

[www.Prozheha.ir](http://www.Prozheha.ir)



با ظاهر جدید و امکانات جدید

# پروژه ها

بزرگترین مرجع دانلود کتاب، جزوه و منابع دانشگاهی رایگان

Subject :

دینامیک

Year: ۸۹ Month: ۱۲ Date: ۶



\* دینامیک { ذرات ✓ ←  
 { سینماتیک : فقط حرکت را بررسی می کند.  
 { احصای صلب  
 { سینماتیک : علاوه بر حرکت، نیرو را هم بررسی می کند.  
 { (سینماتیک + استاتیک)

— سینماتیک :  
 { حرکت مستقیم الخط  
 { حرکت زاویه ای  
 { حرکت منحنی الخط در صفحه  
 { حرکت منحنی الخط در فضا  
 { حرکت نسبی  
 { مختصات متعامد (x-y)  
 { مختصات عمودی-ماس (n-t)  
 { مختصات قطبی (r-θ)

ABADANOMRAN

— سینماتیک ←  
 { نیرو و شتاب (قانون دوم نیوتون)  
 { کار و انرژی

\* حرکت مستقیم الخط :  
 { جابجایی ← s یا x  
 { سرعت ← v  
 { شتاب ← a

مشتق اول نسبت به زمان  
 -s +s  
 0 P P'  
 سرعت متوسط  $V_{ave} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  → سرعت لحظه ای  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$



Subject :

دینامیک

Year: ۸۹ Month: ۱۲ Date: ۶



$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

رابطه ①

سرعت متوسط  $a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$   $\rightarrow$   $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

رابطه ②

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$$

مشتق دوم نسبت به زمان

①  $\rightarrow dt = \frac{ds}{v}$

②  $\rightarrow dt = \frac{dv}{a}$

$$\frac{ds}{v} = \frac{dv}{a} \rightarrow v dv = a ds$$

$$v dv = a ds$$

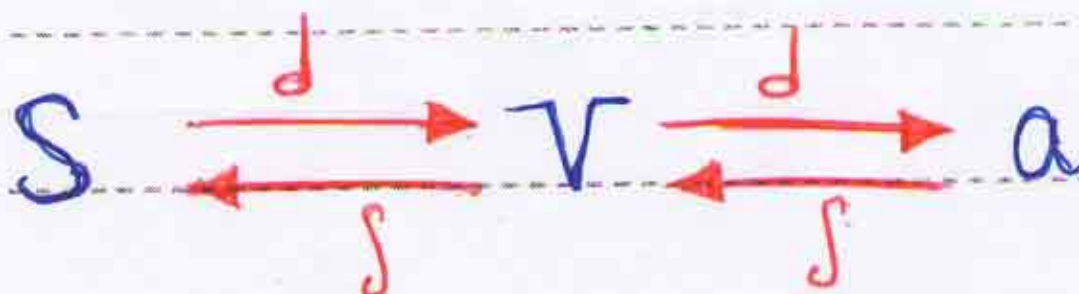
رابطه ③

$$s ds = \ddot{s} ds$$

①  $\rightarrow ds = v dt \xrightarrow{\int} \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v dt \Rightarrow s_2 - s_1 = \Delta s$   
 $\rightarrow \Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$  یعنی « انتگرال سرعت = جابجایی » نسبت به زمان

②  $\rightarrow dv = a dt \xrightarrow{\int} \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a dt = v_2 - v_1 = \Delta v$   
 $\rightarrow \Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a dt$  یعنی « انتگرال از شتاب = تغییرات سرعت » نسبت به زمان





$\int$	مشتق
$\int$	انتگرال

حرکت مستقیم الخط « چهار حالت وجود دارد :  $a$  :

الف) مسافت ثابت باشد  $(a=c)$  :

$$\textcircled{۱} \rightarrow dv = a dt \xrightarrow{\int} \int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{v = v_0 + at}$$

$$\textcircled{۲} \rightarrow v dv = a ds \xrightarrow{\int} \int_{v_0}^v v dv = a \int_{s_0}^s ds \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$$

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)}$$

$$\textcircled{۳} \rightarrow ds = v dt \xrightarrow{\int} \int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_0 + at) dt \Rightarrow$$

$$\boxed{s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0}$$

ب) مسافت تابعی از زمان باشد  $(a = f(t))$  :

$$\textcircled{۱} \rightarrow dv = a dt \xrightarrow{\int} \int_v^v dv = \int_0^t f(t) dt \Rightarrow v = v_0 + \int_0^t f(t) dt$$

$$\textcircled{۲} \rightarrow ds = v dt \xrightarrow{\int} \int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt \Rightarrow s = s_0 + \int_0^t v dt$$

$$s = s_0 + \int_0^t v dt$$

$$v = v_0 + \int_0^t f(t) dt$$



ج - شتاب تابعی از سرعت باشد  $(a = f(v))$

$$\textcircled{۲} \quad dv = a dt \xrightarrow{a=f(v)} \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt \Rightarrow t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)}$$

$\xrightarrow{t \text{ بر حسب } v}$   $\xrightarrow{v \text{ بر حسب } t}$

$$\textcircled{۱} \rightarrow ds = v dt \xrightarrow{s} \int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt \Rightarrow s = s_0 + \int_0^t v dt \xrightarrow{s \text{ بر حسب } t}$$

ج - شتاب تابعی از جابجایی باشد  $(a = f(s))$

$$\textcircled{۳} \rightarrow v dv = a ds \xrightarrow{a=f(s)} \int_{v_0}^v v dv = \int_{s_0}^s f(s) ds \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s f(s) ds$$

$v = g(s)$  سرعت تابعی از جابجایی

$$\textcircled{۱} \rightarrow ds = v dt \xrightarrow{v=g(s)} \int_{s_0}^s \frac{ds}{g(s)} = \int_0^t dt \Rightarrow t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{g(s)}$$

$\rightarrow$   $t$  بر حسب  $s$  و  $s$  و  $v$  بر حسب  $t$

**مثال** شتاب ذره‌ای با رابطه  $[a = 6(\frac{m}{s^2})]$  توصیف می‌شود. با این اطلاع

که در  $[t=0]$   $[x = -32 \text{ (m)}]$  و در  $[t=2 \text{ (s)}]$   $[v = -6(\frac{m}{s})]$

پسند، سرعت، مکان و مسافت کل پیموده شده را در  $[t=5 \text{ (s)}]$  تعیین کنید.

سرعت اولیه:  $v_0 = -18 (\frac{m}{s}) \rightarrow -6 = 6 \times 2 + v_0 \rightarrow v_0 = -18 (\frac{m}{s})$

$\rightarrow v(t=5 \text{ (s)}) = 6 \times 5 - 18 = 12 (\frac{m}{s})$  سرعت در  $t=5$



$$X(t=5) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + X_0 = \frac{1}{2} \times 6 \times 5^2 + (-18) \times 5 + X_0 (-32)$$

$$\rightarrow X = -47 \text{ m} \quad \text{مکان ذره}$$

$$v_2 at + v_0 \rightarrow v = 6t - 18 \xrightarrow{v=0} t = 3 \text{ (s)}$$

حالت حرکت، رفت و برگشتی داریم باید زمان برگشت ذره ( $v=0$ ) را بیابیم:

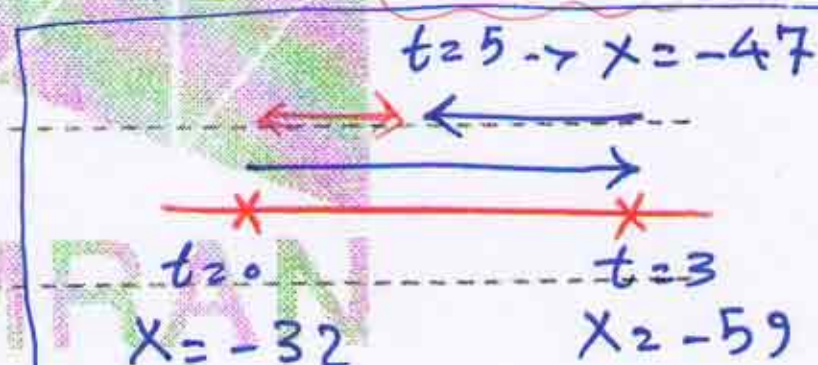
$$X_{\text{کل}} = |X(t=5) - X(t=3)| + |X(t=3) - X(t=0)|$$

مسافت کل

$$X(t=3) = \frac{1}{2} \times 6 \times 3^2 + (-18) \times 3 + (-32) = -59 \text{ (m)}$$

$$X_{\text{کل}} = |(-47) - (-59)| + |(-59) - (-32)|$$

$$= 12 + 27 = 39 \text{ (m)}$$



**مثال** موتور سیکلتی با شتاب اولیه  $\frac{m}{s^2}$  3 از حال سکون به راه می افتد در

شکل زیر، نمودار تغییرات شتاب موتور سیکلت را در مقابل جابجایی آن

نشان داده ایم، سرعت موتور سیکلت در  $S = 200 \text{ (m)}$  چقدر است؟ و مقدار

$\left(\frac{dv}{ds}\right)$  در این نقطه چقدر است؟

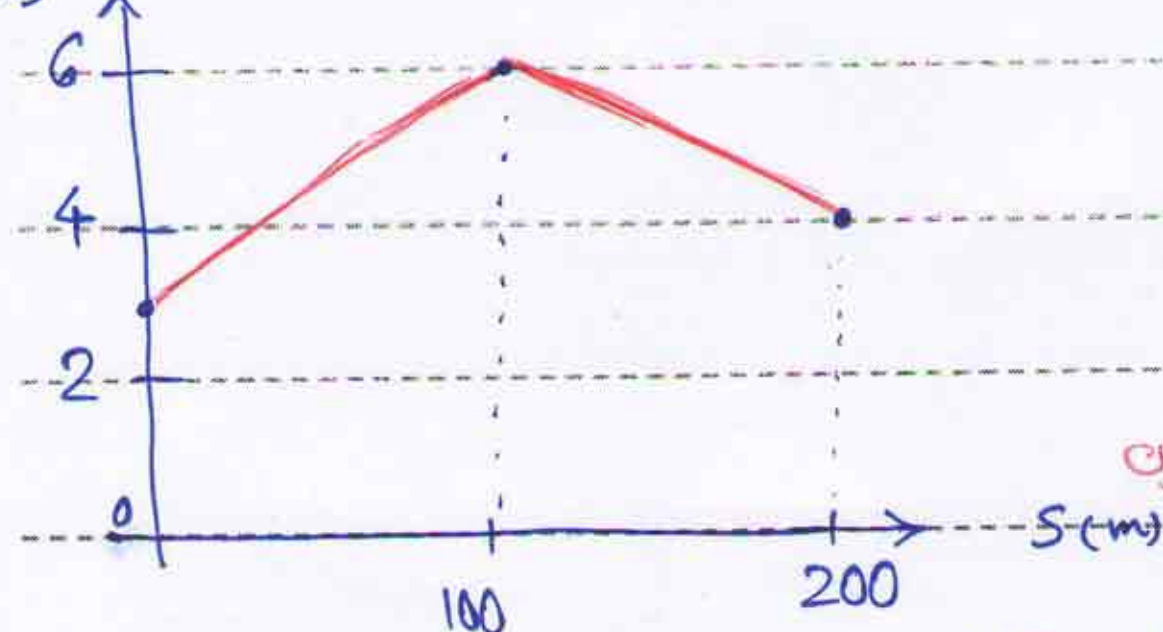


Subject :

Year: 19 Month: 12 Date: 9



$a (\frac{m}{s^2})$



طبق حالت چهارم:

$$v dv = a ds$$

$$\int_0^v v dv = \int_0^{200} a ds$$

از شروع از سکون

سطح زیر منحنی  $(a-s)$  برابر است با

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = \int_0^{200} a ds \rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{4+6}{2} \times 100 + \frac{6+4}{2} \times 100 = 950$$

$$\rightarrow v^2 = 2 \times 950 \rightarrow v = 43.59 (\frac{m}{s})$$

$$v dv = a ds \rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{a}{v} = \frac{4}{43.59} = 0.092$$

ABADANOMRAN

مثال: داده های تجربی نشان می دهد که سرعت جریان هوا در جلوی دریچه ای

بیک دستگاه هوا ساز با رابطه  $v = \frac{0.18 V_0}{x}$  توصیف می شود که

$V_0$  سرعت اولیه ی خروج هوا است، برای  $[V_0 = 3.6 (\frac{m}{s})]$ ؛ (الف) حساب

هوا در  $[x = 2 (m)]$  چقدر است؟ (ب) چه مدت طول می کشد تا هوا از

$[x = 1 (m)]$  به  $[x = 3 (m)]$  برسد؟

$$v = \frac{0.18 \times 3.6}{x} = \frac{0.648}{x}$$

حل

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{0.648}{x} \right) = \frac{-0.648 \times \frac{dx}{dt}}{x^2} = \frac{-0.648 v}{x^2}$$



Subject :

دینامیک

Year: 19 Month: 12 Date: 9



$$\rightarrow a = \frac{-0.648 \left( \frac{0.648}{x} \right)}{x^2} \Rightarrow$$

$$a = \frac{-0.42}{x^3}$$

$$\rightarrow a = \frac{x=2m}{a = -0.0525 \left( \frac{m}{s^2} \right)}$$

$$b) v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{0.648}{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x dx = 0.648 dt \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_1^3 x dx = \int_0^t 0.648 dt \rightarrow \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = 0.648 t$$

$$\rightarrow \left( \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0.648 t \rightarrow t = 6.17 \text{ (s)} \checkmark$$

**مثال** چتر بازی که با سرعت  $200 \frac{km}{h}$  در حال سقوط آزاد است چترش را در ارتفاع 600 متری باز می کند، سپس در پی شتاب کند کشته می ثابت با آفتاب ثابت  $50 \frac{km}{h}$  از 586 m تا 30 m پایین می آید، در اینجا با چترش مانور می دهد تا سرعت فرودش را کم کند و در نهایت با سرعت ناچیزی فرود می آید؛ الف) شتاب ب کشته کشته چقدر است؟ ب) پس از باز کردن چتر چه مدت طول می کشد تا چتر بازی به زمین برسد؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{تبدیل} \\ \frac{km}{h} \\ \frac{m}{s} \end{array} \right\} \frac{200}{3.6} = 55.56 \frac{m}{s}$$

$$\frac{50}{3.6} = 13.89 \frac{m}{s}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

$$(13.89)^2 - (55.56)^2 = 2 \times a \times (600 - 586)$$

$$\text{الف} \rightarrow a = -103.36 \frac{m}{s^2}$$

$$b) v = at_1 + v_0 \rightarrow 13.89 = -103.36 (t_1) + 55.56 \rightarrow t_1 = 0.403 \text{ s}$$

از 600 متر تا 586 متر شتاب ثابت بود



Subject :

دینا می

Year: ۸۹ Month: ۱۲ Date: ۷



$$\Delta x = v t_2 \rightarrow (586 - 30) = 13.89 \times t_2$$

$$\rightarrow t_2 = 40.029 \text{ (s)}$$

وقت به دست آمد

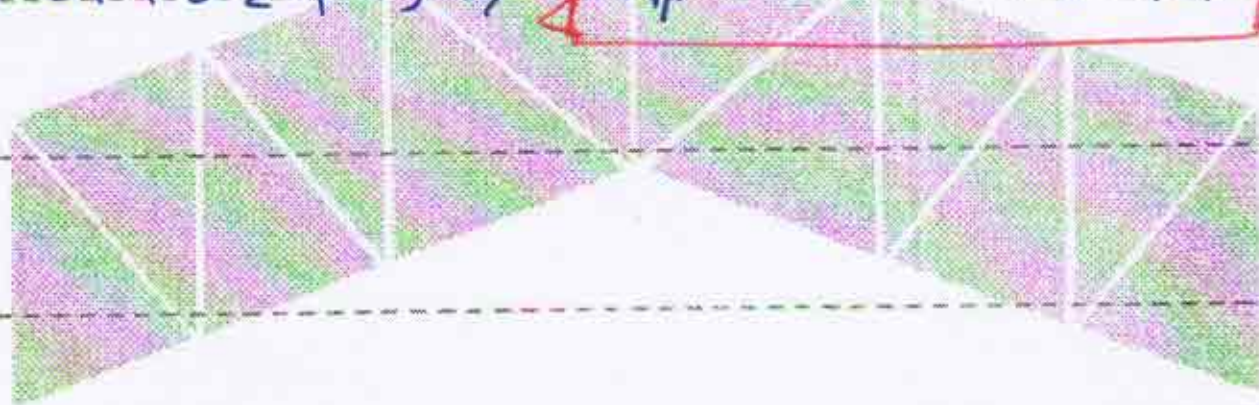
$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \rightarrow 0^2 - (13.89^2) = 2 \times a \times 30$$

$$\rightarrow a = -3.216 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \rightarrow v = at_3 + v_0$$

$$\rightarrow 0 = 13.89 + (-3.216) \times t_3 \rightarrow t_3 = 4.32 \text{ (s)}$$

$$\rightarrow t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 + t_3 \Rightarrow t_{\text{کل}} = 44.75 \text{ (s)}$$

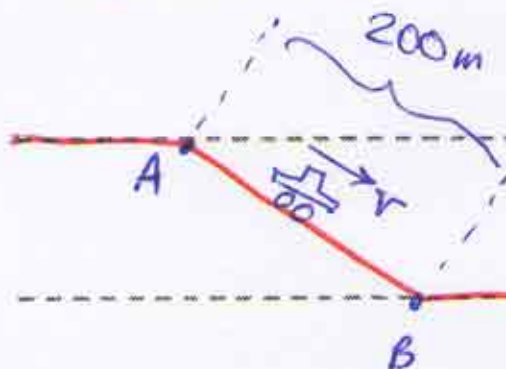
زمان کل



ABADANOMRAN



**مثال** اتومبیل شکل زیر از نقطه A در حال سقوط است، راننده رنده و طاج را رها می کند و اتومبیل با شتاب ثابت a از سطح سیمابرایین می آید و سرعت اتومبیل در نقطه B در پایین سطح سیمابرایین چقدر خواهد بود؟



$$a = 0.981 - 0.013 v^2$$

$$v dv = a ds \rightarrow \int_0^{v_B} \frac{v dv}{0.981 - 0.013 v^2} = \int_0^{200} ds$$

$$0.981 - 0.013 v^2 = u$$

$$-0.026 v dv = du$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{0.026} \int \frac{du}{u} = 200$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{0.026} \ln(0.981 - 0.013 v^2) \Big|_0^{v_B} = 200$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{0.026} [\ln(0.981 - 0.013 v_B^2) - \ln(0.981)] = 200$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \rightarrow \ln \left( \frac{0.981 - 0.013 v_B^2}{0.981} \right) = -5.2$$

$$\ln a = b \rightarrow a = e^b \rightarrow (0.981 - 0.013 v_B^2) = 0.981 \times e^{-5.2} \Rightarrow v_B = 8.66 \frac{m}{s}$$

**مثال** مخروطی که در شکل نشان داده شده است پس از سقوط با سرعت  $v_0$  به جسم

برخورد می کند و در آن مخروط می رود، شتاب مخروط پس از برخورد با رابطه زیر

$$a = g - cy^2$$

بیان می شود، در این رابطه یک مقدار ثابت مثبت c و y عمق نفوذ است

و ثابت c را بر حسب حداکثر عمق نفوذ  $y_m$  که قابل اندازه گیری است، بیابید.



$$v dv = a ds \Rightarrow \int_{v_0}^0 v dv = \int_0^{y_m} (g - cy^2) dy$$

$$\Rightarrow \left( \frac{v^2}{2} \right) \Big|_{v_0}^0 = \left( gy - \frac{cy^3}{3} \right) \Big|_0^{y_m}$$



$$\Rightarrow -\frac{V_0^2}{2} = g y_m - \frac{C g y_m^3}{3} \Rightarrow C = \frac{3}{y_m} \left( g y_m + \frac{V_0^2}{2} \right)$$

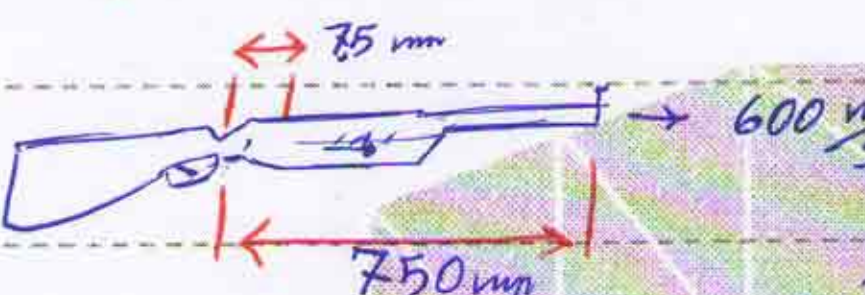
**مثال** فشار گاز نسبت فشنگ در تفنگ با تقریب خوبی به صورت خطی متناسب

است با عکس مسافتی که فشنگ در لوله تفنگ طی می کند، لذا نسبت فشنگ را می توان

به صورت  $a = \frac{k}{x}$  نوشت که برای  $k$  ثابت است و اگر فشنگ از حالت سکون

شروع به حرکت نموده و سرعت خروج آن از دهانه ی لوله به طول 750 میلی متر

برابر با  $600 \frac{m}{s}$  باشد، نسبت فشنگ را در نیمه ی طول لوله ( $x = 375 \text{ mm}$ ) تعیین کنید.

$$v dv = a ds \rightarrow \int_0^{600} v dv = \int_{0.0075}^{0.75} \frac{k}{x} dx$$


$$\Rightarrow \left( \frac{v^2}{2} \right) \Big|_0^{600} = k \times \ln x \Big|_{0.0075}^{0.75} \Rightarrow k = 39086.5$$

$$a = \frac{k}{x} = \frac{39086.5}{0.375} \Rightarrow a = 104230.7 \frac{m}{s^2}$$

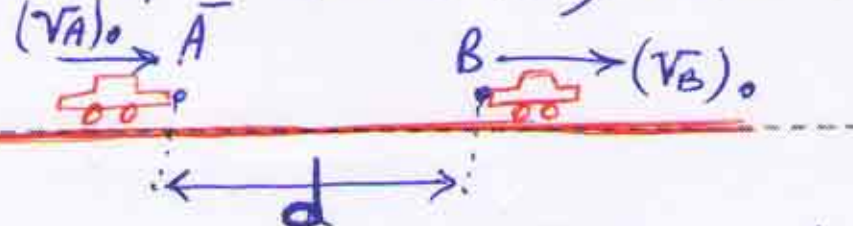
**مثال** مطابق شکل اتومبیل های A و B به اندازه ی  $d = 60 \text{ m}$  از هم فاصله دارند و

به ترتیب با سرعت های ثابت  $(V_A)_0 = 30 \frac{km}{h}$  و  $(V_B)_0 = 24 \frac{km}{h}$  روی

جاده ی یغ زده ای در حرکت اند، راننده ی A ترمز می کند تا با B برخورد نکند و اما

45 ثانیه بعد با آن برخورد می کند و **الف** ب باند شونده ی یکنواخت اتومبیل A

**ب** سرعت نسبی اتومبیل A نسبت به اتومبیل B در لحظه ی برخورد را حساب کنید؟

$$(\Delta x)_B = V_B \times t = \frac{24}{3.6} \times 45 = 300.15 \text{ (m)}$$


$$(\Delta x)_A = \frac{1}{2} a t^2 + (V_A)_0 t = \frac{1}{2} (a) (45^2) + \frac{30}{3.6} \times 45$$



$$\Rightarrow (\Delta x)_A = 1012.5 \times a + 374.85$$

$$\Delta x_A = \Delta x_B + d \rightarrow 1012.5 \times a + 374.85 = 300.15 + 60 \Rightarrow a = -0.0145 \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

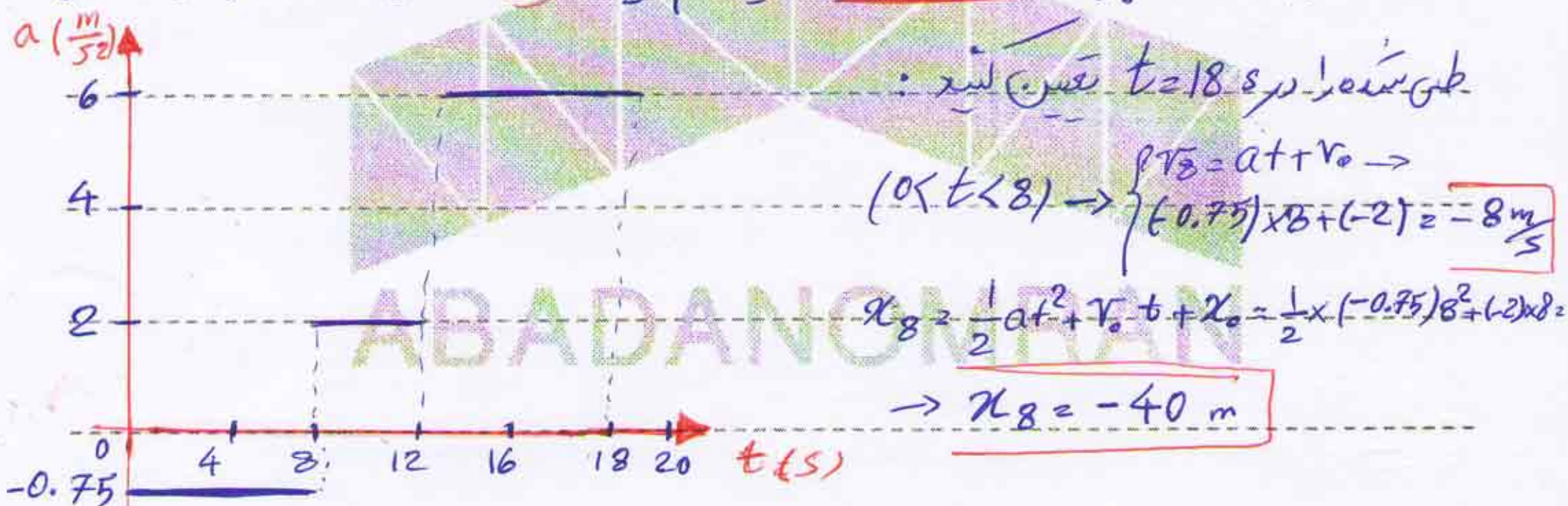
$$v_A = at + (v_A)_0 = (-0.0145) \times 45 + \frac{30}{3.6} = 7.68 \left(\frac{m}{s}\right)$$

$$\rightarrow v_B = \frac{24}{3.6} = 6.67 \left(\frac{m}{s}\right) \rightarrow \text{سرعت مثبت برعکس} = v_A - v_B = 1.01 \frac{m}{s}$$

مثال: خزه ای با شیبی که در شکل زیر نشان داده شده است روی خط راست حرکت می کند.

سرعت ذره در آغاز حرکت از مقدار برابر با  $v_0 = -2 \frac{m}{s}$  می باشد. (الف) مشخصه های

$(v-t)$  و  $(x-t)$  را برای  $0 < t < 18$  ثانیه رسم کنید. (ب) مکان و سرعت ذره و مسافت طی



$$(8 < t < 12) \rightarrow \begin{cases} v_{12} = at + v_8 \rightarrow 2 \times 4 + (-8) = 0 \\ x_{12} = \frac{1}{2}at^2 + v_8 t + x_8 = \frac{1}{2} \times 2 \times 4^2 + (-8) \times 4 + (-40) = -56 \text{ m} \end{cases}$$

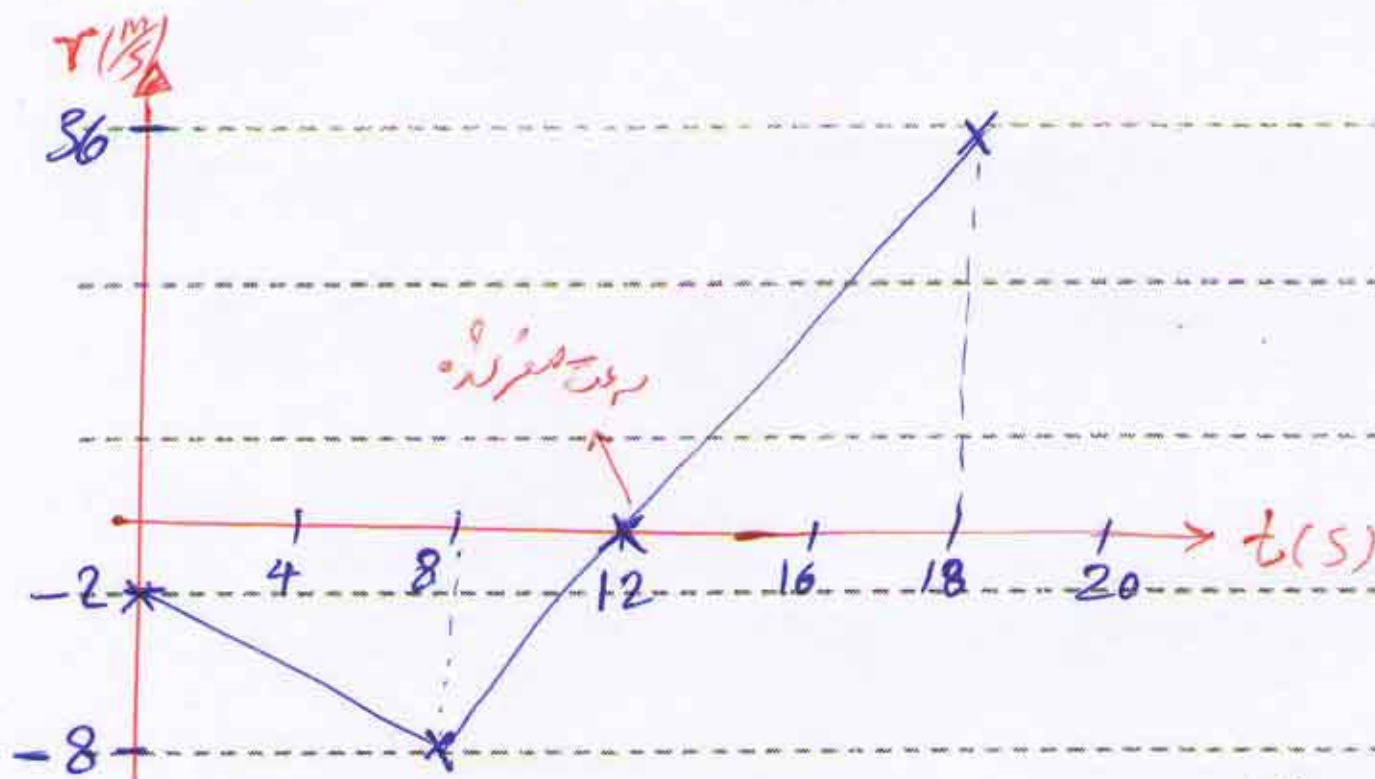
$$(12 < t < 18) \rightarrow \begin{cases} v_{18} = at + v_{12} = 6 \times 6 + 0 = 36 \frac{m}{s} \\ x_{18} = \frac{1}{2}at^2 + v_{12} t + x_{12} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6^2 + 0 \times 6 + (-56) = 52 \text{ m} \end{cases}$$



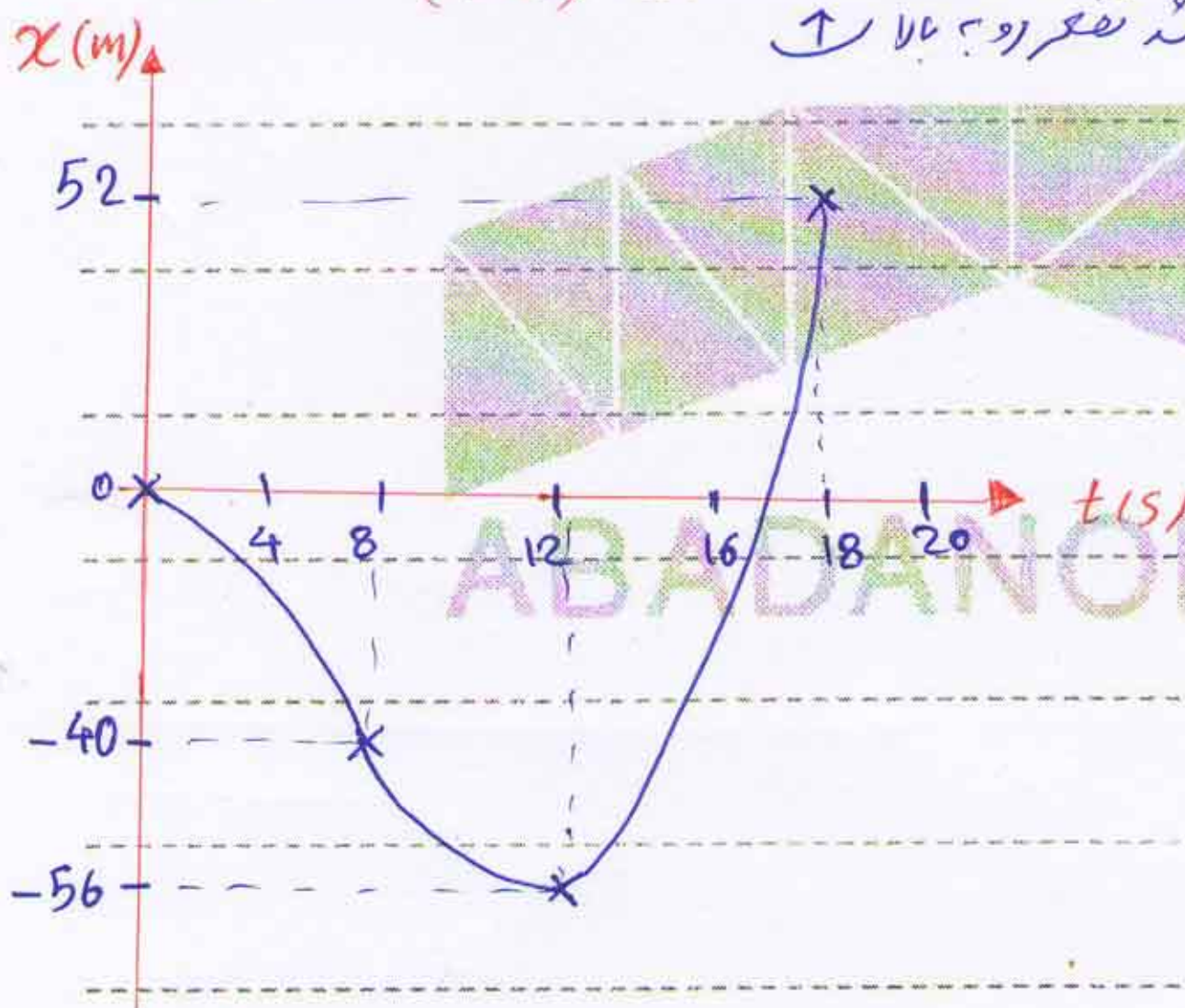
Subject :

دینامیک

Year: ۸۹ Month: ۱۲ Date: ۲۰



مسافتی که خودرو با سرعت  $v$  حرکت می کند  $\downarrow$  است  $(x-t)$   
 و مسافتی که خودرو با سرعت  $v$  حرکت می کند  $\uparrow$  است  $(x-t)$



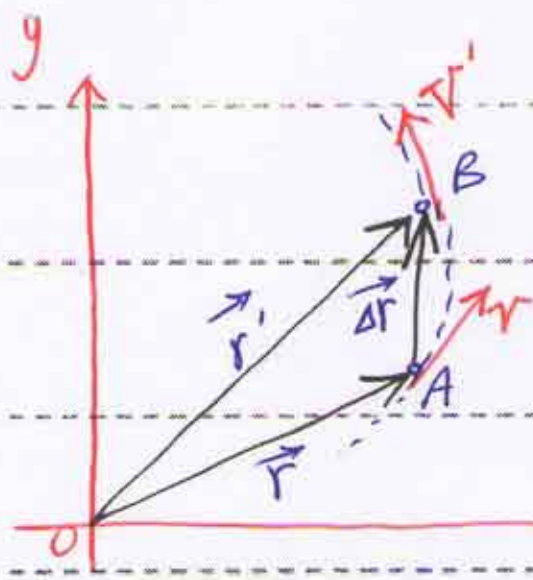
$$X_{\text{کل}} = X_{\text{افت}} + X_{\text{برگشت}} \rightarrow X_{\text{کل}} = |X_{12} - X_0| + |X_{18} - X_{12}|$$

$$\rightarrow X_{\text{کل}} = |(-56) - 0| + |52 - (-56)|$$

$$\rightarrow X_{\text{کل}} = 164 \text{ (m)}$$



\* حرکت منحنی الخط در صفحه :



$$\vec{r}' = \vec{r} + \Delta \vec{r}$$

$$\vec{V}_{ave} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{سرعت متوسط}$$

سرعت لحظی

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \rightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$$



$$\vec{V}' = \vec{V} + \Delta \vec{V}$$

$$\vec{a}_{ave} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$$

\* نکته: در حرکت منحنی الخط جهت سرعت همواره به سمت حرکت

است و جهت شتاب همواره به داخل منحنی است.

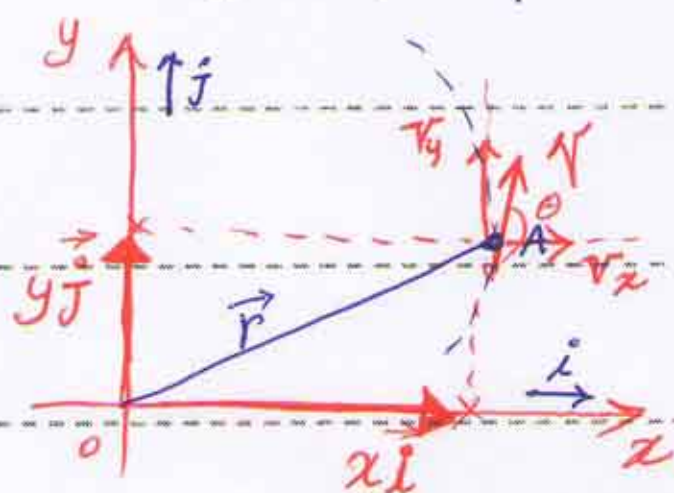
\* سیستم های مختصات مورد استفاده

در حرکت منحنی الخط :

(۱) دستگاه مختصات متعامد (x-y)

(۲) دستگاه مختصات عمودی-ماسی (r-t)

(۳) دستگاه مختصات قطبی (r-θ)



دستگاه مختصات متعامد



Subject :

دینامیک

Year: 90 Month: 1 Date: 19



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{array} \right.$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

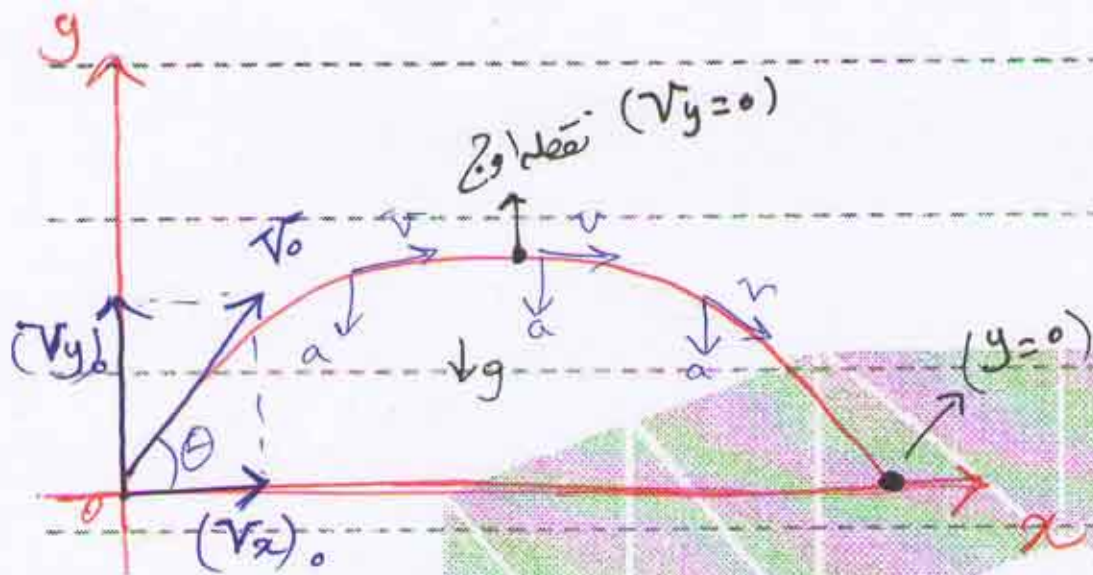
$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \end{array} \right.$$

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

\* حرکت پرتابی



$$(v_x)_0 = v_0 \cos \theta$$

$$(v_y)_0 = v_0 \sin \theta$$

$$v = at + v_0$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$$

$$v_x = (v_x)_0, v_y = -gt + (v_y)_0$$

$$x = (v_x)_0 t, y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_y)_0 t$$

$$v_y^2 - (v_y)_0^2 = -2gy$$

مثال: تفنگی را مطابق شکل به طرف نقطه A نشانه گیری و شلیک می کنند

گلوله به نقطه B برخورد می کند، فاصله ی قائم بین این دو نقطه (b) را بدست

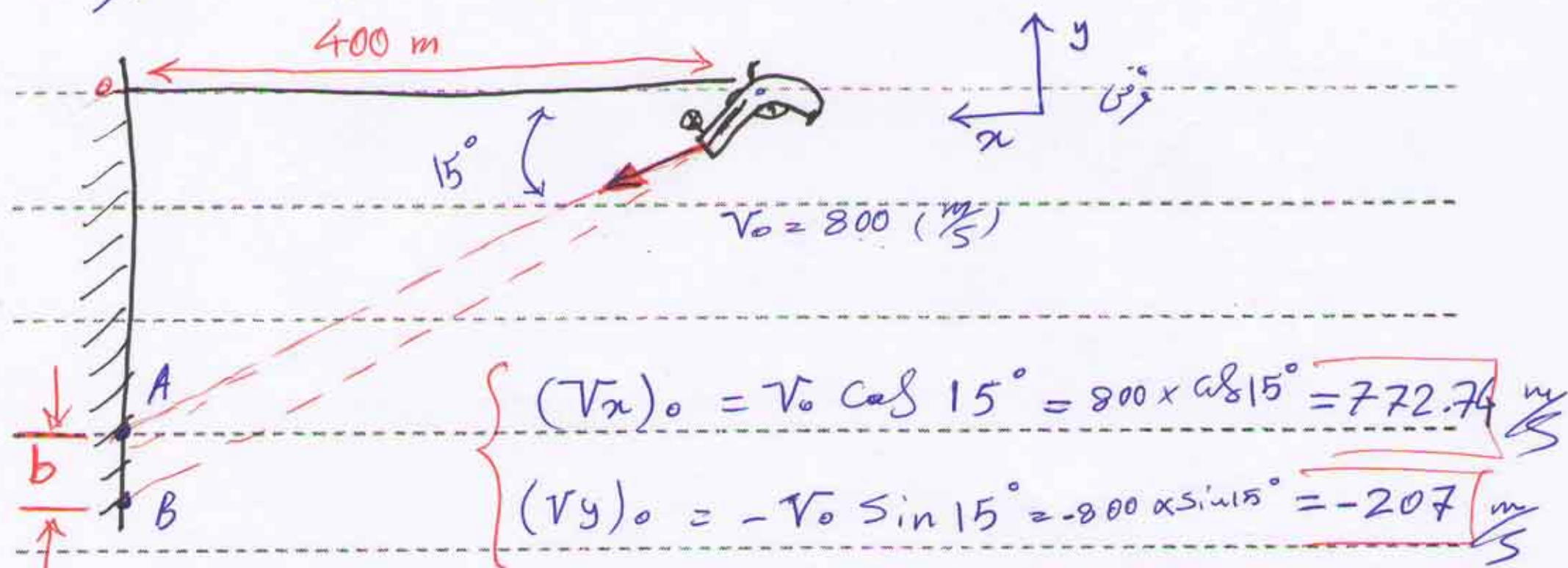
آورید، سرعت شلیک طولی  $\frac{800}{5}$  است.



Subject :

ریاضیات

Year: 90 Month: 1 Date: 19



$$x = (v_x)_0 t \Rightarrow 400 = 772.74 \times t \Rightarrow t = 0.518 \text{ (s)}$$

$$y = OB = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_y)_0 t = -\frac{1}{2} (9.81) (0.518)^2 + (-207.06) \times 0.518$$

$$\rightarrow OB = -108.57 \text{ m}$$

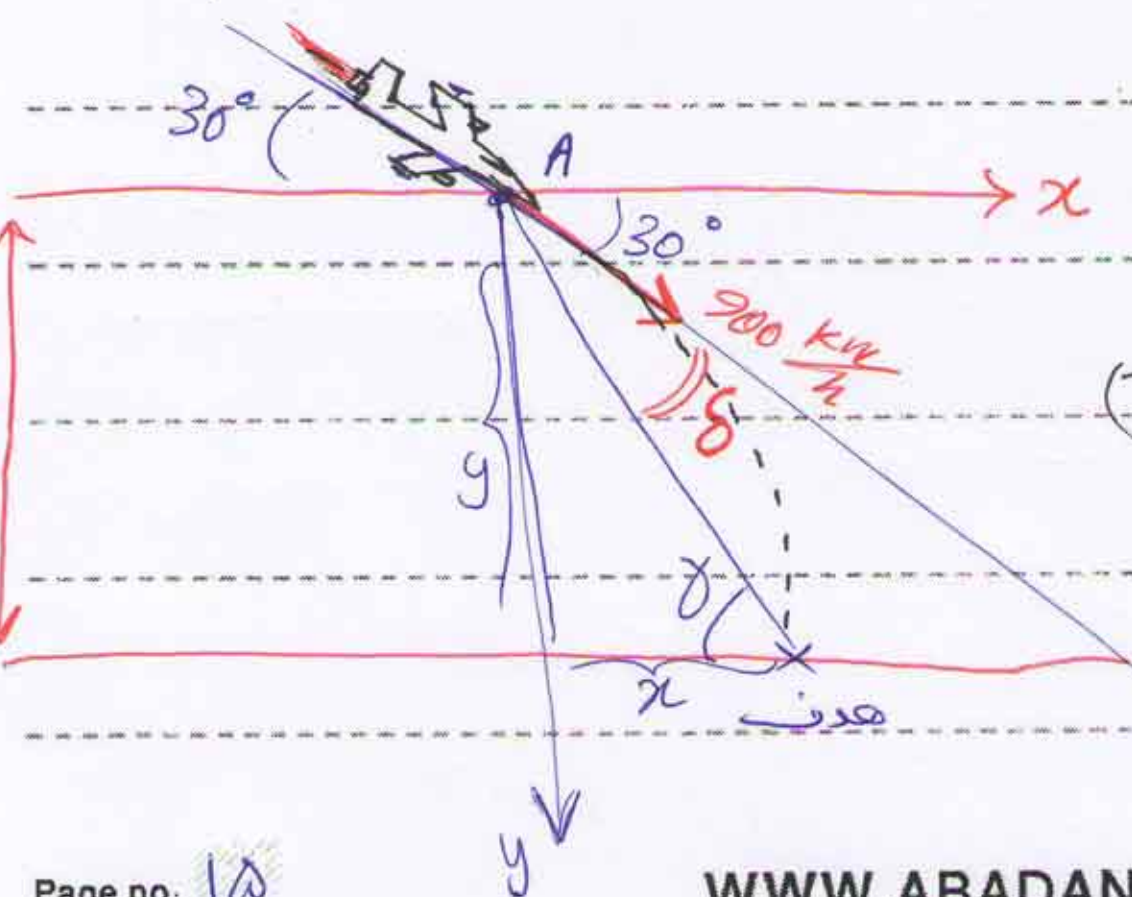
$$\tan 15^\circ = \frac{OA}{400} \rightarrow OA = 400 \times \tan 15^\circ \rightarrow OA = 107.18 \text{ (m)}$$

$$b = OB - OA = 108.57 - 107.18 = 1.39 \text{ (m)}$$

**مثال** هواپیما با سرعت 900 کیلومتر بر ساعت و با زاویه  $\theta = 30^\circ$  شیب جرزده

و می خواهد هدف را بمباران کند، زاویه ی خط دید و هدف فرضی (زاویه  $\delta$ )

چقدر باید باشد؟



$$v_0 = 900 = \frac{900}{3.6} = 250 \frac{m}{s}$$

$$(v_x)_0 = v_0 \cos 30^\circ = 216.5 \frac{m}{s}$$

$$(v_y)_0 = v_0 \sin 30^\circ = 125 \frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g = 9.81 \end{cases}$$



$$y = \frac{1}{2} g t^2 + (V_y)_0 t \rightarrow 2000 = \frac{1}{2} (9.81) \times t^2 + 125 t$$

$$\rightarrow 9.81 \times t^2 + 250 t - 4000 = 0 \rightarrow t = \frac{-250 \pm \sqrt{(250)^2 - 4 \times (9.81) \times (-4000)}}{2 \times 9.81}$$

$$\rightarrow t = 11.13 \text{ (s)}$$

$$x = (V_x)_0 t = 216.5 \times 11.13 = 2410 \text{ (m)}$$

$$\tan(\delta) = \frac{y}{x} = \frac{2000}{2410} \rightarrow \delta = 39.7^\circ$$

$$\delta = \delta + 30 \rightarrow \delta = \delta - 30 = 39.7^\circ - 30 \rightarrow \delta = 9.7^\circ$$

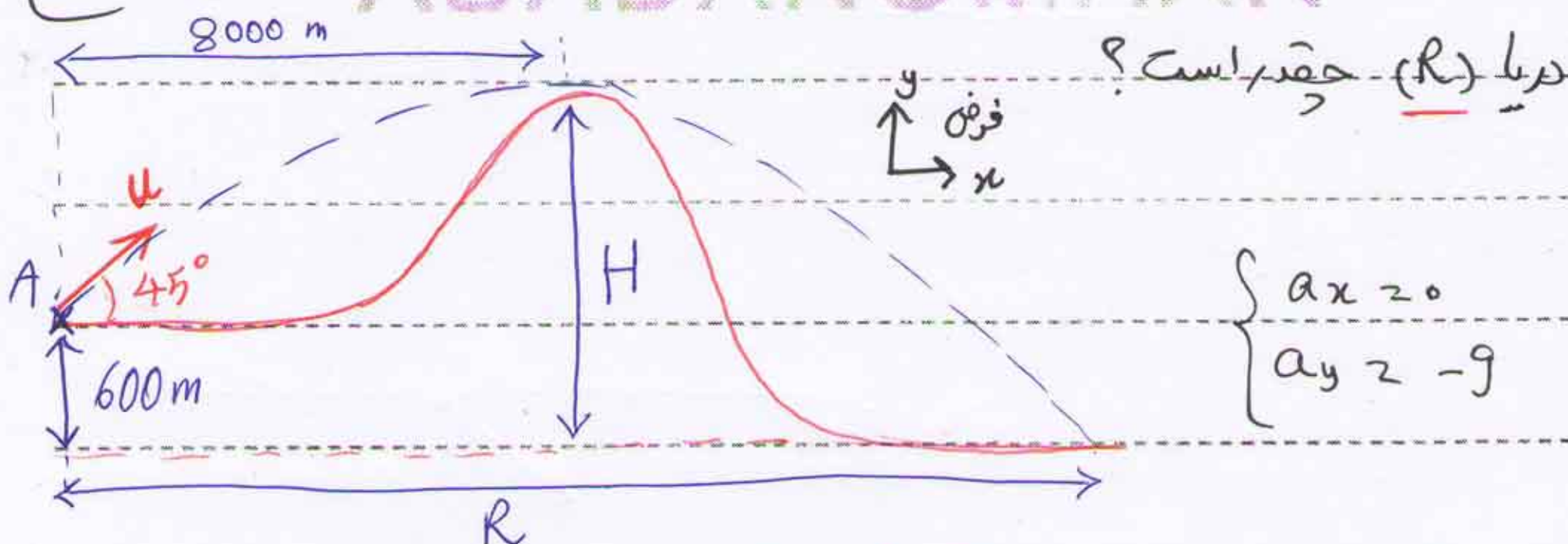
**مثال** یک توپ تپاچی دوربرد در نقطه A که ارتفاع آن از سطح دریا 600

متر است، تحت زاویه  $45^\circ$  با افق شانه گیری می شود و طولی توپ در نقطه

اوج مسیر خود، درست از روی قلعه ی کوه می گذرد و سرعت اولیه ی طولی برابر است

آورید؟ ارتفاع قلعه ی کوه از سطح دریا (H) چقدر است؟ برد طولی تا برخورد به سطح

دریا (R) چقدر است؟



$$\begin{cases} (V_x)_0 = u_0 \cos 45^\circ \\ (V_y)_0 = u_0 \sin 45^\circ \end{cases}$$



$$(در نقطه اوج) \quad v_y = 0 \rightarrow -gt + (v_y)_0 = 0$$

$$\rightarrow (-9.81 \times t + u \sin 45^\circ = 0) \quad (1)$$

$$x = (v_x)_0 t \xrightarrow[\text{اوج}]{\text{در نقطه اوج}} (8000 = u \cos 45^\circ \times t) \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow t = \frac{u \sin 45^\circ}{9.81} \xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{(2)}$$

$$\rightarrow 8000 = u \cos 45^\circ \times \frac{u \sin 45^\circ}{9.81} \Rightarrow \frac{u^2}{2 \times 9.81} = 8000$$

$$\rightarrow u = 396.18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_y^2 - (v_y)_0^2 = -2gy \xrightarrow[\substack{v_y = 0 \\ y = H - 600}]{\text{در نقطه اوج}} 0 - (u \sin 45^\circ)^2 = -2 \times 9.81 \times (H - 600)$$

$$\Rightarrow H = 4600 \text{ (m)}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_y)_0 t \xrightarrow[\substack{\text{در نقطه انتهای} \\ y = -600}]{\text{در نقطه اوج}} -600 = -\frac{1}{2} \times 9.81 \times t^2 + (u \sin 45^\circ) \times t \rightarrow 4.905 t^2 - 280.14 t - 600 = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{280.14 \pm 300.42}{9.81} \Rightarrow t = 59.18 \text{ s}$$

$$R = x = (v_x)_0 t = u \cos 45^\circ \times t \rightarrow R = 396.18 \times \cos 45^\circ \times 59.18$$

$$\Rightarrow R = 16578.8 \text{ (m)}$$



**مثال** داخل لیوانی به بلندی اش  $140 \text{ mm}$  و قطر داخلی اش  $66 \text{ mm}$  است و از

ارتفاع  $h$  شیر می ریزیم و اگر سرعت اولیه شیر  $1.2 \text{ m/s}$  باشد و زاویه اش نسبت به افق  $40^\circ$  باشد گستره شیر  $h$  چقدر باشد تا شیر بیرون نریزد



$$V_0 = 1.2 \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} (V_x)_0 = 1.2 \times \cos 40^\circ = 0.919 \text{ m/s} \\ (V_y)_0 = 1.2 \times \sin 40^\circ = 0.771 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_y)_0 t \Rightarrow (-h + 0.14) = -\frac{1}{2} \times 9.81 \times t^2 + (-0.771) \times t \quad (1)$$

$$x = (V_x)_0 t \Rightarrow 0.08 = 0.919 \times t_1 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0.087 \text{ (s)} \\ t_2 = 0.159 \text{ (s)} \end{cases}$$

$$h \xrightarrow{t_1 \rightarrow (1)} h_1 = 224.2 \text{ (mm)}$$

$$h \xrightarrow{t_2 \rightarrow (1)} h_2 = 386.6 \text{ (mm)}$$

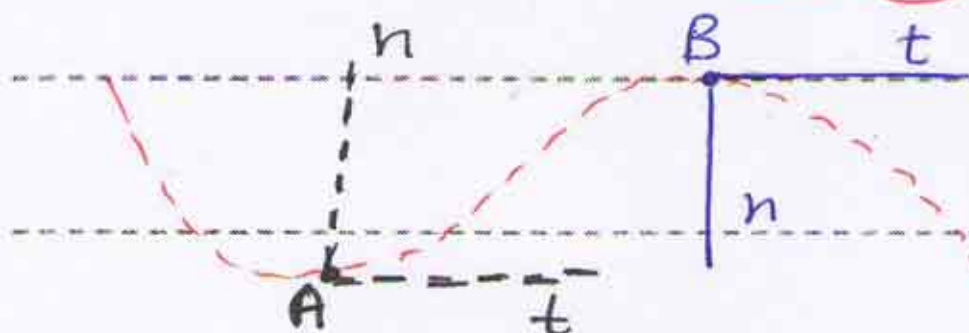
**نکته** طولانی با سرعت اولیه  $V_0$  نه چندان زیاد و در داخل یک ماده به مقاومتش در مقابل حرکت متناسب با سرعت طولی است بصورت افقی شلیک می شود و سباب

طولی برابر  $a = -KV$  می باشد و رابطه ای پیدا کنید که مسافت پیموده شده  $S$  را قبل

از توقف بر حسب  $V_0$  و  $K$  بیان کرده و هم چنین زمان لازم  $t$  برای رسیدن به نصف سرعت اولیه را بیابید؟

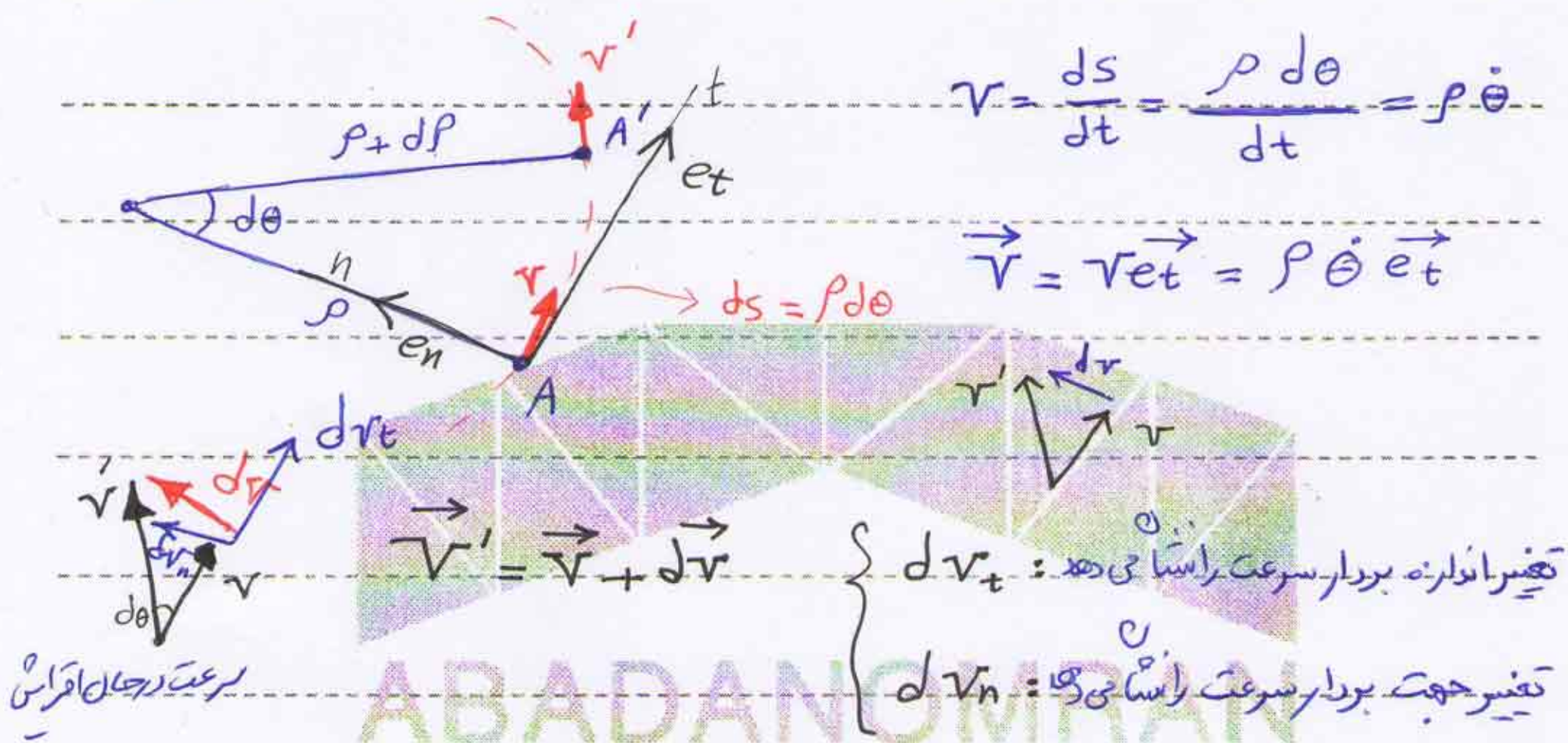


دستگاه مختصات عمودی - مماسی (n-t) :



$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\rho d\theta}{dt} = \rho \dot{\theta}$$

$$\vec{v} = v \vec{e}_t = \rho \dot{\theta} \vec{e}_t$$



$$\begin{cases} dv_t = d(v) = d(\rho \dot{\theta}) \\ dv_n = v d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \dot{\theta}) \\ = \dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} \\ a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v d\theta}{dt} = v \dot{\theta} = \rho \dot{\theta}^2 \\ = \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$



Subject :

دینامیک

Year: ۹۰ Month: ۱ Date: ۲۶

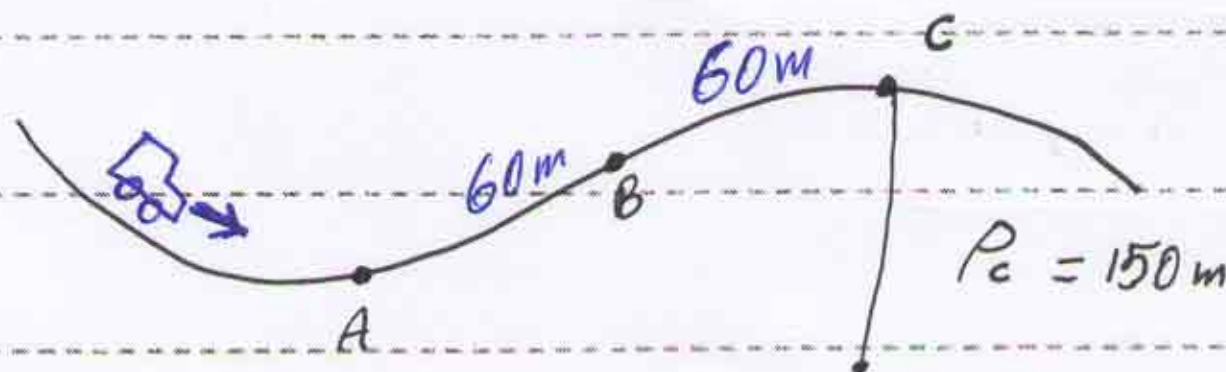
$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

حرکت دایره‌ای

$$(P=r) \rightarrow \begin{cases} v = r\dot{\theta} \\ a_t = \dot{v} = r\ddot{\theta} \\ a_n = v\dot{\theta} = r\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

سرعت زاویه‌ای  $(\dot{\theta} = \omega)$   
 شتاب زاویه‌ای  $(\ddot{\theta} = \alpha)$

**مثال** راننده‌ای با توجه به سیستم و بلندی جاده پدال ترمز را به نحوی فشار می‌دهد که سرعت اتومبیل با شتاب منفی ثابتی کاهش می‌یابد، سرعت اتومبیل در پایین برای هر دو نقطه‌ای  $A$  برابر ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت و در بالای سر بالایی هر نقطه‌ای  $C$  برابر ۵۰ کیلومتر بر ساعت است. حاصل این دو نقطه در طول جاده ۱۲۰ متر است. کل شتابی که سرنشینان اتومبیل در نقطه‌ای  $A$  حس می‌کنند برابر ۳ متر بر مجذور ثانیه و شعاع انحنای برآمدگی در نقطه  $C$  برابر ۱۵۰ متر است، (الف) شعاع انحنای مسیر در نقطه‌ای  $A$  چقدر است، (ب) شتاب اتومبیل در نقطه‌ای  $B$  چقدر است؟ (ج) شتاب کل اتومبیل در نقطه‌ای  $C$  چقدر است؟





Subject :

دینامیک

Year:

90

Month:

1

Date:

۲۴



$$\begin{cases} V_A = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{100}{3.6} = 27.78 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \\ V_C = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{50}{3.6} = 13.89 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \end{cases}$$

$$V_C^2 - V_A^2 = 2 \times a_t \times \Delta x_{AC} \Rightarrow (13.89)^2 - (27.78)^2 = 2 \times a_t \times 120$$

$$\Rightarrow a_t = -2.41 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \quad \text{منهای مثبت در کل نیست}$$

A نقطه:

$$\begin{cases} V_A = 27.78 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ a_t = -2.41 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a_{\phi} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

$$(a_{\phi})^2 = (a_t)^2 + (a_n)^2 \Rightarrow (a_n)^2 = (a_{\phi})^2 - (a_t)^2$$

$$= (3)^2 - (-2.41)^2 \Rightarrow a_n = 1.79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho_A} \Rightarrow \rho_A = \frac{(27.78)^2}{1.79} = 431.13 \text{ (m)}$$

B نقطه:

$$\begin{cases} a_t = -2.41 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ \rho_B = \infty \Rightarrow a_n = \frac{V^2}{\rho} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow a_{\phi} = a_t = -2.41 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$$

C نقطه:

$$\begin{cases} a_t = -2.41 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \\ \rho_C = 150 \text{ (m)} \\ V = 13.89 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \end{cases}$$



$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(13.89)^2}{150} = 1.29 \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

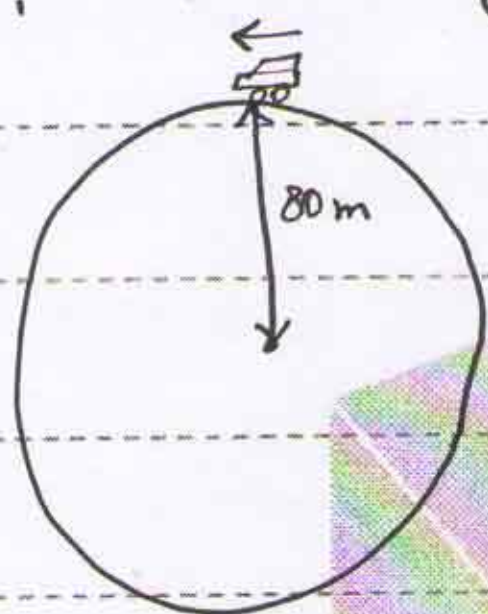
$$a_k = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2} = \sqrt{(-2.41)^2 + (1.29)^2} = 2.73 \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

**مثال** اتومبیلی روی مسیر افقی که به شکل دایره ای به شعاع  $80\text{ m}$  است، از حال

سکون به راه من افتد، سرعت اتومبیل با آهنگ ثابتی افزایش می یابد و در طی مدت

$10\text{ s}$  به  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  می رسد،  $8$  ثانیه بعد از شروع حرکت مقدار شتاب

کل اتومبیل چقدر است؟



$$v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{100}{3.6} = 27.78 \left( \frac{m}{s} \right)$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 27.78 = a \times 10 \Rightarrow$$

$$a = 2.78 \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2.78 \times 8 = 22.24 \left( \frac{m}{s} \right)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(22.24)^2}{80} = 6.18 \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

$$a_t = 2.78 \left( \frac{m}{s^2} \right) \rightarrow a_k = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2} = \sqrt{(2.78)^2 + (6.18)^2}$$

$$\Rightarrow a_k = 6.77 \left( \frac{m}{s^2} \right)$$

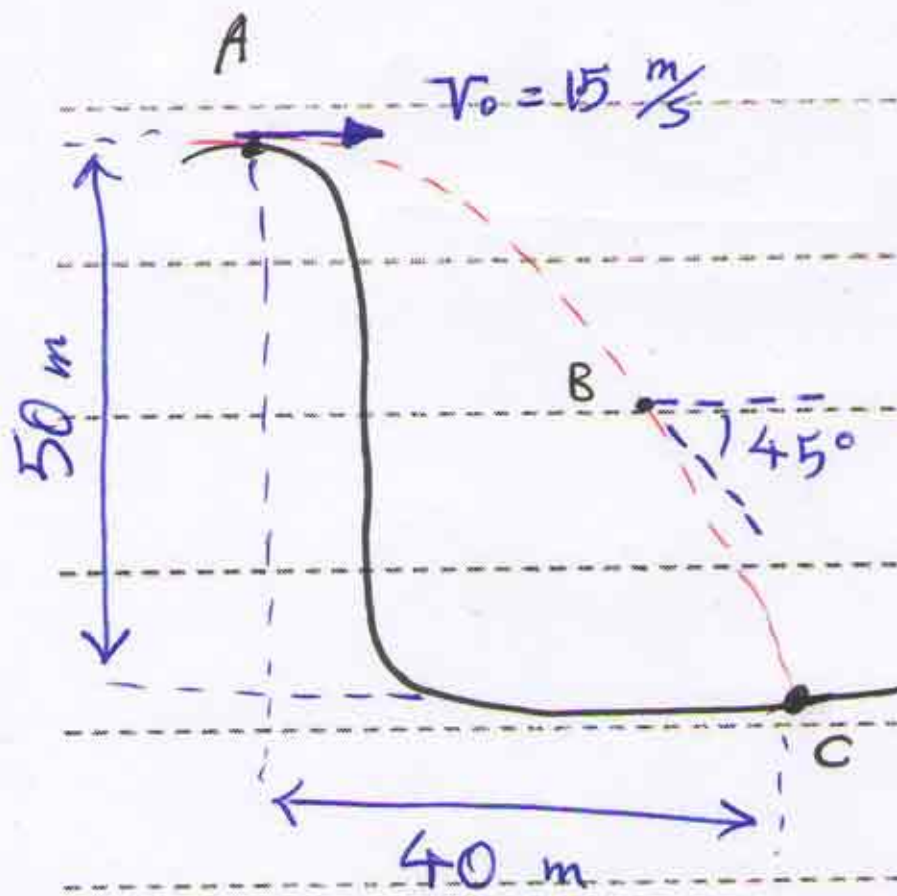
**مثال** گلوله ای از نقطه  $A$  واقع در بالای صخره ای به ارتفاع  $50\text{ m}$  مطابق شکل با

سرعت  $15 \left( \frac{m}{s} \right)$  به طور افقی پرتاب می شود و در نقطه  $C$  فرود می آید،

گلوله بر اثر باد شدیدی که به طرف چپ می وزد دچار شتاب افقی ثابتی در خلاف

جهت  $x$  می شود، شعاع انحنای مسیر گلوله را در نقطه  $B$  بدست آورید و در این نقطه





زاویه امتداد مسیر با افق  $45^\circ$  است ؟

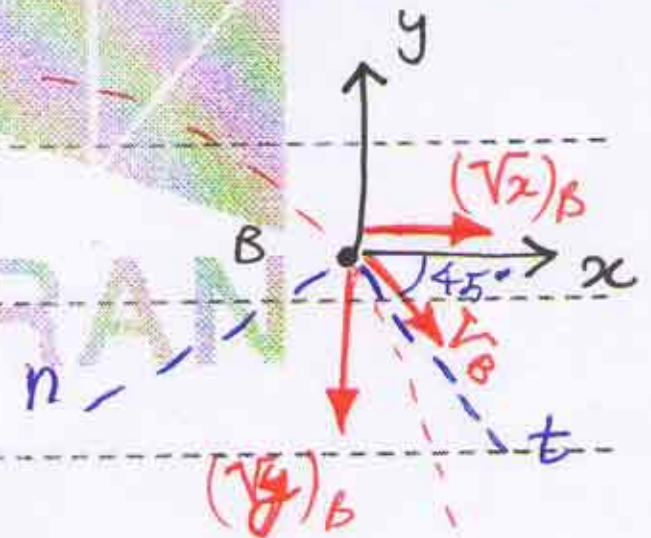
با  $\rightarrow$

$$x = \frac{1}{2} a_x t_c^2 + (v_x)_0 t$$

$$y = -\frac{1}{2} g t_c^2 + (v_y)_0 t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 40 = \frac{1}{2} a_x \times t_c^2 + 15 \times t_c \\ -50 = -\frac{1}{2} \times 9.81 \times t_c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_c = 3.19 (s) \\ a_x = -1.54 \left(\frac{m}{s^2}\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} (v_x)_B = a_x t_B + (v_x)_0 = -1.54 \times t_B + 15 \\ (v_y)_B = -g t_B + (v_y)_0 = -9.81 \times t_B \end{cases}$$

$$(v_y)_B = -g t_B + (v_y)_0 = -9.81 \times t_B$$

$$\tan 45^\circ = \frac{-(v_y)_B}{(v_x)_B} = 1 \Rightarrow \boxed{(v_y)_B = -(v_x)_B}$$

$$\Rightarrow -9.81 \times t_B = -(-1.54 \times t_B + 15) \Rightarrow \boxed{t_B = 1.32 (s)}$$

$$\rightarrow \boxed{(v_x)_B = 12.97 \frac{m}{s}} \quad \text{و} \quad \boxed{(v_y)_B = 12.95 \frac{m}{s}}$$



Subject :

دینامیک

Year:

90

Month:

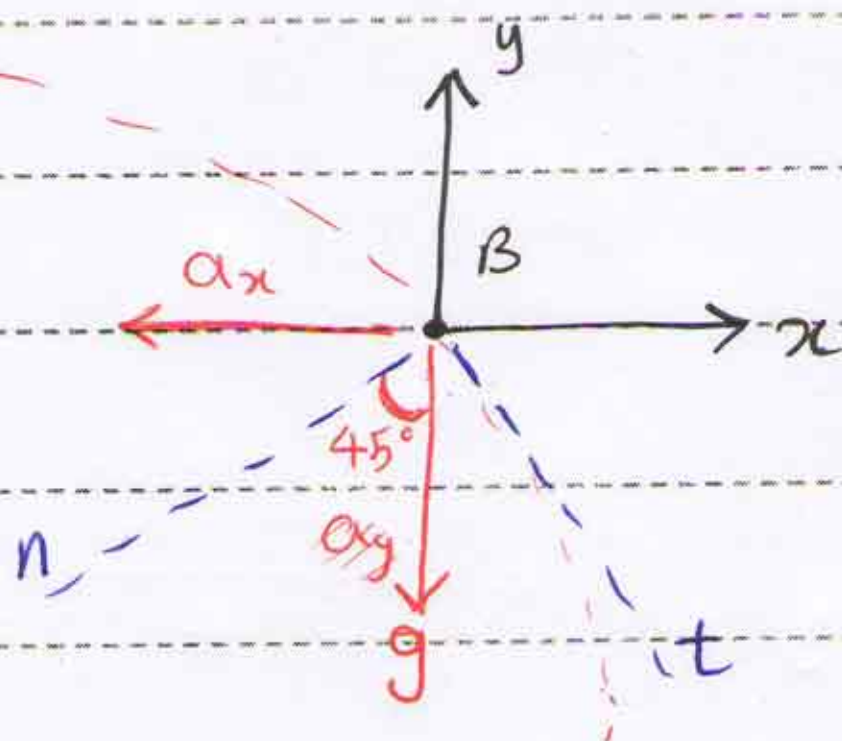
1

Date:

۲۷



$$V_B = \sqrt{(V_x)_B + (V_y)_B} = \sqrt{2 \times (12.95)^2} = 18.33 \frac{m}{s}$$

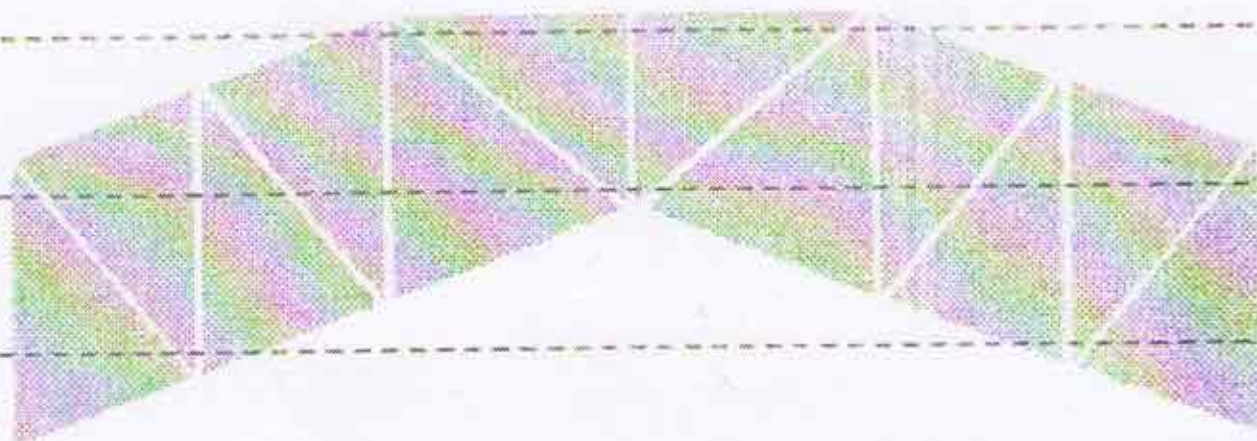


$$a_n = g \cos 45^\circ + a_x \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow a_n = 8.03 \frac{m}{s^2}$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow 8.03 = \frac{(18.33)^2}{\rho}$$

$$\Rightarrow \rho = 41.84 \text{ cm}$$



ABADANOMRAN



Subject :

دینامیک

Year: 90 Month: 2 Date: 2



دستگاه مختصات قطبی  $(r, \theta)$  :

$$\vec{r} = r \vec{e}_r, \quad \vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$$

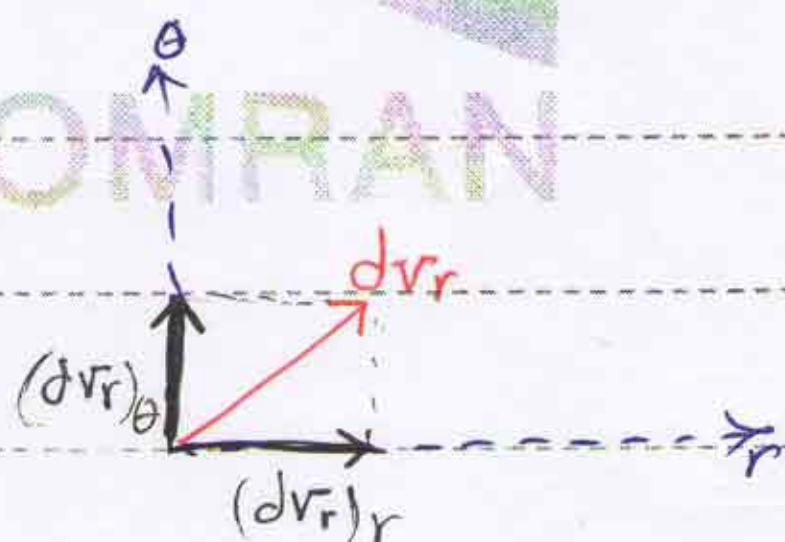
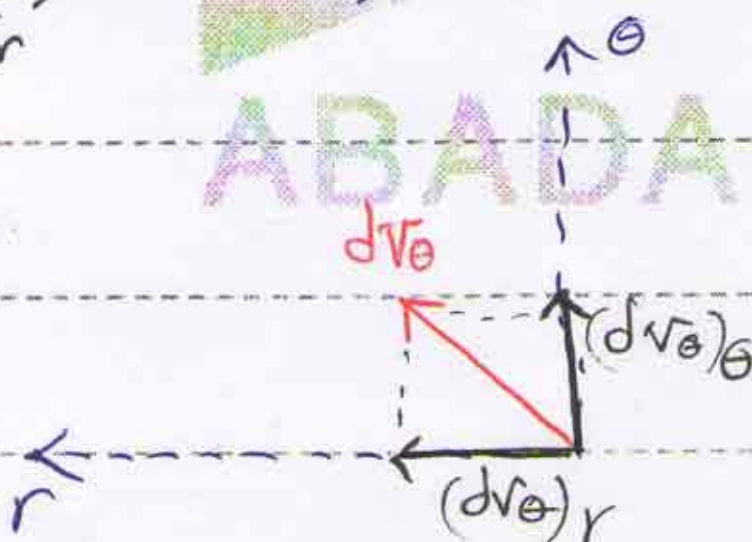
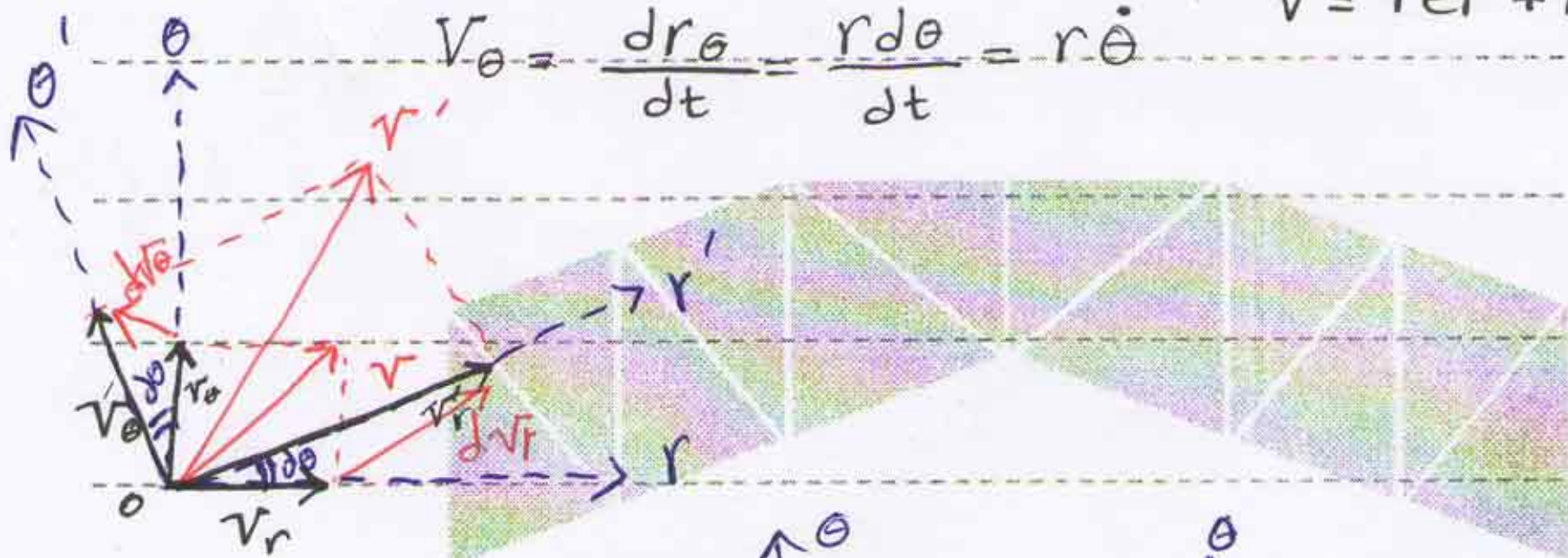
$$dr_r = |\vec{r}'| - |\vec{r}| = d|\vec{r}| = dr$$

$$dr_\theta = r d\theta$$

$$V_r = \frac{dr_r}{dt} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$\vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$V_\theta = \frac{dr_\theta}{dt} = \frac{r d\theta}{dt} = r \dot{\theta}$$



$$\begin{cases} (dr_r)_r = d|\vec{V}_r| = dr \rightarrow r \\ (dr_r)_\theta = V_r d\theta = \dot{r} d\theta \uparrow \theta \\ (dr_\theta)_\theta = d|\vec{V}_\theta| = d(r\dot{\theta}) \uparrow \theta \\ (dr_\theta)_r = V_\theta d\theta = r\dot{\theta} d\theta \leftarrow r \end{cases}$$



Subject :

دینامیک

Year: ۹ • Month: ۲ Date: ۲



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{(dr)_r}{dt} &= \frac{dr}{dt} = \dot{r} \rightarrow r \\ \frac{(dr)_\theta}{dt} &= \frac{r d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \uparrow \theta \end{aligned} \right.$$

$$\frac{(dr)_\theta}{dt} = \frac{r d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \uparrow \theta$$

$$\frac{(d\dot{r})_\theta}{dt} = \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \uparrow \theta$$

$$\frac{(d\dot{\theta})_r}{dt} = \frac{r\ddot{\theta}}{dt} = r\ddot{\theta} \leftarrow r$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned} \right.$$

\* برای حرکت دایره‌ای (r ثابت):

$$\left\{ \begin{aligned} r &= 0 \\ \dot{r} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_r &= -r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned} \right.$$

مثال: در شکل زیر هواپیما با سرعت افقی ثابت پرواز می‌کند و از بالای سر ناظر نقطه O می‌گذرد. برای هر یک از موقعیت‌های A، B و C علامت کمیت‌های

$r, \dot{r}, \ddot{r}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$  را تعیین کنید.



در هر لحظه حالت مثبت هستند.

$$\left\{ \begin{aligned} a_r &= 0 \\ a_\theta &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 \quad (1) \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} \quad (2) \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned} \right.$$



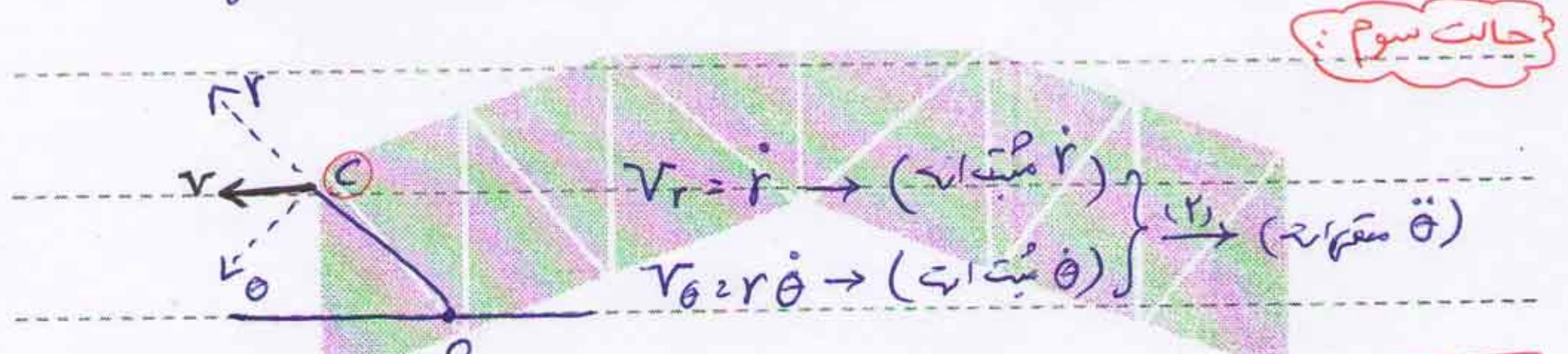
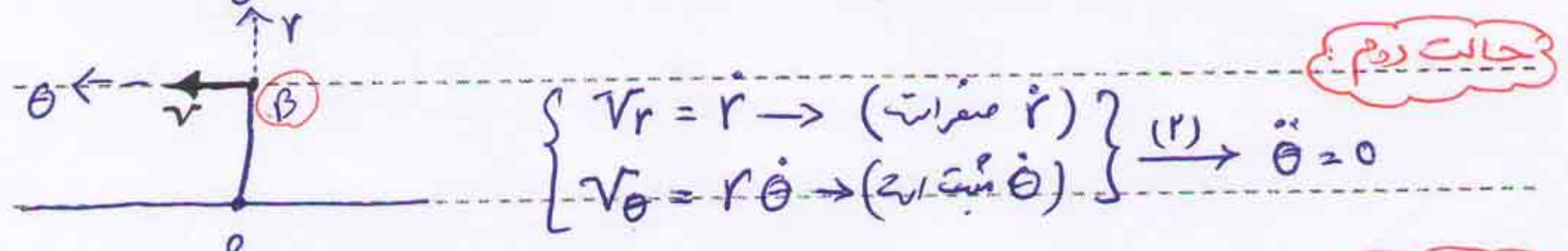
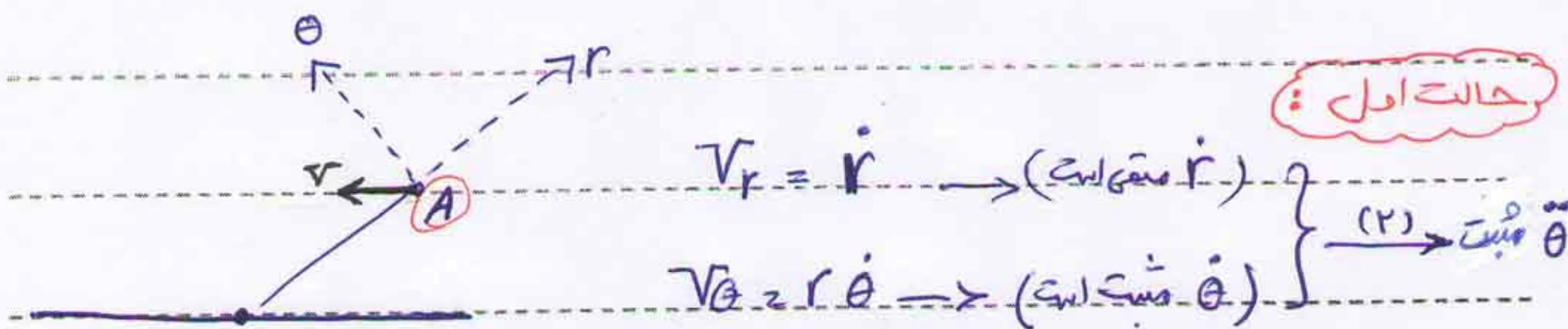
Subject :

دینامیک

Year: ۹۰ Month: ۲ Date: ۲

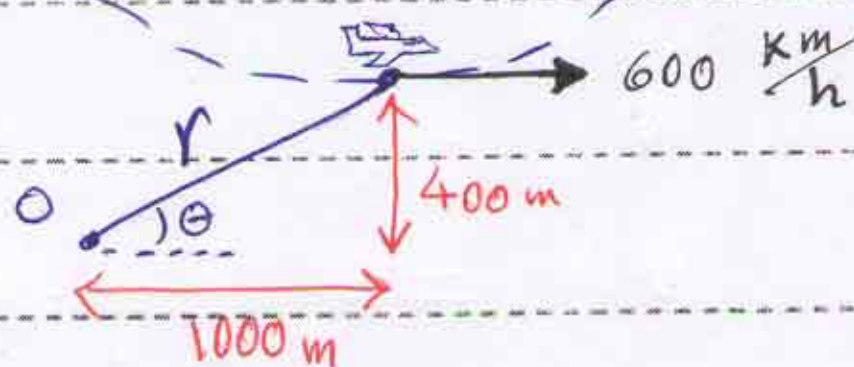


همیشه مثبت است  $\dot{r}$   $\rightarrow$  مثبت  $\dot{\theta}$  و چون همیشه مثبت است  $\rightarrow$  ①



**مثال** هواپیمایی به شکل در مسیری دایره‌ای به شعاع ۱۲۰۰ متر را در صفحه‌ای قائم  $(r-\theta)$  طی می‌کند و حرکت آن را رادار از نقطه‌ی O ردیابی می‌کند، در پایین این مسیر در ارتفاع ۴۰۰ متری، هواپیمای دارای سرعت افقی ۶۰۰ کیلومتر بر ساعت است و شیب افقی ندارد. در این لحظه رادار مقدار  $\dot{r}$  و  $\dot{\theta}$  را چند سان می‌دهد؟

$$v = 600 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{600}{3.6} = 166.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$





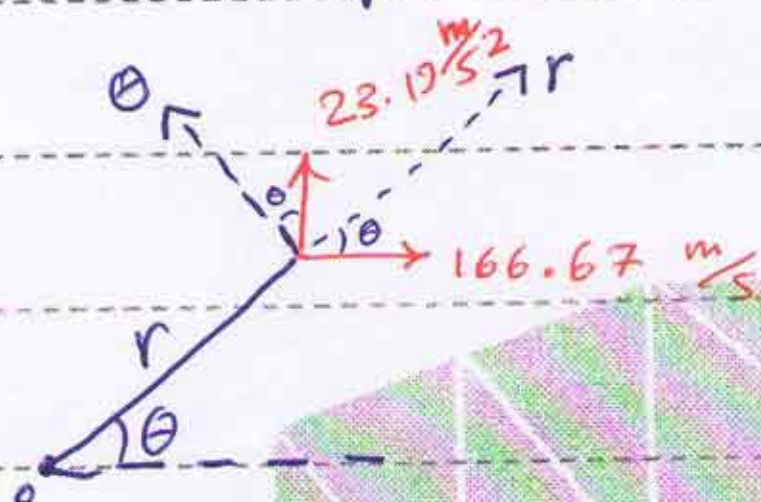
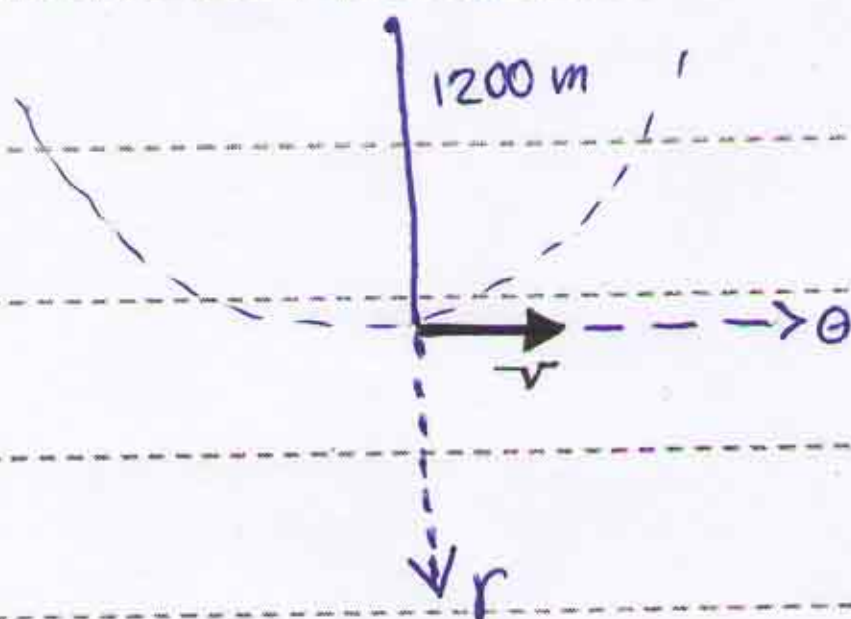
$$V_\theta = r\dot{\theta} \Rightarrow 166.67 = 1200 \times \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = 0.139 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$a_\theta = 0 \leftarrow \text{موازی شتاب یعنی ندارد}$$

$$a_r = -r\dot{\theta}^2 = -1200 \times (0.132)^2 \rightarrow$$

$$a_r = -23.19 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



$$r = \sqrt{400^2 + 1000^2} = 1077 \text{ m} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{400}{1000}\right) = 21.8^\circ$$

$$V_r = 166.67 \times \cos 21.8^\circ = 154.75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_\theta = -166.67 \times \sin 21.8^\circ = -61.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{cases} a_r = 23.19 \times \sin(21.8^\circ) = 8.61 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a_\theta = 23.19 \times \cos(21.8^\circ) = 21.53 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_r = \dot{r} \Rightarrow \boxed{\dot{r} = 154.75 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \Rightarrow -61.9 = 1077 \times \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = -5.75 \times 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \end{cases}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = -5.75 \times 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \Rightarrow 8.61 = \ddot{r} - 1077 \times (-5.75 \times 10^{-2})^2 \Rightarrow \boxed{\ddot{r} = 12.17 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow 21.53 = 1077 \times \ddot{\theta} + 2 \times 154.75 \times (-5.75 \times 10^{-2})$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = 0.0365 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}$$

مثال - مسیر ذره با روابط  $r = b(2 + \cos \pi t)$  و  $\theta = \pi t$  توصیف می شود.

الف - سرعت و شتاب ذره را در  $t = 2 \text{ s}$  تعیین کنید و ب)  $\theta$  های متناظر با  $\theta = 0$  را بیابید.



Subject :

دینامیک

Year:

90

Month:

۲

Date:

۲



سرعت را تعیین کنید:  $r = b(2 + \cos \pi t) \rightarrow \dot{r} = -b\pi \sin \pi t$

$\rightarrow \ddot{r} = -b\pi^2 \cos \pi t$  ,  $\theta = \pi t \rightarrow \dot{\theta} = \pi$  ,  $\ddot{\theta} = 0$  (الف)

$V_r = \dot{r} = -b\pi \sin \pi t \rightarrow t = 2s \rightarrow V_r = 0$

$V_\theta = r\dot{\theta} = b\pi(2 + \cos \pi t) \rightarrow t = 2s \rightarrow V_\theta = 3b\pi$

$\Rightarrow \vec{V} = 3b\pi \vec{e}_\theta$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -b\pi^2 \cos \pi t - b\pi^2(2 + \cos \pi t) \rightarrow t = 2s \rightarrow$

$a_r = -4b\pi^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2 \times (-b\pi \sin \pi t) \times \pi \rightarrow t = 2s \rightarrow a_\theta = 0$

$\Rightarrow \vec{a} = -4b\pi^2 \vec{e}_r$

$V = \sqrt{b^2\pi^2 \sin^2 \pi t + b^2\pi^2(2 + \cos \pi t)^2} =$  (ب)

$= \sqrt{b^2\pi^2 \sin^2 \pi t + 4b^2\pi^2 + b^2\pi^2 \cos^2 \pi t + 4b^2\pi^2 \cos \pi t}$

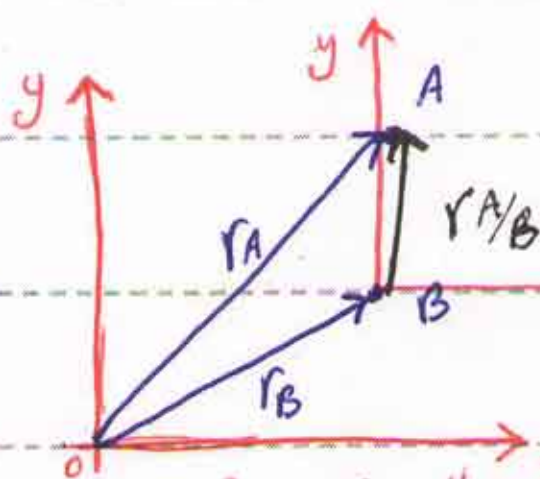
$= \sqrt{5b^2\pi^2 + 4b^2\pi^2 \cos \pi t} \Rightarrow V = b\pi \sqrt{5 + 4 \cos \pi t}$

سرعت زمانی ماکزیمم شود که مقدار  $\cos$  ① شود.  $\cos \pi t = 1$

$\hookrightarrow \pi t = 2k\pi (k = 0, 2, 3, 4, \dots) \rightarrow t = 2k \xrightarrow{\theta = \pi t} \theta = 2k\pi$



\* حرکت نسبی :



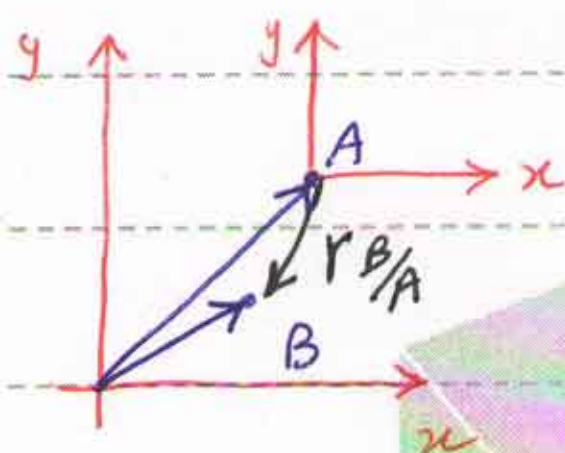
دستگاه مختصات انتقالی

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}$$

دستگاه مختصات ثابت (مبنای)

$$\vec{r} = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \quad \text{یا} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \quad \text{یا} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{r}_{B/A} = -\vec{r}_{A/B}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_{B/A} = -\vec{v}_{A/B}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_{B/A} = -\vec{a}_{A/B}$$

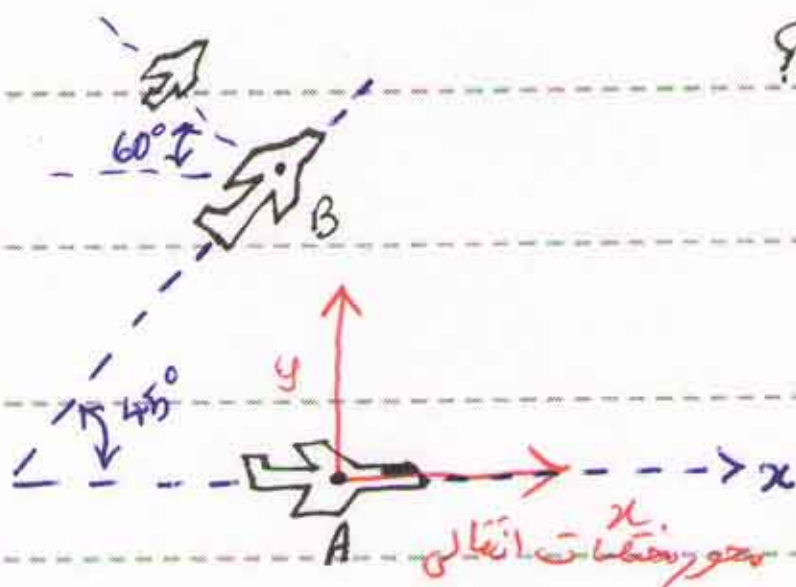
**مثال** در شکل بحال هواپیمای جت مسافری A با سرعت  $800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  به طرف شرق حرکت می کند و در زیر این هواپیمای جت B در حال پرواز افقی است و در جهت

45° درجه شمال شرقی حرکت می کند اما بطوری که در شکل هم نشان داده شده است

هواپیمای B از نظر مسافران هواپیمای A با زاویه 60° درجه از آن عادی می شود

سرعت حقیقی هواپیمای B را بدست آورید؟

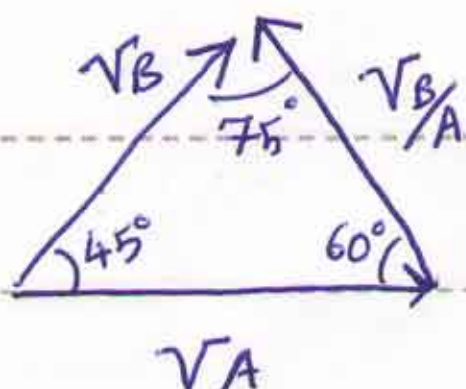
(حل)



برای حل این مسئله نمودار و جبر دارد:



\* راه حل مثلثاتی :



قانون سینوس ها :

$$\frac{V_A}{\sin 75^\circ} = \frac{V_B}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{800 \times \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 717 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

\* راه حل برداری :

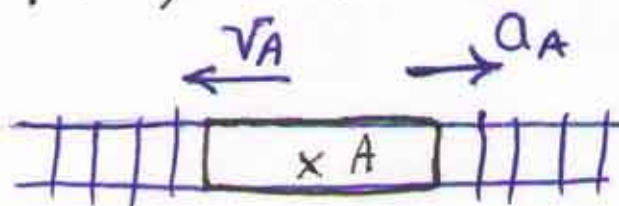
$$\vec{V}_A = 800 \vec{i}$$

$$\vec{V}_B = V_B \cos 45^\circ \vec{i} + V_B \sin 45^\circ \vec{j}$$

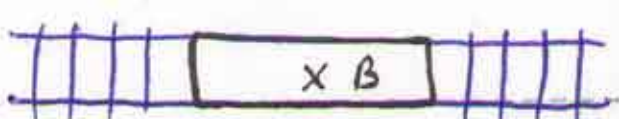
$$\vec{V}_{B/A} = -\frac{V_B}{A} \cos 60^\circ \vec{i} + \frac{V_B}{A} \sin 60^\circ \vec{j}$$

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A \Rightarrow \vec{V}_{B/A} = 586 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

**مثال** در شکل زیر دو قطار A و B را نشان داده ایم که بر روی ریل های موازی حرکت می کنند و در حالی که سرعت قطار A برابر  $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  و آهنگ کاهش آن  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  باشد سرعت قطار B ثابت و برابر  $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  است و سرعت و شتاب قطار B را نسبت به قطار A بدست آورید :



$$\vec{V}_A = -80 \vec{i}, \quad \vec{a}_A = 2 \vec{i}$$

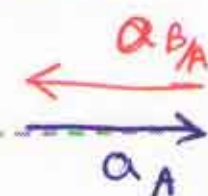


$$\vec{V}_B = 40 \vec{i}, \quad \vec{a}_B = 0$$

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A = 40 \vec{i} - (-80 \vec{i}) = 120 \vec{i}$$



$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = 0 - 2 \vec{i} = -2 \vec{i}$$



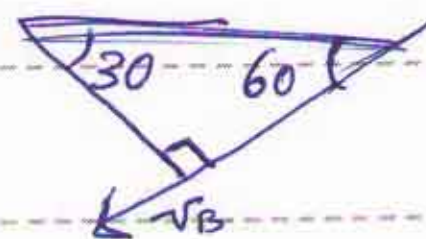
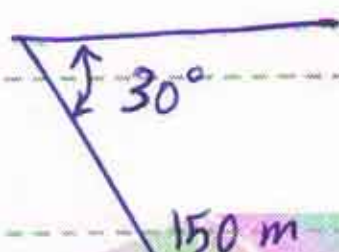


مثال: در شکل مقابل اتومبیل A با شتاب  $1.2 \frac{m}{s^2}$  حرکت می کند و اتومبیل B

قوسی به شعاع ۱۵۰ m را با سرعت ثابت  $54 \frac{km}{h}$  می پیماید، در وضعیت نشان

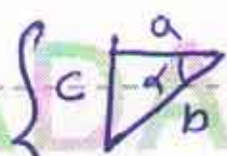
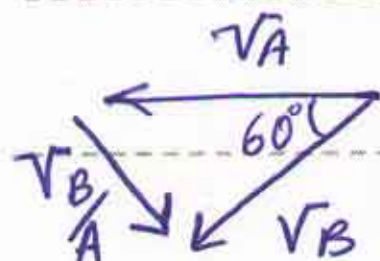
داده شده سرعت اتومبیل A برابر  $72 \frac{km}{h}$  است، سرعت و شتاب اتومبیل B را

از دید ناظری که در اتومبیل A قرار دارد بدست آورید.



$$v_A = 72 \frac{km}{h} = \frac{72}{3.6} = 20 \frac{m}{s}$$

$$v_B = 54 \frac{km}{h} = \frac{54}{3.6} = 15 \frac{m}{s}$$



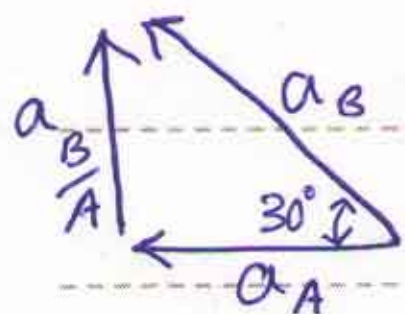
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

\* راه حل مشابهی:

$$(v_{B/A})^2 = (v_A)^2 + (v_B)^2 - 2 \times v_A \times v_B \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow (v_{B/A})^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \times 20 \times 15 \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow v_{B/A} = 18.03 \frac{m}{s}$$



$$(a_t)_B = 0 \text{ و } (a_n)_B = \frac{(v_B)^2}{r_B} = \frac{15^2}{150} = 1.5 \frac{m}{s^2}$$

$$(a_{B/A})^2 = (a_A)^2 + (a_B)^2 - 2 \times a_A \times a_B \times \cos 30^\circ$$

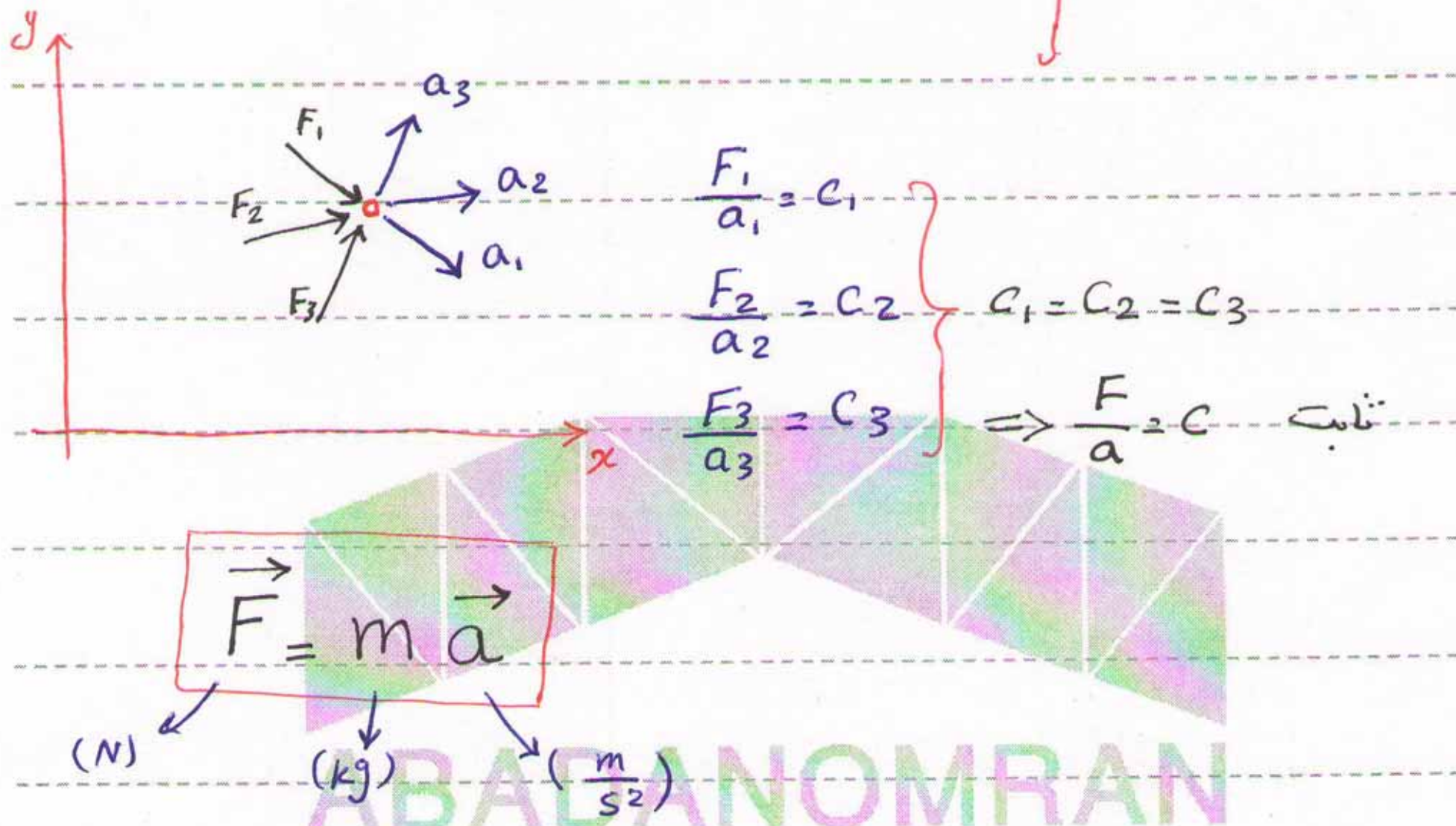
$$\Rightarrow (a_{B/A})^2 = (1.2)^2 + (1.5)^2 - 2 \times 1.2 \times 1.5 \times \cos 30^\circ \rightarrow a_{B/A} = 0.757 \frac{m}{s^2}$$



\* سینه: ① استفاده از قانون دوم نیوتن

روش های حل مسائل ② روش کاروانرژی

سینه: ③ روش ضرب و اندازه حرکت



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = m a_x \\ \sum F_y = m a_y \\ \sum F_z = m a_z \end{array} \right.$$

$$\sum F_y = m a_y$$

$$\sum F_z = m a_z$$

حرکت سه بعدی:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = m a_x \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{array} \right.$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

حرکت مستقیم الخط:



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = m a_x \quad , \quad a_x = \ddot{x} \\ \sum F_y = m a_y \quad , \quad a_y = \ddot{y} \end{array} \right. \quad \text{دستگاه مختصات دکارتی:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_t = m a_t \quad , \quad a_t = \dot{v} \\ \sum F_n = m a_n \quad , \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{دستگاه مختصات} \\ \text{عمودی - مماسی:} \end{array}$$

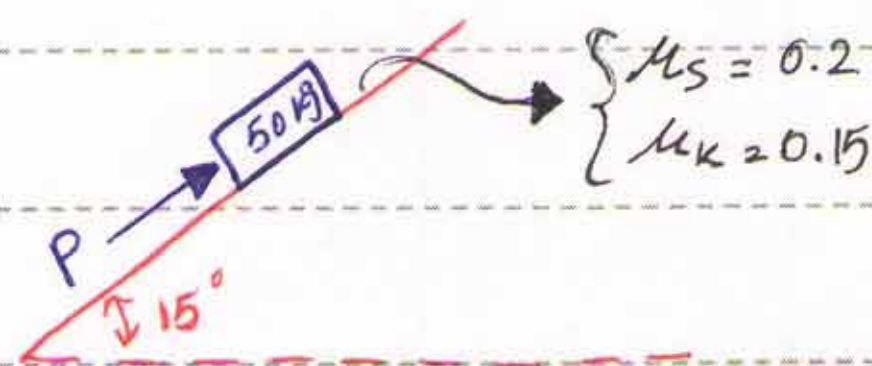
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_r = m a_r \quad , \quad a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ \sum F_\theta = m a_\theta \quad , \quad a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \end{array} \right. \quad \text{دستگاه مختصات قطبی:}$$

**مثال:** صندوق ۵۰ کیلوگرمی مثل شکل زیر، درست قبل از آن که نیروی  $P$  بر آن وارد شود، ساکن است، شتاب صندوق را در حالت های زیر بدست آورید؟

الف)  $P = 0$  ، ب)  $P = 150 \text{ (N)}$  ، ج)  $P = 300 \text{ (N)}$

$f_s = \mu_s \cdot N$  نیروی اصطکاک ایستایی

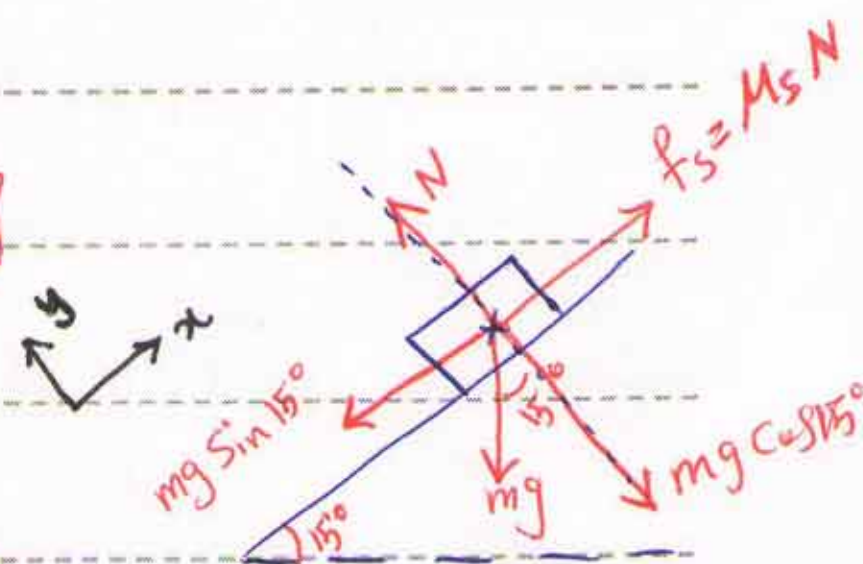
$f_k = \mu_k \cdot N$  نیروی اصطکاک جنبشی



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg \cos 15^\circ = 0 \Rightarrow N = 433.79 \text{ (N)}$$

$$mg \sin 15^\circ = 50 \times 9.81 \times \sin 15^\circ = 126.95 \text{ (N)}$$

$$f_s = \mu_s N = 0.2 \times 433.79 = 94.76 \text{ (N)}$$





$\Rightarrow mg \sin 15^\circ > f_s \Rightarrow$  جسم روی پائین حرکت می کند

$$\sum F_x = -ma_x \Rightarrow mg \sin 15^\circ - \mu_k N = -ma_x$$

$$\Rightarrow mg \sin 15^\circ - \mu_k mg \cos 15^\circ = -ma_x \Rightarrow a_x = g(\mu_k \cos 15^\circ - \sin 15^\circ)$$

$$\Rightarrow a_x = (0.15 \times \cos 15^\circ - \sin 15^\circ) \times 9.81 \Rightarrow \boxed{a_x = 1.12 \frac{m}{s^2}}$$

ب)  $P = 150 \text{ N}$

$$P - mg \sin 15^\circ = 150 - 50 \times 9.81 \times \sin 15^\circ =$$

$$= 23.05 \text{ (N)} \quad (\text{به سمت بالا})$$

$$f_s = 94.76 \text{ (N)}$$

$\Rightarrow$  نیروی اصطکاک متوازن است  $\rightarrow (a_x = 0)$

ج)  $P = 300 \text{ N}$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow P - mg \sin 15^\circ - \mu_k N = ma_x$$

$$\Rightarrow 300 - 50 \times 9.81 \times \sin 15^\circ - 0.15 \times 473.79 = 50 \times a_x$$

$$\Rightarrow \boxed{a_x = 2.04 \frac{m}{s^2}}$$

$$P - mg \sin 15^\circ = 173.05$$

$$f_s = 94.76$$

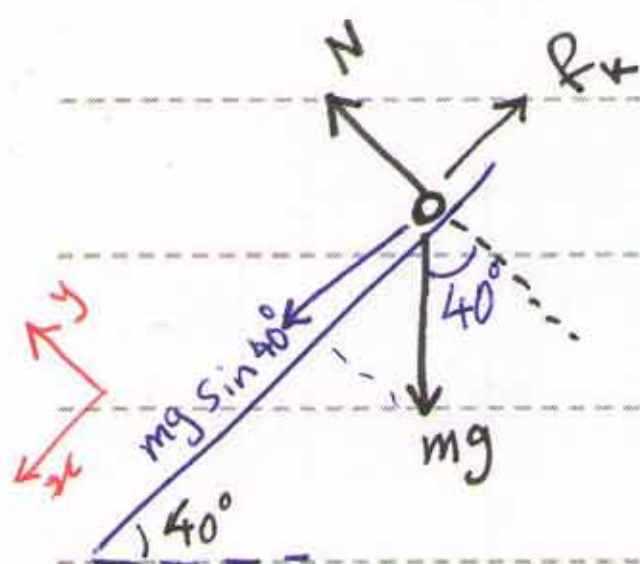
مقایسه ای  
ابتدایی:

مثال: اسکی باز روی سطحی با شیب 40 درجه در لحظه  $t = 0$  از حال سکون

به راه می افتد و در لحظه  $t = 2.58$  از مقابل محل ثبت سرعت که 20 متر پائین تر

است رد می شود و ضرب اصطکاک جنبشی بین برف و چوب اسکی را تعیین کنید.





مقاومت هوا صرف نظر کنید.

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

$$\Rightarrow 20 = \frac{1}{2} \times a \times (2.58)^2 + 0 \Rightarrow a = 6 \frac{m}{s^2}$$

$$\sum F_x = m a_x$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = m g \cos 40^\circ \rightarrow N = m g \cos 40^\circ$$

$$\sum F_x = m a_x \rightarrow m g \sin 40^\circ - \mu_k N = m a_x$$

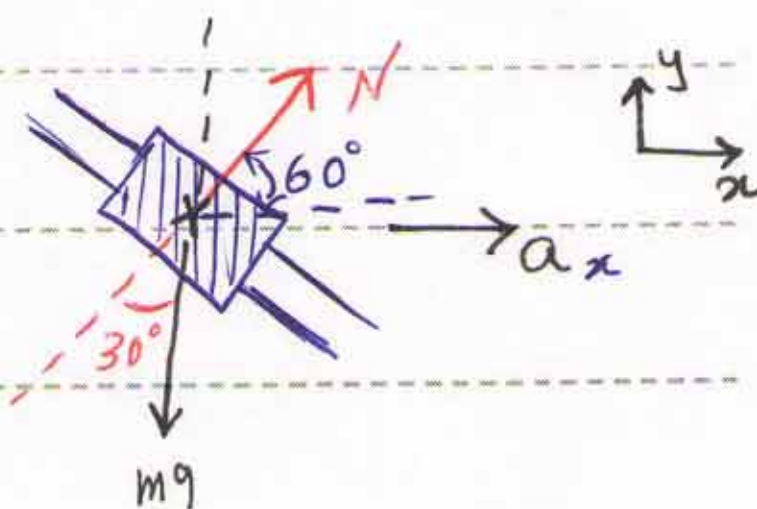
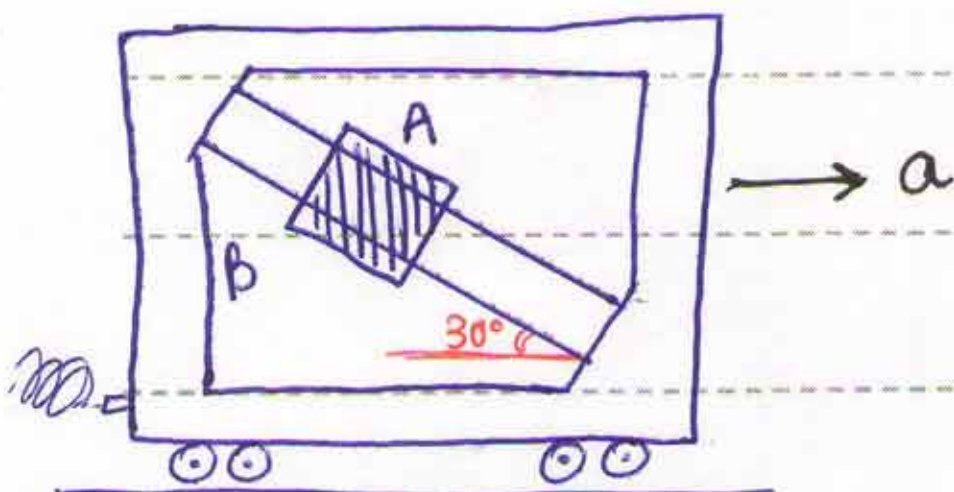
$$\Rightarrow m g \sin 40^\circ - \mu_k m g \cos 40^\circ = m a$$

$$\Rightarrow 9.81 \times \sin 40^\circ - \mu_k \times 9.81 \times \cos 40^\circ = 6 \Rightarrow \mu_k = 0.04$$

مثال در شکل مقابل قابی را نشان داده ایم که محور صیقلی B بطور مایل در آن نصب شده است.

طوقه ای A می تواند آزادانه روی این محور بلغزد و قاب در صفحه ای

قائم قرار دارد برای آن که طوقه نسبت به محور حرکت نکند و شتاب افقی قاب چقدر باشد؟

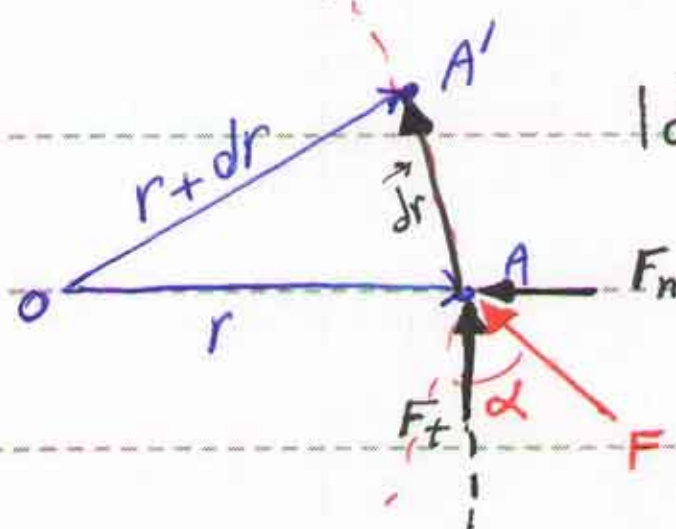


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N \sin 60^\circ = m g \quad (1)$$

$$\sum F_x = m a_x \Rightarrow N \cos 60^\circ = m a_x \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{N \sin 60^\circ}{N \cos 60^\circ} = \frac{m g}{m a_x} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{9.81}{a_x} \Rightarrow a_x = 5.66 \frac{m}{s^2}$$





$$|d\vec{r}| = ds$$

کاروانرژی:

$$du = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos \alpha$$

$$\Rightarrow du = F_t ds$$

$$\begin{matrix} N \cdot m \\ (J) \end{matrix} \quad \begin{matrix} (N) \\ (m) \end{matrix}$$

$$U = \int F_t ds = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

اگر چند نیرو همزمان بر ذره اثر کند:

$$dU = (\vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow dU = \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad \begin{matrix} \vec{a} \cdot d\vec{r} = a_t ds \\ a_t ds = v dv \end{matrix} \quad \rightarrow \quad U = \int_1^2 m v dv$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad \begin{matrix} T = \frac{1}{2} m v^2 \\ \text{انرژی جنبشی} \end{matrix}$$

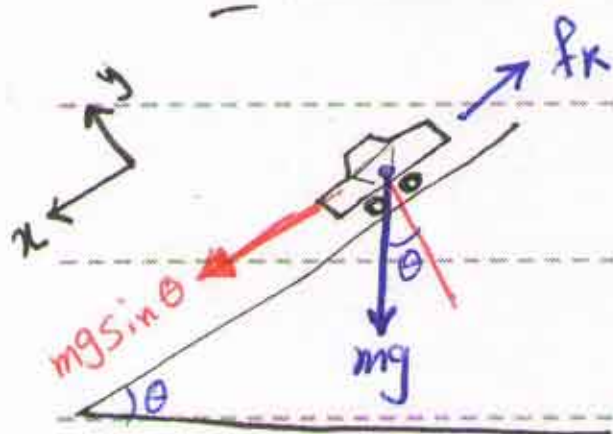
$$U = \Delta T$$

تغییرات انرژی جنبشی  
کار انجام شده توسط نیروهای خارجی

**مثال** اتومبیلی در سرازیری یک جاده با شیب ۵٪ در صد، با سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت

حرکت کرده و ناگهان ترمز می‌کند، اگر پس از طی مسافت ۱۵ متر متوقف گردد، ضریب اصطکاک

بین چرخ‌ها و سطح جاده را محاسبه کنید؟



$$\left. \begin{matrix} U = \Delta T \\ du = F_t ds \end{matrix} \right\} \Rightarrow (mg \sin \theta - \mu_k N) \times S = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta =$$

$$V_0 = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{50}{3.6} = 13.89 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= -\frac{1}{2} m V_0^2$$

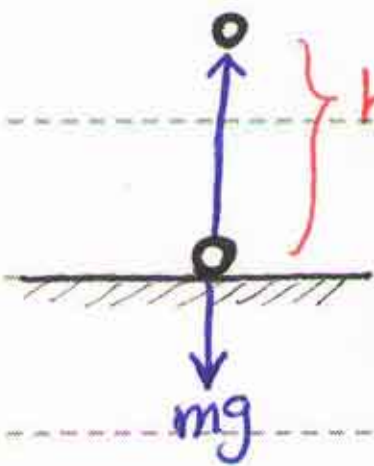
$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0.1) = 5.71^\circ$$

$$\text{بنابراین: } 9.81 \times (\sin 5.71^\circ - \mu_k \times \cos 5.71^\circ) = -\frac{1}{2} \times 13.89^2$$

$$\Rightarrow \mu_k = 0.759$$

همچنین انرژی مکانیک در دو نقطه قابل حل است.

\* انرژی پتانسیل گرانشی:



$$V_g = mgh$$

سطح مبدا  
( $V_g = 0$ )

$$\Delta V_g = mgh_2 - mgh_1 = mg \Delta h$$

$$U = -\Delta V_g = -mg \Delta h$$

کار انجام شده توسط

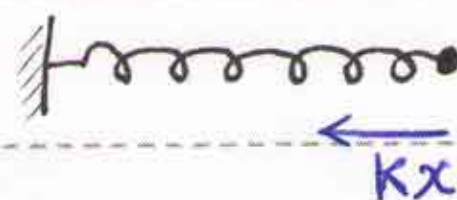
نیروی جاذبه

انرژی پتانسیل الاستیک

$$V_e = \int_0^x kx \, dx = \frac{1}{2} kx^2$$

ثابت فنر

\* انرژی پتانسیل الاستیک:



$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2)$$

تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک



کار انجام شده توسط فنر  $\rightarrow U = -\Delta V_e$

$$U = \Delta T$$

$$U - \Delta V_g - \Delta V_e = \Delta T \rightarrow$$

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

کار سبدهای خارجی

تغییرات انرژی جنبشی

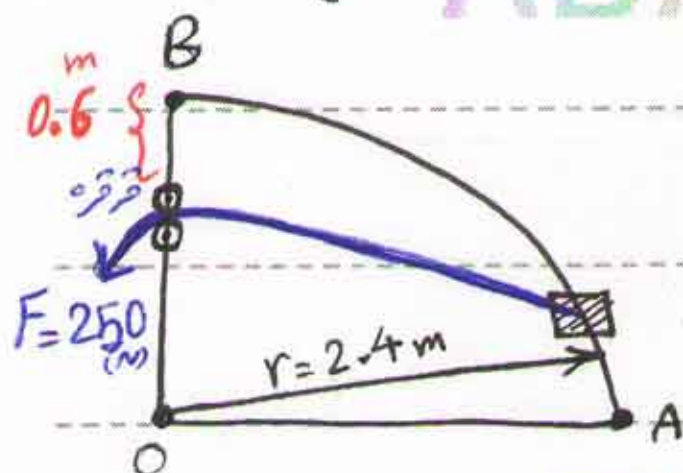
تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی

تغییرات انرژی پتانسیل الاستیک

$$T + V_g + V_e = E \Rightarrow U = \Delta E$$

انرژی مکانیکی

**مثال ۹** لغزنده‌ای به جرم  $10 \text{ kg}$  آزادانه در امتداد میله‌ای راهنمای خمیده می‌لغزد (میله  $AB$ ) لغزنده از حالت سکون در نقطه‌ی  $A$  در اثر نیروی کششی ثابت  $250 \text{ N}$  حرکت می‌کند. سرعت لغزنده در نقطه‌ی  $B$  چقدر است؟ ( $r_1 = 3 \text{ m}$  طول اولیه‌ی طناب)



$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$$\Rightarrow F \times \Delta l = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) + mg \Delta h$$

$$\Rightarrow 250 \times 2.4 = \frac{1}{2} \times 10 \times v_B^2 + 10 \times 9.81 \times 2.4$$

$$\Delta l = 3 - 0.6 = 2.4$$

$$\Rightarrow v_B = 8.54 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

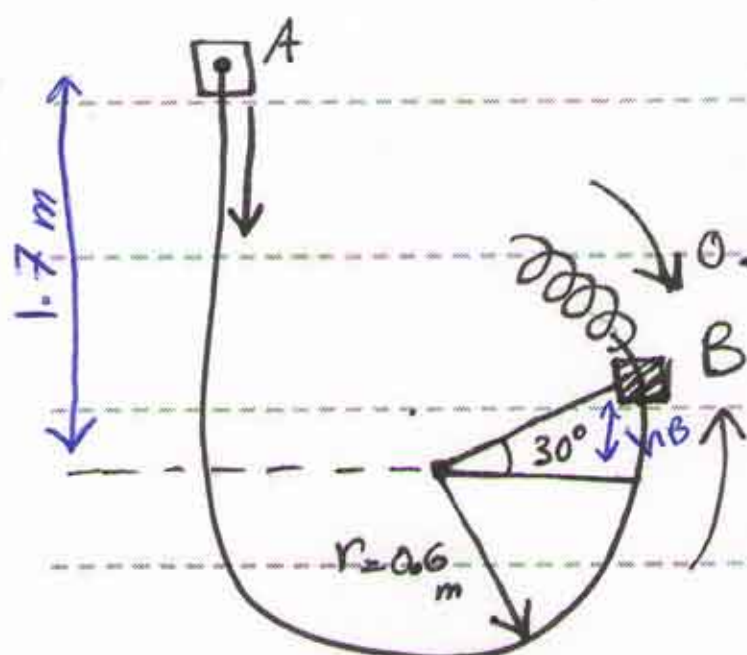
**مثال ۱۰** مهره  $P$  به جرم  $0.9 \text{ kg}$  از نقطه‌ی  $A$  در بالای میله رها شده و در امتداد میله‌ی بدون اصطکاک می‌لغزد و باعث فشردگی فنر  $B$  می‌گردد. نیروی عکس‌العمل  $N$  بین میله و مهره را در لحظه‌ی نشان داده شده که فنر  $0.2 \text{ m}$  فشرده شده، حساب کنید؟



Subject :

Year: 90 Month.

Date.



است  $(K = 450 \frac{N}{m})$

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

چون نیروی به جسم اعمال نشده است

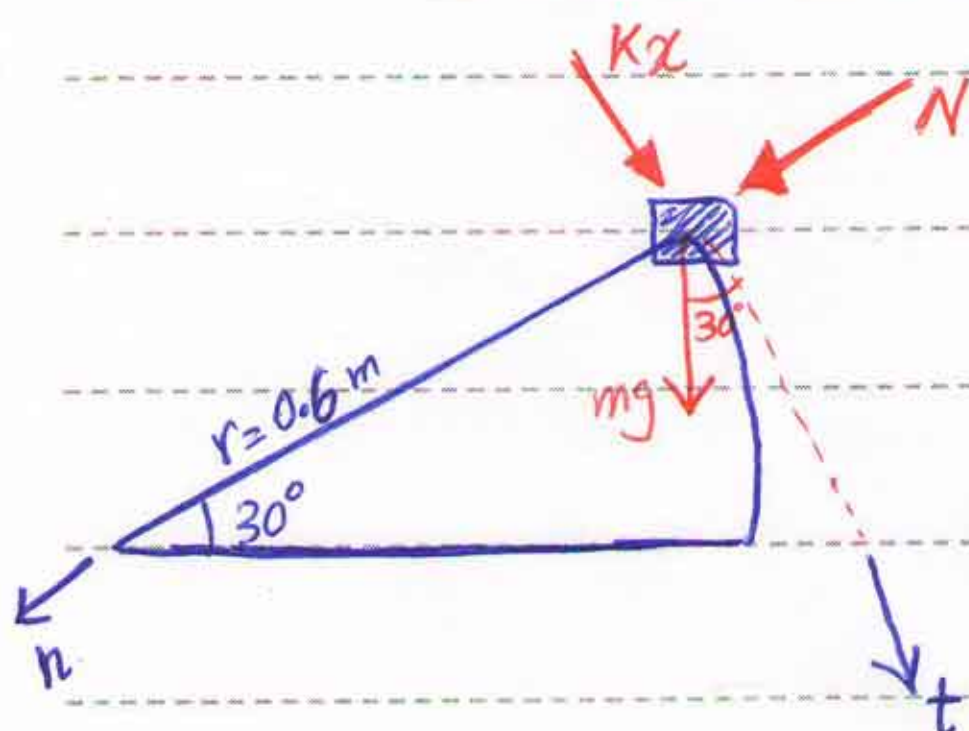
$$\Delta T = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) = \frac{1}{2} \times 0.9 \times v_B^2 = 0.45 v_B^2$$

$$\Delta V_g = mg \Delta h = mg (h_B - h_A) = mg (0.6 \times \sin 30 - 1.7) =$$

$$\rightarrow \Delta V_g = -12.36 \text{ (ج)}$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} K (x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} \times 450 \times (0.2)^2 \Rightarrow \Delta V_e = 9 \text{ (ج)}$$

$$\text{بنابراین} \rightarrow 0.45 v_B^2 + (-12.36) + 9 = 0 \rightarrow v_B = 2.73 \text{ (}\frac{m}{s}\text{)}$$



$$\sum F_n = m a_n \Rightarrow (N + mg \sin 30) =$$

$$= m \frac{v_B^2}{r}$$

$$\Rightarrow N + 0.9 \times 9.81 \times \sin 30 = 0.9 \times \frac{2.73^2}{0.6}$$

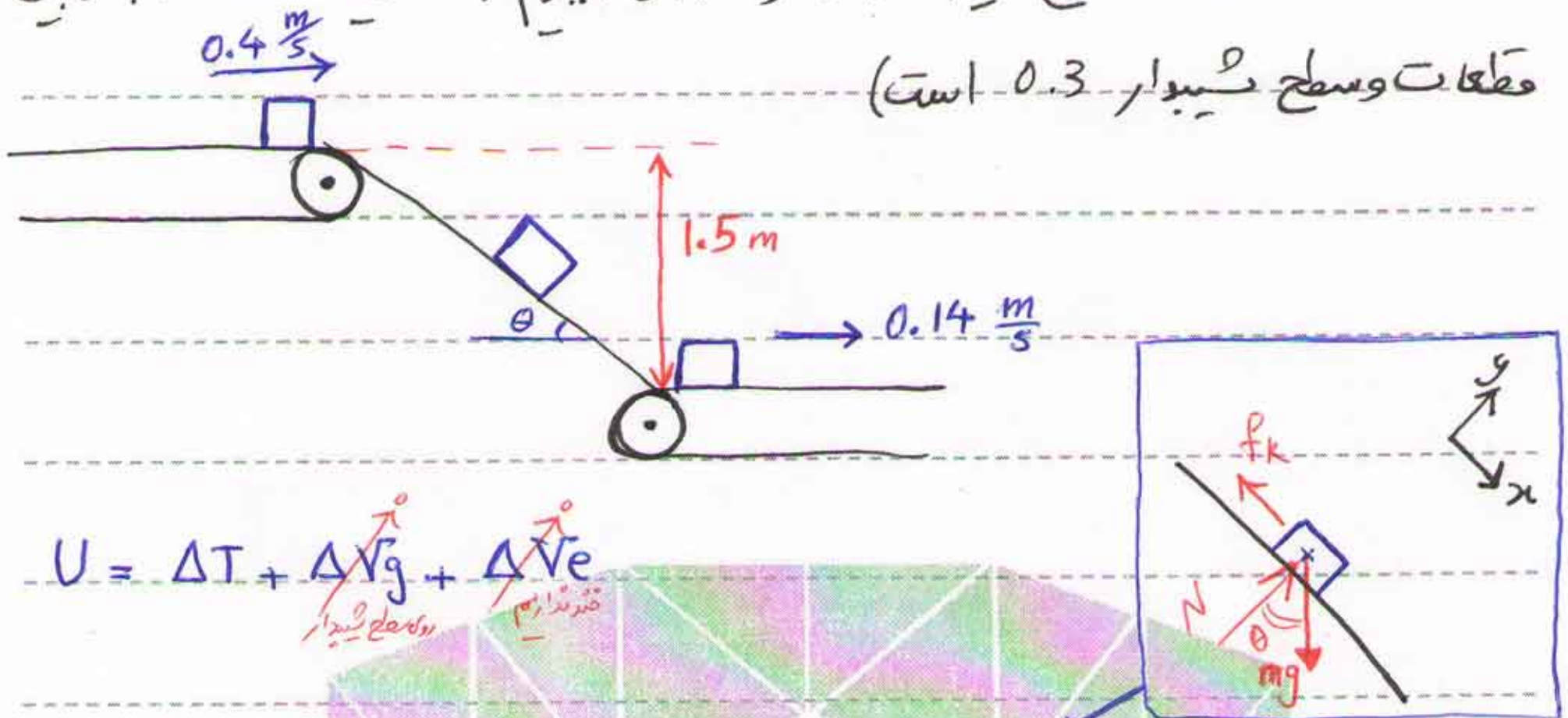
$$\rightarrow N = 6.76 \text{ (N)}$$

مثال در شکل داده شده طرح یک سیستم تکانه، نشان داده ایم، نوار تکانه بالایی

مقاطع فلزی نوک را با سرعت  $0.4 \frac{m}{s}$  به سطح سبیلاری رساند، نوار تکانه پایینی



با سرعت  $0.14 \frac{m}{s}$  حرکت می کند، می خواهیم به قطعات بدون لغزش به این تار منتقل شود، زاویه ی سطح سب تار را چقدر باید بگیریم؟ ضریب اصطکاک جنبشی بین قطعات و سطح سبوار 0.3 است



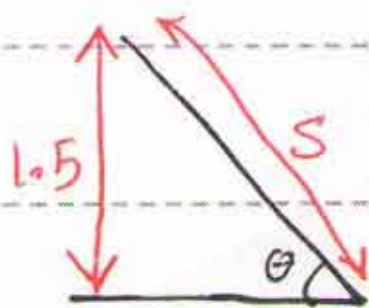
$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

$\Delta V_g$  تغییر پتانسیل  
 $\Delta V_e$  تغییر انرژی

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow (mg \sin \theta - \underbrace{\mu_k N}_{f_k}) \times S = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow$$

$$mg \times (\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \times S = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$



$$\rightarrow \sin \theta = \frac{1.5}{S} \rightarrow S = \frac{1.5}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow g(\sin \theta - 0.3 \times \cos \theta) \times \frac{1.5}{\sin \theta} = \frac{1}{2} \times (0.14^2 - 0.4^2)$$

$$\rightarrow \tan \theta = 0.2986 \Rightarrow \theta = 16.62^\circ$$