایین می باشد، به عنوان یک تیر طره ای به دهانه $2/12$ متر مورد استفاده قرار گرفته است. اگر یک نیروی رو به بالای 4000 نیوتنی در انتهای آزاد این تیر بر مرکز برش مقطع وارد گردد، حداکثر تنشهای کششی و فشاری موجود در انتهای گیردار این تیر چقدر خواهد بود. از وزن نبشی صرف نظر کنید.

از جدول ۱۰ ضمیمه مشخصات مورد نیاز استخراج می شود:

$$a = 150 \text{ mm} = 15 \text{ cm} \text{ و } e = 4/12 \text{ cm}$$

$$I_x = I_y = 737 \text{ cm}^4 \text{ و } I_\xi = 1170 \text{ cm}^4 \text{ و } I_\eta = 303 \text{ cm}^4$$

$$M_x = P \times e = 4000 \times 212 = 848000 \text{ N.cm}$$

$$M_\xi = M_\eta = M_x \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} M_x = 424000 \sqrt{2} \text{ N.cm}$$

$$\sigma_A = -\frac{M_\xi \eta_A}{I_\xi} + \frac{M_\eta \xi_A}{I_\eta}$$

$$\eta_A = a \frac{\sqrt{2}}{2} = 15 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10/6 \text{ cm}$$

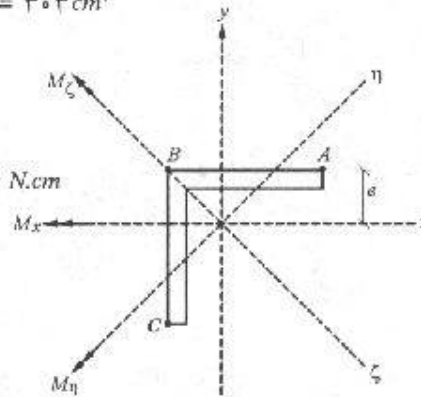
$$\xi_A = a \frac{\sqrt{2}}{2} - e\sqrt{2} = 4/78 \text{ cm}$$

$$\rightarrow \sigma_A = 4026/9 \text{ N/cm}^2 \text{ کششی}$$

$$\sigma_B = -M_\eta \frac{\xi_B}{I_\eta} = -424000 \sqrt{2} \times \frac{4/12 \sqrt{2}}{303} = -11530/6 \text{ N/cm}^2 \text{ فشاری}$$

$$\sigma_c = \frac{M_\xi \eta_c}{I_\xi} + \frac{M_\eta \xi_c}{I_\eta}$$

$$\eta_c = 10/6 \text{ cm} \text{ و } \xi_c = 4/78 \text{ cm} \rightarrow \sigma_c = 14892 \text{ N/cm}^2 \text{ کششی}$$

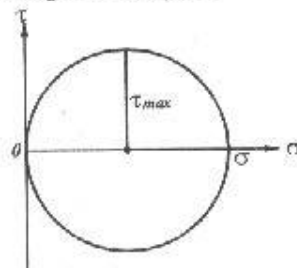


مسائل فصل دهم

۱-۱۰. یک میله فولادی با مقطع مربع به ابعاد ۵۰×۵۰ میلی متر، تحت تأثیر نیروی کشش محوری می باشد. اگر حداکثر نیروی برشی ناشی از این نیرو مساوی ۸۰ نیوتن بر میلی متر مربع باشد، مطلوب است تعیین مقدار نیروی وارده.

$$\sigma = \tau_{max} = \tau \times ۸۰ = ۱۶۰ \text{ N/mm}^2$$

$$P = \sigma A = ۱۶۰ \times (۵۰ \times ۵۰) \Rightarrow P = ۴۰۰ \text{ kN}$$



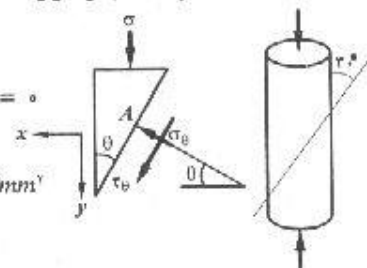
۲-۱۰. یک نمونه استوانه‌ای بتنی که در حالت قائم تحت آزمایش قرار گرفته بود، در تنش فشاری معادل ۳۰ نیوتن بر میلی متر مربع گسیخته شد. گسیختگی در صفحه‌ای که با امتداد قائم زاویه‌ای مساوی ۳۰° درجه می سازد، رخ داد. تنشهای قائم و برشی موجود در صفحه گسیختگی را محاسبه نموده و آنها را در یک شکل واضح نمایش دهید.

$$\sum F_x = 0 : \sigma_\theta A \cdot \cos \theta + \tau_\theta A \cdot \sin \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 : \sigma_\theta A \cdot \sin \theta + \tau_\theta A \cdot \cos \theta + \sigma (A \sin \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \tau_\theta = \sigma \sin \theta \cos \theta = ۳۰ \sin ۳۰^\circ \cos ۳۰^\circ = ۱۳ \text{ N/mm}^2$$

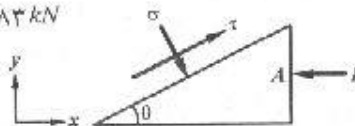
$$\sigma_\theta = -\sigma \sin^2 \theta = -۳۰ \sin^2 ۳۰^\circ = -۷.۵ \text{ N/mm}^2$$



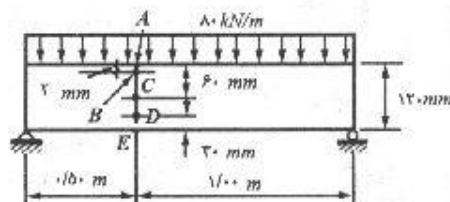
۳-۱۰. یک عضو فشاری چوبی به مقطع ۵۰×۱۰۰ میلی متر که تارهای آن با محور عضو زاویه‌ای مساوی ۲۵ درجه می سازند، مفروض است. اگر تنش برشی مجاز این عضو به موازات تارهای چوب، مساوی $۰/۶$ نیوتن بر میلی متر مربع باشد، نیروی فشاری مجاز چوب که توسط تنش برشی کنترل می گردد، چقدر است.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 : \tau \cdot \frac{A}{\sin \theta} \cdot \cos \theta + \sigma \cdot \frac{A}{\sin \theta} \cdot \sin \theta - P &= 0 \\ \sum F_y = 0 : \tau \cdot \frac{A}{\sin \theta} \cdot \sin \theta - \sigma \cdot \frac{A}{\sin \theta} \cdot \cos \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau = \frac{P}{A} \cos \theta \sin \theta$$

$$\Rightarrow P = \frac{\tau A}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{۰/۶ \times ۵۰ \times ۱۰۰}{\sin ۲۵^\circ \times \cos ۲۵^\circ} \Rightarrow P = ۷۱۸۳ \text{ kN}$$



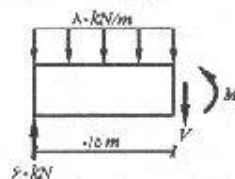
۴-۱۰. یک تیر ساده به مقطع ۵۰×۱۲۰ میلی متر و دهانه $۱/۵$ متر، بار گسترده یکنواختی به میزان ۸۰ کیلونیوتن متر را که شامل وزن خودش نیز می باشد، حمل می کند. مطلوب است تعیین مقدار و امتداد تنشهای اصلی در نقاط A, B, C, D و E از مقطع نشان داده شده در شکل.



مسئله ۴-۱۰

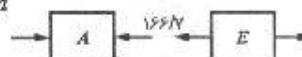
$$V = 60 - 80 \times 0.5 \Rightarrow F = 20 \text{ kN}$$

$$M = 60 \times 0.5 - (80 \times 0.5) \times \frac{0.5}{2} \Rightarrow M = 20 \text{ kN.m}$$



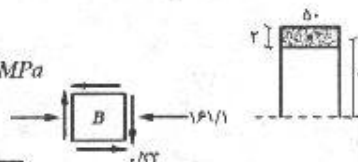
توزیع نیروی برشی در ارتفاع مقطع مستطیل بصورت سهمی می باشد، پس هیچ تنش برشی در روی جزء سطوح A و E بوجود نمی آید و تنشهای اصلی در این نقاط همان تنشهای نرمال ناشی از خمش می باشند:

$$\sigma_{A,E} = \frac{\pm Mc}{I} = \frac{\pm 6M}{bh^3} = \frac{\pm 6 \times (20 \times 10^3)}{50 \times 120^3} = \pm 166/7 \text{ MPa}$$



$$\sigma_B = \frac{58}{60} \sigma_A = \frac{58}{60} (-166/7) = -161/1 \text{ MPa}$$

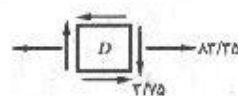
$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{-(20 \times 10^3)(50 \times 2) \times 59}{\frac{1}{12} \times 50 \times (120)^3 (50)} = -0.33 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{1,2}_B = \frac{-161/1 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-161/1 - 0}{2}\right)^2 + (0.33)^2} \Rightarrow \sigma_1 = 0, \sigma_2 = 161/1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = \frac{30}{60} (166/7) = 83/35 \text{ MPa}$$

$$\tau_D = \frac{VQ_D}{It} = \frac{-(20 \times 10^3)(50 \times 30) \times 45}{\frac{1}{12} \times 50 \times (120)^3 (50)} = -3/75 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{1,2}_D = \frac{83/35 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{83/35 - 0}{2}\right)^2 + (3/75)^2} \Rightarrow \sigma_1 = 83/5 \text{ MPa}, \sigma_2 = -0.17 \text{ MPa}$$

نقطه C روی محور خشی تیر واقع می باشد؛ بنابراین بر اثر خمش، تنش به آن وارد نمی شود اما تنش

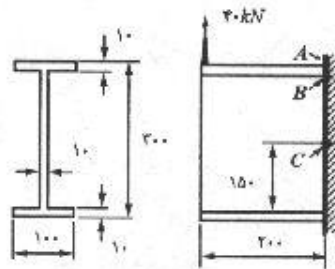
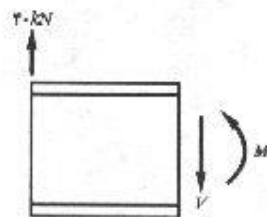
برشی وارد بر آن عبارتست از:

$$\tau_c = \tau_{max} = \frac{\tau}{2} \times \frac{V}{A} = \frac{\tau}{2} \times \frac{20 \times 10^2}{50 \times 120} = -5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2}_C = \frac{0+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + 5^2} \Rightarrow \sigma_{1,2} = \pm 5 \text{ MPa}$$



۵-۱۰. یک تیر طره‌ای بسیار کوتاه I مطابق شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین مقدار و امتداد تنشهای اصلی در نقاط A , B و C . نقطه B در جان و در محل تلاقی آن با بال قرار دارد. از وزن تیر و اثر تمرکز تنش چشم‌پوشی نمایید. لنگرماند مقطع در حول محور خنثی مساوی 60×10^6 میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد. برای تعیین تنش برشی از رابطه دقیق استفاده نمایید.



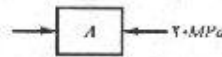
مسئله ۵-۱۰

$$M = 40 \times 0 / 2 = 8 \text{ kN.m}$$

$$V = -40 \text{ kN}$$

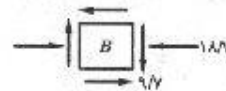
در نقطه A تنش برشی صفر است و تنش قائم برابر است با:

$$\sigma_A = \frac{-Mc}{I} = \frac{-8 \times 10^3 (\text{N.mm}) \times 100}{60 \times 10^6} = -20 \text{ MPa}$$



$$\sigma_B = \frac{My}{I} = \frac{-(8 \times 10^3)(140)}{60 \times 10^6} = -18.7 \text{ MPa}$$

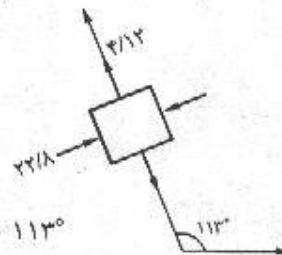
$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{-(40 \times 10^3)(100 \times 10) \times 140}{(60 \times 10^6)(10)} = -9.3 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{1,2}_B = \frac{-18.7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-18.7}{2}\right)^2 + (-9.3)^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 4.12 \text{ MPa}, \sigma_2 = -22.8 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_B}{\sigma_B} = \frac{2(-9.3)}{-18.7} \Rightarrow 2\theta_p = 180^\circ + 46^\circ \Rightarrow \theta_p = 113^\circ$$

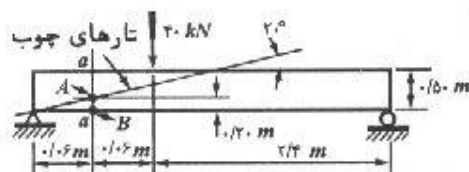


نقطه C روی محور خنثی قرار دارد پس تنش ناشی از خمش روی آن بوجود نمی آید.

$$\tau_C = \frac{VQ_C}{It} = \frac{(-40 \times 10^3) [(100 \times 10)(145) + (10 \times 140)(70)]}{(60 \times 10^6)(10)} = -16/2 \text{ MPa}$$



۶-۱۰. یک تیر چوبی به مقطع 100×500 میلی متر، نیروی متمرکز 40 کیلونیوتنی را مطابق شکل



مسئله ۶-۱۰

حمل می کند. در مقطع $a-a$ تارهای چوب با محور تیر زاویه 20° درجه می سازند. مطلوب است تعیین تنش برشی ناشی از بار 40 کیلونیوتنی در نقاط A و B در امتداد تارهای چوب.

$$R_A \times 3/6 - 40 \times 2/4 = 0 \Rightarrow R_A = 26/7 \text{ kN}$$

$$V = -26/7 \text{ kN}$$

$$M = 26/7 \times 0/6 = 16 \text{ kN.m}$$

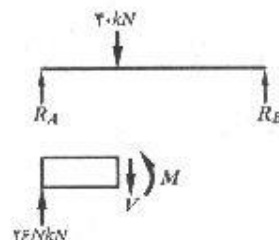
$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{(16 \times 10^3)(250)}{\frac{1}{12}(100)(500)^3} = 3/84 \text{ MPa}$$

$$\tau'_B = -\frac{3/84 - 0}{7} \sin(2 \times 110) + 0 \times \cos(2 \times 110) = 1/23 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = \frac{50}{250} (3/84) = 0/77 \text{ MPa}$$

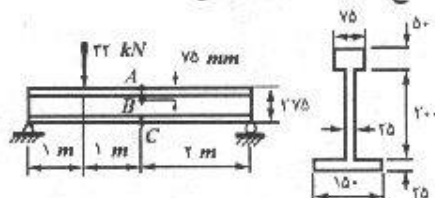
$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{(26/7 \times 10^3)(50 \times 100)(225)}{\frac{1}{12}(100)(500)^3(100)} = -0/768 \text{ MPa}$$

$$\tau'_A = -\frac{0/77 - 0}{7} \sin 40^\circ + (-0/768) \cos 40^\circ = -0/835 \text{ MPa}$$



۷-۱۰. یک تیر چدنی مطابق شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین تنشهای اصلی در سه نقطه

A, B, C. لنگر ماند مقطع در حول محور خنثی مساوی 124×10^9 میلی متر به توان ۴ می باشد.



مسئله ۷-۱۰

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{150 \times 25 \times 12/5 + 200 \times 25 \times 12/5 + 75 \times 50 \times 25/5}{150 \times 25 + 200 \times 25 + 75 \times 50} \Rightarrow \bar{y} = 128/75$$

$$R_B \times 4 = 32 \times 1 \Rightarrow R_B = 8 \text{ kN}$$

$$V = 8 \text{ kN}$$

$$M = 16 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_A = \frac{Mc}{I} = \frac{(16 \times 10^3)(275 - 128/75)}{124 \times 10^6} = 18/87 \text{ MPa فشاری}$$

$$\tau_A = 0$$

$$\sigma_B = \frac{My_B}{I} = \frac{(16 \times 10^3)(275 - 75 - 128/75)}{124 \times 10^6} = 9/19 \text{ فشاری}$$

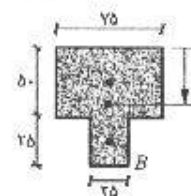
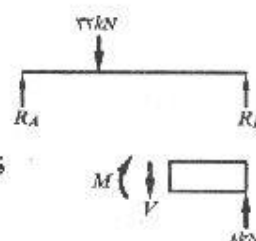
$$b = \frac{(75 \times 50)(25) + (25 \times 25)(50 + 12/5)}{75 \times 50 + 25 \times 25} = 30/36 \text{ از بالا}$$

$$\tau_B = \frac{(8 \times 10^3)(75 \times 50 + 25 \times 25)(275 - 30/36 - 128/75)}{(124 \times 10^6)(25)} = 1/31 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,y}_B = \frac{-9/19}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-9/19}{2}\right)^2 + (1/31)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0/18 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -9/37 \text{ MPa} \end{cases}$$

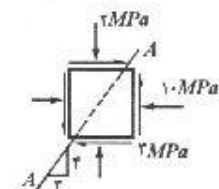
$$\sigma_c = \frac{Mc}{I} = \frac{(16 \times 10^3)(128/75)}{124 \times 10^6} = 16/6 \text{ کششی}$$

$$\tau_c = 0$$



۸-۱۰. در یک نقطه مشخص از یک سازه بنایی، حالت تنش مطابق شکل می باشد. سنگی که این بنا

از آن ساخته شده لایه لایه است و در امتداد صفحه ای به موازات A-A در برش ضعیف می باشد. آیا حالت تنش نشان داده شده مجاز می باشد. تنش مجاز سنگ را در هر امتداد، ۱/۵ مگاپاسکال در کشش و ۱۴ مگاپاسکال در فشار و تنش برشی مجاز در امتداد A-A را مساوی ۲/۳ مگاپاسکال در نظر بگیرید.



$$\sigma_x = -10 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -2 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-10 - 2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10 + 2}{2}\right)^2 + 3^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0/7 \text{ MPa} < 1/5 \text{ MPa} \rightarrow \text{مجاز است} \\ \sigma_2 = -12/7 \text{ MPa} < 14 \text{ MPa} \rightarrow \text{مجاز است} \end{cases}$$

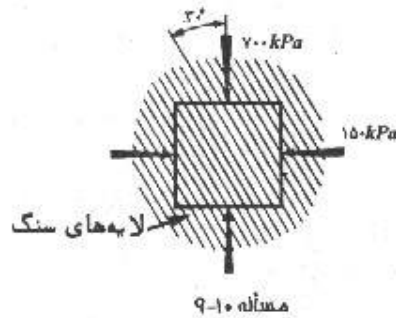
$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \alpha = 53/1^\circ$$

$$\sigma_{AA} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = -\frac{-10 + 2}{2} \sin (106/2)^\circ + 3 \times \cos (106/2)^\circ$$

$$\Rightarrow \tau_{AA} = 3 \text{ MPa} > 2/3 \text{ MPa}$$

بنابراین تنش برشی در امتداد $A-A$ بیشتر از مقدار مجاز بوده و حالت تنش نشان داده شده مجاز نمی باشد.

۹-۱۰. طبق برآوردهای انجام شده، حالت تنش در پی صخره‌ای یک سازه سنگین پس از اتمام



عملیات ساختمانی آن، مطابق شکل می باشد. اگر صخره به صورت لایه لایه با لایه‌هایی که با محور قائم زاویه 30° درجه می سازند باشد، آیا حالت تنش برآورد شده مجاز می باشد. ضریب اصطکاک بین دو لایه سنگی را مساوی 0.5 و چسبندگی بین دو لایه را مساوی 850 کیلو پاسکال (کیلو نیوتن بر مترمربع) در نظر بگیرید.

$$\sigma_x = -150 \text{ kPa}, \quad \sigma_y = -700 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma'_x = \frac{-150 - 700}{2} + \frac{-150 + 700}{2} \cos 60^\circ + 0 = -287.5 \text{ kPa}$$

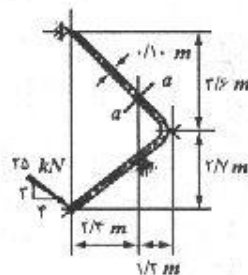
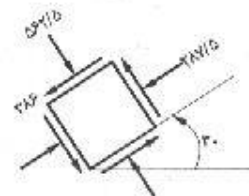
$$\sigma'_y = \frac{-150 - 700}{2} - \frac{-150 + 700}{2} \cos 60^\circ - 0 = -562.5 \text{ kPa}$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{-150 + 700}{2} \sin 60^\circ + 0 = -368 \text{ kPa}$$

برای اینکه لایه‌های سنگ روی هم نلغزند باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\tau'_{xy} - \mu \sigma'_x < 850$$

$$368 - 0.5(287.5) = 224.3 < 850 \quad \text{پس مجاز می باشد.}$$



مسئله ۱۰-۱۰

۱۰-۱۰. یک میله خمیده به ابعاد 100×100 میلی متر، مطابق

شکل بارگذاری شده است. مطلوب است تعیین حالت تنش در نقطه‌ای که در روی محور این میله در مقطع $a-a$ واقع است. نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء بسیار کوچک نشان دهید. محاسبه تنشهای اصلی لازم نیست.

$$\sum M_B = 0 : F \cos \theta (2/3 + 3/6)$$

$$+ A_y (2/3) - A_x (3/6 + 2/3 - 2/3 \tan \theta) = 0$$

$$F = 25 \text{ kN} , \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 36.87^\circ , \quad A_x = A_y \tan \theta$$

$$\Rightarrow A_y = 129/2 \text{ kN} \Rightarrow A_x = 96/9 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : F \cos \theta - A_x - B_x = 0 \Rightarrow B_x = -96/9 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : -F \sin \theta + A_y + B_y = 0 \Rightarrow B_y = -114/2 \text{ kN}$$

$$P = 96/9 \times \cos 45^\circ + 114/2 \times \cos 45^\circ = 135/13 \text{ kN}$$

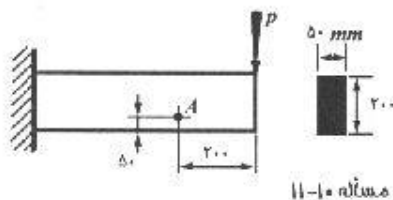
$$V = 114 \sin 45^\circ - 96/9 \times \sin 45^\circ = 26/23 \text{ kN}$$

$$M = V \times x = 26/23 \times \left(\frac{2/3}{\cos 45^\circ} \right) = 89 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{13513}{100 \times 100} = 13/5 \text{ MPa}$$

نقطه‌ای که روی محور میله قرار دارد چون روی تار خنثی واقع شده، تنش ناشی از خمش بر آن اثر نمی‌کند اما نیروی برشی برابر است با:

$$\tau = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 26/23 \times 10^3}{2 \times 100 \times 100} = 3/9 \text{ MPa}$$



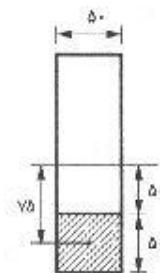
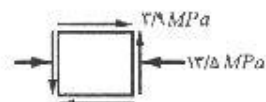
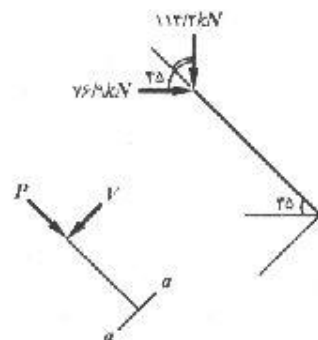
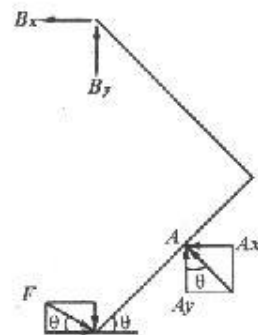
۱۰-۱۱. حداکثر تنش برشی در نقطه A از تیر زیر مساوی ۰/۹ نیوتن بر میلی‌متر مربع می‌باشد. مطلوب است تعیین مقدار نیروی P از وزن تیر صرف‌نظر نماید.

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{P(50 \times 50)(75)}{\frac{1}{12} (50)(200)^3 (50)} = 1/125 \times 10^{-3} P$$

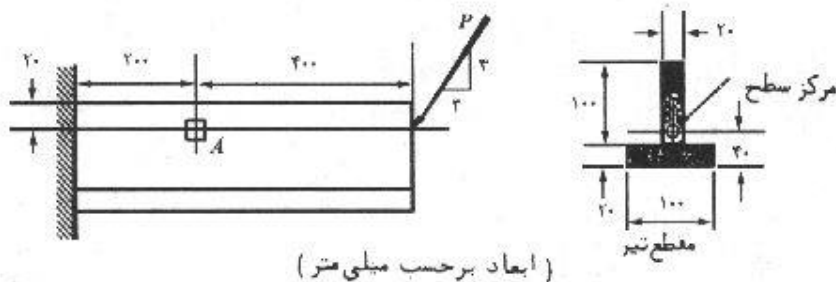
$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(200P)(50)}{\frac{1}{12} (50)(200)^3} = 3 \times 10^{-3} P$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{3} \right)^2 + \tau_A^2} = 1/875 \times 10^{-3} P$$

$$0/9 = 1/875 \times 10^{-3} P \Rightarrow P = 4800 \text{ N}$$



۱۲-۱۰. لچکی زیر توسط نیروی متمرکز P بارگذاری شده است. در اثر این نیرو در لچکی نیروی محوری فشاری، و لنگر خمشی تولید می شود لیکن در آن هیچگونه پیچشی ایجاد نمی گردد. (الف) حالت تنش در نقطه A را در روی یک جزء سطح نشان دهید. (ب) اگر کرنش افقی (طولی) در نقطه A مساوی 2×10^{-2} میلی متر بر میلی متر و ضریب ارتجاعی مصالح تیر 2×10^5 نیوتن بر میلی مترمربع باشد، مقدار نیروی P چقدر می باشد. لنگر ماند مقطع در حول محور خنثی را مساوی $5/33 \times 10^6$ میلی متر به توان ۴ فرض نمایید.



(ابعاد بر حسب میلی متر)

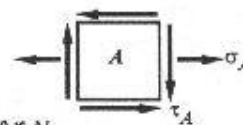
مسئله ۱۰-۱۲

$$\sigma_1 = \frac{My}{I} = \frac{\left(\frac{P}{5} \times 400\right)(60)}{5/33 \times 10^6} = 36 \times 10^{-2} P$$

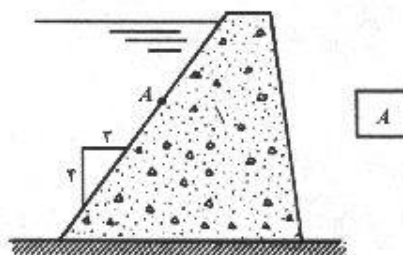
$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{-\frac{3}{5} P}{20 \times 100 + 100 \times 20} = -1/5 \times 10^{-2} P \quad \sigma_A = \sigma_1 + \sigma_2 = 36/5 \times 10^{-2} P$$

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{-\left(\frac{P}{5}\right) [(20 \times 20)(70)]}{(5/33 \times 10^6)(20)} = 2/1 \times 10^{-2} P$$

$$\sigma_A = E \epsilon_A \Rightarrow 36/5 \times 10^{-2} P = (2 \times 10^5)(2 \times 10^{-2}) \Rightarrow P = 11594 N$$



۱۳-۱۰. در نقطه A از سطح بالادست سد نشان داده شده در شکل، فشار آب مساوی ۲- نیوتن بر میلی مترمربع می باشد. تنش فشاری اندازه گیری شده به موازات رویه مساوی ۳- نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. مطلوب است محاسبه تنشهای σ_x و σ_y و τ_{xy} و نمایش ترمیمی آنها در روی جزء سطح نشان داده شده.



مسئله ۱۰-۱۳

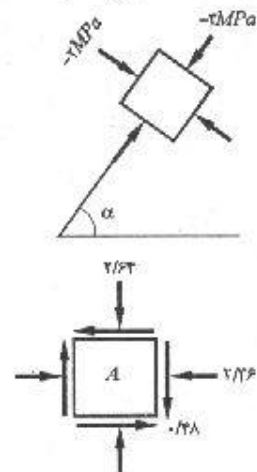
۲۸۰ / شرح کامل مقاومت مصالح پوپوف

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.1^\circ$$

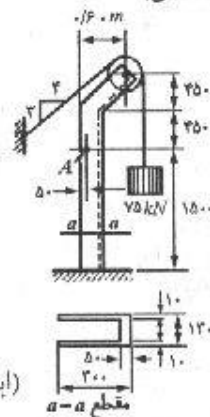
$$\sigma_x = \frac{-3 - 2}{2} + \frac{-3 + 2}{2} \cos(-106/2) + 0 = -2/36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{-3 - 2}{2} - \frac{-3 + 2}{2} \cos(-106/2) + 0 = -2/64 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-3 + 2}{2} \sin(-106/2) + 0 = -0.48 \text{ MPa}$$



۱۰-۱۴. مطلوب است نمایش حالت تنش در نقطه A از جرثقیل زیر. نتایج را در روی یک جزء سطح که اضلاع آن افقی و قائم می‌باشند، نشان دهید. لنگر مانند مقطع در حول محور خنثی مساوی 91×10^6 میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد.



(ابعاد بر حسب میلی‌متر)

(مساحت) 130×10^6

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow T \times R = 75 \times R \Rightarrow T = 75 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : F_x = \frac{4}{5} T = 60 \text{ kN}$$

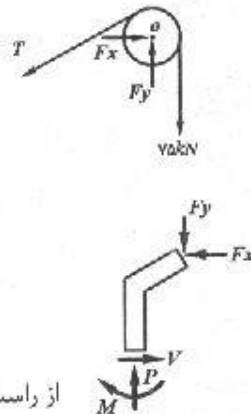
$$\sum F_y = 0 : F_y = 75 + \frac{3}{5} T = 120 \text{ kN}$$

$$V = F_x = 60 \text{ kN}$$

$$P = F_y = 120 \text{ kN}$$

$$M = F_x \times 900 - F_y \times 550 = -12000 \text{ (kN.mm)}$$

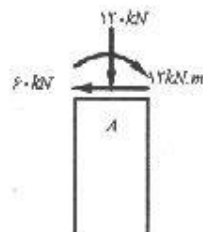
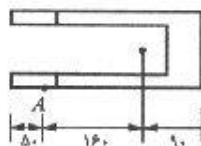
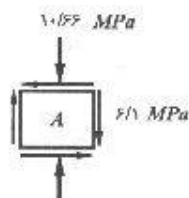
$$\bar{y} = \frac{(1300 \times 500)(250) + (250 \times 100)(1750) \times 2}{1300 \times 500 + 250 \times 100 \times 2} = 90 \text{ mm} \text{ از راست}$$



معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۲۸۱

$$\sigma_b = \frac{My}{I} - \frac{P}{A} = \frac{(12 \times 10^3) \times 160}{91 \times 10^6} - \frac{120 \times 10^3}{11500} \Rightarrow \sigma_A = 10/66 \text{ MPa}$$

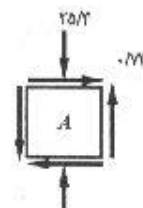
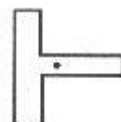
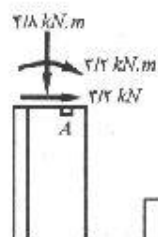
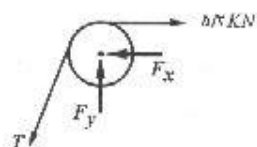
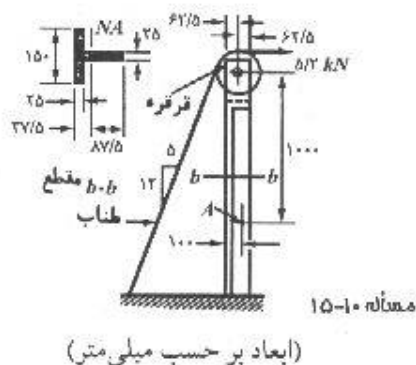
$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{(60 \times 10^3) [(50 \times 10 \times 2)(185)]}{(91 \times 10^6)(10 \times 2)} = 6/1 \text{ MPa}$$



۱۵-۱۰. مطلوب است محاسبه حالت تنش در نقطه A از سازه زیر. نتایج را در روی یک جزء سطح که

اضلاع آن افقی و قائم می باشند، نشان دهید. سطح مقطع عضو قائم مساوی ۶۲۵۰

میلی متر مربع و لنگر ماند آن در حول محور خشی ماوی $8/16 \times 10^6$ میلی متر به توان ۴ می باشد.



$$T = 5/2 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : 5/2 - F_x - \frac{5}{13} T = 0 \rightarrow F_x = 3/2 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : F_y = T_y = \frac{12}{13} T = 4/8 \text{ kN}$$

$$V = 3/2 \text{ kN}$$

$$P = 4/8 \text{ kN}$$

$$M = 3/2 \times 1 = 3/2 \text{ kN.m}$$

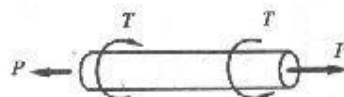
$$\sigma_A = -\frac{My}{I} - \frac{P}{A} = -\frac{(3/2 \times 10^3)(-87/5 + 25)}{8/16 \times 10^6} - \frac{4/8 \times 10^3}{6250} = -25/3 \text{ MPa}$$

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{-4800[(25 \times 25)(87/5 - 12/5)]}{(8/16 \times 10^6)(25)} = -0/73 \text{ MPa}$$

۱۶-۱۰. یک میله کوتاه استوانه‌ای به قطر ۴۰ میلی‌متر تحت تأثیر نیروی محوری ۲۰۰ کیلو نیوتن و لنگر پیچشی ۰/۲۰ کیلو نیوتن متر قرار دارد. مطلوب است تعیین حداکثر تنش برشی (تنش برشی اصلی). نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء سطح مناسب نمایش دهید.

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{T \left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{\pi}{32} (d)^4} = \frac{16 T}{\pi d^3} = \frac{16 \times (0/20 \times 10^3)}{\pi (40)^3} \Rightarrow \tau = 50 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \times (2000 \pi)}{\pi (40)^2} \Rightarrow \sigma = 50 \text{ N/mm}^2$$



$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \Rightarrow \tau_{max} = 50/0.6 \text{ N/mm}^2$$

۱۷-۱۰. یک محور استوانه‌ای کوتاه به قطر ۴۰ میلی‌متر تحت تأثیر نیروی محوری کششی ۴۰۰ کیلو نیوتن قرار دارد. چه لنگر پیچشی می‌توان بر این محور وارد کرد بدون اینکه تنش برشی حداکثر (تنش برشی اصلی)، از ۱۳۰ مگاپاسکال (نیوتن بر میلی‌متر مربع) تجاوز کند.

$$\tau = \frac{16T}{\pi d^3} \quad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \times 400 \pi \times 10^3}{\pi (40)^2} = 100 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \tau_{max}^2 - \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 = 130^2 - 50^2 = 14400 \Rightarrow \tau = 120 \text{ MPa}$$

$$\frac{16T}{\pi d^3} = 120 \Rightarrow T = 1/5 \times 10^3 \text{ (N.m)} = 1/5 \text{ kN.m}$$

۱۸-۱۰. یک محور استوانه‌ای به قطر ۲۰ میلی‌متر تحت اثر توأم لنگر پیچشی و لنگر خمشی خالص قرار دارد. با فرض اینکه در هر مقطع دلخواه از محور، بزرگترین تنش کششی اصلی ناشی از بارهای وارده ۱۶۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع، و در همان نقطه بزرگترین تنش کششی ناشی از لنگر خمشی مساوی ۱۲۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، مطلوب است تعیین لنگر خمشی و لنگر پیچشی وارده.

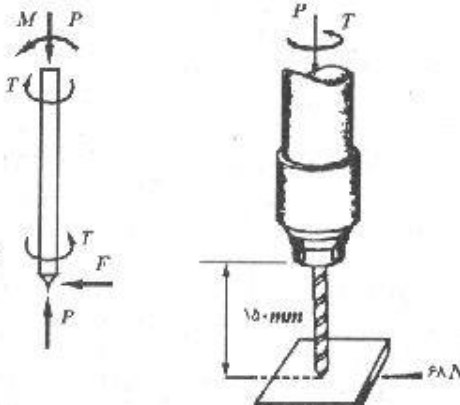
$$\sigma_b = \frac{Mc}{I} \Rightarrow M = \frac{\pi d^3}{32} \cdot \sigma_b = \frac{\pi (20)^3}{32} \times (120) = 30 \pi \text{ N.m}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \left(\sigma_{max} - \frac{\sigma_b}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 = (160 - 60)^2 - 60^2 = 6400$$

$$\Rightarrow \tau = 80 \text{ N/mm}^2 \quad \tau = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = 80 \Rightarrow T = 40 \pi \text{ N.m}$$

۱۹-۱۰. به مثنه نشان داده شده در شکل، در حین کار نیروی محوری ۶/۷۸ کیلو نیوتن و لنگر پیچشی ۲۷/۲ نیوتن متر تأثیر می‌کنند. اگر در حین سوراخ کردن، نیروی افقی ۶۸ نیوتن به قطعه‌ای که سوراخ می‌شود، وارد گردد، مقدار بزرگترین تنش اصلی که در بالای مثنه وارد می‌شود چقدر

است. بحرانی‌ترین نقطه تحت تنش در روی مته در کجا قرار دارد. قطر مته ۱۲ میلی‌متر، سطح مقطع آن ۱۱۳ میلی‌متر مربع و لنگر ماند آن ۱۰۲۰ میلی‌متر به توان ۴ و لنگر ماند قطبی آن ۲۰۴۰ میلی‌متر به توان ۴ می‌باشد.



$$\tau_t = \frac{Tc}{J} = \frac{(27200)(6)}{2040} \Rightarrow \tau_t = 80 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_r = \frac{3}{4} \times \frac{P}{A} = \frac{3}{4} \times \frac{68}{113} \Rightarrow \tau_r = 0.9 \text{ N/mm}^2$$

$$M = FL = 68 \times 150 = 10200 \text{ N.mm}$$

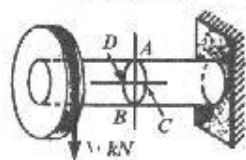
$$\sigma = -\frac{Mc}{I} - \frac{P}{A} = -\frac{(10200)(6)}{1020} - \frac{68}{113} = -120 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = -\frac{120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-120}{2}\right)^2 + (80.9)^2} \Rightarrow \sigma_1 = -160.9 \text{ N/mm}^2$$

مسئله ۱۹-۱۰

بحرانی‌ترین نقطه در سطح بیرونی بالای مته واقع است.

۱۰-۲۰. یک محور استوانه‌ای توپر همانند شکل بارگذاری شده است. در مقطع تنشهای ناشی از نیروی ۱۰ کیلونیوتنی و وزن محور و دیسک انتهایی به شرح زیر می‌باشند؛ حداکثر تنش خمشی مساوی ۴۰، حداکثر تنش پیچشی مساوی ۳۰ و حداکثر تنش برشی ناشی از V مساوی ۶ (تمام تنشها برحسب نیوتن بر میلی‌متر مربع) هستند. در روی هر یک از جزء سطحهای واقع در نقاط A و B و C و D مقدار و امتداد تنشهای وارده را نشان دهید. در هر حالت بیان کنید که جزء سطح از چه امتدادی مشاهده می‌شود. (ب) با استفاده از دایره مور مقدار و امتداد تنشهای اصلی و حداکثر تنش برشی در نقطه A را پیدا کنید.

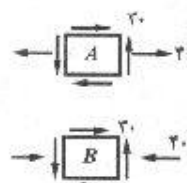


مسئله ۲۰-۱۰

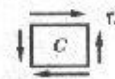
$$\sigma_M = 40 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_T = 30 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_V = 6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_A = \sigma_M = 40 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_A = \tau_T = 30 \text{ N/mm}^2$$

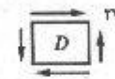
$$\sigma_B = \sigma_M = 40 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_B = \tau_T = 30 \text{ N/mm}^2$$



$$\sigma_C = \frac{My}{I}, y = 0 \rightarrow \sigma_C = 0, \quad \tau_C = \tau_T + \tau_V = 36 \text{ N/mm}^2$$



$$y_D = 0 \rightarrow \sigma_D = 0, \quad \tau_D = \tau_T + \tau_V = 36 \text{ N/mm}^2$$



$$\text{Center} = \frac{40 + 0}{2} = 20$$

$$X(40, 30), Y(0, -30)$$

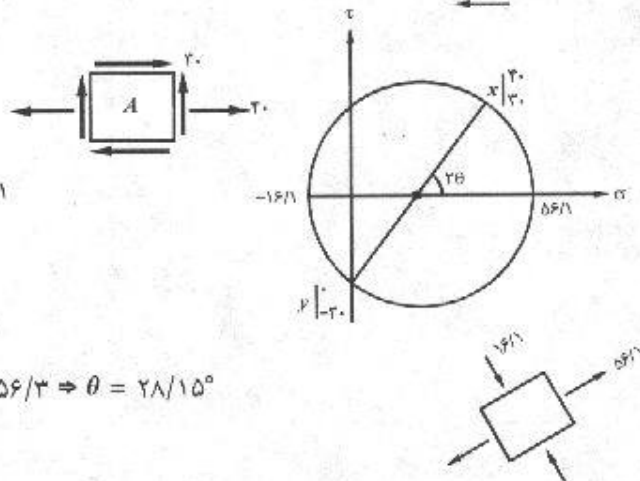
$$R = \sqrt{\left(\frac{40}{2}\right)^2 + 30^2} = 36/1$$

$$\sigma_1 = 20 + 36/1 = 56/1$$

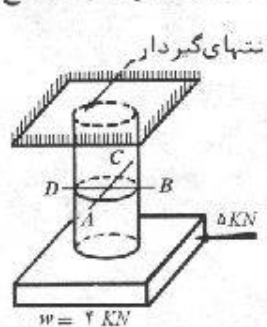
$$\sigma_2 = 20 - 36/1 = -16/1$$

$$\tau_\theta = \tan^{-1} \left(\frac{30}{40 - 20} \right) = 56/3 \Rightarrow \theta = 28/15^\circ$$

$$\tau_{max} = R = 36/1 \text{ MPa}$$



۲۱-۱۰. مطابق شکل، یک میله استوانه‌ای به قطر ۵۰ میلی‌متر در حالی که یک بلوک مکعب مستطیل به انتهای آزاد آن آویزان می‌باشد، مفروض است. علاوه بر این، یک نیروی افقی که به‌طور خارج از مرکز به بلوک وارد می‌شود، در شکل نشان داده شده است. از تحلیل تنش در مقطع



مسئله ۱۰-۲۱

ABCD نتایج زیر به دست آمده است: حداکثر تنش خمشی مساوی ۱۰ مگاپاسکال، حداکثر تنش پیچشی مساوی ۳ مگاپاسکال و حداکثر تنش برشی ناشی از ۷ مساوی ۴ مگاپاسکال و تنش محوری مستقیم مساوی ۲ مگاپاسکال. در روی یک جزء کوچک واقع در نقطه A، مقدار و امتداد تنشهای وارده را نشان دهید. ضلع فوقانی جزء سطح را منطبق بر مقطع ABCD در نظر بگیرید. (ب) با استفاده از دایره مور، مطلوب است تعیین امتداد و مقدار تنش برشی حداکثر(اصلی) و تنش قائم همراه با آن را در نقطه A.

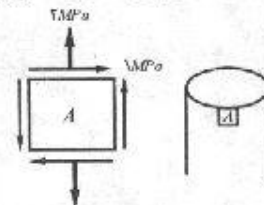
$$\sigma_b = 0$$

چون نقطه A روی محور خنثی قرار دارد تنش خمشی برای آن صفر است.

$$\sigma_A = \sigma_L = 2 \text{ MPa}$$

$$\tau_A = \tau_V - \tau_T = 2 - 3 = 1 \text{ MPa}$$

$$\text{Center} = \frac{0 + 2}{2} = 1 \quad X(0, 1) \quad \text{و} \quad Y(2, -1)$$



معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۲۸۵

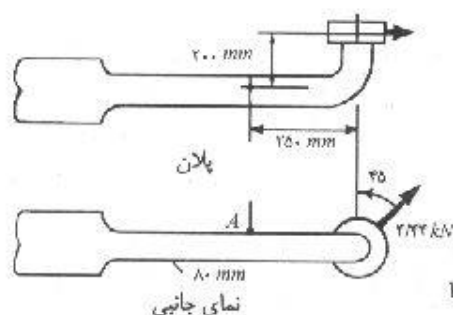
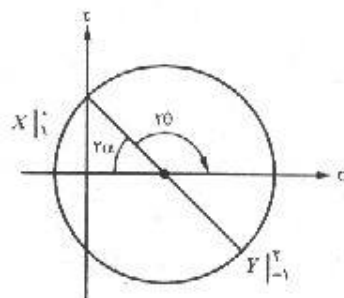
$$R = \sqrt{\left(\frac{-Y}{Y}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ \rightarrow \alpha = 22/5^\circ$$

$$\theta = 90 - 22/5 \rightarrow \theta = 67/5^\circ$$

$$\tau_{max} = \sqrt{2} = 1/21 \text{ MPa}$$

تنش قائم همراه تنش برشی ماکزیمم: $\sigma = 1 \text{ MPa}$



۲۲-۱۰. مطلوب است تعیین تنشهای اصلی در نقطه A از شکل زیر. نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء سطح نشان دهید. از وزن عضو صرف نظر نمایید.

مسئله ۱۰-۲۲

$$P = F_y = 4/44 \times \sin 45^\circ = 3/14 \text{ kN}$$

$$V = F_y = 4/44 \times \cos 45^\circ = 3/14 \text{ kN}$$

$$M_y = F_x \cdot d_1 = 3/14 \times 200 = 628 \text{ kN.mm}$$

$$M_z = F_y \cdot d_1 = 3/14 \times 200 = 785 \text{ kN.mm}$$

$$T = F_y \cdot d_1 = 3/14 \times 200 = 628 \text{ kN.mm}$$

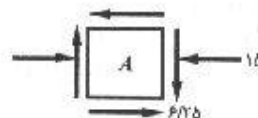
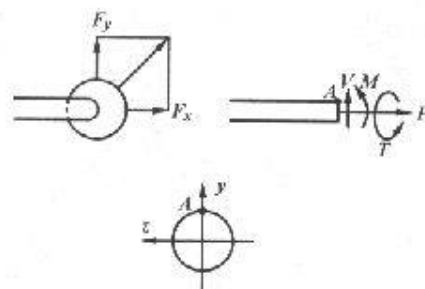
$$\sigma_L = \frac{F_A}{A} = \frac{3140}{\frac{\pi}{4} (100)^2} = 0/625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = -\frac{M_z c}{I} = -\frac{(785 \times 10^3) (40)}{\frac{\pi}{64} (100)^4} = -15/62 \text{ MPa}$$

با توجه به محل نقطه A تنش برشی ناشی از نیروی برشی نیز برای آن وجود ندارد:

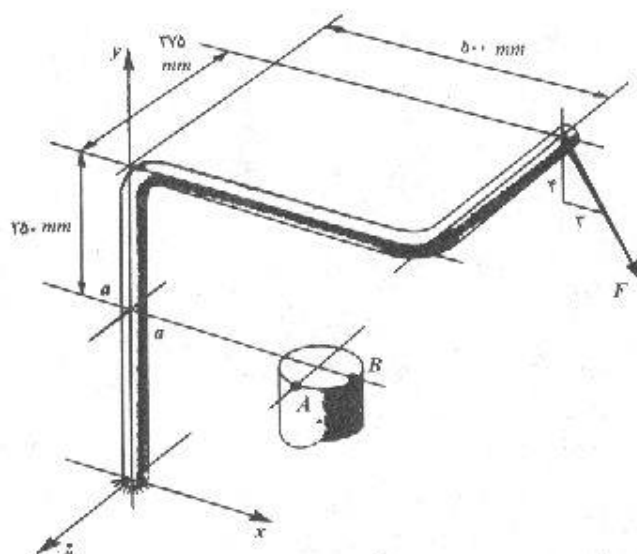
$$\tau_V = 0$$

$$\tau_T = \frac{Tr}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 628 \times 10^3}{\pi (100)^3} = 6/25 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2 + \tau_A^2} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + (6/25)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 17/26 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -2/27 \text{ MPa} \end{cases}$$

۱۰-۲۳. مطابق شکل، میله‌ای استوانه‌ای به قطر ۵۰ میلی‌متر در انتهای آزاد خود تحت تأثیر نیروی مایل F مساوی 225π نیوتن قرار دارد. (اگر از بالا نگاه کنیم، نیروی F به موازات محور x ‌ها دیده می‌شود). مطلوب است تعیین مقدار و امتداد تنشهای ناشی از F در روی جزء سطحهای واقع در نقاط A و B از مقطع $a-a$. نتایج را در روی یک جزء سطح مناسب به‌طور ترسیمی نشان دهید. محاسبه تنشهای اصلی لازم نمی‌باشد.



مسئله ۱۰-۲۳

نیروی F را به دو مؤلفه F_x و F_y تجزیه می‌کنیم:

$$F_x = \frac{3}{5} \times F = 135\pi \text{ (N)}$$

$$F_y = \frac{4}{5} F = 180\pi \text{ (N)}$$

نیروی F_x در مقطع $(a-a)$ ایجاد نیروی برشی می‌کند:

$$V = F_x = 135\pi \text{ (N)}$$

نیروی F_y در مقطع $(a-a)$ ایجاد یک نیروی فشاری می‌کند:

$$P = F_y = 180\pi \text{ (N)}$$

حاصل ضرب F_x در فاصله 250 mm یک ممان خمشی حول محور z روی مقطع $(a-a)$ ایجاد می‌کند:

$$M_{xz} = 135\pi \times 250 = 33750\pi \text{ (N.mm)}$$

همچنین حاصل ضرب F_y در فاصله 500 mm نیز ممان خنثی دیگری را حول z در مقطع مذکور موجب می شود.

$$M_{yz} = 180 \pi \times 500 = 9 \times 10^4 \pi \text{ (N.mm)}$$

هر دو ممان فوق هم جهت و در جهت منفی محور z می باشند بنابراین:

$$M_z = M_1 + M_2 = -123750 \pi \text{ (N.m)}$$

اما حاصل ضرب F_y در فاصله 375 mm ممانی حول محور x در جهت منفی ایجاد می کند:

$$M_x = 180 \pi \times 375 = -67500 \pi \text{ (N.mm)}$$

تنها عاملی که باعث ایجاد پیچش در مقطع $(a-a)$ می شود حاصل ضرب نیروی F_x در فاصله 375 mm می باشد:

$$T_y = 135 \pi \times 375 = -50625 \pi \text{ (N.mm)}$$

علامت لنگرها را می توان از طریق ضرب برداری $(\vec{r} \times \vec{F})$ بدست آورد:

$$M_x = (-375k) \times (-180 \pi j) = -67500 \pi i$$

حال می توان تنشهای وارد بر نقاط را بدست آورد.

نقاط A و B در مورد تنشهای ناشی از بار محوری و لنگر پیچشی یکسان می باشند بنابراین:

$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{180 \pi}{\frac{\pi}{4} (50)^2} = 0/288 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{(16)(50625 \pi)}{\pi (50)^3} = 6/48 \text{ MPa}$$

تنش خمشی و تنش برشی ناشی از نیروی برشی برای نقطه A :

$$\sigma_b = \frac{M_x z}{I_x} = \frac{32 M_x}{\pi d^3} = \frac{32(67500 \pi)}{\pi (50)^3} = 17/28 \text{ MPa} \quad \text{کششی}$$

$$\tau_V = \frac{VQ}{It} = \frac{4}{3} \left(\frac{V}{A} \right) = \frac{4}{3} \frac{F_x}{\frac{\pi d^2}{4}} = 0/288 \text{ MPa}$$

با توجه به موارد فوق کل تنش وارد بر نقطه A عبارتست از:

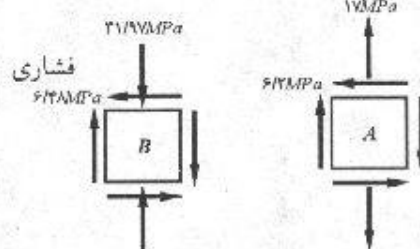
$$\sigma_A = 17/28 - 0/288 = 17 \text{ MPa} \quad \text{کششی}$$

$$\tau_A = 6/48 - 0/288 = 6/2 \text{ MPa}$$

تنش خمشی و تنش برشی ناشی از نیروی برشی برای نقطه B:

$$\sigma_b = \frac{M_z x}{I_y} = \frac{(123750 \cdot \pi) \left(\frac{50}{4}\right)}{\frac{\pi (50)^4}{64}} = 31/68 \text{ MPa}$$

$$\tau_V = 0$$

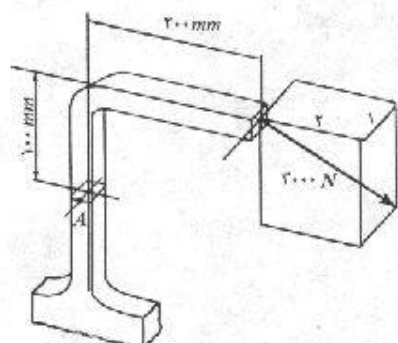


بنابراین کل تنش وارد بر نقطه B عبارتست از:

$$\sigma_B = 31/68 + 0/288 = 31/97 \text{ MPa} \text{ فشاری}$$

$$\tau_B = 6/48 \text{ MPa}$$

۱۰-۲۴. مطابق شکل، یک میله با مقطع مربع به ابعاد 12×12 میلی‌متر، تحت تأثیر نیروی مایل 3000 نیوتنی در انتهای آزاد خود قرار دارد. مطلوب است: (الف) تعیین حالت تنش ناشی از نیروی وارده در نقطه A. نتایج را در روی یک جزء سطح مناسب به‌طور ترسیمی نمایش دهید. (ب) تعیین مقدار و امتداد تنشهای اصلی.



مسئله ۱۰-۲۴

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$F_x = \frac{2}{3} (3000) = 2000 \text{ N}$$

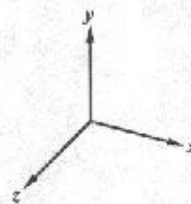
$$F_y = \frac{2}{3} (3000) = 2000 \text{ N}$$

$$F_z = \frac{1}{3} (3000) = 1000 \text{ N}$$

$$M_x = 1000 \times F_z = -10^6 \text{ (N.mm)}$$

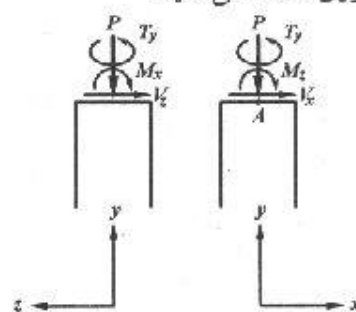
$$M_z = 1000 \times F_x + 2000 \times F_y = -6 \times 10^6 \text{ (N.mm)}$$

$$T_y = 2000 \times F_z = +2 \times 10^6 \text{ (N.mm)}$$



نیروهای F_x و F_z نیروی برشی در صفحه مورد مطالعه ایجاد می‌کنند. و نیروی F_y تولید نیروی فشاری روی صفحه می‌نماید.

$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{F_y}{A} = \frac{2000}{12 \times 12} = 13/89 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$



با توجه به محل نقطه A ممان M_z هیچگونه تنش روی آن ایجاد نمی‌کند.

$$\sigma_b = \frac{M_z z}{I} = \frac{(100)(6)}{\frac{1}{12}(12)^3} = 347/2 \text{ MPa} \quad \text{کششی}$$

نیروی برشی V_x هم روی نقطه A تنش برشی ایجاد نمی‌کند اما تنش برشی ناشی از V_x عبارتست از:

$$\tau_v = \frac{V}{A} \left(\frac{V}{A} \right) = \frac{V}{A} \times \frac{2000}{12 \times 12} = 20/8 \text{ MPa}$$

$$\tau_T = \frac{T}{abc} = \frac{2 \times 100}{(0/208)(12)(12)} = 556$$

$$\frac{b}{c} = 1 \rightarrow \alpha = 0/208$$

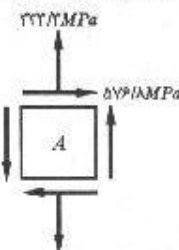
از جدول صفحه ۱۱۳:

تنشهای برشی ناشی از نیروی برشی و لنگر پیچشی روی نقطه A هم‌جهت می‌باشند.

$$\tau_A = \tau_v + \tau_T = 20/8 + 556 = 576/8 \text{ MPa}$$

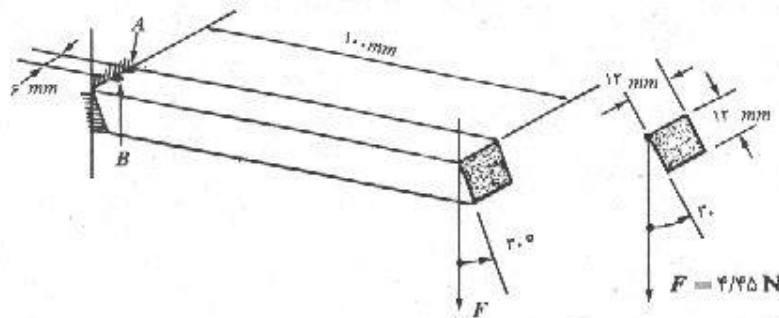
$$\sigma_A = 347/2 - 13/89 = 333/3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2 + \tau_A^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 767 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -434 \text{ MPa} \end{cases}$$



$$\tan 2\theta_p = \frac{2 \times 576/8}{0 - 333/3} = -3/46 \Rightarrow 2\theta_p = 180 - 73/4 = 106 \rightarrow \theta_p = 53^\circ$$

۱۰-۲۵. مطابق شکل یک میله با مقطع مربع به ابعاد 12×12 میلی‌متر و طول ۱۰۰ میلی‌متر، در یک انتها به صورت گیردار تکیه داده شده است. سطوح جانبی میله به‌طور شاقولی قرار نگرفته‌اند، بلکه مطابق شکل با امتداد شاقولی زاویه‌ای مطابق 30° درجه می‌سازند. مطلوب است محاسبه تنشهای ناشی از نیروی شاقولی F در نقاط A و B . اثر تمرکز تنش را نادیده بگیرید. نتایج را در روی یک جزء سطحی که از بالا دیده می‌شود، نشان دهید. محاسبه تنشهای اصلی لازم نیست.



مسئله ۱۰-۲۵

$$F_x = F \sin 30^\circ = 2000 \text{ N}$$

$$F_y = F \cos 30^\circ = 3464 \text{ N}$$

$$a = 12 \text{ mm}$$

$$T = F_x \times \frac{a}{y} + F_y \times \frac{a}{y} = 36473 \text{ N.mm}$$

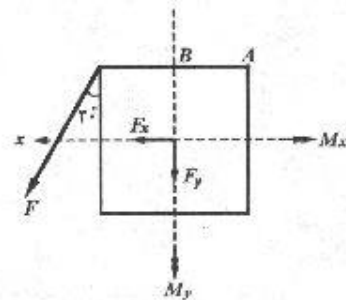
$$M_x = F_y \cdot l = 3464 \times 1000 = 3464000 \text{ N.mm}$$

$$M_y = F_x \cdot l = 2000 \times 1000 = 2000000 \text{ N.mm}$$

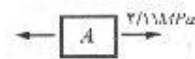
$$I_x = I_y = \frac{a^3}{12} = 1728 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_A = \frac{M_x \times \left(\frac{a}{y}\right)}{I_x} + \frac{M_y \times \frac{a}{y}}{I_y} = 211 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_A = 0$$



نقطه A

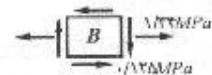


نقطه B

$$\sigma_B = \frac{M_x \times \left(\frac{a}{y}\right)}{I_x} = 134 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_B = F_x \text{ ناشی از } T + \text{تنش برشی ناشی از } F_y = \frac{3}{y} \frac{V}{A} + \frac{T}{\alpha a^2}$$

$$= \frac{3}{y} \frac{F_x}{a^2} + \frac{T}{0.708 a^2} \Rightarrow \tau_B = 0.125 \text{ N/mm}^2$$

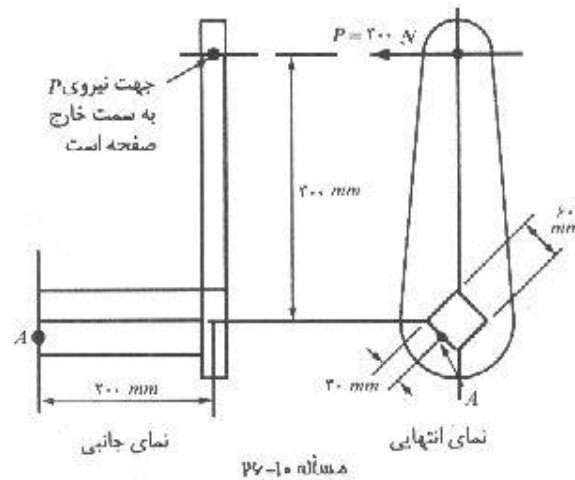


۱۰-۲۶. مطابق شکل میله‌ای با مقطع مربع و به ابعاد 60×60 میلی‌متر، در یک انتها به صورت

گیردار تکیه داده شده است. مطلوب است محاسبه حالت تنش در نقطه A ناشی از نیروی P

که بر بازوی میله وارد می‌شود. نتایج را به صورت ترسیمی در روی یک جزء سطح که از

طرف بیرون دیده می‌شود، نمایش دهید. از تمرکز تنش صرف‌نظر نمایید.



$$F_x = F_y = 200 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 141.42 \text{ N}$$

$$M_x = M_y = 141.42 \times 200 = -28284 \text{ N.mm}$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} \times 60 \times 60^3 = 1.08 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$T_z = 200 \times 200 = 4 \times 10^4 \text{ N.mm}$$

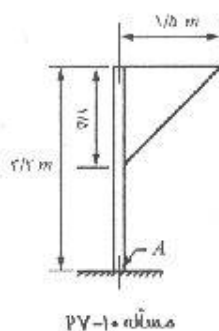
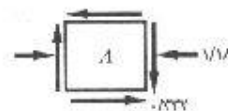
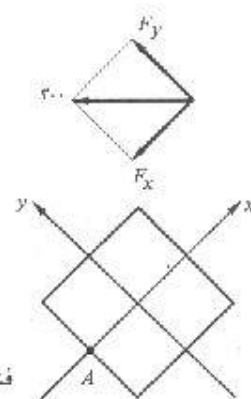
$$\sigma_A = -\frac{M_y c}{I_y} = -\frac{(-28284) \times (-30)}{1.08 \times 10^6} = -0.78 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$

لنگر M_y روی نقطه A تنش خمشی ایجاد نمی‌کند، زیرا این نقطه روی محور خنثی واقع است.

$$\tau_V = \frac{VQ}{It} = \frac{3}{2} \times \frac{F_y}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{141.42}{60 \times 60} = 0.37 \text{ MPa}$$

$$\tau_T = \frac{T_z}{\alpha A^2} = \frac{4 \times 10^4}{1 \times 60^2} = 0.42 \text{ MPa}$$

$$\tau_A = 0.42 - 0.37 = 0.05 \text{ MPa}$$



۱۰-۲۷. یک تابلو راهنمایی مثلثی شکل به یک پایه از نیمرخ لوله‌ای

با قطر خارجی ۱۱۴/۳ میلی‌متر و ضخامت پوسته ۶/۰۲

میلی‌متر متصل شده است. مطلوب است محاسبه تنشهای

اصلی در نقطه A در اثر باری به شدت ۲/۴ کیلونیوتن بر

مترمربع که از طرف خواننده به تابلو می‌وزد. فقط اثر باد

مورد نظر است و اثر وزن لوله و تابلو را وارد محاسبات

نمایید. از اثر مکش باد در طرف دیگر صفحه علامت نیز،

صرف نظر نمایید.

$$F = PA = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3} \times 1/5 \times 1/5\right) = 2/7 \text{ kN}$$

$$M_x = Fh = 2/7 \times (3/2 - 0/5) = -7/29 \text{ kN.m}$$

$$T_y = Fx = 2/7 \times 0/5 = 1/35 \text{ kN.m}$$

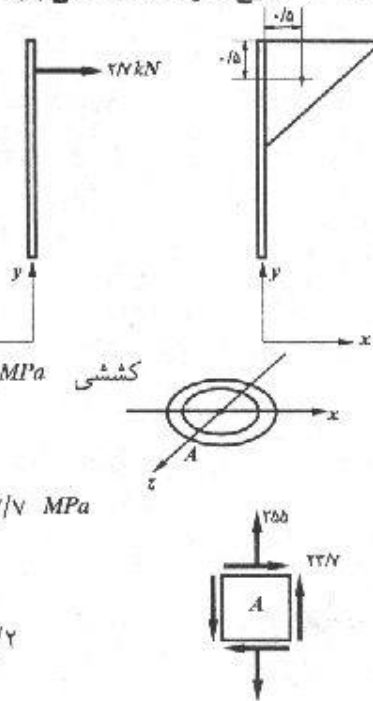
$$I = \frac{\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4) = 1630468 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_B = -\frac{M_x z}{I} = -\frac{(-7/29 \times 10^3) \left(\frac{114/3}{2}\right)}{1630468} = 255 \text{ MPa}$$

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{T \frac{d_o}{2}}{2I} = \frac{(1/35 \times 10^3) \left(\frac{114/3}{2}\right)}{2 \times 1630468} = 23/7 \text{ MPa}$$

$$\tau_V = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{255}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{255}{2}\right)^2 + (23/7)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 242/2 \\ \sigma_2 = -2/2 \end{cases}$$



۱۰-۲۸. یک تابلو راهنمایی به وزن ۱۸۰۰ نیوتن توسط لوله‌ای به قطر خارجی ۷۳ میلی‌متر و ضخامت پوسته ۵/۱۶ میلی‌متر حمل می‌گردد. مقدار نیروی افقی ناشی از باد بر تابلو مساوی ۴۰۰ نیوتن تخمین زده شده است. مطلوب است تعیین حالت تنش در نقاط A و B ناشی از بار مرده و باد. محاسبه تنشهای اصلی لازم نمی‌باشد. نتایج را به صورت ترسیمی در روی جزء سطحهای مربوطه نشان دهید. جزء سطح را از بیرون لوله مطالعه نمایید.

$$M_z = 1800 \times 1 = 1800 \text{ N.m} \quad (\text{جهت منفی})$$

$$M_x = 400 \times 3 = 1200 \text{ N.m} \quad (\text{جهت منفی})$$

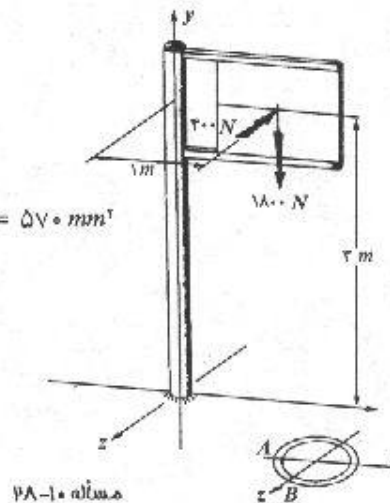
$$T_y = 400 \times 1 = 400 \text{ N.m} \quad (\text{جهت مثبت})$$

$$A = \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4} [(73)^2 - (67/8)^2] \Rightarrow A = 570 \text{ mm}^2$$

$$I = \frac{\pi}{64} (d_o^4 - d_i^4) = 354283 \text{ mm}^4$$

$$J = 2I = 708566 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{1800}{570} = 3/16 \text{ MPa} \quad \text{فشاری}$$



$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{(400 \times 10^3) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)}{708566} = 20/6 \text{ MPa}$$

تنشهای فوق برای نقاط A و B یکسان می‌باشند.

تنشهای ناشی از خمش: ممان خمشی M_x با توجه به جهت منفی آن روی نقطه A ایجاد تنش کششی می‌کند و روی نقطه B اثری ندارد. برعکس ممان خمشی M_z روی نقطه B تنش کششی ایجاد نموده درحالی‌که روی نقطه A اثری ندارد.

$$\sigma_b)_A = \frac{M_x x}{I} = \frac{(1800 \times 10^3) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)}{354283} = 185/4 \text{ MPa} \quad \text{کششی}$$

$$\sigma_b)_B = \frac{M_x z}{I} = \frac{(1200 \times 10^3) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)}{354283} = 123/6 \text{ MPa} \quad \text{کششی}$$

با توجه به این نکته که راستای نیروی برشی (400 N) هم‌راستا با محور z می‌باشد (در جهت منفی) بنابراین روی نقطه B تنش برشی ایجاد نمی‌کند.

$$\bar{y} = \frac{r}{\pi} = \frac{d_a}{\pi}, \quad A = \frac{1}{4} (\pi d_a^2)$$

$$Q = A \bar{y} = \frac{1}{4} \cdot d_a^2 \cdot t, \quad I = \frac{1}{4} \pi r^4 t = \frac{1}{16} \pi d_a^4 t$$

$$\tau_v)_A = \frac{VQ}{It} = \frac{V \left(\frac{1}{4} \cdot d_a^2 \cdot t \right)}{\left(\frac{1}{16} \pi d_a^4 \cdot t \right) (2t)} = \frac{4V}{\pi d_a^2 t} = \frac{4V}{A}$$

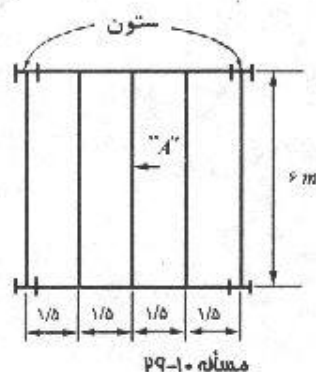
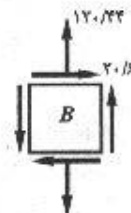
$$\tau_v)_A = \frac{4 \times 400}{\pi (70/42) (5/16)} = 1/4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = 185/4 - 3/16 = 182/24 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = 123/6 - 3/16 = 120/44 \text{ MPa}$$

$$\tau_A = 20/6 - 1/4 = 19/2 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = 20/6 \text{ MPa}$$



مسئله ۱۰-۷۹

۱۰-۲۹. تیر ریزی سقف ساختمانی در شکل نشان داده شده

است. مطلوب است طراحی تیر فولادی A با

استفاده از نیمرخ پهن IPE ، وزن مرده سقف که

شامل وزن مرده خود تیر نیز می‌باشد، مساوی $3/8$

کیلونیوتن بر مترمربع تخمین زده شده است. وزن

زنده سقف که شامل بارهایی است که در هنگام

استفاده ممکن است بر سقف وارد گردد، مساوی 3

کیلونیوتن بر مترمربع در نظر گرفته شده است. تنش

مجاز خمشی را مساوی ۱۴۰ نیوتن بر میلی مترمربع (مگاپاسکال) و تنش مجاز برشی را ۹۰ نیوتن بر میلی مترمربع در نظر بگیرید.

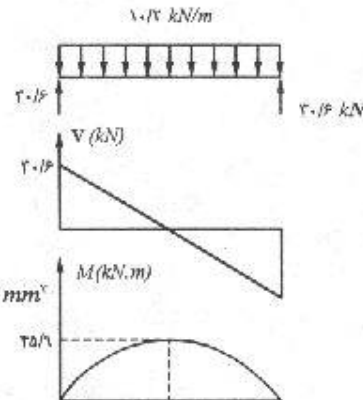
$$W = W_D + W_L = ۶/۸ \text{ kN/m}^2$$

$$q = ۶/۸ \times \frac{۱/۵ \times ۶}{۶} = ۱۰/۲ \text{ kN/m}$$

$$V_{max} = ۳۰/۶ \text{ kN}, \quad M_{max} = ۴۵/۹ \text{ kN.m}$$

$$\sigma_{all} = \frac{M_{max}}{S} \Rightarrow S = \frac{M_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{۴۵/۹ \times ۱۰^9}{۱۴۰} = ۳۲۷۸۰۰ \text{ mm}^3$$

$$\Rightarrow S = ۳۲۷/۸ \text{ cm}^3$$



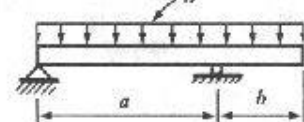
از جدول ۴ ضمیمه، نیمرخ IPE ۲۷۰ جوابگو می باشد اما بهتر است نیمرخ IPE ۲۴۰ را انتخاب کرده و در صورت لزوم دو قطعه ورق تقویتی در وسط دهانه به آن جوش دهیم. حال باید نیمرخ انتخاب شده برای برش هم امتحان شود.

$$\tau = \frac{VQ}{I_s} = \frac{(۳۰۶۰۰)(۱۸۳ \times ۱۰^3)}{(۳۸۹۰ \times ۱۰^4)(۶/۲)} = ۲۳/۲ \text{ MPa}$$

مقدار تنش برشی بدست آمده کمتر از مقدار مجاز (۹۰ MPa) بوده و مقطع انتخابی برای برش نیز جوابگو می باشد.

۱۰-۳۰. مطلوب است انتخاب ابعاد مقطع تیر چوبی مستطیلی نشان داده شده در شکل. شدت بار گسترده که شامل وزن مرده خود تیر نیز می باشد، مساوی ۲۰ کیلونیوتن بر متر است. تنش

مجاز خمشی مساوی ۹ نیوتن بر میلی مترمربع و تنش مجاز برشی مساوی ۱ نیوتن بر میلی مترمربع می باشد. a را مساوی ۳ متر، b را مساوی ۱/۵ متر و ارتفاع مقطع را دو برابر پهنای آن در نظر بگیرید.



مسئله ۱۰-۳۰

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \times ۳ - (۲۰ \times ۴/۵) \times ۲/۲۵ = 0 \Rightarrow R_B = ۶۷/۵ \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = ۲۰ \times ۲/۵ - ۶۷/۵ \Rightarrow R_A = ۲۲/۵ \text{ kN}$$

$$M_{max} = \frac{1}{4} (۳۷/۵ + ۲۲/۵) \times ۰/۷۵ = ۲۲/۵ \text{ kN.m}$$

$$M_{max} = \frac{1}{4} \times ۱/۵ \times ۳۰ = ۲۲/۵ \text{ kN.m}$$

$$V_{max} = ۳۷/۵ \text{ kN}$$

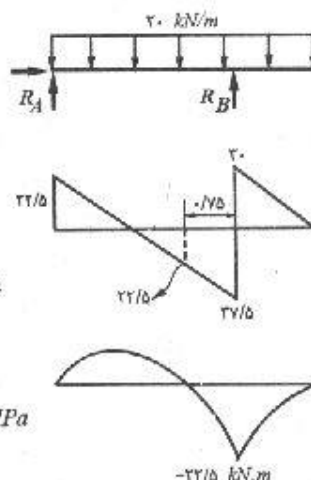
$$S = \frac{M_{max}}{\sigma_{all}} = \frac{22/5 \times 10^6}{9} = 2/5 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{I}{h/2} = \frac{2 \times \left(\frac{1}{12} b h^3\right)}{h} = \frac{1}{6} b h^2$$

$$\text{فرض مسئله: } h = 2b \Rightarrow S = \frac{2}{3} b^3 \Rightarrow b = 155/4 \text{ mm}$$

$$h = 2b = 310/8 \text{ mm}$$

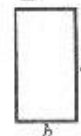
$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \times \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{37/5 \times 10^2}{(155/4)(310/8)} = 1/16 \text{ MPa}$$



چون این مقدار از تنش مجاز برشی بیشتر است، پس مقطع انتخابی برای برش جوابگو نیست و باید تصحیح شود.

$$A = \frac{3}{2} \times \frac{V}{\tau_{max}} = \frac{3}{2} \times \frac{37/5 \times 10^2}{9} = 56250$$

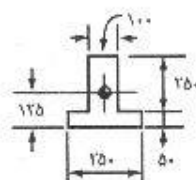
$$A = bh = b(2b) = 2b^2 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{A}{2}} = 167/7 \text{ mm}$$



با انتخاب $b = 168 \text{ mm}$ برای برش نیز جوابگو می‌باشد.

$$h = 2b = 336$$

۳۱-۱۰. تیری مطابق شکل میله قبل با $a = 5$ و $b = 2/5$ متر در نظر بگیرید. اگر مقطع تیر مطابق شکل نشان داده شده با لنگر ماندی در حول محور خمشی مساوی 320×10^6 میلی متر به توان ۴ در نظر گرفته شود، مطلوب است شدت مجاز بار گسترده در صورتی که تنش مجاز خمشی مساوی 320×10^6 میلی متر به توان ۴ در نظر گرفته شود، مطلوب است شدت مجاز بار گسترده در صورتی که تنش مجاز خمشی مساوی $8/4$ و تنش مجاز برشی مساوی $7/0$ نیوتن بر میلی متر مربع باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل برحسب میلی متر می‌باشند.



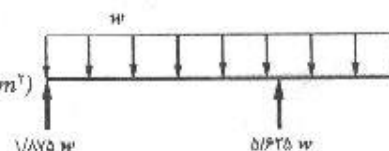
مسئله ۱۰-۳۱

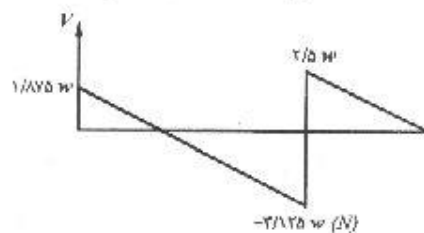
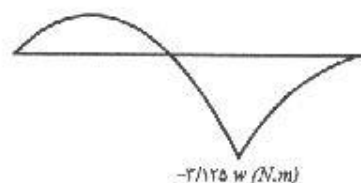
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \times 5 - 7/5 w \times 3/5 = 0 \Rightarrow R_B = 5/625 w$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = wL \Rightarrow R_A = 1/875 w$$

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I} = \frac{(3/125 w)(0/175)}{320 \times 10^6 (m^4)} = 8/4 \times 10^6 (N/m^2)$$

$$\Rightarrow W_1 = 4915 N/m^2 = 4/915 kN/m^2$$





$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

با توجه به اینکه V و I ثابت می‌باشند برای اینکه τ بیشینه باشد باید نسبت $\frac{Q}{t}$ بیشینه باشد و بیشینه این نسبت برای مقطع فوق در مرکز هندسی آن می‌باشد:

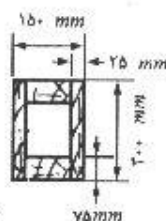
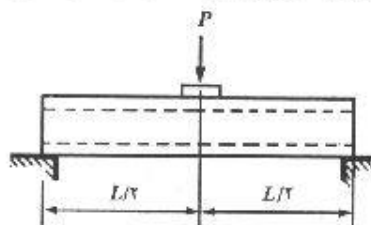
$$\tau_{all} = \frac{(3/125 w)(0/125 \times 0/1) \left(\frac{125}{2} \right)}{(320 \times 10^{-6})(0/1)} = 0/7 \times 10^6 \Rightarrow w = 4681 \text{ N/m}$$

$$w_1 = 4/68 \text{ kN/m}$$

بین دو مقدار بدست آمده برای w مقدار کوچکتر بار مجاز می‌باشد:

$$w = 4/68 \text{ kN/m}$$

۳۲-۱۰. مطلوب است محاسبه بار متمرکز مجاز P و طول دهانه و ابعاد صفحه تقسیم فشار زیر بار متمرکز، در تیر نشان داده شده در شکل. تنش مجاز خمشی مساوی ۱۰ ، تنش مجاز برشی برای چوب مساوی $۰/۸۲۵$ و برای اتصالات چسبی مساوی $۰/۴۱$ و تنش لپیدگی در امتداد عمود بر تارهای چوب مساوی $۲/۸$ نیوتن بر میلی متر مربع می‌باشد. از وزن تیر صرف نظر نمایند.



مسئله ۱۰-۳۲

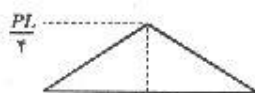
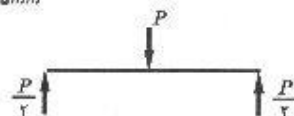
(ابعاد بر حسب میلی متر)

$$V_{max} = \frac{P}{2}, \quad M_{max} = \frac{PL}{4}$$

$$I = \frac{1}{12} (150)(300)^3 - \frac{1}{12} (100)(150)^3 = 309/4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I} = \frac{\left(P \frac{L}{4} \right) (150)}{309/4 \times 10^6} = 10 \Rightarrow PL = 82/5 \times 10^6 \text{ (N.mm)} \quad (1)$$

$$Q_1 = (100 \times 75) \left(150 - \frac{75}{2} \right) = 843750 \text{ mm}^3$$



معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۲۹۷

$$\tau_{(جذب)} = \frac{VQ_1}{Ih} = \frac{\left(\frac{P}{\gamma}\right)(843750)}{(309/4 \times 10^6)(75)} \Rightarrow P = 22550 \text{ N}$$

$$Q_2 = (100 \times 75)\left(150 - \frac{75}{\gamma}\right) + (25 \times 150)(75) \times 2 = 1406250 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{(جذب)} = \frac{VQ_2}{Ih} \Rightarrow 0.825 = \frac{\left(\frac{P}{\gamma}\right)(1406250)}{(309/4 \times 10^6)(50)} \Rightarrow P = 18150 \text{ N}$$

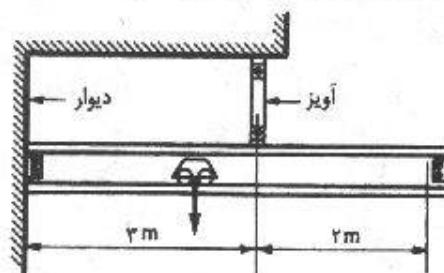
بین دو مقدار تنش برشی بدست آمده مقدار کمتر مورد قبول است:

$$P = 18150 \text{ kN}$$

$$(1) \Rightarrow 18150 \times L = 82/5 \times 10^6 \Rightarrow L = 4545 \text{ mm} = 4.54 \text{ m}$$

$$\sigma_{all} = \frac{P/\gamma}{A} \Rightarrow A = \frac{P}{\gamma \sigma_{all}} = \frac{18150}{\gamma \times 2/8} = 3241 \text{ mm}^2$$

۳۳-۱۰. مطلوب است طراحی تیر جرقیل سقفی نشان داده شده در شکل با استفاده از نیمرخ INP. ظرفیت جرقیل مساوی ۳۶ کیلونیوتن می باشد و در محاسبات از وزن تیر صرف نظر نمایید. اتصال تیر به دیوار را مفصلی در نظر بگیرید. تنش مجاز خمشی مساوی ۸۵ و تنش مجاز برشی مساوی ۵۰ نیوتن بر میلی متر مربع می باشند.

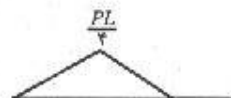


مثال ۱۰-۳۳

در حالتی که بار بین دو تکیه گاه است، لنگر خمشی ماکزیمم هنگامی رخ می دهد که بار در وسط دهانه قرار گیرد و نیروی برشی ماکزیمم وقتی ایجاد می شود که بار در محل تکیه گاه باشد (عملکرد تیر ساده)

$$M_{max} = \frac{PL}{4} = \frac{36 \times 2}{4} = 18 \text{ kN.m}$$

$$V_{max} = 36 \text{ kN}$$



وقتی که بار سمت راست آویز باشد، لنگر خمشی ماکزیمم مربوط به حالتی است که بار بیشترین فاصله را از آویز داشته باشد یعنی در انتهای تیر.

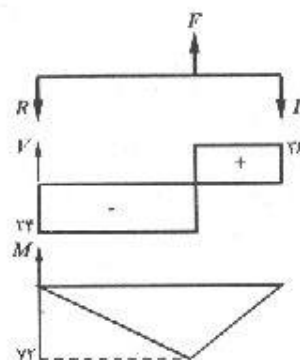
$$36 \times 2 = R \times 2 \Rightarrow R = 36$$

$$M_{max} = 22 \times 3 = 66 \text{ kN.m}$$

$$V_{max} = 36 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{M}{S} \Rightarrow S = \frac{M}{\sigma_{all}} = \frac{66 \times 10^6}{85} = 776.47 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$= 77.65 \text{ cm}^2$$

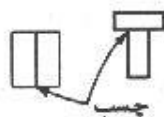


با استفاده از جدول ۳ ضمیمه ۳۴۰ INP مناسب می باشد.

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(36000)(540 \times 10^3)}{(157000 \times 10^4)(12/2)} = 10/15 \text{ MPa}$$

که از مقدار تنش برشی مجاز کمتر بوده و قابل قبول است.

۳۴-۱۰. با چسباندن دو قطعه پلاستیکی به ابعاد 20×60 میلی متر به یکدیگر، می خواهیم تیر ساده ای به دهانه ۶۰۰ میلی متر که بار گسترده یکنواختی را حمل می کند، بسازیم. به دو صورت نشان داده شده در شکل می توانیم این کار را انجام دهیم. اگر



مسئله ۱۰-۳۴

تنش مجاز خمشی مساوی ۴ و تنش مجاز برشی پلاستیک مساوی ۰/۶ و تنش برشی مجاز چسب مساوی ۰/۴ باشد، شدت بار گسترده مجاز برای هر یک از حالات نشان داده شده چقدر می باشد.

$$V_{max} = \frac{wL}{2} = 300w \text{ (N)}$$

$$M_{max} = \frac{wL^2}{8} = 45000w \text{ (N.mm)}$$

$$\bar{y}_1 = \frac{(20 \times 60)(10) + (20 \times 60)(20 + 30)}{2 \times 20 \times 60} = 30 \text{ mm}$$

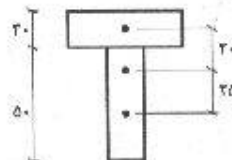
$$I_1 = \frac{1}{12} (60)(20)^3 + (20 \times 60)(20)^2 + \frac{1}{12} (20)(60)^3 + (20 \times 60)(20)^2$$

$$\Rightarrow I_1 = 1/36 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow 4 = \frac{(45000w)(50)}{1/36 \times 10^6} \Rightarrow w = 2/4 \text{ N/mm}$$

$$\tau_p = \frac{VQ}{It} \Rightarrow 0/6 = \frac{(300w) \times [(20 \times 50)(25)]}{(1/36 \times 10^6)(20)} \Rightarrow w = 2/14 \text{ N/mm}$$

$$\tau_a = \frac{VQ}{It} \Rightarrow 0/4 = \frac{(300w) \times [(20 \times 60)(20)]}{(1/36 \times 10^6)(20)} \Rightarrow w = 1/51 \text{ N/mm}$$



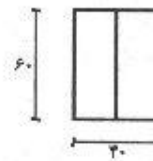
یعنی بار مجاز برای مقطع T شکل $۱/۵۱ N/mm$ می باشد

$$I_x = \frac{1}{12} (40)(60)^3 = 72 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow 4 = \frac{(45000w)(30)}{72 \times 10^4} \Rightarrow w = 2/13 \text{ N/mm}$$

$$\tau_p = \frac{VQ}{It} \Rightarrow 0/6 = \frac{(300w) \times [(40 \times 30)(15)]}{(72 \times 10^4)(40)} \Rightarrow w = 3/2 \text{ N/mm}$$

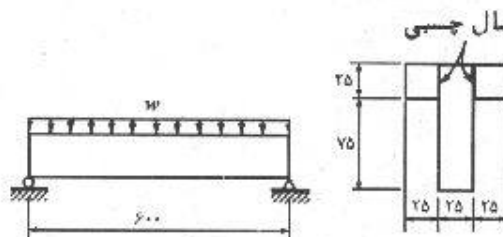
$$\tau_a = 0$$



کمترین مقدار بار مجاز می باشد:

$$w = 1/51 \text{ N/mm} = 1510 \text{ N/m}$$

۱۰-۳۵. مطلوب است محاسبه شدت مجاز بار گسترده یکنواختی که می تواند بر تیر پلاستیکی نشان داده شده در شکل وارد گردد (بار گسترده شامل وزن خود تیر نیز می باشد). تنش مجاز خمشی مساوی $3/5$ ، تنش برشی مجاز پلاستیک مساوی $0/7$ و تنش برشی مجاز چسب، مساوی $0/35$ نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. تمام ابعاد نشان داده شده در شکل بر حسب میلی متر مربع می باشند.



مسئله ۱۰-۳۵

$$V_{max} = R_A = \frac{wL}{2} = 300w \quad M_{max} = \frac{wL^2}{8} = 45000w$$

$$\bar{y} = \frac{2 \times (25 \times 25)(12/5) + (25 \times 100)(50)}{2 \times (25 \times 25) + 25 \times 100} = 37/5$$

$$I = \frac{1}{12} (25)(100)^3 + (25 \times 100)(50 - 37/5)^2 + 2 \left[\frac{1}{12} (25)(25)^3 + (25 \times 25)(37/5 - 12/5)^2 \right]$$

$$\Rightarrow I = 3/32 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \Rightarrow 3/5 = \frac{(45000w)(62/5)}{3/32 \times 10^9} \Rightarrow w = 4/13 \text{ N/mm}$$

$$Q_a = (25 \times 25)(37/5 - 12/5) = 15625 \text{ mm}^3$$

$$\tau_a = \frac{VQ_a}{It} \Rightarrow 0/35 = \frac{(300w)(15625)}{(3/32 \times 10^9)(25)} \Rightarrow w = 6/19 \text{ N/mm}$$

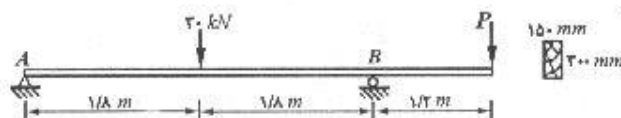
$$Q_p = (25 \times 62/5) \left(\frac{62/5}{2} \right) = 48828 \text{ mm}^2$$

$$\tau_p = \frac{VQ_p}{It} \Rightarrow 0.7 = \frac{(300w)(48828)}{(3/32 \times 10^6)(25)} \Rightarrow w = 3/97 \text{ N/mm}$$

بین مقادیر بدست آمده کمترین مقدار بار مجاز خواهد بود.

$$w = 3/97 \text{ N/mm} = 3/97 \text{ kN/m}$$

۱۰-۳۶. تنش مجاز خمشی برای تیر نشان داده شده در شکل مساوی $\pm 8/5$ نیوتن بر میلی متر مربع می باشد. اگر بار 30 نیوتنی به تنهایی بر تیر وارد گردد، تنش خمشی ایجاد شده در تیر از مقدار مجاز تجاوز می کند. مطلوب است محاسبه حداقل بار P به طوری که تنشهای خمشی از حد تجاوز نکنند. (ب) پس از تعیین بار P ، حداکثر تنش برشی ایجاد شده در تیر را به دست آورید.



مسئله ۱۰-۳۶

$$R_B(3/6) - 30(1/8) - P(2/8) = 0 \Rightarrow R_B = 15 + \frac{4}{3}P$$

$$R_A + R_B = 30 + P \Rightarrow R_A = 15 - \frac{P}{3}$$

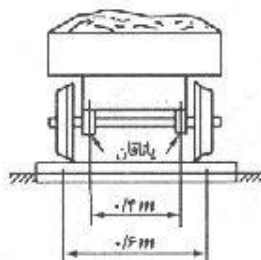
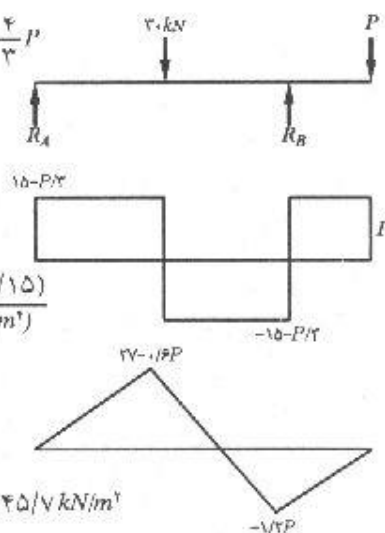
$$I = \frac{1}{12} (150)(300)^3 \Rightarrow I = 337/5 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I} \Rightarrow 8/5 \times 10^7 \text{ (kN/m}^2\text{)} = \frac{(27 - 0.6P)(0.15)}{337/5 \times 10^7 \text{ (m}^4\text{)}}$$

$$\Rightarrow P = 13/1 \text{ kN}$$

$$V_{max} = -15 - \frac{13/1}{3} = -19/37 \text{ kN}$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V_{max}}{A} = \frac{3}{2} \times \frac{19/37}{(0.3) \times (0.15)} \Rightarrow \tau_{max} = 645/7 \text{ kN/m}^2$$



مسئله ۱۰-۳۷

۱۰-۳۷. مطلوب است محاسبه قطر محور واگن چهارچرخه نشان داده شده در شکل. وزن واگن با بار روی آن مساوی 40 کیلونیوتن می باشد. تنش مجاز خمشی را مساوی 80 و تنش برشی مجاز را مساوی 40 نیوتن بر میلی متر مربع در نظر بگیرید.

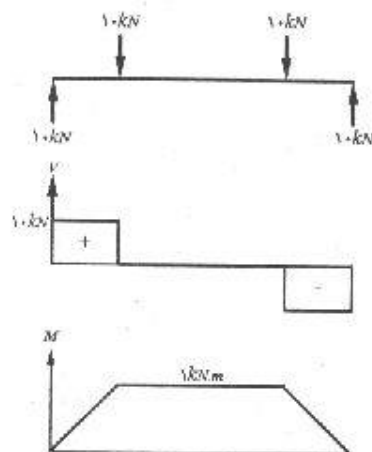
معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۳۰۱

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32 M}{\pi d^3} = \frac{(32)(1 \times 10^6)}{\pi \cdot d^3} = 10$$

$$\Rightarrow d_1 = 50/3 \text{ mm}$$

$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \left(\frac{V}{A} \right) = \frac{16 V}{3 \pi d^3} = 40 \Rightarrow d_2 = 20/6 \text{ mm}$$

$$d = \max(d_1, d_2) = 50/3 \text{ mm}$$

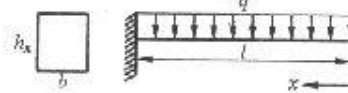


۳۸-۱۰. یک تیر طره‌ای با مقاومت ثابت برای بار گسترده یکنواخت طراحی نمایید. پهنای تیر را ثابت فرض کنید.

$$M_x = q \frac{x^2}{2} \quad \sigma = \frac{M_x c_x}{I_x}$$

$$c_x = \frac{h_x}{2} \quad I_x = \frac{1}{12} b h_x^3$$

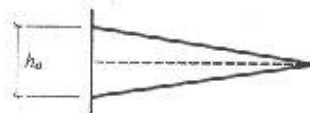
$$\sigma = \frac{\left(q \cdot \frac{x^2}{2} \right) \left(\frac{h_x}{2} \right)}{\frac{1}{12} b h_x^3} \Rightarrow h_x^2 = \frac{3q}{b\sigma} x^2 \Rightarrow h_x = \sqrt{\frac{3q}{b\sigma}} x$$



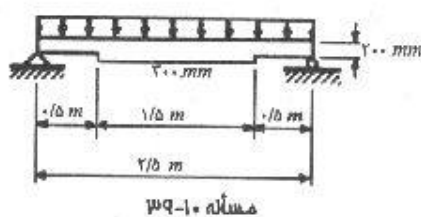
همانگونه که ملاحظه می‌شود ارتفاع تیر رابطه مستقیم با طول آن دارد.

$$h_1 = \sqrt{\frac{3q}{b\sigma}} \times L \Rightarrow \sqrt{\frac{3q}{b\sigma}} = \frac{h_1}{L}$$

$$h_x = \frac{h_1}{L} x$$



۳۹-۱۰. پهنای تیر مستطیلی نشان داده شده در شکل مساوی ۱۵۰ میلی‌متر می‌باشد. در صورتی که



مسئله ۱۰-۳۹

تنش مجاز خمشی مساوی ۱۰ و تنش مجاز برشی مساوی ۱ نیوتن بر میلی‌متر مربع باشد، شدت مجاز بار گسترده یکنواخت را تعیین نمایید. در محاسبات از وزن تیر و تمرکز تنش در نقطه تغییر مقطع صرف‌نظر نمایید.

$$R_A = \frac{wL}{2} = 1/25 (m) \times w (N/m) = 1/25 w (N)$$

$$V_{max} = 1/25 w (N)$$

$$M(x) = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \rightarrow x = \frac{L}{2} \rightarrow M_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^2}{8} = 0/\sqrt{8}w$$

$$M(0/5) = w\left(\frac{2/5}{2}\right)(0/5) - \frac{w(0/5)^2}{2} = 0/5w$$

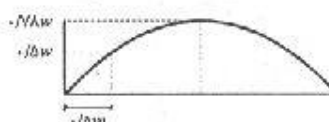
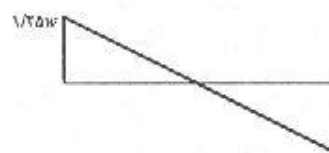
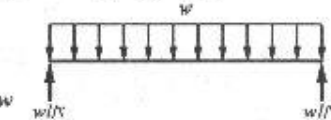
$$I_1 = \frac{1}{12}(0/15)(0/3)^3 = 33/75 \times 10^{-6} m^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12}(0/15)(0/2)^3 = 10 \times 10^{-6} m^4$$

$$\sigma = \frac{M_1 c_1}{I_1} \Rightarrow 10 \times 10^6 (N/m^2) = \frac{(0/\sqrt{8}w)(0/15)}{33/75 \times 10^{-6}} \Rightarrow w = 28846 N/m$$

$$\sigma = \frac{M_2 c_2}{I_2} \Rightarrow 10 \times 10^6 = \frac{(0/5w)(0/1)}{10 \times 10^{-6}} \Rightarrow w = 2000 N/m$$

$$\tau = \frac{VQ}{I_y t} = \frac{(1/25w)[(0/15)(0/1) \times (0/5)]}{(10 \times 10^{-6})(0/15)} = 1 \times 10^6 \Rightarrow w = 16000 N/m$$



کمترین مقدار w بار مجاز می‌باشد:

$$w = 16 kN/m$$

۱۰-۴۰. (الف) نشان دهید که تنش اصلی بزرگتر برای یک محور استوانه‌ای که تحت اثر توأم لنگر خمشی و لنگر پیچشی می‌باشد، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_1 = (c/J) (M + \sqrt{M^2 + T^2})$$

(ب) نشان دهید که رابطه طراحی محوره‌ای استوانه‌ای بر پایه فرضیه تنش حداکثر به صورت زیر است:

$$d = \sqrt{\left[\frac{16}{(\pi \tau_{allow})} \right] (M + \sqrt{M^2 + T^2})}$$

(الف) برای مقطع دایره‌ای $J = \pi I$ بنابراین:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{2Mc}{J}, \quad \tau = \frac{Tc}{J}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{Mc}{J} + \sqrt{\left(\frac{Mc}{J}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2} = \left(\frac{c}{J}\right) (M + \sqrt{M^2 + T^2})$$

$$\frac{c}{J} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16}{\pi d^3} \quad (ب)$$

$$\sigma_{all} = \sigma_1 = \left(\frac{16}{\pi d^3} \right) (M + \sqrt{M^2 + T^2}) \Rightarrow d = \sqrt[3]{\left[\frac{16}{\pi \sigma_{all}} \right] (M + \sqrt{M^2 + T^2})}$$

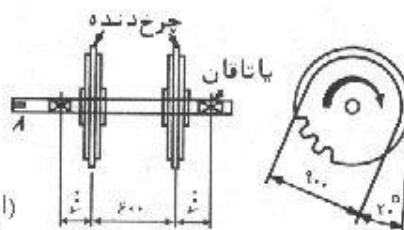
۴۱-۱۰. در مقطع بحرانی از یک محور استوانه‌ای توپر، لنگر پیچشی مساوی ۴۰ کیلونیوتن‌متر و لنگر خمشی مساوی ۱۰ کیلونیوتن‌متر می‌باشد. مطلوب است تعیین قطر لازم طوری که تنش برشی حداکثر (اصلی)، از ۵۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز نکند.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3}, \quad \tau = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} = \left(\frac{16}{\pi d^3} \right) \sqrt{M^2 + T^2} = \left(\frac{16}{\pi d^3} \right) \sqrt{(10 \times 10^3)^2 + (40 \times 10^3)^2}$$

$$= \frac{209988}{d^3} < 50 \Rightarrow d > 16/1 \text{ mm}$$

۴۲-۱۰. محور رأسی یک بالابر شیبدار مطابق شکل می‌باشد. نیروی محرکه این محور در نقطه A وارد می‌شود و آن را با سرعت ۱۱ دور در دقیقه با توان مصرفی ۴۰ کیلووات، به‌طور یکنواخت به دوران در می‌آورد. در صورتی که توان مصرفی هر یک از چرخ دنده‌های زنجیرخور مساوی ۲۰ کیلووات باشد، مطلوب است تعیین قطر محور به نحوی که حداکثر تنش برشی از ۴۰ نیوتن بر میلی‌متر مربع تجاوز نکند. اثر تمرکز تنش در تنش مجاز در نظر گرفته شده است.

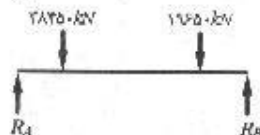


(ابعاد بر حسب میلی‌متر)

مسئله ۴۲-۱۰

$$T = 9540 \frac{kW}{n} \quad T_1 = 9540 \times \frac{40}{11} = 34690 \text{ N.m} \quad T_2 = 9540 \times \frac{20}{11} = 17350 \text{ N.m}$$

$$T_1 = \Delta F_1 \cdot r \Rightarrow \Delta F_1 = \frac{34690}{0/9} = 38540 \text{ N} \quad \Delta F_2 = \frac{17350}{0/9} = 19650 \text{ N}$$



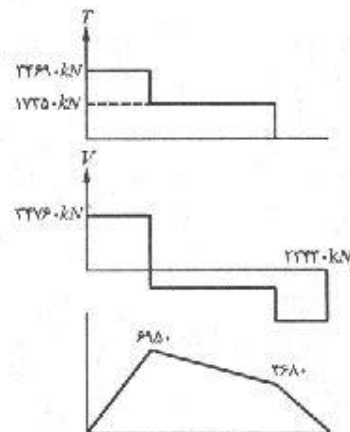
$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B \times 1 = (19600)(0/1) - (38000)(0/2) = 0$$

$$\rightarrow R_B = 22430 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \therefore R_A + R_B = 3804.0 + 1960.0$$

$$\rightarrow R_A = 3476.0 \text{ N}$$

ببا توجه به نمودارهای ممان خمشی، ممان پیچشی و نیروی برشی، به وضوح مشخص است که نقطه بحرانی محور در محل چرخنده سمت چپ واقع است.



$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{\pi \gamma M}{\pi d^3} = \frac{\pi (6900)}{\pi d^3} = \frac{6.94\gamma}{d^3}$$

$$\tau_T = \frac{T_c}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(34990)}{\pi d^3} = \frac{1760.70}{d^3}$$

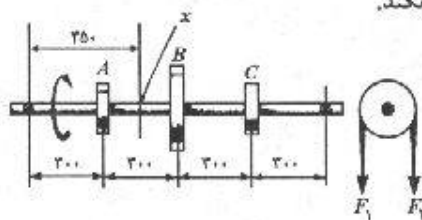
$$\tau_{Vmax} = \frac{F}{A} \times \frac{V}{A} = \frac{F}{A} \times \frac{F(34V60)}{\pi d^2} = \frac{59.10}{d^2}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{Y}\right)^2 + \tau^2} \Rightarrow \tau \times 10^6 \text{ (N/m}^2\text{)} = \sqrt{\left(\frac{350996}{d^3}\right)^2 + \left(\frac{146040}{d^3} + \frac{49010}{d^3}\right)^2}$$

با استفاده از روش سعی و خطا مقدار قطر محور بدست می آید:

$$d = 0,19 \text{ V m} = 19 \text{ V mm}$$

۴۳-۱۰. محوری استوانه‌ای مطابق شکل مفروض است. چرخ دنده A، چرخ دنده B، چرخ دنده C می‌باشد. چرخ دنده A، ۱۲۰۰ نیوتن متر و چرخ دنده C، ۴۰۰ نیوتن متر لنگر پیچشی جذب می‌نماید. برآیند نیروی کششی هر چرخ دنده مساوی ۱۸۰۰ نیوتن و به سمت پایین می‌باشد. مطلوب است محاسبه قطر محور به طوری که تنش برشی حداکثر (اصلی) از ۴۰ نیوتن بر میلی متر مربع تجاوز نکند.



470-1 • வினா

با توجه به نمودار لنگر خمشی و لنگر پیچشی نقطه B (سمت چپ آن) نقطه بحرانی می‌باشد.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{\gamma \gamma M}{\pi d^2}, \quad M = 10 \text{ A} \Rightarrow \sigma = \frac{1100}{d^2}$$

معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۳۰۵

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3}, \quad T = 1200 \Rightarrow \tau_T = \frac{6111/5}{d^3}$$

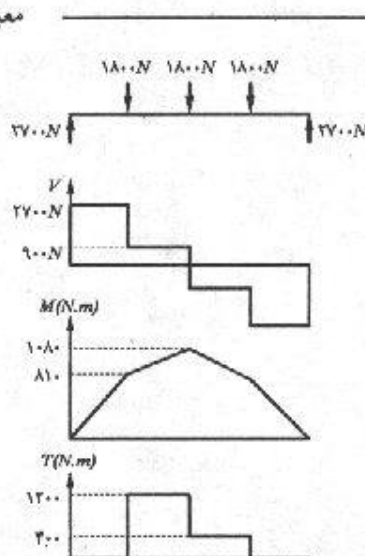
$$\tau_V = \frac{4}{3} \left(\frac{V}{A} \right) = \frac{16V}{3\pi d^3}, \quad V = 900 \Rightarrow \tau_V = \frac{1528}{d^3}$$

$$\tau = \tau_T + \tau_V$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{3} \right)^2 + \tau^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5500/5}{d^3} \right)^2 + \left(\frac{6111/5}{d^3} + \frac{1528}{d^3} \right)^2}$$

$$\tau_{max} = 40 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$



با استفاده از روش سعی و خطا مقدار d بدست می آید:

$$d = 0.059 \text{ m} = 59 \text{ mm}$$

جواب را برای ناحیه با نیروی برشی 2700 N امتحان می کنیم:

$$\tau = \frac{4}{3} \times \frac{2700}{\frac{\pi (59)^2}{4}} = 1/3 \text{ N/mm}^2$$

۱۰-۴۳. اگر قطر محور مسأله قبل ۵۰ میلی متر باشد، مطلوب است محاسبه مقدار و امتداد تنشهای اصلی در نقطه x .

$$M = 2700 \times 250 - 1800 \times 150 = 945 \times 10^3 \text{ N.mm}$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{(32)(945 \times 10^3)}{\pi (50)^3} \Rightarrow \sigma = 77 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_V = \frac{4}{3} \times \frac{V}{A} = \frac{4}{3} \times \frac{900}{\pi (50)^2} = 0.6 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_T = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(1200 \times 10^3)}{\pi (50)^3} = 48/9 \text{ N/mm}^2$$

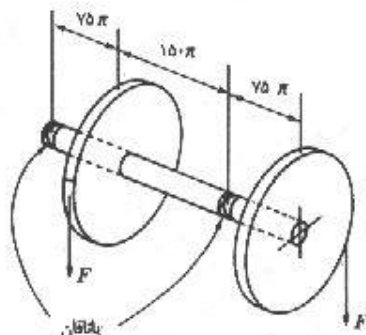
$$\tau = \tau_V + \tau_T = 49/5 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} = \frac{77}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{77}{2} \right)^2 + (49/5)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 101/2 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -24/2 \text{ MPa} \end{cases}$$

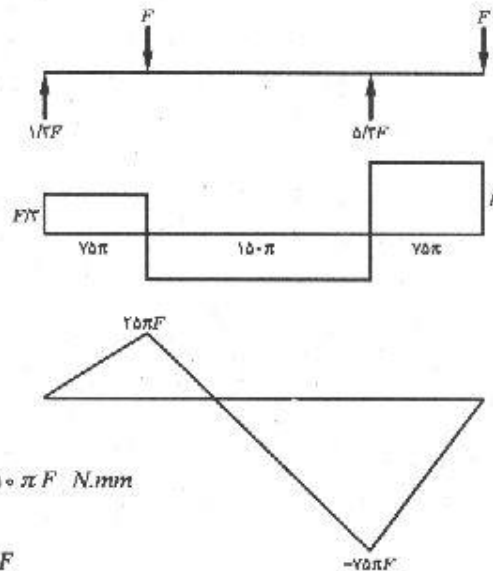
$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 49/5}{77} = 1/28 \Rightarrow 2\theta = 52^\circ \Rightarrow \theta = 26^\circ$$

۱۰-۴۴. مطابق شکل، دو چرخ دنده هرکدام به قطر 100π میلی متر، به یک محور به قطر ۴۰ میلی متر که دارای دو یاتاقان در نقاط نشان داده شده می باشد، سوار شده اند. اگر تنش برشی

حداکثر به ۳۵ نیوتن بر میلی متر مربع محدود شده باشد، حداکثر مقدار نیروی F چقدر خواهد بود. اثر نیروی برشی مستقیم V را لازم نیست در محاسبات وارد نمایید.



مسئله ۱۰-۴۴



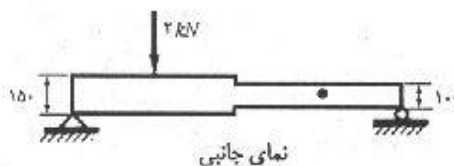
$$M_{max} = 75 \pi F \text{ N.mm} \quad , \quad T = Fr = 50 \pi F \text{ N.mm}$$

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32(75 \pi F)}{\pi (40)^3} = 0.0375 F$$

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(50 \pi F)}{\pi (40)^3} = 0.0125 F$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{0.0375 F}{2}\right)^2 + (0.0125 F)^2} = 35 \Rightarrow F = 1553 \text{ N}$$

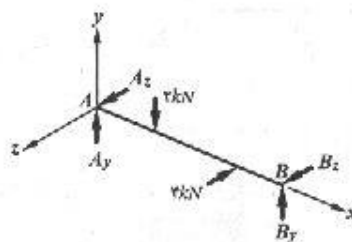
۴۵-۱۰. با صرف نظر کردن از وزن تیر و تمرکز تنش در نقطه تغییر مقطع، حداکثر تنش خمشی برای تیر نشان داده شده در شکل را تعیین نمایید. تمام اندازه‌های شکل بر حسب میلی متر می‌باشند.



نمای جانبی



مسئله ۱۰-۴۵



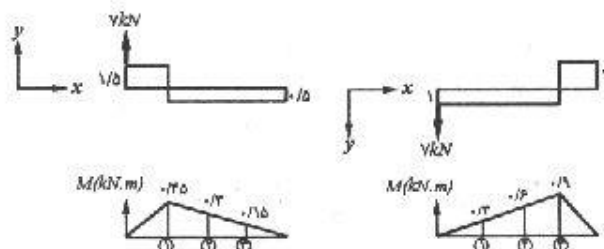
$$\sum M_z (A \text{ حول}): -B_y \times 1/2 + 2 \times 0/3 = 0 \Rightarrow B_y = 0.5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : A_y + B_y = 2 \text{ kN} \Rightarrow A_y = 1.5 \text{ kN}$$

معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۳۰۷

$$\sum M_y (A): -B_z \times 1/2 + 4 \times 0/9 = 0 \Rightarrow B_z = 4 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0 : A_z + B_z = 4 \text{ kN} \Rightarrow A_z = 1 \text{ kN}$$



$$I_{yy} = \frac{1}{12} (0/1)(0/15)^3 = 28/1 \times 10^{-9} \text{ m}^4, \quad I_{xz} = \frac{1}{12} (0/15)(0/1)^3 = 12/5 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

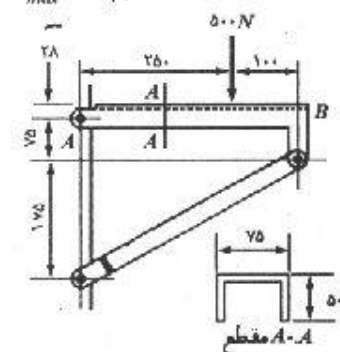
$$I_{yy} = \frac{1}{12} (0/1)(0/1)^3 = 8/3 \times 10^{-9} \text{ m}^4, \quad I_{xz} = \frac{1}{12} (0/1)(0/1)^3 = 8/3 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1 c_y}{I_{yy}} + \frac{M_1' c_z}{I_{xz}} = \frac{(450) \left(\frac{0/15}{2} \right)}{28/1 \times 10^{-9}} + \frac{(300) \left(\frac{0/1}{2} \right)}{12/5 \times 10^{-9}} = 2/4 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 2/4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1 c_y}{I_{yy}} + \frac{M_1' c_z}{I_{xz}} = \frac{(300) \left(\frac{0/1}{2} \right)}{8/3 \times 10^{-9}} + \frac{(600) \left(\frac{0/1}{2} \right)}{8/3 \times 10^{-9}} = 5/42 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 5/42 \text{ MPa}$$

$$\sigma_r = \frac{M_r c_y}{I_{yy}} + \frac{M_r' c_z}{I_{xz}} = \frac{(150) \left(\frac{0/1}{2} \right)}{8/3 \times 10^{-9}} + \frac{(900) \left(\frac{0/1}{2} \right)}{8/3 \times 10^{-9}} = 6/32 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 6/32 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max} = 6/32 \text{ MPa}$$



مسئله ۱۰-۴۶

۱۰-۴۶. مطلوب است تعیین حداکثر تنش در قطعه AB از

شکل زیر. قطعه AB از ورقی به ضخامت ۲

میلی متر ساخته شده است. تمام اتصالات مفصلی

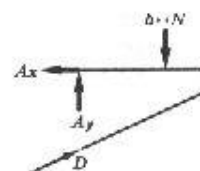
می باشند و لنگر مانند مقطع قطعه AB در حول

محور خنثی مساوی 130×10^2 میلی متر به توان ۴

می باشد.

$$\sum M_D = 0 : A_x(250) - 500(250) = 0 \rightarrow A_x = 500 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 : D_x = 500 \text{ N}, \quad D_y = \frac{175}{350} (D_x) = 250 \text{ N}$$



$$\sum F_y = 0 : A_y + D_y = 500 \Rightarrow A_y = 250 \text{ N}$$

$$V_{max} = 250 \text{ N} , \quad M_{max} = 250 \times 250 = 62500 \text{ N.mm}$$

$$y = \frac{(50 \times 3)(25) \times 2 + (75 - 6)(3)(1/5)}{50 \times 3 \times 2 + 69 \times 3} = 15/4$$

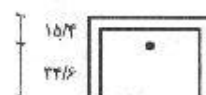
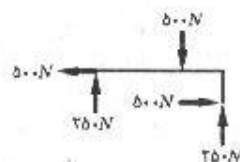
$$\sigma_b = \frac{Mc}{I} = \frac{(62500)(34/6)}{130 \times 10^7} = 16/6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_L = \frac{P}{A} = \frac{500}{50 \times 7} = 0/9 \text{ MPa}$$

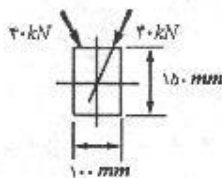
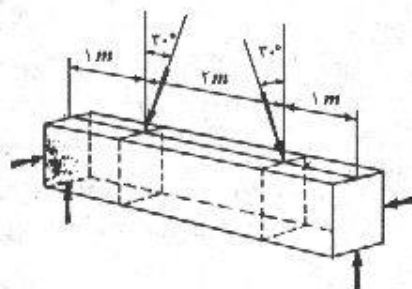
$$\sigma = 16/6 + 0/9 = 17/5 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(250) \left(34/6 \times 3 \times \frac{34/6}{2} \right) \times 2}{(130 \times 10^7)(6)} = 1/15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{17/5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{17/5}{2} \right)^2 + (1/15)^2} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 17/57 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -0/07 \text{ MPa} \end{cases}$$



۴۷-۱۰. یک تیر به دهانه ۴ متر، مطابق شکل بارگذاری شده است. نیروهای مایل نشان داده شده، در صفحات عمودی عمود بر محور تیر تأثیر می نمایند و از مرکز هندسی سطح مقطع تیر عبور می کنند. مطلوب است تعیین محل و مقدار تنش خمشی حداکثر. از وزن تیر صرف نظر نمایید.

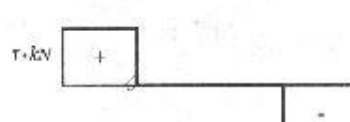
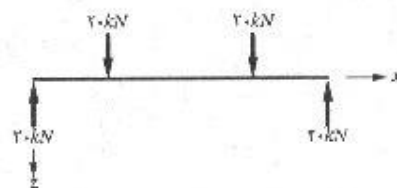
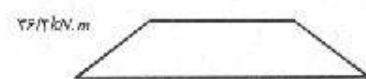
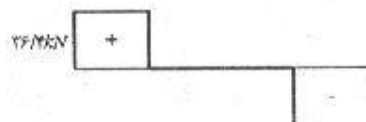
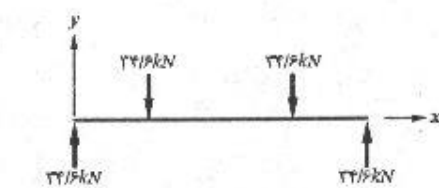


مسئله ۴۷-۱۰

معیارهای گسیختگی و طراحی اعضاء براساس معیار مقاومت / ۳۰۹

$$F_y = 40 \times \cos 30^\circ = 34.64 \text{ kN}$$

$$F_z = 40 \times \sin 30^\circ = 20 \text{ kN}$$



$$I_1 = \frac{1}{12} (1000)(1500)^3 = 28/125 \times 10^9 \text{ mm}^4 \quad I_2 = \frac{1}{12} (1500)(1000)^3 = 12/5 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_1 = \pm \frac{M_1 c_1}{I_1} = \frac{(34.64 \times 10^3)(750)}{(28/125 \times 10^9)} = \pm 92/3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \pm \frac{M_2 c_2}{I_2} = \frac{(20 \times 10^3)(500)}{(12/5 \times 10^9)} = \pm 80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 + \sigma_2 = \pm 172 \text{ MPa}$$

محل تنش خمشی حداکثر در فاصله بین دو بار می باشد.