

فصل اول

مبانی انتقال حرارت

اصول و مبانی هر کدام از علوم مهندسی در صورتی به بهترین نحو درک خواهد شد که جایگاه آن علم را در ارتباط با دیگر علوم مهندسی در نظر بگیریم. بنابراین، اولین موردی که بررسی خواهیم کرد، تعیین جایگاه انتقال حرارت در علوم مهندسی است. بعد از آن، دو روش انتقال حرارت نفوذ (هدایت یا رسانایی) و تابش را به طور مختصر مرور خواهیم نمود. سپس از دیدگاه پیوستگی و مولکولی مسائل مهندسی را بررسی نموده و در نهایت، به بررسی مبانی انتقال حرارت پیوستگی^۱ خواهیم پرداخت.

۱-۱. جایگاه انتقال حرارت در مهندسی

ابتدا می‌خواهیم چهار مساله مشهور را که از مکانیک اجسام صلب و اجسام تغییر شکل پذیر^۲ و ترمودینامیک گرفته شده است بررسی نماییم. می‌خواهیم برای هر مساله دو فرمولاسیون براساس فرضیات مختلف در نظر بگیریم. با ماهیت قوانین فیزیکی استفاده شده در این فرمولاسیون‌ها، سروکار خواهیم داشت. (در این مرحله، لازم است که بحثمان در چارچوب متداول و موجود در کتاب‌های مرجع باشد؛ در ابتدای فصل بعدی متن حاضر تکمیل خواهد شد).

مثال ۱-۱. سقوط آزاد جسم. یک جسم با جرم m را در نظر بگیرید که در اثر میدان گرانش در حال سقوط آزاد است (شکل ۱-۱). ما می‌خواهیم به طور همزمان مکان این جسم را تعیین کنیم.

فرمولاسیون (فیزیک) مساله: قانون دوم حرکت نیوتن،

1- Continuum heat transfer

2- Deformable bodies

مثال ۱-۲. نیروهای واکنشی تیرک. یک تیرک که روی آن فشار P وارد می‌شود را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نیروهای واکنشی تیرک را به دست آوریم.

برای انجام اولین فرمولاسیون مساله، می‌خواهیم فرض کنیم که تیرک روی دو تکیه‌گاه ساده قرار دارد (شکل ۱-۲). نیروهای واکنشی A و B را می‌توان با استفاده از شرایط به دست آورد.

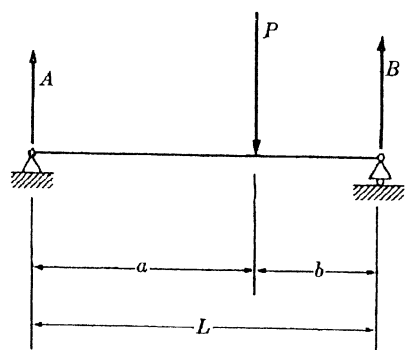
$$\sum \text{نیرو} = \text{صفر} \quad \text{موازنه نیرو:} \quad (1-7)$$

$$\sum \text{گشتاور} = \text{صفر} \quad \text{موازنه گشتاور:} \quad (1-8)$$

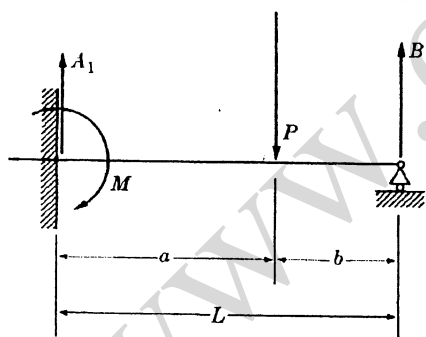
که این دو رابطه با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن به دست آمده‌اند.

برای انجام دومین فرمولاسیون مساله، می‌خواهیم یکی از تکیه‌گاه‌های ساده را با یک تکیه‌گاه توکار^۱ (غیرقابل حرکت) تعویض نماییم (شکل ۱-۳). که این مورد اخیر را نمی‌توان تنها با استفاده از قانون نیوتن حل نمود، زیرا سه مورد غیرمعین وجود دارد که نیروهای واکنشی A_1 و B_1 و مومنت^۲ خمشی M می‌باشند، بنابراین علاوه بر معادلات (۱-۷) و (۱-۸) به یک معادله اضافی نیز نیاز داریم. این شرط ممکن است با در نظر گرفتن ماهیت تیرک حاصل شود. اگر، به عنوان مثال، فرض شود که تیرک کشسان^۳ می‌باشد، شرط اضافی را می‌توان با استفاده از قانون هوک^۴ بدست آورد.

همانند، مثال ۱-۱، جزییات فرمولاسیون مذکور و راه‌حل‌هایش در بحث اخیر مورد نیاز نمی‌باشد.



شکل ۱-۲



شکل ۱-۳

- 1- Built in support
- 2- Bending moment
- 3- Elastic
- 4- Hooke's law

$$F = ma, \quad (1-1)$$

که در آن F جمع نیروهای خارجی و a بردار شتاب است. در فرمولاسیون اول مساله از مقاومت هوا در اطراف جسم صرف‌نظر می‌کنیم و می‌توانیم مساله را به مساله یک‌بعدی تبدیل نماییم و معادله (۱-۱) را به شکل زیر بنویسیم:

$$mg = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (1-2)$$

می‌توانیم شرایط اولیه مناسبی را در نظر بگیریم. حل ریاضی مساله: با دو بار انتگرال‌گیری از معادله (۱-۲) بر حسب زمان داریم:

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad (1-3)$$

که دو ثابت حاصل از انتگرال‌گیری یعنی C_1 و C_2 را می‌توان با استفاده از مکان اولیه و سرعت جسم به دست آورد.

در فرمولاسیون دوم مساله، مقاومتی از جانب محیط اطراف در برابر حرکت جسم در نظر گرفته خواهد شد. با این ملاحظات خواهیم داشت:

$$mg - R = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (1-4)$$

بدون داشتن اطلاعات بیشتری در مورد نیروی R ، نمی‌توان از معادله (۱-۴) انتگرال‌گیری نمود. اگر به عنوان مثال، فرض کنیم که این نیرو برابر مضرپی از توان دوم سرعت جسم است، یعنی:

$$\frac{R}{m} = k \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \quad (1-5)$$

سپس با استفاده از معادله (۱-۴) خواهیم داشت:

$$g - k \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (1-6)$$

که در آن k یک ثابت است. معادله (۱-۶) یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است که راه‌حل آن کاملاً ساده می‌باشد، و از آنجایی که این راه حل در بحث اخیر دارای اهمیت نمی‌باشد از ارائه آن خودداری می‌کنیم.

قبل از آن که وارد فرمولاسیون‌ها شویم ابتدا دو مساله را که از مکانیک گرفته شده‌اند بررسی خواهیم نمود.

بدون اصطکاک بین‌شان در نظر بگیریم. در غیاب هر نیروی خالصی، قانون اول نیوتن بیان می‌کند که هر لایه باید ثابت باشد و یا با سرعت یکنواخت حرکت نماید. بنابراین، اگر سرعت ورودی ثابت و یکنواخت باشد، این شرط به صورت محوری و متقاطع برای همه مقادیر زمانی وجود خواهد داشت. به عبارت دیگر، سرعت در هر مقطع عرضی یکنواخت است. اگر سیال اصطکاک داشته باشد (یعنی گرانش باشد)، قانون دوم نیوتن مورد استفاده در حجم کنترل شکل ۱-۴ نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$-\frac{d\tau}{dy} - \frac{dp}{dx} = 0. \quad (1-9)$$

معادله (۱-۹) را نمی‌توانیم برای به‌دست آوردن توزیع سرعت مناسب مورد استفاده قرار دهیم مگر آن‌که یک شرط اضافی داشته باشیم. یکی از چنین شرایطی ممکن است رابطه بین تنش برشی و گرادیان سرعت باشد. اگر فرض کنیم، به عنوان مثال سیال مان نیوتنی است، این شرایط ممکن است به صورت زیر بیان شود:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}, \quad (1-10)$$

که ثابت تناسب، گرانشی سیال است. با قرار دادن معادله (۱-۱۰) در معادله (۱-۹) و بازاریابی آن داریم:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \quad (1-11)$$

می‌توان شرایط مرزی زیر را در نظر گرفت:

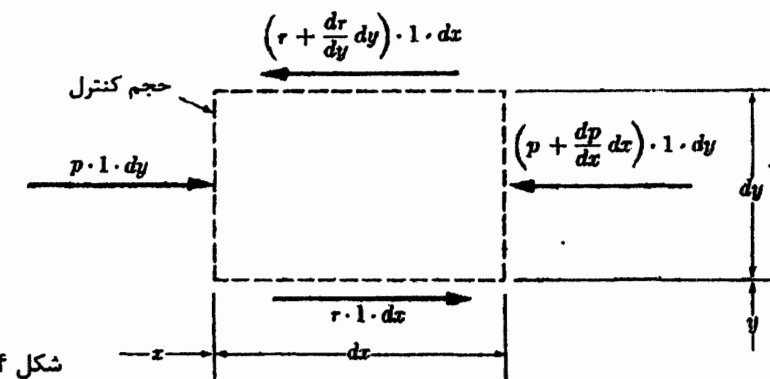
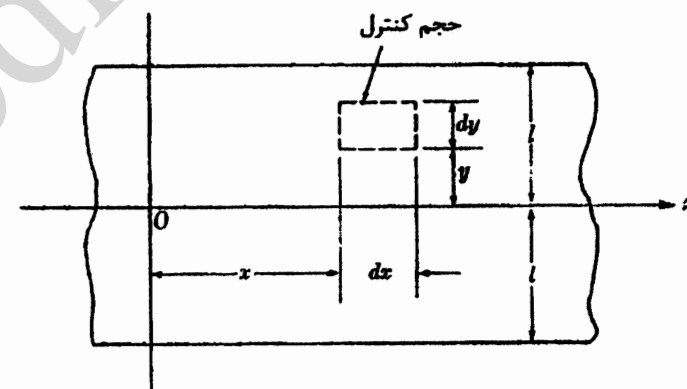
$$\frac{du(0)}{dy} = 0, \quad u(l) = 0, \quad (1-12)$$

برای گرادیان فشار محوری ثابت (dp/dx) ، حل معادله (۱-۱۱) رابطه‌ای را حاصل می‌کند که به توزیع سهموی سرعت معروف است:

$$u(y) = \frac{(-dp/dx)l^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{y}{l} \right)^2 \right] \quad (1-13)$$

حال می‌خواهیم این سه مساله مذکور را به‌وسیله قوانین فیزیکی مورد استفاده در فرمولاسیون، امتحان نماییم. همان‌طور که دیده شد بعضی از مسائل مکانیک را می‌توان تنها با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن، یا در بعضی مواقع در ترکیب با قانون اول نیوتن و یا معادله بقای جرم، حل نمود؛ این موارد به مسائل تعیین‌شده مکانیکی موسومند. دینامیک اجسام صلب در غیاب اصطکاک و مسائل استاتیکی اجسام صلب و مکانیک سیالات ایده‌ال مثال‌های مشهوری از این دسته‌اند. همچنین می‌توان به‌طور ویژه‌ای اولین فرمولاسیون انجام شده برای مسائل ذکر شده در بالا را در

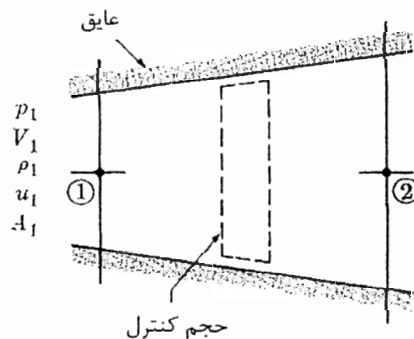
مثال ۱-۳. جریان کاملاً گسترش‌یافته، پایا و تراکم‌ناپذیر یک سیال بین صفحات موازی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم توزیع سرعت در این جریان را به‌دست آوریم. حجم کنترل^۱ نشان داده شده در شکل ۱-۴ را در نظر می‌گیریم. از آنجایی که عبارت‌های شتاب شتاب به‌طور یکسان برابر صفر هستند، قانون دوم حرکت نیوتن در این حجم کنترل به موازنه نیرو تبدیل می‌شود. پارامترهای نرمال و مماسی نیروهای سطحی به ازای واحد سطح با فشار P و تنش τ نشان داده می‌شوند. نیروهای تماسی^۲ نظیر گرانش در این مثال قابل صرف‌نظرند. اولین فرمولاسیون مساله براساس فرض سیال ایده‌ال (بدون اصطکاک) و دومین فرمولاسیون براساس سیال گرانشی (نیوتنی) انجام خواهد شد.



شکل ۱-۴

اگر سیال ایده‌ال باشد، تنش برشی صفر خواهد بود و تغییر فشار در جهت x نیز با توجه به قانون دوم نیوتن صفر خواهد بود. ممکن است بتوانیم سیال را با لایه‌های بینهایت نازک موازی و

۱- تعریف حجم کنترل در فصل بعدی ارائه خواهد شد.



شکل ۱-۵

می‌خواهیم از قوانین مناسب کلی برای حجم کنترل نشان داده شده در شکل (۱-۵) استفاده کنیم. قانون بقای جرم به صورت زیر داده شده است:

$$d(\rho AV) = 0; \quad (1-14)$$

قانون دوم حرکت نیوتن با استفاده از معادله (۱-۱۴) بازآرایی شده است. نتیجه به صورت زیر می‌باشد:

$$dp + \rho V dV = 0, \quad (1-15)$$

و قانون اول ترمودینامیک، با معادله (۱-۱۴)، (۱-۱۵) ترکیب شده و نتیجه به این صورت می‌باشد.

$$du + pd(1/\rho) = 0. \quad (1-16)$$

در اولین فرمولاسیون مساله فرض می‌کنیم که سیال تراکم‌ناپذیر است. پس با توجه به تعریف، $\rho_1 = \rho_2$ خواهد شد و بقیه مشخصات خروجی نظیر V_2 ، P_2 ، u_2 از طریق انتگرال‌گیری از معادلات (۱-۱۴)، (۱-۱۵)، (۱-۱۶) بین ورودی و خروجی دیفیوزر به دست می‌آیند.

در دومین فرمولاسیون مساله فرض می‌کنیم که سیال تراکم‌پذیر باشد. اکنون علاوه بر V_2 و P_2 و u_2 چگالی خروجی ρ_2 نیز باید محاسبه شود؛ بنابراین، شرایط داده شده در معادلات (۱-۱۴)، (۱-۱۵)، (۱-۱۶) دیگر کافی نیست. برای کامل کردن فرمولاسیون می‌خواهیم روشی را که در فرمولاسیون دوم مثال‌های ۱-۱، ۱-۲، و ۱-۳، مورد استفاده قرار دادیم فراخوانی کنیم. در این مثال شرایط اضافی مورد نیاز وابسته به طبیعت سیال است. ضمناً ما می‌توانیم این شرایط را به صورت زیر بنویسیم.

$$p = p(\rho, u). \quad (1-17)$$

این تقسیم‌بندی قرار داد یعنی: سقوط آزاد جسم بدون اصطکاک، تیرکی که استاتیک آن معلوم است، و جریان پایای یک سیال ایده‌آل بین دو صفحه موازی.

بعضی مسائل مکانیکی علاوه بر قانون حرکت نیوتن و معادله بقای جرم به یک شرایط اضافی نیز نیازمندند که به این مسائل، مسائل تعیین‌نشده مکانیکی گفته می‌شود. دینامیک اجسام صلب با اصطکاک و مکانیک اجسام تغییرشکل‌پذیر (اجسام گرانشی، کشسان^۱، ناکشسان (شکل‌پذیر)^۲، کشسان-گرانرو^۳) مثال‌هایی از این گروه می‌باشند و دومین فرمولاسیون مسائل ذکر شده در بالا در این تقسیم‌بندی قرار می‌گیرند یعنی: سقوط آزاد جسم با در نظر گرفتن اصطکاک، تیرکی که استاتیک آن نامعلوم است، جریان آرام بین دو صفحه موازی. باید متذکر شد که این مسائل تعیین‌نشده مکانیکی تنها از قوانین کلی مکانیک استفاده نمی‌نمایند، بلکه همچنین یک قانون اضافی و بسته به ماهیت مساله مورد نظر، مورد استفاده قرار می‌گیرد. سقوط آزاد جسم به رابطه بین نیروی مقاومتی و سرعت نیاز دارد، تیرک با استاتیک نامعلوم به رابطه‌ای بین تنش و کشش نیاز دارد، و جریان آرام بین دو صفحه موازی به رابطه‌ای بین تنش برشی و سرعت نیازمند است. در اینجا چنین قوانینی، قانون ویژه^۴ نامیده می‌شوند، اگرچه از واژه رابطه ترکیب‌کننده^۵ در اغلب مقالات به جای قانون ویژه، استفاده می‌شود.

مسائل ترمودینامیک را نیز می‌توان به طور مشابه به دو دسته تقسیم نمود. بعضی از مسائل ترمودینامیک را می‌توان با استفاده از قوانین کلی (اول و دوم) ترمودینامیک و اگر لازم باشد با قوانین کلی مکانیک حل نمود، که به این مسائل، مسائل تعیین‌نشده ترمودینامیکی گفته می‌شود. دسته دیگر نیازمند استفاده از شرایطی علاوه بر قوانین کلی هستند که به این مسائل، مسائل تعیین‌نشده ترمودینامیکی گفته می‌شود.

شاید مسائل زیر برای بیان نکات ذکر شده، مفید واقع شوند.

مثال ۱-۴. جریان پایای یک بعدی ایزنتروپیک و فروصوت از میان یک سیال غیرگرانرو در یک دیفیوزر عایق وجود دارد. حالت سیال در ورودی معلوم است، می‌خواهیم حالت سیال در خروجی را پیدا کنیم. علائم نشان داده شده در شکل (۱-۵) به این صورت است: فشار P ، چگالی ρ ، انرژی داخلی u ، سرعت V ، و سطح مقطع عرضی A . مشخصات ورودی با زیرنویس ۱ و مشخصات خروجی با زیرنویس ۲ مشخص شده‌اند.

- 1- Elastic
- 2- Plastic
- 3- Viscoelastic
- 4- Particular law
- 5- Constitutive relation

در طبقه‌بندی مذکور ما انتقال حرارت جابه‌جایی را به عنوان حالتی از انتقال حرارت در نظر نگرفتیم. جابه‌جایی، در واقع، حرکت محیط است که انتقال حرارت به وسیله نفوذ یا تابش را، تسهیل می‌نماید. تنها به دلایل مرسوم، بین نفوذ حرارت در اجسام صلب ساکن یا در حال حرکت، که آن را هدایت می‌نامیم، و نفوذ حرارت در اجسام تغییرشکل‌پذیر، که آن را جابه‌جایی می‌نامیم، تمایز قائل می‌شویم. هدایت موضوع بحث این کتاب می‌باشد؛ جابه‌جایی و تابش در جای دیگر مورد بررسی قرار خواهند گرفت. هر چند مثال‌هایی از جابه‌جایی و تابش در این کتاب به اقتضا آورده شده است.

۲-۱ تئوری پیوستگی در برابر تئوری مولکولی^۱

در بخش قبل فرایند انتقال حرارت به وسیله نفوذ با دو روش مختلف تشریح شد. از دیدگاه ماکروسکوپی یا پدیده‌شناختی، حرارت، به عنوان مدرک مشاهدات آزمایشگاهی، از یک ناحیه با دمای بیشتر به ناحیه‌ای با دمای کمتر در یک محیط منتقل می‌شود. از دیدگاه میکروسکوپی یا مولکولی، انتقال حرارت در اثر تبادل انرژی جنبشی بین مولکول‌ها پدید می‌آید. اما این تئوری بیشتر بر پایه فرضیه است تا آزمایش. تضاد بین این دو صورت از انتقال حرارت در دو دیدگاه دیگر برای مسائل مهندسی در انتقال حرارت منعکس شده است.

در دیدگاه اول، یعنی متناظر با دیدگاه ماکروسکوپی، محیط پیوسته فرض می‌شود. که در آن مسیر متوسط آزاد مولکول‌ها در مقایسه با تمام ابعاد دیگر موجود در محیط کوچک است. پس یک متوسط‌گیری آماری بر پایه تعاریف کلی امکان‌پذیر است. به عبارت دیگر محیط با تعریف مفهوم زمینه یا میدان^۲ مطابقت می‌کند.

ممکن است ویژگی‌های یک میدان، نرده‌ای باشد، مثل دما T ، یا برداری باشد مثل سرعت V . در دیدگاه دوم، یعنی متناظر با دیدگاه میکروسکوپی یا مولکولی، یا متوسط‌گیری آماری رفتار مولکولی امکان‌پذیر نیست یا امکان‌پذیر است ولی مورد نیاز نیست. در واقع یک تشریح کلی و منطقی از محیطی که دارای ساختار مولکولی توزیع شده فضایی می‌باشد، می‌تواند به گونه‌ای باشد که در آن قوانین کلی برای هر مولکول به‌طور جداگانه نوشته شود. حل سیستم با تعداد زیاد ذره (مولکول)، برحسب زمان و مکان و سپس ربط دادن یک مفهوم ماکروسکوپی به رفتار مولکولی، می‌تواند همان نتیجه‌ای را دربر داشته باشد که از تئوری پیوستگی حاصل می‌شود.

دلیل این‌که همیشه کار را با روش مولکولی شروع نمی‌کنیم، جدا از مشکلات ریاضی و این حقیقت که دانش ما در مورد نیروهای بین مولکولی محدود می‌باشد، این است که رفتار مولکول‌ها

معادله (۱-۱۷) با تعدادی از روش‌های مناسب برای برخی مسائل بیان یا جدول‌بندی شده است. معمول‌ترین شکل^۱ صریح معادله (۱-۱۷) به صورت زیر است.

$$p = \rho RT. \quad (1-18)$$

معادله فوق قانون گاز ایده‌آل نامیده می‌شود. معادلات (۱-۱۷) و (۱-۱۸) حالت‌هایی از قوانین ویژه هستند که معمولاً معادلات حالت نامیده می‌شوند. حال حالت خروجی می‌تواند به کمک معادلات (۱-۱۴)، (۱-۱۵)، (۱-۱۶)، و (۱-۱۷) محاسبه شود. ولی، مطابق گذشته، جزئیات اهمیت زیادی ندارد و در این‌جا به آن نمی‌پردازیم.

حال واضح است که اولین فرمولاسیون مثال ۱-۴ از نوع مسائل تعیین‌شده ترمودینامیکی است و با استفاده از قوانین کلی ترمودینامیک در ترکیب با معادلات مکانیک محاسبه شده است. ولی دومین فرمولاسیون، نیازمند استفاده از قوانین ویژه اضافی بوده و در نتیجه از نوع مسائل تعیین‌شده ترمودینامیکی است.

دینامیک گازها و انتقال حرارت قواعد کلی هستند که با مسائل تعیین‌نشده ترمودینامیکی سروکار دارند. علاوه بر قوانین کلی ترمودینامیکی، دینامیک گازها به معادلات حالت، به عنوان قوانین عمومی وابسته هستند. در انتقال حرارت دو قانون ویژه به کار می‌رود که حالت‌های انتقال حرارت نامیده شده و ما اکنون به تشریح آن‌ها می‌پردازیم.

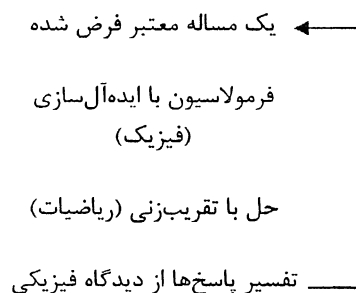
نفوذ (رسانایی): در نفوذ، اگر یک توزیع غیریکنواخت دمایی در یک محیط یا بین دو محیط در تماس با هم وجود داشته باشد حرارت انتقال می‌یابد. در مقیاس مولکولی، مکانیسم نفوذ به صورت تغییر انرژی جنبشی بین مولکول‌ها در نواحی دمابالا و دماب پایین، خود را نشان می‌دهد. خصوصاً این اتفاق به برخوردهای کشسان مولکول‌ها در گازها، حرکت الکترون‌های آزاد در فلزات و نوسان‌های طولی اتم‌ها در جامدات عایق الکتریسیته نسبت داده شده است.

تابش: طبیعت واقعی تابش و مکانیسم انتقال آن به‌طور کامل تاکنون مشخص نشده است. بعضی از اثرات تابش برحسب امواج الکترومغناطیسی و بعضی دیگر برحسب مکانیک کوانتومی توصیف می‌شوند، همچنین هیچکدام از این دو تئوری تمام مشاهدات آزمایشگاهی را تشریح نمی‌کنند. به عنوان مثال، طبق تئوری موج در هنگام گسیل تابش، مقداری از انرژی داخلی جسم به امواج الکترومغناطیس که نوع دیگری از انرژی است تبدیل می‌شود. این امواج در میان فضا با سرعت نور حرکت می‌کنند تا هنگامی‌که به یک جسم دیگر برخورد کنند که قسمتی از انرژی آن‌ها جذب شده و دوباره تبدیل به انرژی داخلی شود.

۱- تئوری پیوستگی، تئوری ماکروسکوپی یا میدانی یا دیدگاه پدیده‌شناختی نیز نامیده می‌شود؛ به تئوری مولکولی،

تئوری میکروسکوپی هم گفته می‌شود.

۱- در این کتاب از واژه "شکل" در ترجمه واژه "form" استفاده شده است.



در فرمولاسیون یک مساله، ایده‌آل‌سازی‌ها حتی برای تعریف مفاهیم و عبارت قوانین طبیعی (عمومی و خصوصی) لازم‌اند. یک مثال معروف از تعریف ایده‌آل‌سازی در میان مفاهیم، چگالی (b) یک ویژگی فیزیکی (B) یک سیستم در یک نقطه (P) است. این مفهوم مطابق فرآیند حدگیری، ایده‌آل‌سازی شده زیر تعریف می‌شود. کره کوچکی با شعاع R در نقطه P در نظر گرفته شده است، سپس همه مقادیر خاصیت ΔB موجود در کره بر حجم آن ΔV تقسیم شده است و R (یا ΔV) به صفر میل داده شده است. فرآیند حدگیری مذکور یک ایده‌آل‌سازی غیر واقعی است. به‌عنوان یک واقعیت می‌توان گفت وقتی حجم کره از یک مقدار $\Delta V_0(R_0)$ کمتر شود، چگالی به‌خاطر ساختار مولکولی محیط به‌صورت ناپیوسته تغییر می‌کند. البته در انجام برون‌یابی منحنی چگالی از $\Delta V_0(R_0)$ تا $\Delta V(0) = 0$ که در شکل ۱-۶ نشان داده شده است، به‌جای در نظر گرفتن رفتار ناپیوسته، رفتار پیوسته را جایگزین می‌کنیم و از حالت تفاضل به حالت دیفرانسیل می‌رسیم که خواهیم داشت:

$$b = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta V} = \frac{dB}{dV}, \quad (1-19)$$

که تعریف ریاضی مناسب چگالی در یک نقطه است. مثال‌های معروف کاربردهای این تعریف عبارتند از: چگالی جرمی، غلظت جرمی و چگالی شارژ الکتریکی. ممکن است روند مشابهی برای دیگر ویژگی‌های وابسته به جرم یا وابسته به حجم^۲ یک محیط به‌کار برده شود. ایده‌آل‌سازی دوم در فرمولاسیون یک مساله شامل جملات منحصربه‌فردی است که در عبارت قوانین عمومی ظاهر می‌شوند. برای مثال می‌توان با در نظر گرفتن قانون دوم حرکت نیوتن آن را بیان نمود. نیروهایی که در این قانون صدق می‌کنند را می‌توان به دو دسته نیروهای (تماسی)

۱- در این‌جا به‌طور کلی چگالی یک کمیت به ازای واحد حجم است. که ممکن است چگالی جرمی باشد یا نباشد. یعنی مولف از واژه چگالی برای بیان یکی از ویژگی‌های سیستم تقسیم بر حجم آن سیستم استفاده نموده است و فقط آن چگالی مورد استفاده در مهندسی یعنی $\rho = m/V$ مدنظر نبوده است. م.
۲- بعضی اوقات به آن‌ها ویژگی‌های شدنی (extensive) گفته می‌شود.

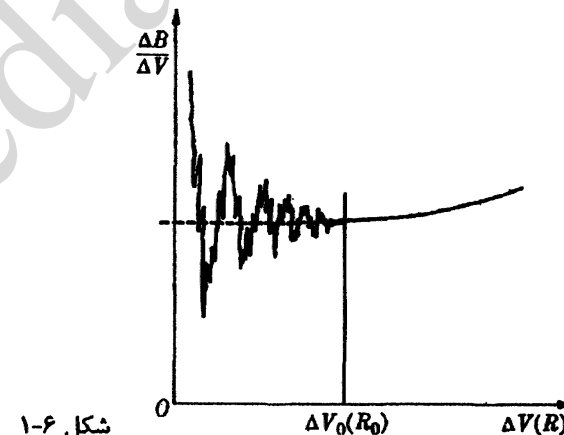
یا ذرات ریز در یک محیط، ممکن است هدفی که به دنبالش هستیم، نباشد. در اکثر مسائل مهندسی، مساله، محاسبه چگونگی رفتار سیستم در حالت کلی است (نه رفتار یک مولکول بلکه مجموعه‌ای از مولکول‌ها.م)، مانند سرعت و یا اختلاف دماها در یک محیط. به این علت استفاده از مفهوم میدان روشن می‌شود. واضح است که در مواردی بهتر است یکی از روش‌های فوق بر سایر روش‌ها ترجیح داده شود. برای مثال، یک فرد به سختی می‌تواند در مورد راه حل یک مساله هدایتی برای یک جسم جامد از دیدگاه ذره‌ای (مولکولی) بیاندیشد و یا رفتار گازهای منبسط را به کمک دیدگاه پیوستگی (میدان) توصیف نماید. مسائل متعددی وجود دارد که می‌توان از هر دو روش برای آن‌ها بهره گرفت، انتخاب هر یک از آن‌ها بستگی به عواملی همچون مهارت، سلیقه و تجربه پیشین فرد دارد. اگر به صورت فیزیکی به این دو روش نگاه کنیم (یعنی روش‌های ماکروسکوپی و میکروسکوپی.م)، تنها تفاوت در این است که فرآیند متوسط‌گیری ساختار مولکولی بسته به روش مورد استفاده، قبل یا بعد از انجام تحلیل صورت می‌گیرد. این به این معنی است که علم آمار، یا قبل از مکانیک (یا ترمودینامیک) مورد استفاده قرار می‌گیرد یا بعد از آن‌ها. در این کتاب، توجه ما به رفتار هر کدام از مولکول‌ها (دیدگاه میکروسکوپی) معطوف نمی‌باشد، بلکه می‌خواهیم میانگین تاثیراتشان را در زمان و مکان بیابیم. به عبارت دیگر، مساله این است که یک محیط چگونه به شکل یک کل (یکپارچه) رفتار می‌کند، و یا بخش‌هایی از آن دربردارنده تعداد زیادی مولکول می‌باشد، چگونه رفتار می‌کند. بنابراین، ما مسائل انتقال حرارت را از دیدگاه پیوستگی مورد ارزیابی قرار خواهیم داد.

۱-۳. مبانی انتقال حرارت پیوستگی

هر علم مهندسی بر دو اصل تئوری و آزمایش (تجربه) بنا شده است. پاسخ این سوال که «چرا فقط تئوری و یا فقط آزمایش به‌جای ترکیب تئوری و آزمایش با یکدیگر، استفاده نمی‌شود؟» این است که هر یک اساساً به‌عنوان ابزار متفاوتی از دیگری است^۲ و هر یک تقریب‌ها و ایده‌آل‌سازی‌های خود را دارند که به دیگری مربوط نمی‌شوند. در بررسی اعتبار مسائل، هر دو مورد نیازند و ممکن است در بررسی صحت کار، نتایج تحقیقات تئوری و تجربی نظیر به نظیر مورد با هم مقایسه شوند. بنابراین، اگرچه کتاب حاضر تنها به انتقال حرارت تئوریک پرداخته است ولی باید اشاره نمود که بحث در مورد تئوری تنها به موضوعی برای رقابت مولفان تبدیل شده است، به‌جای آن‌که در مورد اهمیت تئوری و مقایسه آن با تجربه بحث شود.

حل مساله در انتقال حرارت تئوریک همانند دیگر کارهای مهندسی رامی‌توان با طرح زیر نشان داد:
از این طرح دیده می‌شود که دو اصل در تمام مسائل مهندسی وجود دارد، یکی اصل ایده‌آل‌سازی و دیگری اصل تقریب‌زنی است.

حجمی^۱ و نیروهای سطحی^۲ طبقه‌بندی کرد. نیروهای حجمی بر المان دیفرانسیلی حجم و نیروهای سطحی بر المان دیفرانسیلی سطح در نظر گرفته می‌شوند و هر دو طی ایده‌آل‌سازی با حذف جفت نیروها^۳ می‌توانند به برداری تبدیل شوند.^۴ بدون این ایده‌آل‌سازی‌ها و بسیاری از ایده‌آل‌سازی‌های دیگر، فرمولاسیون تئوری پیوستگی مهندسی که در مکانیک اجسام صلب و مواد تغییر شکل‌پذیر، ترمودینامیک، دینامیک گازها، انتقال حرارت یا الکترومغناطیس مورد استفاده قرار می‌گیرد، غیرممکن می‌شود. این زمینه‌ها با پیوستگی‌های ایده‌آل سروکار دارند، اگر چه محیط پیوسته شامل تعدادی محدود ولی بسیار زیاد از ذرات مجزا از یکدیگر می‌باشد.



شکل ۱-۶

از آنجایی که قوانین طبیعی تئوری پیوستگی بر پایه تعدادی ایده‌آل‌سازی بنا شده‌اند، ما باید برای انجام فرمولاسیون مسائل راه‌هایی را پیدا کنیم که فرمولاسیون انجام شده دارای اعتبار باشد. فرمولاسیون انتخاب شده به توانایی ما در تطبیق دادن مسائل با قوانین طبیعی بستگی دارد، که این فرایند انطباق، فرآیندی است که اغلب به تقریب‌های بیشتری نیازمند است تا این قوانین طبیعی را برای استفاده در شرایط مورد نظر، آماده سازد.

همیشه باید در نظر داشت که ممکن است برای انجام فرمولاسیون یک مساله، روش‌های تقریب مختلفی وجود داشته باشد و انتخاب مناسب‌ترین روش، نیازمند درک، بصیرت و تجربه است. متأسفانه درک و بصیرت قابل آموزش نبوده و بستگی به خود فرد دارد. البته دستیابی به تجربه، نیاز به تلاش فراوان و صادقانه دارد. همان‌طور که برای انجام فرمولاسیون روش‌های متعددی وجود

- 1- Body forces
- 2- Surface forces
- 3- Couples

۴- فرض حذف جفت نیرو و چند فرض اضافی دیگر برای انجام فرمولاسیون معادلات اولر و ناویر-استوکس سیالات نیز ضروری می‌باشند.

فارد، برای حل مسائل فرموله شده نیز می‌توان از چندین روش تقریبی استفاده نمود و باز هم می‌توان گفت که انتخاب بهترین روش به درک، بصیرت، و تجربه فردی این‌بار در حوضه ریاضیات نیازمند است نه فیزیک (چون انتخاب بهترین روش برای انجام فرمولاسیون به درک، بصیرت، و تجربه در حوضه فیزیک نیازمند است.م). پاسخ مساله‌ای که خوب فرموله شده است باید موجود، یکتا و پایا باشد. هر دو مورد موجود بودن و یکتا بودن مهمند و به علوم پایه مربوط می‌شوند و از طرفی پایداری به‌طور واضح اهمیت زیادی در علوم کاربردی دارد.

این کتاب به سه قسمت تقسیم شده است. قسمت اول با فرمولاسیون و قسمت دوم با روش‌های دقیق و تقریبی حل مسائل هدایت سر و کار دارد. قسمت سوم به روش‌های بیشتر فرمولاسیون و حل ساختارهای پیشرفته یا خاص پرداخته است.^۱

مراجع

1. L. PRANDTL and O. G. TIETJENS, *Fundamentals of Hydro- and Aerodynamics*, New York: McGraw-Hill, 1934.
2. M. H. SHAMOS and G. M. MURPHY, *Recent Advances in Science*, New York: Interscience Publishers, 1956.
3. A. H. SHAPIRO, *The Dynamic and Thermodynamic of Compressible Flow*, New York: The Roland Press, 1953.

۱- این کتاب در برگرفته ۷ فصل اول کتاب انتقال حرارت هدایتی آرپاچی است و علاقه‌مندان برای مطالعه بخش سوم و فصول ۸، ۹ و ۱۰ می‌توانند به کتاب زبان اصلی مراجعه نمایند.

بخش I : فرمولاسیون

www.chempedia.ir

فصل دوم

فرمولاسیون‌های متمرکز،

انتگرالی و دیفرانسیلی

در فصل ۱ جایگاه انتقال حرارت در بین علوم مهندسی شرح داده شد و انواع مختلف انتقال حرارت یعنی هدایت، جابه‌جایی و تابش از هم متمایز شدند. حال می‌خواهیم به بررسی کلی فرمولاسیون مسائل هدایت بپردازیم.

فرمولاسیون یا روابط فیزیکی تحلیل فازی علوم مهندسی از قبیل انتقال حرارت، براساس تعریف مفاهیم و برقراری قوانین طبیعی انجام می‌شود. قوانین طبیعی هدایت، مانند دیگر رشته‌های علمی را نه می‌توان اثبات و نه نقض نمود، و براساس مدارک و شواهد جمع‌آوری شده از آزمایشات مختلف و وسیع، استنتاج شده‌اند. از هنگامی که بشر برای درک جهان، کوشش خود را بیشتر نموده است، عبارات قوانین طبیعی که در حال حاضر موجود می‌باشند، بیان شده‌اند. ما در حال حاضر به این قوانین طبیعی به عنوان توصیفات تقریبی از طبیعت رجوع نموده و از آن‌ها برای حل مسائل متداول مهندسی استفاده می‌نماییم.

همان‌طور که در فصل ۱ دیدیم، قوانین طبیعی را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود: (۱) قوانین کلی (۲) قوانین ویژه. مشخصه قانون کلی این حقیقت است که کاربرد آن از ماهیت محیط مورد مطالعه مستقل است. به عنوان مثال‌هایی از قوانین کلی می‌توان از موارد زیر نام برد: قانون بقای جرم، قانون دوم حرکت نیوتن (شامل تکانه یا اندازه حرکت^۱ و گشتاور اندازه حرکت^۲)، قوانین اول و دوم ترمودینامیک، قانون بقای شارژ الکتریکی، قانون نیروی لورنتز، قانون مدار آمپر، قانون القای فارادی. مسائلی که می‌توان آن‌ها را تنها با استفاده از قوانین کلی به‌طور کامل فرمول نمود، مسائل

1- Momentum

2- Moment of momentum

تعیین شده مکانیکی، ترمودینامیکی یا الکترومغناطیسی نامیده می‌شوند. به عبارت دیگر، مسائلی که نمی‌توان آن‌ها را تنها با استفاده از قوانین کلی به‌طور کامل فرموله نمود مسائل تعیین‌نشده مکانیکی، ترمودینامیکی یا الکترومغناطیسی نامیده می‌شوند. هر کدام از مسائل قرار گرفته در دسته دوم (مسائل تعیین‌نشده)، علاوه بر قانون کلی به یک یا تعداد بیشتر شرایط، که در شکل قوانین ویژه بیان می‌شود، نیاز دارند. مشخصه قانون ویژه این است که کاربرد آن به ماهیت محیط مورد مطالعه وابسته است. به عنوان مثال‌هایی از قوانین ویژه می‌توان از موارد زیر نام برد: قانون کشسانی هوک^۱، قانون گرانروی نیوتن، قانون گاز ایده‌ال، قانون هدایتی فوریه، قانون تابش استفان-بولتزمان، قانون الکتریسیته اهم. در این کتاب ما از سه قانون کلی استفاده خواهیم نمود:

(الف) قانون بقای جرم

(ب) قانون اول ترمودینامیک

(پ) قانون دوم ترمودینامیک

و نیز از دو قانون ویژه بهره می‌بریم:

(ت) قانون هدایتی فوریه

(ج) قانون تابش استفان-بولتزمان

که هر کدام از این قوانین دارای درجه اهمیت متفاوتی هستند.

۲-۱. تعریف مفاهیم

موضوع را با این فرضیه آغاز می‌کنیم که جهان محیطی از ساختارهای مولکولی و شامل انرژی است، و ابتدا مفاهیم زیر را تعریف می‌نماییم:

پیوستگی (میدان): محیطی است که دارای کمترین حجم ممکن بوده و شامل مولکول‌های کافی است و در آن می‌توان خصوصیات آماری متوسط محیط را به‌دست آورد تا به‌طور مناسبی محیط را توصیف نمود (به عنوان مثال تعریف چگالی b را ببینید (معادله ۱۹-۱)).

سیستم^۲: بخشی از محیط (پیوستگی) است که آن را از بقیه محیط (پیوستگی) جدا می‌کنیم، تا بتوانیم به راحتی فرمولاسیون مساله را انجام دهیم. مرزهای یک سیستم می‌تواند منبسط یا منقبض شوند، اما همیشه به گونه‌ای فرض می‌کنیم که بقیه محیط در طی هرگونه تغییر در

1-Hook's law of elasticity

۲- در این کتاب مولف از واژه پیوستگی برای بیان محیط استفاده نموده است و منظور این است که محیطی را که در آن به تحلیل می‌پردازیم ماکروسکوپی است و به عبارت دیگر پیوسته است نه گسسته و مولکولی.

۳- در کتاب‌های دیگر از واژه سیستم به عنوان یک عبارت کلی برای بخشی از محیط که به منظور انجام مطالعات از بخش‌های دیگر محیط جدا می‌شود استفاده می‌شود که این سیستم می‌تواند باز یا بسته باشد و به چیزی که در این کتاب سیستم نامیده شده است سیستم بسته یا جرم کنترل گفته می‌شود.

سیستم، از مرزهای سیستم عبور ننماید^۱. در توصیف سیستم به‌صورت ریاضی از روش مکانیک سیالاتی لاگرانژی استفاده می‌نماییم.

حجم کنترل^۲: همان سیستم است با این تفاوت که ممکن است بقیه محیط، از مرزهای ثابت و یا قابل تغییر (سطح کنترل) یک حجم کنترل در یک یا چند نقطه عبور نماید. این تنها تفاوت بین حجم کنترل و سیستم است. برای اغلب مسائل در این کتاب لازم نیست بغیر از موارد ساده (بخش ۲-۲ را ببینید) حجم کنترل را با مرزهای متغیر در نظر بگیریم. در توصیف حجم کنترل به‌صورت ریاضی از روش مکانیک سیالاتی اولیری استفاده می‌کنیم.

ویژگی: یک خصوصیت ماکروسکوپی سیستم یا حجم کنترل است که با استفاده از یک روند میانگین‌گیری آماری تعیین می‌شود. ویژگی‌هایی از قبیل چگالی، سرعت، فشار، دما، انرژی درونی، انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل، آنتالپی یا انتروپی به‌صورت مقداری مشاهده یا ارزیابی می‌شوند. توصیف ریاضی ویژگی B بدین صورت است که تغییر B بین هر شرط اولیه و نهایی، به مسیر حرکت بستگی ندارد و داریم:

$$\int_1^2 dB = B_2 - B_1.$$

حالت: یک شرط سیستم یا حجم کنترل که به‌وسیله ویژگی‌ها تعیین می‌شود. حالت سیستم در صورتی تعیین می‌شود که ویژگی‌های مستقل به تعداد کافی معلوم باشند.

فرآیند: هر تغییری در هر کدام از حالات یک سیستم یا حجم کنترل.

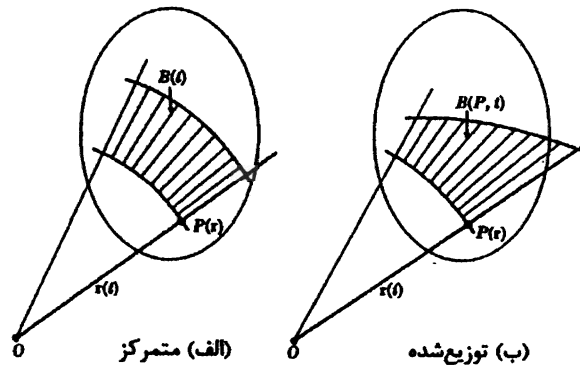
سیکل: فرآیندی که حالات اولیه و نهایی آن یکسان است.

کار: نوعی انرژی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود. در طول یک فرآیند توسط یک سیستم یا حجم کنترل کار به روی محیط انجام می‌شود اگر تنها اثر خارجی بر سیستم یا حجم کنترل بالا بردن وزنه باشد (یعنی توسط یک سیستم در صورتی کار انجام می‌شود که وزنه جابه‌جا شود.م). کار انجام شده توسط سیستم یا حجم کنترل مثبت در نظر گرفته می‌شود؛ کار انجام شده روی یک سیستم یا حجم کنترل، منفی در نظر گرفته می‌شود. اغلب گونه‌های متداول کار در جملات قانون اول ترمودینامیک بررسی شده است. [معادلات (۱۶-۲) و (۳۶-۲) را ببینید].

تساوی دمایی: وقتی که دو سیستم یا حجم کنترل در تماس با یکدیگر قرار گیرند، با تغییر ویژگی‌هایشان یکدیگر را تحت‌تاثیر قرار می‌دهند. یکی از حالاتی که بعد از تماس دو سیستم یا حجم کنترل پیش می‌آید، حالت برابری دمایی نامیده می‌شود. تعریف برابری دمایی بر این امر دلالت می‌کند که دو سیستم یا دو حجم کنترل قبل از آن‌که در تماس با یکدیگر قرار گیرند دمای‌شان با هم برابر نبوده است.

۱- یعنی ورود و خروج جرم به یا از سیستم نداشته باشیم یا به عبارت دیگر سیستم بسته یا جرم کنترل.

۲- یا همان سیستم باز



شکل ۲-۱

در مورد فرمولاسیون های دگرگونی و اختلافی مربوط به قوانین کلی تا فصول ۸، ۹ و ۱۰ توضیحی داده نمی شود.^۱ در اینجا تنها فرمولاسیون های متمرکز، انتگرالی و دیفرانسیلی این قوانین بررسی خواهند شد. این کار را هم برای سیستم و هم برای حجم کنترل انجام خواهیم داد. باید متذکر شد که، البته، یک فرمول تبدیل^۲ (تئوری انتقال رینولدز) وجود دارد که یک قانون کلی بیان شده برای یک سیستم را به قانون مربوط به حجم کنترل، تبدیل نموده و ما را از بررسی جداگانه قانون کلی برای حجم کنترل، بی نیاز می نماید. به کمک ویژگی های وابسته به جرم یا حجم است که انواع مختلفی از فرمول های تبدیل، مناسب برای انجام فرمولاسیون متمرکز، انتگرالی، و دیفرانسیلی به دست می آید.

۲-۳. فرمولاسیون متمرکز قوانین کلی

ابتدا شکل فرمول تبدیل، مورد استفاده در مورد فرمولاسیون متمرکز را معرفی می کنیم. B ، ویژگی نرده ای وابسته به حجم یا جرم است که مقدار ویژه آن b می باشد.

$$b = B/m \quad \text{یا} \quad B/V. \quad (2-1)$$

مثال های متفاوتی از B و b در جدول ۲-۱ فهرست شده اند. در اینجا فرمول تبدیل را برحسب مقادیر ویژه از ویژگی وابسته به جرم به دست می آوریم، $b = B/m$. روند مشابهی را می توان برای مورد وابسته به حجم به کار برد.

یک حجم کنترل را در نظر بگیرید که در فرآیندی قرار گرفته و حالت های اولیه و نهایی آن در شکل ۲-۲ نشان داده شده است. جرم Δm_l در مکان l از مرزهای حجم کنترل عبور می کند و این جرم دارای مقدار ویژه b_l از ویژگی B است (در اینجا Δ نشان دهنده تغییر محدود در مورد هر

گرما: نوعی انرژی است که در طول یک فرآیند، از مرزهای یک سیستم یا حجم کنترل، و به واسطه نابرابری دمایی عبور می کند. انتقال حرارت به یک سیستم یا حجم کنترل مثبت و انتقال حرارت از یک سیستم یا حجم کنترل منفی در نظر گرفته می شود. می توان نشان داد که برهم کنش های کار و گرما بین سیستم یا حجم کنترل و محیط به مسیر طی شده توسط فرآیند مربوطه وابسته است. بنابراین، کار و گرما، ویژگی نیستند. اکنون می توان قوانین طبیعی را برحسب مفاهیم مذکور بیان نمود. ابتدا قوانین کلی را مورد بررسی قرار می دهیم.

۲-۲. قوانین کلی

اولین مرحله در شرح و بیان یک قانون کلی انتخاب یک سیستم یا حجم کنترل است. بدون این مرحله، بی معنی است که در مورد مفاهیمی مثل چگالی، سرعت، فشار، دما، گرما، کار، انرژی داخلی، یا انتروپی که در قوانین کلی به کار می روند، صحبت نماییم. با وجود آن که، همواره قوانین کلی معروف و ساده برای یک سیستم نوشته می شود، اما وقتی که با محیط های در حال حرکت^۱ سروکار داریم، تحلیل سیستم سخت خواهد بود زیرا اغلب مشخص کردن مرزهای یک سیستم متحرک برای هر بازه زمانی محسوس، کار مشکلی است. بنابراین به طور کلی در نظر گرفتن حجم کنترل برای تحلیل محیط های در حال حرکت، ترجیح داده می شود.

دومین مرحله در بیان یک قانون کلی انتخاب نوع این قانون است. ممکن است یک قانون کلی به یکی از انواع زیر فرموله شود:

- متمرکز شده^۲ (یا میانگین گیری شده)
- توزیع شده^۳: (الف) انتگرالی، (ب) دیفرانسیلی، (پ) دگرگونی^۴ (ت) اختلافی^۵. یک قانون کلی، متمرکز است، اگر جمله های آن مستقل از مکان باشد و توزیع شده است، اگر جملاتش وابسته به مکان باشند. این امر در شکل ۲-۱ در یک نقطه $P(r)$ به وسیله ویژگی B نشان داده شده است، که در آن r نشان دهنده بردار مکان P ، $B = B(t)$ و $B = B(P, t)$ به ترتیب نشان دهنده مقادیر متمرکز و توزیع شده از B است.

1- Continua in motion (جمع Continuum است)

2- Lumped (به آن متمرکز نیز می گویند و در این کتاب از واژه متمرکز استفاده شده است)

3- Distributed

4- Variational

5- Difference

۱- این کتاب در برگزیده هفت فصل از کل کتاب انتقال حرارت هدایتی است و برای اطلاع از فصول ۸، ۹ و ۱۰ علاقمندان می توانند به کتاب زبان اصلی رجوع کنند.

ویژگی است). انبساط یا انقباض مرزهای حجم کنترل مشکلی ایجاد نکرده و بنابراین در بحثمان گنجانده شده است.^۱

جدول ۲-۱

ویژگی(خاصیت)	B	$b = B/m$	$b = B/v$
جرم	m	1	ρ
حجم	$v = \begin{cases} mv \\ m/\rho \end{cases}$	v	1
		$1/\rho$	1
مومنتم	mV	V	ρV
انرژی جنبشی	$\frac{1}{2}mV^2$	$\frac{1}{2}V^2$	$\frac{1}{2}\rho V^2$
انرژی پتانسیل	mgz	gz	ρgz
انرژی داخلی	$U = mu$	u	ρu
انرژی کل	$E = me$	e	ρe
آنتالپی	$H = mh$	h	ρh
انتروپی	$S = ms$	s	ρs
غلظت جرمی	$C = mc$	c	ρc
بار الکتریکی	$q_e = v\rho_e$	ρ_e/ρ	ρ_e

Δv_i از حجم، حجم کنترل بیشتر است بنابراین با این فرض جرم Δm_i را که به حجم کنترل وارد می‌شود به عنوان جرمی که از ابتدا در سیستم وجود داشته در نظر می‌گیریم (م). می‌خواهیم رابطه بین تغییرات ویژگی B درون سیستم و حجم کنترل را بیابیم.

فرض می‌کنیم که B_1, B_2 و B', B'' به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر اولیه و نهایی B برای سیستم و حجم کنترل می‌باشند. در طول فرایند نشان داده شده در شکل ۲-۲ تغییر B در سیستم به‌صورت زیر است:

$$\Delta B = B_2 - B_1. \quad (2-2)$$

دوباره با توجه به شکل ۲-۲ برای بیان B_2 و B_1 برحسب مقادیر حجم کنترل خواهیم داشت:

$$B_1 = B' + b_i \Delta m_i, \quad B_2 = B''. \quad (2-3)$$

بنابراین با قراردادن معادله (۲-۳) درون (۲-۲) و نشان دادن تغییر در حجم کنترل با ΔB_σ داریم:

$$\Delta B = \Delta B_\sigma - b_i \Delta m_i. \quad (2-4)$$

اگر مشخصه B در بیش از یک مکان، از حجم کنترل عبور نماید معادله (۲-۴) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta B = \Delta B_\sigma - \sum_{i=1}^N b_i \Delta m_i, \quad (2-5)$$

که این رابطه، فرمول تبدیل مورد نظر است. در اینجا N نشان‌دهنده تعداد عبور و Δm_i مثبت نشان‌دهنده جریان به درون حجم کنترل است. سرانجام با تقسیم طرفین معادله (۲-۵) بر Δt و انجام حد آن وقتی که $\Delta t \rightarrow 0$ فرمول تبدیل، به‌صورت زیر خواهد بود:

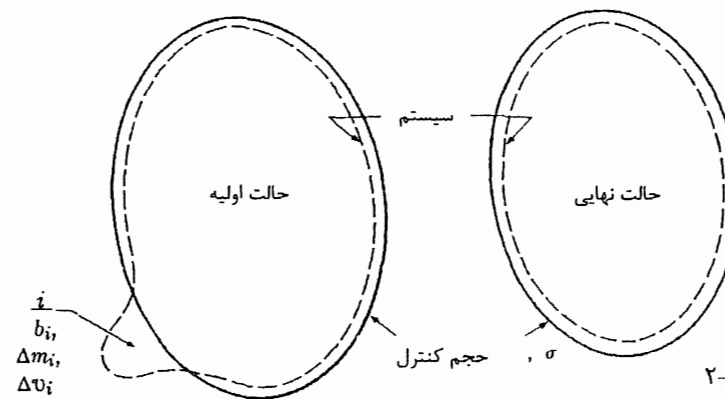
$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB_\sigma}{dt} - \sum_{i=1}^N b_i \omega_i, \quad (2-6)$$

حجم کنترل سیستم

که در آن $\omega_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta m_i / \Delta t)$ ، نرخ جریان جرمی عبوری از حجم کنترل در موقعیت i است.

حال می‌خواهیم از فرمول تبدیل (۲-۶) برای به‌دست آوردن شکل‌های متمرکز قوانین کلی برای حجم کنترل استفاده کنیم.

بقای جرم (فرمولاسیون متمرکز). طبق تعریف، در صورتی سیستم داریم که از مرزهای آن جرمی عبور نکنند، بنابراین برای یک سیستم خواهیم داشت:



شکل ۲-۲

به‌طور هم‌زمان یک سیستم را در نظر بگیرید که در حالت نهایی بر حجم کنترل منطبق می‌شود اما در حالت اولیه، حجم آن Δv_i به‌علاوه حجم کنترل است (یعنی حجم سیستم به اندازه

۱- برای روشن شدن مطلب حالت‌های اولیه و نهایی شکل ۲-۲ به‌طور جداگانه نشان داده شده است. درحالی‌که مرزها تغییرشکل می‌نمایند، کل حجم کنترل ممکن است ثابت یا غیر ثابت باشد.

۱- از آنجایی‌که زمان نه ویژگی سیستم یا حجم کنترل است و نه ویژگی سیستم یا حجم کنترل نیست، در اینجا هر تغییری در زمان با همان نماد مورد استفاده در تغییر در خاصیت، نشان داده می‌شود.

$$\frac{dE}{dt} = q - P, \quad (2-13)$$

که در آن $q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\nabla Q / \Delta t)$ و $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\nabla W / \Delta t)$ به ترتیب نرخ انتقال حرارت و نرخ کار (توان) می باشد. شایان ذکر است که برحسب طبقه بندی ما برای قانون های کلی، معادله (۲-۱۳) متمرکز فضایی است اما از نظر زمانی شکل دیفرانسیلی قانون اول ترمودینامیک سیستم ها است.

برطبق معمول با استفاده از فرمول تبدیل (۲-۶) و استفاده از جدول ۲-۱ خواهیم داشت:

$$B = E, \quad b = e, \quad (2-14)$$

سپس با قرار دادن معادله (۲-۱۴) در معادله (۲-۶) و قرار دادن نتیجه آن در معادله (۲-۱۳) شکل شدنی قانون اول ترمودینامیک برای حجم کنترل متمرکز را خواهیم داشت:

$$\frac{dE_{\sigma}}{dt} - \sum_{i=1}^N e_i \omega_i = q - P, \quad (2-15)$$

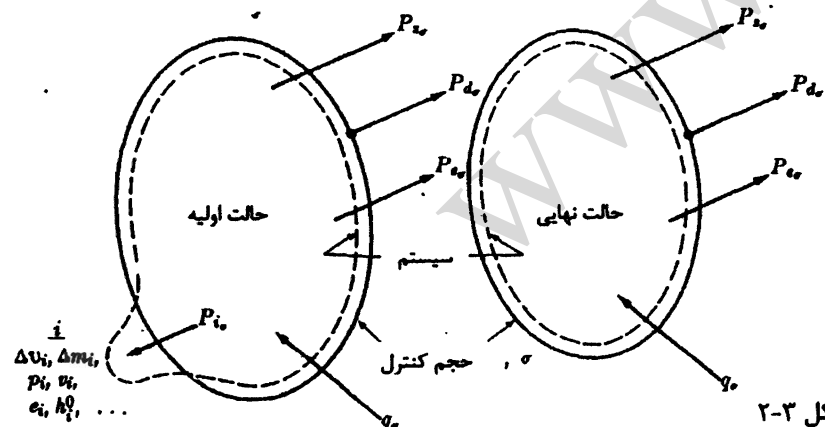
که در آن P توان خارج شده از سیستم و q نرخ حرارت وارد شده به سیستم است. توان P معمولاً شامل سه بخش است:

$$P = P_d + P_s + P_e,$$

که در آن P_d , P_s , و P_e به ترتیب توان های جابه جایی، محوری و الکتریکی می باشند. می توان این توان ها را با عبارات مناسبی به صورت توان های خروجی از حجم کنترل بیان نمود:

$$P_d = (P_d + P_t)_{\sigma}, \quad P_s = P_{s\sigma}, \quad P_e = P_{e\sigma} + P_{e_{adv}},$$

که در آن $P_{d\sigma}$, $P_{t\sigma}$, $P_{s\sigma}$, و $P_{e\sigma}$ به ترتیب نشان دهنده توان های جابه جایی، جریان جرمی، محور و الکتریکی است (شکل ۲-۳).



شکل ۲-۳

$$\frac{dm}{dt} = 0, \quad (2-7)$$

که این رابطه معادله بقای جرم برای سیستم های متمرکز است. حال می توانیم معادله بقای جرم برای حجم کنترل نشان داده شده در شکل ۲-۲ را با استفاده از معادلات (۲-۶) و (۲-۷) به دست آوریم. با استفاده از جدول ۲-۱ داریم:

$$B = m, \quad b = 1, \quad (2-8)$$

با قرار دادن معادله (۲-۸) درون (۲-۶) خواهیم داشت:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_{\sigma}}{dt} - \sum_{i=1}^N \omega_i.$$

با استفاده از این نتیجه و معادله (۲-۷) خواهیم داشت:

$$0 = \frac{dm_{\sigma}}{dt} - \sum_{i=1}^N \omega_i. \quad (2-9)$$

این معادله بقای جرم برای حجم کنترل متمرکز می باشد.

قانون اول ترمودینامیک (فرمولاسیون متمرکز). از آنجایی که این قانون در انتقال حرارت با اهمیت بوده و دارای کاربردهای زیادی است، با جزئیات بیشتری بررسی خواهد شد. در سرتاسر مرزهای یک سیستم که یک سیکل کامل را طی می کند، حرارت خالص برابر با کار خالص می باشد:

$$\nabla Q = \nabla W, \quad (2-10)$$

که در آن ∇ نشان دهنده مقدار خالص غیر ویژگی هاست (کار و گرما جزو ویژگی های ترمودینامیکی نیستند).

اگر سیستم در یک فرایند قرار گیرد (یعنی سیستم یک سیکل را طی نکند و فقط یک فرایند را انجام دهد م.م) تفاوت بین گرما و کار خالص برابر تغییر انرژی کل سیستم (که یک ویژگی است) می باشد:

$$\Delta E = \nabla Q - \nabla W, \quad (2-11)$$

در اینجا ممکن است E در شکل های مختلفی از قبیل انرژی درونی، جنبشی، پتانسیل، شیمیایی، و هسته ای وجود داشته باشد. بنابراین:

$$E = U + \frac{1}{2} mV^2 + mgz + U_{\text{شیمیایی}} + U_{\text{هسته ای}} \quad (2-12)$$

شکل شدنی معادله (۲-۱۱)، قانون اول ترمودینامیک برای سیستم های متمرکز را حاصل می کند:

با بازآرایی معادله (۲-۱۵)، شکل صریح قانون اول ترمودینامیک برای حجم های کنترل متمرکز را به دست می آوریم:

$$\frac{dE_{\sigma}}{dt} = \sum_{i=1}^N h_i^0 \omega_i + q_{\sigma} - (P_d + P_s + P_e)_{\sigma}, \quad (2-16)$$

که در آن $h_i^0 = e_i + p_i v_i$ و نشان دهنده آنتالپی سکون به ازای واحد جرم است.
قانون دوم ترمودینامیک (فرمولاسیون متمرکز). ابتدا قانون دوم ترمودینامیک برای سیستم متمرکز را ارائه می دهیم:

$$\Delta S \geq \frac{\dot{Q}}{T}, \quad (2-17)$$

و در شکل شدتی داریم:

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{q}{T}, \quad (2-18)$$

(یا می توان نوشت: $\frac{dS}{dt} = \frac{q}{T} + S_g$).
بنابراین، با استفاده از جدول ۲-۱ خواهیم داشت:

$$B = S, \quad b = s \quad (2-19)$$

با قرار دادن معادله (۲-۱۹) در معادله (۲-۶) و بعد قرار دادن نتیجه آن درون معادله (۲-۱۸) قانون دوم ترمودینامیک برای حجم های کنترل متمرکز به دست می آید:

$$\frac{dS_{\sigma}}{dt} \geq \sum_{i=1}^N s_i \omega_i + \frac{q}{T}, \quad (2-20)$$

با قرار دادن تولید انترپپی S_g ، ممکن است معادله (۲-۲۰) را به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{dS_{\sigma}}{dt} = \sum_{i=1}^N s_i \omega_i + \frac{q}{T} + S_g, \quad (2-21)$$

که این رابطه معادله بقای انترپپی برای حجم های کنترل متمرکز می باشد.
از آنجایی که S_g در ارتباط با درجه بازگشتناپذیری است^۲، معادله (۲-۲۱) برای مطالعه فرایندهای بازگشتناپذیر مفید است. این نکته در فرمولاسیون دیفرانسیلی به دقت گنجانده شده است.
[معادلات (۲-۶۶) تا (۲-۶۹) را ببینید].

۱- مفهوم کار تلف شده در مرجع ۹ را ببینید، معادله (۷-۸).

۲- وقتی که $S_g \rightarrow 0$ معادله (۲-۲۱) تنها برای فرایندهای بازگشتپذیر استفاده می شود (در فرایندهای بازگشتناپذیر به دلیل وجود بازگشتناپذیری هایی مثل اصطکاک، انبساط آزاد، واکنش شیمیایی و غیره درون سیستم یا حجم کنترل انترپپی تولید می شود اما در مورد فرایندهای بازگشتپذیر چون عوامل بازگشتناپذیری وجود ندارند بنابراین تولید انترپپی نخواهیم داشت.م).

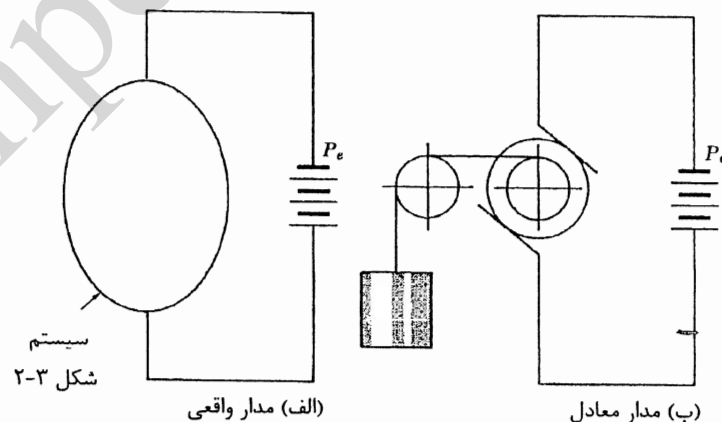
به عنوان مثال، فرض کنید که در سیستم شکل ۲-۳، انرژی داخلی کل با نرخ $U' = U'_{\sigma} + U'_{\Delta v_i}$ و به وسیله یک مدار الکتریکی خارجی (شکل ۲-۴ الف) تولید شود. بر طبق تعریف کار، این تولید انرژی برابر توان P_e است که به سیستم وارد می شود (شکل ۲-۴ ب). بنابراین داریم:

$$P_e = U',$$

که

$$P_e = P_{e\sigma} + P_{e\Delta v_i}$$

در مقالات علمی به اشتباه واژه "تولید حرارت" به واژه جای تولید انرژی داخلی استفاده شده است.
توان الکتریکی $P_{e\Delta v_i}$ ، برابر انرژی الکتریکی داخلی تولید شده در حجم Δv_i بوده و باید در جریان انرژی داخلی عبوری از مرزهای حجم کنترل (یعنی $\sum_{i=1}^N e_i \omega_i$) به حساب آید.



اگر اصطکاک قابل صرف نظر باشد، توان جریان جرمی $P_{i\sigma}$ به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$P_{i\sigma} = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N (p_i \Delta v_i / \Delta t) = - \sum_{i=1}^N p_i v_i \omega_i,$$

که در آن Δv_i حجم و v_i حجم ویژه جرم Δm_i ، و $P_{i\sigma}$ فشار در مرزهای Δv_i است.
به طور مشابه، نرخ گرمای q دریافت شده توسط سیستم را می توان برحسب q_{σ} دریافت شده توسط حجم کنترل بیان نمود. بنابراین داریم:

$$q = q_{\sigma} + q_{\Delta v_i}$$

البته از نقطه نظر تحلیل حجم کنترل، ممکن است $q_{\Delta v_i}$ مثل $P_{i\sigma}$ به عنوان افزایش انرژی داخلی در حجم Δv_i در نظر گرفته شود و در جریان انرژی داخلی $\sum_{i=1}^N e_i \omega_i$ به حساب آید.

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{سیستم}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{B_1(t+\Delta t) - B_1(t)}{\Delta t}}_{\text{عبارت اول}} + \underbrace{\frac{B_3(t+\Delta t)}{\Delta t}}_{\text{عبارت دوم}} - \underbrace{\frac{B_2(t)}{\Delta t}}_{\text{عبارت سوم}} \right], \quad (2-22)$$

که در آن B_1 و B_2 و B_3 مقادیر لحظه‌ای B متناظر با سه ناحیه از فضا است که در شکل ۲-۵ با ۱، ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند.

وقتی که $\Delta t \rightarrow 0$ مکان ۱ با حجم کنترل منطبق می‌شود و اولین عبارت سمت راست معادله (۲-۲۲) نرخ زمانی تغییر B درون حجم کنترل را حاصل می‌کند. از آنجایی که B اکنون علاوه بر بستگی به زمان به مکان نیز بستگی دارد، ممکن است این نرخ تغییر به خوبی برحسب $B = \int_V b \rho dV$ بیان شود، V حجم ثابت حجم کنترل، dV المان حجمی، $b = B/m$ است. بنابراین برای عبارت اول معادله (۲-۲۲) داریم:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_1(t+\Delta t) - B_1(t)}{\Delta t} = \left(\frac{dB}{dt}\right)_V = \int_V \frac{\partial(b\rho)}{\partial t} dV, \quad (2-23)$$

عبارت دوم و سوم در معادله (۲-۲۲) به ترتیب جریانات خروجی و ورودی B از درون سطح کنترل σ را نشان می‌دهند. این عبارات را می‌توان با در نظر گرفتن استوانه هاشورخورده در شکل ۲-۵، ارزیابی نمود. ارتفاع این استوانه $(V\Delta t) \cdot n$ ، حجم آن $(V\Delta t) \cdot n d\sigma$ ، و جرم آن $\rho(V\Delta t) \cdot n d\sigma$ است؛ V نشان‌دهنده سرعت جریان، n بردار عمود بیرونی، و $d\sigma$ المان سطح حجم کنترل است. بنابراین نرخ‌های جریان جرم و ویژگی B درون $d\sigma$ به ترتیب $\rho V \cdot n d\sigma$ و $b\rho V \cdot n d\sigma$ می‌باشند. با انتگرال‌گیری از دو عبارت اخیر روی تمام سطح کنترل داریم:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{B_2(t+\Delta t)}{\Delta t} - \frac{B_2(t)}{\Delta t} \right] = \int_{\sigma} b\rho V \cdot n d\sigma, \quad (2-24)$$

سرانجام، با قرار دادن معادلات (۲-۲۴) و (۲-۲۵) در معادله (۲-۲۳)، فرمول تبدیل موردنظر به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{سیستم}} = \underbrace{\int_V \frac{\partial(b\rho)}{\partial t} dV}_{\text{حجم کنترل}} + \int_{\sigma} b\rho V \cdot n d\sigma, \quad (2-26)$$

باید متذکر شد که این فرمول تبدیل براساس بیان فیزیکی تعریف سیستم و حجم کنترل دست آمده است. ممکن است با استفاده از توضیحات ریاضی و توابع لاگرانژی و اویلری محیط پیوسته بتوانیم به نتایج مشابهی برسیم. این عبارات ریاضی در اینجا ذکر نمی‌شوند.^۲

از آنجایی که حجم کنترل ثابت است، $d/dt \equiv \partial/\partial t$ ، و مرتبه دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری تعویض‌پذیر است.

طبق قرارداد علامت‌های عبارات نرخ فرمول تبدیل انتگرالی و متمرکز مخالف یکدیگرند.

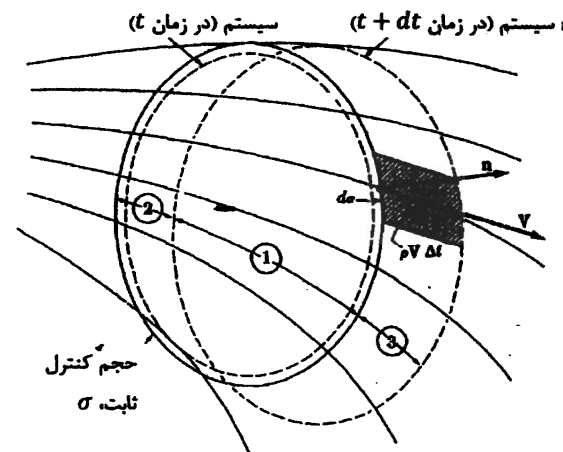
به عنوان مثال مرجع ۱۲ صفحه ۸۴ را ببینید.

بعد از ارائه قانون‌های کلی متمرکز برای سیستم‌ها و حجم‌های کنترل، اکنون می‌خواهیم به شکل‌های انتگرالی متناظر آن‌ها بپردازیم. اگر جریان جرم از مرزهای حجم کنترل به صفر برسد جملات قانون‌های کلی آن مشابه جملات مربوط به یک سیستم خواهد بود. بنابراین، اگر چه نقطه آغاز کارمان همواره با سیستم است ولی شکل‌های انتگرالی و دیفرانسیلی را تنها برای حجم کنترل ارائه می‌دهیم.

۲-۴. فرمولاسیون انتگرالی قوانین کلی

مانند مورد متمرکز، مرحله اول به‌دست آوردن یک فرمول انتقال مناسب است. به‌دلیل کاهش پیچیدگی فرمولاسیون انتگرالی، فرمول را برای حجم کنترل ساکن در نظر می‌گیریم. این فرض برای اغلب موارد فرمولاسیون انتگرالی قانون‌های کلی، صادق است.

یک حجم کنترل ساکن را در نظر بگیرید که در آن مشخصه B جریان دارد (شکل ۲-۵). فرض کنید که در زمان t ، یک سیستم منطبق با این حجم کنترل باشد. می‌خواهیم نرخ زمانی تغییر ویژگی در سیستم را به‌دست آوریم.



شکل ۲-۵

از آنجایی که محیط نمی‌تواند مرزهای خود را قطع کند، این سیستم در طول یک بازه زمانی Δt محیط حرکت نموده و در زمان $t + \Delta t$ همان‌طور که در شکل ۲-۵ نشان داده شده است، حجم دیگری را در فضا اشغال می‌کند. بنابراین نرخ تغییر مورد نیاز را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{\text{سیستم}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[B_1(t+\Delta t) + B_3(t+\Delta t)] - [B_2(t) + B_4(t)]}{\Delta t}, \quad (2-27)$$

با بازآرایی عبارات این معادله خواهیم داشت:

که در آن d و δ به ترتیب نشان‌دهنده تغییر دیفرانسیلی ویزگی و مقدار یک غیر ویزگی است (مثل گرما و کار).^۱

با توجه به فرمول (۲-۱۴):

$$B = E, \quad b = e \quad (2-14)$$

و فرمول انتقال (۲-۲۶) می‌توانیم معادله (۲-۲۹) را به صورت زیر بازآرایی نماییم:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{سیستم}} = \int_V \frac{\partial(e\rho)}{\partial t} dV + \int_{\sigma} e\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (2-30)$$

از آنجایی که در زمان t سیستم حجم کنترل را اشغال می‌کند، نرخ انتقال حرارت $(\delta Q/dt)_{\text{سیستم}}$ و نرخ کار (توان) $P = (\delta W/dt)_{\text{سیستم}}$ در طول مرزهای سیستم را می‌توان به طور مناسبی برحسب حجم کنترل بیان نمود.

بنابراین، با قرار دادن بردار شار حرارتی \mathbf{q} (شکل ۲-۷) و انتگرال‌گیری از نرخ انتقال حرارت $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ از المان سطح $d\sigma$ در تمام سطح کنترل خواهیم داشت:

$$(\delta Q/dt)_{\text{سیستم}} = - \int_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (2-31)$$

که در آن علامت منفی این معادله با علامت قراردادی برای گرما مطابقت دارد.

از آنجایی که در این مبحث با یک مورد متمرکز سروکار داریم عبارت نرخ کار $(\delta W/dt)_{\text{سیستم}}$ را می‌توان به طور مناسبی با در نظر گرفتن عناصرش بیان نمود. این عناصر نرخ‌های کار انجام شده توسط موارد زیر می‌باشند:

(الف) سیستم در فشار محیط،

$$(\delta W/dt)_a = P_a,$$

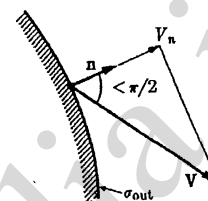
(ب) سیستم در محیطی با تنش‌های گرانشی،

۱- درجه مقدار (δ) همانند درجه تغییرات دیفرانسیلی (d) است

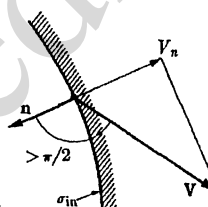
۲- در این کتاب تعریف شار و جریان کاملاً دارای تمایز است. جریان، برای نشان دادن جابه‌جایی (حرکت) ویزگی وابسته به جرم یا حجم درون یک سطح به کار می‌رود. که مثال‌های آن انتقال جرم، مومنتم، انرژی، آنتالپی، و انتروپی با جابه‌جایی و انتقال جریان الکتریکی است. از سوی دیگر، شار، برای بیان نرخ نفوذ یک ویزگی (یا غیرویزگی) به ازای واحد سطح به دلیل حرکت مولکول‌ها، استفاده می‌شود. مثال‌های آن انتقال جرم، مومنتم، و حرارت به دلیل نفوذ و رسانش جریان الکتریکی است. علامت‌های مورد استفاده در بیان انتقال حرارت هدایتی به صورت زیر است: انتقال حرارت، Q (Btu)؛ نرخ انتقال حرارت، q (Btu/hr)؛ نرخ انتقال حرارت به ازای واحد سطح (شار)، q به همراه یک زیرنویس یا بالا نویس، به طور مثال q'' و q_n و q_x و ... یا q (Btu/ft² · hr).

حال می‌خواهیم از معادله (۲-۲۶) برای به دست آوردن شکل انتگرالی قوانین کلی برای حجم‌های کنترل استفاده کنیم.

شکل صریح معادله (۲-۲۵) برای جریانات خروجی و ورودی در شکل ۲-۶ بیان شده است.



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_3(t+\Delta t)}{\Delta t} = \int_{\sigma} b\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\sigma_{out}} b\rho V_n d\sigma_{out},$$



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_2(t)}{\Delta t} = \int_{\sigma} b\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\sigma_{in}} b\rho V_n d\sigma_{in},$$

شکل ۲-۶

قانون بقای جرم (فرمولاسیون انتگرالی). مقادیر مناسب قبلی برای B و b در نظر گرفته می‌شود:

$$B = m, \quad b = 1 \quad (2-8)$$

با قراردادن این مقادیر در معادله (۲-۲۶) داریم:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{سیستم}} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\sigma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (2-27)$$

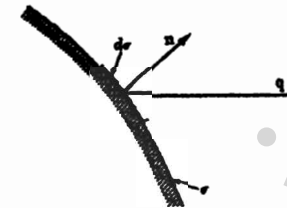
از آنجایی که سمت چپ معادله (۲-۲۷) برابر صفر است خواهیم داشت:

$$0 = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\sigma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (2-28)$$

که این معادله بقای جرم برای حجم‌های کنترل انتگرالی است.

قانون اول ترمودینامیک (فرمولاسیون انتگرالی). می‌خواهیم شکل انتگرالی قانون اول ترمودینامیک را برای حجم کنترل شکل ۲-۵ بیان کنیم، با سیستم نشان داده شده در شکل آغاز می‌کنیم. شکل شدتی (نرخ) قانون اول برای این سیستم به صورت زیر است:

$$(\delta E/dt)_{\text{سیستم}} = (\delta Q/dt)_{\text{سیستم}} - (\delta W/dt)_{\text{سیستم}} \quad (2-29)$$



شکل ۲-۷

$$(\delta W / dt)_\tau = P_\tau, \quad (2-32)$$

(پ) محوری که از سیستم به محیط نیرو وارد می‌کند،

$$(\delta W / dt)_s = P_s, \quad (2-33)$$

(ت) توان الکتریکی که از طرف سیستم بر محیط وارد می‌شود،

$$(\delta W / dt)_e = P_e.$$

در طول بازه‌ی زمانی Δt ، کار انجام شده توسط سیستم برای غلبه بر فشار وارده بر المان سطح $d\sigma$ برابر $p d\sigma (V \Delta t) \cdot n$ است، که در آن $(V \Delta t) \cdot n$ ارتفاع استوانه و فاصله بین بردار عمود تا $d\sigma$ است. با انتگرال‌گیری از این عبارت در تمام سطح کنترل داریم:

$$P_p = \int_\sigma p V \cdot n d\sigma = \int_\sigma (p/\rho) \rho V \cdot n d\sigma. \quad (2-34)$$

انتگرال دوم معادله (۲-۳۴) به‌وسیله ضرب و تقسیم تابع تحت انتگرال اول در ρ حاصل می‌شود و وقتی که تعریف انتالپی استفاده شود این رابطه مناسب‌تر می‌باشد. [معادلات (۲-۳۶) و (۲-۳۷) را ببینید].

برای موردی که P_e نشان‌دهنده توان وارد بر سیستم از یک جریان الکتریکی خارجی است، داریم:

$$P_e = - \int_V u''' dV, \quad (2-35)$$

که در آن u''' نرخ انرژی داخلی محلی به ازای واحد حجم است که به‌وسیله الکتریسیته در سیستم تولید می‌شود.

با قرار دادن معادلات (۲-۳۰)، (۲-۳۱)، (۲-۳۲)، (۲-۳۳)، (۲-۳۴) و (۲-۳۵) درون معادله (۲-۲۹) داریم:

$$\int_V \frac{\partial(\epsilon p)}{\partial t} dV + \int_\sigma \epsilon p V \cdot n d\sigma = - \int_\sigma q \cdot n d\sigma - \int_\sigma (p/\rho) \rho V \cdot n d\sigma - P_\tau - P_s + \int_V u''' dV. \quad (2-36)$$

علاوه بر آن، با استفاده از تعریف آنتالپی سکون به ازای واحد جرم $h^0 = e + pV$ معادله (۲-۳۶) را می‌توان بازاریابی نمود و قانون اول ترمودینامیک برای حجم‌های کنترل انتگرالی به‌دست می‌آید:

$$\int_V \frac{\partial(\epsilon p)}{\partial t} dV + \int_\sigma h^0 \rho V \cdot n d\sigma = - \int_\sigma q \cdot n d\sigma - P_\tau - P_s + \int_V u''' dV. \quad (2-37)$$

قانون دوم ترمودینامیک (فرمولاسیون انتگرالی). شکل شدتی این قانون برای سیستم شکل ۲-۵ نوشته شده است:

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{q}{T} \quad (2-18)$$

سمت راست معادله (۲-۱۸) ممکن است برحسب بردار شار حرارت q بیان شود:

$$q/T = - \int_\sigma (q/T) \cdot n d\sigma \quad (2-38)$$

با قرار دادن،

$$B = S, \quad b = s \quad (2-19)$$

بر معادله (۲-۲۶)، و سپس قرار دادن نتیجه به همراه معادله (۲-۳۸) درون معادله (۲-۱۸) قانون دوم ترمودینامیک برای حجم‌های کنترلی انتگرالی به‌دست می‌آید:

$$\int_V \frac{\partial(s\rho)}{\partial t} dV + \int_\sigma s\rho V \cdot n d\sigma \geq - \int_\sigma \left(\frac{q}{T}\right) \cdot n d\sigma. \quad (2-39)$$

با استفاده از معادله (۲-۲۱) برای حالت متمرکز و با افزودن تولید کل انتروپی

$$S_g = \int_V s''' dV$$

به سمت راست معادله (۲-۳۹) معادله بقای انتروپی برای حجم‌های کنترل انتگرالی به‌دست می‌آید:

$$\int_V \frac{\partial(s\rho)}{\partial t} dV + \int_\sigma s\rho V \cdot n d\sigma = - \int_\sigma \left(\frac{q}{T}\right) \cdot n d\sigma + \int_V s''' dV, \quad (2-40)$$

که در آن s''' نرخ تولید انتروپی محلی به ازای واحد حجم است.

در پایان مطالعه پیرامون شکل‌های انتگرالی قوانین کلی، حال می‌خواهیم شکل‌های دیفرانسیلی این قوانین را بیان نماییم.

۲-۵. فرمولاسیون دیفرانسیلی قوانین کلی

رو روش برای دستیابی به شکل‌های دیفرانسیلی قوانین کلی وجود دارد. یکی از آن‌ها با شکل انتگرالی شروع می‌شود و در آن از قضیه دیورژانس (گرین) استفاده شده و انتگرال‌های سطحی این شکل انتگرالی را تبدیل به انتگرال‌های حجمی می‌نماید، سپس با حذف عملیات انتگرال حجمی حاصل، شکل دیفرانسیلی به‌دست می‌آید. در روش دوم به‌طور مستقیم شکل‌های دیفرانسیلی برحسب یک حجم کنترل دیفرانسیلی مناسب انتخاب شده و به‌دست می‌آیند. روش اول در این مبحث کوتاه‌تر بوده و در اینجا ترجیح داده می‌شود.

ابتدا قضیه دیورژانس را می‌نویسیم، که بیان می‌کند برای یک حجم V که دارای سطح تکه‌ای یکنواخت σ است، می‌توان نوشت:

$$\int_{\sigma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV, \quad (2-41)$$

که در آن \mathbf{a} هر بردار همواره دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد. سپس با استفاده از معادله (2-41)، شکل‌های دیفرانسیلی قوانین کلی را می‌توان با استفاده از شکل‌های انتگرالی‌شان به‌دست آورد.

قانون بقای جرم (فرمولاسیون دیفرانسیلی). شکل انتگرالی این قانون، معادله (2-28) است که انتگرال سطحی آن با استفاده معادله (2-41) و $\mathbf{a} = \rho \mathbf{V}$ به انتگرال حجمی تبدیل می‌شود و با بازآرایی آن داریم:

$$0 = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] dV, \quad (2-42)$$

از آنجایی که معادله (2-42) برای یک حجم کنترل اختیاری صحیح است، انتگرالده باید در همه جا صفر باشد، بنابراین قانون بقای جرم برای حجم‌های کنترلی دیفرانسیلی به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (2-43)$$

با نوشتن بردار معروف همانی داریم:

$$\nabla \cdot (\alpha \beta) = \alpha \nabla \cdot \beta + \beta \cdot \nabla \alpha. \quad (2-44)$$

(که در آن α یک مقدار نرده‌ای و β یک بردار است) با در نظر گرفتن عبارت مشتقی زیر^۱

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{V} \alpha, \quad (2-45)$$

شکل دیگر معادله (2-43) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2-46)$$

برای جامدات و سیالات تراکم‌ناپذیر، ثابت $\rho =$ است و معادله (2-46) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2-47)$$

۱- این مشتق اغلب با D/Dt نشان داده می‌شود، و معمولاً به عنوان مشتق مادی، مشتق اساسی، مشتق جابجایی معروف است.

قبل از آن که قانون کلی دیگری را مدنظر قرار دهیم، شکل انتگرالی فرمول تبدیل، یعنی معادله (2-26) را بازآرایی می‌کنیم و به‌صورت شکل دیفرانسیلی قانون بقای جرم در می‌آوریم با تبدیل انتگرال سطحی معادله (2-26) به انتگرال حجمی و استفاده از معادلات (2-44) و (2-43) داریم:

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\text{سیستم}} = \int_V \rho \frac{db}{dt} dV. \quad (2-48)$$

در اینجا از این شکل فرمول تبدیل برای فرمولاسیون دیفرانسیلی قوانین کلی استفاده می‌شود.

قانون اول ترمودینامیک (فرمولاسیون دیفرانسیلی). سمت راست معادله (2-30) با سمت چپ معادله (2-36) (یعنی شکل انتگرالی قانون اول ترمودینامیک) برابر است، و می‌توان سمت چپ معادله (2-30) را با استفاده از معادله (2-48) تغییر داد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_V \rho \frac{de}{dt} dV = - \int_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_{\sigma} p \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma - P_T - P_S + \int_V u''' dV. \quad (2-49)$$

از آنجایی که فرض می‌کنیم با جامدات و سیالات تراکم‌ناپذیر بدون اصطکاک سروکار داریم در نتیجه $P_T = 0$ است. علاوه بر آن با در نظر گرفتن موارد ویژه‌ای که در آن‌ها $P_S = 0$ است، و تبدیل انتگرال‌های سطحی مربوط به شار حرارتی و نرخ کار فشاری به انتگرال‌های حجمی، و سپس حذف عملیات انتگرال حجمی خواهیم داشت:

$$\rho \frac{de}{dt} + \nabla \cdot (p \mathbf{V} + \mathbf{q}) = u''' \quad (2-50)$$

با بسط عبارت $\nabla \cdot (p \mathbf{V})$ به‌وسیله معادله (2-44) و برای، ثابت $\rho =$ و با استفاده از معادله (2-47) خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot (p \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \nabla p. \quad (2-51)$$

با قرار دادن معادله (2-51) درون معادله (2-50) داریم:

$$\rho \frac{de}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + \nabla \cdot \mathbf{q} = u''', \quad (2-52)$$

که این رابطه، قانون اول ترمودینامیک برای حجم کنترل دیفرانسیلی است. از آنجایی که معادله (2-52) بیانی از قانون بقای انرژی کل است، می‌توانیم نتایجی را از آن استنباط نماییم. در غیاب اثرات حرارتی، شیمیایی و هسته‌ای معادله (2-52) به قانون بقای انرژی مکانیکی برای حجم کنترل دیفرانسیلی تبدیل می‌شود:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} V^2 + gz \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla p = 0. \quad (2-53)$$

معادله (2-53) را می‌توان برای فرایندهایی که شامل اثرات حرارتی، شیمیایی، و یا هسته‌ای هستند با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن به طور مستقیم به‌دست آورد.

برای یک فرایند پایه، مشتق مادی p به صورت زیر است:

$$\frac{dp}{dt} = \mathbf{V} \cdot \nabla p. \quad (2-54)$$

با قرار دادن معادله (2-54) درون معادله (2-53) و بازآرایی عبارت آن داریم:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) = 0, \quad (2-55)$$

و در نتیجه با انتگرال گیری از این معادله، معادله برنولی در یک خط جریان حاصل می شود:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + gz = \text{ثابت}, \quad (2-56)$$

تفاوت بین معادلات (2-53) و (2-52) قانون بقای انرژی حرارتی برای حجم کنترل دیفرانسیلی را حاصل می کند:

$$\rho \frac{du}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} = u''', \quad (2-57)$$

معادله (2-57) را می توانیم به صورت ترمودینامیکی بازآرایی کنیم. هر ویژگی محیط پیوسته که از نظر ترکیب غیرقابل تغییر و همگن باشد (ولی ممکن است مخلوطی از دو فاز باشد)، به وسیله دو ویژگی مستقل دیگر به طور کامل مشخص می شود.^۱ بنابراین، با در نظر گرفتن $u(v, T)$ و $h(p, T)$ تعریف گرمای مخصوص در حجم ثابت و گرمای مخصوص در فشار ثابت،

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v, \quad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p,$$

خواهیم داشت:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dv + c_v dT, \quad (2-58)$$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + c_p dT, \quad (2-59)$$

برای جامدات و سیالات تراکم ناپذیر، ثابت $v = v$ ، معادله (2-58) به صورت زیر خواهد بود:

$$du = c_v dT. \quad (2-60)$$

علاوه بر آن، اگر ثابت $p = p$ باشد معادله (2-59) به صورت زیر خواهد بود:

$$dh = c_p dT, \quad (2-61)$$

۱- این یک عنصر خالص ترمودینامیکی است. به عنوان مثال، مرجع ۹ صفحه ۳۰ را ببینید.

و با استفاده از تعریف آنتالپی به ازای واحد جرم، $h = v + p v$ خواهیم داشت،

$$dh = du, \quad p = \text{ثابت}, \quad v = \text{ثابت} \quad (2-62)$$

بنابراین با ترکیب معادلات (2-60) و (2-61) و (2-62) داریم:

$$c_p = c_v = c. \quad (2-63)$$

اگر p تغییر کند، $c_p - c_v$ برای جامدات و سیالات تراکم ناپذیر، کوچک و قابل صرف نظر خواهد بود.^۱ و معادله (2-63) به طور تقریبی همچنان برقرار خواهد بود.

با قرار دادن معادله (2-63) درون معادله (2-60) و قرار دادن نتیجه آن در معادله (2-57) برانجام خواهیم داشت:

$$\rho c \frac{dT}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} = u''', \quad (2-64)$$

که این عبارت بیان دیگری از قانون بقای انرژی حرارتی برای حجم کنترل دیفرانسیلی است. در بخش ۲-۷، معادله (2-64) نقطه آغازی برای به دست آوردن شکل دیفرانسیلی معادله هدایت خواهد بود.

قانون دوم ترمودینامیک (فرمولاسیون دیفرانسیلی). با تبدیل سمت چپ معادله انتگرالی قانون دوم، معادله (2-39)، با استفاده از فرمول تبدیل (2-48) و تبدیل سمت راست معادله (2-39) با استفاده از تئوری دیورژانس، معادله (2-41)، و حذف عملیات انتگرال حجمی خواهیم داشت:

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) \geq 0, \quad (2-65)$$

که این معادله، قانون دوم ترمودینامیک برای حجم کنترل دیفرانسیلی است. به طور مشابه، با استفاده از شکل انتگرالی معادله بقای انرژی، معادله (2-40)، می توان به راحتی معادله بقای انرژی برای حجم کنترل دیفرانسیلی را به دست آورد:

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) = s'''. \quad (2-66)$$

معادله (2-66) برای تعیین s''' بر حسب \mathbf{q} و T مفید است. ابتداءً با استفاده از رابطه ترمودینامیکی:

$$du = T ds - p dv,$$

شکل شدتی آن را برای ثابت $v = v$ خواهیم داشت:

۱- به عنوان مثال مرجع ۹ صفحه ۴۱۳، مثال ۴-۱۴ را ببینید.

$$\frac{du}{dt} = T \frac{ds}{dt} \quad (۲-۶۷)$$

حال با حذف du/dt و ds/dt در معادلات (۲-۵۷)، (۲-۶۶) و (۲-۶۷) خواهیم داشت:

$$s''' = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T} (\nabla \cdot \mathbf{q}) + \frac{u'''}{T} \quad (۲-۶۸)$$

سپس عبارت $\nabla \cdot (\mathbf{q}/T)$ را با استفاده از معادله (۲-۴۴) بسط می‌دهیم و معادله (۲-۶۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$s''' = -\frac{1}{T^2} (\mathbf{q} \cdot \nabla T) + \frac{u'''}{T} \quad (۲-۶۹)$$

معادله (۲-۶۹) برای یک حجم کنترل دیفرانسیلی، نرخ تولید آنتروپی به ازای واحد حجم در مسائل هدایتی را می‌دهد. [وقتی که اثر اصطکاک برای سیال تراکم‌ناپذیر وجود داشته باشد، اتلافی که در اثر اصطکاک به وجود می‌آید باعث افزایش تولید آنتروپی شده که اثر آن با یک عبارت اضافی در معادله (۲-۶۹) نشان داده می‌شود. این عبارت، به دلیل کم اهمیت بودن در مطالعه حاضر بررسی نشده.]

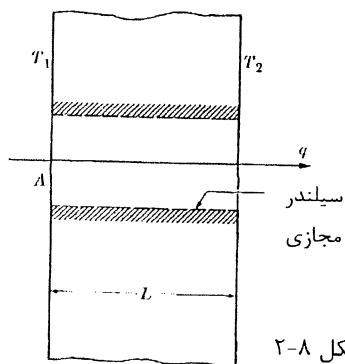
بنابراین تا اینجا فرمولاسیون‌های متمرکز، انتگرالی و دیفرانسیلی قوانین کلی را کامل نمودیم. به منظور کسب آمادگی برای مطالعه بخش بعدی، بر هدف از مطالعه هدایت توجه می‌کنیم، که در طراحی تجهیزات حرارتی، به عنوان مثال مبدل‌های حرارتی، استفاده می‌شود. به این هدف نخواهیم رسید مگر آن که دما و انتقال حرارت به، یا از این گونه تجهیزات را ارزیابی نماییم. دما برای طراحی مکانیکی مهم است، زیرا ما را قادر می‌سازد تا تنش و تغییر شکل حرارتی را محاسبه نماییم. نرخ انتقال حرارت برای طراحی حرارتی مهم است، زیرا به ما کمک می‌کند تا اندازه تجهیزات را تعیین نموده و سطح انتقال حرارت مبدل‌های حرارتی را مشخص کنیم. بنابراین یک مساله انتقال حرارت، به طور کلی و به طور همزمان به محاسبه \mathbf{q} و T نیاز دارد. حال به عنوان مثال قانون بقای انرژی حرارتی، معادله (۲-۶۴) را در نظر بگیرید. این معادله رابطه‌ای را برای تعیین و ارزیابی \mathbf{q} و T می‌دهد که به تنهایی کافی نیست. بنابراین، مجبوریم رابطه دیگری که بین \mathbf{q} و T ارتباط برقرار می‌کند، در نظر بگیریم. مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که سایر روابط مورد نیاز وابسته به محیط پیوسته مورد مطالعه می‌باشد، از این رو معادلاتی که چنین روابطی را بیان می‌نمایند، قوانین ویژه نامیده می‌شوند، که به بررسی آن‌ها خواهیم پرداخت.

۲-۶. توصیف قوانین ویژه

دو قانون ویژه، قانون هدایتی فوریه و قانون تابش استفان-بولتزمان در این بخش مدنظر قرار می‌گیرند، که اولی مستقیماً به هدایت مربوط بوده و مورد تاکید قرار می‌گیرد. دومین معادله فقط وقتی که تابش بر انتقال حرارت از مرزهای محیط پیوسته حکم‌فرما باشد، مفید خواهد بود.

قانون هدایت فوریه. تئوری‌های میکروسکوپی نظیر تئوری جنبشی گازها و تئوری الکترون آزاد در فلزات برای پیش‌بینی هدایت از درون محیط مفید می‌باشند. اگرچه، تئوری ماکروسکوپی (پیوستگی) هدایت، که موضوع اصلی و مهم این کتاب است به ساختار مولکولی محیط پیوسته توجهی ندارد، بنابراین به صورت پدیده‌ای انجام شده، و اثراتش را به وسیله آزمایش تجربی و به گونه زیر تعیین می‌کنند.

یک دیواره صاف جامد با ضخامت L را در نظر بگیرید (شکل ۲-۸). فرض می‌شود که قسمتی از این دیواره به وسیله یک استوانه فرضی و با سطح مقطع کوچک A مرزبندی شود. فرض می‌شود که این استوانه از دو انتهای بالا و پایین دیواره به اندازه‌ای دور است که هیچ حرارتی از سطح پیرامونش عبور نمی‌کند؛ انتقال حرارت در طول محور استوانه یک بعدی است. دمای سطوح صفحه را T_1 و T_2 در نظر می‌گیریم، و فرض می‌نماییم که $T_1 > T_2$ باشد. برطبق قانون اول ترمودینامیک، تحت شرایط پایا نرخ انتقال حرارت ثابت q از هر مقطع استوانه موازی سطوح صفحه، برقرار است. بر طبق قانون دوم ترمودینامیک می‌دانیم که جهت این انتقال حرارت از دمای بیشتر به دمای کمتر است.



شکل ۲-۸

مشاهدات تجربی جامدات مختلف ما را به این نتیجه می‌رساند که برای مقادیر به اندازه کافی کوچک اختلاف دما بین سطوح صفحه، رابطه زیر را داریم:

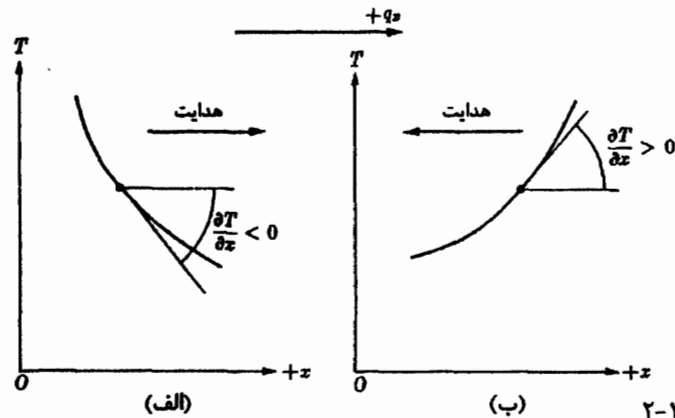
$$q = kA \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (۲-۷۰)$$

که در آن k یک مقدار ثابت است، که به آن ضریب هدایت حرارتی ماده صفحه می‌گویند. بنابراین

$$q_n = k \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (۲-۷۱)$$

شار حرارت ناشی از هدایت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

که در آن زیرنویس در q_n نشان‌دهنده جهت این شار است. معادله (۲-۷۱) قانون فوریه برای محیط پیوسته همگن ایزوتروپیک را می‌دهد.



شکل ۲-۱۰

برای هر سطح هم دما می‌توان معادله (۲-۷۲) را به راحتی گسترش داد:

$$q_n = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2-72)$$

در آن $\partial/\partial n$ نشان‌دهنده مشتق در طول بردار عمود و سطح است. و این شار حرارتی را با بردار n زیرنویس n نشان می‌دهیم و داریم:

$$q_n = |q|, \quad (2-73)$$

اینجا q ممکن است برحسب سیستم مختصاتی بیان شود^۱ و داریم:

$$q = -k \nabla T, \quad (2-74)$$

این معادله، شکل برداری قانون فوریه برای محیط ایزوتروپیک ناهمگن است.

شار حرارتی در هر نقطه P در هر سطح غیرهم‌دما به وسیله شار حرارتی در سطح هم‌دما در همان نقطه، تعیین می‌شود (شکل ۲-۱۱). اگر در نقطه P بردار عمود m روی سطح غیرهم‌دما نسبت به سیستم مختصاتی کسینوس‌های (α, β, γ) بسازد، اندازه شار حرارتی از درون این سطح صورت زیر است:

برحسب مختصات کارتزین به عنوان مثال:

$$q = q_x i + q_y j + q_z k,$$

در آن i, j, k بردارهای واحد در جهات x, y, z هستند. با توجه به معادله (۲-۷۲) که $q_x = -k(\partial T/\partial x)$ و به طور مشابه $q_y = -k(\partial T/\partial y)$ و $q_z = -k(\partial T/\partial z)$ خواهیم داشت:

$$q = -k \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) T,$$

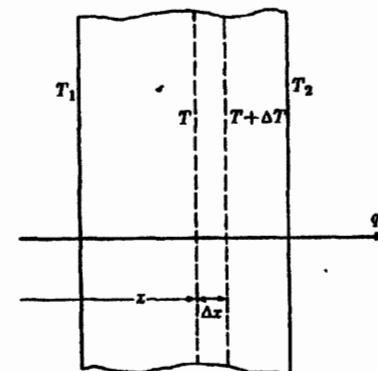
بر طبق تعریف، نشان‌دهنده معادله (۲-۷۵) است.

معادله (۲-۷۰) را همچنین می‌توان برای یک سیال (مایع یا گاز) بین دو صفحه با فاصله L از هم نیز مورد استفاده قرار داد، که این دو صفحه به منظور جلوگیری از جابه‌جایی و تابش قرار داده شده‌اند. بنابراین معادله (۲-۷۰) هدایت حرارتی درون سیالات را مثل جامدات بیان می‌کند.

محیط پیوسته را می‌توانیم براساس تغییرات ضریب هدایت حرارتی طبقه‌بندی کنیم. به یک محیط پیوسته همگن می‌گویند اگر هدایتش نقطه به نقطه تغییر ننماید، و ناهمگن می‌گویند اگر هدایتش تغییر نماید. علاوه بر آن، محیط پیوسته در تمام جهات دارای رسانایی یکسان است که به آن خاصیت ایزوتروپیک^۱ می‌گویند درحالی‌که به مواد دارای رسانایی در جهت‌های مختلف غیرایزوتروپیک گفته می‌شود. بعضی مواد شامل ساختار فیبری دارای خصوصیات غیر ایزوتروپیک هستند، به طور مثال، چوب و پنبه نسوز. موادی که دارای ساختار متخلخل هستند مثل پشم یا چوب پنبه، مثال‌هایی از محیط‌های پیوسته ناهمگنند. در این کتاب، به جز در مواقعی که به طور صریح گفته شود، تنها مسائل محیط‌های ایزوتروپیک را مطالعه می‌نماییم. به دلیل تفران در هدایت حرارتی در محیط ایزوتروپیک، شار حرارت در هر نقطه باید نسبت به سطح هم‌دما^۲ عمود شود.

حال فرض کنید که صفحه شکل ۲-۸ ایزوتروپیک اما ناهمگن است. دماهای دو سطح هم‌دمای متناظر با x و $x + \Delta x$ را به ترتیب با T و $T + \Delta T$ نشان می‌دهیم (شکل ۲-۹). از آنجایی‌که این صفحه ممکن است همگن در نظر گرفته شود، معادله (۲-۷۱) را می‌توان برای یک لایه از صفحه با ضخامت Δx که $\Delta x \rightarrow 0$ استفاده نمود. بنابراین شکل دیفرانسیلی قانون هدایت فوریه، عبارت شار حرارتی در جهت افزایش x را به این شکل ارائه می‌کند:

$$q_x = -k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right) = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2-72)$$



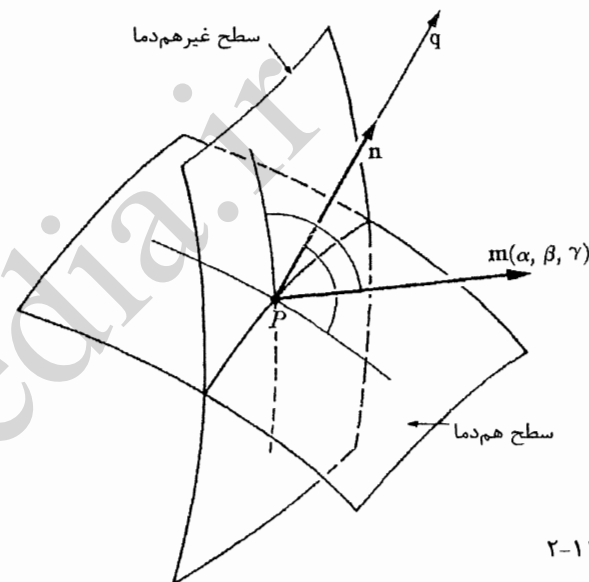
شکل ۲-۹

(قانون فوریه برای محیط ایزوتروپیک ناهمگن). در معادله (۲-۷۲)، با قرار دادن علامت منفی، q_x را در جهت افزایش x مثبت می‌نماییم. شایان ذکر است که این معادله به توزیع دما وابسته نیست. بنابراین، برای مثال، در شکل ۲-۱۰ الف، $\partial T/\partial x < 0$ و $q_x > 0$ است در حالی‌که در شکل ۲-۱۰ ب، $\partial T/\partial x > 0$ و $q_x < 0$ است. هر دو نتیجه با قانون دوم ترمودینامیک سازگار است که در آن حرارت از دمای بالاتر به دمای پایین‌تر نفوذ می‌کند.

۱- از آنجایی‌که محیط‌ها را براساس رسانایی‌شان طبقه‌بندی می‌کنیم، بنابراین واضح است که جامدات مورد استفاده در قانون فوریه حتماً باید همگن و ایزوتروپیک باشند.

۲- سطحی که دمای تمام نقاط آن یکسان باشد.

$$q_m = q \cdot m,$$



شکل ۲-۱۱

با قرار دادن معادله (۲-۷۵) درون معادله (۲-۷۶) داریم:

$$q_m = -k(\nabla T \cdot m). \quad (۲-۷۷)$$

بنابراین با توجه به خواص بردارها داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial m} = \nabla T \cdot m,$$

معادله (۲-۷۷) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$q_m = -k \frac{\partial T}{\partial m}, \quad (۲-۷۸)$$

که این رابطه مقدار شار حرارتی از درون هر سطحی را می‌دهد؛ در اینجا $\partial/\partial m$ نشان‌دهنده مشتق در جهت بردار عمود است.

بنابراین قانون فوریه را فقط برای محیط ایزوتروپیک به‌کار می‌بریم. در عمل محیط غیرایزوتروپیک نیز مهم است. که مثال‌های متنوع از آن کریستال‌ها، چوب، و مواد ورقه‌ای مثل مغزه‌های انتقال‌دهنده^۱ می‌باشند. برای چنین محیطی جهت بردار شار حرارت در هر نقطه از بردار عمود درون سطح هم‌دما، بزرگتر نیست. برای نوشتن شکل کلی قانون فوریه برای محیط

ایزوتروپیک، می‌توانیم برای هر سازنده فرض کنیم که بردار شار حرارتی به‌طور خطی به گرادیان دما در هر نقطه وابسته است. بنابراین، به عنوان مثال، شکل کارترین قانون فوریه^۱ برای محیط غیرایزوتروپیک ناهمگن به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} q_x &= -\left(k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial T}{\partial z}\right), \\ q_y &= -\left(k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial T}{\partial z}\right), \\ q_z &= -\left(k_{31} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial T}{\partial z}\right). \end{aligned} \quad (۲-۷۹)$$

ابعاد فیزیکی ویژگی k در واحد حرارتی انگلیسی به‌صورت $k \equiv \text{Btu/ft} \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{F}$ می‌باشد. مقدار عددی k برای محیط‌های مختلف به‌طور عملی از صفر برای گازها و تحت فشار بسیار کم تا حدود $7000 \text{ Btu/ft} \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{F}$ برای کریستال طبیعی مس در دماهای بسیار کم، متغیر است. به‌طور کلی مقدار k برای یک محیط به ترکیب شیمیایی، حالت فیزیکی، و ساختار، دما و فشار بستگی دارد.

در جامدات وابستگی به فشار، بسیار کم است، و معمولاً قابل صرف‌نظر می‌باشد. برای تفاضل دمایی کم، وابستگی به دما نیز قابل صرف‌نظر می‌باشد. در غیر این‌صورت یک رابطه خطی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$k = k_0(1 + \beta T), \quad (۲-۸۰)$$

که در آن β کوچک بوده و برای اغلب جامدات منفی است. در شکل ۲-۱۲^۲ مقادیر عددی ضریب هدایت حرارتی برای بعضی گازها، مایعات و جامدات برحسب تابعی از دما داده شده است. روش‌های تجربی تعیین ضریب هدایت حرارتی برای محیط‌های مختلف، زیاد و متنوع می‌باشد. و این روش‌ها به‌صورت وسیع در مقالات ارائه شده‌اند و در این کتاب ذکر نمی‌شوند.^۳

قانون تابش استفان-بولتزمان. قبل از بیان این قانون، مرور کوتاهی از تعدادی مفاهیم مورد نیاز خواهیم داشت. از دیدگاه الکترومغناطیسی، انتقال حرارت تابشی، مثل امواج رادیویی، نور، پرتوهای کیهانی و غیره انرژی‌هایی هستند که به‌صورت امواج الکترومغناطیسی بوده و تنها از نظر

۱- شکل برداری این قانون به‌صورت زیر است:

$$q = -k \cdot \nabla T,$$

که در آن k تانسور هدایتی است؛ اجزا این تانسور ضرایب هدایتی نامیده می‌شوند.

۲- برگرفته از المان‌های انتقال حرارت، M. Jakob و G. A. Hawkins. نیویورک: John Wiley & Sons, 1957.

۳- به عنوان مثال فصل ۹ مرجع ۱۴ را ببینید.

$$\alpha + \rho = 1,$$

(۲-۸۱)

از آنجایی که برای محیط‌های شفاف $\rho = 0$ است داریم:

$$\alpha + \tau = 1,$$

(۲-۸۱)

سطحی که همه تابش وارد شده را جذب می‌کند ($\alpha = 1$) یا در دماهای خاصی بیشترین تابش ممکن را گسیل می‌کند سطح سیاه نامیده می‌شود.

گسیل یک سطح به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\epsilon = q/q_b,$$

(۲-۸۱)

که در آن q و q_b به ترتیب نشان‌دهنده شارهای انتقال حرارت تابش این سطح و سطح سیاه در یک دماست. بنابراین برای یک سطح سیاه $\epsilon = 1$ است.

برای هر سطحی تحت تعادل حرارتی رابطه $\alpha = \epsilon$ برقرار است^۱.

حال دو سطح هم دمای A_1 و A_2 که دارای ضریب صدورهای ϵ_1 و ϵ_2 و دماهای مطلق T_1 و T_2 هستند را در نظر می‌گیریم این سطوح، با یک سطح عایق سوم، یک محفظه را تشکیل می‌دهند (شکل ۲-۱۳). ابتدا به‌صورت تجربی توسط استفان و بعداً به‌صورت ترمودینامیکی توسط بولتزمن و ثابت شرایط پایا و در حضور محیط دارای جاذب‌های نانو یا محیط خلاء نشان داده شد که شار انتقال حرارت تابشی q_{12} بین سطوح A_1 و A_2 توسط قانون تابش استفان - بولتزمن و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$q_{12} = \sigma F_{12}(T_1^4 - T_2^4),$$

(۲-۸۱)

که در آن σ ثابت استفان - بولتزمن است و مقدار آن $0.17 \times 10^{-8} \text{ Btu/ft}^2 \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{R}^4$ می‌باشد.

فاکتوری است که به ضریب صدور و مکان نسبی دو سطح بستگی دارد و داریم:

$$\frac{1}{F_{12}} = \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1\right) + \frac{1}{F_{12}} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right),$$

(۲-۸۱)

$$F_{12} = \frac{A_2 - A_1 F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2A_1 F_{12}}.$$

(۲-۸۱)

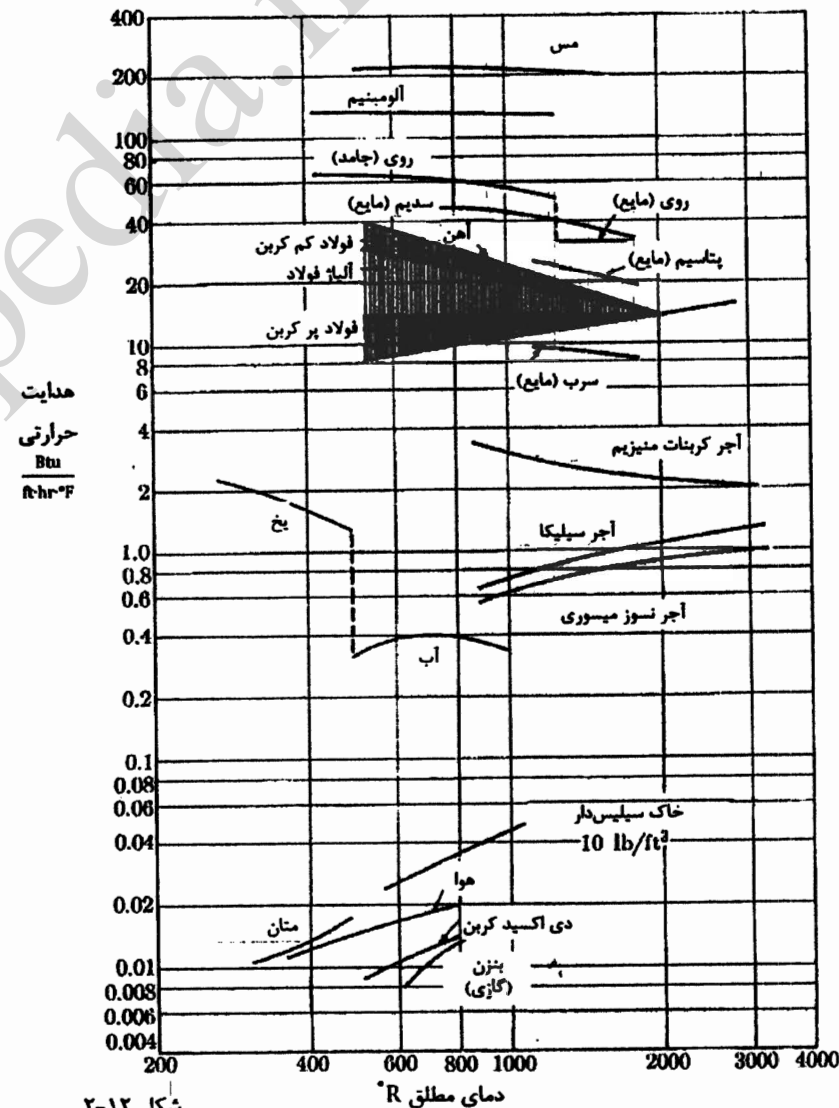
در اینجا F_{12} ضریب دید هندسی نامیده می‌شود. به‌طور فیزیکی F_{12} نشان‌دهنده جزیی از کل تابش از سطح A_1 است که توسط سطح A_2 دریافت می‌شود. این فاکتور برای سطحی که توسط

طول موج با یکدیگر متفاوتند. وقتی که انرژی تابشی به سطحی وارد می‌شود، جزیی از آن (α) جذب می‌شود، و جزو دیگر آن (ρ) بازتاب شده و بقیه آن (τ) عبور می‌کند. بنابراین داریم:

$$\alpha + \rho + \tau = 1,$$

(۲-۸۱)

که در آن α ، ρ و τ به ترتیب ضریب جذب، ضریب بازتابش و ضریب عبور سطح نامیده می‌شوند.



شکل ۲-۱۲

از آنجایی که برای محیط‌های مات $\tau = 0$ است معادله (۲-۸۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

که در آن ∇^2 معرف عمل‌گر معروف لاپلاسین می‌باشد. اگر k تنها تابعی از فاصله باشد معادله (۲-۸۹) خطی خواهد بود. از سوی دیگر، هنگامی که k تنها وابسته به زمان باشد، با استفاده از شاخص برداری $\nabla k = (dk/dT)\nabla T$ ، معادله (۲-۸۹) به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \frac{dk}{dT} (\nabla T)^2 + k \nabla^2 T + u''' \quad (2-90)$$

که این عبارت غیر خطی می‌باشد. [چه عبارتی معادله (۲-۹۵) را غیر خطی کرده است؟] برای محیط ایزوتروپیک پیوسته k ثابت است و معادله (۲-۸۹) تبدیل به معادله هدایت برای جامدات ایزوتروپیک همگن و سیالات تراکم‌ناپذیر بدون اصطکاک می‌شود.

$$\frac{dT}{dt} = a \nabla^2 T + \frac{u'''}{\rho c} \quad (2-91)$$

که:

$$a = k/\rho c \quad (2-92)$$

a نفوذ حرارتی نامیده می‌شود.

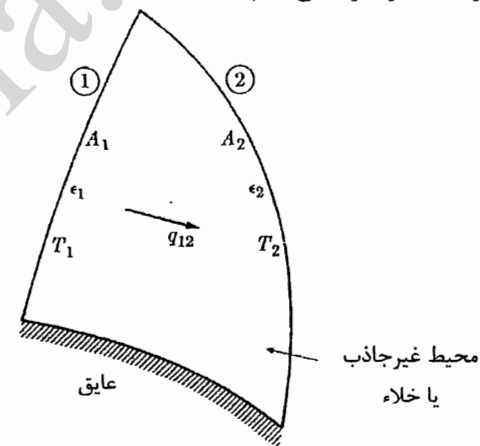
حال فرض می‌کنیم که محیط غیرایزوتروپیک^۱ باشد. برحسب مختصات کارتزین، به عنوان مثال، با قرار دادن معادله (۲-۷۹) درون معادله (۲-۶۴) خواهیم داشت:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{23} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{31} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{32} \frac{\partial T}{\partial y} + k_{33} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + u''' \quad (2-93)$$

که این معادله، معادله هدایت برای جامدات غیرایزوتروپیک ناهمگن^۲ می‌باشد. اگر ضرایب هدایت، هر چند متفاوت از یکدیگر، نسبت به مکان ثابت باقی بماند، معادله (۲-۹۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

سطح دیگر محصور شده باشد و یا برای دو صفحه موازی که در دو انتهایشان اتلاف تابش قابل صرف‌نظری داشته باشند، دارای مقدار واحد است. برای سطح عایق ضریب دید نزدیک به صفر است، $\bar{F}_{12} \rightarrow F_{12}$.

برای ترکیبی با بیش از سه سطح، ارزیابی شار حرارتی تابشی دخیل می‌شود. علاوه بر آن، تعیین ضرایب دید هندسی برای هر سطحی حتی اشکال هندسی ساده اغلب مشکل است؛ از این رو از ذکر آن‌ها در اینجا خودداری می‌کنیم.



شکل ۲-۱۳

۲-۷. معادله هدایت

تولید انتروپی به دلیل مقاومت هدایتی.

هنگامی که قانون فوریه را، معادلات (۲-۷۵) یا (۲-۷۹)، درون قانون بقای انرژی حرارتی قرار دهیم، معادله (۲-۶۴)، شکل دیفرانسیلی معادله هدایت گرمایی تنها برحسب دما به دست می‌آید. ابتدا می‌خواهیم محیط همگن را بررسی کنیم. با قرار دادن معادله (۲-۷۵) درون معادله (۲-۶۴)، معادله هدایت را برای جامدات ناهمگن ایزوتروپیک و سیالات تراکم‌ناپذیر بدون اصطکاک خواهیم داشت:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + u''' \quad (2-88)$$

معادله (۲-۸۸) با استفاده از مفهوم معادله (۲-۴۴) به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \nabla k \cdot \nabla T + k \nabla^2 T + u''' \quad (2-89)$$

۱- این مورد هیچ معنی و اهمیت فیزیکی‌ای برای سیالات ندارد.

۲- در حالتی که ضرایب هدایت حرارتی مساوی k و ثابت در نظر گرفته شود معادله (۲-۹۳) به صورت کلی زیر نمایش داده می‌شود.

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \cdot \nabla T) + u'''$$

با محاسبه این مقدار، معادله به این صورت بازنویسی می‌شود.

$$\rho c \frac{dT}{dt} = (\nabla \cdot k) \cdot (\nabla T) + k : \nabla(\nabla T) + u'''$$

به طور مشابه حالت کلی معادله (۲-۹۴) هم به این صورت درخواهد آمد.

$$\rho c \frac{dT}{dt} = k : \nabla(\nabla T) + u'''$$

همراه با یک شرط اولیه و شش شرط مرزی، فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله را کامل می‌کند.^۱ حال با بررسی دقیق‌تر شرایط اولیه و مرزی مناسب برای مسائل انتقال حرارت هدایتی می‌پردازیم.

شرط اولیه (حجمی). برای یک مساله ناپایا دمای محیطی که مورد بررسی قرار می‌گیرد در تقادیری از زمان باید مشخص باشد. در بسیاری از حالات این زمان‌ها به‌طور معمول آغاز مساله در نظر گرفته می‌شود. به بیان ریاضی، اگر شرط اولیه به‌وسیله $T_0(\mathbf{r})$ نشان داده شود پاسخ این مساله یعنی $T(\mathbf{r}, t)$ باید به گونه‌ای باشد که در تمام نقاط محیط معادله زیر برقرار باشد.

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(\mathbf{r}, t) = T_0(\mathbf{r}). \quad (2-97)$$

شرایط مرزی (سطحی). اکثر شرایط مرزی متداول در هدایت به‌صورت زیر می‌باشند.

(۱) دمای معین: دمای سطح در مرزها یا به‌صورت ثابت یا به‌عنوان تابعی از مکان یا زمان مشخص می‌باشد. این ساده‌ترین شرط مرزی از منظر ریاضیات است، ولی در قسمت (۴) یک شرط پیچیده فیزیکی به وجود می‌آید که تنها برای حالت خاص $h \rightarrow \infty$ ساده شده و به شرط مرزی دمای معین تبدیل می‌شود.

(۲) شار حرارتی معین: شار حرارتی در مرزها یا به‌صورت ثابت یا به‌عنوان تابعی از مکان یا زمان تعریف می‌شود. تشریح ریاضی این شرط با استفاده از قانون جریان کرشلف به این صورت است که مجموع جبری شارهای حرارتی در مرز باید مساوی صفر باشد. در اینجا از این پس شار حرارتی وارد شده به مرزها مثبت و شار حرارتی خارج شده از مرزها منفی در نظر گرفته می‌شود. به یاد داشته باشید که بیان قانون فوریه، $q_n = -k(\partial T / \partial n)$ مستقل از توزیع واقعی دماست، و انتخاب جهت q_n به‌طور معمول به‌صورتی انجام می‌شود که مثبت باشد، از شکل ۱۴-۲ داریم:

$$\pm k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = \pm q'', \quad (2-98)$$

که در آن $\partial / \partial n$ نمایانگر دیفرانسیل‌گیری در جهت بردار عمود^۲ بر مرز (بردار عمود بر مرز که در شکل ۱۴-۲ با n نشان داده شده است.م) می‌باشد. علامت مثبت و منفی در سمت چپ معادله (۲-۹۸) به‌ترتیب متناظر با دیفرانسیل‌گیری نسبت به بردارهای عمود درونی و بیرونی، و علامت مثبت و منفی سمت راست به‌ترتیب متناظر با شار حرارتی از مرز و شار حرارتی به مرز سیستم می‌باشد.

۱- به وضوح، سرعت درون معادله (۲-۹۶). اگرچه بر جواب این معادله تاثیر می‌گذارد، تعداد شرایط مرزی و اولیه مورد نیاز را تغییر نمی‌دهد.

$$\rho c \frac{dT}{dt} = k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (k_{12} + k_{21}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + (k_{23} + k_{32}) \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} + (k_{31} + k_{13}) \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} + u''', \quad (2-94)$$

و این معادله حرارتی برای جامدات همگن غیرایزوتروپیک است. این کتاب از توضیحات بیشتر در مورد مواد غیرایزوتروپیک اجتناب می‌نماید.^۱

هرگاه تغییرات دمایی در هر محیط پیوسته که فرایند مشخصی در آن جریان دارد مشاهده شود، تولید انتروبی در این فرایند، توسط قانون فوریه - که رابطه بین دما و انتروبی را مشخص می‌کند - قابل دستیابی است. به همین دلیل در حالت محیط ایزوتروپیک، به‌عنوان مثال، با قرار دادن معادله (۲-۷۵) در معادله (۲-۶۹) خواهیم داشت:

$$s''' = k \frac{(\nabla T)^2}{T^2} + \frac{u'''}{T}. \quad (2-95)$$

تاکنون توانستیم معادلات (۲-۸۸)، (۲-۹۱)، (۲-۹۳) و (۲-۹۴) را که در یک معادله دیفرانسیل پارهای (نه یک معادله جبری) برحسب دمای نامعلوم صدق می‌کنند، استخراج کنیم. نظر به این که پاسخ یک معادله دیفرانسیل در برگرفته تعدادی از ثوابت انتگرال‌گیری است، تکمیل فرمولاسیون نیازمند این است که به همان تعداد شرایط مناسب را در مکان و زمان برای محاسبه این ثوابت داشته باشیم. این مطلب در بخش بعدی مورد توجه قرار گرفته است.

۲-۸. شرایط مرزی و شرایط اولیه

این شرایط توصیف ریاضی مشاهدات تجربی است. تعداد آن‌ها در جهت هر متغیر مستقل در یک مساله برابر بالاترین مرتبه مشتق معادله دیفرانسیل حاکم در همان جهت خواهد بود. با ذکر مثالی از هدایت می‌توان این مفهوم را بیان نمود. با توجه به معادله هدایت نوشته شده، به عنوان مثال، در مختصات کارتزین برای حرکت یک جامد ایزوتروپیک همگن با سرعت V .

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{u'''}{\rho c}, \quad (2-96)$$

که در آن v_x ، v_y و v_z اجزا V هستند. حل معادله (۲-۹۶)، بدون توجه به روش ریاضی مورد استفاده، نیازمند یک شرط در جهت زمان و دو شرط در هر یک از جهت‌های مکانی می‌باشد. شرایط زمانی را شرایط اولیه و شرایط مکانی را شرایط مرزی گویند که می‌گوییم معادله (۲-۹۶)

۱- خوانندگان علاقمند می‌توانند به بخش‌های ۱۷-۱، ۱۸-۱، ۱۹-۱، ۲۰-۱ مرجع ۲ و یا مطلب دیگر در مراجع مشابه مراجعه کنند.

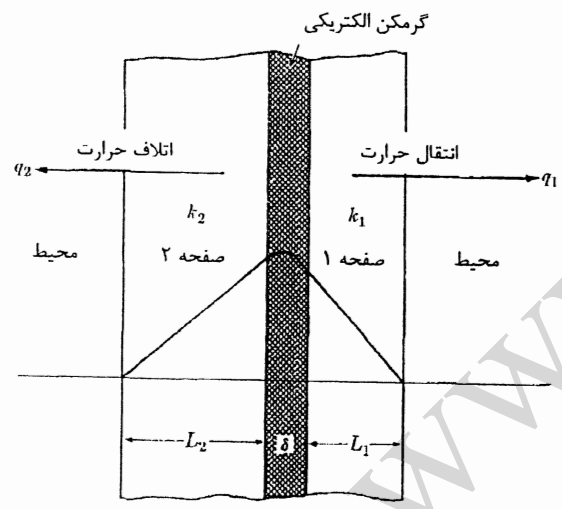
یک مثال عملی این مورد، محاسبه مقادیر آزمایشگاهی انتقال حرارت به روش جابه جایی اجباری در لوله ها می باشد. انرژی داخلی ثابتی را که به صورت الکتریکی در دیواره لوله ای که سطح خارجی آن عایق شده است تولید می شود، در نظر بگیرید. از درون لوله، سیالی به شیوه معین جریان می یابد. تحت شرایط پایا و با فرض ثابت بودن مقاومت الکتریکی و ضریب هدایت حرارتی دیواره لوله، سیال در معرض شار حرارتی ثابتی که از محیط لوله وارد می شود، قرار می گیرد.^۱

(۳) شار حرارتی صفر (عایق). این مورد حالت خاصی از مورد قبل است:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma = 0, \quad (۲-۹۹)$$

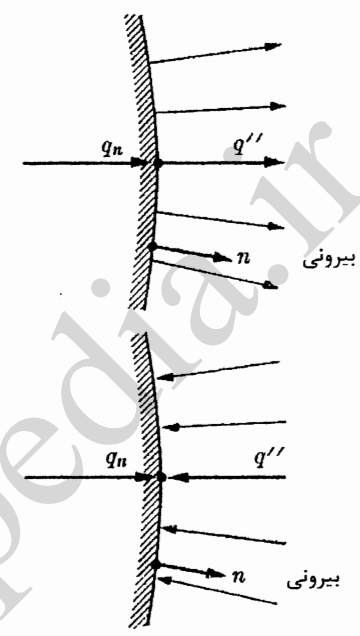
و با قرار دادن $q'' = 0$ در معادله (۲-۹۸) به دست می آید. مثال بررسی شده در ادامه اهمیت عملی این شرط مرزی را نشان می دهد.

می خواهیم گرما را از یک سطح گرمکن برقی مسطح به درون یک صفحه جامد، صفحه ۱، برای اهداف خاصی انتقال دهیم (شکل ۲-۱۵). هر انتقالی از سطوح دیگر گرمکن به عنوان اتلاف حرارتی در نظر گرفته شده و مطلوب نیست. در عمل اتلاف حرارتی با قرار دادن یک صفحه دیگر (عایق) در کنار سطح دوم گرمکن کاهش پیدا می کند. می خواهیم هندسه و مشخصات حرارتی عایق را مشخص کنیم.



شکل ۲-۱۵

برای ساده سازی فرض می کنیم که محیط چپ و راست مقاومت حرارتی قابل صرف نظر دارند. ضخامت گرمکن را با δ نشان می دهیم و ضریب هدایت حرارتی و ضخامت صفحات k_1, k_2 و

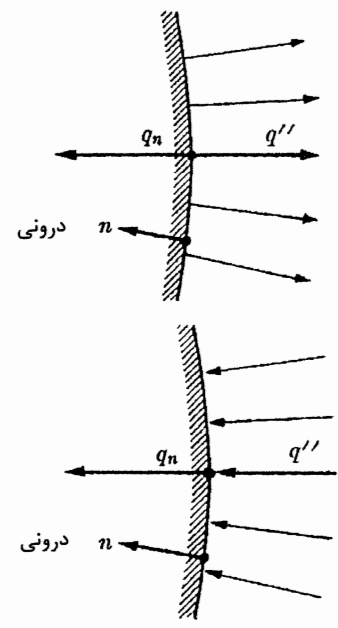


$$q_n - q'' = 0, \\ -k \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma - q'' = 0.$$

(الف)

$$q_n + q'' = 0, \\ -k \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma + q'' = 0.$$

(ب)



$$-q_n - q'' = 0, \\ -\left[-k \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma\right] - q'' = 0.$$

(پ)

$$-q_n + q'' = 0, \\ -\left[-k \left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_\sigma\right] + q'' = 0.$$

(ت)

شکل ۲-۱۴

۱- موقعیت فیزیکی مشابهی در (۴) در نظر گرفته شده است. مساله ۸-۳ نیز بررسی شود.

در نظر گرفته می‌شود و نرخ تجمع انرژی داخلی به ازای واحد حجم u''' نشان داده می‌شود. در شرایط پایا خواهیم داشت:

$$\delta u''' = q_1 + q_2, \quad q_1 \frac{L_1}{k_1} = q_2 \frac{L_2}{k_2},$$

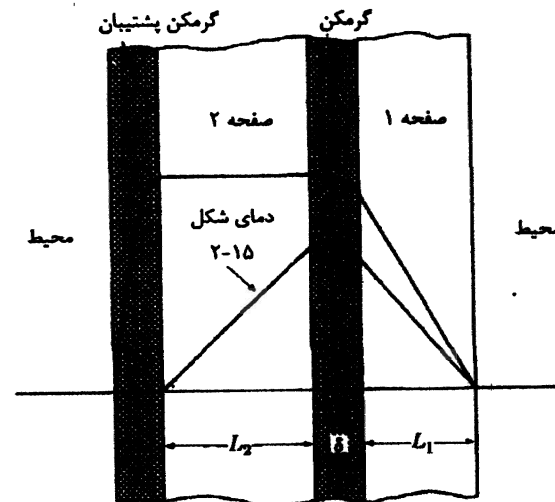
و از روی این معادلات،

$$q_1 = \frac{\delta u'''}{1 + (L_1/k_1)/(L_2/k_2)}, \quad q_2 = \frac{\delta u'''}{1 + (L_2/k_2)/(L_1/k_1)}$$

شرایط مطلوب که $q_2 \rightarrow 0$ با قرار دادن $(L_2/k_2)/(L_1/k_1) \rightarrow \infty$ یا شرایط زیر به دست می‌آید:

$$(2-100)$$

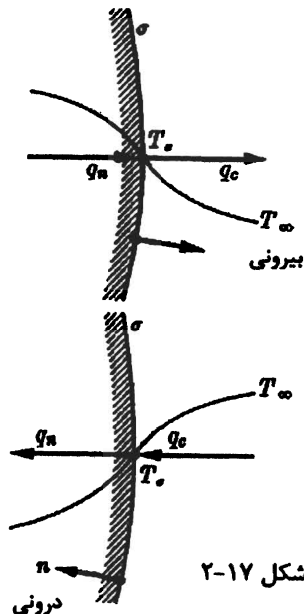
از روی معادله (2-100) به این نتیجه می‌رسیم که تنها ضخامت و ضریب هدایت گرمایی صفحات برای محاسبه هدایت حرارتی از این صفحات مهم می‌باشند. از این رو اتلاف گرمایی از سطح ۲ می‌تواند حذف شود اگر در مقایسه با L_1 و k_1 به ترتیب $L_2 \rightarrow \infty$ یا $k_2 \rightarrow 0$ باشد. از آنجایی که $L_2 = \infty$ یا $k_2 = 0$ از لحاظ فیزیکی غیرممکن است، عایق کاری به‌طور کامل هیچ‌گاه به وقوع نخواهد پیوست. هر چند ضخامت بیشتر و ضریب هدایت حرارتی کمتر، عایق کاری بهتری را نتیجه خواهد داد.



شکل ۲-۱۶

حذف کامل اتلاف حرارتی از سطح ۲ نیازمند استفاده از یک گرمکن دیگر است (شکل ۲-۱۶). پس به‌وسیله تعدیل مناسب انرژی برای گرمکن دوم، تمام انرژی داخلی تجمع‌یافته در گرمکن از طریق صفحه ۱ انتقال خواهد یافت.

گرمکن دوم، که اغلب گرمکن پشتیبان نامیده می‌شود، وسیله آزمایشگاهی مهمی برای کنترل انتقال حرارت است زیرا از آن برای اندازه‌گیری دقیق ضریب هدایت گرمایی استفاده می‌شود.



$$q_n - q_c = 0, \quad -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\sigma - h(T_\sigma - T_\infty) = 0.$$

(الف)

$$-q_n + q_c = 0, \quad - \left[-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\sigma \right] + h(T_\infty - T_\sigma) = 0.$$

(ب)

انتقال گرما به محیط توسط جابه‌جایی. هنگامی که انتقال حرارت در مرزهای یک محیط قابل تعیین نباشد، می‌توانیم آنرا برابر اختلاف دمای بین مرزها و محیط فرض کنیم پس خواهیم داشت:

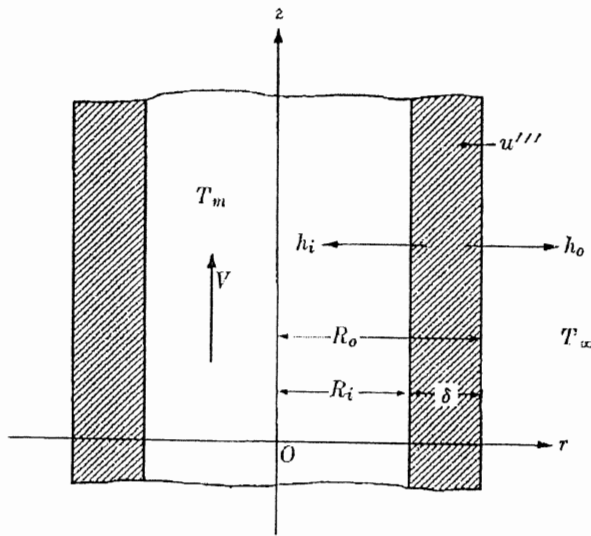
$$(2-101)$$

که در آن دمای مرزهای جامد T_σ دمای محیط در فاصله‌ای دور از مرزها و h ثابت تناسب است^۱ که ضریب انتقال حرارت نامیده می‌شود. معادله (2-۱۰۱) معادله سرمایش نیوتن می‌باشد. رابطه فوق رابطه مهمی است. ولی، باید توجه داشت که این رابطه برخلاف قانون هدایت فوری و قانون تابش استفان - بولتزمان براساس پدیده‌های فیزیکی نیست. از آنجایی که این رابطه تنها بر یک فرض پایه‌گذاری شده است، نمی‌توان آنرا به عنوان یک قانون ویژه (طبیعی) در نظر گرفت. از

واحد حجم با نرخ u''' در دیواره لوله تولید می‌شود. دمای محیط و دمای توده سیال^۱ به ترتیب T_m, T_∞ و ضرایب داخلی و خارجی انتقال حرارت h_i و h_o در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی شعاعی برای لوله به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$q_i = +k \frac{\partial T(R_i, z)}{\partial r} = h_i [T(R_i, z) - T_m],$$

$$q_o = -k \frac{\partial T(R_o, z)}{\partial r} = h_o [T(R_o, z) - T_\infty],$$



شکل ۲-۱۸

می‌خواهیم ابتدا مورد لوله عایق $q_o = 0$ را مورد بررسی قرار دهیم. در این مورد تحت شرایط پایا تمام انرژی داخلی تولید شده در دیواره به سیال منتقل می‌شود. از این رو $q_i = u''' \delta$ خواهد شد. از آنجایی که q_i برای مقادیر معلوم u''' و δ ثابت می‌باشد با افزایش ضریب انتقال حرارت داخلی h_i اختلاف دمایی $T(R_i, z) - T_m$ کوچکتر خواهد شد. در حالت خاص $h_i \rightarrow \infty$ $T(R_i, z)$ به سمت T_m میل خواهد کرد. بنابراین شرط مرزی موجود تبدیل به شرط مرزی نوع (۱) یعنی با مقدار دمای مشخص در سطح خواهد شد. جوشیدن مایعات در لوله‌های عایق مثالی از این حالت است. برای مقدار ثابت q_i کوچکترین مقدار h_i بزرگترین اختلاف دمایی بین $T(R_i, z)$ و T_m را نتیجه خواهد داد.

۱- دمای توده یک سیال به صورت زیر است:

$$T_m = \frac{1}{\pi R_i^2 \rho_m c_{p_m} V} \int_0^{R_i} 2\pi r v(r) \rho c_p T(r) dr,$$

که در آن ρ_m ، c_{p_m} و V به ترتیب چگالی، گرمای ویژه در فشار ثابت، و سرعت متوسط سیال بوده، و همه آن‌ها در دمای توده T_m اندازه‌گیری می‌شوند.

این رو می‌توان قانون سرمایش نیوتن را به عنوان تعریفی از ضریب انتقال حرارت دانست. معادله (۲-۱۰۱) علی رغم این که شالوده ضعیفی دارد تنها رابطه موجود برای بیان انتقال حرارت نامعین به یک محیط است و نقش اساسی را در مسائل هدایت حرارتی بازی می‌کند. بنابراین با توجه به این که مجموع شار حرارتی در مرزها باید مساوی صفر باشد و از روی معادلات (۲-۷۳) و (۲-۱۰۱)، شرط مرزی مورد نیاز به صورت زیر خواهد شد.

$$\pm k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\sigma = h(T_\sigma - T_\infty), \quad (2-102)$$

که در آن $\partial/\partial n$ دیفرانسیل گیری در جهت بردار عمود را نشان می‌دهد. علامت مثبت و منفی در سمت چپ معادله (۲-۱۰۲) به ترتیب متناظر با مشتق گیری نسبت به بردارهای عمود درونی و بیرونی است (شکل ۲-۱۷). به این نکته باید توجه شود که q_n نشان داده شده در شکل ۲-۱۷ مقدار مثبتی است، که با انتخاب اختیاری جهت عمود به دست آمده است. در حقیقت معادله (۲-۱۰۲) مستقل از توزیع دمایی و جهت انتقال حرارت است.

جدول ۲-۲

شرایط		$h(\text{Btu}/\text{ft}^2 \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{F})$
جابه جایی آزاد	گازها	۱-۵
	آب	۲۰-۱۵۰
جابه جایی اجباری	گازها	۲-۵۰
	آب	۵۰-۲۰۰۰
	روغن‌های غلیظ	۱۰-۳۰۰
	فلزات مایع	۱۰۰۰-۲۰۰۰۰
تغییر فاز	مایعات در حال جوش	۵۰۰-۱۰۰۰۰
	بخارات میعان شده	۱۰۰۰-۲۰۰۰۰

محدوده مقادیر ضرایب انتقال حرارت که تحت شرایط مختلف رخ می‌دهد، ارائه خواهد شد تا خواننده درکی از مقادیر داشته باشد. باید خاطرنشان کرد که h ، همانند k و بلکه قوی‌تر از آن، وابسته به متغیرهای مشخصی است. این متغیرها ممکن است شامل مکان، زمان، هندسه، شرایط جریان و مشخصات فیزیکی باشند. مقادیر معمول ضرایب انتقال حرارت پایا در جدول ۲-۲ داده شده است.

تغییرات وسیع مقادیر ضرایب انتقال حرارت، تحقیقات بیشتری را برای مطالعه شرایط مرزی در مقادیر محدود از h می‌طلبد. این کار برای حالت‌های عملی‌ای که اغلب با آن‌ها روبه‌رو می‌شویم در ادامه انجام خواهد شد. لوله‌ای با شعاع داخلی و خارجی R_i و R_o را که سیالی درون آن تحت شرایط مشخص پایا جریان دارد (شکل ۲-۱۸) در نظر بگیرید. انرژی داخلی پایا و یکنواخت به ازای

(۵) انتقال حرارت به محیط توسط تابش. دوباره به بررسی شکل ۱۳-۲ می‌پردازیم و به‌عنوان مثال متوجه می‌شویم که این حالت شرط مرزی، نشان‌دهنده انتقال حرارت به‌وسیله تابش از مرزهای محیط ۱ می‌باشد.

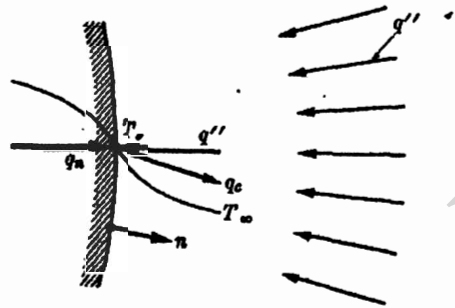
وقتی که T_1 یکنواخت بوده ولی غیرمشخص است، برای بیان شار حرارتی در سطح ۱ به‌وسیله هدایت و تابش شرایط مرزی مورد نیاز به‌صورت زیر نوشته خواهند شد.

$$\pm k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\sigma = \sigma \bar{F}_{12} (T_1^4 - T_2^4), \quad (2-104)$$

که مثل قبل، علامت مثبت و منفی عبارت هدایت به‌ترتیب متناظر با مشتق‌گیری در جهت بردار عمود درونی و بیرونی جسم می‌باشد. معادله (۲-۱۰۴) مستقل از توزیع دمای واقعی است. از آنجایی که این معادله دارای توان چهارم یک متغیر وابسته است، یک شرط مرزی غیرخطی می‌باشد.

ترکیب معادلات (۲-۱۰۲) و (۲-۱۰۴) میزان انتقال حرارت همزمان تابشی و جابه‌جایی از مرزهای محیط را خواهد داد. در عمل این انتقال همزمان یک مورد واقعی است. اهمیت داشتن تابش نسبت به جابه‌جایی به وضعیت دمایی مربوط می‌شود. بدین صورت که تابش به سرعت با افزایش دما افزایش می‌یابد. حتی در دمای اتاق، برای نرخ‌های کم جابه‌جایی، که به آن جابه‌جایی آزاد به هوا گفته می‌شود، انتقال حرارت تابشی بیش از ۵۰ درصد کل انتقال حرارت را به خود اختصاص می‌دهد.

(۶) شار حرارتی معین که در یک فاصله عمل می‌کند. محیطی را در نظر بگیرید که حرارت را به اطراف به‌وسیله جابه‌جایی منتقل و یک شار حرارتی تابشی q'' را از یک منبع دوردست دریافت می‌کند (شکل ۱۹-۲). ضریب انتقال حرارت h و دمای محیط اطراف T_∞ می‌باشد.



شکل ۲-۱۹

$$\begin{aligned} q_n + q'' - q_c &= 0, \\ -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\sigma + q'' &= 0, \\ -h(T_s - T_\infty) &= 0. \end{aligned}$$

در حالت بعدی به بررسی یک لوله ساده می‌پردازیم. حال $u^\infty \delta$ به محیط اطراف و داخل لوله منتقل می‌شود. فرض می‌کنیم T_m و T_∞ به همان صورت قبلی می‌باشند و دیواره لوله به اندازه‌ای نازک است که بتوان از اختلاف بین $T(R_o, z)$ و $T(R_i, z)$ صرف‌نظر کرد. سپس انتقال حرارت به سیال درونی و به محیط، تقریباً به‌ترتیب متناسب با ضرایب انتقال حرارت داخلی و خارجی می‌باشد. اگر به عنوان مثال $h_o \ll h_i$ باشد. انتقال حرارت به محیط در مقایسه با انتقال حرارت به درون سیال قابل صرف‌نظر می‌شود. بنابراین سطح خارجی لوله را می‌توان عایق فرض کرد و شرایط مرزی مانند حالت توصیف شده (۳) خواهد شد. مثال این مورد جریان آب درون یک لوله (جابه‌جایی اجباری برای مایع) که در اطراف آن اتمسفر ساکن قرار دارد (جابه‌جایی آزاد به گازها) می‌باشد. به‌دست آوردن توزیع دما برای سه مورد $h_o \ll h_i$ ، $h_i \sim h_o$ و یا h_i بزرگ، به عهده خواننده گذاشته می‌شود. از بحث مذکور به یک اصل مهم می‌رسیم: در انتخاب نوع شرط مرزی که باید در فرمولاسیون یک مساله استفاده شود اندازه ضریب انتقال حرارت تعیین‌کننده می‌باشد.

مطالعه مقادیر h باعث می‌شود که تحقیق مشابهی برای مقادیر k انجام شود. بدین منظور می‌خواهیم باز به حالت لوله عایق برگردیم. برای یک q_i مفروض، بزرگتر بودن ضریب هدایت حرارت کوچک‌تر شدن گرادیان دمایی $\partial T(R_i, z) / \partial r$ را به همراه خواهد داشت پس در حالتی که $\partial T(R_i, z) / \partial r$ ، $k \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می‌کند یا توزیع دمای شعاعی درون دیواره لوله قابل صرف‌نظر است. از آنجایی که این حالت منجر به تحلیل متمرکز شعاعی می‌شود، فرمولاسیون مساله را ساده می‌کند. از سوی دیگر، مقادیر کم یا متوسط k نیازمند تحلیل توزیع‌شده شعاعی است. (تحلیل‌های متمرکز و توزیع‌شده در فرمولاسیون پنج مثال توضیحی در بخش ۱۰-۲ داده شده است) بنابراین مقدار ضریب هدایت حرارتی نقش مهمی را در فرمولاسیون معادلات هدایت حرارتی یک مساله ایفا می‌کند.

در نهایت شکل بی‌بعد شرط مرزی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\pm k \left(\frac{\partial T}{\partial (r/R)} \right)_\sigma = \frac{hR}{k} (T_\sigma - T_\infty), \quad (2-103)$$

این معادله نشان می‌دهد که اثرات h و k را می‌توان به‌صورت عباراتی از یک عدد بدون بعد بررسی کرد (عدد بایوت)

$$hR/k = Bi,$$

که در آن R در این معادله طول مشخصه است. این معادله به‌صورت $(R/k)/(1/h)$ بازآرایی می‌شود. در این صورت می‌توان به‌طور فیزیکی عدد بایوت را به‌صورت نسبت مقاومت‌های ورودی و خروجی از یک مساله در جهتی که معادله (۲-۱۰۳) به‌کار می‌رود، تعریف نمود.

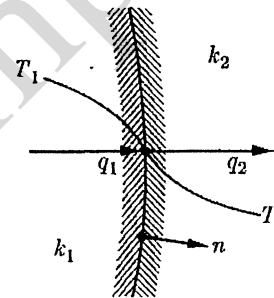
این شرط مرزی به سادگی به صورت زیر به دست می آید:

$$\pm k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\sigma + q'' = h(T_\sigma - T_\infty), \quad (2-105)$$

که در آن علامت‌های عبارت هدایت وابسته به جهت‌های عمود می‌باشد. معادله (۲-۱۰۵) مانند معادله (۲-۱۰۴) مستقل از توزیع‌های واقعی دما می‌باشد. هر جسم در محیط که قابلیت دریافت حرارت تابشی از یک منبع تابشی نزدیک (چراغ برق و یا لامپ) و یا از طریق نور خورشید را دارد، نمونه‌ای از شرط مرزی فوق خواهد بود.

(۷) سطح مشترک دو محیط با ضرایب هدایت متفاوت k_1 و k_2 . هنگامی که دو محیط دارای مرزی مشترک مانند شکل (۲-۲۰) باشند، شار حرارتی عبوری از این مرز، از روی هر دو محیط و بدون توجه به جهت عمود محاسبه می‌شود، به صورت زیر

$$k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_\sigma = k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_\sigma. \quad (2-106)$$



شکل ۲-۲۰

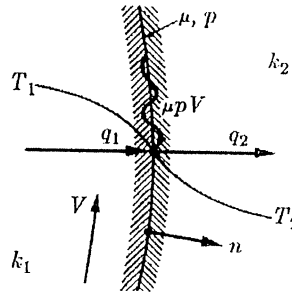
به علاوه، شرط دومی هم می‌تواند با توجه به دماهای دو محیط تعریف شود. اگر به عنوان مثال محیط‌ها جامد و در تماس نزدیک با هم باشند، طبق ایده‌آل‌سازی ریاضی می‌توان دمای دو محیط را یکسان فرض کرد.

$$(T_1)_\sigma = (T_2)_\sigma. \quad (2-107)$$

البته، معادله (۲-۱۰۷) در عمل خیلی به ندرت پیش می‌آید. حتی برای سطوح کاملاً صاف به هم فشرده، انتقال حرارت بین دو محیط از طریق مقاومت تماسی^۱ رخ خواهد داد. این مقاومت که به سختی قابل محاسبه و تشخیص است، باعث یک اختلاف دما بین دو محیط در طول سطح مشترک می‌شود. با وجود این واقعیت، معادله (۲-۱۰۷) ضرورتاً کاربرد وسیعی را در فرمولاسیون

مسائل هدایت پیدا کرده است. دیوارهای ترکیبی و لوله‌های عایق مثال‌هایی معروف از این حالت می‌باشند.

(۸) مرز مشترک دو محیط در حرکت نسبت به یکدیگر. دو محیط جامد در تماس با هم، که یکی نسبت به دیگری حرکت می‌کند، را در نظر می‌گیریم (شکل ۲-۲۱). فشار موضعی در مرز مشترک p ، ضریب اصطکاک خشک μ و سرعت نسبی V در نظر گرفته می‌شود.



$$q_1 + \mu p V - q_2 = 0, \\ -k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_\sigma + \mu p V - \left[-k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_\sigma \right] = 0$$

شکل ۲-۲۱

با فرض این که انتقال حرارت به هر دو محیط به وسیله هدایت، برابر کار انجام شده به وسیله اصطکاک است خواهیم داشت:

$$\pm k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_\sigma + \mu p V = \pm k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_\sigma \quad (2-108)$$

که در آن علامت منفی جمله‌های هدایت، متناظر با جهت بردار عمود، نشان داده شده در شکل ۲-۲۱ می‌باشد. دوباره با فرض حالت ایده‌آل تماس نزدیک، می‌توانیم دمای دو محیط را طبق حالتی که قبلاً برای معادله (۲-۱۰۷) تشریح شد در مرزها یکسان فرض کنیم. نیروی اصطکاک ترمز حالت عملی مهمی برای این شرط مرزی می‌باشد. ساییده شدن و دمای بالای به وجود آمده در اثر آن این شرط مرزی را برای فرایندهای پیوسته غیرعملی می‌کند راه حل این مشکل روانکاری است که فراتر از این کتاب بوده و در اینجا مورد بررسی قرار نخواهد گرفت.

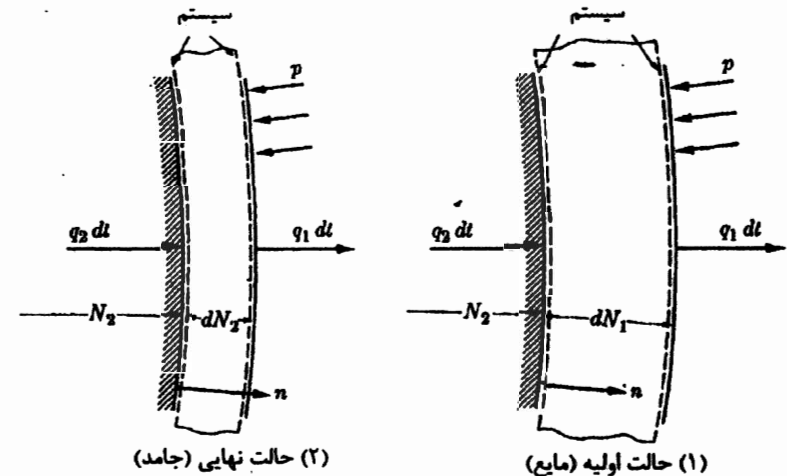
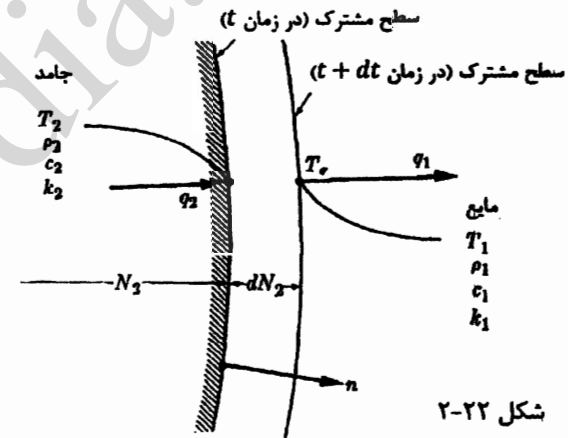
(۹) مرز متحرک بین دو محیط (تغییر فاز). اگر دماهای قسمتی از محیط، کمتر از دمایی باشد که در آن محیط با جذب یا از دست دادن گرما از یک فاز به فاز دیگر تغییر پیدا می‌کند، مرز متحرک بین دو فاز ایجاد خواهد شد. برای مسائل این بخش، تغییرات دمایی محیط به همراه روشی که طی آن مرز حرکت می‌کند، باید تعیین شود.

به عنوان مثال بررسی انجماد یک مایع را در نظر بگیرید. توجه ما در اینجا به شرط مرزی روی سطح مشترک متحرک $N_2(t)$ می‌باشد (شکل ۲-۲۲). مشخصات حرارتی مایع و جامد به ترتیب با زیرنویس ۱ و ۲ مشخص می‌شوند. از آنجایی که چگالی دو فاز یکسان نیست در مدت زمان dt ، جامد به ضخامت dN_2 از مایع به ضخامت dN_1 تشکیل می‌شود. با استفاده از قانون اول

ترمودینامیک برای سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۲۳ که حالت اولیه آن مایعی با ضخامت dN_1 و حالت نهایی اش جامدی با ضخامت dN_2 بوده، خواهیم داشت:

$$\rho_2 u_2 dN_2 - \rho_1 u_1 dN_1 = q_2 dt - q_1 dt - p(dN_2 - dN_1), \quad (2-109)$$

که در آن p فشار محیط است.



با توجه به پیوستگی داریم:

$$\rho_2 dN_2 = \rho_1 dN_1, \quad (2-110)$$

و گرمای نهان ذوب به صورت زیر است:

$$h_{sl} = h_1 - h_2, \quad (2-111)$$

می‌توانیم سرعت را در معادله (۲-۱۰۹) به صورت زیر بنویسیم:

$$-\rho_2 h_{sl} \frac{dN_2}{dt} = q_2 - q_1. \quad (2-112)$$

با جاگذاری q_1 و q_2 از قانون فوری در نهایت به فرمول زیر خواهیم رسید:

$$-\rho_2 h_{sl} \frac{dN_2}{dt} = \pm k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_\sigma - \left[\pm k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_\sigma \right], \quad (2-113)$$

که در آن علامت‌های مثبت و منفی مربوط به دیفرانسیل‌گیری $\partial/\partial n$ در طول بردار عمود ورودی و خروجی فاز جامد می‌باشد.

شرط مرزی مذکور توسط یک روش دیگر نیز به این صورت قابل حصول می‌باشد. از آنجایی که $\rho_1 \neq \rho_2$ با فرض $\rho_2 > \rho_1$ فرایند انجماد تا سرعت V_1 در سیال افزایش می‌یابد که این سرعت متناسب با نرخ اختلاف بین حجم‌های دو فاز می‌باشد (شکل ۲-۲۴ الف). بنابراین خواهیم داشت:

$$V_1 = \frac{dN_1 - dN_2}{dt},$$

که اگر با معادله (۲-۱۱۰) بازآرایی شود، خواهد شد:

$$V_1 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \frac{dN_2}{dt}. \quad (2-114)$$

برای ساده‌سازی تحلیل، فرض می‌کنیم که ناظر با حرکت مرزها حرکت می‌کند. شکل ۲-۲۴ (ب) نشان‌دهنده نمایان شدن انجماد برای ناظر است. سپس با به کار بردن قانون اول ترمودینامیک برای حجم کنترلی که مرز ثابت را احاطه نموده است (شکل ۲-۲۴ ب)) خواهیم داشت:

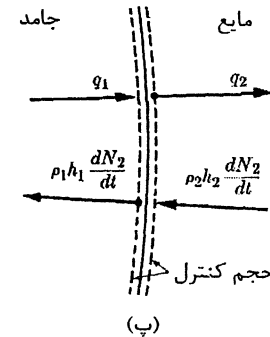
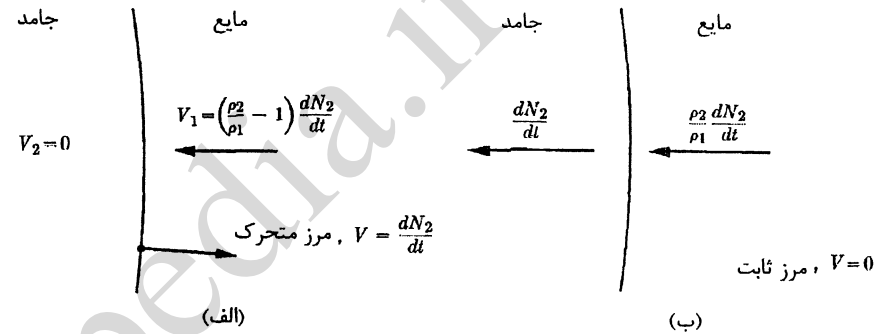
$$0 = \rho_2 (h_2 - h_1) \frac{dN_2}{dt} + q_2 - q_1. \quad (2-115)$$

با قرار دادن معادله (۲-۱۱۱) در معادله (۲-۱۱۵) به معادله (۲-۱۱۲) خواهیم رسید.

زمانی که تغییرات دمایی در مایع مورد توجه نباشد، مساله انجماد به صورت قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. در این مورد اگر ما q_1 را برحسب ضریب انتقال حرارت h بیان کنیم معادله (۲-۱۱۲) به صورت زیر بازآرایی خواهد شد:

$$-\rho_2 h_{sl} \frac{dN_2}{dt} = \pm k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_\sigma - h(T_\sigma - T_\infty), \quad (2-116)$$

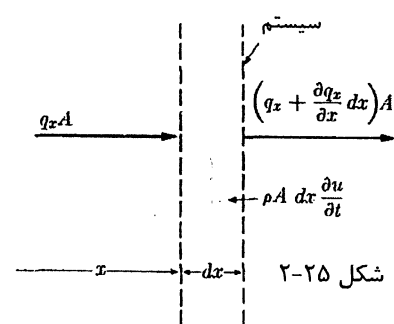
که در آن T_σ دمای انجماد و T_∞ دمای مایع دور از مرزها می باشد. مسائلی که در آنها تغییر فاز وجود دارد از اهمیت عملی زیادی برخوردار هستند. تشکیل یخ به طور طبیعی و مصنوعی، انجماد فلزات در ریخته گری و میعان و تبخیر سیالات مثال هایی از این مورد هستند.



شکل ۲-۲۴

۲-۹. روش های فرمولاسیون

در این بخش از این فصل به تبیین فرمولاسیون پدیده هدایت می پردازیم. می خواهیم فرمولاسیون هر مساله خاص را از فرمولاسیون کلی به دست آوریم. این کار امکان پذیر است اما

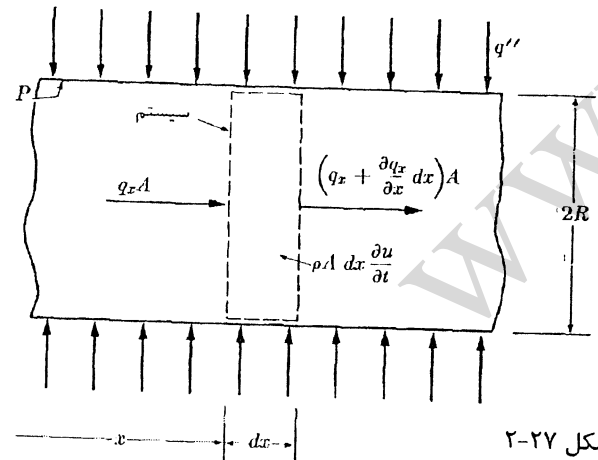
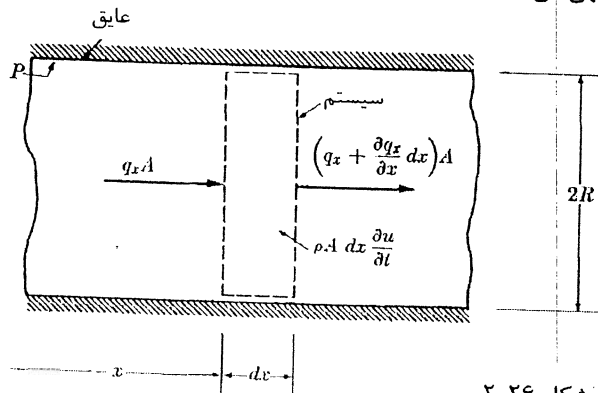


همیشه مناسب نمی باشد به خصوص اگر مساله مورد بررسی در یک جهت یا بیشتر متمرکز باشد. (این نکته در مساله شکل ۲-۲۷ تشریح شده است). علاوه بر آن، کاربرد فرمولاسیون کلی برای یک مساله خاص یک فرایند ریاضی است که فیزیک فرمولاسیون را که در مسائل عملی اهمیت زیادی دارد، حذف می کند. در مقابل، دیدگاه فیزیکی که در این کتاب به آن تاکید شده هر

مساله را به طور مجزا از ابتدای فرمولاسیون با دخالت دادن فیزیک در هر بخش از فرمولاسیون بررسی می کند. برای مشخص شدن این نکته می خواهیم به مقایسه دو روش توسط سه مساله که نیازمند فرمولاسیون یک بعدی از روی قانون اول ترمودینامیک می باشند، بپردازیم. مساله اول سیستم کارترین یک بعدی نشان داده شده در شکل ۲-۲۵ است. هنگامی که نرخ زمانی تغییر انرژی داخلی را مساوی انتقال حرارت خالص عبوری از مرزهای سیستم قرار دهیم به نتیجه زیر می رسیم:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} = 0 \quad (2-117)$$

مشخص است که فرمولاسیون کلی به دست آمده از مختصات کارترین یک بعدی معادله (۵۷-۲) نیز نتایج مشابهی می دهد.



بعدی‌ای که می‌خواهیم فرمولاسیون را در ابعاد کمتری انجام دهیم و یک یا چند جهت را متمرکز فرض کنیم (مثل مثال سوم)، دیدگاه ریاضی طولانی و نامناسب خواهد بود.

با توجه به بحث مذکور و تاکید این کتاب روی کاربردهای عملی انتقال حرارت، روش فیزیکی برای انجام فرمولاسیون ترجیح داده می‌شود. برای سادگی و استفاده‌های بعدی، این روش فرمولاسیون در پنج مرحله زیر خلاصه شده است:

(i) تعریف یک سیستم مناسب یا حجم کنترل: این مرحله شامل انتخاب (الف) سیستم مختصات، (ب) فرمولاسیون متمرکز یا توزیع‌شده، و (پ) یک سیستم یا حجم کنترل برحسب (الف) و (ب).

(ii) نوشتن قوانین کلی برای قسمت (i): قوانین عمومی یا کلی به جز در حالت متمرکز، برحسب یک سیستم مختصات نوشته می‌شوند. شکل دیفرانسیلی این قوانین وابسته به جهت بوده به مبدا مختصات وابسته نیست. درحالی‌که شکل انتگرالی علاوه بر جهت‌های مختصات به مبدا نیز وابسته است. اگر چه شکل دیفرانسیلی به‌صورت موضعی و محلی استفاده شده، شکل‌های انتگرالی و متمرکز برای کل سیستم یا حجم کنترل تشریح می‌شوند.

(iii) تشریح قوانین خاص برای قسمت (ii): قوانین خاص که تشریح کننده نفوذ گرما (اندازه حرکت، جرم یا الکتریسیته) است، دیفرانسیلی بوده، و به‌صورت محلی کاربرد دارند و به جهت محورها وابسته بوده و وابسته به مبدا مختصات نیست.

(iv) به‌دست آوردن معادله حاکم از قسمت (ii) و (iii): این معادلات مانند معادله هدایت، ممکن است جبری، دیفرانسیلی یا به شکل‌های دیگر که شامل متغیرهای وابسته دلخواهی مانند u یا T به عنوان تنها مجهول معادله می‌باشند، باشد. معادله حاکم (به‌جز برای عبارات‌های جریان) مستقل از جهت و مبدا مختصات می‌باشد.

(v) مشخص کردن شرایط مرزی و اولیه مربوط به (iv): این شرایط وابسته به مبدا و جهت‌های مختصات می‌باشد.

۲-۲. مثال‌ها

در این بخش بر روی فرمولاسیون تاکید می‌شود؛ هر چند، برای آن مسائلی که فرمولاسیون‌شان منجر به یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه اول یا درجه دوم با ضرایب ثابت می‌شود، حل مساله را نیز ارائه خواهیم داد.

مثال ۲-۱. یک گرمکن الکتریکی ساخته شده از میله جامد با مقطع مستطیلی $(2L \times 2L)$ که به یکی از صورت‌های ارائه شده در شکل ۲-۲۸ طراحی شده را در نظر بگیرید. تغییرات دمایی در طول میله قابل صرف‌نظر است. به‌علاوه اثرات خمیدگی در گرمکن کویلی، شکل ۲-۲۸ (ب) کوچک قابل صرف‌نظر است. تولید انرژی داخلی \dot{u} در گرمکن یکنواخت است. ضریب انتقال حرارت با

سپس، یک میله جامد عایق‌شده با شعاع R ، سطح مقطع A و محیط P (شکل ۲-۲۶) را در نظر می‌گیریم. به روش مشابه، قانون اول ترمودینامیک برای سیستم یک بعدی نشان داده شده در شکل (۲-۲۶) نتایج مشابهی با مساله قبل یعنی معادله (۲-۱۱۷) را حاصل می‌کند.

در نهایت، میله جامد مساله قبل را هنگامی که در معرض شار حرارتی محیطی یکنواخت q'' (شکل ۲-۲۷) قرار دارد، در نظر می‌گیریم. طبق دیدگاه فیزیکی، از قانون اول برای سیستم یک بعدی نشان داده شده در شکل ۲-۲۷ استفاده می‌کنیم. نتیجه به این صورت است:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{q'' P}{A} \quad (2-118)$$

در مقابل، شکل یک بعدی فرمولاسیون کلی، دوباره به معادله (۲-۱۱۷) می‌انجامد و شامل اثرات شار حرارتی محیطی نمی‌شود. این مشکل با بررسی شکل دوبعدی از معادله (۲-۵۷) حل می‌شود.

$$\rho \frac{\partial u^*}{\partial t} + \frac{\partial q_r^*}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r^*) = 0, \quad (2-119)$$

که در آن u^* و q_r^* علاوه بر x و t به r نیز وابسته هستند. سپس با متوسط‌گیری شعاعی معادله (۲-۱۱۹) که منجر به ضرب هر جمله در $2\pi r dr$ شده و با انتگرال‌گیری در بازه $(0, R)$ خواهیم داشت:

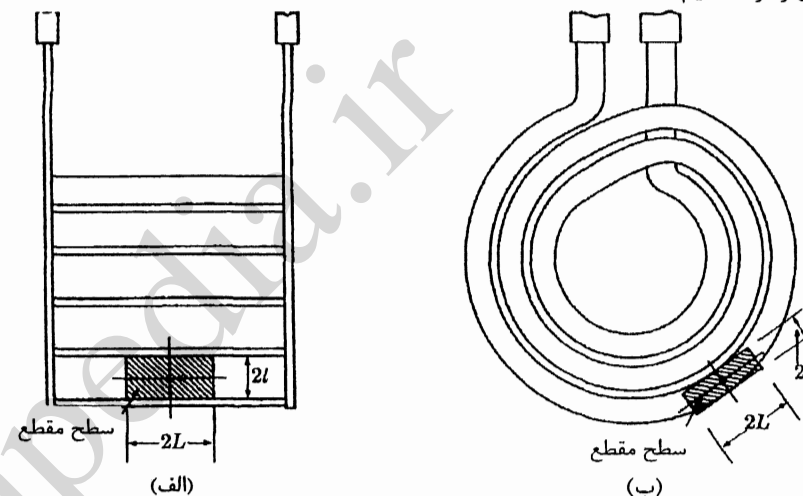
$$A\rho \frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial q_x}{\partial x} + 2\pi r q_r \Big|_0^R = 0, \quad (2-120)$$

که برابر با معادله (۲-۱۱۸) می‌باشد. اینجا مقدار متوسط شعاعی با متغیر مستقل u ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u(x, t) = \frac{2\pi}{A} \int_0^R r u^*(r, x, t) dr.$$

بحث در مورد سه مثال مذکور را می‌توان به‌صورت زیر جمع‌بندی نمود. یک مساله داده شده به دو صورت فرمول‌بندی می‌شود: یا با در نظر گرفتن یک حالت خاص مناسب از فرمولاسیون کلی (روش فرمولاسیون ریاضی، م.) و یا از ابتدا دنبال کردن یک فرمولاسیون مناسب برای هر مساله (روش فرمولاسیون فیزیکی، م.). تا زمانی که فرمولاسیون کلی موجود باشد، از روش اول استفاده می‌شود، اما این حالت نیازمند تفسیر ریاضی از فرمولاسیون کلی برای مساله مورد بررسی می‌باشد. از طرفی، روش دوم، شامل مراحل معین پشت‌سرهم در یک روند پایهای برای هر فرمولاسیون است، که این موضوع در ادامه آورده شده است. برای مسائل یک یا چندبعدی که فرمولاسیون مساله شامل تمامی ابعاد می‌باشد (مثل مسائل اول و دوم بررسی شده)، ثابت می‌شود که دیدگاه ریاضی یا کلی بسیار کوتاه‌تر از دیدگاه فیزیکی یا منحصر به فرد است. هر چند برای مسائل چند

h نشان داده شده و دمای محیط T_{∞} است. می‌خواهیم فرمولاسیون هدایت پایای مناسب برای این شکل را ارائه کنیم.



شکل ۲-۲۸

طبق پنج مرحله اصلی اشاره شده در بخش قبل، عمل می‌کنیم. باید فرمولاسیون متمرکز، انتگرالی و دیفرانسیلی این مساله را ارائه کنیم.

I فرمولاسیون متمرکز.

(i) سیستم یا حجم کنترل. سیستم متمرکز شامل تمام سطح مقطع گرمکن می‌شود (شکل ۲-۲۹). از آنجایی که مساله دو بعدی در نظر گرفته می‌شود، طول میله‌ها تاثیری در فرمولاسیون ندارد؛ به جهت ساده‌سازی برای میله‌ها طول واحدی را در نظر می‌گیریم.

(ii) قوانین کلی. با استفاده از قانون اول ترمودینامیک (معادله ۲-۱۶) برای شکل ۲-۲۹ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

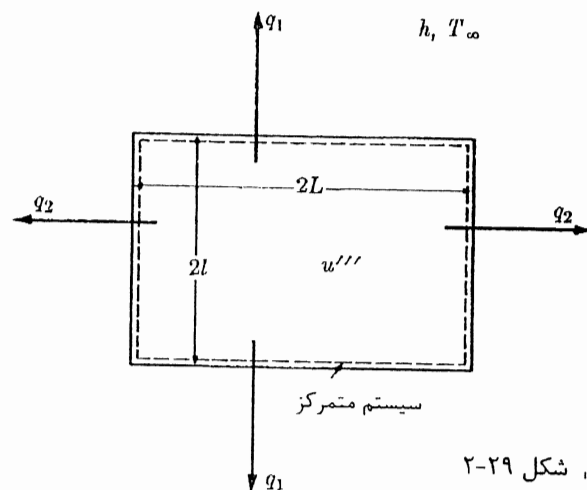
$$0 = -2q_1(2L \cdot 1) - 2q_2(2l \cdot 1) + u'''(2L \cdot 2l \cdot 1). \quad (2-121)$$

(iii) قوانین خاص. فرمولاسیون متمرکز بوده و نیازمند هیچ قانون خاصی نیست.

(iv) معادله حاکم. در غیاب قوانین خاص معادله حاکم برابر قوانین کلی می‌شود.

(v) شرایط مرزی و اولیه. به علت فرمولاسیون پایا نیازی به شرط اولیه نمی‌باشد. با استفاده از تعریف h نیز تنها شرط مرزی را خواهیم داشت:

$$q_1 \text{ (و } q_2) = h(T - T_{\infty}). \quad (2-122)$$



شکل ۲-۲۹

معادلات (۲-۱۲۱) و (۲-۱۲۲) فرمولاسیون متمرکز را برای این مساله به اتمام می‌رسانند. اگر معادله (۲-۱۲۲) را درون معادله (۲-۱۲۱) قرار دهیم، این فرمولاسیون به صورت دمای مجهول T نیز نوشته می‌شود، به صورت زیر:

$$0 = -2h(2L \cdot 1)(T - T_{\infty}) - 2h(2l \cdot 1)(T - T_{\infty}) + u'''(2L \cdot 2l \cdot 1) \quad (2-123)$$

ساده بودن معادله (۲-۱۲۳) دمای میله گرمکن را به سادگی به صورت زیر می‌دهد:

$$T = T_{\infty} + \frac{u'''(2L \cdot 2l)}{2h(2L + 2l)}. \quad (2-124)$$

هنگامی که مقدار h به سمت بی‌نهایت میل کند دمای گرمکن به دمای محیط T_{∞} نزدیک خواهد شد. [بحث بخش ۲-۸ در مورد شرایط مرزی نوع چهارم بررسی شود].

II فرمولاسیون دیفرانسیلی.

(i) سیستم یا حجم کنترل. سیستم دیفرانسیلی دو بعدی نشان داده شده در شکل ۲-۳۰ را در نظر بگیرید. به طور اختیاری جهت افقی با x و جهت عمودی با y نشان داده شده‌اند. جهت و مبداء مختصات هنوز مورد نیاز نیست. به عنوان یک قرارداد معمول سمت راست محور x ها و جهت بالا در محور y ها را جهت مثبت انتخاب می‌کنیم.

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + u''' = 0. \quad (2-125)$$

(iii) قوانین خاص. دو عبارت از شکل برداری قانون فوریه در مختصات کارتزین که برای محیط یزوتروپیک استفاده می‌شوند، به صورت زیر می‌باشند:

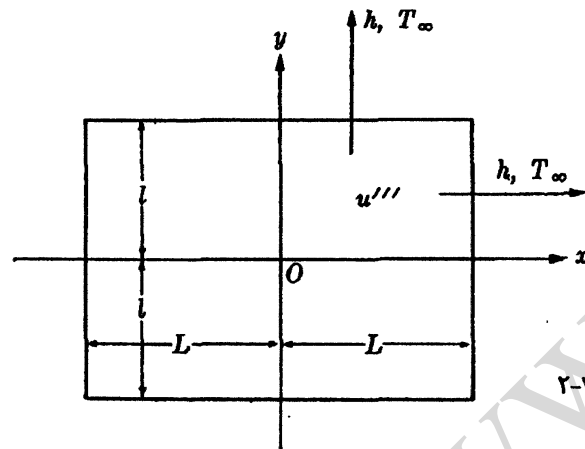
$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2-126)$$

(iv) معادلات حاکم. قرار دادن معادله (۲-۱۲۶) در معادله (۲-۱۲۵) نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u''' = 0, \quad (2-127)$$

که این رابطه برای k ثابت به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \quad (2-128)$$

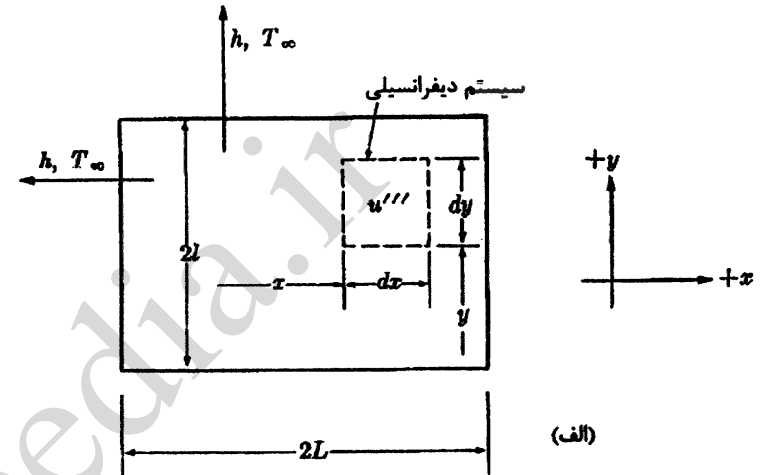


شکل ۲-۳۱

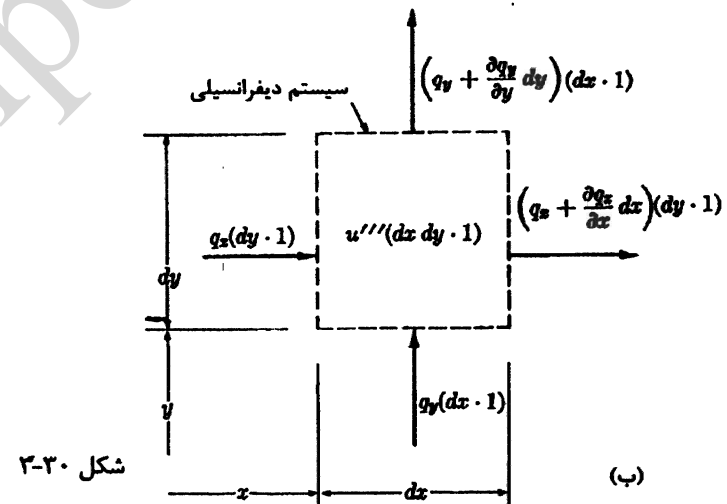
معادله (۲-۱۲۷) یا معادله (۲-۱۲۸) معادله حاکم (هدایتی) برای مساله مورد نظر خواهند بود. واضح است که این معادلات از شکل کلی برداری داده شده در معادلات (۲-۸۸) و (۲-۹۱) و با در نظر گرفتن حالات کارتزین دو بعدی پایا به دست آمده‌اند.

(۷) شرایط مرزی و اولیه. همانند فرمولاسیون متمرکز شرط اولیه نیاز نیست. درجه مشتقات x و y در معادله (۲-۱۲۸) نشان می‌دهد که دو شرط مرزی در هر جهت مورد نیاز است. قبل از این که این شرایط مشخص شوند باید مبداء مختصات و جهت محورها مشخص شوند با توجه به ظارن هندسی و گرمایی مساله، سیستم مختصات را مطابق شکل ۲-۳۱ در نظر می‌گیریم.

بنابراین شرایط مرزی به این صورت نوشته خواهند شد:



(الف)



شکل ۲-۳۰

(ب)

(ii) قوانین کلی. قانون اول ترمودینامیک برای سیستم دیفرانسیلی شکل (۲-۳۰) (الف) به کار می‌رود و به طور واضح تر برحسب عبارات و علائم شکل ۲-۳۰ (ب) بیان شده و نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$0 = +q_x(dy \cdot 1) - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) (dy \cdot 1) + q_y(dx \cdot 1) - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) (dx \cdot 1) + u'''(dx \cdot dy \cdot 1),$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\int_0^L \int_0^L \left(-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + u''' \right) dx dy = 0. \quad (2-131)$$

به‌سادگی با انجام انتگرال‌گیری مناسب از معادله (۲-۱۳۱) می‌توان تساوی معادلات (۲-۱۳۰) و (۲-۱۳۱) را نشان داد.

(iii) قوانین خاص. از آنجایی که q_x و q_y به‌صورت محلی و موضعی استفاده می‌شود. قانون فوریه داده شده در معادله (۲-۱۲۶) برای این مورد نیز صادق است.

(iv) معادله حاکم. با قرار دادن معادله (۲-۱۲۶) در معادله (۲-۱۳۰) و (۲-۱۳۱) شکل انتگرالی معادله هدایت به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^L \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_s dy + \int_0^L \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_s dx + \frac{u'''}{k} Ll = 0. \quad (2-132)$$

یا

$$\int_0^L \int_0^L \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{u'''}{k} \right) dx dy = 0. \quad (2-131)$$

از این‌رو، دو شکل انتگرالی متناظر با فرمولاسیون دیفرانسیلی معادله هدایت داریم، که یکی از روی ملاحظات فیزیکی و دیگری از روی دیدگاه ریاضی به‌دست می‌آید و معادله حاصل از دیدگاه ریاضی حاصل انتگرال‌گیری از شکل مناسب دیفرانسیلی نوشته شده روی مقطع عرضی گرمکن می‌باشد. واضح است هنگامی که شکل دیفرانسیلی موجود باشد، معادله (۲-۱۳۳) راحت‌تر از معادله (۲-۱۳۲) به‌دست می‌آید. البته، هر دو معادله یکسان و برابر می‌باشند.

(۷) شرایط مرزی و اولیه. از آنجایی که معادلات (۲-۱۳۲) و (۲-۱۳۳) به‌صورت محلی و موضعی استفاده می‌شوند، شرایط مرزی و اولیه فرمولاسیون دیفرانسیلی برای فرمولاسیون انتگرالی حاضر نیز قابل استفاده است. از این‌رو معادله (۲-۱۳۲) یا معادله (۲-۱۳۳) به‌همراه معادله (۲-۱۲۹)، فرمولاسیون انتگرالی مساله را تکمیل می‌کنند.

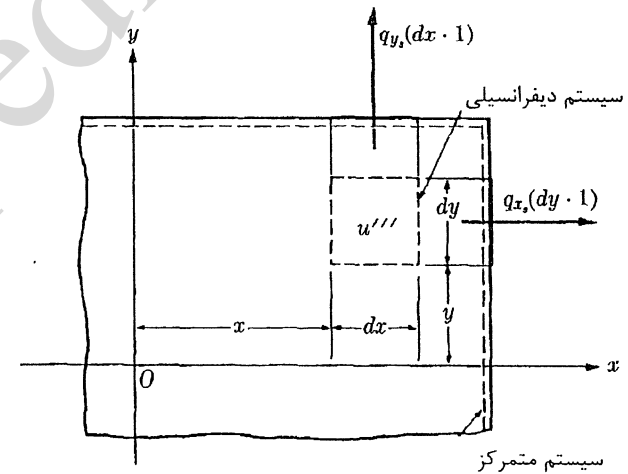
فرمولاسیون انتگرالی برای به‌دست آوردن جواب تقریبی مناسب می‌باشد، و برای مسائلی که حل دقیق آن‌ها شامل معادلات جبری نسبتاً پیچیده بوده مناسب است و مخصوصاً برای مسائل پیچیده‌ای که حل دقیق ندارند، ضروری است. حل فرمولاسیون انتگرالی، به پیشینه ریاضی بیش از آن چیزی که برای خواننده دانسته فرض شده، نیاز ندارد؛ از این‌رو روش را در اینجا ارائه می‌دهیم. این روش براساس انتخاب پروفایل تقریبی برای متغیرهای نامعلوم (وابسته)، مثل دما می‌باشد. این پروفایل شامل پارامتری نامعلوم است که باید محاسبه شود و فرض می‌شود که پروفایل مذکور

$$\frac{\partial T(0,y)}{\partial x} = 0, \quad -k \frac{\partial T(L,y)}{\partial x} = h[T(L,y) - T_\infty], \quad (2-129)$$

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial y} = 0, \quad -k \frac{\partial T(x,l)}{\partial y} = h[T(x,l) - T_\infty].$$

معادلات فوق را در سیستم مختصاتی که مبداء آن یکی از گوشه‌های گرمکن در نظر گرفته شده، بازنویسی کنید. معادله (۲-۱۲۹) را، با معادلات جدیدی که به‌دست آمده است مقایسه کنید.

معادله (۲-۱۲۷) یا (۲-۱۲۸)، به‌همراه معادله (۲-۱۲۹) فرمولاسیون دیفرانسیلی این مساله را کامل می‌کند. حل این مساله نیازمند پیشینه ریاضی بیشتری بوده و به فصل ۴ موکول می‌شود. (مثال ۴-۱۰ را که در آن حالت خاص $h \rightarrow \infty$ بررسی شده است، مشاهده کنید).



شکل ۲-۳۲

III. فرمولاسیون انتگرالی.

(i) سیستم یا حجم کنترل. همان‌طور که در ادامه آمده است در این فرمولاسیون باید به‌طورهم‌زمان از سیستم‌های فرمولاسیون متمرکز و دیفرانسیلی استفاده نمود (شکل ۲-۳۲).
(ii) قوانین کلی. قانون اول ترمودینامیک برای سیستم متمرکز شکل ۲-۳۲ به‌کار می‌رود، اما برحسب عبارات و علائم سیستم دیفرانسیلی همین شکل بیان می‌شود (همان‌طور که در بالا ذکر شد، شکل ۲-۳۲ ترکیبی از سیستم متمرکز و دیفرانسیلی است. م.) و خواهیم داشت:

$$-\int_0^L (q_x)_s dy - \int_0^L (q_y)_s dx + u''' Ll = 0. \quad (3-130)$$

نتایج مشابهی نیز ممکن است از دیدگاه ریاضی با استفاده از شکل دیفرانسیلی قانون اول ترمودینامیک معادله (۲-۱۲۵) روی سطح عرض گرمکن به‌دست آید. نتایج به این صورت است:

$$\frac{T(x,y)-T_{\infty}}{u^m l^2/k} = \frac{3}{4} \frac{[1-(x/L)^2][1-(y/L)^2]}{1+(l/L)^2} \quad (2-136)$$

حال می‌خواهیم راجع به دقت این حل تقریبی بحث کنیم. از آنجایی که شرایط مرزی به‌طور کامل ارضا می‌شوند، بیشترین خطا در دورترین مناطق نسبت به مرزها حاصل می‌شود به‌خصوص در مبدا مختصات. در حقیقت، با قرار دادن $x/L = y/L = 0$ و مقدار ویژه $l/L = 1$ درون معادله (۲-۱۳۶)، خطای حدود ۲۷٪ حاصل می‌شود، که مقدار قابل توجهی است.^۱ اگر چه خطا با l در نظر گرفتن تقریب درجه دوم به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد، که بعداً مورد بررسی قرار خواهد گرفت. (به مثال ۱۱-۴ توجه شود).

همچنین می‌توانیم از یک روش دیگر که روش کانترویچ^۲ نام دارد برای انتخاب پروفایل تقریبی استفاده کنیم. این روش بر پایه تعمیم روش ریتز می‌باشد. دوباره فرض می‌کنیم که پاسخ از حاصل ضرب چند تابع تشکیل شده باشد، که هر کدام از این توابع تنها وابسته به یک متغیر مستقل است. یکی از این توابع، تابع پارامتری^۳ است^۴ که به‌صورت غیرمشخص باقی می‌ماند (به‌طور به‌طور مثال اگر مساله دارای دو بعد (یا دو متغیر وابسته) باشد تنها برای یک جهت یا یک متغیر وابسته تابعی را حدس می‌زنیم و جهت دیگر را به‌صورت پارامتری $X(x)$ یا $Y(y)$ باقی می‌گذاریم تا به کمک معادله حاکم انتگرالی به‌دست آید م.م). پروفایل جدید، شرایط مرزی مساله را تنها در جهت‌هایی که دارای توابع مشخص هستند، ارضا می‌کند و هنگامی که این پروفایل کانترویچ (که در آن ثوابت توابع مشخص به کمک شرایط مرزی تعیین شده است م.م) را در فرمولاسیون انتگرالی قرار می‌دهیم یک معادله دیفرانسیل برحسب تابع پارامتری به‌دست می‌آید. ثوابت انتگرال‌گیری حل این معادله دیفرانسیل طبق شرایط مرزی در جهت تابع پارامتری به‌دست می‌آیند. همان‌طوری که در مثال‌های ۲-۲ و ۲-۳ خواهیم دید روش کانترویچ برای مسائل ناپایا متداول است (البته برای مسائل پایا نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد و دقیق‌تر از روش ریتز است م.م).

حال اگر به مساله مورد مطالعه باز گردیم و به‌عنوان مثال، اگر جهت x معادله (۲-۱۳۴) نامشخص باشد^۵، چند جمله‌ای درجه اول به روش کانترویچ به این صورت خواهد شد:

متشکل از ضرب توابع ساده (چند جمله‌ای، دایره‌ای و غیره) می‌باشد.^۱ هر تابع در این حاصل ضرب تنها وابسته به یکی از متغیرهای مستقل ورودی مساله می‌باشد و به گونه‌ای انتخاب می‌شود که شرایط مرزی ارضا شود.^۲ هنگامی که این حاصل ضرب در فرمولاسیون انتگرالی قرار می‌گیرد، نتیجه انتگرال‌گیری پارامترهای نامعلوم را مشخص می‌کند.^۳ و در عوض هنگامی که مقادیر پارامترها درون حاصل ضرب قرار گیرد، یک حل تقریبی برای مساله مورد نظر به‌دست خواهد آمد.

حال می‌خواهیم این رویه کلی را برای مساله مطرح شده استفاده کنیم. برای دمای گرمکن فرض می‌کنیم که حاصل ضرب به‌صورت زیر موجود باشد:

$$T(x,y) - T_{\infty} = X(x)Y(y),$$

که در آن X و Y به ترتیب توابعی از x و y هستند. مساله را به حالتی که h بزرگ است، محدود کرده و به عنوان مثال فرض می‌کنیم که پروفایل در هر دو جهت سهموی بوده به‌طوری که شرایط مرزی را ارضا کند، می‌توانیم تقریب اولیه دمای گرمکن را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$T(x,y) - T_{\infty} = (l^2 - x^2)(l^2 - y^2)a_0, \quad (2-134)$$

که در آن a_0 پارامتر نامعلومی است که باید محاسبه شود. معادله (۲-۱۳۴) پروفایل چندجمله‌ای درجه اول ریتز^۴ می‌باشد، که با استفاده از روش مشهور محاسبات تغییرکننده^۵ ریتز به‌دست می‌آید که این روش در فصل ۸ تشریح خواهد شد.^۶

با قرار دادن معادله (۲-۱۳۴) در معادله (۲-۱۳۲) یا معادله (۲-۱۳۳) خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{3u^m/k}{4l^2 + l^2} \quad (2-135)$$

با ترکیب معادلات (۲-۱۳۴) و (۲-۱۳۵) و بازآرایی نتیجه ترکیب این دو معادله، چندجمله‌ای درجه اول ریتز برای توزیع دمایی موردنظر به شکل زیر به‌دست می‌آید:

۱- این می‌تواند تنها یک فرض باشد، و ممکن است منجر به یک جواب نشود. وجود یک جواب بر درست بودن فرض دلالت دارد.

۲- اگرچه در انتقال حرارت هدایتی متداول نیست، روش انتگرالی به‌طور وسیعی تحت نام کارمن - پلهاسن (Karman-Polhausen) برای به‌دست آوردن جواب‌های تقریبی سرعت و دمای مسائل لایه مرزی در مکانیک سیالات و انتقال حرارت جابه‌جایی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳- شکل‌های حاصل ضرب مراتب بالاتر به بیش از یک پارامتر نیاز دارد.

4- Ritz Profile
5- Variational calculus

۶- این کتاب ترجمه ۷ فصل اول کتاب انتقال حرارت هدایتی آرپاچی بوده و علاقه‌مندان می‌توانند برای مطالعه فصول ۸، ۹ و ۱۰ به کتاب زبان اصلی مراجعه نمایند.

۱- این خطا از مقایسه معادله (۲-۱۳۶) با جواب دقیق، معادله (۲-۱۳۳)، و با حل فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله به‌دست می‌آید.

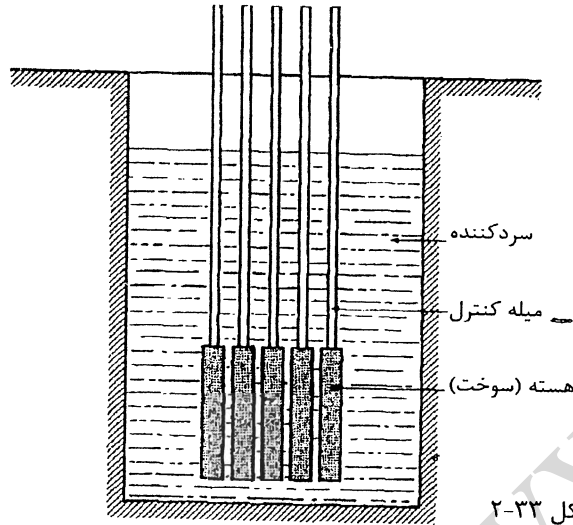
2- Kantorovich method
3- parameter function

۴- در روش ریتز عبارت پارامتر، به پارامتر ثابت اشاره دارد اما در روش کانترویچ واژه پارامتر برای بیان یک تابع کلی مثل $X(x)$ یا $Y(y)$ به‌کار می‌رود.

۵- همان‌طور که در فصل ۸ توصیف خواهد شد، این انتخاب نمی‌تواند اختیاری باشد، زیرا جهتی که نامشخص باشد صحت روش را تحت تأثیر قرار می‌دهد (رجوع شود به کتاب زبان اصلی م.م).

زیرا محدودیت‌های دلخواه کمتری به پروفایل کانترویچ تحمیل شده است. دقت پروفایل درجه اول کانترویچ مثل پروفایل درجه اول ریتز، به میزان قابل توجهی در پروفایل درجه دوم بهبود می‌یابد. (مثال ۱۱-۴ را مشاهده کنید).

شایان توجه است که اگر برای یک مساله، پروفایل‌های درجه اول ریتز و کانترویچ با استفاده از شکل تغییر یافته^۱ همان مساله حاصل شوند (به جای شکل انتگرالی (م.))، نتایج دقیق‌تری حاصل می‌شود. از این راه خطای ۲۷/۳ درصدی روش ریتز انتگرالی می‌تواند با استفاده از ریتز تغییر یافته به ۶/۰۵ درصد، کاهش یابد. به طور مشابه خطای ۱۱/۵ درصدی روش کانترویچ انتگرالی با استفاده از کانترویچ تغییر یافته به ۲/۶۸ درصد، کاهش یابد. مطالعه محاسبات تغییر یافته در فصل ۸ بررسی شده است.^۲ دلیل بررسی محاسبات تغییر یافته به دست آوردن نتایج دقیق‌تری نسبت به روش انتگرالی است که در همان فصل توضیح داده شده است. (بحث ارائه شده در زیر مثال ۶-۸ را مشاهده کنید).



شکل ۲-۳۳

مثال ۲-۲. راکتور حوضچه‌ای شکل (۲-۳۳) را که درون کوره آن تعدادی صفحات سوختی عمودی با ضخامت $2L$ تعبیه شده است، در نظر بگیرید. در ابتدا سیستم در دمای یکنواخت T_∞ قرار دارد. سپس فرض کنید که انرژی درونی ثابت هسته‌ای u''' به طور یکنواخت در این صفحات تولید می‌شود. ضرایب انتقال حرارت میان صفحات و ماده خنک‌کننده h است. دمای ماده خنک‌کننده ثابت باقی می‌ماند و ضخامت صفحات در مقایسه با ابعاد دیگر آن کوچک است. بنابراین

$$T(x, y) - T_\infty = (l^2 - y^2)X(x), \quad (2-137)$$

که این معادله شرایط مرزی را تنها در جهت y ارضا می‌کند.

با قرار دادن معادله (۲-۱۳۷) در (۲-۱۳۲)^۱ و انتگرال‌گیری در جهت y به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$\int_0^L \left(\frac{2}{3} l^2 X'' - 2X + u'''/k \right) dx = 0. \quad (2-138)$$

از آنجایی که معادله (۲-۱۳۸) برای طول دلخواه L صادق است، باید جمله زیر انتگرال در بازه $(0, L)$ صفر شود. بنابراین تابع پارامتری $X(x)$ ، با توجه به شرایط مرزی در جهت x که قبلاً استفاده نشده است، در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

$$X'' - (3/l^2)X = 3u'''/2kl^2, \quad (2-139)$$

این شرایط ممکن است به شکل زیر محاسبه شوند. به عنوان مثال فرض کنید که شرط مرزی در $T(L, y) = T_\infty$ است. ممکن است این شرط برحسب قاعده حاصل ضرب، به شکل زیر نوشته شود:

$$T(L, y) - T_\infty = 0 = X(L)Y(y). \quad (2-140)$$

البته، معادله (۲-۱۴۰) برای تمام مقادیر $Y(y)$ معتبر نیست مگر این که $X(L) = 0$ شود. به طور مشابه، شرایط دیگر، از تقارن دمایی و به صورت $dX(0)/dx = 0$ به دست می‌آید. بنابراین شرایط مرزی در جهت x به صورت زیر می‌شود.

$$dX(0)/dx = 0, \quad X(L) = 0. \quad (2-141)$$

جواب معادله (۲-۱۳۹) با توجه به معادله (۲-۱۴۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$X(x) = \frac{u'''}{2k} \left(1 - \frac{\cosh(\sqrt{3}/l)x}{\cosh(\sqrt{3}/l)L} \right). \quad (2-142)$$

در نهایت، با قرار دادن معادله (۲-۱۴۲) در معادله (۲-۱۳۷) و بازآرایی آن، چندجمله‌ای درجه اول کانترویچ برای توزیع دمایی مناسب گرمکن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{T(x, y) - T_\infty}{u'''l^2/k} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{l} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{\cosh(\sqrt{3}/l)x}{\cosh(\sqrt{3}/l)L} \right). \quad (2-143)$$

دمای صفحه مربعی در مبداء مختصات، بیشترین خطا را خواهد داشت. که اختلاف آن با جواب دقیق در حدود ۱۱/۵ درصد است. طبق انتظار، این نتیجه دقت بیشتری نسبت به روش ریتز دارد،

۱- معادله (۲-۱۳۳) نسبت به معادله (۲-۱۳۲) برای روش کانترویچ مناسب‌تر است.

با قرار دادن معادله (۲-۱۴۵) در معادله (۲-۱۴۴)، به شکل متمرکز قانون اول ترمودینامیک می‌رسیم:

$$\rho c L \frac{dT}{dt} = -q_n + u''' L. \quad (2-146)$$

آنجایی که نیازی به قوانین ویژه نیست، معادله (۲-۱۴۶) معادله حاکم بر مساله است. شرایط اولیه و مرزی به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$T(0) = T_{\infty}, \quad (2-147)$$

$$q_n = h(T - T_{\infty}). \quad (2-148)$$

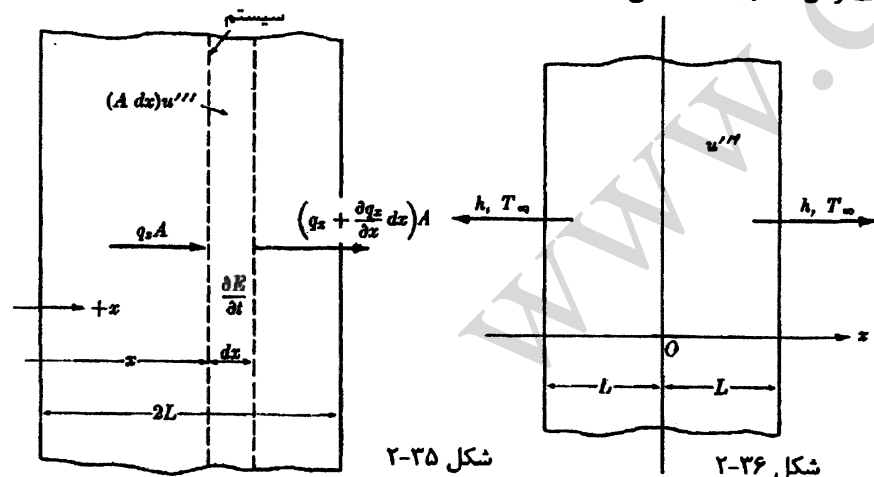
بنابراین معادلات (۲-۱۴۶)، (۲-۱۴۸) به طور کامل فرمولاسیون متمرکز مساله را شرح می‌دهند. جواب بدیهی^۱ این فرمولاسیون به سهولت از حل ترکیب معادلات (۲-۱۴۶) و (۲-۱۴۸) به دست می‌آید:

$$\rho c L \frac{dT}{dt} = -h(T - T_{\infty}) + u''' L, \quad (2-149)$$

بر اساس معادله (۲-۱۴۷)، نتیجه به صورت زیر است:

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{u''' L / h} = 1 - e^{-mt}, \quad (2-150)$$

که در آن $m = h / \rho c L$ می‌باشد.



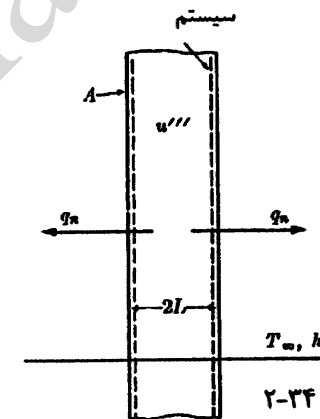
شکل ۲-۳۵

شکل ۲-۳۶

اگر از اثرات انتهایی صرف‌نظر کنیم، انتقال حرارت در یک بعد صورت می‌گیرد. می‌خواهیم که مساله دمای ناپایای راکتور را فرموله کنیم.

مجدداً شکل‌های متمرکز، دیفرانسیلی و انتگرالی مساله، برای یکی از صفحات درونی، با در نظر گرفتن پنج مرحله اساسی فرمولاسیون، فرمول‌بندی می‌شوند. هر چند که این مراحل دیگر به تفصیل شرح داده نمی‌شوند.

I فرمولاسیون متمرکز. همه صفحه به عنوان سیستم در نظر گرفته می‌شود (شکل ۲-۳۴).



شکل ۲-۳۴

صورت متمرکز قانون اول ترمودینامیک معادله (۲-۱۶) برای این سیستم به کار گرفته می‌شود:

$$\frac{dE}{dt} = -2Aq_n, \quad (2-144)$$

که در آن A سطح مقطع یک طرف صفحه را نشان می‌دهد. توجه کنید که تولید انرژی درونی u''' را نمی‌توان به عنوان یک توان ورودی به سیستم که توسط منبع الکتریکی خارجی تامین می‌شود تعریف نمود بلکه شامل تغییرات پیوسته ترکیب سوخت هسته‌ای و تجزیه صفحات به عنوان مواد قابل شکافت است که به صورت انرژی درونی عمل می‌کند^۱. عموماً این تغییر ترکیب به اندازه‌ای کوچک است که مشخصه‌های حرارتی را می‌توان ثابت فرض کرد.

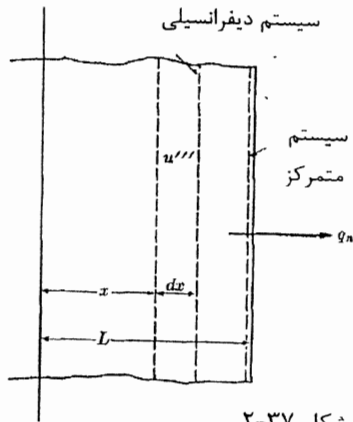
بنابراین وقتی از تعریف گرمای ویژه استفاده می‌کنیم، طرف چپ معادله (۲-۱۴۴) تغییر می‌کند:

$$\frac{dE}{dt} = \rho(A \cdot 2L)c \frac{dT}{dt} - (A \cdot 2L)u''', \quad (2-145)$$

۱- آرگومانی مشابه با این حالت به حالت‌های منابع و چاه‌های انرژی داخلی توزیع‌یافته که به ترتیب در اثر واکنش‌های شیمیایی گرماده و گرمازا به وجود می‌آیند، مربوط می‌شود. معادله (۲-۱۲) را ببینید.

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0, \quad -k \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h[T(L,t) - T_{\infty}],$$

مرزی



شکل ۲-۳۷

بنابراین با در نظر گرفتن یکی از معادلات (۲-۱۵۵) یا (۲-۱۵۶) به همراه معادله (۲-۱۵۷)، فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله کامل می‌شود. حل این فرمولاسیون نیازمند اطلاعات ریاضی بیشتر است که در فصل ۵ ارائه می‌شود (به مثال ۴-۵ و مساله ۸-۵ مراجعه کنید).
III. فرمولاسیون انتگرالی. سیستم‌های به کار گرفته شده برای فرمولاسیون‌های متمرکز و دیفرانسیلی را دوباره در نظر گرفته و در این مرحله از فرمولاسیون، مبداء مختصات را مشخص می‌کنیم. زمانی که قانون اول ترمودینامیک برای سیستم متمرکز شکل ۲-۳۷ به کار رود، نتایج قبلی حاصل می‌شود:

$$\frac{dE}{dt} = -2Aq_n, \quad (2-144)$$

از dE/dt موجود در جملات سیستم دیفرانسیلی، بر روی ضخامت صفحه، انتگرال گرفته می‌شود و با توجه به تقارن، شکل انتگرال قانون اول ترمودینامیک به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \rho c T dx - u''' L = -q_n. \quad (2-158)$$

قانون ویژه فرمولاسیون دیفرانسیلی، معادله (۲-۱۵۴)، برای فرمولاسیون انتگرالی هم معتبر است و نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$q_n = q_{x=L} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L}. \quad (2-159)$$

بنابراین با قرار دادن معادله (۲-۱۵۹) در معادله (۲-۱۵۸) معادله حاکم حاصل خواهد شد:

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \rho c T dx - u''' L = k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} \quad (2-160)$$

شرایط مرزی و اولیه، با فرمولاسیون دیفرانسیلی یکسان هستند. از این رو معادله (۲-۱۶۰) به همراه معادله (۲-۱۵۷) فرمولاسیون انتگرالی مساله را کامل می‌کنند.
حال به حل تقریبی فرمولاسیون مذکور می‌توان دست یافت. ابتدا حالت ساده $h \rightarrow \infty$ را در نظر بگیرید. اگر چه ممکن است توزیع فضایی دمای یک مساله ناپایا، به سرعت تقریب زده شود،

II. فرمولاسیون دیفرانسیلی. سیستم دیفرانسیلی یک بعدی نشان داده شده در شکل ۲-۳۵ را در نظر بگیرید. سمت راست x مثبت در نظر گرفته شده است. قانون اول ترمودینامیک برای شکل ۲-۳۵ رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -A \frac{\partial q_x}{\partial x} dx. \quad (2-151)$$

نرخ زمانی تغییرات انرژی داخلی کل به روش مشابه آنچه در فرمولاسیون متمرکز گفته شد، قابل ارزیابی است. از این رو:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho c (A dx) \frac{\partial T}{\partial t} - (A dx) u'''. \quad (2-152)$$

با وارد کردن معادله (۲-۱۵۲) درون معادله (۲-۱۵۱) و بازآرایی نتایج، شکل مناسب قانون عمومی قانون اول ترمودینامیک به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} + u'''. \quad (2-153)$$

سرانجام، با در نظر گرفتن قانون ویژه، قانون فوریه برای جهت x در محیط ایزوتروپیک خواهیم داشت:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2-154)$$

و با قرار دادن معادله (۲-۱۵۴) در معادله (۲-۱۵۳)، معادله حاکم بر مساله را به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + u''', \quad (2-155)$$

که این رابطه برای k ثابت، به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{u'''}{\rho c}, \quad (2-156)$$

معادلات (۲-۱۵۵) و (۲-۱۵۶) شکل‌های معادله دیفرانسیل هدایت یک‌بعدی در مختصات کارتزین به ترتیب برای معادلات (۲-۸۸) و (۲-۹۱) هستند.

باید قبل از نوشتن شرایط مرزی و اولیه، مبداء محورهای مختصات را مشخص کرد. با توجه به تقارن حرارتی و هندسی مساله، سطح میانی صفحه به عنوان مرکز محور x انتخاب می‌شود (شکل ۲-۳۶). شرایط اولیه و مرزی مناسب این مختصات به صورت زیر هستند:

$$T(x, 0) = T_{\infty}, \quad \text{اولیه} \quad (2-157)$$

ولی اغلب حدس زدن تغییرات زمانی مشکل است. برای چنین مسائلی، باید پروفایل کانتروویج دارای تابع پارامتری نامعین برحسب زمان باشد. به ویژه، در صورتی که پاسخ یک مساله ناپایا، به سمت پاسخ پایا میل کند یا اگر پروفایل ناپایا در یک مقیاس مشخص به پروفایل پایا شبیه باشد، پروفایل کانتروویج مساله به طور تقریبی از پاسخ پایا حاصل می شود (یعنی با توجه به پروفایل پایا مساله، پروفایل ناپایای کانتروویج را حدس می زنیم م.م). حال به بیان نکات در جملات مساله مورد نظر می پردازیم. جزییات به دست آوردن پاسخ بدیهی پایای مساله را به عهده خواننده می گذاریم و آن را برحسب عبارات شکل ۲-۳۶ به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\frac{T(x,t)-T_{\infty}}{u^{\infty}L^2/k} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \quad (2-161)$$

یک پروفایل ناپایای درجه اول کانتروویج را می توان به صورت زیر فرض نمود:

$$\frac{T(x,t)-T_{\infty}}{u^{\infty}L^2/k} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \tau_0(t). \quad (2-162)$$

علاوه بر آن، ضریب مقیاس ناپایای $\tau_0(t)$ می تواند به عنوان تابع پارامتری نامعینی که باید مشخص شود، در نظر گرفته شود. با قراردادن معادله (۲-۱۶۲) در معادله (۲-۱۶۰) و انتگرال گیری از آن با فرض مشخصات ثابت و همچنین بازآرایی معادله دیفرانسیل داده شده خواهیم داشت:

$$\frac{d\tau_0}{dt} + \frac{3a}{L^2} (\tau_0 - 1) = 0, \quad (2-163)$$

بلقوجه به شرط

$$\tau_0(0) = 0. \quad (2-164)$$

پاسخ معادله (۲-۱۶۳) که در معادله (۲-۱۶۴) صدق می کند:

$$\tau_0(t) = 1 - \exp(-3at/L^2). \quad (2-165)$$

با قرار دادن معادله (۲-۱۶۵) در معادله (۲-۱۶۲) برای تغییرات دمای صفحه، به پروفایل درجه اول کانتروویج به صورت زیر می رسیم:

$$\frac{T(x,t)-T_{\infty}}{u^{\infty}L^2/k} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \left[1 - \exp\left(-3\frac{at}{L^2}\right) \right] \quad (2-166)$$

وقتی که $t \rightarrow \infty$ معادله (۲-۱۶۶) به پاسخ پایای مساله یعنی معادله (۲-۱۶۱) نزدیک می شود.

۱- پروفیل کانتروویج مسائلی که تغییرات دمای ناپایای آن ها مشابه توزیعات پایای شان نیست، در مثال ۲-۳ توضیح داده خواهند شد.

حالت h محدود هم به صورتی مشابه می باشد. با ضرب پاسخ پایای مساله در تابع پارامتری نامعین $\tau_0(t)$ خواهیم داشت:

$$\frac{T(x,t)-T_{\infty}}{u^{\infty}L^2/k} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{2}{Bi} \right] \tau_0(t), \quad (2-167)$$

که در آن $Bi = hL/k$. [یا $\tau_0(t)$ معادله (۲-۱۶۷) هیچ مفهوم فیزیکی ای دارد؟] با وارد کردن معادله (۲-۱۶۷) در معادله (۲-۱۶۰) و انتگرال گیری، به معادله دیفرانسیلی زیر دست می یابیم:

$$\frac{d\tau_0}{dt} + \frac{3a}{L^2} \left(\frac{Bi}{Bi+3} \right) (\tau_0 - 1) = 0, \quad (2-168)$$

با توجه به شرط

$$\tau_0(0) = 0. \quad (2-169)$$

حل معادله (۲-۱۶۸) که ابتدا در معادله (۲-۱۶۴) صدق کرده و بعد در معادله (۲-۱۶۷) قرار داده می شود، پروفایل درجه اول کانتروویج مساله را می دهد. پس خواهیم داشت:

$$\frac{T(x,t)-T_{\infty}}{u^{\infty}L^2/k} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{2}{Bi} \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{3a}{L^2} \frac{Bi}{Bi+3} t\right) \right], \quad (2-170)$$

[وقتی $Bi \rightarrow \infty$ شکل معادله (۲-۱۶۹) چیست؟]

در ادامه برای تمرین بیشتر خواننده، روش دیگری برای انتخاب پروفایل تقریبی پیشنهاد شده است. یک پروفایل کانتروویج را با فرض نامعین بودن توابع پارامتری دمای سطح میانی و دمای سطحی که باید تعیین شوند، به دست آورید. سپس دمای صفحه را بر طبق حالت h محدود به صورت پروفایل دو پارامتری بنویسید. سپس، با به کارگیری شرط مرزی سطحی، یکی از توابع پارامتری این پروفایل را حذف کنید. نتایج را با معادله (۲-۱۶۷) مقایسه کنید.

در مثال بعدی، فرمولاسیون متمرکز و دیفرانسیلی مساله را مختصر کرده و توجه بیشتری به فرمولاسیون انتگرالی که نیازمند تعریف مفهوم جدید عمق نفوذ^۱ است، معطوف می کنیم.

مثال ۲-۳. یک صفحه داغ با ضخامت L (شکل ۲-۳۸) در ابتدا در دمای محیط T_{∞} قرار دارد. در این شرایط، یک شار حرارتی یکنواخت q'' به زیر صفحه وارد می شود. ضریب انتقال حرارت بالایی صفحه h است. ضخامت L صفحه در مقایسه با دیگر ابعاد کوچک است به طوری که اتلاف حرارت از اطراف ناچیز در نظر گرفته می شود. مطلوبست فرمولاسیون مساله دمای ناپایای صفحه مورد نظر.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2-174)$$

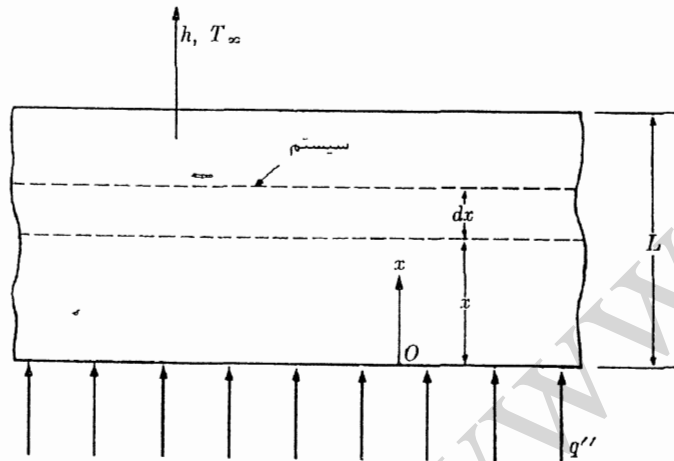
که شرایط مرزی و اولیه در جهت x که از پایین^۱ به بالا محاسبه می‌شود به صورت

$$T(x, 0) = T_{\infty}; \quad -k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = q'', \quad -k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h[T(L, t) - T_{\infty}]. \quad (2-175)$$

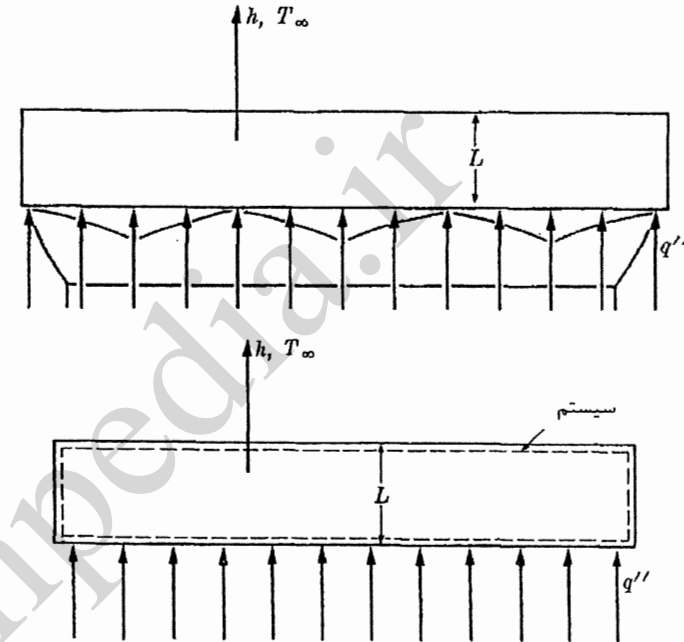
است که همراه با معادلات (۲-۱۷۳) و (۲-۱۷۴) فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله را تکمیل می‌کند. حل این فرمولاسیون به فصل ۵ واگذار می‌شود (به معادله (۵-۳۴) مراجعه کنید).

III. فرمولاسیون انتگرالی. ابتدا مساله را با توجه به زمان به دو محدوده تقسیم می‌کنیم، که در بازه زمانی اول، $0 \leq t \leq t_0$ اثر شار حرارتی به کار گرفته شده به سطح بالایی می‌رسد و بازه زمانی دوم $t \geq t_0$ محدوده مربوط به باقیمانده حالت گذراست و تا زمانی که دمای سطح بالایی به مقدار پایایی آن برسد، برقرار است.

بازه اول مساله را می‌توان با توجه به عمق نفوذ دما^۲، $\tau_0(t)$ نشان داده شده در شکل ۲-۴۱ تشریح کرد. در همان شکل حجم کنترل متمرکز و سیستم دیفرانسیلی مناسب هم نشان داده شده است. محور ترسیم شده برای نشان دادن انتهای عمق نفوذ متحرک، محور مختصات مناسبی برای ایجاد پروفایل دما می‌باشد [به معادله (۲-۱۸۱) مراجعه کنید].



شکل ۲-۴۰



شکل ۲-۳۸

شکل ۲-۳۹

I. فرمولاسیون متمرکز. با به‌کارگیری قانون اول ترمودینامیک که با تعریف ضریب انتقال حرارت ادغام شده است، سیستم متمرکز شکل ۲-۳۹ را به صورت زیر می‌توان فرموله نمود:

$$\rho c L \frac{\partial T}{\partial t} = q'' - h(T - T_{\infty}), \quad (2-170)$$

و

$$T(0) = T_{\infty}. \quad (2-171)$$

پاسخ معادله (۲-۱۷۰) که در معادله (۲-۱۷۱) هم صدق کند به صورت زیر است:

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{q''/h} = 1 - e^{-mt}, \quad (2-172)$$

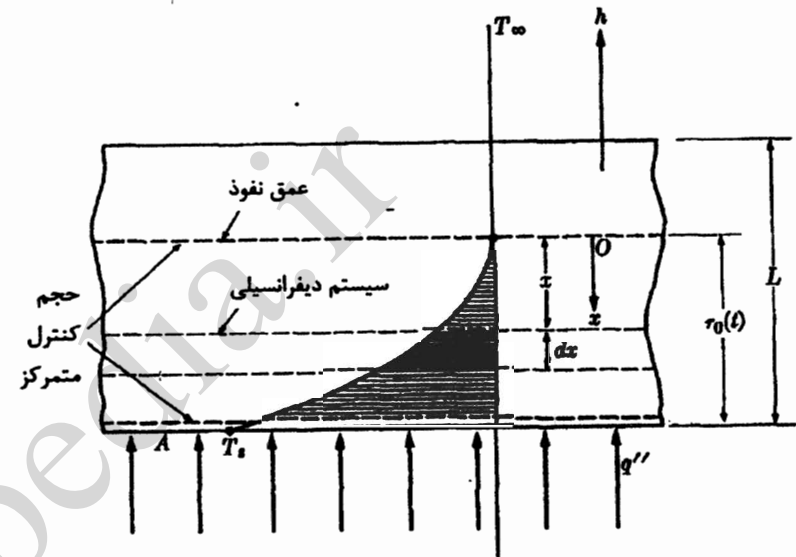
که در آن $m = h/\rho c L$ است.

II. فرمولاسیون دیفرانسیلی. با ترکیب قانون اول ترمودینامیک و قانون هدایت فوری برای سیستم دیفرانسیلی شکل ۲-۴۰، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (2-173)$$

که اگر k ثابت باشد به این صورت در می‌آید:

۱- این اولین مساله‌ای است که محور مختصات مناسب آن واضح نیست. انتخاب بهترین چارچوب مرجع و مناسب از دیدگاه پیچیدگی پاسخ مهم است. پاسخ این سوال در فصول ۳ و ۴ روشن می‌شود.
۲- این بحث مشابه مفهوم ضخامت لایه مرزی سرعت و دما در تئوری لایه مرزی است.



شکل ۲-۴۱

قانون اول ترمودینامیک به کار رفته برای حجم کنترل متمرکز شکل ۲-۴۱ نتیجه می‌دهد:

$$\frac{dE}{dt} = \rho c A T_{\infty} \frac{d\tau_0}{dt} + q'' A, \quad (2-176)$$

که در آن A مساحت سطح یک طرف صفحه است. بیان نمودن انرژی داخلی کل E حجم کنترل متمرکز برحسب عبارات انرژی داخلی سیستم دیفرانسیلی داده شده، شکل مناسبی از فرمولاسیون انتگرالی قانون عمده می‌را ایجاد می‌نماید:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\tau_0(t)} \rho c T dx = \rho c T_{\infty} \frac{d\tau_0}{dt} + q''. \quad (2-177)$$

با وجود این که مساله توزیع شده است، هیچ کدام از عبارات معادله (۲-۱۷۷) نیاز به استفاده از قانون خاصی ندارند. اگر قانون ویژه فوریه در جهت x بعداً در مرتبط کردن شرایط مرزی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. (به معادله (۲-۱۷۹) مراجعه کنید). بنابراین معادله حاکم بازه اول را در معادله (۲-۱۷۷) قرار می‌دهیم.

با استفاده از دمای اولیه یکنواخت صفحه، شرط اولیه ایجاد می‌شود:

$$T(x, 0) = T_{\infty}. \quad (2-178)$$

شرط مرزی سطح زیرین صفحه، شار حرارتی ثابت q'' را با استفاده از قانون ویژه به دما مرتبط می‌کند، که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\tau_0(t)} = -q''. \quad (2-179)$$

آنجایی که در این بازه زمانی عمق نفوذ کمتر از ضخامت صفحه است، شرط مرزی بیان‌کننده انتقال حرارت از سطح بالایی، معتبر نیست. به جای آن، شار حرارتی صفر در سطح صفحه و در قتهای عمق نفوذ، باید مورد استفاده قرار گیرد:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = 0. \quad (2-180)$$

بنابراین معادلات (۲-۱۷۷)، (۲-۱۷۸)، (۲-۱۷۹) و (۲-۱۸۰) فرمولاسیون انتگرالی مساله را در بازه زمانی اول تکمیل می‌کنند. قبل از انجام فرمولاسیون بازه زمانی دوم، یک حل تقریبی برای بازه زمانی اول پیدا می‌کنیم.

از آنجایی که در این بازه (بازه زمانی اول) تغییرات دمای ناپایا وجود دارد، یعنی دمای پایای شناخته شده‌ای در این بازه وجود ندارد (و عدم وجود یک دمای پایای معین باعث می‌شود که شرط اولیه معینی برای بازه زمانی دوم وجود نداشته باشد)، نمی‌توان پروفایل کانترویج ناپایا را با استفاده از پاسخ پایا حاصل نمود (به پروفایل کانترویج مثال ۲-۲ توجه کنید). این مطلب روش دومی را برای ایجاد پروفایل کانترویج ناپایا پیشنهاد می‌کند که در این روش به یک تابع (چندجمله‌ای، تناوبی، و غیره) که شرایط مرزی در آن صدق کند، نیاز است. اگر چه درجه چندجمله‌ای (یا نوع تابع تناوبی) تا حد زیادی اختیاری است ولی می‌توان از یک راهنمایی ساده‌کننده برای به دست آوردن این پروفایل استفاده نمود. بنابراین و برای مثال کمترین درجه چندجمله‌ای که شرایط مرزی را ارضا می‌کند معمولاً بهترین تقریب از پروفایل واقعی است. در مورد این مساله از یک سهمی استفاده می‌کنیم:

$$T(x, t) - T_{\infty} = \left(\frac{q''}{2k} \right) \frac{x^2}{\tau_0(t)}, \quad (2-181)$$

که شرایط مرزی داده شده با معادلات (۲-۱۷۹) و (۲-۱۸۰) در آن صدق می‌کند. با قرار دادن معادله (۲-۱۸۱) در معادله (۲-۱۷۷) و انتگرال‌گیری با فرض ویژگی‌های ثابت، معادله دیفرانسیل ساده ولی غیرخطی زیر حاصل می‌شود:

$$d\tau_0^2 = 6a dt, \quad (2-182)$$

و با توجه به شرط اولیه

$$\tau_0(0) = 0. \quad (2-183)$$

حل معادله (۲-۱۸۲) که در شرط (۲-۱۸۳) صدق کند به صورت زیر است:

$$\tau_0(t) = (6at)^{1/2} \quad (2-184)$$

بنابراین با استفاده از پروفایل درجه اول کانتروویچ، تغییرات دما در بازه زمانی اول مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$T(x, t) - T_\infty = \left(\frac{q''}{2k}\right) \frac{x^2}{(6at)^{1/2}}, \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad (2-185)$$

بنابراین وارد کردن $\tau_0(t_0) = L$ در معادله (۲-۱۸۴) ما را به زمان نفوذ شار حرارتی اعمال شده q'' به سطح بالایی صفحه می‌رساند:

$$t_0 = L^2/6a. \quad (2-186)$$

برای مقایسه سه پاسخ متفاوت مساله، برای مثال یک تغییر دما در پایین صفحه را در نظر می‌گیریم. از راه حل فوق، عبارت $x = \tau_0(t) = (6at)^{1/2}$ را در معادله (۲-۱۸۵) قرار می‌دهیم که خواهیم داشت:

$$T_s(t) - T_\infty = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{q''}{k}\right) (at)^{1/2}. \quad (2-187)$$

پاسخ دقیق مساله که در فصل ۷ ارائه خواهد شد^۱ به صورت زیر است:

$$T_s(t) - T_\infty = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{q''}{k}\right) (at)^{1/2}. \quad (2-188)$$

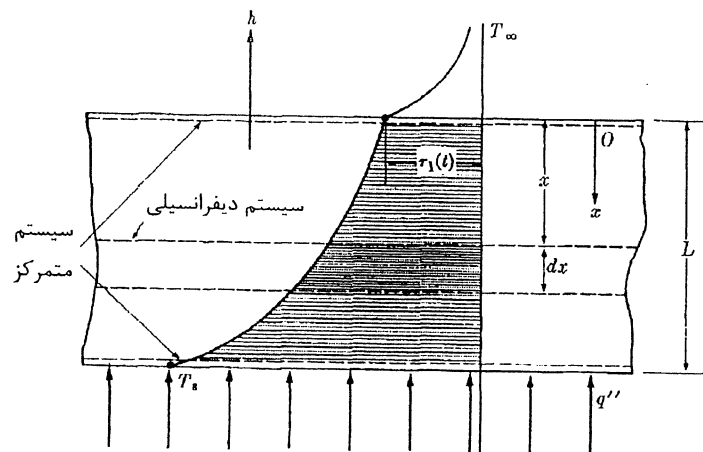
از این رو خطای معادله (۲-۱۸۷)، ۸/۴٪ است. اگر پروفایل تقریبی حاصل از معادله (۲-۱۸۱) در شکل تغییر یافته از فرمولاسیون قرار داده شود (به مثال ۸-۸ مراجعه کنید)، نتیجه به این شکل خواهد بود:

$$T_s(t) - T_\infty = \left(\frac{5\pi}{4}\right)^{1/2} \left(\frac{q''}{k}\right) (at)^{1/2}. \quad (2-189)$$

معادله (۲-۱۸۹) به یک خطای تقریبی ۰/۸۹٪ می‌انجامد. مقایسه مذکور اهمیت محاسبات تغییر یافته را به عنوان یک روش تقریبی نمایان می‌کند.

حال با پایان یافتن بررسی بازه زمانی اول، به فرمولاسیون مساله، برای بازه زمانی دوم باز می‌گردیم. سیستم‌های دیفرانسیلی و متمرکز نشان داده شده در شکل ۲-۴۲ را در نظر بگیرید. محور مختصات از سطح بالایی و رو به پایین در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از قانون اول ترمودینامیک و قانون هدایت فوری، شکل انتگرالی مناسبی از معادله حاکم حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \rho c T dx = q'' - k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}. \quad (2-190)$$



شکل ۲-۴۲

شرایط اولیه این بازه، شرط نهایی بازه اول است. همچنین شرط مرزی صفحه پایینی باید مطابق با محور مختصات جدید اصلاح شود:

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L} = -q''. \quad (2-191)$$

به علاوه مرز در سطح بالایی، که اکنون با محیط انتقال حرارت دارد شرط زیر را ارضا می‌کند:

$$+k \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = h(T_{x=0} - T_\infty). \quad (2-192)$$

بنابراین معادلات (۲-۱۹۰) و (۲-۱۸۵) برای $t = t_0$ ، (۲-۱۹۱) و (۲-۱۹۲) فرمولاسیون انتگرالی مساله برای بازه زمانی دوم را شرح می‌دهند.

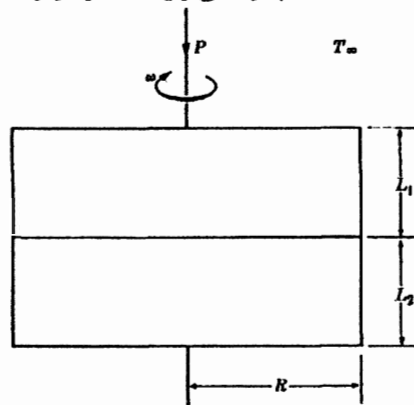
سرانجام یک تغییر دمای تقریبی برای بازه زمانی دوم پیدا می‌کنیم. به دلیل این که مساله مانند مثال ۲-۲ در انتهای بازه زمانی دوم به پاسخ حالت پایا می‌رسد نمی‌توان از پروفایل کانتروویچ ناپایا برای رسیدن به پاسخ پایای مساله در جملات تابع پارامتری نامعین استفاده کرد. در این حالت یک روش مشابه آنچه در بازه زمانی اول استفاده شد، دنبال می‌شود. ساده‌ترین پروفایل ممکن از ترکیب یک تابع پارامتری نامعین در زمان و توابع مکانی مناسبی که در شرایط مرزی صدق می‌کنند، حاصل می‌شود. توجه به این نکته اهمیت دارد که این پروفایل باید به پروفایل حاکم بر بازه زمانی اول در $t = t_0$ و پاسخ پایا در $t \rightarrow \infty$ برسد.

پروفایل سهموی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$T(x, t) - T_\infty = Ax^2 + Bx + C.$$

۱- مورد به خصوص مساله ۷-۱ متناظر با $h = 0$ است

دارد. سپس به‌طور ناگهانی صفحه بالایی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω شروع به چرخش می‌کند. ضریب اصطکاک میان دیسک‌ها μ است. چگونه می‌توان مساله را فرموله کرد؟



شکل ۲-۴۳

ابتدا توجه کنید که ضرایب انتقال حرارت رو به بالا، رو به پایین و افقی به‌خاطر جابه‌جایی آزاد در لایه‌ها متفاوت هستند. ثانیاً انتقال حرارت از دیسک بالایی به علت جابه‌جایی آزاد چرخشی چند برابر افزایش می‌یابد. بنابراین ما چهار ضریب انتقال حرارت متفاوت رو به بالا h_1 و افقی h_3 برای دیسک چرخان و رو به پایین h_2 و افقی h_4 برای دیسک ثابت داریم. برای ساده‌سازی فرمولاسیون، دیسک‌ها همگن و ایزوتروپیک فرض شده‌اند.

۱. فرمولاسیون دیفرانسیلی. مشخصه‌های دیسک‌های بالایی و پایینی به‌وسیله زیرنویس‌های ۱ و ۲ مشخص شده‌اند. قانون اول ترمودینامیک و قانون هدایت فوری برای سیستم استوانه‌ای دایره‌ای شکل ۲-۴۴ نوشته شده است و فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله به‌صورت زیر به‌دست آمده است:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right], \quad (2-198)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right], \quad (2-199)$$

دو شرط اولیه و هشت شرط مرزی:

$$T_1(r, z, 0) = T_{\infty}, \quad (2-200)$$

همانند بازه زمانی دوم در مثال ۲-۳، انتخاب مبداء مختصات برای فرمولاسیون حاضر است و در اینجا بحث نخواهد شد.

برای مثال اگر دمای سطح بالایی را $T_1(t)$ ، به‌عنوان تابع پارامتری نامعین، قرار دهیم، این پروفایل ممکن است به شکل زیر نوشته شود:

$$T(x, t) - T_{\infty} = \left(\frac{q''}{h} - T_1 \right) \frac{hx^2}{2kL} + \left(1 + \frac{hx}{k} \right) T_1. \quad (2-193)$$

وقتی $t \rightarrow \infty$ معادله (۲-۱۹۳) به پاسخ پایای مساله تبدیل می‌شود.

$$T(x) - T_{\infty} = \left(1 + \frac{hx}{k} \right) \frac{q''}{h},$$

و وقتی که $t \rightarrow t_0$ پاسخ بازه زمانی اول حاصل می‌شود.

با وارد کردن معادله (۲-۱۹۳) در معادله (۲-۱۹۰) و انتگرال‌گیری با فرض مشخصات ثابت به معادله دیفرانسیل خطی زیر می‌رسیم:

$$\frac{dT_1}{dt} + \left(\frac{m}{1+Bi/3} \right) \left(T_1 - \frac{n}{m} \right) = 0, \quad (2-194)$$

با شرط اولیه

$$T_1(t_0) = 0, \quad (2-195)$$

که در آن $Bi = hL/k$ و $n = q''/\rho cL$ ، $m = h/\rho cL$ می‌باشند.

پاسخ معادله (۲-۱۹۴) که در معادله (۲-۱۹۵) صدق می‌کند به این صورت است:

$$T_1(t) = \frac{n}{m} \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{m(t-t_0)}{1+Bi/3} \right] \right\}. \quad (2-196)$$

در پایان با ترکیب معادلات (۲-۱۹۶) و (۲-۱۹۳) و بازآرایی آن، پروفایل کانترویچ درجه اول برای بازه زمانی دوم مساله زمانی که $t \geq t_0$ است به شکل زیر حاصل می‌شود:

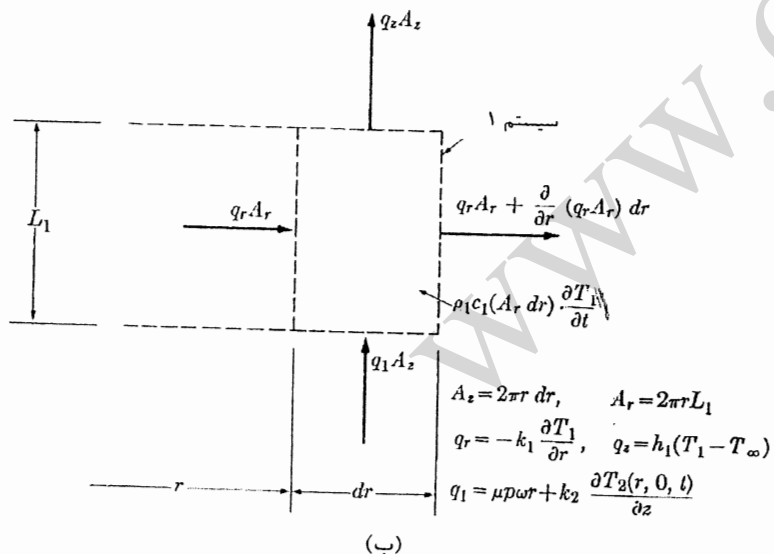
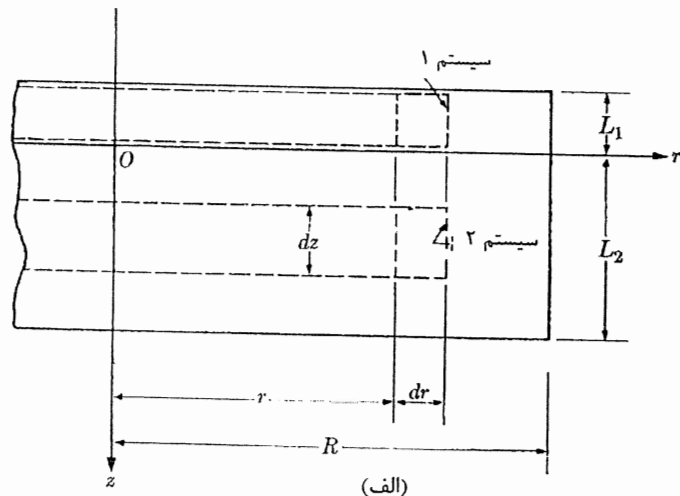
$$\frac{T(x, t) - T_{\infty}}{q''L/k} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left[\frac{1}{Bi} + \left(1 - \frac{x}{2L} \right) \frac{x}{L} \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{m(t-t_0)}{1+Bi/3} \right] \right\}, \quad (2-197)$$

پس ما سه مساله ساده را که حاوی اطلاعات کامل برای فرمولاسیون بود، در نظر گرفتیم. هدف اصلی‌مان توسعه دادن توانایی فرموله کردن مسائل در شکل‌های متمرکز، دیفرانسیلی و انتگرالی بوده است. فرمولاسیون مساله برای یک حالت فیزیکی معلوم نیازمند برقرار نمودن تعدادی فرضیات به عنوان بخشی از فرمولاسیون است. به همین دلیل در دو مثال بعدی فقط فیزیک مساله شرح داده شده است. سپس اطلاعات مورد نیاز برای فرمولاسیون در فرمولاسیون داده شده است.

مثال ۲-۴. دو دیسک استوانه‌ای جامد در جهت محور خود به علت بار خارجی P که در شکل ۲-۴۳ نشان داده شده است به هم فشار می‌آورند. در ابتدا سیستم ثابت است و در دمای محیط T_{∞}

(الف) دیسک بالایی به‌طور محوری متمرکز باشد. وقتی که $k_1 \gg k_2$ یا $L_1 \ll L_2$ باشد تغییر دمای محوری دیسک بالایی می‌تواند متمرکز باشد. بنابراین قانون اول ترمودینامیک، قانون هدایت فوریه و تعریف ضریب انتقال حرارت به‌کار گرفته شده برای سیستم ۱، شکل ۲-۴۵، معادله هدایت برای دیسک بالایی را بدین صورت نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{a_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) - \frac{h_1}{\rho_1 c_1 L_1} (T_1 - T_\infty) + \frac{\mu p(r) \omega r}{\rho_1 c_1 L_1} - \left[-k_2 \frac{\partial T_2(r, 0, t)}{\partial z} \right]. \quad (۲-۲۱۰)$$



شکل ۲-۴۵

$$T_2(r, z, 0) = T_\infty, \quad (۲-۲۰۱)$$

$$+k_1 \frac{\partial T_1(r, -L_1, t)}{\partial z} = h_1 [T_1(r, -L_1, t) - T_\infty], \quad (۲-۲۰۲)$$

$$T_1(r, 0, t) = T_2(r, 0, t) \quad (۲-۲۰۳)$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1(r, 0, t)}{\partial z} + \mu p(r) \omega r = -k_2 \frac{\partial T_2(r, 0, t)}{\partial z}, \quad (۲-۲۰۴)$$

$$-k_2 \frac{\partial T_2(r, L_2, t)}{\partial z} = h_2 [T_2(r, L_2, t) - T_\infty], \quad (۲-۲۰۵)$$

$$\frac{\partial T_1(0, z, t)}{\partial r} = 0, \quad (۲-۲۰۶)$$

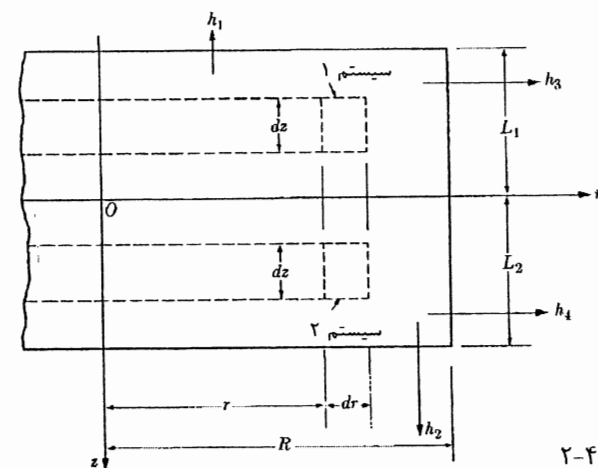
$$-k_1 \frac{\partial T_1(R, z, t)}{\partial r} = h_3 [T_1(R, z, t) - T_\infty], \quad (۲-۲۰۷)$$

$$\frac{\partial T_2(0, z, t)}{\partial r} = 0, \quad (۲-۲۰۸)$$

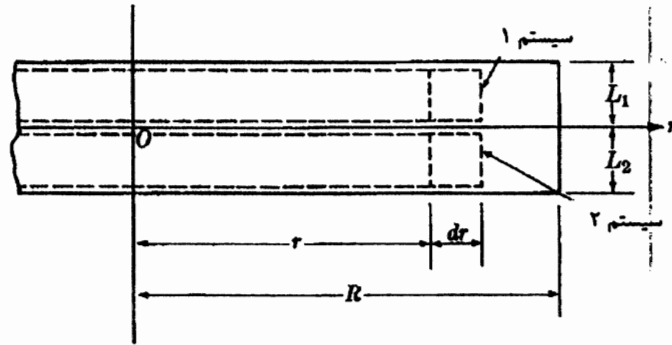
$$-k_2 \frac{\partial T_2(R, z, t)}{\partial r} = h_4 [T_2(R, z, t) - T_\infty], \quad (۲-۲۰۹)$$

که در آن $p(r)$ فشار موضعی بین دیسک‌هاست.

فرمولاسیون دیفرانسیلی مذکور به راحتی حاصل می‌شود ولی حل آن مشکل و یا حتی غیرممکن است. از طرفی دیگر هر زمان فیزیک اجازه دهد ممکن است که فرمولاسیون‌های ساده‌تر برای مساله مشابه به یک پاسخ منجر شوند. حال شرح می‌دهیم که چگونه طی ساده‌سازی‌های مشخصی می‌توان به فرمولاسیون دیفرانسیلی رسید.



شکل ۲-۴۴



شکل ۲-۴۶

(ب) هر دو دیسک به‌طور محوری متمرکز باشند. وقتی که هر دو دیسک نازک باشند بطوری‌که L_1 و $L_2 \ll R$ یا وقتی‌که k_1 و k_2 بزرگ باشند، تغییر محوری دما در هر دو دیسک قابل صرف‌نظر می‌شود.

بنابراین با در نظر گرفتن سیستم نشان داده شده در شکل ۲-۴۶ که به‌طور محوری متمرکز و به‌طور شعاعی دیفرانسیلی است، یک معادله هدایت به شکل زیر به‌دست خواهیم آورد:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\bar{a}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\bar{h}}{\rho c L} (T - T_{\infty}) + \frac{\mu \rho \omega r}{2 \rho c L}, \quad (2-214)$$

که در آن T دمای معمول دیسک‌ها، $\bar{a} = \bar{k} L / \rho c L$ ، $\bar{k} = (k_1 L_1 + k_2 L_2) / 2$ ، $\bar{h} = (h_1 + h_2) / 2$ و $(\rho_1 c_1 L_1 + \rho_2 c_2 L_2) / 2$ است.

شرایط اولیه و مرزی حاکم بر معادله (۲-۲۱۴) بدین صورت است:

$$T(r, 0) = T_{\infty}, \quad (2-215)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial r} = 0, \quad (2-216)$$

$$-\bar{k} \frac{\partial T(R, t)}{\partial r} = \bar{h} [T(R, t) - T_{\infty}], \quad (2-217)$$

که در آن $\bar{k} = (k_1 + k_2) / 2$ است. البته امکان جایگزینی معادله (۲-۲۱۷) با شرط تقریبی زیر هم وجود دارد:

$$\frac{\partial T(R, t)}{\partial r} \cong 0. \quad (2-218)$$

II. فرمولاسیون انتگرالی. یک مساله فرمولاسیون انتگرالی دو بعدی شامل یک سطح نفوذی است که صفحه نمی‌باشد و این مطلب خارج از حوزه این بحث است. فرمولاسیون انتگرالی یک بعدی مطابق با حالت (ب) به‌دلیل سادگی به عنوان تمرین به عهده خواننده گذاشته می‌شود.

به هر حال دقت کنید که برابری دمای سطح تماس بدین گونه است:

$$T_1(r, t) = T_2(r, 0, t), \quad (2-211)$$

برای دیسک پایینی می‌توانیم معادله (۲-۲۱۰) را به یک شرط مرزی تبدیل کنیم. [به معادله (۲-۲۱۲) مراجعه کنید] معادله هدایت برای دیسک پایینی بدون تغییر می‌ماند. بنابراین فرمولاسیون مساله برای این حالت به صورت زیر است:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right], \quad (2-199)$$

با توجه به

$$T_2(r, z, 0) = T_{\infty}, \quad (2-201)$$

$$\frac{\partial T_2(r, 0, t)}{\partial t} = \frac{a_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_2(r, 0, t)}{\partial r} \right] - \frac{h_1}{\rho_1 c_1 L_1} [T_2(r, 0, t) - T_{\infty}] + \frac{\mu \rho \omega r}{\rho_1 c_1 L_1} - \quad (2-212)$$

$$\frac{1}{\rho_1 c_1 L_1} \left[-k_2 \frac{\partial T_2(r, 0, t)}{\partial z} \right],$$

$$-k_2 \frac{\partial T_2(r, L_2, t)}{\partial z} = h_2 [T_2(r, L_2, t) - T_{\infty}], \quad (2-205)$$

$$\frac{\partial T_2(0, z, t)}{\partial r} = 0, \quad (2-208)$$

$$-k_2 \frac{\partial T_2(R, z, t)}{\partial r} = h_4 [T_2(R, z, t) - T_{\infty}]. \quad (2-209)$$

توجه کنید که ضریب انتقال حرارت h_3 از فرمولاسیون مساله ناپدید شده است. (چه شرط مرزی در سطح جانبی دیسک بالایی صدق می‌کند؟ آیا ممکن است فرض عایق بودن در این صفحه برقرار باشد؟)

برای حالت خاص $L_1 \rightarrow 0$ این فرمولاسیون بدون تغییر می‌ماند به‌جز برای شرط مرزی داده شده با معادله (۲-۲۱۲) که به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$0 = -h_2 [T_2(r, 0, t) - T_{\infty}] + \mu \rho \omega r - \left[-k_2 \frac{\partial T_2(r, 0, t)}{\partial z} \right]. \quad (2-213)$$

پس یاد گرفتیم که با صرف‌نظر کردن از تغییر محوری دما در دیسک بالایی فرمولاسیون مساله از دو معادله دیفرانسیلی پاره‌ای با دو شرط اولیه و هشت شرط مرزی به یک معادله دیفرانسیلی پاره‌ای با یک شرط اولیه و چهار شرط مرزی تبدیل می‌شود.

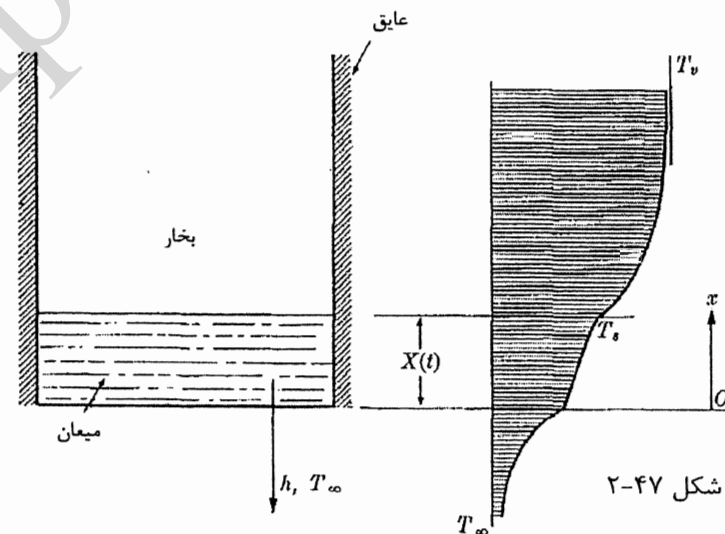
در اینجا به حل چهار فرمولاسیون مذکور، نمی‌پردازیم زیرا این کار نیازمند معلوم بودن توزیع فشار $p(r)$ میان دیسک‌ها است که به این ترتیب کار انجام شده توسط اصطکاک تعیین می‌شود. دو حالت معمول قابل فرض است:

(i) فشار ثابت، ثابت p

(ii) سایش ثابت، ثابت pr

که دومین حالت از نظر فیزیکی واقع‌گرایانه‌تر است و به نظر می‌رسد که برای به دست آوردن پاسخ مناسب‌تر باشد^۱.

مثال ۵-۲. یک ظرف با دیواره‌های نازک عایق‌شده شامل بخار آب داغ در دمای T_v است (شکل ۴۷-۲). سطح خارجی کف ظرف در تماس با هوای اطراف در دمای $(T_\infty < T_v)$ قرار می‌گیرد. می‌خواهیم مساله را توسط عباراتی از ضخامت مایع $X(t)$ و دیگر متغیرهای مربوطه فرموله کنیم.



شکل ۴۷-۲

فرضیات و علل زیر می‌توانند در فرمولاسیون مساله مورد استفاده گیرند:

(الف) سطح تماس بخار - مایع در دمای اشباع T_s است.

(ب) مساله یک‌بعدی است زیرا سطح جانبی ظرف عایق‌بندی شده است.

(پ) افت دما در ضخامت کف ظرف ناچیز است.

(ت) خواص بخار و مایع ثابت است و به ترتیب توسط زیرنویس‌های ۱ و ۲ مشخص شده‌اند.

(ج) اختلاف چگالی ثابت میان بخار و مایع موجب یک جریان رو به پایین بخار با سرعت ثابت می‌شود^۱.

$$V = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \frac{dX}{dt}.$$

از این رو فرمولاسیون دیفرانسیلی یک‌بعدی در منطقه‌ای در جهت x از کف ظرف و رو به بالا مورد محاسبه قرار می‌گیرد و به صورت زیر است:

بخار:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \frac{dX}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial x} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2},$$

$$T_1(x, 0) = T_v,$$

$$T_1(\infty, t) = T_v,$$

مایع:

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2},$$

$$T_2(x, 0) = T_s,$$

$$+k_2 \frac{\partial T_2(0, t)}{\partial x} = h[T_2(0, t) - T_\infty],$$

که در سطح تماس مایع - بخار به وسیله شرایط مرزی زیر به هم مرتبط شده‌اند:

$$T_1(X, t) = T_2(X, t) = T_s,$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1(X, t)}{\partial x} = -k_2 \frac{\partial T_2(X, t)}{\partial x} + \rho_2 h_{vc} \frac{dX}{dt},$$

(چند شرط مرزی برای فرمولاسیون مذکور موردنیاز است و چند شرط بیان شده است؟)

فرمولاسیون‌های دیفرانسیلی مسائل دو منطقه‌ای اغلب به سختی حل می‌شوند مخصوصاً وقتی که بازه‌ها محدود باشند. اگر چه با دلایل فیزیکی مناسب، ممکن است به طور تناوبی به مسائل ساده‌تری تبدیل شوند. در ابتدا بخار را در دمای اشباع در نظر می‌گیریم یا فرض می‌کنیم که میزان داغ بودن آن به اندازه کافی کم است که قابل صرف‌نظر باشد. بنابراین $T_1(x, t) = T_s$ و فرمولاسیون برای مایع (بدون زیرنویس) به دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

$$T(x, 0) = T_s,$$

انتقال حرارت هدایتی

$$+k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h[T(0,t) - T_{\infty}],$$

$$T(X,t) = T_s$$

$$-k \frac{\partial T(X,t)}{\partial x} + \rho h_{vc} \frac{dX}{dt} = 0. \quad (2-219)$$

حتی حل این فرمولاسیون ساده شده دارای پیچیدگی‌های ریاضیاتی است.

حال، یک فرمولاسیون شبه پایا را با ساده‌سازی بیشتر مساله در نظر می‌گیریم. به علت میزان میعان پایین که اغلب هم حاکم است، تغییرات انرژی داخلی با زمان را می‌توان برای مایع قابل صرف نظر دانست. بنابراین فرمولاسیون قبلی به صورت زیر در می‌آید:

$$0 = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow T = ax + b \Rightarrow \text{در این حالت، دما در تمام طول جسم برابر است.} \quad (2-220)$$

$$+k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h[T(0,t) - T_{\infty}], \quad \text{در این حالت، دما در تمام طول جسم برابر است.} \quad (2-221)$$

$$T(X,t) = T_s \quad (2-222)$$

$$-k \frac{\partial T(X,t)}{\partial x} + \rho h_{vc} \frac{dX}{dt} = 0. \quad (2-223)$$

توجه کنید که ناپایایی فرمولاسیون فقط با شرط مرزی معادله (۲-۲۲۳) بیان شده است. حل حالت مذکور به راحتی انجام می‌شود. پاسخ T از معادلات (۲-۲۲۰)، (۲-۲۲۱) و (۲-۲۲۲) و قرار دادن نتایج در معادله (۲-۲۲۳) نتیجه می‌دهد:

$$\rho h_{vc} \frac{dX}{dt} = \frac{T_s - T_{\infty}}{X/k + 1/h} \quad (2-224)$$

یا

$$\frac{1}{k} X dX + \frac{1}{h} dX = \left(\frac{T_s - T_{\infty}}{\rho h_{vc}} \right) dt, \quad (2-225)$$

با توجه به

$$X(0) = 0. \quad (2-226)$$

پاسخ معادله (۲-۲۲۵) که معادله (۲-۲۲۶) را ارضا کند:

$$\frac{X(t)}{k/h} = -1 + \left[1 + \frac{2h^2(T_s - T_{\infty})t}{k\rho h_{vc}} \right]^{1/2}. \quad (2-227)$$

ساده‌سازی نهایی، حذف افت دما در مایع است. این امر وقتی که k بزرگ یا t کوچک باشد، فرض تقریبی خواهد بود. از این رو مقاومت حرارتی X/k مایع در معادله (۲-۲۲۴) را رها می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\rho h_{vc} \frac{dX}{dt} = \frac{T_s - T_{\infty}}{1/h}, \quad (2-228)$$

که در معادله (۲-۲۲۶) صدق می‌کند و انتگرال آن به پاسخ زیر منجر می‌شود:

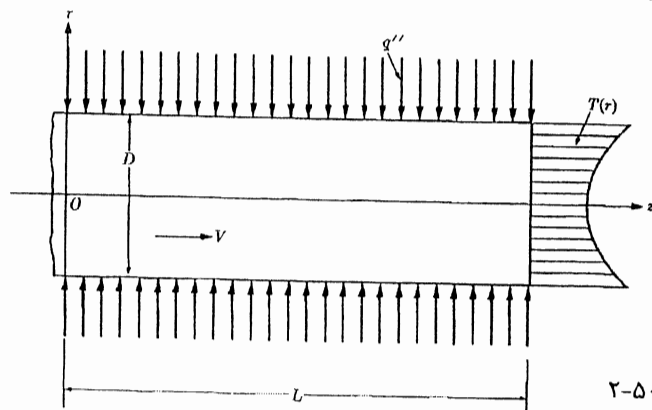
$$X(t) = \frac{h(T_s - T_{\infty})}{\rho h_{vc}} t, \quad (2-229)$$

شکل خاص معادله (۲-۲۲۷) وقتی $k \rightarrow \infty$ یا $t \rightarrow 0$ چگونه است؟

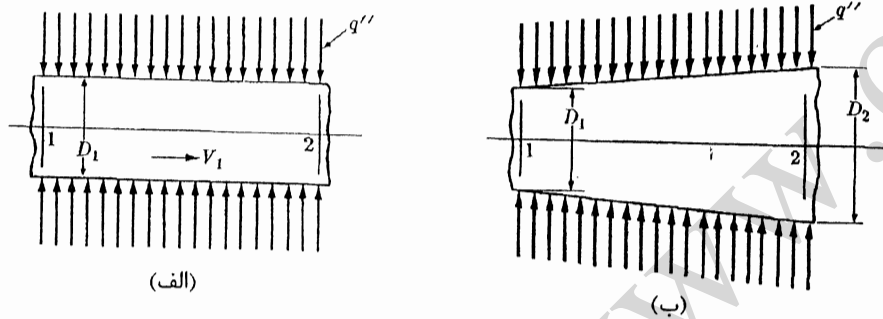
مراجع

1. L. PRANDTL and O. G. TIETJENS, *Fundamentals of Hydro- and Aerodynamics*. New York: McGraw-Hill, 1934
2. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford Clarendon Press, 1959.
3. R. B. BIRD, W. E. STEWART, and E. N. LIGHTFOOT, *Transport Phenomena*. New York: Wiley, 1960.
4. A. H. SHAPIRO, Class Notes on "Advanced Fluid Mechanics." MIT 1956.
5. A. H. SHAPIRO, *The Dynamic and Thermodynamic of Compressible Flow*, New York: The Roland Press, 1953.
6. J. H. KEENAN, Class Notes on "Advanced Engineering Thermodynamics." MIT 1955.
7. J. H. KEENAN, *Thermodynamics*. New York: Wiley, 1941.
8. M. W. ZEMANSKY, *Heat and Thermodynamics*. New York: McGraw-Hill, 1957
9. G. J. VAN WYLEN, *Thermodynamics*. New York: Wiley, 1959.
10. J. C. HUNSAKER and B.G. RIGHTMIRE, *Engineering Application of Fluid Mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1947.
11. I. H. SHAMES, *Mechanics of Fluids*. New York: McGraw-Hill, 1962.
12. R. ARIS, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1962.
13. M. JAKOB and G. A. HAWKINS, *Element of Heat Transfer*. New York: Wiley 1957.
14. M. JAKOB, *Heat Transfer I*. New York: Wiley, 1949.
15. T. N. CETINKALE and M. FISHENDEN, "Thermal Conductance of Metal Surface in Contact," *General Discussion on Heat Transfer*. IME, London and ASME, New York, 271(1951).
16. H. FENECH and W. M. ROHSENOW, "Prediction of Thermal Conductance of Metallic Surface in Contact." *Trans. ASME, C, Journal of Heat Transfer*, 85 15(1963).

۲-۳. یک میله جامد متحرک در یک لوله در اثر شار حرارتی یکنواخت q'' اعمال شده به سطح جانبی لوله، ذوب می‌شود و فرض می‌شود که پروفایل سرعت، سهموی است (شکل ۲-۵۰). چگالی ρ جامد به‌طور تقریبی برابر با چگالی سیال است. سرعت جامد V ، دمای جامد در ورودی T_0 ، گرمای نهان ذوب h_{fs} و گرمای مخصوص جامد و سیال به‌ترتیب C_s و C_f است. اصطکاک میان میله جامد و لوله ناچیز است و هدایت محوری در مقایسه با جریان آنتالپی در جامد و سیال ناچیز است. اگر توزیع شعاعی دما برای سیال سهموی فرض شود، توزیع دما در فاصله L از ورودی لوله را به‌دست آورید.



شکل ۲-۵۰



شکل ۲-۵۱

۲-۴. جریان‌های پایای یک‌بعدی از سیال بی‌اصطکاک تراکم‌ناپذیر در یک لوله با سطح مقطع ثابت و یک دیفیوزر هم طول با آن در نظر بگیرید (شکل ۲-۵۱). بر سطح جانبی لوله و دیفیوزر شار حرارتی یکنواخت q'' اعمال می‌شود. قطر ورودی و سرعت ورودی دیفیوزر با لوله برابر است. (الف) دمای خروجی دیفیوزر بالاتر از دمای خروجی لوله است یا پایین‌تر؟ مبنای خود را بر توجیه فیزیکی قرار دهید نه ریاضیات. (ب) در برابر یک تحلیل ساده که هدایت محوری را ناچیز در نظر می‌گیرد از پاسخ خود دفاع کنید.

- 17 A. L. LONDON and R. A. SEBAN, "Rate of Ice Formation." Trans. ASME, 65, 771 (1943).
- 18 M. A. BIOT, "New Method in Heat Flow Analysis with Application to Flight Structure." *Journal of Aeronautical Science*, 24, 857 (1957).

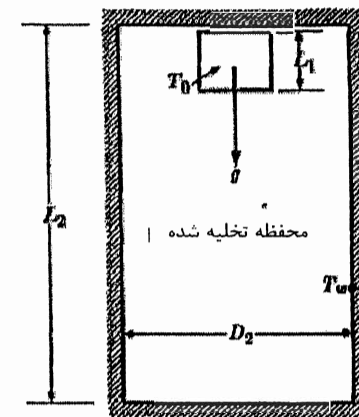
مسائل

۲-۱. یک محفظه شامل مایع و بخار آب در تعادل، در دمایی کمی پایین‌تر از دمای بحرانی است. یک پوند از مایع توسط شیری که در زیر محفظه قرار دارد، به درون آن راه می‌یابد. محفظه توسط حمام دما ثابتی احاطه شده تا دمای محتویاتش نسبت به دمای اولیه تغییر نکند (شکل ۲-۴۸). (۲) حجم مخصوص مایع در مقایسه با بخار آن قابل صرف‌نظر کردن نیست. (الف) رابطه‌ای برای افزایش حجم فاز بخار در محفظه با استفاده از خواص اشباع مایع و بخار پیدا کنید. (ب) رابطه‌ای برای حرارت منتقل شده از حمام به محتویات محفظه در نتیجه پایین آمدن سطح مایع و فقط با استفاده از خواص اشباع پیدا کنید.

حمام دما ثابت



شکل ۲-۴۸



شکل ۲-۴۹

۲-۲. صفحه مسی مربعی با ضخامت σ که در دمای اولیه T_0 قرار دارد در یک محفظه عمودی خالی که دیواره‌هایش در دمای ثابت T_w ($T_0 < T_w$) تنظیم شده است (شکل ۲-۴۹). با استفاده از داده‌های زیر دمای صفحه را وقتی به پایین محفظه می‌رسد، محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} L_1 &= 6 \text{ in.} & \delta &= \frac{1}{4} \text{ in.} \\ L_2 &= 40 \text{ ft} & D_2 &= 10 \text{ ft} \\ \rho_1 &= 500 \text{ lbm/ft}^3 & T_w &= 2000^\circ \text{R} \\ c_1 &= 0.1 \text{ Btu/lbm} \cdot ^\circ \text{F} & T_0 &= 60^\circ \text{F} \\ \epsilon_1 &= 0.8 & g &= 32.2 \text{ ft}^2/\text{sec} \\ \epsilon_2 &= 0.4 \end{aligned}$$

۲-۵. مثال ۲-۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید که بخار در دمای اشباع و دمای مایع نیز متمرکز باشد. به‌طور مستقیم قانون اول ترمودینامیک را برای مایع به‌کار گیرید. اتلاف حرارت از کف مایع را برحسب ضریب انتقال حرارت بیان کنید. نتایج را با معادله (۲-۲۲۸) مقایسه کنید.

۲-۶. یک حجم کنترل دیفرانسیلی سه‌بعدی را در مختصات کارتزین، استوانه‌ای و کروی در نظر بگیرید.

(الف) شکل خاص ∇T و $\nabla^2 T$ در این مختصات را به‌دست آورید (در اینجا T هر مشخصه عددی را در بر می‌گیرد).

(ب) معادله هدایت را برای سیال همگن، ایزوتروپیک و بی‌اصطکاک تراکم‌ناپذیر، با پیروی از پنج مرحله اصلی فرمولاسیون به‌دست آورید.

(پ) به کمک قسمت (الف) معادله (۲-۹۱) را در شکل کارتزین، استوانه‌ای و کروی بنویسید.

(ت) نتایج قسمت (ب) و (پ) را مقایسه کنید.

۲-۷. مثال ۲-۱ را در نظر بگیرید. با استفاده از شکل انتگرالی معادله هدایت و فرض:

(الف) توابع دایره‌ای در هر دو جهت

(ب) تابع دایره‌ای برای وجه کوچک‌تر و یک تابع پارامتر نامعین برای وجه بلندتر، دمای پایای گرمکن را پیدا کنید.

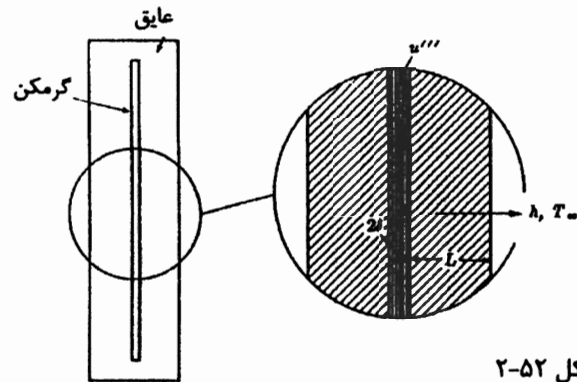
۲-۸. فرمولاسیون متمرکز و انتگرالی مثال ۲-۳ را از فرمولاسیون دیفرانسیلی شروع کنید.

راهنمایی: برای فرمولاسیون انتگرالی مناسب در بازه زمانی اول، از فرمولاسیون دیفرانسیلی در بازه $(0, \tau_0)$ انتگرال بگیرید. نتایج را با فرمول انتگرال لاینیتز بازنویسی کنید:

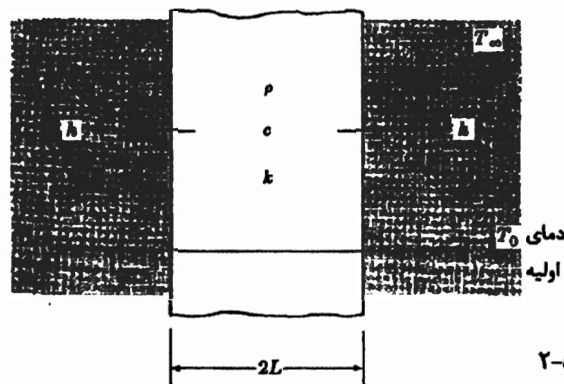
$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} F(x, \xi) d\xi = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x} d\xi + F(x, b) \frac{db}{dx} - F(x, a) \frac{da}{dx}.$$

۲-۹. برای یک هدف گرمایشی، در صفحه فلزی مسطحی با ضخامت 2σ انرژی داخلی به‌صورت الکتریکی تولید می‌شود. برای به‌دست آوردن دمای سطحی پایین و به‌منظور عایق‌بندی الکتریکی، این صفحه توسط یک عایق الکتریکی با ضخامت L که از نظر حرارتی هم هادی ضعیفی است، پوشیده شده است (شکل ۲-۵۲). گرم‌کن در ابتدا در دمای T_∞ محیط قرار دارد و ناگهان انرژی داخلی u''' در آن تولید می‌شود. تحلیل یک‌بعدی را برای آن انجام دهید.

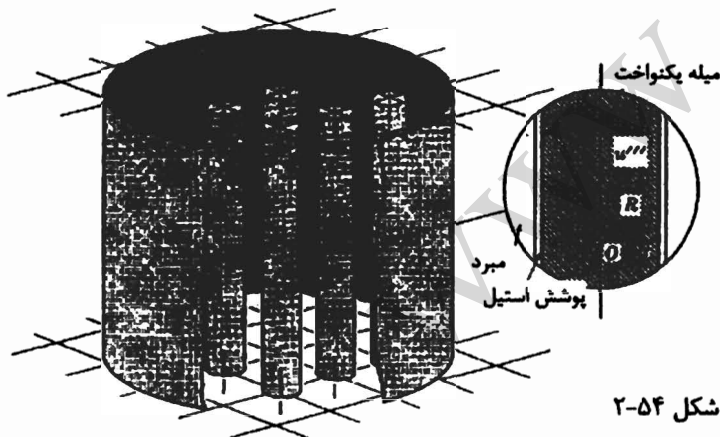
۲-۱۰. یک صفحه مسطح با ضخامت $2L$ دارای دمای اولیه یکنواخت T_0 است و ناگهان به یک حمام با دمای ثابت T_∞ وارد می‌شود (شکل ۲-۵۳). ضریب انتقال حرارت h است. چگالی، ظرفیت حرارتی، و ضریب هدایت حرارتی صفحه به‌ترتیب ρ ، c ، و k هستند مساله را فرموله کنید.



شکل ۲-۵۲



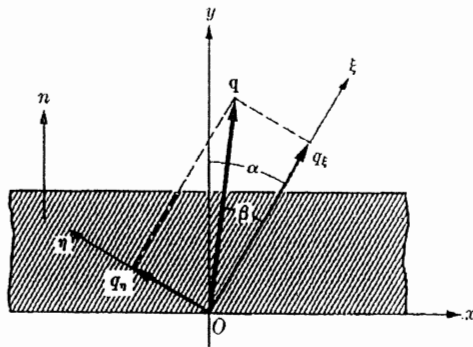
شکل ۲-۵۳



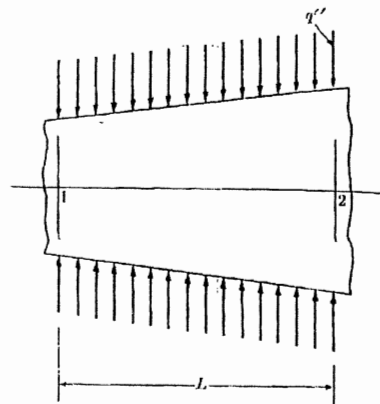
شکل ۲-۵۴

۲-۱۱. هسته راکتور حوضچه‌ای از پیل‌های سوختی استوانه‌ای ساخته شده است، هر کدام از یک میله اورانیوم با شعاع R و پوشش فولاد ضد زنگ با ضخامت ناچیز تشکیل شده است (شکل

کل و محلی در این جریان را با فرض این که هدایت محوری (الف) ناچیز و (ب) غیرقابل صرف نظر باشد، پیدا کنید.



شکل ۲-۵۷



شکل ۲-۵۶

۲-۱۸. یک جسم غیر ایزوتروپیک همگن و دوبعدی را که صفحه مسطحی از مواد قابل ورقه کردن مانند شکل ۲-۵۷ است، در نظر بگیرید. ورقه‌ای شدن صفحه یک زاویه α با بردار عمود n وارد بر سطح می‌سازد. فرض کنید که مقادیر حداقل و حداکثر ضریب هدایت حرارتی به ترتیب k_ξ و k_η در جهت‌های ξ و η هستند. (این جهت‌ها و مقادیر ضریب هدایت مطابق با آن‌ها به ترتیب محورهای اصلی و مقادیر اصلی نامیده می‌شود. نشان داده می‌شود که مقادیر ضریب هدایت در جهت دیگر به صورت یک بیضی که محورهای آن مقادیر اصلی ضریب هدایت هستند، تغییر می‌کنند). اجزاء بردار شار حرارتی ξ و η به صورت زیر هستند:

$$q_\xi = -k_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad q_\eta = -k_\eta \frac{\partial T}{\partial \eta}.$$

(الف) نشان دهید که اجزاء بردار شار حرارتی در x و y به این صورتند:

$$q_x = -k_\xi \sin \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} + k_\eta \cos \alpha \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$q_y = -k_\xi \cos \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} - k_\eta \sin \alpha \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

(ب) q_x و q_y را به صورت عبارتی از $\partial T / \partial x$ و $\partial T / \partial y$ ، بیان کرده و نتایج را طبق صورت هندسی زیر بازآرایی کنید:

$$q_x = -\left(k_\xi \sin^2 \alpha + k_\eta \cos^2 \alpha\right) \frac{\partial T}{\partial x} - (k_\xi - k_\eta) \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial T}{\partial y},$$

۲-۵۴. راکتور در ابتدا در یک دمای یکنواخت T_∞ قرار دارد که ناگهان انرژی داخلی به طور یکنواخت در میله‌ها به صورت زیر تولید می‌شود:

$$u''' / u_0''' = 1 - (r/R)^2,$$

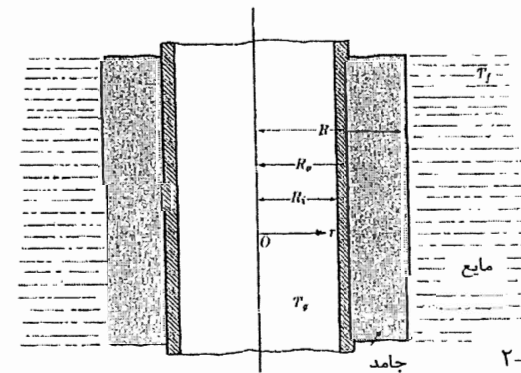
که در آن u_0''' انرژی داخلی تولید شده در خط مرکزی است. دمای مبرد در T_∞ ثابت نگه داشته می‌شود. ضریب انتقال حرارت بزرگ است. مساله را فرموله کنید.

۲-۱۲. یک کره جامد با شعاع R که در دمای اولیه T_0 قرار دارد را در آب در حال جوش با دمای T_∞ می‌اندازیم. مساله را فرموله کنید.

۲-۱۳. مساله ناپایایی مثال ۲-۱ را برای ضریب انتقال حرارت بزرگ دوباره فرموله کنید. فرض کنید که گرم‌کن در ابتدا در دمای محیط T_∞ است و ناگهان انرژی داخلی یکنواخت u''' در آن تولید می‌شود.

۲-۱۴. فرمولاسیون متمرکز مثال ۲-۲ و ۲-۳ را در نظر بگیرید. انتروپی کل تولید شده در این مثال‌ها را به دست آورید.

۲-۱۵. دور یک لوله که توسط جریان داخلی گازی به دمای T_g سرد می‌شود، یک مایع در دمای انجماد T_f در حال یخ زدن است (شکل ۲-۵۵). مساله را براساس موقعیت استوانه‌ای سطح تماس مایع - جامد R و دیگر پارامترهای درگیر در مساله فرموله کنید.



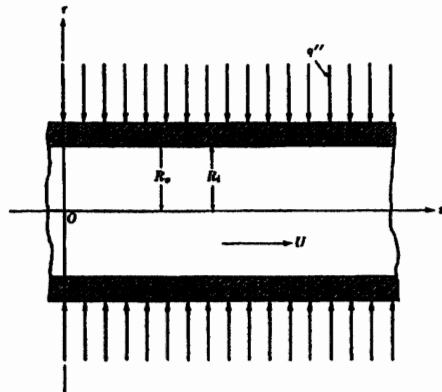
شکل ۲-۵۵

۲-۱۶. فرمولاسیون دیفرانسیلی مثال ۲-۵ که توسط معادله (۲-۲۱۹) ارائه شده است را در نظر بگیرید.

(الف) فرمولاسیون انتگرالی مطابق با آن را با پیروی از روش فیزیکی پیدا کنید.

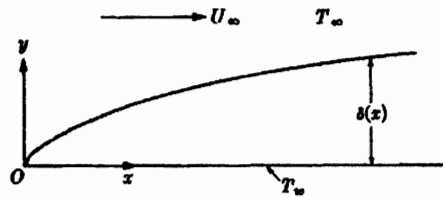
(ب) یک پاسخ تقریبی از مساله به صورت چند جمله‌ای به دست آورید.

۲-۱۷. جریان یک‌بعدی ناپایایی سیال بدون اصطکاک تراکم‌ناپذیر در یک دیفیوزر را در نظر بگیرید. دیفیوزر تحت شار حرارتی محیطی و یکنواخت q'' قرار دارد (شکل ۲-۵۶). تولید انتروپی



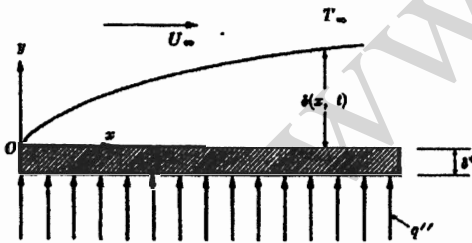
شکل ۲-۵۸

۲-۲۰. یک سیال بدون اصطکاک غیرقابل تراکم با سرعت U_∞ به طور پایا بر روی صفحه نیمه بینهایت با ضخامت ناچیز جریان دارد (شکل ۲-۵۹). دمای سیال و دیواره به ترتیب T_w و T_∞ است. ضخامت عمق نفوذ پایا (لایه مرزی) مربوط به دمای وابسته به x و سایر متغیرها را بیابید.



شکل ۲-۵۹

۲-۲۱. یک سیال بدون اصطکاک غیرقابل تراکم با سرعت U_∞ و به طور پایا بر روی یک صفحه نازک نیمه بینهایت با ضخامت δ^* جریان دارد (شکل ۲-۶۰). دمای اولیه سیال و دیواره برابر T_∞ است. ناگهان شار حرارتی یکنواخت q'' به کف صفحه اعمال می شود. نفوذ ناپایای شار حرارتی در سیال را بیابید.



شکل ۲-۶۰

$$q_y = -(k_\xi - k_\eta) \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial T}{\partial x} - (k_\xi \cos^2 \alpha + k_\eta \sin^2 \alpha) \frac{\partial T}{\partial y}.$$

(ب) نشان دهید که معادله هدایت دو بعدی برای مواد غیر ایزوتروپیک همگن بدین صورت است:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = (k_\xi \sin^2 \alpha + k_\eta \cos^2 \alpha) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (k_\xi \cos^2 \alpha + k_\eta \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + (k_\xi - k_\eta) \cos 2\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}.$$

(ت) صورت خاص معادله فوق برای مواد ایزوتروپیک همگن چگونه خواهد بود؟

(ج) چه مقداری برای ضریب هدایت باید حاصل شود اگر صفحه در میان صفحات همدمای یک

دستگاه آزمایش ضریب هدایتی قرار گیرد؟

(چ) نشان دهید تحت شرایط قسمت (ج) داریم:

$$\tan \beta = \frac{q_\eta}{q_\xi} = \frac{k_\eta (\partial T / \partial \eta)}{k_\xi (\partial T / \partial \xi)} = \frac{k_\eta [\sin \alpha (\partial T / \partial y) - \cos \alpha (\partial T / \partial x)]}{k_\xi [\cos \alpha (\partial T / \partial y) + \sin \alpha (\partial T / \partial x)]};$$

همچنین نشان دهید که با $\partial T / \partial x = 0$

$$\tan \beta = \frac{k_\eta}{k_\xi} \tan \alpha,$$

که اشاره به $\beta < \alpha$ دارد و بردار شار حرارتی دیگر بر صفحات همدمای عمود نیست، که اگر مواد ایزوتروپیک بودند، می توانست عمود باشد.

۲-۱۹. یک سیال بدون اصطکاک غیرقابل تراکم در یک لوله به طور پایا با سرعت U جریان دارد (شکل ۲-۵۸). دمای ورودی سیال T_0 است. دماهای اولیه لوله و سیال یکسان و برابر دمای ورودی سیال هستند. ناگهان شار حرارتی یکنواخت q'' به سطح خارجی لوله اعمال می گردد. هدایت محوری ناچیز است.

فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله را فقط با به کارگیری یکی از فرضیات در هر دفعه به دست آورید: (i) بدون هیچ فرضی (ii) ضخامت لوله ناچیز باشد. (iii) ضخامت لوله کم باشد. (iv) سیال به طور شعاعی متمرکز و ضریب انتقال حرارت (الف) بزرگ یا (ب) متوسط است (v) سیال و لوله به طور شعاعی متمرکز هستند.

۱- توجه کنید که یک فرمولاسیون براساس فرض (i) به سختی حل می شود ولی دقیق تر است. فرمولاسیون های براساس مفروضات (ii) و (iii) بدون هیچ اثری و یا فقط با اثر جزئی دیواره لوله مدلهایی برای مسائل جریان سیال هستند. از طرف دیگر در فرمولاسیون هایی که از فرضیات (iv الف) و (v ب) استفاده می شود تغییرات شعاعی در لوله امکان دارد ولی در سیال خیر. برای مسائل تنش حرارتی مناسبند. فرمولاسیون بر پایه فرض (v) که به طور کامل در جهت شعاعی متمرکز شده است، ساده ترین مدلی است که می تواند در محاسبه دمای توده سیال در محل موردنظر مورد استفاده قرار گیرد.

بخش II : راه حل

www.chempedia.ir

فصل سوم

مسائل یک بعدی پایا،

توابع بسل

فرمولاسیون متمرکز و انتگرالی مسائل یک بعدی پایا تنها شامل حل معادلات جبری می‌باشد. ولی فرمولاسیون دیفرانسیلی همان مسائل شامل حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول یا دوم است. همان‌طور که در فصل ۲ اشاره کردیم، فرض می‌کنیم که خواننده روش‌های حل معادلات مرتبه اول یا دوم خطی با ضرایب ثابت را می‌داند. از این‌رو برای مسائل پایای یک بعدی حاصل از چنین معادلاتی، راه حل ارائه خواهیم داد. برای مسائلی که ضریب هدایت حرارتی آن‌ها به دما وابسته است، با استفاده از فرمولاسیون دیفرانسیلی به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم حاصل می‌شود، و برای مسائلی که ضریب هدایت حرارتی آن‌ها به مکان وابسته است، و همچنین برای سلول‌های گسترش‌یافته با مقطع عرضی متغیر، فرمولاسیون دیفرانسیلی یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر را حاصل می‌کند. در بخش‌های ۳-۵ و ۳-۶، روش‌های مناسب برای حل هر دو نوع این معادلات را معرفی می‌کنیم. ابتدا در نظر داریم که یک مساله کلی را که بیان‌کننده تعدادی از مفاهیم مهم است، ارائه دهیم.

۳-۱. یک مساله کلی

یک استوانه تو خالی با دیواره نازک، که ضخامت دیواره آن در تمام مقطع عرضی ثابت است را در نظر بگیرید. این پوسته در شکل ۳-۱ نشان داده شده است. این استوانه یا پوسته شامل سیالی با دمای T_i بوده که دمای اطراف آن نیز T_o یا دمای محیط می‌باشد و $T_i > T_o$ است. ضرایب انتقال حرارت داخلی و خارجی به ترتیب h_i و h_o می‌باشند. می‌خواهیم توزیع دما و میزان انتقال حرارت از این استوانه یا پوسته را به‌دست آوریم.

$$R = \frac{1}{k} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{A(s)} \quad (3-5)$$

که این عبارت مقاومت هدایتی نامیده می‌شود و زیرنویس ۱ و ۲ به ترتیب نشان‌دهنده سطوح داخلی و خارجی است. معادله (۳-۴) تشابه زیادی به قانون اهم برای جریان الکتریکی پایا دارد،

$$i = \frac{E_1 - E_2}{R_e},$$

انتقال حرارت هدایتی q متناظر با جریان الکتریکی i ، تفاضل دمای $T_1 - T_2$ متناظر با تفاضل پتانسیل $E_1 - E_2$ و مقاومت هدایتی R متناظر با مقاومت الکتریکی R_e می‌باشد. (شکل ۳-۱ دیفرانسیلی قانون اهم چگونه است؟)

از آنجایی که دماهای محیط بسیار راحت‌تر از دماهای سطوح اندازه‌گیری می‌شود، متداول است که q برحسب دمای محیط بیان شود. با استفاده از آخرین مرحله فرمولاسیون داریم:

$$q = \frac{T_i - T_1}{1/h_i A(s_1)} = \frac{T_i - T_1}{R_i}, \quad (3-6)$$

که در آن

$$R_i = \frac{1}{h_i A(s_1)} \quad (3-7)$$

R_i مقاومت جابه‌جایی بین سیال داخل و سطح داخلی دیواره است؛ به‌طور مشابه داریم:

$$q = \frac{T_2 - T_o}{1/h_o A(s_2)} = \frac{T_2 - T_o}{R_o}, \quad (3-8)$$

که در آن

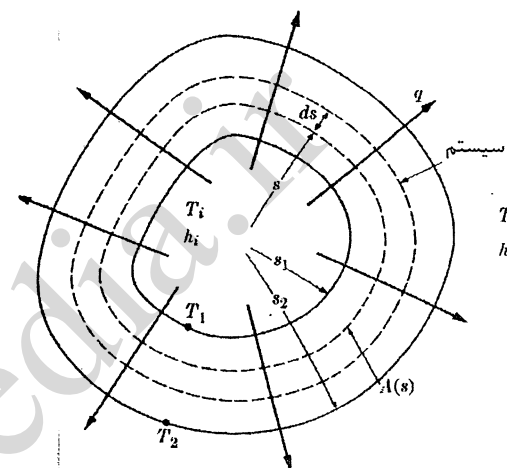
$$R_o = \frac{1}{h_o A(s_2)} \quad (3-9)$$

R_o مقاومت جابه‌جایی خارجی است. با حل معادلات (۳-۴)، (۳-۶) و (۳-۸) برای اختلاف دمای متناظرشان، سپس، به کار بردن نتیجه به‌صورت نظیر به نظیر باعث حذف T_1 و T_2 شده و خواهیم داشت:

$$q = \frac{T_i - T_o}{R_i + R + R_o}. \quad (3-10)$$

نتیجه مشابه‌ای را می‌توان با در نظر گرفتن تشابه بین نفوذ حرارتی و جریان الکتریکی به راحتی به‌دست آورد. بنابراین مساله مشابه تعیین جریان الکتریکی از سه مقاومت بهم پیوسته سری خواهد بود. (شکل ۳-۲)

بعضی مواقع متداول است که برای سهولت، معادله (۳-۱۰) را برحسب ضریب کلی انتقال حرارت U نوشت، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



شکل ۳-۱

روش حلی که در اینجا استفاده شده است یک روش متداول برای مسائل یک بعدی است که در آن q در هر مقطع عرضی ثابت است. دو مرحله اول فرمولاسیون (بخش ۹-۲ را ببینید) چنین نتیجه می‌دهد:

$$d[q_s A(s)] = 0, \quad (3-1)$$

و داریم:

$$q = q_s A(s) = \text{ثابت}, \quad (3-2)$$

که در آن s نشان‌دهنده متغیر مکان و $A(s)$ متناظر با سطح انتقال حرارت است. مرحله سوم فرمولاسیون به صورت زیر است:

$$q_s = -k \frac{dT}{ds}. \quad (3-3)$$

مرحله چهارم شامل جایگزینی معادله (۳-۳) درون معادله (۳-۲) می‌باشد. با بازآرایی و انتگرال‌گیری بین سطوح داخلی و خارجی با فرض این که k ثابت است، خواهیم داشت:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{(1/k) \int_{s_1}^{s_2} ds/A(s)} = \frac{T_1 - T_2}{R}, \quad (3-4)$$

که در آن:

انتقال حرارت هدایتی

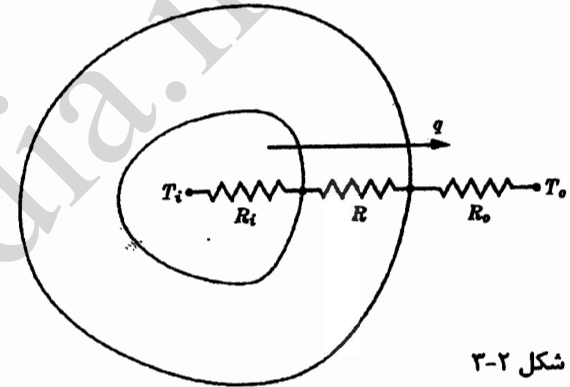
$$q = UA(T_i - T_o),$$

(۳-۱۱)

و

$$\frac{1}{UA} = R_i + R + R_o.$$

(۳-۱۲)



شکل ۳-۲

از آنجایی که U به A وابسته است، باید برای تعیین U یک سطح را انتخاب کنیم:

$$UA = U_i A(s_1) = U_o A(s_2),$$

که در آن U_i و U_o به ترتیب نشان دهنده ضرایب کلی انتقال حرارت برحسب سطوح داخلی و خارجی می باشد، به عنوان مثال ضریب U_o را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{1}{U_o} = \frac{A(s_2)/A(s_1)}{h_i} + \frac{A(s_2)}{k} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{A(s)} + \frac{1}{h_o}. \quad (3-13)$$

برای تعیین توزیع دمای مساله، معادله (۳-۴) را دوباره در نظر گرفته و از مکان اختیاری s تا سطح خارجی^۱ انتگرال می گیریم:

$$q = \frac{T - T_2}{(1/k) \int_s^{s_2} ds/A(s)}, \quad (3-14)$$

که در آن T دمای مکان s است. حذف T_2 بین معادلات (۳-۸) و (۳-۱۴) نتیجه زیر را حاصل می کند:

$$q = \frac{T - T_o}{(1/k) \int_s^{s_2} ds/A(s) + 1/h_o A(s)}. \quad (3-15)$$

۱- تعریف دیگری برای توزیع دمایی، از طریق انتگرال گیری از سطح داخلی تا مکان دلخواه s حاصل می شود.

مسائل یک بعدی پایا، توابع پسل

در آخر، با قرار دادن معادله (۳-۱۱) در معادله (۳-۱۳) و بازاریابی آن نتیجه ای برحسب U_o حاصل می شود و توزیع دما به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{T - T_o}{T_i - T_o} = U_o \left[\frac{A(s_2)}{k} \int_s^{s_2} \frac{ds}{A(s)} + \frac{1}{h_o} \right]. \quad (3-16)$$

با استفاده از روش دیگر، یعنی فرمولاسیون متداول مساله، ابتدا توزیع دما و سپس میزان انتقال حرارت به دست می آید. بنابراین با استفاده از چهار مرحله اول فرمولاسیون، معادله حاکم حاصل می شود:

$$\frac{d}{ds} \left[A(s) \frac{dT}{ds} \right] = 0, \quad (3-17)$$

برای حل معادله (۳-۱۷) آخرین مرحله فرمولاسیون حاصل می شوند:

$$+k \frac{dT(s_1)}{ds} = h_i [T(s_1) - T_i], \quad (3-18)$$

$$-k \frac{dT(s_2)}{ds} = h_o [T(s_2) - T_o],$$

با حل معادله (۳-۱۷) خواهیم داشت:

$$T = C \int^s \frac{ds}{A(s)} + D, \quad (3-19)$$

با جایگذاری معادله (۳-۱۹) در معادله (۳-۱۸) داریم:

$$+ \frac{kC}{A(s_1)} = h_i \left[C \int^{s_1} \frac{ds}{A(s)} + D - T_i \right], \quad (3-20)$$

$$- \frac{kC}{A(s_2)} = h_o \left[C \int^{s_2} \frac{ds}{A(s)} + D - T_o \right].$$

با قرار دادن مقادیر C و D حاصل از معادله (۳-۲۰)، در معادله (۳-۱۹) همان توزیع دمای قبلی یعنی معادله (۳-۱۶) حاصل می شود. حال می توانیم انتقال حرارت را با وارد کردن معادله (۳-۱۶) در ترکیبی از معادلات (۳-۲) و (۳-۳) به دست آوریم، که با این کار همان نتیجه قبلی یعنی معادله (۳-۱۰) حاصل می شود.

برای راحتی کار، روند مساله پیش رو را در سه حالت مهم در نظر می گیریم: مختصات کارتزین، استوانه ای، و کروی. ضرایب انتقال حرارت کلی براساس مساحت سطح خارجی و توزیع دمای این مختصات ها به صورت زیر است:

$$\frac{1}{U_o} = \frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_o}, \quad \text{کارتزین} \quad (3-21)$$

$$\frac{1}{U_o} = \frac{(R_2/R_1)}{h_i} + \frac{R_2}{k} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{h_o}, \quad \text{استوانه ای} \quad (3-22)$$

شکل‌های کارتیزین، استوانه‌ای و کروی معادلات (۳-۲۸) و (۳-۳۰) به صورت زیر فهرست شده

است:

$$\frac{1}{U_o} = \frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \sum_{n=1}^N \frac{L_n}{k_n} + \frac{1}{h_o}, \quad (3-31)$$

کارتیزین

$$\frac{1}{U_o} = \frac{(R_{N+1}/R_1)}{h_i} + R_{N+1} \sum_{n=1}^N \frac{1}{k_n} \ln \left(\frac{R_{n+1}}{R_n} \right) + \frac{1}{h_o}, \quad (3-32)$$

استوانه‌ای

$$\frac{1}{U_o} = \frac{(R_{N+1}/R_1)^2}{h_i} + R_{N+1}^2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{k_n} \left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n+1}} \right) + \frac{1}{h_o}, \quad (3-33)$$

کروی

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o} = U_o \left[\frac{x_{n+1}-x}{k_n} + \sum_{m=n+1}^N \frac{x_{m+1}-x_m}{k_m} + \frac{1}{h_o} \right], \quad (3-34)$$

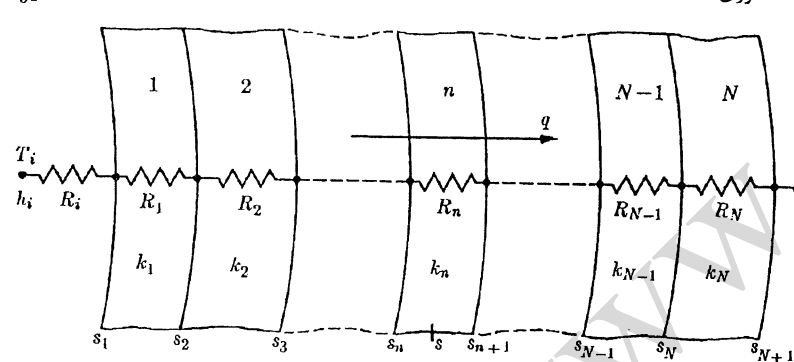
کارتیزین

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o} = U_o \left[\frac{R_{N+1}}{k_n} \ln \left(\frac{R_{n+1}}{r} \right) + R_{N+1} \sum_{m=n+1}^N \frac{1}{k_m} \ln \left(\frac{R_{m+1}}{R_m} \right) + \frac{1}{h_o} \right], \quad (3-35)$$

استوانه‌ای

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o} = U_o \left[\frac{R_{N+1}}{k_n} \left(\frac{R_{n+1}}{r} - \frac{R_{N+1}}{R_{n+1}} \right) + R_{N+1}^2 \sum_{m=n+1}^N \frac{1}{k_m} \left(\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_{m+1}} \right) + \frac{1}{h_o} \right], \quad (3-36)$$

کروی



شکل ۳-۳

در عمل، ترکیب ساختارهای سری- موازی نیز مهم است، به خصوص در مختصات کارتیزین، به عنوان مثال، یک دیواره متشکل از آجرهای سرامیکی، مثل آنهایی که در ساخت خانه به کار می‌روند، را در نظر بگیرید (شکل ۳-۴). در واقع، انتقال حرارت از درون این گونه دیواره‌ها یک بعدی نیست. اگر چه، تحلیل‌های یک بعدی نتایج رضایت بخشی را برای مسائل عملی حاصل می‌کنند.

$$\frac{1}{U_o} = \frac{(R_2/R_1)^2}{h_i} + \frac{R_2}{k} \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) + \frac{1}{h_o}, \quad (3-23) \quad \text{کروی}$$

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o} = U_o \left(\frac{x_2-x}{L} + \frac{1}{h_o} \right), \quad (3-24) \quad \text{کارتیزین}$$

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o} = U_o \left[\frac{R_2}{k} \ln \left(\frac{R_2}{r} \right) + \frac{1}{h_o} \right], \quad (3-25) \quad \text{استوانه‌ای}$$

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o} = U_o \left[\frac{R_2}{k} \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right) + \frac{1}{h_o} \right], \quad (3-26) \quad \text{کروی}$$

۳-۲. ساختارهای ترکیبی

فرض کنید که استوانه توخالی یا استوانه دیواره نازک، یعنی پوسته شکل ۳-۱ متشکل از N لایه مواد مختلف با ضخامت‌ها و هدایت حرارتی مختلف باشند (شکل ۳-۳). مقاومت تماسی بین لایه‌ها قابل صرف نظر است. می‌خواهیم انتقال حرارت از سیال داخلی به محیط اطراف، و توزیع دمای این ساختار را به دست آوریم.

با برقراری تشابه بین نفوذ حرارت و جریان الکتریکی در مورد ذکر شده، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{UA} = R_i + \sum_{n=1}^N R_n + R_o. \quad (3-27)$$

شکل صریح U براساس سطح خارجی به صورت زیر است:

$$\frac{1}{U_o} = \frac{A(S_{N+1})/A(s_1)}{h_i} + A(S_{N+1}) \sum_{n=1}^N \frac{1}{k_n} \int_{s_n}^{s_{n+1}} \frac{ds}{A(s)} + \frac{1}{h_o}. \quad (3-28)$$

با قرار دادن $N = 1$ معادله (۳-۲۸) به معادله (۳-۱۳) تبدیل می‌شود.

برای به دست آوردن توزیع دما در ساختار، ما ابتدا q را بر حسب اختلاف دمای $T - T_o$ و مقاومت‌های متناظر $(R_N, \dots, R_{n+2}, R_{n+1}, R_n)$ بیان می‌کنیم. در نتیجه داریم:

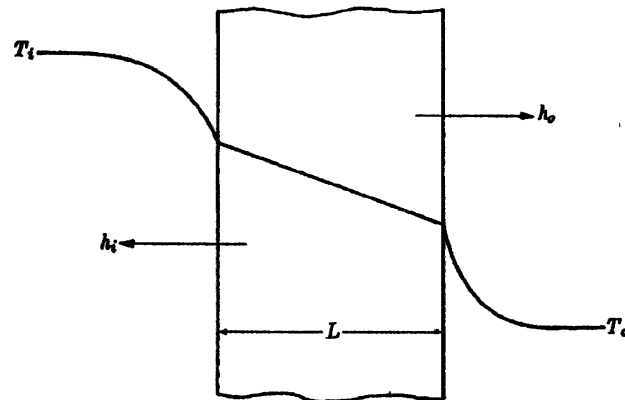
$$q = \frac{T-T_o}{(1/k_n) \int_{s_n}^{s_{n+1}} ds/A(s) + \sum_{m=n+1}^N (1/k_m) \int_{s_m}^{s_{m+1}} ds/A(s) + 1/h_o A(s_{N+1})}, \quad (3-29)$$

که در این فرمول T نشان دهنده دمای مکان s در (شکل ۳-۳) می‌باشد. سپس با حذف q بین معادلات (۳-۱۱) و (۳-۲۹) توزیع دمای مطلوب بر حسب U_o به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{T-T_o}{T_i-T_o} = U_o \left[\frac{A(s_{N+1})}{k_n} \int_{s_n}^{s_{n+1}} \frac{ds}{A(s)} + A(s_{N+1}) \sum_{m=n+1}^N \frac{1}{k_m} \int_{s_m}^{s_{m+1}} \frac{ds}{A(s)} + \frac{1}{h_o} \right]. \quad (3-30)$$

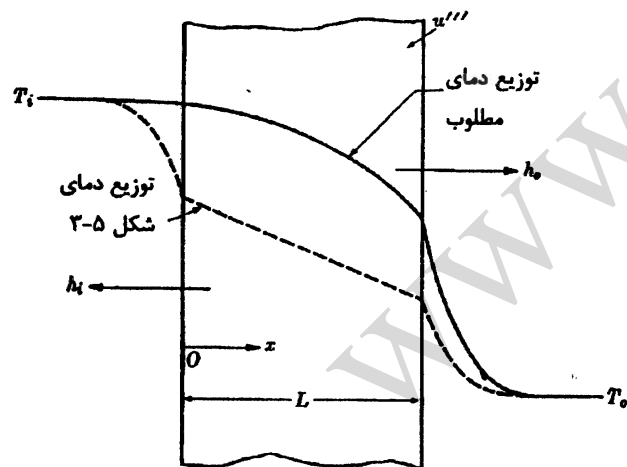
معادله (۳-۳۰) با قرار دادن $N = 1$ به معادله (۳-۱۶) تبدیل می‌شود.

مثال ۳-۱. یک صفحه با ضخامت L دو محیط با دمای T_o و T_i را از هم جدا می کند. ضرایب انتقال حرارت h_o و h_i می باشد (شکل ۳-۵). می خواهیم اتلاف حرارتی از دیواره را در سمتی که برای دمای بیشتری است، حذف نماییم.

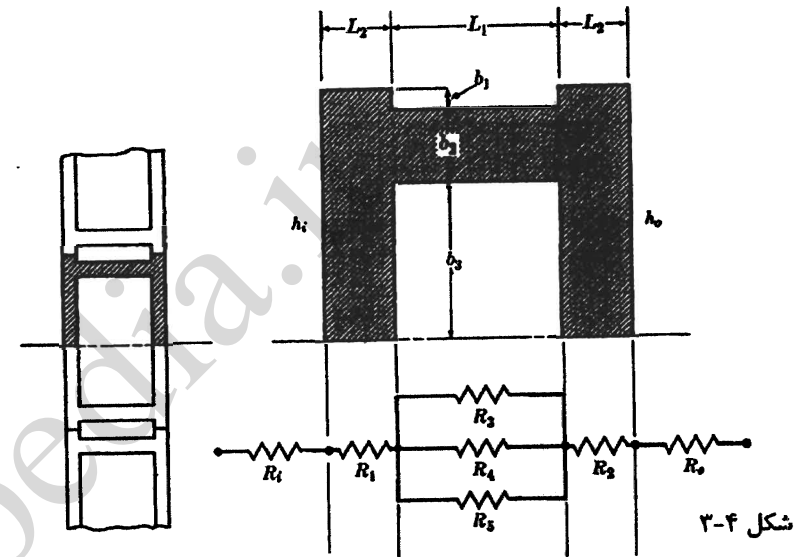


شکل ۳-۵

در بخش ۳-۲ آموختیم که مقاومت کلی بین دو محیط با افزایش عایق به یک یا هر دو سمت دیواره، افزایش می یابد. بدون توجه به ضخامت و جنس عایق، اتلاف حرارتی از دیواره در سمتی که برای دمای بیشتری است را نمی توان با استفاده از چنین عایقی، به طور کامل حذف نمود.



شکل ۳-۶



شکل ۳-۴

دیواره با استفاده از تشابه الکتریکی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{UA} = R_i + R_1 + \frac{1}{1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5} + R_2 + R_o.$$

بنابراین به ازای واحد عرض دیواره عمود بر سطح مقطع نشان داده شده در شکل ۳-۴ خواهیم داشت،

$$\frac{1}{h_i(b_1+b_2+b_3)} + \frac{L_2}{k_2(b_1+b_2+b_3)} + \frac{1}{\frac{1}{k_1 b_1/L_1 + k_2 b_2/L_1 + k_1 b_3/L_1}} + \frac{L_2}{k_2(b_1+b_2+b_3)} + \frac{1}{h_o(b_1+b_2+b_3)}.$$

و از این رو به ازای واحد سطح دیواره داریم:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_1}{\epsilon_1 k_1 + \epsilon_2 k_2} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{1}{h_o},$$

که در آن:

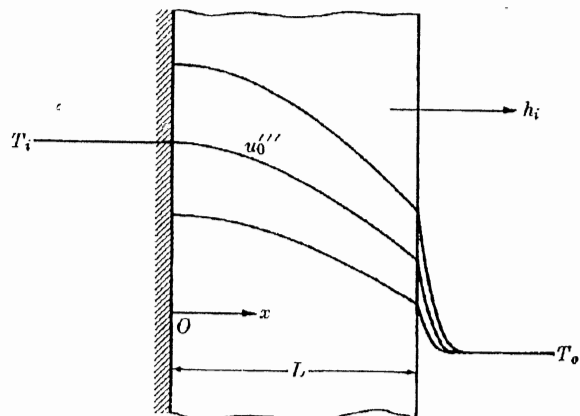
$$\epsilon_1 = (b_1 + b_3)/(b_1 + b_2 + b_3) \quad , \quad \epsilon_2 = (b_2)/(b_1 + b_2 + b_3)$$

۳-۳. مثال ها

در این بخش تعدادی از واقعیت های فیزیکی و ریاضی در قالب مثال های انتخابی در مختصات کارتزین، استوانه ای و کروی بررسی خواهند شد.

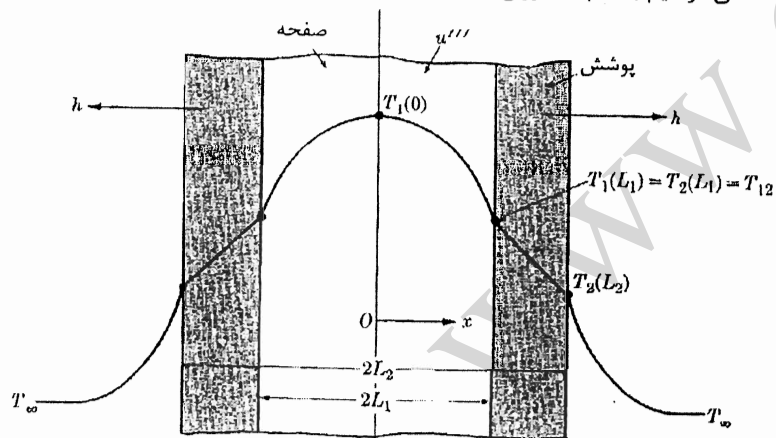
$$\frac{u_0''' L^2}{2k} = \frac{T_i - T_o}{1 + 2(k/h_o L)}$$

این مساله را با در نظر گرفتن معادله (۳-۳۹) یا (۳-۴۰) به عنوان آخرین شرط مرزی، دوباره حل نمایید.



شکل ۳-۷

مثال ۳-۲. المنت سوختی یک راکتور حوضچه‌ای^۱ از صفحات صاف با ضخامت $2L_1$ و پوششی با ضخامت $(L_2 - L_1)$ تشکیل شده است (شکل ۳-۸). فرض می‌شود که انرژی داخلی یکنواخت u''' (هسته‌ای) تنها درون صفحات تولید شود. ضریب انتقال حرارت h است، دمای محیط اطراف T_∞ است. می‌خواهیم بدانیم که توزیع دمای المنت سوختی چگونه است.



شکل ۳-۸

به عبارت دیگر، مقدار مناسبی از انرژی داخلی یکنواخت u''' به صورت الکتریکی درون صفحه^۱ تولید می‌شود تا اتلاف حرارتی را به صفر برساند (شکل ۳-۶). بنابراین هدف مساله پیدا کردن مقدار u''' است.

فرمولاسیون مساله در جهت x نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \quad (3-37)$$

$$T(0) = T_i, \quad (3-38)$$

$$\frac{dT(0)}{dx} = 0, \quad (3-39)$$

$$-k \frac{dT(L)}{dx} = h_o [T(L) - T_o] \quad (3-40)$$

اچرا به جای ۲ شرط مرزی از ۳ شرط مرزی استفاده نمودیم؟ چه پارامترهای غیرمشخصی باید تعیین شوند؟ فیزیک مساله را با معادلات (۳-۳۷)، (۳-۳۸)، (۳-۳۹) و به وسیله معادلات (۳-۳۷)، (۳-۳۹)، (۳-۴۰) توصیف می‌کنیم.

جواب معادله (۳-۳۷) به صورت زیر است،

$$T = -\frac{u''' x^2}{2k} + Ax + B, \quad (3-41)$$

با قرار دادن جواب معادله (۳-۳۷) درون معادلات (۳-۳۹) و (۳-۴۰) داریم:

$$0 = A, \quad u''' L = h_o (-u''' L^2 / 2k + B - T_o).$$

بنابراین، با قرار دادن مقادیر A و B درون معادله (۳-۴۱)، توزیع دمای متناظر با مقدار اختیاری u''' به صورت زیر است:

$$\frac{T - T_o}{u''' L^2 / 2k} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \left(\frac{k}{h_o L}\right). \quad (3-42)$$

نموداری از معادله (۳-۴۲) در شکل ۳-۷ برای مقادیر مختلف u''' داده شده است. اگر چه از این پروفایل‌های دمایی، تنها یک پروفایل در شرایط مرزی معادله (۳-۳۸) صدق می‌کند، و مقدار آن u_0''' می‌باشد. بنابراین با ترکیب معادلات (۳-۳۸) و (۳-۴۲) خواهیم داشت:

۱- اگر صفحه یک هدایت کننده الکتریکی نباشد یا اگر جریان الکتریکی از درون صفحه مطلوب نباشد، صفحه دیگری که توسط جریان الکتریکی گرم شده است (گرمکن پشتیبان) را می‌توان به صفحه اصلی تماس داد. مساله مربوط به شکل ۱۶-۲ را نیز ببینید.

می‌خواهیم دما را فقط در بعضی از مکان‌های به‌خصوص المنت سوختی تعیین کنیم، می‌گوییم $T_1(0) = T_2(L_1) = T_{12}$ و $T_1(L_1) = T_2(L_2)$ به جای روند ذکر شده می‌توانیم از قیاس الکتریکی استفاده کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$T_2(L_2) - T_{\infty} = \frac{1}{h} (u''' L_1),$$

$$T_{12} - T_{\infty} = \left(\frac{1}{h} + \frac{L_2 - L_1}{k} \right) (u''' L_1),$$

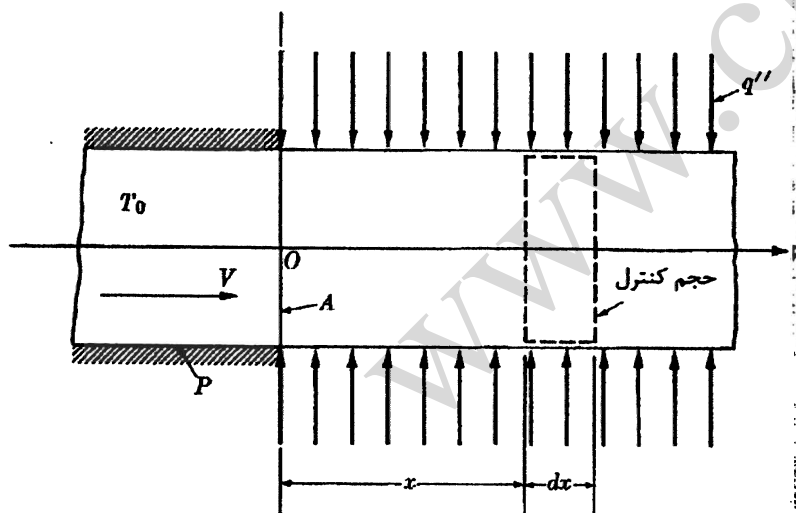
که در آن $(u''' L_1)$ ، شار حرارتی از درون هر سطح از المنت سوختی است. علاوه بر آن با استفاده از معادله (۳-۲۷) داریم:

$$T_1(0) - T_{12} = - \left(\frac{u''' L_1^2}{2k_1} \right),$$

خواهیم داشت:

$$T_1(0) - T_{\infty} = \left(\frac{L_1}{2k_1} + \frac{1}{h} + \frac{L_2 - L_1}{k_2} \right) (u''' L_1).$$

مثال ۳-۳. یک مایع غیرگرانو با ویژگی‌های ثابت که دارای دمای جریان بالادستی T_0 و سرعت V بوده و به‌صورت پایا از درون یک لوله با طول نامحدود و با مقطع عرضی A و محیط P عبور می‌کند. ضخامت دیواره لوله قابل صرف‌نظر است. نیمه جریان پایین‌دستی لوله در معرض شار حرارتی ثابت q'' قرار می‌گیرد و نیمه جریان بالادستی عایق است (شکل ۳-۹). می‌خواهیم توزیع دمای محوری مایع را براساس تحلیل متمرکز شعاعی به‌دست آوریم.



شکل ۳-۹

این مثالی از یک مساله چند منطقه‌ای است. فرمولاسیون چنین مساله‌ای بیش از یک معادله حاکم را در بر می‌گیرد. به‌دلیل تقارن هندسی و حرارتی، x از وسط صفحه المنت سوخت اندازه‌گیری می‌شود. شایان ذکر است که ویژگی‌های صفحه و پوشش به ترتیب با زیرنویس‌های ۱ و ۲ نشان داده می‌شود و داریم:

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} + \frac{u'''}{k_1} = 0, \quad 0 \leq x \leq L_1, \quad (3-43)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dx^2} = 0, \quad L_1 \leq x \leq L_2, \quad (3-44)$$

$$\frac{dT_1(0)}{dx} = 0, \quad T_1(L_1) = T_2(L_2) = T_{12}, \quad k_1 \frac{dT_1(L_1)}{dx} = k_2 \frac{dT_2(L_1)}{dx}, \quad (3-45)$$

$$-k_2 \frac{dT_2(L_2)}{dx} = h[T_2(L_2) - T_{\infty}].$$

جواب معادله (۳-۴۳) به‌صورت زیر است:

$$T_1 = -\frac{u''' x^2}{2k_1} + Ax + B, \quad (3-46)$$

و جواب معادله (۳-۴۴) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$T_2 = Cx + D, \quad (3-47)$$

با قرار دادن معادلات (۳-۴۶) و (۳-۴۷) درون شرایط مرزی، یعنی معادله (۳-۴۳)، چهار معادله جبری همزمان زیر، حاصل می‌شوند.

$$A = 0, \quad -u''' L_1^2 / 2k_1 + B = CL_1 + D,$$

$$-u''' L_1 = k_2 C, \quad -k_2 C = h(CL_2 + D - T_{\infty}).$$

با حل این معادلات برحسب عبارات A, B, C, D و سپس قرار دادن نتیجه درون معادله (۳-۴۶) و (۳-۴۷)، توزیع دمای المنت سوختی برای $0 \leq x \leq L_1$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{T_1 - T_{\infty}}{u''' L_1^2 / 2k_1} = 1 - \left(\frac{x}{L_1} \right)^2 - 2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right) - 2 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \left(1 + \frac{k_2}{hL_2} \right) \quad (3-48)$$

و برای $L_1 \leq x \leq L_2$ داریم:

$$\frac{T_2 - T_{\infty}}{u''' L_1^2 / k_2} = - \left(\frac{x}{L_1} \right) + \left(\frac{L_2}{L_1} \right) \left(1 + \frac{k_2}{hL_2} \right) \quad (3-49)$$

با قرار دادن معادله (۳-۵۴) درون معادله (۳-۵۳) و قرار دادن نتیجه آن در معادله (۳-۵۲) برای انرژی حرارتی خواهیم داشت:

$$-A \frac{dq_x}{dx} - \rho c A V \frac{dT}{dx} + q'' P = 0. \quad (3-55)$$

سرانجام، معادله (۳-۵۵)، به وسیله قانون فوریه در جهت x به صورت زیر بازآرایی می شود:

$$q_x = -k \frac{dT}{dx}$$

و معادله حاکم بخش غیرعایق به صورت زیر خواهد

بود:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{\rho c V}{k} \frac{dT}{dx} + \frac{q'' P}{k A} = 0. \quad (3-56)$$

[معادله (۳-۵۶) را با فرض این که لوله در شکل ۳-۹ عمودی باشد برای یک گاز ایده آل دوباره فرموله کنید.] با قرار دادن $q'' = 0$ در معادله (۳-۵۶)، معادله حاکم بخش عایق حاصل می شود.

با انتخاب T_1 و T_2 به ترتیب برای دمای بخش عایق و بخش غیرعایق، فرمولاسیون مساله را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - \frac{\rho c V}{k} \frac{dT_1}{dx} = 0, \quad -\infty < x \leq 0, \quad (3-57)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dx^2} - \frac{\rho c V}{k} \frac{dT_2}{dx} + \frac{q'' P}{k A} = 0, \quad 0 < x \leq +\infty,$$

شرایط مرزی به صورت زیر خواهد بود:

$$T_1(-\infty) = T_0, \quad T_1(0) = T_2(0), \quad \frac{dT_1(0)}{dx} = \frac{dT_2(0)}{dx}, \quad T_2(\infty) \sim x, \quad (3-58)$$

که شرط مرزی آخر نشان دهنده توزیع دمای خطی درون مایع برای مقادیر زیاد x است. (اگر این نکته برای خواننده واضح نیست، باید خواننده ابتدا راه حل کلی بخش غیرعایق را در نظر گرفته و سپس از خود بپرسد که آیا افزایش دما به صورت نمایی برای مقدار ثابت q'' امکان پذیر می باشد.)

با حل معادله (۳-۵۷) و استفاده از شرایط مرزی (۳-۵۸) توزیع دمای مایع حاصل خواهد شد:

$$\frac{T_1(x) - T_0}{q'' / \rho c V} = \left(\frac{a}{V \lambda} \right) e^{(V \lambda / a)(x / \lambda)}, \quad -\infty < x \leq 0, \quad (3-59)$$

$$\frac{T_2(x) - T_0}{q'' / \rho c V} = \left(\frac{a}{V \lambda} \right) \left[1 + \left(\frac{V \lambda}{a} \right) \frac{x}{\lambda} \right], \quad 0 \leq x < +\infty,$$

این مساله با جزییات بررسی خواهد شد زیرا دارای کاربرد قابل ملاحظه ای در تکنولوژی راکتور و محاسبه ضریب انتقال حرارت در لوله هاست. اما ابتدا یک واقعیت مهم را که در عبارات مساله واضح نیست، مشخص می نماییم. از آنجایی که شار حرارتی q'' از طریق هدایت و به صورت محوری (در راستای x) انتقال می یابد لذا باعث افزایش دما در بخش عایق خواهد شد. از آنجایی که جریان آنتالپی محوری در جهت مخالف هدایت قرار دارد اثر معکوس بر افزایش دما خواهد داشت. بنابراین توزیع دما درون لوله به اهمیت نسبی هدایت محوری و جریان آنتالپی محوری بستگی دارد. اگر چه در این مساله سیال دارای یک منطقه است اما تغییر شرط مرزی از عایق به شار حرارتی ثابت ما را مجاب می کند که از نظر ریاضی مساله را دو منطقه ای قلمداد کنیم. فرمولاسیون بخش عایق را می توان به راحتی با قرار دادن $q'' = 0$ در فرمولاسیون بخش دیگر به دست آورد، بنابراین، جزییات فرمولاسیون فقط برای بخش دریافت کننده شار حرارتی q'' انجام می شود.

حجم کنترل نشان داده شده در شکل ۳-۹ که به صورت شعاعی متمرکز و به صورت محوری دیفرانسیلی است را در نظر می گیریم و قوانین کلی را برای این حجم کنترل مورد استفاده قرار می دهیم.

قانون بقاء جرم:

$$\rho A V = \text{cte} \quad (3-50)$$

ثابت $V =$

مومنتم (انرژی مکانیکی یا معادله برنولی):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = 0. \quad (3-51)$$

قانون اول ترمودینامیک (انرژی کل)، بر حسب شکل ۳-۱۰:

$$-A \frac{dq_x}{dx} - \rho A V \frac{dh_0}{dx} + q'' P = 0. \quad (3-52)$$

با استفاده از تعریف h_0 و معادلات (۳-۵۰) و (۳-۵۱) داریم:

$$dh_0/dx = du/dx. \quad (3-53)$$

با صرف نظر از $c_p - c_v$ برای مایعات، بر حسب گرمای ویژه متداول c داریم:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - a \frac{dT}{dx} + b = 0 \quad (3-54)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - a \frac{dT}{dx} = -$$

$$m^2 - a m = 0 \rightarrow m \in \{0, a\}$$

$$T = A + B e^{ax}$$

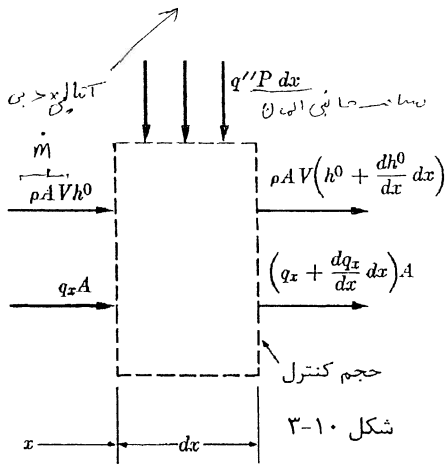
$$\frac{d^2 T}{dx^2} - a \frac{dT}{dx} + b = 0$$

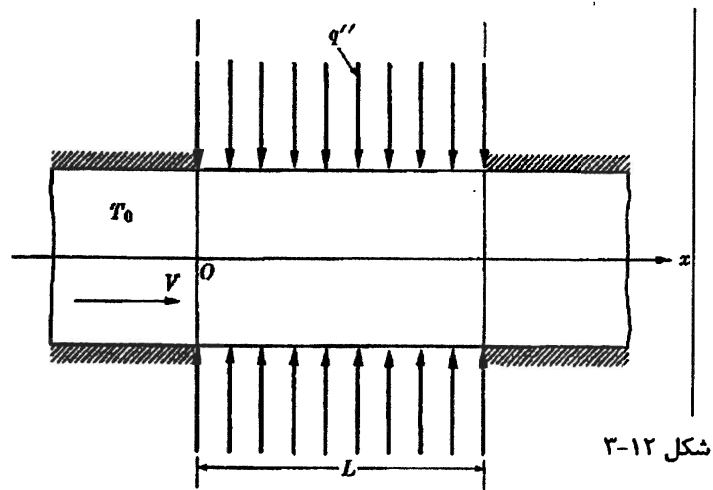
$$m = \int_a^0$$

$$T = A + B e^{ax} + Cx$$

در تدریس اول،
در تدریس دوم،
گزینه

زمانی که دمای سیال را در ابتدا به هم برقرار است
۱۴۳





شکل ۳-۱۲

رابط مرزی به صورت زیر خواهند بود:

$$T_1(-\infty) = T_0, \quad (3-61)$$

$$T_1(0) = T_2(0), \quad \frac{dT_1(0)}{dx} = \frac{dT_2(0)}{dx},$$

$$T_2(L) = T_3(L), \quad \frac{dT_2(L)}{dx} = \frac{dT_3(L)}{dx},$$

$$T_3(+\infty) = \text{محدود}$$

مفهوم آخرین شرط مرزی را می‌توان به وضوح با در نظر گرفتن حل کلی منطقه سوم مساله درک نمود.

با حل معادله (۳-۶۰) و قرار دادن شرایط مرزی (۳-۶۱) درون آن توزیع دمای مایع به صورت زیر خواهد بود:

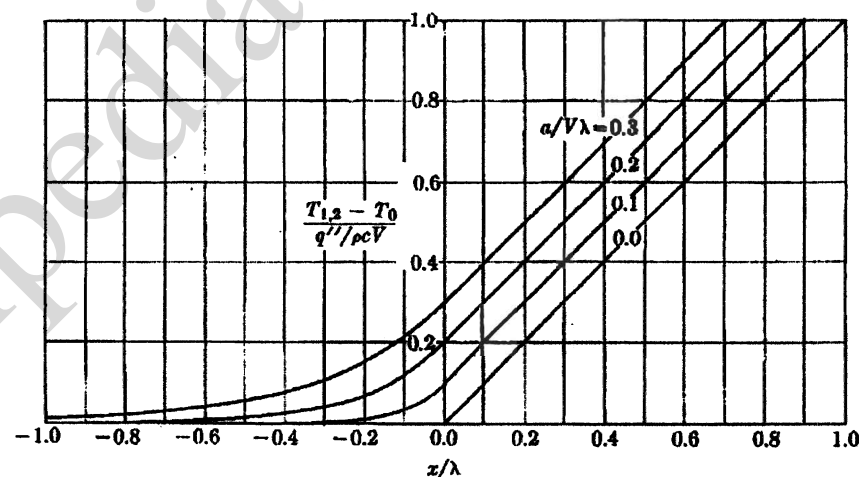
$$\frac{T_1(x) - T_0}{(q''/\rho c V)(L/\lambda)} = \left(\frac{a}{V\lambda}\right) (1 - e^{-VL/a}) e^{(VL/a)(x/L)}, \quad -\infty < x \leq 0, \quad (3-62)$$

$$\frac{T_2(x) - T_0}{(q''/\rho c V)(L/\lambda)} = \frac{x}{L} + \left(\frac{a}{V\lambda}\right) [1 - e^{-(VL/a)(1-x/L)}], \quad 0 \leq x < L,$$

$$\frac{T_3(x) - T_0}{(q''/\rho c V)(L/\lambda)} = 1, \quad L < x \leq +\infty,$$

در آن $\lambda = A/P$ مثل مساله ۳-۲ است. اوقتی که $k \rightarrow 0$ یا $L \rightarrow \infty$ شکل خاص معادله (۳-۶۲) چگونه خواهد بود؟ در شکل ۳-۱۳ دمای مایع یعنی معادله (۳-۶۲) برحسب x/L برای مقادیر مختلف a/VL رسم شده است.

که در آن $a = k/Pc$ و $\lambda = A/P$ عدد بدون بعد $a/V\lambda = k/PcV\lambda$ بیان کننده نسبت بین هدایت محوری و جریان آنتالپی محوری است. معکوس این عدد ضریب پکلت^۱ نامیده می‌شود. [شکل خاص معادله (۳-۵۹) وقتی که $k \rightarrow 0$ چیست؟] در شکل ۳-۱۱ اثر هدایت محوری برای مقادیر مختلف $a/V\lambda$ نشان داده شده است. از آنجایی که در $x = 0$ دما به صورت معکوس با ضریب پکلت متناسب است، وقتی $Pe \geq 100$ ، توزیع دما در بخش عایق و اثر هدایت محوری درون لوله قابل صرف نظر خواهد بود.^۲



شکل ۳-۱۱

مثال ۳-۴. فرض می‌کنیم به جای نصف لوله مثال ۳-۳، بخشی از آن به طول L در معرض شار حرارتی q'' ثابت قرار گیرد (شکل ۳-۱۲). دوباره می‌خواهیم توزیع دمای محوری و متمرکز را برای مایع بیابیم.

مساله، یک مساله سه منطقه‌ای است. با قرار دادن زیر نویس ۳ برای دمای منطقه جریان پایین دست عایق، همانند مثال ۳-۳، معادلات حاکم به صورت زیر خواهند بود:

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - \frac{\rho c V}{k} \frac{dT_1}{dx} = 0, \quad -\infty < x \leq 0, \quad (3-60)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dx^2} - \frac{\rho c V}{k} \frac{dT_2}{dx} + \frac{q'' P}{k A} = 0, \quad 0 < x \leq L,$$

$$\frac{d^2 T_3}{dx^2} - \frac{\rho c V}{k} \frac{dT_3}{dx} = 0, \quad L < x \leq +\infty,$$

۱- Peclet Modulus

۲- اثر هدایت محوری با جزئیات بیشتر برای مسائل دو بعدی بعداً توضیح داده خواهد شد. مثال (۴-۷) را ببینید.

به دلیل مقدار نسبی مقاومت موجود می توان از مقاومت جابه جایی داخلی و مقاومت هدایتی لوله، صرف نظر کرد. از این رو فرض می شود که سطح داخلی عایق به طور تقریبی دارای دمای T_i باشد. با بازآرایی مناسب معادله (۳-۳۲)، ضریب انتقال حرارت کلی براساس سطح خارجی عایق به صورت زیر حاصل می شود:

$$\frac{1}{U_o} = \frac{1}{h_o A_o} + \frac{\ln \frac{R_o}{R_i}}{2\pi k L} + \frac{1}{h_i A_i}$$

علاوه بر آن، از آنجایی که $A_o = 2\pi R_o L$ است، اتلاف حرارتی سیال داخلی به ازای طول L از لوله، $q = U_o A_o (T_i - T_o)$ خواهد بود و داریم:

$$\frac{q}{2\pi k L (T_i - T_o)} = \frac{1}{\ln(R_o/R) + (k/hR)/(R_o/R)} \rightarrow \text{مطابق با } \frac{R_o}{k} \gg \frac{1}{h} \quad (3-63)$$

با بررسی معادله (۳-۶۳) این نتیجه مهم حاصل می شود که وقتی ضخامت عایق تغییر کند، عبارات اول و دوم در مخرج سمت راست معادله (۳-۶۳) به طور معکوس تغییر خواهد کرد. این نتیجه امکان وجود اکسترمم برای اتلاف حرارتی از سیال داخلی را نشان می دهد. ممکن است وجود چنین اکسترممی با برابر صفر قرار دادن مشتق اول معادله (۳-۶۳) و با توجه به R_o/R به سادگی نشان داده شود. نتیجه به صورت زیر است:

$$\frac{dq}{d(R_o/R)} = -2\pi k L (T_i - T_o) \frac{[1/(R_o/R) + (k/hR)/(R_o/R)^2]}{[\ln(R_o/R) + (k/hR)/(R_o/R)]^2} = 0 \quad (3-64)$$

ریشه معادله (۳-۶۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$(R_o/R)_c = k/hR \quad \text{یا} \quad (R_o)_c = k/h \quad (3-65)$$

که در این رابطه $(R_o)_c$ شعاع بحرانی عایق نامیده می شود. با قرار دادن معادله (۳-۶۵) درون معادله (۳-۶۳)، مقدار اکسترمم اتلاف حرارت از لوله به صورت زیر خواهد بود:

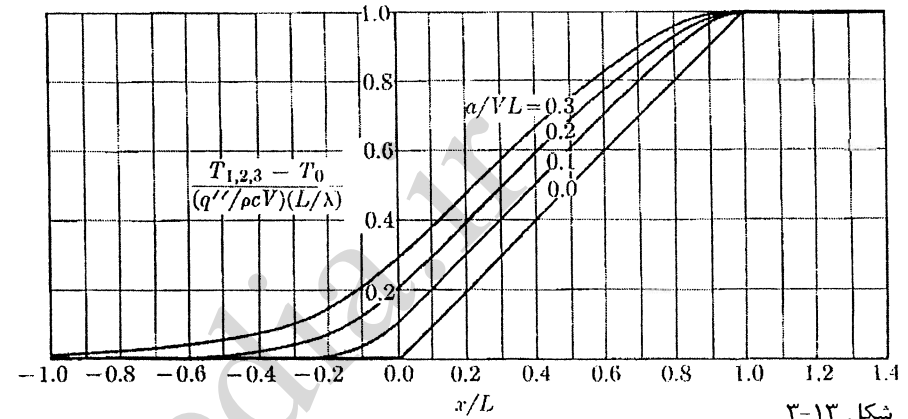
$$\frac{q}{2\pi k L (T_i - T_o)} = \frac{1}{1 + \ln(k/hR)} \quad (3-66)$$

علاوه بر آن، مشتق دوم معادله (۳-۶۳) در $(R_o/R)_c = k/hR$ به صورت زیر است:

$$\left. \frac{d^2 q}{d(R_o/R)^2} \right|_{R_o/R=k/hR} = -\frac{2\pi L h^2 (T_i - T_o)}{[1 + \ln(k/hR)]^2} < 0 \quad (3-67)$$

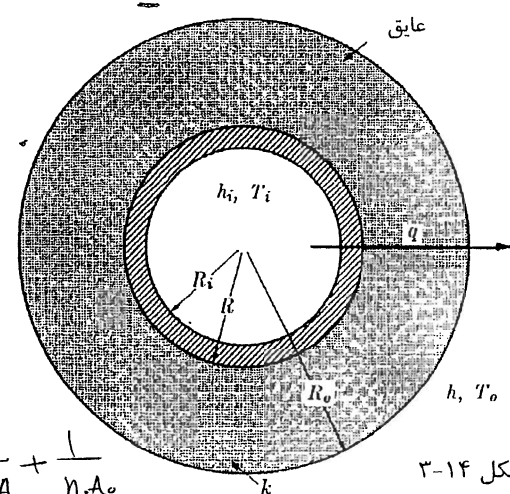
این رابطه نشان می دهد که مقدار اکسترمم اتلاف حرارت حاصل از معادله (۳-۶۳)، در واقع ماکزیمم است! این نتیجه حیرت انگیز که نشان می دهد به وسیله عایق کردن اتلاف حرارتی از لوله افزایش می یابد با در نظر گرفتن مخرج سمت راست معادله (۳-۶۳) توجیه خواهد شد،

حرطعاع بحرانی q_{max} شود حد انتلاف حرارتی در این صورت است



شکل ۳-۱۳

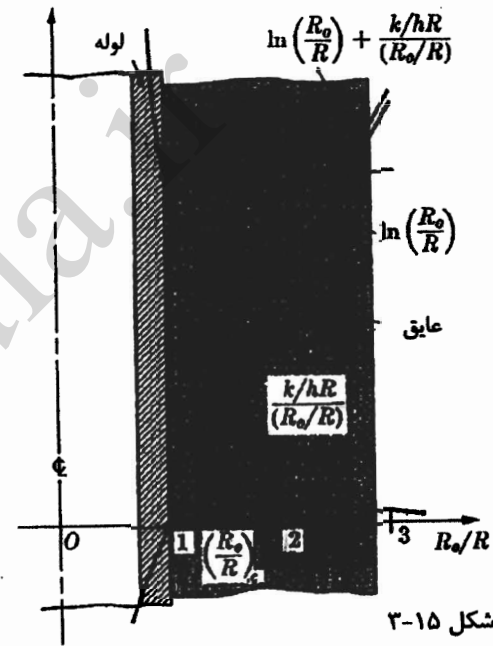
مثال ۳-۵. یک سیال با دمای T_i از درون لوله ای با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o در جریان است. ضرایب انتقال حرارت داخلی و خارجی به ترتیب h_i و h_o می باشند. دمای سیال خارجی T_o است. فرض می کنیم که $T_o < T_i$ باشد. می خواهیم با عایق کاری لوله اتلاف حرارتی از سیال داخل لوله را کاهش دهیم (شکل ۳-۱۴). ضریب هدایت حرارتی دیواره لوله در مقایسه با ضریب هدایت حرارتی عایق و ضریب انتقال حرارت داخلی در مقایسه با ضریب خارجی انتقال حرارت ممکن است زیاد باشد. (بخار میعان شده درون لوله مثال بارزی از این نوع است). اتلاف حرارتی از سیال داخلی را به صورت تابعی از ضخامت عایق به دست آورید.



شکل ۳-۱۴

$$\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln \frac{R_o}{R_i}}{2\pi k L} + \frac{1}{h_o A_o}$$

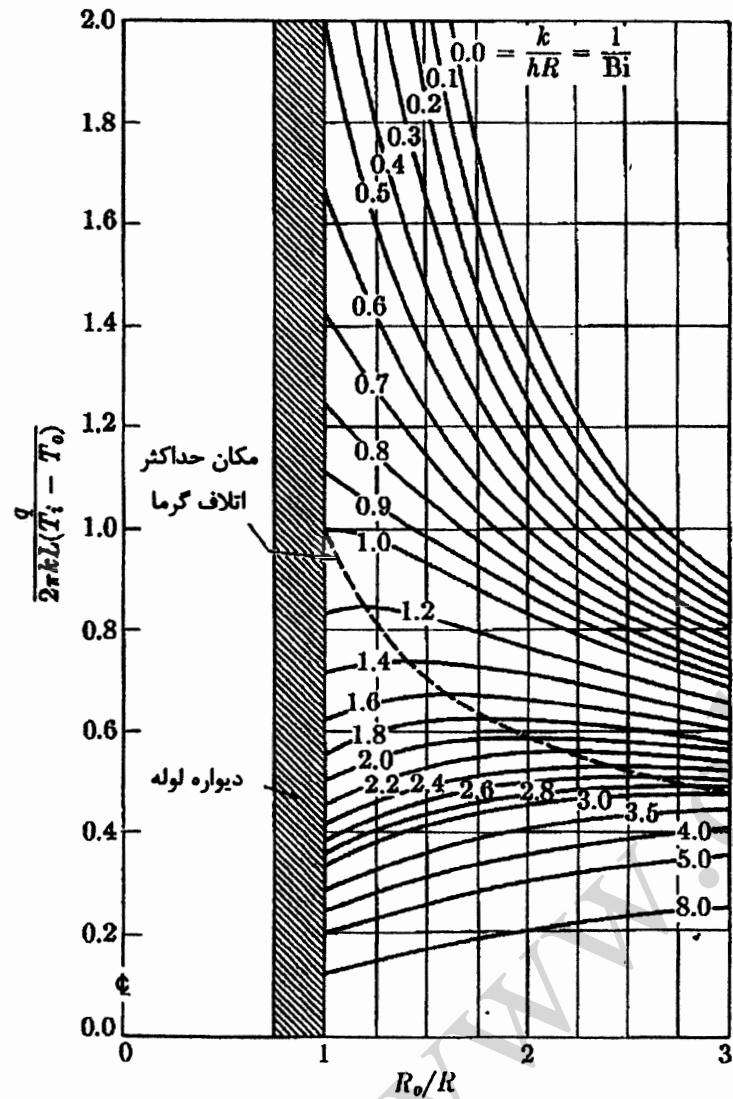
$$\ln\left(\frac{R_o}{R}\right) + \frac{k/hR}{R_o/R}$$



شکل ۳-۱۵

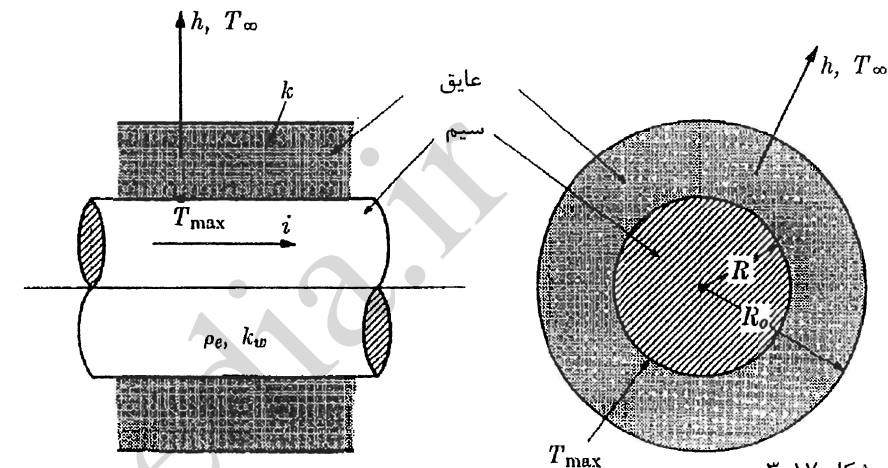
همان‌طور که در شکل ۳-۱۵ نشان داده شده است. تغییر در اولین جمله معادله (۳-۶۸) که مربوط به مقاومت هدایتی عایق است، به صورت لگاریتمی می‌باشد، در حالی که تغییر در جمله دوم، که متناسب است با مقاومت جابه‌جایی خارجی، هذلولی است. بنابراین همان‌طور که در شکل ۳-۱۵ مشاهده می‌شود فرض می‌شود که، مجموع دو جمله در شعاع بحرانی حداقل مقدار را داشته باشد و این نتیجه به نوبه خود حداکثر مقدار اتلاف حرارتی را حاصل می‌کند. در شکل ۳-۱۶ اتلاف حرارت از لوله‌ها در مقابل R_o/R برای مقادیر مختلف $1/Bi = k/hR$ رسم شده است.

هرچقدر عدد بی‌اچ بی‌اچ کمتر باشد q کاهش می‌یابد و در نتیجه به شعاع بحرانی نزدیک می‌شود.
زمانی که عایق نازک کنیم تا یک (در شکل) باید شعاع بحرانی را دست‌نگرفته شود



شکل ۳-۱۶

مثال ۳-۶. یک سیم الکتریکی با شعاع R به‌طور یکنواخت با پلاستیک عایق شده و دارای شعاع بیرونی R_o است (شکل ۳-۱۷). مقاومت الکتریکی و ضریب هدایت حرارتی این سیم به ترتیب ρ_e (اهم \times طول) و k_w است. ضریب هدایت حرارتی عایق k ، ضریب انتقال حرارت h و دمای محیط اطراف T_∞ می‌باشد. می‌خواهیم حداکثر جریانی را که می‌توان از این سیم عبور داد بدون آن‌که پلاستیک آن گرم شود به‌دست آوریم. دمای عملیاتی مجاز T_{max} است.



شکل ۳-۱۷

از آنجایی که هدایت محوری قابل صرف نظر است، انرژی داخلی به صورت زیر خواهد بود:

$$P = RI^2 \quad i^2(\rho_e/\pi R^2) \quad (3-69)$$

این انرژی تولیدی الکتریکی به ازای واحد طول سیم بوده و به صورت شعاعی توسط مقاومت هدایتی عایق و مقاومت جابه جایی محیط اطراف، از بین می رود. باید متذکر شد که مقاومت کلی مؤثر مثال ۳-۵ در این مثال نیز صادق است. بنابراین با بازآرایی معادله (۳-۶۳) و بر طبق علامت گذاری شکل ۳-۱۷ و برابر قرار دادن نتیجه با معادله (۳-۶۹) داریم:

$$\frac{i_{\max}^2 \rho_e}{\pi R^2} = \frac{2\pi k(T_{\max} - T_{\infty})}{\ln(R_o/R) + (k/hR)/(R_o/R)} \quad L=1 \quad (3-70)$$

مقاومت جابه جایی مقاومت رسانایی

$$i_{\max} = \left[\frac{2\pi^2 R^2 (k/\rho_e)(T_{\max} - T_{\infty})}{\ln(R_o/R) + (k/hR)/(R_o/R)} \right]^{1/2} \quad (3-71)$$

شعاع عایق

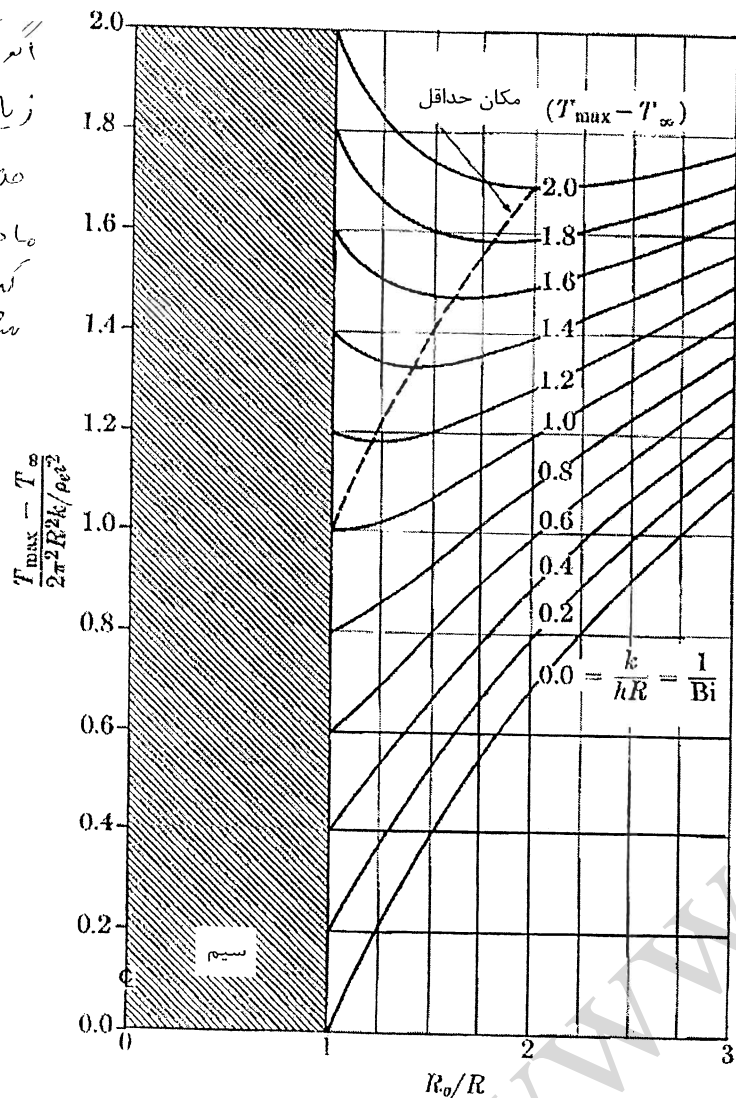
اگر بتوانیم ضخامت عایق و در نتیجه شعاع بحرانی را تغییر دهیم خواهیم داشت:

$$i_{\max \max} = \left[\frac{2\pi^2 R^2 (k/\rho_e)(T_{\max} - T_{\infty})}{1 + \ln(k/hR)} \right]^{1/2} \quad (3-72)$$

$$\frac{R_o}{R} = \frac{k}{hR}$$

به جای

یعنی اختلاف باید افزایش یابد تا T_{\max} به دست آید



شکل ۳-۱۸

یک مساله با اندکی تفاوت با این مساله می تواند با تغییر در دمای سطح مشترک به عنوان تابعی از ضخامت عایق پلاستیکی برای یک جریان الکتریکی ویژه، به وجود آید. این دما را می توان به سادگی با استفاده از معادله (۳-۷۰) و به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{T_{\max} - T_{\infty}}{2\pi^2 R^2 k / \rho_e i^2} = \ln\left(\frac{R_o}{R}\right) + \frac{k/hR}{R_o/R} \quad (3-73)$$

مقدار $\ln(R_o/R)$ را می توان به دست آورد

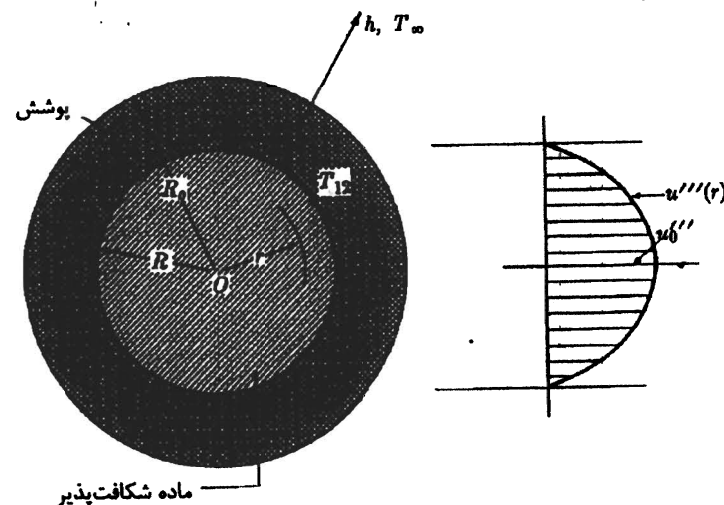
رفتار عبارت $(R_0/R) + (k/hR)/(R_0/R)$ در شکل ۳-۱۵ رسم شده است. اکنون معادله (۳-۷۳) در مقابل R_0/R برای مقادیر مختلف از k/hR رسم می‌شود (شکل ۳-۱۸). تغییرات اینجا برعکس موارد نشان داده شده در شکل ۳-۱۶ است. [معادلات (۳-۶۳) و (۳-۷۳) را با هم مقایسه کنید].

نکته در مورد تفاوت بین موارد مورد نظرم در مثال‌های ۳-۵ و ۳-۶. در مثال ۳-۵ می‌خواستیم q را در حالت ثابت بودن دماهای سیال داخلی و محیط، کاهش دهیم؛ اما می‌خواستیم در مثال ۳-۶ برای یک مقدار ثابت l (یا q) و دمای ثابت محیط، توزیع دمای سیم را به دست آوریم.

مثال ۳-۷. المان سوخت یک راکتور شامل یک ماده شکافت‌پذیر کروی با شعاع R است که با یک پوسته کروی به شعاع R_0 پوشیده شده است (شکل ۳-۱۹). دمای محیط سرد T_∞ است، و ضریب انتقال حرارت h می‌باشد. انرژی هسته‌ای داخلی تولید شده در کره را می‌توان تقریباً با یک معادله سهموی به صورت زیر نشان داد:

$$u''(r) = u_0''[1 - (r/R)^2],$$

که در آن u_0'' انرژی هسته‌ای تولیدی در مرکز کره است. می‌خواهیم توزیع دما را در المان سوختی را به دست آوریم.



شکل ۳-۱۹

طی یک فرمولاسیون عادی، به مساله‌ای دو منطقه‌ای می‌رسیم. اگرچه فرمولاسیون و حل آن را رها کرده و به خواننده واگذار می‌کنیم، اما مساله را به صورت زیر بررسی می‌نماییم. کل انرژی داخلی تولید شده در کره به صورت زیر است.

$$4\pi r^2 \delta r \int_0^R [1 - (r/R)^2] r^2 dr = \frac{8}{15} \pi R^3 u_0''.$$

این انرژی تحت شرایط پایا و به شکل حرارت q ، با گذر از توسط مقاومت هدایتی روکش و مقاومت جابه‌جایی خارجی به محیط سرد منتقل می‌شود. بین ویژگی‌های کره و روکش به ترتیب با انتخاب پرنویس‌های ۱ و ۲ تمایز قائل می‌شویم و دمای سطح مشترک را با T_{12} نشان داده و خواهیم داشت:

$$\frac{8}{15} \pi R^3 u_0'' = q = U_o A_o (T_{12} - T_\infty), \quad (3-74)$$

که در آن $A_o = 4\pi R_o^2$ بوده و داریم:

$$\frac{1}{U_o} = \frac{R_o}{k_2} \left(\frac{R_o}{R} - 1 \right) + \frac{1}{h},$$

که این رابطه از معادله (۳-۲۳) به دست می‌آید. با استفاده از مقادیر A_o و U_o می‌توانیم معادله (۳-۷۴) را به صورت زیر بازآرایی کنیم:

$$\frac{8}{15} \pi R^3 u_0'' = \frac{4\pi R_o^2 (T_{12} - T_\infty)}{(R_o/k_2)(R_o/R - 1) + 1/h}. \quad (3-75)$$

با استفاده از معادله (۳-۷۵) به سادگی دمای سطح مشترک T_{12} حاصل می‌شود:

$$T_{12} - T_\infty = \frac{2}{15} \frac{u_0'' R^2}{k_2} \left[1 - \frac{1}{R_o/R} + \frac{k_2/hR}{(R_o/R)^2} \right]. \quad (3-76)$$

در نظر گرفتن یک آرایش مناسب از معادله (۳-۷۶) می‌توان دمای روکش را بر حسب $T_{12} - T_\infty$ به صورت زیر به دست آورد: از معادله (۳-۷۶) به دست آورده

$$\frac{T_2(r) - T_\infty}{T_{12} - T_\infty} = U_o \left[\frac{R_o}{k_2} \left(\frac{R_o}{r} - 1 \right) + \frac{1}{h} \right], \quad R \leq r \leq R_o. \quad (3-77)$$

سرتیاجام، مساله دمای کره را می‌توانیم به صورت زیر فرموله نماییم:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT_1}{dr} \right) + \frac{u_0''}{k_1} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r^2 = 0, \quad T_1(0) = \text{محدود}, \quad T_1(R) = T_{12}. \quad (3-78)$$

حل معادله (۳-۷۸) دمای کره را با توجه به دمای سطح مشترک به صورت زیر خواهد داد:

$$\frac{T_1(r) - T_{12}}{u_0'' R^2/k_1} = \frac{7}{60} - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{20} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad 0 \leq r \leq R. \quad (3-79)$$

تذکری در مورد روند دنبال شده در تعیین دمای مثال‌های ۳-۶ و ۳-۷: اگرچه هر دو مساله جزو مسائل دو منطقه‌ای هستند، ممکن است دما بدون در نظر گرفتن فرمولاسیون دو منطقه‌ای

اصل جمع پذیری ندارند و نمی توان اهمیت استفاده از این اصل را در مورد آن ها نشان داد. به هر حال در اینجا، هدف، آشنا ساختن خواننده با این روش است و استفاده از آن فقط بعضی اوقات برای مسائل یک بعدی پایا مناسب است، اما برای مسائل چندبعدی یا مسائل ناپایا لازم و ضروری است (این امر در بخش ۷-۴ بررسی خواهد شد).

ابتدا می خواهیم یک سری از مفاهیم ریاضی لازم را معرفی نماییم. یک معادله دیفرانسیل خطی یا یک شرط مرزی خطی همگن است اگر تابع $y(x)$ یا $Cy(x)$ در آن صدق کند، که C یک ثابت اختیاری است. به عبارت دیگر، یک معادله دیفرانسیل خطی وقتی همگن است که همه عبارت هایش یا شامل یک تابع نامعلوم و یا شامل یکی از مشتقات آن تابع نامعلوم باشد. به طور مشابه یک شرط مرزی وقتی همگن است که یک تابع نامعلوم یا مشتقات آن، یا هر ترکیب خطی از این تابع و مشتقاتش، در شرط صدق کنند. بنابراین به عنوان مثال داریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = f_3(x) \quad (3-82)$$

که معادله فوق یک معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن مرتبه دوم است و معادله زیر یک معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم است:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0 \quad (3-83)$$

در شرط مرزی $x = a$ داریم:

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = \beta, \quad \text{یا} \quad y'(a) \pm \gamma y(a) = \delta$$

که این روابط نشان دهنده شرط مرزی خطی غیرهمگن است در حالی که برای شرط مرزی خطی همگن داریم:

$$y(a) = 0, \quad y'(a) = 0, \quad \text{یا} \quad y'(a) + \gamma y(a) = 0$$

حل کلی معادله (۳-۸۲) از جمع سه پاسخ خصوصی به صورت زیر نوشته می شود:

$$y = y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (3-84)$$

که اولین عبارت سمت راست متناظر با جواب خصوصی معادله غیرهمگن است و دیگر عبارات جواب های خصوصی معادله همگن (که معمولاً به جواب های خصوصی معادله همگن، جواب عمومی گفته می شود. م.) می باشند. ثوابت C_1 و C_2 را با استفاده از شرایط مرزی مساله می توان به دست آورد. دلیل این که معادله (۳-۸۴) جواب معادله (۳-۸۲) است را می توان به سادگی با یک جایگزینی مستقیم نشان داد.

به دست آید، زیرا در هر دو مورد شار حرارتی شعاعی برای انرژی داخلی تولید شده برقرار می باشد. بنابراین، با ضرب این شار در مجموع مقاومت های جابه جایی و هدایتی مناسب، می توانیم دمای نسبی پلاستیک یا روکش را با اطلاع از دمای محیط اطراف یا محیط سرد به دست آوریم. سپس دمای سیم یا المان حرارتی را بر حسب دمای سطح مشترک پلاستیک یا روکش با دنبال کردن مراحل متداول کار، به دست می آوریم. این روش را می توان به عنوان روش دیگری برای حل مساله ۳-۲ نیز به کار برد.

دیگر جنبه مساله ۳-۷، بی خطر بودن عملیات راکتور است، که این امر به طور کلی با تعیین حداکثر دمای مجاز سوخت تعیین می شود. ممکن است برای مقادیر ویژه u''' و R ، اثر ضخامت روکش روی این دما در حالت کروی مهم تر از حالت استوانه ای باشد^۱. با بازآرایی معادله (۳-۷۵) برای این هدف خواهیم داشت:

$$\theta = \frac{T_{12} - T_{\infty}}{2u_0''' R^2 / 15k_2} = 1 - \frac{1}{R_0/R} + \frac{k_2/hR}{(R_0/R)^2} \quad (3-80)$$

تنها اکسترمم مهم فیزیکی A به صورت زیر به دست می آید.

$$\frac{d\theta}{d(R_0/R)} = \frac{1}{(R_0/R)^2} + \frac{2k_2/hR}{(R_0/R)^3} = 0$$

که شعاع بحرانی روکش به صورت زیر به دست می آید.

$$(R_0/R)_c = 2(k_2/hR) \quad \text{یا} \quad (R_0)_c = 2k_2/h. \quad (3-81)$$

می توان نشان داد که برای $R_0 = (R_0)_c$ عبارت $d^2\theta/d(R_0/R)^2 > 0$ حاصل می شود. بنابراین فرض می شود که T_{12} حداقل مقدار ممکن خود برای یک مقدار ویژه u''' و R داراست وقتی که شعاع خارجی روکش متناسب با شعاع بحرانی باشد. کاملاً واضح است که اگر این حداقل، قابل دستیابی باشد، توزیع دمای حداقل در المان سوختی را نتیجه می دهد.

$$q_{max} \text{ یعنی}$$

۳-۴. اصل جمع پذیری^۲

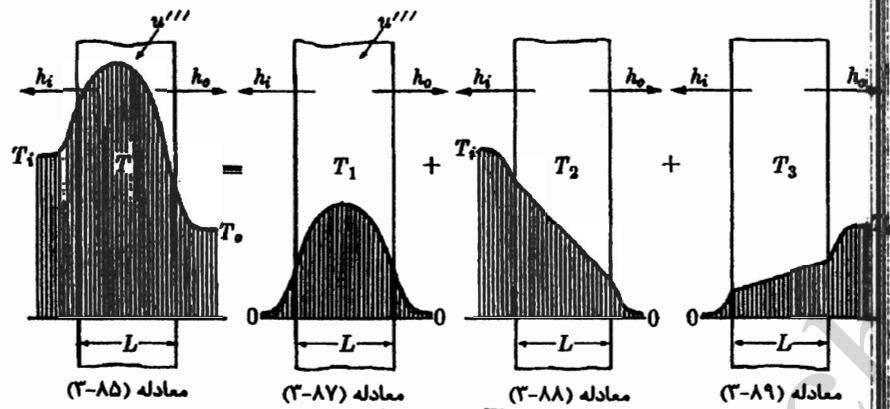
مسائل خطی، نظیر مسائل هدایت با ویژگی های ثابت، اغلب ممکن است با استفاده از اصل جمع پذیری به تعدادی از مسائل ساده تر تبدیل شود. البته مسائل یک بعدی نیازی به استفاده از

۱- در حقیقت ضخامت روکش با توجه به ملاحظات اتمی اندازه گیری می شود نه دمای سوخت. بخشی از مساله که مورد مطالعه است گر چه برای هدف ما غیرواقع بینانه است ولی اندازه گیری شعاع بحرانی را برای هندسه کروی تشریح می کند.

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \quad +k \frac{dT_1(0)}{dx} = h_i T_1(0), \quad -k \frac{dT_1(L)}{dx} = h_o T_1(L); \quad (3-87)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dx^2} = 0, \quad +k \frac{dT_2(0)}{dx} = h_i [T_2(0) - T_i], \quad -k \frac{dT_2(L)}{dx} = h_o T_2(L); \quad (3-88)$$

$$\frac{d^2 T_3}{dx^2} = 0, \quad +k \frac{dT_3(0)}{dx} = h_i T_3(0), \quad -k \frac{dT_3(L)}{dx} = h_o [T_3(L) - T_o]; \quad (3-89)$$



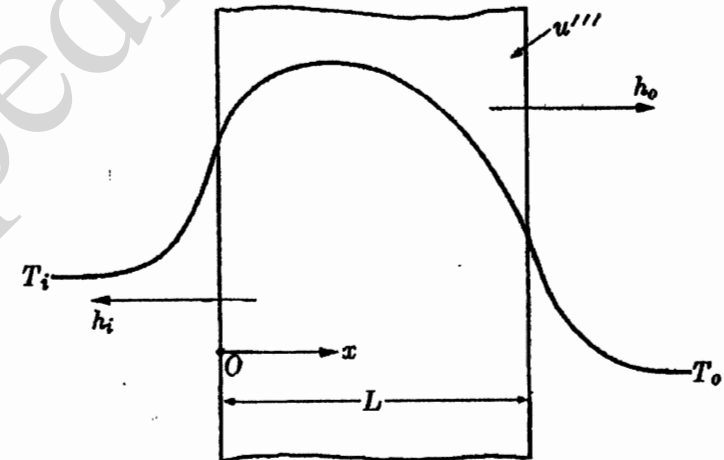
شکل ۳-۲۱ نقطه ای با تولید گرایی

محیت اصل جمع پذیری به سادگی با جمع کردن معادلات (۳-۸۷)، (۳-۸۸)، و (۳-۸۹) در کنار یکدیگر نظیر آنچه در معادله (۳-۸۶) بیان شده است، نشان داده می شود. نتیجه این جمع کردن معادله (۳-۸۵) می باشد.

بازبینی معادلات (۳-۸۵)، (۳-۸۷)، (۳-۸۸)، و (۳-۸۹) دو حقیقت مهم را آشکار می کند. (i) همه جمع پذیری روی همگن بودن تاثیر می گذارد اما روی نوع معادله دیفرانسیل یا شرایط مرزی تاثیر است؛ (ii) معادلاتی که از تفکیک یک معادله دیفرانسیل با استفاده از اصل جمع پذیری حاصل می شوند دارای مختصات یکسانی هستند.

گذشته از این، اصل جمع پذیری در انتخاب یک دمای مرجع نیز مورد استفاده قرار می گیرد. این انتخاب یک انتخاب کاملاً اختیاری است. به عنوان مثال، در مساله قبلی دمای مرجع را صفر در نظر گرفتیم. البته مطلوب تر است که دما، بالاتر از دمای هر کدام از محیطها اندازه گیری شوند. بنابراین:

اصل جمع پذیری ای که ما از آن استفاده می کنیم به جای حل مساله با فرمولاسیون مساله سروکار داد. بنابراین، با استفاده از این اصل، فرمولاسیون اصلی مساله به صورت مجموعی از فرمولاسیون مسائل ساده تر نوشته می شود. تعداد این مسائل ساده تر برابر تعداد ناهمگنی های موجود در فرمولاسیون مساله اصلی است. دوباره مثال ۳-۱ را مدنظر قرار دهید، یک صفحه صاف به ضخامت L دو ناحیه با دمای T_o و T_i و ضرایب انتقال حرارت h_o و h_i را از هم جدا می کند (شکل ۳-۲۰) به جای پیدا کردن مقدار u''' مناسب، که تولید انرژی داخلی به منظور حذف اتلاف حرارتی از محیطی با دمای بیشتر می باشد، می خواهیم دمای صفحه مربوط به یک u''' اختیاری را به دست آوریم.



شکل ۳-۲۰

پس فرمولاسیون مساله به صورت زیر می باشد:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \quad +k \frac{dT(0)}{dx} = h_i [T(0) - T_i], \quad -k \frac{dT(L)}{dx} = h_o [T(L) - T_o]. \quad (3-85)$$

معادله (۳-۸۵) دارای سه پتانسیل است، u''' ، T_i و T_o که باعث تغییر توزیع دمایی در صفحه می شوند. بنابراین مساله به سه مساله به صورت زیر جداسازی می شود:

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (3-86)$$

که T_1 ، T_2 و T_3 در معادلات زیر صدق می کنند:

۱- در مسائلی که به لحاظ فیزیکی اهمیت دارند، به جای واژه ناهمگنی از واژه پتانسیل استفاده می شود به عنوان مثال، پتانسیل حرارتی، پتانسیل الکتریکی و غیره.

$$T(x) = T_0 + \theta(x) \quad \text{یا} \quad T(x) = T_i + \psi(x)$$

به عنوان مثال با استفاده از معادله اول $(T(x) = T_0 + \theta(x))$ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \quad + k \frac{d\theta(0)}{dx} = h_i[\theta(0) - \theta_i], \quad - k \frac{d\theta(L)}{dx} = h_o\theta(L), \quad (3-90)$$

که در آن $\theta_i = T_i - T_0$ می‌باشد. فرمولاسیون جدید، یعنی معادله (۳-۹۰)، تنها دو ناهمگنی دارد. بنابراین، می‌تواند تبدیل به دو مساله جداگانه شود نه سه مساله.

۳-۵. جامدات ناهمگن (ضریب هدایت حرارتی متغیر) *مرز*

استفاده از جامدات ناهمگن به علت کاربرد آن در محدوده وسیعی از دما، در تکنولوژی امروزه اهمیت روزافزون پیدا کرده است به عنوان مثال استفاده در المنت‌های سوختی درون راکتور، اجزاء وسایل نقلیه فضایی، انجماد در ریخته‌گری و غیره. در این بخش یک روش کلی حل برای مسائل ناپایای سه‌بعدی در جامدات ناهمگن به‌دست می‌آید. اکنون دوباره به معادله حرارت هدایتی در جامدات غیرهمگن توجه می‌کنیم،

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + u'''. \quad (2-88)$$

اگر k ، c و u''' تنها تابعی از مکان باشند، معادله (۲-۸۸) یک معادله دیفرانسیلی خطی با ضرایب متغیر خواهد شد. حل چنین معادلاتی نیاز به ریاضی پیچیده‌ای ندارد (مساله ۳-۳۷ ملاحظه شود). اگر k و c وابسته به دما، اما مستقل از مکان باشند در این صورت معادله (۲-۸۸) غیرخطی خواهد شد و به راحتی حل نمی‌شود. (آیا وابستگی دمایی u''' پیچیدگی برای مساله ایجاد خواهد کرد؟) معمولاً، روش‌های عددی برای حل این مسائل استفاده می‌شود. تعدادی از روش‌های تحلیلی اکنون برای حل این مسائل موجود است. یکی از آن‌ها روش کرشلف^۱ است که تا حدود زیادی یک روش کلی است در زیر تشریح شده است.

با تعریف یک دمای جدید θ که توسط تبدیل کرشلف به دمای مساله، T مرتبط می‌شود، معادله (۲-۸۸) به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل خواهد شد،
تبدیل کرشلف،

$$\theta = \frac{1}{k_R} \int_{T_R}^T k(T) dT, \quad (3-91)$$

که در آن T_R یک دمای مرجع مناسب است و $k_R = k(T_R)$ و T_R و k_R تنها برای تامین بعد دمایی θ و معلوم کردن مقدار آن تعریف می‌شوند. از معادله (۳-۹۱) خواهیم داشت:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{k_R} \frac{dT}{dt} \quad (3-92)$$

و

$$\nabla \theta = \frac{k}{k_R} \nabla T. \quad (3-93)$$

با قرار دادن معادله (۳-۹۲) یا (۳-۹۳) در معادله (۲-۸۸) خواهیم داشت:

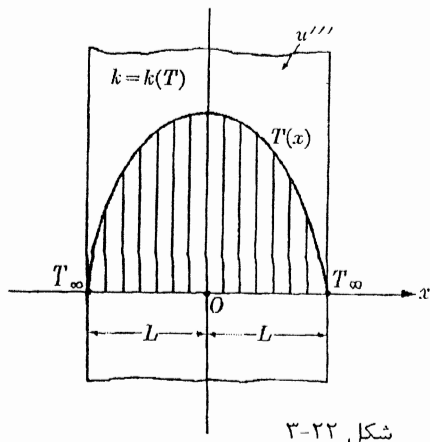
$$\frac{d\theta}{dt} = a \nabla^2 \theta + \left(\frac{a}{k_R}\right) u''', \quad (3-94)$$

که در آن a و u''' به عنوان تابعی از متغیر جدید θ تعریف می‌شوند. برای بسیاری از جامدات وابستگی دمایی a در مقایسه با وابستگی دمایی k قابل صرف‌نظر است. در چنین مواردی، اگر u''' مستقل از T باشد معادله (۳-۹۴) با معادله (۲-۹۱) یکسان خواهد شد به‌جز برای ضرایب مختلف اما ثابت u''' . بنابراین جواب به‌دست آمده برای جامدات همگن می‌تواند برای جامدات غیرهمگن مورد استفاده قرار گیرد، اگر T با θ و ρc با k_R/a جایگزین شوند و البته به شرطی که شرایط مرزی برحسب T یا $\partial T / \partial n$ باشند. هنگامی که شرایط مرزی شامل عبارت جابه‌جایی یعنی $h(T_\sigma - T_\infty)$ باشد، روش کرشلف قابل استفاده نیست. مثال یک بعدی زیر طرز استفاده از این روش را نشان می‌دهد.

مثال ۳-۸. یک مایع به‌وسیله یک گرمکن الکتریکی مسطح با ضخامت $2L$ جوشانده می‌شود. انرژی داخلی u''' به‌صورت یکنواخت توسط الکتریسیته تولید می‌شود. دمای جوش مایع T_∞ است

(شکل ۳-۲۲) می‌خواهیم دمای پایای صفحه را برای (i) $k = k(T)$ ؛ (ii) $k = k_R(1 + \beta T)$ به‌دست آوریم. فرمولاسیون مساله به صورت زیر است.

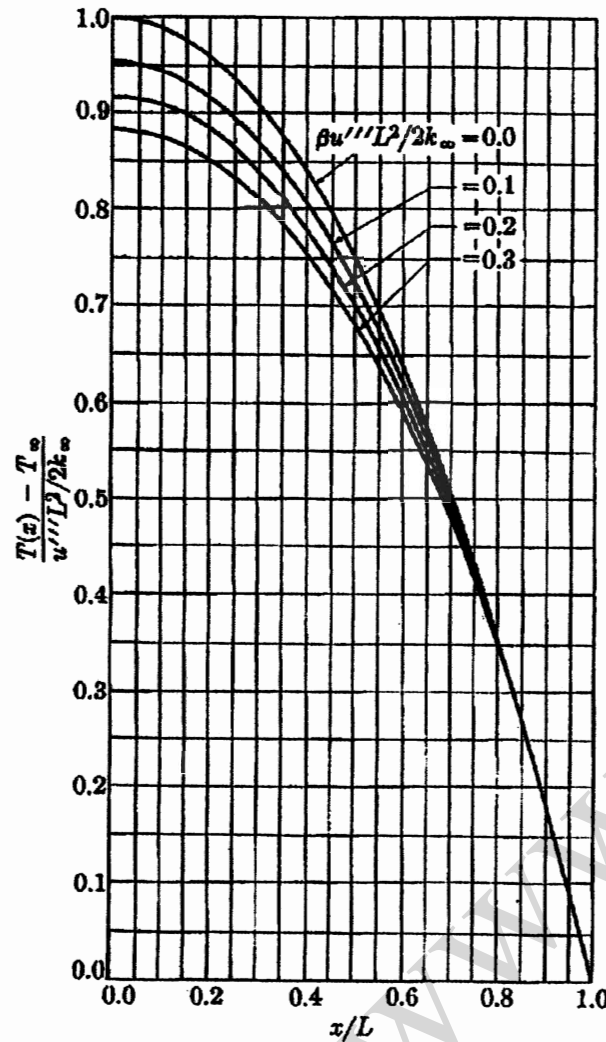
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + u''' &= 0, \\ \frac{dT(0)}{dx} &= 0, \\ T(L) &= T_\infty \end{aligned} \quad (3-95)$$



شکل ۳-۲۲

با استفاده از شکل یک بعدی معادله (۳-۹۳) خواهیم داشت.

نمودارها از معادله (۳-۱۰۲) برای مقادیر مختلف $\beta u''' L^2 / 2k_{\infty}$ محاسبه شده و به صورت تابعی از x/L نشان داده شده است.



شکل ۳-۲۳

۳-۶. حل سری‌های توانی، توابع بسل

در بخش ۳-۷ به شرح یک سری از مسائل یک بعدی به نام سطوح گسترش یافته (پره‌ها، گیره‌ها، یا مهره‌ها) خواهیم پرداخت. هنگامی که مقطع عرضی یک سطح گسترش یافته متغیر باشد،

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{k}{k_R} \frac{dT}{dx'}$$

می‌توانیم معادله (۳-۹۵) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{u'''}{k_R} = 0, \quad \frac{d\theta(0)}{dx} = 0, \quad \theta(L) = \theta_{\infty}, \quad (3-96)$$

که طبق معادله (۳-۹۱):

$$\theta_{\infty} = \frac{1}{k_R} \int_{T_R}^{T_{\infty}} k(T) dT. \quad (3-97)$$

حل معادله (۳-۹۶) به این صورت خواهد بود:

$$\frac{\theta(L) - \theta_{\infty}}{u''' L^2 / 2k_R} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2. \quad (3-98)$$

با قرار دادن معادله (۳-۹۳) و (۳-۹۷) در معادله (۳-۹۸) دمای صفحه به صورت T به دست می‌آید:

$$\frac{(1/k_R) \int_{T_R}^{T_{\infty}} k(T) dT}{u''' L^2 / 2k_R} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2. \quad (3-99)$$

برای حالت‌های خاص $k = k_R(1 + \beta T)$ معادله (۳-۹۹) به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{[T(x) - T_{\infty}] + (\beta/2)[T^2(x) - T_{\infty}^2]}{u''' L^2 / 2k_R} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2. \quad (3-100)$$

با حل معادله (۳-۱۰۰) برای T و نادیده گرفتن ریشه‌ای که به لحاظ فیزیکی بی‌معنی است، دمای صفحه را به دست می‌آوریم:

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{u''' L^2 / 2k_R} = \left(\frac{1 + \beta T_{\infty}}{\beta u''' L^2 / 2k_R} \right) \times \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{1 + \beta T_{\infty}} \right) \left(\frac{\beta u''' L^2 / 2k_R}{1 + \beta T_{\infty}} \right) \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]} \right]. \quad (3-101)$$

هنگامی که $\beta \rightarrow 0$ ، معادله (۳-۱۰۱) به دمای ثابت k میل می‌کند.

اگر دمای مرجع T_R در تبدیل کرشلف، دمای محیط T_{∞} در نظر گرفته شود. معادله (۳-۱۰۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{u''' L^2 / 2k_{\infty}} = \left(\frac{1}{\beta u''' L^2 / 2k_{\infty}} \right) \left[-1 + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{\beta u''' L^2}{2k_{\infty}} \right) \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]} \right], \quad (3-102)$$

معادله فوق از قرار دادن $\beta T_{\infty} = 0$ در معادله (۳-۱۰۱) و استفاده از $k_R = k_{\infty}$ به دست آمده است. در شکل ۳-۲۳ اثرات ضریب هدایت خطی روی دمای صفحه نشان داده شده که این

فرمولاسیون مساله به یک معادله دیفرانسیل خطی درجه دوم با ضرایب متغیر تبدیل می‌شود. این معادله دیفرانسیل یک شکل از معادله بسل است، ولی در موارد استثنایی یک معادله خاص به نام معادله هم‌بعد حاصل می‌شود. روش‌های حل مناسب برای معادلات دیفرانسیل درجه دوم خطی با ضرایب ثابت، برای معادلات با ضرایب متغیر مناسب نمی‌باشد. همچنین می‌توانیم معادلات با ضرایب متغیر را که دارای جواب قابل تعریف در یک بازه مناسب هستند، برحسب سری‌های توانی داشته باشیم. بنابراین، این بخش به مرور مختصر حل سری‌های توانی از معادلات بسل و تشریح خصوصیات معادلات بسل اختصاص دارد. پیش از مرور می‌خواهیم ابتدا به بررسی جزییات سری‌های توانی پردازیم.

یک سری نامحدود به‌صورت زیر:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

این عبارت بسط سری توانی $y(x)$ در نزدیکی $x = x_0$ نامیده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$y(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K a_k(x - x_0)^k.$$

برای بازه‌ای از x که حد بالا موجود است سری همگرا خوانده می‌شود. خواننده می‌تواند برای مطالعه بیشتر همگرایی سری‌های توانی، به کتاب‌های معادلات دیفرانسیل مراجعه کند.

حال می‌خواهیم به بررسی روش حل سری‌های توانی پردازیم. از آنجایی که این روش برای معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و متغیر قابل کاربرد است، می‌توان آن‌را به‌صورت معادله دیفرانسیل ساده با ضرایب ثابت زیر نشان داد:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0. \quad (3-103)$$

سری توانی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم.

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (3-104)$$

که این معادله در بازه‌ای شامل $x = 0$ همگرا است. با قرار دادن معادله (3-104) در معادله (3-103) خواهیم داشت.

$$(a_0 + 2a_2) + (a_1 + 6a_3)x + (a_2 + 12a_4)x^2 + \dots = 0. \quad (3-105)$$

معادله (3-105) در بازه‌ای از x که ضرایب تمام توان‌های x به‌طور مستقل حذف می‌شوند، معتبر است. نتایج به‌صورت زیر می‌باشد:

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0, \quad y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + \dots$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}a_1,$$

$$a_4 = -\frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{24}a_0,$$

$$a_5 = -\frac{1}{20}a_3 = \frac{1}{120}a_1,$$

$$\vdots$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله (3-105)، حل معادله (3-103) را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$y(x) = a_0(1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots) + a_1(x - x^3/6 + x^5/120 - \dots),$$

که به‌صورت زیر نیز قابل بیان است.

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (3-106)$$

دو سری مشاهده شده در معادله فوق به ترتیب بسط مک‌لورن $\cos x$ و $\sin x$ می‌باشند از این‌رو معادله (3-106) به‌صورت زیر خواهد بود.

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x. \quad (3-107)$$

واضح است که رابطه (3-107) به‌وسیله روش کلاسیک و با در نظر گرفتن $y = e^{rx}$ نیز به‌دست می‌آید، که با قرار دادن $y = e^{rx}$ در معادله دیفرانسیل (3-103)، معادله مشخصه به‌دست می‌آید و r از معادله مشخصه محاسبه می‌شود.

سپس ما به بررسی معادله دیفرانسیل درجه دوم خطی با ضرایب متغیر، یعنی معادله بسل می‌پردازیم.

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + (m^2 x^2 - \nu^2) y = 0, \quad (3-108)$$

که در آن m یک پارامتر است و ν می‌تواند صفر، عدد کسری یا عدد صحیح باشد. حل معادله (3-108) می‌تواند همانند معادله (3-103) با استفاده از سری‌های توانی به‌دست آید. نتیجه به این صورت است:

$$y(x) = a_0 J_{\nu}(mx) + a_1 Y_{\nu}(mx). \quad (3-109)$$

در معادله (3-109)،

$$J_{\nu}(mx) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(mx/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \quad (3-110)$$

$$Y_v(mx) = \frac{(\cos v\pi)J_v(mx) - J_{-v}(mx)}{\sin v\pi}, \quad (3-111)$$

که

$$J_{-v}(mx) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(mx/2)^{2k-v}}{k! \Gamma(k-v+1)}. \quad (3-112)$$

تابع ظاهر شده در مخرج معادله (۳-۱۱۰) و (۳-۱۱۲)، معروف به تابع گاما است که برای اعداد صحیح به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!, \quad \Gamma(1) = 0! = 1$$

و برای اعداد اعشاری بدین صورت می‌باشد:

$$\Gamma(v) \Gamma(n+1) = \pi / \sin \pi v, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}$$

اگر v عدد صحیح نباشد، $J_v(mx)$ و $J_{-v}(mx)$ جواب‌های مستقل معادلات (۳-۱۰۸) خواهند بود. اما اگر v یک عدد صحیح باشد، که به آن n می‌گوییم، خواهیم داشت:

$$J_n(mx) = (-1)^n J_{-n}(mx). \quad (3-113) \quad \checkmark$$

برای به دست آوردن پاسخ دوم معادله (۳-۱۰۸) که برای تمام مقادیر v تعریف شده است، معادله (۳-۱۱۱) به صورت زیر تشریح می‌شود:

$$\lim_{v \rightarrow n} Y_v(mx) \rightarrow Y_n(mx), \quad \times$$

که

$$nY_v(mx) = 2 \left(\ln \frac{mx}{2} + \gamma \right) J_n(mx) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{mx}{2} \right)^{2k-n} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [\varphi(k) + \varphi(k+n)] \frac{(mx/2)^{2k+v}}{k! (n+k)!}, \quad (3-114)$$

و

$$\varphi(k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \gamma = 0.5772 \dots$$

تابع $J_v(mx)$ به تابع بسل نوع اول از درجه v و تابع $Y_v(mx)$ به تابع بسل نوع دوم از درجه v معروف است.

معادله زیر که مرتبط با معادله (۳-۱۰۸) است معادله بسل اصلاح شده نام دارد.

✕

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - (m^2 x^2 + v^2) y = 0. \quad (3-115) \quad \text{معادله بسل اصلاح شده}$$

بررسی‌ها نشان می‌دهد که با جایگزینی x با ix معادله (۳-۱۱۵) تبدیل به معادله (۳-۱۰۸) می‌شود. از این رو، حل معادله (۳-۱۱۵) به سرعت با قرار دادن ix به جای x در رابطه (۳-۱۰۹) به دست می‌آید، سپس خواهیم داشت:

$$y(x) = a_0 J_v(imx) + a_1 Y_v(imx). \quad (3-116)$$

✕ و در نتیجه طبق معادله (۳-۱۱۰) خواهیم داشت:

$$J_v(imx) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{i^{2k+v} (mx/2)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)} = i^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx/2)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}. \quad (3-117)$$

ولی به جای استفاده از معادله (۳-۱۱۶) به عنوان حل کلی معادله (۳-۱۱۵)، متداول‌تر است که تابع $J_v(imx)$ را با عبارت $I_v(mx)$ به عنوان جواب ویژه اول جایگزین کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_v(mx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx/2)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}. \quad (3-118)$$

مقایسه روابط ۳-۱۱۷ و ۳-۱۱۸ رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$J_v(imx) = i^v I_v(mx). \quad (3-119)$$

اگر v عدد صحیح نباشد، $I_v(mx)$ مستقل از $I_{-v}(mx)$ می‌باشد و بنابراین جواب ویژه دیگر معادله (۳-۱۱۵) خواهد بود؛ جواب کامل را می‌توان به صورت ترکیب خطی از $I_v(mx)$ و $I_{-v}(mx)$ نوشت. اما برای به دست آوردن جواب ویژه دوم مناسب برای تمام مقادیر v خواهیم داشت.

$$K_v(mx) = \frac{\pi I_{-v}(mx) - I_v(mx)}{2 \sin v\pi}, \quad (3-120)$$

بنابراین:

$$\lim_{v \rightarrow n} K_v(mx) \rightarrow K_n(mx),$$

که در آن n یک عدد صحیح است. با این تعاریف:

$$K_v(mx) = (-1)^{n+1} \left(\ln \frac{mx}{2} + \gamma \right) I_n(mx) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{mx}{2} \right)^{2k-n} + \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(k) + \varphi(k+n)] \frac{(n+1/2)^{2k+n}}{k! (n+k)!}, \quad (3-121) \quad \checkmark$$

انتقال حرارت هدایتی

که در آن مقادیر $\varphi(k)$ و γ همان مقادیری است که در معادله (۳-۱۱۴) داده شده است. حال می‌خواهیم حل کلی معادله (۳-۱۱۵) را به صورت دیگری بنویسیم:

$$(3-122) \quad y(x) = a_0 I_v(mx) + a_1 K_v(mx).$$

تابع $I_v(mx)$ تابع بسل اصلاح‌شده نوع اول از درجه v و تابع $K_v(mx)$ تابع بسل اصلاح‌شده نوع دوم در درجه v نامیده می‌شود.

جداول زیادی از توابع بسل و توابع بسل اصلاح‌شده تنظیم شده است. خواننده می‌تواند برای یافتن حل عددی به این جداول مراجعه نماید (به علت تعدد مقالات در این مورد مرجع خاصی در اینجا پیشنهاد نشده است).

حال می‌خواهیم حل معادله دیفرانسیل به شکل کلی زیر را بیان نماییم:

$$(3-123) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + b^2 x^2 y = 0$$

که می‌توان آن را به صورت توابع بسل نیز بیان نمود. ابتدا متغیر وابسته را به صورت $y = x^v z$ جایگزین کرده و معادله (۳-۱۲۳) را بازآرایی می‌کنیم.

$$x^v \frac{d^2 z}{dx^2} + (a + 2v)x^{v-1} \frac{dz}{dx} + \{b^2 x^v + [(a-1)v + v^2]x^{v-2}\}z = 0.$$

حال با در نظر گرفتن v به طوری که $a + 2v = 1$ باشد، و تقسیم هر کدام از عبارات بر x^{v-2} به رابطه زیر می‌رسیم:

$$(3-124) \quad x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dz}{dx} \right) + (b^2 x^2 - v^2)z = 0,$$

که مشابه معادله (۳-۱۰۸) می‌باشد. بنابراین، اگر جواب معادله (۳-۱۲۴) $Z_v(bx)$ باشد، حل معادله (۳-۱۲۳) به این صورت خواهد بود:

$$(3-125) \quad y(x) = x^v Z_v(bx),$$

که در آن Z_v برای نمایش کلی توابع بسل از درجه v استفاده شده است که $v = (1-a)/2$ می‌باشد.

در انتها، به بررسی معادله دیفرانسیل در شکل کلی زیر می‌پردازیم:

$$(3-126) \quad \frac{d}{dx} \left(x^\alpha \frac{dy}{dx} \right) + \gamma^2 x^\beta y = 0,$$

فصل ۳- مسائل یک بعدی پایا، توابع بسل

که در آن α و β مثبت بوده و γ ممکن است حقیقی یا موهومی باشد. فرمولاسیون مساله مربوط به سطوح گسترش‌یافته با مقاطع عرضی متغیر به شکل کلی داده شده توسط معادله (۳-۱۲۶) منتهی می‌شود. حال ما با تغییر متغیر نشان می‌دهیم که معادله (۳-۱۲۶) شکل دیگری از معادله بسل می‌باشد. با تغییر متغیر $x = t^\mu$ به صورت x و بازآرایی معادله (۳-۱۲۶) خواهیم داشت.

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t[\mu(\alpha-1) + 1] \frac{dy}{dt} + \gamma^2 \mu^2 t^{\mu(\beta-\alpha+2)} y = 0.$$

اگر μ در رابطه $\mu(\beta - \alpha + 2) = 2$ صدق کند، خواهیم داشت:

$$(3-127) \quad t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t[\mu(\alpha-1) + 1] \frac{dy}{dt} + \gamma^2 \mu^2 t^2 y = 0,$$

که این معادله به شکل معادله (۳-۱۲۳) درآمد. بنابراین، جواب معادله (۳-۱۲۶) از روی معادله (۳-۱۲۵) به وسیله ارتباط دادن پارامترهای موجود در (۳-۱۲۷) با آنهایی که در معادله (۳-۱۲۳) وجود دارد، نوشته می‌شود، پس خواهیم داشت.

$$(3-128) \quad y(t) = t^v Z_v(\gamma \mu t),$$

که در آن $v = \mu(1-\alpha)/2 = (1-\alpha)/(\beta-\alpha+2)$ می‌باشد. اگر به متغیرهای مستقل قبلی باز گردیم و به جای t از $x^{1/\mu}$ استفاده کنیم، معادله (۳-۱۲۸) به صورت زیر خواهد شد:

$$(3-129) \quad y(x) = x^{v/\mu} Z_v(\gamma \mu x^{1/\mu}),$$

که در آن $\beta - \alpha + 2 \neq 0$ خواهند بود. پارامترهای موجود در (۳-۱۲۹) با پارامترهای (۳-۱۲۶) به وسیله روابط $v = (1-\alpha)/(\beta-\alpha+2)$ و $1/\mu = (\beta-\alpha+2)/2$ مرتبط می‌شوند.

اگر علامت جمله دوم در معادله (۳-۱۲۶) منفی باشد، با جایگزینی iy به جای y در معادله (۳-۱۲۹) می‌توانیم جواب را به صورت توابع بسل نوع اول و دوم با جملات دارای عبارات موهومی یا به جای آن به صورت توابع بسل اصلاح‌شده نوع اول و دوم با جملات دارای عبارات حقیقی بیان کنیم.

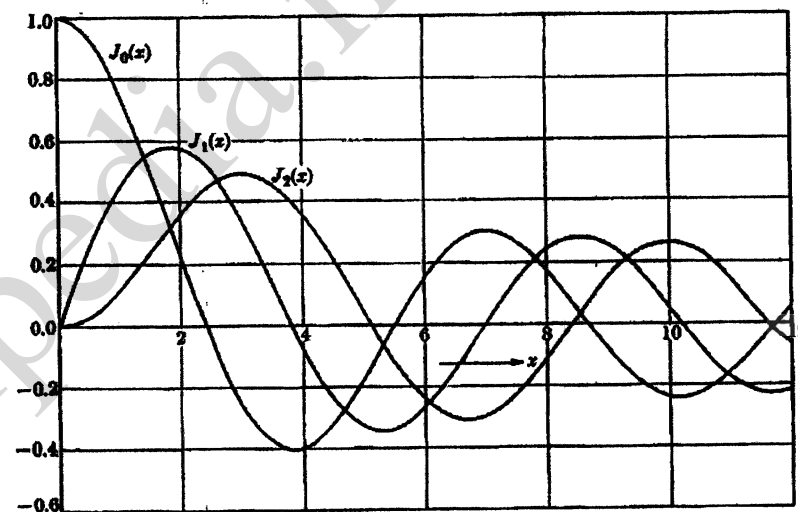
حالت خاص معادله (۳-۱۲۶) برای $\beta - \alpha + 2 = 0$ با بسط جمله اول معادله و تقسیم نتایج بر $x^{\alpha-2}$ به دست خواهد آمد.

بنابراین خواهیم داشت:

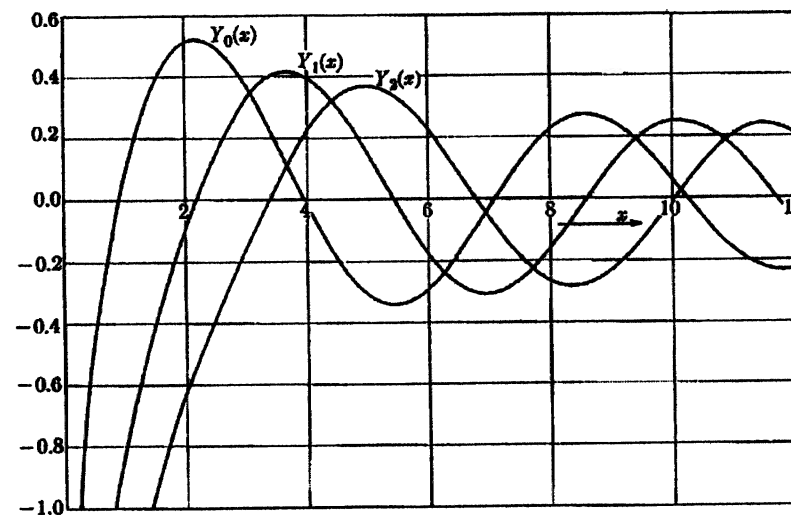
$$(3-130) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \gamma^2 y = 0,$$

$$I_0(x) \sim \frac{e^{-x}}{(2\pi x)^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{4v^2 - 1^2}{118x} + \frac{(4v^2 - 1^2)(4v^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} - \dots \right\}, \quad (3-156)$$

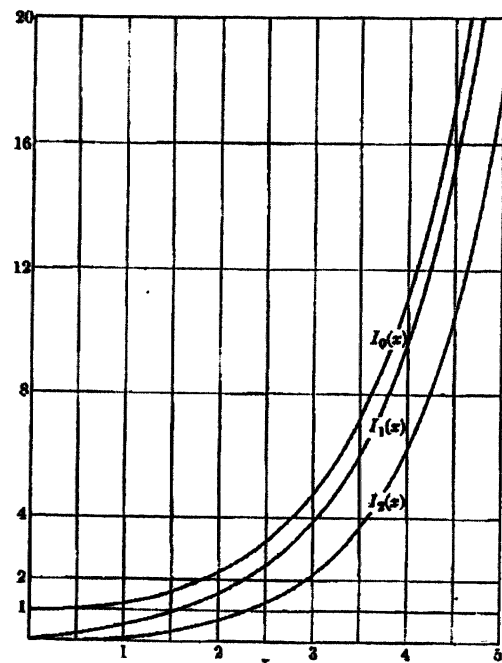
$$K_v(x) \sim \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \left\{ 1 + \frac{4v^2 - 1^2}{118x} + \frac{(4v^2 - 1^2)(4v^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right\}, \quad (3-157)$$



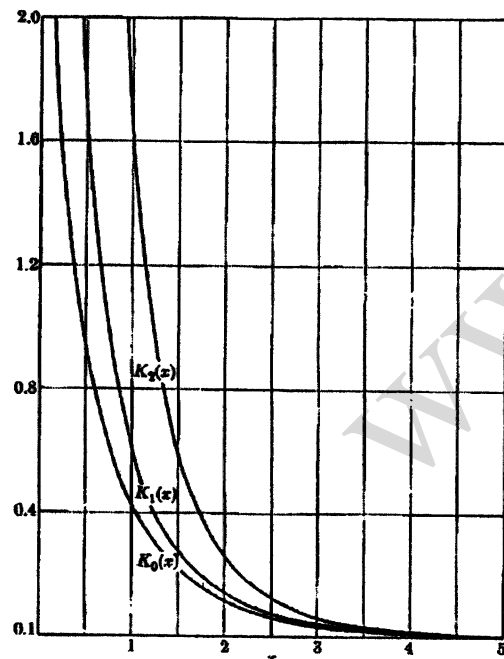
شکل ۳-۲۴ الف



شکل ۳-۲۴ ب



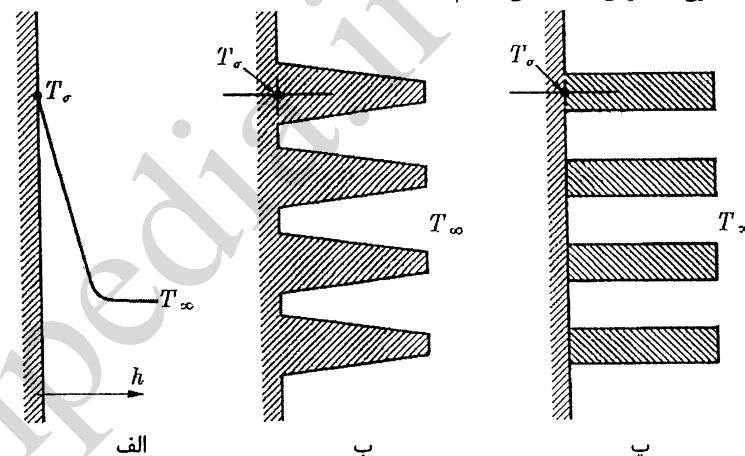
شکل ۳-۲۴ پ



شکل ۳-۲۴ ت

۷. نمایش گرافیکی رفتار کلی توابع بسل: گرافهای رفتار کلی توابع بسل در شکل (۳-۲۴) نشان داده شده است.

در اینجا مرور توابع بسل به پایان رسید، حال می‌توانیم استفاده از این توابع را برای حل مسائل مربوط به سطوح گسترش‌یافته نشان دهیم.



شکل ۳-۲۵

۳-۸. سطوح گسترش‌یافته (پره‌ها، گیره‌ها، میله‌ها)

پیش از فرمولاسیون مسائل انتقال حرارت مربوط به سطوح گسترش‌یافته می‌خواهیم به‌طور خلاصه راجع به مفهوم سطوح گسترش‌یافته و علت توجه ویژه به آن بحث کنیم. به همین منظور دیواره‌ای در دمای T_s را در نظر می‌گیریم که در حال تبادل حرارتی با محیطی دمای T_∞ می‌باشد. (شکل ۳-۲۵ الف). نرخ انتقال حرارت از این دیواره به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$q = hA(T_s - T_\infty). \quad (3-158)$$

اولین هدف مطالعه انتقال حرارت، پیدا کردن راهی برای کنترل کردن q است. به‌عنوان مثال، طراحی مبدل‌های حرارتی اغلب بر پایه رسیدن به حداقل مساحت انتقال حرارت ممکن (برای سبکی و جمع و جور بودن)، یا رسیدن به حداکثر مقدار انتقال حرارت برای هر اندازه از مبدل حرارتی می‌باشد. واضح است که q در معادله (۳-۱۵۸) با افزایش موارد زیر افزایش می‌یابد:

(i) اختلاف دمای بین دیواره و محیط،

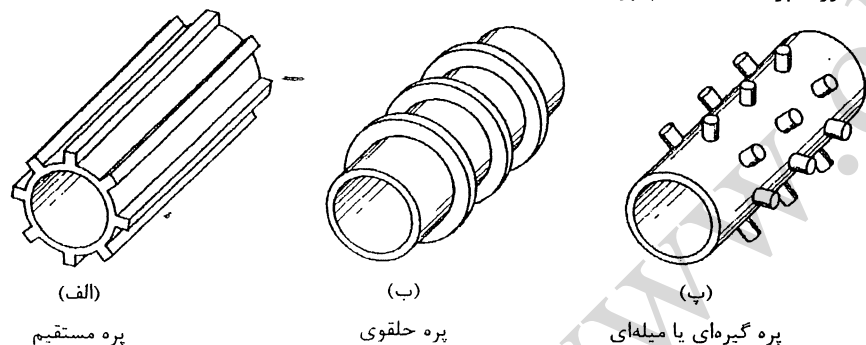
(ii) ضریب انتقال حرارت،

(iii) سطح انتقال حرارت (سطح مورد مطالعه یعنی سطح الف در شکل ۳-۲۵ بدون تغییر نگه داشته شود).

مورد اول نیاز به توضیح بیشتری ندارد؛ مورد دوم، موضوع کتاب‌های نوشته شده در مورد انتقال حرارت جابه‌جایی است؛ و مورد سوم موضوع این بخش است.

سطح دیواره، همان‌طور که در شکل ۳-۲۵ ب و پ نشان داده شده است، در کل به دو روش قابل افزایش است. در شکل ۳-۲۵ ب، سطح گسترش‌یافته جزئی از سطح اصلی است، که با ریخته‌گری یا قالب‌گیری ساخته شده است. در شکل ۳-۲۵ پ، سطوح گسترش‌یافته، که می‌توانند از ماده سطح اصلی ساخته شده یا نشده باشد، به سطح دیواره توسط لحیم یا جوشکاری یا پرس متصل شده باشند. هندسه مشابهی، هرچند کم کاربرد، به وسیله براده‌برداری و کنده‌کاری ماده اصلی نیز حاصل می‌شود. در عمل، تکنولوژی ساخت و قیمت، انتخاب شکل مناسب پره را تعیین می‌کند.

کاربرد سطوح گسترش‌یافته بی‌شمار است خصوصاً در انتقال حرارت در محیط گازی. در این حالت چون ضریب انتقال حرارت کوچک است تنها با استفاده از سطوح گسترش‌یافته، ممکن است یک سطح تبادل کوچک و فشرده به‌دست آید. مثال معروف استفاده از سطوح گسترش‌یافته پره‌های موجود در رادیاتور ماشین و دستگاه‌های گرماساز و مبدل‌های گاز به مایع و گاز به گاز، جوش‌آورها، موتورهای خنک‌کننده توسط هوا می‌باشند. دسته‌بندی معمول سطوح گسترش‌یافته به‌صورت پره‌های مستقیم، پره‌های حلقوی و پره‌های گیره‌ای و میله‌ای شکل می‌باشد (شکل ۳-۲۶).



شکل ۳-۲۶

حال می‌خواهیم به هدف خود بازگردیم، مطالعه انتقال حرارت در سطوح گسترش‌یافته، از آنجایی‌که دمای یک سطح گسترش‌یافته در تمام طول آن به علت انتقال حرارت جابه‌جایی به محیط ثابت نیست، انتقال حرارت از سطوح گسترش‌یافته با استفاده از معادله (۳-۱۵۸) قابل محاسبه نمی‌باشد. بنابراین ابتدا توزیع دما در سطوح گسترش‌یافته به‌دست می‌آید و سپس انتقال حرارت انجام شده در این توزیع دما محاسبه می‌شود.

برای تکمیل شدن فرمول‌ها تنها شرایط مرزی در جهت x مورد نیاز است. با توجه به ثابت بودن k طبق فرض (ii) و اندازه‌گیری دماهای بالاتر از دمای محیط، می‌توان با بازآرایی معادله (۳-۱۶۱) به رابطه زیر رسید:

$$\frac{d}{dx} \left(kA \frac{d\theta}{dx} \right) - \frac{hP}{k} \theta = 0, \quad (3-162)$$

که در آن $\theta = T - T_\infty$ می‌باشد. توجه شود که برای فرمولاسیون مساله تنها از دو فرض اول استفاده شد. فرض (iii)، h ثابت، در آخر کار برای ساده‌سازی انتگرال مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آنجایی که تاکنون اکثر شرایط مرزی معمول در مسائل انتقال حرارت با جزییات مورد بررسی قرار گرفته است (بخش ۸-۲ را بررسی کنید)، شرایط مرزی اعمال شده در معادله (۳-۱۶۲) نیاز به توجه ویژه دارد. بنابراین، چند مثال مشخص مورد بررسی قرار می‌گیرد ابتدا بررسی سطوح گسترش‌یافته با سطح مقطع ثابت انجام شده سپس به بررسی سطح متغیر نیز خواهیم پرداخت. سطوح گسترش‌یافته با سطح مقطع ثابت. هنگامی که سطح مقطع عرضی ثابت باشد معادله (۳-۱۶۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0, \quad (3-163)$$

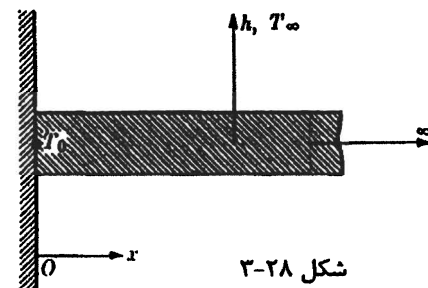
که در آن $m^2 = hP/kA$

پاسخ کلی معادله (۳-۱۶۳) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (3-164)$$

$$\theta(x) = C_3 \cosh mx + C_4 \sinh mx. \quad (3-165)$$

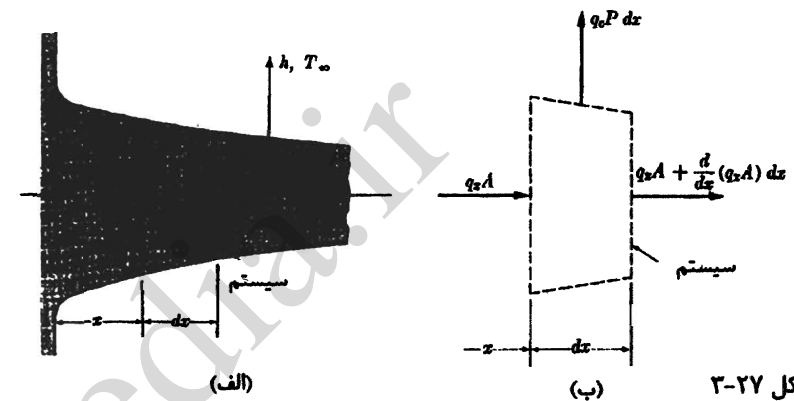
همان‌گونه که در استفاده از شرایط مرزی دیده شد، معادلات (۳-۱۶۴) و (۳-۱۶۵) به ترتیب برای مسائل سطوح گسترش‌یافته نیمه بینهایت و طول محدود مناسب می‌باشند.



شکل ۳-۲۸

مثال ۳-۹. با توجه به پره نیمه بینهایت (شکل ۳-۲۸) که دمای پایه آن T_0 می‌باشد. مطلوبست محاسبه توزیع دما درون پره و انتقال حرارت منتقل شده از آن.

با انتخاب پایه پره به عنوان مبدا جهت x و با توجه به این که دمای پره هنگامی که $x \rightarrow \infty$ به سمت دمای محیط میل می‌کند. شرایط مرزی به



شکل ۳-۲۷

حال یک سطح گسترش‌یافته با سطح مقطع متغیر مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ۳-۲۷). فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم. (i) عرض مشخصه یا ضخامت پره در مقایسه با طول محوری آن ناچیز در نظر گرفته می‌شود. بنابراین توزیع دما در عرض در مقایسه با توزیع دمای محوری ناچیز می‌باشد. (ii) ضریب هدایت حرارتی ثابت است. (از تابعیت دمایی آن صرف‌نظر می‌کنیم). (iii) ضریب انتقال حرارت شعاعی و محوری مورد استفاده، متوسط مقدار واقعی آن است. تحت شرایط پایا و با استفاده از فرض (i) و با استفاده از چهار مرحله اول فرمولاسیون، معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) - q_c P = 0, \quad (3-159)$$

که در این معادله T دمای محلی، x طول محوری، k ضریب هدایت حرارتی، A سطح مقطع عرضی متغیر، q_c شار حرارتی عرضی. و P محیط می‌باشد. معادله (۳-۱۵۹) شرط مرزی زیر تصدیق می‌کند:

$$q_c = h(T - T_\infty), \quad (3-160)$$

دو شرط مرزی در x داریم. یکی وابسته به پایه و دیگری مربوط به نوک سطح گسترش‌یافته است. تمام این بخش‌ها مربوط به پنجمین و آخرین مرحله فرمولاسیون است. از روی این دیدگاه و با قرار دادن معادله (۳-۱۶۰) در معادله (۳-۱۵۹) نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_\infty) = 0, \quad (3-161)$$

خواهیم داشت. استفاده از معادله (۳-۱۷۰) با در نظر داشتن این حقیقت که توزیع دما نسبت به x متقارن است، و بنابراین جواب تنها باید از توابع زوج تشکیل شده باشد، منجر به $C_4 = 0$ می‌شود. به علاوه با توجه به معادله (۳-۱۷۱) رابطه $C_3 = \theta_0 / \cosh ml$ به دست می‌آید پس:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{\cosh mx}{\cosh mL} \quad (3-172)$$

مساله فوق را با فرض این که مبداء مختصات در پایه پره باشد و با استفاده از جواب کلی معادله (۳-۱۶۴) دوباره حل کنید پیچیدگی ریاضی این دو حل را مقایسه کنید. [حرارت کلی منتقل شده از پره، که به وسیله هدایت صورت گرفته از پایه پره ارزیابی می‌شود و به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} q &= - \left[-kA \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=L} \right] \\ &= \frac{kA\theta_0}{\cosh mL} \frac{d}{dx} (\cosh mx) \Big|_{x=L} \\ &= \theta_0 (hPkA)^{1/2} \tanh mL. \end{aligned} \quad (3-173)$$

از آنجایی که $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \rightarrow 1$ معادله (۳-۱۷۳) وقتی $ml \rightarrow \infty$ به معادله (۳-۱۶۹) میل خواهد کرد. زمانی که طول یک پره محدود به سمت نامحدود شدن افزایش یابد، انتقال حرارت از آن نیز به سمت انتقال حرارت از یک پره نامحدود میل خواهد کرد. این عبارت مستقل از نوع شرط مرزی‌ای است که در انتهای پره استفاده می‌شود زیرا هنگامی که $L \rightarrow \infty$ اثرات انتهایی پره حذف می‌شود. شرط $ml \rightarrow \infty$ می‌تواند به صورت $m \rightarrow \infty$ نیز، برای یک L مفروض تعریف شود. این حالت به سادگی از روی تعریف m ، $(hp/kA)^{1/2}$ ، و متناظر با $h \rightarrow \infty$ یا $k \rightarrow 0$ به دست خواهد آمد.

قبل از آغاز بررسی سطوح گسترش یافته با سطح مقطع متغیر بهتر است مقدماتی را برای تخمین و مقایسه سطوح گسترش یافته ارائه دهیم. این مقدمات معمولاً به صورت کارایی سطوح گسترش یافته تشریح می‌شود.

دو تعریف مرسوم برای این کارایی به صورت نسبت انتقال حرارت واقعی به انتقال حرارت تئوری وجود دارد:

$$\eta_b = \frac{\text{انتقال حرارت واقعی از سطح گسترش یافته}}{\text{انتقال حرارت از دیوار بدون پره}} \quad (3-174)$$

$$\eta = \frac{\text{انتقال حرارت واقعی از سطح گسترش یافته}}{\text{انتقال حرارت واقعی از سطح گسترش یافته در دمای پایه}} \quad (3-175)$$

صورت زیر خواهد بود.

$$\theta(0) = \theta_0, \quad (3-166)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) \rightarrow 0, \quad (3-167)$$

که در آن $\theta = T_0 - T_\infty$ می‌باشد.

معادله (۳-۱۶۷) نشان می‌دهد که C_1 در معادله (۳-۱۶۴) باید صفر باشد و بر طبق معادله (۳-۱۶۶) به سادگی $C_2 = \theta_0$ به دست خواهد آمد، پس توزیع دمای مطلوب به صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = e^{-mx} \quad (3-168)$$

اکنون می‌توان حرارت منتقل شده از پره را برحسب این توزیع دما و با ساده سازی معادله انتگرال جابه جایی در طول پره، به دست آورد. بنابراین، معادله زیر به دست می‌آید:

$$q = \int_0^\infty hP\theta dx = hP\theta_0 \int_0^\infty e^{-mx} dx = \theta_0 (hPkA)^{1/2}. \quad (3-169)$$

با توجه به این که انتقال حرارت کلی از پره به وسیله جابه جایی باید به وسیله هدایت از پایه پره تامین شود، می‌توان نتیجه مشابهی از معادلات هدایت برای انتقال حرارت گرفت.

$$q = -kA \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} = -kA\theta_0 \frac{d}{dx} (e^{-mx}) \Big|_{x=0} = \theta_0 (hPkA)^{1/2}.$$

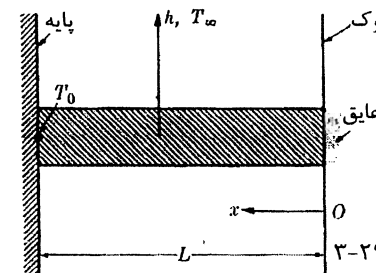
روش دوم محاسبه انتقال حرارت استفاده از شکل دیفرانسیلی به جای انتگرالی است که به خصوص برای معادلات پیچیده تر رایج تر است.

مثال ۳-۱۰. میله‌ای با طول محدود L و دمای پایه T_0 را در نظر بگیرید. انتهای پره عایق است (شکل ۳-۲۹). توزیع دمایی در پره و انتقال حرارت از آن را به دست آورید.

برای این مساله انتهای پره برای مبداء مناسب تر است. پس شرایط مرزی بدین صورت خواهد شد:

$$\frac{d\theta(0)}{dx} = 0, \quad (3-170)$$

$$\theta(L) = \theta_0, \quad (3-171)$$



که، طبق قبل، $\theta = T_0 - T_\infty$ می‌باشد. از آنجایی که پره در جهت طول محدود است، ما پاسخ کلی مساله را به صورت معادله (۳-۱۶۵)

شکل ۳-۲۹

مخرج رابطه (۳-۱۷۴) بیان کننده انتقال حرارت از سطحی از دیواره برابر سطح پایه پره می باشد؛ در معادلات فوق انتقال حرارت باید با بررسی همزمان صورت و مخرج و براساس اختلاف دمای یکسان، دمای پایه منهای دمای محیط، محاسبه شود. تا زمانی که دمای دیواره و ضریب انتقال حرارت بین دیواره و محیط با اتصال سطح گسترش یافته به دیواره تغییر پیدا کند، محاسبه کارایی از روی رابطه (۳-۱۷۴) تقریبی خواهد بود. خطای این تقریب به طول سطوح گسترش یافته و فضای بین آن ها وابسته خواهد بود. از آنجایی که تغییرات دمای دیواره و ضریب انتقال حرارت، به طور مساوی صورت و مخرج کسر معادله (۳-۱۷۵) را تحت تاثیر قرار می دهند، کارایی تعریف شده طبق این معادله به واقعیت نزدیک تر است و عملاً به رابطه دیگر ترجیح داده می شود. به هر حال علاوه بر نشان دادن افزایش انتقال حرارت به وسیله سطح گسترش یافته، این کارایی برای مقایسه سطوح گسترش یافته مختلف مناسب تر می باشد. مقادیر این کارایی ها برای مثال ۳-۹ به صورت زیر خواهد بود:

$$\eta_b = \frac{\theta_0(hPKA)^{1/2}}{\theta_0 hA} = \left(\frac{kP}{hA}\right)^{1/2}$$

$$\eta = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\theta_0(hPKA)^{1/2}}{\theta_0 hPL} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{kA}{hP}\right) \frac{1}{L} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{mL}\right) \rightarrow 0,$$

و برای مثال ۳-۱۰ بدین صورت خواهد شد:

$$\eta_b = \frac{\theta_0(hPKA)^{1/2} \tanh mL}{\theta_0 hA} = \left(\frac{kP}{hA}\right)^{1/2} \tanh mL,$$

$$\eta = \frac{\theta_0(hPKA)^{1/2} \tanh mL}{\theta_0 hPL} = \frac{\tanh mL}{mL},$$

در مورد کارایی سطوح گسترش یافته در مقالات، تحقیقات زیادی انجام شده است. اگرچه، در عمل ترجیح داده می شود که به جای افزایش کارایی به اندازه ۵ تا ۱۰ درصد، که هزینه زیادی را نیز در بر دارد به فناوری توجه شود. به همین منظور، کارایی سطوح گسترش یافته در این کتاب مورد توجه قرار نگرفته است. جزئیات بیشتر در مراجع ۸، ۹، و ۱۱ موجود است.

سطوح گسترش یافته با سطح مقطع متغیر. فرمولاسیون کلی مسائل سطوح گسترش یافته با سطح مقطع متغیر در معادله (۳-۱۶۲) داده شده است. از آنجایی که A و P دیگر ثابت نیستند، این معادله تبدیل به معادله دیفرانسیل، ضرایب متغیر می شود که جواب کلی آن هنگامی که $P(x)$ و $A(x)$ مشخص باشد قابل محاسبه خواهد بود. در اغلب حالت ها، همان طور که در بخش ۳-۶ مورد توجه قرار گرفت معادله (۳-۱۶۲) به شکل معادلات بسل تبدیل می شود. یک حالت خاص این معادلات تبدیل شدن به معادله هم بعد است. حالت هایی که به این معادلات منتهی نمی شوند به صورت منحصر به فرد با استفاده از جواب سری های توانی قابل حل می باشند. دو مثال بعدی نشان دهنده سطوح گسترش یافته با سطح مقطع متغیر خواهد بود.

مثال ۳-۱۱. مشخصات پره صاف، با سطح مقطع مثلثی در شکل (۳-۳۰) نشان داده شده است. دمای پایه پره T_0 می باشد. مطلوبست محاسبه توزیع دمای پره و انتقال حرارت صورت گرفته از آن. فرض معمول $b/L \ll 1$ را برای سطوح گسترش یافته در نظر می گیریم. همچنین برای یک بعدی کردن توزیع دما از یکی از فرضیات $L/l \ll 1$ یا عایق بودن انتهای پره در جهت l می توان استفاده کرد.

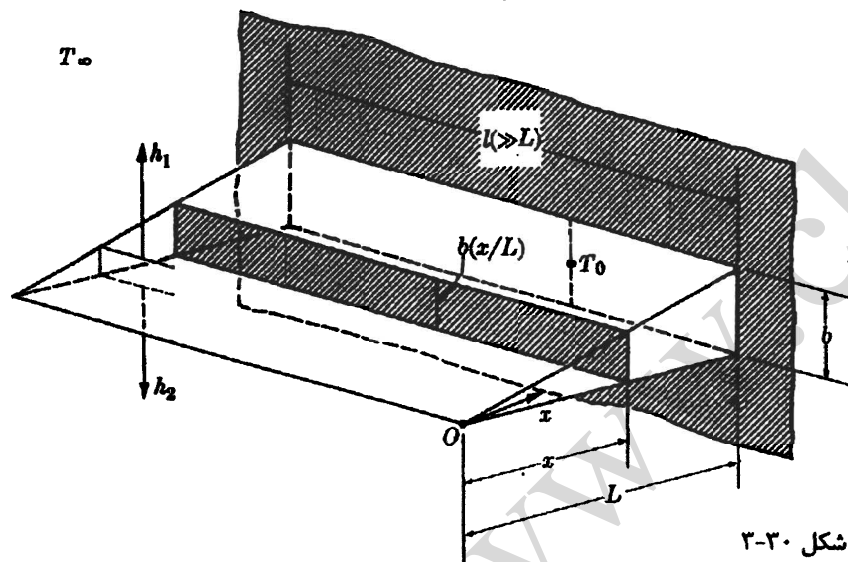
با توجه به شکل (۳-۳۰)، $A = b(x/L)l$ و $hP = (h_1 + h_2)l$ به دست می آید و با جایگزینی این روابط در معادله (۳-۱۶۲) و بازاریابی نتایج خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\theta}{dx} \right) - m^2 \theta = 0, \quad (3-176)$$

که در آن $m^2 = (h_1 + h_2)L/kb$ می باشد. با مقایسه معادله (۳-۱۷۶) و جدول ۳-۱ نتایج زیر به دست می آید:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \pm im,$$

$$v = 0, \quad \mu = 2, \quad v/\mu = 0.$$

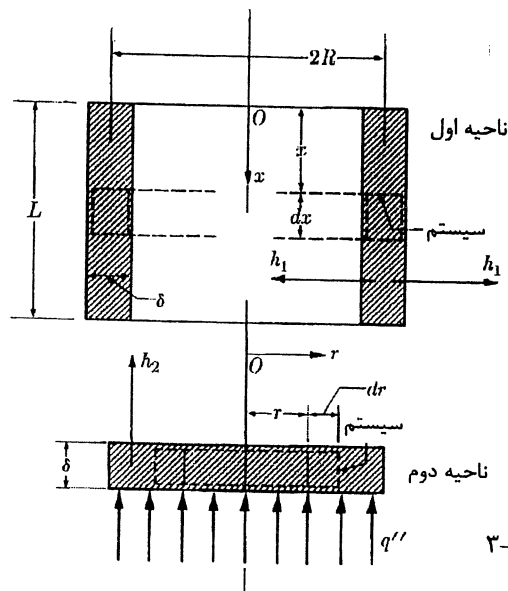


شکل ۳-۳۰

در نتیجه جواب کلی معادله (۳-۱۷۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$\theta(x) = C_1 I_0(2mx^{1/2}) + C_2 K_0(2mx^{1/2}). \quad (3-177)$$

طبق شکل (۳-۲۴) (ت) خواهیم داشت:

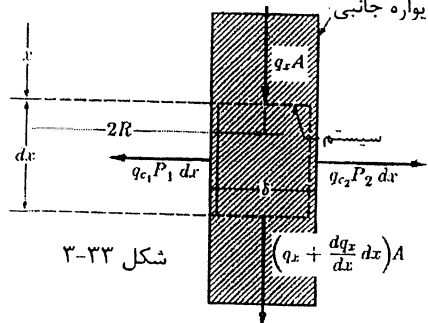



شکل ۳-۳۲

پیشنهاد می‌شود که برای راحتی محاسبات مساله را به دو بخش تقسیم کنیم (شکل ۳۲-۳).
دو مرحله اول فرمولاسیون، به‌کارگیری سیستم یک‌بعدی برای دیواره‌های کناری است (شکل ۳۳-۳) و قانون کلی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$0 = +q_x A - \left(q_x + \frac{dq_x}{dx} dx \right) A - q_{c_1} P_1 dx - q_{c_2} P_2 dx. \quad (7-11a)$$

قانون خاص مرحله سوم در معادله (۱۸۰-۳) وارد شده و معادله حاکم حاصل از مرحله چهارم با قسمتی از مرحله پنجم که مربوط به تعریف ضریب انتقال حرارت است، بازاریابی می‌شود و برای دیواره‌های کناری معادله زیر حاصل می‌شود:



شکل ۳-۳۳

$$\frac{d^2\theta_1}{dx^2} - m_1^2\theta_1 = 0, \quad (3-181)$$

فرض می‌شود که $R \ll \delta$ بوده و بنابراین $P_1 \cong P_2$ است. در اینجا $m_1^2 = 2h_1/k\delta$ و $\theta_1 = T_1 - T_\infty$ دمای محلی دیواره‌های کناری است. همان‌طور که انتظار می‌رود معادله (۱۸۱-۳) با فرمولاسیون مسائل سطوح گسترش یافته با سطح مقطع ثابت که با معادله

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_0(x) \rightarrow \infty,$$

برای انطباق دمای انتهای سطح باید $C_2 = 0$ شود. به علاوه با استفاده از دمای پایه خواهیم داشت $C_1 = \theta_0 / I_0 (2mL^{1/2})$ که مطابق گذشته $\theta_0 = T_0 - T_{\infty}$ است. با جاگذاری مقادیر C_1 و C_2 در معادله (۱۷۷-۳)، توزیع دما در پره به دست می آید.

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{I_0(2mx^{1/2})}{I_0(2mL^{1/2})}. \quad (17)$$

دوباره، انتقال حرارت از پره با توجه به هدایت صورت گرفته از پایه پره به دست می‌آید. بنابراین

$$q = -[-kA(d\theta/dx)_{x=L}],$$

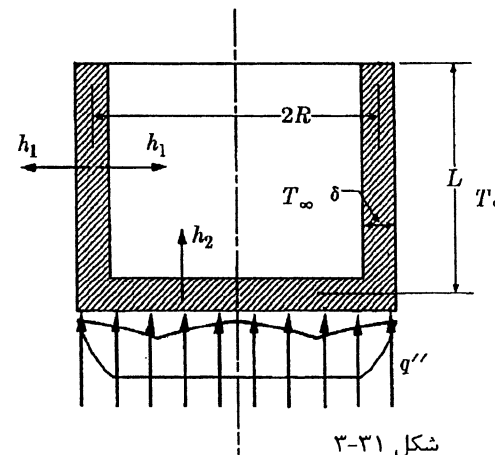
که از معادله (۱۷۸-۳) و به‌وسیله معادله (۱۳۷-۳) به‌دست آمده است. در زیر با در نظر گرفتن $\xi = 2mx^{1/2}$ به معادله زیر خواهیم رسید.

$$\frac{d}{dx}[I_0(\xi)] = \frac{d}{d\xi}[I_0(\xi)] \frac{d\xi}{dx} = \frac{m}{x^{1/2}} I_1(2mx^{1/2}),$$

که انتقال حرارت از پره، به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{q}{kA\theta_0/L} = \frac{(mL^{1/2})I_1(2mL^{1/2})}{I_0(2mL^{1/2})}. \quad (3-179)$$

مثال ۱۲-۳. یک قابلمه خالی بر روی یک صفحه داغ قرار گرفته است (شکل ۳۱-۳). فرض

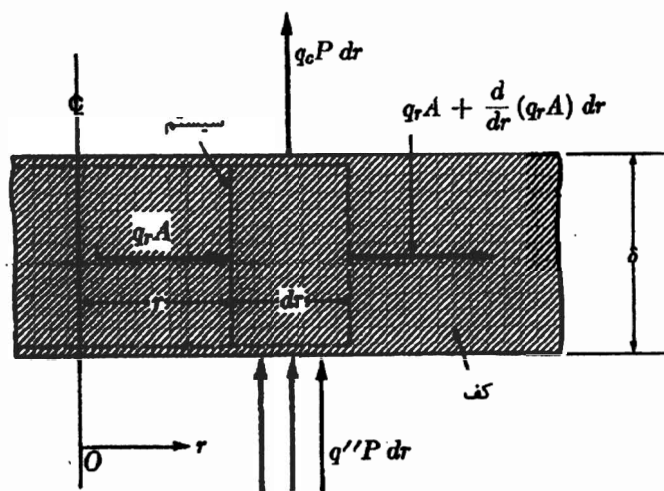


شكل ٣-٣١

می‌شود که به کف ظرف یک شار
حرارتی یکنواخت q'' اعمال می‌شود.
دمای محیط T_∞ است و ضرایب انتقال
حرارت h_1 و h_2 هستند. ضریب هدایت
حرارتی، ضخامت، شعاع و ارتفاع ظرف
به ترتیب k ، δ و R و L هستند.
می‌خواهیم توزیع دما در ظرف را پیدا
کنیم.

تغییر دما در عرض ضخامت ناچیز است و فرض می‌کنیم که توزیع دما در ظرف یک‌بعدی و به صورت شعاعی در کف و محوری در دیواره‌های کناری است.

$$\theta_2(R) = \text{محدود} \quad \left(\text{یا} \quad \frac{d\theta_2(0)}{dr} = 0 \right). \quad (3-189)$$



شکل ۳-۳۴

معادلات (۳-۱۸۲) و (۳-۱۸۵) به ترتیب با معادلات (۳-۱۸۶) و (۳-۱۸۹) در نظر گرفته شده و $C_4 = 0$ و $D_2 = 0$ را می‌دهند. سپس نتایج را در معادلات (۳-۱۸۷) و (۳-۱۸۸) قرار داده و نتیجه می‌دهند:

$$C_3 \cosh m_1 L = n/m_2^2 + D_1 I_0(m_2 R),$$

$$C_3 m_1 \sinh m_1 L + D_1 m_2 I_1(m_2 R) = 0.$$

با حل این معادلات جبری برای ثوابت C_3 و D_1 و قرار دادن نتایج آن به همراه C_4 و D_2 در معادلات (۳-۱۸۲) و (۳-۱۸۵) توزیع دما در ظرف به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{\theta_1(x)}{q''/h_2} = \frac{\cosh m_1 x / \cosh m_1 L}{1 + (m_1/m_2)[I_0(m_2 R)/I_1(m_2 R)] \tanh m_1 L}, \quad (3-190)$$

$$\frac{\theta_2(x)}{q''/h_2} = 1 - \frac{I_0(m_2 r)/I_0(m_2 R)}{1 + (m_2/m_1)[I_1(m_2 R)/I_0(m_2 R)] \coth m_1 L}, \quad (3-191)$$

حالت‌های خاص معادلات (۳-۱۹۰) و (۳-۱۹۱) وقتی که $m_2 \rightarrow 0$ و $m_2 \rightarrow \infty$ چه خواهد بود؟ شرایط فیزیکی مطابق با این حالات را شرح دهید.

(۳-۱۶۳) ارائه شده است، یکسان می‌باشد و تنها تفاوت‌شان در تعریف m_1^2 می‌باشد. شکل هندسی محدود دیواره‌های کناری، یک پاسخ عمومی را برای معادله (۳-۱۸۱) نظیر معادله (۳-۱۶۵) پیش‌بینی می‌کند. پس خواهیم داشت:

$$\theta_1(x) = C_3 \cosh m_1 x + C_4 \sinh m_1 x. \quad (3-182)$$

حال فرمولاسیون مربوط به کف ظرف را در نظر می‌گیریم. دو مرحله اول فرمولاسیون، به صورت عبارات سیستم یک‌بعدی نشان داده شده در شکل ۳-۳۴ بیان شده‌اند و نتیجه می‌دهد:

$$0 = +q_r A - \left(q_r A + \frac{d}{dr} (q_r A) dr \right) - q_c P dr + q'' P dr. \quad (3-183)$$

مجدداً با قرار دادن قانون خاص موجود در مرحله سوم فرمولاسیون، در معادله (۳-۱۸۳) و بازآرایی معادله حاکم به دست آمده از مرحله چهارم توسط قسمتی از مرحله پنجم که در ارتباط با ضریب انتقال حرارت بوده است، به فرمولاسیون زیر خواهیم رسید:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta_2}{dr} \right) - m_2^2 r \left(\theta_2 - \frac{n}{m_2^2} \right) = 0, \quad (3-184)$$

که در آن $m_2^2 = h_2/k\delta$ ، $n = q''/k\delta$ ، $\theta_2 = T_2 - T_\infty$ و T_2 دمای محلی کف ظرف است. توجه کنید که معادله (۳-۱۸۴) برحسب $\theta_2 - n/m_2^2$ همگن است. از مقایسه معادله (۳-۱۸۴) با نتایج جدول ۳-۱ داریم:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \pm im,$$

$$v = 0, \quad \mu = 1, \quad v/\mu = 0.$$

از این‌رو پاسخ برای کف ظرف به این صورت به دست می‌آید:

$$\theta_2(x) = n/m_2^2 + D_1 I_0(m_2 r) + D_2 K_0(m_2 r). \quad (3-185)$$

با صرف‌نظر کردن از انتقال حرارت از بالای دیواره‌های کناری و با توجه به انتخاب مناسب مرکز مختصات برای کف ظرف و دیواره‌های کناری (شکل ۳-۳۲)، می‌توانیم شرایط مرزی مساله را به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{d\theta_1(0)}{dx} \cong 0, \quad (3-186)$$

$$\theta_1(L) = \theta_2(R), \quad (3-187)$$

$$\left[-k \frac{d\theta_1(L)}{dx} \right] + \left[-k \frac{d\theta_2(R)}{dr} \right] = 0, \quad (3-188)$$

پایین $m_2 R \leq 0.1$ حاصل خواهد شد. در این حالت $h \gg k$ است و دمای داخل ظرف را می‌توان متمرکز در نظر گرفت. از فرمولاسیون متمرکز برای مساله خواهیم داشت:

$$\frac{\theta}{q''/h} = \frac{1}{1+4(L/R)}, \quad \text{وقتی } h_1/h_2 = 1 \text{ و } m_2 R \leq 0.1$$

برای حد بالایی $m_2 R \geq 10$ حاصل شده است. به هر حال این حالت منجر به هیچ‌گونه ساده‌سازی در فرمولاسیون نخواهد شد.

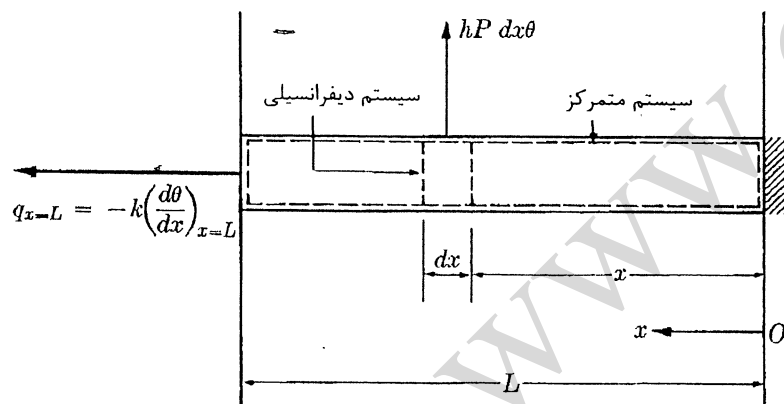
حال اگر فرض شود که یک لایه نازک از آب در ته ظرف وجود دارد و یا وقتی $m_2 R \geq 10$ و $h_1/h_2 \sim 1/200$ ، دمای کف ظرف با فرض متمرکز بودن، پنج درصد و یا کمتر خطا خواهد داشت که این امر در گوشه بالایی سمت راست شکل ۳-۳۵ نشان داده شده است. دمای متمرکز کف به‌سهولت به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\theta_2 = q''/h_2, \quad \text{وقتی } h_1 \ll h_2 \text{ و } m_2 R \geq 10.$$

با استفاده از این دما به‌عنوان دمای مرجع یا پایه امکان حصول فرمولاسیون دیواره‌های کناری به‌صورت مثال ۳-۱۰ فراهم می‌شود. پس توزیع دما در دیواره‌های کناری به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\theta_1(x)}{q''/h_2} = \frac{\cosh m_1 x}{\cosh m_1 L}, \quad \text{وقتی } h_1 \ll h_2 \text{ و } m_2 R \geq 10.$$

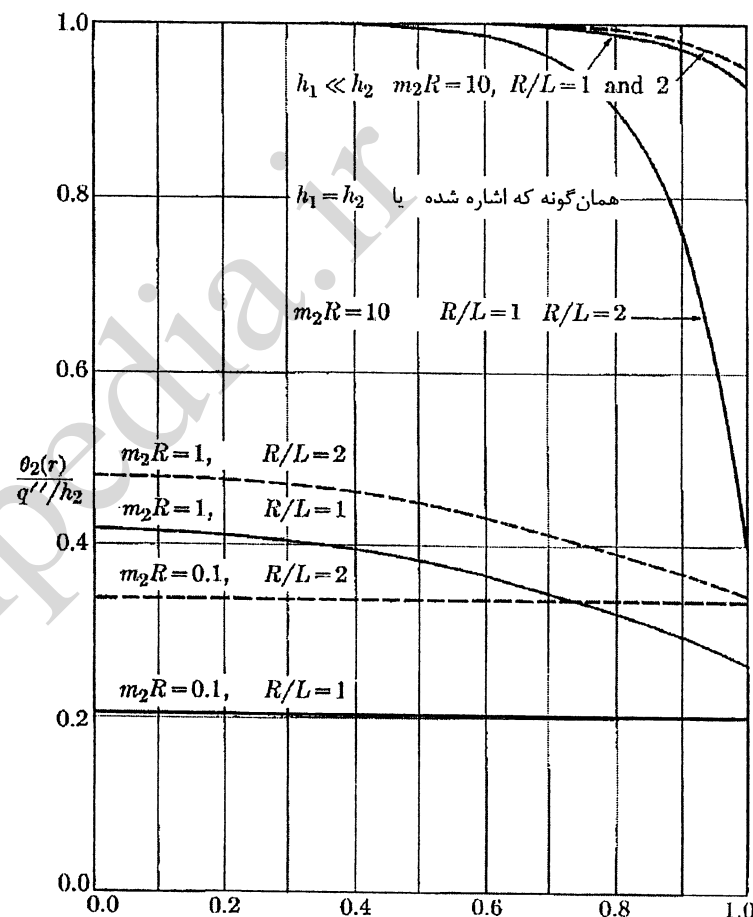
در اینجا باز هم باید تاکید نمود که توجیحات فیزیکی دارای اهمیت زیادی در ساده‌سازی مسائل پیچیده هستند.



شکل ۳-۳۶

۳-۹. حل تقریبی برای سطوح گسترش‌یافته

در این بخش حل تقریبی بعضی مثال‌ها که به‌عنوان سطوح گسترش‌یافته تلقی می‌شوند، انجام خواهد شد. این راه‌حل‌ها براساس انتخاب پروفایل دمایی صادق در شرایط مرزی مساله و به‌صورت



شکل ۳-۳۵

در ارتباط با موارد خاص مذکور دمای کف ظرف را که با معادله (۳-۱۹۱) ارائه شده است، رسم خواهیم نمود. به‌خاطر پارامترهای متعدد موجود در مساله، بررسی کامل پارامتریک خیلی طولانی خواهد بود و برای هدف ما غیرضروری است. ما در اینجا فقط حالت خاصی که $h_1/h_2 \sim 1$ بوده و R/L بین ۱ و ۲ متغیر است را در نظر می‌گیریم. در شکل ۳-۳۵ مقادیر $\theta_2(r)/(q''/h_2)$ در برابر r/R برای مقادیر ۰/۱ و ۱ و ۱۰ از $m_2 R$ و مقادیر ۱ و ۲ برای R/L متناظر با $h_1/h_2 = 1$ رسم شده‌اند. با بررسی شکل مشخص می‌شود که مقادیر عملی را می‌توان به‌طور مناسب به‌جای موارد خاص ریاضی $m_2 \rightarrow 0$ و $m_2 \rightarrow \infty$ به‌کار برد. پس زمانی که $h_1/h_2 = 1$ باشد برای حد

توابع ساده، بیان شده است. پارامترهای پروفایل انتخاب شده از فرمولاسیون انتگرالی مساله به دست آمده‌اند.

مثال ۱۳-۳. می‌خواهیم پاسخ تقریبی درجه اولی برای مساله مثال ۱۰-۳ را به دست آوریم.

فرمولاسیون انتگرالی مساله به سهولت برحسب سیستم‌های دیفرانسیلی و متمرکز نشان داده شده در شکل ۳-۳۶ به دست خواهد آمد. پس خواهیم داشت:

$$0 = - \left[-kA \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=L} \right] - hP \int_0^L \theta dx. \quad (3-192)$$

معادله (۳-۱۹۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

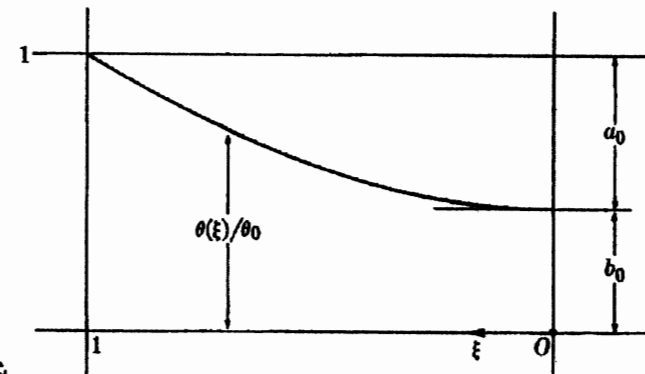
$$0 = \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=L} - m^2 \int_0^L \theta dx, \quad (3-193)$$

که با انتگرال معادله (۳-۱۹۳) در بازه $(0, L)$ که قبلاً حاصل شده است، یکسان خواهد بود. معادله (۳-۱۹۳) ممکن است برحسب جملاتی از عبارت $\xi = x/L$ و $\mu = mL$ بازنویسی شود که برای ارزیابی پروفایل‌های دما مناسب است. بنابراین:

$$0 = \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=1} - \mu^2 \int_0^1 \theta d\xi. \quad (3-194)$$

می‌توان یک پروفایل درجه اول ریتز که شرایط مرزی مساله را ارضا می‌کند را به صورت سهمی زیر نوشت^۱ (شکل ۳-۳۷).

$$\theta(\xi)/\theta_0 = 1 - (1 - \xi^2) a_0. \quad (3-195)$$



شکل ۳-۳۷

۱- همچنین می‌توان سهمی را به صورت جملاتی از دمای نوک، $b_0 \theta_0$ برحسب $\theta(\xi)/\theta_0 = \xi^2 + (1 - \xi^2) b_0$ تعریف نمود ولی چندان مناسب نیست.

که در آن a_0 پارامتر مجهولی است که باید محاسبه شود. با قرار دادن معادله (۳-۱۹۵) در معادله (۳-۱۹۴) و انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{\mu^2/2}{1 + \mu^2/3}.$$

بنابراین با تقریب درجه اول ریتز دمای پره به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{\theta(\xi)}{\theta_0} = 1 - \frac{\mu^2/2}{1 + \mu^2/3} (1 - \xi^2). \quad (3-196)$$

حال پاسخ‌های دقیق و تقریبی مساله را که با معادلات (۳-۱۹۲) و (۳-۱۹۶) ارائه شده‌اند، مقایسه خواهیم کرد. وقتی که محل خاصی از پره را در نظر بگیریم می‌توان اثر ξ را از این قیاس حذف نمود. از آنجایی که در اینجا به جای خود دما با گرادیان دما سرو کار داریم، که در نوک پره به وسیله پروفایل تقریبی ارضا می‌شود، بیشترین اختلاف میان دماهای دقیق و تقریبی در نوک پره پیش‌بینی می‌شود. با قرار دادن $\xi = 0$ درون شکل بی‌بعد معادله (۳-۱۹۲) و در معادله (۳-۱۹۶)، دماهای دقیق و تقریبی نوک پره را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{\theta(0)}{\theta_0} = \frac{1}{\cosh \mu}, \quad \frac{\theta(0)}{\theta_0} = \frac{1 - \mu^2/6}{1 + \mu^2/3}.$$

دماها در جدول ۳-۲ برای بعضی از مقادیر μ مقایسه شده‌اند. بررسی جدول ۳-۲ تطابق خوب و نزدیکی میان پاسخ‌های دقیق و تقریبی را برای مقادیر کوچک μ آشکار می‌سازد. برای درک تطابق ضعیف در مقادیر بزرگ μ توجه شود که توزیع دمای دقیق مساله موجود وقتی که $\mu \rightarrow \infty$ مانند $e^{-\mu\xi}$ رفتار می‌کند که برای مثال می‌توان آن را به صورت $L \rightarrow \infty$ تفسیر کرد. حال اگر تابعی مثل $e^{-\mu\xi}$ را در نظر بگیریم، این تابع نمی‌تواند توسط تابعی دیگر مثل معادله (۳-۱۹۶) یک در بازه بزرگ به خوبی تقریب زده شود، بنابراین افزایش عدم تطابق بین دو جواب وقتی $\mu \rightarrow \infty$ آشکار خواهد شد.

جدول ۳-۲

μ	۰/۵	۱	۲	۴
دقیق	۰/۸۸۰۸	۰/۶۴۸۱	۰/۲۶۵۸	۰/۰۳۶۶
تقریبی	۰/۸۸۶۴	۰/۶۲۵۰	۰/۱۴۲۹	-۰/۲۶۳۲
خطا %	۰/۲۴۸	۳/۵۶	۴۶/۲	۸۱۹

۱- پاسخ دقیق مساله برحسب ξ اندازه‌گیری شده از پایه پره $\theta(\xi)/\theta_0 = \cosh \mu (1 - \xi) / \cosh \mu$ است. وقتی که $\mu \rightarrow \infty$ همان‌طور که انتظار می‌رود این پاسخ به $e^{-\mu\xi} = e^{\mu(1-\xi)}/e^\mu$ نزدیک می‌شود که شکل بدون بعد معادله (۳-۱۶۸) است.

تغییر باقی می‌ماند، درحالی‌که پیچیدگی روش‌های حل دقیق به‌سرعت افزایش پیدا خواهد کرد. این امر روش انتگرالی را مناسب و اغلب برای مسائل پیچیده ضروری می‌گرداند. اگر چه می‌بایست تا فصول ۵ و ۷ حل مسائل ناپایای یک‌بعدی با روش دیفرانسیلی به تأخیر انداخته شود، ولی در اینجا می‌توان به‌سادگی، انتخاب پروفایل‌های تقریبی را برای چنین مسائلی به روش انتگرالی تشریح کرد.

مثال ۱۴-۳. در مثال ۱۰-۳ و ۱۳-۳، دمای اولیه پره را یکنواخت و برابر دمای محیط T_{∞} در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که دمای پایه ناگهان به T_0 تغییر می‌کند و بعد از آن ثابت نگه داشته می‌شود. می‌خواهیم یک پاسخ درجه اول که تغییرات دمای تقریبی در پره را بدهد، بیابیم. از آنجایی‌که مساله شامل عمق نفوذ است^۱، فرمولاسیون آن می‌تواند در دو بازه زمانی متوالی داده شود. در بازه زمانی اول عمق نفوذ کمتر یا مساوی (در حالت حدی) طول پره است؛ در بازه زمانی دوم دمای نوک پره از صفر تا مقدار پایای آن بالا خواهد رفت.

با در نظر گرفتن حجم کنترل متمرکز و سیستم دیفرانسیلی مناسب که در شکل ۳۸-۳ نشان داده شده است، فرمولاسیون انتگرالی مساله برای بازه زمانی اول بدین‌گونه خواهد بود:

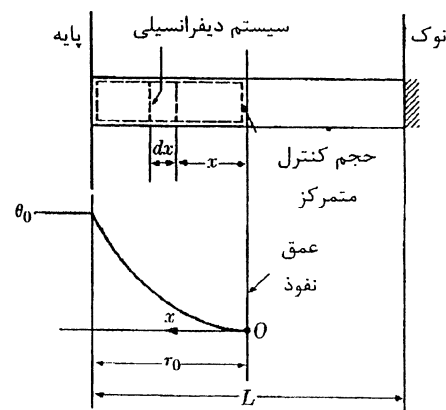
$$\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \int_0^{\tau_0} \theta dx = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=\tau_0} - m_2 \int_0^{\tau_0} \theta dx \quad (3-197)$$

که در آن $\theta = T - T_{\infty}$ و x مبدا محورها در عمق نفوذ است. با توجه به این‌که طول پره هیچ اثری در فرمولاسیون دامنه زمانی اول نخواهد داشت، معادله (۳-۱۹۷) را به همین شکل و بدون بی‌بعدسازی استفاده می‌کنیم.

از پروفایل درجه اول کانتروویچ به‌صورت یک سهمی وابسته به مکان و زمان، که شرایط مرزی را تصدیق نموده و برحسب عمق نفوذ τ_0 بیان می‌شود، استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\frac{\theta(x,t)}{\theta_0} = \left(\frac{x}{\tau_0} \right)^2. \quad (3-198)$$

با قراردادن معادله (۳-۱۹۸) در معادله (۳-۱۹۷) و انتگرال‌گیری از عبارت حاصل یک معادله دیفرانسیل غیرخطی به‌دست خواهد آمد:



شکل ۳۸-۳

در مورد حرارت منتقله از سطوح گسترش‌یافته، برای تعیین محدودیت پاسخ تقریبی که در بالا ارائه شده است، مناسب‌تر است به‌جای مقایسه دماهای دقیق و تقریبی، حرارت از دست رفته دقیق و تقریبی را مقایسه نماییم. این اتلاف‌ها بدین گونه‌اند:

$$\frac{q}{kA\theta_0/L} = \mu \tanh \mu, \quad \frac{q}{kA\theta_0/L} = \frac{\mu^2}{1+\mu^2/3}.$$

که عبارت دوم با استفاده از $q = hP \int_0^L \theta dx$ به‌جای $q = -[kA(d\theta/dx)]_{x=L}$ به‌دست آمده است.

(چرا؟ آیا نباید دو روش منجر به پاسخ یکسانی شوند؟) حرارت از دست رفته دقیق و تقریبی در جدول ۳-۳ برای بعضی از مقادیر μ مورد مقایسه قرار گرفته است. (چرا میزان خطای میان حرارت‌های از دست رفته دقیق و تقریبی کوچک‌تر از میزان آن میان دماهای دقیق و تقریبی برای یک μ داده شده است؟). بنابراین، وقتی $\mu < 2$ است خطای حرارت از دست رفته کمتر از ۱/۱۱٪ است. با به‌کارگیری مقدار حدی $\mu = 2$ می‌توان به عمق نفوذ برای یک میله با شعاع R به‌صورت $L = (2kR/h)^{1/2}$ رسید که پاسخ تقریبی موجود را در بر دارد.

جدول ۳-۳

μ	۰/۵	۱	۲	۴
دقیق	۰/۲۳۱۱	۰/۷۶۱۶	۱/۹۲۶۸	۳/۹۹۷۳
تقریبی	۰/۲۳۰۸	۰/۷۵۰۰	۱/۷۱۴۳	۲/۵۲۶۳
خطا %	۰/۱۳۰	۱/۵۲	۱۱/۱	۳۶/۸

به‌عنوان یک مثال یک میله فولادی با $k \cong 10 \text{ Btu/ft. hr. }^\circ\text{F}$ و $R = \frac{1}{2} \text{ in}$ در نظر گرفته می‌شود. انتقال حرارت به‌وسیله جابه‌جایی آزاد به محیط گازی با $h = 1 \text{ Btu/ft}^2 \cdot \text{hr. }^\circ\text{F}$ صورت گرفته است. طول مجاز برای این حالت $L \cong 0.91 \text{ ft}$ خواهد بود. اگر میله از مس ساخته شود ($k \cong 200 \text{ Btu/ft. hr. }^\circ\text{F}$) طول $L \cong 4.1 \text{ ft}$ خواهد شد. وقتی‌که انتقال حرارت به‌وسیله جابه‌جایی آزاد به مایعات یا جابه‌جایی اجباری انجام شود، در اکثر مواقع h افزایش می‌یابد و پاسخ تقریبی حاضر اغلب طول قابل توجهی را حاصل نمی‌کند.

ممکن است براساس راه‌حل‌های جبری موجود در روش‌های دقیق و تقریبی حل مسائلی که در بالا مدنظر قرار داده شد، عملی بودن راه‌حل‌های تقریبی مورد سوال قرار گیرد. به هر حال راه‌حل تقریبی پیش رو اساساً برای کسب تجربه بیشتر در استفاده از روش انتگرالی مورد بررسی قرار گرفته است. باید به یادداشت که جبر روش‌های حل تقریبی به‌طور عملی برای مسائل پیچیده بدون

که می‌توان آن را به صورت خطی بر حسب $\tau_0^2/2$ نوشت:

در معادله (۱۹۹-۳) باید شرط زیر صادق باشد:

$$\tau_o(0) = 0. \quad (17-20)$$

پاسخ معادله (۳-۱۹۹) با توجه به معادله (۳-۲۰۰) خواهد بود:

اکنون می توان معادله (۳-۲۰۱) را برای به دست آوردن زمان نفوذ t_0 مورد استفاده قرار داد، که در آن $\tau_0(t_0) = L$ می باشد و عبارت زیر حاصل می شود:

که در آن مثل قبل، $\mu = mL$ است.

نهایتاً با قرار دادن معادله (۳-۲۰۱) درون معادله (۳-۱۹۸) و بازاریابی آن، دمای پره در بازه زمانی اول بدین صورت به دست می‌آید:

سیستم‌های دیفرانسیلی و متمرکز مناسب برای بازه زمانی دوم در شکل ۳۹-۳ مشخص شده‌اند. به هر حال با رجوع کردن به شکل ۳۹-۳ دیده می‌شود که نوک پره عایق‌بندی شده است و فرمولاسیون انتگرالی مساله برای دامنه زمانی دوم به وسیله جاگذاری ساده τ_0 با L در معادله (۱۹۹-۳) به آسانی به دست آمده است.

برای این بازه مناسب است که از متغیر بدون بعد $\xi = x/L$ و پارامتر $\mu = mL$ استفاده شود. معادله (۲۰۴-۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{L^2}{a} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta d\xi = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} - \mu^2 \int_0^1 \theta d\xi. \quad (3-25)$$

پروفایل ریتز درجه اول، معادله (۱۹۵-۳)، که برای مساله پایای مثال ۱۳-۳ مورد استفاده قرار گرفته بود، اکنون می‌تواند دوباره در نظر گرفته شود که پارامتر ثابت a_0 موجود در اینجا یک تابع

$a_0(t)$ است که می‌بایست تعیین شود.

بمعادله (۲۰۶-۳) یک پروفایل کانتروویج
درجه اول است.

با قرار دادن معادله (۳-۲۰۶) در معادله (۳-۲۰۵) و انتگرال گیری از آن خواهیم داشت:

شرط اولیه‌ای که برای معادله (۲۰۷-۳) مفروض است:

$$a_0(t_0) = 1.$$

پاسخ معادله (۳-۲۰۷) که معادله (۳-۲۰۸) را ارضا خواهد کرد به این صورت به دست خواهد آمد:

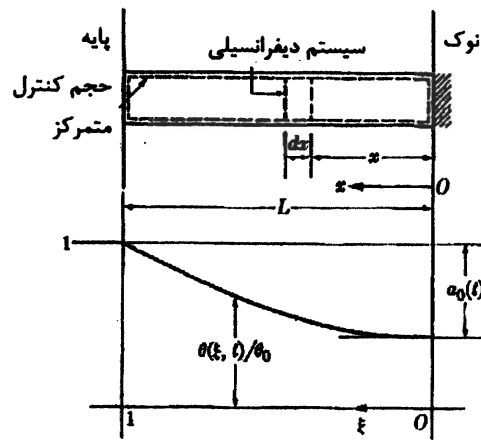
$$a_0(t) = \frac{\mu^2/2}{1+\mu^2/3} + \frac{1-\mu^2/6}{1+\mu^2/3} \exp \left[-3 \left(1 + \frac{\mu^2}{3} \right) \frac{\alpha(t-t_0)}{\mu^2} \right]. \quad (3-29)$$

نتیجتاً با اعمال معادله (۳-۲۰۹) در معادله (۳-۲۰۶) به دمای پره در دامنه زمانی دوم خواهیم رسید:

$$\frac{\theta(\xi t)}{\theta_0} = 1 - (1 - \xi^2) \left\{ \frac{\mu^2/2}{1 + \mu^2/3} + \frac{1 - \mu^2/6}{1 + \mu^2/3} \exp \left[-3 \left(1 + \frac{\mu^2}{3} \right) \frac{a(t - t_0)}{L^2} \right] \right\}. \quad (3-21)$$

وقتی که $t \rightarrow t_0$ معادله (۳-۲۱۰) به حد بالای پاسخ بازه زمانی اول یعنی معادله (۳-۱۹۸) برای $L = \tau_0$ ، و وقتی که $t \rightarrow \infty$ به پاسخ پایایی ارائه شده توسط معادله (۳-۱۹۶) نزدیک می‌شود. انتظار می‌رود که خطای معادله (۳-۲۱۰) از درجه خطای موجود در معادله (۳-۱۹۶) باشد.

پس از توسعه دادن میزان استفاده و سپس تفهیم اهمیت پروفایل‌های پایای درجه اول برای مسائل، نایابا، اکنون به راه‌های بهبود دادن پروفایل‌ها می‌پردازیم.



شکل ۳-۳۹

۳-۱۰. تقریب‌های با درجه بالاتر

بعضی مواقع به دلیل نیاز به دقت بالاتر در پاسخ مسائل، بهبود دادن نتایج پروفایل‌های درجه اول مورد توجه قرار می‌گیرد. از آنجایی که فصل حاضر فقط از نظر دیفرانسیلی با مسائل پایای یک‌بعدی سروکار دارد، در اینجا پروفایل‌های با درجه بالاتر مسائل ناپایای چند بعدی مورد بحث قرار می‌گیرد.

تقریب $(n+1)$ ام پروفایل کانترویچ سه‌بعدی به صورت زیر می‌باشد:

$$\theta(v, t) = \theta[v, \tau_0(t), \tau_1(t), \dots, \tau_n(t)], \quad (3-211)$$

که در آن $\tau_0(t), \tau_1(t), \dots$ و $\tau_n(t)$ توابع پارامتری مجهول هستند که باید تعیین گردند و v نشان‌دهنده حجم است. فقط به خاطر روشن شدن مطلب فرض شده است که مساله کلی تحت بررسی برای یک جامد ساکن ایزوتروپیک و همگن به کار گرفته شود. فرمولاسیون دیفرانسیلی حاکم خواهد بود:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \nabla^2 \theta.$$

با به کارگیری فرمولاسیون انتگرالی مساله نوشته شده، مثلاً به شکل زیر:

$$\int_v \left(\nabla^2 \theta - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \partial v = 0 \quad (3-212)$$

یک رابطه میان $(n+1)$ تابع پارامتری مجهول حاصل می‌شود. دو روش عمومی برای به دست آوردن n رابطه باقی‌مانده میان این توابع پارامتری مجهول وجود دارد. روش اول در نظر گرفتن n رابطه‌ای است که باید به وسیله ضرب توابع تحت انتگرال فرمولاسیون انتگرالی در توابع پیوسته ولی بسیار اختیاری $F_i(v)$ به دست آید.

$$\int_v \left(\nabla^2 \theta - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) F_i(v) dv = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (3-213)$$

که در آن $F_i(v)$ می‌تواند با فرض بسیار مناسبی از پروفایل‌های تقریبی متوالی که به شکل معادله (۳-۲۱۱) می‌باشند، انتخاب شده باشد. ایده موجود در تعریف معادله (۳-۲۱۳) استفاده از ریشه‌های آن برای محاسبه تغییرات است. بنابراین، بحث بر روی این نکته نیاز است که تا فصل ۸ به تعویق می‌افتد. حال باید متذکر شد که پروفایل‌های انتخاب شده هنوز فرمولاسیون دیفرانسیلی را ارضا نمی‌کنند. روش دوم براساس ارضا شدن فرمولاسیون و همچنین در صورت نیاز، صدق

کردن مشتقات مکانی آن در n نقطه مناسب، $P_j (j = 1, 2, 3, \dots, n)$ می‌باشد و بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^m}{\partial x_k^m} \left(\nabla^2 \theta - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{P_j} = 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots, n; \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3-214)$$

که در آن x_k نشان‌دهنده یک جهت مناسب در فضا می‌باشد. به خاطر ماهیت مشخص فرآیند انتگرال‌گیری، به طور کلی انتظار می‌رود استفاده از معادله (۳-۲۱۳) به جای معادله (۳-۲۱۴) پروفایل‌های صحیح‌تری را نتیجه دهد. به هر حال وقتی یک تقریب درجه دوم یا سوم مورد نظر باشد، اگر معادله (۳-۲۱۴) در یک یا دو نقطه که بیشترین اختلاف میان پروفایل‌های انتخابی و واقعی در آن‌ها انتظار می‌رود صدق کند، تقریباً نتیجه‌ای به دقت و صحت نتیجه حاصل از به کارگیری معادله (۳-۲۱۳) به دست خواهد آمد.

حال استفاده از این دو روش در ارزیابی پروفایل‌های درجه دوم مسائل پایای ساده ارائه می‌شود. **مثال ۳-۱۵.** می‌خواهیم یک پاسخ تقریبی برای مساله مثال ۳-۱۰ و به صورت پروفایل ریتز درجه دوم به دست آوریم.

پروفایل پیشنهادی که شرایط مرزی مساله در آن صدق کنند به سهولت و با اضافه کردن یک جمله به تقریب درجه اول معادله (۳-۱۹۵) نوشته شده است. پس خواهیم داشت:

$$\theta(\xi)/\theta_0 = 1 - (1 - \xi^2)(a_0 + a_1 \xi^2). \quad (3-215)$$

با قرار دادن معادله (۳-۲۱۵) در فرمولاسیون انتگرالی مساله، معادله (۳-۱۹۴) یا انتگرال معادله بی‌بعد شده (۳-۱۶۳) و انتگرال‌گیری، اولین رابطه میان پارامترهای ثابت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(1 + \mu^2/3)a_0 + (1 + \mu^2/15)a_1 = \mu^2/2. \quad (3-216)$$

برای رابطه دوم، ابتدا شکل مناسب معادله (۳-۲۱۳) برای $i = 1$ در نظر گرفته می‌شود. با فرض این که امکان داشته باشد که $F_1(\xi), F_2(\xi), \dots$ را از معادله (۳-۲۱۵) به دست آوریم، $F_1(\xi) = (1 - \xi^2), F_2(\xi) = (1 - \xi^2)\xi^2$ و ... را خواهیم داشت و سپس رابطه دوم مورد نیاز به صورت زیر خواهد شد:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} - \mu^2 \theta \right) (1 - \xi^2) d\xi = 0. \quad (3-217)$$

با قرار دادن معادله (۳-۲۱۵) در معادله (۳-۲۱۷) و انتگرال‌گیری از عبارت حاصل، رابطه دوم به دست خواهد آمد:

$$(1 + 2\mu^2/5)a_0 + (1/5 + 3\mu^2/35)a_1 = \mu^2/2. \quad (3-218)$$

قبل از به دست آوردن a_0 و a_1 یک رابطه جایگزین دیگر باید از معادله (۳-۲۱۴) به دست آید. از آنجایی که پروفایل تقریبی چنان به دست آمده است که باید با توجه به شرایط مرزی گرادین دما را به جای خود دما در نوک پره ارضا کند، بیشترین انحراف میان پروفایل های دقیق و تقریبی در این مکان (نوک پره) وجود خواهد داشت. پس می خواهیم شرط دومی را بیابیم که پروفایل تقریبی را مخصوصاً در نزدیکی نوک پره بهبود بخشد. این امر می تواند با صدق کردن معادله (۳-۲۱۵) در $\xi = 0$ درون فرمولاسیون دیفرانسیلی بی بعد مساله، $d^2\theta/d\xi^2 - \mu^2\theta = 0$ به دست آید. نتیجه آن این گونه خواهد بود:

$$(1 + \mu^2/2)a_0 - a_1 = \mu^2/2. \quad (3-219)$$

با بررسی هم زمان معادلات (۳-۲۱۶) و (۳-۲۱۸) نتیجه می گیریم:

$$a_0 = \frac{(\mu^2/2)(1+\mu^2/84)}{1+9\mu^2/21+\mu^4/105}, \quad a_1 = \frac{\mu^2/24}{1+9\mu^2/21+\mu^4/105},$$

و همچنین از معادلات (۳-۲۱۶) و (۳-۲۱۹) خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{(\mu^2/2)(1+\mu^2/30)}{1+9\mu^2/20+\mu^4/60}, \quad a_1 = \frac{\mu^2/24}{1+9\mu^2/20+\mu^4/60},$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله (۳-۲۱۵) و بازنویسی نتیجه به دو پروفایل ریتز درجه دوم برای مساله دست خواهیم یافت:

$$\frac{\theta(\xi)}{\theta_0} = 1 - \left(\frac{\mu^2/2}{1+9\mu^2/21+\mu^4/105} \right) (1 - \xi^2) \left(\left(1 + \frac{\mu^2}{84} \right) + \frac{\mu^2\xi^2}{12} \right). \quad (3-220)$$

و

$$\frac{\theta(\xi)}{\theta_0} = 1 - \left(\frac{\mu^2/2}{1+9\mu^2/20+\mu^4/60} \right) (1 - \xi^2) \left(\left(1 + \frac{\mu^2}{30} \right) + \frac{\mu^2\xi^2}{12} \right). \quad (3-221)$$

به دلایل شرح داده شده در مثال ۳-۱۳ حال باید اتلاف حرارتی را به جای دما مورد مقایسه قرار دهیم. همچنین همین طور که در همان مثال نشان داده شد، این اتلاف با استفاده از رابطه $q = hP \int_0^L \theta dx$ به دست خواهد آمد. پس خواهیم داشت:

$$\frac{q}{kA\theta_0/L} = \frac{\mu^2(1+2\mu^2/21)}{1+9\mu^2/21+\mu^4/105}, \quad \frac{q}{kA\theta_0/L} = \frac{\mu^2(1+7\mu^2/60)}{1+9\mu^2/20+\mu^4/60}$$

این اتلاف های حرارتی به همراه تقریب درجه اول مربوطه، با اتلاف های حرارتی واقعی در جدول ۴-۲ مورد مقایسه قرار گرفته اند که اعداد I و II مشخص کننده تقریب های درجه دوم به ترتیب براساس معادلات (۳-۲۱۳) و (۳-۲۱۴) هستند. بررسی جدول ۴-۳ نشان می دهد که خطاهای موجود در تقریب درجه دوم محاسبه شده توسط معادله (۳-۲۱۳) کوچک تر است. اگرچه این دقت بالاتر در نتیجه به کارگیری معادلات جبری منطقی حاصل شد. برای یک مساله خاص اغلب یکی از این تقریب ها مناسب تر از بقیه می باشد، بنابراین انتخاب، به میزان دقت مورد نیاز در پاسخ، و پیچیدگی ذاتی مساله بستگی دارد. برای مثال، معادله (۳-۲۱۳)، که از آن به سهولت روابط زیاد و مناسبی برای پارامترهای مجهول حاصل می شود، برای تقریب های با درجه بالاتر مناسب تر از معادله (۳-۱۴) است زیرا با استفاده از معادله (۳-۱۴) پیدا کردن محل های کافی که در آن ها اختلاف زیادی میان پروفایل های دقیق و تقریبی انتظار می رود، مشکل می باشد.

جدول ۴-۳

μ	۰/۵	۱	۲	۴
دقیق	۰/۲۳۱۱	۰/۷۶۱۶	۱/۹۲۸۱	۰/۹۹۷۳
تقریب اول	۰/۲۳۰۸	۰/۷۵۰۰	۱/۷۱۴۳	۰/۵۲۶۳
خطا %	۰/۱۳۰	۱/۵۲	۱۱/۱	۳۶/۸
تقریب دوم I	۰/۲۳۱۱	۰/۷۶۱۶	۱/۹۲۶۹	۳/۹۲۲۳
خطا %	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۶۲	۱/۸۸
تقریب دوم II	۰/۲۳۱۱	۰/۷۶۱۴	۱/۹۱۳۰	۳/۶۷۹۱
خطا %	۰/۰۰۰	۰/۰۲۶	۰/۷۸۳	۷/۹۶

به همان دلیل ارائه شده در مثال ۳-۱۳، اختلاف میان پاسخ های تقریبی درجه دوم و دقیق وقتی $\mu \rightarrow \infty$ ، افزایش می یابد. به هر حال پروفایل های درجه دوم در محدوده بزرگتری از پارامتر μ نسبت به پروفایل درجه اول قابل استفاده اند. محدوده مورد نظر $4 \leq \mu$ همراه با خطای کمتر از ۲٪ و ۸٪ به ترتیب برای تقریب های درجه دوم I و II می باشد. مساله ناپایایی مطابق با مثال حاضر (یعنی شامل یک تغییر ناگهانی در دمای پایه پره) به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود. با یادگیری این که پروفایل های تقریبی چگونه انتخاب و محاسبه می شوند می توان این فصل را با یک مثال در مورد انتخاب پروفایل با درجه مناسب برای مساله داده شده، جمع بندی کرد. مثال ۳-۱۶. می خواهیم پروفایل هایی برای راه حل تقریبی مساله مثال ۳-۱۲ انتخاب نماییم.

- 3 F. B. HILDEBRAND, *Advanced Calculus for Engineers*. New York: Prentice-Hall, 1948.
- 4 W. T. MARTIN and E. REISSNER, *Elementary Differential Equations*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1956.
- 5 W. KAPLAN, *Ordinary Differential Equations*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958.
- 6 W. M. ROHSENOW, *Class Notes on "Advanced Heat Transfer"*. MIT, 1956.
- 7 H.S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1959.
- 8 E. SCHMIDT, "Die Wärmeübertragung durch Rippen." *Zeitschr. VDI*, 70, 885, 957 (1926).
- 9 W. B. HARPER and D. R. BROWN, "Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins of Air-Cooled Engines." *NACA Report 158*, 679 (1922).
- 10 K. A. GARDNER, "Efficiency of Extended Surfaces." *Trans. ASME*, 67, 621 (1945).
- 11 M. AVRAMI and J. B. LITTIE, "Diffusion of Heat Through a Rectangular Bar and Cooling and Insulation Effect of Fins." *Journ. Appl. Phys.*, 13, 255 (1942).
- 12 M. JAKOB, *Heat Transfer I*. New York: Wiley, 1949.

مسائل

۳-۱. مساله کلی بخش ۳-۱ و انتقال حرارت زیر را دوباره در نظر بگیرید:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{(1/k) \int_{s_1}^{s_2} ds/A(s)} \quad (3-4)$$

(الف) نشان دهید که وقتی معادله (۳-۴) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$q = k \bar{A} \frac{T_1 - T_2}{s_2 - s_1},$$

\bar{A} مربوط به سطح انتقال حرارت واقعی در مختصات کارتزین است

$$\bar{A} = A;$$

و به صورت متوسط لگاریتمی مقادیر سطوح انتقال حرارت داخلی و خارجی در مختصات استوانه‌ای

به صورت زیر است:

$$\bar{A} = \frac{A_2 - A_1}{\ln(A_2/A_1)}$$

و در مختصات کروی، به صورت متوسط هندسی مقادیر سطوح انتقال حرارت داخلی خارجی،

می‌باشد:

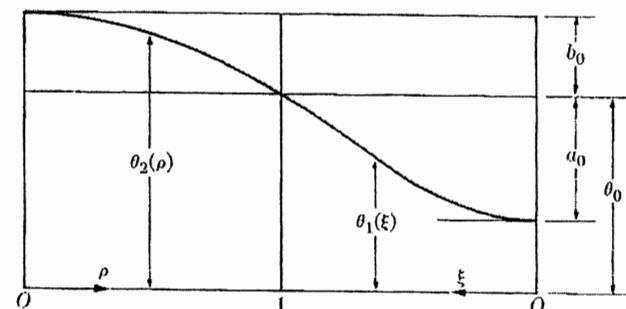
$$\bar{A} = (A_2 A_1)^{1/2}.$$

به وسیله چند جمله‌ای‌ها، توزیع دما در کف و دیواره‌های جانبی ظرف می‌توانند به صورت سهمی تقریب زده شوند (شکل ۳-۴۰). بنابراین پروفایل‌های ریتز درجه اول به صورت زیر وجود خواهند داشت:

$$\theta_1(\xi) = \theta_0 - (1 - \xi^2) a_0, \quad (3-222)$$

$$\theta_2(\rho) = \theta_0 + (1 - \rho^2) b_0, \quad (3-222)$$

که در آن θ_0 ، a_0 و b_0 به ترتیب دماهای مجهول گوشه، مرکز کف و نوک دیواره جانبی هستند و $\xi = x/L$ و $\rho = r/R$ می‌باشند. معادلات (۳-۲۲۲) و (۳-۲۲۳) باید شرایط مرزی مساله یعنی معادلات (۳-۱۸۶) الی (۳-۱۸۹) را به جز معادله (۳-۱۸۸) ارضا کنند. اکنون با به کارگیری صورت بی‌بعد معادله (۳-۱۸۸)، $a_0 = b_0$ حاصل می‌شود که حاکی از برابری افت دما در کف ظرف و دیواره‌های جانبی آن است. به وضوح این مورد یک محدودیت جدی است که با توجه به فیزیک مساله نمی‌تواند مجاز باشد^۱. بنابراین تقریب‌های درجه اول داده شده توسط معادلات (۳-۲۲۲) و (۳-۲۲۳) نمی‌توانند برای مساله مناسب باشند. در این حالت ساده‌ترین جفت از پروفایل‌های معنی‌دار فیزیکی که الزاماً باید براساس تقریب‌های درجه دوم باشند، برای یکی از پروفایل‌ها و یا هر دو آن‌ها مدنظر قرار می‌گیرند.



شکل ۳-۴۰

مراجع

- 1 TH.von KARMAN and M. A. BIOT, *Mathematical Methods in Engineering*. New York: McGraw-Hill, 1940.
- 2 N. W. MCLACHLAN, *Bessel Function for Engineers*. Oxford: Clarendon Press, 1955.

۱- به بحث مربوط به شکل ۳-۲۵ رجوع شود.

(ب) نشان دهید که وقتی $A_2 \rightarrow A_1$ مقادیر متوسط هندسی و لگاریتمی به سمت مقدار متوسط حسابی زیر نزدیک می‌شود:

$$\bar{A} = (A_2 + A_1)/2.$$

۳-۲. یک صفحه تخت که در آن انرژی داخلی به وسیله یک مدار الکتریکی خارجی تولید می‌شود را در نظر بگیرید. (شکل ۳-۴۱)

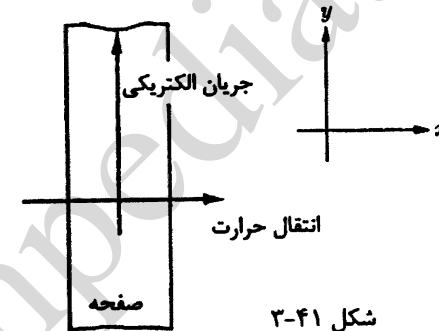
(الف) نشان دهید که شکل یک بعدی کارتزین معادله هدایت به کار برده شده در این صفحه می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + k_e \left(\frac{dE}{dy} \right)^2 = 0,$$

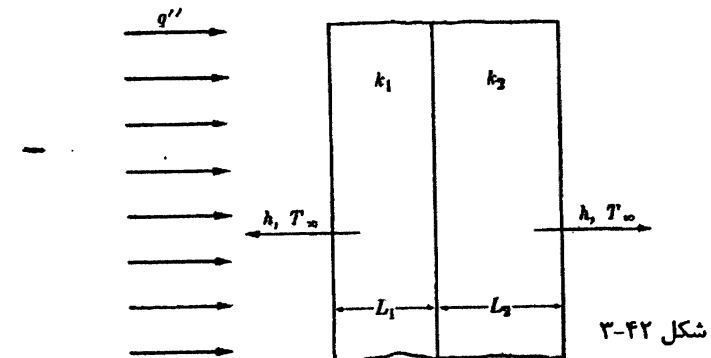
که در آن k_e رسانش الکتریکی بر واحد طول و بر واحد سطح در جهت y و E پتانسیل الکتریکی است.

(ب) نشان دهید که شکل سه بعدی معادله مذکور به صورت زیر است.

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + k_e (\nabla E)^2 = 0.$$



شکل ۳-۴۱



شکل ۳-۴۲

۳-۳. دیواره خارجی یک خانه از دو صفحه موازی تشکیل شده است (شکل ۳-۴۲). ضریب هدایت حرارتی و ضخامت صفحات به ترتیب k_1, L_1 و k_2, L_2 است. دمای محیط‌های داخل و خارج و ضرایب انتقال حرارت مشابه و برابر T_∞ و h است. تابش خالص میان خورشید و دیواره خارجی q'' است.

(الف) انتقال حرارت به خانه را محاسبه کنید.

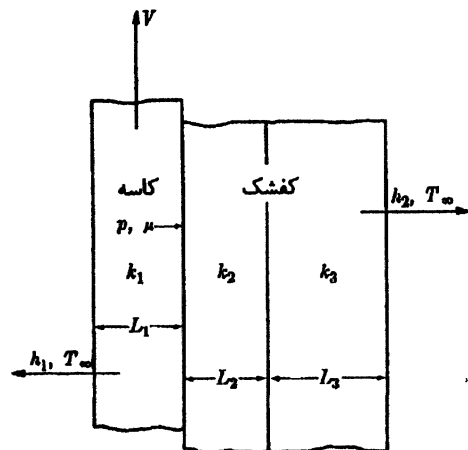
(ب) مدار الکتریکی مربوط به قسمت الف را رسم کنید.

۳-۴. به علت ناچیز بودن اثر انحناء فرض می‌شود که بتوان ترمز یک وسیله نقلیه را به وسیله یک صفحه تخت (کاسه ترمز) که در یک صفحه کامپوزیت (کفشک ترمز) با سرعت ثابت V حرکت می‌کند، شبیه‌سازی نمود (شکل ۳-۴۳). فشار سطح تماس ثابت و یکنواخت p و ضریب اصطکاک دمای محیط T_∞ و ضرایب انتقال حرارت h_1 و h_2 هستند. ضریب هدایت حرارتی و ضخامت صفحات به ترتیب k_1, k_2, k_3 و L_1, L_2, L_3 هستند.

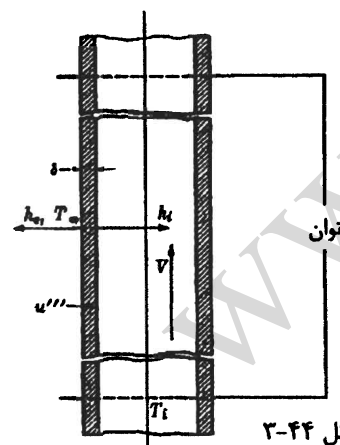
(الف) حرارت منتقل شده به کاسه و به کفشک ترمز را محاسبه کنید.

(ب) حداکثر دمای ترمز را بیابید.

(ج) مدار الکتریکی مربوط به قسمت (الف) را رسم کنید.



شکل ۳-۴۵



شکل ۳-۴۴

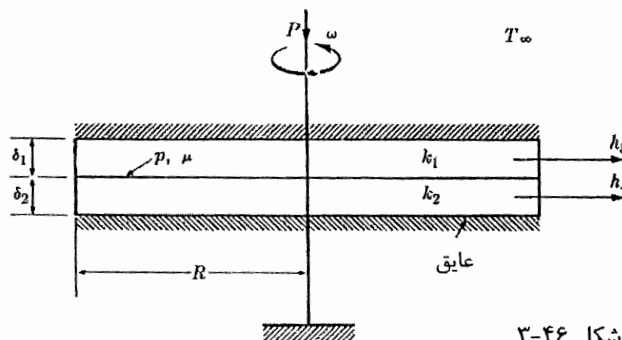
۳-۵. آب تحت فشار با سرعت V در میان یک لوله توخالی در جریان است (شکل ۳-۴۴).

مای آب ورودی T_i و دمای محیط اطراف T_∞ است. ضرایب انتقال حرارت داخلی و خارجی به

$$\frac{T_0 - T_{ci}}{T_{co} - T_{ci}} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \pi \frac{a}{A} \right) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega c}{Ah} \right) \left(1 + \frac{hR}{2k} \right) \sin \pi \frac{a}{A}$$

که در آن ω سرعت جریان خنک کننده، T_c دمای محلی خنک کننده، T_{co} و T_{ci} دماهای ورودی و خروجی خنک کننده، c گرمای ویژه خنک کننده، k ضریب هدایت حرارتی میله، R شعاع خارجی میله، T_w دمای سطح تماس میله و خنک کننده و T_0 دمای خط مرکزی میله است.

۳-۷. یک دیسک دیواره نازک با سرعت دورانی ω بر روی یک دیسک دیواره نازک ثابت دیگر می چرخد (شکل ۳-۴۶). سطوح بالایی و پایینی سیستم عایق بندی شده اند. فشار سطح تماس p ، ضریب اصطکاک μ ، ضرایب انتقال حرارت محیطی h_3 و h_4 و دمای محیط T_{∞} است. شعاع، ضخامت و ضریب هدایت حرارتی دیسکها به ترتیب R ، δ_1 ، δ_2 و k_1 ، k_2 هستند. توزیع دما در دیسکها را بیابید.



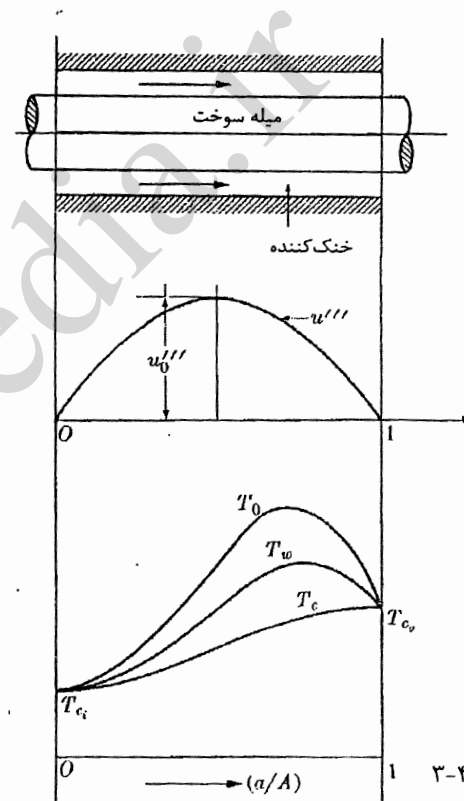
شکل ۳-۴۶

۳-۸. ضریب انتقال حرارت محلی در یک لوله به صورت تجربی به دست آمده است. برای این منظور مساله ۳-۵ را با مفروضات عایق بودن لوله و توزیع دمای شعاعی و محوری در آن در نظر می گیریم. مطابق تعریف ضرایب انتقال حرارت در لوله ها، رابطه محلی زیر موجود است:

$$h = \left(\frac{R_o^2 - R_i^2}{2R_i} \right) \frac{u'''}{T_{wi} - T_b}$$

که در آن R_o و R_i به ترتیب شعاعهای داخلی و خارجی لوله، T_{wi} دمای داخلی دیواره و T_b دمای توده سیال است (شکل ۳-۴۷). محاسبه دمای محلی توده T_b بر حسب مقدار T_i ورودی اندازه گیری شده، قسمت (ب) مساله ۳-۴ را تشکیل می دهد. از آنجایی که دمای داخلی دیواره T_{wi} به سختی اندازه گیری می شود (چرا؟)، به جای آن دمای خارجی دیواره اندازه گیری شده است. یک عبارت که مقدار محلی T_{wi} را به T_{wo} اندازه گیری شده مرتبط سازد، بیابید.

ترتیب h_i و h_o هستند. انرژی داخلی ثابت u''' به طور یکنواخت در دیواره های لوله تولید می شود. هدایت محوری ناچیز است. توزیع دمای محوری و متمرکز شعاعی سیستم را (الف) مطابق با فرض اشتباه $h_i \sim h_o$ و (ب) با توجه به $h_i \gg h_o$ بیابید.

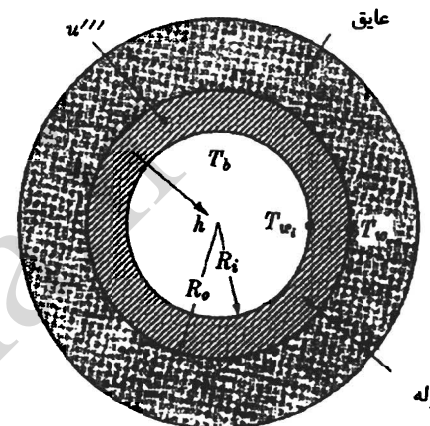


شکل ۳-۴۵

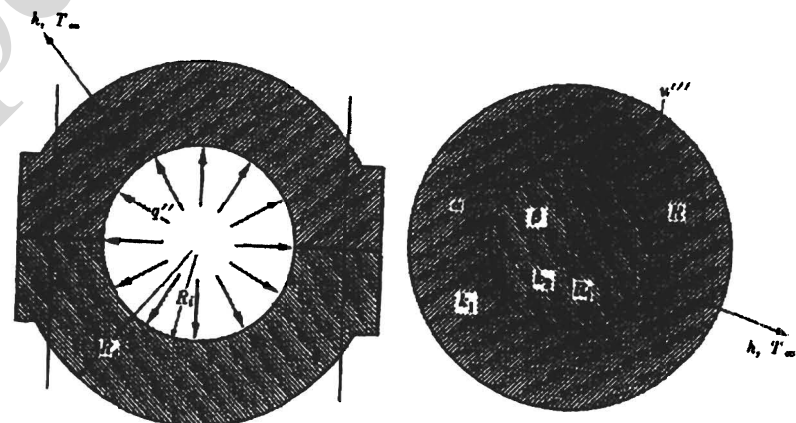
۳-۶. یک سلول واحد از هسته راکتور با خنک کننده مایع به وسیله یک خنک کننده که به طور هم محور با میله سوختی بر روی آن جریان دارد، شبیه سازی شده است. (شکل ۳-۴۵). انرژی داخلی تولیدی در میله $u''' = u_0''' \sin \pi(a/A)$ است که در آن a و A به ترتیب سطوح انتقال حرارت محلی و کل هستند. هدایت محوری ناچیز است و ضریب انتقال حرارت h میان میله سوختی و خنک کننده ثابت فرض شده است. نشان دهید که

$$\frac{T_c - T_{ci}}{T_{co} - T_{ci}} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \pi \frac{a}{A} \right),$$

$$\frac{T_w - T_{ci}}{T_{co} - T_{ci}} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \pi \frac{a}{A} \right) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega c}{Ah} \right) \sin \pi \frac{a}{A},$$



شکل ۳-۴۷



شکل ۳-۴۸

شکل ۳-۴۹

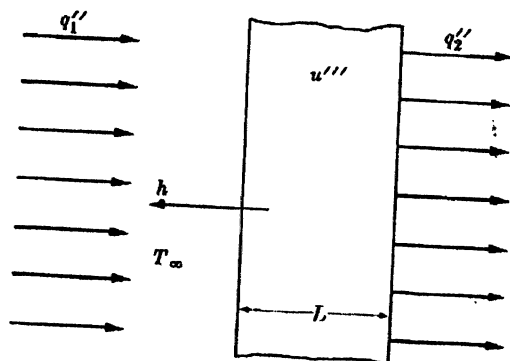
۳-۹. سطح داخلی یک بمب گرماسنج^۱ تحت شار حرارتی q'' حاصل از فرآیند واکنش شیمیایی گرمازا قرار گرفته است. (شکل ۳-۴۸). شعاعهای داخلی و خارجی گرماسنج به ترتیب R_o و R_i هستند. ضریب انتقال حرارت خارجی h و دمای محیط T_∞ است.

(الف) دمای سطح داخلی گرماسنج را به دست آورید.

(ب) آیا ممکن است که بتوان بدون تغییر R_o و R_i ، q'' و T_∞ این دما را کاهش داد؟

۳-۱۱. انرژی داخلی u''' به طور یکنواخت در یک صفحه تولید می شود. سطح سمت چپ صفحه به طور یکنواخت تحت شار حرارتی q_1'' قرار دارد که با فاصله‌ای از آن ساطع می شود. شار حرارتی

یکنواخت q_2'' از سطح سمت راست صفحه اعمال می شود. (شکل ۳-۵۰). ضریب انتقال حرارت و دمای محیط در سمت چپ صفحه به ترتیب h و T_∞ است. با استفاده از اصل جمع پذیری، مساله را به تعدادی مسائل مناسب ساده تر تقسیم کنید (این مسائل را حل نکنید).



شکل ۳-۵۰

۳-۱۲. (الف) از عبارت قانون هدایت فوری شروع کرده و نشان دهید که در غیاب هرگونه تولید انرژی داخلی، وقتی که ضریب هدایت حرارتی به طور خطی $k = k_o(1 + \beta T)$ به دما وابسته است، هدایت یک بعدی در یک صفحه صاف را می توان به شکل زیر نوشت:

$$q = k_m A \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1},$$

که در آن $k_m = (k_1 + k_2)/2$ ، x_1 و x_2 مختصات سطوح صفحه و T_1 و T_2 دمای مربوط به آنها هستند. توزیع دمای صفحه را توسط (ب) انتگرال مستقیم و (پ) با روش کرشلف به دست آرید.

۳-۱۳. در مسائلی که ضریب هدایت حرارتی وابسته به دما است، به غیر از روش کرشلف روش محور تقارن می باشند، وجود دارد. این روش بر پایه بسط دمای نامعلوم در یک سری تیلور حول مرکز عایق شده یا حول صفحه یا محور تقارن استوار است. سپس جملات سری توسط معادله حاکم در مساله و مشتقات متوالی آن محاسبه می شوند. برای تشریح روش به مثال ۳-۸ توجه کنید. دمای صفحه را حول $x = 0$ بسط می دهیم که به این ترتیب سری تیلور به سری مکلاورن تبدیل می شود. جملات سری را از معادله حاکم بر مساله به دست آورید.

$$\frac{dk}{dT} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + k(T) \frac{d^2 T}{dx^2} + u''' = 0,$$

و مشتقات متوالی آن را با در نظر گرفتن $(dT/dx)_{x=0} = 0$ محاسبه کنید. نشان دهید که نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$T(x) = T_0 - \frac{u''' x^2}{k(T_0) 2!} - \frac{3u'''^2}{k^3(T_0)} \left(\frac{dk}{dT} \right)_{T=T_0} \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

که در آن T_0 دمای صفحه در $x = 0$ است.

حداکثر خطای ناشی از برش ϵ_{\max} سری مذکور چنین است:

$$\epsilon_{\max} < \left(\frac{d^6 T}{dx^6} \right)_{\max} \frac{L^6}{6!}.$$

باید متذکر شد که $(d^6 T/dx^6)_{\max}$ به سختی تقریب زده می‌شود. اگرچه به دلیل تغییرات کند دما می‌تواند به وسیله $(d^6 T/dx^6)_{x=0}$ تقریب زده شود. در حالت کلی دمای سطحی صفحه T_{∞} صفحه (یا شرط مرزی دیگر) به جای T_0 داده می‌شود. بنابراین یک فرآیند حدس و خطا برای مرتبط کردن دمای نامشخص T_0 به T_{∞} داده شده، نیاز است. به عنوان اولین تقریب می‌توان حالت ضریب هدایت حرارتی ثابت را مورد استفاده قرار داد. وقتی که مقدار T_0 حاصل را در سری مک‌لورن قرار دهیم دمای سطح به دست آمده با T_{∞} متفاوت است. این فرآیند با تغییر T_0 تا زمانی که اختلاف میان دماهای داده شده و به دست آمده کوچک‌تر از مقدار مشخصی شود، تکرار می‌شود.

۳-۱۴. با استفاده از روش حل مساله ۳-۱۳، مساله ۳-۸ را با فرض این که ضرایب هدایت حرارتی و الکتریکی لوله به طور خطی به دما وابسته‌اند مجدداً حل کنید.

۳-۱۵. پیل سوختی کروی مثال ۳-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید که تولید انرژی هسته‌ای داخلی در ماده قابل شکافت یکنواخت باشد. ضریب هدایت حرارتی این مواد به صورت خطی به دما وابسته است در حالی که برای پوشش فلزی ثابت است. با استفاده از روش مساله ۳-۱۳ توزیع دما در پیل سوختی را بیابید.

۳-۱۶. با شروع از صورت کلی معادله هدایت برای محیط‌های ایزوتروپیک همگن:

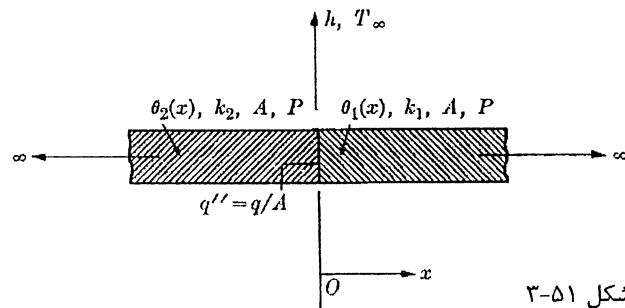
$$\frac{dT}{dt} = a \nabla^2 T + \frac{u'''}{\rho c},$$

معادله حاکم بر صفحات گسترش یافته با سطح مقطع ثابت را به دست آورید.

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \left(\frac{hP}{kA} \right) (T - T_{\infty}) = 0.$$

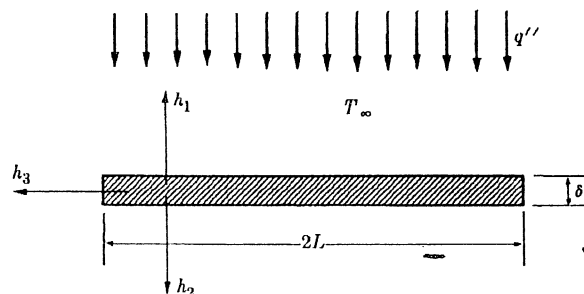
۳-۱۷. یک پره بی‌نهایت متشکل از دو پره نیمه بی‌نهایت را در نظر بگیرید (شکل ۳-۵۱). شار

حرارتی یکنواخت q'' در محل اتصال تولید می‌شود. هندسه پره‌ها مشخص است. ضرایب هدایت حرارتی k_1 و k_2 هستند. توزیع دمای سیستم را بیابید.



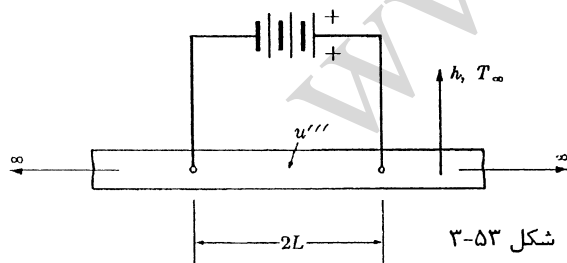
شکل ۳-۵۱

۳-۱۸. صفحه مسطحی در دمای محیط T_{∞} از منبعی شار حرارتی تشعشعی خالص q'' را دریافت می‌دارد (شکل ۳-۵۲). ضخامت صفحه σ بسیار کمتر از طول $2L$ آن است بعد سوم صفحه به بی‌نهایت میل می‌کند. ضرایب انتقال حرارت بالا و پایینی به ترتیب h_1 و h_2 هستند. ضریب انتقال حرارت از انتهای صفحه در صورت نیاز به صورت $h_3 \neq h_1 \neq h_2$ داده شده است. توزیع دمای سیستم را بیابید.



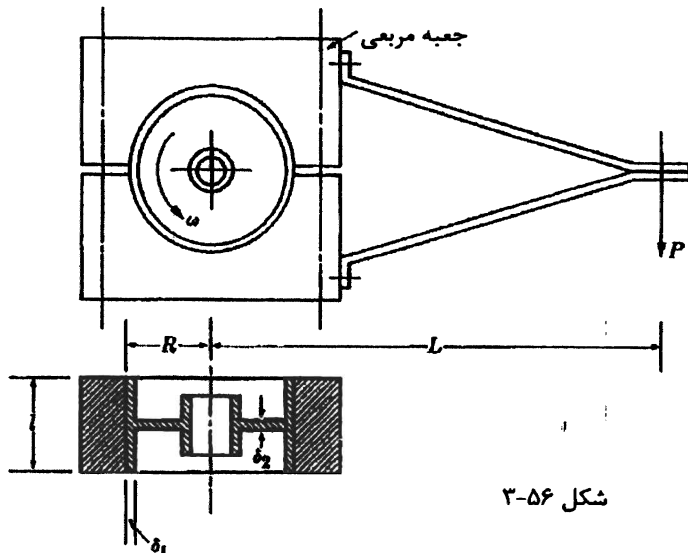
شکل ۳-۵۲

۳-۱۹. یک پره بی‌نهایت را در نظر بگیرید. انرژی داخلی u''' به طور یکنواخت در قسمت نشان داده شده از پره در شکل ۳-۵۳ تولید می‌شود؛ ضریب هدایت حرارتی، مساحت سطح مقطع و محیط جانبی پره به ترتیب k ، P و A هستند. ضریب انتقال حرارت h و دمای محیط T_{∞} است. دمای پایای پره را بیابید.



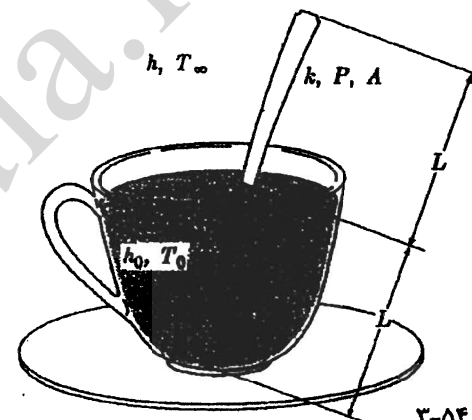
شکل ۳-۵۳

۳-۲۰. یک قاشق در یک فنجان چای را می‌توان به عنوان یک میله با سطح مقطع ثابت تقریب زد (شکل ۳-۵۴). ضریب هدایت حرارتی، طول، محیط جانبی و مساحت سطح مقطع قاشق به ترتیب $k, P, 2L, A$ می‌باشند. ضرایب انتقال حرارت h_0 و h_1 هستند. نصف قاشق در چای است. فرض کنید که دمای چای ثابت باقی می‌ماند و انتهای قاشق عایق‌بندی شده است. دمای حالت پایای قاشق را بیابید.



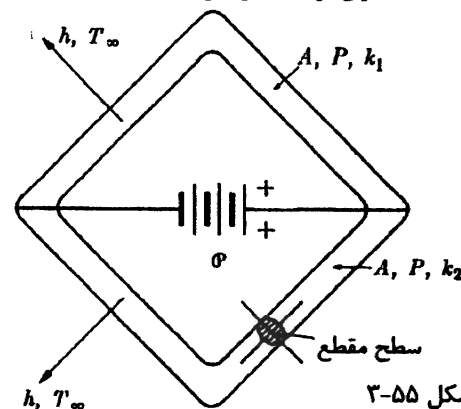
شکل ۳-۵۴

۳-۲۱. توزیع دما در میله مربعی نشان داده شده در شکل ۳-۵۵ را بیابید. ضریب هدایت حرارتی قسمت بالایی و پایینی میله k_1 و k_2 می‌باشند. مقاومت الکتریکی کل قسمت‌های بالایی و پایینی به ترتیب R_1 و R_2 هستند. توان تولیدی در باتری \mathcal{P} است.



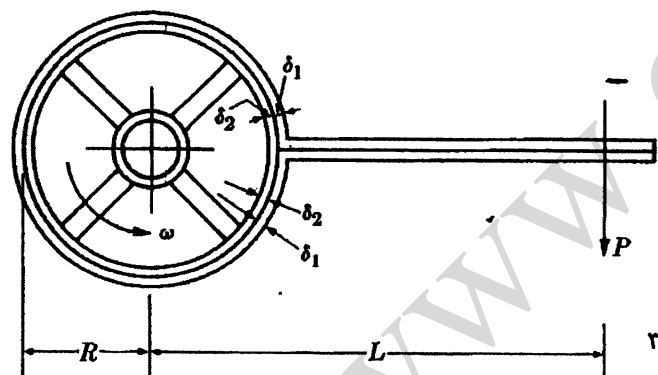
شکل ۳-۵۴

۳-۲۲. تحت شرایط پایا و با استفاده از یک ترمز پرونی، گشتاور موتور با سرعت زاویه‌ای ω به وسیله نیروی P متعادل می‌شود (شکل ۳-۵۶). ضریب اصطکاک خشک μ است. ضریب هدایت



شکل ۳-۵۵

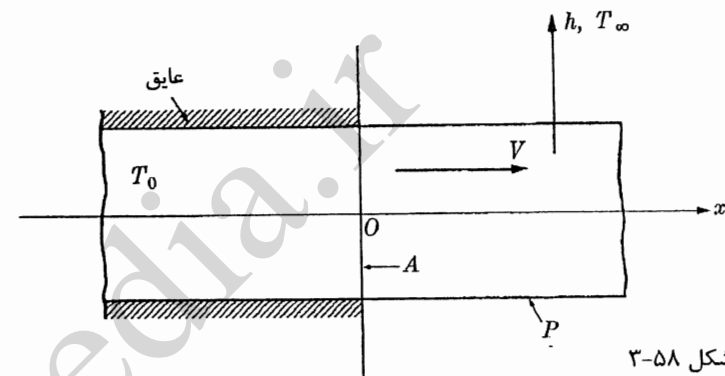
۳-۲۳. یک میله مربعی نشان داده شده در شکل ۳-۵۶ را بیابید. ضریب هدایت حرارتی قسمت بالایی و پایینی میله k_1 و k_2 می‌باشند. مقاومت الکتریکی کل قسمت‌های بالایی و پایینی به ترتیب R_1 و R_2 هستند. توان تولیدی در باتری \mathcal{P} است.



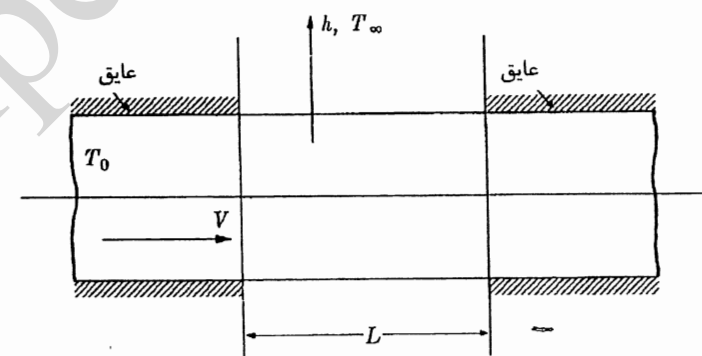
شکل ۳-۵۶

۳-۲۴. یک مایع غیرگرانرو با خواص ثابت دارای سرعت V و دمای بالادست جریان T_0 بصورت پیاپی در امتداد یک لوله با سطح مقطع A و سطح جانبی P در جریان است (شکل ۳-۵۸). ضخامت دیواره لوله ناچیز است. نیمه پایین دست جریان از لوله در انتقال حرارت با محیط دمای T_∞ بوده و نیمه بالا دست جریان از لوله عایق‌بندی شده است. ضریب انتقال حرارت h است. توزیع دمای مایع در مایع را بیابید.

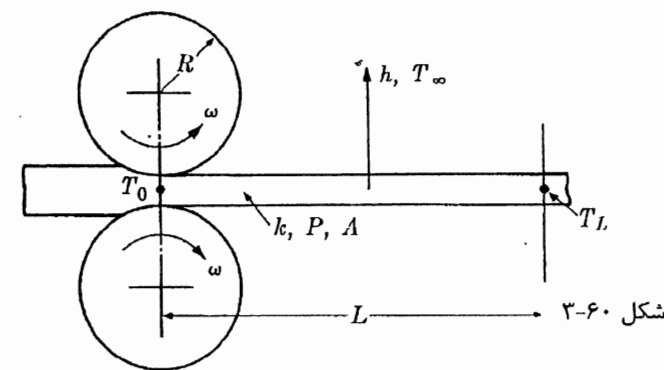
۳-۲۵. مساله ۳-۲۴ را با در نظر گرفتن این که این بار بخشی از لوله به طول L با محیطی به دمای T_∞ تبادل حرارتی دارد (شکل ۳-۵۹)، مجدداً حل نمایید.



شکل ۳-۵۸



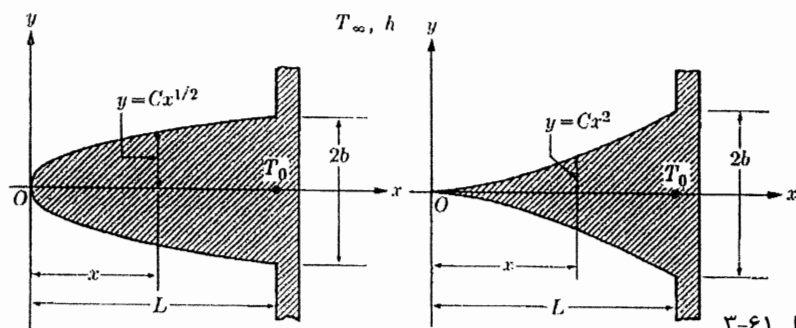
شکل ۳-۵۹



شکل ۳-۶۰

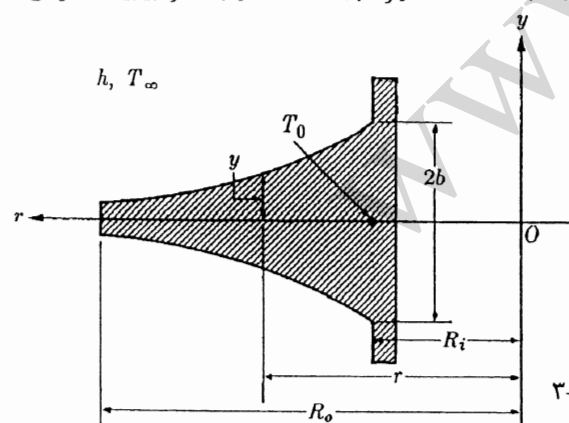
۳-۲۶. یک ماشین پرس حرارتی در شکل ۳-۶۰ نشان داده شده است. انتقال حرارت از سیم پرس شده به محیط در دمای T_∞ و با ضریب هدایت حرارتی h انجام می‌شود. در محل L ، برای انجام یک عملیات شیمیایی نیاز به دانستن T_L داریم. دمای ورودی سیم در T_0 تنظیم شده است. سرعت زاویه‌ای دیسک‌های چرخان را محاسبه کنید. مساله را با استفاده از یک سیستم حجم کنترل تحلیل کنید.

۳-۲۷. یک پره مستقیم با پروفایل سهموی (شکل ۳-۶۱) را در نظر بگیرید. ضریب هدایت حرارتی، ضخامت پایه، و طول پره به ترتیب k ، $2b$ ، و L هستند. ضریب انتقال حرارت h و دمای محیط T_∞ می‌باشد. دمای پایا و کل حرارت منتقله از پره را با فرض این که معادله سهمی (الف) $y = Cx^{1/2}$ (ب) $y = Cx^2$ باشد را بیابید، که C یک ثابت است.

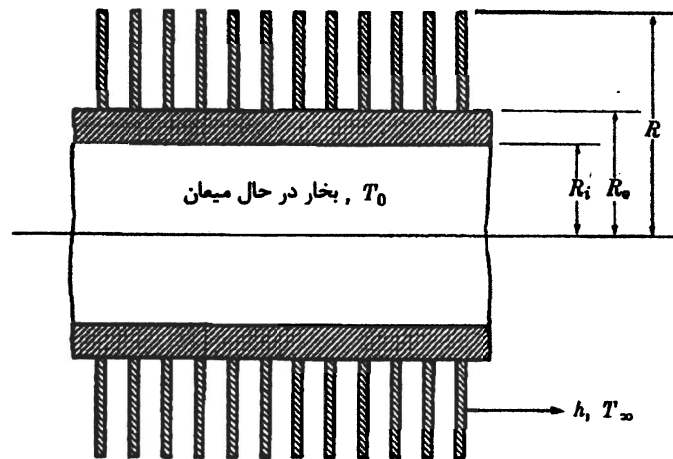


شکل ۳-۶۱

۳-۲۸. یک پره حلقوی با پروفایل هذلولی (شکل ۳-۶۲) را در نظر بگیرید. ضریب هدایت حرارتی، ضخامت پایه و شعاع‌های داخلی و خارجی پره به ترتیب k ، $2b$ ، R_i و R_o هستند. ضریب انتقال h و دمای محیط T_∞ است. دمای پایا و کل حرارت منتقله از پره را با فرض این که معادله هذلولی به صورت (الف) $yr^{1/2} = C$ و (ب) $yr^2 = C$ باشد را بیابید که در آن C یک ثابت است.

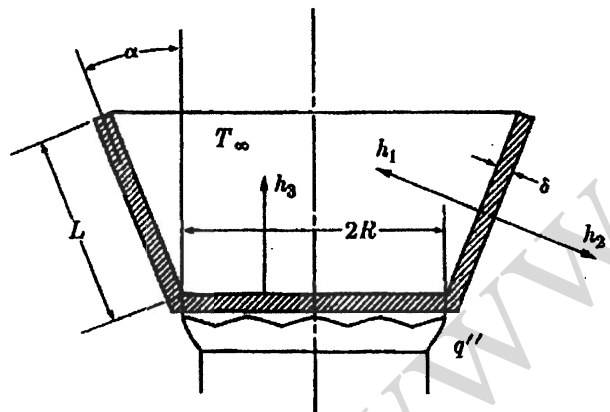


شکل ۳-۶۲



شکل ۳-۶۵

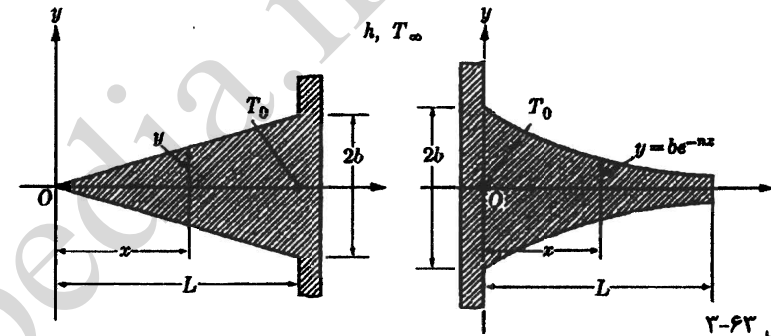
۳-۳۲. یک کتری خالی از قسمت زیرین تحت شار حرارتی یکنواخت q'' قرار گرفته است (شکل ۳-۶۶). دمای محیط T_∞ است و ضرایب انتقال ترتیب h_1 ، h_2 و h_3 هستند. ضریب هدایت حرارتی، طول، شعاع کف و ضخامت کتری به ترتیب k ، L ، R و δ هستند. با استفاده از ساده‌ترین فرمولاسیون ممکن برای مساله، دمای پایای کتری را بیابید.



شکل ۳-۶۶

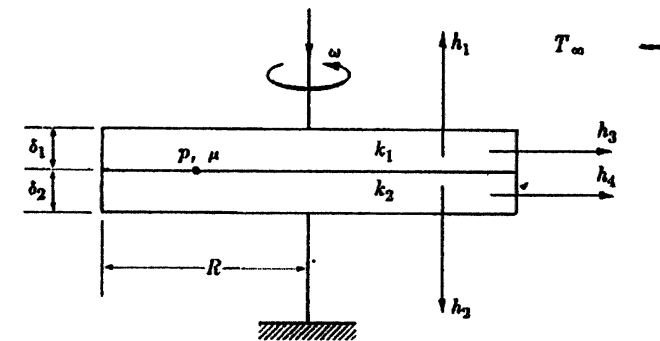
۳-۳۳. یک سیال تراکم‌ناپذیر به‌طور پایا و شعاعی بین دو دیسک موازی هم‌مرکز با ضخامت ناچیز جریان می‌یابد (شکل ۳-۶۷). فاصله δ میان دیسک‌ها کم است. دمای ورودی سیال در T_0 تنظیم شده است. دبی حجمی U ، ضریب هدایت حرارتی سیال k ، دمای محیط T_∞ ، شعاع داخلی دیسک R_i و ضرایب انتقال بالایی و پایینی ترتیب h_1 و h_2 هستند. توزیع دمای شعاعی در سیال را بیابید.

۳-۲۹. یک پره سوزنی با سطح مقطع متغیر (شکل ۳-۶۳) را در نظر بگیرید. ضریب هدایت حرارتی، ضخامت پایه و طول پره به‌ترتیب k ، $2b$ و L هستند. ضریب انتقال حرارت h و دمای محیط T_∞ است. دمای پایه و کل حرارت تلف شده از پره را با فرض اینکه سطح مقطع آن به‌طور (الف) خطی (ب) نمایی تغییر کند، بیابید.



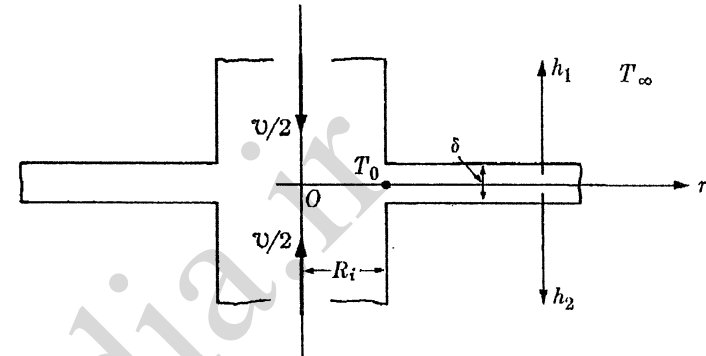
شکل ۳-۶۳

۳-۳۰. یک دیسک دیواره نازک با سرعت زاویه‌ای ω بر روی یک دیسک ساکن می‌چرخد (شکل ۳-۶۴). فشار سطح تماس p ، ضریب اصطکاک خشک μ و دمای محیط T_∞ است. ضرایب انتقال حرارت بالایی، پایینی و جانبی به‌ترتیب h_1 ، h_2 و h_3 هستند. شعاع، ضخامت و ضریب هدایت حرارتی صفحات R ، δ_1 ، δ_2 و k_1 و k_2 هستند. دمای پایای سیستم را بیابید.

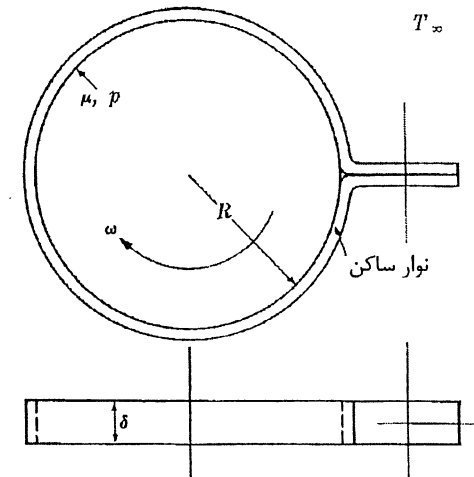


شکل ۳-۶۴

۳-۳۱. بخار در حال میعان در دمای T_0 در یک لوله پره دار شده جریان می‌یابد (شکل ۳-۶۵). شعاع خارجی لوله و شعاع خارجی پره‌ها به‌ترتیب R و R_0 هستند. ضخامت پره δ است و ضریب انتقال حرارت میان پره و محیط h و دمای محیط T_∞ است. توزیع دما در پره‌ها را بیابید.



شکل ۳-۶۷

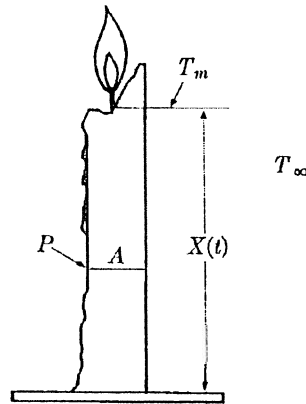


شکل ۳-۶۸

۳-۳۴. پره‌های صنعتی (مستقیم، شعاعی یا نوک تیز) اغلب از صفحات فلزی نازک با ضخامت یکنواخت که به لوله‌ها جوش داده می‌شوند، ساخته شده‌اند. انتقال حرارت به محیط در طول پره ثابت باقی نمی‌ماند، زیرا اختلاف دما میان پره و محیط در طول پره کاهش می‌یابد و در نتیجه استفاده ضعیفی از مواد صورت می‌گیرد. می‌خواهیم برای تصحیح این وضعیت مساحت سطح مقطع پره را طوری تغییر دهیم که شار حرارتی q/A در طول پره ثابت باقی بماند. پروفایل پره‌های مستقیم، شعاعی و نوک تیز با ضخامت نوک صفر را که شرایط مذکور را دارا باشد، بیابید.

۳-۳۵. می‌خواهیم یک ترمز پرونی را به وسیله یک دیسک جامد با شعاع R و ضخامت δ که به صورت محیطی با یک لایه با ضخامت نازک احاطه شده است، شبیه‌سازی کنیم (شکل ۳-۶۸). فشار سطحی P و ضریب اصطکاک خشک μ است. ابتدا ترمز در دمای محیط T_∞ قرار دارد سپس فرض می‌شود که به طور ناگهانی تحت سرعت زاویه‌ای ω قرار گیرد. دمای ناپایای ترمز را بیابید.

۳-۳۶. یک شمع روشن را در نظر بگیرید. طول اولیه و طول لحظه‌ای شمع به ترتیب L و $x(t)$ و محیط آن P است. سطح مقطع شمع نیز A می‌باشد (شکل ۳-۶۹). دمای ذوب شدن موم شمع T_m و دمای محیط T_∞ است. سرعت ذوب شدن شمع را بیابید.



شکل ۳-۶۹

۳-۳۷. مثال ۳-۱۰ را دوباره در نظر بگیرید. توزیع دمای سطح گسترش‌یافته را با فرض وابستگی ضریب هدایت حرارتی آن به حالات زیر به دست آورید:

الف) وابستگی به دما به صورت $k = k(t)$ ،

ب) وابستگی به مکان به صورت $k = k_0 x^n$ و به طوری که n می‌تواند سه حالت داشته باشد:

$0 < n < 2$, $n = 2$ و $n \neq 2$ ولی عددی صحیح.

فصل چهارم

مسائل پایای دو و سه بعدی، جداسازی متغیرها،

توابع متعامد

مباحث قبلی مان به مسائل یک بعدی پایا محدود می‌شد. به‌طور کلی از آنجایی که این‌گونه مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم را حاصل می‌کنند، معمولاً قابل حل می‌باشند. به عبارت دیگر، مسائل پایای دو و سه بعدی و مسائل ناپایا، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را حاصل می‌کنند، که هیچ راه حل کلی برای آن‌ها وجود ندارد. در این فصل و در فصول ۵، ۶ و ۷ چندین روش برای حل دقیق این مسائل ارائه شده است.

وقتی که مرزهای یک مساله هدایت چند بعدی متناظر با سطوح مختصات در یک سیستم مختصات متعامد^۱ مثل مختصات‌های کارتزین، استوانه‌ای، و کروی باشد، راه دقیق توسط روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر خواهد بود. یک روش متداول براساس جداسازی متغیرها، و دیگری براساس تبدیل لاپلاس می‌باشد. دلایل قانع‌کننده‌ای وجود دارد که نشان می‌دهند این دو روش بسیار متداول، برای حل مسائل ویژه مناسب‌تر از سایر روش‌ها می‌باشند؛ البته، روش تبدیل لاپلاس برای حل مسائل پیچیده مناسب است، و نیازمند آگاهی از ریاضیات پیشرفته‌تری می‌باشد. بنابراین، بحث پیرامون تبدیل لاپلاس را به فصل ۷ موکول می‌کنیم و این فصل را به روش جداسازی متغیرها اختصاص می‌دهیم. در چهار بخش بعدی مروری بر روابط ریاضی ضروری برای این روش، خواهیم داشت.

۴-۱. مسائل مقدار مرزی^۱، مسائل مقدار مشخصه^۲

در ابتدا یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم که از فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله هدایت یک بعدی پایا حاصل می‌شود را در نظر بگیرید. جواب این مساله شامل دو ثابت اختیاری است که توسط دو شرط تعیین می‌شوند، که هر کدام از این شرایط در یکی از مرزهای مساله قرار دارند. به این‌گونه مسائل، مسائل مقدار مرزی گفته می‌شود و با مسائل مقدار اولیه که در آن‌ها همه شرایط در یک مکان تعیین شده است، متفاوت می‌باشد. یک مثال از مساله مقدار اولیه سقوط آزاد یک جسم است که در فصل ۱ به آن اشاره شد^۳.

حال یک معادله خطی همگن^۴ مرتبه دوم را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x) \frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0, \quad (4-1)$$

که در مرزهای $x = a$ و $x = b$ مقدار تابع y به صفر می‌رسد،

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (4-2)$$

جواب کلی این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (4-3)$$

که در آن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌های مستقل خطی و C_1 ، C_2 ثوابت اختیاری می‌باشند. از ترکیب این جواب با شرایط مرزی داریم:

$$C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) = 0, \quad (4-4)$$

$$C_1 y_1(b) + C_2 y_2(b) = 0.$$

یک جواب این معادله همگن به ازای $C_1 = C_2 = 0$ به دست می‌آید که به آن جواب بدیهی $y \equiv 0$ می‌گویند. اگر دترمینان ضرایب C_1 و C_2 غیرصفر باشد، جواب بدیهی، تنها جواب است. اگر دترمینان ضرایب صفر باشد، داریم:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0. \quad (4-5)$$

حال دو معادله (۴-۴) یکسان بوده و یک ثابت را می‌توان به صورت حاصل ضرب دیگری با استفاده از یکی از معادلات بیان نمود، و ثابت دوم اختیاری است. بنابراین اگر معادله (۴-۵) صادق بوده و با

1- Boundary Value Problems

2- Characteristic Value Problems

۳- وقتی که یک مساله ناپایا متمرکز باشد به یک مساله مقدار اولیه تبدیل می‌شود، و به یک مساله مقدار اولیه و مقدار مرزی تبدیل می‌شود اگر به صورت توزیع شده فرموله شود.

۴- بخش ۳-۴ را برای تعریف معادلات دیفرانسیل همگن و ناهمگن و شرایط مرزی ببینید.

در نظر گرفتن اولین معادله (۴-۴) $C_2 y_2(a) = -C_1 y_1(a)$ به دست می‌آید. با تعریف ثابت جدید C به صورت $C_1 = C y_2(a)$ معادله $C_2 = -C y_1(a)$ به دست می‌آید و معادله (۴-۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$y = C[y_2(a)y_1(x) - y_1(a)y_2(x)]. \quad (4-6)$$

به سادگی می‌توان دید که معادله (۴-۶) در شرایط مرزی صدق می‌کند. یک شرط، $y(a) = 0$ است که به طور مستقیم از معادله (۴-۶) حاصل می‌شود و شرط دیگر یعنی $y(b) = 0$ معادله (۴-۶) را به $y_2(a)y_1(b) - y_1(a)y_2(b) = 0$ تبدیل می‌کند، که این عبارت، منفی معادله (۴-۵) است. شایان ذکر است که معادله (۴-۶) جواب غیربدیهی است اگر فقط $y_1(a)$ و $y_2(a)$ هر دو صفر نباشند. اگر $y_1(a) = y_2(a) = 0$ باشد معادله اول (۴-۴) پاسخ بدیهی خواهد بود، که در این مورد تنها معادله دوم ممکن است برای به دست آوردن رابطه بین ثوابت C_1 ، C_2 مورد استفاده قرار گیرد. و پاسخ غیربدیهی به صورت زیر خواهد بود:

با این شرط که $y_1(b)$ و $y_2(b)$ هر دو صفر نیستند. اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ هر دو در نقاط $x = a$ و $x = b$ صفر شوند، آن‌گاه برای مقادیر اختیاری ثوابت C_1 ، C_2 معادله (۴-۳) در معادله (۴-۲) صدق می‌کند. اگر معادله (۴-۵) صادق نباشد، تنها پاسخ مساله، پاسخ بدیهی یا $y \equiv 0$ خواهد بود. پاسخ مسائل هدایت پایای دو و سه بعدی، و همچنین پاسخ مسائل ناپایای یک و چند بعدی ممکن است به پاسخ معادله (۴-۱) تبدیل شوند، که در معادله (۴-۱) ضرایب $f_1(x)$ یا $f_2(x)$ به پارامتر λ وابسته هستند. در چنین مسائلی ممکن است دترمینان معادله (۴-۵) تنها برای مقادیر حقیقی λ ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$) به صفر میل کند؛ این مقادیر، مقادیر مشخصه نامیده می‌شوند. به ازای هر مقدار از λ یک پاسخ، مشابه معادله (۴-۶) حاصل می‌شود؛ این پاسخ‌های ویژه توابع مشخصه مساله هستند و مسائلی این‌چنینی مسائل مقدار مشخصه نامیده می‌شوند. که در این مورد واژه‌های مقادیر ویژه^۱ و توابع ویژه^۲ و مسائل مقدار ویژه^۳ نیز استفاده می‌شوند.

روند کلی مذکور را می‌توان با استفاده از یک مثال به طور واضح‌تری شرح داد. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

این معادله در بخش ۶-۳ برای نشان دادن روش سری‌های توانی برای حل معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار گرفت. علاوه بر آن فرض می‌کنیم که این معادله همگن شامل یک پارامتر λ به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0, \quad (F-7)$$

و شرایط مرزی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y(0) = 0, \quad (F-8)$$

$$y(L) = 0. \quad (F-9)$$

پاسخ کلی معادله (F-7) به صورت زیر است:

$$y = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x. \quad (F-10)$$

با استفاده از معادله (F-8)، $C_2 = 0$ می‌شود و خواهیم داشت:

$$y = C_1 \sin \lambda x, \quad (F-11)$$

و از ترکیب معادله (F-9) با معادله (F-11) معادله $C_1 \sin \lambda L = 0$ حاصل می‌شود. تنها اگر λ در معادله $\sin \lambda L = 0$ صدق کند، معادله دارای پاسخ غیربدیهی است. بنابراین،

$$\lambda_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (F-12)$$

و پاسخ متناظر با معادله (F-11) به صورت زیر است:

$$y = C_1 \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x) = \sin(n\pi/L)x. \quad (F-13)$$

وقتی که n دارای مقدار صحیح منفی باشد هیچ پاسخ جدیدی حاصل نمی‌شود.

بنابراین مساله مقدار مرزی مذکور، یعنی معادلات (F-7)، (F-8)، و (F-9) تنها دارای پاسخ بدیهی $y \equiv 0$ می‌باشد، مگر این که λ دارای مقدار مشخصه‌ای حاصل از معادله (F-12) باشد. متناظر با هر مقدار λ_n یک تابع مشخصه $\varphi_n(x)$ وجود دارد که توسط معادله (F-13) حاصل می‌شود. حاصل ضرب هر ثابت دلخواهی در این تابع پاسخی از مساله است. نکته مهم این است که مساله مقدار مرزی زیر

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \lambda^2 y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

به ازای $\lambda = 0$ تنها دارای پاسخ بدیهی $y \equiv 0$ است. از این رو برای این مساله مقادیر مشخصه و توابع مشخصه وجود نخواهد داشت. این امر این واقعیت را نشان می‌دهد که یک مساله مقدار مرزی ممکن است مساله مقدار مشخصه باشد یا این که نباشد. وقتی که یک مساله مقدار اولیه دارای پاسخ‌های ویژه‌ای با ماهیت متناوب باشد، تبدیل به مساله مقدار مشخصه خواهد شد؛ دوره تناوب و میدان نوسان این پاسخ‌ها ممکن است ثابت و یا متغیر باشد. مثال‌هایی از پاسخ‌های ویژه با ماهیت متناوب شامل توابع دایره‌ای^۱ و توابع بسل نوع اول و دوم با هر درجه‌ای است. از آنجایی که نقطه آغازین مساله مقدار مشخصه یک مساله مقدار مرزی است، معمولاً به مساله مقدار مشخصه، مساله مقدار مرزی گفته می‌شود.

در سه بخش بعدی ویژگی‌های کلی توابع مشخصه بررسی شده است.

۴-۲. تعامد توابع مشخصه

طبق تعریف، دو تابع $\varphi_m(x)$ و $\varphi_n(x)$ در یک بازه محدود (a, b) و با استفاده از تابع وزنی $\omega(x)$ متعامد نامیده می‌شوند اگر انتگرال حاصل ضرب $\omega \varphi_n \varphi_m$ در آن بازه صفر باشد و داریم:

$$\int_a^b \omega(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (F-14)$$

علاوه بر آن، دسته‌ای از توابع در بازه (a, b) متعامد نامیده می‌شوند اگر هر دو جفت متمایز از این توابع در بازه (a, b) متعامد باشند. واژه تعامد از تحلیل برداری گرفته شده است. می‌خواهیم یک بردار در فضای سه بعدی را با $\varphi_m(x_i)$ نشان دهیم که تصاویر این بردار روی محورهای مختصات $\varphi_m(x_1)$ ، $\varphi_m(x_2)$ و $\varphi_m(x_3)$ است. دو بردار $\varphi_m(x_i)$ و $\varphi_n(x_i)$ متعامدند و یا بر هم عمودند اگر داشته باشیم:

$$\varphi_m(x_i) \cdot \varphi_n(x_i) = \sum_{i=1}^3 \varphi_m(x_i) \varphi_n(x_i) = 0.$$

وقتی که واحد طول در محورهای مختصات از یک محور به محور دیگر تغییر کند، حاصل ضرب نرده‌ای مذکور را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\varphi_m(x_i) \cdot \varphi_n(x_i) = \sum_{i=1}^3 \omega(x_i) \varphi_m(x_i) \varphi_n(x_i),$$

که در آن تعداد توابع وزنی $\omega(x_1)$ ، $\omega(x_2)$ و $\omega(x_3)$ به واحد طولی مورد استفاده در طول سه محور، بستگی دارد. به طور مشابه، بردارهای فضای N بعدی و دارای سازنده‌های $\varphi_m(x_i)$ و $\varphi_n(x_i)$ و $i = 1, 2, 3, \dots, N$ با استفاده از توابع وزنی $\omega(x_i)$ وقتی متعامدند که داشته باشیم:

(۴-۱۵)

$$\varphi_m(x_i) \cdot \varphi_n(x_i) = \sum_{i=1}^N \omega(x_i) \varphi_m(x_i) \varphi_n(x_i) = 0.$$

اگر بردار فضایی دارای تعداد نامحدودی بعد باشد، عبارات $\varphi_m(x_i)$ و $\varphi_n(x_i)$ به طور پیوسته متمایز بوده و x_i گسسته نبوده بلکه دارای مقادیر پیوسته است و به آن x می گویند؛ در این مورد معادله (۴-۱۵) با معادله (۴-۱۴) یکسان خواهد شد.

اکنون می توان نشان داد که توابع مشخصه یک مساله مقدار مشخصه، در یک بازه محدود، و با استفاده از تابع وزنی، متعامدند. برای نشان دادن این واقعیت، مساله مقدار مشخصه شامل معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم با شکل کلی زیر را در نظر می گیریم:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f_1(x) \frac{dy}{dx} + [f_2(x) + \lambda^2 f_3(x)] y = 0$$

و دو شرط مرزی همگن در دو انتهای بازه محدود (a, b) تعیین می شوند. اگر این معادله را در عبارت $\exp[\int f_1(x) dx] = q(x)$ و در تابع $f_2(x)p(x) = q(x)$ و $f_3(x)p(x) = \omega(x)$ ضرب نموده و بازآرایی کنیم خواهیم داشت:

(۴-۱۶)

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda^2 \omega(x)] y = 0,$$

که این معادله برای بحث حاضر مناسب تر است.

λ_m و λ_n مقادیر مشخصه متمایز هستند، که در آن ها $m \neq n$ بوده و $\varphi_m(x)$ و $\varphi_n(x)$ متناظر با توابع مشخصه است. از آنجایی که $y = \varphi_m(x)$ و $y = \varphi_n(x)$ پاسخ های معادله (۴-۱۶) هستند، داریم:

$$\frac{d}{dx} \left[p \frac{d\varphi_m}{dx} \right] + [q + \lambda_m^2 \omega] \varphi_m = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left[p \frac{d\varphi_n}{dx} \right] + [q + \lambda_n^2 \omega] \varphi_n = 0.$$

با ضرب معادله اول در φ_n و ضرب معادله دوم در φ_m سپس تفریق معادله دوم از اول خواهیم داشت:

$$\varphi_n \frac{d}{dx} \left[p \frac{d\varphi_m}{dx} \right] - \varphi_m \frac{d}{dx} \left[p \frac{d\varphi_n}{dx} \right] + (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \omega \varphi_m \varphi_n = 0.$$

با انتگرال گیری از این معادله در بازه محدود (a, b) خواهیم داشت:

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_a^b \omega \varphi_m \varphi_n dx = \int_a^b \left[\varphi_n \frac{d}{dx} \left[p \frac{d\varphi_m}{dx} \right] - \varphi_m \frac{d}{dx} \left[p \frac{d\varphi_n}{dx} \right] \right] dx,$$

با انجام انتگرال سمت راست معادله بالا خواهیم داشت:

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_a^b \omega \varphi_m \varphi_n dx = \left[p(x) \left[\varphi_n(x) \frac{d\varphi_m(x)}{dx} - \varphi_m(x) \frac{d\varphi_n(x)}{dx} \right] \right]_a^b \quad (۴-۱۷)$$

از آنجایی که هر دو عبارت $y = \varphi_m(x)$ و $y = \varphi_n(x)$ پاسخ های ویژه معادله (۴-۱۶) هستند، وقتی که یکی از شرایط مرزی زیر در در انتهای بازه (a, b) تعیین شود، سمت راست معادله (۴-۱۷) صفر می شود:

(۴-۱۸)

$$y = 0,$$

(۴-۱۹)

$$dy/dx = 0,$$

(۴-۲۰)

$$dy/dx + By = 0,$$

که در آن B یک پارامتر اختیاری است. در واقع وقتی که معادله (۴-۲۰) صادق باشد معادله (۴-۱۷) صفر خواهد شد که می توان حالت را با بازآرایی قسمت سمت راست معادله (۴-۱۷) و به صورت زیر نشان داد:

$$\varphi_n \varphi'_m - \varphi_m \varphi'_n = \varphi_n \varphi'_m - \varphi_m \varphi'_n \pm B \varphi_m \varphi_n = \varphi_n (\varphi'_m + B \varphi_m) - \varphi_m (\varphi'_n + B \varphi_n).$$

به ویژه وقتی که در $x = a$ یا $x = b$ $p(x) = 0$ باشد، سمت راست معادله (۴-۱۷) صفر خواهد شد، که در این صورت شروط داده شده در معادلات (۴-۱۸) و (۴-۱۹) یا (۴-۲۰)، که در $x = a$ یا $x = b$ صادق باشد را می توان از مساله حذف نمود به شرطی که در نقاط $x = a$ یا $x = b$ dy/dx محدود باشد. اگر $p(b) = p(a)$ باشد، تعامد به شرطی وجود خواهد داشت که شرایط مرزی با شرایط $y(b) = y(a)$ و $y'(b) = y'(a)$ جایگزین شود، که به این شرایط اخیر شرایط مرزی متناوب گفته می شود.

به عنوان یک مثال، مساله مقدار مشخصه ذکر شده در معادلات (۴-۷) و (۴-۸) و (۴-۹) را دوباره در نظر بگیرید. مقایسه ای بین معادلات (۴-۷) و (۴-۱۶)، $\omega(x) = 1$ را حاصل می کند و شرط تعامد برای این مسائل به صورت زیر است:

$$\int_0^L \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \int_0^L \sin(m\pi x/L) \sin(n\pi x/L) dx = 0, \quad m \neq n,$$

که این امر را می توان به وسیله انتگرال گیری مستقیم و به طور مستقل به دست آورد.

۴-۳. بسط توابع دلخواه به صورت سری توابع متعامد

فرض کنید $\varphi_n(x)$ دسته ای از توابع متعامد در بازه محدود (a, b) و به همراه تابع وزنی $\omega(x)$ است. می خواهیم تابع دلخواه $f(x)$ را به شکل یک سری به شکل زیر بسط دهیم و داریم:

$$f(x) = b_0 \varphi_0(x) + b_1 \varphi_1(x) + b_2 \varphi_2(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x). \quad (۴-۲۱)$$

می‌خواهیم یک تابع $f(x)$ دلخواه را برحسب توابع مشخصه بسط دهیم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi/L)x, \quad 0 < x < L, \quad (4-21)$$

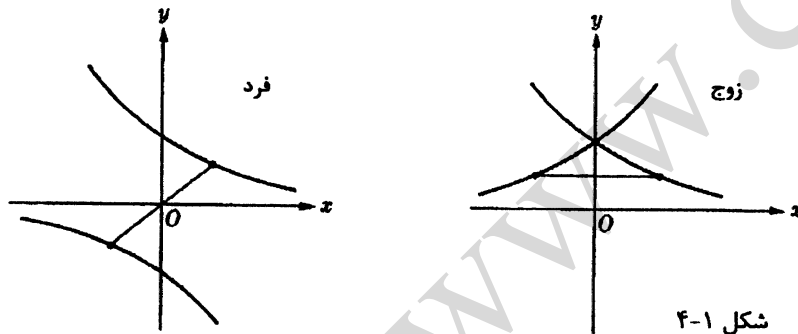
در آن ضرایب b_n با استفاده از معادله (۴-۲۳) به دست می‌آید:

$$b_n = \frac{\int_0^L f(x) \sin(n\pi/L)x dx}{\int_0^L \sin^2(n\pi/L)x dx}. \quad (4-22)$$

سادگی و با انتگرال گیری مستقیم می‌توان نشان داد که مخرج معادله (۴-۲۵) بدون توجه به n برابر $L/2$ است از این رو داریم:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (4-23)$$

ری بیان شده در معادله (۴-۲۴) تعریف سری سینوس فوری تابع $f(x)$ در بازه $(0, L)$ است. به عبارات این سری با دوره تناوب $2L$ ، که دو برابر طول بازه است، متناوب می‌باشند. اگر x را با $-x$ جایگزین کنیم، علامت هر عبارت معکوس می‌شود. از این رو در بازه $(-L, 0)$ سری نشان دهنده تابع $-f(x)$ است. رفتار سری‌ها در بازه $(-L, L)$ به صورت تناوبی برای همه مقادیر x تکرار می‌شود. اگر $f(x)$ تابعی فرد از x باشد؛ سری به دست آمده از معادله (۴-۲۴) تابع $f(x)$ را در بازه $(0, L)$ نشان نمی‌دهد بلکه این سری نشان دهنده تابع $f(x)$ در بازه $(-L, L)$ است. علاوه بر آن $f(x)$ متناوب، با دوره تناوب $2L$ ، باشد، سری‌ها در هر نقطه‌ای $f(x)$ را نشان می‌دهند.



شکل ۴-۱

ک تابع $f(x)$ تابع فرد نامیده می‌شود اگر $f(-x) = -f(x)$ باشد و یک تابع زوج است اگر $f(-x) = f(x)$ باشد. یک تابع فرد نسبت به مبدا متقارن است، در حالی که یک تابع زوج نسبت محور y متقارن است (شکل ۴-۱).

با فرض وجود چنین بسطی، می‌توانیم ضرایب b_n را به دست آوریم. با ضرب دو طرف معادله (۴-۲۱) در $\omega(x)\varphi_m(x)$ و انتگرال گیری از نتیجه آن در بازه (a, b) و با فرض اینکه انتگرال یک حاصل جمع نامحدود معادل مجموع انتگرال باشد خواهیم داشت:

$$\int_a^b \omega(x)f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_a^b \omega(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx, \quad (4-22)$$

که در آن $m, \varphi_m(x)$ امین عبارت در گروه توابع ذکر شده است. با استفاده از تعامد گروه توابع، می‌توانیم دریابیم که همه عبارات موجود در سیکمای سمت راست معادله (۴-۲۲) صفر بوده به جز عبارت متناظر با $n = m$ از این رو معادله (۴-۲۲) عبارت زیر را حاصل می‌کند:

$$b_n = \frac{\int_a^b \omega(x)f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \omega(x)\varphi_n^2(x)dx}. \quad (4-23)$$

مساله کلی تعیین این که آیا بسط به وجود آمده به وسیله معادله (۴-۲۱)، بیان کننده تابع $f(x)$ است یا خیر، خارج از محدوده این کتاب است. البته قابل ذکر است که چنین بسط‌هایی کاملاً عمومیت دارند و برخلاف بسط‌های تیلور و مک‌لورن که نیاز دارد تابع و همه مشتقاتش پیوسته باشند، اگر تابع $f(x)$ در بازه محدود (a, b) یک تابع دیفرانسیل پذیر تکه‌ای^۱ باشد، سری بیان شده در معادله (۴-۲۱)، در تمام نقاط دارای پیوستگی به تابع $f(x)$ ، و در هر نقطه دارای ناپیوستگی به مقدار متوسط $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ همگرا است^۲.

در بخش بعدی نشان می‌دهیم که سری‌های معروف فوری در واقع موارد به خصوصی از بسط‌ها برحسب توابع متعامد شامل توابع دایره‌ای هستند.

۴-۴. سری‌های فوری

در بخش (۴-۱) آموختیم که مساله مقدار مرزی زیر به یک مساله مقدار مشخصه منجر می‌شود

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

که این مساله مقدار مشخصه دارای مقادیر مشخصه و توابع مشخصه زیر است:

$$\lambda_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4-12)$$

$$\varphi_n(x) = \sin(n\pi/L)x. \quad (4-13)$$

۱- Piecewise differentiable

۲- تابع $f(x)$ تابع دیفرانسیل پذیر تکه‌ای است، اگر بتوان آن محدوده را به تعداد مشخصی بازه تقسیم کرد بطوری که $f(x)$ در هر یک از بازه‌ها دیفرانسیل پذیر باشد و $f'(x)$ از هر دو سوی ناپیوستگی به مقدار مشخصی برسد.

به عنوان یک مثال سری فوریه سینوسی تابع زیر را در بازه $(0, L)$ مدنظر قرار می دهیم (شکل

(۴-۲)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \text{ و } L/2 < x < \infty \\ 1, & 0 < x < L/2 \end{cases} \quad (۴-۲۷)$$

ضرایب سری به صورت زیر است:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{n\pi} \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right);$$

از این رو سری به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (۴-۲۸)$$

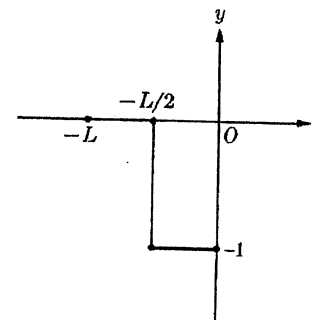
با همین سری ها می توان تابع زیر را در بازه $(-L, 0)$ نشان داد (شکل ۴-۳):

$$-f(x) = f(-x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -L/2 \text{ و } 0 < x < \infty \\ -1, & -L/2 < x < 0 \end{cases}$$

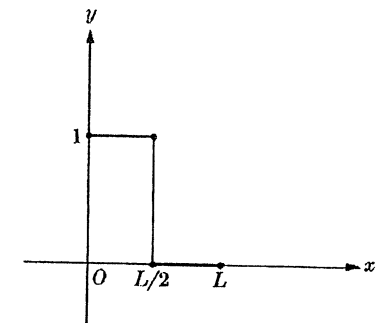
بنابراین سری فوریه سینوسی تابع فرد به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -L/2 < x < 0 \\ 0, & -\infty < x < -L/2 \text{ و } L/2 < x < \infty \\ 1, & 0 < x < L/2 \end{cases}$$

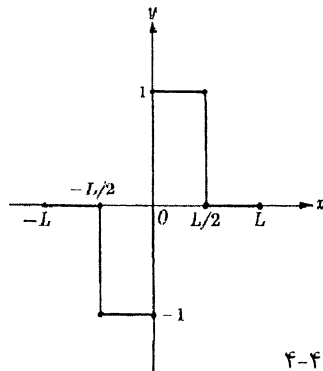
که عبارت بالا تابع $f(x)$ را در بازه $(-L, L)$ (شکل ۴-۴) به جز در نقاط ناپیوستگی نشان می دهد و رفتار متناوب را به ازای همه مقادیر x (شکل ۴-۵) تکرار می کند.



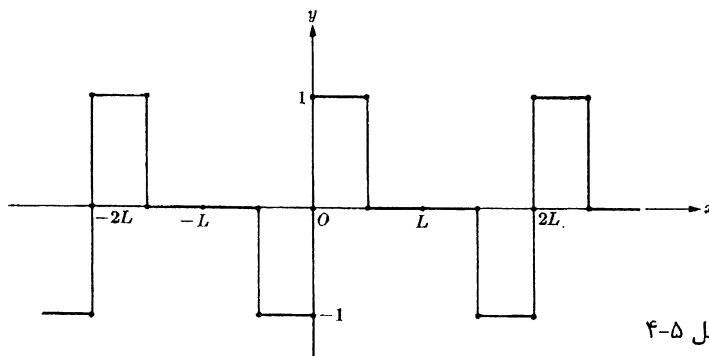
شکل ۴-۳



شکل ۴-۲



شکل ۴-۴



شکل ۴-۵

بسط سری شامل کسینوس به جای سینوس ممکن است با در نظر گرفتن مساله مقدار مرزی زیر حاصل شود:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0; \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0. \quad (۴-۲۹)$$

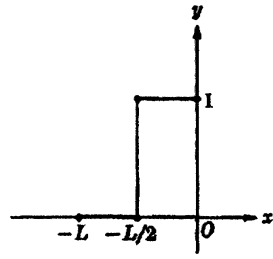
برطبق روند مساله مقدار مشخصه قبلی، می توانیم به سادگی مقادیر مشخصه و توابع مشخصه را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\lambda_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad \varphi_n(x) = \cos(n\pi/L)x. \quad (۴-۳۰)$$

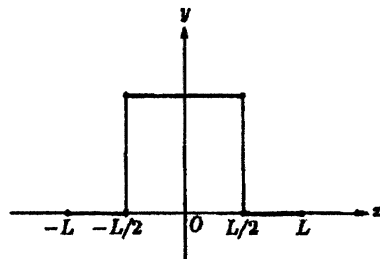
باید متذکر شد که $\varphi_0(x) = 1$ یکی از اعضای گروه توابع مشخصه در معادله (۴-۳۰) و متناظر با $\lambda_0 = 0$ است. اکنون با بسط یک تابع دلخواه $f(x)$ با استفاده از سری مذکور، خواهیم داشت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi/L)x, \quad 0 < x < L, \quad (۴-۳۱)$$

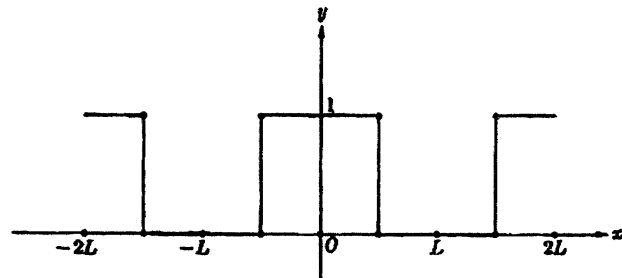
که در آن ضرایب a_n با استفاده از معادله (۴-۲۳) و به صورت زیر محاسبه می شود:



شکل ۴-۶



شکل ۴-۷



شکل ۴-۸

بنابراین، می‌توان دید که هر تابع پیوسته تکه‌ای را می‌توان در بازه $(0, L)$ با سری‌هایی شامل سینوس و کسینوس و با دوره تناوب $2L$ بیان نمود. وقتی که تابع فرد باشد، سری‌های سینوس در بازه $(-L, L)$ معتبرند، در حالی که برای یک تابع زوج سری‌های کسینوسی در بازه $(-L, L)$ قرار می‌گیرند (پس برای توابع فرد، سری سینوسی و برای توابع زوج، سری کسینوسی در بازه $(-L, L)$ قرار می‌گیرند).

حال می‌خواهیم تابع $f(x)$ پیوسته تکه‌ای را در بازه $(-L, L)$ برحسب هر دو عبارت سینوسی کسینوسی دارای دوره تناوب $2L$ بیان کنیم. می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$

به تابع درون کروشه اول زوج بوده و درون کروشه دوم فرد است، می‌توانیم به این واقعیت توجه کنیم که یک تابع دلخواه را می‌توان برحسب مجموع توابع زوج و توابع فرد بیان نمود. از این رو:

$$f(x) = f_e(x) + f_o(x). \quad (۴-۲۵)$$

بیان تابع $f_e(x)$ برحسب کسینوس و $f_o(x)$ برحسب سینوس در بازه $(-L, L)$ خواهیم داشت:

$$f_e(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi/L)x, \quad (۴-۲۶)$$

$$a_0 = \frac{\int_0^L f(x) dx}{\int_0^L dx}, \quad a_n = \frac{\int_0^L f(x) \cos(n\pi/L)x dx}{\int_0^L \cos^2(n\pi/L)x dx}. \quad (۴-۲۷)$$

علاوه بر آن می‌توان نوشت:

$$\int_0^L \cos^2(n\pi/L)x dx = \begin{cases} L, & n = 0 \\ L/2, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

با بازآرایی معادله (۴-۲۷) خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\pi/L)x dx. \quad (۴-۲۸)$$

سری به‌دست آمده در معادله (۴-۲۸) تعریف سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ در بازه $(0, L)$ است. همه عبارات معادله (۴-۲۸) توابعی زوج از x هستند و با دوره تناوب $2L$ متناوب می‌باشند. این سری‌ها نشان‌دهنده تابع $f(-x)$ در بازه $(-L, 0)$ می‌باشند. اگر $f(x)$ تابع زوجی از x باشد سری نه تنها به‌ازای بازه $(0, L)$ به $f(x)$ همگراست بلکه به‌ازای بازه $(-L, 0)$ نیز به $f(x)$ همگراست. اگر علاوه بر آن $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $2L$ باشد سری در هر نقطه‌ای نشان‌دهنده تابع $f(x)$ است.

اکنون سری فوریه کسینوسی مثال قبلی یعنی معادله (۴-۲۷) را در نظر بگیرید ضرایب سری به صورت زیر است.

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} 1 \cdot dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\pi/L)x dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} 1 \cdot \cos(n\pi/L)x dx = \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi/2).$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi/2) \cdot \cos(n\pi/L)x. \quad (۴-۲۹)$$

با سری‌های مشابهی می‌توان تابع زیر را در بازه $(-L, 0)$ نشان داد (شکل ۴-۶).

$$f(x) = f(-x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -L/2 \text{ و } 0 < x < \infty \\ -1, & -L/2 < x < 0 \end{cases}$$

بنابراین سری فوریه کسینوسی تابع زوج به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -L/2 \text{ و } L/2 < x < \infty \\ 1, & -L/2 < x < L/2 \end{cases}$$

که عبارت بالا تابع $f(x)$ را در بازه $(-L, L)$ (شکل ۴-۷) به‌جز در نقاط ناپیوستگی نشان می‌دهد و رفتار متناوب را به ازای همه مقادیر x (شکل ۴-۸) تکرار می‌کند.

$$f_o(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi/L)x, \quad (4-37)$$

که در آن

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f_e(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_e(x) \cos(n\pi/L)x dx,$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f_o(x) \sin(n\pi/L)x dx.$$

از آنجایی که انتگرال گیری از این معادلات توابع زوجی از x را حاصل می کند، \int_0^L را با $\frac{1}{2} \int_{-L}^L$ جایگزین می کنیم:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (4-38)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\pi/L)x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(n\pi/L)x dx.$$

واضح است که قسمت فرد دو انتگرال اول و قسمت زوج انتگرال سوم، خود به طور یکسان صفر می شود. از این رو با قرار دادن معادله (۴-۳۶) و (۴-۳۷) درون معادله (۴-۳۵) خواهیم داشت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi/L)x + b_n \sin(n\pi/L)x], \quad -L < x < L. \quad (4-39)$$

این سری تعریف سری فوریه کامل تابع $f(x)$ در بازه $(-L, L)$ است. وقتی $f(x)$ زوج باشد، سری حاصل تنها شامل عبارت کسینوسی است، و وقتی $f(x)$ فرد باشد، سری حاصل تنها شامل عبارت سینوسی است. علاوه بر آن معادله (۴-۳۹) بر حسب هر دو تابع سینوس و کسینوس با دوره تناوب $2L$ و در بازه $(-L, L)$ می باشد و این رفتار به صورت تناوبی به ازای همه مقادیر x تکرار می شود.

در آخر می خواهیم سری فوریه کامل معادله (۴-۲۷) را به دست آوریم. ضرایب این سری ها عبارتند از:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2L} \int_0^{L/2} 1 \cdot dx = \frac{1}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x dx = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x dx = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2},$$

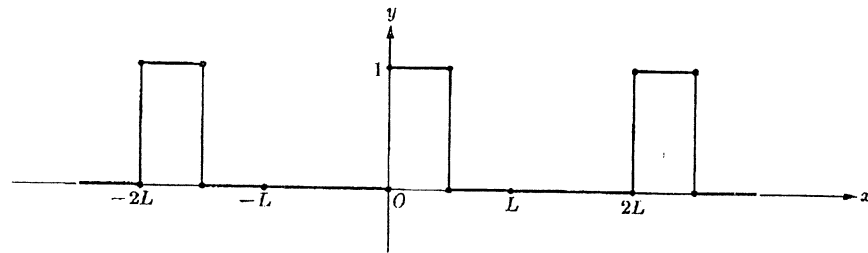
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x dx = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} 1 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x dx = \frac{1}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right).$$

بنابراین،

$$f(x) = \quad (4-40)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x + \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x \right]$$

که این تابع به ازای همه مقادیر x همگراست و یک تابع متناوب است که در شکل ۴-۹ نشان داده شده است. [معادله (۴-۴۰) را با مجموع بسط سری های سینوسی و کسینوسی توابع مشابه که در شکل های ۴-۵ و ۴-۸ به صورت هندسی، یا معادلات (۴-۲۸) و (۴-۳۴) به صورت جبری داده شده اند، مقایسه نمایید.]



شکل ۴-۹

با توجه به ریاضیات ارائه شده حال می خواهیم پاسخ مساله را با استفاده از روش جداسازی متغیرها به دست آوریم.

۴-۵. جداسازی متغیرها، معادلات پایای دو بعدی در مختصات کارتزین

وقتی که شرایط مرزی مساله بر حسب عبارت $T, \partial T / \partial n$ یا $\partial T / \partial n + BT$ باشد که در آن n جهت بردار عمود بر شرط مرزی و B یک ثابت است، ممکن است پاسخ را به صورت حاصل ضرب جداگانه توابعی از هر مختصات دلخواه بیان کنیم. این کار، این امکان را می دهد که شرایط مرزی را بر حسب یک متغیر بیان کرده، و همچنین معادله دیفرانسیل پاره ای به تعدادی معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شود.

حال خصوصیات اساسی روش را با استفاده از مساله پایای دو بعدی بیان می کنیم. معادله دیفرانسیل پاره ای مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید.

$$a_1(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_2(x) \frac{\partial T}{\partial x} + a_3(x)T + b_1(y) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + b_2(y) \frac{\partial T}{\partial y} + b_3(y)T = 0. \quad (4-41)$$

شکل کلی تر این معادله که در آن ضرایب، تابعی از هر دو متغیر مستقل می باشند، برای استفاده در روش جداسازی متغیرها مناسب نمی باشد.

فرض کنید پاسخ قاعده حاصل ضرب به صورت زیر باشد:

$$T(x, y) = X(x)Y(y), \quad (۴-۴۲)$$

که در آن X تنها تابعی از x و Y تنها تابعی از y است. هنگامی که X و Y هر یک در معادله دیفرانسیل جداگانه‌ای صدق کنند، این فرض دارای معنی و صادق خواهد بود.

با قرار دادن معادله (۴-۴۲) درون معادله (۴-۴۱) و تقسیم نتیجه آن بر XY خواهیم داشت:

$$\left[a_1(x) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + a_2(x) \frac{\partial X}{\partial x} + a_3(x) X \right] \frac{1}{X} = - \left[b_1(y) \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + b_2(y) \frac{\partial Y}{\partial y} + b_3(y) Y \right] \frac{1}{Y}. \quad (۴-۴۳)$$

سمت چپ این معادله از y مستقل بوده و سمت راست آن مستقل از x است. از آنجایی که x و y به‌طور مستقل تغییر می‌کنند، هر دو سمت معادله (۴-۴۳) از یکی از متغیرها مستقل است و باید دو طرف معادله برابر یک ثابت $+\lambda^2$ یا $-\lambda^2$ باشد. این ثابت پارامتر جداسازی نامیده می‌شود. از این‌رو معادله دیفرانسیل پارهای (۴-۴۱) به دو معادله دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌شود:

$$a_1(x) \frac{d^2 X}{dx^2} + a_2(x) \frac{dX}{dx} + [a_3(x) \pm \lambda^2] X = 0, \quad (۴-۴۴)$$

$$b_1(y) \frac{d^2 Y}{dy^2} + b_2(y) \frac{dY}{dy} + [b_3(y) \mp \lambda^2] Y = 0.$$

روش جداسازی متغیرها را وقتی می‌توان برای مسائل پایای دو بعدی مورد استفاده قرار داد که داشته باشیم:

(i) یکی از جهت‌های مساله با معادله دیفرانسیل همگن که دارای شرایط مرزی همگن است (جهت همگن)، بیان شود، در حالی که جهت دیگر با معادله دیفرانسیل همگن که دارای یک شرط مرزی همگن و یک شرط مرزی ناهمگن است (جهت ناهمگن)، بیان شود.

(ii) علامت λ^2 به صورتی انتخاب شود که مساله مقدار مرزی جهت همگن منجر به مساله مقدار مشخصه شود (یعنی علامت λ^2 را مخالف علامت جهت همگن مساله انتخاب می‌کنیم).

جواب‌های حاصل از روش جداسازی متغیرها به صورت مجموع یا انتگرالی است و به ترتیب به محدود بودن یا نامحدود بودن جهت همگن بستگی دارد. این فصل و فصل آینده به روش‌های سری که برای حل مسائل همگن با دامنه محدود قابل کاربرند، اختصاص داده شده است. مناسب است مسائلی که در حوزه مسائل همگن با دامنه نامحدود قرار می‌گیرند را توسط روش‌های انتگرالی حل نماییم. البته ساده‌تر است که این مسائل را با استفاده از روش تبدیل لاپلاس حل نمود که فصل ۷ به این مطلب اختصاص دارد (بخش ۵-۷ را ببینید).

نتایج حاصل از این بخش را می‌توان به سادگی برای مسائل سه‌بعدی و مسائل ناپایا بسط داد (به ترتیب بخش ۱۱-۴ و فصل ۵). حال می‌خواهیم روش جداسازی متغیرها را با تعدادی مثال بیان کنیم.

مثال ۴-۱. یک پره نامحدود دو بعدی با ضخامت l را در نظر می‌گیریم (شکل ۴-۱۰). دمای پایه پره $F(y)$ و دمای محیط T_∞ است. ضریب انتقال حرارت بزرگ است. می‌خواهیم دمای پایای پره را به‌دست آوریم.

فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله، با توجه به مبدا مختصات انتخابی به صورت زیر است.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0,$$

$$T(0, y) = F(y), \quad T(\infty, y) = T_\infty, \quad T(x, 0) = T_\infty, \quad T(x, l) = T_\infty.$$

حال می‌خواهیم جواب حاصل از روش جداسازی متغیرها را به‌دست آوریم، که برای این امر لازم است که معادله دیفرانسیل و سه شرط مرزی همگن باشد. اگر چه بیان مساله برحسب متغیر T این شرایط را ایجاد نخواهد شد بنابراین با تبدیل ساده زیر داریم:

$$\theta = T - T_\infty$$

با این تغییر متغیر بدون اثرگذاری بر همگنی معادله دیفرانسیل سه شرط از شرایط مرزی همگن می‌شود. بنابراین فرمولاسیون مساله برحسب θ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad (۴-۴۵)$$

$$\theta(0, y) = F(y) - T_\infty = f(y), \quad (۴-۴۶)$$

$$\theta(\infty, y) = 0, \quad (۴-۴۷)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad (۴-۴۸)$$

$$\theta(x, l) = 0. \quad (۴-۴۹)$$

حال فرض می‌کنیم پاسخ قاعده حاصل ضرب به صورت زیر باشد:

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y), \quad (۴-۵۰)$$

سپس با قرار دادن معادله (۴-۵۰) درون معادله (۴-۴۵) و تقسیم نتیجه بر XY خواهیم داشت:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n x}, \quad (4-54)$$

که B_n یک ثابت اختیاری است.

بنابراین، با استفاده از معادله (۴-۵۰)، پاسخ قاعده حاصل ضرب مساله به صورت زیر است:

$$\theta(x, y) = a_n e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y, \quad (4-55)$$

که همواره، $B_n C_n$ به صورت یک حاصل ضرب بوده و به مقدار ویژه n بستگی دارد و با a_n نشان داده می شود.

اکنون باید تعیین کنیم که کدام مقدار n باید در معادله (۴-۵۵) برای حل مساله، استفاده شود. به وضوح، معادله (۴-۵۵) در معادله دیفرانسیل (۴-۴۵)، و شرایط مرزی همگن یعنی معادلات (۴-۴۷)، (۴-۴۸)، و (۴-۴۹) برای همه مقادیر مثبت عدد صحیح، صدق می کند. به عبارت دیگر، با ترکیب کردن شرط مرزی ناهمگن، یعنی معادله (۴-۴۶)، با معادله (۴-۵۵)، عبارت زیر حاصل می شود:

$$f(y) = a_n \sin \lambda_n y,$$

که به طور کلی، ممکن است این رابطه به ازای تنها یک مقدار n صادق نباشد (یعنی این عبارت به ازای n های زیادی برقرار است.م). اگر چه با استفاده از خطی بودن مساله و استفاده از اصل جمع پذیری می توان بر این مشکل غلبه نمود. از این رو، برحسب تمام مقادیر مثبت n ، به جای معادله (۴-۵۵)، جواب را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y, \quad (4-56)$$

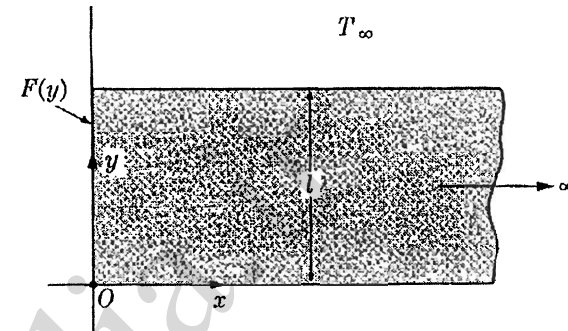
بنابراین شرط مرزی ناهمگن استفاده شده در معادله (۴-۵۶) با توجه به بخش ۳-۴، بسط زیر را حاصل می کند.

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n y, \quad (4-57)$$

در اینجا باید متذکر شد که تابع وزنی، واحد است، و می توانیم مقادیر a_n را با استفاده از معادله (۴-۲۳) به دست آوریم. نتیجه به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{\int_0^l f(y) \sin \lambda_n y dy}{\int_0^l \sin^2 \lambda_n y dx}. \quad (4-58)$$

مخرج معادله (۴-۵۸) برای مقادیر صحیح n برابر $l/2$ است. از این رو معادله (۴-۵۸) به صورت زیر خواهد بود:



شکل ۴-۱۰

$$\frac{1}{x} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \pm \lambda^2. \quad (4-51)$$

در اینجا علامت λ^2 باید به گونه ای انتخاب شود که در مساله مقدار مشخصه جهت y همگن باشد. با انتخاب $-\lambda^2$ پاسخ ویژه در جهت y به صورت توابع هذلولی بیان می شود و همان طور که در بخش ۴-۱ اشاره شد این گونه توابع نمی توانند متعامد باشند؛ از این رو برای مساله ما $+\lambda^2$ مناسب خواهد بود.

علاوه بر آن استفاده از معادله (۴-۵۰) شرایط مرزی همگن دو بعدی مساله را به شرایط یک بعدی تبدیل می کند. این امر ممکن است به سادگی توسط یکی از این شرایط بیان شود که آن شرط معادله (۴-۴۷) است. بنابراین، از آنجایی که $Y(y)$ اختیاری و دلخواه است، عبارت $\theta(\infty, y) = X(\infty)Y(y) = 0$ نشان می دهد که باید $X(\infty) = 0$ باشد.

سرانجام، مساله را به صورت جداگانه در جهات x و y و به صورت زیر بیان خواهیم نمود:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad Y(0) = 0, \quad Y(l) = 0, \quad (4-52)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \lambda^2 X = 0; \quad X(\infty) = 0. \quad (4-53)$$

شرط مرزی ناهمگن در جهت x جدایی ناپذیر است، و برای مرحله آخر راه حل، مورد استفاده قرار می گیرد.

مساله مقدار مشخصه معادله (۴-۵۲) قبلاً در بخش ۴-۱ حل شده است. [معادلات (۴-۷) تا (۴-۱۳) را ببینید]. توابع مشخصه $\varphi_n(y) = \sin \lambda_n y$ و مقادیر مشخصه $\lambda_n = n\pi/l$ (که در آن $n = 1, 2, 3, \dots$ است) می باشند. بنابراین جواب معادله (۴-۵۲)، $Y_n(y) = C_n \varphi_n(y)$ ، می باشد که در آن C_n یک ثابت اختیاری است. به عبارت دیگر، جواب کلی معادله (۴-۵۳) به شکل مناسبی برحسب توابع نمایشی به صورت زیر بیان می شود:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin \lambda_n y dy. \quad (۴-۵۹)$$

سرانجام، با قرار دادن معادله (۴-۵۹) درون معادله (۴-۵۶)، می‌توانیم پاسخ مساله را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\theta(x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l f(\eta) \sin \lambda_n \eta d\eta \right] e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y, \quad (۴-۶۰)$$

که در آن برای عدم بروز اشتباه، متغیر y در معادله (۴-۵۹) با متغیر ساختگی η جایگزین شده است.

در یک حالت ویژه، اگر دمای اولیه، یکنواخت باشد، یعنی

$$\theta(0, y) = f(y) = \theta_0.$$

نتیجه معادله (۴-۵۹) به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n = \frac{2\theta_0}{\lambda_n l} [1 - (-1)^n]. \quad (۴-۶۱)$$

بنابراین، اگر معادله (۴-۶۱) را درون معادله (۴-۵۶) قرار دهیم، پاسخ مساله براساس دمای ثابت پایه به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y. \quad (۴-۶۲)$$

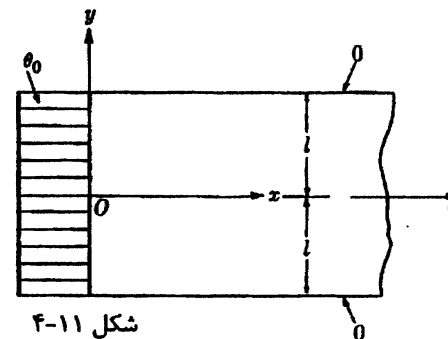
از آنجایی که تنها مقادیر فرد صحیح n را می‌توان در معادله (۴-۶۲) قرار داد، با تعریف عدد صحیح k به صورت $n = 2k + 1$ و استفاده از $\lambda_n = n\pi/l$ می‌توانیم معادله (۴-۶۲) را به صورت مناسب‌تر زیر بنویسیم:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(2k+1)(\pi/l)x}}{(2k+1)} \sin(2k+1) \frac{\pi}{l} y, \quad (۴-۶۳)$$

که در آن k همه مقادیر مثبت صحیح و صفر را در بر می‌گیرد.

مثال ۴-۲. برای نشان دادن اثر انتخاب

مبداء مختصات بر مساله، می‌خواهیم جواب مثال ۴-۱ را در یک مبداء مختصات جدید برای سیستم (شکل ۴-۱۱) برای مورد دمای یکنواخت در پایه θ_0 به دست آوریم. تقارن دمایی مساله با توجه به طول جدید تعریف شده در مساله موجب استفاده از $2l$ به عنوان ضخامت پره می‌شود. فرمولاسیون



شکل ۴-۱۱

مساله برحسب θ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0,$$

$$\theta(0, y) = \theta_0, \quad \theta(\infty, y) = 0, \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad \text{یا} \quad \theta(x, -l) = 0, \quad \theta(x, l) = 0.$$

با استفاده از پاسخ قاعده حاصل ضرب معادله (۴-۵۰) و $+\lambda^2$ ، معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی سیستم به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{\partial Y(0)}{\partial y} = 0, \quad Y(l) = 0, \quad (۴-۶۴)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0; \quad X(\infty) = 0. \quad (۴-۵۳)$$

در اینجا شرط تقارن وسط صفحه در جهت y ، مناسب‌تر بوده و ترجیح داده می‌شود.

جواب مساله مقدار مشخصه در جهت y با استفاده از معادله (۴-۶۴) به صورت زیر است:

$$Y_n(y) = C_n \varphi_n(y) \quad (۴-۶۵)$$

و داریم:

$$\varphi_n(y) = \cos \lambda_n y, \quad \text{توابع مشخصه} \quad (۴-۶۶)$$

$$\lambda_n = (2n + 1)\pi/2l, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{مقادیر مشخصه} \quad (۴-۶۷)$$

که در آن C_n یک ثابت دلخواه است.

جواب مساله مقدار مرزی در جهت x مشابه مساله پیش، معادله (۴-۵۳) است:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n x}. \quad (۴-۵۴)$$

بنابراین پاسخ قاعده حاصل ضرب معادله (۴-۵۰)، در ترکیب با معادلات (۴-۵۴)، (۴-۶۵)، (۴-۶۶)، و (۴-۶۷) نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y, \quad (۴-۶۸)$$

که در این معادله دوباره $a_n = B_n C_n$ است.

سرانجام، با استفاده شرط مرزی ناهمگن داده شده $\theta(0, y) = \theta_0$ ، می‌توان معادله (۴-۶۸) را به معادله زیر تبدیل نمود:

$$\theta_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y. \quad (۴-۶۹)$$

سپس، مثل قبل، با استفاده از معادله (۴-۲۳) خواهیم داشت:

$$a_n = (-1)^n \frac{2\theta_0}{\lambda_n l} \quad (4-70)$$

بنابراین، با قرار دادن معادله (۴-۷۰) درون معادله (۴-۶۸)، جواب مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\theta(x,y)}{\theta_0} = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y. \quad (4-71)$$

معادلات (۴-۶۳) و (۴-۷۱) نشان‌دهنده دمای یکسان در دو سیستم مختلف است. به جز در مسائل بدیهی، انتخاب مبداء مختصات بسیار مهم بوده و در اولین مرحله حل باید انتخاب شود. این نکته در بخش ۴-۶ شرح داده شده است.

مثال ۴-۳. توزیع دمای سطح گسترش‌یافته مثال ۴-۲ را برای ضریب انتقال حرارت محدود h (شکل ۴-۱۲) به دست آورید. این مثال با مساله یک بعدی ۳-۹ وقتی که توزیع دما در طول

ضخامت پره در مقایسه با جهت طولی قابل صرف‌نظر نیست، جایگزین شده است. در این مورد فرمولاسیون مساله برحسب مختصات سیستم مساله ۴-۲ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0,$$

$$\theta(0, y) = \theta_0, \quad \theta(\infty, y) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad -k \frac{\partial \theta(x, l)}{\partial y} = h \theta(x, l).$$

پاسخ قاعده حاصل ضرب داده شده توسط معادله (۴-۵۰) فرمولاسیون مساله را به روابط زیر تبدیل می‌کند:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad -k \frac{dY(l)}{dy} = hY(l), \quad (4-72)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0; \quad X(\infty) = 0. \quad (4-53)$$

مساله مقدار مشخصه در جهت Y ، معادله (۴-۷۲) دارای جواب زیر است:

$$Y_n(y) = C_n \varphi_n(y), \quad (4-73)$$

با

فصل ۴- مسائل پایای دو و سه بعدی، جداسازی متغیرها، توابع متعامد

$$\varphi_n(y) = \cos \lambda_n y, \quad (4-74) \quad \text{توابع مشخصه}$$

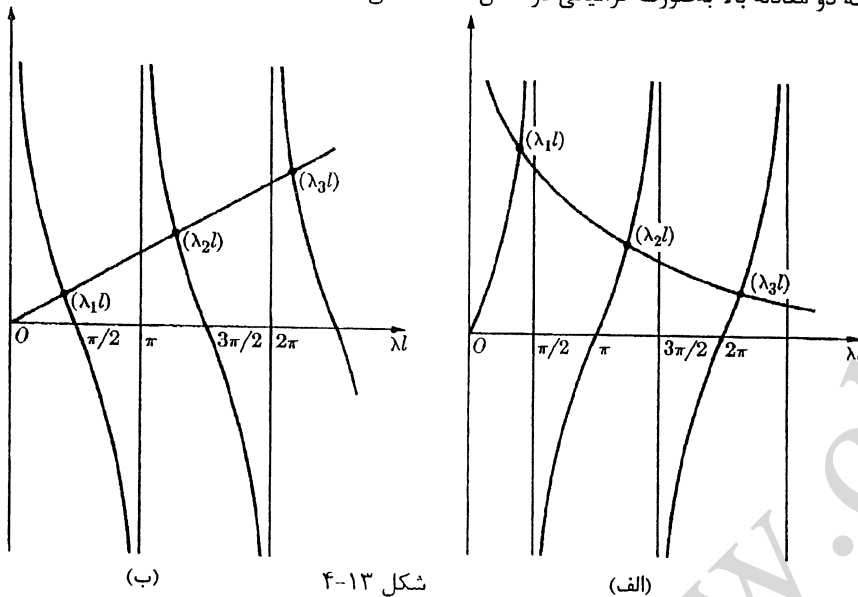
که در آن مقادیر مشخصه ریشه‌های معادله غیرجبری زیر است:

$$k \lambda_n \sin \lambda_n l = h \cos \lambda_n l. \quad (4-75)$$

معادله (۴-۷۵) را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر بازآرایی نمود:

$$\tan \lambda_n l = Bi / \lambda_n l, \quad \cot \lambda_n l = \lambda_n l / Bi; \quad Bi = hl/k,$$

که دو معادله بالا به صورت گرافیکی در شکل ۴-۱۳ نشان داده شده‌اند.^۱



مساله مقدار مرزی در جهت x مانند مثال ۴-۱ و ۴-۲ است، از این‌رو:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n x}, \quad (4-54)$$

و پاسخ قاعده حاصل ضرب مساله به صورت زیر است:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y. \quad (4-76)$$

سرانجام، با استفاده از شرط مرزی ناهمگن باقیمانده، خواهیم داشت:

۱- ضمیمه IV مرجع ۳ را برای مقادیر عددی λ_n ببینید.

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y, \quad (4-77)$$

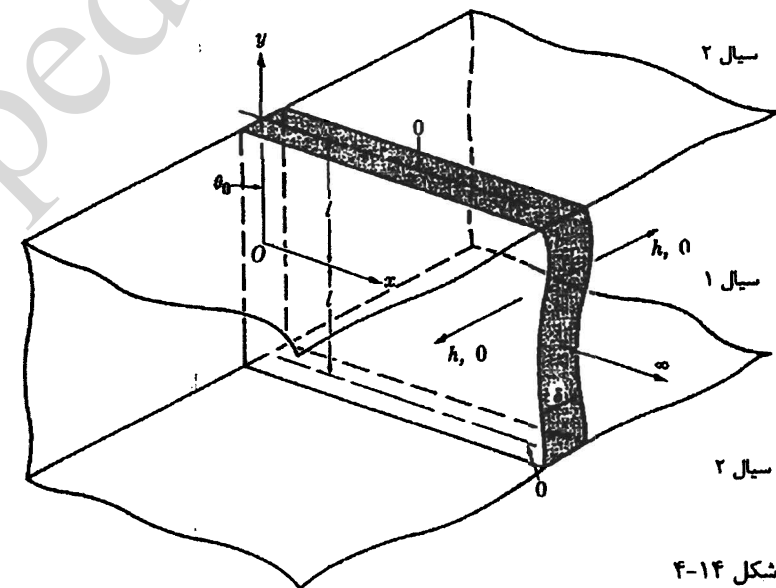
که مقدار a_n با استفاده از معادله (۴-۷۳) به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2\theta_0 \sin \lambda_n l}{\lambda_n l + \sin \lambda_n l \cos \lambda_n l} \quad (4-78)$$

با قرار دادن معادله (۴-۷۸) درون معادله (۴-۷۶)، توزیع دمای مساله به صورت زیر است:

$$\frac{\theta(x,y)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda_n l}{\lambda_n l + \sin \lambda_n l \cos \lambda_n l} \right) e^{-\lambda_n x} \cos \lambda_n y. \quad (4-79)$$

[اگر $h \rightarrow \infty$ ، آن گاه در معادله (۴-۷۰) چه اتفاقی می افتد؟]



شکل ۴-۱۴

مثال ۴-۴. فرض می شود سطح گسترش یافته مثال ۴-۲ صفحه ای با ضخامت σ و عرض $2L$ است (شکل ۴-۱۴). ضریب انتقال حرارت عمودی بزرگ بوده، و ضریب انتقال حرارت افقی دارای مقدار متوسط h است. توزیع دما در طول ضخامت σ قابل صرف نظر است. می خواهیم دمای پایای صفحه را به دست آوریم.

فرمولاسیون مساله بر حسب θ به صورت زیر است:

فصل ۴- مسائل پایای دو و سه بعدی، جداسازی متغیرها، توابع متعامد

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - m^2 \theta = 0,$$

$$\theta(0, y) = \theta_0, \quad \theta(\infty, y) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \theta(x, l) = 0.$$

که در آن $m^2 = 2h/k\delta$ است.

مانند قبل با استفاده از قاعده حاصل ضرب خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{\partial Y(0)}{\partial y} = 0, \quad Y(l) = 0, \quad (4-64)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - (\lambda^2 + m^2)X = 0; \quad X(\infty) = 0. \quad (4-80)$$

جهت y مساله، معادله (۴-۶۴) مشابه مثال ۴-۲ است از این رو:

$$Y_n(y) = C_n \cos \lambda_n y; \quad \lambda_n = (2n+1)\pi/2l, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

در جهت x خواهیم داشت:

$$X_n(x) = B_n e^{-(\lambda^2 + m^2)^{1/2} x}, \quad (4-81)$$

و بنابراین این معادله با مثال ۴-۲ فرق دارد. البته، از آنجایی که جهت x هیچ نقشی را در محاسبه a_n بازی نمی کند، مقدار a_n ممکن است با استفاده از معادله (۴-۷۰) به دست آید.

از این رو ممکن است جواب مساله به سادگی به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{\theta(x,y)}{\theta_0} = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-(\lambda^2 + m^2)^{1/2} x} \cos \lambda_n y. \quad (4-82)$$

که $m \rightarrow 0$ را می توان به صورت $h \rightarrow 0$ یا $\sigma \rightarrow \infty$ تفسیر نمود و همان طور که انتظار می رفت، وقتی که $m \rightarrow 0$ معادله (۴-۸۲) به (۴-۷۱) نزدیک می شود.

مثال ۴-۵. می خواهیم بدانیم اثر حرکت بر جواب مساله ۴-۲ چیست. فرض کنید که سطح گسترش یافته با سرعت ثابت v در جهت x حرکت کند، که در آن جهت، هدایت قابل صرف نظر است (شکل ۴-۱۵). توزیع دمای پایا با توجه به مبداء مختصات ثابت استفاده شده در مثال ۴-۲ را به دست آورید.

۱- همچنین ممکن است که معادلات دیفرانسیل با جداسازی مناسب متغیرها به صورت زیر به دست آیند:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + (\lambda^2 + m^2)Y = 0, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \lambda^2 X = 0$$

که حل این دستگاه نیازمند اعمال جبری بیشتر بوده و توصیه نمی شود.

۱- این حالت با استفاده از دو سیال که ضرایب انتقال حرارت مختلف دارند، و یا فقط با وجود همان سیال در دو فاز و در جهت عمودی صورت گرفته است.

فرمولاسیون به صورت زیر است:

$$2s \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2},$$

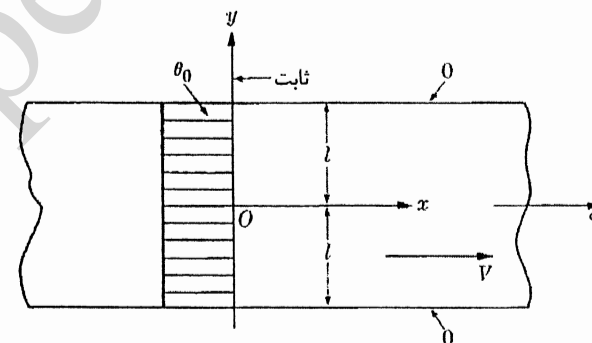
$$\theta(0, y) = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \theta(x, l) = 0,$$

که در آن $2s = \rho c V / k$ است. قاعده حاصل ضرب نتایج زیر را حاصل می کند.

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad Y(l) = 0, \quad (4-64)$$

$$2s \frac{dX}{dx} + \lambda^2 X = 0. \quad (4-83)$$

دوباره می بینیم که در جهت y همان فرمولاسیون مثال ۴-۲ و ۴-۴ حاصل می شود.



شکل ۴-۱۵

واضح است که وقتی فیزیک و هندسه مساله در یک جهت تغییر نمی کند، روش جداسازی متغیرها، بدون توجه به فیزیک و هندسه جهت دیگر، همان فرمولاسیون را برای این جهت حاصل می کند.

در جهت x جواب به صورت زیر است:

$$X_n(x) = B_n e^{-\lambda_n^2 x / 2s},$$

بنابراین با استفاده از قاعده حاصل ضرب داریم:

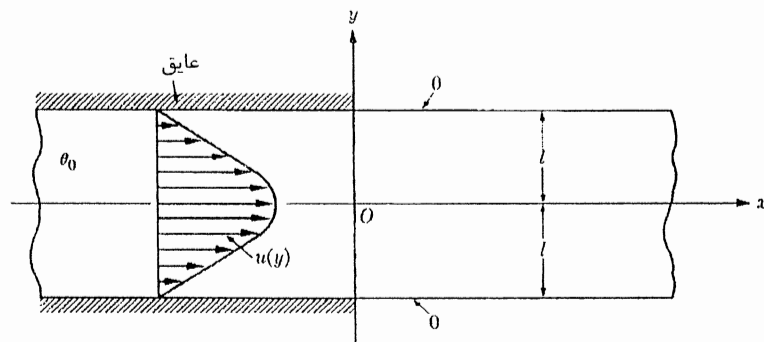
$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 x / 2s} \cos \lambda_n y. \quad (4-84)$$

فصل ۴- مسائل پایای دو و سه بعدی، جداسازی متغیرها، توابع متعامد

سرانجام، استفاده از شرط مرزی ناهمگن، معادله (۴-۸۴) را به (۴-۶۹) تبدیل می کند، که در آن مقدار a_n با استفاده از معادله (۴-۷۰) حاصل می شود. با قرار دادن این مقدار درون معادله (۴-۸۴)، دمای پره به صورت زیر است:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 x / 2s} \cos \lambda_n y. \quad (4-85)$$

مثال ۴-۵ یکی از مهم ترین مثال های نفوذ خطی است. در مساله ۴-۶، مساله گراتز^۱ را بیان می کنیم.



شکل ۴-۱۶

مثال ۴-۶. جسم مثال ۴-۵ را با یک سیال گرانو با جریان آرام کاملاً توسعه یافته بین دو صفحه موازی تعویض می کنیم (شکل ۴-۱۶) ضخامت صفحه قابل صرف نظر است. نیمه بالادستی صفحه عایق بوده در حالی که نیمه پایین دستی آن در دمای صفر نگه داشته می شود. هدایت محوری قابل صرف نظر است. دمای سیال جریان بالادستی یکنواخت است، که θ_0 می باشد. می خواهیم توزیع دما در سیال را به دست آوریم.

فرمولاسیون مساله با فرمولاسیون مثال ۴-۵ یکسان است فقط سرعت یکنواخت مساله ۴-۵ با سرعت جریان آرام کاملاً توسعه یافته بین دو صفحه موازی جایگزین شده است.^۲

$$u(y) = \frac{(-dp/dx)l^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{y}{l} \right)^2 \right]. \quad (4-86)$$

می توان این سرعت را به شکل مناسبی برحسب مقدار متوسط u_m و متغیر بی بعد $\eta = y/l$ به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{u(\eta)}{u_m} = \frac{3}{2}(1 - \eta^2) \quad (۴-۸۶)$$

که در آن $u_m = (-dp/dx)l^2/3\mu$ است.

به دلیل مطالعه پارامتری مساله، آن را به صورت فرمولاسیون بی بعد در نظر گرفتیم. با جایگزینی V با معادله (۴-۸۶) در فرمولاسیون مثال ۴-۵ و قرار دادن اعداد بی بعد مناسب خواهیم داشت:

$$\frac{3}{2}(1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}, \quad (۴-۸۷)$$

که در آن $\psi = \theta/\theta_0$ ، $Pe = u_m l/a$ ، $\xi = (x/l)Pe$ می شود و با $Gz = 1/\xi = Pe/(x/l)$ معادله (۴-۸۷) صادق بوده و داریم:

$$\psi(0, \eta) = 1, \quad \frac{\partial \psi(\xi, 0)}{\partial \eta} = 0, \quad \psi(\xi, 1) = 0.$$

با استفاده از قاعده حاصل ضرب $\psi(\xi, \eta) = X(\xi)Y(\eta)$ به راحتی مساله را می توان تفکیک نمود:

$$\frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \frac{3}{2}\lambda^2(1 - \eta^2)Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{d\eta} = 0, \quad Y(1) = 0, \quad (۴-۸۸)$$

$$\frac{dX}{d\xi} + \lambda^2 X = 0. \quad (۴-۸۹)$$

برخلاف معادلات موجود در مثال های قبلی جواب معادله (۴-۸۸) را نمی توان برحسب توابع ساده بیان نمود. بنابراین از روش سری های توانی که در بخش ۳-۶ ذکر شد برای حل استفاده می کنیم. می توان جواب کلی مساله را به صورت زیر بیان نمود:

$$Y(\eta) = AG_0^{(1)}(\lambda\eta) + BG_0^{(2)}(\lambda\eta), \quad (۴-۹۰)$$

که در آن $G_0^{(1)}(\lambda\eta)$ و $G_0^{(2)}(\lambda\eta)$ نشان دهنده تابع گراتز در مختصات کارتزین از نوع اول و دوم با درجه صفر است.

دوباره متذکر می شویم که جواب کلی معادله ای مثل معادله (۴-۹۰) با ماهیت نوسانی معمولاً متشکل از توابع زوج و فرد می باشد. فرض می کنیم که $G_0^{(1)}(\lambda\eta)$ و $G_0^{(2)}(\lambda\eta)$ به ترتیب نشان دهنده توابع زوج و فرد هستند. اولین شرط مرزی در معادله (۴-۸۸) نشان می دهد که $B \equiv 0$ بوده و تابع مشخصه $\varphi_n(\eta) = G_0^{(1)}(\lambda\eta)$ است. با استفاده از شرط مرزی دوم مقادیر مشخصه به دست می آید که در واقع این مقادیر مشخصه ریشه های معادله $G_0^{(1)}(\lambda_n) = 0$ هستند. با کمک جواب کلی معادله (۴-۸۹) یعنی $e^{-\lambda^2 \xi}$ اکنون می توانیم قاعده حاصل ضرب را برای این مساله به صورت زیر بنویسیم:

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 \xi} G_0^{(1)}(\lambda_n \eta). \quad (۴-۹۱)$$

سرانجام، با استفاده از شرط مرزی ناهمگن مساله $\psi(0, \eta) = 1$ خواهیم داشت:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G_0^{(1)}(\lambda_n \eta),$$

که با توجه به معادله (۴-۹۱) داریم:

$$a_n = \frac{\int_0^1 (1 - \eta^2) G_0^{(1)}(\lambda_n \eta) d\eta}{\int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta}. \quad (۴-۹۲)$$

اکنون می توانیم با استفاده از روابط ریاضی a_n را به صورت مناسب تری بیان نماییم. متذکر می شویم که $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$ یک جواب ویژه معادله (۴-۸۸) است که به جای آن $Y(\eta)$ را در این معادله قرار می دهیم و با انتگرال گیری از نتیجه آن در بازه (۰، ۱) عبارت ساده تری برای صورت معادله (۴-۹۲) به صورت زیر حاصل می شود:

$$\int_0^1 (1 - \eta^2) G_0^{(1)}(\lambda_n \eta) d\eta = - \frac{2}{3\lambda_n^2} \left. \frac{dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta)}{d\eta} \right|_{\eta=1}. \quad (۴-۹۳)$$

بازآرایی مخرج معادله (۴-۹۲) تاحدی مشکل تر است. ما ابتدا معادله (۴-۸۸) را برحسب $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$ و به صورت $dG_0^{(1)}(\lambda_n \eta)/d\lambda_n$ بیان نموده و سپس از نتیجه حاصل در بازه (۰، ۱) انتگرال می گیریم:

$$\left(\frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right) \left(\frac{dG_0^{(1)}}{d\lambda_n} \right) \Big|_{\eta=1} - \int_0^1 \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{dG_0^{(1)}}{d\lambda_n} \right) d\eta - \frac{3}{4} \lambda_n^2 \frac{d}{d\lambda_n} \int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta = 0. \quad (۴-۹۴)$$

سپس، معادله (۴-۸۸) را که به صورت $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$ بیان شده در $G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)$ ضرب کرده و از نتیجه حاصل در همان بازه انتگرال می گیریم و داریم:

$$G_0^{(1)} \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \Big|_{\eta=1} - \int_0^1 \left(\frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \right)^2 d\eta + \frac{3}{2} \lambda_n^2 \int_0^1 (1 - \eta^2) [G_0^{(1)}(\lambda_n \eta)]^2 d\eta = 0. \quad (۴-۹۵)$$

با دیفرانسیل گیری از معادله (۴-۹۵) نسبت به λ_n نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\left(\frac{dG_0^{(1)}}{d\eta}\right)\left(\frac{dG_0^{(1)}}{d\lambda_n}\right)\Big|_{\eta=1} + G_0^{(1)} \frac{d}{d\lambda_n} \left(\frac{dG_0^{(1)}}{d\eta}\right)\Big|_{\eta=1} - 2 \int_0^1 \frac{dG_0^{(1)}}{d\eta} \frac{d}{d\lambda_n} \left(\frac{dG_0^{(1)}}{d\eta}\right) d\eta + 3\lambda_n \int_0^1 (1-\eta^2) \left[G_0^{(1)}(\lambda_n\eta)\right]^2 d\eta + \frac{3}{2} \lambda_n^2 \frac{d}{d\lambda_n} \int_0^1 (1-\eta^2) \left[G_0^{(1)}(\lambda_n\eta)\right]^2 d\eta = 0. \quad (۴-۹۶)$$

متذکر می‌شویم که مرتبه دیفرانسیل‌گیری با توجه به η و λ_n ممکن است تغییر نماید، با تقسیم معادله (۴-۹۶) بر ۲ و جاگذاری نتیجه از معادله (۴-۹۴) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^1 (1-\eta^2) \left[G_0^{(1)}(\lambda_n\eta)\right]^2 d\eta = \frac{1}{3\lambda_n^2} \frac{dG_0^{(1)}(\lambda_n\eta)}{d\lambda_n} \frac{dG_0^{(1)}(\lambda_n\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=1}. \quad (۴-۹۷)$$

با قرار دادن معادلات (۴-۹۳)، (۴-۹۷) درون معادله (۴-۹۲) خواهیم داشت:

$$a_n = -\frac{2}{\lambda_n dG_0^{(1)}(\lambda_n\eta)/d\lambda_n|_{\eta=1}}.$$

بنابراین توزیع دما درون سیال به صورت زیر است:

$$\psi(\xi, \eta) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \xi} G_0^{(1)}(\lambda_n\eta)}{\lambda_n dG_0^{(1)}(\lambda_n\eta)/d\lambda_n|_{\eta=1}}. \quad (۴-۹۸)$$

البته، با توجه به نقطه نظر محاسبات انتقال حرارت، آگاهی از حرارت تلف شده از سیال مهم‌تر از آگاهی از دمای سیال است. در این ارتباط ما ابتدا در مورد اعداد بدون بعد وابسته به انتقال حرارت از سطوح بحث می‌کنیم.

همان‌طور که در فصل ۲ دیدیم، انتقال حرارت q_n از سطح σ با استفاده از ضریب انتقال حرارت به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$q_n = h(T_\sigma - T_\infty),$$

که در آن T_σ و T_∞ به ترتیب نشان‌دهنده دماهای سطح و محیط می‌باشند. همچنین در فصل ۲، q_n را برحسب هدایت از یا به جسم بیان نمودیم. بنابراین، با توجه به شکل ۴-۱۷ الف، خواهیم داشت:

$$-k_s \left(\frac{\partial T_s}{\partial n}\right)_\sigma = h(T_\sigma - T_\infty),$$

که در آن T_s ، k_s به ترتیب دما و ضریب هدایت‌پذیری جسم جامد هستند. با بازآرایی معادله مذکور، عدد بایوت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$Bi = \frac{hL}{k_s} = -\frac{[\partial T_s / \partial (n/L)]_\sigma}{T_\sigma - T_\infty}, \quad (۴-۹۹)$$

که در آن L طول مشخصه است. به وضوح ممکن است که q_n را نیز برحسب هدایت از یا به سیال که در شکل ۴-۱۷ ب نشان داده شده است، بیان کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$-k_f \left(\frac{\partial T_f}{\partial n}\right)_\sigma = h(T_\sigma - T_\infty),$$

که می‌توان آن را به صورت زیر بازآرایی نمود:

$$Nu = \frac{hL}{k_f} = -\frac{[\partial T_f / \partial (n/L)]_\sigma}{T_\sigma - T_\infty}, \quad (۴-۱۰۰)$$

که در آن Nn به عنوان عدد (ضریب) ناسلت معروف است. وقتی که سیال محدود باشد، T_∞ معادلات (۴-۹۹) و (۴-۱۰۰) با دمای متوسط سیال که دمای توده نامیده می‌شود، تعویض می‌شود،

$$T_b = \frac{1}{AU} \int_A u(\mathbf{r}, t) T(\mathbf{r}, t) dA, \quad (۴-۱۰۱)$$

که در آن A نشان‌دهنده سطح مقطع عرضی سیال^۱ و U معیاری از مقدار سرعت متوسط عرضی سیال است.

تذکری در مورد تفاوت در استفاده از معادلات (۴-۹۹) و (۴-۱۰۰): در مسائل هدایت، h و T_∞ (T_b) در مساله داده می‌شود، و معادله (۴-۹۹) به عنوان شرط مرزی استفاده می‌شود، در مسائل جابه‌جایی T_∞ داده شده ولی h داده نمی‌شود. مسائل جابه‌جایی برحسب شرایط مرزی نامربوط به h حل می‌شوند سپس جواب‌های حاصل برای حصول مقدار h درون معادله (۴-۱۰۰) قرار داده می‌شود.

حال می‌خواهیم به مساله خودمان برگردیم. شکل مناسب معادلات (۴-۱۰۰) و (۴-۱۰۱) به صورت زیر است:

$$Nu = \frac{hL}{k} = \frac{-(\partial \psi / \partial \eta)_{\eta=1}}{\psi_b}$$

و

$$\psi_b = \frac{3}{2} \int_0^1 (1-\eta^2) \psi(\xi, \eta) d\eta.$$

سرانجام با استفاده از معادله (۴-۹۸) خواهیم داشت:

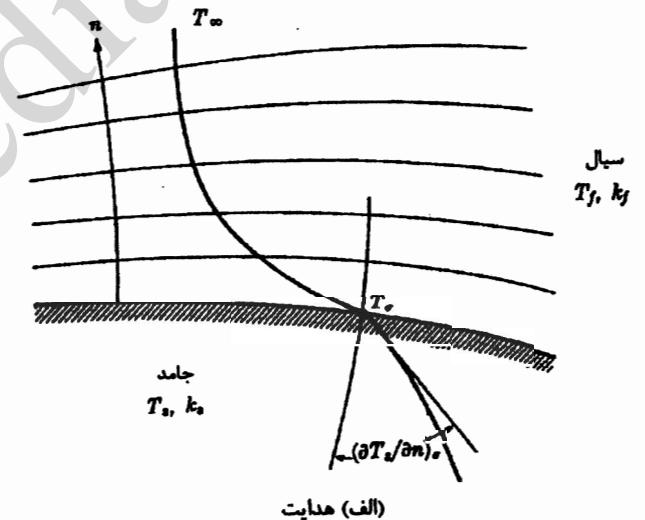
$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)_{\eta=1} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^{(1)} / d\eta}{\lambda_n dG_0^{(1)} / d\lambda_n} \Big|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}.$$

پس، با قرار دادن معادله (۴-۹۸) درون ψ_b و نوشتن معادله (۴-۹۳) خواهیم داشت:

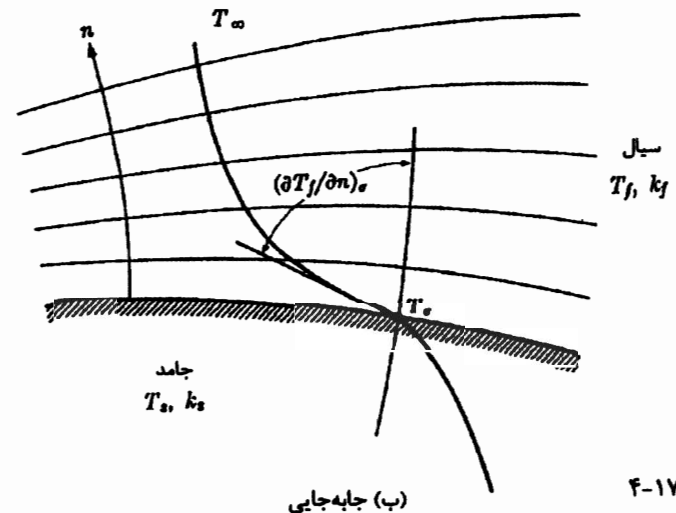
$$\psi_b = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^1/d\eta}{\lambda_n^3 dG_0^1/d\lambda_n} \bigg|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}.$$

بنابراین عدد ناسلت به صورت زیر حاصل می شود:

$$Nu = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^1/d\eta}{\lambda_n dG_0^1/d\lambda_n} \bigg|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dG_0^1/d\eta}{\lambda_n^3 dG_0^1/d\lambda_n} \bigg|_{\eta=1} e^{-\lambda_n^2 \xi}}. \quad (۴-۱۰۲)$$

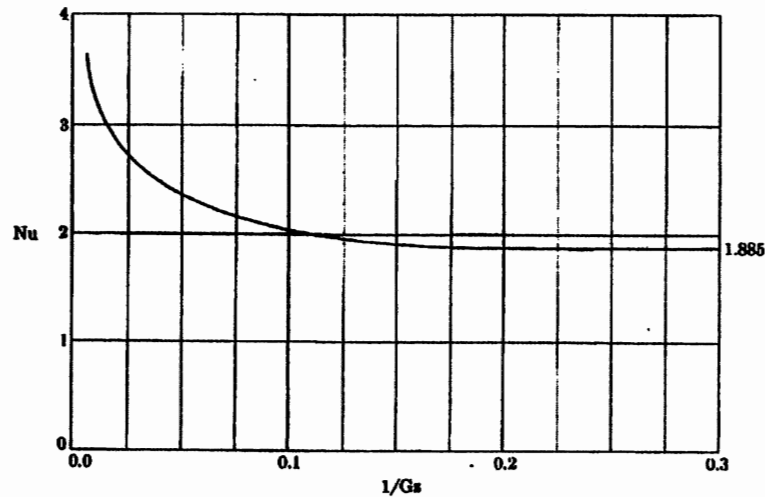


هدایت (الف)



(ب) جابه جایی

شکل ۴-۱۷



شکل ۴-۱۸

در شکل ۴-۱۸ ناسلت برحسب ξ رسم شده است. بنابراین می توان فهمید که وقتی $\xi \rightarrow 0$ $Nu \rightarrow \infty$ و وقتی که $\xi \rightarrow \infty$ $Nu \rightarrow 1.825$ [حدود مذکور برای Nu با استفاده از نزدیک مساله به دست آمده است]. مساله گراتز به طور وسیعی در مقالات بررسی شده است. برای مرور مختصر موضوع مراجع ۶ تا ۱۷ را ببینید.

در مثال بعدی اثر هدایت محوری بر مساله بررسی می شود. اگرچه به دلیل جلوگیری از افزایش پیچیدگی مساله فرض می شود که سیال مورد نظر ایده آل باشد (یا یک سطح گسترش یافته تحرک داشته باشیم).

مثال ۴-۷. مثال (۴-۵) را برای زمانی که اثرات هدایتی در جهت حرکت هم در نظر گرفته شده حل کنید.

طبق توضیحات مثال (۳-۳) هدایت محوری دو اثر دارد. اثر اول، اثر خود رسانش محوری که اغلب مورد توجه است و به صورت $\partial^2 \theta / \partial x^2$ در معادلات دیفرانسیل ظاهر می شود؛ اثر دوم با همان اهمیت، در فیزیک مساله مستتر است، و آن نفوذ رسانشی گرما به خارج از محدوده انتگرالی لیه است. بنابراین به جای یک مساله تک محدوده ای، دو محدوده داریم (شکل ۴-۱۹). از جایی که نقطه $x = 0$ مرز بین دو ناحیه است دما در $x = 0$ قابل تعیین نیست. در اینجا باید

برداشت شده از کار J. Schenk و J. Mulder J. A. Prins "انتقال حرارت در جریان آرام بین صفحات موازی".

Appl. Sci. Res., A2, 431 (1951) استفاده شده با کسب اجازه.

اگر هدایت محوری قابل صرف نظر باشد، دمای محدوده جدید $-\infty < x \leq 0$ برابر θ_0 می شود، و مسائل

پایان شده با شکل های ۴-۱۵ و ۴-۱۹ توزیع دمای یکسانی را حاصل می کنند.

شرایط مرزی طبیعی مشخص شود به عبارت دیگر تساوی دماها و شارهای حرارتی باید مشخص شود. در فاصله منفی دور از نقطه $x = 0$ یا به عبارت دیگر در سطح پره هنگامی که $x < 0$ است دما به صورت θ_0 قابل نمایش است. با استفاده از معادله برای توزیع دما ناحیه $x > 0$ و $\psi(x, y)$ برای $x < 0$ دمای مساله را می توان به شکل زیر نوشت.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad x < 0$$

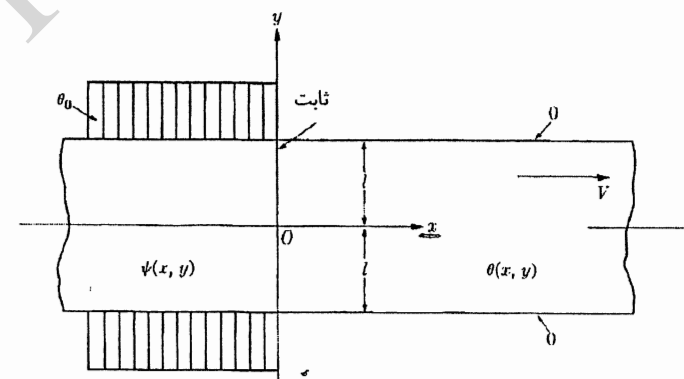
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0$$

$$\psi(-\infty, y) = \theta_0, \quad \theta(\infty, y) = 0,$$

$$\psi(0, y) = \theta(0, y), \quad \frac{\partial \psi(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0,$$

$$\psi(x, y) = \theta_0, \quad \theta(x, l) = 0.$$



شکل ۴-۱۹

این فرمولاسیون، دو معادله دیفرانسیل همگن به همراه چهار شرط مرزی همگن و چهار شرط مرزی ناهمگن را شامل می شود. یکی از شرایط ناهمگن، $\psi(x, l) = \theta_0$ یک ناهمگنی را به جهتی که قابلیت متعامد شدن دارد، وارد می کند و بنابراین مانعی برای استفاده از روش جداسازی متغیرها در ناحیه $x < 0$ می شود. البته، استفاده از تبدیل $\psi(x, y) = \theta_0 + \phi(x, y)$ برای $x < 0$ این مشکل را رفع خواهد کرد. از این رو برای ناحیه $x < 0$ برحسب عبارت $\phi(x, y)$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad x < 0$$

$$\phi(-\infty, y) = 0,$$

$$\theta_0 + \phi(0, y) = \theta(0, y), \quad \frac{\partial \phi(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \phi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \phi(x, l) = 0,$$

بقیه معادلات فرمولاسیون قبلی برای $x > 0$ بدون تغییر باقی و دیگر تکرار نمی شود.

برای $\theta(x, y)$ و $\phi(x, y)$ پاسخ همگن جهت y ، مشابه پاسخ در مثال های (۴-۴)، (۴-۵) و (۴-۵) است. پاسخ کلی در جهت x به صورت زیر می شود:

$$X_n(x) = A_n e^{[s + (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]x} + B_n e^{[s - (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]x}, \quad (۴-۱۰۳)$$

که پاسخ فوق برای هر دو ناحیه قابل استفاده است؛ هر چند، جمله اول معادله (۴-۱۰۳) فیزیک منطقه $x < 0$ را ارضا می کند در حالی که جمله دوم برای منطقه $x > 0$ مناسب است.

از این رو پاسخ $\psi(x, y)$ و $\theta(x, y)$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\psi(x, y) = \theta_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{[s + (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]x} \cos \lambda_n y, \quad (۴-۱۰۴)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{[s - (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]x} \cos \lambda_n y, \quad (۴-۱۰۵)$$

در اینجا a_n و b_n از روی شرایط مرز در $x = 0$ به دست می آید؛ با تساوی قرار دادن دمای دو ناحیه:

$$\theta_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos \lambda_n y. \quad (۴-۱۰۶)$$

با بسط θ_0 به صورت سری هایی برحسب مجموعه متعامد مشابه، یعنی معادله (۴-۶۶)، رابطه زیر را خواهیم داشت:

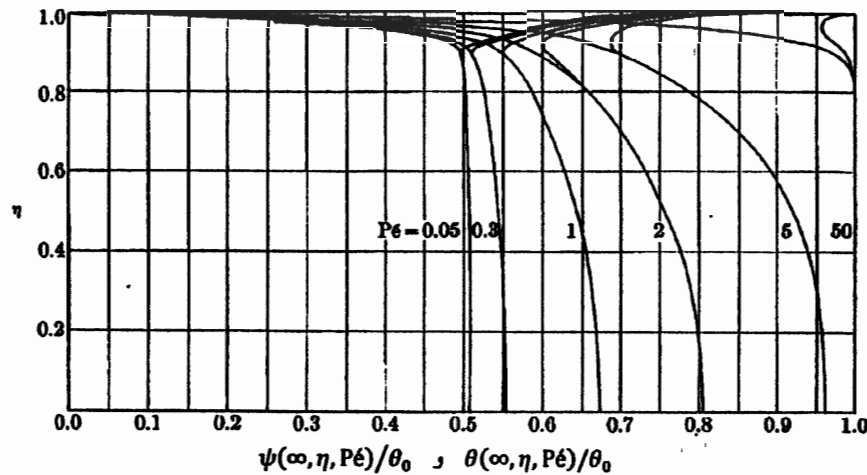
$$\theta_0 = \frac{2\theta_0}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \cos \lambda_n y, \quad (۴-۱۰۷)$$

با قرار دادن معادله (۴-۱۰۷) در معادله (۴-۱۰۶) نتیجه زیر حاصل می شود:

$$(-1)^n \frac{2\theta_0}{\lambda_n l} + a_n = b_n. \quad (۴-۱۰۸)$$

به عبارت دیگر، تساوی شارهای حرارتی نتیجه زیر را می دهد:

$$[s + (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]a_n = [s - (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}]b_n. \quad (۴-۱۰۹)$$



شکل ۴-۲۰

در شکل (۴-۲۱) دمای صفحه میانی در مقابل $1/Gz$ برای مقادیر $0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1, 2, 5, 10$ و $P\epsilon$ عدد ۳ رسم شده است. طبق انتظار، نفوذ توزیع دما به محدوده $x < 0$ با کاهش عدد $P\epsilon$ افزایش می‌یابد.

در نهایت، ضریب انتقال حرارت h براساس فاصله l به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\theta_b = \int_0^1 \theta d\eta, \quad \psi_b = \int_0^1 \psi d\eta$$

و در ادامه:

$$Nu = \frac{(\partial\psi/\partial\eta)_{\eta=1}}{\psi_b - \psi_b}, \quad \xi < 0,$$

$$Nu = \frac{-(\partial\theta/\partial\eta)_{\eta=1}}{\theta_b - \theta_b}, \quad \xi > 0,$$

که در معادلات بالا $\psi_b = \psi(\xi, 1; P) = \theta_b$ و $\theta_b = \theta(\xi, 1; P) = 0$ می‌باشند. با قرار دادن معادلات (۴-۱۱۰) و (۴-۱۱۱) در معادلات فوق، معادلات زیر به دست می‌آید:

$$Nu = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right) P^2 \xi}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right) P^2 \xi}$$

$$\xi < 0, \quad (4-114)$$

سرانجام، با حل معادله (۴-۱۰۵) و (۴-۱۰۹) برای a_n و b_n و جاگذاری نتایج در معادلات (۴-۱۰۴) و (۴-۱۰۵) و تعریف پارامترهای بدون بعد نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$P\epsilon \text{ (or } P) = Vl/a, \quad Gz = 1/\xi = P\epsilon/(x/l)$$

$$\eta = y/l, \quad \mu_n = (2n+1)\pi/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

در نهایت دمای بدون بعد دو ناحیه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\psi(\xi, \eta, P)}{\theta_0} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu_n} \left[1 - \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right] \times \cos \mu_n \eta \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi\right), \quad \xi < 0, \quad (4-110)$$

$$\frac{\theta(\xi, \eta, P)}{\theta_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu_n} \left[1 - \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right] \times \cos \mu_n \eta \exp\left(\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi\right), \quad \xi > 0, \quad (4-111)$$

طبق تعریف زیر (مثال (۳-۳)) را ملاحظه کنید،

$$\frac{\text{جران انتقالی محوری}}{\text{هدایت محوری}} = P\epsilon$$

زمانی که $P\epsilon \rightarrow \infty$ اثرات رسانش محوری حذف شده و معادله (۴-۱۱۰) و (۴-۱۱۱) تبدیل به معادلات زیر می‌شود.

$$\frac{\psi(\xi, \eta)}{\theta_0} = 0, \quad \xi < 0, \quad (4-112)$$

$$\frac{\theta(\xi, \eta)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu_n} e^{-\mu_n^2 \xi} \cos \mu_n \eta, \quad \xi > 0. \quad (4-113)$$

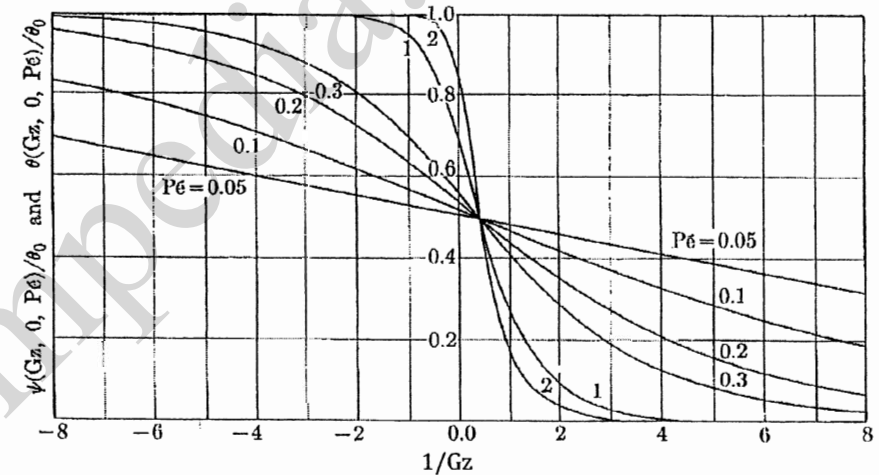
معادله (۴-۱۱۳) مطابق انتظار شکل بی‌بعد معادله (۴-۸۵) است.

شکل بی‌بعد دمای $\psi(x, y)$ و $\theta(x, y)$ به وسیله معادلات (۴-۱۱۰) و (۴-۱۱۱) داده شده است حال به ادامه بحث با مطالعه عددی مساله می‌پردازیم.

در شکل ۴-۲۰ دمای سطح مشترک، که دما در نقطه $Gz = \infty$ ($\xi = 0$) است، در مقابل η برای مقادیر $0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1, 2, 5, 10$ و $P\epsilon$ عدد ۵۰ رسم شده است. نتایج نشان‌دهنده اثرات مثبت رسانش محوری با کاهش $P\epsilon$ می‌باشد.

$$Nu = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left[1 - \left[1 + \left(\frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right] P^2 \xi\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left\{ 1 + \frac{1}{[1 + (2\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \exp\left(\frac{1}{2} \left[1 - \left[1 + \left(\frac{2\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right] P^2 \xi\right)}$$

$\xi > 0. \quad (۴-۱۱۵)$

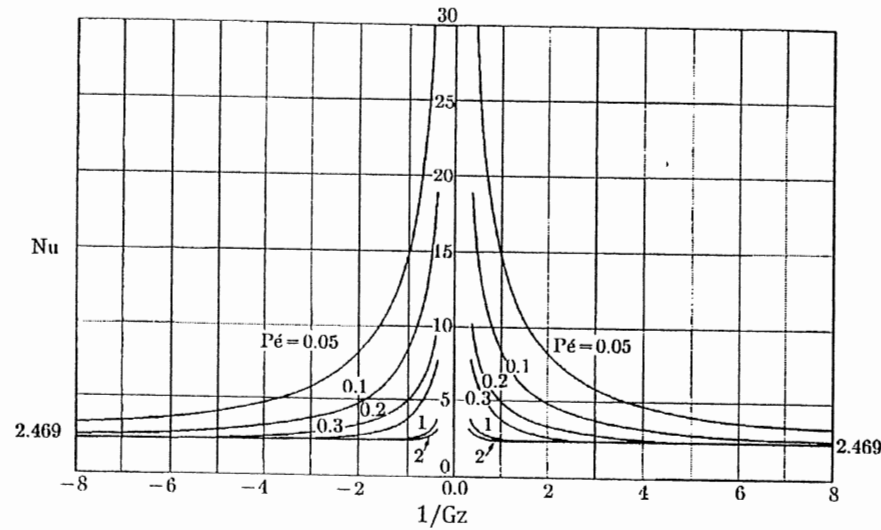


شکل ۴-۲۱

معادلات (۴-۱۱۴) و (۴-۱۱۵) در شکل ۴-۲۲ در مقابل $1/Gz$ برای مقادیر $0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1, 2$ عدد Pe رسم شده است. توجه به این نکته ضروری است که با افزایش رسانش محوری، توسعه ضریب انتقال حرارت کاهش می‌یابد.

۴-۶. انتخاب محورهای مختصات

در بخش‌های گذشته تعدادی مساله دوبعدی در مختصات کارتزین بدون هیچ بحثی راجع به مختصات انتخاب شده، حل شد. همچنین پاسخ مثال ۴-۱ (برای دمای پایه ثابت) و مثال ۴-۲، که هر دو شرایط فیزیکی یکسانی را بیان می‌کنند، به صورت دو سیستم مختصات مختلف در نظر گرفته شدند، پاسخ‌ها از نظر پیچیدگی ریاضی، قابل قیاس هستند و از این‌رو انتخاب محورهای مختصات که در بعضی مسائل از اهمیت بالایی برخوردار است، در مثال‌های زیر تشریح شده است.



شکل ۴-۲۲

مثال ۴-۸. مثال ۴-۲ را با فرض این‌که پره طول محدود L را داشته باشد، دوباره حل کنید.

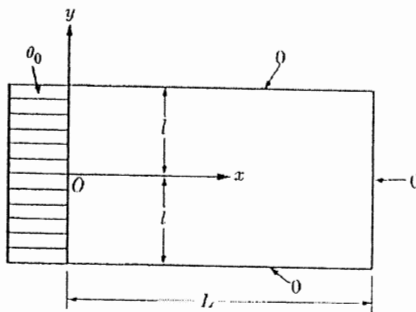
(شکل ۴-۲۳)

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0,$$

(۴-۱۱۶)

$$X(L) = 0.$$

(۴-۱۱۷)



شکل ۴-۲۳

مساله مشابه مثال‌های قبل به‌سادگی قابل جداسازی است. پاسخ در جهت y (جهت متعامد) همانند مثال‌های ۴-۲، ۴-۴، ۴-۵ و ۴-۷ می‌باشد. پاسخ در جهت x (جهت غیرمتعامد) اکنون به‌طور صریح به‌دست می‌آید. فرمولاسیون این جهت همراه با شرط مرزی قابل تفکیک به‌صورت زیر می‌باشد:

برای بازه محدود از توابع هذلولی استفاده می‌شود که پاسخ کلی معادله (۴-۱۱۶) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

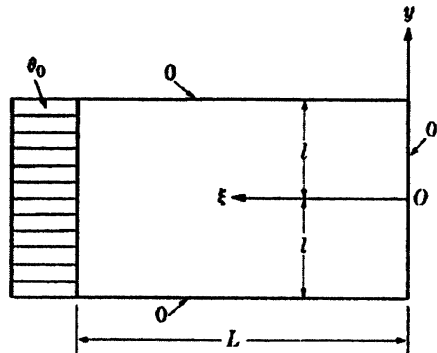
$$X(x) = A \cosh \lambda x + B \sinh \lambda x.$$

(۴-۱۱۸)

از این رو، به علت ساده‌تر بودن پاسخ در جهت x سیستم مختصات شکل ۴-۲۴ برای این مساله مناسب‌تر از سیستم مختصات شکل ۴-۲۳ است.

می‌توان از نتایج حاصل از نحوه انتخاب مبدا مختصات در جهت ناهمگن استفاده نمود و آن را برای انتخاب مبدا مختصات در جهت همگن، تعمیم داد.

در فرمولاسیون یک مساله، انتخاب محور مناسب اهمیت زیادی دارد. در بحث جداسازی متغیرها و تئوری توابع متعامد آموختیم که در هر مساله‌ای، شرط مرزی اول که در جهت همگن در



شکل ۴-۲۴

نظر گرفته می‌شود توابع مشخصه را بسته به سیستم مختصات انتخاب شده، تعیین می‌کند. شرط مرزی دوم به همراه نتیجه به دست آمده از شرط مرزی اول، مقادیر مشخصه را حاصل می‌کند که مقادیر مشخصه با تغییر محورهای مختصات تغییر نمی‌کنند (مساله ۴-۴ را ملاحظه کنید). بنابراین، ساده‌ترین توابع مشخصه ممکن، متناظر با محورهای مختصات (در جهت همگن)، از روی ساده‌ترین شرط مرزی همگن به دست می‌آیند.

همچنین آموختیم که شرط مرزی همگن جهت ناهمگن، رابطه‌ای را بین پاسخ‌های ویژه در جهت ناهمگن حاصل می‌کند. بنابراین، ساده‌ترین پاسخ در این جهت، متناظر با محورهای مختصات (در همان جهت)، با استفاده از شرط مرزی جدایی‌پذیر به دست می‌آید.

روندی که در بالا ذکر شد، برعکس روندی است که برای انتخاب محورهای مختصات در مسائل یک‌بعدی استفاده می‌شود. این موضوع عجیب نیست زیرا مسائل یک بعدی مسائل مقدار مشخصه نیستند، و شرایط مرزی آن‌ها برای تعیین ضرایب نامعین پاسخ‌های ویژه استفاده می‌شود نه برای به دست آوردن توابع مشخصه و مقادیر مشخصه. از این رو در مسائل یک‌بعدی، به وسیله انتخاب مبدا در پیچیده‌ترین مرز، می‌توان یک یا دو جهت که شامل این ضرایب می‌باشند را به طور قابل ملاحظه‌ای ساده نمود.

۴-۷. ناهمگنی

در قبل، مسائل دوبعدی پایای مختصات کارتزین که با روش جداسازی متغیرها حل شده‌اند شامل یک معادله دیفرانسیل همگن به همراه چهار شرط مرزی بودند که دو شرط مرزی مربوط به یک جهت و دو شرط مرزی دیگر مربوط به جهت دیگر بودند. به عبارتی، دو شرط مرزی همگن در جهت محدود داشتیم، و یک شرط مرزی همگن به همراه یک شرط مرزی ناهمگن در جهت دیگر

با قرار دادن شرط معادله (۴-۱۱۷) در معادله (۴-۱۱۸) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$0 = A \cosh \lambda L + B \sinh \lambda L. \quad (۴-۱۱۹)$$

با حل معادله (۴-۱۱۹) برای A یا B ، به طور مثال برای B ، و قرار دادن نتیجه به دست آمده در معادله (۴-۱۱۸)، معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$X(x) = A \left(\cosh \lambda x - \frac{\cosh \lambda L}{\sinh \lambda L} \sinh \lambda x \right),$$

که معادله فوق به صورت زیر بازآرایی می‌شود:

$$X(x) = A^* \sinh \lambda (L - x), \quad A^* = A / \sinh \lambda L.$$

پس پاسخ حاصل ضرب مساله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \sinh \lambda_n (L - x) \cos \lambda_n y.$$

تعیین a_n^* مشابه مثال‌های قبل است. بنابراین توزیع دما در پره به صورت معادله زیر می‌باشد:

$$\frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n L} \left[\frac{\sinh \lambda_n (L - x)}{\sinh \lambda_n L} \right] \cos \lambda_n y. \quad (۴-۱۲۰)$$

حال مساله را برای مختصات سیستم نشان داده شده در شکل ۴-۲۴، حل می‌کنیم. فرمولاسیون جهت y مثل قبل است. فرمولاسیون در جهت x تغییر می‌کند و در اینجا برحسب متغیر جدید ξ حاصل می‌شود.

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} - \lambda^2 X = 0, \quad (۴-۱۲۱)$$

$$X(L) = 0. \quad (۴-۱۲۲)$$

پاسخ کلی معادله (۴-۱۲۱) به صورت معادله (۴-۱۱۸) خواهد شد با این تفاوت که x با ξ جایگزین می‌شود با استفاده از معادله (۴-۱۲۲) $A = 0$ می‌شود و قاعده حاصل ضرب جدید به دست می‌آید.

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sinh \lambda_n \xi \cos \lambda_n y.$$

با تعیین b_n دمای پره به صورت زیر به دست می‌آید:

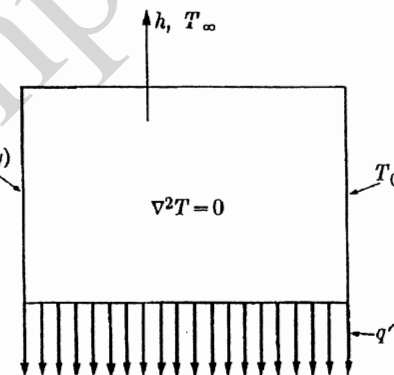
$$\frac{\theta(\xi, y)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n L} \left[\frac{\sinh \lambda_n \xi}{\sinh \lambda_n L} \right] \cos \lambda_n y. \quad (۴-۱۲۳)$$

۱- همان طور که انتظار می‌رفت، با تغییر متغیر $x + \xi = L$ معادله (۴-۱۲۲) به معادله (۴-۱۲۰) تبدیل می‌شود و بالعکس. علاوه بر آن، این معادلات اثر طول محدود را بر مثال ۴-۲ نشان می‌دهد.

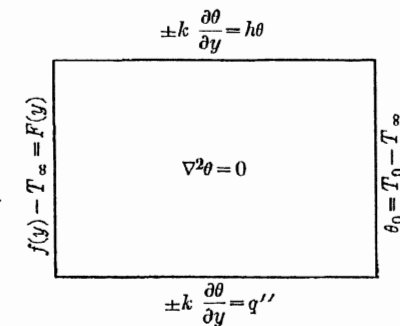
(محدود یا نامحدود) داشتیم (یعنی روش جداسازی متغیرها در حالتی قابل استفاده است که سه شرط مرزی همگن و یک شرط مرزی ناهمگن باشد م.م). اما اغلب مسائل دوی بعدی، در شرایط بالا صدق نمی کنند. در چنین مواردی در صورت امکان مساله باید به گونه ای تغییر داده شود که در این شرایط صدق کند. یک راه انجام این تغییر، تغییر سطح دما می باشد، روشی که در مثال های قبلی این فصل مورد استفاده قرار گرفته است. اگر این مورد امکان پذیر نبود، از قاعده جمع پذیری^۱ استفاده می شود و مساله به چند مساله ساده تر تقسیم می شود که هر کدام از این مسائل ساده تر شرایط همگنی مورد نیاز را دارا می باشند و در نهایت، جواب این مسائل با هم جمع شده و جواب مساله اصلی حاصل می شود.

در یک مساله ناهمگنی می تواند نتیجه ناهمگنی در مرزها و یا ناهمگنی در معادله دیفرانسیل باشد یا هر دو آنها باشد. از آنجایی که ناهمگنی ناشی از مرزهای ناهمگن ساده تر می باشند ابتدا مورد بررسی قرار می گیرند.

مثال ۴-۹. مطلوبست محاسبه دمای پایای مساله نشان داده شده در شکل ۴-۲۵.



شکل ۴-۲۵

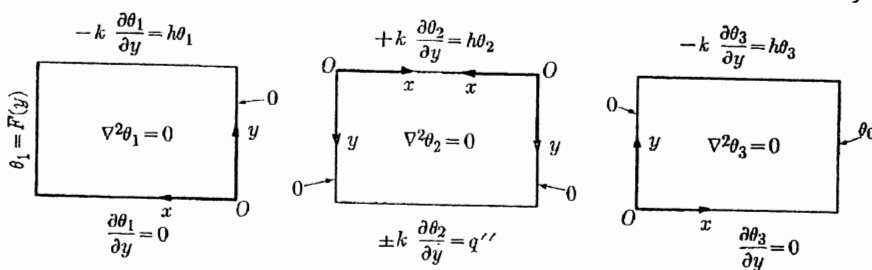


شکل ۴-۲۶

محور عمودی به طور دلخواه و بدون توجه به کلیت مساله، جهت y انتخاب می شود. شکل ۲۵-۴ قابل تقسیم به چهار مساله می باشد، هر کدام از آنها شامل یک شرط ناهمگن و سه شرط مرزی همگن هستند. گرچه، تبدیل ساده $\theta = T - T_\infty$ (یا $\psi = T - T_0$) به سادگی شرط مرزی ناهمگن مربوط به h ، T_∞ (یا T_0) را به شرط همگن تبدیل می کند. به طور مثال با استفاده از $\theta = T - T_\infty$ ، می توانیم مساله شکل ۴-۲۵ را به مساله شکل ۴-۲۶ تبدیل نماییم. اکنون این مساله به جای آن که بر حسب چهار مساله بیان شود، بر حسب سه مساله مناسب بیان می شود. توجه شود که تبدیل یک شرط مرزی ناهمگن به یک شرط مرزی همگن نباید فیزیک آن شرط مرزی را

تغییر دهد. به عبارت دیگر، تنها شکل همگن معادله $\pm k(\partial T / \partial n) = h(T - T_\infty)$ می باشد و آن زمانی است که T_∞ صفر باشد یا تنها شکل همگن معادله $\pm k(\partial T / \partial n) = q''$ به صورت $\pm k(\partial T / \partial n) = 0$ می باشد.

از این رو مساله شکل ۴-۲۶ می تواند به صورت سه مساله نشان داده شده در شکل ۴-۲۷ بیان شود و مجموع $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی شکل ۴-۲۶ صدق می کند. پاسخ θ_1 ، θ_2 و θ_3 به سادگی و با دنبال کردن روند مثال های قبلی به دست می آید و در اینجا نیز لازم به ذکر نیست. محورهای مناسب برای هر مساله در شکل ۴-۲۷ نشان داده شده است. پاسخ این مسائل زمانی قابل جمع کردن است که این مسائل به صورت سیستم مختصات مشترک نوشته شوند.



شکل ۴-۲۷

نوع دوم ناهمگنی، ناهمگنی در معادله دیفرانسیل است که مربوط به تولید انرژی داخلی می باشد.^۱ مثال زیر روش حل این گونه مسائل را نشان می دهد.

مثال ۴-۱۰. دمای پایای گرمکن الکتریکی مثال ۱-۲ زمانی که ضریب انتقال حرارت بزرگ باشد را پیدا کنید.

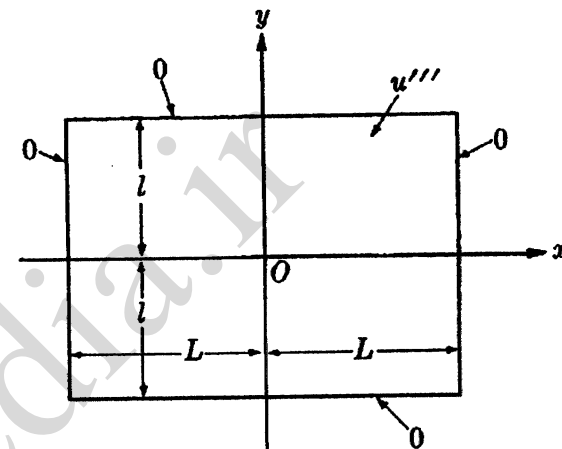
فرمولاسیون مساله بر حسب عبارات شکل ۴-۲۸ به شکل زیر در می آید:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \quad (4-124)$$

$$\frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \theta(L, y) = 0, \quad (4-125)$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \theta(x, l) = 0. \quad (4-126)$$

۱- اگر شار حرارت سطحی در چپتی اعمال شود که دما در آن جهت متمرکز است، معادله دیفرانسیل ناهمگن حاصل می شود. البته از آنجایی که این مورد دارای کاربرد عملی کمی می باشد، در اینجا بررسی نمی شود.



شکل ۴-۲۸

معادله دیفرانسیل ناهمگن و غیرقابل جداسازی است.

پاسخ مساله به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\theta(x, y) = \psi(x, y) + \phi(x) \quad (۴-۱۲۷)$$

یا

$$\theta(x, y) = \psi(x, y) + \phi(y). \quad (۴-۱۲۸)$$

استفاده از هر کدام از این معادلات در این مورد اختیاری است.

با اعمال تولید انرژی داخلی u''' در فرمولاسیون مساله یک‌بعدی، $\phi(x)$ یا $\phi(y)$ معادله دیفرانسیل دو‌بعدی مساله $\psi(x, y)$ همگن می‌شود. بنابراین برای جداسازی متغیرها مناسب است. ولی فرمولاسیون کامل $\phi(x)$ و $\psi(x, y)$ نیازمند مشخص شدن شرایط مرزی هر کدام از آن‌ها است. در اینجا فرض می‌شود که $\phi(x)$ شکل یک‌بعدی معادله (۴-۱۲۵) را ارضا می‌کند. از این‌رو:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{u'''}{k} = 0; \quad \frac{d\phi(0)}{dx} = 0, \quad \phi(L) = 0. \quad (۴-۱۲۹)$$

سپس، با ترکیب معادلات (۴-۱۲۴)، (۴-۱۲۵)، (۴-۱۲۶)، (۴-۱۲۷)، و (۴-۱۲۹)، شکل معادله $\psi(x, y)$ نیز به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (۴-۱۳۰)$$

فصل ۴- مسائل پایای دو و سه بعدی، جداسازی متغیرها، توابع متعامد

$$\frac{\partial \psi(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \psi(L, y) = 0, \quad (۴-۱۳۱)$$

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \psi(x, l) = -\phi(x). \quad (۴-۱۳۲)$$

مساله غیرقابل جداسازی $\theta(x, y)$ تبدیل به مساله قابل جداسازی $\psi(x, y)$ می‌شود. جزییات راه‌حل به خواننده واگذار می‌شود. پاسخ کلی و حاوی $\phi(x)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\theta(x, y)}{u''' L^2 / k} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n L)^3} \left(\frac{\cosh \lambda_n y}{\cosh \lambda_n l} \right) \cos \lambda_n x, \quad (۴-۱۳۳)$$

که در آن $\lambda_n L = (2n+1)\pi/2$ و $n = 0, 1, 2, \dots$ می‌باشد. توجه شود که به‌طور کلی روش فوق برای مختصات استوانه‌ای و کروی و مسائل ناپایا نیز قابل استفاده است.

مطالعه مسائل دو‌بعدی در مختصات کارتزین با یک مثال که با روش تقریبی انتگرالی حل شده، به پایان می‌رسد. از آنجایی که تقریب درجه اول مثال ۴-۱۵ توسط معادله (۲-۱۳۶) و (۲-۱۴۳) داده شده است، اکنون تقریب درجه دوم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۴-۱۱. مثال ۴-۱۰ را به‌وسیله روش انتگرالی، با استفاده از تقریب درجه دوم ریتز و کاتروویچ دوباره حل کنید.

با توجه به تقارن حرارتی مساله نسبت به محوره‌های شکل ۴-۲۸ روش تعمیم‌یافته ریتز پیشنهاد می‌شود:

$$\theta(x, y) = (L^2 - x^2)(l^2 - y^2)(a_0 + a_1 x^2 + b_1 y^2 + a_2 x^4 + b_2 y^4 + c_2 x^2 y^2 + \dots). \quad (۴-۱۳۴)$$

در معادله (۴-۱۳۴)، یا $(a_0 + b_1 y^2)$ یا $(a_0 + a_1 x^2)$ به عنوان جمله آخر تقریب درجه دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. این انتخاب وابسته به نسبت L/l است و در فصل ۸ در موردش بحث می‌شود (مثال ۸-۵ را ملاحظه کنید).^۲ در اینجا:

$$\theta(x, y) = (L^2 - x^2)(l^2 - y^2)(a_0 + a_1 x^2) \quad (۴-۱۳۵)$$

معادله فوق به صورت دلخواه انتخاب شده است. البته با تغییر و بازیابی نتیجه حاصل از معادله (۴-۱۳۵) به سادگی می‌توان پاسخ حاصل از تقریب‌های دیگر را به‌دست آورد.

۱- اگر معادله (۴-۱۲۸) برای تبدیل $\theta(x, y)$ مورد استفاده قرار گیرد، جواب $\theta(x, y)$ دارای شکل متفاوتی خواهد بود. این جواب را با تغییر معادله (۴-۱۳۳) بنویسید.

۲- این کتاب تنها در برگرفته ۷ فصل اول کتاب انتقال حرارت هدایتی است و علاقه‌مندان جهت مطالعه فصول ۸، ۹ و ۱۰ این کتاب می‌توانند به کتاب زبان اصلی مراجعه نمایند.

یا

$$\theta(x, y) = (L^2 - x^2)[Y_1(y) + x^2 Y_2(y) + x^4 Y_3(y) + \dots] \quad (4-140)$$

که در اینجا

$$\theta(x, y) = (l^2 - y^2)[X_1(x) + y^2 X_2(x)] \quad (4-141)$$

و به طور دلخواه به صورت تقریب درجه دوم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

با قرار دادن معادله (۴-۱۴۱) در شکل انتگرالی معادله دیفرانسیل (۲-۱۳۳) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$4 \int_0^L \int_0^l [l^2 X_1'' - y^2 X_1'' + l^2 y^2 X_2'' - y^4 X_2'' - 2X_1 + 2l^2 X_2 - 12y^2 X_2 + (u''' / k)] dx dy = 0,$$

و با انتگرال گیری در جهت y نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$4 \int_0^L \left[\frac{2}{3} l^3 X_1'' + \frac{2}{15} l^5 X_2'' - 2l X_1 - 2l^3 X_2 + \frac{u''' l}{k} \right] dx = 0,$$

که در اینجا جملات زیر انتگرال مساوی صفر قرار داده می‌شوند. نتیجه به این صورت است:

$$\frac{1}{3} l^2 X_1'' + \frac{1}{15} l^4 X_2'' - X_1 - l^2 X_2 = -\frac{u'''}{2k}. \quad (4-142)$$

سپس، با قرار دادن معادله (۴-۱۴۱) درون معادله دیفرانسیلی مساله (یعنی معادله (۴-۱۲۴)) و استفاده از مبدا مختصات، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$l^2 X_1'' - 2X_1 + 2l^2 X_2 = -\frac{u'''}{k}. \quad (4-143)$$

با قرار دادن اپراتور $D \equiv d/dx$ می‌توان معادله (۴-۱۴۲) و (۴-۱۴۳) را به صورت زیر بازآرایی نمود:

$$\left(\frac{l^2}{3} D^2 - 1 \right) X_1 + l^2 \left(\frac{l^2}{15} D^2 - 1 \right) X_2 = -\frac{u'''}{2k}, \quad (4-144)$$

$$(l^2 D^2 - 1) X_1 + 2l^2 X_2 = -\frac{u'''}{k}. \quad (4-145)$$

با حل معادله (۴-۱۴۴) و (۴-۱۴۵) برای X_1 و X_2 به وسیله تئوری دترمینان‌ها یا به وسیله روش حذفی خواهیم داشت:

$$\left(\frac{l^4}{15} D^4 - \frac{9l^2}{5} D^2 + 4 \right) X_1 = 2 \frac{u'''}{k}, \quad (4-146)$$

معادله (۴-۱۳۵) دو پارامتر مجهول دارد، a_0 و a_1 که برای محاسبه نیاز به دو شرط دارند. مثل گذشته، شکل انتگرالی معادله حاکم دیفرانسیلی، معادله (۲-۱۳۲) یا (۲-۱۳۳) بوده و به عنوان یکی از این شرایط استفاده می‌شود. همان‌طور که در بخش ۱۰-۳ آموختیم، دو روش برای به دست آوردن شرط دوم وجود دارد، یکی از آن‌ها مربوط به فرمولاسیون انتگرالی و دیگری مربوط به فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله است. [معادلات (۳-۲۱۳) و (۳-۲۱۴) را ملاحظه فرمایید]. روش اول را به خواننده واگذار نموده و در اینجا روش دوم را مورد استفاده قرار می‌دهیم. از آنجایی که معادله (۴-۱۳۵) تنها در شرایط مرزی مساله صدق می‌کند بیشترین عدم تطابق بین معادله (۴-۱۳۵) و حل دقیق در دورترین نقاط از مرزها خصوصاً در مبدا محورها مختصات روی می‌دهد، از این‌رو با قرار دادن معادله (۴-۱۳۵) درون فرمولاسیون دیفرانسیلی مساله (یعنی معادله (۴-۱۲۴)) و استفاده از مبدا مختصات، شرط دوم مناسبی به دست می‌آید.

شرط اول به صورت زیر است:

$$4 \int_0^L \int_0^l [-2(l^2 - y^2)][(a_0 - a_1 L^2) + 6a_1 x^2] - 2(a_0 L^2 + a_1 L^2 x^2 - a_0 x^2 - a_1 x^4) + (u''' / k) dx dy = 0,$$

که نتیجه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$(l^2 + L^2)a_0 + L^2(l^2 + L^2/5)a_1 = 3u''' / 4k, \quad (4-146)$$

و از روی شرط دوم

$$(l^2 + L^2)a_0 - L^2 a_1 = u''' / 2k. \quad (4-147)$$

حل معادله (۴-۱۳۶) و (۴-۱۳۷) برای a_0 و a_1 به صورت زیر می‌باشد:

$$a_0 = \left(\frac{u'''}{4kl^2} \right) \frac{5 + (2/5)(L/l)^2}{[1 + (L/l)^2][2 + (1/5)(L/l)^2]}$$

$$a_1 = \left(\frac{u'''}{4kl^2} \right) \frac{(1/L)^2}{2 + (1/5)(L/l)^2}$$

از این‌رو معادله ریتز درجه دوم به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\theta(x, y)}{u''' L^2 / k} = \frac{1}{4} \frac{[1 - (x/L)^2][1 - (y/l)^2]}{[2 + (1/5)(L/l)^2]} \left[\frac{5 + (2/5)(L/l)^2}{1 + (L/l)^2} + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (4-148)$$

تقریب درجات بالای کانتروویج دوباره وابسته به نسبت (L/l) می‌باشد، (مثال ۶-۸ را ببینید) و به صورت زیر انتخاب می‌شود.

$$\theta(x, y) = (l^2 - y^2)[X_1(x) + y^2 X_2(x) + y^4 X_3(x) + \dots] \quad (4-149)$$

$$\left(\frac{1^4}{15}D^4 - \frac{9I^2}{5}D^2 + 4\right)X_2 = 0. \quad (4-147)$$

پاسخ ویژه معادله (۴-۱۴۶)، $u'''/2k$ می‌باشد. پاسخ کلی معادله (۴-۱۴۷) و قسمت همگن معادله (۴-۱۴۶) به صورت چهار تابع هذلولی $\cosh \alpha(x/l)$ ، $\sinh \alpha(x/l)$ ، $\cosh \beta(x/l)$ و $\sinh \beta(x/l)$ است که در اینجا:

$$\alpha = [27/2 - (489/4)^{1/2}]^{1/2}, \quad \beta = [27/2 + (489/4)^{1/2}]^{1/2}.$$

و $\pm \beta/l$ ، $\pm \alpha/l$ ریشه‌های معادله زیر است.

$$(1/15)r^4 - (9/5)r^2 + 4 = 0.$$

بنابراین پاسخ کلی X_1 ، X_2 بدون در نظر گرفتن نامتقارن حرارتی یعنی $\sinh \alpha(x/l)$ و $\sinh \beta(x/l)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$X_1 = \frac{u'''}{2k} + A \cosh \alpha\left(\frac{x}{l}\right) + B \cosh \beta\left(\frac{x}{l}\right), \quad (4-148)$$

$$X_2 = C \cosh \alpha\left(\frac{x}{l}\right) + D \cosh \beta\left(\frac{x}{l}\right). \quad (4-149)$$

در اینجا چهار ثابت A ، B ، C ، و D حاصل استفاده از روش حذفی بین روابط (۴-۱۴۴) و (۴-۱۴۵) بوده و مستقل از هم نیستند. برای محاسبه رابطه بین این ثوابت معادله (۴-۱۴۸) و (۴-۱۴۹) در معادله (۴-۱۴۳) جاگذاری شده و نتیجه مساوی صفر قرار داده می‌شود. بنابراین روابط زیر به دست می‌آیند:

$$(\alpha^2 - 2)A + 2l^2C = 0,$$

$$(\beta^2 - 2)B + 2l^2D = 0.$$

نتایج مشابهی نیز با استفاده از معادله (۴-۱۴۲) قابل حصول است. بنابراین در واقع تنها دو ثابت از چهار ثابت اختیاری است. با به دست آوردن C برحسب A و D برحسب B و جاگذاری نتایج در معادلات (۴-۱۴۸) و (۴-۱۴۹) خواهیم داشت:

$$X_1 = \frac{u'''}{2k} + A \cosh \alpha\left(\frac{x}{l}\right) + B \cosh \beta\left(\frac{x}{l}\right), \quad (4-150)$$

$$X_2 = -\left(\frac{\alpha^2 - 2}{2l^2}\right)A \cosh \alpha\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{\beta^2 - 2}{2l^2}\right)B \cosh \beta\left(\frac{x}{l}\right). \quad (4-151)$$

در نهایت، شرایط مرزی در جهت x به صورت زیر ارضا می‌شود:

$$X_1(L) = 0, \quad X_2(L) = 0,$$

با این شرایط معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$A = -\left(\frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - \alpha^2}\right)\frac{u'''/2k}{\cosh \alpha(x/l)}, \quad B = \left(\frac{\alpha^2 - 2}{\beta^2 - \alpha^2}\right)\frac{u'''/2k}{\cosh \beta(x/l)}. \quad (4-152)$$

از این‌رو با ترکیب معادلات (۴-۱۴۱)، (۴-۱۵۰)، (۴-۱۵۱)، و (۴-۱۵۲)، پروفایل کانترویج درجه دوم به دست می‌آید:

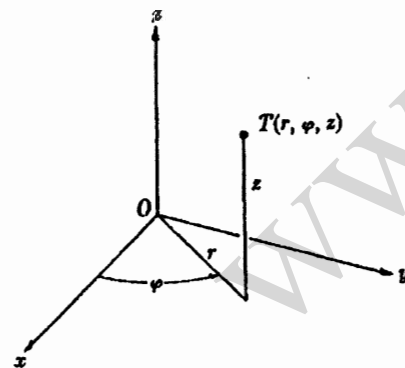
$$\frac{\theta(x,y)}{u'''l^2/k} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{y}{l}\right)^2\right]\left\{1 - \left(\frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - \alpha^2}\right)\left[1 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\left(\frac{y}{l}\right)^2\right]\frac{\cosh \alpha(x/l)}{\cosh \alpha(L/l)}\right. \\ \left. + \left(\frac{\alpha^2 - 2}{\beta^2 - \alpha^2}\right)\left[1 + \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)\left(\frac{y}{l}\right)^2\right]\frac{\cosh \beta(x/l)}{\cosh \beta(L/l)}\right\}. \quad (4-153)$$

ادامه بحث در مورد پاسخ‌های تقریبی به فصل ۸ موكول می‌شود. در اینجا مطالعه مسائل مختصات کارتزین پایان‌یافته و به بررسی مسائل دو بعدی مختصات استوانه‌ای پرداخته می‌شود.

۴-۸. هندسه دو بعدی پایا در مختصات استوانه‌ای.

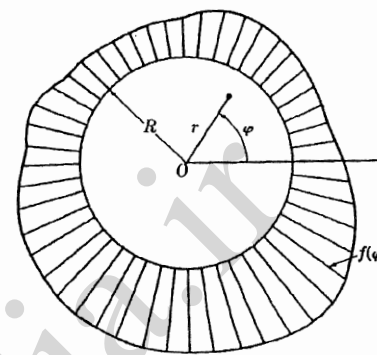
حل با سری‌های فوریه.

طبیعت مختصات استوانه‌ای سه نوع مساله دوبعدی به صورت $T(r, \varphi)$ ، $T(r, z)$ و $T(\varphi, z)$ را ایجاد می‌کند (شکل ۴-۲۹). از آنجایی که $T(\varphi, z)$ مفهوم فیزیکی ندارد (جز در لوله‌های دیواره نازک که می‌توان آن‌ها را به صورت مختصات کارتزین در نظر گرفت)، در اینجا مورد بررسی قرار نمی‌گیرد. $T(r, z)$ تابعی است که می‌توان آن را به صورت سری‌هایی برحسب توابع استوانه‌ای (بسل) بسط داد، و در بخش بعدی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. مسائلی به صورت $T(r, \varphi)$ نیاز به ریاضیات پیچیده‌تری نسبت به مختصات کارتزین ندارد. چنین مسائلی با مثال‌های زیر بیان شده‌اند.



شکل ۴-۲۹

مثال ۴-۱۲. دمای سطح یک میله جامد بی‌نهایت بلند با شعاع R به صورت $f(\varphi)$ داده شده است (شکل ۴-۳۰). مطلوبست محاسبه دمای پایای میله.



شکل ۴-۳۰

فرمولاسیون مساله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (4-154)$$

$$T(0, \varphi) = \text{محدود}, \quad (4-155)$$

$$T(R, \varphi) = f(\varphi), \quad (4-156)$$

$$T(r, \varphi) = T(r, \varphi + 2\pi), \quad (4-157)$$

$$\frac{\partial T(r, \varphi)}{r \partial \varphi} = \frac{\partial T(r, \varphi + 2\pi)}{r \partial \varphi}. \quad (4-158)$$

جهت r به وسیله هیچ تبدیلی متعامد نمی شود. پس φ تنها جهت متعامد ممکن است. از این رو پاسخ قاعده حاصل ضرب $T(r, \varphi) = \mathcal{R}(r)\phi(\varphi)$ با انتخاب مناسب ثابت های جداسازی، به صورت زیر خواهند بود:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 \phi = 0, \quad (4-159)$$

$$\phi(\varphi) = \phi(\varphi + 2\pi), \quad (4-160)$$

$$\frac{\partial \phi(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \phi(r, \varphi + 2\pi)}{\partial \varphi}, \quad (4-161)$$

و

$$r^2 \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial r^2} + r \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r} - \lambda^2 \mathcal{R} = 0, \quad (4-162)$$

$$(4-163) \quad \mathcal{R}(0) = \text{محدود}.$$

جواب کلی معادله (۴-۱۵۹) به صورت زیر است:

$$(4-164) \quad \phi = A \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi.$$

فیزیک مساله اقتضا می کند که ϕ در میله دارای مقدار منفردی باشد. این شرط، که توسط معادله (۴-۱۶۰) بیان شده است هنگامی قابل دستیابی است که توابع دایره ای معادله (۴-۱۶۴) تناوب طبیعی 2π داشته باشند. شرط مشابهی برای تعیین مقادیر مشخصه ثابت جداسازی مورد نیاز است،

$$(4-165) \quad \lambda = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

بنابراین معادله (۴-۱۶۴) تبدیل به معادله زیر خواهد شد.

$$(4-166) \quad \phi = A_0 + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

واضح است که به غیر از این که ϕ تک مقداری خواهد بود، پیوسته بوده و بنابراین به طور خودکار شرط مرزی دوم که در معادله (۴-۱۶۴) داده شده است را ارضا خواهد نمود. معادله (۴-۱۶۲) یک معادله هم بعد [معادله (۳-۱۳۰)] را مشاهده کنید] با جواب کلی زیر است:

$$(4-167) \quad \mathcal{R} = Cr^\lambda + Dr^{-\lambda}.$$

با استفاده از معادلات (۴-۱۶۳) و (۴-۱۶۵)، معادله (۴-۱۶۷) تبدیل به معادله زیر می شود:

$$(4-168) \quad \mathcal{R} = \begin{cases} C_0, & \text{وقتی } n = 0, \\ C_n r^n, & \text{وقتی } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

از این رو جواب کلی معادله به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$T(r, \varphi) = \mathcal{R}_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n \phi_n$$

و می توان معادله زیر را نوشت:

$$(4-169) \quad T(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

که در آن $a_n = A_n C_n$ ، $b_n = B_n C_n$ و $a_0 = A_0 C_0$ می باشد.

در نهایت، و با استفاده از دمای سطح ناهمگن، از روی معادله (۴-۱۶۹) به معادله زیر می رسیم:

با قرار دادن معادله (۴-۱۷۴) در شرط مرزی داریم:

$$+k \frac{\partial \theta(R, \varphi)}{\partial r} = q''(\varphi) - h\theta(R, \varphi) \quad (4-175)$$

نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{q''(\varphi)}{h} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left(1 + \frac{nk}{hR}\right) (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (4-176)$$

که رابطه فوق سری فوریه کامل $q''(\varphi)/h$ می‌باشد. از این رو ضرایب a_0 ، a_n و b_n به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi h} \int_0^{2\pi} q''(\varphi) d\varphi, \\ \left(1 + \frac{nk}{hR}\right) R^n a_n &= \frac{1}{\pi h} \int_0^{2\pi} q''(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \\ \left(1 + \frac{nk}{hR}\right) R^n b_n &= \frac{1}{\pi h} \int_0^{2\pi} q''(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (4-177)$$

ویژه، اگر شار حرارتی به صورت معادله (۴-۱۷۳) معین باشد، ضرایب بالا به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{q_0''}{nh}, \quad a_1 = 0, \\ a_n &= -\left(\frac{q_0''}{nh}\right) \frac{1+(-1)^n}{(n^2-1)(1+nk/hR)R^n}; \quad n = 2, 3, 4, 5, \dots, \\ b_1 &= \left(\frac{q_0''}{nh}\right) \frac{1}{(1+nk/hR)R}, \quad b_n = 0; \quad n = 2, 3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

در نهایت پاسخ به این صورت خواهد بود:

$$\frac{\theta(r, \varphi)}{q_0''/h} = \frac{1}{\pi} + \frac{(r/R)}{2(1+k/hR)} \sin \varphi - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(r/R)^{2m}}{(4m^2-1)(1+2mk/hR)} \cos 2m\varphi, \quad (4-178)$$

که در معادله بالا $m = n/2$ است.

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (4-170)$$

که این معادله بیان گر سری فوریه کامل $f(\varphi)$ می‌باشد (بخش ۴-۴ را ملاحظه کنید) بنابراین، خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad (4-171)$$

$$a_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$b_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi,$$

خصوصاً، اگر دمای سطح یک حالت ویژه به صورت نشان داده شده در شکل (۴-۳۱) و معادله (۴-۱۷۱) باشد، نتیجه به صورت زیر است:

$$a_0 = \frac{1}{2} T_0, \quad a_n = 0, \quad b_n R^n = 2T_0/n\pi; \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

و پاسخ به این صورت خواهد بود:

$$\frac{T(r, \varphi)}{T_0} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin n\varphi, \quad (4-172)$$

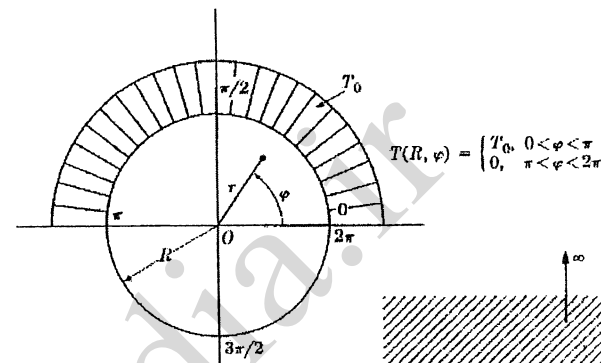
نتایج این مساله به سادگی قابل تعمیم به مساله شامل یک محیط نامحدود با یک سوراخ استوانه‌ای (شکل ۴-۳۲) است که دمای سطح آن، یعنی $f(\varphi)$ معلوم و معین می‌باشد. حل این مساله به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۴-۱۳. قطب آنتن یک تلویزیون از یک میله بلند با شعاع R ساخته شده است (شکل ۴-۳۳) که شار حرارتی خالص شعاعی $q''(\varphi)$ را در یک جهت خود از خورشید دریافت می‌کند درحالی که حرارت را از تمام محیط پیرامون خود از طریق انتقال حرارت جابه‌جایی به محیط دمای T_{∞} از دست می‌دهد. ضریب انتقال حرارت h می‌باشد. فرض بر این است که مساله شبه پایا است که در آن از اثرات چرخش زمین صرف‌نظر می‌شود. (الف) دمای پایا قطب را به دست آورید. (ب) نتایج قسمت (الف) را برای حالت خاص زیر در نظر بگیرید.

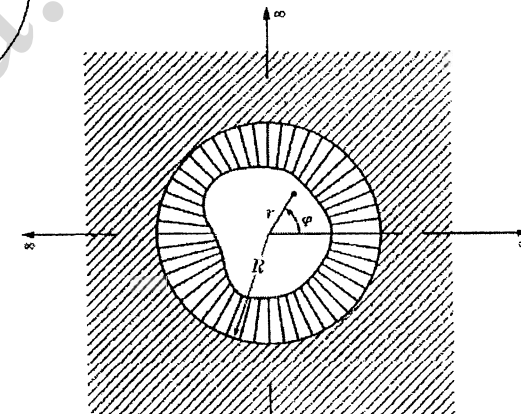
$$q''(\varphi) = \begin{cases} q_0'' \sin \varphi, & 0 < \varphi < \pi, \\ 0, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (4-173)$$

فرمولاسیون مساله جز برای شرط مرزی سطحی، مشخص و شبیه مساله قبل است. از این رو دمای میله $\theta(r, \varphi)$ برحسب دمای محیط به صورت زیر خواهد بود:

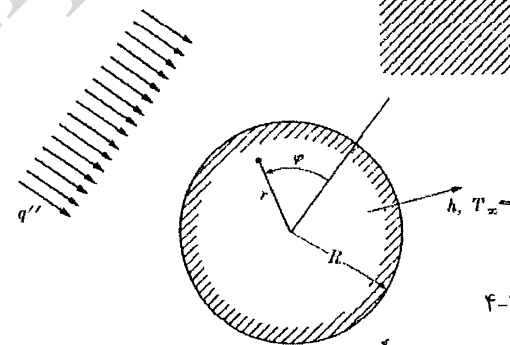
$$\theta(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \quad (4-174)$$



شکل ۴-۳۱



شکل ۴-۳۲



شکل ۴-۳۳

مثال ۴-۱۴. یک پوسته استوانه‌ای طولانی نامحدود با برشی به زاویه ϕ_0 را در نظر بگیرید. (شکل ۴-۳۴). شعاع ورودی و خروجی پوسته به ترتیب R_i و R_o می‌باشد. سطح خارجی پوسته شار حرارتی شعاعی خالص $q''(\phi)$ را دریافت می‌کند درحالی‌که سطح داخلی در دمای یکنواخت خود باقی می‌ماند دو انتهای پوسته در $\phi = 0$ و $\phi = \phi_0$ عایق است. مطلوبست دمای پایای پوسته:

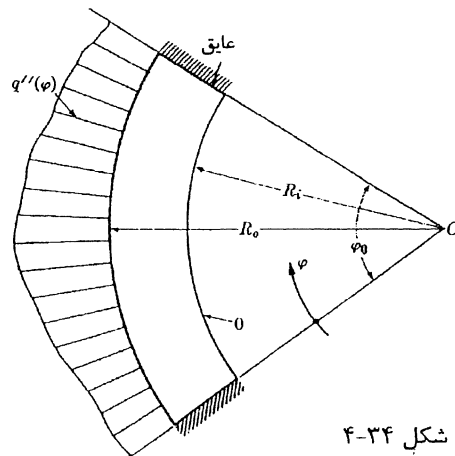
فرمولاسیون مساله به صورت زیر است.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \phi^2} = 0,$$

فصل ۴- مسائل پایای دو و سه بعدی، جداسازی متغیرها، توابع متعامد

$$\theta(R_i, \phi) = 0, \quad +k \frac{\partial \theta(R_o, \phi)}{\partial r} = q''(\phi),$$

$$\frac{\partial \theta(r, 0)}{r \partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial \theta(r, \phi_0)}{r \partial \phi} = 0.$$



شکل ۴-۳۴

با توجه به این‌که تنها جهت ϕ قابل متعامد شدن است، با انتخاب علامت پارامتر جداسازی طبق قبل، می‌توان مساله را به صورت زیر جدا نمود:

$$\frac{d^2 \phi}{d\phi^2} + \lambda^2 \phi = 0; \quad \frac{d\phi(0)}{d\phi} = 0, \quad \frac{d\phi(\phi_0)}{d\phi} = 0, \quad (4-179)$$

و

$$r^2 \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial r^2} + r \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r} - \lambda^2 \mathcal{R} = 0; \quad \mathcal{R}(R_i) = 0. \quad (4-180)$$

جواب کلی معادله (۴-۱۷۹) به صورت $\phi(\phi) = C_n \psi_n(\phi)$ خواهد بود که:

$$\psi_n(\phi) = \cos \lambda_n \phi, \quad \text{توابع مشخصه}$$

$$\lambda_n = n\pi/\phi_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{مقادیر مشخصه}$$

پاسخ معادله (۴-۱۸۰) به صورت زیر است:

$$\mathcal{R}(r) = \begin{cases} A_0 \ln(r/R_i), & \lambda_0 = 0, \\ A_n [(r/R_i)^{\lambda_n} - (r/R_i)^{-\lambda_n}], & \lambda_n = n\pi/\phi_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

پاسخ حاصل ضرب را به صورت زیر خواهیم داشت:

شرط محدودیت و تقارن خط مرکزی در $r = 0$ نیازمند این است که در معادله (۴-۱۸۵) $B = 0$ باشد. بنابراین، با تقسیم رابطه (۴-۱۸۴) بر r و مقایسه نتایج با شکل کلی معادله دیفراسیل درجه دوم داده شده در معادله (۴-۱۶) نتیجه زیر قابل دستیابی است:

$$p(x) = r, \quad q(x) = -v^2/r, \quad \omega(x) = r.$$

از این رو توابع مشخصه $J_v(\lambda_n r)$ یک استوانه جامد با شعاع R با استفاده از تابع وزنی $\omega(x) = r$ در بازه $(0, R)$ ، متعامد خواهند شد. پاسخ به صورت زیر است:

$$\int_0^R r J_v(\lambda_m r) J_v(\lambda_n r) dr = 0, \quad \lambda_m \neq \lambda_n. \quad (۴-۱۸۶)$$

مقادیر مشخصه λ_n ریشه‌های معادله (i) $J_v(\lambda_n R) = 0$ خواهد بود هنگامی که $\mathcal{R}(R) = 0$ باشد (دمای سطح صفر)، ریشه‌های معادله (ii) $J'_v(\lambda_n R) = 0$ خواهد بود زمانی که $\mathcal{R}'(R) = 0$ باشد (شار حرارتی سطحی صفر)، ریشه‌های معادله (iii) $J'_v(\lambda_n R) + B J_v(\lambda_n R) = 0$ خواهد بود زمانی که $\mathcal{R}'(R) + B \mathcal{R}(R) = 0$ باشد (انتقال حرارت به محیط در دمای صفر). در مورد آخری B یک پارامتر می‌باشد.

توجه شود که هر کدام از این سه معادله دارای دو ریشه می‌باشند که به طور خودکار نسبت به مرکز، $r = 0$ ، معین می‌شوند. البته، از آنجایی که جایگزینی λ_n با $-\lambda_n$ در معادله $J_v(\lambda_n r)$ یا تغییر در $J_v(\lambda_n r)$ ایجاد نمی‌کند یا $-J_v(\lambda_n r)$ ایجاد می‌شود، نیاز نیست که مقدار منفی λ_n در نظر گرفته شود. اگر $\lambda_0 = 0$ یک عدد مشخصه باشد، $J_v(\lambda_0 r)$ صفر خواهد شد و تابع مشخصه‌ای در این حالت نخواهیم داشت مگر زمانی که $v = 0$ و $J'_0(\lambda_n R) = 0$ شود. بنابراین، با چنین استثنایی، تنها باید مجموعه‌ای از توابع مشخصه $J_v(\lambda_n r)$ برای اعداد مشخصه مثبت $\lambda_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ مدنظر قرار گیرد. برای مورد خاص، تابع مشخصه $J_0(\lambda_0 r) = 1$ که متناظر با $\lambda_0 = 0$ می‌باشد، نیز باید در مجموعه قرار گیرد.

حال دوباره به مطلب اصلی این بخش باز می‌گردیم، که بسط یک تابع دلخواه $f(r)$ به صورت یک سری از توابع بسل می‌باشد. بسط مورد نظر، به جز در حالتی که $v = 0$ و $J'_0(\lambda_n R) = 0$ باشد، به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_v(\lambda_n r), \quad 0 < r < R, \quad (۴-۱۸۷)$$

رابطه بالا سری بسل - فوریه $f(r)$ در بازه $(0, R)$ می‌باشد. اینجا، با توجه به تابع وزنی $\omega(x) = r$ می‌توان ضریب a_n را از روی معادله (۴-۲۳) به صورت زیر به دست آورد.

$$a_n = \frac{\int_0^R r f(r) J_v(\lambda_n r) dr}{\int_0^R r J_v^2(\lambda_n r) dr}. \quad (۴-۱۸۸)$$

$$\theta(r, \varphi) = a_0 \ln(r/R_i) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n [(r/R_i)^{\lambda_n} - (r/R_i)^{-\lambda_n}] \cos \lambda_n \varphi, \quad (۴-۱۸۱)$$

که در آن $a_n = A_n C_n$ و $a_0 = A_0 C_0$ می‌باشد.

در نهایت، استفاده از شرط مرزی غیرقابل جداسازی در جهت r نتیجه زیر را می‌دهد:

$$q''(\varphi) R_o/k = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n [(R_o/R_i)^{\lambda_n} - (R_o/R_i)^{-\lambda_n}] \cos \lambda_n \varphi, \quad (۴-۱۸۲)$$

از روی معادله به دست آمده و مطابق تئوری سری‌های فوریه ضرایب زیر به دست می‌آید:

$$a_0 = (R_o/k\varphi_0) \int_0^{\varphi_0} q''(\varphi) d\varphi, \quad (۴-۱۸۳)$$

$$a_n \lambda_n [(R_o/R_i)^{\lambda_n} - (R_o/R_i)^{-\lambda_n}] = (2 R_o/k\varphi_0) \int_0^{\varphi_0} q''(\varphi) \cos \lambda_n \varphi d\varphi.$$

حال مطالعه مسائل به شکل $T(r, \varphi)$ خاتمه یافته و شکل $T(r, z)$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. اگر جهت z متعامد باشد، این مسائل نیاز به ریاضیات پیچیده‌تری ندارد، و با استفاده از توابع دایره‌ای در جهت z و توابع بسل اصلاح‌شده در جهت r ، قابل حل خواهد بود. [مساله ۴-۱۹ (الف) مشاهده شود]. در غیر این صورت اگر جهت r متعامد باشد، بسط تابع دلخواه $f(r)$ به صورت سری‌هایی بر حسب توابع بسل ضروری خواهد بود. این مطلب در بخش بعدی نشان داده شده و نتایج برای تعدادی از مسائل استفاده خواهد شد.

۴-۹. هندسه دو بعدی پایا در مختصات استوانه‌ای.

سری‌های بسل - فوریه.

هنگامی که مساله استوانه‌ای دوبعدی پایای $T(r, z)$ در جهت r متعامد باشد، با انتخاب مناسب ثابت جداسازی که منتهی به معادله دیفراسیل درجه دوم خواهد شد، حل می‌شود. این معادله دیفراسیل در جهت z به توابع هذلولی و در جهت r ، به توابع بسل منتهی خواهد شد.

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + (\lambda^2 r^2 - v^2) \mathcal{R} = 0, \quad (۴-۱۸۴)$$

که پاسخ رابطه بالا به صورت توابع بسل به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{R}(r) = A J_v(\lambda r) + B Y_v(\lambda r). \quad (۴-۱۸۵)$$

[معادلات (۳-۱۰۸) و (۳-۱۰۹) را ملاحظه کنید]. در اینجا بحث‌مان به مسائل مربوط به استوانه جامد، محدود می‌شود. روند حل مسائل استوانه‌های توخالی، مشابه بوده ولی از نظر جبری دارای پیچیدگی است، که در اینجا هم مورد بررسی قرار نمی‌گیرد (مساله ۴-۳۱ ملاحظه کنید).

زمانی که $v = 0$ و $J'_0(\lambda_n R) = 0$ باشد، سری بسل - فوریه $f(r)$ به شکل زیر خواهد بود:

$$f(r) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r), \quad (۴-۱۸۹)$$

که در آن a_0, a_n حالت‌های خاص معادله (۴-۱۸۶) در هنگامی که $v = 0$ شود، می‌باشند. بنابراین خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{\int_0^R r f(r) J_0(\lambda_n r) dr}{\int_0^R r J_0^2(\lambda_n r) dr}, \quad (۴-۱۹۰)$$

و از آنجایی که $\lambda_0 = 0$ و $J_0(0) = 1$ می‌باشند از روی معادله (۴-۱۹۰)، خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r) dr. \quad (۴-۱۹۱)$$

بنابراین، برحسب شرط مرزی خارجی، انتگرال مخرج معادله (۴-۱۸۸) برای یک‌بار، محاسبه شده و برای تمامی موارد قابل استفاده است. با توجه به این‌که تابع مشخصه $\varphi_n(r) = J_v(\lambda_n r)$ یک پاسخ معادله (۴-۱۸۴) می‌باشد، خواهیم داشت:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_v}{dr} \right) + (\lambda_n^2 r^2 - v^2) J_v = 0. \quad (۴-۱۹۲)$$

با ضرب معادله (۴-۱۹۲) در $2(dJ_v/dr)$ و بازآرایی آن، معادله زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_v}{dr} \right)^2 = -(\lambda_n^2 r^2 - v^2) \frac{dJ_v^2}{dr}. \quad (۴-۱۹۳)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۴-۱۹۳) در بازه $(0, R)$ و بازآرایی سمت راست معادله، پاسخ زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_0^R r J_v^2(\lambda_n r) dr = \frac{1}{2\lambda_n^2} \left\{ (\lambda_n^2 r^2 - v^2) J_v^2(\lambda_n r) + \left[r \frac{dJ_v(\lambda_n r)}{dr} \right]^2 \right\}_{r=R}. \quad (۴-۱۹۴)$$

سمت چپ معادله (۴-۱۹۴) برابر مخرج معادله (۴-۱۸۸) است. پس مقادیر مخرج می‌تواند به‌صورت زیر خلاصه شود.

(i) هنگامی که λ_n یک ریشه $J_v(\lambda_n r) = 0$ باشد، با توجه به معادله (۴-۱۳۹) خواهیم داشت:

$$\frac{dJ_v(\lambda_n r)}{dr} = -\lambda_n J_{v+1}(\lambda_n r) + \frac{v}{r} J_v(\lambda_n r),$$

سمت راست معادله (۴-۱۹۴) یا به‌عبارتی مخرج رابطه (۴-۱۸۸) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{R^2}{2} J_{v+1}^2(\lambda_n R). \quad (۴-۱۹۴)$$

(ii) هنگامی که λ_n یک ریشه معادله $J'_v(\lambda_n R) = 0$ باشد. مخرج معادله (۴-۱۸۸) به‌صورت

زیر خواهد بود:

$$\frac{\lambda_n^2 R^2 - v^2}{2\lambda_n^2} J_v^2(\lambda_n R). \quad (۴-۱۹۶)$$

(iii) هنگامی که λ_n یک ریشه معادله $J'_v(\lambda_n R) + B J_v(\lambda_n R) = 0$ باشد مخرج معادله

به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{(\lambda_n^2 + B^2) R^2 - v^2}{2\lambda_n^2} J_v^2(\lambda_n R). \quad (۴-۱۹۷)$$

مخرج معادله (۴-۱۹۰) یک حالت خاص معادلات (۴-۱۹۵)، (۴-۱۹۶)، و (۴-۱۹۷) است زمانی که $v = 0$ باشد.

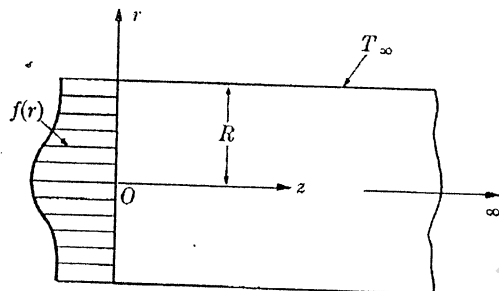
برای به‌دست آوردن صورت معادله (۴-۱۸۸)، معلوم بودن $f(r)$ ضروری است. برای اغلب موارد عملی صورت معادله به کمک رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\int_0^R r^{v+1} J_v(\lambda_n r) dr = \frac{R^{v+1}}{\lambda_n} J_{v+1}(\lambda_n R). \quad (۴-۱۹۸)$$

حال استفاده از سری‌های بسل - فوریه را به‌وسیله تعدادی از مسائل دوبعدی مختصات استوانه‌ای که در جهت r همگن می‌باشند، بیان می‌نماییم.

مثال ۴-۱۵. یک استوانه جامد نیمه بی‌نهایت به شعاع R را در نظر بگیرید (شکل ۴-۳۵). ضریب انتقال حرارت بزرگ است. دمای محیط T_∞ و دمای پایه به‌صورت $f(r)$ می‌باشد. مطلوبست محاسبه دمای پایای دوبعدی درون استوانه.

فرمولاسیون مساله با تغییر متغیر $\theta = T - T_\infty$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



شکل ۴-۳۵

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta(0, z)}{\partial r} = 0$$

یا

$$\theta(0, z) = \text{محدود},$$

$$\theta(R, z) = 0,$$

$$\theta(r, 0) = f(r) - T_\infty = F(r),$$

$$\theta(r, \infty) = 0 \quad (\text{محدود}).$$

حال، می‌خواهیم با قاعده حاصل‌ضرب، $\theta(r, z) = \mathcal{R}(r)Z(z)$ ، مساله را حل نماییم. ثابت جداسازی به صورتی انتخاب می‌شود که در جهت r تابع بسل از نوع اول و در جهت z تابع نمایی یا تابع هذلولی به دست آید. از این رو مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr}\right) + \lambda^2 r \mathcal{R} = 0; \quad \frac{d\mathcal{R}(0)}{dr} = 0 \quad \text{یا} \quad \mathcal{R}(0) = 0, \quad \mathcal{R}(R) = 0, \quad (4-199)$$

و

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0, \quad Z(\infty) = 0. \quad (4-200)$$

طبق گذشته، استفاده از شرط مرزی ناهمگن (بنابراین غیرقابل جداسازی) در جهت z ، در انتهای مساله بررسی خواهد شد.

پاسخ معادله (۴-۱۹۹)، به صورت زیر است:

$$\mathcal{R}_n = A_n \varphi_n(r), \quad \varphi_n(r) = J_0(\lambda_n r),$$

و مقادیر مشخصه، λ_n ، صفرهای $J_0(\lambda_n R) = 0$ می‌باشند. [شکل ۲۴-۳ (الف) را ملاحظه کنید]. از طرفی پاسخ معادله (۴-۲۰۰) به صورت زیر است:

$$Z_n = C_n e^{-\lambda_n z}.$$

از این رو پاسخ حاصل‌ضرب مساله به صورت زیر می‌شود:

$$\theta(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} J_0(\lambda_n r), \quad (4-201)$$

که در آن $a_n = A_n C_n$ است. معادله فوق، در معادله دیفرانسیل اصلی و سه شرط مرزی همگن مساله، صدق می‌کند. حال باید ضریب a_n را به گونه‌ای تعیین کنیم که شرط مرزی ناهمگن، $\theta(r, 0) = F(r)$ ، برقرار شود. پس خواهیم داشت:

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r). \quad (4-202)$$

بنابراین مساله تبدیل به بسط تابع $F(r)$ به سری‌های بسل - فوریه می‌شود. از آنجایی که مقادیر مشخصه، صفرهای معادله $J_0(\lambda_n R) = 0$ می‌باشد، با استفاده از معادله‌های (۴-۱۸۸) و (۴-۱۹۵) برای $v = 0$ ، نتیجه به صورت زیر به دست می‌آید.

$$a_n = 2 \frac{\int_0^R r F(r) J_0(\lambda_n r) dr}{R^2 J_1^2(\lambda_n R)}. \quad (4-203)$$

در نهایت، با قرار دادن معادله (۴-۲۰۳) در معادله (۴-۲۰۱)، پاسخ مساله به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\theta(r, z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^R \rho F(\rho) J_0(\lambda_n \rho) d\rho \right] \frac{e^{-\lambda_n z} J_0(\lambda_n r)}{R^2 J_1^2(\lambda_n R)}. \quad (4-204)$$

برای تشخیص متغیر واقعی r در معادله (۴-۲۰۴) از متغیر ساختگی r در معادله (۴-۲۰۳)، r در معادله (۴-۲۰۴) با ρ جایگزین شده است.

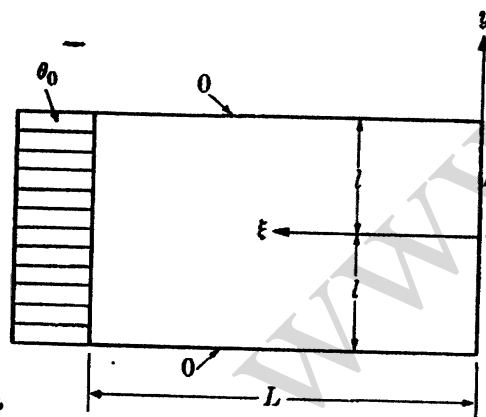
در حقیقت، اگر دمای پایه مقداری یکنواخت، مثل θ_0 باشد، انتگرال معادله (۴-۲۰۴) از روی معادله (۴-۱۹۸) به سادگی برای $v = 0$ به دست می‌آید. بنابراین:

$$\int_0^R \rho J_0(\lambda_n \rho) d\rho = \frac{R}{\lambda_n} J_1(\lambda_n R), \quad (4-205)$$

و توزیع دما به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\theta(r, z)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n z} J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R)}. \quad (4-206)$$

مثال ۴-۲ و مساله مذکور از لحاظ فیزیکی مشابه هستند و تنها اختلاف در هندسه است که دومی شامل اثرات انحناء نیز می‌باشد.
مثال ۴-۱۶. مثال ۴-۱۵ را برای دمای یکنواخت پایه، θ_0 ، با این فرض که در جهت z طول، L ، محدود باشد، دوباره حل نمایید.



شکل ۴-۲۶

مناسب‌ترین محورها مختصات (مثال ۴-۸ را ملاحظه کنید) در شکل ۴-۲۶ نشان داده شده‌اند. از آنجایی که فیزیک در جهت r تغییر نکرده است، معادله (۴-۱۹۹) که برای مساله قبل به دست آمده، برای این مساله نیز به کار می‌رود. از طرف دیگر، جهت z به این صورت خواهد بود:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0, \quad Z(0) = 0. \quad (4-207)$$

پاسخ معادله (۴-۲۰۷) به راحتی برحسب توابع هذلولی بیان می‌شود:

$$Z_n = C_n \sinh \lambda_n z.$$

بنابراین پاسخ مساله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\theta(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh \lambda_n z J_0(\lambda_n r) \quad (4-208)$$

که، هنگامی که دمای پایه θ_0 در آن صدق کند، خواهیم داشت:

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh \lambda_n L J_0(\lambda_n r) \quad (4-209)$$

این معادله، یک بسط بسل-فوریه θ_0 می‌باشد.

با تعیین a_n با استفاده از معادله (۴-۲۰۹) و جاگذاری آن در معادله (۴-۲۰۸) دمای استوانه به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\theta(r, z)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh \lambda_n z}{\sinh \lambda_n L} \right) \frac{J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R)}. \quad (4-210)$$

مثال‌های ۴-۸ و ۴-۱۶ نمایان‌گر فیزیک مشابهی به ترتیب، در مختصات کارتزین و استوانه‌ای می‌باشند.

مثال ۴-۱۷. مثال ۴-۱۵ را با دمای یکنواخت پایه θ_0 ، برای حالتی که ضریب انتقال حرارت h محدود باشد، دوباره حل نمایید.

فرمولاسیون مساله همانند فرمولاسیون مثال ۴-۱۵ است جز شرط مرزی محیطی که به صورت زیر خواهد بود:

$$-k \frac{\partial \theta(R, z)}{\partial r} = h \theta(R, z).$$

بنابراین، برای جهت r ، پاسخ به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) + \lambda^2 r \mathfrak{R} = 0, \quad (4-211)$$

$$\frac{d\mathfrak{R}(0)}{dr} = 0 \quad \text{یا} \quad \mathfrak{R}(0) = \text{محدود}, \quad \mathfrak{R}(R) + B \mathfrak{R}(R) = 0,$$

که در معادله فوق $B = h/k$ می‌باشد. در مقایسه با مثال ۴-۱۵، جهت z نیز بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابراین در جهت z دوباره معادله (۴-۲۰۰) برقرار است.

پاسخ معادله (۴-۲۱۱) به صورت زیر می‌شود:

$$\mathfrak{R}_n = A_n \varphi_n(r), \quad \varphi_n(r) = J_0(\lambda_n r), \quad \text{توابع مشخصه}$$

و مقادیر مشخصه، λ_n صفرهای $J'_0(\lambda_n R) + B J_0(\lambda_n R) = 0$ می‌باشد.

پاسخ قاعده حاصل ضرب نیز به صورت زیر می‌شود:

$$\theta(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} J_0(\lambda_n r), \quad (4-212)$$

پاسخ به دست آمده، مشابه پاسخ مثال ۴-۱۵ است تنها تفاوت، مقدار a_n می‌باشد. با استفاده از معادلات (۴-۱۸۸) و (۴-۱۹۷) برای $v = 0$ ، و معادله (۴-۲۰۵)، خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{2\theta_0(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R)}{[\lambda_n^2 R^2 + (Bi)^2] J_0^2(\lambda_n R)}$$

که در آن $Bi = hR/k$ می‌شود. این معادله با استفاده از معادله $J'_0(\lambda_n R) + B J_0(\lambda_n R) = 0$ قابل بازآرایی است که طبق معادله (۴-۱۳۷)، به صورت زیر می‌باشد:

$$(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R) = Bi J_0(\lambda_n R). \quad (4-213)$$

نتیجه به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2\theta_0 Bi}{[\lambda_n^2 R^2 + (Bi)^2] J_0(\lambda_n R)}. \quad (4-214)$$

در نهایت، با قرار دادن معادله (۴-۲۱۴) در معادله (۴-۲۱۲) دمای استوانه به دست می‌آید:

$$\frac{\theta(r, z)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Bi e^{-\lambda_n z} J_0(\lambda_n r)}{[\lambda_n^2 R^2 + (Bi)^2] J_0(\lambda_n R)}. \quad (4-215)$$

دوباره تنها اختلاف بین پاسخ داده شده در معادله‌های (۴-۷۹) و (۴-۲۱۵) اثر انحنا است که در دومی تاثیر می‌گذارد.

مثال ۴-۱۸. می‌خواهیم اثر سرعت یکنواخت V در مثال ۴-۱۵ را با توجه به سیستم مختصات ثابت که در شکل (۴-۳۷) نشان داده شده، بررسی کنیم. حرکت در جهت z است، هدایت محوری قابل صرف نظر نمی‌باشد، و دمای سطح میله یکنواخت و مساوی θ_0 است.

این مساله، شکل استوانه‌ای مثال ۴-۷ است. همان طور که در مثال ۴-۷ بیان شد، به علت نفوذ رسانش محوری در جهت منفی z ، مساله همان یکی از دو ناحیه خواهد شد.

$$\mu_n = \lambda_n R, \quad P\acute{e}(or P) = VR/a, \quad Gz = 1/\xi = P\acute{e}/(x/R), \quad \rho = r/R,$$

در نهایت دمای بدون بعد در دو ناحیه به دست می آید:

$$\frac{\psi(\rho, \xi; P)}{\theta_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \frac{J_0(\lambda_n \rho)}{\mu_n J_1(\lambda_n)} \times \exp \left(\left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi \right), \quad \xi < 0, \quad (F-220)$$

$$\frac{\theta(\rho, \xi; P)}{\theta_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (\mu_n/P)^2]^{1/2}} \right\} \frac{J_0(\lambda_n \rho)}{\mu_n J_1(\lambda_n)} \times \exp \left(\left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{\mu_n}{P} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} P^2 \xi \right), \quad \xi < 0, \quad (F-221)$$

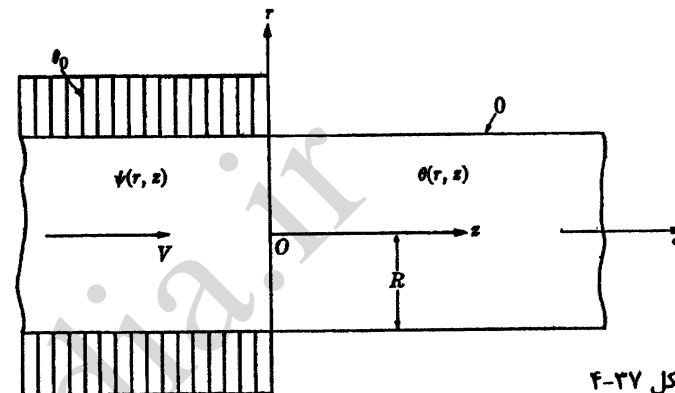
در اینجا شکل بدون بعد دماهای به دست آمده، برای مقایسه مستقیم با معادلات (۴-۱۱۰) و (۴-۱۱۱) به کار می روند. خواننده علاقمند، با به دست آوردن عدد Nu (ناسلت) و دماهای روی مرز و روی خط مرکزی از معادلات (۴-۲۲۰)، (۴-۲۲۱) و مقایسه آن ها با (۴-۲۰)، (۴-۲۱)، و (۴-۲۲) می تواند تاثیر اتحنا را در مساله بررسی کند.

مثال ۴-۱۹. هر دو انتهای یک میله جامد با شعاع R و طول $2L$ عایق شده است. در وسط دو انتهای این میله یک مفصل فلزی با ضخامت قابل صرف نظر و طول $2L$ قرار دارد که با سرعت زاویه ای ω می چرخد (شکل ۴-۲۸). فشار بین قاب و میله p بوده و ضریب اصطکاک خشک μ می باشد.

دو حالت مورد بررسی قرار می گیرد. (i) ضریب انتقال حرارت در کل سیستم یکسان باشد $h_1 = h_2 = h$ (ii) دو ضریب انتقال حرارت داشته باشیم، یکی برای قاب چرخان h_1 و دیگری برای میله ساکن h_2 می خواهیم دمای پایای سیستم را به دست آوریم.

گرچه انتهای دو طرف میله عایق است، از روی مسیرهای شار حرارتی منتقل شده که در شکل ۴-۲۸ نشان داده شده است به این نتیجه می رسیم که مساله دوبعدی است. ابتدا بررسی حالتی که ضریب انتقال حرارت ثابت باشد انجام خواهد شد. پس فرمولاسیون مساله به شکل زیر می شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial \theta(0, z)}{\partial r} = 0, \quad -k \frac{\partial \theta(R, z)}{\partial r} + \begin{cases} \mu p \omega R, & 0 \leq z < l \\ 0, & l < z \leq L \end{cases} = h \theta(R, z), \\ \frac{\partial \theta(r, 0)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \theta(r, L)}{\partial z} = 0.$$



شکل ۴-۲۷

در فرمولاسیون مساله و روند به دست آوردن جواب، اثر انحنا، همانند مثال ۴-۷ در نظر گرفته می شود و در اینجا به صورت جزئی به آن پرداخته نمی شود. نتیجه پیش از در نظر گرفتن شرایط مرزی فصل مشترک، به صورت زیر است:

$$\psi(r, z) = \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{[s + (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}] z} J_0(\lambda_n r), \quad z < 0, \quad (F-216)$$

$$\theta(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{[s - (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}] z} J_0(\lambda_n r), \quad z > 0, \quad (F-217)$$

که مقادیر ویژه صفرهای معادله $J_0(\lambda_n R) = 0$ می باشد و دوباره $2s = \rho c V / k$ است. حال می خواهیم شرایط فصل مشترک را در نظر بگیریم. با تساوی دماهای فصل مشترک خواهیم داشت:

$$\theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\lambda_n r),$$

اگر θ_0 را به صورت سری بسل-فوریه مناسب بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$\theta_0 = 2\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R)},$$

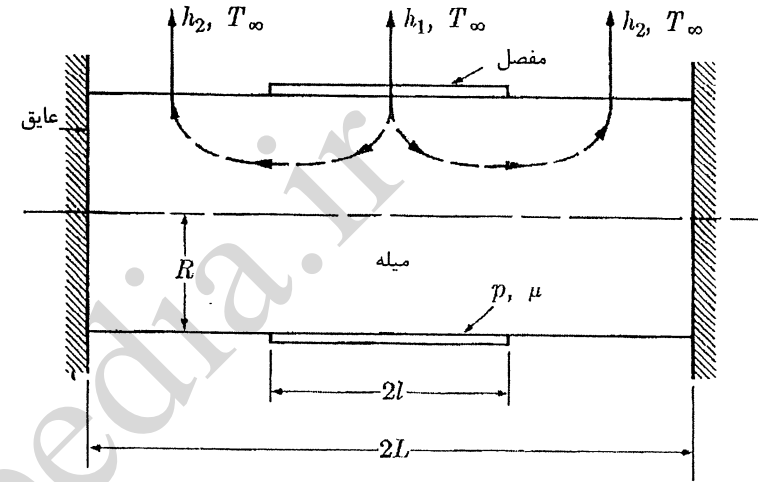
و نتیجه زیر حاصل می شود:

$$2\theta_0 / (\lambda_n R) J_1(\lambda_n R) + a_n = b_n, \quad (F-218)$$

تساوی شارهای حرارتی معادله زیر را نتیجه خواهد داد.

$$[s + (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}] a_n = [s - (s^2 + \lambda_n^2)^{1/2}] b_n. \quad (F-219)$$

در نهایت، با حل معادله (۴-۲۱۸) و (۴-۲۱۹) برای a_n و b_n و جاگذاری نتایج در معادلات (۴-۲۱۶) و (۴-۲۱۷) و استفاده از اعداد بدون بعد معادلات زیر به دست می آید.



شکل ۴-۳۸

اگر فرض کنیم جهت r همگن است، می‌توانیم مساله را به صورت یک مساله دو ناحیه‌ای مشابه روش مثال ۴-۱۸ حل کنیم. از آنجایی که شرایط مرزی محیطی دو ناحیه تنها در همگن بودن متفاوتند، مقادیر مشخصه هر دو ناحیه یکسان است. مراحل حل این مساله به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. در اینجا جواب یک پارامتری با در نظر گرفتن جهت z به عنوان جهت همگن داده شده است. که جداسازی متغیرها نتیجه زیر را حاصل می‌نماید:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \lambda^2 Z = 0; \quad \frac{dZ(0)}{dz} = 0, \quad \frac{dZ(L)}{dz} = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) - \lambda^2 r \mathcal{R} = 0; \quad \frac{d\mathcal{R}(0)}{dr} = 0.$$

تابع مشخصه در جهت $\varphi_n(z) = \cos \lambda_n z$ بوده و مقادیر مشخصه $\lambda_n L = n\pi$ می‌باشد که در آن $n = 0, 1, 2, \dots$ است. پاسخ ویژه در جهت r که تقارن مرکزی در آن صدق کند به صورت $\mathcal{R}_n(r) = I_0(\lambda_n r)$ می‌باشد، پس پاسخ حاصل ضرب به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\theta(r, z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n z. \quad (4-222)$$

در نهایت، استفاده از شرط مرزی غیرهمگن در جهت r نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$-k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n I_1(\lambda_n R) \cos \lambda_n z + \begin{cases} \mu p \omega R, & 0 \leq z < l \\ 0, & l < z \leq L \end{cases}$$

$$= h a_0 + h \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0(\lambda_n R) \cos \lambda_n z,$$

ضرایب نیز به شکل زیر به دست می‌آید:

فصل ۴- مسائل پایای دو و سه بعدی، جداسازی متغیرها، توابع متعامد

$$a_0 = \frac{\mu p \omega R l}{h L}, \quad a_n = \frac{2(\mu p \omega R^2 / k) \sin \lambda_n l}{\lambda_n L [Bi I_0(\lambda_n R) + (\lambda_n R) I_1(\lambda_n R)]}$$

که در آن $Bi = hR/k$ است. با جاگذاری این مقادیر در معادله (۴-۲۲۲)، توزیع دمایی در سیستم به دست می‌آید:

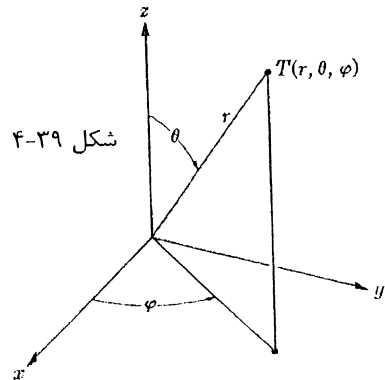
$$\frac{\theta(r, z)}{\mu p \omega R^2 / k} = \frac{l/L}{Bi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n l \cdot I_0(\lambda_n r)}{\lambda_n L [Bi I_0(\lambda_n R) + (\lambda_n R) I_1(\lambda_n R)]} \cos \lambda_n z. \quad (4-223)$$

هنگامی که $h_1 \neq h_2$ باشد، مجموعه‌ای از مقادیر مشخصه به دست می‌آید و مساله، به صورت مساله تک بعدی دیگر قابل حل نیست. این مورد نیاز به یک تعریف جدید دارد و آن بسط یک تابع دلخواه به مجموعه‌ای از توابع غیرمتعامد است که خارج از محدوده این کتاب است.^۱ با مثال بررسی مثال قبل، مطالعه مختصات استوانه‌ای پایان یافته و مطالعه مختصات کروی آغاز می‌شود.

۴-۱۰. هندسه دوبعدی پایا در مختصات کروی.

چندجمله‌ای‌های لاگرانژ. سری‌های فوریه - لاگرانژ.

زمانی که یک مساله کروی به زاویه θ وابسته است (شکل ۴-۳۹)، پاسخ آن می‌تواند، به بسط یک تابع دلخواه، به صورت یک سری چندجمله‌ای لاگرانژ تبدیل شود. ابتدا ریاضیات مورد نیاز مطرح شده، سپس نتایج برای یک مساله به کار گرفته می‌شوند.



معادله دیفرانسیل درجه دوم خطی با ضرایب متغیر زیر معادله لاگرانژ نامیده می‌شود و پاسخ‌های آن به عنوان توابع لاگرانژ خوانده می‌شوند.

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad (3-224)$$

مخصوصاً زمانی که n صفر یا یک عدد صحیح مثبت باشد، پاسخ‌های معادله (۴-۲۲۴) چندجمله‌ای‌های لاگرانژ نامیده می‌شوند. در اینجا فقط مختصری بر روی حالتی که n صفر یا یک عدد صحیح باشد، بحث می‌شود و این حالت زمانی حاصل می‌شود که جداسازی متغیرها برای مسائل هدایت کروی به کار برده شود.

۱- به عنوان مثال مرجع ۴ فصل ۱ صفحه ۴۴ بخش ۱-۳ را ملاحظه نمایید.

$$Q_n(x) = (-1)^{n/2} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)} \times \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 + \dots \right], \quad (4-230)$$

که در آن n زوج و بزرگتر مساوی ۲ است.

وقتی $|x| < 1$ و m یک عدد صحیح است، توابع

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m}, \quad (4-231)$$

به ترتیب چندجمله‌ای‌های به هم پیوسته^۱ نوع اول و دوم لاگرانژ از درجه n و مرتبه m نامیده می‌شوند. با تعویض عبارت $(1-x^2)$ در معادله (۴-۲۳۱) با عبارت (x^2-1) ، این معادله برای حالت $|x| > 1$ حاصل می‌شود.

برای حالت خاصی که $m = 0$ باشد، نتیجه می‌دهد:

$$P_n^0(x) = P_n(x),$$

$$Q_n^0(x) = Q_n(x). \quad (4-232)$$

در این حالت چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، چندجمله‌ای‌های به هم پیوسته لاگرانژ مرتبه صفر هستند.

چندجمله‌ای‌های به هم پیوسته لاگرانژ در معادله دیفرانسیل صدق می‌کنند:

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0. \quad (4-233)$$

وقتی که $|x| < 1$ باشد، با تعریف $x = \cos \theta$ می‌توان معادله لاگرانژ، یعنی معادله (۴-۲۳۳)

را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) + n(n+1)y = 0, \quad (4-234)$$

که این معادله در مسائل دو بعدی کروی ظاهر می‌شود. پاسخ کلی معادله (۴-۲۳۴) به این صورت است:

$$y(x) = a_0 P_n(\cos \theta) + a_1 Q_n(\cos \theta) \quad (4-235)$$

در زیر به خواصی از چندجمله‌ای‌های لژاندر که متناوباً مورد استفاده قرار می‌گیرند، اشاره شده

است:

پاسخ معادله (۴-۲۲۴) می‌تواند به روش سری‌های توانی (به بخش ۳-۶ مراجعه شود) به دست آید و نتیجه به صورت زیر بیان شود:

$$y(x) = a_0 P_n(x) + a_1 Q_n(x), \quad (4-225)$$

که در آن $P_n(x)$ چند جمله‌ای نوع اول لاگرانژ از درجه n و $Q_n(x)$ چند جمله‌ای نوع دوم لاگرانژ از درجه n نامیده می‌شوند. بسط $P_n(x)$ به صورت زیر است:

$$P_n(x) = (-1)^{n/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \times \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + \dots \right], \quad (4-226)$$

که در آن n زوج و بزرگتر مساوی ۲ است و داریم:

$$P_n(x) = (-1)^{(n-1)/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)} \times \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 + \dots \right], \quad (4-227)$$

که در آن فرد n فرد و بزرگتر مساوی ۳ است. شش جمله اول این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر خواهد شد:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad (4-228)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

معادلات (۴-۲۲۷) و (۴-۲۲۸) فقط زمانی که $|x| < 1$ است، همگرا می‌باشند. به طور مشابه، بسط $Q_n(x)$ به صورت زیر است:

$$Q_n(x) = (-1)^{(n+1)/2} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n} \times \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + \dots \right], \quad (4-229)$$

که در آن فرد n فرد و بزرگتر مساوی ۳ است و

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad (4-236)$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4-237)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad \text{فرمول رودریگز}, \quad (4-238)$$

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4-239)$$

$$Q_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), & \text{وقتی که } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right), & \text{وقتی که } |x| > 1, \end{cases}$$

$$Q_1(x) = Q_0(x)P_1(x) - 1,$$

$$Q_2(x) = Q_0(x)P_2(x) - \frac{3}{2}x, \quad (4-240)$$

$$Q_3(x) = Q_0(x)P_3(x) - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3},$$

$$Q_4(x) = Q_0(x)P_4(x) - \frac{35}{8}x^3 + \frac{55}{24}x^2,$$

:

$$Q_n(x) = Q_0(x)P_n(x) - \frac{(2n-1)}{1 \cdot n} P_{n-1}(x) - \frac{(2n-5)}{3(n-1)} P_{n-3}(x) - \dots,$$

$$P_0(\cos \theta) = 1,$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta,$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1), \quad (4-241)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos \theta),$$

:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n! 2^{n-1}} \left[\cos n \theta + \frac{1 \cdot n}{1 \cdot (2n-1)} \cos(n-2)\theta + \frac{1 \cdot 3 \cdot n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \dots \right].$$

سپس تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر مورد بررسی قرار می‌گیرد. به هرحال با توجه به معادله (۴-۲۴۰) وقتی که $x \rightarrow \pm 1$ و $Q_n(x) \rightarrow \infty$ خواهد شد و $Q_n(x)$ از نظر فیزیکی در این بحث بی‌معناس و کنار گذاشته می‌شود.^۱

معادله لژاندر، یعنی معادله (۴-۲۲۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n-1)y = 0 \quad (4-242)$$

و با مقایسه با معادله (۴-۱۶) نتیجه می‌دهد:

$$p(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = 0, \quad \lambda^2 = n(n+1), \quad \omega(x) = 1.$$

از آنجایی که وقتی $x \rightarrow \pm 1$ است $p(x) = 0$ می‌باشد، برطبق معادله (۴-۱۷) بخش ۴-۲، برای معادله (۴-۲۴۲) هیچ شرط مرزی‌ای برای تشکیل یک مساله مقدار مشخصه بر روی بازه $(-1 \leq x \leq 1)$ لازم نیست، زیرا، توابع مشخصه، و مشتقات اول آن‌ها در دو انتهای بازه، محدود می‌باشند. همان‌طور که در بررسی خصوصیات توابع و چندجمله‌ای‌های لژاندر آموختیم، معادله (۴-۲۴۲) در $x \rightarrow \pm 1$ دارای پاسخ‌های خصوصی است، اگر این پاسخ‌ها برحسب $P_n(x)$ بوده و n فقط عدد صحیح مثبت و یا صفر باشد یعنی،

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4-243)$$

از این‌رو چندجمله‌ای‌های لژاندر $P_n(x)$ ، توابع مشخصه حاصل از مساله مقدار مشخصه بیان‌شده توسط معادله (۴-۲۴۲) هستند. این چندجمله‌ای‌ها یک مجموعه متعامد به همراه تابع وزنی $\omega(x) = 1$ بر روی بازه (۱ و -۱) تشکیل می‌دهند؛ که به صورت زیر است:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad \text{اگر } m \neq n. \quad (4-244)$$

حال بسط یک تابع دلخواه $f(x)$ برحسب چندجمله‌ای‌های مناسب لژاندر، که سری‌های فوریه- لژاندر نامیده می‌شود، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad -1 < x < 1. \quad (4-245)$$

در اینجا ضریب a_n از معادله (۴-۲۴۳) به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$a_n = \frac{\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx}{\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx}. \quad (4-246)$$

۱- بسط به صورت تابع به هم پیوسته لاگرانژ $P_n^m(x)$ که در ارتباط با مسائل سه بعدی روی می‌دهد، در اینجا مورد بحث قرار نخواهد گرفت. به مرجع شماره ۵ رجوع شود.

مخرج معادله (۴-۲۴۶) شبیه سری‌های فوریه یا سری‌های فوریه - بسل نیست، زیرا به نوع شرط مرزی بستگی ندارد. بنابراین، می‌تواند یکبار و برای همیشه محاسبه شود. همچنین، به‌منظور سهولت، صورت کسر می‌تواند به شکل دیگری، بازآرایی شود. پس، با استفاده از معادله (۴-۲۳۸) صورت کسر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx. \quad (4-247)$$

اگر $f(x)$ و n مشتق اول آن بر روی بازه پیوسته باشند، با n بار انتگرال‌گیری از سمت راست معادله (۴-۲۴۷) معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} dx. \quad (4-248)$$

حال، با قرار دادن $P_n(x)$ به جای $f(x)$ در معادله (۴-۲۴۸)، و به‌کارگیری مشتق n ام معادله (۴-۲۳۸) خواهیم داشت:

$$\frac{d^n P_n(x)}{dx^n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

مخرج معادله (۴-۲۴۶) به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx. \quad (4-249)$$

سمت راست معادله (۴-۲۴۹)، n بار انتگرال‌گیری شده و داریم:

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}. \quad (4-250)$$

با قرار دادن معادله (۴-۲۵۰) در معادله (۴-۲۴۹) معادله زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (4-251)$$

از این‌رو ضریب a_n به‌صورت خواهد بود:

$$a_n = \begin{cases} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \\ \frac{2n+1}{2^{n+1} n!} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} dx. \end{cases} \quad (4-252)$$

شکل دوم معادله (۴-۲۵۲) فقط در صورتی که $f(x)$ و n مشتق اول آن در بازه $(-1, 1)$ پیوسته باشند، می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

ضمناً، با توجه به این‌که $P_n(x)$ وقتی که n زوج باشد تابعی زوج از x است و وقتی n فرد باشد تابعی فرد خواهد بود، برای تابع زوج $f(x)$ خواهیم داشت:

$$a_n = \begin{cases} (2n+1) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, & \text{فرد } n, \\ 0, & \text{زوج } n, \end{cases} \quad (4-253)$$

برای تابع فرد $f(x)$ خواهیم داشت:

$$a_n = \begin{cases} (2n+1) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, & \text{زوج } n, \\ 0, & \text{فرد } n, \end{cases} \quad (4-254)$$

بسط سری که توسط معادله (۴-۲۴۵) ارائه شده است را با معادله (۴-۲۵۳) یا معادله (۴-۲۵۴) در نظر گرفته و $f(x)$ را درون بازه $(0, 1)$ ارائه می‌کنیم. همچنین در بازه $(-1, 0)$ ، معادله (۴-۲۴۵)، به همراه معادله (۴-۲۵۳) و (۴-۲۵۴)، به‌ترتیب، $f(-x)$ و $-f(-x)$ را توصیف می‌کنند. کاربرد سری‌های فوریه-لژاندر در مثال بعدی شرح داده خواهد شد.

مثال ۴-۲۰. دمای سطح یک کره با شعاع R به‌صورت $f(\theta)$ تعیین شده است. هدف یافتن همای پایای کره می‌باشد.

فرمولاسیون مساله به‌صورت زیر است (به مساله ۶-۲ مراجعه شود):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (4-255)$$

$$T(0, \theta) = \text{محدود} \quad (4-256)$$

$$T(R, \theta) = f(\theta). \quad (4-257)$$

شرایط مرزی که در جهت θ نوشته نشده در مباحث بعدی عنوان می‌شود.

از آنجایی که θ تنها جهت متعامد ممکن است، با انتخاب ثابت جداسازی مناسب، پاسخ قاعده حاصل ضرب $T(r, \theta) = \mathcal{R}(r) \mathcal{Q}(\theta)$ به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\mathcal{Q}}{d\theta} \right) + \lambda \mathcal{Q} = 0, \quad (4-258)$$

$$r^2 \frac{d^2 \mathcal{R}}{dr^2} + 2r \frac{d\mathcal{R}}{dr} - \lambda \mathcal{R} = 0, \quad (4-259)$$

$$\mathcal{R}(0) = \text{محدود} \quad (4-260)$$

حال ابتدا معادله (۴-۲۵۸)، به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta} \frac{d\mathcal{Q}}{d\theta} \right) + \lambda \mathcal{Q} = 0, \quad (4-261)$$

سپس با تبدیل $x = \cos \theta$ خواهیم داشت:

(۴-۲۶۲)

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\theta}{dx} \right] + n(n+1)\theta = 0,$$

که در آن $n(n+1) = \lambda$ می‌باشد. این یک معادله لژاندر است. پاسخ ویژه آن که در $x = \pm 1$ ($\theta = 0, \pi$) محدود است، به صورت زیر می‌باشد:

(۴-۲۶۳)

$$\vartheta_n = A_n \psi_n(\theta), \quad \psi_n(\theta) = P_n(\cos \theta),$$

توابع مشخصه،
مقادیر مشخصه،

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

در اینجا شرط محدود بودن، تعیین کننده توابع مشخصه و مقادیر مشخصه است و این همان دو شرط مرزی نوشته نشده در جهت θ است.
پاسخ عمومی معادله هم بعد توسط معادله (۴-۲۵۹) ارائه شده است:

(۴-۲۶۴)

$$\mathfrak{R}_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-(n+1)},$$

که در آن $n = -\frac{1}{2} + (\lambda + \frac{1}{4})^{1/2}$ است.

شکل خاصی از معادله (۴-۲۶۴) که در معادله (۴-۲۶۰) صدق می‌کند، به صورت زیر خواهد بود:

(۴-۲۶۵)

$$\mathfrak{R}_n(r) = C_n r^n.$$

بنابراین، پاسخ مساله به صورت زیر خواهد بود:

(۴-۲۶۶)

$$T(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta),$$

که در آن $a_n = A_n C_n$ است. با استفاده از معادله (۴-۲۵۷)، خواهیم داشت:

(۴-۲۶۷)

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n P_n(\cos \theta),$$

که این معادله، بسط $f(\theta)$ به صورت سری‌های فوریه - لژاندر می‌باشد. از این رو ضریب a_n به سهولت از معادله (۴-۲۵۲) و به صورت زیر به دست می‌آید:

(۴-۲۶۸)

$$a_n R^n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

فصل ۴- مسائل پایای دو و سه بعدی، جداسازی متغیرها، توابع متعامد

به خصوص، اگر دمای سطح به صورت زیر باشد:

$$T(R, \theta) = f(\theta) = \begin{cases} T_0, & 0 < \theta < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi, \end{cases}$$

معادله (۴-۲۶۸) بر حسب x به صورت زیر خواهد بود:

(۴-۲۶۹)

$$a_n R^n = T_0 \left(\frac{2n+1}{2} \right) \int_0^1 P_n(x) dx.$$

با انتگرال گیری از (۴-۲۶۹) به وسیله معادله (۴-۲۲۸) خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{1}{2} T_0 \int_0^1 dx = \frac{1}{2} T_0,$$

$$a_1 R = \frac{3}{2} T_0 \int_0^1 x dx = \frac{3}{4} T_0,$$

$$a_2 R^2 = 0,$$

$$a_3 R^3 = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} T_0 \int_0^1 (5x^3 - 3x) dx = -\frac{7}{16} T_0,$$

$$a_4 R^4 = 0,$$

$$a_5 R^5 = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{8} T_0 \int_0^1 (63x^5 - 70x^3 + 15x) dx = \frac{11}{32} T_0,$$

⋮

از این رو پاسخ مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{T(r, \theta)}{T_0} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(\frac{r}{R} \right) P_1(\cos \theta) - \frac{7}{16} \left(\frac{r}{R} \right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{32} \left(\frac{r}{R} \right)^5 P_5(\cos \theta) + \dots \quad (۴-۲۷۰)$$

معادلات (۴-۲۷۰) و (۴-۱۷۲) پاسخ مساله مشابه به ترتیب در مختصات کروی و استوانه‌ای را بیان می‌کنند. مساله کره جامد اخیر، به آسانی به خارج کره تو خالی با شعاع R تعمیم می‌یابد که این مساله به خواننده واگذار می‌شود.

۱- اگر $f(\theta)$ به صورت

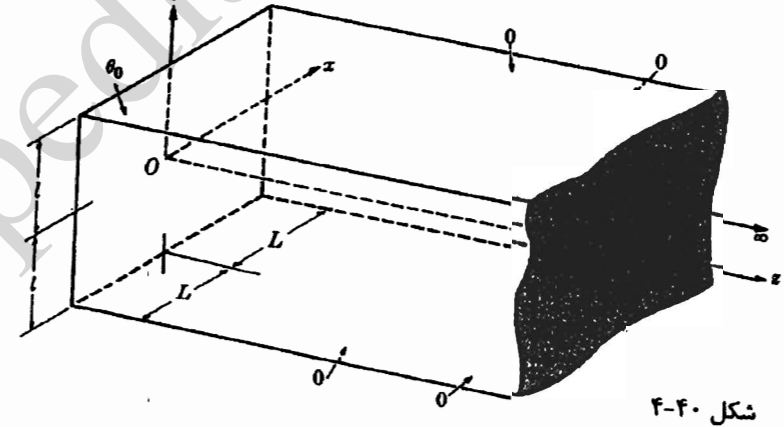
$$f(\theta) = \begin{cases} T_0, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

ارائه شود چه اتفاقی می‌افتد؟ نتیجه گیری شما چیست؟

۴-۱۱. هندسه سه بعدی پایا.

این مسائل، به جز بسط یک تابع بر حسب چندجمله‌ای‌های به هم پیوسته لژاندر برای اشکال هندسی سه بعدی کره، به ریاضیات بیشتری نیاز ندارد. بنابراین، به جای توضیحات گسترده، فقط روش حل بیان خواهد شد.

مثال ۴-۲۱. یک میله نیمه بینهایت مستطیلی با سطح مقطع $(2L \times 2L)$ را در نظر بگیرید (شکل ۴-۴۰). دمای پایه میله θ_0 و دمای محیط صفر است. ضریب انتقال حرارت بزرگ است. هدف یافتن دمای پایای میله می‌باشد.



شکل ۴-۴۰

فرمولاسیون مساله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta(0, y, z)}{\partial x} = 0, \quad \theta(L, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0, z)}{\partial y} = 0, \quad \theta(x, l, z) = 0,$$

$$\theta(x, y, 0) = \theta_0, \quad \theta(x, y, \infty) = 0 \text{ (یا محدود)}$$

مساله در هر دو جهت x و y همگن است. معادله دیفرانسیل با استفاده از قاعده حاصل ضرب، $\theta(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ به صورت زیر جداسازی می‌شود:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda^2, \quad (۴-۲۷۱)$$

دانلود نمونه سوالات، جزوات و کتب هندسی شیمی در کانال

پایا، در جهت x اولین مساله مقدار مشخصه حاصل می‌شود:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0; \quad \frac{dX(0)}{dx} = 0, \quad X(L) = 0. \quad (۴-۲۷۲)$$

در ضمن با یازنویسی تساوی دوم معادله (۴-۲۷۱)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$-\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda^2 = \mu^2, \quad (۴-۲۷۳)$$

در جهت y دومین مساله مقدار مشخصه، به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \mu^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad Y(l) = 0. \quad (۴-۲۷۴)$$

برای جهت z از تساوی دوم معادله (۴-۲۷۳) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - (\lambda^2 + \mu^2)Z = 0; \quad Z(\infty) = 0 \text{ (محدود)}. \quad (۴-۲۷۵)$$

مانند قبل، شرط مرزی دوم و غیرقابل جداسازی (ناهمگن) $\theta(x, y, 0) = \theta_0$ برای انتهای محل گذاشته شده است.

پاسخ معادله (۴-۲۷۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$X_n(x) = A_n \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x) = \cos \lambda_n x \quad \text{توابع مشخصه}$$

$$\lambda_n L = (2n + 1)\pi/2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{مقادیر مشخصه}$$

به طریق مشابه، پاسخ معادله (۴-۲۷۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$Y_m(y) = B_m \psi_m(y), \quad \psi_m(y) = \cos \mu_m y, \quad \text{توابع مشخصه}$$

$$\mu_m l = (2m + 1)\pi/2, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{مقادیر مشخصه}$$

و در نتیجه، پاسخ معادله (۴-۲۷۵) هم خواهد شد:

$$Z_{mn}(z) = C_{mn} e^{-(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^{1/2} z}.$$

پس قاعده حاصل ضرب به پاسخ زیر منجر می‌شود:

$$\theta(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} e^{-(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^{1/2} z} \cos \lambda_n x \cos \mu_m y, \quad (۴-۲۷۶)$$

که در آن $a_{mn} = A_n B_m C_{mn}$ است. معادله (۴-۲۶۷) به وسیله شرط مرزی ناهمگن به دست می‌آید:

فرمولاسیون مساله نتیجه می‌دهد:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0,$$

$$\theta(0, \varphi, z) = \text{محدود}, \quad \theta(R, \varphi, z) = \begin{cases} \theta_0, & 0 < \varphi < \pi \\ 0, & \pi < \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

$$\theta(r, \varphi, z) = \theta(r, \varphi + 2\pi, z), \quad \frac{\partial \theta(r, \varphi, z)}{r \partial \varphi} = \frac{\partial \theta(r, \varphi + 2\pi, z)}{r \partial \varphi}$$

$$\theta(r, \varphi, 0) = 0, \quad \theta(r, \varphi, L) = 0.$$

استفاده مناسب از قاعده حاصل ضرب به شکل $\theta(r, \varphi, z) = \mathfrak{R}(r)\phi(\varphi)Z(z)$ مساله را به صورت زیر جداسازی می‌کند:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda^2 Z = 0; \quad Z(0) = 0, \quad Z(L) = 0, \quad (۴-۲۸۰)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 \phi = 0; \quad \phi(\varphi) = \phi(\varphi + 2\pi), \quad (۴-۲۸۱)$$

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) - (\lambda^2 r^2 + \mu^2) \mathfrak{R} = 0; \quad \mathfrak{R}(0) = \text{محدود}. \quad (۴-۲۸۲)$$

پاسخ معادله (۴-۲۸۰) خواهد شد:

$$Z_n(z) = A_n \varphi_n(z), \quad \varphi_n(z) = \sin \lambda_n z, \quad \text{توابع مشخصه}$$

$$\lambda_n L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{مقادیر مشخصه}$$

پاسخ معادله (۴-۲۸۱) نیز خواهد شد:

$$\phi_\mu(\varphi) = B_\mu \cos \mu \varphi + C_\mu \sin \mu \varphi.$$

$$\cos \mu \varphi, \quad \sin \mu \varphi, \quad \text{توابع مشخصه}$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \text{مقادیر مشخصه}$$

و سرانجام معادله (۴-۲۸۲) پاسخ زیر را خواهد داشت:

$$\mathfrak{R}_{n\mu}(r) = D_{n\mu} I_\mu(\lambda_n r)$$

[به معادلات (۳-۱۱۵) و (۳-۱۲۲) مراجعه شود]. بنابراین پاسخ قاعده حاصل ضرب:

$$\theta_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} \cos \lambda_n x \cos \mu_m y, \quad (۴-۲۷۷)$$

معادله (۴-۲۷۷) بسط دوگانه سری‌های کسینوسی فوریه برای θ_0 روی سطح مقطع میله است. در اینجا ضریب a_{mn} به سهولت می‌تواند توسط تعمیم ساده روش‌های مورد استفاده قبلی در سری‌های فوریه به دست آید به (قسمت‌های ۴-۳ و ۴-۴ مراجعه شود). بنابراین با ضرب کردن دو طرف معادله (۴-۲۷۷) در $\cos \lambda_p x \cos \mu_q y$ و انتگرال‌گیری نتایج روی سطح مقطع و استفاده از قاعده تعامد در جهات x و y برای $p = n$ و $q = m$ به صورت زیر خواهد شد:

$$a_{mn} = \theta_0 \frac{\int_0^L \int_0^L \cos \lambda_n x \cos \mu_m y \, dx \, dy}{\int_0^L \int_0^L \cos^2 \lambda_n x \cos^2 \mu_m y \, dx \, dy},$$

که نتیجه می‌دهد:

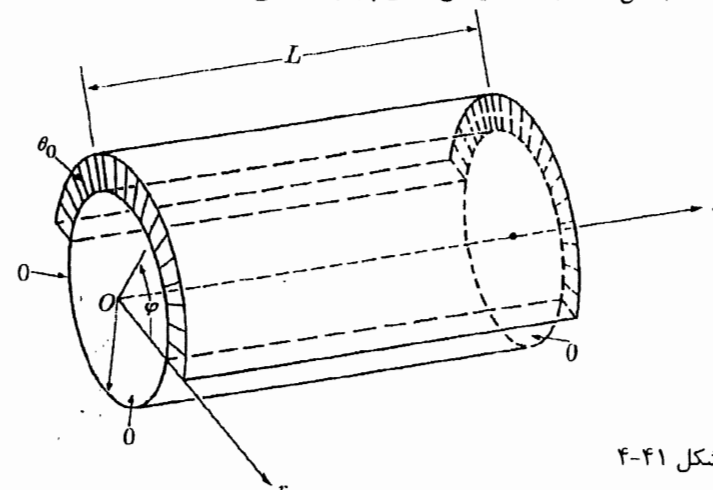
$$a_{mn} = \frac{4\theta_0(-1)^{n+m}}{(\lambda_n L)(\mu_m L)}. \quad (۴-۲۷۸)$$

سرانجام، با قرار دادن معادله (۴-۲۷۸) در معادله (۴-۲۷۶) پاسخ به صورت خواهد بود:

$$\frac{\theta(x, y, z)}{\theta_0} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} e^{-(\lambda_n^2 + \mu_m^2)^{1/2} z}}{(\lambda_n L)(\mu_m L)} \cos \lambda_n x \cos \mu_m y, \quad (۴-۲۷۹)$$

مثال مذکور صورت سه بعدی از مثال ۴-۲ است.

مثال ۴-۲۲. میله جامد محدودی با شعاع R و طول L را در نظر بگیرید. دمای یک نیمه از سطح جانبی آن در دمای یکنواخت θ_0 نگه داشته شده و نیمه دیگر و دو انتهای آن در صفر نگه داشته شده‌اند (شکل ۴-۴۱). هدف یافتن دمای پایای میله می‌باشد.



شکل ۴-۴۱

۱- همان‌طور که در مثال ۴-۱۲ مشاهده شد، این شرط مرزی توابع و مقادیر مشخصه را در جهت φ تعیین می‌کند. بنابراین استفاده از شرط مرزی بعدی در جهت φ ضرورت ندارد.

$$\frac{\theta(r, \varphi, z)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \right) \frac{I_0(\lambda_n r)}{I_0(\lambda_n R)} \sin \lambda_n z$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \right) \left(\frac{2}{\mu\pi} \right) \frac{I_{\mu}(\lambda_n r)}{I_{\mu}(\lambda_n R)} \sin \lambda_n z \sin \mu \varphi. \quad (۴-۲۸۶)$$

مساله مذکور صورت سه بعدی از حالت خاص گفته شده در مثال ۱۲-۴ می باشد (شکل ۴-۳۱).

مراجع

- 1 R. V. CHURCHILL, Fourier Series and Boundary Value problem. New York: Mc Graw-Hill, 1963.
- 2 F. B. HILDEBRAND, Advanced Calculus for Engineers. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1956.
- 3 H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, Conduction of Heat in Solids. Oxford: Clarendon Press, 1959.
- 4 L. V. KANTROVICH and V. I. KRYLOV, Approximate Methods of Higher Analysis. New York-Groningen, Holland: Interscience-Noordhoff, 1958.
- 5 E. J. WHITTAKER and G. N. WATSON, Modern Analysis. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1927.
- 6 L. GRAETZ, "Über die Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten." *Ann. Phys.*, 18, 79 (1883), 25, 337 (1885).
- 7 W. NUSSELT, "Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge." *Zeitschr. VDI*, 54, 1154 (1910).
- 8 M. A. LEVÊQUE, "Les Lois de la Transmission de la Chaleur par Convection." *Ann. Mines*, 13, 201, 305, 381 (1928).
- 9 J. A. PRINS, J. MULDER and J. SCHENK, "Heat Transfer in Laminary Flow between Parallel Plates." *Appl. Sci. Res.*, A3, 308 (1952).
- 10 J. A. W. VAN DER DOES DE BYE and J. SCHENK, "Heat Transfer in Laminary Flow between Parallel Plates." *Appl. Sci. Res.*, A3, 308 (1952).
- 11 J. R. SELLARS, M. TRIBUS, and J. S. KLEIN, "Heat Transfer to Laminary Flow in a Round Tube or Flat Conduit-The Graetz Problem Extended." *Trans. ASME*, 78, 441 (1956).
- 12 P. J. SCHNEIDER, "Effect of Axial Fluid Conduction on Heat Transfer in the Entrance Regions of Parallel Plates and Tubes." *Trans. ASME*, 79, 765 (1957).
- 13 S. N. SINGH, "The Determination of Eigen-Functions of a Certain Sturm-Liouville Equation and its Application to Problems of Heat Transfer." *Appl. Sci. Res.*, A7, 237 (1958).
- 14 S. N. SINGH, "Heat Transfer by Laminar Flow in a Cylindrical Tube." *Appl. Sci. Res.*, A7, 325 (1958).
- 15 R. SIEGEL, E. M. SPARROW, and T. M. HALLMAN, "Steady Laminar Heat Transfer in a Circular Tube with Prescribed Wall Heat Flux." *Appl. Sci. Res.*, A7, 386 (1958).
- 16 R. D. CESS and E. C. SHAFFER, "Heat Transfer to Laminar Flow between Parallel Plates with a Prescribed Wall Heat Flux." *Appl. Sci. Res.*, A8, 339 (1959).

$$\theta(r, \varphi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} I_0(\lambda_n r) \sin \lambda_n z$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (a_{n\mu} \cos \mu \varphi + b_{n\mu} \sin \mu \varphi) I_{\mu}(\lambda_n r) \sin \lambda_n z, \quad (۴-۲۸۳)$$

که در آن $a_{n0} = A_n B_0 D_{n0}$, $a_{n\mu} = A_n B_{\mu} D_{n\mu}$ و $b_{n\mu} = A_n C_{\mu} D_{n\mu}$ است. سپس با استفاده از شرط مرزی ناهمگن (محیطی) خواهیم داشت:

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} I_0(\lambda_n R) \sin \lambda_n z$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (a_{n\mu} \cos \mu \varphi + b_{n\mu} \sin \mu \varphi) I_{\mu}(\lambda_n R) \sin \lambda_n z, \quad (۴-۲۸۴)$$

معادله (۴-۲۸۴) نمایش θ_0 به صورت سری دوگانه فوریه است (که در جهت φ کامل ولی در جهت z فقط سینوسی است).

ضرایب این سری می توانند به صورت زیر محاسبه شوند. با فرض این که معادله (۴-۲۸۴) به عنوان یک سری ساده فوریه در جهت φ بوده و با توجه به این که وقتی $\pi < \varphi < 2\pi$ است $\theta_0 = 0$ می باشد، از معادلات (۴-۱۶۹) و (۴-۱۷۱) خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} I_0(\lambda_n R) \sin \lambda_n z = \frac{\theta_0}{2\pi} \int_0^{\pi} d\varphi,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n\mu} I_{\mu}(\lambda_n R) \sin \lambda_n z = \frac{\theta_0}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \mu \varphi d\varphi,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n\mu} I_{\mu}(\lambda_n R) \sin \lambda_n z = \frac{\theta_0}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \mu \varphi d\varphi,$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} I_0(\lambda_n R) \sin \lambda_n z = \frac{\theta_0}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n\mu} I_{\mu}(\lambda_n R) \sin \lambda_n z = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n\mu} I_{\mu}(\lambda_n R) \sin \lambda_n z = \frac{2\theta_0}{\mu\pi}, \quad \mu = 1, 3, 5, \dots$$

بنابراین مساله به سه بسط سری سینوسی فوریه در جهت z تبدیل می شود. حال سه ضریب a_{n0} , $a_{n\mu}$ و $b_{n\mu}$ می توانند به روش های معمولی به دست آیند. نتایج به صورت زیر خواهد بود:

$$a_{n0} I_0(\lambda_n R) = \frac{2\theta_0}{n\pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

$$a_{n\mu} = 0, \quad (۴-۲۸۵)$$

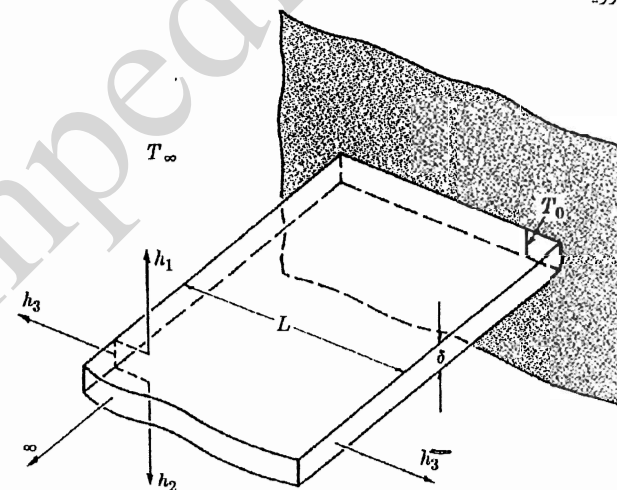
$$b_{n\mu} I_{\mu}(\lambda_n R) = \frac{8\theta_0}{(\mu\pi)(n\pi)}.$$

با قرار دادن معادله (۴-۲۸۵) در (۴-۲۸۳) پاسخ مساله به صورت زیر به دست می آید:

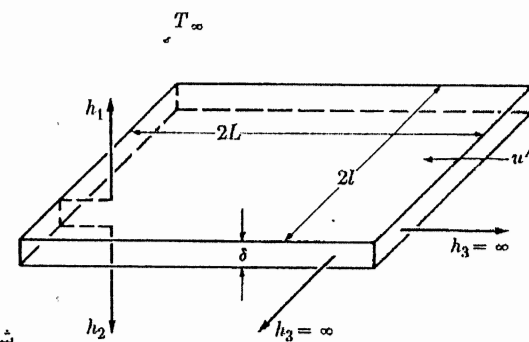
- 17 H. C. AGRAWAL, "Heat Transfer in Laminar Flow between Parallel Plates at Small Péclet Numbers." *Appl. Sci. Res.*, A9, 177 (1960).

مسائل

۴-۱. یک صفحه نیمه بینهایت، با ضخامت δ و عرض L را در نظر بگیرید (شکل ۴-۴۲). ضخامت δ کوچک است. دمای پایه T_0 و دمای محیط T_∞ می‌باشد. ضرایب انتقال حرارت h_1 ، h_2 و h_3 هستند. دمای پایای صفحه را با استفاده از دیدگاهی که از مسائل حل شده در متن برداشت نموده‌اید و با فرض (الف) کناره‌های صفحه عایق‌بندی شده باشند، (ب) حرارت از کناره‌های صفحه منتقل شود، به دست آورید.



شکل ۴-۴۲

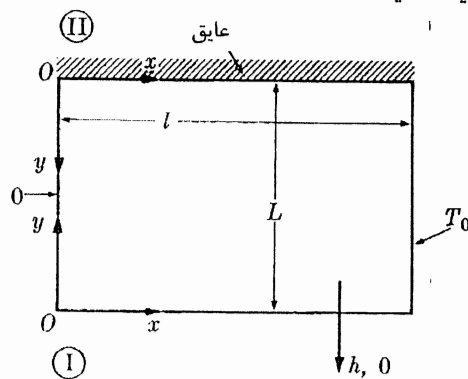


شکل ۴-۴۳

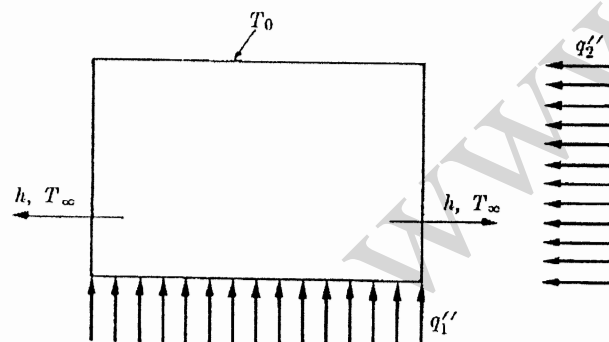
۴-۲. انرژی داخلی یکنواخت u''' در یک صفحه صاف مستطیلی $\delta \times 2l \times 2l$ تولید می‌شود (شکل ۴-۴۳). ضرایب انتقال حرارت بالا و پایین صفحه به ترتیب h_1 و h_2 می‌باشند. ضریب انتقال حرارت محیطی بزرگ است و دمای محیط T_∞ می‌باشد. دمای پایای صفحه را بیابید.

۴-۳. سه وجه از میله‌ای نامحدود با سطح مقطع مربعی $(L \times L)$ در دمای صفر ثابت نگه‌داشته می‌شود در حالی که وجه چهارم در دمای یکنواخت T_0 قرار دارد. دمای پایای محل برخورد قطرها را محاسبه کنید.

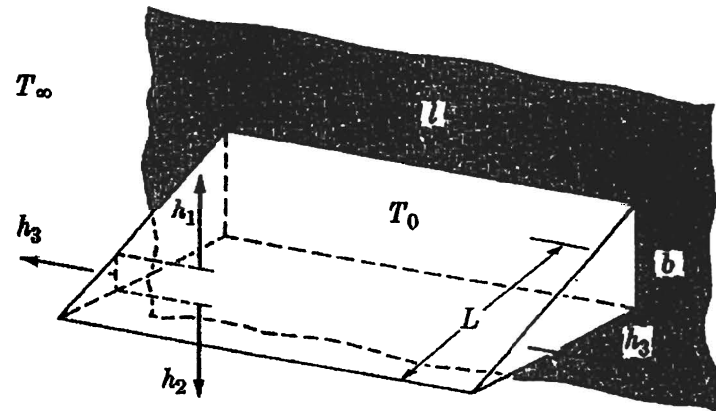
۴-۴. یک میله با طول نامحدود با سطح مقطع مستطیلی $(L \times l)$ را در نظر بگیرید. شرایط مرزی مانند شکل ۴-۴۴ معلوم است. دمای پایای میله را (الف) برحسب عباراتی از مختصات سیستم I و توابع مشخصه براساس مرزهای عایق‌بندی‌شده، (ب) برحسب عباراتی از مختصات سیستم II و توابع مشخصه براساس مرزهای انتقال حرارت بیابید. (ج) پیچیدگی پاسخ‌ها را از دیدگاه جبری مقایسه کنید.



شکل ۴-۴۴

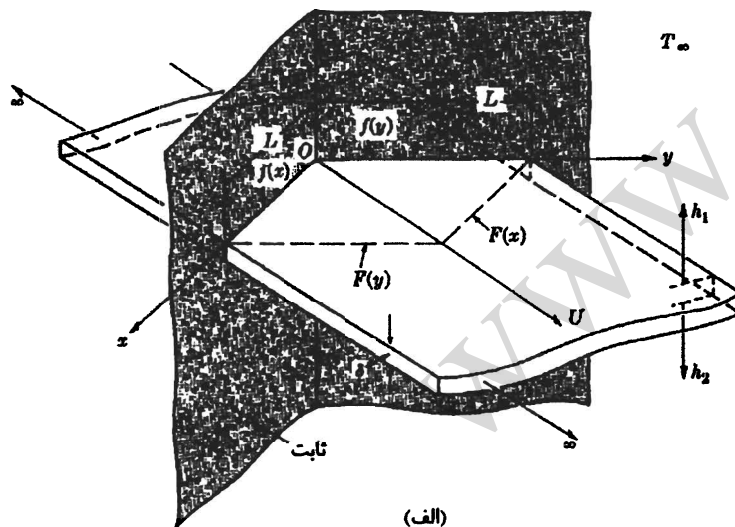


شکل ۴-۴۵



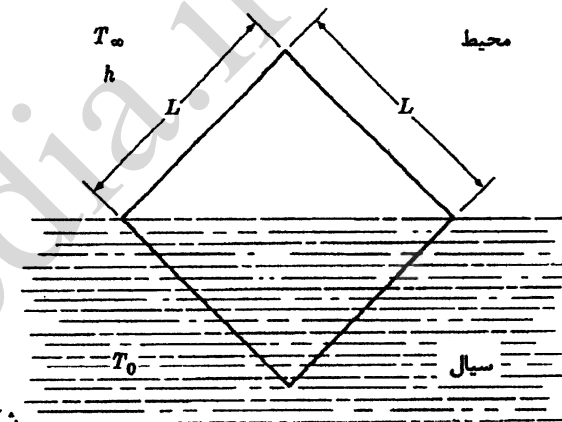
شکل ۴-۴۸

۴-۹. یک صفحه صاف با ضخامت δ و با سرعت ثابت U نسبت به سیستم مختصات نشان داده شده در شکل ۴-۴۹، در حرکت است. با نزدیک شدن به سیستم مختصات، صفحه دارای دمای یکنواخت T_0 خواهد شد. دماهای مرزی $f(x)$ ، $f(y)$ ، $f(x)$ و $F(y)$ اندازه‌گیری می‌شوند و مفروض نیستند. دمای محیط T_∞ است. ضرایب انتقال حرارت سطوح بالایی و پایینی به ترتیب h_1 و h_2 می‌باشند. دمای پایای آن قسمت از صفحه را که سطح مربعی $(L \times L)$ را اشغال کرده است و از مختصات ساکن محاسبه می‌شود، به دست آورید.



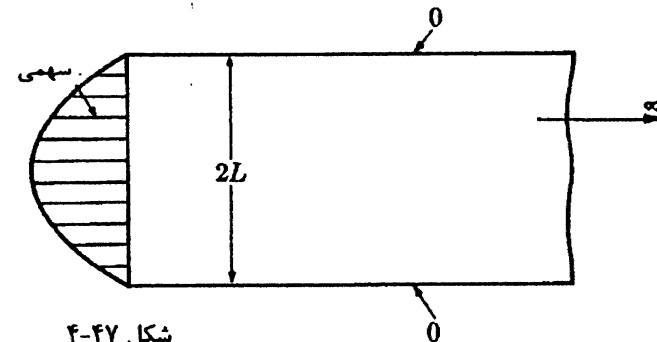
(الف)

۴-۶. یک میله با طول بینهایت و سطح مقطع مربعی $(L \times L)$ در یک سیال شناور است (شکل ۴-۴۶). ضریب انتقال حرارت بین میله و سیال در مقایسه با ضریب انتقال حرارت میان میله و محیط بزرگ است. دماهای سیال و محیط به ترتیب T_0 و T_∞ هستند. دمای پایای میله را به دست آورید.



شکل ۴-۴۶

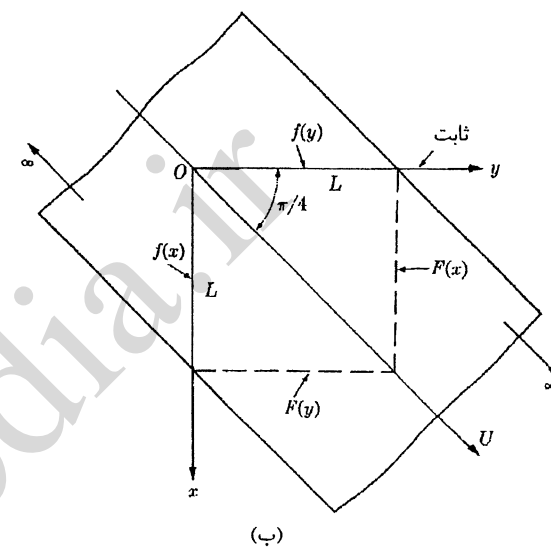
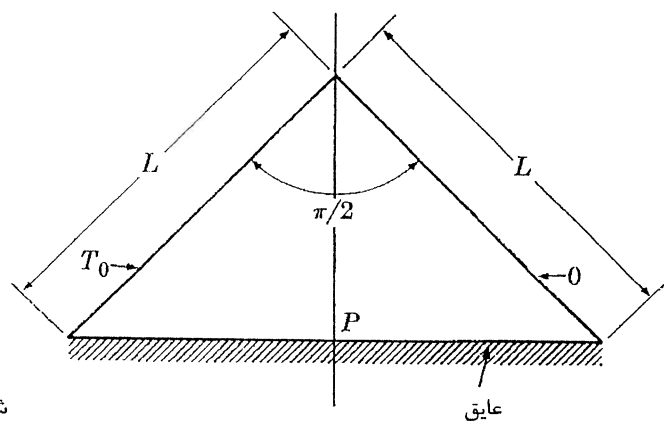
۴-۷. یک صفحه نیمه بینهایت با ضخامت $2L$ را در نظر بگیرید. انتهای صفحه در معرض یک توزیع دمای سهموی قرار دارد و این در حالی است که سطوح آن در دمای ثابت صفر قرار گرفته‌اند (شکل ۴-۴۷). با استفاده از روش انتگرالی، یک تقریب درجه اول و دوم از دمای صفحه برحسب پروفایل‌های ریتز و کانتروویچ به دست آورید.



شکل ۴-۴۷

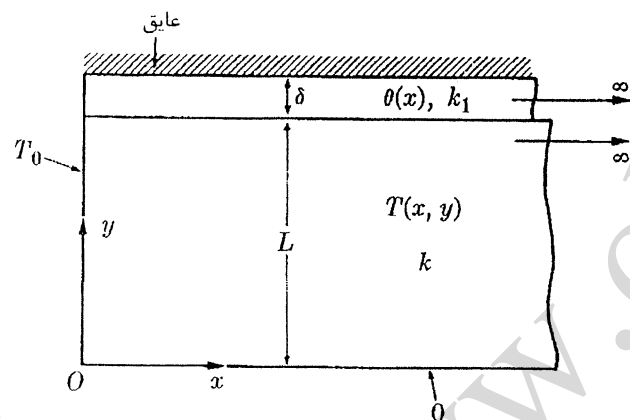
۴-۸. یک صفحه مستطیلی گوه شکل را در نظر بگیرید (شکل ۴-۴۸). ضخامت پایه آن b و دمای پایه آن T_0 و دمای محیط T_∞ می‌باشد. ضرایب انتقال حرارت رو به بالا، پایین و جانبی آن h_1 ، h_2 و h_3 هستند. دمای پایای صفحه را بیابید. (توجه: این مساله شکل دوبعدی مثال ۳-۱۴ است).

۴-۱۱. یک میله با طول بینهایت و سطح مقطع مثلثی را در نظر بگیرید. یک سطح میله دمای یکنواخت T_0 و سطح دوم آن دمای صفر دارد و قاعده آن عایق بندی شده است (شکل ۴-۵۱). دمای پایای نقطه P از قاعده را محاسبه کنید.



شکل ۴-۴۹

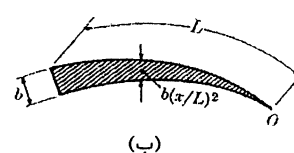
۴-۱۰. یک تیغه از یک توربین گازی حین این که از پایه اش خنک می شود، حرارت جابه جایی و تشعشعی از احتراق محصولات دریافت می کند (شکل ۴-۵۰ الف). نوک تیغه عایق بندی شده است. سطح مقطع تیغه را می توان به صورت نشان داده شده در شکل ۴-۵۰ (ب) ساده نمود. مراحل اولیه حل این مساله را نشان دهید.



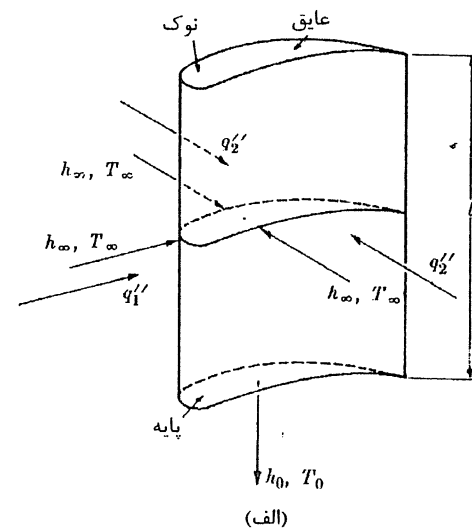
شکل ۴-۵۲

۴-۱۲. یک دیوار مرکب، از دو صفحه موازی با ضرایب هدایت حرارتی k و k_1 و ضخامت های δ و L ($\delta \ll L$) ساخته شده است. شرایط مرزی در شکل ۴-۵۲ نشان داده شده است. مطلوب است یافتن دمای پایای دیواره بر طبق روش حلی که در ادامه توضیح داده خواهد شد. تغییرات دما در طرفین ضخامت صفحه نازک ناچیز است. پس دماهای $T(x, y)$ و $\theta(x)$ از صفحه در معادلات زیر صدق می کنند:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (۴-۲۸۷)$$



شکل ۴-۵۰



$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=L} = 0, \quad (4-288)$$

که در آن $m = (k/k_1\delta)$ است. با فرض این که جهت y قابلیت متعامد شدن را داشته باشد، پاسخ صفحه ضخیم به صورت $T(x, y) = X(x)Y(y)$ قرار داده می شود، بنابراین:

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0; \quad Y(0) = 0, \quad (4-289)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0; \quad X(\infty) = 0. \quad (4-290)$$

شرط مرزی باقیمانده معادله (۴-۲۸۹) و شرط مرزی غیرقابل جداسازی در جهت x بعداً مورد بررسی قرار می گیرد. پاسخ معادله (۴-۲۸۹) به صورت زیر خواهد بود:

$$Y(0) = A\phi(y), \quad \phi(y) = \sin \lambda y \quad (4-291) \quad \text{توابع مشخصه}$$

و پاسخ معادله (۴-۲۹۰) نیز خواهد بود:

$$X(x) = Be^{-\lambda x}. \quad (4-292)$$

پس پاسخ $T(x, y)$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$T(x, y) = be^{-\lambda x} \sin \lambda y, \quad (4-293)$$

که در آن $b = AB$ است. ضمناً از آنجایی که $T(x, y) = \theta(x)$ ، معادله (۴-۲۸۸) به صورت زیر صورت خواهد شد:

$$\lambda^2 T(x, y) - m \frac{\partial T(x, L)}{\partial y} = 0. \quad (4-294)$$

معادله (۴-۲۹۴)، به وسیله قاعده حاصل ضرب به این صورت بازنویسی می شود:

$$\lambda^2 Y(L) - m \frac{\partial Y(L)}{\partial y} = 0, \quad (4-295)$$

که شرط مرزی همگن دوم در جهت y است. بنابراین جهت y دارای یک معادله دیفرانسیل همگن و دو شرط مرزی همگن است که فرض قبلی مبنی بر متعامد بودن این جهت را تصدیق می کند.

مقادیر مشخصه، صفرهای معادله حاصل از قرار دادن معادله (۴-۲۹۱) در معادله (۴-۲۹۵) هستند. نتیجه این گونه خواهد بود:

$$(\lambda_n L) \sin \lambda_n L = (mL) \cos \lambda_n L. \quad (4-296)$$

از این رو معادله (۴-۲۹۳) با قرار دادن مقادیر مشخصه به رابطه زیر تبدیل می شود:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y. \quad (4-297)$$

در نتیجه، با به کارگیری دمای ناهمگن پایه T_0 و معادله (۴-۲۹۷) خواهیم داشت:

$$T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n y. \quad (4-298)$$

این معادله بسط T_0 در سری سینوسی فوریه است. ضرایب b_n از روش معمول به دست می آیند که برابرند با:

$$b_n = 2T_0 \left(\frac{1 - \cos \lambda_n L}{\lambda_n L - \sin \lambda_n L \cos \lambda_n L} \right) \quad (4-299)$$

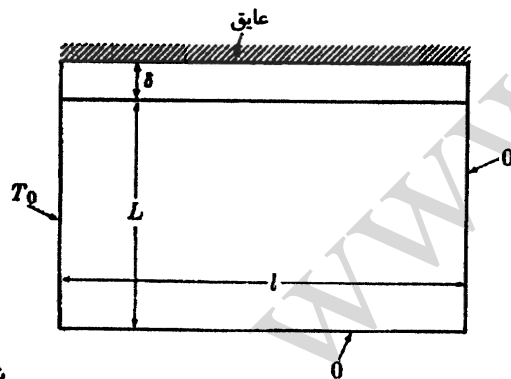
پس پاسخ صفحه ضخیم به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{T(x, y)}{T_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos \lambda_n L}{\lambda_n L - \sin \lambda_n L \cos \lambda_n L} \right) e^{-\lambda_n x} \sin \lambda_n y. \quad (4-300)$$

با قرار دادن معادله (۴-۳۰۰) در معادله (۴-۲۸۸) و دوبار انتگرال گیری از عبارت حاصل در جهت x و با استفاده از شرایط مرزی $T_0 = \theta(0)$ و $\theta(\infty) = 0$ دمای صفحه نازک به دست خواهد آمد.

روش حل فوق شامل یک عبارت ناصحیح است که یک پاسخ اشتباه را توسط معادله (۴-۳۰۰) ارائه می دهد. این عبارت ناصحیح را بیابید.

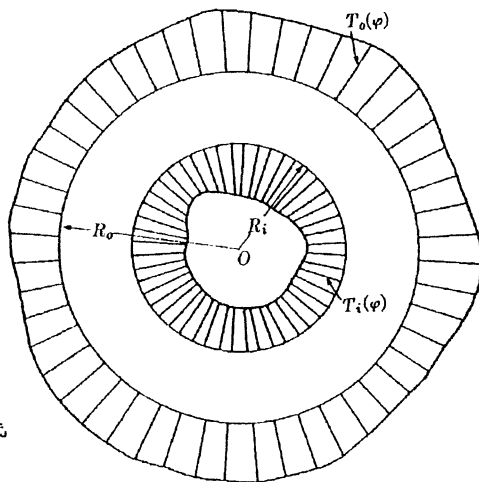
۴-۱۳. مساله ۴-۱۲ را با فرض این که طول صفحات محدود باشد، l (شکل ۴-۵۳) در نظر بگیرید. دمای پایای دیوار مرکب را بیابید.



شکل ۴-۵۳

۴-۱۴. یک صفحه صاف با طول بینهایت و ضخامت $2L$ با سرعت ثابت V نسبت به مختصات ساکن شکل ۴-۵۴ در حرکت است. نیمه مثبت محور x تحت شار حرارتی یکنواخت q'' قرار دارد و نیمه منفی آن عایق بندی شده است. با نزدیک شدن به مبداء مختصات، صفحه به دمای یکنواخت

۴-۱۶. یک استوانه توخالی با طول بی‌نهایت را در نظر بگیرید (شکل ۴-۵۶). شعاع‌های داخلی و خارجی و دمای سطوح به ترتیب $R_i, R_o, T_i(\varphi)$ و $T_o(\varphi)$ هستند. (الف) دمای پایای استوانه را بیابید. (ب) نشان دهید که مساله ۴-۱۲ که میله جامد و صفحه بینهایت که دارای حفره داخلی می‌باشد، حالت‌های خاص از قسمت الف می‌باشند.



شکل ۴-۵۶

۴-۱۷. نیمی از لوله ضخیم یک بویلر شار حرارتی q'' را دریافت می‌کند در حالی که نیمه دیگر آن عایق‌بندی شده است. (شکل ۴-۵۷). شعاع‌های داخلی و خارجی به ترتیب R_i و R_o هستند. دمای سطح داخلی سیال T_∞ و ضریب انتقال حرارت داخلی به‌خاطر جوشش بزرگ است. دمای پایای لوله را بیابید.

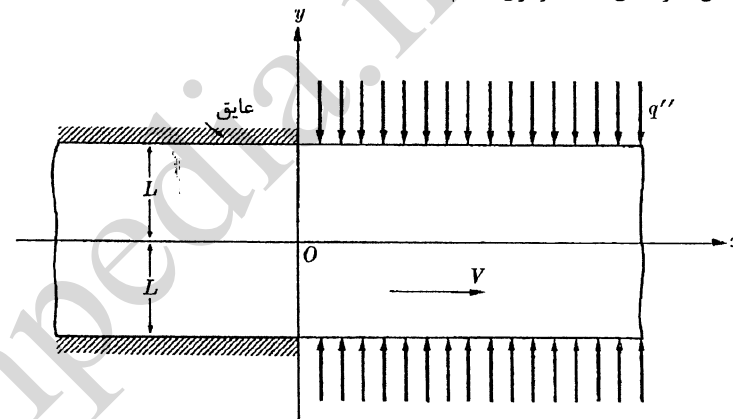
۴-۱۸. یک لوله با طول بینهایت را که سطح مقطع آن قسمتی از یک دایره با شعاع R است در نظر بگیرید. (شکل ۴-۵۸). یک سطح لوله تحت شار حرارتی $q''(r)$ و سطح دیگر عایق‌بندی شده است. سطح جانبی با محیطی با دمای T_∞ و ضریب انتقال حرارت h تبادل گرما دارد. شکل خاصی از $q''(r)$ را که به ازای آن مساله دارای پاسخ براساس قاعده حاصل ضرب باشد، به‌دست آورید.

۴-۱۹. یک میله جامد محدود با شعاع R و طول L در سطح جانبی دارای دمای یکنواخت T_∞ است و دمای دو سر آن T_0 می‌باشد (شکل ۴-۵۹). دمای پایای میله را به‌صورت عبارتی از دماهای (الف) $\theta = T - T_0$ و (ب) $\psi = T - T_\infty$ بیابید.

۴-۲۰. انرژی داخلی u''' در یک میله محدود با شعاع R و طول L به‌طور یکنواخت تولید می‌شود (شکل ۴-۶۰). دمای محیط T_∞ و ضریب انتقال جرم h است. دمای پایای میله را بیابید.

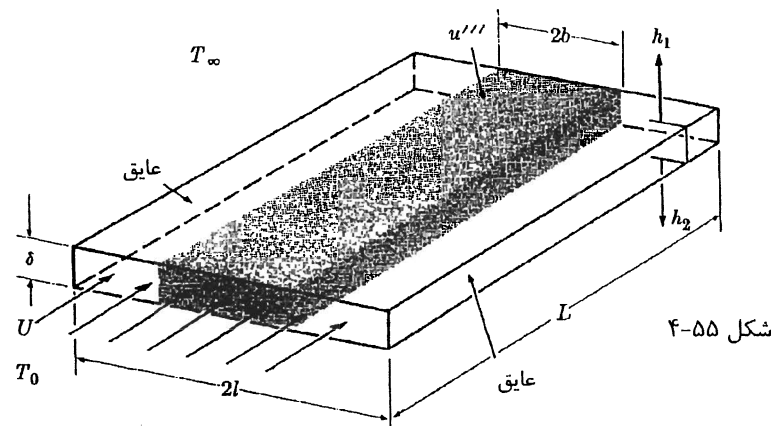
۴-۲۱. یک میله جامد با شعاع R و ارتفاع H دارای سطح جانبی عایق شده است (شکل ۴-۶۱). دماهای بالا و پایین میله به ترتیب صفر و θ_0 می‌باشد. توزیع دما در لوله را توسط (الف) تشخیص فیزیک مساله (ب) انجام مراحل ریاضی بیابید.

صفر می‌رسد. (الف) با در نظر گرفتن اثر هدایت محوری، دمای پایای صفحه را بیابید. (ب) عدد ناسلت و عمق نفوذ در ناحیه $x < 0$ را محاسبه کنید. (ج) نتایج قسمت‌های الف و ب را به‌صورت اعداد بی‌بعد مناسب رسم کنید. (توجه: این مساله به‌جز جمع‌پذیری نیازمند مفاهیم دیگری است که فیزیکی هستند، اگر خواننده از این نظر به مشکل برخورد کرده است باید حل مساله را به بعد از مطالعه فصل ۵ و مثال ۵-۵ موكول كنیم).



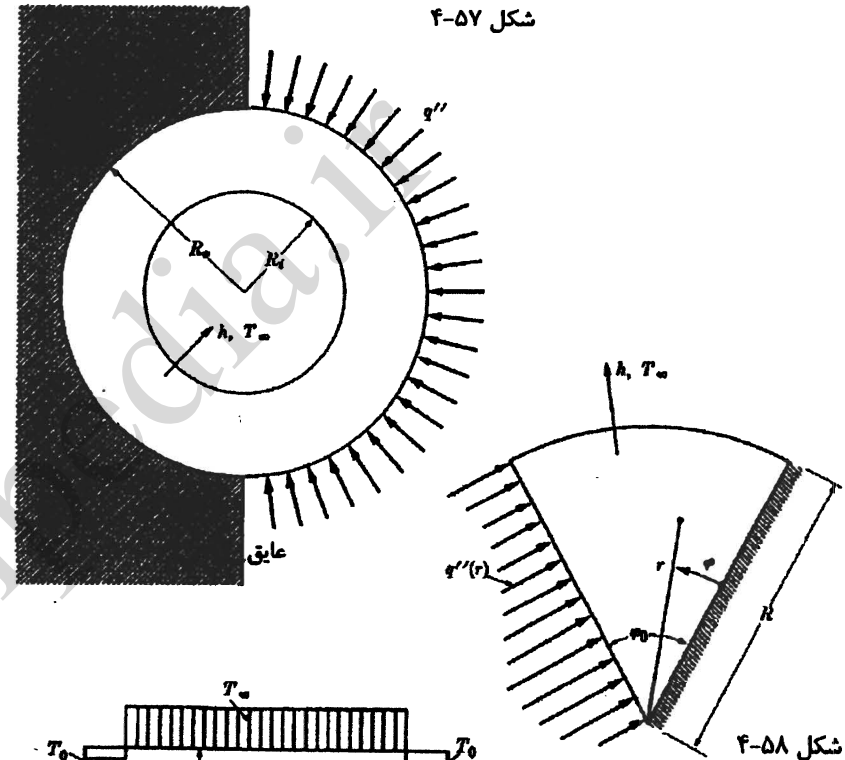
شکل ۴-۵۴

۴-۱۵. یک سیال با سرعت U به‌طور پایا در یک کانال باریک با سطح مستطیلی $(2l \times \delta)$ و طول L جریان دارد (شکل ۴-۵۵). دمای ورودی سیال T_0 و دمای محیط T_∞ است. ضرایب انتقال حرارت بالا و پایین صفحه به ترتیب h_1 و h_2 هستند. کناره‌های کانال عایق‌بندی شده‌اند. هدایت در جهت جریان قابل صرف‌نظر کردن است. انرژی داخلی u''' در قسمتی از سیال به حجم $(2b \times \delta \times L)$ تولید می‌شود. مطلوب است دمای پایای سیال در خروجی کانال.

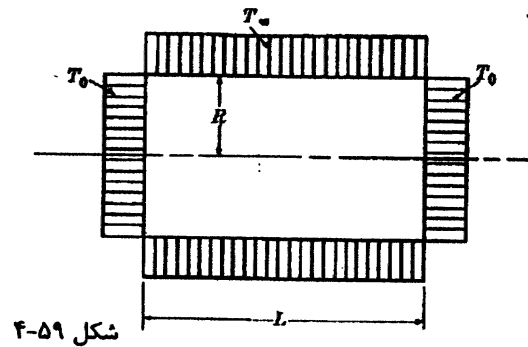


شکل ۴-۵۵

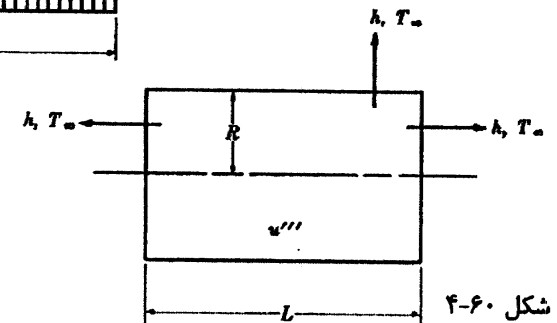
شکل ۴-۵۷



شکل ۴-۵۸



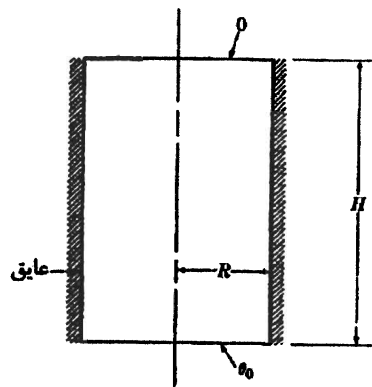
شکل ۴-۵۹



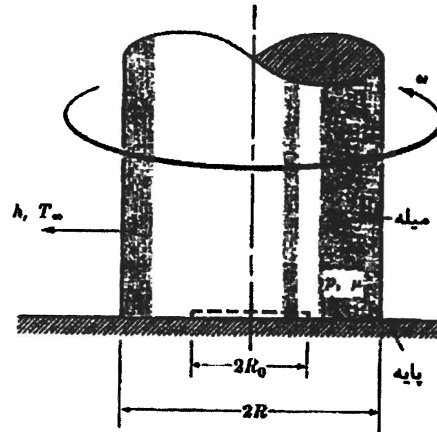
شکل ۴-۶۰

۴-۲۲. یک یاتاقان فشاری توسط یک میله عمودی با شعاع R که با سرعت زاویه ثابت ω حول پایه‌اش می‌چرخد، تنظیم شده است (شکل ۴-۶۲). ضریب هدایت حرارتی پایه در مقایسه با میله

کوچک است. به علت از کار افتادن پمپ روانساز، شرایط اصطکاک خشک میان میله و پایه آن به‌وجود آمده است. فشار سطح تماس P و ضریب اصطکاک μ و میزان فرسودگی ثابت است. توجه کنید که فشار موجود فقط بر روی سطح $\pi(R^2 - R_0^2)$ وجود دارد. دمای نهایی یاتاقان را بیابید.

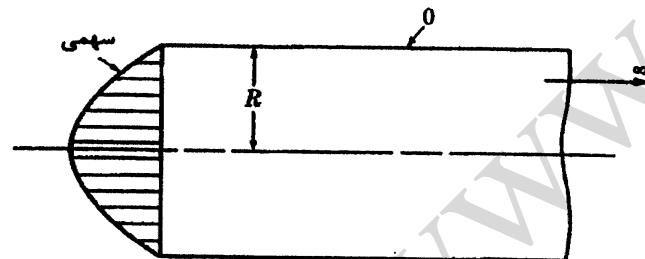


شکل ۴-۶۱



شکل ۴-۶۲

۴-۲۳. یک میله جامد نیمه بینهایت با شعاع R از یک طرف تحت توزیع دمای سهموی قرار دارد و سطح جانبی آن در دمای ثابت صفر نگه داشته می‌شود. (شکل ۴-۶۳). (الف) با استفاده از روش انتگرالی تقریب‌های درجه اول و دوم از دمای پایای میله به‌صورت پروفایل‌های ریتز و کانتروویچ به‌دست آورید. (ب) نتایج را با نتایج مساله ۴-۷ مقایسه کنید.

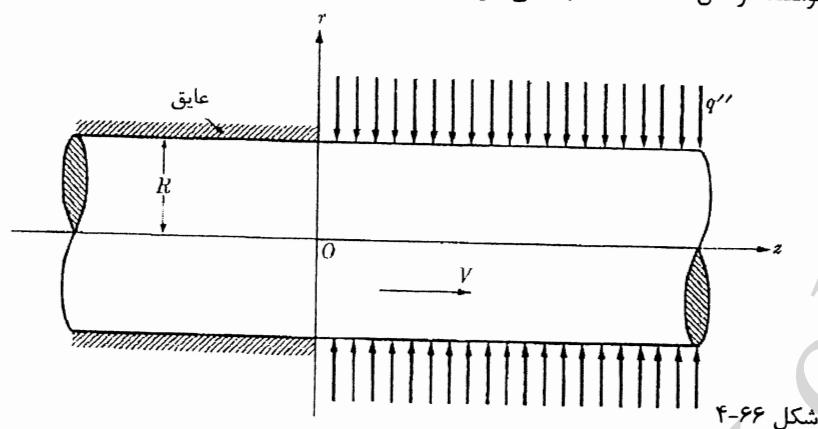


شکل ۴-۶۳

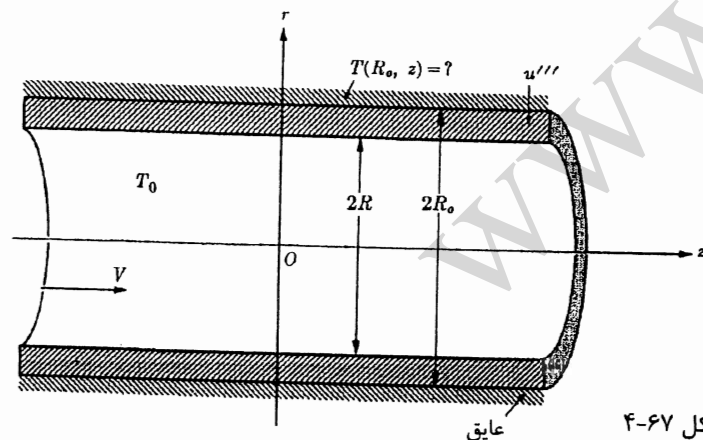
۴-۲۴. یک استوانه جامد با شعاع R و طول L با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در یک جدار آستین شکل با ضخامت δ ($R \gg \delta$) و طول برابر با استوانه می‌چرخد (شکل ۴-۶۴). فشار P و ضریب اصطکاک خشک δ میان استوانه و آستین به‌طور یکنواخت مفروض است. ضرایب انتقال حرارت محوری و جانبی به‌ترتیب h_1 و h_2 هستند. دمای محیط T_∞ است. دمای پایای سیستم را به‌دست آورید.

شعاع R میله است. (ه) دمای ورودی ماده خنک‌کننده یکنواخت و برابر T_0 است. دمای پایای سیستم را به دست آورید.

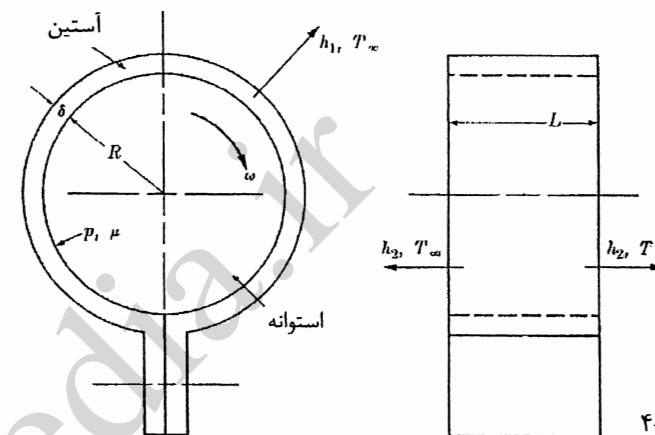
۴-۲۶. یک میله جامد با طول بینهایت و شعاع R با سرعت ثابت V نسبت به مختصات ساکن در حال حرکت است (شکل ۴-۶۶). نیمه مثبت محور z ، $z > 0$ تحت شار حرارتی یکنواخت q'' قرار دارد و نیمه دیگر آن، $z < 0$ عایق‌بندی شده است. در نزدیکی مبدا مختصات دمای میله یکنواخت و برابر صفر است. (الف) دمای پایای میله را با در نظر گرفتن هدایت محوری به دست آورید. (ب) عدد ناسلت و عمق نفوذ دما در ناحیه $z < 0$ را محاسبه کنید. (ج) نتایج قسمت‌های الف و ب را به صورت اعداد بدون بعد مناسب رسم کنید. (د) اثر انحنای روی مساله نشان داده و نتایج قبلی را با نتایج مساله ۴-۱۴ مقایسه کنید. (توجه کنید که حل این قسمت به موفقیت خواننده در حل مساله ۴-۱۴ بستگی دارد.)



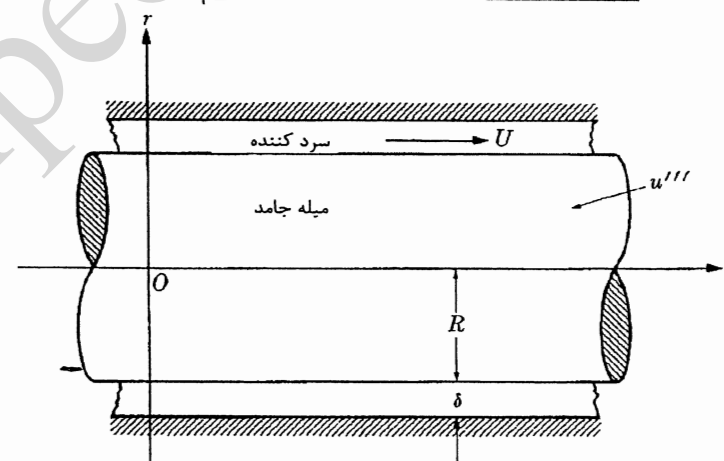
شکل ۴-۶۶



شکل ۴-۶۷



شکل ۴-۶۴

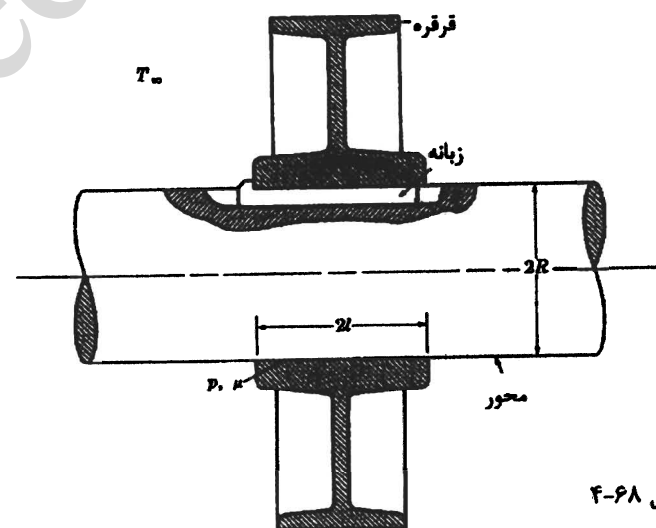


شکل ۴-۶۵

۴-۲۵. یک راکتور هتروژن هسته‌ای توسط یک میله جامد بلند که ماده خنک‌کننده به صورت هم‌محور در آن جریان دارد، شبیه‌سازی شده است (شکل ۴-۶۵). فرضیات بدین گونه هستند: (الف) اتلاف حرارت از ماده خنک‌کننده ناچیز است. (ب) سرعت ماده خنک‌کننده تقریباً یکنواخت است (جریان slug). (به‌خصوص در مورد فلزات مایع که اعداد پرانتل پایینی دارند صحیح می‌باشد) (پ) تولید انرژی داخلی u''' در میله یکنواخت است. (در واقعیت تولید انرژی متناسب با شار نوترون است که در جهت شعاع به‌طور استوانه‌ای و در جهت محور به شکل هذلولی توزیع شده است. (ت) میله و ماده خنک‌کننده دارای ضرایب هدایت حرارتی قابل توجه هستند. (ج) هدایت محوری در میله و ماده خنک‌کننده ناچیز است. (چ) ضخامت شعاعی δ در ماده خنک‌کننده خیلی کمتر از

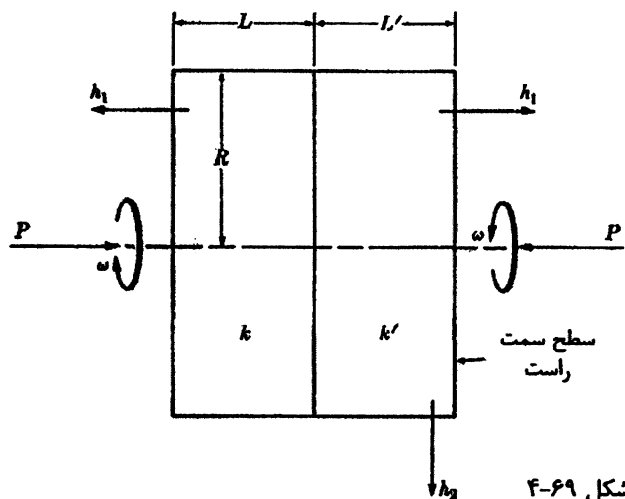
۴-۲۷. یک سیال تراکم‌ناپذیر به‌طور پایا در یک لوله عایق‌بندی شده جریان دارد (شکل ۴۷-۴). انرژی داخلی ثابت u''' به‌طور یکنواخت در نیمه پایین‌دست جریان در لوله تولید می‌شود. شمع‌های داخلی و خارجی لوله به ترتیب R و R_0 هستند. سرعت متوسط سیال و دمای سیال در بالا دست جریان T_0 و V هستند. هدایت محوری در لوله و سیال ناچیز است. دمای پایای سطح خارجی لوله را به‌دست آورید. (توجه: این مساله از نظر مفهومی بیان‌گر مساله ۴-۱۴ است.)

۴-۲۸. به‌خاطر افزایش ناگهانی بارگذاری در یک انتقال صنعتی، گیره یک قرقره کنده شده و قرقره حول محور خود با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω شروع به چرخش کرده است (شکل ۴۶۸-۴). فرض کنید که ظرفیت گرمایی قرقره در مقایسه با محورش ناچیز، فشار میان قرقره و محور یکنواخت و برابر P و ضریب اصطکاک خشک μ باشد. توزیع دما در محور را به‌دست آورید.

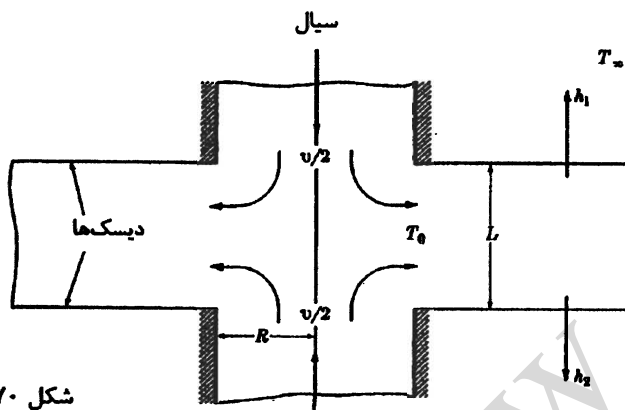


شکل ۴-۶۸

۴-۲۹. دو استوانه جامد در خلاف جهت هم و با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω در حال چرخش هستند و برهم با نیروی P فشرده می‌شوند، (شکل ۴-۶۹). شمع، ضخامت و ضریب هدایت حرارتی استوانه‌ها به ترتیب R ، $(L$ و $L')$ و $(k$ و $k')$ است. ضرایب انتقال حرارت محوری و جانبی h_1 و h_2 هستند. دمای محیط T_∞ است. کدامیک از حالات زیر را می‌توان توسط روش‌های فصل ۴ حل کرد؟ (الف) $k = k'$ و $L = L'$ ؛ (ب) $k = k'$ و $L \neq L'$ ؛ (پ) $k \neq k'$ و $L = L'$ ؛ (ت) $L \neq L'$ و $k \neq k'$ یا $k' \ll k$ (ج) سطح سمت راست عایق‌بندی شده باشد؛ (چ) یکی از استوانه‌ها ساکن باشد. (توجه کنید که مساله شکل اصلاح‌شده مثال ۴-۲ است.)



شکل ۴-۶۹

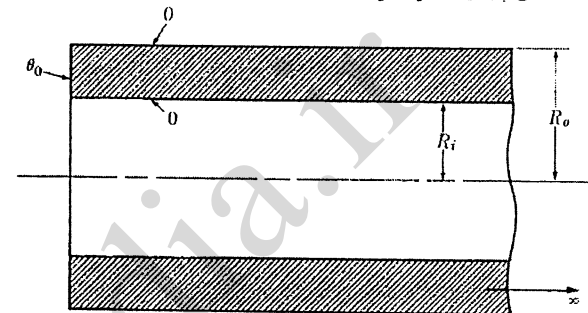


شکل ۴-۷۰

۴-۳۰. یک سیال تراکم‌ناپذیر به‌طور پایا و شعاعی بین دو دیسک متحدالمرکز موازی با ضخامت ناچیز در جریان است (شکل ۴-۷۰). فاصله میان دیسک‌ها L ، شدت جریان حجمی V ، ضرایب هدایت حرارتی سیال k ، دمای محیط T_∞ و شمع داخلی دیسک‌ها R است. ضرایب انتقال حرارت رو به بالا و رو به پایین به ترتیب h_1 و h_2 هستند. دمای ورودی دیسک‌ها یکنواخت و برابر T_0 فرض شده است. با صرف‌نظر کردن از توزیع سرعت محوری (نه توزیع دما)، دمای پایای سیال را به‌دست آورید. (توجه کنید که این مساله صورت دوبعدی مساله ۳-۳۳ است.)

۴-۳۱. تنوری سری فوریه - بسل، قسمت ۴-۹، را برای یک استوانه توخالی بسط دهید. نتایج را برای مساله زیر به‌کار بگیرید. سطوح داخلی و خارجی از یک استوانه توخالی نیمه‌بینهایت

به ترتیب با شعاعهای R_i و R_o (شکل ۴-۷۱) در دمای صفر نگه داشته می‌شوند. دمای پایه یکنواخت و برابر θ_0 است. دمای پایای استوانه را بیابید.

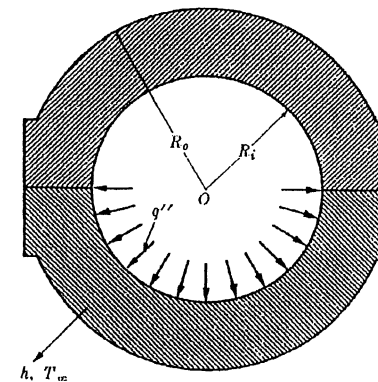


شکل ۴-۷۱

۴-۳۲. یک سیب رسیده بر درخت، به صورت کره‌ای با شعاع R فرض می‌شود و از خورشید تابش خالص حرارتی به صورت زیر دریافت می‌کند:

$$q''(\varphi) = \begin{cases} q_0'' \sin \varphi, & 0 < \varphi < \pi, \\ 0, & \pi < \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

و این در حالی است که توسط جابه‌جایی، حرارت خود را به محیط اطراف در دمای T_∞ می‌دهد (به شکل ۴-۳۳ مراجعه کنید). ضریب انتقال حرارت h است. با فرض نیمه پایا بودن مساله و ناچیز بودن چرخش زمین دمای پایای سیب را بیابید. (توجه کنید که فیزیک مساله نمایانگر مثال ۱۳-۴ است.)

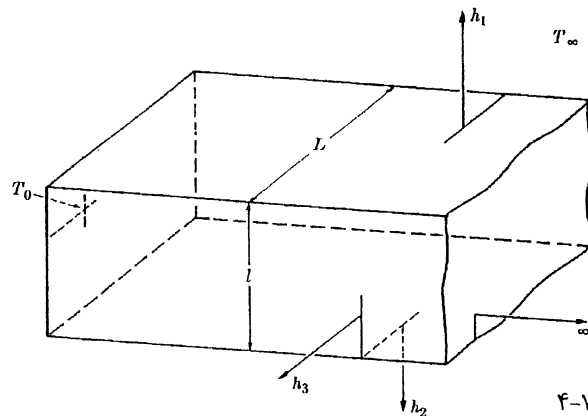


شکل ۴-۷۲

۴-۳۳. یک مخزن احتراق فشار بالا از دو دیواره ضخیم با پوسته شبه کروی ساخته شده است (شکل ۴-۷۲). شعاعهای داخلی و خارجی آن‌ها به ترتیب R_i و R_o هستند. در طول فرآیند احتراق، سطح داخلی پوسته‌ها تحت شار حرارتی تشعشی ثابت q'' قرار دارد و سطح خارجی با محیط

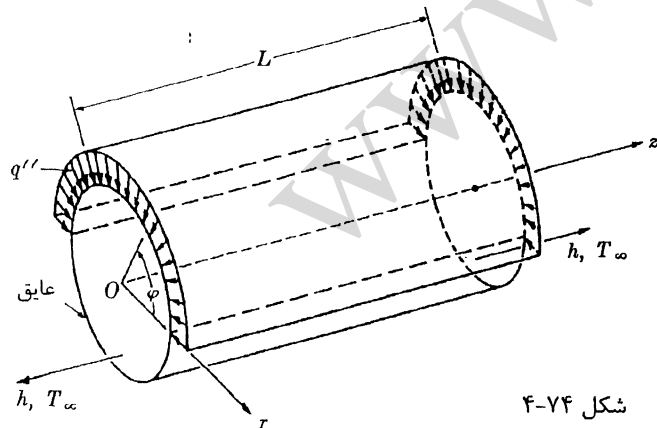
اطراف که دارای دمای T_∞ است، انتقال حرارت دارد. ضریب انتقال h است. پوسته‌های شبه کروی ضرایب هدایت حرارتی مشابهی دارند ولی ضریب نشر صفحه داخلی‌شان متفاوت است، به گونه‌ای که یک پوسته دریافت تشعشع حرارتی ناچیزی در مقایسه با دیگری دارد. دمای پایای مخزن را محاسبه کنید.

۴-۳۴. دمای پایه یک میله نیمه بینهایت مستطیلی با سطح مقطع $(l \times L)$ در T_0 تنظیم شده است. در حالی که انتقال حرارت از سطح جانبی به محیط در دمای T_∞ دارد (شکل ۴-۷۳). ضرایب انتقال حرارت رو به بالا، روبه پایین و جانبی به ترتیب h_1 ، h_2 و h_3 هستند. دمای پایای میله را به دست آورید. (توجه کنید که مساله شکل سه بعدی مثال های ۹-۳ و ۳-۴ است.)



شکل ۴-۷۳

۴-۳۵. حرارت یکنواخت q'' به یک نیمه از سطح جانبی یک میله محدود با شعاع R و طول L اعمال می‌شود (شکل ۴-۷۴). نیمه دیگر عایق بندی شده است. حرارت از دو سر میله به محیط با ضریب انتقال حرارت h انتقال می‌یابد. دمای محیط T_∞ است. دمای پایای میله را محاسبه کنید.



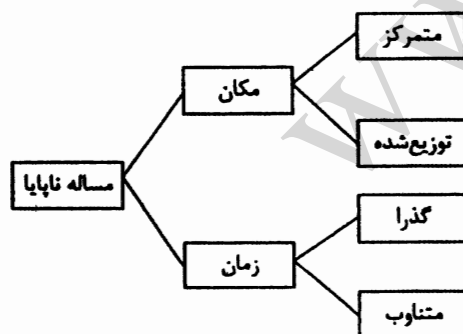
شکل ۴-۷۴

فصل پنجم

جداسازی متغیرها، مسائل ناپایا، توابع متعامد

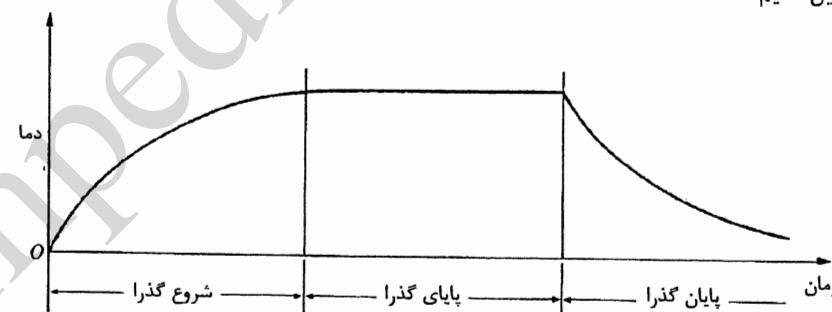
به‌طور کلی در این فصل مسائل ناپایای فصل ۲ به‌علاوه مسائل پایای فصول ۳ و ۴ را مدنظر قرار می‌دهیم و در این‌جا تاثیر زمان را نیز در نظر می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم که قبلاً پاسخ‌های این مسائل را با استفاده از فرمولاسیون متمرکز و انتگرالی به‌دست آورده‌ایم؛ بنابراین این فصل را به حل فرمولاسیون‌های دیفرانسیلی مسائل ناپایا اختصاص می‌دهیم. از آنجایی‌که ریاضیات بیشتری موردنیاز نخواهد بود، محتوی این فصل تاحدودی بیش از فصول قبلی به مسائل کاربردی در واقعیت می‌پردازد؛ لذا این فصل به‌غیر از یک یا دو نکته مفهومی (مثال‌های ۵-۵ و ۵-۶ و بخش ۳-۵ را ببینید)، کلاً شامل راه حل تعدادی مثال تشریحی می‌باشد.

در بخش ۲-۲ مسائل را با توجه به وابستگی‌شان به مکان (به عنوان متمرکز یا توزیع‌شده) تقسیم‌بندی کردیم، و برطبق این تقسیم‌بندی کار فرمولاسیون را انجام دادیم. اکنون می‌خواهیم این مسائل را با توجه به وابستگی‌شان به زمان دسته‌بندی کنیم (به عنوان مسائل گذرا یا متناوب). بنابراین خواهیم داشت:

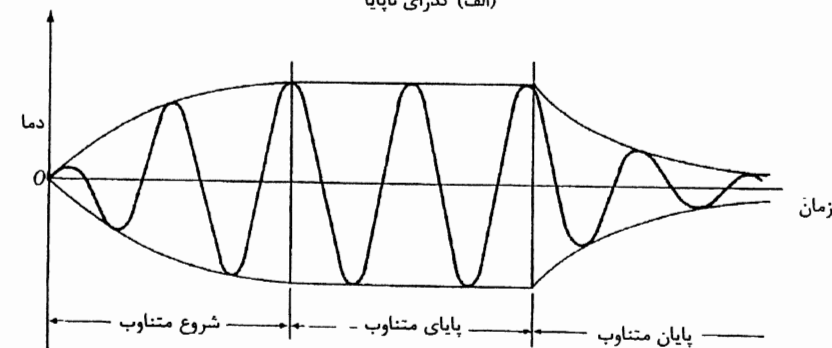


که هر مساله گذرا یا متناوب همان طور که در شکل ۵-۱ نشان داده شده است شامل یک بازه زمانی آغازی و یک بازه زمانی پایا و یک بازه زمانی پایانی است.

یکی از مثال های متداول مسائل گذرا، گرمایش (یا سرمایش) شمش هاست. با استفاده از تغییرات دما، می توان زمان مورد نیاز برای رسیدن این اجسام به دمای مورد نظر را به منظور دستیابی به اهدافی مثل ذوب، عملیات دما بالا، تصفیه حرارتی و غیره، پیش بینی نمود. از طرف دیگر، مسائل متناوب شامل نوسان دما در دیواره موتورهای می باشد. اگرچه این نوسانات متناوبند ولی ممکن است موزون^۱ نباشند، با این حال خطی بودن مسائل هدایت به ما این امکان را می دهد که هر اغتشاش متناوب را به صورت موزون بیان نموده و مساله را به یک مساله دارای یک اغتشاش موزون تبدیل کنیم.



(الف) گذرای ناپایا



(ب) متناوب ناپایا

شکل ۵-۱

همان طور که در فصل ۲ اشاره شد در فرمولاسیون و حل مسائل هدایت، انتقال حرارت جابه جایی از مرزها دارای اهمیت است. شکل بی بعد شرط مرزی، عدد بایوت را حاصل می کند،

$Bi = hL/k$ ، که این عدد نسبت هدایت خارجی به هدایت داخلی است. وقتی که مقاومت داخلی قابل صرف نظر باشد (یا وقتی که هدایت داخلی بزرگ باشد)، $k/L \rightarrow \infty$ و $Bi \rightarrow 0$ خواهد بود. این مورد، متناظر با L کوچک یا k بزرگ است و در چنین شرایطی می توان تغییرات دمایی فضایی عمود بر مرزی که دارای این شرایط است را حذف نمود؛ بنابراین، در چنین شرایطی سیستم به صورت متمرکز مورد تحلیل قرار می گیرد. وقتی که مقاومت خارجی قابل صرف نظر باشد (یا وقتی که هدایت خارجی زیاد باشد) عبارات $h \rightarrow \infty$ و $Bi \rightarrow \infty$ را خواهیم داشت، که این مورد در جوشش، میعان، و جریانبات بسیار آشفته، پیش می آید. چنین شرایطی (یعنی $h \rightarrow \infty$ و $Bi \rightarrow \infty$) موجب تبدیل دمای مرزی به دمای محیط خواهد شد. از این رو شرط مرزی کلی با انجام ساده سازی ها به دمای مرزی ویژه تبدیل می شود، که دمای مرزی ویژه تقریباً معادل دمای محیط فرض می شود.

وقتی که مقاومت های داخلی و خارجی (یا هدایت ها) با هم قابل مقایسه باشند (یعنی یکی از دیگری خیلی بزرگ تر یا کوچک تر نباشد م.م.)، شرط مرزی کلی قابل ساده شدن نبوده و باید مساله برحسب این شرایط (شرط مرزی کلی) حل شود. در این مورد و مورد قبلی باید سیستم را به صورت توزیع شده مورد تحلیل قرار دهیم.

بنابراین، مسائل ناپایا، همانند مسائل پایا، براساس تحلیل های متمرکز یا توزیع شده سیستم فرموله می شوند. مدل متمرکز، که تنها به زمان به عنوان یک متغیر مستقل، وابستگی دارد، یک مساله مقدار اولیه را حاصل می کند^۱.

این مسائل ممکن به سادگی با استفاده از روش های معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول حل شوند. از سوی دیگر، مدل توزیع شده، هم به زمان و هم به مکان وابسته است و از این رو یک مساله مقدار اولیه و مرزی را حاصل می کند. ما می توانیم با استفاده از روش جداسازی متغیرها، این مسائل را به مساله مقدار مشخصه که شامل متغیر مکانی است تبدیل کنیم که توسط روش های فصل ۴ قابل حل می باشند.

حال می خواهیم تعدادی از مسائل شامل سیستم های متمرکز و توزیع شده را مدنظر قرار دهیم و با مساله متمرکز شروع می کنیم.

مثال ۵-۱. دوباره صفحه داغ مثال ۳-۲ را مدنظر قرار دهید. ضخامت L صفحه به اندازه کافی کوچک است که تغییر دما در مقطع عرضی صفحه قابل صرف نظر باشد. در مثال ۳-۲، به مورد گذرای آغازین، که در نتیجه اعمال ناگهانی شار حرارتی q'' به زیر صفحه حاصل می شد، پرداخته شد. با توجه به آن، رابطه زیر حاصل شد:

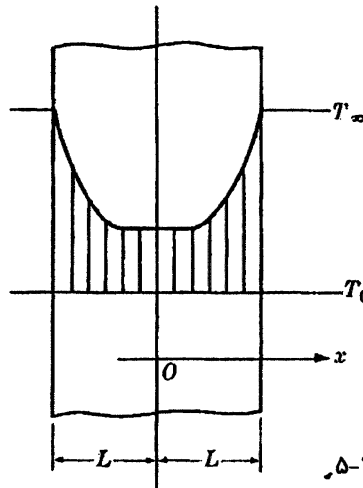
۵-۱. سیستم‌های توزیع شده دارای اغتشاشات پله‌ای

ریاضیات مورد نیاز برای چنین سیستم‌هایی بیش از آن چه در فصل ۴ گفته شد، نیست. به کمک اصل جمع‌پذیری و با استفاده از تغییر در سطح دمایی می‌توان مشکلات ناشی از شرایط مرزی همگن یا معادلات دیفرانسیل را حذف نمود. چند نکته در مورد ناهمگنی ممکن است مفید واقع شود. در این رابطه، می‌خواهیم ۴ مساله زیر را در نظر بگیریم.

مثال ۵-۲. یک صفحه با ضخامت $2L$ دارای دمای یکنواخت اولیه T_0 است که ناگهان به درون یک حوضچه دارای دمای ثابت T_∞ فرو برده می‌شود. ضریب انتقال حرارت بزرگ است. می‌خواهیم دمای ناپایای صفحه را به دست آوریم.

با در نظر گرفتن $\theta = T - T_\infty$ و محور x در شکل ۵-۲، فرمولاسیون مساله به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \theta(x, 0) = \theta_0 = T_0 - T_\infty, \quad \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \theta(L, t) = 0.$$



شکل ۵-۲

شایان ذکر است که تنها جهت x یک مساله مقدار مشخصه را حاصل می‌کند، سپس، با انتخاب یک ثابت جداسازی مناسب، قاعده حاصل ضرب $\theta(x, t) = X(x)\tau(t)$ نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0; \quad \frac{dX(0)}{dx} = 0, \quad X(L) = 0, \quad (5-4)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + a\lambda^2 \tau = 0. \quad (5-5)$$

$$\frac{T - T_\infty}{q''/h} = 1 - e^{-mt}, \quad (2-172)$$

که در آن $m = h/\rho c L$ است. پایان حالت گذرا متناظر با حذف ناگهانی شار حرارتی q'' است، که در این جا رابطه آن را ارائه نمی‌کنیم. و آن را می‌توان به سادگی به شکل زیر نشان داد:

$$\frac{T - T_\infty}{q''/h} = e^{-mt}.$$

حالت متناوب ناپایا نیز مورد توجه قرار می‌گیرد. به این ترتیب که فرض می‌شود شار حرارتی q'' به طور ناگهانی و به صورت نوسانی $q'' \cos \omega t$ به صفحه اعمال شود، که در این جا ω بسامد زاویه‌ای است. با فرمولاسیون مساله خواهیم داشت.

$$\frac{d\theta}{dt} + m\theta = n \cos \omega t, \quad (5-1)$$

$$\theta(0) = 0, \quad (5-2)$$

که در آن $m = h/\rho c L$ و $\theta = T - T_\infty$ است. معادله (۵-۱) ممکن است مثلاً با استفاده از روش تغییر پارامترها قابل حل باشد. نتایجی که در معادله (۵-۲) صدق می‌کنند عبارت است از:

$$\frac{T - T_\infty}{q''/h} = \frac{m}{(m^2 + \omega^2)^{1/2}} \cos(\omega t - \alpha) - \frac{m^2 e^{-mt}}{(m^2 + \omega^2)}, \quad (5-3)$$

که در آن $\alpha = \tan^{-1}(\omega/m)$ است. معادله (۵-۳) جواب متناوب آغازین مساله است. وقتی $t \rightarrow \infty$ جمله دوم این عبارت قابل صرف نظر است، و معادله به صورت مماس به جواب پایای متناوب نزدیک می‌شود.

حال می‌خواهیم تعدادی مساله توزیع شده را حل نماییم. روش جداسازی متغیرها که برای مسائل اغتشاشات پله‌ای^۱ مناسب بود، نمی‌تواند روش مناسبی برای حل مسائل دارای اغتشاشات گذرا یا متناوب باشد. حتی جواب‌های متناوب پایای این مسائل ممکن است فقط برای موارد ساده و بعد از یک روند طولانی به دست آید (مثال ۵-۶ را ببینید). روش‌های مناسب دیگری نیز وجود دارد. بنابراین پاسخ سیستم‌های توزیع شده به هر اغتشاش متناوب یا گذرا ممکن است با استفاده از انتگرال دو هامیل^۲ (بخش ۳-۵)، جواب‌های متناوب پایا با استفاده از روش دمای پیچیده (فصل ۶) و جواب‌های حالت آغازین متناوب با استفاده از تبدیل لاپلاس (فصل ۷) به دست آید.

در اینجا، مثل مسائل پایا، اعمال شرط ناهمگن (اولیه) به انتهای مساله موکول می‌شود. این شرط وقتی استفاده می‌شود که ضرایب بسط سری حاصل تعیین شده باشد.

جواب معادله (۵-۴) به صورت زیر است:

$$X_n(x) = A_n \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x) = \cos \lambda_n x, \quad \text{توابع مشخصه}$$

$$\lambda_n L = (2n + 1)\pi/2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \text{مقادیر مشخصه}$$

و جواب معادله (۵-۵) به صورت زیر است:

$$\tau_n(t) = C_n e^{-a\lambda_n^2 t}, \quad (5-6)$$

بنابراین با استفاده از قاعده حاصل ضرب خواهیم داشت:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x, \quad (5-7)$$

که در آن $a_n = A_n C_n$ است.

سرانجام، با قرار دادن شرط اولیه $\theta(x, 0) = \theta_0$ درون معادله (۵-۷) خواهیم داشت:

$$\theta_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x. \quad (5-8)$$

معادله (۵-۸) بسط سری فوریه سینوسی θ_0 در بازه $(0, L)$ است. ضریب a_n را می‌توان با روشی متداول به دست آورد [معادلات (۴-۶۹) و (۴-۷۰) را ببینید]. نتیجه به صورت زیر است:

$$a_n = (-1)^n \frac{2\theta_0}{\lambda_n L}. \quad (5-9)$$

با قرار دادن معادله (۵-۹) درون (۵-۷)، دمای ناپایای صفحه به صورت زیر است:

$$\frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n L} e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x. \quad (5-10)$$

مثال ۵-۳. می‌خواهیم مثال ۵-۲ را با استفاده از ضریب انتقال حرارت h متوسط، دوباره حل کنیم.

به جز تغییر در شرط مرزی سطحی، فرمولاسیون مساله یکسان باقی می‌ماند. از این رو مساله مقدار مشخصه در جهت x ، معادله (۵-۴)، با استفاده از شرط $-k[\partial\theta(L, t)/\partial x] = h\theta(L, t)$ صحیح می‌شود و داریم:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0; \quad \frac{dX(0)}{dx} = 0, \quad \frac{dX(L)}{dx} + \frac{h}{k} X(L) = 0. \quad (5-11)$$

جواب معادله (۵-۱۱) به صورت زیر است:

$$X_n(x) = A_n \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x) = \cos \lambda_n x, \quad \text{توابع مشخصه}$$

و صفرهای معادله $(\lambda_n L) \sin \lambda_n L = \text{Bi} \cos \lambda_n L$ که در آن $\text{Bi} = hL/k$ است، مقادیر مشخصه می‌باشند (شکل ۱۳-۴ را ببینید).

شکل قاعده حاصل ضرب مثل قبل است به جز آن که در این مساله باید n تغییر نماید، و در این جا از $n = 1$ آغاز می‌شود، بنابراین خواهیم داشت:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x. \quad (5-12)$$

در این جا برای ضریب a_n خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{2\theta_0 \sin \lambda_n L}{\lambda_n L + \sin \lambda_n L \cos \lambda_n L}$$

از این رو دمای ناپایای صفحه به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{T(x, t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda_n L}{\lambda_n L + \sin \lambda_n L \cos \lambda_n L} \right) e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x. \quad (5-13)$$

در دو مثال آخر یعنی مثال ۵-۲ که در آن با یک دمای سطحی $T(L, t) = T_{\infty}$ و در مثال ۳-۵ که با انتقال حرارت به محیط $h[T(L, t) - T_{\infty}] = k[\partial\theta(L, t)/\partial x]$ به عنوان دو شرط مرزی ناهمگن سروکار داشتیم، استفاده از روش جداسازی متغیرها مناسب نمی‌باشد. البته، تبدیل $\theta = T - T_{\infty}$ این شرایط مرزی را همگن می‌سازد و بنابراین مشکلات احتمالی را حذف می‌نماید. ناهمگنی دو مثال بعدی با چنین تبدیلی حذف نخواهد شد.

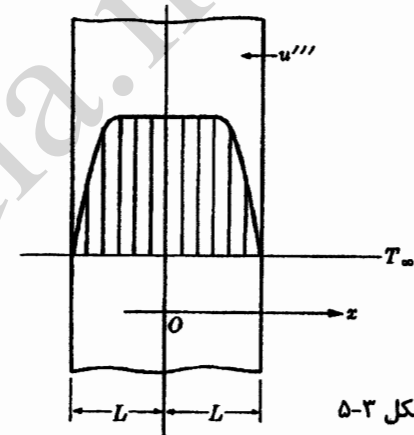
مثال ۵-۴. می‌خواهیم فرمولاسیون دیفرانسیلی مثال ۲-۲ را که در فصل ۲ بدون حل ذکر شد، حل نماییم. ضریب انتقال حرارت بزرگ فرض می‌شود (شکل ۳-۵) فرمولاسیون مساله براساس $\theta = T - T_{\infty}$ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{u'''}{\rho c}, \quad \theta(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial\theta(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \theta(L, t) = 0.$$

شایان ذکر است که تغییر سطح دما باعث تبدیل شرط مرزی ناهمگن به شرط مرزی همگن می‌شود (منظور این است که از $\theta = T - T_{\infty}$ در این فرمولاسیون استفاده شده است و به طور مثال ابتدا $T(x, 0) = T_{\infty}$ بوده ولی با این تغییر متغیر $\theta(x, 0) = 0$ شده است. م. بدون این که تاثیری بر ناهمگنی معادله دیفرانسیل داشته باشد. برای حذف مشکلات ناشی از ناهمگنی معادله

(یعنی جمله $u''' / \rho c$) می‌خواهیم دمای صفحه را به صورت جمع دو دما به صورت زیر تعریف نماییم (مولف این تغییر متغیر را جواب همگن نام نهاده است. م.):

$$\theta(x, t) = \psi(x, t) + \phi(x) \quad (5-14)$$



شکل ۵-۲

(بخش ۴-۷ و مثال ۴-۱۰ را ببینید) بنابراین جمله تولید انرژی در فرمولاسیون مساله یکبعدی (پایا) ظاهر خواهد شد. از این رو $\phi(x)$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{u'''}{k} = 0, \quad \frac{d\phi(0)}{dx} = 0, \quad \phi(L) = 0, \quad (5-15)$$

و فرمولاسیون مساله دو بعدی (ناپایا) $\psi(x, t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \psi(x, 0) = -\phi(x), \quad (5-16)$$

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \psi(L, t) = 0.$$

جواب معادله (۵-۱۵) به صورت زیر است:

$$\frac{\phi(x)}{u''' L^2 / k} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (5-17)$$

۱- باید متذکر شد که تبدیل $\theta = T - T_\infty$ برای حل مثال لازم نیست. معادله (۵-۱۴) را می‌توان با $T(x, t) = \psi(x, t) + \phi(x)$ جایگزین نمود. و فرمولاسیون $\phi(x)$ تنها شامل ناهمگن معادله دیفرانسیل نیست بل که شامل ناهمگنی شرط مرزی سطحی $\phi(L) = T_\infty$ نیز می‌باشد. فرمولاسیون $\psi(x, t)$ به جز برای شرط اولیه ثابت می‌ماند که برای شرط اولیه $\psi(x, 0) = T_\infty - \phi(x)$ خواهد بود.

باز به دست آورد: $\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-a \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x$.
پس ضریب a_n را باید با استفاده از سری فوریه کسینوسی به دست آورد:

$$-\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x, \quad (5-18)$$

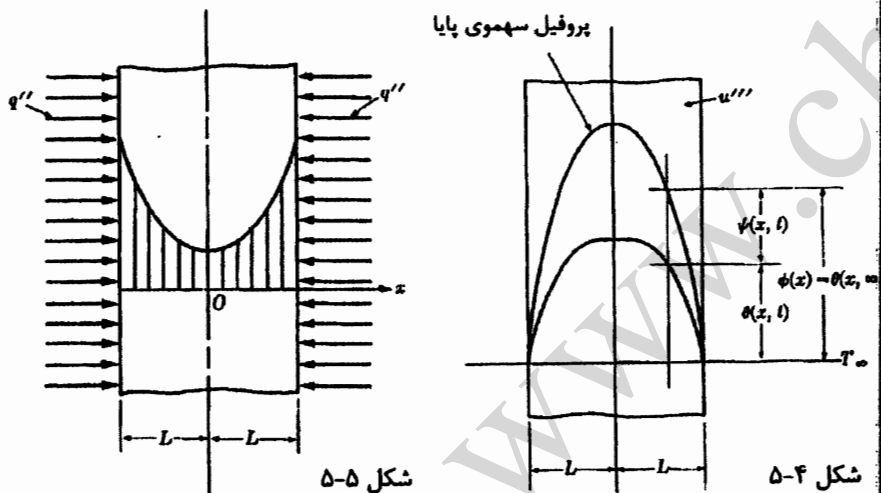
که در آن $\phi(x)$ با استفاده از معادله (۵-۱۷) به دست می‌آید. مقدار این ضریب عبارت است از:

$$a_n = -(-1)^n \left(\frac{u''' L^2}{k} \right) \frac{2}{(\lambda_n L)^3}. \quad (5-19)$$

پس این دمای ناپایای صفحه به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\theta(x, t)}{u''' L^2 / k} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n L)^3} e^{-a \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x. \quad (5-20)$$

این مساله ممکن است به راحتی به مسائل با ضریب انتقال حرارت محدود h نیز بسط داده شود (مثال ۵-۸ را ببینید).



شکل ۵-۴

شکل ۵-۵

باید متذکر شد که تابع ریاضی یکبعدی $\phi(x)$ دمای پایای واقعی (فیزیکی) صفحه است، در حالی که تابع ریاضی دوبعدی $\psi(x, t)$ اختلاف همزمان بین دمای پایا و ناپایای صفحه است. شکل

۵-۴ ارتباط بین مقدار دماهای $\theta(x, t)$ ، $\psi(x, t)$ و $\phi(x)$ را بیان می‌کند، که این عبارات، عبارات تشکیل‌دهنده جمع‌پذیری در معادله (۵-۱۴) هستند.

مساله بعدی به این سوال پاسخ می‌دهد که آیا اصل جمع‌پذیری و در نظر گرفتن رابطه $\theta(x, t) = \psi(x, t) + \phi(x)$ همیشه می‌تواند مشکلات ناشی از ناهمگنی را برطرف نماید.
مثال ۵-۵. شار حرارتی ثابت q'' به هر دو سطح مسطح صفحه به ضخامت $2L$ وارد می‌شود (شکل ۵-۵). دمای اولیه صفحه T_∞ است. می‌خواهیم دمای ناپایای صفحه را به دست آوریم.
فرمولاسیون مساله برحسب $\theta = T - T_\infty$ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \theta(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0, \quad k \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = q''.$$

حال می‌خواهیم با فرض معادله (۵-۱۴) مساله را حل کنیم:

$$\theta(x, t) = \psi(x, t) + \phi(x). \quad (5-14)$$

ثابت جداسازی که انتخاب می‌شود تا جهت x تابع $\psi(x, t)$ را به یک مساله مقدار مشخصه تبدیل کند باید یک تابع نمایی میرا با زمان باشد؛ از این رو وقتی که $t \rightarrow \infty$ حالات $\psi(x, t) \rightarrow 0$ و $\theta(x, t) \rightarrow \phi(x)$ حاصل می‌شوند.^۱

این نتیجه فیزیک مساله را مختل می‌کند؛ زیرا وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، دمای صفحه باید بدون هیچ محدودیتی افزایش یابد. برای صادق بودن چنین شرطی، معادله (۵-۱۴) را با افزودن عبارات $\varphi(t)$ تصحیح می‌کنیم و در نتیجه وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، $\varphi(t) \rightarrow \infty$ ، بنابراین با یک فرض مناسب داریم (مولف این تغییر متغیر را جواب ناهمگن نام نهاده است.م):

$$\theta(x, t) = \psi(x, t) + \phi(x) + \varphi(t). \quad (5-21)$$

حال برحسب عبارات معادله (۵-۲۱) فرمولاسیون مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \psi(x, 0) = -\phi(x) - \varphi(0), \quad \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (5-22)$$

و

۱- علاوه بر آن توجه داشته باشید که $\phi(x)$ با یک مرز عایق و مرز دیگر در معرض شار حرارتی نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۲- از قاعده جمع‌پذیری مشابهی نظیر $\theta(x, t) = \psi(x, t) + \phi(x) + \varphi(x)$ نیز می‌توان برای مساله ۱۴-۴ استفاده نمود.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (5-23)$$

$$\frac{d\phi(0)}{dx} = 0, \quad k \frac{d\phi(L)}{dx} = q''. \quad (5-24)$$

از آنجایی که $\phi(x)$ و $\varphi(t)$ می‌توانند به طور کاملاً مستقل از هم، تغییر کنند، معادله (۵-۲۳) برابر ثابتی مثل C خواهد بود. سپس جواب کلی معادله (۵-۲۳) به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$\varphi(t) = \alpha C t + C_1, \quad (5-25)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2} C x^2 + C_2 x + C_3. \quad (5-26)$$

در اینجا C و C_2 را می‌توان به سادگی با قرار دادن معادله (۵-۲۶) درون معادله (۵-۲۴) به دست آورد. که نتیجه آن $C_2 = 0$ و $C = q''/kL$ می‌باشد. از این رو معادلات (۵-۲۵) و (۵-۲۶) به صورت $\varphi(t) = (q''t/\rho c L) + C_1$ و $\phi(x) = (q''x^2/2kL) + C_3$ می‌باشند که C_1 و C_3 دو ثابت اختیاری می‌باشند. البته، باید متذکر شد که جواب $\psi(x, t)$ بستگی به $\phi(x)$ و $\varphi(t)$ دارد که می‌توانیم این ثوابت را به صورت اختیاری برابر صفر قرار دهیم. بنابراین:

$$\varphi(t) = \frac{q''t}{\rho c L}, \quad \phi(x) = \frac{q''x^2}{2kL}. \quad (5-27)$$

به عبارت دیگر، با اعمال قاعده حاصل ضرب $\psi(x, t) = X(x)\tau(t)$ در معادله (۵-۲۲) نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0; \quad \frac{dX(0)}{dx} = 0, \quad \frac{dX(L)}{dx} = 0, \quad (5-28)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + a\lambda^2 \tau = 0. \quad (5-29)$$

جواب معادله (۵-۲۸) به صورت زیر است:

$$X_n(x) = A_n \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x) = \cos \lambda_n x, \quad \text{توابع مشخصه}$$

$$\lambda_n L = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \text{مقادیر مشخصه}$$

جواب کلی معادله (۵-۲۹) به صورت زیر است:

$$\tau_n(t) = C_n e^{-a\lambda_n^2 t}.$$

۱- تنها ثابت جداسازی که دو سمت معادله را از هم جدا می‌نماید عدد صفر می‌باشد بنابراین باید $\frac{1}{\alpha} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$ در نظر گرفته شود.

بنابراین برای $\psi(x, t)$ با استفاده از قاعده حاصل ضرب داریم:

$$\psi(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x, \quad (5-30)$$

که در آن $a_n = A_n C_n$ و $a_0 = A_0 C_0$ است.

سرانجام، مقدار اولیه معادله (5-30) که برابر $\phi(x)$ است نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$-\frac{q'' x^2}{2kL} = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x; \quad (5-31)$$

ضرایب a_0 و a_n به صورت زیرند:

$$a_0 = -\frac{q'' L}{6k}, \quad a_n = -(-1)^n \frac{2q'' L}{k(\lambda_n L)^2}. \quad (5-32)$$

بنابراین، با ترکیب معادلات (5-21)، (5-27)، (5-30)، و (5-32) دمای ناپایای صفحه به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\theta(x, t)}{q'' L/k} = \frac{at}{L^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{1}{6} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n L)^2} e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x. \quad (5-33)$$

(چگونه دما طی مدت زمان طولانی تغییر می‌کند؟ آیا می‌توان این تغییر را در حل مسائل حدس زد؟)

بنابراین، مثال‌های 5-4 و 5-5 امکان بر طرف کردن ناهمگنی‌های مسائل ناپایا را نشان می‌دهند. اگر در اثر شرط $t \rightarrow \infty$ ، یک مساله ناپایا دارای جواب پایا شود، تغییر متغیر (5-14) مناسب می‌باشد اما اگر در اثر $t \rightarrow \infty$ جواب پایا به دست نیاید، تغییر متغیر (5-21) مناسب خواهد بود.

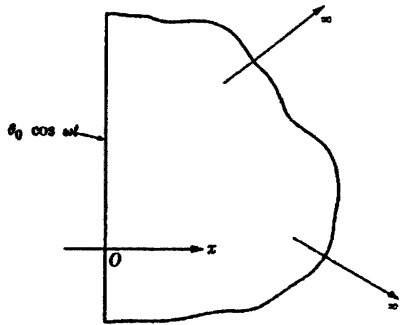
اکنون به روش حل فرمولاسیون دیفرانسیلی مثال 2-3 باز می‌گردیم. از آنجایی که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، مساله دارای جواب پایاست، می‌توان مساله را با استفاده از اصل جمع‌پذیری ارائه شده در معادله (5-14) حل نمود. و نتیجه به صورت زیر است:

$$\frac{T-T_{\infty}}{q'' L/k} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{Bi} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x}{(\lambda_n L)(\lambda_n L + \sin \lambda_n L \cos \lambda_n L)}, \quad (5-34)$$

که در آن x با استفاده از سطح پایینی صفحه به دست می‌آید و $Bi = hL/k$ بوده، و مقادیر مشخصه، صفرهای معادله $(\lambda_n L) \sin \lambda_n L = Bi \cos \lambda_n L$ (شکل 13-4 را ببینید) می‌باشند. بررسی جزئیات این مساله به خوانندگان واگذار می‌شود.

حال می‌خواهیم جواب متناوب فرمولاسیون توزیع‌شده مثال 5-1 را به دست آوریم. در این ارتباط، ابتدا روند محاسبه جواب‌های متناوب پایا را در مسائل ساده‌تر بررسی می‌کنیم.

مثال 5-6. دمای سطح جسم نیمه بینهایت به صورت $\theta_0 \cos \omega t$ (شکل 5-6) نوسان می‌کند. های اولیه جسم یکنواخت است و صفر در نظر گرفته می‌شود. می‌خواهیم دمای متناوب پایای جسم را به دست آوریم.



شکل 5-6

فرمولاسیون مساله به صورت زیر است.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad (5-35)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad (5-36)$$

$$\theta(0, t) = \theta_0 \cos \omega t, \quad (5-37)$$

$$\theta(\infty, t) = 0. \quad (5-38)$$

از آنجایی که جواب فقط برای زمان‌های زیاد معتبر است، لذا جواب مستقل از شرط اولیه داده شده در معادله (5-36) بوده، و با زمان متناوب است. به دلیل خطی بودن مساله، این تناوب، معادل مشتاقی است که در جواب دیده می‌شود. وابستگی دما به زمان متناوب ممکن است با انتخاب پارامتر جداسازی موهومی، حاصل شود. با این کار جواب نمایی برای زمان، با شناسه‌های موهومی حاصل می‌شود که برحسب توابع دایره‌ای بیان می‌شوند. اگر برای معادله (5-35) از قاعده حاصل ضرب $\theta(x, t) = X(x)\tau(t)$ استفاده کنیم، با استفاده از پارامترهای جداسازی مناسب، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \pm i\lambda^2. \quad (5-39)$$

واضح است که هر دو عبارت $i\lambda^2$ و $-i\lambda^2$ در عبارات قبل، صدق می‌کنند.

با تعریف دماهای $\theta_+(x, t)$ و $\theta_-(x, t)$ به ترتیب متناظر با $+i\lambda^2$ و $-i\lambda^2$ خواهیم داشت:

$$\theta_+(x, t) = e^{ia\lambda^2 t} (C_1 e^{\lambda \sqrt{i} x} + C_2 e^{-\lambda \sqrt{i} x}), \quad (5-40)$$

$$\theta_-(x, t) = e^{-ia\lambda^2 t} (C_3 e^{\lambda \sqrt{-i} x} + C_4 e^{-\lambda \sqrt{-i} x}).$$

توجه به شکل 5-7، معادله (5-40) را به شکل زیر بازآرایی می‌نماییم:

$$\theta(x, t) = \theta_+(x, t) + \theta_-(x, t) \quad (5-41)$$

$$= C_1 e^{\lambda x/\sqrt{2}} e^{i(a\lambda^2 t + \lambda x/\sqrt{2})} + C_2 e^{-\lambda x/\sqrt{2}} e^{i(a\lambda^2 t - \lambda x/\sqrt{2})}$$

بنابراین، با قرار دادن معادله (۵-۵) درون معادله (۵-۴۸)، می‌توان دمای ناپایای درون میله را به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{T(r,t)-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R)} \quad (5-51)$$

تنها تفاوت بین مثال‌های ۵-۲ و ۵-۷ تاثیر انحناء در مساله ۵-۷ است.

مثال ۵-۸. می‌خواهیم مثال ۵-۷ را با استفاده از ضریب انتقال حرارت متوسط h ، دوباره حل کنیم (شکل ۵-۱۰).

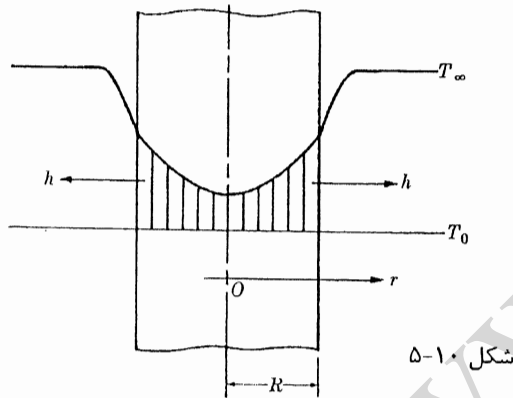
فرمولاسیون مساله به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right), \quad \theta(r, 0) = \theta_0, \quad (5-52)$$

$$\frac{\partial \theta(0,t)}{\partial r} = 0, \quad -k \frac{\partial \theta(R,t)}{\partial r} = h \theta(R,t).$$

قاعده حاصل ضرب در جهت r معادلات زیر را حاصل می‌کند:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) + \lambda^2 r \mathfrak{R} = 0; \quad \frac{d\mathfrak{R}(0)}{dr} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{R}(R)}{dr} + \frac{h}{k} \mathfrak{R}(R) = 0, \quad (5-53)$$



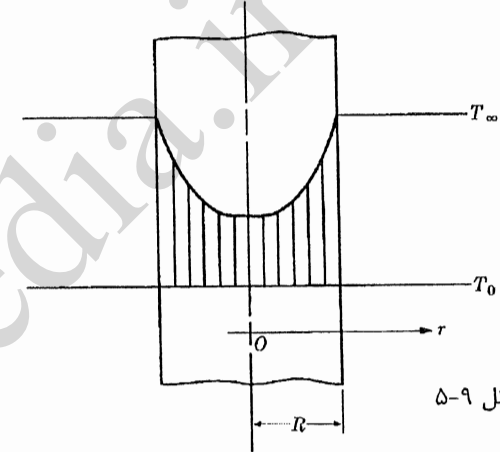
و در جهت زمان معادله‌ای مشابه مثال ۵-۷ حاصل خواهد شد. جواب معادله (۵-۵۳) به صورت زیر است:

$$\mathfrak{R}_n(r) = A_n \varphi_n(r), \quad \varphi_n(r) = J_0(\lambda_n r)$$

و صفرهای معادله $(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R) + \text{Bi} J_0(\lambda_n R) = 0$ ، مقادیر مشخصه هستند، که در آن $\text{Bi} = hL/k$ می‌باشد. اصل قاعده حاصل ضرب این مساله، مشابه مساله قبلی یعنی معادله (۵-۴۸) می‌باشد. البته، در آن ضریب a_n به صورت زیر خواهد بود [معادله (۴-۲۱۴) را ببینید]:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) + \lambda^2 r \mathfrak{R} = 0; \quad \frac{d\mathfrak{R}(0)}{dr} = 0, \quad \mathfrak{R}(R) = 0, \quad (5-46)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + a\lambda^2 \tau = 0. \quad (5-47)$$



جواب معادله (۵-۴۶) به صورت زیر است:

$$\mathfrak{R}_n(r) = A_n \varphi_n(r), \quad \varphi_n(r) = J_0(\lambda_n r), \quad \text{توابع مشخصه}$$

و صفرهای معادله $J_0(\lambda_n R) = 0$ مقادیر مشخصه هستند. جواب معادله (۵-۴۷) به صورت $\tau_n(t) = C_n e^{-a\lambda_n^2 t}$ است. از این رو اصل قاعده حاصل ضرب به صورت زیر خواهد بود:

$$\theta(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r), \quad (5-48)$$

که در آن $a_n = A_n C_n$ است.

مقدار اولیه معادله (۵-۴۸) به صورت زیر است:

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r). \quad (5-49)$$

معادله (۵-۴۹) بسط سری فوریه-بسل θ_0 است. در اینجا ضریب a_n را می‌توان با استفاده از روش‌های متداول محاسبه نمود. نتیجه به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2\theta_0}{(\lambda_n R) J_1(\lambda_n R)} \quad (5-50)$$

علاوه بر آن، با توجه به معادله (۳-۱۴۰) خواهیم داشت:

$$J_{1/2}(\lambda r) \sim \sin \lambda r / r^{1/2}, \quad J_{-1/2}(\lambda r) \sim \cos \lambda r / r^{1/2},$$

می‌توانیم معادله (۵-۵) را به صورت زیر بازآرایی کنیم.

$$\sin \lambda r / r, \quad \cos \lambda r / r$$

این نتیجه، استفاده از تبدیل معروف زیر را توجیه می‌کند:

$$\theta(r, t) = \psi(r, t) / r \quad (۵-۶۰)$$

که برای مسائل کروی، معادله (۵-۶۰)، لاپلاسین کروی را به لاپلاسین کارتیزین تبدیل می‌کند و پاسخ آن به صورت توابع دایره‌ای قابل بیان است.

حال می‌توانیم معادله (۵-۵۶) را برحسب ψ و با استفاده از معادله (۵-۶۰) و شرایط محدود دمای مرکزی به جای دمای متقارن، بیان نماییم. نتایج به صورت زیر است.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad \psi(r, 0) = r \theta_0, \quad (۵-۶۱)$$

$$\psi(0, t) = 0, \quad \psi(R, t) = 0.$$

از این رو معادله، به یک معادله مختصات کارتیزین تبدیل می‌شود.

پس حاصل ضرب $\psi(r, t) = \Re(r) \tau(t)$ نتیجه زیر را حاصل می‌کند:

$$\frac{d^2 \Re}{dr^2} + \lambda^2 \Re = 0; \quad \Re(0) = 0, \quad \Re(R) = 0, \quad (۵-۶۲)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + a\lambda^2 \tau = 0. \quad (۵-۶۳)$$

حل معادله (۵-۶۲) عبارت است از:

$$\Re_n(r) = A_n \varphi_n(r), \quad \varphi_n(r) = \sin \lambda_n r, \quad \text{توابع مشخصه}$$

$$\lambda_n R = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{مقادیر مشخصه}$$

و جواب معادله (۵-۶۳) به صورت $\tau_n(t) = C_n e^{-a\lambda_n^2 t}$ می‌باشد.

از این رو قاعده حاصل ضرب این گونه خواهد شد:

$$\psi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n r. \quad (۵-۶۴)$$

مقدار اولیه معادله (۵-۶۴) به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{2\theta_0 Bi}{(\lambda_n^2 R^2 + Bi^2) J_0(\lambda_n R)}. \quad (۵-۵۴)$$

بنابراین دمای ناپایای میله به صورت زیر است:

$$\frac{T(r, t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = 2Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r)}{(\lambda_n^2 R^2 + Bi^2) J_0(\lambda_n R)}. \quad (۵-۵۵)$$

فیزیک این مساله مختصات استوانه‌ای، با فیزیک مساله کارتیزین مثال ۵-۳ یکسان است.

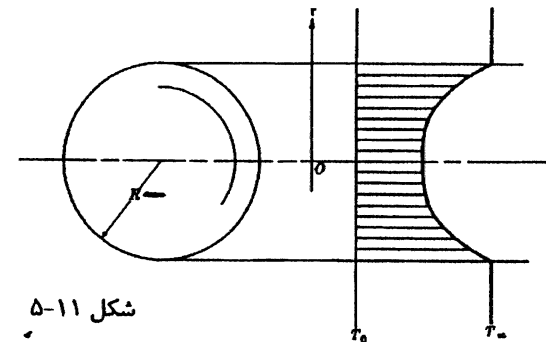
دو مثال بعدی، مثال‌های گذرای یک‌بعدی در مختصات کروی می‌باشند.

مثال ۵-۹. یک جامد کروی با شعاع R با دمای اولیه یکنواخت T_0 به طور ناگهانی درون یک حمام با دمای T_{∞} انداخته می‌شود. ضریب انتقال حرارت بزرگ می‌باشد (شکل ۵-۱۱). می‌خواهیم دمای ناپایای کره را بیابیم.

فرمولاسیون مساله با تغییر متغیر $\theta = T - T_{\infty}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right), \quad \theta(r, 0) = \theta_0, \quad (۵-۵۶)$$

$$\frac{\partial \theta(0, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{یا} \quad \theta(R, t) = \text{محدود}, \quad \theta(R, t) = 0.$$



شکل ۵-۱۱

با قرار دادن قاعده حاصل ضرب $\theta(r, t) = \Re(r) \tau(t)$ در معادله (۵۶-۵) خواهیم داشت.

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Re}{dr} \right) + \lambda^2 r^2 \Re = 0; \quad \frac{d\Re(0)}{dr} = 0, \quad \Re(R) = 0, \quad (۵-۵۷)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + a\lambda^2 \tau = 0. \quad (۵-۵۸)$$

پاسخ خصوصی معادله دیفرانسیل (۵۷-۵) به صورت زیر است (جدول ۳-۱ را ملاحظه کنید):

$$J_{1/2}(\lambda r) / r^{1/2}, \quad J_{-1/2}(\lambda r) / r^{1/2}. \quad (۵-۵۹)$$

$$r\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n r.$$

پس ضریب a_n این چنین به دست می آید:

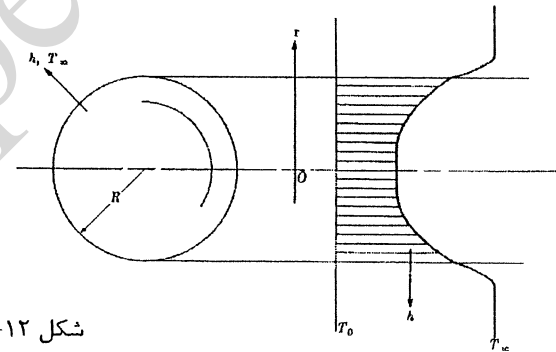
$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{2\theta_0}{\lambda_n}. \quad (5-65)$$

در نهایت دمای ناپایای کره چنین به دست می آید:

$$\frac{T(r,t)-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-a\lambda_n^2 t} \frac{\sin \lambda_n r}{\lambda_n r}. \quad (5-66)$$

توجه کنید که مثال های ۵-۲، ۵-۷ و ۵-۹ شرایط فیزیکی یکسانی را به ترتیب در مختصات های کارتزین، استوانه ای و کروی نشان می دهند.

مثال ۵-۱۰. حال می خواهیم مثال ۵-۹ را با این فرض که ضریب انتقال حرارت مقدار متوسطی باشد حل کنیم (شکل ۵-۱۲).



شکل ۵-۱۲

فرمولاسیون این مساله، به جز برای شرط مرزی سطحی $\theta(R, t) = 0$ که اکنون باید با شرط $-k[\partial\theta(R, t)/\partial r] = h\theta(R, t)$ جایگزین شود با فرمولاسیون مساله قبلی یکسان می باشد. بنابراین برحسب ψ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}, \quad \psi(r, 0) = r\theta_0, \quad (5-67)$$

$$\psi(0, t) = 0, \quad -k \frac{\partial\psi(R, t)}{\partial r} = \left(h - \frac{k}{R}\right) \psi(R, t).$$

قاعده حاصل ضرب نتیجه زیر را حاصل می کند:

$$\frac{d^2\Re}{dr^2} + \lambda^2\Re = 0; \quad \Re(0) = 0, \quad \frac{d\Re(R)}{dr} + \left(\frac{h}{k} - \frac{1}{R}\right) \Re(R) = 0, \quad (5-68)$$

معادله فوق برحسب r ، و معادله (۵-۶۳) برحسب زمان می باشند. جواب معادله (۵-۶۸) به صورت زیر است.

$$\Re_n(r) = A_n \varphi_n(r), \quad \varphi_n(r) = \sin \lambda_n r, \quad \text{معادله مشخصه}$$

و صفرهای رابطه $(\lambda_n R) \cos \lambda_n R = (1 - Bi) \sin \lambda_n R$ مقادیر مشخصه می باشند که در آن $Bi = hL/k$ می باشد.

قاعده حاصل ضرب مثال قبل، معادله (۵-۶۴)، و مقادیر اولیه آن برای این مساله نیز قابل استفاده است ولی ضریب a_n متفاوت خواهد بود.

$$a_n = \frac{2\theta_0(\sin \lambda_n R - \lambda_n R \cos \lambda_n R)}{\lambda_n(\lambda_n R - \sin \lambda_n R \cos \lambda_n R)}. \quad (5-69)$$

بنابراین دمای ناپایای کره به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{T(r,t)-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda_n R - \lambda_n R \cos \lambda_n R}{\lambda_n R - \sin \lambda_n R \cos \lambda_n R} \right) e^{-a\lambda_n^2 t} \frac{\sin \lambda_n r}{\lambda_n r}. \quad (5-70)$$

توجه شود که فیزیک مسائل کارتزین، استوانه ای و کروی در مثال های ۵-۳، ۵-۸ و ۵-۱۰ یکسان می باشد. از آنجایی که مسائل دوبعدی و سه بعدی ریاضیات پیچیده تری دارند، برای آن ها می توان مشابه مسائل یک بعدی عمل نمود. یک مثال دوبعدی در مختصات کارتزین برای نشان دادن این تشابه آورده شده است.

مثال ۵-۱۱. می خواهیم مساله ناپایای متناظر با مثال (۴-۸) را بررسی نماییم. فرض بر این است که دمای اولیه پره T_{∞} ، و دمای یک سطح در ξ ناگهان به T_0 می رسد (شکل ۴-۲۴ بررسی شود). مطلوبست محاسبه دمای ناپایای پره.

فرمولاسیون مساله برحسب $\theta = T - T_{\infty}$ به صورت زیر می باشد.

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \right), \quad \theta(\xi, y, 0) = 0, \quad (5-71)$$

$$\theta(0, y, t) = 0, \quad \theta(L, y, t) = \theta_0 = T_0 - T_{\infty},$$

$$\frac{\partial\theta(\xi, 0, t)}{\partial y} = 0, \quad \theta(\xi, l, t) = 0.$$

با وجود ناهمگنی در یکی از شرایط مرزی، پیشنهاد می شود که از اصل جمع پذیری استفاده شود. توجه شود که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، مساله دارای جواب پایاست و با تعمیم معادله (۵-۱۴)، فرض زیر را در نظر می گیریم:

$$\theta(\xi, y, t) = \psi(\xi, y, t) + \phi(\xi, y) \quad (5-72)$$

که در نتیجه $\phi(\xi, y)$ و $\psi(\xi, y, t)$ در روابط زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \quad \phi(L, y) = \theta_0, \end{aligned} \quad (5-73)$$

$$\frac{\partial \phi(\xi, 0)}{\partial y} = 0, \quad \phi(\xi, l) = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad \psi(\xi, y, 0) = -\phi(\xi, y), \\ \psi(0, y, t) &= 0, \quad \psi(L, y, t) = 0, \end{aligned} \quad (5-74)$$

$$\frac{\partial \psi(\xi, 0, t)}{\partial y} = 0, \quad \psi(\xi, l, t) = 0.$$

مساله پایای معادله (5-73) با مثال ۴-۸ یکسان می باشد و تنها در معادله (5-73)، عبارت $\phi(\xi, y)$ جایگزین $\theta(\xi, y)$ در مثال ۴-۸ می شود. این پاسخ به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\phi(\xi, y)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n l} \left[\frac{\sinh \lambda_n \xi}{\sinh \lambda_n l} \right] \cos \lambda_n y. \quad (4-123)$$

که در آن $\lambda_n l = (2n+1)\pi/2$ و $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ است.

به عبارت دیگر، با قرار دادن قاعده حاصل ضرب $\psi(\xi, y, t) = \mathcal{E}(\xi)Y(y)\tau(t)$ در معادله (5-74) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\xi^2} + \mu^2 \mathcal{E} = 0; \quad \mathcal{E}(0) = 0, \quad \mathcal{E}(L) = 0, \quad (5-75)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \nu^2 Y = 0; \quad \frac{dY(0)}{dy} = 0, \quad Y(l) = 0, \quad (5-76)$$

$$\frac{d\tau}{dt} + a(\mu^2 + \nu^2)\tau = 0. \quad (5-77)$$

جواب (5-75) به صورت زیر است:

$$\mathcal{E}_m(\xi) = A_m \phi_m(\xi), \quad \phi_m(\xi) = \sin \mu_m \xi,$$

$$\mu_m l = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

مقادیر مشخصه

جواب (5-76) به صورت زیر است:

$$Y_k(y) = B_k \phi_k(y), \quad \phi_k(y) = \cos \nu_k y,$$

$$\nu_k l = (2k+1)\pi/2, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

جواب کلی (5-77) به صورت زیر است:

$$\tau_{mk}(t) = C_{mk} e^{-a(\mu_m^2 + \nu_k^2)t}.$$

جواب قاعده حاصل ضرب به صورت زیر می شود:

$$\psi(\xi, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} e^{-a(\mu_m^2 + \nu_k^2)t} \sin \mu_m \xi \cos \nu_k y, \quad (5-78)$$

که در آن $a_{mk} = A_m B_k C_{mk}$ می باشد.

با استفاده از شرایط اولیه و قرار دادن آن در معادله (5-78) جواب زیر به دست می آید:

$$-\phi(\xi, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} \sin \mu_m \xi \cos \nu_k y,$$

که این عبارت، بسط $-\phi(\xi, y)$ بر حسب سری های فوریه دوگانه می باشد و ضریب a_{mk} به صورت زیر می باشد:

$$a_{mk} = \frac{4\theta_0(-1)^{k+m}(\mu_m l)}{(\mu_m^2 + \nu_k^2)L^2(\nu_k l)}. \quad (5-79)$$

بنابراین، بخش ناپایای مساله که با $\psi(\xi, y, t)$ بیان می شود، به صورت زیر می باشد.

$$\frac{\psi(\xi, y, t)}{\theta_0} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+m} \left(\frac{\mu_m l}{\nu_k l} \right) \frac{e^{-a(\mu_m^2 + \nu_k^2)t}}{(\mu_m^2 + \nu_k^2)L^2} \sin \mu_m \xi \cos \nu_k y. \quad (5-80)$$

جمع معادلات (4-123) و (5-80) جواب کامل این مساله را حاصل می کند.

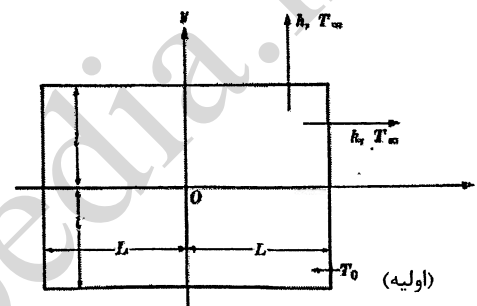
۵- مسائل چندبعدی قابل بیان به صورت یک بعدی.

استفاده از نمودارهای یک بعدی.

بر این بخش به بررسی نوعی از مسائل چندبعدی خواهیم پرداخت که می توان جواب آن ها را بر حسب دو یا چند مساله یک بعدی بیان نمود. در ابتدا یک مثال دوبعدی در مختصات کارتزین

آورده شده است، سپس نتایج به دست آمده، به مختصات کارتزین سه بعدی، و مختصات های دیگر تعمیم داده شده است.

مثال ۵-۱۲. یک میله بلند با طول بینهایت با مقطع مستطیلی $(2L \times 2L)$ در دمای اولیه یکنواخت T_0 دارد، این میله ناگهان در داخل یک حمام با دمای ثابت T_∞ فرو برده می شود. ضریب انتقال حرارت h می باشد (شکل ۵-۱۳). مطلوب است محاسبه دمای ناپایای این میله.



شکل ۵-۱۳

فرمولاسیون مساله بر حسب دمای بی بعد $\vartheta = (T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \alpha \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right), & \vartheta(x, y, 0) &= 1 \\ \frac{\partial \vartheta(0, y, t)}{\partial x} &= 0, & -k \frac{\partial \vartheta(L, y, t)}{\partial x} &= h \vartheta(L, y, t), \\ \frac{\partial \vartheta(x, 0, t)}{\partial y} &= 0, & -k \frac{\partial \vartheta(x, L, t)}{\partial y} &= h \vartheta(x, L, t), \end{aligned} \quad (5-81)$$

مساله با جداسازی متداول $\vartheta(x, y, t) = X(x)Y(y)\tau(t)$ حل می شود. ولی در این جا از شکل زیر استفاده می شود.

$$\vartheta(x, y, t) = X(x)Y(y)\tau(t), \quad (5-82)$$

اگر معادله (۵-۸۲) به جواب برسد به یک نتیجه مهم می رسیم یعنی این که می توان یک مساله ناپایای دوبعدی را به صورت حاصل ضرب دو مساله ناپایای یک بعدی نوشت. با قرار دادن معادله (۵-۸۲) در معادله دیفرانسیل (۵-۸۱) و بازآرایی آن خواهیم داشت:

$$\frac{1}{X} \left(\frac{\partial X}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial Y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) \quad (5-83)$$

۱- می توانستیم مسائل قبلی را بر حسب همین دمای بی بعد حل کنیم اما نیازی به انجام این کار نبود. همان طور که در جداسازی شرایط اولیه مشاهده شد مساله حاضر نیازمند استفاده از این دماست.

از آنجایی که x و y مستقل از هم تغییر می کنند، هر دو سمت معادله (۵-۸۳) باید مستقل از متغیرهای طرف دیگر و مساوی یک پارامتر باشند که آن را با $\lambda^2(t) \pm$ نمایش می دهیم، و حال این دو طرف وابسته به متغیر زمان است. البته، به علت هندسی و تقارن حرارتی مساله، مسائل مقدار مشخصه در جهت x و جهت y باید مشابه باشد. این اتفاق تنها زمانی رخ می دهد که $\lambda^2(t) = 0$ باشد. با استفاده از این مقدار $\lambda^2(t) = 0$ و با جاگذاری معادله (۵-۸۳) درون شرایط اولیه و مرزی معادله (۵-۸۱)، نتایج زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \frac{\partial Y}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \\ X(x, 0) &= 1, & Y(y, 0) &= 1, \\ \frac{\partial X(0, t)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial Y(0, t)}{\partial y} &= 0, \\ -\frac{\partial X(L, t)}{\partial x} &= hX(L, t), & -\frac{\partial Y(L, t)}{\partial y} &= hY(L, t), \end{aligned}$$

بنابراین، مساله به صورت حاصل ضرب دو مساله یک بعدی ناپایا قابل بیان شد. دو طرف با هم برابر هستند. برای فرمولاسیون مثال ۵-۳ که پاسخ آن به وسیله معادله (۵-۱۳) داده شده بود، می توان شکل بی بعد معادله (۵-۱۳) را به صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right)_{2L \times 2L \text{ صفحه}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \right) e^{-\mu_n^2 Fo} \cos \mu_n \xi, \quad (5-84)$$

که در آن $\xi = x/L$ (یا y/L) و $Fo = \alpha t/L^2$ (عدد فوریه)، $\mu_n = \lambda_n L$ و μ_n صفرهای معادله $\mu_n \sin \mu_n = Bi \cos \mu_n$ می باشند. صفحه $[(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)]_{2L}$ در مقابل Fo برای مقادیر $\xi = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ و با استفاده از عدد Bi به عنوان پارامتر در شکل ۵-۱۴ رسم شده است.

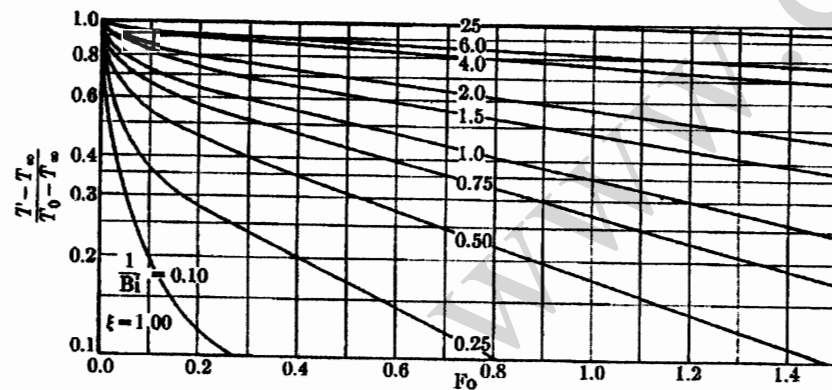
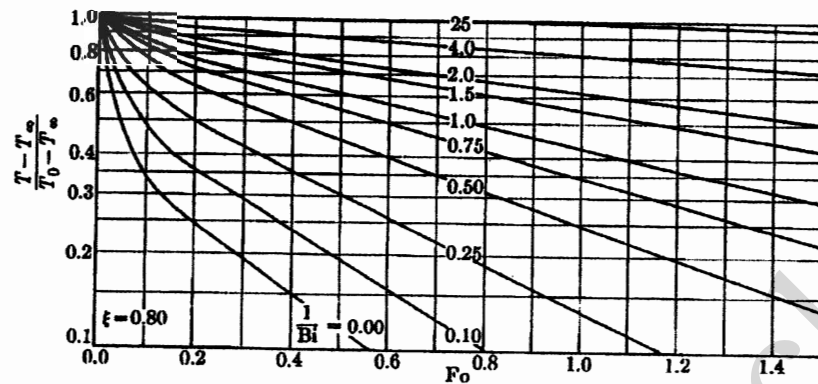
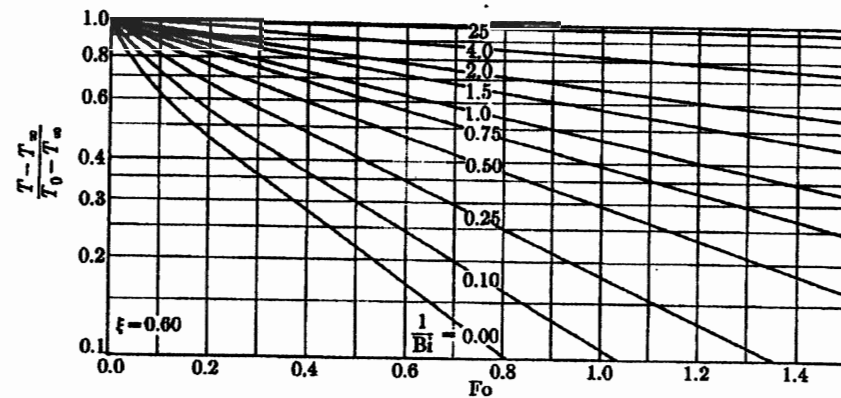
در بازه زمانی $(0, t)$ ، نسبت انتقال حرارت کلی q از (یا به) صفحه و انرژی داخلی اولیه آن $q_i = AL\rho c(T_0 - T_\infty)$ ، به صورت زیر است:

$$\left(\frac{q}{q_i} \right)_{2L \text{ صفحه}} = \frac{-kA \int_0^t (\partial/\partial x)(T - T_\infty)_{x=L} dt}{AL\rho c(T_0 - T_\infty)}. \quad (5-85)$$

۱- شکل های ۵-۱۴، ۵-۱۶، ۵-۱۸، ۵-۲۲، ۵-۲۳، توسط R. C. و H. A. Johnson، V. H. Cherry، L. M. K. Boelter، Martinelli ترسیم شده و در کتاب Heat Transfer Notes (New York: McGraw-Hill, 1965) موجود می باشد و با توافق مورد استفاده قرار گرفته اند.

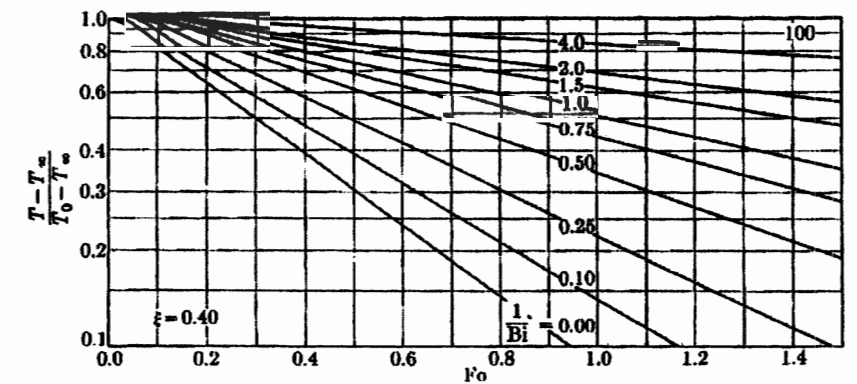
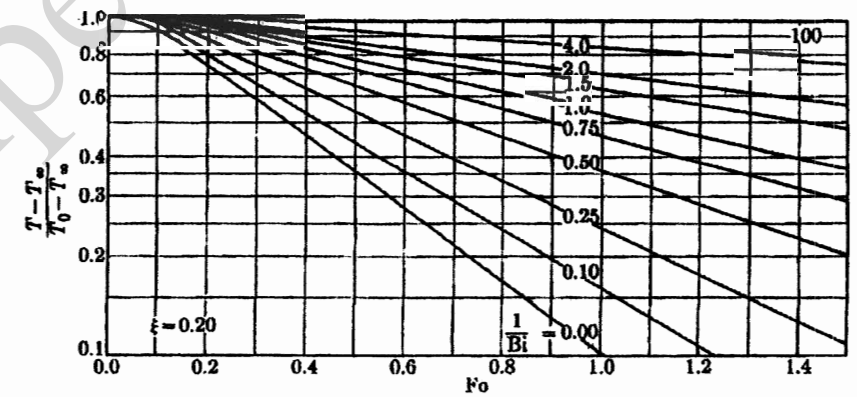
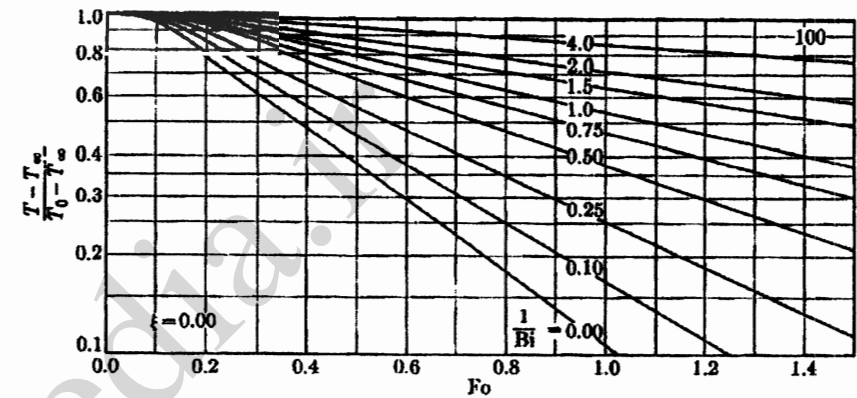
۲- در این جا A نشان دهنده سطح انتقال حرارت یکی از سطوح صفحه است.

صفحه صاف



شکل ۱۴-۵ (ادامه)

صفحه صاف

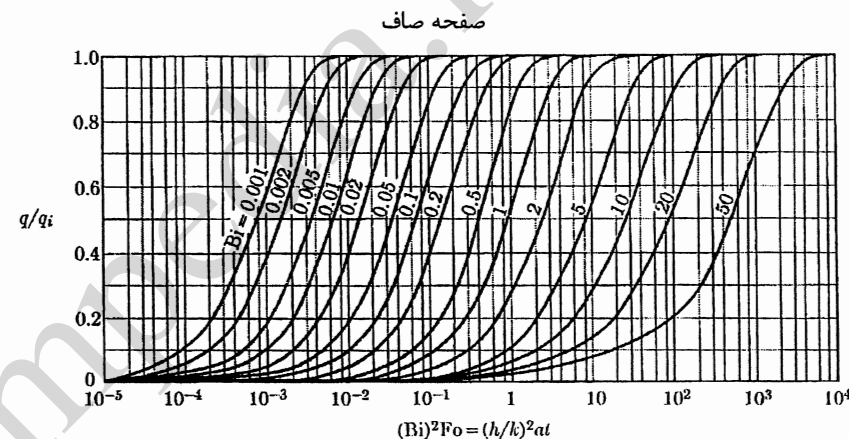


شکل ۱۴-۵

با قرار دادن معادله (۵-۸۴) در شکل بی بعد معادله (۵-۸۵)، رابطه زیر به دست می آید:

$$\left(\frac{q}{q_i}\right)_{2L \text{ یا } 2L} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \mu_n}{\mu_n (\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)} (1 - e^{-\mu_n^2 Fo}) \quad (5-86)$$

در شکل (۵-۱۵) ^۱، $(q/q_i)_{2L}$ در مقابل $(Bi)^2 Fo$ برای بعضی مقادیر عدد Bi ^۲ رسم شده است.



شکل ۵-۱۵

از این رو، معادله (۵-۸۲) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2L \text{ یا } 2L} = \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2L} \cdot \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2L} \quad (5-87)$$

با استفاده از معادله (۵-۸۷) و نمودارهای دمای یک بعدی داده شده در شکل (۵-۱۴) می توانیم دمای لحظه ای میله ای با بلندای نامحدود و مقطع مستطیلی $(2L \times 2L)$ را به سادگی به دست آوریم. حال همین روش گفته شده را می توان برای مختصات کارتزین سه بعدی و مختصات استوانه ای دوبعدی نیز تعمیم داد. نتیجه برای حالت کارتزین به صورت زیر است:

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2L, 2L, 2L} = \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2L} \cdot \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2L} \cdot \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2L} \quad (5-88)$$

۱- شکل های ۵-۱۵، ۵-۱۷، ۵-۱۹، توسط S. Erk، H. Grober و U. Grigull ترسیم شده و در کتاب Fundamentals of Heat Transfer (New York: McGraw-Hill, 1961) موجود می باشد و با توافق مورد استفاده قرار گرفته اند.

۲- انتخاب مختصات و پارامترها در شکل های (۵-۱۴) و (۵-۱۵) تا حد زیادی اختیاری است.

و برای میله استوانه ای با شعاع R و ارتفاع $2L$:

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2R, 2L} = \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2R} \cdot \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2L} \quad (5-89)$$

معادله (۵-۸۹) نیازمند دانستن دمای میله نامحدود با شعاع R است که جواب آن در مثال ۵-۸ به وسیله معادله (۵-۵۵) داده شده است. شکل بی بعد معادله (۵-۵۵) به صورت زیر است:

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2R} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Bi e^{-\mu_n^2 Fo} J_0(\mu_n \rho)}{(\mu_n^2 + Bi^2) J_0(\mu_n)}, \quad (5-90)$$

که در آن:

$$\rho = r/R, \quad Fo = \alpha t/R^2, \quad Bi = hR/k, \quad \mu_n = \lambda_n R,$$

و μ_n صفرهای معادله $\mu_n J_1(\mu_n) + Bi J_0(\mu_n) = 0$ می باشد.

در شکل ۵-۱۶، در مقابل عدد فوریه برای مقادیر $\rho = 0.0$ ، 0.2 ، 0.4 ، 0.6 ، 0.8 ، 1.0 به عنوان پارامتر رسم شده است.

در بازه زمانی $(0, t)$ ، نسبت انتقال حرارت کلی q از طول L میله ای با بلندای نامحدود به انرژی داخلی اولیه $q_i = \pi R^2 L \rho c (T_0 - T_{\infty})$ به صورت زیر خواهد شد:

$$\left(\frac{q}{q_i}\right)_{2R} = \frac{-k 2\pi R L \int_0^t (\partial/\partial r)(T-T_{\infty})_{r=R} dt}{\pi R^2 L \rho c (T_0 - T_{\infty})} \quad (5-91)$$

با قرار گرفتن معادله (۵-۹۰) در شکل بی بعد معادله (۵-۹۱) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{q}{q_i}\right)_{2R} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Bi^2}{\mu_n^2 (\mu_n^2 + Bi^2)} (1 - e^{-\mu_n^2 Fo}) \quad (5-92)$$

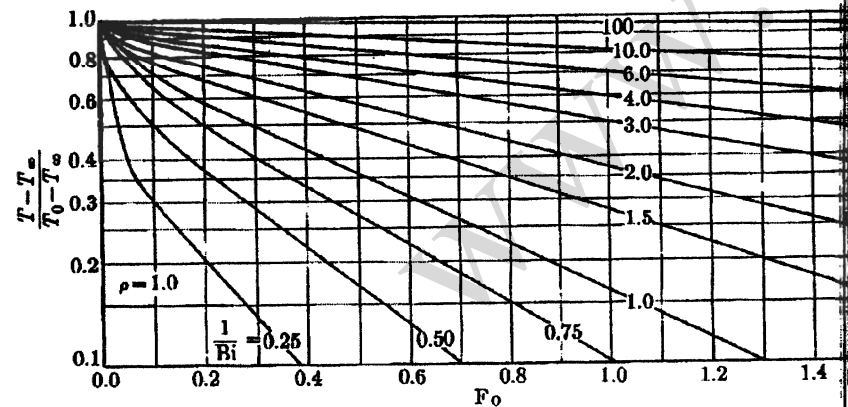
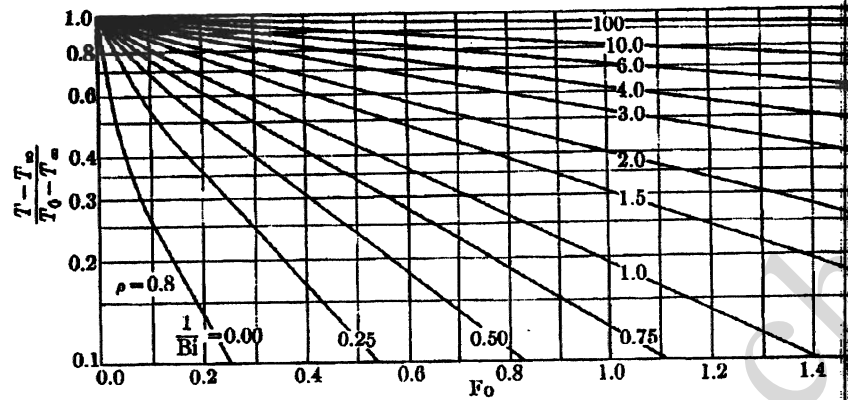
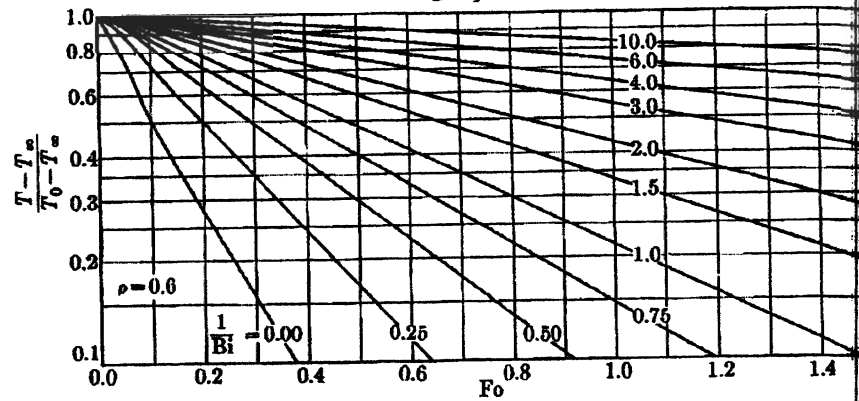
در شکل ۵-۱۷، $(q/q_i)_{2R}$ در مقابل $(Bi)^2 Fo$ برای مقادیر مختلف عدد Bi رسم شده است.

برای تکمیل مطالعه نمودارهای یک بعدی ناپایا، حال به بررسی مختصات کروی می پردازیم. فرمولاسیون و جواب یک مثال برای این مورد در مثال ۵-۱۵ و توسط معادله (۵-۷۰) داده شده است. معادله (۵-۷۰) که به منظور سادگی عددی برحسب متغیرهای بی بعد بیان شده است، دمای لحظه ای کره را در این حالت نتیجه می دهد.

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{r,R} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Bi \sin \mu_n}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} \right) e^{-\mu_n^2 Fo} \frac{\sin \mu_n \rho}{\mu_n \rho} \quad (5-93)$$

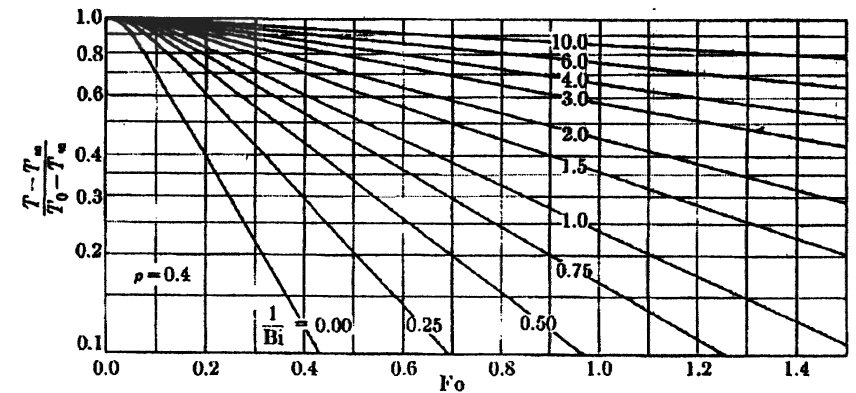
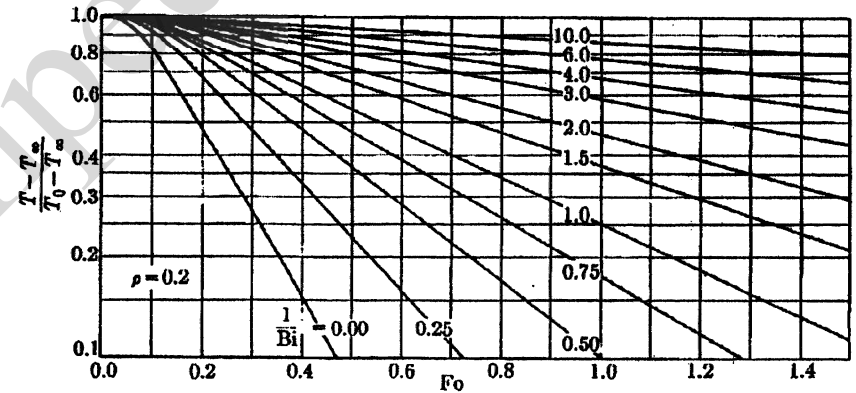
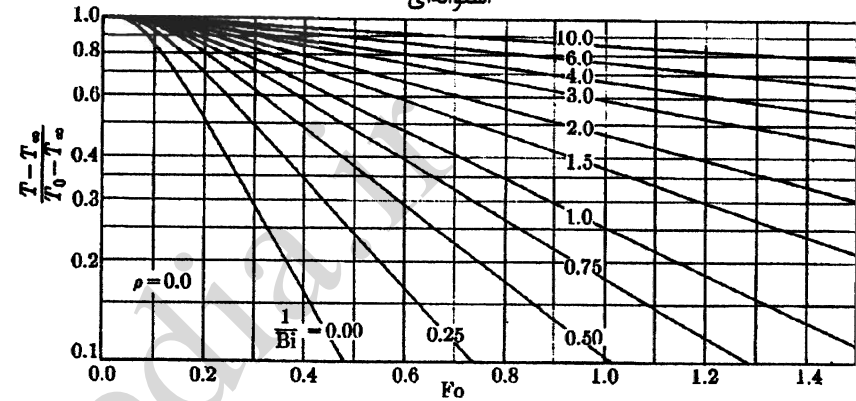
که در آن $\rho = r/R$ ، $Fo = \alpha t/R^2$ ، $Bi = hR/k$ ، $\mu_n = \lambda_n R$ ، μ_n صفرهای معادله $\mu_n \cos \mu_n = (1 - Bi) \sin \mu_n$ می باشد.

استوانه‌ای

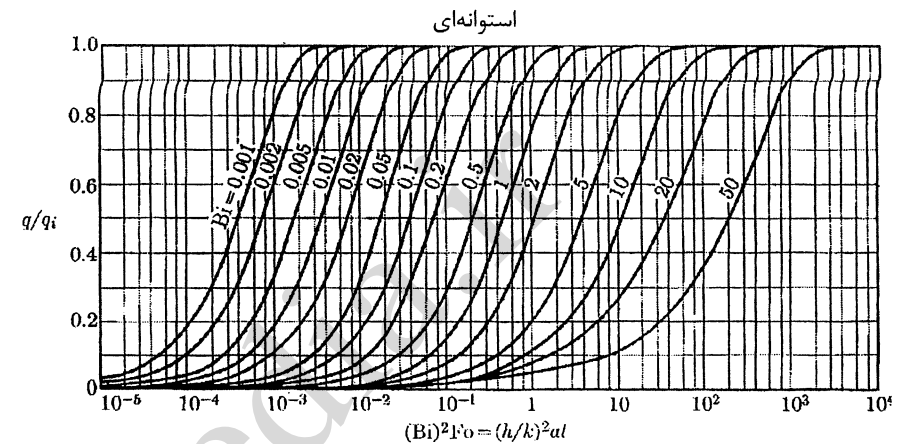
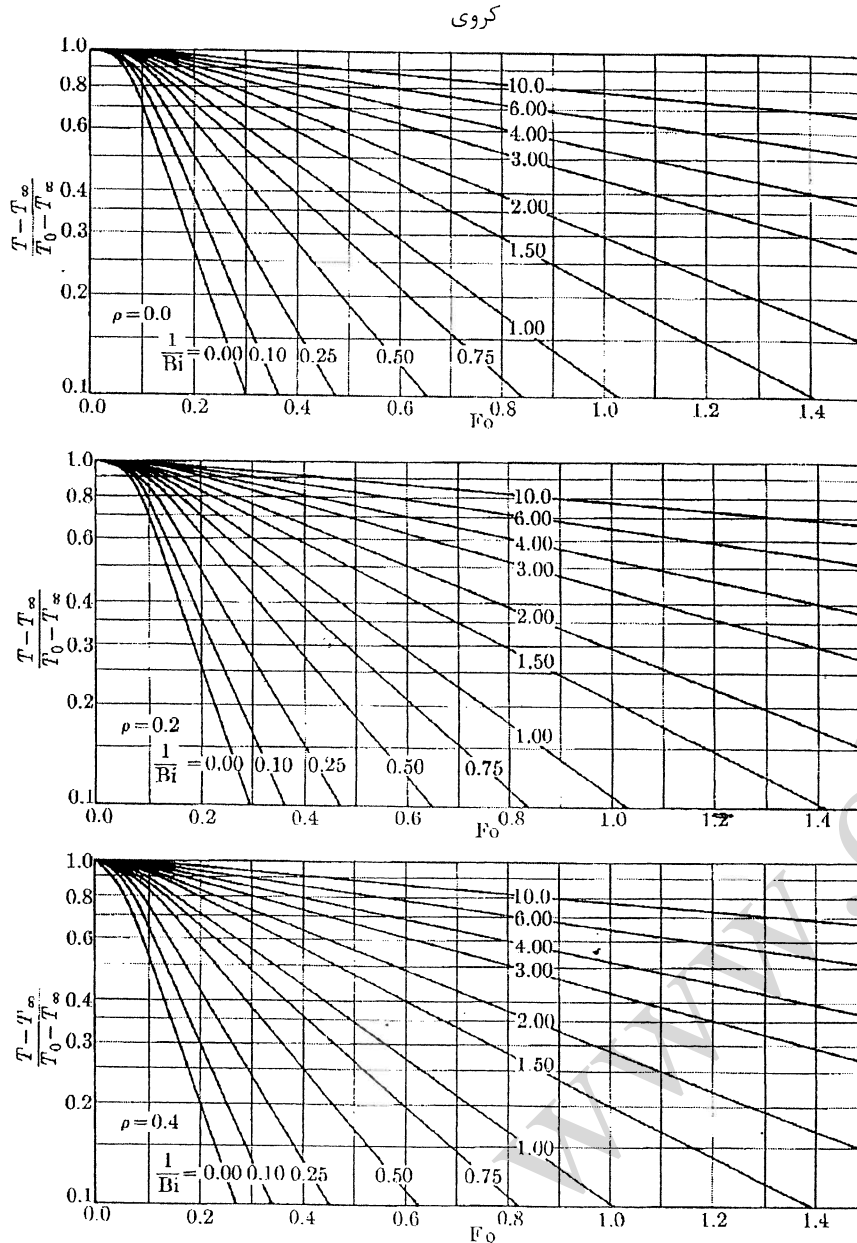


شکل ۵-۱۶ (ادامه)

استوانه‌ای



شکل ۵-۱۶



کروی $[(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)]$ در مقابل Fo برای مقادیر $\rho = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ و از عدد Bi به عنوان پارامتر در شکل ۵-۱۸ رسم شده است.

در بازه زمانی $(0, t)$ ، نسبت انتقال حرارت کل q از (یا به) کره به انرژی داخلی اولیه آن یعنی $q_i = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c (T_0 - T_\infty)$ به صورت زیر است.

$$\left(\frac{q}{q_i}\right)_{\text{کروی}} = \frac{-k4\pi R^2 \int_0^t (\partial/\partial r)(T - T_\infty)_{r=R} dt}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho c (T_0 - T_\infty)} \quad (۵-۹۴)$$

با قرار دادن معادله (۵-۹۳) درون شکل بی بعد معادله (۵-۹۴) نتیجه زیر حاصل می شود:

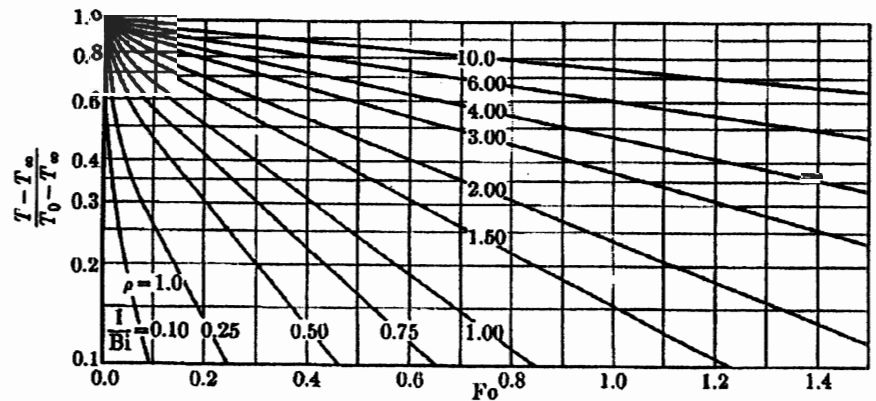
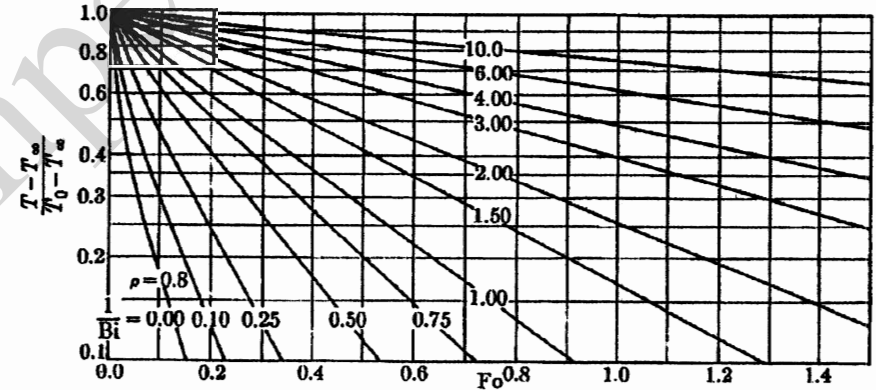
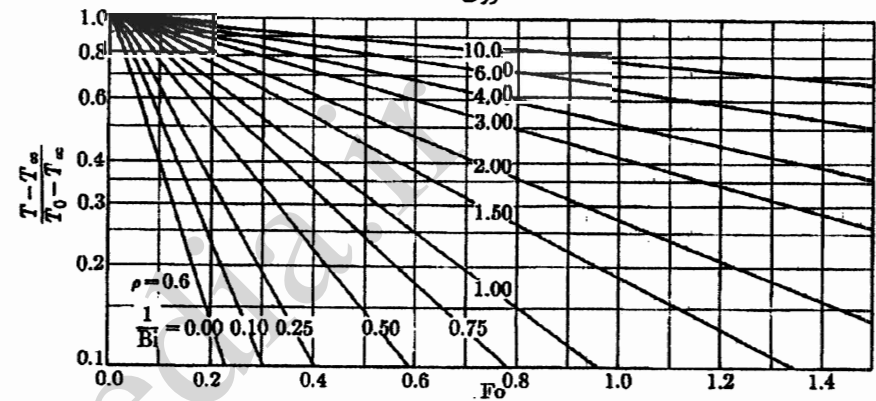
$$\left(\frac{q}{q_i}\right)_{\text{کروی}} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n^3 (\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n)} (1 - e^{-\mu_n^2 Fo}) \quad (۵-۹۵)$$

در شکل ۵-۱۹ $(q/q_i)_{\text{کروی}}$ در مقابل $(Bi)^2 Fo$ رسم شده که عدد Bi پارامتر می باشد.

در این بخش به خصوصیت مهمی از چندین دسته از مسائل ناپایا پی بردیم، که به صورت کلی زیر بیان می شود: هر مساله ناپایای سه بعدی کارترین $T(x, y, z, t)$ یا مساله دوبعدی استوانه‌ای $T(r, z, t)$ که دارای یک معادله دیفرانسیل همگن با شرایط مرزی همگن باشد، می تواند به صورت حاصل ضرب مسائل یک بعدی بیان شود اگر شرایط اولیه آن ثابت یا قابل بیان به ترتیب، به صورت حاصل ضرب $R_i(r)Z_i(z)$ یا $X_i(x)Y_i(y)Z_i(z)$ باشد.

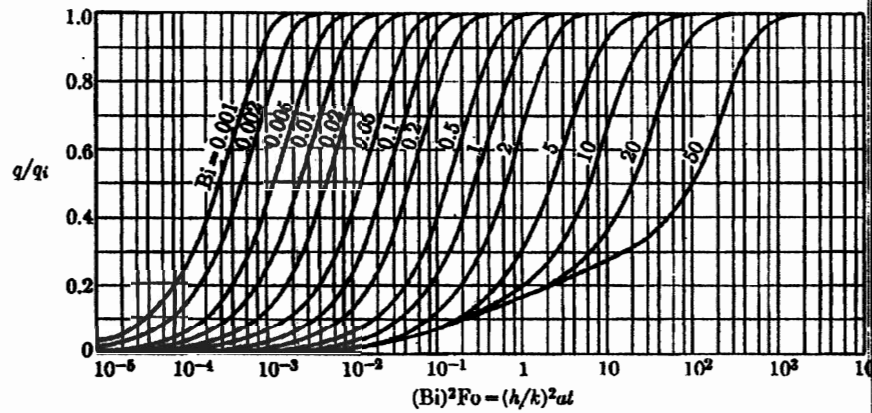
این روش را می توان برای مواردی که هندسه مساله نیمه بینهایت است نیز تعمیم داد. به عنوان مثال، یک صفحه مسطح نیمه بینهایت ضخیمی را در دمای اولیه یکنواخت T_0 در نظر بگیریم. دمای محیط ناگهان به دمای T_∞ تغییر می یابد. ضریب انتقال حرارت h می باشد (شکل ۵-۲۰).

کروی

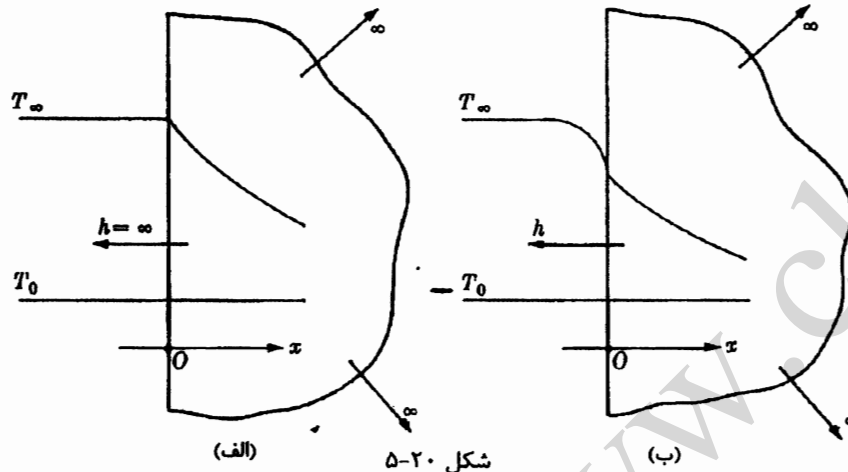


شکل ۵-۱۸ (ادامه)

کروی



شکل ۵-۱۹



شکل ۵-۲۰

های ناپایای صفحه با یک ضریب انتقال حرارت نامحدود به این صورت خواهد بود:

$$\frac{(T - T_{\infty})}{(T_0 - T_{\infty})} = \text{erfc} \left[\frac{x}{2(\alpha t)^{1/2}} \right] \quad (5-96)$$

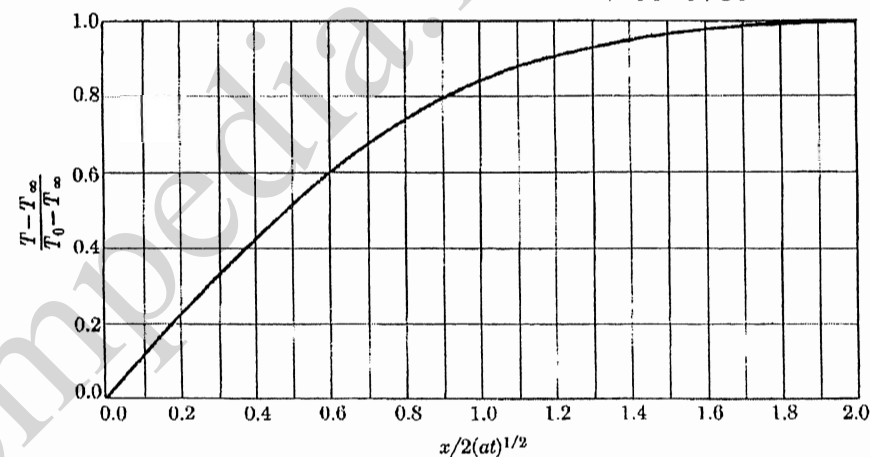
پاسخ برای ضریب انتقال حرارت محدود به صورت زیر خواهد بود:

معادلات (۵-۹۶) و (۵-۹۷) را نمی‌توان با روش‌های فصول ۴ و ۵ به دست آورد و به فصل ۷ موکول می‌شود. برای معادله (۵-۹۶) به مثال ۷-۲ توجه کنید.

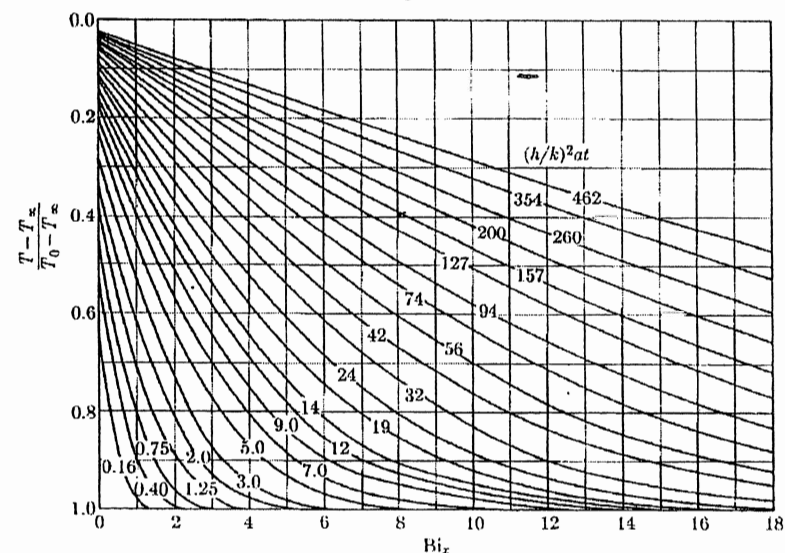
$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_x = \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2(\alpha t)^{1/2}}\right] - \exp\left[\frac{hx}{k} + \left(\frac{h}{k}\right)^2 \alpha t\right] \cdot \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2(\alpha t)^{1/2}} + \frac{h}{k}(\alpha t)^{1/2}\right]$$

(۵-۹۷)

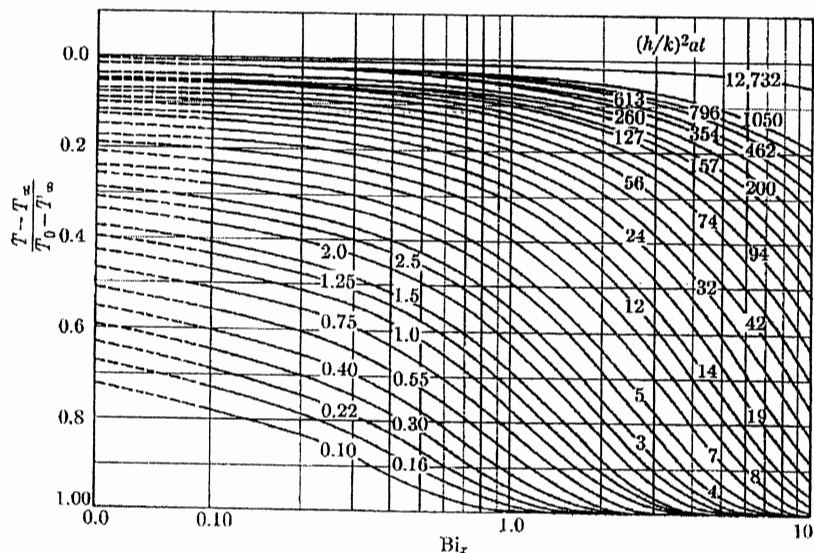
در شکل ۵-۲۱، معادله (۵-۹۶) در مقابل $x/2(\alpha t)^{1/2}$ رسم شده است. معادله (۵-۹۷) در شکل‌های ۵-۲۲ و ۵-۲۳، در مقابل مقادیر مختلف عدد بایوت محلی $Bi_x = hx/k$ به ازای $(h/k)^2$ به عنوان پارامتر رسم شده است.



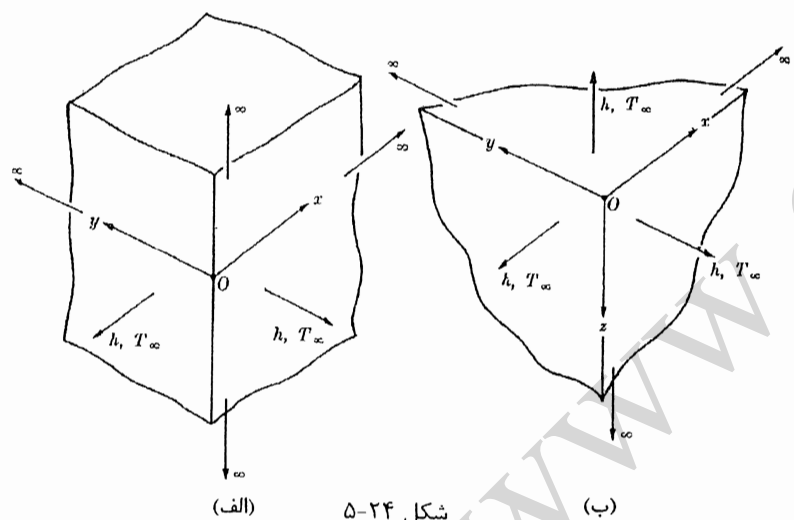
شکل ۵-۲۱



شکل ۵-۲۲ (جامد نیمه بینهایت h محدود)



شکل ۵-۲۳ (جامد نیمه بینهایت h محدود)



شکل ۵-۲۴

با مراجعه به معادلات (۵-۹۶) و (۵-۹۷)، می‌توانیم دمای گوشه‌های دوبعدی و سه‌بعدی (شکل ۵-۲۴) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{x,y} = \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_x \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_y \quad (5-98)$$

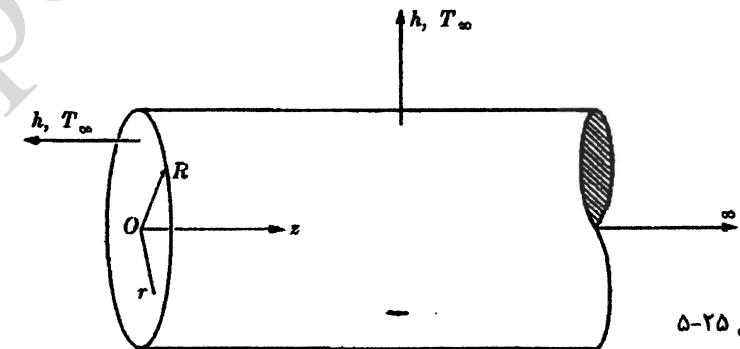
و

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{x,y,z} = \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_x \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_y \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_z \quad (5-99)$$

به طور مشابه دمای میله نیمه بینهایت، با شعاع R (شکل ۵-۲۵) به صورت زیر به دست می آید:

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{r,z} = \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_r \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_z \quad (5-100)$$

که در آن $[(T-T_{\infty})/(T_0-T_{\infty})]_r$ بستگی به ضریب انتقال حرارت داشته و توسط معادله (۵-۵۱) یا معادله (۵-۵۵) به دست می آید. جزییات مختصات نیمه بینهایت به عهده خواننده گذارده می شود.



شکل ۵-۲۵

بهترین راه استفاده از نمودارهای یک بعدی به وسیله یک مساله عددی نشان داده شده می شود.

مثال ۵-۱۳. یک فرایند انتقال حرارت نیازمند این است که یک میله استوانه ای از جنس استیل با قطر $D = 2$ و طول $2L = 4$ تا دمای $T_0 = 1700^\circ\text{F}$ در یک کوره توسط یک حمام روغن تا دمای $T_{\infty} = 100^\circ\text{F}$ گرم شود. ضریب انتقال حرارت $h = 100 \text{ Btu/ft}^2 \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{F}$ بوده و چگالی، گرمای ویژه و هدایت حرارتی میله به ترتیب $\rho = 500 \text{ lbm/ft}^3$ ، $c_p = 0.10 \text{ Btu/lbm} \cdot ^\circ\text{F}$ و $k = 1.25 \text{ Btu/ft} \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{F}$ می باشد. (الف) چه مدت زمانی طول می کشد تا دمای نقطه M که در مرکز سیلندر واقع است (شکل ۵-۲۶) به 500°F برسد؟ (ب) اختلاف دمای بین نقاط $M-P$ و $M-N$ هنگامی که دمای نقطه M به دمای قسمت (الف) می رسد چقدر می شود؟

(الف) دمای دوبعدی میله که به صورت دو مساله یک بعدی بیان شده به صورت زیر است:

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2R,2L} = \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2R} \cdot \left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2L} \quad (5-101)$$

درای بی بعد مطلوب در نقطه $M(r/R = 0, x/L = 0)$ به صورت زیر خواهد بود،

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2R,2L} = \frac{500-100}{1700-100} = 0.25,$$

که باید مساوی با حاصل ضرب دماهای میله $2R$ و صفحه $2L$ باشد. این مساله نیازمند روش حدس و خطا است ولی با توجه به این که انتقال حرارت از دو سر استوانه خیلی کمتر از سطح خارجی آن به محیط است، می توان از اثرات صفحه در تقریب اولیه صرف نظر کرد. عدد Bi به صورت زیر محاسبه می شود:

$$Bi_R = \frac{hR}{k} = \frac{100 \times 1/12}{1.25} = \frac{1}{1.5}, \quad \frac{1}{Bi_R} = 1.5,$$

و از نمودار شکل ۵-۱۶ برای $r/R = 0$ و $(T-T_{\infty})/(T_0-T_{\infty}) = 0.25$ عدد Fo را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$Fo_R = \alpha t / R^2 \cong 1.36,$$

که زمان به دست آمده نیز به این صورت است:

$$t = 1.36 \frac{R^2}{\alpha} = 1.36 \frac{(1/12)^2}{12.5/(500 \times 0.1)} = 0.038 \text{ hr} \quad (2 \text{ دقیقه و } 17 \text{ ثانیه})$$

در این زمان انتقال حرارت از دو سر استوانه کاهش می یابد. با روش حدس خطا، $t = 0.035$ به دست خواهد آمد (۲ دقیقه و ۶ ثانیه). اعداد فوری براساس این زمان به صورت زیر خواهد بود.

$$Fo_R = \frac{\alpha t}{R^2} = \frac{0.25 \times 0.035}{(1/12)^2} = 1.26,$$

$$Fo_L = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{0.25 \times 0.035}{(2/12)^2} = 0.316.$$

با استفاده از شکل ۵-۱۶ و برای $r/R = 0$ ، $1/Bi_R = 1.5$ و $Fo_R = 1.26$ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2R} \cong 0.28, \quad r/R = 0,$$

و به وسیله شکل ۵-۱۴ برای $x/L = 0$ ، $1/Bi_L = 1/2Bi_R = 0.75$ و $Fo_L = 0.315$ نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\left(\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right)_{2L} \cong 0.88, \quad x/L = 0.$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = D(0)\psi(\mathbf{r}, t) + \int_0^t \psi(\mathbf{r}, t-s) \frac{dD(s)}{ds} ds. \quad (۵-۱۰۴)$$

این تعریف، انتگرال جمع‌پذیری دوهمایل است که جواب $\phi(\mathbf{r}, t)$ متناظر با اغتشاشات وابسته به زمان $D(t)$ را، برحسب جواب $\psi(\mathbf{r}, t)$ متناظر با اغتشاشات پله‌ای از همان نوع، ارائه می‌کند. ممکن است شکل دیگر معادله (۵-۱۰۴) با انتگرال‌گیری جزء به جزء حاصل شود:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = D(0)\psi(\mathbf{r}, t) - D(s)\psi(\mathbf{r}, t-s)|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t D(s) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t-s)}{\partial s} ds,$$

و از آنجایی که:

$$\partial \psi(\mathbf{r}, t-s) / \partial s = -\partial \psi(\mathbf{r}, t-s) / \partial t,$$

معادله به این صورت در می‌آید:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = D(0)\psi(\mathbf{r}, t) + \int_0^t D(s) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t-s)}{\partial s} ds. \quad (۵-۱۰۵)$$

به‌علاوه، طبق شرایط مساله $\psi(\mathbf{r}, t) = 0$ بوده، بنابراین معادله (۵-۱۰۵) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_0^t D(s) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t-s)}{\partial s} ds. \quad (۵-۱۰۶)$$

کاربرد روش بالا اکنون با سه مثال شرح داده می‌شود. ابتدا مساله‌ای در حالت متمرکز در نظر گرفته می‌شود که با استفاده از روش‌های استاندارد قابل حل است.

مثال ۵-۱۴. مطلوبست حل مجدد مساله تناوبی ناپایای ۵-۱، با استفاده از جواب گذرا و انتگرال دوهمایل.

با توجه به نکات این بخش، جواب حالت گذرا چنین می‌باشد:

$$\frac{\psi(t)}{q''/h} = 1 - e^{-mt}, \quad (۲-۱۷۲)$$

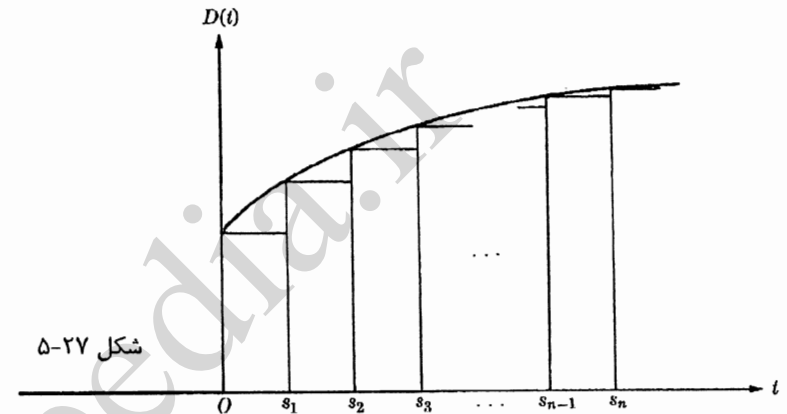
و تابع اغتشاش زمانی آن به‌صورت ذیل است:

$$D(t) = \cos \omega t. \quad (۵-۱۰۷)$$

با قرار دادن معادلات (۲-۱۷۲) و (۵-۱۰۷) در انتگرال دوهمایل، معادله (۵-۱۰۴)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\phi(t)}{q''/h} = 1 - e^{-mt} - \omega \int_0^t [1 - e^{-m(t-s)}] \sin \omega s ds, \quad (۵-۱۰۸)$$

مقدار ثابت نگه داشته می‌شود، که در این زمان دوباره ناگهان اغتشاش به مقدار $D(s_1) - D(0)$ افزایش می‌یابد و تا زمان $t = s_2$ در این مقدار ثابت می‌ماند، و به همین ترتیب، کار ادامه می‌یابد.



شکل ۵-۲۷

سپس با توجه به خطی بودن مساله، می‌توان تغییرات دما را بعد از لحظه $t = s_n$ به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) = & D(0)\psi(\mathbf{r}, t) + [D(s_1) - D(0)]\psi(\mathbf{r}, t - s_1) \\ & + [D(s_2) - D(s_1)]\psi(\mathbf{r}, t - s_2) \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & + [D(s_n) - D(s_{n-1})]\psi(\mathbf{r}, t - s_n). \end{aligned} \quad (۵-۱۰۲)$$

با تعریف:

$$D(s_m) - D(s_{m-1}) = \Delta D_m, \quad s_m - s_{m-1} = \Delta s_m$$

معادله (۵-۱۰۲) بازنویسی می‌شود:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = D(0)\psi(\mathbf{r}, t) + \sum_{m=1}^n \psi(\mathbf{r}, t - s_m) \left(\frac{\Delta D}{\Delta s} \right)_m \Delta s_m. \quad (۵-۱۰۳)$$

بنابراین در حالتی که $n \rightarrow \infty$ ، کلیه بازه‌های بین مراحل متوالی به صفر میل می‌کنند، و با تعریف انتگرال نتیجه زیر حاصل می‌شود:

با حل انتگرال (۵-۱۰۸) و بازآرایی آن جواب زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\phi(t)}{q''/h} = \frac{m}{(m^2 + \omega^2)^{1/2}} \cos(\omega t - \alpha) - \frac{m^2 e^{-m t}}{(m^2 + \omega^2)}$$

که مشابه معادله (۵-۳) است.

بعضی مواقع معمول‌تر است که از شکل دیگر انتگرال دوهامیل که در رابطه (۵-۱۰۶) آمده است، استفاده شود. به‌عنوان مثال، با قرار دادن معادلات (۲-۱۷۲) و (۵-۱۰۷) در معادله (۵-۱۰۶)، نتیجه زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{\phi(t)}{q''/h} = m \int_0^t e^{-m(t-s)} \cos \omega s \, ds, \quad (5-109)$$

که باز هم به همان معادله (۵-۳) خواهد رسید. هر چند که شکل انتگرال معادله (۵-۱۰۹) مشابه انتگرال معادله (۵-۱۰۸) است، حل دومی راحت‌تر از اولی می‌باشد.

روش گفته شده می‌تواند به شکل توزیع‌شده همین مساله نیز تعمیم داده شود. بنابراین، با وارد کردن معادلات (۵-۳۴) و (۵-۱۰۷) در معادله (۵-۱۰۶) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\phi(x,t)}{q''L/k} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\lambda_n^2 (a\lambda_n^2 \cos \omega t + \omega \sin \omega t - a\lambda_n^2 e^{-a\lambda_n^2 t})}{(\lambda_n L)(\lambda_n L + \sin \lambda_n L \cos \lambda_n L)(a^2 \lambda_n^4 + \omega^2)} \cos \lambda_n x. \quad (5-110)$$

مراحل حل مساله به خواننده واگذار می‌شود.

مثال ۵-۱۵. فرض کنید دمای محیط در مثال ۵-۲ به‌طور خطی با زمان تغییر می‌کند. ضریب انتقال حرارت همچنان بزرگ فرض شود. مطلوبست به‌دست آوردن دمای ناپایای صفحه. جواب مثال ۵-۲ که به‌صورت $\psi = (T - T_0)/(T_{\infty} - T_0)$ نوشته شد، می‌تواند برای جواب ϕ در مساله حاضر مورد استفاده قرار گیرد. در این جا ψ که از معادله (۵-۱۰) حاصل می‌شود باید در رابطه زیر صدق کند:

$$\psi(x,t) = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n L)} e^{-a\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x, \quad (5-111)$$

و اغتشاش وابسته به زمان (دمای سطح) به‌صورت زیر است:

$$D(t) = (\phi_0/t_0)t, \quad (5-112)$$

که در آن $\phi_0 = T_{\infty} - T_0$ و t_0 یک ثابت زمانی است. با قرار دادن x به جای x و قرار دادن معادلات (۵-۱۱) و (۵-۱۱۲) در (۵-۱۰۴) چنین نتیجه می‌شود:

$$\phi(x,t) = \frac{\phi_0}{t_0} \int_0^t \left[1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n L)} e^{-a\lambda_n^2 (t-s)} \cos \lambda_n x \right] ds. \quad (5-113)$$

و با حل انتگرال فوق خواهیم داشت:

$$\frac{\phi(x,t)}{\phi_0} = \left(\frac{t}{t_0} \right) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - e^{-a\lambda_n^2 t})}{(\lambda_n L)(a\lambda_n^2 t_0)} \cos \lambda_n x. \quad (5-114)$$

به‌طور مشابه، با قرار دادن معادلات (۵-۱۱۱) و (۵-۱۱۲) در (۵-۱۰۶) نتیجه می‌شود:

$$\phi(x,t) = 2 \frac{\phi_0}{t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (a\lambda_n^2)}{(\lambda_n L)} e^{-a\lambda_n^2 t} \int_0^t s e^{a\lambda_n^2 s} ds. \quad (5-115)$$

با حل انتگرال رابطه فوق، شکل دیگر جواب به‌دست می‌آید:

$$\frac{\phi(x,t)}{\phi_0} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n L)} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right) - \left(\frac{1 - e^{-a\lambda_n^2 t}}{a\lambda_n^2 t_0} \right) \right] \cos \lambda_n x. \quad (5-116)$$

از آنجایی که $\psi(x,0) = 0$ ، از معادله (۵-۱۱۱) خواهیم داشت:

$$1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\lambda_n L)} \cos \lambda_n x.$$

با استفاده از این نتیجه، مشخص می‌شود که معادله (۵-۱۱۴) و معادله (۵-۱۱۶) همان‌طور که انتظار می‌رفت، یکسان هستند.

مثال ۵-۱۶. در مثال ۳-۱۲، با در نظر گرفتن این که دمای اولیه کتری برابر دمای محیط T_{∞} بوده و شار حرارتی یکنواخت q'' به‌طور ناگهانی به زیر کتری وارد می‌شود، دمای ناپایای کتری را به‌دست آورید.

در این جا حالت ساده‌ای در نظر گرفته می‌شود که در آن دمای سطح زیرین کتری متمرکز فرض می‌شود (به توضیحات مثال ۳-۱۲ توجه شود). تحلیل متمرکز دمای سطح زیرین نتیجه می‌دهد:

$$\rho c A \delta \frac{dT_2}{dt} = q'' A - h_2 A (T_2 - T_{\infty}), \quad (5-117)$$

که در آن A سطح کل زیر کتری است.

جواب معادله (۵-۱۱۷) با توجه به شرط اولیه $T_2(0) = T_{\infty}$ چنین خواهد شد:

$$\theta_2(t) = \frac{q''}{h_2} (1 - e^{-bt}), \quad (5-118)$$

که در آن $b = h_2 / \rho c \delta$ و $\theta_2(t) = T_2(t) - T_{\infty}$ می‌باشد. حال با به‌کارگیری معادله (۵-۱۱۸) به‌عنوان یک شرط مرزی، می‌توان برای دیواره کتری چنین نوشت:

و جواب معادله (۵-۱۲۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\tau_n(t) = C_n e^{-a(\lambda_n^2 + m^2)t}.$$

از این رو قاعده حاصل ضرب ϕ به صورت زیر حاصل می شود:

$$\phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-a(\lambda_n^2 + m^2)t} \cos \lambda_n x. \quad (5-125)$$

مقدار اولیه معادله (۵-۱۲۵) که برابر $-\phi(x)$ است نتیجه می دهد که:

$$-\frac{q'' \cosh m_1 x}{h_2 \cosh m_1 L} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x. \quad (5-126)$$

ضریب a_n از معادله (۵-۱۲۶) به طور عادی محاسبه می شود:

$$a_n = -(-1)^n \frac{2}{L} \left(\frac{q''}{h_2} \right) \frac{\lambda_n}{m_1^2 + \lambda_n^2}. \quad (5-127)$$

با قرار دادن (۵-۱۲۷) در (۵-۱۲۵) و جمع زدن آن با معادله (۵-۱۲۲)، جواب $\psi(x, t)$ به شکل زیر خواهد شد:

$$\frac{\psi(x, t)}{q''/h_2} = \frac{\cosh m_1 x}{\cosh m_1 L} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_n L) e^{-a(m_1^2 + \lambda_n^2)t}}{(m_1^2 + \lambda_n^2)L^2} \cos \lambda_n x. \quad (5-128)$$

در نهایت، با توجه به این که $D(s) = 1 - e^{-bs}$ و با استفاده از معادله (۵-۱۰۴)، جواب $\theta_1(x, t)$ به صورت زیر حاصل می شود:

$$\frac{\theta_1(x, t)}{q''/h_2} = b \int_0^t \left[\frac{\cosh m_1 x}{\cosh m_1 L} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_n L) e^{-a(m_1^2 + \lambda_n^2)(t-s)}}{(m_1^2 + \lambda_n^2)L^2} \cos \lambda_n x \right] e^{-bs} ds. \quad (5-129)$$

و با انتگرال گیری، دمای ناپایای دیواره کتری حاصل خواهد شد:

$$\frac{\theta_1(x, t)}{q''/h_2} = \frac{\cosh m_1 x}{\cosh m_1 L} (1 - e^{-bs}) + 2 \left(\frac{b}{a} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_n L) \left[e^{-a(m_1^2 + \lambda_n^2)t} - e^{-bt} \right]}{(m_1^2 + \lambda_n^2)L^2 (m_1^2 + \lambda_n^2 - b/a)} \cos \lambda_n x. \quad (5-130)$$

معادله (۵-۱۳۰) می تواند شکل دیگری هم داشته باشد. با تلفیق معادلات (۵-۱۲۶) و (۵-۱۲۷) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} - m_1^2 \theta_1 = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta_1}{\partial t}, \quad m_1^2 = 2h_1/k\delta,$$

$$\theta_1(x, 0) = 0, \quad (5-119)$$

$$\frac{\partial \theta_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \theta_1(L, t) = \frac{q''}{h_2} (1 - e^{-bt}).$$

پیش از حل (۵-۱۱۹)، باید مساله کمکی $\psi(x, t)$ را مورد بررسی قرار داد که فرمولاسیون آن شبیه به معادله (۵-۱۱۹) است به جز در شرط مرزی آخر، که در این جا با اغتشاش پله ای $\theta_1(L, t) = q''/h_2$ جایگزین شده است. ناهمگنی موجود در مساله نشان می دهد که باید اصل جمع پذیری را به صورت $\psi(x, t) = \phi(x, t) + \varphi(x)$ نوشت، به طوری که $\phi(x, t)$ و $\varphi(x)$ در روابط زیر صدق می کنند:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - m_1^2 \phi = 0, \quad \frac{d\phi(0)}{dx} = 0, \quad \phi(L) = \frac{q''}{h_2}, \quad (5-120)$$

و

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - m_1^2 \phi = \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \phi(x, 0) = -\varphi(x), \quad (5-121)$$

$$\frac{\partial \phi(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \phi(L, t) = 0.$$

مساله پایای معادله (۵-۱۲۰) مشابه مثال ۱۰-۳ است که در θ_0 با q''/h_2 جایگزین شده، m_1 نیز به خوبی تعریف شده است. بنابراین با حل معادله (۵-۱۲۰)، خواهیم داشت:

$$\frac{\varphi(x)}{q''/h_2} = \frac{\cosh m_1 x}{\cosh m_1 L}. \quad (5-122)$$

با به کارگیری روش جداسازی متغیرها برای معادله (۵-۱۲۱) چنین نتیجه می شود که:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad (5-123)$$

$$\frac{dX(0)}{dx} = 0, \quad X(L) = 0;$$

$$\frac{d\tau}{dt} + a(\lambda^2 + m^2)\tau = 0. \quad (5-124)$$

جواب معادله (۵-۱۲۳) به این صورت است:

$$X_n(x) = A_n \cos \lambda_n x, \quad \phi_n(x) = \cos \lambda_n x, \quad \text{توابع مشخصه}$$

$$\lambda_n L = (2n + 1)\pi/2, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \text{مقادیر مشخصه}$$

$$\frac{\cosh m_1 x}{\cosh m_1 L} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_n L)}{(m_1^2 + \lambda_n^2) L^2} \cos \lambda_n x, \quad (\delta-131)$$

و با قرار دادن $(m_1^2 - b/a)^{1/2}$ به جای m_1 در معادله $(\delta-131)$:

$$\frac{\cosh(m_1^2 - b/a)^{1/2} x}{\cosh(m_1^2 - b/a)^{1/2} L} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_n L)}{(m_1^2 + \lambda_n^2 - b/a) L^2} \cos \lambda_n x. \quad (\delta-132)$$

سپس، از تفاضل معادلات $(\delta-131)$ و $(\delta-132)$ خواهیم داشت:

$$\frac{\cosh(m_1^2 - b/a)^{1/2} x}{\cosh(m_1^2 - b/a)^{1/2} L} - \frac{\cosh m_1 x}{\cosh m_1 L} = 2 \left(\frac{b}{a} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_n L) \cos \lambda_n x}{(m_1^2 + \lambda_n^2) L^2 (m_1^2 + \lambda_n^2 - b/a)}. \quad (\delta-133)$$

با ضرب کردن معادله $(\delta-133)$ در e^{-bt} و قرار دادن نتیجه در معادله $(\delta-130)$ می‌توان جواب $\theta_1(x, t)$ را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\theta_1(x, t) = \frac{\cosh m_1 x}{\cosh m_1 L} - \frac{e^{-bt} \cosh(m_1^2 - b/a)^{1/2} x}{\cosh(m_1^2 - b/a)^{1/2} L} + 2 \left(\frac{b}{a} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_n L) e^{-a(m_1^2 + \lambda_n^2)t}}{(m_1^2 + \lambda_n^2) L^2 (m_1^2 + \lambda_n^2 - b/a)} \cos \lambda_n x. \quad (\delta-134)$$

معادله $(\delta-134)$ برابر جوابی است که در فصل ۷ با روش لاپلاس به دست خواهد آمد. (رجوع شود به مثال ۷-۱۴)

مراجع

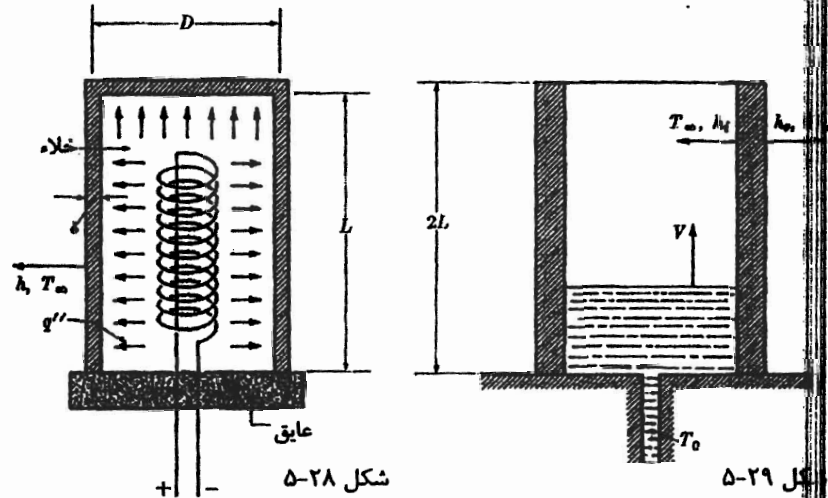
1. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, Conduction of Heat in Solids. Oxford: Clarendon Press, 1959.
2. R. V. CHURCHILL, Fourier Series and Boundary Value problem. New York: McGraw-Hill, 1963.
3. F. B. HILDEBRAND, Advanced Calculus for Engineers. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1956.
4. L. M. K. BOELTER, V. H. CHERRY, H. A. JOHNSON, and R. C. MARTINELLI, Heat Transfer Notes. New York: McGraw-Hill, 1965.
5. H. GRBER, S. ERK, and U. GTIGULL, Fundamental of Heat Transfer. New York: McGraw-Hill, 1961.

مسائل

مسائل ۵-۱ تا ۵-۶ مربوط به سیستم‌های متمرکز می‌باشند.

۵-۱. یک لوله الکترونی با پوشش استیل در شکل ۵-۲۸ نشان داده شده است. ضریب هدایت حرارتی، قطر متوسط، طول، و ضخامت لوله به ترتیب k ، D ، L و δ می‌باشد. ضریب انتقال حرارت

h دمای محیط T_{∞} است. وقتی رشته گرم شود، می‌توان فرض کرد که سطح داخلی لوله در معرض شار حرارتی q'' به‌طور ناگهانی قرار گرفته است. دمای ناپایای تیوب را بیابید.



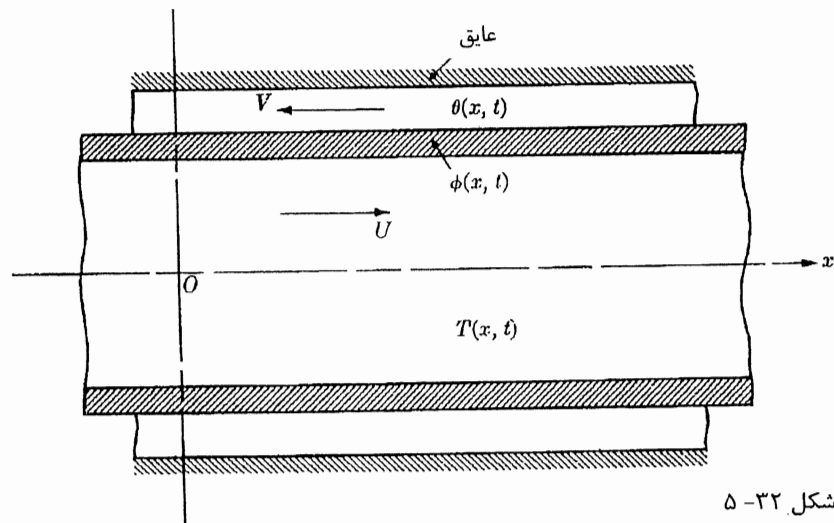
شکل ۵-۲۸

شکل ۵-۲۹

۵-۲. یک لوله عمودی خالی ابتدا در دمای T_{∞} واقع شده است. سپس سیالی با سرعت ثابت V و دمای T_0 شروع به حرکت در لوله می‌کند (شکل ۵-۲۹). انتقال حرارت هدایتی محوری و مقاوت شعاعی لوله قابل صرف‌نظر می‌باشند. چگالی، گرمای ویژه، و سطح مقطع لوله و سیال به ترتیب (ρ_w, ρ_f) ، (c_{pw}, c_{pf}) ، و (A_w, A_f) می‌باشند. می‌دانیم که $(\rho c_p A)_f \gg (\rho c_p A)_w$ می‌باشد. ضرایب انتقال حرارت داخلی و خارجی نیز h_i و h_o داده شده‌اند. انتقال حرارت مابین سیال و محیط در مقایسه با سیال و لوله قابل صرف‌نظر است. مطلوب است محاسبه دمای لوله در وسط آن وقتی سیال به بالای لوله می‌رسد.

۵-۳. یک دیوار دو سیال را مطابق شکل ۵-۳۰ از هم جدا می‌کند. چگالی، ظرفیت حرارتی و ضخامت دیوار و سیال محدود به ترتیب (ρ_w, ρ_f) ، (c_{pw}, c_{pf}) ، و (δ_w, δ_f) می‌باشند. سیستم ابتدا در دمای یکنواخت T_0 قرار دارد. سپس دمای سیال نامحدود، ناگهان به T_{∞} تغییر می‌یابد. ضرایب انتقال حرارت h_1 و h_2 می‌باشند. دمای ناپایای دیواره و سیال محدود را پیدا کنید. [راهنمایی: از عملگر $D \equiv d/dt$ در فرمولاسیون مساله استفاده کنید. معادلات جبری را به‌طور همزمان به‌وسیله روش حذفی و یا دترمینان حل کنید. D را با d/dt جایگزین کنید و به روش نای کلاسیک دو معادله دیفرانسیل درجه دوم خطی مجزا را که با ضرایب ثابت به دست آمده حل کنید. ضرایب ثابت انتگرال را با قرار دادن جواب‌ها در معادله حاکم دیوار یا سیال، حذف کنید. سپس ضرایب باقیمانده از انتگرال را به کمک شرط اولیه مساله حل کنید.]

۵-۵. یک تبادل گر حرارتی با دو سیال جریان متقاطع به وسیله دو لوله هم‌محور ساخته شده است (شکل ۵-۳۲). ظرفیت گرمایی لوله داخلی قابل صرف‌نظر نمی‌باشد. سیستم در دمای اولیه و یکنواخت T_0 واقع است. سپس ناگهان دمای درونی یکی از سیال‌ها به T_∞ تغییر می‌یابد. مساله را بر مبنای تحلیل متمرکز شعاعی فرموله کنید.



شکل ۵-۳۲

۵-۶. یک لامپ روشنایی معمولی را در نظر بگیرید (شکل ۵-۳۳). (الف) دمای پایای سطحی لامپ را به دست آورید. (ب) زمان لازم برای این که دمای سطح لامپ به حالت پایا برسد را محاسبه کنید.
داده‌ها:

$$P = 200 \text{ watts,}$$

$$\rho = 170 \text{ Btu/lbm} \cdot ^\circ\text{F,}$$

$$c_p = 0.2 \text{ lb/ft}^3,$$

$$D = 3 \text{ in.}$$

$$\delta = \frac{1}{64} \text{ in.,}$$

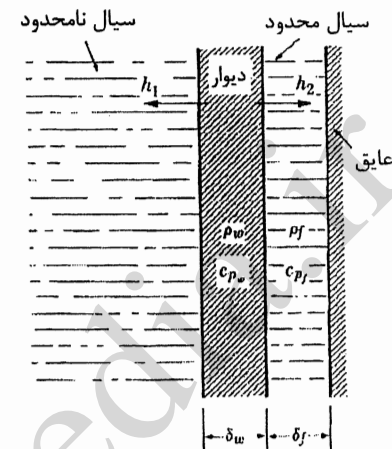
$$\alpha = 0.10 \text{ متر}^2/\text{ثانیه}$$

$$T_\infty = 70^\circ\text{F,}$$

مسائل ۵-۷ الی ۵-۳۲ مربوط به سیستم‌های توزیع شده هستند.

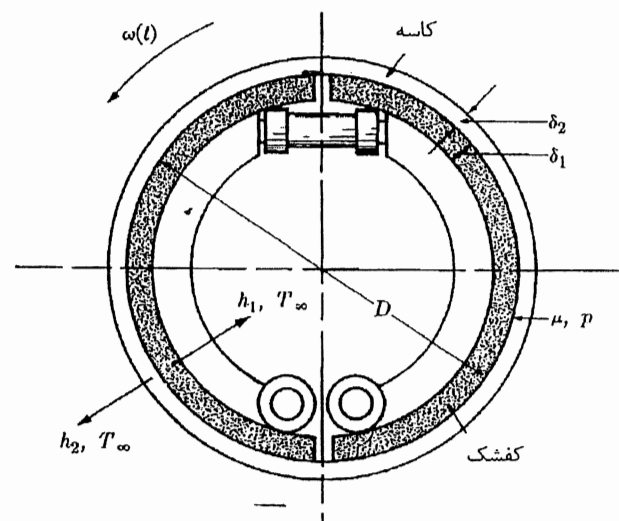
۵-۷. شکل کلاسیک معادله هدایت یک‌بعدی ناپایا یعنی معادله زیر، تخمین درجه اول قانون اول ترمودینامیک است که با قانون هدایت حرارتی تلفیق شده است.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



شکل ۵-۳۰

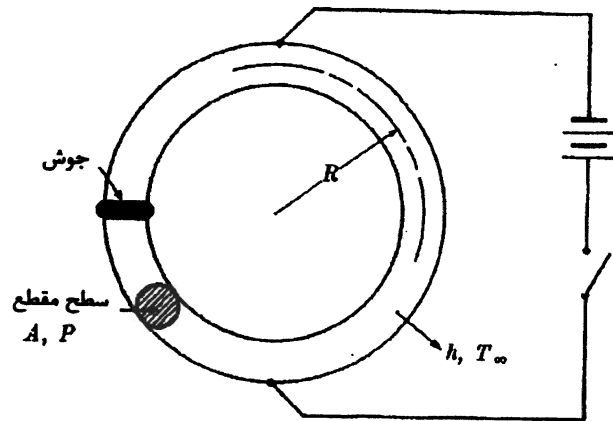
۵-۴. سیستم ترمز یک ماشین در شکل ۵-۳۱ آمده است. چگالی، ظرفیت گرمایی و ضخامت کفشک ترمز و کاسه آن به ترتیب (ρ_1, ρ_2) ، (c_{p1}, c_{p2}) و (δ_1, δ_2) می‌باشد. سیستم در دمای اولیه یکنواخت T_0 واقع است. طی زمان ترمز به مدت Δt ، فشار p بین کفشک ترمز و کاسه همانند ضرایب اصطکاک μ ثابت بوده و سرعت زاویه‌ای $\omega(t)$ نیز مشخص می‌باشد. از اثرات خمیدگی صرف‌نظر می‌شود.
(الف) مساله را فرموله کنید. (ب) افزایش دما در کفشک و کاسه را در طول زمان Δt محاسبه کنید.



شکل ۵-۳۱

۱۲-۵. یک مقاومت الکتریکی حلقه‌ای شکل، با گرد کردن و جوش دادن یک سیم مستقیم باخته شده است (شکل ۲۵-۵). فرض کنید مقاومت الکتریکی سیم در نقطه جوش در طول l آیند جوشکاری به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.

بر ابتدا این حلقه در دمای محیط T_{∞} قرار دارد، سپس توان الکتریکی به آن اعمال می‌شود. توزیع دما را در این جسم بیابید.



شکل ۳۵-۵

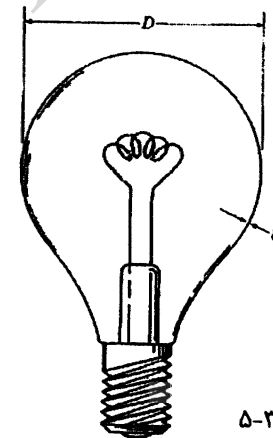
حالتی که صفحات در فاصله $0 \leq x < +\infty$ در دمای صفر ثابت نگه داشته شده‌اند و در فاصله $-\infty < x \leq 0$ عایق باشند، و سیال در بالادست جریان دچار تغییر دمای ناگهانی به θ_0 شود (شکل ۵-۳۶ الف)

(ii) حالتی که دمای صفحات در فاصله $0 \leq x < +\infty$ در صفر نگه داشته شده و به‌طور ناگهانی در فاصله $-\infty < x \leq 0$ در معرض دمای θ_0 قرار می‌گیرد. (شکل ۳۶-۵ ب). توزیع دما را در این حالت بیابید.

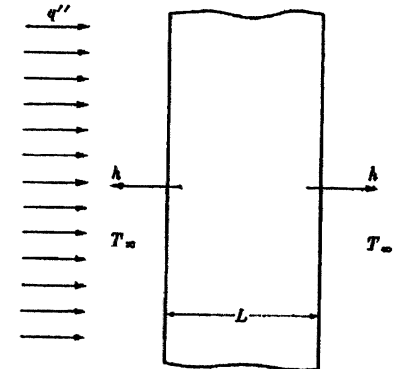
٢٤٨

(الف) نشان دهید که این معادله با صرفنظر کردن از تغییرات زمانی هدایت حرارتی در مقایسه با تغییرات مکانی آن و همچنین با صرفنظر کردن از تغییرات مکانی انرژی داخلی در مقایسه با تغییرات آن با زمان نیز حاصل می‌شود. (ب) نشان دهید که قسمت (الف) یک تخمین معمول در فرمولاسیون تئوری‌های مختلف (هیدرودینامیک، دینامیک گاز، انتقال حرارت، الاستیکی، الکترومغناطیس و غیره) می‌باشد و می‌تواند به ترتیب زیر تعمیم داده شود: در بیان یک قانون عمومی [که با قانون یا قوانین خاص دیگر تلفیق شده باشد] برای یک سیستم یا یک حجم کنترل، تغییرات برحسب زمان یک سطح در مقابل تغییرات مکانی (فضایی) آن قابل صرفنظر است، همان‌طور که تغییرات مکانی یک حجم در مقابل تغییرات آن با زمان قابل صرفنظر کردن خواهد بود.

۵-۸. (الف) مثال ۴-۵ را (فرمولاسیون دیفرانسیلی مثال ۲-۲) برای ضریب انتقال حرارت محدود دوباره حل کنید (ب) مثال ۴-۵ را با روش انتگرالی و با به کارگیری پروفایل درجه دوم، مجدداً حل کنید (در مثال ۲-۲ پروفایل درجه اول آمده است).



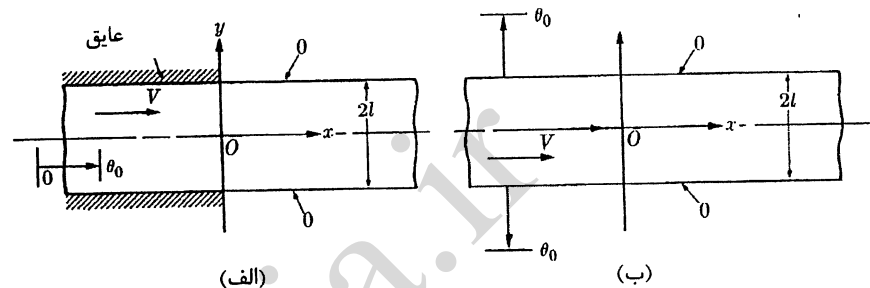
شکل ۳۳-۵



شکل ۳۴-۵

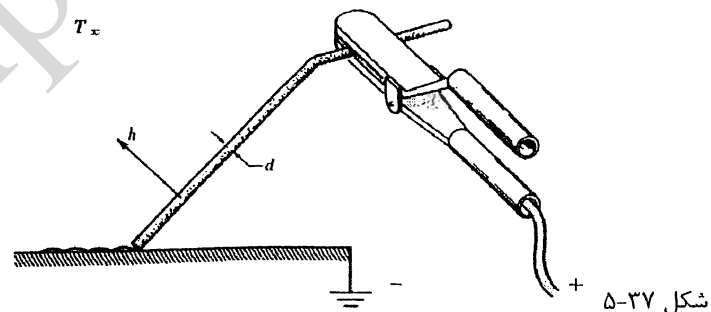
۹-۵. یکی از سطوح یک صفحه مسطح به ضخامت L ناگهان در معرض شار حرارتی q'' قرار می‌گیرد (شکل ۳۴-۵) دمای اولیه صفحه برابر دمای محیط و T_∞ است. ضریب انتقال حرارت برای هر دو طرف صفحه یکسان و h می‌باشد. دمای ناپایایی صفحه را پیدا کنید.

۱۰-۵. جواب مساله ناپایای مربوطه به مثال ۱۰-۳ را بیابید. (به مثال ۱۴-۳ به عنوان جواب تخمینی درجه اول توجه کنید) فرض کنید که دمای اولیه برابر دمای محیط و T_{∞} است و دمای پایه ناگهان از T_{∞} به T_0 تغییر می‌یابد.



شکل ۵-۳۶

۵-۱۴. سرعت ذوب را برای الکتروذ جوشکاری در شکل ۵-۳۷ پیدا کنید. قطر و طول اولیه الکتروذ d و L می‌باشند. ضریب انتقال حرارت h ، دمای محیط T_∞ و توان الکتریکی اعمال شده P می‌باشد. می‌توان فرض کرد که نوک الکتروذ بلافاصله به دمای ذوب می‌رسد، و نیز تغییرات شعاعی دما قابل صرف نظر است.



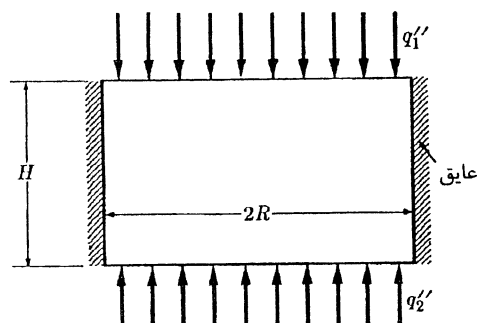
شکل ۵-۳۷

۵-۱۵. مثال ۵-۴ و مساله ۵-۸ (الف) را برای یک استوانه بسیار طولانی و جامد به شعاع R مجدداً حل کنید.

۵-۱۶. مثال ۵-۵ را برای یک استوانه جامد بسیار طولانی به شعاع R حل کنید.

۵-۱۷. مساله ۳-۳۰ را دوباره در نظر بگیرید (شکل ۳-۶۴). هر دو دیسک ابتدا به حالت ساکن قرار دارند و دمایشان برابر دمای محیط T_∞ است. سپس دیسک بالایی ناگهان با سرعت زاویه‌ای ω شروع به چرخش می‌کند. دمای ناپایای سیستم را پیدا کنید، فرض کنید میزان فرسایش ثابت است.

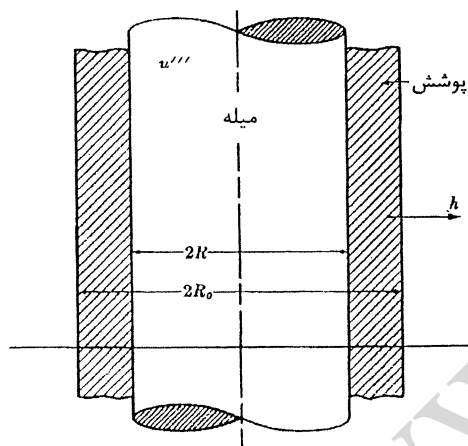
۵-۱۸. مساله ۳-۳۱ (شکل ۳-۶۵) را در نظر بگیرید. فرض کنید دمای اولیه لوله برابر دمای محیط و T_∞ است و لوله ناگهان توسط میعان بخار در دمای T_0 پر می‌شود. دمای ناپایای پره‌ها را پیدا کنید، ضمن این که فرض کنید هدایت حرارتی دیواره لوله در مقایسه با پره‌ها بزرگ است.



شکل ۵-۳۸

۵-۱۹. پیرامون استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع H عایق شده است (شکل ۵-۳۸). دمای اولیه استوانه T_0 است سپس بالا و پایین استوانه به ترتیب در معرض شارهای q_1'' و q_2'' قرار می‌گیرد. توزیع دما را در استوانه پیدا کنید.

۵-۲۰. راکتور حوضچه‌ای مساله ۲-۱۱ را دوباره در نظر بگیرید، این بار فرض کنید ضخامت پوشش قابل ملاحظه باشد، انرژی داخلی به صورت یکنواخت تولید شده و ضریب انتقال حرارت محدود باشد (شکل ۵-۳۹). دمای ناپایای پیل سوختی را به روش انتگرالی به دست آورید.

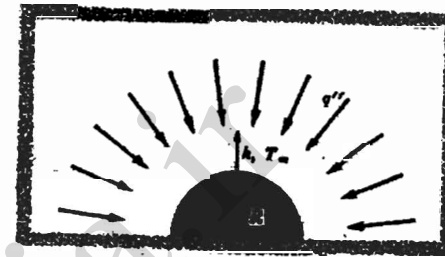


شکل ۵-۳۹

۵-۲۱. مثال ۵-۴ و مساله ۵-۸ (الف) را برای یک کره به شعاع R حل کنید.

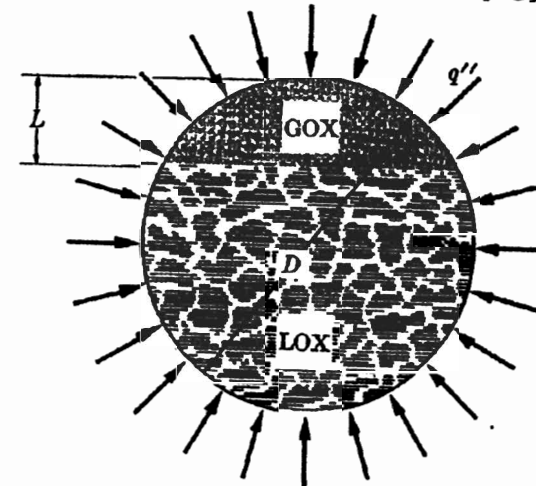
۵-۲۲. مثال ۵-۵ را برای یک کره جامد به شعاع R حل کنید.

۵-۲۳. بیسکوییتی که در دمای اولیه T_0 قرار دارد در اجاقی به دمای یکنواخت T_∞ حرارت داده می‌شود. (شکل ۵-۴۰) فرض کنید بیسکویت به صورت نیمکره‌ای جامد است به شعاع R ، که خواص آن ثابت باقی می‌ماند. توزیع دما را در بیسکویت پیدا کنید.



شکل ۵-۴۰

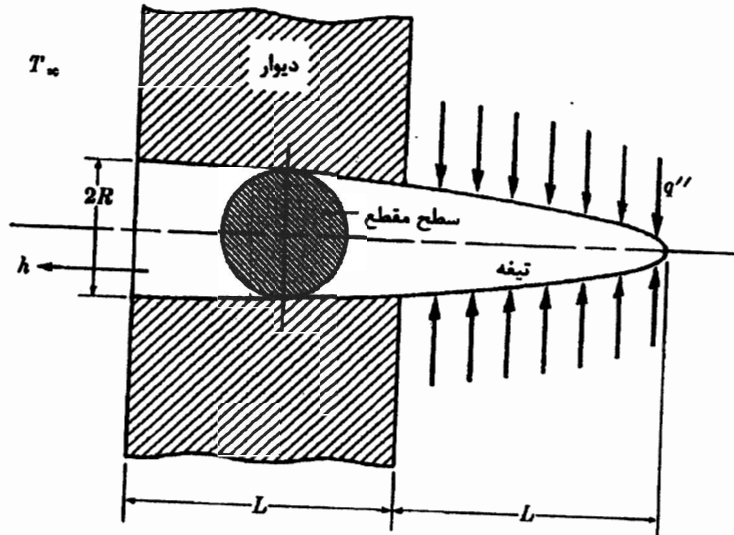
۵-۲۴. حامل کروی یک سفینه فضایی در ابتدا حاوی اکسیژن گاز و مایع، GOX و LOX در دمای یکنواخت T_s است. حال فرض کنید سفینه در معرض میدان گرانش صفر قرار گرفته و شار حرارتی ثابت q'' در طول گردش و پرواز سفینه به آن وارد می‌شود. در نتیجه فرایند تخلیه گاز را در فشار و چگالی ثابت GOX خواهیم داشت که از قانون گاز کامل پیروی می‌کند. تجربیات اخیر نشان داده که GOX تحت تاثیر گرانش صفر، به شکل کره صلب در می‌آید. برای ساده‌سازی مساله، از انتقال جرم بین فازی در GOX و LOX صرف‌نظر کنید. دمای ناپایای LOX را بیابید.



شکل ۵-۴۱

۵-۲۵. یک تیغه با سطح مقطع متغیر در دیواری به ضخامت L تعبیه شده است (شکل ۴۲-۵). سطح مقطع طولی و عرضی این تیغه دایره و بیضی است. شعاع اصلی و طول تیغه نیز R و $2L$ می‌باشد. ضریب هدایت حرارتی دیوار در برابر تیغه قابل شار حرارتی صرف‌نظر است. در ابتدا سیستم

در فضای محیط T_∞ قرار دارد. سپس بطور ناگهانی تیغه از اطراف در معرض شار حرارتی یکنواخت قرار می‌گیرد. ضریب انتقال حرارت پایه h است دمای ناپایای تیغه را پیدا کنید.

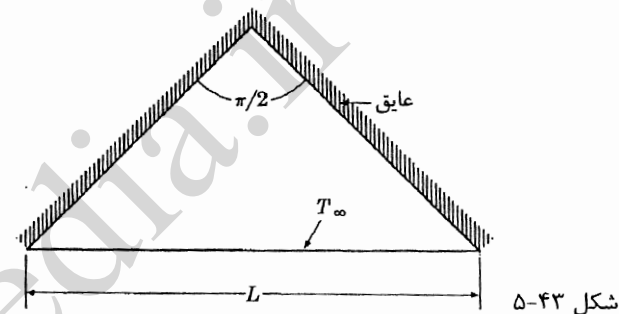


شکل ۵-۴۲

۵-۲۶. کره جامدی به شعاع R_0 در دمای اولیه T_0 به‌طور ناگهانی در اتاق بزرگی که دیواره‌های آن در دمای یکنواخت T_w ($T_w \gg T_0$) قرار داده می‌شود. دمای محیط اتاق صفر فرض می‌شود. ضریب انتقال حرارت بین کره و محیط h است. ضریب صدور کره و دیواره‌ها ϵ_w و ϵ_s می‌باشد. گرمای نهان ذوب و دمای ذوب کره h_{sl} و T_m می‌باشد. (الف) دمای ناپایای کره را بر مبنای تحلیل متمرکز به‌دست آورید. این دما را به‌عنوان تابعی از زمان رسم کنید، وابستگی آن را به بزرگی نسبی تشعشع و جابه‌جایی نشان دهید (ب) قسمت (الف) را تکرار کنید، و از روش تابع‌شده انتگرالی استفاده کنید.

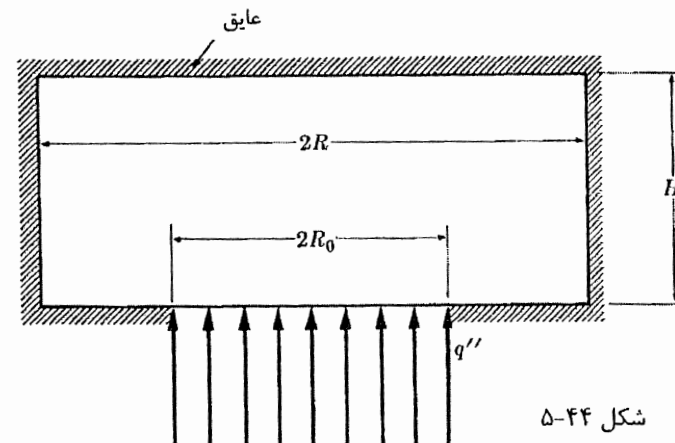
۵-۲۷. مساله ناپایای مربوط به گرمکن الکتریکی مثال ۱-۲ را در نظر بگیرید (به مساله ۱۳-۲ که یک تخمین درجه اول بر مبنای فرمولاسیون انتگرالی است، توجه کنید). در ابتدا گرمکن در دمای محیط T_∞ قرار دارد. سپس انرژی داخلی ثابت u'' به‌طور یکنواخت در گرمکن تولید می‌شود. دمای ناپایای مربوط به گرمکن را در شرایط: (i) ضریب انتقال حرارت بزرگ (ii) ضریب انتقال حرارت متوسط، به‌دست آورید.

۵-۲۸. میله بلند با سطح مقطع مثلثی در شکل ۵-۴۳ را در نظر بگیرید. دمای اولیه میله یکنواخت و برابر T_0 بوده و دو سطح دیگر آن عایق می‌باشند. دمای سطح سوم ناگهان به T_∞ تغییر می‌یابد. آیا این مساله می‌تواند حاصل ضرب دو مساله ناپایای یک‌بعدی باشد؟



شکل ۵-۴۳

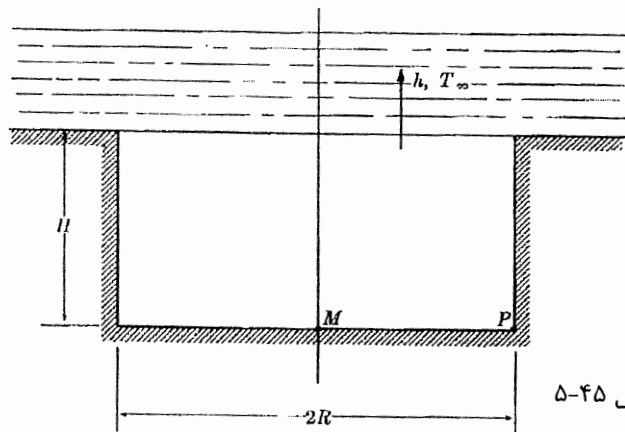
۵-۲۹. یک استوانه جامد به ارتفاع H و شعاع R را در نظر بگیرید. دمای اولیه آن T_∞ است. سطح استوانه در همه جا عایق است مگر در یک قسمت گرد در زیر آن به شعاع R_0 که به‌طور ناگهانی در معرض شار حرارتی یکنواخت q'' قرار می‌گیرد (شکل ۵-۴۴). دمای ناپایای استوانه را بیابید.



شکل ۵-۴۴

۵-۳۰. یک استوانه جامد به شعاع $R = 1''$ و ارتفاع $H = 1''$ (شکل ۵-۴۵) را در نظر بگیرید. قسمت زیرین و دور تا دور استوانه عایق است. چگالی، گرمای ویژه، و هدایت حرارتی آن به ترتیب، $\rho = 500 \text{ lb/ft}^3$ و $c_p = 0.1 \text{ Btu/lbm} \cdot ^\circ\text{F}$ و $k = 10 \text{ Btu/ft} \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{F}$ می‌باشند. دمای

اولیه استوانه $T_0 = 50^\circ\text{F}$ است، سپس سطح بالایی آن توسط سیالی که در دمای $T_\infty = 200^\circ\text{F}$ می‌باشد، پوشیده می‌شود. ضریب انتقال حرارت $h = 30 \text{ Btu/ft}^2 \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{F}$ است (الف) دمای نقاط M و P را بعد از گذشت ۴۰ دقیقه حساب کنید. (ب) میزان انتقال حرارت به استوانه را در همین بازه زمانی پیدا کنید.



شکل ۵-۴۵

۵-۳۱. فرمولاسیون متمرکز را در مثال ۲-۲ دوباره در نظر بگیرید. فرض کنید که انرژی داخلی تولیدی در صفحات سوخت (الف) به‌طور خطی با تابع $q = q_0(t/t_0)$ افزایش می‌یابد. (ب) به‌طور نمایی با تابع $q = q_0(1 - e^{-bt})$ افزایش می‌یابد (پ) توسط تابع $q = q_0(1 + \epsilon \sin \omega t)$ نوسان می‌کند. دمای ناپایای صفحات را برپایه این توضیحات حساب کنید.

۵-۳۲. مساله قبل را برای همان مثال با استفاده از فرمولاسیون توزیع یافته حل کنید.

