



# گروه مهندسی عمران دانشگاه صنعتی قم

# مقاومت مصالح

فریدیناند پی بیر  
ای واسل جانستون  
جان تی دی ولف

بهرام پوستی



$P_U$ بار نهایی (LRFD)	$a$ ثابت؛ فاصله	$A, B, C, \dots$ نیروها، واکنش‌ها
$q$ نیروی برشی برای طول واحد؛ جریان برشی	$A, B, C, \dots$ نقاط	
$Q$ نیرو	$A, a$ مساحت	
$Q$ ممان اول سطح	$b$ فاصله؛ عرض	
$r$ شعاع؛ شعاع ژیراسیون	$c$ ثابت؛ فاصله؛ شعاع	
$R$ نیرو، واکنش	$C$ مرکز هندسی	
$R$ شعاع؛ مدول گسیختگی	$C_1, C_2, \dots$ ثابت‌های انتگرال‌گیری	
$s$ طول	$C_p$ ضریب پایداری ستون	
$S$ مدول مقطع الاستیک	$d$ فاصله؛ قطر؛ عمق	
$t$ ضخامت؛ فاصله؛ انحراف معامی	$D$ قطر	
$T$ گشتاور	$e$ فاصله؛ خروج از مرکز؛ اتساع	
$T$ دما	$E$ مدول الاستیسته	
$u, v$ مختصات قائم	$f$ فرکانس، تابع	
$u$ چگالی انرژی کرنشی	$F$ نیرو	
$U$ انرژی کرنشی؛ کار	$F.S.$ ضریب اطمینان	
$v$ سرعت	$G$ مدول صلابت؛ مدول برش	
$V$ نیروی برشی	$h$ فاصله؛ ارتفاع	
$V$ حجم، برش	$H$ نیرو	
$w$ عرض؛ فاصله؛ بار برای طول واحد	$H, J, K$ نقاط	
$W, W$ وزن، بار	$I, I_x, \dots$ ممان اینرسی	
$x, y, z$ مختصات قائم؛ فاصله؛ تغییر مکان؛ خیزها	$I_{xy}, \dots$ حاصلضرب اینرسی	
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ مختصات مرکز هندسی	$J$ ممان اینرسی قطبی	
$Z$ مدول مقطع پلاستیک	$k$ ثابت فنر؛ ضریب شکل؛ مدول کپ‌ای؛ ثابت	
$\alpha, \beta, \gamma$ زوایا	$K$ ضریب تمرکز تنش؛ ثابت فنر پیچشی	
$\alpha$ ضریب انبساط گرمایی؛ ضریب تأثیر	$l$ طول؛ دهانه	
$\gamma$ کرنش برشی؛ وزن مخصوص	$L$ طول؛ دهانه	
$\gamma_D$ ضریب بار، بار مرده (LRFD)	$L_e$ طول مؤثر	
$\gamma_L$ ضریب بار، بار زنده (LRFD)	$m$ جرم	
$\delta$ تغییر شکل؛ تغییر مکان	$M$ کوپل	
$\epsilon$ کرنش قائم	$M, M_x, \dots$ لنگر خمشی	
$\theta$ زاویه، شیب	$M_D$ لنگر خمشی، بار مرده (LRFD)	
$\lambda$ کسینوس هادی	$M_L$ لنگر خمشی، بار زنده (LRFD)	
$\nu$ نسبت پواسون	$M_U$ لنگر خمشی، بار نهایی (LRFD)	
$\rho$ شعاع انحنا، فاصله؛ چگالی	$n$ عدد؛ نسبت مدول‌های الاستیسته؛ جهت قائم	
$\sigma$ تنش قائم	$p$ فشار	
$\tau$ تنش برشی	$P$ نیرو؛ بار متمرکز	
$\phi$ زاویه، زاویه پیچش؛ ضریب مقاومت	$P_D$ بار مرده (LRFD)	
$\omega$ سرعت زاویه‌ای	$P_L$ بار زنده (LRFD)	

# فهرست مطالب

## ۱ مقدمه - مفهوم تنش

۲	مقدمه	۱-۱
۲	مرور روش های استاتیک	۲-۱
۴	تنش در عضوهای یک سازه	۳-۱
۵	تحلیل و طراحی	۴-۱
۵	بارگذاری محوری؛ تنش قائم	۵-۱
۷	تنش برشی	۶-۱
۹	تنش تکیه گاهی در اتصالات	۷-۱
۹	کاربرد تنش در تحلیل و طراحی سازه های ساده	۸-۱
۱۱	روش حل مسائل	۹-۱
۱۲	دقت عددی	۱۰-۱
۱۹	تنش وارد بر صفحه مایلی که تحت بارگذاری محوری است	۱۱-۱
۲۰	تنش تحت شرایط کلی بارگذاری؛ مولفه های تنش	۱۲-۱
۲۳	نکات طراحی	۱۳-۱
۳۳	مرور و خلاصه فصل ۱	

## ۲ تنش و کرنش - بارگذاری محوری

۴۲	مقدمه	۱-۲
۴۲	کرنش قائم تحت بارگذاری محوری	۲-۲
۴۴	نمودار تنش - کرنش	۳-۲
۴۸	تنش حقیقی و کرنش حقیقی	۴-۲
۴۸	قانون هوک؛ مدول الاستیسیته	۵-۲
۴۹	مقایسه رفتار الاستیک و پلاستیک ماده	۶-۲
۵۱	بارگذاری های تکراری؛ خستگی	۷-۲



۵۲	تغییر شکل عضوها تحت بارگذاری محوری	۸-۲
۵۹	مسائل نامعین استاتیکی	۹-۲
۶۳	مسائل مربوط به تغییرات دما	۱۰-۲
۷۲	نسبت پواسون	۱۱-۲
۷۳	بارگذاری چند محوری؛ قانون عمومی هوک	۱۲-۲
۷۴	اتساع؛ مدول کپه‌ای	۱۳-۲
۷۵	کرنش برشی	۱۴-۲
۷۸	توضیح بیشتر درباره تغییر شکل‌ها در بارگذاری محوری؛ رابطه بین $G$ و $E$	۱۵-۲
۸۰	رابطه‌های تنش-کرنش برای مواد مرکب تقویت شده با تار	۱۶-۲
۸۸	توزیع تنش و کرنش در بارگذاری محوری؛ اصل سنت-وانانت	۱۷-۲
۸۹	تمرکز تنش	۱۸-۲
۹۱	تغییر شکل پلاستیک	۱۹-۲
۹۳	تنش‌های باقیمانده	۲۰-۲
۱۰۲	مرور و خلاصه فصل ۲	

## ۳

## پیچش

۱۱۳

۱۱۴	مقدمه	۱-۳
۱۱۵	مقدمه‌ای درباره تنش در شفت	۲-۳
۱۱۶	تغییر شکل در شفت دایره‌ای	۳-۳
۱۱۹	تنش در ناحیه الاستیک	۴-۳
۱۲۸	زاویه پیچش در ناحیه الاستیک	۵-۳
۱۳۰	شفت‌های نامعین استاتیکی	۶-۳
۱۳۹	طراحی شفت‌های انتقال قدرت	۷-۳
۱۴۱	تمرکز تنش در شفت‌های دایره‌ای	۸-۳
۱۴۵	تغییر شکل پلاستیک در شفت‌های دایره‌ای	۹-۳
۱۴۶	شفت‌های دایره‌ای الاستوپلاستیک	۱۰-۳
۱۴۹	تنش‌های باقیمانده در شفت‌های دایره‌ای	۱۱-۳
۱۵۶	پیچش عضوهای غیردایره‌ای	۱۲-۳
۱۵۸	شفت‌های توخالی جدار نازک	۱۳-۳
۱۶۶	مرور و خلاصه فصل ۳	

## ۴

## خمش خالص

۱۷۵

۱۷۶	مقدمه	۱-۴
۱۷۷	عضو متقارن در خمش خالص	۲-۴
۱۷۸	تغییر شکل عضو متقارن در خمش خالص	۳-۴

۴-۴	تنش و تغییر شکل در ناحیه الاستیک.....	۱۸۰
۵-۴	تغییر شکل در مقطع عرضی.....	۱۸۳
۶-۴	خمش عضوهایی که از مواد مختلف ساخته شده‌اند.....	۱۹۱
۷-۴	تمرکز تنش.....	۱۹۴
۸-۴	تغییر شکل پلاستیک.....	۲۰۱
۹-۴	عضوهای الاستوپلاستیک.....	۲۰۲
۱۰-۴	تغییر شکل پلاستیک عضوهایی که فقط یک صفحه تقارن دارند.....	۲۰۶
۱۱-۴	تنش‌های باقیمانده.....	۲۰۶
۱۲-۴	بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن.....	۲۱۴
۱۳-۴	خمش نامتقارن.....	۲۲۲
۱۴-۴	حالت کلی بارگذاری محوری خارج از مرکز.....	۲۲۶
۱۵-۴	خمش عضوهای خمیده.....	۲۳۵
	مرور و خلاصه فصل ۴.....	۲۳۳

## ۵

### تحلیل و طراحی تیرها در خمش

۲۵۳

۱-۵	مقدمه.....	۲۵۴
۲-۵	نمودار برش و نمودار لنگر خمشی.....	۲۵۶
۳-۵	روابط میان بار، برش، و لنگر خمشی.....	۲۶۵
۴-۵	طراحی تیرهای منشوری تحت خمش.....	۲۷۲
۵-۵	استفاده از توابع تکین برای تعیین برش و لنگر خمشی در یک تیر.....	۲۸۰
۶-۵	تیرهای غیرمنشوری.....	۲۹۰
	مرور و خلاصه فصل ۵.....	۲۹۸

## ۶

### تنش برشی در تیرها و عضوهای جدار نازک

۳۰۵

۱-۶	مقدمه.....	۳۰۶
۲-۶	برش وارد بر وجه افقی یک جزء از تیر.....	۳۰۷
۳-۶	تعیین تنش برشی در تیرها.....	۳۰۹
۴-۶	تنش برشی $\tau_{xy}$ در انواع تیرها.....	۳۱۰
۵-۶	توضیح بیشتر درباره توزیع تنش در یک تیر باریک مستطیلی.....	۳۱۱
۶-۶	نیروی برشی طولی وارد بر یک جزء تیر با شکل اختیاری.....	۳۱۸
۷-۶	تنش برشی در عضوهای جدار نازک.....	۳۲۰



۲۲۲	تغییر شکل پلاستیک	۸-۶
۲۳۰	بارگذاری نامتقارن در عضوهای جدار نازک؛ مرکز برش	۹-۶
۲۳۲	مرور و خلاصه فصل ۶	

## ۷

## تبدیلات تنش و کرنش

۳۳۹

۲۵۰	مقدمه	۱-۷
۲۵۲	تبدیل تنش صفحه‌ای	۲-۷
۲۵۳	تنش‌های اصلی؛ ماکزیمم تنش برشی	۳-۷
۳۶۱	دایره مور برای تنش صفحه‌ای	۴-۷
۳۶۹	حالت کلی تنش	۵-۷
۳۷۰	کاربرد دایره مور برای تحلیل تنش سه بعدی	۶-۷
۳۷۳	معیارهای تسلیم برای مواد نرم تحت تنش صفحه‌ای	۷-۷
۳۷۵	معیارهای شکست برای مواد شکننده تحت تنش صفحه‌ای	۸-۷
۳۸۲	تنش در مخزن‌های جدار نازک پرفشار	۹-۷
۳۸۹	تبدیل کرنش صفحه‌ای	۱۰-۷
۳۹۲	دایره مور برای کرنش صفحه‌ای	۱۱-۷
۳۹۴	تحلیل سه بعدی کرنش	۱۲-۷
۳۹۷	اندازه‌گیری‌های کرنش؛ گلبرگ کرنش	۱۳-۷
۴۰۳	مرور و خلاصه فصل ۷	

## ۸

## تنش‌های اصلی در شرایط معین بارگذاری

۳۱۱

۴۱۲	مقدمه	۱-۸
۴۱۲	تنش‌های اصلی در تیر	۲-۸
۴۱۵	طراحی شفت‌های انتقال قدرت	۳-۸
۴۲۳	پتنش در بارگذاری ترکیبی	۴-۸
۴۳۶	مرور و خلاصه فصل ۸	

## ۹

## خیز تیرها

۳۲۳

۴۴۴	مقدمه	۱-۹
۴۴۵	تغییر شکل تیر تحت بارگذاری عرضی	۲-۹
۴۴۶	معادله منحنی الاستیک	۳-۹

۴-۹	تعیین منحنی الاستیک از توزیع بار	۴۵۱
۵-۹	تیرهای نامعین استاتیکی	۴۵۲
۶-۹	استفاده از توابع تکینی برای تعیین شیب و خیز تیر	۴۶۱
۷-۹	روش ترکیب	۴۷۰
۸-۹	کاربرد اصل ترکیب برای تیرهای نامعین استاتیکی	۴۷۱
۹-۹	قضایای لنگر مساحت	۴۷۹
۱۰-۹	کاربرد قضایای لنگر مساحت برای تیرهای طردای و تیر با بارگذاری متقارن	۴۸۱
۱۱-۹	نمودارهای جزء به جزء لنگر خمشی	۴۸۳
۱۲-۹	کاربرد قضایای لنگر مساحت برای تیر با بارگذاری نامتقارن	۴۹۰
۱۳-۹	خیز ماکزیمم	۴۹۲
۱۴-۹	استفاده از قضایای لنگر مساحت برای تیرهای نامعین استاتیکی	۴۹۴
	مرور و خلاصه فصل ۹	۵۰۳

## ۱۰

### ستون‌ها

۵۱۵

۱-۱۰	مقدمه	۵۱۶
۲-۱۰	پایداری سازه‌ها	۵۱۶
۳-۱۰	فرمول اوپلر برای ستون‌های دو سر مفصلی	۵۱۸
۴-۱۰	تعمیم فرمول اوپلر برای ستون‌ها با سایر شرایط انتهایی	۵۲۰
۵-۱۰	بارگذاری خارج از مرکز؛ فرمول سکانت	۵۲۹
۶-۱۰	طراحی ستون‌های تحت بار مرکزی	۵۳۷
۷-۱۰	طراحی ستون‌های تحت بار خارج از مرکز	۵۴۹
	مرور و خلاصه فصل ۱۰	۵۵۷

## ۱۱

### روش‌های انرژی

۵۶۵

۱-۱۱	مقدمه	۵۶۶
۲-۱۱	انرژی کرنشی	۵۶۶
۳-۱۱	چگالی انرژی کرنشی	۵۶۷
۴-۱۱	انرژی کرنشی الاستیک برای تنش‌های قائم	۵۶۹
۵-۱۱	انرژی کرنشی الاستیک برای تنش برشی	۵۷۱
۶-۱۱	انرژی کرنشی برای حالت کلی تنش	۵۷۳
۷-۱۱	بارگذاری ضربه‌ای	۵۸۲
۸-۱۱	طراحی در بارهای ضربه‌ای	۵۸۴
۹-۱۱	گاز و انرژی در یک بار تنها	۵۸۵



۵۸۷	..... ۱۰-۱۱ خیز تحت یک بار تنها با روش کار-انرژی
۵۹۵	..... ۱۱-۱۱ کار و انرژی تحت چند بار
۵۹۷	..... ۱۲-۱۱ قضیه کاستیلیانو
۵۹۸	..... ۱۳-۱۱ تعیین خیز با استفاده از قضیه کاستیلیانو
۶۰۱	..... ۱۴-۱۱ سازه‌های نامعین استاتیکی
۶۱۱	..... مرور و خلاصه فصل ۱۱

## پیوست‌ها

۶۱۹

۶۲۱	..... الف ممان سطوح
۶۲۹	..... ب خواص نوعی مواد صنعتی
۶۳۱	..... ج خواص مقاطع فولادی نورد شده
۶۳۷	..... د خیز و شیب تیرها

۱

## مقدمه مفهوم تنش



در این فصل، تنش‌های موجود در اغلب اجزای دستگاه حفاری بالا (مانند عضوهای دنیرویی، اکسل‌ها، پیچ و مهره‌ها و بین‌ها) بررسی می‌شوند.



## ۱-۱ مقدمه

هدف اصلی از مطالعه مقاومت مصالح این است که مهندسان به ابزار تحلیل و طراحی انواع ماشین آلات و سازه‌هایی که تحت بار قرار دارند دست یابند.

در تحلیل و طراحی هر سازه‌ای، با تنش و تغییر شکل سر و کار داریم. لذا، در فصل اول، مفهوم تنش را مطالعه می‌کنیم.

در قسمت ۲-۱، روش‌های بنیادی در استاتیک را مرور، و از آنها برای تعیین نیروها در عضوهای مفصلی استفاده می‌کنیم. در قسمت ۳-۱، مفهوم تنش در عضو یک سازه و نحوه تعیین تنش را از نیروی موجود در آن عضو بررسی می‌کنیم. پس از بحث مختصری درباره تحلیل و طراحی مهندسی در قسمت ۴-۱، تنش‌های قائم در یک عضو را که تحت بارگذاری محوری است در قسمت ۵-۱، و تنش‌های برشی ناشی از اعمال نیروهای عرضی مساوی و مخالف را در قسمت ۶-۱، و تنش‌های تکیه‌گاهی ناشی از پیچ و مهره‌ها و مفصل‌ها را در قسمت ۷-۱ مطالعه می‌کنیم. این مفاهیم را برای تعیین تنش در عضوهای سازه‌ای قسمت ۲-۱ به کار می‌بریم.

قسمت اول این فصل را با توصیف روش حل یک مسئله (قسمت ۹-۱) و با بحثی درباره دقت عددی که در محاسبات مهندسی به کار می‌رود (قسمت ۱۰-۱) به پایان می‌بریم.

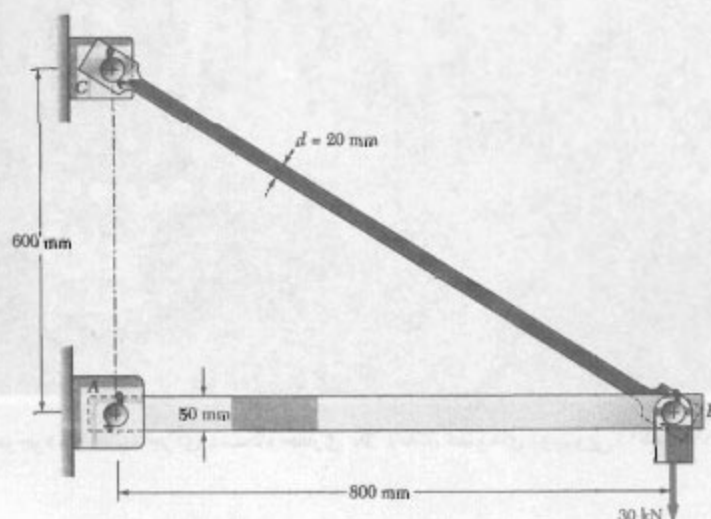
در قسمت ۱-۱، که در آن مجدداً یک عضو دینروبی تحت بارگذاری محوری مورد بررسی قرار می‌گیرد، می‌بینیم که تنش‌های وارد بر یک صفحه مایل شامل تنش‌های قائم و برشی است، و در قسمت ۱۲-۱ خواهیم دید که برای توصیف حالت تنش در یک نقطه از جسمی که تحت کلی‌ترین شرایط بارگذاری است نیاز به شش مؤلفه است.

سرانجام، در قسمت ۱۳-۱، استقامت نهایی یک ماده را از نمونه آزمایشی تعیین می‌کنیم و از آن برای محاسبه بار مجاز یک عضو ساختمانی استفاده می‌کنیم.

## ۲-۱ مرور روش‌های استاتیک

در این قسمت، روش‌های بنیادی استاتیک را برای تعیین نیروها در عضوهای یک سازه ساده مرور می‌کنیم.

سازه نشان داده شده در شکل ۱-۱ را، که برای تحمل بار  $30 \text{ kN}$  است، در نظر بگیرید. این سازه از بازوی  $AB$  با مقطع عرضی مستطیلی  $50 \times 30 \text{ mm}$  و از میله  $BC$  با مقطع عرضی دایره‌ای به قطر  $20 \text{ mm}$  تشکیل شده است. این بازو و میله توسط مفصل  $B$  به هم متصل شده‌اند و توسط مفصل‌ها و بست‌ها، به ترتیب، در  $A$  و  $C$  نگه داشته شده‌اند. در گام اول، سازه را از تکیه‌گاه‌های  $A$  و  $C$  جدا می‌کنیم. سپس، با ترسیم نمودار آزاد آن، واکنش‌هایی را که این تکیه‌گاه‌ها بر سازه وارد می‌کنند نشان می‌دهیم (شکل ۲-۱). توجه کنید که با



شکل ۱-۱

با جایگذاری  $A_y$  از (۴-۱) در (۳-۱)، داریم  $C_y = +30 \text{ kN}$ . با بیان برداری واکنش‌ها در  $A$  و  $C$ ، نتیجه می‌شود:

$$A = 40 \text{ kN} \rightarrow \quad C_x = 40 \text{ kN} \leftarrow, \quad C_y = 30 \text{ kN} \uparrow$$

توجه کنید که واکنش در  $A$  در امتداد محور بازوی  $AB$  است و در آن عضو ایجاد فشار می‌کند. چون مولفه‌های  $C_x$  و  $C_y$ ، به ترتیب، با مولفه‌های افقی و عمودی فاصله  $B$  تا  $C$  متناسب‌اند، نتیجه می‌شود واکنش در  $C$  برابر با  $50 \text{ kN}$  است. این واکنش در امتداد میله  $BC$  قرار دارد و در آن ایجاد کشش می‌کند.

نتایج بالا را با توجه به این مطلب نیز می‌توان به‌دست آورد که  $AB$  و  $BC$  عضوهای دینروبی هستند؛ یعنی، عضوهایی که فقط از دو نقطه تحت تأثیر نیرو قرار می‌گیرند ( $A$  و  $B$  برای عضو  $AB$ ،  $B$  و  $C$  برای عضو  $BC$ ). در حقیقت، برای یک عضو دینروبی، خطوط اثر برایندهای نیروهای وارد بر هر یک از این دو نقطه در خلاف جهت هم هستند و از این دو نقطه می‌گذرند. با استفاده از این خاصیت، و با در نظر گرفتن نمودار آزاد مفصل  $B$ ، می‌توان حل ساده‌تری را به‌دست آورد. نیروهای وارد بر مفصل  $B$  عبارتند از نیروهای  $F_{AB}$ ،  $F_{BC}$  و بار  $30 \text{ kN}$  (شکل ۴-۱ الف). با ترسیم مثلث نیروها می‌توان گفت مفصل  $B$  در تعادل است (۴-۱ ب).

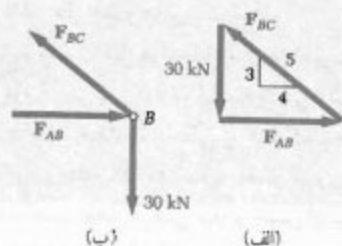
چون نیروی  $F_{BC}$  در امتداد عضو  $BC$  است، شیب آن با شیب  $BC$  برابر است. بنابراین،

$$\frac{F_{AB}}{4} = \frac{F_{BC}}{5} = \frac{30 \text{ kN}}{3}$$

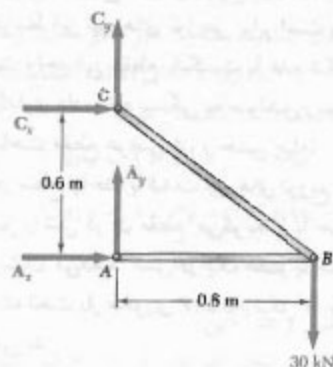
در نتیجه،

$$F_{AB} = 40 \text{ kN} \quad F_{BC} = 50 \text{ kN}$$

نیروهای  $F_{AB}$  و  $F_{BC}$  که از مفصل  $B$ ، به ترتیب، بر بازوی  $AB$  و میله  $BC$  وارد می‌شوند مساوی و متضاد با  $F_{AB}$  و  $F_{BC}$  هستند (شکل ۴-۱ د).



شکل ۴-۱



شکل ۲-۱

حذف جزئیات غیر ضرور می‌توان ترسیم نمودار آزاد را ساده کرد. گفتنی است که  $AB$  و  $BC$  عضوهای دینروبی هستند. ولی بدون توجه به این مطلب و با در نظر گرفتن جهت‌های فرضی برای واکنش‌های مجهول  $A$  و  $C$ ، تحلیل را پیش می‌بریم. لذا، هر یک از این واکنش‌ها را با دو مولفه  $A_x$  و  $A_y$  در  $A$ ، و  $C_x$  و  $C_y$  در  $C$  نشان می‌دهیم و معادله‌های تعادل زیر را می‌نویسیم:

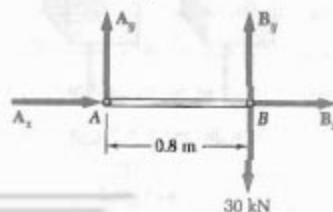
$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 : \quad A_x(0.6 \text{ m}) - (30 \text{ kN})(0.8 \text{ m}) &= 0 \\ A_x &= +40 \text{ kN} \end{aligned} \quad (1-1)$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 : \quad A_x + C_x &= 0 \\ C_x &= -A_x, \quad C_x = -40 \text{ kN} \end{aligned} \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 : \quad A_y + C_y - 30 \text{ kN} &= 0 \\ A_y + C_y &= +30 \text{ kN} \end{aligned} \quad (3-1)$$

دو تا از چهار مجهول را پیدا کردیم، ولی نمی‌توانیم دو مجهول دیگر را از این معادله‌ها بیابیم. از نمودار آزاد سازه نیز نمی‌توانیم معادله مستقل اضافی به‌دست آوریم. لذا، سازه را جزء-جزء می‌کنیم. با در نظر گرفتن نمودار آزاد بازوی  $AB$  (شکل ۳-۱)، معادله تعادل زیر را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 : \quad -A_y(0.8 \text{ m}) &= 0 \\ A_y &= 0 \end{aligned} \quad (4-1)$$



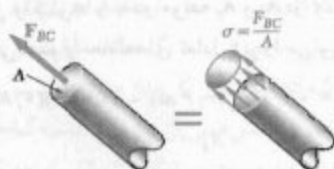
شکل ۳-۱

در تمام مساحت مقطع عرضی توزیع شده‌اند (شکل ۷-۱) و شدت متوسط این نیروهای توزیعی برابر است با نیروی وارده بر مساحت واحد این مقطع. شکست یا عدم شکست میله  $BC$  تحت بارگذاری داده شده بستگی به عوامل زیر دارد: نیروی  $F_{BC}$ ، مساحت مقطع عرضی  $A$ ، و جنس میله.

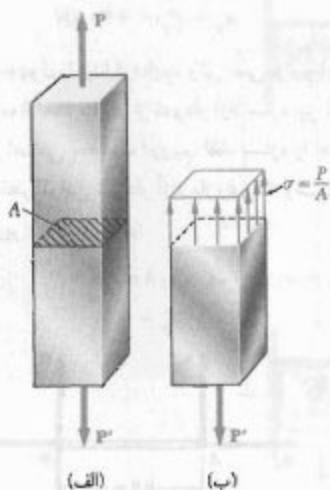
نیرو در سطح واحد، یا شدت نیروهای توزیع شده روی یک مقطع معین را تنش در آن مقطع می‌گویند و با حرف یونانی  $\sigma$  (سیگما) نشان می‌دهند. تنش در یک عضو با مساحت مقطع عرضی  $A$  که تحت بار محوری  $P$  است (شکل ۸-۱) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (۵-۱)$$

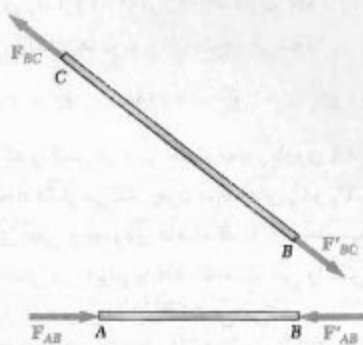
از علامت مثبت برای تنش کششی و از علامت منفی برای تنش فشاری استفاده می‌شود.



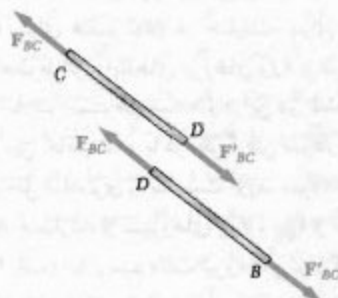
شکل ۷-۱



شکل ۸-۱



شکل ۵-۱



شکل ۶-۱

با معلوم بودن نیروها در دو سر عضوها، می‌توان نیروهای داخلی را در آنها به دست آورد. اگر میله  $BC$  را در نقطه اختیاری  $D$  مقطع ببریم، دو قسمت  $BD$  و  $CD$  خواهیم داشت (شکل ۶-۱). برای تعادل این دو قسمت، نیروهای  $50 \text{ kN}$  را باید در  $D$  بر هر دو وارد کرد. لذا با اعمال بار  $30 \text{ kN}$  در نقطه  $B$ ، نیروی داخلی  $50 \text{ kN}$  در میله  $BC$  بوجود می‌آید. با توجه به جهت نیروهای  $F_{BC}$  و  $F'_{BC}$  در شکل ۶-۱، می‌توان گفت میله در کشش است. با روش مشابه می‌توان گفت نیروی داخلی در بازوی  $AB$  برابر با  $40 \text{ kN}$  است و بازو تحت فشار می‌باشد.

### ۳-۱ تنش در عضوهای یک سازه

گرچه نتایج قسمت قبل در تحلیل سازه‌ها اهمیت دارند، ولی با آنها نمی‌توان پیش‌بینی کرد که آیا سازه می‌تواند بار وارده را تحمل کند یا نه. مثلاً، گسیختگی یا عدم گسیختگی میله  $BC$  تحت بارگذاری داده شده نه تنها به مقدار نیروی داخلی  $F_{BC}$ ، بلکه به مساحت مقطع عرضی میله و جنس آن نیز بستگی دارد. در حقیقت، نیروی داخلی  $F_{BC}$  برابند نیروهای جزئی است که

معادله (۵-۱)،

$$\sigma_{all} = \frac{P}{A} \quad A = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{100 \times 10^6 \text{ Pa}} = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

اما  $A = \pi r^2$  در نتیجه،

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{500 \times 10^{-6} \text{ m}^2}{\pi}} = 12.62 \times 10^{-3} \text{ m} = 12.62 \text{ mm}$$

$$d = 2r = 25.2 \text{ mm}$$

یعنی، میله آلومینیومی به قطر ۲۵ mm یا بیشتر مناسب خواهد بود.

### ۵-۱ بارگذاری محوری؛ تنش قائم

میله BC، که در قسمت قبل به آن اشاره شد، یک عضو دوتیرویی است. لذا، نیروهای  $F_{BC}$  و  $F_{BC}$  که در دو سر B و C آن وارد می‌شوند (شکل ۵-۱) در امتداد محور میله قرار دارند. گفته می‌شود میله تحت بارگذاری محوری است. مثلاً، عضوهای خربای پل نشان داده شده در شکل ۹-۱ تحت بارگذاری محوری قرار دارند.

میله BC در شکل ۵-۱ را دوباره در نظر می‌گیریم. قبلاً، برای تعیین نیروی داخلی در میله و تنش متناظر، میله را در امتداد عمود بر محور مقطع زدیم؛ از این رو، نیروی داخلی بر صفحه این مقطع عمود بود (شکل ۷-۱) و تنش متناظر را تنش قائم می‌گویند. تنش قائم در عضوی که تحت بارگذاری محوری است از فرمول ۵-۱ به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (5-1)$$



شکل ۹-۱ خربای این پل از عضوهای دوتیرویی کششی یا فشاری تشکیل شده است.

با  $P$  برحسب نیوتن (N) و  $A$  برحسب متر مربع ( $\text{m}^2$ )، تنش  $\sigma$  برحسب  $\text{N/m}^2$  است. این واحد را پاسکال (Pa) می‌گویند. ولی، پاسکال کمیت بسیار کوچکی است و در عمل از مضرب‌های آن. مانند کیلوپاسکال (kPa)، مگاپاسکال (MPa) و گیگاپاسکال (GPa) استفاده می‌شود:

$$1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$$

### ۴-۱ تحلیل و طراحی

سازه شکل ۱-۱ را مجدداً در نظر بگیرید و فرض کنید میله BC، به قطر ۲۰ mm، از فولاد (با ماکزیمم تنش مجاز  $\sigma_{all} = 165 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. آیا میله BC می‌تواند بار وارده را تحمل کند؟ قبلاً، مقدار نیروی  $F_{BC}$  در میله ۵۰ kN به دست آمد. با استفاده از معادله ۵-۱، تنش ناشی از این بارگذاری را می‌یابیم:

$$P = F_{BC} = +50 \text{ kN} = +50 \times 10^3 \text{ N}$$

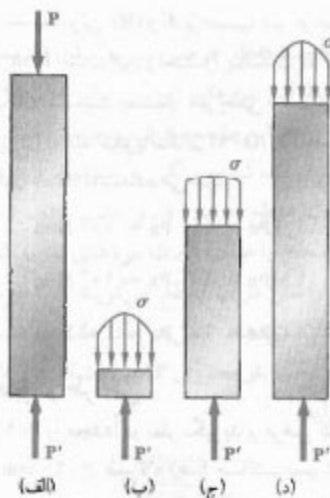
$$A = \pi r^2 = \pi \left( \frac{20 \text{ mm}}{2} \right)^2 = \pi (10 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{+50 \times 10^3 \text{ N}}{314 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = +159 \times 10^6 \text{ Pa} = +159 \text{ MPa}$$

چون  $\sigma$  حاصله کوچکتر از مقدار تنش مجاز فولاد است، نتیجه می‌شود که میله BC با اطمینان می‌تواند بار وارده را تحمل کند. برای تکمیل تحلیل، باید تنش فشاری در بازوی AB را تعیین، و تنش‌های ایجاد شده در مفصل‌ها و یاتاقانها را بیابیم. این کار را بعداً در این فصل انجام می‌دهیم. همچنین باید تعیین کنیم که آیا تغییرشکل‌های ایجاد شده بر اثر بارگذاری وارده قابل قبول‌اند یا نه. مطالعه تغییرشکل‌ها تحت بارهای محوری در فصل ۲ انجام می‌شود. نکته اضافی، که برای عضوهای فشاری باید در نظر گرفت، پایداری عضو است؛ یعنی، قابلیت آن برای تحمل بار وارده بدون اینکه تغییرشکل ناگهانی دهد. این موضوع را در فصل ۱۰ بررسی می‌کنیم.

نقش مهندس فقط تحلیل تنش در سازه‌ها و ماشین‌آلات موجود نیست، بلکه باید سازه‌ها و ماشین‌آلات جدید را برای انجام عملیات خاصی نیز طراحی نماید. برای مثال، مجدداً به سازه شکل ۱-۱ برمی‌گردیم، و فرض می‌کنیم می‌خواهیم از آلومینیم به تنس مجاز  $\sigma_{all} = 100 \text{ MPa}$  استفاده کنیم. نیرو در میله BC عبارت است از  $P = F_{BC} = 50 \text{ kN}$ ؛ از

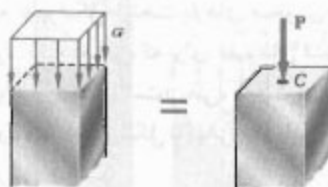




شکل ۱۱-۱

لذا، حجم زیر هر یک از سطوح تنش در شکل ۱۱-۱ با مقدار  $P$  برابر است. البته، این تنها اطلاعاتی است که از استاتیک می‌توان درباره توزیع تنش‌های قائم در مقاطع مختلف میله به‌دست آورد. توزیع واقعی تنش‌ها در یک مقطع معین، از مسائل نامعین استاتیکی است. برای اطلاعات بیشتر درباره این توزیع، باید تغییرشکل‌های ناشی از حالت‌های خاص اعمال بارها در دو سر میله را در نظر بگیریم. این را در فصل ۲ بررسی می‌کنیم.

در عمل، فرض می‌کنیم که توزیع تنش‌های قائم در عضوی که به طور محوری بارگذاری شده است یکنواخت می‌باشد، به جز در مجاورت نقاط اثر بارها که یکنواخت نیست. در این حالت، مقدار  $\sigma$  تنش با  $\sigma_{avg}$  برابر است و آن را از فرمول (۵-۱) می‌توان به‌دست آورد. با فرض توزیع یکنواخت تنش در مقطع عرضی، از استاتیک\* نتیجه می‌گیریم برآیند  $P$  نیروهای داخلی



شکل ۱۲-۱

\* نگاه کنید به:

Ferdinand P. Beer and E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1987, or *Vector Mechanics for Engineers*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1996, secs. 5.2 and 5.3.



شکل ۱۰-۱

گفتنی است که  $\sigma$  در فرمول (۵-۱)، مقدار متوسط تنش در روی مقطع عرضی نشان می‌دهد، نه تنش در یک نقطه خاص از مقطع عرضی را.

برای تعریف تنش در نقطه معین  $Q$  از مقطع عرضی، باید مساحت کوچک  $\Delta A$  را در نظر بگیریم (شکل ۱۰-۱). از تقسیم مقدار  $\Delta F$  بر  $\Delta A$ ، مقدار متوسط تنش را روی  $\Delta A$  می‌یابیم. با میل دادن  $\Delta A$  به سمت صفر، تنش در نقطه  $Q$  به‌دست می‌آید:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (۶-۱)$$

به طور کلی، مقدار تنش  $\sigma$  در نقطه معین  $Q$  از مقطع عرضی با مقدار تنش متوسطی که فرمول (۵-۱) می‌دهد متفاوت است، و در هر مقطع تغییر می‌کند. در میله باریکی که تحت بارهای متمرکز مساوی و متضاد  $P$  و  $P'$  قرار دارد (شکل ۱۱-۱ الف)، این تغییر در مقاطع دور از نقاط اثر بارهای متمرکز کوچک است (شکل ۱۱-۱ ج)، اما در مجاورت این نقاط قابل توجه می‌باشد (شکل ۱۱-۱ ب، و د).

از معادله (۶-۱) نتیجه می‌شود که مقدار برآیند نیروهای داخلی توزیعی چنین است:

$$\int dF = \int_A \sigma dA$$

اما تعادل هر یک از قسمت‌های میله شکل ۱۱-۱ نشان می‌دهد که این مقدار برابر است با مقدار بارهای متمرکز. یعنی،

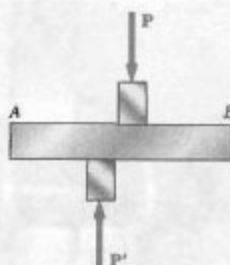
$$P = \int dF = \int_A \sigma dA \quad (۷-۱)$$

لنگر  $M = Pd^*$  در این حالت، توزیع نیروها و توزیع تنش‌های متناظر نمی‌توانند یکنواخت یا متقارن باشند (شکل ۱۱-۱). این مطلب را در فصل ۴ به تفصیل بررسی می‌کنیم.

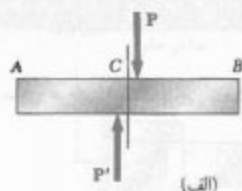
### ۶-۱ تنش برشی

در قسمت‌های ۱-۲ و ۳-۱، نیروهای داخلی و تنش‌های متناظر بر مقطع تحت بررسی عمود بودند. با اعمال نیروهای عرضی  $P$  و  $P'$  بر عضو  $AB$  (شکل ۱۵-۱)، تنش کاملاً متفاوتی به وجود می‌آید. با عبور یک مقطع در  $C$  بین نقاط اثر دو نیرو (شکل ۱۶-۱ الف)، نمودار قسمت  $AC$  به دست می‌آید (شکل ۱۶-۱ ب). از تعادل این قسمت نتیجه می‌شود که در صفحه مقطع عرضی نیروهای داخلی وجود دارد، و برآیند آنها  $P$  است. این نیروهای جزئی داخلی را نیروهای برشی، و برآیند آنها را بوش در آن مقطع می‌گویند. از تقسیم بوش  $P$  بر مساحت  $A$  مقطع عرضی، تنش برشی متوسط به دست می‌آید:

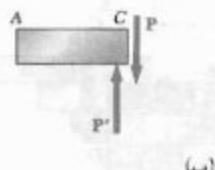
$$\tau_{avg} = \frac{P}{A} \quad (A-1)$$



شکل ۱۵-۱



(الف)



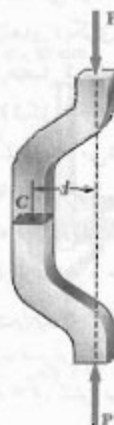
(ب)

شکل ۱۶-۱

در مرکزوار مقطع عرضی (نقطه  $C$  در شکل ۱۲-۱) وارد می‌شود. یعنی، توزیع یکنواخت تنش فقط وقتی امکان‌پذیر است که خط اثر بارهای متمرکز  $P$  و  $P'$  از مرکزوار مقطع عرضی تحت بررسی بگذرد (شکل ۱۳-۱). این نوع بارگذاری را بارگذاری مرکزی می‌گویند و فرض می‌شود که در تمام عضوهای دنیروی مستقیم، که در خراباها و سازه‌های مفصلی وجود دارند (مانند عضو شکل ۱۴-۱)، روی می‌دهد. اگر یک عضو دنیروی به طور محوری بارگذاری شود و بار دارای خروج از مرکز باشد (شکل ۱۴-۱ الف)، از شرایط تعادل قسمتی از عضو که در شکل ۱۴-۱ ب نشان داده شده است نتیجه می‌شود که نیروهای داخلی در یک مقطع معین معادل است با نیرویی  $P$  وارده در مرکزوار آن مقطع و کوپل  $M$  با



شکل ۱۳-۱

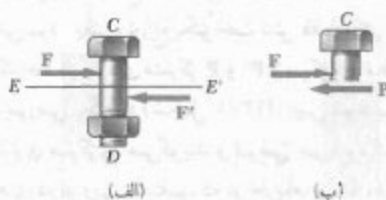


(الف)

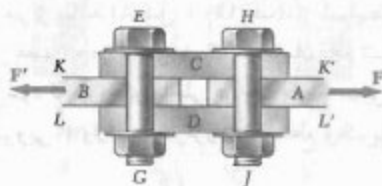


(ب)

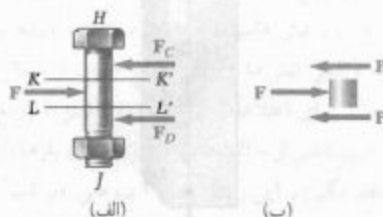
شکل ۱۴-۱



شکل ۱۹-۱



شکل ۲۰-۱



شکل ۲۱-۱

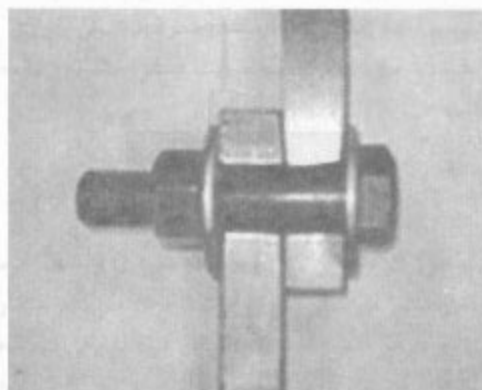
گفته می‌شود این پیچ و مهره تحت برش تنها قرار دارد. البته، حالت‌های دیگری از بارگذاری ممکن است روی دهد. مثلاً اگر برای متصل کردن صفحات  $A$  و  $B$  از ورق‌های  $C$  و  $D$  استفاده شود (شکل ۲۰-۱)، نیروی برشی در هر یک از دو صفحه  $KK'$  و  $LL'$  باعث می‌شود پیچ و مهره  $HJ$  (و نیز پیچ و مهره  $EG$ ) تحت برش قرار گیرد. گفته می‌شود این پیچ و مهره‌ها تحت برش دوگانه قرار دارند. برای تعیین تنش برشی متوسط در هر صفحه، نمودار آزاد پیچ و مهره  $HJ$  و نمودار آزاد قسمتی از پیچ و مهره را که بین این دو صفحه قرار دارد رسم می‌کنیم (شکل ۲۱-۱). چون برش  $P$  در هر یک از این مقاطع عبارت است از  $P = F/2$ ، تنش برشی متوسط چنین است:

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A} \quad (۱۰-۱)$$

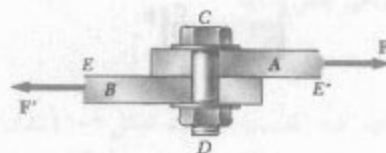
برخلاف آنچه که قبلاً برای تنش‌های قائم گفتیم، توزیع تنش‌های برشی در عرض مقطع را نمی‌توان یکنواخت فرض کرد. همانطور که در فصل ۶ خواهیم دید، مقدار واقعی تنش برشی از صفر در سطح عضو تا مقدار ماکزیمم  $\tau_{max}$ ، که می‌تواند بزرگتر از مقدار متوسط  $\tau_{ave}$  باشد، تغییر می‌کند.

تنش‌های برشی معمولاً در پیچ و مهره‌ها، مفصل‌ها و پرچها روی می‌دهد (شکل ۱۷-۱). دو صفحه  $A$  و  $B$  را که با پیچ و مهره  $CD$  به هم متصل شده‌اند در نظر بگیرید (شکل ۱۸-۱). اگر این صفحات تحت نیروهای کششی  $F$  قرار گیرند، تنش‌هایی در صفحه  $EE'$  به وجود می‌آید. با ترسیم نمودارهای پیچ و مهره و قسمت واقع در بالای صفحه  $EE'$  (شکل ۱۹-۱)، نتیجه می‌شود که برش  $P$  در این مقطع با  $F$  برابر است. تنش برشی متوسط در این مقطع چنین است:

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \quad (۹-۱)$$



شکل ۱۷-۱ نمای عرضی اتصال پیچی تحت برش

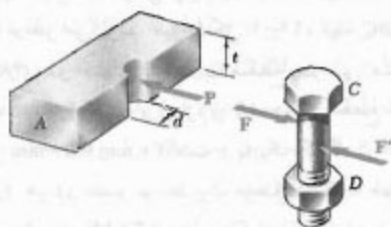


شکل ۱۸-۱

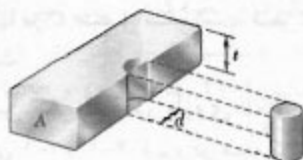
## ۷-۱ تنش تکیه‌گاهی در اتصالات

پیچ و مهره، مفصل‌ها و پرچ‌ها، تنش‌هایی را در امتداد سطح تماس عضوهای متصله به وجود می‌آورند. مثلاً، دو صفحه  $A$  و  $B$  را که توسط پیچ و مهره  $CD$  به هم متصل‌اند (شکل ۱-۲۲) در نظر بگیرید. پیچ و مهره، نیروی  $P$  را بر صفحه  $A$  وارد می‌کند که برابر و متضاد با نیروی  $F$  وارده از صفحه بر پیچ و مهره است (شکل ۱-۲۲)؛ نیروی  $P$  بر ایند نیروهای جزئی توزیع شده روی سطح داخلی نیم استوانه‌ای به قطر  $d$  و به طول  $t$  است (ضخامت صفحه است). چون توزیع این نیروها و تنش‌های متناظر - کاملاً پیچیده است، در عمل از مقدار متوسط نامی تنش،  $\sigma_b$ ، که آن را تنش تکیه‌گاهی می‌گویند استفاده می‌شود. این تنش، از تقسیم بار  $P$  بر مساحت مستطیلی تصویر پیچ و مهره روی مقطع صفحه بعدست می‌آید (شکل ۱-۲۳). این مساحت برابر است با  $td$ ، که در آن  $t$  ضخامت صفحه و  $d$  قطر پیچ و مهره است. در نتیجه،

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \quad (1-11)$$

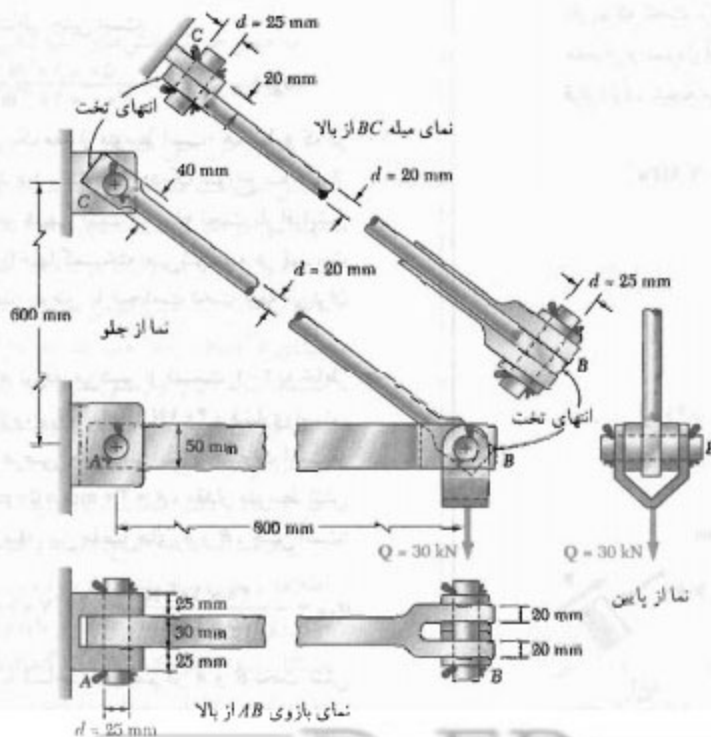


شکل ۱-۲۲



شکل ۱-۲۳

۸-۱ کاربرد تنش در تحلیل و طراحی سازه‌های ساده  
حال، می‌خواهیم تنش در اعضا و اتصالات سازه‌های ساده دوبعدی مختلف را تعیین، و این سازه‌ها را طراحی کنیم.



شکل ۱-۲۴

ب- تعیین تنش برشی در اتصالات مختلف. برای تعیین تنش برشی در اتصالاتی مانند پیچ و مهره، مفصل یا پرچ، ابتدا نیروهای وارده از عضوهای مختلفی را که توسط این اتصالات به هم متصل شده‌اند نشان می‌دهیم. مثلاً، برای مفصل C در شکل ۲۵-۱ الف، شکل ۲۵-۱ ب را رسم می‌کنیم. در این شکل، نیروی ۵۰ kN وارده از عضو BC بر مفصل C و نیروی مساوی و متضاد با آن را که از براکت وارد می‌شود نشان می‌دهیم. با ترسیم قسمتی از مفصل واقع در زیر صفحه DD' که تنش‌های برشی در آنجا به وجود می‌آیند (شکل ۲۵-۱ ج)، نتیجه می‌شود برش در آن صفحه عبارت است از  $P = 50 \text{ kN}$ . مساحت مقطع عرضی مفصل برابر است با:

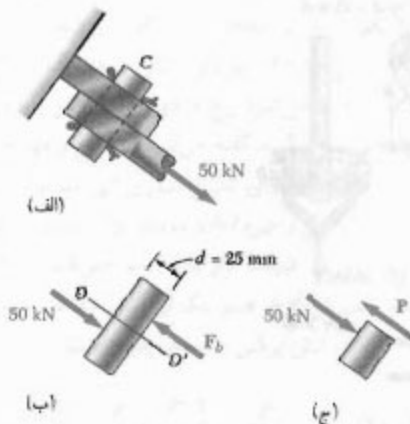
$$A = \pi r^2 = \pi \left( \frac{25 \text{ mm}}{2} \right)^2 = \pi (12.5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

لذا، مقدار متوسط تنش برشی در مفصل C چنین است:

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 102 \text{ MPa}$$

حال، مفصل A را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۶-۱) و توجه داریم که تحت برش دوگانه است. با ترسیم نمودار آزاد این مفصل و نمودار آزاد قسمتی از آن که بین صفحات EE' و DD' قرار دارد، نتیجه می‌شود که  $P = 20 \text{ kN}$ ، یعنی،

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 40.7 \text{ MPa}$$



شکل ۲۵

به سازه شکل ۱-۱ برمی‌گردیم و تکیه‌گاه‌ها و اتصالات A و B و C را در نظر می‌گیریم. طبق شکل ۱-۲۴، میله BC به قطر ۲۰ mm دارای دو انتهای تخت با مقطع عرضی مستطیلی  $20 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$  است، و بازوی AB دارای مقطع عرضی مستطیلی  $20 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$  است و با یک رگاپیک در انتهای B اتصال دارد. هر دو عضو توسط یک مفصل در B به هم متصل شده‌اند. در B، بار  $30 \text{ kN}$  توسط براکت U شکل وارد شده است. بازوی AB توسط پیچی که در یک براکت دوگانه جاذبه شده است در A نگه داشته شده است، و میله BC توسط یک براکت تنها در C متصل شده است. قطر تمام مفصل‌ها ۲۵ mm است.

الف- تعیین تنش قائم در بازوی AB و میله BC. طبق قسمت‌های ۱-۲ و ۱-۴، نیرو در میله BC برابر است با  $F_{BC} = 50 \text{ kN}$  و مساحت مقطع عرضی دایره‌ای برابر است با  $A = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ . تنش متوسط نامی متناظر عبارت است از  $\sigma_{BC} = +159 \text{ MPa}$  ولی، قسمت‌های تخت میله نیز تحت کشش‌اند و در باریک‌ترین قسمت، که سوراخی در آنجا قرار دارد،

$$A = (20 \text{ mm})(40 \text{ mm} - 25 \text{ mm}) = 300 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

مقدار متوسط تنش متناظر چنین است:

$$(\sigma_{BC})_{\text{در سوراخ}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{300 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 167 \text{ MPa}$$

توجه کنید که این یک مقدار متوسط است؛ همانطور که در قسمت ۲-۱۸ خواهید دید، تنش در نزدیک سوراخ به مقدار خیلی بیشتری می‌رسد. بدیهی است که میله تحت بار افزایشی در نزدیک یکی از سوراخها گسیخته می‌شود نه در قسمت استوانه‌ای؛ لذا، با افزایش عرض یا ضخامت تخت میله می‌توان طراحی آن را بهبود داد.

حال، به بازوی AB توجه می‌کنیم. از قسمت ۱-۲ به خاطر داریم که نیرو در این بازو،  $F_{AB}$ ، برابر با  $40 \text{ kN}$  و فشاری است. چون مساحت مقطع عرضی مستطیلی بازو عبارت است از  $A = 30 \text{ mm} \times 50 \text{ mm} = 1500 \times 10^{-6} \text{ m}^2$  مقدار متوسط تنش قائم در قسمت اصلی میله، بین مفصل‌های A و B، چنین است:

$$\sigma_{AB} = -\frac{40 \times 10^3 \text{ N}}{1500 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = -26.7 \times 10^6 \text{ Pa} = -26.7 \text{ MPa}$$

توجه کنید که مقاطع با مساحت میثیم در A و B تحت تنش نیستند، زیرا بازو تحت فشار است و مفصل‌ها را هل می‌دهد (در حالتی که میله BC مفصل‌ها را می‌کشد).



قسمت‌های  $DE$  (شکل ۲۷-۱ ب) و  $DG$  (شکل ۲۷-۱ ج)، نتیجه می‌شود برش در مقاطع  $E$  و  $G$ ، به ترتیب، عبارتند از  $P_E = ۱۵ \text{ kN}$  و  $P_G = ۲۵ \text{ kN}$ . چون بارگذاری مفصل به طور متقارن است، ماکزیمم مقدار برش در مفصل  $B$  عبارت است از  $P_G = ۲۵ \text{ kN}$  و بیشترین تنش‌های برشی در مقاطع  $H$  و  $G$  روی می‌دهند؛ در این مقاطع،

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P_G}{A} = \frac{۲۵ \text{ kN}}{۴۹۱ \times ۱۰^{-۶} \text{ m}^2} = ۵۰/۹ \text{ MPa}$$

ج - تعیین تنش‌های تکیه‌گاهی. برای تعیین تنش تکیه‌گاهی نامی در  $A$  از عضو  $AB$ ، از فرمول (۱۱-۱) استفاده می‌کنیم. از شکل ۲۴-۱،  $d = ۲۵ \text{ mm}$  و  $t = ۳۰ \text{ mm}$ ، چون  $P = F_{AB} = ۴۰ \text{ kN}$

$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{۴۰ \text{ kN}}{(۳۰ \text{ mm})(۲۵ \text{ mm})} = ۵۳/۳ \text{ MPa}$$

برای تعیین تنش تکیه‌گاهی در براکت  $A$ ، از  $d = ۲۵ \text{ mm}$  و  $t = ۲(۲۵ \text{ mm}) = ۵۰ \text{ mm}$  استفاده می‌کنیم:

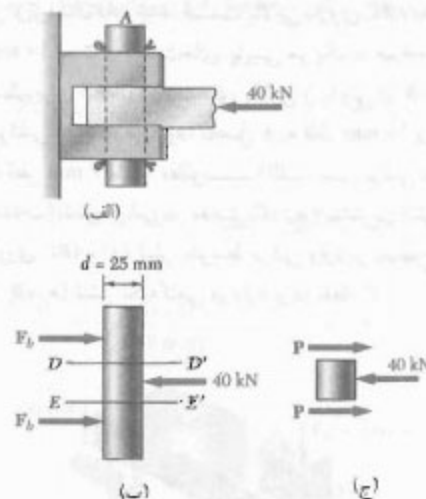
$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{۴۰ \text{ kN}}{(۵۰ \text{ mm})(۲۵ \text{ mm})} = ۳۲/۰ \text{ MPa}$$

به همین طریق، تنش‌های تکیه‌گاهی در  $B$  از عضو  $AB$ ، در  $C$  و از عضو  $BC$ ، و در براکت  $C$  را می‌یابیم.

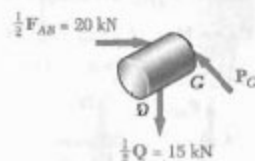
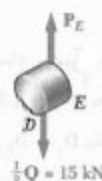
### ۹-۱ روش حل مسائل

مسائل مقاومت مصالح را باید به عنوان یک مسئله واقعی مهندسی در نظر گرفت. با تجربه و ابتکار، به سهولت می‌توان مسئله را درک و فرمول‌بندی کرد؛ در این رابطه، بیان مسئله به طور واضح نیز نقش مهمی دارد. مسئله را باید با کاربرد اصول بنیادی استاتیک و مقاومت مصالح حل کرد. پس از تعیین پاسخ مسئله، باید آن را وارسی کرد. در اینجا مجدداً می‌توان از احساس و تجربه بهره گرفت. اگر نتیجه حاصل رضایتبخش نباشد، فرمول‌بندی مسئله، صحت روش‌های مورد استفاده در حل مسئله و دقت محاسبات را باید به دقت وارسی کرد.

بیان مسئله باید واضح، دقیق، و شامل اطلاعات داده شده و اطلاعات مورد نیاز باشد. طرحواره ساده‌ای که تمام کمیت‌های ضروری موجود را نشان دهد نیز باید رسم کرد. برای حل اغلب مسائل، ابتدا بایدواکنش در تکیه‌گاهها، لنگرها و نیروهای داخلی را تعیین کرد. برای این منظور، باید یک یا چند نمودار آزاد را رسم کرد (در قسمت ۲-۱)، و با نوشتن معادله‌های تعادل به



شکل ۲۶-۱

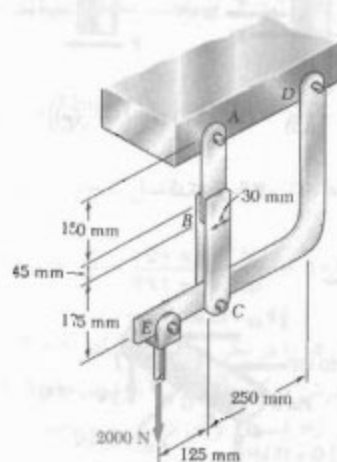


شکل ۲۷-۱

اکنون، مفصل  $B$  را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۷-۱ الف). این مفصل را می‌توان به پنج قسمت تقسیم کرد، که هر کدام تحت نیروهای وارده از بازو، میله، و براکت قرار دارند. باید در نظر گرفت

## مسئله نمونه ۱-۱

در آویز نشان داده شده، قسمت بالایی بازوی  $ABC$  به ضخامت  $10 \text{ mm}$  است و قسمت‌های پایینی هر یک به ضخامت  $6 \text{ mm}$  است. برای اتصال قسمت‌های بالایی و پایینی در  $B$ ، از چسب اپوکسی استفاده می‌شود. مفصل  $A$  به قطر  $10 \text{ mm}$  و مفصل  $C$  به قطر  $6 \text{ mm}$  است. مطلوب است: (الف) تنش برشی در مفصل  $A$ ، (ب) تنش برشی در مفصل  $C$ ، (ج) بیشترین تنش قائم در بازوی  $ABC$ ، (د) تنش متوسط برشی وارد بر سطوح چسبی در  $B$ ، (ه) تنش تکیه‌گاهی در بازو و در نقطه  $C$ .



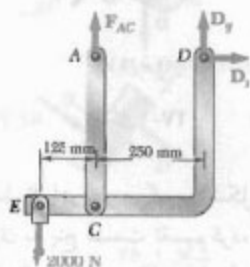
## حل

جسم آزاد تمام آویز. چون بازوی  $ABC$  یک عضو دینروبی است، واکنش در  $A$  به صورت عمودی است؛ واکنش در  $D$  را با مؤلفه‌های  $D_x$  و  $D_y$  نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0:$$

$$(2000 \text{ N})(375 \text{ mm}) - F_{AC}(250 \text{ mm}) = 0$$

$$F_{AC} = +3000 \text{ N} \quad (\text{کششی})$$



حل نیروهای مجهول پرداخت. سپس، تنش‌ها و تغییرشکل‌های مورد نیاز را محاسبه کرد.

پس از تعیین پاسخ، باید آن را به دقت و اوسی کرد. با رعایت آحاد در محاسبات و وارسی آحاد پاسخ می‌توان به علت اشتباهات پی برد. مثلاً، در طراحی میله‌ای که در قسمت ۱-۴ بررسی شد، پس از کاربرد آحاد در محاسبات، دیدیم که قطر مورد نیاز میله برحسب میلیمتر بیان شد که واحد درستی است؛ اگر واحد دیگری به دست می‌آوردیم، در جایی اشتباهی روی داده بود.

با جایگذاری مقادیر عددی حاصل در معادله‌ای که هنوز مورد استفاده قرار نگرفته است، معمولاً خطای محاسبه پیدا می‌شود.

## ۱-۱۰ دقت عددی

دقت حل مسئله بستگی به دو مورد زیر دارد: (۱) دقت داده‌ها، (۲) دقت محاسبات.

دقت حل نباید بیشتر از دقت دو مورد بالا باشد. مثلاً، اگر بار وارد بر یک تیر  $300 \text{ kN}$  و خطای ممکن آن  $400 \text{ N}$  باشد، خطای نسبی که میزان دقت داده‌ها را می‌سنجد چنین است:

$$\frac{400 \text{ N}}{300 \text{ kN}} = 0.00133 = 0.13\%$$

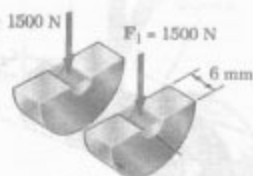
لذا، هنگام محاسبه واکنش در یکی از تکیه‌گاه‌های تیر نمی‌توان آن را به صورت  $57288 \text{ N}$  بیان کرد. دقت محاسبات هر چه باشد، دقت حل نمی‌تواند بیشتر از  $0.13\%$  درصد باشد و خطای ممکن پاسخ می‌تواند به اندازه  $74 \text{ N}$  ( $0.13\%$  از  $57288 \text{ N}$ ) باشد. پاسخ صحیح به صورت  $57288 \pm 74 \text{ N}$  است.

در مسائل مهندسی، دقت داده‌ها به ندرت بیشتر از  $0.2\%$  درصد است. بنابراین، پاسخ این مسائل را به ندرت با دقت بیش از  $0.2\%$  درصد می‌نویسند. به عنوان یک قاعده عملی، برای ثبت اعدادی که با  $10^4$  شروع می‌شوند از ۴ رقم، و برای سایر اعداد از ۳ رقم استفاده می‌شود. در یک مسئله، دقت داده‌ها باید با هم قابل مقایسه باشند مگر اینکه خلاف آن ذکر شده باشد. مثلاً، نیروی  $160 \text{ N}$  به صورت  $1600 \text{ N}$  و نیروی  $60 \text{ N}$  به صورت  $6000 \text{ N}$  نوشته می‌شود.

مهندسان و دانشجویان از ماشین حساب و کامپیوتر خیلی استفاده می‌کنند. سرعت و دقت این وسایل باعث سهولت محاسبات عددی در حل اغلب مسائل می‌شود. ولی، دانشجویان نباید تعداد ارقام با معنی را که ثبت می‌کنند بیشتر از تعداد مورد نیاز باشد. همانطور که در بالا گفته شد، دقت بیش از  $0.2\%$  درصد در حل مسائل مهندسی به ندرت مورد نیاز است.

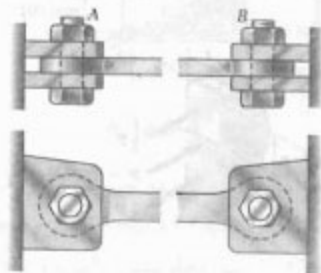
هر تنش تکیه گاهی در بازو در نقطه  $C$ ، برای هر قسمت بازو،  
 $F_1 = 1500 \text{ N}$  و مساحت نامی تکیه گاهی برابر است با  
 $(6 \text{ mm})(6 \text{ mm}) = 36 \text{ mm}^2$  می نویسیم:

$$\sigma_b = \frac{F_1}{A} = \frac{1500 \text{ N}}{36 \text{ mm}^2} \Rightarrow \sigma_b = 41.7 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



### مسئله نمونه ۱-۲

یک میله مهار فولادی برای تحمل نیروی کششی  $P = 120 \text{ kN}$  طراحی شده است. این میله بین پراکت های دوتایی  $A$  و  $B$  پیچ شده است. میله از یک ورق به ضخامت  $40 \text{ mm}$  ساخته شده است. ماکزیمم تنش های مجاز برای فولاد به کار رفته عبارتند از:  $\sigma = 175 \text{ MPa}$ ،  $\tau = 100 \text{ MPa}$ ،  $\sigma_b = 350 \text{ MPa}$ ، مطلوب است: (الف) قطر  $d$  پیچ و مهره، (ب) اندازه  $h$  در هر انتهای میله، (ج) اندازه  $h$  میله.



حل

الف. قطر پیچ و مهره. چون پیچ و مهره تحت برش دوگانه است،  
 $F_1 = \frac{1}{2}P = 60 \text{ kN}$ ، است.

$$\tau = \frac{F_1}{A} = \frac{60 \text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2} \Rightarrow 100 \text{ MPa} = \frac{60 \text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi d^2}$$

$$\Rightarrow d = 27.6 \text{ mm}$$

از  $d = 28 \text{ mm}$  استفاده می کنیم.

حال، تنش تکیه گاهی بین ورق به ضخامت  $40 \text{ mm}$  و پیچ و مهره به قطر  $28 \text{ mm}$  را وارسی می کنیم:

$$\tau_b = \frac{P}{td} = \frac{120 \text{ kN}}{(0.7 \times 20 \text{ m})(0.7 \times 28 \text{ m})} = 111 \text{ MPa} < 350 \text{ MPa}$$

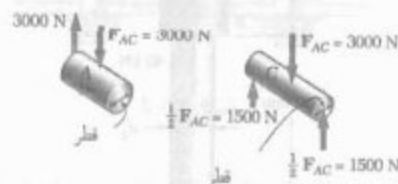
(درست است)

الف. تنش برشی در مفصل  $A$ ، چون این مفصل تحت برش تنهاست،

$$\tau_A = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{3000 \text{ N}}{\frac{1}{4}\pi (10 \text{ mm})^2} \quad \tau_A = 387.2 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

ب. تنش برشی در مفصل  $C$ ، چون این مفصل تحت برش دوگانه است،

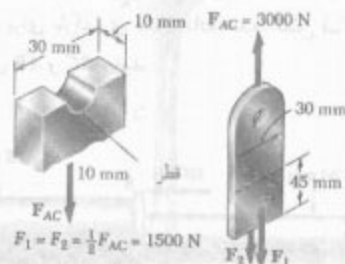
$$\tau_C = \frac{\frac{1}{2}F_{AC}}{A} = \frac{1500 \text{ N}}{\frac{1}{4}\pi (6 \text{ mm})^2} \quad \tau_C = 53.1 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



ج. بیشترین تنش قائم در بازوی  $ABC$ . بیشترین تنش در کمترین مساحت به وجود می آید؛ مساحت مینیمم نیز در مقطع  $A$  است، یعنی جایی که سوراخ  $10 \text{ mm}$  قرار دارد. می نویسیم:

$$\sigma_A = \frac{F_{AC}}{A_{\text{net}}} = \frac{3000 \text{ N}}{(10 \text{ mm})(70 \text{ mm} - 10 \text{ mm})} = \frac{3000 \text{ N}}{500 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma_c = 15 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

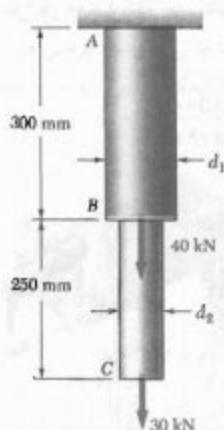


د. تنش متوسط برشی در  $B$ . توجه کنید که هر دو طرف قسمت بالایی بازو چسب خورده است و نیروی برشی وارد به هر طرف برابر است با  $F_1 = (3000 \text{ N}) / 2 = 1500 \text{ N}$  تنش متوسط برشی وارد بر هر سطح چنین است:

$$\tau_B = \frac{F_1}{A} = \frac{1500 \text{ N}}{(70 \text{ mm})(20 \text{ mm})} \quad \tau_B = 10.7 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

## مسائل

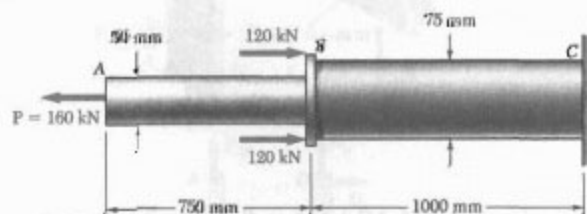
۱-۱ دو میله توپر استوانه‌ای  $AB$  و  $BC$  در  $B$  بهم جوش شده‌اند.  $d_1 = 50 \text{ mm}$  و  $d_2 = 30 \text{ mm}$ . تنش قائم متوسط در وسط میله‌های  $AB$  و  $BC$  را بیابید.



شکل م ۱-۱ و م ۲-۱

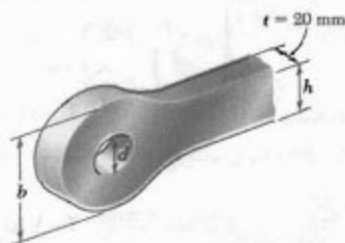
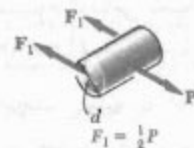
۲-۱ دو میله توپر استوانه‌ای  $AB$  و  $BC$  در  $B$  بهم جوش شده‌اند. تنش قائم متوسط در هر یک از دو میله نباید از  $140 \text{ MPa}$  بیشتر شود. کمترین مقدار مجاز قطرهای  $d_1$  و  $d_2$  را بیابید.

۳-۱ دو میله توپر استوانه‌ای  $AB$  و  $BC$  در  $B$  بهم جوش شده‌اند. برای بارگذاری نشان داده شده، تنش قائم را در وسط میله‌های  $AB$  و  $BC$  بیابید.



شکل م ۳-۱

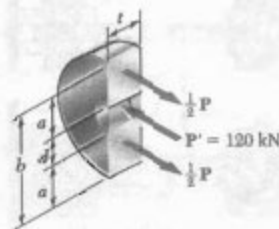
۴-۱ در مسئله ۳-۱، مطلوبست مقدار  $P$  به طوری که مقدار تنش کششی در میله  $AB$  با مقدار تنش فشاری در میله  $BC$  برابر باشد.



ب. اندازه  $b$ ، یکی از قسمت‌های انتهایی میله را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه ضخامت ورق  $20 \text{ mm}$  است و تنش متوسط کششی نباید از  $175 \text{ MPa}$  بیشتر شود، می‌نویسیم

$$\sigma = \frac{F_1}{ta} \Rightarrow 175 \text{ MPa} = \frac{60 \text{ kN}}{(0.02 \text{ m})a} \Rightarrow a = 171.14 \text{ mm}$$

$$b = d + 2a = 28 \text{ mm} + 2(171.14 \text{ mm}) \Rightarrow b = 370.28 \text{ mm}$$

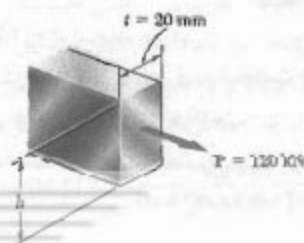


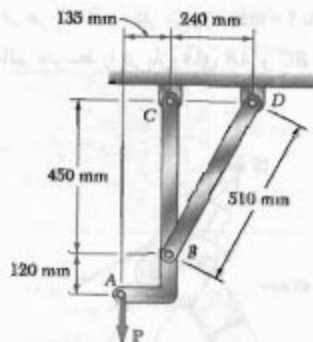
ج. اندازه  $h$ ، با توجه به اینکه ضخامت ورق  $20 \text{ mm}$  است،

$$\sigma = \frac{P}{th} \Rightarrow 175 \text{ MPa} = \frac{120 \text{ kN}}{(0.02 \text{ m})h}$$

$$\Rightarrow h = 34.3 \text{ mm}$$

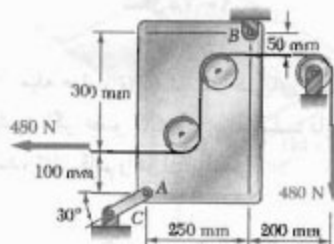
از  $h = 35 \text{ mm}$  استفاده می‌کنیم.





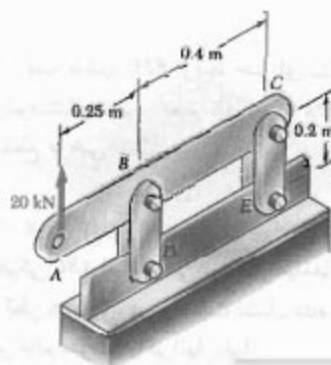
شکل م-۷

۸-۱ رابط  $AC$  دارای مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی به ضخامت ۳ mm و به عرض ۲۵ mm است. تنش قائم را در قسمت مرکزی این رابط بیابید.



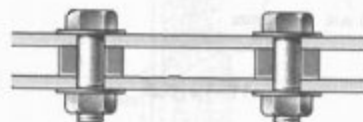
شکل م-۸

۹-۱ هر یک از چهار میله عمودی دارای مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی  $۸\text{ mm} \times ۳۶\text{ mm}$  است و قطر هر یک از مفصل ها ۱۶ mm است. مطلوبیت ماکزیمم مقدار تنش قائم متوسط: (الف) در رابط  $BD$ ، (ب) در رابط  $CE$ .



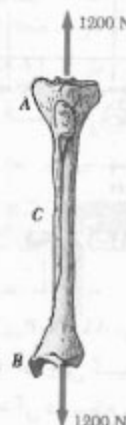
شکل م-۹

۵-۱ دو ورق فولادی توسط پیچ و مهره های فولادی پر استحكام به قطر ۱۶ mm به هم متصل شده اند. این پیچ و مهره ها در داخل فاصله اندازهای برنجی استوانه ای به طور محکم جازده شده اند. با توجه به اینکه تنش قائم متوسط در پیچ و مهره ها نباید از ۲۰۰ MPa و در فاصله اندازها نباید از ۱۳۰ MPa بیشتر شود، قطر خارجی فاصله اندازها را برای اقتصادی ترین مطمئن ترین طرح بیابید.



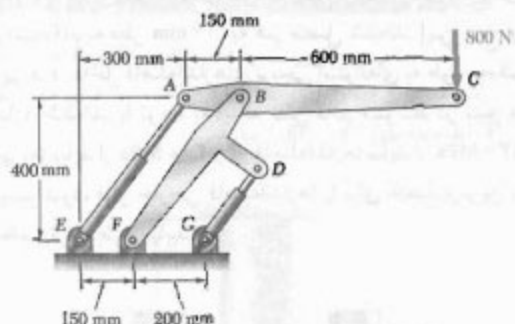
شکل م-۵

۶-۱ کرنش سنجی که در نقطه  $C$  روی سطح استخوان  $AB$  قرار دارد نشان می دهد که وقتی استخوان تحت تأثیر دو نیروی  $۱۲۰۰\text{ N}$  قرار می گیرد، تنش قائم متوسط در آن  $۳/۸۰\text{ MPa}$  است. با فرض اینکه مقطع عرضی استخوان در  $C$  به صورت حلقه ای است و قطر خارجی آن ۲۵ mm است، قطر داخلی مقطع عرضی استخوان را در  $C$  بیابید.



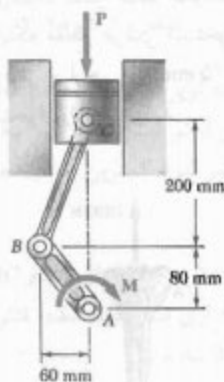
شکل م-۶

۷-۱ اگر قسمت مرکزی میله  $BD$  دارای مقطع عرضی یکنواخت  $۸۰۰\text{ mm}^2$  باشد، مطلوبیت مقدار  $P$  به طوری که تنش قائم در قسمت  $BD$  برابر با ۵۰ MPa باشد.



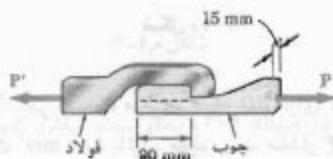
شکل م-۱۳

۱۴-۱ کوپل  $M$  با مقدار  $1500 \text{ N.m}$  بر یک لنگ وارد شده است. برای وضعیت نشان داده شده، مطلوبست: (الف) نیروی  $P$  مورد نیاز برای اینکه مجموعه در تعادل باشد، (ب) تنش قائم متوسط در شاتون  $BC$ ، با مساحت مقطع عرضی یکنواخت  $450 \text{ mm}^2$ .



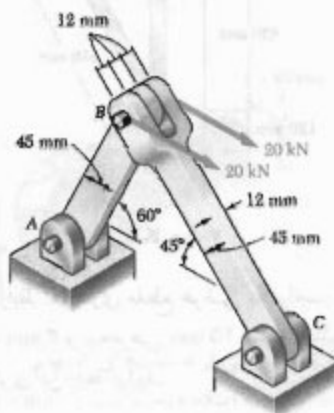
شکل م-۱۴

۱۵-۱ وقتی نیروی  $P$  به  $8 \text{ kN}$  می‌رسد، نمونه چوبی بر اثر نیروی برشی در امتداد خط چین گسیخته می‌شود. تنش برشی متوسط را هنگام گسیختگی در سطح برش بیابید.



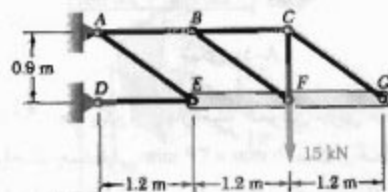
شکل م-۱۵

۱۰-۱ دو نیروی افقی  $20 \text{ kN}$  بر مفصل  $B$  اثر می‌کنند. اگر قطر پینی که در هر اتصال به کار می‌رود  $20 \text{ mm}$  باشد، ماکزیمم مقدار تنش قائم متوسط را در بازوهای  $AB$  و  $BC$  بیابید.



شکل م-۱۰

۱۱-۱ میله صلب  $EFG$  توسط خربای نشان داده شده تحمل می‌شود. اگر عضو  $CG$  یک میله صلب دایره‌ای به قطر  $18 \text{ mm}$  باشد، تنش قائم را در آن بیابید.

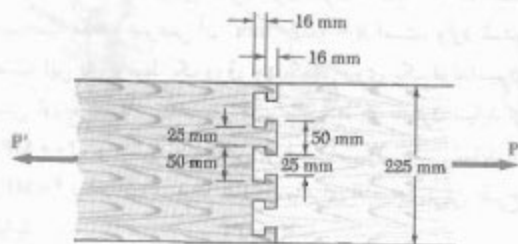


شکل م-۱۱ و م-۱۲

۱۲-۱ میله صلب  $EFG$  توسط خربای نشان داده شده تحمل می‌شود. تنش قائم در عضو  $AE$  برابر با  $105 \text{ MPa}$  است. مساحت مقطع عرضی آن را بیابید.

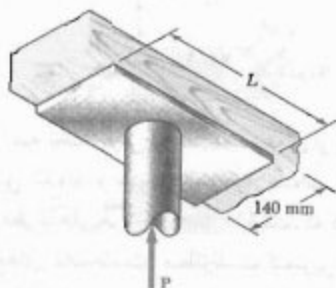
۱۳-۱ از دو سیلندر هیدرولیکی برای کنترل وضعیت بازوی مکانیکی  $ABC$  استفاده می‌شود. اگر میله‌های  $AE$  و  $DG$ ، هر یک به قطر  $20 \text{ mm}$ ، در وضعیت نشان داده شده موازی باشند، تنش قائم متوسط را در آنها بیابید.





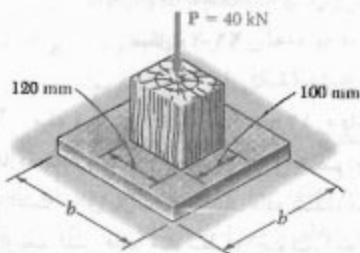
شکل م-۱۸

۱۹-۱ نیروی محوری  $P$  وارد بر ستون  $۷۵ \text{ kN}$  است. تنش تکیه‌گاهی در پایه چوبی نگهدار ستون نباید از  $۳۰ \text{ MPa}$  بیشتر شود. کمترین طول مجاز  $L$  پایه چوبی را بیابید.



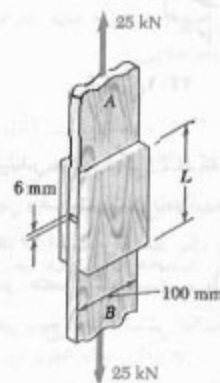
شکل م-۱۹

۲۰-۱ بار محوری  $۴۰ \text{ kN}$  بر یک تیر چوبی کوتاه وارد شده است. این تیر روی پایه بتنی قرار دارد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش تکیه‌گاهی وارد بر پایه بتنی، (ب) اندازه پایه، به طوری که تنش متوسط تکیه‌گاهی در خاک  $۱۴۵ \text{ kPa}$  شود.



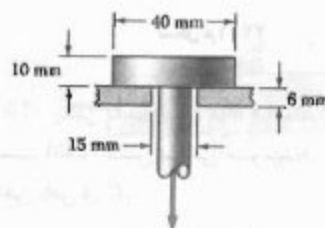
شکل م-۲۰

۱۶-۱ عضوهای چوبی  $A$  و  $B$ ، که توسط تخته‌های چند لایه به هم متصل شده‌اند، در تمام سطوح تماس چسب خورده‌اند. فاصله آزاد دو انتهای اعضا  $۸ \text{ mm}$  است. کمترین طول مجاز  $L$  را بیابید در صورتیکه بدانییم تنش متوسط برشی نباید از  $۸۲۰ \text{ kPa}$  بیشتر شود.



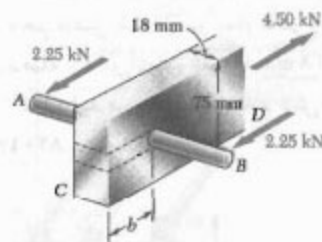
شکل م-۱۶

۱۷-۱ بار  $P$  بر میله فولادی نشان داده شده وارد می‌شود. این میله در داخل سوراخی به قطر  $۱۵ \text{ mm}$ ، که در یک ورق آلومینیومی تعبیه شده است، قرار دارد. تنش برشی در میله فولادی نباید از  $۱۲۶ \text{ MPa}$  و در صفحه آلومینیومی نباید از  $۷۰ \text{ MPa}$  بیشتر شود. بیشترین بار  $P$  را که می‌توان بر میله وارد کرد بیابید.



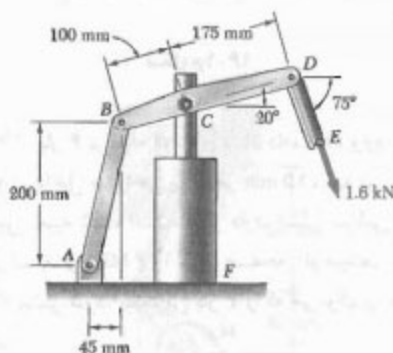
شکل م-۱۷

۱۸-۱ دو تخته چوبی، هر یک به ضخامت  $۱۲ \text{ mm}$  و به عرض  $۲۲۵ \text{ mm}$ ، با چسب به هم متصل شده‌اند. اگر تنش متوسط برشی برای خراب کردن چسب  $۸ \text{ MPa}$  باشد، مقدار بار محوری  $P$  را که باعث خرابی چسب می‌شود بیابید.



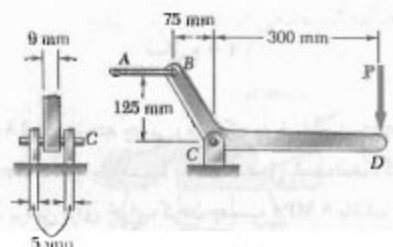
تسکيل م ۱-۲۲

۱-۲۲ سیلندر هیدرولیکی CF، که وضعیت میله DE را کنترل می‌کند، در وضعیت نشان داده شده قفل است. عضو BD به ضخامت ۱۶ mm است و توسط یک پیچ به قطر ۱۰ mm به یک میله عمودی متصل شده است. مطلوب است: (الف) تنش برشی متوسط در پیچ، (ب) تنش تکیه‌گاهی در نقطه C از عضو BD.



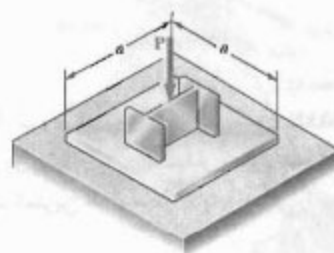
شکل م ۱-۲۴

۶۵-۹ پین C به قطر ۶ mm است. اگر  $P = 500 \text{ N}$ ،  
مطلوبست: (الف) تنش برشی متوسط در پین، (ب) تنش  
تکیه گاه، (ج) تنش در C.



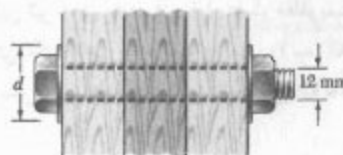
شکل ۱ ۲۵ و ۱ ۲۶

۱-۲۱ بار محوری P بر ستون کوتاه  $W_{200} \times 59$ ، که مساحت مقطع عرضی آن  $A = 7560 \text{ mm}^2$  است، وارد شده است. این بار توسط یک ورق چهارگوش روی یک فونداسیون بتنی توزیع شده است. تنش قائم متوسط در ستون نباید از  $20 \text{ MPa}$ ، و تنش تکیه‌گاهی بر فونداسیون بتنی نباید از  $2 \text{ MPa}$  بیشتر شود. ضلع  $a$  ورق را برای اقتصادی‌ترین طرح باید.



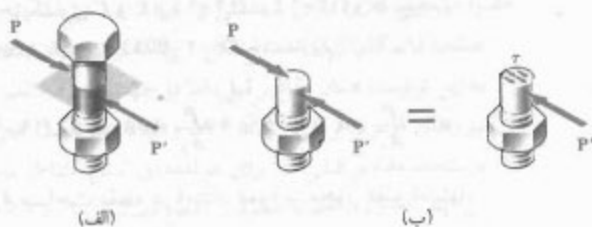
شکل م ۱-۲۱

۱-۲۲ سه تخته چوبی توسط مجموعه‌ای از پیچ و مهره‌ها به هم متصل شده‌اند و ستونی را تشکیل داده‌اند. قطر هر پیچ ۱۲ mm و قطر داخلی هر واشر ۱۶ mm است، که کمی بزرگتر از قطر سوراخ‌های تخته‌هاست. مطلوب‌ست کمترین قطر مجاز خارجی  $d$  واشرها، در صورتی که بدانیم تنش قائم متوسط در پیچ و مهره‌ها ۳۵ MPa است و تنش نکیه‌گاهی بین واشرها و تخته‌ها نباید از ۸ MPa بیشتر شود.

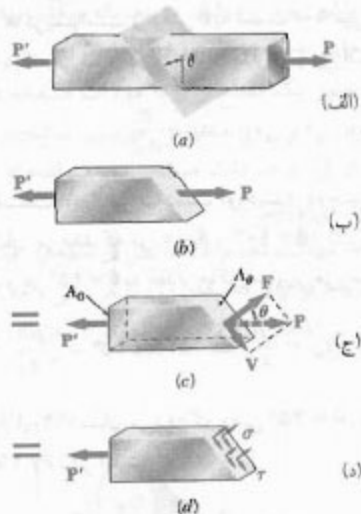


شکل م ۱-۲۲

۲۳-۱ میل به فولادی  $AB$  به قطر  $12\text{ mm}$ ، داخل سوراخ دایره‌ای جازده شده است. این سوراخ داخل عضو چوبی  $CD$  تعبیه شده است. برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوب است: (الف) ماکزیمم تنش قائم متوسط در چوب، (ب) فاصله  $b$  به طوری که تنش برشی متوسط در سطح خط چین  $620\text{ kPa}$  باشد، (ج) تنش تکیه گاهی متوسط در چوب.



شکل ۲۹-۱



شکل ۳۰-۱

عضو دوتیرویی شکل ۲۸-۱ را که تحت تأثیر نیروهای محوری  $P$  و  $P'$  قرار دارد در نظر بگیرید. اگر این عضو را تحت زاویه  $\theta$  با عمود مقطع بزنیم (شکل ۳۰-۱ الف) و نمودار آزاد قسمتی از عضو را که در سمت چپ آن مقطع است رسم کنیم (شکل ۳۰-۱ ب)، از شرایط تعادل جسم آزاد دیده می‌شود که نیروهای توزیعی وارد بر آن مقطع با نیروی  $P$  معادل‌اند. با تجزیه  $P$  به مولفه‌های  $F$  و  $V$  که، به ترتیب، بر آن مقطع عمود و مماس هستند (شکل ۳۰-۱ ج)، داریم:

$$F = P \cos \theta \quad V = P \sin \theta \quad (۱۲-۱)$$

نیروی  $F$  برآیند نیروهای عمودی توزیع شده روی آن مقطع، و نیروی  $V$  برآیند نیروهای برشی است (شکل ۳۰-۱ د). از تقسیم  $F$  و  $V$  بر مساحت  $A_\theta$  آن مقطع، به ترتیب، مقدار متوسط تنش قائم و تنش برشی بدست می‌آید:

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \quad \tau = \frac{V}{A_\theta} \quad (۱۳-۱)$$

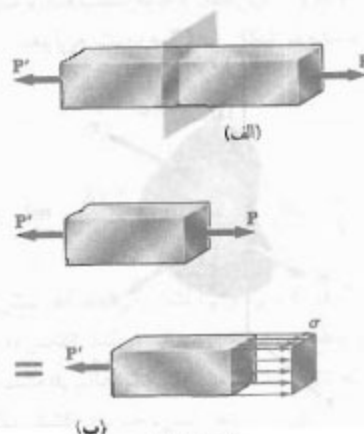
۲۶-۱ اگر  $P = ۷۵۰ \text{ N}$ ، مطلوبست: (الف) قطر پین  $C$  به‌طوری که تنش برشی متوسط در آن  $۴۰ \text{ MPa}$  باشد، (ب) تنش تکیه‌گاهی متناظر در  $C$ .

۲۷-۱ در مسئله ۹-۱، مطلوبست: (الف) تنش برشی متوسط در مفصل  $B$ ، (ب) تنش تکیه‌گاهی متوسط در  $B$  از بازوی  $BD$ ، (ج) تنش تکیه‌گاهی متوسط در  $B$  از عضو  $ABC$ ، در صورتی که بدانیم این عضو دارای مقطع عرضی مستطیلی یکنواخت  $۱۰ \text{ mm} \times ۵۰ \text{ mm}$  است.

۲۸-۱ در مسئله ۱۰-۱، مطلوبست: (الف) تنش برشی متوسط در مفصل  $C$ ، (ب) تنش تکیه‌گاهی متوسط در  $C$  از عضو  $BC$ ، (ج) تنش تکیه‌گاهی متوسط در  $B$  از عضو  $BC$ .

۱۱-۱ تنش وارد بر صفحه مایلی که تحت پارگذاری محوری است

در قسمت‌های قبل دیدیم که وقتی یک عضو دو نیرویی تحت نیروی محوری قرار می‌گیرد (شکل ۲۸-۱ الف)، فقط تنش قائم در آن به‌وجود می‌آید (شکل ۲۸-۱ ب). همچنین، دیدیم که نیروهای عرضی وارد بر پیچ و مهره‌ها و مفصل‌ها (شکل ۲۹-۱ الف) فقط تنش برشی در آن اتصالات ایجاد می‌کنند (شکل ۲۹-۱ ب). در این فصل خواهیم دید که نیروهای محوری در صفحاتی که بر محور عضو عمود نباشند تنش‌های قائم و برشی را با هم به‌وجود می‌آورند. به‌طور مشابه، نیروهای عرضی وارد بر یک پیچ و مهره نیز در صفحاتی که بر محور پیچ و مهره عمود نباشند تنش‌های قائم و برشی را با هم ایجاد می‌کنند.



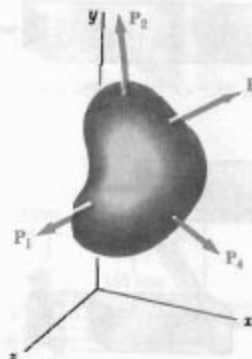
شکل ۲۸-۱

نتایج حاصل در معادله‌های (۱۵-۱)، (۱۶-۱) و (۱۷-۱) در شکل ۳۱-۱ نشان داده شده‌اند. گفتنی است که، برحسب وضعیت مقطع تحت بارگذاری، ممکن است فقط تنش قائم  $\sigma_m = P/A_0$  (شکل ۳۱-۱ ب)، یا یک تنش قائم و یک تنش برشی با مقدار یکسان  $\sigma' = \tau_m = P/2A_0$  (شکل ۳۱-۱ ج و د) در آن مقطع به وجود آید.

۱۲-۱ تنش تحت شرایط کلی بارگذاری؛ مولفه‌های تنش تا به حال، عضوها تحت بارگذاری محوری و اتصالات تحت بارگذاری عرضی قرار داشتند. ولی، اغلب عضوهای ساختمانی و اجزای ماشین آلات تحت شرایط بارگذاری پیچیده‌تری هستند.

جسمی را در نظر بگیرید که تحت چند بار  $P_1$  و  $P_2$ ، و ... قرار دارد (شکل ۳۲-۱). برای بررسی تنش حاصل از این بارها در نقطه  $Q$  از جسم، ابتدا این جسم را توسط صفحه‌ای به موازات صفحه  $Q$  در نقطه  $Q$  مقطع می‌زنیم. قسمتی از جسم در سمت چپ این مقطع تحت تأثیر چند بار اولیه، و نیروهای قائم و برشی توزیعی قرار دارد.

نیروهای قائم و برشی را که در مساحت کوچک  $\Delta A$  پیرامون نقطه  $Q$  اثر می‌کنند، به ترتیب، با  $\Delta F^x$  و  $\Delta V^x$  نشان می‌دهیم (شکل ۳۳-۱ الف). توجه کنید که برای نشان دادن نیروهای  $\Delta F^x$  و  $\Delta V^x$ ، که بر یک سطح عمود بر محور  $x$  اثر می‌کنند، از اندیس  $x$  استفاده می‌شود. در حالی که نیروی قائم  $\Delta F^x$  دارای جهت کاملاً مشخصی است، نیروی برشی  $\Delta V^x$  می‌تواند هر جهتی را در صفحه مقطع دارا باشد. بنابراین،  $\Delta V^x$  را به دو مولفه  $\Delta V_y^x$  و  $\Delta V_z^x$  در جهت‌های موازی با محورهای  $y$  و  $z$



شکل ۳۲-۱

با جایگذاری  $F$  و  $V$  از (۱۲-۱) در (۱۳-۱) و با توجه به اینکه  $A_\theta = A_0 / \cos \theta$  (شکل ۳۰-۱ ج)، داریم:

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta \quad (14-1)$$

( $A_0$  مساحت مقطع در امتداد عمود بر محور عضو است).

از اولین معادله (۱۴-۱) دیده می‌شود که در  $\theta = 0$ ، یعنی وقتی صفحه مقطع بر محور عضو عمود است، تنش قائم  $\sigma$  دارای مقدار ماکزیمم است و وقتی  $\theta$  به سمت  $90^\circ$  میل می‌کند،  $\sigma$  به صفر نزدیک می‌شود. در  $\theta = 0$ ، مقدار  $\tau$  چنین است:

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \quad (15-1)$$

(این را در قسمت ۳-۱ نیز به دست آوردیم). دومین معادله (۱۴-۱) نشان می‌دهد که در  $\theta = 0$  و  $\theta = 90^\circ$ ، تنش برشی  $\tau$  صفر است، و در  $\theta = 45^\circ$  به مقدار ماکزیمم زیر می‌رسد:

$$\tau_m = \frac{P}{A_0} \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{P}{2A_0} \quad (16-1)$$

معادله اول (۱۴-۱) نشان می‌دهد که وقتی  $\theta = 45^\circ$ ، تنش قائم  $\sigma'$  نیز با  $P/2A_0$  برابر است:

$$\sigma' = \frac{P}{A_0} \cos^2 45^\circ = \frac{P}{2A_0} \quad (17-1)$$



(الف) بارگذاری محوری



(ب) تنش‌های یاری



(ج) تنش‌های براری



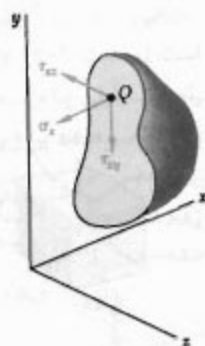
(د) تنش‌های براری

شکل ۳۱-۱

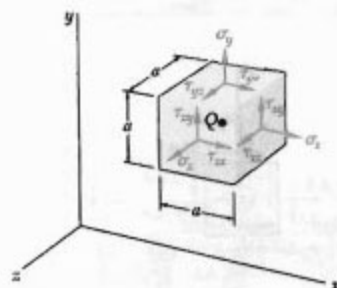
تحلیل بالا را برای قسمتی از جسم که در سمت راست صفحه قائم گذرا از  $Q$  است (شکل ۳۵-۱) نیز می‌توان به کار برد. به این ترتیب، همان مقادیر قبل، اما در جهت‌های مخالف، برای نیروهای قائم و برشی  $\Delta F_y^x$ ،  $\Delta F_z^x$  و  $\Delta V_y^x$  به دست می‌آیند. در نتیجه، مقادیر قبلی نیز برای مولفه‌های تنش متناظر به دست می‌آیند. اما چون جهت عمود بر مقطع در شکل ۳۵-۱ به طرف خارج در جهت  $+$  است، علامت مثبت برای  $\sigma_x$  نشان می‌دهد که پیکان آن در جهت  $+$  است. به طور مشابه، علامت‌های مثبت برای  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{xz}$  نشان می‌دهد که پیکان آنها، به ترتیب، در جهت‌های  $+$  و  $-$  است (شکل ۳۵-۱).

با عبور یک مقطع از  $Q$  به موازات صفحه  $zx$ ، مولفه‌های تنش  $\sigma_y$ ،  $\tau_{yz}$  و  $\tau_{yx}$  را مشخص می‌کنیم. سرانجام، با عبور یک مقطع از  $Q$  به موازات صفحه  $xy$ ، مولفه‌های  $\sigma_z$ ،  $\tau_{zx}$  و  $\tau_{xz}$  را به دست می‌آوریم.

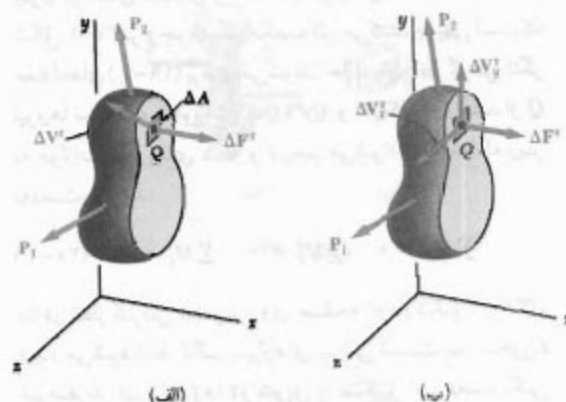
برای سهولت تجسم حالت تنش در نقطه  $Q$ ، مکعب کوچکی به ضلع  $a$  با مرکز  $Q$  و تنش‌های وارد بر هر شش وجه مکعب را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۶-۱). مولفه‌های نشان داده شده در شکل



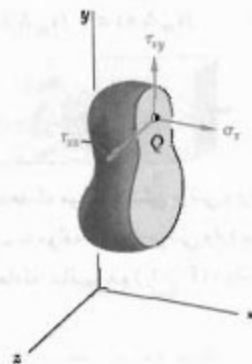
شکل ۳۵-۱



شکل ۳۶-۱



شکل ۳۳-۱



شکل ۳۴-۱

تجزیه می‌کنیم (شکل ۳۳-۱ ب). از تقسیم مقدار هر نیرو بر مساحت  $\Delta A$  و با میل دادن  $\Delta A$  به سمت صفر، سه مولفه تنش نشان داده شده در شکل ۳۴-۱ به دست می‌آیند:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A} \quad (۱۸-۱)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$

اندیس اول در  $\sigma_x$ ،  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{xz}$  نشان می‌دهد که تنش‌های تحت بررسی بر سطح عمود بر محور  $x$  اثر می‌کند. اندیس دوم در  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{xz}$  جهت مولفه تنش را نشان می‌دهد. تنش قائم  $\sigma_x$  مثبت است هرگاه پیکان آن در سوی  $+$  باشد؛ یعنی، جسم در کشش باشد. در غیر اینصورت، منفی است. به طور مشابه، مولفه‌های تنش برشی  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{xz}$  مثبت‌اند هرگاه پیکان آنها، به ترتیب، در سوی  $+$  و  $+$  باشد.

چون نیروهای مساوی و متضاد با نیروهای نشان داده شده در شکل ۳۷-۱ بر وجوه دیگر مکعب اثر می‌کنند، بدیهی است که معادله‌های (۱۹-۱) برقرار می‌شوند. حال، با در نظر گرفتن لنگر نیروها نسبت به محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  رسم می‌شوند، سه معادله زیر به دست می‌آیند:

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (۲۰-۱)$$

با در نظر گرفتن تصویر روی صفحه  $xy$  (شکل ۳۸-۱)، دیده می‌شود فقط لنگر نیروهای برشی نسبت به محور  $z$  غیر صفرند. این نیروها دو کویل را تشکیل می‌دهند، یکی لنگر مثبت پلاساعتگرد  $(\tau_{xy} \Delta A) a$  و دیگری لنگر منفی ساعتگرد  $(\tau_{yx} \Delta A) a$ ، لذا، از آخرین معادله (۲۰-۱)،

$$-\sum M_z = 0 : (\tau_{xy} \Delta A) a - (\tau_{yx} \Delta A) a = 0$$

در نتیجه،

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (۲۱-۱)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که مولفه تنش برشی وارد بر وجه عمود بر محور  $x$  برابر است با مولفه تنش برشی وارد بر وجه عمود بر محور  $y$ . از دو معادله باقیمانده (۲۰-۱)، رابطه‌های زیر را می‌یابیم:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (۲۲-۱)$$

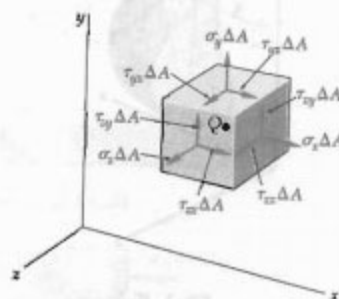
از معادله‌های (۲۱-۱) و (۲۲-۱) نتیجه می‌شود که برای تعریف حالت تنش در نقطه داده شده  $Q$ ، به جای نه مولفه تنش، فقط شش مولفه تنش مورد نیازند. این شش مولفه عبارتند از  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$ ،  $\sigma_z$ ،  $\tau_{xy}$ ،  $\tau_{yz}$  و  $\tau_{zx}$ . ضمناً، در یک نقطه داده شده، برش نمی‌تواند فقط در یک صفحه روی دهد؛ بلکه، یک تنش برشی مساوی با آن بر صفحه دیگری که بر صفحه اول عمود است وارد می‌شود. مثلاً، پیچ و مهره شکل ۲۹-۱ و مکعب کوچکی را در مرکز  $Q$  پیچ و مهره در نظر می‌گیریم (شکل ۳۹-۱ الف). دیده می‌شود تنش‌های برشی با مقدار مساوی بر دو وجه افقی مکعب و بر دو وجهی که بر نیروهای  $P$  و  $P'$  عمودند وارد می‌شوند (شکل ۳۹-۱ ب).

قبل از خاتمه این بحث، مجدداً عضوی را که تحت بارگذاری محوری است در نظر می‌گیریم. مکعب کوچکی را که وجوه آن

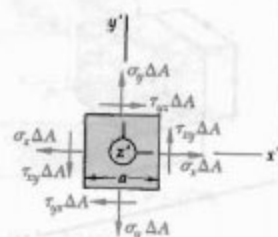
عبارتند از  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  (تنش‌های قائم وارد بر وجوه عمود بر محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$ ) و شش مولفه تنش برشی  $\tau_{xy}$ ،  $\tau_{yz}$  و غیره، طبق تعریف، مولفه  $\tau_{xy}$  تنش برشی وارد بر وجه عمود بر محور  $x$  است، و  $\tau_{yx}$  مولفه تنش برشی وارد بر وجه عمود بر محور  $y$  را نشان می‌دهد. توجه کنید که در شکل ۳۶-۱ فقط تنش‌های وارد بر سه وجه مکعب نشان داده شده‌اند. بر وجوه دیگر نیز تنش‌های مساوی و مخالف با تنش‌های نشان داده شده اثر می‌کنند. گرچه تنش‌های وارد بر وجوه مکعب با تنش‌های موجود در  $Q$  کمی تفاوت دارند، ولی خطای موجود کم است و وقتی ضلع  $a$  مکعب به سمت صفر میل می‌کند، این خطا از بین می‌رود.

حال، رابطه‌های مهم بین مولفه‌های تنش برشی را به دست می‌آوریم. نمودار آزاد مکعب کوچکی را با مرکز  $Q$  در نظر می‌گیریم (شکل ۳۷-۱). با ضرب کردن مولفه‌های تنش متناظر در مساحت  $\Delta A$  هر وجه، نیروهای قائم و برشی وارد بر وجوه مختلف مکعب را می‌یابیم. ابتدا، سه معادله تعادل زیر را می‌نویسیم:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (۱۹-۱)$$



شکل ۳۷-۱



شکل ۳۸-۱

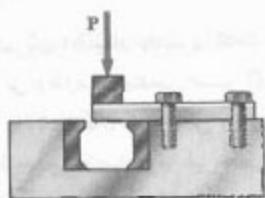


برای طراحی سازه‌ها و ماشین‌آلاتی که عمل خاصی را به‌طور مطمئن و اقتصادی انجام می‌دهند استفاده کنند.

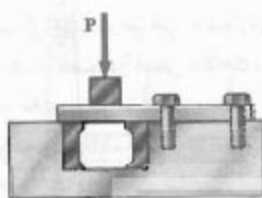
الف- تعیین استقامت نهایی یک ماده. نکته مهمی که طراح باید در نظر گیرد این است که ماده انتخاب شده تحت یک نیرو چه رفتاری دارد. این کار، با آزمایش روی نمونه‌هایی از آن ماده انجام می‌شود. مثلاً، نمونه فولادی را می‌توان در ماشین آزمایشگاهی تحت نیروی کششی محوری مرکزی معلومی قرار داد (قسمت ۲-۳). با افزایش مقدار نیرو، تغییرات حاصل در نمونه، مانند تغییر طول و قطر، اندازه‌گیری می‌شود. وقتی نیروی وارد از حد تحمل نمونه بیشتر می‌شود، نمونه گسیخته می‌شود یا تحمل بار کمتری را شروع می‌کند. این بزرگترین نیرو را بار نهایی نمونه می‌گویند و با  $P_U$  نشان داده می‌شود. چون بار وارده از مرکز می‌گذرد، از تقسیم بار نهایی بر مساحت مقطع عرضی اولیه نمونه، تنش قائم نهایی، یا استقامت نهایی کششی ماده، به‌دست می‌آید:

$$\sigma_U = \frac{P_U}{A} \quad (۲۳-۱)$$

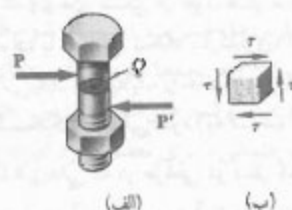
برای تعیین تنش برشی نهایی، یا استقامت نهایی برشی یک ماده، روش‌های آزمایشی مختلفی وجود دارد. یکی از رایج‌ترین آنها، پیچش لوله دایره‌ای است (قسمت ۳-۵). در روشی که دقت کمتری دارد، یک میله مستطیلی یا دایره‌ای را مطابق (شکل ۴۱-۱) در وسیله‌ای قرار می‌دهند. با افزایش بار  $P$ ، بار نهایی  $P_U$  برای برش تنها به‌دست می‌آید. اگر انتهای آزاد نمونه روی هر دو طرف قالب‌های آبدیده‌ای قرار گیرد



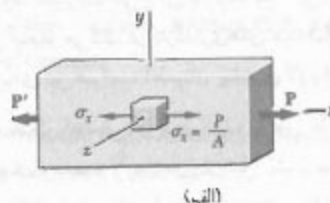
شکل ۴۱-۱



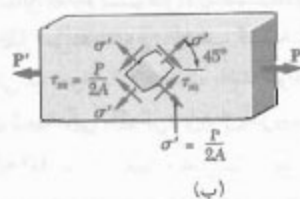
شکل ۴۲-۱



شکل ۳۹-۱



(الف)



(ب)

شکل ۴۰-۱

به موازات وجوه این عضو هستند انتخاب می‌کنیم. با توجه به نتایج قسمت ۱-۱۱، فقط تنش‌های قائم  $\sigma_x$  بر وجوهی از مکعب که بر محور  $x$  عمودند وارد می‌شوند (شکل ۴۰-۱ الف). ولی، اگر مکعب حول محور  $z$  به اندازه  $45^\circ$  بچرخد به طوری که بر مقاطع شکل‌های ۳۱-۱ ج و ۳۱-۱ د متطبق شود، تنش‌های قائم و برشی با مقدار مساوی بر چهار وجه آن وارد می‌شوند (شکل ۴۰-۱ ب). لذا، برحسب وضعیت جزء تحت بارگذاری، حالت‌های مختلف تنش در آن به‌وجود می‌آید. در فصل ۷، در این باره بیشتر بحث می‌شود.

### ۱۳-۱ نکات طراحی

در قسمت‌های قبل، نحوه تعیین تنش در میله‌ها، پیچ و مهره‌ها، و مفصل‌ها را تحت شرایط بارگذاری ساده آموختید. در فصل‌های بعد، تنش‌ها را در حالت‌های پیچیده‌تر تعیین می‌کنیم. ولی، در کاربردهای مهندسی، به ندرت پیش می‌آید که تعیین تنش تنها هدف باشد. بلکه، مهندسان می‌خواهند از این موضوع

۲. تعداد بارگذاری‌های ممکن در طول عمر سازه یا ماشین. در اغلب مواد، با افزایش تعداد بارگذاری، استقامت نهایی کاهش می‌یابد. این پدیده را خستگی می‌گویند و می‌تواند باعث گسیختگی ناگهانی شود (به قسمت ۲-۷ نگاه کنید).

۳. نوع بارگذاری‌هایی که در طراحی در نظر گرفته می‌شوند، یا ممکن است در آینده به وجود آیند. تعداد بسیار اندکی از بارگذاری‌ها را می‌توان با دقت کامل پیش‌بینی کرد - اغلب بارگذاری‌های طراحی دارای تخمین‌های صنعتی‌اند. به علاوه، تغییرات آتی برای کاربرد، تغییراتی را در بارگذاری واقعی ایجاد می‌کند. در بارگذاری‌های دینامیکی، چرخه‌های یا ضربه‌ای نیز ضرایب اطمینان بیشتری لازم است.

۴. نوع گسیختگی احتمالی. مواد شکننده به طور ناگهانی گسیخته می‌شوند، و معمولاً علامتی از قبل نشان نمی‌دهند. ولی، مواد چکش‌خوار مانند فولاد ساختمانی، با نشان دادن یک تغییر شکل به نام تسلیم قبل از شکست، درباره وجود اضافه بار اخطار می‌دهند. ولی، اغلب گسیختگی‌های کم‌انرژی ناگهانی‌اند، خواه ماده شکننده باشد خواه نباشد. در صورت امکان گسیختگی ناگهانی، باید از ضریب اطمینان بزرگتری استفاده کرد.

۵. خطای ناشی از روش‌های تحلیل. در تمام روش‌های طراحی، از فرض‌های ساده‌کننده استفاده می‌شود. لذا، تنش‌های واقعی با مقدار تقریبی محاسبه می‌شوند.

۶. خرابی ایجاد شده در آینده بر اثر تعمیر و نگهداری ضعیف یا بر اثر عوامل طبیعی غیر قابل اجتناب. در نقاطی که کنترل شرایطی چون خوردگی و افت کیفیت کار مشکلی است، از ضریب اطمینان بزرگتر باید استفاده کرد.

۷. اهمیت یک عضو برای یکپارچگی کل سازه. عضوهای مهارکننده را در بسیاری از موارد می‌توان با ضریب اطمینان کمتر از ضرایب اطمینان عضوهای اصلی طراحی کرد.

علاوه بر نکات بالا، خطر جانی و مالی را که گسیختگی می‌داند باید در نظر گرفت. وقتی گسیختگی خطر جانی ندارد و فقط اندکی خطر مالی دارد، می‌توان از ضریب اطمینان کمتری استفاده کرد. گفتنی است که با استفاده از ضریب اطمینان بیش از اندازه، ماشین ممکن است در شرایط طراحی کار نکنند. مثلاً، ضرایب اطمینان بزرگ تأثیر نامطلوبی بر وزن یک هواپیما دارد.

\* در اغلب رشته‌های مهندسی، به خصوص مهندسی هوا-فضا، به جای ضریب اطمینان از حالت اطمینان استفاده می‌شود، که برابر است با ضریب اطمینان نهایی ۱: یعنی،  $F.S. = 1/00$  = حاشیه اطمینان.

(شکل ۱-۴۲)، بار نهایی برای برش دوگانه به‌دست می‌آید. در هر حالت، از تقسیم بار نهایی بر مساحت کلی که تحت برش قرار دارد، تنش برشی نهایی  $F_r$  به‌دست می‌آید. در حالت برش تنها، این مساحت عبارت است از مساحت مقطع عرضی  $A$  نمونه، و در تنش دوگانه برابر است با دو برابر مساحت مقطع عرضی آن.

ب- بار مجاز و تنش مجاز؛ ضریب اطمینان. ماکزیمم باری که یک عضو ساختمانی یا یک قطعه ماشینی مجاز است تحت شرایط معمولی تحمل کند خیلی کمتر از بار نهایی است، و آن را بار مجاز و، گاهی، بار کاری یا بار طراحی می‌گویند. لذا، برای اطمینان از عملکرد عضو، فقط بار مجاز که کسری از بار نهایی عضو است مورد استفاده قرار می‌گیرد. نسبت بار نهایی به بار مجاز را ضریب اطمینان\* می‌گویند:

$$(1-24) \quad \text{بار نهایی} \\ \text{بار مجاز} = F.S. = \text{ضریب اطمینان}$$

یک تعریف دیگر برای ضریب اطمینان چنین است:

$$(1-25) \quad \text{تنش نهایی} \\ \text{تنش مجاز} = F.S. = \text{ضریب اطمینان}$$

اگر یک رابطه خطی بین بار و تنش وجود داشته باشد، دو عبارت داده شده برای ضریب اطمینان در معادله‌های (۱-۲۴) و (۱-۲۵) همسانند. ولی، در اغلب کاربردهای مهندسی، وقتی بار به مقدار نهایی‌اش نزدیک می‌شود، این رابطه خطی از بین می‌رود و ضریب اطمینان حاصل از معادله (۱-۲۵)، یک ارزیابی واقعی برای ضریب اطمینان طراحی نیست. با وجود این، از روش تنش مجاز طراحی (معادله ۱-۲۵) خیلی استفاده می‌شود.

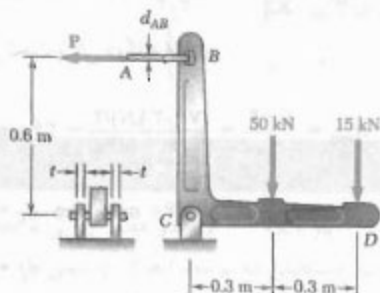
ج- انتخاب ضریب اطمینان مناسب. انتخاب ضریب اطمینان یکی از مهم‌ترین وظایف مهندسی است. اگر ضریب اطمینان خیلی کوچک باشد، امکان گسیختگی وجود دارد و اگر خیلی بزرگ باشد، طرح غیر اقتصادی یا غیر عملی می‌شود. انتخاب ضریب اطمینان مناسب نیاز به قضاوت مهندسی دارد، و این قضاوت به عوامل بسیاری بستگی دارد که در زیر چند نمونه آورده شده‌اند:

۱. تغییراتی که ممکن است در خواص عضو روی دهد. ترکیب، استقامت و ابعاد عضو در ضمن ساخت، تغییرات کوچکی می‌دهند. به علاوه، خواص ماده ممکن است تغییر کنند. مثلاً، بر اثر گرمایش، ممکن است تنش‌های باقیمانده در عضو به‌وجود آید. در هنگام ساخت، انبار کردن یا انتقال، ممکن است عضو دست‌خوش تغییر شکل شود.

بزرگتر است. در این کتاب، از روش طراحی بر مبنای تنش مجاز استفاده شده است. ولی، در این فصل و فصل‌های ۵ و ۱۰، چند مسئله نیز با استفاده از روش LRFD حل شده‌اند.

### مسئله نمونه ۱-۳

مطابق شکل، دو نیرو بر براکت BCD وارد شده‌اند. (الف) اگر میله کنترل AB از فولاد با تنش قائم نهایی ۶۰۰ MPa باشد، قطر آن را برای ضریب اطمینان ۳/۳ در برابر گسیختگی بیابید. (ب) مفصل C از فولاد با تنش برشی نهایی ۳۵۰ MPa ساخته شده است. قطر آن را برای ضریب اطمینان ۳/۳ در برابر برش بیابید. (ج) ضخامت مورد نیاز تکیه‌گاه C را بیابید در صورتی که تنش تکیه‌گاهی مجاز فولاد به کار رفته ۳۰۰ MPa باشد.



### حل

جسم آزاد تمام براکت. واکنش در C با مولفه‌های  $C_x$  و  $C_y$  نشان داده شده است.

$$\sum M_C = 0 :$$

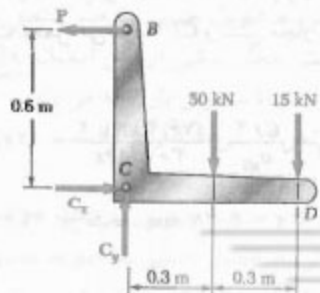
$$P(0.6 \text{ m}) - (50 \text{ kN})(0.3 \text{ m}) - (15 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) = 0$$

$$P = 40 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 : C_x = 40 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 : C_y = 65 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 76.3 \text{ kN}$$



در اغلب کاربردها، ضرایب اطمینان توسط آیین‌نامه‌ها تعیین می‌شوند. این آیین‌نامه‌ها توسط کمیته‌های متشکل از مهندسان مجرب نوشته می‌شود. در زیر، چند نمونه از آیین‌نامه‌های ساختمانی را برای بعضی مواد آورده‌ایم.

#### ۱. فولاد :

American Institute of Steel Construction, Specifications for Structural Steel Buildings

#### ۲. بتن :

American Concrete Institute, Building Code Requirement for Structural Concrete

#### ۳. چوب :

American Forest and Paper Association, National Design Specification for Wood Construction

#### ۴. پل ها :

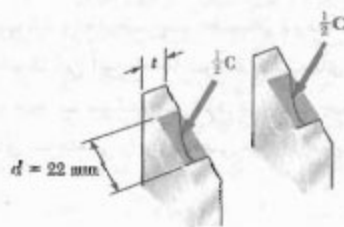
American Association of State Highway Officials, Standard Specifications for Highway Bridges

د. طراحی بر مبنای ضریب بار و مقاومت. گفتیم که در طراحی مبتنی بر تنش مجاز، تمام عدم قطعیت‌ها در طراحی یک عضو ساختمانی یا قطعه مکانیکی را می‌توان با ضریب اطمینان از بین برد. در روش دیگری که مقبولیت زیادی در بین مهندسان ساختمان دارد، برای تفکیک بین عدم قطعیت‌های سازه و باری که سازه برای تحمل آن طرح می‌شود می‌توان از سه ضریب مختلف استفاده کرد. این روش، که آن را طراحی بر مبنای ضریب بار و مقاومت (LRFD) می‌گویند به طراح این امکان را نیز می‌دهد که بین عدم قطعیت‌های بار زنده  $P_L$ ، یعنی باری که توسط سازه تحمل می‌شود، و بار مرده  $P_D$ ، یعنی وزن قسمتی از سازه که در بار کل سهم دارد، تمایز قائل شود.

هنگام استفاده از این روش، ابتدا باید بار نهایی  $P_U$  سازه، یعنی باری که تحت آن سازه غیر قابل استفاده می‌شود، تعیین کرد. اگر نامساوی زیر برقرار باشد، طرح پیشنهادی قابل قبول است:

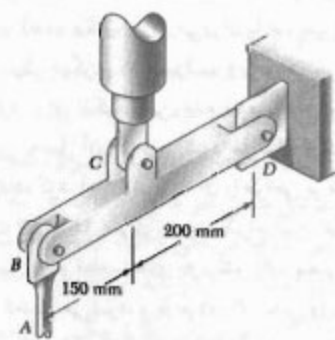
$$\gamma_D P_D + \gamma_L P_L \leq \phi P_U \quad (26-1)$$

ضریب  $\phi$  را ضریب مقاومت می‌گویند؛ این ضریب، عدم قطعیت‌های مربوط به سازه را در نظر می‌گیرد و معمولاً کمتر از ۱ است. ضرایب  $\gamma_D$  و  $\gamma_L$  را ضرایب بار می‌گویند. این ضرایب، به ترتیب، عدم قطعیت‌های بار مرده و بار زنده را در نظر می‌گیرند و معمولاً از ۱ بزرگترند.  $\gamma_L$  معمولاً از  $\gamma_D$



### مسئله نمونه ۴-۱

تیر صلب  $BCD$  در  $B$  توسط پیچ و مهره به یک میله کنترل، در  $C$  به یک میلندر هیدرولیکی، و در  $D$  به یک تکیه‌گاه ثابت متصل شده است. قطر پیچ و مهره عبارتند از:  $d_B = d_D = 10 \text{ mm}$ ،  $d_C = 12 \text{ mm}$ . هر پیچ و مهره تحت برش دوگانه است و از فولاد با تنش برشی نهایی  $\tau_U = 280 \text{ MPa}$  ساخته شده است. میله کنترل  $AB$  به قطر  $d_A = 11 \text{ mm}$  است و از فولاد با تنش کششی نهایی  $\sigma_U = 420 \text{ MPa}$  ساخته شده است. اگر مینیمم ضریب اطمینان این مجموعه  $3/0$  باشد، مطلوب‌ست بیشترین نیرویی که میلندر هیدرولیکی می‌تواند در  $C$  وارد کند.



### حل

ضریب اطمینان، در رابطه با گسیختگی، در هر سه پیچ و مهره و در میله کنترل باید  $3/0$  یا بیشتر باشد. این چهار معیار مستقل را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

جسم آزاد: تیر  $BCD$ . ابتدا نیرو در  $C$  را برحسب نیروهای وارده در  $B$  و  $D$  می‌یابیم.

$$\sum M_D = 0 :$$

$$B(350 \text{ mm}) - C(200 \text{ mm}) = 0 \Rightarrow C = 1,750 \text{ N} \quad (1)$$

$$\sum M_B = 0 :$$

$$-D(350 \text{ mm}) + C(150 \text{ mm}) = 0 \Rightarrow C = 7,750 \text{ N} \quad (2)$$

الف - میله کنترل  $AB$ . چون ضریب اطمینان  $3/0$  است، تنش مجاز برابر است با:

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{420 \text{ MPa}}{3/0} = 140 \text{ MPa}$$

برای  $P = 40 \text{ kN}$ ، مساحت مقطع عرضی مورد نیاز عبارت است از:

$$A_{req} = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{40 \text{ kN}}{140 \text{ MPa}} = 285.7 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A_{req} = \frac{\pi}{4} d_{AB}^2 = 285.7 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \Rightarrow d_{AB} = 18.9 \text{ mm} \quad \leftarrow$$

ب - برش در مفصل  $C$ . برای ضریب اطمینان  $3/0$  داریم

$$\tau_{all} = \frac{\tau_U}{F.S.} = \frac{280 \text{ MPa}}{3/0} = 93.3 \text{ MPa}$$

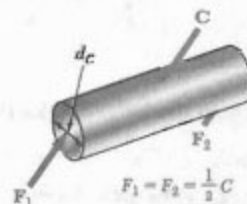
چون مفصل تحت برش دوگانه است،

$$A_{req} = \frac{C/2}{\tau_{all}} = \frac{(7,750 \text{ kN})/2}{93.3 \text{ MPa}} = 41.5 \text{ mm}^2$$

$$A_{req} = \frac{\pi}{4} d_C^2 = 41.5 \text{ mm}^2 \Rightarrow d_C = 7.4 \text{ mm}$$

$$d_C = 22 \text{ mm} \quad \leftarrow$$

از قطر  $22 \text{ mm}$  برای مفصل استفاده می‌شود.



ج - تنش تکیه‌گاهی در  $C$ . با استفاده از  $d = 22 \text{ mm}$ ، مساحت نامی تکیه‌گاه هر براکت  $22t$  است. چون نیرویی که توسط هر براکت تحمل می‌شود  $C/2$  و تنش مجاز تکیه‌گاهی  $300 \text{ MPa}$  است،

$$A_{req} = \frac{C/2}{\sigma_{all}} = \frac{(7,750 \text{ kN})/2}{300 \text{ MPa}} = 12.9 \text{ mm}^2$$

لذا،  $22t = 12.9$ ، در نتیجه،  $t = 0.58 \text{ mm}$ . از  $t = 6 \text{ mm}$  استفاده می‌شود.

### پیچ و مهره D.

چون این پیچ و مهره مانند B است، نیروی مجاز چنین است:  
از معادله (۲):  $D = B = ۱۴,۶۶ \text{ kN}$

$$C = ۲,۳۳ D = ۲,۳۳ (۱۴,۶۶ \text{ kN}) \Rightarrow C = ۳۴,۱۶ \text{ kN} <$$

### پیچ و مهره C.

مجدداً،  $\tau_{all} = ۹۳,۳۳ \text{ MPa}$  می‌نویسیم:

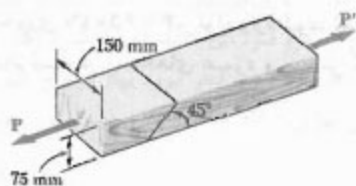
$$C = ۲ F_1 = ۲ (\tau_{all} A) = ۲ (۹۳,۳۳ \text{ MPa}) \left( \frac{1}{4} \pi (12 \times 10^{-3} \text{ m})^2 \right) \\ \Rightarrow C = ۲۱,۱۱ \text{ kN} <$$

خلاصه: چهار مقدار ماکزیمم مجاز را برای نیرو در C تعیین کرده‌ایم. برای برقراری تمام این معیارها، کوچکترین مقدار را انتخاب می‌کنیم؛ یعنی:

$$C = ۲۱,۱۱ \text{ kN} <$$

## مسائل

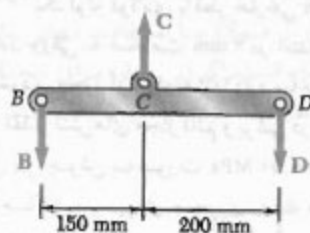
۲۹-۱ بار  $P = ۱۱ \text{ kN}$  بر دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی که توسط اتصال چسبی به هم متصل شده‌اند، وارد شده است. تنش‌های قائم و برشی در این اتصال را بیابید.



شکل م-۱ و م-۲

۳۰-۱ دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی توسط اتصال چسبی به هم متصل شده‌اند. اگر ماکزیمم تنش مجاز برشی در این اتصال  $۶۲۰ \text{ kPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) بیشترین بار  $P$  که می‌توان با اطمینان وارد کرد، (ب) تنش کششی متناظر در وصله.

۳۱-۱ دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی توسط اتصال چسبی به هم متصل شده‌اند. اگر تنش‌های قائم و برشی در این اتصال را بیابید.



میله کنترل. برای ضریب اطمینان  $\gamma_f = ۳$ :

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{۴۲۰ \text{ MPa}}{۳} = ۱۴۰ \text{ MPa}$$

نیروی مجاز در میله کنترل چنین است:

$$B = \sigma_{all} (A) = (۱۴۰ \text{ MPa}) \left( \frac{1}{4} \pi (11 \times 10^{-3} \text{ m})^2 \right) = ۱۳,۳ \text{ kN}$$

با استفاده از معادله (۱)، بیشترین مقدار مجاز C برابر است با:

$$C = ۱,۷۵ B = ۱,۷۵ (۱۳,۳ \text{ kN}) \Rightarrow C = ۲۳,۲۸ \text{ kN} <$$

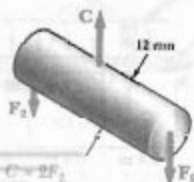
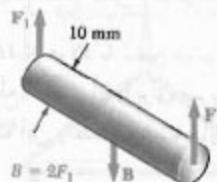
### پیچ و مهره B.

چون  $\tau_{all} = \tau_U / F.S. = (۲۸۰ \text{ MPa}) / ۳ = ۹۳,۳۳ \text{ MPa}$  و مهره تحت برش دوگانه است، مقدار مجاز نیروی B وارد بر پیچ و مهره عبارت است از:

$$B = ۲ F_1 = ۲ (\tau_{all} A) = ۲ (۹۳,۳۳ \text{ MPa}) \left( \frac{1}{4} \pi (10 \times 10^{-3} \text{ m})^2 \right) \\ = ۱۴,۶۶ \text{ kN}$$

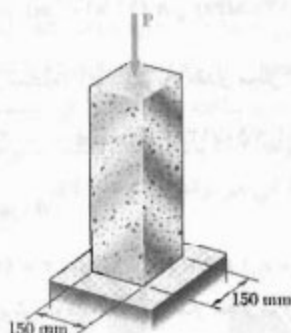
از معادله (۱):

$$C = ۱,۷۵ B = ۱,۷۵ (۱۴,۶۶ \text{ kN}) \Rightarrow C = ۲۵,۶۶ \text{ kN} <$$



۳۴-۱ یک لوله فولادی با قطر خارجی  $300 \text{ mm}$  از طریق جوش دادن ورقی به ضخامت  $6 \text{ mm}$  در امتداد ماریچی که با صفحه عمود بر محور لوله زاویه  $25^\circ$  دارد ساخته شده است. اگر ماکزیمم مقدار تنش‌های مجاز قائم و برشی در امتدادهای عمود و مماس بر جوش به صورت  $\sigma = 50 \text{ MPa}$  و  $\tau = 30 \text{ MPa}$  باشند، ماکزیمم نیروی محوری را که می‌توان بر لوله وارد کرد بیابید.

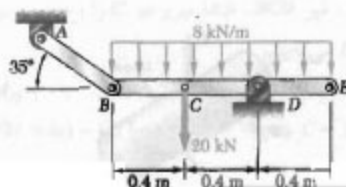
۳۵-۱ بار  $P = 960 \text{ kN}$  بر قطعه گرانی نشان داده شده اثر می‌کند. ماکزیمم مقدار تنش‌های قائم و برشی را بیابید. وضعیت صفحه متناظر با هر یک از این مقادیر ماکزیمم را مشخص کنید.



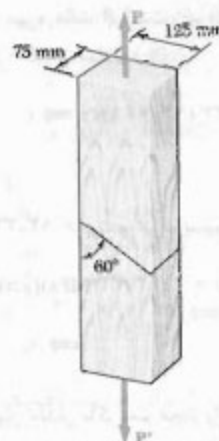
شکل م-۳۵ و م-۳۶

۳۶-۱ بار مرکزی  $P$  بر قطعه گرانی نشان داده شده اثر می‌کند. اگر ماکزیمم مقدار تنش برشی حاصل در قطعه  $17 \text{ MPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) مقدار  $P$ ، (ب) وضعیت سطحی که ماکزیمم تنش برشی بر آن وارد می‌شود، (ج) تنش قائم وارده بر آن سطح، (د) ماکزیمم مقدار تنش قائم در قطعه.

۳۷-۱ رابط  $AB$  از فولاد با تنش قائم نهایی  $450 \text{ MPa}$  است. مساحت مقطع عرضی آن را برای ضریب اطمینان  $2.5$  بیابید. فرض کنید که این رابط در مفصل‌های  $A$  و  $B$  به خوبی تقویت شده است.



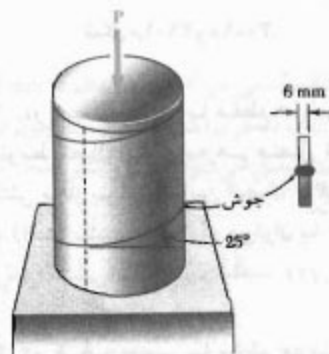
شکل م-۳۷



شکل م-۳۱ و م-۳۲

۳۲-۱ دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی توسط اتصال چسبی به هم متصل شده‌اند. اگر ماکزیمم تنش مجاز کششی در این اتصال  $525 \text{ kPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) بیشترین بار  $P$  که با اطمینان تحمل می‌شود، (ب) تنش برشی متناظر در این اتصال.

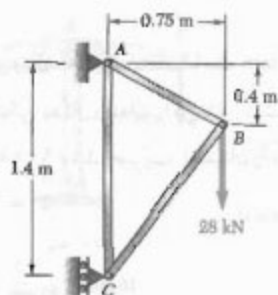
۳۳-۱ یک لوله فولادی با قطر خارجی  $300 \text{ mm}$  از طریق جوش دادن ورقی به ضخامت  $6 \text{ mm}$  در امتداد ماریچی که با صفحه عمود بر محور لوله زاویه  $25^\circ$  دارد ساخته شده است. اگر نیروی محوری  $P = 250 \text{ kN}$  بر لوله وارد شود، تنش‌های قائم و برشی، به ترتیب، در امتدادهای عمود و مماس بر جوش را بیابید.



شکل م-۳۳ و م-۳۴



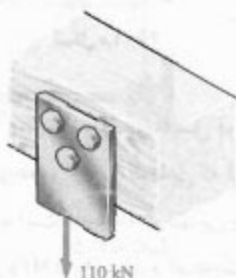
۴۱-۱. عضوهای  $AB$  و  $AC$  از میله‌های هم‌جنس با مقطع عرضی چهارگوش ساخته شده‌اند. میله چهارگوشی از همان جنس و به ضلع  $20\text{ mm}$  تحت بار  $120\text{ kN}$  گسیخته می‌شود. برای ضریب اطمینان  $3/2$  برای هر دو میله، ابعاد مورد نیاز مقطع عرضی آنها را بیابید.



شکل م-۴۱ و م-۴۲

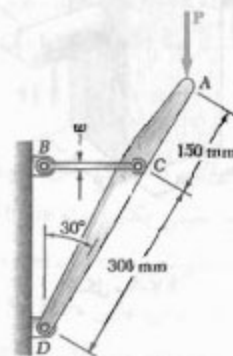
۴۲-۱. عضوهای  $AB$  و  $AC$  از میله‌های هم‌جنس با مقطع عرضی چهارگوش ساخته شده‌اند. میله چهارگوشی از همان جنس و به ضلع  $20\text{ mm}$  تحت بار  $120\text{ kN}$  گسیخته می‌شود. اگر مقطع عرضی میله  $AB$  به ضلع  $15\text{ mm}$  باشد، مطلوبست: (الف) ضریب اطمینان برای میله  $AB$ ، (ب) ابعاد مقطع عرضی میله  $AC$  در صورتی که دارای ضریب اطمینان میله  $AB$  باشد.

۴۳-۱. برای اتصال ورق فولادی نشان داده شده به یک تیر چوبی، از سه پیچ و مهره فولادی استفاده می‌شود. اگر بار  $110\text{ kN}$  بر این ورق وارد شود، قطر مورد نیاز پیچ و مهره را بیابید. تنش برشی نهایی فولاد  $360\text{ MPa}$  و ضریب اطمینان  $3/25$  باشد.



شکل م-۴۳ و م-۴۴

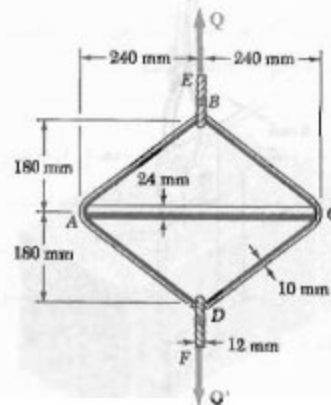
۳۸-۱. بازوی افقی  $BC$  به ضخامت  $6\text{ mm}$  و به عرض  $w = 25\text{ mm}$  است، و از فولاد با استقامت نهایی کششی  $450\text{ MPa}$  ساخته شده است. اگر این سازه برای تحمل بار  $P = 40\text{ kN}$  طرح شده باشد، ضریب اطمینان چقدر است؟



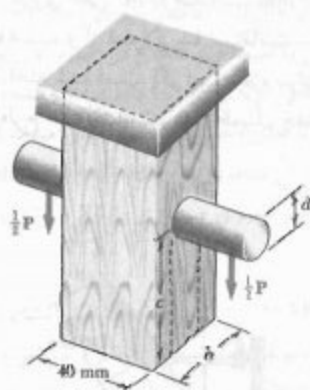
شکل م-۳۸ و م-۳۹

۳۹-۱. بازوی افقی  $BC$  به ضخامت  $6\text{ mm}$  است و از فولاد با استقامت نهایی کششی  $450\text{ MPa}$  ساخته شده است. اگر این سازه برای تحمل بار  $P = 32\text{ kN}$  طرح شده باشد، عرض  $w$  برای ضریب اطمینان ۳ چقدر است؟

۴۰-۱. حلقه فولادی  $ABCD$  به طول  $1/2\text{ m}$  و به قطر  $10\text{ mm}$  مطابق شکل، پیرامون میله آلومینیومی  $AC$  به قطر  $24\text{ mm}$  قرار گرفته است. از کابل‌های  $BE$  و  $DF$ ، هر یک به قطر  $12\text{ mm}$  برای اعمال بار  $Q$  استفاده می‌شود. اگر استقامت نهایی میله  $AC$   $260\text{ MPa}$  و استقامت نهایی حلقه و کابل‌ها  $480\text{ MPa}$  باشد، بیشترین بار  $Q$  را برای ضریب اطمینان کلی ۳ بیابید.



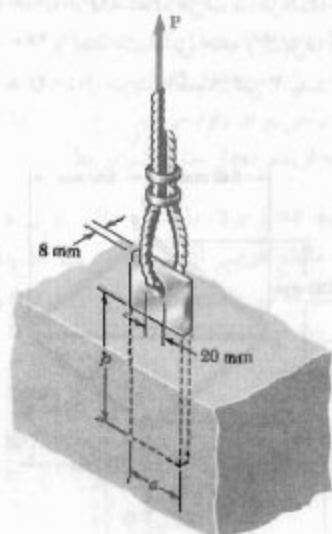
شکل م-۴۰



شکل م ۴۷-۱

۴۸-۱ در مسئله ۴۷-۱، اگر  $d = 16 \text{ mm}$  و  $P = 2 \text{ kN}$ ،  
مطلوبست: (الف) ضریب اطمینان مفصل، (ب) مقدار  $c$  و  $h$   
در صورتی که ضریب اطمینان مفصل  $3/2$  باشد.

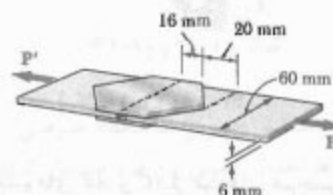
۴۹-۱ یک ورق فولادی به ضخامت  $8 \text{ mm}$  در یک تیغه افقی قرار گرفته است و از آن برای مهار کردن یک کابل عمودی پر مقاومت استفاده شده است. قطر سوراخ داخل ورق  $20 \text{ mm}$  است، استقامت نهایی فولاد به کار رفته  $250 \text{ MPa}$  است، و تنش اتصالی نهایی بین ورق و بتن  $2 \text{ MPa}$  است. اگر ضریب اطمینان برای بار  $P = 10 \text{ kN}$  برابر با  $3/60$  باشد، مطلوبست:



شکل م ۴۹-۱

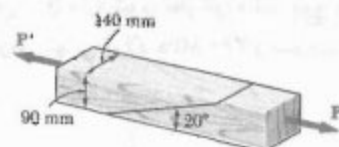
۴۴-۱ از سه پیچ و مهره فولادی به قطر  $18 \text{ mm}$  برای متصل کردن ورق فولادی نشان داده شده به یک تیر چوبی استفاده می‌شود. اگر بار  $110 \text{ kN}$  بر این ورق وارد شود و تنش برشی نهایی این فولاد  $360 \text{ MPa}$  باشد، ضریب اطمینان را بیابید.

۴۵-۱ دو ورق، هر یک به ضخامت  $3 \text{ mm}$ ، برای اتصال یک نوار پلاستیکی به کار رفته‌اند. اگر تنش برشی نهایی اتصال بین سطوح  $900 \text{ kPa}$  باشد، ضریب اطمینان را در رابطه با برش  $P = 1/3 \text{ kN}$  بیابید.



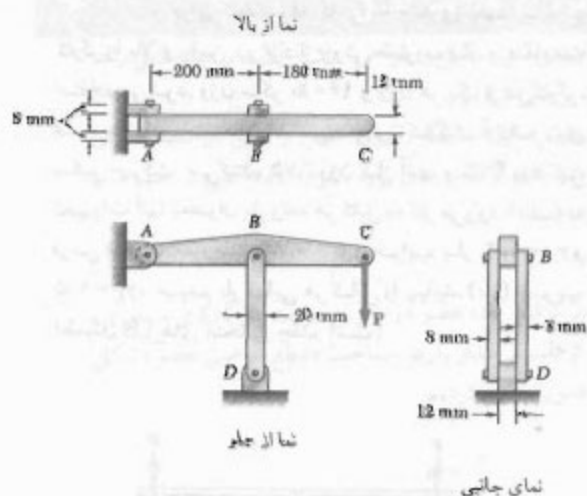
شکل م ۴۵-۱

۴۶-۱ دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی  $90 \times 140 \text{ mm}$  توسط اتصال چسبی به هم متصل شده‌اند. اگر ماکزیمم تنش برشی مجاز در این اتصال  $520 \text{ kPa}$  باشد، ماکزیمم بار محوری  $P$  را بیابید.



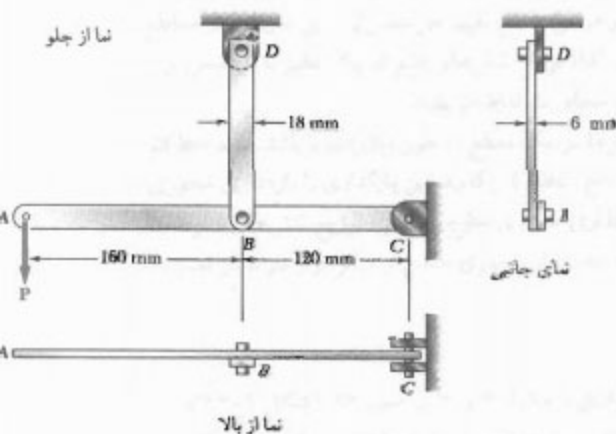
شکل م ۴۶-۱

۴۷-۱ بار  $P$ ، مطابق شکل، بر مفصل فولادی وارد شده است. این مفصل در عضو چوبی کوتاهی که از سقف آویزان است جازده شده است. استقامت نهایی چوب در کشش  $60 \text{ MPa}$  و در برش  $7/5 \text{ MPa}$  است، و استقامت نهایی فولاد در برش  $150 \text{ MPa}$  است.  $b = 40 \text{ mm}$ ،  $c = 55 \text{ mm}$  و  $d = 12 \text{ mm}$  بار  $P$  را برای ضریب اطمینان کلی  $3/2$  بیابید.



شکل م-۵۴ و م-۵۳

۵۵-۱ در سازه فولادی نشان داده شده، قطر پین‌های  $B$ ،  $C$  و  $D$ ، به ترتیب،  $6\text{ mm}$ ،  $10\text{ mm}$  و  $10\text{ mm}$  است. تنش برش نهایی در تمام اتصالات  $150\text{ MPa}$ ، و تنش قائم نهایی در میله  $BD$  برابر با  $400\text{ MPa}$  است. برای ضریب اطمینان  $3$ ، ماکزیم بار  $P$  را بیابید. میله  $BD$  در پیرامون سوراخ پین‌ها تقویت نشده است.



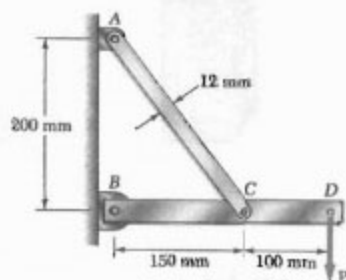
شکل م-۵۵

۵۶-۱ مسئله ۵۵-۱ را با این فرض حل کنید که قطر پین‌های  $B$  و  $D$  برابر با  $12\text{ mm}$  باشد.

(الف) عرض  $a$  مورد نیاز ورق، (ب) مینیمم عمق  $b$  جایگذاری ورق با آن عرض در تیغه بتنی. (از تنش‌های قائم بین بتن و انتهای پایینی ورق صرف‌نظر کنید).

۵۰-۱ در مسئله ۴۹-۱، اگر  $a = 50\text{ mm}$ ،  $b = 190\text{ mm}$  و  $P = 12\text{ kN}$ ، ضریب اطمینان را برای مهار کابل بیابید.

۵۱-۱ میله فولادی  $AC$  دارای تنش قائم نهایی  $450\text{ MPa}$  و مقطع عرضی مستطیلی بکنواخت  $12\text{ mm} \times 6\text{ mm}$  است. قطر پین‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، به ترتیب،  $10\text{ mm}$ ،  $8\text{ mm}$  و  $10\text{ mm}$  است. پین‌ها از فولاد با تنش برش نهایی  $170\text{ MPa}$  هستند و تحت برش تنها قرار دارند. برای ضریب اطمینان  $3/25$ ، ماکزیم بار  $P$  را بیابید. میله  $AC$  در پیرامون سوراخ پین‌ها تقویت نشده است.



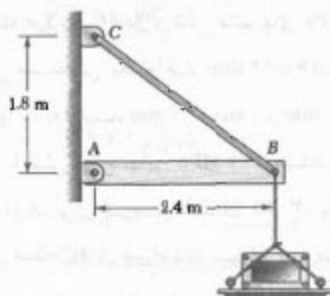
شکل م-۵۱

۵۲-۱ مسئله ۵۱-۱ را با این فرض حل کنید که قطر پین‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  برابر با  $8\text{ mm}$  باشد.

۵۳-۱ در سازه نشان داده شده، از مفصل  $A$  به قطر  $8\text{ mm}$  و مفصل‌های  $B$  و  $D$  به قطر  $12\text{ mm}$  استفاده شده است. اگر تنش برش نهایی در تمام اتصالات  $100\text{ MPa}$  باشد و تنش قائم نهایی در هر یک از دو عضوی که  $B$  و  $D$  را به هم متصل می‌کند  $250\text{ MPa}$  باشد، بار مجاز  $P$  را برای ضریب اطمینان کلی  $3/0$  بیابید.

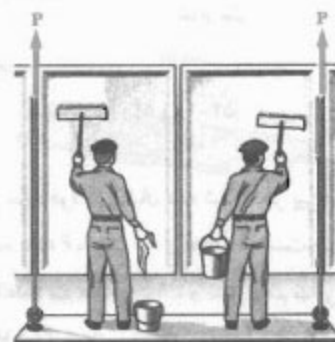
۵۴-۱ مسئله ۵۳-۱ را با این فرض حل کنید که قطر مفصل  $A$  برابر با  $10\text{ mm}$  باشد.

۵۸-۱\* یک سکوی تخت  $40 \text{ kg}$  به انتهای  $B$  تیر چوبی  $AB$  به جرم  $50 \text{ kg}$  متصل است. این تیر توسط مفصل  $A$  و میله لاغر فولادی  $BC$ ، با بار نهایی  $12 \text{ kN}$ ، نگه داشته شده است. (الف) با استفاده از طراحی بر مبنای ضریب بار و مقاومت، بیشترین بلری را که می‌توان با اطمینان بر سکو وارد کرد بیابید ( $\gamma_L = 1/6$  و  $\gamma_D = 1/25$ ،  $\phi = 0/90$ ) (ب) ضریب اطمینان متناظر برای میله  $BC$  چقدر است؟



شکل م-۵۸-۱

۵۷-۱\* برای انتخاب دو کابلی که سکوی نگهدارنده دو کارگر را بالا و پایین می‌برد از روش ضریب بار و مقاومت استفاده می‌شود. وزن سکو  $160 \text{ lb}$  و وزن هر یک از دو کارگر، همراه با تجهیزات،  $195 \text{ lb}$  است. چون کارگران آزادانه روی سکو حرکت می‌کنند،  $75\%$  وزن کل آنها و  $75\%$  وزن کل تجهیزات آنها به‌عنوان بار زنده هر کابل به کار می‌رود. (الف) به فرض ضریب مقاومت  $\phi = 0/85$  و ضرایب بار  $\gamma_D = 1/2$  و  $\gamma_L = 1/5$ ، مینیمم بار نهایی هر کابل را بیابید. (ب) ضریب اطمینان کابل‌های انتخابی چقدر است؟



شکل م-۵۷-۱

## مرور و خلاصه فصل ۱

در این فصل، مفهوم تنش و روش‌های تحلیل و طراحی ماشین‌آلات و سازه‌هایی را که تحت بارگذاری قرار می‌گیرند بررسی کردیم.

در قسمت ۱-۲، کاربرد روش‌های استاتیک را برای تعیین واکنش در تکیه‌گاه‌های یک سازه مرور کردیم. از نمودار جسم آزاد نیز برای تعیین نیروهای داخلی در عضوهای مختلف سازه استفاده کردیم.

بارگذاری محوری. تنش قائم

در قسمت ۱-۳، با در نظر گرفتن یک عضو دنیروبی تحت بارگذاری محوری، مفهوم تنش را بررسی کردیم. از تقسیم مقدار بار بر مساحت مقطع عرضی عضو (شکل ۱-۸الف)، تنش قائم در آن عضو را تعیین کردیم:

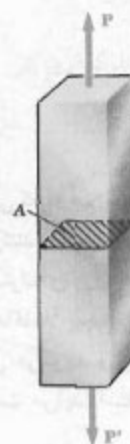
$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (5-1)$$

در قسمت ۱-۴، درباره تحلیل و طراحی سازه‌ها و ماشین‌آلات بحث کردیم. همانطور که در قسمت ۵-۱ گفته شد، مقدار  $\sigma$  حاصل از معادله (۵-۱) تنش متوسط در مقطع را نشان می‌دهد نه تنش در نقطه خاص  $Q$  از آن مقطع را. با در نظر گرفتن مساحت  $\Delta A$  در پیرامون نقطه  $Q$  و مقدار نیروی وارده بر آن، تنش در آن نقطه را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (6-1)$$

به طور کلی، مقدار حاصله برای  $\sigma$  در نقطه  $Q$  با مقدار تنش متوسط حاصل از فرمول (۵-۱) متفاوت است. تنش  $\sigma$  در عرض مقطع تغییر می‌کند. ولی، این تغییرات در مقاطع دور از نقاط اثر بار کوچک است. لذا، توزیع تنش‌های قائم در یک عضو با بار محوری را یکنواخت فرض می‌کنیم مگر در مجاورت نقاط اثر بارها.

البته، برای اینکه توزیع تنش‌ها در یک مقطع به طور یکنواخت باشد، باید خط اثر بارهای  $P$  و  $P'$  از مرکزوار آن مقطع (نقطه  $C$ ) بگذرد. این بارگذاری را بارگذاری محوری مرکزی می‌گویند. در حالت بارگذاری محوری خارج از مرکز، توزیع تنش‌ها یکنواخت نیست. تنش در عضوهایی را که تحت بار محوری خارج از مرکز قرار دارند در فصل ۴ بررسی می‌کنیم.

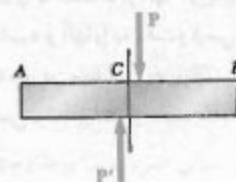


شکل ۱-۸الف

نیروهای عرضی. تنش برشی

با اعمال نیروهای عرضی مساوی و متضاد  $P$  و  $P'$  بر عضو  $AB$  (شکل ۱۶-۱الف)، تنش برشی  $\tau$  در مقاطع بین نقاط اثر دو نیرو به وجود می‌آید (قسمت ۶-۱). این تنش در عرض مقطع به طور قابل توجه تغییر می‌کند و توزیع آن رانمی‌توان یکنواخت فرض کرد. تنش برشی متوسط در یک مقطع از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} \quad (16-1)$$



شکل ۱۶-۱الف

در پیچ و مهره‌ها، مفصل‌ها، یا پرچ‌ها نیز تنش برشی به وجود می‌آید. مثلاً، در پیچ و مهره  $CD$  (شکل ۱۸-۱)، که تحت برش تنها است،

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A} \quad (9-1)$$

ولی، در پیچ و مهره‌های  $EG$  و  $HJ$  (شکل ۲۰-۱)، که هر دو تحت برش دوگانه‌اند،

$$\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F/\gamma}{A} = \frac{F}{\gamma A} \quad (10-1)$$

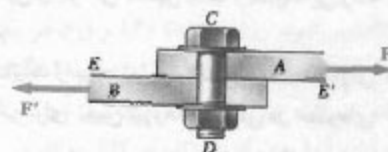
پیچ و مهره‌ها، مفصل‌ها، و پرچ‌ها نیز در عضوهایی که به هم متصل می‌کنند در امتداد سطح تکیه‌گاهی، یا سطح تماس، ایجاد تنش می‌کنند (قسمت ۷-۱). مثلاً، پیچ و مهره  $CD$  در شکل ۱۸-۱، تنش‌هایی را بر سطح نیم استوانه‌ای ورق  $A$  که با پیچ تماس دارد وارد می‌کند (شکل ۲۲-۱). چون توزیع این تنش‌ها کاملاً پیچیده است، در عمل از مقدار نامی تنش متوسط ( $\sigma_b$ )، که آن را تنش تکیه‌گاهی می‌گویند و از تقسیم بار  $P$  بر مساحت مستطیلی تصویر پیچ و مهره روی ورق به دست می‌آید، استفاده می‌شود. اگر ضخامت ورق را با  $t$  و قطر سوراخ را با  $d$  نشان دهیم،

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{td} \quad (11-1)$$

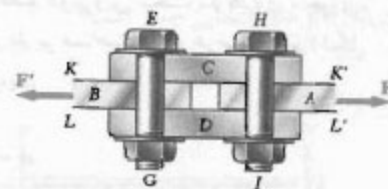
در قسمت ۸-۱، برای تحلیل یک سازه ساده متشکل از دو عضو با اتصال مفصلی، از مفاهیم قبل استفاده کردیم؛ یعنی، تنش‌های قائم در این دو عضو، باریکترین مقاطع، تنش‌های برشی در مفصل‌های مختلف و تنش تکیه‌گاهی در هر اتصال را بررسی کردیم.

در قسمت ۹-۱، روش حل مسائل مقاومت مصالح را توضیح دادیم، و گفتیم که حل باید با یک بیان واضح و دقیق از مسئله شروع شود. آنگاه، پس از ترسیم چند نمودار آزاد، معادله‌های تعادل را نوشته و نیروهای مجهول را با استفاده از آنها می‌یابیم. با حل این نیروها، تنش‌ها و تغییرشکل‌های مورد نیاز را محاسبه و آنها را به دقت و اوسی می‌کنیم. قسمت اول این فصل را با بحث درباره دقت عددی در مهندسی به پایان بردیم، و به این نکته توجه داشتیم که دقت پاسخ هیچوقت نمی‌تواند بیشتر از دقت داده‌ها باشد (قسمت ۱۰-۱).

برش تنها و برش دوگانه

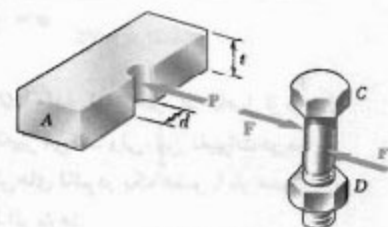


شکل ۱۸-۱



شکل ۲۰-۱

تنش تکیه‌گاهی



شکل ۲۲-۱

روش حل



# تنش در مقطع مایل

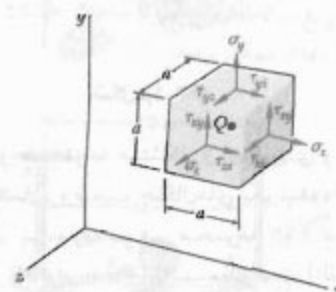


شکل ۳۰-۱ الف

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta \quad (14-1)$$

دیدیم که تنش قائم برای  $\theta = 0$  دارای مقدار ماکزیمم  $\sigma_m = P/A_0$  است، و برای  $\theta = 45^\circ$  تنش برشی دارای مقدار ماکزیمم  $\tau_m = P/2A_0$  است. همچنین، دیدیم که در  $\theta = 0$ ،  $\tau = 0$  و در  $\theta = 45^\circ$ ،  $\sigma = P/2A_0$ .

# تنش در بارگذاری کلی



شکل ۳۶-۱

درباره حالت تنش در نقطه  $Q$  از جسمی که تحت بارگذاری کلی است نیز بحث کردیم (قسمت ۱۲-۱). مکعب کوچکی با مرکز  $Q$  را در نظر گرفتیم (شکل ۳۶-۱) و تنش قائم وارد بر یک وجه مکعب را در امتداد عمود بر محور  $x$  با  $\sigma_x$  و مولفه‌های  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{yx}$  تنش برشی وارد بر همان وجه مکعب را، به ترتیب، با  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{yx}$  نشان دادیم. این روش را برای دو وجه دیگر مکعب تکرار کردیم و دیدیم که  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ،  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ،  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  نتیجه گرفتیم که برای مشخص کردن حالت تنش در نقطه معین  $Q$ ، شش مولفه تنش، یعنی  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$ ،  $\sigma_z$ ،  $\tau_{xy}$ ،  $\tau_{yz}$  و  $\tau_{zx}$  مورد نیازند.

# ضریب اطمینان

در قسمت ۱۳-۱، درباره مفاهیم مختلف در طراحی سازه‌های مهندسی بحث کردیم. دیدیم که بار نهایی یک عضو ساختمانی یا یک قطعه مکانیکی، باری است که پیش‌بینی می‌شود عضو یا قطعه تحت آن گسیخته شود؛ این بار از روی تنش نهایی یا استقامت نهایی ماده، که با آزمایش به دست می‌آیند، تعیین می‌شود. بار نهایی به طور قابل توجه از بار مجاز بیشتر است (بار مجاز باری است که عضو یا قطعه تحت شرایط عادی تحمل می‌کند). نسبت بار نهایی به بار مجاز را ضریب اطمینان می‌گویند:

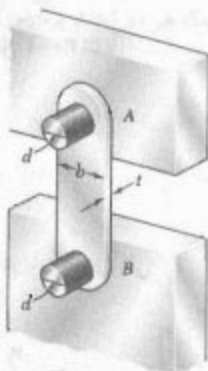
$$F.S. = \frac{\text{بار نهایی}}{\text{بار مجاز}} = \text{ضریب اطمینان} \quad (26-1)$$

تعیین ضریب اطمینان، که در طراحی یک سازه باید از آن استفاده کرد، بستگی به عوامل گوناگونی دارد که بعضی از آنها در این قسمت فهرست شدند.

# طراحی بر مبنای ضریب بار و مقاومت

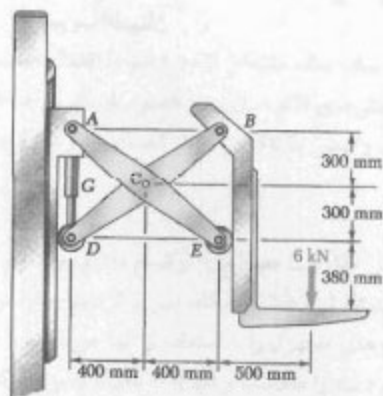
قسمت ۱۳-۱ را با بحث درباره روش دیگر طراحی، به نام طراحی بر مبنای ضریب بار و مقاومت، به پایان بردیم. در این روش، مهندس می‌تواند عدم قطعیت‌های مربوط به سازه و بار و از هم تفکیک کند.

۶۲-۱ رابط  $AB$ ، به عرض  $b = 50 \text{ mm}$  و ضخامت  $t = 6 \text{ mm}$ ، تکیه گاه یک تیر افقی را تشکیل می دهد. اگر تنش قائم متوسط در رابط  $84 \text{ MPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) قطر  $d$  پین ها، (ب) متوسط تکیه گاهی در رابط.



شکل م-۶۲

۶۳-۱ دو مجموعه متشکل از میله بندی و سیلندر هیدرولیکی همسان، وضعیت چنگال های یک لیفت تراک را کنترل می کنند. بار وارده بر هر مجموعه  $6 \text{ kN}$  است. اگر ضخامت عضو  $BD$  برابر  $16 \text{ mm}$  باشد، مطلوبست: (الف) تنش برشی متوسط در پین  $B$  به قطر  $12 \text{ mm}$ ، (ب) تنش تکیه گاهی در نقطه  $B$  از عضو  $BD$ .

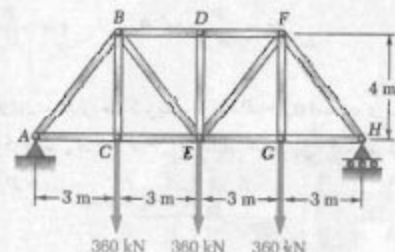


شکل م-۶۳

۶۴-۱ تنش برشی متوسط در پین  $B$  به قطر  $10 \text{ mm}$  نباید از  $120 \text{ MPa}$  و تنش تکیه گاهی متوسط در عضو  $AB$  و براکت  $B$  نباید از  $90 \text{ MPa}$  بیشتر شود. ماکزیمم بار  $P$  را بیابید.

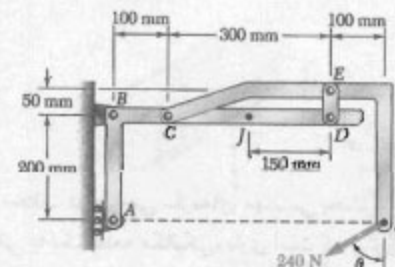
## مسائل تکمیلی

۵۹-۱ برای خرپا و بارگذاری نشان داده شده، تنش قائم متوسط را در عضو  $BE$  بیابید. مساحت مقطع عرضی این عضو  $1750 \text{ mm}^2$  است.



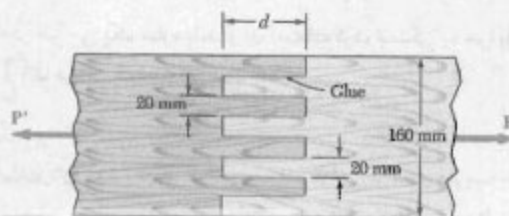
شکل م-۵۹

۶۰-۱ اگر عرض و ضخامت رابط  $DE$ ، به ترتیب،  $25 \text{ mm}$  و  $3 \text{ mm}$  باشد، مطلوبست تنش قائم در قسمت مرکزی آن در صورتی که: (الف)  $\theta = 0^\circ$ ، (ب)  $\theta = 90^\circ$ .



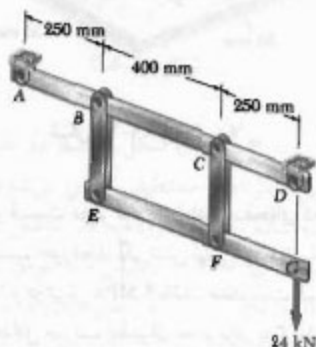
شکل م-۶۰

۶۱-۱ دو قطعه چوبی، هر یک به ضخامت  $22 \text{ mm}$  و به عرض  $160 \text{ mm}$ ، توسط اتصال خشک زبانه ای نشان داده شده به هم متصل اند. اگر چوب به دار رفته تحت تنش برش متوسط  $820 \text{ kPa}$  در امتداد دانه بندی اش بریده شود و  $P = 7.6 \text{ kN}$ ، کمترین طول مجاز  $d$  را بیابید.



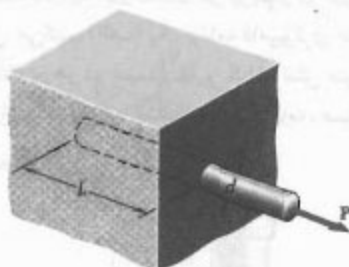
شکل م-۶۱

۶۷-۱ هر یک از دو بازوی عمودی  $CF$  که دو بازوی افقی  $AD$  و  $EG$  را به هم متصل می‌کند دارای مقطع عرضی مستطیلی  $۱۰\text{ mm} \times ۴۰\text{ mm}$  است و از فولاد با استقامت نهایی کششی  $۴۰۰\text{ MPa}$  ساخته شده است. هر یک از مفصل‌های  $C$  و  $F$  به قطر  $۲۰\text{ mm}$  و از فولاد با استقامت نهایی برشی  $۱۵۰\text{ MPa}$  است. ضریب اطمینان کلی بازوهای  $CF$  و مفصل‌هایی که آنها را به عضوهای افقی متصل می‌کند بیابید.



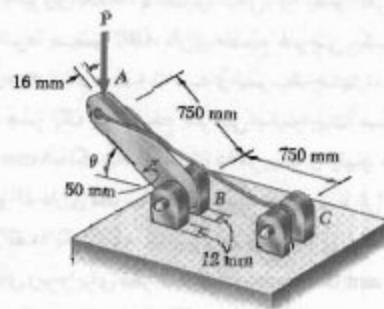
شکل م-۶۷

۶۸-۱ بار  $P$  بر میله فولادی وارد شده است. این میله داخل یک قطعه بتنی جازده شده است. مطلوب‌ست کمترین طول  $L$  به‌طوری که ماکزیمم تنش قائم مجاز در میله ایجاد شود. نتیجه را برحسب قطر  $d$  میله، تنش قائم مجاز  $\sigma_{all}$  فولاد، و تنش مجاز متوسط اتصال  $\tau_{all}$  بین بتن و سطح استوانه‌ای میله بیان کنید. (از تنش قائم بین بتن و انتهای میله صرف‌نظر کنید).



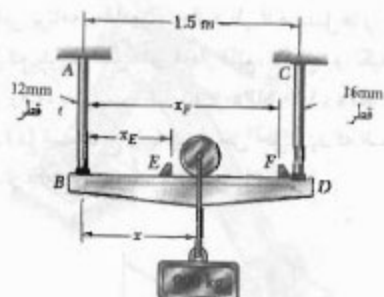
شکل م-۶۸

۶۹-۱ دو قسمت عضو  $AB$  در امتداد صفحه‌ای که با افق زاویه  $\theta$  دارد به هم چسب خورده‌اند. اگر تنش نهایی اتصال چسبی در کشش  $۱۷\text{ MPa}$  و در برش  $۹\text{ MPa}$  باشد، مطلوب‌ست: (الف) مقدار  $\theta$  متناظر با ماکزیمم ضریب اطمینان، (ب) مقدار ماکزیمم ضریب اطمینان.



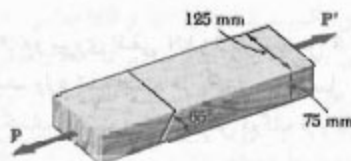
شکل م-۶۴

۶۵-۱ بار  $۹۰۰\text{ kg}$  می‌توان در امتداد تیر  $BD$  بین موانع  $E$  و  $F$  حرکت داد. اگر  $\sigma_{all}$  برای میله‌های  $AB$  و  $CD$  برابر با  $۲۲\text{ MPa}$  باشد، موانع را کجا قرار دهیم تا فاصله حرکت مجاز بار به بیشترین مقدار ممکن برسد.



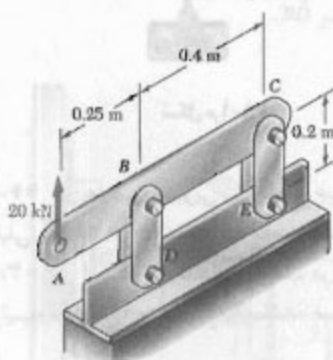
شکل م-۶۵

۶۶-۱ دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی  $۷۵ \times ۱۲۵\text{ mm}$  با چسب به هم متصل شده‌اند. اگر  $P = ۳.۶\text{ kN}$  و استقامت نهایی چسب در کشش و برش، به ترتیب،  $۱.۱\text{ MPa}$  و  $۱.۴\text{ MPa}$  باشد، ضریب اطمینان را بیابید.



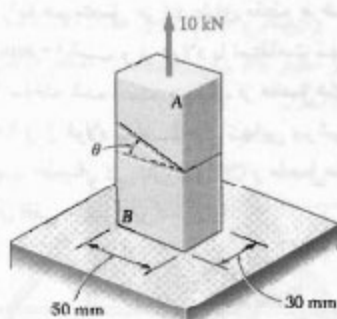
شکل م-۶۶

۱-ک ۲ نیروی  $20 \text{ kN}$ ، مطابق شکل، بر عضو افقی  $ABC$  وارد می‌شود. عضو  $ABC$  دارای مقطع عرضی یکنواخت مستطیل  $10 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$  است و توسط چهار بازوی عمودی، هر یک با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی  $8 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$ ، نگه داشته می‌شود. هر یک از چهار مفصل  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  دارای قطر یکسان  $d$  است و تحت برش دوگانه قرار دارد. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن کمیت‌های زیر را برای قطر  $d$  در گستره  $10 \text{ mm}$  تا  $30 \text{ mm}$ ، با نمو  $1 \text{ mm}$ ، محاسبه کنید: (۱) ماکزیمم مقدار تنش قائم متوسط در بازوهای متصل‌کننده مفصل‌های  $B$  و  $D$ ، (۲) تنش قائم متوسط در بازوهای متصل‌کننده مفصل‌های  $C$  و  $E$ ، (۳) تنش برشی متوسط در مفصل  $B$ ، (۴) تنش برشی متوسط در مفصل  $C$ ، (۵) تنش تکیه‌گاهی متوسط در  $B$  از عضو  $ABC$ ، (۶) تنش تکیه‌گاهی متوسط در  $C$  از عضو  $ABC$ . (ب) با مقایسه مقادیر حاصل برای  $d = 16 \text{ mm}$  با پاسخ‌های به‌دست آمده در مسائل ۸-۱، ۲۳-۱ و ۲۴-۱، این برنامه را واریسی کنید. (ج) با استفاده از این برنامه، مقادیر مجاز قطر  $d$  مفصل‌ها را بیابید در صورتی که بدانیم تنش‌های مجاز قائم، برشی، و تکیه‌گاهی فولاد به کار رفته، به ترتیب، عبارتند از  $150 \text{ MPa}$ ،  $90 \text{ MPa}$ ، و  $230 \text{ MPa}$ . (د) قسمت ج را با این فرض حل کنید که ضخامت عضو  $ABC$  از  $10 \text{ mm}$  به  $8 \text{ mm}$  کاهش یابد.



شکل ۱-ک ۲

۱-ک ۳ دو نیروی افقی  $20 \text{ kN}$  بر مفصل  $B$  مجموعه نشان داده شده وارد شده است. هر یک از سه مفصل  $A$ ،  $B$  و  $C$  دارای قطر یکسان  $d$  است و تحت برش دوگانه قرار دارد. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن کمیت‌های زیر را برای مقادیر  $d$  در گستره  $17.5 \text{ mm}$  تا  $27.5 \text{ mm}$ ، با نمو  $1.75 \text{ mm}$ ، محاسبه کنید: (۱) ماکزیمم مقدار تنش قائم



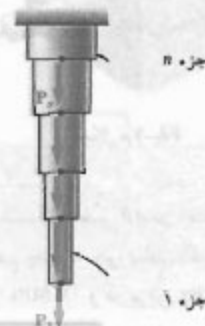
شکل ۱-ک ۶۹-۷۰

۷۰-۱ دو قسمت عضو  $AB$  در امتداد صفحه‌ای که با افق زاویه  $\theta$  دارد به هم چسب خورده‌اند. اگر تنش نهایی برای اتصال چسبی در کشش  $17 \text{ MPa}$  و در برش  $9 \text{ MPa}$  باشد، مطلوبست گستره مقدار  $\theta$  که به ازای آن حداقل ضریب اطمینان عضو برابر با ۳ باشد.

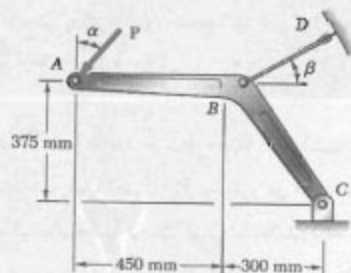
## مسائل کامپیوتری

مسائل زیر برای حل با کامپیوتر طرح شده‌اند.

۱-ک ۱ یک میله توپر فولادی از  $n$  جزء استوانه‌ای که به هم جوش‌اند تشکیل شده است. این میله تحت بارگذاری نشان داده شده قرار دارد. قطر جزء  $i$  را با  $d_i$  و بار وارد بر انتهای پایینی آن را با  $P_i$  نشان می‌دهیم. اگر  $P_i$  مطابق شکل، به طرف پایین باشد، مقدار  $P_i$  آن را مثبت می‌گیریم و در غیر اینصورت منفی فرض می‌کنیم. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن، دو هر دو سیستم SI و US، تنش متوسط در هر جزء میله را بیابید. (ب) با استفاده از این برنامه، مسائل ۱-۱ و ۱-۳ را حل کنید.

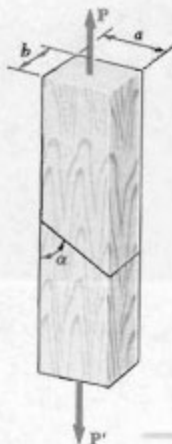


شکل ۱-ک ۱



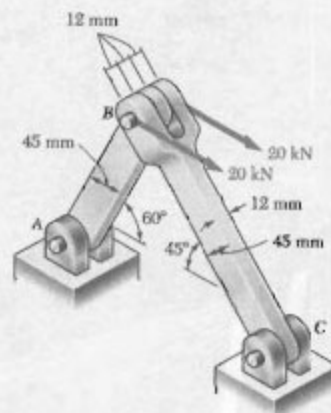
شکل ۱-۴

۱-ک ۵ بار  $P$ ، مطابق شکل، توسط دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی تحمل می‌شود. این دو عضو توسط وصله ساده چسب خورده به هم متصل شده‌اند. (الف) اگر استقامت نهایی اتصال در کشش و در برش را، به ترتیب، با  $\sigma_{IJ}$  و  $\tau_{IJ}$  نشان دهیم، یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن، برای مقادیر داده شده  $P$ ،  $b$ ،  $a$ ،  $\alpha$ ،  $\beta$  (که در واحدهای SI یا U.S. بیان شده‌اند)، و برای مقادیر  $\alpha$  از  $5^\circ$  تا  $85^\circ$  در بازه‌های  $5^\circ$ ، کمیت‌های زیر را محاسبه کنید: (۱) تنش قائم در اتصال، (۲) تنش برشی در اتصال، (۳) ضریب اطمینان نسبت به گسیختگی در کشش، (۴) ضریب اطمینان نسبت به گسیختگی در برش، (۵) ضریب اطمینان کلی برای اتصال چسب خورده. (ب) با استفاده از ابعاد و بارگذاری عضوها در مسائل ۱-۲۹، ۱-۳۲، این برنامه را اجرا کنید، در صورتیکه بدانیم برای چسب به کار رفته در مسئله ۱-۲۹ داریم  $\sigma_{IJ} = 17.26 \text{ MPa}$  و برای چسب به کار رفته در مسئله ۱-۳۲ داریم  $\tau_{IJ} = 1.50 \text{ MPa}$ .



شکل ۱-۵

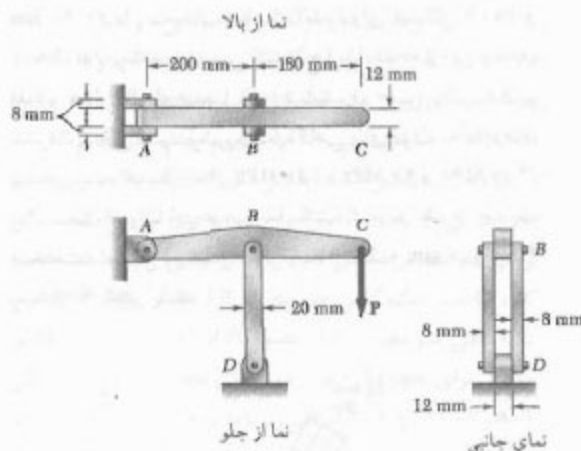
متوسط در عضو  $AB$ ، (۲) تنش قائم متوسط در عضو  $BC$ ، (۳) تنش برشی متوسط در مفصل  $A$ ، (۴) تنش برشی متوسط در مفصل  $C$ ، (۵) تنش تکیه‌گاهی متوسط در  $A$  از عضو  $AB$ ، (۶) تنش تکیه‌گاهی متوسط در  $C$  از عضو  $BC$ ، (۷) تنش تکیه‌گاهی متوسط در  $B$  از عضو  $BC$ . (ب) با مقایسه مقادیر حاصل برای  $d = 20 \text{ mm}$  با پاسخ‌های به دست آمده برای مسائل ۱-۱ و ۱-۲۸، این برنامه را واریسی کنید. (ج) با استفاده از این برنامه، مقادیر مجاز قطر  $d$  مفصل‌ها را بیابید، در صورتیکه بدانیم تنش‌های مجاز قائم، برشی و تکیه‌گاهی برای فولاد به کار رفته، به ترتیب عبارتند از  $150 \text{ MPa}$ ،  $90 \text{ MPa}$  و  $250 \text{ MPa}$ . (د) قسمت ج را با این فرض حل کنید که، در طرح جدید، ضخامت و عرض دو عضو، به ترتیب، از  $12 \text{ mm}$  به  $8 \text{ mm}$ ، و از  $45 \text{ mm}$  به  $6 \text{ mm}$  تغییر یابند.



شکل ۱-۳

۱-ک ۴ نیروی  $P = 16 \text{ kN}$ ، که با عمود زاویه  $\alpha$  دارد، مطابق شکل بر عضو  $ABC$  وارد می‌شود. این عضو توسط مفصل  $C$  و کابل  $BD$ ، که با افق زاویه  $\beta$  دارد، نگه داشته می‌شود. (الف) اگر بار نهایی کابل  $100 \text{ kN}$  باشد، یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با آن جدولی از ضریب اطمینان کابل را برای مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  از صفر تا  $45^\circ$  تشکیل دهید. برای این منظور، نمودارهای  $\alpha$  و  $\beta$  را طوری بگیرید که نمودار  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  برابر با  $0.1$  باشد. (ب) نشان دهید که برای تمام مقادیر  $\alpha$ ، مقدار ماکزیمم ضریب اطمینان برای  $\beta = 38.66^\circ$  است و علت آن را توضیح دهید. (ج) کمترین مقدار ممکن ضریب اطمینان را برای  $\beta = 38.66^\circ$ ، و نیز مقدار متناظر  $\alpha$  را بیابید و نتیجه حاصل را توضیح دهید.

وارسی کنید. (د) با استفاده از این برنامه، بار مجاز  $P_{all}$ ، و اینکه کدام یک از تنش‌ها بحرانی است را برای معلومات زیر بیابید:  $\sigma_U = 110 \text{ MPa}$ ،  $d_1 = d_2 = 15 \text{ mm}$ ،  $F.S. = 3.2$ ، و برای مفصل‌های فولادی،  $\tau_U = 100 \text{ MPa}$ .



شکل ۱-۶

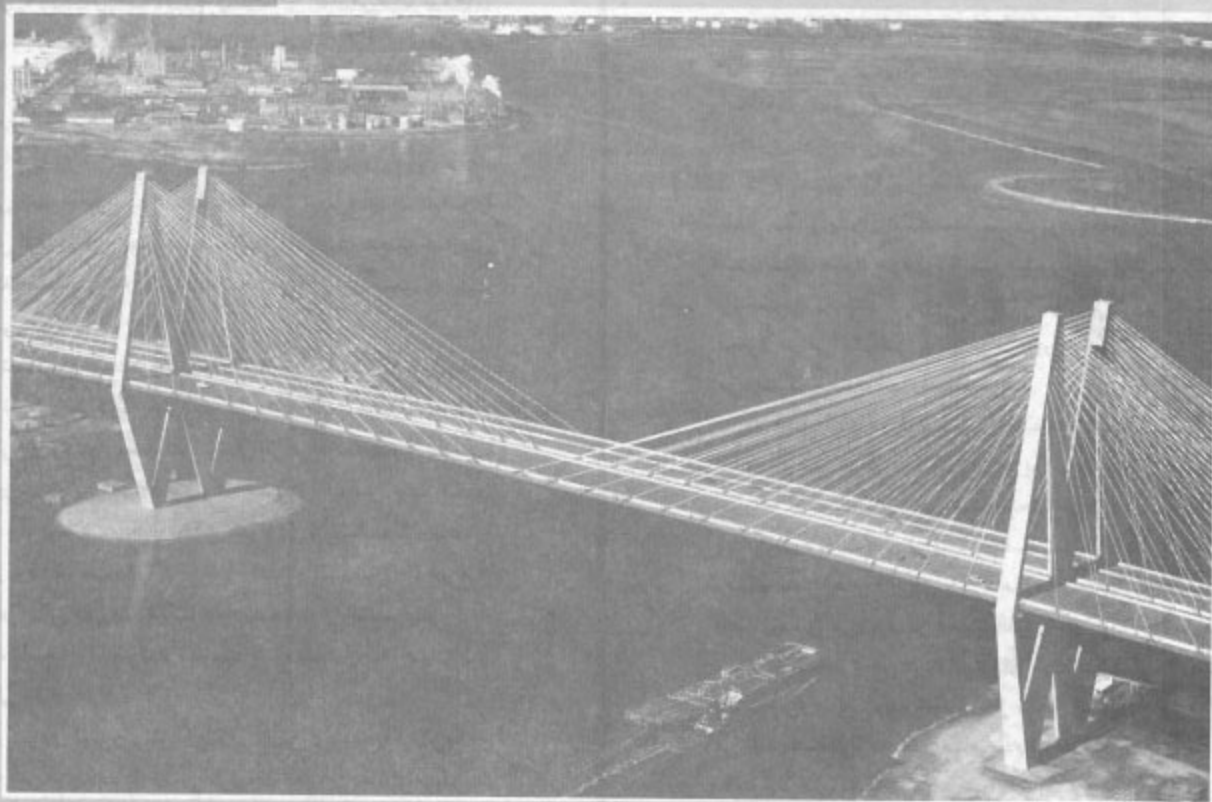
داریم  $\sigma_U = 150 \text{ psi}$  و  $\tau_U = 214 \text{ psi}$ . (ج) نشان دهید که تنش برشی در هر یک از این حالت برای  $\alpha = 45^\circ$  دارای مقدار ماکزیمم است.

۱-۶ عضو  $ABC$  توسط مفصل و براکت  $A$  و توسط دو بازو نگه داشته شده است. این دو بازو در  $B$  به عضو  $ABC$  و در  $D$  به یک تکیه‌گاه ثابت لولا شده‌اند. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن بار مجاز  $P_{all}$  را برای موارد زیر محاسبه کنید: (۱) برای هر قطر داده شده  $d_1$  برای مفصل  $A$ ، (۲) برای قطر مشترک  $d_2$  مفصل‌های  $B$  و  $D$ ، (۳) برای تنش نهایی  $\sigma_U$  در هر یک از دو بازو، (۴) برای تنش برشی نهایی  $\tau_U$  در هر یک از سه مفصل، (۵) برای ضریب اطمینان کلی دلخواه  $F.S.$ ، برنامه باید نشان دهد که کدام یک از سه تنش بحرانی است: تنش قائم در بازوها، تنش برشی در مفصل  $A$ ، یا تنش برشی در مفصل‌های  $B$  و  $D$ . (ب و ج) با استفاده از داده‌های مسائل ۱-۵۳ و ۱-۵۴، و بنا مقایسه پاسخ‌های به‌دست آمده برای  $P_{all}$  با مقادیر به‌دست آمده در تنش، این برنامه را



۲

## تنش و کرنش بارگذاری محوری



در این فصل، تغییر شکل های اجزای ساختمانی را که تحت بارگذاری محوری اند بررسی می کنیم. برای طراحی این پل کابلی، واقع در بندر هوستون، تغییر طول مهارهای قطری به دقت در نظر گرفته شده اند.

## ۱-۲ مقدمه

در فصل ۱، تنش‌های حاصل از بارهای وارد بر عضوها را تحلیل کردیم. همچنین، طراحی عضوها و اتصالات ساده را، به طوری که تحت شرایط خاص بارگذاری گسیخته نشوند، آموختیم. جنبه دیگر تحلیل و طراحی سازه‌ها مربوط می‌شود به تغییرشکل‌هایی که توسط بارهای وارده ایجاد می‌شوند. بدیهی است که باید از تغییرشکل‌های بزرگ جلوگیری شود تا سازه بتواند منظورهای طراحی را برآورده کند. اما، تحلیل تغییرشکل‌ها در تعیین تنش‌ها نیز کمک می‌کند. در حقیقت، همیشه نمی‌توان نیروهای موجود در عضوهای یک سازه را فقط با کاربرد اصول استاتیک تعیین کرد، زیرا در استاتیک فرض می‌شود که سازه‌ها صلب و تغییرشکل ناپذیرند. با در نظر گرفتن سازه‌های مهندسی به عنوان سازه‌های تغییرشکل‌پذیر و با تحلیل تغییرشکل‌های عضوهای مختلف آنها، می‌توان نیروهای نامعین استاتیکی، یعنی نیروهایی را که با استاتیک نمی‌توان تعیین کرد، به دست آورد. همچنین، در قسمت ۱-۵ نشان دادیم که توزیع تنش‌ها در یک عضو از نظر استاتیکی نامعین است، حتی اگر نیرو در آن عضو معلوم باشد. لذا، برای تعیین توزیع واقعی تنش‌ها در یک عضو، باید تغییرشکل‌های آن عضو را تحلیل کرد. در این فصل، تغییرشکل‌های یک عضو سازه‌ای مانند میل، یا ورق را که تحت بارگذاری محوری است بررسی می‌کنیم.

ابتدا، کرنش قائم  $\epsilon$  در یک عضو را به عنوان تغییرشکل طول واحد عضو تعریف می‌کنیم. با ترسیم تنش  $\sigma$  بر حسب کرنش  $\epsilon$ ، هنگام افزایش بار وارد بر عضو، نمودار تنش-کرنش ماده عضو را به دست می‌آوریم. از این نمودار می‌توان بعضی از خواص مهم ماده، مانند مدول الاستیسته، و چکش‌خواری یا شکندگی ماده را تعیین کرد (قسمت‌های ۲-۲ تا ۲-۵). در قسمت ۲-۵ خواهیم دید در حالی که رفتار اغلب مواد مستقل از جهت بار وارده است، پاسخ مواد مرکب تقویت شده با تار به جهت بار بستگی دارد.

از نمودار تنش-کرنش می‌توان تعیین کرد که آیا کرنش‌ها در نمونه پس از حذف بار از بین می‌روند - در این حالت می‌گویند ماده به طور الاستیکی رفتار می‌کند - یا اینکه یک تغییرشکل پلاستیکی دائم در آن به وجود می‌آید (به قسمت ۲-۶ نگاه کنید).

در قسمت ۲-۷، پدیده خستگی را بررسی می‌کنیم، که به موجب آن یک عضو پس از تکرار زیاد بارگذاری گسیخته می‌شوند، حتی اگر تنش‌ها در گستره الاستیک باشند.

بخش اول این فصل با قسمت ۲-۸ پایان می‌گیرد، که در آن تغییرشکل انواع مختلف عضوها تحت شرایط گوناگون بارگذاری محوری تعیین می‌شود.

در قسمت‌های ۲-۹ و ۲-۱۰، مسائل نامعین استاتیکی را بررسی می‌کنیم؛ یعنی، مسائلی که در آنها واکنش‌ها و نیروهای داخلی را نمی‌توان صرفاً با استاتیک به دست آورد. معادله‌های تعادل را که از نمودار آزاد یک عضو به دست می‌آیند باید با رابطه‌هایی که شامل تغییرشکل‌ها هستند کامل کرد؛ این رابطه‌ها از هندسه مسئله به دست می‌آیند.

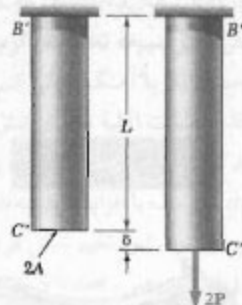
در قسمت‌های ۲-۱۱ تا ۲-۱۵، ثابت‌های اضافی مربوط به مواد ایزوتروپیک - یعنی، موادی که مشخصه‌های مکانیکی آنها مستقل از جهت است - تعریف می‌شوند؛ مانند نسبت پواسون که عوامل زیر را به هم ارتباط می‌دهد: کرنش جانبی و کرنش محوری، مدول کپه‌ای (که تغییر حجم یک ماده را تحت فشار هیدروستاتیکی مشخص می‌کند) و مدول صلابت (که مولفه‌های تنش برشی و کرنش برشی را به هم ارتباط می‌دهد). رابطه‌های تنش-کرنش برای یک ماده ایزوتروپیک تحت بارگذاری چند محوری را نیز استخراج می‌کنیم.

در قسمت ۲-۱۶، رابطه‌های تنش-کرنش را که شامل چند مقدار متمایز مدول الاستیسته، نسبت پواسون و مدول صلابت است، برای مواد مرکب تقویت شده با تار تحت بارگذاری چندمحوری به دست می‌آوریم. چون این مواد ایزوتروپیک نیستند، معمولاً خواص مشخصی به نام خواص اورتوتروپیک از خود نشان می‌دهند که مطالعه آنها را ساده می‌کند.

در فصل قبل، دو فرض زیر را در نظر گرفتیم: (۱) تنش در مقاطع عرضی به طور یکنواخت توزیع می‌شود، (۲) مواد به صورت الاستیک باقی می‌مانند. صحت فرض اول در قسمت ۲-۱۷ مورد بحث قرار می‌گیرد. در قسمت ۲-۱۸، تمرکز تنش در نزدیک سوراخ‌های دایره‌ای و گرده‌ها (ماهچه‌ها) در میل‌های تخت بررسی می‌شود. در قسمت‌های ۲-۱۹ و ۲-۲۰، درباره تنش و تغییرشکل در عضوهای ساخته شده از مواد چکش‌خواری بحث می‌شود که از نقطه تسلیم خود فراتر می‌روند. همانطور که بعداً خواهیم دید، تغییرشکل‌های پلاستیک دائم و تنش‌های باقیمانده از این شرایط بارگذاری ناشی می‌شوند.

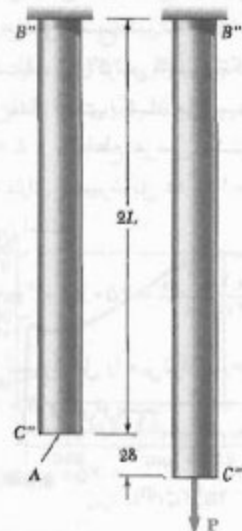
## ۲-۲ کرنش قائم تحت بارگذاری محوری

میله  $BC$ ، به طول  $L$  و با مساحت مقطع عرضی یکنواخت  $A$ ، را که از نقطه  $B$  آویزان شده است در نظر می‌گیریم (شکل ۲-۱ الف). با اعمال بار  $P$  بر انتهای  $C$ ، میل افزایش طول می‌دهد (شکل ۲-۱ ب). با ترسیم مقدار  $P$  بار بر حسب



شکل ۳-۲

منحنی  $\sigma = P/A$  برحسب کرنش  $\epsilon = \delta/L$  مشخصه خواص ماده را نشان می‌دهد و شکل آن به ابعاد نمونه مورد استفاده بستگی ندارد. این منحنی را نمودار تنش-کرنش می‌گویند و در قسمت ۳-۲ به تفصیل بررسی می‌شود.

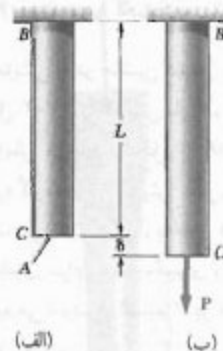


شکل ۴-۲

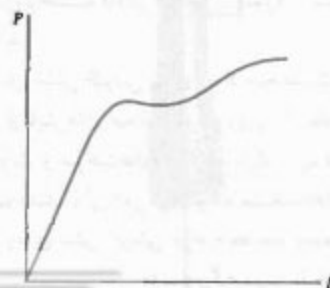
چون میله BC مذکور دارای مساحت مقطع عرضی یکنواخت A است، می‌توان فرض کرد تنش قائم  $\sigma$  در تمام میله دارای مقدار ثابت  $P/A$  است. لذا، کرنش به عنوان نسبت تغییر شکل به طول کل میله تعریف شد. ولی، در یک عضو با مساحت مقطع عرضی متغیر، تنش قائم  $\sigma = P/A$  در امتداد عضو تغییر می‌کند و کرنش را باید در نقطه معین Q تعریف کرد.

تغییر شکل  $\delta$ ، نمودار بارگذاری-تغییر شکل را به دست می‌آوریم (شکل ۲-۲). گرچه این نمودار شامل اطلاعات مفیدی برای تحلیل میله تحت بررسی است، ولی از آن نمی‌توان برای پیش‌بینی تغییر شکل یک میله از همان جنس ولی با ابعاد دیگر استفاده کرد. مشاهده می‌شود اگر تغییر شکل  $\delta$  توسط بار P در میله BC ایجاد شود، بار  $2P$  باعث می‌شود همان تغییر شکل در میله  $B'C'$  به طول L و با مساحت مقطع عرضی  $2A$  به وجود آید (شکل ۳-۲). در هر دو حالت، مقدار تنش یکسان است و برابر است با  $\sigma = P/A$ . از طرف دیگر، بار P که بر میله  $B'C'$  با مساحت مقطع عرضی A و به طول  $2L$  وارد می‌شود باعث می‌شود تغییر شکل  $2\delta$  در این میله به وجود آید (شکل ۴-۲). یعنی، دو برابر تغییر شکلی که در میله BC به وجود می‌آید. اما در هر دو حالت، نسبت تغییر شکل به طول میله دارای مقدار یکسان  $\delta/L$  است. یا توجه به این مطلب، مفهوم کرنش را وارد می‌کنیم: کرنش قائم در میله‌ای که تحت بارگذاری محوری است به عنوان تغییر شکل طول واحد آن میله تعریف می‌شود. اگر کرنش قائم را با  $\epsilon$  نشان می‌دهیم.

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (1-2)$$

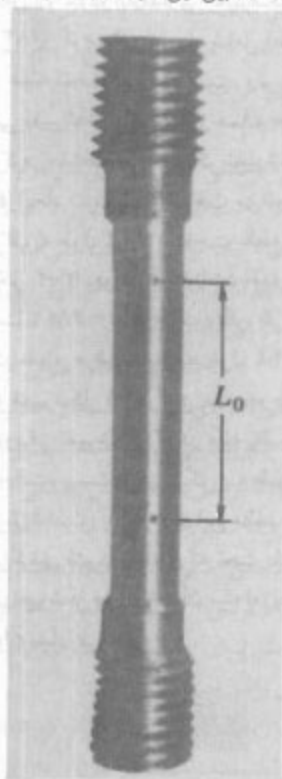


شکل ۱-۲



شکل ۲-۲

در نظر می‌گیرند. فاصله  $L_0$  بین این دو علامت را طول سنجه می‌گویند.



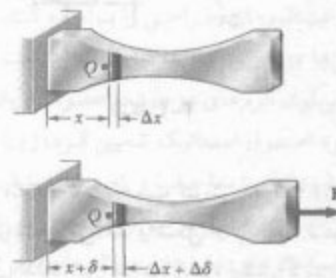
شکل ۲-۶ نمونه نوعی تحت آزمون کشش

سپس، نمونه آزمایشی را در ماشین کشش تحت بار مرکزی  $P$  قرار می‌دهند (شکل ۲-۷). با افزایش بار  $P$ ، فاصله  $L$  بین دو علامت سنجه نیز افزایش می‌یابد (شکل ۲-۸). فاصله  $L$  را با سنجه شماره‌دار اندازه گرفته، و افزایش طول  $\delta = L - L_0$  را برای هر مقدار  $P$  ثبت می‌کنند. اغلب، به‌طور همزمان، از یک سنجه شماره‌دار ثانوی برای اندازه‌گیری و ثبت تغییرات قطر نمونه نیز استفاده می‌شود. از تقسیم  $P$  بر مساحت مقطع عرضی اولیه نمونه ( $A_0$ ) می‌توان تنش  $\sigma$  و از تقسیم  $\delta$  بر فاصله اولیه  $L_0$  می‌توان کرنش  $\epsilon$  را تعیین کرد. سپس، با ترمیم  $\epsilon$  (در طول) برحسب  $\sigma$  (در عرض)، نمودار تنش-کرنش به‌دست می‌آید.

نمودارهای تنش-کرنش برای مواد مختلف کاملاً با هم متفاوت‌اند و آزمایش‌های مختلف کشش روی یک ماده خاص، در دماهای متفاوت و سرعت‌های مختلف بارگذاری، ممکن است نتایج مختلف دهند. ولی، می‌توان وجه مشخصه‌های مشترکی را برای نمودارهای تنش-کرنش مواد مختلف تشخیص داد و مواد را بر مبنای این مشخصه‌ها به دو گروه زیر تقسیم‌بندی کرد: مواد یکسخت‌خوار و مواد شکننده.

برای این منظور، جزء کوچکی را با طول تغییرشکل نداده  $\Delta x$  در نظر می‌گیریم (شکل ۲-۵). اگر تغییرشکل این جزء را تحت بارگذاری داده شده با  $\Delta \delta$  نشان دهیم، کرنش قائم در نقطه  $Q$  چنین است:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \quad (2-2)$$



شکل ۲-۵

چون تغییرشکل و طول در آحاد یکسان بیان می‌شوند، کرنش قائم  $\epsilon$ ، که حاصل تقسیم  $\delta$  بر  $L$  (یا  $d\delta$  بر  $dx$ ) است، یک کمیت بی‌بعد است. لذا، برای کرنش قائم در یک عضو در هر دو آحاد SI و U.S. به مقدار عددی یکسان می‌رسیم. مثلاً، میله‌ای با طول  $L = 0.600 \text{ m}$  و با مقطع عرضی یکنواخت را در نظر بگیرید. این میله دارای تغییرشکل  $\delta = 150 \times 10^{-6} \text{ m}$  است. کرنش متناظر چنین است:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150 \times 10^{-6} \text{ m}}{0.600 \text{ m}} = 250 \times 10^{-6} \text{ m/m} = 250 \times 10^{-6}$$

توجه کنید که تغییرشکل را می‌توان برحسب میکرومتر بیان کرد.  $\delta = 150 \mu\text{m}$  و می‌نویسیم:

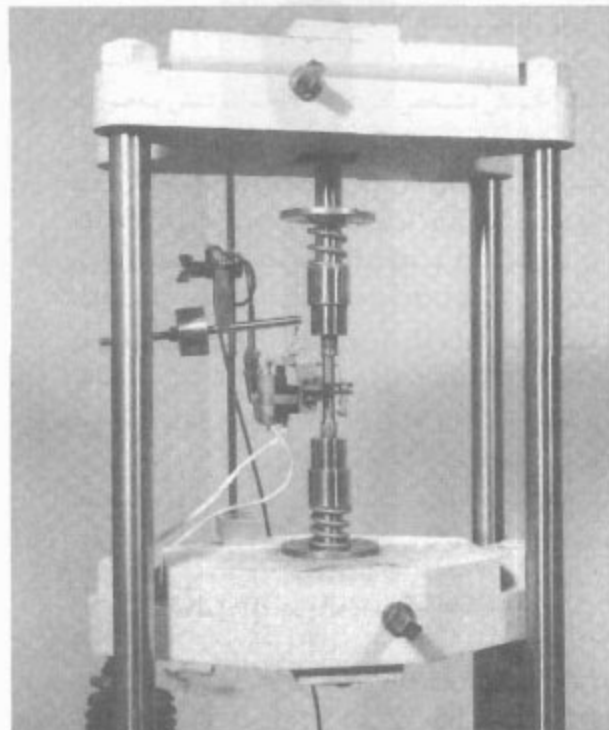
$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150 \mu\text{m}}{0.600 \text{ m}} = 250 \mu\text{m/m} = 250 \mu$$

( $\mu$  تلفظ می‌شود "میکرو").

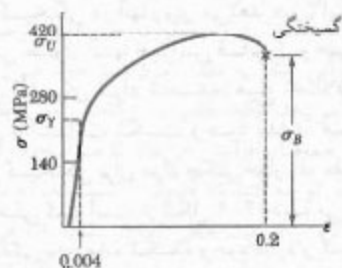
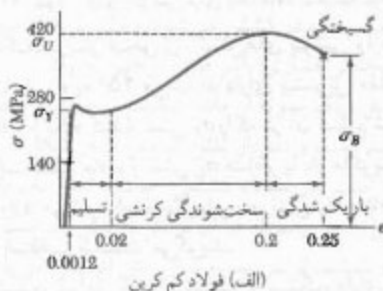
## ۲-۳ نمودار تنش-کرنش

در قسمت ۲-۲ دیدیم که نمودار تنش-کرنش، یکی از مشخصه‌های مهم مواد است. برای تعیین نمودار تنش-کرنش یک ماده، معمولاً نمونه‌ای از آن را تحت آزمایش کشش قرار می‌دهند. در شکل ۲-۶، یکی از این نمونه‌ها نشان داده شده است. مساحت مقطع عرضی قسمت استوانه‌ای مرکزی نمونه را به‌دقت تعیین کرده و دو علامت را روی این قسمت

مواد چکش خوار، شامل فولاد ساختمانی و بسیاری از آلیاژهای فلزی، با قابلیت شان برای تسلیم در دماهای معمولی مشخص می‌شوند. وقتی نمونه تحت بار افزایشی قرار می‌گیرد، ابتدا طول آن برحسب بار با آهنگ خیلی کم به طور خطی افزایش می‌یابد. لذا، قسمت اولیه نمودار تنش-کرنش یک خط راست با شیب تند است (شکل ۲-۹). ولی، پس از اینکه نمونه به تنش بحرانی  $\sigma_y$  می‌رسد، با افزایش بار به مقدار کم دستخوش تغییر شکل بزرگی می‌شود. این تغییر شکل بر اثر لغزش ماده در امتداد سطوح مایل است؛ یعنی، عمدتاً از تنش‌های برشی ناشی می‌شود. همانطور که از نمودارهای تنش-کرنش دو ماده چکش خوار نوعی (شکل ۲-۹) می‌توان دید، افزایش طول نمونه پس از شروع تسلیم ممکن است ۲۰۰ برابر تغییر شکل آن قبل از تسلیم باشد. پس از اینکه بار به مقدار ماکزیمم معینی می‌رسد، قطر قسمتی از نمونه شروع به کاهش می‌کند که ناشی از ناپایداری محلی است (شکل ۲-۱۰ الف). این پدیده را باریک‌شدگی می‌گویند. پس از شروع باریک‌شدگی، بارهای کمتری برای افزایش بیشتر نمونه مورد نیازند، تا سرانجام گسیختگی نهایی روی می‌دهد (شکل ۲-۱۰ ب). توجه داریم که گسیختگی در امتداد یک سطح مخروطی روی می‌دهد که با سطح اولیه نمونه تقریباً زاویه  $45^\circ$  می‌سازد. این نشان می‌دهد که شکست مواد چکش خوار اساساً ناشی از برش است و



شکل ۲-۷ از این ماشین برای آزمایش نمونه‌های کششی، مانند آنچه که در این فصل نشان داده شدند، استفاده می‌شود.



(ب) آلیاژ آلومینیوم

شکل ۲-۹ نمودارهای تنش-کرنش دو ماده چکش خوار نوعی



شکل ۲-۸ نمونه آزمایشی یا بار کششی.

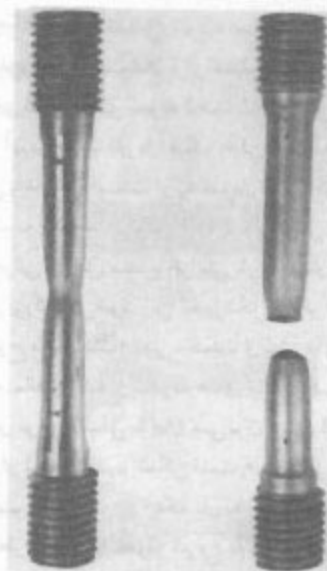




شکل ۲-۱۲ نمونه آزمایشی یک ماده شکننده.

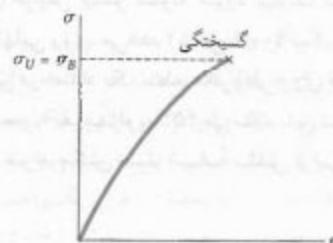
نمودارهای تنش کرنش شکل ۲-۹ نشان می‌دهند که فولاد و آلومینیوم ساختمانی، که هر دو چکش‌خوارند، دارای مشخصه‌های تسلیم متفاوت‌اند. در فولاد ساختمانی (شکل ۲-۹ الف)، پس از شروع تسلیم، تنش در گستره بزرگی از مقادیر کرنش ثابت می‌ماند. سپس، برای حفظ افزایش طول نمونه باید تنش افزایش یابد تا به مقدار ماکزیمم  $\sigma_U$  برسد. این ناشی از خاصیتی از ماده به نام سخت شوندگی کرنشی است. استقامت تسلیم فولاد ساختمانی در آزمون کششی را با رؤیت بلری که روی ماشین آزمون نشان داده می‌شود می‌توان تعیین کرد. پس از افزایش دائمی بار، دیده می‌شود که بار ناگهان کمی کاهش یافته و برای مدتی در همین مقدار می‌ماند؛ ولی، افزایش طول نمونه ادامه می‌یابد. در یک آزمایش بسیار دقیق، می‌توان نقطه تسلیم بالایی را (که متناظر است با بار درست قبل از شروع تسلیم) از نقطه تسلیم پایینی (که متناظر است با بار مورد نیاز برای حفظ تسلیم) از یکدیگر تمیز داد. چون نقطه تسلیم بالایی گذراست، برای تعیین استقامت نهایی ماده باید از نقطه تسلیم پایینی استفاده کرد.

\* آزمایش‌های کشش که در این قسمت توصیف شدند در دماهای معمولی در نظر گرفته می‌شوند. ولی، ماده‌ای که در دماهای معمولی چکش‌خوار است در دماهای خیلی پایین ممکن است مشخصه‌های یک ماده شکننده را از خود نشان دهد، و یک ماده شکننده معمولی ممکن است در دماهای خیلی زیاد چکش‌خوار شود. لذا، در دماهای غیر معمولی باید به جای واژه چکش‌خوار یا شکننده از واژه در حالت چکش‌خواری یا در حالت شکنندگی صحبت کرد.



(الف) (ب)

شکل ۲-۱۰ نمونه آزمایشی یک ماده چکش‌خوار.



شکل ۲-۱۱ نمودار تنش-کرنش برای یک ماده شکننده نوعی.

نشان می‌دهد که، در بار محوری، تنش‌های برشی وارد بر سطوحی که با بار زاویه  $45^\circ$  می‌سازند دارای بیشترین مقدارند (به قسمت ۱-۱۱ نگاه کنید). تنش  $\sigma_y$  را که در آن تسلیم شروع می‌شود استقامت تسلیم ماده، و تنش  $\sigma_U$  متناظر با بار ماکزیمم را که بر نمونه وارد می‌شود استقامت نهایی، و تنش  $\sigma_B$  متناظر با گسیختگی را استقامت شکست می‌گویند.

مواد شکننده، شامل چدن، شیشه و سنگ، دلای این مشخصه‌اند که گسیختگی در آنها روی می‌دهد بدون اینکه قبلاً آهنک افزایش طول آنها افزایش قابل توجهی دهد (شکل ۲-۱۱). لذا، برای مواد شکننده، هیچ اختلافی بین استقامت نهایی و استقامت شکست وجود ندارد. همچنین، کرنش در زمان گسیختگی برای مواد چکش‌خوار، در مقایسه با مواد شکننده، خیلی کمتر است. از شکل ۲-۱۲ دیده می‌شود که حالت باریک‌شدگی برای ماده شکننده وجود ندارد و گسیختگی در امتداد سطح عمود بر بار روی می‌دهد. یعنی، تنش‌های قائم عامل اصلی شکست مواد شکننده‌اند.



برای فولادهای معمولی با استقامت تسلیم تا ۵۰ ksi برابر با ۲۱٪ است. یعنی، مینیمم کرنش متوسط هنگام گسیختگی باید ۲۱ mm/mm باشد.

یکی دیگر از معیارهای چکش خواری، درصد کاهش مساحت است. با تعریف زیر

$$\text{درصد کاهش مساحت} = 100 \frac{A_0 - A_B}{A_0}$$

که در آن  $A_0$  و  $A_B$  به ترتیب، مساحت مقطع عرضی نمونه و مینیمم مساحت مقطع عرضی آن هنگام گسیختگی است. برای فولاد ساختمانی، درصد کاهش مساحت معمولاً ۶۰ تا ۷۰ درصد است.

تا به حال، فقط درباره آزمایش‌های کشش بحث کرده‌ایم. اگر نمونه‌ای از یک ماده چکش خوار تحت فشار قرار گیرد، منحنی تنش-کرنش حاصل اساساً از لحاظ قسمت خطی اولیه و شروع قسمت منطابق با تسلیم و سخت‌شوندگی کرنشی مانند منحنی تنش-کرنش در آزمایش کشش است. گفتنی است که برای یک فولاد معین، استقامت تسلیم در کشش و فشار دارای مقدار یکسان است. برای مقادیر بزرگتر کرنش، منحنی‌های تنش-کرنش در کشش و فشار از هم فاصله می‌گیرند. باید توجه داشت که باریک‌شدگی در آزمایش فشار روی نمی‌دهد. در اغلب مواد شکننده، دیده می‌شود که استقامت نهایی در فشار خیلی بیشتر از استقامت نهایی آن در کشش است و این ناشی از وجود نقص‌ها، مانند ترک‌ها یا حفره‌های میکروسکوپی است که باعث تضعیف ماده در کشش می‌شوند، ولی بر مقاومت آن در مقابل گسیختگی فشاری تأثیر قابل توجهی ندارند.

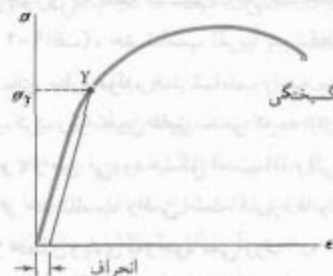
پس، یک نمونه از ماده شکننده با خواص مختلف در کشش و فشار است و نمودار تنش-کرنش آن در شکل ۲-۱۴ نشان داده شده است. در سمت کششی نمودار، ابتدا یک ناحیه الاستیک خطی را می‌بینیم که در آن کرنش با تنش متناسب است. پس از نقطه تسلیم، کرنش سریع‌تر از تنش افزایش می‌یابد تا سرانجام، گسیختگی روی می‌دهد. ماده در فشار رفتار متفاوتی دارد. اول اینکه، ناحیه الاستیک خطی به طور قابل توجه وسیع‌تر است. دوم، وقتی تنش به مقدار ماکزیمم خود می‌رسد، گسیختگی روی نمی‌دهد بلکه مقدار تنش کاهش می‌یابد، در حالی که کرنش همچنان افزایش می‌یابد تا سرانجام، گسیختگی روی می‌دهد. توجه کنید که مدول الاستیسیته، که با شیب منحنی تنش-کرنش قسمت خطی نمودار نشان داده می‌شود، در کشش و فشار دارای مقدار یکسان است. این موضوع برای اغلب مواد شکننده صحیح دارد.

در آلومینیم (شکل ۲-۹ب) و بسیاری از مواد چکش‌خوار دیگر، شروع تسلیم را نمی‌توان با قسمت افقی منحنی تنش-کرنش مشخص کرد. در این مواد، تنش به صورت غیرخطی افزایش می‌یابد تا اینکه به استقامت نهایی می‌رسد. سپس، باریک‌شدگی شروع می‌شود و سرانجام گسیختگی روی می‌دهد. در این مواد، استقامت نهایی  $\sigma_f$  را با روش انحراف می‌توان تعریف کرد. مثلاً، با ترسیم یک خط از نقطه‌ای روی محور افقی به طول  $\epsilon = 0.2\%$  (یا  $\epsilon = 0.002$ ) به موازات قسمت خطی اولیه نمودار تنش-کرنش، استقامت نهایی در انحراف ۰.۲٪ به دست می‌آید (شکل ۲-۱۳). تنش  $\sigma_f$  متناظر با نقطه  $Y$  که به این طریق به دست می‌آید به عنوان استقامت نهایی در انحراف ۰.۲٪ تعریف می‌شود.

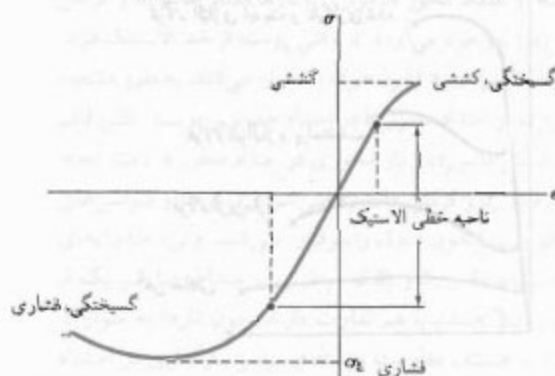
یکی از معیارهای استاندارد برای چکش‌خواری یک ماده، درصد افزایش طول آن است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{درصد افزایش طول} = 100 \frac{L_B - L_0}{L_0}$$

که در آن  $L_0$  و  $L_B$  به ترتیب، طول اولیه نمونه تحت کشش و طول نهایی آن هنگام گسیختگی است. مینیمم افزایش طولی که برای طول سنج ۵۰ mm در نظر می‌گیرند



شکل ۲-۱۳ تعیین استقامت تسلیم با روش انحراف.



شکل ۲-۱۴ نمودار تنش-کرنش برای بتن.

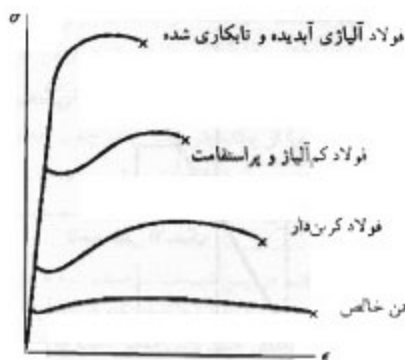
## ۲-۵ قانون هوک؛ مدول الاستیسیته

اغلب سازه‌های مهندسی که برای تغییر شکل‌های نسبتاً کوچک طراحی می‌شوند، فقط شامل قسمت خطی نمودار تنش-کرنش هستند. برای آن قسمت اولیه نمودار (شکل ۲-۹)، تنش  $\sigma$  با کرنش  $\epsilon$  به طور مستقیم متناسب است و می‌توان نوشت:

$$\sigma = E\epsilon \quad (۲-۴)$$

این رابطه را، به افتخار ریاضی‌دان انگلیسی رابرت هوک (۱۷۰۳-۱۶۳۵)، قانون هوک می‌گویند. ضریب  $E$  را، به افتخار دانشمند انگلیسی توماس یانگ (۱۸۲۹-۱۷۷۳)، مدول الاستیسیته یا مدول یانگ ماده می‌گویند. چون  $\epsilon$  یک کمیت بی‌بعد است،  $E$  با واحدهای  $\sigma$  بیان می‌شود؛ در SI،  $E$  برحسب پاسکال یا یکی از مضرب‌های آن است.

بیشترین مقدار تنش که به ازای آن می‌توان قانون هوک را برای ماده‌ای به کار برد حد تناسب آن ماده می‌گویند. در مواد چکش‌خواری که نقطه تسلیم کاملاً مشخصی دارند (مانند شکل ۲-۹الف)، حد تناسب تقریباً بر نقطه تسلیم منطبق است. برای سایر مواد، حد تناسب را به سهولت نمی‌توان تعریف کرد، زیرا تعیین دقیق تنش که به ازای آن رابطه خطی بین  $\sigma$  و  $\epsilon$  از بین می‌رود مشکل است. اما وقتی مقدار تنش کمی بیشتر از حد تناسب واقعی است، کاربرد قانون هوک برای مواد مذکور خطای زیادی به وجود نمی‌آورد.



شکل ۲-۱۶ نمودارهای تنش-کرنش برای آهن و فولاد در درجات مختلف فولاد.

## ۲-۴ تنش حقیقی و کرنش حقیقی

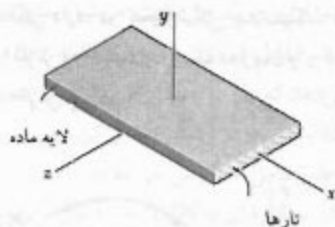
به خاطر داریم که تنش رسم شده در نمودارهای ۲-۹ و ۲-۱۱ از تقسیم بار  $P$  بر مساحت مقطع عرضی اولیه نمونه،  $A_0$ ، به دست آمد. چون مساحت مقطع عرضی نمونه با افزایش  $P$  کاهش می‌یابد، تنش در این نمودارها تنش حقیقی در نمونه نیست. در مواد چکش‌خوار، پس از شروع تسلیم، بین تنش مهندسی محاسباتی  $\sigma = P/A_0$  و تنش حقیقی  $\sigma_f = P/A_f$  که از تقسیم  $P$  بر مساحت مقطع عرضی نمونه تغییر شکل داده به دست می‌آید، اختلاف وجود دارد. تنش مهندسی  $\sigma$ ، که با بار  $P$  متناسب است، در حالت باریک‌شدگی با افزایش  $P$  کاهش می‌یابد؛ ولی، تنش حقیقی  $\sigma_f$ ، که با  $P$  تناسب مستقیم و با  $A_f$  تناسب معکوس دارد، همچنان افزایش می‌یابد تا نمونه گسیخته می‌شود. اغلب به جای رابطه  $\epsilon = \delta/L_0$  که آن را کرنش مهندسی می‌گویند، از کرنش حقیقی  $\epsilon_f$  با تعریف زیر استفاده می‌شود:

$$\epsilon_f = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} \quad (۲-۳)$$

نموداری که با ترسیم تنش حقیقی برحسب کرنش حقیقی به دست می‌آید (شکل ۲-۱۵)، رفتار ماده را دقیق‌تر توضیح می‌دهد. همانطور که قبلاً دیدیم، تنش حقیقی در حالت باریک‌شدگی کاهش نمی‌یابد. همچنین، با استفاده از تنش حقیقی و کرنش حقیقی، نتایج حاصل از آزمایش‌های کشش و فشار اساساً نمودار یکسان را می‌دهند؛ ولی، با ترسیم تنش مهندسی برحسب کرنش مهندسی، برای مقادیر بزرگ کرنش چنین نیست. البته، مهندسان که مسئولیت آنها بررسی این موضوع است که آیا بار  $P$  باعث ایجاد یک تنش و تغییر شکل قابل قبول در عضو می‌شود یا نه، از نمودار مبتنی بر تنش مهندسی  $\sigma = P/A_0$  و کرنش مهندسی  $\epsilon = \delta/L_0$  استفاده می‌کنند، زیرا این عبارات شامل مساحت مقطع عرضی  $A_0$  و طول اولیه  $L_0$  است و اینها داده‌های قابل دسترسی هستند.



شکل ۲-۱۵ تنش حقیقی برحسب کرنش حقیقی برای یک ماده چکش‌خوار نوعی.



شکل ۲-۱۷ پوسته ماده مرکب تقویت شده با تار.

با ترکیب تعدادی پوسته، یک ورقه به دست می آید. اگر ورقه فقط تحت بار محوری کششی قرار گیرد، تارها در تمام پوسته‌ها باید دارای همان وضعیت بار باشند تا بیشترین استقامت ممکن حاصل شود. اما اگر ورقه تحت فشار قرار گیرد، ماده ماتریس ممکن است آنقدر محکم باشد که از کماتش تارها جلوگیری کند. در این حالت، پایداری جانبی ورقه را با استقرار بعضی از پوسته‌ها به طوری که تارهای آنها بر بار عمود باشند می‌توان افزایش داد. استقرار بعضی از پوسته‌ها به گونه‌ای که تارهای آنها تحت زاویه  $30^\circ$ ،  $45^\circ$  یا  $60^\circ$  نسبت به بار باشد نیز می‌تواند مقاومت ورقه را در برابر برش صفحه‌ای افزایش دهد. در قسمت ۲-۱۶، مواد مرکب تقویت شده با تار و رفتار آنها تحت بارگذاری‌های چند محوری بررسی می‌شود.

## ۲-۶ مقایسه رفتار الاستیک و پلاستیک ماده

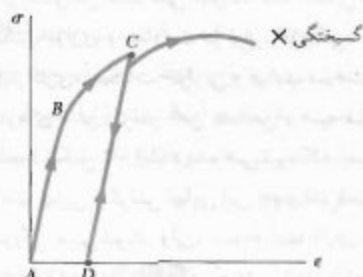
اگر کرنش‌هایی که با اعمال بار معینی در یک نمونه آزمایشی به وجود می‌آیند هنگام حذف بار از بین بروند، می‌گویند ماده به صورت الاستیک رفتار می‌کند. بیشترین مقدار تنشی که به ازای آن ماده به صورت الاستیک رفتار می‌کند حد الاستیک آن ماده نام دارد.

اگر ماده دارای نقطه تسلیم کاملاً مشخصی باشد (شکل ۲-۹ الف)، حد الاستیک، حد تناسب (قسمت ۲-۵) و نقطه تسلیم آن اساساً با هم برابرند. به عبارت دیگر، تا وقتی تنش کمتر از نقطه تسلیم است، ماده به صورت الاستیک و خطی رفتار می‌کند. در حالت تسلیم (قسمت ۳-۳)، با حذف بار، تنش و کرنش در امتداد خط  $CD$ ، که به موازات قسمت خطی  $AB$  منحنی بارگذاری است (شکل ۲-۱۸)، به صورت خطی کاهش می‌یابد. این موضوع که  $\epsilon$  پس از حذف بار به صفر برمی‌گردد نشان می‌دهد که تغییر شکل پلاستیک (دائمی) روی داده است. در اغلب مواد، تغییر شکل پلاستیک نه فقط به

بعضی از خواص فیزیکی فلزات ساختمانی، مانند استقامت، چکش‌خواری و مقاومت در برابر خوردگی، بستگی شدیدی به آلیاژ کاری، عملیات حرارتی و فرایند ساخت دارند. مثلاً، از نمودارهای تنش-کرنش آهن خالص و سه فولاد با درجات مختلف (شکل ۲-۱۶) دیده می‌شود که استقامت تسلیم، استقامت نهایی و کرنش نهایی این چهار فلز دستخوش تغییرات بزرگی می‌شوند. ولی، تمام آنها دارای مدول الاستیسیته یکسانند؛ به عبارت دیگر، "سفتی" آنها (مقاومت در برابر تغییر شکل در ناحیه خطی) یکسان است. بنابراین، اگر فولاد پر استقامتی را در یک سازه جایگزین فولاد با استقامت کمتر کنیم و هیچ یک از ابعاد را تغییر ندهیم، سازه دارای ظرفیت بارپذیری بیشتری خواهد شد، اما سفتی آن تغییر نمی‌کند.

برای هر یک از موادی که تا به حال بررسی شده‌اند، رابطه بین تنش قائم و کرنش قائم،  $\sigma = E\epsilon$ ، مستقل از امتداد بارگذاری بود زیرا خواص مکانیکی، از قبیل الاستیسیته  $E$ ، مستقل از امتداد تحت بررسی بود. این مواد را همسانگرد و موادی را که خواص آنها به امتداد بستگی دارد ناهمسانگرد می‌گویند. مواد مرکب تقویت شده با تار یکی از مواد مهم ناهمسانگرد هستند.

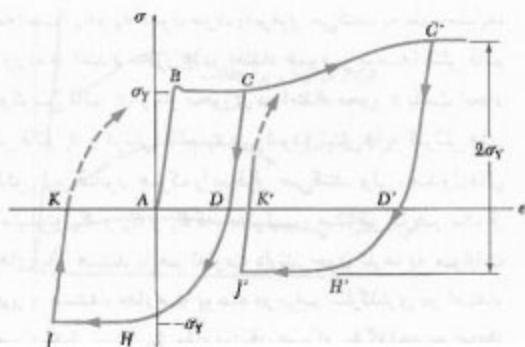
این مواد مرکب با قرار دادن تارهای یک ماده سفت و با استقامت در یک ماده نرم ضعیف‌تر، که به آن ماتریس می‌گویند، ساخته می‌شوند. از موادی مانند گرافیت، شیشه و پلیمرها به عنوان تار، و از موادی مانند انواع مختلف رزین‌ها به عنوان ماتریس استفاده می‌شود. در شکل ۲-۱۷، پوسته ماده مرکبی نشان داده شده است؛ این ماده از تعداد زیادی تارهای موازی که در ماتریسی قرار دارند تشکیل شده است. بار محوری وارد بر پوسته در امتداد محور  $x$  (موازی با تارها) تنش قائم  $\sigma_x$  و کرنش قائم  $\epsilon_x$  را به وجود می‌آورد. تا وقتی پوسته از حد الاستیک فراتر نرفته است،  $\sigma_x$  و  $\epsilon_x$  قانون هوک را برقرار می‌کنند. به طور مشابه، بار وارده در امتداد محور  $y$  (در امتداد عمود بر پوسته) تنش قائم  $\sigma_y$  و کرنش قائم  $\epsilon_y$  و بار محوری در امتداد محور  $z$  باعث ایجاد تنش قائم  $\sigma_z$  و کرنش قائم  $\epsilon_z$  می‌شود؛ تنش‌ها و کرنش‌های مذکور نیز قانون هوک را برقرار می‌کنند. ولی، مدول‌های الاستیسیته  $E_x$  و  $E_y$  و  $E_z$  که، به ترتیب، متناظر با هر یک از بارهای بالا هستند با هم تفاوت دارند. چون تارها به موازات محور  $x$  هستند، مقاومت پوسته در برابر بارگذاری در امتداد محور  $x$  خیلی بیشتر از مقاومت آن در برابر بارگذاری در امتداد محورهای  $y$  و  $z$  است، و  $E_x$  از  $E_y$  یا  $E_z$  خیلی بزرگتر است.



شکل ۱۹-۲

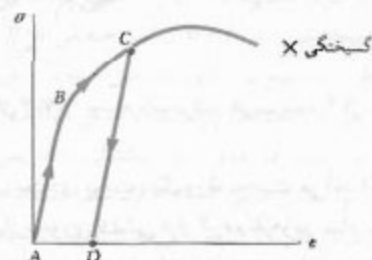
فرض می‌کنیم ماده از نوع فولاد متوسط است که استقامت تسلیم آن در کشش و فشار دارای مقدار یکسان است. بار اولیه کششی است و تا نقطه C در نمودار تنش-کرنش اعمال می‌شود (شکل ۲-۲۰). پس از باربرداری (نقطه D)، یک بار فشاری اعمال می‌شود و ماده را به نقطه H می‌رساند. در این نقطه، تنش برابر است با  $\sigma_y$ . دیده می‌شود که قسمت DH نمودار تنش-کرنش خمیده است و نقطه تسلیم کاملاً مشخصی ندارد. این را اثر باثینگر می‌گویند. با حفظ بار فشاری، ماده در امتداد خط HJ تسلیم می‌شود.

اگر بار پس از نقطه I حذف شود، تنش در امتداد خط JK به صفر برمی‌گردد، و توجه داریم که شیب JK با مدول الاستیسیته E برابر است. تغییر شکل پلاستیک حاصل، یعنی AK، برحسب طول پاره خط‌های BC و HJ می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. با اعمال مجدد بار کششی، قسمتی از نمودار تنش-کرنش که از K شروع می‌شود (قسمت خط چین) به طرف بالا و سمت راست خمیده می‌شود تا سرانجام، تنش به مقدار تسلیم  $\sigma_y$  می‌رسد.



شکل ۲۰-۲

ماکزیمم مقدار تنش، بلکه به مدت اعمال این تنش قبل از حذف بار نیز بستگی دارد. در تغییر شکل پلاستیک، قسمت وابسته به تنش را لغزش، و قسمت وابسته به زمان را -که به دما نیز بستگی دارد- خزش می‌گویند.



شکل ۱۸-۲

وقتی ماده‌ای دارای نقطه تسلیم کاملاً مشخصی نیست، حد الاستیک را نمی‌توان با دقت تعیین کرد. ولی، این فرض که حد الاستیک با استقامت تسلیم برابر است (روش انحراف در قسمت ۲-۳)، فقط خطای کمی را وارد می‌کند. در حقیقت، از شکل ۲-۱۳ دیده می‌شود خط مستقیم که برای تعیین نقطه Y به کار می‌رود منحنی بار برداری را پس از اینکه تنش به مقدار ماکزیمم  $\sigma_y$  می‌رسد نیز نشان می‌دهد. وقتی ماده به صورت الاستیک رفتار نمی‌کند، کرنش پلاستیک حاصل به همان کوچکی انحراف انتخابی است.

اگر نمونه، پس از بارگذاری و بار برداری (شکل ۲-۱۹)، مجدداً بارگذاری شود، منحنی بارگذاری جدید تقریباً از همان منحنی بار برداری اولیه پیروی می‌کند تا اینکه تقریباً به نقطه C می‌رسد؛ سپس، به سمت راست خمیده می‌شود و به قسمت خمیده نمودار تنش-کرنش اولیه متصل می‌شود. توجه داریم که قسمت خط مستقیم منحنی بارگذاری جدید از قسمت متناظر منحنی اولیه طولانی‌تر است. لذا، بر اثر سخت‌شوندگی کرنشی که در بارگذاری اولیه نمونه روی می‌دهد، حد تناسب و حد الاستیک افزایش می‌یابند. ولی، چون نقطه گسیختگی بی‌تغییر می‌ماند، چکش‌خواری نمونه، که اکنون باید از نقطه D اندازه‌گیری شود، کاهش می‌یابد.

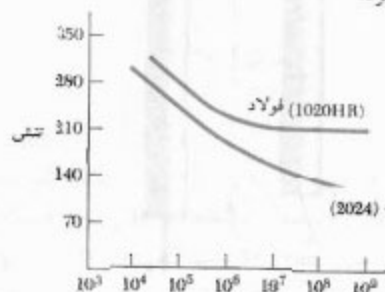
در این بحث، فرض شد که نمونه در هر دو حالت در جهت یکسان بارگذاری شده است. حال، می‌خواهیم حالتی را بررسی می‌کنیم که یک بار ثانوی در جهت مخالف با بار اولیه وارد شود.

بعضی بارگذاری‌ها دارای ماهیت نوسانی‌اند. مثلاً، عبور اتومبیل‌ها از روی یک پلی باعث می‌شود تنش‌های حاصل حول مقدار تنش ناشی از وزن پلی نوسان کنند. حالت شدیدتر وقتی روی می‌دهد که بار در سیکل بارگذاری به طور کامل معکوس شود. مثلاً، تنش‌ها در اکسل یک واگن قطار پس از هر نیم دور از چرخ به‌طور کامل معکوس می‌شوند.

تعداد سیکل‌های بارگذاری مورد نیاز برای ایجاد خستگی در یک نمونه از طریق بارگذاری‌های تکراری متوالی و بارگذاری‌های معکوس را می‌توان برای هر مقدار ماکزیمم تنش به‌طور آزمایشی تعیین کرد. با انجام مجموعه‌ای از این آزمایش‌ها، با استفاده از مقادیر مختلف ماکزیمم تنش، داده‌های حاصل را به‌صورت منحنی  $\sigma-N$  می‌توان رسم کرد. در هر آزمایش، ماکزیمم تنش  $\sigma$  در عرض و تعداد سیکل‌ها،  $N$ ، در طول رسم می‌شود؛ چون تعداد زیادی سیکل برای گسیختگی نیاز است،  $N$  در مقیاس لگاریتمی رسم می‌شود.

در شکل ۲-۲۱، یک منحنی نوعی  $\sigma-N$  برای فولاد نشان داده شده است. توجه داریم که اگر تنش ماکزیمم وارده زیاد باشد، تعداد نسبتاً اندکی سیکل باعث گسیختگی می‌شود. با کاهش مقدار تنش ماکزیمم، تعداد سیکل‌های لازم برای گسیختگی افزایش می‌یابد تا اینکه تنش به حد دوام می‌رسد. حد دوام، تنشی است که به ازای آن خستگی روی نمی‌دهد، حتی اگر تعداد سیکل‌های بارگذاری نامحدود باشد. حد دوام برای یک فولاد کم کربن، مانند فولاد ساختمانی، تقریباً نصف استقامت نهایی فولاد است.

برای فلزات غیر آهنی، مانند آلومینیم و مس، منحنی نوعی  $\sigma-N$  (شکل ۲-۲۲) نشان می‌دهد که با افزایش تعداد سیکل‌های بارگذاری، تنش در خستگی دائماً کاهش می‌یابد. در این فلزات، حد خستگی به عنوان تنش متناظر با خستگی حاصل پس از تعداد معینی سیکل بارگذاری، مثلاً ۵۰۰ میلیون سیکل، تعریف می‌شود.



تعداد سیکل‌های کاملاً معکوس

شکل ۲-۲۱

اگر بارگذاری اولیه آنقدر بزرگ باشد که باعث سخت‌شدگی کرنشی ماده شود (نقطه  $C'$ )، باربرداری در امتداد خط  $C'D'$  روی می‌دهد. با اعمال بار معکوس، تنش از نوع فشاری می‌شود، در نقطه  $H'$  به مقدار ماکزیمم می‌رسد و تا تسلیم ماده در امتداد خط  $H'F'$  ثابت می‌ماند. توجه داریم که مقدار ماکزیمم تنش فشاری کمتر از  $\sigma_y$  است، و تغییر کلی تنش بین  $C'$  و  $H'$  هنوز با  $2\sigma_y$  برابر است.

اگر نقطه  $K$  یا  $K'$  بر مبدأ  $A$  منطبق باشد، تغییر شکل دائمی برابر با صفر است و نمونه ممکن است به حالت اولیه‌اش برگردد. ولی، تغییرات داخلی روی خواهند داد و در صورتی که همان سیکل بارگذاری تکرار شود، نمونه پس از چند تکرار گسیخته می‌شود بدون اینکه قبلاً علامتی از خود نشان دهد. این موضوع نشان می‌دهد که تغییر شکل‌های پلاستیک اضافی نمونه باعث می‌شود مشخصه‌های ماده به شدت تغییر کنند. بنابراین، در ناحیه پلاستیک به ندرت می‌توان بارگذاری معکوس را به‌کار برد و فقط در شرایط دقیقاً کنترل شده، مانند اصلاح مواد آسیب دیده یا تنظیم سازه یا ماشین، از آن استفاده می‌شود.

## ۲-۷ بارگذاری‌های تکراری؛ خستگی

در قسمت‌های قبل، رفتار یک نمونه آزمایشی را تحت بارگذاری محوری بررسی کردیم. توجه داریم که اگر ماکزیمم تنش در نمونه از حد الاستیک ماده فراتر نرود، نمونه پس از حذف بار به حالت اولیه‌اش برمی‌گردد. می‌توان نتیجه گرفت که یک بارگذاری معین را می‌توان به دفعات تکرار کرد، به شرطی که تنش‌ها در ناحیه الاستیک باشند. این نتیجه‌گیری برای بارگذاری‌هایی که حتی صدها مرتبه تکرار می‌شوند صحت دارد. ولی، همانطور که بعداً خواهید دید برای بارگذاری‌هایی که هزاران یا میلیون‌ها مرتبه تکرار می‌شوند صحت ندارد. در چنین مواردی، تحت تنشی که خیلی کمتر از استقامت شکست استاتیکی است، گسیختگی روی می‌دهد؛ این پدیده را خستگی می‌گویند. گسیختگی ناشی از خستگی، حتی برای موادی که در حالت عادی چکش‌خوارند، دارای ماهیت شکنندگی است.

در طراحی تمام اجزای ساختمانی و ماشین‌آلات که تحت بارهای تکراری یا نوسانی قرار دارند باید خستگی را در نظر گرفت. تعداد سیکل‌های بارگذاری که در طی عمر مفید یک جزء می‌توان پیش‌بینی کرد خیلی تغییر می‌کند. مثلاً، تیری که یک جرفیل صنعتی را نگه می‌دارد ممکن است دو میلیون مرتبه در ۲۵ سال بارگذاری شود (تقریباً ۳۰۰ بارگذاری در یک روز کاری). میل‌لنگ اتومبیلی که ۲۰۰۰۰۰ مایل کار می‌کند تقریباً نیم میلیارد مرتبه بارگذاری می‌شود. تیغه یک توربین در عمر خود ممکن است صدها میلیارد مرتبه بارگذاری می‌شود.



با جایگذاری  $\epsilon$  از (۵-۲) در (۶-۲):

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (۷-۲)$$

از معادله (۷-۲) وقتی می‌توان استفاده کرد که میله همگن (دارای  $E$ ) باشد، مساحت  $A$  مقطع عرضی آن یکنواخت باشد و از دو سر بارگذاری شده باشد. اگر میله در نقاط دیگری بارگذاری شده باشد یا از چند قسمت با مقطع عرضی متفاوت و از مواد مختلف ساخته شده باشد، باید آن را به اجزای مختلفی تقسیم کرد که هر کدام شرایط مورد نیاز را برای کاربرد فرمول (۷-۲) برقرار کند. اگر  $A_i$ ،  $L_i$ ،  $E_i$  به ترتیب، نیروی داخلی، طول، مساحت مقطع عرضی و مدول الاستیسیته جزء  $i$  باشند، تغییر شکل کلی میله را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \quad (۸-۲)$$

طبق قسمت ۲-۲، کرنش  $\epsilon$  در میله‌ای با مقطع عرضی متغیر (شکل ۵-۲) به وضعیت نقطه  $Q$  (که  $\epsilon$  در آنجا محاسبه می‌شود) بستگی دارد و به صورت  $\epsilon = d\delta/dx$  تعریف می‌شود. با حل  $d\delta$  و با جایگذاری  $\epsilon$  از معادله (۵-۲)، تغییر شکل یک جزء با طول  $dx$  چنین است:

$$d\delta = \epsilon dx = \frac{P dx}{AE}$$

با انتگرال‌گیری از عبارت بالا در طول میله، تغییر شکل کلی میله به دست می‌آید:

$$\delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE} \quad (۹-۲)$$

وقتی مساحت مقطع عرضی  $A$  تابعی از  $x$  است یا نیروی داخلی  $P$  به  $x$  بستگی دارد (مانند میله آویزانی که تحت وزن خود قرار دارد)، باید به جای فرمول (۷-۲) از فرمول (۹-۲) استفاده کرد.

#### مثال ۱-۲

تغییر شکل میله فولادی نشان داده شده در شکل ۲۳-۲ الف را تحت بارهای داده شده بیابید ( $E = 200 \text{ GPa}$ ).

آزمایش بر روی نمونه‌های آزمایشی شفت‌ها، فنرها و سایر اجزایی که گسیخته شدند نشان داد که گسیختگی ابتدا با یک ترک میکروسکوپی، یا نقص مشابه آن، شروع می‌شود و در هر بارگذاری کمی بزرگتر می‌شود. در بارگذاری‌های متوالی، این ترک در ماده پیش می‌رود تا اینکه گسیختگی روی می‌دهد. چون گسیختگی ناشی از خستگی می‌تواند در هر ترک یا نقص شروع شود، شرایط در سطح یک نمونه تأثیر مهمی بر حد دوام دارد. حد دوام نمونه‌های ماشین‌کاری و پرداخت شده بیشتر از حد دوام نمونه‌های نورد شده، آهنگری شده، یا خورده شده است. در کاربردهای داخل آب دریا، یا در سایر کاربردهایی که احتمال خوردگی وجود دارد، حد دوام ممکن است تا ۵۰٪ کاهش یابد.

۸-۲ تغییر شکل عضوها تحت بارگذاری محوری  
میله همگن  $BC$  به طول  $L$  با مساحت مقطع عرضی یکنواخت  $A$  تحت بار محوری مرکزی  $P$  قرار دارد (شکل ۲۲-۲). اگر تنش محوری از حد تناسب ماده فراتر نرود، می‌توان قانون هوک را به کار برد:

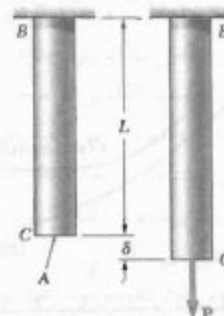
$$\sigma = E\epsilon \quad (۴-۲)$$

در نتیجه،

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} \quad (۵-۲)$$

طبق قسمت ۲-۲،  $\epsilon = \delta/L$ ، در نتیجه،

$$\delta = \epsilon L \quad (۶-۲)$$



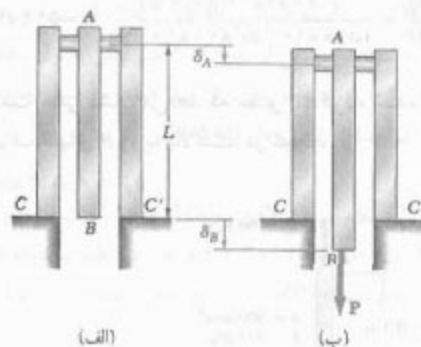
شکل ۲۲-۲



میله  $BC$  در شکل ۲۲-۲، که از آن برای استنتاج فرمول (۷-۲) استفاده شده، و میله  $AD$  در شکل ۲۳-۲ که در مثال ۱-۲ به کار رفت، هر دو از یک سر به تکیه‌گاه ثابت متصل‌اند. از این‌رو، تغییر شکل  $\delta$  میله با تغییر مکان سر آزاد آن برابر بود. ولی اگر هر دو سر میله حرکت کنند، تغییر شکل میله با تغییر مکان نسبی یک سر میله نسبت به سر دیگر سنجیده می‌شود. مثلاً، مجموعه نشان داده شده در شکل ۲۴-۲ الف را در نظر بگیرید. این مجموعه از سه میله الاستیک به طول  $L$ ، که با مفصل صلب  $A$  به هم متصل‌اند، تشکیل شده است. اگر بار  $P$  بر  $B$  وارد شود (شکل ۲۴-۲ ب)، هر یک از سه میله تغییر شکل می‌دهند. چون میله‌های  $AC$  و  $AC'$  در  $C$  و  $C'$  به تکیه‌گاه‌های ثابت متصل شده‌اند، تغییر شکل مشترک آنها با تغییر مکان نقطه  $A$  اندازه‌گیری می‌شود. از طرف دیگر، چون هر دو سر میله  $AB$  حرکت می‌کنند، تغییر شکل  $AB$  با اختلاف تغییر مکان‌های  $A$  و  $B$  و  $\delta_B - \delta_A$ ، یعنی با تغییر مکان  $B$  نسبت به  $A$ ، سنجیده می‌شود. اگر این تغییر مکان نسبی را با  $\delta_{B/A}$  نشان دهیم،

$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE} \quad (۱۰-۲)$$

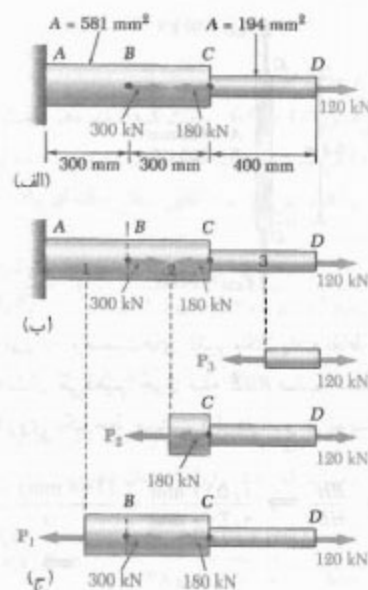
که در آن  $A$  مساحت مقطع عرضی  $AB$  و  $E$  مدول الاستیسیته آن است.



شکل ۲۴-۲

مسئله نمونه ۱-۲

میله صلب  $BDE$  توسط دو بازوی  $AB$  و  $CD$  نگه داشته شده است. بازوی  $AB$  از آلومینیم ( $E = 70 \text{ GPa}$ ) و دارای مساحت مقطع عرضی  $500 \text{ mm}^2$  است؛ بازوی  $CD$  از فولاد ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) و با مساحت مقطع عرضی  $600 \text{ mm}^2$  است. برای نیروی  $3 \text{ kN}$  وارده، مطلوب است انحراف نقاط:  $B$ ، (الف)  $B$ ، (ب)  $D$ ، (ج)  $E$ .



شکل ۲۳-۲

میله را به سه قسمت نشان داده شده در شکل ۲۳-۲ تقسیم می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$L_1 = L_2 = 300 \text{ mm} \quad L_3 = 400 \text{ mm}$$

$$A_1 = A_2 = 581 \text{ mm}^2 \quad A_3 = 194 \text{ mm}^2$$

برای تعیین نیروهای داخلی  $P_1$ ،  $P_2$  و  $P_3$ ، هر یک از این سه قسمت را مقطع می‌زنیم و نمودار آزاد قسمتی از میله را که در سمت راست آن مقطع قرار دارد رسم می‌کنیم (شکل ۲۳-۲ ج). با توجه به تعادل این قسمت‌ها،

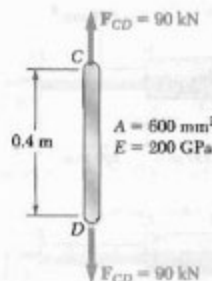
$$P_1 = 240 \text{ kN} = 240 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P_2 = -60 \text{ kN} = -60 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P_3 = 120 \text{ kN} = 120 \times 10^3 \text{ N}$$

با جایگذاری در معادله (۸-۲)،

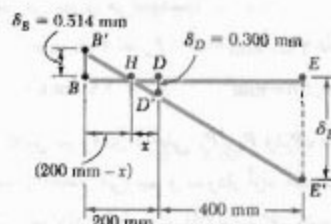
$$\begin{aligned} \delta &= \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left( \frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3} \right) \\ &= \frac{1}{200 \times 10^9} \left[ \frac{(240 \times 10^3)(0.3)}{581 \times 10^{-6}} + \frac{(-60 \times 10^3)(0.3)}{581 \times 10^{-6}} + \frac{(120 \times 10^3)(0.4)}{194 \times 10^{-6}} \right] \\ &= \frac{0.345 \times 10^5}{200 \times 10^9} = 1.73 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.73 \text{ mm} \end{aligned}$$



ج- انحراف  $E$ . وضعیت‌های تغییر مکان یافته نقاط  $B$  و  $D$  را با  $B'$  و  $D'$  نشان می‌دهیم. چون میله  $BDE$  صلب است، نقاط  $B'$ ،  $D'$  و  $E'$  روی یک خط مستقیم قرار دارند و می‌نویسیم:

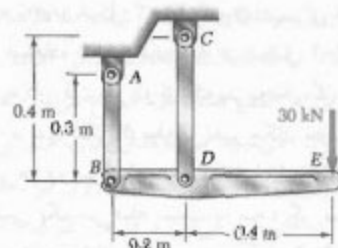
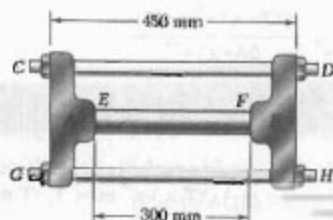
$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \Rightarrow \frac{0.514 \text{ mm}}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(100 \text{ mm}) - x}{x} \Rightarrow x = 173.7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \Rightarrow \frac{\delta_E}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(100 \text{ mm}) + (173.7 \text{ mm})}{173.7 \text{ mm}} \Rightarrow \delta_E = 1.928 \text{ mm} \downarrow$$



#### مسئله نمونه ۲-۲

قطعات ریختگی  $A$  و  $B$  توسط دو پیچ و مهره فولادی  $CD$  و  $GH$  به قطر ۱۸ mm به هم متصل‌اند و با دوسر میله آلومینیومی  $EF$  به قطر ۳۸ mm تماس دارند. پیچ‌ها تک راهه و با گام ۲.۵ mm هستند. پس از اینکه پیچ و مهره‌ها محکم می‌شوند، مهره‌های  $D$  و  $H$  به اندازه یک چهارم دور سفت می‌شوند. اگر  $E$  برای فولاد ۲۰۰ GPa و برای آلومینیوم ۷۰ GPa باشد، تنش قائم در میله را بیابید.



حل

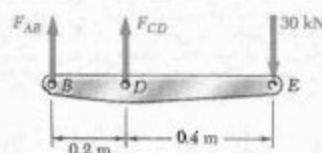
نمودار آزاد: میله  $BDE$

$$\sum M_B = 0 : -(30 \text{ kN})(0.6 \text{ m}) + F_{CD}(0.2 \text{ m}) = 0$$

$$F_{CD} = +90 \text{ kN} \quad F_{CD} = 90 \text{ kN} \text{ (کششی)}$$

$$\sum M_D = 0 : -(30 \text{ kN})(0.4 \text{ m}) - F_{AB}(0.2 \text{ m}) = 0$$

$$F_{AB} = -60 \text{ kN} \quad F_{AB} = 60 \text{ kN} \text{ (فشاری)}$$



الف- انحراف  $B$ . چون نیروی داخلی در بازوی  $AB$  فشاری

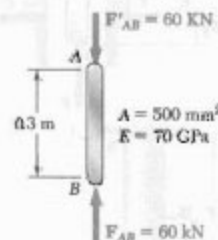
است،  $P = -60 \text{ kN}$

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0.2 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})} = -0.171 \times 10^{-3} \text{ m}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که عضو  $AB$  کوتاه شده است.

لذا، انحراف انتهای  $B$  رو به بالاست. در نتیجه،

$$\delta_B = 0.171 \text{ mm} \uparrow$$

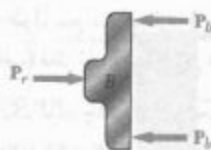


ب- انحراف  $D$ . در میله  $CD$ ،  $P = 90 \text{ kN}$ ، در نتیجه،

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(0.4 \text{ m})}{(600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$\delta_D = 0.300 \text{ mm} \uparrow$$

$$\delta_D = 0.300 \text{ mm} \downarrow$$



نیرو در پیچ‌ها و در میله

با جایگذاری  $P_r$  از (۶) در (۵)،

$$0.625 \text{ mm} = 8.842 \times 10^{-6} P_b + 3.779 \times 10^{-6} (2P_b)$$

$$\Rightarrow P_b = 38.1 \times 10^3 \text{ N} \approx 38.1 \text{ kN}$$

$$P_r = 2 P_b = 2 (38.1 \text{ kN}) = 76.2 \text{ kN}$$

تنش در میله

$$\sigma_r = \frac{P_r}{A_r} = \frac{76.2 \text{ kN}}{\frac{1}{4} \pi (38 \text{ mm})^2} \Rightarrow \sigma_r = 67.19 \text{ MPa}$$

## مسائل

۱-۲ یک میله فولادی به طول  $2.2 \text{ m}$  است و تحت بار  $8.5 \text{ kN}$  نباید بیش از  $1.2 \text{ mm}$  افزایش طول دهد. اگر  $E = 200 \text{ GPa}$ ، مطلوبست: (الف) کمترین قطر میله، (ب) تنش قائم متناظر تحت بار  $8.5 \text{ kN}$ .

۲-۲ یک سیم فولادی به طول  $6 \text{ m}$  تحت نیروی کششی  $4 \text{ kN}$  است. اگر  $E = 200 \text{ GPa}$  و افزایش طول میله  $48 \text{ mm}$  باشد، مطلوبست: (الف) کمترین قطر سیم، (ب) تنش قائم متناظر.

۳-۲ یک میله کنترل از جنس برنج زرد تحت کشش  $3.2 \text{ kN}$  نباید بیش از  $3 \text{ mm}$  کشیده شود. اگر  $E = 105 \text{ GPa}$  و ماکزیمم تنش قائم مجاز  $180 \text{ MPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) کمترین قطر میله، (ب) ماکزیمم طول متناظر میله.

۴-۲ دو علامت‌سنج دقیقاً به فاصله  $250 \text{ mm}$  روی یک میله آلومینیومی، با  $E = 73 \text{ GPa}$  و با استقامت نهایی  $120 \text{ MPa}$  و به قطر  $12 \text{ mm}$  قرار دارند. اگر فاصله بین این دو علامت پس از اعمال نیرو  $250.28 \text{ mm}$  باشد، مطلوبست: (الف) تنش در میله، (ب) ضریب اطمینان.

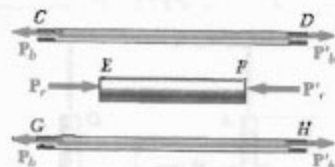
تغییر شکل‌ها

پیچ‌های  $CD$  و  $GH$  سفت کردن مهره‌ها باعث ایجاد کشش در پیچ‌ها می‌شود. به علت تقارن، هر دو پیچ تحت نیروی داخلی یکسان  $P_b$  قرار می‌گیرند و تغییر شکل یکسان  $\delta_b$  را می‌دهند:

$$\delta_b = \frac{P_b L_b}{A_b E_b} = \frac{P_b (250 \text{ mm})}{\frac{1}{4} \pi (18 \text{ mm})^2 (200 \times 10^9 \text{ N/mm}^2)} = 8.842 \times 10^{-6} P_b \quad (1)$$

میله  $EF$  این میله تحت فشار است. اگر مقدار نیرو در میله را با  $P_r$  و تغییر شکل میله را با  $\delta_r$  نشان دهیم،

$$\delta_r = -\frac{P_r L_r}{A_r E_r} = -\frac{P_r (300 \text{ mm})}{\frac{1}{4} \pi (28 \text{ mm})^2 (70 \times 10^9 \text{ N/mm}^2)} = -3.779 \times 10^{-6} P_r \quad (2)$$



تغییر شکل  $D$  نسبت به  $B$  سفت کردن مهره‌ها به اندازه یک چهارم دور باعث می‌شود دو سر  $D$  و  $H$  تغییر مکان  $\frac{1}{4} (2.5 \text{ mm})$  را نسبت به قطعه  $B$  بدهند. با در نظر گرفتن سر  $D$ ، می‌نویسیم:

$$\delta_{DB} = \frac{1}{4} (2.5 \text{ mm}) = 0.625 \text{ mm} \quad (3)$$

اما  $\delta_{DB} = \delta_D - \delta_B$ ، که در آن  $\delta_D$  و  $\delta_B$  تغییر مکان‌های  $D$  و  $B$  هستند. اگر فرض کنیم قطعه  $A$  در یک مکان ثابت نگه داشته می‌شود و مهره‌های  $D$  و  $H$  سفت می‌شوند، این تغییر مکان‌ها، به ترتیب، با تغییر شکل پیچ‌ها و میله برابرند. بنابراین،

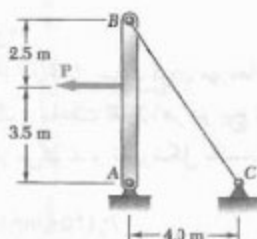
$$\delta_{DB} - \delta_b = \delta_r \quad (4)$$

با جایگذاری از (۱)، (۲) و (۳) در (۴)،

$$0.625 \text{ mm} = 8.842 \times 10^{-6} P_b + 3.779 \times 10^{-6} P_r \quad (5)$$

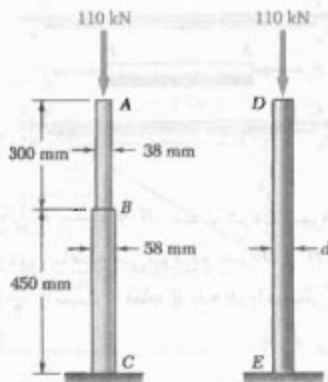
جسم آزاد: قطعه  $B$

$$\sum F = 0: P_r - 2 P_b = 0 \Rightarrow P_r = 2 P_b \quad (6)$$



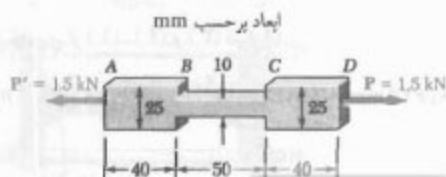
شکل م ۱۳-۲

۱۴-۲ میلۀ آلومینیومی  $ABC$  ( $E = 70 \text{ GPa}$ )، از دو قسمت  $AB$  و  $BC$  تشکیل شده است و می‌خواهیم آن را با میلۀ فولادی استوانه‌ای  $DE$  ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) با همان طول کلی جایگزین کنیم. تحت بار یکسان، تغییر شکل میلۀ فولادی نباید بیشتر از تغییر شکل میلۀ آلومینیومی باشد و تنش مجاز آن  $65 \text{ MPa}$  است. قطر میلۀ فولادی را بیابید.



شکل م ۱۴-۲

۱۵-۲ قطعه نشان داده شده از ورقی به ضخامت  $5 \text{ mm}$  ساخته شده است. برای  $E = 70 \text{ GPa}$ ، مطلوب است: (الف) تغییر شکل کلی قطعه، (ب) تغییر شکل قسمت مرکزی  $BC$ .



شکل م ۱۵-۲

۵-۲ یک نخ نایلونی تحت نیروی کششی  $8 \text{ N}$  قرار دارد. اگر  $E = 5 \text{ GPa}$  و طول نخ به اندازه  $1/8$  درصد افزایش یابد، مطلوب است: (الف) قطر نخ، (ب) تنش در نخ.

۶-۲ از یک لوله چدنی برای تحمل بار فشاری استفاده می‌شود. اگر  $E = 69 \text{ GPa}$  و ماکزیمم تغییر مجاز طول لوله  $0.25\%$  باشد، مطلوب است: (الف) ماکزیمم تنش قائم در لوله، (ب) مینیمم ضخامت دیواره لوله برای بار  $7/2 \text{ kN}$  در صورتی که قطر لوله  $50 \text{ mm}$  باشد.

۷-۲ سیم فولادی به طول  $9 \text{ mm}$  و به قطر  $6 \text{ mm}$  تحت نیروی کششی  $P$  به اندازه  $11 \text{ mm}$  افزایش طول می‌دهد. اگر  $E = 200 \text{ GPa}$ ، مطلوب است: (الف) مقدار  $P$ ، (ب) تنش قائم متناظر در سیم.

۸-۲ سیم چهارگوش آلومینیومی تحت بار کششی نباید بیش از  $1/4 \text{ mm}$  افزایش طول دهد. اگر  $E = 70 \text{ GPa}$  و تنش مجاز کششی  $120 \text{ MPa}$  باشد، مطلوب است: (الف) ماکزیمم طول مجاز سیم، (ب) ابعاد مورد نیاز مقطع عرضی برای بار کششی  $28 \text{ kN}$ .

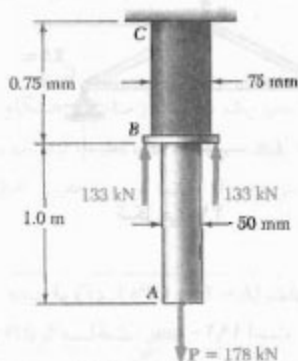
۹-۲ بار کششی  $9 \text{ kN}$  بر یک سیم فولادی، به طول  $50 \text{ m}$  و با  $E = 200 \text{ GPa}$ ، وارد می‌شود. اگر تنش قائم در سیم نباید از  $150 \text{ MPa}$  و افزایش طول آن نباید از  $25 \text{ mm}$  بیشتر شود، کمترین قطر سیم را بیابید.

۱۰-۲ قطعه‌ای به طول  $250 \text{ mm}$  و با مقطع عرضی  $50 \times 40 \text{ mm}$  برای تحمل بار فشاری مرکزی  $P$  به کار می‌روند. این قطعه از برنز، با  $E = 95 \text{ GPa}$ ، ساخته شده است. اگر تنش قائم در قطعه نباید از  $80 \text{ MPa}$  و کاهش طول آن نباید از  $0.12\%$  طول اولیه‌اش بیشتر شود، ماکزیمم باری را که می‌توان بر قطعه وارد کرد بیابید.

۱۱-۲ میلۀ آلومینیومی به طول  $1/5 \text{ mm}$  تحت بار محوری  $3 \text{ kN}$  نباید بیش از  $1 \text{ mm}$  افزایش طول دهد و تنش قائم در آن نباید بیش از  $40 \text{ MPa}$  باشد. اگر  $E = 70 \text{ GPa}$ ، قطر مورد نیاز میلۀ را بیابید.

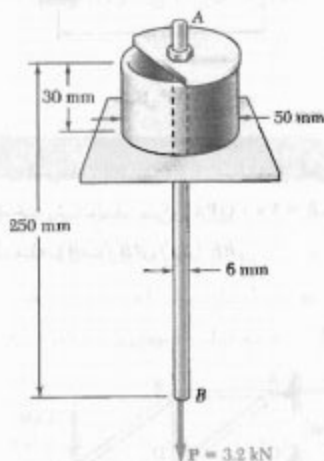
۱۲-۲ نخ نایلونی تحت بار  $10 \text{ N}$  قرار دارد.  $E = 3/5 \text{ GPa}$  و ماکزیمم تنش قائم مجاز  $42 \text{ MPa}$  است. افزایش طول نخ نباید بیش از  $1\%$  باشد. قطر نخ را بیابید.

۱۳-۲ کابل  $BC$  به قطر  $4 \text{ mm}$  از فولاد،  $E = 200 \text{ GPa}$ ، ساخته شده است. اگر ماکزیمم تنش در کابل نباید از  $190 \text{ MPa}$  و افزایش طول کابل نباید از  $6 \text{ mm}$  بیشتر شود، ماکزیمم بار  $P$  را که می‌توان وارد کرد بیابید.



شکل م ۱۹-۲

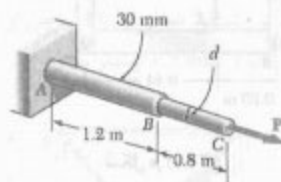
۲-۲۰ استوانه توخالی با ضخامت دیواره ۳ mm از جنس پلی استیرن ( $E = 3 \text{ GPa}$ )، و ورق دایره‌ای (که فقط قسمتی از آن نشان داده شده است) میله فولادی ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) به قطر ۶ mm را نگه داشته‌اند. برای  $P = 3.2 \text{ kN}$ ، مطلوبست: (الف) افزایش طول  $AB$ ، (ب) انحراف نقطه  $B$ ، (ج) تنش قائم متوسط در میله  $AB$ .



شکل م ۲۰-۲

۲-۲۱ برای خربای فولادی ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) و بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست تغییر شکل عضوهای  $AB$  و  $AD$ ، در صورتی که مساحت مقطع عرضی آنها، به ترتیب،  $2400 \text{ mm}^2$  و  $1800 \text{ mm}^2$  باشد.

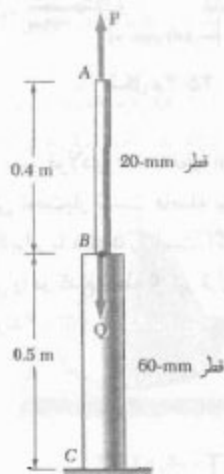
۲-۱۶ بار محوری با مقدار  $P = 58 \text{ kN}$  بر انتهای  $C$  میله برنجی  $ABC$  وارد می‌شود. اگر  $E = 105 \text{ GPa}$ ، مطلوبست قطر قسمت  $BC$  که به لای آن انحراف نقطه  $C$  برابر با ۳ mm باشد.



شکل م ۱۶-۲

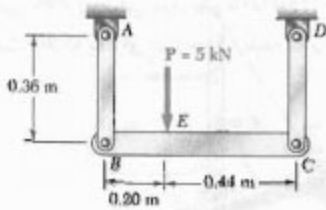
۲-۱۷ میله  $ABC$  از آلومینیم ( $E = 70 \text{ GPa}$ ) ساخته شده است. اگر  $P = 6 \text{ kN}$  و  $Q = 42 \text{ kN}$ ، مطلوبست: (الف) مقدار  $Q$  به طوری که انحراف نقطه  $A$  صفر باشد، (ب) انحراف نقطه  $B$ .

۲-۱۸ میله  $ABC$  از آلومینیم ( $E = 70 \text{ GPa}$ ) ساخته شده است. برای  $P = 6 \text{ kN}$  و  $Q = 42 \text{ kN}$ ، مطلوبست: (الف) انحراف  $A$ ، (ب) انحراف  $B$ .



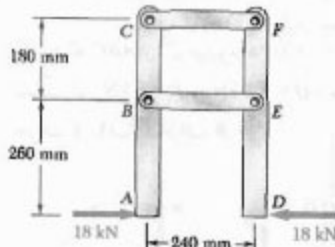
شکل م ۱۷-۲ و ۱۸-۲

۲-۱۹ دو میله استوانه‌ای در  $B$  بهم متصل شده‌اند. میله  $AB$  از فولاد ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) و  $BC$  از برنج ( $E = 105 \text{ GPa}$ ) است. مطلوبست: (الف) تغییر شکل کلی میله مرکب  $ABC$ ، (ب) انحراف نقطه  $B$ .



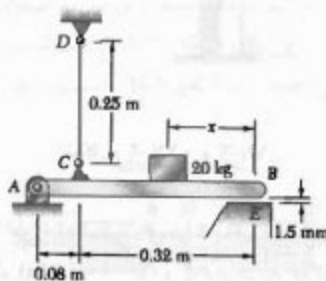
شکل م ۲۴-۲

۲۵-۲ عضوهای  $ABC$  و  $DEF$  توسط عضوهای فولادی  $BE$  و  $CF$  (الف) و  $BE$  (ب) ساخته شده است. مطلوب است تغییر طول: (الف) عضو  $BE$ ، (ب) عضو  $CF$ .

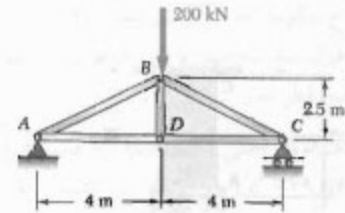


شکل م ۲۵-۲

۲۶-۲ سیم فولادی  $CD$  به قطر ۲ mm طوری تنظیم شده است که وقتی تحت بار نیست فاصله بین سر  $B$  از تیر  $ACB$  با نقطه تماس  $E$  برابر با ۱٫۵ mm است. اگر  $E = ۲۰۰$  GPa، قطعه ۲۰ کیلوگرمی را در کدام نقطه از تیر قرار دهیم تا نقاط  $B$  و  $E$  با هم تماس گیرند؟

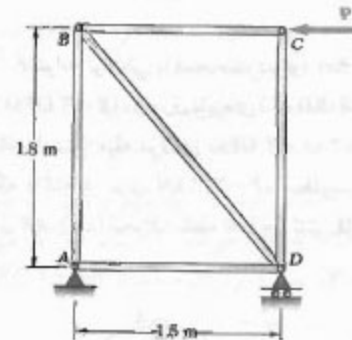


شکل م ۲۶-۲



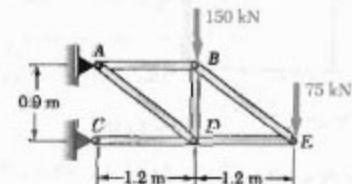
شکل م ۲۱-۲

۲۲-۲ قاب فولادی ( $E = ۲۰۰$  GPa) نشان داده شده دارای مهار قطری  $BD$  با مساحت  $۱۹۲۰$  mm<sup>۲</sup> است. اگر تغییر طول عضو  $BD$  نباید از ۱٫۶ mm بیشتر شود، بیشترین بار مجاز  $P$  را بیابید.



شکل م ۲۲-۲

۲۳-۲ عضوهای  $AB$  و  $BE$  از میله‌های فولادی به قطر ۲۵ mm ساخته شده‌اند. برای  $E = ۲۰۰$  GPa، مطلوب است افزایش طول میله: (الف)  $AB$ ، (ب)  $BE$ .



شکل م ۲۳-۲

۲۴-۲ هر یک از بازوهای  $AB$  و  $CD$  از آلومینیم ( $E = ۷۵$  GPa) ساخته شده است و دارای مساحت مقطع عرضی  $۱۲۵$  mm<sup>۲</sup> است. اگر این بازوها عضو صلب  $BC$  را نگه دارند، انحراف نقطه  $F$  را بیابید.



۳۱-۲ اگر "کرنش مهندسی" در یک نمونه کششی را با  $\epsilon$  نشان دهیم، ثابت کنید که کرنش حقیقی عبارت است از

$$\epsilon_f = \ln(1 + \epsilon)$$

۳۲-۲ حجم یک نمونه آزمایشی هنگام تغییر شکل پلاستیک اساساً ثابت می ماند. اگر قطر اولیه نمونه  $d_i$  باشد، نشان دهید که وقتی قطر  $d$  است، کرنش حقیقی عبارت است از

$$\epsilon_f = 2 \ln(d_i/d)$$

## ۹-۲ مسائل نامعین استاتیکی

در قسمت قبل، برای تعیین نیروهای داخلی در قسمت های مختلف عضوی که تحت بارگذاری قرار داشت از نمودار آزاد و معادله های تعادل استفاده می کردیم. سپس، با جایگذاری مقادیر حاصل در معادله (۸-۲) یا (۹-۲)، تغییر شکل عضو را به دست می آوردیم.

ولی، در بسیاری از مسائل نمی توان به صورت بالا عمل کرد. در این مسائل، معادله های تعادل را باید با رابطه هایی که شامل تغییر شکل ها هستند تکمیل کرد؛ این تغییر شکل ها از هندسه مسئله تعیین می شوند. چون صرفاً با استاتیک نمی توان واکنش ها یا نیروهای داخلی را پیدا کرد، این نوع مسائل را نامعین استاتیکی می گویند.

### مثال ۹-۲

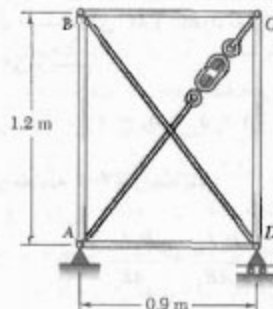
میله ای به طول  $L$ ، مساحت مقطع عرضی  $A_1$ ، و مدول الاستیسیته  $E_1$  در داخل لوله ای به طول  $L$  و با مساحت مقطع عرضی  $A_2$  و مدول الاستیسیته  $E_2$  قرار دارد (شکل ۲۵-۲ الف). اگر نیروی  $P$  بر صفحه صلب انتهایی وارد شود، تغییر شکل میله و لوله را بیابید.

نیروهای محوری در میله و لوله را، به ترتیب، با  $P_1$  و  $P_2$  نشان می دهیم و نمودار آزاد سه جزء نشان داده شده را رسم می کنیم (شکل ۲۵-۲ ب، ج، د). در نمودار آخر،

$$P_1 + P_2 = P \quad (۱۱-۲)$$

با این معادله نمی توان دو نیروی داخلی مجهول  $P_1$  و  $P_2$  را حل کرد و مسئله نامعین استاتیکی است.

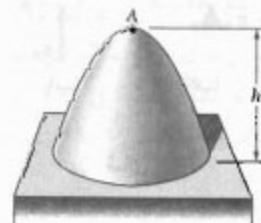
۲۷-۲ عضوهای  $AB$  و  $CD$  از نوع میله های فولادی به قطر  $30 \text{ mm}$  و عضوهای  $BC$  و  $AD$  از نوع میله های فولادی به قطر  $22 \text{ mm}$  هستند. وقتی بست قوریغه ای سفت می شود، عضو قطر  $AC$  تحت کشش قرار می گیرد. اگر  $E = 200 \text{ GPa}$ ، مطلوب است بیشترین کشش مجاز در  $AC$  به طوری که تغییر شکل عضوهای  $AB$  و  $CD$  از  $1/16 \text{ mm}$  بیشتر نشود.



شکل م ۲۷-۲

۲۸-۲ برای سازه داده شده در مسئله ۲۷-۲، مطلوب است: (الف) فاصله  $h$  به طوری که تغییر شکل عضوهای  $AB$ ،  $BC$ ،  $CD$  و  $AD$  برابر باشند، (ب) کشش متناظر در عضو  $AC$ .

۲۹-۲ انحراف رأس  $A$  مخروط همگن دژولی به ارتفاع  $h$ ، چگالی  $\rho$  و مدول الاستیسیته  $E$  را تحت تأثیر وزن مخروط بیابید.



شکل م ۲۹-۲

۳۰-۲ کابل همگنی به طول  $L$  و با مقطع عرضی یکنواخت از یک سر آویزان شده است. (الف) اگر چگالی کابل را با  $\rho$  و مدول الاستیسیته آن را با  $E$  نشان دهیم، افزایش طول کابل را بر اثر وزن آن بیابید. (ب) نشان دهید که اگر کابل افقی بود و نیرویی برابر با نصف وزنش بر هر سر آن وارد می شد، همان افزایش طول را می داد.

نمودار آزاد میله را رسم می‌کنیم (شکل ۲-۲۶) و معادله تعادل را می‌نویسیم:

$$R_A + R_B = P \quad (۱۴-۲)$$

این معادله شامل دو واکنش مجهول  $R_A$  و  $R_B$  است. لذا، مسئله نامعین استاتیکی است.

طبق شکل هندسی، افزایش طول کلی میله صفر است. افزایش طول قسمت‌های  $AC$  و  $BC$  را، به ترتیب، با  $\delta_1$  و  $\delta_2$  نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

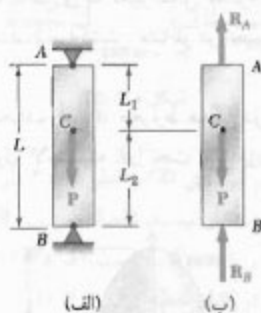
$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

با استفاده از معادله ۲-۷ و رابطه بالا،

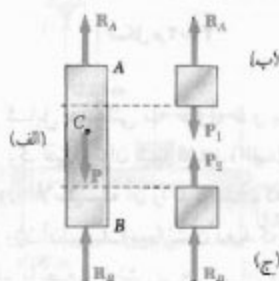
$$\delta = \frac{P_1 L_1}{AE} + \frac{P_2 L_2}{AE} = 0 \quad (۱۵-۲)$$

از نمودار آزاد قسمت‌های ب و ج شکل ۲-۲۷، به ترتیب،  $P_1 = R_B$  و  $P_2 = R_A$  با جایگذاری این مقادیر در معادله (۱۵-۲)، نتیجه می‌شود:

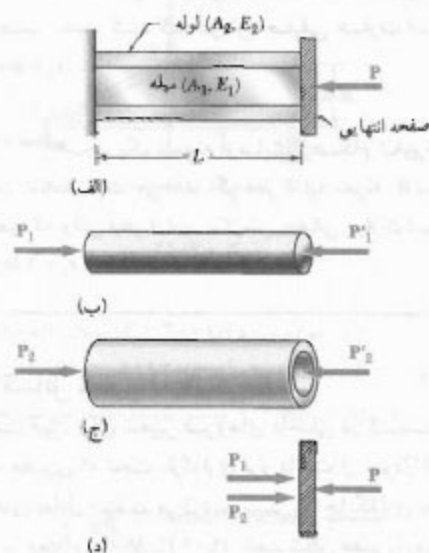
$$R_A L_1 - R_B L_2 = 0 \quad (۱۶-۲)$$



شکل ۲-۲۶



شکل ۲-۲۷



شکل ۲-۲۵

باتوجه به شکل هندسی، تغییر شکل‌های میله و لوله با هم برابرند. طبق معادله (۷-۲)،

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \quad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \quad (۱۲-۲)$$

این دو تغییر شکل را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \quad (۱۳-۲)$$

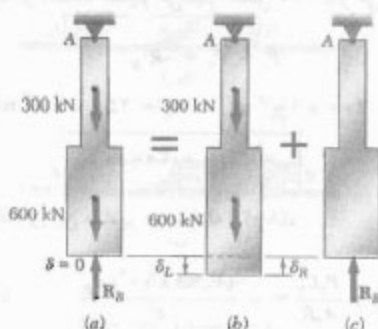
با حل معادله‌های (۱۱-۲) و (۱۳-۲)،

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \quad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

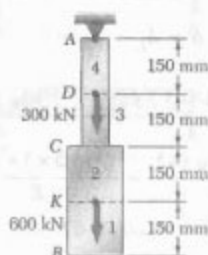
هر یک از معادله‌های (۱۲-۲) را برای تعیین تغییر شکل مشترک میله و لوله می‌توان به کار برد.

### مثال ۲-۳

میله  $AB$  به طول  $L$  و با مقطع عرضی یکنواخت، قبل از بارگذاری به تکیه‌گاههای صلب  $A$  و  $B$  متصل است. تنش در قسمت‌های  $AC$  و  $BC$  را بر اثر بار  $P$  که در نقطه  $C$  وارد شده است بیابید (شکل ۲-۲۶).



شکل ۲۹-۲



شکل ۳۰-۲

میله را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم (شکل ۳۰-۲)، و تغییر شکل  $\delta_L$  را از معادله (۸-۲) می‌یابیم. با استفاده از مثال ۲-۱۰، می‌نویسیم:

$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3 \text{ N} \quad P_4 = 900 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150 \text{ m}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله (۸-۲)،

$$\begin{aligned} \delta_L &= \sum_{i=1}^4 \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left( 0 + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{400 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{600 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} + \frac{900 \times 10^3 \text{ N}}{250 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \right) \frac{0.150 \text{ m}}{E} \\ &\Rightarrow \delta_L = \frac{1.125 \times 10^{-4}}{E} \quad (17-2) \end{aligned}$$

در قسمت ۳۰-۲ شرایط کلی را که به موجب آن می‌توان با این روش اثر ترکیبی چند بار را به دست آورد مورد بحث قرار می‌دهیم.

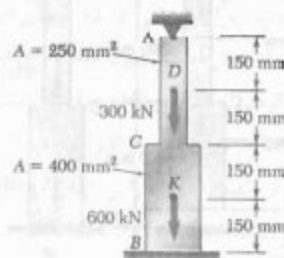
یا حل همزمان معادله‌های (۱۴-۲) و (۱۶-۲)،  $R_A = PL_1/L$  و  $R_B = PL_1/L$ ، به ترتیب، از تقسیم  $P_1 = R_A$  و  $P_2 = -R_B$  بر مساحت مقطع عرضی میله به دست می‌آیند:

$$\sigma_1 = \frac{PL_1}{AL} \quad \sigma_2 = -\frac{PL_1}{AL}$$

روش برهم‌نهی (ترکیب). اگر تعداد تکیه‌گاههای سازه‌ای بیش از تعداد لازم برای حفظ تعادل سازه باشد، سازه نامعین استاتیکی است. در این حالت، تعداد واکنش‌های مجهول بیش از تعداد معادله‌های تعادل است. اغلب، یکی از این واکنش‌ها را زائد گرفته و تکیه‌گاه متناظر آن را حذف می‌کنیم (واکنش زائد را می‌توان بار مجهولی دانست که، همراه با سایر بارها، تغییر شکل‌های سازگار با قیدها را ایجاد می‌کند). سپس، تغییر شکل‌های حاصل از بارهای داده شده و حاصل از واکنش زائد را به طور جداگانه در نظر گرفته، و با ترکیب این تغییر شکل‌ها به نتیجه دلخواه می‌رسیم.\*

مثال ۴-۲

در شکل ۲۸-۲، واکنش در  $A$  و  $B$  را بیابید. فرض کنید میله قبل از بارگذاری به هر دو تکیه‌گاه کاملاً متصل است. واکنش در  $B$  را زائد می‌گیریم و میله را از تکیه‌گاهش جدا می‌کنیم. حال، واکنش  $R_B$  را به عنوان بار مجهول می‌گیریم (شکل ۲۹-۲ الف) و آن را از این شرایط به دست می‌آوریم که تغییر شکل میله صفر است. با در نظر گرفتن جداگانه تغییر شکل ناشی از بارهای داده شده (شکل ۲۹-۲ ب) و تغییر شکل ناشی از واکنش زائد  $R_B$  (شکل ۲۹-۲ ب)، مسئله را می‌توان حل کرد.



شکل ۲۸-۲

واکنش  $R_A$  در تکیه‌گاه فوقانی از نمودار آزاد میله (شکل ۳۲-۲) به دست می‌آید. می‌نویسیم:

$$\uparrow \sum F_y = 0; R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 400 \text{ kN} - 577 \text{ kN} = 323 \text{ kN}$$

با تعیین واکنش‌ها، به سهولت می‌توان تنش و کرنش در میله را به دست آورد. باید توجه داشت که تغییر شکل کلی میله صفر است، ولی هر قسمت آن تحت بارگذاری و قیدهای داده شده تغییر شکل می‌دهد.

### مثال ۳-۵

مثال قبل را با این فرض حل کنید که، قبل از بارگذاری، فاصله  $\delta = 4.5 \text{ mm}$  وجود دارد (شکل ۳۳-۲).  $E = 200 \text{ GPa}$ . از همان روش مثال ۳-۲ استفاده می‌کنیم. واکنش در  $B$  زائد می‌گیریم، و با استفاده از بارهای داده شده و واکنش زائد  $R_B$ ، به ترتیب، تغییر شکل‌های  $\delta_L$  و  $\delta_R$  را می‌یابیم. در این حالت، تغییر شکل کلی صفر نیست و  $\delta = 4.5 \text{ mm}$  بنابراین،

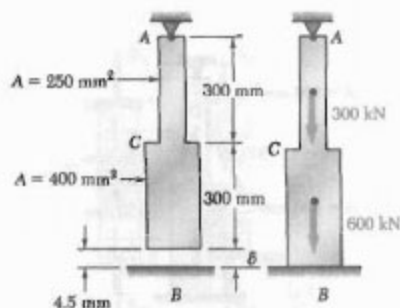
$$\delta = \delta_L + \delta_R = 4.5 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (20-2)$$

با جایگذاری  $\delta_L$  و  $\delta_R$  از (۱۷-۲) و (۱۸-۲) در (۲۰-۲) و با توجه به اینکه  $E = 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$

$$\delta = \frac{1/125 \times 10^4}{200 \times 10^9} - \frac{(1/95 \times 10^7) R_B}{200 \times 10^9} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

در نتیجه،

$$R_B = 115.4 \times 10^3 \text{ N} = 115.4 \text{ kN}$$



شکل ۳۳-۲

حال، با در نظر گرفتن تغییر شکل ناشی از واکنش زائد  $R_B$ ، میله را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم (شکل ۳۱-۲) و می‌نویسیم:

$$P_1 = P_2 = -R_B$$

$$A_1 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_2 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = 0.3 \text{ m}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله (۸-۲)،

$$\delta_R = \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} = - \frac{(1/95 \times 10^7) R_B}{E} \quad (18-2)$$

تغییر شکل کلی میله را مساوی صفر قرار می‌دهیم، و می‌نویسیم:

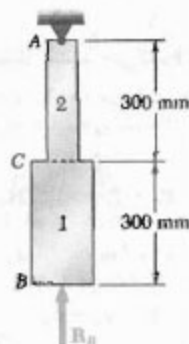
$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0 \quad (19-2)$$

با جایگذاری  $\delta_L$  و  $\delta_R$  از (۱۷-۲) و (۱۸-۲) در (۱۹-۲)،

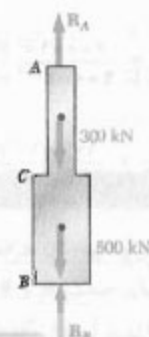
$$\delta = \frac{1/125 \times 10^4}{E} - \frac{(1/95 \times 10^7) R_B}{E} = 0$$

در نتیجه،

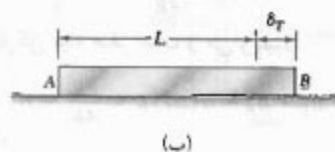
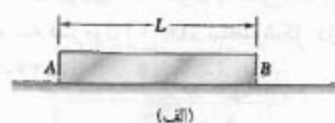
$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$



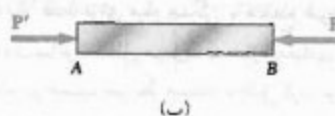
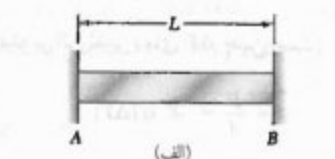
شکل ۳۱-۲



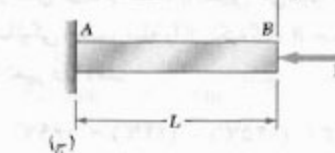
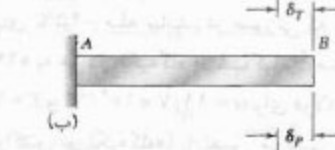
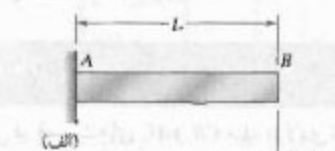
شکل ۳۲-۲



شکل ۳۴-۲



شکل ۳۵-۲



شکل ۳۶-۲

برای تعیین تنش  $\sigma$  ناشی از تغییر دمای  $\Delta T$  در این حالت، با یک مسئله نامعین استاتیکی رو به رو هستیم. بنابراین، ابتدا باید واکنش در تکیه‌گاهها را از شرط صفر بودن کشیدگی میله محاسبه کنیم. با استفاده از روش ترکیب، که در قسمت ۲-۹ توصیف شد، میله را از تکیه‌گاه B جدا می‌کنیم (شکل ۳۶-۲ الف) و می‌گذاریم تحت تغییر دمای  $\Delta T$  آزادانه کشیده شود (شکل ۳۶-۲ ب). طبق فرمول (۲-۲۱)، کشیدگی متناظر چنین است:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

از نمودار آزاد میله (شکل ۳۲-۲)، واکنش در A را می‌یابیم:

$$\uparrow \sum F_y = 0: R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + R_B = 0$$

$$R_A = 900 \text{ kN} - R_B = 900 \text{ kN} - 115.4 \text{ kN} = 784.6 \text{ kN}$$

## ۲-۱۰ مسائل مربوط به تغییرات دما

تا به حال، تمام عضوها و سازه‌ها هنگام بارگذاری در دمای ثابت بودند. حال می‌خواهیم اثر تغییر دما را بررسی کنیم.

میله همگن AB با مقطع عرضی یکنواخت و به طول L را روی یک سطح صاف افقی در نظر می‌گیریم (شکل ۳۴-۲ الف). اگر دمای میله به اندازه  $\Delta T$  افزایش یابد، میله به اندازه  $\delta_T$  کشیده می‌شود (شکل ۳۴-۲ ب). به‌طوری‌که:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \quad (2-21)$$

$\alpha$  مشخصه‌ای از ماده، به نام ضریب انبساط گرمایی، است.  $\delta_T$  و L برحسب واحدهای طول، و  $\alpha$  برحسب  $\frac{1}{^\circ\text{C}}$  یا  $\frac{1}{^\circ\text{F}}$  بیان می‌شود.

تغییر شکل  $\delta_T$  با کرنش  $\epsilon_T = \delta_T/L$  همراه است. با توجه به معادله (۲-۲۱)،

$$\epsilon_T = \alpha\Delta T \quad (2-22)$$

$\epsilon_T$  را کرنش گرمایی می‌گویند. در حالت بالا، هیچ تنشی در ارتباط با کرنش  $\epsilon_T$  وجود ندارد زیرا میله آزادانه روی سطح قرار دارد.

حال فرض می‌کنیم که میله AB بین دو تکیه‌گاه ثابت به فاصله L از هم قرار دارد (شکل ۳۵-۲ الف). ابتدا هیچ تنش یا کرنشی وجود ندارد. اگر دمای میله را به اندازه  $\Delta T$  افزایش دهیم، میله کشیده نمی‌شود زیرا قیدهایی در دو انتهای آن قرار دارند؛ لذا، کشیدگی  $\delta_T$  میله صفر است. چون میله دارای مقطع عرضی یکنواخت است، کرنش  $\epsilon_T$  در هر نقطه عبارت است از  $\epsilon_T = \delta_T/L$  و آنهم صفر است. ولی، پس از افزایش دما، تکیه‌گاهها دوتیرروی مساوی و متضاد P و P' را بر میله وارد می‌کنند و مانع کشیدگی آن می‌شوند (شکل ۳۵-۲ ب). لذا، تنش (بدون کرنش) در میله به وجود می‌آید.

حال، با اعمال نیروی مجهول  $R_B$  در انتهای  $B$  (شکل ۲-۳۸ ج)، از معادله  $(\lambda=2)$  برای تغییر شکل متناظر  $\delta_R$  استفاده می‌کنیم. مقادیر زیر را در معادله  $\lambda=2$  جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 = 300 \text{ mm} \\ A_1 &= 380 \text{ mm}^2 & A_2 &= 750 \text{ mm}^2 \\ P_1 &= P_2 = R_B & E &= 200 \text{ GPa} \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \delta_R &= \frac{P_1 L_1}{A_1 E} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E} \\ &= \frac{R_B}{200 \text{ GPa}} \left( \frac{300 \text{ mm}}{380 \text{ mm}^2} + \frac{300 \text{ mm}}{750 \text{ mm}^2} \right) \\ &= (0.95 \times 10^{-6} \text{ mm/N}) R_B \end{aligned}$$

تغییر شکل کلی میله بر اثر وجود قیدها صفر است و می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_T + \delta_R = 0 \\ &= -0.484 \text{ mm} + (0.95 \times 10^{-6} \text{ mm/N}) R_B = 0 \end{aligned}$$

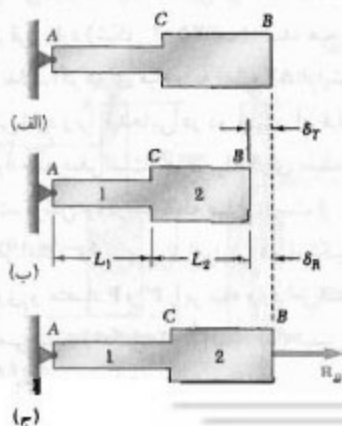
در نتیجه،

$$R_B = 81,34 \times 10^3 \text{ N} = 81,34 \text{ kN}$$

واکنش در  $A$  مساوی و متضاد با واکنش بالاست.

نیروها در دو قسمت میله عبارتند از  $P_1 = P_2 = 81,34 \text{ kN}$  لذا، تنش در قسمت‌های  $AC$  و  $CB$  میله عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P_1}{A_1} = \frac{81,34 \text{ kN}}{380 \text{ mm}^2} = 214,1 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= \frac{P_2}{A_2} = \frac{81,34 \text{ kN}}{750 \text{ mm}^2} = 107,8 \text{ MPa} \end{aligned}$$



شکل ۲-۳۸

حال، با اعمال نیروی  $P$  به عنوان واکنش زائد در انتهای  $B$  و با توجه به فرمول  $(\lambda=2)$ ، تغییر شکل دوم را می‌یابیم (شکل ۲-۳۶ ج):

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

تغییر شکل کلی میله صفر است و می‌نویسیم:

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

در نتیجه،

$$P = -AE \alpha(\Delta T)$$

تنش در میله بر اثر تغییر دمای  $\Delta T$  چنین است:

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E \alpha(\Delta T) \quad (2-32)$$

نتیجه بالا فقط برای میله همگن با مقطع عرضی یکنواخت به کار می‌رود. سایر مسائل مربوط به سازه مقیدی را که تغییر دما می‌دهد باید برحسب شرایط مسئله تحلیل کرد. برای این منظور، از یک روش کلی می‌توان استفاده کرد؛ یعنی، تغییر شکل ناشی از تغییر دما و ناشی از واکنش زائد را به طور جداگانه محاسبه، و با ترکیب آنها مسئله را حل کرد.

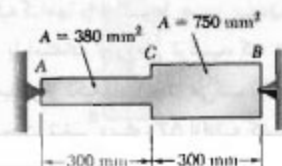
#### مثال ۲-۶

مقدار تنش در قسمت‌های  $AC$  و  $CB$  میله فولادی نشان داده شده را برای دمای  $-45^\circ\text{C}$  میله بیابید، در صورتی که بدانییم میله در دمای  $+24^\circ\text{C}$  به هر دو تکیه‌گاه صلب کاملاً متصل است. از  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\alpha = 11,7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  برای فولاد استفاده کنید. ابتدا واکنش در تکیه‌گاه‌ها را تعیین می‌کنیم. چون مسئله نامعین استاتیکی است، میله را از تکیه‌گاه  $B$  جدا می‌کنیم و می‌گذاریم تغییر دما دهد:

$$\Delta T = (-45^\circ\text{C}) - (24^\circ\text{C}) = -69^\circ\text{C}$$

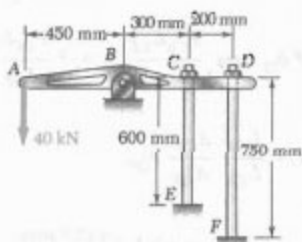
تغییر شکل متناظر (شکل ۲-۳۸ ب) چنین است:

$$\begin{aligned} \delta_T &= \alpha(\Delta T)L = (11,7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(-69^\circ\text{C})(600 \text{ mm}) \\ &= -0,484 \text{ mm} \end{aligned}$$



شکل ۲-۳۷

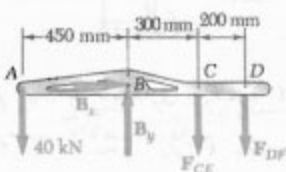




حل

استاتیک، نمودار آزاد میله ABCD را رسم، و توجه می‌کنیم که واکنش در B و نیروهای وارده از میله‌ها نامعین استاتیکی‌اند. با استفاده از استاتیک، می‌نویسیم:

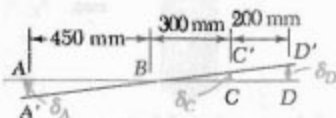
$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ (40 \text{ kN})(450 \text{ mm}) - F_{CE}(300 \text{ mm}) - F_{DF}(500 \text{ mm}) &= 0 \\ \Rightarrow 300 F_{CE} + 500 F_{DF} &= 18000 \quad (1) \end{aligned}$$



همدسه. پس از اعمال بار ۴۰ kN، وضعیت میله به صورت  $A'BC'D'$  در می‌آید. از مثلث‌های متشابه  $BAA'$  و  $BCC'$  و  $BDD'$ :

$$\frac{\delta_C}{300 \text{ mm}} = \frac{\delta_D}{500 \text{ mm}} \Rightarrow \delta_C = 0.6 \delta_D \quad (2)$$

$$\frac{\delta_A}{450 \text{ mm}} = \frac{\delta_D}{500 \text{ mm}} \Rightarrow \delta_A = 0.9 \delta_D \quad (3)$$



تغییر شکل‌ها، با استفاده از معادله (۲-۷)،

$$\delta_C = \frac{F_{CE} L_{CE}}{A_{CE} E} \quad \delta_D = \frac{F_{DF} L_{DF}}{A_{DF} E}$$

گرچه تغییر شکل کلی میله صفر است، ولی تغییر شکل قسمت‌های AC و CB صفر نیست، لذا، کرنش  $\epsilon_{AC}$  در AC را محاسبه می‌کنیم. کرنش  $\epsilon_{AC}$  را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد: (۱) کرنش گرمایی  $\epsilon_T$  ناشی از تغییر دمای  $\Delta T$  در میله معین نشده (شکل ۲-۳۸ ب)، از معادله (۲۲-۲)،

$$\begin{aligned} \epsilon_T &= \alpha \Delta T = (11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})(-69^\circ\text{C}) \\ &= -8.0713 \times 10^{-5} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

(۲) کرنش ناشی از تنش  $\sigma_1$ ، که آن هم از نیروی  $R_B$  وارد بر میله ناشی می‌شود (شکل ۲-۳۸ ج). با توجه به قانون هوک، این مولفه کرنش چنین است:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{E} &= \frac{+214.1 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} = +1.0705 \times 10^{-5} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \epsilon_{AC} &= \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -8.0713 \times 10^{-5} + 1.0705 \times 10^{-5} \\ &= +263.2 \times 10^{-5} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

با محاسبه مشابه، کرنش در قسمت میله به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \epsilon_{CB} &= \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -8.0713 \times 10^{-5} + 263.2 \times 10^{-5} \\ &= -264.8 \times 10^{-5} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

تغییر شکل‌های  $\delta_{AC}$  و  $\delta_{CB}$  در دو قسمت میله عبارتند از:

$$\begin{aligned} \delta_{AC} &= \epsilon_{AC}(AC) = (+263.2 \times 10^{-5})(300 \text{ mm}) \\ &= +0.079 \text{ mm} \\ \delta_{CB} &= \epsilon_{CB}(CB) = (-264.8 \times 10^{-5})(300 \text{ mm}) \\ &= -0.079 \text{ mm} \end{aligned}$$

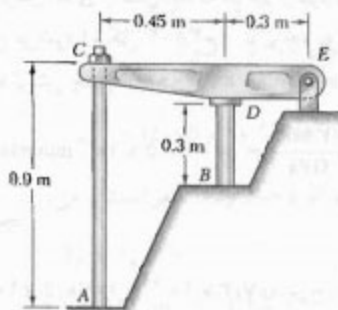
دیده می‌شود که مجموع این دو تغییر شکل،  $\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}$ ، صفر است در حالی که هیچکدام از آنها صفر نیست.

مسئله نمونه ۲-۳

میله CE به قطر ۱۲ mm و میله DF به قطر ۱۸ mm به میله صلب ABCD متصل شده‌اند. اگر میله‌ها از آلومینیم ( $E = 70 \text{ GPa}$ ) باشند، مطلوبست: (الف) نیرو در هر میله، (ب) انحراف در نقطه A.

مجموعه  $20^{\circ}\text{C}$  است، میله  $AC$  با پیچ و مهره سفت می‌شود. سپس، دمای استوانه برنجی تا  $50^{\circ}\text{C}$  افزایش می‌یابد ولی میله فولادی در  $20^{\circ}\text{C}$  می‌ماند. اگر قبل از تغییر دما تنش وجود نداشته باشد، تنش در استوانه را بیابید.

میله فولادی $AC$ :	استوانه برنجی $BD$ :
$E = 200 \text{ GPa}$	$E = 105 \text{ GPa}$
$\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$	$\alpha = 20.9 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$

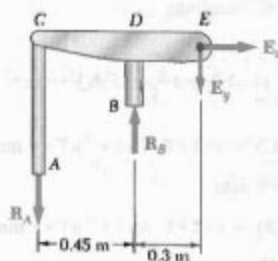


حل

استاتیک. نمره‌دار آزاد تمام مجموعه را رسم می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\sum M_E = 0 : R_A(0.75 \text{ m}) - R_B(0.3 \text{ m}) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 0.4 R_B \quad (1)$$



تغییر شکل‌ها. با در نظر گرفتن  $R_B$  به عنوان واکنش زائد، از روش ترکیب استفاده می‌کنیم. با حذف تکیه‌گاه  $B$ ، افزایش دمای استوانه باعث می‌شود نقطه  $B$  به اندازه  $\delta_B$  پایین آید. واکنش  $R_B$  باعث انحراف  $\delta_D$ ، برابر با  $\delta_B$ ، می‌شود. در نتیجه، انحراف نهایی  $B$  صفر است (شکل ۳).

انحراف  $\delta_T$ . به علت افزایش دمای  $30^{\circ}\text{C}$   $50^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C}$ ، طول استوانه برنجی به اندازه  $\delta_T$  افزایش می‌یابد:

$$\delta_T = L(\Delta T)\alpha = (0.3 \text{ m})(30^{\circ}\text{C})(20.9 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})$$

$$= 188.7 \times 10^{-6} \text{ m} \downarrow$$

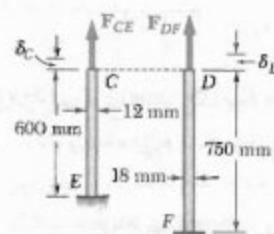
با جایگذاری  $\delta_D$  و  $\delta_C$  در (۲)،

$$\delta_C = 0.6 \delta_D \Rightarrow \frac{F_{CE} L_{CE}}{A_{CE} E} = 0.6 \frac{F_{DF} L_{DF}}{A_{DF} E}$$

$$\Rightarrow F_{CE} = 0.6 \frac{L_{DF}}{L_{CE}} \frac{A_{CE}}{A_{DF}} F_{DF}$$

$$= 0.6 \left( \frac{750 \text{ mm}}{600 \text{ mm}} \right) \left[ \frac{\frac{1}{4} \pi (12 \text{ mm})^2}{\frac{1}{4} \pi (18 \text{ mm})^2} \right] F_{DF}$$

$$\Rightarrow F_{CE} = 0.222 F_{DF}$$



نیرو در هر میله. با جایگذاری  $F_{CE}$  در (۱) و با توجه به اینکه نیروها بر حسب kN هستند، داریم

$$300(0.222 F_{DF}) + 500 F_{DF} = 18000$$

$$\Rightarrow F_{DF} = 30 \text{ kN} \leftarrow$$

$$F_{CE} = 0.222 F_{DF} = 0.222 (30 \text{ kN})$$

$$\Rightarrow F_{CE} = 6.66 \text{ kN} \leftarrow$$

انحراف‌ها. انحراف نقطه  $D$  چنین است:

$$\delta_D = \frac{F_{DF} L_{DF}}{A_{DF} E} = \frac{(30 \times 10^3 \text{ N})(750 \text{ mm})}{\frac{1}{4} \pi (18)^2 (70 \text{ GPa})}$$

$$\Rightarrow \delta_D = 1.26 \text{ mm}$$

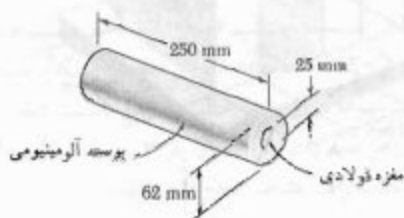
با استفاده از (۳)،

$$\delta_A = 0.9 \delta_D = 0.9 (1.26 \text{ mm})$$

$$\Rightarrow \delta_A = 1.13 \text{ mm} \leftarrow$$

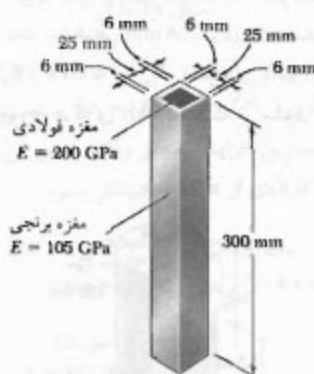
مسئله نمونه ۲-۴

میله صلب  $CDE$  دارای تکیه‌گاه مفصلی  $E$  است و روی استوانه برنجی  $BD$  به قطر ۳۰ mm قرار دارد. میله فولادی  $AC$  به قطر ۲۲ mm از سوراخ داخل میله  $CDE$  گذشته است. وقتی دمای



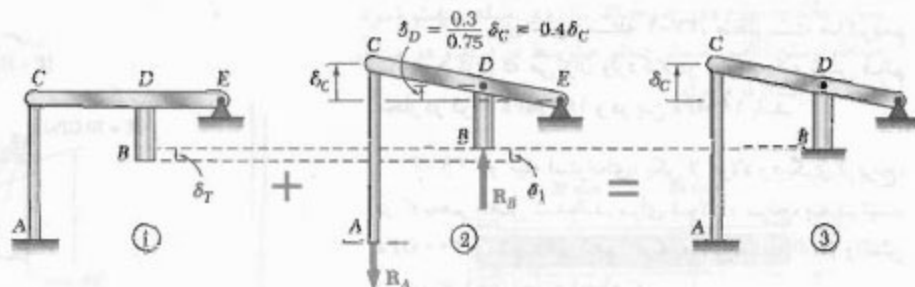
شکل م-۳۳

۳۴-۲ با اعمال یک نیروی محوری از جانب صفحات صلب انتهایی بر مجموعه، طول مجموعه به اندازه ۱۵ mm کاهش می‌یابد. مطلوبست: (الف) مقدار نیروی وارده، (ب) تنش در مغزه فولادی.



شکل م-۳۴

۳۵-۲ نیروی محوری مرکزی با مقدار  $P = 450 \text{ kN}$  از صفحه صلب انتهایی بر قطعه مرکب وارد شده است. اگر  $h = 10 \text{ mm}$  مطلوبست: (الف) تنش قائم در مغزه برنجی، (ب) تنش قائم در صفحات آلومینیومی.



انحراف  $\delta_1$  توجه داریم که  $\delta_D = 0.4 \delta_C$  و  $\delta_D = \delta_D + \delta_{B/D}$

$$\delta_C = \frac{R_A L}{AE} = \frac{R_A (0.9 \text{ m})}{\frac{1}{4} \pi (0.022 \text{ m})^2 (700 \text{ GPa})} = 11.84 \times 10^{-4} R_A \uparrow$$

$$\delta_D = 0.4 \delta_C = 0.4 (11.84 \times 10^{-4} R_A) = 4.74 \times 10^{-4} R_A \uparrow$$

$$\delta_{B/D} = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B (0.7 \text{ m})}{\frac{1}{4} \pi (0.02 \text{ m})^2 (100 \text{ GPa})} = 4.4 \times 10^{-4} R_B \uparrow$$

از (۱) دیده می‌شود که  $R_A = 0.4 R_B$  و می‌نویسیم:

$$\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D} = [4.74 (0.4 R_B) + 4.4 R_B] 10^{-4} = 5.94 \times 10^{-4} R_B \uparrow$$

$$\delta_T = \delta_1 : 1.881 \times 10^{-2} \text{ m} = 5.94 \times 10^{-4} R_B \Rightarrow R_B = 31.7 \text{ kN}$$

تنش در استوانه:

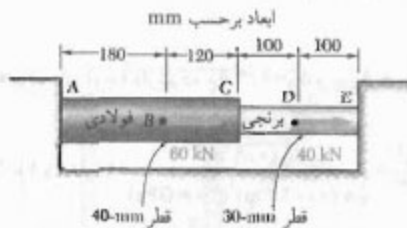
$$\sigma_B = \frac{R_B}{A} = \frac{31.7 \text{ kN}}{\frac{1}{4} \pi (0.02)^2} \Rightarrow \sigma_B = 44.8 \text{ MPa} \leftarrow$$

## مسائل

۳۳-۲ نیروهای فشاری مرکزی  $260 \text{ kN}$  از طریق صفحات صلب بر هر دوسر مجموعه نشان داده شده وارد شده‌اند. اگر  $E_s = 200 \text{ GPa}$  و  $E_a = 70 \text{ GPa}$ ، مطلوبست: (الف) تنش قائم در هسته فولادی و در پوسته آلومینیومی، (ب) تغییر شکل مجموعه

۳۸-۲ برای ستون مسئله ۲-۳۷، مطلوبست ماکزیمم نیروی مرکزی که می‌توان وارد کرد در صورتی که تنش قائم مجاز در فولاد  $160 \text{ MPa}$  و در بتن  $18 \text{ MPa}$  باشد.

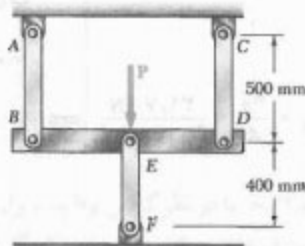
۳۹-۲ دو میله استوانه‌ای، یکی از فولاد و دیگری از برنج، در  $C$  به هم متصل شده‌اند. برای فولاد و برنج، به ترتیب،  $E_s = 200 \text{ GPa}$  و  $E_b = 105 \text{ GPa}$ . مطلوبست: (الف) واکنش در  $A$  و  $E$ ، (ب) انحراف نقطه  $C$ .



شکل م ۳۹-۲

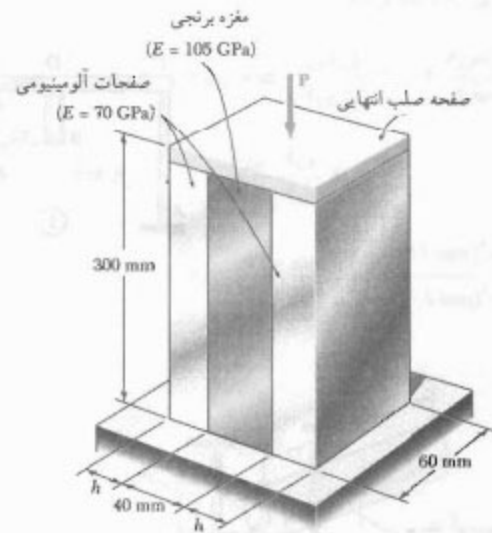
۴۰-۲ مسئله ۲-۳۹ را با این فرض حل کنید که میله  $AC$  از برنج و میله  $CE$  از فولاد باشد.

۴۱-۲ سه میله فولادی ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) با مقدار  $26 \text{ kN}$  را تحمل می‌کنند. مساحت مقطع عرضی میله‌های  $AB$ ،  $CD$  و  $EF$ ، به ترتیب،  $200 \text{ mm}^2$ ،  $200 \text{ mm}^2$  و  $625 \text{ mm}^2$  است. مطلوبست: (الف) تغییر طول میله  $EF$ ، (ب) تنش در هر میله.



شکل م ۴۱-۲

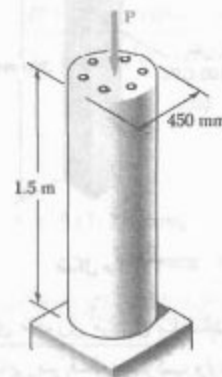
۴۲-۲ لوله آلومینیومی به طول  $250 \text{ mm}$ ، با قطر خارجی  $36 \text{ mm}$  و با قطر داخلی  $28 \text{ mm}$  است. یک میله برنجی به قطر  $25 \text{ mm}$  داخل این لوله قرار داده می‌شود. سپس، دو بوش پیچ‌دار در دو انتهای لوله پیچ می‌شود. گام پیچ‌ها  $1.5 \text{ mm}$  است. برای آلومینیوم و برنج، به ترتیب،  $E_a = 70 \text{ GPa}$  و  $E_b = 105 \text{ GPa}$ . چون میله کمی بلندتر از لوله است، بوش را



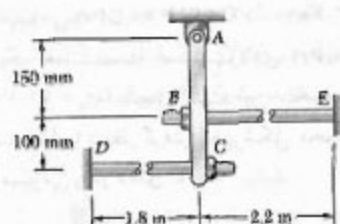
شکل م ۳۵-۲

۳۶-۲ برای قطعه مرکب نشان داده شده در مسئله ۲-۳۶، مطلوبست: (الف) مقدار  $h$  در صورتی که قسمت تحت بار صفحات آلومینیومی نصف قسمت تحت بار مغزه برنجی باشد، (ب) بار کل در صورتی که تنش در مغزه برنجی  $80 \text{ MPa}$  باشد.

۳۷-۲ ستون بتنی به طول  $1.5 \text{ mm}$  توسط شش میله فولادی، هر یک به قطر  $28 \text{ mm}$ ، تقویت شده است. اگر  $E_s = 200 \text{ GPa}$  و  $E_c = 25 \text{ GPa}$ ، تنش‌های قائم در فولاد و بتن را برای بار محوری مرکزی  $1550 \text{ kN}$  که بر ستون وارد می‌شود بیابید.

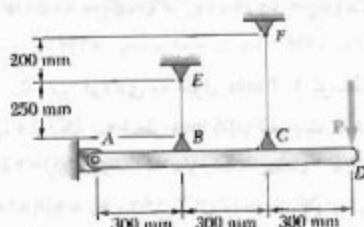


شکل م ۳۷-۲



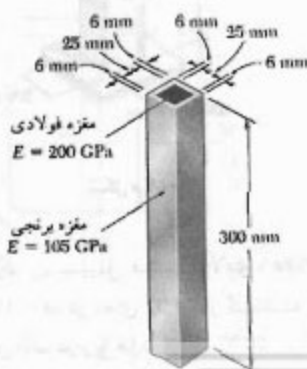
شکل م ۴۵-۲

۴۵-۲ میله صلب  $AD$  توسط دو سیم فولادی  $AB$  و  $AC$  به قطر  $1.5 \text{ mm}$  و مفصل  $A$  نگه داشته شده است. اگر سیم‌ها در ابتدا در حالت کشیده باشند، (الف) کشش اضافی در هر سیم را بر اثر اعمال بار  $P$  با مقدار  $900 \text{ N}$  در  $D$  بیابید، (ب) انحراف متناظر نقطه  $D$  را بیابید.



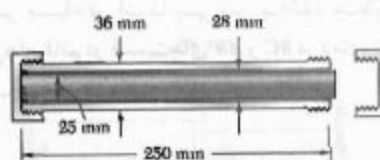
شکل م ۴۶-۲

۴۶-۲ پوسته برنجی  $(\alpha_b = 20.9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})$  کاملاً به مغز فولادی  $(\alpha_f = 11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C})$  متصل شده است. مطلوب‌ترین افزایش مجاز دما در صورتی که بخواهیم تنش در مغزه فولادی از  $55 \text{ MPa}$  بیشتر نشود.



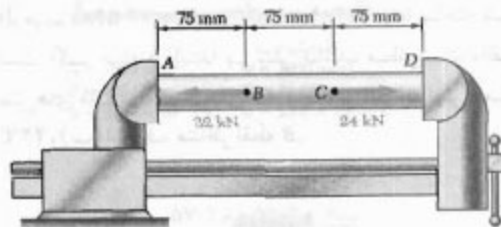
شکل م ۴۷-۲

باید یک چهارم دور چرخاند تاروی میله سفت شود. مطلوب‌ست: (الف) تنش قائم متوسط در لوله و در میله، (ب) انحراف لوله و میله.



شکل م ۴۸-۲

۴۸-۲ یک لوله فولادی  $(E = 200 \text{ GPa})$  با قطر خارجی  $36 \text{ mm}$  و ضخامت  $3 \text{ mm}$  در گیره‌ای قرار گرفته است. این گیره طوری تنظیم می‌شود که فک‌هایش درست با دو انتهای لوله تماس می‌گیرند بدون اینکه فشار وارد کنند. سپس، دو نیروی نشان داده شده بر لوله وارد می‌شوند. پس از اعمال نیروها، گیره تنظیم می‌شود به طوری که فاصله بین فک‌هایش  $0.2 \text{ mm}$  کاهش می‌یابد. مطلوب‌ست: (الف) نیروی وارده از گیره بر لوله در  $D$  و  $A$ ، (ب) تغییر طول قسمت  $BC$  لوله.

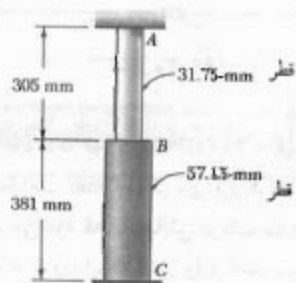


شکل م ۴۹-۲

۴۹-۲ مسئله ۴۸-۲ را با این فرض حل کنید که گیره، پس از اعمال نیروها، طوری تنظیم شود که فاصله بین فک‌هایش  $0.1 \text{ mm}$  کاهش یابد.

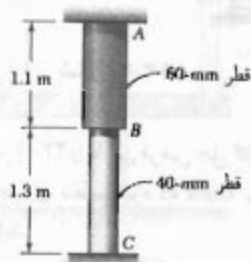
۴۵-۲ قطر هر یک از میله‌های فولادی  $BE$  و  $CD$   $(E = 200 \text{ GPa})$  برابر با  $16 \text{ mm}$  است. گام پیچ‌های انتهایی  $2.5 \text{ mm}$  است. مهره  $B$ ، پس از محکم شدن، به اندازه یک دور کامل سفت می‌شود. مطلوب‌ست: (الف) کشش در میله  $CD$ ، (ب) انحراف نقطه  $C$  عضو صلب  $ABC$ .

۵۲-۲. میله‌ای از دو قسمت استوانه‌ای  $AB$  و  $BC$  تشکیل شده است و از دو انتها مسقیم است. قسمت  $AB$  از فولاد ( $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $E_s = 200 \text{ GPa}$ ) و قسمت  $BC$  از برنج ( $\alpha_b = 18.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $E_b = 120 \text{ GPa}$ ) ساخته شده است. اگر میله در ابتدا بی‌تنش باشد، مطلوب است: (الف) تنش‌های قائم در قسمت‌های  $AB$  و  $BC$  در دمای  $18^\circ\text{C}$ ، (ب) انحراف متناظر نقطه  $B$ .



شکل م ۵۲-۲

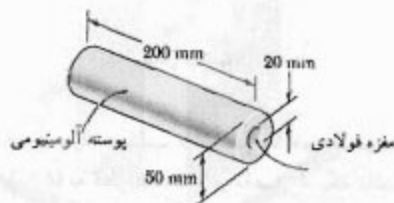
۵۳-۲. میله‌ای از دو قسمت  $AB$  و  $BC$  تشکیل شده است و از دو انتها مسقیم است. قسمت  $AB$  از برنج ( $\alpha_b = 20.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $E_b = 105 \text{ GPa}$ ) و قسمت  $BC$  از آلومینیم ( $\alpha_a = 23.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $E_a = 72 \text{ GPa}$ ) ساخته شده است. اگر میله در ابتدا بی‌تنش باشد، مطلوب است: (الف) تنش‌های قائم در قسمت‌های  $AB$  و  $BC$  بر اثر افزایش دمای  $42^\circ\text{C}$ ، (ب) انحراف متناظر نقطه  $B$ .



شکل م ۵۳-۲

۵۴-۲. در مسئله ۴۲-۲، تنش قائم متوسط را در لوله و میله با این فرض بیابید که مهره‌ها در دمای  $15^\circ\text{C}$  سفت شوند و دمای نهایی  $55^\circ\text{C}$  باشد، (برای آلومینیم،  $\alpha = 23.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$  و برای برنج،  $\alpha = 20.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ).

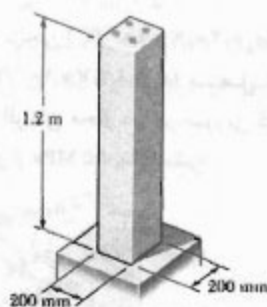
۴۸-۲. مجموعه نشان داده شده متشکل است از یک پوسته آلومینیومی ( $\alpha_a = 23.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $E_a = 70 \text{ GPa}$ ) به یک هسته فولادی ( $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $E_s = 200 \text{ GPa}$ ) متصل است. این مجموعه در دمای  $20^\circ\text{C}$  فقط با در نظر گرفتن تغییر شکل محوری، تنش در پوسته آلومینیومی را در دمای  $180^\circ\text{C}$  بیابید.



شکل م ۴۸-۲

۴۹-۲. مسئله ۴۸-۲ را با این فرض حل کنید که هسته از برنج ( $\alpha_b = 20.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $E_b = 105 \text{ GPa}$ ) باشد.

۵۰-۲. تیر فولادی به طول  $1.2 \text{ m}$  توسط چهار میله فولادی، هر یک به قطر  $18 \text{ mm}$  تقویت شده است. اگر  $E_c = 205 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ,  $E_s = 200 \text{ GPa}$  و  $\alpha_c = 9.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ، تنش قائم را در فولاد و بتن در دمای  $27^\circ\text{C}$  بیابید.

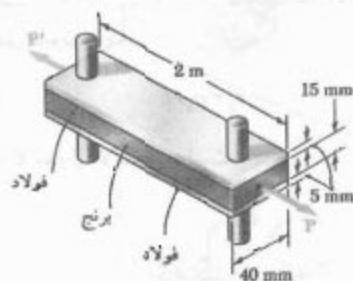


شکل م ۵۰-۲

۵۱-۲. یک ریل فولادی ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) در دمای  $6^\circ\text{C}$  کار گذاشته شده است. مطلوب است تنش قائم در ریل‌ها در دمای  $52^\circ\text{C}$ ، با این فرض که ریل‌ها: (الف) به هم جوش شده باشند و مسیر پیوسته‌ای را تشکیل داده باشند، (ب) به طول  $12 \text{ m}$  و با فاصله  $6 \text{ mm}$  از هم باشند.



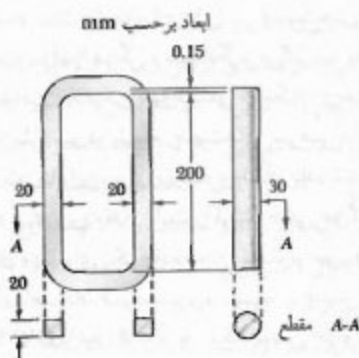
۵۵-۲ پس از ساخت، دمای میله‌های فولادی را به دمای اتاق برمی‌گردانند. مطلوبست: (الف) افزایش دمایی که برای جا زدن مفصل‌ها در میله‌های فولادی نیاز است، (ب) تنش در میله بزرنجی پس از اینکه تحت بار قرار می‌گیرد.



شکل م ۵۸-۲

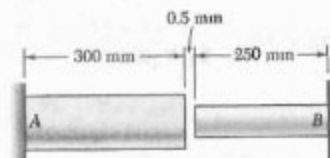
۵۹-۲ مطلوبست ماکزیمم بار  $P$  که می‌توان بر میله بزرنجی مسئله ۵۸-۲ وارد کرد در صورتی که بخواهیم تنش مجاز در میله‌های فولادی  $30 \text{ MPa}$  و در میله بزرنجی  $25 \text{ MPa}$  باشد.

۶۰-۲ یک بلزوری بزرنجی ( $E_b = 70 \text{ GPa}$ ،  $E_s = 200 \text{ GPa}$ ) و یک میله فولادی ( $\alpha_b = 10.4 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$ ،  $\alpha_s = 6.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$ ) در دمای  $20^\circ\text{C}$  دارای ابعاد نشان داده شده‌اند. میله فولادی سرد می‌شود تا اینکه آزادانه در بازو جا می‌خورد. سپس، دمای کل مجموعه تا  $150^\circ\text{C}$  افزایش می‌یابد. مطلوبست: (الف) تنش قائم نهایی در میله فولادی، (ب) طول نهایی میله فولادی.



شکل م ۶۰-۲

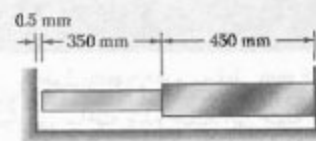
۵۵-۲ در دمای اتاق ( $20^\circ\text{C}$ ) فاصله  $0.5 \text{ mm}$  بین دو انتهای میله‌های نشان داده شده وجود دارد. در لحظه بعد، وقتی دما به  $140^\circ\text{C}$  می‌رسد، مطلوبست: (الف) تنش قائم در میله آلومینیومی، (ب) تغییر طول میله آلومینیومی.



آلومینیوم	فولاد زنگ‌نزن
$A = 2000 \text{ mm}^2$	$A = 800 \text{ mm}^2$
$E = 75 \text{ GPa}$	$E = 190 \text{ GPa}$
$\alpha = 23 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$	$\alpha = 17.3 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$

شکل م ۵۵-۲

۵۶-۲ اگر در دمای  $24^\circ\text{C}$  فاصله  $0.5 \text{ mm}$  وجود داشته باشد، مطلوبست: (الف) دمایی که به ازای آن تنش قائم در میله آلومینیومی  $75 \text{ MPa}$  است، (ب) طول دقیق متناظر میله آلومینیومی.

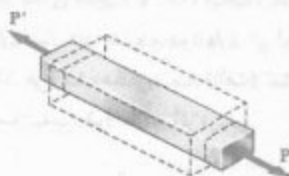


برنج	آلومینیوم
$A = 1500 \text{ mm}^2$	$A = 1800 \text{ mm}^2$
$E = 105 \text{ GPa}$	$E = 73 \text{ GPa}$
$\alpha = 21.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$	$\alpha = 23.2 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$

شکل م ۵۶-۲ و ۵۷-۲

۵۷-۲ مطلوبست: (الف) نیروی فشاری در میله‌های نشان داده شده پس از اینکه دما به اندازه  $82^\circ\text{C}$  افزایش یابد، (ب) تغییر طول متناظر میله بزرنجی.

۵۸-۲ از دو میله فولادی ( $E_s = 200 \text{ GPa}$ ) و  $E_b = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$  برای تقویت میله بزرنجی ( $E_b = 105 \text{ GPa}$ ،  $\alpha_b = 20.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ )، که تحت بار  $P = 25 \text{ kN}$  قرار دارد، استفاده شده است. هنگام ساخت میله‌های فولادی، فاصله بین مراکز سوراخ‌هایی که برای تعبیه مفصل‌هاست به اندازه  $0.5 \text{ mm}$  کمتر از  $2 \text{ m}$  (فاصله مورد نیاز) در می‌آید. لذا، میله‌های فولادی را در کوره‌ای قرار می‌دهند تا طول آنها افزایش یابد به طوری که مفصل‌ها را بتوان جا زد.



شکل ۴۰-۲

یا

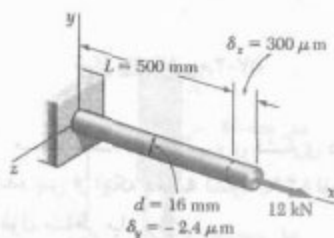
$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (2-26)$$

در معادله‌های بالا از علامت منفی استفاده می‌کنیم تا مقدار مثبتی برای  $\nu$  به دست آید، زیرا کرنش‌های محوری و جانبی در تمام مواد صنعتی دارای علامت مخالف‌اند<sup>\*\*</sup>. با حل معادله (۲۶-۲) برای  $\varepsilon_y$  و  $\varepsilon_z$  و با توجه به معادله (۲۴-۲)،

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} \quad (2-27)$$

مثال ۷-۲

میله‌ای به طول ۵۰۰ mm و به قطر ۱۶ mm از ماده همگن و همسانگردی ساخته شده است. این میله تحت بار محوری ۱۲ kN به اندازه ۳۰۰  $\mu\text{m}$  افزایش طول و ۲/۴  $\mu\text{m}$  کاهش قطر می‌دهد. مدول الاستیسته و نسبت پواسون آن را بیابید.



شکل ۴۱-۲

\* شاید فکر کنید به علت اثر ترکیبی کشیدگی محوری و انقباض عرضی، حجم میله ثابت می‌ماند، ولی اینطور نیست.

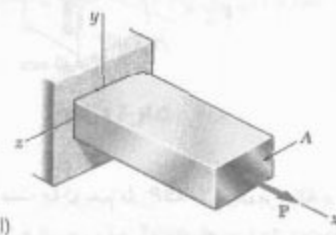
\*\* البته، بعضی از مواد آزمایشی، مانند فوم‌های پلیمر، هنگام کشیدگی به‌طور جانبی منبسط می‌شوند. در این حالت، چون کرنش‌های محوری و جانبی دارای علامت یکسانند، نسبت پواسون این مواد منفی است (See Roderic Lakes, "Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio," Science, 27 February 1987, Volume 235, p. 1038-1040.)

## ۲-۱۱ نسبت پواسون

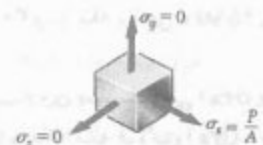
در قسمت اول این فصل دیدیم که وقتی میله باریک همگنی به‌طور محوری بارگذاری می‌شود، تا مادامی که ماده از حد الاستیک خود فراتر نرفته است، تنش و کرنش از قانون هوک پیروی می‌کنند. اگر بار  $P$  در امتداد محور  $x$  وارد شود (شکل ۲-۳۹ الف)،  $\sigma_x = P/A$  که در آن  $A$  مساحت مقطع عرضی است. طبق قانون هوک،

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E \quad (2-24)$$

که در آن  $E$  مدول الاستیسته است.



(الف)

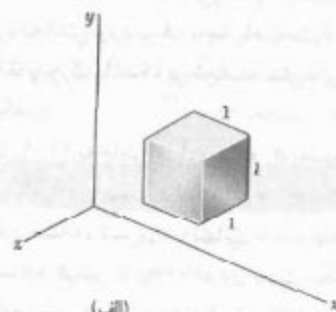


(ب)

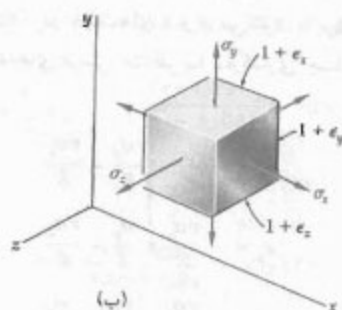
شکل ۳۹-۲

گفتنی است که تنش‌های قائم وارد بر وجوه عمود بر محورهای  $y$  و  $z$  صفر هستند؛ یعنی،  $\sigma_y = \sigma_z = 0$  (شکل ۲-۳۹ ب). ولی، کرنش‌های  $\varepsilon_y$  و  $\varepsilon_z$  صفر نیستند. در تمام مواد، کشیدگی حاصل از اعمال نیروی محوری  $P$  با انقباض عرضی همراه است (شکل ۲-۴۰). در قسمت‌های ۲-۱۲ تا ۲-۱۵، تمام مواد را همگن و همسانگرد می‌گیریم؛ یعنی، فرض می‌کنیم خواص مکانیکی آنها مستقل از مکان و جهت است. در نتیجه، کرنش نیز در تمام جهت‌های عرضی دارای مقدار یکسان است. بنابراین، برای بارگذاری نشان داده شده در شکل ۲-۳۹، این مقدار ثابت را کرنش جانبی می‌گویند. یکی از ثابت‌های مهم برای یک ماده معین، نسبت پواسون است که به افتخار ریاضی‌دان فرانسوی، سیمون دنیس پواسون (۱۷۸۱-۱۸۴۰) نامیده شده و با حرف یونانی  $\nu$  (نو) نشان داده می‌شود. برای بارگذاری نشان داده شده در شکل ۲-۳۹،

$$\nu = \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} \quad (2-25)$$



(الف)



(ب)

شکل ۴۳-۲

یک جزء مکعبی به ضلع واحد از ماده همسانگرد را در نظر می‌گیریم (شکل ۴۳-۲ الف). تحت بارگذاری چند محوری فاده شده، این جزء به صورت مکعب مستطیلی به اضلاع  $1 + \epsilon_x$ ،  $1 + \epsilon_y$  و  $1 + \epsilon_z$  در می‌آید، که در آن  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\epsilon_z$  کرنش قائم در سه جهت هستند (شکل ۴۳-۲ ب). بر اثر تغییر شکل سایر اجزا، جزء تحت بررسی می‌تواند حرکت انتقالی نیز داشته باشد، ولی در اینجا فقط تغییر شکل واقعی جزء را در نظر گرفته‌ایم، نه هر تغییر مکان ممکن جسم صلب را.

برای بیان مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\epsilon_z$  بر حسب مولفه‌های تنش  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$ ، تأثیر هر مولفه تنش را به‌طور جداگانه در نظر می‌گیریم و با جمع این آثار به نتیجه دلخواه می‌رسیم. برای این منظور، از اصل ترکیب استفاده می‌کنیم. طبق این اصل، با تعیین جداگانه تأثیر بارهای مختلف و با ترکیب نتایج حاصل می‌توان تأثیر بارگذاری ترکیبی را بر یک سازه به‌دست آورد، در صورتی که شرایط زیر برقرار باشند:

۱- رابطه هر اثر با باری که این اثر را ایجاد می‌کند به صورت خطی باشد.

۲- تغییر شکل ناشی از هر بار دارای مقدار کوچکی باشد و بر شرایط کاربرد سایر بارها تأثیر نگذارد.

مساحت مقطع عرضی میله:

$$A = \pi r^2 = \pi (8 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 201 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

با انتخاب محور  $x$  در امتداد محور میله (شکل ۴۱-۲)، می‌نویسیم:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12 \times 10^3 \text{ N}}{201 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 59.7 \text{ MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{300 \mu\text{m}}{500 \text{ mm}} = 600 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2.4 \mu\text{m}}{16 \text{ mm}} = -150 \times 10^{-6}$$

از قانون هوک،  $\sigma_x = E \epsilon_x$ ، در نتیجه،

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{59.7 \text{ MPa}}{600 \times 10^{-6}} = 99.5 \text{ GPa}$$

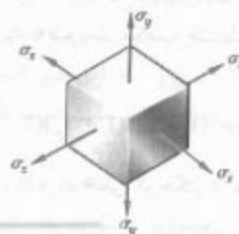
از معادله (۲-۲۶)،

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} = 0.25$$

## ۱۲-۲ بارگذاری چند محوری؛ قانون عمومی هوک

تا به حال، عضوهای باریکی را که تحت بار محوری قرار دارند بررسی کردیم. بار محوری در امتداد یک محور تنها وارد می‌شود. اگر این محور را محور  $x$  و نیروی داخلی در مکان خاصی را  $P$  بگیریم، مولفه‌های تنش متناظر عبارتند از  $\sigma_x = P/A$  و  $\sigma_y = 0$  و  $\sigma_z = 0$ .

حال، عضوهایی را در نظر می‌گیریم که تحت نیروهای وارده در سه جهت مختصاتی قرار دارند. این نیروها تنش‌های قائم غیر صفر  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  را ایجاد می‌کنند (شکل ۴۲-۲). این حالت را بارگذاری چند محوری می‌گویند. گفتنی است که حالت تنش موجود مانند حالت کلی تنش در قسمت ۱-۱۲ نیست، زیرا تنش برشی در شکل ۴۲-۲ وجود ندارد.



شکل ۴۲-۲

اما،

$$\epsilon_x = \delta_x / AB = (-300 \times 10^{-6} \text{ mm}) / (100 \text{ mm})$$

$$= -300 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

در نتیجه،

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_x = -300 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

لذا،

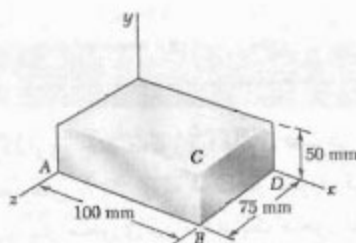
$$\delta_y = \epsilon_y (BC) = (-300 \times 10^{-6}) (50 \text{ mm}) = -15 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\delta_z = \epsilon_z (BD) = (-300 \times 10^{-6}) (75 \text{ mm}) = -22.5 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

(ب) فشار. از معادله (۲۹-۲)،

$$p = - \frac{E \epsilon_x}{1 - 2\nu} = - \frac{(200 \text{ GPa})(-300 \times 10^{-6})}{1 - 0.58}$$

$$p = 142.9 \text{ MPa}$$



شکل ۴۴-۲

۲-۱۳ اتساع: مدول کپهای

در این قسمت، اثر تنش‌های قائم  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  وارد بر جزء حجم یک ماده همسانگرد را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، جزء نشان داده شده در شکل ۲-۴۳ را در نظر می‌گیریم. این جزء در حالت بی‌تنش به شکل مکعب با حجم واحد است، و تحت تنش‌های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  به صورت مکعب مستطیل با حجم زیر درمی‌آید:

$$v = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

چون کرنش‌های  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\epsilon_z$  خیلی کوچکتر از واحد هستند، از حاصلضرب آنها صرف‌نظر می‌شود. در نتیجه،

$$v = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

در بارگذاری چند محوری، شرط اول وقتی برقرار می‌شود که تنش‌ها از حد تناسب ماده فراتر نروند، و شرط دوم نیز وقتی برقرار می‌شود که تنش وارد بر هر وجه باعث نشود تغییر شکل سایر وجوه آنقدر بزرگ باشد که بر محاسبه تنش‌های وارد بر آن وجوه تأثیر بگذارد.

از قسمت ۲-۱۱ به‌خاطر می‌آوریم که  $\sigma_x$  به‌تنهایی باعث ایجاد کرنش  $\sigma_x/E$  در جهت  $x$  و کرنش در جهت‌های  $y$  و  $z$  می‌شود. به‌طور مشابه، تنش  $\sigma_y$  به‌تنهایی باعث ایجاد کرنش  $\sigma_y/E$  در جهت  $y$  و کرنش  $-\nu\sigma_y/E$  در دو جهت دیگر می‌شود. سرانجام، مولفه تنش  $\sigma_z$  باعث ایجاد کرنش  $\sigma_z/E$  در جهت  $z$  و کرنش  $-\nu\sigma_z/E$  در جهت‌های  $x$  و  $y$  می‌شود. با ترکیب نتایج حاصل، مولفه‌های کرنش متناظر با بارگذاری چند محوری عبارتند از:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \quad (28-2)$$

رابطه‌های (۲۸-۲) را قانون عمومی هوک برای بارگذاری چندمحوری یک ماده همگن همسانگرد می‌گویند. همانطور که قبلاً گفتیم، نتایج حاصل فقط تا وقتی صحت دارند که تنش‌ها از حد تناسب فراتر نروند و تغییر شکل‌ها کوچک باشند. مقدار مثبت برای مولفه تنش می‌رساند که این مولفه کششی است، و مقدار منفی می‌رساند که فشاری است. به‌طور مشابه، مقدار مثبت برای مولفه کرنش به معنای انبساط و مقدار منفی به معنای انقباض است.

مثال ۲-۸

قطعه فولادی نشان داده شده (شکل ۲-۴۲) تحت فشار یکنواختی است که بر تمام وجوه آن وارد می‌شود. اگر تغییر طول ضلع  $AB$  برابر با  $30 \times 10^{-3} \text{ mm}$  باشد، مطلوب است: (الف) تغییر طول دو ضلع دیگر، (ب) فشار  $P$  وارده بر وجوه قطعه. فرض کنید  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.29$ .

(الف) تغییر طول اضلاع دیگر. با جایگذاری  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$  در رابطه‌های (۲۸-۲)، دیده می‌شود سه مولفه کرنش دارای مقدار یکسان زیر هستند:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = - \frac{p}{E} (1 - 2\nu) \quad (29-2)$$

از طرف دیگر، یک ماده ایده‌آل با  $\nu = \frac{1}{2}$  ( $k = \infty$ )، کاملاً تراکم‌ناپذیر است ( $e = 0$ ). در ناحیه الاستیک  $\nu < \frac{1}{2}$ ، لذا، از معادله ۳۱-۲ نتیجه می‌شود کشیدگی یک ماده در یک جهت باعث افزایش حجم آن می‌شود (مثلاً، در جهت  $x$ ،  $\sigma_x > 0$  و  $\sigma_y = \sigma_z = 0$  در نتیجه،  $e > 0$ ).

### مثال ۲-۹

تغییر حجم قطعه فولادی نشان داده شده را تحت تأثیر فشار هیدروستاتیکی  $p = 180 \text{ MPa}$  بسایید.  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.29$ .

از معادله (۳۳-۲)، مدول کپای فولاد را می‌یابیم:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{200 \text{ GPa}}{3(1 - 0.58)} = 158.7 \text{ GPa}$$

از معادله (۳۴-۲)،

$$e = -\frac{p}{k} = -\frac{180 \text{ MPa}}{158.7 \text{ GPa}} = -1.134 \times 10^{-3}$$

حجم قطعه در حالت بی تنش برابر است با:

$$V = (80 \text{ mm})(40 \text{ mm})(60 \text{ mm}) = 192 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$e$  تغییر حجم واحد است، یعنی  $e = \Delta V / V$ ، در نتیجه،

$$\Delta V = eV = (-1.134 \times 10^{-3})(192 \times 10^3 \text{ mm}^3) \\ \Delta V = -218 \text{ mm}^3$$

### ۲-۱۴ کرنش برشی

در قسمت ۲-۱۲، هنگام استنتاج رابطه‌های (۲۸-۲) بین تنش‌های قائم و کرنش‌های قائم در یک ماده همگن و همسانگرد، فرض کردیم که تنش برشی وجود ندارد. در حالت کلی‌تر شکل ۲-۴۵، تنش‌های برشی  $\tau_{xy}$ ،  $\tau_{yz}$  و  $\tau_{zx}$  (و نیز، تنش‌های برشی متناظر  $\tau_{yx}$ ،  $\tau_{zy}$  و  $\tau_{xz}$ ) وجود دارند. این تنش‌ها تأثیری روی کرنش‌های قائم ندارند و تا وقتی تمام تغییرشکل‌های موجود کوچک هستند، بر استنتاج یا صحت

\* چون اتساع  $e$  تغییر حجم را نشان می‌دهد، از وضعیت جزء تحت بررسی مستقل است. لذا، از معادله‌های (۳۰-۲) و (۳۱-۲) نتیجه می‌شود که کمیت‌های  $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  و نیز مستقل از وضعیت جزء هستند. این خاصیت را در فصل ۷ اثبات می‌کنیم. \*\* در ناحیه پلاستیک، حجم ماده تقریباً ثابت می‌ماند.

اگر تغییر حجم جزء را با  $e$  نشان دهیم، داریم:

$$e = v - 1 = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z - 1$$

یا

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (30-2)$$

چون این جزء در ابتدا دارای حجم واحد بوده است، کمیت  $e$  تغییر حجم واحد را نشان می‌دهد و آن را اتساع ماده می‌گویند. با جایگذاری  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\epsilon_z$  از معادله (۲۸-۲) در معادله (۳۰-۲)،

$$e = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (31-2)^*$$

در حالت خاصی که جسم تحت فشار یکنواخت هیدروستاتیکی  $p$  قرار دارد، هر یک از مولفه‌های تنش برابر با  $-p$  است. از معادله (۳۱-۲)،

$$e = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E} p \quad (32-2)$$

با تعریف ثابت زیر،

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (33-2)$$

معادله (۳۲-۲) به صورت زیر در می‌آید:

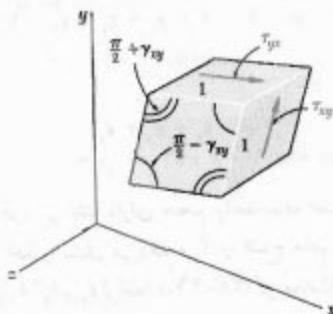
$$e = -\frac{p}{k} \quad (34-2)$$

ثابت  $k$  را مدول کپای یا مدول تراکم ماده می‌گویند، و مانند مدول الاستیسیته  $E$  برحسب پاسکال است.

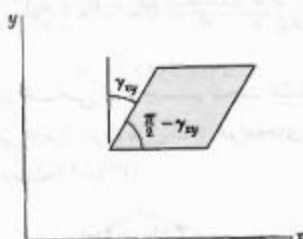
ماده پایداری که تحت فشار هیدروستاتیکی است فقط کاهش حجم می‌دهد؛ لذا اتساع  $e$  در معادله (۳۴-۲) منفی است. یعنی، مدول کپای  $k$  یک کمیت مثبت است. با توجه به معادله (۳۳-۲)،  $1 - 2\nu > 0$  یا  $\nu < \frac{1}{2}$ . اما، طبق قسمت ۲-۱۱، برای تمام مواد صنعتی دارای مقدار مثبت است. لذا، برای این مواد،

$$0 < \nu < \frac{1}{2} \quad (35-2)$$

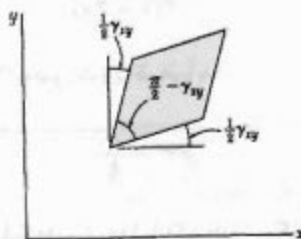
گفتنی است ماده ایده‌آلی که مقدار  $\nu$  آن صفر است می‌تواند در یک جهت کشیده شود بدون اینکه انقباض جانبی داشته باشد.



شکل ۴۷-۲



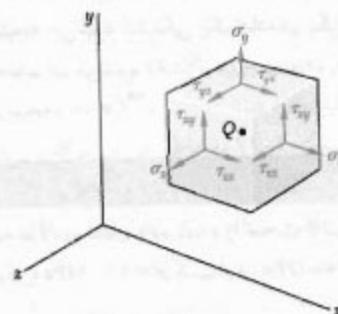
شکل ۴۸-۲



شکل ۴۹-۲

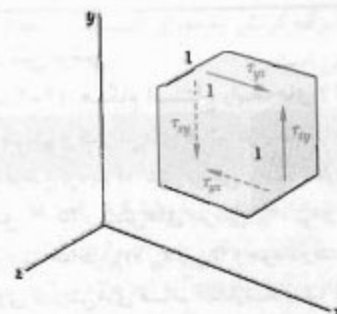
\* طبق قسمت ۱-۱۲،  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

\*\* بعضی مؤلفین، در تعریف کرنش  $\gamma_{xy}$  فرض می‌کنند که تغییر شکل واقعی جزء با چرخش صلب‌گونه‌ای همراه است که در آن وجوه افقی جزء نمی‌چرخند. لذا کرنش  $\gamma_{xy}$  را با زاویه چرخش دو جزء دیگر نشان می‌دهند (شکل ۴۸-۲). بعضی دیگر چرخش صلب‌گونه‌ای را در نظر می‌گیرند که در آن وجوه افقی به اندازه  $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$  پادساعتگرد، و وجوه عمودی به اندازه  $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$  ساعتگرد می‌چرخند (شکل ۴۹-۲). در این کتاب ترجیح می‌دهیم کرنش برشی  $\gamma_{xy}$  را به جای اینکه چرخش یک وجه معین تحت شرایط محدودی بگیریم، به عنوان تغییر زاویه بین دو وجه در نظر بگیریم.



شکل ۴۵-۲

رابطه‌های (۲-۲۸) تأثیر نمی‌گذارند. البته، تنش‌های برشی گرایش دارند جزء مکعبی را به صورت مکعب مستطیل مایل درآورند. ابتدا، یک جزء مکعبی با اضلاع واحد را در نظر می‌گیریم (شکل ۴۶-۲). فقط تنش‌های برشی  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{yx}$  بر وجوهی از این جزء که، به ترتیب، بر محورهای  $x$  و  $y$  عمودند وارد می‌شوند و آن را به صورت متوازی‌السطوحی با اضلاع واحد در می‌آورند (شکل ۴۷-۲). دو تا از زوایای بین چهار وجهی که تحت تنش قرار دارند از  $\frac{\pi}{2}$  به  $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$  کاهش می‌یابند، و دو تای دیگر از  $\frac{\pi}{2}$  به  $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$  افزایش می‌یابند. زاویه کوچک  $\gamma_{xy}$  (که برحسب رادیان بیان می‌شود) کرنش برشی متناظر با امتدادهای  $x$  و  $y$  است. اگر زاویه بین دو وجهی که در جهت‌های مثبت محورهای  $x$  و  $y$  هستند در ضمن تغییر شکل جزء کاهش یابد (شکل ۴۷-۲)، کرنش برشی مثبت است؛ در غیر این صورت، منفی است.



شکل ۴۶-۲

بر اثر تغییر شکل سایر اجزاء، جزء تحت بررسی می‌تواند دستخوش چرخش کلی نیز بشود. ولی، همانطور که در بررسی کرنش‌های قائم داشتیم، در اینجا فقط تغییر شکل واقعی جزء را در نظر می‌گیریم، نه هر گونه تغییر مکان ممکن صلب‌گونه‌ای.\*\*



حال، جزء کوچکی از ماده‌ای را که تحت تنش‌های برشی  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{yz}$  قرار دارد (شکل ۲-۵۰الف) در نظر گرفته، و کرنش برشی  $\gamma_{yz}$  را به عنوان تغییر زاویه بین وجوهی که تحت تنش قرار دارند تعریف می‌کنیم. به طور مشابه، با در نظر گرفتن مجزئی که تحت تنش‌های برشی  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{xy}$  قرار دارد (شکل ۲-۵۰ب)، کرنش برشی  $\gamma_{xz}$  را تعریف می‌کنیم. اگر تنش‌ها از حد تناسب فراتر نروند، دو رابطه اضافی زیر داریم:

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (۲-۳۷)$$

که در آن ثابت  $G$  همان است که در معادله (۲-۳۶) به کار رفت. برای حالت کلی تنش داده شده در شکل ۲-۴۵ و تا وقتی که هیچ یک از تنش‌های موجود از حد تناسب فراتر نرفته‌اند، با استفاده از اصل ترکیب می‌توان نتایج این قسمت و قسمت ۲-۱۲ را با هم ترکیب کرد. برای ماده همگن و همسانگردی که تحت کلی‌ترین حالت تنش است، گروه معادله‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \end{aligned} \quad (۲-۳۸)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

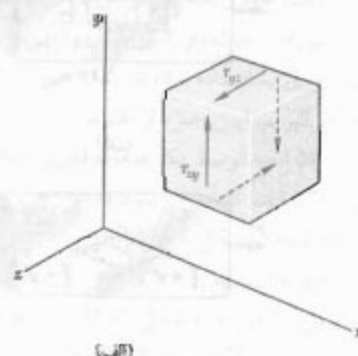
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

برای هر ماده‌ای فقط باید دو تا از این ثابت‌ها را به طور آزمایشی تعیین کرد. همانطور که در قسمت بعد خواهید دید، ثابت سوم را با محاسبه بسیار ساده‌ای می‌توان به‌دست آورد.

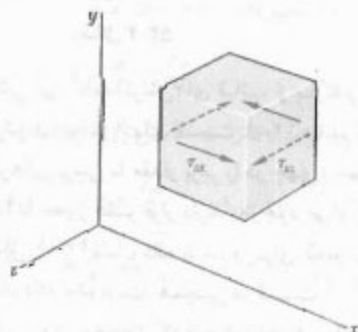
با ترسیم مقدار  $\tau_{xy}$  برحسب مقدار  $\gamma_{xy}$ ، نمودار تنش-کرنش برشی به‌دست می‌آید. همانطور که در فصل ۳ خواهید دید، این کار با آزمایش پیش انجام می‌شود. نمودار حاصل مشابه است با نمودار تنش-کرنش قائم که از آزمایش کشش به‌دست می‌آید. ولی، استقامت تسلیم برشی، استقامت نهایی برشی و غیره تقریباً نصف استقامت تسلیم کششی، استقامت نهایی کششی و غیره است. همانطور که در بررسی کرنش‌ها و تنش‌های قائم داشتیم، قسمت اولیه نمودار تنش-کرنش برشی یک خط راست است. در مواد همگن و همسانگرد و در حالتی که مقدار تنش برشی از حد تناسب برش بیشتر نیست، داریم:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (۲-۳۹)$$

این رابطه را قانون هوک برای تنش و کرنش برشی، و ثابت  $G$  را مدول صلابت یا مدول برشی ماده می‌گیرند. کرنش زاویه‌ای  $\gamma_{xy}$  برحسب رادیان و بی‌بعد است مدول  $G$ ، که مانند  $\tau_{xy}$  برحسب پاسکال بیان می‌شود، برای هر ماده‌ای کمتر از نصف مدول الاستیسته  $E$  آن ماده و بیشتر از یک سوم آن است.\*



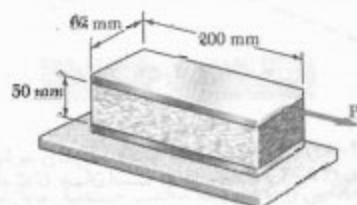
(الف)



(ب)

## مثال ۱۰-۲

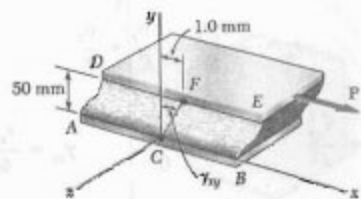
قطعه مستطیلی، که از ماده‌ای با مدول صلابت  $G = 630 \text{ MPa}$  ساخته شده است، به دو صفحه صلب افقی متصل است. صفحه پایینی ثابت است و صفحه بالایی تحت تأثیر نیروی افقی  $P$  قرار دارد (شکل ۵۱-۲). صفحه بالایی تحت تأثیر این نیرو به اندازه  $1 \text{ mm}$  حرکت می‌کند. مطلوبست: (الف) کرنش برشی در ماده، (ب) نیروی  $P$  وارد بر صفحه بالایی.



شکل ۵۱-۲

(الف) کرنش برشی. محوره‌های مختصات را در جهت‌های نشان داده شده، و مبدأ را در نقطه میانی  $C$  از ضلع  $AB$  در نظر می‌گیریم (شکل ۵۲-۲). طبق تعریف، کرنش برشی  $\gamma_{xy}$  با زاویه بین عمود و خط  $CF$ ، که نقاط میانی اضلاع  $AB$  و  $DE$  را به هم متصل می‌کند، برابر است. چون این زاویه کوچک است،

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{1 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \Rightarrow \gamma_{xy} = 0.02 \text{ rad}$$



شکل ۵۲-۲

(ب) نیروی وارد بر صفحه بالایی. ابتدا، تنش برشی  $\tau_{xy}$  را می‌یابیم. با استفاده از قانون هوک،

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (630 \text{ MPa})(0.02 \text{ rad}) = 12.6 \text{ MPa}$$

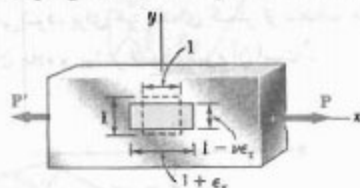
نیروی وارد بر صفحه بالایی چنین است:

$$P = \tau_{xy} A = (12.6 \text{ MPa})(200 \text{ mm})(62 \text{ mm}) = 156.2 \text{ kN}$$

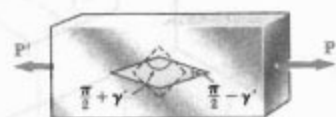
## ۱۵-۲ توضیح بیشتر درباره تغییر شکل‌ها در

بارگذاری محوری: رابطه بین  $E$  و  $G$

فرض کنید میله باریکی تحت بار کششی  $P$ ، واقع در جهت  $x$ ، قرار می‌گیرد. در قسمت ۱۱-۲ دیدیم که این میله در جهت  $x$  کشیده می‌شود و در جهت‌های  $y$  و  $z$  منقبض می‌شود. اگر  $\epsilon_x$  کرنش محوری باشد، کرنش‌های جانبی با  $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$  بیان می‌شوند، که در آن  $\nu$  نسبت پواسون است. لذا، یک جرم مکعبی، به ضلع واحد (شکل ۵۳-۲ الف) به صورت مکعب مستطیل با اضلاع  $1 + \epsilon_x$ ،  $1 - \nu\epsilon_x$  و  $1 - \nu\epsilon_x$  در می‌آید. (فقط یک وجه این جزء در شکل نشان داده شده است). از سوی دیگر، اگر این جزء تحت زاویه  $45^\circ$  نسبت به محور بار قرار داشته باشد (شکل ۵۳-۲ ب)، وجه نشان داده شده در شکل به صورت لوزی در می‌آید. یعنی، بار محوری  $P$  باعث می‌شود کرنش برشی  $\gamma'$  برابر با افزایش یا کاهش هر یک از زوایای نشان داده شده در شکل ۵۳-۲ ب، در این جزء به وجود آید.\*



(الف)

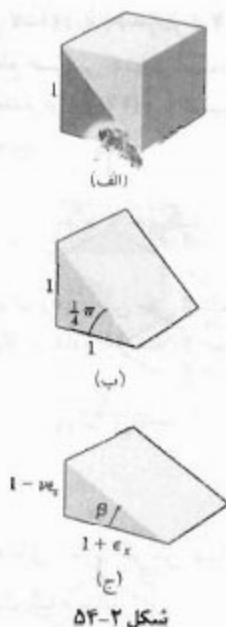


(ب)

شکل ۵۳-۲

کرنش‌های برشی نیز، مانند کرنش‌های قائم، از بارگذاری محوری ناشی می‌شوند زیرا در انتهای قسمت ۱۲-۱ دیدیم که بار محوری  $P$  تنش‌های برشی با مقدار برابر را در چهار وجهی که تحت زاویه  $45^\circ$  با محور عضو قرار دارند به وجود می‌آورد. این موضوع در شکل ۴۰-۱ نشان داده شد، و برای سهولت مجدداً در اینجا نشان داده شده است. همچنین در قسمت ۱۱-۱ دیدیم که تنش برشی روی صفحه‌ای که با محور بار زاویه  $45^\circ$

\* توجه کنید که بار  $P$  باعث ایجاد کرنش‌های قائم در جزء نشان داده شده در شکل ۵۳-۲ ب نیز می‌شود (به مسئله ۷۴-۲ نگاه کنید).



شکل ۲-۵۴

از شکل ۲-۵۴ ج.

$$\tan \beta = \frac{1 - \nu \epsilon_x}{1 + \epsilon_x} \quad (۴۰-۲)$$

عضوهای سمت راست (۲-۳۹) و (۲-۴۰) را مساوی هم قرار می‌دهیم و  $\gamma_m$  را می‌یابیم:

$$\gamma_m = \frac{(1 + \nu) \epsilon_x}{1 + \frac{1 - \nu}{2} \epsilon_x}$$

چون  $\epsilon_x \ll 1$ ، مخرج عبارت بالا را می‌توان واحد گرفت. در نتیجه،

$$\gamma_m = (1 + \nu) \epsilon_x \quad (۴۱-۲)$$

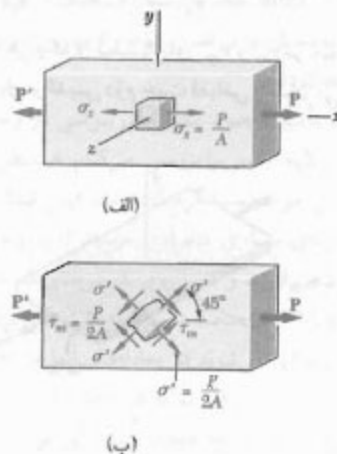
که رابطه دلخواه بین ماکزیمم کرنش برشی  $\gamma_m$  و کرنش محوری  $\epsilon_x$  است.

برای تعیین رابطه میان ثابت‌های  $E$ ،  $\nu$  و  $G$  از قانون هوک استفاده می‌کنیم. طبق این قانون،  $\gamma_m = \tau_m / G$  و در بارگذاری محوری،  $\epsilon_x = \sigma_x / E$ . لذا، معادله (۴۱-۲) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\tau_m}{G} = (1 + \nu) \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\frac{E}{G} = (1 + \nu) \frac{\sigma_x}{\tau_m} \quad (۴۲-۲)$$

دارد دارای مقدار ماکزیمم است. طبق قانون هوک، کرنش برشی  $\gamma' = \gamma_m$  به نیز ماکزیمم است؛ یعنی  $\gamma' = \gamma_m$ .



شکل ۲-۵۵ (تکراری)

مطالعه تبدیلات تنش را تا فصل ۷ به تعویق می‌اندازیم، و در این قسمت فقط رابطه بین کرنش برشی ماکزیمم  $\gamma' = \gamma_m$  و کرنش قائم  $\epsilon_x$  در جهت بار را به دست می‌آوریم. برای این منظور، جزء منشوری نشان داده شده در شکل‌های ۲-۵۴ الف و ب را در نظر می‌گیریم. این جزء از طریق برش جزء مکعبی در شکل ۲-۵۳ الف توسط یک صفحه قطری ایجاد شده است. از شکل ۲-۵۳ الف نتیجه می‌شود که این جزء، جدید به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۵۴ ج درمی‌آید، که وجوه افقی و عمودی آن، به ترتیب،  $1 + \epsilon_x$  و  $1 - \nu \epsilon_x$  است. اما زاویه بین وجوه مایل و افقی جزء شکل ۲-۵۴ ب دقیقاً نصف یکی از زوایای قائم جزء مکعبی نشان داده شده در شکل ۲-۵۳ ب است. لذا، تغییر زاویه فوق‌الذکر نصف  $\pi/2 - \gamma_m$  است.

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}$$

با کاربرد فرمول تانژانت تفاضل زوایا، داریم

$$\tan \beta = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\gamma_m}{2}} = \frac{1 - \tan \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan \frac{\gamma_m}{2}}$$

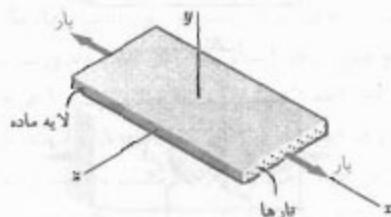
چون  $\gamma_m/2$  خیلی کوچک است،

$$\tan \beta = \frac{1 - \frac{\gamma_m}{2}}{1 + \frac{\gamma_m}{2}} \quad (۳۹-۲)$$

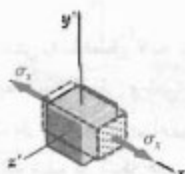
نسبت‌های پواسون متناظر دارای مقادیر متفاوت‌اند:

$$\nu_{xy} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad \text{و} \quad \nu_{xz} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \quad (۴۴-۲)$$

اندیس اول در هر یک از نسبت‌های  $\nu_{xy}$  و  $\nu_{xz}$  در معادله‌های (۴۴-۲) امتداد بار، و اندیس دوم جهت انقباض را نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)

شکل ۵۵-۲

از بحث بالا نتیجه می‌شود که در حالت بارگذاری چند محوری یک لایه از ماده مرکب، برای توصیف رابطه تنش-کرنش می‌توان از معادله‌های مشابه با معادله‌های (۲۸-۲) استفاده کرد. ولی، در حال حاضر، با سه مدول الاستیسته مختلف و شش نسبت پواسون متفاوت سر و کار داریم. می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\sigma_z}{E_z} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zy}\sigma_z}{E_z} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z} \end{aligned} \quad (۴۵-۲)$$

معادله‌های (۴۵-۲) را به عنوان تبدیلات تنش-کرنش برای لایه داده شده می‌توان در نظر گرفت. از این تبدیلات نتیجه می‌شود که ضرایب مولفه‌های تنش متقارن هستند؛ یعنی،

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \quad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z} \quad \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} \quad (۴۶-۲)$$

با توجه به شکل ۴۰-۱،  $\epsilon_m = P/2A$  و  $\sigma_x = P/A$ ،  $\nu = 1/2$  که در آن  $A$  مساحت مقطع عرضی عضو است. لذا،  $\sigma_x/\epsilon_m = 2$ ، با جایگذاری این مقدار در (۴۲-۲) و با تقسیم عضوهای آن بر ۲، رابطه زیر را می‌یابیم:

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \quad (۴۳-۲)$$

از رابطه بالا می‌توان برای تعیین یکی از ثابت‌های  $E$  یا  $G$  از روی دو ثابت دیگر استفاده کرد. مثلاً، از معادله (۴۳-۲)،

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (۴۳'-۲)$$

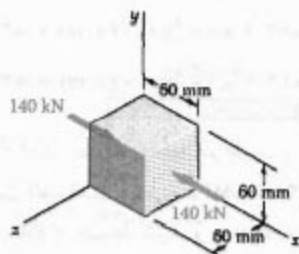
## ۲-۱۶ رابطه‌های تنش-کرنش برای مواد مرکب تقویت شده با تار

در قسمت ۲-۵، مواد مرکب تقویت شده با تار به‌طور خلاصه بررسی شدند. در آن قسمت نشان دادیم که این مواد را با استقرار تارهای یک ماده محکم و سفت در داخل ماده ضعیف‌تر و نرم‌تری، به نام ماتریس، می‌سازند. همچنین، نشان دادیم که رابطه بین تنش قائم و کرنش قائم متناظر در یک لایه از ماده مرکب بستگی به جهت اعمال بار دارد. بنابراین، برای توصیف رابطه بین تنش قائم و کرنش قائم، مدول‌های مختلف الاستیسته  $E_x$ ،  $E_y$  و  $E_z$  مورد نیازند (زیرا ممکن است بار به موازات تارها، در امتداد عمود بر لایه یا در جهت عرضی وارد شود).

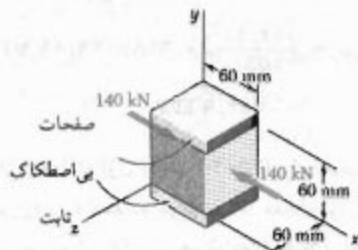
مجدداً لایه ماده مرکب توصیف شده در قسمت ۲-۵ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم تحت بارکشی تک محوری قرار دارد. این بار به موازات تارهای لایه، یعنی در جهت  $x$  (شکل ۵۵-۲ الف)، وارد می‌شود. برای سهولت، یک ماده خیالی همگن را که خواص آن از ترکیب خواص تارها و ماتریس به‌دست آمده است در نظر می‌گیریم. حال، جزء کوچکی از این ماده را انتخاب می‌کنیم (شکل ۵۵-۲ ب). تنش قائم متناظر را با  $\sigma_x$  نشان می‌دهیم. ملاحظه می‌کنیم که  $\sigma_y = \sigma_z = 0$  همانطور که در قسمت ۲-۵ نشان داده شد، کرنش قائم متناظر در امتداد  $x$  عبارت است از  $\epsilon_x = \sigma_x/E_x$ ، که در آن  $E_x$  مدول الاستیسته ماده مرکب در جهت  $x$  است.

همانطور که برای مواد همسانگرد دیدیم، کشیدگی ماده در جهت  $x$  با انقباض در جهت‌های  $y$  و  $z$  همراه است. این انقباضی‌ها به نحوه استقرار تارها در ماتریس بستگی دارد و معمولاً مقادیر مختلفی دارند. در نتیجه، کرنش‌های جانبی  $\epsilon_y$  و  $\epsilon_z$  و نیز

صفحه بی اصطکاک ثابت از انبساط آن در امتداد  $y$  جلوگیری کنند (شکل ۲-۵۷).



شکل ۲-۵۶



شکل ۲-۵۷

(الف) انبساط آزاد در امتدادهای  $y$  و  $z$ . تنش  $\sigma_x$  را در امتداد بارگذاری می‌یابیم:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{-140 \times 10^3 \text{ N}}{(0.060 \text{ m})(0.060 \text{ m})} = -38.89 \text{ MPa}$$

چون مکعب در امتدادهای  $y$  و  $z$  بارگذاری نشده است و مقید نیست،  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ . با جایگذاری داده‌ها در معادله‌های ۲-۴۵، داریم:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} = \frac{-38.89 \text{ MPa}}{155.0 \text{ GPa}} = -250.9 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0.248)(-38.89 \text{ MPa})}{155.0 \text{ GPa}} = +62.22 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} = \frac{(0.248)(-38.89 \text{ MPa})}{155.0 \text{ GPa}} = +62.22 \times 10^{-6}$$

\* برای اطلاعات بیشتر درباره مواد مرکب تقویت شده با تار، نگاه کنید به Hyer, M. W., *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*, McGraw-Hill, New York, 1998.

این معادله‌ها نشان می‌دهند که نسبت‌های پواسون  $\nu_{xy}$  و  $\nu_{xz}$  گرچه متفاوت‌اند اما از هم مستقل نیستند، و اگر مدول‌های الاستیسته متناظر معلوم باشند، هر یک از آنها را از دیگری می‌توان به‌دست آورد. همین موضوع برای  $\nu_{yz}$  و  $\nu_{xy}$  و برای  $\nu_{zx}$  و  $\nu_{yz}$  صحت دارد.

حال، تأثیر وجود تنش‌های برشی در وجوه یک جزء کوچک از لایه ترکیبی را بررسی می‌کنیم. همانطور که در قسمت ۲-۱۴ برای مواد همسانگرد گفته شد، این تنش‌ها به صورت زوج بردارهای مساوی متضادی هستند که بر وجوه متقابل یک جزء وارد می‌شوند و تأثیری بر کرنش‌های قائم ندارند. لذا، معادله‌های (۲-۵۴) صحت دارند. البته، تنش‌های برشی باعث ایجاد کرنش‌های برشی می‌شوند که معادله‌های آنها مشابه سه معادله آخر (۲-۳۸) است، با این تفاوت که در اینجا باید از سه مدول صلیب مختلف  $G_{xy}$ ،  $G_{yz}$  و  $G_{zx}$  استفاده کرد. به این ترتیب،

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} \quad (2-47)$$

موادی را که مؤلفه‌های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\epsilon_z$  آنها فقط به تنش‌های قائم بستگی دارند مواد اورتوتروپیک می‌گویند و با همین خاصیت از مواد ناهمسانگرد تفکیک می‌شوند.

همانطور که در قسمت ۲-۵ دیدیم، با ترکیب تعدادی لایه می‌توان یک پوسته تخت به‌دست آورد. اگر تارها در تمام لایه‌ها دارای وضعیت یکسان باشند، پوسته مقاومت بیشتری در برابر بار کششی محوری دارد و از نوع اورتوتروپیک خواهد بود. اگر بعضی از لایه‌های پوسته طوری قرار گیرند که تارهای آنها تحت زاویه عمود بر تارهای سایر لایه‌ها باشد، پوسته دارای پایداری جانبی بیشتری است و مجدداً از نوع اورتوتروپیک است. از سوی دیگر، اگر هر یک از لایه‌ها طوری قرار گیرند که تارهای آنها به موازات تارهای سایر لایه‌ها نباشد و عمود بر آنها نیز نباشد، پوسته اورتوتروپیک نخواهد بود.\*

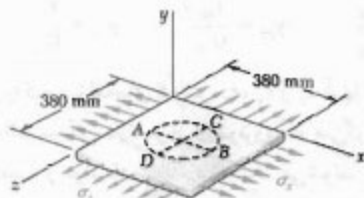
#### مثال ۱۱-۲

مکعبی به ضلع ۶۰ mm از لایه‌های اپوکسی گرافیت، که تارهای آن در امتداد  $x$  است، ساخته شده است. این مکعب تحت بار فشاری ۱۴۰ kN در امتداد  $x$  قرار دارد. خواص این ماده مرکب عبارتند از:  $E_x = 155 \text{ GPa}$ ،  $E_y = 12.1 \text{ GPa}$ ،  $E_z = 12.1 \text{ GPa}$ ،  $\nu_{xy} = 0.248$ ،  $\nu_{yz} = 0.248$ ،  $\nu_{zx} = 0.458$ . مطلوب است تغییر ابعاد مکعب، با این فرض که (الف) مکعب در امتدادهای  $y$  و  $z$  آزادانه منبسط شود (شکل ۲-۵۶)؛ (ب) مکعب در امتداد  $z$  آزادانه منبسط شود، اما در

با مقایسه نتایج قسمت‌های الف و ب، دیده می‌شود که اختلاف بین مقادیر  $\delta_x$  در امتداد تارها ناچیز است. ولی، اختلاف بین مقادیر تغییر شکل جانبی  $\delta_y$  ناچیز نیست. بدیهی است که وقتی مکعب نتواند در امتداد  $y$  تغییر شکل دهد، تغییر شکل جانبی  $\delta_y$  بیشتر خواهد بود.

### مسئله نمونه ۲-۵

سوراخی به قطر  $d = 225 \text{ mm}$  روی یک ورق بی‌تنش آلومینیومی با ضخامت  $t = 18 \text{ mm}$  با سوزن خط‌کشی شده است. نیروهای وارد بر ورق باعث ایجاد تنش‌های قائم  $\sigma_x = 84 \text{ MPa}$  و  $\sigma_y = 140 \text{ MPa}$  شده‌اند. برای  $E = 70 \text{ GPa}$  و  $\nu = \frac{1}{3}$ ، مطلوب است: (الف) تغییر قطر  $AB$ ، (ب) تغییر قطر  $CD$ ، (ج) تغییر ضخامت ورق، (د) تغییر حجم ورق.



حل

قانون هوک. در اینجا  $\sigma_y = 0$  با استفاده از معادله‌های (۲۸-۲)، کرنش در هر یک از جهت‌های مختصاتی را می‌یابیم.

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{70 \text{ GPa}} \left[ (84 \text{ MPa}) - 0 - \frac{1}{3}(140 \text{ MPa}) \right] \\ &= +0.533 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{70 \text{ GPa}} \left[ -\frac{1}{3}(84 \text{ MPa}) + 0 - \frac{1}{3}(140 \text{ MPa}) \right] \\ &= -1.067 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{70 \text{ GPa}} \left[ -\frac{1}{3}(84 \text{ MPa}) - 0 + (140 \text{ MPa}) \right] \\ &= +1.600 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}\end{aligned}$$

با ضرب کردن کرنش‌های متناظر در طول ضلع مکعب، تغییرات ابعاد مکعب به‌دست می‌آیند:

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-250.9 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = -15.05 \mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L = (+62.2 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +3.73 \mu\text{m}$$

$$\delta_z = \epsilon_z L = (+62.2 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +3.73 \mu\text{m}$$

(ب) انبساط آزاد در امتداد  $z$ ، مقید در امتداد  $y$ . تنش در امتداد  $x$  مانند قسمت الف است، یعنی،  $\sigma_x = -38.89 \text{ MPa}$ . مکعب می‌تواند در امتداد  $z$  منبسط شود، و  $\sigma_z = 0$ . مکعب نمی‌تواند در امتداد  $y$  منبسط شود، و  $\delta_y = 0$ . لذا  $\epsilon_y = \delta_y/L = 0$  و  $\sigma_y = 0$  و  $\epsilon_y = 0$  را در معادله دوم (۲۵-۲) جایگذاری و  $\sigma_y$  را می‌یابیم. پس از جایگذاری داده‌ها،

$$\begin{aligned}\sigma_y - \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy}\sigma_x &= \left(\frac{12.10}{155.0}\right)(0.248)(-38.89 \text{ MPa}) \\ &= -752.9 \text{ kPa}\end{aligned}$$

اکنون از معادله اول و آخر (۲۵-۲) برای محاسبه مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_z$  استفاده می‌کنیم. اما معادله اول (۲۵-۲) شامل نسبت پواسون  $\nu_{yx}$  است. همانطور که قبلاً دیدیم، این نسبت با  $\nu_{xy}$  برابر نیست. برای تعیین  $\nu_{yx}$  از معادله اول (۲۵-۲) استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\nu_{yx} = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy} = \left(\frac{12.10}{155.0}\right)(0.248) = 0.1936$$

با قرار دادن  $\sigma_z = 0$  در معادله‌های اول و سوم (۲۵-۲) و با جایگذاری مقادیر داده شده  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$ ،  $\epsilon_z$ ،  $\nu_{yx}$  و  $\nu_{xy}$ ، و نیز مقادیر حاصل برای  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  در این معادله‌ها، داریم:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} = \frac{-38.89 \text{ MPa}}{155.0 \text{ GPa}} \\ &\quad - \frac{(0.1936)(-752.9 \text{ kPa})}{12.10 \text{ GPa}} = -249.7 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} = -\frac{(0.248)(-38.89 \text{ MPa})}{155.0 \text{ GPa}} \\ &\quad - \frac{(0.458)(-752.9 \text{ kPa})}{12.10 \text{ GPa}} = +90.72 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

با ضرب کردن کرنش‌های متناظر در طول ضلع مکعب، تغییرات ابعاد مکعب به‌دست می‌آیند:

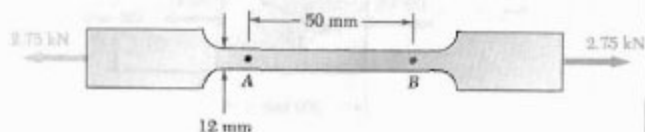
$$\delta_x = \epsilon_x L = (-249.7 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = -14.98 \mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L = (0)(0.060 \text{ m}) = 0$$

$$\delta_z = \epsilon_z L = (+90.72 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +5.44 \mu\text{m}$$



- الف. تغییر طول آن عبارت است:  $\delta_{B/A} = \epsilon_x d$   
 ب. تغییر عرض قسمت  $AB$ ،  $\delta_{B/A} = \epsilon_y d$   
 ج. تغییر ضخامت قسمت  $AB$ ،  $\delta_{B/A} = \epsilon_z d$   
 د. تغییر مساحت مقطع عرضی  $AB$



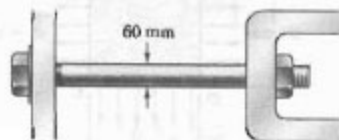
شکل م ۶۲-۲

۶۳-۲ از آزمایش کشش استاندارد برای تعیین خواص یک پلاستیک آزمایشی استفاده می‌شود. نمونه آزمایشی میله‌ای به قطر ۱۶ mm است و تحت نیروی کششی ۳/۲ kN قرار دارد. اگر کشیدگی ۱۱ mm و کاهش قطر ۰/۶۲۵ mm را برای طول سنج ۱۲۵ mm داشته باشیم، مدول الاستیسیته، مدول صلابت، و نسبت پواسون ماده را بیابید.



شکل م ۶۳-۲

۶۴-۲ تغییر قطر یک پیچ بزرگ فولادی، هنگام سفت شدن مهره، با دقت اندازه‌گیری می‌شود. اگر  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.29$ ، نیروی داخلی در پیچ را برای کاهش قطر ۱۳ μm بیابید.



شکل م ۶۴-۲

الف. قطر  $AB$ . تغییر طول آن عبارت است:  $\delta_{B/A} = \epsilon_x d$

$$\delta_{B/A} = \epsilon_x d = (+0.523 \times 10^{-3} \text{ mm/mm})(225 \text{ mm})$$

$$\delta_{B/A} = +0.117 \text{ mm} \leftarrow$$

ب. قطر  $CD$ .

$$\delta_{C/D} = \epsilon_z d = (+1.600 \times 10^{-3} \text{ mm/mm})(225 \text{ mm})$$

$$\delta_{C/D} = +0.360 \text{ mm} \leftarrow$$

ج. ضخامت. با توجه به  $\epsilon_z = 1.8 \text{ mm}$

$$\delta_t = \epsilon_y t = (-1.067 \times 10^{-3} \text{ mm/mm})(18 \text{ mm})$$

$$\delta_t = -0.192 \text{ mm} \leftarrow$$

د. حجم ورق. با استفاده از معادله (۲-۳۰)،

$$\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (+0.523 - 1.067 + 1.600) \times 10^{-3} = +1.067 \times 10^{-3}$$

$$\Delta V = eV = +1.067 \times 10^{-3} [(280 \text{ mm})(280 \text{ mm})(18 \text{ mm})]$$

$$\Delta V = +2733 \text{ mm}^3 \leftarrow$$

## مسائل

۶۱-۲ در آزمایش کشش استاندارد، یک میله فولادی به قطر ۲۰ mm تحت نیروی کششی ۱۷ kips قرار دارد. اگر  $E = 70 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.35$ ، کشیدگی میله با طول سنج ۱۵۰ mm، (ب) تغییر قطر میله.

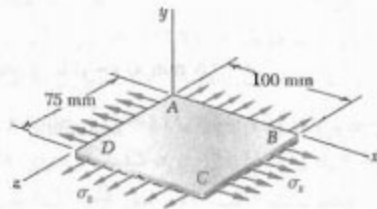


شکل م ۶۱-۲

۶۲-۲ قطعه نشان داده شده از ورق تحت فولادی

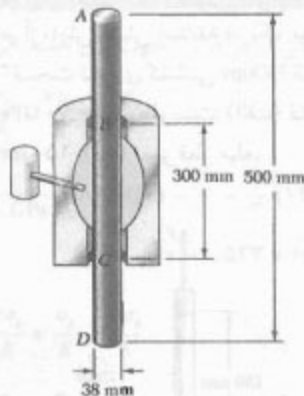
به ضخامت ۱/۶ mm ساخته شده است. برای  $E = 200 \text{ GPa}$

۶۸-۲ بافتی که در سازه‌های بادشو به کار می‌رود تحت بارگذاری دو محوری قرار دارد و تنش‌های قائم  $\sigma_x = 120 \text{ MPa}$  و  $\sigma_y = 160 \text{ MPa}$  در آن به وجود آمده است. اگر خواص بافت را به صورت  $E = 47 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.34$  تقریب بزنیم، مطلوبست تغییر طول: (الف) ضلع  $AB$ ، (ب) ضلع  $BC$ ، (ج) قطر  $AC$ .



شکل م-۶۸

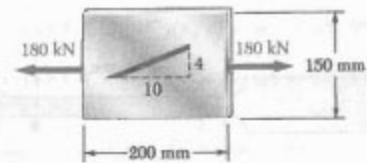
۶۹-۲ میله برنجی  $AD$  در زاکنی جازده شده است و فشار هیدروستاتیکی  $42 \text{ MPa}$  بر قسمت  $BC$  میله به طول  $300 \text{ mm}$  وارد شده است. اگر  $E = 70 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.36$ ، مطلوبست: (الف) تغییر طول کل  $AD$ ، (ب) تغییر قطر قسمت  $BC$  میله.



شکل م-۶۹

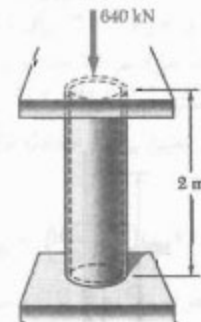
۷۰-۲ در مسئله ۶۹-۲، مطلوبست نیرویی که باید بر سر  $D$  وارد کرد تا: (الف) کرنش محوری در قسمت  $BC$  صفر بماند، (ب) طول کل  $AD$  تغییر نکند.

۶۵-۲ خط مایلی با شیب  $4:10$  روی ورق برنج زرد، به عرض  $150 \text{ mm}$  و ضخامت  $6 \text{ mm}$ ، حک شده است. با استفاده از پیوست ب، شیب این خط را تحت بار محوری  $180 \text{ kN}$  بیابید.



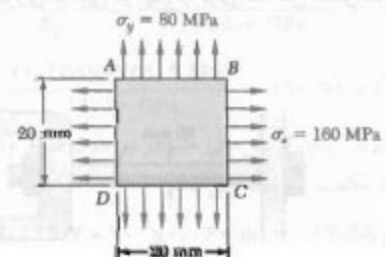
شکل م-۶۵

۶۶-۲ از یک لوله آلومینیومی به طول  $2 \text{ m}$  و با قطر خارجی  $240 \text{ mm}$  و با ضخامت دیواره  $10 \text{ mm}$  به عنوان یک ستون کوتاه استفاده می‌شود. این لوله، بار محوری مرکزی  $640 \text{ kN}$  را تحمل می‌کند. اگر  $E = 73 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.33$ ، مطلوبست: (الف) تغییر طول لوله، (ب) تغییر قطر خارجی، (ج) تغییر ضخامت دیواره آن.



شکل م-۶۶

۶۷-۲ مربعی به ضلع  $20 \text{ mm}$  روی مخزن فولادی بزرگی حک شده است. پس از این که مخزن تحت فشار قرار می‌گیرد، حالت تنش دوماحوری نشان داده شده در مربع به وجود می‌آید. با استفاده از پیوست ب برای فولاد ساختمانی، درصد تغییر شیب قطر  $DB$  را بیابید.



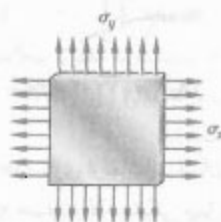
شکل م-۶۷

۷۴-۲ معمولاً، تنش قائم در یک جهت معین صفر است؛ مثلاً، برای صفحه نازک نشان داده شده،  $\sigma_z = 0$ . در این حالت، که آن را تنش صفحه ای می گویند، نشان دهید که اگر کرنش های  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$  به طور آزمایشی تعیین شوند،  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\epsilon_z$  را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\sigma_x = E \frac{\epsilon_x + \nu \epsilon_y}{1 - \nu}$$

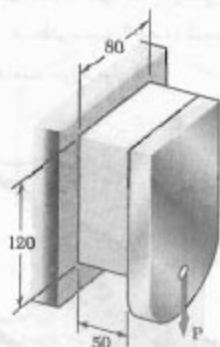
$$\sigma_y = E \frac{\epsilon_y + \nu \epsilon_x}{1 - \nu}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\epsilon_x + \epsilon_y)$$



شکل م ۷۴-۲

۷۵-۲ قطعه پلاستیکی نشان داده شده به یک تکیه گاه صلب و صفحه قائم متصل است. بار  $P = 240 \text{ kN}$  بر قطعه وارد می شود. اگر برای پلاستیک  $G = 1050 \text{ MPa}$ ، انحراف صفحه را بیابید.

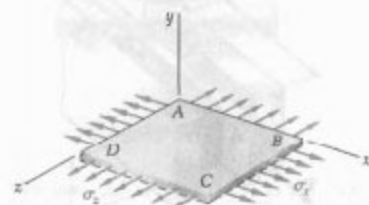


ابعاد بر حسب mm

شکل م ۷۵-۲

۷۶-۲ در مسئله ۷۵-۲، مطلوب است بار  $P$  به طوری که انحراف  $1.5 \text{ mm}$  در قطعه به وجود آید.

۷۶-۲ برای عضوی که تحت بارگذاری محوری است، مطلوب است کرنش قائم  $\epsilon'$  در جهتی که با محور بار زاویه  $45^\circ$  دارد بر حسب کرنش محوری  $\epsilon_x$  (الف) با مقایسه و ترسای مثلث های نشان داده شده در شکل ۷۶-۲ که، به ترتیب، یک جزء را در قبل و بعد از تغییر شکل نشان می دهند، (ب) با استفاده از مقادیر تنش های متناظر  $\sigma'_x$  و  $\sigma'_y$  نشان داده شده در شکل ۷۶-۱، و قانون عمومی هوک، (الف) مقدار مورد نیاز  $\sigma'_y$ ، (ب) نسبت  $\sigma'_x / \epsilon'_x$ .



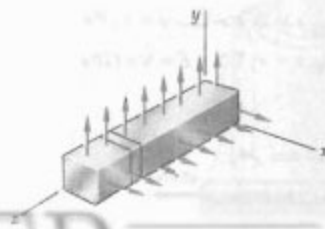
شکل م ۷۶-۲

۷۷-۲ در اغلب موارد، قیدهای فیزیکی مانع ایجاد کرنش در جهت خاصی می شوند؛ مثلاً، در حالت نشان داده شده که در آن از حرکت طولی منشور بلند جلوگیری می شود،  $\epsilon_z = 0$ . مقاطع صفحه ای عمود بر محور طولی به صورت صفحه ای می مانند و فاصله بین آنها تغییر نمی کند. نشان دهید که در این حالت، که آن را کرنش صفحه ای می گویند،  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\epsilon_z$  را می توان به صورت زیر بیان کرد:

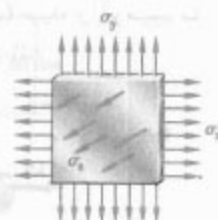
$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [(1 - \nu) \sigma_x - \nu (1 + \nu) \sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [(1 - \nu) \sigma_y - \nu (1 + \nu) \sigma_x]$$



(الف)



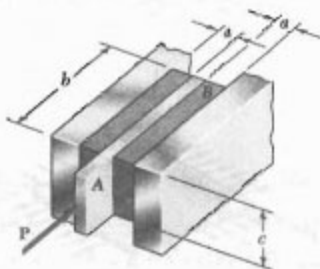
(ب)

شکل م ۷۷-۲



۷۷-۲ واحد جدامازی ارتعاشات نشان داده شده مشکل است از دو قطعه سفت لاستیکی که به ورق  $AB$  و به تکیه گاههای صلب متصل است. اگر نیروی  $P = 24 \text{ kN}$  باعث انحراف  $\delta = 1.5 \text{ mm}$  شود، مدول صلابت لاستیک را بیابید.

۸۱-۲ دو قطعه لاستیکی با مدول صلابت  $G = 12 \text{ MPa}$  به تکیه گاههای صلب و به ورق  $AB$  متصل اند. اگر  $c = 100 \text{ mm}$  و  $P = 40 \text{ kN}$ ، مطلوبست کمترین ابعاد مجاز  $b$  و  $a$  در صورتی که بخواهیم تنش برشی در لاستیک از  $4 \text{ MPa}$  بیشتر نشود و کمترین انحراف ورق  $5 \text{ mm}$  باشد.

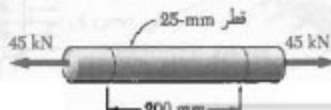


شکل م ۸۱-۲ و ۸۲-۲

۸۲-۲ دو قطعه لاستیکی با مدول صلابت  $G = 10 \text{ MPa}$  به تکیه گاههای صلب و به ورق  $AB$  متصل اند. اگر  $b = 200 \text{ mm}$  و  $c = 125 \text{ mm}$ ، مطلوبست بیشترین بار مجاز  $P$  و کمترین ضخامت مجاز  $a$  قطعات در صورتی که بخواهیم تنش برشی در لاستیک از  $1.5 \text{ MPa}$  بیشتر نشود و حداقل انحراف ورق  $6 \text{ mm}$  باشد.

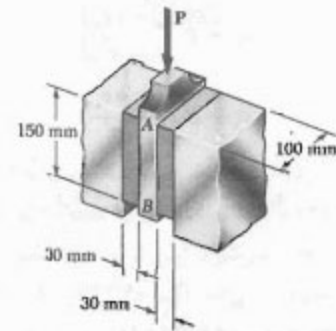
۸۳-۲\* مطلوبست تغییر حجم قطعه  $AB$  با طول سنج  $50 \text{ mm}$  در مسئله ۶۸-۲: (الف) با مقایسه اتساع ماده، (ب) با تفريق حجم اولیه قسمت  $AB$  از حجم نهایی آن.

۸۴-۲\* مطلوبست اتساع  $e$  و تغییر حجم میله به طول  $200 \text{ mm}$  در صورتی که: (الف) میله از فولاد  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.30$  ساخته شده باشد، (ب) میله از آلومینیم با  $E = 70 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.35$  ساخته شده باشد.



شکل م ۸۴-۲

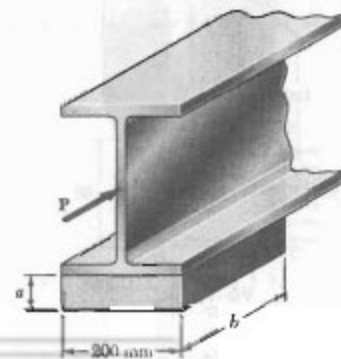
۷۷-۲ واحد جدامازی ارتعاشات نشان داده شده مشکل است از دو قطعه سفت لاستیکی که به ورق  $AB$  و به تکیه گاههای صلب متصل است. اگر نیروی  $P = 24 \text{ kN}$  باعث انحراف  $\delta = 1.5 \text{ mm}$  شود، مدول صلابت لاستیک را بیابید.



شکل م ۷۷-۲ و ۷۸-۲

۷۸-۲ واحد جدامازی ارتعاشات نشان داده شده مشکل است از دو قطعه سفت لاستیکی با مدول صلابت  $G = 19 \text{ MPa}$  که به ورق  $AB$  و به تکیه گاههای صلب متصل است. اگر مقدار نیروی وارده و  $\delta$  انحراف متناظر باشد، ثابت فنریت مجموعه را بیابید.

۷۹-۲ برای انعطاف پذیری در ضمن زلزله، مطابق شکل از یاناقان الاستومتریك ( $G = 0.9 \text{ MPa}$ ) برای نگهداری شاهتیر پل استفاده شده است. تیر تحت بار جانبی  $22 \text{ kN}$  نباید بیش از  $10 \text{ mm}$  تغییر مکان دهد. اگر ماکزیمم تنش برشی مجاز  $420 \text{ kPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) کمترین بُعد مجاز  $b$ ، (ب) کمترین ضخامت مورد نیاز  $a$ .



شکل م ۷۹-۲

۲-۸۸ یک تکیه‌گاه ایزولاسیون ارتعاشات متشکل است از میله  $A$  با شعاع  $R_1 = 10 \text{ mm}$  و لوله  $B$  با شعاع داخلی  $R_2 = 25 \text{ mm}$  که به یک استوانه لاستیکی تو خالی به طول  $80 \text{ mm}$  و با مدول صلابت  $G = 12 \text{ MPa}$  متصل است. مطلوبست ماکزیم نیروی مجاز  $P$  که بر میله  $A$  می‌توان وارد کرد در صورتی که بخواهیم انحراف از  $2.5 \text{ mm}$  بیشتر نشود.

۲-۸۹ ثابت‌های  $E$ ،  $G$ ،  $k$  و  $\nu$  یک ماده با معادله‌های (۲-۲۳) و (۲-۴۳) به هم ارتباط داده می‌شوند. نشان دهید که:

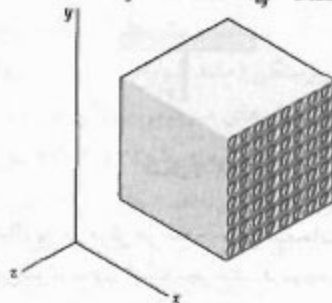
$$k = GE / (9G - 3E) \quad (\text{الف})$$

$$\nu = (3k - 2G) / (6k + 2G) \quad (\text{ب})$$

۲-۹۰ نشان دهید که، برای تمام مواد، نسبت  $G/E$  (نسبت مدول الاستیسته به مدول صلابت) همواره کمتر از  $\frac{1}{2}$  و بیشتر از  $\frac{1}{3}$  است (راهنمایی: به معادله (۲-۴۳) و به قسمت ۲-۱۳ مراجعه کنید).

۲-۹۱ مکعبی به ضلع  $40 \text{ mm}$  از تارهای پلیمر شیشه که در امتداد  $x$  هستند ساخته شده است. مکعب نمی‌تواند در جهت‌های  $y$  و  $z$  تغییر شکل دهد و تحت بار کششی  $65 \text{ kN}$  در امتداد  $x$  قرار دارد. مطلوبست: (الف) تغییر طول مکعب در جهت  $x$ ، (ب) تنش‌های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$ ، و  $\sigma_z$ .

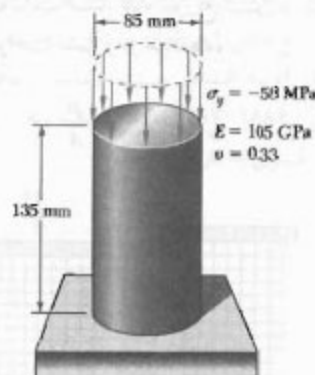
$$\begin{aligned} E_x &= 30 \text{ GPa} & \nu_{xz} &= 0.254 \\ E_y &= 15.2 \text{ GPa} & \nu_{xy} &= 0.254 \\ E_z &= 15.2 \text{ GPa} & \nu_{yz} &= 0.428 \end{aligned}$$



شکل ۹۱-۲

۲-۹۲ مکعب مرکب مسئله ۲-۸۹ نمی‌تواند در جهت  $z$  تغییر شکل دهد و با اعمال بار کششی در جهت  $x$  به اندازه  $57.5 \text{ mm}$  در جهت  $x$  کشیده می‌شود. مطلوبست: (الف) تنش‌های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$ ، و  $\sigma_z$ . (ب) تغییر بُعد در جهت  $y$ .

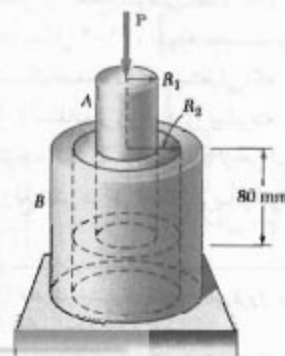
۲-۸۵ (الف) برای بارگذاری محوری نشان داده شده، تغییر ارتفاع و تغییر حجم استوانه برنجی نشان داده شده را بیابید. (ب) قسمت (الف) را با این فرض حل کنید که بارگذاری به صورت هیدروستاتیکی با  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -70 \text{ MPa}$  باشد.



شکل ۸۵-۲

۲-۸۶ کره فولادی توپری به قطر  $150 \text{ mm}$  را در دریا تا عمق  $5$  کیلومتری پایین می‌برند (فشار در این نقطه  $50 \text{ MPa}$  است). اگر  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.30$ ، مطلوبست: (الف) کاهش قطر کره، (ب) کاهش حجم کره، (ج) درصد افزایش چگالی کره.

۲-۸۷ یک تکیه‌گاه ایزولاسیون ارتعاشات متشکل است از میله  $A$  با شعاع  $R_1$  و لوله  $B$  با شعاع داخلی  $R_2$  که به یک استوانه لاستیکی تو خالی به طول  $80 \text{ mm}$  و با مدول صلابت  $G = 10.93 \text{ MPa}$  متصل است. اگر نیروی  $P$  با مقدار  $10 \text{ kN}$  باعث انحراف میله  $A$  به مقدار  $2 \text{ mm}$  شود، مقدار نسبت  $R_2/R_1$  را بیابید.



شکل ۸۷-۲ و ۸۸-۲

## ۲-۱۷. توزیع تنش و کرنش در بارگذاری محوری؛

## اصل سنت-وینانت

تا به حال، در یک عضو با بارگذاری محوری فرض می‌کردیم تنش‌های قائم در مقاطع عمود بر محور عضو به طور یکنواخت توزیع می‌شوند. در قسمت ۱-۵ دیدیم که چنین فرضی در نواحی مجاور نقاط اثر بارها اشتباه است، و برای تعیین تنش‌های واقعی در یک مقطع باید یک مسئله نامعین استاتیکی را حل کرد.

در قسمت ۲-۹، برای تعیین نیروها در مسائل نامعین استاتیکی از تغییرشکل‌های ناشی از این نیروها استفاده شد. لذا، می‌توان گفت برای تعیین تنش‌ها در یک عضو باید کرنش‌های حاصل از این تنش‌ها را تحلیل کرد. در کتاب‌های پیشرفته برای تعیین توزیع تنش‌های متناظر با شرایط مختلف اعمال بار در انتهای عضوها، از روش مذکور و نظریه الاستیسیته استفاده می‌شود. برای تحلیل تنش‌ها می‌توان حالتی را در نظر گرفت که در آن از دو صفحه صلب برای انتقال بار به یک عضو ساخته شده از ماده همگن همسانگرد استفاده شده است (شکل ۲-۵۸).

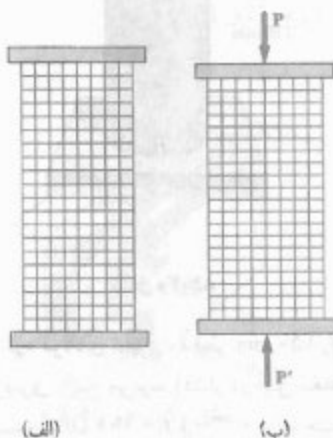


شکل ۲-۵۸

با اعمال بار در مرکز هر صفحه، این صفحات\* به طرف‌ها نزدیک می‌شوند بدون اینکه بچرخند. در نتیجه، عضو کوتاه‌تر می‌شود و عرض و ضخامت آن افزایش می‌یابد. می‌توان فرض کرد عضو به طور مستقیم می‌ماند، مقاطع صفحه‌ای آن به صورت صفحه‌ای می‌مانند و تمام اجزای آن به طور یکسان تغییر شکل می‌دهند (این فرض با شرایط انتهایی داده شده سازگار است). شکل ۲-۵۹ یک مدل الاستیکی واقع‌ی و بعد از بارگذاری نشان می‌دهد\*\*. با تغییر شکل یکسان اجزاء، توزیع

کرنش در تمام عضو به صورت یکنواخت خواهد بود. به عبارت دیگر، کرنش محوری  $\epsilon_y$  و کرنش جانبی  $\epsilon_x = -\nu\epsilon_y$  ثابت‌اند. اگر تنش‌ها از حد تناسب فراتر نروند، با استفاده از قانون هوک می‌توان رابطه  $\sigma_y = E\epsilon_y$  را نوشت. از این رابطه نتیجه می‌شود که تنش قائم  $\sigma_y$  ثابت است. لذا، توزیع تنش در تمام عضو به صورت یکنواخت است و در هر نقطه،

$$\sigma_y = (\sigma_y)_{ave} = \frac{P}{A}$$



شکل ۲-۵۹

از طرف دیگر، اگر بارها متمرکز باشند (شکل ۲-۶۰)، اجزای موجود در مجاورت نقاط اثر بارها تحت تنش‌های بزرگی قرار می‌گیرند، در حالی که سایر اجزای نزدیک انتهای عضو تحت تأثیر بارگذاری قرار نمی‌گیرند؛ این موضوع را با مشاهده تغییر شکل‌های بزرگ در نزدیکی نقاط اثر بارها، و نبود تغییر شکل در گوشه‌ها می‌توان دید. هر چه اجزا از انتهای عضو دورتر می‌شوند، تغییر شکل‌ها یکنواخت‌تر می‌شوند؛ یعنی، توزیع کرنش و تنش در مقطع عرضی عضو یکنواخت‌تر است (شکل ۲-۶۱). در شکل ۲-۶۱، نتیجه محاسبه توزیع تنش‌ها در مقاطع مختلف یک صفحه نازک مستطیلی، که تحت بارهای متمرکز قرار دارد، با استفاده از روش‌های پیشرفته ریاضی نشان داده شده است. توجه کنید که در فاصله  $h$  از هر انتها (عرض صفحه است)، توزیع تنش در هر مقطع تقریباً یکنواخت است و

\* به عبارت دقیق‌تر، خط اثر مشترک بارها از مرکزوار مقطع هندسی بگذرد (به قسمت ۵.۹ مراجعه کنید).

\*\* عقرهای باریک و بلند که تحت بار زیاد قرار می‌گیرند ممکن است کجی کنند. اگر این موضوع در فصل ۱۰ بررسی می‌شود.



برای محاسبه تنش در یک عضو، با استفاده از اصل سنت-وینانت می‌توان بارگذاری داده شده را با بارگذاری ساده‌تری جایگزین کرد. گفتنی است که هنگام کاربرد اصل مذکور به دو نکته مهم باید توجه داشت:

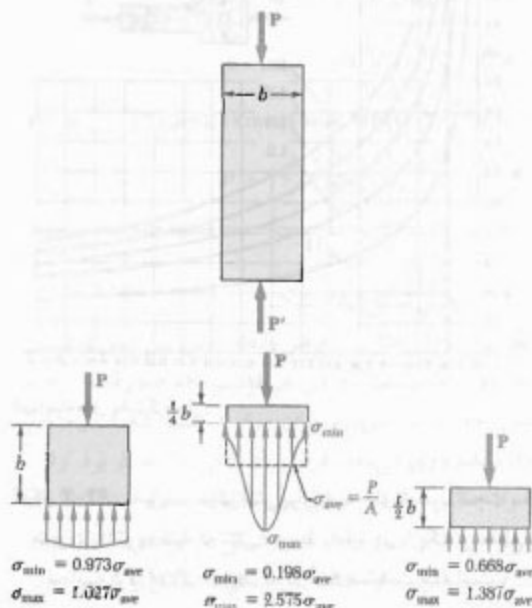
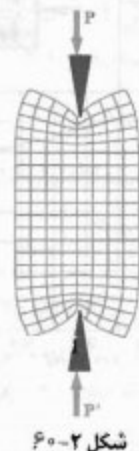
- ۱- بارگذاری واقعی و بارگذاری مورد استفاده در محاسبه تنش‌ها باید از نظر استاتیکی هم‌ارز باشند.
- ۲- با این روش نمی‌توان تنش‌ها را در مجاورت نقاط اثر بار محاسبه کرد، و برای این منظور باید از روش‌های پیشرفته نظری یا تجربی بهره گرفت.

صفحاتی که برای تعیین توزیع تنش یکنواخت در عضو شکل ۲-۵۹ به کار رفتند نباید مانع انبساط آزاد جانبی عضو شوند. لذا، صفحات نمی‌توانند به صورت صلب به عضو متصل شوند. و فرض می‌شود که آنها فقط با عضو تماس دارند و انقراض صافانند که مانع انبساط جانبی عضو نمی‌شوند. در عمل، این شرایط برای یک عضو فشاری برقرار می‌شوند، ولی برای عضو کششی برقرار نمی‌شوند. البته، این که نتوانیم فیکچسری را به عنوان عضوی بگیریم که توزیع تنش‌ها در آن یکنواخت است موضوع مهمی نیست. مهم این است که مدلی را تصور کنیم که توزیع تنش در آن یکنواخت است، و سپس این مدل را با شرایط واقعی بارگذاری مقایسه کنیم.

## ۲-۱۸ تمرکز تنش

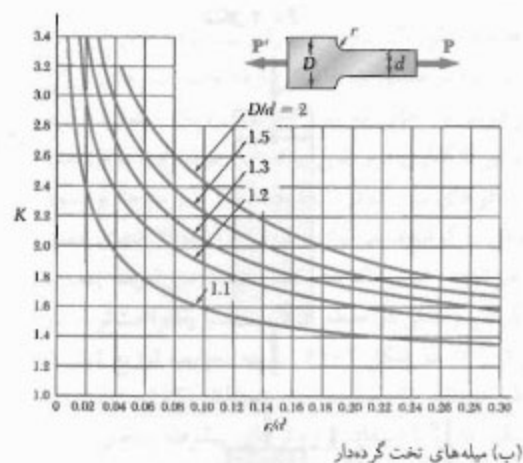
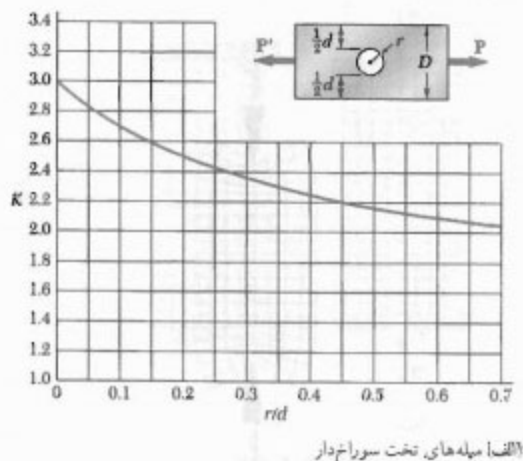
در قسمت قبل دیدید که تنش در نزدیک نقاط اثر بارهای متمرکز ممکن است خیلی بزرگتر از مقدار متوسط آن باشد. وقتی عضوی دارای یک ناپیوستگی (مانند سوراخ یا تغییر ناگهانی مقطع عرضی است)، تنش‌های موضعی بزرگی در نزدیک ناپیوستگی به وجود می‌آید. شکل‌های ۲-۶۲ و ۲-۶۳ توزیع تنش در مقاطع بحرانی را نشان می‌دهند. شکل ۲-۶۲ برای میله تخت با یک سوراخ دایره‌ای است و توزیع تنش در یک مقطع گذرا از مرکز سوراخ را نشان می‌دهد. شکل ۲-۶۳ برای یک میله تخت است که از دو قسمت با عرض‌های متفاوت، که با گرده (ماهیچه) به هم متصل‌اند، تشکیل شده است؛ این شکل، توزیع تنش در باریکترین قسمت اتصال را نشان می‌دهد. در این قسمت، تنش بزرگی ایجاد می‌شود.

مقدار تنش  $\sigma_p$  در هر نقطه از آن مقطع را می‌توان با مقدار متوسط  $P/A$  برابر گرفت. لذا، در فاصله برابر با عرض عضو یا در فاصله بیشتر از آن، توزیع تنش در عرض یک مقطع به طور یکنواخت است، خواه عضو مانند شکل ۲-۵۸ بارگذاری شده باشد خواه مانند شکل ۲-۶۰. به عبارت دیگر، به جز در نواحی مجاور نقاط اثر بارها، توزیع تنش را می‌توان مستقل از حالت اعمال بار دانست. این اصل را، به افتخار سنت-وینانت ریاضی‌دان و مهندس فرانسوی (۱۸۸۶-۱۷۹۷)، اصل سنت-وینانت می‌گویند و برای هر نوع بارگذاری به کار می‌رود.



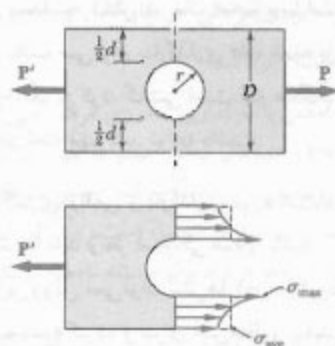
شکل ۲-۶۱

تمرکز تنش را می‌توان برحسب نسبت‌های پارامترهای هندسی موجود محاسبه، و نتایج حاصل را به صورت جدول یا نمودار بیان کرد (شکل ۶۲-۲). برای تعیین تنش ماکزیمم در نزدیک ناپیوستگی عضوی که تحت بار محوری  $P$  قرار دارد، طراح فقط باید تنش متوسط  $\sigma_{ave} = P/A$  را در مقطع بحرانی محاسبه کند، و نتیجه حاصل را در ضریب تمرکز تنش  $K$  ضرب کند. این روش تا وقتی صحت دارد که  $\sigma_{max}$  از حد تناسب ماده فراتر نرود، زیرا منحنی‌های شکل ۶۲-۲ با فرض رابطه خطی بین تنش و کرنش به دست آمده‌اند.

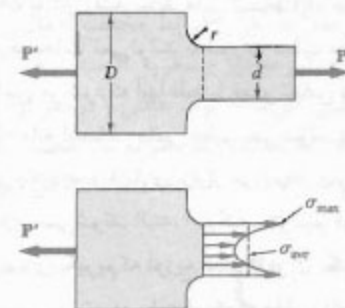


شکل ۶۲-۲ ضرایب تمرکز تنش برای میله‌های تخت تحت بار محوری\* (توجه کنید که تنش متوسط را باید در باریکترین مقطع محاسبه کرد:  $\sigma_{ave} = P/td$ ، که در آن  $t$  ضخامت میله است).

\* W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, New York, 1997.



شکل ۶۲-۲ توزیع تنش در نزدیک سوراخ دایره‌ای در میله تخت تحت بار محوری.



شکل ۶۲-۲ توزیع تنش در نزدیک گرده‌ها در میله تخت تحت بار محوری.

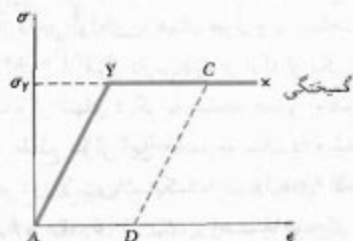
این نتایج، با استفاده از روش فوتوالاستیک، به طور تجربی به دست آمدند. نتایج مذکور مستقل از اندازه و جنس عضو هستند و فقط بستگی به نسبت پارامترهای هندسی عضو دارند، یعنی، نسبت  $r/d$  در سوراخ دایره‌ای، و نسبت‌های  $r/d$  و  $D/d$  در گرده‌ها. به علاوه، طراح بیشتر مایل است مقدار ماکزیمم تنش را در مقطع معینی بیابد، نه توزیع واقعی تنش در آن مقطع را، زیرا می‌خواهد بررسی کند که آیا، تحت بارگذاری داده شده، این مقدار ماکزیمم از تنش مجاز بیشتر است یا نه، و موضوع مکان این مقدار ماکزیمم برای او اهمیتی ندارد. به این دلیل، نسبت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}} \quad (۶۸-۲)$$

$K$  عبارت است از نسبت تنش ماکزیمم به تنش متوسطی که در مقطع بحرانی (باریک‌ترین مقطع) محاسبه می‌شود، و آن را ضریب تمرکز تنش برای ناپیوستگی داده شده می‌گویند. ضرایب

قسمت‌های قبل صحت خود را از دست می‌دهند. در این صورت، باید از یک تحلیل پیچیده‌تر، مبتنی بر رابطه غیرخطی بین تنش و کرنش، استفاده کرد.

تحلیل مبتنی بر رابطه واقعی بین تنش و کرنش فراتر از این کتاب است. ولی، با در نظر گرفتن یک ماده الاستوپلاستیک ایده‌آل که نمودار تنش-کرنش آن از دو پاره خط مستقیم تشکیل می‌شود (شکل ۲-۶۵)، رفتار پلاستیک را به خوبی می‌توان درک کرد. گفتنی است که نمودار تنش-کرنش فولاد متوسط در نواحی الاستیک و پلاستیک با این ایده‌آل‌سازی مشابه است. تا وقتی تنش  $\sigma$  کمتر از استقامت تسلیم  $\sigma_y$  است، ماده دارای رفتار الاستیک است و از قانون هوک،  $\sigma = E\epsilon$ ، پیروی می‌کند. وقتی  $\sigma$  به مقدار  $\sigma_y$  می‌رسد، ماده شروع به تسلیم می‌کند و تغییر شکل پلاستیک خود را تحت یک بار ثابت ادامه می‌دهد. با حذف بار، این بار برداری در امتداد پاره خط مستقیم  $CD$  به موازات قسمت اولیه  $AY$  منحنی بارگذاری روی می‌دهد. پاره خط  $AD$  در محور افقی، کرنش متناظر با تغییر شکل پلاستیک دائم را که حاصل از بارگذاری و باربرداری نمونه است نشان می‌دهد. گرچه هیچ ماده واقعی دقیقاً مانند شکل ۲-۶۵ رفتار نمی‌کند، ولی این نمودار در بحث تغییر شکل‌های پلاستیک مواد چکش‌خوار، مانند فولاد متوسط، مفید واقع می‌شود.



شکل ۲-۶۵

میله‌ای به طول  $L = 500 \text{ mm}$  و با مساحت مقطع عرضی  $A = 60 \text{ mm}^2$  از یک ماده الاستوپلاستیک ساخته شده است. این ماده در ناحیه الاستیک دارای مدول الاستیسیته  $E = 200 \text{ GPa}$  است و نقطه تسلیم آن،  $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$  است. این میله تا کشیدگی  $7 \text{ mm}$  تحت بار محوری قرار می‌گیرد و سپس بار حذف می‌شود. تغییر شکل پلاستیک حاصل چقدر است؟

یک میله تخت فولادی از دو قسمت با عرض‌های  $40 \text{ mm}$  و  $60 \text{ mm}$ ، هر یک به ضخامت  $10 \text{ mm}$ ، تشکیل شده است. این دو قسمت توسط گرده‌هایی با شعاع  $r = 8 \text{ mm}$  به هم متصل شده‌اند. ماکزیمم بار محوری را که می‌توان با اطمینان بر این میله وارد کرد بیابید. تنش قائم مجاز را  $165 \text{ MPa}$  بگیرید. ابتدا نسبت‌های زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{D}{d} = \frac{60 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 1.50 \quad \frac{r}{d} = \frac{8 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 0.20$$

با استفاده از منحنی شکل ۲-۶۴ ب متناظر با  $D/d = 1.50$  مقدار ضریب تمرکز تنش مربوط به  $r/d = 0.20$  را می‌یابیم:

$$K = 1.82$$

با جایگذاری این مقدار در معادله (۲-۴۸) و با حل  $\sigma_{ave}$ ،

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_{max}}{1.82}$$

اما  $\sigma_{max}$  نمی‌تواند از تنش مجاز  $\sigma_{all} = 165 \text{ MPa}$  بیشتر شود. با جایگذاری این مقدار برای  $\sigma_{max}$ ، دیده می‌شود تنش متوسط در باریک‌ترین قسمت میله ( $d = 40 \text{ mm}$ ) نباید از مقدار زیر بیشتر شود:

$$\sigma_{ave} = \frac{165 \text{ MPa}}{1.82} = 90.7 \text{ MPa}$$

اما  $\sigma_{ave} = P/A$ ، در نتیجه،

$$P = A\sigma_{ave} = (40 \text{ mm})(10 \text{ mm})(90.7 \text{ MPa}) = 36.3 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P = 36.3 \text{ kN}$$

## ۱۹-۲ تغییر شکل پلاستیک

نتایج قسمت‌های قبل را از فرض رابطه خطی بین تنش و کرنش به دست آوردیم. یعنی، فرض می‌کردیم ماده هیچوقت از حد تناسب خود فراتر نمی‌رود. برای مواد شکننده، که گسیختگی بدون تسلیم روی می‌دهد، فرض بالا را می‌توان به کار برد. ولی، در مواد چکش‌خوار این فرض می‌رساند که ماده از حد استقامت تسلیم خود فراتر نمی‌رود، تغییر شکل در محدوده الاستیک است و عضو، پس از حذف بار، شکل اولیه‌اش را باز می‌یابد. ولی، اگر تنش در هر قسمت عضو از استقامت تسلیم ماده بیشتر شود، تغییر شکل پلاستیک روی می‌دهد و اغلب نتایج

ابتدا، نیروی داخلی و کشیدگی میله را تا شروع تسلیم تعیین می‌کنیم:

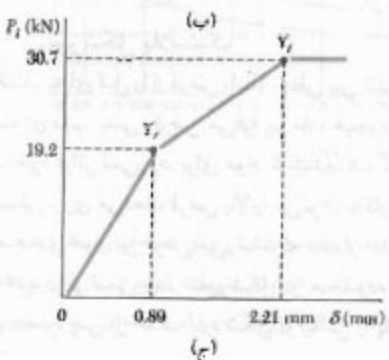
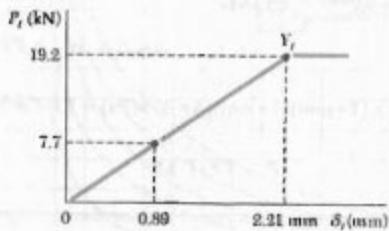
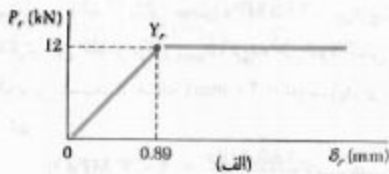
$$(P)_Y = (\sigma_Y)_Y A_r = (250 \text{ MPa})(48 \text{ mm}^2) = 12 \text{ kN}$$

$$(\delta_P)_Y = (\epsilon_P)_Y L = \frac{(\sigma_P)_Y}{E_r} L = \frac{250 \text{ MPa}}{210 \text{ GPa}} (0.75 \text{ m}) = 0.89 \text{ mm}$$

چون ماده الاستوپلاستیک است، نمودار نیرو-کشیدگی میله تنها از یک خط مستقیم مایل و یک خط مستقیم افقی تشکیل می‌شود (شکل ۶۷-۲ الف). با استفاده از همین روش برای لوله،

$$(P)_Y = (\sigma_Y)_Y A_t = (310 \text{ MPa})(62 \text{ mm}^2) = 19.2 \text{ kN}$$

$$(\delta_P)_Y = (\epsilon_P)_Y L = \frac{(\sigma_P)_Y}{E_t} L = \frac{310 \text{ MPa}}{105 \text{ GPa}} (0.75 \text{ m}) = 2.21 \text{ mm}$$



شکل ۶۷-۲

از شکل ۶۵-۲، کرنش ماکزیمم (که با طول نقطه C نشان داده می‌شود) چنین است:

$$\epsilon_C = \frac{\delta_C}{L} = \frac{5 \text{ mm}}{500 \text{ mm}} = 10 \times 10^{-3}$$

کرنش تسلیم، که با طول نقطه Y نشان داده می‌شود، چنین است:

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{300 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 1.5 \times 10^{-3}$$

کرنش پس از بار برداری با طول  $\epsilon_D$  نشان داده می‌شود. از شکل ۶۵-۲،

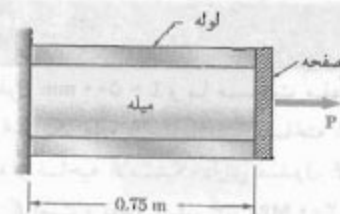
$$\begin{aligned} \epsilon_D &= AD = YC = \epsilon_C - \epsilon_Y \\ &= 10 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-3} = 8.5 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

تغییر شکل پلاستیک  $\delta_D$  متناظر با کرنش  $\epsilon_D$  است:

$$\delta_D = \epsilon_D L = (8.5 \times 10^{-3})(500 \text{ mm}) = 4.25 \text{ mm}$$

#### مثال ۱۴-۲

میله استوانه‌ای به طول ۰٫۷۵ m و با مساحت مقطع عرضی  $A_r = 48 \text{ mm}^2$  داخل لوله‌ای با همان طول و با مساحت مقطع عرضی  $A_t = 62 \text{ mm}^2$  قرار دارد. میله و لوله از یک انتها به تکیه‌گاه صلب و از انتهای دیگر به صفحه صلبی متصل‌اند؛ در شکل ۶۶-۲، مقطع طولی این مجموعه نشان داده شده است. میله و لوله هر دو الاستوپلاستیک، با مدول‌های الاستیته  $E_r = 210 \text{ GPa}$  و  $E_t = 105 \text{ GPa}$ ، و استقامت‌های تسلیم  $(\sigma_P)_Y = 250 \text{ MPa}$  و  $(\sigma_P)_Y = 310 \text{ MPa}$  هستند. بار P بر صفحه وارد می‌شود. نمودار نیرو-کشیدگی مجموعه میله-لوله را رسم کنید.



شکل ۶۶-۲

نمودار نیرو - کشیدگی لوله تنها در شکل ۲-۶۷ نشان داده شده است. نیرو و کشیدگی مجموعه میله-لوله عبارتند از

$$P = P_r + P_l \quad \delta = \delta_r = \delta_l$$

با جمع کردن عرض نمودارهای میله و لوله (شکل ۲-۶۷ ج)، نمودار نیرو - کشیدگی به دست می آید. نقاط  $Y_r$  و  $Y_l$  به ترتیب، متناظر با شروع تسلیم در میله و در لوله هستند.

#### مثال ۲-۱۵

اگر بار وارد بر مجموعه میله-لوله مثال ۲-۱۴ از صفر تا ۲۵ kN افزایش یابد و سپس به صفر برگردد، مطلوب است: (الف) ماکزیمم کشیدگی مجموعه، (ب) تغییر شکل پلاستیک پس از حذف بار.

(الف) ماکزیمم کشیدگی. از شکل ۲-۶۷ دیده می شود که بار  $P_{max} = 25$  kN متناظر است با نقطه ای که روی پاره خط  $Y_r Y_l$  در نمودار نیرو-کشیدگی مجموعه قرار دارد. لذا، میله به ناحیه پلاستیک، با  $P_r = (P_r)_Y = 12$  kN و  $\sigma_r = (\sigma_r)_Y = 250$  MPa و  $P_l = (P_l)_Y = 13$  kN و  $\sigma_l = (\sigma_l)_Y = 210$  MPa رسیدگی است ولی لوله هنوز در ناحیه الاستیک است. می نویسیم:

$$P_l = P - P_r = 25 \text{ kN} - 12 \text{ kN} = 13 \text{ kN}$$

$$\sigma_l = \frac{P_l}{A_l} = \frac{13 \text{ kN}}{62 \text{ mm}^2} = 210 \text{ MPa}$$

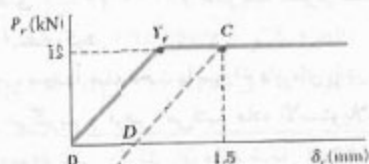
$$\delta_l = \epsilon_l L = \frac{\sigma_l}{E_l} L = \frac{210 \text{ MPa}}{105 \text{ GPa}} (0.75 \text{ m}) = 1.5 \text{ mm}$$

ماکزیمم کشیدگی مجموعه عبارت است از:

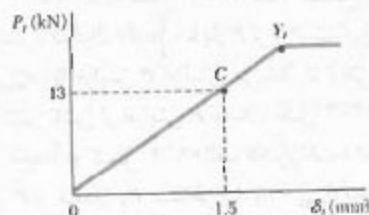
$$\delta_{max} = \delta_l = 1.5 \text{ mm}$$

(ب) تغییر شکل پلاستیک (دائمی). وقتی بار  $P$  از ۲۵ kN تا صفر کاهش می یابد، نیروهای داخلی  $P_r$  و  $P_l$  هر دو در امتداد یک خط مستقیم کاهش می یابند (شکل های ۲-۶۸ الف و ۲-۶۸ ب). نیروی  $P_r$  در امتداد خط  $CD$  به موازات قسمت اولیه منحنی بارگذاری کاهش می یابد، و نیروی  $P_l$  در امتداد منحنی بارگذاری اولیه کاهش می یابد زیرا تنش در لوله از مقدار تسلیم بیشتر نشده است. بنابراین، مجموع  $P$  آنها در امتداد خط  $CE$  به موازات قسمت  $OY_r$  منحنی نیرو - کشیدگی مجموعه کاهش می یابد (شکل ۲-۶۸ ج). از شکل ۲-۶۷ ج دیده می شود که شیب  $OY_r$  و نیز شیب  $CE$ ، چنین است:

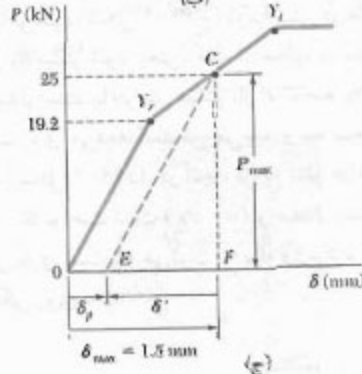
$$m = \frac{19.2 \text{ kN}}{0.9 \text{ mm}} = 21.3 \text{ kN/mm}$$



(الف)



(ب)



(ج)

#### شکل ۲-۶۸

پاره خط  $FE$  در شکل ۲-۶۸ ج تغییر شکل  $\delta'$  مجموعه را در ضمن بار برداری نشان می دهد، و پاره خط  $OE$  تغییر شکل دائمی  $\delta_p$  را پس از حذف بار  $P$  نشان می دهد. از مثلث  $CEF$ ،

$$\delta' = -\frac{P_{max}}{m} = -\frac{25 \text{ kN}}{21.3 \text{ kN/mm}} = -1.174 \text{ mm}$$

لذا، تغییر شکل دائمی چنین است:

$$\delta_p = \delta_{max} + \delta' = 1.5 \text{ mm} - 1.174 \text{ mm} = 0.326 \text{ mm}$$

در قسمت ۲-۱۸، تمرکز تنش را با فرض رابطه خطی بین تنش و کرنش بررسی کردیم. بنابراین، در تغییر شکل پلاستیک که مقدار  $\sigma_{max}$  حاصل از شکل های ۲-۶۲ و ۲-۶۳ از استقامت

اکنون، مقدار ماکزیم  $P_Y$  بار را که به ازای آن تغییر شکل دائمی در میله به وجود نمی آید با مقدار  $P_U$  که باعث گسیختگی می شود مقایسه می کنیم. با توجه به تعریف تنش متوسط،  $K = \sigma_{\max} / \sigma_{ave}$  و تعریف ضریب تمرکز تنش،  $K = \sigma_{\max} / \sigma_{ave}$  برای هر مقدار  $\sigma_{\max}$  که از  $\sigma_Y$  بیشتر نباشد، می نویسیم:

$$P = \sigma_{ave} A = \frac{\sigma_{\max} A}{K} \quad (۴۹-۲)$$

وقتی  $\sigma_{\max} = \sigma_Y$  (شکل ۶۹-۲ ب)،  $P = P_Y$ ؛ از معادله (۴۹-۲)،

$$P_Y = \frac{\sigma_Y A}{K} \quad (۵۰-۲)$$

وقتی  $P = P_U$  (شکل ۶۹-۲ د)،  $\sigma_{ave} = \sigma_Y$  و

$$P_U = \sigma_Y A \quad (۵۱-۲)$$

با مقایسه معادله های (۵۰-۲) و (۵۱-۲)،

$$P_Y = \frac{P_U}{K} \quad (۵۲-۲)$$

#### \* ۲-۲۰ تنش های باقیمانده

در مثال ۲-۱۳، میله ای را در نظر گرفتیم که فراتر از نقطه تسلیم خود کشیده می شود. پس از حذف بار، شکل اولیه اش را باز نمی یافت و دستخوش تغییر شکل دائمی می شد؛ ولی، تمام تنش ها از بین می رفتند. اما واقعاً اینطور نیست. در حقیقت، وقتی فقط بعضی از اجزای یک سازه نامعین استاتیکی دستخوش تغییر شکل های پلاستیک می شوند (مانند مثال ۲-۱۵)، یا وقتی اجزای مختلف سازه تغییر شکل های پلاستیک متفاوت می دهند، آنچه که تنش های باقیمانده نامیده می شود پس از حذف بار در اجزای مختلف سازه برجای می ماند.

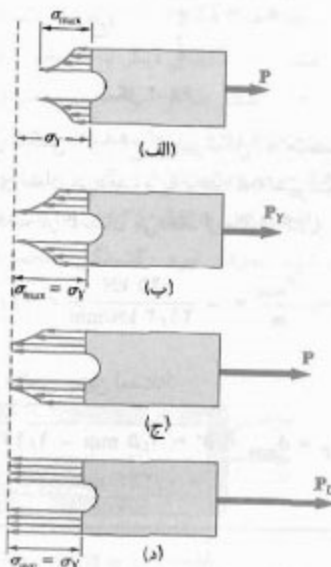
محاسبه تنش های باقیمانده در یک سازه واقعی معمولاً مشکل است، و با مثال زیر می خواهیم یک دید کلی درباره محاسبه این تنش ها به دست آوریم.

#### مثال ۲-۱۶

در مثال های ۲-۱۴ و ۲-۱۵، فرض کنید بار  $P$  از صفر تا ۲۵ kN افزایش یافته و سپس به صفر می رسد. تنش های باقیمانده در میله و لوله را بیابید.

تسلیم  $\sigma_Y$  بیشتر می شود، نمی توان از توزیع تنش داده شده در شکل های ۶۲-۲ و ۶۳-۲ و ضرایب تمرکز تنش در شکل ۶۴-۲ استفاده کرد.

حال، مجدداً میله تخت با سوراخ دایره ای را در شکل ۶۲-۲ در نظر می گیریم و فرض می کنیم ماده الاستوپلاستیک است؛ یعنی، نمودار تنش-کرنش آن مانند شکل ۶۵-۲ است. تا وقتی تغییر شکل پلاستیک روی نداده است، توزیع تنش مانند قسمت ۲-۱۸ است (شکل ۶۹-۲ الف). سطح زیر منحنی توزیع تنش، انتگرال  $\int \sigma dA$ ، با بار  $P$  برابر است. این مساحت، و مقدار  $\sigma_{\max}$ ، با افزایش  $P$  افزایش می یابد. تا وقتی  $\sigma_{\max} \leq \sigma_Y$ ، توزیع تنش ناشی از افزایش  $P$  مانند شکل ۶۲-۲ است (این شکل، مجدداً در شکل ۶۹-۲ الف تکرار شده است). وقتی مقدار  $P$  از مقدار  $P_Y$  متناظر با  $\sigma_{\max} = \sigma_Y$  بیشتر می شود (شکل ۶۹-۲ ب)، منحنی توزیع تنش در مجاورت سوراخ صاف تر می شود (شکل ۶۹-۲ ج)، زیرا تنش در ماده نمی تواند از مقدار  $\sigma_Y$  بیشتر شود. یعنی، ماده در مجاورت سوراخ در حال تسلیم شدن است. با افزایش بیشتر بار  $P$ ، ناحیه پلاستیک که در آن تسلیم روی می دهد گسترش می یابد و به لبه های صفحه می رسد (شکل ۶۹-۲ د). در آنجا، توزیع تنش در عرض صفحه به طور یکنواخت است ( $\sigma = \sigma_Y$ ) و مقدار متناظر  $P = P_U$  بیشترین باری است که می توان بر میله وارد کرد بدون اینکه گسیختگی روی دهد.



شکل ۶۹-۲ توزیع تنش در ماده الاستوپلاستیک که تحت بار افزایشی قرار دارد

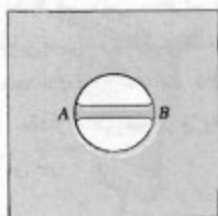


با ترکیب تنش‌های ناشی از بارگذاری و تنش‌های معکوس ناشی از بار برداری، تنش‌های باقیمانده به دست می‌آیند:

$$(\sigma_r)_{res} = \sigma_r + \sigma'_r = 250 \text{ MPa} - 329.7 \text{ MPa} = -79.7 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_t)_{res} = \sigma_t + \sigma'_t = 210 \text{ MPa} - 164.9 \text{ MPa} = +45.1 \text{ MPa}$$

تغییر شکل‌های پلاستیک ناشی از تغییرات دما نیز می‌تواند تنش‌های باقیمانده به وجود آورند. مثلاً، توبی کوچکی را در نظر بگیرید که می‌خواهیم آن را به ورق بزرگی جوش دهیم. توبی را به صورت میله کوچک فولادی  $AB$  می‌گیریم که قرار است در عرض سوراخ کوچک داخل ورق جوش داده شود (شکل ۷۱-۲). در ضمن جوشکاری، دمای میله به بیش از  $1000^\circ\text{C}$  می‌رسد و در این دما مدول الاستیسته میله، و نیز صفی و تنش، تقریباً صفر هستند. چون ورق بزرگ است، دمای آن خیلی بیش از دمای اتاق ( $20^\circ\text{C}$ ) نخواهد شد. لذا، هنگام جوشکاری، میله  $AB$  میله‌ای است با دمای  $T = 1000^\circ\text{C}$  و فاقد تنش که به ورق با دمای  $20^\circ\text{C}$  متصل است.



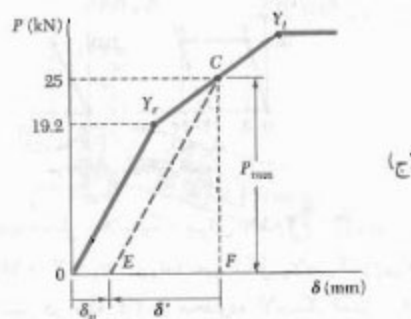
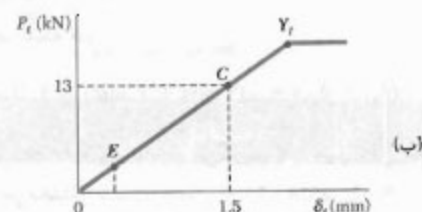
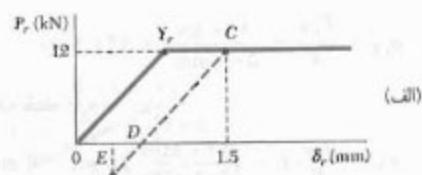
شکل ۷۱-۲

وقتی میله خنک می‌شود، مدول الاستیسته آن افزایش می‌یابد و در  $500^\circ\text{C}$  به مقدار معمولی تقریباً  $200 \text{ GPa}$  می‌رسد. با کاهش بیشتر دمای میله، حالتی داریم که در قسمت ۱۰-۲ بررسی و در شکل ۲-۳۵ نشان داده شد. با حل  $\Delta T$  از معادله (۲۳-۲) و با قرار دادن  $\sigma_F = 300 \text{ MPa}$  و  $\alpha = 12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ، تغییر دمایی را که باعث تسلیم میله می‌شود می‌یابیم:

$$\Delta T = -\frac{\sigma}{E\alpha} = -\frac{300 \text{ MPa}}{(200 \text{ GPa})(12 \times 10^{-6}/^\circ\text{C})} = -125^\circ\text{C}$$

یعنی، میله در دمای تقریباً  $375^\circ\text{C}$  شروع به تسلیم می‌کند و وقتی تا دمای اتاق خنک می‌شود، این تسلیم را با یک مقدار تنش تقریباً ثابت حفظ می‌کند. به این ترتیب، تنش باقیمانده‌ای بر اثر جوشکاری در توبی و در جوش ایجاد می‌شود که تقریباً با استقامت فولاد به کار رفته برابر است.

از نمودارهای شکل ۷۰-۲ دیده می‌شود که پس از صفر شدن بار  $P$ ، نیروهای داخلی  $P_r$  و  $P_t$  برابر با صفر نیستند و مقدار آنها، به ترتیب، با نقطه  $E$  در قسمت‌های (الف) و (ب) شکل نشان داده شده است. یعنی، تنش‌های متناظر پس از باربرداری مجموعه نیز صفر نیستند. برای تعیین این تنش‌های باقیمانده، تنش‌های معکوس  $\sigma'_r$  و  $\sigma'_t$  ناشی از بار برداری را محاسبه می‌کنیم و آنها را به تنش‌های ماکزیمم  $\sigma_r = 250 \text{ MPa}$  و  $\sigma_t = 210 \text{ MPa}$ ، که در قسمت الف مثال ۲-۱۵ به دست آمدند، اضافه می‌کنیم.



شکل ۷۰-۲

کرنش حاصل از بار برداری در لوله و میله، دارای مقدار یکسان است و برابر است با  $\delta'/L$ ، که در آن  $\delta'$  تغییر شکل مجموعه در ضمن بار برداری است و آن را در مثال ۲-۱۵ به دست آوردیم. می‌نویسیم:

$$\epsilon' = \frac{\delta'}{L} = \frac{-1/174 \text{ mm}}{1.75 \text{ m}} = -1.57 \times 10^{-5} \text{ mm/mm}$$

تنش‌های معکوس متناظر در میله و لوله عبارتند از:

$$\sigma'_r = \epsilon' E_r = (-1.57 \times 10^{-5})(210 \text{ GPa}) = -329.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_t = \epsilon' E_t = (-1.57 \times 10^{-5})(105 \text{ GPa}) = -164.9 \text{ MPa}$$

حد الاستیک. ماکزیمم مقدار  $Q$  و ماکزیمم انحراف الاستیکی نقطه  $A$  وقتی روی می‌دهد که در میله  $AD$ ،  $\sigma = \sigma_Y$ .

$$(P_{AD})_{\max} = \sigma_Y A = (300 \text{ MPa})(400 \text{ mm}^2) = 120 \text{ kN}$$

$$Q_{\max} = 2(P_{AD})_{\max} = 2(120 \text{ kN}) \quad Q_{\max} = 240 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

$$\delta_A = \epsilon L = \frac{\sigma_Y}{E} L = \left( \frac{300 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} \right) (2 \text{ m}) = 3 \text{ mm}$$

چون  $P_{CE} = P_{AD} = 120 \text{ kN}$  تنش در میله  $CE$  چنین است:

$$\sigma_{CE} = \frac{P_{CE}}{A} = \frac{120 \text{ kN}}{500 \text{ mm}^2} = 240 \text{ MPa}$$

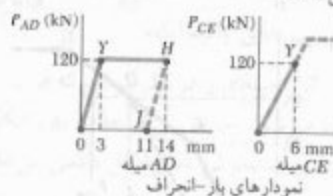
انحراف نقطه  $C$

$$\delta_C = \epsilon L = \frac{\sigma_{CE}}{E} L = \left( \frac{240 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} \right) (5 \text{ m}) = 6 \text{ mm}$$

انحراف نقطه  $B$

$$\delta_B = \frac{1}{2}(\delta_A + \delta_C) = \frac{1}{2}(3 \text{ mm} + 6 \text{ mm}) = 4.5 \text{ mm}$$

چون  $\delta_B = 10 \text{ mm}$  نتیجه می‌گیریم که تغییرشکل پلاستیک روی می‌دهد.



تغییرشکل پلاستیک. برای  $Q = 240 \text{ kN}$ ، در میله  $AD$  (با  $\sigma_{AD} = \sigma_Y = 300 \text{ MPa}$ ) تغییرشکل پلاستیک روی می‌دهد. چون تنش در میله  $CE$  در محدوده الاستیک است،  $\delta_C$  برابر با  $6 \text{ mm}$  است. انحراف  $\delta_A$  را، که به ازای آن  $\delta_B = 10 \text{ mm}$  به صورت زیر می‌یابیم:

$$\delta_B = 10 \text{ mm} = \frac{1}{2}(\delta_A + 6 \text{ mm}) \Rightarrow \delta_A = 14 \text{ mm}$$

بار برداری. چون نیروی  $Q$  به تدریج حذف می‌شود، نیروی  $P_{AD}$  در امتداد خط  $HJ$  به موازات قسمت اولیه نمودار بار-انحراف میله  $AD$  کاهش می‌یابد. انحراف نهایی نقطه  $A$  چنین است:

$$\delta_{A2} = 14 \text{ mm} - 3 \text{ mm} = 11 \text{ mm}$$

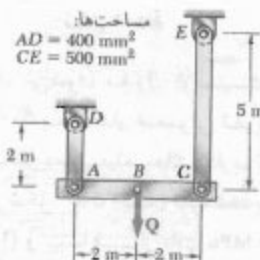
چون تنش در میله  $CE$  در محدوده الاستیک است، انحراف نهایی نقطه  $C$  صفر است.

فلزاتی که ریخته‌گری یا نورد گرم می‌شوند، هنگام سرمايش دستخوش تنش‌های باقیمانده می‌شوند. در این موارد، لایه‌های خارجی سریع‌تر از هسته داخلی خنک می‌شوند. در نتیجه، لایه‌های خارجی سفتی خود را سریع‌تر از هسته داخلی به دست می‌آورند. وقتی تمام نمونه به دمای اتاق می‌رسد، هسته داخلی بیشتر از لایه‌های خارجی منقبض می‌شود. در نتیجه، تنش‌های باقیمانده کششی در هسته داخلی و تنش‌های باقیمانده فشاری در لایه‌های خارجی به وجود می‌آید.

تنش‌های باقیمانده ناشی از جوشکاری، ریخته‌گری و نورد گرم ممکن است خیلی بزرگ، و با استقامت تسلیم قابل مقایسه باشند. در صورت لزوم، با بازگرمایش نمونه در دمای تقریباً  $600^\circ\text{C}$  و سپس یا خنک کردن آهسته آن در مدت ۱۲ تا ۲۴ ساعت می‌توان این تنش‌ها را حذف کرد.

## مسئله نمونه ۶-۲

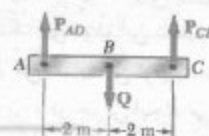
تیر صلب  $ABC$  از دو میله فولادی آویزان شده است و ابتدا به صورت افقی است. با اعمال آهسته نیروی  $Q$ ، نقطه میانی  $B$  به اندازه  $10 \text{ mm}$  به طرف پایین منحرف می‌شود. سپس، بار به تدریج حذف می‌شود. اگر فولاد میله‌ها از نوع الاستوپلاستیک با  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\sigma_Y = 300 \text{ MPa}$  باشد، مطلوب است: (الف) مقدار ماکزیمم  $Q$  و وضعیت متناظر تیر، (ب) وضعیت نهایی تیر.

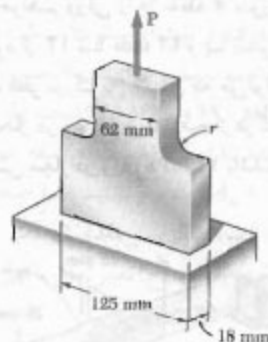


حل

استاتیک. چون  $Q$  در نقطه میانی تیر وارد می‌شود،

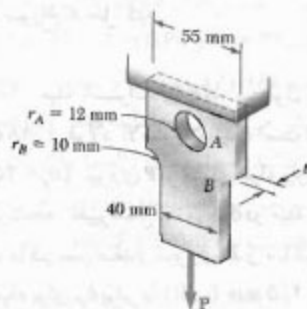
$$P_{AD} = P_{CE} \quad \text{و} \quad Q = 2P_{AD}$$





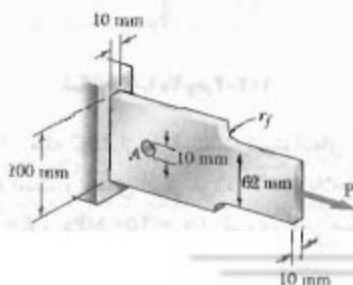
شکل ۹۵-۲ و ۹۶-۲

۹۷-۲ برای  $P = 35 \text{ kN}$ ، مطلوبست مینیمم ضخامت  $t$  ورق در صورتیکه تنش مجاز  $125 \text{ MPa}$  باشد.

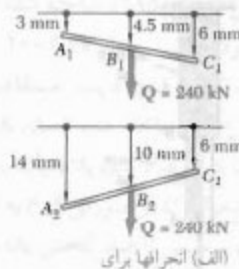


شکل ۹۷-۲

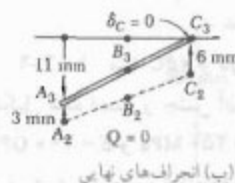
۹۸-۲ اگر قطر سوراخ نشان داده شده  $10 \text{ mm}$  باشد، مطلوبست: (الف) شعاع  $r$  گرد (ماهیچه) که به ازای آن ماکزیمم تنش در سوراخ  $A$  و در گردها یا هم برابرنند، (ب) بار ماکزیمم مجاز متناظر  $P$  در صورتی که تنش مجاز  $105 \text{ MPa}$  باشد.



شکل ۹۸-۲



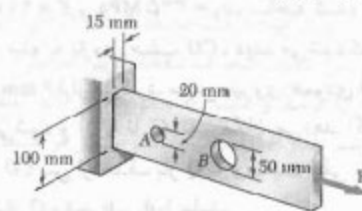
(الف) انحرافها برای



(ب) انحرافهای نهایی

## مسائل

۹۳-۲ اگر  $\sigma_{all} = 120 \text{ MPa}$ ، ماکزیمم مقدار مجاز بار محوری مرکزی  $P$  را بیابید.

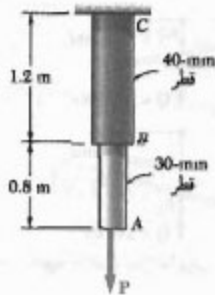


شکل ۹۳-۲ و ۹۴-۲

۹۴-۲ در یک میله بلند فولادی که تحت بار محوری مرکزی قرار دارد دو سوراخ تعبیه شده است. برای  $P = 32 \text{ kN}$ ، مطلوبست ماکزیمم مقدار تنش: (الف) در  $A$ ، (ب) در  $B$ .

۹۵-۲ اگر  $P = 40 \text{ kN}$ ، مطلوبست ماکزیمم تنش وقتی: (الف)  $r = 12 \text{ mm}$ ، (ب)  $r = 15 \text{ mm}$ .

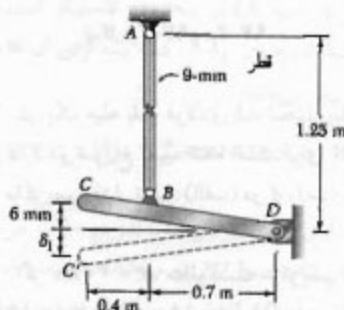
۹۶-۲ اگر تنش مجاز ورق نشان داده شده،  $110 \text{ MPa}$  باشد، مطلوبست ماکزیمم مقدار مجاز  $P$  وقتی: (الف)  $r = 10 \text{ mm}$ ، (ب)  $r = 18 \text{ mm}$ .



شکل م ۱۰۳-۱ و م ۱۰۴-۱

۱۰۴-۱ میل ABC از دو قسمت استوانه‌ای AB و BC تشکیل شده است و جنس آن از فولاد الاستوپلاستیک است ( $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$  و  $E = 200 \text{ GPa}$ ). نیروی P بر میله وارد می‌شود. در نتیجه، میله به اندازه  $\delta_m = 5 \text{ mm}$  کشیده می‌شود. ماکزیمم مقدار نیروی P و تغییر شکل دائمی در میله را پس از حذف این نیرو بیابید.

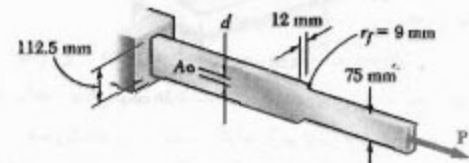
۱۰۵-۲ میل AB از فولاد متوسط الاستوپلاستیک، با  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 240 \text{ MPa}$  ساخته شده است. پس از اتصال میله به بازوی صلب CD، دیده می‌شود که انتهای C به ارتفاع 6 mm قرار می‌گیرد. سپس، نیروی عمودی Q بر انتهای C وارد می‌شود و آن را تا C' تغییر مکان می‌دهد. اگر بخواهیم بازوی CD پس از حذف بار Q به وضعیت افقی بازگردد، مقدار مورد نیاز Q و انحراف  $\delta_1$  را بیابید.



شکل م ۱۰۵-۲

۱۰۶-۲ مسئله ۱۰۵-۲ را با این فرض حل کنید که نقطه تسلیم فولاد متوسط  $250 \text{ MPa}$  باشد.

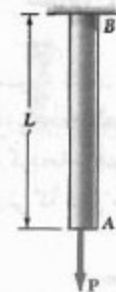
۹۹-۲ می‌خواهیم ورقی را در نقطه A سوراخ کنیم. قطره‌های موجود از ۱۲ تا ۲۴ mm و با نمو ۳ mm است. (الف) مطلوب‌ست قطر بزرگترین ته‌ای که می‌توان به کار برد به طوری که بار مجاز در سوراخ از بار مجاز در گرده‌ها بیشتر باشد. (ب) اگر تنش مجاز در ورق  $14 \text{ MPa}$  باشد، بار مجاز P بیابید.



شکل م ۹۹-۲ و م ۱۰۰-۲

۱۰۰-۲ (الف) برای  $P = 58 \text{ kN}$  و  $d = 12 \text{ mm}$ ، ماکزیمم تنش را در ورق نشان داده شده بیابید. (ب) قسمت الف را با فرض نبود سوراخ A حل کنید.

۱۰۱-۲ میل استوانه‌ای AB، به طول  $L = 1.5 \text{ m}$  و به قطر ۱۸ mm، از فولاد الاستوپلاستیک است ( $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$ ). نیروی P بر انتهای میله وارد و سپس حذف می‌شود. در نتیجه، تغییر شکل دائمی  $\delta_m$  در میله به وجود می‌آید. مطلوب‌ست ماکزیمم مقدار نیروی P و ماکزیمم مقدار  $\delta_m$  کشیدگی میله برای  $\delta_m$  برابر با: (الف) ۲.۵ mm، (ب) ۵ mm.



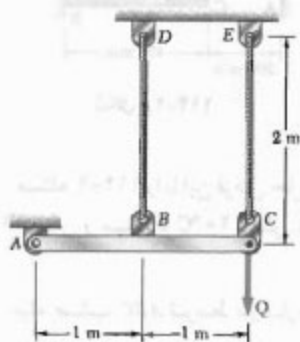
شکل م ۱۰۱-۲ و م ۱۰۲-۲

۱۰۳-۲ میل ABC از دو قسمت استوانه‌ای AB و BC تشکیل شده است و جنس آن از فولاد الاستوپلاستیک است ( $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$ ). نیروی P بر میله وارد و سپس حذف می‌شود. در نتیجه، تغییر شکل دائمی  $\delta_m = 2 \text{ mm}$  در میله به وجود می‌آید. ماکزیمم مقدار P و ماکزیمم مقدار کشیدگی  $\delta_m$  میله را بیابید.

متصل شده‌اند. این میله مرکب تحت بار محوری مرکزی  $P$  قرار دارد. هر دو فولاد از نوع الاستوپلاستیک، با  $E = 200 \text{ GPa}$  هستند. استقامت تسلیم برای فولادهای آبدیده و متوسط، به ترتیب،  $690 \text{ MPa}$  و  $345 \text{ MPa}$  است. بار  $P$  به تدریج از صفر افزایش می‌یابد تا اینکه تغییر شکل میله به مقدار ماکزیمم مطلوبست:  $\delta_m = 1.016 \text{ mm}$  برسد، و سپس تا صفر کاهش می‌یابد. مطلوبست: (الف) ماکزیمم مقدار  $P$ ، (ب) ماکزیمم تنش در میله‌های فولادی آبدیده، (ج) تغییر شکل دائمی پس از حذف بار.

۱۱۰-۲ برای میله مرکب ۱۰۹-۲، اگر  $P$  به تدریج از صفر تا  $436 \text{ kN}$  افزایش و سپس تا صفر کاهش یابد، مطلوبست (الف) ماکزیمم تغییر شکل میله، (ب) ماکزیمم تنش در میله‌های فولادی آبدیده، (ج) تغییر شکل دائمی پس از حذف بار.

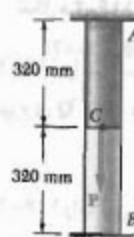
۱۱۱-۲ مساحت مقطع عرضی هر یک از کابل‌ها  $100 \text{ mm}^2$  است. کابل‌ها از فولاد الاستوپلاستیک ساخته شده‌اند ( $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 345 \text{ MPa}$ ). نیروی  $Q$  در نقطه  $C$  بر میله صلب  $ABC$  وارد می‌شود و مقدار آن به تدریج از صفر تا  $50 \text{ kN}$  افزایش می‌یابد و مجدداً به صفر می‌رسد. اگر کابل‌ها در ابتدا کشیده باشند، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش در کابل  $BC$ ، (ب) ماکزیمم انحراف نقطه  $C$ ، (ج) تغییر مکان نقطه  $C$  (راهنمایی: در قسمت ج، کابل  $CE$  کشیده نیست).



شکل م-۱۱۱

۱۱۲-۲ مسئله ۱۱۱-۲ را با این فرض حل کنید که به جای کابل از میله‌هایی با همان مقطع عرضی و از همان جنس استفاده شود. همچنین فرض کنید که میله‌ها مهار شوند به طوری که بتوانند نیروهای فشاری را بدون کماتش تحمل کنند.

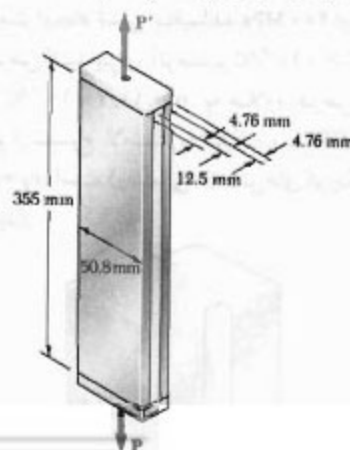
۱۰۷-۲ میله  $AB$  از دو قسمت استوانه‌ای  $AC$  و  $BC$ ، هر یک با مساحت مقطع عرضی  $2950 \text{ mm}^2$  ساخته شده است. قسمت  $AC$  از فولاد متوسط،  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$ ، و قسمت  $BC$  از فولاد پر استقامت، با  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 345 \text{ MPa}$  ساخته شده است. بار  $P$  در  $C$  وارد می‌شود. اگر فولادها از نوع الاستوپلاستیک باشند، مطلوبست: (الف) ماکزیمم انحراف  $C$  در صورتی که  $P$  به تدریج از صفر تا  $1625 \text{ kN}$  افزایش و سپس تا صفر کاهش یابد، (ب) ماکزیمم تنش در هر قسمت میله، (ج) انحراف دائمی  $C$ .



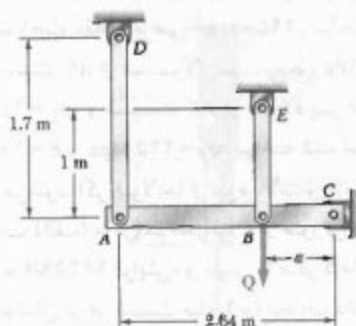
شکل م-۱۰۷

۱۰۸-۲ برای میله مرکب مسئله ۱۰۹-۲، اگر  $P$  به تدریج از صفر افزایش یابد، انحراف نقطه  $C$  به مقدار ماکزیمم  $\delta_m = 0.5 \text{ mm}$  برسد و سپس تا صفر کاهش یابد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم مقدار  $P$ ، (ب) تنش ماکزیمم در هر قسمت میله.

۱۰۹-۲ دو میله فولادی آبدیده، هر یک به ضخامت  $4.76 \text{ mm}$ ، به میله‌ای از فولاد متوسط به ضخامت  $12.5 \text{ mm}$



شکل م-۱۰۹

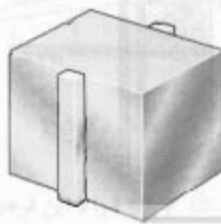


شکل م ۱۱۶-۲

۱۱۷-۲ مسئله ۱۱۶-۲ را با این فرض حل کنید که مقدار نیروی  $Q$  وارده در  $B$  به تدریج از صفر تا  $135 \text{ kN}$  افزایش یابد.

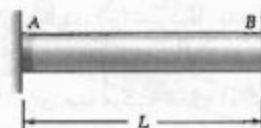
۱۱۸-۲\* مسئله ۱۱۶-۲ را با این فرض حل کنید که مقدار نیروی  $Q$  وارده در  $B$  به تدریج از صفر تا  $260 \text{ kN}$  افزایش یابد و سپس مجدداً به صفر برسد. اگر  $a = 0.64 \text{ m}$ ، مطلوبست: (الف) تنش باقیمانده در هر میله، (ب) انحراف نهایی نقطه  $B$ . فرض کنید میله‌ها مهار شده‌اند به طوری که نیروی فشاری را بدون کماتش تحمل می‌کنند.

۱۱۹-۲\* یک میله باریک آلومینیومی، مطابق شکل، به یک طرف ورق ضخیم فولادی متصل است. ابتدا، در  $T_1 = 21^\circ\text{C}$ ، تمام تنش‌ها صفر هستند. اگر دما به تدریج تا  $T_2$  افزایش و سپس تا  $T_3$  کاهش یابد. مطلوبست: (الف) بیشترین دمای  $T_3$  که باعث ایجاد تنش‌های باقیمانده نمی‌شود، (ب) دمای  $T_2$  که باعث ایجاد تنش باقیمانده  $400 \text{ MPa}$  در آلومینیم می‌شود. فرض کنید برای آلومینیم  $\alpha_a = 23.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$  و برای فولاد  $\alpha_f = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ . به علاوه، فرض کنید که آلومینیم از نوع الاستوپلاستیک، با  $E = 75 \text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$  است. (دانه‌نمایی: از تنش‌های کوچک در ورق صرف‌نظر کنید).



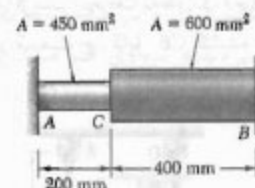
شکل م ۱۱۹-۲

۱۱۳-۲ میله فولادی یکتوانخت با مساحت مقطع عرضی  $A$  به تکیه‌گاههای صلب متصل است و در دمای  $7^\circ\text{C}$  بی‌تنش است. فولاد از نوع الاستوپلاستیک، با  $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$  و  $G = 200 \text{ GPa}$  است. اگر  $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ، مطلوبست: (الف) تنش در میله: وقتی دما تا  $160^\circ\text{C}$  افزایش می‌یابد، (ب) پس از اینکه دما مجدداً تا  $7^\circ\text{C}$  کاهش می‌یابد.



شکل م ۱۱۳-۲

۱۱۴-۲ میله فولادی  $ABC$  به تکیه‌گاههای صلب متصل است و در دمای  $20^\circ\text{C}$  در حالت بی‌تنش است. فولاد از نوع الاستوپلاستیک، با  $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$  و  $E = 200 \text{ GPa}$  است. دمای هر دو قسمت میله تا  $120^\circ\text{C}$  افزایش می‌یابد. اگر  $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ، مطلوبست: (الف) تنش در قسمت  $AC$ ، (ب) انحراف نقطه  $C$ .



شکل م ۱۱۴-۲

۱۱۵-۲\* مسئله ۱۱۴-۲ را با این فرض حل کنید که دمای میله تا  $120^\circ\text{C}$  افزایش و سپس تا  $20^\circ\text{C}$  کاهش یابد.

۱۱۶-۲ میله صلب  $ABC$  توسط دو بازوی  $AD$  و  $BE$  نگه داشته شده است. این دو بازو دارای مقاطع عرضی یکتوانخت مستطیلی  $37.5 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$  و از فولاد متوسط الاستوپلاستیک، با  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$  هستند. مقدار نیروی  $Q$  وارده در  $B$  به تدریج از صفر تا  $260 \text{ kN}$  افزایش می‌یابد. اگر  $a = 0.64 \text{ m}$ ، مطلوبست: (الف) مقدار تنش قائم در هر بازو، (ب) ماکزیمم انحراف نقطه  $B$ .

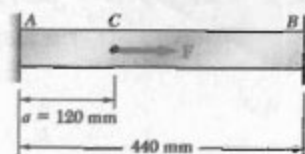


۱۲۱-۲ مسئله ۱۲۰-۲ را با فرض  $a = 180 \text{ mm}$  حل کنید.

۱۲۲-۲\* برای میله مرکب مسئله ۱۰۹-۲، اگر  $P$  به تدریج از صفر تا  $436 \text{ kN}$  افزایش و سپس تا صفر کاهش یابد، تنش‌های باقیمانده در میله‌های فولادی آبدیده را بیابید.

۱۲۳-۲\* برای میله مرکب مسئله ۱۰۹-۲، اگر  $P$  به تدریج از صفر افزایش یابد تا تغییر شکل میله به مقدار ماکزیمم  $\delta_m = 10 \text{ mm}$  برسد و سپس تا صفر کاهش یابد، تنش‌های باقیمانده را در میله‌های فولادی آبدیده بیابید.

۱۲۰-۲ میله  $AB$  دارای مساحت مقطع عرضی  $1200 \text{ mm}^2$  و از فولاد الاستوپلاستیک، با  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$  است. اگر نیروی  $F$  به تدریج از صفر تا  $520 \text{ kN}$  افزایش و سپس تا صفر کاهش یابد، مطلوب است: (الف) انحراف دائمی نقطه  $C$ ، (ب) تنش باقیمانده در میله.



شکل م ۱۲۰-۲

## مرور و خلاصه فصل ۲

در این فصل، مفهوم کرنش و رابطه بین تنش و کرنش را در مواد مختلف مورد بحث قرار دادیم و تغییر شکل‌های اجزای ساختمانی را تحت بارگذاری محوری تعیین کردیم.

میله‌ای به طول  $L$  و با مقطع عرضی یکنواخت را در نظر گرفتیم و تغییر شکل آن را تحت بار محوری  $P$  با  $\delta$  نشان دادیم (شکل ۱-۲). کرنش قائم  $\epsilon$  را در میل به عنوان تغییر شکل طول واحد تعریف کردیم [قسمت ۲-۲]:

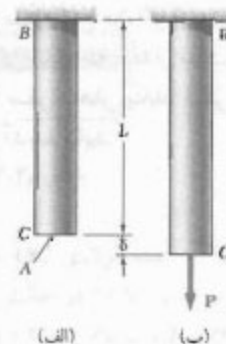
$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (۱-۲)$$

در میل به با مقطع عرضی متغیر، کرنش قائم در نقطه معین  $Q$  را با در نظر گرفتن جزء کوچکی از میل در نقطه  $Q$  تعریف کردیم. طول این جزء را با  $\Delta x$  و تغییر شکل آن را تحت بار داده شده با  $\Delta \delta$  نشان دادیم و رابطه زیر را نوشتیم:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \quad (۲-۲)$$

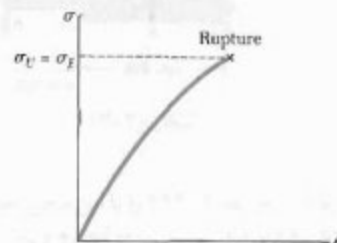
با ترسیم تنش  $\sigma$  بر حسب کرنش  $\epsilon$ ، نمودار تنش-کرنش را به دست آوردیم [قسمت ۳-۲]. از این نمودار، توانستیم میان مواد شکننده (ترد) و چکش‌خوار (نرم) تمایز زیر را قائل شویم: نمونه‌ای که از ماده شکننده ساخته شده است گسیخته می‌شود بدون اینکه آهنگ کشیدگی آن قبل از گسیختگی تغییر قابل توجهی داشته باشد (شکل ۱۱-۲)، ولی نمونه چکش‌خوار پس از اینکه تنش آن به مقدار بحرانی  $\sigma_y$ ، به نام استقامت تسلیم، می‌رسد تسلیم می‌شود؛ یعنی، نمونه قبل از اینکه گسیخته شود، با افزایش نسبتاً کوچک بار وارده (شکل ۹-۲) تغییر شکل قابل توجهی می‌دهد. بتن یکی از موادی است که خواص آن در کشش و فشار کاملاً متفاوت است.

کرنش قائم

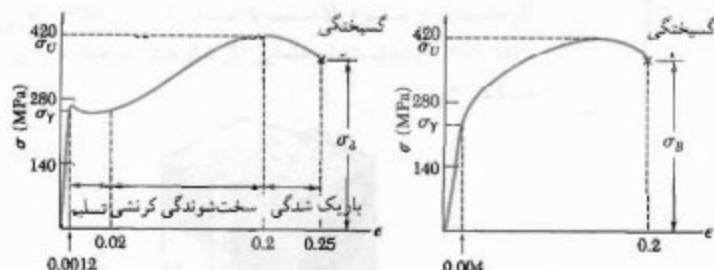


شکل ۱-۲ نمودار تنش-کرنش

نمودار تنش-کرنش



شکل ۱۱-۲



(الف) فولاد کم‌کربن

(ب) آلومینوم

شکل ۹-۲

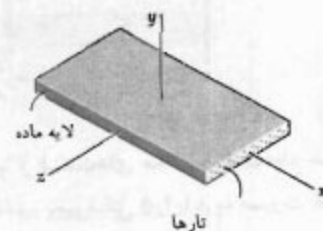
قانون هوک: مدول الاستیسیته

در قسمت ۲-۵ دیدیم که قسمت اولیه نمودار تنش-کرنش یک خط مستقیم است. یعنی، برای تغییر شکل های کم، تنش با کرنش به طور مستقیم متناسب است:

$$\sigma = E\varepsilon$$

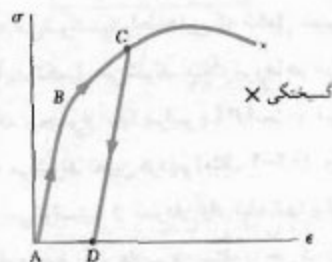
این رابطه را قانون هوک، و  $E$  را مدول الاستیسیته می گویند. ما کریتم تنش را که معادله (۲-۴) برای آن به کار می رود حد تناسب ماده می گویند.

مواد تحت بررسی، همسانگرد (دارای خواص مستقل از جهت) بودند. در قسمت ۲-۵، دسته ای از مواد ناهمسانگرد را نیز بررسی کردیم؛ یعنی، موادی که خواص آنها به جهت بستگی دارد و آنها را مواد مرکب تقویت شده با تار می گویند. این مواد از تارهای محکم و سفتی که در لایه ضعیف تر و نرمتری قرار دارند ساخته شده اند (شکل ۲-۱۷). دیدیم که، برحسب جهت بارگذاری، از مدول های الاستیسیته مختلفی باید استفاده کرد.



شکل ۲-۱۷

حد الاستیک، تغییر شکل پلاستیک



شکل ۲-۱۸

اگر کرنش هایی که با اعمال بار معینی در نمونه ای به وجود می آیند با حذف بار از بین بروند، می گویند ماده رفتار الاستیکی دارد و ما کریتم تنش را که به ازای آن این حالت روی می دهد حد الاستیک ماده می گویند [قسمت ۲-۶]. اگر ماده از حد الاستیک خود فراتر رود، با حذف بار، تنش و کرنش به صورت خطی کاهش می یابند و کرنش به صفر نمی رسد (شکل ۲-۱۸). یعنی، یک تغییر شکل دائمی (پلاستیک) در ماده به وجود می آید.

خستگی، حد دوام

در قسمت ۲-۷، پدیده خستگی را بررسی کردیم. در این پدیده، عضوهای ساختمانی یا مکانیکی پس از تعداد زیادی بارگذاری تکراری گسیخته می شوند، حتی اگر تنش ها در محدوده الاستیک باشند. در آزمایش استاندارد خستگی، تعداد  $n$  سیکل بارگذاری ساربرداری مورد نیاز برای گسیختگی یک نمونه برای هر مقدار تنش ما کریتم  $\sigma$  تعیین و منحنی  $\sigma-n$  رسم می شود. مقدار  $\sigma$  را که به ازای آن، حتی برای تعداد نامحدودی سیکل، گسیختگی روی نمی دهد حد دوام ماده می گویند.

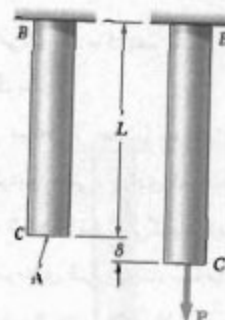
تغییر شکل الاستیک در  
بارگذاری محوری

در قسمت ۲-۸، تغییر شکل های الاستیک انواع مختلف عضوهای ساختمانی و مکانیکی را در شرایط مختلف بارگذاری محوری تعیین کردیم. دیدیم اگر میله ای به طول  $L$  و با مساحت مقطع عرضی  $A$  در انتهای خود تحت بار محوری مرکزی  $P$  قرار گیرد (شکل ۲-۲۲)، تغییر شکل متناظر چنین است:

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (۷-۲)$$

اگر میله در نقاط مختلف بارگذاری شود یا از قسمت های مختلف با مقاطع عرضی مختلف و از مواد مختلف تشکیل شده باشد، تغییر شکل  $\delta$  را باید به صورت مجموع تغییر شکل های اجزای آن بیان کرد [مثال ۲-۱۰]:

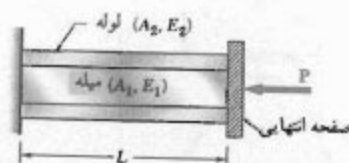
$$\delta = \sum_i \frac{P L_i}{A_i E_i} \quad (۸-۲)$$



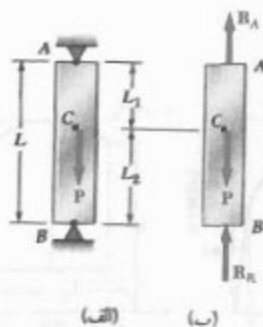
شکل ۲۲-۲

در قسمت ۲-۹، مسائل نامعین استاتیکی را حل کردیم؛ یعنی، مسائلی را که در آنها واکنش ها و نیروهای داخلی را نمی توان صرفاً با استاتیک تعیین کرد. معادله های تعادل، که با توجه به نمودار آزاد عضو نوشته می شوند، با رابطه هایی که شامل تغییر شکل ها هستند و از هندسه مسئله به دست می آیند تکمیل می شوند. مثلاً، نیروها در میله و لوله شکل ۲۵-۲ را با توجه به اینکه مجموع آنها برابر با  $P$  است و نیز باعث تغییر شکل های مساوی در میله و لوله می شوند تعیین کردیم [مثال ۲-۲۰]. واکنش در تکیه گاه های میله شکل ۲۶-۲ را نیز نمی توانستیم از نمودار آزاد میله تنها بیابیم [مثال ۲-۲۳]؛ لذا، کشیدگی کلی میله را مساوی صفر قرار دادیم و مسئله را حل کردیم.

## مسائل نامعین استاتیکی



شکل ۲۵-۲



شکل ۲۶-۲

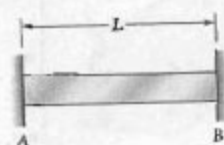
در قسمت ۲-۱۰، مسائلی را که با تغییرات دما سر و کار دارند بررسی کردیم. ابتدا دیدیم که اگر دمای میله آزاد  $AB$  به طول  $L$  به اندازه  $\Delta T$  افزایش یابد، کشیدگی آن چنین است:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \quad (21-2)$$

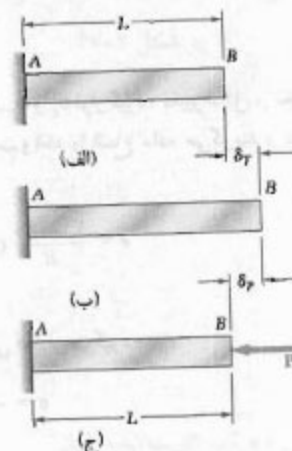
که در آن  $\alpha$  ضریب انبساط گرمایی ماده است. دیدیم که کرنش متناظر، به نام کرنش گرمایی، چنین است:

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T \quad (22-2)$$

هیچ تنشی وابسته به این کرنش نیست. ولی، اگر میله  $AB$  توسط تکیه‌گاه‌های ثابت مقید شده باشد (شکل ۲-۳۵ الف)، با افزایش دمای میله، تنش‌هایی در آن به وجود می‌آید و این ناشی از واکنش در تکیه‌گاه‌هاست. برای تعیین مقدار  $P$  واکنش‌ها، میله را از تکیه‌گاه  $B$  جدا کردیم (شکل ۲-۳۶) و دو تغییرشکل زیر را به طور جداگانه بررسی کردیم: یکی  $\delta_T$  هنگام انبساط آزاد بر اثر تغییر دما و دیگری  $\delta_P$  ناشی از نیروی  $P$ ، که برای برگرداندن میله به طول اولیه‌اش نیاز است به طوری که میله مجدداً قابل اتصال به تکیه‌گاه  $B$  باشد. تغییرشکل کلی  $\delta = \delta_T + \delta_P$  را مساوی صفر قرار دادیم، و با حل آن  $P$  را تعیین کردیم. گرچه کرنش نهایی در میله  $AB$  صفر است، ولی برای میله‌های متشکل از قسمت‌هایی که مقاطع عرضی یا جنس مختلف دارند چنین نیست، زیرا تغییرشکل اجزای مختلف معمولاً صفر نیست [مثال ۲-۵۶].



شکل ۲-۳۵ الف



شکل ۲-۳۶

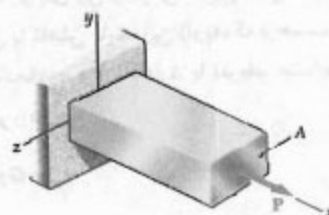
با اعمال بار محوری  $P$  بر میله همگن و باریک (شکل ۲-۳۹ الف)، در آن کرنش‌های محوری و جانبی (عرضی) به وجود می‌آید [قسمت ۲-۱۱]. نسبت کرنش جانبی به کرنش محوری را نسبت پواسون می‌گویند و با  $\nu$  نشان می‌دهند:

$$\nu = - \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} \quad (25-2)$$

لذا، با توجه به کرنش محوری  $\epsilon_x = \sigma_x/E$  در بارگذاری محوری، کرنش‌های جانبی را به صورت زیر بیان کردیم:

$$\epsilon_y = \epsilon_z = - \frac{\nu \sigma_x}{E} \quad (27-2)$$

کرنش جانبی. نسبت پواسون



شکل ۲-۳۹ الف

در قسمت ۲-۱۲، نتیجه بالا را برای بارگذاری چند محوری، که تنش‌های شکل ۲-۴۲ را به وجود می‌آورد، بسط داده و قانون عمومی هوک را به صورت زیر بیان کردیم:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\end{aligned}\quad (2-28)$$

اگر جزیی از ماده‌ای تحت تنش‌های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$ ،  $\sigma_z$  قرار گیرد، تغییر شکل و تغییر حجم می‌دهد [قسمت ۲-۱۳]. تغییر حجم برای حجم واحد را اتساع ماده می‌گویند و با  $e$  نشان داده می‌شود. دیدیم که:

$$e = \frac{1-\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2-31)$$

وقتی ماده‌ای تحت فشار هیدروستاتیکی  $p$  قرار می‌گیرد،

$$e = -\frac{p}{k} \quad (2-34)$$

$k$  را مدول کپه‌ای ماده می‌گویند:

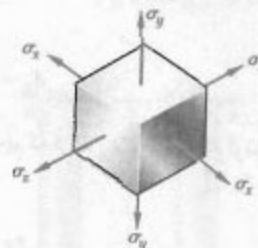
$$k = \frac{E}{3(1-\nu)} \quad (2-33)$$

در فصل ۱ دیدیم که یک ماده تحت بارگذاری کلی شامل تنش‌های قائم و برشی قائم است (شکل ۲-۴۵). تنش‌های برشی گرایش دارند یک جزء مکعبی از ماده را به صورت متوازی‌السطوح مایل درآورند [قسمت ۲-۱۴]. مثلاً، تنش‌های  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{yx}$  در شکل ۲-۴۷ (که دارای مقدار برابرند)، باعث می‌شوند زوایای بین وجوهی که این تنش‌ها بر آنها اثر می‌کنند به اندازه زاویه کوچک  $\gamma_{xy}$  افزایش یا کاهش یابند؛ این زاویه، که برحسب رادیان بیان می‌شود، کرنش برشی متناظر با امتدادهای  $x$  و  $y$  نام دارد. با تعریف مشابه برای کرنش‌های برشی  $\gamma_{yz}$  و  $\gamma_{zx}$ ، رابطه‌های زیر را داریم:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}\end{aligned}\quad (2-35 \text{ و } 2-36)$$

این رابطه‌ها برای هر ماده همسانگردی که تحت برش با مقدار کمتر یا مساوی حد تناسب قرار دارد صحت دارند. ثابت  $G$  را مدول صلابت ماده می‌گویند و رابطه‌های حاصل را قانون هوک برای تنش و کرنش برشی می‌گویند. این رابطه‌ها، همراه با معادله‌های (۲-۲۸)، معجزه‌های از معادله‌ها را تشکیل می‌دهند که به آنها قانون عمومی هوک برای یک ماده همگن همسانگرد می‌گویند.

بارگذاری چند محوری

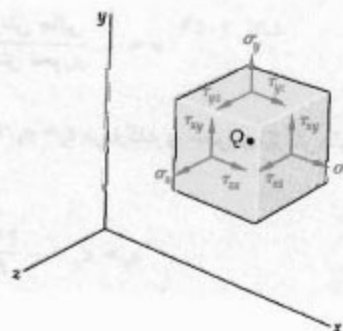


شکل ۲-۴۲

اتساع

مدول کپه‌ای

کرنش برشی. مدول صلابت



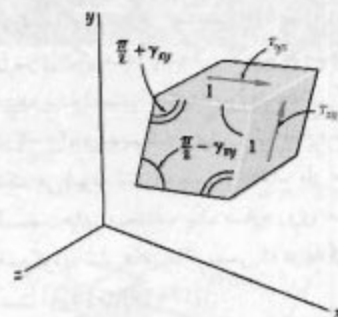
شکل ۲-۴۵



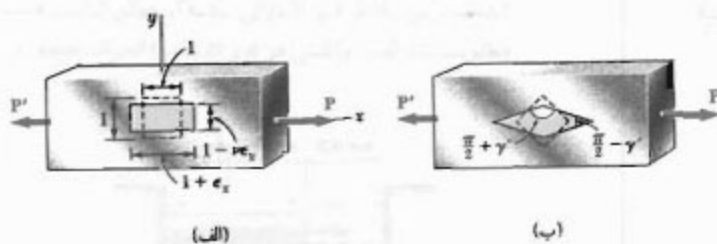
در قسمت ۲-۱۵ دیدیم که بار محوری وارد بر یک میله باریک فقط کرنش‌های قائم محوری و عرضی را در جزئی از ماده که در امتداد محور میله است به وجود می‌آورد. ولی، جزئی که تحت زاویه  $45^\circ$  قرار دارد (شکل ۲-۵۳) تحت کرنش‌های قائم و برشی، قرار می‌گیرد. همچنین، دیدیم که سه ثابت  $E$ ،  $\nu$  و  $G$  مستقل از هم نبودند. رابطه زیر را داشتیم:

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \quad (2-۴۳)$$

از رابطه بالا برای تعیین هر یک از سه ثابت فوق‌الذکر از دو ثابت دیگر می‌توان استفاده کرد.



شکل ۲-۴۷



شکل ۲-۵۳

رابطه‌های تنش-کرنش برای مواد مرکب تقویت شده با تار در قسمت ۲-۱۶ بررسی شدند. معادله‌های مشابه با ۲-۲۸ و ۲-۳۶ و ۲-۳۷ برای این مواد استخراج شدند، و برای این منظور از مدول‌های صلابت، نسبت‌های پواسون و مدول‌های الاستیسته مختلف استفاده کردیم.

مواد مرکب تقویت شده با تار

در قسمت ۲-۱۷، درباره لامل مستحولات بحث کردیم. طبق این اصل، توزیع تنش در یک عضو در نزدیکی نقاط اثر بارها مستقل از حالت واقعی اعمال بار است. طبق این اصل می‌توان توزیع تنش در عضوی را که تحت بار محوری متمرکز است یکنواخت گرفت، به جز در نزدیکی نقاط اثر بار که تمرکز تنش روی می‌دهد.

اصل سنت - ونانت

در عضوهای ساختمانی در نزدیکی ناپیوستگی، مانند سوراخ یا تغییر ناگهانی مقطع عرضی، تمرکز تنش روی می‌دهد [قسمت ۲-۱۸]. نسبت مقدار ماکزیمم تنش که در نزدیک ناپیوستگی روی می‌دهد به تنش متوسط محاسبه شده در مقطع بحرانی را ضریب تمرکز تنش می‌گویند و با  $K$  نشان می‌دهند:

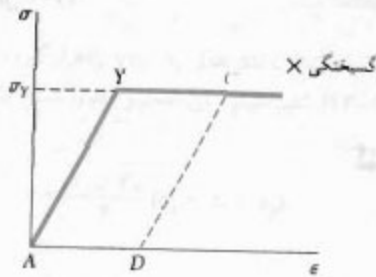
$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{avg}}} \quad (2-۴۸)$$

مقادیر  $K$  برای سوراخ‌های دایره‌ای و گردوها در میله‌های تخت در شکل ۲-۶۴ داده شده‌اند.

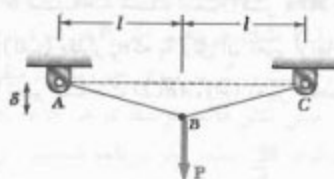
تمرکز تنش

## تغییر شکل پلاستیک

در قسمت ۲-۱۹، درباره تغییر شکل پلاستیک بحث کردیم و دیدیم که در عضوهای ساختمانی پخش خوار هنگامی روی می‌دهد که تنش در قسمتی از عضو بیشتر از استقامت تسلیم ماده شود. این تحلیل را برای یک ماده ایده‌آلی الاستوپلاستیک، که نمودار تنش-کرنش آن در شکل ۲-۶۵ داده شده است، انجام دادیم (مثال‌های ۲-۱۳، ۲-۱۴ و ۲-۱۵). سرانجام، در قسمت ۲-۲۰، دیدیم که وقتی یک سازه نامعین استاتیکی دستخوش تغییر شکل پلاستیک می‌شود، تنش‌ها پس از حذف بار معمولاً از بین نمی‌روند. تنش‌هایی را که در قسمت‌های مختلف یک سازه روی می‌دهند تنش‌های باقیمانده می‌گویند و آنها را از جمع کردن تنش‌های ماکزیممی که در بارگذاری و باربرداری به وجود می‌آیند می‌توان به دست آورد [مثال ۲-۱۶].

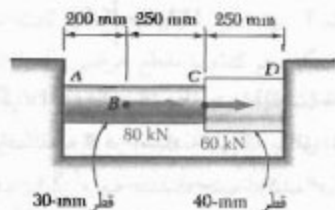


شکل ۲-۶۵



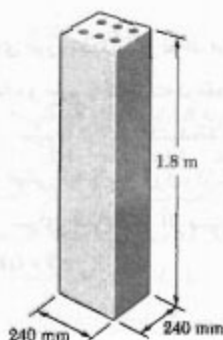
شکل م-۱۲۶

۱۲۷-۲ میلۀ استوانه‌ای فولادی  $CD$  ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) و میلۀ آلومینیومی  $AC$  ( $E = 72 \text{ GPa}$ ) در نقطه  $C$  به هم متصل شده‌اند و در نقاط  $A$  و  $D$  دارای تکیه‌گاههای ثابت هستند. مطلوبست: (الف) واکنش در  $A$  و  $D$ ، (ب) انحراف نقطه  $C$ .



شکل م-۱۲۷

۱۲۸-۲ یک ستون بتنی ( $E_c = 25 \text{ GPa}$ ) و  $E_s = 200 \text{ GPa}$  است. برای فولاد،  $\alpha_s = 11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  و  $\alpha_c = 9.9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  توسط شش میلۀ فولادی تقویت شده است. قطر هر میلۀ ۲۲ mm است. با افزایش دما به مقدار  $35^\circ\text{C}$ ، تنش قائم ایجاد شده را در فولاد و بتن بیابید.

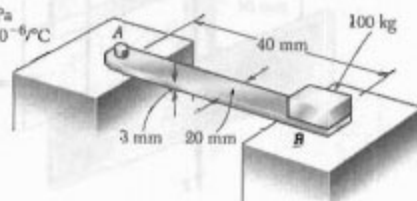


شکل م-۱۲۸

## مسائل تکمیلی

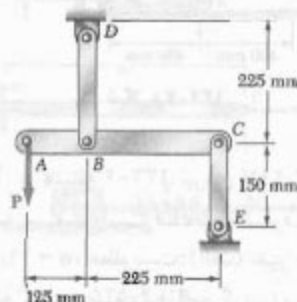
۱۲۴-۲ میلۀ برنجی  $AB$  دارای تکیه‌گاه ثابت  $A$  است و یک سر آن روی تکیه‌گاه زیر  $B$  قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک بین میلۀ و تکیه‌گاه  $B$  برابر با ۰٫۶۰ باشد، کُشش دما را برای آستانه لغزش بیابید. برای میلۀ،  $E = 105 \text{ GPa}$  و  $\alpha = 20 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ .

نوار برنجی

 $E = 105 \text{ GPa}$  $\alpha = 20 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ 

شکل م-۱۲۴

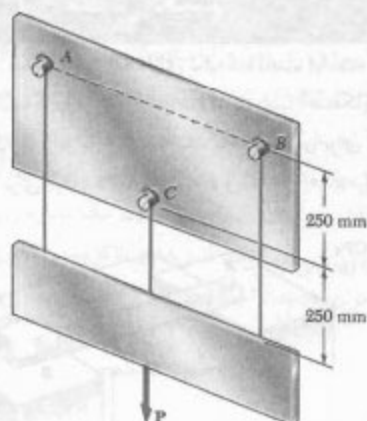
۱۲۵-۲ میلۀ برنجی  $BD$  ( $E = 105 \text{ GPa}$ ) دارای مقطع عرضی با مساحت  $250 \text{ mm}^2$  است. میلۀ  $CE$  از آلومینیوم ( $E = 72 \text{ GPa}$ ) است و دارای مقطع عرضی با مساحت  $450 \text{ mm}^2$  است. مطلوبست ماکزیمم نیروی  $P$  که به طور عمودی در نقطه  $A$  وارد می‌شود به طوری که انحراف نقطه  $A$  از  $35 \text{ mm}$  بیشتر نشود.



شکل م-۱۲۵

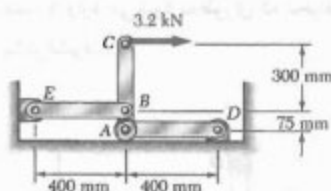
۱۲۶-۲ سیم یکنواخت  $ABC$ ، با طول نگشیده ۲۱، به تکیه‌گاه‌های نشان داده شده متصل است و بار عمودی  $P$  بر نقطه میانی  $B$  وارد می‌شود. اگر مساحت مقطع عرضی سیم را با  $A$  و مدول الاستیسته آن را با  $E$  نشان دهیم، ثابت کنید که برای  $\delta \ll l$ ، انحراف نقطه میانی  $B$  چنین است:

$$\delta = l \sqrt{\frac{P}{AE}}$$



شکل م ۲-۱۳۱

۱۳۲-۲ میل‌های فولادی  $AD$  و  $BE$  هر کدام با مقطع عرضی  $6 \text{ mm} \times 18 \text{ mm}$  هستند. اگر  $E = 200 \text{ GPa}$ ، انحراف نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  از میله صلب  $ABC$  را بیابید.

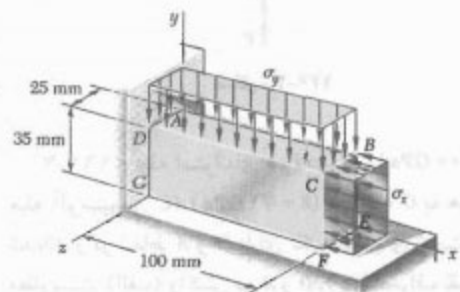


شکل م ۲-۱۳۲

۱۳۳-۲ در مسئله ۱۳۲-۲، نیروی  $3.2 \text{ kN}$  باعث می‌شود نقطه  $C$  به سمت راست منحرف شود. با استفاده از  $\alpha = 11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ، مطلوبست: (الف) تغییر دمایی که باعث می‌شود نقطه  $C$  به وضعیت اول برگردد، (ب) انحراف کل متناظر نقاط  $A$  و  $B$ .

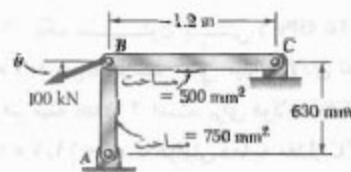
۱۳۴-۲ نمونه فولادی کششی  $ABCD$  ( $E = 200 \text{ GPa}$ ) و  $E = 70 \text{ GPa}$  و  $E_s = 200 \text{ GPa}$  تا ماکزیم کرنش  $\epsilon = 0.0025$  تحت بار کششی قرار می‌گیرد. (الف) با صرف‌نظر از تأثیر گرده‌ها بر تغییر طول نمونه، طول کلی  $AD$  نمونه را پس از حذف بار بیابید. (ب) پس از حذف بار در قسمت الف، بار فشاری وارد می‌شود تا ماکزیم کرنش فشاری به  $\epsilon = 0.0025$  برسد. طول کل  $AD$  را پس از حذف بار فشاری بیابید.

۱۲۹-۲ قطعه نشان داده شده از آلیاژ منیزیم ( $E = 45 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.35$ ) ساخته شده است. اگر  $\sigma_x = -140 \text{ MPa}$ ، مطلوبست: (الف) مقدار  $\sigma_y$  که به ازای آن تغییر ارتفاع قطعه صفر است، (ب) تغییر مساحت  $ABCD$ ، (ج) تغییر حجم قطعه.



شکل م ۲-۱۲۹

۱۳۰-۲ اگر  $E = 200 \text{ GPa}$ ، مطلوبست: (الف) مقدار  $\theta$  که به ازای آن انحراف نقطه  $B$  در امتداد خطی که با افق زاویه  $36^\circ$  دارد به طرف پایین و به سمت چپ باشد، (ب) مقدار انحراف  $B$ .



شکل م ۲-۱۳۰

۱۳۱-۲ سیم‌های مورد استفاده در نقاط  $A$  و  $B$  فولادی و به قطر  $3.25 \text{ mm}$  هستند، و سیم به کار رفته در نقطه  $C$  آلومینیومی و به قطر  $2 \text{ mm}$  است. سیم‌ها در ابتدا کشیده‌اند. با اعمال نیروی  $P = 900 \text{ N}$  در نقطه عیانی لبه پایین ورق، کشش اضافی در هر سیم را بیابید. برای فولاد و آلومینیوم، به ترتیب،  $E_s = 200 \text{ GPa}$  و  $E_a = 70 \text{ GPa}$ .

بارگذاری شده است. طول جزء  $i$  را با  $L_i$ ، مساحت مقطع عرضی آن را با  $A_i$ ، مدول الاستیسیته آن را با  $E_i$  و بار وارد بر انتهای راست آن را با  $P_i$  نشان می‌دهیم. اگر  $P_i$  در سوی راست باشد، مقدار  $P_i$  آن را مثبت و اگر در سوی چپ باشد، منفی می‌گیریم. (الف) برای تعیین تنش قائم متوسط در هر جزء، تغییرشکل هر جزء و تغییرشکل کل میله، یک برنامه کامپیوتری بنویسید. (ب) این برنامه را برای حل مسائل ۱۸-۲ و ۱۹-۲ اجرا کنید.



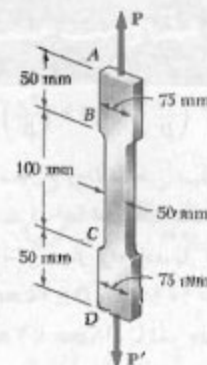
شکل م ۱۸-۲

۲-۲ میله افقی  $AB$  از هر دو انتها ثابت است؛ این میله از  $n$  جزء همگن، هر کدام با مقطع عرضی یکنواخت، ساخته شده است و تحت بارگذاری داده شده قرار دارد. طول جزء  $i$  را با  $L_i$ ، مساحت مقطع عرضی آن را با  $A_i$ ، مدول الاستیسیته آن را با  $E_i$  و بار وارد بر انتهای سمت راست را با  $P_i$  نشان می‌دهیم. اگر  $P_i$  در سوی راست باشد، مقدار  $P_i$  را مثبت و اگر در سوی چپ باشد، منفی می‌گیریم. (توجه کنید که  $P_1 = 0$ ). (الف) برای تعیین واکنش‌ها در  $A$  و  $B$ ، تنش قائم متوسط در هر جزء و تغییرشکل هر جزء، یک برنامه کامپیوتری بنویسید. (ب) این برنامه را برای حل مسائل ۳۹-۲ و ۴۰-۲ اجرا کنید.



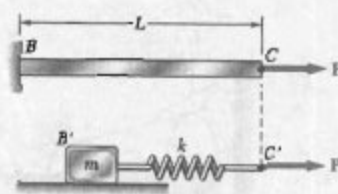
شکل م ۳۹-۲

۲-۳ میله  $AB$  از  $n$  جزء همگن، هر کدام با مقطع عرضی یکنواخت، تشکیل شده است. انتهای  $A$  ثابت است و بین انتهای  $B$  و سطح قائم ثابت سمت راست در ابتدا فاصله  $\delta_0$  وجود دارد. طول جزء  $i$  را با  $L_i$ ، مساحت مقطع عرضی آن را با  $A_i$ ، مدول الاستیسیته آن را با  $E_i$  و ضریب انبساط گرمایی آن را با  $\alpha_i$  نشان می‌دهیم. پس از اینکه دما به اندازه  $\Delta T$  افزایش می‌یابد، فاصله مذکور از بین می‌رود و سطوح قائم نیروی مساوی و متضاد را بر میله وارد می‌کنند. (الف) برای تعیین



شکل م ۱۳۴-۲

۲-۱۳۵ میله یکنواخت  $BC$  دارای مساحت مقطع عرضی  $A$  و از فولاد متوسط الاستیسیته  $E$  با مدول الاستیسیته  $E$  و استقامت تسلیم  $\sigma_y$  است. نیروی محوری  $P$  به تدریج بر میله وارد می‌شود و سپس حذف می‌شود. با استفاده از مجموعه قطعه - فنر نشان داده شده، انحراف نقطه  $C$  را شبیه‌سازی کنید (انحراف نقاط  $C$  و  $C'$  برای تمام مقادیر  $P$  یکسان است). اگر ضریب اصطکاک بین قطعه و سطح افق را با  $\mu$  نشان دهیم، مطلوبست عبارت: (الف) جرم  $m$  قطعه، (ب) ثابت  $k$  فنر.



شکل م ۱۳۵-۲

### مسائل کامپیوتری

مسائل زیر برای حل با کامپیوتر طرح شده‌اند. برنامه را در آحاد SI به گونه‌ای بنویسید که بتوان اجزای توپر استوانه‌ای را با قطر یا با مساحت مقطع عرضی آنها تعریف کرد.

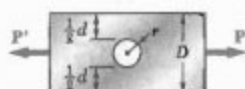
۲-۱ میله‌ای از  $n$  جزء تشکیل شده است. این اجزا همگن و دارای مقطع عرضی یکنواخت‌اند. میله مطابق شکل



۲-ک ۵ ضریب تمرکز تنش برای یک میله تخت، که دارای سوراخ مرکزی است و تحت بار محوری قرار دارد، به صورت زیر است:

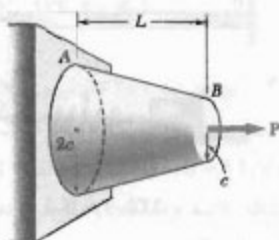
$$K = 3,000 - 3,13 \left( \frac{r}{D} \right) + 3,66 \left( \frac{r}{D} \right)^2 - 1,53 \left( \frac{r}{D} \right)^3$$

که در آن  $r$  شعاع سوراخ و  $D$  عرض میله است. یک برنامه کامپیوتری بنویسید که با استفاده از مقادیر معلوم  $D$ ،  $r$ ، ضخامت  $t$  میله و تنش مجاز  $\sigma_{all}$  ماده، بار مجاز  $P$  را تعیین کند. اگر  $\sigma_{all} = 10 \text{ MPa}$  و  $D = 75 \text{ mm}$ ،  $r = 6 \text{ mm}$  و  $t = 3 \text{ mm}$  تا  $18 \text{ mm}$ ، با نمو  $3 \text{ mm}$ ، بیایید.



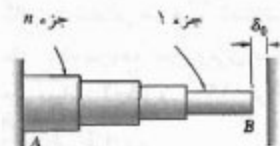
شکل م ۲-۵

۲-ک ۶ مخروط ناقص توپری، مطابق شکل، تحت نیروی محوری  $P$  قرار دارد. کشیدگی دقیق مخروط برابر است با  $(PL)/(\pi E t^3)$ . یک برنامه کامپیوتری بنویسید که این مخروط را با  $n$  استوانه دوار با ضخامت مساوی و با شعاعی که با شعاع متوسط مخروط برابر است جایگزین، و کشیدگی مخروط را محاسبه کند. مطلوبیت درصد خطای محاسبه کامپیوتری برای: (الف)  $n = 6$ ، (ب)  $n = 12$ ، (ج)  $n = 60$ .



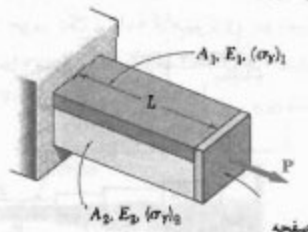
شکل م ۲-۶

مقدار واکنش در  $A$  و  $B$ ، تنش قائم در هر جزء و انحراف هر جزء، یک برنامه کامپیوتری بنویسید. (ب) این برنامه را برای حل مسائل ۲-۵۲، ۲-۵۳، ۲-۵۵ و ۲-۵۷ اجرا کنید.



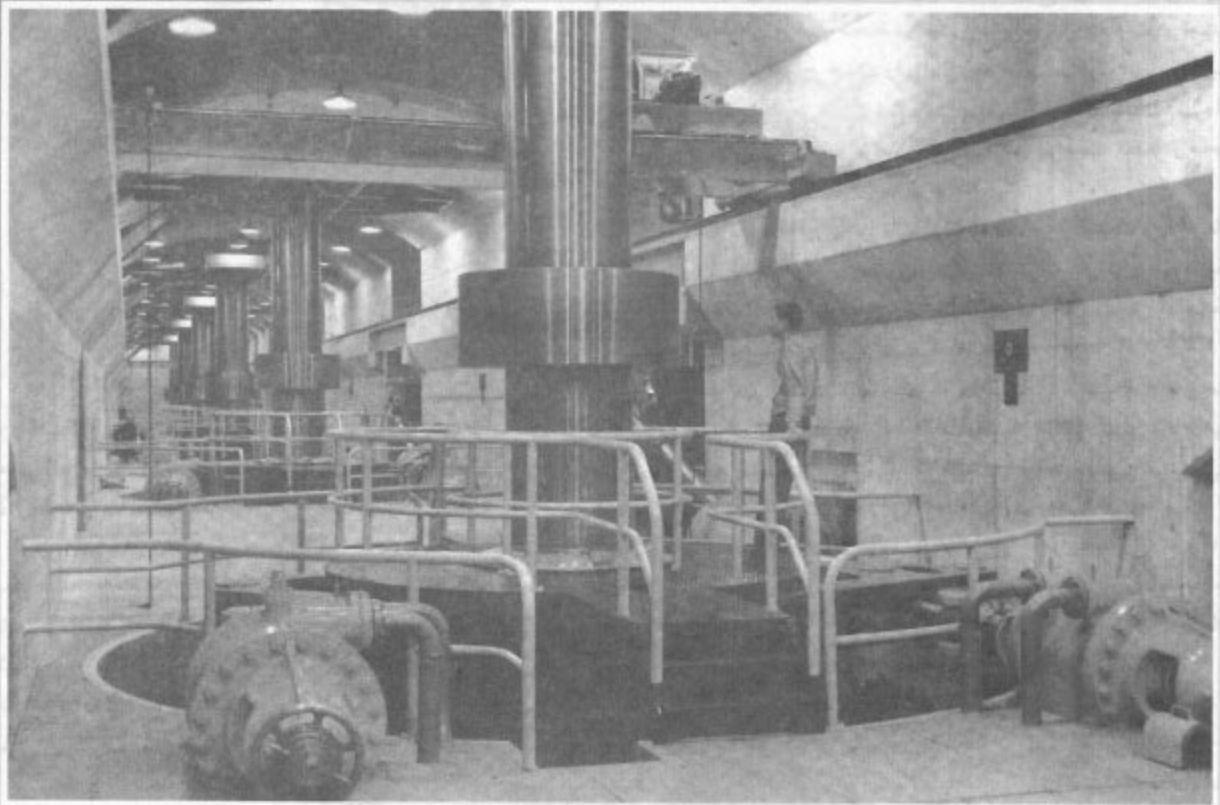
شکل م ۲-۳

۲-ک ۴ میله  $AB$  به طول  $L$  است و از دو ماده مختلف با مساحت مقطع عرضی، مدول الاستیته و استقامت تسلیم معلومی ساخته شده است. میله، مطابق شکل، تحت بار  $P$  قرار دارد. این بار از صفر تدریجاً افزایش می‌یابد تا اینکه تغییر شکل میله به مقدار ماکزیمم  $\delta_m$  می‌رسد و سپس تا صفر کاهش می‌یابد. (الف) برای هر مقدار  $\delta_m$ ، که در گستره صفر تا  $120\%$  تغییر شکلی که باعث تسلیم هر دو ماده می‌شود به طور مساوی قرار دارد، یک برنامه کامپیوتری بنویسید که با استفاده از آن بتوان ماکزیمم مقدار  $P_m$  بار، ماکزیمم تنش قائم در هر ماده، تغییر شکل دائمی  $\delta_p$  میله و تنش باقیمانده در هر ماده را تعیین کرد. (ب) این برنامه را برای حل مسائل ۲-۱۰۹ و ۲-۱۱۰ اجرا کنید.



شکل م ۲-۴





در این فصل، پیچش و تنش و تغییر شکل ناشی از آن را مطالعه می‌کنیم. در نیروگاه هیدرو الکتریکی نشان داده شده، شفت‌های عمودی که روتور مولدهای الکتریکی را می‌گردانند تحت کوبل توربین‌ها قرار دارند.

## ۱-۳ مقدمه

در دو فصل قبل، نحوه محاسبه تنش‌ها و کرنش‌ها را در عضوهایی که تحت بارهای محوری قرار داشتند مطالعه کردیم. در این فصل، عضوهای ساختمانی و مکانیکی را تحت پیچش بررسی، و تنش و کرنش در اعضاها یا مقطع عرضی دایره‌ای را تحت کوپل‌های پیچشی  $T$  و  $T'$  تحلیل می‌کنیم (شکل ۱-۳). این کوپل‌ها، که دارای مقدار یکسان  $T$  و سوهای مخالف‌اند، کمیت‌های برداری‌اند و با پیکان‌های خمیده (شکل ۱-۳ الف)، یا با بردارهای کوپل (شکل ۱-۳ ب) نشان داده می‌شوند.



الف)



ب)

شکل ۱-۳

در اغلب کاربردهای مهندسی با عضوهای تحت پیچش مواجه می‌شویم. متداول‌ترین آنها شفت است که برای انتقال قدرت از نقطه‌ای به نقطه دیگر به کار می‌رود. مثلاً، از شفت

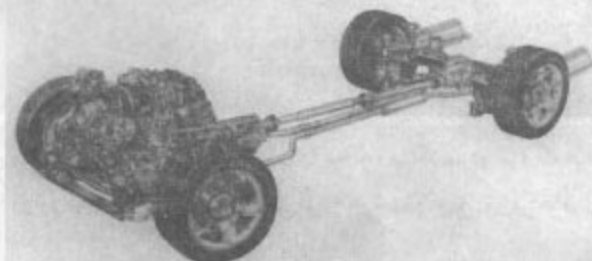
نشان داده شده در شکل ۲-۳ برای انتقال قدرت از موتور به چرخ‌های عقب اتومبیل استفاده می‌شود. این شفت‌ها به صورت توپر (شکل ۱-۳) یا تو خالی هستند.

سیستم نشان داده شده را در شکل ۳-۳ الف در نظر بگیرید. این سیستم از توربین بخاری  $A$  و مولد الکتریکی  $B$  که به شفت  $AB$  متصل است تشکیل شده است. با تجزیه این سیستم به سه قسمت (شکل ۳-۳ ب)، دیده می‌شود که توربین، کوپل پیچشی  $T$  را بر شفت، و شفت نیز کوپل  $T$  را بر مولد وارد می‌کند. مولد نیز کوپل مساوی و مخالف  $T'$  را بر شفت، و شفت کوپل  $T'$  را بر توربین اعمال می‌کند.

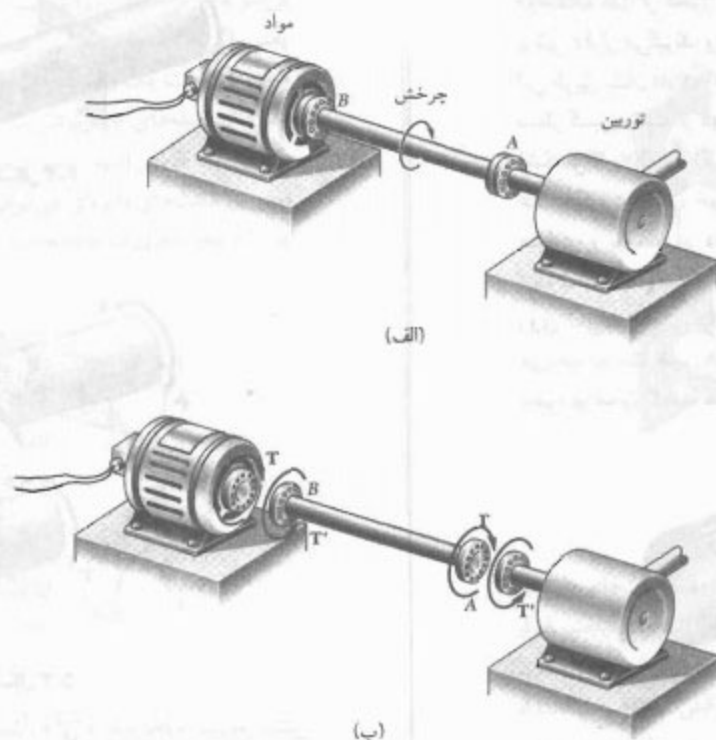
ابتدا، تنش و تغییر شکل در شفت‌های دایره‌ای را تحلیل می‌کنیم. در قسمت ۳-۳، خاصیت مهم زیر را نشان می‌دهیم: وقتی یک شفت دایره‌ای تحت پیچش قرار می‌گیرد، تمام مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای و بدون اعوجاج می‌مانند. یعنی، گرچه مقاطع عرضی مختلف شفت تحت زوایای متفاوت در امتداد شفت می‌چرخند، ولی این چرخ صلب‌گونه است. با این خاصیت می‌توان توزیع کرنش برشی را در یک شفت دایره‌ای تعیین کرد و نتیجه گرفت که کرنش برشی برحسب فاصله از محور شفت به صورت خطی تغییر می‌کند.

با در نظر گرفتن تغییر شکل‌ها در ناحیه الاستیک و با استفاده از قانون هوک برای تنش و کرنش برشی، توزیع تنش برشی در یک شفت دایره‌ای تعیین می‌شود و فرمول‌های پیچش الاستیک به دست می‌آیند (قسمت ۳-۴).

در قسمت ۳-۵، با فرض تغییر شکل الاستیک، زاویه پیچش یک شفت دایره‌ای را که تحت کوپل معینی قرار دارد تعیین می‌کنیم. در قسمت ۳-۶، مسائل شفت‌های نامعین استاتیکی را بررسی می‌کنیم.



شکل ۲-۳ در زنجیره قدرت نشان داده شده، انتقال قدرت از موتور به چرخ‌های عقب توسط شفت انجام می‌شود.



شکل ۳-۳

### ۳-۲ مقدمه‌ای درباره تنش در شفت

شفت  $AB$  را که در نقاط  $A$  و  $B$  تحت گشتاورهای مساوی و متضاد  $T$  و  $T'$  قرار دارند در نظر می‌گیریم، و یک برش را عمود بر محور شفت از نقطه اختیاری  $C$  می‌گذرانیم (شکل ۳-۴). نمودار آزاد قسمت  $BC$  شامل نیروهای جزئی برشی  $dF$  است که قسمت  $AC$  بر قسمت  $BC$  هنگام پیچش در امتداد عمود بر شعاع شفت وارد می‌کند (شکل ۳-۵الف). تعادل قسمت  $BC$  نشان می‌دهد که سیستم نیروهای جزئی معادل است با گشتاور داخلی  $T$ ، که مساوی و مخالف  $T'$  است (شکل ۳-۵ب). مجموع لنگر\* نیروهای برشی  $dF$  نسبت به محور شفت را مساوی با گشتاور  $T$  قرار داده و می‌نویسیم:

$$\int \rho \, dF = T$$

اما  $dF = \tau \, dA$ ، که در آن  $\tau$  تنش برشی وارد بر جزء سطح  $dA$  است. در نتیجه،

$$\int \rho \, (\tau \, dA) = T \quad (۱-۳)$$

\* به آن گشتاور نیز می‌گویند - مترجم.

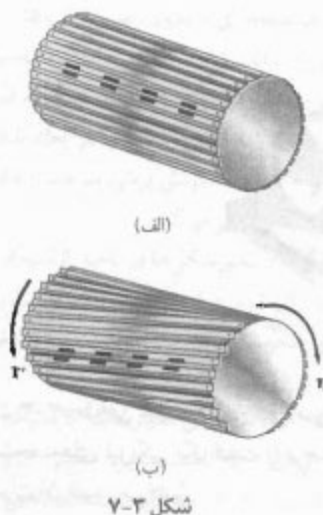
در قسمت ۳-۷، مباحثی شفت‌ها را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، مشخصه‌های فیزیکی یک شفت را برحسب سرعت چرخش و قدرت آن تعیین می‌کنیم.

برای تعیین تنش در نزدیک مقطعی که کوپل وارد می‌شود یا در نزدیک مقطعی که شفت ناگهان تغییر قطر می‌دهد، از فرمول‌های پیچش نمی‌توان استفاده کرد. به علاوه، این فرمول‌ها فقط در ناحیه الاستیک ماده به کار می‌روند.

در قسمت ۳-۸، تمرکز تنش را در مقطعی که قطر شفت در آن تغییر ناگهانی می‌دهد بررسی می‌کنیم. در قسمت‌های ۳-۹ تا ۳-۱۱، تنش و تغییر شکل در شفت‌های دایره‌ای چکش‌خواری را که از نقطه تسلیم خود فراتر رفته است مطالعه می‌کنیم. در این قسمت‌ها، تغییر شکل پلاستیک و تنش‌های باقیمانده را نیز بررسی می‌کنیم.

در قسمت ۳-۱۲، پیچش عضوهای غیردایره‌ای و در قسمت ۳-۱۳ توزیع تنش در شفت‌های غیردایره‌ای توخالی جدار نازک را تحلیل می‌کنیم.

با توجه به شرایط تعادل (قسمت ۱-۱۲)، وجوهی که از دو صفحه گذرا از محور شفت تشکیل می‌شوند نیز تحت تنش برشی قرار می‌گیرند. وجود این تنش‌ها را در پیچش می‌توان به این طریق نشان داد که "شفت" را متشکل از تیغه‌های مجزایی در نظر گیریم که از دو انتها به دیسک‌هایی لولا شده‌اند (شکل ۳-۷ الف). اگر روی دو تیغه مجاور را با رنگ علامت‌گذاری کنیم، خواهیم دید که با اعمال گشتاورهای مساوی و ناهمسو بر دو انتهای "شفت" (شکل ۳-۷ ب)، دو تیغه نسبت به یکدیگر می‌لغزند. گرچه در شفت چنین لغزشی روی نمی‌دهد، ولی گرایش برای لغزش وجود دارد و نشان می‌دهد که تنش‌هایی در صفحات طولی و نیز در صفحات عمود بر محور شفت به وجود آمده‌اند\*.

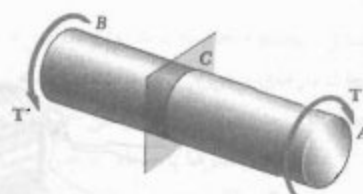


شکل ۳-۷

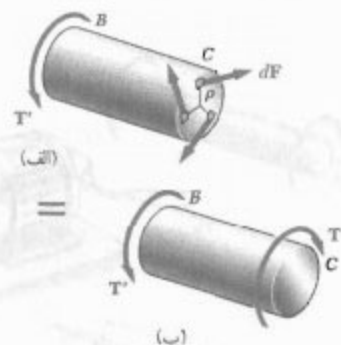
### ۳-۳ تغییر شکل در شفت دایره‌ای

یک شفت دایره‌ای را در نظر بگیرید که از یک انتها به تکیه‌گاه ثابتی متصل است (شکل ۳-۸ الف). اگر گشتاور  $T$  بر انتهای دیگر وارد شود، شفت می‌پیچد و انتهای آزاد آن تحت زاویه  $\phi$ ، موسوم به زاویه پیچش، دوران می‌کند (شکل ۳-۸ ب). آزمایش نشان می‌دهد که برای گستره معینی از مقادیر  $T$ ، زاویه پیچش  $\phi$  با  $T$  و طول  $L$  شفت متناسب است. به عبارت دیگر، اگر طول شفتی دو برابر شود، تحت گشتاور یکسان  $T$ ، دارای زاویه پیچش دو برابر خواهد بود. در اینجا می‌خواهیم رابطه بین  $L$ ،

\* اینجاست که یک لوله مقوایی که در جهت طولی بریده شده است نمایش دیگری از وجود تنش‌های برشی وارد بر صفحات طولی است.

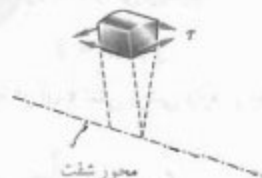


شکل ۳-۴



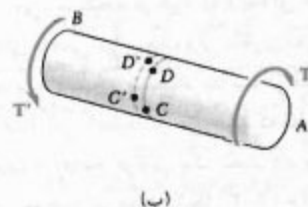
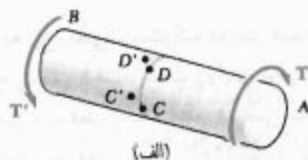
شکل ۳-۵

رابطه بالا گرچه مهم است، ولی درباره نحوه توزیع تنش برشی در یک مقطع عرضی چیزی نمی‌گوید. لذا، طبق قسمت ۵-۱، توزیع واقعی تنش برشی را در این حالت نمی‌توان با روش‌های استاتیکی به دست آورد. در قسمت ۵-۱ فرض شد که تنش‌های قائم ناشی از بار محوری مرکزی دارای توزیع یکنواخت‌اند و در قسمت ۱۷-۲ دیدیم که این فرض قابل توجیه است به جز در مجاورت بارهای متمرکز. ولی، چنین فرضی برای توزیع تنش‌های برشی در یک شفت الاستیک اشتباه است. در واقع، قبل از تحلیل تغییر شکل در شفت، نباید درباره توزیع تنش در آن قضاوت کرد. این کار در قسمت بعد انجام می‌شود. گفتنی است که، طبق قسمت ۱۲-۱، برش فقط در یک صفحه روی نمی‌دهد. جزء کوچکی از شفت نشان داده شده در شکل ۳-۶ را در نظر می‌گیریم. با اعمال گشتاور بر شفت، وجوهی که بر محور شفت عمود هستند تحت تنش برشی قرار می‌گیرند.



شکل ۳-۶

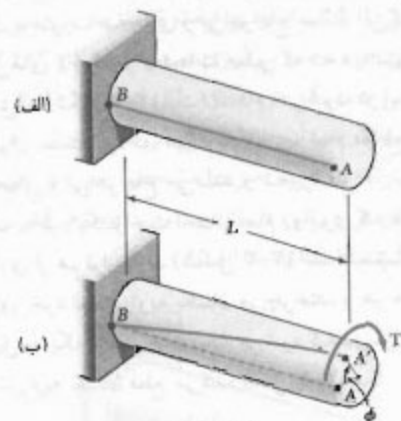
مقاطع عرضی یک شفت دایره‌ای به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج می‌مانند زیرا شفت دایره‌ای تقارن محوری دارد؛ یعنی، اگر از وضعیت ثابتی به آن نگاه کنیم و آن را حول محورش تحت یک زاویه اختیاری بچرخانیم، ظاهر آن تغییر نمی‌کند. (میله‌های چهارگوش نیز وقتی به اندازه  $90^\circ$  یا  $180^\circ$  می‌چرخند، ظاهر آنها تغییر نمی‌کند). با استفاده از تقارن محوری شفت‌های دایره‌ای می‌توان ثابت کرد که مقاطع عرضی این شفت‌ها به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج می‌مانند.



شکل ۱۰-۳

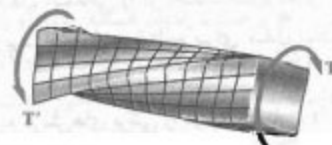
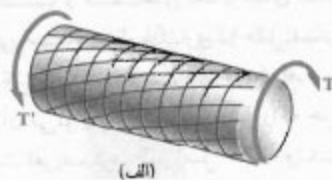
برای این منظور، نقاط  $C$  و  $D$  را روی محیط یک مقطع عرضی از شفت در نظر می‌گیریم، و وضعیت این نقاط را پس از پیچش شفت با  $C'$  و  $D'$  نشان می‌دهیم (شکل ۱۰-۳ الف). به علت تقارن محوری شفت و تقارن محوری بارگذاری، در چرخشی که  $D$  به  $C$  تغییر مکان می‌یابد  $D'$  به  $C'$  می‌رود. لذا،  $C'$  و  $D'$  روی محیط یک دایره قرار دارند، و کمان  $C'D'$  با کمان  $CD$  برابر است (شکل ۱۰-۳ ب). حال، بررسی می‌کنیم که آیا دایره‌ای که روی آن  $C'$  و  $D'$  قرار دارند با دایره اولیه متفاوت است یا نه. فرض می‌کنیم که  $C'$  و  $D'$  روی دایره متفاوتی قرار دارند و دایره جدید در سمت چپ دایره اولیه است (شکل ۱۰-۳ ب). همین وضع برای سایر مقاطع عرضی برقرار است، زیرا تمام مقاطع عرضی شفت تحت گشتاور داخلی یکسان  $T$  قرار دارند، و ناظر واقع انتهای  $A$  می‌بیند که دایره به طرف خارج او حرکت می‌کند. اما ناظر واقع در انتهای  $B$  می‌بیند که دایره به طرف او حرکت می‌کند. این دو نتیجه متضاد نشان می‌دهد که فرض ما نادرست است و  $C'$  و  $D'$  روی همان دایره‌ای قرار دارند که  $C$  و  $D$  واقع‌اند. لذا، وقتی شفت می‌پیچد، بزرگترین مقطع عرضی دایره‌ای آن در صفحه خود می‌پیچد. با تکرار این استدلال برای هر دایره کوچکتر و هم مرکز واقع در

$T$  را تعیین، و توزیع تنش برشی در شفت را بیابیم (کاری که در قسمت قبل نمی‌توانستیم صرفاً با استفاده از استاتیک انجام دهیم).



شکل ۸-۳

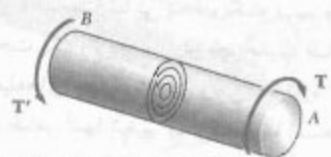
برای این منظور، به یکی از خواص مهم شفت‌های دایره‌ای اشاره می‌کنیم: وقتی یک شفت دایره‌ای تحت پیچش قرار می‌گیرد، تمام مقاطع عرضی آن به صورت صفحه‌ای و بدون اعوجاج می‌مانند. یعنی، گرچه مقاطع عرضی مختلف در امتداد شفت تحت زوایای متفاوت می‌پیچند، ولی این پیچش صلب‌گونه است. این موضوع در شکل ۹-۳ الف برای تغییر شکل یک مدل لاستیکی که تحت پیچش قرار دارد نشان داده شده است. خاصیت مذکور، مشخصه شفت‌های دایره‌ای توپر و توخالی است؛ در عضوها با مقطع عرضی غیر دایره‌ای چنین حالتی وجود ندارد. مثلاً، وقتی میله‌ای با مقطع عرضی چهارگوش تحت پیچش قرار می‌گیرد، مقاطع عرضی مختلف آن به صورت صفحه‌ای باقی نمی‌مانند (شکل ۹-۳ ب).



شکل ۹-۳



مقطع عرضی تحت بررسی، نتیجه می شود که تمام مقاطع عرضی به صورت صفحه ای می مانند (شکل ۱۱-۳).



شکل ۱۱-۳

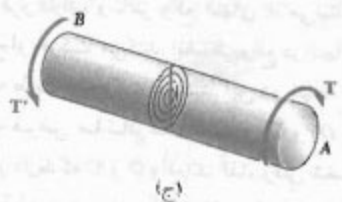
بحث بالا به این معنی نیست که دایره هم مرکز شکل ۱۱-۳، هنگام پیچش شفت، تحت زوایای برابر می چرخند. زیرا، در این صورت، قطر یک مقطع عرضی به صورت یک منحنی تغییر شکل می دهد (شکل ۱۲-۳ الف). ناظری که این منحنی را از A می بیند نتیجه می گیرد که لایه های خارجی شفت بیشتر از لایه های داخلی می پیچند، ولی ناظری که این منحنی را از B می بیند به نتیجه مستضاد یا ناظر قسبل می رسد (شکل ۱۲-۳ ب). این ناسازگاری می رساند که قطر ها به صورت خطوط مستقیم، و مقاطع عرضی یک شفت دایره ای به صورت صفحه ای و بی اعوجاج می مانند. (شکل ۱۲-۳ ج).



(الف)



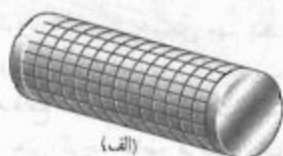
(ب)



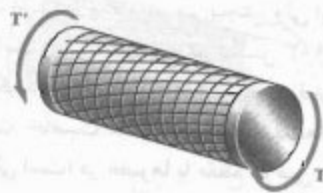
(ج)

شکل ۱۲-۳

تا به حال، نحوه اعمال کوپل های پیچشی  $T$  و  $T'$  را در نظر نگرفته ایم. برای اینکه تمام مقاطع شفت به صورت صفحه ای و بی اعوجاج بمانند، باید کوپل ها طوری وارد شوند که دو انتهای شفت به صورت صفحه ای و بی اعوجاج بمانند. این کار با اعمال کوپل های  $T$  و  $T'$  بر صفحات صلبی که به دو انتهای شفت متصل اند (شکل ۱۳-۳ الف) انجام می شود. در این صورت، می توان مطمئن بود که، هنگام بارگذاری، تمام مقاطع به صورت صفحه ای و بی اعوجاج می مانند و تغییر شکل در تمام طول شفت به طور یکنواخت است. تمام دایره ای که در فواصل مساوی از هم قرار دارند (شکل ۱۳-۳ الف) نسبت به دایره مجاور خود تحت زاویه یکسان می چرخند، و هر خط مستقیم تبدیل به یک منحنی (مارپیچ) می شود که دایره های مختلف را تحت زاویه یکسان قطع می کند (شکل ۱۳-۳ ب).



(الف)



(ب)

شکل ۱۳-۳

نتایج این قسمت و قسمت های بعد بر مبنای صلب بودن صفحات انتهایی است. شرایط بارگذاری در عمل ممکن است با شرایط مدل شکل ۱۳-۳ متفاوت باشد. مزیت اصلی این مدل این است که با آن می توان یک مسئله پیچشی را که حل دقیق آن امکان پذیر است تعریف کرد. طبق اصل سنت-ونانت، نتایج حاصله برای مدل ایده ای را در اغلب کاربردهای مهندسی می توان به کار برد. البته، این نتایج برای مدل شکل ۱۳-۳ هستند.

حال، توزیع گشت های برشی را در یک شفت دایره ای به طول  $l$  و به شعاع  $r$  که تحت زاویه  $\phi$  چرخیده است (شکل ۱۴-۳ الف) تعیین می کنیم. استوانه ای به شعاع  $r$  را از



از معادله (۲-۳) نتیجه می‌شود که کرنش برشی در سطح شفت، که در آن  $\rho = c$ ، به ماکزیمم می‌رسد:

$$\gamma_{\max} = \frac{\phi}{L} \quad (۳-۳)$$

با حذف  $\phi$  از معادله‌های (۲-۳) و (۳-۳)، کرنش برشی  $\gamma$  در فاصله  $\rho$  از محور شفت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max} \quad (۴-۳)$$

### ۳-۴ تنش در ناحیه الاستیک

تا به حال، درباره رابطه بین تنش-کرنش در شفت‌های دایره‌ای تحت پیچش چیزی نگفته‌ایم. در اینجا، فرض می‌کنیم تنش برشی در شفت دارای مقدار کمتر از استقامت تسلیم  $\tau_y$  است. یعنی مقدار تنش برشی در شفت کمتر از حد تناسب و نیز کمتر از حد الاستیک است (فصل ۲). لذا، قانون هوک به کار می‌رود و تغییر شکل پلاستیک وجود ندارد.

با توجه به قانون هوک در قسمت ۲-۱۴،

$$\tau = G\gamma \quad (۵-۳)$$

که در آن  $G$  مدول صلابت یا مدول برشی ماده است. با ضرب کردن هر دو طرف معادله (۴-۳) در  $G$ ، می‌نویسیم:

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{\max}$$

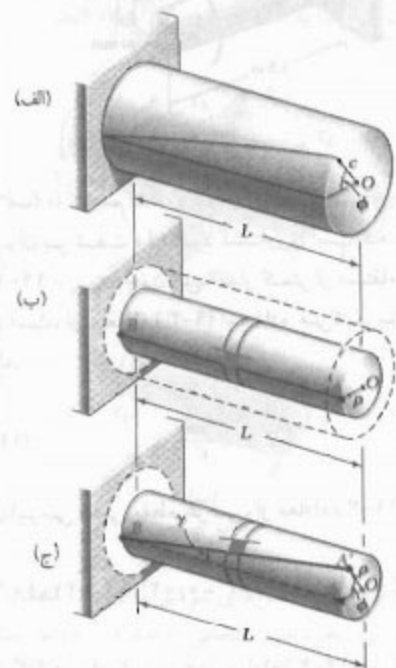
با استفاده از معادله (۵-۳)،

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max} \quad (۶-۳)$$

این معادله نشان می‌دهد تا وقتی هیچ قسمتی از شفت دایره‌ای از استقامت تسلیم (یا حد تناسب) فراتر نرفته است، تنش برشی در شفت برحسب فاصله  $\rho$  از محور شفت به صورت خطی تغییر می‌کند. شکل ۱۵-۳ الف توزیع تنش را در یک شفت توپر دایره‌ای به شعاع  $c$  و شکل ۱۵-۳ ب توزیع تنش را در یک شفت دایره‌ای توخالی یا شعاع‌های داخلی و خارجی  $c_i$  و  $c_o$  نشان می‌دهد. در این حالت، از معادله (۶-۳)

$$\tau_{\min} = \frac{c_i}{c_o} \tau_{\max} \quad (۷-۳)$$

شفت جدا می‌کنیم، و جزء چهارگوش کوچکی از آن را در نظر می‌گیریم. این جزء توسط دو دایره و دو خط مستقیم، که روی سطح استوانه قبل از اعمال بار رسم می‌شوند، تشکیل شده است (شکل ۱۴-۳ ب). وقتی شفت تحت بار پیچشی قرار می‌گیرد، این جزء به صورت لوزی در می‌آید (شکل ۱۴-۳ ج). کرنش برشی  $\gamma$  در یک جزء معین، طبق قسمت ۲-۴، از تغییر زوایایی که بین وجه آن جزء تشکیل می‌شوند به دست می‌آید. چون دایره‌ای که دو وجه جزء را مشخص می‌کنند بی‌تغییر می‌مانند، کرنش برشی  $\gamma$  با زاویه بین خطوط  $AB$  و  $A'B$  برابر است ( $\gamma$  برحسب رادیان است).



شکل ۱۴-۳

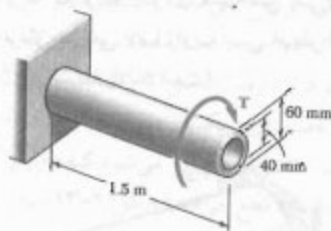
طبق شکل ۱۴-۳ ج، برای مقادیر کوچک  $\gamma$  می‌توان گفت  $AA' = L\gamma$  از طرف دیگر،  $AA' = \rho\phi$ . در نتیجه  $L\gamma = \rho\phi$ ، یا

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad (۲-۳)$$

که در آن  $\gamma$  و  $\phi$  برحسب رادیان هستند. معادله بالا نشان می‌دهد که کرنش برشی  $\gamma$  در یک نقطه معین از شفت با زاویه پیچش  $\phi$ ، و نیز با فاصله نقطه تحت بررسی تا محور شفت متناسب است. لذا، کرنش برشی در یک شفت دایره‌ای برحسب فاصله از محور شفت به صورت خطی تغییر می‌کند.

## مثال ۳-۱

یک شفت فولادی استوانه‌ای توخالی به طول ۱٫۵ m و با قطرهای داخلی و خارجی ۴۰ و ۶۰ mm است (شکل ۳-۱۶). (الف) اگر بخواهیم تنش برشی از ۱۲۰ MPa بیشتر نشود، ماکزیمم گشتاوری را که می‌توان وارد کرد چقدر است؟ (ب) مینیمم مقدار تنش برشی متناظر در شفت چقدر است؟



مثال ۳-۱۶

(الف) ماکزیمم گشتاور مجاز. ماکزیمم گشتاور مجاز  $T$  که می‌توان بر شفت وارد کرد گشتاوری است که به ازای آن  $\tau_{\max} = 120 \text{ MPa}$ . چون این مقدار کمتر از استقامت تسلیم فولاد است، از معادله (۳-۹) استفاده می‌کنیم. با حل این معادله،

$$T = \frac{J \tau_{\max}}{c} \quad (3-12)$$

ممان اینرسی قطبی عرضی، از معادله (۳-۱۱)،

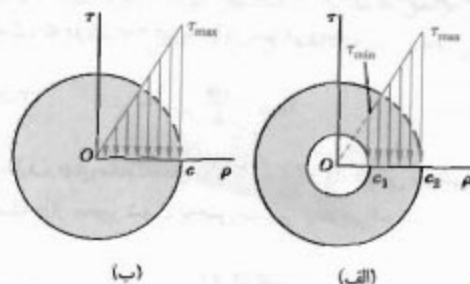
$$J = \frac{1}{4} \pi (c_o^4 - c_i^4) = \frac{1}{4} \pi (60^4 - 40^4) = 1.021 \times 10^6 \text{ m}^4$$

با جایگذاری برای  $J$  و  $\tau_{\max}$  در معادله (۳-۱۲)، و با قرار دادن  $c = c_o = 60 \text{ mm}$  داریم

$$T = \frac{J \tau_{\max}}{c} = \frac{(1.021 \times 10^6 \text{ m}^4)(120 \times 10^6 \text{ Pa})}{0.06 \text{ m}} = 4.08 \text{ kN.m}$$

(ب) تنش برشی مینیمم. مینیمم مقدار تنش برشی در سطح داخلی شفت ایجاد می‌شود و آن را از معادله (۳-۷) می‌توان یافت:

$$\tau_{\min} = \frac{c_i}{c_o} \tau_{\max} = \frac{40}{60} (120 \text{ MPa}) = 80 \text{ MPa}$$



شکل ۳-۱۵

طبق قسمت ۳-۲، مجموع لنگر نیروهای جزئی وارد، بر هر مقطع عرضی شفت با مقدار گشتاور وارد بر شفت برابر است:

$$\int \rho(\tau dA) = T \quad (3-13)$$

با جایگذاری  $\tau$  از (۳-۶) در (۳-۱۳)، نتیجه می‌شود:

$$T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{\max}}{c} \int \rho^2 dA$$

انتگرال آخر، ممان اینرسی قطبی مقطع عرضی را نسبت به مرکز  $O$  نشان می‌دهد. بنابراین،

$$T = \frac{\tau_{\max} J}{c} \quad (3-14)$$

با حل  $\tau_{\max}$

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad (3-15)$$

با جایگذاری  $\tau_{\max}$  از (۳-۱۵) در (۳-۶)، تنش برشی در فاصله  $\rho$  از محور شفت به دست می‌آید:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad (3-16)$$

معادله‌های (۳-۹) و (۳-۱۰) را فرمول‌های پیچش الاستیک می‌گویند. از استاتیک می‌دانیم که ممان اینرسی قطبی دایره‌ای به شعاع  $c$  چنین است:  $J = \frac{1}{4} \pi c^4$ . در یک شفت دایره‌ای توخالی با شعاع داخلی  $c_i$  و شعاع خارجی  $c_o$ ، ممان اینرسی قطبی برابر است با:

$$J = \frac{1}{4} \pi c_o^4 - \frac{1}{4} \pi c_i^4 = \frac{1}{4} \pi (c_o^4 - c_i^4) \quad (3-17)$$

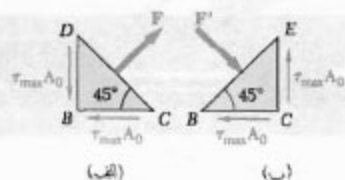
در معادله (۳-۹) یا (۳-۱۰)،  $T$  برحسب  $\text{N.m}$  یا  $\text{m}$  و  $\tau$  برحسب  $\text{Pa}$  بیان می‌شود.

اکنون، جزء  $c$  را تحت زاویه  $45^\circ$  با محور شفت در نظر بگیرید (این جزء نشان داده نشده است). برای تعیین تنش‌های وارد بر وجوه این جزء، دو جزء مثلثی را در شکل ۱۹-۳ در نظر می‌گیریم و نمودار آزاد آنها را رسم می‌کنیم. برای جزء شکل ۱۹-۳ الف، می‌دانیم که تنش‌های وارد بر وجوه  $BC$  و  $BD$  همان تنش‌های برشی  $\tau_{\max} = Tc/J$  هستند. لذا، مقدار نیروهای برشی برابر با  $\tau_{\max} A_0$  است، که در آن  $A_0$  مساحت وجه است. چون مؤلفه‌های دو نیروی برشی در امتداد  $DC$  با هم مساوی و مخالف‌اند، نیروی  $F$  وارد بر  $DC$  بر این وجه عمود است. این نیرو به صورت کششی است و مقدار آن چنین است:

$$F = 2(\tau_{\max} A_0) \cos 45^\circ = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2} \quad (۱۳-۳)$$

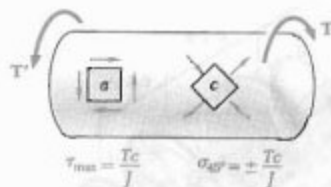
از تقسیم نیروی  $F$  بر مساحت  $A$  از وجه  $DC$ ، تنش وارد بر این وجه به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max} \quad (۱۴-۳)$$



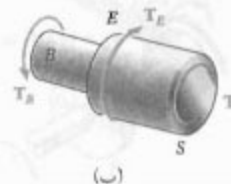
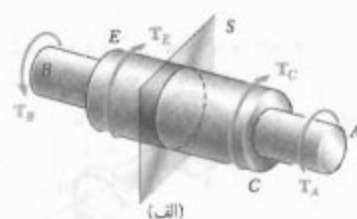
شکل ۱۹-۳

با تحلیل مشابه درباره جزء شکل ۱۹-۳ ب، دیده می‌شود که تنش وارد بر وجه  $BE$  عبارت است از  $\sigma = -\tau_{\max}$ . در نتیجه، وجوه جزء  $c$  که تحت زاویه  $45^\circ$  با محور شفت است (شکل ۲۰-۳) تحت تنش‌های قائم و برابر با  $\tau_{\max}$  قرار دارند. لذا، در حالی که جزء  $a$  در شکل ۲۰-۳ تحت برش خالص است، دو وجه از جزء  $c$  در همان شکل تحت تنش کششی، و دو وجه دیگر آن تحت تنش فشاری است. ضمناً، تمام تنش‌ها دارای مقدار یکسان  $Tc/J$  هستند.\*



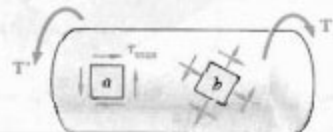
شکل ۲۰-۳

فرمول‌های  $(۹-۳)$  و  $(۱۰-۳)$  برای یک شفت با مقطع عرضی یکنواخت دایره‌ای هستند که دو انتهای آن تحت گشتاور قرار دارند. ولی، از آنها برای مقطع عرضی متغیر یا شفتی که از نقاطی غیر از دو انتهایش تحت گشتاور قرار دارد نیز می‌توان استفاده کرد (شکل ۱۷-۳ الف). توزیع تنش برشی در مقطع عرضی  $S$  از معادله  $(۹-۳)$  به دست می‌آید، که در آن  $J$  همان اینرسی قطبی آن مقطع، و  $T$  گشتاور داخلی در آن مقطع است. با ترسیم نمودار آزاد قسمتی از شفت که در یک طرف آن مقطع قرار دارد (شکل ۱۷-۳ ب) و با مساوی صفر قرار دادن مجموع گشتاورهای وارد بر آن قسمت، شامل گشتاور داخلی  $T$ ، مقدار  $T$  به دست می‌آید (به مسئله نمونه ۱-۳ نگاه کنید).



شکل ۱۷-۳

تا به حال، فقط تنش‌های برشی را در یک شفت تحلیل کرده‌ایم. زیرا وجوه جزء انتخابی به موازات محور شفت یا عمود بر آن بودند (شکل ۶-۳). طبق قسمت‌های ۱-۱ و ۱۲-۱، بر حسب وضعیت جزء انتخابی، ممکن است تنش قائم، برشی یا هر دو به وجود آیند. دو جزء  $a$  و  $b$  را که روی سطح یک شفت دایره‌ای تحت پیچش (شکل ۱۸-۳) قرار دارد در نظر بگیرید. چون وجوه جزء  $a$  به موازات و عمود بر محور شفت هستند، فقط تنش برشی  $\tau_{\max} = Tc/J$  بر این جزء وارد می‌شود. ولی، جزء  $b$ ، که وجوه آن با محور شفت زوایای اختیاری می‌سازند، دارای تنش‌های قائم و برشی هستند.



شکل ۱۸-۳

\* تنش‌های وارد بر اجزا با وضعیت اختیاری، مانند جزء  $b$  در شکل ۱۸-۳، در فصل ۷ بررسی می‌شوند.

## حل

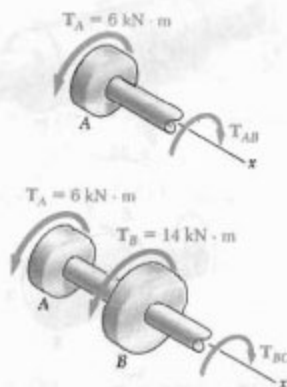
معادله‌های استاتیکی. گشتاور در شفت  $AB$  را با  $T_{AB}$  نشان می‌دهیم، و این شفت را مقطع می‌زنیم. برای نمودار آزاد نشان داده شده، می‌نویسیم:

$$\sum M_A = 0 : (6 \text{ kN.m}) - T_{AB} = 0 \Rightarrow T_{AB} = 6 \text{ kN.m}$$

حال، شفت  $BC$  را مقطع می‌زنیم، و برای نمودار آزاد نشان داده شده می‌نویسیم:

$$\sum M_A = 0 :$$

$$(6 \text{ kN.m}) + (14 \text{ kN.m}) - T_{BC} = 0 \Rightarrow T_{BC} = 20 \text{ kN.m}$$



الف. شفت  $BC$ . برای این شفت توخالی،

$$J = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4) = \frac{\pi}{2} [(0.106 \text{ m})^4 - (0.045 \text{ m})^4] = 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

تنش برشی ماکزیمم، بر روی سطح خارجی،

$$\tau_{\max} = \tau_r = \frac{T_{BC} c_o}{J} = \frac{(20 \text{ kN.m})(0.106 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$\tau_{\max} = 146.7 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

تنش برشی مینیمم، تنش‌ها متناسب با فاصله از محور

شفت هستند؛ می‌نویسیم:

$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{c_i}{c_o} \Rightarrow \frac{\tau_{\min}}{146.7 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{106 \text{ mm}}$$

$$\tau_{\min} = 60.7 \text{ MPa}$$

طبق قسمت ۲-۳، مواد چکش‌خوار معمولاً در برش گسیخته می‌شوند. بنابراین، وقتی نمونه  $T$  از ماده چکش‌خواری تحت پیچش قرار می‌گیرد، در امتداد یک صفحه عمود بر محور طولی‌اش گسیخته می‌شود (شکل ۲۱-۳ الف). از طرف دیگر، مواد شکننده در کشش، در مقایسه با برش، ضعیف‌ترند. لذا، وقتی نمونه شکننده‌ای تحت پیچش قرار می‌گیرد، گرایش دارد در امتداد سطوح عمود بر امتداد متناظر با کشش ماکزیمم (یعنی، در امتداد سطوحی که با محور طولی نمونه زاویه  $45^\circ$  دارند) بشکند (شکل ۲۱-۳ ب).



(الف)

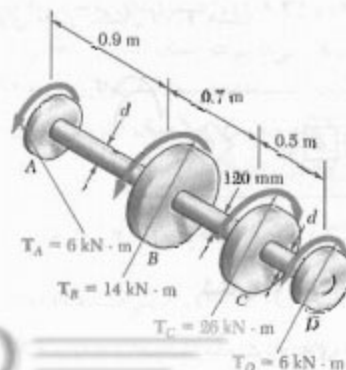


(ب)

شکل ۲۱-۳

## مسئله نمونه ۱-۳

شفت  $BC$  توخالی و با قطرهای داخلی و خارجی  $90 \text{ mm}$  و  $120 \text{ mm}$  است. شفت‌های  $AB$  و  $CD$  توپر و به قطر  $d$  هستند. برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست: (الف) ماکزیمم و مینیمم تنش برشی در شفت  $BC$ ، (ب) قطر  $d$ ، در صورتی که تنش مجاز برشی در این شفت‌ها  $65 \text{ MPa}$  باشد.



حل

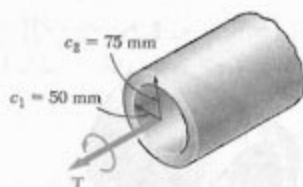
الف- شفت توخالی. برای این شفت،

$$J = \frac{\pi}{2} (c_1^4 - c_2^4) = \frac{\pi}{2} [(75 \text{ mm})^4 - (50 \text{ mm})^4] \\ = 39,88 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

از معادله (۹-۳)،

$$\tau_{\max} = \frac{Tc_1}{J} \Rightarrow 84 \text{ MPa} = \frac{T(75 \text{ mm})}{39,88 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$\Rightarrow T = 44,7 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$



ب- شفت توپر با همان وزن. مساحت مقطع عرضی شفت تغییر نمی‌کند و می‌نویسیم:

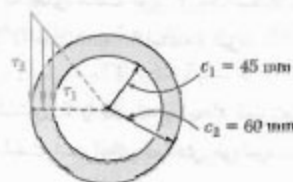
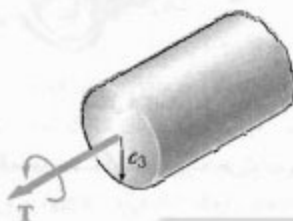
$$A_{(a)} = A_{(b)}$$

$$\pi [(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2] = \pi c_p^2 \quad c_p = 55,9 \text{ mm}$$

چون  $\tau_{\text{all}} = 84 \text{ MPa}$ ، می‌نویسیم

$$\tau_{\max} = \frac{Tc_p}{J} \quad 84 \text{ MPa} = \frac{T(55,9 \text{ mm})}{\frac{\pi}{2} (55,9 \text{ mm})^4}$$

$$\Rightarrow T = 22,1 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$

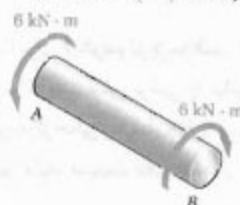


ب. شفت‌های AB و CD در این شفت‌ها،  $T = 6 \text{ kN.m}$  و  $\tau_{\text{all}} = 65 \text{ MPa}$  شعاع شفت‌ها را با  $c$  نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$\tau = \frac{Tc}{J} \Rightarrow 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kN.m})c}{\frac{\pi}{2} c^4}$$

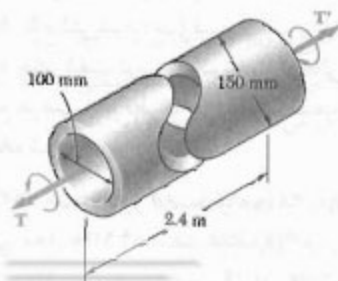
$$c^3 = 58,8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \Rightarrow c = 38,9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 2c = 2(38,9 \text{ mm}) \quad d = 77,8 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$



مسئله نمونه ۳-۲

شفت بزرگی که مرتوری را به مولدی متصل می‌کند با قطرهای داخلی و خارجی، ۱۰۰ و ۱۵۰ mm است. اگر تنش مجاز برشی ۸۴ MPa باشد، مطلوبست ماکزیمم گشتاوری که: (الف) توسط این شفت می‌توان انتقال داد، (ب) توسط شفت توپری با همان وزن می‌توان انتقال داد، (ج) توسط شفت توخالی با همان وزن و با قطر خارجی ۲۰۰ mm می‌توان انتقال داد.



حل کنید که به جای شفت توپر از یک شفت توخالی با همان جرم و با قطر داخلی ۹۰ mm استفاده شود.

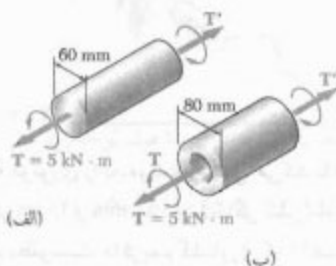
۳-۳ گشتاور  $T$  را که باعث ایجاد تنش برشی ماکزیمم  $80 \text{ MPa}$  در شفت استوانه‌ای فولادی می‌شود بیاید.



شکل ۳-۳ و ۴-۳

۴-۳ ماکزیمم تنش برشی حاصل از گشتاور  $T = 65 \text{ kN.m}$  را بیاید.

۵-۳ (الف) برای استوانه توپر به قطر ۶۰ mm و بازگذاری نشان داده شده، ماکزیمم تنش برشی را بیاید. (ب) مطلوبست قطر داخلی استوانه توخالی، با قطر خارجی ۸۰ mm که به ازای آن تنش ماکزیمم مانند قسمت الف باشد.



شکل ۵-۳

۶-۳ (الف) مطلوبست گشتاوری که می‌توان بر یک شفت توپر با قطر ۲۰ mm وارد کرد بدون اینکه تنش برشی مجاز از  $50 \text{ MPa}$  بیشتر شود. (ب) قسمت الف را با این فرض حل کنید که به جای شفت توپر از یک شفت توخالی با همان مساحت مقطع عرضی و با قطر داخلی برابر با نصف قطر خارجی‌اش استفاده شود.

۷-۳ محور توپر  $AB$  به قطر  $d_s = 38 \text{ mm}$  و از فولاد با تنش برشی مجاز  $84 \text{ MPa}$  است. غلاف  $CD$  از برنج با تنش برشی مجاز  $50 \text{ MPa}$  است. ماکزیمم گشتاور  $T$  را که می‌توان در  $A$  وارد کرد بیاید.

ج- شفت توخالی با قطر ۲۰۰ mm برای وزن مساوی، مساحت مقطع عرضی تغییر نمی‌کند و می‌نویسیم:

$$A_{(a)} = A_{(c)}$$

$$\pi [(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2] = \pi [(100 \text{ mm})^2 - c_2^2]$$

$$\Rightarrow c_2 = 82.9 \text{ mm}$$

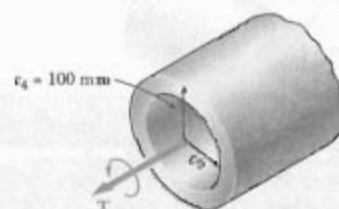
برای  $c_1 = 100 \text{ mm}$  و  $c_2 = 82.9 \text{ mm}$

$$J = \frac{\pi}{2} [(100 \text{ mm})^4 - (82.9 \text{ mm})^4] = 83.89 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

با  $c_1 = 100 \text{ mm}$  و  $\tau_{all} = 84 \text{ MPa}$

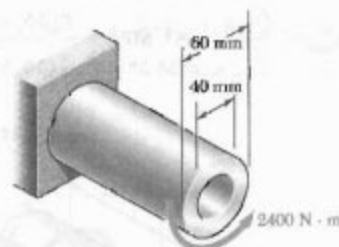
$$\tau_{max} = \frac{T c_1}{J} \quad 84 \text{ MPa} = \frac{T (100 \text{ mm})}{83.89 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$T = 69.6 \text{ kN.m} \quad \leftarrow$$



## مسائل

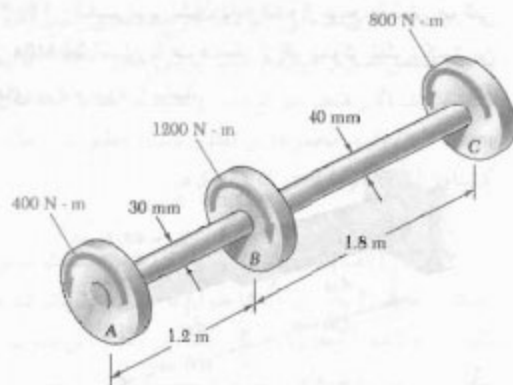
۱-۳ (الف) برای شفت توخالی نشان داده شده، ماکزیمم تنش برشی را بیاید. (ب) مطلوبست قطر شفت توپر که به ازای آن ماکزیمم تنش برشی مانند قسمت (الف) باشد.



شکل ۱-۳

۲-۳ (الف) مطلوبست گشتاوری که می‌توان بر یک شفت توپر با قطر خارجی ۹۰ mm وارد کرد بدون اینکه تنش مجاز برشی از  $70 \text{ MPa}$  بیشتر شود. (ب) قسمت الف را با این فرض

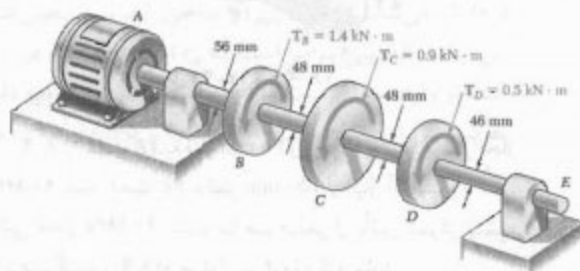




شکل م ۱۱-۳ و م ۱۲-۳

۱۲-۳ اگر تنش مجاز برشی در هر شفت  $60 \text{ MPa}$  باشد، مطلوبست کمترین قطر مجاز برای: (الف) شفت  $AB$ ، (ب) شفت  $BC$ .

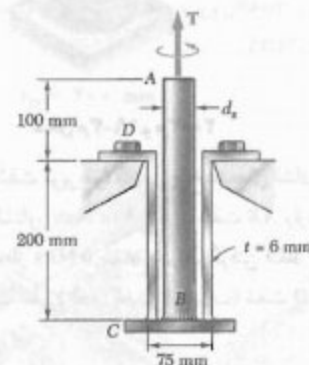
۱۳-۳ در شرایط کارکرد عادی، موتور الکتریکی گشتاور  $2/8 \text{ kN}\cdot\text{m}$  را بر شفت  $AB$  وارد می‌کند. اگر شفت‌ها توپر باشند، مطلوبست ماکزیم تنش برشی: (الف) در شفت  $AB$ ، (ب) در شفت  $BC$ ، (ج) در شفت  $CD$ .



شکل م ۱۳-۳

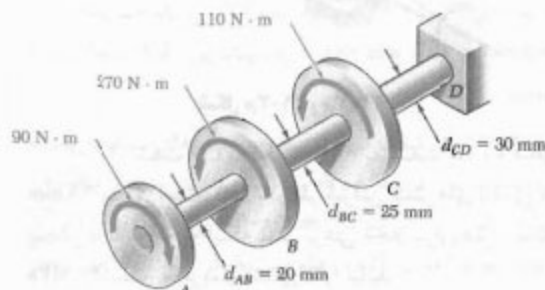
۱۴-۳ برای کاهش جرم کل مجموعه مسئله ۱۳-۳، طرح جدیدی بررسی می‌شود که در آن شفت  $BC$  با قطر کمتر گرفته می‌شود. مطلوبست کمترین قطر برای شفت  $BC$  که به ازای آن ماکزیم مقدار تنش برشی در مجموعه افزایش نیابد.

۸-۳ محور توپر  $AB$  از فولاد با تنش برشی مجاز  $84 \text{ MPa}$  است. غلاف  $CD$  از برنج با تنش برشی مجاز  $50 \text{ MPa}$  است. مطلوبست: (الف) ماکزیم گشتاور  $T$  که می‌توان در  $A$  وارد کرد با این شرط که تنش مجاز برشی در  $AB$  از تنش مجاز برشی در  $CD$  بیشتر نشود، (ب) قطر  $d_c$  محور  $AB$ .



شکل م ۷-۳ و م ۸-۳

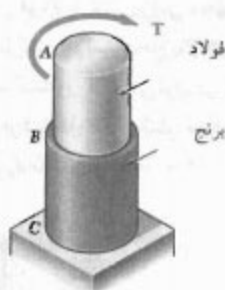
۹-۳ اگر هر یک از شفت‌های  $AB$ ،  $BC$  و  $CD$  به صورت میله‌های استوانه‌ای توپر باشند، مطلوبست: (الف) شفتی که ماکزیم تنش برشی در آن روی می‌دهد، (ب) مقدار این تنش.



شکل م ۹-۳ و م ۱۰-۳

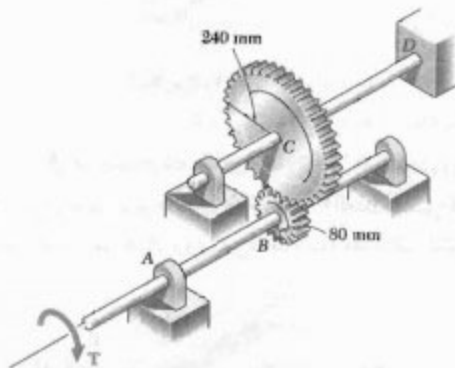
۱۰-۳ اگر سوراخی به قطر  $10 \text{ mm}$  در هر یک از شفت‌های  $AB$ ،  $BC$  و  $CD$  تعبیه شود، مطلوبست: (الف) شفتی که ماکزیم تنش برشی در آن روی می‌دهد، (ب) مقدار این تنش.

۱۱-۳ گشتاورهای نشان داده شده بر پولی‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  وارد شده‌اند. اگر شفت‌ها توپر باشند، مطلوبست ماکزیم تنش برشی: (الف) در شفت  $AB$ ، (ب) در شفت  $BC$ .



شکل ۳-۱۹ و ۳-۲۰

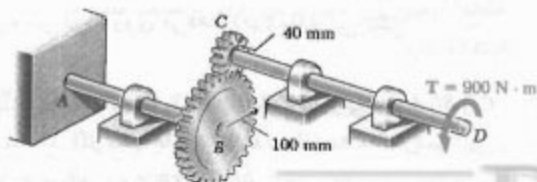
۳-۲۱ دو شفت توپر فولادی با چرخ‌دنده‌های نشان داده شده به هم متصل‌اند. گشتاور  $T = 900 \text{ N}\cdot\text{m}$  بر شفت  $AB$  وارد می‌شود. اگر تنش برشی مجاز  $5 \text{ MPa}$  باشد، بادر نظر گرفتن فقط تنش‌های پیچشی، مطلوب‌ست قطر: (الف) شفت  $AB$ ، (ب) شفت  $CD$ .



شکل ۳-۲۱ و ۳-۲۲

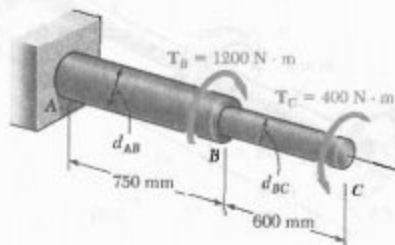
۳-۲۲ شفت  $CD$  به قطر  $66 \text{ mm}$  به شفت  $AB$  به قطر  $48 \text{ mm}$  متصل است. فقط بادر نظر گرفتن تنش‌های ناشی از پیچش و با توجه به اینکه تنش برشی مجاز برای هر شفت  $60 \text{ MPa}$  است، ماکزیمم گشتاور  $T$  را بیابید.

۳-۲۳ گشتاور  $T = 900 \text{ N}\cdot\text{m}$  مطابق شکل، در  $D$  وارد می‌شود. اگر قطر شفت  $AB$  برابر با  $60 \text{ mm}$  و قطر شفت  $CD$  برابر با  $45 \text{ mm}$  باشد، مطلوب‌ست بیشترین تنش برشی در: (الف) شفت  $AB$ ، (ب) شفت  $CD$ .



شکل ۳-۲۳ و ۳-۲۴

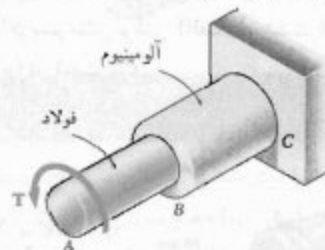
۳-۱۵ شفت توپر نشان داده شده از یونج با تنش برشی مجاز  $55 \text{ MPa}$  است. با صرف‌نظر از اثر تمرکز تنش، کمترین قطرهای  $d_{BC}$  و  $d_{AB}$  را بیابید.



شکل ۳-۱۵ و ۳-۱۶

۳-۱۶ مسئله ۳-۱۵ را با این فرض حل کنید که جهت  $T_C$  برعکس شود.

۳-۱۷ شفت  $AB$  از فولاد با تنش برشی  $90 \text{ MPa}$  و شفت  $BC$  از آلومینیوم با تنش برشی مجاز  $60 \text{ MPa}$  ساخته شده است. اگر قطر شفت  $BC$  برابر با  $50 \text{ mm}$  باشد، با صرف‌نظر از تأثیر تمرکز تنش، مطلوب‌ست: (الف) ماکزیمم گشتاور  $T$  که می‌توان بر  $A$  وارد کرد، (ب) قطر متناظر شفت  $AB$ .



شکل ۳-۱۷ و ۳-۱۸

۳-۱۸ شفت  $AB$  به قطر  $30 \text{ mm}$  از فولاد با تنش برشی مجاز  $90 \text{ MPa}$  است. شفت  $BC$  به قطر  $50 \text{ mm}$  از آلومینیوم با تنش برشی مجاز  $60 \text{ MPa}$  است. با صرف‌نظر از تأثیر تمرکز تنش، ماکزیمم گشتاور  $T$  را که می‌توان بر  $A$  وارد کرد بیابید.

۳-۱۹ تنش مجاز در میله فولادی  $AB$  به قطر  $36 \text{ mm}$  برابر با  $100 \text{ MPa}$  و در میله برنجی  $BC$  به قطر  $40 \text{ mm}$  برابر با  $60 \text{ MPa}$  است. با صرف‌نظر از تمرکز تنش، بیشترین گشتاوری را که می‌توان در  $A$  وارد کرد بیابید.

۳-۲۰ تنش مجاز در میله فولادی  $AB$  برابر با  $100 \text{ MPa}$  و در میله برنجی  $BC$  برابر با  $60 \text{ MPa}$  است. اگر گشتاور  $T = 900 \text{ N}\cdot\text{m}$  در  $A$  وارد شود، مطلوب‌ست قطر: (الف) میله  $AB$ ، (ب) میله  $BC$ .

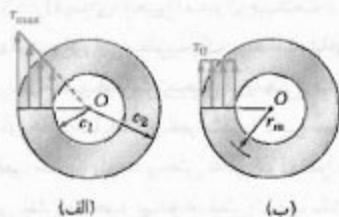
۲۸-۳ دو شفت توپر توسط چرخ‌دنده‌های نشان داده شده به هم متصل‌اند و از فولاد با تنش برشی مجاز  $50 \text{ MPa}$  ساخته شده‌اند. اگر قطر  $d$  و شفت به ترتیب  $d_{BC} = 40 \text{ mm}$  و  $d_{EF} = 32 \text{ mm}$  و مجموعه در تعادل باشد، مطلوبست ماکزیمم گشتاور  $T_C$  که می‌توان در  $C$  وارد کرد.

۲۹-۳ (الف) برای تنش مجاز داده شده، نسبت ماکزیمم گشتاور مجاز  $T$  به وزن واحد طول  $w$  را برای شفت توخالی نشان داده شده بیابید. (ب) اگر  $(T/w)_0$  مقدار این نسبت برای شفت توپری با شعاع  $c_0$  باشد، نسبت  $T/w$  را برای شفت توخالی برحسب  $c_1/c_0$  و  $(T/w)_0$  بیابید.



شکل م ۲۹-۳

۳۰-۳ گرچه توزیع دقیق تنش برشی در یک شفت استوانه‌ای توخالی مانند شکل ۳۰-۳ الف است، ولی با فرض توزیع یکنواخت تنش روی مساحت  $A$  مقطع عرضی (شکل م ۳۰-۳ ب) و نیز با فرض اینکه تمام نیروهای برشی جزئی در فاصله‌ای برابر با شعاع متوسط مقطع عرضی،  $r_m = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$  از  $O$  اثر می‌کنند، می‌توان  $r_{max}$  را به‌طور تقریبی تعیین کرد. این مقدار تقریبی برابر است با  $r_0 = T/A r_m$  که در آن  $T$  گشتاور وارده است. نسبت ماکزیمم تنش برشی  $r_{max}$  را به مقدار تقریبی  $r_0$  برای  $c_1/c_0$  برابر با ۰ و ۰/۵۰ و ۰/۷۵ و ۰/۹۵ و ۱ بیابید.

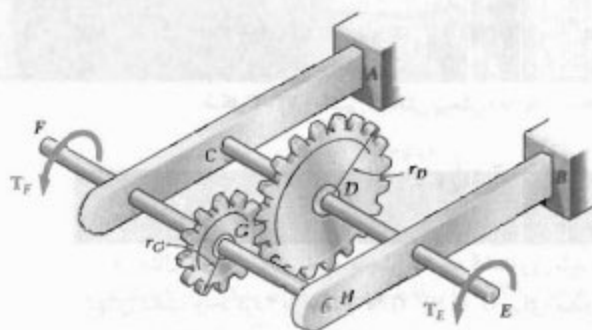


شکل م ۳۰-۳

۲۴-۳ گشتاور  $T = 900 \text{ N.m}$  مطابق شکل، در  $D$  وارد می‌شود. اگر تنش برشی مجاز در هر شفت  $50 \text{ MPa}$  باشد، مطلوبست قطر: (الف) شفت  $AB$ ، (ب) شفت  $CD$ .

۲۵-۳ در شرایط عادی، موتور گشتاور  $T_F = 150 \text{ N.m}$  را در  $F$  وارد می‌کند. اگر تنش برشی مجاز در هر شفت  $75 \text{ MPa}$  باشد، برای داده‌های زیر، مطلوبست قطر: (الف) شفت  $CDE$ ، (ب) شفت  $FGH$ .

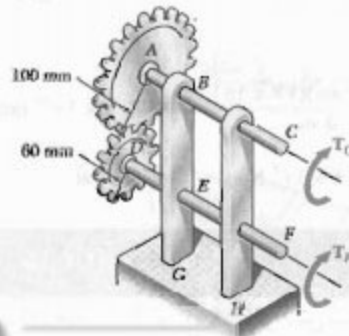
$$r_G = 75 \text{ mm} \quad r_D = 100 \text{ mm}$$



شکل م ۲۵-۳ و م ۲۶-۳

۲۶-۳ در شرایط عادی، موتور گشتاوری  $T_F$  را در  $F$  وارد می‌کند. شفت‌ها از فولاد با تنش برشی مجاز  $85 \text{ MPa}$  و با قطرهای  $d_{FGH} = 40 \text{ mm}$  و  $d_{CDE} = 32 \text{ mm}$  هستند. اگر  $r_G = 100 \text{ mm}$  و  $r_D = 150 \text{ mm}$  بیشترین مقدار مجاز  $T_F$  را بیابید.

۲۷-۳ دو شفت توپر توسط چرخ‌دنده‌های نشان داده شده به هم متصل‌اند و از فولاد با تنش برشی مجاز  $60 \text{ MPa}$  ساخته شده‌اند. اگر گشتاور  $T_C = 600 \text{ N.m}$  در  $C$  وارد شود و مجموعه در تعادل باشد، مطلوبست قطر: (الف) شفت  $BC$ ، (ب) شفت  $EF$ .

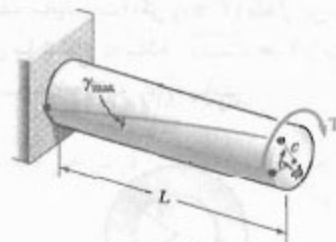


شکل م ۲۷-۳ و م ۲۸-۳

## ۳-۵ زاویه پیچش در ناحیه الاستیک

در این قسمت، رابطه بین زاویه پیچش  $\phi$  یک شفت دایره‌ای به طول  $L$  و شعاع  $C$  را که انتهای آزاد آن تحت گشتاور  $T$  قرار دارد به دست می‌آوریم (شکل ۳-۲۲). فرض می‌کنیم شفت به طور الاستیک می‌ماند. طبق قسمت ۳-۳، و زاویه پیچش  $\phi$  و ماکزیم کرنش برشی  $\gamma_{\max}$  دارای رابطه زیر هستند:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad (۳-۳)$$



شکل ۳-۲۲

در ناحیه الاستیک، تنش در هیچ نقطه‌ای از تنش تسلیم بیشتر نمی‌شود. طبق قانون هوک،  $\gamma_{\max} = \tau_{\max}/G$ . از معادله (۳-۹)،

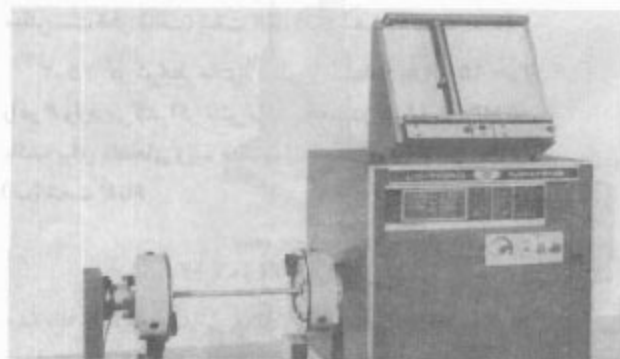
$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG} \quad (۳-۱۵)$$

سمت راست معادله‌های (۳-۳) و (۳-۱۵) را مساوی هم قرار می‌دهیم و  $\phi$  را حل می‌کنیم:

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (۳-۱۶)$$

در رابطه بالا،  $\phi$  برحسب رادیان است. رابطه حاصل نشان می‌دهد که، در ناحیه الاستیک، زاویه پیچش  $\phi$  با گشتاور  $T$  وارد بر شفت متناسب است. این موضوع با آزمایشی که در آغاز قسمت ۳-۳ به آن اشاره شد هماهنگ است.

از معادله (۳-۱۶) برای تعیین مدول صلابت یک ماده می‌توان استفاده کرد. برای این منظور، یک میله استوانه‌ای با قطر و طول معلوم را در ماشین آزمایش پیچش قرار می‌دهند (شکل ۳-۲۳). گشتاورهایی با مقدار افزایشی  $T$  بر نمونه وارد می‌کنند، و مقادیر متناظر زاویه پیچش  $\phi$  در طول نمونه را ثبت می‌کنند. تا وقتی تنش موجود بیشتر از تنش تسلیم نشده است، نقاطی که با ترسیم برحسب  $T$  به دست می‌آیند روی یک خط راست قرار دارند. شیب این خط کمیت  $T/L$  را نشان می‌دهد و از روی آن می‌توان  $G$  را محاسبه کرد:



شکل ۳-۲۳ ماشین آزمایش پیچش

## مثال ۳-۲

در مثال ۳-۱، برای زاویه پیچش  $2^\circ$  چه گشتاوری باید بر انتهای شفت وارد کرد؟ از مقدار  $G = 77 \text{ GPa}$  برای مدول صلابت فولاد استفاده کنید.

از معادله (۳-۱۶)،

$$T = \frac{JG}{L} \phi$$

با جایگذاری مقادیر داده شده،

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa} \quad L = 1.5 \text{ m}$$

$$\phi = 2^\circ \left( \frac{\pi \text{ rad}}{360^\circ} \right) = 34.9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

در مثال ۳-۱، دیدیم که برای مقطع عرضی داده شده،

$$J = 1.71 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

بنابراین،

$$T = \frac{JG}{L} \phi =$$

$$\frac{(1.71 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}{1.5 \text{ m}} (34.9 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

$$\Rightarrow T = 1.829 \times 10^3 \text{ N.m} = 1.829 \text{ kN.m}$$

## مثال ۳-۳

در مثال‌های ۳-۱ و ۳-۲، اگر تنش برشی وارو بر سطح داخلی شفت فولادی-توخالی  $70 \text{ MPa}$  باشد، زاویه پیچش چقدر است؟

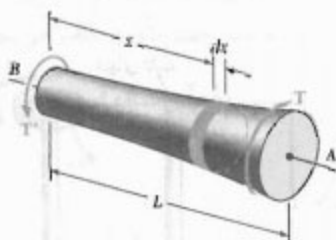
گشتاور داخلی  $T_i$  در هر قسمت شفت با عبور یک مقطع از آن قسمت و با ترسیم نمودار آزاد قسمتی از شفت که در یک طرف آن مقطع است به دست می آید. این روش، که قبلاً در قسمت ۳-۳ به کار رفت و در شکل ۱۷-۳ نشان داده شده است، در مسئله نمونه ۳-۳ به کار می رود.

در یک شفت با مقطع عرضی متغیر دایره ای (شکل ۳-۲۵)، فرمول (۱۶-۳) را برای دیسکی با ضخامت  $dx$  می توان به کار برد. زاویه چرخش یک وجه دیسک نسبت به وجه دیگر چنین است:

$$d\phi = \frac{T dx}{JG}$$

که در آن  $J$  تابعی از  $x$  است. با انتگرال گیری بر حسب  $x$  از ۰ تا  $L$ ، زاویه کل پیچش شفت را می یابیم:

$$\phi = \int_0^L \frac{T dx}{JG} \quad (۱۸-۳)$$



شکل ۲۵-۳

شفت نشان داده شده در شکل ۳-۲۲، که برای استنتاج فرمول (۱۶-۳) به کار رفت و شفت شکل ۱۶-۳ در مثال های ۳-۲ و ۳-۳ بررسی شد، هر دو از یک انتها به تکیه گاه ثابتی متصل اند. لذا، در هر دو حالت، زاویه پیچش  $\phi$  با زاویه دوران انتهای آزاد شفت برابر بود. اگر هر دو انتهای شفت بچرخند، زاویه پیچش شفت برابر است با زاویه چرخش یک انتهای شفت نسبت به انتهای دیگر. مثلاً، مجموعه شکل ۲۶-۳ الف را در نظر بگیرید. این مجموعه متشکل است از شفت های الاستیک  $AD$  و  $BE$ ، هر یک به طول  $L$ ، شعاع  $c$  و مدول صلابت  $G$ ، که به چرخ دنده هایی متصل اند (این چرخ دنده ها در نقطه  $C$  درگیر شده اند). با اعمال گشتاور  $T$  بر  $E$  (شکل ۳-۲۶ ب)، هر دو شفت می پیچند. چون انتهای  $D$  شفت  $AD$  ثابت است، زاویه پیچش  $AD$  با زاویه دوران انتهای  $A$

ابتدا، از معادله (۳-۱۰)، گشتاور  $T$  متناظر با مقدار داده شده  $T$  را می یابیم. سپس، با استفاده از معادله (۳-۱۶)، زاویه پیچش  $\phi$  را به دست می آوریم. روش دیگر: ابتدا، با استفاده از قانون هوک، کرنش برشی را در سطح داخلی شفت محاسبه می کنیم:

$$\gamma_{min} = \frac{r_{min}}{G} = \frac{V_0 \times 10^{-6} \text{ Pa}}{77 \times 10^9 \text{ Pa}} = 9.9 \times 10^{-6}$$

از معادله (۳-۲)،

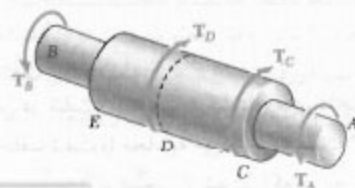
$$\phi = \frac{L\gamma_{min}}{c_1} = \frac{1500 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} (9.9 \times 10^{-6}) = 68.2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

بر حسب درجه،

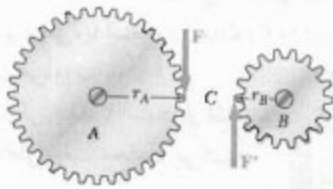
$$\phi = (68.2 \times 10^{-3} \text{ rad}) \left( \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \right) = 3.91^\circ$$

فرمول (۱۶-۳) را فقط وقتی می توان به کار برد که شفت همگن (با  $G$  ثابت) دارای مقطع عرضی یکنواخت و فقط در انتها بارگذاری شده باشد. اگر شفت در نقاطی غیر از دو انتها تحت گشتاور قرار گیرد یا اگر از قسمت های مختلف با مقاطع عرضی گوناگون و از مواد مختلف تشکیل شده باشد، آن را باید به قسمت هایی تقسیم کرد که هر کدام شرایط مورد نیاز را برای کاربرد فرمول (۱۶-۳) برقرار کنند. مثلاً در شفت  $AB$  در شکل ۳-۲۴، چهار قسمت مختلف زیر را باید در نظر گرفت:  $AC$ ،  $CD$ ،  $DE$  و  $EB$ . زاویه کل پیچش شفت (یعنی، زاویه چرخش انتهای  $A$  نسبت به انتهای  $B$ ) از جمع جبری زوایای پیچش هر قسمت به دست می آید. اگر گشتاور داخلی، طول، مدول صلابت، قطبی مقطع عرضی و مدول صلابت قسمت  $i$ ام را، به ترتیب، با  $G_i$ ،  $J_i$ ،  $L_i$ ،  $T_i$  نشان دهیم، زاویه کل پیچش شفت چنین است:

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \quad (۱۷-۳)$$



شکل ۲۴-۳



شکل ۲۷-۳

چون انتهای  $D$  اثر شفت  $AD$  ثابت است، زاویه چرخش چرخ‌دنده  $A$  با زاویه پیچش شفت برابر است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\phi_A = \frac{T_{AD}L}{JG} = \frac{2TL}{JG}$$

دو قوس  $CC'$  و  $CC''$  در شکل ۲۶-۳ ب برابرند، و می‌نویسم، در نتیجه،

$$\phi_B = (r_A/r_B)\phi_A = 2\phi_A$$

بنابراین،

$$\phi_B = 2\phi_A = \frac{4TL}{JG}$$

حال، شفت  $BE$  را در نظر می‌گیریم. زاویه پیچش آن برابر است با زاویه  $\phi_{E/B}$  (یعنی، زاویه چرخش انتهای  $E$  نسبت به انتهای  $B$ )، لذا،

$$\phi_{E/B} = \frac{T_{BE}L}{JG} = \frac{TL}{JG}$$

زاویه چرخش انتهای  $E$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{E/B}$$

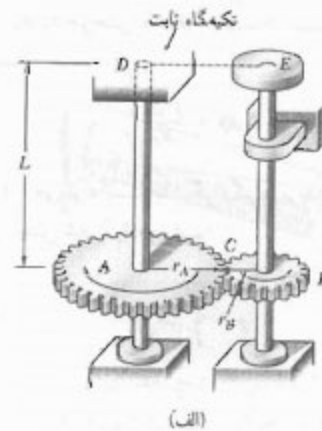
$$= \frac{4TL}{JG} + \frac{TL}{JG} = \frac{5TL}{JG}$$

### ۳-۶ شفت‌های نامعین استاتیکی

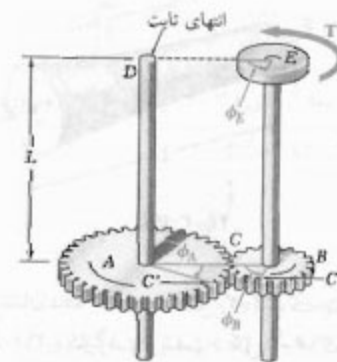
برای تعیین تنش در شفت، ابتدا باید گشتاورهای داخلی در قسمت‌های مختلف شفت را محاسبه می‌کردیم (قسمت ۳-۴). برای این منظور، نمودار آزاد قسمتی از شفت را که در یک طرف مقطع داده شده قرار دارد رسم می‌کردیم و مجموع گشتاورهای

برابر است. از طرف دیگر، چون هر دو انتهای شفت  $BE$  می‌چرخند زاویه پیچش  $BE$  برابر است با اختلاف زوایای چرخش  $\phi_E$  و  $\phi_B$ ؛ یعنی، زاویه پیچش با زاویه چرخش انتهای  $E$  نسبت به انتهای  $B$  برابر است. اگر این زاویه دوران نسبی را با  $\phi_{E/B}$  نشان دهیم، داریم:

$$\phi_{E/B} = \phi_E - \phi_B = \frac{TL}{JG}$$



(الف)



(ب)

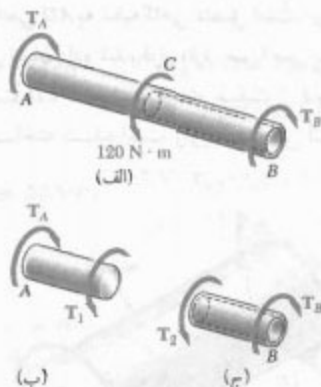
شکل ۲۶-۳

مثال ۴-۳

در شکل ۲۶-۳،  $r_A = 2r_B$ ، زاویه دوران انتهای  $E$  از شفت  $BE$  را بر اثر اعمال گشتاور  $T$  بیابید.

ابتدا، گشتاور  $T_{AD}$  و لوردیر شفت  $AD$  را می‌یابیم. با توجه به اینکه نیروهای مساوی و متضاد  $F$  و  $F'$  در  $C$  بر دو چرخ‌دنده وارد می‌شوند (شکل ۲۷-۳) و  $r_A = 2r_B$ ، گشتاور وارد بر شفت  $AD$  دو برابر گشتاور وارد بر شفت  $BE$  است؛ یعنی،  $T_{AD} = 2T$





شکل ۲۹-۳

از نمودار آزاد قسمت کوچکی از شفت، شامل انتهای A (شکل ۲۹-۳ ب)، دیده می‌شود که گشتاور داخلی  $T_1$  در AC با  $T_A$  برابر است؛ از نمودار آزاد قسمت کوچکی از شفت، شامل انتهای B (شکل ۲۹-۳ ج)، دیده می‌شود که گشتاور داخلی  $T_2$  در CB با  $T_B$  برابر است. از معادله (۱۶-۳) و با توجه به اینکه قسمت‌های AC و CB شفت در جهت‌های مخالف می‌پیچند، داریم

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_t G} - \frac{T_B L_2}{J_t G} = 0$$

یا حل  $T_B$

$$T_B = \frac{L_1 J_t}{L_2 J_t} T_A$$

با جایگذاری داده‌های عددی،

$$L_1 = L_2 = 125 \text{ mm}$$

$$J_t = \frac{1}{2} \pi (0.011 \text{ m})^4 = 230 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$J_t = \frac{1}{2} \pi [(0.011 \text{ m})^4 - (0.008 \text{ m})^4] = 165.6 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

در نتیجه،

$$T_B = 0.72 T_A$$

با جایگذاری این عبارت در معادله تعادل، داریم:

$$0.72 T_A = 120 \text{ N.m}$$

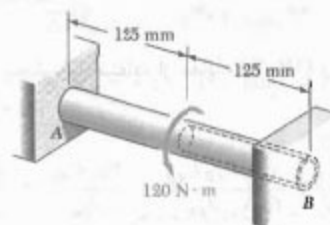
$$\Rightarrow T_A = 166.7 \text{ N.m} \quad T_B = 120 \text{ N.m}$$

وارد بر آن قسمت را مساوی صفر قرار می‌دادیم. به این ترتیب، گشتاورهای داخلی فوق‌الذکر را صرفاً با استاتیک به‌دست می‌آوریم.

گاهی، گشتاورهای داخلی را صرفاً با استاتیک نمی‌توان به‌دست آورد. در این موارد، از روابطی که شامل تغییرشکل‌های شفت هستند و از هندسه مسئله به‌دست می‌آیند، همراه با معادله‌های تعادل، باید استفاده کرد. از این‌رو، شفت را نامعین استاتیکی می‌گویند. در مثال زیر، و نیز در مسئله نمونه ۳-۵، شفت نامعین استاتیکی تحلیل شده است.

### مثال ۳-۵

شفت دایره‌ای AB متشکل است از یک استوانه فولادی به طول ۲۵۰ mm و به قطر ۲۲ mm که در آن سوراخی به طول ۱۲۵ mm و به قطر ۱۶ mm از انتهای B تعبیه شده است. شفت از دو انتها ثابت است، و گشتاور ۱۲۰ N.m در وسط آن وارد می‌شود (شکل ۲۸-۳). گشتاور وارده از تکیه‌گاه‌ها را بیابید.



شکل ۲۸-۳

نمودار آزاد شفت را رسم می‌کنیم و گشتاورهای وارده از تکیه‌گاه‌ها را با  $T_B$  و  $T_A$  نشان می‌دهیم (شکل ۲۹-۳ الف). با توجه به تعادل شفت،

$$T_A + T_B = 120 \text{ N.m}$$

چون این معادله برای تعیین دو مجهول  $T_B$  و  $T_A$  کافی نیست، شفت نامعین استاتیکی است.

چون شفت AB از دو انتها مقید است. لذا، زاویه کل پیچش آن صفر است. با این معلومات می‌توان گشتاورهای  $T_B$  و  $T_A$  را به‌دست آورد. زوایای پیچش قسمت‌های AC و CB را، به ترتیب، با  $\phi_2$  و  $\phi_1$  نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = 0$$

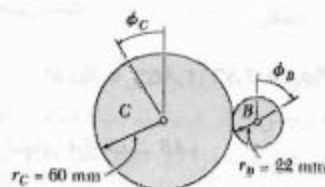


$$T_a = 74.1 \text{ N.m} \quad \blacktriangleleft$$

شفت  $CD$  از (۱)  $T_{CD} = 2.73 T_a$  با  $c = 12.5 \text{ mm}$  و  $\tau_{all} = 55 \text{ MPa}$  داریم:

$$\tau = \frac{T_{CD} c}{J} \Rightarrow 55 \text{ MPa} = \frac{2.73 T_a (12.5 \times 10^{-3} \text{ m})}{\frac{1}{2} \pi (12.5 \times 10^{-3} \text{ m})^4}$$

$$T_a = 61.8 \text{ N.m} \quad \blacktriangleleft$$



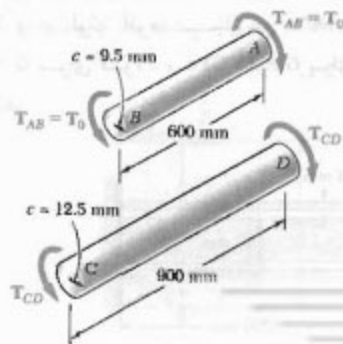
ماکزیمم گشتاور مجاز، مقدار کوچکتر را برای  $T_a$  انتخاب می‌کنیم:

$$T_a = 61.8 \text{ N.m} \quad \blacktriangleleft$$

ب. زاویه چرخش انتهای  $A$ ، ابتدا، زاویه پیچش هر شفت را محاسبه می‌کنیم.

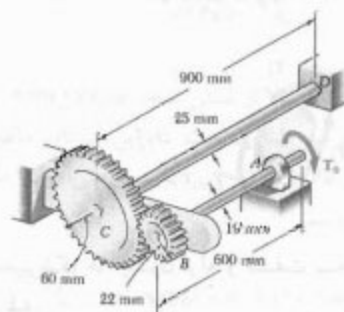
شفت  $AB$  برای  $T_{AB} = T_a = 61.8 \text{ N.m}$

$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB} L}{JG} = \frac{(61.8 \text{ N.m})(0.6 \text{ m})}{\frac{1}{2} \pi (0.0095 \text{ m})^4 (77 \times 10^9 \text{ Pa})} = 0.0276 \text{ rad} = 2.15^\circ$$



### مسئله نمونه ۳-۴

دو شفت توپر فولادی توسط چرخ‌دنده‌هایی به هم متصل شده‌اند. اگر برای هر شفت  $G = 77 \text{ GPa}$  و تنش برشی مجاز  $55 \text{ MPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم گشتاور  $T_a$  که می‌توان بر انتهای  $A$  از شفت  $AB$  وارد کرد؛ (ب) زاویه دوران انتهای  $A$ .



حل

استاتیک. مقدار نیروی مماسی بین دندانه‌های چرخ‌دنده را با  $F$  نشان می‌دهیم، و می‌نویسیم

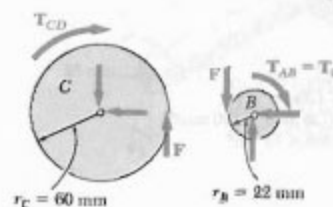
$$\text{چرخ‌دنده } B: \sum M_B = 0: F(22 \text{ mm}) - T_a = 0$$

$$\text{چرخ‌دنده } C: \sum M_C = 0: F(60 \text{ mm}) - T_{CD} = 0$$

$$T_{CD} = 2.73 T_a \quad (1)$$

سینماتیک. حرکت‌های محیطی چرخ‌دنده‌ها برابرند، و می‌نویسیم:

$$r_B \phi_B = r_C \phi_C \Rightarrow \phi_B = \phi_C \frac{r_C}{r_B} = \phi_C \frac{60 \text{ mm}}{22 \text{ mm}} = 2.73 \phi_C \quad (2)$$



الف. گشتاور  $T_a$

شفت  $AB$  با  $T_{AB} = T_a$  و  $c = 9.5 \text{ mm}$  و ماکزیمم تنش مجاز برشی  $55 \text{ MPa}$ ، می‌نویسیم:

$$\tau = \frac{T_{AB} c}{J} \Rightarrow 55 \text{ MPa} = \frac{T_a (9.5 \times 10^{-3} \text{ m})}{\frac{1}{2} \pi (9.5 \times 10^{-3} \text{ m})^4}$$

حل

استاتیکی. نمودار آزاد دیسک. گشتاور وارده از لوله بر دیسک را با  $T_1$  و گشتاور وارده از شفت را با  $T_2$  نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$T_0 = T_1 + T_2 \quad (۱)$$

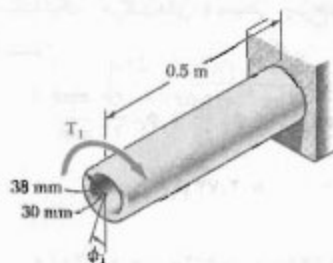


تغییر شکل‌ها. چون لوله و شفت به دیسک صلب متصل‌اند.

$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \frac{T_1 L_1}{J_1 G_1} = \frac{T_2 L_2}{J_2 G_2}$$

$$\frac{T_1 (0.9 \text{ m})}{(2.003 \times 10^{-8} \text{ m}^4)(27 \text{ GPa})} = \frac{T_2 (0.9 \text{ m})}{(2.003 \times 10^{-8} \text{ m}^4)(27 \text{ GPa})}$$

$$T_2 = 0.874 T_1 \quad (۲)$$



$$\begin{aligned} G_1 &= 27 \text{ GPa} \\ J_1 &= \frac{\pi}{32} [(38 \text{ mm})^4 - (30 \text{ mm})^4] \\ &= 2.003 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

تنش‌های برشی. فرض می‌کنیم که شرط  $\tau_{\text{آلومینیوم}} \leq 70 \text{ MPa}$  تعیین‌کننده است. برای لوله آلومینیومی،

$$T_1 = \frac{\tau_{\text{آلومینیوم}} J_1}{c_1} = \frac{(70 \text{ MPa})(2.003 \times 10^{-8} \text{ m}^4)}{0.019 \text{ m}} = 739 \text{ N}\cdot\text{m}$$

شفت CD

$$T_{CD} = 2.72 T_0 = 2.72 (61.8 \text{ N}\cdot\text{m}) = 168.7 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned} \phi_{CD} &= \frac{T_{CD} L}{JG} = \frac{(168.7 \text{ N}\cdot\text{m})(0.9 \text{ m})}{\frac{1}{2} \pi (0.0125 \text{ m})^4 (77 \times 10^9 \text{ Pa})} \\ &= 0.514 \text{ rad} = 2.95^\circ \end{aligned}$$

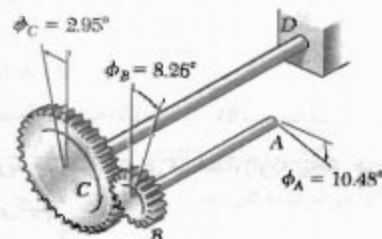
چون انتهای D از شفت CD ثابت است.  $\phi_C = \phi_{CD} = 2.95^\circ$  با استفاده از (۲)، زاویه چرخش چرخ‌دنده B چنین است:

$$\phi_B = 2.72 \phi_C = 2.72 (2.95^\circ) = 8.02^\circ$$

برای انتهای A از شفت AB،

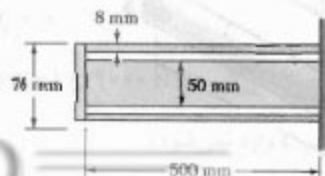
$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 8.02^\circ + 2.15^\circ$$

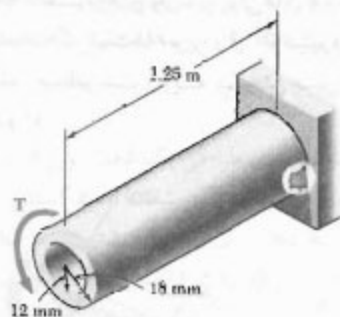
$$\phi_A = 10.17^\circ \quad \triangleleft$$



مسئله نمونه ۳-۵

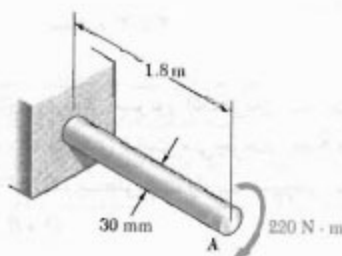
یک شفت فولادی و یک لوله آلومینیومی به یک تکیه‌گاه ثابت و یک دیسک صلب، با مقطع عرضی نشان داده شده، متصل شده‌اند. اگر تنش‌های اولیه صفر باشند، ماکزیمم گشتاور  $T_0$  را که می‌توان بر دیسک وارد کرد بیابید. تنش مجاز در شفت فولادی  $120 \text{ MPa}$  و در لوله آلومینیومی  $70 \text{ MPa}$  است. از  $G = 77 \text{ GPa}$  برای فولاد و  $G = 27 \text{ GPa}$  برای آلومینیوم استفاده کنید.





شکل ۳۱-۳

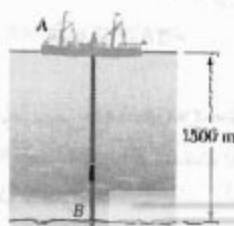
۳۲-۳ (الف) برای شفت توپر فولادی نشان داده شده  
 $(G = 77 \text{ GPa})$ ، زاویه پیچش را در  $A$  بیابید. (ب) قسمت الف  
 را با این فرض حل کنید که شفت فولادی دارای قطر خارجی  
 ۳۰ mm و قطر داخلی ۲۰ mm است.



شکل ۳۲-۳

۳۳-۳ مطلوبست ماکزیمم قطر مجاز میله فولادی  
 $(G = 77 \text{ GPa})$  به طول ۳ m در صورتی که بخواهیم تنش برشی  
 ایجاد شده در میله بر اثر پیچش ۳۰° از ۸۰ MPa بیشتر نشود.

۳۴-۳ یک کشتی، از نقطه  $A$ ، عملیات حفاری نفت را از  
 کف اقیانوسی به عمق ۵۰۰۰ ft شروع کرده است. اگر نوک لوله  
 مته فولادی  $(G = 77.4 \text{ GPa})$  به قطر ۲۰۰ mm قبل از شروع  
 عملیات سر مته  $B$  دو دور کامل بزند، ماکزیمم تنش برشی در  
 لوله را بر اثر پیچش بیابید.



شکل ۳۴-۳

با استفاده از معادله (۲)، مقدار  $T_x$  را محاسبه می‌کنیم و سپس  
 ماکزیمم تنش برشی را در شفت فولادی می‌یابیم.

$$T_x = 0.874 T_1 = 0.874 (3690) = 3225 \text{ N.m}$$

$$\tau_{\text{در } r_1} = \frac{T_x c_x}{J_x} = \frac{(3225 \text{ N.m})(0.025 \text{ m})}{0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 131.3 \text{ MPa}$$

دیده می‌شود که مقدار بالا از تنش مجاز فولاد (۱۲۰ MPa)  
 بیشتر است؛ لذا، فرض ما اشتباه است. بنابراین، گشتاور ماکزیمم  
 $T_0$  را با استفاده از  $\tau_{\text{در } r_1} = 120 \text{ MPa}$  به‌دست می‌آوریم. ابتدا،  
 گشتاور  $T_x$  را می‌یابیم:

$$T_x = \frac{\tau_{\text{در } r_1} J_x}{c_x} = \frac{(120 \text{ MPa})(0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.025 \text{ m}} = 2950 \text{ N.m}$$

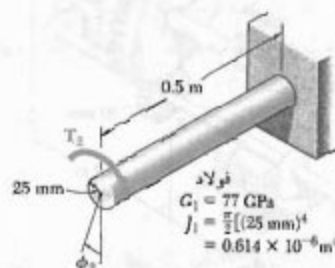
از معادله (۲)،

$$2950 \text{ N.m} = 0.874 T_1 \Rightarrow T_1 = 3375 \text{ N.m}$$

با استفاده از معادله (۱)، ماکزیمم گشتاور مجاز را به‌دست  
 می‌آوریم:

$$T_0 = T_1 + T_x = 3375 \text{ N.m} + 2950 \text{ N.m}$$

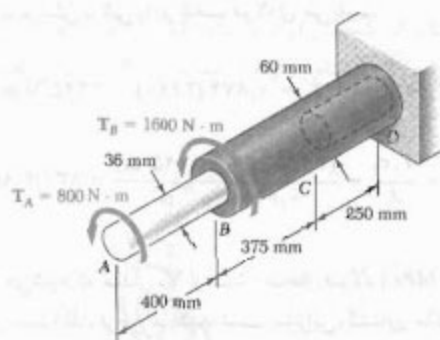
$$T_0 = 6325 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$



## مسائل

۳۱-۳ برای شفت آلومینیومی نشان داده شده  
 $(G = 27 \text{ GPa})$ ، مطلوبست: (الف) گشتاور  $T$  که باعث زاویه  
 پیچش ۴° می‌شود، (ب) زاویه پیچش که همان گشتاور  $T$  را در  
 شفت توپر استوانه‌ای با همان طول و مقطع عرضی  
 ایجاد می‌کند.

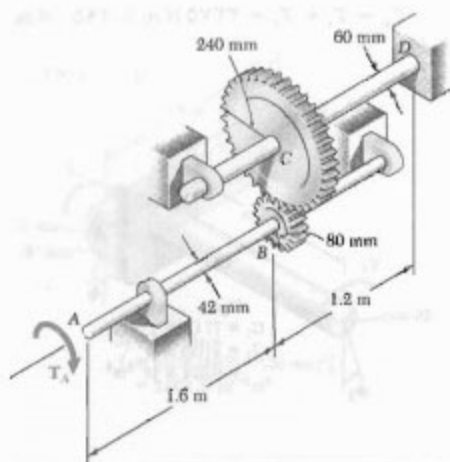
۳۵-۳ گشتاورهای وارده بر پولی‌های  $A$  و  $B$  در شکل نشان داده شده‌اند. اگر شفت‌ها توپر و از آلومینیوم ( $G = ۳۹ \text{ GPa}$ ) باشند، مطلوبست زاویه پیچش بین: (الف)  $A$  و  $B$ ، (ب)  $A$  و  $C$ .



شکل م ۳۷-۳

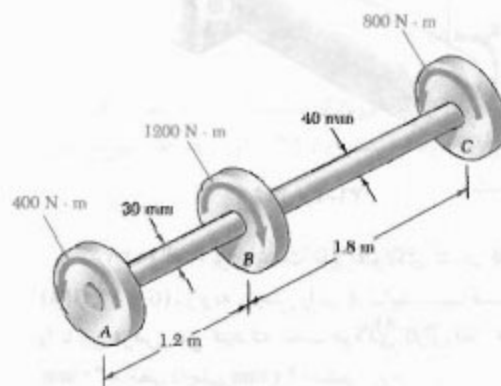
۳۸-۳ مسئله ۳۷-۳ را با این فرض حل کنید که قسمت  $BD$  به صورت یک میله توپر به قطر  $۶۰ \text{ mm}$  و به طول  $۶۲۵ \text{ mm}$  باشد.

۳۹-۳ دو شفت توپر فولادی ( $G = ۷۷.۲ \text{ GPa}$ ) توسط چرخ‌دنده‌های نشان داده شده به هم متصل شده‌اند. زاویه چرخش انتهای  $A$  را بر اثر اعمال  $T_A = ۱۲۰۰ \text{ N.m}$  بیابید.



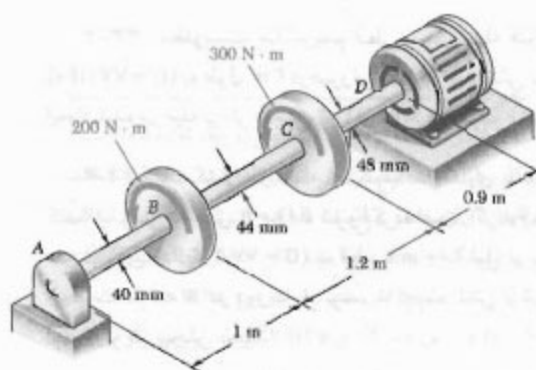
شکل م ۳۹-۳

۴۰-۳ مسئله ۳۹-۳ را با این فرض حل کنید که قطر هر شفت  $۵۲ \text{ mm}$  است.



شکل م ۳۵-۳

۳۶-۳ گشتاور وارده از موتور الکتریکی به شفت آلومینیومی  $ABCD$ ، که با نندی ثابت می‌چرخد،  $۵۰۰ \text{ N.m}$  است. اگر  $G = ۲۷ \text{ GPa}$ ، مطلوبست زاویه پیچش بین: (الف)  $B$  و  $C$ ، (ب)  $B$  و  $D$ .



شکل م ۳۶-۳

۳۷-۳ میله آلومینیومی  $AB$  ( $G = ۲۷ \text{ GPa}$ ) به میله برنجی  $BD$  ( $G = ۳۹ \text{ GPa}$ ) متصل است. اگر قسمت  $CD$  از میله برنجی نوخالی و دارای قطر داخلی  $۴۰ \text{ mm}$  باشد، زاویه پیچش  $A$  را بیابید.

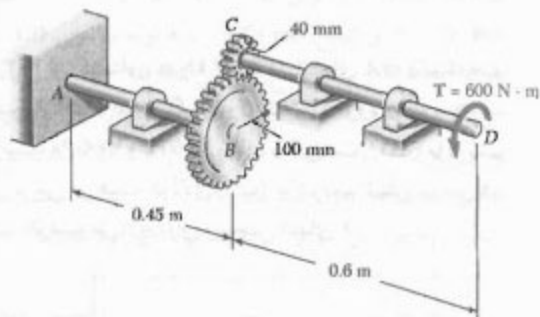


۴۴-۳ مسئله ۳-۴۱ را با این فرض حل کنید که شعاع چرخ‌دنده  $B$  برابر با  $150 \text{ mm}$  و شعاع چرخ‌دنده  $E$  برابر با  $110 \text{ mm}$  باشد.

۴۵-۳ مشخصه‌های طراحی یک شفت توپر استوانه‌ای به طول  $2 \text{ m}$  ایجاب می‌کند که وقتی شفت تحت گشتاور  $7 \text{ kN.m}$  قرار می‌گیرد، زاویه پیچش آن از  $0.5^\circ$  بیشتر نشود. مطلوبیت قطر شفت، در صورتی که شفت: (الف) از فولاد با تنش برشی مجاز  $87 \text{ MPa}$  و مدول صلابت  $77 \text{ GPa}$  تشکیل شده باشد.

۴۶-۳ مشخصه‌های طراحی یک شفت توپر استوانه‌ای به طول  $1.2 \text{ m}$  ایجاب می‌کند که وقتی شفت تحت گشتاور  $750 \text{ N.m}$  قرار می‌گیرد، زاویه پیچش آن از  $4^\circ$  بیشتر نشود. مطلوبیت قطر شفت، در صورتی که شفت از فولاد با تنش برشی مجاز  $90 \text{ MPa}$  و مدول صلابت  $77.2 \text{ GPa}$  تشکیل شده باشد.

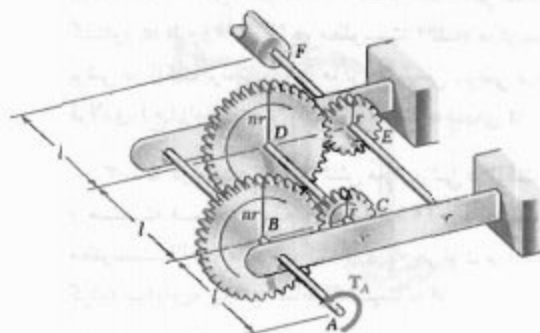
۴۷-۳ طراحی سیستم چرخ‌دنده-شفت نشان داده شده ایجاب می‌کند که شفت‌های فولادی  $AB$  و  $CD$  دارای قطر یکسان باشند، و نیز  $\tau_{\max} \leq 55 \text{ MPa}$  و زاویه چرخش انتهای  $D$  از شفت  $CD$  بیشتر از  $2^\circ$  نشود. اگر  $G = 77 \text{ GPa}$ ، قطر مورد نیاز شفت‌ها را بیابید.



شکل م ۴۷-۳ و م ۴۸-۳

۴۸-۳ در مجموعه نشان داده شده، قطر شفت‌ها عبارتند از  $d_{AB} = 50 \text{ mm}$  و  $d_{CD} = 38 \text{ mm}$ . اگر  $G = 77 \text{ GPa}$ ، زاویه چرخش انتهای  $D$  را بیابید.

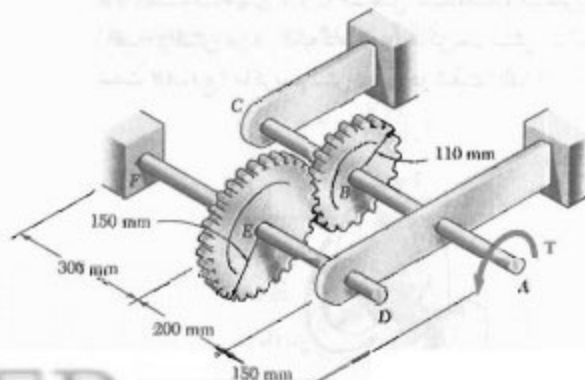
۴۹-۳ کدگذار  $F$ ، که برای ثبت دیجیتالی چرخش شفت  $A$  به کار می‌رود، توسط زنجیره چرخ‌دنده‌ای نشان داده شده به این شفت متصل شده است. زنجیره از چهار چرخ‌دنده و سه شفت توپر فولادی، هر کدام به قطر  $d$ ، تشکیل شده است. دو تا از چرخ‌دنده‌ها به شعاع  $r$  و دو تای دیگر به شعاع  $nr$  هستند. اگر از چرخش کدگذار  $F$  جلوگیری شود، زاویه چرخش انتهای  $A$  را برحسب  $n$  و  $J, G, l, T$  بیابید.



شکل م ۴۹-۳

۴۲-۳ برای زنجیره چرخ‌دنده‌ای در مسئله ۳-۴۲، زاویه چرخش انتهای  $A$  را برای  $l = 60 \text{ mm}$ ،  $T = 0.75 \text{ N.m}$ ،  $G = 77 \text{ GPa}$ ،  $d = 4 \text{ mm}$  و  $n = 2$  بیابید.

۴۳-۳ دو شفت، هر یک به قطر  $22 \text{ mm}$ ، توسط چرخ‌دنده‌های نشان داده شده به هم متصل شده‌اند. اگر  $G = 77 \text{ GPa}$  و شفت در  $F$  ثابت باشد، زاویه چرخش انتهای  $A$  را بر اثر اعمال گشتاور  $130 \text{ N.m}$  بیابید.



شکل م ۴۳-۳

۵۳-۳ شفت مرکب نشان داده شده با اعمال گشتاور  $T$  در انتهای  $A$  می‌پیچد. اگر مدول صلابت فولاد و آلومینیوم، به ترتیب،  $۷۷ \text{ GPa}$  و  $۲۷ \text{ GPa}$  باشد، مطلوبست بیشترین زاویه چرخش انتهای  $A$  در صورتیکه بنحواهم تنش‌ها از مقادیر مجاز  $\tau_{\text{فولاد}} = ۶۰ \text{ MPa}$  و  $\tau_{\text{آلومینیوم}} = ۴۵ \text{ MPa}$  بیشتر نشوند.

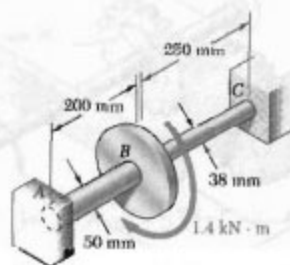
۵۴-۳ شفت مرکب نشان داده شده متشکل است از ژاکت برنجی ( $G = ۳۹ \text{ GPa}$ ) به ضخامت  $۵ \text{ mm}$  که به هسته فولادی ( $G = ۷۷.۲ \text{ GPa}$ ) به قطر  $۴۰ \text{ mm}$  متصل است. اگر شفت تحت گشتاور  $۶۰۰ \text{ N.m}$  قرار گیرد، مطلوبست: (الف) ماکزیم تنش برشی در ژاکت برنجی، (ب) ماکزیم تنش برشی در هسته فولادی، (ج) زاویه پیچش انتهای  $B$  نسبت به انتهای  $A$ .

۵۵-۳ در مسئله ۵۴-۳، تنش مجاز برشی در ژاکت برنجی و هسته فولادی، به ترتیب،  $۲۰ \text{ MPa}$  و  $۴۵ \text{ MPa}$  است. مطلوبست: (الف) ماکزیم گشتاوری که می‌توان بر ژاکت وارد کرد، (ب) زاویه پیچش متناظر  $B$  نسبت به  $A$ .



شکل م ۵۴-۳ و م ۵۵-۳

۵۶-۳ دو شفت توپر فولادی ( $G = ۷۷.۲ \text{ GPa}$ ) به دایک  $B$  و تکیه‌گاه‌های  $A$  و  $C$  متصل شده‌اند، مطلوبست: (الف) واکنش در هر تکیه‌گاه، (ب) ماکزیم تنش برشی در شفت  $AB$ ، (ج) ماکزیم تنش برشی در شفت  $BC$ .

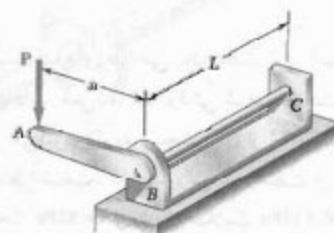


شکل م ۵۶-۳

۴۹-۳ میله توپر استوانه‌ای  $BC$  به بازوی صلب  $AB$  و به تکیه‌گاه ثابت  $C$  متصل است. نیروی عمودی  $P$  که در  $A$  وارد می‌شود تغییر شکل کوچک  $\Delta$  را در نقطه  $A$  ایجاد می‌کند. نشان دهید که ماکزیم تنش برشی در میله عبارت است از:

$$\tau = \frac{G\delta}{\sqrt{3}La} \Delta$$

که در آن  $d$  قطر میله و  $G$  مدول صلابت است.



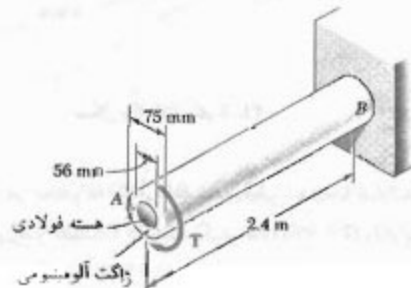
شکل م ۴۹-۳، م ۵۰-۳ و م ۵۱-۳

۵۱-۳ و ۵۰-۳ میله توپر استوانه‌ای  $BC$  به طول  $L = ۰.۶ \text{ m}$  به بازوی صلب  $AB$  به طول  $a = ۰.۴ \text{ m}$  و به تکیه‌گاه  $C$  متصل است. تغییر مکان  $A$  تحت بار  $P = ۴۰۰ \text{ N}$  نباید از  $۲۵ \text{ mm}$  بیشتر شود. قطر میله را در شرایط زیر بیابید:

۵۰-۳ فولاد:  $G = ۷۷ \text{ GPa}$ ،  $\tau_{\text{فولاد}} = ۸۴ \text{ MPa}$

۵۱-۳ آلومینیوم:  $G = ۲۷ \text{ GPa}$ ،  $\tau_{\text{آلومینیوم}} = ۶۲ \text{ MPa}$

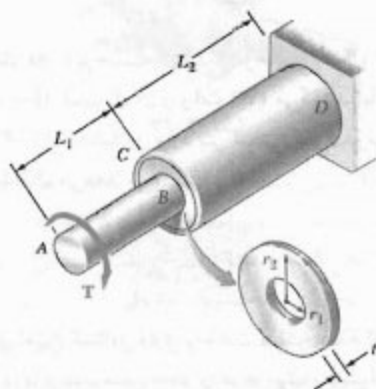
۵۲-۳ گشتاور  $T = ۴ \text{ kN.m}$  در انتهای  $A$  از یک شفت مرکب وارد شده است. اگر مدول صلابت فولاد و آلومینیوم، به ترتیب،  $۷۷ \text{ GPa}$  و  $۲۷ \text{ GPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیم تنش برشی در هسته فولادی، (ب) ماکزیم تنش برشی در ژاکت آلومینیومی، (ج) زاویه پیچش انتهای  $A$ .



شکل م ۵۲-۳ و م ۵۳-۳

۶۲-۳ از یک ورق حلقوی با ضخامت  $t$  و مدول صلابت  $G$  برای اتصال شفت  $AB$  به شعاع  $r_1$  به لوله  $CD$  با شعاع داخلی  $r_2$  استفاده شده است. اگر گشتاور  $T$  بر انتهای  $A$  از شفت  $AB$  وارد شود و انتهای  $D$  لوله  $CD$  ثابت باشد، (الف) مقدار و مکان ماکزیم تنش برشی در ورق حلقوی را بیابید، (ب) نشان دهید که زاویه چرخش انتهای  $B$  نسبت به انتهای  $C$  لوله عبارت است از:

$$\phi_{BC} = \frac{T}{4\pi Gt} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)$$



شکل م ۶۲-۳ و م ۶۳-۳

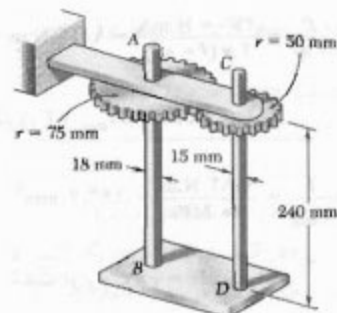
۶۳-۳ از ورق حلقوی به برنجی ( $G = 39 \text{ GPa}$ )، با ضخامت  $t = 6 \text{ mm}$ ، برای اتصال شفت برنجی  $AB$ ، به طول  $L_1 = 50 \text{ mm}$  و شعاع  $r_1 = 30 \text{ mm}$  به لوله برنجی  $CD$ ، به طول  $L_2 = 125 \text{ mm}$ ، شعاع داخلی  $r_2 = 75 \text{ mm}$  و ضخامت  $3 \text{ mm}$  استفاده شده است. اگر گشتاور  $T = 2.8 \text{ kN.m}$  بر انتهای  $A$  از شفت  $AB$  وارد شود و انتهای  $D$  از لوله  $CD$  ثابت باشد، (الف) ماکزیم تنش برشی در سیستم شفت-لوله، (ب) زاویه چرخش انتهای  $A$  (راهنمایی: از فرمول به دست آمده در مسئله ۶۲-۳ برای حل قسمت ب استفاده کنید).

### ۷-۳ طراحی شفت‌های انتقال قدرت

مشخصات اصلی در طراحی یک شفت انتقال قدرت عبارتند از قدرتی که شفت باید انتقال دهد، و سرعت چرخش شفت. نقش طراح، انتخاب ماده و ابعاد مقطع عرضی شفت است، به طوری که ماکزیم تنش برشی در ماده هنگام انتقال قدرت در یک سرعت مشخص شده از مقدار مجاز خود بیشتر نشود.

۵۷-۳ در مسئله ۵۶-۳، شفت  $AB$  را با یک شفت توخالی جایگزین کنید که دارای همان قطر خارجی و با قطر داخلی  $25 \text{ mm}$  باشد.

۵۸-۳ با جلوگیری از چرخش انتهای پایینی هر شفت، گشتاور  $80 \text{ N.m}$  بر انتهای  $A$  از شفت  $AB$  وارد می‌شود. اگر برای هر دو شفت  $G = 77.2 \text{ GPa}$ ، مطلوب است: (الف) ماکزیم تنش برشی در شفت  $CD$ ، (ب) زاویه چرخش انتهای  $A$ .



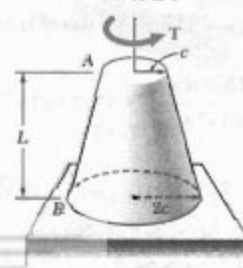
شکل م ۵۸-۳

۵۹-۳ مسئله ۵۸-۳ را با این فرض حل کنید که گشتاور  $80 \text{ N.m}$  بر انتهای  $C$  از شفت  $CD$  وارد شود.

۶۰-۳ یک شفت توپر و یک شفت توخالی از ماده یکسان و با وزن و طول یکسان ساخته شده‌اند. اگر  $c_1/c_2 = \pi$ ، نشان دهید که نسبت گشتاور  $T_2$  در شفت توپر به گشتاور  $T_1$  در شفت توخالی، برابر است با: (الف)  $\sqrt{1-n^2}/(1+n^2)$  در صورتی که ماکزیم تنش برشی در هر شفت دارای مقدار یکسان باشد، (ب)  $(1-n^2)/(1+n^2)$  در صورتی که زاویه پیچش هر دو شفت یکسان باشد.

۶۱-۳ گشتاور  $T$ ، مطابق شکل، بر شفت توپر مخروطی  $AB$  وارد می‌شود. با انتگرال‌گیری نشان دهید که زاویه پیچش در انتهای  $A$  عبارت است از:

$$\phi = \frac{\sqrt{TL}}{12\pi Gc^2}$$



شکل م ۶۱-۳

ابتدا قدرت موتور را برحسب  $N.m/s$  و فرکانس آن را برحسب سیکل بر ثانیه (هرتز) بیان می‌کنیم.

$$P = 3.7 \text{ kW} = 3700 \text{ N.m/s}$$

$$f = (3600 \text{ rpm}) \frac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 60 \text{ Hz} = 60 \text{ s}^{-1}$$

گشتاور وارد بر شفت را از معادله (۲۱-۳) می‌یابیم:

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{3700 \text{ N.m/s}}{2\pi (60 \text{ s}^{-1})} = 9.87 \text{ N.m}$$

با جایگذاری  $T$  و  $\tau_{\max}$  در معادله (۲۲-۳)،

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}} = \frac{9.87 \text{ N.m}}{60 \text{ MPa}} = 163.7 \text{ mm}^3$$

برای یک شفت توپر،  $J/c = \frac{1}{2}\pi c^2$ . بنابراین،

$$\frac{1}{2}\pi c^2 = 163.7 \text{ mm}^3$$

$$c = 10.7 \text{ mm}$$

$$d = 2c = 21.4 \text{ mm}$$

از شفتی به قطر ۱۰ mm استفاده می‌شود.

مثال ۷-۳

شفتی که از یک لوله فولادی با قطر خارجی ۵۰ mm تشکیل شده است قدرت ۱۰۰ kW را در فرکانس دوران ۲۰ هرتز انتقال می‌دهد. مطلوبست ضخامت لوله به طوری که تنش برشی از ۶۰ MPa بیشتر نشود.

گشتاور وارد بر شفت را از معادله (۲۱-۳) می‌یابیم:

$$T = \frac{P}{2\pi f} = \frac{100 \times 10^3 \text{ W}}{2\pi (20 \text{ Hz})} = 795.8 \text{ N.m}$$

حداقل مقدار  $J/c$  را از معادله (۲۲-۳) تعیین می‌کنیم:

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}} = \frac{795.8 \text{ N.m}}{60 \times 10^6 \text{ N/m}^2} = 13.26 \times 10^{-9} \text{ m}^3 \quad (23-3)$$

از معادله (۱۰-۳)،

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2c} (c_o^4 - c_i^4) = \frac{\pi}{2 \times 0.05} [(0.025)^4 - c_i^4] \quad (24-3)$$

از دینامیک می‌دانیم که قدرت  $P$  برای جسم صلب چرخانی که تحت گشتاور  $T$  قرار دارد چنین است:

$$P = T\omega \quad (19-3)$$

که در آن،  $\omega$  سرعت زاویه‌ای جسم برحسب رادیان بر ثانیه است. اما  $\omega = 2\pi f$  است، که در آن  $f$  فرکانس دوران (تعداد دوران‌ها در یک ثانیه) است. واحد فرکانس  $s^{-1}$  است و آن را هرتز (Hz) می‌گویند. با جایگذاری  $\omega$  در معادله (۱۹-۳)،

$$P = 2\pi f T \quad (20-3)$$

در واحدهای SI،  $f$  برحسب Hz،  $T$  برحسب N.m، و قدرت برحسب N.m/s است که آن را وات (W) می‌گویند. با حل  $T$  از معادله (۲۰-۳)، گشتاور وارد بر شفتی که قدرت  $P$  را در فرکانس  $f$  انتقال می‌دهد می‌یابیم:

$$T = \frac{P}{2\pi f} \quad (21-3)$$

پس از تعیین گشتاور وارد بر شفت و انتخاب ماده، طرح مقادیر  $T$  و ماکزیم تنش مجاز را در فرمول پیچش الاستیک (۹-۳) قرار می‌دهد. با حل  $J/c$

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (22-3)$$

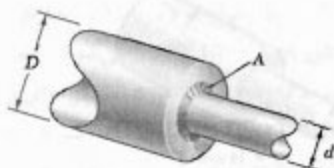
به این ترتیب، مینیم مقدار مجاز پارامتر  $J/c$  به دست می‌آید. در واحدهای SI،  $T$  برحسب N.m،  $\tau_{\max}$  برحسب Pa (N/m<sup>2</sup>) و  $J/c$  برحسب m<sup>3</sup> است. در یک شفت توپر استوانه‌ای،  $J/c = \frac{1}{2}\pi c^2$  و  $J/c = \frac{1}{2}\pi c^2$  با جایگذاری در معادله (۲۲-۳) و با حل  $c$ ، مینیم مقدار مجاز برای شعاع شفت به دست می‌آید. در یک شفت استوانه‌ای توخالی،  $J/c$  پارامتر تعیین‌کننده است ( $c_i$  شعاع خارجی شفت است)؛ مقدار این پارامتر را از معادله (۱۱-۳) می‌توان تعیین و وارسی کرد که آیا مقطع عرضی داده شده قابل قبول است یا نه.

مثال ۶-۳

اندازه شفت روتور موتوری به قدرت ۳.۷ kW که با ۳۶۰۰ rpm می‌چرخد چقدر باشد تا تنش برشی در شفت از ۶۰ MPa بیشتر نشود؟

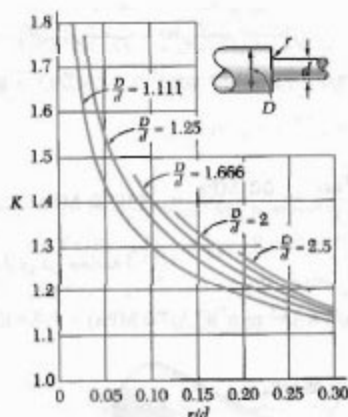
به وجود می‌آید. مثلاً، در شکل ۳-۳۱ تنش بزرگی در مقطع A به وجود آمده است. این تنش‌ها را با استفاده از گرده (مسابیچه) می‌توان کاهش داد. ماکزیمم مقدار تنش برشی در گرده چنین است:

$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{J} \quad (3-25)$$



شکل ۳-۳۱

که در آن،  $Tc/J$  تنش است که برای شفت با قطر کمتر محاسبه شده، و  $K$  ضریب تمرکز تنش است. ضریب  $K$  فقط به نسبت دو قطر و نسبت شعاع گرده به قطر شفت کوچکتر بستگی دارد. لذا، آن را می‌توان محاسبه و به صورت جدول یا نمودار نشان داد (شکل ۳-۳۲). گفتنی است که تعیین تنش‌های برشی موضعی بالاین روش فقط تا وقتی صحت دارد که مقدار  $\tau_{\max}$  از حد تناسب ماده بیشتر نشود، زیرا مقدار  $K$  در شکل ۳-۳۲ بر مبنای رابطه خطی بین تنش برشی و کرنش برشی است. اگر تغییر شکل پلاستیک روی دهد، تنش ماکزیمم از آنچه که با معادله (۳-۲۵) به دست می‌آید کمتر خواهد بود.



شکل ۳-۳۲ ضرایب تمرکز تنش برای گرده‌ها در شفت‌های دایره‌ای \*

\* W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1997.

سمت راست معادله‌های (۳-۲۳) و (۳-۲۴) را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$(0.025)^3 - c_1^3 = \frac{0.050}{\pi} (13.26 \times 10^{-9})$$

$$c_1^3 = 390.6 \times 10^{-9} - 211.0 \times 10^{-9} = 179.6 \times 10^{-9} \text{ m}^3$$

$$c_1 = 20.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 20.6 \text{ mm}$$

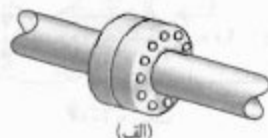
ضخامت لوله چنین است:

$$c_2 - c_1 = 25 \text{ mm} - 20.6 \text{ mm} = 4.4 \text{ mm}$$

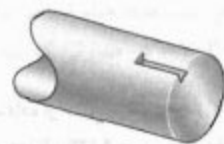
از لوله‌ای با ضخامت ۵ mm استفاده می‌شود.

### ۳-۸ تمرکز تنش در شفت‌های دایره‌ای

فرمول  $\tau_{\max} = Tc/J$  در قسمت ۳-۴ برای یک شفت دایره‌ای با مقطع عرضی یکنواخت به کار می‌رود. به علاوه، در قسمت ۳-۳ فرض شد که شفت از طریق صفحات صلبی که به دو انتهای شفت متصل‌اند از دو انتها بارگذاری می‌شود. ولی، در عمل، گشتاورها معمولاً از طریق کوپلینگ‌های فلانچی بر شفت وارد می‌شوند (شکل ۳-۳۰ الف). در هر دو حالت، ممکن است در مقطعی که بر آن گشتاور وارد می‌شود، یا در نزدیک آن، توزیع تنش را نتوان با فرمول پیچش داده شده در بالا بیان کرد. مثلاً، تمرکز تنش بزرگی در مجاورت عیار شکل ۳-۳۰ ب به وجود می‌آید. برای تعیین این تنش‌های موضعی می‌توان از روش‌های آزمایشی، و گاهی از نظریه الاستیسته استفاده کرد.



(الف)



(ب)

شکل ۳-۳۰

طبق قسمت ۳-۴، از فرمول پیچش برای شفت با مقطع عرضی متغیر دایره‌ای نیز می‌توان استفاده کرد. ولی، در مقطع عرضی شفتی که قطر آن ناگهان تغییر می‌کند، تمرکز تنش

قدرت.  $f = (900 \text{ rpm}) \frac{1 \text{ Hz}}{60 \text{ rpm}} = 15 \text{ Hz} = 15 \text{ s}^{-1}$ . می‌نویسیم:

$$P_a = 2\pi fT = 2\pi(15 \text{ s}^{-1})(6460 \text{ N.m}) = 656 \text{ kN.m/s} = 656 \text{ kW}$$

$$P_a = 656 \text{ kW} \quad \blacktriangleleft$$

ب. طرح نهایی برای  $r = 24 \text{ mm}$

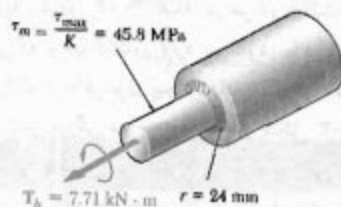
$$\frac{D}{d} = 2 \quad \frac{r}{d} = \frac{24 \text{ mm}}{90 \text{ mm}} = 0.267 \quad K = 1.20$$

با استفاده از روش بالا، می‌نویسیم:

$$\frac{\tau_{\max}}{K} = \frac{55 \text{ MPa}}{1.20} = 45.8 \text{ MPa}$$

$$T = \frac{J}{c} \frac{\tau_{\max}}{K} = (168.3 \times 10^3 \text{ mm}^4)(45.8 \text{ MPa}) = 7.71 \text{ kN.m}$$

$$P_b = 2\pi fT = 2\pi(15 \text{ s}^{-1})(7.71 \text{ N.m}) = 727 \text{ kW}$$



درصد تغییر قدرت:

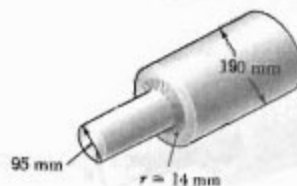
$$\text{درصد تغییر قدرت} = 100 \frac{P_b - P_a}{P_a} = 100 \frac{727 - 656}{656} = +10.82\%$$

۶۴-۳ با استفاده از تنش برشی مجاز  $55 \text{ MPa}$ ، یک شفت توپر فولادی برای انتقال  $9 \text{ kW}$  در سرعت‌های زیر طراحی کنید: (الف)  $1200 \text{ rpm}$ ، (ب)  $2400 \text{ rpm}$ .

۶۵-۳ با استفاده از تنش برشی مجاز  $50 \text{ MPa}$ ، یک شفت توپر فولادی برای انتقال  $15 \text{ kW}$  در فرکانس‌های زیر طراحی کنید: (الف)  $30 \text{ Hz}$ ، (ب)  $60 \text{ Hz}$ .

مسئله نمونه ۳-۶

شفت پله‌ای نشان داده شده با  $900 \text{ rpm}$  می‌چرخد و قدرت را از توربین به ژنراتور انتقال می‌دهد. فولاد به کار رفته دارای تنش برشی مجاز  $55 \text{ MPa}$  است. (الف) در طرح اولیه، ماکزیمم قدرتی را که می‌تواند انتقال داد بیابید. (ب) اگر شعاع گردیده در طرح نهایی به  $r = 24 \text{ mm}$  افزایش یابد، درصد تغییر قدرت انتقالی چقدر است؟



حل

الف. طرح اولیه. با استفاده از شکل ۳-۳۲،

$$r = 14 \text{ mm}, d = 95 \text{ mm}, D = 190 \text{ mm}$$

$$\frac{D}{d} = \frac{190 \text{ mm}}{95 \text{ mm}} = 2 \quad \frac{r}{d} = \frac{14 \text{ mm}}{95 \text{ mm}} = 0.15$$

$$K = 1.33, \text{ از شکل ۳-۳۲}$$

گشتاور. یا توجه به معادله (۳-۲۵)،

$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{J} \Rightarrow T = \frac{J}{c} \frac{\tau_{\max}}{K} \quad (1)$$

که در آن،  $J/c$  برای شفت با قطر کمتر است:

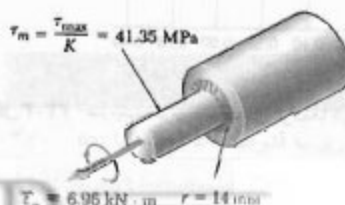
$$J/c = \frac{1}{2} \pi c^2 = \frac{1}{2} \pi (47.5 \text{ mm})^2 = 168.3 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

و در آن

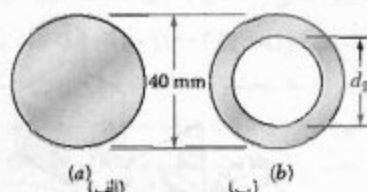
$$\frac{\tau_{\max}}{K} = \frac{55 \text{ MPa}}{1.33} = 41.35 \text{ MPa}$$

با جایگذاری در معادله (۱)،

$$T = (168.3 \times 10^3 \text{ mm}^4)(41.35 \text{ MPa}) = 6.96 \text{ kN.m}$$

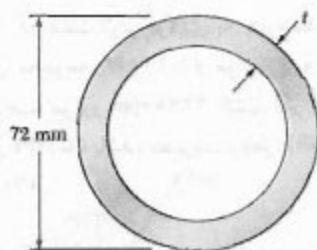






شکل م ۷۲-۲

۷۳-۳ از یک لوله فولادی با قطر خارجی ۷۲ mm برای انتقال گشتاور ۲۵۰۰ N.m استفاده می‌شود و تنش برشی نباید از مقدار مجاز ۵۵ MPa بیشتر شود. مجموعه‌ای از لوله‌ها با قطر خارجی ۷۲ mm در دسترس است. اگر ضخامت لوله‌های موجود از ۴ mm تا ۱۰ mm، با نمونه‌های ۲ mm، تغییر کند، سبک‌ترین لوله‌ای را که می‌توان به کار برد بیابید.



شکل م ۷۳-۲

۷۴-۳ شفت توپر فولادی به طول ۲/۵ m در فرکانس ۲۵ Hz قدرت ۱۰ kW را انتقال می‌دهد. اگر  $G = 77.2 \text{ GPa}$  و تنش مجاز برشی ۳۰ MPa باشد، قدرت شفت را بیابید. زاویه پیچش نباید از ۴° بیشتر شود.

۷۵-۳ شفت توپر فولادی به طول ۱/۵ m و به قطر ۲۲ mm قدرت ۱۲ kW را انتقال می‌دهد. اگر  $G = 77.2 \text{ GPa}$  و تنش مجاز برشی ۳۰ MPa باشد، فرکانس می‌نیم را بیابید. زاویه پیچش نباید از ۳/۵° بیشتر شود.

۷۶-۳ دو شفت توپر فولادی به چرخ‌دنده‌هایی متصل شده‌اند. این مجموعه، ۱۲ kW را از موتور A به ماشین ابزار D می‌دهد. سرعت موتور ۱۲۶۰ rpm است. اگر قطر هر شفت ۲۵ mm باشد، مطلوبیت ماکزیم تنش برشی: (الف) در شفت AB، (ب) در شفت CD.

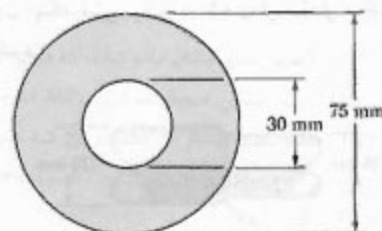
۶۶-۳ مطلوبیت ماکزیم تنش برشی در شفت توپری به قطر ۱۲ mm که ۱۲ kW را در فرکانس‌های زیر انتقال می‌دهد: (الف) ۲۵ Hz، (ب) ۵۰ Hz.

۶۷-۳ مطلوبیت ماکزیم تنش برشی در شفت توپری به قطر ۳۸ mm که ۵۵ kW را در سرعت‌های زیر انتقال می‌دهد: (الف) ۷۵۰ rpm، (ب) ۱۵۰۰ rpm.

۶۸-۳ یک شفت محرک فولادی به طول ۱/۸ m و با قطرهای خارجی و داخلی ۵۶ mm و ۴۲ mm است و ۱۸۰ kW را در ۱۸۰۰ rpm انتقال می‌دهد. مطلوبیت: (الف) ماکزیم تنش برشی، (ب) زاویه پیچش شفت ( $G = 77 \text{ GPa}$ ).

۶۹-۳ یکی از دو شفت توخالی محرک یک کشتی اقیانوسی به طول ۴۰ m است، و قطرهای خارجی و داخلی آن، به ترتیب، ۴۰۰ mm و ۲۰۰ mm است. شفت از فولاد با مشخصات  $G = 77.2 \text{ GPa}$  و  $\tau_{all} = 60 \text{ MPa}$  ساخته شده است. اگر ماکزیم سرعت دوران شفت ۱۶۰ rpm باشد، مطلوبیت: (الف) ماکزیم قدرتی که می‌توان توسط یک شفت به پروانه انتقال داد، (ب) زاویه متناظر پیچشی شفت.

۷۰-۳ یک شفت فولادی با مقطع عرضی نشان داده شده با ۱۲۰ rpm می‌چرخد، و استروبوسکوپ نشان می‌دهد که زاویه پیچش برای طول ۳/۶ m برابر با ۲° است. با استفاده از  $G = 77 \text{ GPa}$ ، قدرت انتقال یافته را بیابید.

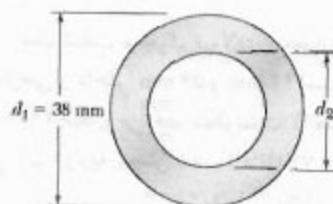


شکل م ۷۰-۲

۷۱-۳ مطلوبیت ضخامت شفت لوله‌ای به ضخامت ۵۰ mm در مثال ۷-۳، در صورتی که بخواهیم در فرکانس ۴۰ Hz قدرت قبل را انتقال دهد.

۷۲-۳ می‌خواهیم شفتی با قطر خارجی ۴۰ mm طرح کنیم که ۴۵ kW را انتقال دهد. (الف) اگر سرعت دوران ۷۲۰ rpm باشد، ماکزیم تنش برشی را در شفت (a) بیابید. (ب) اگر سرعت دوران را ۵٪ افزایش و به ۱۰۸۰ rpm برسایم، مطلوبیت بیشترین قطر داخلی شفت (b) به‌طوری‌که ماکزیم تنش برشی در دو شفت یکسان باشد.

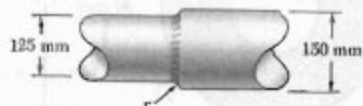
۸۲-۳ یک شفت فولادی به طول ۱٫۶ m و با قطر خارجی  $d_1 = 38 \text{ mm}$  از فولاد با  $G = 77,2 \text{ GPa}$  و  $\tau_{all} = 65 \text{ MPa}$  ساخته شده است. اگر زاویه پیچش هنگام اعمال گشتاور ۶۰۰ N.m نباید از ۴° بیشتر شود، بزرگترین قطر داخلی  $d_2$  را بیاید.



شکل م ۸۲-۳ و م ۸۳-۳

۸۳-۳ یک شفت توخالی فولادی، به طول ۱٫۵ m و با قطر داخلی  $d_1 = 30 \text{ mm}$  دارای قطر داخلی  $d_2$  است و ۱۰۰ kW را بین توربین و ژنراتور انتقال می‌دهد. سرعت دوران شفت را بیاید، در صورتی که  $G = 77,2 \text{ GPa}$  و تنش مجاز برشی ۶۰ MPa باشد. زاویه پیچش نباید از ۳° بیشتر شود.

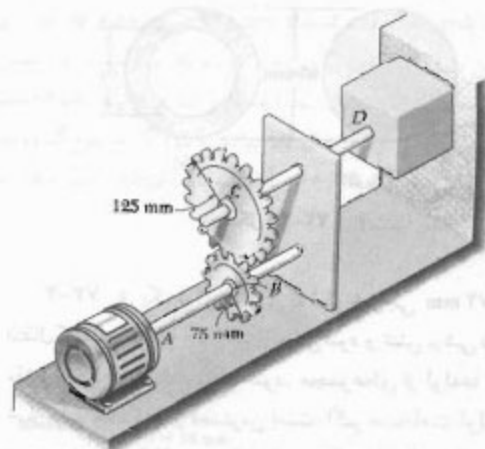
۸۴-۳ شفت پله‌ای نشان داده شده با ۴۵۰ rpm می‌چرخد. اگر  $r = 12 \text{ mm}$ ، مطلوبست ماکزیمم قدرتی که می‌توان انتقال داد بدون اینکه تنش برشی در شفت از مقدار مجاز ۴۵ MPa بیشتر شود.



شکل م ۸۴-۳ و م ۸۵-۳

۸۵-۳ شفت پله‌ای نشان داده شده با ۴۵۰ rpm می‌چرخد. اگر  $r = 5 \text{ mm}$ ، مطلوبست ماکزیمم قدرتی که می‌توان انتقال داد بدون اینکه تنش برشی در شفت از مقدار مجاز ۵۰ MPa بیشتر شود.

۸۶-۳ اگر شفت پله‌ای نشان داده شده ۴۵ kW را در ۲۱۰۰ rpm انتقال دهد، مطلوبست مینیمم شعاع  $r$  کرده در صورتی که بخواهیم تنش در شفت از مقدار مجاز ۵۰ MPa بیشتر نشود.



شکل م ۷۶-۳ و م ۷۷-۳

۷۷-۳ دو شفت توپر فولادی به چرخ‌دنده‌هایی متصل شده‌اند. این مجموعه، ۱۲ kW را از موتور A به ماشین ابزار D می‌دهد. سرعت موتور ۱۲۶۰ rpm است. اگر ماکزیمم تنش مجاز برشی ۵۵ MPa باشد، مطلوبست قطر: (الف) شفت AB، (ب) شفت CD.

۷۸-۳ یک شفت فولادی ۱۵۰ kW را در سرعت ۳۶۰ rpm انتقال می‌دهد. اگر  $G = 77,2 \text{ GPa}$ ، شفت توپری طرح کنید که ماکزیمم تنش در آن از ۵۰ MPa و زاویه پیچش آن در طول ۲٫۵ m از ۳° بیشتر نشود.

۷۹-۳ شفت فولادی به طول ۲٫۵ m و به قطر ۳۰ mm با فرکانس ۳۰ Hz می‌چرخد. اگر  $G = 77,2 \text{ GPa}$  و تنش مجاز برشی ۵۰ MPa باشد، ماکزیمم قدرتی را که شفت می‌تواند انتقال دهد بیاید. زاویه پیچش نباید از ۷٫۵° بیشتر شود.

۸۰-۳ یک شفت فولادی به قطر ۳۸ mm و به طول ۱٫۲ m برای انتقال ۴۵ kW بین موتور و پمپ به کار رفته است. اگر  $G = 77 \text{ GPa}$ ، مطلوبست کمترین سرعت دوران شفت که به ازای آن تنش برشی از ۶۰ MPa و زاویه پیچش از ۳° بیشتر نشود.

۸۱-۳ یک شفت توپر فولادی، به طول ۱٫۵ m و به قطر ۲۲ mm، قدرت ۱۳٫۵ kW را انتقال می‌دهد. اگر  $G = 77 \text{ GPa}$  و تنش مجاز برشی ۳۰ MPa باشد، مینیمم سرعت شفت را بیاید. زاویه پیچش نباید از ۳٫۵° بیشتر شود.

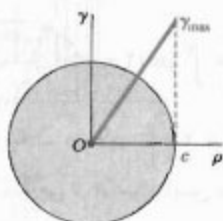
### ۳-۹ تغییر شکل پلاستیک در شفت‌های دایره‌ای

برای استنتاج فرمول‌های (۳-۱۰) و (۳-۱۶) که، به ترتیب، توزیع تنش و زاویه پیچش یک شفت دایره‌ای را تحت گشتاور  $T$  تعریف می‌دهند، از قانون هوک استفاده شد. اگر تنش در قسمتی از شفت از استقامت تسلیم بیشتر شود، یا آن قسمت از ماده شکننده‌ای باشد که رابطه تنش-کرنش آن غیرخطی است، فرمول‌های مذکور به کار نمی‌روند. در این قسمت می‌خواهیم روش کلی‌تری را به دست آوریم و با آن توزیع تنش در یک شفت دایره‌ای، و گشتاور مورد نیاز برای ایجاد زاویه پیچش معینی را بیابیم.

در قسمت ۳-۲ هیچ رابطه خاصی را بین تنش-کرنش در نظر نگرفتیم، و ثابت کردیم که کرنش برشی  $\gamma$  بر حسب فاصله  $\rho$  از محور شفت به طور خطی تغییر می‌کند (شکل ۳-۳۳). با استفاده از این خاصیت، می‌نویسیم:

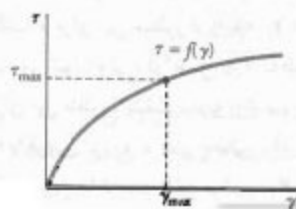
$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max} \quad (۳-۴)$$

که در آن،  $c$  شعاع شفت است.

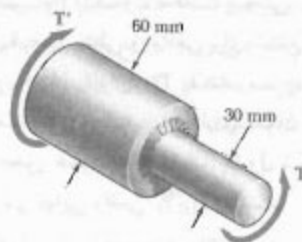


شکل ۳-۳۳

اگر ماکزیمم مقدار تنش برشی معلوم باشد، نمودار  $\tau$  را بر حسب  $\rho$  می‌توان رسم کرد. برای این منظور، ابتدا از نمودار تنش-کرنش برشی (شکل ۳-۳۴)، مقدار  $\gamma_{\max}$  متناظر با  $\tau_{\max}$  را به دست می‌آوریم و این مقدار را در معادله (۳-۴) قرار می‌دهیم.



شکل ۳-۳۴



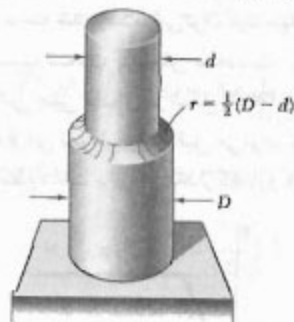
شکل ۳-۸۶ و ۳-۸۷

۳-۸۷ شفت پله‌ای نشان داده شده  $45 \text{ kW}$  را انتقال می‌دهد. اگر تنش برشی مجاز در شفت  $40 \text{ MPa}$  و شعاع  $r$  گردنه  $6 \text{ mm}$  باشد، کمترین سرعت مجاز شفت را بیابید.

۳-۸۸ گشتاور  $T = 22 \text{ N.m}$  بر شفت پله‌ای نشان داده شده، که دارای گردنه کامل ربع دایره‌ای است، وارد شده است. اگر  $D = 25 \text{ mm}$ ، مطلوبست ماکزیمم تنش برشی در شفت وقتی: (الف)  $d = 20 \text{ mm}$ ، (ب)  $d = 23 \text{ mm}$ .

۳-۸۹ در شفت پله‌ای نشان داده شده، که دارای گردنه کامل ربع دایره‌ای است،  $D = 30 \text{ mm}$  و  $d = 25 \text{ mm}$ . اگر سرعت شفت  $2400 \text{ rpm}$  و تنش مجاز برشی  $50 \text{ MPa}$  باشد، ماکزیمم قدرتی را که شفت می‌تواند انتقال دهد بیابید.

۳-۹۰ در شفت پله‌ای نشان داده شده، که دارای گردنه کامل ربع دایره‌ای است، تنش مجاز برشی  $80 \text{ MPa}$  است. اگر  $D = 30 \text{ mm}$ ، مطلوبست بیشترین گشتاوری که می‌توان بر شفت وارد کرد در صورتی که: (الف)  $d = 26 \text{ mm}$ ، (ب)  $d = 24 \text{ mm}$ .

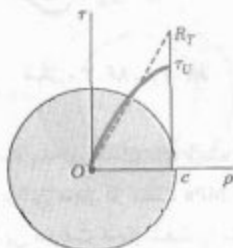


گردنه دایره‌ای که به لبه

شفت بزرگتر می‌پیوندد

شکل ۳-۸۸ و ۳-۸۹ و ۳-۹۰

تنش فرضی  $R_T$  را مدول شکست پیچشی می‌گویند. چون توزیع‌های فرضی خطی و واقعی برای تنش در شکل ۳۶-۳ باید مقدار یکسان را برای  $T_U$  بدهند، مساحت‌هایی را که این توزیع‌ها مشخص می‌کنند باید دارای همان اینرسی یکسان نسبت به محور عمودی باشند. لذا، مدول شکست  $R_T$  همواره از تنش برشی نهایی واقعی  $\tau_U$  بزرگتر است.



شکل ۳۶-۳

گاهی، توزیع تنش و گشتاور  $T$  متناظر با زاویه پیچش معین  $\phi$  را می‌خواهیم. برای این منظور، از رابطه (۲-۳) استفاده می‌کنیم:

$$\gamma = \frac{\rho \phi}{L} \quad (2-3)$$

با  $\phi$  و  $L$  معلوم، مقدار  $\gamma$  متناظر با هر مقدار معین  $\rho$  را می‌یابیم. با استفاده از نمودار تنش-کرنش، مقدار متناظر تنش برشی  $\tau$  را می‌یابیم و  $\tau$  را برحسب  $\rho$  رسم می‌کنیم. با تعیین توزیع تنش برشی، گشتاور  $T$  را به‌طور تحلیلی با عددی می‌توان به‌دست آورد.

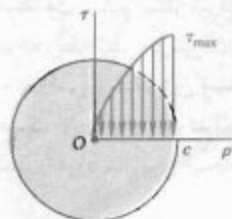
### ۳-۱۰ شفت‌های دایره‌ای الاستوپلاستیک

با بررسی حالت ایده‌آلی شفت توپر دایره‌ای که از ماده الاستوپلاستیک ساخته شده است، می‌توان دید بهتری از رفتار پلاستیکی شفت تحت پیچش به‌دست آورد. نمودار تنش-کرنش برشی چنین ماده‌ای در شکل ۳۷-۳ نشان داده شده است. با استفاده از این نمودار، مانند قبل می‌توان توزیع تنش را در عرض یک مقطع شفت برای هر مقدار گشتاور  $T$  تعیین کرد.



شکل ۳۷-۳

سپس، برای هر مقدار  $\rho$ ، مقدار  $\gamma$  متناظر را از معادله (۴-۳) یا شکل ۳۳-۳ تعیین و تنش برشی  $\tau$  متناظر با این مقدار  $\gamma$  را از شکل ۳۴-۳ می‌یابیم. با ترسیم  $\tau$  برحسب  $\rho$ ، توزیع تنش به‌دست می‌آید (شکل ۳۵-۳).



شکل ۳۵-۳

حال، می‌گوییم هنگام استنتاج معادله (۱-۳) در قسمت ۲-۳، هیچ رابطه خاصی را بین تنش و کرنش برشی در نظر نگرفتیم. لذا، برای تعیین گشتاور  $T$  متناظر با توزیع تنش برشی در شکل ۳۵-۳، از معادله (۱-۳) استفاده می‌کنیم. یک جزء حلقوی به شعاع  $\rho$  و به ضخامت  $d\rho$  را در نظر می‌گیریم. مساحت این جزء،  $dA = 2\pi\rho d\rho$ ، را در معادله ۱-۳ قرار می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$T = \int_0^c \rho \tau (2\pi\rho d\rho)$$

$$T = 2\pi \int_0^c \rho^2 \tau d\rho \quad (26-3)$$

که در آن  $\tau$  تابعی از  $\rho$  است. این تابع در شکل ۳۵-۳ رسم شده است.

اگر  $\tau$  تابعی معلومی از  $\gamma$  باشد، از معادله (۴-۳) برای تعیین تابع  $\tau$  برحسب  $\rho$  می‌توان استفاده کرد، و انتگرال (۲۶-۳) را به‌طور تحلیلی محاسبه کرد. در غیر این صورت، گشتاور  $T$  را با انتگرال‌گیری عددی باید محاسبه کرد. گفتنی است که انتگرال (۲۶-۳) همان اینرسی سطح بین منحنی توزیع تنش و محور افقی در شکل ۳۵-۳ نسبت به محور عمودی است.

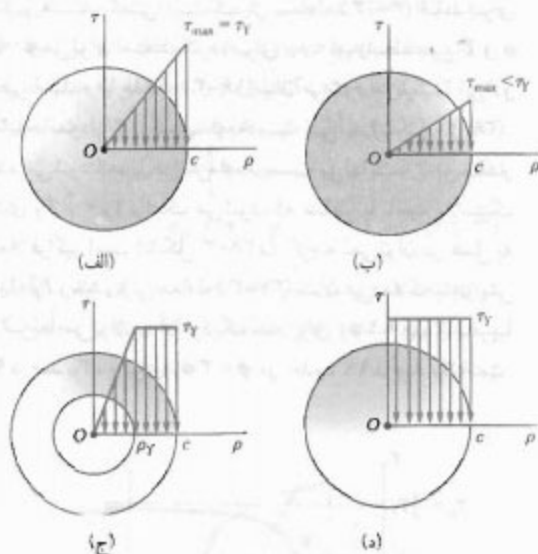
گشتاور نهایی  $T_U$  که باعث شکست شفت می‌شود عامل تعیین‌کننده است. این مقدار از تنش برشی نهایی  $\tau_U$  ماده می‌توان یافت و برای این منظور از رابطه  $\tau_{max} = \tau_U$  و محاسبات بالا استفاده می‌شود. ولی، در عمل  $T_U$  به‌طور آزمایشی تعیین می‌شود. برای این منظور، شفت نمونه را تحت پیچش قرار می‌دهند تا بشکنند. با فرض توزیع فرضی خطی برای تنش، از معادله (۹-۳) برای تعیین ماکزیمم تنش برشی  $R_T$  استفاده می‌شود:

$$R_T = \frac{T_U c}{J} \quad (27-3)$$

که در آن  $T_Y$  ماکزیمم گشتاور الاستیک است، باید توجه داشت که وقتی  $\rho_Y$  به صفر نزدیک می‌شود، گشتاور به مقدار حدی زیر نزدیک می‌شود:

$$T_p = \frac{4}{3} T_Y \quad (۳۳-۳)$$

این گشتاور را، که متناظر با تغییر شکل کاملاً پلاستیک است (شکل ۳-۲۸)، گشتاور پلاستیک شفت می‌گویند. گفتنی است که معادله (۳۳-۳) فقط برای یک شفت توپر دایره‌ای الاستوپلاستیک صحت دارد.



شکل ۳-۲۸

پس از شروع تسلیم، توزیع کرنش در عرض مقطع همچنان خطی است. لذا، معادله (۲-۳) به کار می‌رود و از آن برای تعیین شعاع  $\rho_Y$  هسته الاستیک برحسب زاویه پیچش  $\phi$  می‌توان استفاده کرد، اگر  $\phi$  به اندازه کافی بزرگ باشد و باعث تغییر شکل پلاستیک شود، برای تعیین شعاع  $\rho_Y$  هسته الاستیک،  $\gamma$  را در معادله (۲-۳) برابر با کرنش تسلیم  $\gamma_Y$  قرار می‌دهیم و مقدار متناظر  $\rho_Y$  می‌یابیم:

$$\rho_Y = \frac{L \gamma_Y}{\phi} \quad (۳۴-۳)$$

زاویه پیچش را در شروع تسلیم، یعنی وقتی  $\rho_Y = c$ ، با  $\phi_Y$  نشان می‌دهیم. با قرار دادن  $\phi = \phi_Y$  و  $\rho_Y = c$  در معادله (۳۴-۳)، داریم:

$$c = \frac{L \gamma_Y}{\phi_Y} \quad (۳۵-۳)$$

تا وقتی تنش برشی  $\tau$  از استقامت تسلیم  $\tau_Y$  بیشتر نشده است، قانون هوک به کار می‌رود و توزیع تنش در عرض مقطع شفت به صورت خطی است (شکل ۳-۲۸ الف). در این حالت،  $\tau_{max}$  از معادله (۹-۳) به دست می‌آید:

$$\tau_{max} = \frac{T c}{J} \quad (۹-۳)$$

با افزایش گشتاور،  $\tau_{max}$  به مقدار  $\tau_Y$  می‌رسد (شکل ۳-۲۸ ب). با جایگذاری این مقدار در معادله (۹-۳) و با حل مقدار متناظر  $T$ ، مقدار  $T_Y$  گشتاور در شروع تسلیم به دست می‌آید:

$$T_Y = \frac{J}{c} \tau_Y \quad (۲۸-۳)$$

این مقدار را ماکزیمم گشتاور الاستیک می‌گویند، برای یک شفت توپر دایره‌ای،  $J/c = \frac{1}{4} \pi c^3$ ، در نتیجه،

$$T_Y = \frac{1}{4} \pi c^3 \tau_Y \quad (۲۹-۳)$$

با افزایش بیشتر گشتاور، یک ناحیه پلاستیک به شعاع  $\rho_Y$  در پیرامون هسته الاستیک به وجود می‌آید (شکل ۳-۲۸ ج). در این ناحیه پلاستیک، تنش به طور یکنواخت و برابر با  $\tau_Y$  است؛ در حالی که تنش در هسته الاستیک برحسب  $\rho$  به صورت خطی زیر تغییر می‌کند:

$$\tau = \frac{\tau_Y}{\rho_Y} \rho \quad (۳۰-۳)$$

با افزایش  $T$ ، ناحیه پلاستیک گسترش می‌یابد و تغییر شکل کاملاً پلاستیک می‌شود (شکل ۳-۲۸ د).

از معادله (۲۶-۳) برای تعیین مقدار گشتاور  $T$  متناظر با شعاع  $\rho_Y$  هسته الاستیک استفاده می‌شود. چون  $\tau$  در گستره  $0 \leq \rho \leq \rho_Y$  با معادله (۳۰-۳) داده می‌شود و در گستره  $\rho_Y \leq \rho \leq c$  برابر با  $\tau_Y$  است، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \int_0^{\rho_Y} \rho^2 \left( \frac{\tau_Y}{\rho_Y} \rho \right) d\rho + 2\pi \int_{\rho_Y}^c \rho^2 \tau_Y d\rho \\ &= \frac{1}{4} \pi \rho_Y^4 \tau_Y + \frac{2}{3} \pi c^3 \tau_Y - \frac{2}{3} \pi \rho_Y^3 \tau_Y \\ T &= \frac{2}{3} \pi c^3 \tau_Y \left( 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\rho_Y}{c} \right)^4 \right) \quad (۳۱-۳) \end{aligned}$$

با توجه به معادله (۲۹-۳)،

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left( 1 - \frac{\rho_Y^4}{4 c^4} \right) \quad (۳۲-۳)$$

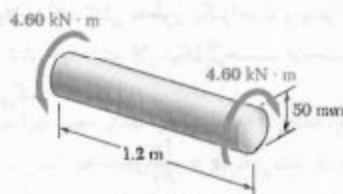
در آن قسمت دارای مقدار ثابت  $\tau$  است. لذا، معادله (۳-۱) به صورت زیر در می آید:

$$T = \rho A \tau$$

که در آن  $\rho$  شعاع متوسط لوله و  $A$  مساحت مقطع عرضی آن است. از این رو، تنش برشی با گشتاور متناسب است و  $\tau$  را می توان از  $T$  به سهولت تعیین کرد. از طرف دیگر، کرنش برشی  $\gamma$  را از معادله (۳-۲) و از  $\phi$  و  $L$  اندازه گیری شده در قسمت لوله ای نمونه می توان به دست آورد.

#### مثال ۳-۸

یک شفت توپر دایره ای، به طول  $1.2\text{ m}$  و به قطر  $50\text{ mm}$ ، در دو انتهای خود تحت گشتاور  $4.60\text{ kN}\cdot\text{m}$  قرار دارد (شکل ۳-۴). با فرض اینکه شفت از ماده الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم برشی  $150\text{ MPa}$  و با مدول صلابت  $77\text{ GPa}$  ساخته شده است، مطلوبست (الف) شعاع هسته الاستیک، (ب) زاویه پیچش شفت.



شکل ۳-۴

(الف) شعاع هسته الاستیک، ابتدا، گشتاور  $T_Y$  را در شروع تسلیم می یابیم. برای  $c = 25\text{ mm}$ ،

$$J = \frac{1}{2} \pi c^4 = \frac{1}{2} \pi (25 \times 10^{-3}\text{ m})^4 = 614 \times 10^{-9}\text{ m}^4$$

با توجه به  $150\text{ MPa}$  و از معادله ۳-۲۸،

$$T_Y = \frac{J \tau_Y}{c} = \frac{(614 \times 10^{-9}\text{ m}^4)(150 \times 10^6\text{ Pa})}{25 \times 10^{-3}\text{ m}} = 3.68\text{ kN}\cdot\text{m}$$

\* معادله (۳-۴) را برای هر ماده پخش خضوری که دارای نقطه تسلیم کاملاً مشخص است می توان به کار برد، زیرا این معادله بدون توجه به شکل نمودار تنش-کرنش پس از نقطه تسلیم استنتاج شده است. \*\* برای به حداقل رساندن امکان شکست ناشی از گمناش، نمونه باید طوری باشد که طول قسمت لوله ای آن بیشتر از قطرش نباشد.

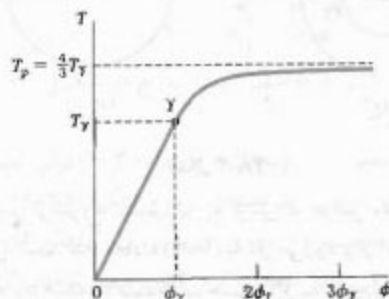
از تقسیم (۳-۳) بر (۳-۲)، رابطه زیر را می یابیم:

$$\frac{\rho_Y}{c} = \frac{\phi_Y}{\phi} \quad (3-36)$$

با جایگذاری عبارت  $\rho_Y/c$  در معادله (۳-۳)، گشتاور  $T$  به صورت تابعی از زاویه پیچش  $\phi$  به دست می آید:

$$T = \frac{T_Y}{3} \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\phi_Y^2}{\phi^2} \right) \quad (3-37)$$

که در آن  $T_Y$  و  $\phi_Y$ ، به ترتیب، گشتاور و زاویه پیچش در شروع تسلیم هستند. گفتنی است که از معادله (۳-۳۷) فقط برای  $\phi > \phi_Y$  می توان استفاده کرد. برای  $\phi < \phi_Y$ ، رابطه بین  $T$  و  $\phi$  خطی است و با معادله (۳-۱۶) بیان می شود. با ترکیب این دو معادله، نمودار  $T$  بر حسب  $\phi$  به دست می آید (شکل ۳-۳۹). دیده می شود که، با افزایش  $\phi$  به سمت بی نهایت،  $T$  به مقدار حدی  $T_p = \frac{4}{3} T_Y$  نزدیک می شود، که متناظر با ناحیه پلاستیک کاملاً فراگیر است (شکل ۳-۳۸). گرچه نمی توان در عمل به مقدار  $T_p$  رسید، ولی معادله (۳-۳۷) نشان می دهد که با افزایش  $\phi$  سریعاً می توان به آن نزدیک شد. برای  $\phi = 2\phi_Y$ ،  $T$  تقریباً ۹۷ درصد  $T_p$ ، و برای  $\phi = 3\phi_Y$  در حدود ۹۹ درصد  $T_p$  است.



شکل ۳-۳۹

نمودار  $T$  بر حسب  $\phi$  برای ماده ایده آل الاستوپلاستیک (شکل ۳-۳۹) با نمودار تنش-کرنش برشی آن ماده (شکل ۳-۳۷) خیلی تفاوت دارد. لذا، نمودار تنش-کرنش برشی یک ماده واقعی را نمی توان مستقیماً از آزمایش پیچش یک میله توپر دایره ای که از آن ماده ساخته شده است به دست آورد. ولی اگر نمونه آزمایشی دارای یک قسمت لوله ای نازک دایره ای باشد، از آزمایش پیچش آن می توان یک نمودار نسبتاً دقیق به دست آورد. در حقیقت، می توان فرض کرد که تنش برشی

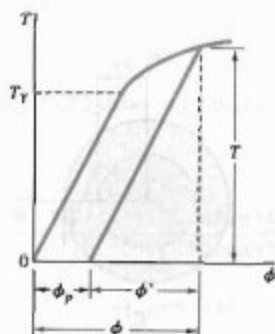


در این قسمت خواهید دید که مقدار نهایی تنش معمولاً صفر نیست و تنش‌های باقیمانده مثبت یا منفی در اغلب نقاط وجود دارد. گفتنی است که، هنگام باربرداری، تنش برشی نیز مانند تنش قائم همچنان کاهش می‌یابد و به مقدار برابر با مقدار ماکزیمم در  $C$  منهای دو برابر استقامت تسلیم ماده می‌رسد.

مجدداً، ماده ایده‌آل الاستوپلاستیک را که نمودار تنش-کرنش برشی آن در شکل ۳-۳۷ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. تا وقتی تنش بیش از  $\tau_y$  کاهش نیافته است، رابطه بین  $\tau$  و  $\gamma$  را در هر نقطه شفت به صورت خطی می‌گیریم و برای تعیین زاویه پیچش شفت، هنگام کاهش گشتاور تا صفر، از معادله (۳-۱۶) استفاده می‌کنیم. به این ترتیب، باربرداری شفت با یک خط مستقیم در نمودار  $T-\phi$  نشان داده می‌شود (شکل ۳-۴۲). پس از حذف گشتاور، زاویه پیچش به صفر نمی‌رسد. یعنی، بارگذاری و باربرداری شفت باعث ایجاد یک تغییر شکل دائمی می‌شود که با زاویه زیر مشخص می‌شود:

$$\phi_p = \phi - \phi' \quad (3-38)$$

در رابطه بالا، زوایای  $\phi$  و  $\phi'$ ، به ترتیب، برای فاز بارگذاری و باربرداری است ( $\phi$  از معادله ۳-۳۶ و  $\phi'$  از معادله ۳-۱۶ به دست می‌آید).



شکل ۳-۴۲

با کاربرد اصل ترکیب (قسمت ۲-۲۰)، تنش‌های باقیمانده را در یک ماده الاستوپلاستیک می‌توان به دست آورد. برای این منظور، تنش‌های ناشی از گشتاور  $T$  را هنگام بارگذاری، و تنش‌های ناشی از گشتاور مساوی و متضاد با  $T$  را هنگام باربرداری شفت در نظر می‌گیریم. تنش‌های گروه اول، رفتار الاستوپلاستیک ماده را ضمن بارگذاری نشان می‌دهند (شکل ۳-۴۳ الف). در گروه دوم رفتار خطی همان ماده را ضمن

با حل  $(\rho_Y/c)^2$  از معادله (۳-۳۲) و با جایگذاری مقدار  $T$  و  $T_y$  می‌نویسیم:

$$\left(\frac{\rho_Y}{c}\right)^2 = \tau = \frac{T}{T_y} = \frac{4}{3} - \frac{3(4/60 \text{ kN.m})}{3/68 \text{ kN.m}} = 0.250$$

$$\frac{\rho_Y}{c} = 0.630 \Rightarrow \rho_Y = 0.630 (25 \text{ mm}) = 15.8 \text{ mm}$$

(ب) زاویه پیچش، ابتدا، زاویه پیچش  $\phi_y$  را در شروع تسلیم از معادله (۳-۱۶) می‌یابیم:

$$\phi_y = \frac{T_y L}{JG} = \frac{(3/68 \times 10^3 \text{ N.m})(1.2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})} = 93.4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

با حل  $\phi$  از معادله (۳-۳۶) و با جایگذاری مقدار  $\phi_y$  و  $\rho_Y/c$  می‌نویسیم:

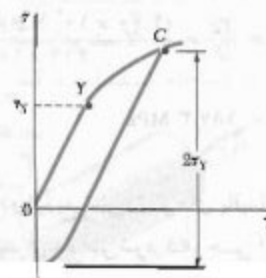
$$\phi = \frac{\phi_y}{\rho_Y/c} = \frac{93.4 \times 10^{-3} \text{ rad}}{0.630} = 148.3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

یا

$$\phi = (148.3 \times 10^{-3} \text{ rad}) \left( \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} \right) = 8.50^\circ$$

### ۳-۱۱ تنش‌های باقیمانده در شفت‌های دایره‌ای

در دو قسمت قبل دیدیم در شفتی که تحت تأثیر گشتاور نسبتاً بزرگی است ناحیه پلاستیک ایجاد می‌شود، و تنش برشی  $\tau$  در هر نقطه از ناحیه پلاستیک را از نمودار تنش-کرنش برشی شکل ۳-۳۴ می‌توان به دست آورد. با حذف گشتاور، کاهش تنش و کرنش در امتداد یک خط راست روی می‌دهد (شکل ۳-۴۱).



شکل ۳-۴۱

شفقت ضمن حذف گشتاور از معادله (۳-۱۶) به دست می آید. با جایگذاری داده های زیر:

$$T = 4.60 \times 10^3 \text{ N.m}$$

$$L = 1.2 \text{ m}$$

$$G = 77 \times 10^9 \text{ Pa}$$

و مقدار  $J = 614 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ ، که در حل مثال ۳-۸ به دست آمد، نتیجه می شود:

$$\phi' = \frac{TL}{JG} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N.m})(1.2 \text{ m})}{(614 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(77 \times 10^9 \text{ Pa})}$$

$$= 116.8 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$= (116.8 \times 10^{-3} \text{ rad}) \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 6.69^\circ$$

بنابراین، پیچش دائم چنین است:

$$\phi_p = \phi - \phi' = 8.5^\circ - 6.69^\circ = 1.81^\circ$$

(ب) تنش های باقیمانده. از مثال ۳-۸ دیدیم که استقامت تسلیم و شعاع هسته الاستیک متناظر با گشتاور داده شده، به ترتیب، عبارتند از  $\tau_y = 150 \text{ MPa}$  و  $\rho_y = 15.8 \text{ mm}$ . توزیع تنش در شفت بارگذاری شده مانند شکل ۳-۴۴ الف است.

توزیع تنش های ناشی از گشتاور مخالف  $4.60 \text{ kN.m}$ ، که برای باربرداری شفت است، به صورت خطی و مانند شکل ۳-۴۴ ب است. تنش ماکزیمم در فاز بار برداری از معادله (۳-۹) به دست می آید:

$$\tau'_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(4.60 \times 10^3 \text{ N.m})(25 \times 10^{-3} \text{ m})}{614 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$

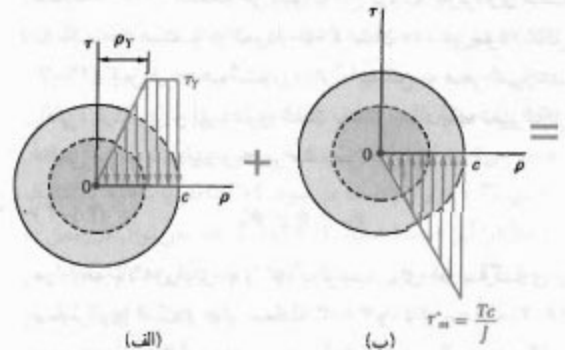
$$= 187.3 \text{ MPa}$$

با ترکیب این دو توزیع تنش، تنش های باقیمانده را در شکل ۳-۴۴ ج می یابیم. دیده می شود که، حتی اگر تنش های معکوس از استقامت تسلیم  $\tau_y$  بیشتر شوند، فرض توزیع خطی این تنش ها صحت دارد زیرا از  $2\tau_y$  بیشتر نشده اند.

باربرداری نشان می دهند (شکل ۳-۴۳ ب). از مجموع این دو گروه تنش، توزیع تنش های باقیمانده در شفت به دست می آید (شکل ۳-۴۳ ج).

از شکل ۳-۴۳ ج دیده می شود که تنش های باقیمانده با تنش های اولیه هم سو هستند، و سایر تنش ها دارای سوی مخالف اند. این موضوع بدیهی است زیرا پس از حذف گشتاور، طبق معادله (۳-۱)، رابطه زیر برقرار است:

$$\int \rho (\tau dA) = 0 \quad (3-39)$$



شکل ۳-۴۳

#### مثال ۳-۹

برای شفت مثال ۳-۸، مطلوب است: (الف) پیچش دائم، (ب) توزیع تنش های باقیمانده، پس از حذف گشتاور  $4.60 \text{ kN.m}$ .

(الف) پیچش دائم. از مثال ۳-۸، زاویه پیچش متناظر با گشتاور داده شده برابر است با  $\phi = 8.5^\circ$ . زاویه  $\phi'$  وابسته

وارد می‌شود و تدریجاً مقدار آن افزایش می‌یابد. مطلوب‌ست مقدار  $T$  و زاویه پیچش متناظر: (الف) وقتی تسلیم برای اولین بار روی می‌دهد، (ب) وقتی تغییر شکل کاملاً پلاستیک شده است.

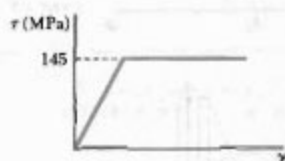
حل

خواص هندسی مقطع عرضی عبارتند از:

$$c_1 = \frac{1}{2}(38 \text{ mm}) = 19 \text{ mm} \quad c_2 = \frac{1}{2}(58 \text{ mm}) = 29 \text{ mm}$$

$$J = \frac{1}{2}\pi(c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2}\pi[(29 \text{ mm})^4 - (19 \text{ mm})^4]$$

$$= 906,3 \times 10^3 \text{ mm}^4$$



الف. شروع تسلیم. برای  $\tau_{\max} = \tau_y = 145 \text{ MPa}$

$$T_y = \frac{\tau_y J}{c_1} = \frac{(145 \text{ MPa})(906,3 \times 10^3 \text{ mm}^4)}{19 \text{ mm}}$$

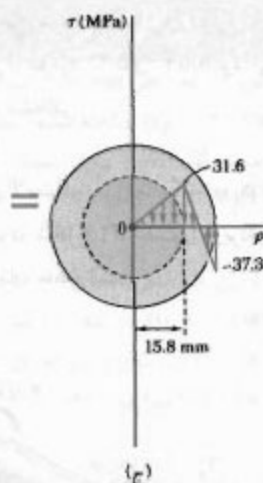
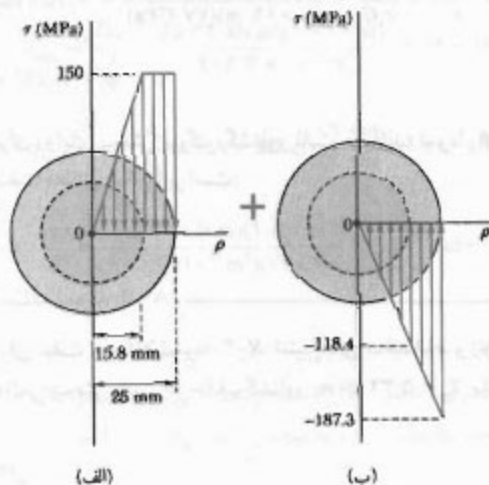
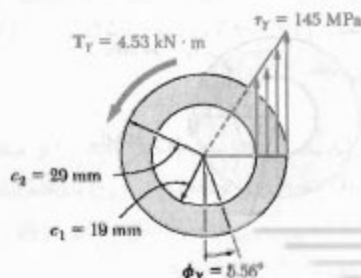
$$T_y = 6,753 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$

با قرار دادن  $p = c_1$  و  $\gamma = \gamma_y$  در معادله (۲-۳) و با حل  $\phi$ ، مقدار  $\phi_y$  را می‌یابیم:

$$\phi_y = \frac{\gamma_y L}{c_1} = \frac{\tau_y L}{c_1 G} = \frac{(145 \text{ MPa})(1500 \text{ mm})}{(19 \text{ mm})(77 \text{ GPa})}$$

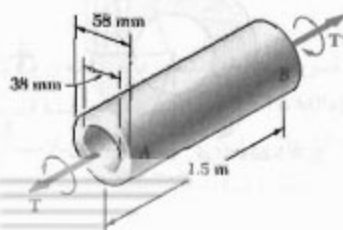
$$= 0,97 \text{ rad}$$

$$\phi_y = 5,56^\circ \quad \blacktriangleleft$$



شکل ۴۴-۳

مسئله نمونه ۷-۳  
شفت  $AB$  از فولاد متوسط الاستوپلاستیک ( $G = 77 \text{ GPa}$  و  $\tau_y = 145 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. گشتاور  $T$  برشفت



$$\phi_f = \frac{\gamma_f L}{c_f} = \frac{\tau_f L}{c_f G} = \frac{(145 \text{ MPa})(1.5 \text{ m})}{(0.019 \text{ m})(77 \text{ GPa})} = 0.150 \text{ rad}$$

$$\phi_f = 8.59^\circ \blacktriangleleft$$

برای زوایای پیچش بزرگتر، گشتاور ثابت می‌ماند؛ نمودار  $T-\phi$  شفت مطابق شکل زیر است:

### مسئله نمونه ۸-۳

برای شفت مسئله نمونه ۷-۳، تنش‌های باقیمانده و زاویه دائمی پیچش را پس از حذف گشتاور  $T_p = 5.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$  بیابید.

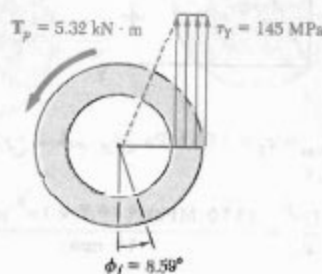
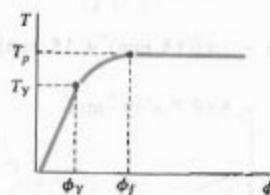
### حل

در مسئله نمونه ۷-۳ دیدیم که وقتی منطقه پلاستیک ابتدا به سطح داخلی می‌رسد، گشتاور وارده  $T_p$  و زاویه پیچش  $\phi_f$  به ترتیب، برابر با  $5.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$  و  $8.59^\circ$  بود. این مقادیر در شکل (۱) نشان داده شده‌اند.

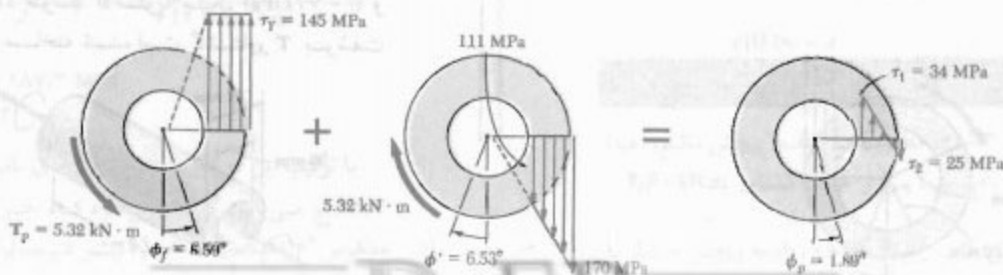
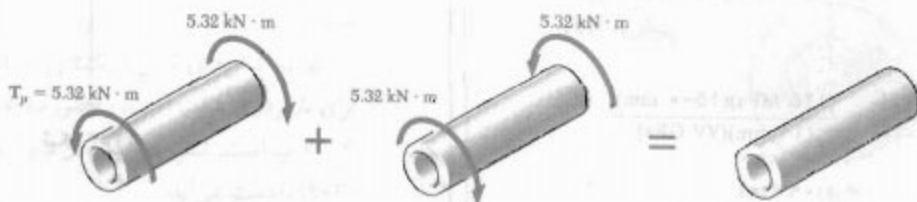
با برداری الاستیک. با اعمال گشتاور  $5.32 \text{ kN}\cdot\text{m}$  در سوی نشان داده شده در شکل (۲)، شفت را بازبرداوی می‌کنیم. در این حالت، رفتار ماده خطی است.

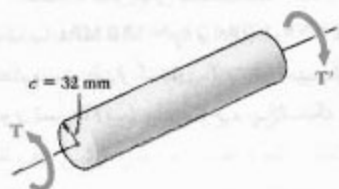
ب. تغییر شکل کاملاً پلاستیک. وقتی منطقه پلاستیک به سطح داخلی می‌رسد، تنش‌ها دارای توزیع یکنواخت‌اند. با استفاده از معادله (۲-۳)،

$$\begin{aligned} T_p &= 2\pi\tau_y \int_{c_f}^{c_t} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi\tau_y (c_t^3 - c_f^3) \\ &= \frac{2}{3}\pi (145 \text{ MPa})[(0.029 \text{ m})^3 - (0.019 \text{ m})^3] \\ T_p &= 5.32 \text{ kN}\cdot\text{m} \blacktriangleleft \end{aligned}$$



وقتی تسلیم ابتدا در سطح داخلی روی می‌دهد، تغییر شکل کاملاً پلاستیک است؛ از معادله (۲-۳)،

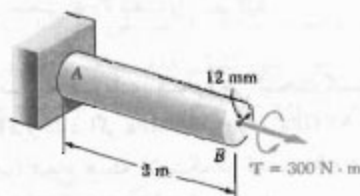




شکل م ۹۵-۳

۹۶-۳ برای شفت و بارگذاری مسئله ۹۵-۳، زاویه پیچش را در طول ۱٫۵ m شفت بیابید.

۹۷-۳ شنت  $AB$  از ماده الاستوپلاستیک با  $\tau_y = 90 \text{ MPa}$  و  $G = 30 \text{ GPa}$  ساخته شده است. مطلوبست: (الف) شعاع هسته الاستیک شفت، (ب) زاویه پیچش در سر  $B$ .



شکل م ۹۷-۳

۹۸-۳ یک شفت توپری دایره‌ای به قطر ۱۸ mm از ماده الاستوپلاستیک ( $\tau_y = 145 \text{ MPa}$  و  $G = 77 \text{ GPa}$ ) ساخته شده است. برای طول ۱٫۲ m، ماکزیم تنش برشی و زاویه پیچش ناشی از گشتاور  $200 \text{ N·m}$  را بیابید.

۹۹-۳ یک میله توپری دایره‌ای از ماده الاستوپلاستیک ساخته شده است. اگر گشتاور و زاویه پیچش را در آغاز تسلیم با  $\tau_y$  و  $\phi_y$  نشان دهیم، مطلوبست زاویه پیچش در صورتی که گشتاور نا: (الف)  $T = 1/1 T_y$ ، (ب)  $T = 1/25 T_y$ ، (ج)  $T = 1/3 T_y$  افزایش یابد.

۱۰۰-۳ یک شفت توپری دایره‌ای به قطر ۳۰ mm از ماده الاستوپلاستیک ( $G = 77 \text{ GPa}$  و  $\tau_y = 125 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. برای طول ۵ ft شفت، ماکزیم تنش برشی و زاویه پیچش ناشی از گشتاور  $850 \text{ N·m}$  را بیابید.

با توجه به مقدار  $c_1$ ،  $c_2$  و  $J$  از مسئله نمونه ۷-۳، داریم:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc_1}{J} = \frac{(5.32 \text{ kN·m})(0.029 \text{ m})}{9.063 \times 10^{-4} \text{ m}^4} = 170 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = \tau_{\max} \frac{c_1}{c_2} = (170 \text{ MPa}) \frac{19 \text{ mm}}{29 \text{ mm}} = 111 \text{ MPa}$$

$$\phi' = \frac{T L}{J G} = \frac{(5.32 \text{ N·m})(1.5 \text{ m})}{(9.063 \times 10^{-4} \text{ m}^4)(77 \text{ GPa})} = 0.114 \text{ rad} = 6.53^\circ$$

تنش‌های باقیمانده و پیچش دائمی. نتایج بارگذاری (شکل ۱) و باربرداری (شکل ۲) را با هم ترکیب می‌کنیم (شکل ۳)، و تنش‌های باقیمانده و زاویه پیچش دائمی  $\phi_p$  را می‌یابیم.

## مسائل

۹۱-۳ شفت توپری به قطر ۵۰ mm از فولاد متوسط الاستوپلاستیک ( $\tau_y = 140 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. ماکزیم تنش برش و شعاع هسته الاستیک را بر اثر اعمال گشتاورهای زیر بیابید: (الف)  $3 \text{ kN·m}$ ، (ب)  $4 \text{ kN·m}$ .

۹۲-۳ شفت توپری به قطر ۳۸ mm از فولاد متوسط الاستوپلاستیک ( $\tau_y = 145 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. ماکزیم تنش برشی و شعاع هسته الاستیک را بر اثر اعمال گشتاورهای زیر بیابید: (الف)  $1.2 \text{ kN·m}$ ، (ب)  $1.8 \text{ kN·m}$ .

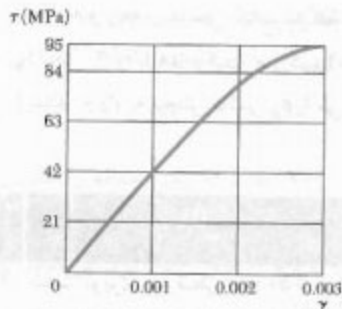
۹۳-۳ گیره کاغذی فولادی با استقامتی را می‌توان با اعمال گشتاور  $60 \text{ N·m}$  چندین بار پیچاند. اگر قطر سیم گیره کاغذی  $0.9 \text{ mm}$  باشد، مقدار تقریبی تنش تسلیم فولاد را بیابید.

۹۴-۳ میله توپری به قطر ۳۰ mm از ماده الاستوپلاستیک ( $\tau_y = 35 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. اگر هسته الاستیک میله به قطر ۲۵ mm باشد، مقدار گشتاور وارد بر میله را بیابید.

۹۵-۳ شفت توپری دایره‌ای نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک ( $\tau_y = 145 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. مطلوبست مقدار  $T$  گشتاور وارده وقتی منطقه پلاستیک (الف) به عمق ۱۶ mm است، (ب) به عمق ۲۴ mm است.

۱-۵-۳ با در نظر گرفتن شفت به طور جزئی پلاستیک در شکل ۳-۳۸، معادله (۳-۳۲) را با توجه به این موضوع استنتاج کنید که انتگرال (۳-۲۶) همان دژم سطح زیر منحنی  $\tau-\rho$  را نسبت به محور  $\tau$  نشان می‌دهد.

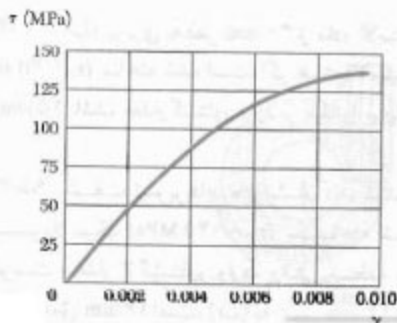
۱-۶-۳ میله برنجی توپری به قطر ۳۰ mm تحت گشتاوری قرار دارد که در آن تنش برشی ماکزیمم ۹۵ MPa را ایجاد می‌کند. با استفاده از نمودار  $\tau-\gamma$  نشان داده شده، مطلوبیت: (الف) مقدار گشتاور (ب) زاویه پیچش در طول ۰/۶ m از میله.



شکل م ۳-۱۰۶ و م ۳-۱۰۷

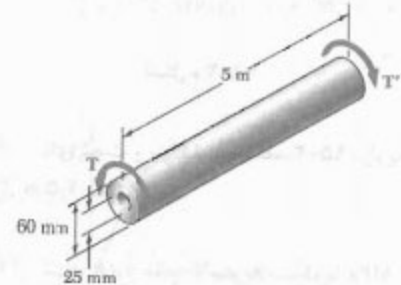
۱-۷-۳ میله برنجی توپری به قطر ۲۰ mm و به طول ۰/۷۵ m تحت زاویه  $10^\circ$  می‌پیچد. با استفاده از نمودار  $\tau-\gamma$  نشان داده شده، مطلوبیت: (الف) مقدار گشتاور وارد بر میله، (ب) ماکزیمم تنش برشی در میله.

۱-۸-۳ میله آلومینیومی توپری به قطر ۴۰ mm تحت گشتاوری قرار دارد که در آن کرنش برشی ماکزیمم ۰/۰۰۸ را ایجاد می‌کند. با استفاده از نمودار  $\tau-\gamma$  نشان داده شده، مطلوبیت: (الف) مقدار گشتاور وارده، (ب) زاویه پیچش در طول ۷۵۰ mm از میله.



شکل م ۳-۱۰۸

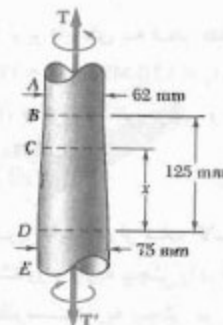
۱-۱-۳ شفت توخالی نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک با  $\tau_y = 145 \text{ MPa}$  و  $G = 77.2 \text{ GPa}$  ساخته شده است. مطلوبیت مقدار گشتاور  $T$  را زاویه پیچش متناظر: (الف) در شروع تسلیم، (ب) وقتی ناحیه پلاستیک به عمق ۱۰ mm است.



شکل م ۳-۱۰۱

۱-۲-۳ در مسئله ۱-۱-۳، مطلوبیت: (الف) زاویه پیچش که به ازای آن شفت کاملاً پلاستیک می‌شود، (ب) مقدار گشتاور متناظر. منحنی  $\tau-\phi$  شفت را رسم کنید.

۱-۳-۳ میله فولادی مخروطی تحت گشتاور  $T = 8500 \text{ N.m}$  قرار دارد. اگر  $\tau_y = 145 \text{ MPa}$  و  $G = 77 \text{ GPa}$ ، مطلوبیت: (الف) شعاع هسته الاستیک در قسمت  $AB$  شفت، (ب) طول قسمت  $CD$  که کاملاً الاستیک می‌ماند.



شکل م ۳-۱۰۳

۱-۴-۳ در مسئله ۱-۳-۳ اگر گشتاورها آهسته افزایش یابند، مطلوبیت: (الف) مقدار ماکزیمم گشتاور  $T$  که می‌توان بر شفت وارد کرد، (ب) طول قسمت  $CD$  که کاملاً الاستیک می‌ماند.

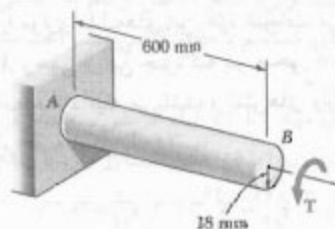


۱۰۹-۳ متحنی شکل م ۱۰۸-۳ را با رابطه تقریبی زیر می‌توان بیان کرد:

$$\tau = 27.8 \times 10^9 \gamma - 1.39 \times 10^{11} \gamma^2$$

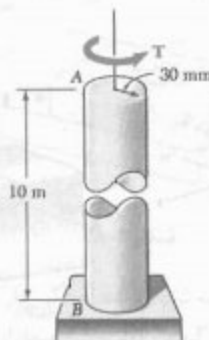
با استفاده از این رابطه و معادله‌های (۲-۳) و (۲۶-۳)، مسئله ۱۰۸-۳ را حل کنید.

۱۱۰-۳ شفت توپر دایره‌ای AB از فولاد الاستوپلاستیک ( $G = 77.2 \text{ GPa}$  و  $\tau_y = 145 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. گشتاور T افزایش می‌یابد تا اینکه شعاع هسته الاستیک به ۶ mm می‌رسد. ماکزیم تنش برشی باقیمانده را در شفت پس از حذف گشتاور T بیابید.



شکل م ۱۱۰-۳

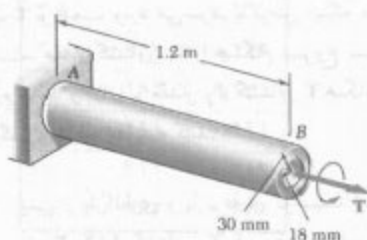
۱۱۱-۳ متنه دایره‌ای توپر AB از فولاد الاستوپلاستیک ( $G = 77 \text{ GPa}$  و  $\tau_y = 160 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. اگر گشتاور  $T = 8475 \text{ N.m}$  بر میله وارد و سپس حذف شود، ماکزیم تنش برشی باقیمانده را در میله بیابید.



شکل م ۱۱۱-۳

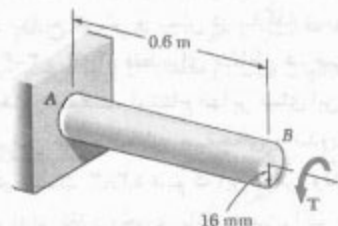
۱۱۲-۳ در مسئله ۱۱۱-۳، زاویه پیچش دائمی میله را بیابید.

۱۱۳-۳ شفت توخالی AB از فولاد الاستوپلاستیک ( $G = 77 \text{ GPa}$  و  $\tau_y = 145 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. گشتاور T به‌طور آهسته افزایش می‌یابد تا اینکه منطقه پلاستیک ابتدا به سطح داخلی می‌رسد؛ سپس، گشتاور حذف می‌شود. مطلوبست: (الف) ماکزیم تنش برشی باقیمانده، (ب) زاویه پیچش دائمی شفت.



شکل م ۱۱۳-۳

۱۱۴-۳ شفت توپر نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک ( $G = 77.2 \text{ GPa}$  و  $\tau_y = 145 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. گشتاور T افزایش می‌یابد تا اینکه شفت ۶۰ می‌چرخد؛ سپس، گشتاور حذف می‌شود. مطلوبست: (الف) مقدار و مکان ماکزیم تنش برشی باقیمانده، (ب) زاویه پیچش دائمی شفت.



شکل م ۱۱۴-۳

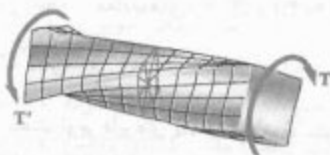
۱۱۵-۳ در مسئله ۱۱۰-۳، زاویه پیچش دائمی شفت را بیابید.

۱۱۶-۳ گشتاور T بر میله توپری از جنس ماده الاستوپلاستیک وارد می‌شود تا میله به‌طور کامل پلاستیک



شکل م ۱۱۶-۳

فاصله از محور میله به صورت خطی تغییر می‌کند و در گوشه‌های مقطع عرضی به بیشترین مقدار می‌رسد. در اینجا خواهیم دید که تنش برشی در این نقاط صفر است.



شکل ۳-۴۵

جزء مکعبی کوچکی را در گوشه مقطع عرضی میله چهارگوشی که تحت پیچش است در نظر گرفته و محورهای مختصات را موازی با لبه‌های این جزء انتخاب می‌کنیم (شکل ۳-۴۶الف). وجهی از این جزء که بر محور عمود است قسمتی از سطح آزاد میله می‌باشد، و تنش‌های وارد بر آن صفر هستند. با توجه به شکل ۳-۴۶ب،

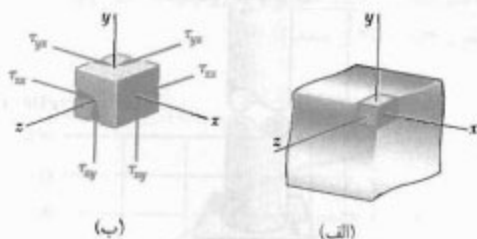
$$\tau_{yx} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad (3-46)$$

به همین دلیل، تمام تنش‌های وارد بر وجهی از جزء که بر محور عمود است نیز صفر است:

$$\tau_{zx} = 0 \quad \tau_{zy} = 0 \quad (3-47)$$

از معادله اول (۳-۴۶) و معادله دوم (۳-۴۷) نتیجه می‌شود:

$$\tau_{xy} = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad (3-48)$$



شکل ۳-۴۶

لذا، هر دو مؤلفه تنش برشی وارد بر وجهی از جزء که بر محور میله عمود است صفر می‌باشند. در نتیجه، هیچ تنش برشی در گوشه‌های مقطع عرضی میله وجود ندارد.

می‌شود؛ سپس، گشتاور حذف می‌شود. (الف) نشان دهید که توزیع تنش‌های باقیمانده به صورت نشان داده شده است. (ب) مقدار گشتاور ناشی از تنش‌های وارد بر قسمتی از میله را که داخل دایره‌ای به شعاع  $c$  قرار دارد بیابید.

۳-۱۱۷ پس از باربرداری و بارگذاری توصیف شده برای شفت توخالی مسئله ۳-۱۱۳، گشتاور  $T_1$  با سوی مخالف گشتاور اولیه  $T$  بر شفت وارد می‌شود. با فرض اینکه مقدار  $T_2$  مانند قبل است، مقدار گشتاور  $T_1$  را هنگام شروع تسلیم در بارگذاری دوم بیابید و آن را با مقدار  $T_2$  گشتاور  $T$  هنگام شروع تسلیم در بارگذاری اولیه مقایسه کنید.

۳-۱۱۸ پس از بارگذاری و باربرداری توصیف شده برای شفت توپر مسئله ۳-۱۱۴، گشتاور  $T_1$  با سوی مخالف گشتاور اولیه  $T$  بر شفت وارد می‌شود. با فرض اینکه مقدار  $\phi_2$  مانند قبل است، مقدار پیچش  $\phi_1$  مورد نیاز را برای شروع تسلیم در بارگذاری دوم بیابید و آن را با مقدار  $\phi_2$  که باعث تسلیم شفت در بارگذاری اولیه شد مقایسه کنید.

### ۳-۱۲ پیچش عضوهای غیردایره‌ای

فرمول‌های توزیع کرنش و تنش در بارگذاری پیچشی در قسمت‌های ۳-۳ و ۳-۴، فقط برای مقاطع عرضی دایره‌ای به کار می‌روند. در حقیقت، استنتاج آنها بر مبنای این فرض بود که مقطع عرضی عضو به طور صفحه‌ای و بدون اعوجاج می‌ماند، و در قسمت ۳-۳ دیدیم که این فرض وقتی صحت دارد که عضو دارای تقارن محوری باشد (یعنی، اگر عضو را از وضعیت ثابتی نگاه کنیم و آن را تحت یک زاویه اختیاری حول محورش بچرخانیم، ظاهر آن تغییر نکند).

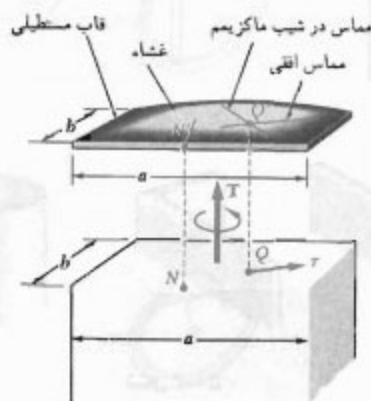
ولی، یک میله با مقطع عرضی چهارگوش فقط وقتی ظاهر خود را حفظ می‌کند که به اندازه  $90^\circ$  یا  $180^\circ$  بچرخد. با استفاده از روش قسمت ۳-۳، می‌توان نشان داد که قطرهای مقطع عرضی میله چهارگوش و خطوط واصل نقاط میانی اضلاع آن مقطع به طور مستقیم می‌مانند (شکل ۳-۴۵). البته، به علت عدم تقارن محوری میله، هر خط دیگری که در مقطع عرضی آن رسم شود هنگام پیچش میله تغییر شکل می‌دهد، و خود مقطع عرضی به طرف خارج صفحه اولیه‌اش می‌پیچد.

در نتیجه، از معادله‌های (۳-۴۷) و (۳-۴۸) نمی‌توان برای عضوهای غیردایره‌ای استفاده کرد. مثلاً، نمی‌توان فرض کرد تنش برشی در مقطع عرضی یک میله چهارگوش بر حسب

جدول ۱-۳ ضرایب میله‌های مستطیلی

$a/b$	$c_1$	$c_2$
۱٫۰	۰٫۲۰۸	۰٫۱۴۰۶
۱٫۲	۰٫۲۱۹	۰٫۱۶۶۱
۱٫۵	۰٫۲۳۱	۰٫۱۹۵۸
۲٫۰	۰٫۲۴۶	۰٫۲۲۹
۲٫۵	۰٫۲۵۸	۰٫۲۴۹
۳٫۰	۰٫۲۶۷	۰٫۲۶۳
۴٫۰	۰٫۲۸۲	۰٫۲۸۱
۵٫۰	۰٫۲۹۱	۰٫۲۹۱
۱۰٫۰	۰٫۳۱۲	۰٫۳۱۲
$\infty$	۰٫۳۳۳	۰٫۳۳۳

توزیع تنش برشی در یک عضو غیردایره‌ای را با استفاده از تشابه غشا می‌توان به‌سهرت تجسم داد. غشای همگن الاستیکی که به قاب ثابتی متصل است و یک طرف آن تحت فشار یکنواخت قرار دارد مشابه میله تحت پیشش است؛ یعنی، برای تعیین تغییر شکل غشا از همان معادله دیفرانسیلی استفاده می‌شود که برای تعیین تنش‌های برشی در میله به‌کار رفت<sup>\*</sup>. اگر  $Q$  یک نقطه از مقطع عرضی میله و  $Q'$  نقطه متناظر از غشا باشد (شکل ۳-۴۹)، تنش برشی  $\tau$  در  $Q$  با مماس افقی بر غشا در نقطه  $Q'$  هم‌جهت است، و مقدار آن با ماکزیمم شیب غشا در



شکل ۳-۴۹

با پیچاندن مدل لاستیکی یک میله چهارگوش، مشاهده می‌شود که تغییر شکل یا تنش در لبه‌های میله به‌وجود نمی‌آید، در حالی که خط مرکزی هر یک از وجوه میله دارای ماکزیمم تغییر شکل است و تحت ماکزیمم تنش قرار می‌گیرد (شکل ۳-۴۷).



شکل ۳-۴۷

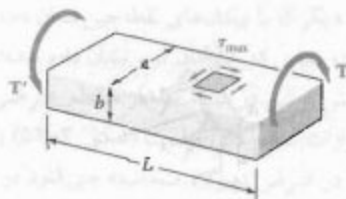
تعیین تنش در عضوهای غیردایره‌ای تحت پیشش فرائر از این متن است. ولی، نتایج حاصل از نظریه ریاضی الاستیسته برای میله‌های مستقیم با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی را در اینجا می‌آوریم<sup>\*</sup>.

اگر طول میله را با  $L$  و ضلع عرضی تر مقطع عرضی را با  $a$  و ضلع باریک‌تر آن را با  $b$  و مقدار گشتاور وارد بر میله را با  $T$  نشان دهیم (شکل ۳-۴۸)، ماکزیمم تنش برشی در امتداد خط مرکزی وجه عرضی تر میله روی می‌دهد و برابر است با:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 ab^2} \quad (۳-۴۳)$$

زاویه پیشش را نیز به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$\phi = \frac{TL}{c_2 ab^3 G} \quad (۳-۴۴)$$



شکل ۳-۴۸

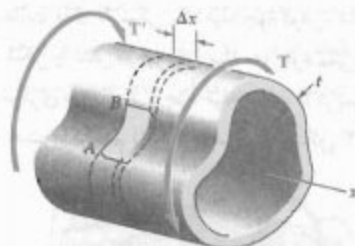
ضرایب  $c_1$  و  $c_2$  فقط به نسبت  $a/b$  بستگی دارند و در جدول ۱-۳ آورده شده‌اند. گفتنی است که معادله‌های (۳-۴۳) و (۳-۴۴) فقط در ناحیه الاستیک صحت دارند.

از جدول ۱-۳ دیده می‌شود که برای  $a/b \geq 5$  ضرایب  $c_1$  و  $c_2$  با هم برابرند. می‌توان نشان داد که برای این مقادیر  $a/b$

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{3} (1 + 0.630 \frac{b}{a}) \quad (a/b \geq 5) \quad (۳-۴۵)$$

\* See S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3d., McGraw-Hill, New York, 1969, sec. 109.

\*\* به قسمت ۷.۱۰ مراجعه شود.



شکل ۳-۵۱

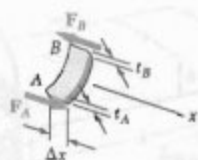
یک استوانه توخالی با مقطع غیردایره‌ای را که تحت بارگذاری پیچشی است در نظر بگیرید (شکل ۳-۵۱)\*\*\*. گرچه ضخامت  $t$  دیواره ممکن است در مقطع عرضی تغییر کند، ولی از این ضخامت می‌توان در مقایسه با سایر ابعاد عضو صرف‌نظر کرد. حال، قسمت جداری  $AB$  از عضو را که با دو صفحه عرضی به فاصله  $\Delta x$  از یکدیگر و دو صفحه طولی عمود بر دیواره محدود شده است جدا می‌کنیم. چون قسمت  $AB$  در تعادل است، مجموع نیروهای وارد بر آن در جهت طولی  $x$  صفر است (شکل ۳-۵۲). تنها نیروهای موجود عبارتند از نیروهای برشی  $F_A$  و  $F_B$  که بر دو انتهای قسمت  $AB$  وارد می‌شود. بنابراین،

$$\sum F_x = 0 : F_A - F_B = 0 \quad (3-46)$$

حال، می‌نویسیم:

$$F_A = \tau_A (t_A \Delta x)$$

که در آن، تنش برشی طولی وارد بر وجه کوچک در انتهای  $A$  و  $t_A \Delta x$  مساحت آن وجه است.



شکل ۳-۵۲

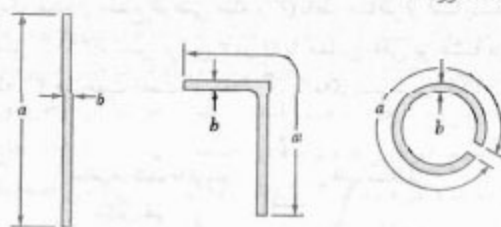
\* این شبیهی است که در جهت عمود بر معاس افقی در  $Q'$  اندازه‌گیری می‌شود.

\*\* می‌توان نشان داد که زاویه پیچش را از معادله (۳-۴۴) با  $c_1 = 0.333$  می‌توان به دست آورد.

\*\*\* درباره این عضو باید شامل یک حفره تنها باشد و نباید دارای یک شکاف باز باشد. به عبارت دیگر، این عضو از نظر توپولوژیکی باید معادل یک شفت «ایره‌ای توخالی» باشد.

$Q'$  متناسب است\* به علاوه، گشتاور وارده با حجم بین غشا و صفحه قاب ثابت متناسب است. در غشای شکل ۳-۴۹، که به یک قاب مستطیلی متصل است، بیشترین شیب در نقطه میانی وجه بزرگتر قاب (نقطه  $N'$ ) روی می‌دهد. لذا، ماکزیمم تنش برشی در میله با مقطع عرضی مستطیلی در نقطه میانی وجه بزرگتر آن مقطع (نقطه  $N$ ) به وجود می‌آید. از تشابه غشا برای تجسم تنش‌های برشی در میله‌های مستقیم با مقطع عرضی یکنواخت غیردایره‌ای می‌توان استفاده کرد.

مثلاً، عضوهای جدار نازکی را که مقاطع عرضی آنها در شکل ۳-۵۰ نشان داده شده است در نظر بگیرید. این عضوها تحت گشتاور یکسان قرار دارند. با استفاده از تشابه غشا، که به تجسم تنش‌های برشی کمک می‌کند، دیده می‌شود که چون گشتاور یکسان بر هر عضو وارد می‌شود، حجم یکسانی در زیر هر غشا وجود دارد و ماکزیمم شیب در هر دو حالت تقریباً یکسان است. لذا، برای یک عضو جدار نازک با ضخامت یکنواخت و با شکل دلخواه، ماکزیمم تنش برشی مانند ماکزیمم تنش برشی در یک میله مستطیلی است که  $a/b$  بسیار بزرگی دارد و آن را از معادله (۳-۴۳) با  $c_1 = 0.333$  می‌توان به دست آورد\*\*.



شکل ۳-۵۰

### ۳-۱۳ شفت‌های توخالی جدار نازک

در قسمت قبل دیدیم که برای تعیین تنش در عضوهای غیردایره‌ای معمولاً باید از روش‌های پیشرفته ریاضی استفاده کرد. ولی در شفت‌های توخالی جدار نازک، با یک محاسبه ساده می‌توان توزیع تنش را با تقریب خوب تعیین کرد.

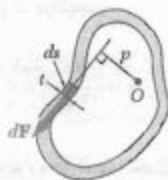
در اینجا، به تشابه بین توزیع تنش برشی  $\tau$  در مقطع عرضی یک شفت توخالی جدار نازک و توزیع سرعت آبی که در کانال بسته‌ای با عمق واحد و عرض متغیر جریان دارد اشاره می‌کنیم. گرچه سرعت  $v$  به علت تغییر عرض کانال از نقطه‌ای تا نقطه دیگر تغییر می‌کند، ولی کمیت  $q = vt$  (آهنگ جریان) در سرتاسر کانال ثابت است، همانطور که  $\tau t$  در معادله (۴۸-۳) ثابت است. با توجه به این تشابه، کمیت  $q = \tau t$  را جریان برشی در دیواره شفت توخالی می‌گویند.

حال، رابطه بین گشتاور  $T$  وارد بر یک عضو توخالی و جریان برشی  $q$  در دیواره آن را تعیین می‌کنیم. جزء کوچکی از مقطع دیواره، به طول  $ds$  را در نظر می‌گیریم (شکل ۵۵-۳). مساحت این جزء عبارت است از  $dA = t ds$  و مقدار نیروی برشی  $dF$  وارد بر این آن چنین است:

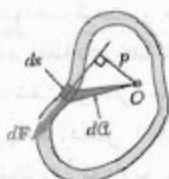
$$dF = \tau dA = \tau(t ds) = (\tau t) ds = q ds \quad (۴۹-۳)$$

گشتاور این نیرو نسبت به نقطه اختیاری  $O$ ، که در حفره عضو قرار دارد، چنین است:

$$dM_O = p dF = p(q ds) = q(p ds) \quad (۵۰-۳)$$



شکل ۵۵-۳



شکل ۵۶-۳

که در آن،  $p$  فاصله عمودی نقطه  $O$  تا خط اثر نیروی  $dF$  است. اما کمیت  $p ds$  با دو برابر مساحت مثلث سایه خورده در شکل ۵۶-۳ برابر است. لذا،

$$dM_O = q(2 d\alpha) \quad (۵۱-۳)$$

گفتی است که گرچه تنش برشی از مختصه  $x$  نقطه تحت بررسی مستقل است، ولی در عرض دیواره تغییر می‌کند؛ لذا،  $\tau_A$  مقدار متوسط تنش محاسبه شده در عرض دیواره را نشان می‌دهد.  $F_B$  را نیز به طور مشابه بیان می‌کنیم. با جایگذاری  $F_A$  و  $F_B$  در (۴۶-۳)،

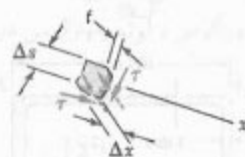
$$\tau_A(t_A \Delta x) - \tau_B(t_B \Delta x) = 0$$

یا

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B \quad (۴۷-۳)$$

چون  $A$  و  $B$  به طور اختیاری انتخاب شده‌اند، طبق معادله (۴۷-۳)، کمیت  $\tau t$  در سرتاسر عضو ثابت است. اگر این حاصلضرب را با  $q$  نشان دهیم، داریم

$$q = \tau t = \text{ثابت} \quad (۴۸-۳)$$



شکل ۵۳-۳

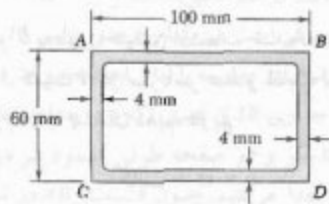
حال، جزء کوچکی از قسمت جدار  $AB$  را جدا می‌کنیم (شکل ۵۳-۳). چون وجوه بالایی و پایینی این جزء قسمتی از سطح آزاد عضو توخالی‌اند، تنش وارد بر این وجوه صفر است. با توجه به رابطه‌های (۲۱-۱) و (۲۲-۱)، مؤلفه‌های تنش وارده بر وجوه دیگر که با پیکان‌های نقطه‌چین نشان داده شده‌اند نیز صفرند، و دو تنشی که با پیکان توپر نشان داده شده‌اند با هم برابرند. لذا، تنش برشی در هر نقطه از مقطع عرضی عضو توخالی به موازات سطح دیواره است (شکل ۵۴-۳) و مقدار متوسط آن که در عرض دیواره محاسبه می‌شود در معادله (۴۸-۳) صدق می‌کند.



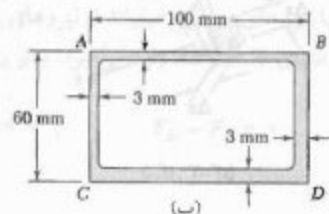
شکل ۵۴-۳

## مثال ۳-۱۰

لوله آلومینیومی با مقطع عرضی مستطیلی  $60 \times 100 \text{ mm}$  با روش اکستروژن ساخته شده است. مطلوبست تنش برشی در هر یک از چهار دیواره قسمتی از این لوله تحت گشتاور  $2.7 \text{ kN.m}$ ، با فرض اینکه: (الف) ضخامت یکنواخت دیواره  $4 \text{ mm}$  است (شکل ۳-۵۸ الف)، (ب) بر اثر نقص ساخت، ضخامت دیواره‌های  $AB$  و  $AC$  برابر با  $3 \text{ mm}$  و ضخامت دیواره‌های  $BD$  و  $CD$  برابر با  $5 \text{ mm}$  است (شکل ۳-۵۸ ب).



(الف)



(ب)

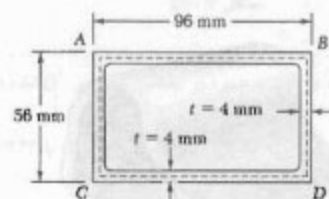
شکل ۳-۵۸

(الف) لوله با ضخامت یکنواخت. مساحت محصور شده توسط خط مرکزی (شکل ۳-۵۹) چنین است:

$$A = (96 \text{ mm})(56 \text{ mm}) = 5376 \text{ mm}^2$$

چون ضخامت هر چهار دیواره  $4 \text{ mm}$  است، تنش برشی در هر دیواره از معادله (۳-۵۳) چنین است:

$$\tau = \frac{T}{2tA} = \frac{2700 \text{ N.m}}{2(0.004 \text{ m})(5376 \times 10^{-6} \text{ m}^2)} = 62.8 \text{ MPa}$$



شکل ۳-۵۹

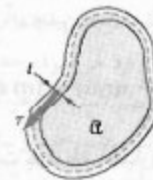
انتگرال عضو سمت چپ معادله (۳-۵۱) پیرامون مقطع جداري برابر است با مجموع لنگر نیروهای برشی جزئی وارد بر مقطع جداري، و این مجموع نیز با گشتاور  $T$  وارد بر عضو توخالی برابر است. در نتیجه،

$$T = \oint dM_o = \oint q(2d\alpha)$$

جریان برشی  $q$  یک ثابت است، و می‌نویسیم:

$$T = 2q\alpha \quad (3-52)$$

که در آن  $\alpha$  مساحتی است که توسط خط مرکزی مقطع عرضی دیواره محدود شده است (شکل ۳-۵۷).



شکل ۳-۵۷

با جایگذاری  $q$  از (۳-۴۸) در (۳-۵۲) و با حل  $\tau$  از معادله حاصل، می‌توان تنش برشی  $\tau$  در هر نقطه از دیواره را بر حسب گشتاور  $T$  به دست آورد. در نتیجه،

$$\tau = \frac{T}{2t\alpha} \quad (3-53)$$

که در آن  $t$  ضخامت دیواره در نقطه تحت بررسی و  $\alpha$  مساحتی است که توسط خط مرکزی محدود شده است. باید توجه داشت که  $\tau$  مقدار متوسط تنش برشی در عرض دیواره است، ولی، توزیع تنش در عرض دیواره را برای تغییرشکل‌های الاستیک می‌توان یکنواخت گرفت، و معادله (۳-۵۳) مقدار واقعی تنش برشی را در نقطه داده شده دیواره می‌دهد.

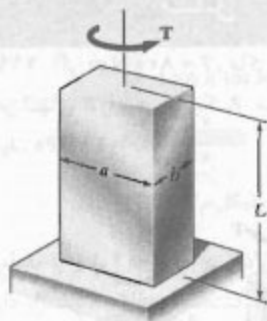
زاویه پیچش یک شفت توخالی جدار نازک را با استفاده از روش انرژی می‌توان یافت (فصل ۱۱). با فرض تغییرشکل الاستیک، می‌توان نشان داد\* که زاویه پیچش یک شفت جدار نازک به طول  $L$  و با مدول صلابت  $G$  چنین است:

$$\phi = \frac{TL}{\oint \frac{ds}{tG}} \quad (3-54)$$

که در آن، انتگرال در امتداد خط مرکزی مقطع جداري محاسبه می‌شود.

\* به مسئله ۸۳.۱۱ نگاه کنید.





۲- میله با مقطع عرضی مستطیلی. در این حالت،

$$a = 0.064 \text{ m} \quad b = 0.025 \text{ m} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2.56$$

با درون‌یابی در جدول ۱-۳،  $c_1 = 0.259$ ، در نتیجه،

$$\tau_{\max} = \frac{T_r}{c_1 a b^2} \Rightarrow 40 \text{ MPa} = \frac{T_r}{0.259 (0.064 \text{ m})(0.025 \text{ m})^2}$$

$$\Rightarrow T_r = 414 \text{ N.m} \blacktriangleleft$$

۳- لوله چهارگوش. برای لوله با ضخامت  $t$ ، تنش برشی با معادله (۵۳-۳) بیان می‌شود:

$$\tau = \frac{T}{\sum t \ell}$$

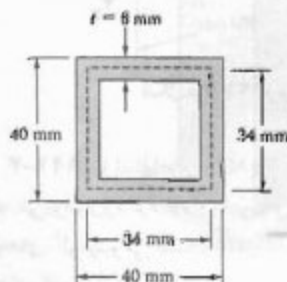
که در آن  $\ell$  مساحتی است که توسط خط مرکزی مقطع عرضی محدود شده است:

$$\ell = (0.034 \text{ m})(0.034 \text{ m}) = 1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

ماکزیم تنش برشی  $\tau = \tau_{\text{all}} = 40 \text{ MPa}$  و  $t = 0.006 \text{ m}$  را جایگذاری می‌کنیم و گشتاور مجاز را می‌یابیم:

$$\tau = \frac{T}{\sum t \ell} \Rightarrow 40 \text{ MPa} = \frac{T_r}{2 (0.006 \text{ m})(1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}$$

$$\Rightarrow T_r = 555 \text{ N.m} \blacktriangleleft$$



(ب) لوله با ضخامت متغیر. مساحت  $\ell$  محصور شده توسط خط مرکزی مانند قسمت (الف) است، و با جایگذاری  $t = 3 \text{ mm}$  و  $t = 5 \text{ mm}$  در معادله (۵۳-۳)، داریم:

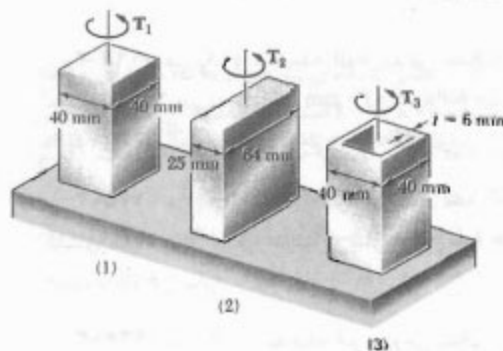
$$\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{2700 \text{ N.m}}{2 (0.003 \text{ m})(0.276 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 83.7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{2700 \text{ N.m}}{2 (0.005 \text{ m})(0.276 \times 10^{-3} \text{ m}^2)} = 50.2 \text{ MPa}$$

توجه کنید که تنش در دیواره فقط به ضخامت آن بستگی دارد.

### مسئله نمونه ۹-۳

با استفاده از  $\tau_{\text{all}} = 40 \text{ MPa}$ ، ماکزیمم گشتاوری را که می‌توان بر هر یک از میله‌ها و لوله برنجی نشان داده شده وارد کرد بیابید. توجه کنید که دو میله توپر دارای مساحت مقطع عرضی یکسان، و میله چهارگوش و لوله چهارگوش دارای ابعاد خارجی یکسان هستند.



حل

۱- میله با مقطع عرضی چهارگوش. برای میله توپر با مقطع عرضی مستطیلی، ماکزیمم تنش برشی با معادله (۴۳-۳) داده می‌شود:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 a b^2}$$

$$a = b = 0.040 \text{ m} \Rightarrow \frac{a}{b} = 1.00$$

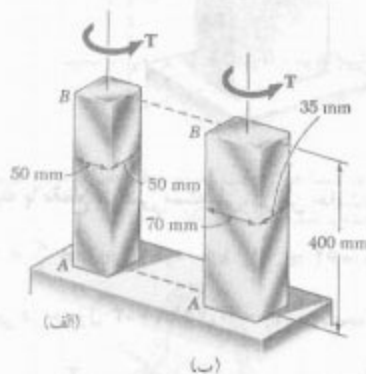
از جدول ۱-۳،  $c_1 = 0.208$ ، برای  $\tau_{\text{all}} = 40 \text{ MPa}$ ،

$$\tau_{\max} = \frac{T_r}{c_1 a b^2} \Rightarrow 40 \text{ MPa} = \frac{T_r}{0.208 (0.040 \text{ m})^2}$$

$$\Rightarrow T_r = 532 \text{ N.m} \blacktriangleleft$$

## مسائل

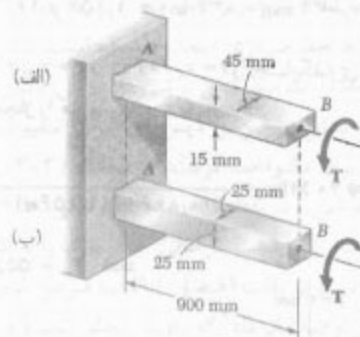
۱۱۹-۳ اگر  $T = 800 \text{ N.m}$ ، ماکزیمم تنش برشی و زاویه پیچش در انتهای  $B$  را برای هر یک از میله‌های برنج زرد با نورد سرد بیابید.  $G = 39 \text{ GPa}$ .



شکل م-۱۱۹ و م-۱۲۰

۱۲۰-۳ با استفاده از  $\tau_{all} = 50 \text{ MPa}$ ، ماکزیمم گشتاور  $T$  را که می‌توان وارد کرد و زاویه پیچش متناظر در انتهای  $B$  را برای هر یک از میله‌های برنج زرد با نورد سرد بیابید.  $G = 39 \text{ GPa}$ .

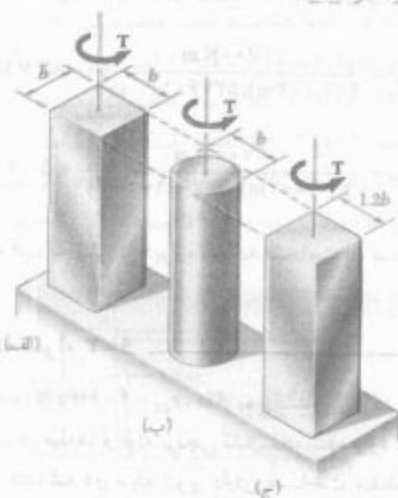
۱۲۱-۳ اگر مقدار گشتاور  $T$  برابر با  $200 \text{ N.m}$  باشد، ماکزیمم تنش برشی و زاویه پیچش را در انتهای  $B$  برای هر یک از میله‌های آلومینیومی نشان داده شده بیابید. از  $G = 27 \text{ GPa}$  استفاده کنید.



شکل م-۱۲۱ و م-۱۲۲

۱۲۲-۳ با استفاده از  $\tau_{all} = 70 \text{ MPa}$ ، ماکزیمم گشتاور  $T$  را که می‌توان وارد کرد و زاویه پیچش متناظر را برای هر یک از میله‌های آلومینیومی نشان داده شده بیابید. از  $G = 27 \text{ GPa}$  استفاده کنید.

۱۲۳-۳ هر یک از سه میله فولادی نشان داده شده تحت گشتاور  $T = 270 \text{ N.m}$  قرار دارد. اگر تنش مجاز برشی  $\tau_{all} = 50 \text{ MPa}$  باشد، اندازه  $b$  را بیابید.



شکل م-۱۲۳، م-۱۲۴، م-۱۲۵ و م-۱۲۶

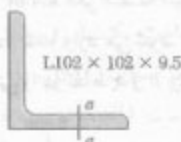
۱۲۴-۳ هر یک از سه میله آلومینیومی نشان داده شده تحت زاویه  $2^\circ$  می‌پیچد. اگر  $\tau_{all} = 50 \text{ MPa}$ ،  $b = 3 \text{ mm}$  و  $G = 27 \text{ GPa}$ ، کمترین طول مجاز هر میله را بیابید.

۱۲۵-۳ هر یک از سه میله فولادی نشان داده شده تحت گشتاور  $T = 550 \text{ N.m}$  قرار دارد. اگر تنش برشی مجاز  $50 \text{ MPa}$  باشد، اندازه  $b$  را بیابید.

۱۲۶-۳ هر یک از سه میله آلومینیومی نشان داده شده تحت زاویه  $1.25^\circ$  می‌پیچد. اگر  $\tau_{all} = 50 \text{ MPa}$ ،  $b = 38 \text{ mm}$  و  $G = 27 \text{ GPa}$ ، کمترین طول مجاز هر میله را بیابید.

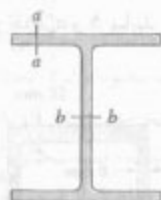
۱۲۷-۳ شفت‌های  $A$  و  $B$  از ماده یکسان ساخته شده‌اند و دارای طول یکسان و مقطع عرضی یکسان هستند. اما  $A$  دارای مقطع عرضی دایره‌ای و  $B$  دارای مقطع عرضی چهارگوش است. مطلوبیت نسبت ماکزیمم گشتاورهای  $T_A$  و  $T_B$  که می‌توان با اطمینان بر  $A$  و  $B$  وارد کرد.

۱۲۸-۳ شفت‌های  $A$  و  $B$  از ماده یکسان ساخته شده‌اند و دارای طول یکسان و مقطع عرضی یکسان هستند. اما  $A$  دارای مقطع عرضی دایره‌ای و  $B$  دارای مقطع عرضی چهارگوش است. نسبت ماکزیمم زاویه پیچش  $\phi_A$  و  $\phi_B$  را برای شفت‌های  $A$  و  $B$  بیابید.



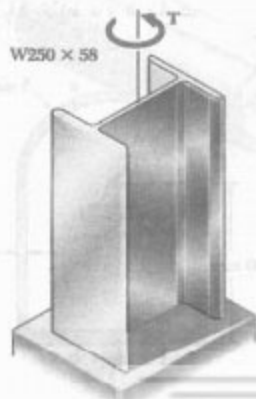
شکل م ۳-۱۳۱

۱۳۲-۳ عضو فولادی به طول  $۲/۴\text{ m}$  و با مقطع عرضی  $W۲۰۰ \times ۴۶/۱$  تحت گشتاور  $۵۶۰\text{ N.m}$  قرار دارد. اگر  $G = ۷۷\text{ GPa}$ ، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در امتداد خط  $a-a$ ، (ب) ماکزیمم تنش برشی در امتداد خط  $b-b$ ، (ج) زاویه پیچش. (راهنمایی: جان و بال‌ها را به‌طور جداگانه در نظر بگیرید و رابطه‌ای بین گشتاورهای وارد بر جان و بال را بیابید. برای این منظور، زوایای پیچش را مساوی هم قرار دهید).

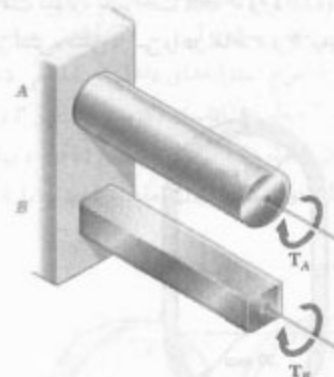


شکل م ۳-۱۳۲

۱۳۳-۳ عضو فولادی به طول  $۳\text{ m}$  دارای مقطع عرضی  $W۲۵۰ \times ۵۸$  است. اگر  $G = ۷۷/۲\text{ GPa}$  و تنش برشی مجاز  $۳۵\text{ MPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم گشتاور  $T$  که می‌توان وارد کرد، (ب) زاویه پیچش متناظر. برای ابعاد مقطع عرضی به پیوست ج مراجعه کنید. تمرکز تنش را در نظر بگیرید (به راهنمایی مسئله ۱۳۲-۳ نگاه کنید).



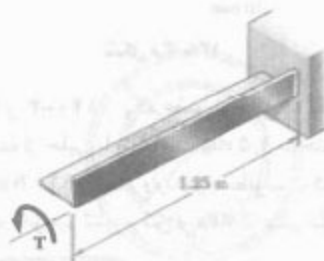
شکل م ۳-۱۳۳



شکل م ۲-۱۱۷ و ۲-۱۲۸

۱۲۹-۳ مطلوبست ماکزیمم مقطع عرضی مجاز شفت فولادی به طول  $۴\text{ m}$  در صورتی که بخواهیم وقتی شفت یک دوران کامل انجام می‌دهد، ماکزیمم تنش برشی در آن از  $۱۲۰\text{ MPa}$  بیشتر نشود.  $G = ۷۷/۲\text{ GPa}$ .

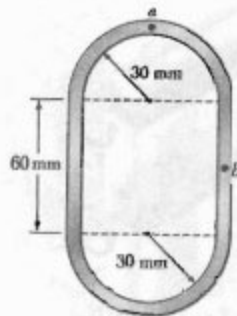
۱۳۰-۳ نبشی فولادی به طول  $۱/۲۵\text{ m}$  دارای مقطع عرضی  $L۱۲۷ \times ۷۶ \times ۶/۴$  است. از پیوست ج، ضخامت این مقطع  $۶/۴\text{ mm}$  و مساحت آن  $۱۲۵۲\text{ mm}^2$  است. اگر  $G = ۷۷/۲\text{ GPa}$  و  $\tau_{\text{مجاز}} = ۶۰\text{ MPa}$ ، با صرف‌نظر از تمرکز تنش، مطلوبست: (الف) ماکزیمم گشتاور  $T$  که می‌توان وارد کرد، (ب) زاویه پیچش متناظر.



شکل م ۳-۱۳۰

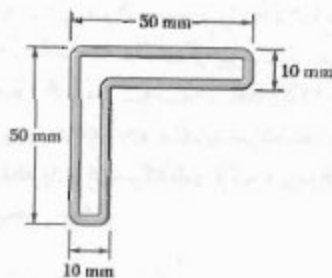
۱۳۱-۳ گشتاور  $۳۴۰\text{ N.m}$  بر نبشی فولادی به طول  $۱/۸\text{ m}$  با مقطع عرضی  $L۱۰۲ \times ۱۰۲ \times ۹/۵$  وارد شده است. از پیوست ج، ضخامت این مقطع  $۹/۵\text{ mm}$  و مساحت آن  $۱۸۵۰\text{ mm}^2$  است. اگر  $G = ۷۷\text{ GPa}$ ، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در امتداد خط  $a-a$ ، (ب) زاویه پیچش.

۱۳۷-۳ گشتاور  $T = 750 \text{ N.m}$  بر شفت توخالی، با ضخامت دیواره یکثابت  $6 \text{ mm}$  وارد شده است. با صرف نظر از تمرکز تنش، تنش برشی را در نقاط  $a$  و  $b$  بیابید.



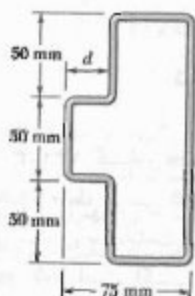
شکل م-۱۳۷

۱۳۸-۳ یک عضو توخالی با مقطع عرضی نشان داده شده از حلی با ضخامت  $2 \text{ mm}$  ساخته شده است. اگر تنش برشی نباید از  $3 \text{ MPa}$  بیشتر شود، ماکزیمم گشتاوری را که می توان بر عضو وارد کرد بیابید.

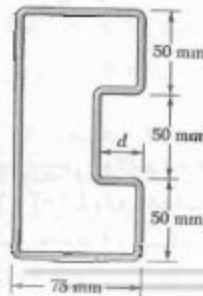


شکل م-۱۳۸

۱۳۹-۳ و ۱۴۰-۳ یک عضو توخالی با مقطع عرضی نشان داده شده از حلی با ضخامت  $1.5 \text{ mm}$  ساخته شده است. اگر گشتاور  $140 \text{ N.m}$  بر عضو وارد شود، مطلوبست کمترین اندازه  $d$  در صورتی که بخواهیم تنش برشی از  $5 \text{ MPa}$  بیشتر نشود.

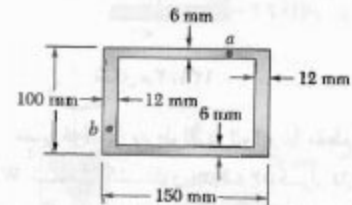


شکل م-۱۴۰



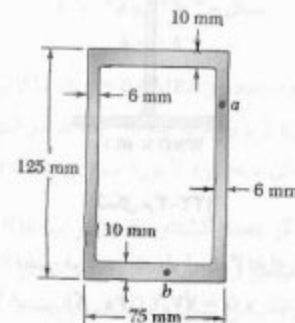
شکل م-۱۳۹

۱۳۴-۳ گشتاور  $7 \text{ kN.m}$  بر شفت آلومینیومی توخالی با مقطع عرضی نشان داده شده وارد می شود. با صرف نظر از تأثیر تمرکز تنش، تنش برشی را در نقاط  $a$  و  $b$  بیابید.



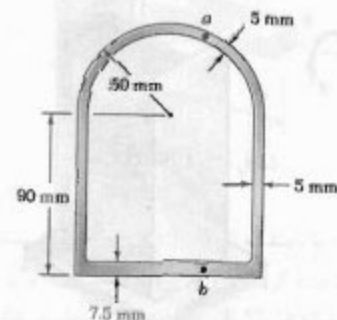
شکل م-۱۳۴

۱۳۵-۳ گشتاور  $50 \text{ kN.m}$  بر شفت توخالی با مقطع عرضی نشان داده شده وارد شده است. با صرف نظر از تمرکز تنش، تنش برشی را در نقاط  $a$  و  $b$  بیابید.



شکل م-۱۳۵

۱۳۶-۳ گشتاور  $5600 \text{ N.m}$  بر شفت توخالی با مقطع عرضی نشان داده شده وارد شده است. با صرف نظر از تمرکز تنش، تنش برشی را در نقاط  $a$  و  $b$  بیابید.



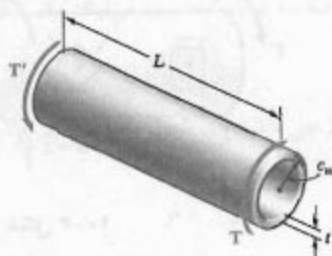
شکل م-۱۳۶

۱۴۴-۳ گشتاورهای مساوی بر لوله‌های جدار نازک با طول یکسان  $L$ ، ضخامت یکسان  $t$  و شعاع یکسان  $c$  وارد شده‌اند. یکی از لوله‌ها، مطابق شکل، در جهت طولی شکاف برداشته است. مطلوبست: (الف) نسبت ماکزیمم تنش‌های برشی در لوله‌ها  $(\tau_{\theta z})$ ، (ب) نسبت زوایای پیچش شفت‌ها  $(\phi_1/\phi_2)$ .



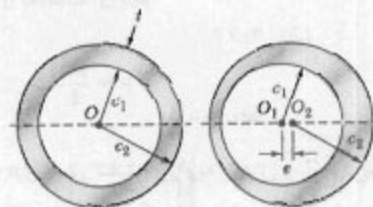
شکل م ۱۴۴-۳  
(الف) (ب)

۱۴۵-۳ شفت استوانه‌ای توخالی به طول  $L$ ، شعاع متوسط  $c_m$  و ضخامت یکنواخت  $t$  تحت گشتاورهای  $T$  قرار دارد. مقدار تنش برشی متوسط  $\tau_{ave}$  و زاویه پیچش  $\phi$  یکبار با فرمول‌های پیچش الاستیک (قسمت‌های ۳-۴ و ۳-۵) و بار دیگر با استفاده از مقادیر حاصل از فرمول‌های شفت‌های جدار نازک توخالی (قسمت ۳-۱۳) در نظر بگیرید. (الف) نشان دهید که خطای نسبی ناشی از کاربرد فرمول‌های شفت (به جای استفاده از فرمول‌های پیچش الاستیک) برای  $\tau_{ave}$  و  $\phi$  یکسان است و مقدار آن مثبت و متناسب با نسبت  $t/c_m$  است. (ب) درصد خطای متناظر با مقادیر نسبت  $t/c_m$  برابر با ۰٫۱، ۰٫۲ و ۰٫۴ را با هم مقایسه کنید.



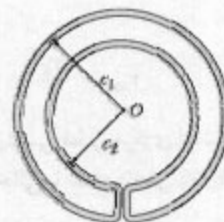
شکل م ۱۴۵-۳

۱۴۶-۳ شفت استوانه‌ای توخالی با مقطع عرضی نشان داده شده در شکل ۱ برای مقاومت در برابر گشتاور ماکزیمم  $T$  طراحی شده است. ولی، بر اثر نقص ساخت، خروج از مرکز  $e$  بین سطوح استوانه‌های داخلی و خارجی شفت وجود دارد (قسمت ۲ شکل). (الف) ماکزیمم گشتاور  $T$  را که می‌توان با اطمینان بر شفت وارد کرد بر حسب  $T$ ،  $e$  و  $t$  بیابید. (ب) درصد کاهش گشتاور مجاز را برای مقادیر  $e/t$  برابر با ۰٫۱، ۰٫۲، ۰٫۳، ۰٫۴، ۰٫۵، ۰٫۶، ۰٫۷، ۰٫۸، ۰٫۹، ۱٫۰ بیابید.



شکل م ۱۴۶-۳

۱۴۷-۳ یک لوله خنک‌کن دارای مقطع عرضی نشان داده شده است و از ورق فولادی زنگ نزن به ضخامت ۳ mm ساخته شده است. شعاع‌های  $c_1$  تا خط مرکزی مقطع اندازه‌گیری شده‌اند و، به ترتیب، برابر با ۱۵۰ mm و ۱۰۰ mm هستند. اگر گشتاور  $T = 3 \text{ kN.m}$  بر لوله وارد شود، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در لوله، (ب) مقدار گشتاور وارد بر پوسته خارجی دایره‌ای از اندازه دهانه کوچک محل اتصال پوسته‌های خارجی و داخلی صرف‌نظر کنید.



شکل م ۱۴۷-۳ و ۱۴۸-۳

۱۴۸-۳ یک لوله خنک‌کن دارای مقطع عرضی نشان داده شده است و از ورق فولادی زنگ‌نزن به ضخامت  $t$  ساخته شده است. شعاع‌های  $c_1$  تا خط مرکزی مقطع اندازه‌گیری شده‌اند. اگر گشتاور  $T$  بر لوله وارد شود، ماکزیمم تنش برشی در لوله را بر حسب  $T$ ،  $e$ ،  $c_1$  و  $t$  بیابید.

### مرور و خلاصه فصل ۳

در این فصل، شفت‌هایی را که تحت گشتاورهای پیچشی قرار دارند تحلیل و طراحی کردیم. به جز دو قسمت آخر، صرفاً شفت‌های دایره‌ای بررسی شدند. در قسمت ۲-۳، گفتیم که توزیع تنش در مقطع عرضی یک شفت دایره‌ای از نوع نامعین استاتیکی است و برای تعیین آن باید تغییر شکل شفت بررسی شود (قسمت ۳-۳). با اثبات این موضوع که در یک شفت دایره‌ای تحت پیچش تمام مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای ویی اعوجاج می‌مانند، برای جزء کوچکی که جوانب آن به موازات محور شفت و عمود بر آن هستند عبارت زیر را به دست آوردیم:

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad (2-3)$$

که در آن،  $\gamma$  کرنش برشی در فاصله  $\rho$  از محور شفت،  $\phi$  زاویه پیچش و  $L$  طول شفت است (شکل ۱۴-۳). معادله (۲-۳) نشان می‌دهد که کرنش برشی در یک شفت دایره‌ای بر حسب فاصله از محور شفت به صورت خطی تغییر می‌کند. در نتیجه، کرنش در سطح شفت، یعنی در  $\rho = c$  دارای مقدار ماکزیمم است:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad \gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max} \quad (3-3 \text{ و } 4-3)$$

با در نظر گرفتن تنش برشی در یک شفت دایره‌ای در ناحیه الاستیک (قسمت ۴-۳) و با توجه به قانون هوک برای تنش و کرنش برشی،  $\tau = G\gamma$ ، رابطه زیر را به دست آوردیم:

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max} \quad (6-3)$$

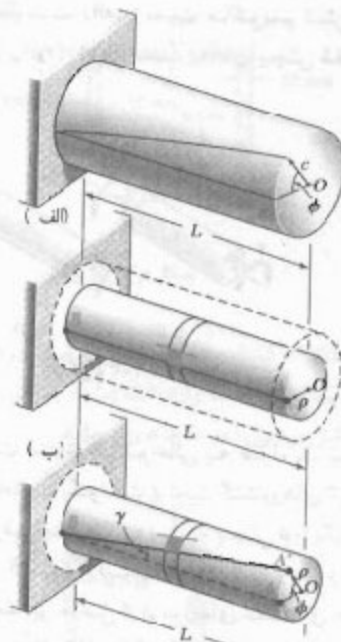
رابطه بالا نشان می‌دهد که در ناحیه الاستیک، تنش برشی  $\tau$  در یک شفت دایره‌ای نیز بر حسب فاصله از محور شفت به صورت خطی تغییر می‌کند. مجموع لنگر نیروهای وارد بر قسمت‌های مختلف شفت را مساوی مقدار گشتاور وارد بر شفت قرار دادیم و فرمول‌های پیچش الاستیک را به دست آوردیم:

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \tau = \frac{T\rho}{J} \quad (9-3, 10-3)$$

که در آن،  $c$  شعاع مقطع عرضی و  $J$  معان اینرسی قطبی مرکزی است. می‌دانیم که برای یک شفت توپر  $J = \frac{1}{2}\pi c^4$  و برای شفت توخالی با شعاع داخلی  $c_i$  و شعاع خارجی  $c_o$ ،  $J = \frac{1}{2}\pi(c_o^4 - c_i^4)$ .

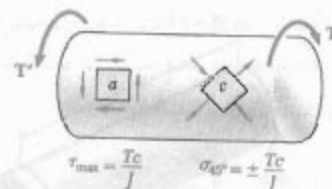
توجه کنید در حالی که جزء  $a$  در شکل ۲۰-۳ در برش خالص است، جزء  $e$  در همان شکل تحت تنش‌های قائم با مقدار یکسان  $Tc/J$  قرار دارد، که دو تا از آنها کششی و دو تای دیگر فشاری هستند. به همین دلیل، یک ماده چکش‌خوار در آزمایش پیچش، که معمولاً تحت برش گسیخته می‌شود، در امتداد یک صفحه عمود بر محور نمونه می‌شکند، در حالی که مواد نرد (شکننده)، که در کشش ضعیف‌تر از برش هستند، در امتداد سطوحی که با آن محور زاویه ۴۵° دارند می‌شکنند.

### تغییر شکل شفت‌های دایره‌ای



شکل ۱۴-۳ (ج)

تنش برشی در ناحیه الاستیک



شکل ۲۰-۳



در قسمت ۳-۵ دیدیم که در ناحیه الاستیک، زاویه پیچش یک شفت دایره‌ای با گشتاور وارد بر آن متناسب است (شکل ۳-۲۲). با  $\phi$  برحسب رادیان،

$$\phi = \frac{TL}{JG} \quad (۳-۱۶)$$

که در آن،

$L$  = طول شفت

$J$  = ممان اینرسی قطبی مقطع عرضی

$G$  = مدول صلابت ماده

اگر شفت در نقاطی غیر از دو انتهایش تحت گشتاور قرار گیرد یا از قسمت‌های مختلف با مقاطع عرضی متفاوت و از مواد مختلف ساخته شده باشد، زاویه پیچش شفت به صورت مجموع جبری زوایای پیچش اجزای آن بیان می‌شود [مسئله نمونه ۳-۳]:

$$\phi = \sum_i \frac{T L_i}{J_i G_i} \quad (۳-۱۷)$$

در شکل ۳-۲۶ ب دیده می‌شود وقتی هر دو انتهای شفت  $BE$  می‌چرخند، زاویه پیچش شفت برابر است با تفاضل زوایای چرخش  $\phi_B$  و  $\phi_E$  دو انتهای شفت. همچنین، توجه کنید وقتی دو شفت  $AD$  و  $BE$  توسط چرخ‌دنده‌های  $A$  و  $B$  به هم متصل شده‌اند، گشتاورهای وارده از چرخ‌دنده  $A$  بر شفت  $AD$  و از چرخ‌دنده  $B$  بر شفت  $BE$ ، به ترتیب، با شعاع‌های  $r_A$  و  $r_B$  این دو چرخ‌دنده به طور مستقیم متناسب‌اند زیرا نیروهای وارده از دنده‌های چرخ‌دنده در  $C$  مساوی و متضادند. از طرف دیگر، زوایای چرخش  $\phi_A$  و  $\phi_B$  دو چرخ‌دنده با  $r_B$  و  $r_A$  به طور معکوس متناسب‌اند زیرا قوس‌های  $CC'$  و  $CC'$  که دنده چرخ‌دنده‌ها طی می‌کنند با هم برابرند [مثال ۳-۴ و مسئله نمونه ۳-۴].

اگر واکنش در تکیه‌گاه‌های یک شفت یا گشتاورهای داخلی را نتوان صرفاً با استفاده از استاتیک تعیین کرد، شفت را نامعین استاتیکی می‌گویند [قسمت ۳-۶]. در این حالت، معادله‌های تعادل را که از نمودارهای آزاد به دست می‌آیند باید با رابطه‌هایی که شامل تغییر شکل شفت هستند و از هندسه مسئله به دست می‌آیند ترکیب کرد [مثال ۳-۵ و مسئله نمونه ۳-۵].

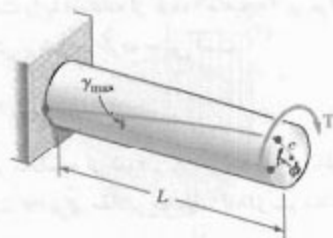
در قسمت ۳-۷، درباره طراحی شفت‌های انتقال بحث کردیم. ابتدا، قدرت  $P$  را که توسط شفت منتقل می‌شود بیان کردیم:

$$P = 2\pi fT \quad (۳-۲۰)$$

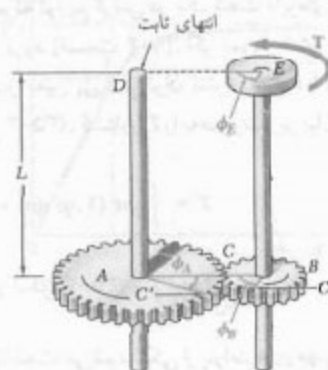
که در آن،  $T$  گشتاور وارد بر هر انتهای شفت و  $f$  فرکانس دوران شفت است. واحد فرکانس عبارت است از دوران بر ثانیه ( $s^{-1}$ ) یا هرتز (Hz). در آحاد SI،  $T$  برحسب نیوتن-متر (N.m) و  $P$  برحسب وات (W) است.

برای طراحی شفتی که قدرت معین  $P$  را در فرکانس  $f$  انتقال می‌دهد، ابتدا باید  $T$  را از معادله (۳-۲۰) حل کرد. با قرار دادن این مقدار و ماکزیمم مقدار مجاز  $\tau$  شفت در فرمول (۳-۹)، مقدار پارامتر  $d$  را تعیین و لزومی آن قطر شفت را محاسبه می‌کنیم [مثال‌های ۳-۶ و ۳-۷].

## زاویه پیچش



شکل ۳-۲۲

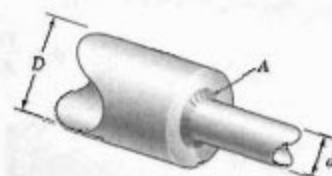


شکل ۳-۲۶ ب

## شفت‌های نامعین استاتیکی

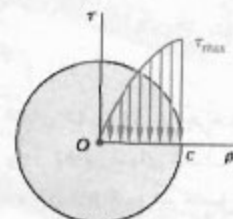
## شفت‌های انتقال

## تمرکز تنش



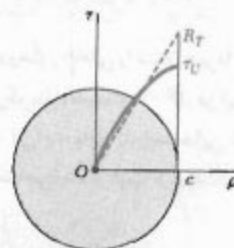
شکل ۳۱-۳

## تغییر شکل پلاستیک



شکل ۳۵-۳

## مدول شکست



شکل ۳۶-۳

## شفت توپر الاستوپلاستیکی

در قسمت ۳-۸، تمرکز تنش را در شفت‌های دایره‌ای بررسی کردیم. دیدیم که تمرکز تنش حاصل از یک تغییر ناگهانی در قطر شفت را با استفاده از گُرده (ماهیه) می‌توان کاهش داد (شکل ۳-۳۱). ماکزیم مقدار تنش برشی در گُرده چنین است

$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{J} \quad (۳-۲۵)$$

که در آن، تنش  $Tc/J$  برای شفت با قطر کوچکتر محاسبه می‌شود و  $K$  ضریب تمرکز تنش است. در شکل ۳-۳۲، مقدار  $K$  برحسب نسبت  $d/D$  برای مقادیر مختلف  $D/d$  رسم شدند ( $r$  شعاع گُرده است).

در قسمت‌های ۳-۹ تا ۳-۱۱، درباره تغییر شکل پلاستیک و تنش‌های باقیمانده در شفت‌های دایره‌ای بحث شد. ابتدا، گفتیم که توزیع کرنش در یک شفت دایره‌ای همواره خطی است حتی اگر قانون هوک به کار نرود (قسمت ۳-۹). اگر نمودار تنش-کرنش برشی ماده‌ای معلوم باشد، برای هر مقدار معین  $\tau_{\max}$  می‌توان تنش برشی  $\tau$  را برحسب فاصله  $\rho$  از محور شفت رسم کرد (شکل ۳-۳۵). گشتاور  $T$  را به صورت زیر بیان کردیم:

$$T = \int_0^c \rho \tau (\pi \rho d\rho) = \pi \int_0^c \rho^2 \tau d\rho \quad (۳-۲۶)$$

که در آن،  $\tau$  تابعی از  $\rho$  است. این تابع در شکل ۳-۳۵ رسم شده است.

گشتاور نهایی  $T_U$ ، که باعث شکست شفت می‌شود، یکی از پارامترهای مهم است و آن را با آزمایش یا با محاسبه می‌توان تعیین کرد. برای این منظور،  $\tau_{\max}$  را مساوی تنش برشی نهایی  $\tau_U$  ماده قرار می‌دهیم. از  $T_U$ ، و با فرض توزیع خطی تنش (شکل ۳-۳۶)، تنش خیالی  $R_T = T_U c/J$  را تعیین کردیم. تنش  $R_T$  را مدول شکست پیچشی شفت می‌گویند.

در قسمت ۳-۱۰ گفتیم که برای شفت توپر دایره‌ای الاستوپلاستیکی، تا وقتی  $\tau_{\max}$  از استقامت تسلیم  $\tau_Y$  شفت بیشتر نشده است، توزیع تنش در تمام مقاطع شفت به صورت خطی است (شکل ۳-۳۸ الف). گشتاور  $T_Y$  متناظر با  $\tau_Y$  (شکل ۳-۳۸ ب) ماکزیم گشتاور الاستیک است. برای یک شفت توپر دایره‌ای به شعاع  $c$ ،

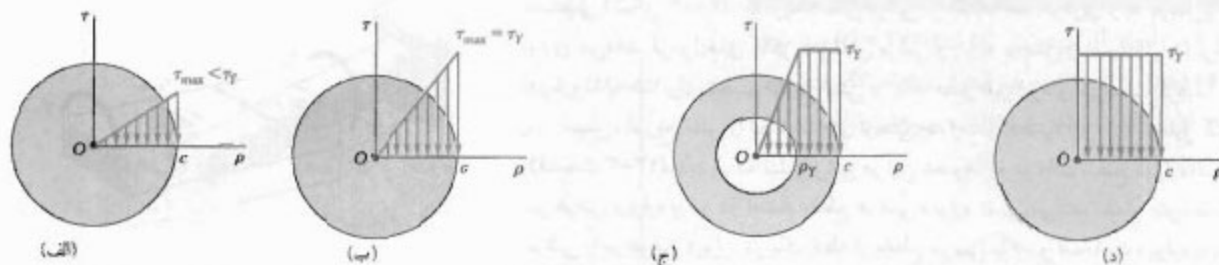
$$T_Y = \frac{1}{4} \pi c^3 \tau_Y \quad (۳-۲۹)$$

با افزایش گشتاور، در پیرامون هسته الاستیک به شعاع  $\rho_Y$  یک ناحیه پلاستیک گسترش می‌یابد. گشتاور  $T$  متناظر با مقدار داده شده  $\rho_Y$  چنین است:

$$T = \frac{4}{3} T_Y \left( 1 - \frac{1}{4} \frac{\rho_Y^2}{c^2} \right) \quad (۳-۳۲)$$

وقتی  $\rho_Y$  به صفر نزدیک می‌شود، گشتاور  $T$  به مقدار حدی  $T_p$ ، به نام گشتاور پلاستیک شفت میل می‌کند:

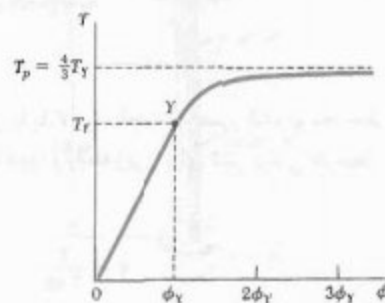
$$T_p = \frac{4}{3} T_Y \quad (۳-۳۳)$$



شکل ۳۸-۳

با ترسیم گشتاور  $T$  بر حسب زاویه پیچش  $\phi$  برای شفت دایره‌ای (شکل ۳۹-۳)، پاره خط مستقیم  $0Y$  را، که با معادله (۱۶-۳) تعریف می‌شود، به دست می‌آید؛ به دنبال این خط، یک منحنی و سپس خط مستقیم  $T = T_p$  می‌آید؛ معادله قسمت منحنی چنین است:

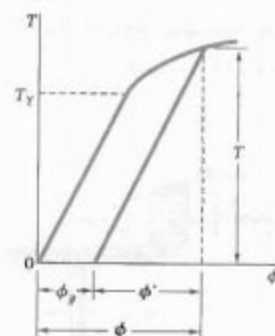
$$T = \frac{4}{3} T_y \left( 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\phi}{\phi_y} \right)^2 \right) \quad (۳۷-۳)$$



شکل ۳۹-۳

بارگذاری یک شفت دایره‌ای پس از شروع تسلیم و باربرداری آن (قسمت ۳-۱۱) باعث ایجاد تغییر شکل دائمی می‌شود. این تغییر شکل از رابطه  $\phi_p = \phi - \phi'$ ، به دست می‌آید، که در آن  $\phi$  متناظر با حالت بارگذاری است که در پاراگراف قبل توصیف شد و  $\phi'$  متناظر با حالت باربرداری است که با یک خط مستقیم در شکل ۴۲-۳ نشان داده می‌شود. همچنین، تنش‌های باقیمانده در شفت به وجود می‌آید. از مجموع تنش‌های ماکزیمم در حالت بارگذاری و تنش‌های معکوس متناظر در حالت باربرداری، تنش‌های باقیمانده به دست می‌آیند (مثال ۳-۹).

تغییر شکل دائمی، تنش‌های باقیمانده



شکل ۴۲-۳

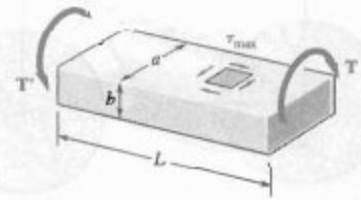
در دو قسمت آخر فصل درباره پیچش عضوهای غیر دایره‌ای بحث کردیم. ابتدا گفتیم که استنتاج فرمول‌های توزیع کرنش و تنش در شفت‌های دایره‌ای بر این مبنا انجام شد که، به علت تقارن محوری این اعضا، مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای و بی‌اعوجاج می‌مانند. چون این خاصیت برای عضوهای غیر دایره‌ای، مانند میله چهارگوش شکل ۳-۴۵ صحت ندارد، فرمول‌های قبل را نمی‌توان در تحلیل این اعضا به کار برد (قسمت ۳-۱۲).

پیچش عضوهای غیر دایره‌ای



شکل ۴۵-۳

## میله با مقطع عرضی مستطیلی



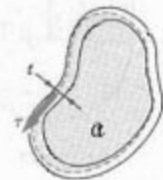
شکل ۳-۴۸

در قسمت ۳-۱۲ نشان دادیم که در میله‌های مستقیم با مقطع عرضی یک‌نواخت مستطیلی (شکل ۳-۴۸)، ماکزیمم تنش برشی در امتداد خط مرکزی وجه عریض‌تر میله روی می‌دهد. فرمول‌های ماکزیمم تنش برشی و زاویه پیچش را بدون اثبات نوشتیم. درباره تشابه غشا برای تجسم توزیع تنش در یک عضو غیردایره‌ای نیز بحث کردیم. سپس، توزیع تنش را در شفت‌های توخالی جدار نازک غیردایره‌ای تحلیل کردیم (قسمت ۳-۱۳). دیدیم که تنش برشی در این اعضا به موازات سطح دیواره است، و در عرض دیواره و نیز در امتداد مقطع عرضی دیواره تغییر می‌کند. مقدار متوسط تنش برشی را در عرض دیواره در یک نقطه از مقطع عرضی با  $\tau$  و ضخامت دیواره را در آن نقطه با  $t$  نشان دادیم (شکل ۳-۵۷). دیدیم که کمیت  $q = \tau t$ ، که آن را جریان برش می‌گویند، در امتداد مقطع عرضی ثابت است.

گشتاور وارد بر شفت توخالی را با  $T$  و مساحت محصور شده توسط خط مرکزی مقطع عرضی دیواره را با  $A$  نشان دادیم، و رابطه زیر را برای تنش برشی متوسط  $\tau$  در یک نقطه از مقطع عرضی نوشتیم:

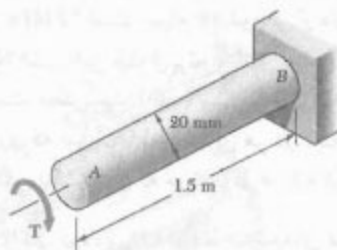
$$\tau = \frac{T}{Y A} \quad (۳-۵۳)$$

## شفت‌های توخالی جدار نازک



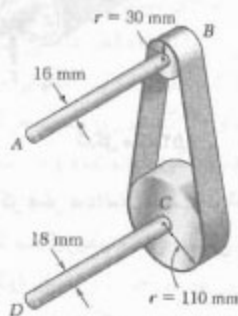
شکل ۳-۵۷

## مسائل تکمیلی



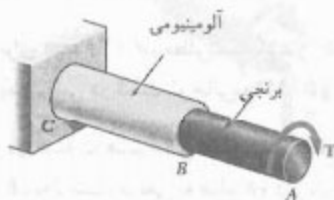
شکل م ۳-۱۴۸

۳-۱۴۹ مجموعه نشان داده شده ۲ kW را از نقطه A به نقطه D انتقال می‌دهد. (الف) با استفاده از تنش برشی مجاز ۶۶ MPa، سرعت شفت AB را بیابید. (ب) قسمت الف را با این فرض حل کنید که قطر شفت‌های AB و CD، به ترتیب، ۱۸ mm و ۱۵ mm باشد.



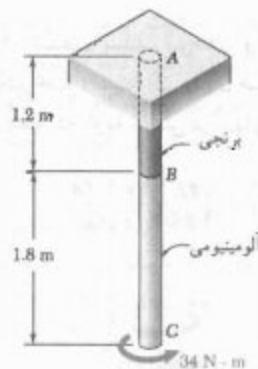
شکل م ۳-۱۴۹

۳-۱۵۰ تنش مجاز در میله برنجی AB برابر ۵۰ MPa و در میله آلومینیومی BC برابر با ۲۵ MPa است. اگر گشتاور  $T = 125 \text{ N}\cdot\text{m}$  در A وارد شود، مطلوبست قطر: (الف) میله AB، (ب) میله BC.



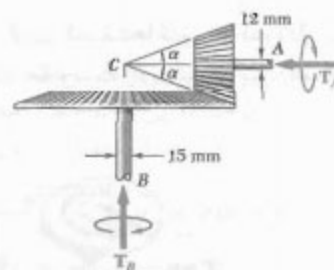
شکل م ۳-۱۵۰ و م ۳-۱۵۱

۳-۱۴۶ میله آلومینیومی BC ( $G = 27 \text{ GPa}$ ) به میله برنجی AB ( $G = 39 \text{ GPa}$ ) به هم متصل شده‌اند. اگر قطر هر میله ۱۲ mm باشد، مطلوبست زاویه پیچش: (الف) در B، (ب) در C.



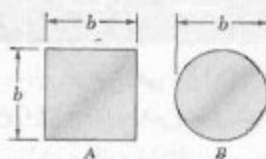
شکل م ۳-۱۴۶

۳-۱۴۷ در سیستم چرخ‌دنده مخروطی نشان داده شده، اگر تنش مجاز برشی آلومینیوم ۵۵ MPa و  $\alpha = 18.43^\circ$  باشد، ماکزیمم گشتاور  $T_A$  را که می‌توان در A وارد کرد بیابید.



شکل م ۳-۱۴۷

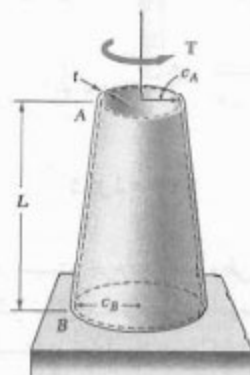
۳-۱۴۸ گشتاور T بر میله فولادی AB به قطر ۲۰ mm وارد شده است. اگر  $G = 77.2 \text{ GPa}$  و  $\tau_Y = 145 \text{ MPa}$ ، مطلوبست: (الف) گشتاور T وقتی زاویه پیچش در A برابر  $25^\circ$  است. (ب) قطر منظر هسته الاستیک شفت.



شکل م ۱۵۵-۳

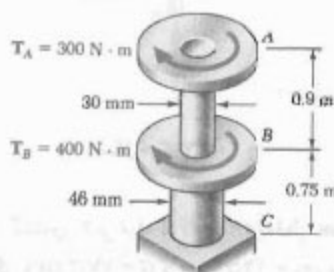
۱۵۶-۳ شفت بلند، توخالی و مخروطی  $AB$  دارای ضخامت یکنواخت  $t$  است. اگر مدول صلابت را با  $G$  نشان دهیم، نشان دهید که زاویه پیچش در انتهای  $A$  چنین است

$$\phi_A = \frac{TL}{\pi G t} \frac{c_A + c_B}{c_A^2 c_B^2}$$



شکل م ۱۵۶-۳

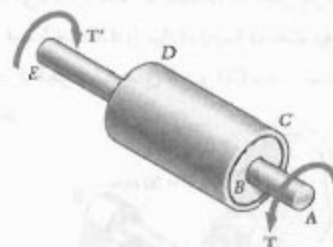
۱۵۷-۳ اگر شفت‌ها توپر و فولادی باشند و  $G = 77.2 \text{ GPa}$ ، مطلوبست زاویه پیچش بین: (الف)  $A$  و  $B$ ، (ب)  $A$  و  $C$ .



شکل م ۱۵۷-۳

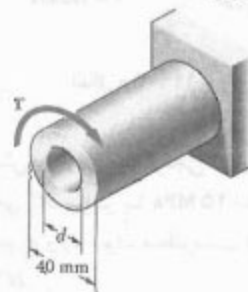
۱۵۱-۳ میله توپر  $BC$  به قطر  $30 \text{ mm}$  و از آلومینیوم با تنش برشی مجاز  $25 \text{ MPa}$  است. میله  $AB$  توخالی و دارای قطر خارجی  $25 \text{ mm}$  است؛ این میله از برنج با تنش برشی  $50 \text{ MPa}$  ساخته شده است. مطلوبست: (الف) بیشترین قطر داخلی برای میله  $AB$  به طوری که ضریب اطمینان برای هر دو میله یکسان باشد، (ب) بیشترین گشتاوری که می‌توان در  $A$  وارد کرد.

۱۵۲-۳ ژاکت فولادی  $CD$  توسط فلانچ‌های صلب به شفت  $AE$  به قطر  $40 \text{ mm}$  متصل شده است (فلانچ‌ها به ژاکت و میله جوش شده‌اند). قطر خارجی ژاکت  $80 \text{ mm}$  و ضخامت دیواره آن  $4 \text{ mm}$  است. با اعمال گشتاور  $500 \text{ N}\cdot\text{m}$ ، ماکزیمم تنش برشی را در ژاکت بیابید.



شکل م ۱۵۲-۳

۱۵۳-۳ اگر قطر  $d$  داخلی شفت توخالی نشان داده شده  $22 \text{ mm}$  باشد، ماکزیمم تنش برشی حاصل از گشتاور  $T = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$  را بیابید.



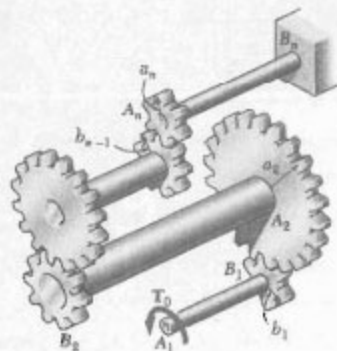
شکل م ۱۵۳-۳ و ۱۵۴-۳

۱۵۴-۳ برای  $d = 30 \text{ mm}$ ، مطلوبست گشتاور  $T$  به طوری که تنش ماکزیمم برشی در شفت توخالی  $50 \text{ MPa}$  باشد.

۱۵۵-۳ دو شفت هم‌جنس هستند. مقطع عرضی شفت‌های  $A$  و  $B$ ، به ترتیب، مربعی به ضلع  $b$  و دایره‌ای به قطر  $b$  است. اگر شفت‌ها تحت گشتاور یگانه قرار گیرند، نسبت  $\phi_A/\phi_B$  را برای ایجاد ماکزیمم تنش برشی در شفت‌ها بیابید.

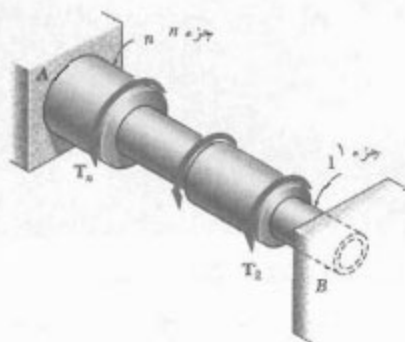


مسائل زیر برای حل با کامپوتر طراحی شده‌اند.



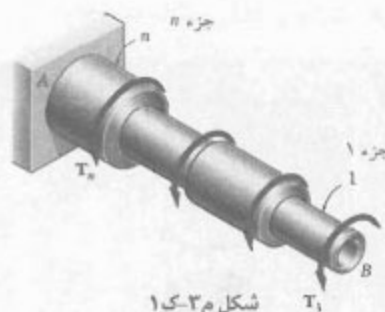
شکل م ۳-۲

۳-ک ۳ شفت  $AB$  از  $n$  جزء همگن استوانه‌ای، که می‌توانند توپر یا توخالی باشند، تشکیل شده است. هر دو انتهای آن ثابت‌اند، و تحت بارگذاری نشان داده شده قرار دارد. طول جزء  $i$  با  $L_i$ ، قطر خارجی آن با  $OD_i$ ، قطر داخلی آن با  $ID_i$ ، مدول صلابت آن با  $G_i$  و گشتاور وارد بر انتهای راست آن را با  $T_i$  نشان می‌دهیم. مقدار  $T_i$  گشتاور را مثبت می‌گیریم هرگاه  $T_i$  از انتهای  $B$  به‌طور پادساعتگرد دیده شود و در غیر این صورت منفی است. توجه کنید اگر جزء توپر باشد،  $ID_i = 0$  و  $T_i = 0$ . یک برنامه کامپوتری بنویسید و با استفاده از آن واکنش‌ها در  $A$  و  $B$ ، ماکزیم تنش برشی در هر جزء، و زاویه پیچش هر جزء را بیابید. با استفاده از این برنامه: (الف) مسئله ۳-۵۶ را حل کنید، (ب) ماکزیم تنش برشی را در شفت مثال ۳-۵۰ تعیین کنید.



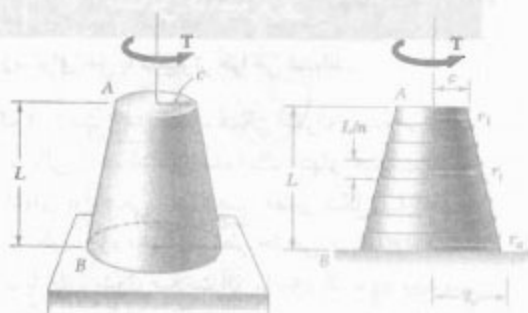
شکل م ۳-۳

۳-ک ۱ شفت  $AB$  از  $n$  جزء همگن استوانه‌ای، که می‌تواند توپر یا توخالی باشد، تشکیل شده است. انتهای  $A$  شفت ثابت است و انتهای  $B$  آزاد می‌باشد. شفت، مطابق شکل، بارگذاری شده است. طول جزء  $i$  ام با  $L_i$ ، قطر خارجی آن با  $OD_i$ ، قطر داخلی آن با  $ID_i$ ، مدول صلابت آن با  $G_i$  و گشتاور وارد بر انتهای سمت راست آن با  $T_i$  نشان داده می‌شود. مقدار  $T_i$  این گشتاور را مثبت می‌گیریم هرگاه  $T_i$  از انتهای  $B$  به‌طور پادساعتگرد دیده شود و در غیر این صورت منفی می‌گیریم. (توجه کنید که اگر جزء توپر باشد،  $ID_i = 0$ ). (الف) یک برنامه کامپوتری بنویسید و با آن ماکزیم تنش برشی در هر جزء، زاویه پیچش هر جزء، و زاویه پیچش تمام شفت را بیابید. (ب) با استفاده از این برنامه مسائل ۳-۳۶، ۳-۳۷، و ۳-۱۵۷ را حل کنید.



شکل م ۳-۴

۳-ک ۲ مجموعه نشان داده شده از  $n$  شفت استوانه‌ای، که می‌توانند توپر یا توخالی باشند، تشکیل شده است. این شفت‌ها توسط چرخ‌دنده‌هایی به هم متصل شده‌اند و مجموعه توسط بست‌هایی (که نشان داده نشده‌اند) نگه داشته شده است. انتهای  $A_1$  شفت اول آزاد است و تحت گشتاور  $T_0$  قرار دارد، و انتهای  $B_n$  شفت آخر ثابت است. طول شفت  $A_i B_i$  با  $L_i$ ، قطر خارجی آن با  $OD_i$ ، قطر داخلی آن با  $ID_i$  و مدول صلابت آن را با  $G_i$  نشان می‌دهیم (توجه کنید که برای جزء توپر  $ID_i = 0$ ). شعاع چرخ‌دنده  $A_i$  با  $a_i$  و شعاع چرخ‌دنده  $B_i$  را با  $b_i$  نشان می‌دهیم. (الف) یک برنامه کامپوتری بنویسید و با استفاده از آن ماکزیم تنش برشی در هر شفت، زاویه پیچش هر شفت و زاویه چرخش انتهای  $A_i$  را بیابید. (ب) با استفاده از این برنامه، مسائل ۳-۴۲، ۳-۴۳، و ۳-۴۴ را حل کنید.



شکل م ۵-۳

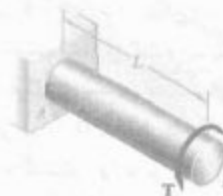
۳-۶ گشتاور  $T$  مطابق شکل بر شفت بلند، توخالی و مخروطی  $AB$ ، که دارای ضخامت یکنواخت  $t$  است، وارد شده است. عبارت دقیق زاویه پیچش شفت را از عبارت داده شده در مسئله ۳-۱۵۶ می‌توان به دست آورد. این شفت را با  $n$  حلقه استوانه‌ای با طول مساوی و با شعاع  $r_i = (n + i - \frac{1}{2})(cn)$  ( $n$  و  $i = 1$  و  $2$  و ...) جایگزین کنید و عبارت تقریبی زاویه پیچش را بیابید. با استفاده از مقادیر انتخابی برای  $t$ ،  $G$ ،  $L$ ،  $c$  و  $i$ ، درصد خطای این عبارت تقریبی را در موارد زیر بیابید:

(الف)  $n = 4$ ، (ب)  $n = 8$ ، (ج)  $n = 20$ ، (د)  $n = 100$ .



شکل م ۶-۳

۳-۴ شفت همگن و توپر استوانه‌ای  $AB$  دارای طول  $L$ ، قطر  $d$ ، مدول صلابت  $G$  و استقامت تسلیم  $s_y$  است. این شفت تحت گشتاور  $T$  قرار دارد. مقدار این گشتاور به تدریج از صفر افزایش می‌یابد تا اینکه زاویه پیچش شفت به مقدار ماکزیمم  $\phi_m$  می‌رسد و سپس مجدداً تا صفر کاهش می‌یابد. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن، برای هر مقدار  $\phi_m$  که در بازه‌های مساوی قرار دارند و از  $0$  تا  $3$  برابر زاویه پیچش در شروع تسلیم هستند، کمیت‌های زیر را بیابید: مقدار ماکزیمم  $T_m$  گشتاور، شعاع هسته الاستیک، ماکزیمم تنش برشی، پیچش دائمی و تنش برشی باقیمانده در سطح شفت و در فصل مشترک بین هسته الاستیک و ناحیه پلاستیک. (ب) با استفاده از این برنامه، پاسخ‌های تقریبی را برای مسائل ۳-۱۱۱ و ۳-۱۱۲ و ۳-۱۱۴ بیابید.



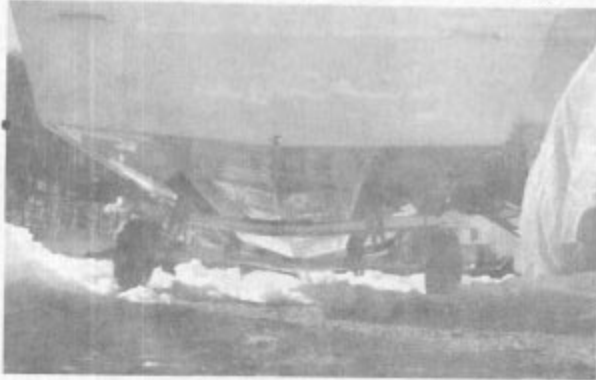
شکل م ۷-۳

۳-۵ عبارت دقیق زاویه پیچش شفت توپر مخروطی  $AB$ ، هنگامی که تحت گشتاور  $T$  قرار می‌گیرد، در مسئله ۳-۹۱ داده شده است. شفت مخروطی را با  $n$  شفت استوانه‌ای با طول مساوی و با شعاع  $r_i = (n + i - \frac{1}{2})(cn)$  جایگزین کنید و عبارت تقریبی زاویه پیچش را بیابید ( $n$  و  $i = 1$  و  $2$  و ...). با استفاده از مقادیر انتخابی برای  $t$ ،  $G$ ،  $L$ ،  $c$  و  $i$ ، درصد خطای این عبارت تقریبی را در موارد زیر بیابید: (الف)  $n = 4$ ، (ب)  $n = 8$ ، (ج)  $n = 20$ ، (د)  $n = 100$ .

## خمش خالص

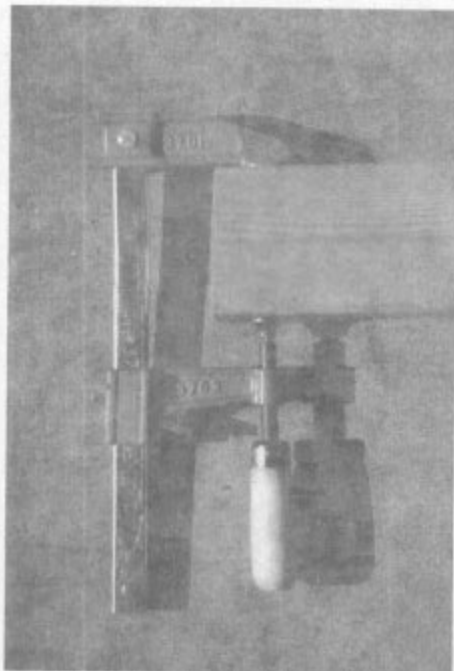


ورزشکار، میله وزنه برداری را با دست‌هایش که در فواصل مساوی از وزنه‌ها قرار دارند نگه داشته است. این عمل باعث ایجاد خمش خالص در قسمت مرکزی میله می‌شود. تنش‌های قائم و انحنای ناشی از خمش خالص در این فصل تعیین می‌شوند.



شکل ۴-۲ در خودروی نشان داده شده، قسمت مرکزی اکسل در خمش خالص است

نتایج حاصل از خمش خاص را برای تحلیل سایر بارگذاری‌ها، مانند بارگذاری محوری خارج از مرکز و بارگذاری عرضی، می‌توان به کار برد.

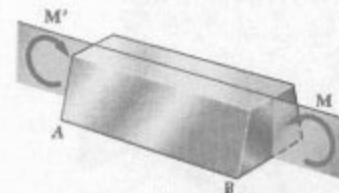


شکل ۴-۳ یک گیره فولادی را نشان می‌دهد که نیروهای ۶۰۰ N را بر دو تکه چوب وارد کرده و آنها را به هم چسبانده است. در شکل ۴-۵ الف، نیروهای مساوی و مخالف وارده از چوب بر گیره نشان داده شده است. این نیروها باعث می‌شوند قسمت مستقیم گیره تحت بارگذاری خارج از مرکز قرار گیرد. در شکل ۴-۵ ب، گیره در مقطع خورده است و نمودار آزاد نیمه بالایی آن رسم شده است. طبق این

#### ۱-۴ مقدمه

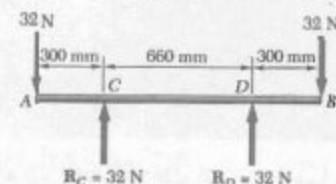
در فصل‌های قبل، تنش در عضوهای منشوری را که تحت بارهای محوری یا کوپل‌های پیچشی قرار دارند بررسی کردیم. در این فصل و در دو فصل بعد، تنش و کرنش در عضوهای منشوری را که تحت خمش قرار دارند تحلیل می‌کنیم. خمش مفهوم مهمی است که در طراحی اغلب اجزای مکانیکی و ساختمانی به کار می‌رود.

در این فصل، عضوهای منشوری را تحت کوپل‌های مساوی و مخالف  $M$  و  $M'$ ، که در صفحه طولی یکسان عمل می‌کنند، تحلیل می‌کنیم. می‌گوییم این عضوها در خمش خالص هستند. فرض می‌کنیم عضو دارای صفحه تقارن است و کوپل‌های  $M$  و  $M'$  در آن صفحه عمل می‌کنند (شکل ۴-۱).

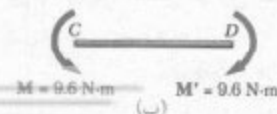


شکل ۴-۱

خمش میله وزنه‌برداری در بالای سر وزنه‌بردار، نمونه‌ای از خمش خالص است. این میله دارای وزنه‌هایی است که به فواصل مساوی از دست‌های وزنه‌بردار قرار دارند. به علت تقارن میله (شکل ۴-۲ الف)، واکنش دست‌ها با هم برابر و در سوی مخالف وزنه‌ها هستند. بنابراین، هنگام بررسی قسمت مرکزی میله می‌توان وزنه‌ها و واکنش‌ها را با دو کوپل مساوی و مخالف  $9/6 \text{ N}\cdot\text{m}$  جایگزین کرد (شکل ۴-۲ ب)، و این نشان می‌دهد که قسمت مرکزی میله در خمش خالص است. همین تحلیل برای اکسل یک خودرو (شکل ۴-۳) نشان می‌دهد که اکسل، بین دو نقطه اتصالش با خودرو، در خمش خالص است.



(الف)



شکل ۴-۲

در قسمت اول این فصل، تنش و تغییر شکل ناشی از خمش خالص را در عضو همگنی بررسی می‌کنیم که دارای صفحه تقارن است و ماده سازنده آن از قانون هوک پیروی می‌کند. در قسمت ۲-۴، از روش‌های استاتیک برای استنتاج معادله‌های تنش قائم در مقاطع عرضی استفاده می‌کنیم. در قسمت ۳-۴، نشان می‌دهیم در تیری که تحت خمش خالص است مقاطع عرضی بصورت صفحه‌ای می‌مانند. در قسمت ۴-۴، فرمول‌های تنش قائم و شعاع انحنای عضوی را که در خمش خالص است به دست می‌آوریم.

در قسمت ۶-۴، تنش و تغییر شکل را در عضوهای مرکبی که از چند ماده ساخته شده‌اند، مانند تیرهای بتن آرمه که در ساختمان‌ها و پل‌ها به کار می‌روند، مطالعه می‌کنیم. در آنجا نحوه ترسیم مقطع تبدیل یافته را خواهید آموخت؛ مقطع تبدیل یافته عبارت است از مقطع عضو همگنی که تغییر شکل آن، تحت همان بارگذاری عضو مرکب، مانند تغییر شکل مرکب است. از مقطع تبدیل یافته برای تعیین تنش و تغییر شکل در عضو مرکب استفاده می‌شود. در قسمت ۷-۴، تمرکز تنش را که در تغییرات ناگهانی مقطع عرضی عضو به وجود می‌آید مطالعه می‌کنیم.

در قسمت ۸-۴، تغییر شکل پلاستیک را در خمش بررسی می‌کنیم؛ یعنی، تغییر شکل عضوهایی را که ماده سازنده آنها از قانون هوک پیروی نمی‌کنند. در قسمت ۹-۴ تنش و تغییر شکل در عضوهای الاستوپلاستیک را مطالعه می‌کنیم. با ماکزیمم لنگر\* الاستیک  $M_p$ ، که متناظر با آغاز تسلیم است، شروع می‌کنیم و تأثیر افزایش لنگر را، تا وقتی به لنگر پلاستیک  $M_p$  می‌رسد، بررسی می‌کنیم. در قسمت ۱۱-۴، تغییر شکل دائمی و تنش‌های باقیمانده را که از این بارگذاری‌ها ناشی می‌شوند تعیین می‌کنیم. گفتنی است که در نیم قرن گذشته برای طرح‌های مطمئن و اقتصادی از خواص الاستوپلاستیکی فولاد خیلی استفاده شده است.

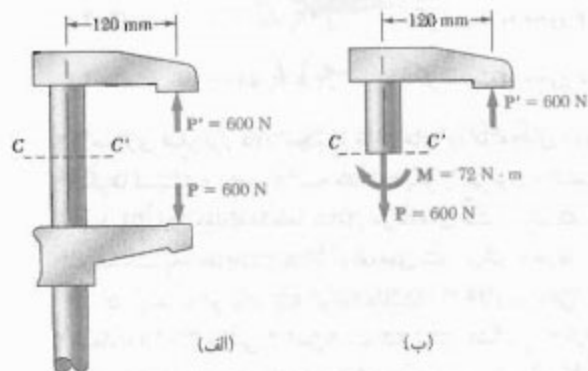
در قسمت ۱۲-۴، بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن را با استفاده از ترکیب تنش‌های ناشی از خمش خالص و بارگذاری محوری مرکزی تحلیل می‌کنیم.

خمش نامتقارن، بارگذاری محوری خارج از مرکز و تنش در عضوهای خمیده را، به ترتیب، در قسمت‌های ۱۳-۴، ۱۴-۴ و ۱۵-۴ بررسی می‌کنیم.

## ۲-۴ عضو متقارن در خمش خالص

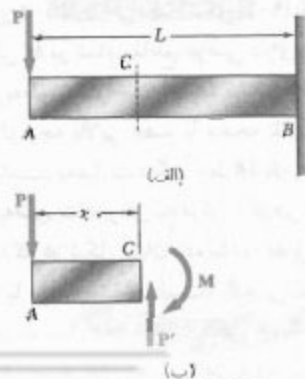
عضو منشوری  $AB$  را در نظر بگیرید. این عضو دارای صفحه تقارن است و تحت گویل‌های مساوی و متضاد  $M$  و  $M'$ ، که در

نمودار، نیروهای داخلی در این مقطع با نیروی کششی محوری  $P = 600 \text{ N}$  و گویل  $M = 72 \text{ N}\cdot\text{m}$  معادل‌اند. با استفاده از اطلاعات مربوط به تنش در بار مرکزی و تحلیل‌های آتی درباره تنش ناشی از خمش خالص، می‌توان توزیع تنش را در بار خارج از مرکز تعیین کرد. این موضوع در قسمت ۱۲-۴ مورد بحث قرار می‌گیرد.



شکل ۵-۴

مطالعه خمش خالص نقش مهمی در مطالعه تیرها ایفا می‌کند. مثلاً، تیر طره‌ای  $AB$  را که سر آزاد آن تحت بار متمرکز  $P$  قرار دارد در نظر بگیرید (شکل ۶-۴ الف). با عبور یک مقطع از  $C$  در فاصله  $x$  از  $A$  و با استفاده از نمودار آزاد  $AC$  (شکل ۶-۴ ب)، دیده می‌شود نیروهای داخلی در این مقطع متشکل است از نیروی  $P'$ ، که مساوی  $P$  و مخالف آن است، و گویل  $M$  با مقدار  $M = Px$ . اگر تیر در خمش خالص باشد، توزیع تنش قائم را در این مقطع می‌توان به دست آورد. از طرف دیگر، تنش برشی در این مقطع بستگی به نیروی  $P'$  دارد. در فصل ۶، توزیع این تنش در یک مقطع بررسی می‌شود.



شکل ۶-۴

نیروها در هر جهت صفر است. به علاوه، لنگر کوپل نسبت به هر محور عمود بر صفحه کوپل دارای مقدار یکسان است، و نسبت به تمام محورهای واقع در صفحه کوپل برابر یا صفر است. محور  $z$  را به دلخواه و مانند شکل ۴-۸ انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad (۱-۴) \quad \text{مؤلفه } x$$

$$\int z \sigma_x dA = 0 \quad (۲-۴) \quad \text{لنگر نسبت به محور } y$$

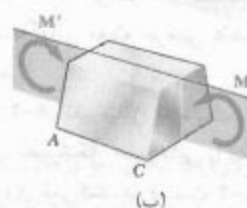
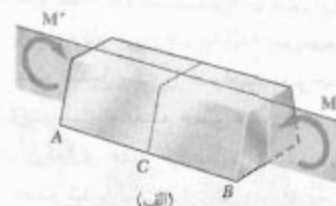
$$\int (-y) \sigma_x dA = M \quad (۳-۴) \quad \text{لنگر نسبت به محور } z$$

با مساوی صفر قرار دادن مجموع مؤلفه‌های  $y$ ، مؤلفه‌های  $z$ ، و لنگرها نسبت به محور  $x$ ، سه معادله دیگر را می‌توان به دست آورد. اما، این معادله‌ها فقط شامل مؤلفه‌های تنش برشی اند و در قسمت بعد خواهید دید که مؤلفه‌های تنش برشی صفرند. در اینجا به دو نکته باید توجه داشت: (۱) علامت منفی در معادله (۳-۴) ناشی از این است که تنش کششی ( $\sigma_x > 0$ ) باعث می‌شود نیروی قائم  $\sigma_x dA$  نسبت به محور  $z$  لنگر منفی (ساعتگرد) به وجود آورد، (۲) معادله (۲-۴) قابل پیش‌بینی بود، زیرا اعمال کوپل‌ها در صفحه تقارن عضو  $AB$  باعث ایجاد تنش‌های قائم، با توزیع متقارن نسبت به محور  $y$ ، می‌شود. گفتنی است که توزیع واقعی تنش در یک مقطع عرضی، یک مسئله نامعین استاتیکی است و با استفاده همزمان از هندسه تغییرشکل عضو حل می‌شود.

### ۳-۴ تغییرشکل عضو متقارن در خمش خالص

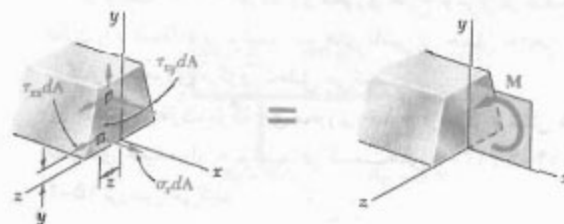
حال، تغییرشکل یک عضو منشوری را که دارای صفحه تقارن است و در دو انتها تحت کوپل‌های  $M$  و  $M'$  قرار دارد تحلیل می‌کنیم (این کوپل‌ها در صفحه تقارن عضو اثر می‌کنند). عضو تحت تأثیر کوپل‌ها خمیده می‌شود، اما نسبت به صفحه تقارن به صورت متقارن می‌ماند (شکل ۴-۹). به علاوه، چون لنگر خمشی  $M$  در تمام مقاطع عرضی دارای مقدار یکسان است، عضو به طور یکنواخت خمیده می‌شود. لذا، خط  $AB$  که فصل مشترک وجه بالایی عضو با صفحه تقارن است دارای انحنای ثابت است. به عبارت دیگر، خط  $AB$  که ابتدا به صورت مستقیم بود، به صورت دایره‌ای به مرکز  $C$  درمی‌آید؛ همین‌طور، خط  $A'B'$  (که در شکل نشان داده نشده، فصل مشترک وجه پایینی عضو با صفحه تقارن است). گفتنی است که وقتی عضو به صورت نشان داده شده در شکل خمیده می‌شود، یعنی وقتی  $M > 0$ ، خط  $AB$  کوتاه‌تر می‌شود، ولی خط  $A'B'$  بلندتر می‌شود.

همان صفحه اثر می‌کنند، قرار دارد (شکل ۴-۷ الف). عضو  $AB$  را در نقطه اختیاری  $C$  مقطع می‌زنیم. تعادل قسمت  $AC$  نشان می‌دهد که نیروهای داخلی در این مقطع با کوپل  $M$  معادل‌اند (شکل ۴-۷ ب). لذا، نیروهای داخلی در هر یک از مقاطع عرضی عضو متقارنی که تحت خمش خالص است با یک کوپل معادل‌اند. لنگر  $M$  این کوپل را لنگر خمشی در مقطع می‌گویند. به عنوان قرارداد، اگر عضو مانند شکل ۴-۷ الف خم شده باشد، یعنی وقتی تیر به طرف بالا باشد،  $M$  دارای علامت مثبت است؛ در غیر این صورت، دارای علامت منفی است.



شکل ۴-۷

تنش قائم در نقطه معینی از مقطع عرضی را با  $\sigma_x$  و مؤلفه‌های تنش برشی را با  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{yx}$  نشان می‌دهیم، و می‌گوییم سیستم نیروهای جزئی داخلی وارد بر این مقطع با کوپل  $M$  معادل‌اند (شکل ۴-۸).

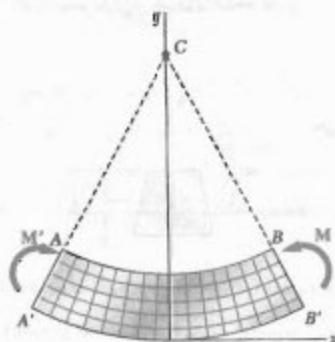


شکل ۴-۸

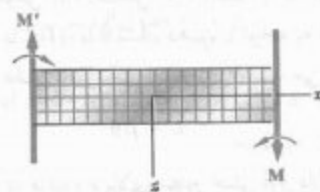
از استاتیک می‌دانیم که کوپل  $M$  از دو نیروی مساوی و متضاد تشکیل شده است. بنابراین، مجموع مؤلفه‌های این



فرض کنید عضو به تعداد زیادی اجزای کوچک مکعبی، که وجوه آنها به موازات صفحات مختصات است، تقسیم شود. طبق بحث بالا، این اجزا وقتی تحت کوپل‌های  $M$  و  $M'$  قرار می‌گیرند، مانند شکل ۴-۱۱ جابه‌جا می‌شوند. چون تمام وجوه نشان داده شده در دو تصویر شکل ۴-۱۱ بر هم عمودند، نتیجه می‌شود که  $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$ ، لذا،  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$ . سه مؤلفه تنش  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  در سطح عضو صفر هستند. چون تغییر شکل موجود باعث بر هم کنش بین اجزای یک مقطع عرضی نمی‌شود، می‌توان گفت سه مؤلفه مذکور در تمام عضو صفر هستند. این فرض را آزمایش، و نیز نظریه الاستیسیته، برای عضوهای باریکی که تغییرشکل‌های کوچک دارند تأیید می‌کند\*. در نتیجه، فقط مؤلفه قائم  $\sigma_x$  بر هر یک از اجزای کوچک مکعبی اثر می‌کند. لذا، در هر نقطه از عضو باریکی که در خمش خالص است، حالت تنش تک‌محوری برقرار است. چون برای  $M > 0$ ، خطوط  $AB$  و  $A'B'$  به ترتیب، منبسط و منقبض می‌شوند، کرنش  $\epsilon_x$  و تنش  $\sigma_x$  در قسمت بالایی عضو منفی‌اند (فشاری‌اند) و در قسمت پایینی عضو مثبت‌اند (کششی‌اند).

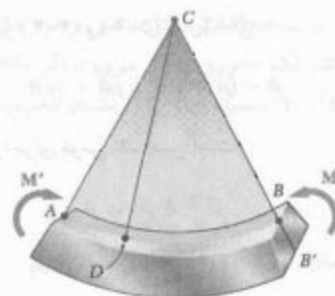


(الف) مقطع طولی و عمودی (صفحه تقارن)



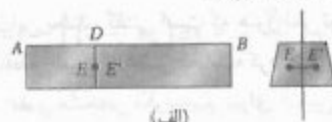
(ب) مقطع طولی و افقی

شکل ۴-۱۱

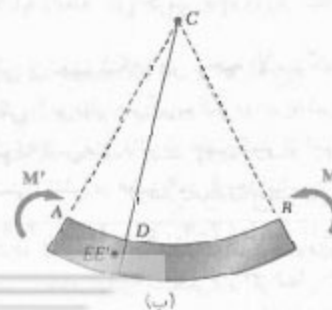


شکل ۴-۹

حال، نشان می‌دهیم که مقاطع عرضی عمود بر محور عضو به صورت صفحه‌ای می‌مانند و صفحه آنها از نقطه  $C$  می‌گذرد. اگر چنین نباشد، نقطه‌ای مانند  $E$  از مقطع عرضی گذرا از  $D$  را می‌توان یافت (شکل ۴-۱۰ الف) که، پس از خمیده شدن عضو، در صفحه  $CD$  قرار نداشته باشد (شکل ۴-۱۰ ب). اما، به علت تقارن عضو، نقطه دیگری مانند  $E'$  وجود دارد که دقیقاً مانند  $E$  جابه‌جا می‌شود. فرض می‌کنیم، پس از خمیده شدن عضو، هر دو نقطه در سمت چپ صفحه  $CD$  قرار دارند (شکل ۴-۱۰ ب). چون لنگر خمشی  $M$  در تمام عضو دارای مقدار یکسان است، در هر مقطع عرضی دیگر نیز حالت بالا برقرار است و نقاط متناظر با  $E$  و  $E'$  نیز به سمت چپ حرکت می‌کنند. لذا، ناظر  $A$  نتیجه می‌گیرد که بارگذاری باعث می‌شود نقاط  $E$  و  $E'$  در مقاطع عرضی مختلف به طرف جلو (به سوی ناظر) حرکت کنند. اما ناظر  $B$  به نتیجه مخالف می‌رسد. در نتیجه،  $E$  و  $E'$  در صفحه  $CD$  قرار دارند و مقطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌ماند و از  $C$  می‌گذرد. گفتنی است که بحث بالا مانع امکان تغییر شکل در داخل صفحه مقطع نمی‌شود (به قسمت ۲-۵ نگاه کنید).



(الف)



(ب)

شکل ۴-۱۰

با جایگذاری از (۴-۴) و (۵-۴) در (۶-۴)،

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta \quad (7-4)$$

کرنش طولی اجزای قوس JK چنین است:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$$

یا

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (8-4)$$

علامت منفی ناشی از این است که لنگر خمشی را مثبت گرفتیم؛ در نتیجه، عضو به طرف بالا تقعر دارد.

چون مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌مانند، در تمام صفحاتی که به موازات صفحه تقارن اند، تغییر شکل‌های همسان روی می‌دهد. لذا، مقدار کرنش در معادله (۸-۴) همه جا صحت دارد، و نتیجه می‌شود کرنش قائم طولی  $\epsilon_x$  بر حسب فاصله از سطح خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند.

کرنش  $\epsilon_x$  در  $y$  ماکزیمم به بیشترین مقدار خود می‌رسد. اگر ماکزیمم فاصله از سطح خنثی را (که متناظر با سطح بالایی یا پایینی عضو است) با  $c$ ، و ماکزیمم قدر مطلق کرنش را با  $\epsilon_m$  نشان دهیم،

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad (9-4)$$

با حل  $\rho$  از معادله (۹-۴) و جایگذاری آن در (۸-۴)،

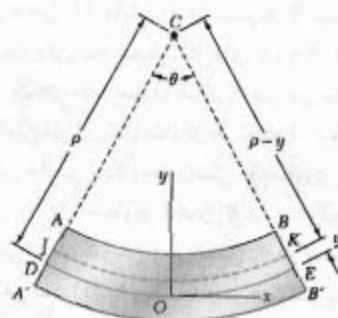
$$\epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_m \quad (10-4)$$

در پایان این بحث، گفتنی است که هنوز نمی‌توان کرنش یا تنش را در نقطه معینی از عضو محاسبه کرد، زیرا مکان سطح خنثی را در عضو مشخص نکرده‌ایم. برای تعیین مکان این سطح، ابتدا باید رابطه تنش-کرنش ماده مورد استفاده را باشد\*.

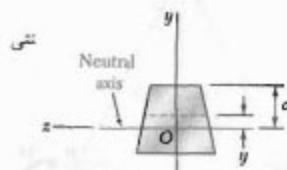
#### ۴-۴ تنش و تغییر شکل در ناحیه الاستیک

اکنون، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن لنگر خمشی  $M$  طوری است که تنش‌های قائم در عضو کمتر از استقامت تسلیم  $\sigma_y$  است؛ یعنی، تنش در عضو کمتر از حد تناسب و نیز کمتر از

از بحث بالا نتیجه می‌شود که باید یک سطح به موازات وجوه بالایی و پایینی عضو وجود داشته باشد، که در آن  $\epsilon_x$  و  $\sigma_x$  صفرند. این را سطح خنثی می‌گویند. سطح خنثی صفحه تقارن را در امتداد قوس دایره‌ای  $DE$  (شکل ۱۲-۴ الف) و مقطع عرضی را در امتداد یک خط مستقیم به نام محور خنثی قطع می‌کند (شکل ۱۲-۴ ب). حال، مبدأ مختصات را روی سطح خنثی می‌گیریم (نه روی وجه پایینی عضو که قبلاً انتخاب کردیم) و فاصله هر نقطه را تا سطح خنثی با  $y$  نشان می‌دهیم.



(الف) مقطع طولی و عمودی (صفحه تقارن)



(ب) مقطع عرضی

شکل ۱۲-۴

اگر شعاع قوس  $DE$  (شکل ۱۲-۴ الف) را با  $\rho$ ، و زاویه مرکزی متناظر با  $DE$  را با  $\theta$  نشان دهیم، با توجه به اینکه طول  $DE$  با طول  $L$  عضو تغییر شکل نداده برابر است، می‌نویسیم:

$$L = \rho\theta \quad (4-4)$$

چون قوس  $JK$  در فاصله  $y$  بالایی سطح خنثی قرار دارد، طول آن چنین است:

$$L' = (\rho - y)\theta \quad (5-4)$$

چون طول اولیه قوس  $JK$  مساوی  $L$  است، تغییر شکل  $JK$  عبارت است از:

$$\delta = L' - L \quad (6-4)$$

\* گفتنی است که اگر عضو دارای صفحات تقارن عمودی و افقی باشد (مانند عضو با مقطع عرضی مستطیلی)، و اگر منحنی تنش-کرنش در کشش و فشار یکسان باشند، سطح خنثی بر صفحه تقارن منطبق خواهد بود (به قسمت ۸-۴ نگاه کنید).

طبق این معادله، محور  $z$  بر محور خنثی مقطع عرضی منطبق است. با توجه به این مطلب،  $\sigma_x$  را از معادله (۱۲-۴) در (۳-۴) جایگذاری می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\int (-y) \left( -\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = M \quad \text{در نتیجه،}$$

$$\frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = M \quad (۱۴-۴)$$

اما در حالت خمش خالص، محور خنثی از مرکز سطح مقطع عرضی می‌گذرد. در نتیجه،  $I$  ممان اینرسی (ممان دوم) مقطع عرضی نسبت به محور مرکزی عمود بر صفحه کوپل  $M$  است. با حل  $\sigma_m$  از معادله (۱۴-۴)، می‌نویسیم<sup>\*\*</sup>:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (۱۵-۴)$$

با جایگذاری  $\sigma_m$  از (۱۵-۴) در (۱۲-۴)، تنش قائم  $\sigma_x$  را در فاصله  $y$  از محور خنثی به دست می‌آوریم:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (۱۶-۴)$$

معادله‌های (۱۵-۴) و (۱۶-۴) را فرمول‌های خمش الاستیک، و تنش قائم  $\sigma_x$  ناشی از خمش عضو را تنش خمشی می‌گویند. این تنش در بالایی محور خنثی ( $y > 0$ ) فشاری است ( $\sigma_x < 0$ ) هرگاه لنگر خمشی  $M$  مثبت باشد، و کششی است ( $\sigma_x > 0$ ) هرگاه  $M$  منفی باشد.

با توجه به معادله (۱۵-۴)، نسبت  $I/c$  فقط به شکل هندسی مقطع عرضی بستگی دارد. این نسبت را مدول الاستیک می‌گویند و با  $S$  نشان می‌دهند:

$$\text{مدول الاستیک} = S = \frac{I}{c} \quad (۱۷-۴)$$

با جایگذاری  $S$  برای  $I/c$  در معادله (۱۵-۴)، این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \quad (۱۸-۴)$$

\* به پوست الفه درباره ممان‌های سطح مراجعه کنید.

\*\* به خاطر داریم که لنگر خمشی را مثبت گرفتیم. اگر لنگر خمشی منفی باشد، به جای  $M$  در معادله (۱۵-۴) از قدر مطلق آن،  $|M|$ ، استفاده می‌کنیم.

حد الاستیک است. هیچ تغییر شکل دائمی وجود ندارد و قانون هوک برای تنش تک محوری به کار می‌رود. اگر ماده را همگن بگیریم و مدول الاستیسته آن را با  $E$  نشان دهیم، در جهت طولی  $x$ ،

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (۱۱-۴)$$

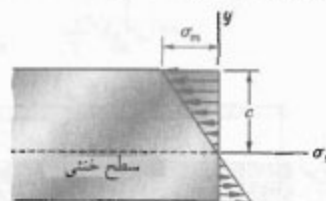
طرفین معادله (۱۰-۴) را در  $E$  ضرب می‌کنیم:

$$E \epsilon_x = -\frac{y}{c} (E \epsilon_m)$$

با استفاده از معادله (۱۱-۴)،

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m \quad (۱۲-۴)$$

که در آن  $\sigma_m$  ماکزیمم مقدار مطلق تنش را نشان می‌دهد. یعنی، در نلجه الاستیک، تنش قائم بر حسب فاصله از سطح خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند (شکل ۱۲-۴).



شکل ۱۲-۴

هنوز مکان سطح خنثی و مقدار ماکزیمم تنش ( $\sigma_m$ ) را نمی‌دانیم. هر دو را از رابطه‌های (۱-۴) و (۳-۴) می‌توان محاسبه کرد. با جایگذاری  $\sigma_x$  از (۱۲-۴) در (۱-۴)،

$$\int \sigma_x dA = \int \left( -\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA = 0 \quad \text{در نتیجه،}$$

$$\int y dA = 0 \quad (۱۳-۴)$$

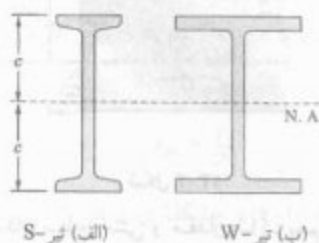
این معادله نشان می‌دهد که ممان اول مقطع عرضی نسبت به محور خنثی آن صفر است<sup>\*</sup>. به عبارت دیگر، برای عضوی که در خمش خالص است، تا وقتی تنش در نلجه الاستیک است، محور خنثی از مرکز سطح مقطع می‌گذرد.

حال، به سراغ معادله (۳-۴)، که در قسمت ۲-۴ نسبت به محور افقی اختیاری  $z$  به دست آمد، می‌رویم:

$$\int (-y \sigma_x dA) = M \quad (۳-۴)$$



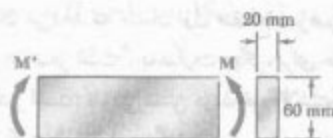
شکل ۱۵-۴ تیرهای فولادی، بال پهن، قاب اغلب ساختمان‌ها را تشکیل می‌دهد.



شکل ۱۶-۴

مثال ۱-۴

میله فولادی، با مقطع عرضی مستطیلی  $20 \times 60 \text{ mm}$ ، تحت دو کویل مساوی و متضاد است. این کویل‌ها در صفحه تقارن عمودی میله اثر می‌کنند (شکل ۱۷-۴). مقدار لنگر خمشی  $M$  را که باعث تسلیم می‌شود بیابید. فرض کنید  $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$ .



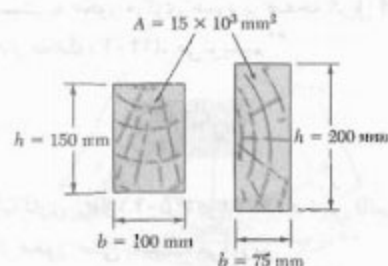
شکل ۱۷-۴

\* البته، مقادیر بزرگ نسبت  $h/b$  ممکن است به ناپایداری جانبی تیر بیانجامد.

چون تنش ماکزیمم  $\sigma_m$  با مدول الاستیک  $S$  به‌طور معکوس متناسب است، واضح است که تیرها را باید تا حد امکان با مقدار  $S$  بزرگ طراحی کرد. مثلاً، در یک تیر چوبی با مقطع عرضی مستطیلی به عرض  $b$  و ارتفاع  $h$ ،

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah \quad (19-4)$$

که در آن،  $A$  مساحت مقطع عرضی تیر است. طبق این رابطه، از میان دو تیر با مساحت مقطع عرضی یکسان (شکل ۴-۱۴)، تیر با عمق بزرگتر دارای مدول بزرگتر است و مقاومت بیشتری در برابر خمش دارد\*.



شکل ۱۴-۴

برای فولاد ساختمانی، تیرهای استاندارد آمریکایی و تیرهای بال پهن (شکل ۴-۱۵) بر سایر تیرها ترجیح دارند زیرا قسمت بزرگی از مقطع عرضی آنها در فاصله دور از محور خنثی قرار دارد (شکل ۴-۱۶). لذا، برای یک مساحت مقطع و ارتفاع معین، تیرهای مذکور دارای  $I$  و  $S$  بزرگ هستند. مدول الاستیک تیرهای رایج را از جدول خواص هندسی آنها می‌توان به‌دست آورد. برای تعیین تنش ماکزیمم  $\sigma_m$  در مقطع معینی از یک تیر استاندارد، فقط باید مقدار مدول الاستیک  $S$  را از جدول تعیین، و لنگر خمشی  $M$  در مقطع را بر تقسیم کرد.

تغییر شکل عضو بر اثر لنگر خمشی  $M$  با انحنای سطح خنثی اندازه‌گیری می‌شود. این انحنا با معکوس شعاع انحنا،  $1/\rho$ ، تعریف می‌شود. از معادله (۴-۹)،

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} \quad (20-4)$$

در ناحیه الاستیک،  $\epsilon_m = \sigma_m / E$ . با جایگذاری در (۲۰-۴) و با توجه به (۴-۱۵)،

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec} \frac{Mc}{I}$$

یا

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (21-4)$$

محور خنثی از مرکزوار  $C$  می‌گذرد (شکل ۴-۲۰) و فاصله دورترین نقطه مقطع عرضی تا محور خنثی چنین است:

$$c = r - \bar{y} = 12 \text{ mm} - 5,093 \text{ mm} = 6,907 \text{ mm}$$

با استفاده از معادله (۴-۹)،

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} = \frac{6,907 \times 10^{-3} \text{ m}}{2,75 \text{ m}} = 2,763 \times 10^{-3}$$

با استفاده از قانون هوک،

$$\sigma_m = E \epsilon_m = (70 \times 10^9 \text{ Pa})(2,763 \times 10^{-3}) = 193,4 \text{ MPa}$$

چون این طرف میله به طرف خارج مرکز انحنا خمیده می‌شود، تنش حاصل از نوع کششی است. ماکزیم تنش فشاری روی وجه تخت میله به وجود می‌آید. چون تنش با فاصله از محور خنثی متناسب است، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{فشاری}} &= -\frac{\bar{y}}{c} \sigma_m = -\frac{5,093 \text{ mm}}{6,907 \text{ mm}} (193,4 \text{ MPa}) \\ &= -142,6 \text{ MPa} \end{aligned}$$



شکل ۴-۲۰

#### ۴-۵ تغییر شکل در مقطع عرضی

در قسمت ۴-۳، هنگام اثبات این موضوع که مقطع عرضی در عضوی که تحت خمش خالص است به صورت صفحه‌ای می‌ماند، در زیرنویس به امکان تغییر شکل در صفحه مقطع اشاره کردیم. طبق قسمت ۲-۱۱، اجزا در حالت تنش تک محوری هستند ( $\sigma_x \neq 0$  و  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ) و در جهت‌های  $x$ ،  $y$  و  $z$  تغییر شکل می‌دهند. بنابراین، تغییر شکل در صفحه مقطع وجود دارد. کرنش‌های قائم  $\epsilon_y$  و  $\epsilon_z$  به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x \quad \epsilon_z = -\nu \epsilon_x$$

( $\nu$  نسبت پواسون عضو است). با توجه به معادله (۴-۸)،

$$\epsilon_y = \frac{\nu y}{\rho} \quad \epsilon_z = \frac{\nu y}{\rho} \quad (۴-۲۲)$$

رابطه‌هایی را که تا به حال به دست آورده‌ایم نشان می‌دهند اجزایی که بالای سطح خنثی هستند ( $y > 0$ ) در امتدادهای  $y$  و  $z$

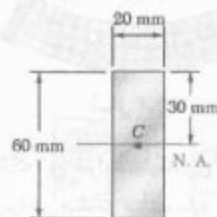
چون محور خنثی از مرکزوار مقطع عرضی (نقطه  $C$ ) می‌گذرد،  $c = 30 \text{ mm}$  (شکل ۴-۱۸). از طرف دیگر، ممان اینرسی مقطع عرضی مستطیلی نسبت به محور مرکزی چنین است:

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (20 \text{ mm})(60 \text{ mm})^3 = 360 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

با حل  $M$  از معادله (۴-۱۵) و با جایگذاری داده‌های بالا،

$$M = \frac{I}{c} \sigma_m = \frac{360 \times 10^3 \text{ mm}^4}{30 \text{ mm}} (250 \text{ MPa})$$

$$M = 3 \text{ kN.m}$$



شکل ۴-۱۸

#### مثال ۴-۲

میله آلومینیومی با مقطع عرضی نیم‌دایره‌ای به شعاع  $r = 12 \text{ mm}$  (شکل ۴-۱۹) به صورت قوس دایره‌ای با شعاع متوسط  $\rho = 2,5 \text{ m}$  خم شده است. اگر وجه تخت میله به طرف مرکزی انحنای قوس خمیده باشد، ماکزیم تنش کششی و فشاری را در میله بیابید.  $E = 70 \text{ GPa}$ .



شکل ۴-۱۹

با استفاده از معادله ۴-۲۱ می‌توان لنگر خمشی  $M$  متناظر با شعاع انحنای  $\rho$  را تعیین، و سپس  $\sigma_m$  از معادله (۴-۱۵) استفاده کرد. ولی، بهتر است  $\epsilon_m$  از معادله (۴-۹) تعیین کنیم و با استفاده از قانون هوک،  $\sigma_m$  را بیابیم.

مختصه  $\bar{y}$  مرکزوار مقطع عرضی نیم دایره چنین است:

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(12 \text{ mm})}{3\pi} = 5,093 \text{ mm}$$

هنگام بررسی تغییر شکل عضو متقارن در خمش خالص، نحوه اعمال کوپل‌های  $M$  و  $M'$  را بر عضو در نظر نگرفتیم. اگر بخواهیم تمام مقاطع عرضی عضو، از یک انتها تا انتهای دیگر، به صورت صفحه‌ای همانند و فاقد تنش برشی باشند، باید کوپل‌ها طوری وارد شوند که دو انتهای عضو به صورت صفحه‌ای همانند و فاقد تنش‌های برشی باشند. به این دلیل، برای اعمال کوپل‌های  $M$  و  $M'$  از صفحات صلب و هموار استفاده می‌شود (شکل ۴-۲۲). نیروهای جزئی که از این صفحات بر عضو وارد می‌شوند بر مقاطع انتهایی عمودند و این مقاطع می‌توانند تغییر شکل دهنده ولی به صورت صفحه‌ای می‌مانند.

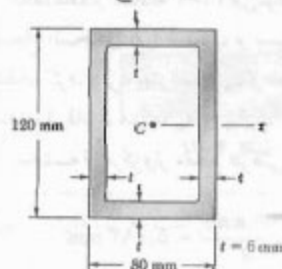


شکل ۴-۲۲

گفتنی است که این شرایط بارگذاری را در عمل نمی‌توان به دست آورد، زیرا هر صفحه صلب باید نیروهای کششی را در زیر محور خشی بر مقطع انتهایی وارد کند و این مقطع در صفحه خود تغییر شکل ندهد. ولی، این موضوع از اهمیت مدل صفحات صلب نمی‌کاهد، و با همین مدل بود که در قسمت‌های قبل توانستیم شرایط بارگذاری متناظر با رابطه‌های حاصل را تجسم دهیم. گرچه شرایط بارگذاری واقعی ممکن است با این مدل ایده‌آلی خیلی متفاوت باشد، ولی تا وقتی مقطع تحت بررسی خیلی نزدیک به مکان اعمال کوپل‌ها نباشد، با توجه به اصل سنت-وینانت و فرمول‌های قسمت‌های قبل می‌توان تنش‌ها را در شرایط عملی محاسبه کرد.

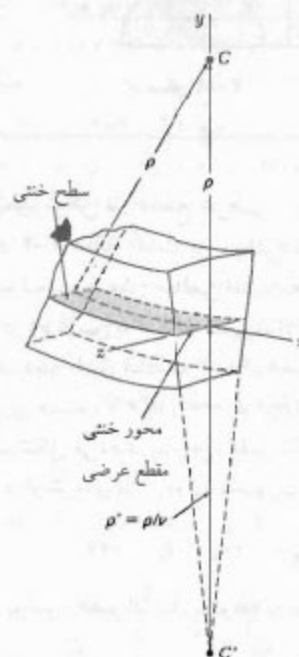
#### مسئله نمونه ۴-۱

لوله مستطیلی نشان داده شده از آلومینیوم ساخته شده است. با صرف نظر از تأثیر گردها، مطلوب است: (الف) لنگر خمشی  $M$  برای ضریب اطمینان ۳، (ب) شعاع انحنای لوله.



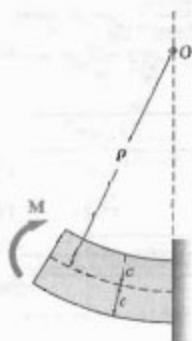
منبسط می‌شوند و اجزایی که پایین سطح خشی هستند ( $y < 0$ ) منقبض می‌شوند. در یک عضو با مقطع عرضی مستطیلی، انبساط و انقباض اجزای مختلف در جهت عمودی یکدیگر را خشی می‌کنند، و مقطع عرضی در امتداد عمودی تغییراندازه نمی‌دهد. البته، هنگام بررسی تغییر شکل‌ها در امتداد عرضی افقی  $z$ ، انبساط اجزایی که بالای سطح خشی هستند و انقباض اجزایی که پایین سطح خشی هستند باعث می‌شوند خطوط مختلف افقی در مقطع عرضی به صورت قوس‌های دایره‌ای درآیند (شکل ۴-۲۱). حالتی که در اینجا بررسی کردیم شبیه حالتی است که قبلاً در مقطع طولی دیده شد. با مقایسه معادله دوم (۴-۲۲) با معادله (۴-۸)، نتیجه می‌شود که محور خشی مقطع عرضی به صورت قوس دایره‌ای با شعاع  $\rho' = \rho/\nu$  در می‌آید. با فرض  $M > 0$ ، مرکز  $C'$  این قوس در زیر سطح خشی قرار دارد؛ یعنی، روی وجه مقابل مرکز انحنای عضو (نقطه  $C$ ) واقع است. معکوس شعاع انحنای  $\rho'$ ، انحنای مقطع عرضی را نشان می‌دهد و آن را انحنای غیر الاستیک می‌گویند:

$$\rho' = \frac{\rho}{\nu} \quad (4-23)$$



شکل ۴-۲۱





راه حل دیگر. چون ماکزیم تنش عبارت است از  $\sigma_{all} = 138 \text{ MPa}$  ماکزیم کرنش  $\epsilon_m$  را از معادله (۴-۹) می یابیم:

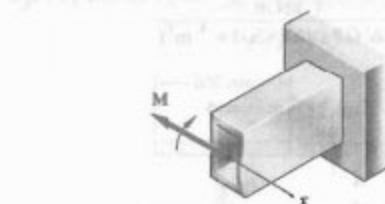
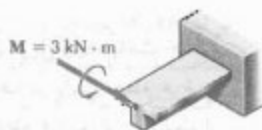
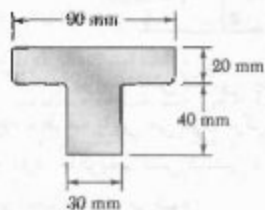
$$\epsilon_m = \frac{\sigma_{all}}{E} = \frac{138 \text{ MPa}}{73 \text{ GPa}} = 1.89 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}$$

$$\epsilon_m \approx \frac{c}{\rho} \quad \rho = \frac{c}{\epsilon_m} = \frac{60 \text{ mm}}{1.89 \times 10^{-3}}$$

$$\rho = 31.7 \text{ m} \quad \rho = 31.7 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

#### مسئله نمونه ۴-۲

قطعه مکانیکی چدنی تحت کوپل ۳ kN.m قرار دارد. اگر  $E = 165 \text{ GPa}$ ، با صرف نظر از تأثیر گردها، مطلوب است: (الف) ماکزیم تنش های کششی و فشاری در قطعه، (ب) شعاع انحنای قطعه.

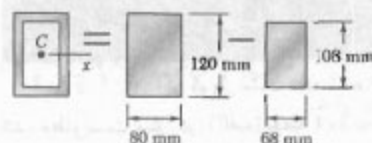


حل

ممان اینرسی. ممان اینرسی مساحت مقطع عرضی لوله چنین است:

$$I = \frac{1}{12} (80 \text{ mm})(120 \text{ mm})^3 - \frac{1}{12} (68 \text{ mm})(108 \text{ mm})^3$$

$$I = 4.738 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



تنش مجاز. برای ضریب اطمینان ۳ و تنش نهایی ۴۱۵ MPa

$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_U}{F.S.} = \frac{415 \text{ MPa}}{3.00} = 138 \text{ MPa}$$

چون  $\sigma_{all} < \sigma_T$ ، لوله در ناحیه الاستیک است و از نتایج قسمت ۴-۴ می توان استفاده کرد.

الف. لنگر خمشی. با  $c = \frac{1}{2}(120 \text{ mm}) = 60 \text{ mm}$  می نویسیم:

$$\sigma_{all} = \frac{Mc}{I}$$

$$M = \frac{I}{c} \sigma_{all} = \frac{4.738 \times 10^6 \text{ mm}^4}{60 \text{ mm}} (138 \text{ MPa})$$

$$M = 10.1 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$

ب. شعاع انحنای.

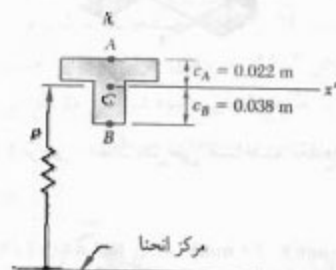
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{10.1 \text{ kN.m}}{(73 \text{ GPa})(4.738 \times 10^6 \text{ mm}^4)} = 0.000316 \text{ m}^{-1}$$

$$\rho = 31.7 \text{ m} \quad \rho = 31.7 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

ب. شعاع انحنای از معادله (۴-۲۱).

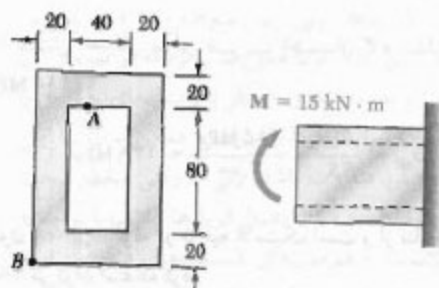
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{3 \text{ kN.m}}{(165 \text{ GPa})(868 \times 10^{-9} \text{ m}^4)}$$

$$= 20,95 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1} \Rightarrow$$

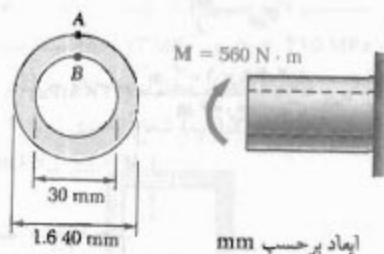


## مسائل

۱-۴ و ۲-۴ اگر کوپل نشان داده شده در صفحه قائم اثر کند، مطلوب است تنش در: (الف) نقطه A، (ب) نقطه B.



شکل م ۱-۴



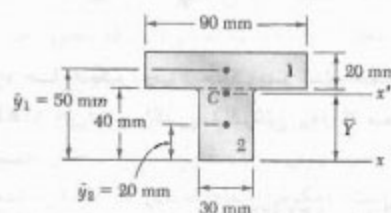
شکل م ۲-۴

\* ممان اینرسی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح مترجم.

حل

مرکز سطح. مقطع عرضی T شکل قطعه را به دو مستطیل نشان داده شده تقسیم می‌کنیم و می‌نویسیم:

	مساحت، $\text{mm}^2$	$\bar{y}, \text{mm}$	$\bar{y}A, \text{mm}^3$	
۱	$(20)(90) = 1800$	۵۰	$90 \times 10^3$	$\bar{Y} \sum A = \sum \bar{y}A$
۲	$(40)(20) = 800$	۲۰	$800 \times 10^3$	$\bar{Y}(2000) = 114 \times 10^3$
	$\sum A = 2600$		$\sum \bar{y}A = 114 \times 10^3$	$\bar{Y} = 43.8 \text{ mm}$

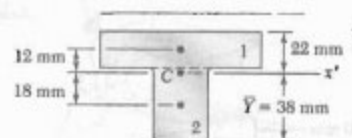


ممان اینرسی مرکزی \* از قضیه محورهای موازی برای تعیین ممان اینرسی هر یک از مستطیل‌ها نسبت به محور  $x'$  که از مرکز سطح مقطع مرکب می‌گذرد، استفاده می‌کنیم و سپس آنها را جمع می‌زنیم:

$$I_{x'} = \sum (\bar{I} + Ad^2) = \sum \left( \frac{1}{12} bh^3 + Ad^2 \right)$$

$$= \frac{1}{12} (90)(20)^3 + (90 \times 20)(12)^2 + \frac{1}{12} (30)(40)^3 + (30 \times 40)(18)^2$$

$$= 868 \times 10^4 \text{ mm}^4 \quad I = 868 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

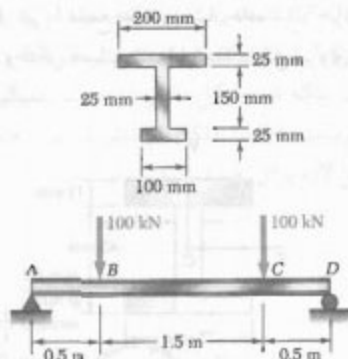


الف. ماکزیمم تنش کششی. چون کوپل وارده باعث خمش قطعه به طرف پایین می‌شود، مرکز انحنای در پایین مقطع عرضی قرار دارد. ماکزیمم تنش کششی در نقطه A (دورترین نقطه از مرکز انحنای) ایجاد می‌شود:

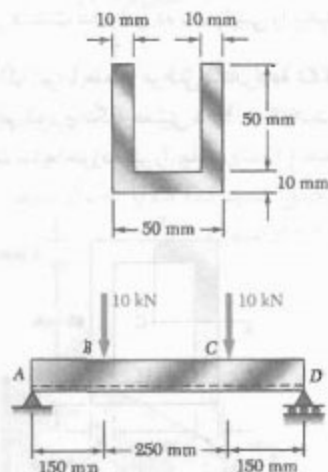
$$\sigma_A = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(3 \text{ kN.m})(0.072 \text{ m})}{868 \times 10^{-4} \text{ m}^4} \Rightarrow \sigma_A = +76.7 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$

ماکزیمم تنش فشاری. این تنش در نقطه B روی می‌دهد:

$$\sigma_B = \frac{Mc_B}{I} = \frac{(3 \text{ kN.m})(0.072 \text{ m})}{868 \times 10^{-4} \text{ m}^4} \Rightarrow \sigma_B = -131.3 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$

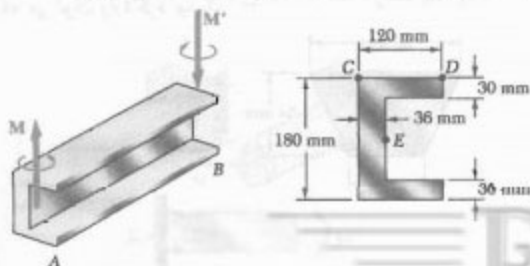


شکل م-۴



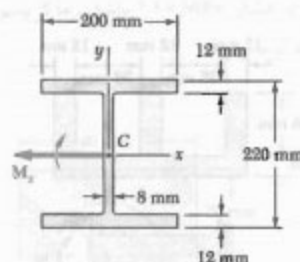
شکل م-۹

۱۰-۴. دو کوپل مساوی و متضاد با مقدار  $M = 25 \text{ kN}\cdot\text{m}$  بر تیر  $AB$ ، که به شکل ناودانی است، وارد شده است. اگر کوپل‌ها باعث شوند تیر در صفحه افقی خم شود، مطلوب است: (الف) تنش در نقطه  $C$ ، (ب) تنش در نقطه  $D$ ، (ج) تنش در نقطه  $E$ .



شکل م-۱۰

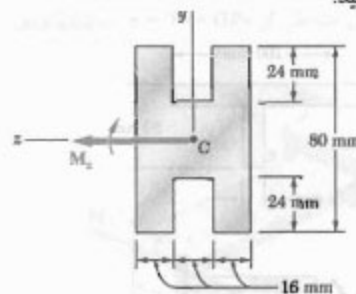
۳-۴. با استفاده از تنش مجاز  $155 \text{ MPa}$ ، ماکزیمم لنگر خمشی  $M$  را که می‌توان بر تیر بال پهن نشان داده شده وارد کرد بیابید. از تأثیر گرده‌ها صرف‌نظر کنید.



شکل م-۳

۴-۴. مسئله ۳-۴ را با این فرض حل کنید که تیر بال پهن تحت کوپل  $M_y$  حول محور  $y$  خم شود.

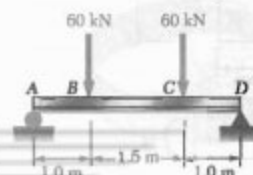
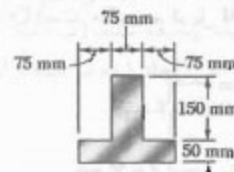
۵-۴. تیری با مقطع عرضی نشان داده شده، از آلومینیوم ساخته شده است.  $\sigma_U = 45 \text{ MPa}$  و  $\sigma_T = 25 \text{ MPa}$ . برای ضریب اطمینان  $3/0$ ، ماکزیمم کوپلی را که می‌توان حول محور  $z$  وارد کرد بیابید.



شکل م-۵

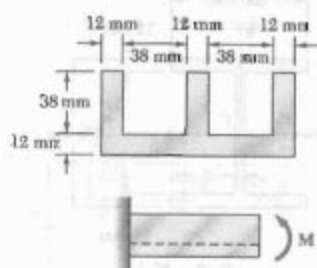
۶-۴. مسئله ۵-۴ را برای خمش حول محور  $y$  حل کنید.

۷-۴ تا ۹-۴. دو نیروی عمودی بر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده وارد شده‌اند. ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری را در قسمت  $BC$  تیر بیابید.



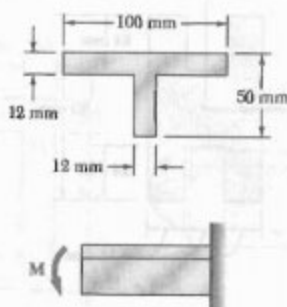
شکل م-۷

۱۶-۴ اگر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده، تنش مجاز در کشش  $84 \text{ MPa}$  و در فشار  $110 \text{ MPa}$  باشد، ماکزیمم کوپل  $M$  را که می توان وارد کرد بیابید.



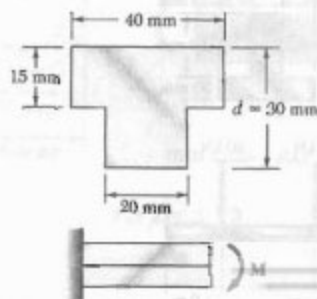
شکل م-۱۶-۴

۱۷-۴ برای تنش های مجاز زیر، ماکزیمم کوپل  $M$  را که می توان بر قطعه نشان داده شده وارد کرد بیابید:  $\sigma_{all} = -100 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{all} = +42 \text{ MPa}$



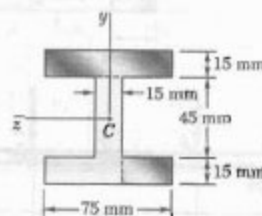
شکل م-۱۷-۴

۱۸-۴ تیر نشان داده شده از نایلون ساخته شده است. برای نایلون به کار رفته، تنش مجاز در کشش  $24 \text{ MPa}$  و در فشار  $30 \text{ MPa}$  است. ماکزیمم کوپل  $M$  را که می توان بر تیر وارد کرد بیابید.



شکل م-۱۸-۴

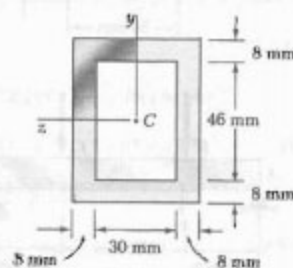
۱۱-۴ اگر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده حول محور افقی خم شود و لنگر خمشی  $8 \text{ kN.m}$  باشد، کل نیروی وارد بر بال فوقانی را بیابید.



شکل م-۱۱-۴ و ۱۲-۴

۱۲-۴ اگر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده حول یک محور عمودی خم شود و لنگر خمشی  $4 \text{ kN.m}$  باشد، کل نیروی وارد بر قسمت سایه خورده بال پایینی را بیابید.

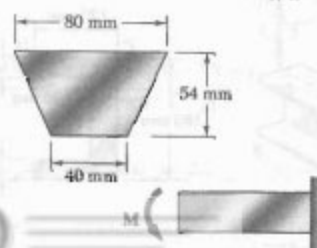
۱۳-۴ اگر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده حول یک محور افقی خم شود و لنگر خمشی  $900 \text{ N.m}$  باشد، کل نیروی وارد بر قسمت سایه خورده تیر را بیابید.



شکل م-۱۳-۴

۱۴-۴ مسئله ۱۳-۴ را با این فرض حل کنید که تیر حول یک محور عمودی خم شود و لنگر خمشی  $900 \text{ N.m}$  باشد.

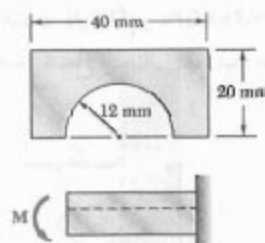
۱۵-۴ اگر برای تیر اکستروژنه نشان داده شده، تنش مجاز در کشش  $120 \text{ MPa}$  و در فشار  $150 \text{ MPa}$  باشد، ماکزیمم کوپل  $M$  را که می توان وارد کرد بیابید.



شکل م-۱۵-۴

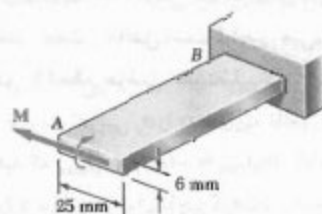
۱۹-۴ مسئله ۱۸-۴ را با فرض  $d = 40 \text{ mm}$  حل کنید.

۲۰-۴ اگر برای تیر نشان داده شده، تنش مجاز در کشش  $84 \text{ MPa}$  و در فشار  $110 \text{ MPa}$  باشد، ماکزیمم کوپل  $M$  را که می توان وارد کرد بیابید.



شکل م-۲۰

۲۱-۴ اگر  $\sigma_{all}$  برای نوار فولادی  $AB$  برابر با  $165 \text{ MPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم کوپل  $M$  را که می توان وارد کرد، (ب) شعاع انحنای متناظر. از  $E = 200 \text{ GPa}$  استفاده کنید.



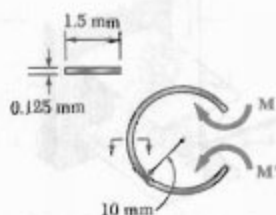
شکل م-۲۱

۲۲-۴ میله های راست به قطر  $6 \text{ mm}$  و به طول  $30 \text{ m}$  را داخل فلکه ای با قطر داخلی  $1/25 \text{ m}$  قرار می دهیم. مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش در میله پیچیده شده، (ب) لنگر خمشی متناظر در میله. فرض کنید تنش ایجاد شده در میله از استقامت تسلیم آن بیشتر نمی شود.  $E = 200 \text{ GPa}$ .



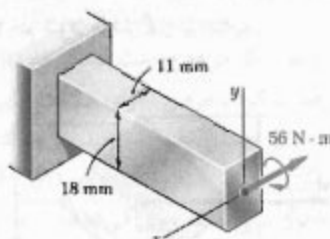
شکل م-۲۲

۲۳-۴ دیده می شود که نوار نازک فولادی به عرض  $1.5 \text{ mm}$  را می توان به صورت دایره ای به قطر  $10 \text{ mm}$  خم کرد بدون اینکه تغییر شکل دائمی به وجود آید. اگر  $E = 200 \text{ GPa}$ ، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش در نوار خمیده، (ب) مقدار کوپل لازم برای خمیده کردن نوار.



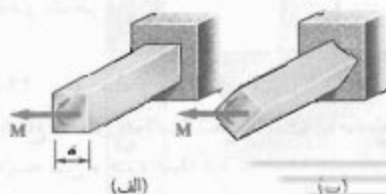
شکل م-۲۳

۲۴-۴ کوپل  $65 \text{ N}\cdot\text{m}$  بر میله فولادی نشان داده شده وارد شده است. (الف) اگر کوپل حول محور  $z$  وارد شود، ماکزیمم تنش و شعاع انحنای میله را بیابید. (ب) قسمت (الف) را با این فرض حل کنید که کوپل حول محور  $y$  وارد شود. از  $E = 200 \text{ GPa}$  استفاده کنید.



شکل م-۲۴

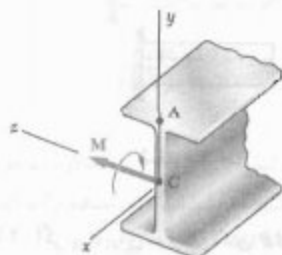
۲۵-۴ کوپل با مقدار  $M$  بر میله چهارگوشی به ضلع  $a$  وارد شده است. برای هر یک از وضعیت های نشان داده شده، ماکزیمم تنش و شعاع انحنای میله را بیابید.



شکل م-۲۵

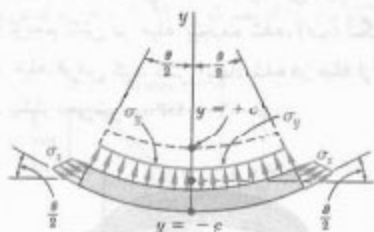
۳-۴ برای میله آلومینیومی و بارگذاری مسئله نمونه ۱-۴، مطلوبست: (الف) شعاع انحنای  $\rho'$  مقطع عرضی، (ب) زاویه بین وجوه میله که در ابتدا عمودی بودند. از  $E = 73 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.33$  استفاده کنید.

۳۱-۴ تیر فولادی نورد شده  $W 200 \times 31.3$  تحت کویل  $M = 45 \text{ kN.m}$  قرار دارد. اگر  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.29$ ، مطلوبست: (الف) شعاع انحنای  $\rho$ ، (ب) شعاع انحنای  $\rho'$  مقطع عرضی.



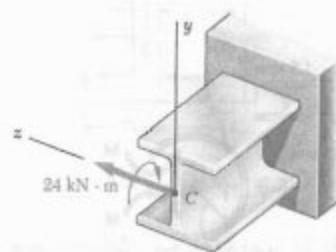
شکل م-۳۱

۳۲-۴ در قسمت ۲-۳ فرض شد که تنش‌های قائم  $\sigma_y$  در عضوی که تحت خمش خالص است ناچیز می‌باشند. برای عضو الاستیکی با مقطع عرضی مستطیلی که ابتدا مستقیم است، (الف) عیارت تقریبی  $\sigma_y$  را به صورت تابعی از  $y$  بیابید، (ب) نشان دهید که  $(\sigma_y)_{\max} = -(c/2\rho)(\sigma_y)_{\max}$ . لذا، نشان دهید که  $\sigma_y$  را در موارد عملی می‌توان ناچیز گرفت. (واهنمایی: نمودار آزاد قسمتی از تیر را که زیر سطح با مختصه  $y$  است در نظر بگیرید و فرض کنید که توزیع تنش  $\sigma_x$  به صورت خطی است).



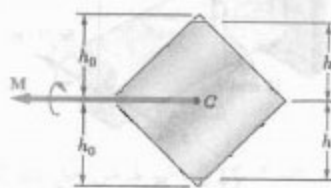
شکل م-۳۲

۲۶-۴ کویل  $24 \text{ kN.m}$  بر تیر فولادی نورد شده  $W 200 \times 46.1$  وارد شده است. (الف) اگر کویل حول محور  $z$  وارد شود، تنش ماکزیمم و شعاع انحنای تیر را بیابید. (ب) قسمت (الف) را با این فرض حل کنید که کویل حول محور  $y$  وارد شود. از  $E = 200 \text{ GPa}$  استفاده کنید.



شکل م-۲۶

۲۷-۴ میله چهارگوشی فرزکاری شده است و مقطع آن به صورت نشان داده شده درآمده است. سپس، این میله تحت کویل  $M$  قرار می‌گیرد و حول قطر افقی‌اش خم می‌شود. با در نظر گرفتن حالت  $h = 0.9 h_0$ ، ماکزیمم تنش در میله را به صورت  $\sigma_m = k \sigma_0$  بیان کنید، که در آن  $\sigma_0$  ماکزیمم تنش ایجاد شده در صورتی است که میله چهارگوش اولیه تحت همان کویل  $M$  خم شود. مقدار  $k$  را نیز بیابید.

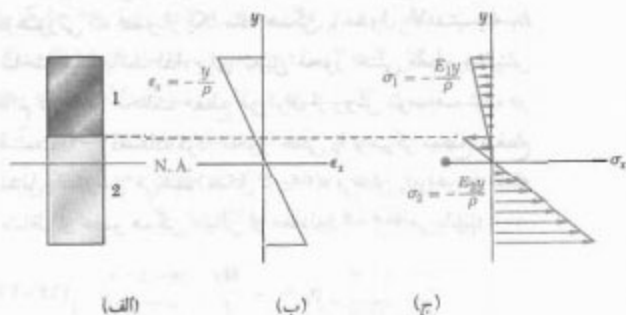


شکل م-۲۷

۲۸-۴ در مسئله ۳۲-۴، مطلوبست: (الف) مقدار  $h$  که به ازای آن تنش ماکزیمم  $\sigma_m$  تا حد امکان کوچک باشد، (ب) مقدار متناظر  $k$ .

۲۹-۴ برای میله و بارگذاری مثال ۱-۴، مطلوبست: (الف) شعاع انحنای  $\rho$ ، (ب) شعاع انحنای  $\rho'$  مقطع عرضی، (ج) زاویه بین وجوه میله که در ابتدا عمودی بودند. از  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.29$  استفاده کنید.





شکل ۲۴-۴ توزیع کرنش و تنش در میله متشکل از دو ماده.

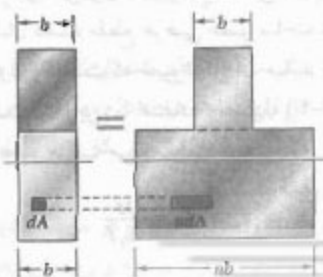
برای نیروی  $dF_y$  وارد بر یک جزء قسمت پایینی مقطع عرضی با همان مساحت  $dA$  داریم:

$$dF_y = \sigma_y dA = -\frac{E_y y}{\rho} dA \quad (26-4)$$

اگر نسبت  $E_y/E_x$  را با  $n$  نشان دهیم،

$$dF_y = -\frac{(nE_x)y}{\rho} dA = -\frac{E_x y}{\rho} (n dA) \quad (27-4)$$

با مقایسه معادله‌های (۲۵-۴) و (۲۷-۴)، دیده می‌شود که نیروی وارد بر یک جزء با مساحت  $n dA$  از ماده اول برابر با  $dF_y$  است. به عبارت دیگر، اگر هر دو قسمت میله از ماده اول ساخته شده باشند، یا ضرب کردن عرض اجزای قسمت پایینی در  $n$ ، مقاومت میله در برابر خمش تغییر نمی‌کند. توجه کنید که این عریض شدگی (اگر  $n > 1$ )، یا باریک شدگی (اگر  $n < 1$ )، در جهت موازی با محور خشی مقطع روی می‌دهد زیرا فاصله  $y$  هر جزء از محور خشی باید ثابت بماند. مقطع عرضی جدیدی را که به این طریق حاصل می‌شود مقطع تبدیل یافته عضو می‌گویند (شکل ۲۵-۴).



شکل ۲۵-۴ مقطع تبدیل یافته برای میله مرکب.

#### ۶-۴ خمش عضوهایی که از مواد مختلف ساخته شده‌اند

روابط قسمت ۴-۴ بر مبنای این فرض بود که عضو از یک ماده همگن با مدول الاستیسته معلوم  $E$  ساخته شده است. اگر عضو در خمش خالص باشد و از دو یا چند ماده با مدول‌های الاستیسته مختلف ساخته شده باشد، برای تعیین تنش در آن باید از روش دیگر استفاده کرد.



شکل ۲۳-۴

فرض کنید میله از دو قسمت با مواد مختلف ساخته شده است و مقطع عرضی این دو قسمت، مطابق شکل ۲۳-۴، به هم متصل شده‌اند. این میله مرکب به صورتی که در قسمت ۴-۳ گفته شد تغییر شکل می‌دهد؛ یعنی، مقطع عرضی آن در تمام طول آن یکسان می‌ماند. ضمناً، در قسمت ۳-۴ هیچ فرضی درباره رابطه تنش کرنش ماده یا مواد در نظر گرفته نشد. لذا، کرنش قائم  $\epsilon_x$  برحسب فاصله  $y$  از محور خشی مقطع به صورت خطی تغییر می‌کند (شکل ۲۴-۴ الف و ب)، و فرمول (۸-۴) به کار می‌رود:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (8-4)$$

البته، نمی‌توان فرض کرد محور خشی از مرکز سطح مقطع مرکب می‌گذرد، و یکی از اهداف تحلیل در اینجا تعیین مکان این محور است.

چون مدول‌های الاستیسته  $E_1$  و  $E_2$  دو ماده با هم تفاوت دارند، تنش قائم در هر ماده نیز یکسان نیست و می‌نویسیم:

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho} \quad (24-4)$$

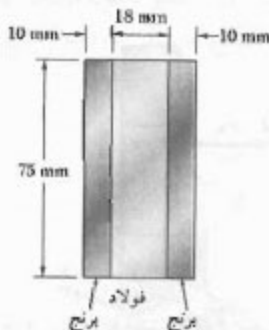
$$\sigma_2 = E_2 \epsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho}$$

به این ترتیب، منحنی توزیع تنش از دو پاره خط راست تشکیل می‌شود (شکل ۲۴-۴ ج). از معادله‌های (۲۴-۴) نتیجه می‌شود که نیروی  $dF_y$  وارد بر جزء مساحت  $dA$  قسمت بالایی مقطع عرضی چنین است:

$$dF_y = \sigma_1 dA = -\frac{E_1 y}{\rho} dA \quad (25-4)$$

## مثال ۳-۴

با اتصال قطعات فولادی ( $E_s = 200 \text{ GPa}$ ) و برنجی ( $E_b = 100 \text{ GPa}$ )، میله‌ای با مقطع عرضی نشان داده شده ساخته شده است (شکل ۲۷-۴). اگر میله تحت لنگر خمشی  $M = 415 \text{ kN.m}$  در خمش خالص قرار گیرد، ماکزیم تنش را در فولاد و برنج بیابید.



شکل ۲۷-۴

در شکل ۲۸-۴، مقطع تبدیل یافته متناظر با یک میله تماماً برنجی نشان داده شده است.

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{200 \text{ GPa}}{100 \text{ GPa}} = 2$$

در نتیجه، عرض قسمت مرکزی برنجی که جایگزین قسمت فولادی اولیه می‌شود برابر است با:

$$(18 \text{ mm} \times 2) = 36 \text{ mm}$$

گفتنی است که این تغییر اندازه در امتداد موازای با محور خشی روی می‌دهد. ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته نسبت به محور مرکزی‌اش چنین است:

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (56 \text{ mm})(75 \text{ mm})^3 = 1,97 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

ماکزیم فاصله از محور خشی،  $37.5 \text{ mm}$  است. با استفاده از معادله (۱۵-۴)، ماکزیم تنش را در مقطع تبدیل یافته می‌یابیم:

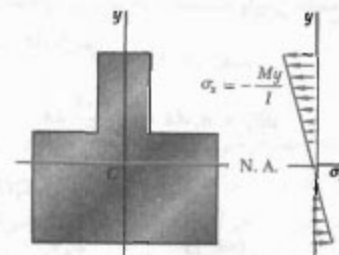
$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(415 \times 10^3 \text{ N.m})(37.5 \times 10^{-3} \text{ m})}{1,97 \times 10^6 \text{ m}^4} = 85.7 \text{ MPa}$$

مقدار بالا، ماکزیم تنش در قسمت برنجی میله مرکب اولیه را نیز نشان می‌دهد. ولی، ماکزیم تنش در قسمت فولادی از

یعنی، مقطع تبدیل یافته هم‌ارز است با مقطع عرضی عضو در صورتی که عضو از یک ماده همگن با مدول الاستیته  $E_s$  ساخته شده باشد. لذا، برای تعیین محور خشی مقطع و تنش قائم در نقاط مختلف مقطع می‌توان از روش توصیف شده در قسمت ۴-۴ استفاده کرد. محور خشی را از مرکز سطح مقطع تبدیل یافته رسم می‌کنیم (شکل ۲۶-۴)، و تنش  $\sigma_x$  را در هر نقطه متناظر از عضو همگن خیالی از معادله (۱۶-۴) می‌یابیم:

$$\sigma_x = - \frac{My}{I} \quad (16-4)$$

( $y$  فاصله از سطح خشی، و  $I$  ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته نسبت به محور گذرا از مرکز سطح است).



شکل ۲۶-۴ توزیع تنش‌ها در مقطع تبدیل یافته.

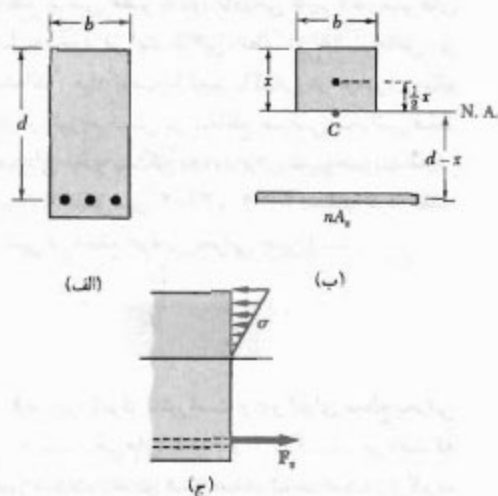
برای تعیین تنش  $\sigma_x$  در هر نقطه از قسمت بالایی مقطع عرضی میله مرکب اولیه، فقط تنش  $\sigma_x$  را در نقطه متناظر مقطع تبدیل یافته محاسبه می‌کنیم. ولی، برای تعیین تنش  $\sigma_x$  در یک نقطه از قسمت پایینی مقطع عرضی، باید تنش  $\sigma_x$  محاسبه شده در نقطه متناظر مقطع تبدیل یافته را در  $n$  ضرب کنیم. همانطور که قبلاً دیدیم، نیروی جزئی یکسان  $dF$  بر مساحت  $n dA$  از مقطع تبدیل یافته و بر مساحت  $dA$  از مقطع اولیه وارد می‌شود. لذا، تنش  $\sigma_x$  در یک نقطه از مقطع اولیه برابر است با  $n$  برابر تنش در نقطه متناظر از مقطع تبدیل یافته.

تغییر شکل یک عضو مرکب را با استفاده از مقطع تبدیل یافته نیز می‌توان تعیین کرد. می‌دانیم که مقطع تبدیل یافته نشان دهنده مقطع عرضی عضو ساخته شده از ماده همگنی با مدول  $E_s$  است که تغییر شکل آن مانند تغییر شکل میله مرکب است. بنابراین، با استفاده از معادله (۲۱-۴)، برای شعاع انحناى عضو مرکب می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_s I}$$

که در آن  $I$  ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته نسبت به محور خشی خود می‌باشد.

برای تعیین مقطع انتقال یافته یک تیر بتنی تقویت شده، کل مساحت مقطع عرضی  $A_s$  میله‌های فولادی را با  $nA_s$  جایگزین می‌کنیم (شکل ۳۰-۴)؛  $n$  برابر است با  $E_s/E_c$  و  $E_s$  و  $E_c$  به ترتیب، مدول الاستیسیته فولاد و مدول الاستیسیته بتن (است). چون بتن در تیر فقط تحت فشار به خوبی عمل می‌کند، فقط قسمتی از مقطع عرضی را که در بالای محور خنثی قرار دارد باید در مقطع تبدیل یافته به کار برد.



شکل ۳۰-۴

با تعیین فاصله مرکز سطح مقطع تبدیل یافته تا وجه بالایی تیر می‌توان مکان محور خنثی را به دست آورد. عرض تیر را با  $b$  و فاصله خط مرکزی میله‌های فولادی از وجه بالایی را با  $d$  نشان می‌دهیم، و همان اول مقطع تبدیل یافته را نسبت به محور خنثی برابر با صفر قرار می‌دهیم. مقطع تبدیل یافته از دو قسمت تشکیل شده است. می‌نویسیم:

$$(bx) \frac{x}{2} - nA_s (d - x) = 0$$

یا

$$\frac{1}{2} bx^2 + nA_s x - nA_s d = 0 \quad (28-4)$$

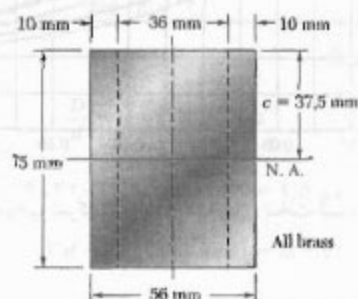
( $x$  فاصله مرکز سطح مقطع تبدیل یافته تا وجه بالایی تیر است). با حل این معادله درجه دوم، مکان محور خنثی در تیر و قسمتی از مقطع عرضی تیر بتنی که به طور مؤثر مورد استفاده قرار می‌گیرد به دست می‌آید.

در مسئله نمونه ۴-۴، تنش در مقطع تبدیل یافته را تعیین کردیم. توزیع تنش فشاری در بتن و برابند نیروهای کششی  $F_s$  در میله‌های فولادی در شکل ۳۰-۴ ج نشان داده شده‌اند.

مقدار حاصل برای مقطع تبدیل یافته بیشتر است، زیرا وقتی می‌خواهیم از مقطع تبدیل یافته به مقطع اولیه برگردیم، باید مساحت قسمت مرکزی را بر ۱/۹۳۳ تقسیم کنیم. در نتیجه،

$$\sigma_{\text{در برنج (ماتریس)}} = 85.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{در فولاد (ماتریس)}} = (7)(85.7 \text{ MPa}) = 599.9 \text{ MPa}$$



شکل ۲۸-۴

تیرهای بتنی تقویت شده (شکل ۲۹-۴)، یکی از نمونه‌های مهم از عضوهای ساختمانی است که از دو ماده مختلف تشکیل شده‌اند. این تیرها، وقتی برای لنگرهای خمشی مثبت طراحی می‌شوند، با میله‌های فولادی که به فاصله کمی بالایی وجه پایینی تیر قرار می‌گیرند تقویت می‌شوند (شکل ۳۰-۴ الف). چون بتن در کشش خیلی ضعیف است، در زیر سطح خنثی تیر برمی‌دارد و میله‌های فولادی تمام بار کششی را تحمل می‌کنند، در حالی که قسمت بالایی تیر بتنی بار فشاری را تحمل می‌کند.



شکل ۲۹-۴

## ۷-۴ تمرکز تنش

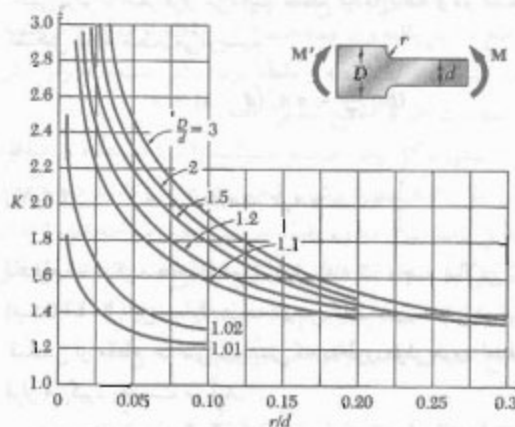
در قسمت ۴-۴، فرمول  $\sigma_m = Mc/I$  برای عضوی که دارای صفحه تقارن مقطع عرضی یکنواخت است به دست آمد. در قسمت ۵-۴ دیدیم که اگر کوپل‌های  $M$  و  $M'$  با استفاده از صفحات صلب و هموار اعمال شوند، فرمول مذکور در تمام طول عضو به کار می‌آید. در موارد دیگر، در نزدیک نقاط بارگذاری، تمرکز تنش روی می‌دهد.

اگر مقطع عرضی عضو به‌طور ناگهانی تغییر کند، تنش‌های بزرگتری نیز به وجود می‌آیند. در این رابطه، دو حالت خاص زیر بررسی شده‌اند: میله تحت با تغییر ناگهانی در عرض، و میله تحت شیاردار. توزیع تنش در مقاطع عرضی بحرانی فقط به شکل هندسی عضو بستگی دارد. و برای تعیین ضریب تمرکز تنش می‌توان از شکل‌های ۴-۳۱ و ۴-۳۲ استفاده کرد. مقدار ماکزیم تنش در مقطع عرضی بحرانی چنین است:

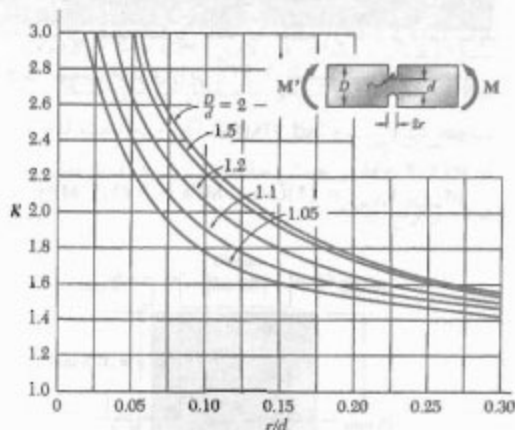
$$\sigma_m = K \frac{Mc}{I} \quad (۴-۲۹)$$

که در آن،  $K$  ضریب تمرکز تنش است و  $c$  و  $I$  برای مقطع بحرانی به عرض  $d$  است. شکل‌های ۴-۳۱ و ۴-۳۲ نشان می‌دهند که برای کاهش شدت تمرکز تنش باید تاحد امکان از گرده (ماهیچه) و شیار با شعاع بزرگ استفاده کرد.

در اینجا نیز مانند بارگذاری محوری و پیچش، ضریب  $K$  با فرض رابطه خطی بین تنش و کرنش محاسبه شده‌اند. در اغلب موارد، تغییر شکل پلاستیک روی می‌دهد و مقدار ماکزیم تنش کمتر از مقدار حاصل از معادله (۴-۲۹) است.



شکل ۴-۳۱ ضریب تمرکز تنش برای میله‌های تحت گرده‌دار در خمش خالص.



شکل ۴-۳۲ ضرایب تمرکز تنش برای میله‌های تحت شیاردار در خمش خالص.

## مثال ۴-۴

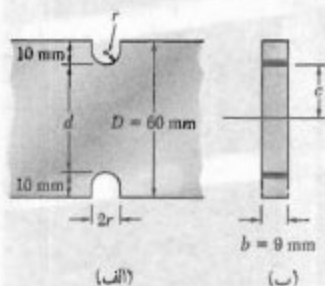
یک میله فولادی به عرض ۶۰ mm و به ضخامت ۹ mm دارای شیارهایی به عمق ۱۰ mm است (شکل ۴-۳۳). مطلوب است کمترین عرض مجاز شیارها تا وقتی میله تحت لنگر خمشی  $180 \text{ N.m}$  قرار می‌گیرد، تنش در میله از  $150 \text{ MPa}$  بیشتر نشود. از شکل ۴-۳۳ الف،

$$d = 60 \text{ mm} - 2(10 \text{ mm}) = 40 \text{ mm}$$

$$c = \frac{1}{2}d = 20 \text{ mm} \quad b = 9 \text{ mm}$$

ممان اینرسی مقطع عرضی بحرانی نسبت به محور خنثی آن چنین است:

$$I = \frac{1}{12} b d^3 = \frac{1}{12} (9 \times 10^{-3} \text{ m})(40 \times 10^{-3} \text{ m})^3 \\ = 48 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$



شکل ۴-۳۳

با ضرب کردن ابعاد افقی قسمت فولادی مقطع در  $n = 16$ ، مقطع تبدیل یافته‌ای که تماماً از چوب ساخته شده است به دست می‌آید.

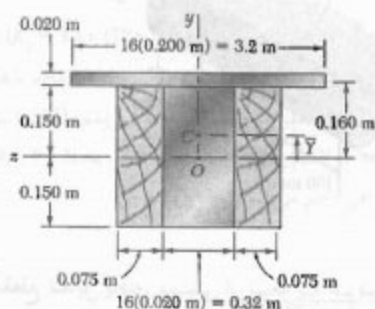
محور خنثی. محور خنثی از مرکز سطح مقطع تبدیل یافته می‌گذرد. چون این مقطع از دو مستطیل تشکیل شده است، داریم

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{(0.16 \text{ m})(3.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}) + 0}{3.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m} + 0.47 \text{ m} \times 0.3 \text{ m}} = 0.050 \text{ m}$$

ممان اینرسی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح. با استفاده از نظریه محوره‌های موازی،

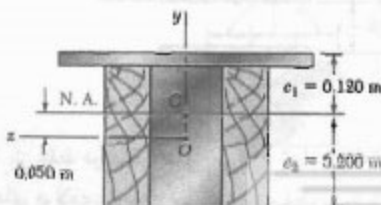
$$I = \frac{1}{12}(0.47 \text{ m})(0.3 \text{ m})^3 + (0.47 \text{ m} \times 0.3 \text{ m})(0.050 \text{ m})^2 + \frac{1}{12}(3.2 \text{ m})(0.2 \text{ m})^3 + (3.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m})(0.16 \text{ m} - 0.050 \text{ m})^2$$

$$I = 2.19 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$



الف. تنش ماکزیمم در چوب. دورترین فاصله از محور خنثی در امتداد لبه چوب قرار دارد، یعنی در جایی که  $c_y = 0.200 \text{ m}$

$$\sigma_w = \frac{Mc_y}{I} = \frac{(50 \times 10^3 \text{ N.m})(0.200 \text{ m})}{2.19 \times 10^{-7} \text{ m}^4} = 45.7 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$



مقدار تنش  $Mc/I$  عبارت است از:

$$\frac{Mc}{I} = \frac{(180 \text{ N.m})(20 \times 10^{-3} \text{ m})}{48 \times 10^{-8} \text{ m}^4} = 75 \text{ MPa}$$

با جایگذاری این مقدار در معادله (۲۹-۴) و با استفاده از  $\sigma_m = 150 \text{ MPa}$  داریم

$$150 \text{ MPa} = K(75 \text{ MPa})$$

$$\Rightarrow K = 2$$

از طرف دیگر،

$$\frac{D}{d} = \frac{60 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 1.5$$

برای  $K = 2$  و  $D/d = 1.5$  طبق شکل ۴-۱۳،  $r/d = 0.13 \pm 0.02$

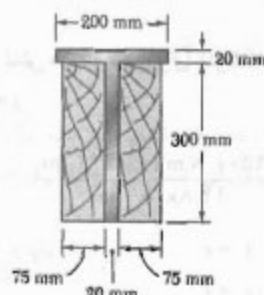
$$r = 0.13d = 0.13(40 \text{ mm}) = 5.2 \text{ mm}$$

لذا، کمترین عرض مجاز شیار چنین است:

$$2r = 2(5.2 \text{ mm}) = 10.4 \text{ mm}$$

### مسئله نمونه ۳-۴.

دو ورق فولادی به هم جوش شده‌اند و یک تیر T شکل را تشکیل داده‌اند. این تیر به دو الوار بلوط پیچ و مهره شده است. مدول الاستیسته برای چوب  $12.5 \text{ GPa}$  و برای فولاد  $200 \text{ GPa}$  است. اگر لنگر خمشی  $M = 50 \text{ kN.m}$  بر این تیر مرکب وارد شود، مطلوبست: (الف) تنش ماکزیمم در چوب، (ب) تنش در فولاد در امتداد لبه بالایی.



حل

مقطع تبدیل یافته. ابتدا نسبت زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$n = \frac{E_s}{E_w} = \frac{200 \text{ GPa}}{12.5 \text{ GPa}} = 16$$

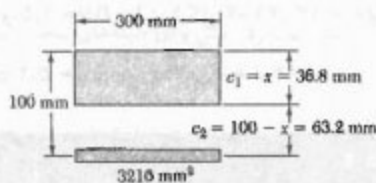
از بتن تحت فشار است (بالای محور خنثی)، و دیگری مساحت تبدیل یافته فولاد،  $nA_s$  است. می‌نویسیم:

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200 \text{ GPa}}{25 \text{ GPa}} = 8.0$$

$$nA_s = 8.0 (402 \text{ mm}^2) = 3216 \text{ mm}^2$$

محور خنثی. محور خنثی تیغه از مرکز سطح مقطع تبدیل یافته می‌گذرد. مماس مقاطع تبدیل یافته را نسبت به محور خنثی با هم جمع می‌کنیم:

$$300 \times \left(\frac{x}{2}\right) - 3216 (100 - x) = 0 \quad x = 36.8 \text{ mm}$$



مماس اینرسی. مماس اینرسی مساحت تبدیل یافته نسبت به محور گذرا از مرکز سطح چنین است:

$$I = \frac{1}{12} (300)(36.8)^3 + 3216 (100 - 36.8)^2 = 12.8 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

الف. تنش ماکزیمم در بتن. در بالای تیغه، داریم  
و  $c_1 = 36.8 \text{ mm}$

$$\sigma_c = \frac{Mc_1}{I} = \frac{(4500 \text{ N.m})(36.8 \text{ mm})}{12.8 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$\sigma_c = 12.9 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

ب. تنش در فولاد. برای فولاد، داریم  $c_2 = 63.2 \text{ mm}$  و  $n = 8.0$

$$\sigma_s = n \frac{Mc_2}{I} = 8.0 \frac{(4500 \text{ N.m})(63.2 \text{ mm})}{12.8 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$\sigma_s = 177.8 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



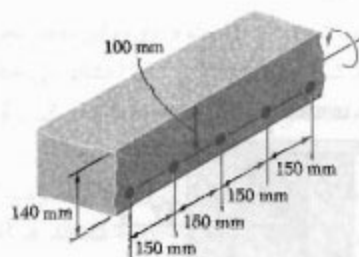
ب. تنش در فولاد. در امتداد لبه بالایی،  $c_1 = 36.8 \text{ mm}$ . از مقطع تبدیل یافته، تنش معادل در چوب را می‌یابیم و آن را در  $n$  ضرب می‌کنیم تا تنش در فولاد به دست آید:

$$\sigma_s = n \frac{Mc_1}{I} = (8.0) \frac{(4500 \text{ N.m})(36.8 \text{ mm})}{12.8 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$\sigma_s = 177.8 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

#### مسئله نمونه ۴-۴

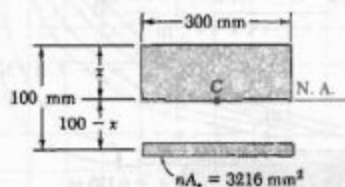
یک تیغه بتنی توسط میله‌های فولادی به قطر  $16 \text{ mm}$  تقویت شده است. این میله‌ها به فاصله  $38 \text{ mm}$  بالای وجه پایینی تیغه قرار دارند و فاصله مراکز آنها از یکدیگر  $150 \text{ mm}$  است. مدول الاستیسته برای بتن  $25 \text{ GPa}$  و برای فولاد  $200 \text{ GPa}$  است. اگر لنگر خمشی  $4.5 \text{ kN.m}$  بر هر فوت عرض تیغه وارد شود، مطلوبست: (الف) تنش ماکزیمم در بتن، (ب) تنش در فولاد.



#### حل

مقطع تبدیل یافته. قسمتی از تیغه به عرض  $300 \text{ mm}$  را در نظر می‌گیریم، که در آن دو میله به قطر  $16 \text{ mm}$  کلاً دارای مساحت مقطع عرضی زیر هستند:

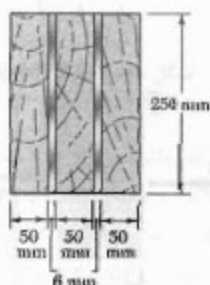
$$A_s = 2 \left[ \frac{\pi}{4} (16 \text{ mm})^2 \right] = 402 \text{ mm}^2$$



چون بتن فقط در فشار عمل می‌کند، تمام نیروهای کششی را میله‌های فولادی تحمل می‌کنند و مقطع تبدیل یافته از دو مساحت نشان داده شده تشکیل شده است. یکی از آنها قسمتی



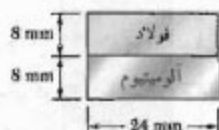
فولاد	چوب	
۲۰۰ GPa	۱۴ GPa	مدول الاستیسیته
۱۵۰ MPa	۱۴ MPa	تنش مجاز



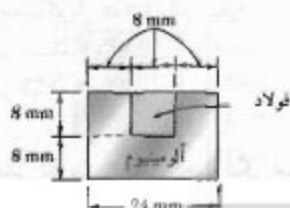
شکل م-۳۷

۳۸-۴ در مسئله ۳۷-۴، ماکزیمم لنگر خمشی را برای خمش عضو مدل یک محور عمودی بیابید.

۳۹-۴ و ۴۰-۴ از اتصال میله فولادی ( $E_s = 210 \text{ GPa}$ ) و میله آلومینیومی ( $E_a = 70 \text{ GPa}$ )، میله مرکب نشان داده شده به وجود آمده است. مطلوبست تنش ماکزیمم: (الف) در آلومینیوم، (ب) در فولاد، وقتی میله تحت لنگر  $M = 60 \text{ N.m}$  حول یک محور افقی خم می شود.



شکل م-۳۹

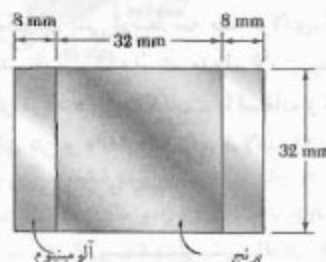


شکل م-۴۰

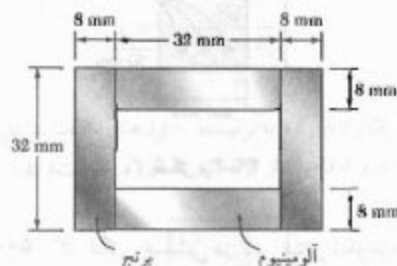
## مسائل

۳۳-۴ و ۳۴-۴ میله‌ای با مقطع عرضی نشان داده شده از برنج و آلومینیوم است. با استفاده از داده‌های زیر، ماکزیمم لنگر خمشی مجاز را برای خمش میله حول یک محور افقی بیابید.

برنج	آلومینیوم	
۱۰۵ GPa	۷۰ GPa	مدول الاستیسیته
۱۶۰ MPa	۱۰۰ MPa	تنش مجاز



شکل م-۳۳



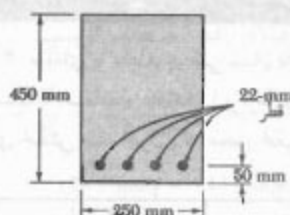
شکل م-۳۴

۳۵-۴ و ۳۶-۴ برای میله مرکب نشان داده شده، ماکزیمم لنگر خمشی مجاز را در میله برای خمش آن حول یک محور عمودی بیابید:

۳۵-۴ میله مسئله ۳۳-۴

۳۶-۴ میله مسئله ۳۴-۴

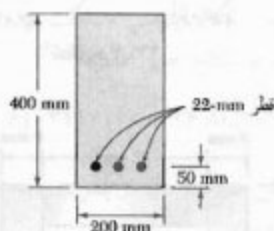
۳۷-۴ سه تیر چوبی و دو ورق فولادی به هم پیچ شده‌اند و عضو مرکب نشان داده شده را ساخته‌اند. با استفاده از داده‌های زیر، ماکزیمم لنگر خمشی مجاز را برای خمش عضو حول یک محور افقی بیابید.



شکل م ۴۷-۴

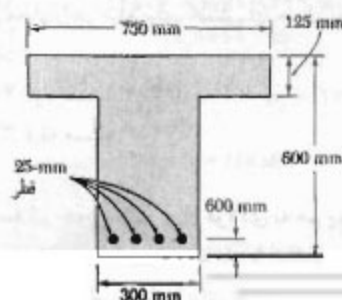
۴۸-۴ مسئله ۴۷-۴ را با این فرض حل کنید که عمق تیر از ۴۵۰ mm به ۵۰۰ mm افزایش یابد.

۴۹-۴ یک تیر بتنی توسط سه میله فولادی، که مطابق شکل قرار دارند، تقویت شده است. مدول الاستیسیته برای بتن ۲۰ GPa و برای فولاد ۲۰۰ GPa است. با استفاده از تنش مجاز خمشی مثبت مجاز در تیر را بیابید.



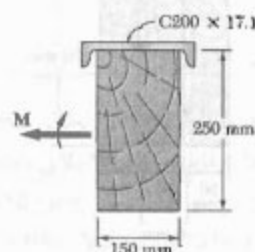
شکل م ۴۹-۴

۵۰-۴ اگر لنگر خمشی در تیر بتنی تقویت شده‌ای  $200 \text{ kN.m}$  و مدول الاستیسیته برای بتن  $25 \text{ GPa}$  و برای فولاد  $200 \text{ GPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) تنش در فولاد، (ب) ماکزیمم تنش در بتن.

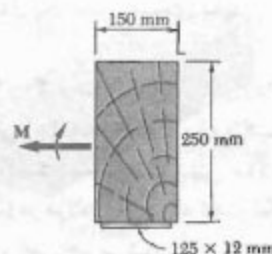


شکل م ۵۰-۴

۴۱-۴ و ۴۲-۴ تیر چوبی یا مقطع عرضی  $150 \times 250 \text{ mm}$  به تقویت‌کننده فولادی پیچ شده است. مدول الاستیسیته چوب و فولاد، به ترتیب،  $12 \text{ GPa}$  و  $200 \text{ GPa}$  است. اگر تیر تحت کویل  $M = 50 \text{ kN.m}$  حول یک محور افقی خم شود، مطلوبست ماکزیمم تنش: (الف) در چوب، (ب) در فولاد.



شکل م ۴۱-۴



شکل م ۴۲-۴

۴۳-۴ و ۴۴-۴ برای میله مرکب نشان داده شده، شعاع انحنای ناشی از اعمال کویل  $35 \text{ N.m}$  را بیابید.

۴۳-۴ میله مسئله ۲۹-۴

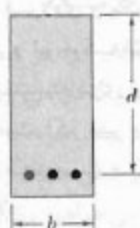
۴۴-۴ میله مسئله ۳۰-۴

۴۵-۴ و ۴۶-۴ برای تیر مرکب نشان داده شده، شعاع انحنای ناشی از اعمال کویل  $50 \text{ kN.m}$  را بیابید.

۴۵-۴ تیر مسئله ۴۱-۴

۴۶-۴ تیر مسئله ۴۲-۴

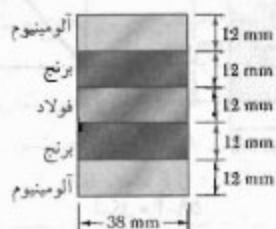
۴۷-۴ تیر بتنی تقویت شده‌ای تحت لنگر خمشی مثبت  $175 \text{ kN.m}$  قرار دارد. اگر مدول الاستیسیته برای بتن  $25 \text{ GPa}$  و برای فولاد  $200 \text{ GPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) تنش در فولاد، (ب) ماکزیمم تنش در بتن.



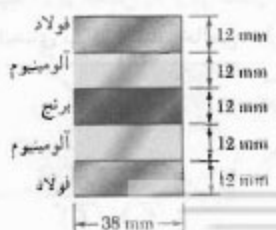
شکل م ۵۳-۴ و م ۵۴-۴

۵۴-۴ برای تیر بتنی نشان داده شده، مدول الاستیسیته برای بتن ۲۵ GPa و برای فولاد ۲۰۰ GPa است. اگر  $b = ۲۰۰ \text{ mm}$  و  $d = ۴۵۰ \text{ mm}$ ، با استفاده از تنش مجاز  $۱۲/۵ \text{ MPa}$  برای بتن و  $۱۴۰ \text{ MPa}$  برای فولاد، مطلوبست: (الف) مساحت  $A_s$  فولاد تقویت‌کننده در صورتی که بخواهیم طرح متوازن باشد، (ب) ماکزیمم لنگر خمشی مجاز (برای تعریف طرح متوازن، به مسئله ۵۲-۴ مراجعه کنید).

۵۵-۴ و ۵۶-۴ پنج تسمه فلزی، هر یک با مقطع عرضی  $۱۲ \times ۳۸ \text{ mm}$ ، به یکدیگر متصل و تیر مرکب نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. مدول الاستیسیته برای فولاد ۲۰۰ GPa، برای برنج ۱۰۵ GPa و برای آلومینیوم ۷۰ GPa است. اگر تیر با اعمال کوپل  $۱/۴ \text{ kN.m}$  حول یک محور افقی خم شود، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش در هر یک از سه فلز، (ب) شعاع انحنای تیر مرکب.

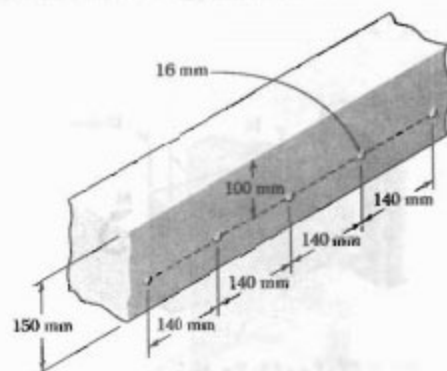


شکل م ۵۵-۴



شکل م ۵۶-۴

۵۱-۴ یک دال بتنی توسط میله‌هایی به قطر ۱۶ mm تقویت شده است. فاصله مراکز میله‌ها از هم ۱۴۰ mm است. مدول الاستیسیته بتن و فولاد، به ترتیب، ۲۰ GPa و ۲۰۰ GPa است. با استفاده از تنش مجاز ۹ MPa برای بتن و ۱۴۰ MPa برای فولاد، ماکزیمم لنگر خمشی را که می‌توان بر واحد طول دال وارد کرد بیابید.

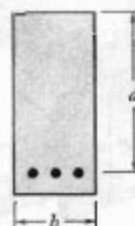


شکل م ۵۱-۴

۵۲-۴ در یک تیر بتنی تقویت شده، هرگاه ماکزیمم تنش در فولاد مساوی با تنش مجاز  $\sigma_s$  و ماکزیمم تنش در بتن مساوی با تنش مجاز  $\sigma_c$  باشد، تیر را متوازن می‌گویند. نشان دهید که برای دستیابی به یک طرح متوازن، فاصله  $x$  از نوک تیر تا محور خنثی باید به صورت زیر باشد:

$$x = \frac{d}{1 + \frac{\sigma_s E_s}{\sigma_c E_c}}$$

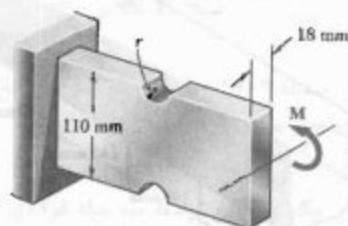
که در آن  $E_s$  و  $E_c$ ، به ترتیب، مدول‌های الاستیسیته بتن و فولاد هستند و  $d$  فاصله از نوک تیر تا فولاد تقویت‌کننده است.



شکل م ۵۲-۴

۵۳-۴ برای تیر بتنی نشان داده شده، مدول الاستیسیته برای بتن ۲۴ GPa و برای فولاد ۲۰۰ GPa است. اگر  $b = ۲۰۰ \text{ mm}$  و  $d = ۵۵۰ \text{ mm}$ ، با استفاده از تنش مجاز  $۱۲ \text{ MPa}$  برای بتن و  $۱۴۰ \text{ MPa}$  برای فولاد، مطلوبست: (الف) مساحت  $A_s$  فولاد تقویت‌کننده در صورتی که بخواهیم طرح متوازن باشد، (ب) ماکزیمم لنگر خمشی مجاز (برای تعریف طرح متوازن، به مسئله ۵۲-۴ مراجعه کنید).

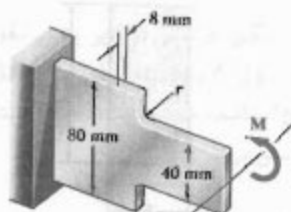
۴-۶۱ شیارهای نیم دایره‌ای با شعاع  $r$ ، مطابق شکل، در جوانب یک عضو فولادی فرغ شده‌اند. با استفاده از تنش مجاز  $55 \text{ MPa}$ ، مطلوبست ماکزیمم لنگر خمشی که می‌توان بر عضو وارد کرد در صورتی که شعاع  $r$  شیارهای نیم دایره‌ای برابر است با: (الف)  $10 \text{ mm}$ ، (ب)  $18 \text{ mm}$ .



شکل م ۴-۶۱ و م ۴-۶۲

۴-۶۲ شیارهای نیم دایره‌ای با شعاع  $r$ ، مطابق شکل، در جوانب یک عضو فولادی فرغ شده‌اند. اگر  $M = 450 \text{ N.m}$ ، مطلوبست ماکزیمم تنش در عضو در صورتی که: (الف)  $r = 10 \text{ mm}$ ، (ب)  $r = 18 \text{ mm}$ .

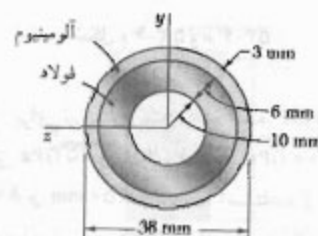
۴-۶۳ اگر  $M = 250 \text{ N.m}$ ، مطلوبست ماکزیمم تنش در تیر نشان داده شده وقتی شعاع  $r$  گردیده برابر است با: (الف)  $4 \text{ mm}$ ، (ب)  $8 \text{ mm}$ .



شکل م ۴-۶۳ و م ۴-۶۴

۴-۶۴ اگر تنش مجاز در تیر نشان داده شده  $90 \text{ MPa}$  باشد، مطلوبست لنگر خمشی مجاز  $M$  وقتی شعاع  $r$  گردیده برابر است با: (الف)  $8 \text{ mm}$ ، (ب)  $12 \text{ mm}$ .

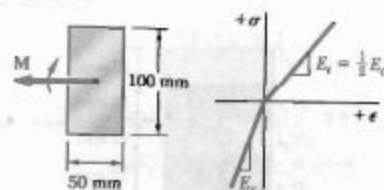
۴-۵۷ یک لوله فولادی و یک لوله آلومینیومی به یکدیگر محکم شده‌اند و تیر مرکب نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. مدول الاستیسته برای فولاد  $210 \text{ GPa}$  و برای آلومینیوم  $70 \text{ GPa}$  است. اگر تیر مرکب با اعمال گویل  $500 \text{ N.m}$  خم شود، مطلوبست ماکزیمم تنش: (الف) در آلومینیوم، (ب) در فولاد.



شکل م ۴-۵۷

۴-۵۸ مسئله ۴-۵۷ را با این فرض حل کنید که لوله داخلی به ضخامت  $6 \text{ mm}$  از آلومینیوم و لوله خارجی به ضخامت  $3 \text{ mm}$  از فولاد ساخته شده باشند.

۴-۵۹ تیر مستطیلی نشان داده شده از پلاستیکی ساخته شده است که مدول الاستیسته آن در کشش نصف مقدار آن در فشار است. برای لنگر خمشی  $M = 600 \text{ N.m}$ ، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش کششی، (ب) ماکزیمم تنش فشاری.



شکل م ۴-۵۹

\* ۴-۶۰ یک تیر مستطیلی از ماده‌ای ساخته شده است که مدول الاستیسته آن در کشش  $E_t$  و در فشار  $E_c$  است. نشان دهید که شعاع انحنای تیر در خمش خالص عبارت است از

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_t I}$$

که در آن

$$E_r = \frac{2 E_t E_c}{(\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c})^2}$$

# ۴-۸ تغییر شکل پلاستیک

برای استنتاج رابطه  $M/\theta = EI$  در قسمت ۴-۴، فرض شد قانون هوک در تمام عضو به کار می‌رود. اگر تنش در قسمتی از عضو از استقامت تسلیم بیشتر شود، یا اگر ماده از نوع شکننده با نمودار تنش-کرنش غیرخطی باشد، رابطه بالا صحت نخواهد داشت. در این قسمت می‌خواهیم یک روش کلی را برای تعیین توزیع تنش در عضوی که در خمش خالص است و از قانون هوک پیروی نمی‌کند بررسی کنیم.

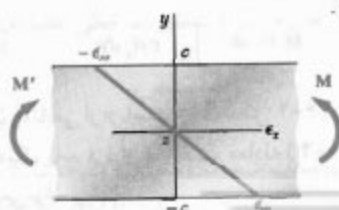
در قسمت ۴-۳، هنگام اثبات این موضوع که کرنش قائم  $\epsilon_x$  برحسب فاصله  $y$  از سطح خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند، هیچ رابطه خاصی را برای تنش-کرنش در نظر نگرفتیم. در اینجا نیز از این خاصیت استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_m \quad (۱۰-۴)$$

که در آن،  $y$  فاصله نقطه مورد نظر از سطح خنثی است، و  $c$  ماکزیم مقدار  $y$  است.

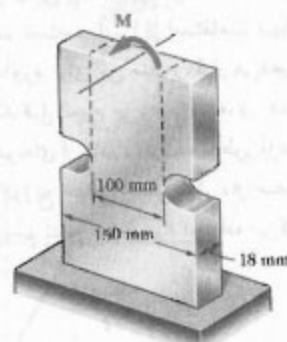
البته، نمی‌توان فرض کرد محور خنثی از مرکز سطح مقطع داده شده می‌گذرد، زیرا این خاصیت در قسمت ۴-۴ با فرض تغییر شکل الاستیک به دست آمد. به طور کلی، مکان محور خنثی با توجه به معادله‌های (۱-۴) و (۳-۴) و با آزمون و خطا به دست می‌آید. ولی، در حالت خاصی که عضوی دارای صفحات تقارن افقی و عمودی است و از ماده‌ای ساخته شده است که رابطه تنش-کرنش آن در کشش و فشار یکسان است، محور خنثی بر محور تقارن افقی مقطع منطبق است. در حقیقت، با توجه به خواص چنین ماده‌ای، تنش‌ها باید نسبت به محور خنثی متقارن باشند. این حالت، و نیز معادله (۱-۴)، وقتی برقرار می‌شود که محور خنثی محور تقارن افقی باشد.

ابتدا، حالت خاص بالا را تحلیل می‌کنیم. در این حالت، فاصله  $y$  در معادله (۱۰-۴) از محور تقارن افقی  $z$  مقطع عرضی اندازه‌گیری می‌شود و توزیع کرنش  $\epsilon_x$  نسبت به آن محور به صورت خطی و متقارن است (شکل ۴-۳۴). منحنی تنش-کرنش نیز نسبت به مبدأ مختصات متقارن است (شکل ۴-۳۵).

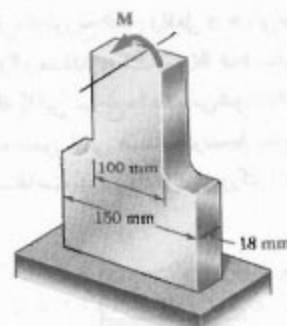


شکل ۳۴-۴

۴-۶۵ تنش مجاز برای یک میله فولادی ۸۰ MPa است. مطلوبست ماکزیم کوپل  $M$  که می‌توان بر میله وارد کرد در صورتی که (الف) میله دارای شیارهای نیم‌دایره‌ای با شعاع  $r = 15 \text{ mm}$  باشد (شکل م ۴-۷۳ الف)، (ب) شیارها حذف شوند و میله به صورت نشان داده شده در شکل م ۴-۶۵ ب در آید.



(الف)



(ب)

شکل م ۴-۶۵ و م ۴-۶۶

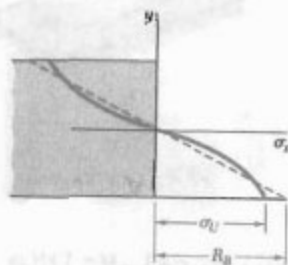
۴-۶۶ کوپل  $M = 2 \text{ kN.m}$  بر انتهای یک میله فولادی وارد شده است. مطلوبست ماکزیم تنش در میله به شرطی که: (الف) میله دارای شیارهای نیم‌دایره‌ای با شعاع  $r = 15 \text{ mm}$  باشد (شکل م ۴-۶۵ الف)، (ب) شیارها حذف شوند و میله به صورت نشان داده شده در شکل م ۴-۶۵ ب در آید.

اگر  $\sigma_x$  تابع معلومی از  $\epsilon_x$  باشد، از معادله (۴-۱۰) برای بیان  $\sigma_x$  برحسب  $y$  می‌توان استفاده، و انتگرال در (۴-۳۱) را به صورت تحلیلی تعیین کرد. در غیر اینصورت، لنگر خمشی  $M$  را با انتگرالگیری عددی باید به دست آورد. توجه کنید که انتگرال در معادله (۴-۳۱) همان اول سطح شکل ۴-۳۶ را، که بالای محور افقی است و با منحنی توزیع تنش و محور عمودی محدود شده است، نسبت به محور افقی نشان می‌دهد.

لنگر خمشی نهایی  $M_U$  که باعث شکست عضو می‌شود یک پارامتر مهم است، و آن را از استقامت نهایی  $\sigma_U$  ماده می‌توان به دست آورد. برای این منظور، قرار می‌دهیم  $\sigma_{max} = \sigma_U$  و محاسبه را مانند قبل انجام می‌دهیم. البته، در عمل بهتر است  $M_U$  را از روی نمونه‌ای از ماده داده شده به طور آزمایشی بیابیم. سپس، با فرض توزیع خیالی تنش  $\epsilon_x$  از معادله (۴-۱۵) برای تعیین ماکزیمم تنش متناظر  $R_B$  استفاده می‌کنیم:

$$R_B = \frac{M_U c}{I} \quad (۴-۳۲)$$

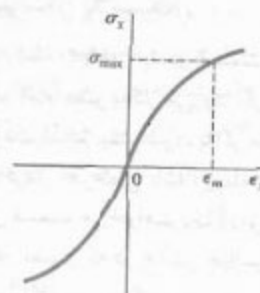
تنش خیالی  $R_B$  را مدول شکست خمشی ماده می‌گویند. از معادله ۴-۳۲ برای تعیین لنگر خمشی نهایی عضوی که مدول شکست آن معلوم است می‌توان استفاده کرد. در عضوی با مقطع عرضی مستطیلی، از توزیع تنش واقعی و خیالی نشان داده شده در شکل ۴-۳۷، مقدار یکسان  $M_U$  به دست می‌آید. لذا، مساحت‌هایی که با این توزیع‌ها داده می‌شوند دارای همان اول یکسان نسبت به محور افقی هستند. در نتیجه، مدول گسیختگی  $R_B$  همواره از استقامت نهایی واقعی  $\sigma_U$  بزرگتر است.



شکل ۴-۳۷

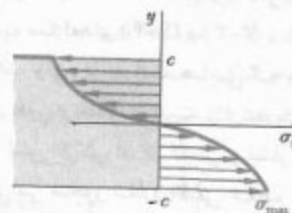
#### ۴-۹. عضوهای الاستوپلاستیک

برای اطلاعات بیشتر درباره رفتار پلاستیکی یک عضو تحت خمشی، عضوی را که از ماده الاستوپلاستیک ساخته شده است در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که دارای مقطع عرضی مستطیلی



شکل ۴-۳۵

توزیع تنش در مقطع عرضی عضو، یعنی نمودار  $\sigma_x$  برحسب  $y$ ، به صورت زیر به دست می‌آید. با فرض اینکه  $\sigma_{max}$  معلوم شده است، ابتدا مقدار متناظر  $\epsilon_m$  را از نمودار تنش-کرنش می‌یابیم و این مقدار را در معادله (۴-۱۰) می‌گذاریم. سپس، برای هر مقدار  $y$ ، مقدار متناظر  $\epsilon_x$  را از معادله (۴-۱۰) یا شکل (۴-۳۵) می‌یابیم، و از نمودار تنش-کرنش شکل ۴-۳۵ تنش  $\sigma_x$  متناظر با این مقدار  $\epsilon_x$  را به دست می‌آوریم. با ترسیم  $\sigma_x$  برحسب  $y$ ، توزیع تنش دلخواه به دست می‌آید (شکل ۴-۳۶).



شکل ۴-۳۶

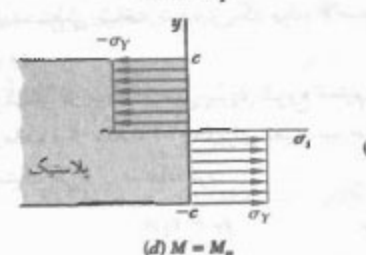
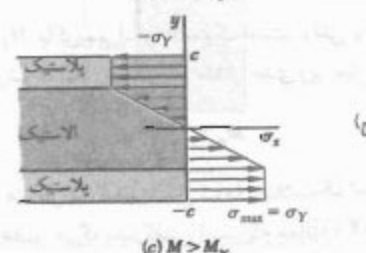
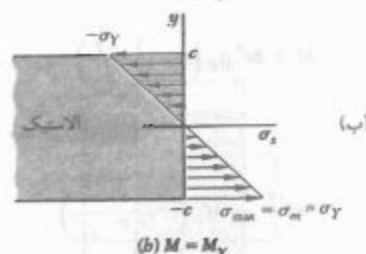
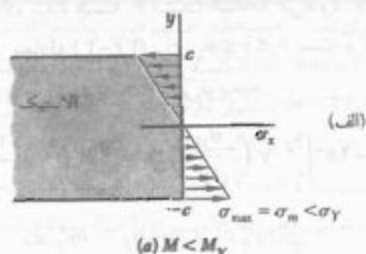
برای استنتاج معادله (۴-۳) در قسمت ۴-۲، هیچ رابطه خاصی را بین تنش و کرنش در نظر نگرفتیم. بنابراین، برای تعیین لنگر خمشی  $M$  متناظر با توزیع تنش به دست آمده در شکل ۴-۳۶، از معادله (۴-۳) استفاده می‌کنیم. برای یک عضو با مقطع عرضی مستطیلی به عرض  $b$ ، جزء مساحت در معادله (۴-۳) به صورت  $dA = b dy$  است و می‌نویسیم:

$$M = -b \int_{-c}^c y \sigma_x dy \quad (۴-۳۰)$$

که در آن  $\sigma_x$  تابعی از  $y$  است که در شکل ۴-۳۶ رسم شده است. چون  $\sigma_x$  یک تابع فرد از  $y$  است، معادله (۴-۳۰) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$M = -2b \int_0^c y \sigma_x dy \quad (۴-۳۱)$$





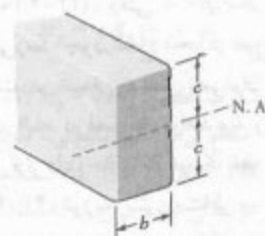
شکل ۴-۴۰

با افزایش بیشتر لنگر خمشی، نواحی پلاستیک در عضو گسترش می‌یابند، به طوری که تنش یکنواخت در ناحیه بالایی برابر با  $-\sigma_y$  و در ناحیه پایینی برابر با  $+\sigma_y$  است (شکل ۴-۴۰ ج). بین این نواحی پلاستیک، هسته الاستیک وجود دارد که در آن تنش  $\sigma_x$  برحسب  $y$  به صورت خطی تغییر می‌کند:

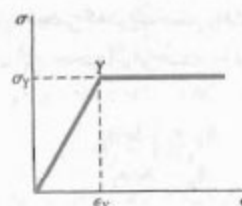
$$\sigma_x = -\frac{\sigma_y}{y_y} y \quad (۴-۳۶)$$

در رابطه بالا،  $y_y$  نصف ضخامت هسته الاستیک است. با افزایش  $M$ ، نواحی پلاستیک گسترش می‌یابند تا اینکه تغییر شکل کاملاً پلاستیک می‌شود (شکل ۴-۴۰ د).

به عرض  $b$  و به ارتفاع  $2c$  است (شکل ۴-۳۸). در قسمت ۱۷-۲ دیدیم که نمودار تنش-کرنش برای یک ماده الاستوپلاستیک ایده‌آلی مانند شکل ۴-۳۹ است.



شکل ۴-۳۸



شکل ۴-۳۹

تا وقتی تنش قائم  $\sigma_x$  از استقامت تسلیم  $\sigma_y$  بیشتر نشده است، قانون هوک به کار می‌رود و توزیع تنش در عرض این مقطع به صورت خطی است (شکل ۴-۴۰ الف). ماکزیمم مقدار تنش چنین است:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (۴-۱۵)$$

با افزایش لنگر خمشی،  $\sigma_m$  سرانجام به مقدار  $\sigma_y$  می‌رسد (شکل ۴-۴۰ ب). با جایگذاری در معادله (۴-۱۵) و با حل مقدار متناظر  $M$ ، مقدار  $M_y$  لنگر خمشی در شروع تسلیم به دست می‌آید:

$$M_y = \frac{I}{c} \sigma_y \quad (۴-۳۳)$$

لنگر  $M_y$  را ماکزیمم لنگر الاستیک می‌گویند، زیرا بزرگترین لنگری است که به ازای آن تغییر شکل کاملاً الاستیک است. برای مقطع عرضی مستطیلی،

$$\frac{I}{c} = \frac{b(2c)^3}{12c} = \frac{1}{3} bc^2 \quad (۴-۳۴)$$

در نتیجه،

$$M_y = \frac{1}{3} bc^2 \sigma_y \quad (۴-۳۵)$$

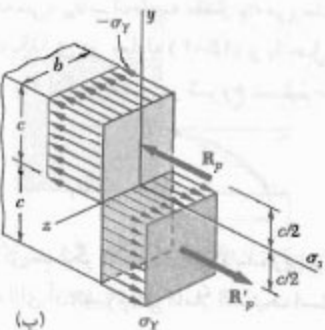
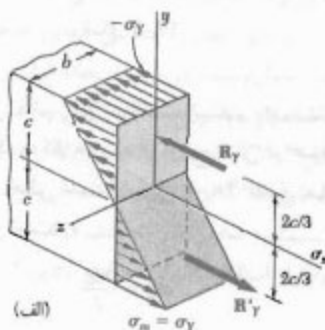
معادله (۴-۴۳) فقط پس از شروع تسلیم، یعنی برای  $M < M_Y$ ، به کار می‌رود. برای  $M < M_Y$ ، از معادله (۴-۲۱) باید استفاده کرد.

طبق معادله (۴-۴۳)، وقتی  $\rho = 0$ ، لنگر خمشی به مقدار  $M_p = \frac{2}{3} M_Y$  می‌رسد. چون شعاع انحنا در هیچ نقطه‌ای از سطح خشی صفر نیست، در خمش خالص نمی‌توان تغییر شکل کاملاً پلاستیک داشت. البته، در فصل ۵ خواهید دید وقتی یک تیر تحت بارگذاری عرضی قرار دارد، حالت بالا در یک نقطه به وجود می‌آید.

در شکل ۴-۴۱، توزیع تنش متناظر با ماکزیمم لنگر الاستیک  $M_Y$  و متناظر با حالت حدی لنگر پلاستیک  $M_p$  در یک عضو مستطیلی در سه بعد نشان داده شده است. در هر دو حالت، برایند نیروهای کششی جزئی و برایند نیروهای فشاری جزئی از مراکز حجمی که توزیع تنش را نشان می‌دهند می‌گذرند و مقدار آنها با این حجم‌ها برابر است. در نتیجه،

$$R_Y = \frac{1}{3} bc \sigma_Y$$

$$R_p = bc \sigma_Y$$



شکل ۴-۴۱

\* معادله (۴۲-۲) برای عضوی به کار می‌رود که از ماده چکش سواری با نقطه تسلیم معین ساخته شده است، و استنتاج آن ربطی به شکل مقطع عرضی عضو و نمودار تنش-کرنش پس از نقطه تسلیم ندارد.

از معادله (۴-۳۱) برای تعیین مقدار لنگر خمشی متناظر با ضخامت داده شده هسته الاستیک استفاده می‌شود. با توجه به اینکه  $\sigma_Y$  در معادله (۴-۳۶) برای  $0 \leq y \leq y_Y$  است و در ناحیه  $y_Y \leq y \leq c$  برابر است با  $-\sigma_Y$ ، می‌نویسیم:

$$M = -2b \int_0^{y_Y} y \left( -\frac{\sigma_Y}{y_Y} y \right) dy - 2b \int_{y_Y}^c y (-\sigma_Y) dy$$

$$= \frac{2}{3} b y_Y^3 \sigma_Y + b c^2 \sigma_Y - b y_Y^2 \sigma_Y$$

$$M = b c^2 \sigma_Y \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y^2}{c^2} \right) \quad (4-37)$$

با توجه به معادله (۴-۳۵)،

$$M = \frac{2}{3} M_Y \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y^2}{c^2} \right) \quad (4-38)$$

که در آن  $M_Y$  ماکزیمم لنگر الاستیک است. وقتی  $y_Y$  به صفر نزدیک می‌شود، لنگر خمشی به مقدار حدی زیر میل می‌کند:

$$M_p = \frac{2}{3} M_Y \quad (4-39)$$

را، که متناظر با تغییر شکل کاملاً پلاستیک است، لنگر پلاستیک عضو می‌گویند. گفتنی است که معادله (۴-۳۹) فقط برای عضو مستطیلی ساخته شده از یک ماده الاستوپلاستیک به کار می‌رود.

توزیع کرنش در مقطع عرضی پس از شروع تسلیم به صورت خطی می‌ماند، و از معادله (۴-۸) برای تعیین نیم ضخامت  $y_Y$  هسته الاستیک می‌توان استفاده کرد:

$$y_Y = \epsilon_Y \rho \quad (4-40)$$

( $\epsilon_Y$  کرنش تسلیم و  $\rho$  شعاع انحنا متناظر با لنگر خمشی  $M \geq M_Y$  است). وقتی لنگر خمشی با  $M_Y$  برابر است،  $y_Y = c$ ، از معادله (۴-۴۰)،

$$c = \epsilon_Y \rho_Y \quad (4-41)$$

( $\rho_Y$  شعاع انحنا متناظر با ماکزیمم لنگر الاستیک  $M_Y$  است). از تقسیم (۴-۴۰) بر (۴-۴۱)، داریم:

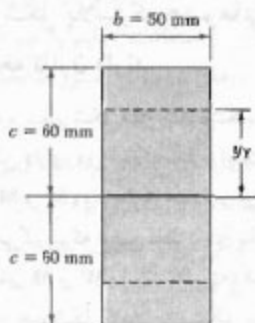
$$\frac{y_Y}{c} = \frac{\rho}{\rho_Y} \quad (4-42)$$

با جایگذاری  $y_Y/c$  از (۴-۴۲) در (۴-۳۸)، لنگر خمشی  $M$  بر حسب شعاع انحنا  $\rho$  سطح خشی به دست می‌آید:

$$M = \frac{2}{3} M_Y \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{\rho^2}{\rho_Y^2} \right) \quad (4-43)$$

مثال ۴-۵

عضوی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی  $50 \text{ mm} \times 120 \text{ mm}$  (شکل ۴-۴۲) تحت لنگر خمشی  $M = 36.8 \text{ kN.m}$  قرار دارد. این عضو از یک ماده الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم  $240 \text{ MPa}$  و مدول الاستیسیته  $200 \text{ GPa}$  ساخته شده است. مطلوب است: (الف) ضخامت هسته الاستیک، (ب) شعاع انحنای سطح خشی.



شکل ۴-۴۲

(الف) ضخامت هسته الاستیک. ابتدا، ماکزیمم لنگر الاستیک  $M_Y$  را تعیین می‌کنیم. با جایگذاری داده‌ها در معادله (۴-۳۴)، داریم

$$\frac{I}{c} = \frac{1}{3} bc^3 = \frac{1}{3} (50 \times 10^{-3} \text{ m})(60 \times 10^{-3} \text{ m})^3 = 120 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

با جایگذاری این مقدار، و نیز  $\sigma_Y = 240 \text{ MPa}$  در معادله (۴-۳۳)،

$$M_Y = \frac{I}{c} \sigma_Y = (120 \times 10^{-9} \text{ m}^4)(240 \text{ MPa}) = 28.8 \text{ kN.m}$$

با جایگذاری مقادیر  $M$  و  $M_Y$  در معادله (۴-۳۸)، داریم

$$36.8 \text{ kN.m} = \frac{3}{4} (28.8 \text{ kN.m}) \left(1 - \frac{1}{3} \frac{y_Y^2}{c^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{y_Y}{c}\right)^2 = 0.444 \Rightarrow \frac{y_Y}{c} = 0.666$$

چون  $c = 60 \text{ mm}$

$$y_Y = 0.666(60 \text{ mm}) = 40 \text{ mm}$$

لذا، ضخامت هسته الاستیک  $80 \text{ mm}$  است.

لنگرهای متناظر، به ترتیب، عبارتند از:

$$M_Y = \left(\frac{1}{3} c\right) R_Y = \frac{1}{3} bc' \sigma_Y \quad (4-44)$$

و

$$M_p = c R_p = bc' \sigma_Y \quad (4-45)$$

لذا، برای یک عضو مستطیلی،  $M_p = \frac{3}{4} M_Y$  (معادله ۴-۳۹). برای تیرها با مقطع عرضی غیرمستطیلی، محاسبه ماکزیمم لنگر الاستیک  $M_Y$  و ماکزیمم لنگر پلاستیک  $M_p$  معمولاً با استفاده از روش ترمیمی ساده می‌شود (مسئله نمونه ۴-۵). در این حالت کلی، دیده می‌شود که نسبت  $k = M_p/M_Y$  معمولاً  $\frac{3}{4}$  نیست. مثلاً، این نسبت برای تیرهای بال پهن تقریباً از  $1.08$  تا  $1.14$  است. نسبت  $k = M_p/M_Y$  فقط به شکل مقطع عرضی بستگی دارد، و آن را ضریب شکل مقطع عرضی می‌گویند. اگر ضریب شکل  $k$  و ماکزیمم لنگر الاستیک  $M_Y$  یک تیر معلوم باشند، لنگر پلاستیک  $M_p$  تیر را در رابطه زیر می‌توان یافت:

$$M_p = k M_Y \quad (4-46)$$

نسبت  $M_p/\sigma_Y$  را، که از تقسیم لنگر پلاستیک بر استقامت تسلیم  $\sigma_Y$  عضو به دست می‌آید، مدول پلاستیک عضو می‌گویند و با  $Z$  نشان داده می‌شود. اگر مدول پلاستیک  $Z$  و استقامت تسلیم  $\sigma_Y$  یک تیر معلوم باشند، لنگر پلاستیک  $M_p$  آن را از رابطه زیر می‌توان یافت:

$$M_p = Z \sigma_Y \quad (4-47)$$

با توجه به رابطه  $M_Y = S \sigma_Y$  (معادله ۴-۱۸)، و مقایسه آن با معادله (۴-۴۷)، نتیجه می‌شود که ضریب شکل  $k$  را برحسب نسبت مدول پلاستیک به مدول الاستیک می‌توان بیان کرد:

$$k = \frac{M_p}{M_Y} = \frac{Z \sigma_Y}{S \sigma_Y} = \frac{Z}{S} \quad (4-48)$$

طبق معادله‌های (۴-۴۵) و (۴-۴۷)، مدول پلاستیک یک تیر مستطیلی چنین است:

$$Z = \frac{M_p}{\sigma_Y} = \frac{bc' \sigma_Y}{\sigma_Y} = bc' = \frac{1}{3} bh^2$$

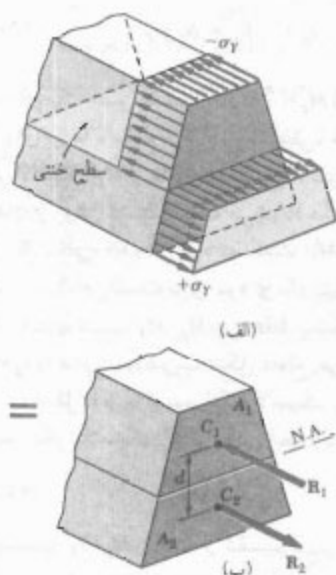
( $b$  و  $h$ ، به ترتیب، عرض و ارتفاع مقطع عرضی تیر هستند). طبق معادله (۴-۱۹)، مدول الاستیک این تیر چنین است:

$$S = \frac{1}{6} bh^2$$

با جایگذاری مقادیر  $Z$  و  $S$  در معادله (۴-۴۸)، ضریب شکل تیر مستطیلی به دست می‌آید:

$$k = \frac{Z}{S} = \frac{\frac{1}{3} bh^2}{\frac{1}{6} bh^2} = \frac{3}{2}$$

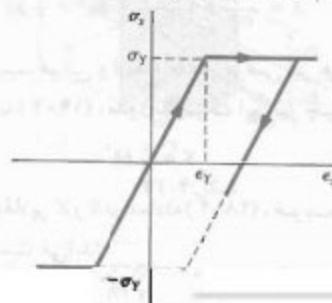
در مسئله نمونه ۴-۶، لنگر پلاستیک عضوی که فقط یک صفحه تقارن دارد محاسبه شده است.



شکل ۴-۴۳

#### ۴-۱۱ تنش‌های باقیمانده

در قسمت‌های قبل دیدیم که اگر لنگر خمشی وارد بر یک عضو الاستوپلاستیک به اندازه کافی بزرگ باشد، در آن ناحیه پلاستیک به وجود می‌آید. اگر لنگر خمشی دوباره تا صفر کاهش یابد، کاهش تنش و کرنش در هر نقطه را در نمودار تنش-کرنش با یک خط مستقیم می‌توان نشان داد (شکل ۴-۴۴). همانطور که خواهید دید، مقدار نهایی تنش در یک نقطه، به‌طور کلی، صفر نیست. در اغلب نقاط، تنش باقیمانده و تنشی وجود دارد که ممکن است با ماکزیمم تنش ایجاد شده در انتهای فاز بارگذاری هم‌علامت باشد یا نباشد.



شکل ۴-۴۴

(ب) شعاع انحنا. کرنش تسلیم چنین است:

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{240 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 1.2 \times 10^{-3}$$

با حل از معادله (۴-۴۰) و با جایگذاری مقادیر  $\epsilon_y$  و  $\sigma_y$

$$\rho = \frac{y_y}{\epsilon_y} = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ m}}{1.2 \times 10^{-3}} = 33.3 \text{ m}$$

۴-۱۰ تغییر شکل پلاستیک عضوهایی که فقط یک

صفحه تقارن دارند

هنگام بحث درباره تغییر شکل‌های پلاستیک، فرض می‌شد عضو تحت خمش دارای دو صفحه تقارن است، یکی صفحه شامل کوپل‌های  $M$  و  $M'$ ، و دیگری عمود بر آن صفحه. اکنون، حالتی را در نظر می‌گیریم که عضو فقط دارای یک صفحه تقارن، شامل کوپل‌های  $M$  و  $M'$  است. البته، فقط حالتی را تحلیل می‌کنیم که تغییر شکل کاملاً پلاستیک است و در آن تنش قائم یکنواخت در بالای سطح خشی دارای مقدار  $+\sigma_y$  و در پایین آن سطح دارای مقدار  $+\sigma_y$  است (شکل ۴-۴۳ الف).

همانطور که در قسمت ۴-۸ گفته شد، وقتی مقطع عرضی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح متقارن نباشد، نمی‌توان فرض کرد محور خشی بر محور گذرا از مرکز سطح متطبق است. برای تعیین مکان محور خشی، نیروی برآیند فشاری  $R_1$  و نیروی برآیند کششی  $R_2$  را در شکل ۴-۴۳ ب که، به ترتیب، بر قسمت‌های  $A_1$  و  $A_2$  از مقطع عرضی وارد می‌شوند. در نظر می‌گیریم  $A_1$  و  $A_2$ ، به ترتیب، بالای محور خشی و پایین آن قرار دارند. چون نیروهای  $R_1$  و  $R_2$  یک کوپل معادل با کوپل وارد بر عضو را تشکیل می‌دهند، دارای مقدار یکسان هستند. بنابراین،  $R_1 = R_2$  یا  $A_1 \sigma_y = A_2 \sigma_y$ . در نتیجه،  $A_1 = A_2$ . به عبارت دیگر، محور خشی مقطع عرضی را به دو قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کند. گفتنی است که محوری که به این طریق به دست می‌آید، به‌طور کلی، محور گذرا از مرکز سطح مقطع نیست.

همچنین، مشاهده می‌شود که خطوط اثر برآیندهای  $R_1$  و  $R_2$  از مراکز سطح  $C_1$  و  $C_2$  دو قسمتی که در بالا تعریف شدند می‌گذرند. اگر فاصله بین  $C_1$  و  $C_2$  را با  $d$  و مساحت کل مقطع عرضی را با  $A$  نشان دهیم، لنگر پلاستیک عضو را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$M_p = \left(\frac{1}{2} A \sigma_y\right) d$$

توزیع تنش معکوس ناشی از لنگر خمشی  $36/8 \text{ kN.m}$  در فاز بار برداری به صورت خطی است و در شکل ۴-۴۵ ب نشان داده شده است. ماکزیمم تنش  $\sigma'_m$  از معادله (۴-۱۵) به دست می آید. از مثال ۴-۵۵،  $I/c = 120 \times 10^{-8} \text{ m}^3$  و می نویسیم

$$\sigma'_m = \frac{Mc}{I} = \frac{36/8 \text{ kN.m}}{120 \times 10^{-8} \text{ m}^3} = 306/7 \text{ MPa}$$

با ترکیب این دو توزیع تنش، تنش های باقیمانده به دست می آید (شکل ۴-۴۵ ج). دیده می شود، با وجود اینکه تنش های معکوس از استقامت تسلیم  $\sigma_y$  بیشتر می شوند، فرض توزیع خطی تنش های معکوس هنوز صحت دارد، زیرا این تنش ها از  $\sigma_y$  بیشتر نشده اند.

(ب) شعاع انحنا پس از باربرداری. قانون هوک را در هر نقطه از هسته  $40 < |y| \leq 40 \text{ mm}$  می توان به کار برد، زیرا هیچ تغییر شکل پلاستیکی در آن قسمت وجود نمی آید. لذا، کرنش باقیمانده در فاصله  $y = 40 \text{ mm}$  چنین است:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{-35/5 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = -177/5 \times 10^{-6}$$

با حل  $\rho$  از معادله (۴-۸) و با جایگذاری مقادیر  $\epsilon_x$  و  $y$

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = -\frac{40 \times 10^{-3} \text{ m}}{177/5 \times 10^{-6}} = 225 \text{ m}$$

مقدار حاصل برای  $\rho$ ، پس از حذف بار، تغییر شکل دائمی عضو را نشان می دهد.

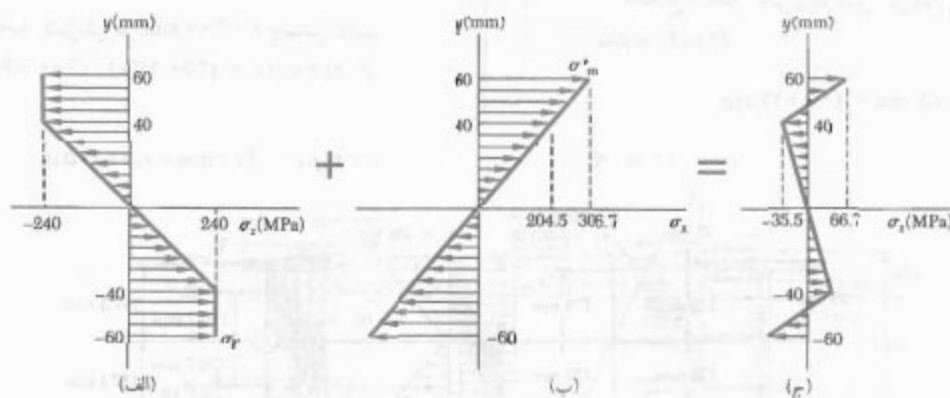
چون در فاز باربرداری در تمام نقاط رابطه خطی بین  $\sigma_x$  و  $\epsilon_x$  به کار می رود، برای تعیین تغییر تنش در هر نقطه می توان از معادله (۴-۱۶) استفاده کرد. به عبارت دیگر، فاز باربرداری را با فرض اینکه عضو کاملاً الاستیک است می توان بررسی کرد.

تنش های باقیمانده را با استفاده از اصل ترکیب می توان به دست آورد (به همان صورتی که در قسمت ۲-۲۰ برای بارگذاری مرکزی محوری توضیح داده شد و مجدداً در قسمت ۳-۱۱ برای پیچش به کار رفت). تنش های ناشی از اعمال لنگر خمشی  $M$  و تنش های معکوس ناشی از لنگر خمشی  $M$  را در فاز بار برداری در نظر می گیریم. تنش های گروه اول رفتار الاستوپلاستیکی عضو را در فاز بارگذاری، و تنش های گروه دوم رفتار خطی همان ماده را در فاز باربرداری نشان می دهند. با جمع کردن این دو گروه، توزیع تنش های باقیمانده در عضو به دست می آید.

#### مثال ۴-۶

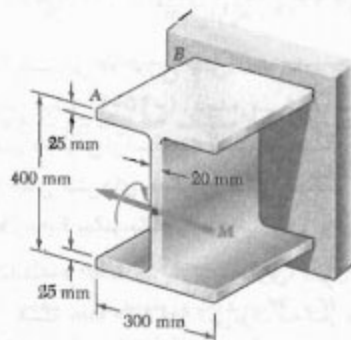
برای عضو مثال ۴-۵۵، مطلوب است: (الف) توزیع تنش های باقیمانده، (ب) شعاع انحنا پس از اینکه لنگر خمشی از مقدار ماکزیمم  $36/8 \text{ kN.m}$  به صفر کاهش می یابد.

(الف) توزیع تنش های باقیمانده. از مثال ۴-۵۵ دیده می شود که استقامت تسلیم  $\sigma_y$  برابر با  $240 \text{ MPa}$  و ضخامت هسته الاستیک،  $2y$  برابر با  $80 \text{ mm}$  است. توزیع تنش در عضو بارگذاری شده در شکل ۴-۴۵ الف نشان داده شده است.



## مسئله نمونه ۴-۵

تیر  $AB$  از فولاد کم آلیاژ پر استقامت الاستوپلاستیک (با  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\sigma_Y = 350 \text{ MPa}$ ) ساخته شده است. با صرفنظر از تأثیر گردها، مطلوب است لنگر خمشی  $M$  و شمع انحنای متناظر (الف) و قی تسلیم برای اولین بار روی می‌دهد، (ب) وقتی بال‌ها کاملاً پلاستیک شده‌اند.



حل

الف. شروع تسلیم. همان اینرسی مقطع نسبت به محور گذرا از مرکز سطح چنین است:

$$I = \frac{1}{12} (300 \text{ mm})(400 \text{ mm})^3 - \frac{1}{12} (300 \text{ mm} - 20 \text{ mm})(350 \text{ mm})^3 = 600 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

لنگر خمشی. برای  $\sigma_{\max} = \sigma_Y = 350 \text{ MPa}$  و  $c = 200 \text{ mm}$

$$M_Y = \frac{\sigma_Y I}{c} = \frac{(350 \text{ MPa})(600 \times 10^6 \text{ mm}^4)}{200 \text{ mm}}$$

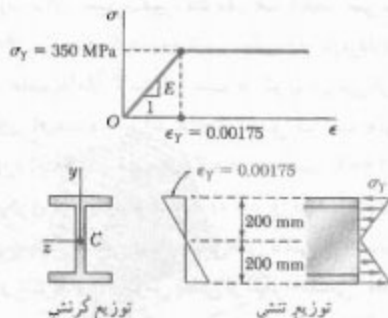
$$M_Y = 1.05 \times 10^7 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$

شمع انحنا. کرنش در  $c = 200 \text{ mm}$  چنین است

$$\epsilon_Y = \sigma_Y / E = (350 \text{ MPa}) / (200 \text{ GPa}) = 0.00175$$

معادله (۴-۴)،

$$c = \epsilon_Y \rho_Y \quad 200 \text{ mm} = 0.00175 \rho_Y \quad \rho_Y = 114 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$



ب. بال‌های کاملاً پلاستیک. وقتی بال‌ها کاملاً پلاستیک شده‌اند، کرنش و تنش در مقطع مانند شکل زیر هستند. نیروهای برآیند فشاری  $R_1$  و  $R_2$  را که بر بال و نیمه جان بالایی وارد می‌شوند، و نیروهای برآیند کششی  $R_3$  و  $R_4$  را در نظر می‌گیریم. می‌نویسیم:

$$R_1 = R_2 = (350 \text{ MPa})(0.3 \text{ m})(0.025 \text{ m}) = 2.625 \times 10^3 \text{ kN}$$

$$R_3 = R_4 = \frac{1}{2}(350 \text{ MPa})(0.175 \text{ m})(0.02 \text{ m}) = 613 \text{ kN}$$

لنگر خمشی. لنگر  $R_1, R_2, R_3, R_4$  را نسبت به محور  $z$  محاسبه و آنها را با هم جمع می‌کنیم:

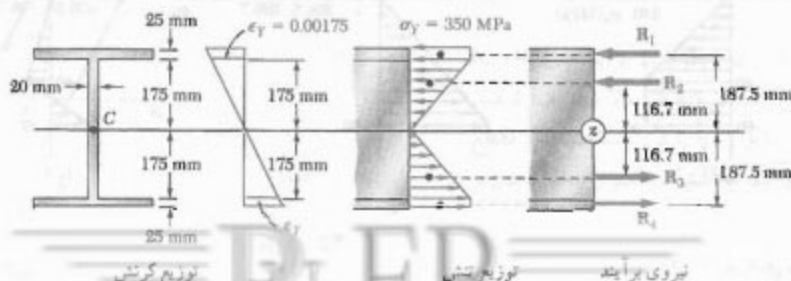
$$M = 2[R_1(0.1875 \text{ m}) + R_3(0.1167 \text{ m})] = 2[(2.625 \times 10^3)(0.1875) + (613)(0.1167)]$$

$$M = 1.13 \times 10^7 \text{ kN.m} \quad \blacktriangleleft$$

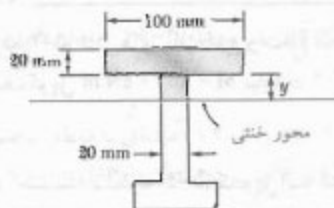
شمع انحنا. چون در این بارگذاری  $y_Y = 175 \text{ mm}$  از معادله (۴-۴)،

$$y_Y = \epsilon_Y \rho \quad 0.175 \text{ m} = (0.00175) \rho$$

$$\rho = 100 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$







این نیرو از مرکز سطح  $A_1$  می‌گذرد. می‌نویسیم:

$$R_1 = A_1 \sigma_y = [(0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 480 \text{ kN}$$

$$R_2 = A_2 \sigma_y = [(0.020 \text{ m})(0.030 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 96 \text{ kN}$$

$$R_3 = A_3 \sigma_y = [(0.020 \text{ m})(0.060 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}$$

$$R_4 = A_4 \sigma_y = [(0.060 \text{ m})(0.020 \text{ m})] 240 \text{ MPa} = 288 \text{ kN}$$

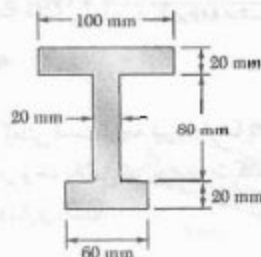
لنگر پلاستیک  $M_p$  از مجموع لنگر نیروها نسبت به محور  $z$  به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} M_p &= (0.030 \text{ m}) R_1 + (0.100 \text{ m}) R_2 + (0.030 \text{ m}) R_3 \\ &\quad + (0.070 \text{ m}) R_4 \\ &= (0.030 \text{ m})(480 \text{ kN}) + (0.100 \text{ m})(96 \text{ kN}) \\ &\quad + (0.030 \text{ m})(288 \text{ kN}) + (0.070 \text{ m})(288 \text{ kN}) \\ &= 44.16 \text{ kN.m} \quad M_p = 44.16 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

توجه: چون مقطع عرضی نسبت به محور  $z$  تقارن ندارد، مجموع لنگرهای  $R_1$  و  $R_2$  با مجموع لنگرهای  $R_3$  و  $R_4$  برابر نیست.

#### مسئله نمونه ۴-۶

لنگر پلاستیک  $M_p$  یک تیر با مقطع عرضی نشان داده شده را وقتی تیر حول یک محور افقی خم می‌شود بیابید. فرض کنید که تیر از نوع الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم  $240 \text{ MPa}$  است.



حل

محور خشی. وقتی تغییر شکل کاملاً پلاستیک است، محور خشی مقطع عرضی را به دو قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کند، چون مساحت کل عبارت است از:

$$A = (100)(20) + (80)(20) + (60)(20) = 4800 \text{ mm}^2$$

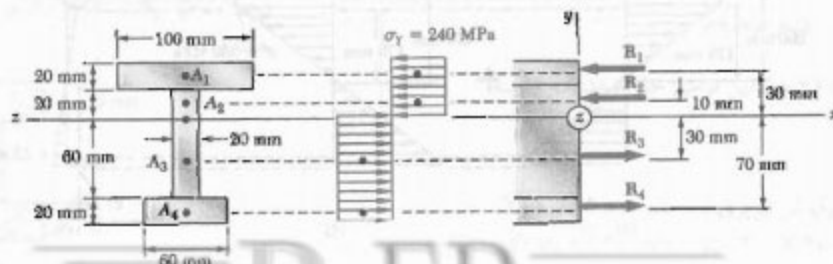
مساحتی که بالای محور خشی قرار دارد  $2400 \text{ mm}^2$  است. می‌نویسیم:

$$(20)(100) + 20y = 2400 \Rightarrow y = 20 \text{ mm}$$

توجه کنید که محور خشی از مرکز سطح مقطع عرضی نمی‌گذرد.

لنگر پلاستیک. براینده نیروهای جزئی وارد بر مساحت  $A_i$  چنین است:

$$R_i = A_i \sigma_y$$

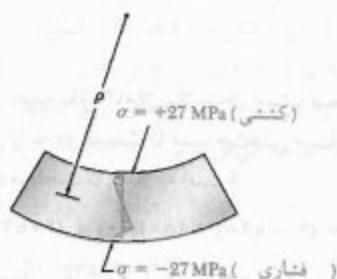


شعاع انحنای دائمی. در  $y = 175 \text{ mm}$ ، تنش باقیمانده برابر است با  $\sigma = -20 \text{ MPa}$ . چون هیچ تغییر شکل پلاستیک در این نقطه روی نداده است، قانون هوک را می‌توان به کار برد و داریم  $\epsilon_y = \sigma/E$ ، با توجه به معادله (۴-۸)،

$$\rho = -\frac{y}{\epsilon_x} = -\frac{yE}{\sigma} = -\frac{(0.175 \text{ m})(200 \text{ GPa})}{-20 \text{ MPa}} = +1750 \text{ m}$$

$$\rho = 1750 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

گفتنی است گرچه تیر به طرف بالا تقعر دارد، ولی تنش باقیمانده در وجه بالایی تیر به صورت کششی و در وجه پایینی به صورت فشاری است.



مسئله نمونه ۴-۷  
برای تیر مسئله نمونه ۴-۵، تنش‌های باقیمانده و شعاع انحنای دائمی را پس از حذف کوپل  $M = 1130 \text{ kN.m}$  بیابید.

حل

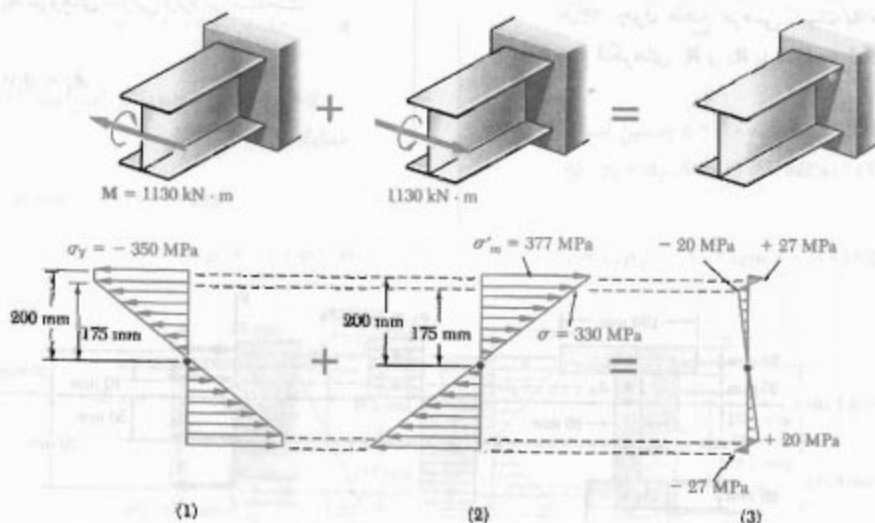
بارگذاری. در مسئله نمونه ۴-۵، کوپل با لنگر  $M = 1130 \text{ kN.m}$  وارد شد و تنش‌های نشان داده شده در شکل ۱ به دست آمد.

باربرداری الاستیک. با اعمال لنگر مخالف  $M = -1130 \text{ kN.m}$  (که مساوی و متضاد با لنگر کوپل اولیه است)، تیر باربرداری می‌شود. در فاز باربرداری، رفتار تیر کاملاً الاستیک است. از مسئله نمونه ۴-۵،  
 $I = 600 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ، در نتیجه، تنش ماکزیمم چنین است:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(1130 \text{ kN.m})(0.175 \text{ m})}{600 \times 10^6 \text{ mm}^4} = 377 \text{ MPa}$$

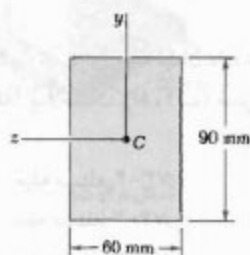
تنش‌های ناشی از باربرداری در شکل ۲ نشان داده شده‌اند.

تنش‌های باقیمانده. با ترکیب تنش‌های ناشی از بارگذاری (شکل ۱) و باربرداری (شکل ۲)، تنش‌های باقیمانده در تیر به دست می‌آید (شکل ۳).

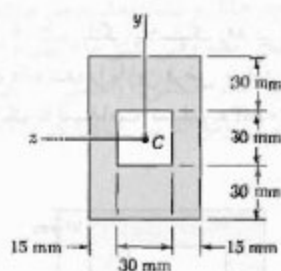


۷۲-۴ در مسئله ۷۱-۴، مقدار  $M$  را برای شعاع زیراسیون  $0.9\text{ m}$  بیابید.

۷۳-۴ و ۷۴-۴ میله‌ای با مقطع عرضی نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک ( $E = 200\text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 240\text{ MPa}$ ) ساخته شده است. برای خمش حول محور  $z$ ، مطلوبست لنگر خمشی که به‌ازای آن: (الف) تسلیم برای اولین بار روی می‌دهد، (ب) مناطق پلاستیک در بالا و پایین میله به ضخامت  $3\text{ mm}$  هستند.

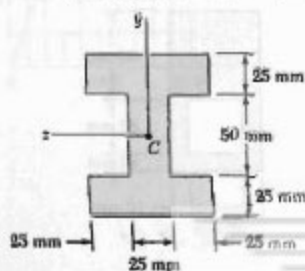


شکل م ۷۳-۴



شکل م ۷۴-۴

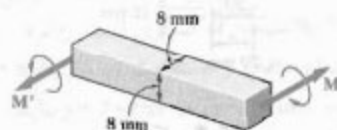
۷۵-۴ و ۷۶-۴ میله‌ای با مقطع عرضی نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک ( $E = 200\text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 300\text{ MPa}$ ) ساخته شده است. برای خمش حول محور  $z$ ، مطلوبست لنگر خمشی که به‌ازای آن: (الف) تسلیم برای اولین بار روی می‌دهد، (ب) مناطق پلاستیک در بالا و پایین میله به ضخامت  $25\text{ mm}$  هستند.



شکل م ۷۵-۴

## مسائل

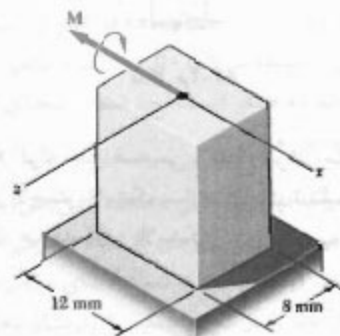
۶۷-۴ میله فولادی با مقطع عرضی نشان داده شده از نوع الاستوپلاستیک است.  $E = 200\text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 230\text{ MPa}$ . مطلوبست لنگر خمشی  $M$  که به‌ازای آن: (الف) ابتدا تسلیم روی می‌دهد، (ب) مناطق پلاستیک در بالا و پایین میله به ضخامت  $2\text{ mm}$  باشند.



شکل م ۶۷-۴

۶۸-۴ در مسئله ۶۷-۴، ضخامت مناطق پلاستیک را در بالا و پایین میله در شرایط زیر بیابید: (الف)  $M = 30\text{ N.m}$ ، (ب)  $M = 35\text{ N.m}$ .

۶۹-۴ میله منشوری نشان داده شده با  $\sigma_y = 300\text{ MPa}$  تحت کوپل  $M$  که به‌موازات محور  $x$  است قرار دارد. مطلوبست لنگر  $M$  کوپل که به‌ازای آن: (الف) تسلیم برای اولین بار روی می‌دهد، (ب) هسته الاستیک میله به ضخامت  $4\text{ mm}$  است.

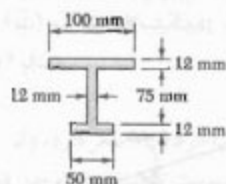


شکل م ۶۹-۴

۷۰-۴ مسئله ۶۹-۴ را با این فرض حل کنید که  $M$  به موازات محور  $z$  باشد.

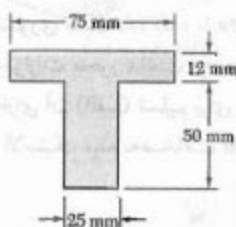
۷۱-۴ میله چهارگوش توپری به ضلع  $15\text{ mm}$  از فولاد الاستوپلاستیک است.  $E = 200\text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 230\text{ MPa}$ . اگر کوپل  $M$  به موازات یک ضلع مقطع عرضی بر میله وارد شود، مقدار  $M$  را برای شعاع زیراسیون  $1.8\text{ m}$  بیابید.

۸۳-۴ لنگر پلاستیک  $M_p$  را برای مقطع عرضی نشان داده شده بیابید. تیر از جنس فولاد الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم  $250 \text{ MPa}$  است.



شکل م-۸۳

۸۴-۴ لنگر پلاستیک  $M_p$  را برای مقطع عرضی نشان داده شده بیابید. تیر از جنس فولاد الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم  $330 \text{ MPa}$  است.



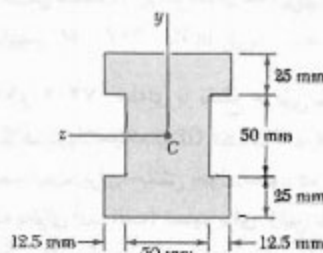
شکل م-۸۴

۸۵-۴ لوله جدار ضخیمی با مقطع عرضی نشان داده شده از فولاد الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم  $\sigma_y$  ساخته شده است. عبارت لنگر پلاستیک  $M_p$  را بر حسب  $\sigma_y$  و  $c_1$  و  $c_2$  بیابید.



شکل م-۸۵ و م-۸۶

۸۶-۴ لنگر پلاستیک  $M_p$  لوله جدار ضخیمی با مقطع عرضی نشان داده شده را بیابید در صورتی که بدانیم  $\sigma_y = 240 \text{ MPa}$  و  $c_1 = 40 \text{ mm}$  و  $c_2 = 60 \text{ mm}$ .

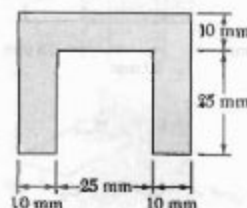


شکل م-۷۶

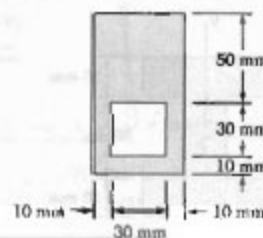
۷۷-۴ تا ۸۰-۴ برای میله نشان داده شده، مطلوب است: (الف) لنگر کاملاً پلاستیک  $M_p$ ، (ب) ضریب شکل مقطع عرضی.

- ۷۷-۴ میله مسئله ۷۳-۴
- ۷۸-۴ میله مسئله ۷۴-۴
- ۷۹-۴ میله مسئله ۷۵-۴
- ۸۰-۴ میله مسئله ۷۶-۴

۸۱-۴ و ۸۲-۴ لنگر پلاستیک  $M_p$  تیر فولادی با مقطع عرضی نشان داده شده را با این فرض بیابید که تیر از فولاد الاستوپلاستیک با استقامت تسلیم  $240 \text{ MPa}$  ساخته شده است.

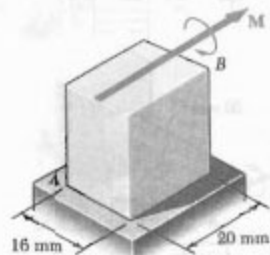


شکل م-۸۱



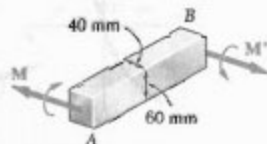
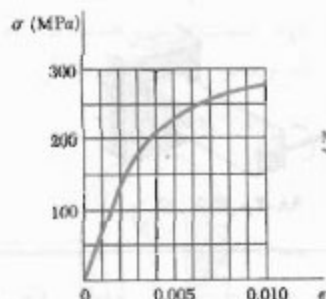
شکل م-۸۲

۹۵-۴ میلۀ منشوری  $AB$  از فولاد الاستوپلاستیک  $(E = 200 \text{ GPa})$  ساخته شده است. اگر با اعمال لنگر کوپل  $M = 350 \text{ N.m}$  بر میلۀ شعاع انحنا  $2/4 \text{ m}$  باشد، مطلوبست: (الف) استقامت تسلیم  $\sigma_y$  فولاد، (ب) ضخامت هسته الاستیک میلۀ.



شکل م ۹۵-۴

۹۶-۴ میلۀ منشوری  $AB$  از آلیاژ آلومینیوم، با نمودار تنش کرنش نشان داده شده، ساخته شده است. به فرض اینکه نمودارهای  $\sigma-\epsilon$  در فشار و کشش مشابه هم هستند، مطلوبست: (الف) شعاع انحنا ی میلۀ وقتی تنش ماکزیم  $250 \text{ MPa}$  است، (ب) مقدار متناظر لنگر خمشی. (راهنمایی: در قسمت ب،  $\sigma$  را بر حسب  $\epsilon$  رسم و از روش تقریبی انتگرالگیری استفاده کنید.



شکل م ۹۶-۴

۸۷-۴ و ۸۸-۴ برای تیر نشان داده شده، کوپلی که لنگر آن با لنگر کاملاً پلاستیک  $M_p$  مساوی است وارد و سپس حذف می‌شود. با استفاده از استقامت تسلیم  $240 \text{ MPa}$ ، تنش باقیمانده را در  $y = 45 \text{ mm}$  بیابید.  
۸۷-۴ تیر مسئله ۷۳-۴.  
۸۸-۴ تیر مسئله ۷۴-۴.

۸۹-۴ و ۹۰-۴ برای تیر نشان داده شده، کوپلی که لنگر آن با لنگر کاملاً پلاستیک  $M_p$  مساوی است وارد و سپس حذف می‌شود. با استفاده از استقامت تسلیم  $290 \text{ MPa}$ ، تنش باقیمانده را در  $y = 25 \text{ mm}$  و در  $y = 50 \text{ mm}$  بیابید.  
۸۹-۴ تیر مسئله ۷۵-۴.  
۹۰-۴ تیر مسئله ۷۶-۴.

۹۱-۴ کوپل خمشی بر میلۀ مسئله ۷۳-۴ وارد شده است، و مناطق پلاستیک به ضخامت  $30 \text{ mm}$  را در بالا و پایین میلۀ به وجود آورده است. پس از حذف کوپل، مطلوبست: (الف) تنش باقیمانده در  $y = 45 \text{ mm}$ ، (ب) نقاطی که در آنها تنش باقیمانده صفر است، (ج) شعاع انحنا ی متناظر با تغییر شکل دائمی میلۀ.

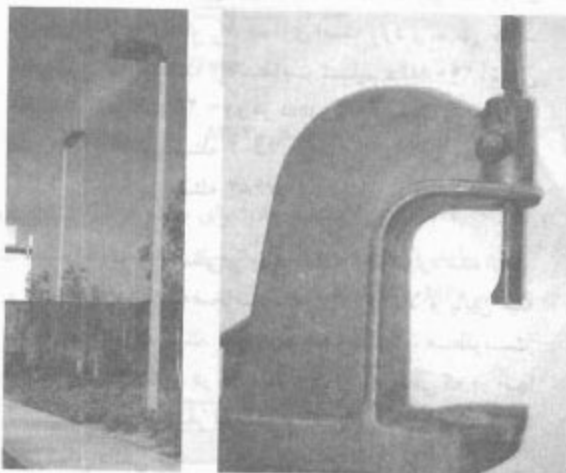
۹۲-۴ کوپل خمشی بر میلۀ مسئله ۷۵-۴ وارد شده است، و مناطق پلاستیک به ضخامت  $50 \text{ mm}$  را در بالا و پایین میلۀ به وجود آورده است. پس از حذف کوپل، مطلوبست: (الف) تنش باقیمانده در  $y = 50 \text{ mm}$ ، (ب) نقاطی که در آنها تنش باقیمانده صفر است، (ج) شعاع انحنا ی متناظر با تغییر شکل دائمی میلۀ.

۹۳-۴ یک میلۀ مستطیلی مستقیم و بی‌تنش، با اعمال دو کوپل  $M$  به صورت قوس دایره‌ای با شعاع  $\rho$  در می‌آید. پس از حذف کوپل‌ها، دیده می‌شود که شعاع انحنا ی میلۀ  $\rho_y$  است. اگر شعاع انحنا ی میلۀ را در شروع تسلیم با  $\rho_y$  نشان دهیم، نشان دهید که شعاع‌های انحنا در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{\rho_R} = \frac{1}{\rho} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{\rho}{\rho_y} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\rho}{\rho_y} \right) \right] \right\}$$

۹۴-۴ میلۀ توپری با مقطع عرضی مستطیلی از یک ماده الاستوپلاستیک ساخته شده است. اگر لنگر خمشی و شعاع انحنا را در شروع تسلیم، به ترتیب، با  $M_y$  و  $\rho_y$  نشان دهیم، مطلوبست: (الف) شعاع انحنا ی وقتی لنگر کوپل  $M = 1.25 M_y$  بر میلۀ وارد می‌شود، (ب) شعاع انحنا پس از حذف کوپل. نتایج را با استفاده از رابطه به دست آمده در مسئله ۹۳-۴ واری کنید.

حالتی بررسی می‌کنیم که خط اثر بار از مرکز سطح مقطع عرضی نگذرد. این حالت را بارگذاری خارج از مرکز می‌گویند. در شکل‌های ۴-۴۶ و ۴-۴۷، دو نمونه از بارگذاری خارج از مرکز نشان داده شده است. در تیرهای برق اتوبان‌ها، وزن لامپ موجب بارگذاری خارج از مرکز در تیر برق می‌شود. به‌طور مشابه، نیروهای عمودی وارد بر یک پرس باعث بارگذاری خارج از مرکز برای ستون نگهدارنده پرس می‌شوند.

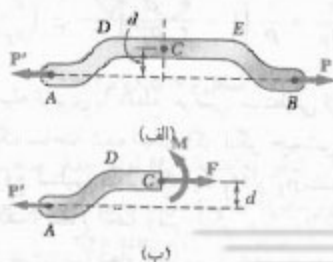


شکل ۴-۴۶

شکل ۴-۴۷

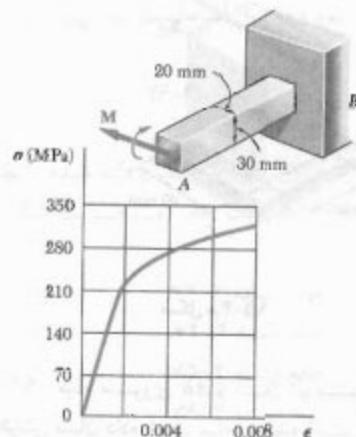
در این قسمت، فقط عضوهایی را تحلیل می‌کنیم که دارای صفحه تقارن هستند، و فرض می‌کنیم که بار در صفحه تقارن عضو وارد می‌شود (شکل ۴-۴۸ الف). لذا، نیروهای داخلی مؤثر بر یک مقطع عرضی داده شده را می‌توان با نیروی  $F$  وارد بر مرکز سطح مقطع عرضی و کوپل  $M$  که در صفحه عضو اثر می‌کند نشان داد (شکل ۴-۴۸ ب). از تعادل نمودار آزاد  $AC$  نتیجه می‌شود که نیروی  $F$  با  $P'$  مساوی و در جهت مخالف آن است و لنگر کوپل  $M$  با لنگر  $P'$  نسبت به  $C$  مساوی و در جهت مخالف آن است. اگر فاصله مرکز سطح  $C$  را از خط اثر نیروهای  $P$  و  $P'$  (خط  $AB$ ) با  $d$  نشان دهیم، داریم

$$F = P \quad \text{و} \quad M = Pd \quad (۴-۴۹)$$



شکل ۴-۴۸

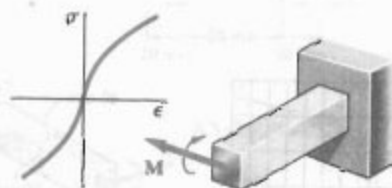
۴-۹۷. میله منشوری  $AB$  از آلپاز برنز، با نمودار تنش-کرنش داده شده، ساخته شده است. به‌فرض اینکه نمودارهای  $\sigma$ - $\epsilon$  در فشار و کشش مشابه هم هستند، مطلوب است: (الف) تنش ماکزیمم در میله وقتی شعاع آن  $2.5 \text{ mm}$  است، (ب) مقدار متناظر لنگر خمشی. (به راهنمایی مسئله ۴-۹۶ نگاه کنید).



شکل ۴-۹۷

۴-۹۸. میله منشوری با مقطع عرضی مستطیلی از آلپازی با نمودار تنش-کرنش نشان داده شده ساخته شده است. این نمودار را می‌توان با رابطه  $\epsilon = k\sigma^n$  برای  $\sigma > 0$  و  $\epsilon = -k\sigma^n$  برای  $\sigma < 0$  نشان داد. اگر کوپل  $M$  بر میله وارد شود، نشان دهید که تنش ماکزیمم عبارت است از

$$\sigma_m = \frac{1 + 2n}{3n} \frac{Mc}{I}$$



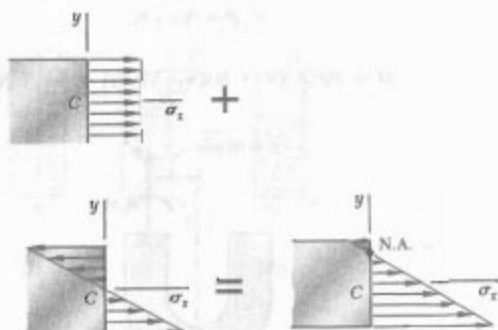
شکل ۴-۹۸

## ۴-۱۲ بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن

در قسمت ۵.۱ دیدیم که توزیع تنش را در مقطع عرضی عضوی که تحت بارگذاری محوری است می‌توان یکتواخت فرض کرد به شرطی که خط اثر بارهای  $P$  و  $P'$  از مرکز سطح مقطع عرضی بگذرد. این را بارگذاری مرکزی می‌گویند. حال، توزیع تنش را در



است که محور خمشی بر محور گذرا از مرکز سطح مقطع منطبق نیست، زیرا برای  $y = 0$ ،  $\sigma_x \neq 0$ .

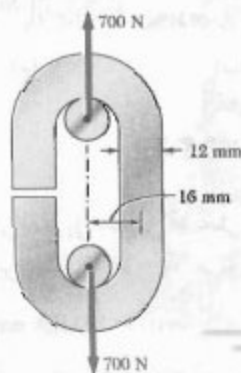


شکل ۵۱-۴

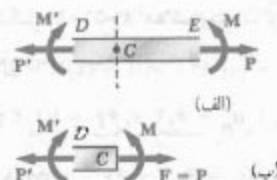
نتایج بالا فقط تا وقتی صحت دارند که اصل ترکیب (قسمت ۲-۱۲) و اصل سنت-ونانت (قسمت ۲-۱۷) به کار روند. یعنی، تنش‌های موجود از حد تناسب ماده فراتر نروند، تغییر شکل ناشی از خمش بر فاصله  $d$  در شکل ۴-۴۸ الف خیلی تأثیر نگذارد، و مقطع عرضی که در آن تنش محاسبه می‌شود خیلی نزدیک به نقاط  $D$  یا  $E$  در شکل ۴-۴۸ الف نباشند. این شرایط نشان می‌دهند که روش ترکیب را نمی‌توان برای تغییر شکل پلاستیک به کار برد.

#### مثال ۴-۷

با خم کردن میله‌های فولادی کم‌کربن به قطر ۱۲ mm، زنجیر حلقه باز نشان داده به دست آمده است (شکل ۴-۵۲). اگر بار ۷۰۰ N بر زنجیر وارد شود، مطلوب است: (الف) ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری در قسمت مستقیم حلقه، (ب) فاصله بین خط گذرا از مرکز سطح و محور خمشی مقطع عرضی.



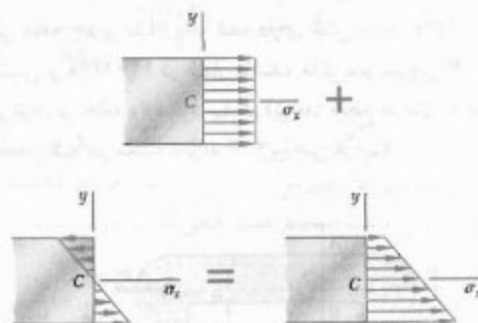
شکل ۵۲-۴



شکل ۴-۵۹

حال، قسمت مستقیم  $DE$  از عضو  $AB$  را جدا می‌کنیم و آن را تحت بارهای مرکزی  $P$  و  $P'$  و کوپل‌های  $M$  و  $M'$  قرار می‌دهیم (شکل ۴-۵۹). نیروهای داخلی در مقطع عرضی داده شده را با نیروی  $F$  و کوپل  $M$  نشان می‌دهیم. از ترکیب توزیع تنش یکنواخت ناشی از بارهای مرکزی  $P$  و  $P'$  و توزیع خطی ناشی از کوپل‌های خمشی  $M$  و  $M'$ ، توزیع تنش در برگذاری خارج از مرکز به دست می‌آید (شکل ۴-۵۰):

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{مرکزی}} + (\sigma_x)_{\text{خمشی}}$$



شکل ۵۰-۴

با توجه به معادله‌های (۵.۱) و (۴-۱۶)،

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \quad (۵-۴)$$

که در آن  $A$  مساحت مقطع عرضی و  $I$  میان اینرسی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح است، و  $y$  از محور مرکزی مقطع عرضی اندازه‌گیری می‌شود. رابطه بالا نشان می‌دهد که توزیع تنش در عرض مقطع خطی است نه یکنواخت. برحسب شکل هندسی مقطع عرضی و خروج از مرکز  $y$ ، تنش‌های مرکب می‌توانند دارای علامت یکسان باشند (شکل ۴-۵۰)، یا بعضی از آنها دارای علامت مثبت و بعضی دارای علامت منفی باشند (شکل ۴-۵۱). در حالت دوم، خطی در مقطع وجود دارد که بر امتداد آن  $\sigma_x = 0$  و این خط را محور خمشی مقطع می‌گویند. گفتنی

با ترکیب این دو توزیع تنش در بارگذاری خارج از مرکز داده شده را می‌یابیم (شکل ۴-۵۴). ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری در مقطع، به ترتیب، عبارتند از:

$$\sigma_t = \sigma_o + \sigma_m = 67.2 + 66 = 133.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \sigma_o - \sigma_m = 67.2 - 66 = 1.2 \text{ MPa}$$

(ب) فاصله بین محور گذرا از مرکز سطح و محور خشی. با قرار دادن  $\sigma_x = 0$  در معادله (۴-۵۰) و با حل  $y_o$ ، فاصله مزبور به دست می‌آید:

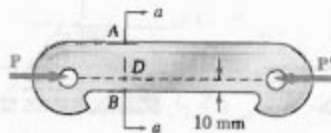
$$0 = \frac{P}{A} - \frac{My_o}{I}$$

$$y_o = \left(\frac{P}{A}\right)\left(\frac{I}{M}\right) = (67.2 \text{ MPa}) \frac{1.01719 \times 10^{-11} \text{ m}^4}{11.2 \text{ N.m}}$$

$$y_o = 0.56 \text{ mm}$$

مسئله نمونه ۴-۸

اگر حلقه چدنی نشان داده شده دارای تنش مجاز  $30 \text{ MPa}$  در کشش و  $120 \text{ MPa}$  در فشار باشند، ماکزیمم نیروی  $P$  را که می‌توان بر حلقه وارد کرد بیابید. (توجه: مقطع عرضی  $T$  شکل حلقه را قبلاً در مسئله نمونه ۴-۲ بررسی کردیم).



حل

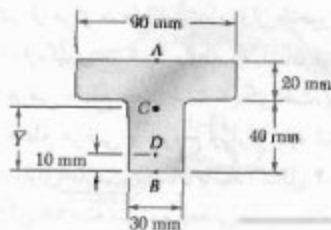
خواص مقطع عرضی از مسئله نمونه ۴-۲:

$$A = 3000 \text{ mm}^2 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad \bar{Y} = 38 \text{ mm} = 0.038 \text{ m}$$

$$I = 1.68 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

حال، می‌نویسیم:

$$d = (0.038 \text{ m}) - (0.010 \text{ m}) = 0.028 \text{ m}$$



مقطع a-a

(الف) ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری. نیروهای داخلی در مقطع عرضی معادلند با نیروی  $P$  و گویل خمشی  $M$  (شکل ۴-۵۳) با مقادیر زیر:

$$P = 700 \text{ N}$$

$$M = Pd = (700 \text{ N})(0.16 \text{ m}) = 112 \text{ N.m}$$

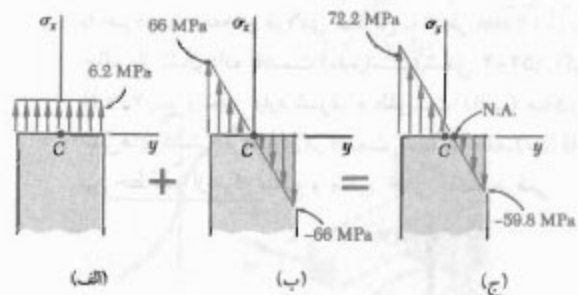


شکل ۴-۵۳

توزیع تنش در قسمت‌های الف و ب شکل ۴-۵۴ داده شده‌اند. توزیع ناشی از بار مرکزی  $P$  یکنواخت و مساوی با  $\sigma_o = P/A$  است. می‌نویسیم:

$$A = \pi c^2 = \pi (6 \text{ mm})^2 = 113.1 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_o = \frac{P}{A} = \frac{700 \text{ N}}{113.1 \text{ mm}^2} = 6.2 \text{ MPa}$$



شکل ۴-۵۴

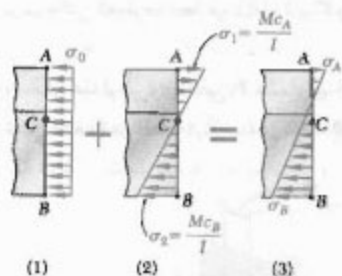
توزیع ناشی از گویل خمشی  $M$  خطی است و تنش ماکزیمم حاصل برابر است با  $\sigma_m = Mc/I$ . می‌نویسیم:

$$I = \frac{1}{4} \pi c^4 = \frac{1}{4} \pi (6 \text{ mm})^4 = 1.01719 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(112 \text{ N.m})(6 \text{ mm})}{1.01719 \text{ mm}^4} = 66 \text{ MPa}$$

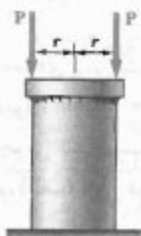
با انتخاب مقدار کوچکتر، تنش‌های حاصل از تنش مجاز بیشتر نمی‌شوند. در نتیجه،

$$P = 77.0 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$



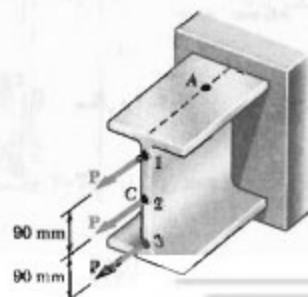
### مسائل

۹۹-۴ دو نیروی  $P$  را به‌طور جداگانه یا هم‌زمان می‌توان بر ورقی که به میله توپر استوانه‌ای به شعاع  $r$  جوش شده است وارد کرد. مطلوبست ماکزیمم تنش فشاری در میله استوانه‌ای: (الف) وقتی هر دو نیرو وارد شوند، (ب) وقتی یکی از نیروها وارد شود.



شکل م ۹۹-۴

۱۰۰-۴ سه بار محوری، هر یک با مقدار  $P = 50 \text{ kN}$ ، را بر انتهای تیر فولادی نورد  $W 200 \times 31.1$  می‌توان وارد کرد. مطلوبست تنش در نقطه  $A$ : (الف) برای بارگذاری نشان داده شده، (ب) برای وقتی که بارها فقط در نقاط ۱ و ۲ وارد شوند.



شکل م ۱۰۰-۴ و م ۱۰۱-۴

نیرو و کوپل در  $C$  را با سیستم نیرو-کوپل معادل در مرکز سطح  $C$  جایگزین می‌کنیم

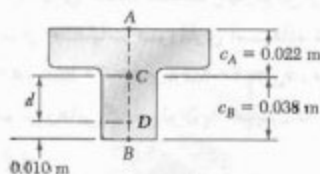
$$P = P \quad M = P(d) = P(0.7028 \text{ m}) = 0.7028 P$$

نیروی  $P$  وارد بر مرکز سطح باعث توزیع تنش یکنواخت می‌شود (شکل ۱) و کوپل خمشی  $M$  باعث توزیع تنش خطی می‌شود (شکل ۲).

$$\sigma_o = \frac{P}{A} = \frac{P}{3 \times 10^{-3}} = 333 P \quad (\text{فشاری})$$

$$\sigma_1 = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(0.7028 P)(0.7022)}{868 \times 10^{-9}} = 710 P \quad (\text{کششی})$$

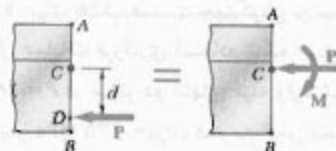
$$\sigma_2 = \frac{Mc_B}{I} = \frac{(0.7028 P)(0.7038)}{868 \times 10^{-9}} = 726 P \quad (\text{فشاری})$$



ترکیب. با ترکیب توزیع تنش‌های ناشی از بار مرکزی  $P$  و کوپل خمشی  $M$ ، توزیع تنش کل به‌دست می‌آید (شکل ۳). چون کشش مثبت است و فشار منفی است، می‌نویسیم:

$$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = -333 P + 710 P = +377 P \quad (\text{کششی})$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Mc_B}{I} = -333 P - 726 P = -1059 P \quad (\text{فشاری})$$



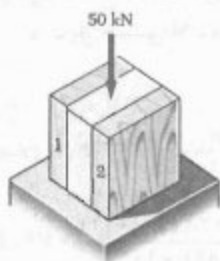
ماکزیمم بار مجاز. برای تعیین مقدار  $P$ ، که به‌ازای آن تنش کششی در نقطه  $A$  مساوی  $30 \text{ MPa}$  است، می‌نویسیم:

$$\sigma_A = 377 P = 30 \text{ MPa} \Rightarrow P = 79.6 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

برای تعیین مقدار  $P$ ، که به‌ازای آن تنش در  $B$  مساوی تنش مجاز فشاری  $120 \text{ MPa}$  است، می‌نویسیم:

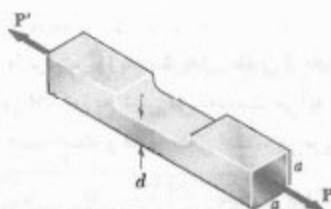
$$\sigma_B = -1059 P = -120 \text{ MPa} \Rightarrow P = 77.0 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

مطلوبست ماکزیمم تنش فشاری در ستون پس از اعمال بار ۵۰ kN در مرکز قسمت بالایی ستون در صورتی که: (الف) ستون به صورت گشت شده باشد، (ب) قطعه ۱ حذف شود، (ج) قطعات ۱ و ۲ حذف شوند.



شکل م ۱۰۵-۴

۱۰۶-۴ برای حذف قسمت چهارگوش از میله توپر نشان داده شده، از عملیات فرزکاری استفاده شده است. اگر  $\sigma_{all} = 60 \text{ MPa}$  و  $d = 20 \text{ mm}$ ،  $a = 30 \text{ mm}$ ، مطلوبست مقدار  $P$  ماکزیمم نیروهایی که می توان با اطمینان در مراکز دو انتهای میله وارد کرد.



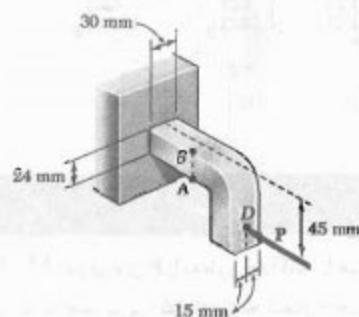
شکل م ۱۰۶-۴ و م ۱۰۷-۴

۱۰۷-۴ برای حذف قسمت چهارگوش از میله توپر نشان داده شده، از عملیات فرزکاری استفاده شده است. نیروها با مقدار  $P = 18 \text{ kN}$  در مراکز دو انتهای میله وارد شده اند. اگر  $\sigma_{all} = 125 \text{ MPa}$  و  $a = 30 \text{ mm}$ ، کمترین عمق مجاز  $d$  قسمت فرز شده را بیابید.

۱۰۸-۴ چهار نیروی نشان داده شده بر صفحه صلبی که توسط تیر توپر فولادی با شعاع  $a$  نگه داشته شده است وارد می شود. مطلوبست تنش ماکزیمم در تیر وقتی: (الف) تمام چهار نیرو وارد شوند، (ب) نیرو در  $D$  حذف شود، (ج) نیروها در  $C$  و  $D$  حذف شوند.

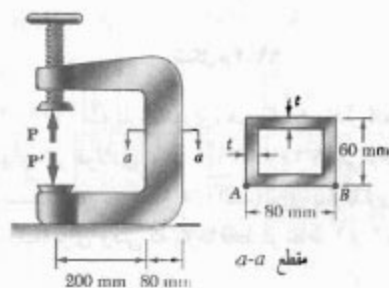
۱۰۹-۴ سه بار محوری، هر یک با مقدار  $P = 50 \text{ kN}$ ، را بر انتهای تیر فولادی نورد  $W 200 \times 31$  می توان وارد کرد. مطلوبست تنش در نقطه  $A$ : (الف) برای بارگذاری نشان داده شده، (ب) برای وقتی که بارها فقط در نقاط ۲ و ۳ وارد شوند.

۱۰۹-۴ اگر مقدار نیروی افقی  $P$  مساوی ۸ kN باشد، مطلوبست تنش: (الف) در نقطه  $A$ ، (ب) در نقطه  $B$ .



شکل م ۱۰۹-۴

۱۰۳-۴ قسمت عمودی پرس نشان داده شده، از یک لوله مستطیلی با ضخامت دیواره  $t = 10 \text{ mm}$  تشکیل شده است. اگر پرس را روی قطعات چوبی که چسب خورده اند تا نیروی  $P = 20 \text{ kN}$  سفت کنیم، (الف) تنش در نقطه  $A$ ، (ب) تنش در نقطه  $B$  را بیابید.



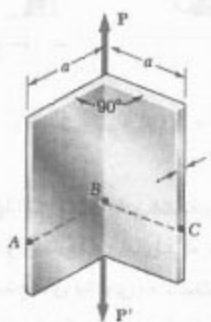
شکل م ۱۰۳-۴

۱۰۴-۴ مسئله ۱۰۳-۴ را برای  $t = 8 \text{ mm}$  حل کنید.

۱۰۵-۴ با میخ کردن دو قطعه چوبی  $25 \times 100 \text{ mm}$  به قطعه چوبی  $50 \times 100 \text{ mm}$ ، ستون کوتاهی ساخته شده است.

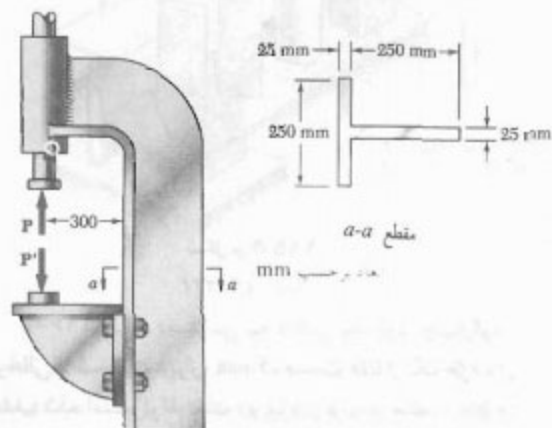
۱۱۱-۴. لوله فلزی با قطر خارجی ۱۸ mm و ضخامت دیواره ۲ mm باید دارای انحراف  $h$  باشد. اگر بدانیم که تنش ماکزیم پس از ایجاد انحراف نباید از ۴ برابر تنش در لوله مستقیم بیشتر باشد، ماکزیم انحراف مورد استفاده را بیابید.

۱۱۲-۴. عضو نشان داده شده از خم کردن یک ورق نازک فولادی به وجود آمده است. اگر ضخامت  $t$  در مقایسه با طول  $a$  این عضو کوچک باشد، مطلوبست: (الف) تنش در  $A$ ، (ب) تنش در  $B$ ، (ج) تنش در  $C$ .

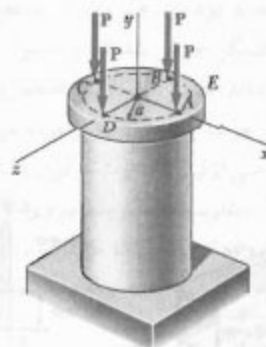


شکل م ۱۱۲-۴

۱۱۳-۴. اگر تنش مجاز در مقطع  $a-a$  از پرس هیدرولیکی نشان داده شده در کشش و فشار، به ترتیب، ۴۰ MPa و ۸۰ MPa باشد، ماکزیم نیروی  $P$  را که می توان بر پرس وارد کرد بیابید.

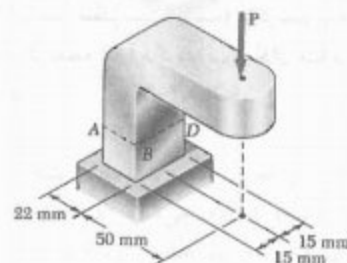


شکل م ۱۱۳-۴



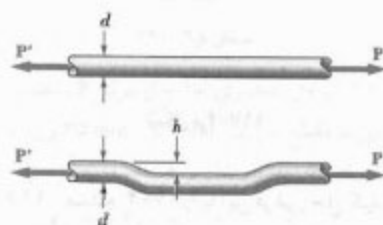
شکل م ۱۰۸-۴

۱۰۹-۴. اگر تنش مجاز در مقطع  $ABCD$  برابر با ۷۰ MPa باشد، ماکزیم نیروی  $P$  را که می توان بر براکت نشان داده شده وارد کرد بیابید.



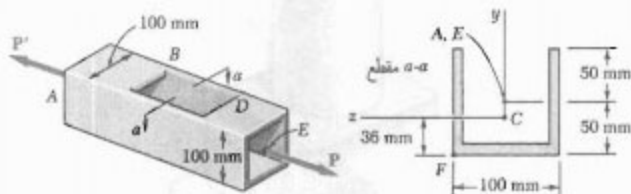
شکل م ۱۰۹-۴

۱۱۰-۴. میله توپر دایره ای به قطر  $d$  باید دارای انحراف  $h$  باشد. اگر بدانیم که تنش ماکزیم پس از ایجاد انحراف نباید از ۴ برابر تنش در میله مستقیم بیشتر باشد، ماکزیم انحراف مورد استفاده را بیابید.



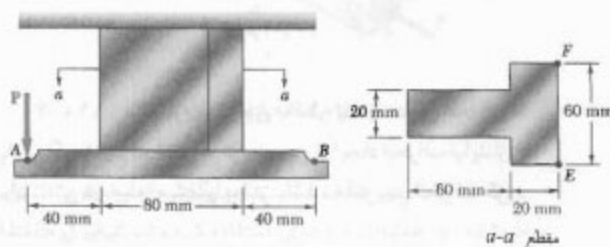
شکل م ۱۱۰-۴ و ۱۱۱-۴

۱۱۴-۴ اگر گیره نشان داده شده روی قطعات چوبی چسب خورده تا نیروی  $P = 400 \text{ N}$  سفت شود، در مقطع  $a-a$  مطلوب است: (الف) تنش در نقطه  $A$ ، (ب) تنش در نقطه  $D$ ، (ج) مکان محور خنثی.



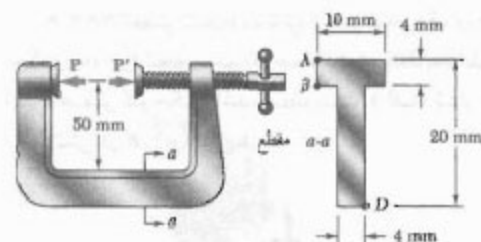
شکل م ۱۱۶-۴

۱۱۷-۴ اگر تنش مجاز در مقطع  $a-a$  آویز نشان داده شده  $150 \text{ MPa}$  باشد، مطلوب است: (الف) ماکزیم نیروی عمودی  $P$  که می توان در نقطه  $A$  وارد کرد، (ب) مکان متناظر محور خنثی مقطع  $a-a$ .



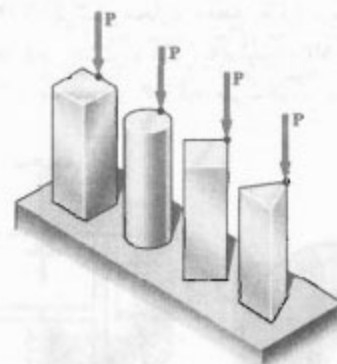
شکل م ۱۱۷-۴

۱۱۸-۴ مسئله ۱۷-۴ را با این فرض حل کنید که نیروی عمودی  $P$  در نقطه  $B$  وارد شود.



شکل م ۱۱۴-۴

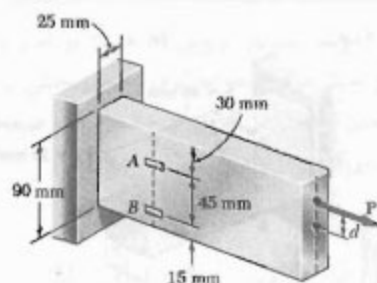
۱۱۵-۴ چهار بار نشان داده شده دارای مساحت مقطع عرضی یکسانند. برای بارگذاری های داده شده، نشان دهید که: (الف) ماکزیم تنش های فشاری به نسبت  $4:5:7:9$  هستند. (ب) ماکزیم تنش های کششی به نسبت  $2:3:5:3$  هستند. (واحدایی: مقطع عرضی میله به صورت مثلث متساوی الاضلاع است.)



شکل م ۱۱۵-۴

۱۱۶-۴ برای دسترسی به داخل یک لوله چهارگوش توخالی با ضخامت دیواره  $6 \text{ mm}$ ، قسمت  $CD$  از یک طرف آن حذف شده است. لوله تحت دو نیروی برابر و متضاد  $60 \text{ kN}$  قرار می گیرد. این نیروها در مراکز هندسی  $A$  و  $E$  دو انتهای لوله وارد می شوند. مطلوب است: (الف) تنش ماکزیم در مقطع  $a-a$ ، (ب) تنش در نقطه  $F$  داده: مرکز سطح مقطع عرضی در نقطه  $C$  است و  $I_x = 2 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .





شکل م ۴-۱۲۱

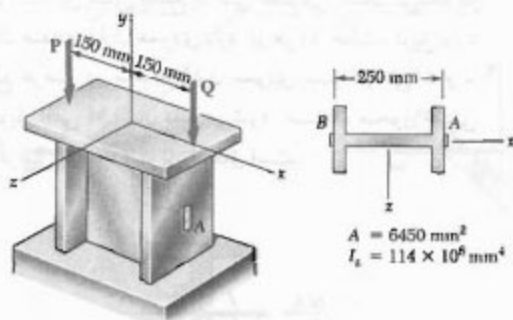
۱۲۲-۴ مسئله ۴-۱۲۱ را با فرض زیر حل کنید:

$$\epsilon_A = +600 \mu \quad \epsilon_B = +420 \mu$$

۱۲۳-۴ طول کوتاهی از ستون فولادی نورد شده یک صفحه صلب را نگه می‌دارد. بارهای  $P$  و  $Q$ ، مطابق شکل، بر این صفحه وارد شده‌اند. کرنش‌ها در دو نقطه  $A$  و  $B$  روی خطوط مرکزی وجوه خارجی بال‌ها به صورت زیر هستند:

$$\epsilon_A = -400 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \quad \epsilon_B = -300 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

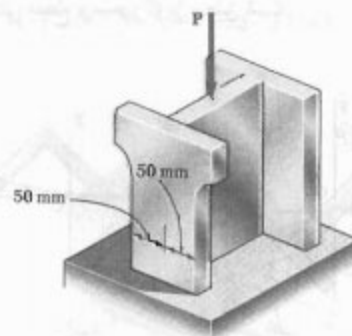
اگر  $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$  مقدار هر بار را بیابید.



شکل م ۴-۱۲۳

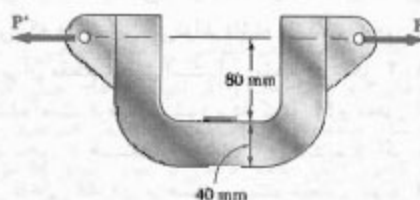
۱۲۴-۴ نیروی محوری، خارج از مرکز  $P$ ، که در نقطه  $D$  وارد می‌شود، باید ۲۵ mm زیر سطح بالایی میله فولادی نشان داده شده باشد. برای  $P = 60 \text{ kN}$ ، مطلوب است: (الف) عمق  $d$  میله که به‌ازای آن تنش‌های کششی در نقطه  $A$  ماکزیمم است، (ب) تنش متناظر در نقطه  $A$ .

۴-۱۱۹ سه صفحه فولادی، هر یک با مقطع عرضی  $25 \times 150 \text{ mm}$ ، به یکدیگر جوش شده‌اند و ستون کوتاه به شکل  $H$  را تشکیل داده‌اند. سپس، به دلایل معماری، نواری به عرض ۲۵ mm از هر طرف یکی از بال‌ها درآورده می‌شود. اگر بار نسبت به مقطع عرضی اولیه به صورت مرکزی بماند، و تنش مجاز  $100 \text{ MPa}$  باشد، مطلوب است ماکزیمم نیروی  $P$ : (الف) که می‌تواند بر ستون اولیه وارد کرد، (ب) که می‌تواند بر ستون تغییر یافته وارد کرد.



شکل م ۴-۱۱۹

۴-۱۲۰ برای تعیین مقدار  $P$  نیروهای نشان داده شده، از میله فولادی  $C$  شکل استفاده می‌شود. اگر مقطع عرضی میله به صورت چهارگوش به ضلع ۴۰ mm، و کرنش در لبه داخلی  $E = 200 \text{ GPa}$  باشد، مقدار  $P$  را بیابید. از  $E = 200 \text{ GPa}$  استفاده کنید.



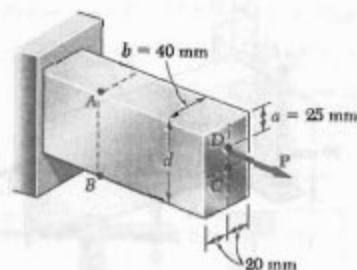
شکل م ۴-۱۲۰

۴-۱۲۱ نیروی محوری خارج از مرکز  $P$ ، مطابق شکل، بر میله فولادی با مقطع عرضی  $25 \text{ mm} \times 90 \text{ mm}$  وارد شده است. کرنش‌ها در  $A$  و  $B$  به صورت زیر هستند

$$\epsilon_A = +350 \mu \quad \epsilon_B = -70 \mu$$

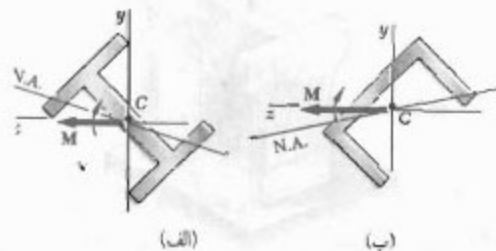
اگر  $E = 200 \text{ GPa}$ ، مطلوب است: (الف) فاصله  $d$ ، (ب) مقدار نیروی  $P$ .

اکنون، حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که در آن کوپل‌های خمشی در صفحه تقارن عضو اثر نمی‌کنند، یا اینکه عضو صفحه تقارن ندارد. در این موارد، نمی‌توان فرض کرد که عضو در صفحه کوپل‌ها خم می‌شود. این موضوع در شکل ۴-۵۶ نشان داده شده است. در هر قسمت شکل، فرض شده است کوپل وارد بر مقطع در یک صفحه عمودی اثر می‌کند و یا بردار کوپل افقی  $M$  نشان داده شده است. البته، چون صفحه عمودی صفحه تقارن نیست، نمی‌توان گفت عضو در آن صفحه خم می‌شود، یا محور خشی مقطع بر محور کوپل منطبق است.



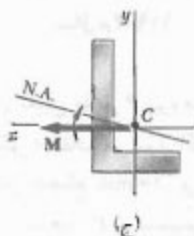
شکل م-۱۲۴

۴-۱۲۵ در مسئله ۴-۱۲۴، مطلوب است: (الف) عمق  $d$  میله که به‌لای آن تنش فشاری در نقطه  $B$  ماکزیمم است، (ب) تنش مشاظر در نقطه  $B$ .



(الف)

(ب)



(ج)

شکل ۴-۵۶

می‌خواهیم شرایطی را بیابیم که در آن محور خشی مقطع عرضی، که هر شکلی می‌تواند داشته باشد، بر محور کوپل  $M$  مؤثر بر آن مقطع منطبق است. این مقطع در شکل ۴-۵۷ نشان داده شده است. فرض می‌شود بردار کوپل  $M$  و محور خشی در امتداد محور  $z$  هستند. در قسمت ۴-۲ دیدیم که اگر نیروهای جزئی داخلی  $\sigma_x dA$  را بر حسب سیستم معادل کوپل  $M$  بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad (1-4) \quad \text{در امتداد } x$$

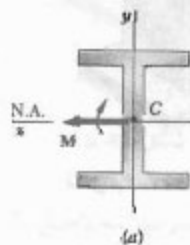
$$\int z \sigma_x dA = 0 \quad (2-4) \quad \text{لنگر نسبت به محور } y$$

$$\int (-y \sigma_x dA) = M \quad (3-4) \quad \text{لنگر نسبت به محور } z$$

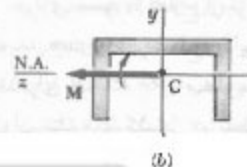
قبلاً دیدیم که وقتی تنش‌ها کمتر از حد تناسب‌اند، طبق معادله (۱-۴) محور خشی یک محور گذرا از مرکز سطح است، و

#### ۴-۱۳ خمش نامتقارن

تا به حال، فقط خمش خالص عضوهایی را بررسی کرده‌ایم که حداقل یک صفحه تقارن دارند و تحت کوپل‌هایی که در آن صفحه اثر می‌کنند قرار می‌گیرند. در قسمت ۴-۳ دیدیم که این عضوها نسبت به صفحه کوپل‌ها متقارن می‌مانند و در آن صفحه خم می‌شوند. شکل ۴-۵۵ الف، مقطع عرضی عضو را نشان می‌دهد که دو صفحه تقارن دارد، یکی عمودی و دیگری افقی، و قسمت (ب) این شکل، مقطع عرضی عضو را نشان می‌دهد که فقط یک صفحه تقارن عمودی دارد. در هر دو حالت، کوپل وارد بر مقطع عرضی در صفحه تقارن عمودی عضو اثر می‌کند و با بردار کوپل افقی  $M$  نشان داده می‌شود؛ ضمناً، محور خشی مقطع عرضی بر محور کوپل منطبق است.



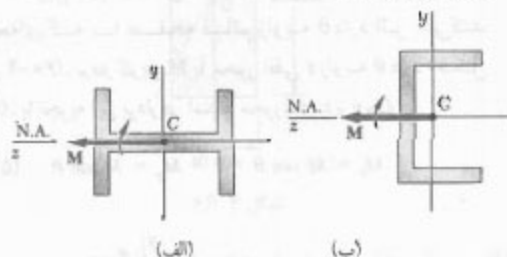
(الف)



(ب)

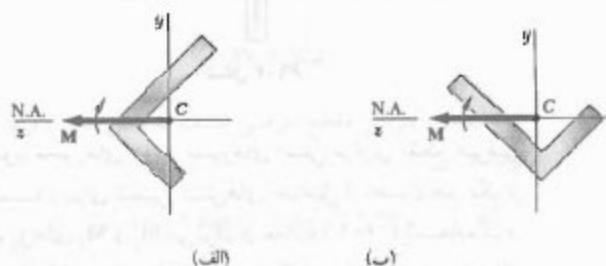
شکل ۴-۵۵

(شکل ۴-۵۸)، بردار کویل  $M$  هنوز در امتداد یکی از محوره‌های اصلی مرکزی خواهد بود، و محور خنثی نیز بر محور کویل منطبق است؛ ولی کویل در حالت  $b$  در صفحه تقارن عضو اثر نمی‌کند.



شکل ۴-۵۸

از طرف دیگر، در شکل ۴-۵۶ هیچ یک از محوره‌های مختصات محور تقارن مقاطع نشان داده شده نیست و نیز محور اصلی نمی‌باشد. لذا، بردار کویل  $M$  در امتداد محور اصلی مرکزی نیست و محور خنثی بر محور کویل منطبق نیست. ولی، هر مقطعی دارای محوره‌های اصلی مرکزی است، حتی اگر نامتقارن باشد (شکل ۴-۵۶ ج). و این محورها را با استفاده از دایره مور می‌توان یافت<sup>\*\*</sup>. اگر بردار کویل  $M$  در امتداد یکی از محوره‌های اصلی مرکزی مقطع عرضی باشد، محور خنثی بر محور کویل منطبق است (شکل ۴-۵۹) و از معادله‌هایی که در قسمت‌های ۴-۳ و ۴-۴ برای عضوهای متقارن داده شدند برای تعیین تنش در این حالت نیز می‌توان استفاده کرد.



شکل ۴-۵۹

\* نگاه کنید به:

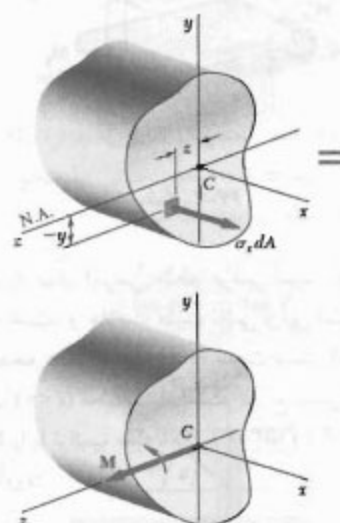
Ferdinand P. Beer and E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1987, or *Vector Mechanics for Engineers*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1996, secs. 9.8-9.10.

\*\* نگاه کنید به:

Ferdinand P. Beer and E. Russell Johnston, Jr., *Mechanics for Engineers*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1987, or *Vector Mechanics for Engineers*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1996, secs. 9.8-9.10.

معادله (۳-۴) رابطه اصلی  $\sigma_x = -My/I$  را می‌دهد. در قسمت ۲-۴، با توجه به تقارن مقطع عرضی نسبت به محور  $y$  معادله (۲-۴) زاید بود و آن را در نظر نگرفتیم. ولی، اکنون که مقطع عرضی با یک شکل اختیاری را بررسی می‌کنیم، معادله (۲-۴) حائز اهمیت است. با فرض اینکه تنش‌ها کمتر از حد تناسب ساده‌اند، در معادله (۲-۴) قرار می‌دهیم  $\sigma_x = -\sigma_m y/c$  و می‌نویسیم:

$$\int z \left( -\frac{\sigma_m y}{c} \right) dA = 0 \Rightarrow \int yz dA = 0 \quad (۴-۵۱)$$



شکل ۴-۵۷

انتگرال  $\int yz dA$  حاصلضرب اینرسی  $I_{yz}$  مقطع عرضی را نسبت به محوره‌های  $y$  و  $z$  می‌دهد، و اگر آنها محوره‌های اصلی گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی باشند،  $I_{yz}$  صفر خواهد بود. در نتیجه، محور خنثی مقطع عرضی بر محور کویل  $M$  مؤثر بر آن مقطع منطبق خواهد بود اگر، و فقط اگر، بردار کویل  $M$  در امتداد یکی از محوره‌های اصلی گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی باشد.

گفتنی است که مقاطع عرضی نشان داده شده در شکل ۴-۵۵ حداقل نسبت به یکی از محوره‌های مختصات تقارن دارند، یعنی، در هر حالت، محوره‌های  $y$  و  $z$  محوره‌های اصلی گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی هستند. چون بردار کویل  $M$  در امتداد یکی از محوره‌های اصلی مرکزی است، محور خنثی بر محور کویل منطبق است. با چرخش  $90^\circ$  مقاطع عرضی

که در آن  $I_z$  ممان اینرسی مقطع عرضی نسبت به محور اصلی مرکزی  $z$  است. علامت منفی ناشی از این است که بالای صفحه تحت کشش ( $y > 0$ ) تحت فشار است و پایین آن ( $y < 0$ ) تحت کشش است. از طرف دیگر، کوپل  $M_y$  در یک صفحه افقی اثر می‌کند و عضو را در آن صفحه خم می‌کند (شکل ۴-۶۳). تنش‌های حاصل عبارتند از:

$$\sigma_x = + \frac{M_y z}{I_y} \quad (۴-۵۴)$$

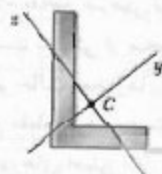


شکل ۴-۶۳

که در آن  $I_y$  ممان اینرسی مقطع عرضی نسبت به محور اصلی مرکزی  $y$  است، و علامت مثبت ناشی از این است که سمت چپ صفحه عمودی  $xy$  ( $z > 0$ ) تحت کشش است و سمت راست آن ( $z < 0$ ) تحت فشار است. توزیع تنش‌های ناشی از کوپل  $M$  را با ترکیب معادله‌های (۴-۵۳) و (۴-۵۴) می‌توان به‌دست آورد:

$$\sigma_x = - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (۴-۵۵)$$

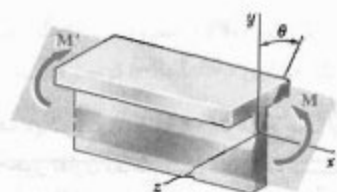
با تعیین محورهای اصلی  $y$  و  $z$ ، از معادله (۴-۵۵) می‌توان برای محاسبه تنش‌ها در یک مقطع نامتقارن، مانند مقطع شکل ۴-۶۴، نیز استفاده کرد. از طرف دیگر، معادله (۴-۵۵) فقط وقتی به‌کار می‌رود که شرایط کاربرد اصل ترکیب برقرار باشند. به عبارت دیگر، اگر تنش‌های ترکیبی از حد تناسب ماده فراتر روند، یا اگر تغییر شکل‌های ناشی از یکی کوپل‌ها بر توزیع تنش‌های ناشی از کوپل دیگر خیلی تأثیر بگذارند، از معادله (۴-۵۵) نمی‌توان استفاده کرد.



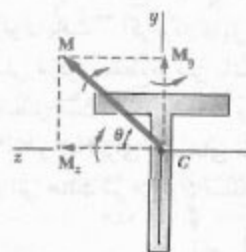
شکل ۴-۶۴

حال، نشان می‌دهیم که از اصل ترکیب برای تعیین تنش در کلی‌ترین حالت خمشی نامتقارن می‌توان استفاده کرد. ابتدا، عضوی را با یک صفحه تقارن عمودی در نظر بگیرید. این عضو تحت کوپل‌های خمشی  $M$  و  $M'$  قرار دارد، و کوپل‌ها در صفحه‌ای که با صفحه قائم زاویه  $\theta$  دارد اثر می‌کنند (شکل ۴-۶۰). بردار کوپل  $M$  با محور افقی  $z$  زاویه  $\theta$  دارد (شکل ۴-۶۱). با تجزیه این بردار در امتداد محورهای  $z$  و  $y$ ، داریم

$$M_z = M \cos \theta \quad M_y = M \sin \theta \quad (۴-۵۲)$$



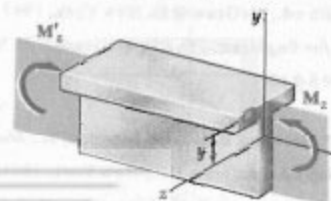
شکل ۴-۶۰



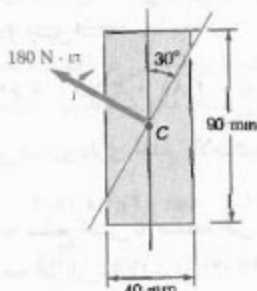
شکل ۴-۶۱

چون محورهای  $y$  و  $z$  محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی هستند، برای تعیین تنش‌های حاصل از اعمال هر یک از کوپل‌های  $M_y$  و  $M_z$  می‌توان از معادله (۴-۱۶) استفاده کرد. کوپل  $M_z$  در یک صفحه عمودی اثر می‌کند و عضو را در آن صفحه خم می‌کند (شکل ۴-۶۲). تنش‌های حاصل عبارتند از:

$$\sigma_x = - \frac{M_z y}{I_z} \quad (۴-۵۳)$$



شکل ۴-۶۲

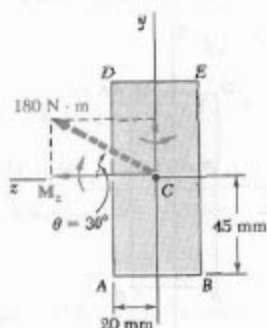


شکل ۶۶-۴

(الف) تنش ماکزیمم. ابتدا، مؤلفه‌های  $M_z$  و  $M_y$  بردار کوپل را می‌یابیم (شکل ۶۷-۴):

$$M_z = (180 \text{ N.m}) \cos 30^\circ = 155.9 \text{ N.m}$$

$$M_y = (180 \text{ N.m}) \sin 30^\circ = 90 \text{ N.m}$$



شکل ۶۷-۴

ممان‌های اینرسی مقطع عرضی نسبت به محورهای  $y$  و  $z$  عبارتند از:

$$I_z = \frac{1}{12} (0.04 \text{ m})(0.09 \text{ m})^3 = 2.73 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (0.09 \text{ m})(0.04 \text{ m})^3 = 0.48 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

ماکزیمم تنش کششی ناشی از  $M_z$  در امتداد  $AB$  روی می‌دهد و چنین است:

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{(155.9 \text{ N.m})(0.045 \text{ m})}{2.73 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 2.59 \text{ MPa}$$

ماکزیمم تنش کششی ناشی از  $M_y$  در امتداد  $AD$  روی می‌دهد و چنین است:

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{I_y} = \frac{(90 \text{ N.m})(0.02 \text{ m})}{0.48 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 3.75 \text{ MPa}$$

معادله (۴-۵۵) نشان می‌دهد که توزیع تنش‌های ناشی از خمش نامتقارن به صورت خطی است. ولی، همانطور که قبلاً در همین قسمت گفته شد، محور خنثی مقطع عرضی، به طور کلی، بر محور کوپل خمشی منطبق نیست. چون تنش قائم در تمام نقاط محور خنثی صفر است، با قرار دادن  $\sigma_x = 0$  در معادله (۴-۵۵) می‌توان معادله‌ای که این محور خنثی را مشخص می‌کند به دست آورد. می‌نویسیم:

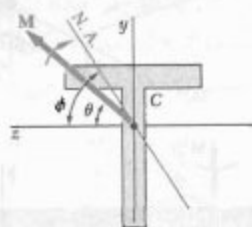
$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0$$

با حل  $y$  و جایگذاری  $M_y$  و  $M_z$  از معادله‌های (۴-۵۲)،

$$y = \left( \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \right) z \quad (۴-۵۶)$$

معادله حاصل، یک خط مستقیم با شیب  $m = (I_z/I_y) \tan \theta$  را نشان می‌دهد. زاویه  $\phi$  که محور خنثی با محور  $z$  دارد (شکل ۴-۶۵) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \quad (۴-۵۷)$$



شکل ۶۵-۴

که در آن  $\theta$  زاویه‌ای است که بردار کوپل  $M$  با محور  $z$  می‌سازد. چون  $I_z$  و  $I_y$  هر دو مثبت‌اند،  $\phi$  و  $\theta$  علامت یکسان دارند. وقتی  $I_z > I_y$ ،  $\phi > \theta$  و وقتی  $I_z < I_y$ ،  $\phi < \theta$ . لذا، محور خنثی همواره بین بردار کوپل  $M$  و محور اصلی متناظر با ممان اینرسی مینیمم قرار دارد.

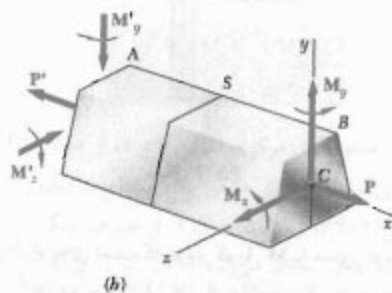
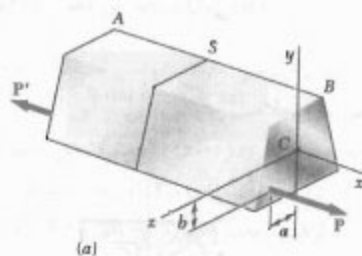
#### مثال ۸-۴

کوپل  $180 \text{ N.m}$  بر یک تیر چوبی، با مقطع عرضی مستطیلی  $40 \text{ mm} \times 90 \text{ mm}$ ، در صفحه‌ای که با عمود زاویه  $30^\circ$  دارد وارد شده است (شکل ۴-۶۶). مطلوبست: (الف) تنش ماکزیمم در تیر، (ب) زاویه‌ای که سطح خنثی با صفحه افق دارد.

#### ۴-۱۴ حالت کلی بارگذاری محوری خارج از مرکز

در قسمت ۴-۱۲، تنش‌های حاصل از بار محوری خارج از مرکز را، که در صفحه تقارن عضو بر آن اثر می‌کرد، تحلیل کردیم. اکنون، حالت کلی تری را بررسی می‌کنیم که در آن بار محوری در صفحه تقارن اعمال نمی‌شود.

عضو مستقیم  $AB$  را که تحت نیروهای متضاد و محوری خارج از مرکز  $P$  و  $P'$  قرار دارد در نظر بگیرید (شکل ۴-۷۰ الف). فواصل خطوط اثر این نیروها را تا محوره‌های اصلی مرکزی مقطع عرضی عضو با  $a$  و  $b$  نشان می‌دهیم. نیروی خارج از مرکز  $P$  از نظر استاتیکی معادل است با سیستمی که از نیروی مرکزی  $P$  و دو کوپل  $M_y$  و  $M_z$ ، با لنگرهای اصلی مرکزی  $M_y = Pa$  و  $M_z = Pb$ ، تشکیل شده است (شکل ۴-۷۰ ب). به طور مشابه، نیروی خارج از مرکز  $P'$  معادل است با سیستمی که از نیروی مرکزی  $P'$  و کوپل‌های  $M'_y$  و  $M'_z$  تشکیل شده است.



شکل ۷۰-۴

با استفاده از اصل سنت-وانانت (قسمت ۲-۱۷)، بارگذاری اولیه در شکل ۴-۷۰ الف را می‌توان با معادل استاتیکی آن، یعنی بارگذاری در شکل ۴-۷۰ ب، جایگزین کرد، و توزیع تنش در مقطع  $S$  عضو را، که خیلی نزدیک به انتهای عضو نباشد، به دست آورد. به علاوه، تا وقتی شرایط استفاده از اصل ترکیب برقرار باشند (قسمت ۲-۱۲)، با ترکیب تنش‌های ناشی از بار

بنابراین، ماکزیمم تنش کششی ناشی از بارگذاری ترکیبی در  $A$  روی می‌دهد و چنین است:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 2,89 + 3,75 = 6,64 \text{ MPa}$$

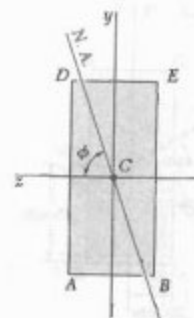
ماکزیمم تنش فشاری دارای مقدار بالاست و در  $E$  روی می‌دهد.

(ب) زاویه سطح خنثی با صفحه افق. زاویه  $\phi$  که سطح خنثی با صفحه افق می‌سازد (شکل ۴-۶۸) از معادله (۴-۵۷) به دست می‌آید.

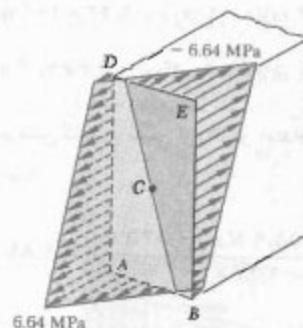
$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta = \frac{2,43 \times 10^{-9} \text{ m}^4}{0,48 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \tan 30^\circ = 2,9$$

$$\phi = 72,4^\circ$$

توزیع تنش در مقطع عرضی در شکل ۴-۶۹ نشان داده شده است.



شکل ۶۸-۴



شکل ۶۹-۴



(الف) تنش‌ها. بار خارج از مرکز داده شده را با سیستم معادل آن جایگزین می‌کنیم. این سیستم از بار مرکزی  $P$  و دو کوپل  $M_x$  و  $M_y$ ، که با بردارهایی در امتداد محورهای اصلی مرکزی مقطع غرضی نشان داده شده‌اند، تشکیل شده است (شکل ۴-۷۲). می‌نویسیم:

$$M_x = (4/80 \text{ kN})(40 \text{ mm}) = 192 \text{ N.m}$$

$$M_y = (4/80 \text{ kN})(60 \text{ mm} - 25 \text{ mm}) = 120 \text{ N.m}$$

مساحت و ممان‌های اینرسی مرکزی\*\* مقطع عرضی عبارتند از:

$$A = (0/080 \text{ m})(0/120 \text{ m}) = 9/60 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{1}{12} (0/120 \text{ m})(0/080 \text{ m})^3 = 5/12 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (0/080 \text{ m})(0/120 \text{ m})^3 = 11/52 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

تنش  $\sigma_o$  ناشی از بار مرکزی  $P$  منفی است و در مقطع عرضی به صورت یکنواخت است:

$$\sigma_o = \frac{P}{A} = \frac{-4/80 \text{ kN}}{9/60 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = -0/5 \text{ MPa}$$

تنش‌های ناشی از کوپل‌های خمشی  $M_x$  و  $M_y$  در مقطع عرضی دارای توزیع خطی هستند و ماکزیمم مقدار آنها، به ترتیب، عبارتند از:

$$\sigma_1 = \frac{M_x z_{\max}}{I_x} = \frac{(192 \text{ N.m})(40 \text{ mm})}{5/12 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 1/5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_y x_{\max}}{I_y} = \frac{(120 \text{ N.m})(60 \text{ mm})}{11/52 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 0/625 \text{ MPa}$$

تنش در گوشه‌های مقطع عرضی عبارتند از:

$$\sigma_y = \sigma_o \pm \sigma_1 \pm \sigma_2$$

علامت‌ها را از شکل ۴-۷۲ باید تعیین کرد. تنش‌های ناشی از  $M_x$  در  $D$  و  $C$  مثبت‌اند و در  $A$  و  $B$  منفی‌اند، و تنش‌های ناشی از  $M_y$  در  $C$  و  $B$  مثبت‌اند و در  $A$  و  $D$  منفی‌اند. در نتیجه،

$$\sigma_A = -0/5 - 1/5 - 0/625 = -2/625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -0/5 - 1/5 + 0/625 = -1/375 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -0/5 + 1/5 + 0/625 = +1/625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -0/5 + 1/5 - 0/625 = +0/375 \text{ MPa}$$

\* گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی - مترجم

\*\* نسبت به محور گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی - مترجم

محوری مرکزی  $P$  و کوپل‌های خمشی  $M_x$  و  $M_y$  می‌توان تنش‌های ناشی از بارگذاری شکل ۴-۷۰ را به دست آورد. تنش ناشی از بار مرکزی  $P$  با معادله (۵-۵)، و تنش ناشی از کوپل‌های خمشی با معادله (۴-۵۵) داده می‌شوند، زیرا بردارهای کوپل متناظر در امتداد محورهای اصلی مرکزی\* مقطع قرار دارند. بنابراین،

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_y y}{I_y} + \frac{M_x z}{I_x} \quad (۴-۵۸)$$

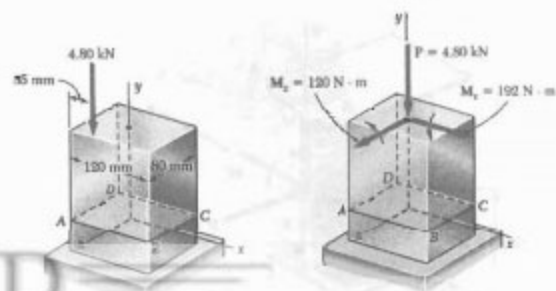
که در آن  $y$  و  $z$  از محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی اندازه‌گیری می‌شوند. رابطه حاصل نشان می‌دهد که توزیع تنش در عرض مقطع به صورت خطی است.

گفتنی است که در معادله (۴-۵۸)، برحسب سویی بارهای  $P$  و  $M_x$  و مکان خط اثر آنها نسبت به محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی، هر یک از سه جمله این معادله ممکن است مثبت یا منفی باشد. برحسب شکل هندسی مقطع عرضی و مکان خط اثر  $P$  و  $M_x$ ، تنش‌های حاصل از معادله (۴-۵۸) در نقاط مختلف مقطع ممکن است دارای علامت یکسان باشند یا بعضی از آنها مثبت و بعضی منفی باشد. در حالت دوم، خطی در مقطع وجود دارد که تنش در امتداد آن صفر است. با قرار دادن  $\sigma_x = 0$  در معادله (۴-۵۸)، معادله یک خط مستقیم که محور خشی مقطع را نشان می‌دهد به دست می‌آید:

$$\frac{M_x}{I_x} z - \frac{M_y}{I_y} y = \frac{P}{A}$$

مثال ۴-۹

مطابق شکل بار عمودی  $4/80 \text{ kN}$  بر تیر چوبی با مقطع عرضی مستطیلی  $80 \text{ mm} \times 120 \text{ mm}$  وارد شده است (شکل ۴-۷۱). مطلوب است: (الف) تنش در نقاط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$ ، (ب) مکان محور خشی مقطع عرضی.



شکل ۴-۷۱

شکل ۴-۷۲

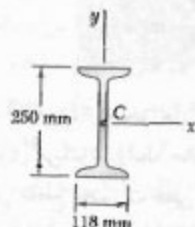
حل

خواص مقطع عرضی. داده‌های زیر از پیوست ج گرفته شده‌اند.

$$A = 4820 \text{ mm}^2$$

$$S_x = 402 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$S_y = 27.5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$



نیرو و کوپل در C. نیروی P را با میسم معادل نیرو-کوپل در مرکز سطح C مقطع عرضی جایگزین می‌کنیم.

$$M_x = (120 \text{ mm})P \quad M_y = (38 \text{ mm})P$$

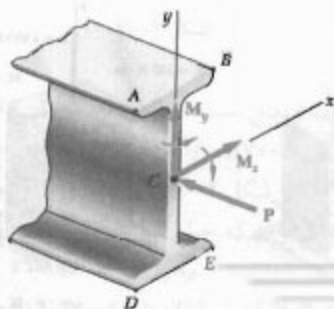
توجه کنید که بردارهای  $M_x$  و  $M_y$  در امتداد محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی هستند.

تنش‌های قائم. قدرمطلق تنش‌های ناشی از بار مرکزی P و کوپل‌های  $M_x$  و  $M_y$  در نقاط A، B، C، D، E، عبارتند از:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{P}{4820 \text{ mm}^2} = 20.7 \times 10^{-6} P$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{S_x} = \frac{120 P}{402 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 298 \times 10^{-6} P$$

$$\sigma_3 = \frac{M_y}{S_y} = \frac{38 P}{27.5 \times 10^3 \text{ mm}^3} = 138 \times 10^{-6} P$$

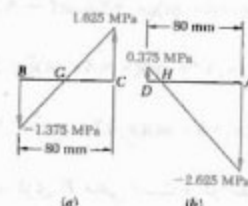


(ب) محور خشی. تنش در نقطه G بین B و C صفر است، و در نقطه H بین D و A نیز صفر است (شکل ۴-۷۳). چون توزیع تنش خطی است، می‌نویسیم:

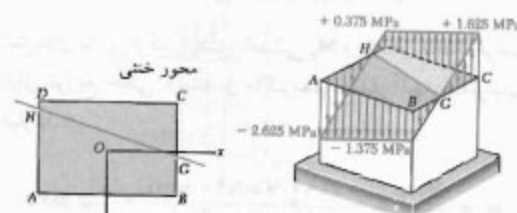
$$\frac{BG}{80 \text{ mm}} = \frac{1.375}{1.625 + 1.375} \Rightarrow BG = 36.7 \text{ mm}$$

$$\frac{HA}{80 \text{ mm}} = \frac{2.625}{2.625 + 1.375} \Rightarrow HA = 70 \text{ mm}$$

با اتصال نقاط G و H، محور خشی به‌دست می‌آید (شکل ۴-۷۴).



شکل ۴-۷۳



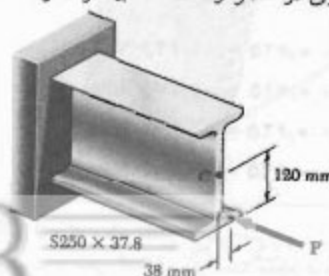
شکل ۴-۷۴

شکل ۴-۷۵

در شکل ۴-۷۵، توزیع تنش در مقطع عرضی نشان داده شده است.

مسئله نمونه ۴-۹

نیروی افقی P بر قسمت کوتاهی از عضو فولادی نورد شده  $S250 \times 37.8$  وارد شده است. ماکزیمم بار مجاز P را بیابید، به‌طوری که تنش فشاری در عضو از  $82 \text{ MPa}$  بیشتر نشود.



## حل

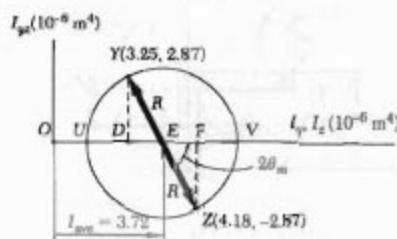
محورهای اصلی. دایره مور را رسم می‌کنیم، و از روی آن وضعیت محورهای اصلی و ممان‌های اینرسی اصلی متناظر را می‌یابیم:

$$\tan 2\theta_m = \frac{FZ}{EF} = \frac{2.1AV}{0.465} \Rightarrow 2\theta_m = 80.18^\circ \Rightarrow \theta_m = 40.09^\circ$$

$$R^2 = (EF)^2 + (FZ)^2 = (0.465)^2 + (2.1AV)^2 \Rightarrow R = 2.191 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$I_u = I_{\min} = OU = I_{ave} - R = 3.72 - 2.191 \Rightarrow 0.810 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

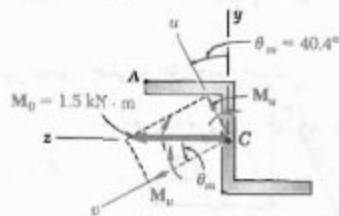
$$I_v = I_{\max} = OV = I_{ave} + R = 3.72 + 2.191 \Rightarrow 6.73 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$



بارگذاری. کوپل  $M_0$  را به مؤلفه‌های موازی با محورهای اصلی تجزیه می‌کنیم:

$$M_u = M_0 \sin \theta_m = 1500 \sin 40.09^\circ = 972 \text{ N.m}$$

$$M_v = M_0 \cos \theta_m = 1500 \cos 40.09^\circ = 1142 \text{ N.m}$$



الف. تنش در A. فواصل عمودی نقطه A از محورهای اصلی عبارتند از:

$$u_A = y_A \cos \theta_m + z_A \sin \theta_m = 50 \cos 40.09^\circ + 75 \sin 40.09^\circ = 86.0 \text{ mm}$$

$$v_A = -y_A \sin \theta_m + z_A \cos \theta_m = -50 \sin 40.09^\circ + 75 \cos 40.09^\circ = 23.9 \text{ mm}$$

ترکیب. از ترکیب تنش‌های ناشی از  $M_v$  و  $M_u$ ، تنش کل به‌دست می‌آید. علامت هر تنش را با بررسی دقیق سیستم نیرو-کوپل تعیین می‌کنیم:

$$\sigma_A = -\sigma_t + \sigma_c + \sigma_r = -207 \times 10^6 \text{ Pa} + 298 \times 10^6 \text{ Pa} + 800 \times 10^6 \text{ Pa} = +891 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_B = -\sigma_t + \sigma_c - \sigma_r = -207 \times 10^6 \text{ Pa} + 298 \times 10^6 \text{ Pa} - 800 \times 10^6 \text{ Pa} = -709 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_D = -\sigma_t - \sigma_c + \sigma_r = -207 \times 10^6 \text{ Pa} - 298 \times 10^6 \text{ Pa} + 800 \times 10^6 \text{ Pa} = +295 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\sigma_E = -\sigma_t - \sigma_c - \sigma_r = -207 \times 10^6 \text{ Pa} - 298 \times 10^6 \text{ Pa} - 800 \times 10^6 \text{ Pa} = -1305 \times 10^6 \text{ Pa}$$

ماکزیمم بار مجاز. ماکزیمم تنش فشاری در نقطه E روی می‌دهد. با توجه به  $\sigma_{all} = 82 \text{ MPa}$  داریم

$$\sigma_{all} = \sigma_E \Rightarrow -82 \text{ MPa} = -1305 \times 10^6 \text{ Pa} \Rightarrow P = 62.8 \text{ kN}$$

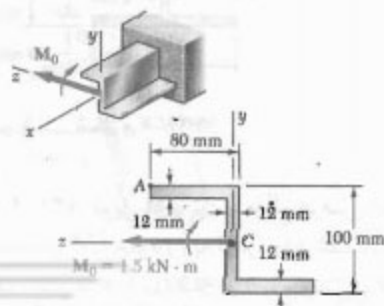
## مسئله نمونه ۴-۱۰

کوپل  $M_0 = 1.5 \text{ kN.m}$  در صفحه قائم بر تیری با مقطع عرضی Z وارد شده است. مطلوبست: (الف) تنش در نقطه A، (ب) زاویه‌ای که محور خشی با صفحه افق می‌سازد. ممان‌های اینرسی و حاصلضرب اینرسی مقطع نسبت و محورهای y و z عبارتند از:

$$I_y = 3.25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

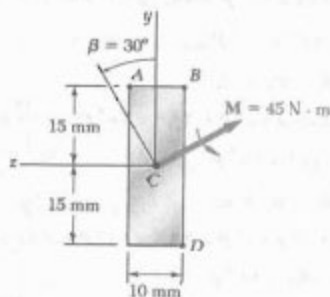
$$I_z = 4.18 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{yz} = 2.187 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

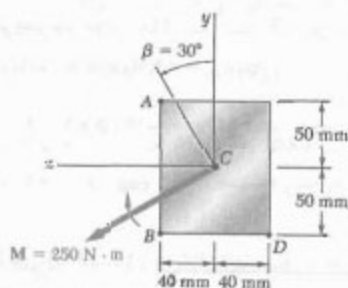


## مسائل

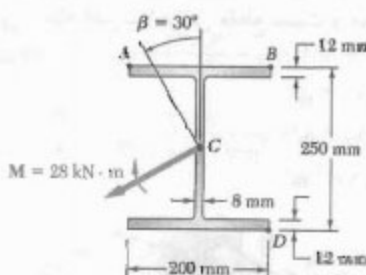
۱۲۶-۴ تا ۱۲۸-۴ کوپل  $M$  بر تیر، با مقطع عرضی نشان داده شده، در صفحه‌ای که با عمود زاویه  $\beta$  دارد وارد شده است. مطلوبست: (الف) تنش در  $A$ ، (ب) تنش در  $B$ ، (ج) تنش در  $D$ .



شکل م ۱۲۶-۴



شکل م ۱۲۷-۴



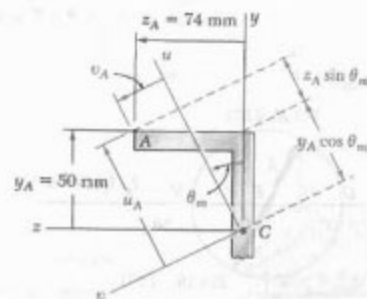
شکل م ۱۲۸-۴

۱۲۹-۴ تا ۱۳۱-۴ کوپل  $M$  بر تیر، با مقطع عرضی نشان داده شده، در صفحه‌ای که با عمود زاویه  $\beta$  ندارد وارد شده است. مطلوبست: (الف) تنش در  $A$ ، (ب) تنش در  $B$ ، (ج) تنش در  $D$ .

با در نظر گرفتن خمش حول هر محور اصلی جداگانه، دیده می‌شود که  $M_y$  در نقطه  $A$  ایجاد کشش، و  $M_z$  در همان نقطه ایجاد فشار می‌کند.

$$\begin{aligned}\sigma_A &= + \frac{M_y v_A}{I_y} - \frac{M_z u_A}{I_z} \\ &= + \frac{(972 \text{ N.m})(0.0239 \text{ m})}{0.181 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \\ &\quad - \frac{(1142 \text{ N.m})(0.086 \text{ m})}{6.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \\ &= + (28.68 \text{ MPa}) - (14.81 \text{ MPa})\end{aligned}$$

$$\sigma_A = +13.87 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



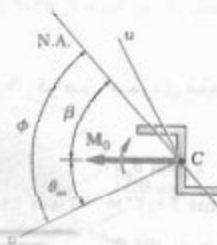
ب. محور خنثی. با استفاده از معادله (۴-۵۷)، زاویه بین محور خنثی و محور  $y$  را می‌یابیم.

$$\tan \phi = \frac{I_y}{I_z} \tan \theta_m = \frac{6.63}{0.181} \tan 40.4^\circ \Rightarrow \phi = 81.8^\circ$$

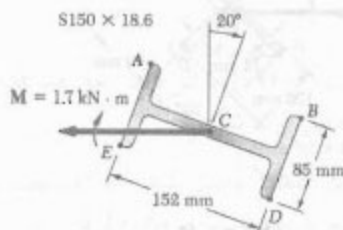
زاویه  $\beta$  بین محور خنثی و افق چنین است:

$$\beta = \phi - \theta_m = 81.8^\circ - 40.4^\circ = 41.4^\circ$$

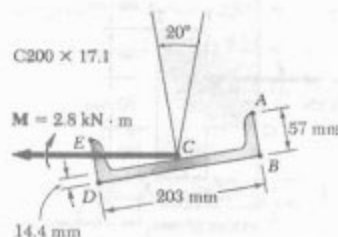
$$\beta = 41.4^\circ \quad \blacktriangleleft$$



۱۳۳-۴ و ۱۳۴-۴ کوپل  $M$  در یک صفحه عمودی بر تیر در وضعیت نشان داده شده اعمال شده است. مطلوبست: (الف) زاویه محور خشی با صفحه افق، (ب) ماکزیمم تنش کششی در تیر.

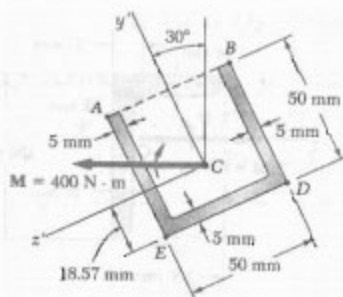


شکل م-۱۳۳-۴



شکل م-۱۳۴-۴

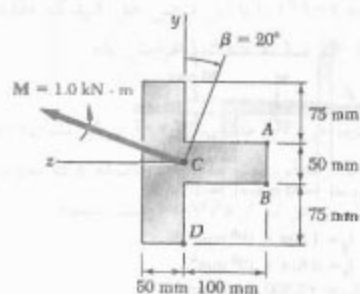
۱۳۵-۴ تا ۱۳۷-۴ کوپل  $M$  در یک صفحه عمودی بر تیر در وضعیت نشان داده شده اعمال شده است. مطلوبست: (الف) زاویه محور خشی با صفحه افق، (ب) ماکزیمم تنش کششی در تیر.



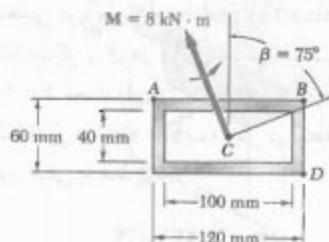
$$I_y = 281 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 176.9 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

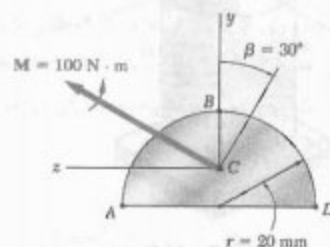
شکل م-۱۳۵-۴



شکل م-۱۲۹-۴

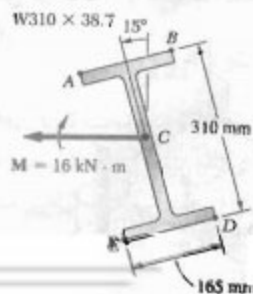


شکل م-۱۳۰-۴

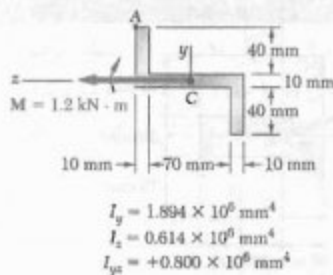


شکل م-۱۳۱-۴

۱۳۲-۴ کوپل  $M$  در یک صفحه قائم بر تیر در وضعیت نشان داده شده وارد شده است. مطلوبست: (الف) زاویه ای که محور خشی با صفحه افق می سازد، (ب) ماکزیمم تنش کششی در تیر.

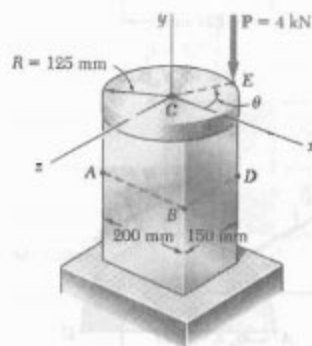


شکل م-۱۳۲-۴



شکل م-۱۳۹

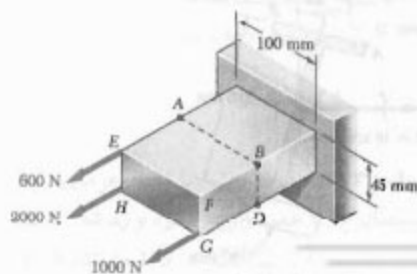
۱۴۰-۴ یک ورق صلب دایره‌ای با شعاع ۱۲۵ mm به تیر مستطیلی توپری با ابعاد ۱۵۰ mm × ۲۰۰ mm متصل شده است. مرکز ورق در بالای مرکز تیر قرار دارد. اگر نیروی  $P = 4$  kN تحت زاویه  $\theta = 30^\circ$  وارد شود، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه A، (ب) تنش در نقطه B، (ج) نقطه تلاقی محور خنثی با خط ABD.



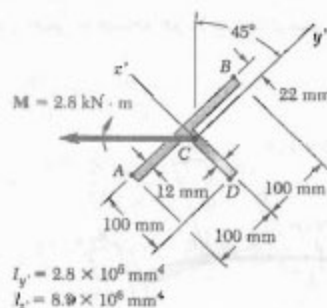
شکل م-۱۴۰

۱۴۱-۴ در مسئله ۱۴۰-۴، مطلوبست: (الف) مقدار  $\theta$  که به ازای آن تنش در D به بیشترین مقدار می‌رسد، (ب) مقادیر متناظر تنش در A، B، C و D.

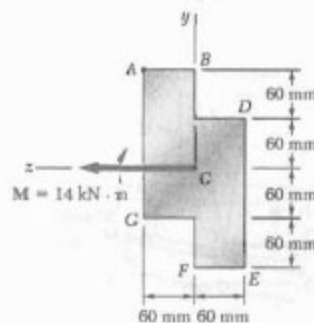
۱۴۲-۴ برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست: (الف) تنش در نقاط A و B، (ب) نقطه تقاطع محور خنثی با خط ABC.



شکل م-۱۴۲

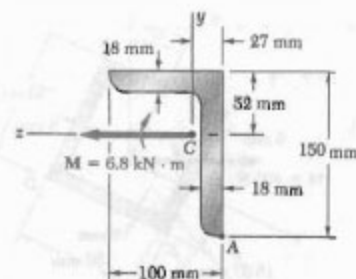


شکل م-۱۳۶



شکل م-۱۳۷

۱۳۸-۴ و ۱۳۹-۴ کوپل M در یک صفحه عمودی بر تیر با مقطع عرضی نشان داده شده اعمال شده است. تنش را در نقطه A بیابید.



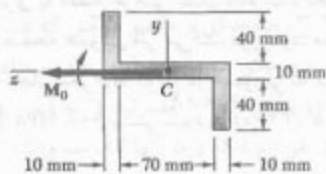
$$I_y = 3.65 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = 10.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = 3.45 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

شکل م-۱۳۸

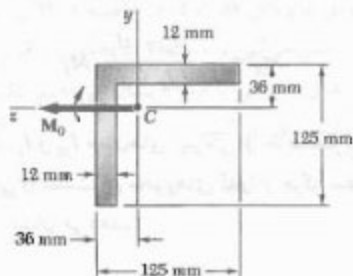




شکل م-۱۴۶

۱۴۷-۴ مسئله ۱۴۶-۴ را با این فرض حل کنید که کوپل  $M_0$  در یک صفحه افقی وارد شود.

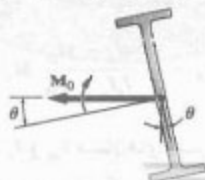
۱۴۸-۴ تیری با مقطع عرضی نشان داده شده تحت کوپل  $M_0$  که در یک صفحه عمودی اثر می‌کند، قرار دارد. مطلوب است ماکزیم مقدار مجاز لنگر  $M_0$  کوپل در صورتی که بخواهیم ماکزیم تنش در تیر از  $84 \text{ MPa}$  بیشتر نشود. داده:  $k_{\min} = 25 \text{ mm}$ ,  $A = 3064 \text{ mm}^2$ ,  $I_y = I_z = 4.7 \times 10^6 \text{ mm}^4$  (راهنمایی: با توجه به تقارن، محاورهای اصلی با محاورهای مختصات زاویه  $45^\circ$  دارند. از روابط  $I_{\min} = Ak_{\min}^2$  و  $I_{\min} + I_{\max} = I_y + I_z$  استفاده کنید).



شکل م-۱۴۸

۱۴۹-۴ مسئله ۱۴۸-۴ را با این فرض حل کنید که کوپل  $M_0$  در صفحه افق وارد شود.

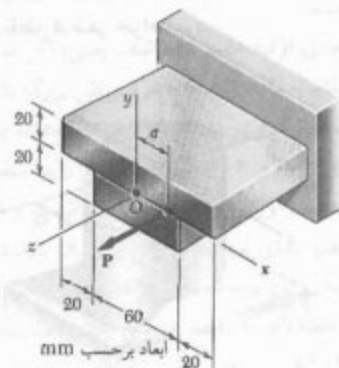
۱۵۰-۴ کوپل  $M_0$  در یک صفحه عمودی بر تیر فولادی نورد شده  $W310 \times 23.8$  وارد شده است. جان تیر با عمود زاویه  $\theta$  دارد. اگر تنش ماکزیم در تیر برای  $\theta = 0^\circ$  با  $\sigma_c$  نشان دهیم، زاویه میل  $\theta$  تیر را که به ازای آن تنش ماکزیم  $\sigma_c$  است بیابید.



شکل م-۱۵۰

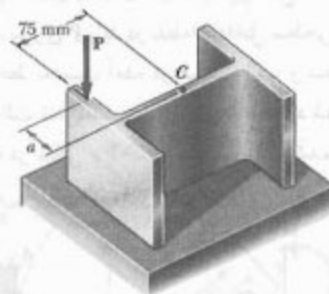
۱۴۳-۴ مسئله ۱۴۲-۴ را با این فرض حل کنید که مقدار نیروی وارده در  $G$  از  $1.0 \text{ kN}$  به  $1.6 \text{ kN}$  افزایش یابد.

۱۴۴-۴ نیروی افقی  $P$  با مقدار  $1.0 \text{ kN}$  بر تیر نشان داده شده اعمال شده است. مطلوب است ماکزیم فاصله  $a$  که به ازای آن ماکزیم تنش کششی در تیر از  $75 \text{ MPa}$  بیشتر نشود.



شکل م-۱۴۴

۱۴۵-۴ بار محوری  $P$  با مقدار  $50 \text{ kN}$  مطابق شکل، بر قسمت کوتاهی از عضو فولادی نورد شده  $W150 \times 24$  وارد شده است. مطلوب است ماکزیم فاصله  $a$  که به ازای آن ماکزیم تنش فشاری از  $90 \text{ MPa}$  بیشتر نشود.



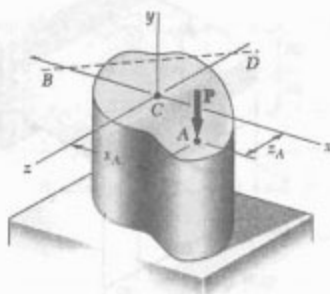
شکل م-۱۴۵

۱۴۶-۴ مقطع  $Z$  نشان داده شده تحت کوپل  $M_0$  که در یک صفحه عمودی اثر می‌کند، قرار دارد. مطلوب است ماکزیم مقدار مجاز لنگر  $M_0$  کوپل در صورتی که بخواهیم ماکزیم تنش از  $80 \text{ MPa}$  بیشتر نشود. داده:  $I_{\max} = 2.28 \times 10^6 \text{ mm}^4$  و  $I_{\min} = 0.23 \times 10^6 \text{ mm}^4$  محاورهای اصلی  $30^\circ$  و  $60^\circ$  به  $64/3^\circ$ .

۱۵۴-۴ (الف) نشان دهید که، اگر نیروی عمودی  $P$  در نقطه  $A$  مقطع نشان داده شده وارد شود، معادله محور خنثی  $BD$  عبارت است از:

$$\left(\frac{x_A}{k_z}\right)^2 + \left(\frac{z_A}{k_y}\right)^2 = -1$$

که در آن  $k_y$  و  $k_z$  شعاع ژیراسیون مقطع عرضی را، به ترتیب، نسبت به محورهای  $z$  و  $y$  نشان می‌دهند. (ب) به علاوه، نشان دهید که اگر نیروی عمودی  $Q$  در نقطه‌ای روی خط  $BD$  اعمال شود، تنش در نقطه  $A$  صفر خواهد بود.

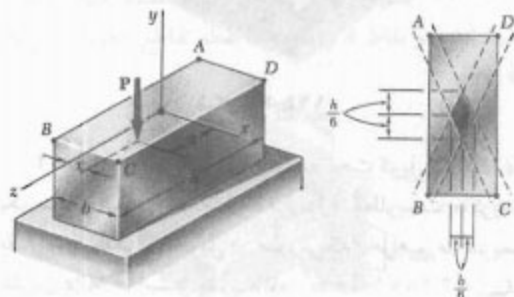


شکل م-۱۵۴

۱۵۵-۴ (الف) نشان دهید که تنش در گوشه  $A$  عضو منشوری نشان داده شده در شکل م-۱۵۵ الف صفر خواهد بود هرگاه نیروی عمودی  $P$  در نقطه‌ای روی خط زیر اعمال شود:

$$\frac{x}{b/6} + \frac{z}{h/6} = 1$$

(ب) به علاوه، نشان دهید که اگر بخواهیم تنش کششی در عضو ایجاد نشود، نیروی  $P$  باید در نقطه‌ای داخل سطحی اعمال شود که توسط خط به دست آمده در قسمت الف و سه خط مشابه متناظر با حالت تنش صفر در  $C$ ،  $B$  و  $D$  محدود شده است. این سطح را، که در شکل م-۱۵۵ ب نشان داده شده است، هسته مقطع عرضی می‌گویند.

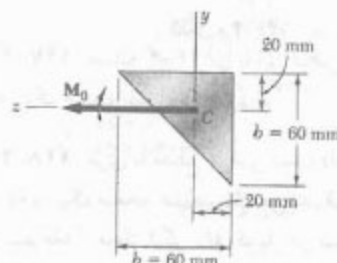


(الف)

(ب)

شکل م-۱۵۵

۱۵۱-۴ تیری با مقطع عرضی نشان داده شده تحت کوپل  $M_0$ ، که در یک صفحه عمودی اثر می‌کند، قرار دارد. مطلوب است ماکزیمم مقدار مجاز لنگر  $M_0$  کوپل در صورتی که بخواهیم ماکزیمم تنش از  $100 \text{ MPa}$  بیشتر نشود، داده:  $I_y = I_z = b^4/36$  و  $I_{yz} = b^4/72$ .

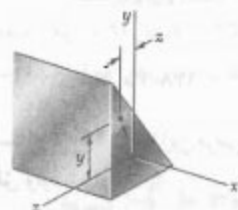


شکل م-۱۵۱

۱۵۲-۴ تیری با مقطع عرضی نامتقارن تحت کوپل  $M_0$ ، که در صفحه عمودی  $xy$  اثر می‌کند، قرار دارد. نشان دهید که تنش در نقطه  $A$ ، با مختصات  $y$  و  $z$ ، چنین است:

$$\sigma_A = -\frac{yI_z - zI_{yz}}{I_yI_z - I_{yz}^2} M_0$$

که در آن  $I_y$ ،  $I_z$  و  $I_{yz}$  ممان‌های اینرسی و حاصلضرب اینرسی مقطع عرضی را نسبت به محورهای گذرا از مرکز سطح، و  $M_0$  لنگر کوپل را نشان می‌دهد.



شکل م-۱۵۲ و م-۱۵۳

۱۵۳-۴ تیری با مقطع عرضی نامتقارن تحت کوپل  $M_0$ ، که در صفحه افقی  $xz$  اثر می‌کند، قرار دارد. نشان دهید که تنش در نقطه  $A$  چنین است:

$$\sigma_A = -\frac{zI_y - yI_{yz}}{I_zI_y - I_{yz}^2} M_0$$

که در آن  $I_y$ ،  $I_z$  و  $I_{yz}$  ممان‌های اینرسی و حاصلضرب اینرسی را نسبت به محورهای گذرا از مرکز سطح، و  $M_0$  لنگر کوپل را نشان می‌دهد.

قسمت ۳-۴، صفحه‌ای از مقطع عرضی که شامل نقطه  $C$  است به صورت صفحه‌ای می‌ماند، و قوس‌های مختلف دایره‌ای نشان داده شده در شکل ۴-۷۶ الف تبدیل به قوس‌های دایره‌ای و هم مرکزی می‌شوند که مرکز آنها  $C'$ ، متفاوت با  $C$ ، خواهد بود. به عبارت دقیق‌تر، اگر کوپل‌های  $M$  و  $M'$  در جهت‌های نشان داده شده باشند، انحناي قوس‌های دایره‌ای مختلف افزایش خواهد یافت؛ یعنی  $AC' < AC$ . همچنین، توجه کنید که کوپل‌های  $M$  و  $M'$  باعث می‌شوند طول سطح بالایی عضو کاهش یابد ( $A'B' < AB$ ) و طول سطح پایینی افزایش یابد ( $F'G' > FG$ ). نتیجه می‌شود که عضو دارای سطح ختایی است که طول آن ثابت می‌ماند. فصل مشترک سطح ختایی با صفحه  $xy$  در شکل ۴-۷۶ الف با قوس  $DE$  به شعاع  $R$ ، و در شکل ۴-۷۶ ج با قوس  $D'E'$  به شعاع  $R'$  نشان داده شده است. زوایای مرکزی متناظر با  $DE$  و  $D'E'$  را، به ترتیب، با  $\theta$  و  $\theta'$  نشان دهیم. چون طول سطح ختایی ثابت است، می‌نویسیم:

$$R\theta = R'\theta' \quad (۴-۵۹)$$

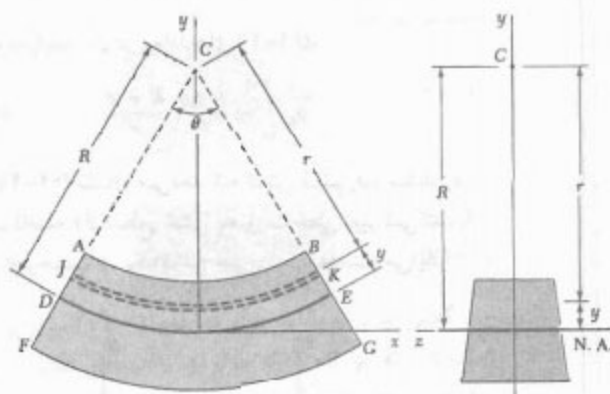
حال قوس دایره‌ای  $JK$  را، که در فاصله  $y$  بالایی سطح ختایی قرار دارد، در نظر می‌گیریم و شعاع این قوس را قبل و بعد از اعمال کوپل‌های خمشی با  $r$  و  $r'$  نشان می‌دهیم. تغییر شکل  $JK$  را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\delta = r'\theta' - r\theta \quad (۴-۶۰)$$

## ۱۵-۴\* خمش عضوهای خمیده

تابه‌حال، فقط تنش‌های ناشی از خمش عضوهای مستقیم را تحلیل کرده‌ایم. اکنون، تنش‌های ناشی از کوپل‌های مساوی و متضادی را که بر عضو خمیده‌ای وارد می‌شوند بررسی می‌کنیم. در این بحث، فقط عضو خمیده با مقطع عرضی یکنواختی را در نظر می‌گیریم که یک صفحه تقارن دارد و کوپل‌های خمشی در آن صفحه اثر می‌کنند. فرض می‌شود که تنش‌ها کمتر از حد تناسب هستند.

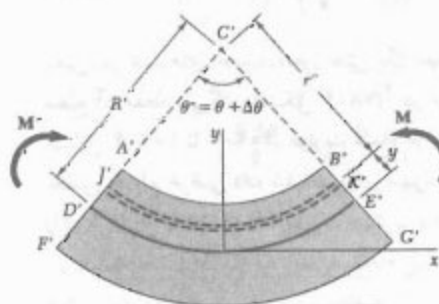
اگر انحناي اولیه عضو کم باشد، یعنی، اگر شعاع انحناي عضو در مقایسه با عمق مقطع عرضی‌اش بزرگ باشد، می‌توان عضو را مستقیم گرفت. به این ترتیب، با استفاده از فرمول‌های قسمت‌های ۳-۴ و ۴-۴، توزیع تنش را با تقریب خوب می‌توان به دست آورد\*. ولی، اگر شعاع انحنا و ابعاد مقطع عرضی عضو دارای مرتبه بزرگی یکسان باشند، از تحلیل مهندس آلمانی ای. وینکلر (۱۸۳۵ تا ۱۸۸۸) باید استفاده کرد. عضو خمیده‌ای با مقطع عرضی یکنواخت نشان داده شده در شکل ۴-۷۶ را در نظر بگیرید. مقطع عرضی آن نسبت به محور  $y$  تقارن دارد (شکل ۴-۷۶ ب). در حالت بی‌تنش، سطوح بالایی و پایینی مقطع عرضی صفحه عمودی  $xy$  را در امتداد قوس‌های دایره‌ای  $AB$  و  $FG$ ، با مرکز  $C$  قطع می‌کنند (شکل ۴-۷۶ الف). حال، دو کوپل مساوی و متضاد  $M$  و  $M'$  را در صفحه تقارن عضو وارد می‌کنیم (شکل ۴-۷۶ ج). طبق



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۴-۷۶

برای تعیین مکان سطح خنثی عضو و مقدار ضریب  $E \Delta \theta / \theta$ ، که در معادله‌های (۶۴-۴) و (۶۵-۴) به کار می‌رود، مانند قسمت ۴-۲ برای عضو مستقیم عمل می‌کنیم؛ یعنی، مجموع نیروهای جزئی وارد بر یک مقطع عرضی را مساوی صفر، و مجموع لنگر آنها را نسبت به محور عرضی  $z$  مساوی با لنگر خمشی  $M$  قرار می‌دهیم و معادله‌های زیر را می‌نویسیم:

$$\int \sigma_x dA = 0 \quad (۱-۴)$$

و

$$\int (-y \sigma_x dA) = M \quad (۳-۴)$$

با جایگذاری  $\sigma_x$  از (۶۵-۴) در معادله (۱-۴)،

$$- \int \frac{E \Delta \theta}{\theta} \frac{R-r}{r} dA = 0$$

$$\int \frac{R-r}{r} dA = 0$$

$$R \int \frac{dA}{r} - \int dA = 0$$

در نتیجه، فاصله از مرکز انحنا  $C$  تا سطح خنثی چنین است:

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \quad (۶۶-۴)$$

گفتنی است که  $R \neq F$  (فاصله از مرکز انحنا  $C$  تا مرکز سطح مقطع عرضی است)، زیرا  $\bar{r}$  با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{r} = \frac{1}{A} \int r dA \quad (۶۷-۴)$$

یعنی، در عضوهای خمیده، محور خنثی یک مقطع عرضی از مرکز سطح آن مقطع نمی‌گذرد (شکل ۷۸-۴)\*. در مثال ۱۰-۴ و در مسائل ۲۰۷-۴ تا ۲۰۹-۴، عبارت شعاع  $R$  سطح خنثی برای بعضی مقاطع عرضی داده شده‌اند. برای سهولت، این عبارت‌ها را در شکل ۷۹-۴ نشان داده‌ایم.

\* اگر معادله (۶۶-۴) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{A} \int \frac{1}{r} dA \quad (۶۶'-۴)$$

به خاصیت جالبی برای سطح خنثی می‌رسیم. معادله بالا نشان می‌دهد که اگر عضو را به تعداد زیادی مقطع عرضی با مساحت  $dA$  تقسیم کنیم، انحنا  $\frac{1}{R}$  سطح خنثی با مقدار متوسط انحنا  $\frac{1}{r}$  مقاطع مختلف برابر است.

با توجه به شکل ۷۶-۴،

$$r = R - y \quad r' = R' - y \quad (۶۱-۴)$$

با جایگذاری این عبارت‌ها در معادله (۶۰-۴)، داریم

$$\delta = (R' - y)\theta' - (R - y)\theta$$

با توجه به معادله (۵۹-۴) و با قرار دادن  $\theta' - \theta = \Delta \theta$ ،

$$\delta = -y \Delta \theta \quad (۶۲-۴)$$

از تقسیم تغییر شکل  $\delta$  اجزای قوس  $JK$  بر طول اولیه  $r\theta$  این قوس، کرنش قائم  $\epsilon_x$  این اجزا به دست می‌آید:

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{r\theta} = -\frac{y \Delta \theta}{r\theta}$$

با توجه به اولین رابطه در معادله (۶۱-۴)،

$$\epsilon_x = -\frac{\Delta \theta}{\theta} \frac{y}{R - y} \quad (۶۳-۴)$$

طبق این رابطه، در حالی که تمام مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌مانند، کرنش قائم  $\epsilon_x$  برحسب  $y$  از سطح خنثی به صورت خطی تغییر نمی‌کند.

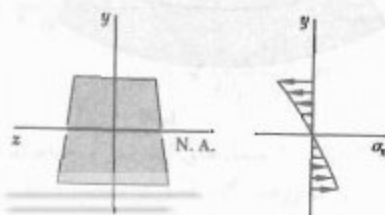
حال، تنش قائم  $\sigma_x$  را از قانون هوک،  $\sigma_x = E \epsilon_x$ ، می‌یابیم. برای این منظور،  $\epsilon_x$  را از معادله (۶۳-۴) جایگذاری می‌کنیم:

$$\sigma_x = -\frac{E \Delta \theta}{\theta} \frac{y}{R - y} \quad (۶۴-۴)$$

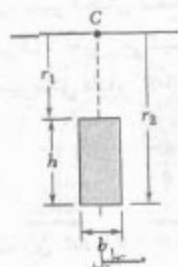
با توجه به رابطه اول در معادله‌های (۶۱-۴)،

$$\sigma_x = -\frac{E \Delta \theta}{\theta} \frac{R - r}{r} \quad (۶۵-۴)$$

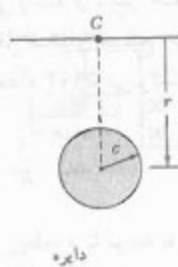
معادله (۶۴-۴) نشان می‌دهد که تنش قائم  $\sigma_x$ ، مانند  $\epsilon_x$ ، برحسب فاصله  $y$  از سطح خنثی به صورت خطی تغییر نمی‌کند. با ترسیم  $\sigma_x$  برحسب  $y$ ، یک قوس هیپربولیک به دست می‌آید.



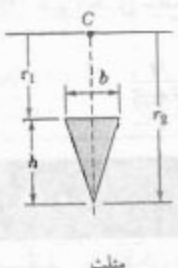
شکل ۷۷-۴



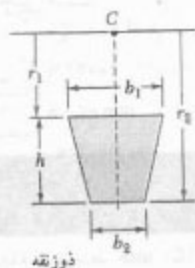
$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$



$$R = \frac{1}{2} (r + \sqrt{r^2 - c^2})$$



$$R = \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{r_2}{r_1} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1}$$



$$R = \frac{\frac{1}{2}h^2(b_1 + b_2)}{(b_1r_2 - b_2r_1) \ln \frac{r_2}{r_1} - h(b_1 - b_2)}$$

شکل ۷۹-۴ شعاع سطح خشی مقاطع عرضی با شکل‌های مختلف.

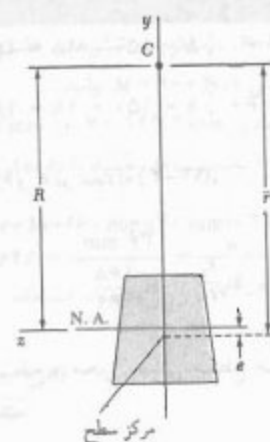
با جایگذاری  $E \Delta \theta / \theta$  از معادله (۶۹-۴) در معادله‌های (۶۴-۴) و (۶۵-۴)، عبارتهای زیر برای تنش قائم  $\sigma_x$  در یک تیر خمیده به دست می‌آیند:

$$\sigma_x = - \frac{My}{Ae(R-y)} \quad (۷۰-۴)$$

و

$$\sigma_x = \frac{M(r-R)}{Aer} \quad (۷۱-۴)$$

گفتنی است که پارامتر  $e$  در معادله‌های بالا، کمیت کوچکی است که از تفریق  $R$  و  $\bar{r}$ ، که طول آنها با هم قابل مقایسه است، به دست می‌آید. لذا، برای تعیین  $\sigma_x$  با دقت منطقی، باید  $R$  و  $\bar{r}$  را با دقت محاسبه کرد، به خصوص اگر  $R$  و  $\bar{r}$  بزرگ باشند؛ یعنی، وقتی انحنای عضو کوچک باشد. البته، همانطور که قبلاً دیدیم، در این حالت می‌توان با استفاده از فرمول  $\sigma_x = -My/I$ ، که برای عضوهای مستقیم است،  $\sigma_x$  را با تقریب خوب محاسبه کرد.



شکل ۷۸-۴

با جایگذاری  $\sigma_x$  از (۶۵-۴) در معادله (۴-۴)، می‌نویسیم:

$$\int \frac{E \Delta \theta}{\theta} \frac{R-r}{r} y dA = M$$

چون  $y = R - r$

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} \int \frac{(R-r)^2}{r} dA = M$$

با بسط عبارت مجذور در انتگرال بالا و پس از ساده کردن، داریم:

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} \left[ R^2 \int \frac{dA}{r} - 2RA + \int r dA \right] = M$$

با توجه به معادله‌های (۶۶-۴) و (۶۷-۴)، جمله اول داخل کروشه مساوی  $RA$  و جمله آخر مساوی  $\bar{r}A$  است. بنابراین،

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} (RA - 2RA + \bar{r}A) = M$$

با حل  $E \Delta \theta / \theta$

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} = \frac{M}{A(\bar{r} - R)} \quad (۶۸-۴)$$

از شکل ۷۶-۴ دیده می‌شود که برای  $M > 0$ ،  $\Delta \theta$  بزرگتر از صفر است. در نتیجه، شکل مقطع عرضی هر چه باشد،  $\bar{r} - R > 0$  یا  $\bar{r} < R$ . لذا، محور خشی مقطع عرضی همواره بین مرکز سطح مقطع عرضی و مرکز انحنای عضو قرار دارد (شکل ۷۸-۴). با جایگذاری  $\bar{r} - R = e$  در معادله (۶۸-۴)،

$$\frac{E \Delta \theta}{\theta} = \frac{M}{Ae} \quad (۶۹-۴)$$

با توجه به داده‌ها،

$$r_1 = \bar{r} - \frac{1}{2}h = 150 - 18 = 132 \text{ mm}$$

$$r_2 = \bar{r} + \frac{1}{2}h = 150 + 18 = 168 \text{ mm}$$

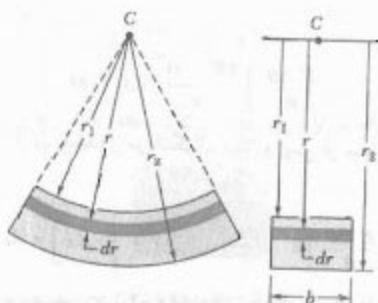
با جایگذاری  $h$ ،  $r_1$  و  $r_2$  در معادله (۷۳-۴)،

$$R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{36 \text{ mm}}{\ln \frac{168}{132}} = 149.3 \text{ mm}$$

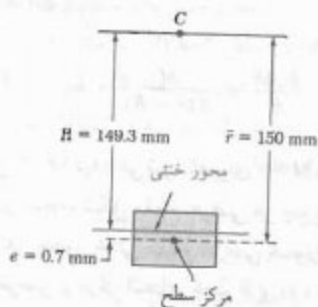
فاصله بین مرکز سطح و محور خنثی مقطع عرضی (شکل ۸۲-۴) چنین است:

$$e = \bar{r} - R = 150 - 149.3 = 0.7 \text{ mm}$$

برای تعیین  $e$  با دقت معمولی،  $R$  را باید تا پنج رقم با معنی محاسبه کرد:



شکل ۸۱-۴



شکل ۸۲-۴

حال، تغییر انحنای سطح خنثی را که از لنگر خمشی  $M$  ناشی می‌شود تعیین می‌کنیم. با حل انحنای سطح خنثی در عضو تغییرشکل داده،  $1/R'$ ، از معادله ۵۹-۴ می‌نویسیم:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \frac{\theta'}{\theta}$$

با جایگذاری  $\theta' = \theta + \Delta\theta$  در این رابطه، و با توجه به معادله (۶۹-۴)،

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\Delta\theta}{\theta} \right) = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{M}{EAe} \right)$$

در نتیجه، تغییر انحنای سطح خنثی چنین است:

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR} \quad (۷۲-۴)$$

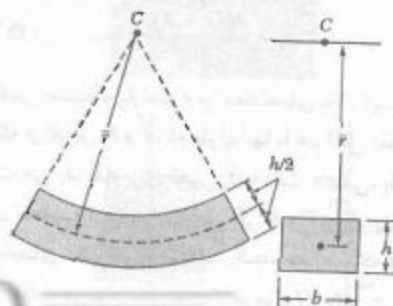
#### مثال ۱۰-۴

میله مستطیلی خمیده‌ای دارای شعاع متوسط  $\bar{r} = 150 \text{ mm}$  است. مقطع عرضی میله به عرض  $b = 60 \text{ mm}$  و عمق  $h = 36 \text{ mm}$  است (شکل ۸۰-۴). فاصله  $e$  بین مرکز سطح و محور خنثی مقطع عرضی را بیابید.

ابتدا، عبارت شعاع  $R$  سطح خنثی را می‌یابیم. شعاع‌های داخلی و خارجی میله را، به ترتیب، با  $r_1$  و  $r_2$  نشان می‌دهیم. از معادله (۶۶-۴)،

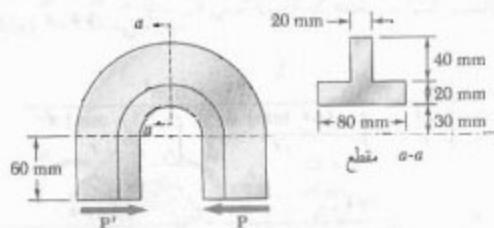
$$R = \frac{A}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dA}{r}} = \frac{bh}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{b dr}{r}} = \frac{h}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (۷۳-۴)$$



شکل ۸۰-۴

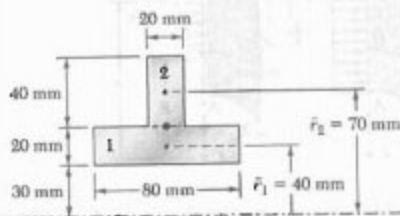




حل

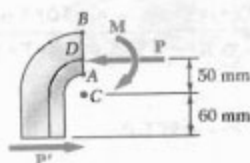
مرکز سطح مقطع عرضی. مرکز سطح  $D$  مقطع عرضی را می‌یابیم

$A_i, \text{mm}^2$	$\bar{r}_i, \text{mm}$	$\bar{r}_i A_i, \text{mm}^3$
۱ $(20)(80) = 1600$	۴۰	$64 \times 10^3$
۲ $(40)(20) = 800$	۷۰	$28 \times 10^3$
$\sum A_i = 2400$	$\sum \bar{r}_i A_i = 92 \times 10^3$	$\bar{r} = 38.3 \text{ mm}$



نیرو و کوپل در  $D$ . نیروهای داخلی در مقطع  $a-a$  معادل اند. با نیروی  $P$  که در  $D$  وارد می‌شود و کوپل  $M$  با لنگر زیر:

$$M = P(50 \text{ mm} + 60 \text{ mm}) = (0.11 \text{ m})P$$



اصل ترکیب. نیروی مرکزی  $P$  باعث ایجاد تنش فشاری یکنواخت در مقطع  $a-a$  می‌شود و کوپل خمشی  $M$  باعث ایجاد تنش با توزیع متغیر می‌شود [معادله (۷۱-۴)]. توجه داریم که کوپل  $M$  می‌خواهد شعاع انحنای عضو را افزایش دهد و لذا مثبت است (به شکل ۷۶-۴ نگاه کنید). تنش کل در یک نقطه از مقطع  $a-a$  در فاصله  $r$  از مرکز انحنای  $C$  برابر است با:

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{M(r-R)}{Aer_i} \quad (۱)$$

## مثال ۱۱-۴

در مثال ۱۰-۴، ماکزیمم تنش‌های کششی و فشاری را برای لنگر خمشی  $M = 900 \text{ N.m}$  بیابید.

مقادیر  $R = 149.3 \text{ mm}$  و  $e = 0.7 \text{ mm}$  را، که در مثال ۱۰-۴ به دست آمد، همراه با داده‌های زیر،

$$M = 900 \text{ N.m} \quad A = bh = (60 \text{ mm})(60 \text{ mm}) = 3600 \text{ mm}^2$$

در معادله (۷۱-۴) قرار می‌دهیم. با استفاده از  $r = r_i = 168 \text{ mm}$  می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M(r_i - R)}{Aer_i} \\ &= \frac{(900 \text{ N.m})(0.168 \text{ m} - 0.1493 \text{ m})}{(3600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(0.7 \times 10^{-3} \text{ m})(0.168 \text{ m})} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = 64.3 \text{ MPa}$$

اکنون، با جایگذاری  $r = r_i = 132 \text{ mm}$  در معادله (۷۱-۴) داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= \frac{M(r_i - R)}{Aer_i} \\ &= \frac{(900 \text{ N.m})(0.132 \text{ m} - 0.1493 \text{ m})}{(3600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(0.7 \times 10^{-3} \text{ m})(0.132 \text{ m})} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\min} = -75.4 \text{ MPa}$$

توجه. مقادیر به دست آمده برای  $\sigma_{\max}$  و  $\sigma_{\min}$  را با نتایج مربوط به یک میله مستقیم مقایسه می‌کنیم. با استفاده از معادله (۱۵-۴) در قسمت ۴-۴،

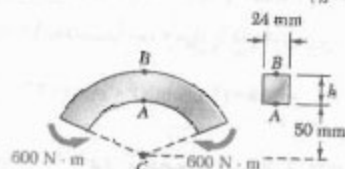
$$\begin{aligned} \sigma_{\max, \min} &= \pm \frac{Mc}{I} \\ &= \pm \frac{(900 \text{ N.m})(0.018 \text{ m})}{\frac{1}{12}(0.06 \text{ m})(0.036 \text{ m})^3} = \pm 69.44 \text{ MPa} \end{aligned}$$

## مسئله نمونه ۱۱-۴

یک قطعه مکانیکی با مقطع عرضی  $T$ ، مطابق شکل بازگذاری شده است. اگر تنش مجاز فشاری  $50 \text{ MPa}$  باشد، ماکزیمم نیروی  $P$  را که می‌توان بر قطعه وارد کرد بیابید.

## مسائل

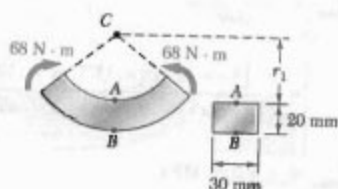
۱۵۶-۴ برای میله خمیده و بارگذاری نشان داده شده،  
مطلوبست تنش در نقطه  $A$  وقتی: (الف)  $h = 50 \text{ mm}$ ،  
(ب)  $h = 60 \text{ mm}$ .



شکل م ۱۵۶-۴ و م ۱۵۷-۴

۱۵۷-۴ برای میله خمیده و بارگذاری نشان داده شده،  
تنش در نقاط  $A$  و  $B$  را برای  $h = 55 \text{ mm}$  بیابید.

۱۵۸-۴ برای میله خمیده و بارگذاری نشان داده شده،  
تنش در نقاط  $A$  و  $B$  را برای  $r_1 = 40 \text{ mm}$  بیابید.



شکل م ۱۵۸-۴ و م ۱۵۹-۴

۱۵۹-۴ برای میله خمیده و بارگذاری نشان داده شده،  
مطلوبست تنش در نقطه  $A$  وقتی: (الف)  $r_1 = 30 \text{ mm}$ ،  
(ب)  $r_1 = 50 \text{ mm}$ .

۱۶۰-۴ قسمت خمیده میله نشان داده شده دارای شعاع داخلی  $20 \text{ mm}$  است. اگر خط اثر نیروی  $3 \text{ kN}$  در فاصله  $a = 60 \text{ mm}$  از صفحه قائمی که شامل مرکزی انحنا میله است قرار داشته باشد، ماکزیم تنش فشاری در میله را بیابید.

۱۶۱-۴ اگر تنش مجاز در میله  $150 \text{ MPa}$  باشد،  
مطلوبست ماکزیم فاصله مجاز  $a$  خط اثر نیروی  $3 \text{ kN}$  تا صفحه قائمی که شامل مرکز انحنا میله است.

شعاع سطح خشی. حال شعاع  $R$  سطح خشی را با استفاده از معادله (۲-۶۶) می یابیم:

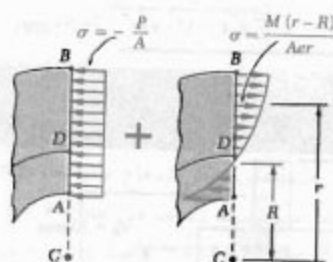
$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} = \frac{2400 \text{ mm}^2}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{(80 \text{ mm})}{r} dr + \int_{r_1}^{r_2} \frac{(20 \text{ mm})}{r} dr}$$

$$= \frac{2400}{80 \ln \frac{50}{30} + 20 \ln \frac{90}{50}} = \frac{2400}{40.866 + 11.756}$$

$$= 45.61 \text{ mm} = 0.04561 \text{ m}$$

همچنین:

$$e = \bar{r} - R = 0.05000 \text{ m} - 0.04561 \text{ m} = 0.00439 \text{ m}$$



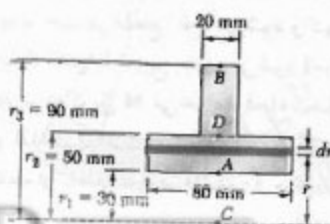
بار مجاز. ماکزیم تنش فشاری در نقطه  $A$ ، یعنی در  
 $r = 0.030 \text{ m}$ ، روی می دهد.  $\sigma_{all} = 50 \text{ MPa}$ ، با استفاده از  
معادله (۱)،

$$-50 \times 10^6 \text{ Pa} = - \frac{P}{2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2}$$

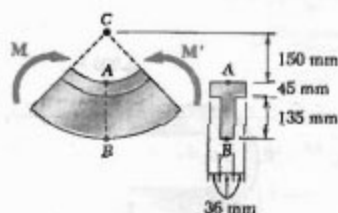
$$+ \frac{(0.110 \text{ P})(0.030 \text{ m} - 0.04561 \text{ m})}{(2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(0.00439 \text{ m})(0.030 \text{ m})}$$

$$\Rightarrow -50 \times 10^6 = -417 P - 5432 P$$

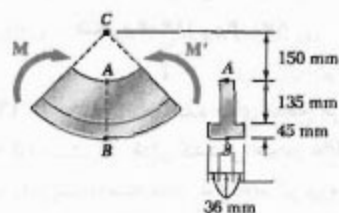
$$\Rightarrow P = 8.55 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$



۱۶۵-۴ و ۱۶۶-۴ اگر  $M = 20 \text{ kN.m}$ ، مطلوبست:  
(الف) تنش در نقطه A، (ب) تنش در نقطه B.

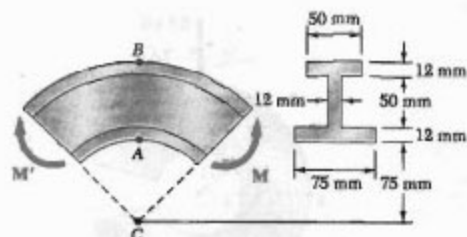


شکل م-۱۶۵-۴



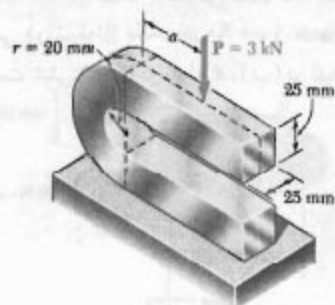
شکل م-۱۶۶-۴

۱۶۷-۴ سه ورق به هم جوش شده‌اند و تیر خمیده نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. برای بارگذاری داده شده، فاصله e بین محور خنثی و مرکز سطح مقطع عرضی را بیابید.



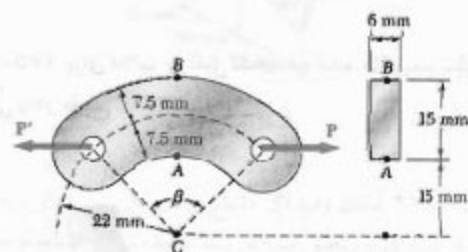
شکل م-۱۶۷-۴ و م-۱۶۸-۴

۱۶۸-۴ سه ورق به هم جوش شده‌اند و تیر خمیده نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. برای  $M = 900 \text{ N.m}$ ، مطلوبست:  
(الف) تنش در نقطه A، (ب) تنش در نقطه B، (ج) تنش در مرکز سطح مقطع عرضی.



شکل م-۱۶۰-۴ و م-۱۶۱-۴

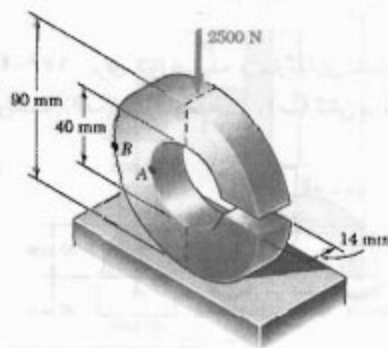
۱۶۲-۳ میله‌های فولادی با مقطع عرضی نشان داده شده و زوایای مرکزی مختلف  $\beta$  در دسترس‌اند. اگر تنش ماکزیمم  $100 \text{ MPa}$  باشد، ماکزیمم نیروی P را که می‌توان در حالت  $\beta = 90^\circ$  بر میله وارد کرد بیابید.



شکل م-۱۶۲-۴

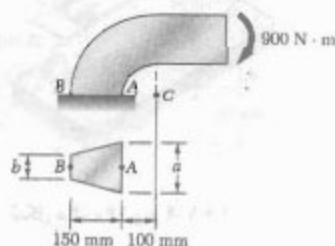
۱۶۳-۴ مسئله ۱۶۲-۴ را با فرض  $\beta = 60^\circ$  حل کنید.

۱۶۴-۴ برای حلقه شیاردار نشان داده شده، مطلوبست تنش: (الف) در نقطه A، (ب) در نقطه B.



شکل م-۱۶۴-۴

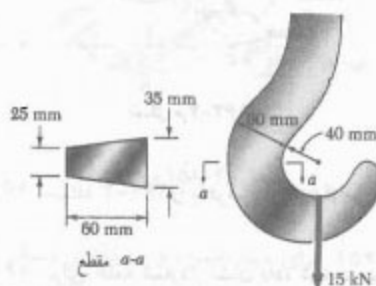
۱۷۳-۴ اگر قطعه مکانیکی نشان داده شده دارای مقطع عرضی ذوزنقه‌ای با  $a = 90 \text{ mm}$  و  $b = 62 \text{ mm}$  باشد، مطلوبست: تنش: (الف) در نقطه  $A$ ، (ب) در نقطه  $B$ .



شکل م ۱۷۳-۴ و م ۱۷۴-۴

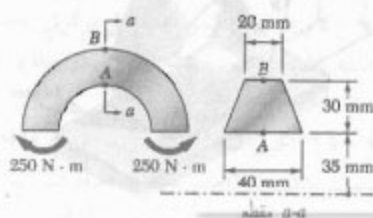
۱۷۴-۴ اگر قطعه مکانیکی نشان داده شده دارای مقطع عرضی ذوزنقه‌ای با  $a = 62 \text{ mm}$  و  $b = 90 \text{ mm}$  باشد، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه  $A$ ، (ب) تنش در نقطه  $B$ .

۱۷۵-۴ برای قلاب جرثقیل نشان داده شده، ماکزیمم تنش کششی را در مقطع  $a-a$  بیابید.



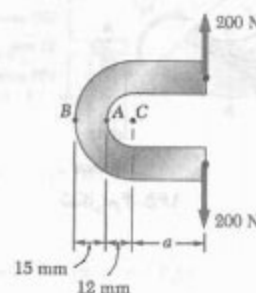
شکل م ۱۷۵-۴

۱۷۶-۴ برای تیر خمیده و یارگذاری نشان داده شده، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه  $A$ ، (ب) تنش در نقطه  $B$ .



شکل م ۱۷۶-۴

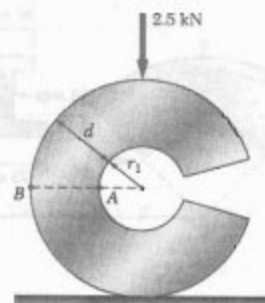
۱۶۹-۴ میله نشان داده شده دارای مقطع عرضی دایره‌ای به قطر ۱۵ mm است. اگر  $a = 30 \text{ mm}$ ، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه  $A$ ، (ب) تنش در نقطه  $B$ .



شکل م ۱۶۹-۴ و م ۱۷۰-۴

۱۷۰-۴ میله نشان داده شده دارای مقطع عرضی دایره‌ای به قطر ۱۵ mm است. اگر تنش کششی مجاز ۵۵ MPa باشد، مطلوبست ماکزیمم فاصله مجاز  $a$  از خط اثر نیروی ۲۰۰ N تا صفحه‌ای که شامل مرکز انحنای میله است.

۱۷۱-۴ حلقه شکاف‌دار نشان داده شده دارای شعاع داخلی  $r_1 = 20 \text{ mm}$  و مقطع عرضی دایره‌ای به قطر  $d = 32 \text{ mm}$  است. برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه  $A$ ، (ب) تنش در نقطه  $B$ .



شکل م ۱۷۱-۴ و م ۱۷۲-۴

۱۷۲-۴ حلقه شکاف‌دار نشان داده شده دارای شعاع داخلی  $r_1 = 16 \text{ mm}$  و مقطع عرضی دایره‌ای به قطر  $d = 32 \text{ mm}$  است. برای بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست: (الف) تنش در نقطه  $A$ ، (ب) تنش در نقطه  $B$ .

۴-۱۸۰ تا ۴-۱۸۲ با استفاده از معادله (۴-۶۶)، عبارت  $R$  داده شده در مسئله ۴-۷۹ را در حالت‌های زیر بیابید:

۴-۱۸۰ مقطع عرضی دایره‌ای

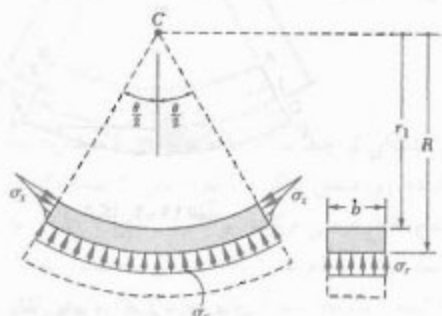
۴-۱۸۱ مقطع دوزنقه‌ای

۴-۱۸۲ مقطع مثلثی

۴-۱۸۳ برای تیر خمیده با مقطع عرضی مستطیلی که تحت کوپل خمشی  $M$  قرار دارد، نشان دهید که تنش شعاعی در سطح خشی عبارت است از

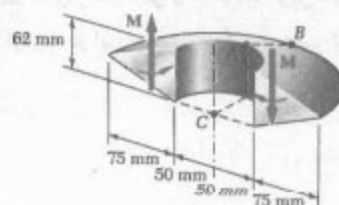
$$\sigma_r = \frac{M}{Ae} \left( 1 - \frac{r_i}{R} - \ln \frac{R}{r_i} \right)$$

و مقدار  $\sigma_r$  را برای تیر خمیده مثال‌های ۴-۱۰ و ۴-۱۱ محاسبه کنید. (راهنمایی: نمودار آزاد قسمتی از تیر را که بالای سطح خشی است در نظر بگیرید).

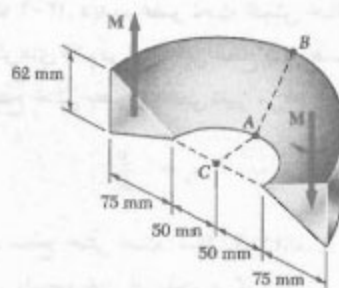


شکل م-۱۸۳

۴-۱۷۷ و ۴-۱۷۸ اگر  $M = 560 \text{ N.m}$ ، مطلوب است: (الف) تنش در نقطه  $A$ ، (ب) تنش در نقطه  $B$ .



شکل م-۱۷۷

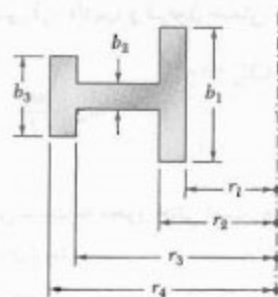


شکل م-۱۷۸

۴-۱۷۹ نشان دهید اگر مقطع عرضی تیر خمیده‌ای از دو یا تعداد بیشتری مستطیل تشکیل شده باشد، شعاع  $R$  سطح خشی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد

$$R = \frac{A}{\ln \left[ \left( \frac{r_1}{r_i} \right)^{b_1} \left( \frac{r_2}{r_i} \right)^{b_2} \left( \frac{r_3}{r_i} \right)^{b_3} \right]}$$

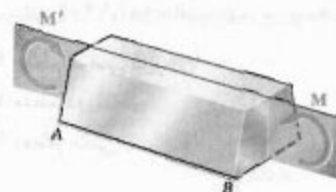
که در آن  $A$  مساحت کل مقطع عرضی است.



شکل م-۱۷۹

## مرور و خلاصه فصل ۴

در این فصل، تنش و تغییر شکل عضوهایی را که تحت کوبل‌های مساوی و متضاد  $M$  و  $M'$  قرار دارند، بررسی کردیم؛ در این حالت، می‌گویند عضو تحت خمش خالص است (شکل ۴-۱).

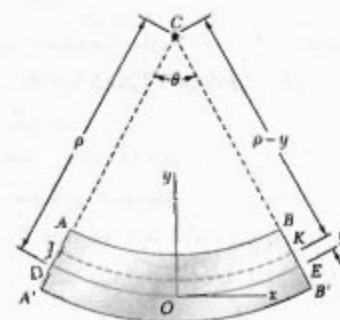


شکل ۴-۱

ابتدا، عضوهایی را مطالعه کردیم که دارای صفحه تقارن بودند و کوبل‌ها در آن صفحه وارد می‌شدند، نشان دادیم که، با تغییر شکل عضو، مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌مانند (قسمت ۴-۳). دیدیم عضو تحت خمش خالص دارای یک سطح خنثی است. تنش‌ها و کرنش‌های قائم در امتداد این سطح صفر هستند و کرنش قائم طولی  $\epsilon_x$  برحسب فاصله  $y$  از سطح خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (۴-۸)$$

که در آن،  $\rho$  شعاع انحناي سطح خنثی است (شکل ۴-۱۲ الف). فصل مشترک سطح خنثی با یک مقطع عرضی را محور خنثی آن مقطع می‌گویند.



شکل ۴-۱۲ الف

برای عضوهای متشکل از چند ماده که از قانون هوک پیروی می‌کنند (قسمت ۴-۴)، تنش قائم  $\sigma_x$  برحسب فاصله از محور خنثی به صورت خطی تغییر می‌کند (شکل ۴-۱۳). اگر تنش ماکزیمم را با  $\sigma_m$  نشان دهیم،

$$\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m \quad (۴-۱۲)$$

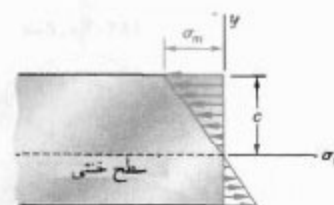
که در آن،  $c$  ماکزیمم فاصله یک نقطه از مقطع تا محور خنثی است. با مساوی صفر قرار دادن مجموع نیروهای جزئی  $\sigma_x dA$ ، نشان دادیم که محور خنثی از مرکز سطح مقطع عرضی عضو که تحت خمش خالص است می‌گذرد. سپس، مجموع لنگر نیروهای جزئی را مساوی لنگر خمشی قرار دادیم، و فرمول خمش الاستیک را برای ماکزیمم تنش قائم به دست آوردیم:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \quad (۴-۱۵)$$

که در آن،  $I$  معان اینرسی مقطع عرضی نسبت به محور خنثی است. همچنین، تنش قائم را در فاصله  $y$  از محور خنثی به دست آوردیم:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (۴-۱۶)$$

تنش قائم در گستره الاستیک



شکل ۴-۱۳

فرمول خمش الاستیک



با توجه به اینکه  $I$  و  $c$  به شکل هندسی مقطع عرضی بستگی دارند، مدول الاستیک را با تعریف زیر در نظر گرفتیم:

$$S = \frac{I}{c} \quad (۱۷-۴)$$

سپس، عبارت زیر را برای ماکزیمم تنش قائم نوشتیم:

$$\sigma_m = \frac{M}{S} \quad (۱۸-۴)$$

با توجه به اینکه انحنای عضو معکوس شعاع انحنای آن است، انحنای عضو را به صورت زیر نوشتیم:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (۲۱-۴)$$

در قسمت ۴-۵، در بررسی خمش عضوهای همگن دارای صفحه تقارن دیدیم که تغییر شکل ها در صفحه مقطع عرضی روی می دهند و انحنای غیر الاستیک عضو را ایجاد می کنند.

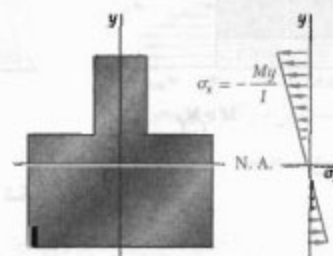
سپس، خمش عضوهای متشکل از چند ماده با مدول های الاستیته مختلف را بررسی کردیم (قسمت ۴-۶). دیدیم، ضمن اینکه مقاطع به صورت صفحه ای می مانند، محور خشی معمولاً از مرکز سطح مقطع عرضی مرکب نمی گذرد (شکل ۴-۲۴). با استفاده از نسبت مدول های الاستیته مواد، مقطع تبدیل یافته متناظر با عضو معادلی را که تماماً از یک نوع ماده ساخته شده است به دست آوردیم. سپس، برای تعیین تنش در این عضو همگن (شکل ۴-۲۶)، از روش های قبل و برای تعیین تنش در تیر مرکب از نسبت مدول های الاستیته استفاده کردیم (مسائل نمونه ۴-۳ و ۴-۴).

مدول الاستیک

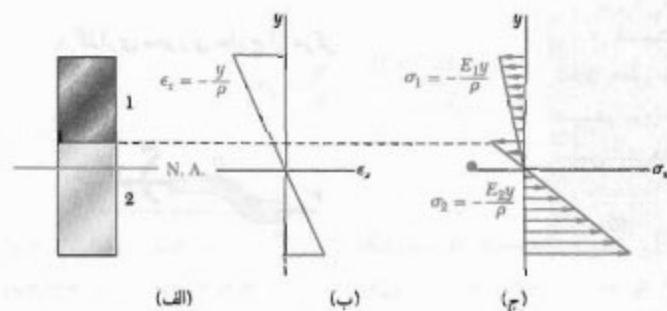
انحنای عضو

انحنای غیر الاستیک

عضوهای چند ماده ای



شکل ۴-۲۶

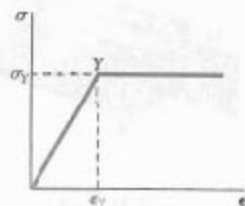


شکل ۴-۲۴

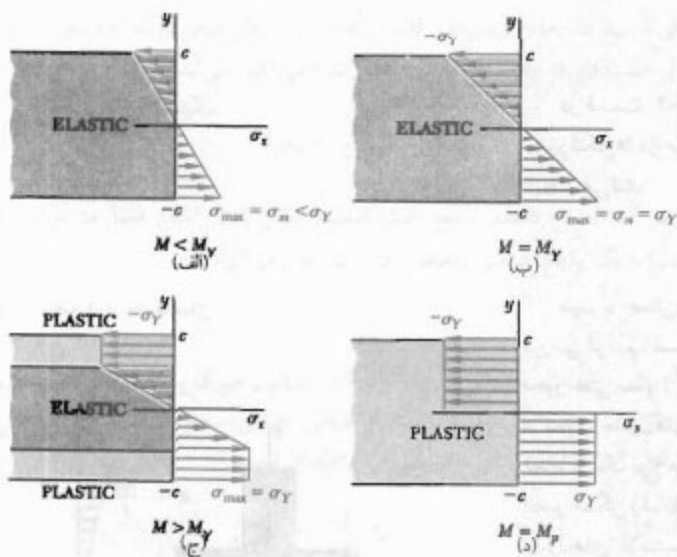
## تمرکز تنش

در قسمت ۴-۷، تمرکز تنش را در عضوهای تحت خمش خالص بررسی کردیم و نمودار ضریب تمرکز تنش را برای میله‌های مستقیم و گرد و دایره‌دار و شیاردار را در شکل‌های ۴-۳۱ و ۴-۳۲ نشان دادیم.

سپس، دیدیم که عضوهای چند ماده‌ای از قانون هوک پیروی نمی‌کنند (قسمت ۴-۸). در بررسی تیر مستطیلی الاستوپلاستیک (شکل ۴-۳۹) هنگام افزایش لنگر خمشی دیدیم که ماکزیمم لنگر الاستیک  $M_y$  هنگام شروع تسلیم در تیر به وجود می‌آید (شکل ۴-۴۰). با افزایش بیشتر لنگر خمشی، مناطق پلاستیک به وجود می‌آیند و اندازه هسته الاستیک عضو کاهش می‌یافت (قسمت ۴-۹). سرانجام، تیر کاملاً پلاستیک می‌شود در این حالت، لنگر پلاستیک  $M_p$  (لنگر ماکزیمم) را داریم. در قسمت ۴-۱۱، تغییر شکل‌های دائمی و تنش‌های باقیمانده در یک عضو را پس از حذف بارهایی که باعث تسلیم شده‌اند بررسی کردیم.



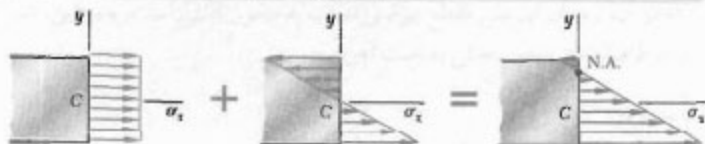
شکل ۴-۳۹



شکل ۴-۴۰

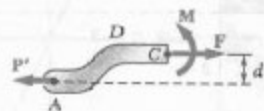
در قسمت ۴-۱۲، با استفاده از روش‌های قبل، تنش در عضوهایی را که در صفحه تقارن به طور خارج از مرکز بارگذاری شده‌اند مطالعه کردیم. بار خارج از مرکز را با یک سیستم نیرو کوپل واقع در مرکز سطح مقطع عرضی جایگزین (شکل ۴-۴۸) و سپس تنش‌های ناشی از بار مرکزی و کوپل خمشی را ترکیب کردیم (شکل ۴-۵۱):

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I} \quad (4-50)$$



شکل ۴-۵۱

بارگذاری محوری خارج از مرکز



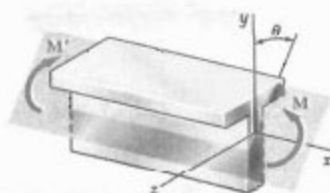
شکل ۴-۴۸

سپس، خمش عضوها با مقطع عرضی نامتقارن را بررسی کردیم [قسمت ۴-۱۳]. دیدیم که اگر بردار  $M$  در امتداد یکی از محوره‌های اصلی گذرا از مرکز سطح مقطع عرضی باشد، فرمول خمش را می‌توان به کار برد. در هنگام لزوم،  $M$  را به مؤلفه‌هایش در امتداد محوره‌های اصلی تجزیه می‌کردیم و تنش‌های ناشی از کوپل‌های مؤلفه‌ای را با هم ترکیب می‌کردیم (شکل‌های ۴-۶۰ و ۴-۶۱).

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (۵۵-۴)$$

برای کوپل  $M$  نشان داده شده در شکل ۴-۶۵، وضعیت محور خشی را از معادله زیر به دست آوردیم:

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \quad (۵۷-۴)$$



شکل ۴-۶۰

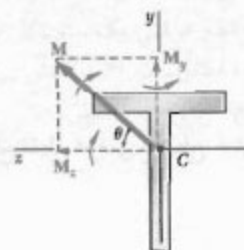
این حالت در قسمت ۴-۱۴ بررسی شد. در این قسمت بود که مجدداً بار را با یک سیستم نیروکوپل واقع در مرکز سطح جایگزین می‌کردیم. سپس، تنش‌های ناشی از بار مرکزی و دو مؤلفه کوپل واقع در امتداد محوره‌های اصلی را با هم ترکیب می‌کردیم:

$$\sigma_x = \frac{p}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad (۵۸-۴)$$

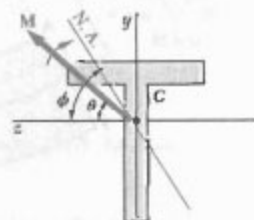
با تحلیل تنش در عضوهای خمیده (شکل ۴-۱۷۶ الف)، این فصل را به پایان بردیم. دیدیم که اگر عضو خمیده‌ای تحت خمش قرار گیرد، مقاطع عرضی به صورت صفحه‌ای می‌مانند، و تنش به صورت خطی تغییر نمی‌کند و سطح خشی از مرکز سطح مقطع عرضی نمی‌گذرد. فاصله مرکز انحنای عضو تا سطح خشی چنین بود:

$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}} \quad (۶۶-۴)$$

## خمش نامتقارن



شکل ۴-۶۱



شکل ۴-۶۵

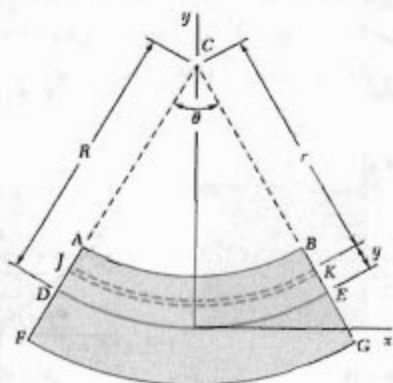
حالت کلی بارگذاری محوری  
خارج از مرکز

عضوهای خمیده

که در آن،  $A$  مساحت مقطع عرضی است. تنش قائم در فاصله  $y$  از سطح خنثی به صورت زیر بیان شد:

$$\sigma_x = - \frac{My}{Ae(R - y)} \quad (۷۰-۴)$$

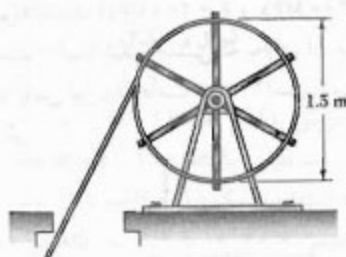
که در آن  $M$  لنگر خمشی و  $e$  فاصله مرکز سطح مقطع عرضی تا سطح خنثی است.



شکل ۴-۷۶ الف

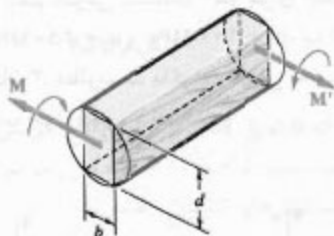
## مسائل تکمیلی

۱۸۷-۴ گاهی، برای تمیز کردن مجراهای زیرزمینی که مسدود شده‌اند از میله‌های مستقیم به قطر ۸ mm و به طول ۶ m استفاده می‌شود. میله‌ها از فولاد پر استقامت ساخته شده‌اند و پیرامون قرقره‌هایی به قطر ۱٫۵ m پیچیده شده‌اند. اگر بخواهیم تنش در میله‌ها از استقامت تسلیم بیشتر نشود، مطلوبیت: (الف) تنش در میله وقتی میله، که در ابتدا مستقیم است، پیرامون قرقره پیچیده شود، (ب) لنگر خمشی متناظر در میله از  $E = ۲۰۰ \text{ GPa}$  استفاده کنید.



شکل م-۱۸۷

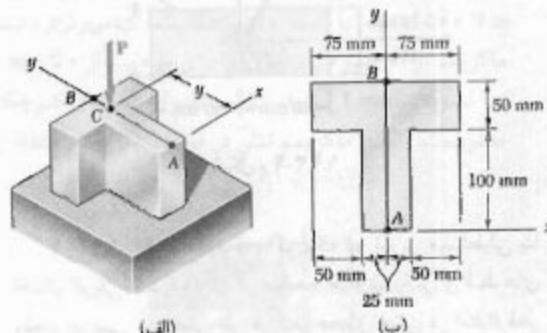
۱۸۸-۴ کوپل  $M$  بر تیر، با مقطع عرضی نشان داده شده، وارد شده است. می‌خواهیم این تیر را با ابره کردن الواری با مقطع عرضی دایره‌ای به دست آوریم. مطلوبیت نسبت  $d/b$  که به ازای آن: (الف) تنش ماکزیمم  $\sigma_m$  تا حد امکان کوچک باشد، (ب) شعاع انحنای تیر به ماکزیمم برسد.



شکل م-۱۸۸

۱۸۹-۴ یک تسمه مسی ( $E_s = ۱۰۵ \text{ GPa}$ ) و یک تسمه آلومینیومی ( $E_a = ۷۵ \text{ GPa}$ ) به یکدیگر متصل شده‌اند و میله مرکب نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. اگر میله با اعمال کوپل ۳۵ N.m حول یک محور افقی خم شود، مطلوبیت ماکزیمم تنش: (الف) در تسمه آلومینیومی، (ب) در تسمه مسی.

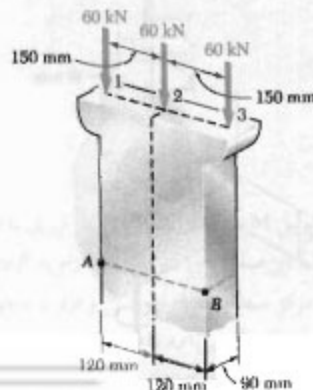
۱۸۴-۴ نیروی عمودی  $P$  با مقدار ۸۰ kN در نقطه  $C$  روی محور تقارن مقطع عرضی یک ستون کوتاه وارد شده است. اگر  $y = ۱۲۵ \text{ mm}$ ، مطلوبیت: (الف) تنش در نقطه  $A$ ، (ب) تنش در نقطه  $B$ ، (ج) مکان محور خنثی.



شکل م-۱۸۴ و م-۱۸۵

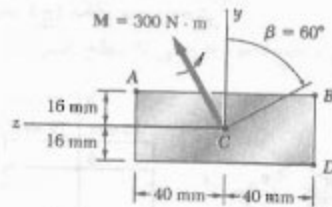
۱۸۵-۴ نیروی عمودی  $P$  با مقدار ۸۰ kN در نقطه  $C$  روی محور تقارن مقطع عرضی ستون نشان داده شده وارد شده است. مطلوبیت گستره مقدار  $y$  به طوری که تنش کششی در ستون روی ندهد.

۱۸۶-۴ مطلوبیت تنش در نقاط  $A$  و  $B$ : (الف) برای بارگذاری نشان داده شده، (ب) برای بارهای ۶۰ kN که فقط در نقاط ۱ و ۲ وارد می‌شوند.



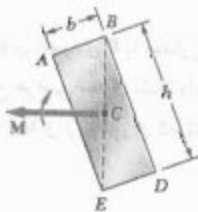
شکل م-۱۸۶

۱۹۳-۴ کوپل  $M$  در صفحه‌ای که با عمود زاویه  $\beta$  دارد بر مقطع عرضی تیر نشان داده شده وارد شده است. تنش را در نقاط زیر بیابید: (الف)  $A$ ، (ب)  $B$ ، (ج)  $D$



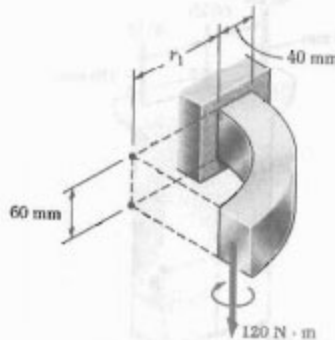
شکل م ۱۹۳-۴

۱۹۴-۴ نشان دهید که، اگر یک تیر توپر مستطیلی با اعمال کوپلی خم شود که در صفحه حاوی یکی از قطرهای مقطع عرضی مستطیلی اثر می‌کند، محور خنثی در امتداد قطر دیگر خواهد بود.

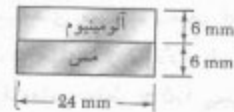


شکل م ۱۹۴-۴

۱۹۵-۴ میله خمیده نشان داده شده دارای مقطع عرضی  $40 \text{ mm} \times 60 \text{ mm}$  و شعاع داخلی  $r_1 = 15 \text{ mm}$  است. برای بارگذاری نشان داده شده، ماکزیم تنش‌های کششی و فشاری را بیابید.

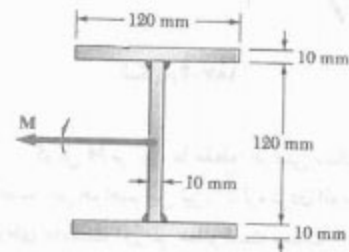


شکل م ۱۹۵-۴



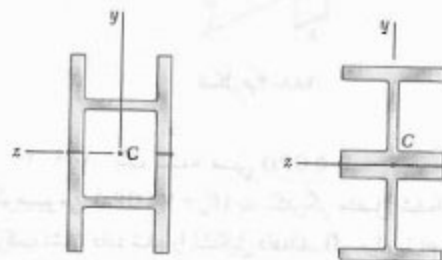
شکل م ۱۸۹-۴

۱۹۰-۴ سه ورق فولادی  $120 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$  به هم جوش شده‌اند و تیر نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. با فرض اینکه تیر الاستوپلاستیک ( $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$ ) باشد، مطلوبست: (الف) لنگر خمشی که به ازای آن مناطق پلاستیک در بالا و پایین تیر به ضخامت  $40 \text{ mm}$  است، (ب) شعاع انحنای متناظر تیر.



شکل م ۱۹۰-۴

۱۹۱-۴ و ۱۹۲-۴ دو مقطع نورد شده  $W100 \times 19.3$  مطابق شکل به هم جوش شده‌اند. اگر برای آلیاژ فولادی به کار رفته  $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$  و  $\sigma_U = 400 \text{ MPa}$  با استفاده از ضریب اطمینان ۳، مطلوبست ماکزیم کوپلی که می‌توان وارد کرد تا مجموعه حول محور  $z$  خم شود.



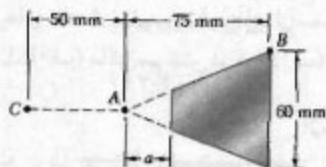
شکل م ۱۹۲-۴

شکل م ۱۹۱-۴



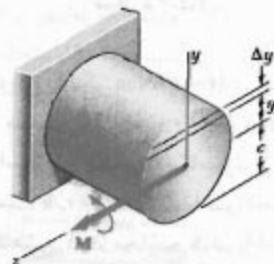


۷-۴ یک ۷ در قطعه مکانیکی مسئله ۴-۱۷۸، یک قسمت با مقطع عرضی مثلثی به عرض  $a$  را حذف می‌کنیم، تا تنش ماکزیمم در این قطعه کاهش یابد. برای واری صحت این طرح، با استفاده از یک برنامه کامپیوتری، تنش ماکزیمم در قطعه را برای مقادیر  $a$  از ۰ تا ۲۵ mm با نموداری ۲۵ محاسبه کنید. با استفاده از نموداری کوچکتر، مطلوبیت فاصله  $a$  که به‌زای آن تنش ماکزیمم تا حد امکان کوچک باشد.



شکل م ۷-۴

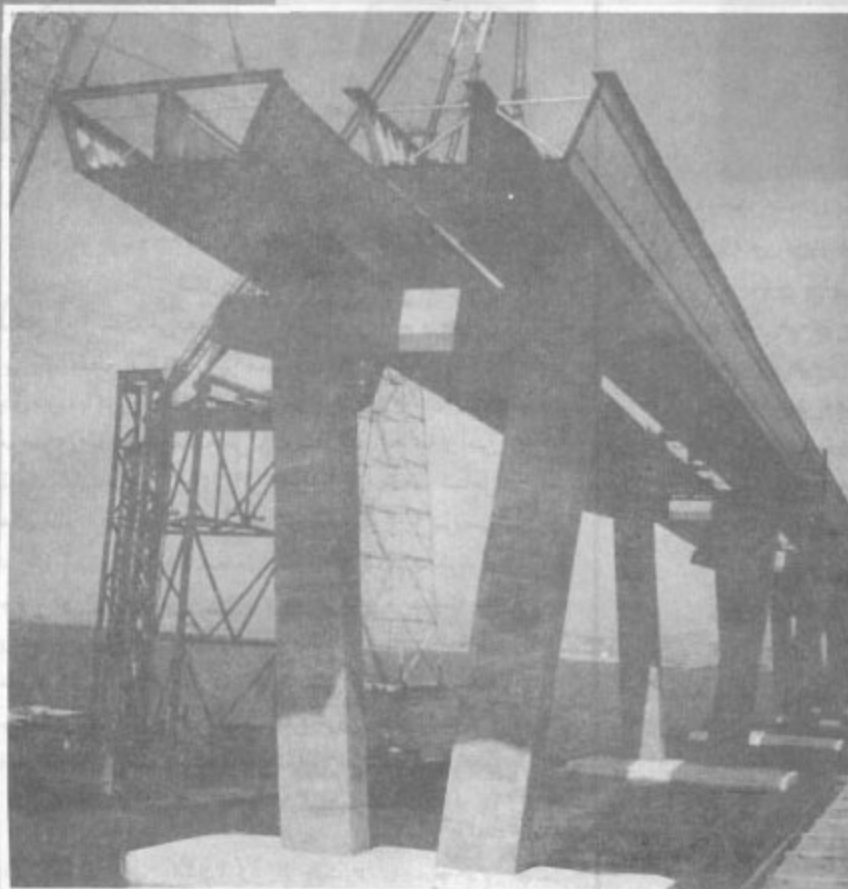
۶-۴ میل به توپری با شعاع  $c = 30$  mm از فولاد الاستوپلاستیک ( $\sigma_y = 290$  MPa و  $E = 200$  GPa) ساخته شده است. میل تحت کوپل  $M$  قرار دارد. این کوپل از صفر تا ماکزیمم لنگر الاستیک  $M_y$  و سپس تا لنگر پلاستیک  $M_p$  افزایش می‌یابد. اگر نصف ضخامت هسته الاستیک را با  $y_p$  نشان دهیم، با استفاده از یک برنامه کامپیوتری، لنگر خمشی  $M$  و شعاع انحنای  $\rho$  را برای مقادیر  $y_p$  از ۳۰ mm تا ۰ با نموداری ۵ mm محاسبه کنید. (راهنمایی: مقطع عرضی را به ۸۰ جزء افقی با ارتفاع ۱ mm تقسیم کنید).



شکل م ۶-۴



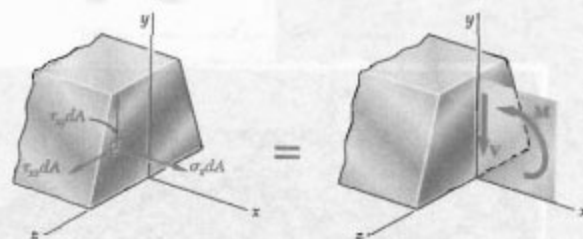
## تنش برشی در تیرها و عضوهای جدار نازک



از اتصال کف بتنی تقویت شده و قسمت های فولادی، یک پل تیر ورق جعبه ای تشکیل شده است.  
در این فصل، تنش برشی در انواع تیرها تعیین می شود.

## ۱-۶ مقدمه

در قسمت ۱-۵ دیدیم که بارگذاری عرضی باعث ایجاد تنش‌های قائم و برشی در مقاطع عرضی تیر می‌شود. تنش قائم بر اثر کوپل خمشی  $M$  و تنش برشی بر اثر نیروی برشی  $V$  به وجود می‌آید. چون ماکزیمم مقدار تنش قائم معیار اصلی برای استقامت تیر است، در فصل ۵ فقط تنش قائم را تعیین کردیم. ولی، تنش برشی نیز می‌تواند مهم باشد (به خصوص، در طراحی تیرهای کوتاه)، و در قسمت اول این فصل به تحلیل آن می‌پردازیم.



شکل ۱-۶

شکل ۱-۶ نشان می‌دهد که نیروهای جزئی قائم و برشی وارد بر یک مقطع عرضی از تیر منشوری، که صفحه تقارن عمودی دارد، با کوپل خمشی  $M$  و نیروی برشی  $V$  معادل است. این موضوع را با تنش معادله می‌توان نشان داد. سه تا از این معادله‌ها، معادله‌های (۱-۴)، (۲-۴) و (۳-۴)، فقط شامل نیروهای قائم  $\sigma_x dA$  هستند که قبلاً در قسمت ۲-۴ بررسی شدند. طبق این معادله‌ها، مجموع نیروهای قائم صفرند و مجموع لنگر\* آنها نسبت به محور  $y$  برابر با صفر و نسبت به محور  $z$  برابر با  $M$  است. حال، سه معادله اضافی، شامل نیروهای برشی  $\tau_{xy} dA$  و  $\tau_{yz} dA$  را می‌نویسیم. طبق یکی از آنها، مجموع لنگر نیروهای برشی نسبت به محور  $x$  صفر است. با توجه به تقارن تیر نسبت به صفحه  $xy$ ، این معادله زاید است و آن را می‌توان کنار گذاشت. دو معادله دیگر عبارتند از:

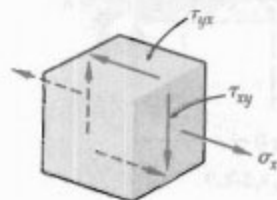
$$\int \tau_{xy} dA = 0 \quad \text{در جهت } y \quad (۱-۶)$$

$$\int \tau_{yz} dA = 0 \quad \text{در جهت } z \quad (۲-۶)$$

معادله اول نشان می‌دهد که در یک مقطع عرضی از تیری که تحت بارگذاری عرضی است تنش‌های برشی عمودی وجود دارد.

معادله دوم نشان می‌دهد که میانگین تنش‌های برشی افقی در هر مقطع صفر است. ولی، این نمی‌رساند که تنش برشی  $\tau_{yz}$  در همه جا صفر است.

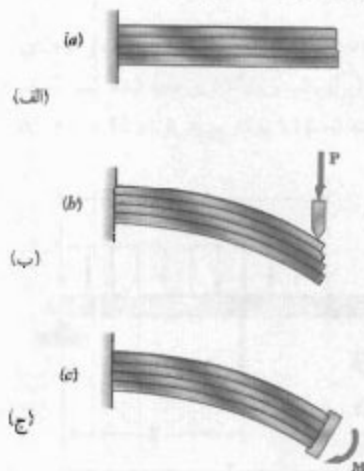
حال، جزء مکعبی کوچکی را در صفحه تقارن عمودی تیر (که در آن،  $\tau_{yz}$  صفر است) در نظر می‌گیریم و تنش‌های وارد بر وجوه آن را بررسی می‌کنیم (شکل ۲-۶). همانطور که قبلاً دیدیم، تنش قائم  $\sigma_x$  و تنش برش  $\tau_{xy}$  بر هر دو وجه عمود بر محور  $x$  وارد می‌شوند.



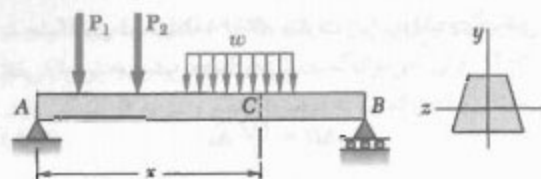
شکل ۲-۶

اما از فصل ۱ به خاطر داریم که اگر تنش‌های برشی  $\tau_{xy}$  بر وجوه عمودی یک جزء وارد شوند، بر وجوه افقی آن نیز وارد می‌شوند. یعنی، در هر عضوی که تحت بارگذاری عرضی است تنش برشی طولی وجود دارد. برای اثبات این موضوع، یک تیر طره‌ای چند تکه را در نظر می‌گیریم (شکل ۳-۶ الف). وقتی بار عرضی  $P$  بر انتهای آزاد این تیر مرکب وارد می‌شود، تکه‌ها نسبت به هم می‌لغزند (شکل ۳-۶ ب). ولی، اگر کوپل  $M$  بر انتهای آزاد تیر مرکب وارد شود (شکل ۳-۶ ج)، این تکه‌ها به صورت قوس‌های دایره‌ای هم مرکز خمیده می‌شوند و نسبت به یکدیگر نمی‌لغزند. یعنی، در تیری که تحت خمش خالص است نیروی برشی به وجود نمی‌آید (به قسمت ۳-۴ نگاه کنید).

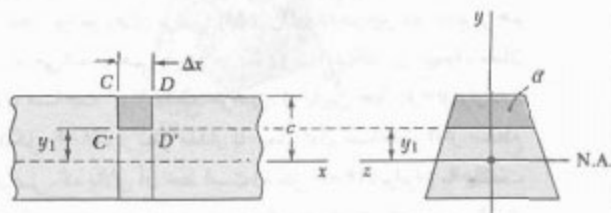
شکل ۳-۶



\* به آن گشتاور نیز می‌گویند - مترجم.



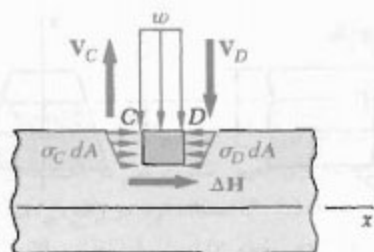
شکل ۵-۶



شکل ۶-۶

نیروهای وارد بر این جزء متشکل‌اند از نیروهای برش عمودی  $V_C'$  و  $V_D'$ ، نیروی برش افقی  $\Delta H$  که بر وجه پایینی جزء وارد می‌شود، نیروهای جزئی قائم افقی  $\sigma_C dA$  و  $\sigma_D dA$  و بار  $w \Delta x$  (شکل ۷-۶). معادله تعادل را می‌نویسیم:

$$\sum F_x = 0 : \Delta H + \int_a (\sigma_D - \sigma_C) dA = 0$$



شکل ۷-۶

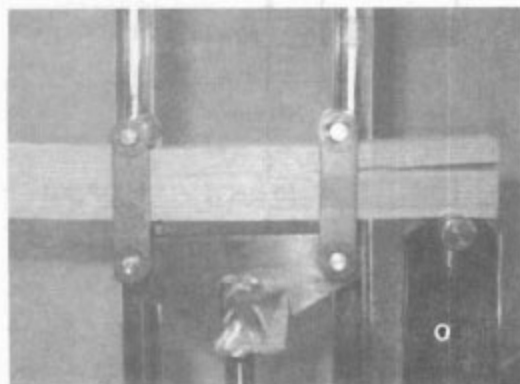
که در آن، انتگرال روی سطح سایه خورده مقطع  $\Delta$  که در بالای خط  $y_1$  قرار دارد، محاسبه می‌شود. با حل  $\Delta H$  از این معادله و با استفاده از معادله (۲-۵)،

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I} \int_a dA \quad (3-6)$$

انتگرال در (۳-۶) همان اول مساحت  $\Delta$  از مقطع عرضی تیر را نسبت به محور خنثی بیان می‌کند و با  $Q$  نشان داده می‌شود. از طرف دیگر، با توجه به معادله (۷-۵)، می‌نویسیم:

$$M_D - M_C = \Delta M = (dM/dx) \Delta x = V \Delta x$$

گرچه با اعمال نیروی عرضی  $P$  بر یک تیر فولادی لغزش روی نمی‌دهد، ولی تنش‌هایی در صفحات طولی و عرضی به وجود می‌آید. در تیرهای چوبی، که استقامت آنها در برابر برش بین الیاف ضعیف است، شکست ناشی از برش در امتداد یک صفحه طولی روی می‌دهد نه در امتداد یک صفحه عرضی (شکل ۴-۶).



شکل ۴-۶

در قسمت ۲-۶، با انتخاب یک جزء از تیر به طول  $\Delta x$ ، که توسط دو صفحه عرضی و یک صفحه افقی محدود شده است، نیروی برش  $\Delta H$  وارد بر وجه افقی و نیروی برش  $q$  در طول واحد آن جزء، موسوم به جریان برش، تعیین می‌شود. در قسمت ۳-۶، فرمول تنش برشی در یک تیر، که دارای صفحه تقارن عمودی است، استخراج می‌شود و در قسمت ۴-۶ برای تعیین تنش برشی در انواع تیرها به کار می‌رود. در قسمت ۵-۶، توزیع تنش در یک تیر مستطیلی باریک مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در قسمت ۶-۶، موضوع قسمت ۲-۶ برای یک جزء از تیر که توسط دو صفحه عرضی و یک سطح خمیده محدود شده است بسط داده می‌شود. با این کار، در قسمت ۷-۶ تنش برشی در هر نقطه از یک عضو جدار نازک متقارن را می‌یابیم. در قسمت ۸-۶، تأثیر تغییر شکل پلاستیک را بر توزیع تنش برشی بررسی خواهیم کرد.

در قسمت ۹-۶، بارگذاری غیرمتقارن در عضوهای جدار نازک را بررسی، و مرکز بوش را تعریف می‌کنیم. سپس، توزیع تنش برشی را در این اعضا می‌یابیم.

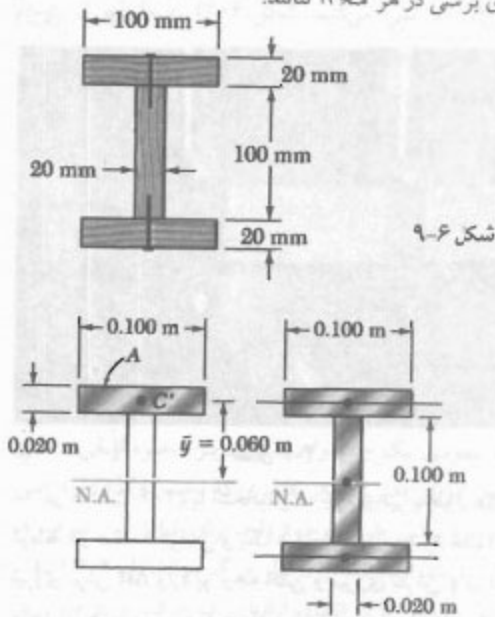
## ۲-۶ برش وارد بر وجه افقی یک جزء از تیر

تیر منشوری  $AB$  را، که دارای صفحه تقارن عمودی و تحت بارهای متمرکز و توزیعی است، در نظر بگیرید (شکل ۵-۶). در فاصله  $x$  از انتهای  $A$ ، جزء  $CDD'C'$  به طول  $\Delta x$  را مطابق شکل ۶-۶ جدا می‌کنیم.



## مثال ۶-۱۰

تیری از سه تخته، با مقطع عرضی  $20 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$  که به هم میخ شده‌اند تشکیل شده است (شکل ۹-۶). اگر فاصله بین میخ‌ها  $25 \text{ mm}$  و برش عمودی  $V$  در تیر  $500 \text{ N}$  باشد، نیروی برشی در هر میخ ۱۰ سانت.



شکل ۹-۶

(الف)

(ب)

شکل ۱۰-۶

ابتدا، نیروی افقی  $q$  در طول واحد را که بر وجه پایینی تخته بالایی وارد می‌شود تعیین می‌کنیم. از معادله (۵-۶) استفاده می‌کنیم، که در آن  $Q$  ممان اول سطح سایه خورده  $A$  (شکل ۱۰-۶ الف) نسبت به محور خشی و  $I$  ممان اینرسی تمام مقطع عرضی (شکل ۱۰-۶ ب) نسبت به محور خشی است. ممان اول یک سطح نسبت به یک محور برابر است با مساحت سطح ضرب در فاصله آن محور تا محور گذرا از مرکز سطح.\* در نتیجه،

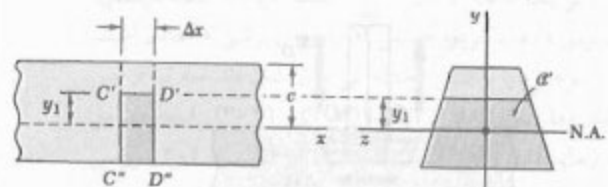
$$\begin{aligned} Q &= A \bar{y} = (0.100 \text{ m} \times 0.020 \text{ m})(0.060 \text{ m}) \\ &= 120 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \\ I &= \frac{1}{12} (0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 \\ &\quad + 2 \left[ \frac{1}{12} (0.020 \text{ m})(0.100 \text{ m})^3 \right. \\ &\quad \left. + (0.020 \text{ m} \times 0.100 \text{ m})(0.060 \text{ m})^2 \right] \\ &= 1.667 \times 10^{-6} + 2(0.0667 + 7.2) \times 10^{-6} \\ &= 16.2 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

\* به پیوست الفه نگاه کنید.

با جایگذاری در معادله (۳-۶)، عبارت زیر برای نیروی برشی افقی وارد بر جزء تیر به دست می‌آید:

$$\Delta H = \frac{VQ}{I} \Delta x \quad (۴-۶)$$

با استفاده از نمودار آزاد جزء پایینی  $C'D'D'C'$ ، به جای جزء بالایی  $CDD'C'$  (شکل ۸-۶)، نیز می‌توان به نتیجه بالا رسید زیرا نیروهای برشی  $\Delta H$  و  $\Delta H'$  که در این دو جزء بر هم وارد می‌کنند با هم برابر و در سوی مخالف‌اند. در نتیجه، ممان اول مساحت  $A'$  از مقطع عرضی، که پایین خط  $y_1 = y$  قرار دارد (شکل ۸-۶)، از نظر مقدار با ممان اول مساحت  $A$  از مقطع عرضی، که بالای آن خط است (شکل ۶-۶)، برابر و با علامت مخالف است. مجموع این دو ممان برابر است با ممان مساحت تمام مقطع عرضی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح آن. لذا، این مجموع برابر با صفر است. گاهی، از این خاصیت برای ساده کردن محاسبه  $Q$  استفاده می‌شود. همچنین، توجه داریم که  $Q$  در  $y_1 = 0$  دارای مقدار ماکزیمم است، زیرا اجزای مقطع عرضی که در بالای محور خشی قرار دارند در انتگرال (۵-۵)، که  $Q$  را تعریف می‌کند، دارای سهم مثبت‌اند و اجزای پایین آن محور دارای سهم منفی‌اند.



شکل ۸-۶

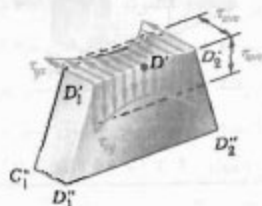
برش افقی در طول واحد، که با نماد  $q$  نشان داده می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \quad (۵-۶)$$

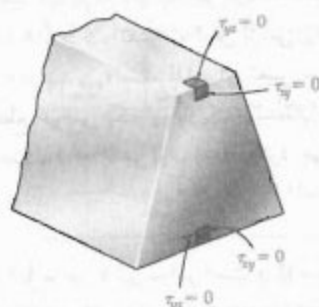
به خاطر می‌آوریم که  $Q$  ممان اول قسمتی از مقطع عرضی را، که در بالا یا پایین نقطه‌ای است که  $q$  محاسبه می‌شود، نسبت به محور خشی نشان می‌دهد و  $I$  ممان اینرسی مرکزی تمام مساحت مقطع عرضی نسبت به محور خشی است. در قسمت ۷-۶، خواهید دید که  $q$  را جریان برش نیز می‌گویند.



است گرچه  $Q$  در  $y = 0$  دارای مقدار ماکزیمم است (قسمت ۶-۲)، ولی نمی‌توان گفت  $\tau_{ave}$  در امتداد محور خشی ماکزیمم است، زیرا این کمیت به عرض  $t$  مقطع و نیز به  $Q$  بستگی دارد.



شکل ۱۲-۶



شکل ۱۳-۶

تا وقتی عرض مقطع عرضی تیر در مقایسه با ارتفاع آن کوچک است، برای تعیین تنش برشی در امتداد خط  $D_1'D_2'$  می‌توان از معادله (۶-۶) استفاده کرد. در واقع،  $\tau_{xy}$  در نقاط  $D_1'$  و  $D_2'$  بزرگتر از  $\tau_{xy}$  در نقطه  $D'$  است، اما نظریه الاستیسته نشان می‌دهد که\* برای یک تیر با مقطع مستطیلی به عرض  $b$  و عمق  $h$ ، تا وقتی  $b \leq h/4$ ، تغییرات تنش برشی از نقطه  $C_1$  تا  $C_2$  (شکل ۶-۱۴) بیشتر از ۸ درصد تنش متوسط در امتداد محور خشی نخواهد بود\*\*.

\* نگاه کنید به:

S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw Hill, New York 3d ed., 1970, sec. 124.

\*\* البته، برای مقادیر بزرگ  $b/h$ ، مقدار  $\tau_{max}$  در  $C_1$  و  $C_2$  ممکن است چندین برابر مقدار  $\tau_{ave}$  در امتداد محور خشی باشد (به جدول زیر نگاه کنید).

$b/h$	۱/۲۵	۱/۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
$\tau_{max}/\tau_{ave}$	۱.۰۰۰	۱.۰۳۳	۱.۱۲۶	۱.۲۱۶	۱.۳۰۰	۱.۳۷۷	۱.۴۵۰	۱.۵۱۰	۱.۵۶۰	۱.۶۰۰	۱.۶۳۰	۱.۶۵۰	۱.۶۷۰	۱.۶۹۰	۱.۷۱۰	۱.۷۳۰	۱.۷۵۰	۱.۷۷۰	۱.۷۹۰	۱.۸۱۰	۱.۸۳۰	۱.۸۵۰
$\tau_{min}/\tau_{ave}$	۰.۹۹۶	۰.۹۸۳	۰.۹۶۰	۰.۹۳۵	۰.۹۱۰	۰.۸۸۵	۰.۸۶۰	۰.۸۳۵	۰.۸۱۰	۰.۷۸۵	۰.۷۶۰	۰.۷۳۵	۰.۷۱۰	۰.۶۸۵	۰.۶۶۰	۰.۶۳۵	۰.۶۱۰	۰.۵۸۵	۰.۵۶۰	۰.۵۳۵	۰.۵۱۰	۰.۴۸۵

با جایگذاری در معادله (۶-۵)،

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(500 \text{ N})(120 \times 10^{-6} \text{ m}^2)}{16,200 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 370.4 \text{ N/m}$$

چون فاصله بین میخ‌ها ۲۵ mm است، نیروی برشی در هر میخ چنین است:

$$F = (0.025 \text{ m})q = (0.025 \text{ m})(370.4 \text{ N/m}) = 92.6 \text{ N}$$

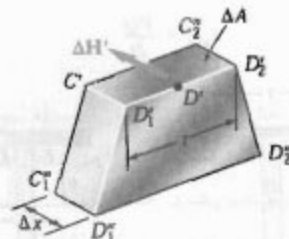
### ۳-۶ تعیین تنش برشی در تیرها

یک تیر را که دارای صفحه تقارن عمودی است در نظر می‌گیریم. فرض کنید بارهای متمرکز یا توزیعی مختلفی در صفحه تقارن بر این تیر وارد می‌شوند. در قسمت قبل دیدیم که اگر تیر را با دو برش عمودی و یک برش افقی قطع کرده و یک جزء با طول  $\Delta x$  را از آن جدا کنیم (شکل ۶-۱۱)، مقدار نیروی برشی وارد بر وجه افقی این جزء را از معادله (۶-۶) می‌توان به دست آورد. تنش برشی متوسط  $\tau_{ave}$  وارد بر وجه این جزء از تقسیم  $\Delta H$  بر مساحت  $\Delta A$  وجه به دست می‌آید. چون  $\Delta A = t \Delta x$ ، که در آن  $t$  عرض این جزء در صفحه برش است،

$$\tau_{ave} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ}{I} \frac{\Delta x}{t \Delta x}$$

یا

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It} \quad (6-6)$$



شکل ۱۱-۶

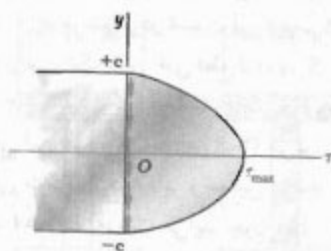
اما، تنش‌های برشی  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{yx}$  که، به ترتیب، بر یک صفحه عرضی و یک صفحه افقی گذرا از  $D'$  اثر می‌کنند با هم برابرند. در نتیجه، عبارت بالا مقدار متوسط  $\tau_{xy}$  را در امتداد خط  $D_1'D_2'$  نیز نشان می‌دهد (شکل ۶-۱۲).

$\tau_{xy}$  وارد بر وجه بالایی و پایینی تیر برابر با صفر است، زیرا هیچ نیرویی بر این وجه وارد نمی‌شود. لذا، در امتداد لبه‌های بالایی و پایینی مقطع عرضی،  $\tau_{xy} = 0$  (شکل ۶-۱۳) گفتنی

معادله (۹-۶) نشان می‌دهد که توزیع تنش برشی در مقطع عرضی یک تیر مستطیلی به صورت سهمی است (شکل ۶-۱۶). همانطور که در قسمت قبل دیدیم، تنش برشی در بالا و پایین مقطع عرضی ( $y = \pm C$ ) صفر است، با قرار دادن  $y = 0$  در معادله (۹-۶)، ماکزیمم مقدار تنش برشی در مقطع عرضی تیر باریک مستطیلی به دست می‌آید:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad (۱۰-۶)$$

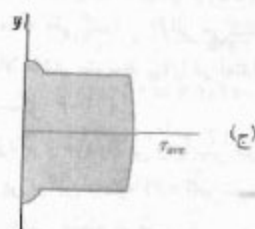
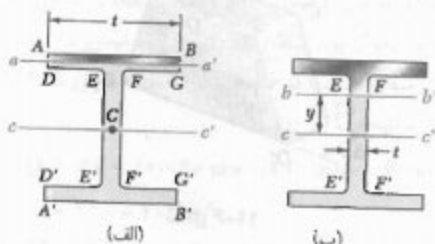
رابطه بالا نشان می‌دهد که ماکزیمم مقدار تنش برشی در یک تیر با مقطع عرضی مستطیلی ۵۰٪ بیشتر از مقدار  $V/A$  حاصل از فرض نادرست توزیع یکنواخت تنش در تمام مقطع عرضی است.



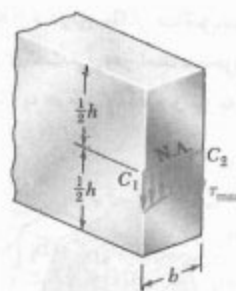
شکل ۱۶-۶

در یک تیر استاندارد آمریکایی (تیر S) یا یک تیرال پهن (تیر W)، برای تعیین مقدار متوسط تنش برشی  $\tau_{xy}$  در مقطع  $aa'$  یا  $bb'$  از مقطع عرضی تبدیل یافته (شکل‌های ۱۷-۶ الف و ب) می‌توان از معادله (۶-۶) استفاده کرد. می‌نویسیم:

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{VQ}{It} \quad (۶-۶)$$



شکل ۱۷-۶



شکل ۱۴-۶

#### ۶-۴ تنش برشی در انواع تیرها

در قسمت قبل دیدیم که برای یک تیر باریک مستطیلی به عرض  $b$  و عمق  $h$  با  $b \leq \frac{1}{4}h$ ، تغییرات تنش برشی  $\tau_{xy}$  در عرض تیر کمتر از ۸٪ در صد  $\tau_{\text{ave}}$  است. لذا، برای تعیین تنش برشی در هر نقطه از مقطع عرضی یک تیر باریک مستطیلی در کاربردهای عملی، از معادله (۶-۶) می‌توان استفاده کرد. می‌نویسیم:

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} \quad (۷-۶)$$

که در آن،  $t$  با عرض  $b$  تیر برابر است و  $Q$  ممان اول سطح سایه خورده نسبت به محور خنثی است (شکل ۶-۱۵).

فاصله مرکز سطح  $A$  (نقطه  $C'$ ) از محور خنثی برابر است با  $\bar{y} = \frac{1}{2}(c+y)$ ، در نتیجه،

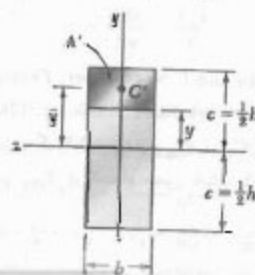
$$Q = A\bar{y} = b(c-y)\frac{1}{2}(c+y) = \frac{1}{2}b(c^2 - y^2) \quad (۸-۶)$$

با توجه به  $I = bh^3/12 = \frac{1}{3}bc^3$

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{3}{4} \frac{c^2 - y^2}{bc^3} V$$

مساحت مقطع عرضی تیر عبارت است از  $A = 2bc$ ، در نتیجه،

$$\tau_{xy} = \frac{3}{4} \frac{V}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \quad (۹-۶)$$



شکل ۱۵-۶

اگر تنش برشی مجاز  $\tau_{all}$  برای تیر فولادی مسئله نمونه ۵-۸ برابر با  $90 \text{ MPa}$  باشد، نشان دهید که مقطع  $32/9 \times 360 \text{ W}$  در آن مسئله نمونه از نظر تنش‌های برشی قابل قبول است.

از نمودار برش مسئله نمونه ۵-۸،  $|V|_{max} = 58 \text{ kN}$ . در قسمت ۶-۴ دیدیم که عملاً می‌توان فرض کرد تمام بار برشی را جان تیر تحمل می‌کند و مقدار ماکزیمم تنش برشی در تیر را از معادله (۶-۱۱) به‌دست آورد. طبق پیوست ج، عمق و ضخامت تیر برای مقطع  $32/9 \times 360 \text{ W}$ ، به ترتیب، عبارتند از  $d = 349 \text{ mm}$  و  $t_w = 5/8 \text{ mm}$ ، لذا،

$$A_{جان} = d t_w = (349 \text{ mm})(5/8 \text{ mm}) = 2024 \text{ mm}^2$$

با جایگذاری مقادیر عددی در معادله (۶-۱۱)،

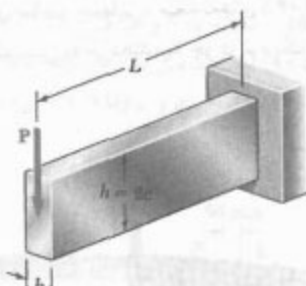
$$\tau_{max} = \frac{|V|_{max}}{A_{جان}} = \frac{58 \text{ kN}}{2024 \text{ mm}^2} = 28.7 \text{ MPa}$$

چون  $\tau_{max} < \tau_{all}$ ، طرح تیر قابل قبول است.

## ۵-۶\* توضیح بیشتر درباره توزیع تنش در یک تیر باریک مستطیلی

تیر باریک طره‌ای با مقطع عرضی مستطیلی به عرض  $b$  و ارتفاع  $h$  را در نظر بگیرید. سر آزاد این تیر تحت بار  $P$  قرار دارد (شکل ۶-۱۸). چون برش  $V$  در تیر ثابت است و مقدار آن با بار  $P$  برابر است، از معادله (۶-۹)،

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \quad (۶-۱۲)$$



شکل ۶-۱۸

که در آن،  $V$  برش عمودی،  $t$  عرض مقطع در ارتفاع تحت بررسی،  $Q$  ممان اول سطح سابه خورده نسبت به محور خنثی  $cc'$  و  $I$  ممان اینرسی تمام مساحت مقطع عرضی نسبت به  $cc'$  است. با ترسیم  $\tau_{ave}$  نسبت به فاصله عمودی  $y$ ، منحنی داده شده در شکل ۶-۱۷ ج به‌دست می‌آید. ناپوستگی‌های موجود در این منحنی ناشی از این است که مقدار  $t$  برای پال‌های  $ABGD$  و  $A'B'G'D'$  با مقدار  $t$  برای جان  $EFF'E'$  تفاوت دارد.

در جان تیر، تنش برشی  $\tau_{xy}$  در عرض مقطع  $bb'$  فقط کمی تغییر می‌کند و می‌توان فرض کرد که با مقدار متوسط  $\tau_{ave}$  برابر است. ولی این موضوع برای پال‌های تیر صحت ندارد. مثلاً، در خط افقی  $DEFG$ ،  $\tau_{xy}$  بین  $D$  و  $E$  و بین  $F$  و  $G$  صفر است، زیرا این دو تکه قسمتی از سطح آزاد تیر هستند. از سوی دیگر، با قراردادن  $t = EF$  در معادله (۶-۹) می‌توان  $\tau_{xy}$  بین  $E$  و  $F$  را به‌دست آورد. در عمل، معمولاً فرض می‌شود که تمام بار برشی را جان تیر تحمل می‌کند، و از تقسیم  $V$  بر مساحت مقطع عرضی جان تیر می‌توان ماکزیمم مقدار تنش برشی در مقطع عرضی را با تقریب خوبی به‌دست آورد:

$$\tau_{max} = \frac{V}{A_{جان}} \quad (۶-۱۱)$$

گفتنی است گرچه می‌توان از مؤلفه قائم  $\tau_{xy}$  تنش برشی در پال‌ها صرف‌نظر کرد، ولی مؤلفه افقی  $\tau_{xz}$  آن قابل توجه است و در قسمت ۶-۷ تعیین می‌شود.

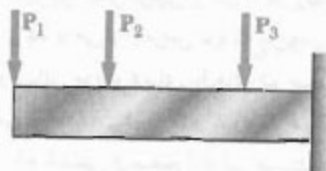
اگر تنش برشی مجاز  $\tau_{all}$  برای تیر چوبی مسئله نمونه ۵-۷ برابر با  $1/75 \text{ MPa}$  باشد، نشان دهید که طراحی آن در مسئله نمونه از نظر تنش‌های برشی قابل قبول است.

از نمودار برش مسئله نمونه ۵-۷،  $V_{max} = 20 \text{ kN}$ . عرض واقعی تیر را  $b = 90 \text{ mm}$  و عمق آن را  $h = 366 \text{ mm}$  یافتیم. با استفاده از معادله (۶-۱۰)، که برای تیر باریک مستطیلی به کار می‌رود،

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} = \frac{3(20 \text{ kN})}{2(0.09 \text{ m})(0.366 \text{ m})} = 0.91 \text{ MPa}$$

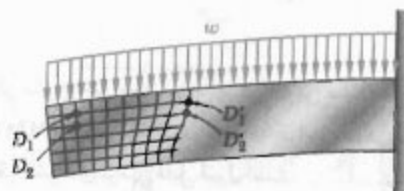
چون  $\tau_{max} < \tau_{all}$ ، طرح تیر قابل قبول است.

وقتی یک تیر با مقطع عرضی مستطیلی تحت تأثیر چند بار متمرکز قرار دارد (شکل ۲۱-۶)، برای تعیین تنش‌های قائم و برشی در مقاطعی که بین نقاط اثر بارها قرار دارند می‌توان از اصل ترکیب استفاده کرد. البته، چون بارهای  $P_1$ ،  $P_2$  و غیره بر سطح تیر وارد می‌شوند و نمی‌توان توزیع آنها را در تمام مقطع عرضی به صورت سهموی فرض کرد، نتایج حاصل در مجاورت نقاط اثر بارها صحت ندارند.



شکل ۲۱-۶

وقتی یک تیر تحت بار توزیعی قرار دارد (شکل ۲۲-۶)، نیروی برشی و تنش برشی در ارتفاع معین  $y$  برحسب فاصله از انتهای تیر تغییر می‌کند. تغییر شکل برشی حاصل طوری است که فاصله بین دو نقطه متناظر از مقاطع عرضی مختلف، مانند  $D_1$  و  $D_1'$  یا  $D_2$  و  $D_2'$ ، به ارتفاع آنها بستگی دارد. این نشان می‌دهد که فرض صفحه‌ای ماندن مقاطع، که به موجب آن معادله‌های (۱۲-۶) و (۱۳-۶) استنتاج شدند، برای حالت بارگذاری شکل ۲۲-۶ به کار می‌رود. ولی، خطای ناشی از این فرض در عمل ناچیز است.



شکل ۲۲-۶

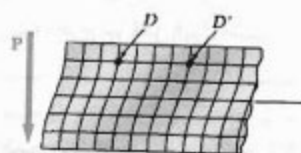
گفتنی است در قسمت‌هایی از تیر که تحت بار متمرکز یا توزیعی قرار دارند، علاوه بر تنش‌های  $\tau_{xy}$  نشان داده شده در شکل ۲-۶، تنش‌های قائم  $\sigma_y$  تیر بر وجه افقی یک جزء مکعبی تیر وارد می‌شوند.

طبق معادله (۱۲-۶)، تنش برشی فقط به فاصله  $y$  از سطح خنثی بستگی دارد. در نتیجه، تمام اجزای واقع در فاصله یکسان از سطح خنثی دستخوش تغییر شکل برشی یکسان می‌شوند (شکل ۱۹-۶). گرچه مقاطع صفحه‌ای به صورت صفحه‌ای نمی‌مانند، ولی فاصله بین دو نقطه متناظر  $D$  و  $D'$  که روی مقاطع مختلف قرار دارند ثابت می‌مانند. یعنی، کرنش قائم  $\epsilon_x$  و نیز تنش قائم  $\sigma_x$  تحت تأثیر تنش‌های برشی قرار نمی‌گیرند و فرض گفته شده در قسمت ۵-۱ برای حالت بارگذاری شکل ۱۸-۶ توجیه می‌شود.

در نتیجه، برای تعیین تنش برشی در یک تیر طره‌ای با مقطع عرضی مستطیلی، که سر آزاد آن تحت بار متمرکز  $P$  قرار دارد، از معادله ۱۲-۶ می‌توان استفاده کرد. برای تعیین تنش قائم در فاصله  $x$  از سر آزاد تیر، در معادله ۲-۵ قرار می‌دهیم  $M = -Px$ .

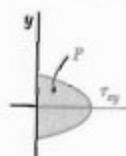
در نتیجه،

$$\sigma_x = + \frac{Pxy}{I} \quad (۱۳-۶)$$



شکل ۱۹-۶

البته، صحت عبارت بالا به شرایط انتهایی تیر بستگی دارد. برای کاربرد معادله ۱۲-۶ در تمام تیر، بار  $P$  روی مقطع سر آزاد تیر باید به صورت سهموی توزیع شده باشد. به علاوه، تکیه‌گاه ثابت انتهایی باید طوری باشد که تغییر شکل برشی نشان داده شده در شکل ۱۹-۶ ایجاد شود. با مدل حاصل (شکل ۲۰-۶) در عمل به ندرت مواجه می‌شویم. ولی، از اصل سنت-ونانت نتیجه می‌شود که، برای سایر شیوه‌های اعمال بار و انواع تکیه‌گاه‌های ثابت انتهایی، معادله‌های (۱۲-۶) و (۱۳-۶) توزیع درست تنش را می‌دهند، به جز در نزدیک دو سر تیر.

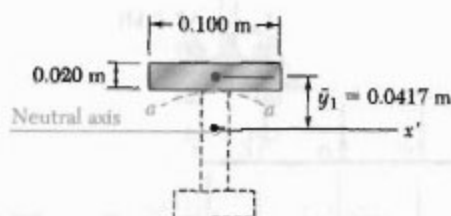


شکل ۲۰-۶

با استفاده از معادله ۶-۷،

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500 \text{ N})(83.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.020 \text{ m})}$$

$$\tau_{ave} = 725 \text{ kPa} \quad \blacktriangleleft$$

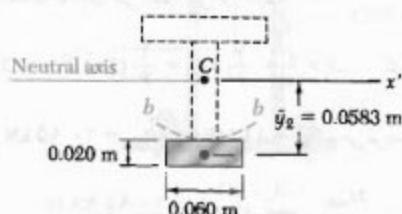


تنش برشی در اتصال  $b$ . حال، مقطع  $b-b$  را می‌گذرانیم و  $Q$  را برای مساحت پایین این مقطع محاسبه می‌کنیم:

$$Q = A\bar{y}_1 = [(0.060 \text{ m})(0.020 \text{ m})](0.0583 \text{ m}) = 7.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

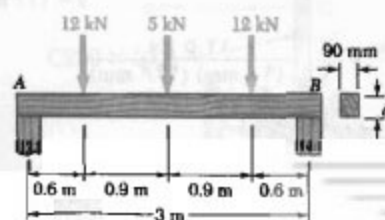
$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It} = \frac{(1500 \text{ N})(7.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3)}{(8.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.020 \text{ m})}$$

$$\tau_{ave} = 608 \text{ kPa} \quad \blacktriangleleft$$



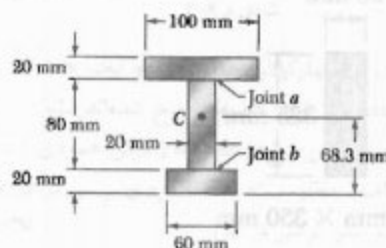
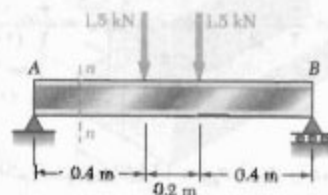
مسئله نمونه ۶-۲

تیر چوبی  $AB$  با دهانه ۳ m و عرض نامی ۱۰۰ mm (عرض واقعی ۹۰ mm) تحت سه بار متمرکز قرار دارد. اگر برای چوب به کار رفته  $\sigma_{all} = 12 \text{ MPa}$  و  $\tau_{all} = 0.8 \text{ MPa}$ ، مینیمم عمق  $d$  تیر را بیابید.



مسئله نمونه ۶-۱

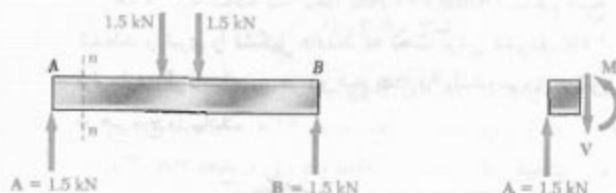
تیر  $AB$  از سه تخته چسب خورده تشکیل شده است و در صلبه تقارن خود تحت بارگذاری داده شده قرار دارد. اگر عرض هر اتصال چسب خورده ۲۰ mm باشد، تنش برشی متوسط را در هر اتصال در مقطع  $n-n$  تیر بیابید. مکان مرکز سطح مقطع در تصویر نشان داده شده است و معادله اینرسی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح عبارت است از  $I = 8.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ .



حل

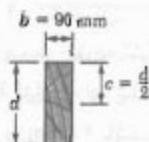
برش عمودی در مقطع  $n-n$ . چون تیر و بارگذاری نسبت به مرکز تیر متقارن اند،  $A = B = 1.5 \text{ kN} \uparrow$ .  
با در نظر گرفتن نمودار آزاد قسمتی از تیر که در سمت چپ مقطع  $n-n$  قرار دارد، داریم:

$$+\uparrow \sum F_y = 0 : 1.5 \text{ kN} - V = 0 \Rightarrow V = 1.5 \text{ kN}$$



تنش برشی در اتصال  $a$ . مقطع  $a-a$  را از اتصال چسب خورده می‌گذرانیم و مقطع عرضی را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. حال، مکان اول مساحت بالای مقطع  $a-a$  نسبت به محور خنثی می‌یابیم:

$$Q = A\bar{y}_1 = [(0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})](0.0417 \text{ m}) = 83.4 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

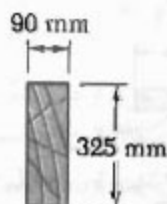


طراحی بر مبنای تنش برشی مجاز. تنش برشی مجاز طراحی را کنترل می‌کند. می‌نویسیم:

$$\tau_m = \tau_{all} = \frac{3}{2} \frac{V_{max}}{A} \Rightarrow 0.8 \text{ MPa} = \frac{3}{2} \frac{14.5 \text{ kN}}{(90 \text{ mm}) d}$$

$$\Rightarrow d = 322 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

البته، تنش قائم کمتر از  $\sigma_{all} = 12 \text{ MPa}$  است و عمق  $322 \text{ mm}$  کاملاً قابل قبول است.



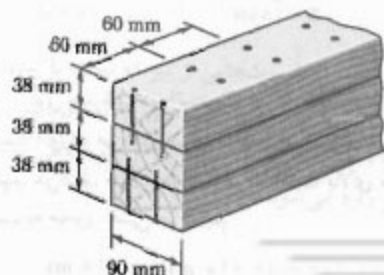
100 mm × 350 mm

اندازه نامی

توضیح: چون عمق تیرهای چوبی موجود دارای نمو ۵۰ mm است، از تیر چوبی با اندازه نامی ۱۰۰ mm × ۳۵۰ mm باید استفاده کرد. در این صورت، مقطع عرضی واقعی ۹۰ mm × ۳۲۵ mm است.

## مسائل

۱-۶ سه تخته به ابعاد ۳۸ mm × ۹۰ mm به هم میخ شده‌اند و تیری را تشکیل داده‌اند که تحت برش عمودی ۱ kN قرار دارد. اگر فاصله بین هر دو میخ ۶۰ mm باشد، نیروی برشی در هر میخ را بیابید.



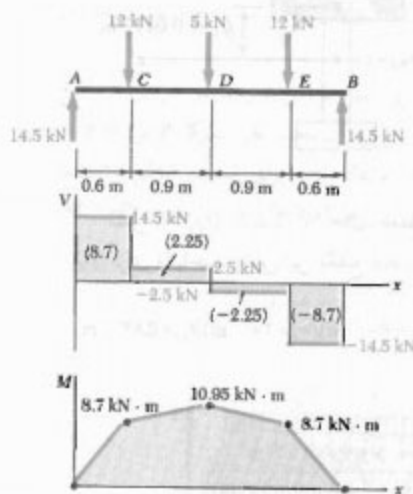
شکل ۱-۶

حل

ماکزیم برش و لنگر خمشی پس از ترسیم نمودارهای برش و لنگر خمشی، داریم:

$$M_{max} = 10.95 \text{ kN.m}$$

$$V_{max} = 14.5 \text{ kN}$$



طراحی بر مبنای تنش مجاز نامی. ابتدا، مدول الاستیک  $S$  را بر حسب  $d$  بیان می‌کنیم. می‌نویسیم:

$$I = \frac{1}{12} b d^3 \quad S = \frac{I}{c} = \frac{1}{6} b d^2 = \frac{1}{6} (90) d^2 = 15 d^2$$

برای  $\sigma_{all} = 12 \text{ MPa}$  و  $M_{max} = 10.95 \text{ kN}$  می‌نویسیم:

$$S = \frac{M_{max}}{\sigma_{all}} \Rightarrow 15 d^2 = \frac{10.95 \text{ kN.m}}{12 \text{ MPa}}$$

$$\Rightarrow d^2 = 60.833 \Rightarrow d = 246 \text{ mm}$$

شرط  $\sigma_m \leq 12 \text{ MPa}$  برقرار است.

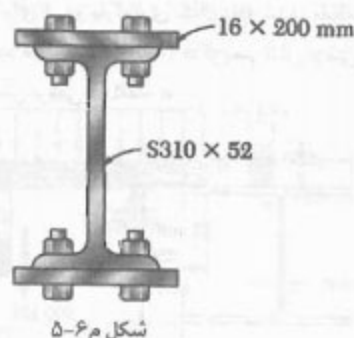
و از بررسی تنش برشی برای  $V_{max} = 14.5 \text{ kN}$  و  $d = 246 \text{ mm}$

$$\tau_m = \frac{3}{2} \frac{V_{max}}{A} = \frac{3}{2} \frac{14.5 \text{ kN}}{(90 \text{ mm}) (246 \text{ mm})}$$

$$\Rightarrow \tau_m = 0.982 \text{ MPa}$$

چون  $\tau_{all} = 0.8 \text{ MPa}$  عمق  $d = 246 \text{ mm}$  قابل قبول نیست و باید تیر را بر مبنای شرط  $\tau_m \leq 0.8 \text{ MPa}$  طراحی کرد.

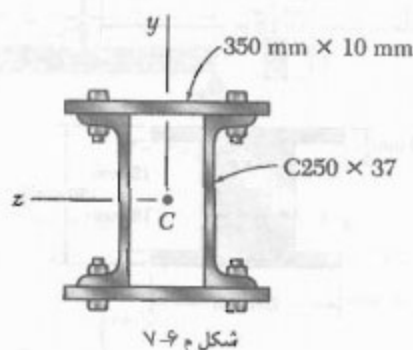




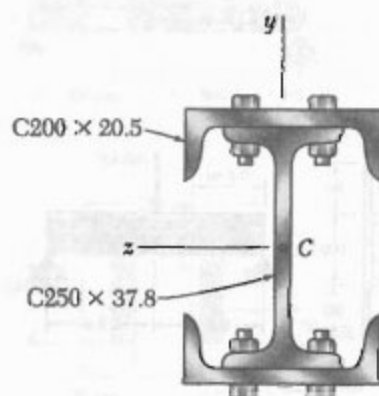
شکل م ۵-۶

۶-۶ مسئله ۵-۶ را با این فرض حل کنید که ضخامت ورق‌ها ۱۲ mm باشد.

۷-۶ و ۸-۶ عضوهای فولادی مورد شده را با پیچ و مهره‌هایی به قطر ۱۸ mm، که در امتداد طولی در هر ۱۲۵ mm قرار دارند، به یکدیگر متصل کرده‌ایم و ستونی را ساخته‌ایم. تنش برش متوسط در پیچ و مهره‌ها را بر اثر نیروی برشی ۱۲۰ kN، که به موازات محور  $y$  است، بیابید.

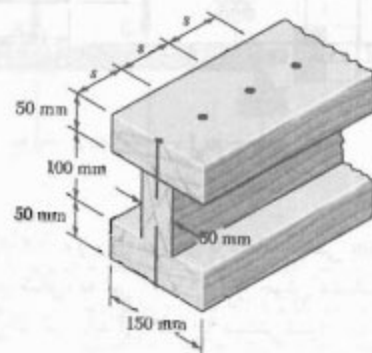


شکل م ۷-۶



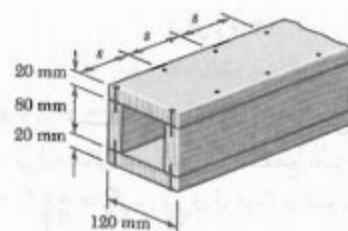
شکل م ۸-۶

۲-۶ سه تخته، هر یک به ضخامت ۵۰ mm، به هم میخ شده‌اند و یک تیر را تشکیل داده‌اند. این تیر تحت برش عمودی قرار دارد. اگر نیروی برشی مجاز در هر میخ ۶۰۰ N و فاصله  $s$  بین هر دو میخ ۷۵ mm باشد، برش مجاز را بیابید.



شکل م ۲-۶

۳-۶ یک تیر چهارگوش جعبه‌ای از دو تخته ۲۰ x ۸۰ mm و دو تخته ۲۰ x ۱۲۰ mm که به هم میخ شده‌اند تشکیل شده است. اگر فاصله  $s$  بین میخ‌ها ۵۰ mm و برش عمودی  $V$  در هر تیر ۳۰۰ N باشد، مطلوبست: (الف) نیروی برشی در هر میخ، (ب) ماکزیم تنش برشی در تیر.

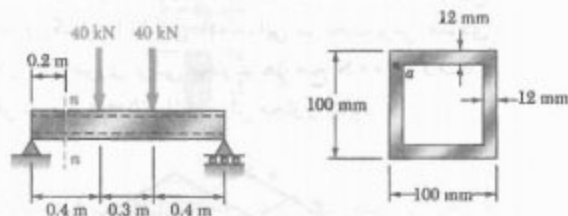


شکل م ۳-۶ و ۴-۶

۴-۶ یک تیر جعبه‌ای چهارگوش از دو تخته به ابعاد ۲۰ x ۸۰ mm و دو تخته به ابعاد ۲۰ x ۱۲۰ mm که به هم میخ شده‌اند تشکیل شده است. اگر فاصله  $s$  بین میخ‌ها ۳۰ mm و نیروی برشی مجاز در هر میخ ۱۲۰۰ N باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیم برش عمودی مجاز در تیر، (ب) ماکزیم تنش برشی مجاز در تیر.

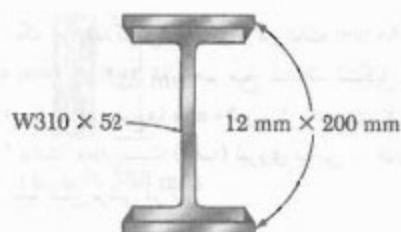
۵-۶ تیر استاندارد فولادی آمریکایی نشان داده شده توسط دو ورق ۱۶ x ۴۰۰ mm تقویت شده است. برای اتصال ورق‌ها به تیر، از پیچ‌های به قطر ۱۸ mm که به فاصله طولی ۱۲۰ mm از هم قرار دارند استفاده شده است. اگر تنش برشی متوسط مجاز در پیچ‌ها ۹۰ MPa باشد،

۹-۶ تا ۱۲-۶ برای تیر و بارگذاری نشان داده شده، مقطع  $n-n$  را در نظر بگیرید. مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در این مقطع، (ب) تنش برشی در نقطه  $a$ .



شکل م-۱۲

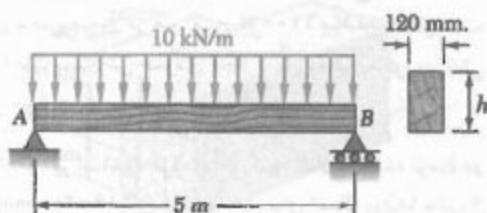
۱۳-۶ دو ورق فولادی با مقطع عرضی  $۱۲ \times ۲۰۰ \text{ mm}$  مطابق شکل، به تیر  $W۳۱۰ \times ۵۲$  جوش شده‌اند. اگر تنش برشی در تیر نباید از  $۹۰ \text{ MPa}$  بیشتر شود، ماکزیمم برش عمودی مجاز را بیابید.



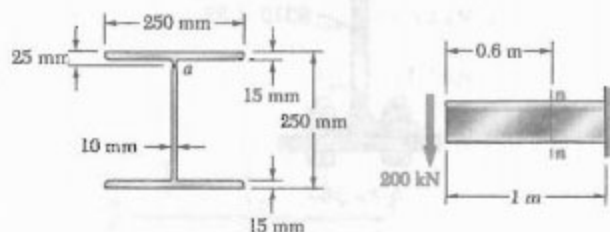
شکل م-۱۳

۱۴-۶ مسئله ۱۳-۶ را با این فرض حل کنید که: (الف) ورق‌های فولادی با مقطع عرضی مستطیلی  $۸ \times ۲۰۰ \text{ mm}$  جایگزین دو ورق فولادی شوند، (ب) دو ورق فولادی حذف شوند.

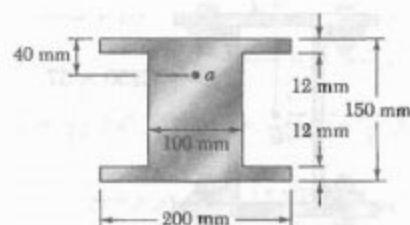
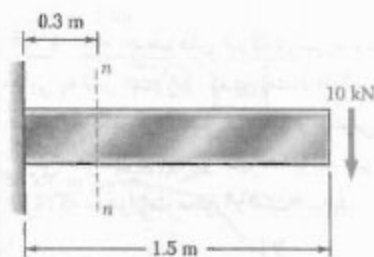
۱۵-۶ برای تیر نشان داده شده، مینیمم عمق  $h$  را بیابید.  
 $\sigma_{all} = ۱۲ \text{ MPa}$  و  $\tau_{all} = ۰٫۹ \text{ MPa}$



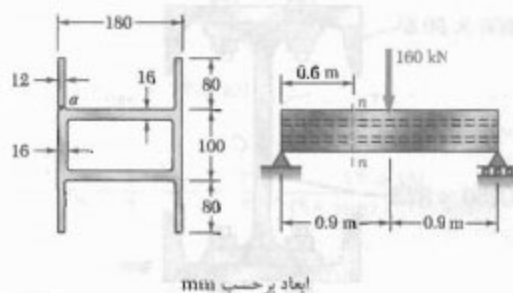
شکل م-۱۵



شکل م-۹

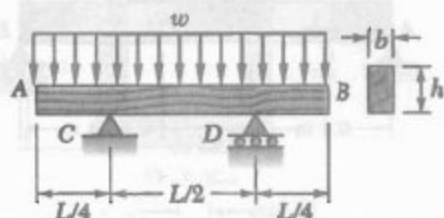


شکل م-۱۰



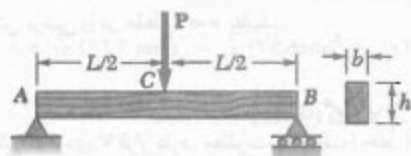
شکل م-۱۱

۱۶-۶ برای تیر نشان داده شده، مینیمم عرض  $b$  را بیابید.  
 $\tau_{all} = 825 \text{ kPa}$  و  $\sigma_{all} = 12 \text{ MPa}$   
 عرض  $b$  تیر را بیابید.



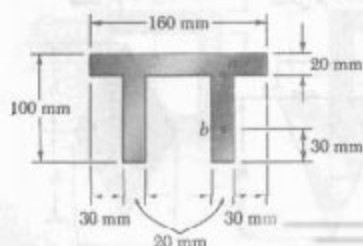
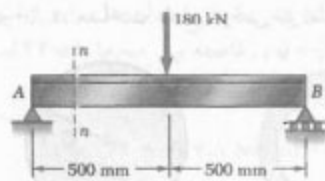
شکل م-۱۹

۲۰-۶ تیر چوبی AB با مقطع عرضی مستطیلی و با تکیه‌گاه ساده، بار متمرکز  $P$  را در دهانه میانی  $C$  تحمل می‌کند. (الف) نشان دهید که نسبت مقادیر ماکزیمم تنش برشی به تنش قائم در تیر،  $\tau_m/\sigma_m$ ، مساوی  $h/2L$  است، که در آن  $h$  و  $L$ ، به ترتیب، عمق و طول تیر هستند. (ب) اگر  $L = 2 \text{ m}$ ،  $\sigma_m = 12 \text{ MPa}$  و  $\tau_m = 960 \text{ kPa}$ ،  $P = 40 \text{ kN}$  عمق  $h$  و عرض  $b$  تیر را بیابید.

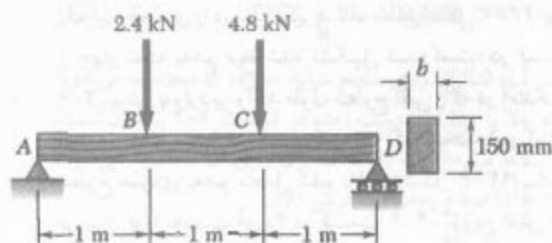


شکل م-۲۰

۲۱-۶ و ۲۲-۶ برای تیر و بارگذاری داده شده، مقطع  $n-n$  را در نظر بگیرید. مطلوبست تنش برشی: (الف) در نقطه  $a$ ، (ب) در نقطه  $b$ .

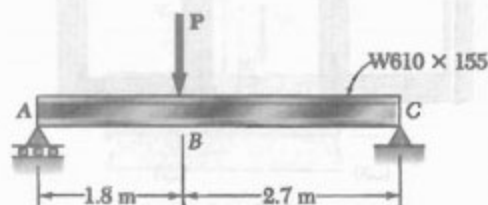


شکل م-۲۱ و م-۲۲



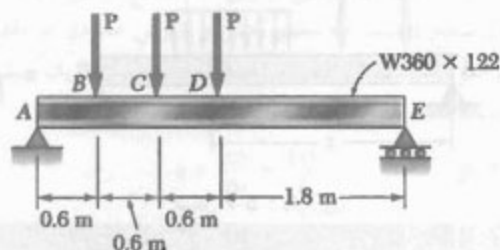
شکل م-۱۶

۱۷-۶ برای تیر بال‌پهن نشان داده شده، ماکزیمم بار  $P$  را بیابید. ماکزیمم تنش قائم  $165 \text{ MPa}$  و ماکزیمم تنش برشی، با استفاده از رابطه  $\tau_m = V/A$ ،  $100 \text{ MPa}$  است.



شکل م-۱۷

۱۸-۶ برای تیر بال‌پهن نشان داده شده، ماکزیمم بار  $P$  را بیابید. ماکزیمم تنش قائم  $160 \text{ MPa}$  و ماکزیمم تنش برشی، با استفاده از رابطه  $\tau_m = V/A$ ،  $100 \text{ MPa}$  است.

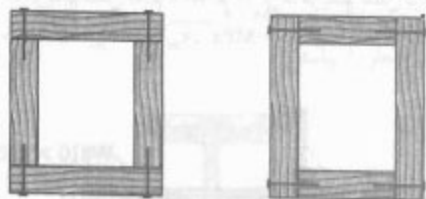


شکل م-۱۸

۱۹-۶ تیر چوبی AB، با طول  $L$  و مقطع عرضی مستطیلی، بار یکنواخت توزیعی  $w$  را مطابق شکل تحمل می‌کند. (الف) نشان دهید که نسبت ماکزیمم مقادیر تنش برشی به تنش قائم در تیر،  $\tau_m/\sigma_m$ ، مساوی  $h/2L$  است، که در آن  $h$  و  $L$ ، به ترتیب، عمق و طول تیر هستند. (ب) اگر  $L = 5 \text{ m}$ ،

## ۶-۶ نیروی برشی طولی وارد بر یک جزء تیر با شکل اختیاری

یک تیر جعبه‌ای را در نظر بگیرید که، مطابق شکل ۶-۲۳ الف، از چهار تخته به هم میخ شده تشکیل شده است. در قسمت ۶-۲، برش  $q$  وارد بر واحد طول سطوح افقی را که در امتداد آنها تخته‌ها به هم متصل‌اند تعیین کردیم. اگر تخته‌ها در امتداد سطوح عمودی به هم متصل شده باشند (شکل ۶-۲۳ ب)، آیا می‌توان  $q$  را به دست آورد؟ در قسمت ۶-۴، توزیع تنش قائم  $\tau_{xy}$  را در یک تیر  $W$  یا تیر  $S$  را بررسی کردیم و دیدیم که این تنش‌ها در جان تیر دارای مقدار نسبتاً ثابتی هستند و در بال‌ها قابل صرف‌نظرند. درباره مؤلفه‌های افقی  $\tau_{xx}$  در بال‌ها چه می‌توان گفت؟

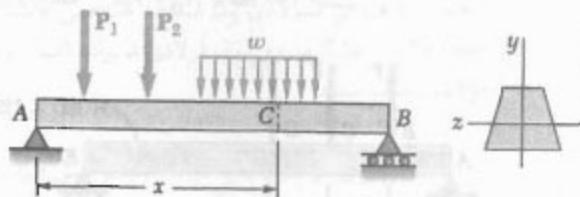


(الف)

(ب)

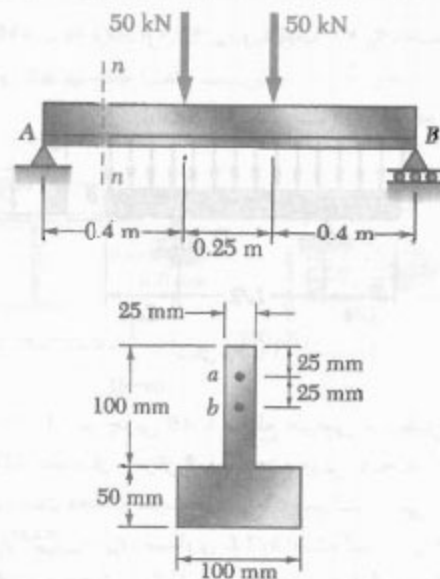
شکل ۶-۲۳

برای پاسخ به این سؤال، روش قسمت ۶-۲ را برای تعیین برش  $q$  در طول واحد بسط می‌دهیم و آن را برای حالت‌های فوق‌الذکر به کار می‌بریم.



شکل ۶-۵ (تکراری)

تیر منشوری  $AB$  را در شکل ۶-۵ در نظر بگیرید. این تیر دارای صفحه تقارن عمودی است و بارهای داده شده را تحمل می‌کند. در فاصله  $x$  از انتهای  $A$ ، جزء  $CDD'C'$  به طول  $\Delta x$  را مطابق شکل ۶-۲۴ جدا می‌کنیم. طبق شکل ۶-۲۵، این جزء تحت نیروهای زیر قرار دارد: نیروهای برشی عمودی  $V_C$  و  $V_{C'}$ ، نیروهای قائم افقی جزئی  $\sigma_C \Delta A$  و  $\sigma_{D'} \Delta A$ ، بار



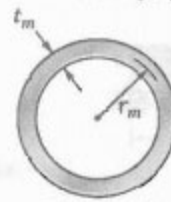
شکل ۶-۲۲ و ۶-۲۴

۶-۲۳ و ۶-۲۴ برای تیر و بارگذاری داده شده، ماکزیمم تنش برشی را در مقطع  $n-n$  بیابید.

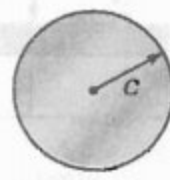
۶-۲۵ تا ۶-۲۸ یک تیر با مقطع عرضی داده شده تحت برش عمودی  $V$  قرار دارد. مطلوبست: (الف) خط افقی که تنش برشی در امتداد آن دارای مقدار ماکزیمم است، (ب) ثابت  $k$  در عبارت ماکزیمم تنش برشی زیر:

$$\tau_{\max} = k \frac{V}{A}$$

که در آن،  $A$  مساحت مقطع عرضی تیر است.



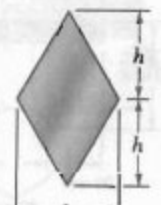
شکل ۶-۲۶



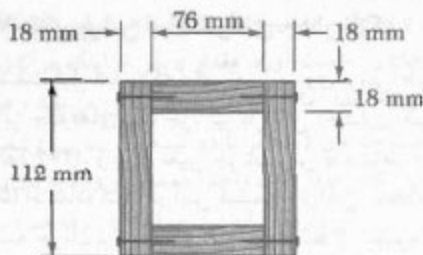
شکل ۶-۲۵



شکل ۶-۲۸



شکل ۶-۲۷



شکل ۲۶-۶

تخته بالایی را جدا می‌کنیم و نیروی کل  $q$  وارد بر طول  $\Delta x$  دو لبه آن را در نظر می‌گیریم. از معادله (۵-۶) استفاده می‌کنیم. در این معادله،  $Q$  ممان اول سطح سایه خورده امیر شکل ۲۷-۶ الف نسبت به محور خشی، و  $I$  ممان اینرسی تمام مساحت مقطع عرضی تیر جعبه‌ای (یکل ۲۷-۶ ب) نسبت به محور خشی است. می‌نویسیم:

$$Q = A' \bar{y} = (18 \text{ mm})(76 \text{ mm})(47 \text{ mm}) = 64296 \text{ mm}^3$$

آن اینرسی مربع به ضلع  $a$  نسبت به محور مرکزی عبارت  
 مه از  $I = \frac{1}{12} a^3$  در نتیجه،

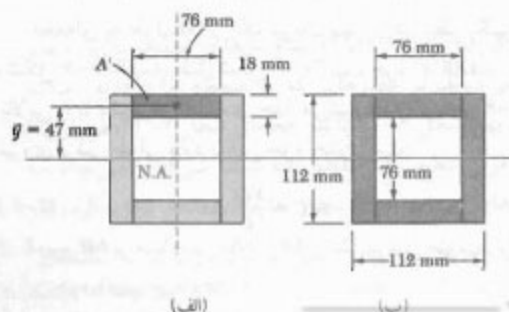
$$I = \frac{1}{12} (112 \text{ mm})^3 - \frac{1}{12} (76 \text{ mm})^3 = 10332 \text{ mm}^4$$

ایگذاری در معادله (۵-۶)،

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(2.5 \text{ kN})(64296 \text{ mm}^3)}{10332 \text{ mm}^4} = 15.6 \text{ N/mm}$$

ن تیر و دو تخته بالایی نسبت به صفحه قائم بارگذاری چارن‌اند، نیروهای مساوی بر دو لبه تخته وارد می‌شوند. نیرو متقاول واحد برای هر یک از این لبه‌ها برابر است با  $q = \frac{1}{2}(15.6) = 7.8 \text{ N/mm}$ . فاصله بین میخ‌ها  $44 \text{ mm}$  است. نتیجه، نیروی برشی در هر میخ عبارت است از:

$$F = (44 \text{ mm})(7.8 \text{ N/mm}) = 343.2 \text{ N}$$

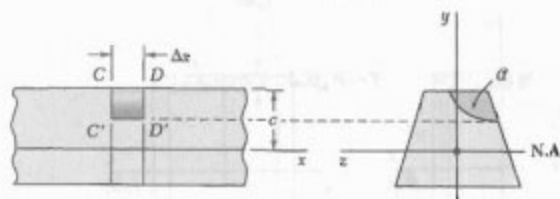


شکل ۲۷-۶

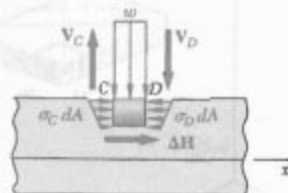
$w \Delta x$  و نیروی برشی  $\Delta H$  (که برایتند نیروهای برشی طولی جزئی وارد بر سطح خمیده است). معادله تعادل را می‌نویسیم:

$$\sum F_x = 0 : \Delta H + \int_a (\sigma_D - \sigma_C) dA = 0$$

که در آن، انتگرال روی سطح سایه خورده  $a$  محاسبه می‌شود. رابطه بالا با معادله به‌دست آمده در قسمت ۲-۶ یکسان است. اما، سطح سایه‌خورده  $a$ ، که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود، در اینجا تا سطح خمیده گسترش دارد.



شکل ۲۴-۶



شکل ۲۵-۶

بقیه استنتاج مانند قسمت ۲-۶ است. برش طولی وارد بر جزء تیر چنین است:

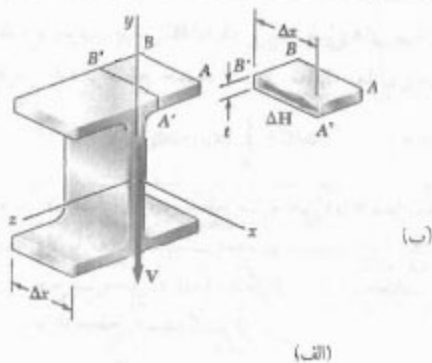
$$\Delta H = \frac{VQ}{I} \Delta x \quad (۴-۶)$$

که در آن،  $I$  ممان اینرسی مرکزی تمام مقطع عرضی،  $Q$  ممان اول سطح  $a$  نسبت به محور خشی و  $V$  برش عمودی در مقطع عرضی است. برش افقی در طول واحد، یا جریان برش، چنین است:

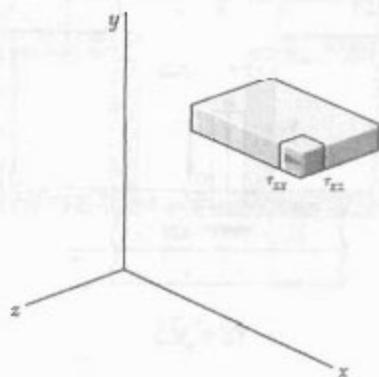
$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \quad (۵-۶)$$

مثال ۴-۶

تیر جعبه‌ای چهارگوشی از دو تخته  $18 \text{ mm} \times 76 \text{ mm}$  و دو تخته  $18 \text{ mm} \times 112 \text{ mm}$ ، که مطابق شکل به هم میخ شده‌اند، تشکیل شده است (شکل ۲۶-۶). اگر فاصله بین میخ‌ها  $44 \text{ mm}$  باشد و تیر تحت برش عمودی  $V = 2.5 \text{ kN}$  باشد، نیروی برشی در هر میخ را بیابید.



شکل ۳۰-۶

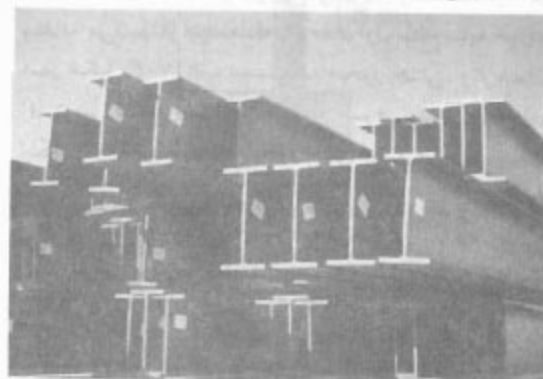


شکل ۳۱-۶

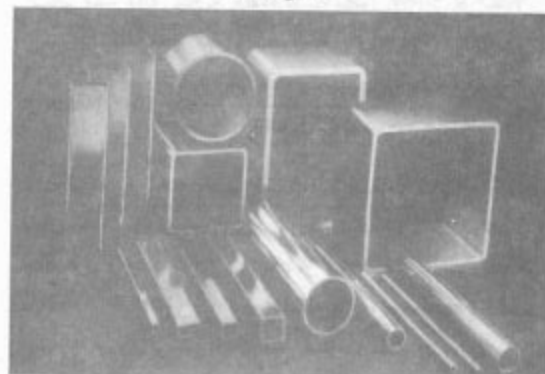
این همان عبارتی است که در قسمت ۳-۶ برای برش افقی به دست آمد. گفتنی است که  $\tau_{avg}$  مقدار متوسط  $\tau_{xz}$  است. چون ضخامت  $t$  بال کم است،  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  (شکل ۳۱-۶)، در نتیجه، برای تعیین مؤلفه افقی  $\tau_{xz}$  در هر نقطه مقطع عرضی بال می توان از معادله ۶-۶ استفاده کرد. در این معادله،  $Q$  ممان اول سطح سایه خورده نسبت به محور خنثی است (شکل ۳۲-۶ الف). در قسمت ۴-۶ نیز برای مؤلفه قائم  $\tau_{xy}$  در جان تیر به همین نتیجه رسیدیم (شکل ۳۲-۶ ب). برای تعیین تنش های برشی در تیرهای جعبه ای (شکل ۳۳-۶)، نیم لوله ها (شکل ۳۴-۶) و سایر عضوهای جدار نازک، تا وقتی بارها در صفحه تقارن عضو اعمال می شوند، می توان از معادله (۶-۶) استفاده کرد. در هر حالت، مقطع بریده باید بر سطح عضو عمود باشد. در این صورت، معادله (۶-۶) مؤلفه تنش برشی در جهت مماس بر آن سطح را می دهد. (به علت نزدیکی دو سطح آزاد به یکدیگر، مؤلفه دیگر را می توان صفر گرفت).

## ۶-۷ تنش برشی در عضوهای جدار نازک

در قسمت قبل دیدیم که برای تعیین نیروی برشی طولی  $\Delta H$  وارد بر جداره های یک جزء تیر با شکل اختیاری می توان از معادله (۴-۶)، و برای تعیین جریان برش  $q$  متناظر از معادله (۵-۶) استفاده کرد. در این قسمت، از این معادله ها برای محاسبه جریان برش و تنش برشی متوسط در عضوهای جدار نازک، مانند بال تیرهای بال پهن (شکل ۲۸-۶) و تیرهای جعبه ای، یا دیواره لوله های ساختمانی (شکل ۲۹-۶) استفاده می شود.



شکل ۲۸-۶



شکل ۲۹-۶

قطعه ای به طول  $\Delta x$  از یک تیر بال پهن را در نظر بگیرید (شکل ۳۰-۶ الف). طبق شکل ۳۰-۶ ب، جزء  $ABB'A'$  از بال بالایی را با یک برش عمودی جدا می کنیم. طبق معادله ۴-۶، نیروی برشی طولی وارد بر این جزء چنین است:

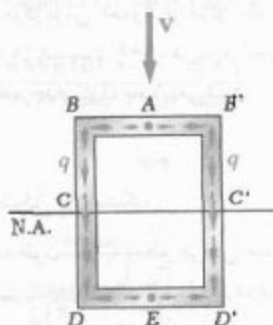
$$\Delta H = \frac{VQ}{I} \Delta x \quad (۴-۶)$$

از تقسیم  $\Delta H$  بر مساحت  $\Delta A = t \Delta x$ ، تنش برشی متوسط وارد بر این جزء تعیین می شود:

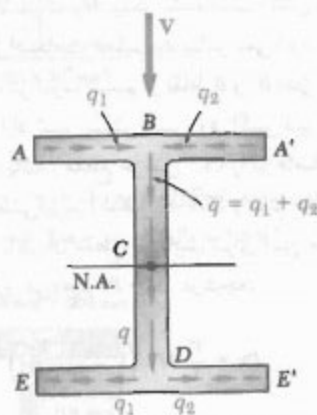
$$\tau_{avg} = \frac{VQ}{It} \quad (۶-۶)$$



تیر، مقدار  $q$  متناظر با دو نیمه پال را باید با هم ترکیب و مقدار  $q$  هر بالای جان را به دست آورد. مقدار  $q$  پس از اینکه در  $C$  روی محور خنثی به مقدار ماکزیمم می‌رسد، کاهش می‌یابد و در  $D$  به دو قسمت مساوی (متناظر با دو نیمه پال پایینی) تقسیم می‌شود، برای برش  $q$  در طول واحد، معمولاً از واژه جریان برش استفاده می‌شود. این واژه، تشابه بین خواص  $q$  را، که هم اکنون توصیف کردیم، با بعضی مشخصه‌های جریان سیال در یک کانال باز یا لوله نشان می‌دهد.\*



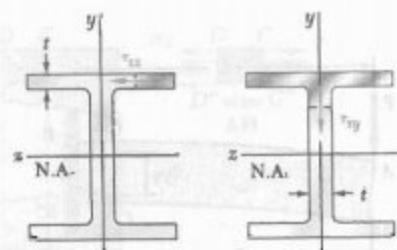
شکل ۳۵-۶ تغییرات  $q$  در مقطع تیر جعبه‌ای



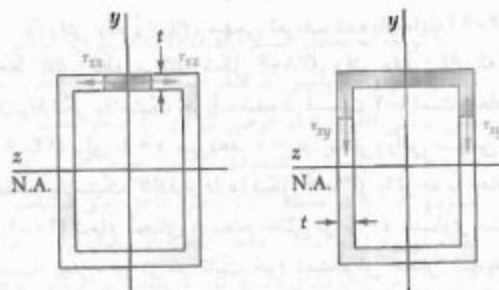
شکل ۳۶-۶ تغییرات  $q$  در مقطع تیر بال پهن

تا کنون، فرض کردیم که تمام بارها در صفحه تقارن عضو وارد می‌شوند. در عضوهایی که دو صفحه تقارن دارند، مانند تیربال پهن شکل ۳۲-۶ یا تیر جعبه‌ای شکل ۳۳-۶، هر باری را که از مرکز سطح یک مقطع داده شده می‌گذرد می‌توان به مؤلفه‌هایی در امتداد دو محور تقارن آن مقطع تجزیه کرد. هر

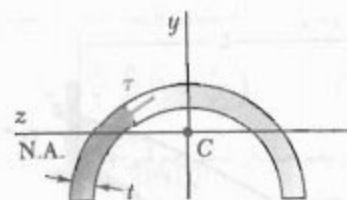
\* از مفهوم جریان برش برای تحلیل توزیع تنش برشی در شفت‌های توخالی جدار نازک استفاده شد (قسمت ۲-۱۲)، گفتنی است که جریان برشی نزدیک شفت توخالی ثابت است، ولی در عضوی که تحت بارگذاری عرضی است ثابت نیست.



(الف) (ب)  
شکل ۳۲-۶

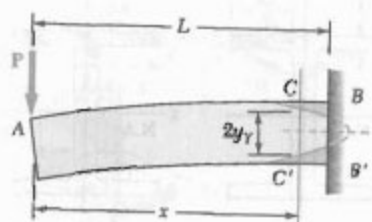


(الف) (ب)  
شکل ۳۳-۶

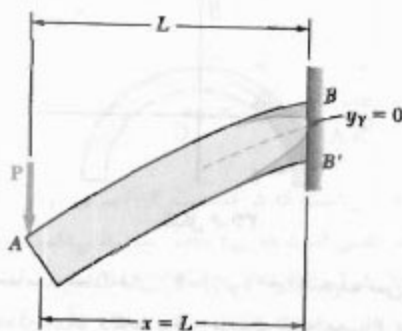


شکل ۳۴-۶

با مقایسه معادله‌های (۵-۶) و (۶-۶)، دیده می‌شود که  $q = \tau t$ ، که در آن  $\tau$  تنش برشی در یک نقطه معین از مقطع  $t$  ضخامت مقطع در آن نقطه است. چون  $q$  در تمام مقاطع ثابت اند،  $q$  فقط به ممان اول  $Q$  بستگی دارد و به سهولت می‌توان آن را روی مقطع رسم کرد. مثلاً در یک تیر جعبه‌ای (شکل ۳۵-۶)،  $q$  از صفر در  $A$  تا مقدار ماکزیمم در  $C$  و  $C'$  روی محور خنثی به طور یکنواخت افزایش می‌یابد، و سپس در نقطه  $E$  به صفر می‌رسد. همچنین، مقدار  $q$  با عبور از گوشه  $B$ ،  $D$ ،  $B'$  یا  $D'$ ، به طور ناگهانی تغییر می‌کند و سوی آن را در قسمت‌های افقی مقطع به سهولت می‌توان از سوی آن در قسمت‌های عمودی (که با سوی برش  $V$  یکسان است) به دست آورد. در یک مقطع بال پهن (شکل ۳۶-۶)، مقدار  $q$  در قسمت‌های  $AB$  و  $A'B'$  بال بالایی به طور متقارن توزیع می‌شود. در نقطه  $B$  در جان


 شکل ۶-۳۸ ( $PL > M_T$ )

تا وقتی  $PL < \frac{\pi}{2} M_T$ ، سهمی تعریف شده با معادله (۶-۱۴) خط  $BB'$  را قطع می‌کند (شکل ۶-۳۸). وقتی  $PL = M_T$ ، که در آن  $M_T$  لنگر پلاستیک تعریف شده در قسمت ۴-۹ است، معادله (۶-۱۴) برای  $x = L$  می‌دهد  $y_T = 0$ ، یعنی، رأس سهمی در مقطع پلاستیک  $BB'$  قرار دارد (شکل ۶-۳۹). با توجه به معادله (۴-۴۰) شعاع انحنای  $\rho$  سطح خنثی در  $x = L$  مساوی صفر است؛ یعنی، تیر در سر ثابت خود دستخوش خمش شدیدی شده است و می‌گویند در آن نقطه لولای پلاستیک به وجود آمده است. بار  $P = M_T/L$  ماکزیمم باری است که تیر می‌تواند تحمل کند.


 شکل ۶-۳۹ ( $PL = M_T = \frac{\pi}{2} M_T$ )

بحث بالا فقط برای تحلیل تنش قائم در تیر است. حال، توزیع تنش برشی در مقطعی را در نظر می‌گیریم که به‌طور جزئی پلاستیک شده است. قسمت  $CC'D'D$  از تیر را که بین مقاطع عرضی  $CC'$  و  $DD'$  و بالای صفحه افقی  $DD'C'$  قرار دارد در نظر بگیرید (شکل ۶-۴۰ الف). اگر این قسمت تماماً در منطقه پلاستیک باشد، تنش‌های قائم وارد بر وجوه  $DD'$  و  $CC'$  دارای توزیع یکنواخت‌اند و با استقامت تسلیم  $\sigma_T$  برابرند (شکل ۶-۴۰ ب).

مؤلفه باعث می‌شود عضو در صفحه تقارن خمیده شود. تنش‌های برشی متناظر را از معادله (۶-۶) می‌توان به‌دست آورد. سپس، از اصل ترکیب برای تعیین تنش‌های حاصل استفاده می‌شود.

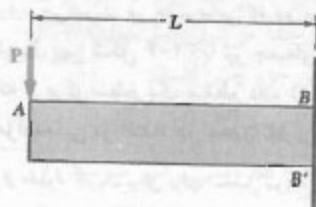
اگر عضو تحت بررسی فاقد صفحه تقارن باشد، یا فقط یک صفحه تقارن داشته باشد و تحت باری قرار داشته باشد که در آن صفحه نیست، عضو به‌طور هم‌زمان خمیده و پیچیده می‌شود، به‌جز وقتی که بار در نقطه خاصی، به‌نام مرکز برش، وارد شود. گفتنی است که مرکز برش معمولاً بر مرکز سطح مقطع عرضی منطبق نیست. در قسمت ۶-۹، درباره تعیین مرکز برش شکل‌های مختلف جدار نازک بحث می‌شود.

### ۶-۸ تغییر شکل پلاستیک

تیر طره‌ای  $AB$  به طول  $L$  و با مقطع عرضی مستطیلی را، که سر آزاد  $A$  آن تحت بار متمرکز  $P$  قرار دارد، در نظر می‌گیریم (شکل ۶-۳۷). ماکزیمم مقدار لنگر خمشی در سر ثابت  $B$  به‌وجود می‌آید و عبارت است از  $M = PL$ . تا وقتی  $PL$  از ماکزیمم لنگر الاستیک  $M_T$  بیشتر نشده است، تنش قائم  $\sigma_x$  در هیچ نقطه تیر از استقامت تسلیم  $\sigma_T$  بیشتر نمی‌شود. اگر  $P$  از مقدار  $M_T/L$  بیشتر شود، تسلیم در نقاط  $B$  و  $B'$  آغاز می‌شود و به‌طرف سر آزاد تیر پیش می‌رود. اگر تیر از جنس الاستوپلاستیک باشد، مقطع عرضی  $CC'$  را در فاصله  $x$  از سر آزاد  $A$  در نظر می‌گیریم (شکل ۶-۳۸) و نیم ضخامت  $y_T$  هسته الاستیک را در آن مقطع می‌یابیم. برای این منظور، در معادله ۶-۳۸ قرار می‌دهیم  $M = Px$ ، در نتیجه،

$$Px = \frac{\pi}{4} M_T \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{y_T^2}{c^2} \right) \quad (۶-۱۴)$$

که در آن  $c$  نصف عمق تیر است. یا تواریم  $y_T$  را بر حسب  $x$ ، مرز بین مناطق الاستیک و پلاستیک به‌دست می‌آید.


 شکل ۶-۳۷ ( $PL \leq M_T$ )

### مسئله نمونه ۳-۶

اگر برش عمودی در تیر فولادی نورد شده  $W 250 \times 101$  برابر با  $200 \text{ kN}$  باشد، تنش برشی افقی در بال بالایی را در نقطه  $a$  به فاصله  $108 \text{ mm}$  از لبه تیر بیایید. ابعاد و سایر داده‌های هندسی مقطع فولادی نورد شده در پیوست چ داده شده‌اند.

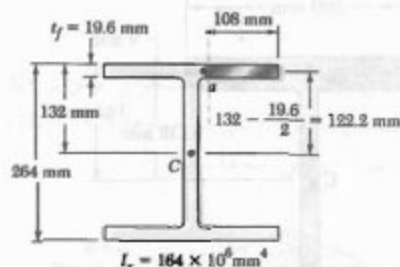
حل

قسمت سایه خورده بال را در نقطه  $a$  در امتداد خط چین می‌بریم.

$$Q = (108 \text{ mm})(19.6 \text{ mm})(122.2 \text{ mm}) = 258.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

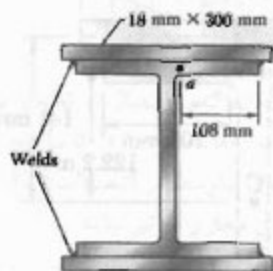
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(200 \text{ kN})(258.7 \times 10^3 \text{ mm}^3)}{(164 \times 10^6 \text{ mm}^4)(19.6 \text{ mm})}$$

$$\Rightarrow \tau = 16.1 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



### مسئله نمونه ۴-۶

مسئله نمونه ۳-۶ را با این فرض حل کنید که ورق‌های  $18 \times 300 \text{ mm}$  به بال‌های تیر متصل شده باشند.



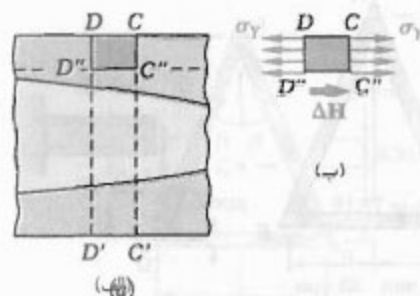
حل

ممان اینرسی مرکزی تیر مرکب چنین است:

$$I = 164 \times 10^6 \text{ mm}^4 + 2 \left[ \frac{1}{12} (300 \text{ mm})(18 \text{ mm})^3 + (300 \text{ mm})(18 \text{ mm})(141 \text{ mm})^2 \right]$$

$$I = 379 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

\* به مسئله ۵۵-۶ نگاه کنید.



شکل ۴-۶

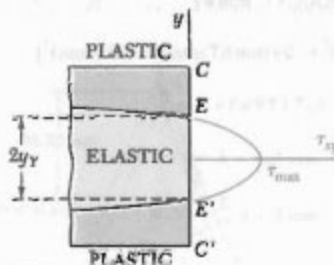
با توجه به تعادل جسم آزاد  $CC'D'D$  نیروی برشی افقی وارد بر وجه پایینی آن صفر است. در نتیجه، مقدار متوسط تنش برشی افقی  $\tau_{xy}$  در عرض تیر در  $C'$  صفر است، و مقدار متوسط تنش برشی عمودی  $\tau_{yx}$  نیز صفر است. لذا، برش عمودی  $V = P$  در مقطع  $CC'$  به طور کامل روی قسمت  $EE'$  آن مقطع توزیع شده است و داخل ناحیه الاستیک قرار دارد (شکل ۴-۶). می‌توان نشان داد که توزیع تنش‌های برشی روی  $EE'$  مانند توزیع آنها در یک تیر الاستیک مستطیلی است که عرض آن، مانند عرض تیر  $AB$ ، برابر با  $b$  و عمق آن مساوی ضخامت  $2y_y$  منطقه الاستیک است. اگر مساحت  $A'$  قسمت الاستیک مقطع عرضی را با  $A'$  نشان دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{P}{A'} \left( 1 - \frac{y'^2}{y_y^2} \right) \quad (15-6)$$

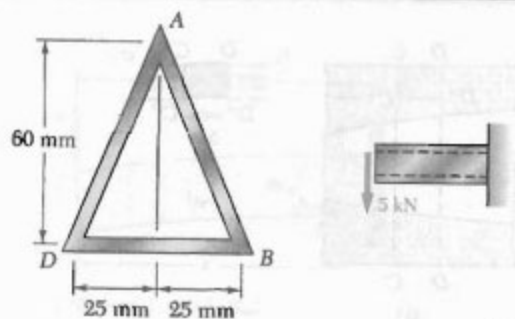
ماکزیمم مقدار تنش برشی برای  $y' = 0$  روی می‌دهد و چنین است:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{P}{A'} \quad (16-6)$$

با کاهش مساحت  $A'$  قسمت الاستیک، مقطع عرضی،  $\tau_{\max}$  افزایش می‌یابد و سرانجام به استقامت تسلیم برشی  $\tau_y$  می‌رسد. لذا، برش در شکست نهایی تیر سهم دارد. برای تحلیل دقیق‌تر این حالت شکست، باید اثر ترکیبی تنش‌های قائم و برشی را در نظر گرفت.\*



شکل ۴-۶



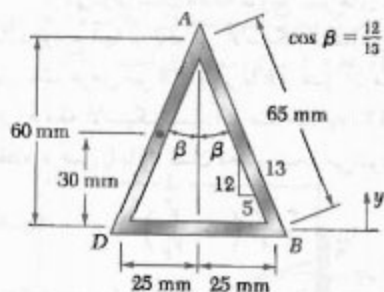
حل

 مرکز هندسی. با توجه به  $AB = AD = 65 \text{ mm}$ 

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y} A}{\sum A}$$

$$= \frac{2[(65 \text{ mm})(3 \text{ mm})(30 \text{ mm})]}{2[(65 \text{ mm})(3 \text{ mm})] + (50 \text{ mm})(3 \text{ mm})}$$

$$= 21.67 \text{ mm}$$



ممان اینرسی نسبت به محور گذرا از مرکز سطح. طرفین تیر جدار نازک را می‌توان متوازی‌الاضلاع گرفت. لذا، برای حالت داده شده،  $I_{mm} = bh^3/12$  که در آن  $b$  در امتداد محور  $mm$  اندازه‌گیری می‌شود.

$$b = (3 \text{ mm}) / \cos \beta = (3 \text{ mm}) / (\frac{12}{13}) = 3.25 \text{ mm}$$

$$I = \sum (\bar{I} + Ad^2) = 2 \left[ \frac{1}{12} (3.25 \text{ mm})(60 \text{ mm})^3 \right]$$

$$+ (3.25 \text{ mm})(60 \text{ mm})(4.33 \text{ mm})^2$$

$$+ \left[ \frac{1}{12} (50 \text{ mm})(3 \text{ mm})^3 + (50 \text{ mm})(3 \text{ mm})(21.67 \text{ mm})^2 \right]$$

$$= 214,6 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 2.146 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

چون بال و ورق بالایی فقط در نقاط جوشکاری به هم متصل‌اند، بال را در نقاط  $a$  و  $a'$  می‌بریم و تنش برشی را در نقطه  $a$  می‌یابیم.

برای سطح سایه خورده جدا شده،

$$I = 2I_f = 2(19.6 \text{ mm}) = 39.2 \text{ mm}$$

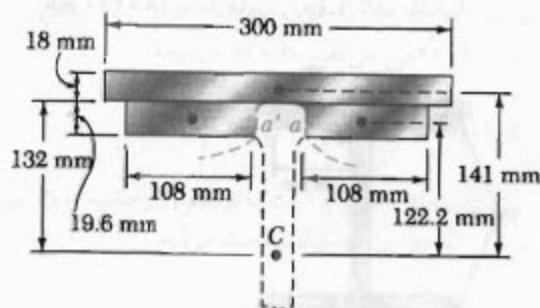
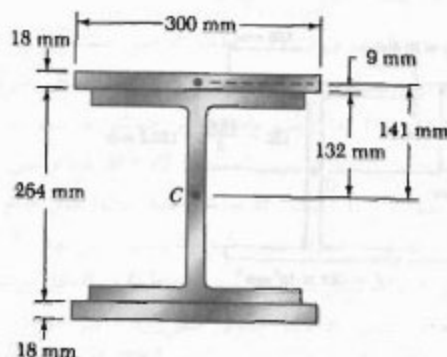
$$Q = 2[(108 \text{ mm})(19.6 \text{ mm})(122.2 \text{ mm})]$$

$$+ (300 \text{ mm})(18 \text{ mm})(141 \text{ mm})$$

$$Q = 1,28 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(500 \text{ kN})(1,28 \times 10^6 \text{ mm}^2)}{(379 \times 10^6 \text{ mm}^4)(39.2 \text{ mm})}$$

$$\Rightarrow \tau = 1.72 \text{ MPa} \leftarrow$$



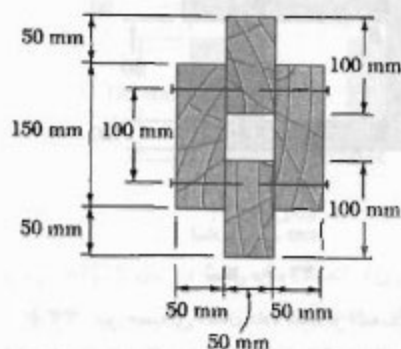
مسئله نمونه ۵-۶

تیر جدار نازک آلومینیومی نشان داده شده دارای دیواره یکنواخت با ضخامت ۳ mm است. اگر نیروی برشی در تیر ۵ kN باشد، مطلوبست: (الف) تنش برشی در نقطه  $A$ ، (ب) ماکزیمم تنش برشی در تیر.

توجه: ابعاد داده شده تا خطوط میانی سطوح خارجی و داخلی تیر هستند.

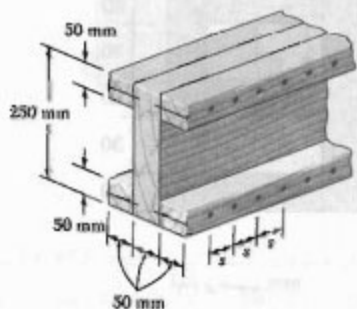
## مسائل

۲۹-۶ تیر چوبی سر هم شده نشان داده شده تحت برش عمودی  $6 \text{ kN}$  قرار دارد. اگر فاصله طولی بین میخ‌ها،  $s = 60 \text{ mm}$  و طول هر میخ  $90 \text{ mm}$  باشد، نیروی برشی در هر میخ را بیابید.



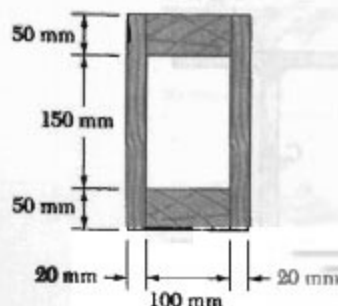
شکل م ۲۹-۶

۳۰-۶ تیر چوبی نشان داده شده تحت برش عمودی  $5 \text{ kN}$  قرار دارد. اگر نیروی مجاز برشی در میخ‌ها  $300 \text{ N}$  باشد، ماکزیمم فاصله مجاز  $s$  را بین میخ‌ها بیابید.

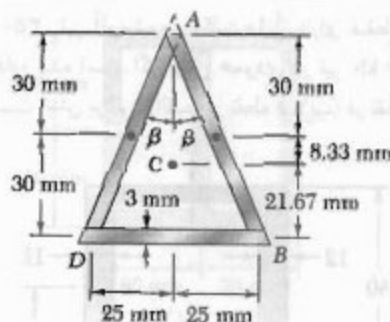


شکل م ۳۰-۶

۳۱-۶ تیر چوبی نشان داده شده از اتصال دو تخته به ابعاد  $250 \times 250 \text{ mm}$  و دو تخته به ابعاد  $50 \times 100 \text{ mm}$  ساخته شده است. اگر تنش برشی مجاز متوسط در اتصالات  $350 \text{ kPa}$  باشد، ماکزیمم برش عمودی مجاز را در تیر بیابید.



شکل م ۳۱-۶



الف. تنش برشی در  $A$ . برای تنش برشی  $\tau_A$  در  $A$ ، جریان برش عبارت است از  $q_A = \tau_A t$  و در یکی از دو جهت نشان داده شده است. اما مقطع عرضی و بارگذاری نسبت به یک خط عمودی گذرا از  $A$  متقارن‌اند. لذا، جریان برش نیز باید متقارن باشد. چون هیچکدام از جریان‌های برش ممکن متقارن نیست،



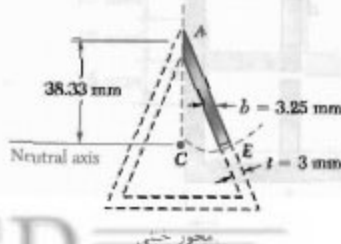
ب. ماکزیمم تنش برشی. چون ضخامت دپولره ثابت است، ماکزیمم تنش برشی در محور خنثی به وجود می‌آید، یعنی در جایی که  $Q$  ماکزیمم است. چون تنش برشی در  $A$  صفر است، مقطع را در امتداد خط چین می‌بریم و قسمت سایه خورده را جدا می‌کنیم. برای تعیین ماکزیمم تنش برشی، مقطع بریده در محور خنثی را عمود بر وجوه می‌گیریم. طول  $t$  این مقطع  $3 \text{ mm}$  است. در نتیجه،

$$Q = [(37.25 \text{ mm})(38.33 \text{ mm})] \left( \frac{38.33 \text{ mm}}{2} \right) = 2287 \text{ mm}^3$$

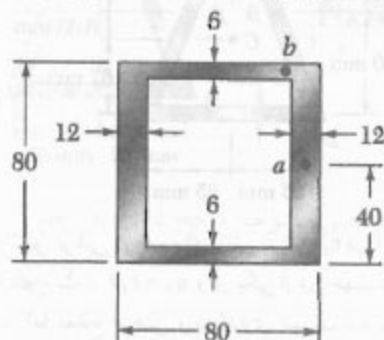
$$Q = 2.287 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_E = \frac{VQ}{It} = \frac{(5 \text{ kN})(2.287 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(0.0146 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.003 \text{ m})}$$

$$= \tau_E = 187.54 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

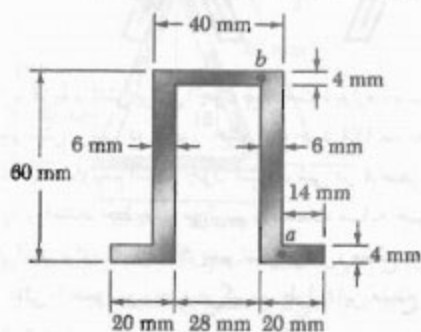


۳۵-۶ تیر آلومینیومی اکستروژنی دارای مقطع عرضی نشان داده شده است. اگر برش عمودی در تیر  $150 \text{ kN}$  باشد، مطلوبست تنش برشی: (الف) در نقطه  $a$ ، (ب) در نقطه  $b$ .



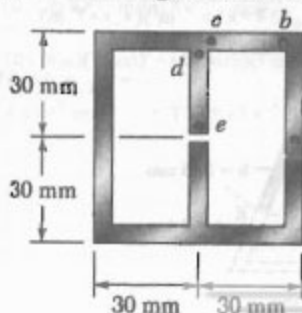
شکل م-۳۵

۳۶-۶ اگر برش عمودی داده شده  $V$  باعث ایجاد ماکزیمم تنش برشی  $75 \text{ MPa}$  در مقطع نشان داده شده شود، مطلوبست تنش برشی متناظر: (الف) در نقطه  $a$ ، (ب) در نقطه  $b$ .



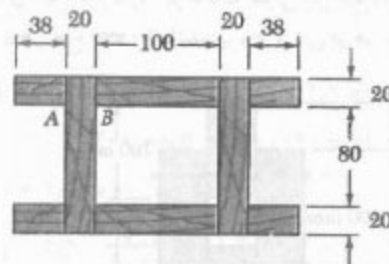
شکل م-۳۶

۳۷-۶ و ۳۸-۶ تیر اکستروژن نشان داده شده دارای دیواره با ضخامت یکنواخت  $3 \text{ mm}$  است. اگر برش عمودی در تیر  $8 \text{ kN}$  باشد، تنش برشی در هر پنج نقطه داده شده را بیابید.



شکل م-۳۷

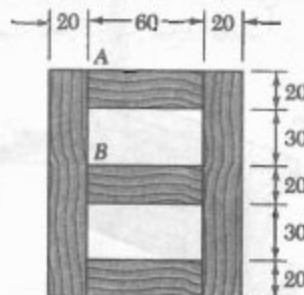
۳۲-۶ تیر چوبی نشان داده شده از اتصال چند تخته ساخته شده است. اگر تیر تحت برش  $5 \text{ kN}$  قرار گیرد، مطلوبست تنش برش متوسط در اتصال چسبی: (الف) در  $A$ ، (ب) در  $B$ .



ابعاد بر حسب mm

شکل م-۳۲

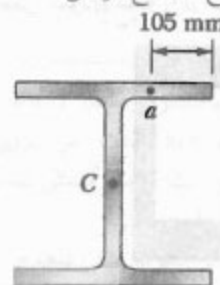
۳۳-۶ تیر جعبه‌ای نشان داده شده از اتصال چند تخته ساخته شده است. اگر تیر تحت برش عمودی  $3 \text{ kN}$  قرار گیرد، مطلوبست تنش برشی متوسط در اتصال چسبی: (الف) در نقطه  $A$ ، (ب) در نقطه  $B$ .



ابعاد بر حسب mm

شکل م-۳۳

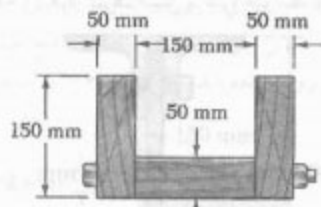
۳۴-۶ اگر تیر فولادی نورد شده  $W 360 \times 122$  تحت برش عمودی  $250 \text{ kN}$  باشد، مطلوبست تنش برشی: (الف) در نقطه  $A$ ، (ب) در مرکز سطح  $C$  مقطع عرضی.



شکل م-۳۴

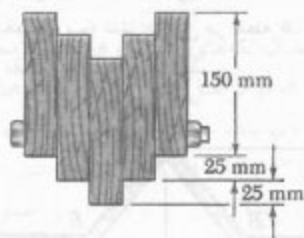


۴۳-۶ سه تخته به هم پیچ شده‌اند و تیر نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. قطر هر پیچ ۱۰ mm و فاصله پیچ‌ها از هم در امتداد محور طولی تیر ۳۰۰ mm است اگر تیر تحت برش عمودی ۱۰ kN قرار گیرد، تنش برشی متوسط را در پیچ‌ها بیابید.



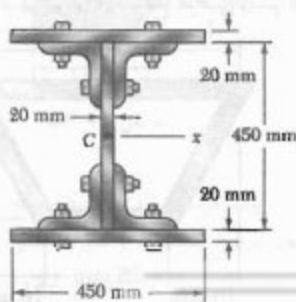
شکل م-۴۳-۶

۴۴-۶ تیری از اتصال پنج تخته، هر یک با مقطع عرضی  $38 \times 150$  mm ساخته شده است. تخته‌ها توسط پیچ‌هایی که به فاصله طولی ۲۲۰ mm از هم قرار دارند به هم پیچ شده‌اند. اگر برش در تیر به صورت عمودی و ۸ kN باشد و تنش برشی متوسط مجاز در هر پیچ ۵۰ MPa باشد، کمترین قطر مجاز پیچ‌ها را بیابید.

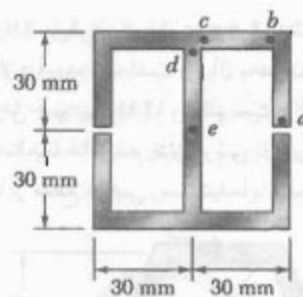


شکل م-۴۴-۶

۴۵-۶ دو ورق فولادی به ابعاد  $20 \times 450$  mm به چهارنشی به ابعاد  $L 152 \times 152 \times 19.7$  جوش شده‌اند و مقطع عرضی نشان داده شده را ساخته‌اند. پیچ‌ها به قطر ۲۲ mm هستند و در فاصله طولی ۱۲۵ mm از هم قرار دارند. اگر تنش برشی متوسط مجاز در پیچ‌ها ۹۰ MPa باشد، بیشترین تنش برش عمودی مجاز در تیر را بیابید ( $I_x = 1896 \times 10^6 \text{ mm}^4$ ).

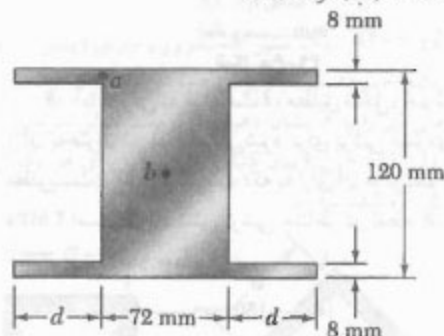


شکل م-۴۵-۶



شکل م-۳۸-۶

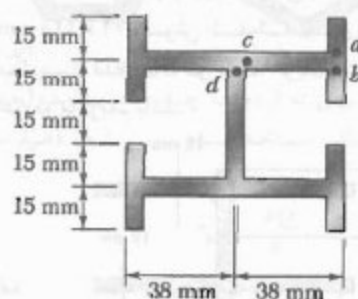
۳۹-۶ برش عمودی در تیری با مقطع عرضی نشان داده شده ۲۵ kN است. اگر  $d = 50$  mm، مطلوبیت تنش برشی: (الف) در نقطه a، (ب) در نقطه b.



شکل م-۳۹-۶ و م-۴۰-۶

۴۰-۶ برش عمودی در تیری با مقطع عرضی نشان داده شده ۲۵ kN است. مطلوبیت: (الف) فاصله d که به ازای آن  $\tau_a = \tau_b$ ، (ب) تنش برشی متناظر در نقاط a و b.

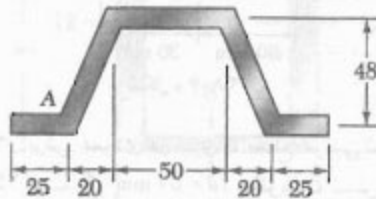
۴۱-۶ ضخامت دیواره تیر نشان داده شده ۵ mm است. اگر برش عمودی V باعث ایجاد ماکزیمم تنش برشی  $\tau = 60$  MPa در تیر شود، تنش برشی را در چهار نقطه نشان داده شده بیابید.



شکل م-۴۱-۶

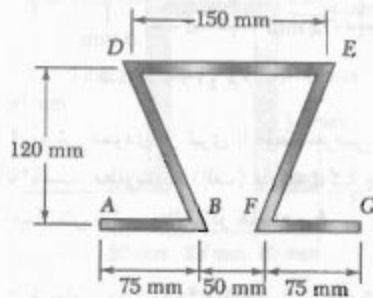
۴۲-۶ مسئله ۴۱-۶ را با این فرض حل کنید که تیر تحت برش افقی V قرار گیرد.

۴۹-۶ ورقی به ضخامت ۴ mm، مطابق شکل، به صورت کنگره‌ای درآورده شده است و از آن به عنوان تیر استفاده می‌شود. برای برش عمودی ۱۲ kN، مطلوبست: (الف) تنش برشی در نقطه A. (ب) ماکزیمم تنش برشی در تیر. همچنین، جریان برش را در مقطع عرضی رسم کنید.



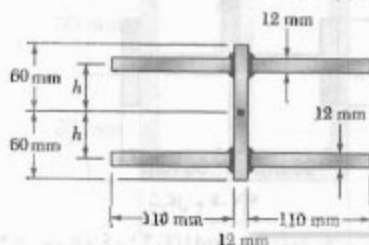
ابعاد بر حسب mm  
شکل م ۴۹-۶

۵۰-۶ ورقی به ضخامت ۴ mm، مطابق شکل، خم شده است و از آن به عنوان تیر استفاده می‌شود. برای برش عمودی ۲/۴ kN، مطلوبست: (الف) ضخامت  $t$  که به ازای آن ماکزیمم تنش برشی ۲ MPa است. (ب) تنش برشی متناظر در نقطه E. همچنین، جریان برش را در مقطع عرضی رسم کنید.



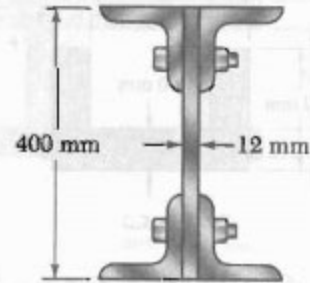
شکل م ۵۰-۶

۵۱-۶ چهار ورق افقی به یک ورق عمودی یکنواخت به ضخامت ۳ mm است. برای برش عمودی ۱۰ kN، مطلوبست: (الف) تنش برشی در نقطه A. (ب) ماکزیمم تنش برشی در تیر. جریان برشی را در مقطع عرضی رسم کنید.



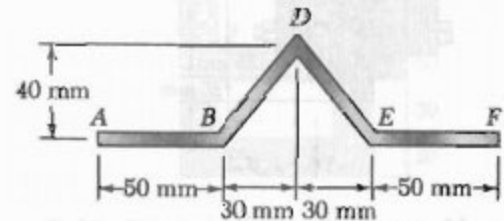
شکل م ۵۱-۶

۴۶-۶ چهارپرنشی فولادی  $102 \times 102 \times 9.5$  و یک ورق فولادی  $12 \times 400$  به هم پیچ شده‌اند و تیر نشان داده شده را ساخته‌اند. پیچ‌ها به قطر ۲۲ mm هستند و فاصله آنها از هم در امتداد محور طولی تیر ۱۲۰ mm است. اگر تیر تحت برش عمودی ۲۴۰ kN قرار گیرد، تنش برشی متوسط را در هر پیچ بیابید.



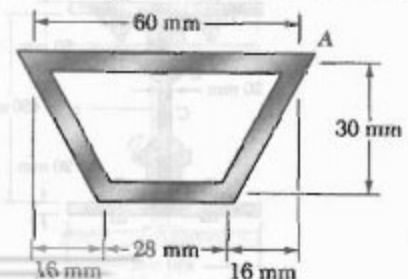
شکل م ۴۶-۶

۴۷-۶ ورقی به ضخامت ۶ mm، مطابق شکل، به صورت کنگره‌ای درآورده شده است و از آن به عنوان تیر استفاده می‌شود. برای برش عمودی ۵ kN، مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در مقطع. (ب) تنش برشی در نقطه B. همچنین، جریان برش را در مقطع عرضی رسم کنید.



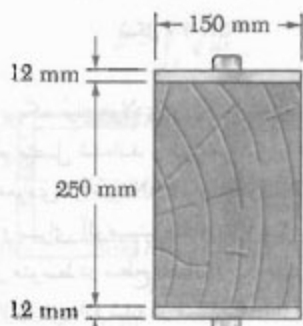
شکل م ۴۷-۶

۴۸-۶ تیر با مقطع عرضی نشان داده شده دارای دیواره یکنواخت به ضخامت ۳ mm است. برای برش عمودی ۱۰ kN، مطلوبست: (الف) تنش برشی در نقطه A. (ب) ماکزیمم تنش برشی در تیر. جریان برشی را در مقطع عرضی رسم کنید.



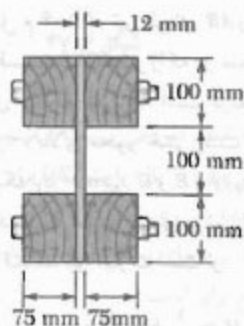
شکل م ۴۸-۶

۵۶-۶ از اتصال تکه‌های چوبی و فولادی توسط پیچ‌هایی به قطر ۱۲ mm، که در فواصل طولی ۲۰۰ mm از هم قرار دارند، تیر مرکب نشان داده شده ساخته شده است. مدول الاستیسیته برای چوب ۱۰ GPa و برای فولاد ۲۰۰ GPa است. (الف) تنش برشی متوسط در پیچ‌ها را بر اثر نیروی برشی عمودی ۴ kN بسپارید. (ب) تنش برشی را در مرکز مقطع عرضی بسپارید. (راهنمایی: از روش داده شده در مسئله ۵۵-۶ استفاده کنید).



شکل م ۵۶-۶

۵۷-۶ از اتصال تکه‌های چوبی و فولادی توسط پیچ‌هایی به قطر ۱۲ mm، که در فواصل طولی ۲۰۰ mm از هم قرار دارند، تیر مرکب نشان داده شده ساخته شده است. مدول الاستیسیته برای چوب ۱۳ GPa و برای فولاد ۲۰۰ GPa است. (الف) تنش برشی متوسط در پیچ‌ها را بر اثر نیروی برشی عمودی ۱۶ kN بسپارید. (ب) تنش برشی را در مرکز مقطع عرضی بسپارید. (راهنمایی: از روش داده شده در مسئله ۵۶-۶ استفاده کنید).



شکل م ۵۷-۶

۵۸-۶ یک میله فولادی و یک میله آلومینیومی، مطابق شکل، به هم متصل شده‌اند و تیر مرکبی را تشکیل داده‌اند. اگر برش عمودی در تیر ۶ kN و مدول الاستیسیته فولاد ۲۱۰ GPa و برای آلومینیوم ۷۰ GPa باشد، مطلوب است:

۵۲-۶ (الف) تنش برشی در نقطه P یک لوله جدار نازک با مقطع عرضی داده شده را بر اثر برش عمودی V بسپارید. (ب) نشان دهید که ماکزیمم تنش برشی برای  $\theta = 90^\circ$  روی می‌دهد و این مقدار ماکزیمم مساوی  $V/A$  است، که در آن A مساحت مقطع عرضی لوله است.



شکل م ۵۲-۶

۵۳-۶ و ۵۴-۶ یک تیر اکستروژن دارای دیواره با ضخامت یکنواخت t است. اگر برش عمودی را با V و مساحت مقطع عرضی تیر را با A نشان دهیم، ماکزیمم تنش برشی را به صورت  $\tau_{max} = k(V/A)$  بیان کنید و ثابت k را برای هر یک از دو وضعیت داده شده بسپارید.



(الف)



(ب)

شکل م ۵۳-۶



(الف)



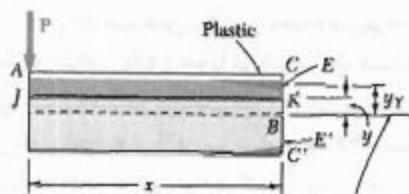
(ب)

شکل م ۵۴-۶

۵۵-۶ برای تیری که از دو یا چند ماده با مدول‌های الاستیسیته مختلف ساخته شده است، نشان دهید که معادله (۶-۶)

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{I}$$

صحت دارد به شرطی که I و Q هر دو با استفاده از مقطع تبدیل یافته تیر محاسبه شود (به قسمت ۶.۴ نگاه کنید) و نیز به شرطی که I عرض واقعی تیر در جایی باشد که  $\tau_{ave}$  محاسبه می‌شود.


 محور خشی  
شکل م ۶-۶۰

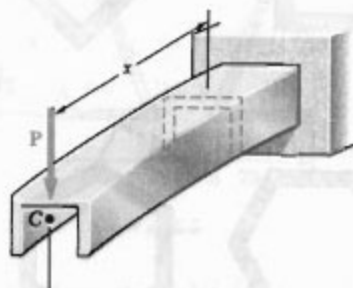
۶-۹ بارگذاری نامتقارن در عضوهای جدار نازک:

مرکز برش

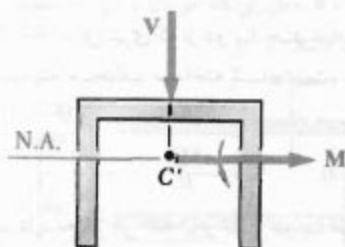
در فصل ۵ و قبل از آن، فقط عضوهای را تحلیل کردیم که دارای صفحه تقارن عمودی بودند و تحت بارگذاری عرضی در آن صفحه قرار داشتند. این اعضا در صفحه بارگذاری خم می شدند (شکل ۶-۴۲). تنش های قائم و برشی ناشی از کوپل خمشی M و برش V (شکل ۶-۴۳) در یک مقطع عرضی با معادله های زیر بیان می شوند:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad (۴-۱۶)$$

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It} \quad (۶-۶)$$



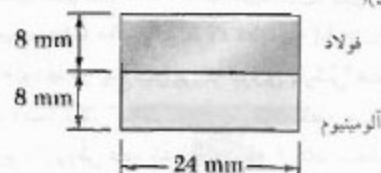
شکل ۶-۴۲



$$(V = P, M = Px)$$

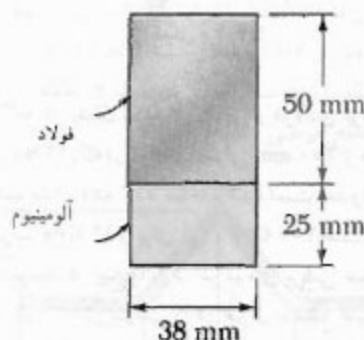
شکل ۶-۴۳

(الف) تنش متوسط در سطح اتصال، (ب) ماکزیمم تنش در تیر: (راهنمایی: از روش داده شده در مسئله ۶-۵۵ استفاده کنید).



شکل م ۶-۵۸

۶-۵۹ یک میله فولادی و یک میله آلومینیومی، مطابق شکل، به هم متصل شده اند و تیر مرکبی را تشکیل داده اند. اگر برش عمودی در تیر ۱۶ kN و مدول الاستیسیته فولاد ۲۰۰ GPa و برای آلومینیوم ۷۳ GPa باشد، مطلوب است: (الف) تنش متوسط در سطح اتصال، (ب) ماکزیمم تنش در تیر. (راهنمایی: از روش داده شده در مسئله ۶-۵۵ استفاده کنید).



شکل م ۶-۵۹

۶-۶۰ در شکل م ۶-۵۵، تیر طره ای AB را که در قسمت ۸-۶ بررسی شد و قسمت ACKJ تیر را که در سمت چپ مقطع عرضی CC' و بالای صفحه افقی JK است در نظر بگیرید (K نقطه ای به فاصله  $y < y_c$  بالای محور خشی است). (الف) با توجه به اینکه  $\sigma_x = \sigma_y$  بین C و E و  $\sigma_x = (\sigma_y/y_y)y$  بین E و K است، نشان دهید که مقدار نیروی برشی افقی H وارد بر وجه پایینی قسمت ACKJ تیر عبارت است از

$$H = \frac{1}{y} b \sigma_y \left( y_c - y_y - \frac{y}{y_y} \right)$$

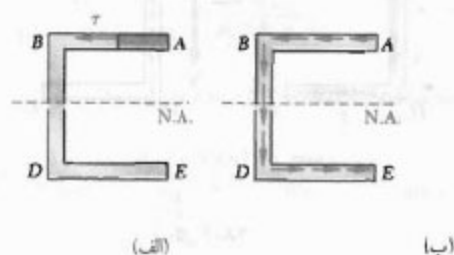
(ب) با توجه به اینکه تنش برشی در K چنین است:

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta A} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{b} \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial x}$$

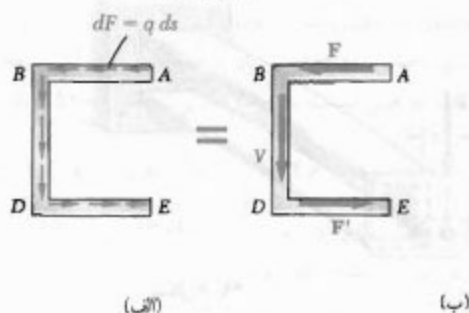
و با توجه به اینکه  $y$  تابعی از  $x$  است که با معادله (۶-۱۴) تعریف می شود، معادله (۶-۱۵) را استنتاج کنید.

(شکل ۴۶-۶ الف)، و توزیع تنش مانند شکل ۴۶-۶ ب است (برای هر دو نقطه  $A$  و  $E$ ،  $\tau = 0$ ). نیروی برشی وارد بر جزء کوچکی از مساحت مقطع عرضی  $dA = t ds$  برابر است با  $dF = \tau dA = \tau t ds$  یا  $dF = q ds$  (شکل ۴۷-۶ الف)، که در آن  $q$  جریان برش،  $q = \tau t = VQ/I$ ، در نقطه تحت بررسی است. براینده نیروهای برشی وارد بر اجزای بال بالایی  $AB$  برابر است با نیروی افقی  $F$  (شکل ۴۷-۶ ب) با مقدار زیر:

$$F = \int_A^B q ds \quad (۱۷-۶)$$



شکل ۴۶-۶



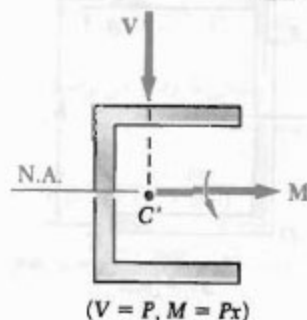
شکل ۴۷-۶

به علت تقارن مقطع ناودانی نسبت به محور خنثی، براینده نیروهای برشی وارد بر بال پایینی  $DE$  برابر است با نیروی  $F'$  که مقدار آن با مقدار نیروی  $F$  برابر و در سوی مخالف آن است. در نتیجه براینده نیروهای برشی وارد بر جان  $BD$  با برش عمودی  $V$  در این مقطع برابر است:

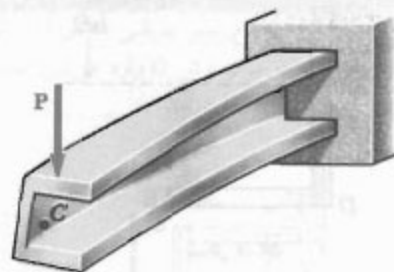
$$V = \int_B^D q ds \quad (۱۸-۶)$$

نیروهای  $F$  و  $F'$  یک کوپل با لنگر  $Fl$  را تشکیل می‌دهند، که در آن  $l$  فاصله بین خطوط مرکزی بال‌های  $AB$  و  $DE$  است (شکل ۴۸-۶ الف). اگر برش عمودی  $V$  به فاصله  $e$  جابه‌جا شود به طوری که لنگر  $V$  نسبت به  $B$  مساوی  $Fl$  باشد

در این قسمت، آثار بارگذاری‌های عرضی را در عضوهای جدار نازکی که دارای صفحه تقارن عمودی نیستند بررسی می‌کنیم. مثلاً، فرض کنید که ناودانی شکل ۴۲-۶ به اندازه  $90^\circ$  بچرخد و خط اثر  $P$  در این حالت نیز از مرکز سطح مقطع انتهایی بگذرد. بردار کوپل  $M$  که لنگر خمشی وارد بر یک مقطع عرضی داده شده نشان می‌دهد هنوز در امتداد محور اصلی مقطع است (شکل ۴۴-۶)، و محور خنثی بر آن محور منطبق است (قسمت ۴-۱۳). بنابراین، معادله (۴-۱۶) را می‌توان به کار برد و از آن برای محاسبه تنش‌های قائم در این مقطع استفاده کرد. برای تعیین تنش برشی در این مقطع نمی‌توان از معادله (۶-۶) استفاده کرد، زیرا این معادله برای عضو به کار می‌رود که دارای صفحه تقارن عمودی است (قسمت ۶-۷). در واقع، عضو تحت بار وارده خمیده و پیچیده می‌شود (شکل ۴۵-۶) و توزیع تنش‌های برشی حاصل با توزیعی که معادله (۶-۶) می‌دهد کاملاً متفاوت است.



شکل ۴۴-۶



شکل ۴۵-۶

سؤال: آیا می‌توان بار عمودی  $P$  را طوری وارد کرد که ناودانی شکل ۴۵-۶ خمیده شود بدون اینکه پیچد. اگر آری، بار  $P$  را کجا باید وارد کرد؟ اگر عضو بدون پیچش خمیده شود، در این صورت تنش برشی در هر نقطه از یک مقطع عرضی را می‌توان از معادله (۶-۶) به دست آورد؛ در این معادله،  $Q$  همان اول سطح صایه خورده نسبت به محور خنثی است

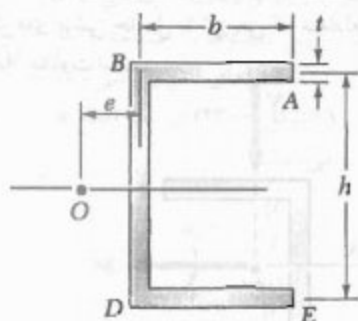
## مثال ۵-۶:

مرکز برش یک ناودانی با ضخامت یکنواخت (شکل ۵۱-۶) را برای  $t = 4 \text{ mm}$ ,  $h = 150 \text{ mm}$ ,  $b = 100 \text{ mm}$  بیابید.

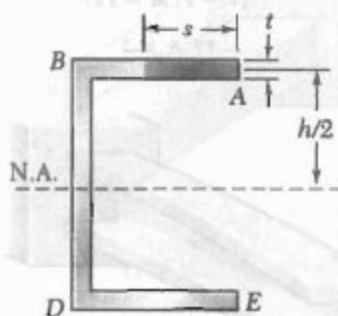
فرض می‌کنیم عضو نمی‌پیچد، و ابتدا جریان برش  $q$  در بال  $AB$  را در فاصله  $s$  از  $A$  می‌یابیم (شکل ۵۲-۶). با مراجعه به معادله (۵-۶) و با توجه به اینکه ممان اول  $Q$  سطح سایه خورده نسبت به محور خنثی عبارت است از  $Q = (st)(h/2)$ ، می‌نویسیم:

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vsth}{2I} \quad (۲۰-۶)$$

که در آن  $V$  برش عمودی و  $I$  ممان اینرسی مقطع نسبت به محور خنثی است.



شکل ۵۱-۶



شکل ۵۲-۶

از معادله (۱۷-۶)، مقدار نیروی برشی وارد بر بال  $AB$  را با انتگرال‌گیری جریان برش  $q$  از  $A$  تا  $B$  می‌یابیم:

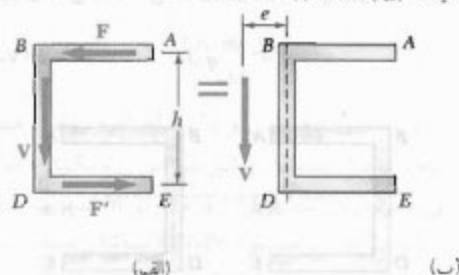
$$F = \int_0^b q \, ds = \int_0^b \frac{Vsth}{2I} \, ds = \frac{Vth}{2I} \int_0^b s \, ds$$

$$F = \frac{Vthb^2}{4I} \quad (۲۱-۶)$$

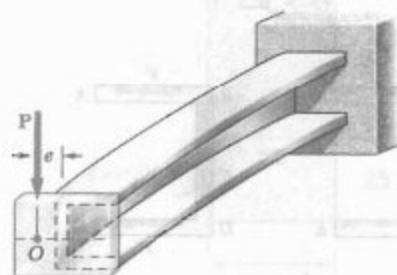
(شکل ۴۸-۶ ب)، این کوپل حذف می‌شود، می‌نویسیم  $Ve = Fh$ ، در نتیجه،

$$e = \frac{Fh}{V} \quad (۱۹-۶)$$

یعنی، اگر نیروی  $P$  در فاصله  $e$  در سمت چپ خط مرکزی جان  $BD$  وارد می‌شود، عضو در یک صفحه عمودی خم می‌شود بدون اینکه بپیچد (شکل ۴۹-۶).

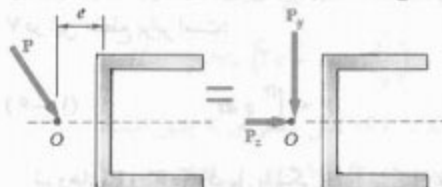


شکل ۴۸-۶



شکل ۴۹-۶

نقطه  $O$  را که محل تلاقی خط اثر  $P$  با محور تقارن مقطع انتهایی است مرکز برش آن مقطع می‌گویند. اگر بار  $P$  مایل هم باشد (شکل ۵۰-۶ الف) ولی در مرکز برش مقطع وارد شود، عضو نخواهد پیچید. در این حالت، بار  $P$  را می‌توان به دو مؤلفه  $P_y$  و  $P_z$ ، متناظر با شرایط شکل‌های ۴۲-۶ و ۴۹-۶، تجزیه کرد (شکل ۵۰-۶ ب) که هیچکدام از آنها باعث پیچش عضو نمی‌شود.



(الف) (ب)

شکل ۵۰-۶



تنش برشی در پال‌ها. چون  $V$  در مرکز برش وارد می‌شود، پیشش وجود ندارد. تنش را در پال  $AB$  از معادله (۶-۲۰) می‌یابیم:

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It} = \frac{Vh}{\frac{1}{3}I} s \quad (۶-۲۵)$$

این رابطه نشان می‌دهد که توزیع تنش در پال  $AB$  خطی است. با قرار دادن  $s = h$  و با جایگذاری  $I$  از معادله (۶-۲۳)، مقدار تنش برشی در  $B$  چنین است:

$$\tau_B = \frac{Vhb}{\frac{1}{3}(\frac{1}{12}th^3)(6b+h)} = \frac{6Vb}{th(6b+h)} \quad (۶-۲۶)$$

با جایگذاری  $V = 10 \text{ kN}$ ، و اندازه‌های ناودانی،

$$\begin{aligned} \tau_B &= \frac{6(10 \text{ kN})(100 \text{ mm})}{(4 \text{ mm})(150 \text{ mm})(6 \times 100 \text{ mm} + 150 \text{ mm})} \\ &= 13.3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

تنش برشی در جان. توزیع تنش برشی در جان  $BD$  به صورت سهمی است (مانند تیر  $W$ )، و تنش ماکزیمم در محور خنثی به وجود می‌آید. با محاسبه ممان اول نیمه بالایی مقطع عرضی نسبت به محور خنثی (شکل ۶-۵۴)، داریم

$$Q = bt(\frac{1}{2}h) + \frac{1}{2}ht(\frac{1}{2}h) = \frac{1}{8}ht(4b+h) \quad (۶-۲۷)$$

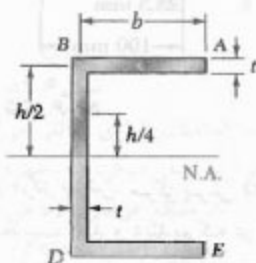
با جایگذاری  $I$  و  $Q$ ، به ترتیب، از (۶-۲۳) و (۶-۲۷) در عبارت تنش برشی، نتیجه می‌شود:

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V(\frac{1}{8}ht)(4b+h)}{\frac{1}{12}th^3(6b+h)t} = \frac{3V(4b+h)}{2th(6b+h)}$$

با توجه به داده‌ها،

$$\tau_{\max} = \frac{3(10 \text{ kN})(4 \times 100 \text{ mm} + 150 \text{ mm})}{2(4 \text{ mm})(150 \text{ mm})(6 \times 100 \text{ mm} + 150 \text{ mm})}$$

$$= 18.3 \text{ MPa}$$



شکل ۶-۵۴

فاصله  $e$  از خط مرکزی جان  $BD$  تا مرکز برش  $O$  را از معادله (۶-۱۹) به دست می‌آوریم:

$$e = \frac{Fh}{V} = \frac{Vthb^3}{\frac{1}{12}I} \frac{h}{V} = \frac{th^3b^3}{\frac{1}{12}I} \quad (۶-۲۲)$$

ممان اینرسی  $I$  ناودانی را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{جان}} + 2I_{\text{پال}} \\ &= \frac{1}{12}th^3 + 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] \end{aligned}$$

با صرفنظر از جمله شامل  $t^3$ ،

$$I = \frac{1}{12}th^3 + \frac{1}{12}tbh^3 = \frac{1}{12}th^3(6b+h) \quad (۶-۲۳)$$

با جایگذاری این عبارت در معادله (۶-۲۲)،

$$e = \frac{3b^3}{6b+h} = \frac{b}{2 + h/3b} \quad (۶-۲۴)$$

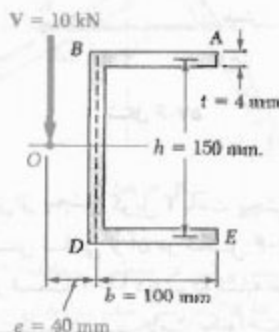
توجه داریم که  $e$  به  $t$  بستگی ندارد و می‌تواند از  $h/2$  تغییر کند. برای مقطع داده شده،

$$\frac{h}{3b} = \frac{150 \text{ mm}}{3(100 \text{ mm})} = 0.5$$

$$\Rightarrow e = \frac{100 \text{ mm}}{2 + 0.5} = 40 \text{ mm}$$

#### مثال ۶-۶

برای ناودانی مثال ۶-۵، توزیع تنش برشی ناشی از برش عمودی  $V = 10 \text{ kN}$  را که در مرکز برش  $O$  وارد می‌شود بیابید (شکل ۶-۵۳).



شکل ۶-۵۳

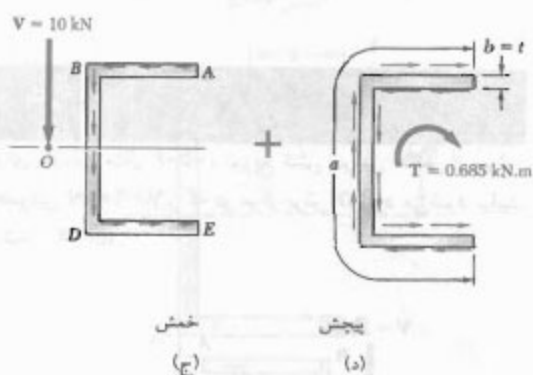
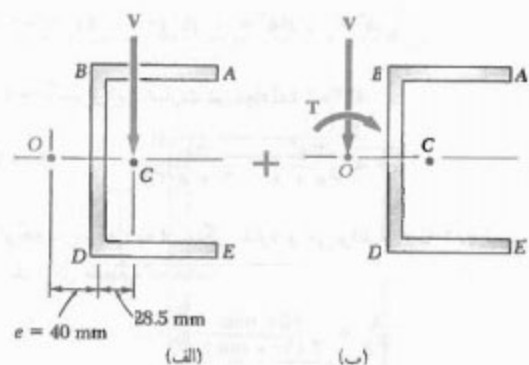
برش  $O$  جایگزین می‌کنیم (شکل ۵۷-۶). این سیستم از نیروی  $V = 10 \text{ kN}$  و کوپل زیر تشکیل شده است:

$$T = V(OC) = (10 \text{ kN})(40 \text{ mm} + 28.5 \text{ mm})$$

$$= 0.685 \text{ kN.m}$$

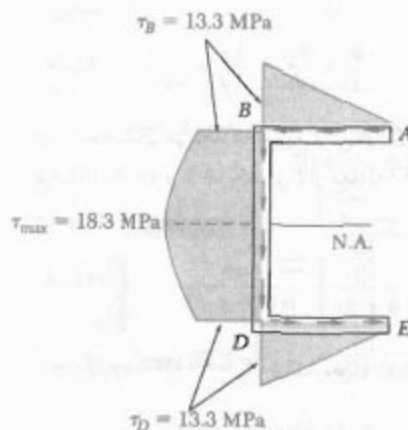
تنش ناشی از خمش. نیروی  $V = 10 \text{ kN}$  باعث خمش عضو می‌شود. توزیع متناظر تنش برشی در مقطع ناودانی (شکل ۵۷-۶ ج) در مثال ۶-۵ تعیین شد. دیدیم که:

$$(\tau_{\max})_{\text{عش}} = 18.3 \text{ MPa}$$



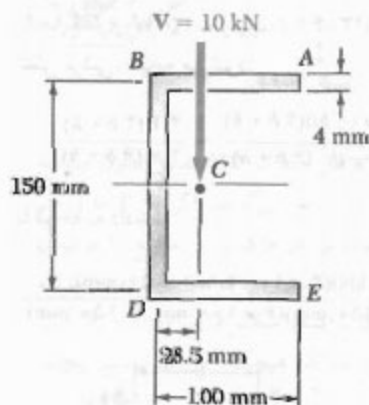
شکل ۵۷-۶

توزیع تنش روی مقطع. توزیع تنش برشی در کل مقطع ناودانی در شکل ۵۵-۶ رسم شده است.



شکل ۵۵-۶

برای ناودانی مثال ۵۵-۶ و با صرفنظر از تمرکز تنش، ماکزیمم تنش برشی ناشی از برش عمودی  $V = 10 \text{ kN}$  را که در مرکز سطح ناودانی (نقطه  $C$ ) وارد می‌شود بیابید. نقطه  $C$  در فاصله  $28.5 \text{ mm}$  در سمت راست خط مرکزی جان  $BD$  قرار دارد (شکل ۵۶-۶).

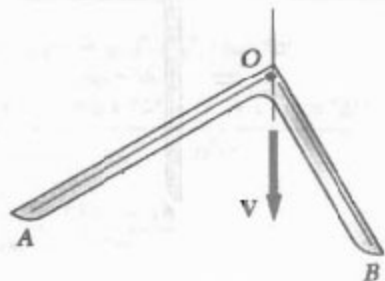
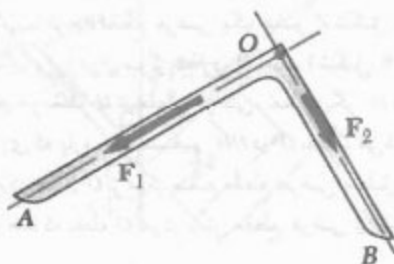
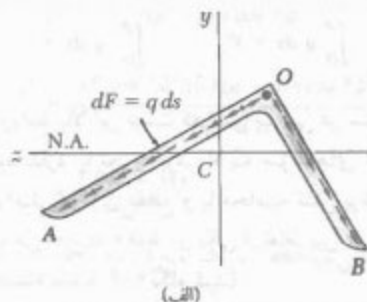


شکل ۵۶-۶

سیستم نیرو-کوپل در مرکز برش. مرکز برش  $O$  مقطع عرضی در مثال ۵۵-۶ به دست آمد و دیدیم که در فاصله  $e = 40 \text{ mm}$  در سمت چپ خط مرکزی جان  $BD$  قرار دارد. برش  $V$  (شکل ۵۷-۶ الف) را با سیستم معادل نیرو-کوپل در مرکز

تنش ناشی از پیچش. کوپل  $T$  باعث پیچش عضو می‌شود، و توزیع تنش ناشی از آن در شکل ۵۷-۶ د نشان داده شده است. در قسمت ۱۲-۳ دیدیم که تشابه غشای نشان می‌دهد که در عضو جدار نازک با ضخامت یکنواخت، تنش ناشی از کوپل  $T$  در امتداد لبه مقطع دارای مقدار ماکزیمم است. با

(شکل ۵۹-۶ الف). در شکل ۵۹-۶ ب، نیروی  $F_1$  در امتداد  $OA$  برآیند نیروهای برشی وارد بر قسمت  $OA$  مقطع عرضی، و نیروی  $F_2$  در امتداد  $OB$  برآیند نیروهای برشی وارد بر قسمت  $OB$  است. چون  $F_1$  و  $F_2$  از گوشه نیسی (نقطه  $O$ ) می‌گذرند، برآیند آنها، که برش  $V$  در مقطع است، از این نقطه می‌گذرد (شکل ۵۹-۶ ج). در نتیجه، اگر بار  $P$  از گوشه  $O$  مقطعی که بر آن وارد می‌شود بگذرد، عضو نخواهد پیچید.



شکل ۵۹-۶  
(ج)

همین استدلال را برای حالتی می‌توان به کار برد که بار  $P$  بر محور مرکزی اصلی دیگر،  $Cy$ ، عمود باشد. چون بار  $P$  را که در گوشه  $O$  یک مقطع عرضی وارد می‌شود می‌توان به مؤلفه‌های عمود بر محورهای اصلی تجزیه کرد، نتیجه می‌شود اگر بار در گوشه  $O$  مقطع عرضی وارد شود، عضو نخواهد پیچید. یعنی،  $O$  مرکز برش مقطع است.

استفاده از معادله‌های (۳-۴۵) و (۳-۴۳) و داده‌های زیر

$$a = 100 \text{ mm} + 150 \text{ mm} + 100 \text{ mm} = 350 \text{ mm}$$

$$b = t = 4 \text{ mm} \quad b/a = 0.0114$$

داریم:

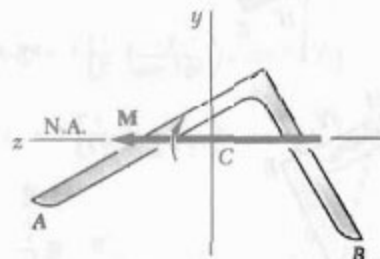
$$c_1 = \frac{1}{3}(1 - 0.630 \cdot b/a) = \frac{1}{3}(1 - 0.630 \times 0.0114) = 0.331$$

$$(\tau_{\max})_{\text{برش}} = \frac{T}{c_1 a b^2} = \frac{685 \text{ kN} \cdot \text{in}}{(0.331)(350)(4 \text{ mm})^2} = 370 \text{ MPa}$$

تنش مرکب، ماکزیمم تنش ناشی از خمش و پیچش مرکب در محور خنثی روی سطح داخلی جان روی می‌دهد و چنین است:

$$\tau_{\max} = 18.3 \text{ MPa} + 370 \text{ MPa} = 388.3 \text{ MPa}$$

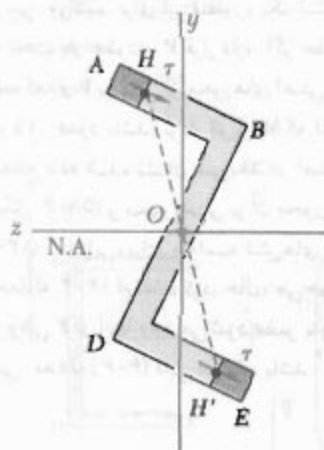
حال، عضوهای جدار نازکی را که صفحه تقارن ندارند بررسی می‌کنیم. برای این منظور، یک نیسی را در نظر می‌گیریم که تحت بار عمودی  $P$  قرار دارد. اگر عضو طوری قرار داشته باشد که بار  $P$  بر یکی از محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی آن،  $Cz$ ، عمود باشد، بردار کوپل  $M$  که لنگر خمشی را در یک مقطع داده شده نشان می‌دهد در امتداد  $Cz$  خواهد بود (شکل ۵۸-۶) و محور خنثی بر آن محور منطبق است (قسمت ۴-۱۳). بنابراین، برای محاسبه تنش‌های قائم در مقطع می‌توان از معادله ۴-۱۶ استفاده کرد. حال، می‌خواهیم نقطه‌ای را بیابیم که وقتی  $P$  در آنجا وارد می‌شود عضو بدون پیچش خمیده شود؟ یعنی، معادله (۶-۶) قابل استفاده باشد.



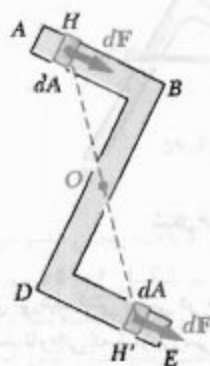
شکل ۵۸-۶

هم می‌گنیم تنش برشی در مقطع از معادله (۶-۶) به دست آید. مانند ناودانی که قبلاً بررسی شد، نیروهای برشی جزئی وارد بر مقطع را می‌توان به صورت  $dF = q ds$  بیان کرد، که در آن  $q = VQ/I$  و  $Q$  ممان اول مقطع نسبت به محور خنثی است.

مانند حالت نبشی، فرض می‌کنیم باز در صفحه‌ای عمود بر یکی از محورهای اصلی مقطع، که محور خنثی مقطع نیز می‌باشد، وارد شود (شکل ۶-۶۲). حال، فرض می‌کنیم تنش برشی در مقطع با معادله (۶-۶) تعریف شود؛ یعنی، عضو بدون پیچش خم می‌شود. اگر ممان اول قسمت  $AH$  مقطع عرضی را نسبت به محور خنثی با  $Q$  و ممان اول قسمت  $EH'$  را با  $Q' = -Q$ ، لذا، تنش‌های برشی در  $H$  و  $H'$  دارای مقدار یکسان و امتداد یکسان هستند، و نیروهای برشی وارد بر مساحت‌های جزئی  $dA$  که، به ترتیب، در  $H$  و  $H'$  قرار دارند نیروهای برابری هستند که دارای ممان‌های مساوی و مخالف نسبت به  $O$  می‌باشند (شکل ۶-۶۳). چون این مطلب برای هر زوج جزء مساحت متقارن صحت دارد، لنگر برآیند نیروهای برشی وارد بر مقطع نسبت به نقطه  $O$  صفر است. یعنی، برش  $V$  در مقطع در امتداد خطی است که از  $O$  می‌گذرد. چون این تحلیل را می‌توان برای باری که در صفحه عمود بر محور اصلی دیگر وارد می‌شود تکرار کرد، نتیجه می‌شود که نقطه  $O$  مرکز برش مقطع است.



شکل ۶-۶۲



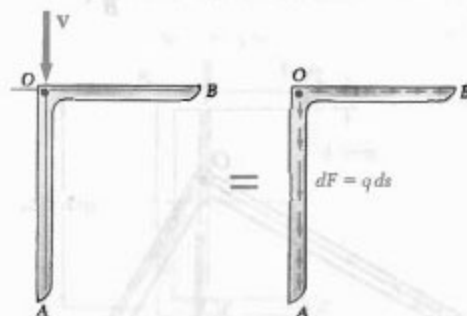
شکل ۶-۶۳

اغلب، با نبشی‌هایی مواجه می‌شویم که یک ساق عمودی و یک ساق افقی دارند. از بحث قبل نتیجه می‌شود اگر بار عمودی در امتداد خط مرکزی ساق عمودی عضو وارد شود، این عضو نخواهد پیچید. از شکل ۶-۶۰ دیده می‌شود برآیند نیروهای برشی جزئی وارد بر قسمت عمودی  $OA$  یک مقطع داده شده مساوی برش  $V$  است و برآیند نیروهای برشی وارد بر قسمت افقی  $OB$  صفر است:

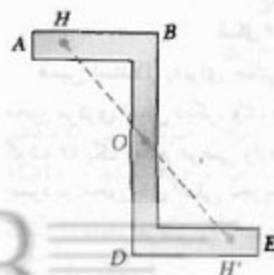
$$\int_0^A q \, ds = V \quad \int_0^B q \, ds = 0$$

معنی روابط بالا این نیست که تنش برشی در ساق افقی عضو وجود ندارد. با تجزیه برش  $V$  به مؤلفه‌های عمود بر محورهای اصلی مرکزی مقطع و با محاسبه تنش برشی در هر نقطه، دیده می‌شود که فقط در یکی از نقاط بین  $O$  و  $B$  صفر است (به مسئله نمونه ۶-۶ نگاه کنید).

عضو جدار نازک دیگری که اغلب با آن مواجه می‌شویم شکل  $Z$  است. گرچه مقطع عرضی یک عضو  $Z$  شکل محور تقارن ندارد، ولی دارای مرکز تقارن  $O$  است (شکل ۶-۶۱). یعنی، برای هر نقطه  $H$  از مقطع عرضی، نقطه دیگر  $H'$  وجود دارد به طوری که پاره خط مستقیم  $HH'$  در  $O$  نصف می‌شود. به وضوح، مرکز تقارن  $O$  بر مرکز سطح مقطع عرضی مطبّق است. اکنون خواهیم دید که نقطه  $O$  مرکز برش مقطع عرضی نیز است.



شکل ۶-۶۰



شکل ۶-۶۱

ترکیب. برش  $V$  در مقطع با بار  $P$  برابر است. آن را به مؤلفه‌های موازی یا محورها اصلی تجزیه می‌کنیم.

تنش برشی ناشی از  $V_y$  تنش برشی را در نقطه  $e$ ، با مختصات  $y$ ، می‌یابیم:

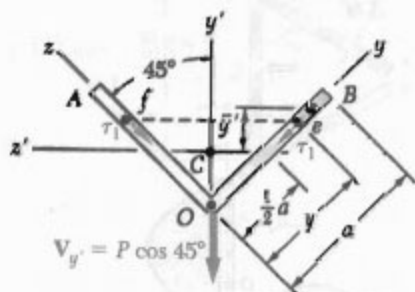
$$\bar{y}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + y) \cos 45^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}}a \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}y \cos 45^\circ$$

$$Q = t(a - y)\bar{y}' = \frac{1}{\sqrt{2}}t(a - y)y \cos 45^\circ$$

$$\tau_1 = \frac{V_y Q}{I_y t} = \frac{(P \cos 45^\circ) \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} t(a - y)y \cos 45^\circ \right]}{\left( \frac{1}{\sqrt{2}} ta^3 \right) t}$$

$$= \frac{3P(a - y)y}{ta^3}$$

تنش برشی در نقطه  $f$  با یک تابع مشابه برحسب  $z$  بیان می‌شود.



تنش برشی ناشی از  $V_z$  مجدداً نقطه  $e$  را در نظر می‌گیریم:

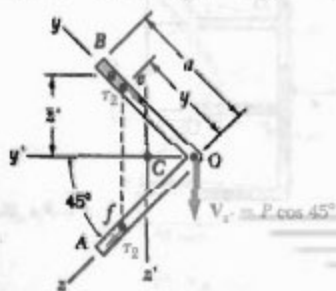
$$\bar{z}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + y) \cos 45^\circ$$

$$Q = (a - y)\bar{z}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - y)t \cos 45^\circ$$

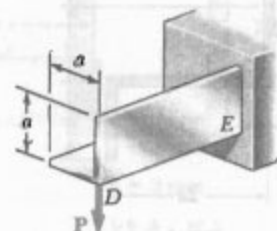
$$\tau_1 = \frac{V_z Q}{I_z t} = \frac{(P \cos 45^\circ) \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (a - y)t \cos 45^\circ \right]}{\left( \frac{1}{\sqrt{2}} ta^3 \right) t}$$

$$= \frac{3P(a - y)}{\sqrt{2} ta^3}$$

تنش برشی در نقطه  $f$  با یک تابع مشابه برحسب  $z$  بیان می‌شود.

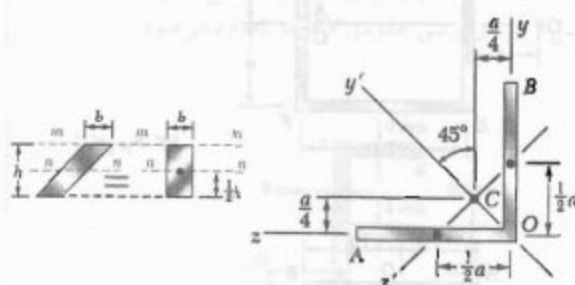


مسئله نمونه ۶-۶  
توزیع تنش برشی را در نبشی جدار نازک  $DE$  با ضخامت یکنواخت  $t$  برای بارگذاری داده شده بیابید.



حل

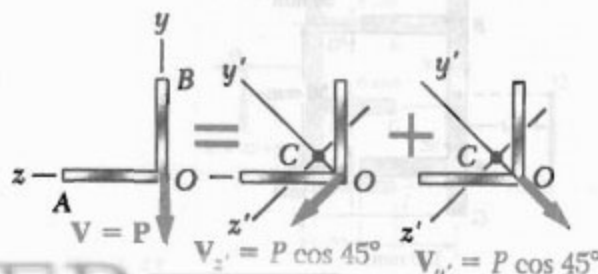
مرکز برش. از قسمت ۹-۶ به خاطر می‌آوریم که مرکز برش مقطع عرضی نبشی جدار نازک در گوشه آن قرار دارد. چون بار  $P$  در  $D$  وارد می‌شود، باعث خمش بدون پیچش نبشی می‌شود.

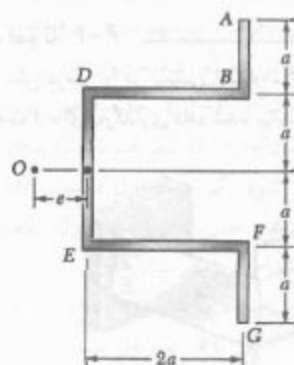


محورهای اصلی. مرکز سطح  $($  مقطع عرضی داده شده را به دست می‌آوریم. چون محور  $y'$  محور تقارن است، محورهای  $y'$  و  $z'$  محورهای اصلی مرکزی مقطع اند. برای متوازی‌الاضلاع داده شده،  $I_{mm} = \frac{1}{12}bh^3$  و  $I_{nn} = \frac{1}{12}bh^3$ . با در نظر گرفتن هر ساق مقطع به عنوان یک متوازی‌الاضلاع، ممان اینرسی مرکزی  $I_y$  و  $I_z$  را می‌یابیم:

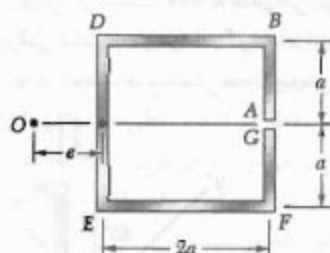
$$I_y = 2 \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{t}{\cos 45^\circ} \right) (a \cos 45^\circ)^3 \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} ta^3$$

$$I_z = 2 \left[ \frac{1}{12} \left( \frac{t}{\cos 45^\circ} \right) (a \cos 45^\circ)^3 \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} ta^3$$

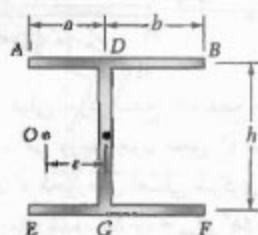




شکل م ۶۲-۶

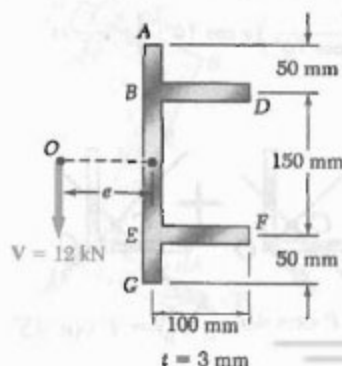


شکل م ۶۳-۶



شکل م ۶۴-۶

۶۵-۶ و ۶۶-۶ تیر اکستروژنی دارای مقطع عرضی نشان داده شده است. مطلوبست: (الف) مکان مرکز برش  $O$ ، (ب) توزیع تنش‌های برشی ناشی از نیروی برشی  $12 \text{ kN}$  که در  $O$  وارد می‌شود.



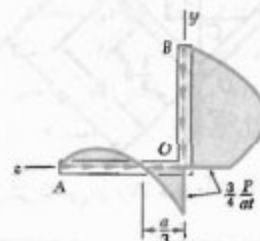
شکل م ۶۵-۶

تنش‌های ترکیبی در امتداد ساق عمودی. تنش برشی در نقطه  $e$  عبارت است از:

$$\begin{aligned} \tau_e &= \tau_x + \tau_y = \frac{V P (a^2 - y^2)}{4 I a^3} + \frac{V P (a - y) y}{I a^3} \\ &= \frac{V P (a - y)}{4 I a^3} [(a + y) + 4y] \\ &\Rightarrow \tau_e = \frac{V P (a - y)(a + 5y)}{4 I a^3} \end{aligned}$$

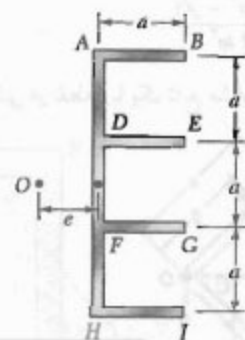
در امتداد ساق افقی. تنش برشی در نقطه  $f$  عبارت است از:

$$\begin{aligned} \tau_f &= \tau_x - \tau_y = \frac{V P (a^2 - z^2)}{4 I a^3} - \frac{V P (a - z) z}{I a^3} \\ &= \frac{V P (a - z)}{4 I a^3} [(a + z) - 4z] \\ &\Rightarrow \tau_f = \frac{V P (a - z)(a - 3z)}{4 I a^3} \end{aligned}$$



## مسائل

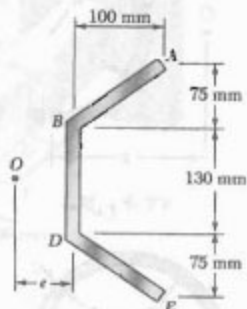
۶۱-۶ تا ۶۴-۶ مکان مرکز برش  $O$  تیر جدار نازک با ضخامت یکنواخت و با مقطع عرضی داده شده را بیابید.



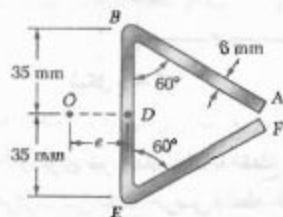
شکل م ۶۱-۶



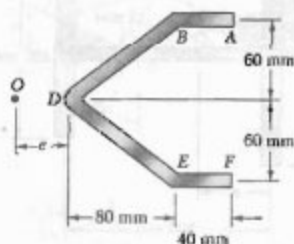
۶۹-۶ تا ۷۴-۶ مکان مرکز برش  $O$  یک تیر جدار نازک با ضخامت پکنواخت و با مقطع عرضی نشان داده شده را بیابید.



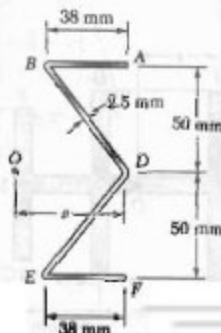
شکل م ۶۹-۶



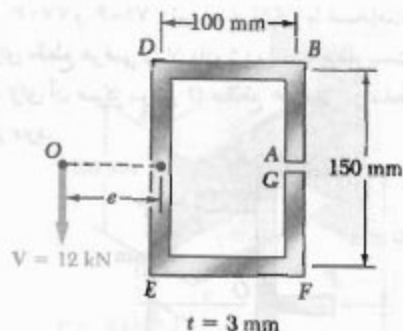
شکل م ۷۰-۶



شکل م ۷۱-۶

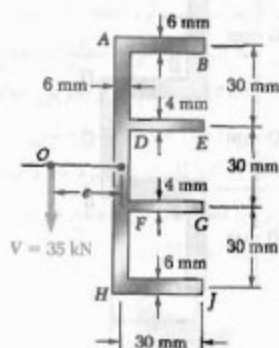


شکل م ۷۲-۶



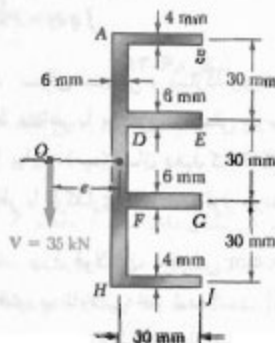
شکل م ۹۴-۶

۶۷-۶ و ۶۸-۶ برای تیر با مقطع عرضی نشان داده شده، مطلوبست: (الف) مکان مرکز برشی  $O$ ، (ب) توزیع تنش‌های برشی ناشی از نیروی برشی عمودی  $V$  که در  $O$  وارد می‌شود.



$$I_x = 1.149 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

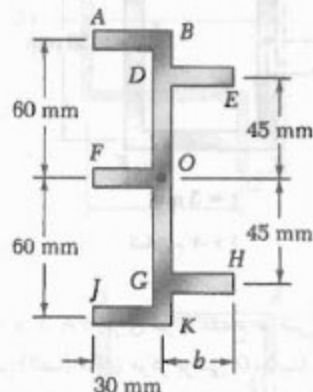
شکل م ۶۷-۶



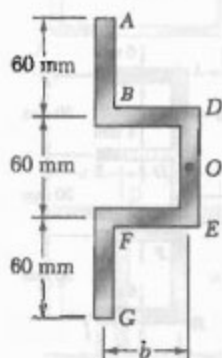
$$I_x = 0.933 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

شکل م ۶۸-۶

۷۷-۶ و ۷۸-۶ تیر جدار نازکی با ضخامت یکنواخت دارای مقطع عرضی نشان داده شده است. مطلوب است اندازه  $b$  که به ازای آن مرکز برش  $O$  مقطع عرضی در نقطه داده شده قرار دارد.



شکل م-۷۷-۶



شکل م-۷۸-۶

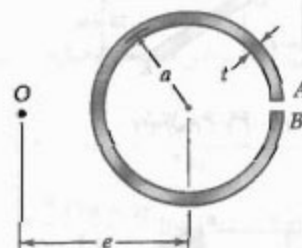
۷۹-۶ برای نبشی و بارگذاری مسئله نمونه ۶-۶، نشان دهید که در امتداد ساق افقی نبشی  $\int q dz = 0$  و در امتداد ساق عمودی آن  $\int q dy = P$ .

۸۰-۶ برای نبشی و بارگذاری مسئله نمونه ۶-۶، (الف) نقاط متناظر با ماکزیمم تنش برشی و مقادیر تنش ماکزیمم را بیابید، (ب) نشان دهید که نقاط حاصل روی محور خنثی متناظر با بارگذاری داده شده قرار دارند.

۸۱-۶ ورق فولادی، به عرض ۱۶۰ mm و به ضخامت ۸ mm، به صورت ناودانی خم شده است. اگر بار عمودی  $P$  در وسط جان ناودانی وارد شود، مطلوب است: (الف) گشتاور  $T$  که باعث می شود ناودانی به همان صورتی که تحت بار  $P$  قرار دارد بپیچد، (ب) ماکزیمم تنش برشی در ناودانی بر اثر بار  $P$ .

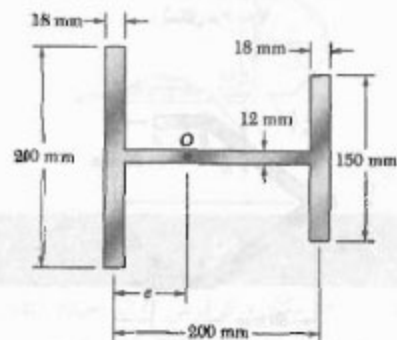


شکل م-۷۳-۶

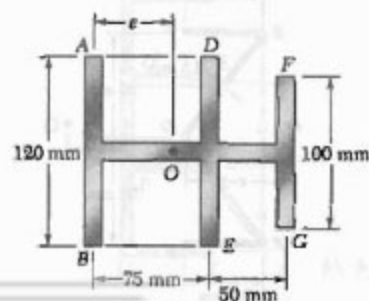


شکل م-۷۴-۶

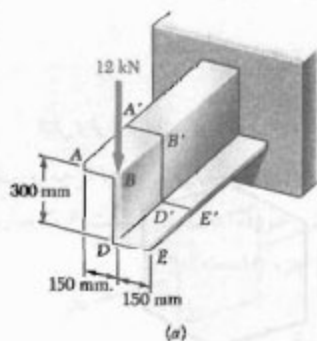
۷۵-۶ و ۷۶-۶ برای تیر جدار نازک با مقطع عرضی نشان داده شده، مکان مرکز برشی مقطع عرضی (نقطه  $O$ ) را بیابید.



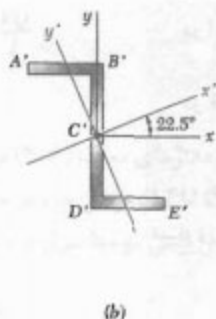
شکل م-۷۵-۶



شکل م-۷۶-۶



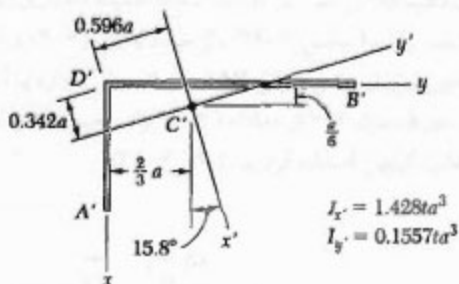
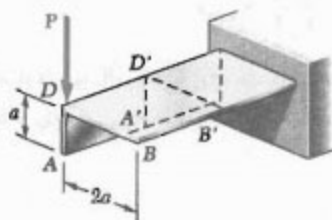
شکل م ۸۵-۶



(b)

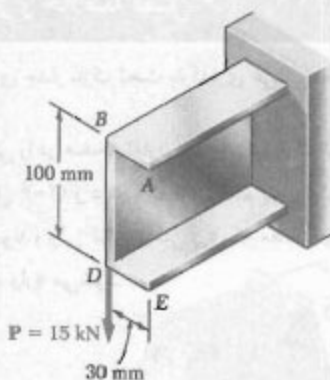
۸۶-۶\* برای تیر طره‌ای و بارگذاری مسئله ۸۵-۶، توزیع تنش‌های برشی در امتداد خط  $B'D'$  در جان عمودی شکل Z را بیابید.

۸۷-۶\* توزیع تنش برشی را در امتداد خط  $D'B'$  از ساق افقی تیشی نشان داده شده بیابید. محورهای  $x'$  و  $y'$  محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی هستند.



شکل م ۸۷-۶

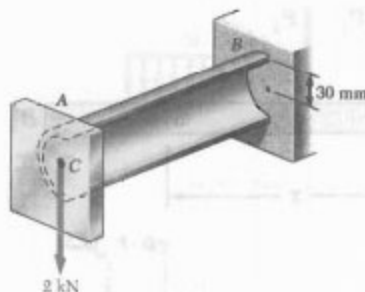
۸۸-۶\* در مسئله ۸۷-۶، توزیع تنش برشی را در امتداد خط  $D'A'$  از ساق عمودی بیابید.



شکل م ۸۱-۶

۸۲-۶\* مسئله ۸۱-۶ را با این فرض حل کنید که ورق به ضخامت ۶ mm به صورت ناودانی نشان داده شده خم شود.

۸۳-۶\* تیر طره‌ای AB، متشکل از لوله جدار نازکی به شعاع ۳۰ mm و با ضخامت دیواره ۱۰ mm، تحت بار عمودی ۲ kN قرار دارد. اگر خط اثر بار از مرکز سطح C مقطع عرضی تیر بگذرد، مطلوب است: (الف) سیستم نیرو کوپل معادل در مرکز برشی مقطع عرضی، (ب) ماکزیمم تنش برشی در تیر. (راهنمایی: در مسئله ۷۳-۶ ثابت می‌شود که فاصله مرکز برش O این مقطع عرضی تا قطر عمودی مقطع دو برابر فاصله مرکز سطح C مقطع تا آن قطر می‌باشد).



شکل م ۸۳-۶

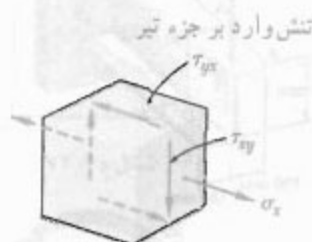
۸۴-۶\* مسئله ۸۱-۶ را با این فرض حل کنید که ضخامت تیر به ۶ mm کاهش یابد.

۸۵-۶\* تیر طره‌ای نشان داده شده از مقطع Z به ضخامت ۶ mm تشکیل شده است. برای بارگذاری داده شده، توزیع تنش‌های برشی را در امتداد خط  $A'B'$  ساق افقی بالایی شکل Z بیابید. محورهای  $x'$  و  $y'$  محورهای اصلی مرکزی مقطع عرضی اند و میان‌های اینرسی عبارتند از:  $I_x = 69.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$  و  $I_y = 5.7 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .

# مرور و خلاصه فصل ۶

در این فصل، تیرها و عضوهای جدار نازک تحت بارگذاری عرضی تحلیل شدند.

در قسمت ۶-۱، جزء کوچکی را در صفحه تقارن عمودی تیری که تحت بارگذاری عرضی است بررسی کردیم (شکل ۶-۲) و دیدیم که تنش قائم  $\sigma_x$  و تنش برشی  $\tau_{xy}$  بر وجوه عرضی آن جزء وارد می‌شوند، ولی تنش برشی  $\tau_{yx}$ ، که مقدار آن با مقدار  $\tau_{xy}$  مساوی است، بر وجوه افقی جزء وارد می‌شود.



شکل ۶-۲

در قسمت ۶-۲، تیر منشوری  $AB$  با صفحه تقارن عمودی را تحت بارهای مختلف متمرکز و توزیعی بررسی کردیم (شکل ۶-۵). در فاصله  $x$  از انتهای  $A$ ، جزء  $CDD'C'$  به طول  $\Delta x$  را مطابق شکل ۶-۶ جدا کردیم. دیدیم که مقدار نیروی برشی وارد به وجه پایینی این جزء چنین است:

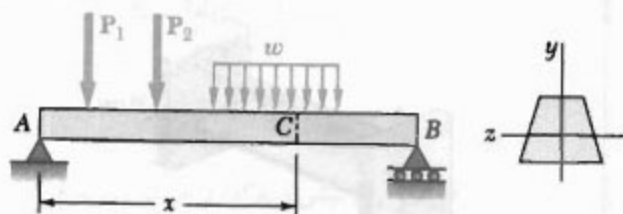
$$\Delta H = \frac{VQ}{I} \Delta x \quad (۶-۴)$$

که در آن،

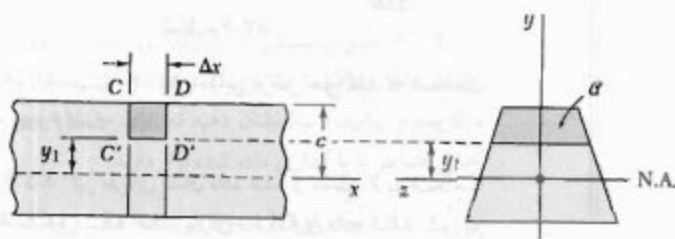
$V$  = برش عمودی در مقطع عرضی داده شده

$Q$  = ممان اول قسمت سایه خورده  $\alpha$  مقطع نسبت به محور خنثی

$I$  = ممان اینرسی مرکزی کل مساحت مقطع عرضی



شکل ۶-۵



شکل ۶-۶

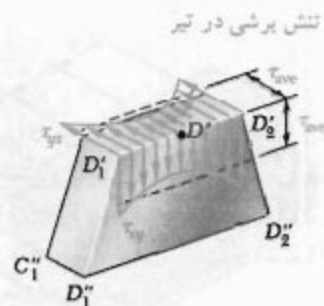
برش افقی برای طول واحد، یا جریان برش  $q$  عبارت است از:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I} \quad (۵-۶)$$

از تقسیم عضوهای معادله (۴-۶) بر مساحت  $\Delta A$  وجه افقی جزء و با توجه به اینکه  $\Delta A = t \Delta x$ ، که در آن  $t$  عرض جزء در مقطع برش خورده است، در قسمت ۳-۶ عبارت زیر را برای شش برشی متوسط مؤثر بر وجه افقی جزء به دست آوردیم:

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It} \quad (۶-۶)$$

سپس، دیدیم که چون تنش‌های برشی  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{yx}$  که، به ترتیب، بر یک صفحه عرضی و یک صفحه افقی گذرا از  $D'$  اثر می‌کنند با هم برابرند و عبارت (۶-۶) مقدار متوسط  $\tau_{xy}$  را در امتداد خط  $D'D'$  نیز نشان می‌دهد (شکل ۱۲-۶).



شکل ۱۲-۶

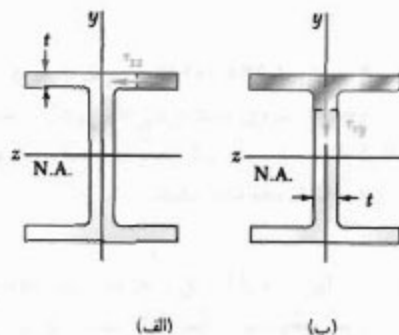
در قسمت‌های ۴-۶ و ۵-۶، تنش برشی را در یک تیر با مقطع عرضی مستطیلی تحلیل کردیم. دیدیم که توزیع تنش به صورت سهمی است و تنش ماکزیمم، که در مرکز مقطع روی می‌دهد، چنین است:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \quad (۱۰-۶)$$

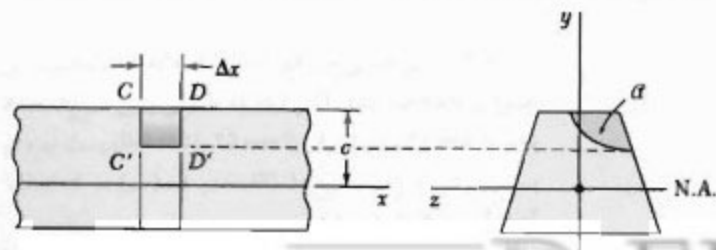
که در آن  $A$  مساحت مقطع مستطیلی است. برای تیرهای بال پهن، دیدیم که از تقسیم برش  $V$  بر مساحت مقطع عرضی جان می‌توان تقریب خوبی را برای ماکزیمم تنش برشی به دست آورد.

در قسمت ۶-۶، نشان دادیم که اگر جزء تیر با یک سطح خمیده اختیاری (به جای صفحه افقی) محدود شده باشد (شکل ۲۴-۶)، از معادله‌های (۴-۶) و (۵-۶) می‌توان، به ترتیب، برای تعیین نیروی برشی طولی  $\Delta H$  و جریان برش  $q$  وارد بر آن جزء استفاده کرد. به این ترتیب، در قسمت ۷-۶ از معادله (۶-۶) برای تعیین تنش برشی متوسط در بال و جان تیرهای بال پهن استفاده کردیم (شکل ۳۲-۶).

برش طولی روی سطح خمیده



شکل ۳۲-۶



شکل ۲۴-۶

## تغییر شکل پلاستیک

در قسمت ۶-۸، تأثیر تغییر شکل پلاستیک را بر مقدار و توزیع تنش برشی بررسی کردیم. از فصل ۴ به خاطر داریم که با شروع تغییر شکل پلاستیک، افزایش بارگذاری باعث می شود مناطق پلاستیک در هسته الاستیک تیر نفوذ کنند. پس از اینکه نشان دادیم تنش برشی فقط می تواند در هسته الاستیک یک تیر به وجود آید، دیدیم که افزایش بارگذاری و کاهش حاصل در اندازه هسته الاستیک در افزایش تنش برشی سهم دارند.

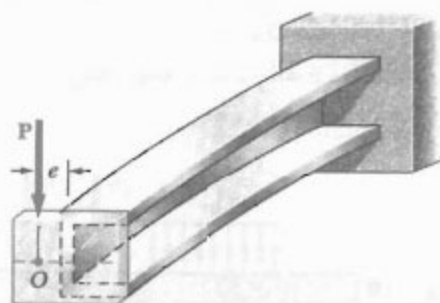
## بارگذاری نامتقارن

## مرکز برش

در قسمت ۶-۹، عضوهای منشوری را که در صفحه تقارن خود بارگذاری نشده اند بررسی کردیم و دیدیم که، به طور کلی، خمش و پیچش در آنها به وجود می آید. سپس، مکان نقطه  $O$  را که در آن می توان بار را وارد کرد به طوری که عضو بدون پیچش خم شود (شکل ۶-۴۹) تعیین کردیم. این نقطه را مرکز برش نامیدیم و دیدیم که اگر بار در مرکز برش وارد شود، معادله های زیر به کار می روند:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad \tau_{ave} = \frac{VQ}{It} \quad (۶-۶، ۱۶-۴)$$

با استفاده از اصل ترکیب، تنش در عضوهای جدار نازک نامتقارن، مانند ناودانی، نبشی و تیرهای اکسترودی را تعیین کردیم [مثال ۶-۷ و مسئله نمونه ۶-۶].

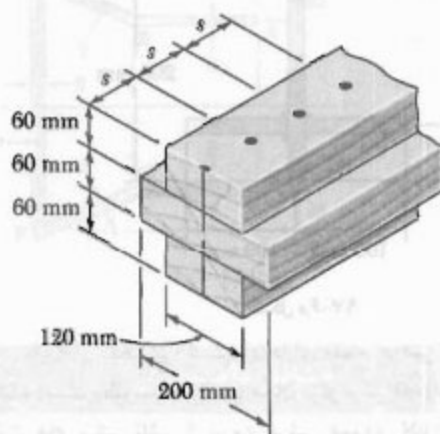


شکل ۶-۴۹

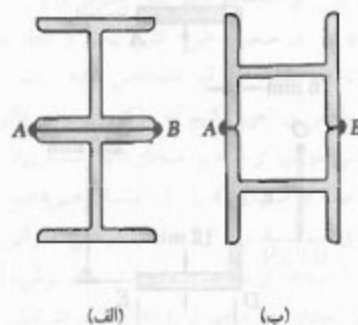


## مسائل تکمیلی

۸۹-۶ سه تخته به هم میخ شده و تیر نشان داده شده را ساخته‌اند. این تیر تحت برش عمودی قرار دارد. اگر فاصله بین میخ‌ها  $s = 75 \text{ mm}$  و نیروی مجاز برشی در هر میخ  $400 \text{ N}$  باشد، برش مجاز را بیابید.



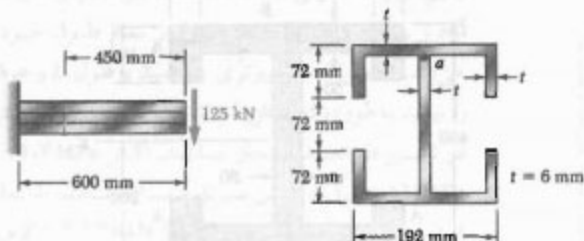
شکل م-۸۹



شکل م-۹۰

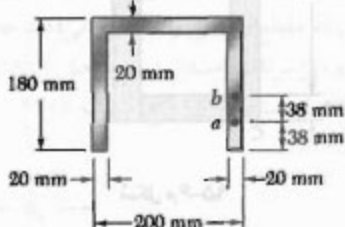
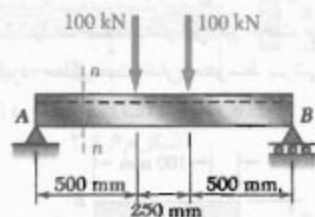
۹۰-۶ دو تیر  $W 200 \times 46$  به دو طریق در  $A$  و  $B$  به هم جوش شده‌اند. اگر نیروی مجاز برشی افقی برای هر خط جوش  $525 \text{ kN/m}$  باشد، ماکزیمم برش عمودی مجاز را در هر یک از تیرهای مرکب نشان داده شده بیابید.

۹۱-۶ برای تیر و بارگذاری نشان داده شده، مقطع  $n-n$  را در نظر بگیرید. مطلوبست: (الف) ماکزیمم تنش برشی در این مقطع، (ب) تنش برشی در نقطه  $a$ .



شکل م-۹۱

۹۲-۶ برای تیر و بارگذاری داده شده، مقطع  $n-n$  را در نظر بگیرید. مطلوبست: (الف) تنش برشی در نقطه  $a$ ، (ب) تنش برشی در نقطه  $b$ .

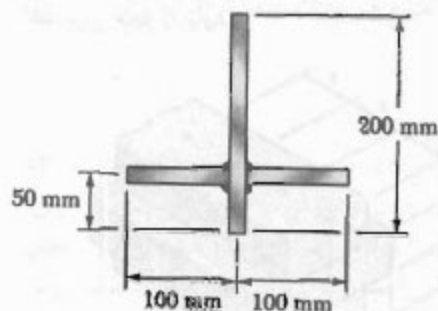


شکل م-۹۲

۹۳-۶ در مسئله ۹۲-۶، ماکزیمم تنش برشی را در مقطع  $n-n$  بیابید.

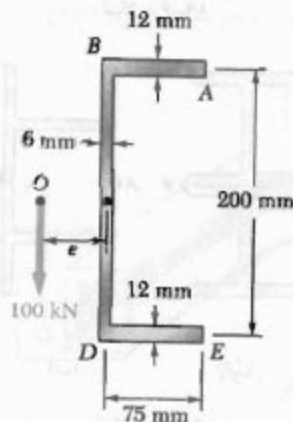
۹۴-۶ تیر چوبی سر هم شده نشان داده شده تحت برش عمودی  $8 \text{ kN}$  قرار دارد. اگر فاصله طولی بین میخ‌ها در  $A$  برابر با  $60 \text{ mm}$  و در  $B$  برابر با  $25 \text{ mm}$  باشد، مطلوبست نیروی برشی در میخ‌ها: (الف) در  $A$ ، (ب) در  $B$ . (داده:  $I_x = 1.75 \times 10^4 \text{ mm}^4$ )

۹۷-۶ سه ورق، هر یک به ضخامت ۱۲ mm، به هم جوش شده‌اند و مقطع نشان داده شده را تشکیل داده‌اند. برای برش عمودی ۱۰۰ kN، جریان برش را در سطوح جوش شده بیابید و جریان برش را در مقطع عرضی رسم کنید.



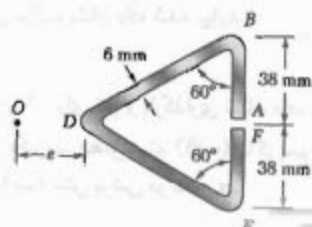
شکل م-۹۷

۹۸-۶ یک تیر اکستروژن دارای مقطع عرضی نشان داده شده است. مطلوب است: (الف) مکان مرکز برش  $O$ ، (ب) توزیع تنش‌های برشی ناشی از نیروی برشی عمودی ۱۰۰ kN وارده در  $O$ .

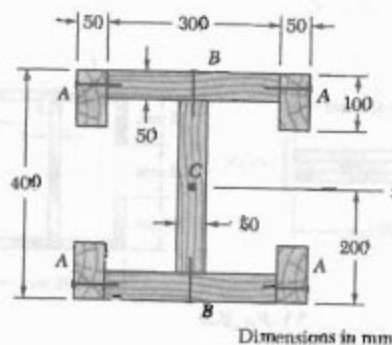


شکل م-۹۸

۹۹-۶ مکان مرکز برش  $O$  یک تیر جدار نازک با ضخامت یکنواخت و با مقطع عرضی نشان داده شده را بیابید.

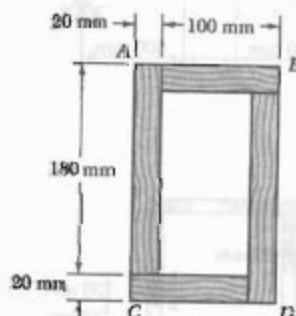


شکل م-۹۹



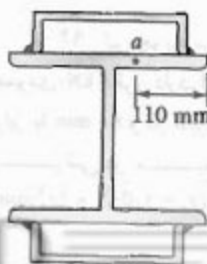
شکل م-۹۴ ابعاد بر حسب mm

۹۵-۶ دو تخته به ابعاد  $20 \times 100$  mm و دو تخته به ابعاد  $20 \times 180$  mm با چسب به هم متصل شده‌اند و تیر جعبه‌ای  $120 \times 200$  mm را ساخته‌اند. اگر این تیر تحت برش عمودی ۳/۵ kN قرار گیرد، مطلوب است تنش متوسط برشی در اتصال چسبی: (الف) در نقطه  $A$ ، (ب) در نقطه  $B$ .



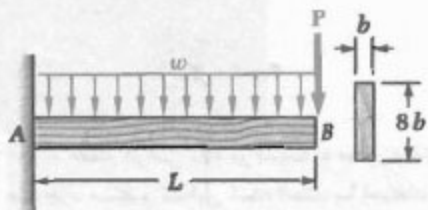
شکل م-۹۵

۹۶-۶ ناودانی‌های  $C200 \times 17.1$  به بال‌های تیر  $W250 \times 80$  جوش شده و تیر مرکب نشان داده شده را ساخته‌اند. اگر تیر تحت برش عمودی ۲۰۰ kN قرار گیرد، مطلوب است: (الف) نیروی برشی افقی در هر متر جوش، (ب) تنش برشی در نقطه  $a$  از بال.



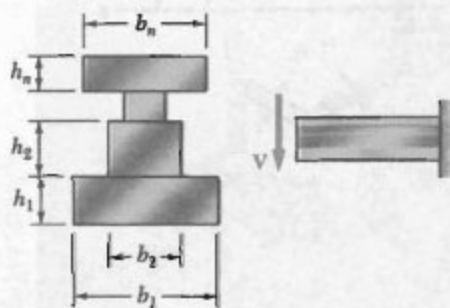
شکل م-۹۶

۲-۶-۲ تیر چوبی طره‌ای  $AB$  به طول  $L$  و با مقطع یکنواخت مستطیلی نشان داده شده، بار متمرکز  $P$  را در انتهای آزاد و بار یکنواخت توزیعی  $w$  را در تمام طول خود تحمل می‌کند. یک برنامه کامپیوتری بنویسید و طول  $L$  و عرض  $b$  تیر را بیابید به طوری که ماکزیمم تنش قائم و ماکزیمم تنش برشی در تیر در حد مجاز باشند. اگر  $\sigma_{all} = 12.4 \text{ MPa}$  و  $\tau_{all} = 827 \text{ kPa}$ ، از این برنامه برای تعیین ابعاد  $b$  و  $L$  استفاده کنید در صورتی که: (الف)  $P = 4.448 \text{ kN}$  و  $w = 0$ ، (ب)  $P = 0$  و  $w = 2.2 \text{ kN/m}$ ، (ج)  $P = 2.224 \text{ kN}$  و  $w = 2.2 \text{ kN/m}$ .



شکل م ۲-۶

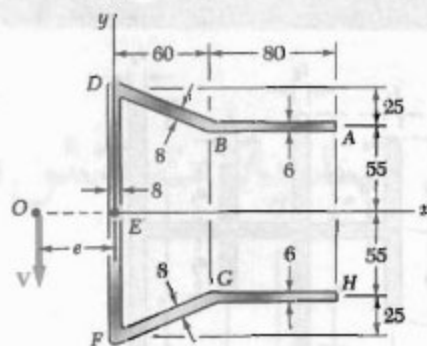
۳-۶-۳ تیری با مقطع عرضی نشان داده شده، تحت برش عمودی  $V$  قرار دارد. با استفاده از یک برنامه کامپیوتری، تنش برشی را در امتداد خط واصل بین هر دو سطح مستطیلی مجاور که مقطع عرضی را تشکیل می‌دهند محاسبه کنید. با استفاده از این برنامه، مسائل زیر را حل کنید: (الف) مسئله ۱۰-۶، (ب) مسئله ۱۲-۶، (ج) مسئله ۲۱-۶.



شکل م ۳-۶

۴-۶-۴ ورقه‌ای با ضخامت یکنواخت  $t$ ، مطابق شکل، طوری خم شده است که دارای یک صفحه تقارن عمودی است و از آن به عنوان تیر استفاده می‌شود. با استفاده از یک برنامه کامپیوتری، توزیع تنش‌های برشی ناشی از برش عمودی  $V$  را

۱۰-۶-۱ برای تیر با مقطع عرضی نشان داده شده، مطلوب است: (الف) مکان مرکز برشی  $O$ ، (ب) توزیع تنش برشی ناشی از نیروی عمودی  $V = 2.5 \text{ kN}$  که در  $O$  وارد می‌شود.

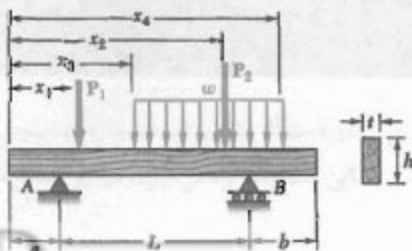


شکل م ۱۰-۶

## مسائل کامپیوتری

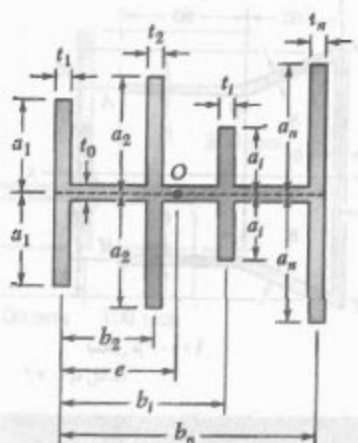
مسائل زیر برای حل با کامپیوتر طرح شده‌اند

۱-۶-۱ می‌خواهیم یک تیر چوبی را برای تحمل بار توزیعی و دو بار متمرکز طرح کنیم. یکی از ابعاد مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی این تیر مشخص شده است و می‌خواهیم بُعد دوم را طوری تعیین کنیم که ماکزیمم تنش قائم و ماکزیمم تنش برشی در تیر از مقادیر مجاز داده شده  $\sigma_{all}$  و  $\tau_{all}$  بیشتر نشود. فاصله از انتهای  $A$  را با  $x$  نشان می‌دهیم. یک برنامه کامپیوتری بنویسید و برای مقاطع عرضی متوالی، از  $x = 0$  تا  $x = L$  و با استفاده از نمودارهای داده شده  $\Delta x$ ، برش، لنگر خمشی و کمترین مقدار بُعد مجهول را که (۱) شرط تنش قائم مجاز، (۲) شرط تنش برشی مجاز در آن مقطع را برقرار می‌کند محاسبه کنید. با استفاده از این برنامه، تیرهایی با مقطع عرضی یکنواخت را برای مسائل زیر طراحی کنید، در صورتی که با  $\sigma_{all} = 12 \text{ MPa}$  و  $\tau_{all} = 825 \text{ kPa}$  (الف) مسئله ۵-۶، با استفاده از  $\Delta x = 0.1 \text{ m}$  (ب) مسئله ۵-۱۵، با استفاده از  $\Delta x = 0.2 \text{ m}$ .



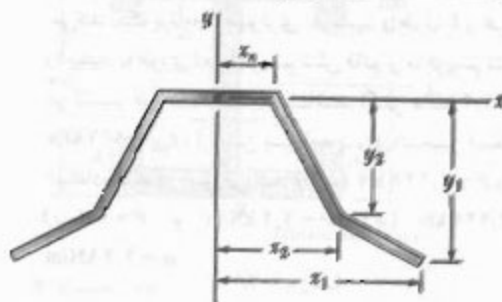
شکل م ۱-۶

۶-۶ ک-تیر جدار نازکی دارای مقطع عرضی نشان داده شده است. با استفاده از یک برنامه کامپیوتری، مکان مرکز برش  $O$  مقطع عرضی را بیابید. از این برنامه برای حل مسئله ۶-۷۵ استفاده کنید.



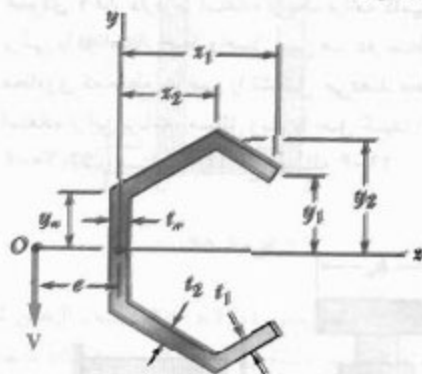
شکل ۶-۶ ک

بیابید. از این برنامه برای حل مسائل استفاده کنید: (الف) مسئله ۶-۴۸، (ب) تعیین تنش برشی در نقطه  $E$  برای مقطع و بارگذاری مسئله ۶-۵۰. در صورتی که  $t = 6 \text{ mm}$ .



شکل ۶-۶ ک

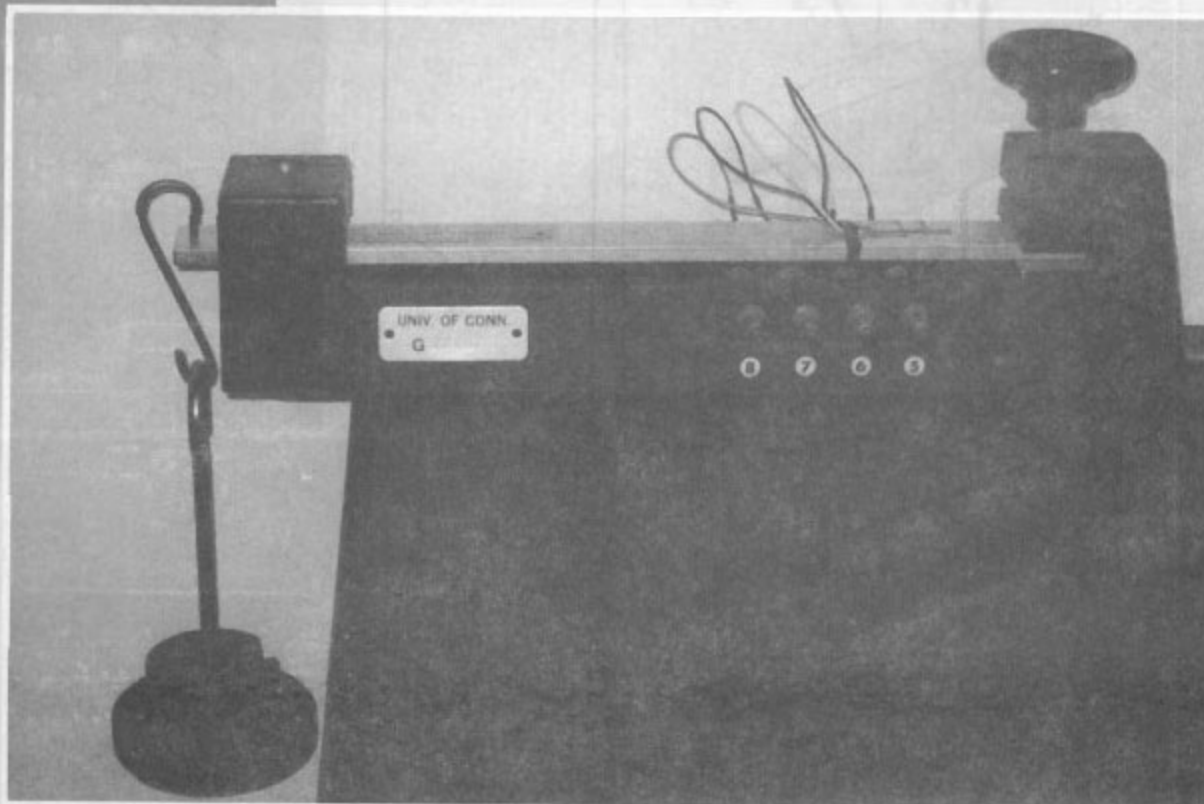
۶-۵ ک-مقطع عرضی یک تیر نسبت به محور  $x$  تقارن دارد و از چند جزء مستقیم تشکیل شده است. با استفاده از یک برنامه کامپیوتری، (الف) مکان یک برنامه مرکز برش  $O$  را بیابید. (ب) توزیع تنش برشی ناشی از نیروی عمودی وارده در  $O$  را تعیین کنید. از این برنامه برای حل مسائل ۶-۶۶ و ۶-۷۰ استفاده کنید.



شکل ۶-۵ ک



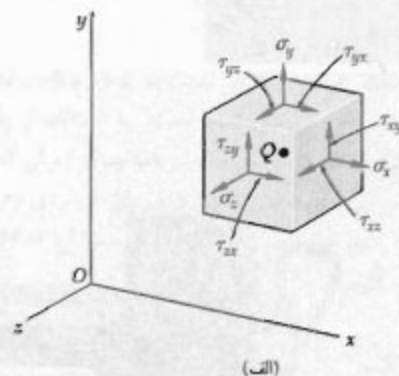
## تبدیلات تنش و کرنش



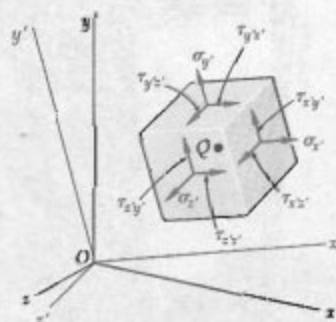
در دستگاه نشان داده شده، یک سنجه کرنش الکتریکی، که به سطح فوقانی یک میله متصل است، کرنش خطی را در این سطح اندازه می گیرد. در این فصل، تنش و کرنش در اجزای ساختمانی و مکانیکی بررسی می شوند.

## ۱-۷ مقدمه

در قسمت ۱-۱۲ دیدیم که حالت تنش در نقطه داده شده  $Q$  را در حالت کلی با شش مؤلفه می‌توان نشان داد. سه تا از این مؤلفه‌ها،  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$ ، تنش‌های قائم وارد بر وجوه یک جزء کوچک مکعبی به مرکز  $Q$  را نشان می‌دهند (شکل ۱-۷ الف)، و سه تای دیگر،  $\tau_{xy}$ ،  $\tau_{yz}$  و  $\tau_{zx}$ ، مؤلفه‌های تنش‌های برشی وارد بر همان جزء را نشان می‌دهند. همانطور که در آن قسمت گفتیم که اگر محورهای مختصات را دوران دهیم (شکل ۱-۷ ب)، همان حالت تنش را با مجموعه دیگری از مؤلفه‌ها می‌توان نشان داد. در قسمت اول این فصل، نحوه تبدیل مؤلفه‌های تنش را بر اثر چرخش محورهای مختصات نشان می‌دهیم. در قسمت دوم این فصل، تحلیل مشابهی را برای تبدیل مؤلفه‌های کرنش می‌آوریم.



(الف)

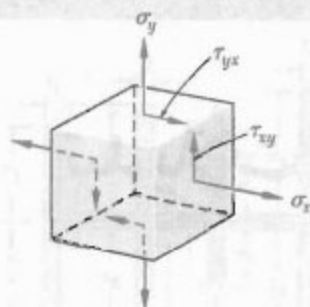


(ب)

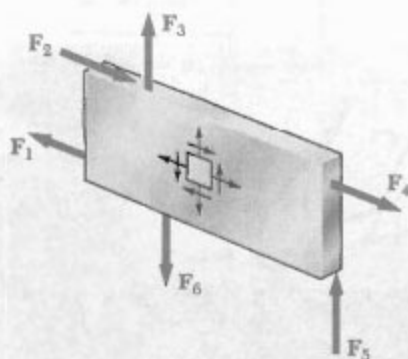
شکل ۱-۷

در تبدیل تنش، عمدتاً به تنش صفحه‌ای می‌پردازیم، یعنی حالتی که در آن دو وجه جزء مکعبی فاقد تنش‌اند. اگر محور  $z$  را عمود بر این وجوه بگیریم، داریم  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ، و فقط مؤلفه‌های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  باقی می‌مانند (شکل ۲-۷). چنین حالتی در ورق نازکی روی می‌دهد که در صفحه میانی‌اش تحت

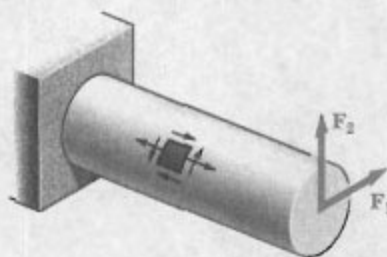
نیرو قرار دارد (شکل ۳-۷). این حالت در سطح آزاد یک عضو ساختمانی یا مکانیکی نیز روی می‌دهد (نقاط روی سطح آزاد تحت نیروی خارجی قرار ندارند، شکل ۴-۷).



شکل ۲-۷



شکل ۳-۷



شکل ۴-۷

در قسمت ۲-۷، حالت تنش صفحه‌ای را در نقطه داده شده  $Q$  با مؤلفه‌های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  نشان می‌دهیم (شکل ۵-۷ الف)، و مؤلفه‌های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  مربوط به آن جزء را پس از چرخش جزء حول محور  $z$  تحت زاویه  $\theta$  (شکل ۵-۷ ب) می‌یابیم. در قسمت ۳-۷، مقدار زاویه  $\theta$  را که به ازای آن تنش‌های  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  به ترتیب، ماکزیمم و مینیمم هستند، می‌یابیم (این مقادیر را اکسیرم تنش‌های اصلی در نقطه  $Q$ ، و وجوه متناظر را صفحات

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \text{ و } \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xy} = \tau_{yx} \text{ به خاطر داریم که}$$



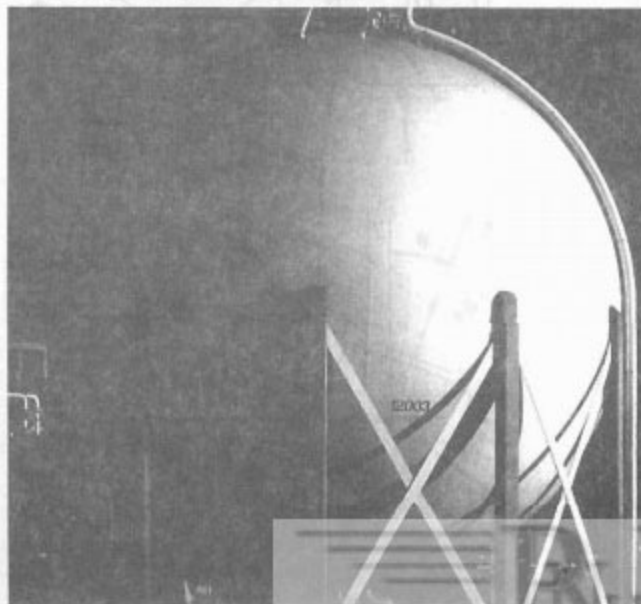
و  $\sigma_y$  را در آن نقطه تعیین، و واریسی می‌کنیم که آیا  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و استقامت تسلیم  $\sigma_y$  ماده معیار خاصی را برقرار می‌کنند یا نه. دو معیار متداول اند: معیار ماکزیمم استقامت برشی و معیار ماکزیمم تغییرشکل. در قسمت ۷-۸، معیارهای شکست برای مواد شکننده‌ای که تحت تنش صفحه‌ای قرار دارند مطالعه می‌شوند؛ این معیارها شامل تنش‌های اصلی  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  در یک نقطه بحرانی و استقامت نهایی  $\sigma_U$  ماده هستند. دو معیار بررسی می‌شوند: معیار ماکزیمم تنش قائم و معیار مور.

مخزن‌های جدار نازک تحت فشار کاربرد مهمی در تحلیل تنش صفحه‌ای دارند. در قسمت ۷-۹، دریاه تنش در مخزن‌های استوانه‌ای و کروی تحت فشار بحث می‌کنیم (شکل‌های ۷-۶ و ۷-۷).

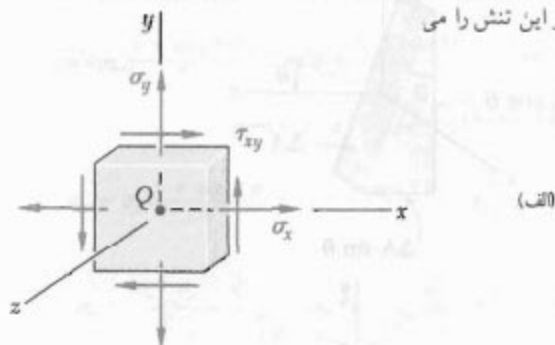
شکل ۷-۶



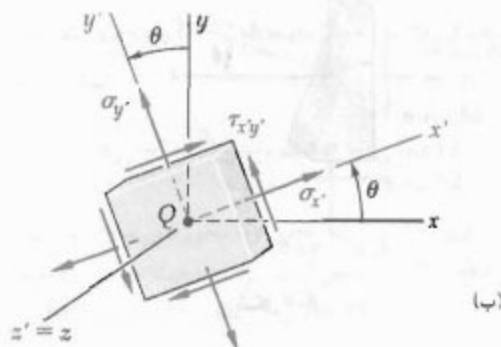
شکل ۷-۷



اصلی تنش در آن نقطه می‌گویند). همچنین، مقدار زاویه دوران را که به لای آن تنش برشی دارای مقدار ماکزیمم است، و نیز مقدار این تنش را می



(الف)



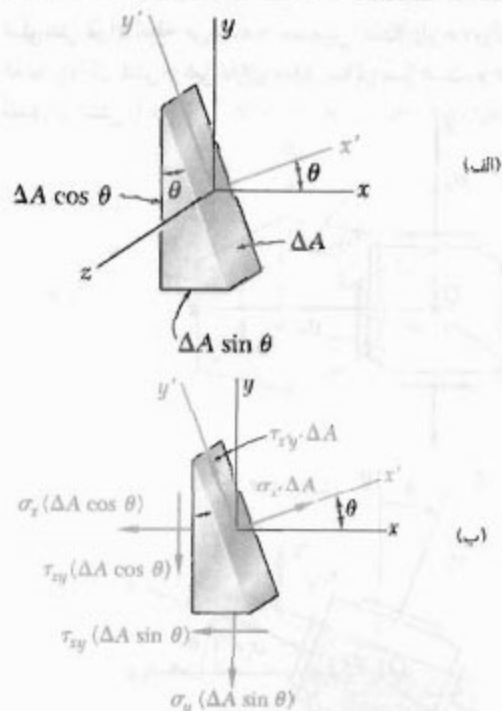
(ب)

شکل ۷-۵

در قسمت ۷-۹، روش دایره مور را برای حل مسائل تبدیل تنش‌های صفحه‌ای نشان می‌دهیم.

در قسمت ۷-۵، حالت تنش سه‌بعدی در یک نقطه داده شده را بررسی و تنش قائم وارد بر یک صفحه با وضعیت اختیاری در آن نقطه را فرمول‌بندی می‌کنیم. در قسمت ۷-۶، چرخش یک جزء مکعبی را حول هر یک از محورهای اصلی تنش بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که تبدیلات متناظر تنش را با سه دایره مور مختلف می‌توان توصیف کرد. همچنین، خواهیم دید که در حالت تنش صفحه‌ای در یک نقطه معین، ماکزیمم مقدار تنش برشی که قبلاً با در نظر گرفتن دوران‌ها در صفحه تنش به دست آمد لزوماً ماکزیمم تنش برشی را در آن نقطه نشان نمی‌دهد. این به عهده شماست که ماکزیمم تنش برشی داخل صفحه و ماکزیمم تنش برشی خارج از صفحه را از هم تمیز دهید.

معیارهای تسلیم برای مواد چکش‌خواری که تحت تنش صفحه‌ای قرار دارند در قسمت ۷-۷ بررسی می‌شوند. برای پیش‌بینی این موضوع که ماده‌ای در یک نقطه بحرانی تحت شرایط بارگذاری معینی تسلیم می‌شود یا نه، تنش‌های اصلی  $\sigma_x$



شکل ۸-۷

برای تعیین تنش قائم  $\sigma_{x'}$  و تنش برشی  $\tau_{x'y'}$  وارد بر وجه عمود بر محور  $x'$ ، یک جزء منشوری را در نظر می‌گیریم که وجوه آن، به ترتیب، بر محورهای  $x$ ،  $y$  و  $x'$  عمودند (شکل ۸-۷ الف). اگر مساحت وجه مایل را با  $\Delta A$  نشان دهیم، مساحت‌های وجوه عمودی و افقی، به ترتیب، برابرند با  $\Delta A \cos \theta$  و  $\Delta A \sin \theta$ . در نتیجه، نیروهای وارد بر این سه وجه مانند شکل ۸-۷ ب هستند (هیچ نیرویی بر وجه مثلثی این جزء وارد نمی‌شود، زیرا تنش‌های قائم و برشی متناظر را صفر فرض کرده‌ایم). معادله‌های تعادل زیر را می‌نویسیم:

$$\sum F_x = 0 : \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta = 0$$

$$\sum F_{y'} = 0 : \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta = 0$$

با حل این معادله‌ها، داریم:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (1-7)$$

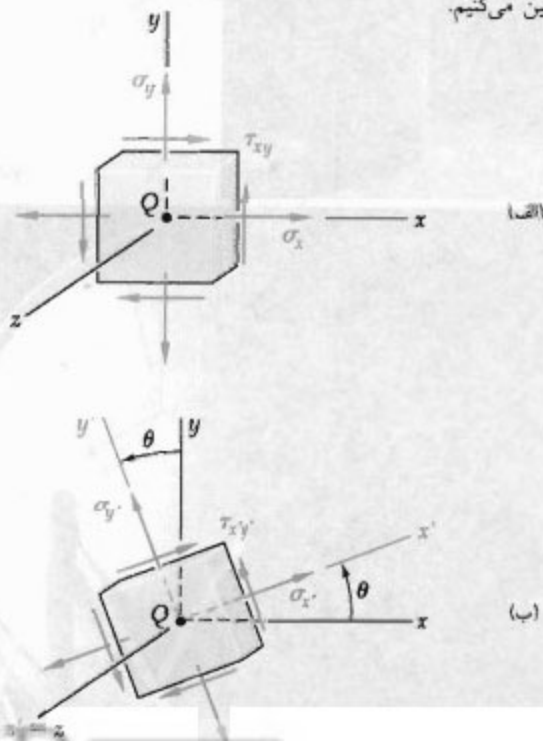
$$\tau_{x'y'} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (2-7)$$

در قسمت‌های ۷-۱۰ و ۷-۱۱، درباره تبدیل تنش صفحه‌ای و دایره مور در کرنش صفحه‌ای بحث می‌کنیم. در قسمت ۷-۱۲، تحلیل کرنش سه بعدی را می‌آوریم و خواهیم دید که برای تعیین ماکزیمم کرنش برشی در یک نقطه معین می‌توان از دایره مور استفاده کرد. دو حالت خاص مورد توجه‌اند و نباید آنها را با هم اشتباه کرد: کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای.

سرتاجام، در قسمت ۷-۱۳ درباره سنج‌های کرنش که برای اندازه‌گیری کرنش قائم در سطح یک عضو ساختمانی یا مکانیکی به کار می‌روند بحث می‌کنیم. خواهید دید چگونه از اندازه‌گیری‌های سه سنج کرنش، که گلبزرگ کرنش را تشکیل می‌دهند، مؤلفه‌های  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  را می‌توان به دست آورد (این مؤلفه‌ها حالت کرنش در یک نقطه معین را مشخص می‌کنند).

### ۷-۲ تبدیل تنش صفحه‌ای

فرضی می‌کنیم حالت تنش صفحه‌ای در نقطه  $Q$  وجود دارد ( $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ). در شکل ۵-۷ الف، مؤلفه‌های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  برای جزء تحت بررسی نشان داده شده‌اند. مؤلفه‌های  $\sigma_{x'}$ ،  $\sigma_{y'}$  و  $\tau_{x'y'}$  را پس از اینکه این جزء تحت زاویه  $\theta$  حول محور  $z$  چرخیده است (شکل ۵-۷ ب) بر حسب  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  تعیین می‌کنیم.



شکل ۵-۷ (تکراری)

طرفین معادله ۷-۶ را مجذور کرده و طرفین آن را با طرفین رابطه قبل جمع می‌کنیم. در نتیجه،

$$\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (9-7)$$

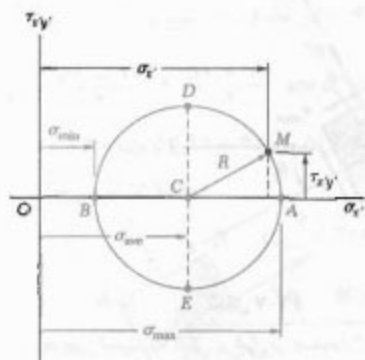
با استفاده از جایگذاری‌های زیر:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10-7)$$

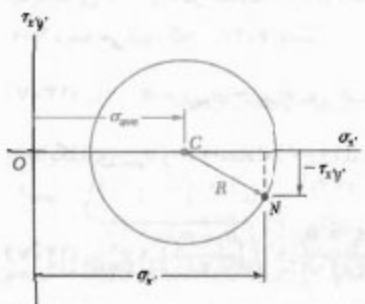
اتحاد (۹-۷) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\sigma_x - \sigma_{ave})^2 + \tau_{xy}^2 = R^2 \quad (11-7)$$

که معادله دایره‌ای به شعاع  $R$  و با مرکز  $C$ ، به طول  $\sigma_{ave}$  و به عرض  $0$ ، است (شکل ۷-۹). به علت تقارن دایره نسبت به محور افقی، اگر نقطه  $N$  به طول  $\sigma_x$  و به عرض  $\tau_{xy}$  را به جای نقطه  $M$  رسم می‌کردیم، به همان نتیجه بالا می‌رسیدیم (شکل ۷-۱۰). از این خاصیت در قسمت ۷-۴ استفاده می‌شود.



شکل ۷-۹



شکل ۷-۱۰

با توجه به روابط مثلثاتی زیر:

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad (3-7)$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad (4-7)$$

معادله (۱۱-۷) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sigma_x = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

یا

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (5-7)$$

با استفاده از روابط (۳-۷)، معادله (۲-۷) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (6-7)$$

با جایگذاری  $90^\circ + \theta$ ، که محور  $y$  را محور  $x$  می‌سازد، به جای  $\theta$  در معادله (۵-۷)، تنش قائم  $\sigma_y$  به دست می‌آید. چون  $\sin(2\theta + 180^\circ) = -\sin 2\theta$  و  $\cos(2\theta + 180^\circ) = -\cos 2\theta$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (7-7)$$

معادله‌های (۵-۷) و (۷-۷) را عضو به عضو با هم جمع می‌کنیم. در نتیجه،

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_x + \sigma_y \quad (8-7)$$

چون  $\sigma_x = \sigma_y$ ، مجموع تنش‌های قائم وارد بر یک جزء مکعبی در حالت تنش صفحه‌ای از وضعیت آن جزء مستقل است.\*

### ۷-۳ تنش‌های اصلی؛ ماکزیمم تنش برشی

معادله‌های (۵-۷) و (۶-۷) معادله‌های پارامتری یک دایره‌اند. یعنی، اگر مجموعه‌ای از محورهای قائم را انتخاب و نقطه  $M$  به طول  $\sigma_x$  و به عرض  $\tau_{xy}$  را برای هر مقدار معلوم پارامتر  $\theta$  رسم کنیم، تمام نقاطی که به این ترتیب به دست می‌آیند روی یک دایره قرار می‌گیرند. برای تعیین معادله این دایره،  $\theta$  را از معادله‌های (۵-۷) و (۶-۷) حذف می‌کنیم؛ برای این منظور، ابتدا  $2(\sigma_x + \sigma_y)$  را در معادله (۵-۷) به طرف چپ انتقال می‌دهیم و سپس طرفین رابطه را مجذور می‌کنیم. آنگاه،

\* به (برنوس صفحه ۷۵ مراجعه کنید.

طبق شکل ۷-۹، قدر مطلق تنش برشی در نقاط  $D$  و  $E$  دارای مقدار ماکزیمم است. چون طول این نقاط  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$  است، پس جایگذاری  $\sigma_{xy} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$  در معادله (۷-۵)، مقادیر  $\theta_p$  متناظر با این نقاط از رابطه\*\* زیر به دست می آیند:

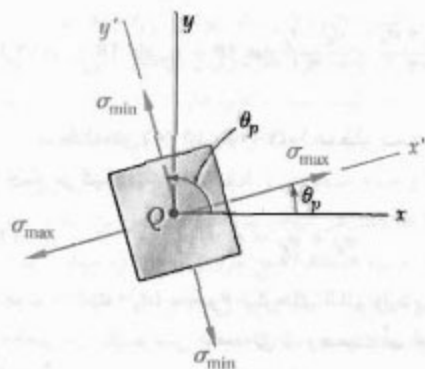
$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\gamma} \cos 2\theta_p + \tau_{xy} \sin 2\theta_p = 0$$

در نتیجه،

$$\tan 2\theta_p = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\gamma \tau_{xy}} \quad (۷-۱۵)$$

این معادله، دو مقدار را برای  $2\theta_p$  می دهد که با هم  $180^\circ$  اختلاف دارند. لذا، دو مقدار  $\theta_p$  با هم  $90^\circ$  اختلاف دارند. برای تعیین وضعیت جزء متناظر با ماکزیمم تنش برشی می توان از مقادیر مذکور استفاده کرد (شکل ۷-۱۲). از شکل ۷-۹ دیده می شود که ماکزیمم مقدار تنش برشی با شعاع دایره برابر است. از رابطه دوم ۷-۱۰،

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\gamma}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (۷-۱۶)$$



شکل ۷-۱۲

همانطور که قبلاً دیده شد، تنش قائم متناظر با ماکزیمم تنش برشی عبارت است از:

$$\sigma' = \sigma_{\text{ave}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\gamma} \quad (۷-۱۷)$$

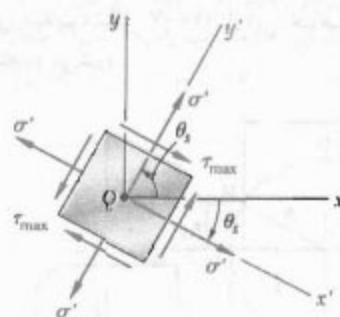
\* این رابطه را با مشتق گیری از  $\sigma_p$  در معادله (۷-۵) نسبت به  $\theta$  و با تساوی صفر قرار دادن این مشتق نیز می توان به دست آورد.

\*\* این رابطه را با مشتق گیری از  $\tau_{xy'}$  در معادله (۷-۶) نسبت به  $\theta$  و با تساوی صفر قرار دادن آن نیز می توان به دست آورد.

دو نقطه  $B$  و  $A$  را که محل تلاقی دایره شکل ۷-۹ با محور افقی است مورد توجه قرار می دهیم. نقطه  $A$  متناظر با ماکزیمم مقدار تنش قائم  $\sigma_p$ ، و نقطه  $B$  متناظر با مینیمم مقدار آن است. به علاوه، هر دو نقطه دارای تنش برشی  $\tau_{xy'} = 0$  هستند. لذا، مقادیر  $\theta_p$  پارامتر  $\theta$  را که متناظر با نقاط  $A$  و  $B$  است می توان با قرار دادن  $\tau_{xy'} = 0$  در معادله (۷-۶) به دست آورد. می نویسیم\*

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (۷-۱۲)$$

از این معادله دو مقدار برای  $2\theta_p$  به دست می آید که با هم  $180^\circ$  اختلاف دارند؛ لذا، دو مقدار  $\theta_p$  با هم  $90^\circ$  اختلاف دارند. هر یک از این دو مقدار را می توان برای تعیین وضعیت جزء متناظر به کار برد (شکل ۷-۱۱). تنش های  $\sigma_{\max}$  و  $\sigma_{\min}$  را، که متناظر با دو مقدار  $\theta_p$  هستند، تنش های اصلی در نقطه  $Q$  می گویند، و صفحاتی را که این تنش ها بر آنها وارد می شوند صفحات اصلی تنش در نقطه  $Q$  می گویند.



شکل ۷-۱۱

بدیهی است که تنش برشی بر صفحات اصلی وارد نمی شود زیرا دو مقدار  $\theta_p$  که با معادله (۷-۱۲) تعریف می شوند از جایگذاری  $\tau_{xy'} = 0$  در معادله (۷-۶) به دست آمدند. از شکل ۷-۹ دیده می شود که:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ave}} + R \quad \text{و} \quad \sigma_{\min} = \sigma_{\text{ave}} - R \quad (۷-۱۳)$$

با جایگذاری  $\sigma_{\text{ave}}$  و  $R$  از معادله (۷-۱۰)، داریم:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{\gamma} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\gamma}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (۷-۱۴)$$

برای تعیین این که کدام صفحه اصلی تحت تنش  $\sigma_{\max}$  و کدام تحت تنش  $\sigma_{\min}$  است، باید یکی از مقادیر  $\theta_p$  را در معادله (۷-۵) جایگذاری کنیم.

با جایگذاری در معادله (۷-۱۲)،

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = \frac{40}{60}$$

$$\Rightarrow 2\theta_p = 53.1^\circ \quad \text{و} \quad 180^\circ + 53.1^\circ = 233.1^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_p = 26.6^\circ \quad \text{و} \quad 116.6^\circ$$

(ب) تنش‌های اصلی. طبق فرمول (۷-۱۴)،

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$$\sigma_{\max} = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

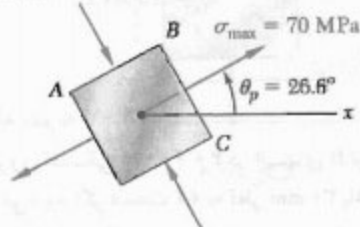
$$\sigma_{\min} = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

صفحات اصلی و تنش‌های اصلی در شکل ۷-۱۴ رسم شده‌اند. با قرار دادن  $\theta = 26.6^\circ$  در معادله (۷-۵)، دیده می‌شود که تنش قائم وارد بر وجه  $BC$  دارای مقدار ماکزیمم است:

$$\sigma_x = \frac{50 - 10}{2} + \frac{50 + 10}{2} \cos 53.1^\circ + 40 \sin 53.1^\circ$$

$$= 20 + 30 \cos 53.1^\circ + 40 \sin 53.1^\circ = 70 \text{ MPa} = \sigma_{\max}$$

$$\sigma_{\min} = 30 \text{ MPa}$$



شکل ۷-۱۴

(ج) ماکزیمم تنش برشی. طبق فرمول (۷-۱۶)،

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

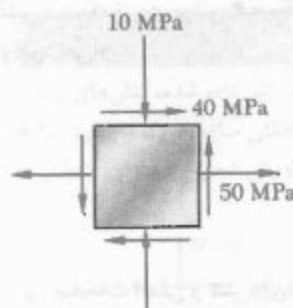
چون  $\sigma_{\max}$  و  $\sigma_{\min}$  دارای علامت مخالف‌اند، مقدار بالا ماکزیمم مقدار تنش برشی در نقطه تحت بررسی است. وضعیت صفحات ماکزیمم تنش برشی و سوی تنش‌های برشی را با بُریدن جزء شکل ۷-۱۴ در امتداد صفحه قطری  $AC$  می‌توان تعیین کرد. چون وجوه  $AB$  و  $BC$  این جزء در صفحات اصلی

از مقایسه معادله‌های (۷-۱۲) و (۷-۱۵) دیده می‌شود که  $\tan 2\theta_s$  برابر است با منفی معکوس  $\tan 2\theta_p$ . یعنی، زوایای  $2\theta_p$  و  $2\theta_s$  با هم  $90^\circ$  اختلاف دارند. بنابراین، زوایای  $\theta_p$  و  $\theta_s$  با هم  $45^\circ$  اختلاف دارند. در نتیجه، صفحات ماکزیمم تنش برشی با صفحات اصلی تنش زاویه  $45^\circ$  دارند. این موضوع صحت نتایجی را که در قسمت ۱-۱۲ در حالت بارگذاری محوری مرکزی (شکل ۷-۱) و در قسمت ۳-۴ در حالت بارگذاری پیچشی به‌دست آمد (شکل ۳-۲۰) نشان می‌دهد.

گفتنی است که تحلیل بالا برای تبدیل تنش صفحه‌ای فقط برای چرخش در صفحه تنش می‌باشد. اگر جزء مکعبی شکل ۷-۷ حول محوری غیر از محور  $z$  بچرخد، وجوه آن ممکن است تحت تنش‌های برشی بزرگتر از تنشی قرار گیرد که با معادله (۷-۱۶) تعریف می‌شود. همانطور که در قسمت ۷-۵ خواهید دید، این حالت وقتی روی می‌دهد که تنش‌های اصلی تعریف شده با معادله (۷-۱۴) دارای علامت یکسان باشند؛ یعنی، وقتی هر دو کششی یا هر دو فشاری باشند. در چنین مواردی، مقدار داده شده با معادله (۷-۱۶) را ماکزیمم تنش برشی داخل صفحه می‌گویند.

#### مثال ۷-۱

برای تنش صفحه‌ای نشان داده شده در شکل ۷-۱۳، مطلوب است: (الف) صفحات اصلی، (ب) تنش‌های اصلی، (ج) ماکزیمم تنش برشی و تنش قائم متناظر.



شکل ۷-۱۳

(الف) صفحات اصلی. با استفاده از قرارداد علامت، مولفه‌های تنش را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

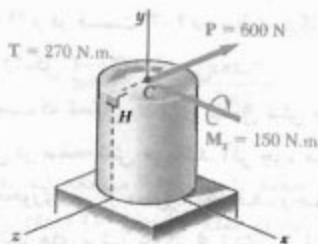
$$\sigma_x = +40 \text{ MPa} \quad \sigma_y = +10 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = +50 \text{ MPa}$$

حل

سیستم نیرو-کوپل، نیروی  $P$  را با یک سیستم نیرو-کوپل در مرکز  $C$  مقطع عرضی، که شامل نقطه  $H$  است، جایگزین می‌کنیم:

$$P = 600 \text{ N} \quad T = (600 \text{ N})(0.45 \text{ m}) = 270 \text{ N.m}$$

$$M_x = (600 \text{ N})(0.25 \text{ m}) = 150 \text{ N.m}$$



الف. تنش‌های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  در نقطه  $H$ ، با استفاده از قرارداد علامت داده شده در شکل ۷-۲، سو و علامت هر یک از مولفه‌های تنش را با توجه به طرحواره سیستم نیرو-کوپل در نقطه  $C$  می‌یابیم:

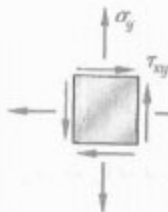
$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = + \frac{Mc}{I} = + \frac{(150 \text{ N.m})(0.15 \text{ m})}{\frac{1}{4} \pi (0.15)^4}$$

$$\sigma_y = +56.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = + \frac{Tc}{J} = + \frac{(270 \text{ N.m})(0.15)}{\frac{1}{4} \pi (0.15)^4}$$

$$\tau_{xy} = +50.9 \text{ MPa}$$

گفتنی است که نیروی برشی  $P$  هیچ‌گونه تنش برشی در نقطه  $H$  به‌وجود نمی‌آورد.



ب. صفحات اصلی و تنش‌های اصلی. با جایگذاری مقدار مولفه‌های تنش در معادله (۷-۱۲)، وضعیت صفحات اصلی را می‌یابیم:

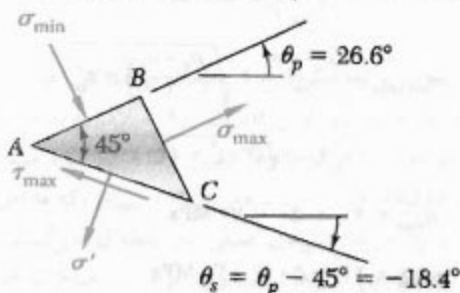
$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(50.9)}{0 - 56.6} = -1.80$$

$$2\theta_p = -61.0^\circ \quad \text{و} \quad 180^\circ - 61.0^\circ = 119^\circ$$

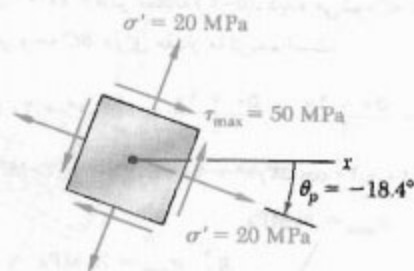
$$\theta_p = -30.5^\circ \quad \text{و} \quad 59.5^\circ$$

قرار دارند، صفحه قطری  $AC$  یکی از صفحات ماکزیمم تنش برشی است (شکل ۷-۱۵). به‌علاوه، شرایط تعادل برای جزء منشوری  $ABC$  نشان می‌دهد که تنش برشی وارد بر  $AC$  در جهت نشان داده شده است. جزء مکعبی متناظر با ماکزیمم تنش برشی در شکل ۷-۱۶ نشان داده شده است. تنش قائم وارد بر هر یک از چهار وجه این جزء با معادله (۷-۱۷) داده می‌شود:

$$\sigma' = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 - 56.6}{2} = -28.3 \text{ MPa}$$



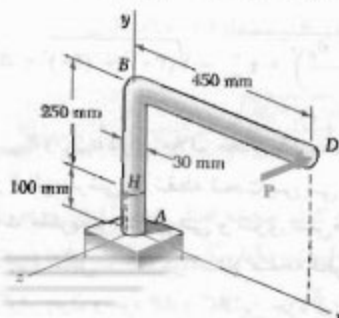
شکل ۷-۱۵



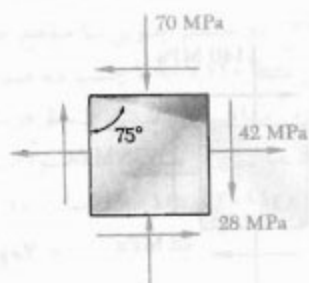
شکل ۷-۱۶

مسئله نمونه ۷-۱

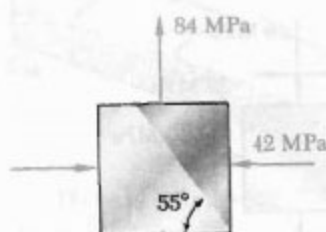
نیروی افقی  $P = 600 \text{ N}$  در انتهای  $D$  از بازوی  $ABD$  وارد می‌شود. اگر قسمت  $AB$  به قطر  $30 \text{ mm}$  باشد، مطلوب است: (الف) تنش‌های قائم و برشی وارد بر جزئی که در نقطه  $H$  قرار دارد و اضلاع آن به موازات محورهای  $x$  و  $y$  است، (ب) صفحات اصلی و تنش‌های اصلی در نقطه  $H$ .



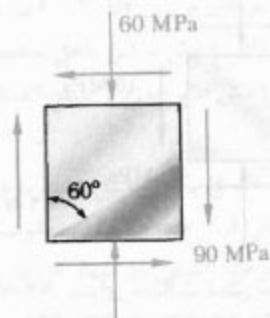




شکل م ۲-۷

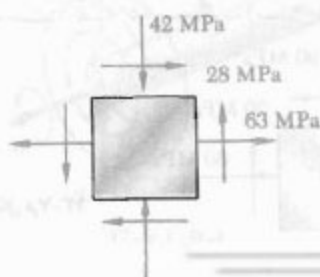


شکل م ۳-۷

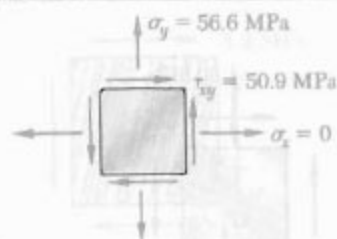


شکل م ۴-۷

۵-۷ تا ۸-۷ برای حالت تنش داده شده، مطلوبست:  
الف) صفحات اصلی، ب) تنش‌های اصلی.

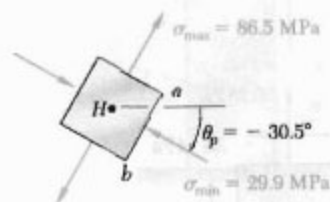


شکل م ۵-۷ و ۹-۷



با جایگذاری در معادله (۷-۱۴)، تنش‌های اصلی را می‌یابیم:

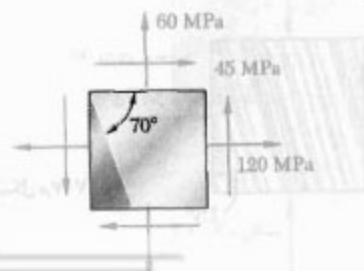
$$\begin{aligned}\sigma_{\max, \min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{0 + 56.6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 56.6}{2}\right)^2 + (50.9)^2} \\ &= +28.3 \pm 58.2 \\ \sigma_{\max} &= +86.5 \text{ MPa} \\ \sigma_{\min} &= -29.9 \text{ MPa}\end{aligned}$$



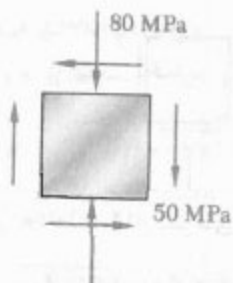
با در نظر گرفتن وجه  $ab$  از جزء نشان داده شده، در معادله (۷-۵) قرار می‌دهیم  $\theta_p = -30.5^\circ$  و نتیجه می‌گیریم  $\sigma_x = -29.9 \text{ MPa}$ . لذا، تنش‌های اصلی به صورت نشان داده شده‌اند.

### مسائل

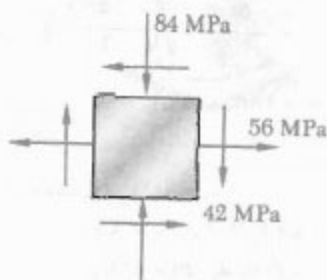
۱-۷ تا ۴-۷ برای حالت تنش داده شده، تنش‌های قائم و برشی وارث بر وجه مایل جزء مثلثی سایه خورده را بیابید. مانند استنتاج‌های قسمت ۲-۷، از روش تحلیل مبتنی بر تعادل آن جزء استفاده کنید.



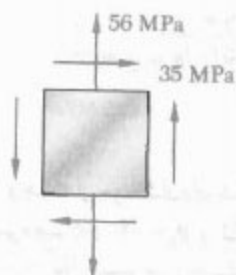
شکل م ۱-۷



شکل م ۷-۱۴

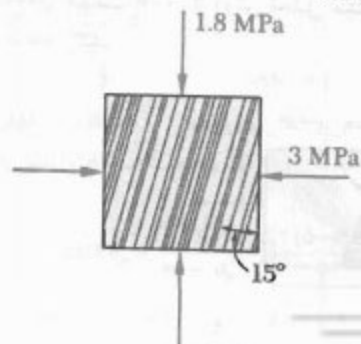


شکل م ۷-۱۵

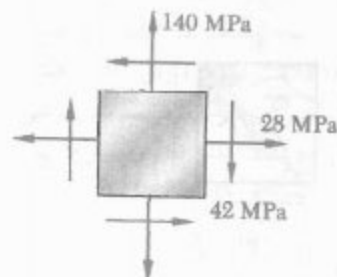


شکل م ۷-۱۶

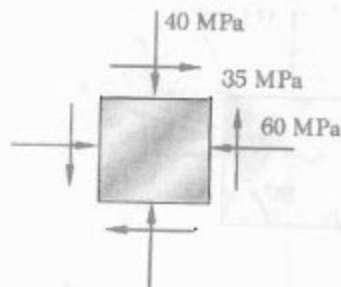
۱۷-۷ و ۱۸-۷ الیاف یک عضو چوبی با عمود زاویه  $15^\circ$  می‌سازند. برای حالت تنش نشان داده شده، مطلوب است: (الف) تنش برشی داخل صفحه به موازات الیاف، (ب) تنش قائم عمود بر الیاف.



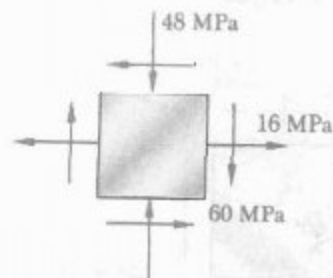
شکل م ۷-۱۷



شکل م ۷-۶ و م ۷-۱۰



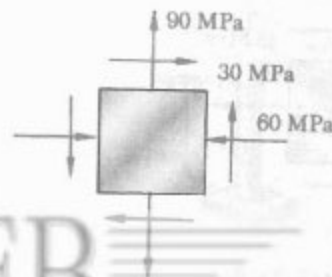
شکل م ۷-۷ و م ۷-۱۱



شکل م ۷-۸ و م ۷-۱۲

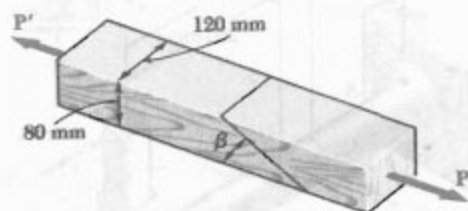
۹-۷ تا ۱۲-۷ برای حالت تنش نشان داده شده، مطلوب است: (الف) وضعیت صفحات ماکزیمم تنش برشی داخل صفحه، (ب) تنش قائم متناظر

۱۳-۷ تا ۱۶-۷ برای حالت تنش داده شده، مطلوب است تنش‌های قائم و برشی پس از اینکه جزء به اندازه زوایای زیر چرخیده است: (الف)  $15^\circ$  ساعتگرد، (ب)  $10^\circ$  پاد ساعتگرد.



شکل م ۷-۱۳

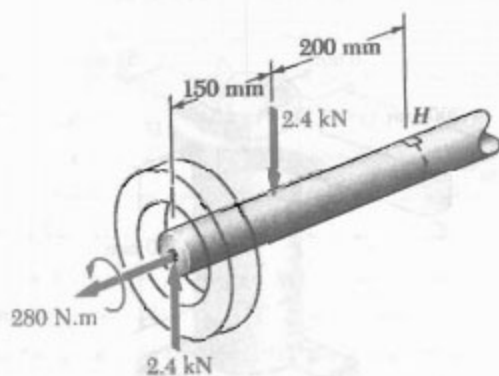
۲۱-۷ دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی  $80 \times 120$  mm با چسب به هم متصل شده‌اند.  $\beta = 22^\circ$  و ماکزیم تنش مجاز در کشش (عمود بر سطح اتصال) و در برش (به موازات سطح اتصال)، به ترتیب،  $400$  kPa و  $600$  kPa است. ماکزیم بار مرکزی  $P$  را بیابید.



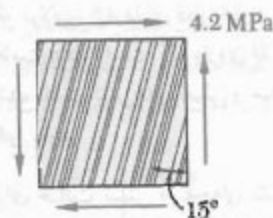
شکل م ۲۱-۷ و م ۲۲-۷

۲۲-۷ دو عضو چوبی با مقطع عرضی یکنواخت مستطیلی  $80 \times 120$  mm با چسب به هم متصل شده‌اند.  $\beta = 25^\circ$  و بارهای مرکزی  $P = 10$  kN بر عضو وارد می‌شود. مطلوبست: (الف) تنش برشی داخل صفحه به موازات سطح اتصال، (ب) تنش قائم عمود بر سطح اتصال.

۲۳-۷ اکسل یک اتومبیل تحت بارهای نشان داده شده است. اگر قطر اکسل  $30$  mm باشد، مطلوبست: (الف) صفحات اصلی و تنش‌های اصلی در نقطه  $H$  واقع در بالای اکسل، (ب) ماکزیم تنش برشی در همان نقطه.

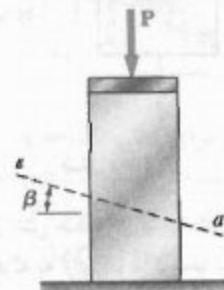


شکل م ۲۳-۷



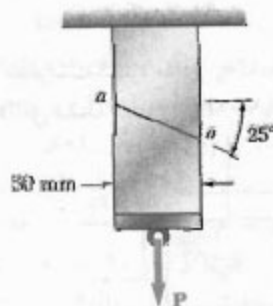
شکل م ۱۸-۷

۱۹-۷ نیروی مرکزی  $P$ ، مطابق شکل، بر یک تیر کوتاه وارد شده است. می‌دانیم که تنش‌های وارد بر صفحه  $a-a$  عبارتند از  $\sigma = -100$  MPa و  $\tau = 35$  MPa. مطلوبست: (الف) زاویه  $\beta$  که صفحه  $a-a$  با افق می‌سازد (ب) ماکزیم تنش فشاری در تیر.



شکل م ۱۹-۷

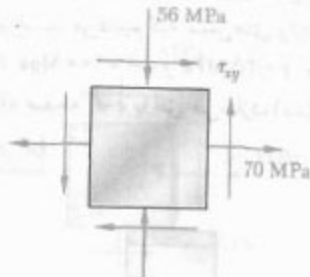
۲۰-۷ دو عضو با مقطع عرضی یکنواخت  $50 \times 80$  mm در امتداد صفحه  $a-a$ ، که با افق زاویه  $25^\circ$  دارد، به هم چسب خورده‌اند. می‌دانیم که تنش‌های مجاز برای اتصال چسب خورده عبارتند از  $\sigma = 800$  kPa و  $\tau = 600$  kPa. ماکزیم بار محوری  $P$  را که می‌توان وارد کرد بیابید.



شکل م ۲۰-۷

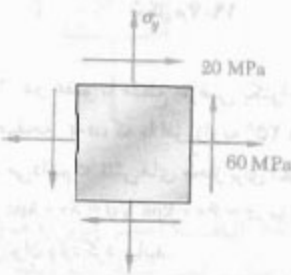
۲۶-۷ لوله فولادی  $AB$  دارای قطر خارجی  $102 \text{ mm}$  و دیواره‌ای به ضخامت  $6 \text{ mm}$  است. اگر بازوی  $CD$  به طور صلب به لوله متصل شده باشد، تنش‌های اصلی و ماکزیم تنش برشی در نقطه  $K$  را بیابید.

۲۷-۷ برای حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده، مطلوبست: (الف) ماکزیم مقدار  $\tau_{xy}$  که به ازای آن ماکزیم تنش برشی در صفحه مساوی  $84 \text{ MPa}$  یا کمتر از آن باشد. (ب) تنش‌های اصلی متناظر.



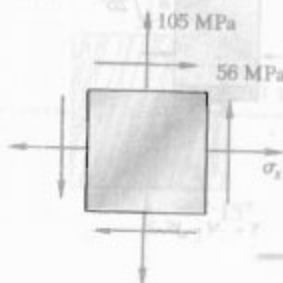
شکل م-۲۷

۲۸-۷ برای تنش صفحه‌ای نشان داده شده، مطلوبست ماکزیم مقدار  $\sigma_x$  که به ازای آن ماکزیم تنش برشی داخل صفحه مساوی  $75 \text{ MPa}$  یا کمتر از آن است.



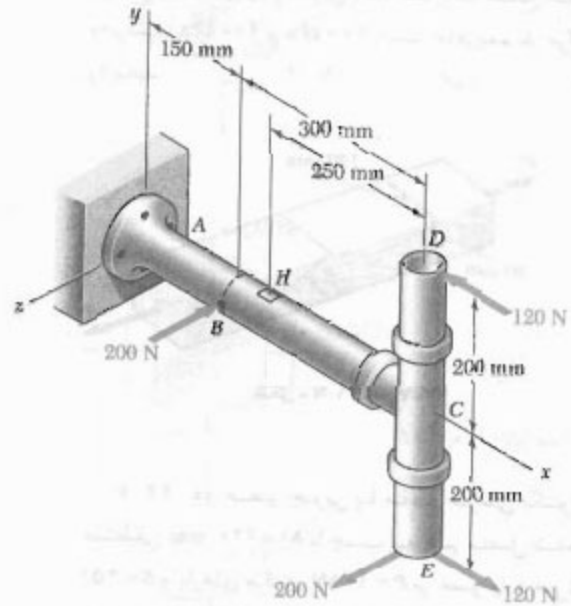
شکل م-۲۸

۲۹-۷ مطلوبست گستره مقادیر  $\sigma_x$  که به ازای آن ماکزیم تنش برشی داخل صفحه مساوی  $70 \text{ MPa}$  یا کمتر از آن است.



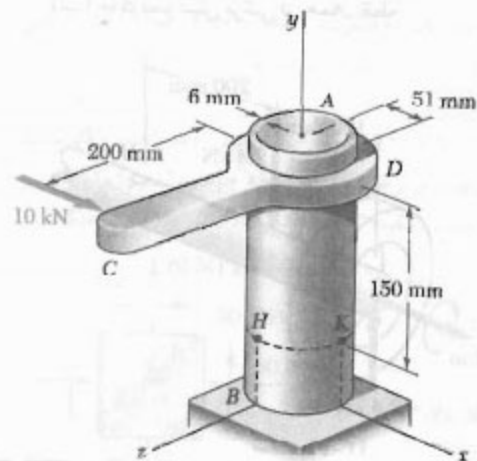
شکل م-۲۹

۲۴-۷ قطرهای داخلی و خارجی لوله‌ها، به ترتیب،  $38 \text{ mm}$  و  $42 \text{ mm}$  است. مطلوبست: (الف) صفحات اصلی و تنش‌های اصلی در نقطه  $H$  واقع در بالای سطح خارجی لوله، (ب) ماکزیم تنش برشی در همان نقطه.

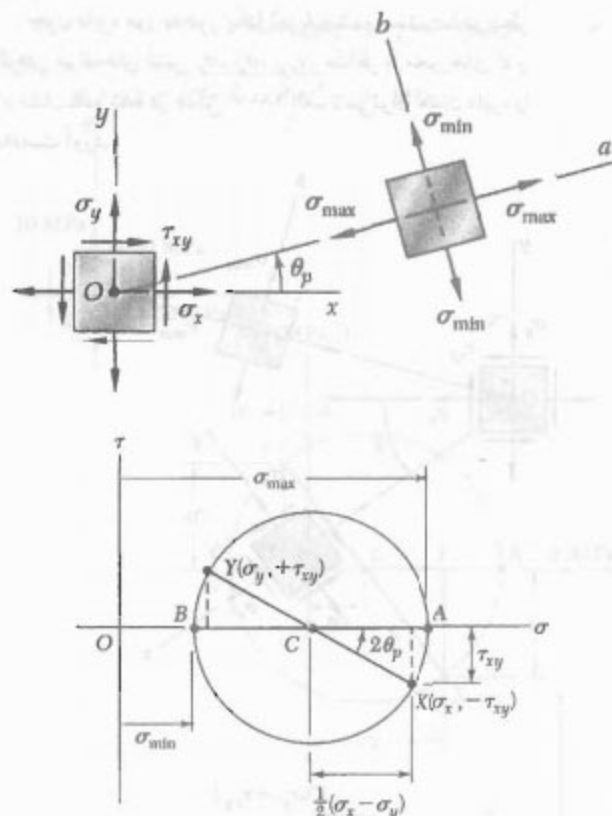


شکل م-۲۴

۲۵-۷ لوله فولادی  $AB$  دارای قطر خارجی  $102 \text{ mm}$  و دیواره‌ای به ضخامت  $6 \text{ mm}$  است. اگر بازوی  $CD$  به طور صلب به لوله متصل شده باشد، تنش‌های اصلی و ماکزیم تنش برشی در نقطه  $H$  را بیابید.



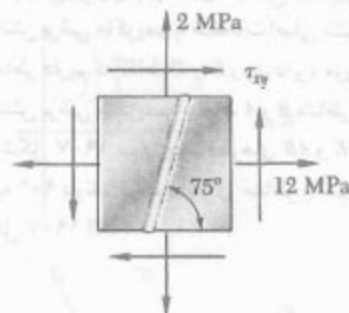
شکل م-۲۵ و م-۲۶



شکل ۱۷-۷

چون  $\tan(\angle XCA) = \tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$  برای  $\theta_p$  با یکی از زوایای  $2\theta_p$  در معادله (۱۲-۷) است. لذا، زاویه  $\theta_p$  را که در شکل ۱۷-۷ الف وضعیت صفحه اصلی متناظر با نقطه A در شکل ۱۷-۷ ب را مشخص می‌کند با نصف کردن زاویه  $\angle XCA$  در دایره مور می‌توان به دست آورد. دیده می‌شود که اگر  $\sigma_x > \sigma_y$  و  $\tau_{xy} > 0$ ، مانند حالت تحت بررسی در اینجا، دورانی که به موجب آن  $CX$  روی  $CA$  قرار می‌گیرد پادساعتگرد است. اما، در این حالت، زاویه  $\theta_p$  از معادله (۱۲-۷) به دست می‌آید و جهت  $Oa$  (عمود بر صفحه اصلی) مثبت است؛ لذا، دورانی که به موجب آن  $Ox$  بر  $Oa$  منطبق می‌شود نیز پادساعتگرد است. در نتیجه، سوهای چرخش در هر دو قسمت شکل ۱۷-۷ یکسانند؛ اگر برای منطبق کردن  $CX$  بر  $CA$  در دایره مور نیاز به دوران پادساعتگرد تحت زاویه  $2\theta_p$  باشد، دوران پادساعتگرد زاویه  $\theta_p$  باعث می‌شود  $Ox$  در شکل ۱۷-۷ الف بر  $Oa$  منطبق شود.\*

۳-۷ برای حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده، مطلوب است: (الف) مقدار  $\tau_{xy}$  که به ازای آن تنش برشی داخل صفحه به موازات جوش صفر است، (ب) تنش‌های اصلی متناظر



شکل ۳۰-۷

#### ۴-۷ دایره مور برای تنش صفحه‌ای

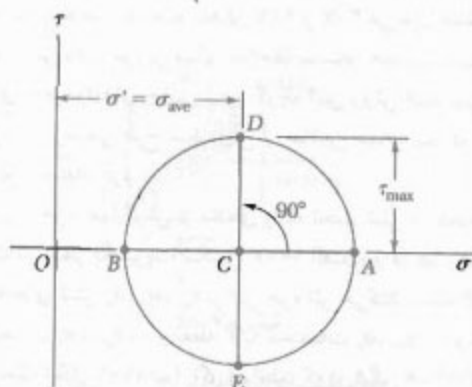
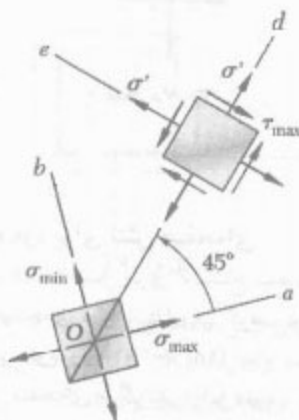
دایره‌ای که در قسمت قبل برای استنتاج بعضی فرمول‌های تبدیل تنش صفحه‌ای مورد استفاده قرار گرفت اولین بار توسط مهندس آلمانی اتومور (۱۹۱۸-۱۸۳۵) ابداع شد و آن را دایره مور برای تنش صفحه‌ای می‌گویند. از این دایره برای حل مسائل مختلف داده شده در قسمت‌های ۲-۷ و ۳-۷ می‌توان استفاده کرد. روش دایره مور بر مبنای ملاحظات ساده هندسی است و نیازی به فرمول‌های خاص ندارد. گرچه این روش ابتدا برای حل‌های تریسمی طرح شد، ولی از ماشین‌حساب نیز در آن می‌توان استفاده کرد.

یک جزء چهارگوش از ماده‌ای را که تحت تنش صفحه‌ای است در نظر بگیرید (شکل ۱۷-۷ الف)، و فرض کنید مولفه‌های تنش  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$ ،  $\tau_{xy}$  بر این جزء اثر می‌کنند. نقطه X با مختصات  $\sigma_x$  و  $-\tau_{xy}$ ، و نقطه Y با مختصات  $\sigma_y$  و  $+\tau_{xy}$  را رسم می‌کنیم (شکل ۱۷-۷ ب). اگر همانطور که در شکل ۱۷-۷ الف فرض شده است  $\tau_{xy}$  مثبت باشد، نقطه X پایین محور  $\sigma$  و نقطه Y بالای آن است (شکل ۱۷-۷ ب). اگر  $\tau_{xy}$  منفی باشد، X در بالای محور  $\sigma$  و Y در پایین آن است. با اتصال نقاط X و Y توسط یک خط راست، نقطه تقاطع خط XY با محور  $\sigma$  (نقطه C) به دست می‌آید. دایره‌ای به مرکز C و قطر XY رسم می‌کنیم. چون طول C و شعاع این دایره، به ترتیب، به  $\sigma_{avg}$  و R در معادله‌های ۷-۱۰ برابرند، دایره حاصل دایره مور است. لذا، طول نقاط A و B (نقاط تقاطع دایره با محور  $\sigma$ )، به ترتیب، تنش‌های اصلی  $\sigma_{max}$  و  $\sigma_{min}$  در نقطه تحت بررسی هستند.

\* زیرا به جای دایره شکل A-۷ از دایره شکل ۱۰-۷ به عنوان دایره مور استفاده می‌شود.

منطبق می‌شود همسو با دورانی است که به موجب آن محاورهای  $xy$  در شکل ۱۸-۷ الف بر محاورهای  $x'y'$  منطبق می‌شوند.

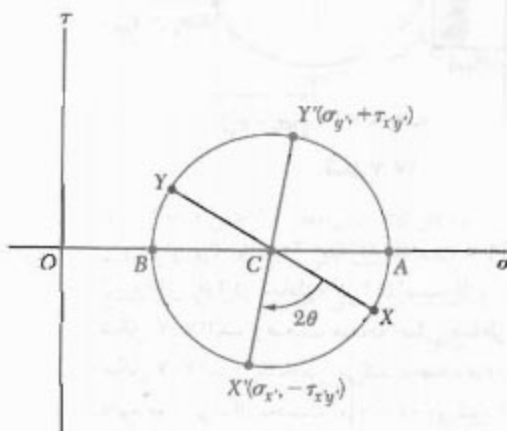
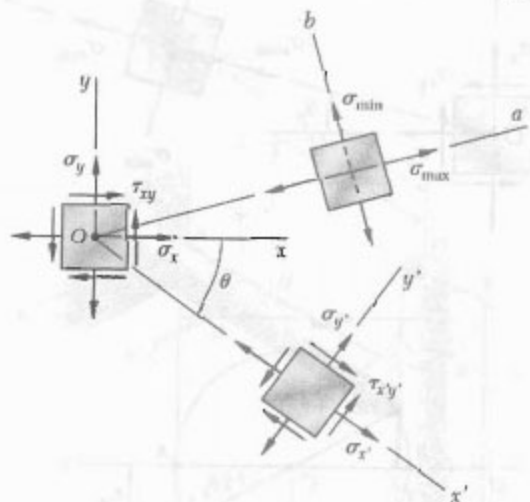
از خاصیت اخیر برای اثبات این موضوع استفاده می‌شود که صفحات تنش برشی ماکزیمم با صفحات اصلی تنش زاویه  $45^\circ$  دارند. به خاطر داریم که نقاط  $D$  و  $E$  روی دایره مور منظر با صفحات تنش برشی ماکزیمم، و نقاط  $A$  و  $B$  متناظر با صفحات اصلی اند (شکل ۱۹-۷ ب). چون قطرهای  $AB$  و  $DE$  دایره مور با هم زاویه  $90^\circ$  دارند، وجوه اجزای متناظر با هم زاویه  $45^\circ$  دارند (شکل ۱۹-۷ الف).



شکل ۱۹-۷

اگر هر وجه جزئی را که برای تعریف مولفه‌های تنش به کار رفته است به طور جداگانه در نظر بگیریم، ترسیم دایره مور برای تنش صفحه‌ای خیلی ساده می‌شود. طبق شکل‌های ۱۷-۷ و ۱۸-۷، وقتی تنش برشی وارد بر یک وجه معین گرایش دارد جزء تحت بررسی را به طور ساعتگرد بچرخاند، نقطه روی دایره مور متناظر با آن وجه در بالای محور  $\sigma$  قرار دارد. وقتی تنش برشی وارد بر یک وجه معین گرایش دارد جزء را به طور

چون دایره مور به طور یکتا تعریف شده است، با در نظر گرفتن مولفه‌های تنش  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$ ،  $\tau_{xy}$  متناظر با محاورهای  $x$  و  $y$  نشان داده شده در شکل ۱۸-۷ الف، می‌توان همان دایره را به دست آورد.



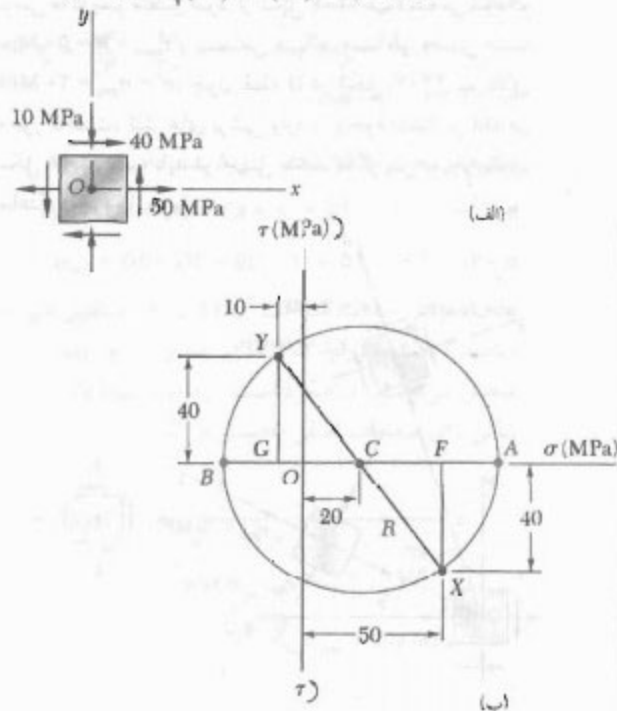
شکل ۱۸-۷

لذا، نقطه  $X'$  به مختصات  $\sigma_x$  و  $-\tau_{xy}$ ، و نقطه  $Y'$  به مختصات  $\sigma_y$  و  $+\tau_{xy}$  روی دایره مور قرار دارند، و زاویه  $X'CA$  در شکل ۱۸-۷ ب دو برابر زاویه  $X'Oa$  در شکل ۱۸-۷ الف است. چون، مانند قبل، زاویه  $XCA$  دو برابر زاویه  $xOa$  است، زاویه  $XCA'$  در شکل ۱۸-۷ ب دو برابر زاویه  $xOx'$  در شکل ۱۸-۷ الف است. لذا، قطر  $X'Y'$  که تنش‌های قائم و برشی  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$ ، و  $\tau_{xy}$  را مشخص می‌کند، از دوران قطر  $XY$  تحت زاویه‌ای مساوی با دو برابر زاویه  $\theta$  (زاویه بین محاورهای  $x$  و  $x'$  در شکل ۱۸-۷ الف) به دست می‌آید. توجه کنید دورانی که به موجب آن قطر  $XY$  در شکل ۱۸-۷ ب بر قطر  $X'Y'$



در نتیجه، شعاع دایره چنین است:

$$R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$



شکل ۲۱-۷

(ب) صفحات اصلی و تنش‌های اصلی. تنش‌های اصلی عبارتند از:

$$\sigma_{\max} = OA = OC + CA = 20 + 50 = 70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = OB = OC - BC = 20 - 50 = -30 \text{ MPa}$$

طبق شکل ۲۱-۷ ب،  $ACX = 2\theta_p$ ، در نتیجه،

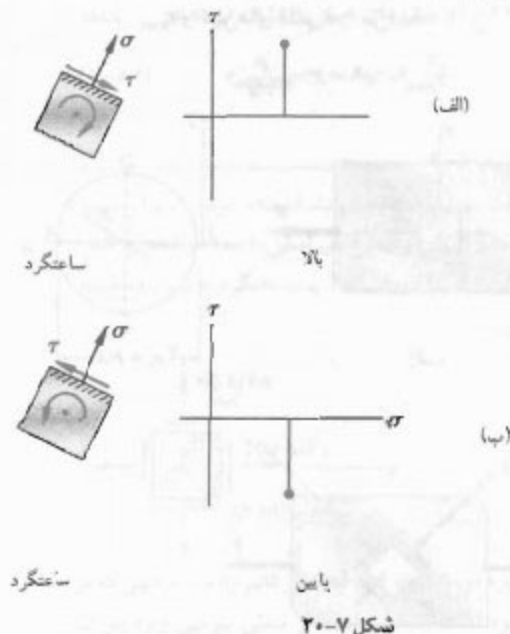
$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30}$$

$$\Rightarrow 2\theta_p = 53.1^\circ \Rightarrow \theta_p = 26.6^\circ$$

چون دورانی که  $CX$  را در شکل ۲۲-۷ ب بر  $CA$  منطبق می‌کند پادساعتگرد است، دورانی که  $Ox$  را در شکل ۲۲-۷ الف بر محور  $On$  منطبق می‌کند نیز پادساعتگرد است.

(ج) تنش برشی ماکزیمم. چون یک دوران  $90^\circ$  پادساعتگرد دیگر باعث می‌شود  $CA$  در شکل ۲۲-۷ ب روی  $CD$

پادساعتگرد بچرخاند، نقطه متناظر با آن وجه در پایین محور  $\sigma$  قرار دارد (شکل ۷-۲۰). طبق قرارداد، تنش کششی را مثبت می‌گیریم و آن را به سمت راست رسم می‌کنیم، و تنش فشاری را منفی می‌گیریم و آن را به سمت چپ رسم می‌کنیم.



شکل ۲۰-۷

مثال ۲-۷

ای تنش صفحه‌ای مثال ۷-۱۰، الف) دایره مور را رسم کنید. ب) تنش‌های اصلی را بیابید. ج) تنش برشی ماکزیمم و تنش قائم متناظر را بیابید.

الف) ترسیم دایره مور. طبق شکل ۲۱-۷ الف، تنش قائم وارد بر وجهی که بر محور  $x$  عمود است کششی (مثبت) است و تنش برشی وارد بر آن وجه گرایش دارد جزء را به طور پادساعتگرد بچرخاند. لذا، نقطه  $X$  از دایره مور در سمت راست محور عمودی و در پایین محور افقی رسم می‌شود (شکل ۲۱-۷ ب). بررسی مشابه برای تنش قائم و تنش برشی وارد بر وجه بالایی جزء نشان می‌دهد که نقطه  $Y$  باید در سمت چپ محور عمودی و بالای محور افقی باشد. با ترسیم خط  $XY$ ، مرکز دایره مور (نقطه  $C$ ) به دست می‌آید که طول آن چنین است:

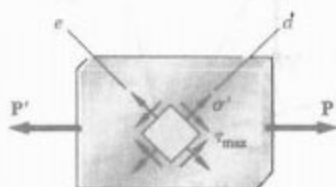
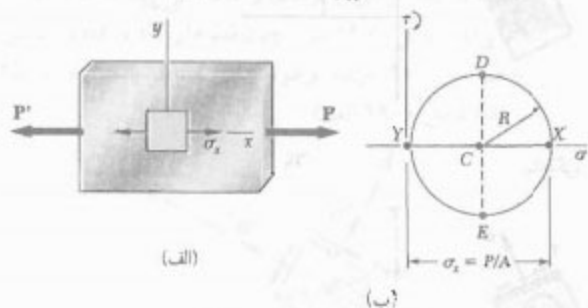
$$\sigma_{\text{ave}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

این مثلث سایه خورده عبارتند از:

$$CF = 50 - 20 = 30 \text{ MPa} \quad \text{و} \quad FX = 40 \text{ MPa}$$

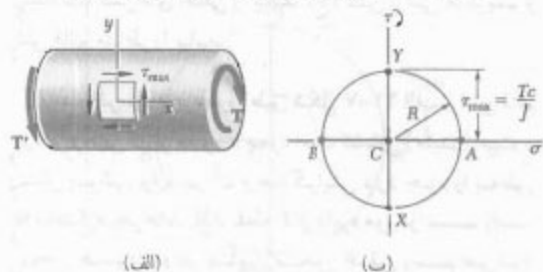
(شکل ۲۳-۷ الف)، داریم  $\sigma_x = P/A$ ،  $\sigma_y = 0$  و  $\tau_{xy} = 0$  نقاط  $X$  و  $Y$  دایره‌ای به شعاع  $R = P/2A$  را مشخص می‌کنند که از مبدأ مختصات می‌گذرد (شکل ۲۳-۷ ب)، نقاط  $D$  و  $E$  وضعیت صفحات تنش برشی ماکزیمم (شکل ۲۳-۷ ج)، و مقدار  $\tau_{max}$  و تنش‌های قائم  $\sigma'$  را می‌دهند:

$$\tau_{max} = \sigma' = R = \frac{P}{2A} \quad (۱۸-۷)$$



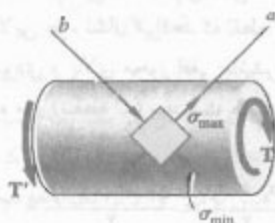
(ج)

شکل ۲۳-۷ دایره مور برای بارگذاری محوری مرکزی



(الف)

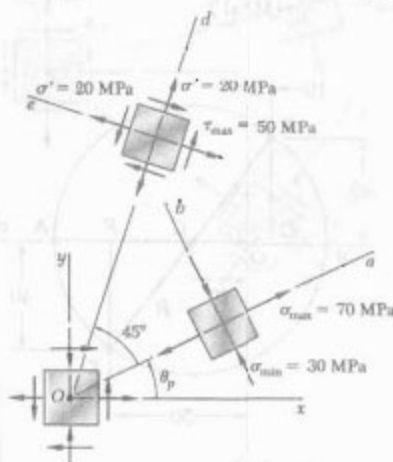
(ب)



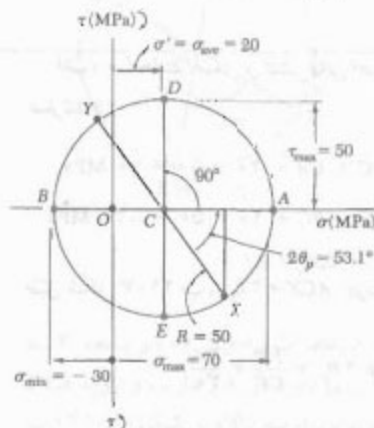
(ج)

شکل ۲۴-۷ دایره مور برای بارگذاری پیچشی

منطبق شده یک دوران  $45^\circ$  پادساعتگرد دیگر باعث می‌شود محور  $Oa$  در شکل ۲۲-۷ الف روی محور  $Od$  متناظر با تنش برشی ماکزیمم منطبق شود. از شکل ۲۲-۷ ب دیده می‌شود که  $\tau_{max} = R = 50 \text{ MPa}$  و  $\sigma' = \sigma_{ave} = 20 \text{ MPa}$  چون نقطه  $D$  در شکل ۲۲-۷ ب بالای محور  $\sigma$  است، تنش‌های برشی وارد بر وجوه عمود بر  $Od$  در شکل ۲۲-۷ الف باید در جهتی باشند که گرایش به چرخاندن ساعتگرد جزء داشته باشند.



(الف)



(ب)

شکل ۲۲-۷

دایره مور روش مناسبی برای بررسی نتایجی است که قبلاً برای تنش‌ها در بارگذاری محوری مرکزی (قسمت ۱-۱۲) و در بارگذاری پیچشی (قسمت ۳-۴) به دست آمدند، در حالت اول

الف. صفحات اصلی و تنش های اصلی. قطر  $XY$  را به اندازه  $2\theta_p$  در جهت ساعتگرد دوران می دهیم تا بر قطر  $AB$  منطبق شود. می نویسیم:

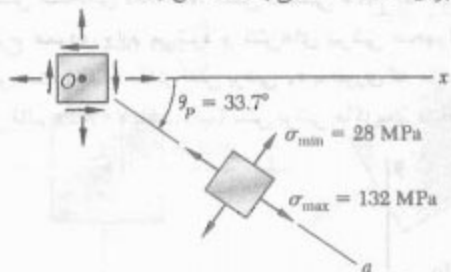
$$\tan 2\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2.4 \Rightarrow 2\theta_p = 67.4^\circ \Rightarrow \theta_p = 33.7^\circ$$

تنش های اصلی با طول نقاط  $A$  و  $B$  نشان داده می شوند:

$$\sigma_{\max} = OA = OC + CA = 80 + 52 = 132 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = OB = OC - BC = 80 - 52 = 28 \text{ MPa}$$

چون دورانی که به موجب آن  $XY$  بر  $AB$  منطبق می شود ساعتگرد است، دورانی که  $Ox$  را بر محور  $Oa$  متناظر با  $\sigma_{\max}$  منطبق می کند نیز ساعتگرد است؛ وضعیت نشان داده شده در شکل برای صفحات اصلی به دست می آید.



ب. مولفه های تنش وارد بر جزئی که  $(30^\circ)$  چرخیده است. نقاط  $X'$  و  $Y'$  روی دایره مور، که مولفه های تنش وارد بر جزء چرخیده را نشان می دهند، با چرخاندن پادساعتگرد  $XY$  تحت زاویه  $2\theta = 60^\circ$  به دست می آیند. می نویسیم:

$$\phi = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad \phi = 52.6^\circ$$

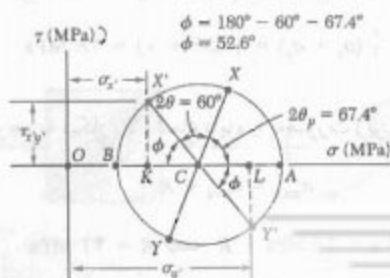
$$\sigma_{x'} = OK = OC - KC = 80 - 52 \cos 52.6^\circ$$

$$\sigma_{x'} = +48.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = OL = OC + CL = 80 + 52 \cos 52.6^\circ$$

$$\sigma_{y'} = +111.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = KX' = 52 \sin 52.6^\circ \quad \tau_{x'y'} = 41.3 \text{ MPa}$$

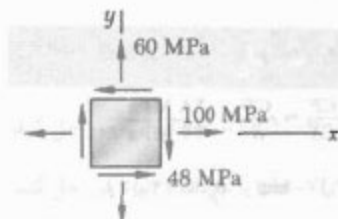


در حالت پیچشی (شکل ۷-۲۴ الف)، داریم  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ، لذا نقاط  $X$  و  $Y$  روی محور  $\tau$  قرار دارند، و دایره مور به شعاع  $R = Tc/J$  است که مرکز آن در مبدأ است (شکل ۷-۲۴ ب). نقاط  $A$  و  $B$  صفحات اصلی (شکل ۷-۲۴ ج) و تنش های اصلی را نشان می دهند:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm R = \pm \frac{Tc}{J} \quad (7-19)$$

## مسئله نمونه ۷-۲

برای حالت تنش صفحه ای نشان داده شده، مطلوب است: (الف) صفحات اصلی و تنش های اصلی، (ب) مولفه های تنش وارد بر جزئی که با دوران  $30^\circ$  پادساعتگرد جزء داده شده به دست می آید.

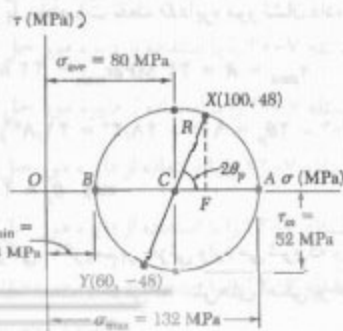


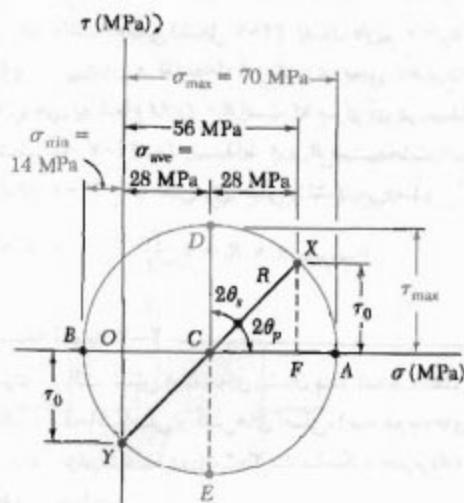
حل

رسم دایره مور. توجه کنید که تنش قائم وارد بر وجهی که بر محور  $x$  عمود است کششی است و تنش برشی وارد بر آن گرایش دارد جزء را به طور ساعتگرد بچرخاند؛ لذا  $X$  را در نقطه ای به فاصله  $100$  واحد در سمت راست محور عمودی و  $48$  واحد در بالای محور افقی رسم می کنیم. به طور مشابه، مولفه های تنش وارد بر وجه بالایی را واریسی و نقطه  $(-48, 60)$  را رسم می کنیم. با اتصال نقاط  $X$  و  $Y$  توسط یک خط راست، مرکز  $C$  دایره مور به دست می آید. طول  $OC$ ، که  $\sigma_{\text{ave}}$  را نشان می دهد، و شعاع  $R$  دایره عبارتند از:

$$\sigma_{\text{ave}} = OC = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2} (100 + 48) = 74 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(20)^2 + (48)^2} = 52 \text{ MPa}$$





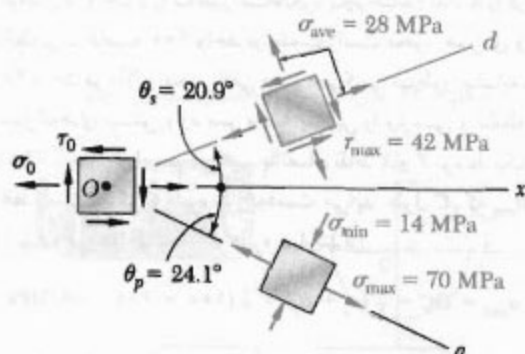
الف. تنش برشی  $\tau_0$  با توجه به مثلث  $CFX$ ،

$$\cos 2\theta_p = \frac{CF}{CX} = \frac{CF}{R} = \frac{28 \text{ MPa}}{42 \text{ MPa}}$$

$$\Rightarrow 2\theta_p = 48.7^\circ \Rightarrow \theta_p = 24.1^\circ$$

$$\tau_0 = FX = R \sin 2\theta_p = (42 \text{ MPa}) \sin 48.7^\circ$$

$$\tau_0 = 31.7 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$



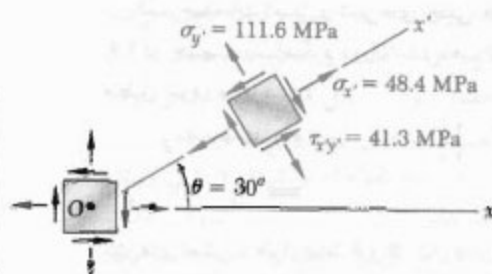
ب. تنش برشی ماکزیمم، تنش برشی ماکزیمم و تنش قائم متناظر با مختصات نقطه  $D$  دایره مور نشان داده می‌شوند:

$$\tau_{\max} = R = 42 \text{ MPa}, \tau_{\min} = 42 \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$2\theta_s = 90^\circ - 2\theta_p = 90^\circ - 48.7^\circ = 41.3^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_s = 20.7^\circ$$

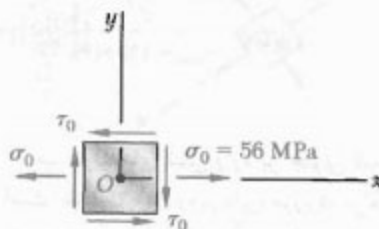
تنش برشی ماکزیمم بر جزئی وارد می‌شود که وضعیت آن مانند شکل الف است. (جزئی که تنش‌های اصلی بر آن وارد می‌شوند نیز نشان داده شده‌اند).



چون  $x'$  بالای محور افقی است، تنش برشی وارد بر وجهی که بر  $Ox'$  عمود است گرایش دارد جزء را در جهت ساعتگرد بچرخاند.

### مسئله نمونه ۷-۳

در تنش صفحه‌ای داده شده، تنش کششی  $\sigma_0 = 56 \text{ MPa}$  بر سطوح عمودی وارد می‌شود و تنش‌های برشی مجهول‌اند. مطلوبست: (الف) مقدار تنش برشی  $\tau_0$  به طوری که ماکزیمم تنش قائم  $70 \text{ MPa}$  باشد، (ب) تنش برشی ماکزیمم متناظر.



حل

رسم دایره مور. فرض می‌کنیم تنش‌های برشی در سوی نشان داده شده هستند. لذا، تنش برشی  $\tau_0$  وارد بر وجهی که بر محور  $x$  عمود است گرایش دارد جزء را در جهت ساعتگرد بچرخاند. نقطه  $X$  با مختصات  $56 \text{ MPa}$  و  $\tau_0$  را بالای محور افقی رسم می‌کنیم. با بررسی وجه افقی جزء، دیده می‌شود که  $\sigma_p = 0$  و  $\tau_0$  گرایش دارد جزء را در جهت پادساعتگرد بچرخاند؛ لذا، نقطه  $Y$  را در فاصله  $\tau_0$  پایین  $O$  رسم می‌کنیم.

طول مرکز  $C$  دایره مور چنین است:

$$\sigma_{\text{ave}} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(56 + 0) = 28 \text{ MPa}$$

با توجه به شکل بالا، شعاع دایره را به صورت زیر می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_{\text{ave}} + R \\ 70 \text{ MPa} &= 28 \text{ MPa} + R \Rightarrow R = 42 \text{ MPa} \end{aligned}$$

۴۸-۷ مسئله ۲۶-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۴۹-۷ مسئله ۲۷-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۵۰-۷ مسئله ۲۸-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۵۱-۷ مسئله ۲۹-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۵۲-۷ مسئله ۳۰-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

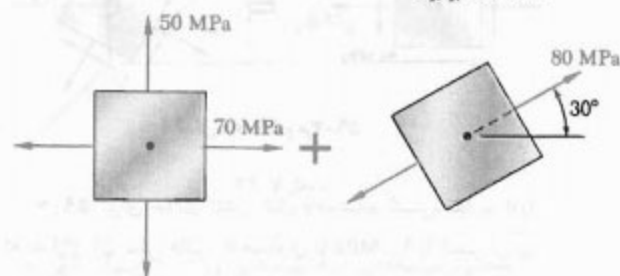
۵۳-۷ مسئله ۳۰-۷ را با استفاده از دایره مور و با فرض

اینکه جوش با افق زاویه  $60^\circ$  دارد حل کنید.

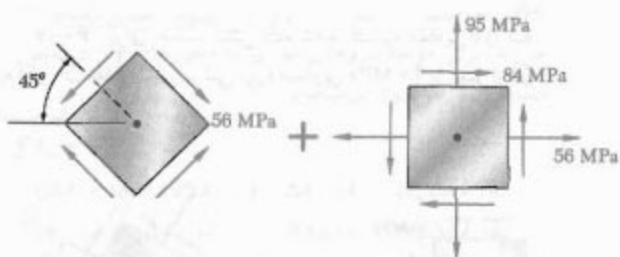
۵۴-۷ و ۵۵-۷ صفحات اصلی و تنش‌های اصلی را برای

حالت تنش صفحه‌ای حاصل از ترکیب دو حالت تنش نشان

داده شده بیابید.



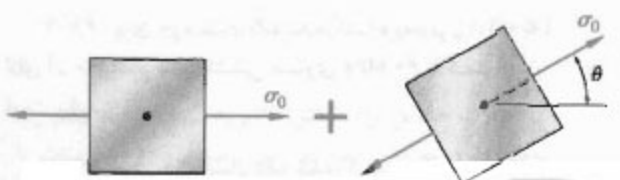
شکل ۵۴-۷



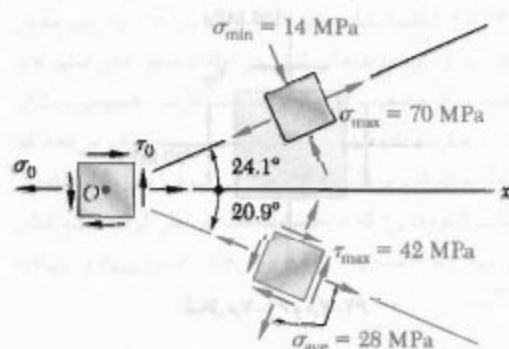
شکل ۵۵-۷

۵۶-۷ و ۵۷-۷ صفحات اصلی و تنش‌های اصلی را برای

حالت تنش صفحه‌ای حاصل از ترکیب دو حالت تنش نشان



شکل ۵۶-۷



ترجیح: اگر سوی  $\sigma_0$  را برعکس کنیم، دایره و پاسخ‌های قبل را به دست می‌آوریم، اما وضعیت اجزا مانند شکل ب می‌باشد.

## مسائل

۳۱-۷ مسائل ۷-۷ و ۱۱-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۳۲-۷ مسائل ۸-۷ و ۱۲-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۳۳-۷ مسئله ۹-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۳۴-۷ مسئله ۱۰-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۳۵-۷ مسئله ۱۳-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۳۶-۷ مسئله ۱۴-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۳۷-۷ مسئله ۱۵-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۳۸-۷ مسئله ۱۶-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۳۹-۷ مسئله ۱۷-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۴۰-۷ مسئله ۱۸-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۴۱-۷ مسئله ۱۹-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۴۲-۷ مسئله ۲۰-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

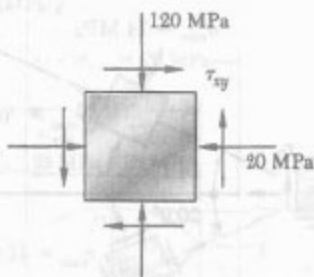
۴۳-۷ مسئله ۲۱-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۴۴-۷ مسئله ۲۲-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۴۵-۷ مسئله ۲۳-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

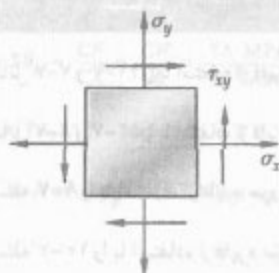
۴۶-۷ مسئله ۲۴-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.

۴۷-۷ مسئله ۲۵-۷ را با استفاده از دایره مور حل کنید.



شکل م ۶۱-۷ و م ۶۲-۷

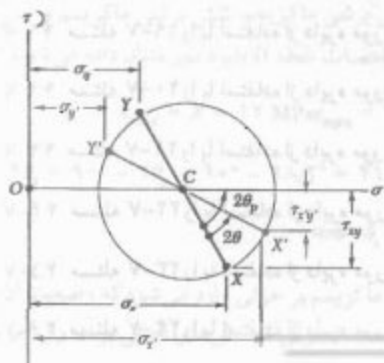
۶۳-۷. برای حالت تنش نشان داده شده، می‌دانیم که  $\sigma_x = 98 \text{ MPa}$ ،  $\sigma_y = 63 \text{ MPa}$  و  $\sigma_{\min} = 35 \text{ MPa}$ . مطلوبست: (الف) وضعیت صفحات اصلی، (ب) تنش اصلی  $\sigma_{\max}$ ، (ج) ماکزیمم تنش برشی در صفحه.



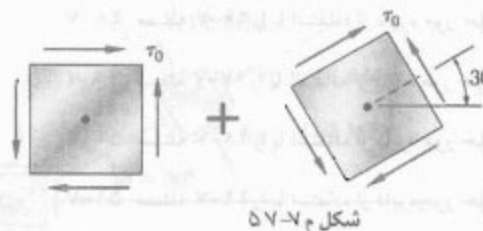
شکل م ۶۳-۷

۶۴-۷. دایره مور نشان داده شده متناظر است با حالت تنشی که در شکل‌های ۵-۷ الف و ب داده شده است. با توجه به اینکه  $\tau_{x'y'} = (CX') \sin(2\theta_p - 2\theta)$  و  $\sigma_x = OC + (CX') \cos(2\theta_p - 2\theta)$  عبارتهای  $\sigma_x$  و  $\tau_{x'y'}$  را که، به ترتیب، در معادله‌های (۵-۷) و (۶-۷) داده شده‌اند، بیابید.

[راهنمایی: از  $\sin(A+B) + \sin A \cos B + \cos A \sin B$  و  $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$  استفاده کنید].

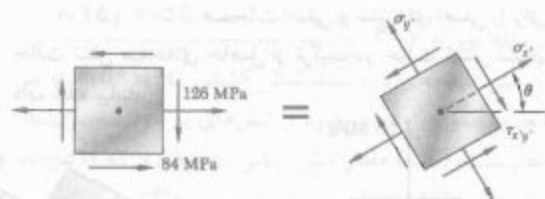


شکل م ۶۴-۷



شکل م ۵۷-۷

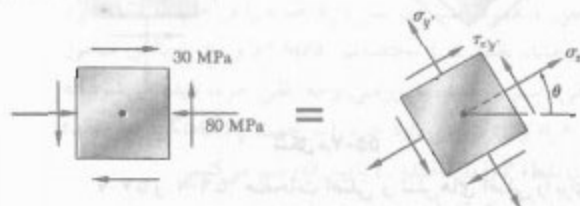
۵۸-۷. برای حالت تنش نشان داده شده، گستره مقادیر  $\theta$  را که به ازای آن تنش قائم  $\sigma_x$  مساوی  $140 \text{ MPa}$  یا کمتر از آن است بیابید.



شکل م ۵۸-۷ و م ۵۹-۷

۵۹-۷. برای حالت تنش نشان داده شده، گستره مقادیر  $\theta$  را که به ازای آن تنش قائم  $\sigma_x$  مساوی با  $70 \text{ MPa}$  یا کمتر از آن است بیابید.

۶۰-۷. برای حالت تنش داده شده، گستره مقادیر  $\theta$  را که به ازای آن مقدار تنش برشی  $\tau_{x'y'}$  مساوی  $40 \text{ MPa}$  یا کمتر از آن است بیابید.



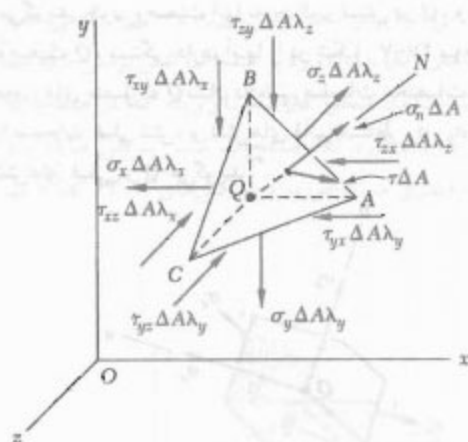
شکل م ۶۰-۷

۶۱-۷. برای جزء نشان داده شده، گستره مقادیر  $\tau_{xy}$  را که به ازای آن ماکزیمم تنش کششی مساوی  $60 \text{ MPa}$  یا کمتر از آن است بیابید.

۶۲-۷. برای جزء نشان داده شده، گستره مقادیر  $\tau_{xy}$  را که به ازای آن ماکزیمم تنش برشی در صفحه مساوی  $50 \text{ MPa}$  یا کمتر از آن است بیابید.



وجه می‌توان یافت (شکل ۷-۲۶). از طرف دیگر، نیروهای وارد بر وجه  $ABC$  متشکل اند از نیروی قائم با مقدار  $\sigma_n \Delta A$  که در جهت  $QN$  است، و نیروی برشی با مقدار  $\tau \Delta A$  که بر  $QN$  عمود است. چون  $QCA$  و  $QAB$ ، به ترتیب، در جهت منفی  $x$ ،  $y$  و  $z$  هستند، نیروهای وارد بر آنها را باید با سوی منفی نشان داد.



شکل ۲۶-۷

مجموع مؤلفه‌های تمام نیروهای وارد بر چهاروجهی در امتداد  $QN$  صفر است. مؤلفه نیروی موازی با محور  $x$  در امتداد  $QN$  از حاصلضرب مقدار آن نیرو در کسینوس هادی  $\lambda_x$  به دست می‌آید. برای مؤلفه نیروهای موازی با محوره‌های  $y$  و  $z$  به طور مشابه عمل می‌شود. در نتیجه،

$$\begin{aligned} \sum F_n &= 0: \\ \sigma_n \Delta A &- (\sigma_x \Delta A \lambda_x) \lambda_x - (\tau_{xy} \Delta A \lambda_x) \lambda_y - (\tau_{xz} \Delta A \lambda_x) \lambda_z \\ &- (\tau_{yx} \Delta A \lambda_y) \lambda_x - (\sigma_y \Delta A \lambda_y) \lambda_y - (\tau_{yz} \Delta A \lambda_y) \lambda_z \\ &- (\tau_{zx} \Delta A \lambda_z) \lambda_x - (\tau_{zy} \Delta A \lambda_z) \lambda_y - (\sigma_z \Delta A \lambda_z) \lambda_z = 0 \end{aligned}$$

از تقسیم بر  $\Delta A$  و با حل  $\sigma_n$  داریم:

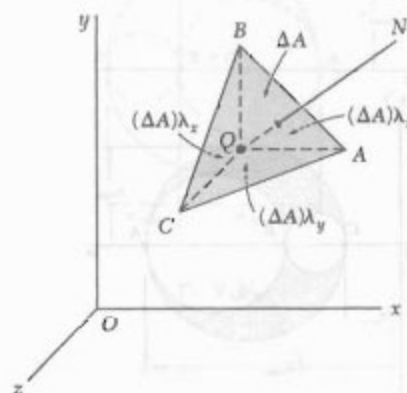
$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \lambda_x^2 + \sigma_y \lambda_y^2 + \sigma_z \lambda_z^2 \\ &+ 2\tau_{xy} \lambda_x \lambda_y + 2\tau_{yz} \lambda_y \lambda_z + 2\tau_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (20-7) \end{aligned}$$

عبارت حاصل برای تنش قائم  $\sigma_n$  برحسب  $\lambda_x$ ،  $\lambda_y$  و  $\lambda_z$  به صورت درجه دوم است. در نتیجه، محوره‌های مختصات را می‌توان طوری انتخاب کرد که عضو سمت راست معادله (۷-۲۰) به سه جمله، شامل مربعات کسینوس‌های هادی،

۷-۲۰ الف) نشان دهید که عبارت  $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$  که در آن  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  مؤلفه‌های تنش در امتداد محوره‌های قائم  $x$  و  $y$  هستند، از وضعیت این محورها مستقل اند. همچنین، نشان دهید که عبارت داده شده مربع طول مماسی را نشان می‌دهد که از مبدأ مختصات بر دایره مور رسم می‌شود. (ب) با استفاده از خاصیت "باوردایی" که در قسمت الف در نظر گرفته شده، تنش برشی  $\tau_{xy}$  را برحسب  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و تنش‌های اصلی  $\sigma_{\max}$  و  $\sigma_{\min}$  بیان کنید.

## ۷-۵ حالت کلی تنش

در قسمت‌های قبل، حالت تنش صفحه‌ای را با  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$  در نظر گرفتیم، و فقط تبدیلات تنش مربوط به دوران حول محور  $z$  را بررسی کردیم. اکنون، حالت کلی تنش داده شده در شکل ۷-۱۱ الف و تبدیل تنش مربوط به دوران محوره‌های نشان داده شده در شکل ۷-۱۱ ب را در نظر می‌گیریم. البته، این تحلیل فقط برای تعیین تنش قائم  $\sigma_n$  وارد به یک صفحه با وضعیت اختیاری است.



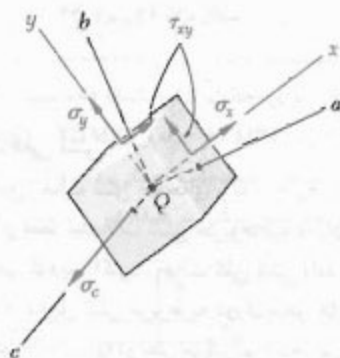
شکل ۲۵-۷

چهاروجهی داده شده در شکل ۷-۲۵ را در نظر بگیرید. سه تا از وجوه آن به موازات صفحات مختصات هستند، و وجه  $ABC$  بر خط  $QN$  عمود است. اگر مساحت وجه  $ABC$  را با  $\Delta A$ ، و کسینوس‌های هادی خط  $QN$  را با  $\lambda_x$ ،  $\lambda_y$  و  $\lambda_z$  نشان دهیم، مساحت وجوه عمود بر محوره‌های  $x$ ،  $y$  و  $z$ ، به ترتیب، عبارتند از  $(\Delta A) \lambda_x$ ،  $(\Delta A) \lambda_y$  و  $(\Delta A) \lambda_z$ . اگر حالت تنش در نقطه  $Q$  با مؤلفه‌های تنش  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$ ،  $\sigma_z$ ،  $\tau_{xy}$ ،  $\tau_{yz}$  و  $\tau_{zx}$  بیان شود، در اینصورت نیروهای وارد بر وجوه موازی با صفحات مختصات را از حاصلضرب مؤلفه‌های تنش در مساحت هر

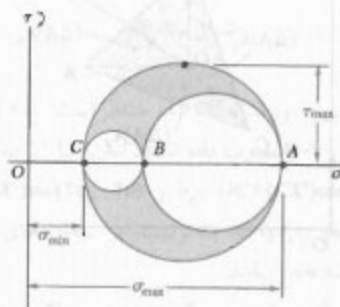
برشی را در نقطه  $Q$  نشان می‌دهد. با توجه به اینکه قطر آن دایره با اختلاف بین  $\sigma_{\max}$  و  $\sigma_{\min}$  برابر است، می‌نویسیم

$$r_{\max} = \frac{1}{\tau} |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}| \quad (۲۲-۷)$$

که در آن،  $\sigma_{\max}$  و  $\sigma_{\min}$  مقادیر جبری تنش‌های ماکزیمم و مینیمم در نقطه  $Q$  هستند.



شکل ۲۸-۷



شکل ۲۹-۷

\* در قسمت ۱۶.۹ کتاب "Vector mechanics for engineers, 6th ed" تألیف Beer & Johnston، شکل درجه دوم مشابهی برای نمایش مسان اینرسی یک جسم صلب نسبت به یک محور اختیاری آورده شده است. در قسمت ۱۷.۹ نشان داده می‌شود که این شکل درجه دوم مربوط به سطح درجه دوم و شکلی که فقط شامل مربعات کسینوس‌های هادی است همان شکلی است که برای تعیین محورهای اصلی آن سطح به کار می‌رود.

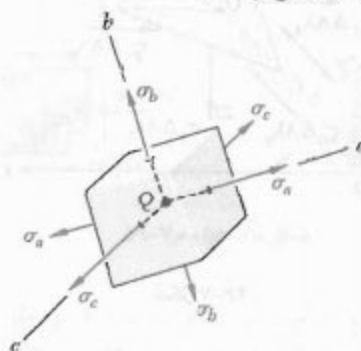
\*\* برای بحث درباره تعیین صفحات اصلی تنش و تنش‌های اصلی، نگاه کنید به:

S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, 1970, sec. 77.

تبدیل شود.\* اگر این محورها را با  $a, b, c$  و تنش‌های قائم متناظر را با  $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$  و کسینوس‌های هادی  $Q_N$  نسبت به این محورها را با  $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$  نشان دهیم، داریم:

$$\sigma_n = \sigma_a \lambda_a^2 + \sigma_b \lambda_b^2 + \sigma_c \lambda_c^2 \quad (۲۱-۷)$$

محورهای مختصات  $a, b, c$  را محورهای اصلی تنش می‌گویند. چون وضعیت آنها به حالت تنش در  $Q$  و لذا به وضعیت  $Q$ ، بستگی دارد، آنها را در شکل ۲۷-۷ به صورت محورهای متصل به  $Q$  نشان داده‌ایم. صفحات مختصات متناظر با صفحات اصلی تنش، و تنش‌های قائم متناظر  $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$  و تنش‌های اصلی در  $Q$  می‌گویند.\*\*



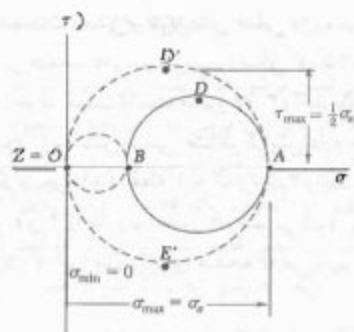
شکل ۲۷-۷

## ۷-۶ کاربرد دایره مور برای تحلیل تنش سه بعدی

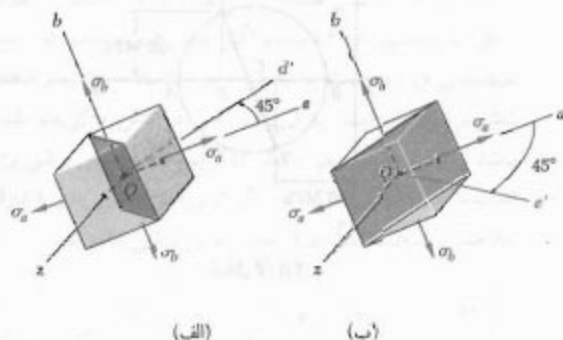
اگر جزء نشان داده شده در شکل ۲۷-۷ حول یکی از محورهای اصلی در  $Q$ ، مثلاً محور  $c$  (شکل ۲۸-۷)، دوران داده شود، با استفاده از دایره مور می‌توان تبدیل تنش متناظر را به دست آورد. در حقیقت، تنش‌های برشی وارد بر وجوه عمود بر محور  $c$  صفر هستند و تنش قائم  $\sigma_c$  بر صفحه  $ab$  که تبدیل در آن روی می‌دهد عمود است و بر این تبدیل تأثیر نمی‌گذارد. لذا، برای تعیین تنش‌های قائم و برشی وارد بر وجوه جزء پس از دوران آن حول محور  $c$  (شکل ۲۹-۷)، از دایره‌ای به قطر  $AB$  استفاده می‌کنیم. به‌طور مشابه، برای تعیین تنش‌های وارد بر آن جزء پس از دوران حول محورهای  $a$  و  $b$  می‌توان، به‌ترتیب، از دایره‌ای به قطر  $BC$  و  $CA$  استفاده کرد. گرچه این تحلیل برای دوران حول محورهای اصلی است، ولی می‌توان نشان داد که دوران حول هر محور دیگر باعث ایجاد تنش‌هایی می‌شود که در شکل ۲۹-۷ با یک نقطه در داخل مساحت سایه‌خورده نشان داده می‌شوند. لذا، شعاع بزرگترین دایره از میان سه دایره، ماکزیمم مقدار تنش

از طرف دیگر، اگر  $A$  و  $B$  در یک طرف  $O$  باشند (یعنی، اگر  $\sigma_b$  و  $\sigma_a$  دارای علامت یکسان باشند)، دایره‌ای که  $\sigma_{\min}$  و  $\sigma_{\max}$  را مشخص می‌کند دایره متناظر با تبدیل تنش در صفحه  $xy$  نیست.

اگر، طبق شکل ۳۲-۷،  $\sigma_a > \sigma_b > 0$ ، در این صورت  $\sigma_{\max} = \sigma_a$  و  $\tau_{\min} = 0$ ، با شعاع دایره‌ای که با نقاط  $O$  و  $A$  مشخص می‌شود برابر است، یعنی:  $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_{\max}$ ، گفتنی است که عمودهای  $Qd'$  و  $Qe'$  وارد بر صفحات تنش برشی ماکزیمم را با چرخاندن محور  $Qa$  تحت زاویه  $45^\circ$  در صفحه  $za$  می‌توان به دست آورد. لذا، صفحات تنش برشی ماکزیمم صفحات قطری مسایه‌خورده در شکل‌های ۳۳-۷ الف و ب هستند.

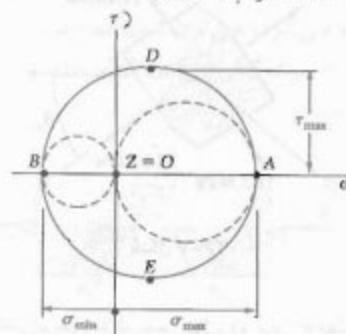


شکل ۳۲-۷

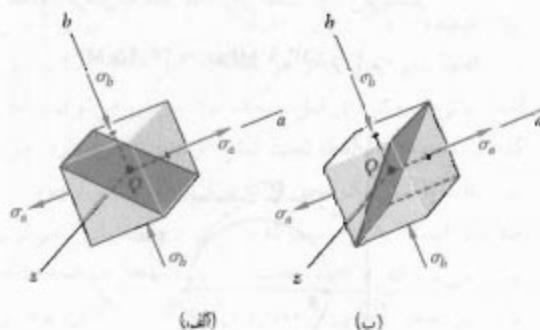


شکل ۳۳-۷

اکنون، به حالت خاص تنش صفحه‌ای، که در قسمت‌های ۲-۷ تا ۴-۷ بررسی شد، بزمی‌گردیم. به‌خاطر داریم که اگر محورهای  $x$  و  $y$  در صفحه تنش انتخاب شوند،  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ، یعنی، محور  $z$ ، که محور عمود بر صفحه تنش است، یکی از سه محور اصلی تنش است. در نمودار دایره مور، این محور متناظر است با مبدأ  $O$ ، که در آن  $\sigma = \tau = 0$ . همچنین، به‌خاطر داریم که دو محور اصلی دیگر متناظرند با نقاط  $A$  و  $B$  که محل تلاقی دایره مور در صفحه  $xy$  با محور  $\sigma$  هستند. اگر  $A$  و  $B$  در طرفین متقابل مبدأ  $O$  باشند (شکل ۳۰-۷)، تنش‌های اصلی متناظر، ماکزیمم و مینیمم تنش‌های قائم در نقطه  $Q$  هستند، و تنش برشی ماکزیمم با ماکزیمم تنش برشی "داخل صفحه" برابر است. همانطور که در قسمت ۳-۷ گفته شد، صفحات تنش برشی ماکزیمم متناظرند با نقاط  $D$  و  $E$  دایره مور که با صفحات اصلی متناظر با نقاط  $A$  و  $B$  زاویه  $45^\circ$  دارند. لذا، آنها صفحات قطری مسایه‌خورده در شکل‌های ۳۱-۷ الف و ب هستند.



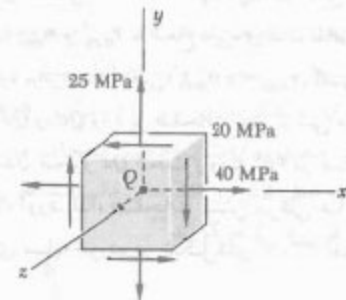
شکل ۳۰-۷



شکل ۳۱-۷

## مثال ۳-۷

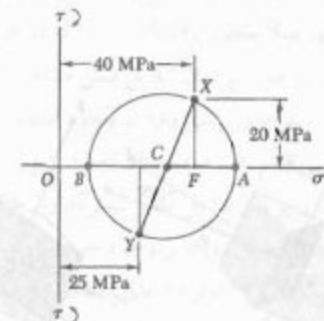
برای حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده در شکل ۳۴-۷، مطلوب است: (الف) صفحات اصلی و تنش‌های اصلی، (ب) تنش برشی ماکزیمم.



شکل ۳۴-۷

(الف) صفحات اصلی و تنش‌های اصلی. دایره مور را برای تبدیل تنش در صفحه  $xy$  رسم می‌کنیم (شکل ۳۵-۷). نقطه  $X$  به اندازه ۶ واحد در سمت راست محور  $\sigma$  و ۳ واحد بالای محور  $\tau$  رسم می‌شود (زیرا تنش برشی متناظر گرایش دارد جزء را در جهت ساعتگرد بچرخاند). نقطه  $Y$  به اندازه ۳/۵ واحد در سمت راست محور  $\tau$  و ۳ واحد زیر محور  $\sigma$  رسم می‌شود. با ترسیم خط  $XY$ ، مرکز  $C$  دایره مور را برای صفحه  $xy$  می‌یابیم؛ طول آن چنین است:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{40 + 25}{2} = 32.5 \text{ MPa}$$



شکل ۳۵-۷

ضلاع مثلث قائم‌الزاویه  $CFX$  عبارتند از:  $CF = 40 - 32.5 = 7.5 \text{ MPa}$  و  $FX = 3 \text{ MPa}$  در نتیجه، شعاع دایره چنین است:

$$R = CX = \sqrt{(7.5)^2 + (3)^2} = 8.14 \text{ MPa}$$

تنش‌های اصلی در صفحه تنش عبارتند از:

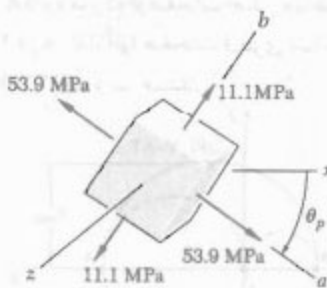
$$\sigma_a = OA = OC + CA = 32.5 + 8.14 = 40.64 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = OB = OC - BC = 32.5 - 8.14 = 24.36 \text{ MPa}$$

چون وجوه جزء که بر محور  $z$  عمودند فاقد تنش‌اند، این وجوه یکی از صفحات اصلی هستند و تنش اصلی متناظر عبارت است از  $\sigma_z = 0$ . دو صفحه اصلی دیگر با نقاط  $A$  و  $B$  روی دایره مور مشخص می‌شوند. زاویه  $\theta_p$  که تحت آن باید جزء را حول محور  $z$  بچرخانیم تا وجوه آن بر این صفحات منطبق شوند (شکل ۳۶-۷) نصف زاویه  $ACX$  است. می‌نویسیم:

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{3}{7.5}$$

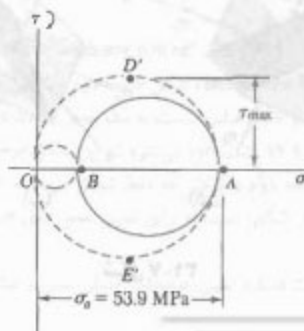
$$\Rightarrow 2\theta_p = 21.8^\circ \Rightarrow \theta_p = 10.9^\circ$$



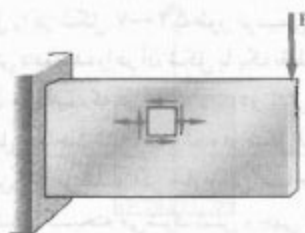
شکل ۳۶-۷

(ب) تنش برشی ماکزیمم. حال، دایره  $OB$  و  $OA$  را که، به ترتیب، با دوران‌های جزء حول محورهای  $b$  و  $a$  متناظرند رسم می‌کنیم (شکل ۳۷-۷). تنش برشی ماکزیمم با شعاع دایره‌ای به قطر  $OA$  برابر است، و می‌نویسیم:

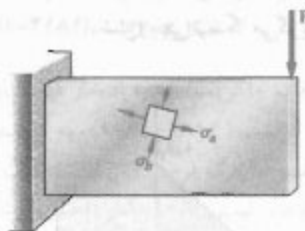
$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sigma_a = \frac{1}{2} (40.64 \text{ MPa}) = 20.32 \text{ MPa}$$



شکل ۳۷-۷



(الف)



(ب)

شکل ۳۹-۷

معیار تنش برشی ماکزیمم. این معیار بر مبنای مشاهده تسلیم مواد نرم بر اثر لغزش ماده در امتداد سطوح مایل است و عمدتاً ناشی از تنش‌های برشی است (به قسمت ۲-۳ نگاه کنید). طبق این معیار، یک عضو تا وقتی به‌طور مطمئن کار می‌کند که ماکزیمم مقدار تنش برشی در آن کمتر از مقدار تنش برشی در نمونه آزمایشی تحت کشش از همان جنس در شروع تسلیم باشد.

از قسمت ۱-۱۱ به‌خاطر داریم که ماکزیمم مقدار تنش برشی تحت بار محوری مرکزی با نصف مقدار تنش قائم محوری برابر است. بنابراین، ماکزیمم تنش برشی در نمونه آزمایشی تحت کشش هنگام شروع تسلیم  $\frac{1}{2}\sigma_y$  است. از طرف دیگر، در قسمت ۶-۷ دیدیم اگر تنش‌های اصلی در تنش صفحه‌ای هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند، ماکزیمم مقدار تنش برشی برابر است با  $|\sigma_{\max}|$ ، و اگر تنش ماکزیمم مثبت باشد و تنش مینم منفی باشد، ماکزیمم مقدار تنش برشی برابر است با  $\frac{1}{2}|\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|$ . لذا، اگر تنش‌های اصلی  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  دارای علامت یکسان باشند، طبق معیار تنش برشی ماکزیمم،

$$|\sigma_x| < \sigma_y \quad |\sigma_y| < \sigma_y \quad (۷-۲۳)$$

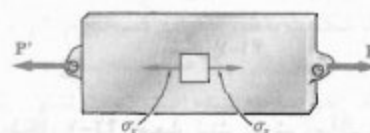
اگر تنش‌های اصلی  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  دارای علامت‌های مخالف باشند، طبق معیار تنش برشی ماکزیمم،

$$|\sigma_x - \sigma_y| < \sigma_y \quad (۷-۲۴)$$

چون نقاط  $D'$  و  $E'$ ، که صفحات تنش برشی ماکزیمم را مشخص می‌کنند، در دو انتهای قطر عمودی دایره متناظر با دوران حول محور  $b$  قرار دارند، با دوران وجوه جزء شکل ۷-۳۶ تحت زاویه  $45^\circ$  حول محور  $b$  می‌توان این وجوه را بر صفحات تنش برشی ماکزیمم منطبق کرد.

### ۷-۷\* معیارهای تسلیم برای مواد نرم تحت تنش صفحه‌ای

طراحی عضوهای ساختمانی و مکانیکی از جنس مواد نرم (چکش‌خوار)، معمولاً طوری است که عضو تحت شرایط بارگذاری پیش‌بینی شده تسلیم نمی‌شود. وقتی قطعه‌ای تحت تنش محوری قرار می‌گیرد (شکل ۷-۳۸)، مقدار تنش قائم  $\sigma_x$  را که باعث تسلیم ماده می‌شود می‌توان از آزمون کششی که روی نمونه‌ای از همان جنس انجام می‌شود به‌دست آورد. لذا، صرفنظر از مکانیزم واقعی که باعث تسلیم ماده می‌شود، می‌توان گفت تا وقتی  $\sigma_x < \sigma_y$ ، جزء یا قطعه با اطمینان کار می‌کند ( $\sigma_y$  استقامت تسلیم نمونه آزمایشی است).



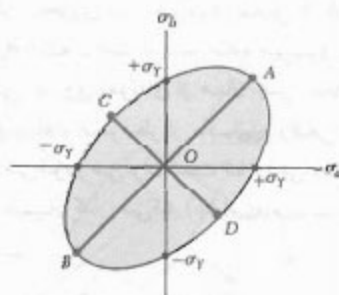
شکل ۳۸-۷

از طرف دیگر، وقتی عضو ساختمانی یا مکانیکی تحت تنش صفحه‌ای قرار می‌گیرد (شکل ۷-۳۹ الف)، برای تعیین تنش‌های اصلی  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  در هر نقطه (شکل ۷-۳۹ ب)، بهتر است یکی از روش‌های قبل را به کار برد. سپس، می‌توان در نظر گرفت که ماده در آن نقطه تحت تنش دو محوری قرار دارد. چون این حالت با تنش یک محوری که در آزمایش کشش وجود دارد متفاوت است، بدیهی است که از روی این آزمایش نمی‌توان پیش‌بینی کرد که آیا عضو تحت بررسی گسیخته می‌شود یا نه. برای این منظور بعضی از معیارهای مربوط به مکانیزم واقعی گسیختگی ماده را، که به موجب آن می‌توان آثار هر دو حالت تنش وارد بر ماده را با هم مقایسه کرد، باید در نظر گرفت. در این قسمت، دو معیار تسلیم را که اغلب برای مواد نرم به کار می‌روند بررسی می‌کنیم.

یعنی، تا وقتی که نقطه با مختصات  $\sigma_a$  و  $\sigma_b$  داخل سطح نشان داده شده در شکل ۴۱-۷ قرار گیرد. این سطح به صورت بیضی و با معادله زیر است:

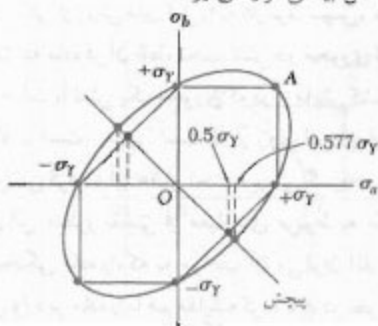
$$\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 = \sigma_Y^2 \quad (۲۷-۷)$$

این بیضی محورهای مختصات را در  $\sigma_a = \pm \sigma_Y$  و  $\sigma_b = \pm \sigma_Y$  قطع می‌کند. می‌توان دید که قطر بزرگ بیضی محورهای مختصات را در ربع اول و سوم قطع می‌کند و از  $A (\sigma_a = \sigma_b = \sigma_Y)$  تا  $B (\sigma_a = \sigma_b = -\sigma_Y)$  امتداد دارد، و قطر کوچک آن از  $C (\sigma_a = -\sigma_b = -0.577 \sigma_Y)$  تا  $D (\sigma_a = -\sigma_b = 0.577 \sigma_Y)$  امتداد دارد.



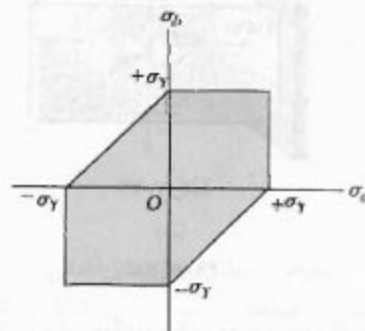
شکل ۴۱-۷

در شکل ۴۲-۷، معیار تنش برشی ماکزیمم و معیار ماکزیمم انرژی تغییرشکل با هم مقایسه شده‌اند. این بیضی از رئوس شش‌وجهی می‌گذرد. لذا، برای حالت‌های تنش که با این شش نقطه مشخص شده‌اند، دو معیار مذکور نتیجه یکسان می‌دهند. برای هر حالت تنش دیگر، معیار تنش برشی ماکزیمم محافظه‌کارانه‌تر از معیار ماکزیمم انرژی تغییرشکل است، زیرا شش‌وجهی داخل بیضی قرار می‌گیرد.



شکل ۴۲-۷

روابط حاصل را در شکل ۷-۴۰ به‌طور ترسیمی نشان داده‌ایم. هر حالت تنش داده شده را در آن شکل با یک نقطه به مختصات  $\sigma_a$  و  $\sigma_b$  نشان می‌دهیم، که در آن  $\sigma_a$  و  $\sigma_b$  دو تنش اصلی‌اند. اگر این نقطه داخل مساحت نشان داده شده در شکل قرار گیرد، عضو به‌طور مطمئن کار می‌کند و اگر خارج این مساحت قرار گیرد، عضو بر اثر تسلیم گسیخته می‌شود. شش‌وجهی مربوط به آغاز تسلیم در ماده را، به افتخار مهندس فرانسوی هنری ادوارد ترسکا (۱۸۸۵-۱۹۱۴)، شش‌وجهی ترسکا می‌گویند.



شکل ۴۰-۷

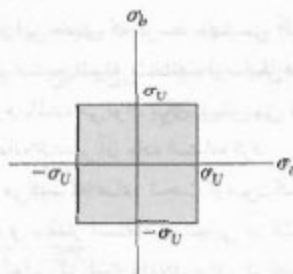
معیار ماکزیمم انرژی تغییرشکل. این معیار بر مبنای انرژی تغییرشکل یک ماده (یا انرژی مربوط به تغییر حجم آن ماده) می‌باشد. طبق این معیار، که آن را به افتخار ریاضی‌دان آلمانی-آمریکایی ریچارد فون میزیز (۱۸۸۳-۱۹۵۳)، معیار فون میزیز می‌گویند، یک عضو تا وقتی به‌طور مطمئن کار می‌کند که مقدار ماکزیمم انرژی تغییرشکل واحد حجم آن کمتر از انرژی تغییرشکل واحد حجم مورد نیاز برای تسلیم ماده آزمایشی تحت کششی باشد که هم جنس با عضو است. همانطور که در قسمت ۶.۱۱ خواهیم دید، انرژی تغییرشکل واحد حجم در ماده همسانگردی که تحت تنش صفحه‌ای است عبارت است از:

$$u_d = \frac{1}{6G} (\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2) \quad (۲۵-۷)$$

که در آن،  $\sigma_a$  و  $\sigma_b$  تنش‌های اصلی و  $G$  مدول صلابت است. در حالت خاصی که نمونه آزمایشی شروع به تسلیم می‌کند،  $\sigma_a = \sigma_Y$  و  $\sigma_b = 0$  و  $(u_d)_Y = \sigma_Y^2 / 6G$ . لذا، طبق معیار ماکزیمم انرژی تغییرشکل، عضو تا وقتی به‌طور مطمئن کار می‌کند که  $u_d < (u_d)_Y$  یا:

$$\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_Y^2 \quad (۲۶-۷)$$





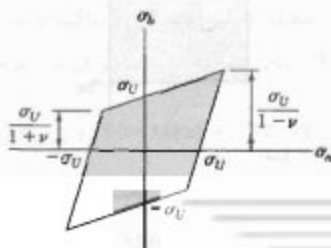
شکل ۴۳-۷

معیار تنش قائم ماکزیمم، که به افتخار فیزیکدان فرانسوی چارلز اگوستین کولمب (۱۸۰۶-۱۷۳۶)، به آن معیار کولمب می‌گویند، این نقص دارد که فرض می‌کند استقامت نهایی ماده در کشش و استقامت نهایی آن در فشار با هم برابرند. همانطور که در قسمت ۲-۳ گفته شد، این حالت به ندرت روی می‌دهد، و این ناشی از نقائص ماده، مانند ترک‌ها یا حفره‌های میکروسکوپی است، که باعث تضعیف ماده در کشش می‌شوند، ولی بر مقاومت آن در برابر شکست ناشی از فشار تأثیر زیادی نمی‌گذارند. به علاوه، در این معیار فقط تأثیر تنش‌های قائم بر مکانیزم شکست ماده در نظر گرفته می‌شود.\*

\* معیار دیگری برای شکست، به نام معیار ماکزیمم کرنش قائم، یا معیار منت-سرنانت، در قرن نوزدهم مورد استفاده قرار گرفت. طبق این معیار، یک عضو ساختمانی تا وقتی به طور مطمئن کار می‌کند که ماکزیمم مقدار کرنش قائم در آن کمتر از مقدار  $\epsilon_U$  کرنشی باشد که به لای آن نمونه‌ای از همان جنس تحت آزمون کشش گسیخته می‌شود. اما، همانطور که در قسمت ۷-۱۲ دیده می‌شود، اگر تغییر شکل الاستیک باشد و ماده همگن و همسانگرد باشد، کرنش در امتداد یکی از محورهای اصلی تنش دارای مقدار ماکزیمم است. لذا اگر مقادیر کرنش قائم را در امتداد یکی از محورهای اصلی در صفحه تنش با  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$  نشان دهیم، داریم

$$|\epsilon_x| < \epsilon_U \quad |\epsilon_y| < \epsilon_U \quad (7-29)$$

با استفاده از قانون کلی هوک (قسمت ۲-۱۲)، این روابط را برحسب تنش‌های اصلی  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  و استقامت نهایی  $\sigma_U$  ماده می‌توان بیان کرد. طبق معیار ماکزیمم کرنش قائم، عضو ساختمانی تا وقتی به طور مطمئن کار می‌کند که نقطه به مختصات  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  داخل مساحت نشان داده شده در شکل ۷-۲۲ قرار گیرد (۷ ضرب بر پواسون ماده است).



شکل ۴۴-۷

یکی از حالت‌های جالب تنش، حالت مربوط به تسلیم در آزمایش پیچش است. از شکل ۷-۲۴ قسمت ۷-۴ به خاطر داریم که، در پیچش،  $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$ ؛ لذا، نقاط متناظر در شکل ۷-۲۲ روی نیمساز ربع دوم و چهارم قرار دارند. لذا، تسلیم در آزمون پیچش طبق معیار تنش برشی ماکزیمم وقتی روی می‌دهد که  $\sigma_x = -\sigma_y = \pm 0.5\sigma_U$  و طبق معیار ماکزیمم انرژی تغییر شکل وقتی که  $\sigma_x = -\sigma_y = \pm 0.577\sigma_U$  است. اما، با توجه به شکل ۷-۲۴، مقدار  $\sigma_x$  باید مساوی مقدار  $\sigma_{\max}$  باشد؛ یعنی، مساوی مقداری که از آزمون پیچش برای استقامت تسلیم  $\tau_y$  ماده به دست آمده است. مقدار استقامت تسلیم  $\tau_y$  در کشش و مقدار استقامت تسلیم  $\tau_y$  در برش برای مواد نرم مختلف در پیوست ب آورده شده‌اند. در نتیجه، با مقایسه نسبت  $\tau_y/\sigma_y$  برای این مواد می‌توان تحقیق کرد که آیا مقادیر حاصلی در گستره ۰/۵۵ تا ۰/۶۰ هستند یا نه. لذا، در پیش‌بینی تسلیم در پیچش، معیار ماکزیمم انرژی تغییر شکل از معیار تنش برشی ماکزیمم قدری دقیق‌تر است.

#### ۷-۸ معیارهای شکست برای مواد شکننده تحت تنش صفحه‌ای

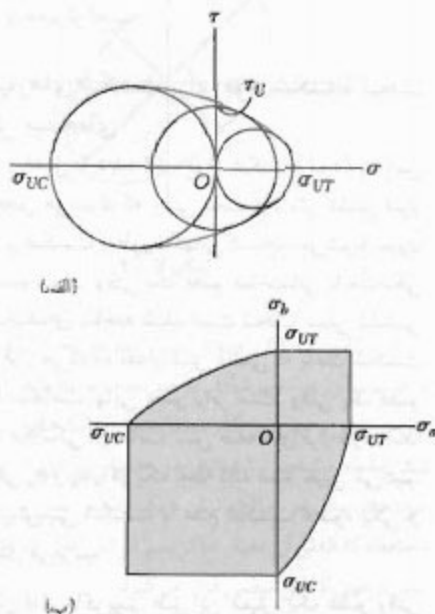
همانطور که در فصل ۲ دیده شد، مواد شکننده (ترد) به این صورت مشخص می‌شوند که وقتی تحت آزمایش کشش قرار می‌گیرند، بر اثر شکست به طور ناگهانی گسیخته می‌شوند بدون اینکه قبلاً تسلیم شوند. وقتی یک عضو ساختمانی یا مکانیکی که از ماده شکننده‌ای ساخته شده است تحت تنش کششی تک محوری قرار می‌گیرد، مقدار تنش قائمی که باعث شکست آن می‌شود با استقامت نهایی عضو برابر است. وقتی یک عضو ساختمانی یا مکانیکی در حالت تنش صفحه‌ای قرار دارد، ابتدا تنش‌های اصلی  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  را در یک نقطه داده شده تعیین می‌کنیم. سپس، برای پیش‌بینی شکست یا عدم شکست عضو، یکی از معیارها را به کار می‌بریم.

معیار تنش قائم ماکزیمم. طبق این معیار، یک عضو وقتی گسیخته می‌شود که ماکزیمم تنش قائم در عضو با استقامت نهایی  $\sigma_U$  آن برابر شود (استقامت نهایی را از آزمون کشش نمونه هم‌جنس عضو به دست می‌آورند). لذا، عضو تا وقتی به طور مطمئن کار می‌کند که قدر مطلق تنش‌های اصلی  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  کمتر از  $\sigma_U$  باشد:

$$|\sigma_x| < \sigma_U \quad |\sigma_y| < \sigma_U \quad (7-28)$$

معیار تنش قائم ماکزیمم را به صورت ترسیمی می‌توان نشان داد (شکل ۷-۲۳). اگر نقطه با مختصات  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  (تنش‌های اصلی) داخل سطح چهارگوش نشان داده شده در شکل قرار گیرد، عضو مطمئن است، و اگر خارج سطح قرار گیرد، عضو گسیخته می‌شود.

برای تحلیل حالت‌هایی که  $\sigma_b$  و  $\sigma_a$  علامت‌های مخالف دارند، فرض می‌کنیم که ماده تحت آزمون پیچشی قرار دارد و استقامت نهایی آن در برش،  $\tau_U$ ، تعیین شده است. با ترسیم دایره‌ای به مرکز  $O$  که حالت تنش متناظر با شکست نمونه تحت آزمون پیچشی را نشان می‌دهد (شکل ۷-۴۶ الف)، دیده می‌شود اگر دایره متناظر با یک حالت تنش کاملاً داخل دایره مذکور قرار گیرد، عضو به‌طور مطمئن کار می‌کند. به‌طور کلی، طبق معیار مور، اگر دایره متناظر با یک حالت تنش کاملاً داخل سطحی قرار گیرد که با پوش منحنی‌های متناظر با داده‌های موجود محصور شده است، عضو به‌طور مطمئن کار می‌کند. با ترسیم دوائر مختلفی که بر این پوش مماس‌اند، با تعیین مقادیر متناظر  $\sigma_b$  و  $\sigma_a$  و با ترسیم نقاط به مختصات  $\sigma_b$  و  $\sigma_a$  می‌توان قسمت‌های باقیمانده نمودار تنش اصلی را به‌دست آورد (شکل ۷-۴۶ ب).

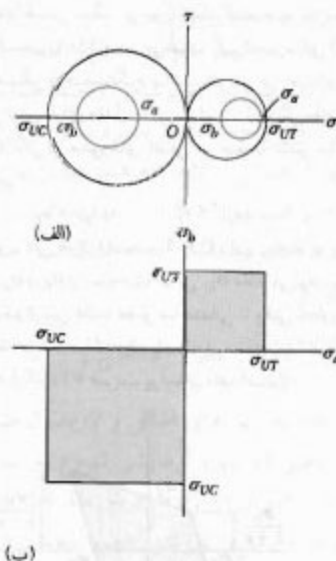


شکل ۷-۴۶

اگر نتایج آزمایش‌های بیشتر، متناظر با حالت‌های مختلف تنش، در دسترس باشند، نمودارهای دقیق‌تری را می‌توان رسم کرد. از طرف دیگر، اگر فقط داده‌های متشکل از استقامت‌های نهایی  $\sigma_{UT}$  و  $\sigma_{UC}$  در دسترس باشند، پوش داده شده در شکل ۷-۴۶ الف با خطوط  $AB$  و  $A'B'$  نشان داده می‌شوند؛ این خطوط، به ترتیب، بر دوائر متناظر با شکست در کشش و فشار مماس هستند (شکل ۷-۴۷ الف). از مثلث‌های مشابه در این شکل می‌توان دید که طول مرکز دایره‌ای که بر  $AB$  و  $A'B'$

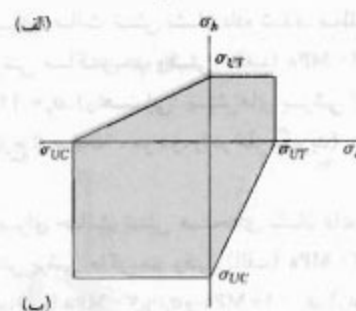
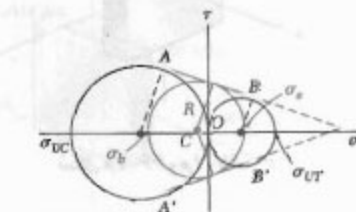
معیار مور. از این معیار، که توسط مهندسی آلمانی اتو مور مطرح شد، اگر نتایج انواع مختلف آزمایش‌ها برای ماده شکننده‌ای معلوم باشد، می‌توان برای پیش‌بینی تأثیر حالت تنش صفحه‌ای داده شده بر آن ماده استفاده کرد.

ابتدا فرض می‌کنیم که ماده تحت آزمون کشش و فشار قرار گرفته است و مقدار استقامت نهایی در کشش،  $\sigma_{UT}$ ، و مقدار استقامت نهایی در فشار،  $\sigma_{UC}$ ، برای آن تعیین شده‌اند. حالت تنش متناظر با گسیختگی نمونه تحت آزمون کشش را روی دایره مور با دایره‌ای که محور افقی را در  $O$  و  $\sigma_{UT}$  قطع می‌کند می‌توان نشان داد (شکل ۷-۴۵ الف). به‌طور مشابه، حالت تنش متناظر با شکست نمونه تحت آزمون فشار را با دایره‌ای که محور افقی را در  $O$  و  $\sigma_{UC}$  قطع می‌کند می‌توان نشان داد. بدیهی است اگر دایره متناظر با یک حالت تنش به‌طور کامل در یکی از این دوائر قرار گیرد، عضو به‌طور مطمئن کار می‌کند. لذا، اگر هر دو تنش اصلی مثبت باشند، حالت تنش تا وقتی مطمئن است که  $\sigma_b < \sigma_{UT}$  و  $\sigma_a < \sigma_{UT}$ ؛ اگر هر دو تنش اصلی منفی باشند، حالت تنش تا وقتی مطمئن است که  $|\sigma_b| < |\sigma_{UC}|$  و  $|\sigma_a| < |\sigma_{UC}|$ . با ترسیم نقطه‌ای به مختصات  $\sigma_b$  و  $\sigma_a$  (شکل ۷-۴۵ ب)، دیده می‌شود حالت تنش تا وقتی مطمئن است که نقطه داخل یکی از مربع‌ات نشان داده شده قرار گیرد.



شکل ۷-۴۵

مماس است با شعاع  $R$  دارای رابطه خطی است. چون  
 $\sigma_a = OC + R$  و  $\sigma_b = OC - R$  نتیجه می‌شود که  $\sigma_a$  و  $\sigma_b$  نیز  
 دارای رابطه خطی‌اند. لذا، مساحت سایه خورده متناظر با این  
 معیار ساده شده مور توسط خطوط مستقیم در ربع‌های دوم و  
 چهارم محصور شده است (شکل ۴۷-۷ ب).



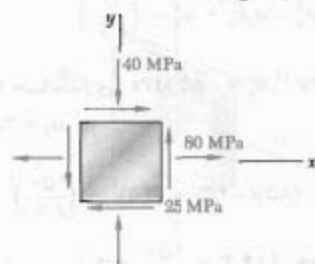
شکل ۴۷-۷

برای تعیین اینکه یک عضو به‌طور مطمئن کار می‌کند یا نه،  
 حالت تنش را باید در تمام نقاط بحرانی آن محاسبه کرد؛ یعنی،  
 در تمام نقاطی که احتمال وقوع تمرکز تنش وجود دارد. این کار  
 را، با استفاده از ضرایب تمرکز تنش در شکل‌های ۲-۴۴،  
 ۳-۳۲، ۴-۳۱، ۴-۳۲، برای چند حالت می‌توان انجام  
 داد. البته، در بسیاری از موارد، برای تعیین حالت تنش در یک  
 نقطه بحرانی باید از نظریه الاستیسته استفاده کرد.

با آشکار شدن ترک‌های میکروسکوپی در یک عضو، باید  
 بررسی کرد که این ترک‌ها در شرایط بارگذاری گسترش می‌یابند  
 یا نه، و عضو گسیخته می‌شود یا به‌طور مطمئن کار می‌کند.  
 برای این منظور، از تحلیلی که با انرژی رشد ترک‌ها سر و کار  
 دارد استفاده می‌شود. این تحلیل فوآتر از این کتاب است و در  
 مکانیک شکست بررسی می‌شود.

مسئله نمونه ۴-۷

حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده، در یک نقطه به‌عنوان  
 قطعه فولادی روی داده است. با چند از مؤلفه‌های مشخص شده  
 است که استقامت تسلیم کششی فولاد به کار رفته عبارت است از



حل

دایره مور. با ترسیم دایره مور برای حالت تنش داده شده،  
 نتیجه می‌شود:

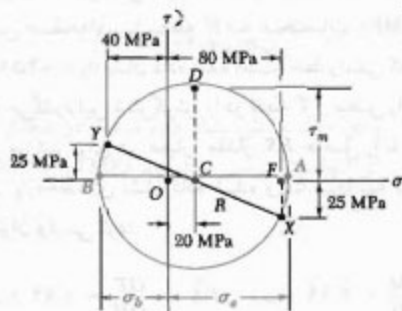
$$\sigma_{ave} = OC = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(80 - 40) = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_m = R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(60)^2 + (25)^2} = 65 \text{ MPa}$$

تنش‌های اصلی

$$\sigma_a = OC + CA = 20 + 65 = +85 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = OC - BC = 20 - 65 = -45 \text{ MPa}$$



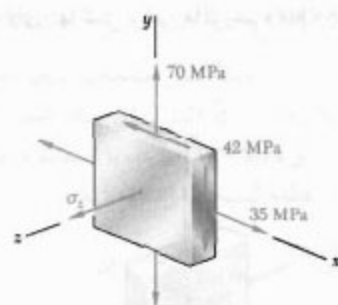
الف. معیار تنش برشی ماکزیمم. با توجه به  
 $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$ ، تنش برشی متناظر در تسلیم چنین است:

$$\tau_y = \frac{1}{2}\sigma_y = \frac{1}{2}(250 \text{ MPa}) = 125 \text{ MPa}$$

برای  $\tau_m = 65 \text{ MPa}$

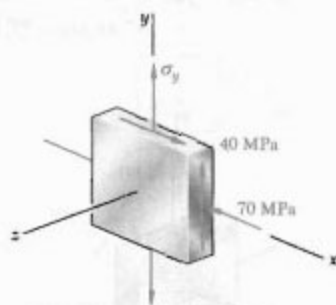
$$F.S. = \frac{\tau_y}{\tau_m} = \frac{125 \text{ MPa}}{65 \text{ MPa}} \Rightarrow F.S. = 1.92$$





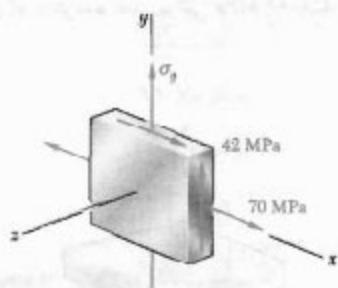
شکل م ۷-۷۳

۷۴-۷ برای حالت تنش نشان داده شده، دو مقدار  $\sigma_y$  را بیابید که به ازای آنها تنش برشی ماکزیمم برابر با ۷۵ MPa باشد.



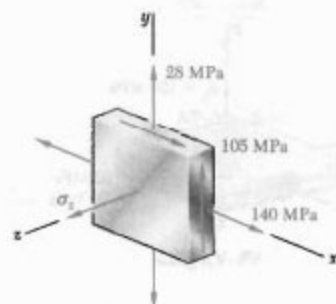
شکل م ۷-۷۴

۷۵-۷ برای حالت تنش نشان داده شده، دو مقدار  $\sigma_y$  را بیابید که به ازای آنها تنش برشی ماکزیمم ۵۲/۵ MPa باشد.

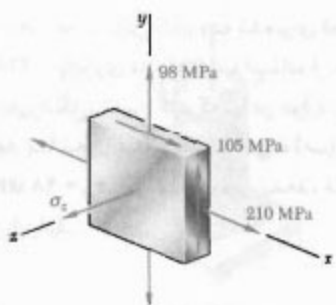


شکل م ۷-۷۵

۷-۷ و ۷۱-۷ برای حالت تنش نشان داده شده، مطلوبیت تنش برشی ماکزیمم وقتی: (الف)  $\sigma_z = 0$ ، (ب)  $\sigma_z = +60$  MPa، (ج)  $\sigma_z = -60$  MPa.

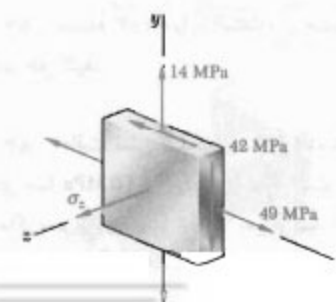


شکل م ۷-۷۰



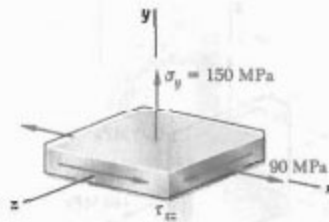
شکل م ۷-۷۱

۷۲-۷ و ۷۳-۷ برای حالت تنش نشان داده شده، مطلوبیت ماکزیمم تنش برشی وقتی: (الف)  $\sigma_y = +20$  MPa، (ب)  $\sigma_y = -20$  MPa، (ج)  $\sigma_y = 0$ .



شکل م ۷-۷۲

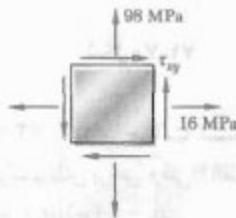
۷-۷۹ برای حالت تنش نشان داده شده، مطلوبست گستره مقادیر  $\tau_{xz}$  به طوری که ماکزیمم تنش برشی مساوی یا کمتر از ۹۰ MPa باشد.



شکل ۷-۷۹

۷-۸۰ برای حالت تنش مسئله ۷-۶۶، مطلوبست:  
(الف) مقدار  $\sigma_y$  به طوری که تنش برشی ماکزیمم تا حد امکان کوچک باشد، (ب) مقدار تنش برشی متناظر.

۷-۸۱ حالت تنش نشان داده شده برای قطعه‌ای از فولاد با  $\sigma_y = ۲۱۰$  MPa روی داده است. یا استفاده از معیار ماکزیمم انرژی تغییرشکل، تعیین کنید که آیا در موارد زیر تسلیم روی می‌دهد یا نه: (الف)  $\tau_{xy} = ۴۲$  MPa، (ب)  $\tau_{xy} = ۸۴$  MPa، (ج)  $\tau_{xy} = ۹۸$  MPa. اگر تسلیم روی ندهد، ضریب اطمینان متناظر را بیابید.

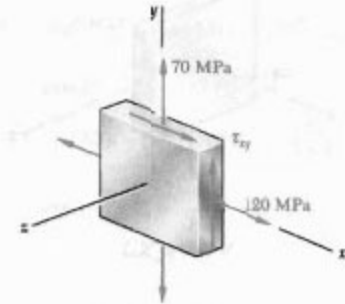


شکل ۷-۸۱

۷-۸۲ مسئله ۷-۸۱ را با استفاده از معیار تنش برشی ماکزیمم حل کنید.

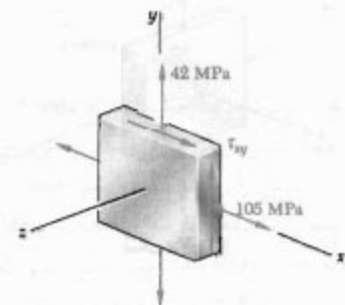
۷-۸۳ حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده در قطعه‌ای فولادی با  $\sigma_y = ۳۲۵$  MPa روی داده است. با استفاده از معیار ماکزیمم انرژی تغییرشکل، تعیین کنید آیا در موارد زیر تسلیم روی می‌دهد یا نه. (الف)  $\sigma_x = ۲۰۰$  MPa، (ب)  $\sigma_x = ۲۴۰$  MPa، (ج)  $\sigma_x = ۲۸۰$  MPa. اگر تسلیم روی ندهد، ضریب اطمینان متناظر را بیابید.

۷-۷۶ برای حالت تنش نشان داده شده، دو مقدار  $\tau_{xy}$  را بیابید که به ازای آنها تنش برشی ماکزیمم ۸۰ MPa باشد.



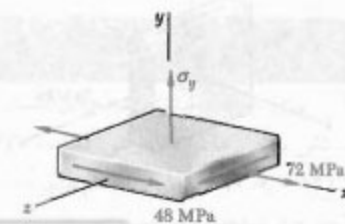
شکل ۷-۷۶

۷-۷۷ برای حالت تنش نشان داده شده، مطلوبست مقدار  $\tau_{xy}$  به طوری که تنش برشی ماکزیمم برابر باشد با:  
(الف) ۶۳ MPa، (ب) ۱۲ ksi.



شکل ۷-۷۷

۷-۷۸ برای حالت تنش نشان داده شده، مطلوبست مقادیر  $\sigma_x$  به طوری که ماکزیمم تنش برشی ۶۴ MPa باشد.

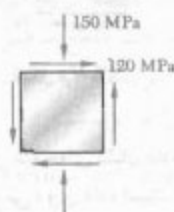


شکل ۷-۷۸

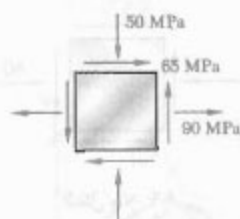


۸۸-۷ مسئله ۷-۸۷ را با استفاده از معیار ماکزیمم انرژی تغییر شکل حل کنید.

۸۹-۷ و ۹۰-۷ حالت تنش صفحه‌ای نشان داده در یک قطعه چوبی روی داده است. اگر برای چدن مورد استفاده  $\sigma_{UT} = 160 \text{ MPa}$  و  $\sigma_{UC} = 320 \text{ MPa}$  با استفاده از معیار مور تعیین کنید که آیا قطعه گسیخته می‌شود یا نه.

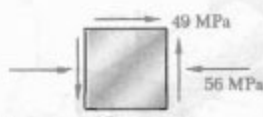


شکل م-۸۹

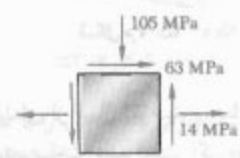


شکل م-۹۰

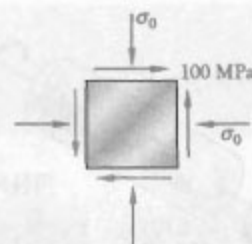
۹۱-۷ و ۹۲-۷ حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده در یک قطعه آلومینیومی روی داده است. اگر برای آلیاژ به کار رفته  $\sigma_{UT} = 70 \text{ MPa}$  و  $\sigma_{UC} = 210 \text{ MPa}$  با استفاده از معیار مور تعیین کنید که آیا قطعه گسیخته می‌شود یا نه.



شکل م-۹۱



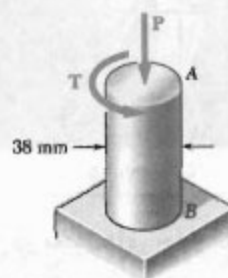
شکل م-۹۲



شکل م-۸۳

۸۴-۷ مسئله ۷-۸۳ را با استفاده از معیار ماکزیمم تنش برشی حل کنید.

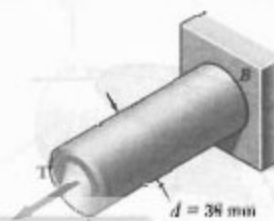
۸۵-۷ شفت  $AB$  به قطر  $38 \text{ mm}$  از فولادی با استقامت تسلیم  $\sigma_Y = 250 \text{ MPa}$  ساخته شده است. با استفاده از معیار تنش برشی ماکزیمم، مقدار گشتار  $T$  را بیابید به طوری که برای  $P = 24 \text{ kN}$  تسلیم روی دهد.



شکل م-۸۵

۸۶-۷ مسئله ۷-۸۵ را با استفاده از معیار انرژی تغییر شکل ماکزیمم حل کنید.

۸۷-۷ شفت  $AB$  به قطر  $38 \text{ mm}$  از فولاد با استقامت تسلیم  $\sigma_Y = 250 \text{ MPa}$  ساخته شده است. با استفاده از معیار تنش برشی ماکزیمم، مقدار گشتاور  $T$  را که در  $P = 24 \text{ kN}$  باعث تسلیم می‌شود بیابید.

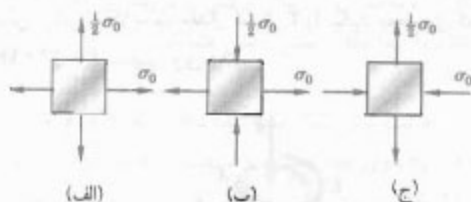


شکل م-۸۷



شکل م-۹۶

۹۷-۷ قطعه‌ای از چدن، با  $\sigma_{UT} = 56 \text{ MPa}$  و  $\sigma_{UC} = 140 \text{ MPa}$  ساخته شده است. برای حالت‌های تنش صفحه‌ای نشان داده شده و با استفاده از معیار مور، تنش قائم  $\sigma_0$  را که به ازای آن باید انتظار گسیختگی داشت بیابید.



شکل م-۹۷

۹-۷ تنش در مخزن‌های جدار نازک پرفشار یکی از موارد مهم کاربرد تحلیل تنش صفحه‌ای برای مخزن‌های جدار نازک پرفشار است. چون دیواره این مخزن‌ها مقاومت کمی در برابر خمش دارد، می‌توان فرض کرد نیروهای داخلی وارد بر هر قسمت دیواره بر سطح مخزن مماس‌اند (شکل ۷-۴۸). لذا، تنش‌های حاصل وارد بر یک جزء دیواره در صفحه مماس بر سطح مخزن قرار دارند. تحلیل تنش در مخزن‌های جدار نازک پرفشار را فقط برای دو نوع متداول زیر انجام می‌دهیم: مخزن‌های پرفشار استوانه‌ای و مخزن‌های پرفشار کروی (شکل‌های ۷-۴۹ و ۷-۵۰).



شکل ۴۸-۷

۹۳-۷ حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده در یک نقطه بحرانی از لوله آلومینیومی، با  $\sigma_{UT} = 75 \text{ MPa}$  و  $\sigma_{UC} = 150 \text{ MPa}$  روی داده است. با استفاده از معیار مور تنش برشی،  $\tau_0$  را که به ازای آن باید انتظار گسیختگی داشت بیابید.



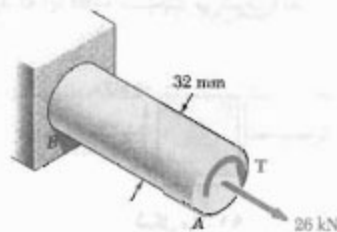
شکل م-۹۳

۹۴-۷ حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده در یک نقطه بحرانی از قطعه آلومینیومی روی داده است. برای این قطعه،  $\sigma_{UT} = 70 \text{ MPa}$  و  $\sigma_{UC} = 170 \text{ MPa}$ . با استفاده از معیار مور، تنش برشی  $\tau_0$  را برای شکست قطعه بیابید.



شکل م-۹۴

۹۵-۷ میله آلومینیومی نشان داده شده از آلیاژی با  $\sigma_{UT} = 60 \text{ MPa}$  و  $\sigma_{UC} = 120 \text{ MPa}$  ساخته شده است. با استفاده از معیار مور، مقدار گشتاور T را که به ازای آن باید انتظار گسیختگی داشت بیابید.



شکل م-۹۵

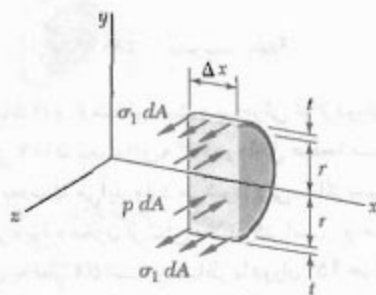
۹۶-۷ میله‌ای از آلیاژ آلومینیوم، با  $\sigma_{UT} = 70 \text{ MPa}$  و  $\sigma_{UC} = 175 \text{ MPa}$  ساخته شده است. اگر مقدار T گشتاورهای وارده را آهسته افزایش دهیم، با استفاده از معیار مور، تنش برشی  $\tau_0$  را که به ازای آن باید انتظار گسیختگی داشت بیابید.

برای تعیین تنش حلقه‌ای  $\sigma_r$ ، قسمتی از مخزن و محتویات آن را که توسط صفحه  $xy$  و دو صفحه موازای با صفحه  $yz$ ، به فاصله  $\Delta x$  از هم، محدود شده است جدا می‌کنیم (شکل ۵۲-۷). نیروهای موازی با محور  $x$  که بر این جسم آزاد اثر می‌کند متشکل‌اند از نیروهای جزئی داخلی  $\sigma_r dA$  و نیروهای جزئی فشاری  $p dA$  که، به ترتیب، بر دیواره جسم آزاد و سیال داخل آن وارد می‌شوند. فشار پیمانه‌ای سیال (فشار داخلی منهای فشار اتمسفر) است. برآیند نیروی‌های داخلی برابر است با  $\sigma_r$  ضرب در مساحت مقطع عرضی دیواره  $(2\pi r \Delta x)$  و برآیند نیروهای فشاری برابر است  $p$  ضرب در مساحت  $2\pi r \Delta x$ . معادله تعادل  $\sum F_x = 0$  را می‌نویسیم:

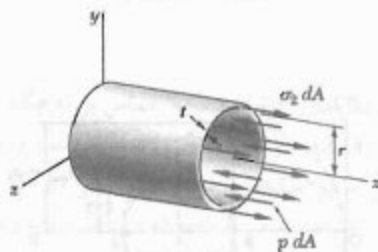
$$\sum F_x = 0 : \quad \sigma_r (2\pi r \Delta x) - p (2\pi r \Delta x) = 0$$

در نتیجه،

$$\sigma_r = \frac{pr}{t} \quad (30-7)$$



شکل ۵۲-۷

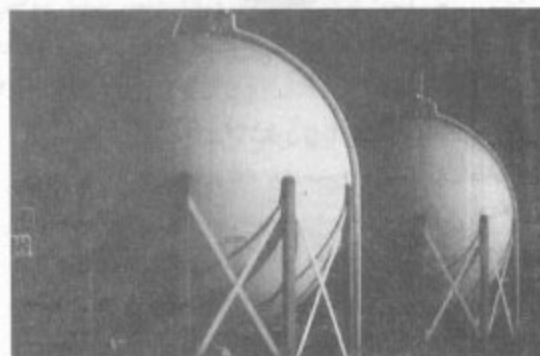


شکل ۵۳-۷

برای تعیین تنش طولی  $\sigma_x$ ، مخزن را با صفحه‌ای عمود بر محور  $x$  برش می‌دهیم و جسم آزاد متشکل از بدنه مخزن و محتویات آن را در سمت چپ صفحه برش در نظر می‌گیریم (شکل ۵۴-۷). نیروهای وارد بر این جسم آزاد متشکل‌اند از

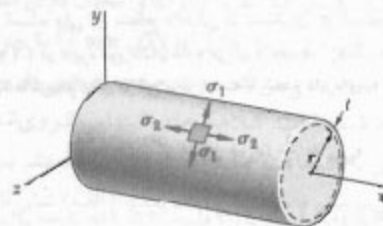


شکل ۴۹-۷



شکل ۵۰-۷

مخزن پر فشار استوانه‌ای با شعاع داخلی  $r$  و ضخامت دیواره  $t$  را که حاوی سیال پر فشار است در نظر بگیرید (شکل ۵۱-۷). می‌خواهیم تنش‌های وارد بر جزء کوچکی از دیواره را که جوانب آن، به ترتیب، به موازات و عمود بر محور استوانه‌اند بیابیم. به علت تقارن مخزن و محتویات آن، واضح است که تنش برشی بر این جزء وارد نمی‌شود. لذا، تنش‌های قائم  $\sigma_r$  و  $\sigma_x$  نشان داده شده در شکل ۵۱-۷ تنش‌های اصلی‌اند. تنش  $\sigma_r$  را تنش حلقه‌ای می‌گویند، زیرا از نوع تنش موجود در حلقه‌هایی است که برای محکم کردن تکه‌های یک بشکه چوبی به کار می‌روند؛ تنش  $\sigma_x$  را تنش طولی می‌گویند.



شکل ۵۱-۷

حال، یک مخزن کروی با شعاع داخلی  $r$  و با ضخامت دیواره  $t$  را، که حاوی سیال با فشار پیمانه‌ای  $p$  است، در نظر می‌گیریم. به‌علت تقارن، تنش‌های وارد بر چهار وجه جزء کوچکی از دیواره با هم برابرند (شکل ۵۵-۷):

$$\sigma_1 = \sigma_2 \quad (۳۵-۷)$$



شکل ۵۵-۷

برای تعیین این مقدار تنش، مخزن را با یک صفحه‌گذرا از مرکز  $C$  مخزن می‌بریم و جسم آزاد بدنه مخزن و محتویات داخل آن را در سمت چپ این بُرش در نظر می‌گیریم (شکل ۵۶-۷). معادله تعادل این جسم آزاد مانند معادله تعادل شکل ۵۳-۷ است. در نتیجه، برای یک مخزن کروی،

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (۳۶-۷)$$

\* با استفاده از شعاع متوسط مقطع دیواره،  $r_m = r + \frac{1}{2}t$ ، در محاسبه برابند نیروهای وارد بر آن مقطع، مقدار دقیق‌تر زیر برای تنش طولی به‌دست می‌آید:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2t} \frac{1}{1 + t/2r} \quad (۳۱-۷)$$

ولی، برای مخزن جدار نازک پرفشار، جمله  $t/2r$  آنقدر کوچک است که در طراحی و تحلیل مهندسی می‌توان از معادله (۳۱-۷) استفاده کرد. اگر مخزن پرفشار جدار نازک نباشد ( $t/2r$  کوچک نباشد)، تنش‌های  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  در عرض دیواره تغییر می‌کنند و آنها را باید با استفاده از نظریه الاستیسته محاسبه کرد.

\*\* باید توجه داشت که گرچه تنش اصلی سوم در سطح خارجی مخزن صفر است، ولی در سطح داخلی آن مساوی  $-p$  است، و با نقطه  $(\sigma, \tau)$  در دایره مور نشان داده می‌شود. لذا، در نزدیک سطح داخلی مخزن، ماکزیم تنش برشی برابر است با شعاع دایره‌ای به قطر  $CA$ ، و

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + p) = \frac{pr}{2t} \left(1 + \frac{t}{r}\right)$$

ولی، برای مخزن جدار نازک، جمله  $t/r$  کوچک است و از تغییرات  $\tau_{\max}$  در عرض مقطع دیواره می‌توان صرف‌نظر کرد. این مطلب برای مخزن‌های پرفشارکروی نیز به‌کار می‌رود.

نیروهای جزئی داخلی  $\sigma_1 da$  و نیروهای جزئی فشاری  $p da$  که، به‌ترتیب، بر دیواره جسم آزاد و سیال داخل آن وارد می‌شوند. مساحت مقطع سیال  $\pi r^2$ ، و مساحت دیواره  $2\pi r t$  است. حال معادله تعادل زیر را می‌نویسیم\*

$$\sum F_x = 0 : \quad \sigma_1 (2\pi r t) - p(\pi r^2) = 0$$

در نتیجه،

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2t} \quad (۳۱-۷)$$

از معادله‌های (۳۰-۷) و (۳۱-۷) دید، می‌شود که تنش حلقه‌ای  $\sigma_2$  دو برابر تنش طولی  $\sigma_1$  است:

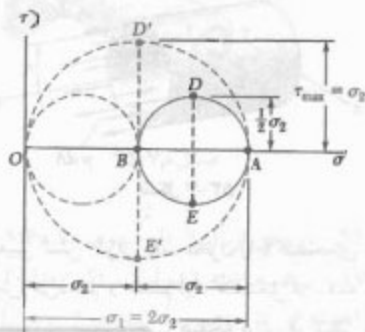
$$\sigma_2 = 2\sigma_1 \quad (۳۲-۷)$$

با رسم دایره مورگذرا از نقاط  $A$  و  $B$  که، به‌ترتیب، متناظر با تنش‌های اصلی  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  هستند (شکل ۵۴-۷)، و با توجه به اینکه ماکزیم تنش برشی "داخل صفحه" مساوی شعاع این دایره است، داریم:

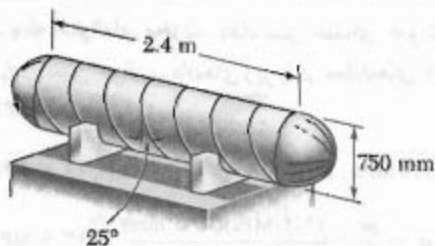
$$\tau_{\max} (\text{داخل صفحه}) = \frac{1}{2} \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (۳۳-۷)$$

این تنش با نقاط  $D$  و  $E$  متناظر است و بر جزئی که از دوران جزء اولیه در شکل ۵۱-۷ تحت زاویه  $45^\circ$  در داخل صفحه مماس بر سطح مخزن به‌دست می‌آید وارد می‌شود. ولی، ماکزیم تنش برشی وارد بر دیواره مخزن از تنش بالا بزرگتر است، و مساوی شعاع دایره‌ای به قطر  $OA$  است و متناظر با دوران  $45^\circ$  حول یک محور طولی و خارج از صفحه تنش است.\* داریم:

$$\tau_{\max} = \sigma_1 = \frac{pr}{2t} \quad (۳۴-۷)$$



شکل ۵۴-۷



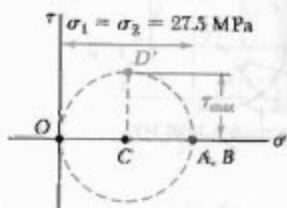
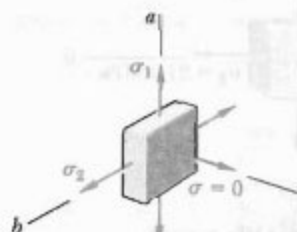
حل

الف. کلاهک کروی. داده‌های زیر را در معادله ۳۶-۷ قرار می‌دهیم:

$$p = 1.2 \text{ MPa}, t = 8 \text{ mm}, r = 375 - 8 = 367 \text{ mm}$$

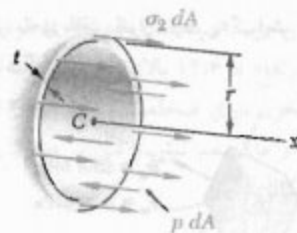
$$\sigma_1 = \sigma_r = \frac{pr}{2t} = \frac{(1.2 \text{ MPa})(367 \text{ mm})}{2(8 \text{ mm})}$$

$$\sigma = 27.5 \text{ MPa} \quad \leftarrow$$



برای تنش‌های "داخل صفحه" مماس بر کلاهک، دایره مور به نقطه (A, B) روی محور افقی تبدیل می‌شود و تمام تنش‌های برشی "داخل صفحه" صفرند. تنش اصلی سوم در سطح کلاهک صفر است و متناظر با نقطه O می‌باشد. در دایره مور به قطر OA، نقطه D' ماکزیمم تنش برشی را نشان می‌دهد؛ این تنش در صفحاتی که با صفحه مماس بر کلاهک زاویه ۴۵° دارند به وجود می‌آید.

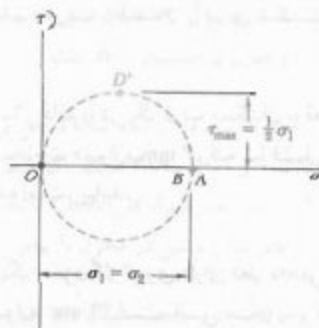
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} (27.5 \text{ MPa}) \Rightarrow \tau_{\max} = 13.75 \text{ MPa}$$



شکل ۵۶-۷

چون تنش‌های اصلی  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  با هم برابرند، دایره مور برای تبدیلات تنش در صفحه مماس بر سطح مخزن به یک نقطه تبدیل می‌شود (شکل ۵۷-۷)؛ در نتیجه، تنش قائم "داخل صفحه" ثابت است و ماکزیمم تنش برشی "داخل صفحه" صفر است. ولی، ماکزیمم تنش برشی در دیواره مخزن صفر نیست، و مساوی شعاع دایره‌ای به قطر OA است و متناظر با دوران ۴۵° خارج از صفحه تنش است. داریم:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{pr}{2t} \quad (37-7)$$

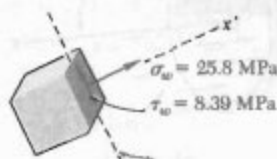


شکل ۵۷-۷

مسئله نمونه ۵-۷

یک مخزن هوای فشرده مطابق شکل، با دو کلاف نگه داشته شده است؛ طرح یکی از کلاف‌ها طوری است که نیروی طولی بر مخزن وارد نمی‌کند. بدنه استوانه‌ای مخزن دارای قطر خارجی ۷۵۰ mm است و از یک ورق فولادی ۱۰ mm با جوش لب به لب در امتداد مارپیچی که با یک صفحه عرضی زاویه ۲۵° دارد ساخته شده است. کلاهک‌های انتهایی کروی‌اند و دارای دیواره‌ای با ضخامت یکسان ۸ mm هستند. برای فشار پیمانه‌ای داخلی ۱.۲ MPa، مطلوب است: (الف) تنش قائم و تنش برشی ماکزیمم دو کلاهک‌های کروی؛ (ب) تنش در امتداد عمود بر جوش مارپیچی و موازی آن.

چون  $X'$  زیر محور افقی قرار دارد،  $\sigma_w$  گرایش دارد جزء را در جهت پادساعتگرد بچرخاند.



جوش

### مسائل

۷-۹۸ یک مخزن گاز کروی فولادی دارای قطر خارجی ۶ m و ضخامت دیواره ۹ mm است. اگر فشار داخلی ۵۰۰ kPa باشد، ماکزیمم تنش قائم و ماکزیمم تنش برشی در مخزن را بیابید.

۷-۹۹ ماکزیمم فشار پیمانه‌ای در یک مخزن فولادی کروی ۸ MPa است. قطر خارجی مخزن ۲۵۰ mm و ضخامت دیواره‌اش ۶ mm است. اگر تنش نهایی در فولاد مخزن ۴۰۰ MPa باشد، ضریب اطمینان را برای شکست ناشی از کشش بیابید.

۷-۱۰۰ تنش قائم را در یک توپ بسکتبال با قطر خارجی ۲۴۰ mm و ضخامت دیواره ۳ mm، که تا فشار پیمانه‌ای ۶۳ kPa باد شده است، بیابید.

۷-۱۰۱ یک مخزن گاز کروی دارای قطر داخلی ۴/۵ m و ضخامت دیواره ۲۲ mm است. این مخزن از فولاد، با  $E = ۲۰۰$  GPa و  $\nu = ۰.۲۹$ ، ساخته شده است. اگر فشار پیمانه‌ای در مخزن از صفر تا ۱.۷ MPa افزایش یابد، مطلوب است: (الف) ماکزیمم تنش قائم در محفظه، (ب) افزایش قطر مخزن.

۷-۱۰۲ مخزن کروی تحت فشار دارای قطر خارجی ۳ m و با ضخامت دیواره ۱۲ mm است. اگر  $\sigma_{all} = ۸۰$  MPa،  $E = ۲۰۰$  GPa و  $\nu = ۰.۲۹$ ، مطلوب است: (الف) فشار پیمانه‌ای مجاز، (ب) افزایش متناظر قطر مخزن.

۷-۱۰۳ یک مخزن کروی پر فشار دارای قطر خارجی ۷۵۰ mm است و از فولاد با تنش نهایی  $\sigma_{all} = ۴۰۰$  MPa ساخته شده است. اگر ضریب اطمینان ۴ باشد و فشار پیمانه‌ای را بتوان تا ۴۳ MPa افزایش داد، کمترین ضخامت دیواره را بیابید.

ب. بدنه استوانه‌ای مخزن. ابتدا، تنش حلقه‌ای  $\sigma_1$  و تنش طولی  $\sigma_2$  را تعیین می‌کنیم. داده‌های زیر را در معادله‌های ۷-۳۰ و ۷-۳۲ قرار می‌دهیم:

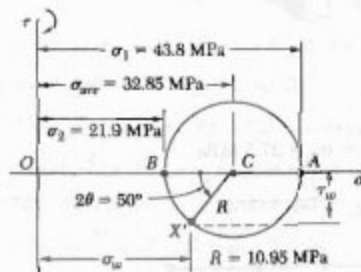
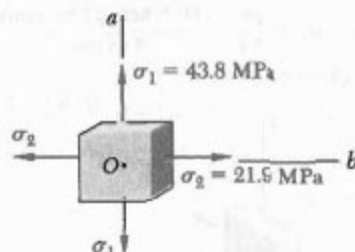
$$p = ۱.۲ \text{ MPa}, t = ۱۰ \text{ mm}, r = ۳۷۵ - ۱۰ = ۳۶۵ \text{ mm}$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{(۱.۲ \text{ MPa})(۳۶۵ \text{ mm})}{(۱۰ \text{ mm})} = ۴۳.۸ \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} \sigma_1 = ۲۱.۹ \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ave} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = ۳۲.۸۵ \text{ MPa}$$

$$R = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = ۱۰.۹۵ \text{ MPa}$$



تنش‌ها در جوش. با توجه به اینکه تنش حلقه‌ای و تنش طولی تنش‌های اصلی‌اند، دایره مور را مطابق شکل رسم می‌کنیم.

جزئی که دارای وجه موازی با جوش است از دوران  $۲۵^\circ$  پادساعتگرد وجه عمود بر محور  $Ob$  به دست می‌آید. لذا، نقطه  $X'$  که متناظر با مولفه‌های تنش وارد بر جوش است از دوران پادساعتگرد شعاع  $CB$  تحت زاویه  $2\theta = ۵۰^\circ$  به دست می‌آید.

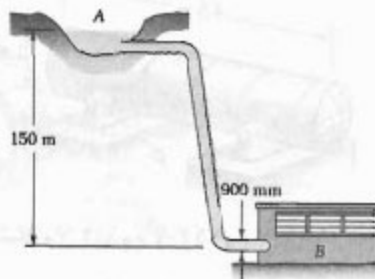
$$\sigma_w = \sigma_{ave} - R \cos ۵۰^\circ = ۳۲.۸۵ - ۱۰.۹۵ \cos ۵۰^\circ$$

$$\sigma_w = +۲۵.۸ \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$

$$\tau_w = R \sin ۵۰^\circ = ۱۰.۹۵ \sin ۵۰^\circ$$

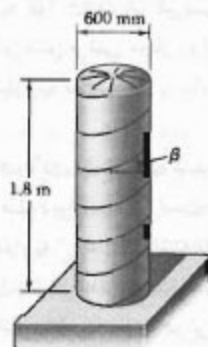
$$\tau_w = ۸.۳۹ \text{ MPa} \quad \blacktriangleleft$$





شکل م ۷-۱۰ و م ۷-۱۰۹

۷-۱۱۰ قسمت استوانه‌ای مخزن هوای فشرده‌ای از ورق با ضخامت ۸ mm ساخته شده است. این ورق در امتداد یک مارپیچ که با افق زاویه  $\beta = 30^\circ$  دارد جوش شده است. اگر تنش قائم مجاز برای جوش ۷۵ MPa باشد، ماکزیم فشار پیمانه‌ای را که مخزن می‌تواند تحمل کند بیابید.

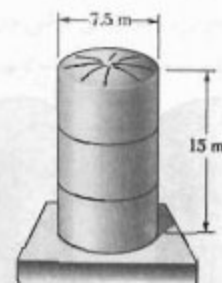


شکل م ۷-۱۱۰ و م ۷-۱۱۱

۷-۱۱۱ قسمت استوانه مخزن هوای فشرده‌ای از ورق با ضخامت ۶ mm ساخته شده است. این ورق در امتداد یک مارپیچ که با افق زاویه  $\beta = 30^\circ$  دارد جوش شده است. فشار پیمانه‌ای که تنش برشی ۳۰ MPa را به موازات جوش ایجاد می‌کند بیابید.

۷-۱۱۲ مخزن پرفشار نشان داده شده دارای ضخامت دیواره ۹ mm است. دره‌هایی که جوش لب به لب شده‌اند با یک صفحه عرضی زاویه  $\beta = 20^\circ$  می‌سازند. برای فشار پیمانه‌ای ۵۸۰ kPa (مطلوبت: الف) تنش قائم در امتداد عمود بر جوش، (ب) تنش برشی به موازات جوش.

۷-۱۰۴ وقتی مخزن ذخیره نشان داده شده تا ظرفیت کامل خود پر می‌شود تا ارتفاع ۱۴/۶ m بالای قاعده‌اش آب می‌گیرد. اگر قسمت پایین مخزن دارای ضخامت دیواره ۱۶ mm باشد، ماکزیم تنش قائم و ماکزیم تنش برشی در مخزن را بیابید. (چگالی آب =  $1000 \text{ kg/m}^3$ ).



شکل م ۷-۱۰۴

۷-۱۰۵ مطلوبیت ماکزیم فشار داخلی که یک مخزن استوانه‌ای با قطر خارجی ۱/۷۵ m و ضخامت دیواره ۱۶ mm می‌تواند تحمل کند در صورتی که بدانیم تنش قائم نهایی فولاد مخزن ۴۵۰ MPa و ضریب اطمینان ۵/۰ است.

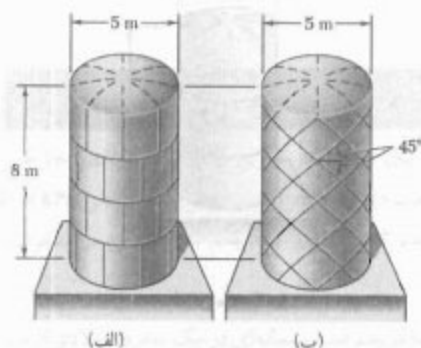
۷-۱۰۶ مخزن ذخیره نشان داده شده شامل پروپان مایع تحت فشار ۱/۵ MPa و دمای  $38^\circ\text{C}$  است. اگر قطر خارجی مخزن ۳۲۰ mm و ضخامت دیواره‌اش ۳ mm باشد، ماکزیم تنش قائم و ماکزیم تنش برشی در مخزن را بیابید.

۷-۱۰۷ مخزن ذخیره حجیم نشان داده شده در شکل ۷-۴۹ دارای قطر خارجی ۳/۵ m و ضخامت دیواره ۲۰ mm است. وقتی فشار داخلی مخزن ۱/۲ MPa است، ماکزیم تنش قائم و ماکزیم تنش برشی در مخزن را بیابید.

۷-۱۰۸ یک لوله پر فشار فولادی دارای قطر خارجی ۹۰۰ mm و ضخامت دیواره ۱۲ mm است. این لوله به مخزن A و ایستگاه مولد B متصل است. اگر چگالی آب  $1000 \text{ kg/m}^3$  باشد، ماکزیم تنش قائم و ماکزیم تنش برشی در لوله را در شرایط استاتیکی بیابید.

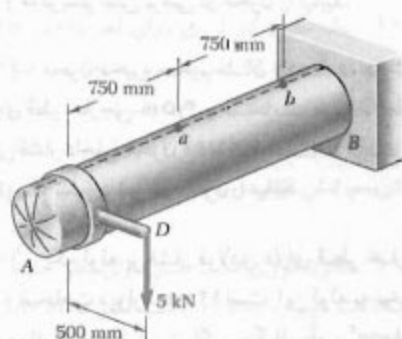
۷-۱۰۹ یک لوله پرفشار فولادی، با قطر خارجی ۹۰۰ mm به مخزن A و ایستگاه مولد B متصل است. اگر چگالی آب  $1000 \text{ kg/m}^3$  و تنش قائم مجاز در فولاد ۸۵ MPa باشد، کمترین ضخامت دیواره لوله را بیابید.

۱۱۷-۷ صفحات چهارگوش، هر یک به ضخامت ۱۶ mm، را می‌توان به یکی از دو روش نشان داده شده خم کرد و به هم جوش داد تا قسمت استوانه‌ای یک مخزن هوای فشرده به‌دست آید. اگر تنش قائم مجاز عمود بر جوش ۶۵ MPa باشد، ماکزیم فشار پیمانه‌ای مجاز را در هر حالت بیابید.



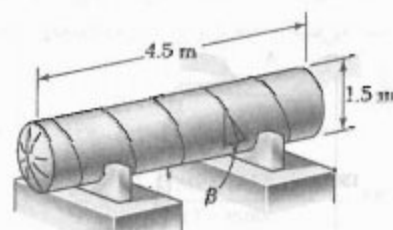
شکل م-۱۱۷

۱۱۸-۷ مخزن  $AB$ ، که حاوی هوای فشرده است، دارای قطر داخلی ۴۵۰ mm و ضخامت دیواره ۶ mm است. اگر فشار پیمانه‌ای در مخزن ۱٫۲ MPa باشد. ماکزیم تنش قائم و ماکزیم تنش برشی داخل صفحه را در نقطه  $a$  روی لبه فوقانی مخزن بیابید.



شکل م-۱۱۸

۱۱۹-۷ در مسئله ۱۱۸-۷، ماکزیم تنش قائم و ماکزیم تنش برشی داخل صفحه را در نقطه  $b$  روی لبه فوقانی مخزن بیابید.

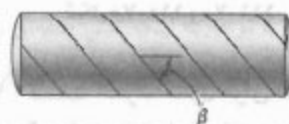


شکل م-۱۱۲ و م-۱۱۳ و م-۱۱۴

۱۱۳-۷ مخزن پر فشار نشان داده شده دارای ضخامت دیواره ۹ mm است. درزهایی که جوش لب به لب شده‌اند با یک صفحه عرضی زاویه  $\beta$  می‌سازند. اگر بخواهیم تنش برشی موازی جوش برای فشار پیمانه‌ای ۵۸۰ kPa از ۹ MPa بیشتر نشود، گستره مقادیر  $\beta$  را بیابید.

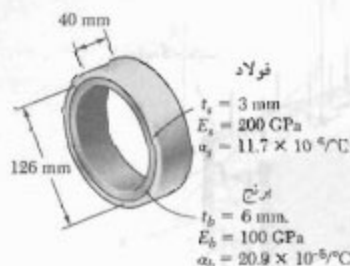
۱۱۴-۷ مخزن پر فشار نشان داده شده دارای ضخامت دیواره ۹ mm است. درزهایی که جوش لب به لب شده‌اند با یک صفحه عرضی زاویه  $\beta = ۲۵^\circ$  دارند. اگر تنش قائم مجاز عمود بر جوش ۱۲۵ MPa و تنش برشی مجاز موازی جوش ۷۰ MPa باشد، ماکزیم فشار پیمانه‌ای مجاز را بیابید.

۱۱۵-۷ مخزن فولادی نشان داده شده دارای قطر داخلی ۷۵۰ mm و ضخامت دیواره ۹ mm است. اگر درز جوش با محور طول مخزن زاویه  $\beta = ۵۰^\circ$  داشته باشد و فشار پیمانه‌ای در مخزن ۱٫۲ MPa باشد، مطلوبست: (الف) تنش قائم عمود بر درز جوش، (ب) تنش برشی موازی جوش.



شکل م-۱۱۵ و م-۱۱۶

۱۱۶-۷ مخزن فولادی نشان داده شده از جوشکاری نواری در امتداد یک مارپیچ ساخته شده است. این مارپیچ با صفحه عرضی زاویه  $\beta$  دارد. مطلوبست ماکزیم مقدار  $\beta$  به طوری که تنش قائم در امتداد عمود بر درز جوش بیشتر از ۸۵ درصد تنش ماکزیم در مخزن نباشد.



شکل م-۱۲۴

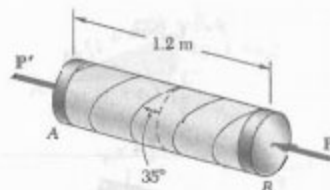
۷-۱۲۵ مسئله ۷-۱۲۴ را با این فرض حل کنید که حلقه برنجی به ضخامت ۳ mm و حلقه فولادی به ضخامت ۶ mm باشد.

### ۷-۱۰ تبدیل کرنش صفحه‌ای

حالت، تبدیل کرنش را برای دوران محورهای مختصات بررسی می‌کنیم. در این تحلیل، ابتدا کرنش صفحه‌ای بررسی می‌شود؛ یعنی، حالت‌هایی که تغییر شکل ماده در صفحات موازی روی می‌دهند، و در هریک از این صفحات به‌طور یکسان هستند. اگر محور  $x$  را عمود بر این صفحات انتخاب کنیم،  $\epsilon_x = \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 0$  و فقط مولفه‌های کرنش  $\epsilon_y$ ،  $\epsilon_z$  و  $\gamma_{yz}$  باقی می‌مانند. این حالت در صفحه‌ای روی می‌دهد که لبه‌های آن تحت بارهای یکنواخت توزیعی قرار دارند و تکیه‌گاه‌های ثابت هموار و صلبی مانع انقباض جانبی آن می‌شوند (شکل ۷-۵۸). این حالت در میله‌ای با طول بی‌نهایت که جوانب آن تحت بارهای یکنواخت توزیعی قرار دارند نیز روی می‌دهد زیرا، به‌علت تقارن، اجزای واقع در یک صفحه عرضی نمی‌توانند به‌طرف خارج آن صفحه حرکت کنند. این مدل ایده‌آلی نشان می‌دهد که در یک میله بلند واقعی که تحت بارهای عرضی یکنواخت توزیعی قرار دارد (شکل ۷-۵۹)، در هر مقطع عرضی که خیلی نزدیک انتهای میله نباشد حالت کرنش صفحه‌ای به‌وجود می‌آید.\*

\* باید توجه داشت که حالت کرنش صفحه‌ای و حالت تنش صفحه‌ای (قسمت ۷-۱) به‌طور همزمان روی نمی‌دهند، به‌جز برای مواد ایده‌آلی که ضریب پواسون آنها صفر است. قیدهای مربوط به اجزای صفحه شکل ۷-۵۸ و میله شکل ۷-۵۹ باعث می‌شوند تنش  $\sigma_z$  مخالف صفر باشد از طرف دیگر، برای صفحه شکل ۷-۳، نبود هرگونه قید جانبی باعث می‌شود  $\sigma_z = 0$  و  $\epsilon_z \neq 0$ .

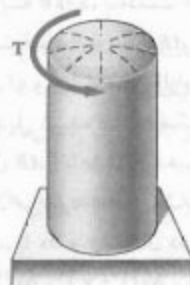
۷-۱۲۰ یک مخزن پر فشار با قطر داخلی ۲۵۰ mm و ضخامت دیواره ۶ mm از قسمتی به طول ۱/۲ m که به‌طور ماریج به لوله AB جوش شده ساخته شده است. این مخزن دارای دو صفحه صلب انتهایی است. فشار پیمانه‌ای داخل مخزن ۲ MPa است و نیروهای محوری مرکزی  $P$  و  $P'$  با مقدار ۴۵ kN بر این دو صفحه وارد می‌شود. مطلوب است: (الف) تنش قائم عمود بر جوش، (ب) تنش برشی موازی جوش.



شکل م-۱۲۰

۷-۱۲۱ مسئله ۷-۱۲۰ را با این فرض حل کنید که مقدار  $P$  تا ۱۴۰ kN افزایش یابد.

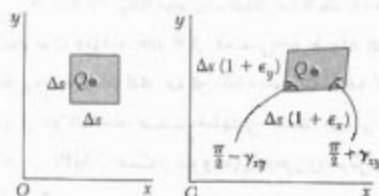
۷-۱۲۲ گشتاور  $T = ۱۲ \text{ kN.m}$  بر انتهای مخزنی حاوی هوا با فشار ۸ MPa وارد می‌شود. اگر قطر داخلی مخزن ۱۸۰ mm و ضخامت دیواره‌اش ۱۲ mm باشد، ماکزیمم تنش قائم و ماکزیمم تنش برشی در مخزن را بیابید.



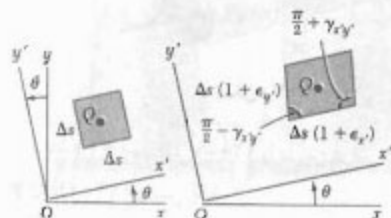
شکل م-۱۲۲ و م-۱۲۳

۷-۱۲۳ مخزن نشان داده شده دارای قطر داخلی ۱۸۰ mm و ضخامت دیواره ۱۲ mm است. اگر مخزن حاوی هوا با فشار ۸ MPa باشد، مطلوب است مقدار گشتاور  $T$  ورده به‌طوری که ماکزیمم تنش قائم در مخزن ۷۵ MPa باشد.

۷-۱۲۴ یک حلقه برنجی با قطر خارجی ۱۲۶ mm در دمای ۱۰۰°C دقیقاً داخل یک حلقه فولادی با قطر داخلی ۱۲۶ mm جازده می‌شود. اگر دمای حلقه‌ها تا ۵۲°C افزایش یابد، مطلوب است: (الف) تنش کششی در حلقه فولادی، (ب) فشار وارده از حلقه برنجی بر حلقه فولادی. برای دمای ضخامت دیواره حلقه‌های برنجی و فولادی، به ترتیب، ۶ mm و ۳ mm است.



شکل ۶۰-۷

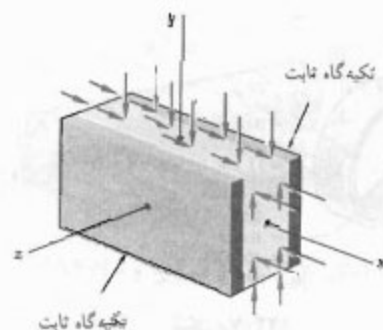


شکل ۶۱-۷

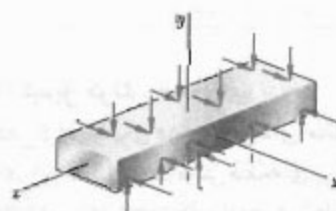
ابتدا، عبارت کرنش قائم  $\epsilon(\theta)$  را در امتداد خط  $AB$ ، که با محور  $x$  زاویه  $\theta$  دارد، به دست می آوریم. برای انجام این کار، مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ، که وتر آن  $AB$  است (شکل ۶۲-۷ الف)، و مثلث متفرج الزاویه  $A'B'C'$  را که مثلث  $ABC$  به آن تبدیل شده است (شکل ۶۲-۷ ب) در نظر می گیریم. اگر طول  $AB$  را با  $\Delta s$  نشان دهیم، طول  $A'B'$  به صورت  $[\Delta s(1 + \epsilon(\theta))]$  بیان می شود. به طور مشابه، اگر طول اضلاع  $AC$  و  $CB$  را، به ترتیب، با  $\Delta x$  و  $\Delta y$  نشان دهیم، طول  $A'C'$  و  $C'B'$  به صورت  $[\Delta x(1 + \epsilon_x)]$  و  $[\Delta y(1 + \epsilon_y)]$  بیان می شود. از شکل ۶۰-۷ دیده می شود که زاویه قائمه  $C$  در شکل ۶۲-۷ الف تبدیل به زاویه  $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$  شده است (شکل ۶۲-۷ ب). با کاربرد قانون کسینوس ها برای مثلث  $A'B'C'$  داریم:

$$\begin{aligned} (A'B')^2 &= (A'C')^2 + (C'B')^2 - 2(A'C')(C'B') \times \\ &\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) [\Delta s]^2 [1 + \epsilon(\theta)]^2 \\ &= (\Delta x)^2 (1 + \epsilon_x)^2 + (\Delta y)^2 (1 + \epsilon_y)^2 \\ &\quad - 2(\Delta x)(1 + \epsilon_x)(\Delta y)(1 + \epsilon_y) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}\right) \end{aligned}$$

(۳۸-۷)

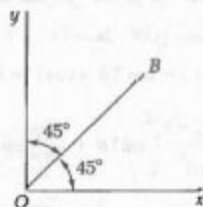


شکل ۵۸-۷



شکل ۵۹-۷

فرض می کنیم حالت کرنش صفحه ای در نقطه  $Q$  (با  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ ) وجود دارد، و با مولفه های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  تعریف می شود. در قسمت های ۱۲-۲ و ۱۴-۲ دیدیم که در این حالت یک جزء چهارگوش با مرکز  $Q$ ، که اضلاع آن به طول  $\Delta x$  موازی محورهای  $x$  و  $y$  هستند، به صورت متوازی الاضلاعی در می آید که اضلاع آن، با طول های  $[\Delta x(1 + \epsilon_x)]$  و  $[\Delta y(1 + \epsilon_y)]$ ، با هم زوایای  $\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy}$  و  $\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}$  می سازند (شکل ۶۰-۷). بر اثر تغییر شکل اجزای دیگری که در صفحه  $xy$  قرار دارند، جزء تحت بررسی نیز ممکن است دستخوش حرکت صلب گونه شود، اما این حرکت هیچ تأثیری بر تعیین کرنش ها در نقطه  $Q$  ندارد و آن را در این تحلیل نادیده می گیریم. می خواهیم مولفه های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  مربوط به دستگاه مرجع  $x'y'$  را، که از دوران محورهای  $x$  و  $y$  تحت زاویه  $\theta$  به دست می آید، بر حسب  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  و  $\theta$  بیابیم. همانطور که در شکل ۶۱-۷ نشان داده شده است، این مولفه های جدید کرنش یک متوازی الاضلاع را نشان می دهند. این متوازی الاضلاع از تبدیل مربعی به دست آمده است که اضلاع آن با اضلاع موازی با محورهای  $x'$  و  $y'$  به آن تبدیل شده است.



شکل ۶۳-۷

با این رابطه می‌توان کرنش برشی مربوط به زوج محوره‌های قائم را برحسب کرنش‌های قائم، که در امتداد این محورها و نیمساز آنها اندازه‌گیری می‌شود، به‌دست آورد. این رابطه در استخراج فعلی نقش اصلی دارد و از آن برای تعیین کرنش‌های برشی در قسمت ۷-۱۳ استفاده خواهد شد.

در این قسمت می‌خواهیم مولفه‌های کرنش در دستگاه مرجع  $x'y'$  (شکل ۶۱-۷) را برحسب زاویه  $\theta$  و مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$ ،  $\gamma_{xy}$  در دستگاه  $xy$  بیان کنیم. برای این منظور، می‌گوییم کرنش قائم  $\epsilon_{x'}$  در امتداد محور  $x'$  با معادله (۷-۴۱) داده می‌شود. با استفاده از روابط مثلثاتی (۷-۳) و (۷-۴)، معادله ۷-۴۱ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (7-44)$$

با قرار دادن  $\theta + 90^\circ$  به جای  $\theta$ ، کرنش قائم در امتداد محور  $y'$  به‌دست می‌آید. چون  $\cos(2\theta + 180^\circ) = -\cos 2\theta$  و  $\sin(2\theta + 180^\circ) = -\sin 2\theta$

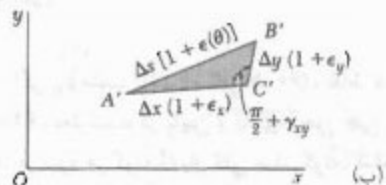
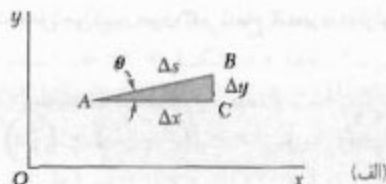
$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (7-45)$$

معادله‌های (۷-۴۴) و (۷-۴۵) را عضو به عضو با هم جمع می‌کنیم و رابطه زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_x + \epsilon_y \quad (7-46)$$

در حالت کرنش صفحه‌ای  $\epsilon_z = \epsilon_{z'} = 0$ ، بنابراین، طبق معادله ۷-۴۶، در این حالت مجموع کرنش‌های قائم مربوط به یک جزء مکعبی از وضعیت آن جزء مستقل است.\*

\* به زیرنویس صفحه ۷۵ نگاه کنید.



شکل ۶۲-۷

از شکل ۶۲-۷ الف،

$$\Delta x = (\Delta s) \cos \theta \quad \Delta y = (\Delta s) \sin \theta \quad (7-39)$$

چون  $\sin \gamma_{xy}$  خیلی کوچک است،

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} + \gamma_{xy} \right) = -\sin \gamma_{xy} \approx -\gamma_{xy} \quad (7-40)$$

با جایگذاری از معادله‌های (۷-۳۹) و (۷-۴۰) در معادله (۷-۳۸)، و با توجه به رابطه  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  با صرفنظر از جمله‌های مرتبه دوم در  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$ ،  $\gamma_{xy}$ ، داریم:

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (7-41)$$

برای تعیین کرنش قائم  $\epsilon(\theta)$  در جهت اختیاری  $AB$  برحسب مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$ ،  $\gamma_{xy}$  و زاویه  $\theta$  که  $AB$  با محور  $x$  می‌سازد از معادله (۷-۴۱) می‌توان استفاده کرد. این معادله برای  $\theta = 0^\circ$  و  $\theta = 90^\circ$ ، به ترتیب، می‌دهد  $\epsilon(0^\circ) = \epsilon_x$  و  $\epsilon(90^\circ) = \epsilon_y$ . با جایگذاری  $\theta = 45^\circ$  در معادله (۷-۴۱)، کرنش قائم در جهت نیمساز زاویه بین محوره‌های  $x$  و  $y$  (خط  $OB$  در شکل ۷-۶۳) به‌دست می‌آید:

$$\epsilon_{OB} = \epsilon(45^\circ) = \frac{1}{2} (\epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy}) \quad (7-42)$$

از معادله (۷-۴۲)،

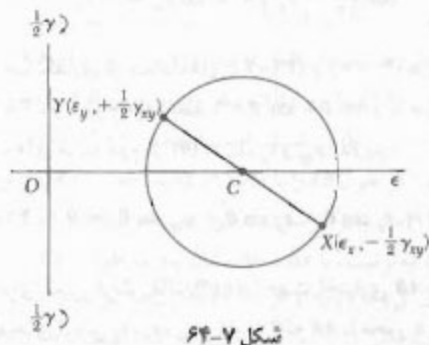
$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (7-43)$$

قطر  $XY$ ، مرکز  $C$  دایره مور را برای کرنش صفحه‌ای مشخص می‌کنیم. طول  $C$  و شعاع  $R$  دایره، به ترتیب، عبارتند از:

$$\epsilon_{ave} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad \text{و} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

(۵۰-۷)

اگر  $\gamma_{xy}$  مثبت باشد (شکل ۶۰-۷)، نقاط  $X$  و  $Y$  در شکل ۶۴-۷، به ترتیب، در پایین و بالای محور افقی رسم می‌شوند. اما، در نبود هر گونه دوران کلی صلب‌گونه، ضلعی از جزء داده شده در شکل ۶۰-۷ که به  $\epsilon_x$  مربوط است به‌طور پادساعتگرد می‌چرخد، و ضلع مربوط به  $\epsilon_y$  به‌طور ساعتگرد می‌چرخد. لذا، اگر تغییر شکل برشی باعث دوران ساعتگرد یک ضلع شود، نقطه متناظر در دایره مور کرنش صفحه‌ای در بالای محور افقی رسم می‌شود، و اگر تغییر شکل باعث دوران پادساعتگرد شود، نقطه متناظر در زیر محور افقی رسم می‌شود. این قرارداد با قراردادی که برای ترسیم دایره مور در تنش صفحه‌ای به کار رفت هم‌آهنگ است.



شکل ۶۴-۷

نقاط  $A$  و  $B$  که نقطه تقاطع دایره مور با محور افقی‌اند متناظر با کرنش‌های لینی  $\epsilon_{max}$  و  $\epsilon_{min}$  هستند (شکل ۶۵-۷ الف):

$$\epsilon_{max} = \epsilon_{ave} + R \quad \text{و} \quad \epsilon_{min} = \epsilon_{ave} - R \quad (۵۱-۷)$$

که در آن،  $\epsilon_{ave}$  و  $R$  با معادله‌های (۵۰-۷) تعریف می‌شوند. چون کرنش برشی برای  $A$  و  $B$  صفر است، مقدار متناظر  $\theta_p$  برای زاویه  $\theta$  به‌دست می‌آید. با قرار دادن  $\gamma_{xy} = 0$  در معادله (۲۹-۷)، داریم:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (۵۲-۷)$$

با جایگذاری  $\theta + 45^\circ$  به جای  $\theta$  در معادله (۴۴-۷)، عبارت کرنش قائم در امتداد نیمساز زاویه بین محوره‌های  $x'$  و  $y'$  (خط  $OB'$ ) به‌دست می‌آید. چون  $\sin(2\theta + 90^\circ) = \cos 2\theta$  و  $\cos(2\theta + 90^\circ) = -\sin 2\theta$  داریم:

$$\epsilon_{OB'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (۴۷-۷)$$

با نوشتن معادله (۴۳-۷) برای محوره‌های  $x'$  و  $y'$ ، کرنش برشی  $\gamma_{x'y'}$  برحسب  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$  و نیمساز  $\epsilon_{OB'}$  به‌دست می‌آید:

$$\gamma_{x'y'} = 2\epsilon_{OB'} - (\epsilon_x' + \epsilon_y') \quad (۴۸-۷)$$

از جایگذاری از معادله‌های (۴۶-۷) و (۴۷-۷) در معادله (۴۸-۷)، نتیجه می‌شود:

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \quad (۴۹-۷)$$

معادله‌های (۴۴-۷)، (۴۵-۷) و (۴۹-۷) معادله‌هایی هستند که تبدیل کرنش صفحه‌ای را هنگام دوران محورها در صفحه کرنش تعریف می‌کنند. از تقسیم جمله‌های معادله (۴۹-۷) بر ۲، داریم:

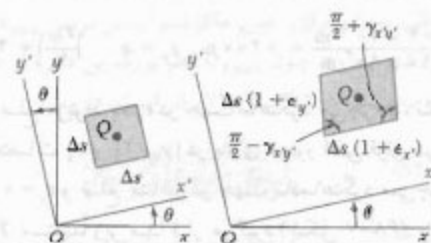
$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (۴۹'-۷)$$

دیده می‌شود که معادله‌های (۴۴-۷)، (۴۵-۷) و (۴۹'-۷)، که برای تبدیل کرنش صفحه‌ای هستند، خیلی شبیه معادله‌هایی هستند که در قسمت ۷-۲ برای تبدیل تنش صفحه‌ای به‌دست آمدند. گرچه با جایگذاری کرنش‌های قائم به جای تنش‌های قائم متناظر می‌توان معادله‌های مذکور را از معادله‌های تبدیل تنش صفحه‌ای (قسمت ۷-۲) به‌دست آورد، ولی باید توجه داشت که تنش‌های برشی  $\tau_{xy}$  و  $\tau_{yx}$  را باید با نصف کرنش‌های برشی متناظر، یعنی، به ترتیب، با  $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$  و  $\frac{1}{2}\gamma_{yx}$  جایگزین کرد.

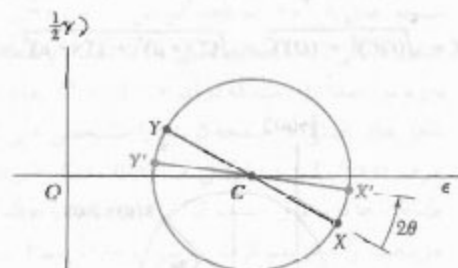
### ۷-۱۱ دایره مور برای کرنش صفحه‌ای

چون معادله‌های تبدیل کرنش صفحه‌ای هم شکل معادله‌های تبدیل تنش صفحه‌ای‌اند، برای تحلیل کرنش صفحه‌ای می‌توان از دایره مور استفاده کرد. با در نظر گرفتن مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  که تبدیل داده شده در شکل ۶۰-۷ را مشخص می‌کنند، نقطه  $X(\epsilon_x - \frac{1}{2}\gamma_{xy})$  را، که طول آن مساوی کرنش قائم  $\epsilon_x$  و عرض آن مساوی منفی نصف کرنش برشی  $\gamma_{xy}$  است، و نقطه  $Y(\epsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy})$  را مشخص می‌کنیم (شکل ۶۴-۷). با ترسیم





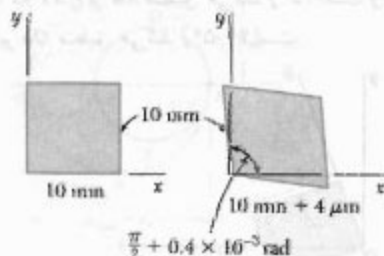
شکل ۶۱-۷ (تکراری)



شکل ۶۶-۷

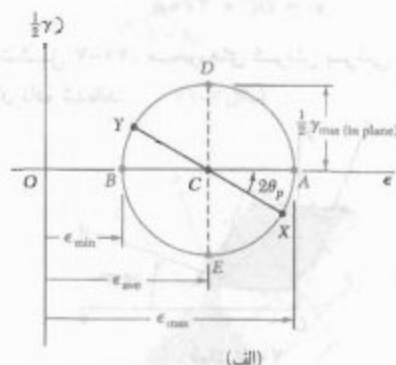
## مثال ۴-۷

در ماده‌ای با حالت کرنش صفحه‌ای، ضلع افقی مربعی به ابعاد  $10 \times 10$  mm به اندازه  $4 \mu\text{m}$  افزایش می‌یابد، ضلع عمودی‌اش تغییر نمی‌کند و زاویه گوشه چپ پایینی به اندازه  $0.4 \times 10^{-3}$  rad افزایش می‌یابد (شکل ۶۷-۷). مطلوب است: (الف) محورهای اصلی و کرنش‌های اصلی، (ب) ماکزیمم کرنش برشی و کرنش قائم متناظر.

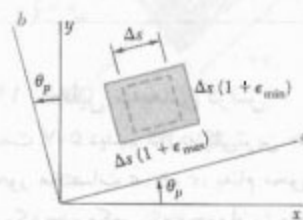


شکل ۶۷-۷

محورهای متناظر  $a$  و  $b$  در شکل ۶۵-۷ ب محورهای اصلی کرنش اند. زاویه  $\theta_p$  امتداد محور اصلی  $Oa$  در شکل ۶۵-۷ با  $OX$  که نقطه  $A$  در شکل ۶۵-۷ الف است، مشخص می‌کند و برابر است با نصف زاویه  $XCA$  که در دایره مور اندازه‌گیری می‌شود. دورانی که  $Ox$  را بر  $Oa$  منطبق می‌کند همسو با دورانی است که قطر  $XY$  دایره مور را بر قطر  $AB$  منطبق می‌کند.



(الف)



(ب)

شکل ۶۵-۷

از قسمت ۲-۱۴ به‌خاطر داریم که، در حالت تغییر شکل الاستیک یک ماده همگن و همسانگرد، طبق قانون هوک،  $\epsilon_{xy} = 0$ ،  $\gamma_{xy} = 0$  و وقتی  $\epsilon_{xy} = 0$ ،  $\gamma_{xy} = 0$ ، یعنی، محورهای اصلی کرنش بر محورهای اصلی تنش منطبق‌اند. ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه" با نقاط  $D$  و  $E$  در شکل ۶۵-۷ الف مشخص شده است و با قطر دایره مور برابر است. با توجه به رابطه دوم (۷-۵۰)،

$$\gamma_{\max(\text{داخل صفحه})} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (53-7)$$

گفتنی است نقاط  $X'$  و  $Y'$  که مولفه‌های کرنش متناظر با دوران محورهای مختصات تحت زاویه  $\theta$  را مشخص می‌کنند (شکل ۶۱-۷)، از دوران قطر  $XY$  دایره مور در همان جهت تحت زاویه  $2\theta$  به‌دست می‌آیند (شکل ۶۶-۷).

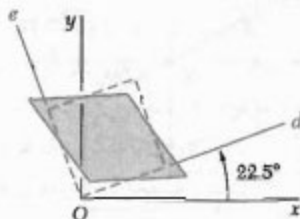
(ب) ماکزیمم کرنش برشی، نقاط  $D$  و  $E$  ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه" را مشخص می‌کنند. چون کرنش‌های اصلی دارای علامت‌های مخالف‌اند، این کرنش ماکزیمم کرنش برشی واقعی است (به قسمت ۷-۱۲ نگاه کنید). می‌نویسیم:

$$\frac{\gamma_{\max}}{\gamma} = R = 283 \mu \quad \gamma_{\max} = 566 \mu$$

کرنش‌های قائم متناظر هر دو عبارتند از:

$$\epsilon' = OC = 200 \mu$$

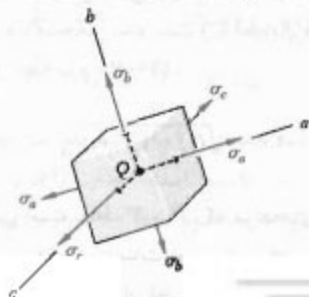
در شکل ۷-۷۰، محورهای کرنش برشی ماکزیمم نشان داده شده‌اند.



شکل ۷-۷۰

#### ۷-۱۲ تحلیل سه‌بعدی کرنش

در قسمت ۷-۵ دیدیم که، در کلی‌ترین حالت تنش، می‌توانیم سه محور مختصات  $a, b, c$  به نام محورهای اصلی تنش را بیابیم. یک جزء مکعبی که وجوه آن بر محورهای مذکور عمود است فاقد تنش برشی است (شکل ۷-۲۷)؛ یعنی،  $\tau_{ab} = \tau_{bc} = \tau_{ca} = 0$ . همانطور که در قسمت قبل گفته شد، قانون هوک برای تنش و کرنش برشی وقتی به کار می‌رود که تغییر شکل از نوع الاستیک، و ماده همگن و همسانگرد باشد. در این حالت،  $\gamma_{ab} = \gamma_{cb} = \gamma_{ca} = 0$  و محورهای  $a, b, c$  محورهای اصلی کرنش نیز هستند. مکعب کوچکی با ضلع واحد و به مرکز  $Q$ ، که وجوه آن بر محورهای اصلی عمودند، به صورت مکعب مستطیل با اضلاع  $1 + \epsilon_a$ ،  $1 + \epsilon_b$  و  $1 + \epsilon_c$  درمی‌آید (شکل ۷-۲۷).



شکل ۷-۲۷ (تکراری)

(الف) محورهای اصلی و کرنش‌های اصلی. ابتدا،

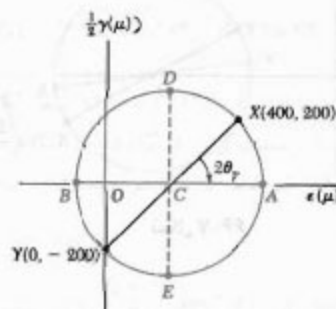
مختصات نقاط  $X$  و  $Y$  را روی دایره مور کرنش می‌یابیم:

$$\epsilon_x = +\frac{4 \times 10^{-4} \text{ m}}{10 \times 10^{-4} \text{ m}} = +400 \mu \quad \epsilon_y = 0 \quad \left| \frac{\gamma_{xy}}{\gamma} \right| = 200 \mu$$

چون ضلع مربوط به  $\epsilon_x$  در جهت ساعتگرد می‌چرخد، نقطه  $X$  به مختصات  $\epsilon_x$  و  $|\gamma_{xy}|/2$  در بالای محور افقی قرار می‌گیرد. چون  $\epsilon_y = 0$  و ضلع متناظر در جهت پادساعتگرد می‌چرخد، نقطه  $Y$  مستقیماً زیر مبدأ قرار می‌گیرد (شکل ۷-۶۸). با رسم قطر  $XY$ ، مرکز  $C$  دایره مور و شعاع  $R$  آن را می‌یابیم:

$$OC = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = 200 \mu \quad OY = 200 \mu$$

$$R = \sqrt{(OC)^2 + (OY)^2} = \sqrt{(200 \mu)^2 + (200 \mu)^2} = 283 \mu$$



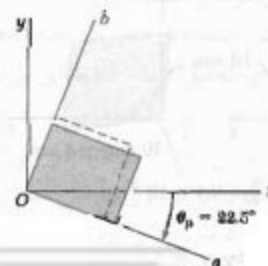
شکل ۷-۶۸

کرنش‌های اصلی با طول نقاط  $A$  و  $B$  مشخص می‌شوند. می‌نویسیم:

$$\epsilon_a = OA = OC + R = 200 \mu + 283 \mu = 483 \mu$$

$$\epsilon_b = OB = OC - R = 200 \mu - 283 \mu = -83 \mu$$

محورهای اصلی  $Oa$  و  $Ob$  در شکل ۷-۶۹ نشان داده شده‌اند. چون  $OC = OY$ ، زاویه  $C$  در مثلث  $OCY$  مساوی  $45^\circ$  است. لذا، زاویه  $\theta_p$  که  $XY$  را بر  $AB$  منطبق می‌کند  $(45^\circ)$  است و زاویه  $\theta_p$  که  $Ox$  را بر  $Oa$  منطبق می‌کند  $(22.5^\circ)$  است.



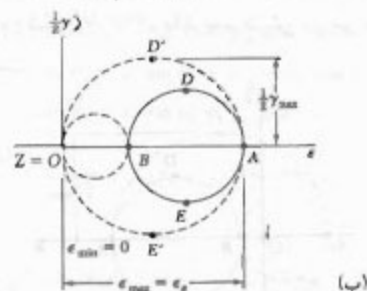
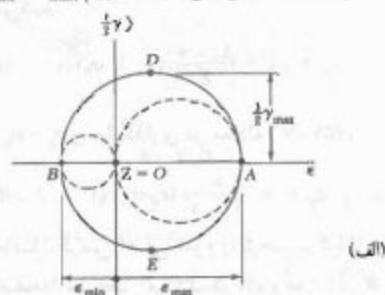
شکل ۷-۶۹

در اینجا، تحلیل سه بعدی کرنش با استفاده از دایره مور فقط برای دوران حول محوره‌های اصلی است (در تحلیل تنش نیز این طور بود) و برای تعیین ماکزیمم کرنش برشی  $\gamma_{max}$  در نقطه  $Q$  به کار می‌رود. چون  $\gamma_{max}$  با قطر بزرگترین دایره از میان سه دایره داده شده در شکل ۷۳-۷ برابر است، داریم:

$$\gamma_{max} = |\epsilon_{max} - \epsilon_{min}| \quad (۷۴-۷)$$

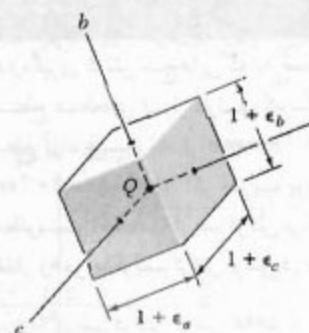
که در آن  $\epsilon_{max}$ ،  $\epsilon_{min}$  مقدار جبری کرنش‌های ماکزیمم و مینیمم در نقطه  $Q$  هستند.

با مراجعه به حالت خاص کرنش صفحه‌ای، و انتخاب محوره‌های  $x$  و  $y$  در صفحه کرنش،  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{xy} = 0$ ، لذا، محور  $z$  یکی از سه محور اصلی در  $Q$  است، و نقطه متناظر در دایره مور مبدأ  $O$  است، که در آن  $\epsilon = \gamma = 0$ . اگر نقاط  $A$  و  $B$ ، که محوره‌های اصلی در صفحه کرنش را مشخص می‌کنند، در دو طرف  $O$  قرار گیرند (شکل ۷۴-۷ الف)، کرنش‌های اصلی متناظر، ماکزیمم و مینیمم کرنش‌های قائم در نقطه  $Q$  را نشان می‌دهند، و ماکزیمم کرنش برشی با ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه" متناظر با نقاط  $E$  و  $D$  برابر است. اگر  $A$  و  $B$  در یک طرف  $O$  باشند (شکل ۷۴-۷ ب)، یعنی اگر  $\epsilon_b$  و  $\epsilon_a$  هم علامت باشند، ماکزیمم کرنش برشی با نقاط  $D'$  و  $E'$  روی دایره‌ای به قطر  $OA$  مشخص می‌شود و داریم  $\gamma_{max} = \epsilon_{max}$ .

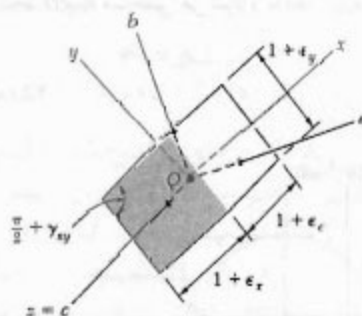


شکل ۷۴-۷

\* توجه کنید که چهار وجه دیگر جزء به صورت مستطیلی می‌مانند و اشباع موازی محور  $c$  تغییر نمی‌کنند.

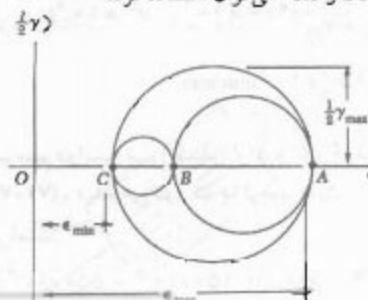


شکل ۷۱-۷



شکل ۷۲-۷

اگر جزء شکل ۷۱-۷ حول یکی از محوره‌های اصلی در  $Q$ ، مثلاً محور  $c$ ، بچرخد (شکل ۷۲-۷)، برای تعیین مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$ ،  $\epsilon_z$  و  $\gamma_{xy}$ ،  $\gamma_{yz}$ ،  $\gamma_{zx}$  به وجوه عمود بر محور  $c$  می‌توان از روش تبدیل کرنش صفحه‌ای که قبلاً گفته شد استفاده کرد زیرا در این روش هیچ یک از مولفه‌های دیگر کرنش وارد نمی‌شود\*. لذا، می‌توان دایره مور گذرا از نقاط  $A$  و  $B$  متناظر با محوره‌های اصلی  $a$  و  $b$  را رسم کرد (شکل ۷۳-۷). برای تبدیل کرنش هنگام چرخش جزء حول محوره‌های  $a$  و  $b$ ، به ترتیب، از دایره‌ای با قطرهای  $CA$  و  $BC$  می‌توان استفاده کرد.



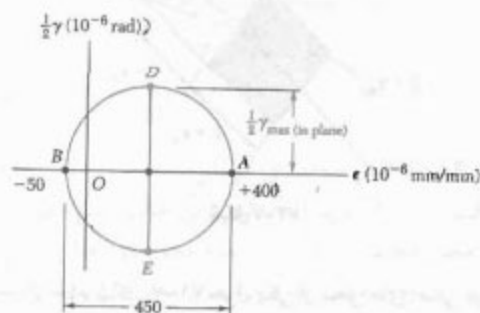
شکل ۷۳-۷

## مثال ۷-۵

طبق اندازه‌گیری کرنش سنج‌هایی که به صورت‌های مختلف روی سطح قطعه‌ای قرار دارند، کرنش‌های اصلی روی سطح آزاد عبارتند از  $\epsilon_a = +400 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$  و  $\epsilon_b = -50 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$ . اگر ضریب پواسون قطعه  $\nu = 0.3$  باشد، مطلوبست: (الف) ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه" (ب) مقدار واقعی ماکزیمم کرنش برشی در نزدیک سطح قطعه.

(الف) ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه". دایره مور گذر از نقاط  $A$  و  $B$  متناظر با کرنش‌های اصلی داده شده را رسم می‌کنیم (شکل ۷-۷۶). ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه" با نقاط  $D$  و  $E$  مشخص می‌شود و با قطر دایره مور برابر است:

$$\gamma_{\max (\text{داخل صفحه})} = 400 \times 10^{-6} + 50 \times 10^{-6} = 450 \times 10^{-6} \text{ rad}$$



شکل ۷-۷۶

(ب) ماکزیمم کرنش برشی. ابتدا، کرنش اصلی سوم،  $\epsilon_c$  را می‌یابیم. چون در سطح قطعه حالت تنش صفحه‌ای وجود دارد، از معادله (۷-۵۹) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \epsilon_c &= -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_a + \epsilon_b) \\ &= -\frac{0.3}{1-0.3} (400 \times 10^{-6} - 50 \times 10^{-6}) \\ &= -150 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

با ترسیم دایره مور گذرا از  $A$  و  $C$  و گذرا از  $B$  و  $C$  (شکل ۷-۷۷)، دیده می‌شود که ماکزیمم کرنش برشی با قطر  $CA$  برابر است:

$$\gamma_{\max} = 400 \times 10^{-6} + 150 \times 10^{-6} = 550 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

اکنون، حالت خاص تنش صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم که در یک ورق نازک یا در سطح آزاد یک عضو ساختمانی یا مکانیکی روی می‌دهد (قسمت ۷-۱). با انتخاب محورهای  $x$  و  $y$  در صفحه تنش،  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ، یعنی، محور  $z$  محور اصلی تنش است. همانطور که قبلاً دیدیم، برای تغییر شکل الاستیک و ساده همگن و همسانگرد، از قانون هوک نتیجه می‌شود  $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ ؛ لذا، محور  $z$  نیز محور اصلی کرنش است و برای تحلیل تبدیل کرنش در صفحه  $xy$  می‌توان از دایره مور استفاده کرد. البته، هم‌اکنون خواهیم دید از قانون هوک نتیجه نمی‌شود  $\epsilon_z = 0$ ؛ یعنی، حالت تنش صفحه‌ای، به‌طور کلی، حالت کرنش صفحه‌ای را نتیجه نمی‌دهد.\*

محورهای اصلی داخل صفحه تنش را با  $a$  و  $b$  و محور اصلی عمود بر آن صفحه را با  $c$  نشان می‌دهیم و در معادله‌های (۷-۲۸) قرار می‌دهیم  $\sigma_x = \sigma_a$ ،  $\sigma_y = \sigma_b$  و  $\sigma_z = 0$ ، در نتیجه،

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{\nu \sigma_b}{E} \quad (7-55)$$

$$\epsilon_b = -\frac{\nu \sigma_a}{E} + \frac{\sigma_b}{E} \quad (7-56)$$

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{E} (\sigma_a + \sigma_b) \quad (7-57)$$

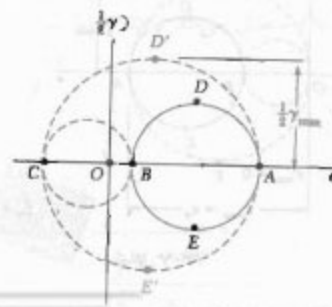
معادله‌های (۷-۵۵) و (۷-۵۶) را عضو به عضو با هم جمع می‌کنیم:

$$\epsilon_a + \epsilon_b = \frac{1-\nu}{E} (\sigma_a + \sigma_b) \quad (7-58)$$

با حل  $\sigma_a + \sigma_b$  و جایگذاری در معادله (۷-۵۷)،

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_a + \epsilon_b) \quad (7-59)$$

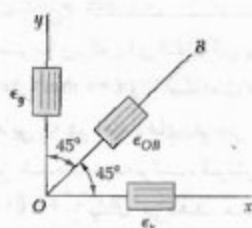
رابطه حاصل، کرنش اصلی سوم را برحسب کرنش‌های اصلی "داخل صفحه" مشخص می‌کند. در دایره مور، اگر  $B$  بین  $A$  و  $C$  قرار گیرد (شکل ۷-۷۵)، ماکزیمم کرنش برشی با قطر  $CA$  برابر است.



شکل ۷-۷۵

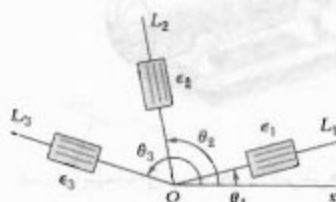
با اندازه‌گیری کرنش قائم در امتداد محورهای  $x$  و  $y$  گذرا از یک نقطه می‌توان مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$  را در آن نقطه اندازه گرفت. با اندازه‌گیری کرنش قائم سوم، که در امتداد نیمساز  $OB$  انجام می‌شود، کرنش برشی  $\gamma_{xy}$  را از معادله ۷-۲۳ نیز می‌توان به‌دست آورد (شکل ۷-۷۹):

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (۷-۲۳)$$



شکل ۷-۷۹

با اندازه‌گیری کرنش‌های قائم در امتداد سه خط دلخواه گذرا از یک نقطه (شکل ۷-۸۰)، می‌توان  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  را در آن نقطه به‌دست آورد.



شکل ۷-۸۰

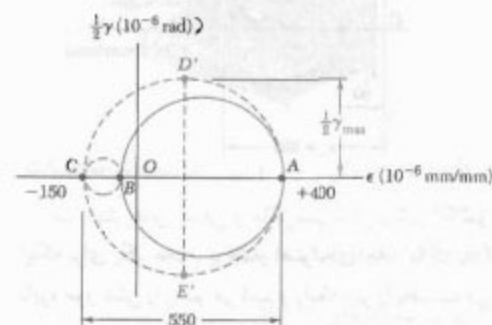
زاویه هر یک از این سه خط با محور  $x$  را با  $\theta_1$ ،  $\theta_2$  و  $\theta_3$  و کرنش‌های متناظر را با  $\epsilon_1$ ،  $\epsilon_2$  و  $\epsilon_3$  نشان می‌دهیم و آنها را در معادله (۷-۴۱) جایگذاری می‌کنیم. در نتیجه،

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ \epsilon_2 &= \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ \epsilon_3 &= \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (۷-۴۰)$$

با حل همزمان این معادله‌ها،  $\epsilon_x$  و  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  به‌دست می‌آیند.\*

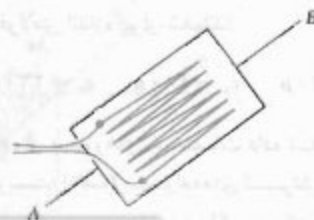
\* باید دانست سطح آزاد که اندازه‌گیری‌های کرنش روی آن انجام می‌شوند یک حالت تنش صفحه‌ای است، در حالی که معادله‌های (۷-۴۱) و (۷-۲۳) برای حالت کرنش صفحه‌ای استنتاج شدند. البته، همانطور که قبلاً دیده شد، خط عمود بر سطح آزاد یک محور اصلی کرنش است و استنتاج‌های داده شده در قسمت ۷-۱۰ صحت دارند.

گفتنی است گرچه  $\epsilon_B$  و  $\epsilon_H$  دارای علامت‌های مخالف‌اند، ولی ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه" کرنش برشی ماکزیمم واقعی را نشان نمی‌دهد.

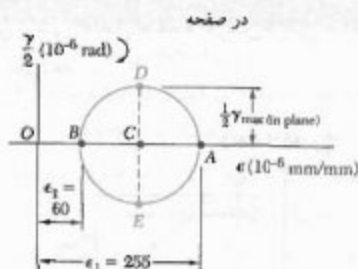


شکل ۷-۷۷

۷-۱۳ اندازه‌گیری‌های کرنش: گلبزرگ کرنش  
کرنش قائم را در هر جهت دلخواه روی سطح یک ساختمان یا مکانیکی می‌توان تعیین کرد. برای این منظور می‌توان دو علامت  $A$  و  $B$  را روی یک خط با امتداد دلخواه نشان زد و طول پاره خط  $AB$  را قبل از بارگذاری و پس از بارگذاری اندازه گرفت. اگر  $L$  طول تغییر شکل نداده  $AB$  و  $\delta$  تغییر طول آبی باشد، کرنش قائم در امتداد  $AB$  چنین است  $\epsilon_{AB} = \delta/L$ .  
برای اندازه‌گیری دقیق‌تر کرنش قائم، از کرنش سنج الکتریک استفاده می‌شود. این وسیله متشکل است از سیم نازکی با آرایه‌ی داده شده در شکل ۷-۷۸ که به دو تکه کاغذ متصل است. برش اندازه‌گیری کرنش  $\epsilon_{AB}$  یک عضو در امتداد  $AB$ ، این وسیله را می‌توان به سطح عضو متصل می‌کنند، به‌طوری که چین‌های سیم به موازات  $AB$  باشد. وقتی عضو افزایش طول می‌دهد، سیم نیز افزایش طول داده و قطر آن کاهش می‌یابد و باعث افزایش مقاومت الکتریکی وسیله می‌شود. با اندازه‌گیری جریان عبور از کرنش سنج که دقیقاً درجه‌بندی شده است، ضمن افزایش  $\epsilon_{AB}$  می‌توان کرنش را دقیقاً و به‌طور پیوسته اندازه گرفت.



شکل ۷-۷۸



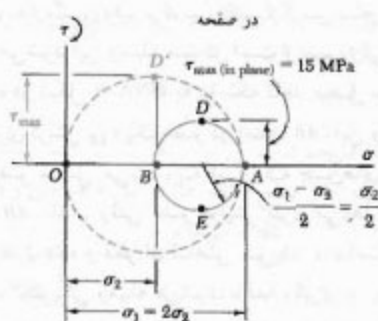
ب. تنش‌های اصلی و ماکزیمم تنش برشی. با توجه به اینکه برای یک مخزن پرفشار استوانه‌ای جدار نازک  $\sigma_1 = 2\sigma_r$  و دایره مور تنش را رسم می‌کنیم و رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\sigma_r = 2\tau_{\max (\text{داخل صفحه})} = 2(15 \text{ MPa}) = 30 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_r = 30 \text{ MPa} \triangleleft$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_r = 2(30 \text{ MPa}) \Rightarrow \sigma_1 = 60 \text{ MPa} \triangleleft$$

ماکزیمم تنش برشی با شعاع یک دایره به قطر  $OA$  برابر است و متناظر با چرخش  $45^\circ$  حول یک محور طولی است:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_1 = \sigma_r = 30 \text{ MPa} \quad \tau_{\max} = 30 \text{ MPa} \triangleleft$$



مسئله نمونه ۷-۷  
با استفاده از گلیبرگ  $60^\circ$ ، کرنش‌های زیر در نقطه  $Q$  روی سطح یک قطعه فولادی اندازه‌گیری شده‌اند:

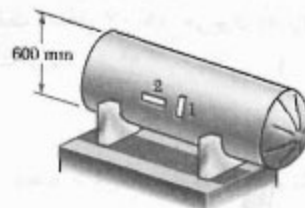
$$\epsilon_1 = 40 \mu \quad \epsilon_2 = 980 \mu \quad \epsilon_3 = 330 \mu$$

با استفاده از محورهای مختصات داده شده، در نقطه  $Q$  مطلوبیت: (الف) مولفه‌های کرنش  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ، (ب) کرنش‌های اصلی، (ج) ماکزیمم کرنش برشی، (از  $\nu = 0.29$  استفاده کنید).

آرایش کرنش سنج‌ها را که برای اندازه‌گیری سه کرنش قائم  $\epsilon_1, \epsilon_2$  و  $\epsilon_3$  به کار می‌رود گلیبرگ کرنش می‌گویند. گلیبرگ مورد استفاده برای اندازه‌گیری کرنش قائم در امتداد محورهای  $x$  و  $y$  و نیمساز آنها را گلیبرگ  $45^\circ$  می‌گویند. گلیبرگ دیگری که اغلب به کار می‌رود گلیبرگ  $60^\circ$  است (به مسئله نمونه ۷-۷ نگاه کنید).

مسئله نمونه ۷-۶

یک مخزن استوانه‌ای، که برای انتقال گاز پرفشار به کار می‌رود، دارای قطر داخلی  $600 \text{ mm}$  و ضخامت دیواره  $18 \text{ mm}$  است. کرنش سنج‌هایی که در امتدادهای عرضی و طولی به سطح مخزن متصل شده‌اند، به ترتیب، کرنش‌های  $255 \times 10^{-6}$  و  $60 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$  را نشان می‌دهند. مدول صلابت مخزن عبارت است از  $G = 77 \text{ GPa}$ . مطلوبیت: (الف) فشار پیمانه‌ای در مخزن، (ب) تنش‌های اصلی و ماکزیمم تنش برشی در دیواره مخزن



حل

الف. فشار پیمانه‌ای در مخزن. کرنش‌های داده شده، کرنش‌های اصلی در سطح مخزن هستند. با ترسیم نقاط  $A$  و  $B$ ، دایره مور کرنش را رسم می‌کنیم. ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه" با قطر این دایره برابر است:

$$\gamma_{\max (\text{داخل صفحه})} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = 255 \times 10^{-6} - 60 \times 10^{-6} = 195 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

طبق قانون هوک،

$$\begin{aligned} \tau_{\max (\text{داخل صفحه})} &= G\gamma_{\max (\text{داخل صفحه})} \\ &= (77 \text{ GPa})(195 \times 10^{-6} \text{ rad}) \\ &= 15 \text{ MPa} \end{aligned}$$

با جایگذاری در معادله (۷-۳۳)،

$$\tau_{\max (\text{داخل صفحه})} = \frac{pr}{4t} \Rightarrow 15 \text{ MPa} = \frac{p(300 \text{ mm})}{4(18 \text{ mm})}$$

در نتیجه،

$$p = 3.6 \text{ MPa} \triangleleft$$



ب. کرنش‌های اصلی. ضلع مربوط به  $\epsilon_x$  به طور پادساعتگرد می‌چرخد. ابتدا نقاط  $X(۴۰$  و  $-۳۷۵)$  و  $Y(۸۶۰$  و  $+۳۷۵)$  و سپس دایره مور را رسم می‌کنیم.

$$\epsilon_{ave} = \frac{1}{2} (۸۶۰ \mu + ۴۰ \mu) = ۴۵۰ \mu$$

$$R = \sqrt{(۳۷۵ \mu)^2 + (۴۱۰ \mu)^2} = ۵۵۶ \mu$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{۳۷۵ \mu}{۴۱۰ \mu} \Rightarrow 2\theta_p = ۴۲,۴^\circ \Rightarrow \theta_p = ۲۱,۲^\circ$$

نقاط  $A$  و  $B$  متناظر با کرنش‌های اصلی‌اند. می‌نویسیم:

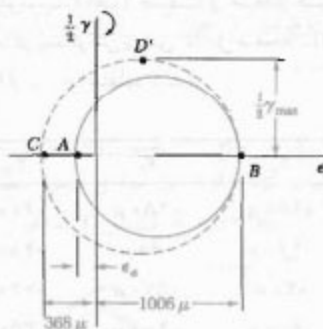
$$\epsilon_a = \epsilon_{ave} - R = ۴۵۰ \mu - ۵۵۶ \mu \quad \epsilon_a = -۱۰۶ \mu \quad \leftarrow$$

$$\epsilon_b = \epsilon_{ave} + R = ۴۵۰ \mu + ۵۵۶ \mu \quad \epsilon_b = +۱۰۰۶ \mu \quad \leftarrow$$

چون روی سطح  $\sigma_z = 0$  از معادله  $(۵۹-۷)$  برای تعیین کرنش اصلی  $\epsilon_c$  استفاده می‌کنیم:

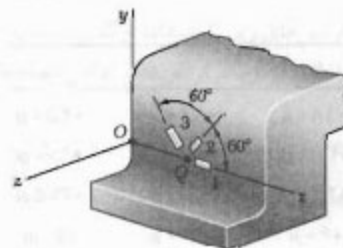
$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_a + \epsilon_b) = -\frac{0,۲۹}{1-0,۲۹} (-۱۰۶ \mu + ۱۰۰۶ \mu)$$

$$\epsilon_c = -۳۶۸ \mu \quad \leftarrow$$



ج. ماکزیمم کرنش برشی. با ترسیم نقطه  $C$  و ترسیم دایره مور گذرا از نقاط  $B$  و  $C$ ، نقطه  $D'$  را به دست آوریم. می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2} \gamma_{max} = \frac{1}{2} (۱۰۰۶ \mu + ۳۶۸ \mu) \Rightarrow \gamma_{max} = ۱۳۷۴ \mu \quad \leftarrow$$



حل

الف. مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  در دستگاه مختصات نشان داده شده،

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = 60^\circ \quad \theta_3 = 120^\circ$$

با جایگذاری در معادله‌های  $(۷-۶)$ ،

$$\epsilon_1 = \epsilon_x (1) + \epsilon_y (0) + \gamma_{xy} (0)(1)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_x (0,۵۰۰)^2 + \epsilon_y (0,۸۶۶)^2 + \gamma_{xy} (0,۸۶۶)(0,۵۰۰)$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_x (-0,۵۰۰)^2 + \epsilon_y (0,۸۶۶)^2 + \gamma_{xy} (0,۸۶۶)(-0,۵۰۰)$$

از حل این معادله‌ها نتیجه می‌شود:

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \quad \epsilon_y = \frac{1}{2} (2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 - \epsilon_1) \quad \gamma_{xy} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_3}{0,۸۶۶}$$

با جایگذاری مقادیر داده شده  $\epsilon_1$ ،  $\epsilon_2$ ،  $\epsilon_3$  داریم:

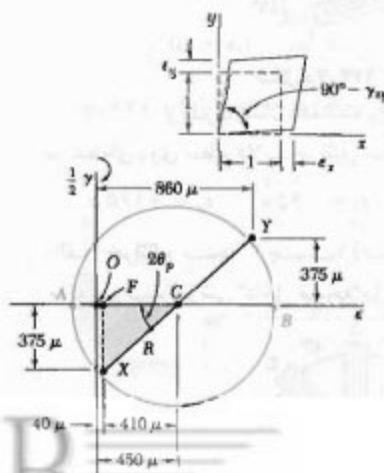
$$\epsilon_x = ۴۰ \mu \quad \epsilon_y = \frac{1}{2} [2(۹۸۰) + 2(۳۳۰) - ۴۰]$$

$$\epsilon_y = +۸۶۰ \mu \quad \leftarrow$$

$$\gamma_{xy} = (۹۸۰ - ۳۳۰)/0,۸۶۶$$

$$\gamma_{xy} = ۷۵۰ \mu \quad \leftarrow$$

این کرنش‌ها روی جزء نشان داده شده‌اند.



## مسائل

۱۲۶-۷ تا ۱۲۹-۷ برای کرنش صفحه‌ای داده شده، از روش‌های قسمت ۷-۱۰ برای تعیین حالت کرنش مربوط به محورها  $x'$  و  $y'$  که تحت زاویه  $\theta$  چرخیده‌اند استفاده کنید.



شکل م-۱۲۶ تا م-۱۲۹

$\theta$	$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$\gamma_{xy}$
۶۰°	$+150 \mu$	$+160 \mu$	$+240 \mu$
۳۰°	$-100 \mu$	$+320 \mu$	۰
۲۵°	$+200 \mu$	$+350 \mu$	$-800 \mu$
۲۵°	۰	$-300 \mu$	$+500 \mu$

۱۳۰-۷ تا ۱۳۳-۷ برای کرنش صفحه‌ای داده شده، از دایره مور برای تعیین حالت کرنش مربوط به محورها  $x'$  و  $y'$  که تحت زاویه  $\theta$  چرخیده‌اند استفاده کنید.

۱۳۴-۷ تا ۱۳۷-۷ حالت کرنش زیر روی سطح یک ورق نازک اندازه‌گیری شده است. اگر سطح ورق بی‌تنش باشد، مطلوب است: (الف) جهت و مقدار کرنش‌های اصلی، (ب) ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه"، (ج) ماکزیمم کرنش برشی (از  $\frac{1}{2}$  استفاده کنید).

	$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$\gamma_{xy}$
۱۳۴-۷	$+160 \mu$	$-480 \mu$	$-600 \mu$
۱۳۵-۷	$-260 \mu$	$-60 \mu$	$+480 \mu$
۱۳۶-۷	$+30 \mu$	$+570 \mu$	$+720 \mu$
۱۳۷-۷	$-600 \mu$	$-400 \mu$	$+250 \mu$

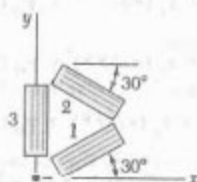
۱۳۸-۷ تا ۱۴۱-۷ برای حالت کرنش صفحه‌ای داده شده، با استفاده از دایره مور مطلوب است: (الف) وضعیت و مقدار کرنش‌های اصلی، (ب) ماکزیمم کرنش "داخل صفحه"، (ج) ماکزیمم کرنش برشی.

	$\epsilon_x$	$\epsilon_y$	$\gamma_{xy}$
۱۳۸-۷	$-180 \mu$	$-260 \mu$	$+350 \mu$
۱۳۹-۷	$+300 \mu$	$+60 \mu$	$+100 \mu$
۱۴۰-۷	$+400 \mu$	$+200 \mu$	$+375 \mu$
۱۴۱-۷	$+60 \mu$	$+240 \mu$	$-50 \mu$

۱۴۲-۷ کرنش‌های زیر با استفاده از گلبرگ نشان داده شده در طی آزمایش یک بازوی مکانیکی به دست آمده‌اند:

$$\epsilon_1 = +600 \mu \quad \epsilon_2 = +450 \mu \quad \epsilon_3 = +75 \mu$$

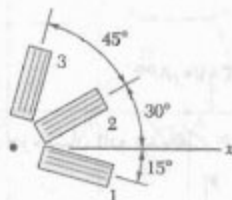
مطلوب است: (الف) کرنش‌های اصلی "داخل صفحه"، (ب) ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه".



شکل م-۱۴۲

۱۴۳-۷ اگر کرنش‌های زیر با استفاده از گلبرگ نشان داده شده به دست آمده باشند، کرنش  $\epsilon_x$  را بیابید:

$$\epsilon_1 = +480 \times 10^{-3} \text{ mm/mm} \quad \epsilon_2 = -120 \times 10^{-3} \text{ mm/mm} \quad \epsilon_3 = +80 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}$$

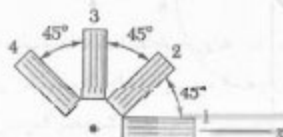


شکل م-۱۴۳

۱۴۴-۷ از گلبرگ نشان داده شده برای تعیین کرنش‌های زیر در نقطه‌ای روی سطح قلاب جرتقیل استفاده شده است:

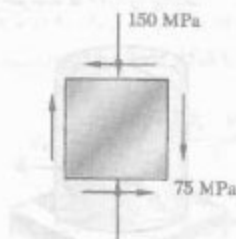
$$\epsilon_1 = +420 \mu \quad \epsilon_2 = -45 \mu \quad \epsilon_3 = +165 \mu$$

(الف) خواننده سنج ۳ چیست؟ (ب) کرنش‌های اصلی و ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه" را بیابید.



شکل م-۱۴۴

۱۴۸-۷ حالت تنش صفحه‌ای داده شده روی سطح یک قطعه روی داده است. اگر  $E = ۲۰۰ \text{ GPa}$  و  $G = ۷۷ \text{ GPa}$ ، مطلوبست جهت و مقدار سه کرنش اصلی: (الف) با تعیین حالت کرنش متناظر از معادله‌های (۲-۴۳) و (۲-۳۸) استفاده کنید؛ و سپس با استفاده از دایره مور کرنش، (ب) با استفاده از دایره مور تنش برای تعیین صفحات اصلی و تنش‌های اصلی و سپس با تعیین کرنش‌های متناظر.



شکل م-۱۴۸

۱۴۹-۷ حالت کرنش زیر روی سطح یک قطعه چدنی روی داده است:

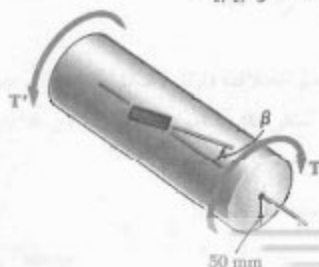
$$\epsilon_1 = -۷۲۰ \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \quad \epsilon_2 = -۴۰۰ \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

$$\gamma = +۶۶۰ \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

اگر  $E = ۷۰ \text{ GPa}$  و  $G = ۲۸ \text{ GPa}$ ، مطلوبست صفحات اصلی و تنش‌های اصلی: (الف) با تعیین حالت تنش صفحه‌ای متناظر از معادله (۲-۳۶) و (۲-۴۳) و دو معادله اول مسئله ۲-۷۵ و سپس با استفاده از دایره مور تنش، (ب) با استفاده از دایره مور کرنش برای تعیین وضعیت و مقدار کرنش‌های اصلی و سپس با تعیین تنش‌های متناظر.

۱۵۰-۷ یک کرنش سنج به شفت آلومینیومی به قطر ۱۰۰ mm تحت زاویه  $\beta = ۲۵^\circ$  با خط موازی محور شفت به آن متصل شده است. اگر  $G = ۷۹ \text{ GPa}$ ، گشتاور  $T$  متناظر با خوانده

را بیابید.  $۳۰۰ \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$

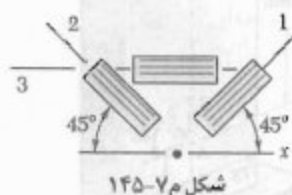


شکل م-۱۵۰

۱۴۵-۷ اگر کرنش‌های زیر با استفاده از گلبرگ نشان داده شده به دست آمده باشند، ماکزیمم کرنش قائم "داخل صفحه" را بیابید.

$$\epsilon_1 = -۵۰ \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \quad \epsilon_2 = +۳۶۰ \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

$$\epsilon_3 = +۳۱۵ \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

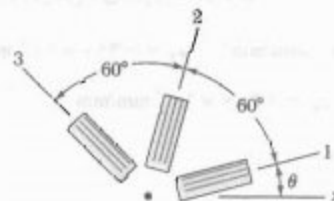


شکل م-۱۴۵

۱۴۶-۷ نشان دهید که مجموع اندازه‌گیری‌های سه کرنش یک گلبرگ  $60^\circ$ ، مستقل از وضعیت گلبرگ است و برابر است با:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3\epsilon_{ave}$$

که در آن  $\epsilon_{ave}$  طول مرکز دایره مور کرنش است.

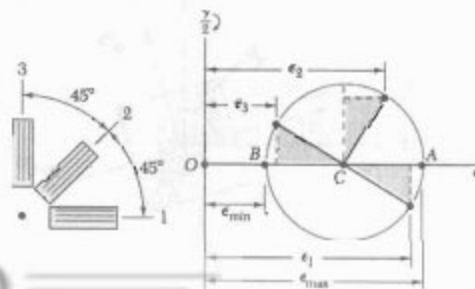


شکل م-۱۴۶

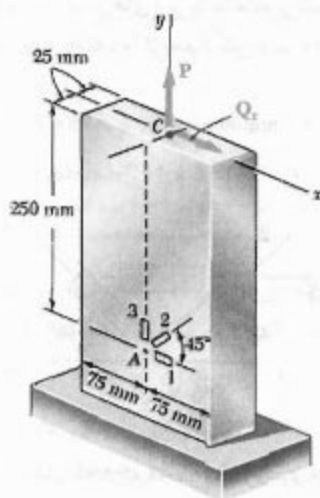
۱۴۷-۷ با استفاده از گلبرگ  $45^\circ$ ، کرنش‌های  $\epsilon_1$ ،  $\epsilon_2$  و  $\epsilon_3$  در نقطه‌ای داده شده‌اند. با استفاده از دایره مور، نشان دهید که کرنش‌های اصلی عبارتند از:

$$\epsilon_{max,min} = \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \pm \frac{1}{\sqrt{3}} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]^{1/2}$$

(راهنمایی: مثلث‌های سایه‌خورده همانندند).



شکل م-۱۴۷



شکل م-۱۵۴

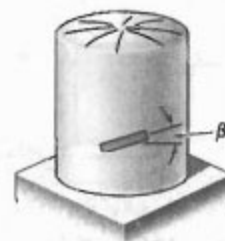
مسئله ۱۵۵-۷ را با این فرض حل کنید که گلبیگ در نقطه A کرنش‌های زیر را نشان دهد:

$$\epsilon_x = -60 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \quad \epsilon_y = +410 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

$$\epsilon_z = +200 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

۱۵۱-۷ مسئله ۷-۱۵۰ را با فرض  $\beta = 35^\circ$  حل کنید.

۱۵۲-۷ از یک کرنش سنج که با افق زاویه  $\beta = 18^\circ$  دارد برای تعیین فشار پیمانه‌ای در مخزن فولادی استوانه‌ای نشان داده شده استفاده می‌شود. دیواره استوانه‌ای مخزن به ضخامت ۶ mm و قطر داخلی آن ۶۰۰ mm است. مخزن از فولاد (  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.30$  ) ساخته شده است. فشار داخل مخزن متناظر با خوانده  $280 \mu$  را بیابید.



شکل م-۱۵۲

۱۵۳-۷ مسئله ۷-۱۵۲ را با فرض  $\beta = 35^\circ$  حل کنید.

۱۵۴-۷ نیروی محوری مرکزی P و نیروی افقی Qx در نقطه C میله مستطیلی وارد شده‌اند. گلبیگ سنج ۴۵° روی سطح میله در نقطه A، کرنش‌های زیر را نشان می‌دهد:

$$\epsilon_x = -75 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \quad \epsilon_y = +300 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

$$\epsilon_z = +250 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

اگر  $E = 200 \text{ GPa}$  و  $\nu = 0.30$ ، مقادیر P و Qx را بیابید.

## مرور و خلاصه فصل ۷

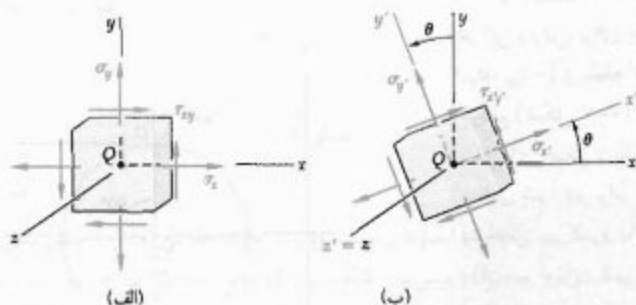
در قسمت اول این فصل، تبدیل تنش را در دوران محورها و کاربرد آنها را در حل مسائل مهندسی بررسی کردیم، و در قسمت دوم همین کار را برای تبدیل کرنش انجام دادیم.

ابتدا، حالت تنش صفحه‌ای را در نقطه معین  $Q$  بررسی کردیم [قسمت ۷-۲] و مؤلفه‌های تنش مربوط به جزء داده شده در شکل ۷-۵ الف را با  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  نشان دادیم؛ سپس، فرمولهای زیر را برای مؤلفه‌های  $\sigma_{x'}$ ،  $\sigma_{y'}$  و  $\tau_{x'y'}$  که مربوط به جزء پس از دوران آن تحت زاویه  $\theta$  حول محور  $z$  هستند (شکل ۷-۵ ب)، به دست آوردیم:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (5-7)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (6-7)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (7-7)$$



شکل ۷-۵

در قسمت ۷-۳، مقدار زاویه دوران را برای ماکزیمم و مینیمم تنش قائم در نقطه  $Q$  از رابطه زیر به دست آوردیم:

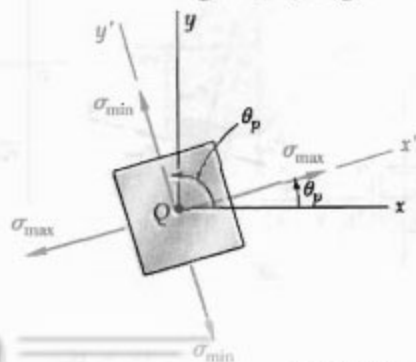
$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (12-7)$$

دو مقدار حاصل برای  $\theta_p$  به اندازه  $90^\circ$  با هم اختلاف دارند (شکل ۷-۱۱) و صفحات اصلی تنش را در نقطه  $Q$  مشخص می‌کنند. تنش‌های قائم متناظر با دو مقدار  $\theta_p$  را تنش‌های اصلی در  $Q$  می‌گویند؛ رابطه زیر را به دست آوردیم:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (14-7)$$

تبدیل تنش صفحه‌ای

صفحات اصلی: تنش‌های اصلی



شکل ۷-۱۱

همچنین دیدیم که مقدار تنش برشی متناظر صفر است. سپس، زاویه  $\theta$  را که به ازای آن ماکزیمم مقدار تنش برشی روی می‌دهد از رابطه زیر به دست آوردیم:

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (15-7)$$

دو مقدار حاصل برای  $\theta_s$  به اندازه  $90^\circ$  با هم اختلاف دارند (شکل ۷-۱۲). همچنین، دیدیم که صفحات تنش برشی ماکزیمم با صفحات اصلی زاویه  $45^\circ$  دارند. ماکزیمم مقدار تنش برشی برای دوران در صفحه تنش عبارت است از:

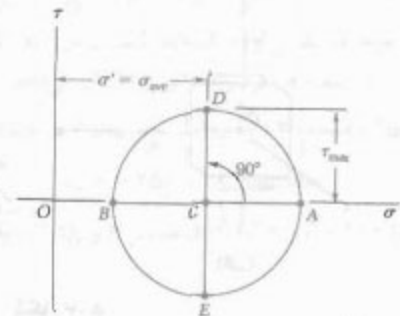
$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (16-7)$$

و مقدار متناظر تنش قائم چنین است:

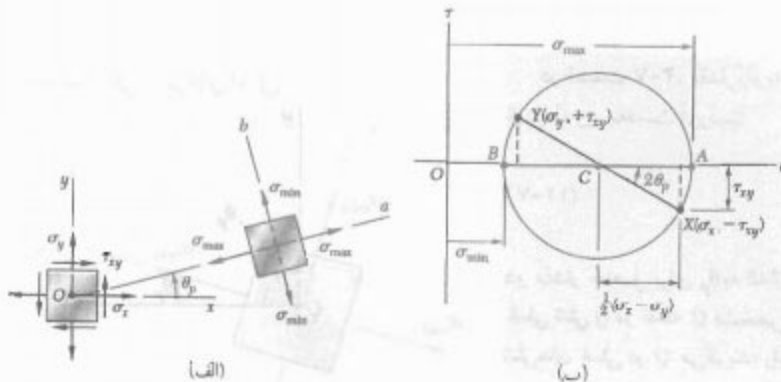
$$\sigma' = \sigma_{\text{ave}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (17-7)$$

در قسمت ۷-۴، روش دایره مور را برای تبدیل تنش صفحه‌ای به کار بردیم. در این روش، برای حالت تنش داده شده در شکل ۷-۱۷ الف، نقطه  $X$  با مختصات  $(\sigma_x, -\tau_{xy})$  و نقطه  $Y$  با مختصات  $(\sigma_y, +\tau_{xy})$  را مشخص، و دایره‌ای به قطر  $XY$  رسم کردیم (شکل ۷-۱۷ ب). طول نقاط تلاقی این دایره با محور افقی، نقاط  $A$  و  $B$ ، تنش‌های اصلی را نشان می‌دادند، و زاویه دورانی که باعث می‌شود قطر  $XY$  بر  $AB$  منطبق شود دو برابر زاویه  $\theta_p$  است (زاویه  $\theta_p$  صفحات اصلی در شکل ۷-۱۷ الف را مشخص می‌کند و با زاویه دوران مذکور هموست). همچنین، دیدیم که قطر  $DE$  ماکزیمم تنش برشی و وضعیت صفحه متناظر آن را مشخص می‌کند (شکل ۷-۱۹ ب) [مثال ۷-۲، مسائل نمونه ۷-۲ و ۷-۳].

دایره مور برای تنش



شکل ۷-۱۹ ب

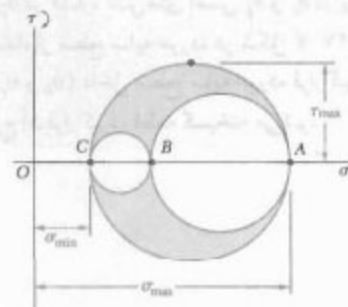


شکل ۷-۱۷

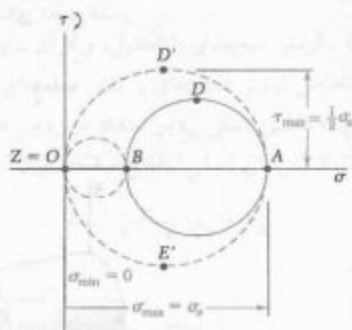


## حالت کلی تنش

با در نظر گرفتن حالت کلی تنش که با شش مولفه تنش مشخص می‌شود [قسمت ۷-۵]، نشان دادیم که تنش قائم وارد بر یک صفحه با وضعیت اختیاری را به صورت معادله درجه دوم کسینوس‌های هادی عمود بر آن صفحه می‌توان بیان کرد. یعنی، سه محور اصلی تنش و سه تنش اصلی در هر نقطه وجود دارد. با چرخاندن یک جزء کوچک مکعبی حول هر یک از سه محور اصلی [قسمت ۷-۶]، دایره مور متناظر، که مقادیر  $\sigma_{\max}$ ،  $\sigma_{\min}$  و  $\tau_{\max}$  را می‌دهند، رسم کردیم (شکل ۷-۲۹). در حالت خاص تنش صفحه‌ای، و با انتخاب محورهای  $x$  و  $y$  در صفحه تنش، نقطه  $C$  بر مبدأ  $O$  منطبق می‌شود. اگر  $A$  و  $B$  در طرفین  $O$  قرار گیرند، تنش برشی ماکزیمم با ماکزیمم تنش برشی "داخل صفحه" برابر است (قسمت‌های ۷-۳ و ۷-۴). اگر  $A$  و  $B$  در یک طرف  $O$  باشند، این حالت برقرار نیست. اگر  $\sigma_a > \sigma_b > 0$ ، تنش برشی ماکزیمم برابر است با  $\frac{1}{2}\sigma_a$  و متناظر با دوران خارج از صفحه تنش می‌باشد (شکل ۷-۳۲).



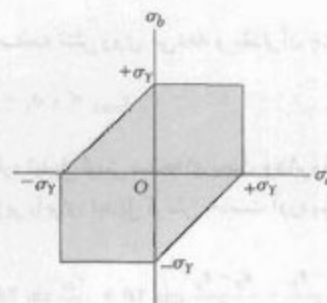
شکل ۷-۲۹



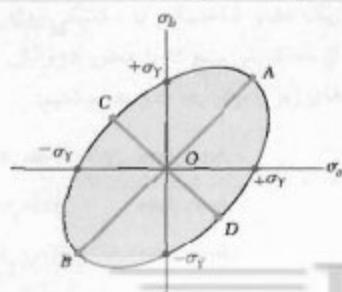
شکل ۷-۳۲

در قسمت ۷-۷، معیارهای تسلیم را برای مواد چکش خوار تحت تنش صفحه‌ای به دست آوردیم. برای پیش‌بینی شکست یک عضو ساختمانی یا مکانیکی در یک نقطه بحرانی، ابتدا تنش‌های اصلی  $\sigma_a$  و  $\sigma_b$  را در آن نقطه برای بارگذاری داده شده به دست آوردیم. سپس، نقطه‌ای با مختصات  $(\sigma_a, \sigma_b)$  را رسم کردیم. اگر این نقطه داخل سطح معینی قرار گیرد قطعه به طور مطمئن کار می‌کند؛ اگر خارج آن قرار گیرد، قطعه گسیخته می‌شود. در شکل‌های ۷-۴۰ و ۷-۴۱، به ترتیب، سطوح مورد استفاده را برای معیارهای ماکزیمم استقامت برشی و ماکزیمم انرژی تغییر شکل نشان داده‌ایم. هر دو مساحت به استقامت تسلیم  $\sigma_Y$  بستگی دارند.

معیار تسلیم برای مواد چکش خوار



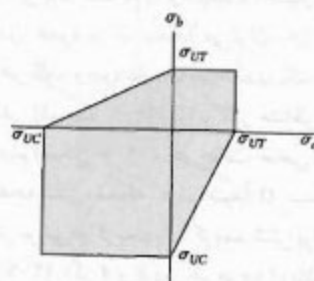
شکل ۷-۴۰



شکل ۷-۴۱

در قسمت ۷-۸، معیارهای شکست را برای مواد شکننده‌ای که تحت تنش صفحه‌ای اند به دست آوردیم. معیار مور متداول‌ترین معیار است. در این معیار، از نتایج انواع مختلف آزمایش‌ها روی ماده داده شده استفاده می‌شود. پس از تعیین آزمایشی استقامت نهایی  $\sigma_{UT}$  و استقامت نهایی  $\sigma_{UC}$  در فشار، تنش‌های اصلی  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  در یک نقطه داده شده از قطعه تحت بررسی با استفاده از سطح سایه‌خورده در شکل ۷-۴۷ ب به دست می‌آیند. اگر نقطه به مختصات  $(\sigma_1$  و  $\sigma_2)$  داخل سطح سایه‌خورده قرار گیرد، قطعه به طور مطمئن کار می‌کند، و اگر خارج آن قرار گیرد، قطعه گسیخته می‌شود.

معیار شکست برای مواد شکننده



شکل ۷-۴۷

در قسمت ۷-۹، تنش در مخزن‌های جدار نازک تحت فشار را بررسی کردیم و تنش در دیواره مخزن و فشار پیماته‌ای سیال داخل آن را به دست آوردیم. در یک مخزن استوانه‌ای با شعاع داخلی  $r$  و ضخامت  $t$  (شکل ۷-۵۱)، عبارت‌های زیر را برای تنش حلقه‌ای  $\sigma_1$  و تنش طولی  $\sigma_2$  به دست آوردیم:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \quad \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (۷-۳۱ \text{ و } ۷-۳۰)$$

دیدیم که تنش برشی ماکزیمم در خارج از صفحه تنش روی می‌دهد و مقدار آن عبارت است از:

$$\tau_{\max} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (۷-۳۴)$$

در یک مخزن کروی با شعاع داخلی  $r$  و ضخامت  $t$  (شکل ۷-۵۵)، دو تنش اصلی با هم برابرند:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \quad (۷-۳۶)$$

مجدداً، تنش برشی ماکزیمم در خارج از صفحه تنش روی می‌دهد و مقدار آن چنین است:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{pr}{4t} \quad (۷-۳۷)$$

در قسمت‌های ۷-۱۰ و ۷-۱۱ درباره تبدیل کرنش صفحه‌ای بحث و دایره مور کرنش صفحه‌ای را تعریف کردیم. فرمول‌های زیر را برای تبدیل کرنش به دست آوردیم:

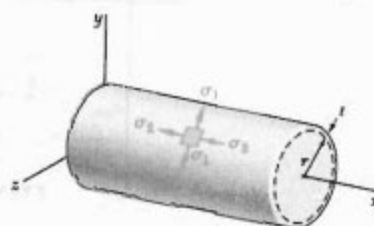
$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (۷-۴۴)$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad (۷-۴۵)$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta \quad (۷-۴۹)$$

در آیین معادله‌ها،  $\theta$  زاویه دوران محورهاست.

مخزن‌های استوانه‌ای تحت فشار



شکل ۷-۵۱

مخزن‌های کروی تحت فشار



شکل ۷-۵۵

تبدیل کرنش صفحه‌ای

با استفاده از دایره مور (شکل ۶۵-۷)، فرمولهای زیر را برای زاویه دوران  $\theta_p$  متناظر با محوره‌های اصلی کرنش و برای مقدار کرنش‌های اصلی  $\epsilon_{\max}$  و  $\epsilon_{\min}$  به دست آوردیم:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad (۵۲-۷)$$

$$\epsilon_{\max} = \epsilon_{\text{ave}} + R \quad \text{و} \quad \epsilon_{\min} = \epsilon_{\text{ave}} - R \quad (۵۱-۷)$$

که در آن،

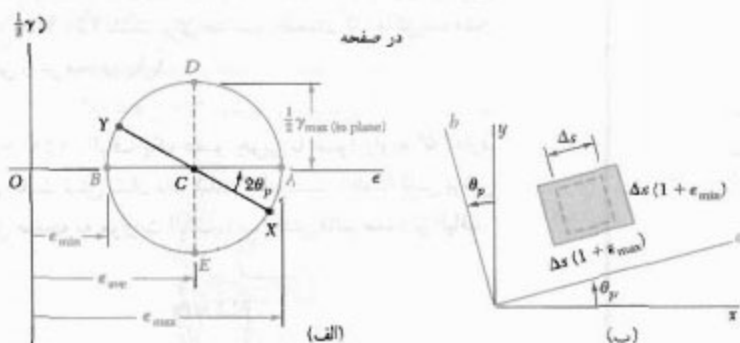
$$\epsilon_{\text{ave}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad \text{و} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (۵۰-۷)$$

ماکزیمم کرنش برشی برای دوران در صفحه کرنش را به صورت زیر یافتیم:

$$\gamma_{\max}(\text{داخل صفحه}) = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (۵۳-۷)$$

در قسمت ۷-۱۲، کرنش سه بعدی را تحلیل، و از آن برای تعیین ماکزیمم کرنش برشی در حالت‌های خاص کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای استفاده کردیم. در حالت تنش صفحه‌ای، دیدیم که کرنش اصلی  $\epsilon_c$  در امتداد عمود بر صفحه تنش را می‌توان به صورت زیر برحسب کرنش‌های اصلی "داخل صفحه" بیان کرد:

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) \quad (۵۹-۷)$$



شکل ۶۵-۷

در قسمت ۷-۱۳، درباره کرنش سنج بحث کردیم. این وسیله‌ها برای اندازه‌گیری کرنش قائم روی سطح یک عضو ساختمانی یا مکانیکی به کار می‌رود. با استفاده از گلیرگ کرنش، متشکل از سه کرنش سنج که با محور  $x$  زوایای  $\theta_1$ ،  $\theta_2$ ، و  $\theta_3$  می‌سازند (شکل ۸۰-۷)، فرمول‌های زیر را برای  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  نوشتیم:

$$\epsilon_1 = \epsilon_x \cos^2 \theta_1 + \epsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_x \cos^2 \theta_2 + \epsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2 \quad (۶۰-۷)$$

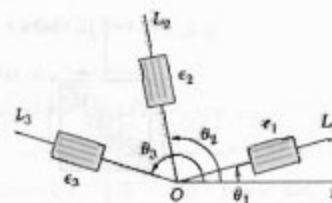
$$\epsilon_3 = \epsilon_x \cos^2 \theta_3 + \epsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3$$

با تعیین  $\epsilon_1$ ،  $\epsilon_2$ ، و  $\epsilon_3$  و با حل معادله‌های بالا،  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  را می‌توان یافت.

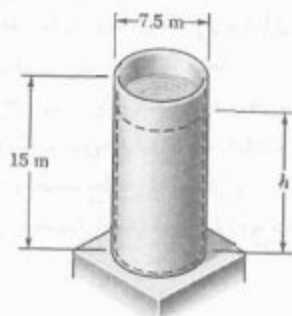
دایره مور برای کرنش



کرنش سنج. گلیرگ کرنش

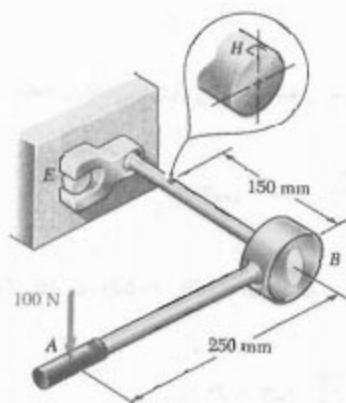


شکل ۸۰-۷



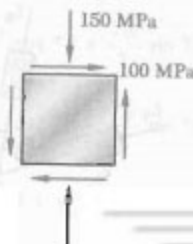
شکل م-۱۵۹

۱۶۰-۷ از آچار نشان داده شده برای شل کردن پیچ  $E$  استفاده می‌شود. اگر نیروی عمودی وارده در نقطه  $A$  برابر با  $100\text{ N}$  باشد، تنش‌های اصلی و ماکزیم تنش برشی را در نقطه  $H$  واقع در لبه شفت بیابید. قطر شفت  $18\text{ mm}$  است.



شکل م-۱۶۰

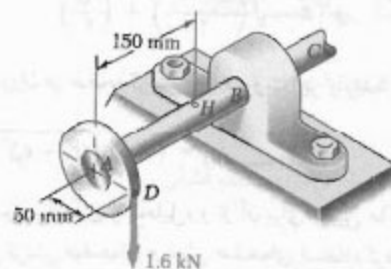
۱۶۱-۷ حالت تنش نشان داده شده در یک قطعه چدنی روی داده است. اگر برای چدن  $\sigma_{UT} = 160\text{ MPa}$  و  $\sigma_{UC} = 320\text{ MPa}$  با استفاده از معیار مور تعیین کنید که آیا گسیختگی روی می‌دهد یا نه.



شکل م-۱۶۱

## مسائل تکمیلی

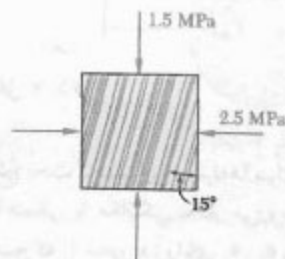
۱۵۶-۷ نیروی عمودی  $1.6\text{ kN}$  را در نقطه  $D$  بر چرخ دنده‌ای که به شفت  $AB$  به قطر  $25\text{ mm}$  متصل است وارد شده است. تنش‌های اصلی و ماکزیم تنش برشی را در نقطه  $H$  روی لبه فوقانی شفت بیابید.



شکل م-۱۵۶

۱۵۷-۷ قطر خارجی یک مخزن استوانه‌ای فولادی  $1.6\text{ m}$  و ضخامت دیواره آن  $16\text{ mm}$  است. اگر تنش قائم نهایی فولاد  $450\text{ MPa}$  باشد، برای ضریب اطمینان  $5$ ، ماکزیم فشار داخلی را در مخزن بیابید.

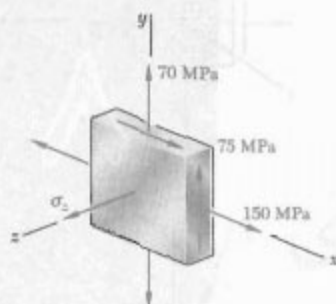
۱۵۸-۷ الیاف یک عضو چوبی با عمود زاویه  $15^\circ$  دارد. برای حالت تنش نشان داده شده، مطلوبست: (الف) تنش برشی داخلی صفحه به موازات الیاف، (ب) تنش قائم عمود بر الیاف.



شکل م-۱۵۸

۱۵۹-۷ مخزن استوانه‌ای نشان داده شده، دارای ضخامت دیواره  $5\text{ mm}$  است و استقامت نهایی آن در کشش  $420\text{ MPa}$  است. اگر مخزن بر آب باشد، برای ضریب اطمینان  $4$ ، ارتفاع  $h$  را بیابید. چگالی آب  $1000\text{ kg/m}^3$  است.

۱۶۶-۷ برای حالت تنش نشان داده شده،  
مطلوبست ماکزیمم تنش برشی وقتی: (الف)  $\sigma_z = 0$   
(ب)  $\sigma_x = +45 \text{ MPa}$ ، (ج)  $\sigma_y = -45 \text{ MPa}$



شکل م ۱۶۶-۷

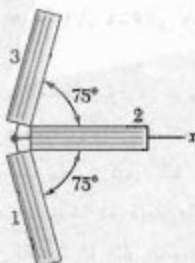
۱۶۷-۷ کرنش‌هایی که گلبیگ نشان داده شده برای سطح  
یک عضو مکانیکی نشان می‌دهند عبارتند از:

$$\varepsilon_x = -93.1 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

$$\varepsilon_y = +385 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

$$\varepsilon_z = +210 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

مطلوبست: (الف) وضعیت و مقدار کرنش‌های اصلی در صفحه  
گلبیگ، (ب) ماکزیمم تنش برشی "داخل صفحه"



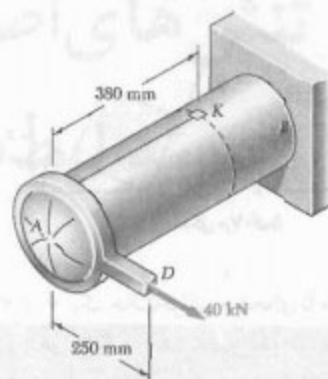
شکل م ۱۶۷-۷

### مسائل کامپیوتری

مسائل زیر برای حل با کامپیوتر طرح شده‌اند.

۷-۱ در شکل م ۷-۱ الف، یک حالت تنش صفحه‌ای  
نشان داده شده است. (الف) با استفاده از یک برنامه کامپیوتری،  
مولفه‌های تنش  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$ ،  $\sigma_z$  و  $\tau_{xy}$  مربوط به جزء را پس از دوران آن  
تحت زاویه  $\theta$  حول محور  $z$  بیابید (شکل م ۷-۱ ب). (ب) با  
استفاده از این برنامه، مسائل ۷-۱۴ تا ۷-۱۶ را حل کنید.

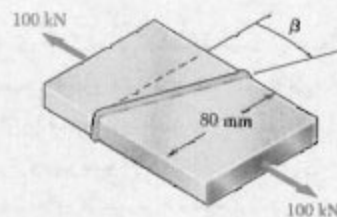
۷-۱۶ مخزن استوانه‌ای  $AB$  دارای قطر داخلی  $200 \text{ mm}$   
و ضخامت دیواره  $8 \text{ mm}$  است. اگر فشار داخل مخزن  $4.2 \text{ MPa}$   
باشد، ماکزیمم تنش قائم و ماکزیمم تنش برشی را در نقطه  $k$   
واقع در لبه مخزن بیابید.



شکل م ۱۶۲-۷

۷-۱۶۳ مسئله ۷-۱۶۲ را با این فرض حل کنید که نیروی  
 $40 \text{ kN}$  در نقطه  $D$  در امتداد قائم رو به پایین باشد.

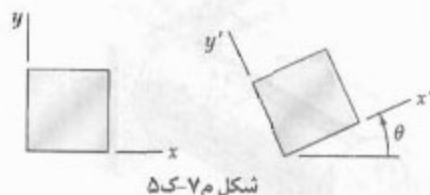
۷-۱۶۴ دو ورق فولادی با مقطع عرضی یکنواخت  
 $10 \times 80 \text{ mm}$  به هم جوش شده‌اند. اگر  $\beta = 25^\circ$ ، مطلوبست:  
(الف) تنش برشی داخل صفحه به موازات جوش، (ب) تنش  
قائم در امتداد عمود بر جوش.



شکل م ۱۶۴-۷ و م ۱۶۵-۷

۷-۱۶۵ دو ورق فولادی با مقطع عرضی یکنواخت  
 $10 \times 80 \text{ mm}$  به هم جوش شده‌اند. اگر تنش برشی داخل صفحه  
(به موازات الیاف)  $30 \text{ MPa}$  باشد، مطلوبست: (الف) زاویه  $\beta$ ،  
(ب) تنش قائم متناظر عمود بر الیاف.

۵-۷ یک حالت کرنش صفحه‌ای با مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  در دستگاه  $xy$  مشخص شده است. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن مولفه‌های کرنش  $\epsilon_{x'}$ ،  $\epsilon_{y'}$  و  $\gamma_{x'y'}$  را در دستگاه  $x'y'$  که از دوران محورها  $x$  و  $y$  تحت زاویه  $\theta$  به دست می‌آید، بیابید. (ب) با استفاده از این برنامه، مسائل ۱۲۶-۷ تا ۱۲۹-۷ را حل کنید.

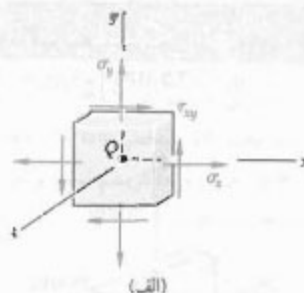


شکل م-۷-۵

۶-۷ یک حالت کرنش صفحه‌ای با مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  در دستگاه  $xy$  مشخص شده است. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن وضعیت و مقدار کرنش‌های اصلی، ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه" و کرنش برشی ماکزیمم را بیابید. (ب) با استفاده از این برنامه، مسائل ۱۳۴-۷ تا ۱۳۷-۷ را حل کنید.

۷-۷ یک حالت کرنش صفحه‌ای با مولفه‌های کرنش  $\epsilon_x$ ،  $\epsilon_y$  و  $\gamma_{xy}$  که در نقطه‌ای اندازه‌گیری شده‌اند مشخص شده است. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن وضعیت و مقدار کرنش‌های اصلی، ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه" و کرنش برشی ماکزیمم را بیابید. (ب) با استفاده از این برنامه، مسائل ۱۳۸-۷ تا ۱۴۱-۷ را حل کنید.

۸-۷ گلبیگی متشکل است از سه کرنش سنج که، به ترتیب، با محور  $x$  زوایای  $\theta_1$ ،  $\theta_2$  و  $\theta_3$  می‌سازند و به سطح آزاد قطعه‌ای با ضریب پواسون  $\nu$  متصل‌اند. (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن، برای خوانده‌های  $\epsilon_1$ ،  $\epsilon_2$ ،  $\epsilon_3$ ، مولفه‌های کرنش در دستگاه  $x$  و  $y$ ، وضعیت و مقدار سه کرنش اصلی، ماکزیمم کرنش برشی "داخل صفحه" و کرنش برشی ماکزیمم را بیابید. (ب) با استفاده از این برنامه، مسائل ۱۴۲-۷ تا ۱۴۵-۷ را حل کنید.



(ب)

شکل م-۷-۱

۲-۷ در شکل دوم ۷-۱ الف، یک حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده است. (الف) با استفاده از یک برنامه کامپیوتری، محورهای اصلی، تنش‌های اصلی، ماکزیمم تنش برشی "داخل صفحه" و تنش برشی ماکزیمم را بیابید. (ب) با استفاده از این برنامه، مسائل ۷-۷، ۱۱-۷، ۶۶-۷ و ۶۷-۷ را حل کنید.

۳-۷ (الف) یک برنامه کامپیوتری بنویسید و با استفاده از آن، برای حالت تنش صفحه‌ای و استقامت تسلیم داده شده یک ماده چکش‌خوار (نرم)، تعیین کنید که آیا ماده تسلیم می‌شود یا نه. این برنامه باید با هر دو معیار ماکزیمم استقامت برشی و ماکزیمم انرژی تغییرشکل کار کند، مقدار تنش‌های اصلی را چاپ کند و ضریب اطمینان را برای عدم تسلیم ماده محاسبه نماید. (ب) از این برنامه برای حل مسائل ۷-۸۳ و ۷-۸۴ استفاده کنید.

۴-۷ (الف) یک برنامه کامپیوتری بر مبنای معیار شکست مور برای مواد شکننده (ژرد) بنویسید و با استفاده از آن، برای حالت تنش صفحه‌ای و مقادیر معلوم استقامت تسلیم ماده در کشش و فشار، تعیین کنید که آیا گسختگی روی می‌دهد یا نه. این برنامه باید مقدار تنش‌های اصلی را نیز چاپ کند. (ب) با استفاده از این برنامه، مسائل ۷-۹۱ و ۷-۹۲ را حل و پاسخ‌های داده شده برای مسائل ۷-۹۳ و ۷-۹۴ را واری کنید.