



ملی یونی ، دانشگاه ملی ایرانیان

❖ **عنوان کتاب:** مدار های الکتریکی

❖ **نویسنده:** ویلیام هیت

❖ **زبان:** فارسی

❖ **تعداد صفحات:** ۳۷۹ صفحه

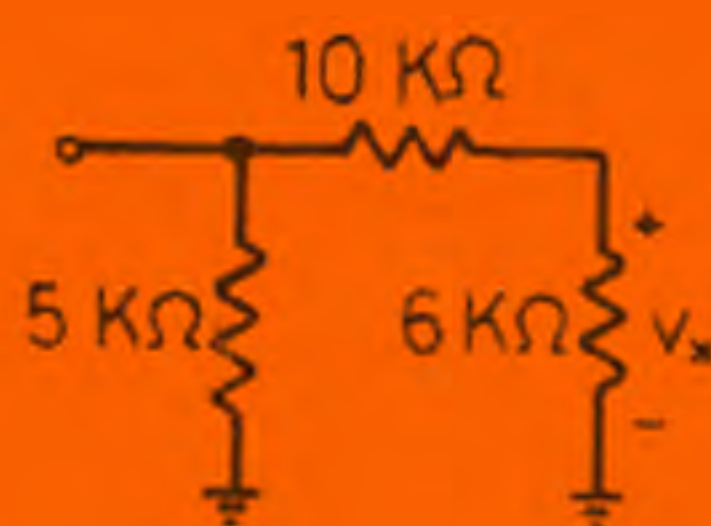
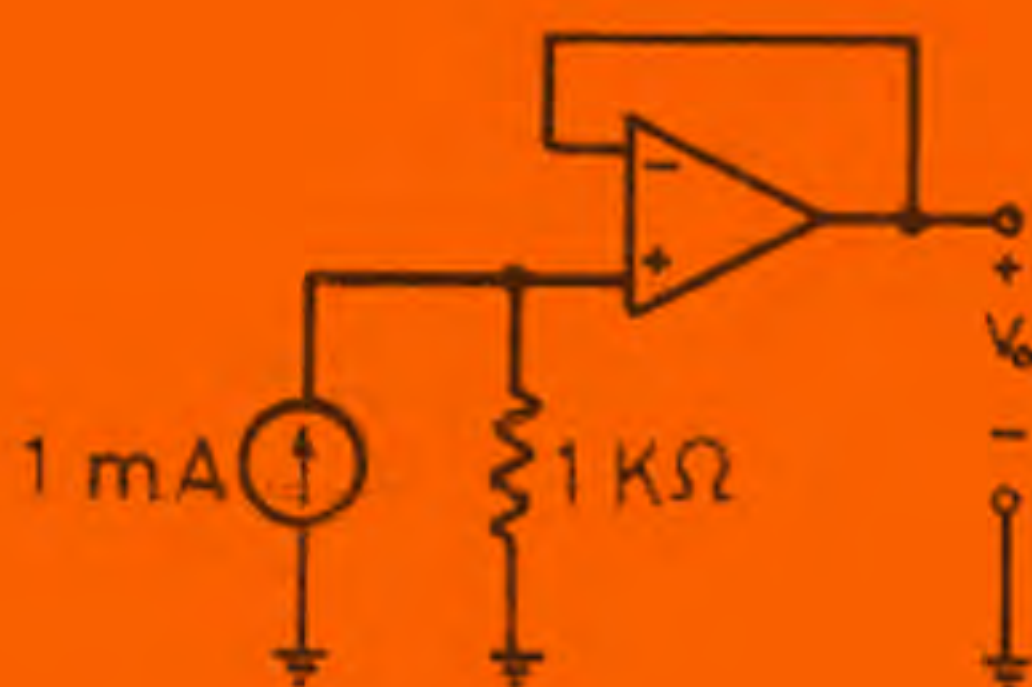
ملی یونی ، دانشگاه ملی ایرانیان ، در راستای پیشرفت کیفیت آموزش و ارتقای سطح علمی دانشجویان و دانش آموزان ایران عزیز اقدام به برپایی محیطی پویا توسط برترین دانشجویان کشور کرده است و این افتخار را دارد تا با بهترین آموزش ها توسط برترین اساتید همراه شما باشد .

- اگر علاقمند به همکاری در راستای تولید محتوای آموزشی هستید
- اگر علاقمند به تدریس به عنوان مدرس آموزشی در سایت ملی یونی و **کسب درآمد** هستید
- اگر به دنبال کتاب های آموزشی ، معرفی کتاب ، آموزش رایگان و... هستید
- اگر به دنبال تحقیق و شناخت بیشتر دانشگاه های خود و دیگر دانشگاه ها هستید
- اگر علاقمند به اخبار علمی و آموزشی کشور و سراسر جهان و همچنین آخرین دستاوردهای دانشجویان هستید
- اگر به دنبال اطلاعات بیشتر درمورد رشته ی موردعلاقه خود و همچنین بازار کار متناسب با رشته ی تحصیلی خود هستید
- اگر علاقمند به شرکت در همایش ها ، رویداد های آموزشی ، سمینار های آموزشی و ... هستید

Meliuni.com: کافیهست به سایت ملی یونی مراجعه کنید.: Meliuni.com

ما را در شبکه های اجتماعی به آدرس @meliuniCOM دنبال کنید و رایگان از برترین مطالب بهره مند شوید و با سایر دانشجویان سراسر کشور تعامل داشته باشید.

تحليل مدارهای الکتریکی



پرفورمینگ نام هیت

مترجم:

مهندس امیرشمارزاده

پرفسور ویلیام هیت

تحلیل مدارهای الکتریکی

مهندس امیر ستارزاده



سال هزار و سیصد و هفتاد و یک خورشیدی

این کتاب ترجمه‌ای است از جدیدترین چاپ کتاب نسخه انگلیسی آن

ENGINEERING CIRCUIT ANALYSIS
INTERNATIONAL STUDENT EDITION

Copyright © 1986

Exclusive rights by McGraw-Hill Book Co. — Singapore
for manufacture and export. This book cannot be re-exported
from the country to which it is consigned by McGraw-Hill.

تحلیل مدارهای الکتریکی

پروفسور ویلیام هیت

مترجم: مهندس امیر ستارزاده

ناشر: نشر روایت - نشر قائم

چاپ اول - ۳۰۰۰ نسخه - پاییز ۱۳۷۱

حروفچینی مؤسسه همراه - چاپ احمدی

تحليل مدارهای الکتریکی

فهرست مطالب

عنوان پیشگفتار	صفحه
-------------------	------

بخش اول - مدارهای مقاومتی

فصل ۱ - تعاریف و واحدها	۳
۱-۱ مقدمه	۳
۱-۲ دستگاه آحاد	۵
۱-۳ واحد بار	۹
۱-۴ جریان	۱۲
۱-۵ ولتاژ	۱۶
۱-۶ قدرت	۱۹
۱-۷ انواع مدارها و عناصر مداری	۲۱
مسائل	۲۷

فصل ۲ - قوانین تجربی و مدارهای ساده	۳۲
۲-۱ مقدمه	۳۲
۲-۲ قانون اهم	۳۳
۲-۳ قوانین کیرشوف	۳۶
۲-۴ تحلیل یک مدار تک حلقه‌ای	۴۲

۴۷	۲-۵ مدار یک جفت گرهی
۵۰	۲-۶ ترکیب مقاومتها و منابع
۵۶	۲-۷ تقسیم ولتاژ و جریان
۶۰	۲-۸ یک مثال عملی: تقویت کننده عملیاتی
۶۴	مسائل
۷۶	فصل ۳ - چند تکنیک مفید تحلیل مدار
۷۶	۳-۱ مقدمه
۷۷	۳-۲ تحلیل گره
۸۹	۳-۳ تحلیل چشمه‌ای (مش)
۹۹	۳-۴ خطی بودن و جمع اثرها
۱۰۴	۳-۵ تبدیل منابع
۱۱۱	۳-۶ قضایای تونن و نورتن
۱۲۱	۳-۷ درختها و تحلیل گرهی عمومی
۱۳۰	۳-۸ لینکها و تحلیل حلقه
۱۳۷	مسائل

بخش دوم - مدارهای گذرا

۱۵۳	فصل ۴ - سلف و خازن
۱۵۳	۴-۱ مقدمه
۱۵۴	۴-۲ سلف
۱۵۹	۴-۳ روابط انتگرالی برای سلف
۱۶۴	۴-۴ خازن
۱۷۱	۴-۵ ترکیب نمودن سلفها و خازنها

۴-۶ تناظر	۱۷۵
۴-۷ باز هم خطی بودن و آثار آن	۱۸۳
مسائل	۱۸۵

فصل ۵ - مدارهای RL و RC بدون منبع

۵-۱ مقدمه	۱۹۲
۵-۲ مدار RL ساده	۱۹۳
۵-۳ خواص پاسخ نمایی	۱۹۷
۵-۴ مدار RL عمومی تر	۲۰۰
۵-۵ مدار RC ساده	۲۰۴
۵-۶ مدار RC کلی تر	۲۰۷
مسائل	۲۰۹

فصل ۶ - اعمال تابع تحریک پله واحد

۶-۱ مقدمه	۲۲۰
۶-۲ تابع تحریک پله واحد	۲۲۱
۶-۳ نظری بر مدار RL تحریک شده	۲۲۷
۶-۴ پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری	۲۳۰
۶-۵ مدارهای RL	۲۳۲
مسائل	۲۴۳

فصل ۷ - مدار RLC

۷-۱ مقدمه	۲۵۳
۷-۲ مدار موازی بدون منبع	۲۵۵
۷-۳ مدار RLC موازی فوق میرایی	۲۶۰

۷-۴	میرایی بحرانی	۲۶۴
۷-۵	مدار RLC موازی در حالت زیر میرایی	۲۶۸
۷-۶	مدار RLC سری بدون منبع	۲۷۳
۷-۷	پاسخ کامل مدار RLC	۲۷۷
۷-۸	مدار LC بدون افت	۲۸۴
۲۸۷	مسائل	
فصل ۸ - تابع تحریک سینوسی		
۸-۱	مقدمه	۲۹۶
۸-۲	مشخصات موج سینوسی	۲۹۸
۸-۳	پاسخ اجباری ناشی از توابع تحریک سینوسی	۳۰۱
۳۰۶	مسائل	
فصل ۹ - مفهوم فیزور		
۹-۱	مقدمه	۳۰۹
۹-۲	تابع تحریک مختلط	۳۱۰
۹-۳	فیزور	۳۱۵
۹-۴	روابط فیزیوری برای R و L و C	۳۱۸
۹-۵	امپدانس	۳۲۴
۹-۶	آدمیتانس	۳۲۸
۳۲۹	مسائل	
فصل ۱۰ - پاسخ حالت پایدار سینوسی		
۱۰-۱	مقدمه	۳۳۶
۱۰-۲	تحلیل گرهی، چشمه‌ای و حلقه‌ای	۳۳۶

- ۳-۱۰ اصل جمع آثار، تبدیل منابع و قضیه تونن ۳۳۹
- ۴-۱۰ دیاگرام فیزوری ۳۴۲
- ۵-۱۰ پاسخ به صورت تابعی از w ۳۴۸
- مسائل ۳۵۳
- پاسخ مسائل با شماره فرد از فصل ۱ تا ۱۰ ۳۵۴

پیشگفتار

کتابی که پیش روی خوانندگان عزیز قرار دارد ترجمه‌ای است از کتاب معروف «تحلیل مدارهای الکتریکی» اثر دانشمند و مهندس بزرگ آمریکایی «ویلیام هیت»، که کاملاً برای دانشجویان و دانشگاهیان محترم ما شناخته شده می‌باشد و نیازی به معرفی ندارد. لذا اینجانب قصد معرفی این کتاب را ندارم و هدفم از نگارش این سطور بعنوان مقدمه صرفاً چند کلمه‌ای صحبت نمودن با خوانندگان عزیز می‌باشد. همانگونه که بر اهل فن روشن است، درس تحلیل مدار اصلی‌ترین درس پایه برای رشته مهندسی برق (قدرت) و مهندسی الکترونیک (با گرایشهای الکترونیک و مخابرات و کنترل و سخت‌افزار کامپیوتر) می‌باشد و اگر دانشجوی این درس را با موفقیت و با کیفیت خوب نگذراند، یا نمی‌تواند دروس بالاتر و تخصصی‌تر را اخذ نماید و اگر هم اخذ نماید در مطالعه آنها با مشکل مواجه خواهد شد زیرا زیربنای آنها درس تحلیل مدار می‌باشد.

پرواضح است که برای فهمیدن یک درس دانشگاهی مهمترین عوامل عبارتند از: استاد و کتاب، و چون بدلائل مختلف از قبیل کمبود وقت و غیره استاد بخشی از مطالعه را از روی کتاب به خود دانشجو واگذار می‌کند (و اگر هم اینطور نباشد دانشجو برای مرور مطالب نیاز به کتاب خواهد داشت)، درمی‌یابیم که اگر بگوییم «کتاب خوب مهمترین عامل یادگیری دروس دانشگاهی می‌باشد»، بیجا نگفته‌ایم.

حال بیایید به این پرسش پاسخ دهیم که «کتاب خوب در درس تحلیل مدار کدام است؟» این کتاب، همانا کتاب «تحلیل مدار هیت» می‌باشد.

لذا اینجانب نظر به اینکه خواندن یک متن فارسی از همه نظر برای دانشجویان ما راحت‌تر و خوشایندتر از متن انگلیسی می‌باشد، تصمیم به ترجمه این کتاب گرفتم

تا به این طریق هدیه‌ای را در حد توان خود به دانشجویان عزیز و جامعه دانشگاهی‌مان تقدیم کنم. البته فعلاً جلد اول کتاب که شامل ۱۰ فصل از آخرین چاپ کتاب اصلی می‌باشد آماده شده است که جلد دوم آن هم متعاقباً به حضورتان تقدیم خواهد شد. در ترجمه این کتاب سعی شده است از نقطه ضعفی که در آثار اکثر مترجمین کتب فنی در سالهای اخیر مشاهده شده است و عمدتاً ناشی از دو علت می‌باشد (یکی ناآشنا بودن مترجم به متون فنی و دیگری تعصب بی‌مورد در بکار بردن واژه‌های فارسی و واژه‌سازی‌های ناشیانه و غلط برای اصطلاحات فنی جا افتاده در بین اهل فن)، اجتناب شود.

مترجم هرگز برای اینکه مورد تشویق مخالفان کلمات لاتین قرار گیرد به جای اصطلاحات فنی جا افتاده و مانوس از قبیل فرکانس، امپدانس، ولتاژ، فاز و غیره، از کلمات عجیب و غریب که هر دانشجو و خواننده‌ای را گیج و سردرگم می‌کند استفاده نکرده است و سعی شده است که لحن بیان فارسی کتاب هماهنگ با همان لحن سخن و کلمات و اصطلاحاتی باشد که دو نفر فرد فنی در رشته برق و الکترونیک به هنگام مکالمات روزمره در کارگاه و یا کلاس درس و یا در کریدور دانشکده به هنگام بحث و جدل‌های دانشجویی برای حل یک مسئله تحلیل مدار بکار می‌برند، باشد.

در خاتمه آرزو می‌کنم این اثر برای دانشجویان عزیز و اهل فن در رشته برق و الکترونیک مفید واقع شود و اشتباهات احتمالی را هم با نظر بلند خویش بدیده اغماض بنگرند. ضمناً لازم میدانم از تشویق‌ها و راهنمایی‌های ناشر محترم (که از دوستان عزیز و فاضل من می‌باشند) که همیشه باعث دلگرمی اینجانب بوده است و نیز زحمات بیدریغ کارکنان مؤسسه همراه که زحمت طاقت‌فرسای تایپ این کتاب را متحمل شدند تشکر کنم.

مهندس امیر ستارزاده

بخش ۱

مدارهای مقاومتی

فصل ۱

تعاریف و واحدها

۱-۱ مقدمه:

هدف این متن، بطوریکه از عنوان آن پیداست، ارائه مطالبی است که ما را به مهارتی در موضوع تحلیل مدار مهندسی رهنمون شود. این موضوع بطور بالقوه برای هر نوع مهندس و نیز برای بسیاری از فیزیکدانان و ریاضیدانان کاربردی بسیار مفید می باشد، همچنین آن محرکی، مبارزه جویانه و کاملاً لذت بخش هم می باشد. فرد مبتدی ممکن است بلافاصله سؤال کند، «تحلیل مدار مهندسی چیست؟» جواب نسبتاً خوب و ملایم است و ما می توانیم آن را با یک نگاه سریع به یک دیکشنری دانشگاهی که تعابیر زیر را ارائه کرده است، به دست آوریم:

مهندسی: علمی است که به وسیله آن خواص مواد و منابع انرژی موجود در طبیعت برای بشر مفید واقع می شود.

مدار: اتصالی از قطعات الکتریکی ساده که در آن حداقل یک مسیر بسته که جریان بتواند در آن جاری شود وجود داشته باشد.

تحلیل مطالعه ریاضی یک پدیده پیچیده و ارتباط بین اجزاء آن.

بنابراین ممکن است ما متمایل به این تصمیم شویم که «تحلیل مدار مهندسی» یک مطالعه ریاضی اتصالات مفید قطعات الکتریکی ساده ای که در آن حداقل یک مسیر بسته وجود دارد، می باشد. این تعریف اساساً درست است، اگرچه ما تا زمانیکه مفاهیم «جریان» و «قطعات الکتریکی» را توضیح ندهیم نمی توانیم آن را کاملاً درک کنیم.

سالیانی نه چندان دور کتابی از این نوع به عنوان یک متنی صرفاً برای مهندسی برق در نظر گرفته می شد. اما حالا بطور روزافزونی برای دانشجویان مهندسی ساختمان، مهندسی مکانیک

و سایر رشته‌های مهندسی و نیز برای یک دانشجوی عادی ریاضی کاربردی، کامپیوتر، زیست‌شناسی یا فیزیک به صورت یک درس مشترک شده است.

اگر ما قبلاً در یک دوره مهندسی برق وارد شده باشیم و یا این قصد را داشته باشیم، در این صورت تحلیل مدار می‌تواند یک درس مقدماتی در حوزه انتخاب ما باشد.

اگر هم با سایر رشته‌های مهندسی مشارکت و آمیزش داشته باشیم در این صورت تحلیل مدار قسمت عمده‌ای از کل مطالعه ما درباره مهندسی برق را تشکیل خواهد داد و همچنین ما را قادر خواهد کرد که کار الکتریکی‌مان را در الکترونیک، ابزار دقیق و سایر زمینه‌ها ادامه دهیم. اگر چه مهمتر از همه امکان توسعه پایه تحصیلاتمان است که به ما داده می‌شود و می‌توانیم اعضای آگاه تیمی باشیم که مقدماً مواجه با چند قطعه و یا دستگاه الکتریکی بوده است. ارتباط موثر در چنین تیمی فقط در صورتی حاصل می‌شود که زبان و تعاریف مورد استفاده برای همه آشنا باشد.

تعداد کمی از کارهای مهندسی چند سال اخیر را می‌توان به یک فرد نسبت داد. دوران مخترعین ادیسون گونه سپری شده است و از یک مهندس تحصیلکرده انتظار داریم که جزئی از یک گروه شامل انواع مهندسين، ریاضیدانان کاربردی، دانشمندان کامپیوتر و فیزیکدانان باشد. کار این گروه به وسیله مدیرانی که آموزشهای فنی دیده‌اند هماهنگ می‌شود و محصولات صنعتی به وسیله مردان و زنانی که دارای معلومات علمی یا مهندسی می‌باشند، تولید، فروخته و یا تعمیر و نگهداری می‌شوند.

تحصیلات مهندسی امروز به تنهایی برای کار بر روی جنبه‌های طراحی فنی مسائل مهندسی نمی‌باشند. تلاشهای آنان امروزه به ماوراء خلق ماشینهای بخار و سیستمهای رادار و به تلاشهای شدید برای حل مسائل اجتماعی - اقتصادی مانند آلودگی آب و هوا، شهرسازی، حمل و نقل، کشف منابع انرژی جدید و حفظ منابع طبیعی موجود خصوصاً نفت و گاز طبیعی توسعه یافته است.

برای مشارکت در حل اینگونه مسائل مهندسی، یک مهندس باید مهارتهای زیادی کسب کند که یکی از آنها اطلاعاتی درباره تحلیل مدارهای الکتریکی می‌باشد.

ما این مطالعه را با توجهی به دستگاه آحاد و چند تعریف و قرارداد پایه‌ای شروع خواهیم نمود. برای کسانی که اطلاعاتی مقدماتی از الکتریسته و مغناطیس پایه دارند مطالب این فصل می‌تواند بطور سریع مطالعه شود. بعد از اینکه در این مطالب مقدماتی تسلط حاصل شد، می‌توانیم توجه خود را به یک مدار الکتریکی ساده معطوف کنیم.

۲- ۱ دستگاه آحاد:

ما باید ابتدا یک زبان مشترک را پی ریزی کنیم. مهندسین نمی توانند با یکدیگر بطور تفاهیم آمیز مکالمه کنند مگر اینکه هر عبارتی که بکار می رود واضح و تعریف شده باشد. این مطلب هم صحیح است که ما از کتابی که بطور دقیق هر کمیتی را که ارائه می کند تعریف نکرده باشد بهره کمی خواهیم برد. (اگر ما در یک آگهی تجارتي تلویزیونی بطور مبهم بگوییم - «لباسهایتان را ۴۰ درصد سفیدتر کنید» - و بخود زحمت ندهیم که سفیدی را تعریف کنیم و یا واحدهایی را که به وسیله آنها بتوان آن را اندازه گیری نمود ارائه دهیم در این صورت در مهندسی موفق نخواهیم بود اگرچه ممکن است مقدار زیادی مواد پاک کننده بفروشیم.) برای بیان مقدار یک کمیت قابل اندازه گیری باید هم یک عدد و هم یک واحد ارائه دهیم مانند: «۳ اینچ». خوشبختانه ما همه از دستگاه اعداد واحدی استفاده می کنیم و آن را بخوبی می شناسیم. این امر برای واحدها صادق نیست و برای آشنا شدن با یک دستگاه آحاد مناسب باید مقداری وقت صرف نمود. ما باید بر روی یک دستگاه آحاد استاندارد بتوافق برسیم و از تداوم و مقبولیت عمومی آن مطمئن شویم. واحد استاندارد طول را نباید بر حسب فاصله بین دو نقطه بر روی یک نوار لاستیکی خاصی تعریف نمود. این دائمی نیست و به علاوه هر کس دیگری از استاندارد دیگری استفاده می کند.

ما همچنین احتیاج داریم که هر اصطلاح فنی را در موقعی که معرفی می شود تعریف کنیم و این تعریف را بر حسب واحدها و کمیتهایی که قبلاً تعریف شده است بیان کنیم. در اینجا تعریف همیشه نمی تواند به همان اندازه ای که بطور تئوریک تصور می شود عمومی باشد. مثلاً به زودی نیاز خواهیم داشت که ولتاژ را تعریف کنیم ما باید یا یک تعریف خیلی کامل و کلی را که ما فعلاً نمی توانیم آن را بفهمیم، بپذیریم و یا یک تعریف غیر عمومی ولی ساده تر را که فعلاً منظور ما را برآورده کند بپذیریم. تا زمانی که یک تعریف کلی تر مورد نیاز باشد، آشنایی ما با مفاهیم ساده تر به فهمیدن ما کمک خواهد کرد. همچنین معلوم خواهد شد که بسیاری از کمیتها بطور خیلی تنگاتنگی به یکدیگر وابسته اند بطوریکه برای تعریف اولی باید قبلاً تعاریف چندی ارائه شود تا آن کمیت را بطور کامل بفهمیم. مثلاً وقتی که «عنصر مداری» تعریف می شود مناسب تر است که آن را بر حسب جریان و ولتاژ تعریف کنیم و وقتی که جریان و ولتاژ تعریف می شوند اگر اینکار را با توجه به یک عنصر مداری انجام دهیم مفید خواهد بود. هیچیک از این سه تعریف را نمی توان بخوبی فهمید تا زمانی که همه آنها بیان شده باشند. بنابراین تعریف اول ما از عنصر

مداری ممکن است نارسا باشد اما پس از اینکه جریان و ولتاژ را بر حسب عنصر مداری تعریف نمودیم باز خواهیم گشت و عنصر مداری را بطور دقیق تری تعریف خواهیم نمود.

برای انتخاب یک دستگاه آحاد ما امکان انتخاب زیادی نداریم. دستگاهی را که ما بکار خواهیم برد بوسیله اداره ملی استانداردها در سال ۱۹۶۴ پذیرفته شده است و بوسیله همه انجمنهای حرفه‌ای مهندسين بکار می‌رود و زبانی است که امروزه کتابها با آن نوشته می‌شوند. این دستگاه، سیستم بین‌المللی واحدها است (با علامت اختصاری SI) که بوسیله کنفرانس عمومی اوزان و مقادیر در سال ۱۹۶۰ تصویب شده است. دستگاه SI براساس شش واحد پایه‌ای بنا نهاده شده است: متر، کیلوگرم، ثانیه، آمپر، کلوین و شمع. البته این دستگاه، یک «دستگاه متریک» است که بعضی از اشکال آن بطور مشترکی در اکثر کشورهای پیشرفته صنعتی بکار می‌رود و استفاده از آن بخصوص در آمریکا شدیداً تاکید می‌شود. ما متعاقباً تعاریف متر، کیلوگرم، ثانیه و آمپر را مورد توجه قرار خواهیم داد و لیست علائم اختصاری استاندارد آنها و سایر واحدهای SI را که ما مورد استفاده قرار خواهیم داد در آخر کتاب آمده است.

در سده ۱۷۰۰ متر بصورت یک ده میلیونیم فاصله از قطب زمین تا استوا تعریف شد و این فاصله بوسیله دو خط نازک روی یک میله‌ای از آلیاژ پلاتین - ایریدیوم در دمای صفر درجه سلیوس (°C) [که سابقاً سانتیگراد نامیده می‌شد] علامت گذاری شده بود. اگر چه مساحی‌های دقیق‌تر نشان دادند که آن علامتهای روی میله دقیقاً بیانگر این کسر نصف‌النهار زمین نیستند با وجود این فاصله بین علامتهای روی میله تا سال ۱۹۶۰ بعنوان تعریف استاندارد متر بصورت بین‌المللی پذیرفته شد.

در آن سال کنفرانس عمومی تعریف دقیق تری از متر (m) را بصورت مضربی از طول موج تشعشع نارنجی کریپتون ۸۶ بنا نهاد و سپس در سال ۱۹۸۳ متر بصورت دقیق‌تر بعنوان فاصله‌ای که نور در $\frac{1}{299792458}$ ثانیه در فضا طی می‌کند تعریف شد.

واحد اساسی جرم، کیلوگرم (kg) در سال ۱۹۰۱ بصورت جرم یک قطعه پلاتین که با متر استاندارد در اداره بین‌المللی اوزان و مقادیر در سور فرانسه نگهداری می‌شد، تعریف شد. این تعریف در سال ۱۹۶۰ دوباره تأیید شد. جرم این قطعه تقریباً $0/001$ جرم یک متر مکعب آب خالص در ۴°C می‌باشد.

سومین واحد اصلی، ثانیه (s)، تا سال ۱۹۵۶ بصورت $\frac{1}{86400}$ یک روز متوسط شمسی تعریف می‌شد. در آن زمان آن را بصورت $\frac{1}{31556925,9747}$ سال حاره ۱۹۰۰ تعریف نمودند. در سال ۱۹۶۴ بصورت دقیق‌تر یعنی ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ پریود از فرکانس عبوری بین ترازهای

هیپرفاین $m_F = 0$, $F = 3$, $F = 4$, $m_F = 0$ حالت اساسی $2S_{1/2}$ اتم سزیم ۱۳۳ که بوسیله میدانهای خارجی مختل نشده باشد، تعریف شد. این تعریف اخیر دائمی بوده و قابل تجدید تراز تعاریف قبل می باشد و فقط برای فیزیکدانان اتمی قابل فهم می باشد. اگرچه هر یک از این تعاریف بطور مناسبی ثانیه ای را که همه با آن آشنا هستیم توصیف می کنند.

چهارمین واحد اصلی، آمپر (A)، بعداً در همین فصل پس از اینکه با خواص اساسی الکتریستیه آشنا شدیم تعریف خواهد شد. دو واحد اصلی باقیمانده، کلوین (K) و شمع (cd)، ضرورت چندانی برای تحلیل مدار ندارند.^۱

دستگاه SI برای ارتباط دادن واحدهای بزرگتر یا کوچکتر به واحد اصلی از سیستم اعشاری استفاده می کند و برای مشخص نمودن توانهای مختلف ۱۰ از پیشوندهای استاندارد استفاده می کند که عبارتند از:

دسی (10^{-1} - d)	اتو (10^{-18} - a)
دکا (10^{-1} - da)	فمتو (10^{-15} - f)
هکتو (10^{-2} - h)	پیکو (10^{-12} - p)
کیلو (10^{-3} - k)	نانو (10^{-9} - n)
مگا (10^{-6} - M)	میکرو (10^{-6} - μ)
گیگا (10^{-9} - G)	میلی (10^{-3} - m)
ترا (10^{12} - T)	سانتی (10^{-2} - c)

پیشوندهایی که در داخل کادر مشخص شده اند بوسیله دانشجویان درس تئوری مدارهای الکتریکی بیشتر مورد استفاده قرار می گیرند. این پیشوندها ارزش به خاطر سپردن را دارند زیرا هم در این کتاب و هم در سایر آثار علمی بطور مکرر بکار می روند. بنابراین یک میلی ثانیه (ms) برابر است با ۰٫۰۰۱ ثانیه و یک کیلومتر (Km) برابر است با ۱۰۰۰m. اکنون واضح است که گرم (g) ابتدا بعنوان واحد جرم وضع شده است و سپس کیلوگرم بعنوان

۱- تعاریف کامل تمام واحدهای اصلی و بحث بیشتر درباره دستگاه بین المللی آحاد را می توان در C.H. Page et al، تمرین توصیه شده IEEE برای واحدها در کار منتشر شده علمی و فنی IEEE Spectrum، جلد ۳، صفحه ۱۶۹ تا ۱۷۳، مارس ۱۹۶۶ پیدا کرد. مقادیر عددی دقیق در فصل ۲ هند بودک توابع ریاضی، چاپ دهم، ۱۹۷۲ از اداره ملی استانداردها سری ۵۵ ریاضیات کاربردی ارائه شده است.

۱۰۰۰g بیان شده است. اما اکنون کیلو گرم واحد اصلی ما است و ما اگر بخواهیم کمی خودمان را گیج کنیم می توانیم گرم را بصورت میلی کیلو گرم در نظر بگیریم. ترکیب چند پیشوند مانند میلی میکرو ثانیه غیر قابل قبول است و باید عبارت نانو ثانیه بکار رود. همچنین می توان بجای $10^{-6}m$ از میکرون استفاده نمود که کلمه صحیح آن میکرومتر (μm) می باشد و از آنگستروم (\AA) هم می توان برای $10^{-10}m$ استفاده نمود. این رابطه قوای ۱۰ در دستگاه آحاد انگلیسی که متأسفانه در این کشور رواج کامل دارد بکار نمی رود.

مواقع زیادی پیش می آید که باید نتایج حاصل از یک تحلیل مهندسی به سیستم آحاد انگلیسی برای استفاده در کارگاه و یا وضوح بحث با سایرین تبدیل شود.

اکثر ما تصور ذهنی بهتری از $1in$ نسبت به $5cm$ داریم. اگرچه این وابستگی بزرگ به سیستم قدیمی بتدریج تغییر می کند.

واحدهای اساسی سیستم انگلیسی بر حسب واحدهای SI بشرح زیر تعریف می شوند:
 $1in$ دقیقاً برابر است با $0.0254m$ ، یک پوند جرم (lbm) دقیقاً برابر با 0.45359237 کیلو گرم و ثانیه در هر دو سیستم مشترک است.

به عنوان آخرین مورد در بحث مان درباره واحدها، سه واحد فرعی که برای اندازه گیری نیرو، کار و انرژی و توان بکار می رود را مورد توجه قرار می دهیم. نیوتن^۱ واحد اساسی نیرو است و آن مقدار نیرویی است که لازم است تا به جرم یک کیلو گرم شتاب یک متر بر مجذور ثانیه (m/s^2) بدهد. نیروی یک نیوتن معادل است با 0.22481 پوند نیرو (lbf) و یک فرد مذکر نوزده ساله که دارای جرم $68Kg$ می باشد نیروی $667N$ بر نیرو سنج اعمال می کند.

واحد اساسی کار یا انرژی ژول (J) می باشد که بعنوان یک نیوتن متر ($N.m$) تعریف می شود. اعمال یک نیروی ثابت یک نیوتن در فاصله یک متر نیاز به صرف انرژی یک ژول دارد. این مقدار انرژی برای بلند کردن این کتاب، بوزن تقریبی $10N$ ، به مسافت تقریبی $10cm$ کافی می باشد. یک ژول معادل است با $0.73756 ft - lbf$. سایر واحدهای انرژی عبارتند از کالری (cal)^۲ برابر با $4.1868J$ ، واحد حرارتی بریتانیا (Btu) برابر با $1055.1J$ و

۱- قابل ذکر است که همه واحدهایی که به یادبود دانشمندان مشهور نامگذاری می شوند با حروف بزرگ نوشته می شوند.

۲- کالری که با غذا، نوشیدنیها و ورزش بکار می رود در واقع کیلو کالری یعنی $4186.8J$ می باشد.

کیلووات ساعت (kwh) برابر با $10^6 \times 3/6$ آخرین کمیت فرعی که ما با آن سروکار خواهیم داشت توان می باشد که عبارت است از سرعت انجام کار و یا صرف انرژی. واحد اساسی توان وات می باشد که به صورت 1 J/s تعریف می شود. یک وات برابر است با $1 \text{ lb-ft/s} = 0.73756$. آن همچنین معادل است با $1/745.7$ اسب بخار (hp) که اسب بخار واحدی است که امروزه از واژه های مهندسی خارج شده است.

توجه: در سراسر متن تمریناتی در آخر قسمتهایی که اصول جدید ارائه شده است آمده است که بمنظور این است که به دانشجوی اجازه دهد آموخته هایش از مفاهیم اساسی را بیازماید. مسائل داده شده برای کسب آشنایی با عبارات و ایده های جدید مفید می باشند و همگی باید انجام داده شوند. جوابهای تمرینات به ترتیب داده شده است.

تمرین ۱ - ۱: (a) حجم یک مکعب مستطیل به ابعاد:
 $10^8 \text{ nm} \times 3 \times 10^4 \mu\text{m} \times 8 \text{ cm}$ بر حسب dm^3 چقدر است؟ (b) اگر یک بسته شیرینی ژله ای حاوی 5000 Kcal باشد و همه این انرژی به گرما تبدیل شود چند Btu می دهد؟ (c) چه نیرویی بر حسب نیوتن لازم است تا شتاب 200 in/s^2 به جرم 3 lbm بدهد؟
 جواب: $2/40$, 19840 , $6/91$

۳ - ۱ - واحد بار:

قبل از شروع بحث الکتریسته و مدارهای الکتریکی می توان بر حسب یک مورد مشابه پدیده الکتریسته را توصیف نمود. وقتی که ما یک توپ بیس بال را بالای دست نگهداریم و آن را رها کنیم می دانیم که بطرف زمین می افتد زیرا نیروی جاذبه بر آن اعمال می شود. ما همچنین می توانیم بدقت توضیح دهیم که آن چگونه شتاب می گیرد، سرعت آن در هر لحظه چقدر است، چه وقت به نقطه مشخص می رسد و در هر لحظه مشخصی در کجا می باشد. اگرچه، تعداد کمی از ما می فهمیم که چرا آن می افتد با وجوداینکه ما خیلی خوب می دانیم که نیروی جاذبه چکار می کند ولی نمی دانیم که آنها چه هستند.

به طریق مشابهی مهندسين برق با نیروها، خطاهای اندازه گیری، آثار گرمایی و سایر پاسخهای قابل اندازه گیری الکتریسته کاملاً آشنا هستند اما آنها بندرت با ماهیت تنوری (و فلسفی) الکتریسته به تنهایی مواجه می شوند. بنابراین هدف ما تلاشی است برای مشاهده پدیده

الکتریسته، توصیف آن بطور ریاضی و کاربرد عملی آنها می باشد. ما باید فقط بطور اتفاقی با دلیل آنها مواجه شویم.

فرض کنید که ما یک تکه کوچکی از ماده سبکی مانند چوب پنبه را برداریم و آن را به وسیله یک نخ نازک بیاویزیم. حال اگر ما یک شانه پلاستیکی را با پارچه پشمی مالش دهیم و سپس آن را با چوب پنبه تماس دهیم در می یابیم که چوب پنبه مایل است که از شانه دور شود و یک نیروی دافعه بین - شانه و چوب پنبه وجود دارد. بعد از اینکه شانه را زمین گذاشتیم اگر چوب پنبه را به پارچه پشمی نزدیک کنیم می بینیم که یک نیروی جاذبه بین چوب پنبه و پارچه پشمی وجود دارد.

ما هر دوی این نیروها را در چوب پنبه با بیان اینکه آنها نیروهای الکتریکی ناشی از وجود بارهای الکتریکی بر روی چوب پنبه و شانه و پارچه پشمی هستند، توضیح می دهیم. بطریق مشابهی ما نیروی توپ بیس بال را به نیروی جاذبه ای که ناشی از وجود جرمهای ثقلی در توپ بیس بال و زمین است، نسبت می دهیم.

آزمایش ما نشان می دهد که نیروی الکتریکی ممکن است جاذبه یا دافعه باشد و از این نظر تشابه با نیروی جاذبه ثقلی نقض می شود. تا جاییکه امروزه ما می دانیم نیروی دافعه ثقلی وجود ندارد.

ما وجود دو نیروی الکتریکی جاذبه و دافعه را با این فرضیه که دو نوع بار الکتریکی وجود دارد و بارهای مشابه یکدیگر را می رانند و بارهای غیرهمنام یکدیگر را جذب می کنند توضیح می دهیم. این دو نوع بار الکتریکی مثبت و منفی نامیده می شوند اگرچه ما می توانستیم آنها را طلا و سیاه و یا بارهای شیشه ای و صمغی بنامیم (همانگونه که سالها قبل نامیده می شدند). بار الکتریکی که ابتدا در شانه ظاهر شد توسط بنزامین فرانکلین بار منفی نامیده شد و آنکه روی پارچه پشمی بود بار مثبت نام گرفت.

ما اکنون آزمایش خود را با این اصطلاحات جدید توضیح می دهیم. بوسیله مالش شانه با پارچه یک بار منفی در شانه و یک بار مثبت در پارچه تولید می شود. تماس چوب پنبه با شانه باعث می شود که تعدادی از بارهای منفی آن به چوب پنبه منتقل شود و نیروی دافعه بین بارهای همنام چوب پنبه و شانه باعث می شود که توپ دور شود. حال اگر ما پارچه پشمی دارای بار مثبت را نزدیک چوب پنبه دارای بار منفی بیاوریم یک نیروی جاذبه بین دو بار مخالف هویدا می شود.

ما اکنون همچنین می دانیم که تمام مواد از اجزاء ساختمانی بنیادی بنام اتم تشکیل شده اند و اتمها بنوبه خود از ذرات بنیادی مختلفی تشکیل یافته اند. سه ذره مهم که اتم از آنها تشکیل شده

است عبارتند از الکترون، پرتون و نوترون. الکترون دارای بار منفی و پروتون دارای بار مساوی و مثبت و نوترون هم بدون بار الکتریکی می باشد. وقتی که ما شانه پلاستیکی را با پارچه پشمی مالش می دهیم شانه بار منفی می گیرد زیرا مقداری از الکترونها را پشم به شانه منتقل می شوند و سپس پارچه پشمی تعداد الکترونها را کم تر از آنی می شود که بتواند حالت خنثی الکتریکی را حفظ کند و در نتیجه به صورت یک بار مثبت رفتار می کند.

جرم هر سه ذره فوق الذکر بطور آزمایشی تعیین شده اند و عبارتند از:

$$9/1 \times 10^{-31} \text{ Kg} \text{ برای الکترون و در حدود } 1840 \text{ برابر آن برای پروتون و نوترون.}$$

اکنون ما آماده ایم تا واحد اساسی بار یعنی کولن را که پس از شارل کولن، اولین فردی که اندازه گیریهای کمی دقیقی برای نیروی بین دو بار انجام داد، بنام او نامیده شد تعریف کنیم.

البته کولن را بهر طریق که مناسب و عامه پسند و دائمی باشد و تعاریف قبلی را نقض نکند می توانیم تعریف کنیم. باز هم ما آزادی چندانی نداریم زیرا تعریفی که قبلاً بطور عمومی پذیرفته شده است به صورت زیر است: دو ذره باردار کوچک با بار مساوی که در خلاء به فاصله یک متری هم قرار دارند و یکدیگر را با نیروی $10^{-7} \text{ C}^2 \text{ N}$ دفع می کنند دارای بار یکسان مثبت یا منفی یک کولن (C) می باشند. علامت C بیانگر سرعت نور یعنی $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ می باشد. بر حسب این واحد بار یک الکترون $1/60219 \times 10^{-19} \text{ C}$ می باشد و یک کولن (منفی) حاوی $6/24 \times 10^{18}$ الکترون می باشد. ما می توانیم بار را به وسیله Q یا q نشان دهیم که حرف بزرگ نشان دهنده باری است که با زمان تغییر نمی کند و یا ثابت است و حرف کوچک بطور کلی باری را نشان می دهد که ممکن است متغیر با زمان هم باشد. ما اغلب این را مقدار لحظه ای بار می نامیم و ممکن است وابستگی زمانی آن را با نوشتن $q(t)$ مورد تأکید قرار دهیم. توجه داشته باشید که $q(t)$ ممکن است بیانگر یک مقدار ثابت هم به صورت حالت خاص باشد. این استفاده از حروف کوچک و بزرگ را می توان به همه کمیت های دیگر الکتریکی تعمیم داد.

هنگام نوشتن اکثر دانشجویان بین حروف کوچک و بزرگ تمایزی قائل نمی شوند و این می تواند پی آمدهای جدی بدنبال داشته باشد که اکثر آنها مضر می باشند. مثلاً در الکترونیک این چهار جریان کلکتور همگی دارای مفاهیم مختلفی هستند I_c, I_e, i_c, i_e .

تمرین ۱-۲: در موارد زیر چه باری بر حسب I_c ارائه می شود: (a) به وسیله ۱۰ میلیون پروتون؟ (b) به وسیله 10^{12} g الکترون؟ (c) 10^7 الکترون به اضافه 3×10^6 پروتون به اضافه 10^8 نوترون؟
جواب: $1602, -1759, -1122 I_c$.

۴-۱- جریان

پدیده الکتریکی که در بالا مورد بحث قرار گرفت متعلق به حوزه الکترواستاتیک می باشد که به رفتار بارهای الکتریکی در حال سکون می پردازد. این فقط از این نظر برای ما جالب است که شروعی است برای تعریف بار الکتریکی و همچنین وسیله ای مفید برای این تعریف می باشد. اگر چه یک قسمت آزمایش از الکترواستاتیک سرچشمه می گیرد یعنی فرآیند انتقال بار از پارچه پشمی به شانه و یا از شانه به چوب پنبه. این ایده «انتقال بار» یا «بار متحرک» برای ما در مطالعه مدارهای الکتریکی از اهمیت حیاتی برخوردار است زیرا در انتقال بار از یک نقطه به نقطه دیگر ما می توانیم انرژی را هم از نقطه ای به نقطه دیگر انتقال دهیم. بعنوان یک مثال عملی می توان از خطوط انتقال انرژی سراسری کشور نام برد.

چیزی که آن هم به همین اندازه اهمیت دارد امکان تغییر سرعتی است که با آن سرعت بار برای مخابره یا انتقال اطلاعات، انتقال می یابد. این فرآیند اساس سیستمهای مخابراتی از قبیل رادیو، تلویزیون و تله متری می باشد. بار متحرک یک جریان را ارائه می کند که ما در زیر بدقت آن را تعریف خواهیم نمود.

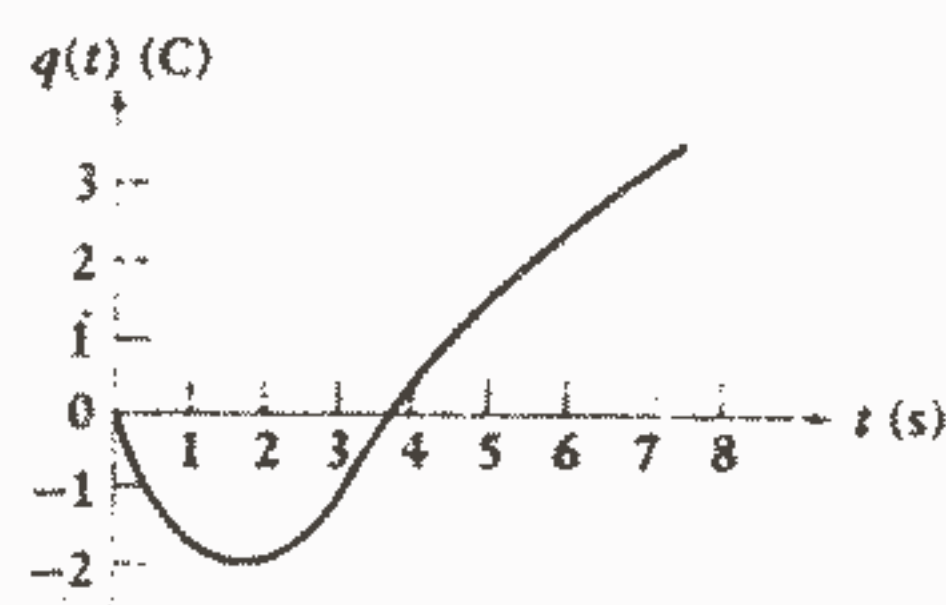
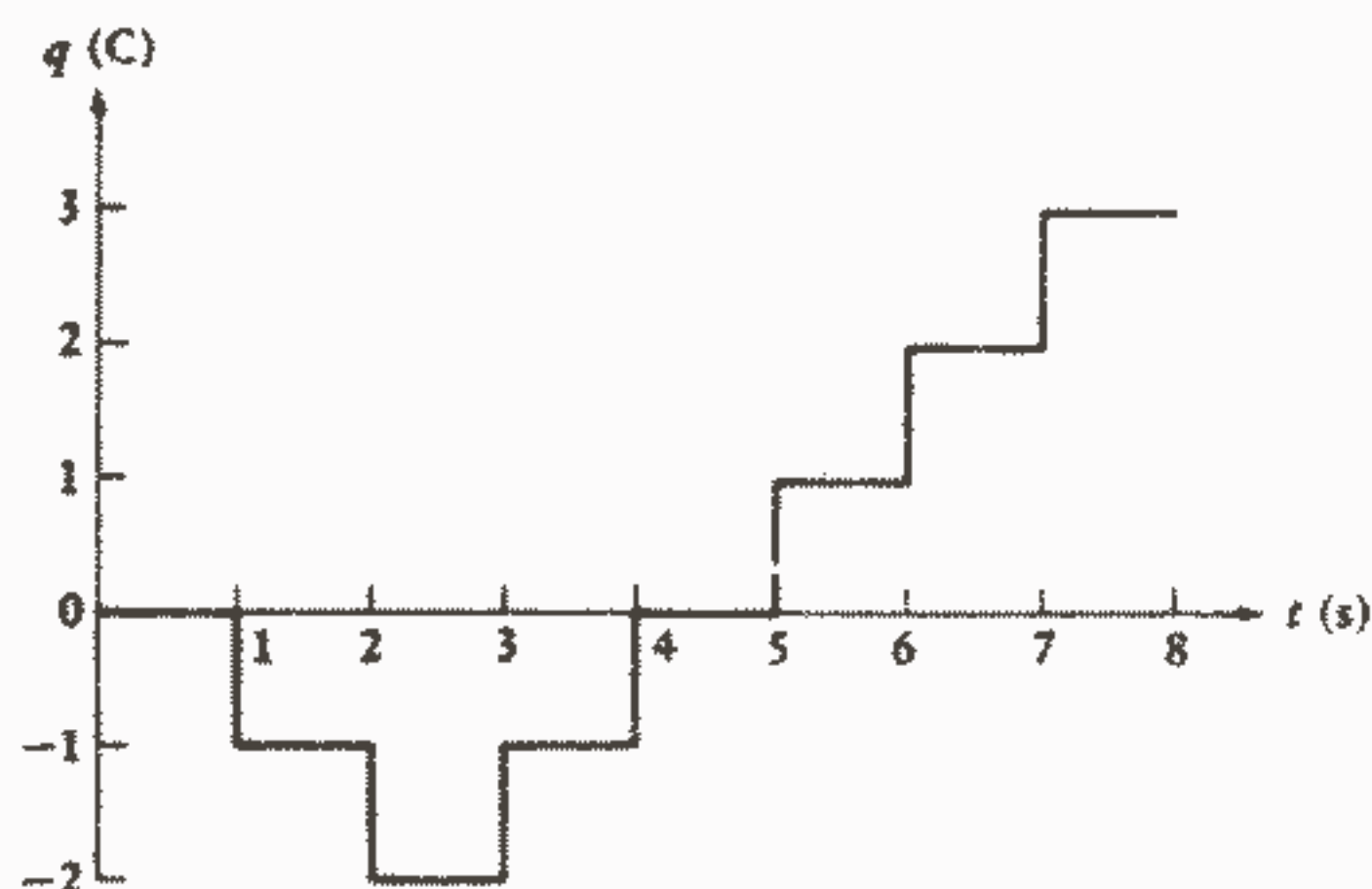
جریان موجود در یک مسیر مجزا مانند یک سیم فلزی هم دارای اندازه و هم دارای جهت می باشد و معیاری است برای سرعت حرکت بار از یک نقطه مرجع مشخص و در یک جهت معین. ما اکنون یک مثال نسبتاً دلخواه را در نظر می گیریم که ما را به تعریف کلی جریان بعنوان تغییر بار در واحد زمان dq/dt رهنمون خواهد شد.

بیایید یک مسیر مجزا را که در طول آن بار می تواند حرکت کند در نظر بگیریم و چند سؤال درباره نحوه حرکت بارها در طول این هادی بپرسیم. بعنوان یک ناظر مستقیم یک دانشجو را در نقطه A روی مسیر قرار می دهیم و از او خواهیم می کنیم که مقدار کل باری را که از مبدا زمان $t = 0$ عبور کرده است ثبت کند. ما می خواهیم که این اطلاعات در هر ثانیه اخذ شود و سپس دستورات عملی زیر انجام شود:

- ۱- جهت مثبت به طرف سمت راست شماس.
- ۲- اگر بار مثبت از مقابل شما در جهت مثبت عبور کند اندازه بار را جمع کنید.
- ۳- اگر بار مثبت در جهت منفی حرکت کند، اندازه بار را تفریق کنید.
- ۴- اگر بار منفی در جهت مثبت حرکت کند نیز اندازه بار را تفریق کنید.
- ۵- اگر بار منفی در جهت منفی حرکت کند، اندازه بار را جمع کنید.

تعاریف و واحدها ۱۳

ناظر برای ۸ ثانیه نگاه می‌کند و اطلاعات را ثبت می‌کند و سپس نمودار شکل ۱-۱ را به ما می‌دهد که بیانگر این است که q کل باری است که از مقابل او از لحظه $t = 0$ عبور کرده است.



شکل ۱-۲: نمودار مقدار لحظه‌ای $q(t)$ که از یک نقطه مبنا از لحظه $t = 0$ عبور کرده است. شکل ۱-۱: نموداری از کل بار q که از یک نقطه مرجع از لحظه $t = 0$ عبور کرده است. بار در فواصل زمانی یک ثانیه اندازه‌گیری شده است.

حال می‌بینیم که راههای زیادی برای تفسیر نمودار ثبت شده وجود دارد. مثلاً در ثانیه اول یا یک واحد بار مثبت به سمت چپ حرکت کرده است و یا یک واحد بار منفی به سمت راست حرکت کرده است. همین حالت برای فاصله زمانی ۱S دوم هم وجود دارد. در واقع در هر یک از این انتروالها ناظر می‌توانست ۱۰۰ واحد بار مثبت را به سمت راست و ۱۰۱ بار را به سمت چپ شمرده باشد. شاید بارهای مثبت و منفی در هر دو جهت در حرکت بوده‌اند.

خوشبختانه لازم نیست بدانیم که کدام یک از این بی‌نهایت حالت ممکن عملاً اتفاقی افتاده است. آثار الکتریکی تولید شده به وسیله هر یک یکسان خواهد بود.

اکنون ما اطلاعات را به وسیله اندازه‌گیریهای با تعداد بیشتر و مکرر پالایش می‌کنیم و این امر احتیاج به این دارد که اجزاء کوچکتر و کوچکتر بار شمرده شوند که حد آن مقدار باری است که به وسیله یک الکترون منفرد حمل می‌شود. این نمودار اکنون به صورت یک منحنی در شکل ۱-۲ ظاهر می‌شود.

ما اکنون آماده‌ایم که سرعت انتقال بار را مورد توجه قرار دهیم. در فاصله زمانی از t تا $t + \Delta t$ باری که از نقطه مبنا عبور می‌کند از q به $q + \Delta q$ افزایش پیدا کرده است. اگر نمودار

در این فاصله نزولی باشد در این صورت Δq مقداری است منفی. بنابراین سرعتی که بار از نقطه مبنا عبور می کند در لحظه t تقریباً مساوی با $\Delta q / \Delta t$ می باشد و وقتی که Δt کوچک شود مقدار دقیق سرعت به وسیله مشتق به دست می آید:

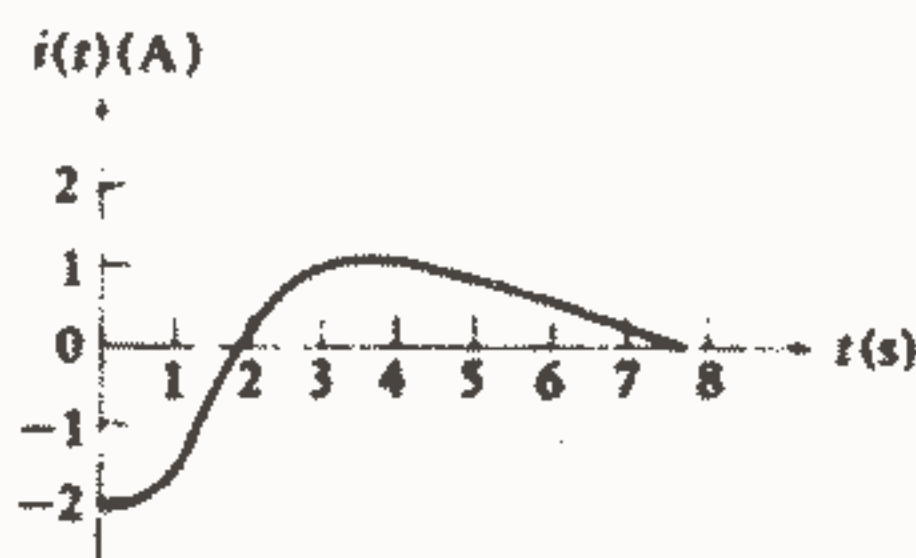
$$\frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

ما جریان را در یک نقطه مشخص و در یک جهت مشخص به صورت سرعت عبور بار مثبت از آن نقطه در جهت مشخص تعریف می کنیم. جریان را با علامت i یا i نمایش می دهیم و بنابراین: (۱) $i = \frac{dq}{dt}$

واحد جریان آمپر (A) است که متناظر است با عبور بار با سرعت $1^\circ/s$. آمپر به یادبود ۱-۱ م. آمپر فیزیکدان فرانسوی اوایل قرن نوزدهم نامگذاری شده است. آن را اغلب با amp هم نشان می دهند ولی این حالت غیررسمی می باشد. استفاده از حرف کوچک i هم برای مقدار لحظه ای می باشد. با استفاده از اطلاعات شکل ۲-۱ جریان لحظه ای به صورت لحظه ای به صورت شیب منحنی در هر نقطه به دست می آید که این منحنی جریان در شکل ۳-۱ رسم شده است. بار منتقل شده از زمان t_1 تا t_2 را می توان به صورت یک انتگرال معین بیان نمود.

$$q \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} i dt$$

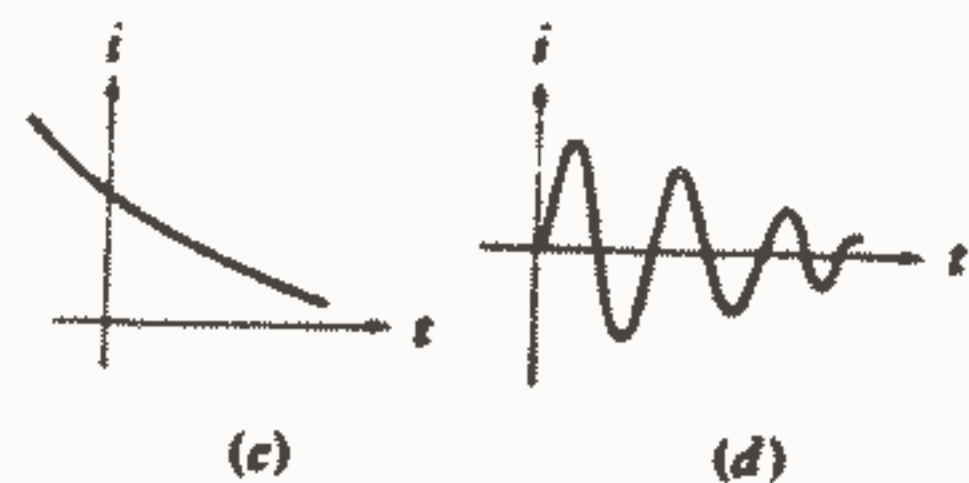
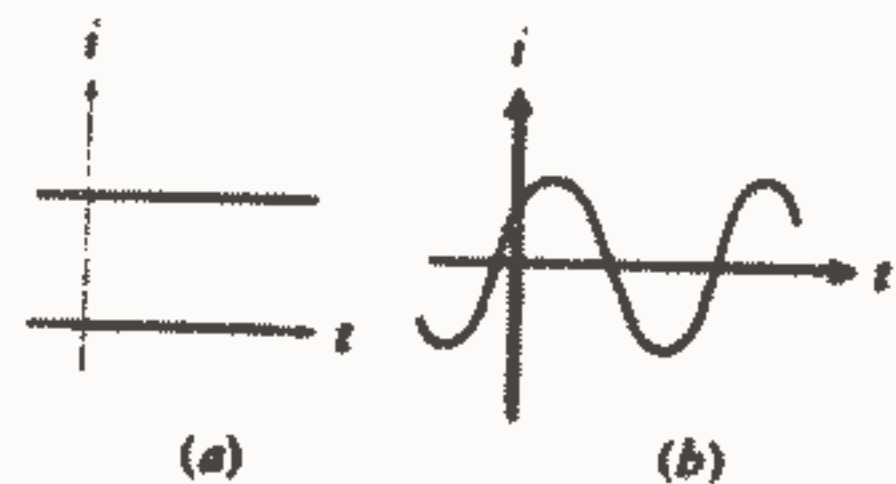
کل بار منتقل شده در تمام زمانها را با اضافه کردن $q(t_1)$ یعنی مقدار باری که تا زمان t_1 منتقل شده است به رابطه بالا می توان به دست آورد. (۲) $q = \int_{t_1}^t i dt + q(t_1)$



شکل ۳-۱: جریان لحظه ای q در
شکل ۲-۱ داده شده است و $i = dq/dt$



شکل ۳-۵: دو روش برای نشان دادن یک جریان واحد.



شکل ۳-۴: چند نوع جریان:
(a) جریان مستقیم dc (b) جریان
سینوسی یا ac (c) جریان نمایی
(d) جریان سینوسی میرا

چند نوع جریان مختلف در شکل ۴ - ۱ نشان داده شده است. جریانی که ثابت است به نام جریان مستقیم و یا بطور ساده تر dc خوانده می شود و در شکل ۴a - ۱ نشان داده شده است. ما مثالهای عملی زیادی برای جریانهایی که بطور سینوسی با زمان تغییر می کنند خواهیم یافت، شکل ۴b - ۱، جریانهایی از این نوع در مدارهای معمولی خانگی وجود دارند. چنین جریانی اغلب جریان متناوب یا ac نامیده می شود. با جریانهای نمایی و سینوسی میرا که در شکلهای ۴c - ۱ - d، رسم شده اند نیز بعداً مواجه خواهیم شد.

ما یک علامت ترسیمی به وسیله قرار دادن یک فلش در کنار هادی حامل جریان برای جریان وضع می کنیم. بنابراین در شکل ۵a - ۱ جهت فلش و مقدار $3A$ نشان دهنده این است که یا یک بار مثبت خالص $3^{\circ}/$ به سمت راست و یا یک بار منفی خالص $3^{\circ}/$ به سمت چپ حرکت می کند. در شکل ۵b - ۱ هم دو امکان وجود دارد، یا $3^{\circ}/$ به سمت چپ و یا $3^{\circ}/$ به سمت راست جاری می باشد. هر چهار بیان فوق و هر دو شکل جریانهایی را نشان می دهند که از نظر آثار الکتریکی معادل می باشند و می گوئیم که آنها مساوی هستند.

بهتر است جریان را به صورت حرکت بار مثبت تصور کنیم اگرچه بطوریکه شناخته شده است جریان در یک هادی نتیجه حرکت الکترون هاست. در گازهای یونیزه، محلولهای الکترولیت و بعضی از مواد نیمه هادی اجزاء باردار مثبت متحرک قسمتی از جریان و یا کل آن را تشکیل می دهند. تعریف و علامتی که ما پذیرفته ایم استاندارد می باشد. لازم است بدانیم که فلش جریان جهت عملی جریان را نشان نمی دهد بلکه بطور ساده قراردادی است که به ما اجازه می دهد به طور دور از ابهام درباره «جریان داخل یک سیم» صحبت کنیم. فلش بخش اساسی تعریف جریان است! بنابراین صحبت کردن درباره مقدار جریان $i_1(t)$ بدون مشخص کردن فلش، بحث کردن درباره یک موجود تعریف نشده می باشد. بنابراین شکلهای ۶a, b - ۱ بیان نامفهومی از $i_1(t)$ می باشند در حالیکه شکل ۶c - ۱ نماد تعریف شده مناسبی می باشد. به یاد داشته باشید که:



تمرین ۱ - ۳: جریان $i_1(t)$ در شکل ۶c - ۱ به صورت $5e^{-t}A$ برای $t < 0$ ، $5e^{-t}A$ برای $t > 0$ داده شده است. پیدا کنید: (a) $i_1(0/25)$ مقدار متوسط $i_1(t)$ در فاصله $0/25 < t < 0/25$ (b) مقدار کل باری که از چپ به راست در طول هادی در فاصله زمانی $0/25 < t < 0/25$ عبور کرده است.

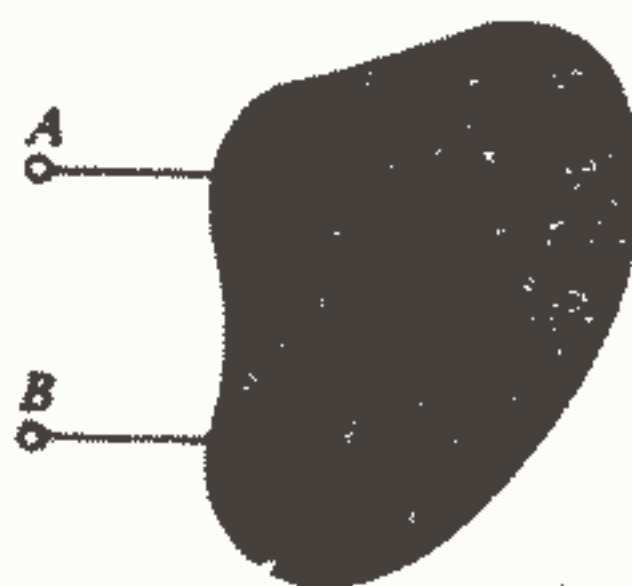
جواب: $1/580C$ ، $3/16A$ ، $1/839A$



شکل ۱-۶: (a) و (b) تعاریف ناقص، نامناسب و غلط یک جریان می‌باشند. (c) تعریف صحیح $i_1(t)$.

۵-۱-ولتاژ

حال ما باید به یک عنصر مداری اشاره کنیم و ما آن را به صورت خیلی کلی تعریف خواهیم نمود. وسایل الکتریکی مانند فیوز، لامپ روشنایی، مقاومت، باتری، خازن، مولد و کویل جرقه را می‌توان به وسیله ترکیبی از عناصر مداری ساده بیان نمود. ما با نشان دادن یک عنصر مداری عمومی به صورت یک شیء بدون شکل که دارای دو ترمینال می‌باشد که اتصال به سایر عناصر به وسیله آنها طبق شکل ۷-۱ انجام می‌شود، آغاز می‌کنیم. این عکس ساده می‌تواند به عنوان تعریف یک عنصر مداری کلی به کار رود.



شکل ۷-۱: یک عنصر مداری عمومی به وسیله یک جفت ترمینال مشخص می‌شود که سایر عناصر مداری می‌توانند به آنها وصل شوند.

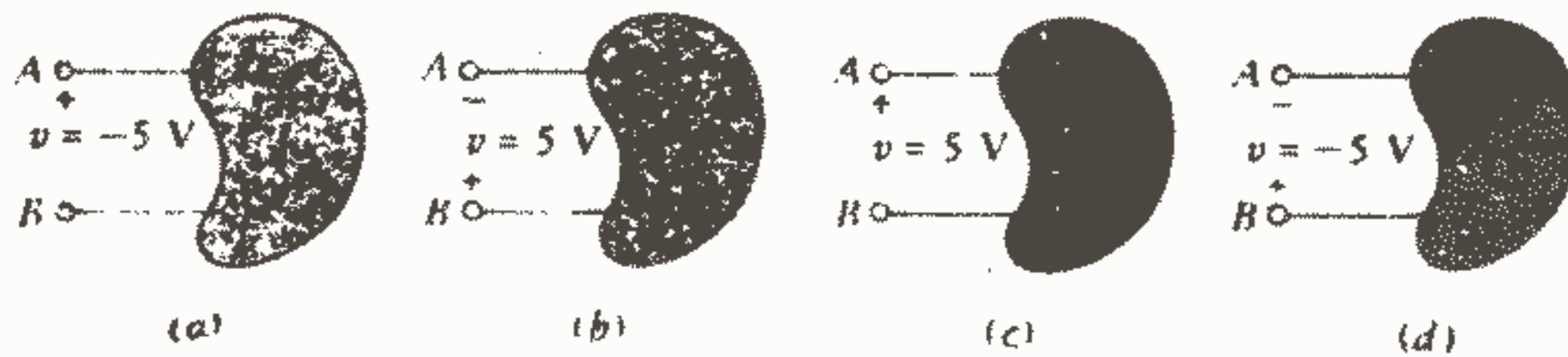
دو مسیر وجود دارد که از طریق آنها جریان می‌تواند به عنصر وارد و یا از آن خارج شود. بعداً ما عناصر مداری خاص را به وسیله توصیف مشخصه‌های الکتریکی که ممکن است در ترمینالهای آنها مشاهده شود، تعریف خواهیم نمود.

بیایید فرض کنیم که جریان مستقیم در ترمینال A وارد عنصر عمومی شکل ۷-۱ شود و از B خارج شود. همچنین فرض می‌کنیم که عبور این بار از میان عنصر احتیاج به صرف انرژی دارد. در این صورت می‌گوییم که یک ولتاژ الکتریکی و یا اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو ترمینال وجود دارد و یا اینکه یک ولتاژ و یا اختلاف پتانسیل در دو سر عنصر وجود دارد. بنابراین ولتاژ دو سر یک جفت ترمینال معیاری است برای کاری که لازم است تا بار را از میان عنصر عبور دهد. بطور خاص تر ما ولتاژ دو سر عنصر را به صورت کار لازم برای حرکت دادن یک بار مثبت ۱C از یک ترمینال به ترمینال دیگر تعریف خواهیم کرد. علامت ولتاژ در زیر مورد بحث قرار خواهد گرفت. واحد ولتاژ ولت (V) می‌باشد که برابر است با $\frac{1}{3}$ و ولتاژ را با V یا v نمایش می‌دهند. ما در واقع خوشبخت هستیم که اسم کامل فیزیکدان قرن هیجده ایتالیا یعنی آلساندرو گیزپ آنتونیو ولتا برای واحد اختلاف پتانسیل بکار نرفته است. یک اختلاف پتانسیل و یا ولتاژ می‌تواند بین یک جفت ترمینال وجود داشته باشد خواه جریانی جاری باشد و یا نباشد. مثلاً یک باتری اتومبیل دارای ولتاژ ۱۲ ولت در دو سر ترمینالهایش می‌باشد حتی اگر هیچ چیزی به ترمینالهایش وصل نشده باشد.

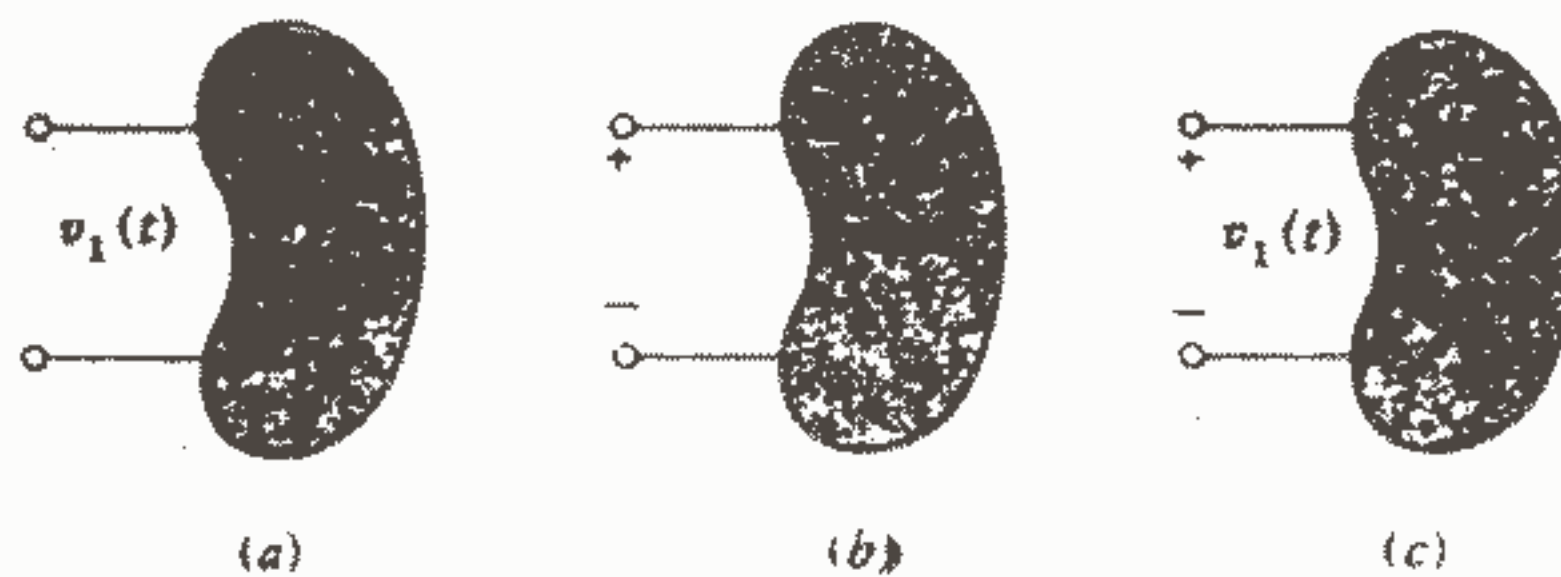
انرژی که برای راندن بار در عنصر مصرف می‌شود باید بنا بر اصل بقای انرژی در جای دیگری ظاهر شود. وقتی که بعداً با عناصر مداری خاص برخورد نمودیم باید متذکر شویم که آیا انرژی به صورتی سهل الوصول ذخیره می‌شود و یا اینکه بطور غیرقابل برگشتی به حرارت، انرژی صوتی و غیره تبدیل می‌شود.

حال باید قراردادی وضع کنیم که به وسیله آن بتوانیم بین حالتی که انرژی به وسیله منبع خارجی به عنصر داده می‌شود و حالتی که انرژی به وسیله عنصر به وسیله خارجی داده می‌شود تمایز قائل شویم. ما اینکار را به وسیله انتخاب علامتی برای ولتاژ ترمینال A نسبت به ترمینال B انجام می‌دهیم. اگر جریان مثبتی به ترمینال A وارد شود و اگر یک منبع خارجی باید انرژی مصرف کند تا این جریان را برقرار کند، در این صورت ترمینال A نسبت به ترمینال B مثبت است و به طریق دیگر می‌توانیم بگوییم که ترمینال B نسبت به ترمینال A منفی است (مفهوم ولتاژ به وسیله یک جفت علامت مثبت - منفی جبری نشان داده می‌شود. مثلاً در شکل ۸a-۱ قرار گرفتن علامت مثبت در ترمینال A نشان می‌دهد که ترمینال A به اندازه ۷ ولت نسبت به ترمینال B مثبت می‌باشد. سپس اگر ما دریابیم که مقدار ۷ برابر با ۵V- است آنگاه می‌توانیم بگوییم که یا A به اندازه ۵V- نسبت به B مثبت است و یا B، ۵V نسبت به A مثبت است. سایر حالات در شکل‌های d, c, b, a-۱ نشان داده

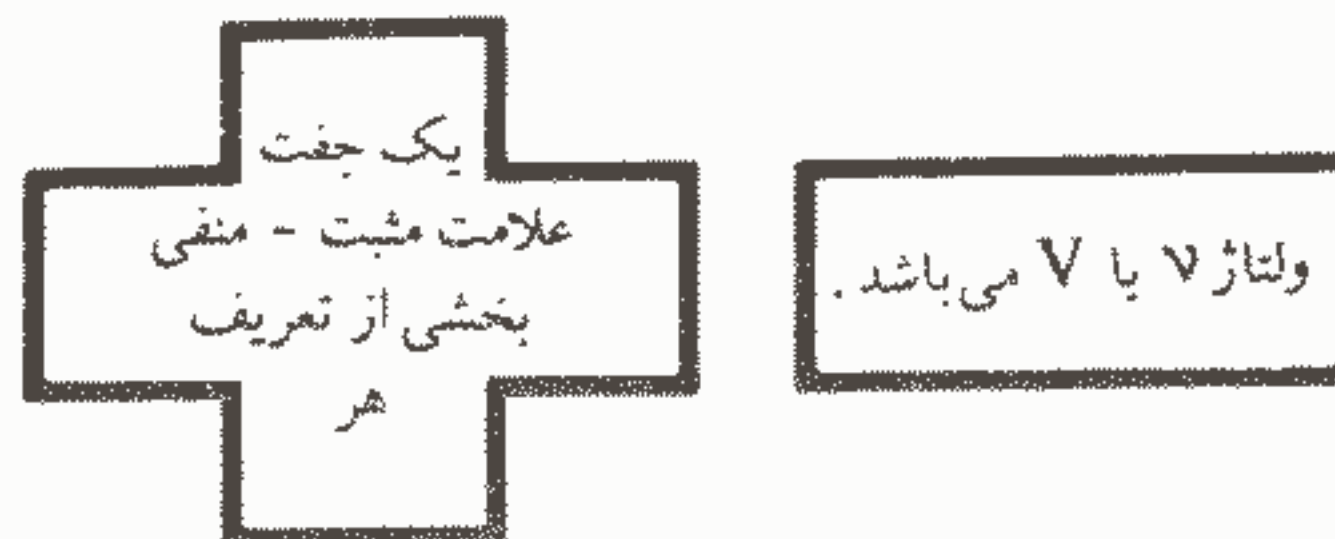
شده‌اند. درست همانگونه که در بحث مان دربارهٔ جریان ذکر کردیم لازم است توجه کنیم که علامت مثبت و منفی جبری پلاریته عملی ولتاژ را نشان نمی‌دهد بلکه بطور ساده قراردادی است که ما را قادر می‌سازد بطور دور از ابهام دربارهٔ «ولتاژ دو سر جفت ترمینال» صحبت کنیم. تعریف هر ولتاژی باید شامل یک جفت علامت مثبت - منفی استفاده از یک عبارت تعریف نشده می‌باشد. شکل‌های a, b, c, d تعریف $v_1(t)$ را ارائه نمی‌کنند اما شکل ۱-۹ اینکار را انجام می‌دهد.



شکل ۱-۸: در (a) و (b) ترمینال B به اندازه $5V$ نسبت به ترمینال A مثبت است و در (c) و (d) ترمینال A به $5V$ نسبت به B مثبت است.



شکل ۱-۹: (a) و (b) تعریف ناقصی از یک ولتاژ (c) تعریف صحیح شامل علامتی برای متغیر و یک جفت علامت مثبت - منفی می‌باشد.



تمرین ۴-۱: در شکل ۱-۹c فرض کنید $v_1(t) = 100 \cos 250t$ پیدا کنید: (a) $v_1(1 \text{ ms})$, (b) $v_1(1 \text{ ms})$, (c) انرژی لازم برای حرکت دادن 4 C از ترمینال پایین‌تر به ترمینال بالاتر در $t = 1 \text{ ms}$.

جواب: $96/97$, $-41/97$, -216 J

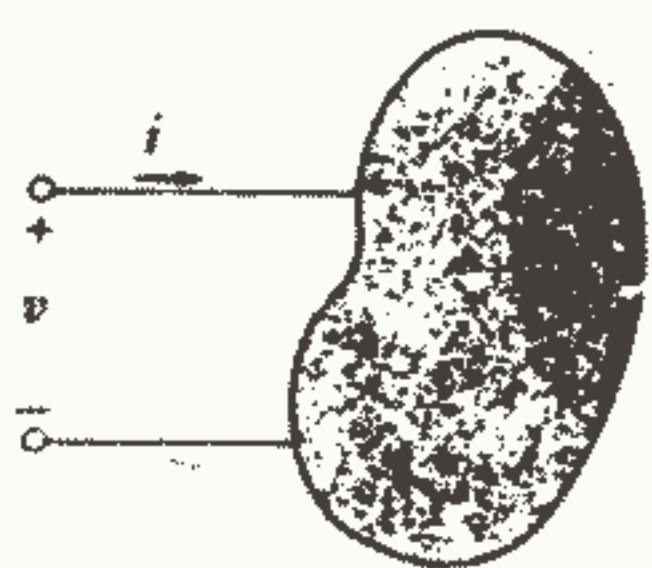
۶-۱- قدرت

ما اکنون احتیاج داریم عبارتی برای قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر مداری بر حسب ولتاژ دو سر آن و جریان آن، تعیین کنیم. ولتاژ قبلاً بر حسب صرف انرژی تعریف شده است و قدرت عبارت از سرعت مصرف انرژی می باشد. اگرچه تا زمانیکه جهت جریان مشخص نشود هیچ بیانی را راجع به انتقال انرژی در هیچیک از چهار حالت نشان داده شده در شکل ۸-۱ نمی توان ارائه نمود.

بیا بید فرض کنیم که یک فلش جریان در هر یک از پایه های بالایی رو به سمت راست قرار گرفته باشد و با مقدار « $2A$ » مشخص شده باشد، سپس از آنجاییکه در هر دو حالت c ، d ترمینال A نسبت به ترمینال B به اندازه $5V$ مثبت می باشد و یک جریان مثبت به ترمینال A وارد می شود پس انرژی به عنصر داده می شود و در دو حالت باقیمانده، عنصر به مدار خارجی انرژی می دهد.

ما قبلاً قدرت را تعریف کرده ایم و باید آن را با P یا p نشان دهیم. اگر یک ژول انرژی برای انتقال یک کولن بار در قطعه ای مصرف شود در این صورت سرعت مصرف انرژی در انتقال یک کولن بار در ثانیه در قطعه یک وات خواهد بود. این قدرت جذب شده باید متناسب با تعداد کولن های انتقال یافته در ثانیه و یا جریان و همچنین انرژی لازم برای انتقال یک کولن در عنصر و یا ولتاژ باشد. بنابراین داریم: $p = vi$ (۳).

از نظر دیمانسیون طرف راست این معادله حاصل ضرب ژول بر کولن در کولن بر ثانیه می باشد که همانگونه که انتظار می رود واحد ژول بر ثانیه و یا وات به دست می آید.



شکل ۱۰-۱: قدرت جذب شده به وسیله عنصر به صورت

حاصل ضرب $P = Vi$ می باشد.

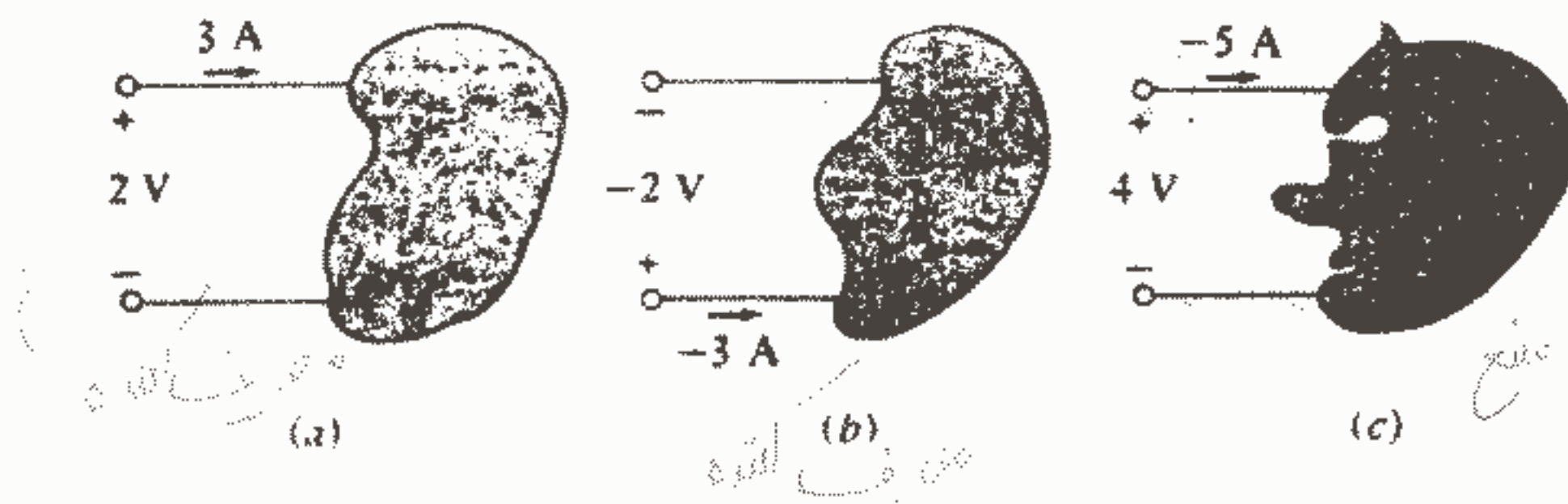
اگر یک فلش جریان رو به سمت راست و با مقدار « $2A$ » در هر یک از پایه های بالایی شکل ۸-۱ قرار داده شود قدرت $10W$ به وسیله عنصر c ، d ، $10W$ - به وسیله a ، b جذب می شود (و یا $10W$ تولید می شود).

قرارداد جریان، ولتاژ و قدرت در شکل ۱۰-۱ خلاصه شده است. شکل نشان می دهد که

جریان مثبت

اگر یک ترمینال عنصر V ولت نسبت به دیگری مثبت باشد و جریان i از ترمینال اول وارد عنصر شود در اینصورت قدرت $P = vi$ به وسیله عنصر جذب می شود و یا به آن تحویل داده می شود. (مهرمکت)

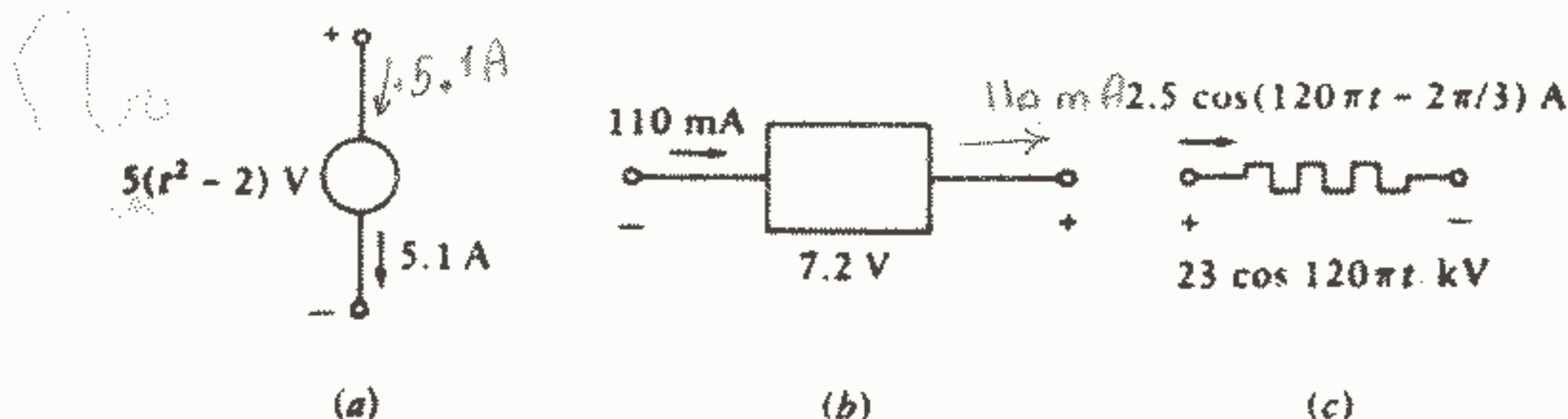
وقتی که فلش جریان در ترمینال مثبت رو به داخل عنصر باشد ما از قرارداد علامت غیر فعال استفاده می کنیم. این قرارداد باید به دقت مطالعه و فهمیده شود و به خاطر سپرده شود. به عبارت دیگر این قرارداد به ما می گوید که اگر فلش جریان و پلاریته ولتاژ در ترمینالهای عنصر طوری قرار گیرند که جریان از ترمینال مثبت عنصر وارد شود و اگر هم فلش و هم جفت علامت ولتاژ مقادیر جبری مناسبی مشخص شوند در اینصورت قدرت جذب شده به وسیله عنصر را می توان با حاصلضرب این دو مقدار بیان نمود. اگر مقدار عددی حاصلضرب منفی باشد در اینصورت می گوئیم که عنصر قدرت منفی جذب می کند و یا عملاً قدرت تولید می کند و یا به مدار خارجی قدرت تحویل می دهد. مثلاً در شکل ۱-۱۰ با $V = 5V$ و $i = -4A$ می توان گفت عنصر $-20W$ جذب می کند و یا $20W$ تولید می کند.



شکل ۱-۱۱: (a) قدرت $P = (2)(3) = 6W$ به وسیله عنصر جذب می شود.

(b) قدرت $P = (-2)(-3) = 6W$ به وسیله عنصر جذب می شود.

(c) قدرت $P = (4)(-5) = -20W$ به وسیله عنصر جذب می شود و یا $20W$ به وسیله عنصر تحویل داده می شود.



شکل ۱-۱۲: به تمرین ۵-۱ مراجعه کنید.

سه مثال شکل ۱۱ - ۱ این قرارداد را بیشتر توضیح می دهد.

تمرین ۵ - ۱ - پیدا کنید: (a) قدرت تحویل داده شده به عنصر مداری شکل ۱-۱۲a در $t = 0.8s$ ، (b) قدرت تولید شده به وسیله عنصر مداری در شکل ۱-۱۲b، (c) قدرت جذب شده به وسیله عنصر مداری در شکل ۱-۱۲c در $t = 0$.

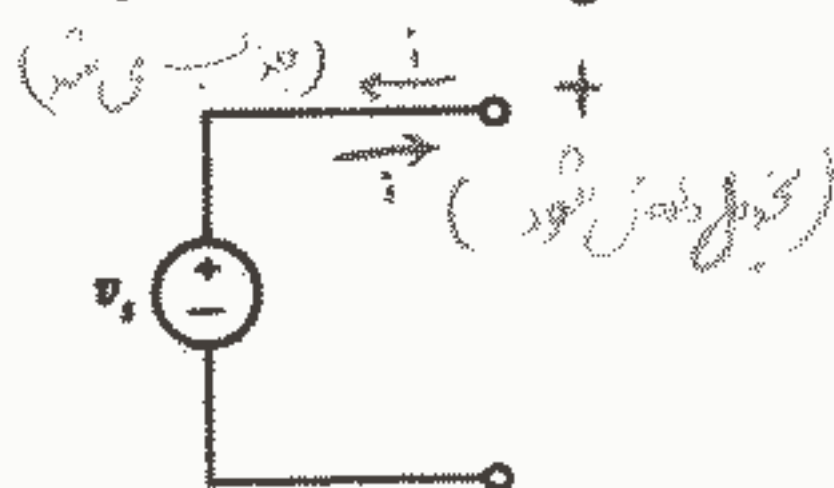
جواب: $-34/68W$ ، $792mw$ ، $-28/75Kw$

۷-۱- انواع مدارها و عناصر مداری

با استفاده از مفاهیم جریان و ولتاژ اکنون امکان تعریف دقیق تر عنصر مداری وجود دارد. این امر حائز اهمیت است که مابین قطعه فیزیکی و مدل ریاضی آن که ما برای تحلیل رفتار آن در مدار بکار خواهیم برد تفاوت قائل شویم. بیا باید توافق کنیم ما عبارت «عنصر مداری» را برای اشاره به مدل ریاضی بکار ببریم. انتخاب یک مدل خاص بر هر قطعه واقعی باید براساس اطلاعات تجربی و یا آزمایش صورت بگیرد و ما معمولاً فرض خواهیم کرد که این انتخاب قبلاً انجام یافته است. ما باید ابتدا روشهای تحلیل مدارهای ایده آل را بیاموزیم. عنصر مداری عمومی و عنصر مداری ساده با بیان اینکه یک اکنون اجازه دهید بین یک عنصر مداری عمومی و یک عنصر مداری ساده با بیان اینکه یک عنصر مداری عمومی ممکن است ترکیبی از چند عنصر مداری ساده باشد اما یک عنصر مداری ساده را نمی توان به عناصر مداری ساده دیگر تجزیه نمود، تفاوت قائل شویم. جهت اختصار توافق می کنیم که عبارت عنصر مداری را کلاً برای عنصر مداری ساده بکار ببریم. تمام عناصر ساده مداری را که در آینده با آنها مواجه خواهیم شد می توان با توجه به رابطه بین ولتاژ دو سر عنصر و جریان آن طبقه بندی نمود. مثلاً، اگر ولتاژ دو سر عنصر مستقیماً متناسب با جریان آن باشد یعنی $v = ki$ در اینصورت ما این عنصر را مقاومت می نامیم. سایر انواع عناصر مداری ساده دارای ولتاژ متناسب با مشتق زمانی و یا انتگرال نسبت به زمان جریان می باشند. همچنین عناصری وجود دارند که ولتاژ آنها کاملاً مستقل از جریان و یا جریان کاملاً مستقل از ولتاژ می باشد، اینها را منابع مستقل می نامند. به علاوه، ما نیاز به تعریف انواع خاص منابع داریم که در آنها ولتاژ و یا جریان بستگی به جریان یا ولتاژ قسمت دیگری از مدار دارد، چنین منابعی را منابع وابسته یا کنترل شده می نامند.

بنابر تعریف یک عنصر مداری ساده عبارت است از مدل ریاضی یک قطعه الکتریکی دو ترمینالی و آن را می توان به وسیله رابطه ولتاژ - جریان آن کاملاً توصیف نمود و نمی توان آن را به قطعات دو ترمینالی دیگر تجزیه نمود.

اولین عنصری که ما به آن نیاز داریم منبع ولتاژ مستقل می باشد که آن را به وسیله یک ولتاژ ترمینال که کاملاً مستقل از جریان آن است مشخص می نماییم. بنابراین، اگر یک منبع ولتاژ مستقل بماند داده شود و گفته شود که ولتاژ ترمینال $50 \angle 17^\circ$ است، می توانیم مطمئن باشیم که در $t = 2s$ ولتاژ برابر با $200V$ خواهد بود، صرف نظر از جریانی که کشیده می شود یا کشیده می شود و یا کشیده خواهد شد. نمایش یک منبع ولتاژ مستقل در شکل ۱۳ - ۱ نشان داده شده است. اندیس S صرفاً نشان دهنده این است که ولتاژ مورد نظر ولتاژ منبع می باشد.



شکل ۱۳ - ۱: سمبل مداری یک منبع ولتاژ مستقل. سمبل مداری یک منبع ولتاژ وابسته با کنترل شده در شکل a ۱۶ - ۱ نشان داده شده است.

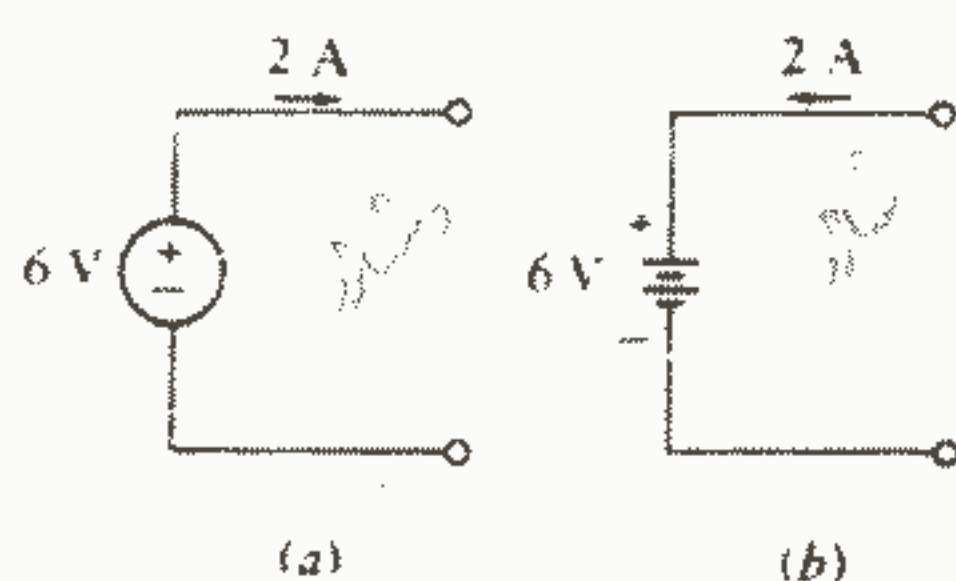
نکته ای که تکرار آن مفید است این است که وجود علامت مثبت در انتهای فوقانی سمبل مداری منبع ولتاژ مستقل در شکل ۳-۱ الزاماً به این معنی نیست که ترمینال بالایی همیشه باید نسبت به ترمینال پایینی مثبت باشد. بلکه به این معنی است که ترمینال بالایی v_s ولت نسبت به ترمینال پایینی مثبت می باشد. اگر، در لحظه ای، v_s منفی باشد در این صورت ترمینال بالایی عملاً نسبت به ترمینال پایینی در آن لحظه منفی می باشد.

اگر یک فلش جریان با مقدار « i » در مجاورت پایه فوقانی این منبع قرار گیرد و رو به چپ باشد در این صورت جریان i به ترمینالی که علامت مثبت دارد وارد می شود بنابراین منبع قدرت $P = v_s i$ را جذب کند. در نتیجه ما ممکن است جهت فلش را رو به راست انتخاب کنیم تا قدرت $v_s i$ به وسیله منبع تحویل داده شود. هر یک از این دو جهت را می توان بکار برد.

منبع ولتاژ مستقل یک منبع ایده آل است و نمی تواند دقیقاً نماینده هر وسیله فیزیکی واقعی باشد زیرا منبع ایده آل بطور تئوری می تواند انرژی بی نهایت از ترمینالهایش تحویل دهد. هر کولن که از میان آن عبور می کند انرژی v_s ژول می گیرد و تعداد کولن ها در ثانیه نامحدود است. اگرچه، این منبع ولتاژ ایده آل می تواند تقریباً قابل قبولی برای برخی منابع ولتاژ عملی باشد. مثلاً یک باتری اتومبیل دارای ولتاژ ترمینالی $12V$ می باشد که تا زمانی که جریان عبوری از

آن بیش از چند آمپر نشود، ثابت می ماند. این جریان کوچک می تواند در هر یک از دو جهت جاری شود. اگر آن مثبت باشد و از ترمینال مثبت خارج شود در اینصورت باتری به چراغهای جلو قدرت می دهد و می گوییم دشارژ می شود اما اگر جریان مثبت باشد و رو به داخل ترمینال مثبت جاری باشد در اینصورت باتری در حال شارژ شدن است.

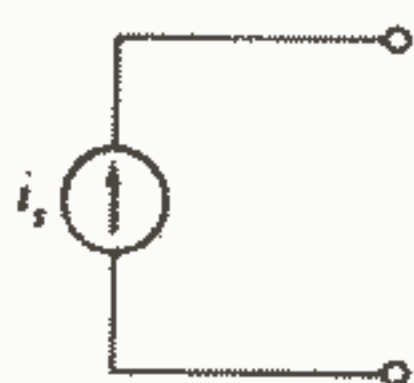
یک پریز برق خانگی معمولی نیز بطور تقریب می تواند یک منبع ولتاژ مستقل باشد که ولتاژ $V = 115\sqrt{2} \cos 2\pi 60 t$ را ارائه می کند و این بیان برای جریانهای کمتر از $20 A$ صحیح است. یک منبع ولتاژ مستقل که دارای یک ولتاژ ترمینال ثابت است اغلب منبع ولتاژ مستقل dc نامیده می شود و با یکی از دو علامت شکل ۱۴ - ۱ نشان داده می شود. در شکل ۱۴b - ۱ توجه داشته باشید که وقتی که صفحات واقعی باتری در نظر گرفته شود صفحه طویل تر در ترمینال مثبت قرار می گیرد و در اینصورت علامت مثبت و منفی زائد و اضافی می باشند ولی آنها معمولاً بکار می روند.



شکل ۱۴ - ۱: نمایشهای مختلف یک منبع ولتاژ ثابت یا dc

در (a) منبع $12 W$ تحویل می دهد و در (b) باتری $12 W$ جذب می کند.

منبع ایده آل دیگری که ما نیاز خواهیم داشت منبع جریان مستقل می باشد. در این مورد جریان عبوری از عنصر کاملاً مستقل از ولتاژ دو سر آن است. سمبل یک منبع جریان مستقل در شکل ۱۵ - ۱ نشان داده شده است. اگر i_s ثابت باشد منبع را منبع جریان مستقل dc می نامیم.



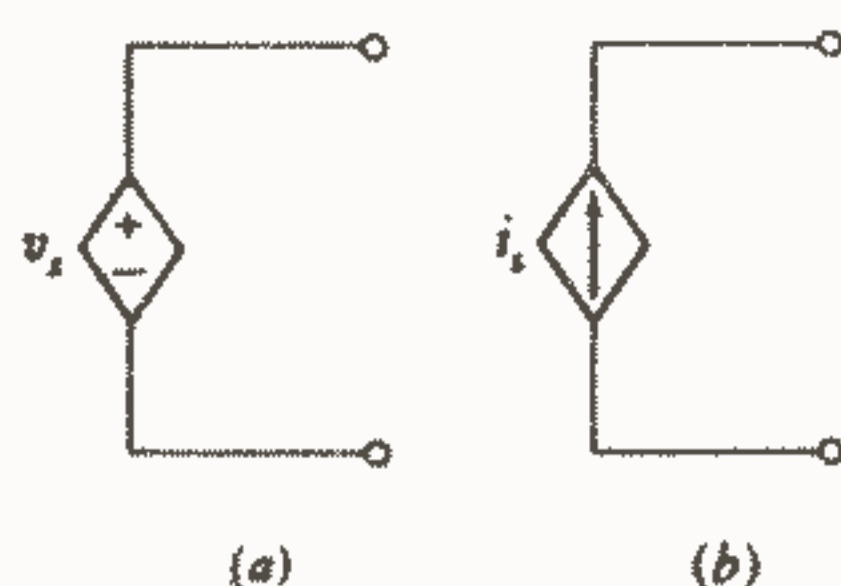
شکل ۱۵ - ۱: سمبل مداری یک منبع جریان مستقل

۱ - عباراتی مانند «منبع ولتاژ dc » و «منبع جریان dc » بطور معمول و رایج بکار می روند. بطور دقیق تر آنها به معنی «منبع ولتاژ جریان مستقیم» و «منبع جریان، جریان مستقیم» می باشند. اگرچه این عبارات ممکن است طولانی و گیج کننده باشند و بقدری کاربرد وسیع دارند که دلیلی برای مخالفت با آنها وجود ندارد.

مانند منبع ولتاژ مستقل، منبع جریان مستقل تقریب خوبی برای یک عنصر فیزیکی است. بطور تئوری آن می تواند قدرت بی نهایت از ترمینال هایش تحویل دهد زیر برای هر ولتاژی که دو سرش باشد هر چقدر هم که این ولتاژ بزرگ باشد جریان یکسانی تولید می کند. با وجود این تقریب خوبی برای بسیاری از منابع عملی بخصوص در مدارات الکترونیکی است.

همچنین منبع جریان مستقل dc با تقریب بسیار نزدیکی بیانگر شعاع پروتونی یک سیکلوترون که در جریان اشعه ثابت در حدود $1\mu A$ کار می کند و تحویل $1\mu A$ را تقریباً با هر قطعه ای که در دو سر ترمینال هایش (زمین و اشعه) قرار گیرد ادامه می دهد، می باشد. دو نوع منابع ایده آل را که تا کنون مورد بحث قرار داده ایم منابع مستقل نامیده می شوند زیرا مقدار کمیت منبع به هیچ وجه به وسیله فعالیتهای بقیه مدار تحت تأثیر قرار نمی گیرد. این مغایر با نوع دیگری از منبع ایده آل یعنی منبع وابسته یا کنترل شده که در آن کمیت منبع به وسیله جریان یا ولتاژ قسمت دیگری از مدار کنترل می شود، می باشد. برای تمایز قائل شدن بین منابع مستقل و وابسته سمبلهای لوزی شکل نشان داده شده در شکل ۱-۱۶ را معرفی می کنیم. چنین منابعی در مدار معادل الکتریکی بسیاری از قطعات الکترونیکی مانند ترانزیستورها، تقویت کننده های عملیاتی و مدارهای مجتمع ظاهر می شوند. ما همه اینها را در فصول آتی خواهیم دید.

منابع ولتاژ و جریان مستقل و وابسته عناصر فعال هستند و قادرند به مدار خارجی قدرت تحویل دهند. حال ما یک عنصر غیر فعال را به عنوان عنصری که فقط قادر است قدرت بگیرد تصور می کنیم. اگرچه، بعداً خواهیم دید که برخی عناصر غیر فعال قادر به ذخیره مقدار محدودی انرژی و باز پس دادن آن به یک عنصر خارجی می باشند و چون ما فعلاً آنها را عنصر غیر فعال می نامیم در آینده لازم خواهد بود که دو تعریف خود را اصلاح کنیم.



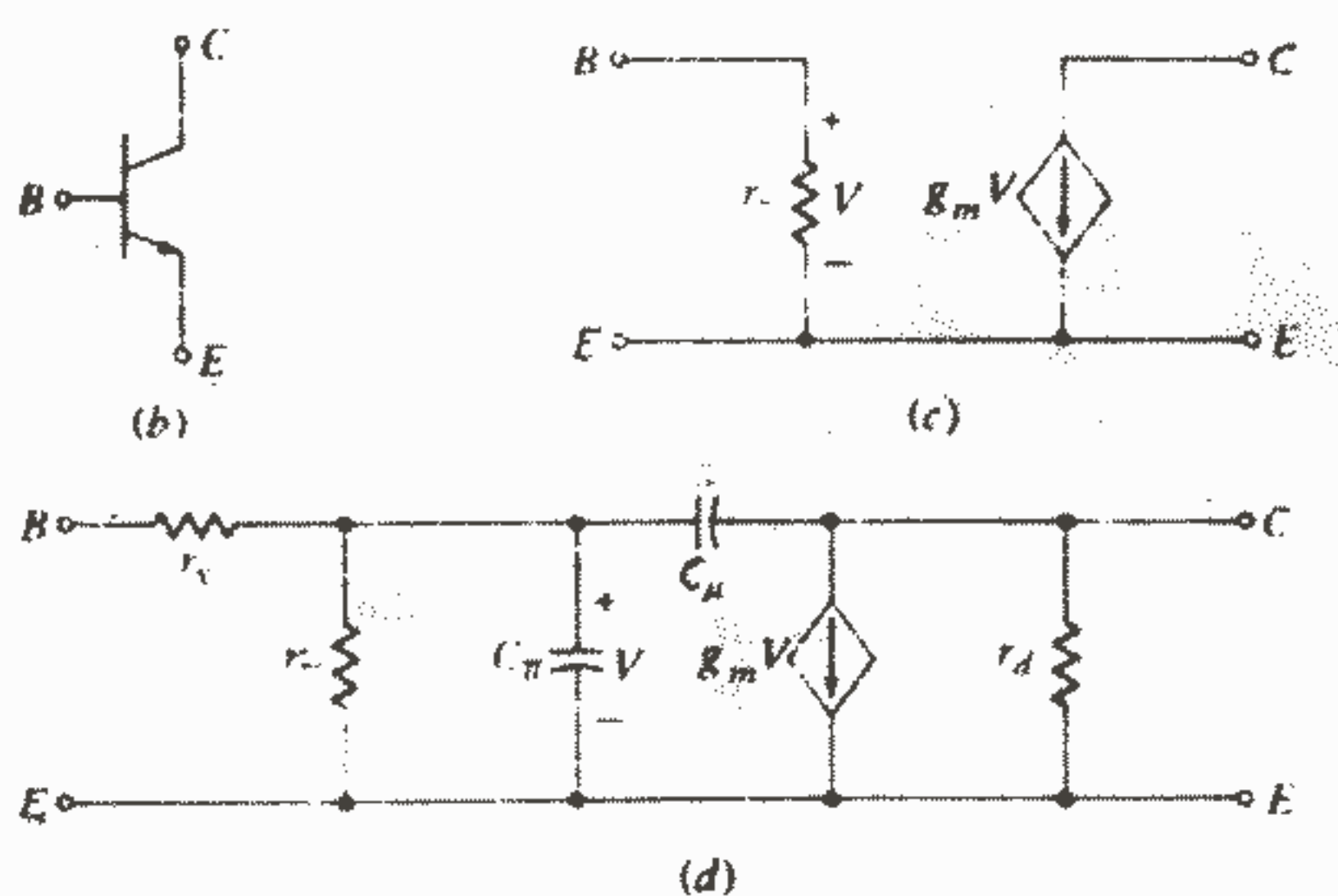
شکل ۱-۱۶: شکل های لوزی گونه سمبل مداری منبع ولتاژ

وابسته را در (a) و منبع جریان وابسته را در (b) نشان

می دهند.

خاص از قبیل منابع ولتاژ و جریان مستقل و وابسته را ارائه کرده‌ایم. در باقیمانده کتاب ما فقط چهار عنصر مداری دیگر را که همگی غیرفعال هستند تعریف خواهیم کرد بنامهای: مقاومت، سلف، خازن و یک جفت سلف که بطور متقابل کوپل شده‌اند. اینها همگی عناصر ایده‌آل هستند. آنها حائز اهمیت هستند زیرا ما می‌توانیم آنها را به صورت شبکه‌ها و مدارهایی که بیانگر وسایل واقعی هستند با دقتی که می‌خواهیم ترکیب کنیم.

بنابراین ترانزیستوری که ساختمان فیزیکی آن در شکل ۱۸a - ارائه شده است و سمبل الکتریکی آن در شکل ۱۸b - داده شده است را می‌توان به وسیله یک مقاومت و یک منبع جریان وابسته در شکل ۱۸c - مدل سازی کرد البته اگر ما فقط نیاز به عملکرد تقریبی آن در فرکانسهای متوسط داشته باشیم. توجه داشته باشید که منبع جریان وابسته جریانی تولید می‌کند که بستگی به یک ولتاژ در جای دیگری از مدار دارد. شکل ۱۸d - مدل دقیق تری را برای کاربردهای فرکانس بالا که حاوی سه مقاومت، دو خازن و یک منبع جریان وابسته است، نشان می‌دهد.



شکل ۱۸ - ۱: یک ساختمان فیزیکی ممکن برای یک ترانزیستور

npn دو قطبی سیلیکون (به مقیاس نیست) (b) سمبل

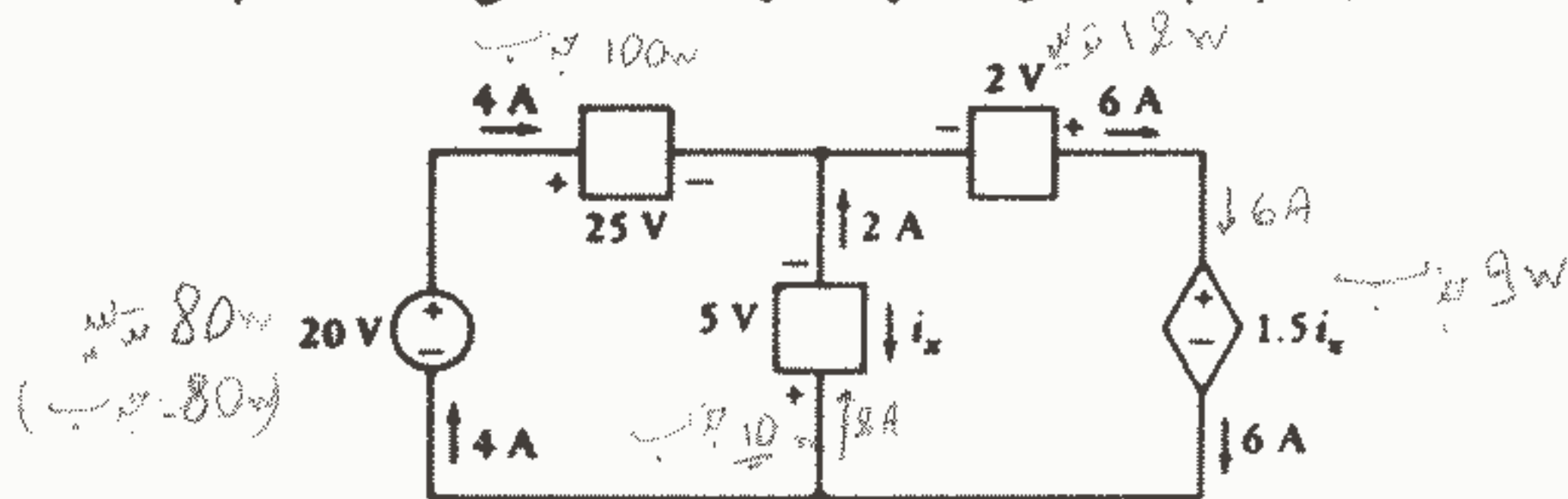
مداری ترانزیستور npn (c) یک مدل مداری ساده که در

فرکانس متوسط مفید می‌باشد. (d) یک مدل دقیق تر برای

فرکانس بالا.

چنین ترانزیستورهایی ممکن است فقط قسمت کوچکی از یک مدار مجتمع را که احتمالاً به مساحت 2 mm^2 و ضخامت 0.2 mm است تشکیل دهند که البته هنوز چند هزار ترانزیستور و هزاران مقاومت و خازن هم دارد. بنابراین ما یک وسیله فیزیکی داریم که اندازه‌اش در حدود یکی از حروف این صفحه می‌باشد اما مدل آن شاید ترکیبی است از ده هزار عنصر مداری ساده‌ایده‌آل. مدل‌های مناسب برای وسایل فیزیکی مختلف که دارای کاربردهای وسیعی هستند در دروس الکترونیک، تبدیل انرژی، آنتن و سایر دروسی که بعداً در دوره تحصیلات مهندسی ظاهر خواهند گشت، مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

تمرین ۱ - ۶: قدرت جذب شده توسط هر عنصر در مدار شکل ۱۹ - ۱ را پیدا کنید.



شکل ۱۹ - ۱: مربوط به تمرین ۱ - ۶

مسائل^۱

- ۱ - یک خبرنگار مشهور خوش برخورد و ملایم^۲ که دارای جرم 80 Kg می‌باشد، می‌تواند به بالای یک ساختمان بلند (250 m) با یک خیز، جهش کند و از نظر سرعت هم به سرعت گلوله (600 m/s) می‌باشد. (a) حداکثر سرعت او بر حسب مایل بر ساعت چقدر است؟ (b) چه مقدار انرژی باید به خیزش بدهد تا دقیقاً به بالای ساختمان برسد؟ (c) این انرژی تا چند روز می‌تواند یک ماشین حساب الکترونیکی را که مصرف آن 100 mw می‌باشد، تغذیه کند؟ (d) نام دوست دختر این خبرنگار چیست؟
- ۲ - یک مرد یا زن 70 کیلو گرمی با نرخ متوسط 120 W در 24 ساعت انرژی می‌سوزاند. این سرعت متابولیکی هنگام خواب به 75 W تنزل می‌کند و هنگام پیاده‌روی به 230 W و هنگام دو با سرعت 10 mi/h به 1000 W صعود می‌کند. انرژی مصرف شده بر حسب اسب بخار هنگام دو با سرعت 10 mi/h چقدر است؟

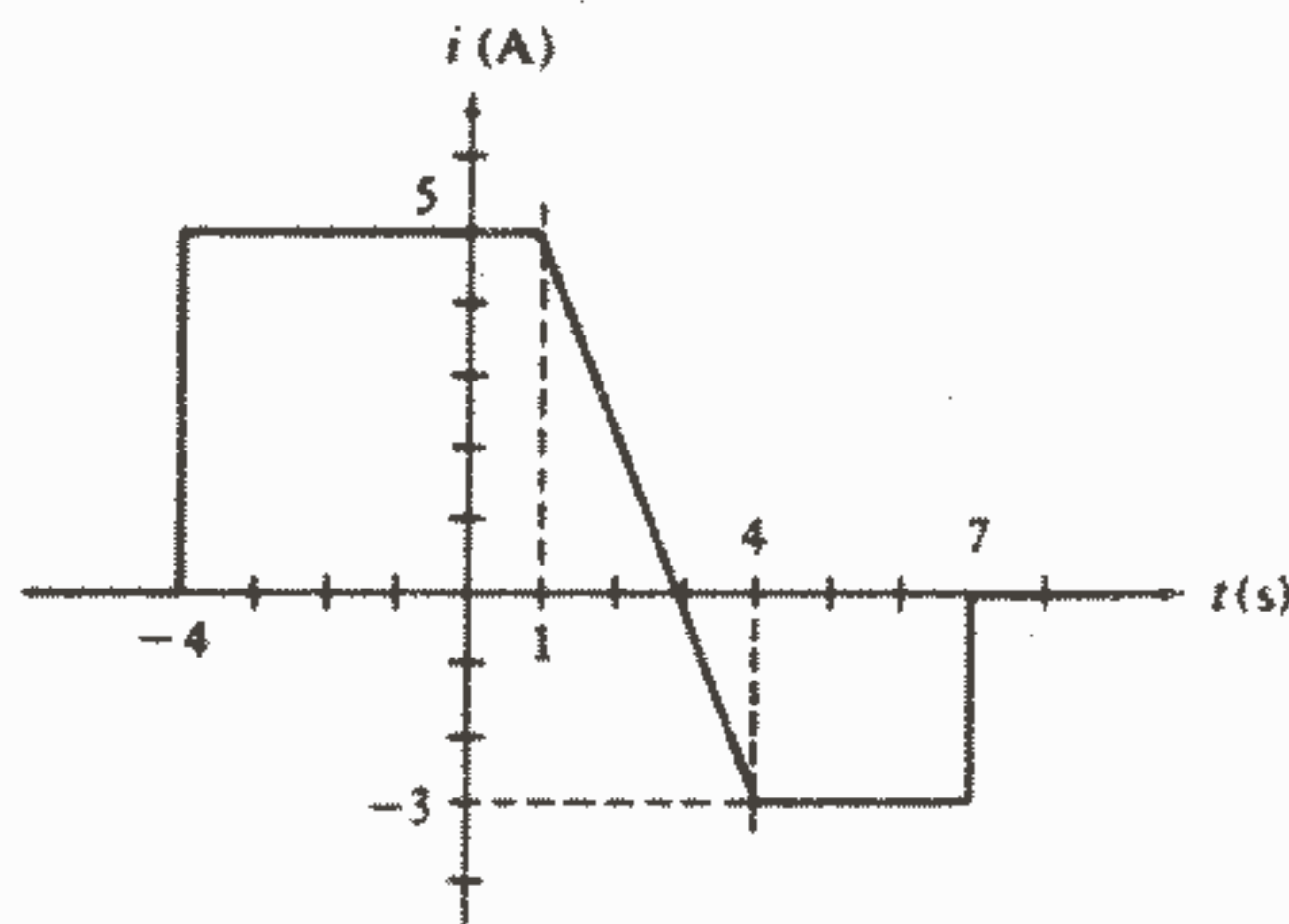
۱ - جواب مسائل فرد در آخر کتاب داده شده است.

۲ - اشاره به شخصیت یک سریال تلویزیونی در آمریکا دارد که شخصیتی قهرمان گونه (مثلاً مانند سوپرمن) می‌باشد. (مترجم)

- ۳- وقتی که یک لباس خشک کن برقی خاصی با تمام قدرت کار می کند، 5.2 KW قدرت می کشد. (a) چند «اسب متوسط» را برای تولید این قدرت باید به کار برد؟ (b) با فرض اینکه سوختی دارای چگالی 50 lbm/ft^3 باشد و 18500 btu بر پوند جرم ارائه کند، چند لیتر ($1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ لیتر}$) سوخت باید بدهیم تا این خشک کن به مدت یک ساعت کار کند؟
- ۴- بار خالصی که در یک هادی در نقطه x به سمت راست منتقل شده است، به صورت تابعی از زمان به صورت مقابل داده شده است:

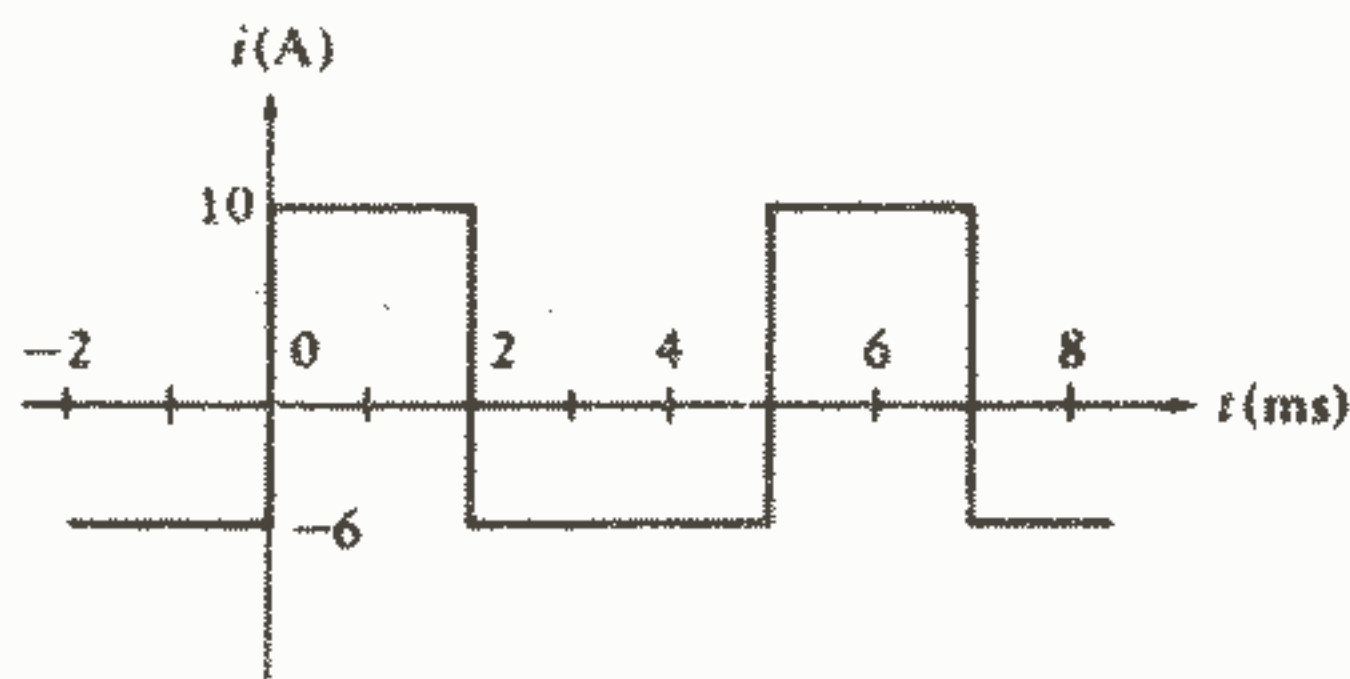
$$q = 7c, t \geq 6, q = 5\sqrt{1+3^{-t}}, 1 \leq t \leq 6, q = 4t + 16, -4 \leq t \leq -2, \\ q = 0, t \leq -4s, q = 2t^2, -2 \leq t \leq 1$$

- (a) q را نسبت به t رسم کنید. (b) i را در لحظات: $t = -4.5, -3.5, -2.5, \dots, 5.5, 6.5s$ محاسبه کنید و i را نسبت به t رسم کنید.
- ۵- نمودار i بر حسب t در شکل ۱-۲۰ داده شده است، کل باری را که از نقطه مرجع در فاصله زمانی $-2 < t < 5$ منتقل شده است محاسبه کنید.



شکل ۱-۲۰: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

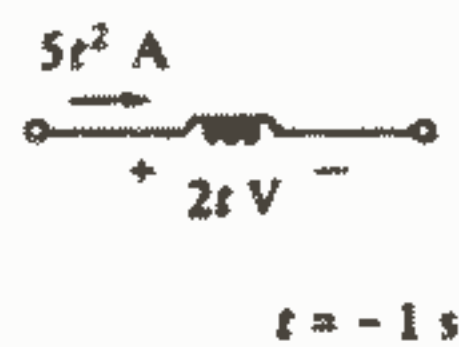
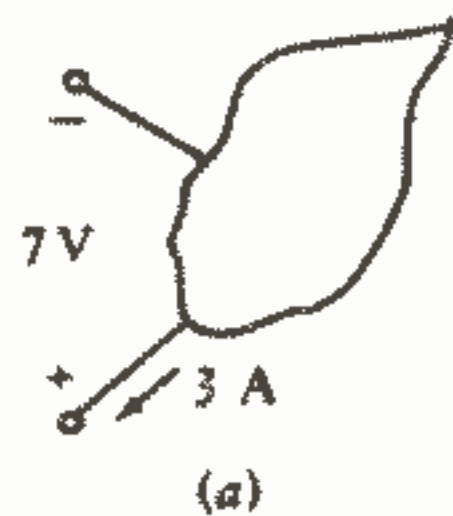
۶ - شکل موج شکل ۱-۲۱ دارای پریود 5ms می باشد. (a) مقدار متوسط جریان در یک پریود چقدر است؟ (b) چقدر بار در فاصله $1 \leq t \leq 4\text{ms}$ منتقل می شود؟ (c) اگر $q(0) = 0$ آنگاه $q(t)$ را در فاصله $0 < t < 12\text{ms}$ رسم کنید.



شکل ۱-۲۱: به مسئله ۶ و ۱۰ مراجعه کنید.

۷ - کل باری که به سمت راست نقطه A در یک هادی خاص بین $t = 0$ تا t جاری شده است به صورت $q_A(t) = 100e^{-2000t} \cos 5000t \text{ mC}$ مشخص شده است. (a) چقدر بار بین $t = 1\text{ms}$ و $t = 2\text{ms}$ به سمت راست جاری می شود. (b) جریان روبه راست A در $t = 1\text{ms}$ چقدر است؟ (c) حال فرض کنید جریان روبه راست در A عبارت از $i_A(t) = 2(e^{-5000t} - e^{-8000t}) \text{ A}$ باشد، مقدار باری را که در فاصله $t = 10\mu\text{s}$ تا $t = 80\mu\text{s}$ به راست جاری می شود چقدر است؟

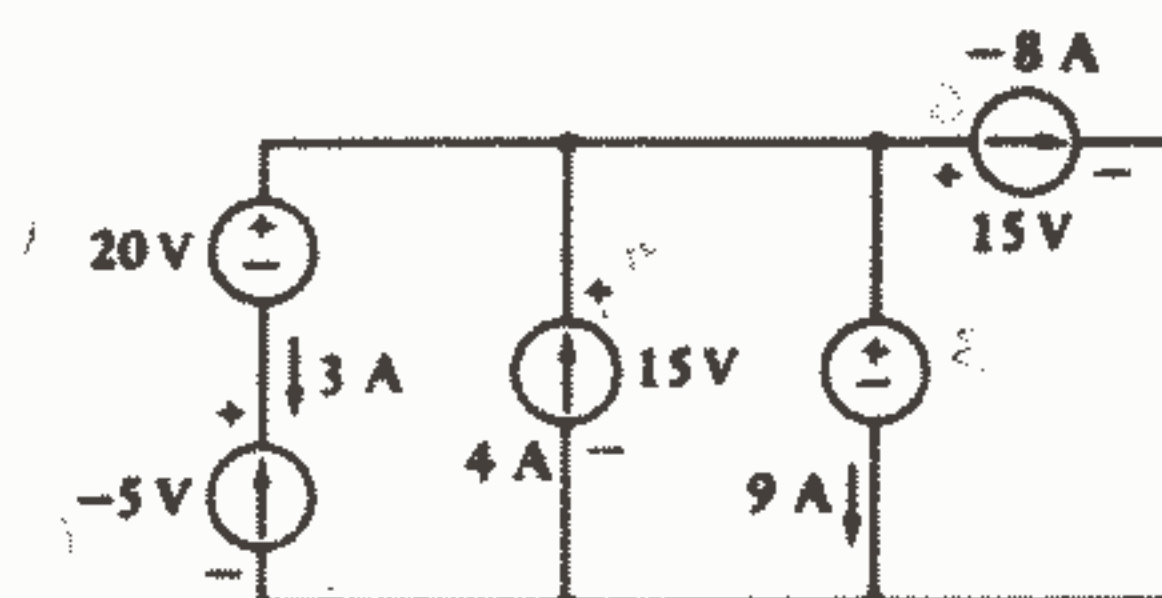
۸ - قدرتی را که به وسیله هر یک از عناصر مداری شکل ۱-۲۲ جذب می شود، پیدا کنید.



شکل ۱-۲۲: به مسئله ۸ مراجعه کنید.

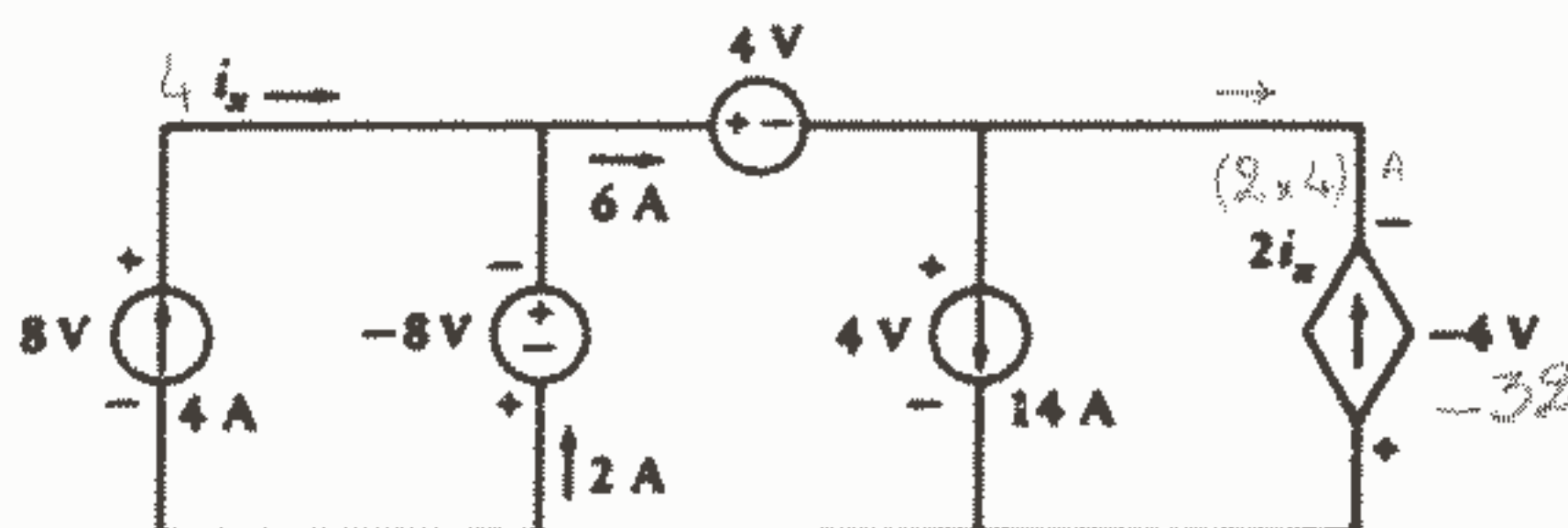
- ۹ - فرض کنید برای عنصر مداری شکل ۱-۱۰ داشته باشیم: $i = 4e^{-50t}$ A و $v = 20 - 30e^{-50t}$ V (a) چقدر قدرت به وسیله این وسیله در $t = 10$ ms جذب می شود؟ (b) چقدر انرژی در فاصله $0 < t < \infty$ به این وسیله تحویل داده می شود؟
- ۱۰ - جریان i شکل ۱-۲۱ به ترمینال + یک عنصر مداری با ولتاژ v وارد می شود که $v = 20 \sin 400\pi t$ V می باشد. (a) ماکزیمم قدرت جذب شده به وسیله این عنصر چقدر است و در چه زمانی انجام می شود؟ (b) ماکزیمم قدرتی که این عنصر تحویل می دهد چقدر است و در چه زمانی روی می دهد؟ (c) چقدر انرژی در فاصله $0 < t < 5$ ms به این عنصر مداری تحویل داده می شود؟ (d) در این فاصله زمانی چه قدرت متوسطی به وسیله این عنصر جذب می شود؟
- ۱۱ - در شکل ۱-۱۰، فرض کنید $v = 2t^2 - 8t + 6$ V و قدرت جذب شده به وسیله عنصر مداری $P = 4(t^3 - 6t^2 + 11t - 6)$ W باشد. (a) چه مقدار انرژی از $t = 1$ تا $t = 3$ s به این عنصر تحویل داده می شود؟ (b) چه مقدار بار در فاصله زمانی $1 < t < 3$ s به عنصر تحویل داده می شود؟

- ۱۲ - مشخص کنید که کدامیک از پنج منبع شکل ۱-۲۳ شارژ می شود (قدرت مثبت جذب می کند) و نشان دهید که جمع جبری پنج قدرت جذب شده صفر است.



شکل ۲۳ - ۱: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

- ۱۳ - قدرت تحویل داده شده به هر یک از عناصر شکل ۱-۲۴ را تعیین کنید.



شکل ۲۴ - ۱: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

تعاریف و واحدها ۳۱

۱۴- در شکل ۱۰-۱ فرض کنید $v = 20e^{-0.1t} V$. قدرت جذب شده به وسیله عنصر را در $t = 4s$ اگر i مقادیر زیر را داشته باشد، پیدا کنید:

(a) $v/0.1$, (b) dv/dt , (c) $0.1 \int_0^t v dt + 5 A$

فصل ۲

قوانین تجربی و مدارهای ساده

۱-۲ مقدمه

در فصل گذشته ما با منابع مستقل و وابسته جریان و ولتاژ آشنا شدیم و متوجه شدیم که آنها عناصر ایده آلی هستند که فقط بطور تقریب نمایانگر یک مدار واقعی می باشند. عنصر ایده آل دیگری به نام مقاومت خطی در این فصل معرفی خواهد شد. ما همچنین نظری مقدماتی به تقویت کننده عملیاتی خواهیم افکند که وسیله قابل توجهی است که امروزه جزء مهمی از بسیاری از مدارهای الکتریکی است. سپس باید دو قانون اساسی را که سودمند می باشند بپذیریم. با این قوانین و با پنج عنصر مداری ساده و تعاریفی که قبلاً داشته ایم، ما سپس می توانیم مطالعه مدارهای الکتریکی ساده را شروع کنیم. این مطالعه تقریباً بطور کامل به تحلیل، که فرایندی است که توسط آن جریان یا ولتاژ عنصری از مدار تعیین می شود، محدود خواهد شد. خوشبختانه تحلیل کامل مورد نیاز نیست و اغلب فقط یک جریان، ولتاژ و یا قدرت بخصوصی مورد نیاز می باشد. بعد از اینکه در این درس و سایر دروس پایه، مهارتی در تحلیل حاصل شد، می توان مسائل سنتز را مورد توجه قرار داد. در این مورد به ما یک توصیف ریاضی از رفتار مطلوب مدار داده می شود و ما باید عناصر ضروری و اتصالاتشان را برای به دست آوردن پاسخ مطلوب، مشخص کنیم. مسائل سنتز اغلب بیش از یک پاسخ دارند. نوع نهایی مطلوب ما می باشد. گاهی اوقات اندازه، وزن، مشخصه های حرارتی، آثار محیطی و یا حتی نمای ظاهری باید در طراحی مورد توجه قرار گیرد.

واضح است که تجربه، پیش نیازی است برای مهارت در طراحی و نیز بدیهی است که تحلیل و سنتز باید در ابتدا آورده شوند.

این فصل و فصل بعدی محدود به تحلیل مدارهای ساده حاوی منابع جریان و ولتاژ و مقاومتها می باشند که منابع ممکن است مستقل و یا وابسته باشند. در تحلیل اینگونه مدارها ما باید از چندین تبدیل شبکه، قضایای مدار و روشهای ریاضی که بعداً قادر به اعمال آنها خواهیم بود، و با کمی اصلاحات درباره مدارهای حاوی انواع دیگری از عناصر غیرفعال تحریک شده بوسیله منابع متغیر با زمان، استفاده کنیم. ما روشهای مفید در تحلیل مدار را با اعمال آنها به ساده ترین حالت ممکن یعنی مدار مقاومتی، خواهیم آموخت.

۲-۲ قانون اهم

ساده ترین عنصر غیرفعال یعنی مقاومت را می توان با توجه به کارهای یک فیزیکدان گمنام آلمانی به نام جورج سیمون اهم که در سال ۱۸۲۷ جزوه ای تحت عنوان «بررسی ریاضی مدار گالوا» منتشر نمود، معرفی کرد. آن جزوه حاوی نتایج یکی از اولین کوششها برای اندازه گیری جریان و ولتاژ و ارتباط ریاضی آنها بود. یکی از این نتایج بیان یک رابطه اساسی است که ما امروزه آن را قانون اهم می نامیم. اگر چه معلوم شده است که این نتیجه ۴۶ سال زودتر در انگلستان توسط هنری کاواندیش کشف شده بود. با وجود این، امیدواریم که هیچ کس حتی اهم از کارهای انجام شده توسط کاواندیش خبر نداشت زیرا آن کارها حتی تا مدت زیادی بعد از مرگ هر دو منتشر و بر ملا نشدند. جزوه اهم تا سالها بعد از اولین انتشارش انتقادهای ناروا و تمسخرهای زیادی را تحمل کرد. اما بعدها مورد قبول قرار گرفت و باعث رفع ابهام و گمنامی از نام اهم شد.

قانون اهم بیان می دارد که ولتاژ دو سر بسیاری از مواد هادی بطور مستقیم متناسب است با جریانی که از آن عبور می کند: $v = Ri$ که در این رابطه ثابت تناسب یعنی R مقاومت نامیده می شود. واحد مقاومت اهم است که $1V/A$ می باشد و با علامت اختصاری امگای بزرگ Ω نشان داده می شود. وقتی که این معادله را در دستگاه محوره های V نسبت به i رسم کنیم خط راستی بدست می آید که از مبدا می گذرد. این معادله یک معادله خطی است و ما آن را به عنوان تعریف یک مقاومت خطی در نظر خواهیم گرفت. بنابراین اگر نسبت جریان و ولتاژ مربوط به هر عنصر مداری ساده ثابت باشد این عنصر یک مقاومت خطی است و دارای مقاومتی مساوی با نسبت ولتاژ به جریان می باشد.

مقاومت معمولاً بصورت یک کمیت مثبت در نظر گرفته می شود، اگر چه مقاومت منفی را هم می توان با بعضی مدارهای خاص شبیه سازی نمود.

باز هم باید تاکید نمود که مقاومت خطی یک عنصر مداری ایده آل است و یک مدل ریاضی برای یک قطعه فیزیکی می باشد. «مقاومتها» را می توان به راحتی تهیه و تولید نمود اما به زودی در می یابیم که نسبت ولتاژ - جریان این قطعه فیزیکی فقط در محدوده بخصوصی از جریان، ولتاژ و یا قدرت بطور قابل قبولی ثابت می باشد و بستگی به دما و سایر عوامل محیطی دیگر دارد. ما معمولاً مقاومت خطی را بطور ساده مقاومت خواهیم خواند و نام کامل آن را فقط وقتی که طبیعت خطی آن مورد تاکید باشد به کار خواهیم برد. هر مقاومت غیرخطی هم همیشه به همان نام کاملش توصیف خواهد شد. مقاومت های غیرخطی را نباید الزاماً عناصر نامطلوبی تصور نمود. اگر چه وجود آنها تحلیل مدار را مشکل می سازد ولی عملکرد قطعه ممکن است بستگی به غیرخطی بودن آن داشته باشد. دیودهای زener، دیودتونی و فیوزها چنین عناصری هستند.

شکل ۱ - ۲ رایجترین سمبل مداری یک مقاومت را نشان می دهد. طبق قراردادهای پذیرفته شده برای جریان، ولتاژ و قدرت در فصل گذشته، حاصلضرب v ، i قدرت جذب شده به وسیله مقاومت را به دست می دهد. v ، i طوری انتخاب می شوند که قرارداد علامت غیرفعال را بر آورده سازند.



شکل ۱ - ۲: سمبل مداری یک مقاومت $R = v/i$ ، $P = vi = Ri^2 = v^2/R$

قدرت جذب شده عملاً به صورت گرما ظاهر می شود و همیشه مثبت است، یک مقاومت مثبت عنصری است غیرفعال که نمی تواند قدرت تحویل دهد و یا انرژی ذخیره نماید. روابط مختلف قدرت جذب شده عبارتند از: (۲) $P = vi = i^2 R = v^2/R$ یکی از مؤلفین (که ترجیح می دهد نامش فاش نشود)^۱ تجربه ناکامی از اتصال سهوی یک مقاومت $100\ \Omega$ و $2\ W$ کربنی به دو سر یک منبع $110\ V$ ولتی داشته است. شعله، دود و ترکیدگی حاصله نسبتاً سراسیمه کننده بود و نشان می داد که یک مقاومت عملی برای اینکه مانند مدل خطی ایده آل آن عمل کند دارای محدودیتهایی می باشد.

در این حالت، از مقاومت نگون بخت خواسته شده بود که $121\ W$ را جذب کند در حالیکه

۱ - نام وی در صورت ارائه تقاضای کتبی به W.H.H با کمال میل تقدیم خواهد شد.

فقط برای تحمل W طراحی شده بود، و عکس العمل آن بطوریکه انتظار می رفت تند و خشن بود.

نسبت جریان به ولتاژ هم مقداری است ثابت: $(3) R = G$, $v = 1$, G, i هدایت نامیده می شود. واحد هدایت مهر یعنی A/V می باشد و با علامت اختصاری امگای وارونه یعنی Ω نمایش داده می شود. واحد SI برای هدایت زیمنس (S) می باشد که هنوز در آمریکا استفاده وسیعی پیدا نکرده است. برای نشان دادن هدایت هم از همان سمبل مداری مقاومت استفاده می شود. قدرت جذب شده هم الزاما مثبت می باشد و می توان آن را بر حسب هدایت به صورت زیر بیان نمود: (4)

$$P = vi = v^2 G = i^2 / G$$

بنابراین یک مقاومت 2Ω دارای هدایت $1/2 \Omega$ می باشد و اگر جریان $5 A$ در آن جاری باشد ولتاژ $10 V$ در دو سر ترمینالهای آن ظاهر می شود و قدرت $50 W$ را جذب می کند.

همه روابط بالا بر حسب جریان، ولتاژ و قدرت لحظه ای نوشته شده است مانند $V = Ri$, $P = vi$ واضح است که جریان و ولتاژ یک مقاومت باید نسبت به زمان تغییرات یکسانی داشته باشند بنابراین اگر $R = 10 \Omega$, $v = 2 \sin 100t V$ باشد در این صورت $i = 0.2 \sin 100t A$ می باشد و قدرت برابر است با $0.4 \sin^2 100t W$ و نمودار ساده ای ماهیتاً متفاوت تغییرات آن با زمان را نشان خواهد داد. با وجود اینکه جریان و ولتاژ در فواصل زمانی خاصی منفی می باشند، قدرت جذب شده هرگز منفی نمی شود. برای تعریف دو اصطلاح رایج یعنی اتصال کوتاه و مدار باز می توان از مفهوم مقاومت به عنوان پایه و اساس استفاده نمود. اتصال کوتاه را بعنوان مقاومت صفر اهم تعریف می کنیم و چون $v = Ri$ بنابراین ولتاژ دو سر اتصال کوتاه باید صفر باشد اگرچه جریان ممکن است هر مقداری داشته باشد. به طریق مشابهی ما مدار باز را به عنوان مقاومت بی نهایت تعریف می کنیم و بنابراین جریان باید صفر باشد، صرف نظر از ولتاژ دو سر مدار باز که هر اندازه می تواند باشد.

به یاد داشته باشید وقتی که هر فرمولی شامل v , i باشد همه v , i ها باید در یک دیاگرام مداری با پلاریته و جهت هایشان تعریف شوند و گرنه $v = -Ri$ را درست مانند $v = Ri$ می توان برای یک مقاومت به کار برد.

تمرین ۱ - ۲:

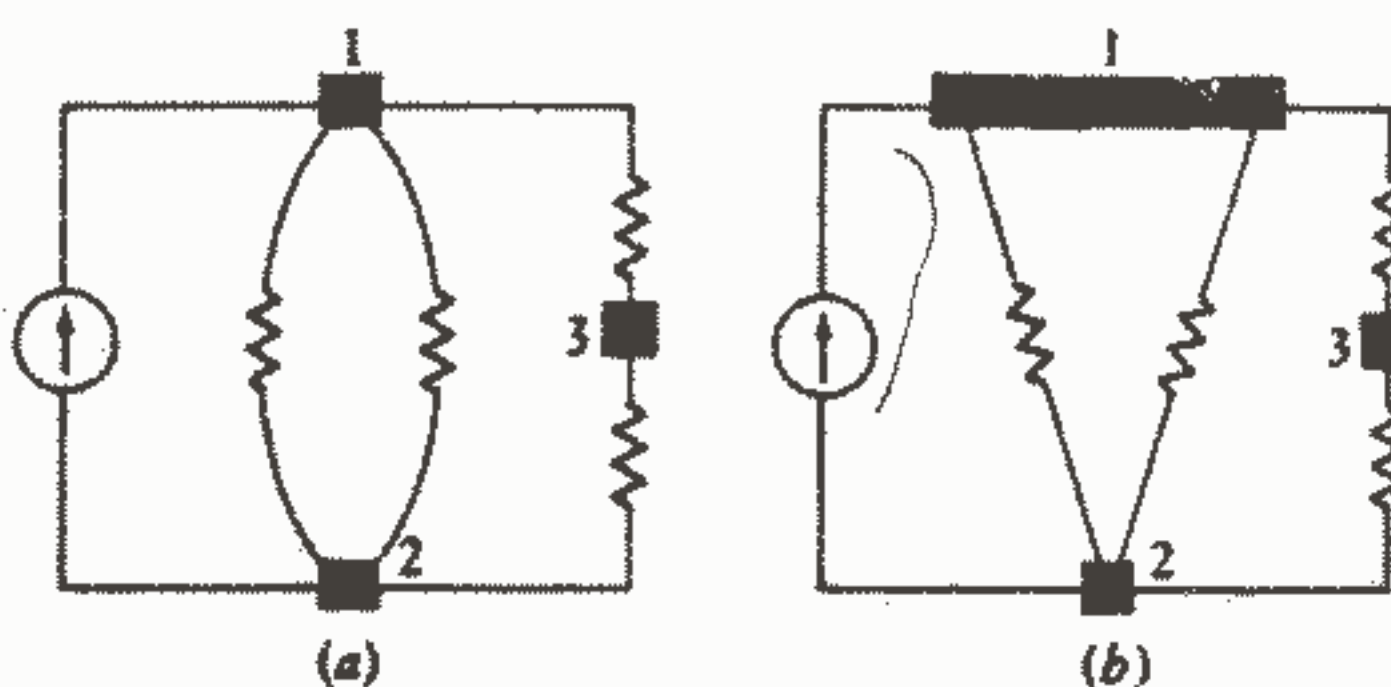
اگر v , i در شکل ۱ - ۲ تعریف شده باشند، پیدا کنید: $R(a)$ را اگر

$v = -8\text{ V}$ و $i = -5\text{ mA}$ و (b) قدرت جذب شده را اگر $i = -5\text{ A}$ و $R = 2,2\ \Omega$ را $i(c)$ و اگر $R = 8\ \Omega$ و مقاومت در حال جذب قدرت 200 mW باشد. (d) G را اگر $v = 2,5\text{ V}$ و $i = 100\text{ mA}$.
جواب: 40 mW ، $\pm 158,1\text{ mA}$ ، 55 W ، $1,60\text{ K}\ \Omega$

۳-۲ قوانین کیرشوف

ما اکنون آماده هستیم که روابط جریان و ولتاژ را در مدارهای ساده‌ای که از اتصال دو یا چند عنصر مداری ساده حاصل شده‌اند، مورد توجه قرار دهیم. این عناصر به وسیله هادیهای الکتریکی و یا پایه‌هایشان که دارای مقاومت صفر هستند و یا هادیهای کامل می‌باشند، به هم وصل می‌شوند. سپس از آنجاییکه شبکه به صورت تعدادی عناصر ساده و پایه‌های وصل‌کننده آنها ظاهر می‌شود، آن را شبکه فشرده ثابت می‌نامند. مسئله تحلیل وقتی مشکلتر می‌شود که ما با یک شبکه ثابت گسترده، که اساساً شامل بینهایت عناصر کوچک ناپیدا می‌باشد، مواجه می‌شویم. توجه به این مورد اخیر را به درسهای بعدی موکول می‌کنیم.

نقطه‌ای که در آن دو یا چند عنصر دارای اتصال مشترک می‌باشند یک گره نامیده می‌شود. شکل (a) ۲-۲ مداری را نشان می‌دهد که دارای سه گره می‌باشد. گاهی اوقات شبکه‌ها طوری رسم می‌شوند که دانشجوی ناآگاه را به دام این اشتباه می‌اندازد که فکر می‌کند گره‌هایی بیش از آنچه که عملاً در مدار هست، وجود دارد. این امر وقتی روی می‌دهد که یک گره، مانند گره ۱ در شکل ۲a-۲، به صورت دو اتصال جداگانه که به وسیله یک هادی (با مقاومت صفر) مانند شکل ۲b-۲ به هم وصل شده‌اند، نشان داده می‌شود. اگر چه همه کاری که انجام شده است فقط گسترش دادن یک نقطه مشترک به صورت یک خط مشترک است. بنابراین، ما باید الزاماً همه پایه‌های هادی کامل و قسمتهایی از پایه‌ها را که به گره وصل هستند بصورت جزئی از گره در نظر بگیریم. همچنین توجه داشته باشید که هر عنصر در هر یک از سرهایش یک گره دارد.



شکل ۲-۲ (a) مداری که شامل سه گره و پنج شاخه می‌باشد.
(b) گره ۱ طوری دوباره رسم شده است که به صورت دو گره به نظر آید در حالیکه هنوز هم یک گره است.

فرض کنید که ما از یک گره شبکه شروع کنیم و از یک عنصر مداری ساده عبور کنیم و به گره موجود در سر دیگر آن برسیم و سپس از آن گره و از عنصر دیگری عبور کنیم و به گره دیگری برسیم و اینکار را تا هر جا که می‌خواهیم ادامه دهیم اگر با هیچ گره‌ای بیش از یکبار مواجه نشویم در این صورت به مجموعه گره‌ها و عناصری که از آنها عبور کرده‌ایم یک مسیر می‌گوییم. اگر گرهی را که از آن شروع کرده‌ایم همان گرهی باشد که در آن ختم کرده‌ایم در این صورت این مسیر را بنابر تعریف یک مسیر بسته یا حلقه می‌نامیم.

مثلاً در شکل ۲a - ۲ اگر ما از گره ۲ حرکت کنیم و از منبع جریان عبور کنیم و به گره ۱ برسیم و سپس از طریق مقاومت بالایی سمت راست به گره ۳ برسیم ما یک مسیر را ایجاد کرده‌ایم اما از آنجاییکه ما دوباره به گره ۲ نرسیده‌ایم، در نتیجه یک مسیر بسته یا حلقه نداریم. اگر ما از گره ۲ شروع کنیم و از طریق منبع جریان به گره ۱ برسیم و از مقاومت سمت چپ پایین بیایم و به گره ۲ برسیم و سپس از مقاومت وسطی بالا برویم و دوباره به گره ۱ برسیم، ما یک مسیر نخواهیم داشت زیرا با یک گره (و در واقع ۲ گره) بیش از یکبار مواجه شده‌ایم، ما همچنین یک حلقه هم نخواهیم داشت زیرا یک حلقه باید مسیر هم باشد.

اصطلاح دیگری که کاربرد آن مفید است، شاخه می‌باشد. ما شاخه را به عنوان یک مسیر منفرد و تکی، که از یک عنصر ساده و گره‌های دو سرش تشکیل شده است، در یک شبکه تعریف می‌کنیم. بنابراین یک مسیر مجموعه خاصی از شاخه‌ها می‌باشد. مدار نشان داده شده در شکل‌های ۲a, b - ۲ شامل پنج شاخه می‌باشد. ما اکنون آماده‌ایم که اولین قانون از دو قانونی را که به نام گوستاو رابرت کیرشوف (یک استاد دانشگاه آلمانی که در زمانی که اهم آزمایشاتش را انجام می‌داد متولد شد) نامیده شده است مورد توجه قرار دهیم^۱. این قانون مفید و آموزنده، قانون جریان کیرشوف (و یا به اختصار Kcl) نامیده می‌شود و چنین بیان می‌دارد:

مجموع جبری تمام جریان‌هایی که به یک گره وارد می‌شوند صفر است.

در این کتاب این قانون را اثبات نخواهیم کرد. اگر چه، آن بسادگی یک بیان ریاضی برای

۱ - کیرشوف حرفه تدریس را بعنوان یک مدرس با سمت رسمی اما بدون حقوق در دانشگاه برلین شروع کرد که این

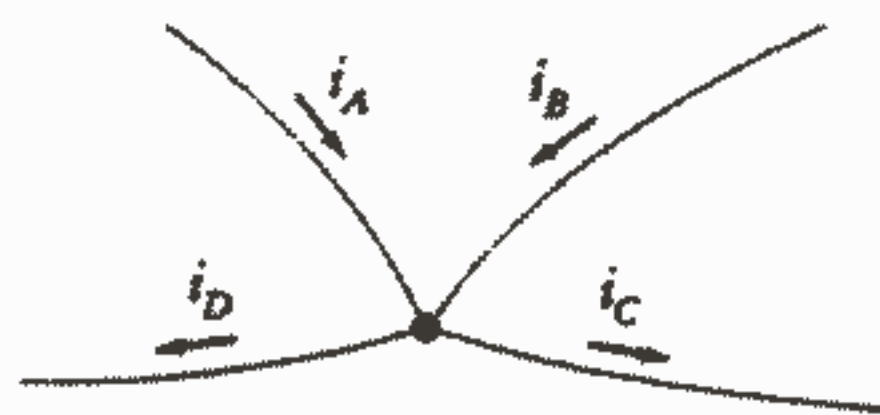
امر امروزه نزد استادان جوان، انتخابی پسندیده نمی‌باشد.

این حقیقت است که بار نمی‌تواند در یک گره انباشته شود. یعنی، اگر جریان خالصی به یک گره جاری باشد، آنگاه سرعتی که کولنها در آن گره انباشته می‌شوند صفر نخواهد بود. و چون یک گره یک عنصر مداری نیست و نمی‌تواند بار را ذخیره، نابود و یا تولید کند. بنابراین مجموع جریانها باید صفر باشد.

گره شکل ۳ - ۲ را در نظر بگیرید. مجموع جبری چهار جریان ورودی به گره باید صفر

باشد:

$$i_A + i_B - i_C - i_D = 0$$



شکل ۳ - ۲: قانون جریان کیوشوف (KCL) ما را قادر می‌سازد که بنویسیم:

$$i_A + i_B - i_C - i_D = 0, \quad i_C + i_D - i_A - i_B = 0, \quad \text{یا} \quad i_A + i_B = i_C + i_D.$$

بدیهی است که این قانون را می‌توان بطور یکسان برای مجموع جبری جریانهایی که از هر گره خارج می‌شوند اعمال نمود.

$$-i_A - i_B + i_C + i_D = 0$$

ما همچنین ممکن است بنخواهیم مجموع جریانهایی را که فلش آنها رو به داخل گره است با مجموع جریانهایی که فلش آنها رو به خارج گره است مساوی قرار دهیم:

$$i_A + i_B = i_C + i_D$$

یک بیان خلاصه و جمع و جور برای قانون جریان کیوشوف عبارت است از:

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0 \quad (5)$$

و این یک بیان خلاصه برای رابطه زیر می‌باشد:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N = 0 \quad (6)$$

خواه رابطه (۵) و یا رابطه (۶) بکار رود از آن چنین استنباط می‌شود که تعداد N فلش

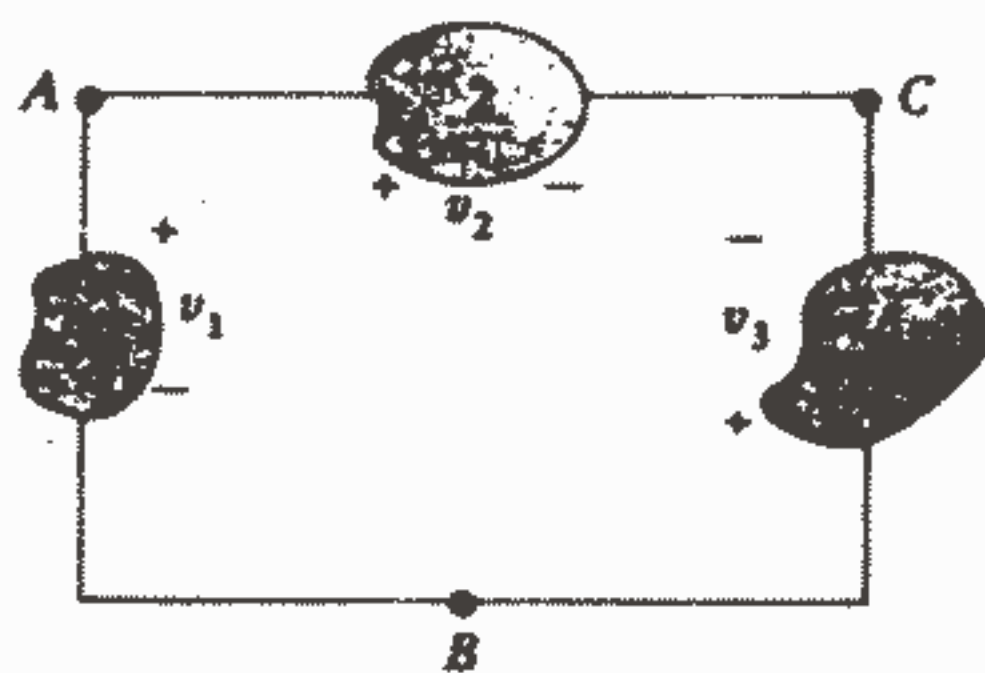
جریان همگی رو به داخل گره مورد نظر و یا رو به خارج از گره می‌باشند.

گاهی اوقات تفسیر قانون جریان کیرشوف بر حسب یک تشابه هیدرولیکی مفید می‌باشد. آب، مانند بار، نمی‌تواند در یک نقطه جمع شود و بنابراین اگر ما اتصال چند لوله را به عنوان یک گره در نظر بگیریم، واضح است که تعداد گالنه‌های آب که در هر ثانیه وارد گره می‌شوند باید مساوی با تعداد گالنه‌هایی باشد که در هر ثانیه از آن گره خارج می‌شود. اکنون می‌پردازیم به قانون ولتاژ کیرشوف (KVL). این قانون هم بیان می‌دارد که:

مجموع جبری ولتاژها در هر حلقه بسته در یک مدار برابر است با صفر.

ما باز هم این قانون را به صورت اثبات شده می‌پذیریم، اگر چه در تئوری مقدماتی الکترو مغناطیسی بطور مبسوط آن را اثبات می‌کنند.

جریان، متغیری است که به بار جاری در یک عنصر مداری مربوط است در حالیکه ولتاژ معیاری است برای اختلاف انرژی پتانسیل در دو سر عنصر. مقدار منفرد و یکتایی برای این کمیت در تئوری مدار وجود دارد. بنابراین انرژی لازم برای حرکت دادن یک بار واحد از نقطه A به نقطه B در یک مدار باید دارای مقداری باشد که مستقل از مسیر A تا B باشد. در شکل ۴-۲ اگر ما یک کولن بار را از A به B از طریق عنصر ۱ حمل کنیم، پلاریته مبنا V_1 نشان می‌دهد که ما V_1 ژول کار انجام می‌دهیم. حال اگر ما مسیر A تا B را از طریق نقطه C انتخاب کنیم در این صورت $v_2 - v_3$ ژول انرژی مصرف خواهیم کرد.



شکل ۴-۲: اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B مستقل از مسیر

انتخاب شده می‌باشد و یا $v_1 = v_2 - v_3$

اگر چه، کار انجام شده در یک مدار مستقل از مسیر است و این مقادیر باید مساوی باشند. بنابراین:

$$v_1 = v_2 - v_3 \quad (۷)$$

از مطلب فوق چنین بر می آید که اگر ما یک مسیر بسته را دنبال کنیم، مجموع جبری ولتاژهای دو سر عناصر مجزا باید صفر باشد. بنابراین می توانیم بنویسیم:

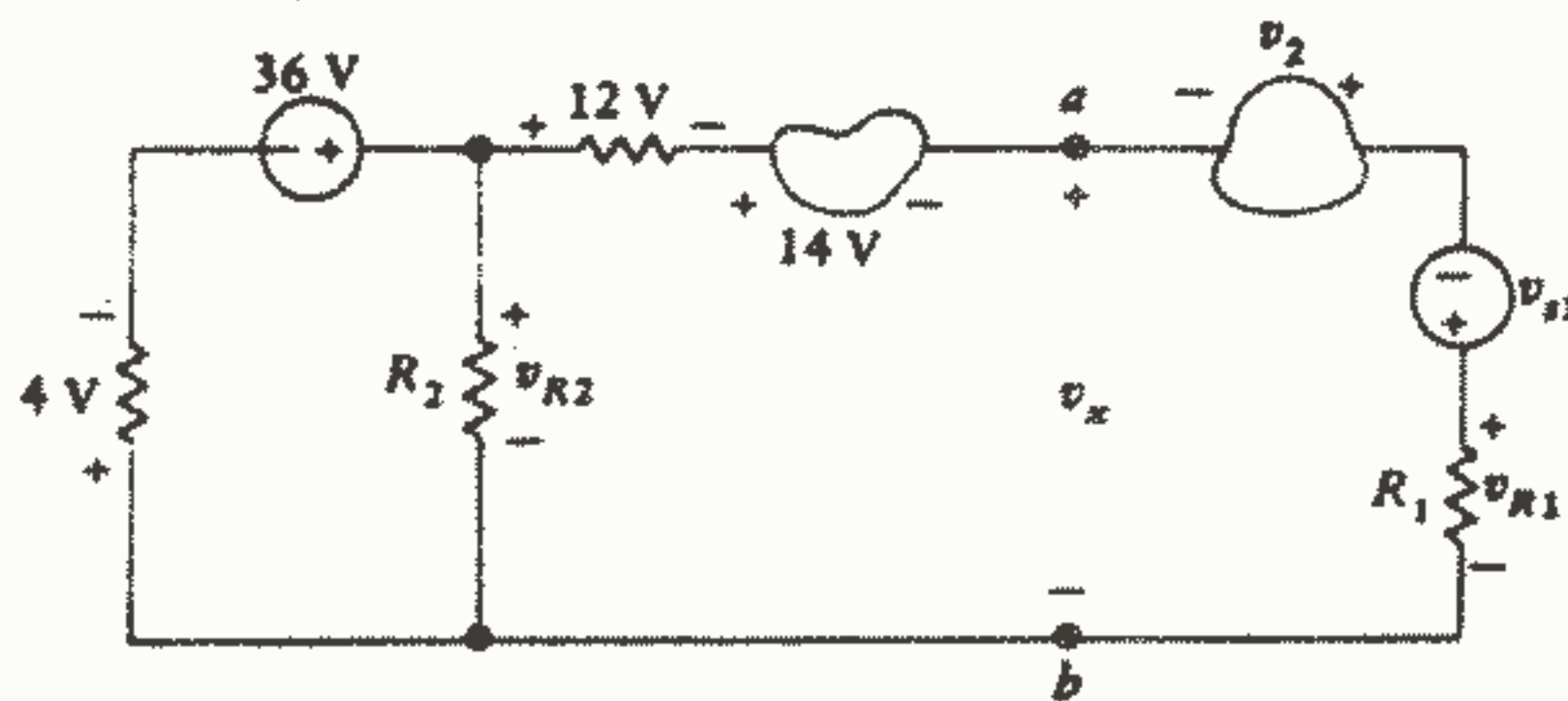
$$\sum_{n=1}^N v_n = 0 \quad \text{or} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N = 0 \quad (۸)$$

قانون ولتاژ کیرشوف نتیجه‌ای است از بقای انرژی و خاصیت بقایی (کنسروایتو) مدارهای الکتریکی. این قانون را می توان بر حسب یک مورد مشابه ثقلی هم تفسیر نمود یعنی اگر جرمی را حول یک مسیر بسته در یک میدان ثقلی کنسروایتو حرکت دهیم کل کار انجام شده بر روی آن جرم صفر خواهد بود.

ما می توانیم KVL را به طرق مختلفی به یک مدار اعمال کنیم. یک روشی که نسبت به سایر روشها ما را به خطای کمتری در نوشتن معادلات رهنمون می شود این است که در جهت حرکت عقربه های ساعت در حول یک مسیر بسته حرکت کنیم و ولتاژ هر عنصری را که به قطب مثبت آن برخورد کردیم با علامت مثبت و ولتاژ هر عنصری را که ابتدا به قطب منفی آن برخورد کردیم با علامت منفی بنویسیم. با اعمال این روش به تک حلقه شکل ۴ - ۲ خواهیم داشت:

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

که مطمئناً با نتایج قبلی ما یعنی معادله (۷) توافق دارد. به عنوان آخرین مثال بیاید برویم به سراغ مدار شکل ۵ - ۲.



شکل ۵ - ۲: مداری که در آن KVL نشان می دهد که

$$v_1 = 6 \text{ V} \text{ و } v_{R2} = 32 \text{ V}$$

در این مدار هشت عنصر مداری وجود دارد و ولتاژهای دو سر هر عنصر با زوجهای مثبت - منفی نشان داده شده‌اند. فرض کنید که می‌خواهیم V_{R2} را پیدا کنیم. ما می‌توانیم اینکار را با نوشتن یک معادله KVL حول حلقه سمت چپ انجام دهیم:

$$4 - 36 + v_{R2} = 0 \rightarrow v_{R2} = 32 \text{ V}$$

و سرانجام بیاید فرض کنیم که می‌خواهیم مقدار v_x را تعیین کنیم. ما می‌توانیم این را به عنوان جمع جبری ولتاژهای دو سر سه عنصر سمت راست و یا بعنوان ولتاژی که در دو سر یک ولتمتر ایده‌آل که به نقاط a, b وصل شده باشد ظاهر می‌شود، تصور کنیم.

ما می‌توانیم KVL را از گوشه پایین سمت چپ شروع کنیم و بالا برویم و به a برسیم و از طریق V_x به b برویم و از طریق پایه هادی به نقطه شروع برسیم:

$$4 - 36 + 12 + 14 + v_x = 0 \rightarrow v_x = 6 \text{ V}$$

با دانستن V_{R2} می‌توانستیم از طریق $R2$ راه کوتاه‌تری طی کنیم:

$$-32 + 12 + 14 + v_x = 0 \rightarrow v_x = 6 \text{ V}$$

تمرین ۲۱

۲ - ۲ - تعداد شاخه‌ها و گره‌ها را در هر یک از مدارهای شکل ۲-۶ تعیین کنید.

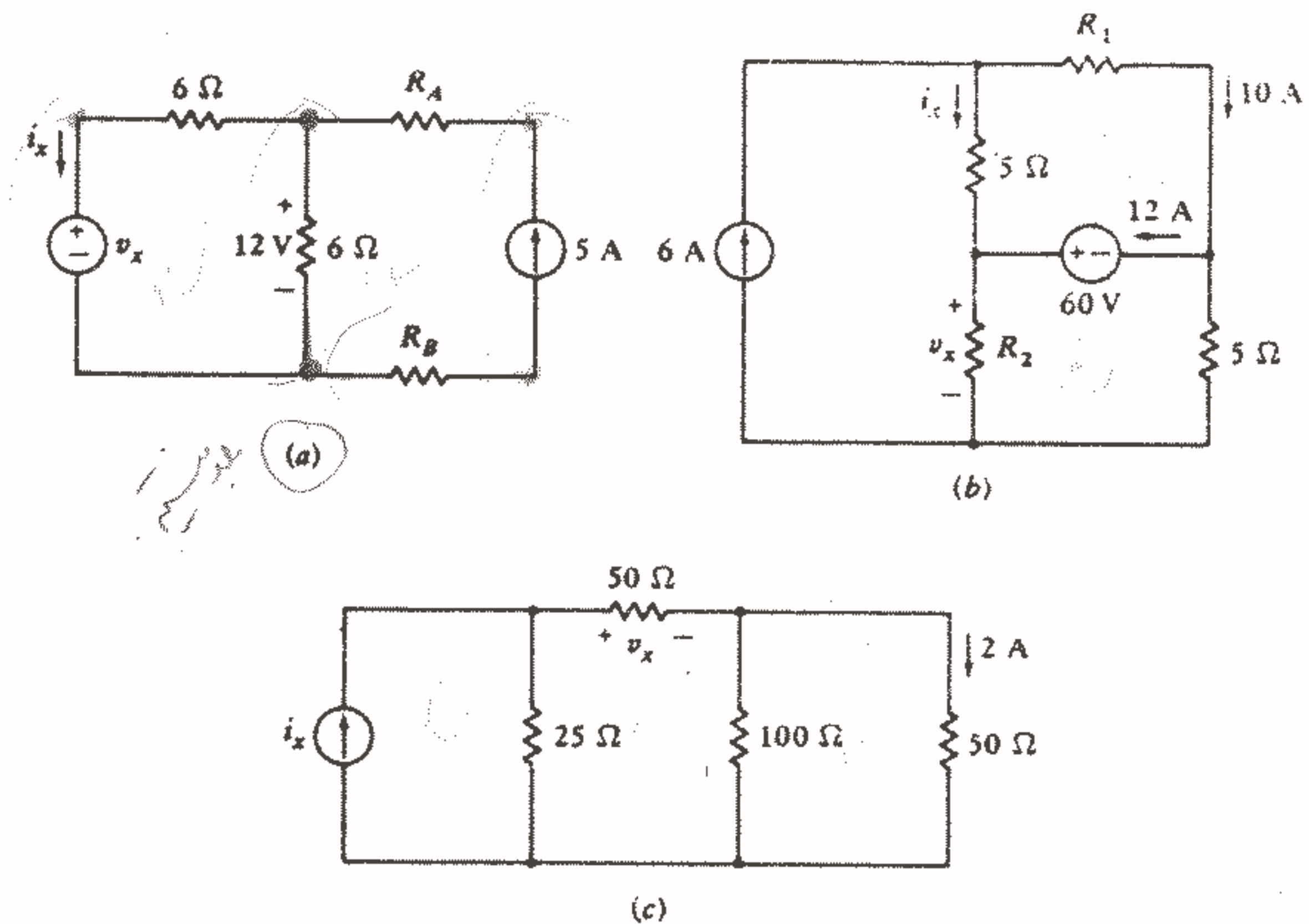
جواب: ۶ و ۵؛ ۶ و ۳ و ۵

۳ - ۲ - مقدار i را در هر یک از مدارهای شکل ۲-۶ تعیین کنید.

جواب: ۳ و ۴ - و ۱۳A

۴ - ۲ - مقدار V_x را در هر یک از مدارهای شکل ۲-۶ تعیین کنید.

جواب: ۳ و ۴ - و ۱۳A



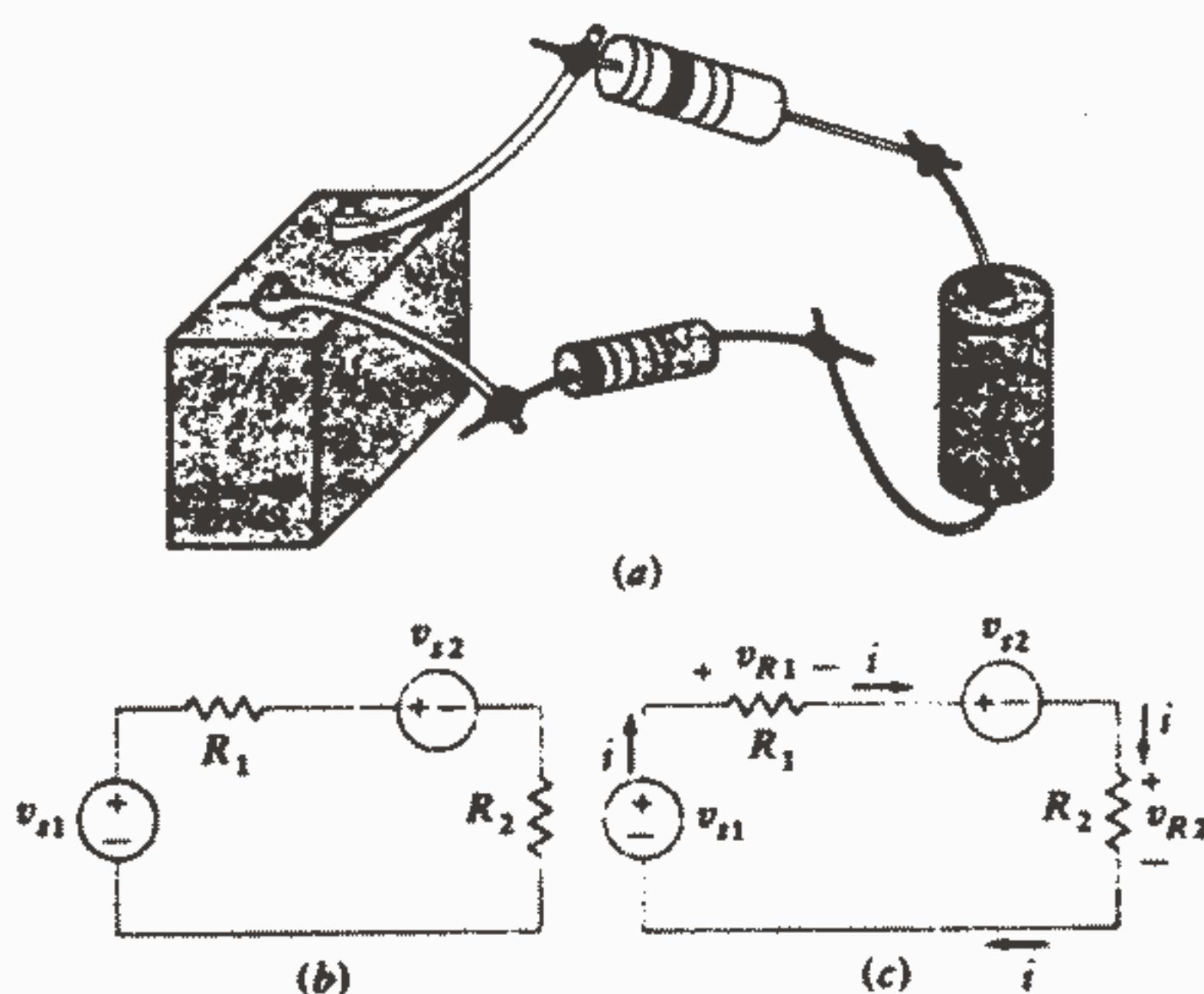
شکل ۶-۲: مراجعه شود به تمرینات ۲-۲ و ۲-۳ و ۲-۴ و ۲-۵.

۴-۲ تحلیل یک مدار تک حلقه‌ای

با بیان قوانین اهم و کیرشوف ما می‌توانیم توان تحلیلی خود را با کاربرد این ابزارها در تحلیل یک مدار مقاومتی ساده، محک بزنیم. شکل ۷-۲ نشان می‌دهد که چگونه اتصال سری دو باتری و دو مقاومت می‌تواند به وسیله یک نوجوان با استفاده از یک هویه نو ایجاد شود. توجه داشته باشید که یک هادی رابط به ترمینال مثبت باتری سمت چپ وصل شده است و سر دیگر سیم به یکی از پایه‌های مقاومت لحیم شده است. فرض شده است که ترمینال، هادیهای رابط و خال لحیم همگی دارای مقاومت صفر هستند و تشکیل یک گره را در گوشه بالای سمت چپ مدار شکل ۷-۲ b می‌دهند. هر دو باتری را با منابع ولتاژ ایده آل جایگزین می‌کنیم یعنی هر مقاومتی را که داشته باشند بقدری کوچک فرض می‌کنیم که قابل صرف‌نظر باشند و در غیر اینصورت می‌توانیم آنها را با R_1 و R_2 ترکیب شده فرض کنیم. همچنین فرض می‌کنیم که دو مقاومت با مقاومت‌های خطی ایده آل جایگزین شده باشند.

فرض می‌کنیم که مقادیر مقاومتها و ولتاژ منابع در شکل ۷-۲ معلوم باشند و سعی می‌کنیم جریان هر عنصر، ولتاژ دو سر هر عنصر و قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر را تعیین کنیم. اولین گام در تحلیل ما در نظر گرفتن جهت‌های مبنا برای جریانهای مجهول می‌باشد. بیایید بطور دلخواه یک جریان، در جهت عقربه‌های ساعت در نظر بگیریم که از ترمینال بالایی منبع ولتاژ سمت چپ جاری می‌شود. این انتخاب به وسیله یک فلش مقدار نقطه مدار در شکل ۷-۲C نشان داده شده است. یک کاربرد ساده قانون جریان کیرشوف ما را مجاب می‌کند که همین جریان از همه عناصر دیگر مدار هم باید جاری باشد. ما این واقعیت را در اینجا با قرار دادن چند فلش جریان دیگر در مدار مورد تأکید قرار می‌دهیم.

بنابر تعریف عناصری که حامل جریان یکسانی باشند می‌گوییم اتصال سری دارند. توجه داشته باشید که ممکن است چند عنصر حامل جریانهای مساوی باشند اما سری نباشند، دو لامپ ۱۰۰W در دو خانه همسایه ممکن است دقیقاً حامل جریانهای مساوی باشند اما آنها جریان یکسانی (واحدی) را حمل نمی‌کنند و سری نمی‌باشند.



شکل ۷-۲: (a) نموداری از یک مدار تک حلقه‌ای واقعی که شامل چهار عنصر، اتصالات لحیم و سیم‌های رابط می‌باشد. (b) مدل مداری که در آن ولتاژ منابع و مقادیر مقاومتها داده شده است. (c) علائم مبناي ولتاژ و جریان به مدار اضافه شده است.

فرض جریان در جهت $IR + IR$ است. نسبت R است.
 قدم دوم ما در این تحلیل انتخاب یک مبنای ولتاژ برای هر یک از دو مقاومت می باشد. ما قبلاً پی بردیم که اعمال قانون اهم بدون علامت منفی یعنی $v = Ri$ لازم‌اش این است که جهت جریان و ولتاژ طوری انتخاب شود که جریان از ترمینالی وارد شود که علامت مثبت ولتاژ قرار دارد. این قرارداد علامت غیرفعال می باشد. اگر انتخاب جهت جریان دلخواه باشد آنگاه اگر بخواهیم قانون اهم را بفرم $v = Ri$ بکار ببریم انتخاب جهت ولتاژ مشخص و فیکس می شود. ولتاژهای v_{R1} و v_{R2} در شکل ۲ - ۷ نشان داده شده اند.

قدم سوم اعمال قانون ولتاژ کیرشوف به مسیر بسته منفرد موجود می باشد. بیاید تصمیم بگیریم که حرکت به دور مدار را در گوشه پایینی چپ در جهت عقربه های ساعت شروع کنیم و هر ولتاژ را که ابتدا به قطب مثبت آن برخورد کردیم با علامت مثبت و هر ولتاژی را که ابتدا به قطب منفی آن برخورد کردیم با علامت منفی بنویسیم. بنابراین:

$$-v_{s1} + v_{R1} + v_{s2} + v_{R2} = 0$$

و سرانجام ما قانون اهم را به عناصر مقاومتی اعمال می کنیم:

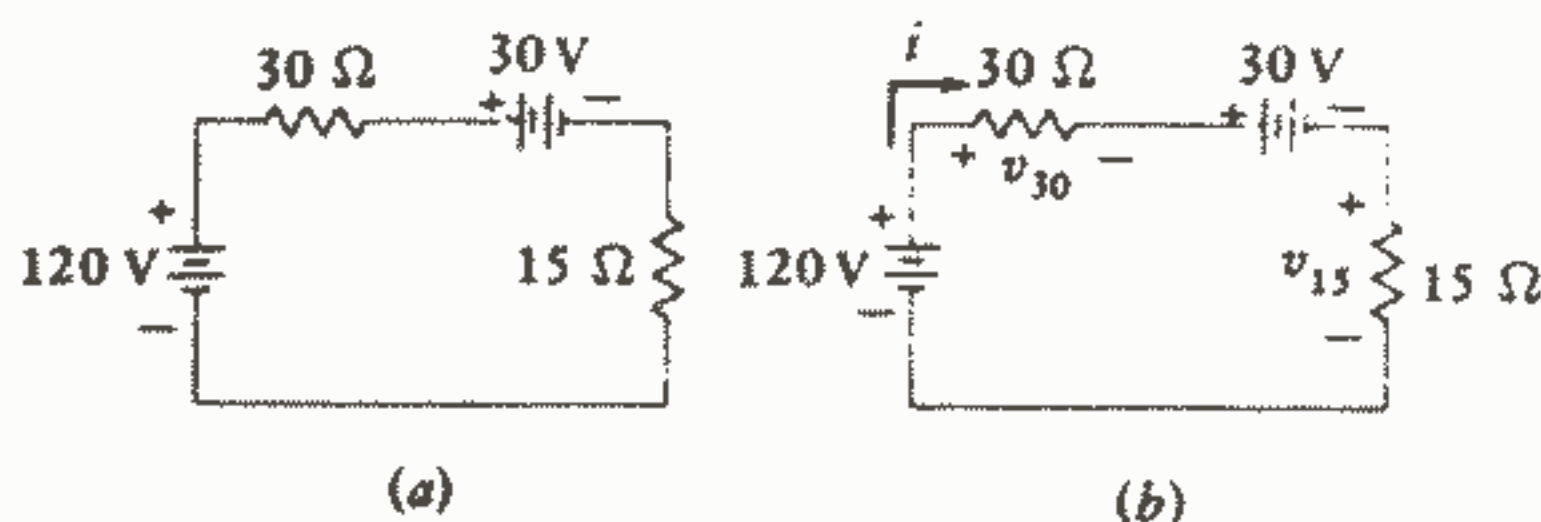
$$-v_{s1} + R_1 i + v_{s2} + R_2 i = 0 \quad \text{و خواهیم داشت:} \quad v_{R1} = R_1 i, \quad v_{R2} = R_2 i$$

این معادله اخیر را نسبت به i حل می کنیم و بدست می آوریم:

$$i = \frac{v_{s1} - v_{s2}}{R_1 + R_2}$$

که در این معادله اخیر همه کمیت های سمت راست معادله معلوم هستند و ما را قادر می سازند که مقدار i را تعیین کنیم. حال می توانیم ولتاژ یا قدرت مربوط به هر عنصر را در یک مرحله با اعمال روابط $p = vi$, $v = Ri$ یا $P = Ri^2$ بدست آوریم.

بیاید مثال عددی نشان داده شده در شکل ۸ - ۲ را مورد توجه قرار دهیم.



شکل ۸ - ۲: یک مدار سری. (b) مداری که در آن مبنای

جریان و ولتاژ مشخص شده است.

دو باتری و دو مقاومت بطور سری به هم وصل شده‌اند. یک جریان در جهت عقربه‌های ساعت و دو ولتاژ مقاومتی در مدار مانند شکل ۸b - ۲ تعیین شده‌اند و با استفاده از قانون

ولتاژ کیرشوف داریم: $-120 + v_{30} + 30 + v_{15} = 0$ و با استفاده از قانون اهم برای هر مقاومت خواهیم داشت: $-120 + 30i + 30 + 15i = 0$ که از آن به دست می‌آید:

$$i = \frac{120 - 30 - 2A}{30 + 10} = 2A \quad \text{بنابراین ولتاژهای دوسر مقاومتها عبارتند از } v_{30} = 2(30) = 60 \text{ V و } v_{15} = 2(15) = 30 \text{ V}$$

قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر با حاصلضرب ولتاژ دو سر هر عنصر و جریان ورودی به ترمینال مثبت آن به دست می‌آید. برای باتری 120 V قدرت جذب شده عبارت است از $P_{120V} = 120(-2) = -240$ و در نتیجه قدرت 240 W به وسیله این منبع به سایر عناصر مدار تحویل داده می‌شود. به طریق مشابه داریم: $P_{30V} = 30(2) = 60 \text{ W}$ و ما درمی‌یابیم که این عنصر به ظاهر فعال، عملاً قدرت جذب می‌کند (و یا شارژ می‌شود). قدرت جذب شده به وسیله هر مقاومت (مثبت) الزاماً مثبت است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

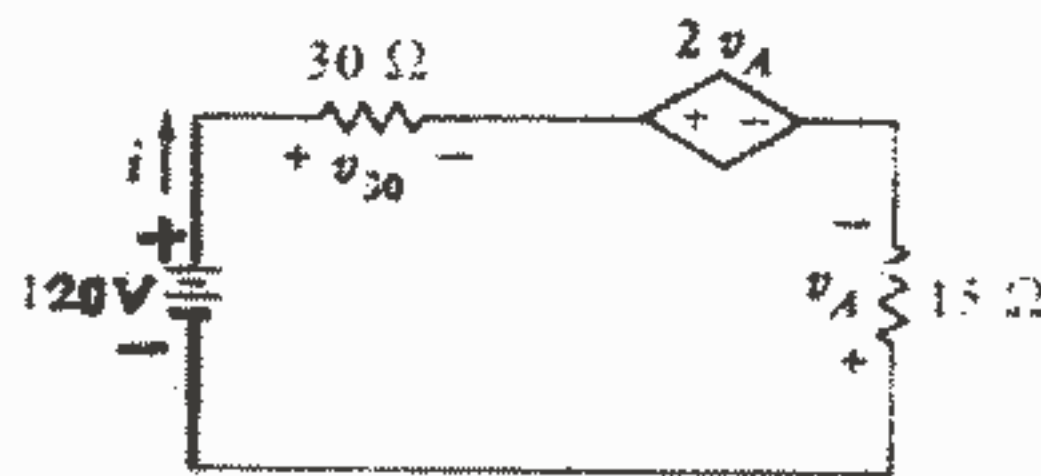
$p_{30} = Ri^2 = (30)(2)^2 = 120 \text{ W}$ و یا $p_{30} = v_{30}i = 60(2) = 120 \text{ W}$ و $p_{15} = v_{15}i = Ri^2 = 60 \text{ W}$. نتایج را می‌توانیم چک کنیم زیرا کل قدرت جذب شده باید صفر باشد و یا بعبارت دیگر، قدرت تحویل داده شده به وسیله باتری 120 V دقیقاً برابر است با مجموع قدرتهای جذب شده به وسیله سه عنصر دیگر. یک تعادل قدرتی اغلب روش مفیدی برای چک کردن اشتباهات ناشی از بی‌دقتی می‌باشد. قبل از به اتمام رساندن این مثال بهتر است. متقاعد شده باشیم که فرض اولیه ما درباره جهت مبنای جریان تأثیری در جوابهای به دست آمده ندارد. بیایید یک جریان i_x در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر بگیریم، بنابراین $i_x = -i$. اکنون هر دو ولتاژهای مقاومتی دارای پلاریته مخالف خواهند شد و خواهیم داشت:

$$v_{x15} = -30 \text{ V و } v_x = -60 \text{ V و } i_x = -2A \text{ و } -120 - 30i_x + 30 - 15i_x = 0$$

از آنجاییکه هر قدرت مبنای جریان و ولتاژ معکوس شده است، بدیهی است که نتایج یکسان می‌باشند و هر قدرت جذب شده همان مقادیر قبلی خواهد بود. هر جهت اتفاقی و یا راحتی را برای جریان می‌توان انتخاب نمود، اگر چه اغلب جریانهای در جهت عقربه‌های ساعت انتخاب می‌شوند. کسانی که بر جوابهای مثبت اصرار می‌ورزند همیشه می‌توانند به عقب برگردند و جهت فلش جریان را معکوس نمایند و مسئله را دوباره حل کنند.

حال بیایید تحلیل را با قرار دادن یک منبع ولتاژ وابسته به جای یکی از منابع ولتاژ مستقل کمی مشکل کنیم که این امر در شکل ۹ - ۲ نشان داده شده است. ما باز هم یک جهت مبنا برای

جریان i و ولتاژ v_3 تعیین می‌کنیم. لازم نیست ولتاژی برای مقاومت 15Ω تعیین کنیم زیرا ولتاژ کنترل‌کننده v_A برای منبع وابسته قبلاً مشخص شده است. اگر چه قابل ذکر است که علامت مبنا برای v_A برعکس آنچه که ما می‌خواستیم تعیین کنیم می‌باشند و قانون اهم برای این عنصر باید به صورت $v_A = -15i$ نوشته شود.



شکل ۹ - ۲: یک جریان i و ولتاژ v_3 در یک مدار تک حلقه‌ای حاوی یک منبع وابسته مشخص شده‌اند.

ما قانون ولتاژ کیرشوف را در حلقه اعمال می‌کنیم:

$$-120 + v_{30} + 2v_A - v_A = 0$$

دوبار از قانون اهم استفاده می‌کنیم: $v_{30} = 30i$ و $v_A = -15i$ و خواهیم داشت:

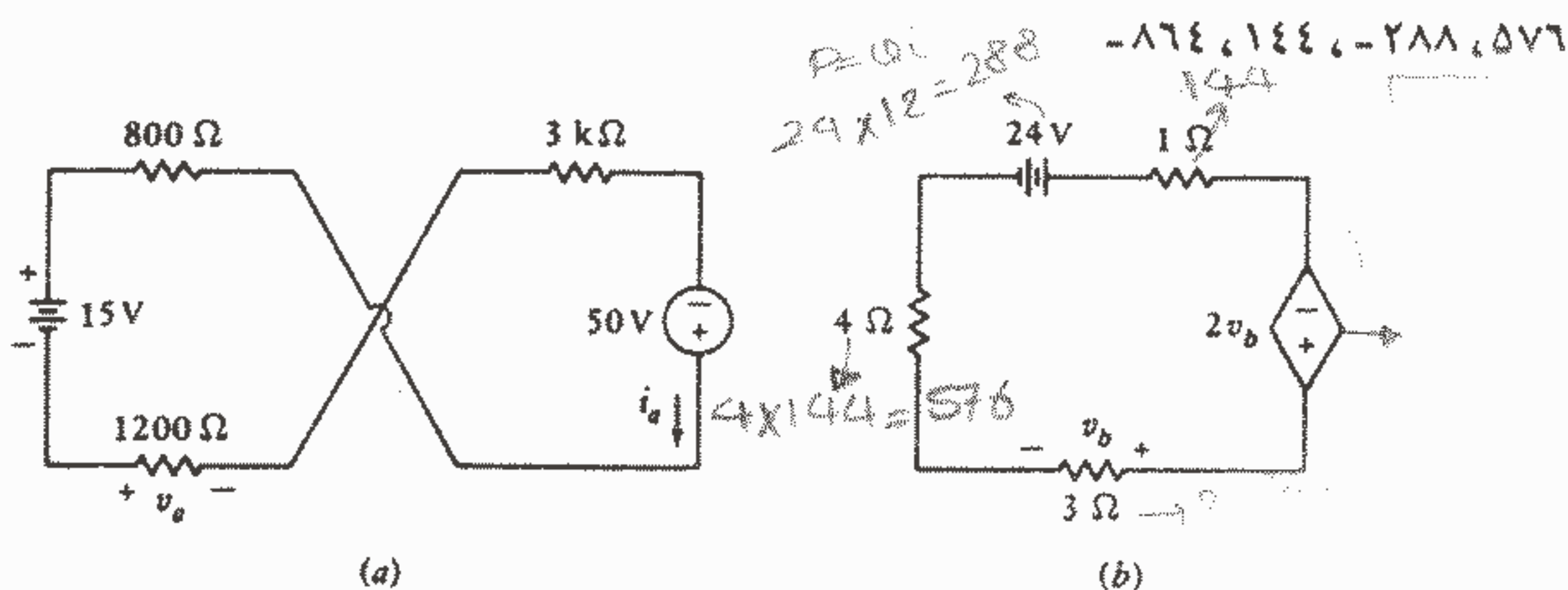
$$-120 + 30i - 30i + 15i = 0 \rightarrow i = 8 \text{ A}$$

روابط قدرت نشان می‌دهد که باتری 120 V قدرت 960 W را تحویل می‌دهد و منبع وابسته قدرت 1920 W را تحویل می‌دهد و دو مقاومت با هم قدرت 2880 W را تلف می‌کنند. کاربردهای عملی‌تر منابع وابسته در مدار معادلهای ترانزیستور و تقویت‌کننده عملیاتی در فصل بعدی ظاهر خواهند شد.

تمرین

۵ - ۲ برای مدار شکل a - ۱۰ پیدا کنید: (a) i_1 ; (b) v_1 ; (c) قدرت تحویل داده شده به وسیله باتری 15 V . جواب: 7 mA ; 8.4 V ; 105 mW .

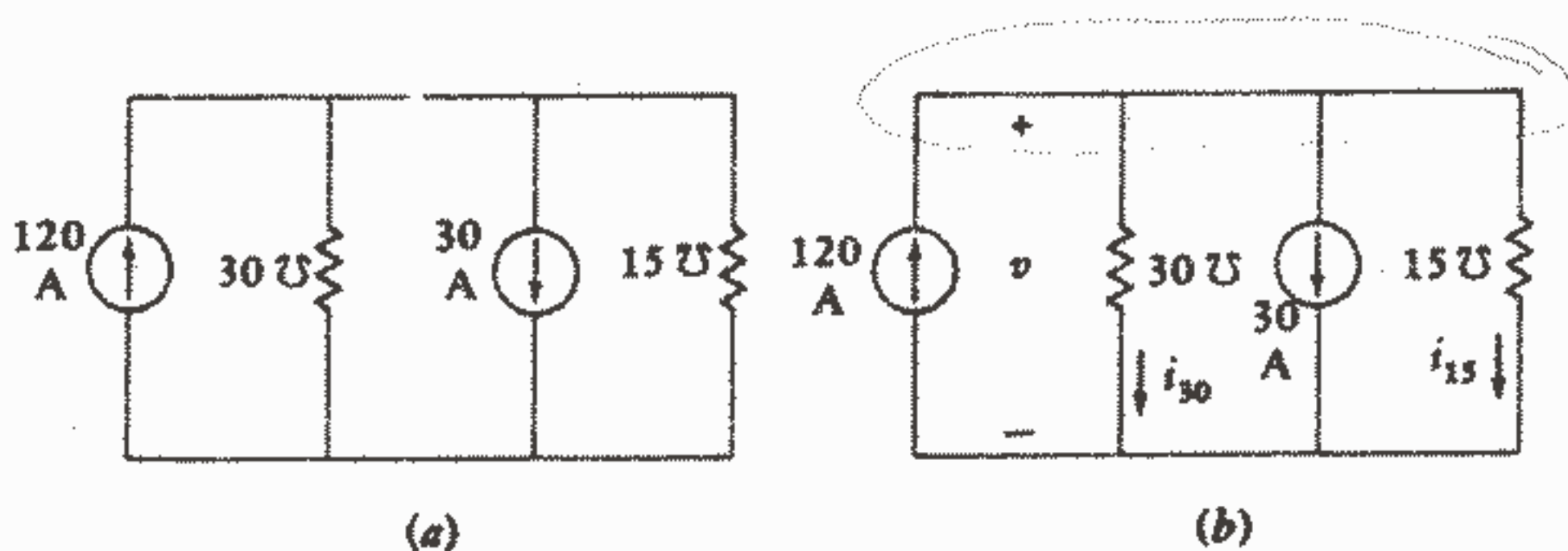
۶-۲. در مدار شکل b ۱۰-۲، قدرت جذب شده به وسیله هر یک از پنج عنصر موجود در مدار را پیدا کنید. جواب: از گوشه پایین سمت چپ و در جهت عقربه‌های ساعت: ۴۳۲ W،



شکل ۱۰-۲: مراجعه شود به تمرینات ۵-۲ و ۶-۲

۵-۲ مدار یک جفت گرهی

همتا و متناظر مدار تک حلقه‌ای که قبلاً مورد بحث قرار گرفت، مدار یک جفت گرهی می‌باشد که در آن هر تعداد عناصر ساده بین زوج گره یکسانی وصل می‌شوند. یک مثال برای چنین مداری در شکل a ۱۱-۲ نشان داده شده است. مقادیر دو منبع جریان و هدایتها داده شده‌اند و ما می‌خواهیم یکبار دیگر جریان، ولتاژ و قدرت هر عنصر را بدست آوریم.



شکل ۱۱-۲: (a) یک مدار یک جفت گرهی. (b) یک ولتاژ

و دو جریان مشخص شده‌اند.

اکنون قدم اول ما فرض کردن یک ولتاژ برای دو سر هر عنصر و انتخاب یک پلاریته مبنای دلخواه می باشد. سپس قانون ولتاژ کیرشوف به ما حکم می کند که ولتاژ دو سر هر شاخه یکسان است زیرا برای هر شاخه از یک گره تا گره دیگر یک مسیر بسته وجود دارد. برای اینکه ولتاژ کل صفر شود لازم است که ولتاژ دو سر هر عنصر یکسان باشد. ما عناصری را که ولتاژ دو سرشان مشترک می باشد می گوئیم اتصال موازی دارند. بیاید این ولتاژ را v بنامیم و آن را به طور دلخواه مانند شکل b - ۱۱ - ۲ نشان دهیم. سپس دو جریانی که در مقاومتها جاری هستند مطابق با قرارداد علامت غیرفعال انتخاب می شوند. این جریانهها هم در شکل b - ۱۱ - ۲ نشان داده شده اند. قدم سوم ما در تحلیل مدار یک جفت گرهی، اعمال KCL به هر یک از دو گره موجود در مدار می باشد. معمولاً واضح تر است که آن را به گرهی که قطب مثبت ولتاژ مبنا قرار دارد اعمال کنیم و در نتیجه ما مجموع جبری جریانهایی را که از گره بالایی خارج می شوند مساوی صفر قرار می دهیم: $-120 + i_{30} + 30 + i_{15} = 0$ و سرانجام جریان هر مقاومت را بر حسب v و هدایت آن مقاومت توسط قانون اهم بیان می کنیم:

$$i_{30} = 30v \quad \text{و} \quad i_{15} = 15v$$

$$\rightarrow -120 + 30v + 30 + 15v = 0 \quad \rightarrow v = 2 \text{ V}$$

$$i_{30} = 60 \text{ A} \quad \text{و} \quad i_{15} = 30 \text{ A}$$

مقادیر قدرتهای جذب شده را اکنون می توان به سادگی به دست آورد. در دو مقاومت داریم:

$$p_{30} = 30(2)^2 = 120 \text{ W} \quad p_{15} = 15(2)^2 = 60 \text{ W}$$

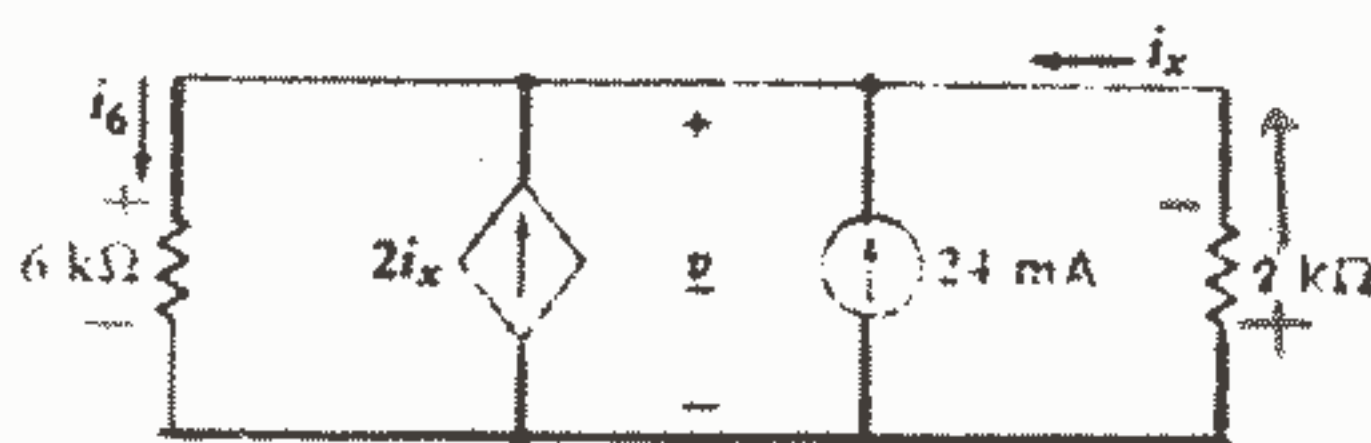
و برای دو منبع داریم:

$$p_{120A} = 120(-2) = -240 \text{ W} \quad p_{30A} = 30(2) = 60 \text{ W}$$

بنابراین منبع جریان بزرگتر 240 W به سه عنصر دیگر مدار تحویل می دهد و یکبار دیگر قانون بقای انرژی اثبات می شود.

تشابه این مثال را با مثال قبلی که حل مدار سری با منابع مستقل را نشان می داد، نباید از نظر دور داشت. اعداد همگی یکسان هستند، اما جریانهها با ولتاژها، مقاومتها با هدایتها و «سری» با «موازی» عوض شده است. این مورد مثالی است از تناظر (duality) و می گوئیم که دو

مدار دقیقاً متناظر یکدیگر هستند. اگر مقادیر عناصر و یا مقادیر منابع در هر مداری تغییر کند، بدون تغییر آرایش مدار، در این صورت دو مدار را متناظر (و یا هم پاسخ - مترجم) می‌نامند، اگر چه دقیقاً متناظر نباشند. ما بعداً تناظر را مورد مطالعه و استفاده قرار خواهیم داد و فعلاً فقط این تصور را داریم که هر نتیجه‌ای که بر حسب جریان، ولتاژ و مقاومت در یک مدار سری به دست می‌آوریم دارای همتایی بر حسب ولتاژ، جریان و هدایت در یک مدار موازی می‌باشد. حال بیایید مهارت خود را در یک مدار یک جفت گرهی شامل یک منبع وابسته مطابق شکل ۱۲ - ۲ بکار ببریم.



شکل ۱۲ - ۲: ولتاژ V و جریان i_6 در یک مدار یک جفت گرهی حاوی یک منبع وابسته، مشخص شده‌اند.

منبع جریان وابسته به وسیله جریان i_x مقاومت $2\text{ K } \Omega$ کنترل می‌شود. ما یک ولتاژ دلخواه v را با قطب مثبت در بالا و یک جریان i_6 در مقاومت $6\text{ K } \Omega$ مشخص می‌کنیم. مجموع جریانهایی که از گره بالایی خارج می‌شوند صفر می‌باشد، یعنی:

$$i_6 - 2i_x - 0.024 - i_x = 0$$

ما سپس قانون اهم را به هر مقاومت اعمال می‌کنیم البته با توجه به این امر که مقادیر رایج تر مقاومت به جای هدایت داده شده است:

$$i_6 = \frac{v}{6000} \quad \text{and} \quad i_x = \frac{-v}{2000}$$

و بنابراین:

$$\frac{v}{6000} - 2\left(\frac{-v}{2000}\right) - 0.024 - \left(\frac{-v}{2000}\right) = 0$$

$$\rightarrow v = 600 \times 0.024 = 14.4 \text{ V}$$

هر اطلاعات دیگری از این مدار را اگر بخواهیم پیدا کنیم، اکنون به سادگی فقط با یک قدم به دست می‌آید. مثلاً، قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع مستقل عبارت است از $p_{24} = 14.4(0.024) = 0.346 \text{ W}$ و جریانی که از هادی وسطی فوقانی رو به راست جاری است برابر است با:

$$i = -0.024 + (14.4/2000) = -0.0168 \text{ A, یا } -16.8 \text{ mA.}$$

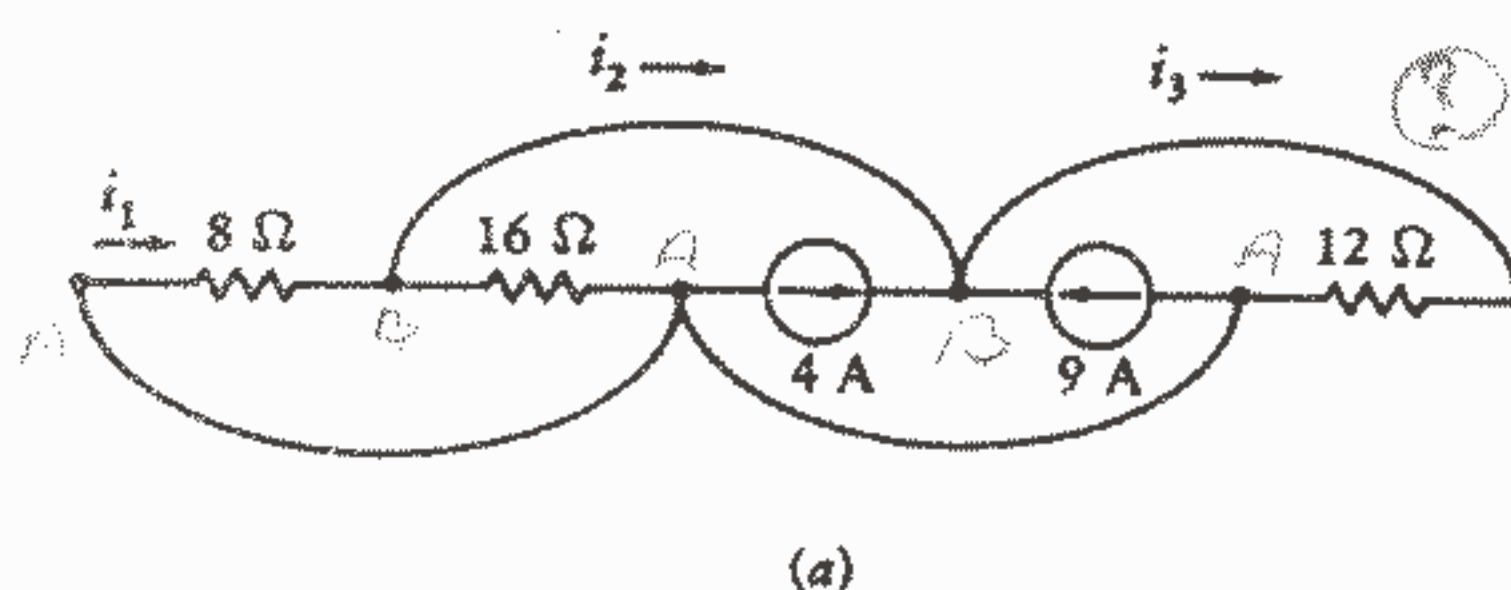
تمرین

۷-۲. در مدار یک جفت گرهی شکل a ۱۳-۲ پیدا کنید:

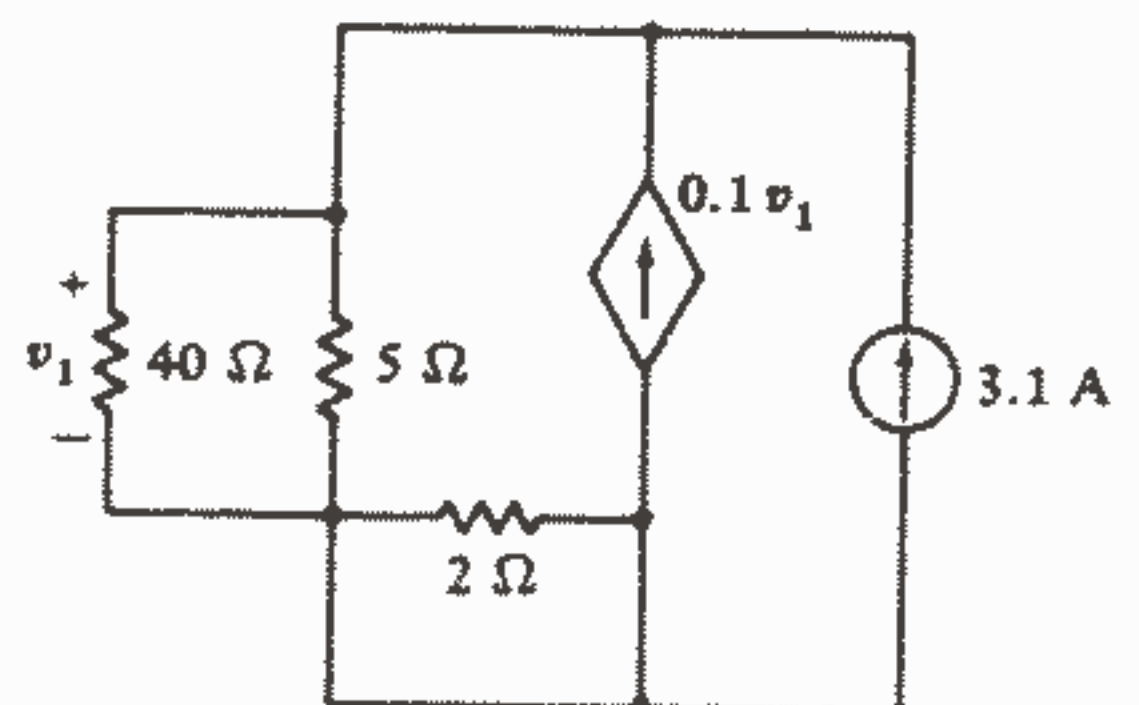
(a) i_1 , (b) i_2 , (c) i_3 جواب: 6 A , -9 A , 4 A

۸-۲. در مدار یک جفت گرهی شکل b ۱۳-۲ قدرت جذب شده به وسیله هر یک از پنج عنصر را به دست آورید.

جواب: از چپ به راست: 15.4 W , 123 W , 0 W , -61.5 W , -76.9 W



(a)



(b)

شکل ۱۳-۲: مراجعه شود به تمرینات ۷-۲ و ۸-۲.

۶-۲ ترکیب مقاومتها و منابع

بعضی از معادلاتی را که ما تا کنون برای مدارهای ساده سری و موازی نوشته ایم، می توانستیم حذف شوند. این امر با جایگزین نمودن یک ترکیب نسبتاً پیچیده مقاومتها با یک مقاومت معادل منفرد البته جاییکه ما جریان، ولتاژ و قدرت یکی از این مقاومتها را به خصوص را احتیاج نداشته باشیم، حاصل می شود. در این صورت تمام ولتاژها و جریانها و قدرت بقیه مدار تغییر نخواهد کرد. ما ابتدا ترکیب سری N مقاومت را که در شکل a ۱۴-۲ نشان داده شده است در نظر می گیریم.

قسمت سایه خورده ای که مقاومتها را احاطه کرده است برای این منظور است که القاء کننده این مطلب به ذهن باشد که آنها در یک «جعبه سیاه» و یا شاید در اتاقک دیگری محصور شده اند و ما می خواهیم این N مقاومت را با یک مقاومت معادل R_{eq} جایگزین کنیم بطوریکه بقیه مدار (در این حالت فقط منبع ولتاژ) احساس نکند که تغییری روی داده است. جریان، قدرت و ولتاژ منبع در قبل و بعد از این جایگزینی، یکسان می باشد.

با اعمال قانون ولتاژ کیرشف داریم:

$$v_s = v_1 + v_2 + \dots + v_N$$

و با استفاده از قانون اهم:

$$v_s = R_1 i + R_2 i + \dots + R_N i = (R_1 + R_2 + \dots + R_N) i$$

و سپس این رابطه را با معادله ساده‌ای که بیانگر مدار معادل شکل ۱۴b-۲ می‌باشد مقایسه می‌کنیم، $v_s = R_{eq} i$ در نتیجه مقدار مقاومت معادل برای N مقاومت سری عبارت است از:

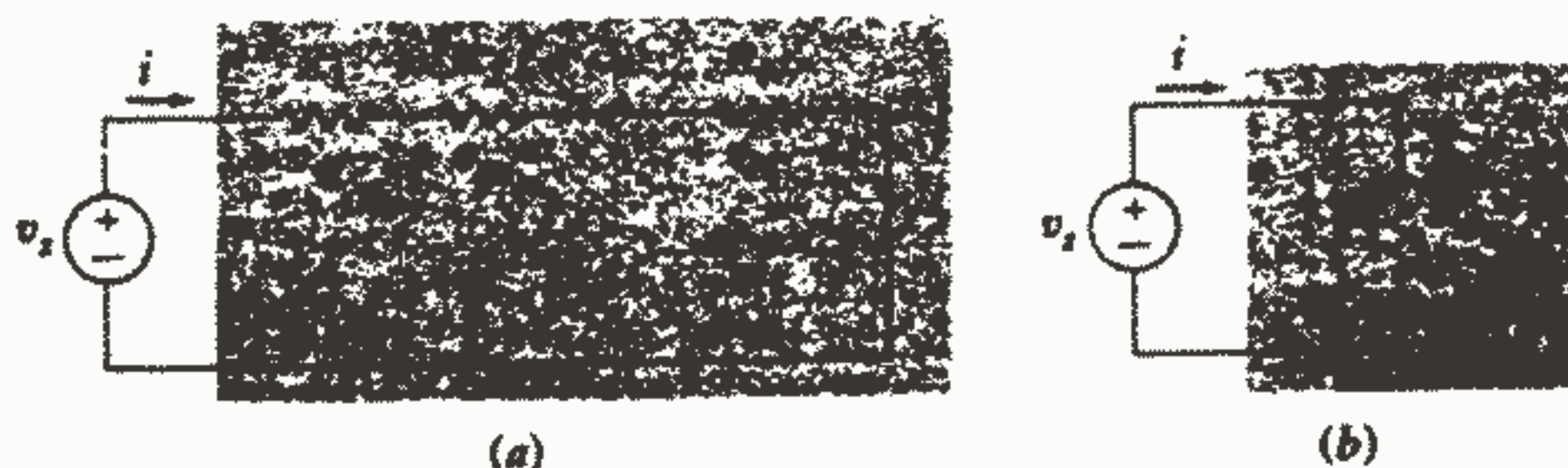
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (9)$$

بنابراین ما قادر هستیم یک شبکه دو ترمینالی مرکب از N مقاومت سری را با یک عنصر دو ترمینالی R_{eq} که همان رابطه $v - i$ را دارا می‌باشد، جایگزین کنیم. هیچ اندازه‌گیری که ما بتوانیم در بیرون «جعبه سیاه» انجام دهیم نمی‌تواند به ما بگوید که کدام مدار کدام است.

دوباره تأکید می‌کنیم که ممکن است جریان، ولتاژ و یا قدرت یکی از عناصر اولیه (قبل از جایگزینی با مقاومت معادل) مورد توجه ما باشد مثلاً وقتی که ولتاژ یک منبع ولتاژ وابسته بستگی به ولتاژ، مثلاً R_p ، داشته باشد. چون R_p با چند مقاومت سری ترکیب شده و تشکیل یک مقاومت معادل را داده است پس آن از بین رفته است و ولتاژ دو سر آن را نمی‌توان تعیین نمود مگر اینکه R_p را با جدا کردن آن از ترکیب مشخص نمود. البته بهتر بود که آینده‌نگر می‌بودیم و از همان ابتدا R_p را ترکیب نمی‌کردیم.

یک بررسی معادله ولتاژ کیرشوف بر روی یک مدار سری دو امکان ساده‌سازی دیگر را نیز نمایان می‌کند. یکی اینکه محل قرار گرفتن عناصر در یک مدار سری فرقی نمی‌کند و دیگر اینکه چند منبع ولتاژ سری را می‌توان با یک منبع ولتاژ معادل که ولتاژ آن برابر با مجموع جبری منابع جداگانه باشد، جایگزین نمود. معمولاً وقتی که یک منبع وابسته در یک ترکیب سری باشد کار کمی مشکل‌تر می‌شود.

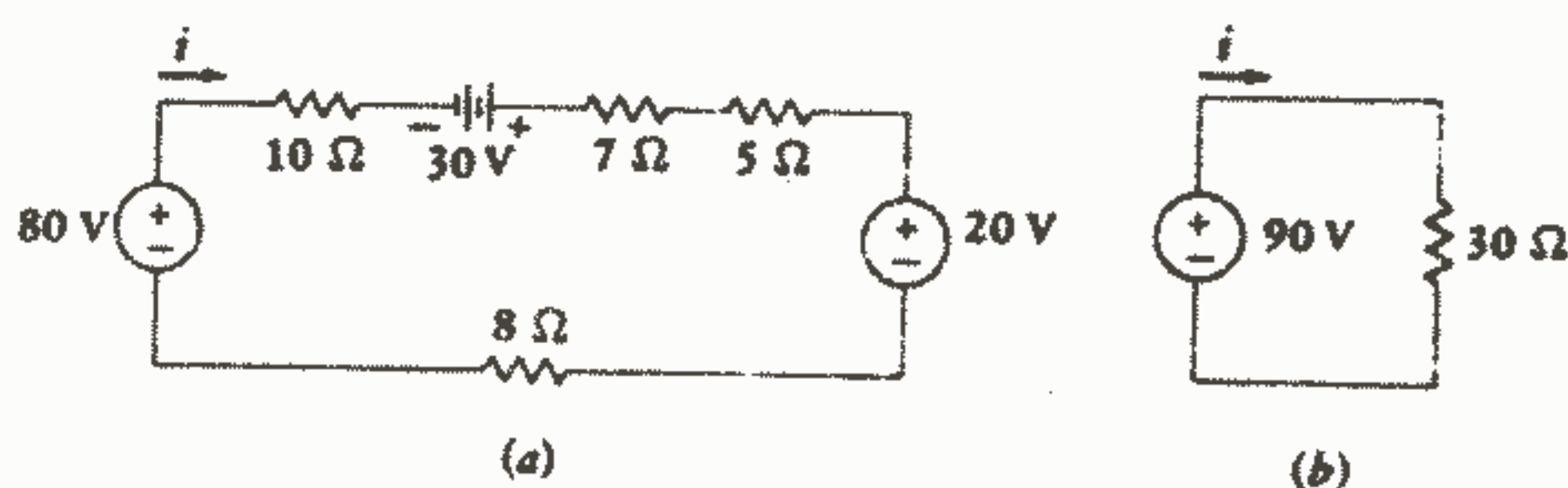
این ساده‌سازیها را می‌توان با توجه به مدار شکل ۱۵a - ۲ تجسم نمود.



شکل ۱۴ - ۲: (a) مداری که شامل N مقاومت سری می‌باشد.

(b) یک مدار معادل ساده‌تر با: $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$.

ما ابتدا محل عناصر را عوض می‌کنیم و دقت می‌کنیم که جهت مناسب منابع حفظ شود و سپس سه منبع ولتاژ را به صورت یک منبع معادل 90 V ترکیب می‌کنیم و چهار مقاومت را به صورت یک مقاومت معادل $30\ \Omega$ به طوریکه در شکل b - ۱۵ نشان داده شده است، ترکیب می‌کنیم. بنابراین به جای نوشتن $-80 + 10i - 30 + 7i + 5i + 20 + 8i = 0$ به طور ساده‌تر می‌توانیم بنویسیم:

$$-90 + 30i = 0 \rightarrow i = 3\text{ A}$$


شکل ۱۵ - ۲: (a) یک مدار سری داده شده. (b) یک مدار معادل ساده‌تر.

برای محاسبه قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع 80 V در مدار داده شده، لازم است که به آن مدار باز گردیم با علم به اینکه جریان 3 A می‌باشد. قدرت مطلوب 240 W می‌باشد. جالب است توجه کنیم که هیچیک از عناصر مدار اولیه در مدار معادل باقی نمی‌ماند مگر اینکه بخواهیم سیمهای رابط را به عنوان عنصر به حساب آوریم. ساده‌سازیهایی مشابهی را می‌توان برای مدارهای موازی در نظر گرفت. یک مدار شامل N هدایت موازی مانند شکل a - ۱۶ ما را به معادله KCL زیر رهنمون می‌شود:

$$i_s = i_1 + i_2 + \dots + i_N$$

$$i_s = G_1 v + G_2 v + \dots + G_N v = (G_1 + G_2 + \dots + G_N) v \quad \text{و یا}$$

در حالیکه معادل آن در شکل b - ۱۶ می‌دهد: $i_s = G_{eq} v$ بنابراین داریم:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_N$$

بر حسب مقاومت بجای هدایت داریم:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

$$R_{eq} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_N}$$

و یا: (۱۰)

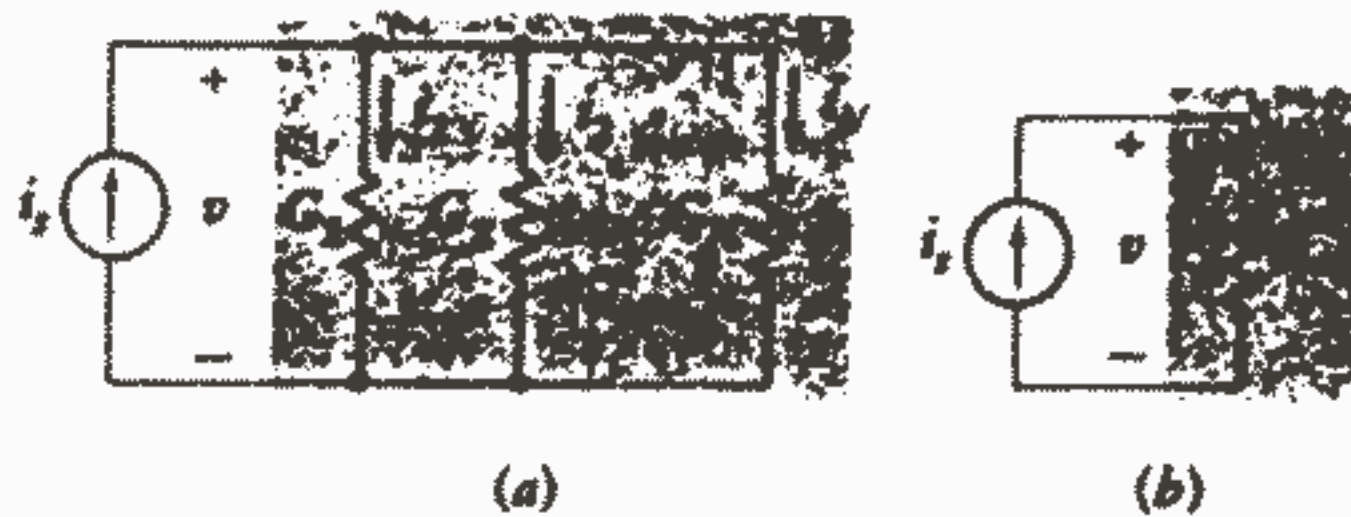
این معادله اخیر احتمالا در اغلب موارد برای ترکیب مقاومتهای موازی بکار می‌رود. ترکیب موازی اغلب بصورت $R_{eq} = R_1 \parallel R_2 \parallel R_3$ نوشته می‌شود.

در حالت خاصی که فقط دو مقاومت موازی داشته باشیم، خواهیم داشت:

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} \quad \text{یا} \quad R_{eq} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (11)$$

رابطه (۱۱) برای به خاطر سپردن مناسب‌تر است.

منابع جریان موازی را هم می‌توان با جمع جبری نمودن جریانهای منفرد، ترکیب نمود و محل عناصر موازی را می‌توان به دلخواه تغییر داد.



شکل ۱۶ - ۲: (a) یک مدار شامل N مقاومت موازی با

هدایت‌های G_1, G_2, \dots, G_N

(b) یک مدار معادل ساده‌تر: $G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_N$

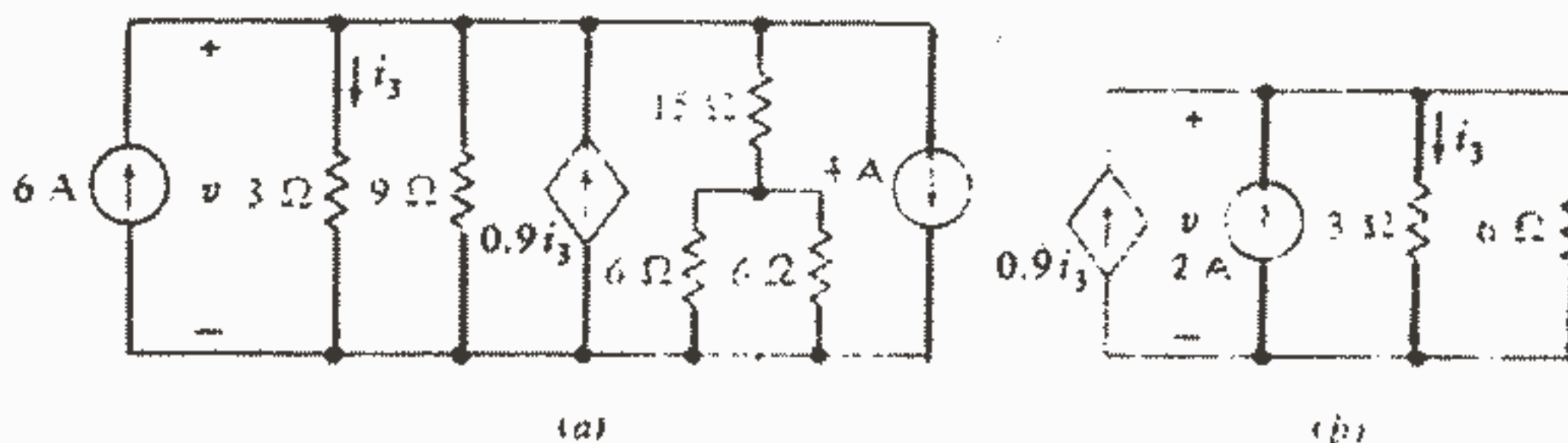
ترکیبات مختلفی را که در این قسمت توضیح دادیم برای ساده کردن مدار شکل ۲-۱۷a بکار می‌بریم. فرض کنیم که می‌خواهیم قدرت و ولتاژ منبع وابسته را بدست آوریم. ما آنرا تنها می‌گذاریم و سپس دو منبع باقیمانده را به صورت یک منبع ۲A ترکیب می‌کنیم و مقاومتهای را با ترکیب دو مقاومت 6Ω موازی به یک مقاومت 3Ω شروع می‌کنیم و سپس ترکیب سری 3Ω و 15Ω را انجام می‌دهیم و سپس دو مقاومت موازی 9Ω و 18Ω را ترکیب می‌کنیم و مقاومت 6Ω بدست می‌آید و این حداکثر جایی است که بطور سودمند می‌توانیم پیش برویم. مطمئناً ترکیب موازی 6Ω و 3Ω می‌شود 2Ω ، اما در اینصورت جریان i_3 که منبع به آن وابسته است از بین می‌رود. از مدار معادل شکل ۲-۱۷b داریم:

$$-0.9i_3 - 2 + i_3 + \frac{v}{6} = 0, \quad v = 3i_3 \rightarrow i_3 = \frac{4}{3} \text{ A} \rightarrow v = 10 \text{ V}$$

۱ - البته ما می‌توانستیم آنرا با نوشتن $i_3 = 7/3$ حفظ کنیم که در اینصورت i_3 برحسب متغیرهایی که در مدار نهایی ظاهر می‌شود، بیان می‌شود.

بنابراین منبع وابسته قدرت $v(0.9i_3) = 10(0.9 \times \frac{1}{3}) = 30 \text{ W}$ را به بقیه مدار تحویل می‌دهد. حال اگر بطور بی‌موقع و بعنوان یک کار از موقع گذشته از ما بخواهند قدرت تلف شده در مقاومت 15Ω را بدست آوریم، باید به مدار اصلی برگردیم. این مقاومت با یک مقاومت معادل 3Ω سری می‌باشد و ولتاژ 10V در دو سر کل مقاومت 18Ω وجود دارد بنابراین جریان $5/9 \text{ A}$ از مقاومت 15Ω عبور می‌کند و قدرت جذب شده بوسیله این عنصر عبارت است از $(15)(5/9)^2$ و یا 4.63W .

در خاتمه بحث ترکیب عناصر سری و موازی، باید به ترکیب موازی دو منبع ولتاژ و ترکیب سری دو منبع جریان توجه نماییم. مثلاً منبع معادل یک ترکیب موازی منبع 5V با منبع 10V چه می‌شود؟ بنابر تعریف یک منبع ولتاژ، ولتاژ دو سر منبع نمی‌تواند تغییر کند، پس بنابر قانون ولتاژ کیرشوف باید ۵ مساوی ۱۰ باشد که از نظر فیزیکی غیر ممکن است. بنابراین، منابع ولتاژ فقط وقتی می‌تواند موازی باشند که ولتاژ دو سر هر یک از آنها در هر لحظه مساوی باشد. بعداً خواهیم دید که منابع ولتاژ عملی را می‌توان بدون هیچگونه مشکل تئوریک بطور موازی ترکیب نمود.



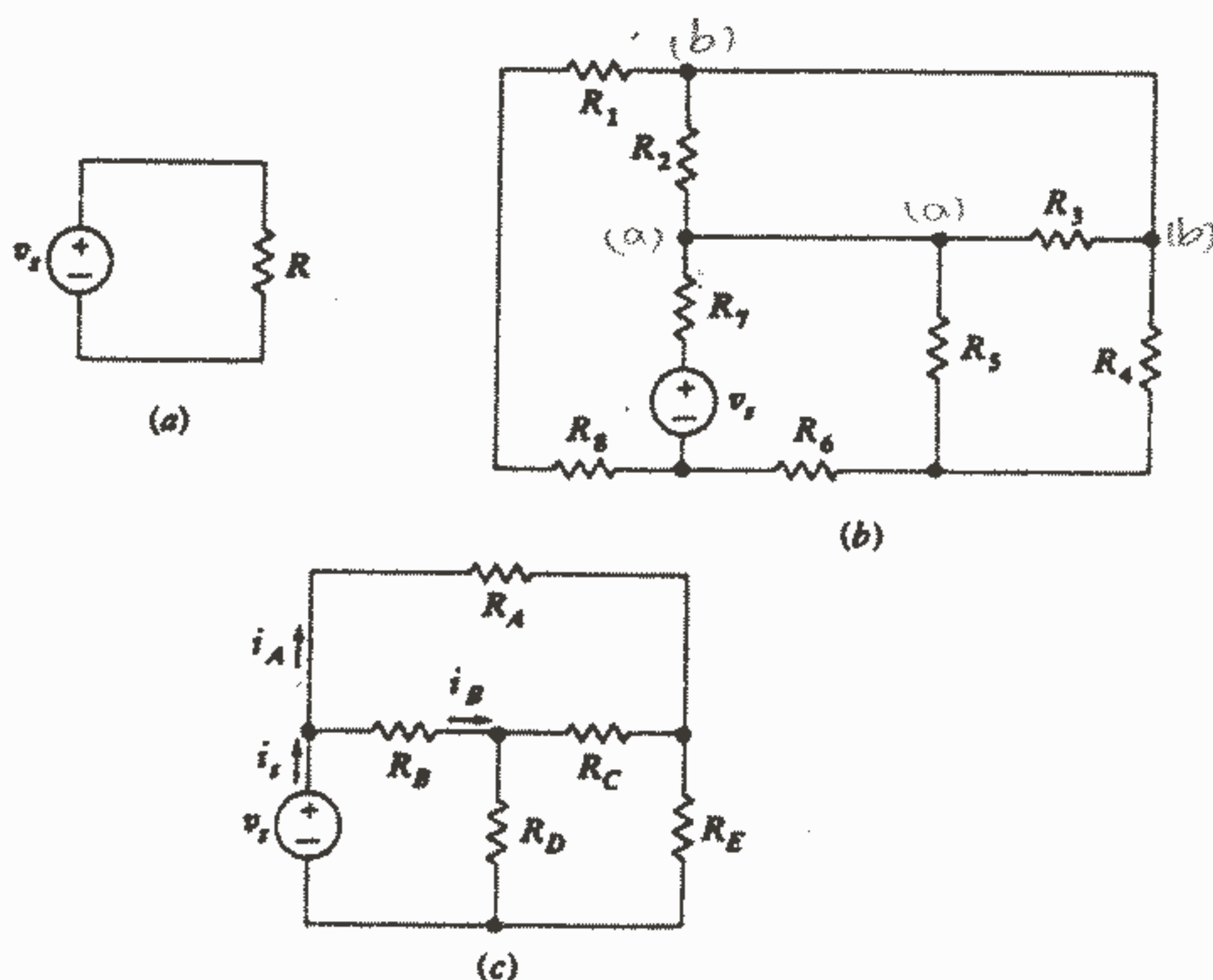
شکل ۱۷-۲: (a) یک مدار ساده شده. (b) مدار معادل ساده شده.

(بطریق مشابه دو منبع جریان را نمی‌توان بطور سری ترکیب نمود مگر اینکه هر یک در هر لحظه دارای جریان مساوی، و هم علامت، باشند.)

یک منبع ولتاژ موازی یا سری با یک منبع جریان یک سرگرمی فکری جالب را ارائه می‌کند. این دو حالت ممکن در مسئله ۳۴ آخر فصل نشان داده شده است.

و سرانجام سه توضیح نهایی درباره ترکیب سری و موازی می‌تواند مفید باشد. توضیح اول را با مراجعه به شکل ۱۸a-۲ و پرسیدن اینکه، «آیا v_p و R سری هستند و یا موازی؟» می‌توان ارائه

نمود. جواب این پرسش واضح است: «هر دو» هر دو عنصر حامل جریان یکسان بوده در نتیجه سری هستند و همچنین هر دوی آنها ولتاژ یکسانی دارند پس موازی می‌باشند. این مدار ساده تنها حالتی است که این مطلب در مورد آن صادق است.



شکل ۱۸ - ۲: (a) این دو عنصر مداری هم موازی و هم سری هستند.

(b) R_3 ، R_2 موازی و R_1 ، R_8 سری هستند.

(c) هیچ عناصر مداری سری و موازی وجود ندارد.

نکته دوم یک تذکر می‌باشد. مدارها را ممکن است دانشجویان ناشی و یا اساتید بی‌دقت طوری رسم کنند که تشخیص ترکیبات سری و موازی مشکل باشد. مثلاً در شکل ۱۸b-۲ فقط دو مقاومت R_3 و R_2 موازی هستند در حالیکه فقط دو مقاومت R_1 و R_8 سری می‌باشند. البته v_s و R_7 نیز سری هستند.

توضیح آخر اینکه لازم نیست یک عنصر مداری ساده موازی و یا سری با هیچ عنصر مداری ساده دیگری باشد. مثلاً در شکل ۱۸b-۲ با هیچ عنصر مداری ساده دیگری موازی یا

سری نیستند و هیچ عنصر مداری ساده‌ای در شکل ۲-۱۸c وجود ندارد که با عنصر مداری ساده دیگری موازی یا سری باشد.

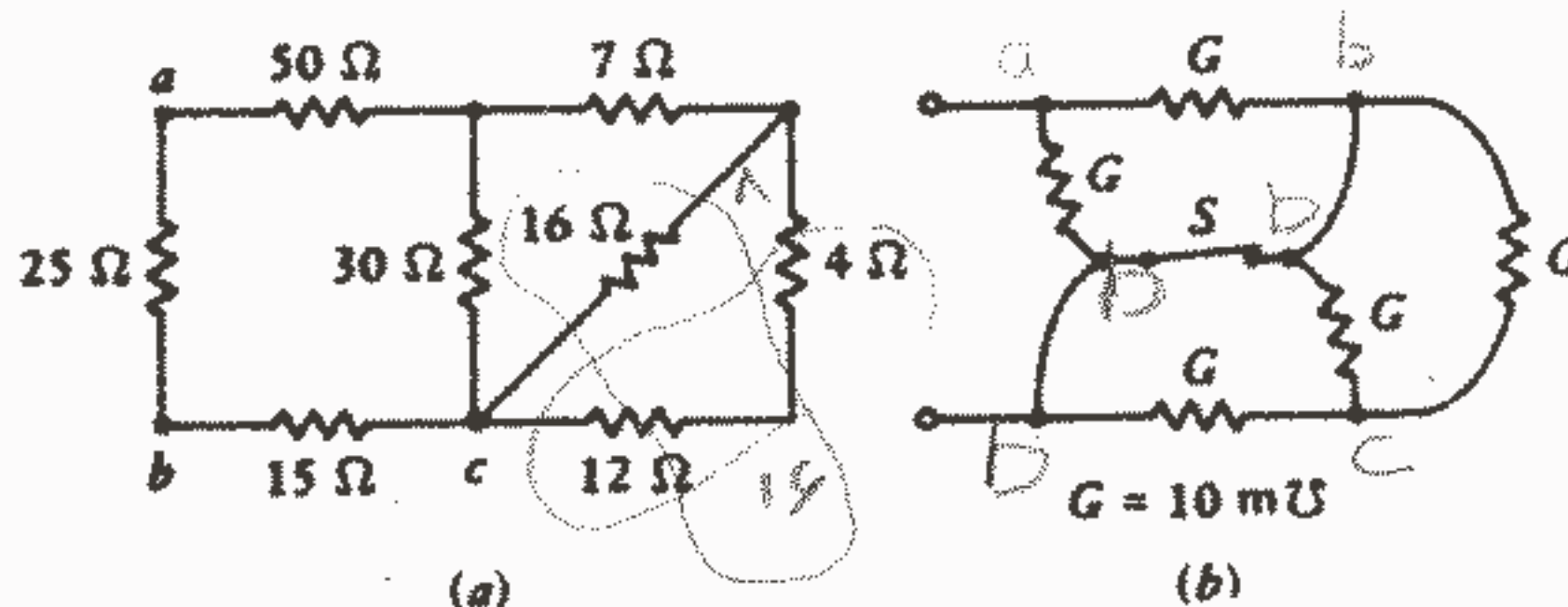
تمرین

۲-۹ - اهم متر وسیله‌ای است که مقدار مقاومتی را که بین دو ترمینال آن دیده می‌شود، ارائه می‌کند. مقدار صحیح خوانده شده وقتی که این وسیله به شبکه شکل ۲-۱۹a وصل شود در نقاط زیر چه خواهد بود: (a) ab, (b) ac, (c) bc ?

جواب: $12,75\Omega$, 24Ω , $18,75\Omega$

۱۰ - ۲ - چه هدایتی در ترمینال‌های شبکه شکل ۲-۱۹b اندازه‌گیری می‌شود اگر کلید S: (a) باز باشد، (b) بسته باشد، (c) بوسیله یک هدایت 10 mS جایگزین شود.

جواب: $16,25\text{ mS}$, 20 mS , 14 mS



شکل ۲-۱۹: به تمرین ۲-۹ و ۲-۱۰ مراجعه کنید.

۷-۲ تقسیم ولتاژ و جریان

با ترکیب مقاومت‌ها و منابع ما یک روش برای کوتاه کردن کار تحلیل یک مدار بدست آوردیم. اختصار مفید دیگر کاربرد ایده‌های تقسیم ولتاژ و جریان می‌باشد. تقسیم ولتاژ برای بیان ولتاژ دو سر یکی از چند مقاومت سری برحسب ولتاژ دو سر کل ترکیب بکار می‌رود. در

شکل ۲-۲۰، واضح است که ولتاژ دو سر R_2 عبارت است از: $v_2 = R_2 i = R_2 \frac{v}{R_1 + R_2}$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

و یا

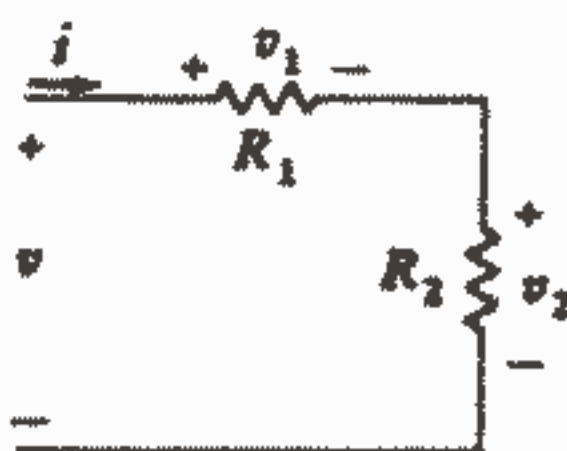
و بطریق مشابه ولتاژ دو سر R_1 عبارت است از:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v$$

اگر شبکه شکل ۲-۲۰ با جایگزینی R_2 بوسیله R_3, R_4, \dots, R_N تعمیم داده شود آنگاه ما نتیجه کلی برای تقسیم ولتاژ در N مقاومت سری را بشرح زیر خواهیم داشت:

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} v \quad (12)$$

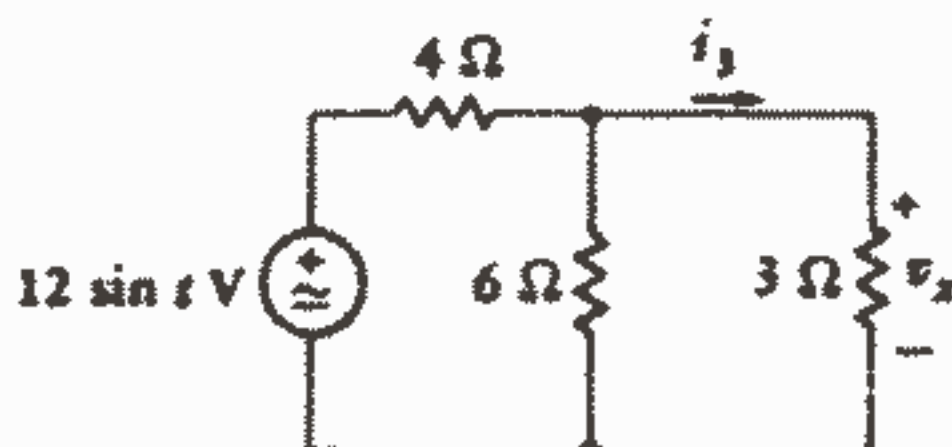
یعنی ولتاژی که در سر یک مقاومت سری ظاهر می شود برابر است با ولتاژ کل ضرب در نسبت آن مقاومت به مقاومت کل.



شکل ۲-۲۰: تجسمی از تقسیم ولتاژ، $v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$

تقسیم ولتاژ و ترکیب مقاومت هر دو را می توان به مدار شکل ۲-۲۱ اعمال نمود. ما بطور ذهنی مقاومت های 3Ω و 6Ω را ترکیب می کنیم و مقاومت 2Ω را بدست می آوریم و در نتیجه بدست می آید: $v_x = \frac{2}{4} (12 \sin t) = 4 \sin t \text{ V}$

متناظر تقسیم ولتاژ، تقسیم جریان می باشد. ما اکنون یک جریان کل داریم که به چند هدایت موازی تغذیه می شود که در مثال شکل ۲-۲۲ نشان داده شده است.



شکل ۲-۲۱: یک مثال عددی که نشان دهنده ترکیب مقاومت

و تقسیم ولتاژ می باشد علامت موج در داخل علامت منبع نشان دهنده این است که تغییرات با زمان سینوسی می باشد.

جریانی که از G_2 عبور می کند برابر است با:

$$i_2 = G_2 v = G_2 \frac{i}{G_1 + G_2}$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i$$

و یا

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i$$

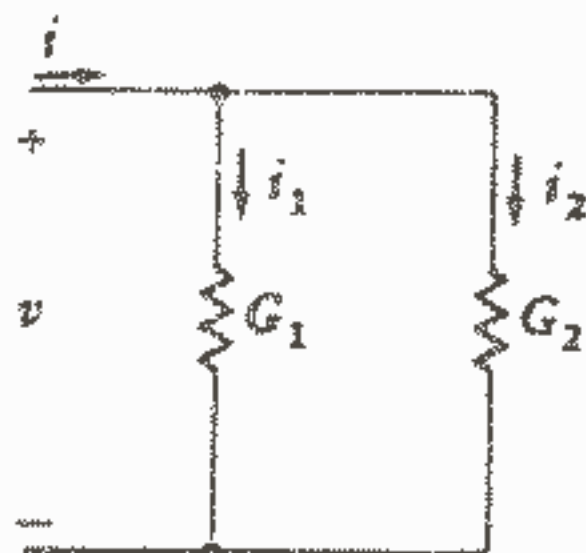
و بطور مشابه داریم:

بنابراین جریانی که از هر یک از دو هدایت موازی عبور می کند برابر است با جریان کل ضرب در نسبت آن هدایت به هدایت کل.

از آنجاییکه اغلب مقدار مقاومت را به جای هدایت به ما می دهند، یک شکل مهم تر نتیجه فوق با جایگزینی $1/R_1$ به جای G_1 و $1/R_2$ به جای G_2 بصورت زیر بدست می آید:

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \quad \text{و} \quad i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

در اینجا طبیعت به ما روی خوش نشان نداده است و در این دو معادله اخیر فاکتوری داریم که بطور ظریفی با فاکتوری که برای تقسیم ولتاژ داشتیم فرق دارد و برای اجتناب از اشتباه باید قدری سعی و کوشش به خرج دهیم. اکثر دانشجویان به رابطه تقسیم ولتاژ به صورت «بدیهی» و به رابطه تقسیم جریان بصورت «مغایر» می نگرند. این امر همچنین کمک می کند دریابیم که از دو مقاومت موازی آنکه بزرگتر است جریان کمتری می کشد.



شکل ۲۲ - ۲: تصویری از تقسیم جریان، $i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$

ما این نتایج را هم می توانیم با جایگزین کردن اتصال موازی G_1, G_2, \dots, G_N به جای G_2 در شکل ۲۲-۲ تعمیم دهیم. بنابراین برای N هدایت موازی داریم:

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + \dots + G_N} i \quad (۱۳)$$

برحسب مقادیر مقاومتی نتیجه فوق بصورت زیر درمی آید:

$$i_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_N} i \quad (14)$$

بعنوان مثالی برای تقسیم جریان و ترکیب مقاومت بیایید به مثال شکل ۲۱-۲ برگردیم و رابطه‌ای برای جریان مقاومت 3Ω بنویسیم. جریان کلی که از ترکیب مقاومت 3Ω و 6Ω می‌گذرد عبارت است از:

$$i = \frac{12 \sin t}{4 + (6)(3)/(6+3)} = 2.8 \sin t$$

و در نتیجه جواب مطلوب برابر است با:

$$i_3 = \frac{12 \sin t}{4 + (6)(3)/(6+3)} \frac{6}{6+3} = 4/3 \sin t$$

متأسفانه تقسیم جریان را گاهی اوقات که عملی نیست بکار می‌برند. بعنوان یک مثال، بیایید دوباره به مدار شکل ۱۸۰-۲، مداری که قبلاً توافق کرده‌ایم هیچ عنصر مداری سری یا موازی ندارد، توجه کنیم. بدون مقاومت‌های موازی هیچ راهی وجود ندارد که بتوانیم تقسیم جریان را بکار ببریم. معذالک، دانشجویان زیادی وجود دارند که با یک نگاه سریع به مقاومت‌های R_B و R_A سعی می‌کنند با استفاده از تقسیم جریان معادله غلطی مانند

$$i_A = i \frac{R_B}{R_A + R_B} \quad \text{بنویسند.}$$

به یاد داشته باشید که مقاومت‌های موازی باید بین یک جفت گره واحدی وصل شده باشند.

تمرین

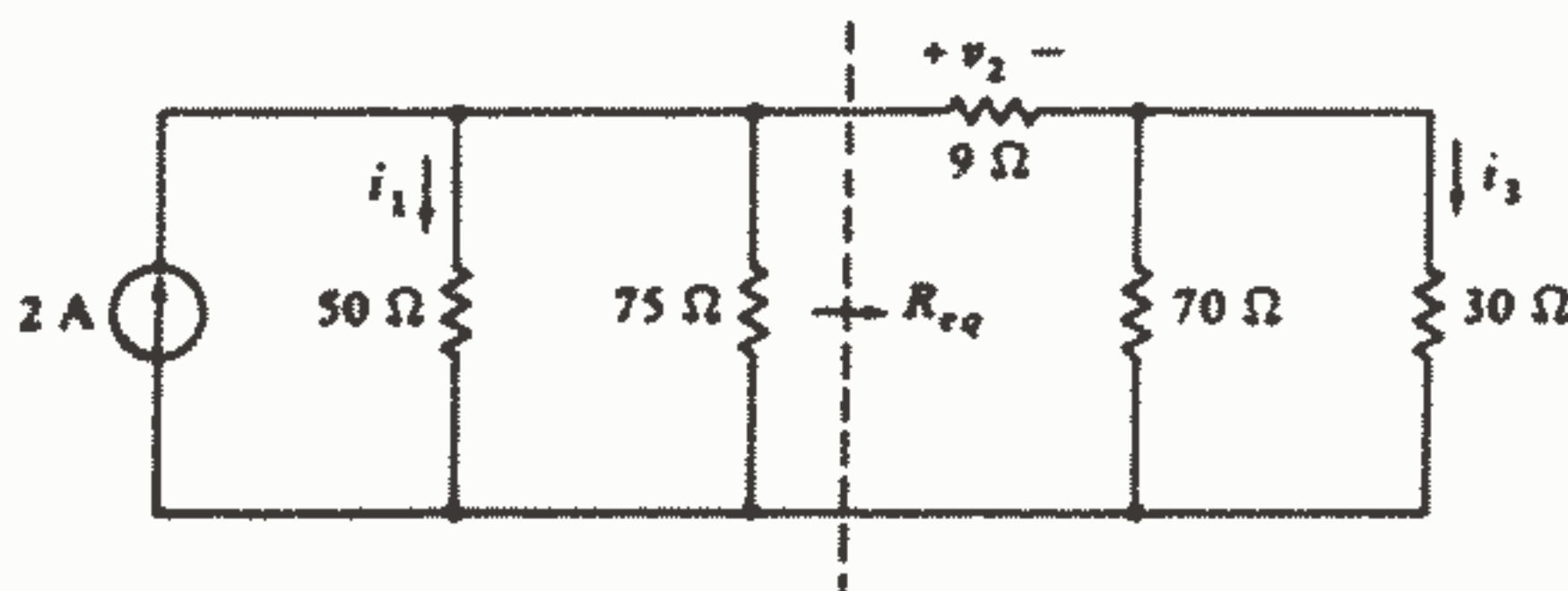
۱۱ - ۲ - در مدار شکل ۲۳-۲: (a) با استفاده از روش ترکیب مقاومتها، R_{eq} را پیدا کنید.

(b) با استفاده از تقسیم جریان i_1 را پیدا کنید.

(c) با استفاده از تقسیم ولتاژ، v_2 را پیدا کنید.

(d) با استفاده از تقسیم جریان، i_3 را پیدا کنید.

جواب: $0.7A$, $9V$, $0.6A$



شکل ۲۳ - ۲: به تمرین ۱۱-۲ مراجعه شود.

۸-۲- یک مثال عملی: تقویت کننده عملیاتی

اکنون به اندازه کافی قوانین پایه و تکنیک‌های تحلیلی ساده به ما معرفی شده است که ما قادر باشیم آنها را بطور موفقیت آمیز به بعضی مدارهای عملی جالب اعمال کنیم. در این قسمت ما بررسی یک وسیله الکترونیکی بنام تقویت کننده عملیاتی و یا به اختصار op-amp را شروع خواهیم کرد.

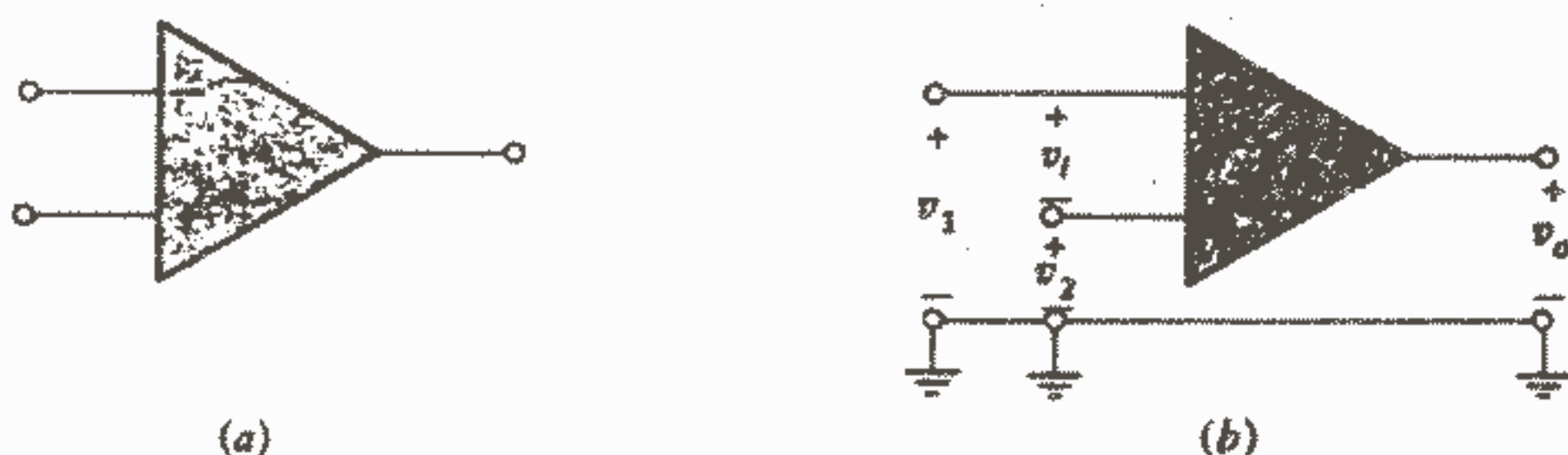
اولین تقویت کننده‌های عملیاتی در دهه ۱۹۴۰ با استفاده از لامپهای خلاء برای انجام عملیات ریاضی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری بطریق الکتریکی، ساخته شدند و در نتیجه حل الکتریکی معادلات دیفرانسیل را در کامپیوترهای آنالوگ اولیه ممکن ساختند.

op-amp اگر به اصول اساسی آن برگردیم دقیقاً یک منبع ولتاژ کنترل شده بوسیله ولتاژ می‌باشد. منبع ولتاژ وابسته در ترمینالهای خروجی op-amp ظاهر می‌شود و ولتاژی که به آن بستگی دارد به ترمینال‌های ورودی اعمال می‌شود.

علامتی که بطور رایج برای op-amp بکار می‌رود در شکل ۲-۲۴a نشان داده شده است. دو ترمینال ورودی در سمت چپ و یک ترمینال خروجی در سمت راست نشان داده شده است. همچنین یک ترمینال و یا گره مشترک بنام «زمین» هم وجود دارد که معمولاً بصورت واضح و آشکار بعنوان یک ترمینال op-amp نشان داده نمی‌شود. در مدارهای عملی اغلب عناصر زیادی به بدنه فلزی و یا شاسی که مدار روی آن بنا می‌شود وصل می‌شوند و سپس این شاسی بوسیله یک هادی خوب به زمین وصل می‌شود. بنابراین، بدنه فلزی، گره زمین می‌شود. علامت گره زمین چند بار در قسمت پایین شکل ۲-۲۴b نشان داده شده است.

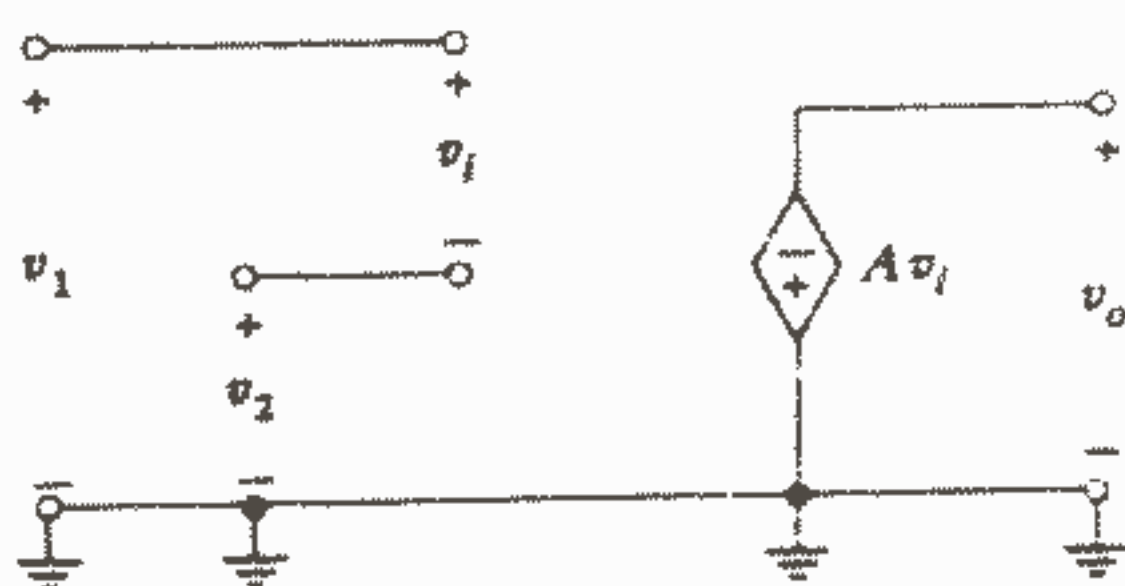
اگرچه ما می‌توانیم یک سیگنال ولتاژ و یا منبع ولتاژ منفردی را مستقیماً بین ترمینال‌های ورودی اعمال کنیم ولی در بیشتر کاربردهای عملی بین هر ترمینال ورودی و زمین یک ولتاژ اعمال می‌شود. ترمینال ورودی که با علامت (—) مشخص می‌شود بنام ورودی معکوس کننده خوانده می‌شود و یک ولتاژ v_1 بین ورودی معکوس کننده و زمین تعریف می‌شود که در شکل ۲-۲۴b نشان داده شده است.

ولتاژ v_2 بین ورودی غیرمعکوس کننده و زمین تعریف می‌شود. ما به طور خلاصه خواهیم دید که ولتاژ $(v_1 - v_2)$ به طور تقویت شده و معکوس شده از نظر پلاریته بین ترمینال خروجی و زمین ظاهر می‌شود.



شکل ۲-۲۴: (a) علامت مداری یک تقویت کننده عملیاتی. (b) ولتاژهای ورودی v_1 ، v_2 ، اختلاف آنها v_1 و خروجی v_o مشخص شده‌اند.

اگر $v_2 = 0$ باشد، آنگاه v_1 به صورت تقویت و معکوس شده در خروجی ظاهر می‌شود و اگر $v_1 = 0$ ، آنگاه v_2 به صورت تقویت شده و بدون تغییر علامت در خروجی ظاهر می‌شود. ضریب تقویت از 10^4 تا 10^7 برای op - amp های مختلف تغییر می‌کند و یک مقدار معمول 10^5 می‌باشد. تفاضل v_1 و v_2 ولتاژ ورودی $v_i = v_1 - v_2$ می‌باشد. یک op - amp ممکن است قیمت کمی در حدود ۲۰ سنت داشته باشد که با آن یک مدار مجتمع (IC) حاوی ۲۵ ترانزیستور و یک دوجین مقاومت که همگی در یک قوطی کوچک و یا ویفر سرامیک با ۸ یا ۱۰ پایه برای اتصال به مدار خارجی بسته‌بندی شده‌اند، به دست می‌آوریم. در بعضی حالات چیپ IC ممکن است شامل چند op - amp باشد. علاوه بر پایه خروجی و دو پایه ورودی پایه‌های دیگر برای اعمال ولتاژهایی به ترانزیستورها و تنظیم خارجی برای متعادل کردن و جبران‌سازی op - amp می‌باشند. اگر چه ما فعلاً با مدار داخلی op - amp و یا IC کاری نداریم و فقط با روابط ولتاژ و جریان که در ترمینالهای خارجی وجود دارد، سر و کار داریم. بنابراین اتصالات نشان داده شده در شکل ۲-۲۴a کافی می‌باشند.



شکل ۲-۲۵: یک مدل ساده برای یک op - amp شامل یک منبع وابسته و چند ترمینال می‌باشد.

شکل ۲۵ - ۲ یک مدل مفید برای یک op - amp را نشان می‌دهد. مقاومت بین ترمینالهای ورودی بقدری بزرگ ($10^5 \Omega$ تا $10^6 \Omega$) است که ما با اطمینان می‌توانیم آن را به وسیله یک مدار باز نشان دهیم. در مثالهای بعدی ما این مقاومت ورودی R_i را بین دو ترمینال ورودی وصل خواهیم کرد ولی فعلاً با مدل ایده آل کار می‌کنیم.

یک منبع ولتاژ وابسته کنترل شده به وسیله ولتاژ یک ولتاژ خروجی مساوی با A برابر تفاضل دو ولتاژ ورودی ارائه می‌کند. مدلهای دقیقتر op - amp شامل یک مقاومت خروجی R_o از ۱ تا 1000Ω به طور سری با منبع ولتاژ و ترمینال خروجی می‌باشد.

فرض می‌کنیم $v_1 = 1 \mu V$, $v_2 = 0.6 \mu V$, $A = 10^5$, آنگاه

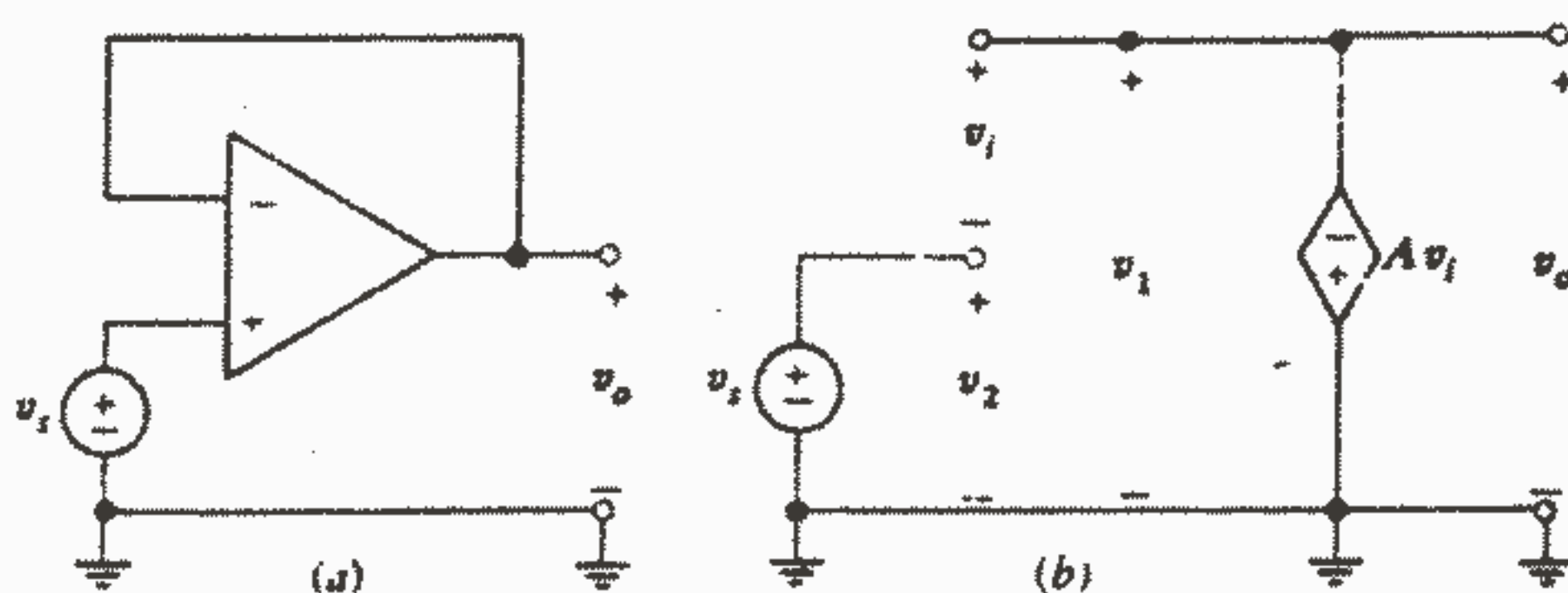
$$v_i = 10^{-6} - 0.6 \times 10^{-6} = 0.4 \times 10^{-6} V, \text{ و } v_o = -10^5 \times 0.4 \times 10^{-6} = -0.4 V.$$

به پلاریته منبع وابسته توجه داشته باشید. حال اگر ورودی غیرمعکوس کننده را به زمین وصل کنیم، آنگاه $v_2 = 0$, $v_1 = 10^{-6} V$ و $v_o = -10^5 \times 10^{-6} = -0.1 V$ و اگر ورودی معکوس کننده را زمین کنیم آنگاه:

$$v_o = -10^5(-0.6 \times 10^{-6}) = 0.06 V, \text{ و } v_1 = -0.6 \times 10^{-6} V \text{ و } v_2 = 0$$

تقویت کننده عملیاتی به ندرت به صورت لخت و جریان ارائه شده در مثال بالا به کار برده می‌شود. معمولاً چند عنصر مداری به صورت موازی یا سری با ورودی یا خروجی و یا بین خروجی و ورودی وصل می‌شوند. ما بسیاری از این مدارهای عملی را در مطالعه مان درباره تحلیل مدار در فصلهای آتی به عنوان مثال به کار خواهیم برد.

اولین مثال ولتاژ فالوور می‌باشد که در شکل ۲۶a - ۲ نشان داده شده است. در اینجا یک سیگنال ورودی v_i بین ورودی غیرمعکوس کننده و زمین وصل شده است به طوریکه $v_2 = v_i$. یک اتصال کوتاه مستقیماً از خروجی به ورودی معکوس کننده وصل شده است و $v_1 = v_o$.



شکل ۲۶ - ۲: (a) یک op - amp که به صورت یک ولتاژ فالوور بسته شده است.

(b) مدار معادل به صورت یک مدار تک حلقه‌ای با یک مدار باز و جریان حلقه‌ای صفر در

نظر گرفته شده است.

شکل ۲-۲۶a یک مدار معادل را نشان می‌دهد اما به نظر می‌رسد که مدار تک حلقه‌ای باشد و لولاینکه یک مدار باز بین دو ترمینال ورودی موجود می‌باشد. در واقع جریان حلقه باید صفر باشد و بنابراین هیچ جریانی در هیچ کجای مدار وجود ندارد.

از بحث فوق چنین بر می‌آید که قانون جریان کیرشوف اطلاعات بیشتری نمی‌تواند به ما بدهد و قانون اهم هم بدون وجود مقاومت بلااستفاده می‌ماند و ما فقط می‌توانیم به قانون ولتاژ کیرشوف، برای اطلاعات بیشتر درباره رابطه بین ولتاژ خروجی V_o و ولتاژ ورودی V_s ، امیدوار باشیم.

در حلقه داریم:

$$-V_s - V_i - AV_i = 0, \quad V_o = -AV_i \quad \text{یا} \quad V_i = -V_o/A$$

بنابراین:

$$-V_s + V_o/A (1+A) = 0 \rightarrow V_o = A/(1+A) V_s \quad (15)$$

اگر $A = 10^5$ آنگاه $V_o = 0.99999 V_s$ و در نتیجه برای تمام اهداف عملی داریم $V_o = V_s$ و ولتاژ خروجی، ولتاژ ورودی را «پیروی» می‌کند. مزیت چنین تقویت‌کننده‌ای با بهره واحد این است که ورودی جریان ناچیز و قدرت ناچیزی از منبع می‌کشد در حالیکه خروجی می‌تواند جریانهای قابل توجهی (۱۰ تا ۲۰ mA) قدرت (۱۰۰ تا ۵۰۰ mw) را به بار خروجی تحویل دهد. بنابراین، بار تأثیر کمی بر روی منبع دارد و به همین علت ولتاژ فالوور را تقویت‌کننده بافر نیز می‌نامند.

چند مقدار عددی ویژه برای ولتاژها می‌تواند مفید باشد. اگر $V_s = 1V$ آنگاه $V_o = 0.99999V$ و ولتاژ ورودی $V_i = -9.9999 \mu V$. اندازه ولتاژ ورودی خیلی کوچک است و ما اغلب تحلیل تقریبی op-amp را با فرض اینکه جریان و ولتاژ ورودی $V_i = 0$ هر دو صفر می‌باشند انجام می‌دهیم. اگر ما اینکار را برای ولتاژ فالوور انجام دهیم بلافاصله نتیجه می‌گیریم که $V_o = V_s$.

این نتیجه را با سختی بیشتری با قرار دادن $A \rightarrow \infty$ در معادله (۱۵) می‌توان به دست آورد.

تمرین

۱۲ - ۲ - یک ولتاژ فالوور با استفاده از یک op-amp که در آن $A = 12000$ ساخته

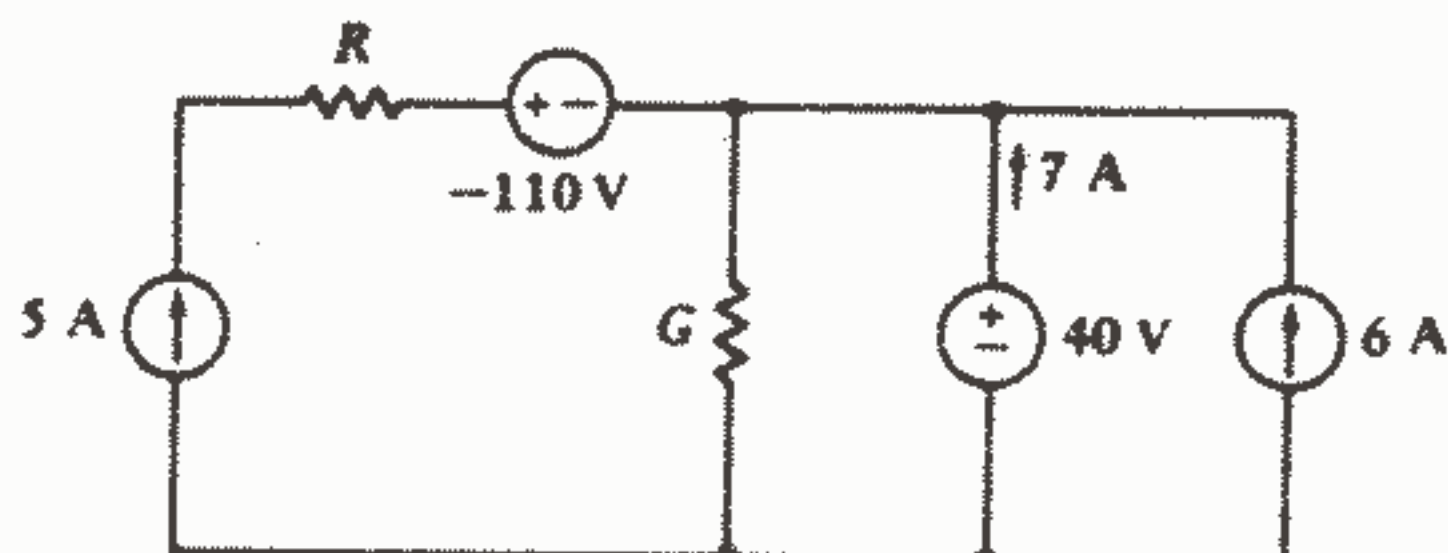
شده است. اگر $V_s = 1mV$ پیدا کنید: V_o (d), V_i (c), V_r (b), V_1 (a)

جواب: $0.99991V$, $-0.833\mu V$, $1mV$, $0.99991V$ mA

مسائل

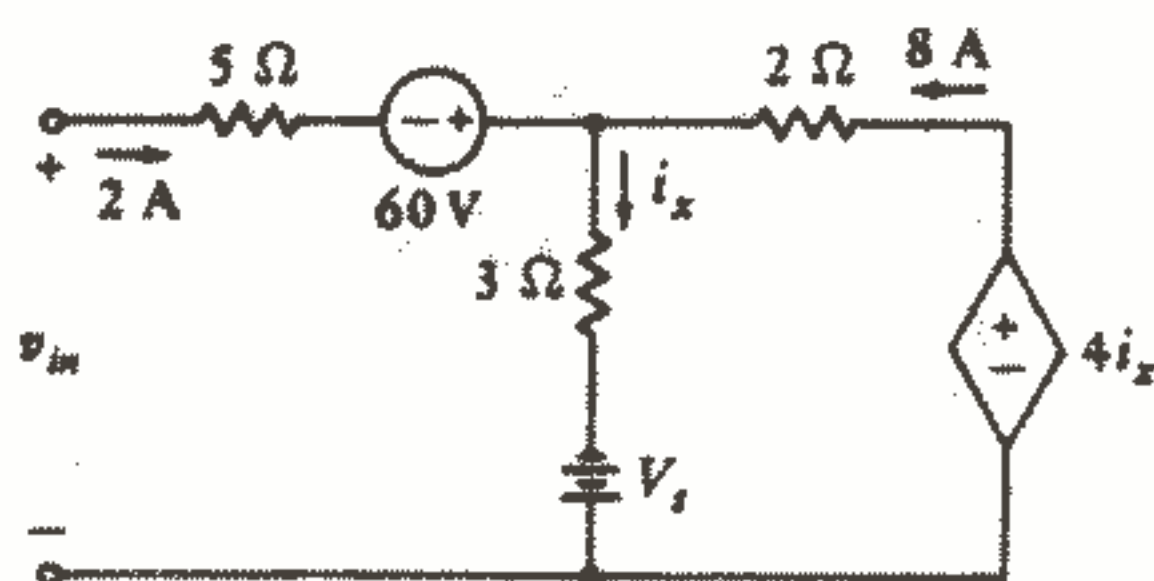
- ۱ - مقدار مقاومتی را در حالات زیر پیدا کنید: (a) اگر جریان ثابت C/s انرژی 5 $10KJ$ را در مدت 4 دقیقه به این عنصر تحویل دهد. (b) قدرت $1 Kw$ را وقتی که به یک باتری 12 ولتی وصل می شود، تلف کند: (c) چه قدرت متوسطی را منبع $v_s = 80 \cos 500\pi t V$ به یک مقاومت 5Ω در فاصله $0 \leq t \leq 12 ms$ تحویل می دهد؟
- ۲ - جریان $i(t)$ در شکل ۱ - ۲ در فاصله $0 < t < 1s$ برابر $4A$ و در فاصله $1 < t < 2s$ برابر $4A$ - می باشد و این حالت پریودیک را ادامه می دهد. $P(t)$, $V(t)$, $i(t)$ را در فاصله $0 < t < 4s$ رسم کنید.

- ۳ - مقاومت dc یک هادی به طول l و سطح مقطع یکنواخت A عبارت است از:
 $R = \rho l/A = 1,6A$ که در آن ρ و مقاومت مخصوص الکتریکی و δ (سیگما) هدایت مخصوص الکتریکی می باشد. اگر $\delta = 5,8 \times 10^7 U/m$ برای مس باشد: (a) چه طولی از یک سیم مسی (بر حسب فوت) #۱۸ (به قطر $1,024 mm$) دارای مقاومت 1Ω می باشد؟ (b) اگر یک برد مداری دارای نوار مسی به ضخامت $0,0013 in$ و عرض $2 in$ بتواند جریان $3A$ را به طور ایمن در دمای $60^\circ C$ حمل کند، چه قدرتی را این جریان به یک هادی به طول $6 in$ تحویل می دهد؟
- ۴ - در مدار شکل ۲۷ - ۲، G , R , اگر منبع $5A$ قدرت $125 W$ را تحویل دهد پیدا کنید.



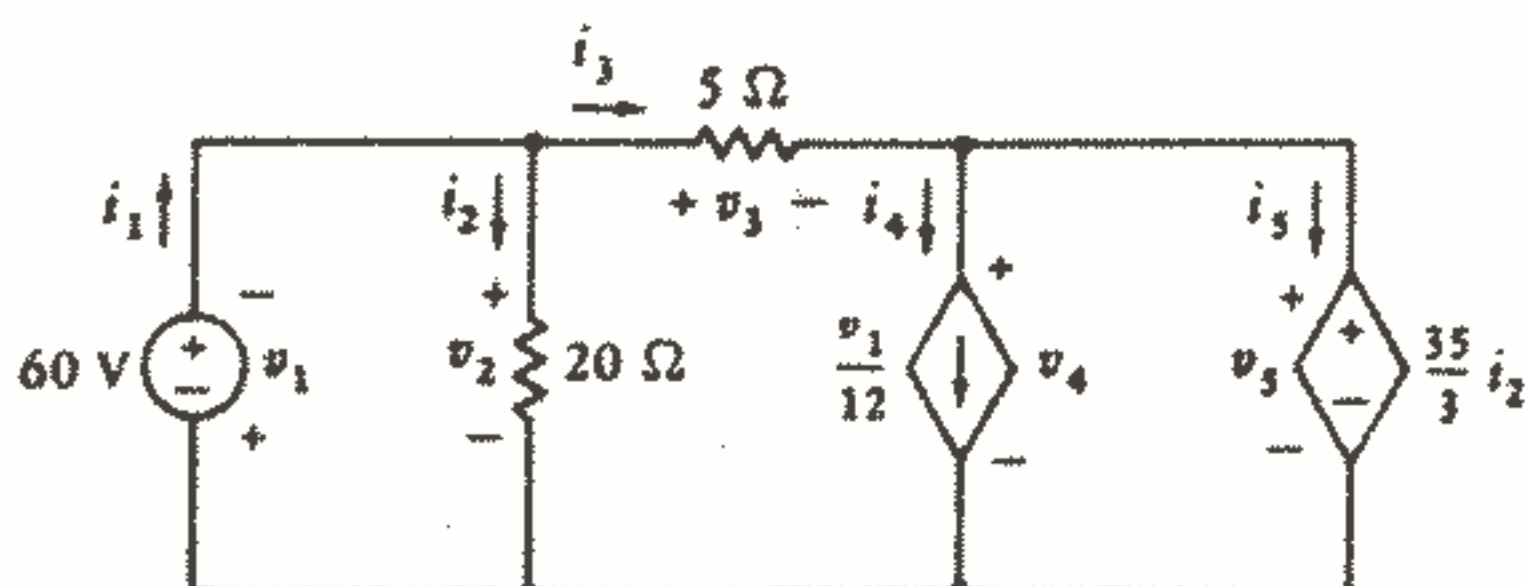
شکل ۲۷ - ۲: به مسئله ۴ مراجعه کنید.

- ۵ - قانون اهم و قوانین کیرشوف را در مدار شکل ۲۸ - ۲ اعمال کنید و مقادیر زیر را پیدا کنید:
 (a) v_{in} (b) قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع وابسته. (c) v_s .



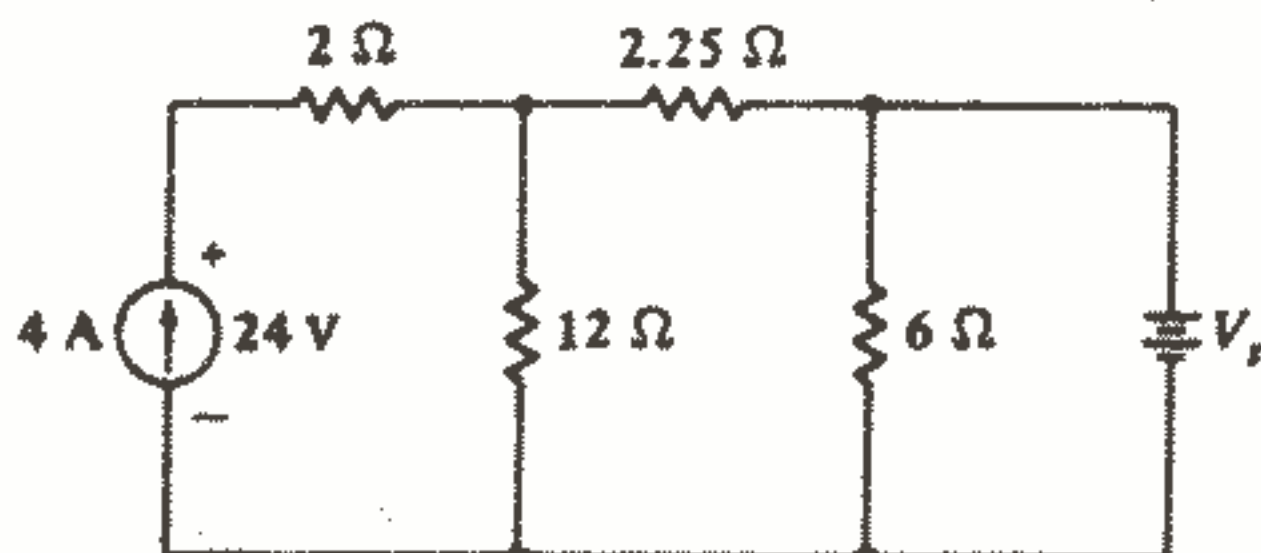
شکل ۲۸ - ۲: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

۶ - (a) قانون اهم و قوانین کیرشوف را به طور قدم به قدم به مدار شکل ۲۹ - ۲ اعمال کنید و همه ولتاژها و جریانها را پیدا کنید. (b) قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر را محاسبه کنید و نشان دهید که مجموع قدرتها صفر است.



شکل ۲۹ - ۲: به مسئله ۶ مراجعه کنید.

۷ - در مدار شکل ۳۰ - ۲، قدرت جذب شده به وسیله عناصر زیر را پیدا کنید: (a) منبع ۴A (b) مقاومت ۲Ω (c) مقاومت ۱۲Ω (d) مقاومت ۶Ω (e) منبع ولتاژ v_s .

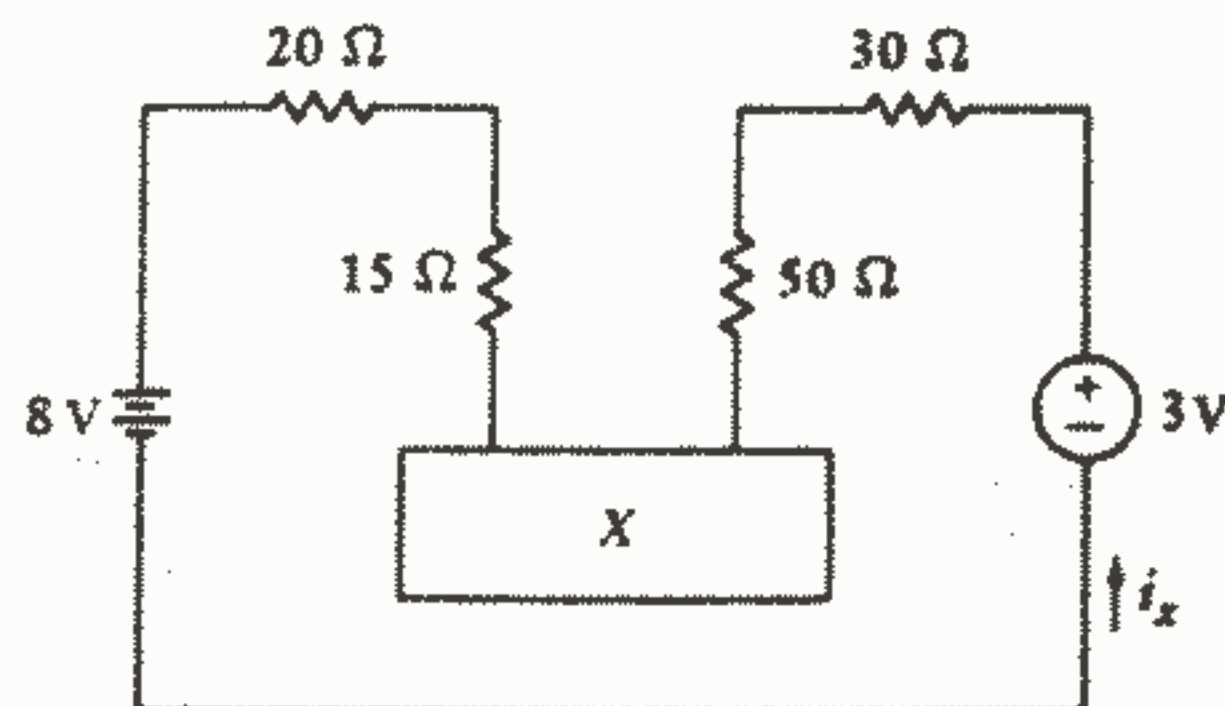


شکل ۳۰ - ۳: به مسئله ۷ مراجعه کنید.

۸ - مداری شامل شش عنصر و چهار گره می‌باشد که گره‌ها به شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ می‌باشند. هر عنصر مداری بین یک زوج گره متفاوتی بسته شده است. جریان از گره ۱ به ۲ عبارت است از $i_{12} = 15A$ و $i_{34} = -8A$. مقادیر i_{13} ، i_{14} را اگر i_{24} مقادیر زیر را داشته باشد به دست آورید:

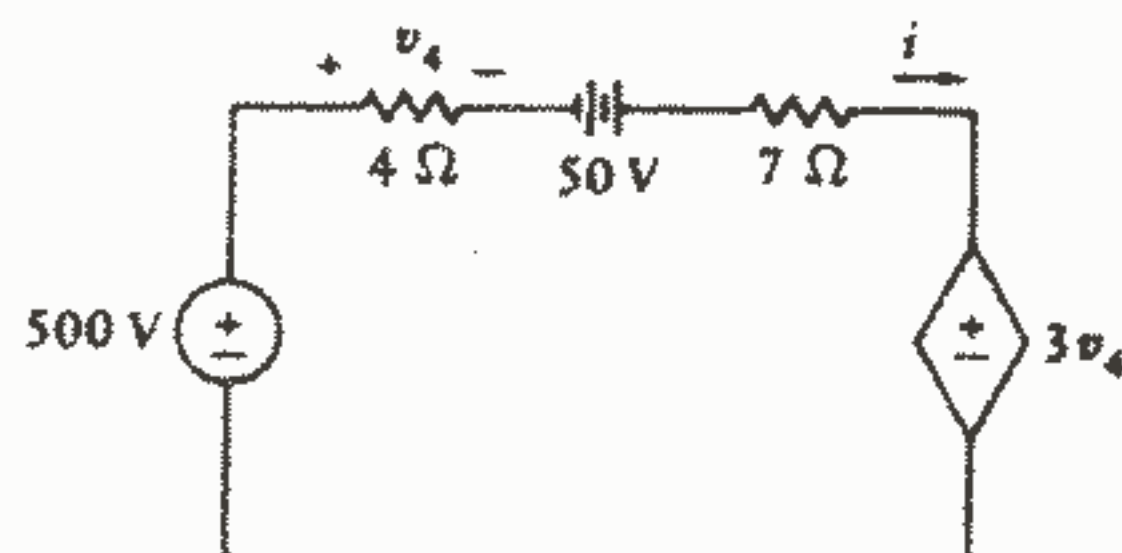
$$0 \text{ (a)} \quad 18A \text{ (b)} \quad -18A \text{ (c)}$$

۹ - قدرت جذب شده به وسیله عنصر X را در شکل ۳۱ - ۲ پیدا کنید. اگر X : (a) مقاومت 70Ω باشد. (b) منبع ولتاژ مستقل $2V$ با علامت + در چپ باشد. (c) منبع ولتاژ وابسته با علامت + در سمت چپ و با مقدار i_x باشد. (d) منبع جریان مستقل $52mA$ با فلش به سمت راست باشد.



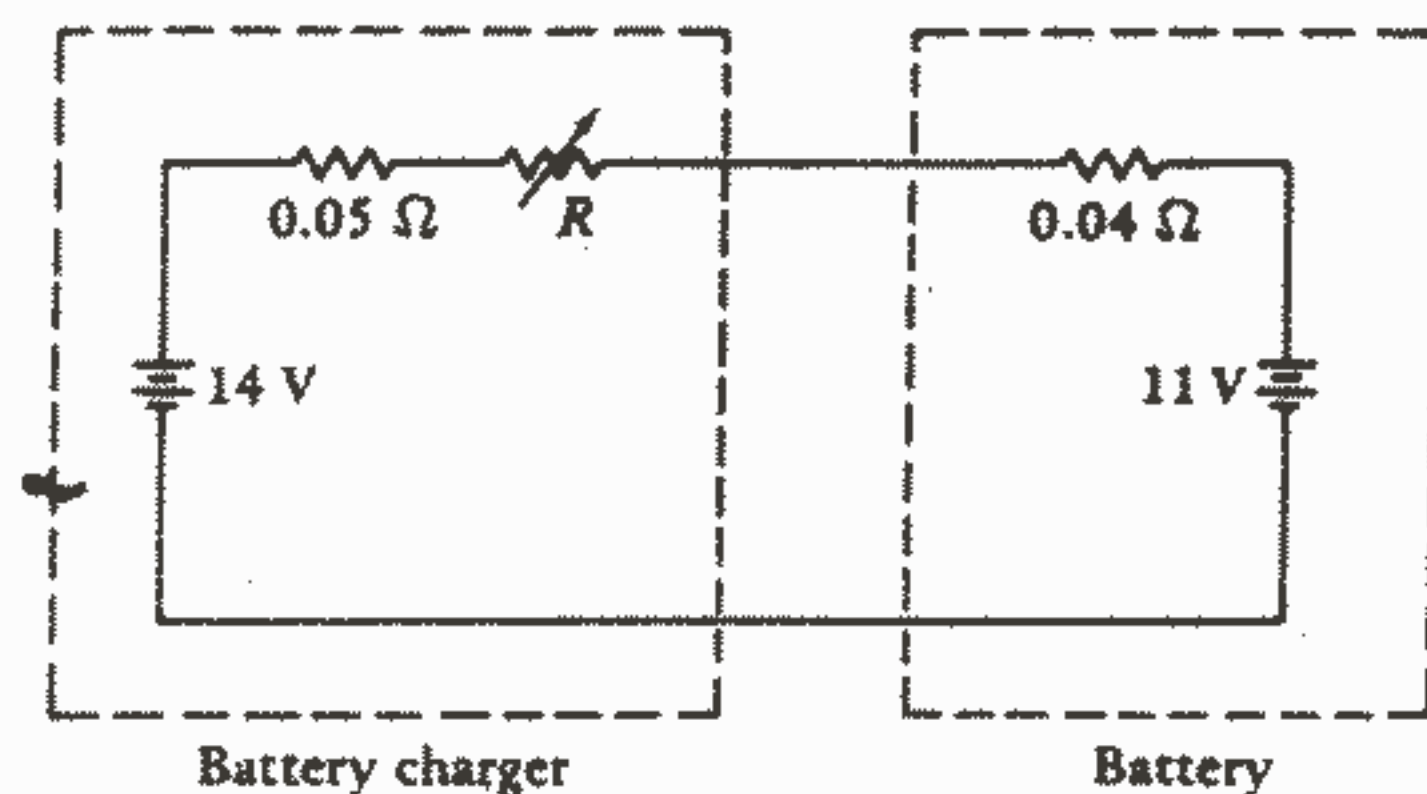
شکل ۳۱ - ۲: به مسئله ۹ مراجعه شود.

۱۰ - (a) i را در شکل ۳۲ - ۲ پیدا کنید. (b) حال فرض کنید که v_4 در دو سر مقاومت 4Ω و منبع $50V$ با علامت + در سمت چپ باشد و دوباره i را پیدا کنید.



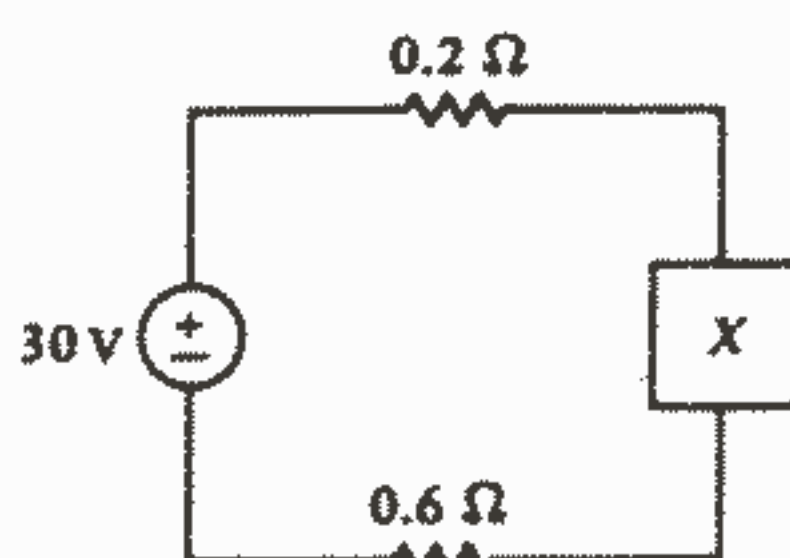
شکل ۳۲ - ۲: به مسئله ۱۰ مراجعه کنید.

۱۱ - برای شارژ باتری مدل شده در شکل ۳۳ - ۲: (a) R را طوری پیدا کنید که یک جریان شارژ کننده $2.5A$ جاری شود. (b) R را طوری پیدا کنید که قدرت $25W$ به منبع ولتاژ ایده آل $11V$ تحویل داده شود. (c) R را طوری پیدا کنید که قدرت $25W$ به ترکیب $4\Omega\%$ و $11V$ تحویل داده شود.



شکل ۳۳ - ۲: به مسئله ۱۱ مراجعه کنید.

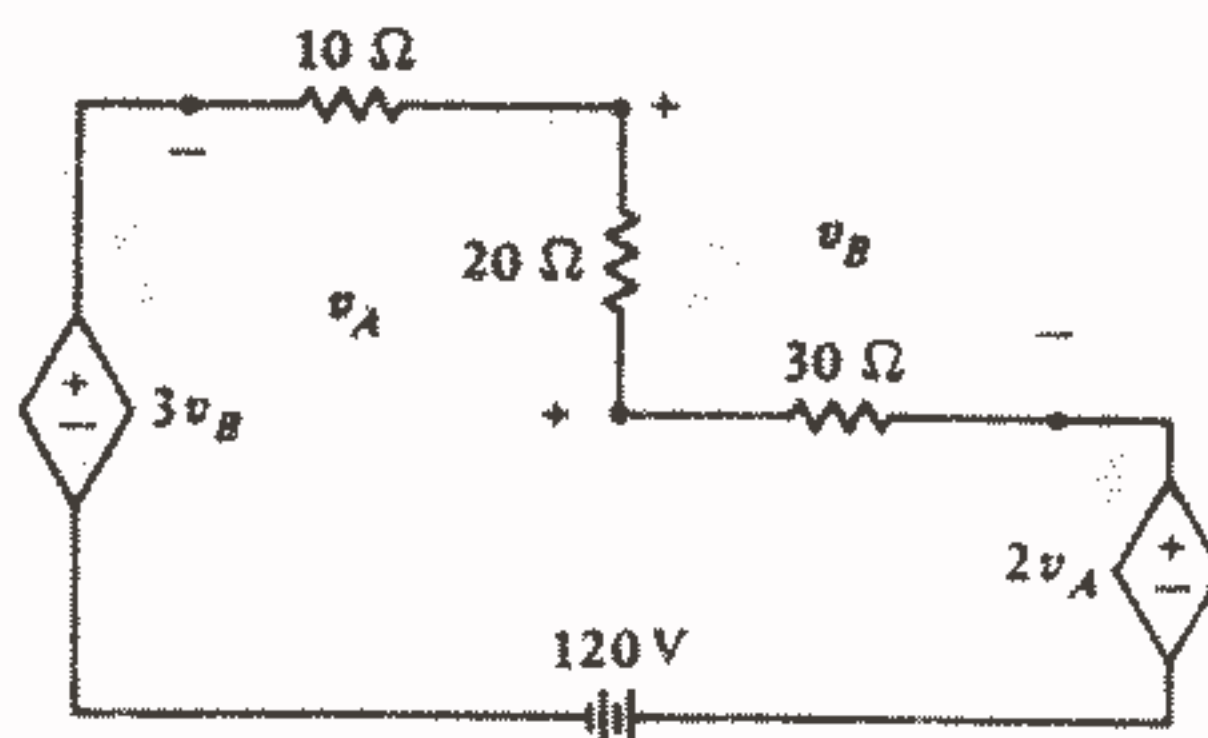
۱۲ - در مدار شکل ۳۴ - ۲، یک عنصر مداری ساده است. فرض کنید که X قدرت 100 W را جذب می‌کند: (a) اگر X مقاومت بزرگتر از 5Ω باشد، R را پیدا کنید. (b) اگر X یک منبع ولتاژ مستقل با علامت مثبت در بالا باشد، v_s را پیدا کنید ($v_s < 5\text{ V}$)



شکل ۳۴ - ۲: به مسئله ۱۲ و ۱۳ مراجعه کنید.

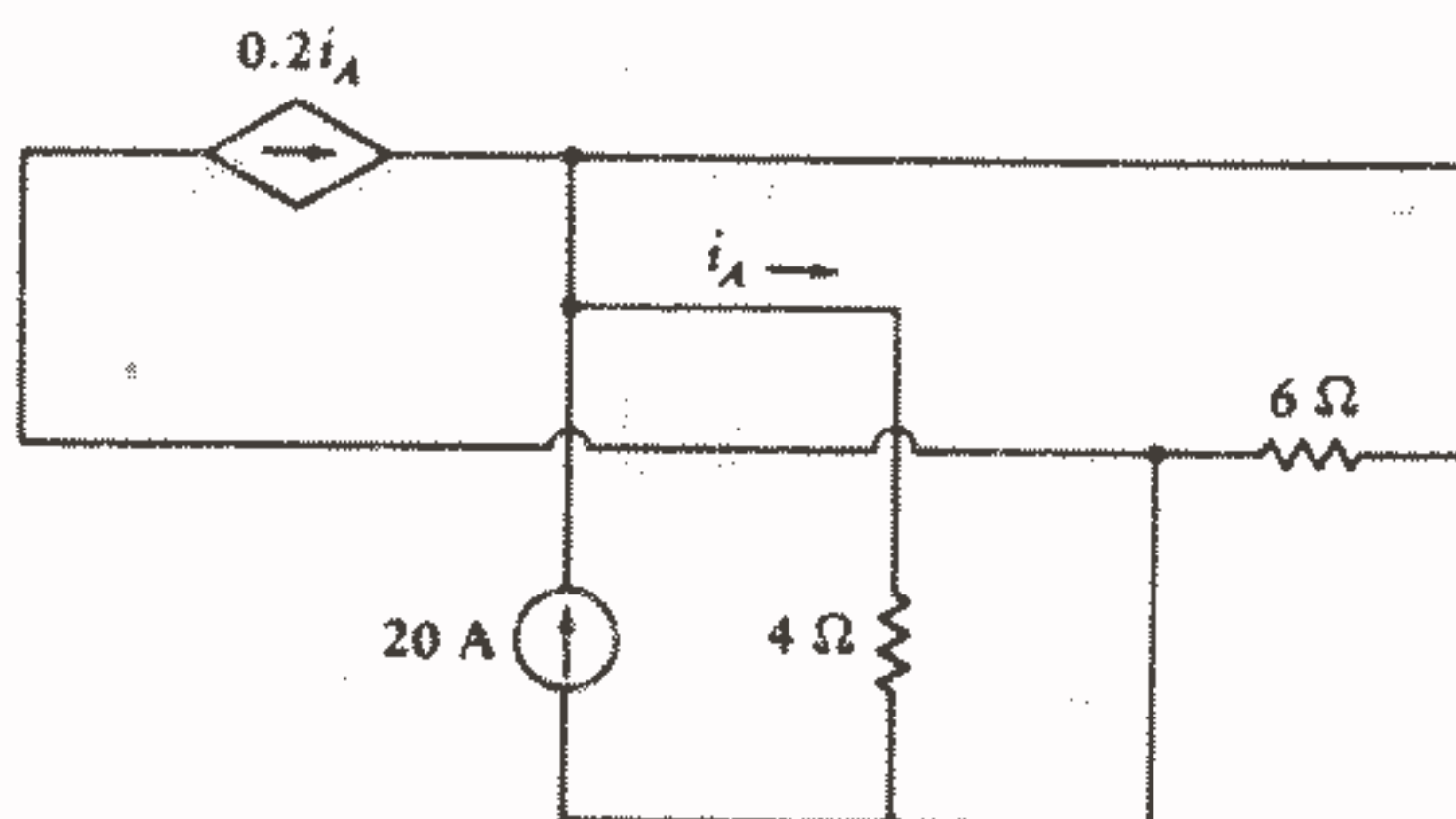
۱۳ - فرض کنید که ولتاژ دو سر مقاومت 0.2Ω در شکل ۳۴ - ۲ برابر 4 V با علامت $+$ در سمت چپ باشد و X یک عنصر مداری مجهول باشد. (a) قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر را در مدار پیدا کنید. (b) اگر X یک مقاومت باشد مقدار آن را (که ممکن است منفی باشد) پیدا کنید، اگر X منبع ولتاژ مستقل باشد v_s و پلاریته آن را پیدا کنید و اگر X یک منبع جریان مستقل باشد i_s و جهت آن را پیدا کنید. (c) قسمتهای a ، b را اگر علامت $+$ منبع 4 V در سمت راست باشد تکرار کنید.

۱۴ - قدرت جذب شده به وسیله هر یک از شش عنصر مدار شکل ۳۵ - ۲ را پیدا کنید.



شکل ۳۵ - ۲: به مسئله ۱۴ مراجعه کنید.

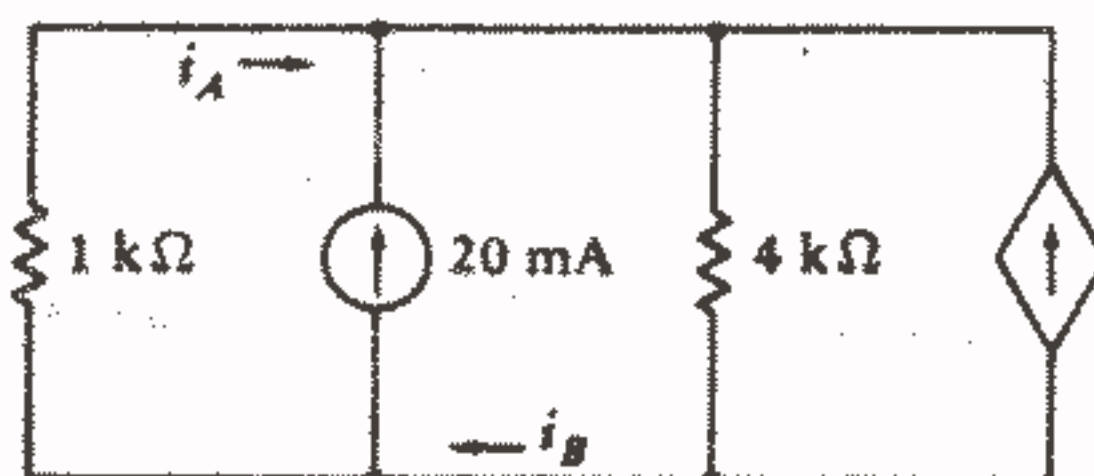
۱۵ - قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر مدار شکل ۳۶ - ۲ را پیدا کنید.



شکل ۳۶ - ۲: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

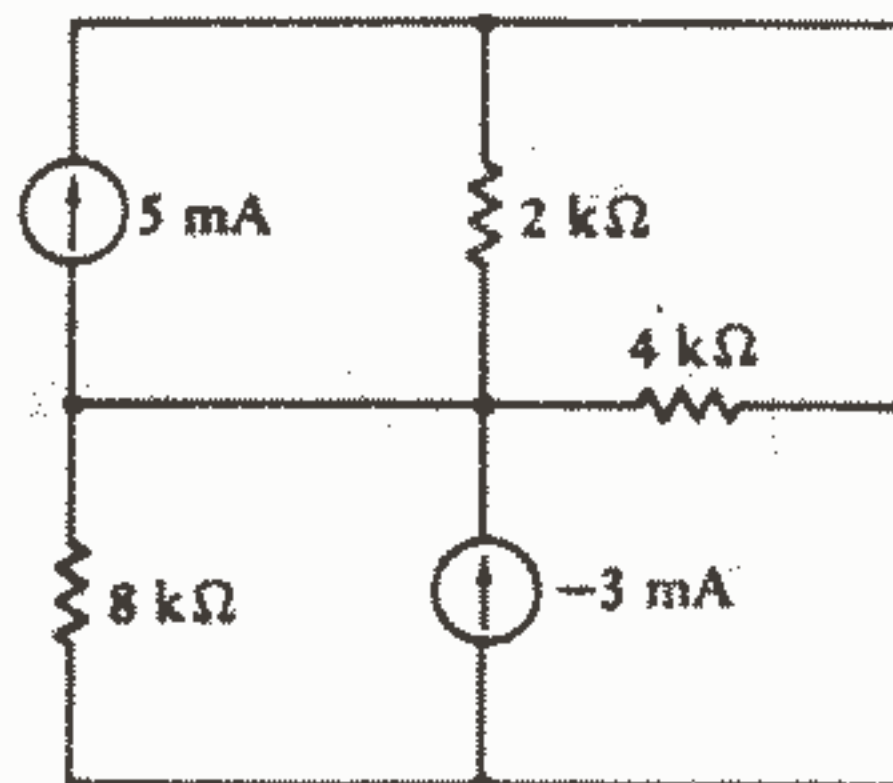
۱۶ - در شکل ۳۷ - ۲ قدرت داده شده به وسیله هر منبع را پیدا کنید، اگر منبع وابسته:

(a) $3i_A$ باشد. (b) $3i_B$ باشد.



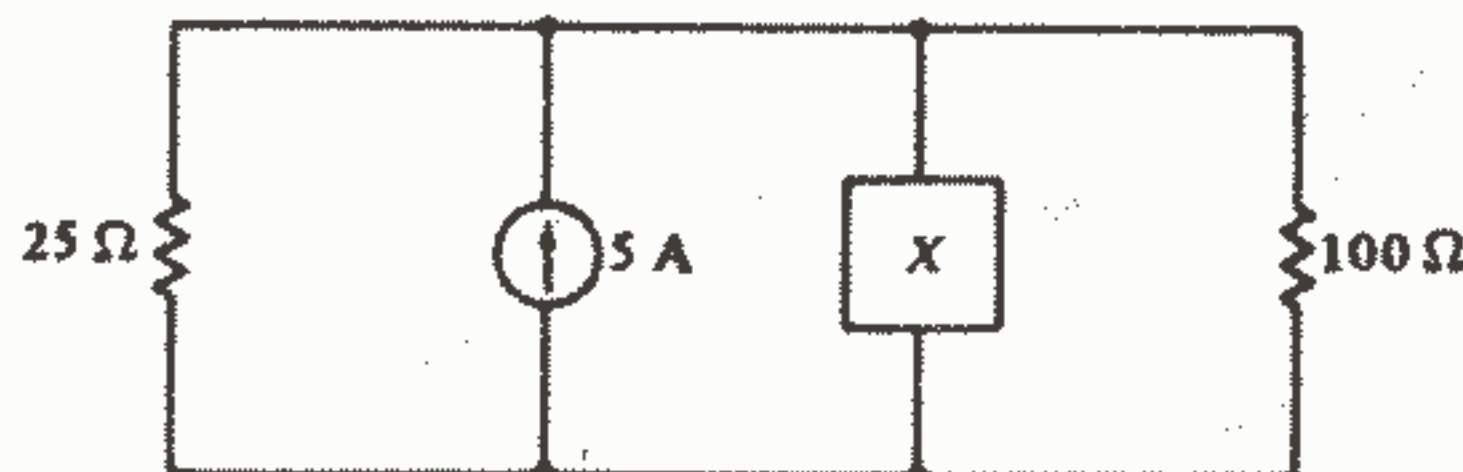
شکل ۳۷ - ۲: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

۱۷ - قدرت جذب شده به وسیله هر عنصر مداری را در مدار شکل ۳۸ - ۲ پیدا کنید.



شکل ۳۸ - ۲: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

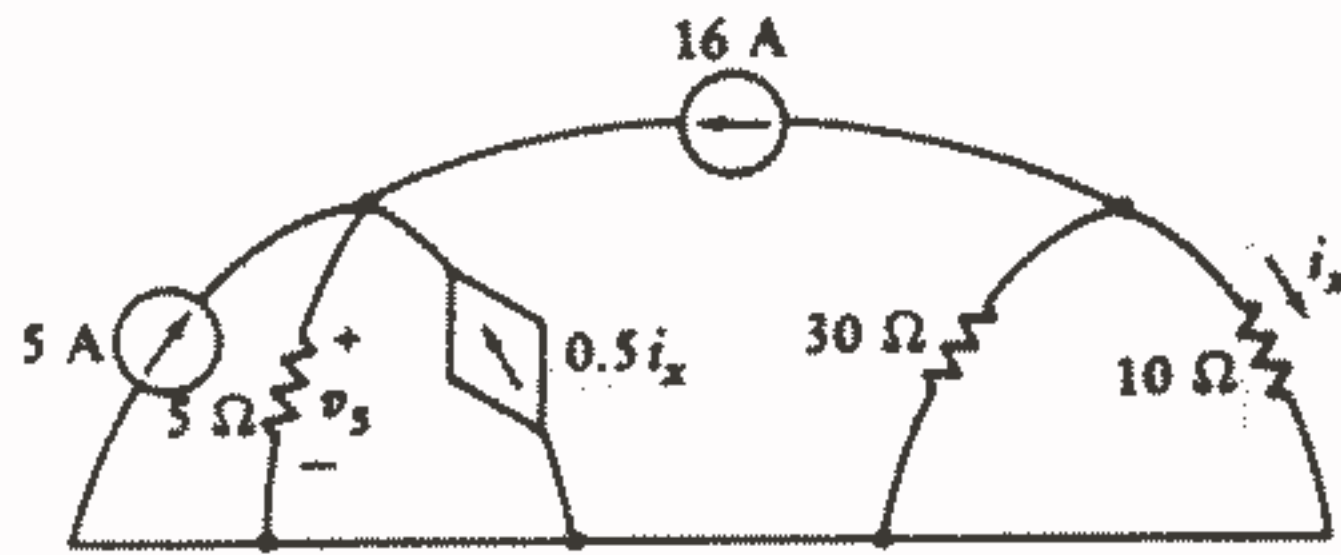
۱۸ - در مدار شکل ۳۹ - ۲، یک عنصر مداری ساده است. فرض کنید که X قدرت 100 W را جذب میکند: (a) اگر X یک مقاومت بزرگتر از $50\ \Omega$ باشد، R را پیدا کنید. (b) اگر X یک منبع جریان مستقل باشد، i_s را که جهت فلش آن رو به پایین است پیدا کنید ($i_s > 2\text{ A}$).



شکل ۳۹ - ۲: به مسئله ۱۸ و ۱۹ مراجعه کنید.

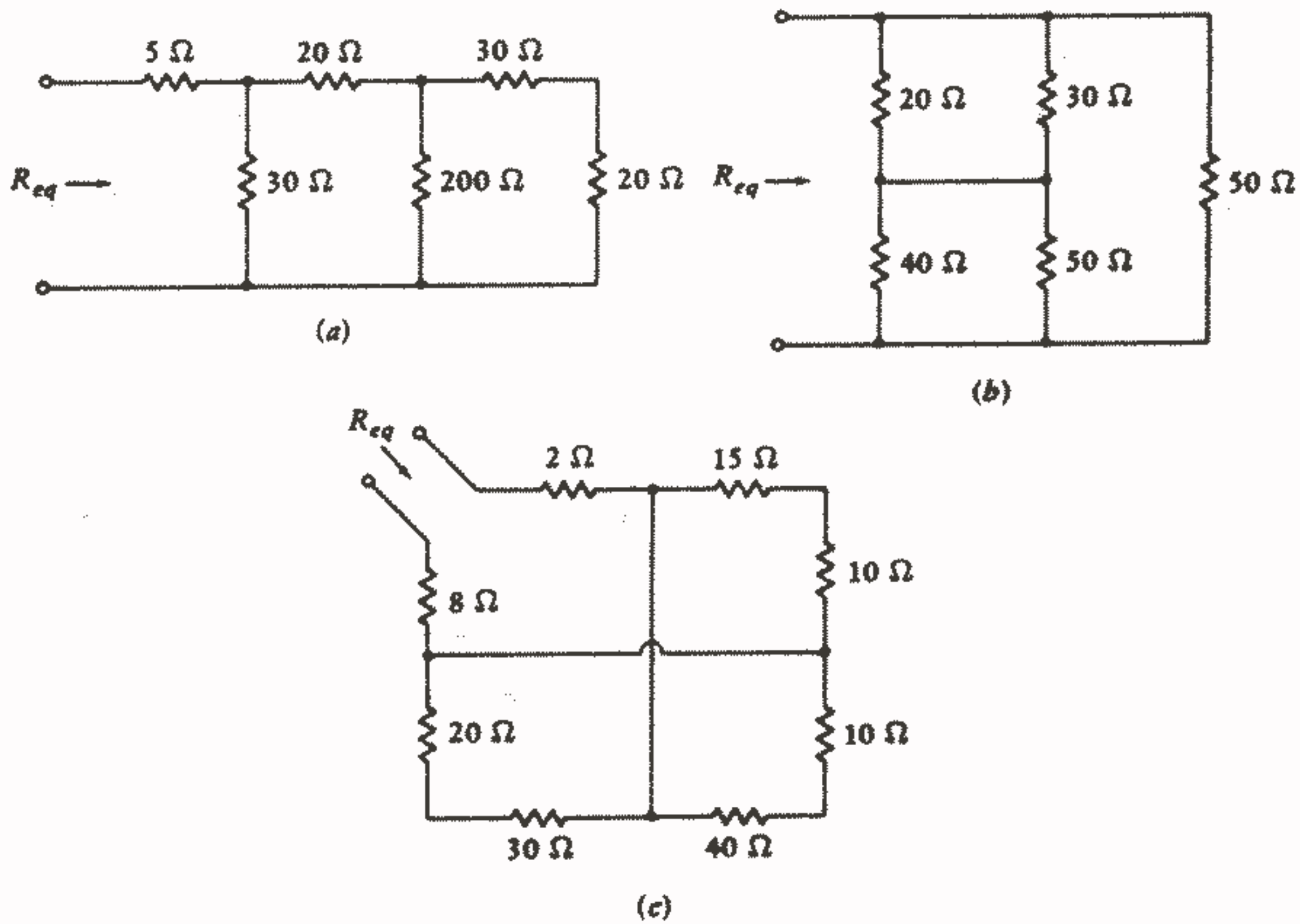
۱۹ - فرض کنید که جریان رو به پایین در مقاومت $100\ \Omega$ در شکل ۳۹ - ۲ برابر 1.2 A باشد و X یک عنصر مداری مجهول باشد. (a) قدرت جذب شده هر عنصر را در مدار پیدا کنید. (b) اگر X یک مقاومت باشد مقدار آنرا (که ممکن است منفی باشد) پیدا کنید، اگر X یک منبع جریان مستقل باشد، i_s و جهت آنرا پیدا کنید و اگر X یک منبع ولتاژ مستقل باشد v_s و پلارنیه آنرا مشخص کنید. (c) اگر جریان 1.2 A رو به بالا باشد قسمت‌های a و b را تکرار کنید.

۲۰ - (a) تکنیکهای تحلیل مدار یک جفت گرهی را به گره بالایی سمت راست در شکل ۴۰ - ۲ به کار برید و i_x را پیدا کنید. (b) حال با گره بالایی سمت چپ کار کنید و v_s را پیدا کنید. (c) منبع 16 A چه قدرتی را تولید می‌کند؟



شکل ۴۰ - ۲: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

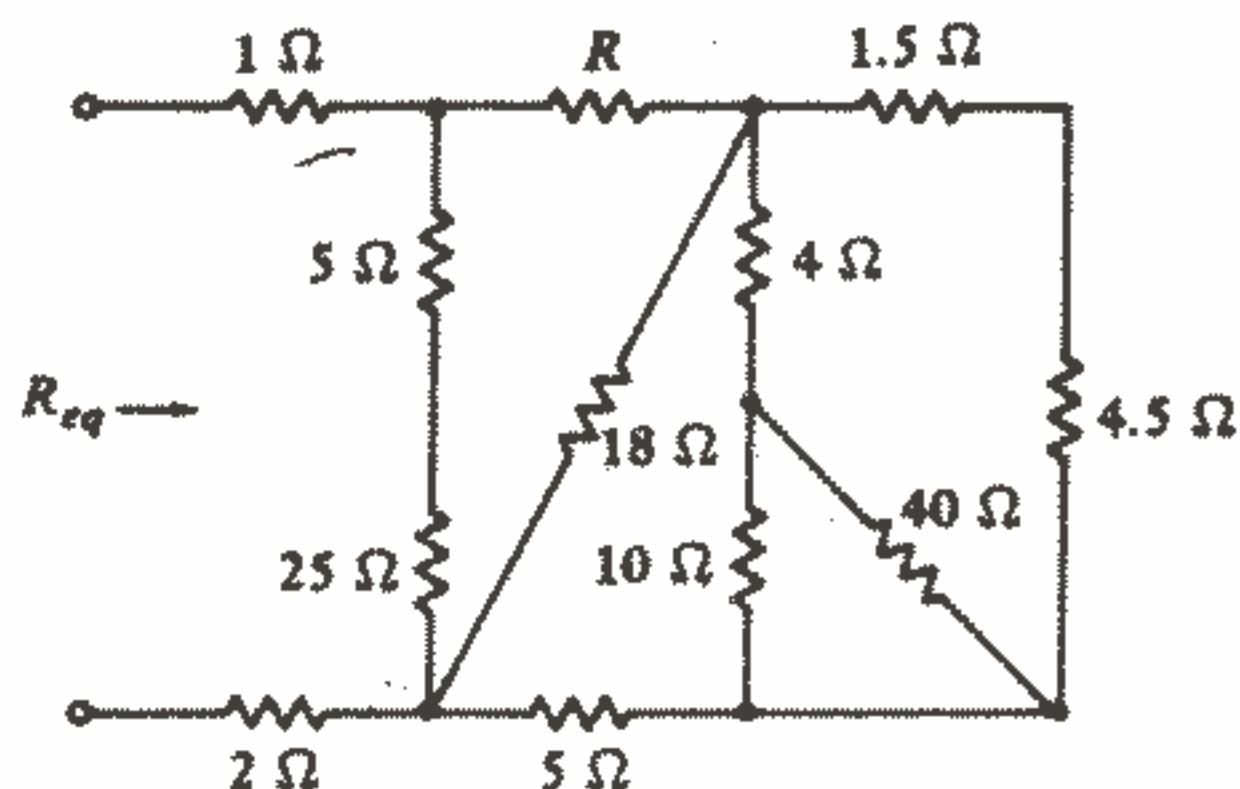
۲۱ - R_{eq} را برای هر یک از سه شبکه مقاومتی شکل ۴۱ - ۲ پیدا کنید.



شکل ۴۱ - ۲: به مسئله ۲۱ مراجعه کنید.

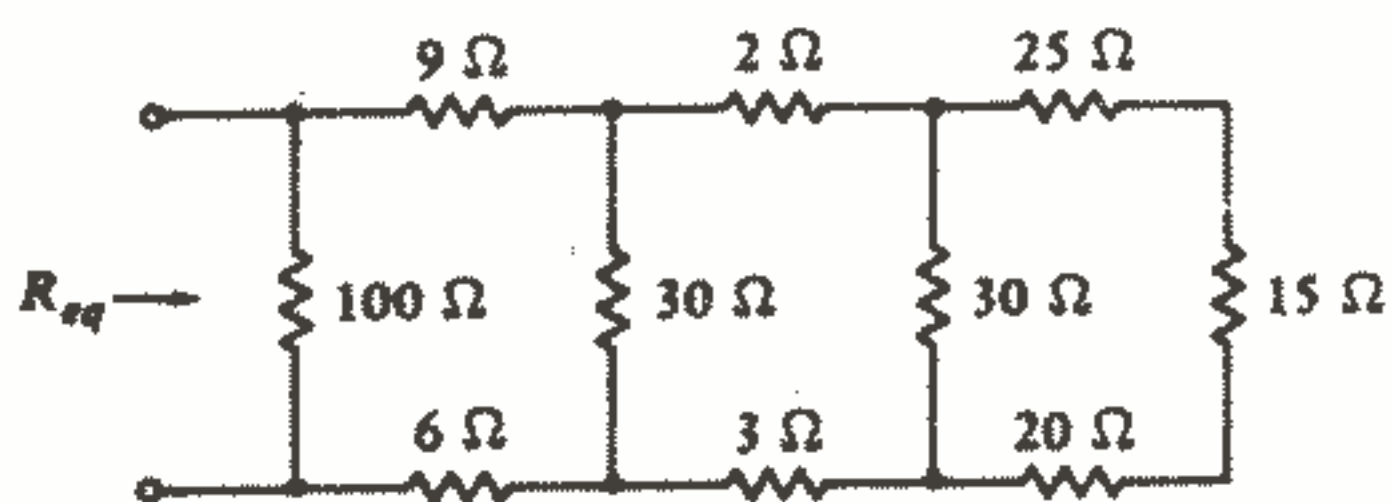
۲۲ - برای شبکه ۴۲ - ۲: (a) اگر $R = ۱۴ \Omega$ باشد آنگاه R_{eq} را پیدا کنید. (b) اگر

$R_{eq} = ۱۴ \Omega$ آنگاه R را پیدا کنید.

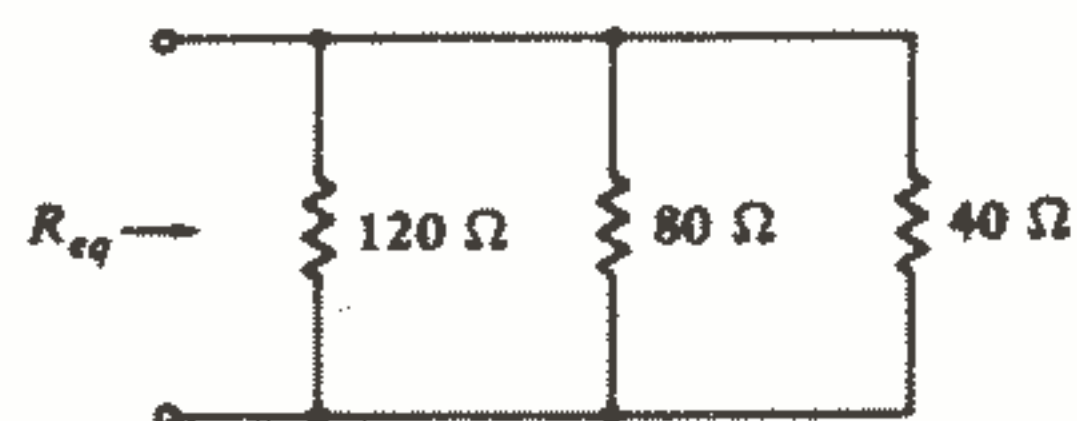


شکل ۲۲ - ۲: به مسئله ۲۲ مراجعه کنید.

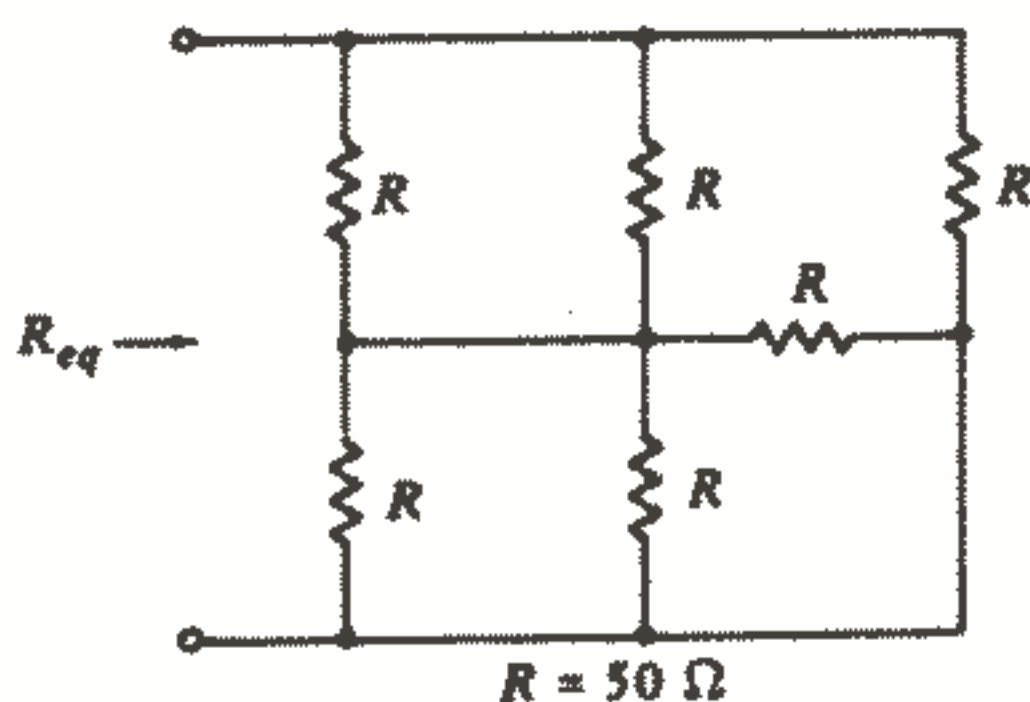
۲۳ - R_{eq} را برای هر یک از شبکه‌های شکل ۲۳ - ۲ پیدا کنید.



(a)



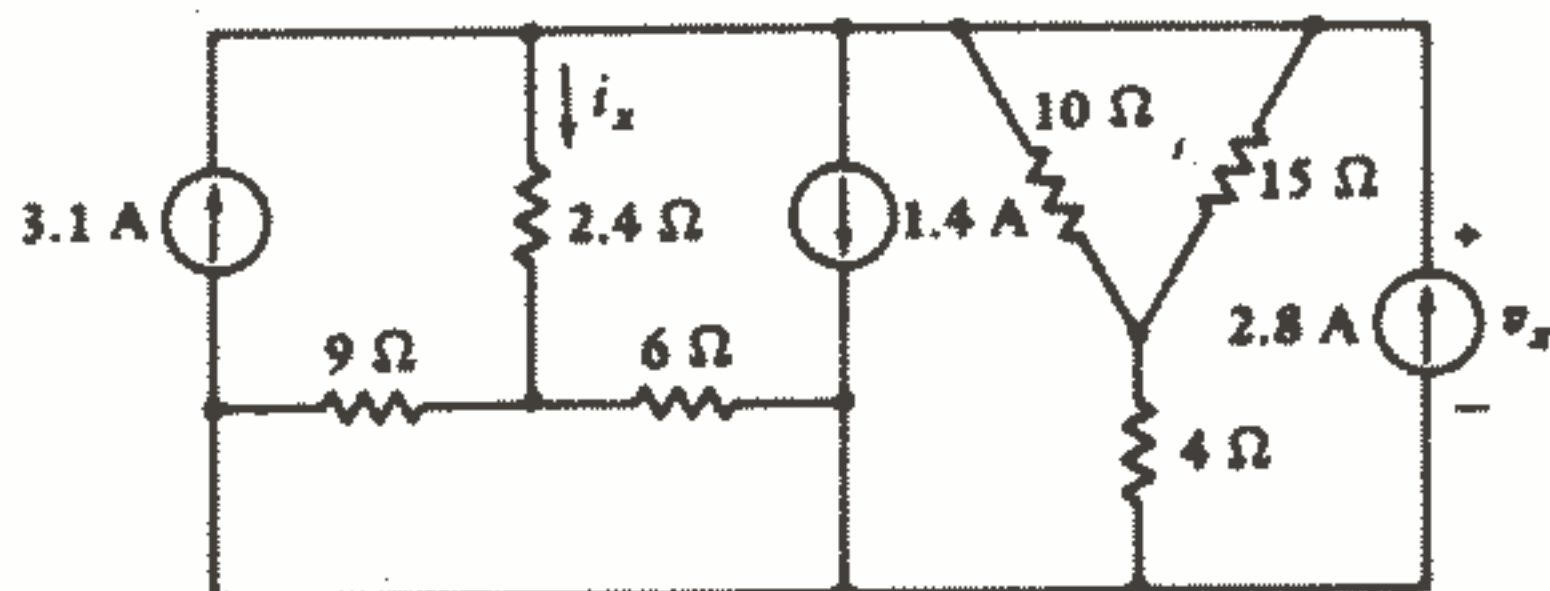
(b)



(c)

شکل ۲۳ - ۲: به مسئله ۲۳ مراجعه کنید.

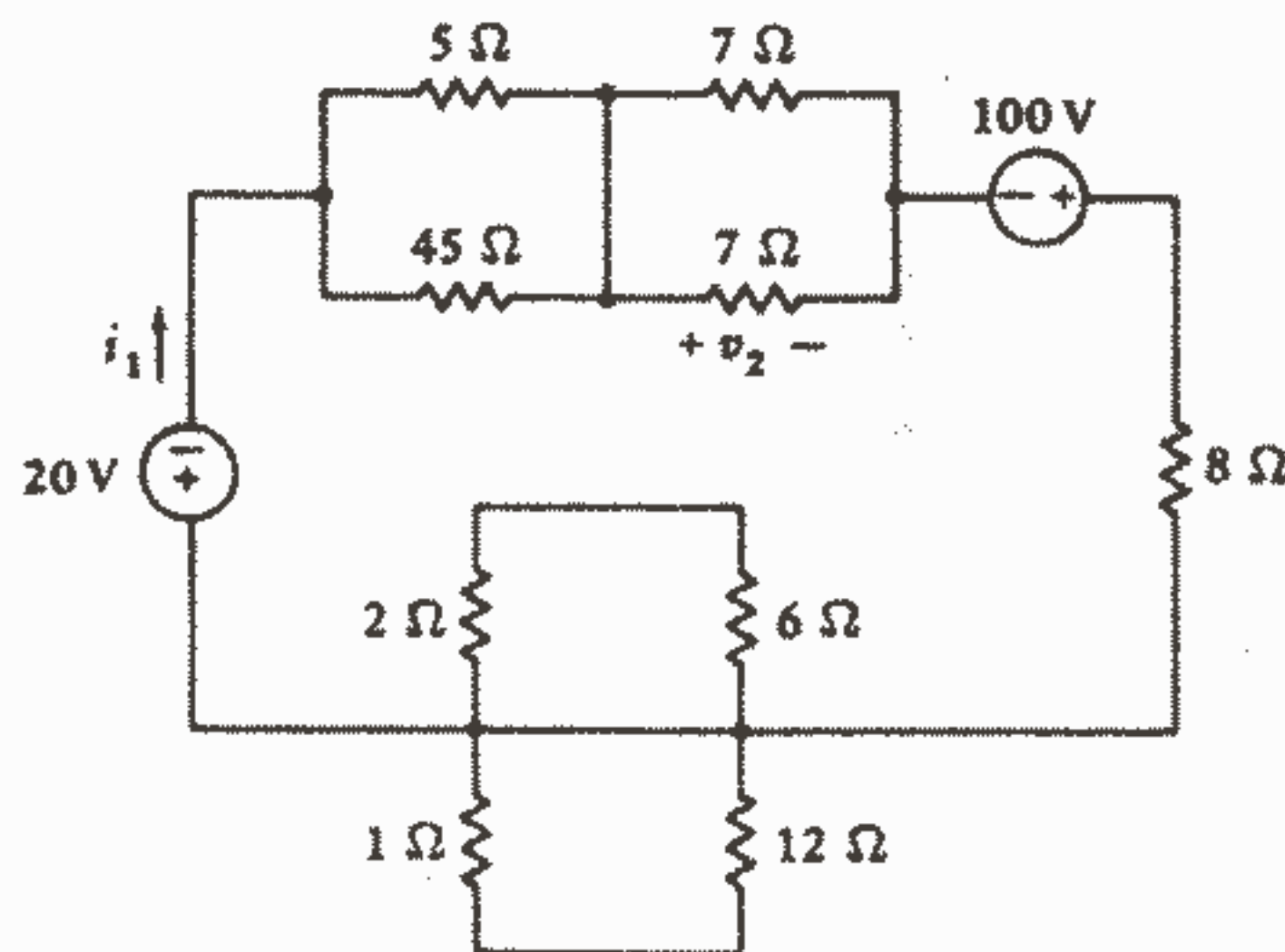
۲۴ - با ترکیب مقاومتها و منابع در مدار شکل ۲۴ - ۲ مقادیر i_x و v_x را پیدا کنید.



شکل ۲۴ - ۲: به مسئله ۲۴ مراجعه کنید.

۲۵ - با استفاده از ترکیب مقاومتها و منابع، مدار شکل ۲۵ - ۴۵ را ساده کنید و سپس ۷۲

i_1 را پیدا کنید.

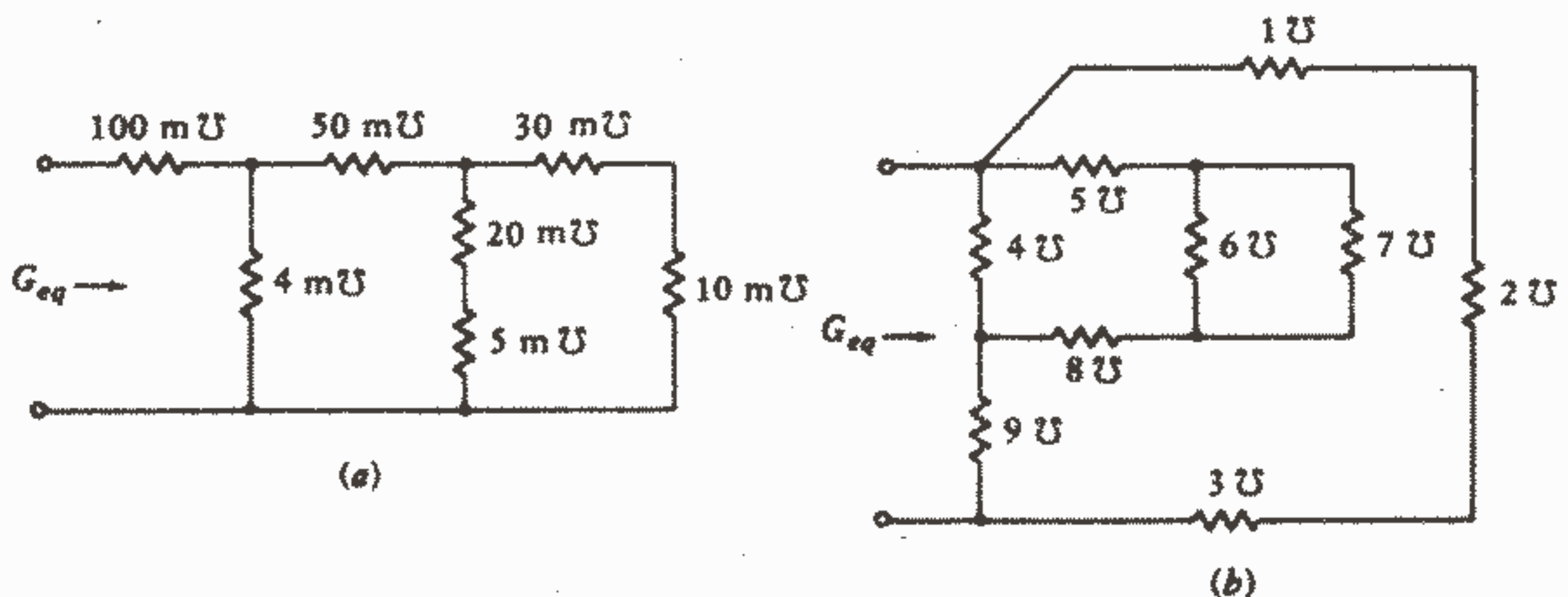


شکل ۲۵ - ۴۵: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

۲۶ - ۱۰ مقاومت 20Ω داده شده است. (a) کمترین مقاومت معادل (غیرصفر) که از مونتاژ آنها می‌توان به دست آورد چقدر است. (b) بزرگترین مقاومت معادل (محدود) چقدر است؟ آرایش این مقاومتها را برای ایجاد مقاومت معادلهای زیر نشان دهید:

(c) 29Ω (d) 6Ω

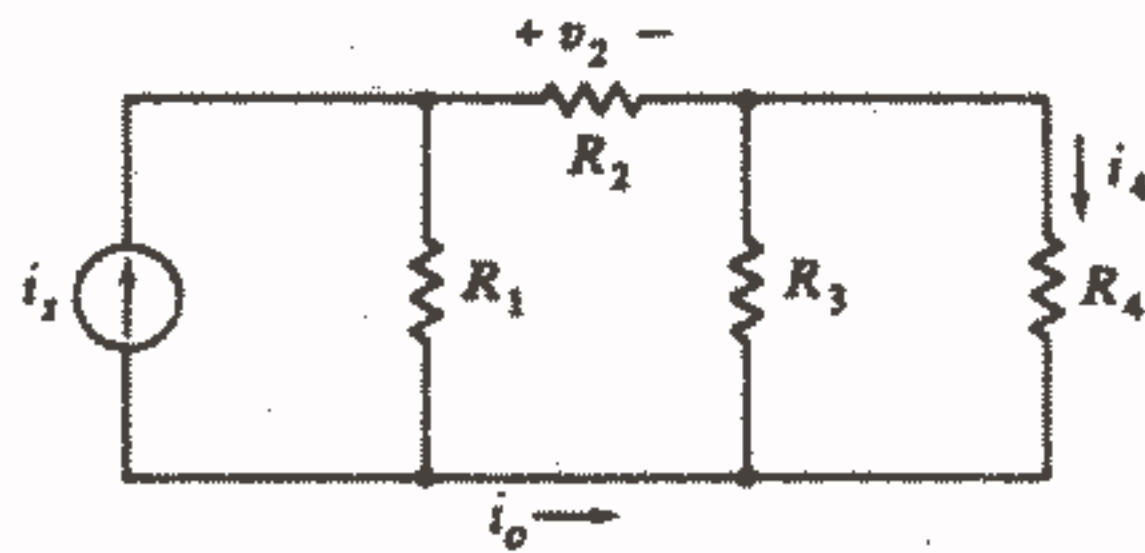
۲۷ - هدایت معادل هر یک از شبکه‌های شکل ۲۶ - ۴۶ را پیدا کنید.



شکل ۲۶ - ۴۶: به مسئله ۲۷ مراجعه کنید.

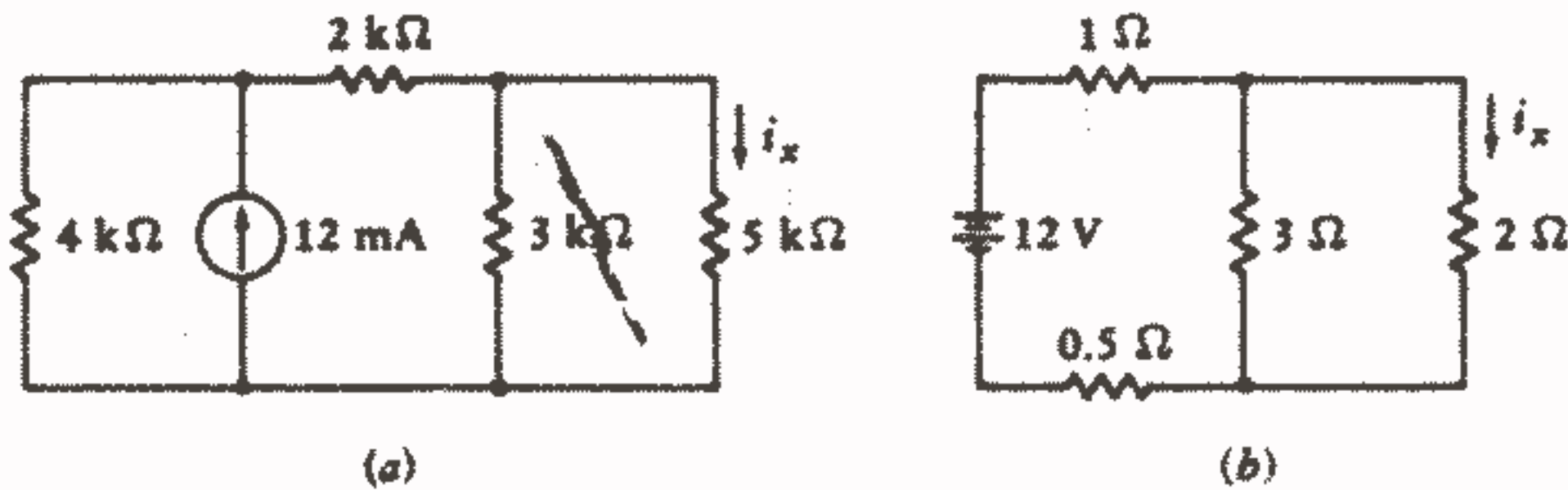
۲۸ - با استفاده از ترکیب مقاومتها و تقسیم جریان و ولتاژ در مدار شکل ۲۸ - ۴۷، رابطه‌ای

برای: (a) i_1 , (b) v_1 , (c) i_0 پیدا کنید.



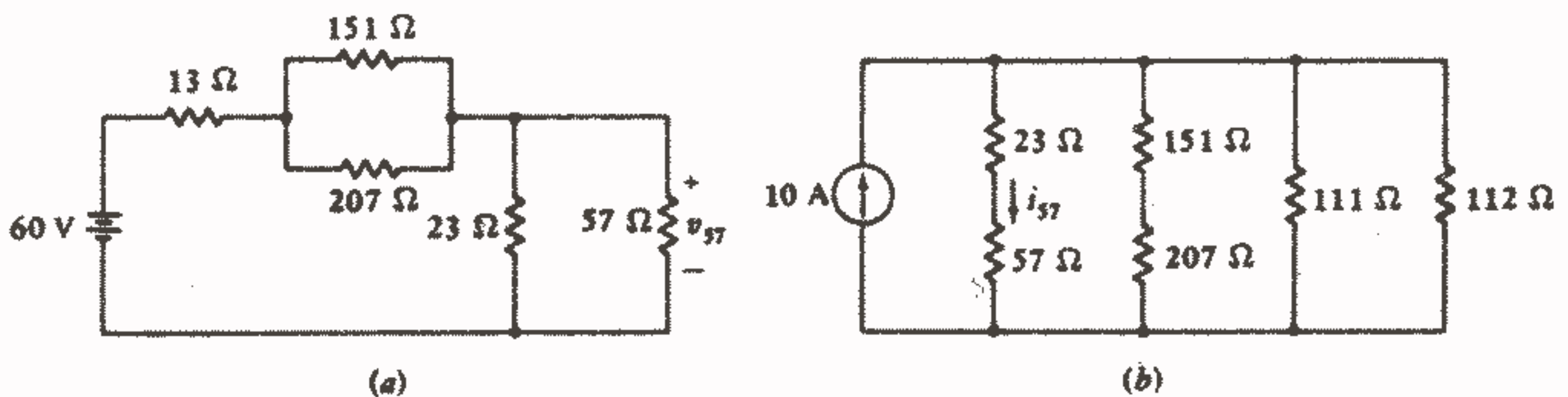
شکل ۲۷ - ۲: به مسئله ۲۸ مراجعه کنید.

۲۹ - با استفاده از ترکیب مقاومتها و تقسیم ولتاژ و جریان، i_x را در هر یک از مدارهای شکل ۲۸ - ۴۸ پیدا کنید.



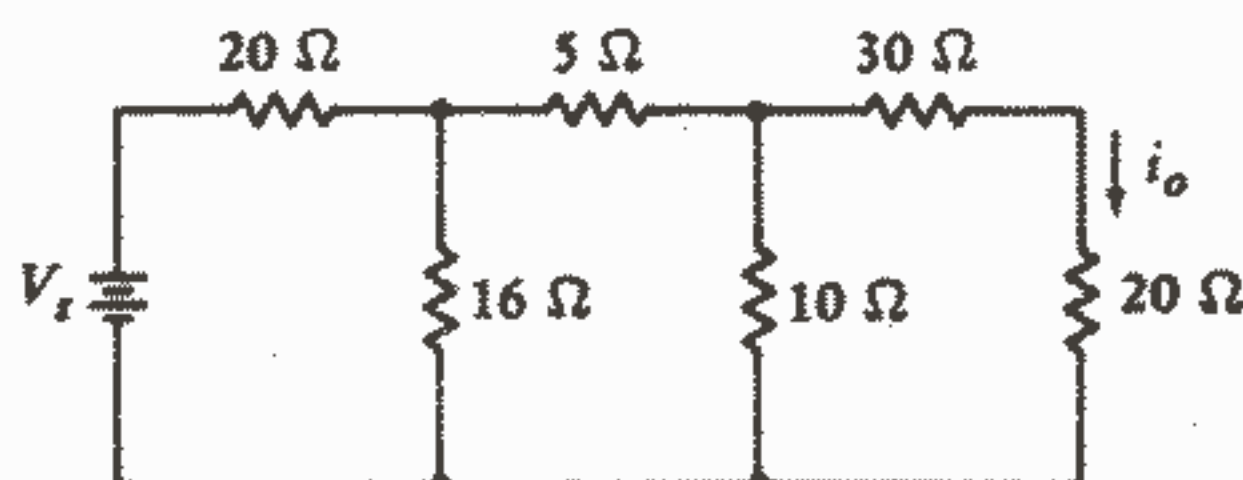
شکل ۲۸ - ۴۸: به مسئله ۲۹ مراجعه کنید.

۳۰ - (a) با استفاده از ترکیب مقاومتها و تقسیم ولتاژ، یک رابطه یک سطری بنویسید تا v_{5V} در مدار شکل ۲۸ - ۴۹ a محاسبه شود. (b) با استفاده از ترکیب مقاومتها و تقسیم جریان رابطه‌ای یک سطری بنویسید تا i_{5V} در مدار شکل ۲۸ - ۴۹ b محاسبه شود.



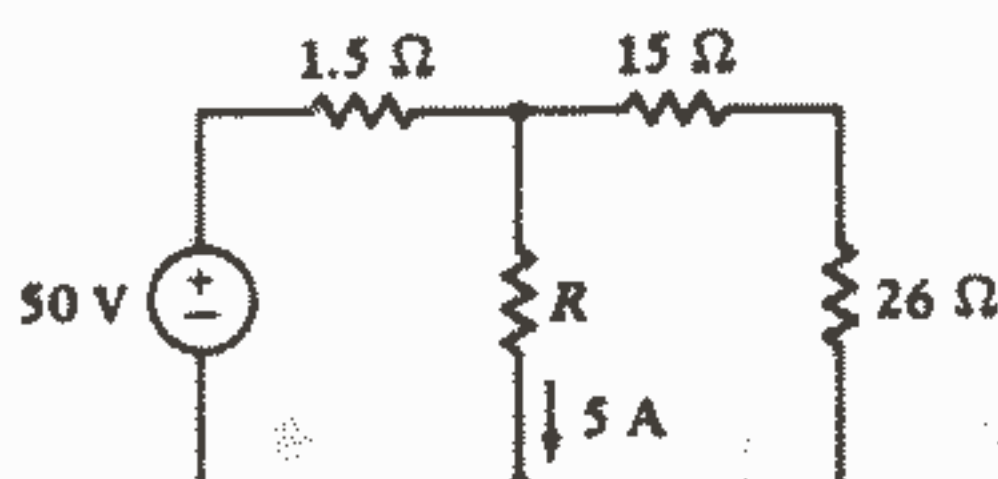
شکل ۲۸ - ۴۹: به مسئله ۳۰ مراجعه کنید.

۳۱ - مدار شکل ۲۸ - ۵۰ شامل یک شبکه نردبانی مقاومتی سه قسمتی است. (a) فرض کنید $i_o = 1 A$ و قدم به قدم از سمت راست به طرف منبع عمل کنید و v_s را پیدا کنید. (b) اگر $i_o = 0.4 A$ مقدار v_s چقدر است؟ (c) اگر $v_s = 100 V$ مقدار i_o را پیدا کنید.



شکل ۵۰ - ۲: به مسئله ۳۱ مراجعه کنید.

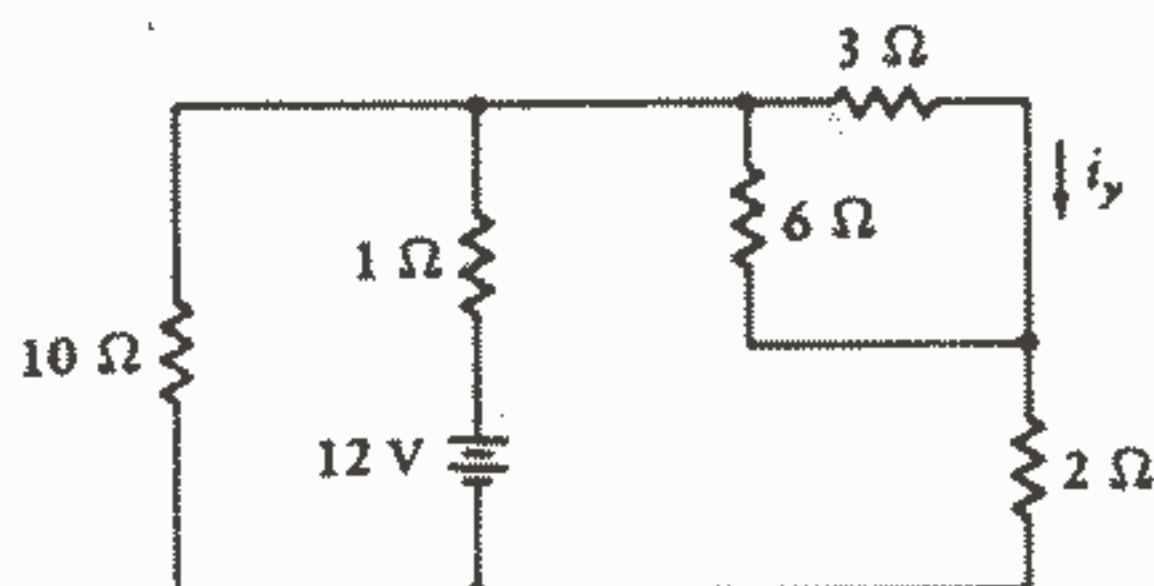
۳۲ - مقدار R را در مدار شکل ۵۱ - ۲ پیدا کنید.



شکل ۵۱ - ۲: به مسئله ۳۲ مراجعه کنید.

۳۳ - (a) با استفاده از ترکیب مقاومتها، تقسیم ولتاژ و تقسیم جریان، i_y را در مدار شکل

۵۲ - ۲ پیدا کنید. (b) مقاومت 3Ω به چه مقداری باید تغییر کند تا $i_y = 1\text{ A}$ شود؟

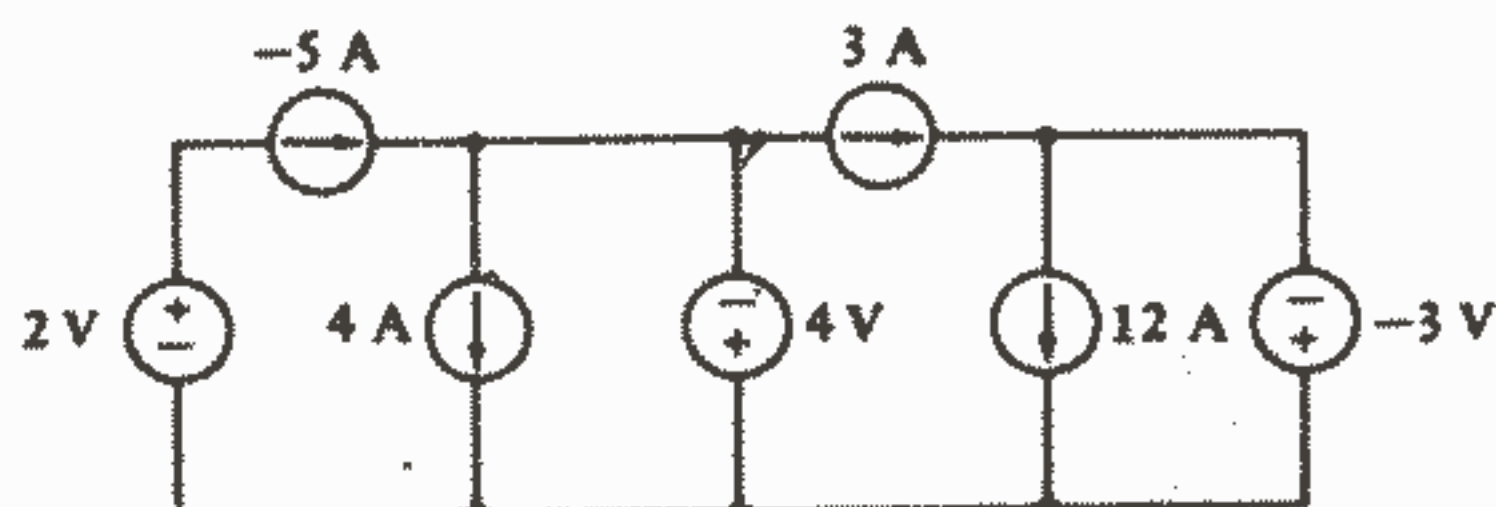


شکل ۵۲ - ۲: به مسئله ۳۳ مراجعه کنید.

۳۴ - مدار شکل ۵۳ - ۲ مثالهای متعددی از منابع جریان و ولتاژ را به طور سری و موازی

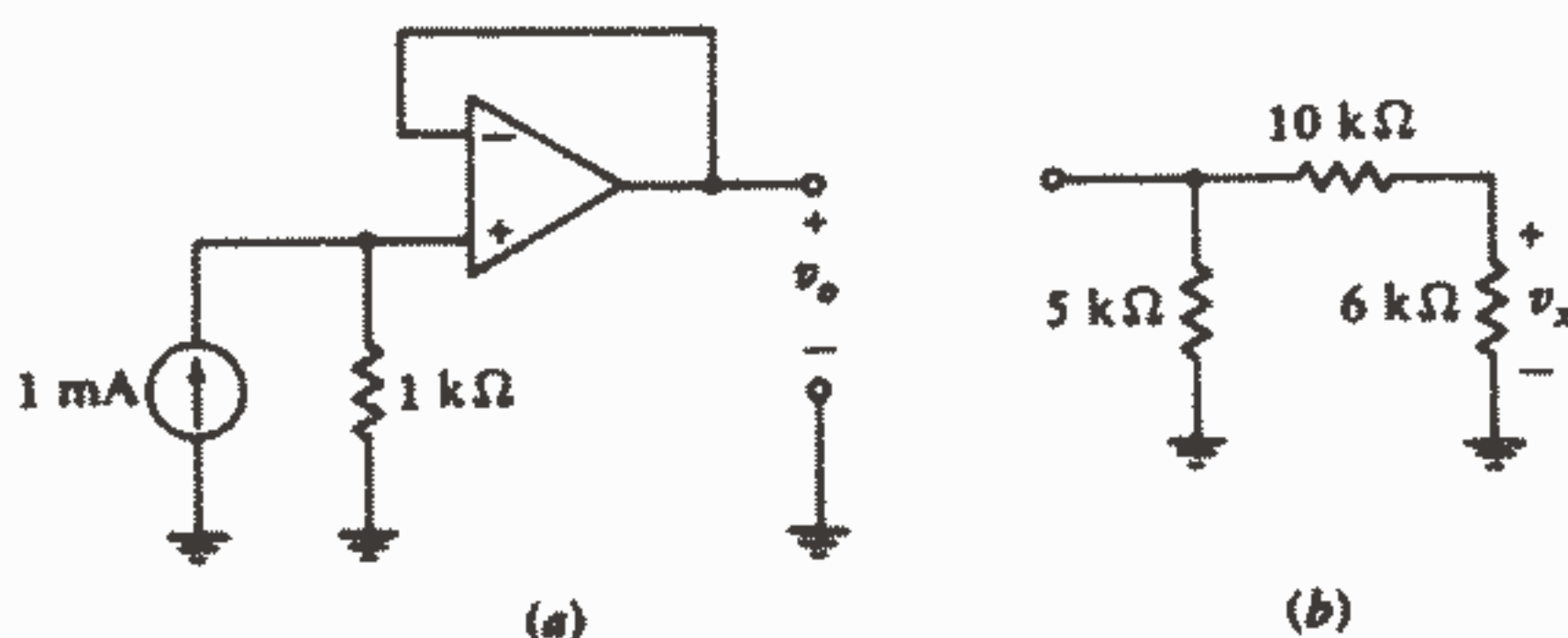
نشان می دهد. (a) قدرت جذب شده به وسیله هر منبع را پیدا کنید. (b) منبع 4 V به چه مقدار

باید تغییر کند تا قدرت داده شده به وسیله منبع 5 A به صفر تنزل کند؟



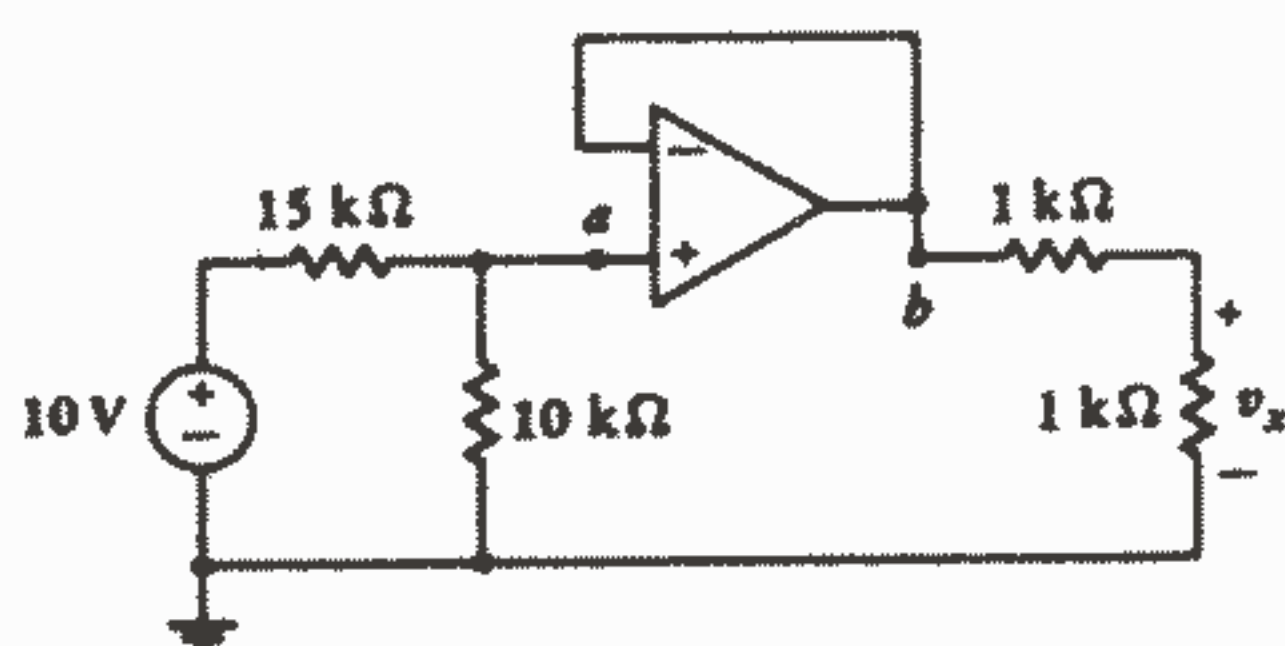
شکل ۵۳ - ۲: به مسئله ۳۴ مراجعه کنید.

- ۳۵ - برای یک op - amp خاص بهره A برابر ۲۰۰۰ و $R_i = 50 \text{ k}\Omega$ بین ورودیهای معکوس کننده و غیرمعکوس کننده می باشد. این op - amp به صورت یک ولتاژ فالتور با $V_s = 1 \text{ V}$ بسته شده است: (a) v_o , (b) v_i , (c) قدرت تحویل داده شده به وسیله v_s را پیدا کنید.
- ۳۶ - (a) در ولتاژ فالتور شکل ۲ - ۵۴ اگر A بزرگ باشد، v_x را پیدا کنید.
- (b) اگر شبکه شکل ۲ - ۵۴b خروجی ولتاژ فالتور وصل شود، v_x را پیدا کنید.



شکل ۲ - ۵۴: به مسئله ۳۶ مراجعه کنید.

- ۳۷ - (a) در مدار شکل ۲ - ۵۵ اگر A بزرگ باشد، v_x را پیدا کنید. (b) اگر op - amp از مدار برداشته شود و نقاط a, b به هم وصل شوند، v_x را پیدا کنید.



شکل ۲ - ۵۵: به مسئله ۳۷ مراجعه کنید.

فصل ۳

چند تکنیک مفید تحلیل مدار

۱-۳ مقدمه

ما اکنون باید با قانون اهم و قوانین کیرشوف و کاربرد آنها در تحلیل مدارهای مقاومتی ساده سری و موازی آشنا شده باشیم و اکنون باید قادر باشیم که مقاومتها یا منابع را به طور سری و موازی ترکیب کنیم و قادر باشیم که اصول تقسیم ولتاژ و جریان را به کار ببریم. اکثر مدارهایی را که تاکنون بر روی آنها تمرین کرده ایم ساده بوده و از اهمیت عملی کمی برخوردار بوده اند، آنها برای کمک به یادگیری ما درباره کاربرد قوانین اساسی مفید می باشند. اکنون باید تحلیل مدارهای پیچیده تر را شروع کنیم.

سیستمهای عملی که ما در سالهای آینده آنها را تحلیل و طراحی خواهیم کرد شامل مدارهای کنترل الکتریکی و الکترونیکی، سیستمهای مخابراتی، مبدل های انرژی مانند موتور ها و ژنراتورها، سیستمهای توزیع قدرت، مدارهای رابط برای IC های تجارتي قابل دسترس و وسایل سرگرمی و یا سایر وسایلی که فعلاً ناشناخته هستند، می باشد.

بسیاری از ما با مسائلی از قبیل جریان گرما، جریان سیال و رفتار سیستمهای مکانیکی متنوعی مواجه خواهیم شد. در تحلیل هر یک از این حالات اغلب بهتر است که آن را با یک مدار معادل الکتریکی جایگزین کنیم.

به عنوان یک مثال می توانیم یک تقویت کننده ترانزیستوری، وسیله ای الکترونیکی که بخشی از اغلب سیستمهای مخابراتی و مدارهای کنترل می باشد، را در نظر بگیریم ترانزیستورها، همراه با مقاومتها و سایر عناصر مداری غیرفعال، برای تقویت کردن و یا بزرگ کردن سیگنالهای الکتریکی (ولتاژ یا جریان) و اعمال آنها به بارهای مورد نظر به کار می روند. آنها همچنین بطور

وسعی به عنوان اجزاء سوئیچهای الکتریکی سریع و مدارهای منطقی که تشکیل دهنده کامپیوترهای دیجیتال هستند، به کار می‌روند می‌توان ترانزیستور، مقاومت، سایر عناصر مداری غیرفعال، منبع سیگنال و بار را به وسیله ترکیبی از عناصر مداری ساده مانند منابع جریان، منابع ولتاژ و مقاومت جایگزین نمود. در این صورت پاسخهای مسئله به وسیله روشهای تحلیل مدار که ما قبلاً آموخته و با در این فصل خواهیم آموخت، به دست می‌آیند.

وقتی که ما قادر باشیم رفتار سیستمهای جریان سیال و جریان گرما، پاسخ دینامیکی سطوح کنترل هواپیما و سایر پدیده‌های غیرالکتریکی را به طور ریاضی توصیف کنیم، خواهیم دید که معادلات حاصله اغلب دقیقاً مشابه آنهایی هستند که روابط جریان و ولتاژ را در مدارهای الکتریکی توصیف می‌کنند.

در این صورت ممکن است به این نتیجه برسیم که ساختن مدار الکتریکی مشابه خیلی ساده‌تر و ارزانتر از ساختن یک نمونه اصلی از سیستم واقعی می‌باشد. در این صورت از مدار الکتریکی می‌توان برای پیشگویی عملکرد سایر سیستمها با تغییر دادن عناصر مختلف استفاده نمود و می‌تواند برای حصول یک طرح نهایی بهتر به ما کمک کند. این است اساس کار کامپیوترهای آنالوگ الکترونیکی.

بدیهی است که یکی از اهداف عمده این فصل باید آموزش روشهای ساده‌سازی تحلیل مدارهای پیچیده‌تر باشد. از میان این روشها می‌توان از جمع اثرها و تحلیل گره، حلقه و چشمه نام برد. ما همچنین سعی خواهیم کرد توانایی انتخاب مناسبترین روش تحلیل را توسعه دهیم. اغلب پیش می‌آید که ما فقط عملکرد یک قسمت ایزوله شده از یک مدار پیچیده را به طور مفصل و دقیق می‌خواهیم، در این صورت روش جایگزینی بقیه مدار با یک مدار معادل بسیار ساده شده، مطلوب می‌باشد. این مدار معادل اغلب یک مقاومت بطور سری یا موازی با یک منبع ایده آل می‌باشد. قضایای تونن و نورتن ما را قادر می‌سازند که این جایگزینی را انجام دهیم.

ما مطالعه روشهای ساده‌سازی تحلیل مدار را با بررسی یک روش عمومی پر قدرت یعنی تحلیل گره آغاز می‌کنیم.

۲-۳ تحلیل گره

در فصل گذشته ما تحلیل یک مدار ساده مشتمل بر فقط دو گره را مورد توجه قرار دادیم. سپس دریافتیم که قدم اصلی تحلیل به دست آوردن یک معادله بر حسب تنها کمیت مجهول یعنی ولتاژ بین جفت گره، می‌باشد. ما اکنون تعداد گره‌ها را افزایش خواهیم داد و در نتیجه برای هر

گرهی که اضافه شود یک مجهول و یک معادله هم اضافه خواهد شد.

بنابراین، یک مدار سه گرهی دارای دو ولتاژ مجهول و دو معادله، یک مدار ده گرهی دارای نه ولتاژ مجهول و نه معادله و یک مدار N گرهی نیاز به $(N-1)$ ولتاژ و $(N-1)$ معادله دارد در این قسمت مامکانیسم تحلیل گره را مورد توجه قرار می دهیم اما توجیه و استدلال روشهایمان را به قسمتهای آتی این فصل موکول می کنیم.

به عنوان یک مثال بیایید مدار سه گرهی نشان داده شده در شکل ۱a - ۳ را در نظر بگیریم. ما می توانیم محل سه گره را با رسم مجدد مدار مانند شکل ۱b - ۳ که در آن هر گره با یک عدد مشخص شده است، مورد تأکید قرار دهیم.

اکنون مایلیم که به هر گره یک ولتاژ نسبت دهیم اما باید بخاطر داشته باشیم که یک ولتاژ همیشه بین دو گره در شبکه تعریف می شود. بنابراین یک گره را به عنوان گره مبنا انتخاب می کنیم و سپس یک ولتاژ بین هر گره و گره مبنا تعریف می کنیم. بنابراین ما دوباره توجه می کنیم که فقط $(N-1)$ ولتاژ در یک مدار N گرهی تعریف می شود.

گره ۳ را به عنوان گره مبنا انتخاب می کنیم هر یک از گره های دیگر را هم می توانستیم به عنوان گره مبنا انتخاب کنیم ولی برای ساده تر شدن معادلات حاصله گرهی را که بیشترین اتصال را دارد به عنوان گره مبنا انتخاب می کنیم.

اگر در مدار گره زمین وجود داشته باشد، مناسبترین کار این است که آن را به عنوان گره مبنا انتخاب کنیم. اغلب گره زمین به صورت پایه مشترکی در سرتاسر قسمت پایینی مدار ظاهر می شود.

ولتاژ گره ۱ نسبت به گره مبنای ۳ را به صورت v_1 و ولتاژ گره ۲ نسبت به گره مبنا را v_2 تعریف می کنیم. این دو ولتاژ کافی هستند و ولتاژ بین هر جفت گره دیگر را می توان بر حسب آنها پیدا کرد.

مثلاً ولتاژ گره ۱ نسبت به گره ۲ عبارت است از $(v_1 - v_2)$. ولتاژهای v_1 ، v_2 و علامت مبنای آنها در شکل ۱c - ۳ نشان داده شده است. در این شکل مقادیر مقاومتها نیز با مقادیر هدایت جایگزین شده اند. و سرانجام مدار با حذف همه علامت مبنای ولتاژها به صورت شکل ۱d - ۳ خلاصه شده است. یک گره مبنا به وضوح مشخص شده است و ولتاژ هر گره به صورت ولتاژ آن گره نسبت به گره مبنا در نظر گرفته شده است. این تنها وضعیتی است که در آن ما باید علامت ولتاژ را بدون جفت مثبت و منفی مربوطه به کار ببریم البته بجز برای علامت باتری که در شکل ۱b - ۱۴ تعریف شد.

ما باید اکنون قانون جریان کیرشوف را به گره‌های ۱ و ۲ اعمال کنیم. این کار را با قرار دادن جریان کل خارج شده از گره از طریق هدایتها با جریان کل منبع وارد شونده به گره انجام می‌دهیم.

$$0.5v_1 + 0.2(v_1 - v_2) = 3 \quad \text{بنابراین:}$$

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = 3 \quad \text{و یا: (1)}$$

$$1v_2 + 0.2(v_2 - v_1) = 2 \quad \text{در گره ۲ داریم:}$$

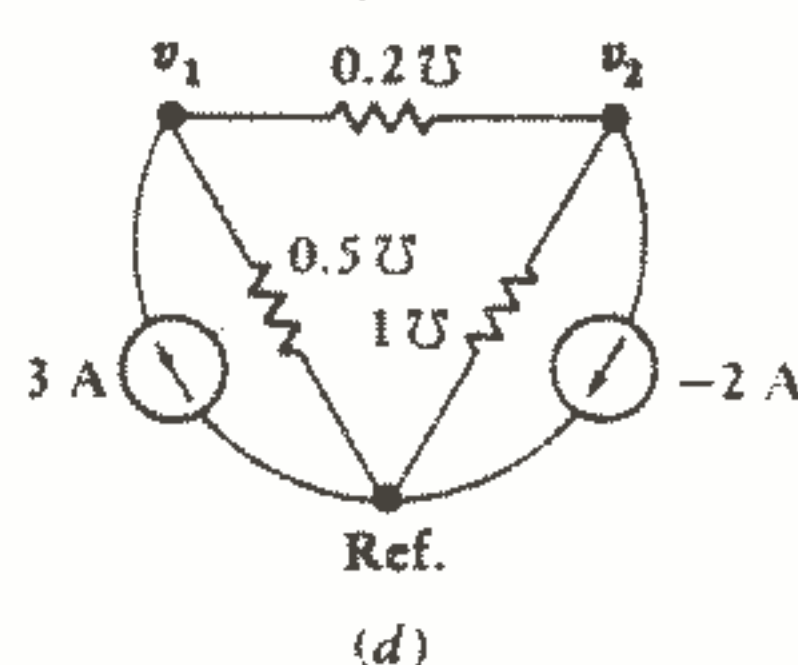
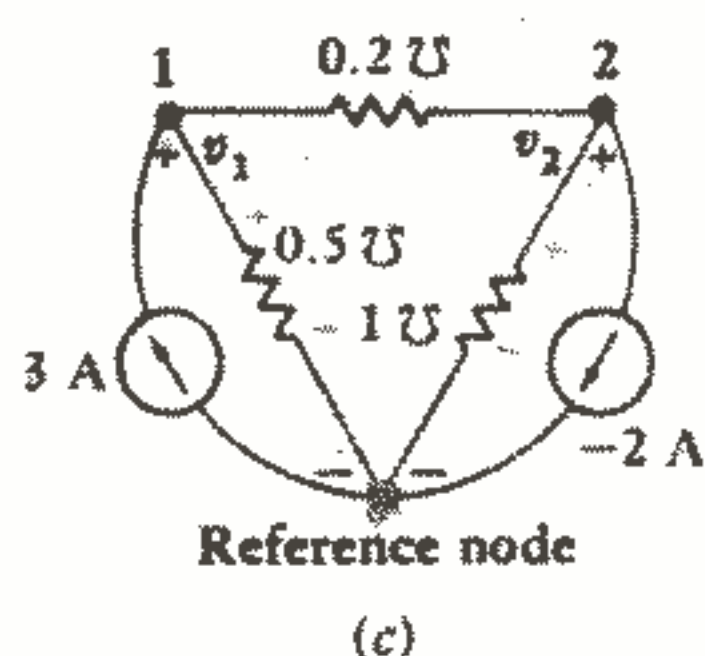
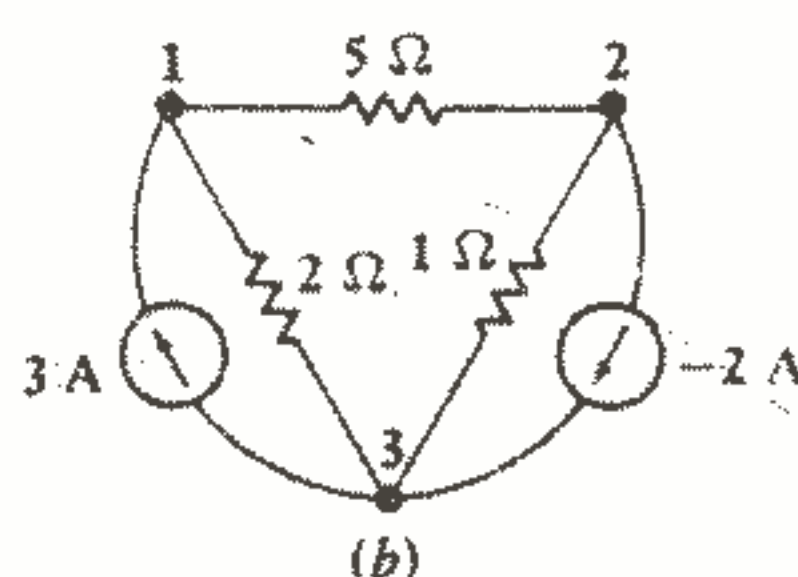
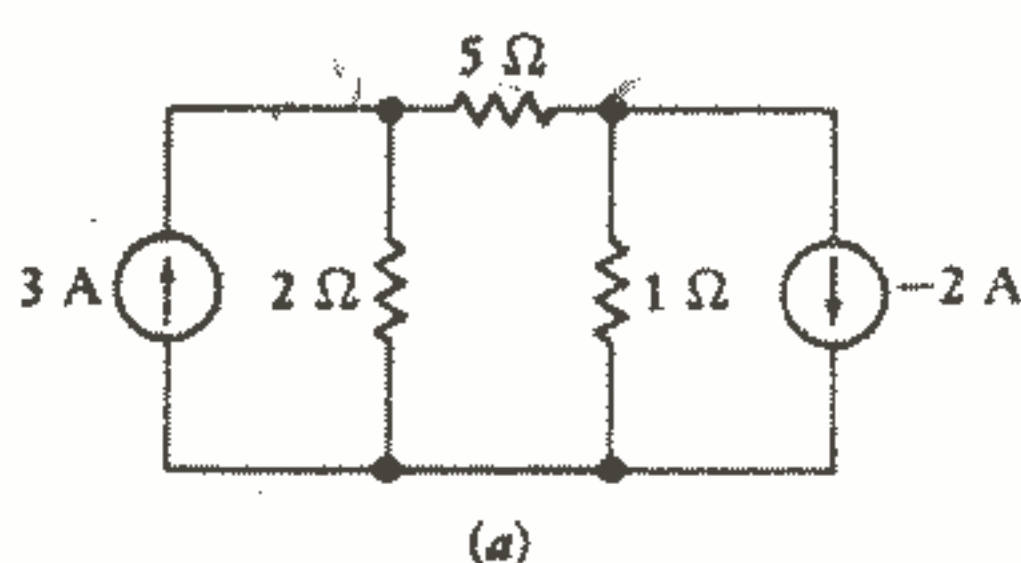
$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = 2 \quad \text{و یا: (2)}$$

معادلات (۱) و (۲) معادلات مطلوب بر حسب دو مجهول هستند و به سادگی می‌توان آنها

را حل نمود. نتایج عبارتند از:

$$v_1 = 5 \text{ V}$$

$$v_2 = 2.5 \text{ V}$$



شکل ۱-۳: (a) یک مدار سه گره‌ای. (b) مدار به منظور تأکید سه گره دوباره رسم شده است و هر گره شماره‌گذاری شده است. (c) یک ولتاژ همراه با پلارته مینا، بین هر گره و گره مینا تعیین شده است. (d) تعیین ولتاژها با حذف پلارته خلاصه شده است. فرض شده است که هر ولتاژ نسبت به مینا مثبت است.

همچنین ولتاژ گره ۱ نسبت به گره ۲ عبارت است از $(v_1 - v_2)$ یا 2.5 V و حال ما هر جریان یا قدرتی را در مدار با یک مرحله می‌توانیم پیدا کنیم. مثلاً، جریانی که از هدایت 0.5 S پایین می‌آید برابر است با $v_1 - 0.5\text{ A}$ یا 2.5 A .

حال بیایید تعداد گره‌ها را یک عدد افزایش دهیم. مدار جدید در شکل ۲a - ۳ نشان داده شده است و در شکل ۲b - ۳ یا مشخص کردن گره‌ها و انتخاب یک گره مبنای مناسب و تعیین نمودن ولتاژ گره‌ها، دوباره رسم شده است. سپس جریانه‌های خارج شونده از گره ۱ را جمع می‌کنیم:

$$3(v_1 - v_2) + 4(v_1 - v_3) - (-8) - (-3) = 0$$

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11 \quad \text{و یا:} \quad (3)$$

در گره ۲ داریم:

$$3(v_2 - v_1) + 1v_2 + 2(v_2 - v_3) - 3 = 0$$

$$-3v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 3 \quad \text{و یا:} \quad (4)$$

در گره ۳ داریم:

$$4(v_3 - v_1) + 2(v_3 - v_2) + 5v_3 - 25 = 0$$

$$-4v_1 - 2v_2 + 11v_3 = 25 \quad \text{و یا:} \quad (5)$$

معادلات ۳ تا ۵ را می‌توان با روش ساده حذف مجهولات و یا به وسیله دستور کرامر و دترمینانها حل نمود.^۱

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix}}$$

با بسط دترمینانهای صورت و منخرج به وسیله مینورها بر حسب ستون اول آنها داریم:

۱ - ضمیمه ۱ مرور مختصری بر دترمینانها و حل یک دستگاه معادلات خطی بوسیله دستور کرامر را ارائه می‌کند.

$$v_1 = \frac{-11 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + 25 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}{7 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-11(62) - 3(-41) + 25(30)}{7(62) + 3(-41) - 4(30)} = \frac{-682 + 123 + 750}{434 - 123 - 120} = \frac{191}{191} = 1 \text{ V}$$

و بطور مشابه داریم:

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -11 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -4 & 25 & 11 \end{vmatrix}}{191} = 2 \text{ V}$$

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -3 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 25 \end{vmatrix}}{191} = 3 \text{ V}$$

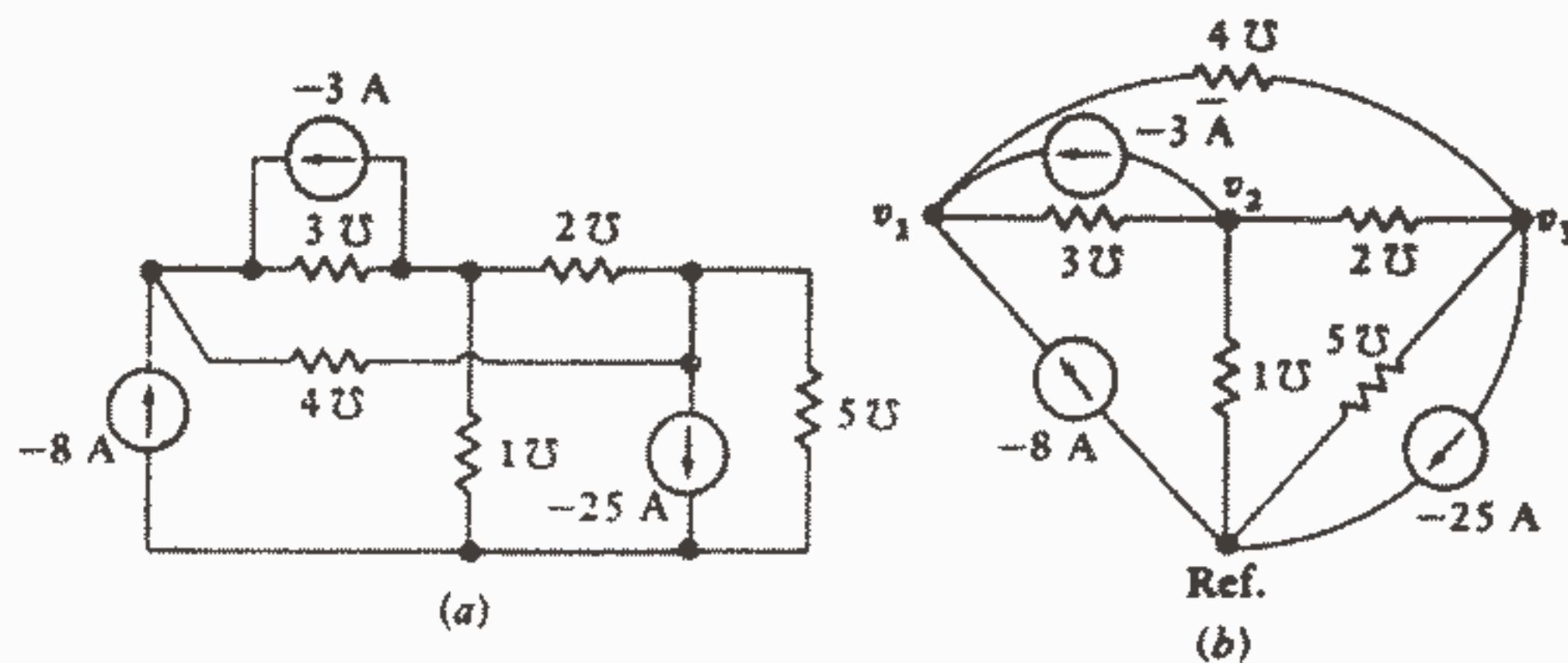
دترمینان مخرج در هر یک از سه محاسبه فوق مشترک می باشد. در مدارهایی که شامل منابع ولتاژ و یا منابع وابسته نمی باشند. (یعنی مدارهایی که فقط شامل منابع مستقل جریان هستند) دترمینان مخرج، دترمینان ماتریسی^۱ است که به صورت ماتریس هدایت مدار تعریف می شود:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

باید توجه داشت که نه عنصر ماتریس فوق یک رشته مرتب ضرایب معادلات (۳)، (۴) و (۵) می باشند که هر یک از عناصر یک هدایت می باشند. سطر اول از ضرایب معادله KCL در گره اول (ضرایب به ترتیب v_1 ، v_2 ، v_3 داده شده اند) تشکیل شده است و سطر دوم مربوط به گره دوم و غیره می باشد.

۱ - تا فصل ۱۶ ماتریس ها را بطور ریاضی بررسی نخواهیم کرد و در آن زمان یک اطلاعات مقدماتی از جبر خطی ارائه می شود.

ماتریس هدایت نسبت به قطر اصلی (از گوشه بالای چپ به گوشه پایین راست) متقارن است و همه عناصری که روی این قطر نیستند منفی بوده و عناصر روی قطر مثبت می‌باشند. این یک نتیجه کلی از روش سیستماتیکی که برای مشخص نمودن متغیرها، اعمال KCL و مرتب نمودن معادلات به کار برده‌ایم و قضیه هم پاسخی، که در فصل ۱۶ مورد بحث قرار خواهیم داد، می‌باشد.



شکل ۲ - ۳: (a) یک مدار شامل چهار گره و هشت شاخه.

(b) همان مدار با مشخص نمودن ولتاژها دوباره رسم شده

است.

در اینجا فقط تقارن موجود در این گونه مدارها را که فقط شامل منابع جریان مستقل هستند مغتنم می‌شمیریم و یک روش چک اشتباهات را در نوشتن معادلات مداری می‌پذیریم. ما اکنون باید ببینیم که منابع ولتاژ و منابع وابسته چگونه روند تحلیل گرهی را تحت تاثیر قرار می‌دهند.

به عنوان یک مثال نوعی مدار شکل ۳ - ۳ را مورد توجه قرار می‌دهیم. مدار چهار گرهی قبلی ما با جایگزینی هدایت 2Ω بین گره‌های ۲ و ۳ به وسیله یک منبع ولتاژ $7V$ ، تغییر یافته است. ما هنوز هم همان ولتاژهای v_1 ، v_2 ، v_3 را مشخص می‌کنیم. در گذشته قدم بعدی ما اعمال KCL به هر یک از سه گره غیر مبنا بود ولی اگر الان هم بنخواهیم همان کار را انجام دهیم، خواهیم دید که در گره ۲ و ۳ با مشکل مواجه می‌شویم زیرا نمی‌دانیم چه جریانی از شاخه محتوی منبع ولتاژ عبور می‌کند.

هیچ راهی وجود ندارد که به وسیله آن بتوانیم جریان را به صورت تابعی از ولتاژ بیان کنیم زیرا بنابر تعریف منبع ولتاژ، جریان مستقل از ولتاژ می‌باشد.

دو راه برای رهایی از این مشکل وجود دارد. راه مشکلیتر این است که یک جریان مجهول به شاخه حاوی منبع ولتاژ نسبت دهیم و سپس سه بار اقدام به اعمال KCL و سپس یکبار اقدام به اعمال KVL بین گره‌های ۲ و ۳ بکنیم که حاصل اینکار چهار معادله و چهار مجهول برای این مثال خواهد بود.

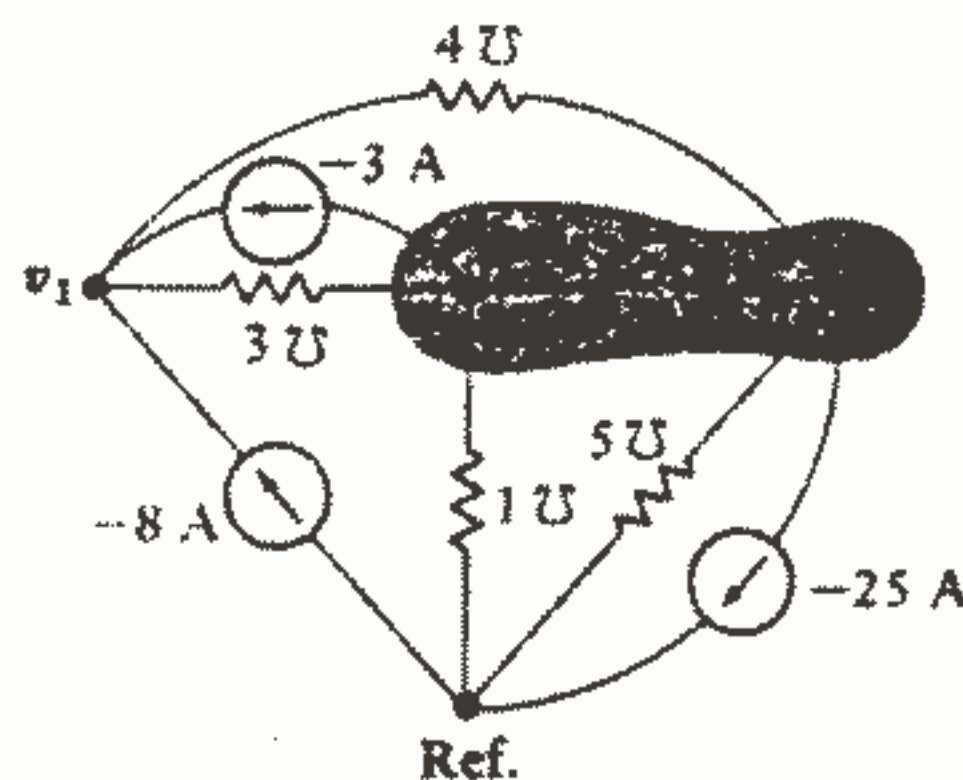
روش ساده‌تر این است که توافق کنیم که برای ما عمدتاً ولتاژ گره‌ها مورد توجه می‌باشد به طوریکه می‌توانیم جریان شاخه‌ای را که حاوی منبع ولتاژ است و برای ما مشکل آفرین شده است، نادیده بگیریم. این کار را با در نظر گرفتن گره ۲، گره ۳ و منبع ولتاژ به عنوان نوعی فوق نقطه و اعمال همزمان KCL به هر دو گره انجام می‌دهیم. این امر مطمئناً، ممکن می‌باشد زیرا اگر جریان کل خارج شونده از گره ۲ صفر باشد و جریان کل خارج شونده از گره ۳ هم صفر باشد، آنگاه جریان کلی که از کل ۲ گره خارج می‌شود صفر می‌باشد.

فوق نقطه به وسیله ناحیه سایه خورده در شکل ۳-۳ مشخص شده است و ما مجموع شش جریان خارج شونده از فوق نقطه را مساوی صفر قرار خواهیم داد. با شاخه‌ای که هدایت 3Ω دارد شروع می‌کنیم و در جهت عقربه‌های ساعت عمل می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$3(v_2 - v_1) - 3 + 4(v_3 - v_1) - 25 + 5v_3 + 1v_2 = 0$$

$$-7v_1 + 4v_2 + 9v_3 = 28$$

و یا



شکل ۳-۳: هدایت 3Ω در شکل ۲-۳ به وسیله یک منبع ولتاژ مستقل جایگزین شده است. قانون جریان کیرشوف برای فوق نقطه به کار رفته است و ولتاژ منبع برابر با $v_3 - v_2$ قرار داده شده است.

معادله KCL در گره ۱ فرقی با معادله (۳) ندارد:

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11$$

ما احتیاج به یک معادله دیگر هم داریم زیرا سه مجهول داریم و باید از این واقعیت که یک

منبع ۲۲ V بین گره‌های ۲ و ۳ وجود دارد استفاده کنیم: $v_3 - v_2 = 22$

این سه معادله اخیر را به صورت زیر دوباره نویسی می‌کنیم:

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11$$

$$-7v_1 + 4v_2 + 9v_3 = 28$$

$$-v_2 + v_3 = 22$$

جواب دترمینانی v_1 عبارت است از:

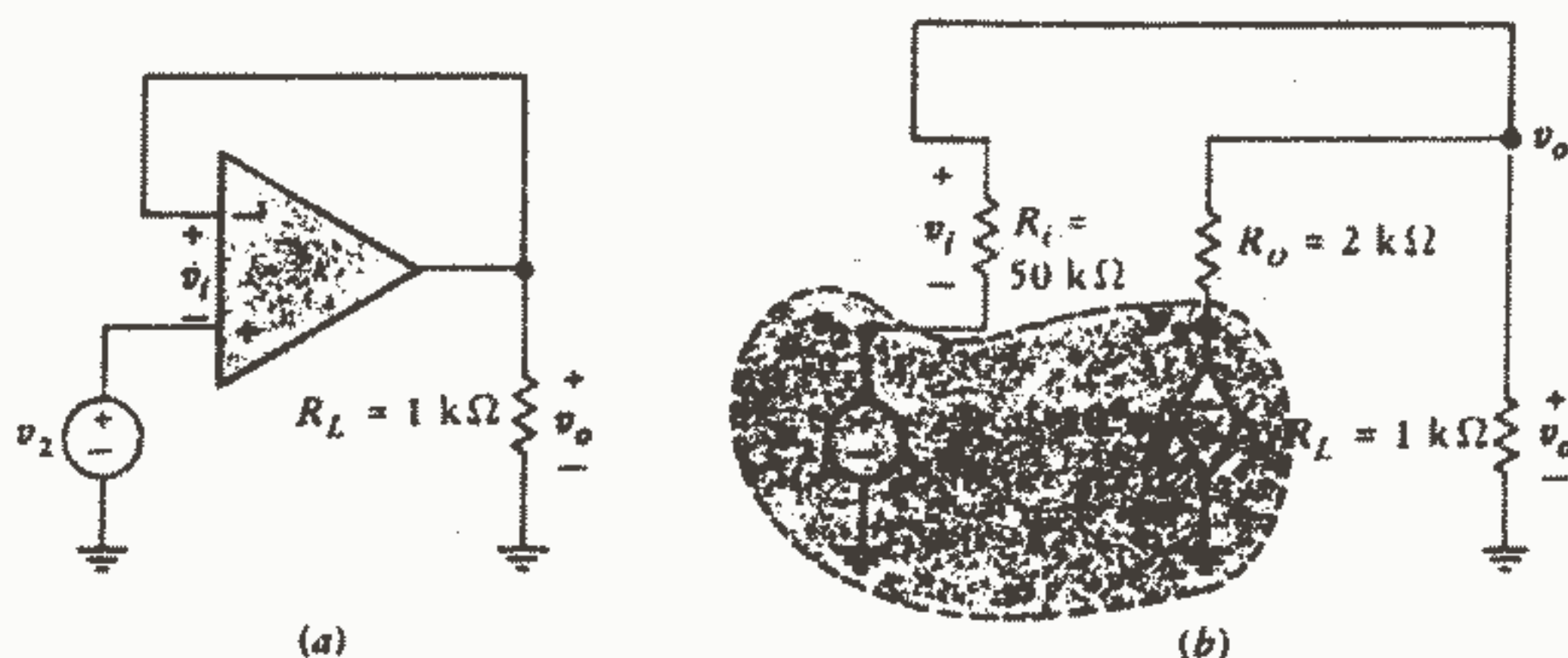
$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 28 & 4 & 9 \\ 22 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -7 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-189}{42} = -4.5 \text{ V}$$

به فقدان تقارن نسبت به قطر اصلی در دترمینان مخرج و منفی نبودن همه عناصر غیرقطری توجه نمایید. این به دلیل وجود منبع ولتاژ است. همچنین توجه داشته باشید که دیگر نمی‌توانیم مخرج را دترمینان ماتریس هدایت بنامیم زیرا سطر پایین آن از معادله $v_3 - v_2 = 22$ حاصل می‌شود، و این معادله بستگی به هیچ هدایتی ندارد.

بنابراین وجود یک منبع ولتاژ تعداد گره‌های غیرمبنا را که باید برای آنها KCL اعمال شود، یک عدد کاهش می‌دهد و فرقی نمی‌کند که منبع ولتاژ بین دو گره غیرمبنا و یا بین یک گره و گره مبنا وصل شده باشد.

حال بیایید مداری را که شامل یک منبع وابسته است در نظر بگیریم. به عنوان مثال یک op-amp را که به صورت ولتاژ فالوور وصل شده است طبق شکل ۳-۴a انتخاب می‌کنیم.

این همان مداری است که در قسمت گذشته از فصل ۲ مورد بررسی قرار دادیم به جز اینکه یک مقاومت بار محدود $R_L = 1 \text{ K } \Omega$ اکنون بین ترمینال خروجی و زمین ظاهر شده است. op-amp را به وسیله مدلی که شامل یک مقاومت ورودی غیربینهایت، $R_i = 50 \text{ k } \Omega$ ، و یک مقاومت خروجی غیرصفر، $R_o = 2 \text{ K } \Omega$ ، می‌باشد و در شکل ۳-۴b نشان داده شده است، بیان می‌کنیم و یک مقدار معمول $A = 10^4$ را فرض می‌نماییم.



شکل ۴ - ۳: (a) یک ولتاژ فالوور که بار محدود R_L

را تغذیه می‌کند.

(b) op - amp با مدار معادلی که شامل R_i غیر بینهایت و R_o

غیر صفر می‌باشد جایگزین شده است. سه ولتاژ گره

نسبت به مبنا مشخص شده و یک فوق نقطه مشخص شده

است.

زمین به عنوان گره مبنا انتخاب شده است و به سه گره غیر مبنا ولتاژهای v_1 , v_2 , v_3 نسبت داده شده است. توجه کنیم که منبع ولتاژ مستقل v_1 باعث می‌شود که گره v_2 و گره مبنا تشکیل یک فوق نقطه را بدهند، به علاوه منبع ولتاژ وابسته هم ما را مجبور می‌سازد که گره v_3 و گره مبنا را هم به عنوان یک فوق نقطه در نظر بگیریم. بنابراین، گره v_2 , v_3 و گره مبنا تشکیل یک فوق نقطه بزرگ را می‌دهند که به وسیله ناحیه سایه خورده در شکل ۴ - ۳ نشان داده شده است. از آنجاییکه فوق نقطه شامل گره مبنا می‌باشد، معادله KCL را برای آن نمی‌نویسیم. تنها معادله KCL که باید نوشته شود مربوط به گره v_0 می‌باشد، یعنی:

$$\frac{v_0 - v_2}{50000} + \frac{v_0 - v_3}{2000} + \frac{v_0}{1000} = 0 \quad (6)$$

بیایید منبع مستقل را $v_1 = 1 \text{ V}$ در نظر بگیریم. اکنون دو ولتاژ گرهی مجهول، v_2 , v_3 در معادله (۶) وجود دارد و معادله KCL مستقل دیگری را نمی‌توان نوشت. اگر چه ما هنوز باید ولتاژ هر منبع ولتاژ بین گره‌ها (و در نتیجه داخل محدوده خط چین) و نیز کنترل منبع وابسته را (در اینجا v_1) بر حسب ولتاژ گره‌ها بنویسیم.

ابتدا به منابع ولتاژ داخل فوق نقطه توجه می‌کنیم. منبع v_2 مساوی V در نظر گرفته شده است و به علاوه ولتاژ گرهی آن با v_2 نمایش داده شده است. اگر ما به اندازه کافی احمق می‌بودیم که آن را مثلاً v_A بنامیم، آنگاه باید معادله‌ی زاید $v_A = v_2$ را می‌نوشتیم. مورد بعدی منبع v_3 می‌باشد. از آنجاییکه این منبع بین گره ۳ و زمین وصل شده است، داریم:

$$v_3 = -10^4 v_1$$

و سرانجام، باید جریانها یا ولتاژهایی را که منابع وابسته با آنها کنترل می‌شوند به ولتاژ گره‌ها ربط دهیم. در اینجا v_1 دو سر R_1 تعریف شده است و داریم:

$$v_1 = v_0 - v_2 = v_0 - 1$$

برای حل معادله (۶) نسبت به v_0 مقدار $v_3 = -10^4(v_0 - 1)$ را در معادله قرار می‌دهیم و یک معادله و یک مجهول به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_0 - 1}{50000} + \frac{v_0 + 10^4(v_0 - 1)}{2000} + \frac{v_0}{1000} = 0$$

از حل معادله فوق پیدا می‌کنیم: $v_0 = 0.999700 V$ و در نتیجه ملاحظه می‌کنیم که ولتاژ خروجی حتی برای یک op - amp با گین نسبتاً کم، مقاومت ورودی کم و مقاومت خروجی زیاد، خیلی نزدیک به ولتاژ ورودی می‌باشد.

در خاتمه یادآور می‌شویم که منفی جمله اول در معادله (۶) جریانی است که منبع ۱۷ تحویل می‌دهد که در اینجا برابر است با 6 nA که $\frac{1 - v_0}{50000}$ یک مقدار خیلی کوچکی است که قادر نیست حتی حساس‌ترین منابع را مختل سازد. برعکس، جریان خروجی عبارت از جمله سوم معادله (۶) یعنی 1 mA که $\frac{v_0}{1000}$ که بیش از 10^5 برابر بزرگتر می‌باشد. بنابراین ولتاژ فالوور می‌تواند جریان و قدرتی خیلی بیش از آنچه که از منبع می‌کشد به بار تحویل دهد. در انجام این عمل قانون بقای انرژی نقض نمی‌شود بلکه قدرت از منابع dc که معمولاً نشان داده نمی‌شوند، کشیده می‌شود.

حال اجازه دهید روش بدست آوردن معادلات گره را برای هر مدار مقاومتی خلاصه کنیم:

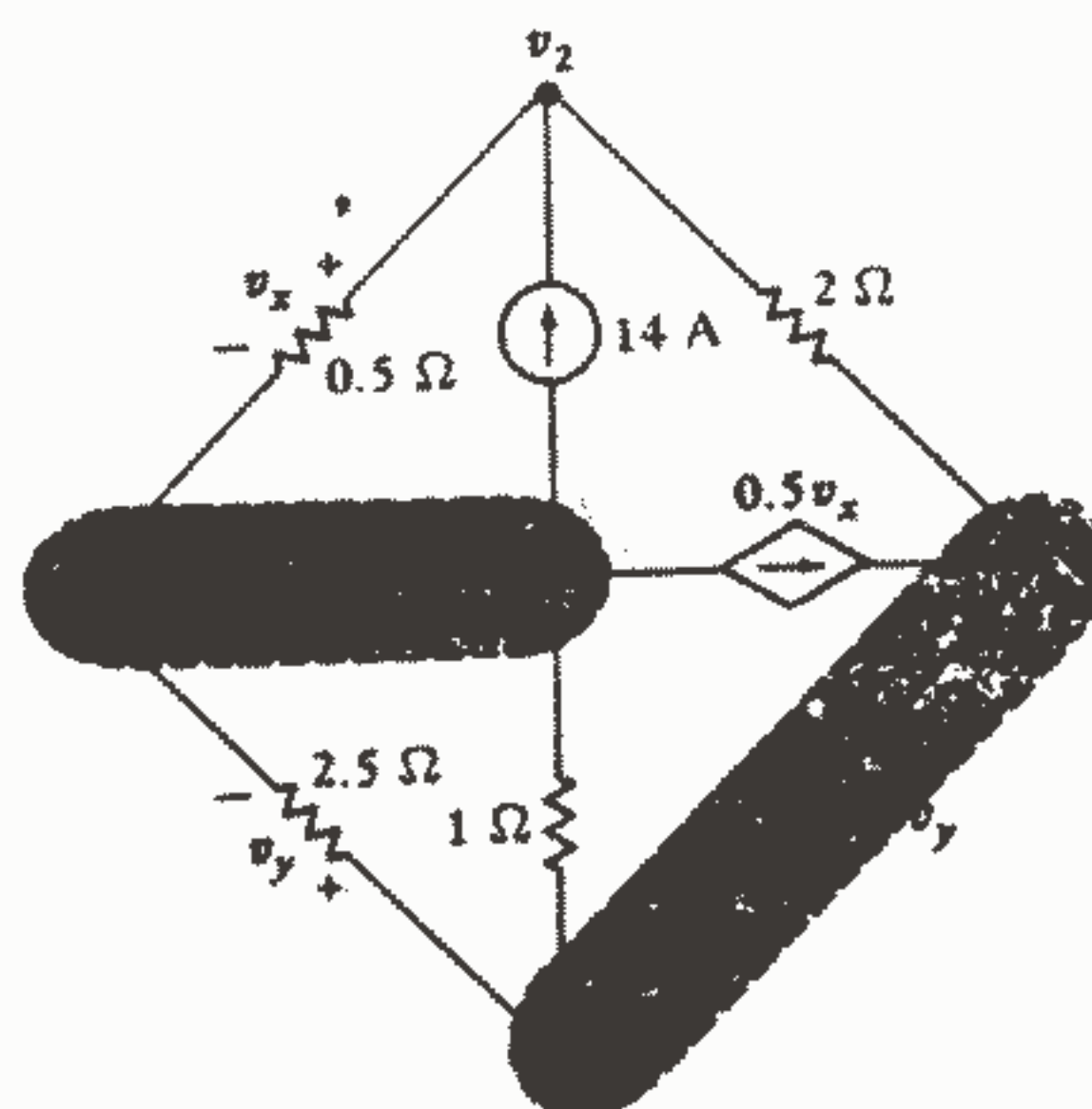
۱ - یک مدار ساده و تمیز بکشید. تمام مقادیر عناصر و منابع را مشخص کنید و هر منبع باید علامت مبنای خود را داشته باشد.

۲ - با فرض اینکه مدار N گره دارد، یکی از گره‌ها را به عنوان گره مبنا انتخاب کنید. سپس ولتاژهای گرهی v_1, v_2, \dots, v_N را در گره‌های مربوطه‌شان بنویسید با توجه به اینکه هر ولتاژ گرهی نسبت به گره مبنا انتخاب شد، سنجیده می‌شود.

۳ - اگر مدار فقط شامل منابع جریان باشد، قانون جریان کیرشوف را در هر گره غیر مبنا اعمال کنید. برای بدست آوردن ماتریس هدایت در مدارهایی که فقط حاوی منابع جریان مستقل هستند، کل جریان خروجی از هر گره از طریق هدایت‌ها را با کل جریان ورودی به آن گره توسط منابع مساوی قرار دهید و جملات را از v_1 تا v_n مرتب کنید. برای هر منبع جریان وابسته موجود، جریان منبع و کمیت کنترل کننده آن را به متغیرهای v_1, v_2, \dots, v_{n-1} ربط دهید، البته اگر قبلاً به این صورت نوشته نشده باشند.

۴ - اگر مدار حاوی منابع ولتاژ باشد در اطراف هر منبع ولتاژ با قرار دادن منبع و دو ترمینال آن داخل یک کادر خط چین یک فوق نقطه تشکیل دهید، به این ترتیب به ازای هر منبع ولتاژ موجود یک گره از تعداد گره‌های مدار کاسته می‌شود. ولتاژهای گره‌ی مشخص شده نباید تغییر یابند. حال در این مدار اصلاح شده با استفاده از ولتاژهای گره به مبنای مشخص شده، KCL را به هر گره و یا فوق نقطه (البته بشرطی که شامل گره مبنا نباشد) اعمال کنید. هر ولتاژ منبع را به متغیرهای v_1, v_2, \dots, v_n نسبت دهید، البته اگر قبلاً اینکار صورت نگرفته باشد.

حال با در نظر گرفتن این پیشنهادات و رهنمودها، بیایید مدار شکل ۵-۳ را که شامل همه چهار نوع منبع و پنج گره می‌باشد، مورد توجه قرار دهیم.



شکل ۵-۳: یک مدار پنج گره‌ی که شامل هر چهار نوع منبع مختلف می‌باشد.

گره مرکزی را به عنوان مبنا انتخاب میکنیم و از v_1 تا v_4 را در جهت عقربه‌های ساعت از گره سمت چپ شروع به نامگذاری میکنیم.

بعد از تشکیل فوق نقطه در اطراف هر منبع ولتاژ، ملاحظه میکنیم که لازم است معادلات KCL را فقط در گره ۲ و فوق نقطه شامل گره ۳ و ۴ و منبع ولتاژ وابسته بنویسیم.

معادله دیگری برای فوق نقطه شامل گره ۱ و منبع ولتاژ مستقل لازم نیست زیرا واضح است که $v_1 = -12V$ در گره ۲ داریم:

$$\frac{v_2 - v_1}{0.5} + \frac{v_2 - v_3}{2} = 14$$

$$\frac{v_2 - v_1}{0.5} + \frac{v_2 - v_3}{2} = 14 \quad \text{همچنین در فوق نقطه ۴ - ۳ داریم:} \quad \frac{v_3 - v_2}{2} - 0.5v_x + \frac{v_4}{1} + \frac{v_4 - v_1}{2.5} = 0$$

سپس ولتاژ منابع را به ولتاژ گره‌ها مربوط می‌کنیم:

$$v_1 = -12, \quad v_3 - v_4 = 0.2(v_4 - v_1)$$

و سرانجام منبع جریان وابسته را به حسب متغیرهای تعیین شده بیان می‌کنیم:

$$0.5v_x = 0.5(v_2 - v_1)$$

بنابراین، چهار معادله بر حسب چهار ولتاژ گره بدست می‌آوریم:

$$-2v_1 + 2/5v_2 - 0.5v_3 = 14$$

$$v_1 = -12$$

$$0.1v_1 - v_2 + 0.5v_3 + 1/4v_4 = 0$$

$$0.2v_1 + v_3 - 1/2v_4 = 0$$

$$v_4 = -27, \quad v_3 = 0, \quad v_2 = -47, \quad v_1 = -12V$$

که جوابهای آنها عبارتند از:

تمرین

۱ - ۳ - روش تحلیل گره را برای پیدا کردن v_y در مدار شکل ۶-۳ بکار ببرید اگر عنصر

:A

(a) یک منبع جریان $2A$ با فلش روبه راست باشد. (b) یک مقاومت 8Ω باشد. (c) یک

منبع ولتاژ $10V$ با علامت مثبت در سمت راست باشد.

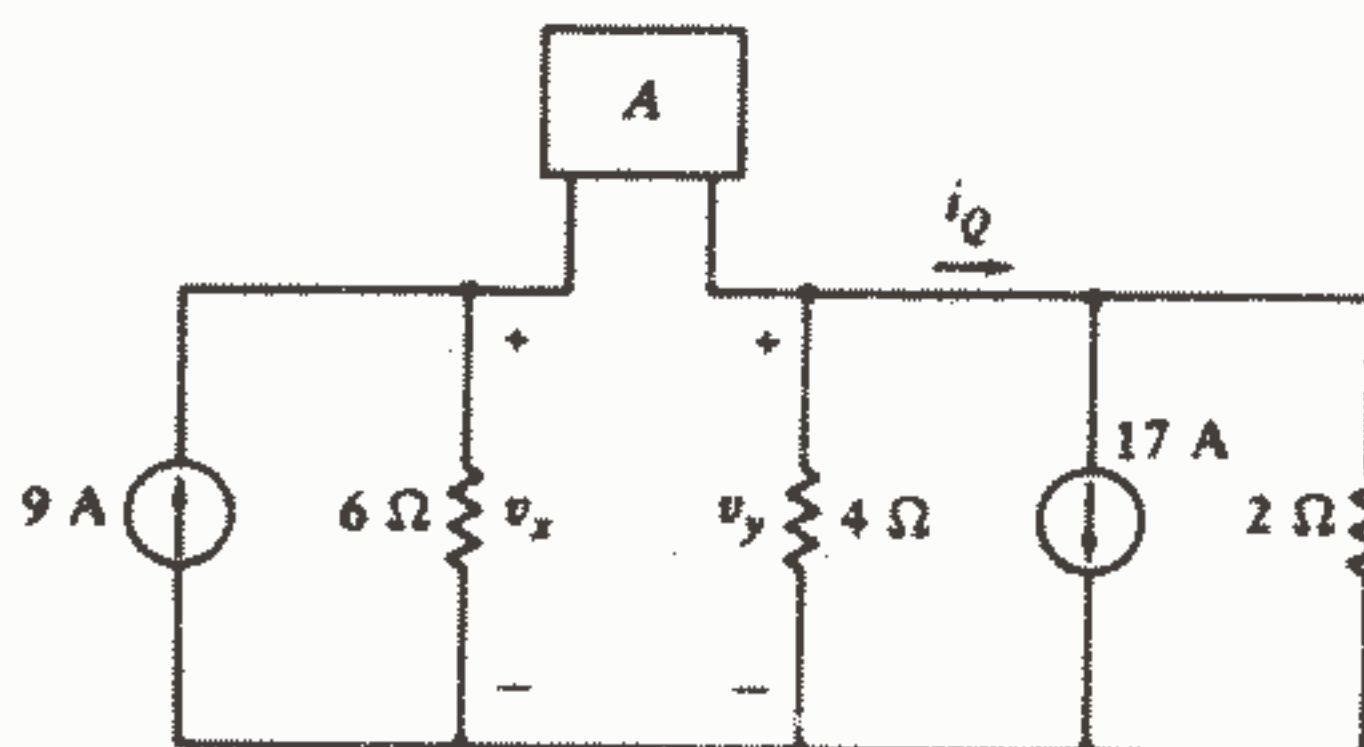
جواب: $7, 11, -16, -20V$

۲ - ۳ - روش تحلیل گره را برای پیدا کردن v_y در مدار شکل ۶-۳ به کار ببرید، اگر

عنصر A:

- (a) یک منبع جریان وابسته با فلش رو به چپ و با مقدار v_x باشد.
 (b) یک منبع ولتاژ وابسته با علامت مثبت در سمت چپ و مقدار i_0 باشد.
 (c) یک مدار باز باشد.
 (d) یک اتصال کوتاه باشد.

جواب: $V: 49.3, -14.14, -22.7, -8.73$



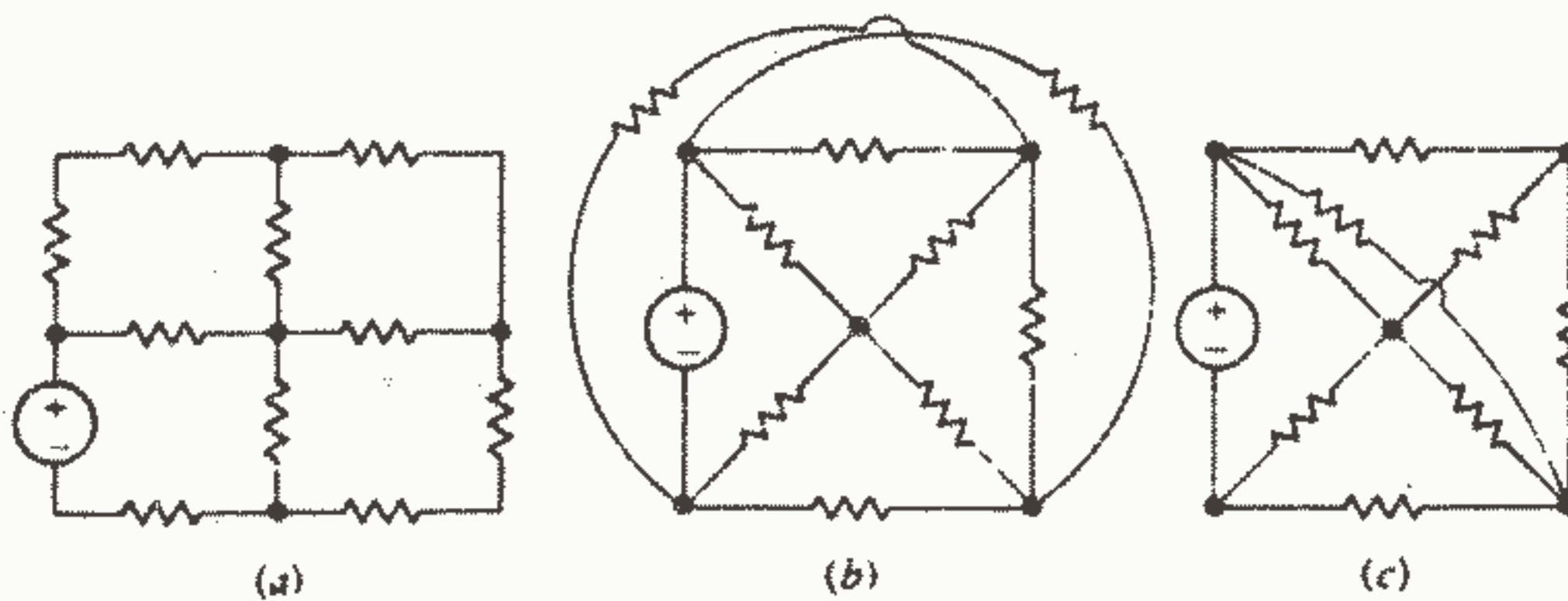
شکل ۳-۶: به تمرینات ۱-۳ و ۲-۳ مراجعه کنید.

۳-۳ تحلیل چشمه‌ای (مش)

تکنیک تحلیل گرهی که در قسمت قبل توصیف شد کاملاً عمومی است و همیشه می‌توان آن را به هر شبکه الکتریکی اعمال نمود. اگر چه این تنها روشی نیست که بتوان ادعا نمود، بخصوص که در قسمتهای پایانی این فصل یک روش تحلیل گرهی تعمیم یافته و تکنیکی به نام تحلیل حلقه را خواهیم دید.

در ابتدا اجازه دهید روشی به نام تحلیل چشمه‌ای را مورد توجه قرار دهیم. اگر چه این روش قابل اعمال به هر شبکه‌ای نیست ولی برای اکثر شبکه‌هایی که ما نیاز به تحلیل آنها خواهیم داشت قابل استفاده است. روش تحلیل چشمه‌ای را فقط به شبکه‌هایی که مسطح (واژه‌ای که به زودی آن را تعریف می‌کنیم) هستند می‌توان اعمال نمود.

اگر بتوان مداری را در یک سطح مسطح به گونه‌ای رسم کرد که هیچ شاخه‌ای از روی شاخه دیگر عبور نکند، این مدار را یک مدار مسطح می‌نامند. بنابراین شکل ۳-۷a یک شبکه مسطح و شکل ۳-۷b یک شبکه غیرمسطح و شکل ۳-۷c، با وجود اینکه طوری رسم شده است که در نظر اول غیر مسطح به نظر می‌رسد، یک شبکه مسطح را نشان می‌دهد.



شکل ۷ - ۳: (a) یک شبکه مسطح را می‌توان طوری رسم نمود

که هیچ رویهم افتادگی وجود نداشته باشد.

(b) یک شبکه غیرمسطح را در یک سطح مسطح نمی‌توان به

گونه‌ای رسم کرد که حداقل یک رویهم افتادگی نداشته باشد.

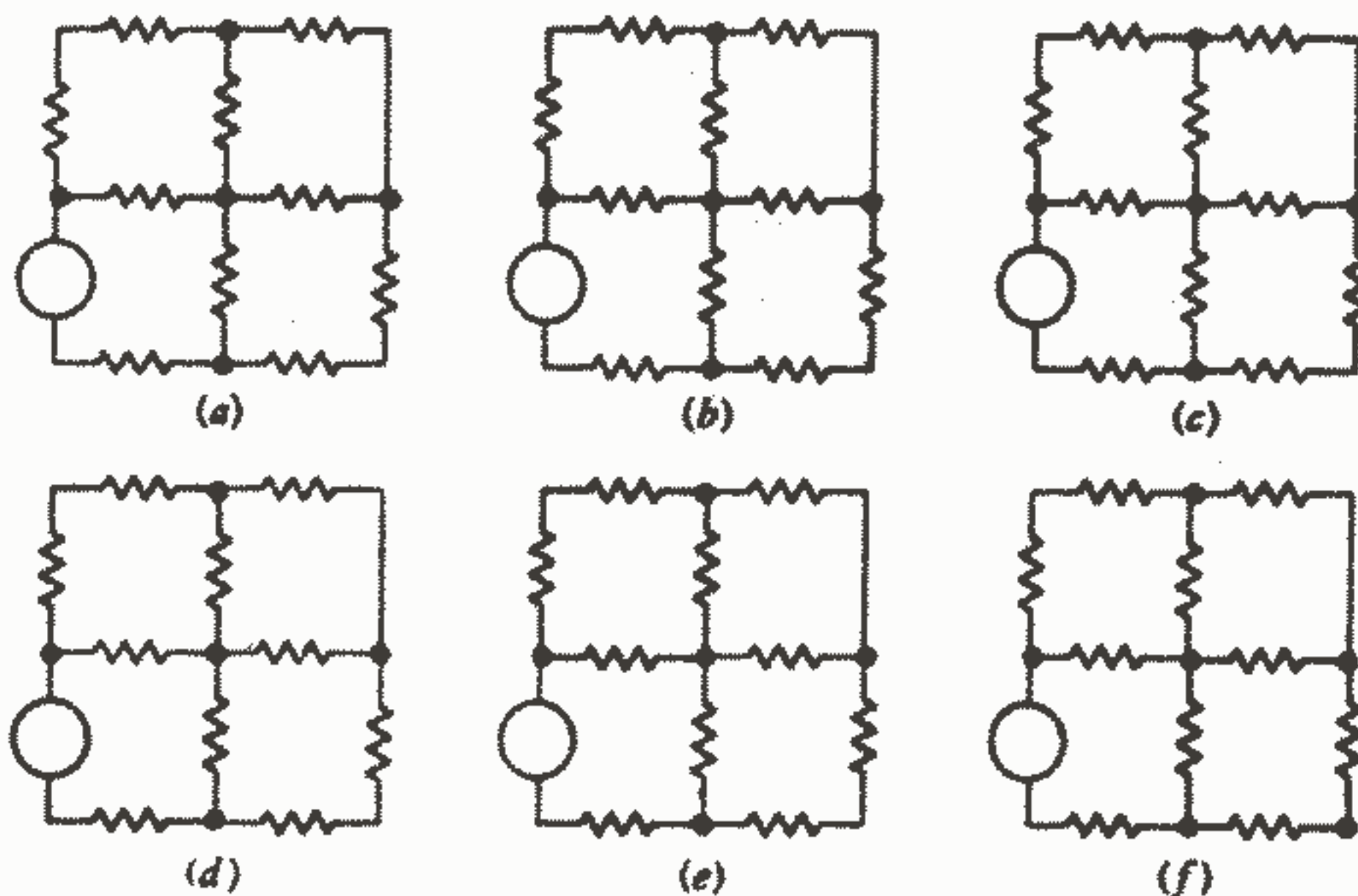
(c) یک شبکه مسطح را می‌توان طوری رسم نمود که غیر مسطح

به نظر می‌آید.

در فصل دوم کلمات مسیر، مسیر بسته و حلقه تعریف شدند. قبل از اینکه یک چشمه را تعریف کنیم، بیاید مجموعه‌ای از شاخه‌های رسم شده با خطوط ضخیم را در شکل ۸ - ۳ مورد توجه قرار دهیم. اولین مجموعه شاخه‌ها یک مسیر نیست زیرا هر چهار شاخه به گره مرکزی وصل شده‌اند و البته حلقه هم نمی‌تواند باشد. دسته دوم شاخه‌ها هم یک مسیر نمی‌باشد زیرا برای رسم آن حتماً باید از گره مرکزی دوبار عبور کنیم.

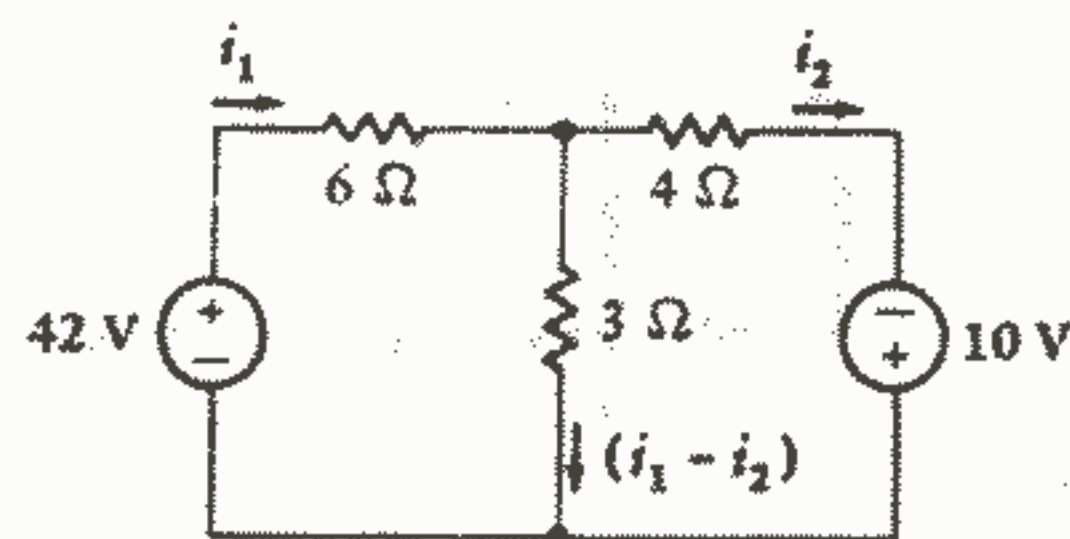
چهار مسیر باقیمانده همگی حلقه می‌باشند. این مدار شامل ۱۱ شاخه می‌باشد.

چشمه خاصیتی است از مدار مسطح و برای مدار غیرمسطح تعریف نشده است. ما چشمه را به عنوان حلقه‌ای که شامل حلقه دیگری در داخل خودش نباشد تعریف می‌کنیم. بنابراین حلقه‌های شکل ۸ - ۳ c, d چشمه نیستند در حالیکه حلقه‌های e, f چشمه می‌باشند. وقتی که مداری به صورت تمیز به فرم مسطح رسم شود اغلب دارای ظاهری به شکل یک پنجره چند قاب شیشه‌ای می‌باشد که هر قاب شیشه را می‌توان به عنوان یک چشمه تصور نمود. اگر شبکه‌ای مسطح باشد می‌توان از تحلیل چشمه‌ای برای تحلیل آن استفاده نمود. این تکنیک مفهوم جریان چشمه‌ای را در بر دارد که ما با در نظر گرفتن تحلیل مدار دو چشمه‌ای شکل ۹ - ۳ آن را معرفی خواهیم کرد.



شکل ۸ - ۳: (a) مجموعه شاخه‌هایی که به وسیله خطوط ضخیم مشخص شده‌اند نه یک مسیر می‌باشند و نه یک حلقه. (b) مجموعه شاخه‌ها در این حالت یک مسیر نیست زیرا باید از گره مرکزی دو بار عبور کنیم. (c) این مسیر یک حلقه است اما یک چشمه نیست، زیرا حلقه‌هایی دیگری را هم دربر دارد. (d) این مسیر هم یک حلقه است اما یک چشمه نیست. (e) و (f) هر یک از این مسیرها هم حلقه و هم چشمه می‌باشند.

همانگونه که در مدار تک حلقه‌ای انجام دادیم، با فرض نمودن یک جریان در یکی از شاخه‌ها شروع می‌کنیم. بیا باید جریانی را که از مقاومت 6Ω به سمت راست جاری است i_1 بنامیم. قصد داریم قانون ولتاژ کیرشوف را حول هر یک از دو چشمه اعمال کنیم و دو معادله حاصل برای تعیین دو جریان مجهول کافی می‌باشند. بنابراین جریان دیگری به نام i_2 در مقاومت 4Ω رو به راست انتخاب می‌کنیم. ما همچنین می‌توانیم جریان دیگری به نام i_3 در شاخه مرکزی رو به پایین انتخاب کنیم اما از قانون جریان کیرشوف واضح است که این جریان بر حسب دو جریان قبلی عبارت از $(i_1 - i_2)$ می‌باشد. جریانه‌ای فرض شده در شکل ۹ - ۳ نشان داده شده‌اند.



شکل ۹ - ۳: دو جریان i_1 و i_2 در یک مدار دو چشمه‌ای در نظر گرفته شده‌اند.

با پیروی از روش حل مدار تک حلقه‌ای، اکنون قانون ولتاژ کیرشوف را به چشمه سمت چپ اعمال می‌کنیم:

$$9 i_1 - 3 i_2 = 42 \text{ (V) و یا } -42 + 6 i_1 + 3 (i_1 - i_2) = 0$$

و سپس آن را به چشمه سمت راست اعمال می‌کنیم:

$$-3 (i_1 - i_2) + 4 i_2 - 10 = 0$$

$$\text{و یا: (۸) } -3 i_1 + 7 i_2 = 10$$

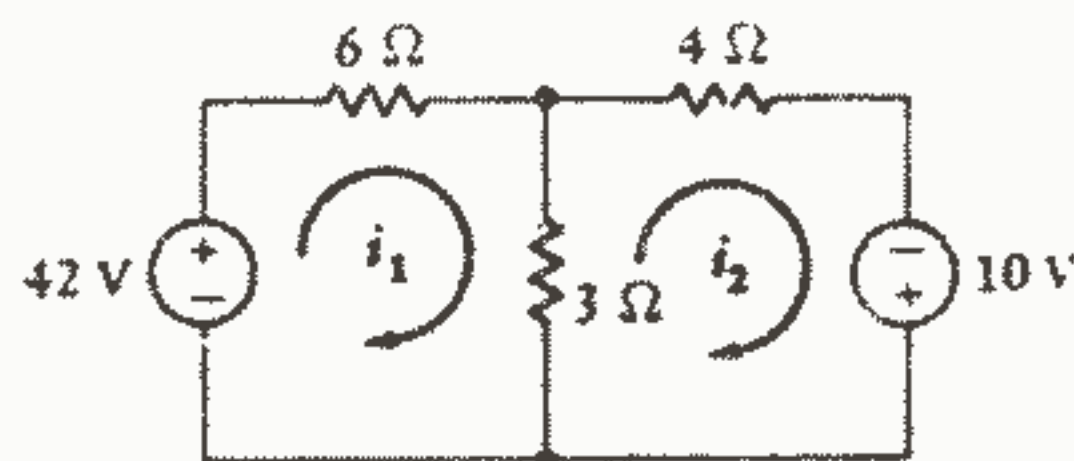
معادلات (۷) و (۸) معادلات مستقلی هستند و نمی‌توان یکی را از روی دیگری به دست آورد. اینها دو معادله و دو مجهول هستند و بسادگی می‌توان جواب آنها را به دست آورد: i_1 برابر ۶ A و i_2 برابر ۴ A و در نتیجه $(i_1 - i_2)$ برابر ۲ A می‌باشد. ولتاژ و قدرت را هم در صورت لزوم سرعت می‌توان به دست آورد.

اگر مدار ما شامل M چشمه می‌بود آنگاه باید M جریان شاخه فرض می‌کردیم و M معادله مستقل می‌نوشتیم.^۲ راه حل کلی را می‌توان از طریق استفاده از دترمینانها به دست آورد. حال بیایید همین مسئله را با روش کمی متفاوت با استفاده از جریانهای چشمه‌ای مورد توجه قرار دهیم. جریان چشمه‌ای را به عنوان جریانی که فقط حول محیط یک چشمه جاری است تعریف می‌کنیم. اگر چشمه سمت چپ مسئله‌مان را چشمه ۱ بنامیم آنگاه می‌توانیم یک جریان چشمه‌ای i_1 را که در جهت عقربه‌های ساعت حول این چشمه جاری است در نظر بگیریم. یک جریان چشمه‌ای با یک فلش منحنی که داخل چشمه مربوطه رسم می‌شود، نشان داده می‌شود که این موضوع در شکل ۱۰ - ۳ نمایش داده شده است.

۱ - در قسمت ۸-۳ نشان خواهیم داد که معادلات چشمه همیشه مستقل هستند.

۲ - اثبات این موضوع را در قسمت ۸ - ۳ می‌توان یافت.

جریان چشمه‌ای i_2 هم در حلقه دیگر در جهت عقربه‌های ساعت وضع شده است. با وجود اینکه جهت دلخواه است ولی ما همیشه جریانهای چشمه‌ای را در جهت عقربه‌های ساعت انتخاب خواهیم کرد زیرا در این صورت یک تقارن خاصی که خطاها را تقلیل می‌دهد در معادلات حاصل می‌شود. ما دیگر هیچ جریان و یا فلش جریانی که به طور مستقیم در هر شاخه مدار نشان داده شده باشد، نداریم. جریان هر شاخه را باید با توجه به جریانهای چشمه‌ای که در هر چشمه‌ای که آن شاخه در آن قرار دارد جاری می‌باشند، تعیین نمود. این امر مشکل نیست زیرا بدیهی است که هیچ شاخه‌ای نمی‌تواند در بیش از دو چشمه ظاهر شود. مثلاً مقاومت 3Ω در هر دو چشمه ظاهر می‌شود و جریانی که از آن پایین می‌آید برابر است با $(i_1 - i_2)$. مقاومت 6Ω فقط در چشمه ۱ ظاهر می‌شود و جریانی که در آن به راست می‌رود برابر است با جریان چشمه‌ای i_1 .



شکل ۱۰ - ۳: یک جریان چشمه‌ای در جهت عقربه‌های ساعت به هر یک از چشمه‌های یک مدار مسطح نسبت داده شده است.

یک جریان چشمه‌ای را اغلب می‌توان به عنوان یک جریان شاخه مشخص نمود مانند i_1 ، i_2 در بالا اگر چه این امر همیشه صادق نیست و برای بررسی یک شبکه نه چشمه‌ای مربع به زودی خواهیم دید که جریان چشمه مرکزی را نمی‌توان به صورت جریان هیچ یک از شاخه‌ها در نظر گرفت. یکی از بزرگترین مزایای استفاده از جریانهای چشمه‌ای این واقعیت است که قانون جریان کیرشوف خودبخود ا قناع می‌شود. اگر یک جریان چشمه‌ای به داخل یک گره جاری شود، بدیهی است که از آن خارج هم خواهد شد.

بنابراین توجه خود را به اعمال KVL به هر چشمه معطوف می‌کنیم. برای چشمه سمت چپ داریم:

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

$$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0 \quad \text{و برای چشمه سمت راست داریم:}$$

و این دو معادله با معادلات (۷) و (۸) معادل می‌باشند.

حال بیایید مدار پنج گرهی، هفت شاخه‌ای و سه چشمه‌ای شکل ۱۱ - ۳ را در نظر بگیریم. سه جریان چشمه‌ای لازم به طوریکه نشان داده شده، مشخص شده‌اند و ما طبق روش، KVL را در هر چشمه به کار می‌بریم:

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 6 + 2(i_1 - i_3) = 0$$

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

$$2(i_3 - i_1) - 6 + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

پس از ساده کردن داریم:

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1$$

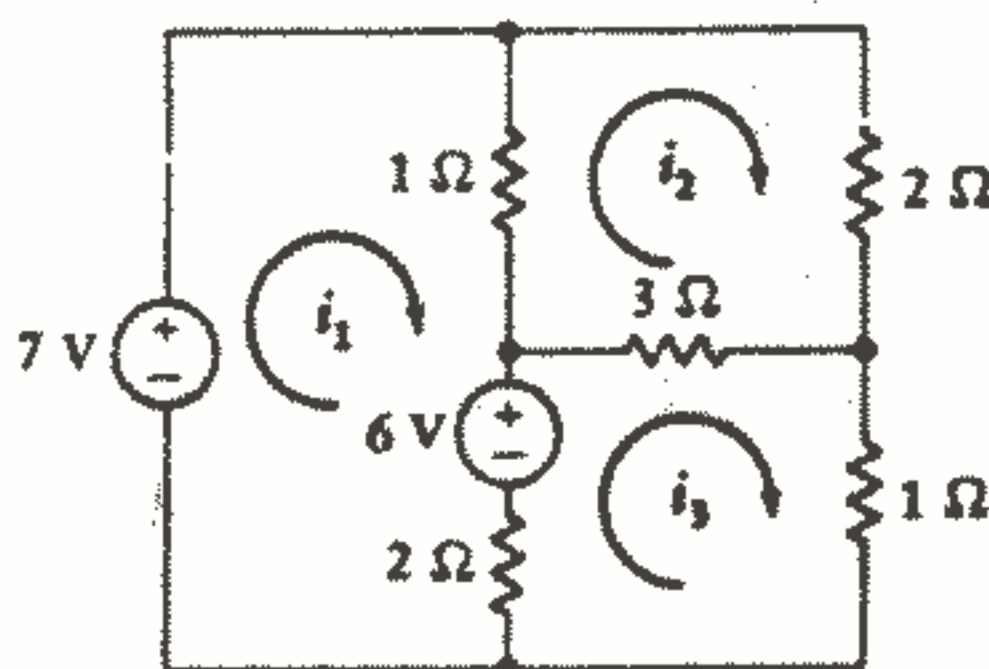
$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$

$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6$$

و با استفاده از دستور کرامر برای i_3 داریم:

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{117}{39} = 3 \text{ A}$$

سایر جریانهای چشمه‌ای عبارتند از: $i_1 = 3 \text{ A}$ ، $i_2 = 2 \text{ A}$



شکل ۱۱ - ۳: جریانهای چشمه‌ای i_1 و i_2 و i_3 در یک مدار پنج گرهی، هفت شاخه‌ای و سه چشمه‌ای فرض شده‌اند.

دوباره ملاحظه می‌کنیم که ما یک دترمینان مخرج داریم که نسبت به قطر اصلی اش متقارن است و عضوهای قطر اصلی مثبت بوده و سایر عضوها صفر و یا منفی می‌باشند. این امر برای

مدارهایی صادق است که فقط شامل منابع ولتاژ مستقل هستند و جریانهای چشمه‌ای در جهت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شده‌اند و عناصر سطر اول دترمینان ضرایب مرتب i_1, i_2, \dots, i_n در معادلات KVL در چشمه اول و عناصر سطر دوم متناظر با چشمه دوم و الی آخر می‌باشند. این رشته متقارن که در منخرج ظاهر می‌شود دترمینان ماتریس مقاومت شبکه می‌باشد.

$$R = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

حال چگونه باید این روند سر راست را وقتی که یک منبع جریان در شبکه موجود است، اصلاح کنیم؟ با الهام از تحلیل گره (و تناظر) احساس می‌کنیم که دو روش ممکن وجود دارد. یکی اینکه می‌توانیم ولتاژ مجهولی را در دو سر منبع جریان در نظر بگیریم و مانند قبل KVL را در هر چشمه اعمال کنیم و سپس جریان منبع را به جریانهای چشمه‌ای مشخص شده، مربوط سازیم. این روش عموماً مشکلتر می‌باشد.

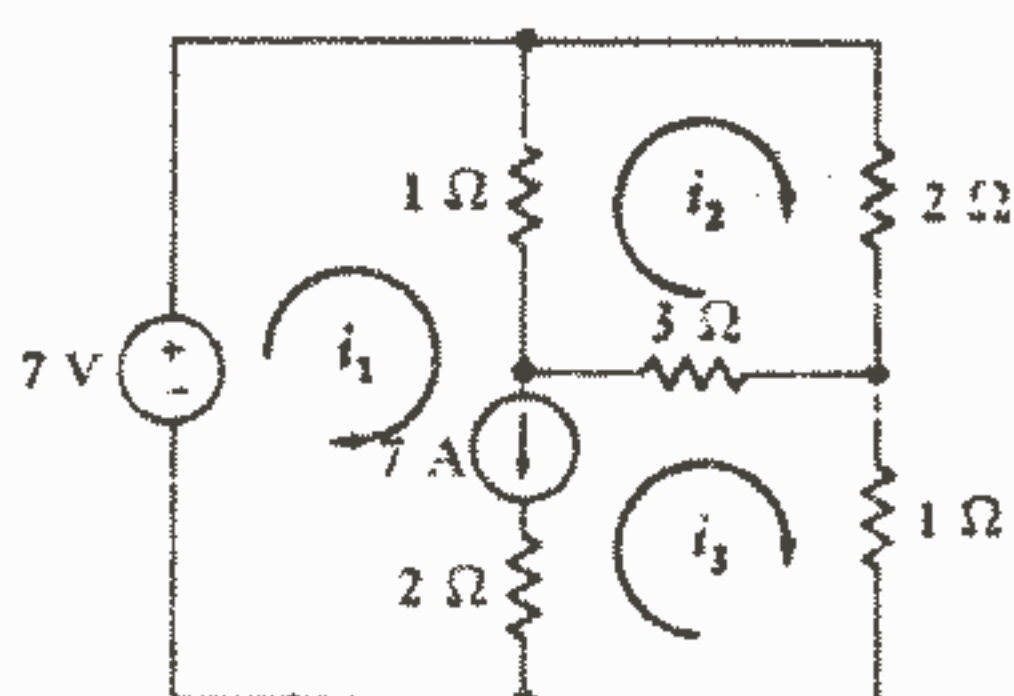
تکنیک بهتر روشی است که کاملاً مشابه روشن فوق نقطه در تحلیل گرهی می‌باشد. در آنجا ما فوق نقطه تشکیل دادیم و با محصور کردن کامل منبع ولتاژ در داخل فوق نقطه تعداد گره‌ها را به ازای هر منبع ولتاژ یک عدد کاهش دادیم. اکنون ما نوعی «فوق چشمه» را با استفاده از دو چشمه‌ای که دارای یک منبع جریان مشترک می‌باشند تشکیل می‌دهیم به طوریکه منبع جریان در داخل فوق چشمه قرار می‌گیرد. بنابراین تعداد چشمه‌ها را به ازای هر منبع جریان موجود یک عدد کاهش می‌دهیم. اگر منبع جریان در محیط مدار باشد آنگاه چشمه‌ای که منبع جریان در آن است حذف می‌شود.^۱

به عنوان یک مثال برای این روش، شبکه شکل ۱۲ - ۳ را که در آن یک منبع جریان مستقل VA در مرز مشترک دو چشمه قرار دارد، در نظر می‌گیریم. جریانهای چشمه‌ای i_1, i_2, i_3 مشخص شده‌اند و منبع جریان ما را وادار می‌سازد که یک فوق چشمه شامل چشمه‌های ۱ و ۳ ایجاد کنیم. با اعمال KVL در این حلقه داریم:

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

$$i_1 - 4i_2 + 4i_3 = 7 \quad \text{و یا} \quad (۹)$$

۱ - چنین منبع جریانی عنصر مشترکی است در چشمه‌ای که خارج کل مدار را احاطه می‌کند. درست همانگونه که برای گره مبنا معادله گرهی نمی‌نویسیم، برای این چشمه خارجی هم معادله KVL را نمی‌نویسیم.



شکل ۱۲ - ۳: تحلیل چشمه‌ای را به این مدار شامل یک منبع جریان به وسیله نوشتن KVL در حلقه ۷ V و ۱ Ω و ۳ Ω و ۱ Ω به کار برده‌ایم.

و در چشمه ۲ داریم:

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \quad (۱۰) \quad \text{و یا}$$

و سرانجام منبع جریان را به جریانهای چشمه‌ای فرض شده نسبت می‌دهیم:

$$i_1 - i_3 = 7 \quad (۱۱)$$

با حل معادلات (۹) تا (۱۱) داریم:

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{28}{14} = 2 \text{ A}$$

همچنین می‌توانیم به دست آوریم: $i_2 = 2.5 \text{ A}$ ، $i_1 = 9 \text{ A}$

وجود یک یا چند منبع وابسته فقط لازم می‌دارد که مقدار هر یک از این منابع و متغیری که آنها را کنترل می‌کند را بر حسب جریانهای چشمه‌ای فرض شده، بیان کنیم. مثلاً در شکل ۱۳ - ۳ توجه می‌کنیم که هم یک منبع جریان مستقل و هم یک منبع جریان وابسته در مدار موجود می‌باشد. سه جریان چشمه‌ای مشخص شده‌اند و KVL به چشمه ۲ اعمال شده است:

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

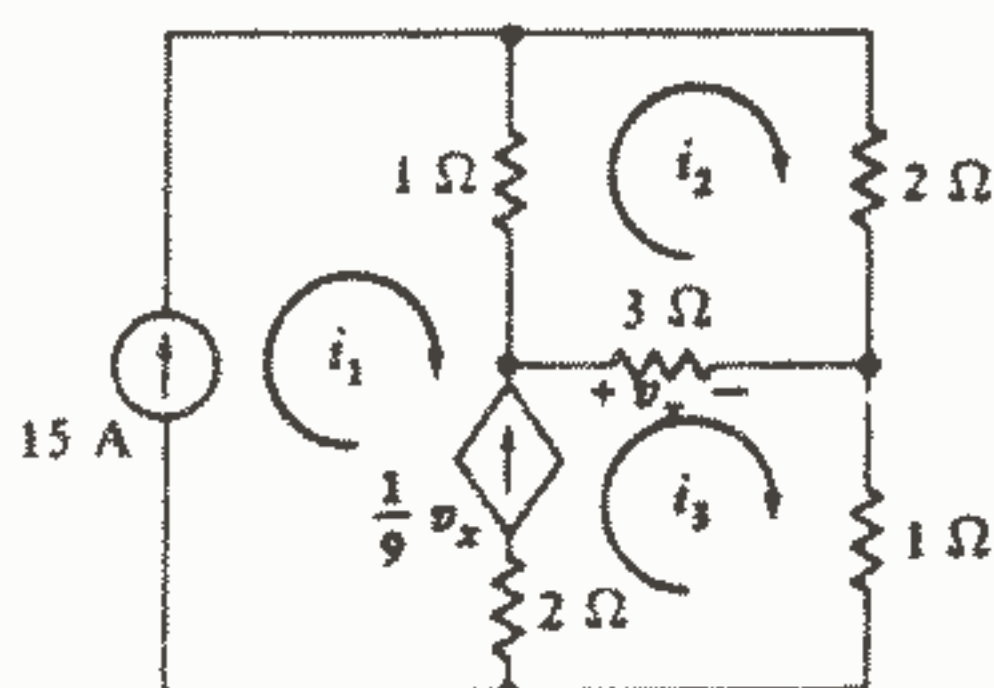
$$i_1 = 15 \text{ ، } \frac{1}{9} v_x = i_3 - i_1 = \frac{1}{9} [3(i_2 - i_1)] \rightarrow -i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$

$$i_1 = 15$$

$$-i_1 + \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 0$$

که از معادلات بالا داریم:

$$i_3 = 17A, i_2 = 11, i_1 = 15$$



شکل ۱۳ - ۳: وجود دو منبع جریان در این مدار سه چشمه‌ای لازم می‌دارد که KVL را فقط یک بار در چشمه ۲ به کار ببریم.

لارم به ذکر است که ما کمی وقت خود را در تعیین جریان چشمه‌ای i_1 در چشمه چپ تلف نمودیم و باید بطور ساده یک جریان چشمه‌ای با مقدار $15A$ را برای آن در نظر می‌گرفتیم. حال اجازه دهید روشی را که به وسیله آن معادلات چشمه‌ای را برای یک مدار مقاومتی به دست می‌آوریم به صورت زیر خلاصه کنیم:

۱ - اطمینان حاصل کنید که شبکه یک شبکه مسطح باشد. اگر غیر مسطح باشد نمی‌توان از تحلیل چشمه‌ای استفاده نمود.

۲ - یک مدار ساده و تمیز و مرتب رسم کنید. تمام مقادیر منابع و عناصر را مشخص کنید. مقادیر مقاومتی بر مقادیر هدایتی ترجیح داده می‌شوند. هر منبع باید دارای علائم مبناي خود باشد.

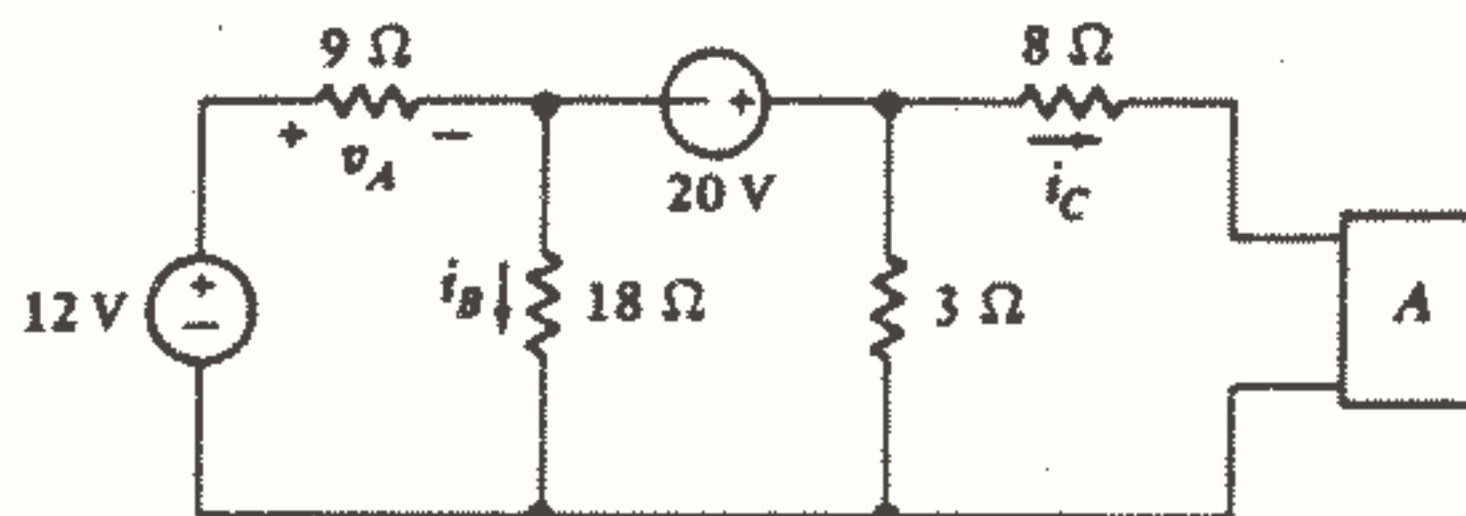
۳ - با فرض اینکه مدار دارای M چشمه باشد، در هر چشمه جریانهای چشمه‌ای در جهت عقربه‌های ساعت i_1, i_2, \dots, i_M در نظر بگیرید.

۴ - اگر مدار فقط شامل منابع ولتاژ باشد، قانون ولتاژ کیرشوف را در هر چشمه اعمال کنید. برای بدست آوردن ماتریس مقاومت اگر مداری فقط شامل منابع ولتاژ مستقل باشد، مجموع همه ولتاژهای مقاومتی در جهت عقربه‌های ساعت را مساوی با مجموع همه ولتاژهای منابع ولتاژ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت قرار دهید و جملات را از i_1 تا i_M مرتب کنید. برای هر منبع ولتاژ مربوط کنید، البته اگر قبلاً اینکار انجام شده باشد.

۵ - اگر مدار حاوی منابع جریان باشد برای هر منبع جریانی که در دو چشمه مشترک باشد یک فوق چشمه ایجاد کنید و قانون KVL را در حلقه‌ای که از عناصر غیرمشترک دو چشمه تشکیل شده است اعمال کنید. KVL را لازم نیست به چشمه‌ای که حاوی یک منبع جریان در محیط مدار باشد، اعمال کنید جریانه‌های چشمه‌ای تعیین شده نباید تغییر داده شوند. حال هر جریان منبع را به متغیرهای i_1, i_2, \dots, i_M مربوط کنید، البته اگر قبلاً اینکار انجام نشده باشد.

تمرین

- ۳ - ۳ - با استفاده از تحلیل چشمه v_A را در مدار شکل ۱۴ - ۳ پیدا کنید، اگر عنصر A:
- (a) یک منبع ولتاژ 4 V با علامت مثبت در بالا باشد.
- (b) یک مقاومت 9Ω باشد.
- (c) یک منبع جریان 600 mA با فلش رو به پایین باشد.
- جواب: $23.9, 23.6, 23.7\text{ V}$



شکل ۱۴ - ۳: به تمرینات ۳ - ۳ و ۳ - ۴ مراجعه کنید.

- ۴ - ۳ - با استفاده از تحلیل چشمه i_A را در شکل ۱۴ - ۳ پیدا کنید، اگر عنصر A:
- (a) یک منبع ولتاژ وابسته، $v_A, 0.2$ ، با علامت مثبت در بالا باشد.
- (b) یک منبع جریان وابسته، $i_B, 0.5$ ، با فلش رو به پایین باشد.
- جواب: $0.462\text{ A}, -0.281\text{ A}$

۴-۳- خطی بودن و جمع اثرها

تمام مدارهایی را که تاکنون تحلیل کرده‌ایم (و بعداً تحلیل خواهیم کرد) مدارهای خطی هستند. حال باید به طور دقیق‌تر یک مدار خطی را تعریف کنیم. با انجام اینکار سپس می‌توانیم مهمترین پی‌آمد خطی بودن یعنی اصل جمع اثرها را مورد توجه قرار دهیم. این اصل بسیار اساسی و بنیادی می‌باشد و به طور مکرر در مطالعه تحلیل مدارهای خطی تکرار خواهد شد.

در واقع مشکل بودن تحلیل مدارهای غیرخطی به دلیل این است که نمی‌توان از اصل جمع اثرها برای تحلیل آنها استفاده نمود.

اصل جمع اثرها بیان می‌دارد که پاسخ (یک جریان و یا ولتاژ مطلوب) هر نقطه یک مدار خطی که دارای بیش از یک منبع مستقل باشد برابر است با مجموع پاسخهای ناشی از هر یک از آن منابع به طور جداگانه. در بحثی که در پی می‌آید، مفهوم «خطی» و «به تنهایی فعال بودن» را مورد بررسی قرار خواهیم داد. همچنین اشاره‌ای هم به فرم کمی وسیع‌تر قضیه خواهیم داشت. اجازه دهید ابتدا یک عنصر خطی را به عنوان عنصر غیرفعال که دارای رابطه ولتاژ - جریان خطی می‌باشد تعریف کنیم. منظور ما از «رابطه ولتاژ - جریان خطی» به طور ساده این است که حاصلضرب جریان متغیر با زمان آن عنصر در مقدار ثابت K ، حاصلضرب ولتاژ متغیر با زمان آن عنصر در مقدار ثابت K را به دنبال داشته باشد. فعلاً فقط یک عنصر غیرفعال یعنی مقاومت تعریف شده است و رابطه ولتاژ - جریان آن، $v(l) = Ri(l)$ ، هم بدیهی است که خطی می‌باشد. در واقع اگر $v(l)$ به صورت تابعی از $i(l)$ رسم شود، حاصل یک خط راست می‌باشد در فصل ۴ خواهیم دید که معادلات تعریف‌کننده ولتاژ - جریان برای خود القایی و خازن هم خطی می‌باشد و در فصل ۱۵ هم خواهیم دید که معادله تعریف‌کننده القاء متقابل هم خطی می‌باشد.

ما همچنین باید یک منبع وابسته خطی را به عنوان یک منبع جریان یا ولتاژ وابسته‌ای که جریان یا ولتاژ خروجی آن فقط متناسب با توان اول متغیر جریان یا ولتاژ و یا مجموع این کمیتها باشد، تعریف کنیم.

یعنی یک منبع ولتاژ وابسته $v_s = 14v_2 - 7i_1$ ، خطی ولی

$$v_s = 0.7i_1^2, \quad v_s = 0.7i_1 v_2$$

غیر خطی می‌باشند.

حال می‌توانیم یک مدار خطی را به عنوان مداری که تماماً از منابع مستقل، منابع وابسته خطی و عناصر خطی تشکیل یافته است تعریف کنیم. از این تعریف می‌توان نشان داد که «پاسخ

متناسب است با منبع» و یا اینکه حاصلضرب همه جریانها و ولتاژهای منابع مستقل در ضریب ثابت K همه پاسخهای جریان و ولتاژ را (از قبیل خروجی جریان و ولتاژ منابع وابسته) به اندازه همان ضریب K افزایش می دهد.

مهمترین نتیجه خطی بودن، جمع اثرها می باشد. بیاید اصل جمع اثرها را با بررسی مدار شکل ۱۵ - ۳ که حاوی دو منبع جریان مستقل i_a ، i_b می باشد، باز کنیم. این منابع را اغلب «تابع تحریک» و ولتاژهایی را که آنها بین گره ۱ و ۲ و گره مبنا ایجاد می کنند «تابع پاسخ» و یا به اختصار «پاسخ» می نامند. هم توابع تحریک و هم پاسخها می توانند تابعی از زمان باشند. دو معادله گرهی این مدار عبارتند از:

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \quad (12)$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \quad (13)$$

حال اجازه دهید آزمایش X را انجام دهیم. دو تابع تحریک را با i_{ax} ، i_{bx} تعویض می کنیم و حال دو ولتاژ مجهول چیز دیگری خواهند بود که ما آنها را v_{1x} ، v_{2x} می نامیم، بنابراین داریم:

$$0.7v_{1x} - 0.2v_{2x} = i_{ax} \quad (14)$$

$$-0.2v_{1x} + 1.2v_{2x} = i_{bx} \quad (15)$$

سپس آزمایش Y را با تعویض منابع جریان به وسیله i_{ay} ، i_{by} و در نظر گرفتن پاسخها به صورت v_{1y} ، v_{2y} انجام می دهیم:

$$0.7v_{1y} - 0.2v_{2y} = i_{ay} \quad (16)$$

$$-0.2v_{1y} + 1.2v_{2y} = i_{by} \quad (17)$$

این سه دسته معادله مدار یکسانی را با منابع جریان مختلف توصیف می کنند. حال بیاید دو دسته معادله آخر را با هم جمع و یا «رویهم نهی» کنیم. (کلمه Superpose به معنی رویهم نهی یا برهم نهی می باشد که بیشتر یک اصطلاح هندسی است و از نظر گرامری اسم معنی آن می شود Superposition که در برخی متون فارسی به نام اصل برهم نهی هم ترجمه شده است. مترجم). با جمع کردن معادلات (۱۴) و (۱۶) داریم:

$$(0.7v_{1x} + 0.7v_{1y}) - (0.2v_{2x} + 0.2v_{2y}) = i_{ax} + i_{ay} \quad (18)$$

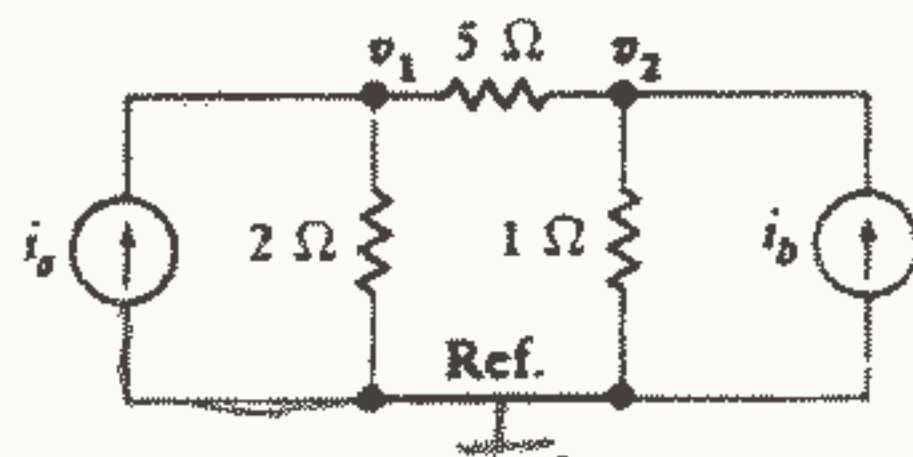
$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \quad (12)$$

و با جمع کردن (۱۵) و (۱۷) خواهیم داشت.

$$-(0.2v_{1x} + 0.2v_{1y}) + (1.2v_{2x} + 1.2v_{2y}) = i_{bx} + i_{by} \quad (19)$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \quad (13)$$

که به منظور مقایسه راحتتر معادله (۱۲) بلافاصله زیر (۱۸) و معادله (۱۳) زیر (۱۹) نوشته شده است:



شکل ۱۵ - ۳: یک مدار سه گره‌ای شامل دو تابع تحریک، که برای توضیح اصل جمع اثرها به کار رفته است.

خطی بودن همه این معادلات به ما اجازه می‌دهد که معادله (۱۸) را با (۱۲) و (۱۹) را با (۱۳) مقایسه کنیم و نتیجه جالبی بگیریم. اگر ما i_{ax} ، i_{ay} را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مجموع آنها i_a شود و i_{bx} ، i_{by} را به گونه‌ای انتخاب کنیم که جمع آنها i_b شود، آنگاه جوابهای مطلوب v_1 ، v_2 را می‌توان با «جمع کردن» v_{1x} با v_{1y} ، v_{2x} با v_{2y} به دست آورد. به عبارت دیگر ما می‌توانیم آزمایش X و آزمایش Y را انجام دهیم و نتیجه را یادداشت کنیم و سرانجام پاسخها را با هم جمع کنیم. اینها پاسخ مدار اصلی به منابع مستقلی خواهند بود که مجموع منابع مستقل به کار رفته در آزمایشهای X ، Y هستند. این است مفهوم اساسی موجود در اصل جمع اثرها.

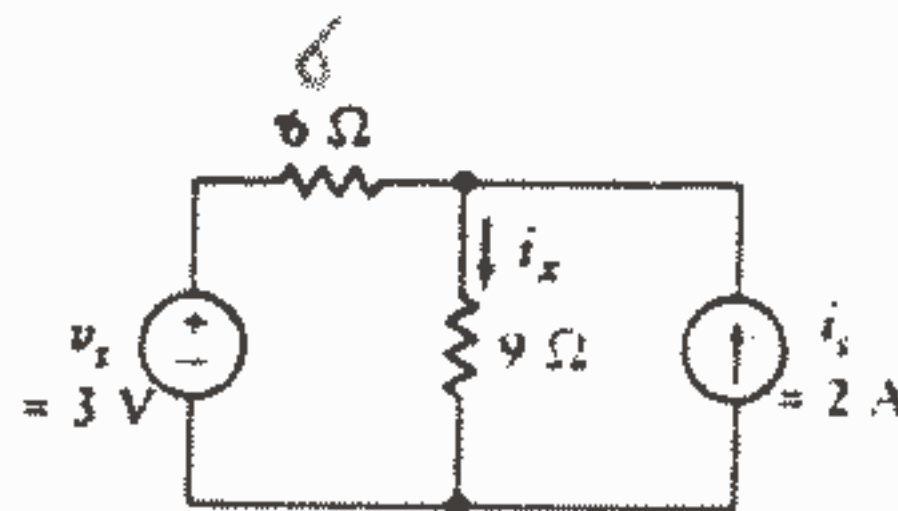
بدیهی است که ما می‌توانیم این نتایج را با تجزیه کردن هر منبع جریان به اجزاء زیادی، هر تعداد که بخواهیم، تعمیم دهیم و دلیلی وجود ندارد که نتوانیم آزمایشهای q, z را انجام دهیم. فقط لازم است که مجموع جبری اجزاء مساوی با جریان اولیه باشد. «قضیه جمع اثرها» معمولاً به صورت زیر بیان می‌شود:

در هر مدار خطی مقاومتی شامل چندین منبع، ولتاژ و جریان هر مقاومت یا منبع را می‌توان با جمع جبری نمودن ولتاژها و جریانهای منفردی که در اثر هر یک از منابع به طور جداگانه حاصل می‌شود، به دست آورد.

بنابراین اگر N منبع مستقل وجود داشته باشد، باید N آزمایش انجام دهیم. هر منبع مستقل فقط در یک آزمایش فعال می‌باشد. یک منبع ولتاژ مستقل غیرفعال برابر است با یک اتصال کوتاه و یک منبع جریان مستقل غیرفعال معادل با یک مدار باز می‌باشد. توجه داشته باشید

که منابع «وابسته» در هر آزمایش فعال می‌باشند. اگر چه، مداری که به عنوان مثال در بالا به کار رفته است نشان می‌دهد که قضیه را به صورت خیلی قویتر هم می‌توان بیان نمود یعنی اگر بخواهیم می‌توانیم گروهی از منابع مستقل را به طور دسته جمعی فعال و غیرفعال کنیم. مثلاً فرض کنید سه منبع مستقل موجود باشد، قضیه فوق بیان می‌دارد که ما می‌توانیم پاسخ را یا با فعال در نظر گرفتن یکی از منابع در هر دفعه و سپس جمع نمودن سه پاسخ به دست آوریم و یا به طریق دیگر یک بار جواب ناشی از منابع ۱ و ۲ فعال در مدار و بار دیگر جواب ناشی از منبع ۳ فعال در مدار را پیدا کنیم و دو پاسخ را با هم جمع کنیم. همچنین دلیلی وجود ندارد که یک منبع مستقل فقط باید مقدار اصلی خودش و صفر را در آزمایشات مختلف قبول کند، بلکه فقط لازم است که مجموع مقادیر مختلفی که می‌گیرد با مقدار اصلی اش مساوی باشد. اگر چه، تقریباً همیشه یک منبع غیرفعال را با ساده‌ترین مدار آن نمایش می‌دهند.

حال بیایید کاربرد اصل جمع اثرها را با بررسی مثالی که حاوی هر دو نوع منبع مستقل می‌باشد، توضیح دهیم.



شکل ۱۶ - ۳: مداری که شامل منبع ولتاژ و منبع جریان مستقل است و به سادگی با اصل جمع اثرها تحلیل می‌شود.

برای مدار شکل ۱۶ - ۳ بیایید از اصل جمع اثرها برای به دست آوردن جریان شاخه‌ای مجهول i_x استفاده کنیم. ابتدا می‌توانیم منبع جریان را مساوی صفر قرار دهیم و جزء i_x ناشی از منبع ولتاژ را برابر با ۲ A. به دست آوریم. سپس اگر منبع ولتاژ را مساوی صفر قرار دهیم و از قانون تقسیم جریان استفاده کنیم ملاحظه می‌کنیم که جزء دیگر i_x برابر ۸ A. می‌شود. جواب را به طور مفصل و با ذکر جزئیات به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$i_x = i_x|_{i_s=0} + i_x|_{v_s=0} = \frac{3}{6+9} + 2 \frac{6}{6+9} = 0.2 + 0.8 = 1.0 \text{ A}$$

چند تکنیک مفید تحلیل مدار ۱۰۳

به عنوان مثالی از کاربرد اصل جمع اثرها در مداری حاوی یک منبع وابسته، شکل ۱۷-۳ را مورد توجه قرار می‌دهیم. ما در جستجوی i_x هستیم و ابتدا منبع ۳ A را مدار باز می‌کنیم. معادلات چشمه برای تک چشمه باقیمانده در مدار عبارت است از:

$$-10 + 2i_x' + 1i_x' + 2i_x' = 0 \rightarrow i_x' = 2$$

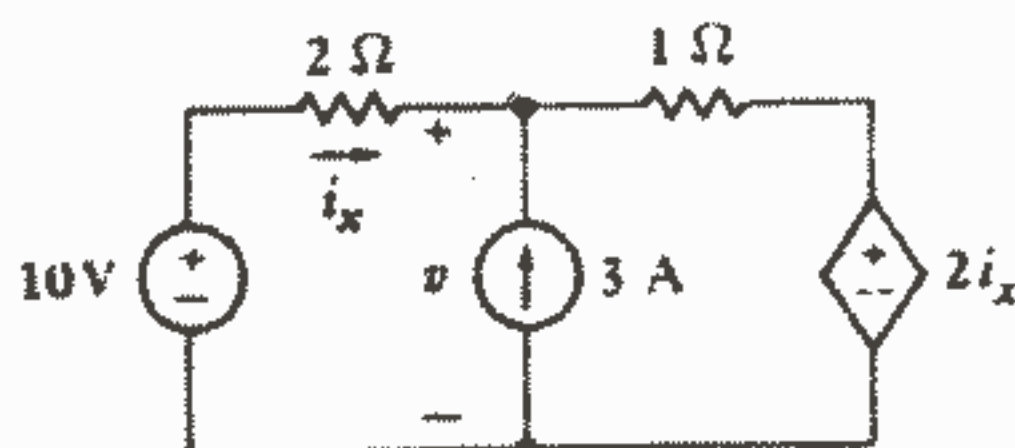
سپس منبع ۱۰ V را اتصال کوتاه می‌کنیم و معادله گره را می‌نویسیم:

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'' - 2i_x''}{1} = 3$$

حال کمیت کنترل‌کننده منبع وابسته را به v'' مربوط می‌کنیم:

$$v'' = -2i_x''$$

خواهیم داشت: $i_x'' = -0.6$ و در نتیجه: $i_x = i_x' + i_x'' = 2 - 0.6 = 1.4$



شکل ۱۷-۳: از اصل جمع اثرها برای تحلیل این مدار به این

صورت که ابتدا منبع ۳ A را با یک مدار باز و سپس منبع ۱۰ V را با یک اتصال کوتاه جایگزین می‌کنیم، استفاده می‌شود. منبع ولتاژ وابسته همیشه فعال است (مگر اینکه $i_x = 0$).

معمولاً چنین بر می‌آید که اگر به هنگام تحلیل یک مدار حاوی یک یا چند منبع وابسته با استفاده از اصل جمع اثرها بخواهیم در وقت صرفه‌جویی شود، همیشه باید حداقل دو منبع فعال باشند: یک منبع مستقل و تمام منابع وابسته.

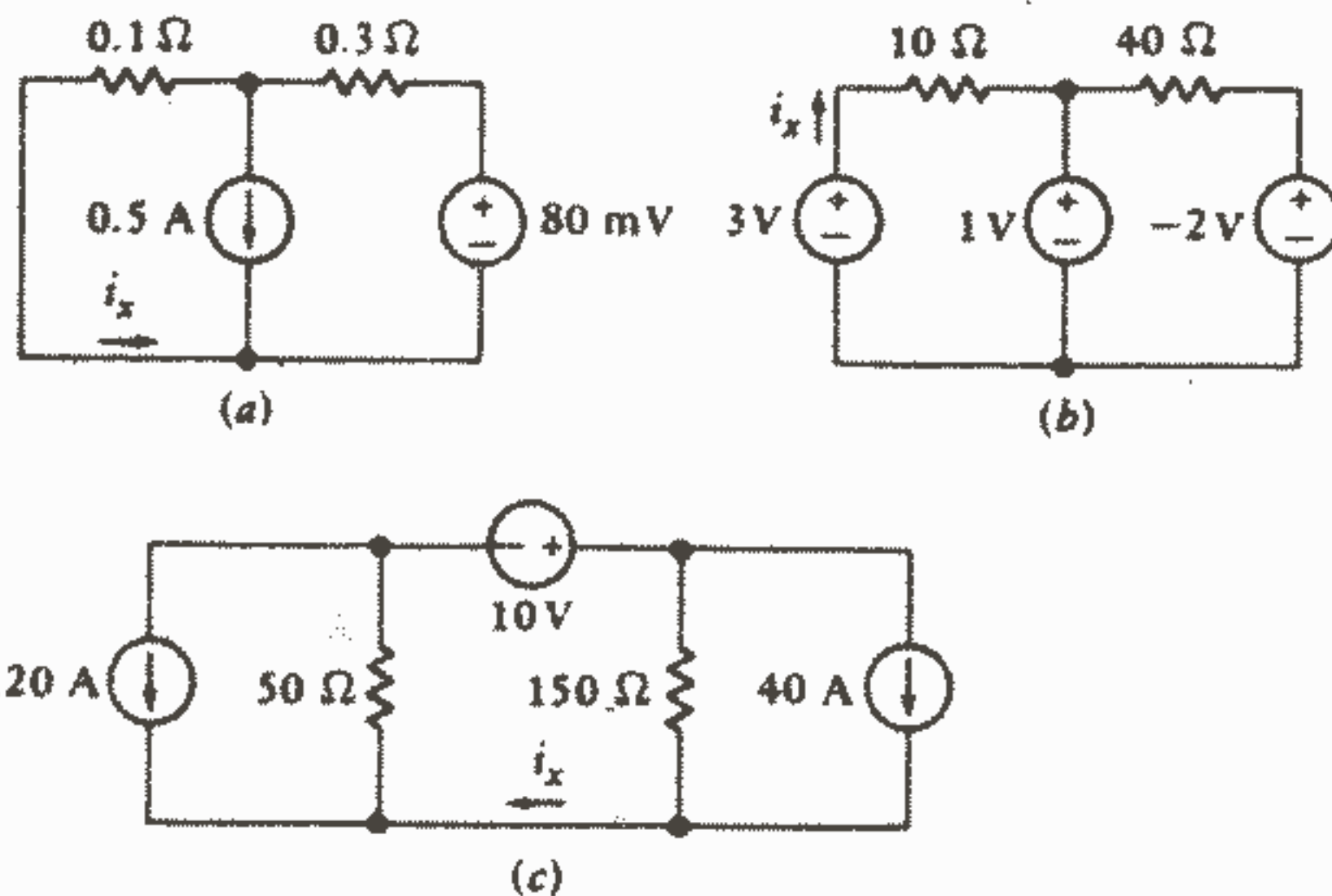
ما باید همیشه از محدودیتهای اصل جمع اثرها آگاه باشیم. این اصل را فقط برای پاسخهای خطی می‌توانیم به کار ببریم، بنابراین رایجترین پاسخ غیرخطی یعنی قدرت را نمی‌توان به وسیله اصل جمع آثار به دست آورد. مثلاً دو باتری یک ولتی را به طور سری با یک مقاومت در نظر بگیرید. واضح است که قدرت تحویل داده شده به مقاومت برابر ۴ W است، اما اگر به اشتباه از

اصل جمع اثرها استفاده کنیم ممکن است بگوییم که هر باتری قدرت 1 W را تحویل می‌دهد پس قدرت کل می‌شود 2 W ، که غلط می‌باشد.

تمرین

۵ - ۳ - با استفاده از اصل جمع اثرها i_x را در هر یک از مدارهای شکل ۱۸ - ۳ پیدا کنید.

جواب: 50 mA ، 200 mA ، -175 mA



شکل ۱۸ - ۳: به تمرین ۵ - ۳ مراجعه کنید.

۵ - ۳ تبدیل منابع

در تمام کارهای قبلی ما تا به حال به طور مدام از منابع ولتاژ و جریان ایده آل استفاده کرده‌ایم، حال وقت آن رسیده است که با در نظر گرفتن منابع عملی یک قدم به واقعیت نزدیکتر شویم. این منابع ما را قادر می‌سازند که نمایش واقعی‌تری از وسایل فیزیکی داشته باشیم. با تعریف نمودن منابع عملی ما سپس روشهایی را که به وسیله آنها منابع ولتاژ و جریان عملی را می‌توان بدون اینکه اثری در بقیه مدار داشته باشند تعویض نمود، مطالعه خواهیم کرد. چنین منابعی را منابع معادل خواهیم نامید. روشهای ما هم برای منابع مستقل و هم برای منابع وابسته قابل استفاده می‌باشند، اگر چه خواهیم دید که برای منابع وابسته چندان مفید نیستند.

منبع ولتاژ ایده آل به عنوان وسیله‌ای که ولتاژ ترمینالش مستقل از جریان عبوری از آن می‌باشد تعریف شد. یک منبع 1 V dc جریان 1 A در مقاومت 1Ω و جریان 1000000 A

در مقاومت $1\mu\Omega$ تولید می‌کند و می‌تواند قدرت بی‌نهایت تحویل دهد.

البته چنین منبعی به طور عملی وجود ندارد و ما توافق کردیم که یک منبع ولتاژ واقعی را بتوان به وسیله یک منبع ولتاژ ایده‌آل فقط در مواقعی که جریان و قدرت کم از آن کشیده شود، نمایش داد.

مثلاً یک باتری اتومبیل را می‌توان به طور تقریب یک منبع ولتاژ ایده‌آل دانست البته اگر جریان آن از چند آمپر تجاوز نکند.

هر کسی که تا به حال سعی کرده باشد یک اتومبیل را در حالیکه چراغهای جلوی آن روشن است استارت بزند، ملاحظه کرده است که چراغها هنگامی که از باتری می‌خواهیم جریان زیاد استارتر، 100 A یا بیشتر به علاوه جریان چراغها را تأمین نماید به طور محسوسی خاموش می‌شوند. تحت این شرایط به سختی می‌توان باتری را یک منبع ولتاژ ایده‌آل دانست. منبع ولتاژ ایده‌آل را با در نظر گرفتن اینکه در جریانهای زیاد ولتاژ ترمینالی آن کاهش می‌یابد، می‌توان اصلاح نمود. بیا بیا فرض کنیم که به طور تجربی مشاهده کرده‌ایم که ولتاژ ترمینالی یک باتری وقتی که جریان صفر باشد 12 V و وقتی که جریان 100 A از آن کشیده می‌شود 11 V می‌باشد. بنابراین یک مدل دقیقتر می‌تواند یک منبع ولتاژ ایده‌آل 12 V به طور سری با مقاومتی باشد که در جریان 100 A در دو سر آن 1 V ظاهر شود. این مقاومت 1Ω % می‌باشد و این مقاومت همراه با منبع ولتاژ ایده‌آل تشکیل یک منبع ولتاژ عملی را می‌دهند بنابراین ما از ترکیب سری دو عنصر مداری ایده‌آل، یک منبع ولتاژ مستقل و یک مقاومت، برای مدل نمودن یک وسیله واقعی استفاده می‌کنیم.

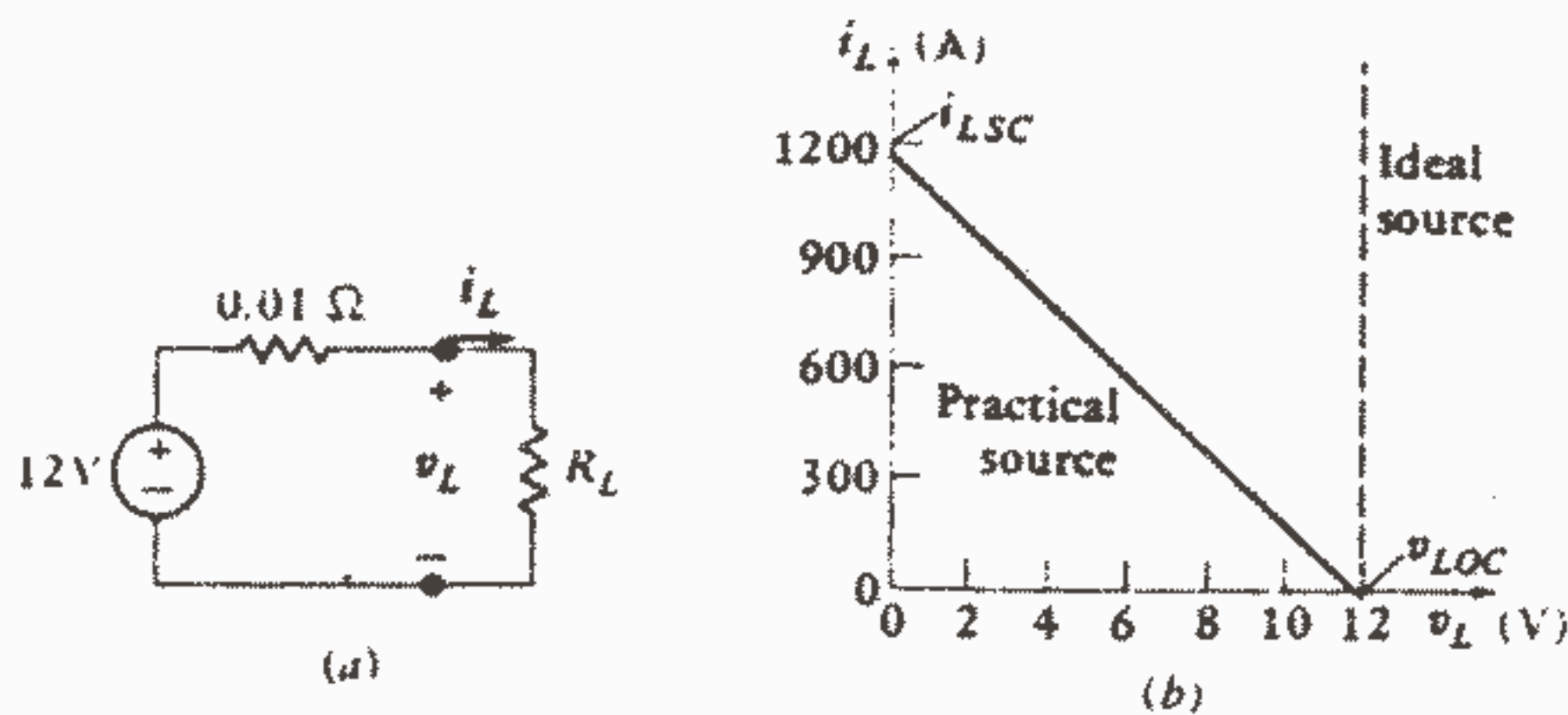
البته نباید انتظار داشته باشیم که چنین ترکیبی از عناصر ایده‌آل در داخل باتری ما موجود باشد. هر وسیله واقعی به وسیله رابطه ولتاژ - جریان معینی در ترمینالهایش مشخص می‌شود و مسئله ما پیدا کردن ترکیبی از عناصر ایده‌آل می‌باشد که بتواند یک مشخصه ولتاژ - جریان مشابهی را، حداقل در محدوده مفیدی از جریان، ولتاژ و قدرت، ارائه کند.

این منبع ولتاژ عملی خاص که به یک مقاومت بار عمومی R_L وصل شده است، در شکل ۱۹a-۳ نشان داده شده است. ولتاژ دو سر منبع عملی همان ولتاژ دو سر R_L است که با v_L نشان داده شده است.

شکل ۱۹b-۳ نمودار جریان بار i_L را نسبت به ولتاژ بار v_L برای منبع فوق‌الذکر نشان می‌دهد. معادله KVL را برای مدار شکل ۱۹a-۳ می‌توان بر حسب i_L ، v_L نوشت:

$$12 = 0.01i_L + v_L \rightarrow i_L = 1200 - 100v_L$$

این یک معادله خطی بر حسب i_L ، v_L است و نمودار شکل b ۱۹ - ۳ یک خط راست می باشد هر نقطه روی خط متناظر است با یک مقدار متفاوتی از R_L . مثلاً نقطه وسط خط راست وقتی به دست می آید که مقاومت بار مساوی با مقاومت داخلی منبع واقعی یعنی $R_L = 1\Omega$ شود. در اینجا ولتاژ بار فقط یک دوم ولتاژ منبع ایده آل است.



شکل ۱۹ - ۳: (a) یک منبع عملی که رفتار یک باتری ۱۲ V را تقریب می کند در حالی که به یک بار R_L وصل شده است نشان داده شده است. (b) رابطه بین i_L و v_L خطی می باشد.

وقتی که $R_L = \infty$ و هیچ جریانی به وسیله بار کشیده نمی شود، در این صورت منبع عملی مدار باز است و ولتاژ ترمینال آن و یا ولتاژ مدار باز عبارت است از $v_{Loc} = 12\text{ V}$. اگر از طرف دیگر $R_L = 0$ و بدینوسیله ترمینالهای بار اتصال کوتاه شود آنگاه یک جریان بار یا جریان اتصال کوتاه $i_{Lsc} = 1200\text{ A}$ عبور خواهد کرد. در عمل چنین تجربه ای احتمالاً منجر به نابودی اتصال کوتاه، باتری و هر وسیله اندازه گیری موجود در مدار خواهد شد. از آنجاییکه نمودار i_L نسبت به v_L یک خط مستقیم است باید تذکر دهیم که مقادیر i_{Lsc} ، v_{Loc} به طور یکتا کل منحنی i_L-v_L را مشخص می سازند.

خط چین عمودی نشاندهنده نمودار i_L-v_L برای یک منبع ولتاژ ایده آل می باشد که ولتاژ ترمینال برای هر مقدار جریان بار ثابت می ماند. برای منبع ولتاژ عملی، ولتاژ ترمینال فقط وقتی که جریان بار نسبتاً کوچک باشد مقداری نزدیک به منبع ایده آل دارد.

حال بیاید یک منبع ولتاژ عملی به طوریکه در شکل a ۲ - ۳ نشان داده شده است در نظر بگیریم ولتاژ منبع ایده آل برابر v_s می باشد و یک مقاومت R_{sv} بنام مقاومت داخلی یا مقاومت

خروجی بطور سری با آن قرار دارد. یک بار دیگر توجه می‌دهیم که این مقاومت واقعاً وجود ندارد و یا ما آن را با سیم و لحیم در مدار قرار نداده‌ایم و فقط نشاندهنده کاهش ولتاژ ترمینال به هنگام افزایش جریان بار می‌باشد. وجود آن ما را قادر می‌سازد که رفتار یک منبع ولتاژ واقعی را دقیقتر مدل‌سازی کنیم.

رابطه خطی بین v_L ، i_L عبارت است از:

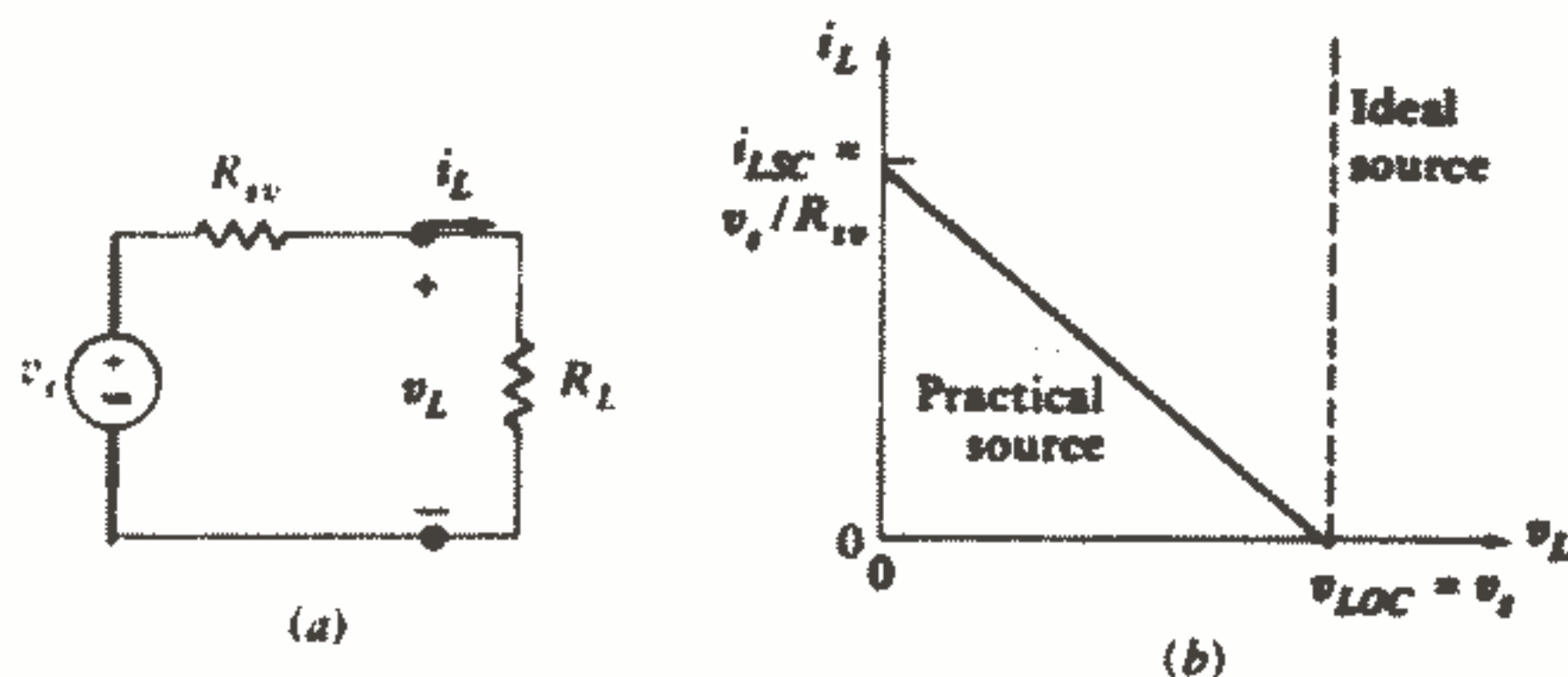
$$v_L = v_s - R_{sv}i_L \quad (20)$$

که این رابطه در شکل b - ۲۰ - ۳ رسم شده است. ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه عبارتند از:

$$v_{Loc} = v_s \quad (21)$$

$$i_{Lsc} = \frac{v_s}{R_{sv}} \quad (22)$$

و باز هم این مقادیر نقاط تقاطع خط راست در شکل b - ۲۰ - ۳ می‌باشند و آن را به طور کامل تعریف می‌کنند.



شکل ۲۰ - ۳: (a) یک منبع ولتاژ عملی کلی که به مقاومت بار R_L وصل شده است.

(b) ولتاژ ترمینال با افزایش i_L و کاهش $v_L = v_s / i_L$ ، کاهش می‌یابد.

یک منبع جریان ایده‌آل هم در دنیای واقعی وجود ندارد و هیچ وسیله‌ای نیست که جریان ثابتی را طرف‌نظر از مقاومت باری که به آن وصل می‌شود و یا ولتاژ دو سر ترمینالهایش، تحویل دهد. مدارهای ترانزیستوری خاصی جریان ثابتی را در محدوده وسیعی از مقاومت‌های بار تحویل می‌دهند اما مقاومت را همیشه به اندازه کافی بزرگ می‌گیرند که جریان آن بسیار کوچک باشد. واضح است که قدرت بینهایت هرگز قابل دسترس نخواهد بود.

یک منبع جریان عملی به صورت یک منبع جریان ایده آل موازی با یک مقاومت داخلی R_{si} تعریف می‌شود. چنین منبعی در شکل ۳-۲۱ a نشان داده شده است و جریان i_L و ولتاژ v_L مربوط به یک مقاومت بار R_L نشان داده شده‌اند. واضح است که:

$$i_L = i_s - \frac{v_L}{R_{si}} \quad (23)$$

که باز هم یک رابطه خطی می‌باشد ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه عبارتند از:

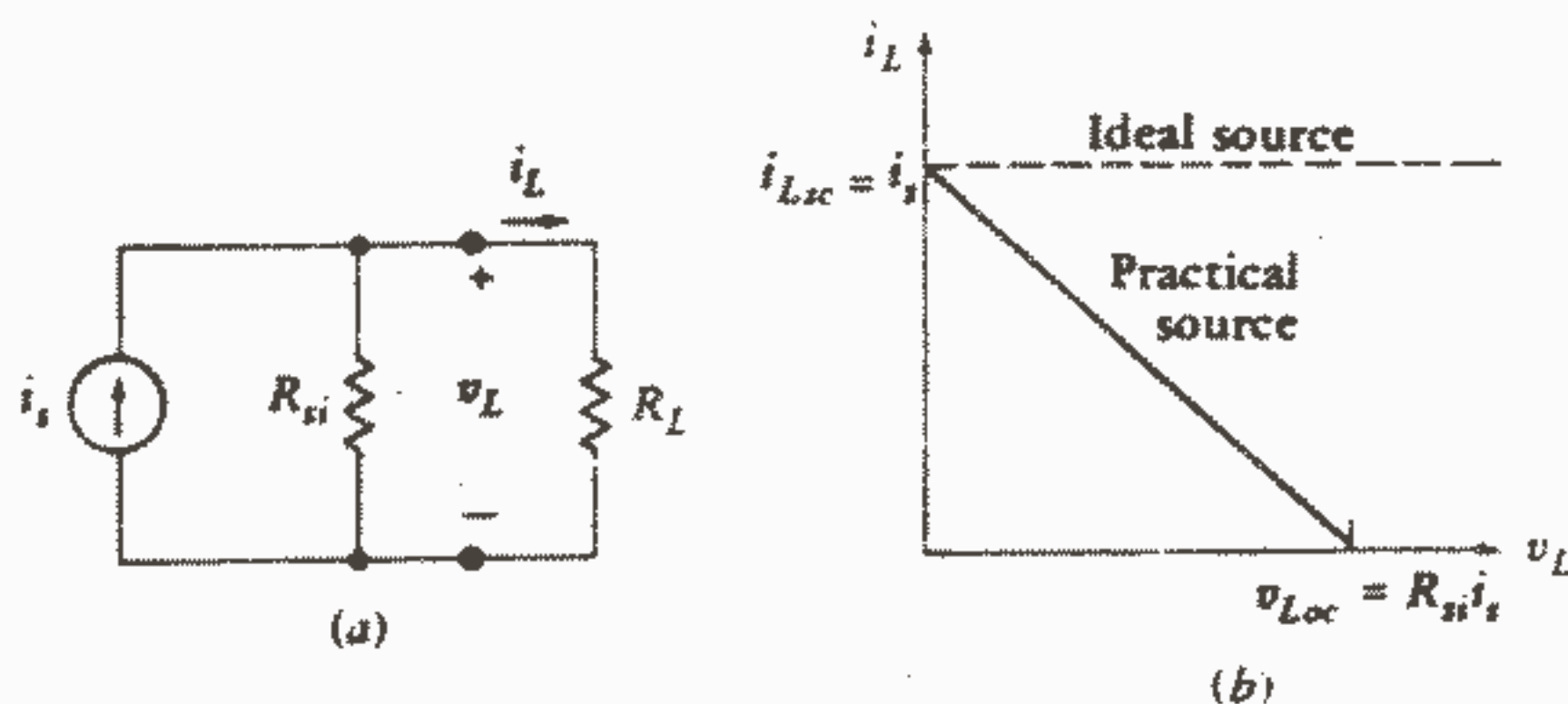
$$v_{Loc} = R_{si} i_s \quad (24)$$

$$i_{Lsc} = i_s \quad (25)$$

تغییرات جریان بار با تغییر ولتاژ بار را می‌توان با تغییر دادن مقدار R_L مطابق شکل ۳-۲۱ b مورد بررسی قرار داد. خط راست از اتصال کوتاه و یا انتهای شمال غربی به مدار باز یا جنوب شرقی با افزایش R_L از صفر تا بینهایت اهم، کشیده شده است: نقطه وسط در $R_L = R_{si}$ واقع می‌شود. بدیهی است که جریان i_L و جریان منبع ایده آل i_s فقط برای مقادیر کوچک ولتاژ بار، تقریباً مساوی هستند.

با تعریف نمودن هر دو منبع عملی اکنون آماده‌ایم که معادل بودن آنها را مورد بحث قرار دهیم.

(ما در صورتی دو منبع را معادل تعریف خواهیم کرد که مقادیر یکسان v_L ، i_L را هنگام اتصال به مقادیر یکسان R_L تولید نمایند صرفنظر از اینکه مقدار R_L چقدر باشد) از آنجاییکه $R_L = 0$ و $R_L = \infty$ هم دو مقدار از مقادیر R_L می‌باشند، پس منابع معادل ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه یکسانی را ارائه می‌کنند. به عبارت دیگر اگر دو منبع معادل به ما بدهند، یکی منبع



شکل ۳-۲۱: (a) یک منبع جریان عملی عمومی که به یک

مقاومت بار R_L وصل شده است. (b) جریان بار تأمین

شده به وسیله منبع جریان عملی به صورت تابعی از ولتاژ

بار نشان داده شده است.

ولتاژ عملی و دیگری منبع جریان عملی، که هر یک در جعبه سیاهی محصور باشند و فقط یک جفت ترمینال آن معلوم باشد و در این صورت هیچ راهی برای اینکه بتوانیم با اندازه گیری جریان یا ولتاژ در یک بار مقاومتی آنها را از یکدیگر تمیز دهیم وجود نخواهد داشت.

حال شرایط هم ارزی هم به سرعت تعیین می شوند. از آنجاییکه ولتاژهای مدار باز باید مساوی باشند، از معادلات (۲۱) و (۲۴) خواهیم داشت: (۲۶) $v_{loc} = v_s = R_{si} i_s$ جریانهای اتصال کوتاه هم مساویند و از معادلات (۲۲) و (۲۵) داریم:

$$i_{lsc} = v_s / R_{sv} = i_s \rightarrow R_{sv} = R_{si} = R_s \quad (27)$$

$$v_s = R_s i_s \quad (28)$$

که ما اکنون R_s را به عنوان مقاومت داخلی هر دو منبع عملی در نظر می گیریم. به عنوان مثالی برای کاربرد این ایده ها، منبع جریان عملی شکل a ۲۲ - ۳ را در نظر بگیرید.

از آنجاییکه مقاومت داخلی آن 2Ω می باشد، پس مقاومت داخلی منبع ولتاژ عملی معادل آن هم 2Ω می باشد و ولتاژ منبع ولتاژ ایده آل موجود در منبع ولتاژ عملی برابر است با $6V = (3) \cdot (2)$. منبع ولتاژ عملی معادل در شکل ۲۲b - ۳ نشان داده شده است.

برای چک کردن هم ارزی، بیایید یک مقاومت 4Ω در نظر بگیریم که به هر منبع وصل شده باشد. در هر دو حالت جریان $1A$ ، ولتاژ $4V$ و قدرت $4W$ به بار 4Ω مربوط می باشد. با وجود این باید به دقت توجه داشته باشیم که منبع جریان ایده آل قدرت $12W$ تحویل می دهد در حالیکه منبع ولتاژ ایده آل فقط $6W$ تحویل می دهد. به علاوه، مقاومت داخلی منبع جریان عملی $8W$ جذب می کند در حالیکه مقاومت داخلی منبع ولتاژ عملی فقط $2W$ جذب می کند. بنابراین می بینیم که این دو منبع عملی فقط از نظر چیزی که به بار تحویل می دهند معادل هستند و از نظر داخلی معادل نیستند!

یک قضیه قدرت خیلی مفید را می توان با مراجعه به یک منبع جریان یا منبع ولتاژ عملی بیان نمود. برای منبع ولتاژ عملی (شکل a ۲۰ - ۳ با $R_{sv} = R_s$) قدرت تحویل داده شده به بار R_L برابر است با:

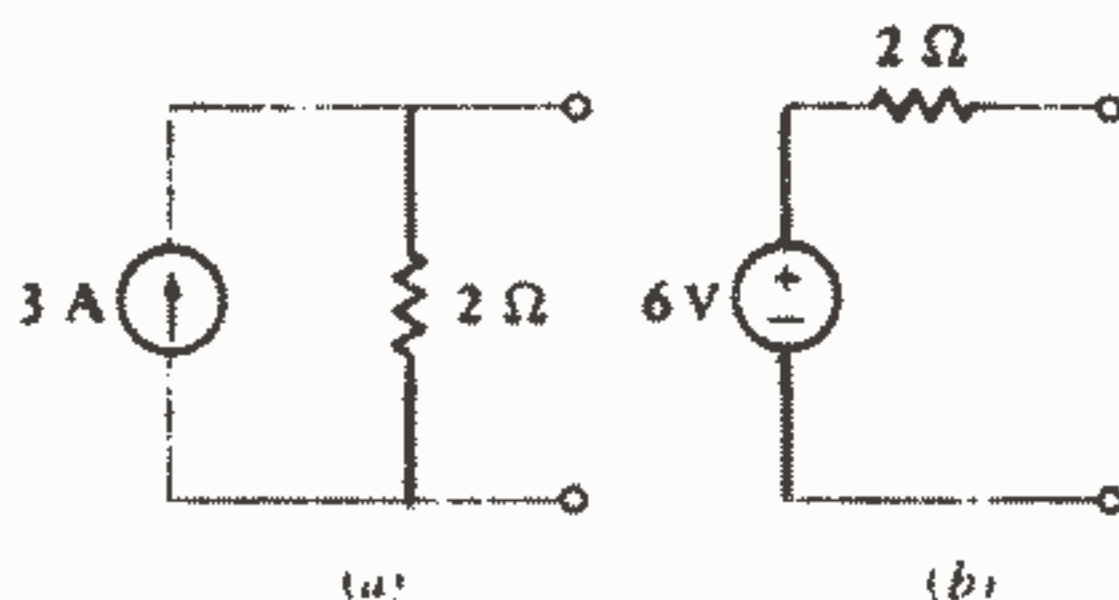
$$p_L = i_L^2 R_L = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2}$$

برای پیدا کردن مقداری از R_L که ما کزیمم قدرت را از منبع عملی جذب کند، نسبت به R_L مشتق می گیریم:

$$\frac{dp_L}{dR_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 v_s^2 - v_s^2 R_L (2)(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4}$$

حال مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$2 R_L (R_s + R_L) = (R_s + R_L)^2 \rightarrow R_s = R_L$$



شکل ۲۲ - ۳: (a) یک منبع جریان عملی (b) منبع ولتاژ

$$R_{sv} = R_{si} = R_s; v_s = R_s i_s \quad \text{عملی معادل آن:}$$

چون مقادیر $R_L = 0$ ، $R_L = \infty$ هر دو مینیمم قدرت ($P_L = 0$) را می‌دهند و چون قبلاً نشان داده‌ایم که منبع ولتاژ عملی و منبع جریان عملی معادل می‌باشند، بنابراین قضیه انتقال ماکزیمم قدرت بیان شده در زیر برای ما ثابت شده است:

یک منبع ولتاژ مستقل سری با مقاومت R_s و یا یک منبع جریان مستقل موازی با مقاومت R_s ، ماکزیمم قدرت را به مقاومت R_L وقتی تحویل می‌دهد که $R_L = R_s$.

بنابراین قضیه انتقال ماکزیمم قدرت به ما می‌گوید که یک مقاومت 2Ω از هر یک از منابع عملی شکل ۲۲ - ۳ ماکزیمم قدرت 4.5 W را می‌کشد، در حالیکه مقاومت 1Ω % ماکزیمم قدرت 3.6 KW را در شکل ۱۹ - ۳ دریافت می‌کند.

تمرین

۳ - ۶ (a) در شکل ۲۳ - ۳ داریم $R_L = 80\Omega$ ، i_L را پیدا کنید.

(b) منبع جریان عملی را به یک منبع ولتاژ عملی تبدیل کنید و دوباره i_L را اگر $R_L = 80\Omega$ پیدا کنید.

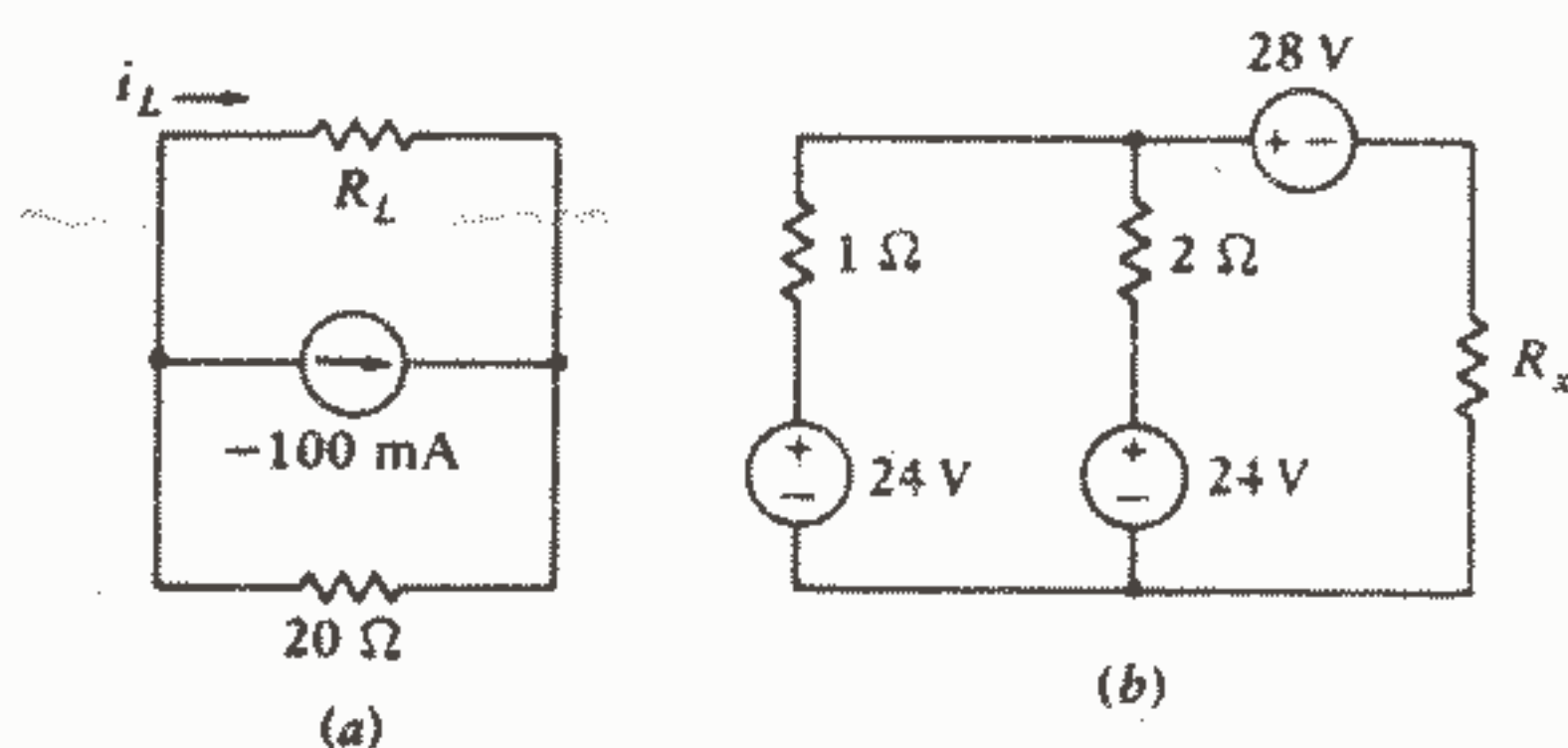
(c) قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع ایده آل را در هر حالت پیدا کنید.

(d) چه مقدار R_L ماکزیمم قدرت را جذب می‌کند و مقدار این قدرت چقدر است؟

جواب: 20 mA ، 20 mA ، 160 mW ، 40 mW ، 20Ω ، 50 mW

۷ - ۳ - هر دو منبع 24 V را در شکل b ۲۳ - ۳ به منابع جریان عملی تبدیل کنید، مقاومتها و منابع جریان ایده آل را تبدیل کنید و سپس منبع جریان عملی حاصل را به منبع ولتاژ عملی تبدیل کنید و منابع ولتاژ ایده آل را ترکیب کنید: (a) اگر $R_x = 2\ \Omega$ ، قدرت تحویل داده شده به R_x را پیدا کنید. (b) ما کزیمم قدرتی که می تواند به هر R_x تحویل داده شود چقدر است؟ (c) به کدام دو مقدار R_x دقیقاً 5 W تحویل داده می شود؟

جواب: $1.5\ 87\ \Omega$ ، $280\ \Omega$ ، 6 W ، 4.5 W



شکل ۲۳ - ۳: به تمرینات ۶ - ۳ و ۷ - ۳ مراجعه شود.

۶ - ۳ - قضایای تونن و نورتن

حال که اصل جمع اثرها را در اختیار داریم، می توانیم دو قضیه دیگر را که تحلیل بسیاری از مدارهای خطی را خیلی ساده می کند، ارائه دهیم. اولین قضیه به یادبود امال: تونن، مهندسی فرانسوی که در زمینه تلگراف کار می کرد و برای اولین بار در سال ۱۸۸۳ این قضیه را منتشر نمود، نامگذاری شده است و دومین قضیه به صورت مشابه قضیه اول است و به ای. ال. نورتن، یکی از دانشمندان سابق آزمایشگاههای بل، منسوب است.

فرض کنید نیاز به تحلیل جزئی یک مدار داشته باشیم، مثلاً بخواهیم جریان، ولتاژ و قدرت تحویل داده شده به یک مقاومت بار منفرد را به وسیله بقیه مدار که ممکن است شامل تعداد زیادی مقاومت و منبع باشد، به دست آوریم و یا شاید بخواهیم پاسخ را به ازای مقادیر مختلف مقاومت بار به دست آوریم.

در این صورت قضیه تونن به ما می گوید که می توان کل مدار بجز مقاومت بار را به وسیله یک مدار معادل شامل فقط یک منبع ولتاژ مستقل سری با یک مقاومت جایگزین نمود.

با استفاده از قضیه نورتن، مدار معادلی مرکب از یک منبع جریان مستقل موازی با یک مقاومت به دست می آوریم.

بنابراین بدیهی است که یکی از کاربردهای عمده قضایای تونن و نورتن، جایگزینی قسمت بزرگی از یک مدار و غالباً قسمت پیچیده و نامفهوم آن، با یک معادل خیلی ساده می باشد. این مدار ساده اخیر ما را قادر می سازد که محاسبات ولتاژ، جریان و قدرتی را که مدار اصلی به بار تحویل می دهد، سریعتر انجام دهیم. آن همچنین به ما کمک می کند که بهترین مقدار این مقاومت را انتخاب کنیم. مثلاً در یک تقویت کننده قدرت ترانزیستوری، مدار معادل تونن یا نورتن ما را قادر می سازد که ماکزیمم قدرتی را که می توان از تقویت کننده گرفت و نوع باری را که لازم است تا ماکزیمم انتقال قدرت را ارائه کند، تعیین کنیم.

به عنوان یک مثال مقدماتی مدار شکل ۲۴ - ۳ را در نظر بگیرید. نواحی سایه خورده مدار را به شبکه های A، B تقسیم می کند و فرض می کنیم که توجه اصلی ما به شبکه B که شامل مقاومت بار R_L است، معطوف باشد. شبکه A را می توان با استفاده مکرر از تبدیل منابع ساده نمود. ابتدا منبع ۱۲ V و مقاومت $3\ \Omega$ را به عنوان یک منبع ولتاژ عملی در نظر می گیریم و آن را با یک منبع جریان عملی متشکل از یک منبع A و موازی با مقاومت $3\ \Omega$ جایگزین می کنیم. سپس دو مقاومت موازی را ترکیب می کنیم که معادل آن می شود $2\ \Omega$ و منبع جریان حاصل را به یک منبع ولتاژ عملی تبدیل می کنیم. این مراحل در شکل ۲۵ - ۳ و نتیجه نهایی در شکل d ۲۵ - ۳ نشان داده شده است. از دید مقاومت بار R_L ، این مدار (معادل تونن) معادل است با مدار اصلی و از دید ما این مدار خیلی ساده تر است و اکنون می توانیم به سادگی قدرت تحویل داده شده به بار را محاسبه کنیم، به صورت زیر:

$$P_L = \left(\frac{A}{9 + R_L} \right)^2 R_L$$

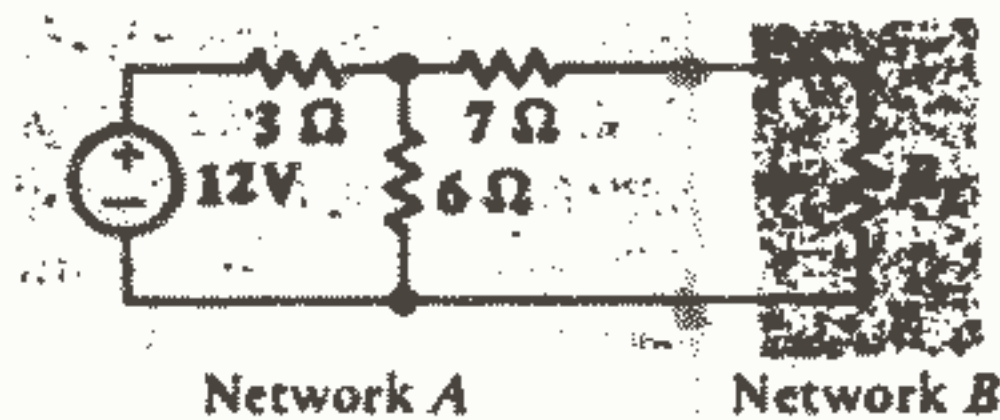
به علاوه، از مدار معادل می توانیم ملاحظه کنیم که ماکزیمم ولتاژی که می توان در دو سر R_L به دست آورد برابر ۸ V است وقتی که $R_L = \infty$ و یک تبدیل سریع شبکه A به یک منبع جریان عملی (معادل نورتن) نشان می دهد که ماکزیمم جریانی که می تواند به بار تحویل داده شود برای $R_L = 0$ برابر با $\frac{4}{3}$ A است و قضیه انتقال ماکزیمم قدرت نشان می دهد که ماکزیمم قدرت وقتی که $R_L = 9\ \Omega$ به R_L تحویل داده می شود. هیچیک از این واقعیتها به سادگی و به سرعت از مدار اصلی مشهود نمی باشد.

اگر شبکه A پیچیده تر می بود تعداد تبدیل منابع و ترکیب مقاومتها لازم برای به دست آوردن مدار معادل تونن یا نورتن خیلی زیاد و تقریباً غیرعملی می شد و نیز با وجود منابع وابسته

روش تبدیل منابع معمولاً غیر عملی می باشد.

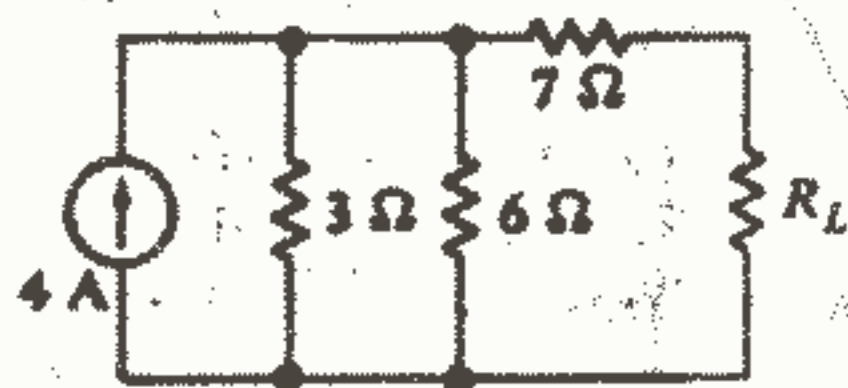
قضایای تونن و نورتن به ما اجازه می دهند که مدار معادل را سریعتر و ساده تر، حتی در مدارهای پیچیده تر، به دست آوریم. حالا اجازه دهید قضیه تونن را به صورت زیر بیان کنیم:

هر مدار خطی که داده شود آن را به شکل دو شبکه A, B در آورید. اگر هر کدام از این دو شبکه حاوی منبع وابسته باشد، متغیر کنترل کننده آن باید در همان شبکه باشد. یک ولتاژ مدار باز V_{oc} را در ترمینالهای A و قتیکه شبکه B جدا شده باشد، تعریف کنید. در این صورت اگر مدار A غیر فعال شود (یعنی همه منابع ولتاژ مستقل با اتصال کوتاه و منابع جریان با مدار باز جایگزین شوند) و به طور سری با یک منبع ولتاژ قرار گیرد. همه جریانها و ولتاژهای شبکه B بدون تغییر باقی خواهد ماند.

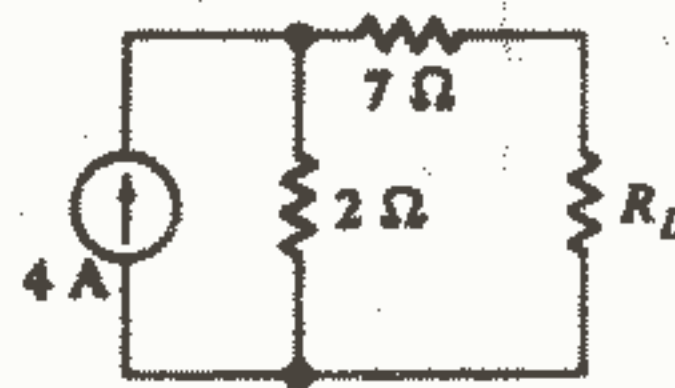


$$V = IR \rightarrow 12 = 3I \Rightarrow I = 4A$$

شکل ۲۴ - ۳: یک مدار ساده مقاومتی به دو شبکه A و B که جزئیات شبکه A مورد نظر ما نمی باشد و شبکه B یک مقاومت بار مورد علاقه ما است، تقسیم شده است.



(a) Network A

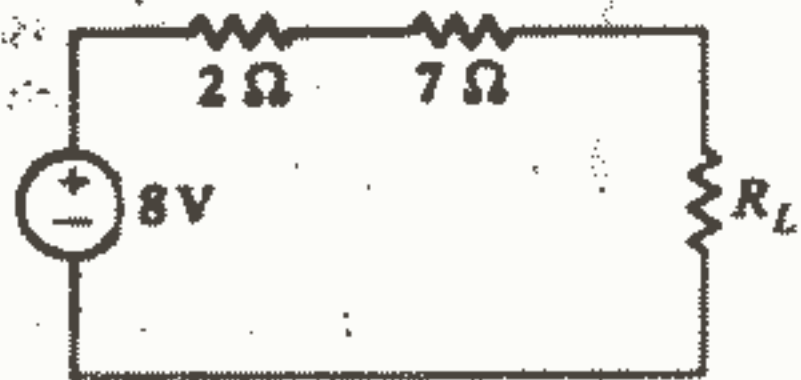


(b) Network A

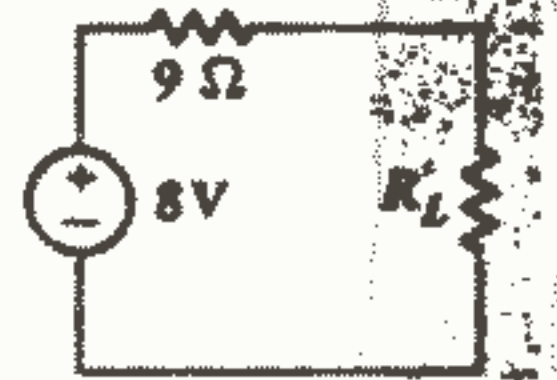
$$V = IR$$

$$V = 4 \times 3$$

$$I = \frac{V}{R}$$



(c) Network A



(d) Network A Network B

شکل ۲۵ - ۳: تبدیل منابع و ترکیب مقاومتها به کار رفته در ساده کردن شبکه A به ترتیب نشان داده شده است. نتیجه کار که در شکل (d) نشان داده شده است، مدار معادل تونن می باشد.

حال بیاید ببینیم که آیا می‌توانیم قضیه تونن را با موفقیت به مدار شکل ۲۴ - ۳ اعمال کنیم. با جدا کردن R_L و با استفاده از قانون تقسیم ولتاژ V_{oc} برابر با V_A تعیین می‌شود. با غیرفعال کردن شبکه A یعنی با جایگزین کردن منبع V_{12} با یک اتصال کوتاه، اگر به شبکه A نگاه کنیم یک مقاومت $7\ \Omega$ به طور سری با ترکیب موازی $6\ \Omega$ ، $3\ \Omega$ خواهیم دید. بنابراین شبکه غیرفعال A را در اینجا می‌توان به طور ساده با یک مقاومت $9\ \Omega$ نمایش داد که این با نتیجه قبلی موافقت دارد.

مدار معادلی را که به دست آورده‌ایم کاملاً مستقل از شبکه B می‌باشد زیرا ما آموخته‌ایم که شبکه B را جدا کنیم و ولتاژ مدار باز تولید شده به وسیله شبکه A را اندازه‌گیری کنیم که این عمل مطمئناً به هیچوجه بستگی به شبکه B ندارد و سپس شبکه غیرفعال A را با یک منبع ولتاژ V_{oc} به طور سری قرار دهیم. شبکه B در قضیه و اثبات فقط به خاطر این ذکر شده است که نشان دهد مدار معادل شبکه A را مستقل از اینکه چه آرایشی از عناصر به آن وصل شده باشد، می‌توان به دست آورد که شبکه B بیانگر این شبکه عمومی می‌باشد.

اثبات قضیه تونن به شکلی که ما بیان کرده‌ایم نسبتاً طولانی است، بنابراین آن را در ضمیمه ۳ قرار داده‌ایم که افراد کنجکاو و سختگیر آن را به دقت مطالعه خواهند کرد.

چند نکته درباره این قضیه وجود دارد که قابل تأکید می‌باشد. اول اینکه، تنها محدودیتی که باید بر A یا B اعمال کنیم، علاوه بر لزوم خطی بودن شبکه A ، B ، این است که همه منابع وابسته موجود در A متغیر کنترل‌کننده‌شان نیز در A باشد و همینطور برای B هیچ محدودیتی درباره پیچیدگی A ، B وجود ندارد و هر یک از آنها می‌توانند شامل هر ترکیبی از منابع مستقل ولتاژ و جریان، منابع وابسته ولتاژ و جریان، مقاومتها و یا هر عنصر مداری خطی دیگر باشند.

ماهیت عمومی قضیه (و اثبات آن) آن را قابل اعمال به شبکه‌های حاوی سلف و خازن، که عناصر مداری غیرفعال خطی می‌باشند و در فصل بعدی تعریف شده‌اند، می‌سازد. اگر چه فعلاً مقاومتها تنها عناصر مداری غیرفعال می‌باشند که تعریف شده‌اند و اعمال قضیه تونن به شبکه‌های مقاومتی حالت خاص ساده‌ای می‌باشد. شبکه غیرفعال A را می‌توان به وسیله یک مقاومت معادل منفرد R_{Th} نمایش داد. بدیهی است که اگر A یک شبکه فعال مقاومتی باشد آنگاه شبکه غیرفعال A را می‌توان با یک مقاومت معادل منفرد، که ما آن را مقاومت تونن هم می‌نامیم، جایگزین نمود.

قضیه نورتن تشابه نزدیکی به قضیه تونن دارد و این پی‌آمد دیگری از تناظر می‌باشد. در

واقع وقتی که اصل تناظر در فصل بعدی مورد بحث قرار گیرد، این دو بیان را می توان به عنوان مثالی از زبان تناظر به کار برد. قضیه نورتن را می توان به صورت زیر بیان نمود.

در هر مدار خطی داده شده آن را به صورت شبکه های A ، B که به وسیله دو هادی بدون مقاومت به هم وصل شده اند، تقسیم کنید. اگر هر یک از شبکه ها حاوی منبع وابسته ای باشد، متغیر کنترل کننده آن باید در همان شبکه موجود باشد. جریان i_{sc} را به عنوان جریان اتصال کوتاه تعریف کنید. سپس اگر A غیرفعال شود (یعنی منابع ولتاژ، اتصال کوتاه و منابع جریان، باز شوند) و یک منبع جریان مستقل i_{sc} ، با پلاریته مناسب، موازی با شبکه غیرفعال A وصل شود، جریانها و ولتاژهای شبکه B بدون تغییر باقی می مانند.

معادل نورتن یک شبکه مقاومتی فعال عبارت از منبع جریان نورتن i_{sc} موازی با مقاومت تونن R_{th} می باشد.

رابطه مهمی بین معادل تونن و نورتن یک شبکه فعال مقاومتی وجود دارد. این رابطه را می توان با اعمال تبدیل منابع به هر یک از این شبکه ها به دست آورد. مثلاً، اگر معادل نورتن را تبدیل کنیم، منبع ولتاژ $i_{sc} R_{th}$ را سری با مقاومت R_{th} به دست می آوریم که این همان فرم مدار معادل تونن را دارد، یعنی

$$V_{oc} = R_{th} i_{sc} \quad (29)$$

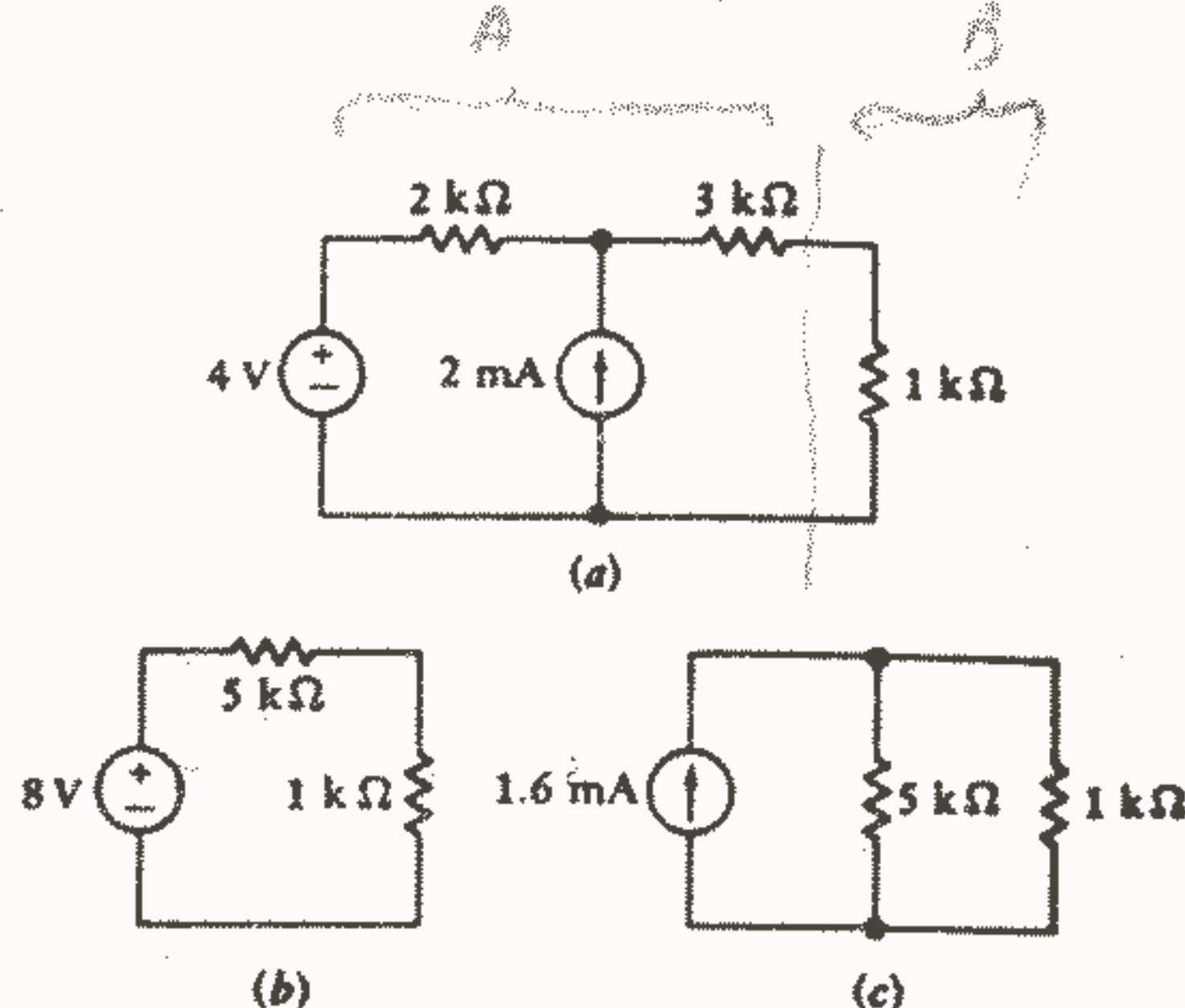
در مدارهای مقاومتی که علاوه بر منابع مستقل دارای منابع وابسته باشند، اغلب در می یابیم که بهتر است مدار معادل تونن و نورتن آنها را به وسیله پیدا کردن ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه تعیین کنیم. که در این صورت مقدار R_{th} برابر با نسبت ولتاژ مدار باز به جریان اتصال کوتاه خواهد بود. بنابراین صلاح در این است که در پیدا کردن ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه حتی در مسائل ساده ای که در پی می آید، تبحر پیدا کنیم. اگر مدار معادل تونن و نورتن را به طور مستقل پیدا کنیم آنگاه رابطه (۲۹) یک وسیله چک مفید خواهد بود.

بیایید چهار مثال برای تعیین مدار معادل تونن و نورتن در نظر بگیریم. مثال اول در شکل a-۲۶ نشان داده شده است و مدار معادل تونن و نورتن برای شبکه ای که در دو سر مقاومت $K \Omega - ۱$ دیده می شود، مطلوب است. یعنی شبکه B همان مقاومت $K \Omega - ۱$ مذکور و شبکه A بقیه مدار می باشد.

این مدار شامل هیچ منبع وابسته‌ای نمی‌باشد و آسانترین راه برای پیدا کردن مدار معادل تونن، پیدا کردن R_{th} مستقیماً از روی شبکه غیرفعال و پس از آن محاسبه V_{oc} یا i_{sc} می‌باشد. ابتدا هر دو منبع مستقل را غیرفعال می‌کنیم تا شبکه غیرفعال A به دست آید. اینکار را با اتصال کوتاه کردن منبع 4 V و باز کردن منبع 2 mA ، انجام می‌دهیم حاصل اینکار ترکیب سری یک مقاومت $2\text{ k}\Omega$ و یک مقاومت $3\text{ k}\Omega$ و یا به طور معادل یک مقاومت $5\text{ k}\Omega$ می‌باشد. ولتاژ مدار به طور ساده به وسیله اصل جمع اثرها به دست می‌آید. وقتی که منبع 4 V به تنهایی فعال باشد، ولتاژ مدار باز برابر 4 V و وقتی که فقط منبع 2 mA روشن باشد، باز هم ولتاژ مدار باز 4 V می‌باشد. حال اگر هر دو منبع فعال باشند، ملاحظه می‌کنیم که $V_{oc} = 4 + 4 = 8\text{ V}$. بدین ترتیب مدار معادل تونن به دست می‌آید که در شکل $b - 26 - 3$ نشان داده شده است و از روی آن می‌توان به سرعت مدار معادل نورتن شکل $c - 26 - 3$ را به دست آورد. به عنوان یک روش برای چک کردن این مسئله بیاید i_{sc} را برای این مدار به دست آوریم. با استفاده از اصل جمع اثرها و تقسیم جریان داریم:

$$i_{sc} = i_{sc|4V} + i_{sc|2mA} = \frac{4}{2+3} + 2 \frac{2}{2+3} = 0.8 + 0.8 = 1.6\text{ mA}$$

که ملاحظه می‌شود مسئله به درستی حل شده است.



شکل $26 - 3 - 3$: (a) مداری که در آن مقاومت $1\text{-k}\Omega$ به عنوان

شبکه B مشخص شده است. (b) مدار معادل تونن شبکه

A . (c) مدار معادل نورتن شبکه A .

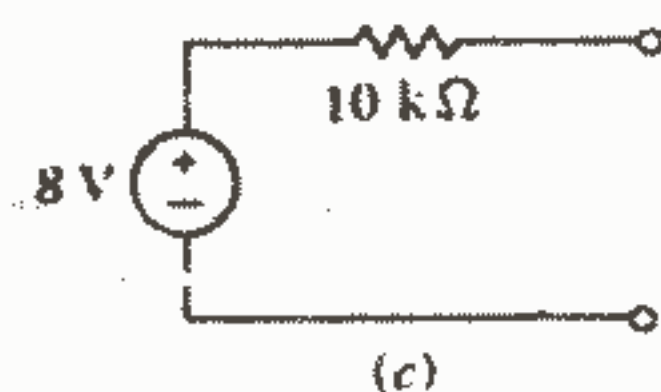
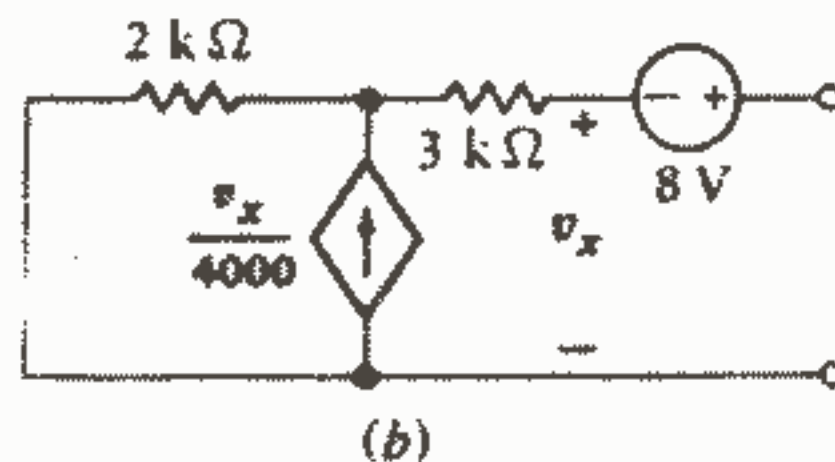
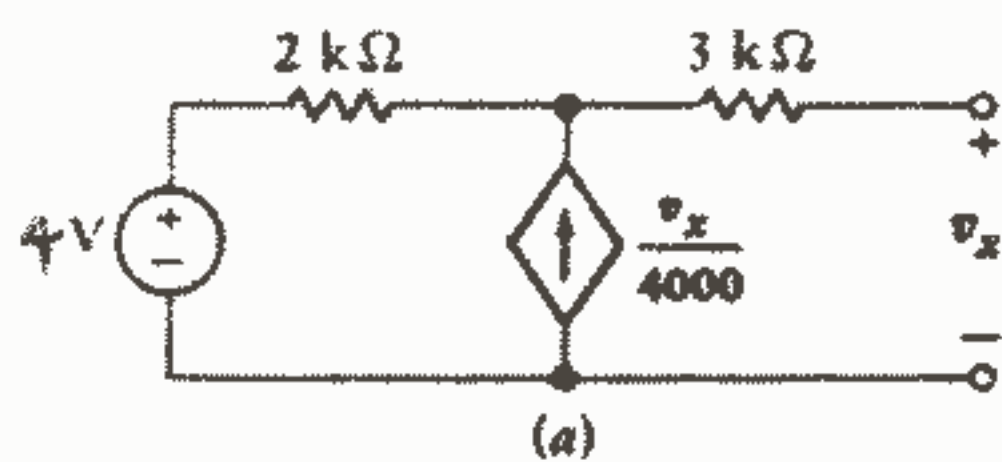
به عنوان مثال دوم، شبکه A نشان داده شده در شکل ۲۷ - ۳ را که شامل منابع مستقل و وابسته می باشد در نظر می گیریم. وجود منبع وابسته به ما اجازه نمی دهد که R_{th} را مستقیماً به وسیله ترکیب مقاومتها از روی شبکه غیرفعال به دست آوریم در عوض باید v_{oc} و i_{sc} را پیدا کنیم. برای پیدا کردن v_{oc} توجه می کنیم که $v_x = v_{oc}$ و جریان منبع وابسته باید از مقاومت $2K\Omega$ عبور کند زیرا سمت راست مدار باز می باشد. با جمع کردن ولتاژها در حلقه پیرامونی داریم:

$$KVL = -4 + 2 \times 10^3 \left(\frac{-v_x}{4000} \right) + 3 \times 10^3 (0) + v_x = 0 \rightarrow v_x = 8 = v_{oc}$$

بنابر قضیه تونن مدار معادل را می توان طبق شکل b - ۲۷ - ۳ از سری نمودن منبع ۸ V با شبکه غیرفعال A به دست آورد. این مدار صحیح است اما خیلی ساده و مفید نیست و در مدارهای خطی مقاومتی باید برای شبکه غیرفعال A مدار معادل ساده تری، یعنی R_{th} ، به دست آوریم. بنابراین i_{sc} را پیدا می کنیم. با اتصال کوتاه کردن ترمینالهای خروجی در شکل a - ۲۷ - ۳، واضح است که $v_x = 0$ و منبع جریان وابسته هم صفر می شود. بنابراین، $i_{sc} = 4/5 \times 10^{-3} = 0.8mA$. در نتیجه داریم:

$$R_{th} = V_{oc}/i_{sc} = 8/(0.8 \times 10^{-3}) = 10 K\Omega$$

و بدین طریق مدار معادل مقبول شکل c - ۲۷ - ۳ به دست می آید.

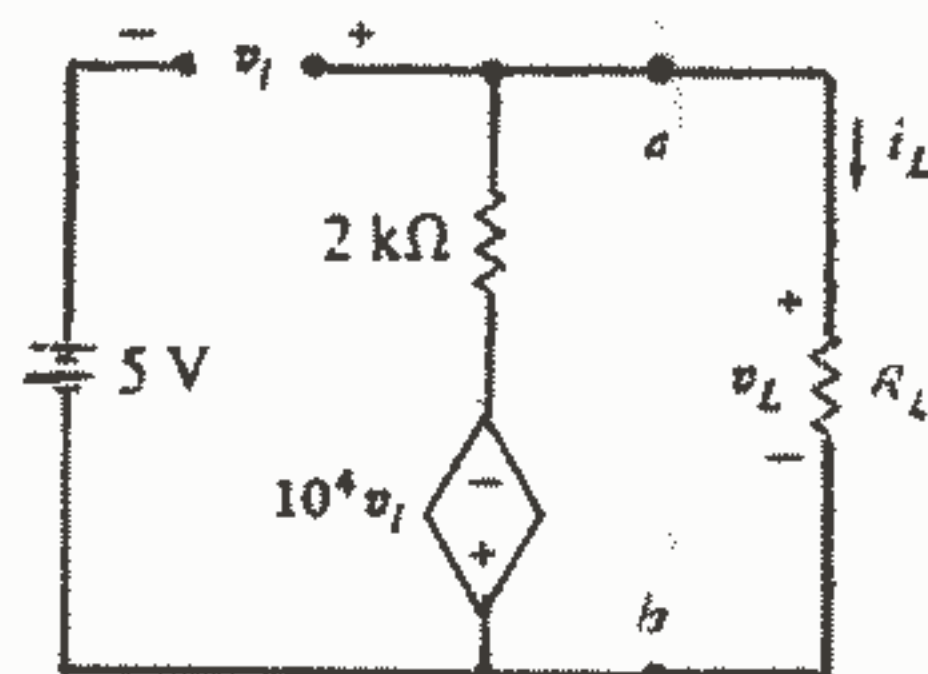


شکل ۲۷ - ۳: (a) مداری که معادل تونن آن مطلوب است.

(b) یک فرم ممکن، اما نسبتاً بلااستفاده، مدار معادل

تونن. (c) بهترین فرم مدار معادل تونن برای این مدار مقاومتی خطی.

مثال دیگری که برای آن باید v_{oc} ، i_{sc} را پیدا کنیم در شکل ۲۸ - ۳ آمده است.



شکل ۲۸ - ۳: مدار معادل تونن برای این ولتاژ فالوور در ترمینال‌های $a - b$ مطلوب می‌باشد.

مدار مذکور یک op - amp می‌باشد که به صورت ولتاژ فالوور با مشخصات $v_s = 5\text{ V}$ ، $R_i = \infty$ ، $A = 10^4$ ، $R_o = 2\text{ K}\Omega$ بسته شده است. برای پیدا کردن v_{Loc} ، $R_L = \infty$ قرار می‌دهیم و یا به طور ساده‌تر در نظر می‌گیریم از مدار جدا شده باشد. بنابراین اکنون هیچ جریانی در مقاومت $2\text{ K}\Omega$ وجود ندارد و بنابراین داریم: $v_i = -10^4 v_{Loc}$ که در آن $v_i = v_{Loc} - 5$ می‌باشد.

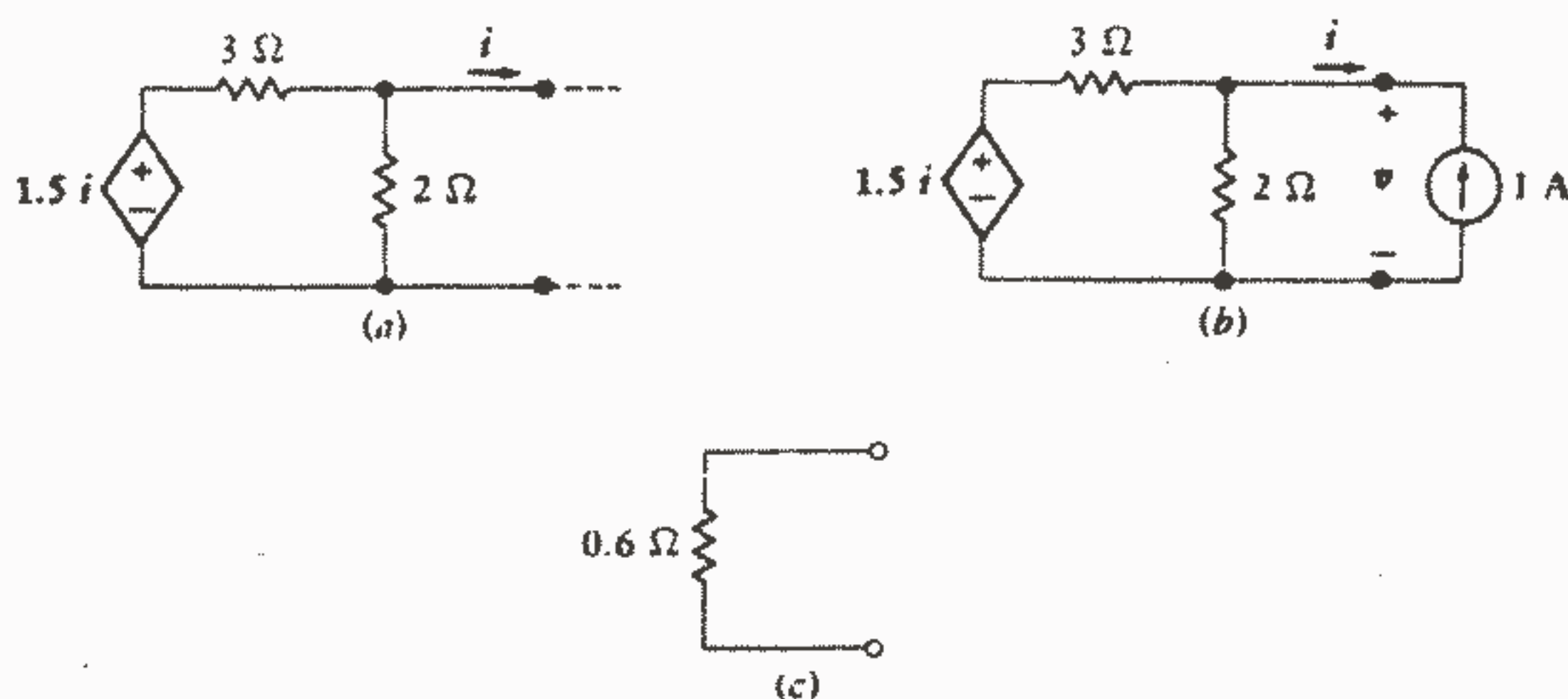
$$v_{Loc} = \frac{10^4 (5)}{10001} = 5\text{ V}$$

سپس ما احتیاج به i_{Lsc} داریم، بنابراین R_L را با یک اتصال کوتاه جایگزین می‌کنیم. در حلقه سمت راست با استفاده از KVL داریم: $10^4 v_i + 2000 i_{Lsc} = 0$ در ضمن، با اعمال KVL به حلقه پیرامون مدار داریم: $-5 - v_i = 0$ در نتیجه، خواهیم داشت: $i_{Lsc} = 25\text{ A}$ $10^4 (-5) + 2000 i_{Lsc} = 0 \rightarrow$ حال برای پیدا کردن R_{th} ، داریم:

$$R_{th} = \frac{v_{Loc}}{i_{Lsc}} = \frac{5}{25} = 0.2\text{ }\Omega$$

بنابراین مدار معادل تونن ارائه شده به R_L در $a - b$ توسط ولتاژ فالوور عبارت است از یک منبع 5 V به طور سری با یک مقاومت خیلی کوچک $0.2\text{ }\Omega$

به عنوان آخرین مثال اجازه دهید شبکه‌ای را که فقط حاوی یک منبع وابسته می‌باشد مانند شکل ۳-۲۹a در نظر بگیریم. چون شبکه A غیرفعال است پس $v_{oc} = 0$. بنابراین ما در جستجوی R_{th} ارائه شده توسط این شبکه دو ترمینالی هستیم. اگرچه، ما نمی‌توانیم i_{sc} ، v_{oc} صفر می‌باشند. بنابراین بیا یک حیل و فن بکار ببریم. یک منبع $1A$ را بطور خارجی به مدار اعمال می‌کنیم و ولتاژ حاصل را اندازه می‌گیریم و سپس $R_{th} = v/i$ با مراجعه به شکل ۳-۲۹b ملاحظه می‌کنیم که: $1 = v/2 + (-1)/3 + v$ و از آنجا داریم: $R_{th} = 0.6 \Omega$. $v = 0.6 V$ مدار معادل تونن در شکل ۳-۲۹c نشان داده شده است.



شکل ۳-۲۹: (a) شبکه‌ای که شامل هیچ منبع مستقلی

نمی‌باشد و مدار معادل تونن آن مطلوب است. R_{th} (b)

به طور عددی برابر است با v . (c) مدار معادل تونن

مدار (a).

ما اکنون چهار مثالی را که مدار معادل تونن و نورتن آنها را پیدا کردیم، بررسی کرده‌ایم. مثال اول (شکل ۳-۲۶) فقط شامل منابع مستقل و مقاومت بود و می‌توانستیم روشهای مختلفی را روی آن بکار ببریم. یکی از این روشها محاسبه R_{th} برای شبکه غیرفعال و سگس v_{oc} برای شبکه فعال. ما همچنین می‌توانستیم R_{th} ، i_{sc} و یا v_{oc} و i_{sc} را پیدا کنیم.



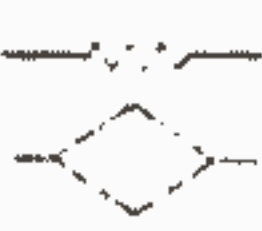
در مثالهای دوم و سوم (شکلهای ۳-۲۷ و ۳-۲۸) هر دو منبع مستقل و وابسته حضور داشتند و تنها روشی که بکار بردیم پیدا کردن v_{oc} ، i_{sc} را ایجاب می‌کرد. ما نمی‌توانستیم R_{th} را برای شبکه غیرفعال به دست آوریم، زیرا منبع وابسته را نمی‌توان غیرفعال نمود.

مثال آخر هیچ گونه منبع مستقلی نداشت و ما R_{th} را به وسیله اعمال یک منبع $1A$ و با

استفاده از رابطه $v = 1 \times R_{th}$ به دست آوردیم. همچنین می‌توانستیم یک منبع $1V$ اعمال کنیم و از رابطه $i = 1/R_{th}$ مقدار R_{th} را به دست آوریم. این گونه مدار معادلهای تونن و نورتن منبع مستقل ندارند.

این تکنیکهای مهم و انواع مدارهایی را که می‌توان به آنها اعمال نمود در جدول ۱-۳ نشان داده شده است.

جدول ۱ - ۳: روشهای توصیه شده برای پیدا کردن مدار معادل تونن و نورتن.

Methods	Circuit contains		
			
R_{th} and v_{oc} or i_{sc}	✓	—	—
v_{oc} and i_{sc}	Possible	✓	—
$i = 1 \text{ A}$ or $v = 1 \text{ V}$	—	—	✓

همه روشهای ممکن در جدول ظاهر نشده است. ما از روش تبدیل منابع در شبکه‌هایی که منابع وابسته ندارند بطور مکرر استفاده کرده‌ایم و این مطمئناً یک روش ساده برای شبکه‌هایی است که حاوی عناصر زیاد نمی‌باشند. روش دیگری وجود دارد که از جاذبه خاصی برخوردار است زیرا می‌توان آن را برای هر سه نوع شبکه درج شده در جدول قبل بکار برد. بطور ساده شبکه B را به وسیله یک منبع ولتاژ v_s جایگزین می‌کنیم و جریان خروجی از ترمینال مثبت آن را به عنوان i تعریف می‌کنیم و سپس شبکه A را تحلیل می‌کنیم و جریان i را به دست می‌آوریم و معادله‌ای به شکل $v_s = ai + b$ تشکیل می‌دهیم. بدیهی است که $a = R_{th}$ و $b = v_{oc}$ می‌باشد. البته می‌توانیم یک منبع جریان i_s را هم اعمال کنیم و ولتاژ دو سر آن را v بگیریم و سپس معادله $v = ai_s + b$ را تشکیل دهیم. این روش عموماً قابل کاربرد می‌باشد اما بعضی روشها گاهی اوقات آسانتر و سریعتر می‌باشند.

اگرچه ما توجه خود را تقریباً بطور کامل معطوف تحلیل مدارهای خطی کرده‌ایم ولی جالب است بدانیم که قضایای تونن و نورتن اگر شبکه B غیرخطی هم باشد صادقند فقط شبکه A حتماً باید خطی باشد.

تمرین

۸-۳ گ مدار معادل تونن را برای شبکه‌های زیر پیدا کنید:

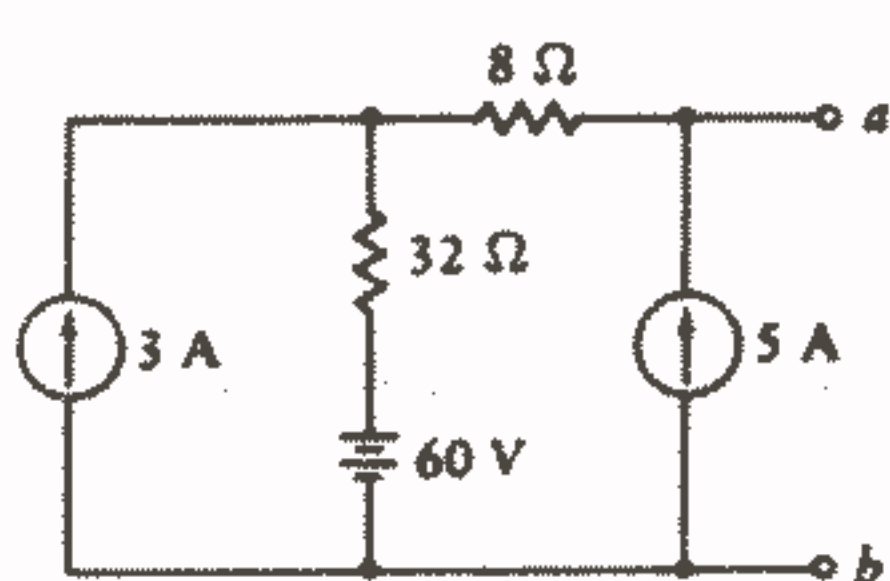
(a) شکل ۳-۳۰a (b) شکل ۳-۳۰b

جواب: 356 V ، 40Ω ؛ $v_s/(1 - g_m R_1)$ ، $(R_1 + R_2)/(1 - g_m R_1)$

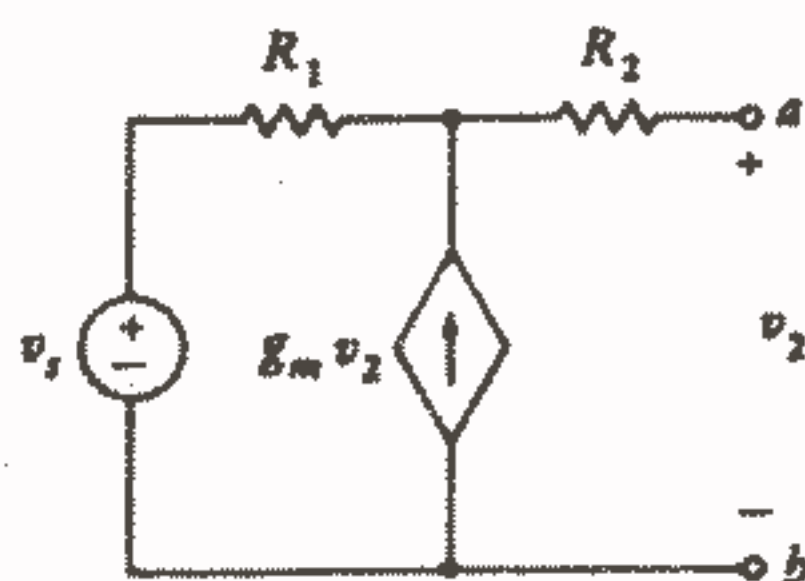
۹-۳ گ مدار معادل نورتن را برای شبکه‌های زیر پیدا کنید:

(a) شکل ۳-۳۰c (b) شکل ۳-۳۰d

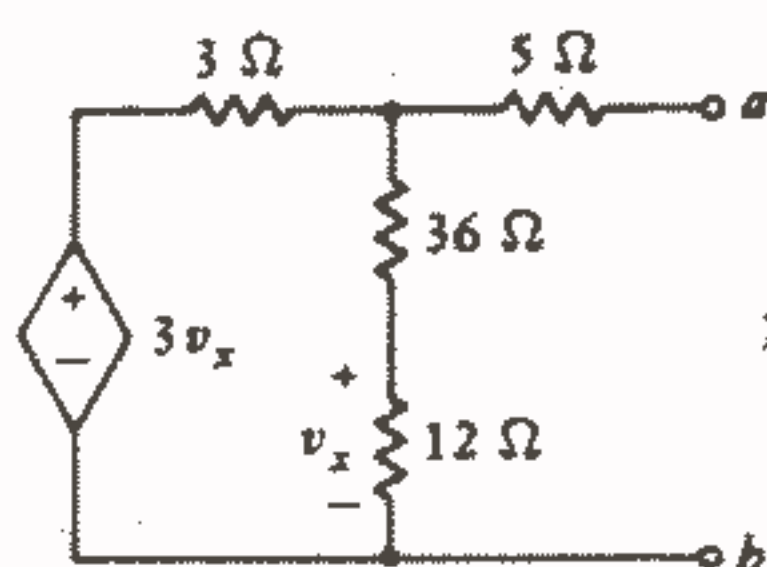
جواب: 0 A ، 14.6Ω ، 0.75 A ، 26.7Ω



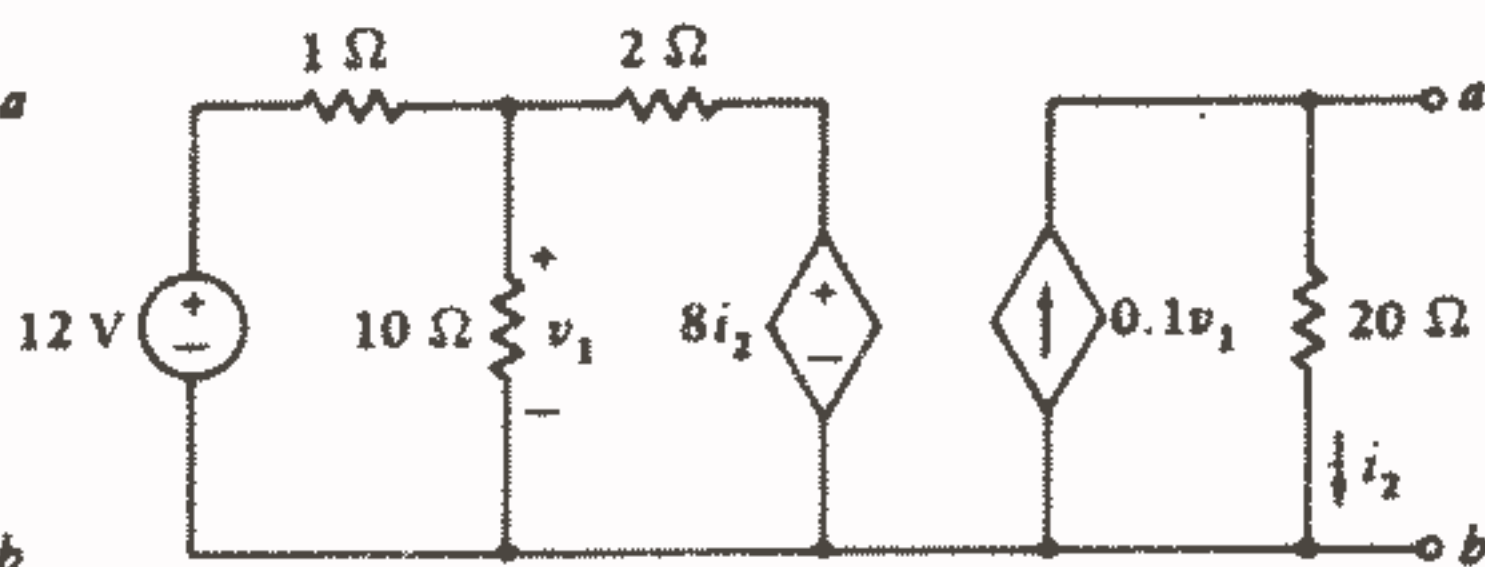
(a)



(b)



(c)



(d)

شکل ۳-۳۰: به تمرینات ۸-۳ و ۹-۳ مراجعه کنید.

۷-۳ درختها و تحلیل گرهی عمومی

در این قسمت روش تحلیل گرهی را تعمیم خواهیم داد. از آنجاییکه روش تحلیل گرهی قابل اعمال به هر مداری می‌باشد، بنابراین نمی‌توانیم قول بدهیم که خواهیم توانست دسته وسیعی از مسائل مدار را حل بکنیم. اگر چه، می‌توانیم امیدوار باشیم که بتوانیم یک روش تحلیل گرهی عمومی برای هر مسئله خاص، انتخاب بکنیم که ما را به معادلات کمتر و کار کمتر رهنمون شود. نخست باید فهرست تعاریف مربوط به توپولوژی شبکه را توسعه دهیم. اینکار را با تعریف

خود توپولوژی بعنوان شاخه‌ای از هندسه شروع می‌کنیم. این مبحث مربوط به خواهی از یک شکل هندسی می‌شود که اگر آن شکل را بتابانیم، خم کنیم، تا کنیم، منبسط کنیم، فشرده کنیم و گره بزنیم، تغییر نمی‌کند البته به شرطی که هیچ جزئی از شکل جدال نشود و یا بهم وصل نشود. یک گره و یک چهار وجهی و نیز یک مربع و دایره از نظر توپولوژیکی یکسان می‌باشند. بنابراین اکنون در زمینه مدارهای الکتریکی با انواع خاصی از عناصری که در مدار ظاهر می‌شوند کاری نداریم، بلکه فقط به نحوه آرایش شاخه‌ها و گره‌ها توجه داریم. در واقع، ما معمولاً ماهیت عناصر مداری را در نظر نمی‌گیریم و با نشان دادن عناصر به صورت خطوط، ترسیم مدار را آسان می‌کنیم. نمودار حاصل یک گراف خطی و یا بطور ساده «گراف» نامیده می‌شود.

یک مدار و گراف آن در شکل ۳-۳۱ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که همه گره‌ها به وسیله نقطه‌های درشت در گراف نشان داده شده‌اند.

از آنجاییکه خواص توپولوژیکی یک مدار و یا گراف آن وقتی که از شکل طبیعی خود خارج می‌شود، تغییر نمی‌کند، بنابراین سه گراف شکل ۳-۳۲ همگی با مدار و گراف شکل ۳-۳۱ از نظر توپولوژیکی یکسان هستند. اصطلاحات توپولوژیکی که قبلاً آموخته‌ایم و تاکنون بطور صحیحی بکار برده‌ایم، عبارتند از:

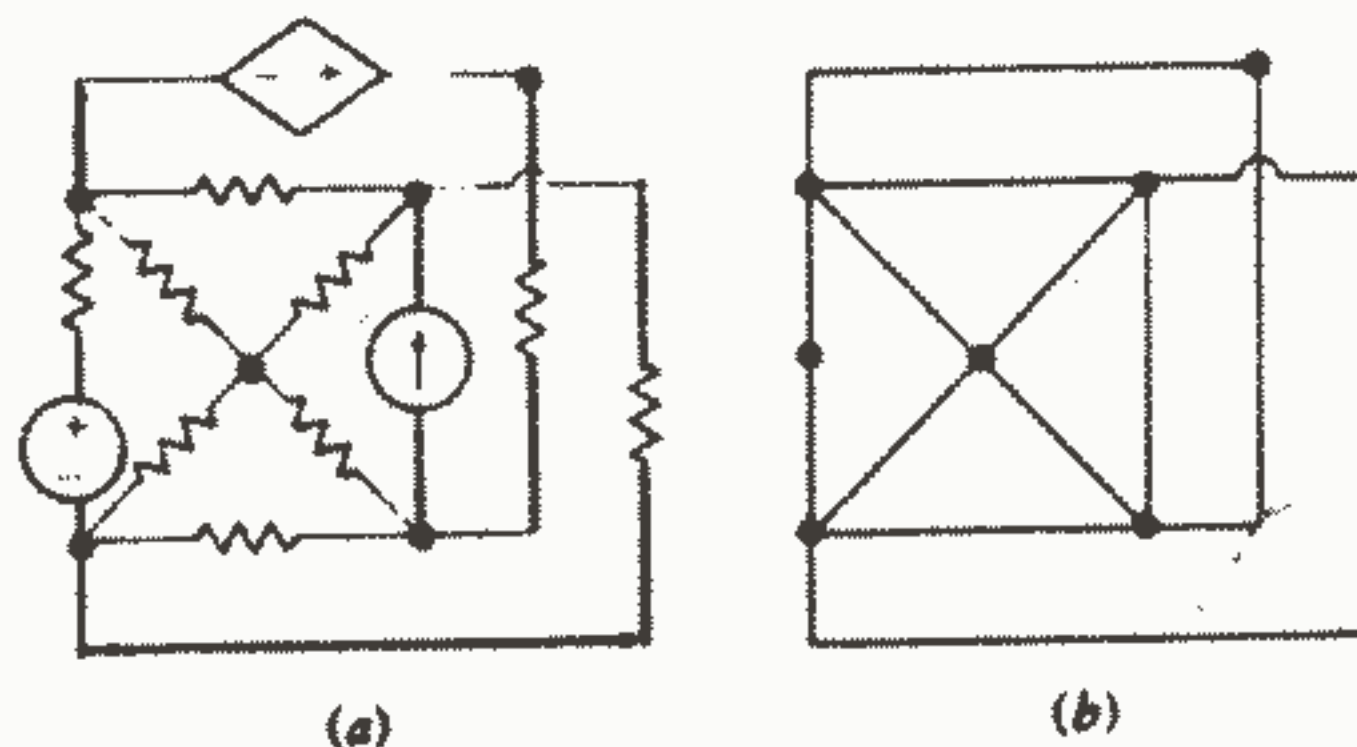
گره: نقطه‌ای است که در آن دو یا چند عنصر دارای اتصال مشترکی هستند.

مسیر: مجموعه‌ای از عناصر که هنگام عبور از آنها از هیچ گرهی بیش از یکبار عبور نکنیم.

شاخه: مسیری منفرد است که شامل یک عنصر ساده است که یک گره را به گره دیگری وصل می‌کند.

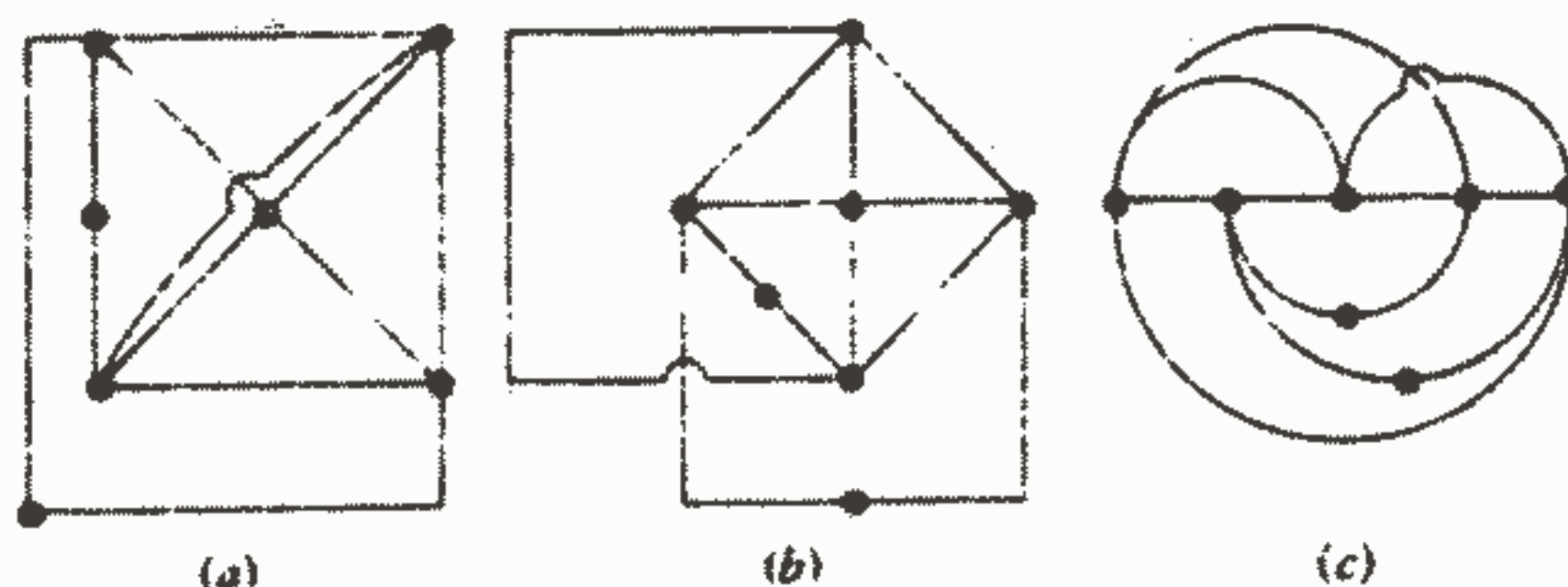
حلقه: مسیر بسته را حلقه گویند.

چشمه: حلقه‌ای است که حلقه دیگری را در داخل خود نداشته باشد.



شکل ۳-۳۱: (a) یک مدار داده شده. (b) گراف خطی آن

مدار.



شکل ۳-۳۲: سه گراف نشان داده شده از نظر توپولوژیکی با یکدیگر و با گراف شکل b ۳-۳۱ یکسان می‌باشند و هر کدام یک گراف از مدار شکل a ۳-۳۱ می‌باشند.

مدار غیر مسطح: هر مداری که مسطح نباشد را غیر مسطح گویند.
مدار مسطح: مداری است که بتوان آن را در یک سطح مسطح طوری ترسیم نمود که هیچ شاخه‌ای از روی شاخه دیگر عبور نکند.

گرافهای شکل ۳-۳۲ حاوی ۱۲ شاخه و ۷ گره می‌باشند.
سه خاصیت جدید یک گراف خطی یعنی درخت، مکمل درخت و لینک را اکنون باید تعریف کنیم. درخت را به صورت هر مجموعه‌ای از شاخه‌ها که شامل هیچ حلقه‌ای نباشند و هر گره به سایر گره‌ها وصل کند، تعریف می‌کنیم. معمولاً برای یک شبکه درختهای مختلفی را می‌توان رسم نمود و با افزایش پیچیدگی شبکه، تعداد آنها هم به سرعت افزایش می‌یابد. گراف ساده شکل ۳-۳۲a دارای هشت درخت می‌باشد که چهار تای آنها به وسیله خطوط ضخیم در شکل‌های e تا ۳-۳۲b نشان داده شده است.



شکل ۳-۳۳: (a) گراف خطی یک شبکه سه گره‌ای. (b) ، (c) ، (d) و (e) چهار درخت از هشت درخت ممکن برای این گراف هستند که با خطوط ضخیم رسم شده‌اند.

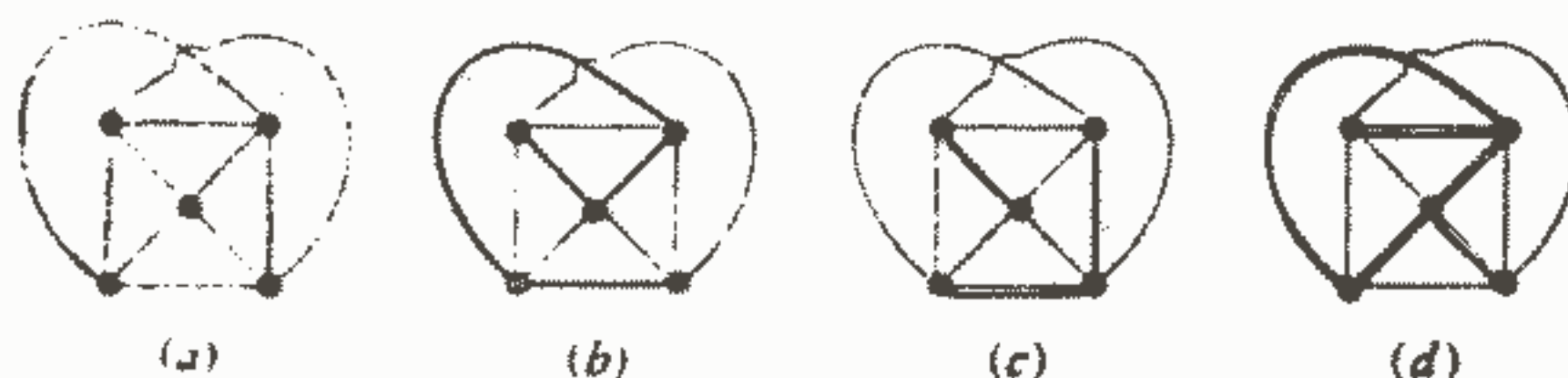
در شکل ۳-۳۴a یک گراف پیچیده تر نشان داده شده است. شکل ۳-۳۴b یک درخت ممکن را نشان می دهد و شکل های d , c-۳۴ مجموعه هایی از شاخه ها را نشان می دهند که درخت نیستند زیرا هیچکدام در تعریف درخت صدق نمی کنند.

بعد از این که یک درخت مشخص شد، شاخه هایی که در درخت نیستند بنام «مکمل درخت» نامیده می شوند. شاخه هایی که در شکل های e تا ۳-۳۳b با خطوط نازک رسم شده اند مکمل درخت های متناظر با درخت های مربوطه می باشند.

وقتی که ساختن یک درخت و مکمل درخت آن را بفهمیم، مفهوم لینک خیلی ساده می شود زیرا لینک به هر یک از شاخه های مکمل درخت گفته می شود. بدیهی است که هر شاخه بخصوصی، بسته به درختی که انتخاب می شود، می تواند یک لینک باشد و یا نباشد.

تعداد لینک های یک گراف را می توان بسادگی به تعداد شاخه ها و گره ها مربوط نمود. اگر گراف دارای N گره، $(N-1)$ شاخه برای ایجاد یک درخت لازم است زیرا شاخه اول دو گره را بهم وصل می کند ولی برای شاخه های دیگر به ازای هر یک گره یک شاخه اضافه می شود. بنابراین اگر تعداد شاخه ها B باشد، تعداد لینکها عبارت است از:

$$L = B - (N - 1) \quad \text{یا} \quad L = B - N + 1 \quad (30)$$



شکل ۳-۳۴: (a) یک گراف خطی (b) یک درخت ممکن

برای این گراف. (c) و (d) این مجموعه شاخه ها در

تعریف درخت صدق نمی کنند.

در مکمل درخت L شاخه و در درخت $(N-1)$ شاخه وجود دارد.

در هر یک از گراف های شکل ۳-۳۳ ملاحظه می کنیم که $3 = 5 - 3 + 1$ و در گراف شکل ۳-۳۴b داریم $6 = 10 - 5 + 1$. یک شبکه ممکن از چند قسمت مجزا تشکیل شده باشد و در معادله (۳۰) می توان برای تعمیم بیشتر آن، $1 + S$ را با S جایگزین نمود که S تعداد قسمت های مجزا می باشد. البته ممکن است دو قسمت مجزا به وسیله هادی منفردی بهم وصل شده باشند، که در این صورت دو گره تبدیل به یک گره می شوند و هیچ جریانی از این هادی منفرد

عبور نمی‌کند. این روش را می‌توان برای ملحق نمودن هر تعداد قسمتهای مجزا بکار برد و در نتیجه ما اگر توجه خود را محدود به مدارهایی که برای آنها $S = 1$ بکنیم، هیچگونه کلیتی را از دست نمی‌دهیم.

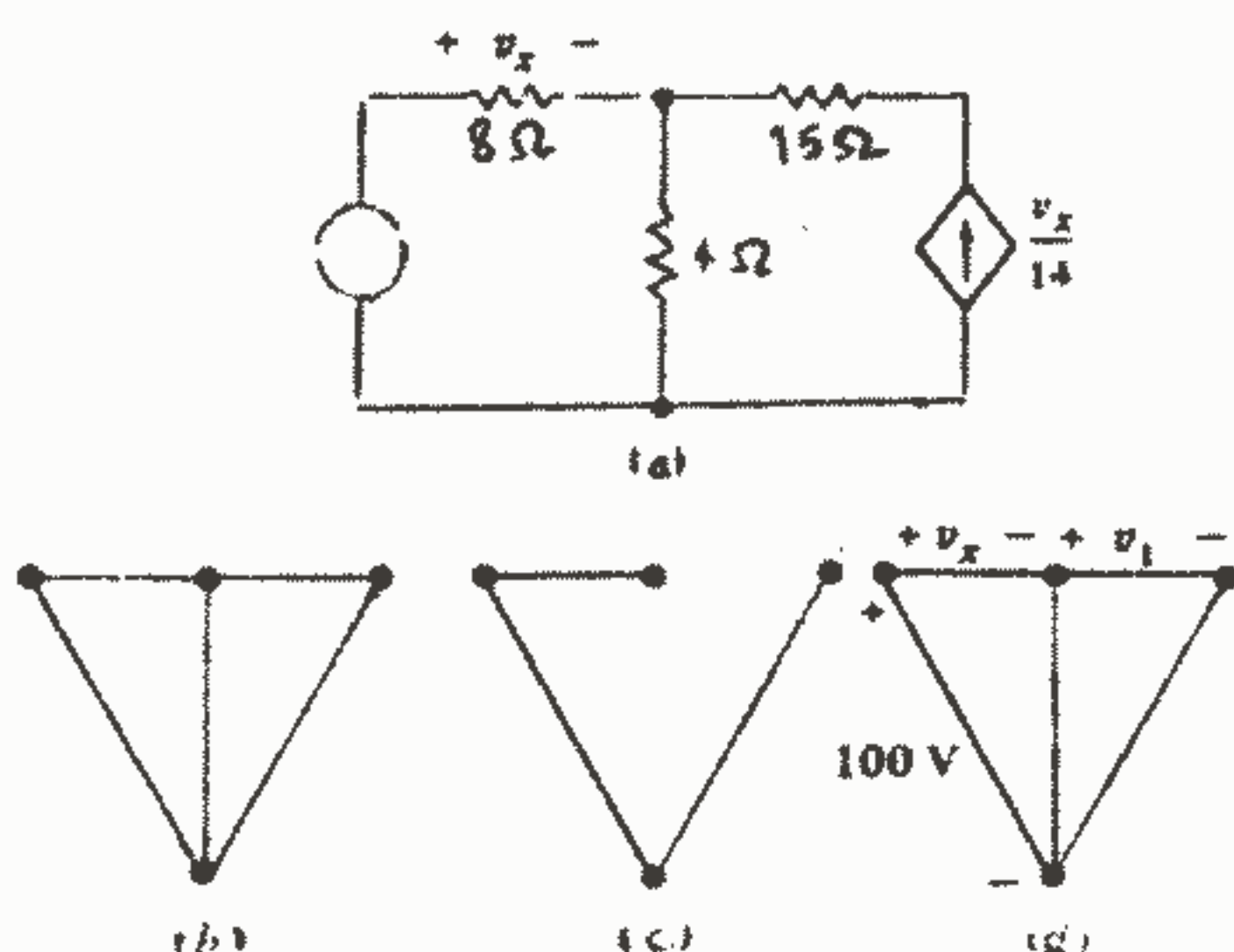
ما اکنون آماده‌ایم که درباره روشی بحث کنیم که ما را قادر به نوشتن مجموعه‌ای از معادلات گره که مستقل و کافی هستند، بکند. این روش ما را قادر خواهد ساخت که مجموعه‌های متفاوتی از معادلات برای یک شبکه به دست آوریم که همگی صادق باشند. اگر چه این روش همه مجموعه معادلات ممکن را به ما ارائه نمی‌کند. بیایید ابتدا این روش را توصیف کنیم و سپس آن را با سه مثال توضیح دهیم و دلیل مستقل و کافی بودن معادلات را خاطر نشان سازیم.

در هر مدار داده شده باید:

- ۱ - یک گراف رسم کنیم و سپس یک درخت مشخص کنیم.
 - ۲ - همه منابع ولتاژ را در درخت قرار دهیم.
 - ۳ - همه منابع جریان را در مکمل درخت قرار دهیم.
 - ۴ - در صورت امکان همه شاخه‌های ولتاژ کنترل را برای منابع وابسته کنترل شده به وسیله ولتاژ، در درخت قرار دهیم.
 - ۵ - در صورت امکان همه شاخه‌های جریان کنترل را برای منابع وابسته کنترل شده به وسیله جریان در مکمل درخت قرار دهیم.
- این چهار مرحله اخیر بطور موثری ولتاژها را به درخت و جریانها را به مکمل درخت مربوط می‌سازد. ما اکنون در دو سر هر یک از $(N - 1)$ شاخه درخت یک متغیر ولتاژ نسبت می‌دهیم. به شاخه‌ای که حاوی یک منبع ولتاژ مستقل یا وابسته است باید آن ولتاژ منبع نسبت داده شود و به شاخه‌ای که حاوی یک ولتاژ کنترل کننده است، باید آن ولتاژ کنترل کننده نسبت داده شود. بنابراین تعداد متغیرهای جدید که معرفی کرده‌ایم برابر است با تعداد شاخه‌های درخت یعنی $(N - 1)$ منهای تعداد منابع ولتاژ موجود در درخت و همچنین منهای تعداد ولتاژهای کنترلی که قادر هستیم در درخت قرار دهیم. در مثال سوم که در پی می‌آید در می‌یابیم که تعداد متغیرهای جدید لازم، ممکن است صفر باشد.

با داشتن مجموعه‌ای از متغیرها، اکنون نیاز به نوشتن مجموعه‌ای از معادلات داریم که برای تعیین این متغیرها کافی باشند. این معادلات به وسیله اعمال KCL به دست می‌آیند. منابع ولتاژ به همان طریقی که در کار قبلی مان راجع به تحلیل گره دیدیم به کار می‌روند و هر منبع ولتاژ و

دو گره آن یک فوق نقطه و یا بخشی از یک فوق نقطه را تشکیل می‌دهند. سپس قانون جریان کیرشوف را به هر یک از گره‌ها و فوق نقطه‌ها اعمال می‌کنیم و سپس مجموع جریانهای خارج شونده از هر گره مساوی صفر قرار می‌دهیم. هر جریان بر حسب متغیرهای ولتاژی که تعیین کرده‌ایم بیان می‌شود. و بالاخره در حالتی که منابع وابسته کنترل شده به وسیله جریان وجود داشته باشد باید برای هر جریان کنترل یک معادله بنویسیم که آن را به متغیرهای ولتاژ مربوط سازد که البته این امر با روند قبلی برای تحلیل گره منافاتی ندارد. اجازه دهید این روش را در مدار شکل ۳-۳۵a بکار ببریم.



شکل ۳-۳۵: (a) مداری که به عنوان مثال برای تحلیل گره‌ای عمومی در نظر گرفته شده است. (b) گراف مدار مذکور. (c) منبع ولتاژ و ولتاژ کنترل در درخت قرار داده شده‌اند در حالی که منبع جریان در مکمل درخت قرار داده شده است. (d) درخت تکمیل شده است و ولتاژی برای هر شاخه درخت نسبت داده شده است.

این مدار شامل چهار گره و پنج شاخه می‌باشد و گراف آن در شکل ۳-۳۵b نشان داده شده است. طبق مرحله ۲ و ۳ روند ترسیم درخت، منبع ولتاژ را در درخت و منبع جریان را در مکمل درخت قرار می‌دهیم. با پیروی از مرحله ۴ ملاحظه می‌کنیم که شاخه v_x را هم می‌توان در درخت قرار داد زیرا هیچ حلقه‌ای که تعریف درخت را نقض کند، ایجاد نمی‌کند. ما اکنون به دو شاخه درختی و یک لینک شکل ۳-۳۵c رسیده‌ایم و ملاحظه می‌کنیم که

هنوز یک درخت نداریم زیرا گره سمت راست به وسیله مسیری از طریق شاخه‌های درختی به دیگر گره‌ها وصل نشده است. تنها راه ممکن برای تکمیل درخت در شکل ۳-۳۵d نشان داده شده است. سپس منبع ولتاژ ۱۰۰V، ولتاژ کنترل v_x و یک متغیر ولتاژ v_1 هم در سه شاخه درخت نشان داده شده است.

بنابراین دو مجهول داریم، v_x ، v_1 ، و بدیهی است که نیاز به دو معادله بر حسب آنها داریم. چهار گره وجود دارد، اما وجود منبع ولتاژ باعث می‌شود که دو تای آنها تشکیل یک فوق نقطه را بدهند. قانون جریان کیرشوف را می‌توان در دو تا از سه گره یا فوق نقطه باقیمانده اعمال نمود. بیایید ابتدا گره راست را در نظر بگیریم. جریانی که به چپ می‌رود عبارت است از - $v_1/15$ در حالیکه جریانی که پایین می‌رود $-v_x/14$ می‌باشد. بنابراین معادله اول ما عبارت است از:

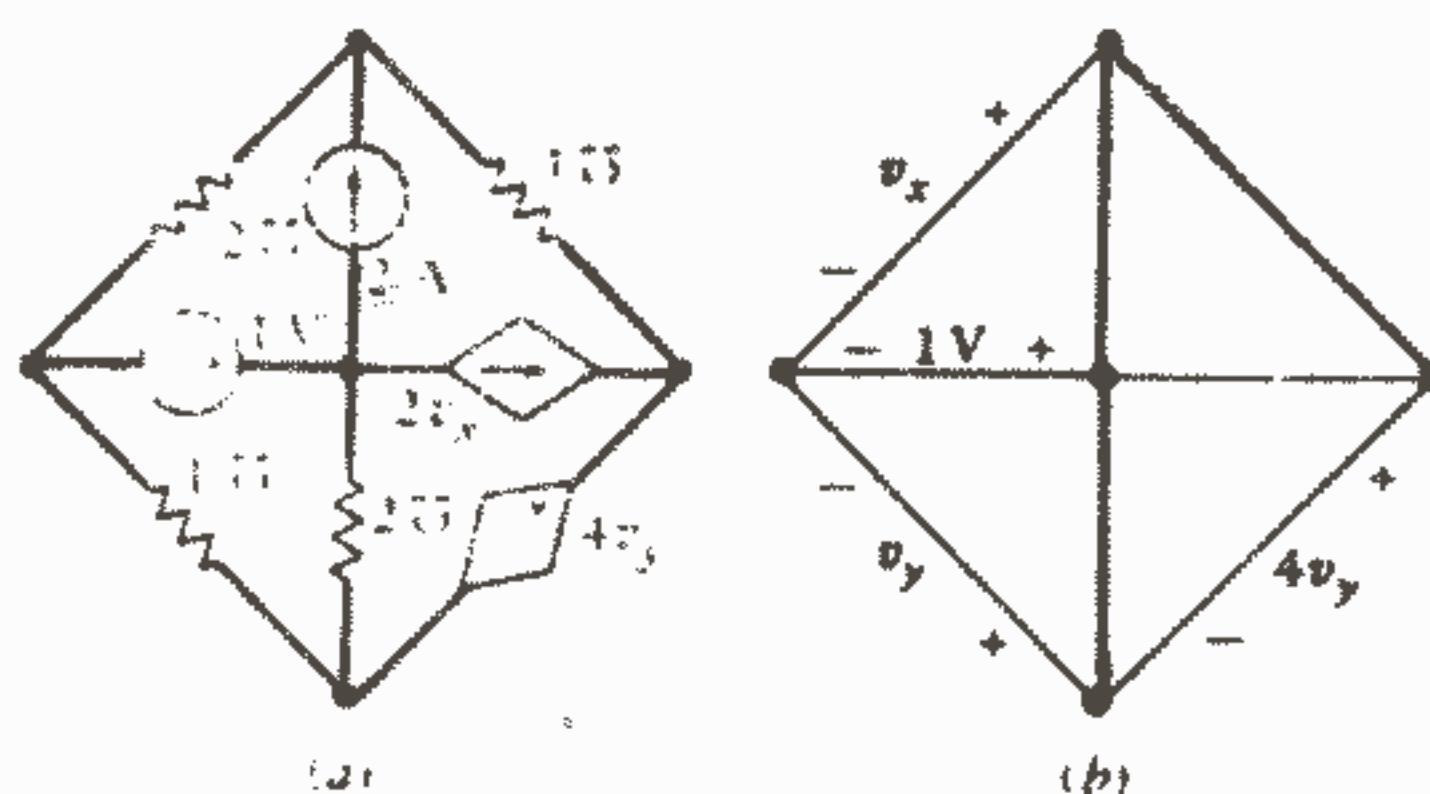
$$-v_1/15 - v_x/14 = 0$$

به نظر می‌رسد که گره وسطی در بالای مدار آسانتر از فوق نقطه باشد، بنابراین مجموع جریان رو به چپ $-v_x/8$ ، جریان رو به راست $v_1/15$ و جریان رو به پایین در مقاومت $4\ \Omega$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم. این جریان اخیر عبارت است از ولتاژ دو سر مقاومت تقسیم بر $4\ \Omega$ ، اما ولتاژی در دو سر این لینک مشخص نشده است. با وجود این، وقتی که درختی ایجاد می‌شود بنابر تعریف باید یک مسیر بین هر گره با سایر گره‌ها وجود داشته باشد. پس از آنجاییکه برای هر شاخه در یک درخت ولتاژی نسبت داده شده است می‌توانی ولتاژ دو سر هر لینک را بر حسب ولتاژهای شاخه‌ای درخت بیان کنیم. بنابراین جریان رو به پایین برابر خواهد بود با $(-v_x + 100)/4$ و معادله دوم ما عبارت خواهد بود از:

$$-v_x/8 + v_1/15 + (-v_x + 100)/4 = 0$$

حل همزمان این دو معادله با هم جوابهای $v_x = 56\text{ V}$ ، $v_1 = 60\text{ V}$ را ارائه می‌کند.

بعنوان مثال دوم بیایید یک مدار پیچیده‌تر را که قبلاً با تعریف ولتاژهای گره‌ها نسبت به گره مبنا تحلیل کردیم دوباره مورد بررسی قرار دهیم. این مدار همان مدار شکل ۳-۵ می‌باشد که در شکل ۳-۳۶a تکرار شده است. ما یک درخت را بگونه‌ای رسم می‌کنیم که هر دو منبع ولتاژ و هر دو ولتاژ کنترل بعنوان ولتاژهای شاخه درخت و در نتیجه بعنوان متغیرهای تعیین شده ظاهر شوند. این چهار شاخه تشکیل درخت شکل ۳-۳۶b را می‌دهند و ولتاژهای شاخه درخت به صورت v_y ، 1 ، v_x ، $4v_y$ انتخاب شده‌اند که در شکل نشان داده شده است.



شکل ۳-۳۶: (a) مدار شکل ۳-۵ تکرار شده است. (b)

درخت به گونه‌ای انتخاب شده است که هر دو منبع ولتاژ

و هر دو ولتاژ کنترل شاخه‌های درخت می‌باشند.

دو منبع ولتاژ فوق نقطه‌هایی را تعریف می‌کنند و ما KCL را دو بار اعمال می‌کنیم، یکبار به گره بالایی:

$$2v_x + 1(v_x - v_y - 4v_y) = 2$$

و یکبار هم به فوق نقطه شامل گره راست، گره پایین و منبع ولتاژ وابسته:

$$1v_y + 2(v_y - 1) + 1(4v_y + v_y - v_x) = 2v_x$$

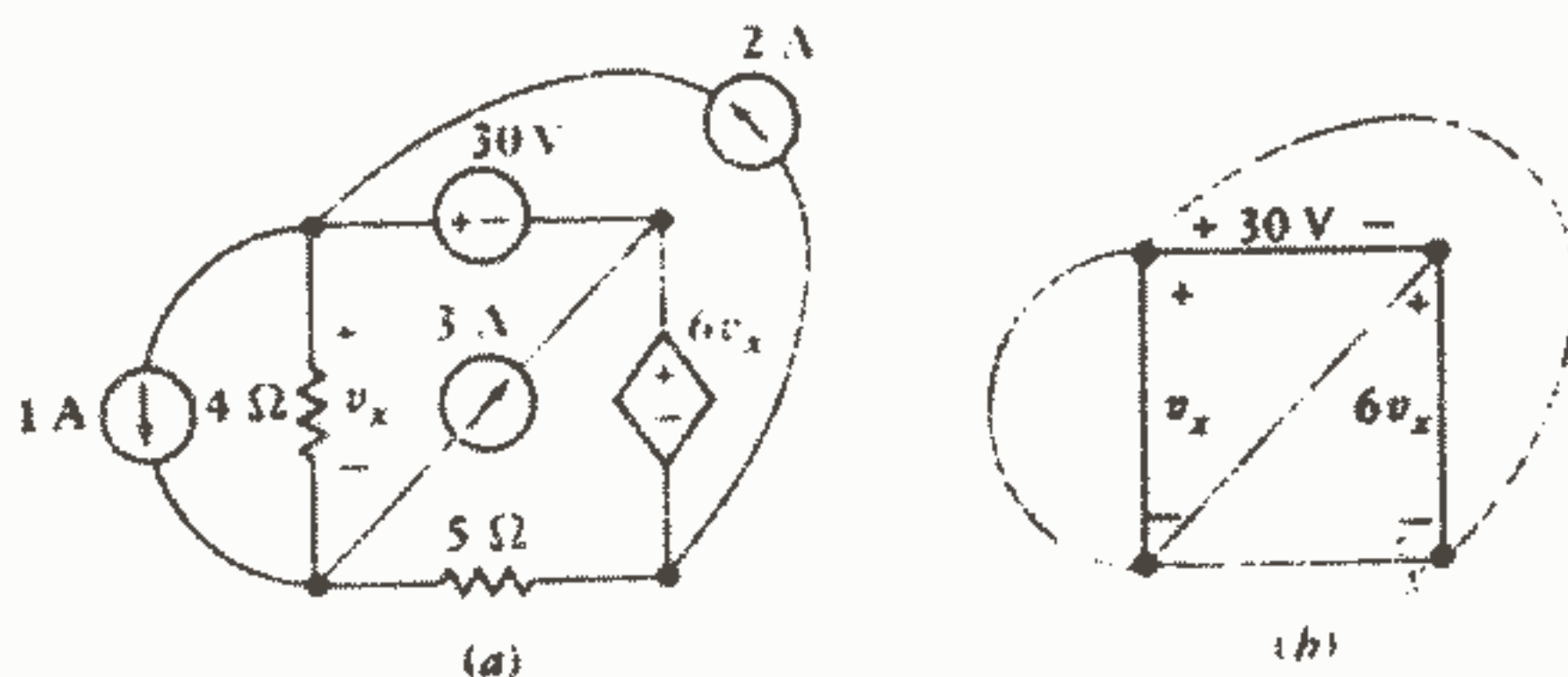
به جای چهار معادله‌ای که قبلاً داشتیم، اکنون فقط دو معادله داریم که به سادگی به دست آوریم: $v_x = \frac{26}{9} V$ ، $v_y = \frac{4}{9} V$ که هر دو جواب با جوابهای قبلی مطابقت دارند.

بعنوان آخرین مثال مدار شکل ۳-۳۷a را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دو منبع ولتاژ و ولتاژ کنترل درخت سه شاخه‌ای شکل ۳-۳۷a را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دو منبع ولتاژ و ولتاژ کنترل درخت سه شاخه‌ای شکل ۳-۳۷b را ایجاد می‌کنند. از آنجاییکه دو گره بالایی و گره راست همگی با هم تشکیل یک فوق نقطه را می‌دهند ما فقط احتیاج به یکبار نوشتن معادله KCL داریم. با انتخاب گره پایین سمت چپ، داریم:

$$-1 - v_x/4 + 3 + (-v_x + 30 + 6v_x)/5 = 0$$

از معادله فوق خواهیم داشت: $v_x = -32/37$. علیرغم ظاهر پیچیده این مدار، استفاده از تحلیل گره‌ای عمومی به راه حل ساده‌ای رهنمون می‌شود. بکارگیری ولتاژهای گره به مبنا و جریانهای چشمه‌ای نیاز به معادلات بیشتر و تلاش بیشتر دارد.

مسئله پیدا کردن بهترین روش تحلیل را در قسمت بعدی مورد بحث قرار خواهیم داد. اگر در مثال قبلی نیاز به دانستن ولتاژ، جریان و یا قدرت دیگری داشتیم فقط یک قدم اضافی جواب را به ما می داد. مثلاً قدرت ارائه شده به وسیله منبع $3A$ برابر است با $-122W = 3(-30 - 32/3)$.



شکل ۳-۳۷: (a) مداری که برای آن فقط یک معادله گرهی عمومی لازم است. (b) درخت و ولتاژهای شاخه درختی به کار رفته.

اجازه دهید بحث را با بررسی کافی بودن مجموعه ولتاژهای شاخه درختی مفروض و مستقل بودن معادلات گرهی به پایان بریم. اگر این ولتاژهای شاخه درختی کافی باشند، آنگاه ولتاژ هر شاخه درخت یا مکمل درخت باید از اطلاعاتی که درباره همه مقادیر ولتاژهای شاخه درخت داریم، قابل دسترس باشند. این مطلب مطمئناً برای شاخه های درخت صادق است. برای لینکها می دانیم که هر لینک بین دو گره قرار دارد و بنابراین تعریف، درخت هم باید آن دو گره را بهم وصل کرده باشد. بنابراین هر ولتاژ را هم می توان بر حسب ولتاژهای شاخه درختی بیان نمود. وقتی که ولتاژ دو سر هر شاخه در مدار معلوم باشد آنگاه همه جریانها را می توان یا به وسیله مقادیر داده شده منابع جریان، اگر شاخه حاوی یک منبع جریان باشد و یا به وسیله قانون اهم، اگر شاخه مقاومتی باشد و یا با استفاده از KCL و این مقادیر جریان وقتی که شاخه، یک منبع ولتاژ باشد، به دست آورد. بنابراین همه ولتاژها و جریانها تعیین می شوند و کافی بودن مشاهده می شود.

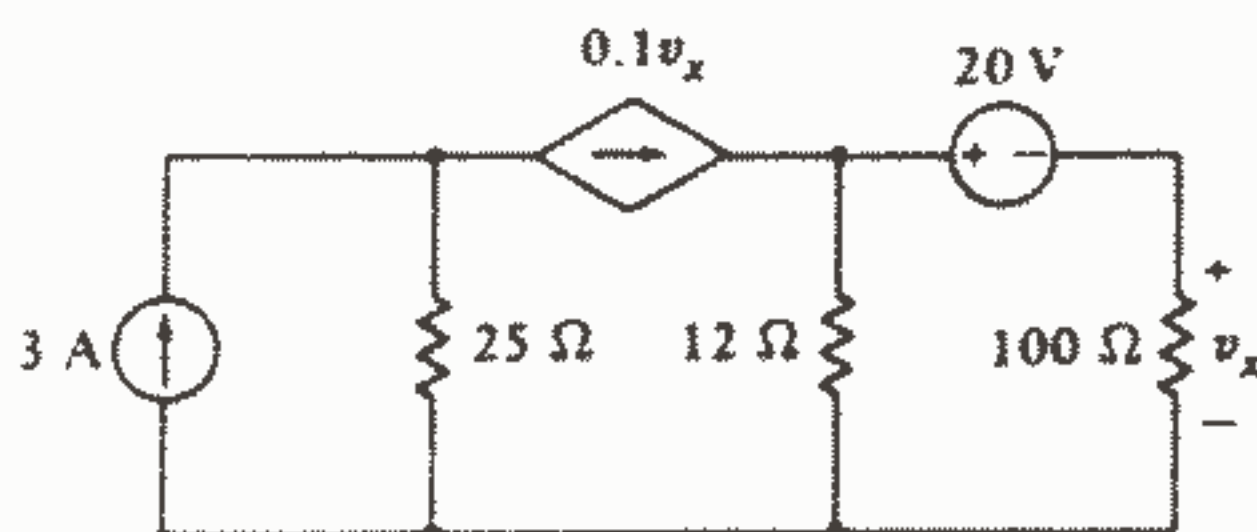
برای نشان دادن استقلال، بیایید خودمان را با فرض نمودن حالتی که فقط منابع مستقل جریان در شبکه موجود باشند ارضاء کنیم. همانگونه که قبلاً ملاحظه کرده ایم، منابع مستقل ولتاژ در مدار باعث کاهش تعداد معادلات می شوند در حالیکه منابع وابسته معمولاً تعداد معادلات بیشتری را ایجاب می کند. در حالتی که فقط منابع جریان مستقل موجود باشند، آنگاه دقیقاً

$(N - 1)$ معادله گرهی که بر حسب $(N - 1)$ ولتاژ شاخه درختی نوشته شده باشند، لازم است. برای نشان دادن اینکه این $(N - 1)$ معادله مستقل می باشند، اعمال KCL را به $(N - 1)$ گره مختلف تجسم کنید. هر دفعه که معادله KCL را می نویسیم یک شاخه درختی جدیدی وجود دارد که آن گره را به بقیه درخت وصل می کند. این مطلب برای هر یک از $(N - 1)$ گره صحیح است و بنابراین ما $(N - 1)$ معادله مستقل خواهیم داشت.

تمرین

۱۰ - ۳ - (a) چند درخت می توان برای شکل ۳-۳۸ ایجاد نمود که تمام پنج مرحله ترسیم درخت را که قبلاً فهرست شده است، در بر داشته باشد؟ (b) یک درخت مناسب رسم کنید و دو معادله بر حسب دو مجهول بنویسید و v_x را پیدا کنید. (c) چه قدرتی به وسیله منبع وابسته ارائه می شود؟

جواب: ۱، ۲۵۰ V، ۲۰٫۵ KW



شکل ۳-۳۸: به تمرین ۱۰ - ۳ مراجعه کنید.

۸-۳ لینکها و تحلیل حلقه

اکنون باید کاربرد یک درخت را برای به دست آوردن مجموعه مناسبی از معادلات حلقه مورد توجه قرار دهیم. از بعضی جهات این مورد متناظر روش نوشتن معادلات گره می باشد. باز هم باید خاطر نشان کنیم که اگر چه ما قادریم تضمین کنیم که معادلاتی را که می نویسیم هم کافی و هم مستقل هستند ولی نباید انتظار داشته باشیم که این روش ما را مستقیماً به تمام مجموعه معادلات ممکن رهنمون خواهد شد.

ما باز هم با ایجاد یک درخت و استفاده از همان قواعدی که برای تحلیل گرهی عمومی به کار بردیم شروع می کنیم. در تحلیل گرهی یا حلقه ای هدف ما قرار دادن ولتاژها در درخت و

جریانها در مکمل درخت می باشد که این یک قاعده اجباری برای منابع و یک قاعده مطلوب برای کمیت‌های کنترل کننده می باشد.

اگر چه، اکنون به جای نسبت دادن یک ولتاژ به هر شاخه درخت، یک جریان (البته با فلش مبنا) به هر عنصر مکمل درخت و یا هر لینک نسبت می دهیم. اگر ده لینک وجود داشته باشد دقیقاً ده جریان لینک نسبت می دهیم. هر لینک که دارای یک منبع جریان باشد همان جریان منبع را به عنوان جریان لینک تعیین می کنیم.

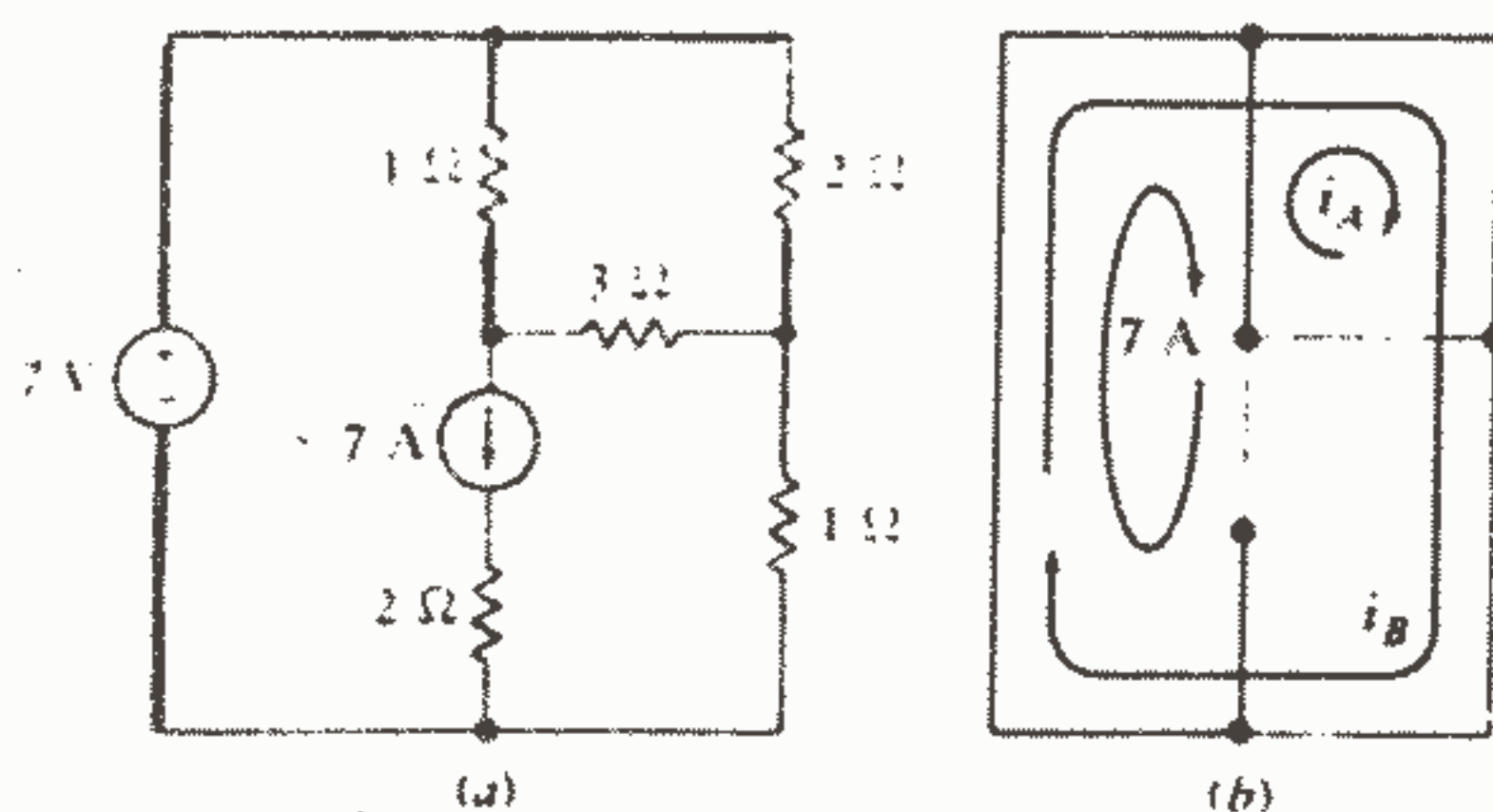
توجه داشته باشید که هر جریان لینک را می توان به عنوان یک جریان حلقه هم در نظر گرفت زیرا لینک باید بین دو گره مشخص کشیده شده باشد و نیز باید مسیری بین آن دو گره در درخت وجود داشته باشد. بنابراین برای هر لینک یک حلقه منفردی وجود دارد که شامل آن لینک و مسیر یکتایی در درخت می باشد. بدیهی است که جریان نسبت داده شده را می توان هم به عنوان یک جریان حلقه و یا یک جریان لینک تصور نمود. مفهوم لینک هنگام تعریف نمودن جریانها خیلی مفید است و برای هر لینک یک جریان تعریف نمود و تعبیر حلقه هنگام نوشتن معادلات بسیار مناسب است زیرا ما باید KVL را در هر حلقه اعمال کنیم.

بیا بید این روند تعریف جریانهای لینک را با توجه مجدد به یک مثال قبلی به کار ببریم. مدار در شکل ۱۲-۳ نشان داده شده است که در شکل ۳-۳۹a مجدداً رسم شده است. درخت انتخاب شده یکی از چندین حالت ممکن است که در آن منبع ولتاژ در یک شاخه درخت و منبع جریان در یک لینک قرار دارد بیا بید ابتدا لینک حاوی منبع جریان را در نظر بگیریم. حلقه مربوط به این لینک، چشمه سمت چپ می باشد، بنابراین جریان لینک را در محیط این چشمه در نظر می گیریم (شکل b ۳-۳۹). یک انتخاب آشکار و بدیهی برای علامت این جریان لینک عبارت از «VA» می باشد. به یاد داشته باشید که هیچ جریان دیگری نمی تواند از میان این لینک به خصوص عبور کند در نتیجه مقدار جریان آن باید دقیقاً نیروی منبع جریان باشد.

حال توجه خود را به لینک مقاومت $3\ \Omega$ معطوف می کنیم. حلقه مربوط به آن عبارت از چشمه سمت راست بالا می باشد و این جریان حلقه (یا چشمه) به صورت i_A تعریف شده و در شکل b ۳-۳۹ نشان داده شده است. آخرین لینک مقاومت $1\ \Omega$ پایین می باشد و تنها مسیر بین ترمینالهای آن در درخت، روی محیط مدار می باشد این جریان لینک را i_B می نامیم و فلش مسیر و جهت مبناي آن در شکل b ۳-۳۹ نشان داده شده است. آن یک جریان چشمه ای نمی باشد.

توجه داشته باشید که هر لینک فقط یک جریان در خودش دارد اما یک شاخه درخت ممکن است هر تعداد از یک تا کل تعداد جریانهای لینک مشخص شده را دارا باشد. استفاده از فلش

طویل (تقریباً بسته) برای نشان دادن حلقه‌ها کمک می‌کند که مشخص کنیم کدام جریان حلقه در کدام شاخه درخت جاری است و جهت مبنای آن کدام است.



شکل ۳-۳۹: (a) مدار شکل ۱۲-۳ که دوباره نشان داده شده است.

(b) یک درخت طوری انتخاب شده است که منبع جریان در یک لینک و منبع ولتاژ در یک شاخه درخت باشد.

اکنون باید در هر یک از این حلقه‌ها یک معادله KVL بنویسیم. متغیرهای به کار رفته همان جریانهای لینک تعیین شده می‌باشند. از آنجاییکه ولتاژ دو سر یک منبع جریان را نمی‌توان بر حسب جریان آن بیان نمود و چون ما قبلاً مقدار جریان منبع را به عنوان جریان لینک به کار برده‌ایم، بنابراین هر حلقه‌ای را که شامل یک منبع جریان باشد کنار می‌گذاریم. برای مدار شکل ۳-۳۹، ابتدا در حلقه i_A از گوشه پایین سمت چپ در جهت ساعت حرکت می‌کنیم. جریانی که از مقاومت 1Ω عبور می‌کند عبارت از $(i_A - 7)$ و جریان عنصر 2Ω عبارت از $(i_A + i_B)$ و جریان لینک i_A می‌باشد. بنابراین داریم:

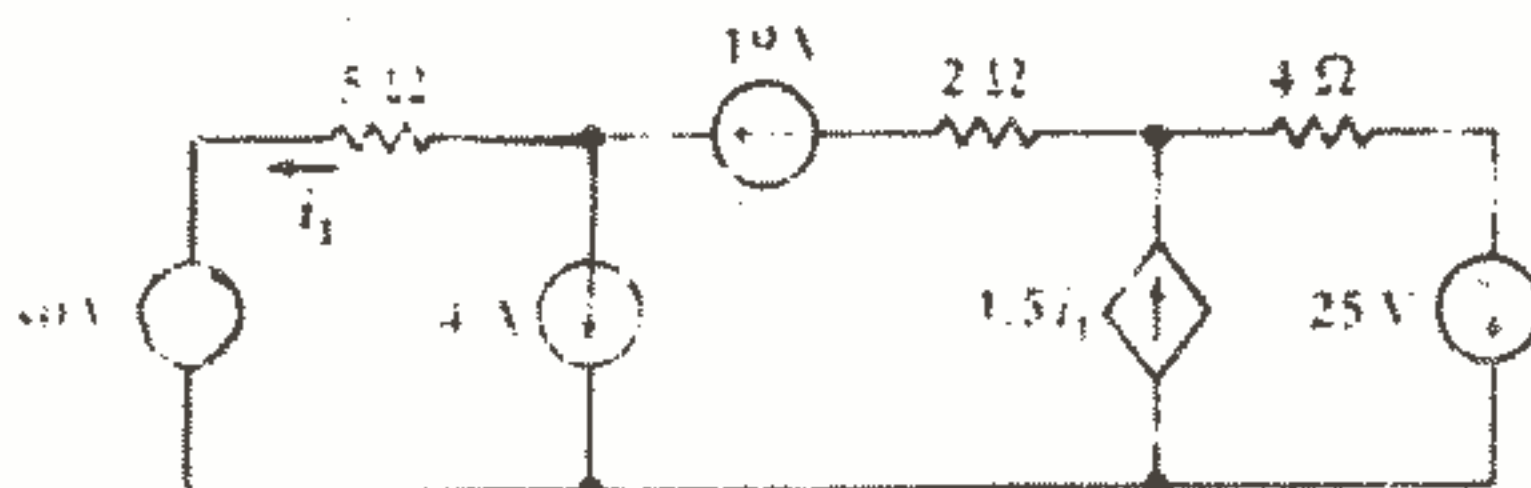
$$1(i_A - 7) + 2(i_A + i_B) + 3i_A = 0$$

برای لینک i_B حرکت در جهت ساعت از گوشه پایین سمت چپ معادله زیر را به ما می‌دهد:

$$-7 + 2(i_A + i_B) + 1i_B = 0$$

حرکت در حلقه ۷ آمپری لازم نیست. با حل معادلات بالا خواهیم داشت: $i_B = 2A$, $i_A = 0.5A$ یکبار دیگر همان جوابهای قبلی را اما با یک معادله کمتر به دست آورده‌ایم. یک مثال حاوی یک منبع وابسته در شکل ۳-۴۰ نشان داده شده است. این مدار شامل

شش گره می‌باشد و در نتیجه درخت آن باید دارای پنج شاخه باشد. از آنجاییکه هشت عنصر در شبکه موجود است، سه لینک در مکمل درخت وجود خواهد داشت.



(a)



(b)



(c)

شکل ۴۰ - ۳: (a) مداری که در آن i_1 را می‌توان با یک معادله با استفاده از تحلیل حلقه عمومی به دست آورد. (b) تنها درختی که قواعد ذکر شده در قسمت ۷ - ۳ را اقلنا می‌کند. (c) سه جریان لینک با حلقه‌هایشان نشان داده شده‌اند.

اگر سه منبع ولتاژ را در درخت و دو منبع جریان و جریان کنترل را در مکمل درخت قرار دهیم، درخت شکل b ۴۰-۳ به دست می‌آید.

جریان منبع ۴A یک حلقه را مطابق شکل c ۴۰-۳ تعریف می‌کند. منبع وابسته، جریان حلقه i_1 را در چشمه راست ایجاد می‌کند و جریان کنترل i_1 جریان حلقه باقیمانده را در حول محیط مدار ارائه می‌کند. توجه داشته باشید که هر سه جریان از مقاومت 4Ω عبور می‌کنند.

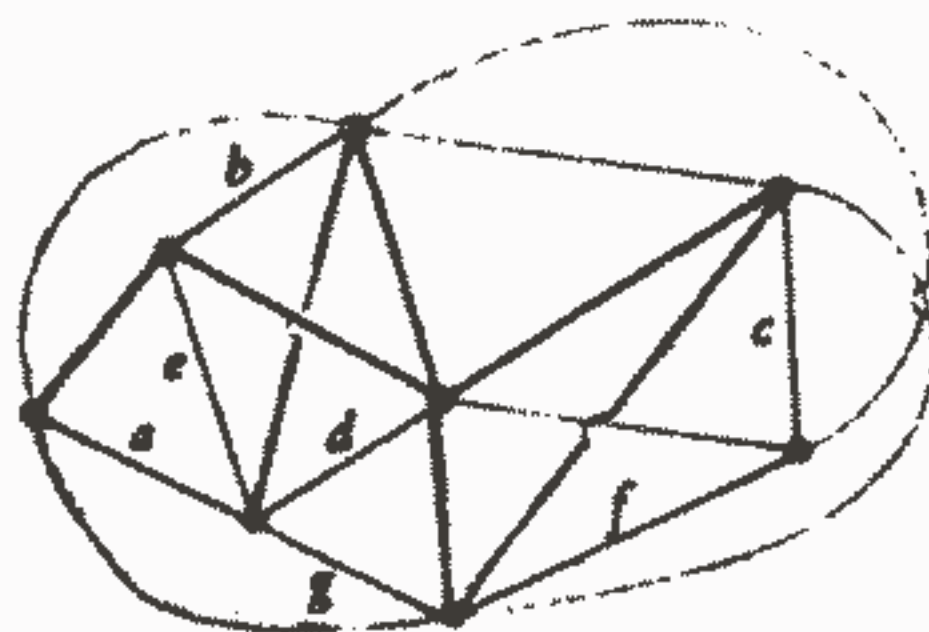
ما اکنون فقط یک کمیت مجهول به نام i_1 داریم و بعد از کنار گذاشتن دو حلقه‌ای که به وسیله دو منبع جریان تعریف شده‌اند، KVL را در حول حلقه بیرونی مدار اعمال می‌کنیم:

$$-30 + 5(-i_1) + 10 + 2(-i_1 - 4) + 4(-i_1 - 4 + 1.5i_1) - 25 = 0$$

علاوه بر سه منبع ولتاژ، سه مقاومت هم در این حلقه وجود دارد. مقاومت $5\ \Omega$ فقط یک جریان حلقه در داخل خود دارد زیرا آن یک لینک هم می باشد، مقاومت $2\ \Omega$ حاوی دو جریان حلقه ای می باشد و مقاومت $4\ \Omega$ دارای سه جریان می باشد. اگر بخواهیم از خطاها در جریانهای جهنده و یا خطا در تعیین جهت صحیح اجتناب کنیم یک مجموعه با دقت ترسیم شده از حلقه ها لازم می باشد. اگر چه اعتبار معادله قبلی را تضمین می کنیم و با حل آن خواهیم داشت:

$$i_1 = -12A$$

چگونه کافی بودن این روش را نشان دهیم؟ بیاید یک درخت را تجسم کنیم که دارای هیچ حلقه ای نمی باشد بنابراین حداقل دو گره وجود دارد که به هر کدام فقط یک شاخه درخت وصل شده است. جریان هر یک از این شاخه ها را می توان به سادگی از جریانهای لینک معلوم و به وسیله KCL به دست آورد. اگر گره های دیگری هم وجود داشته باشند که به آنها فقط یک شاخه درختی وصل شده باشد، این جریانهای شاخه درختی را هم می توان فوراً به دست آورد. بنابراین در درخت شکل ۴۱ - ۳ ما جریانهای شاخه های d, c, b, a را پیدا کرده ایم. اکنون در طول شاخه های درخت حرکت می کنیم و جریانهای شاخه های f, e را پیدا می کنیم، این روند را می توان تا پیدا کردن همه جریانهای شاخه ها ادامه داد. بنابراین جریانهای لینک برای تعیین تمام جریانهای شاخه کافی می باشند. بهتر است وضعیتی را هم در نظر بگیریم که یک درخت غلط رسم شده باشد که شامل یک حلقه باشد. حتی وقتی که همه جریانهای لینک صفر باشند. هنوز هم باید یک جریان در این «حلقه درخت» دور بزنند. بنابراین، جریانهای لینک نمی توانند این جریان را تعیین کنند و یک مجموعه کافی را ارائه نمی کنند. چنین درختی بنابر تعریف غیرممکن است.



شکل ۴۱ - ۳: یک درخت که به عنوان مثال برای توضیح کافی بودن جریانهای لینک به کار رفته است.

برای نشان دادن استقلال، بیایید خود را با فرض نمودن وضعیتی که در آن فقط منابع ولتاژ مستقل در مدار موجود باشند، قانع کنیم. همانگونه که قبلاً اشاره کردیم، منابع جریان مستقل در مدار باعث کاهش معادلات می‌شوند در حالیکه منابع وابسته معمولاً تعداد معادلات بیشتری را ایجاد می‌کنند.

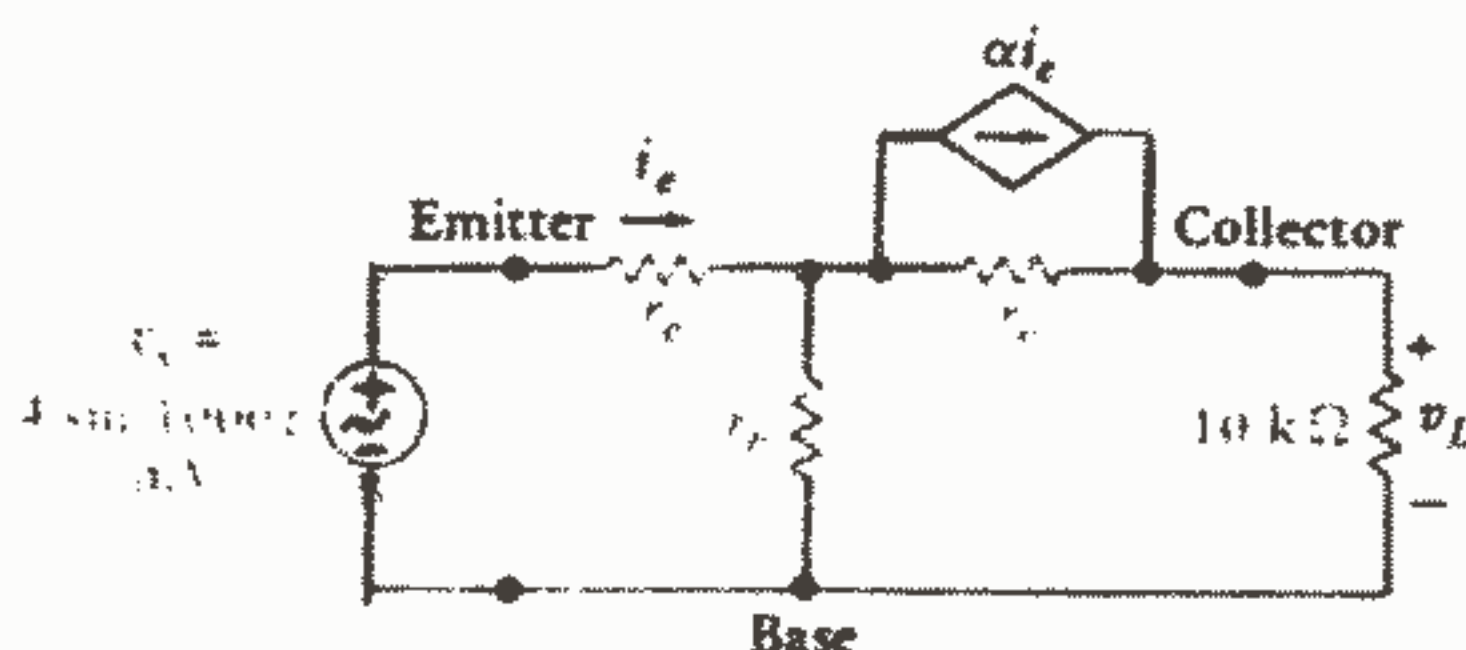
در حالیکه فقط منابع ولتاژ مستقل داشته باشیم، دقیقاً $(B - N + 1)$ معادله حلقه بر حسب $(B - N + 1)$ جریان لینک می‌توان نوشت. برای نشان دادن اینکه این $(B - N + 1)$ معادله حلقه مستقل هستند، کافی است خاطر نشان کنیم که هر یک از این معادلات بیانگر اعمال KVL حول حلقه‌ای می‌باشند که شامل لینکی است که در هیچ یک از معادلات دیگر ظاهر نشده است ما می‌توانیم در هر یک از این لینکها مقاومت‌های متفاوت $R_1, R_2, \dots, R_{B-N+1}$ را در نظر بگیریم که در این صورت بدیهی است که یک معادله هرگز نمی‌تواند از سایرین به دست آید زیرا دارای ضربی است که در هیچ یک از معادلات دیگر ظاهر نمی‌شود.

بنابراین جریانهای لینک برای به دست آوردن یک جواب کامل، کافی می‌باشند و مجموعه معادلات حلقه که برای پیدا کردن جریانهای لینک به کار می‌بریم یک مجموعه مستقل می‌باشند. با بررسی روش تحلیل گرهی عمومی و تحلیل حلقه‌ای، اکنون باید مزایا و معایب هر یک را مورد توجه قرار دهیم به طوریکه انتخاب هوشیارانه‌ای برای یک راه حل بتوانیم انجام دهیم.

روش گرهی به طور کلی نیاز به $(N - 1)$ معادله دارد اما این تعداد به ازای هر منبع ولتاژ مستقل یا وابسته در یک شاخه درختی یک واحد کاهش می‌یابد و به ازای هر منبع وابسته کنترل‌شونده به وسیله ولتاژ لینک و یا جریان یک واحد افزایش می‌یابد.

روش حلقه اساساً دارای $(B - N + 1)$ معادله می‌باشد. اگر چه، هر منبع جریان مستقل یا وابسته در یک لینک این تعداد را یک واحد کاهش می‌دهد در حالیکه هر منبع وابسته کنترل‌شونده با یک جریان شاخه درخت و یا کنترل‌شونده به وسیله ولتاژ این تعداد را یک واحد افزایش می‌دهد.

به عنوان حسن ختامی برای این بحث بیایید مدار معادل T یک ترانزیستور را که در شکل ۴۲ - ۳ نشان داده شده است و به آن یک منبع سینوسی $v_s \sim 10001$ و یک بار $10K \Omega$ وصل شده است، بررسی کنیم. مقادیر معمول برای مقاومت امیتر، $r_e = 50 \Omega$ ، و مقاومت بیس، $r_b = 500 \Omega$ ، و مقاومت کلکتور، $r_c = 20k \Omega$ ، و ضریب انتقال جریان مستقیم بیس مشترک، $\alpha = 0.98$ ، را انتخاب می‌کنیم. فرض کنید که می‌خواهیم جریان ورودی (امیتر) i_e و ولتاژ بار v_L را پیدا کنیم.



شکل ۴۲ - ۳: یک منبع ولتاژ سینوسی و یک بار $10\text{ k}\Omega$ به مدار معادل T یک ترانزیستور وصل شده است. اتصال مشترک ورودی و خروجی در ترمینال بیس می‌باشد و این آرایش را بیس مشترک می‌نامند.

اگر چه جزئیات در تمرینات ۱۲ - ۳ و ۱۳ - ۳ خواسته شده است ولی به سادگی مشاهده می‌کنیم که تحلیل این مدار به وسیله ترسیم درختهایی که نیاز به سه معادله گرهی عمومی $(N - 1 - 1 + 1)$ و یا دو معادله حلقه $(B - N + 1 - 1)$ دارند، می‌تواند انجام شود. همچنین باید توجه داشته باشیم که سه معادله بر حسب ولتاژهای گره به مبنا و یا سه معادله چشمه‌ای مورد نیاز می‌باشند.

صرف نظر از روشی که انتخاب می‌کنیم، این نتایج برای این مدار بخصوص به دست می‌آیند:

$$i_e = 18.14 \sin 1000t \mu\text{A}, \quad v_L = 119.6 \sin 1000t \text{ mV}$$

بنابراین در می‌یابیم که این مدار ترانزیستوری بهره ولتاژ (v_L/v_s) ۲۹٫۹، بهره جریان $(v_L/10000 i_e)$ ۰٫۶۵۹ و بهره قدرت $19.70 = 29.9(0.659)$ را ارائه می‌کند. گینهای بالاتر را می‌توان با آرایش امیتر مشترک ترانزیستور به دست آورد.

تمرین

۱۱ - ۳ - یک درخت مناسب رسم نموده و با استفاده از روش تحلیل حلقه عمومی i_A را در مدارهای زیر به دست آورید: (a) شکل ۴۳a - ۳ را به وسیله نوشتن فقط یک معادله بر حسب متغیر i_A . (b) شکل ۴۳b - ۳ به وسیله نوشتن دو معادله بر حسب متغیرهای i_B ، i_A .

جواب: $1.6A$ ، 9.39

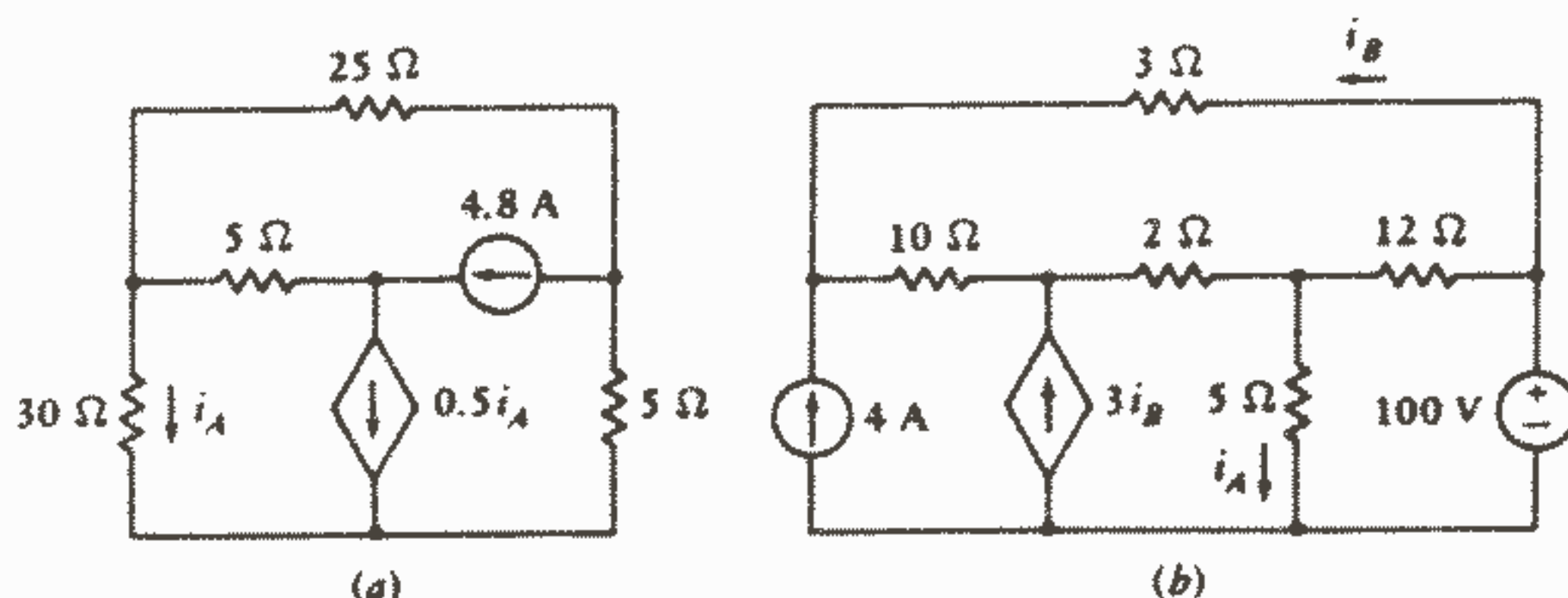
۱۲ - ۳ - برای مدار معادل تقویت کننده ترانزیستوری شکل ۴۲ - ۳ مقادیر $r_e = 50 \Omega$ و $r_b = 500 \Omega$ و $\alpha = 0.98$ را در نظر بگیرید و i_e و v_L را با ترسیم یک درخت

مناسب و با استفاده از: (a) دو معادله حلقه. (b) سه معادله گرهی با یک گره مبنای مشترک برای ولتاژ، (c) سه معادله گرهی بدون گره مبنای مشترک، پیدا کنید.

جواب: $119.6 \sin 1000t \text{ mV}$, $18.14 \sin 1000t \text{ mA}$

۱۳ - مدار معادل تونن و نورتن را از دید مقاومت $10 \text{ k} \Omega$ در شکل ۳-۴۲ در حالات زیر پیدا کنید: (a) با پیدا کردن مقدار مدار باز v_L . (b) با پیدا کردن جریان اتصال کوتاه (رو به پایین). (c) با پیدا کردن مقاومت معادل تونن. (همه مقادیر مداری در تمرین ۳-۱۲ داده شده است.)

جواب: $2.23 \text{ k} \Omega$, $65.6 \sin 1000t \text{ } \mu\text{A}$, $146.2 \sin 1000t \text{ mV}$



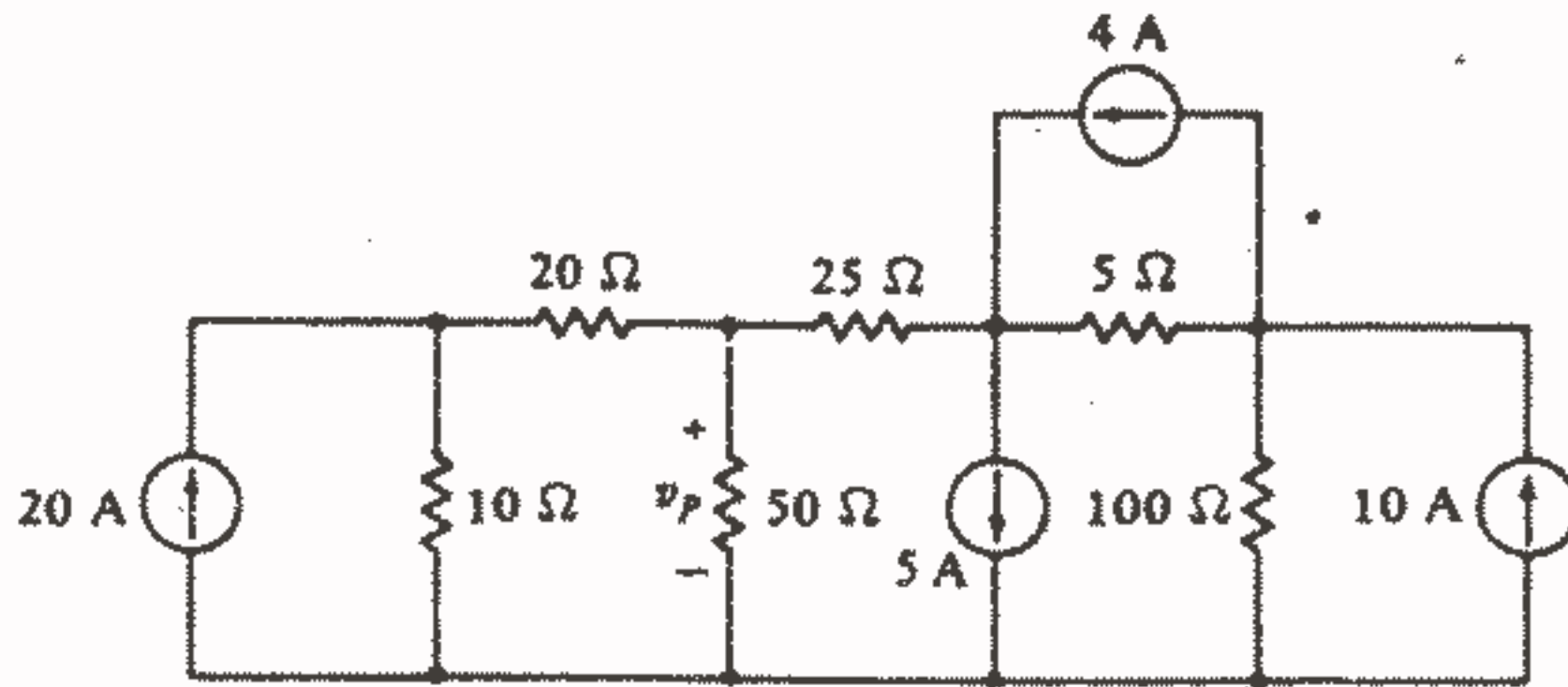
شکل ۳-۴۳: به تمرین ۳-۱۱ نگاه کنید.

مسائل

۱ - (a) اگر $v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 20$, $v_1 - 7v_2 - 5v_3 = -5$, $v_1 + 3v_2 + 4v_3 - 10 = 0$, آنگاه v_1 را به دست آورید. (b) دترمینان زیر را محاسبه کنید:

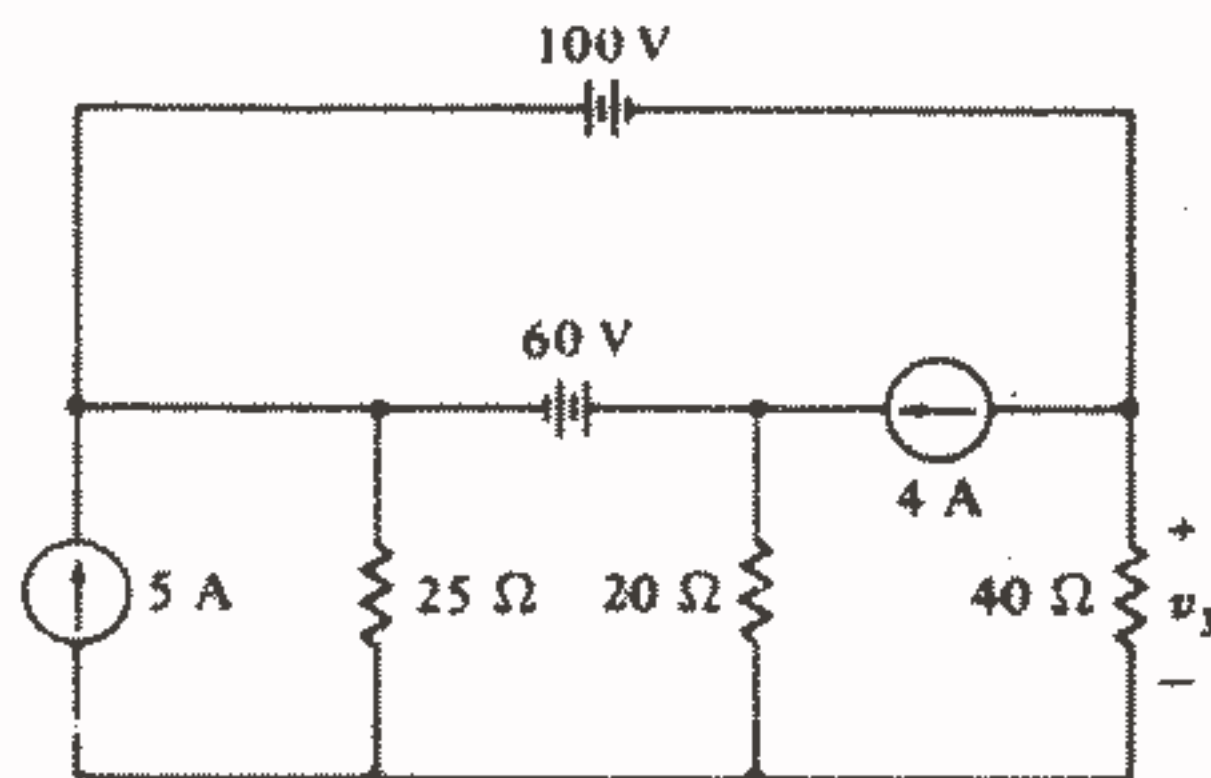
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

۲ - با استفاده از تحلیل گرهی v_m را در مدار شکل ۳-۴۴ به دست آورید.



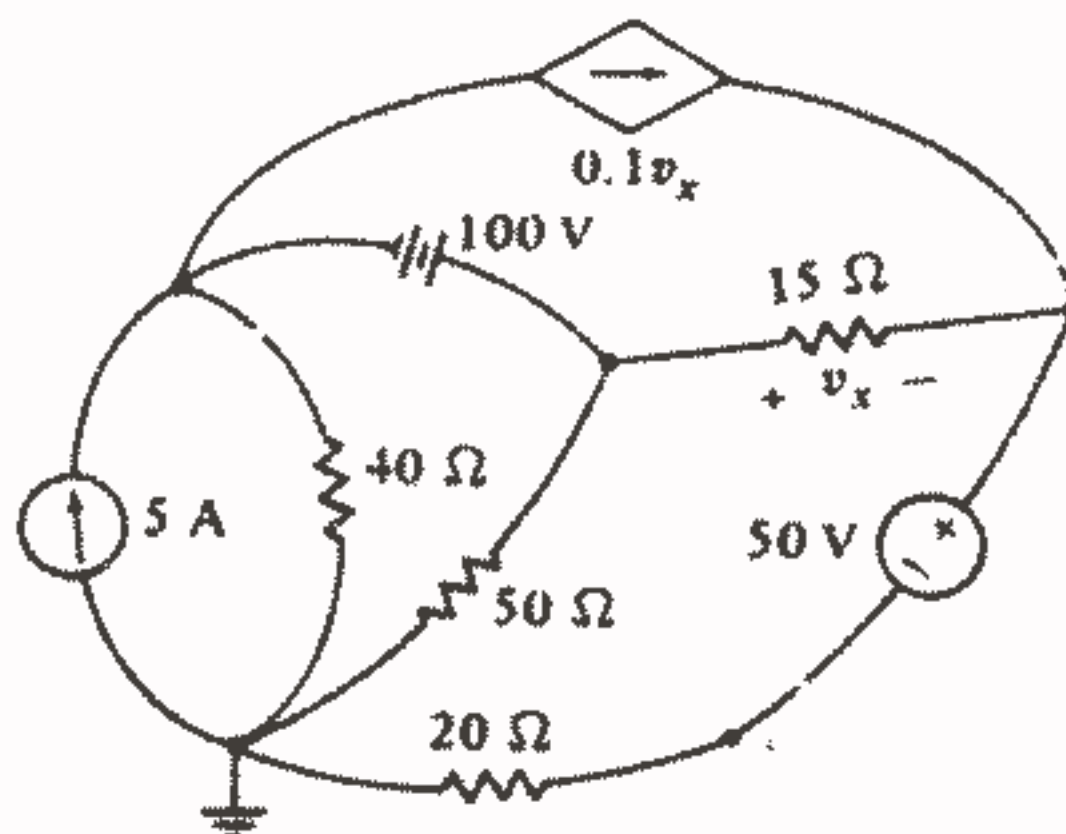
شکل ۴۴ - ۳: به مسئله ۲ مراجعه کنید.

۳ - با استفاده از تحلیل گرهی در مدار شکل ۴۵ - ۳ مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) v_3 (b) قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع ۵ A.



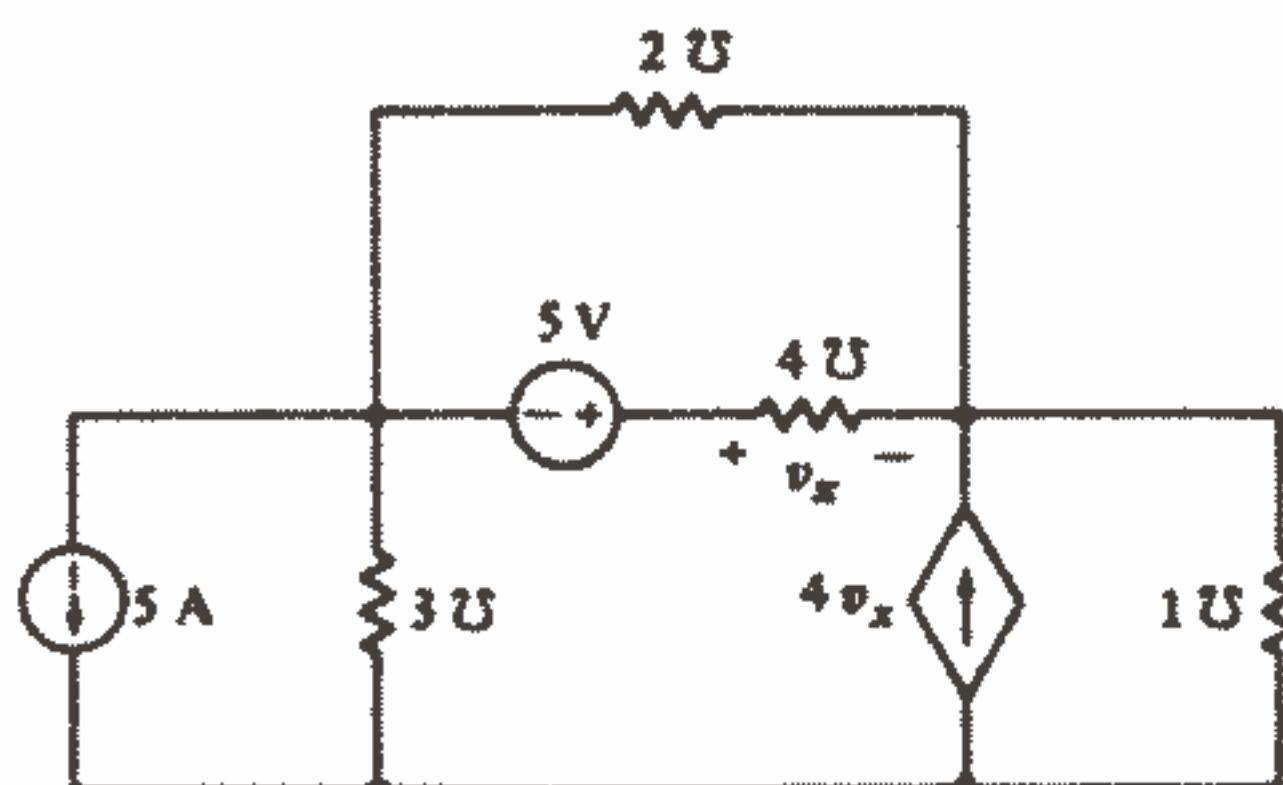
شکل ۴۵ - ۳: به مسئله ۳ مراجعه کنید.

۴ - با استفاده از تحلیل گرهی، v_x و قدرت تحویل داده شده به مقاومت $50\ \Omega$ را در مدار شکل ۴۶ - ۳ پیدا کنید.



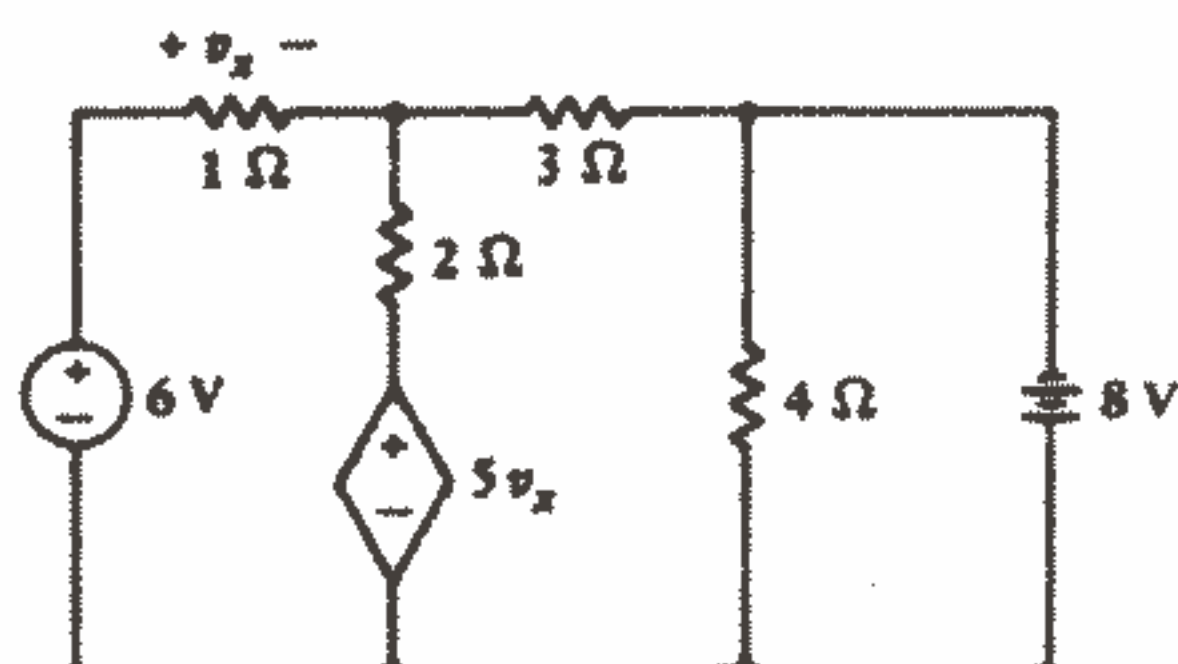
شکل ۴۶ - ۳: به مسئله ۴ مراجعه کنید.

۵ - معادلات گرهی را برای مدار شکل ۳-۴۷ تشکیل دهید و سپس قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع ۵V را پیدا کنید.



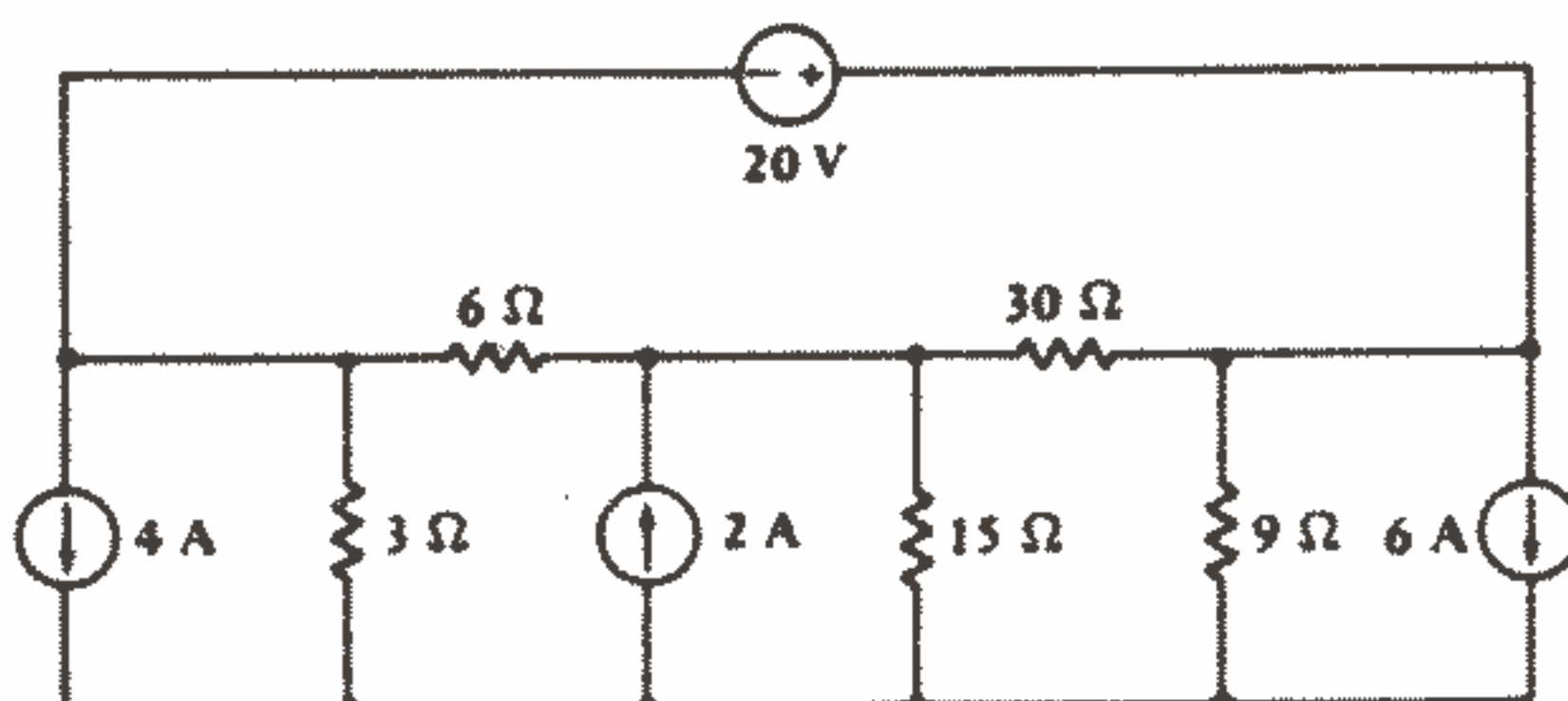
شکل ۳-۴۷: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

۶ - با استفاده از تحلیل گرهی، v_x را در مدار شکل ۳-۴۸ پیدا کنید.



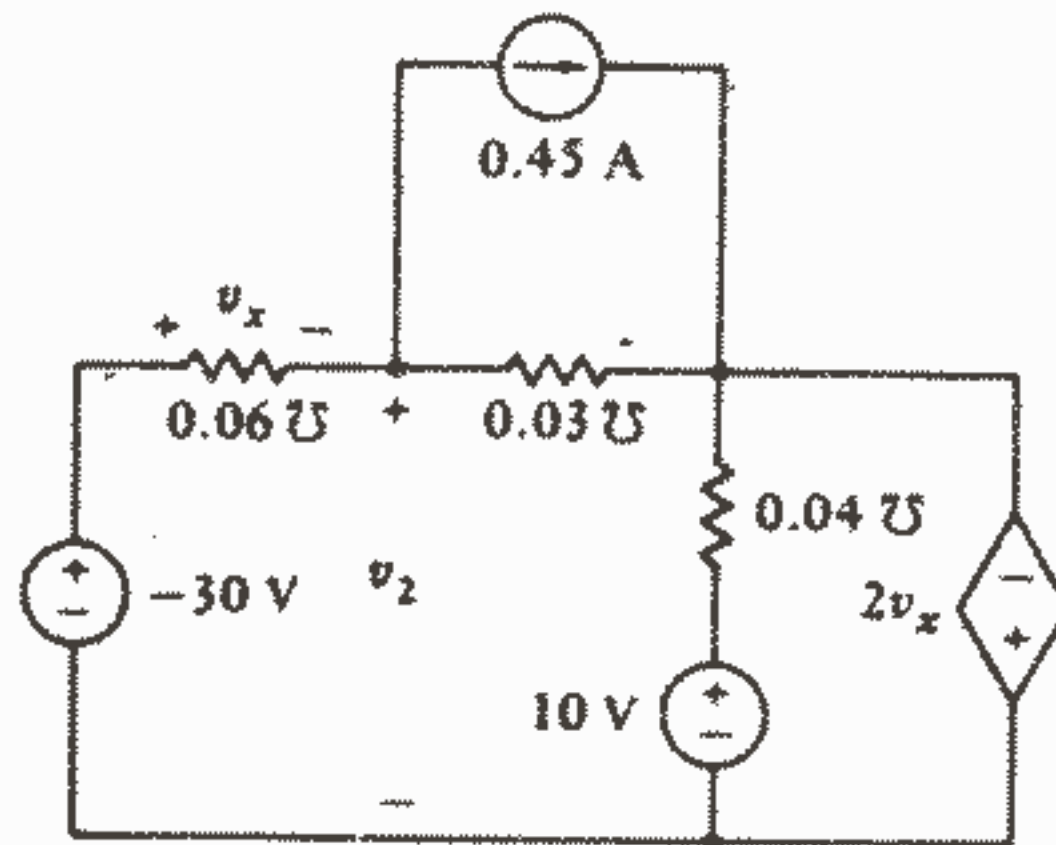
شکل ۳-۴۸: به مسئله‌های ۶، ۱۲ و ۲۸ مراجعه کنید.

۷ - با استفاده از ولتاژهای گره، مدار شکل ۳-۴۹ را تحلیل کنید و قدرت داده شده به وسیله منبع ۶A را به دست آورید.



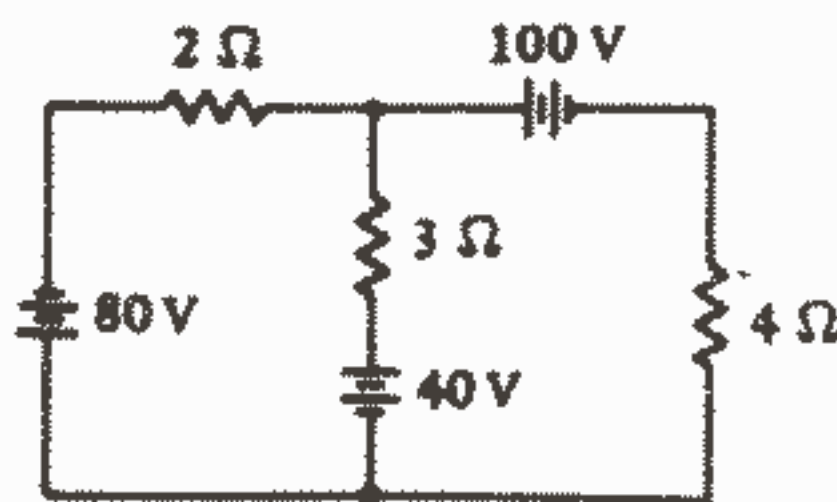
شکل ۳-۴۹: به مسئله ۷ مراجعه کنید.

۸ - در مدار شکل ۳-۵۰ با استفاده از تحلیل گرهی، v_x را پیدا کنید.



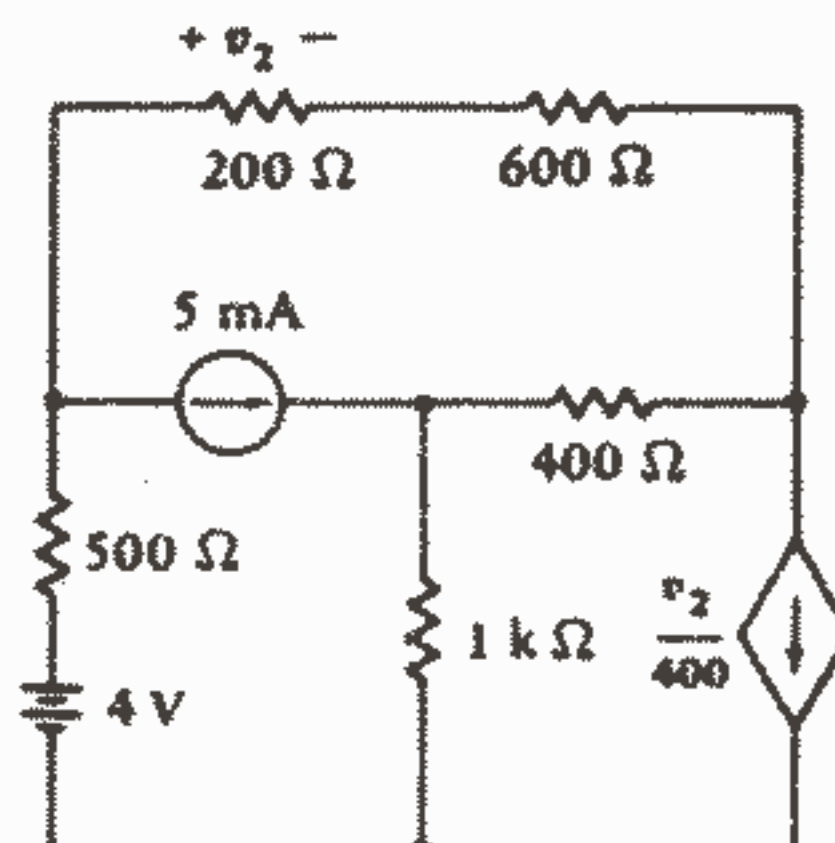
شکل ۳-۵۰: به مسئله ۸ مراجعه کنید.

۹ - در مدار شکل ۳-۵۱ با استفاده از تحلیل چشمه‌ای: (a) قدرت تحویل داده شده به مقاومت 4Ω را پیدا کنید. (b) باتری 100 V به چه ولتاژی باید تغییر داده شود تا هیچ قدرتی به مقاومت 4Ω تحویل داده نشود.



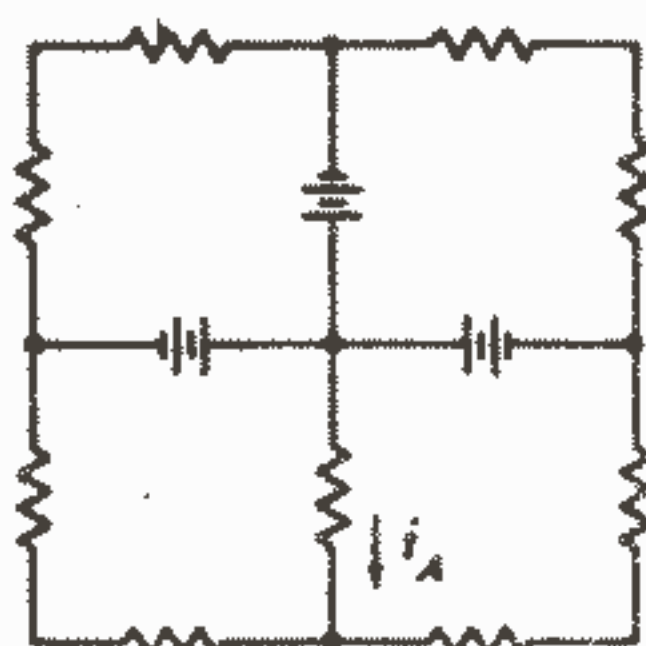
شکل ۳-۵۱: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

۱۰ - با استفاده از تحلیل چشمه‌ای در مدار شکل ۳-۵۲، قدرت تحویل داده شده به وسیله باتری 4 V را پیدا کنید.



شکل ۳-۵۲: به مسئله ۱۰ مراجعه کنید.

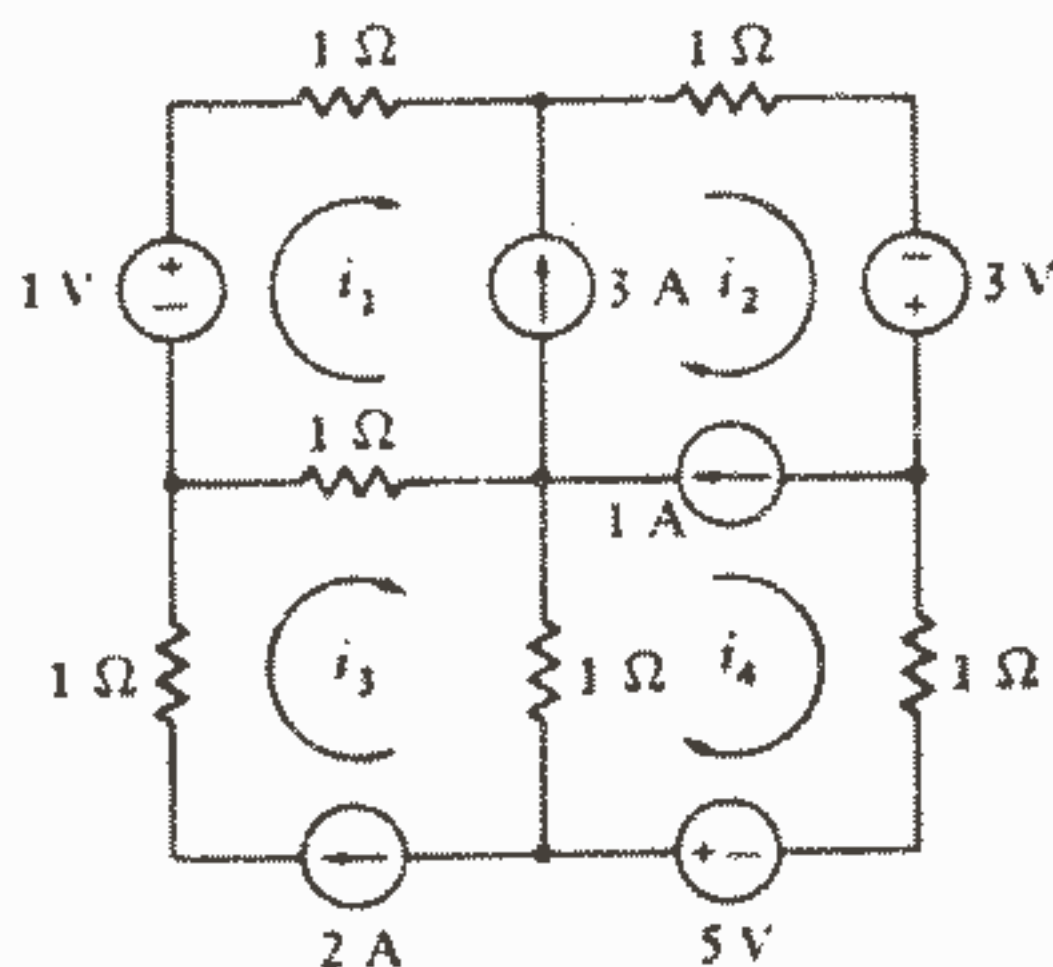
۱۱ - در شکل ۳-۵۳، هر مقاومت $6\ \Omega$ و هر باتری 12V می باشد، i_A را پیدا کنید.



شکل ۳ - ۵۳: به مسئله ۱۱ مراجعه کنید.

۱۲ - در مدار شکل ۳-۴۸، عنصر سمت راست را به یک منبع جریان مستقل 8A با فلش رو به بالا تغییر دهید و با استفاده از تحلیل چشمه ای قدرت جذب شده به وسیله مقاومت $3\ \Omega$ را پیدا کنید.

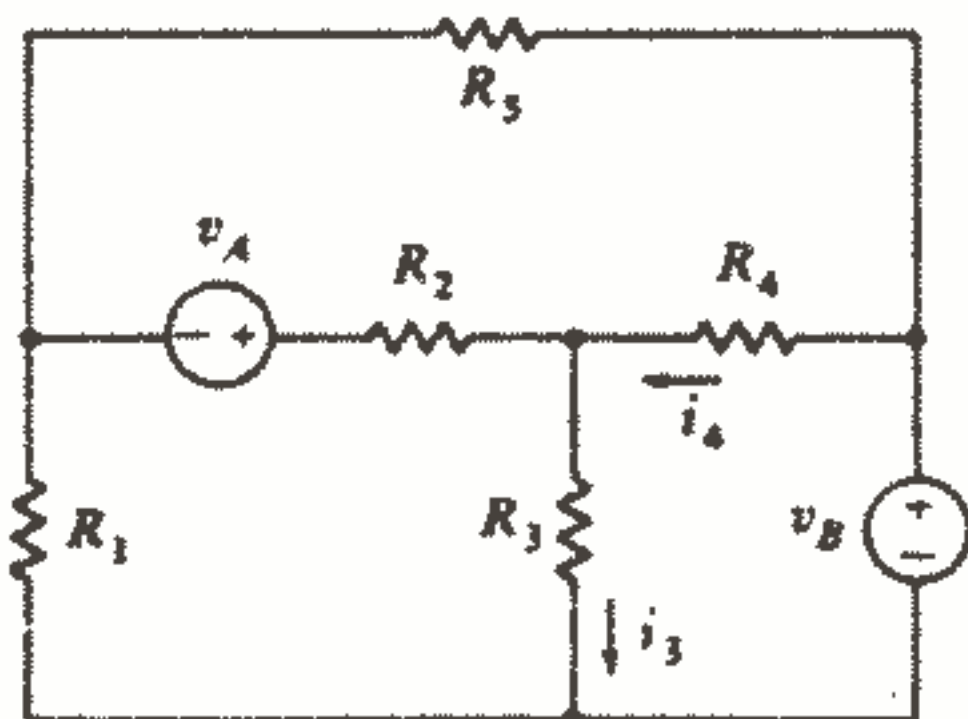
۱۳ - با استفاده از تحلیل چشمه ای در مدار شکل ۳-۵۴، همه جریانهای چشمه ای را پیدا کنید.



شکل ۳ - ۵۴: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

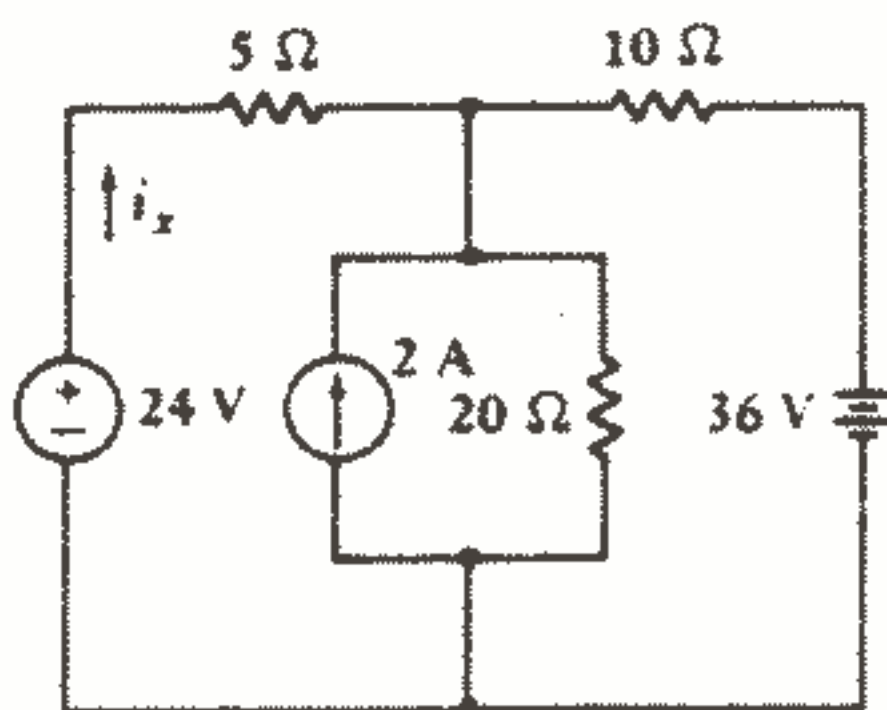
۱۴ - در مدار شکل ۳-۴b با استفاده از تحلیل چشمه ای i_o و جریان رو به پایین در R_1 را اگر $v_p = 1,234321\text{V}$ باشد، پیدا کنید.

۱۵ - در مدار شکل ۳-۵۵: (a) اگر $v_A = 20V$ ، $v_B = 0$ ، $i_3 = 1.5A$ می باشد. اگر $v_A = 50V$ و $v_B = 0$ ، i_3 را پیدا کنید. (b) اگر $v_A = 20V$ ، $v_B = 50V$ ، $i_4 = 2A$ و اگر $v_A = 50V$ و $v_B = 20V$ ، $i_4 = -1A$ ، i_3 را پیدا کنید.



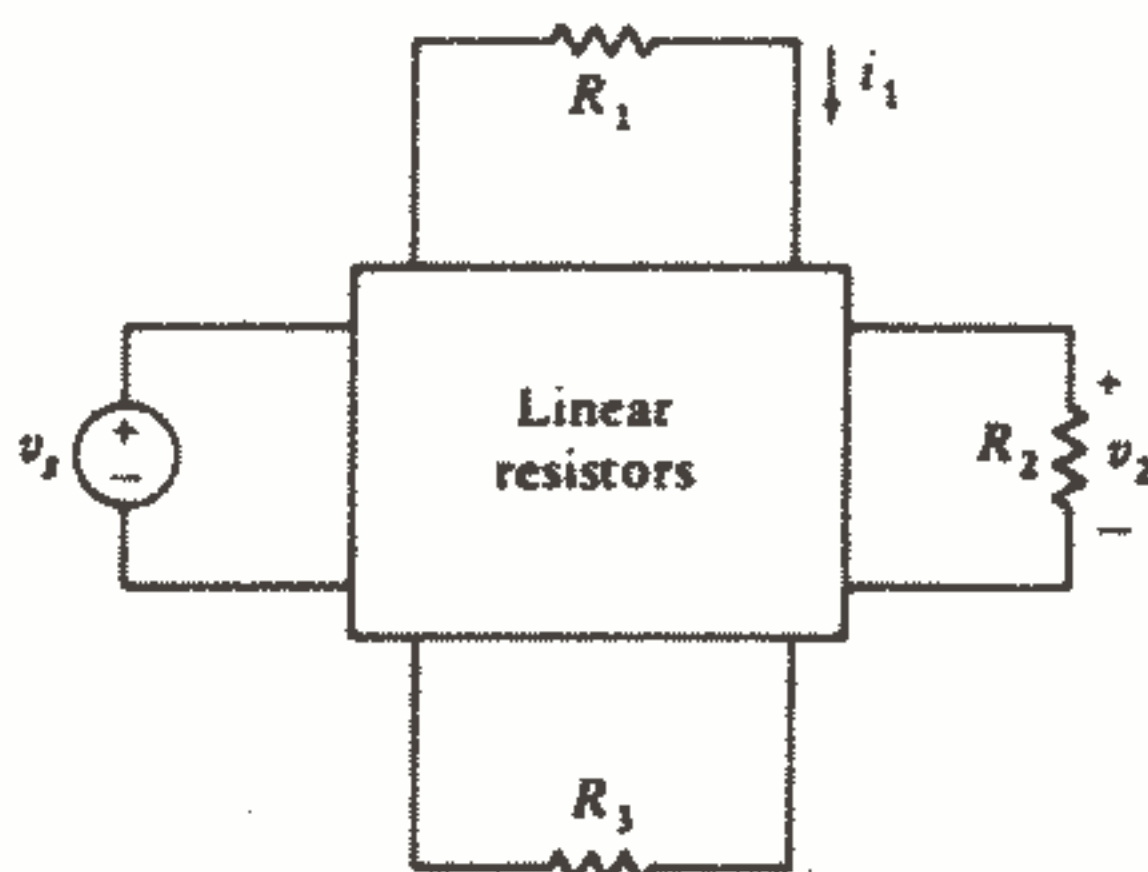
شکل ۳-۵۵: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

۱۶ - با استفاده از اصل جمع اثرها در مدار شکل ۳-۵۶، i_x را پیدا کنید.



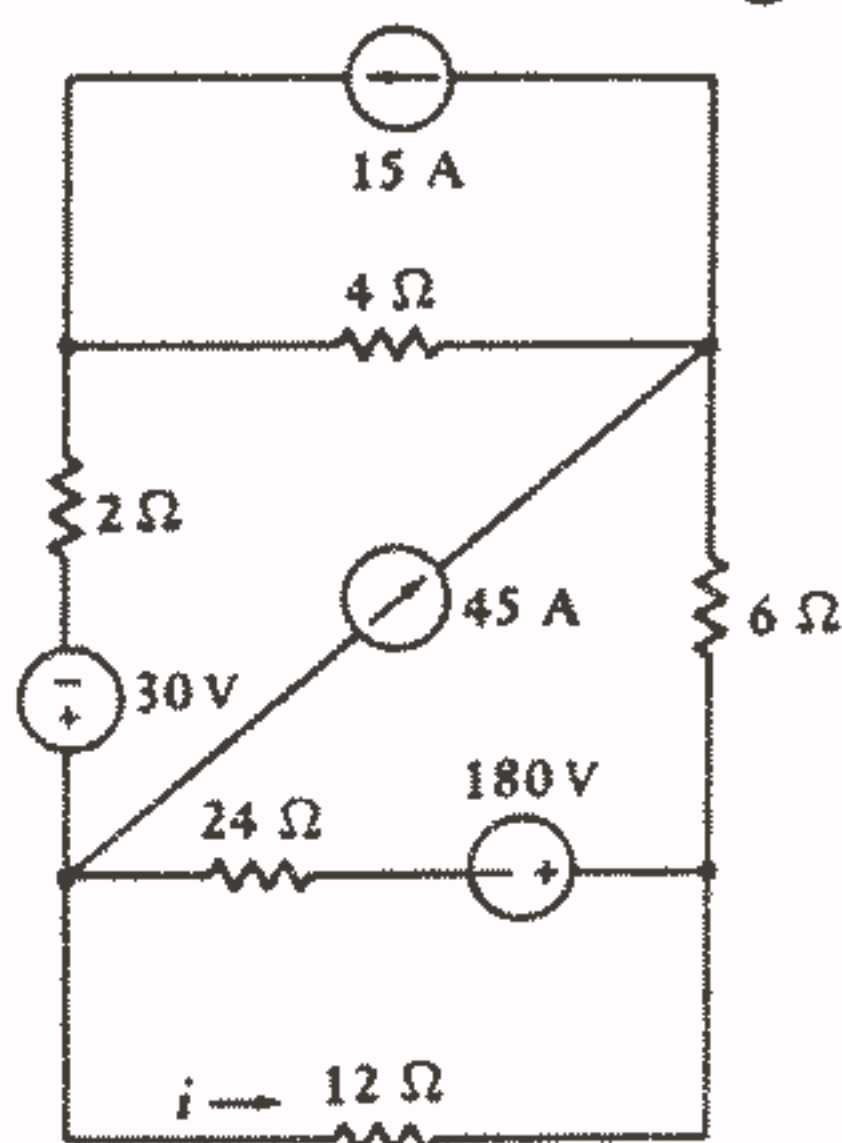
شکل ۳-۵۶: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

۱۷ - با مراجعه به شکل ۳-۵۷، وقتی که $v_s = 120V$ ، $i_1 = 3A$ ، $v_r = 50V$ و قدرت تحویل داده شده به R_p برابر $60W$ می باشد. اگر v_s به $105V$ کاهش یابد، مقادیر جدید v_r ، i_1 و قدرت تحویل داده شده به R_p را پیدا کنید.



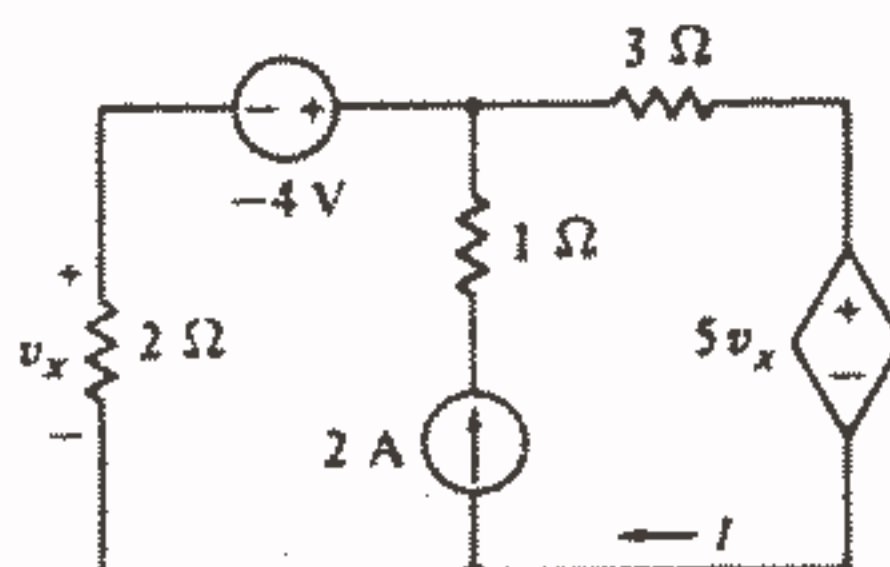
شکل ۳-۵۷: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

۱۸ - با استفاده از اصل جمع اثرها در مدار شکل ۳-۵۸، i را پیدا کنید.



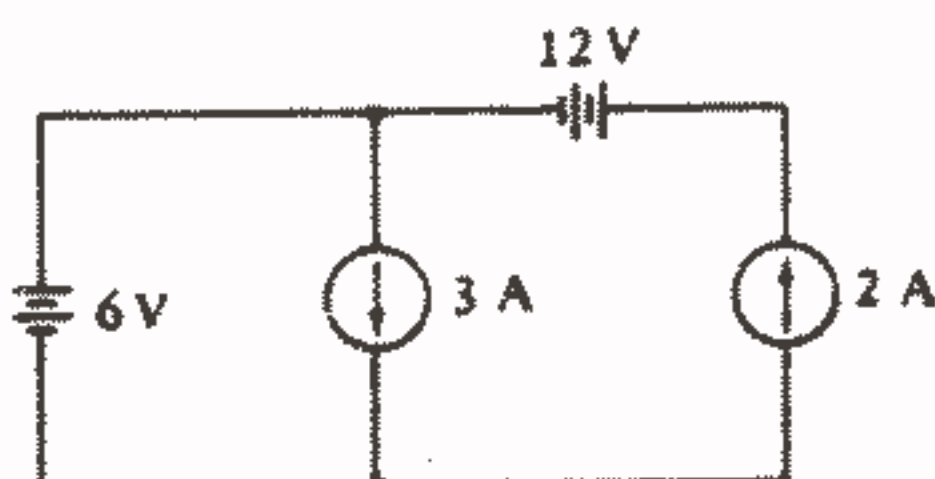
شکل ۳-۵۸: به مسئله ۱۸ مراجعه کنید.

۱۹ - مدار شکل ۳-۵۹ شامل یک منبع وابسته می‌باشد. با استفاده از اصل جمع اثرها جریان i را پیدا کنید.



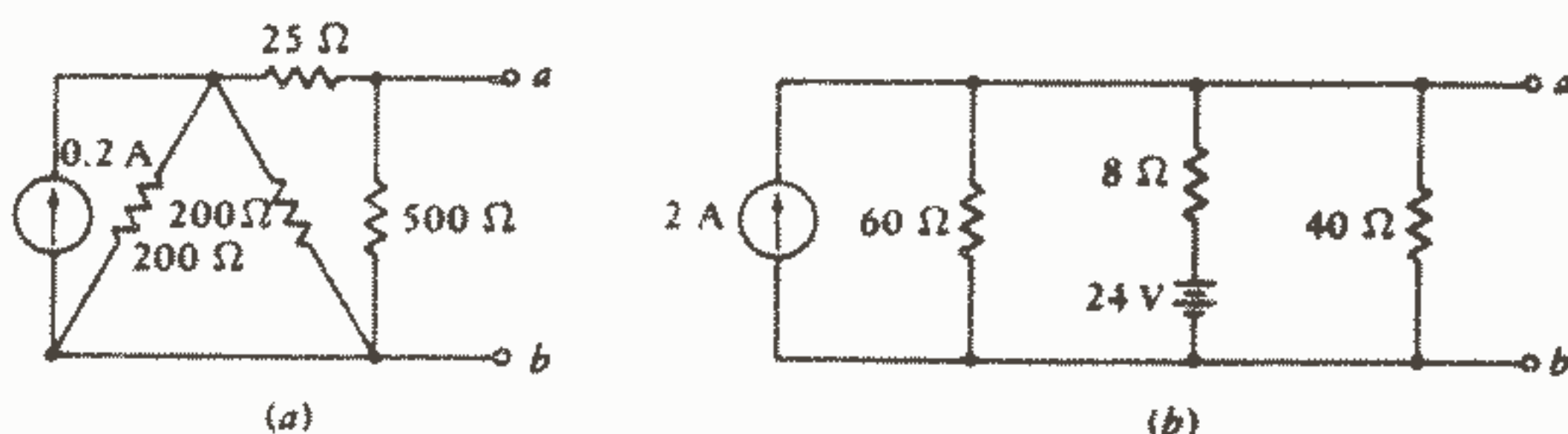
شکل ۳-۵۹: به مسئله‌های ۱۹ و ۲۹ مراجعه کنید.

۲۰ - در مدار شکل ۳-۶۰ با استفاده از اصل جمع اثرها به عنوان یک وسیله کمکی، قدرت جذب شده به وسیله عناصر زیر را پیدا کنید: (a) منبع ۶ V (b) منبع ۳ A (c) منبع ۱۲ V (d) منبع ۲ A.



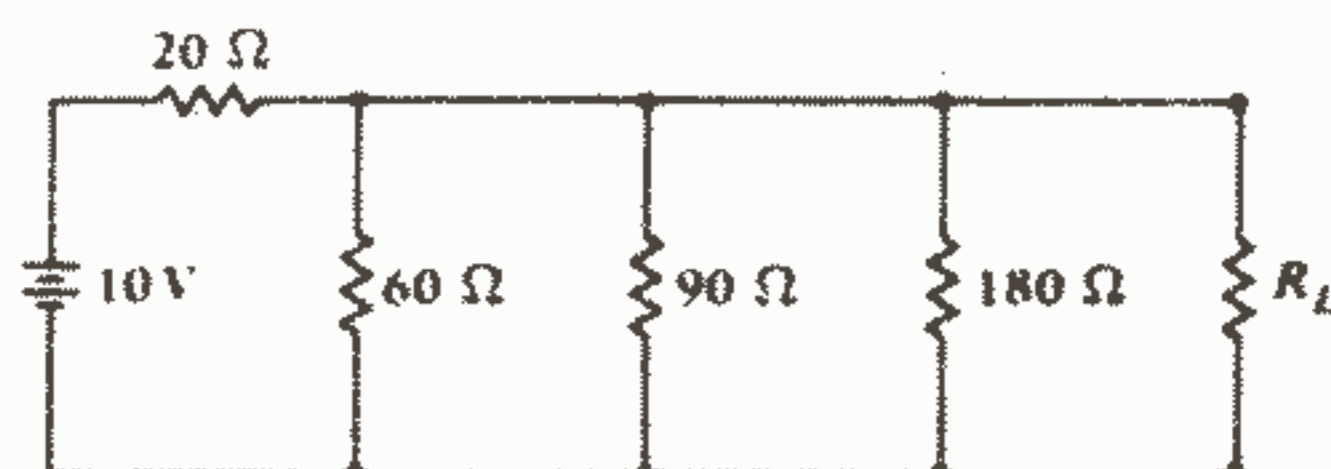
شکل ۳-۶۰: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

- ۲۱ - یک لامپ فلاش را می‌خواهیم با دو باتری قلمی (AA) $1.55V$ به طور سری به کار ببریم. بر روی فلاش نوشته شده است « $2.25V$ ، $0.25A$ ». با فرض اینکه همه نوشته‌ها درست باشد از چه منبع ولتاژ عملی می‌توان برای مدل کردن یکی از باتریها استفاده نمود؟
- ۲۲ - با استفاده مکرر از تبدیل منابع و ترکیب مقاومتها برای هر یک از شبکه‌های شکل ۶۱-۳، شبکه سمت چپ ترمینالهای a-b را با ترکیب سری یک منبع ولتاژ مستقل و یک مقاومت جایگزین کنید.



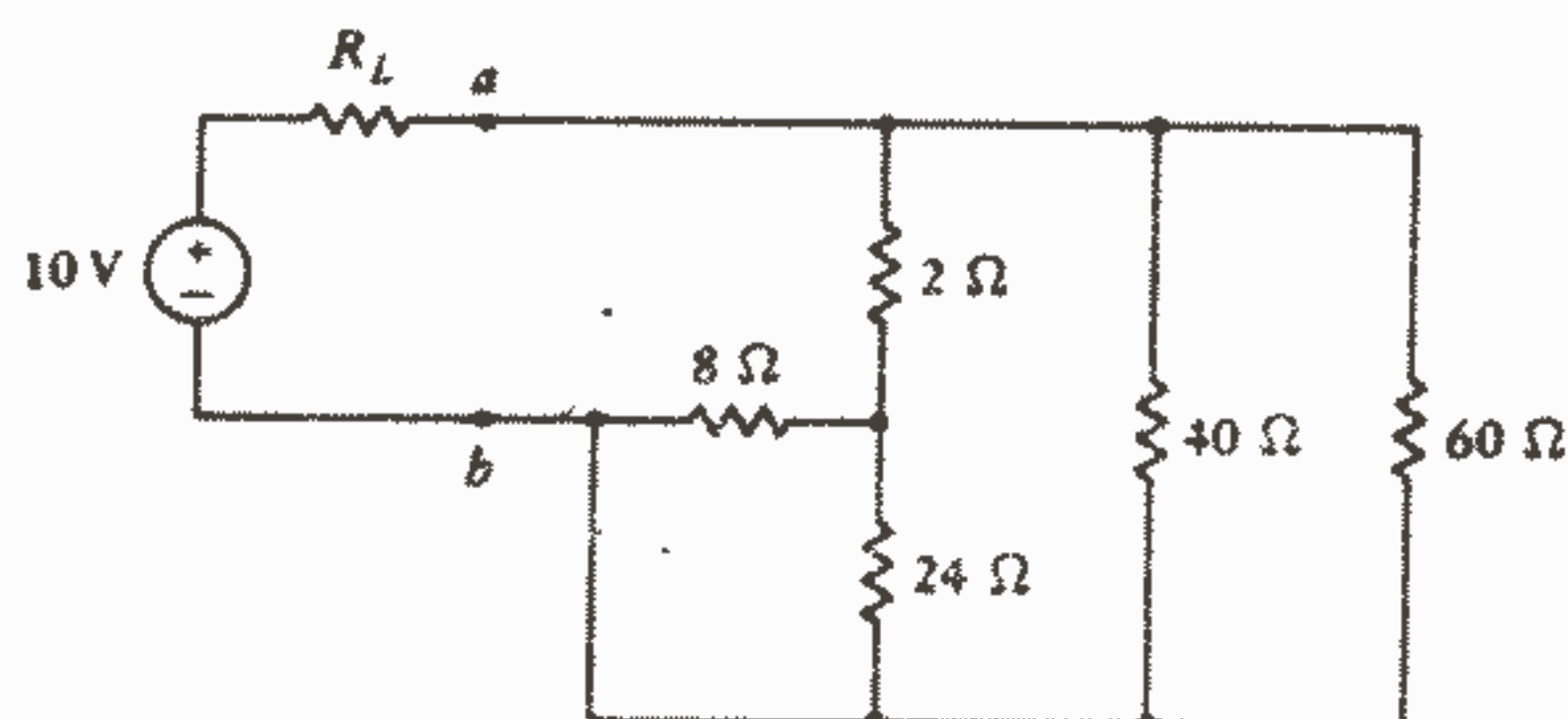
شکل ۶۱ - ۳: به مسئله ۲۲ مراجعه کنید.

- ۲۳ - در مدار شکل ۶۲-۳ چه مقداری از R_L : (a) ماکزیمم قدرت را از این شبکه جذب خواهد کرد و مقدار $P_{L\max}$ چقدر است؟ (b) ماکزیمم ولتاژ را در دوسرش خواهد داشت و مقدار $V_{L\max}$ چقدر است؟ (c) ماکزیمم جریان را خواهد داشت و مقدار $I_{L\max}$ چقدر است؟



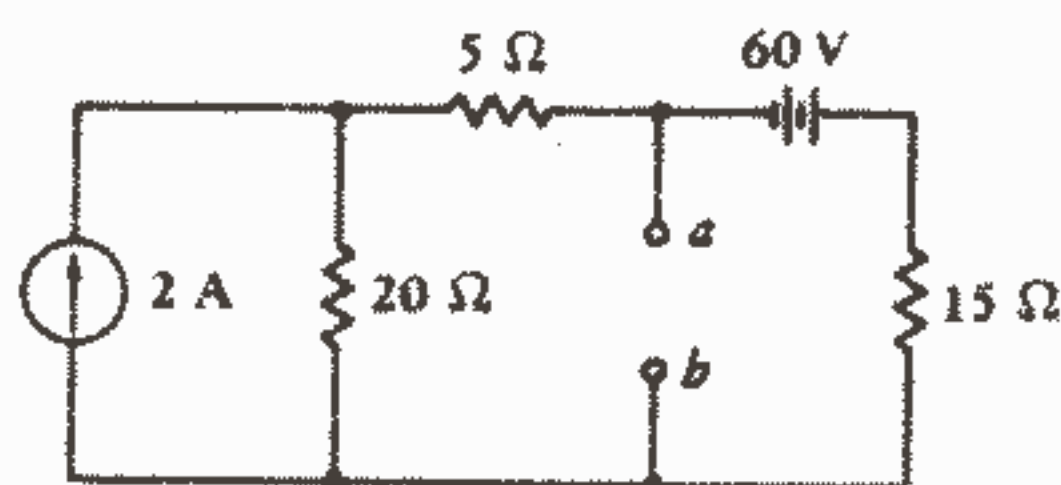
شکل ۶۲ - ۳: به مسئله ۲۳ مراجعه کنید.

- ۲۴ - منبع ولتاژ عملی را در سمت چپ ترمینالهای a-b در شکل ۶۳-۳ در نظر بگیرید. (a) مقدار R_L چقدر باشد تا ماکزیمم قدرت از منبع واقعی کشیده شود؟ (b) مقدار این قدرت ماکزیمم چقدر است؟



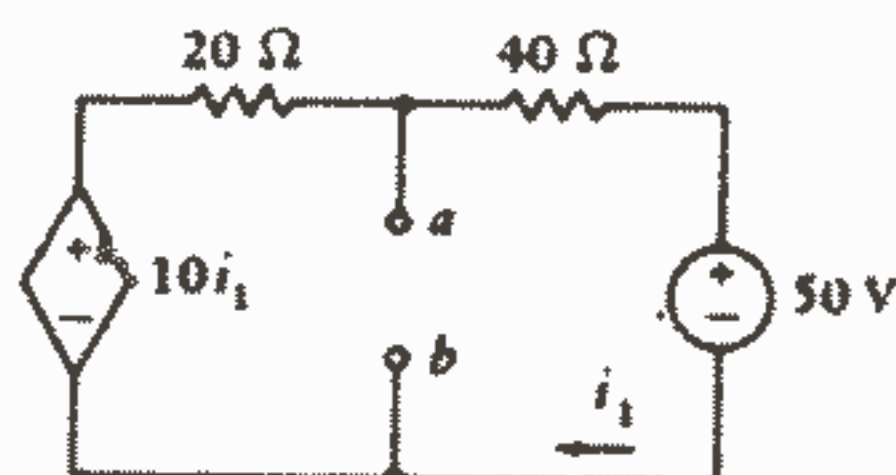
شکل ۳-۶۳: به مسئله ۲۴ مراجعه کنید.

۲۵ - (a) با استفاده از سه روش تحلیل جداگانه، V_{oc} ، i_{sc} ، R_{th} را نسبت به ترمینالهای $a-b$ در مدار شکل ۳-۶۴ پیدا کنید. (b) مدار معادل تونن و نورتن را که در $a-b$ دیده می شود رسم کنید.



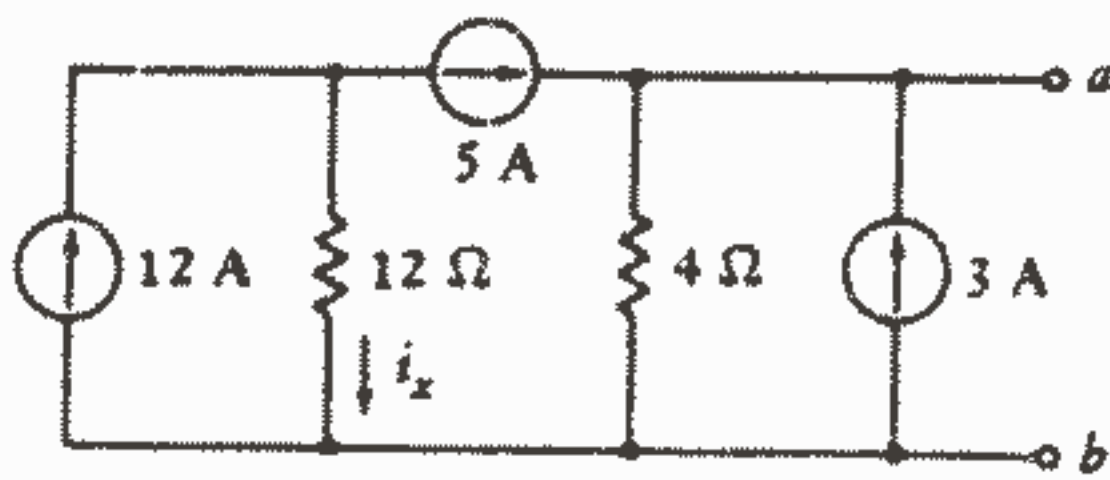
شکل ۳-۶۴: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

۲۶ - مدار معادل تونن را در ترمینالهای $a-b$ مدار شکل ۳-۶۵ پیدا کنید.



شکل ۳-۶۵: به مسائل ۲۶ و ۳۰ مراجعه کنید.

۲۷ - (a) مدار معادل تونن و نورتن را که از ترمینالهای $a-b$ مدار شکل ۳-۶۶ دیده می شود، تعیین کنید. (b) منبع $5A$ را با یک منبع ولتاژ وابسته $5i_x$ (با علامت $+$ در سمت راست) جایگزین کنید و دوباره مدار معادل تونن و نورتن را پیدا کنید.



شکل ۶۶ - ۳: به مسئله ۲۷ مراجعه کنید.

۲۸ - در مدار شکل ۴۸-۳ مدار معادل تونن را: (a) در سمت چپ منبع ۸۷ پیدا کنید. (b) در سمت راست منبع ۶۷ پیدا کنید.

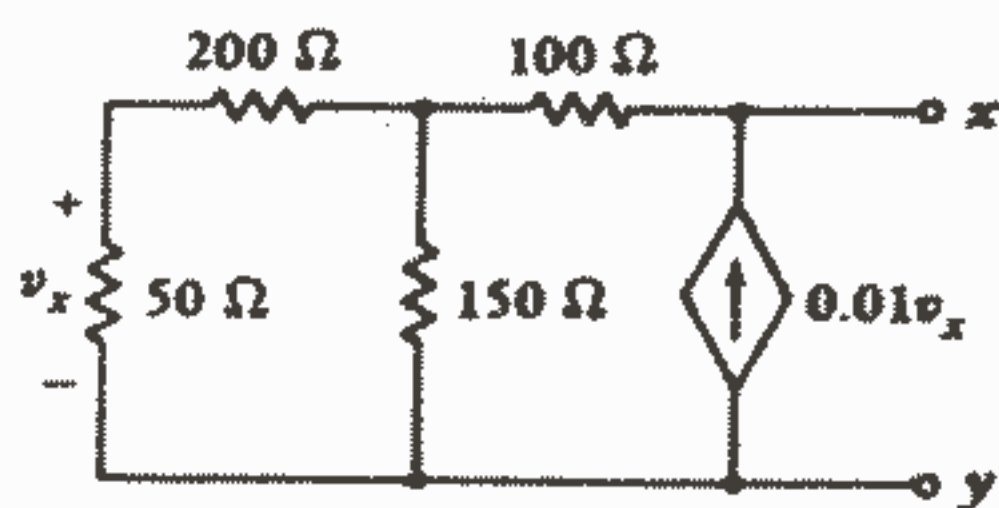
۲۹ - (a) با مراجعه به مدار شکل ۵۹-۳ مدار معادل تونن را که از نظر مقاومت 3Ω دیده می شود پیدا کنید. (b) I را پیدا کنید. (c) مقاومت 3Ω را به 13Ω تبدیل کنید و دوباره I را پیدا کنید.

۳۰ - اگر ولتاژ v_L و جریان $i_L = \frac{v_L}{R_L}$ در یک مقاومت بار کلی R_L معلوم باشد، آنگاه مدار معادل تونن یا نورتن را می توان به سادگی به دست آورد زیرا: $v_{oc} = \lim_{R_L \rightarrow \infty} v_L$ و $i_{sc} = \lim_{R_L \rightarrow \infty} i_L$.

(a) v_L (با علامت + در ترمینال a) را برای مدار شکل ۶۵-۳ و اگر مقاومت R_L بین a, b وصل شده باشد، پیدا کنید.

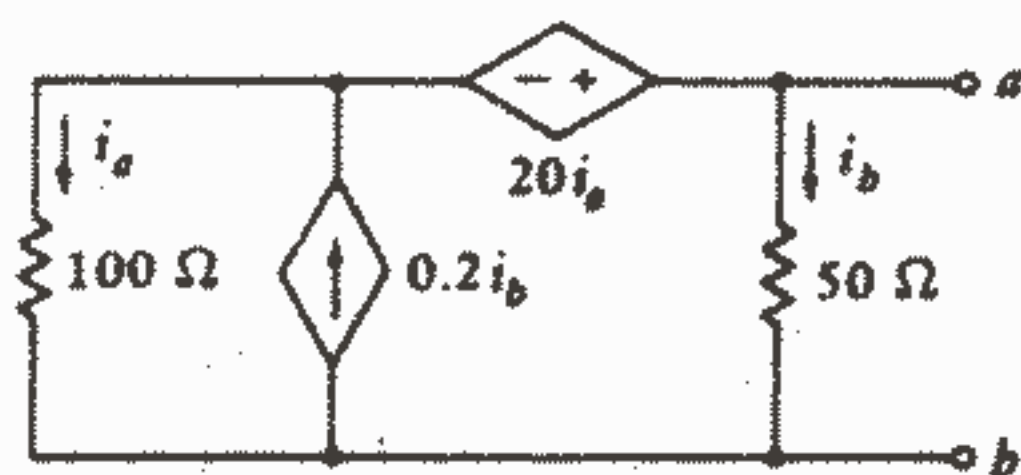
(b) روابط بالا را برای تعیین v_{oc} و i_{sc} پیدا کنید.

۳۱ - مدار معادل تونن را برای شبکه شکل ۶۷-۳ به دست آورید.



شکل ۶۷ - ۳: به مسئله ۳۱ مراجعه کنید.

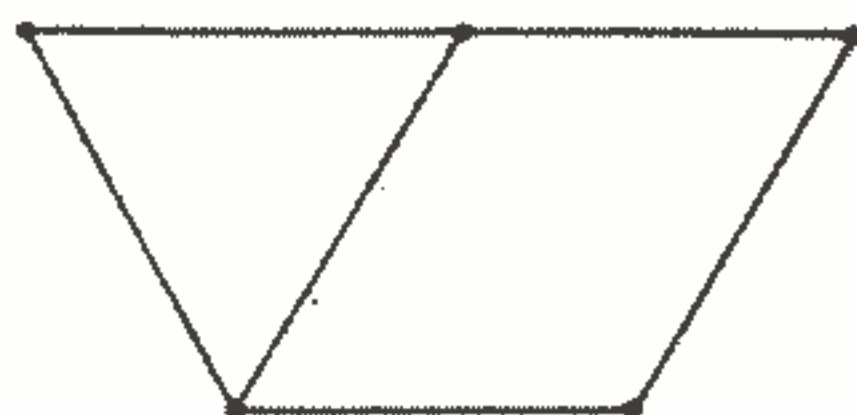
۳۲ - مدار معادل تونن شبکه شکل ۶۸-۳ را پیدا کنید.



شکل ۶۸ - ۳: به مسئله ۳۲ مراجعه کنید.

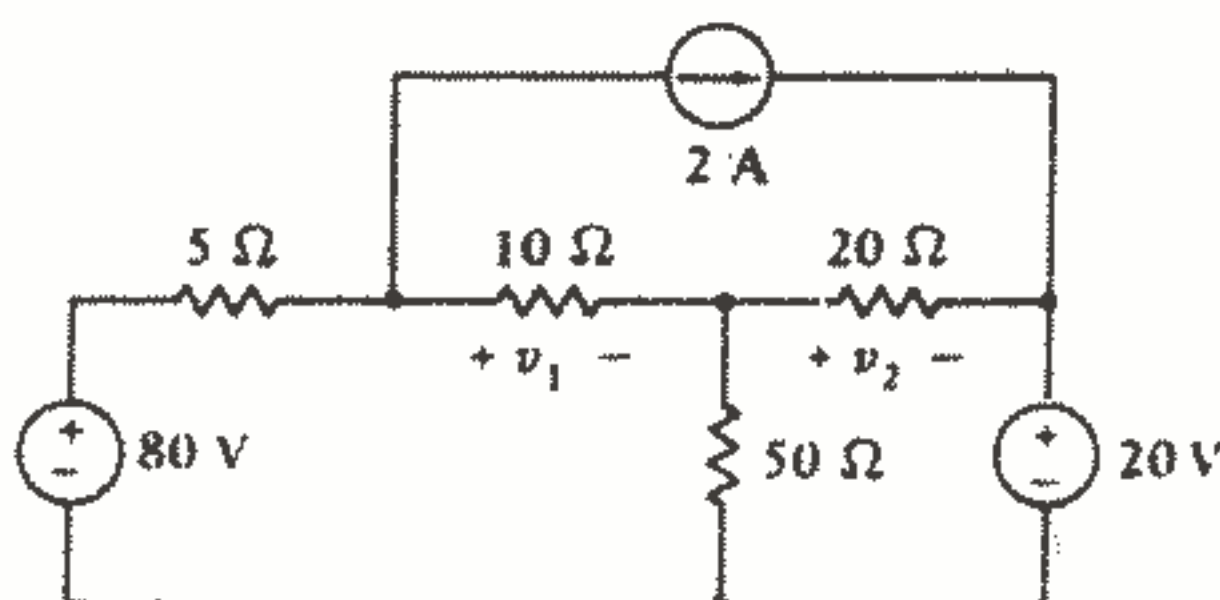
۳۳ - ولتاژ فالوور شکل ۳-۲۸ را می‌توان با وارد کردن یک مقاومت محدود $R_i = 10\text{ K}\Omega$ بین ترمینالهایی که ولتاژ دو سرش v_i می‌باشد، اصلاح نمود. مدار معادل تونن جدید را پیدا کنید.

۳۴ - (a) همه درختهای ممکن را برای گراف خطی شکل ۳-۶۹ تشکیل دهید. (b) اگر دو شاخه بالایی، منبع ولتاژ و شاخه سمت چپ، منبع جریان باشند، همه درختهای ممکن را نشان دهید.



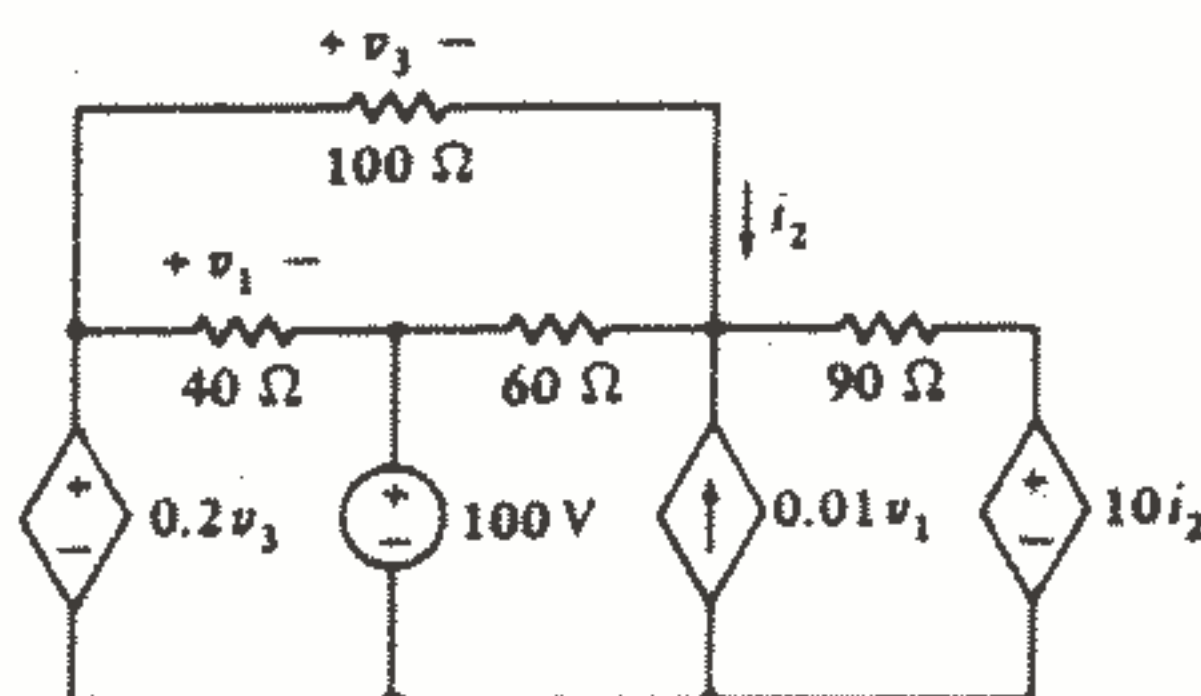
شکل ۳-۶۹: به مسئله ۳۴ مراجعه کنید.

۳۵ - برای مدار شکل ۳-۷۰، درختی رسم کنید که در آن v_1 و v_2 ولتاژهای شاخه درختی باشند و معادلات گرهی را بنویسید و آن را برای v_1 حل کنید.



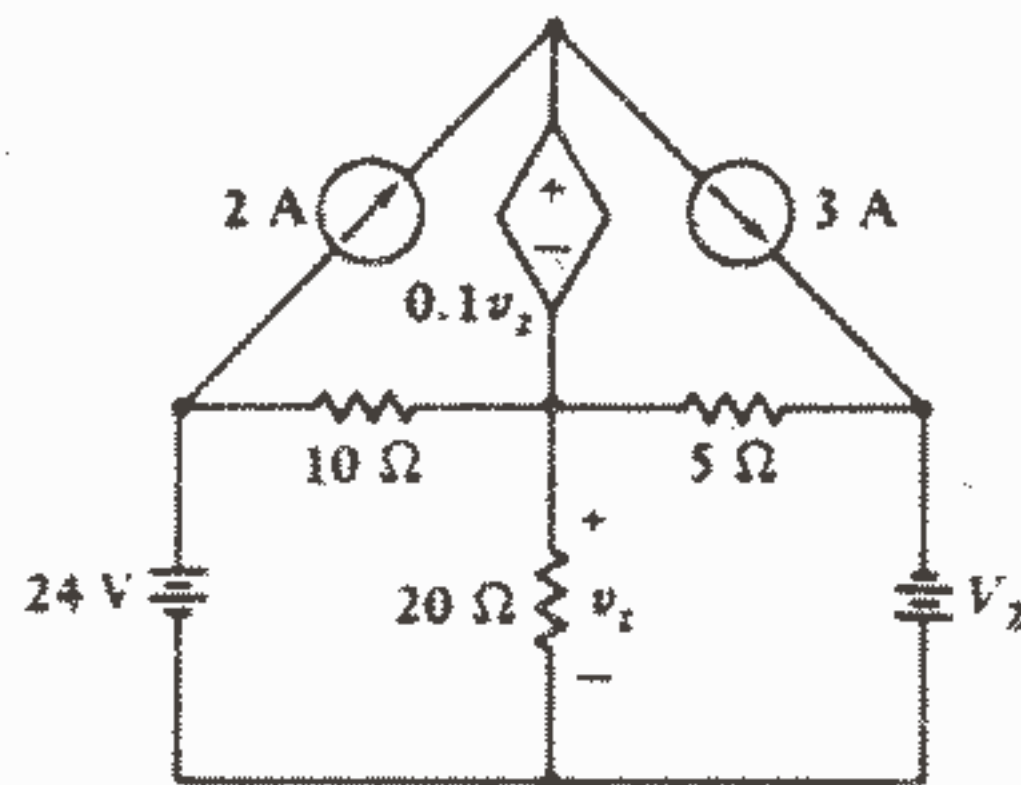
شکل ۳-۷۰: به مسئله ۳۵ مراجعه کنید.

۳۶ - یک درخت مناسب برای مدار شکل ۳-۷۱ تشکیل دهید و ولتاژهای شاخه درختی را مشخص کنید و معادلات کنترل و KCL را بنویسید و سپس i_2 را پیدا کنید.



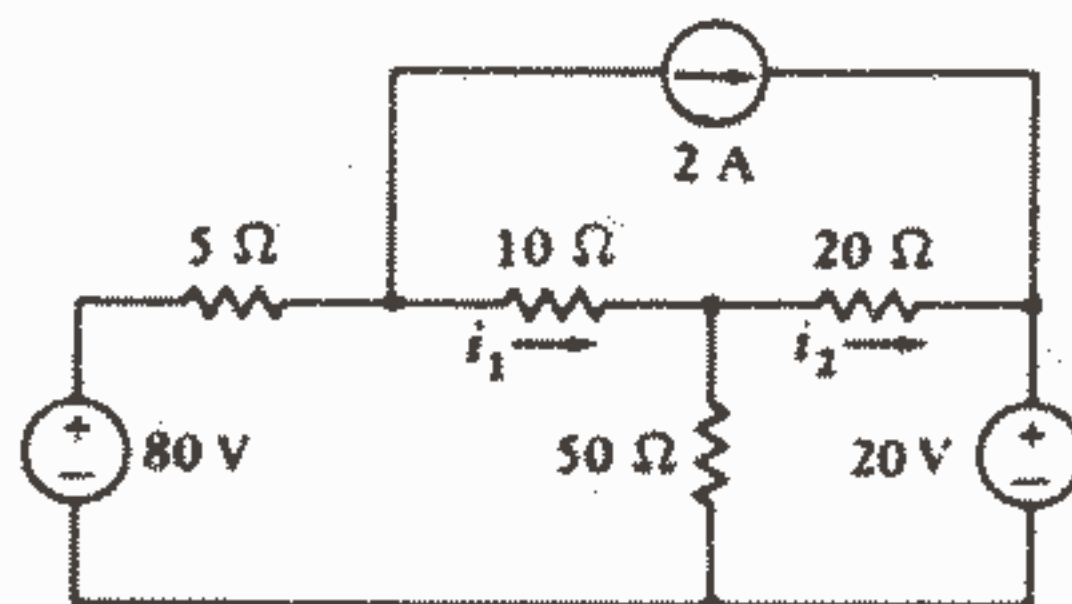
شکل ۳-۷۱: به مسئله ۳۶ مراجعه کنید.

۳۷ - روش تحلیل گرهی را با استفاده از ولتاژهای شاخه درختی در مدار شکل ۳-۷۲ به کار برید و تعیین کنید که به ازای چه مقداری از v_2 داریم $v_2 = 0$.



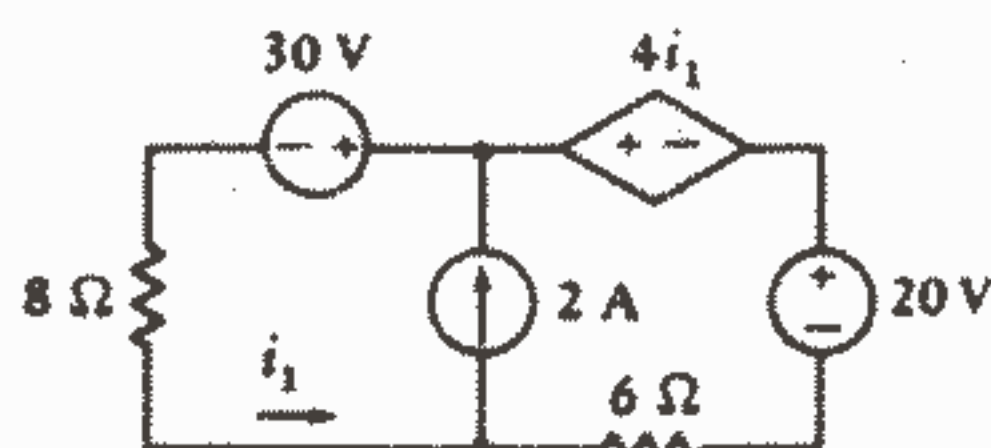
شکل ۳-۷۲: به مسئله ۳۷ مراجعه کنید.

۳۸ - برای مدار شکل ۳-۷۳ یک درخت تشکیل دهید که در آن i_1 و i_2 جریانهای لینک باشند و معادلات حلقه را بنویسید و مقادیر i_1 و i_2 را تعیین کنید.



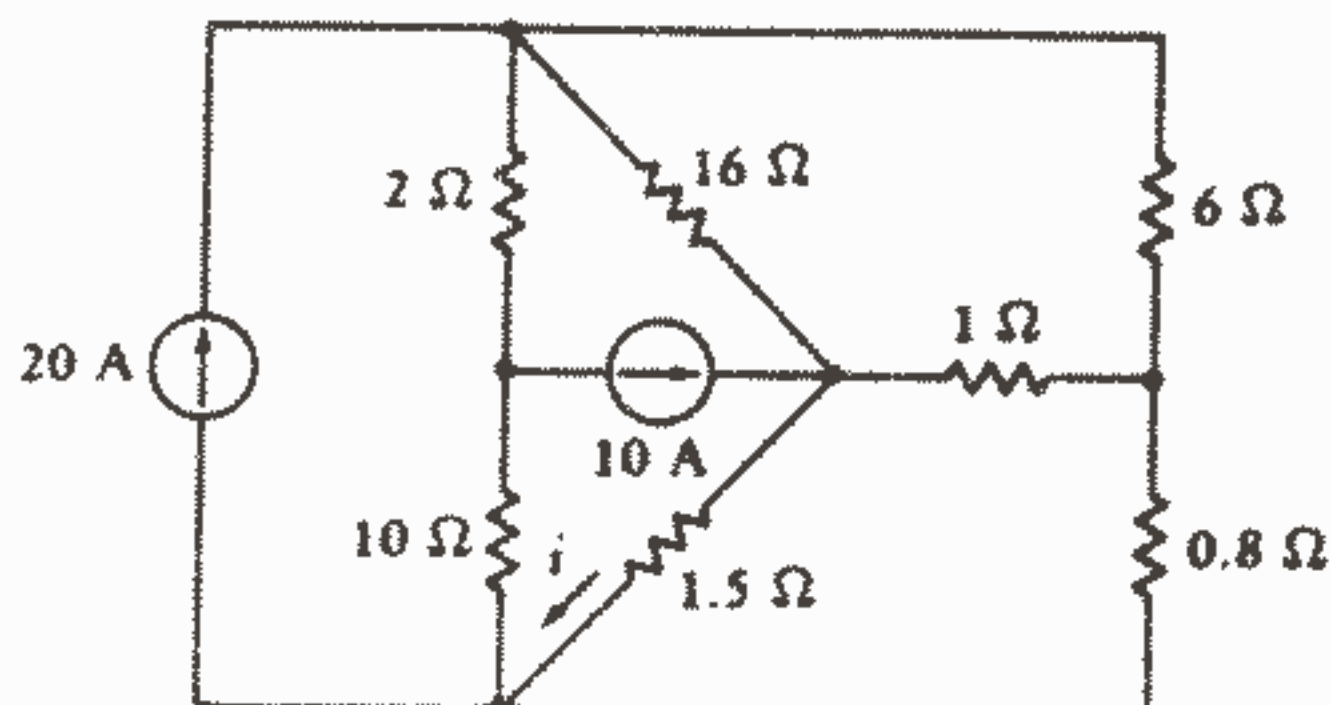
شکل ۳-۷۳: به مسئله ۳۸ مراجعه کنید.

۳۹ - (a) برای مدار شکل ۳-۷۴ درخت مناسبی تشکیل دهید و تنها معادله‌ای را که برای پیدا کردن i_1 لازم است بنویسید. (b) i_1 را پیدا کنید.



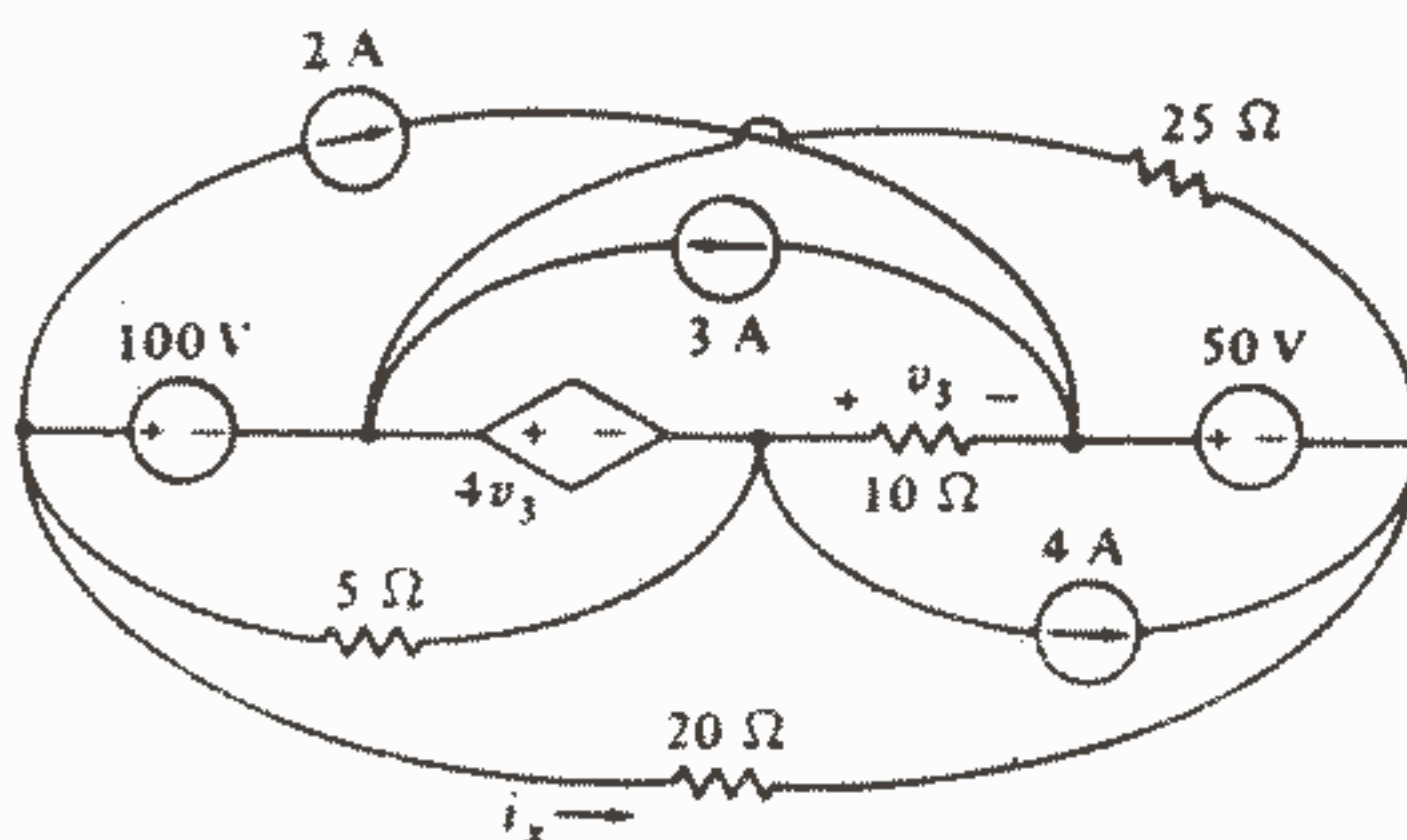
شکل ۳-۷۴: به مسئله ۲۹ مراجعه کنید.

۴۰ - برای مدار شکل ۳-۷۵ درختی ایجاد کنید که در آن همه جریانهای حلقه از مقاومت $1\ \Omega$ عبور کنند و سپس i را پیدا کنید.



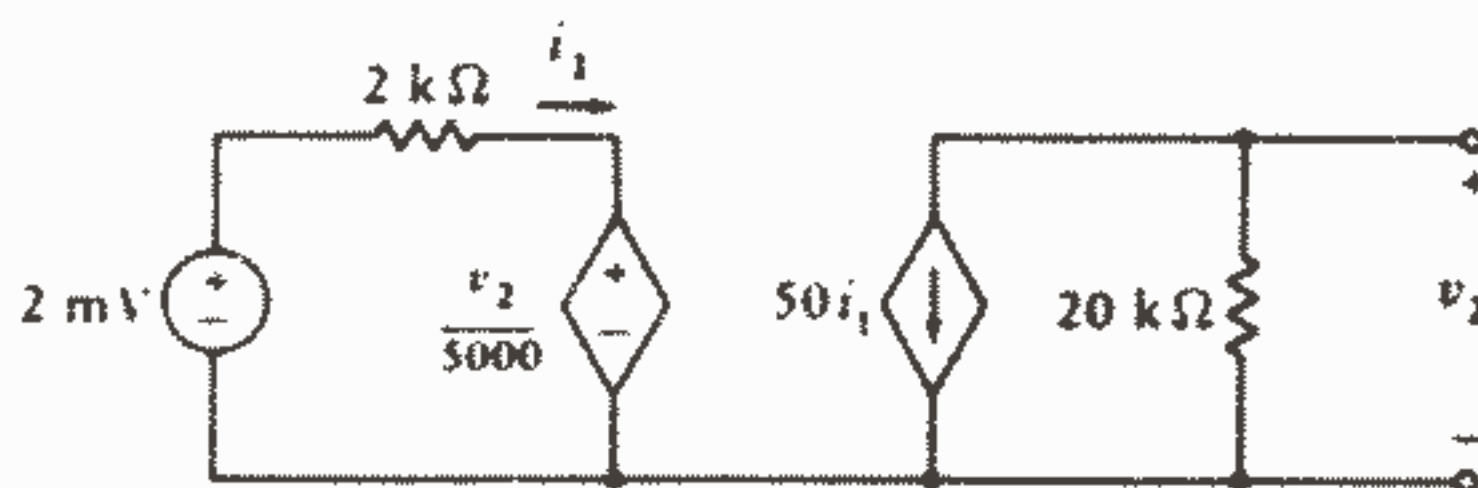
شکل ۳-۷۵: به مسئله ۴۰ مراجعه کنید.

۴۱ - با استفاده از روش تحلیل حلقه عمومی در مدار غیرمسطح شکل ۳-۷۶، i_x را پیدا کنید.



شکل ۳-۷۶: به مسئله ۴۱ مراجعه کنید.

۴۲ - شکل ۳-۷۷ یک نوع مدار معادل تقویت کننده ترانزیستوری را نشان می دهد. مقدار مدار باز V_p و مقاومت خروجی (R_{th}) این تقویت کننده را به دست آورید.



شکل ۳-۷۷: به مسئله ۴۲ مراجعه کنید.

بخش ۲

مدارهای گذرا

فصل ۴

سلف و خازن

۱ - ۴ - مقدمه

ما اکنون آماده‌ایم که دومین بخش عمده مطالعه خود درباره مدارها را شروع کنیم. در این فصل ما دو عنصر ساده مداری جدید را که رابطه ولتاژ - جریان آنها شامل سرعت تغییر ولتاژ یا جریان می‌باشد، را معرفی خواهیم کرد. قبل از شروع این مطالعه جدید، توقفی کوتاه برای یک لحظه و بازگشت به مطالعه مان درباره تحلیل مدارهای مقاومتی ارزشمند می‌باشد. یک مرور کوچک فلسفی به فهم مطالعه آینده مان کمک خواهد کرد.

پس از وضع یک سیستم مقبول از آحاد، بحث درباره مدارهای الکتریکی را با تعریف جریان، ولتاژ و پنج عنصر مداری ساده شروع کردیم. منابع ولتاژ و جریان مستقل و وابسته را عناصر فعال و مقاومت خطی را عنصر غیرفعال نامیدیم. اگر چه تعریف ما از «فعال» و «غیرفعال» هنوز کمی مبهم است و لازم است که مورد توجه دقیقتر قرار گیرند. ما یک عنصر فعال را به عنوان عنصری که قادر است یک قدرت متوسط بزرگتر از صفر را به مدار خارجی بدهد تعریف می‌کنیم، که البته متوسط گیری در فاصله زمانی بی‌نهایت انجام می‌شود، منابع ایده آل عناصر فعال می‌باشند. تقویت کننده عملیاتی هم یک وسیله فعال است. و اما یک عنصر غیرفعال به عنوان عنصری که نمی‌تواند قدرت متوسطی بیش از صفر را در یک فاصله زمانی بی‌نهایت تحویل دهد تعریف می‌شود، مقاومت در این دسته قرار می‌گیرد. انرژی که آن دریافت می‌کند معمولاً تبدیل به حرارت می‌شود.

هر یک از این عناصر بر حسب محدودیتهایی که در رابطه ولتاژ - جریان آنها وجود دارد تعریف شدند. مثلاً در مورد منبع جریان مستقل ولتاژ ترمینال باید کاملاً مستقل از جریانی باشد

که از ترمینالهای آن کشیده می‌شود. سپس مدارهای مرکب از اجزاء ساختمانی مختلف را مورد توجه قرار دادیم.

به طور کلی ما فقط جریان و ولتاژ ثابت را مورد استفاده قرار دادیم اما اکنون که یک آشنایی با تکنیکهای اساسی تحلیل با توجه صرف به مدارهای مقاومتی به دست آورده‌ایم می‌توانیم بررسی مدارهای جالبتر و عملیتر را که در آن سلف و خازن موجود می‌باشد و هم توابع تحریک و هم پاسخها معمولاً متغیر با زمان می‌باشند، را شروع کنیم.

۲-۴- سلف

هم سلف، که موضوع این قسمت و قسمت بعدی می‌باشد، و هم خازن که در قسمتهای بعدی این فصل مورد بحث قرار می‌گیرند عناصر غیرفعال هستند که توانایی ذخیره و باز پس دهی مقدار محدودی انرژی را دارند. بر خلاف یک منبع ایده‌آل، آنها نمی‌توانند مقدار نامحدودی انرژی و یا قدرت متوسط محدود در یک فاصله زمانی نامحدود را ارائه کنند.

اگرچه ما یک سلف و ضریب خود القا را صرفاً از نقطه نظر مداری تعریف خواهیم کرد، یعنی با یک معادله ولتاژ - جریان، ولی توضیحات کمی درباره توسعه تاریخی میدان مغناطیسی می‌تواند درک بهتری از این تعریف را میسر سازد. در اوایل قرن نوزدهم یک دانشمند دانمارکی به نام اورستد نشان داد که یک هادی حامل جریان یک میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند و یا اینکه عقربه قطب‌نما در مجاورت یک سیم حامل جریان تحت تأثیر قرار می‌گیرد. در فرانسه، اندکی بعد، آمپر اندازه‌گیریهای دقیقی انجام داد که نشان می‌داد این میدان مغناطیسی به طور خطی مربوط است به جریانی که آن را ایجاد کرده است. قدم بعدی در حدود بیست سال بعد وقتی که دانشمند تجربی انگلیسی، مایکل فارادی، و مخترع آمریکایی، جوزف هنری، تقریباً به طور هم‌زمان^۱ کشف کردند که یک میدان مغناطیسی متغیر می‌تواند ولتاژی در مدار مجاور خود القاء کند، برداشته شد. آنها نشان دادند که این ولتاژ متناسب است با تغییرات زمانی جریانی که میدان مغناطیسی را ایجاد کرده است. ثابت تناسب را ما اکنون ضریب خود القایی می‌نامیم و با علامت L نشان می‌دهیم و رابطه آن عبارت است از: $v = L di/dt$ (۱) که باید بدانیم که v ، i هر دو تابعی از زمان هستند. هر وقت بخواهیم این مطلب را مورد تأکید قرار دهیم می‌توانیم از علائم $v(t)$ و $i(t)$ استفاده کنیم.

علامت مداری سلف در شکل ۱-۴ نشان داده شده است و باید توجه داشت که قرارداد علامت غیرفعال، درست مانند مقاومت، در اینجا هم به کار رفته است. واحدی که ضریب خودالقایی را با آن اندازه گیری می کنند هنری^۱ (H) می باشد و معادله تعریف کننده آن نشان می دهد که هنری فقط بیان کوتاهتری برای ولت ثانیه بر آمپر می باشد.



شکل ۱ - ۴: علامت مبنای ولتاژ و جریان در علامت مداری سلف

نشان داده شده اند. $v = L di/dt$

سلفی که ضریب خود القایی آن طبق رابطه (۱) تعریف می شود یک مدل ریاضی است و عنصر ایده آلی است که می توانیم برای تقریب نمودن رفتار یک وسیله واقعی به کار ببریم. یک سلف واقعی را می توان با پیچیدن طولی از یک سیم به صورت سیم پیچ به دست آورد. این کار می تواند به طور موثری جریانی را که باعث میدان مغناطیسی می شود افزایش دهد و نیز می تواند «تعداد» مدارهای مجاوری را که در آنها ولتاژ فارادی القاء می شود، افزایش دهد. نتیجه این اثر دو گانه این است که ضریب خودالقایی سلف یا کویلی که به شکل مارپیچ با حلقه های نزدیک به هم باشد، عبارت از $s, \mu N^2 A$ که A سطح مقطع، s طول سیم پیچ، N تعداد دوره های کامل و μ ضریب ثابت ماده داخل سیم پیچ می باشد و به نام پرمابیلیته خوانده می شود. برای هوای آزاد و موادی که خیلی نزدیک به هوا هستند) داریم:

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

سلفهای عملی را باید همراه با یک درس آزمایشگاه و مطالبی مربوط به شار مغناطیسی، پرمابیلیته، و روشهای استفاده از مشخصه های سیم پیچ فیزیکی برای محاسبه یک ضریب خودالقایی مناسب برای مدل ریاضی در دروس فیزیک و تئوری میدان الکترومغناطیس رد بررسی قرار دارد.

همچنین می توان مدارهای الکترونیکی خاصی را مونتاژ نمود که شامل هیچ سلفی نباشد ولی رابطه $V-i$ فرمول (۱) را در ترمینالهای ورودی اش ارائه کند. یک مثال برای این حالت را در قسمت ۷-۸ مورد بررسی قرار خواهیم داد.

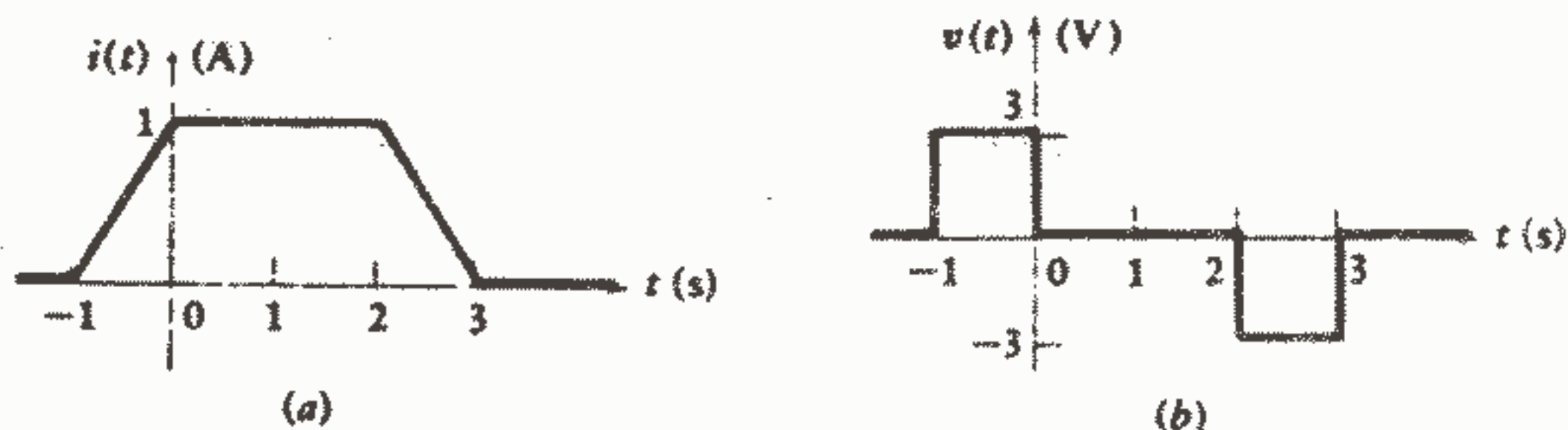
حال بیایید رابطه (۱) را کمی موشکافی کنیم تا بعضی از مشخصات الکتریکی این مدل ریاضی تعیین شود. این معادله نشان می دهد که ولتاژ دو سر یک سلف متناسب است با سرعت

تغییرات زمانی جریان آن. بخصوص که نشان می‌دهد صرفنظر از مقدار جریان که هر چقدر باشد، ولتاژ دو سر سلفی که حامل جریان ثابت باشد صفر می‌باشد. بنابراین ما می‌توانیم سلف را برای dc اتصال کوتاه در نظر بگیریم. واقعیت دیگری که از این معادله مشهود است مربوط می‌شود به سرعت بی‌نهایت تغییر جریان سلف، مانند حالتی که به وسیله یک تغییر ناگهانی از یک مقدار محدود به مقدار محدود دیگری در مقدار جریان به وجود می‌آید. این تغییر ناگهانی جریان باید با ولتاژ نامحدودی در دو سر سلف همراه باشد. به عبارت دیگر اگر بخواهیم یک تغییر ناگهانی در جریان سلف ایجاد کنیم، باید ولتاژ بی‌نهایت به آن اعمال کنیم. اگر چه یک تابع تحریک ولتاژ بی‌نهایت فقط از نظر تئوری قابل قبول است و هرگز نمی‌تواند به وسیله یک وسیله فیزیکی واقعی ارائه شود. همانگونه که به طور خلاصه خواهیم دید که یک تغییر ناگهانی در جریان سلف، نیاز به یک تغییر ناگهانی در انرژی ذخیره شده در سلف دارد و این تغییر ناگهانی در انرژی نیاز به قدرت بی‌نهایت در آن لحظه دارد که باز قدرت بی‌نهایت در دنیای واقعی وجود ندارد. برای اجتناب از ولتاژ و قدرت بی‌نهایت، نباید اجازه دهیم که جریان سلف به طور لحظه‌ای از یک مقداری به مقدار دیگری جهش کند. اگر سلفی را که حامل جریان محدودی است مدار باز کنیم ممکن است یک قوس الکتریکی در دو سر سوئیچ ظاهر شود. انرژی ذخیره شده صرف یونیزه کردن هوا در مسیر قوس می‌شود. این قوس در سیستم احتراق اتومبیل مفید می‌باشد به طوریکه جریانی که از کویل شمع عبور می‌کند به وسیله مقسم قطع می‌شود و قوسی در دو سر شمع ایجاد می‌شود.

ما در حال حاضر هیچ مداری را که در آن یک سلف به طور ناگهانی مدار باز شود را مورد توجه قرار نخواهیم داد. اگر چه باید خاطر نشان ساخت که ما این محدودیت را بعداً وقتی که وجود یک تابع تحریک ولتاژ و یا پاسخ را که به طور لحظه‌ای بی‌نهایت می‌شود، در نظر بگیریم، رفع خواهیم کرد.

معادله (۱) را می‌توان به وسیله روشهای ترسیمی تفسیر (و یا در صورت لزوم حل) نمود. جریانی را فرض می‌کنیم (شکل ۲a-۴) که قبل از $t = -1S$ مقدارش صفر است و سپس در ثانیه بعدی مقدار آن به طور خطی به ۱ افزایش پیدا می‌کند و برای مدت $2S$ در مقدار $1A$ باقی می‌ماند و سپس در ثانیه بعدی مقدارش به صفر تنزل می‌کند و بعد از آن در مقدار صفر می‌ماند. اگر این جریان در یک سلف $3H$ موجود باشد و علائم ولتاژ و جریان به گونه‌ای در نظر گرفته شوند که مطابق با قرارداد علامت غیرفعال باشد و آنگاه می‌توانیم از معادله (۱) برای به دست آوردن شکل موج ولتاژ استفاده کنیم. از آنجاییکه جریان برای $t < -1$ صفر و ثابت می‌باشد، ولتاژ

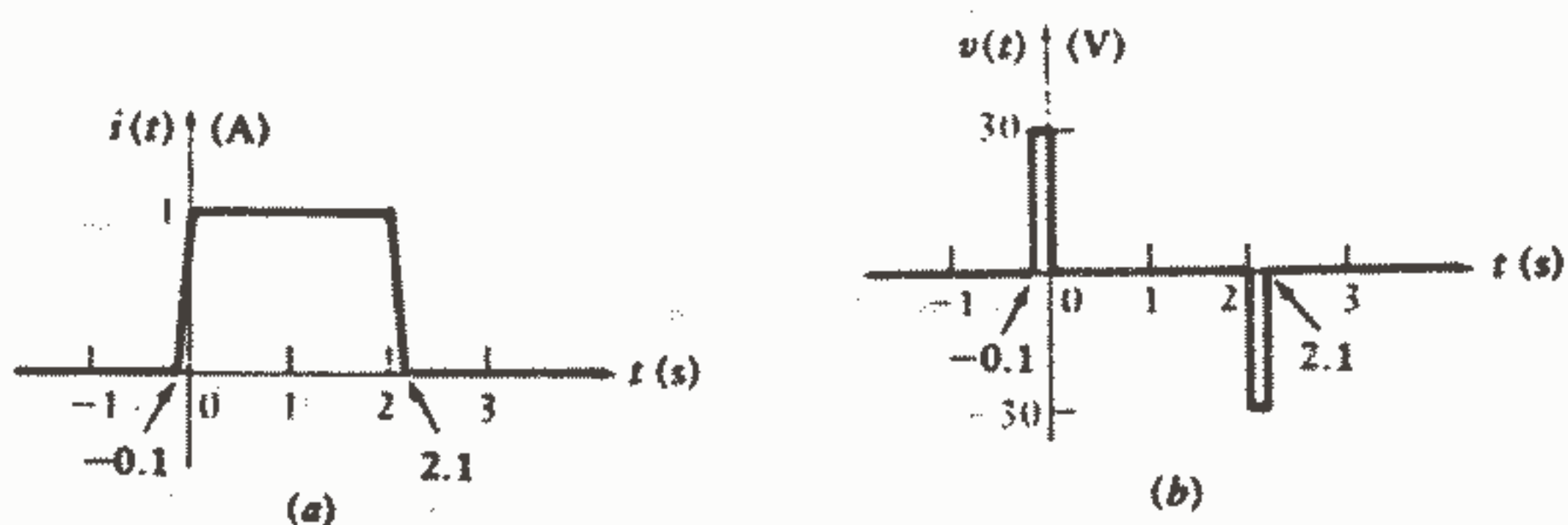
در این فاصله زمانی صفر است سپس جریان با سرعت خطی $1A/s$ شروع به افزایش می کند و در نتیجه ولتاژ ثابت $3V$ ایجاد می شود. در طی فاصله $2S$ بعدی، جریان ثابت است بنابراین ولتاژ صفر می باشد. کاهش نهایی جریان باعث ولتاژ $-3V$ می شود و پس از آن پاسخی وجود ندارد. شکل موج ولتاژ در شکل ۲b-۴ در همان مقیاس زمانی رسم شده است.



شکل ۲ - ۴: (a) شکل موج جریان در یک سلف H ۳. (b)

$$v = 3 di/dt \quad \text{شکل موج ولتاژ متناظر با آن}$$

حال بیایید اثر یک افزایش و یا کاهش سریعتر جریان بین مقادیر صفر و $1A$ را بررسی کنیم. اگر فواصل زمانی لازم برای افزایش و کاهش به $1S$ ، کاهش یابد، آنگاه باید مشتق ده برابر از نظر اندازه بزرگتر شود. این وضعیت در شکل موجهای ولتاژ و جریان در شکلهای a,b-۳ نشان داده شده است و جالب است توجه کنیم که سطح زیر هر پالس ولتاژ $3VS$ می باشد.

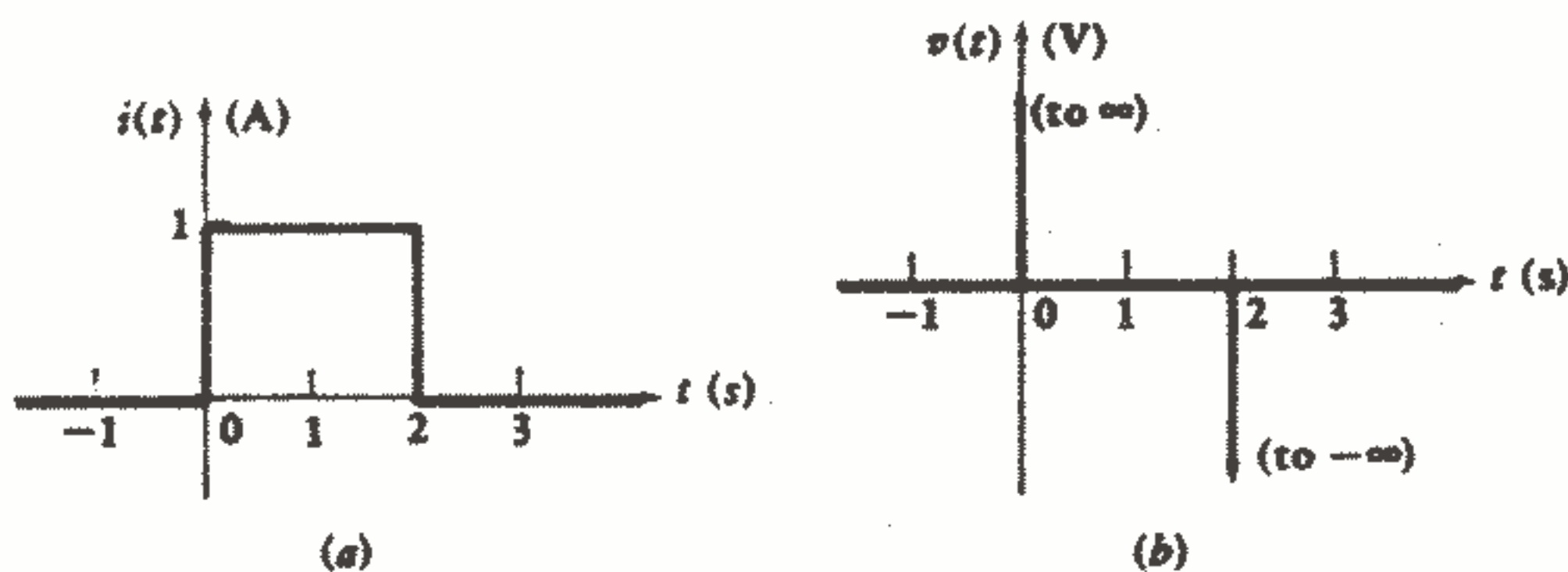


شکل ۳ - ۴: (a) زمانی که لازم است تا جریان شکل a-۲ - ۴

از ۰ تا ۱ و از ۱ تا ۰ تغییر کند با فاکتور ۱۰ کاهش پیدا کرده است. (b) شکل موج ولتاژ حاصله. توجه کنید که عرض پالس ها به منظور وضوح کمی بزرگنمایی شده اند.

هر چه طول این دو فاصله زمانی کاهش یابد به همان نسبت اندازه ولتاژ هم بزرگتر می شود البته فقط در فاصله ای که جریان صعودی و نزولی باشد یک تغییر ناگهانی در جریان باعث یک ولتاژ بی نهایت (Spike) خواهد شد (که هر کدام دارای سطح $3V.S$ می باشند) که در شکل $\epsilon - \epsilon a$, $\epsilon - \epsilon b$ نشان داده شده اند.

بعدها تهیه این ولتاژهای (و جریانهای) بی نهایت، مطلوب خواهد بود و ما آنها را ایمبالس خواهیم نامید، اگرچه در حال حاضر به حالت واقعی نزدیکتر خواهیم بود و اجازه نخواهیم داد جریان، ولتاژ و قدرت بی نهایت شود. بنابراین موقتاً یک تغییر ناگهانی در جریان سلف ممنوع می باشد.



شکل ۴ - ۴: (a) زمان لازم برای تغییر جریا شکل $a - 2 - 4$ از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ به صفر کاهش یافته است. (b) ولتاژ مربوط در دو سر سلف شامل یک ضربه بینهایت مثبت و منفی می باشد.

تمرین

۱ - ۴ - در مدار شکل $4a - 5$ کمیت های زیر را پیدا کنید:

جواب: $0.25A$ و 0 و 0.6
 $i_1(a)$, $i_2(b)$, $i_3(c)$

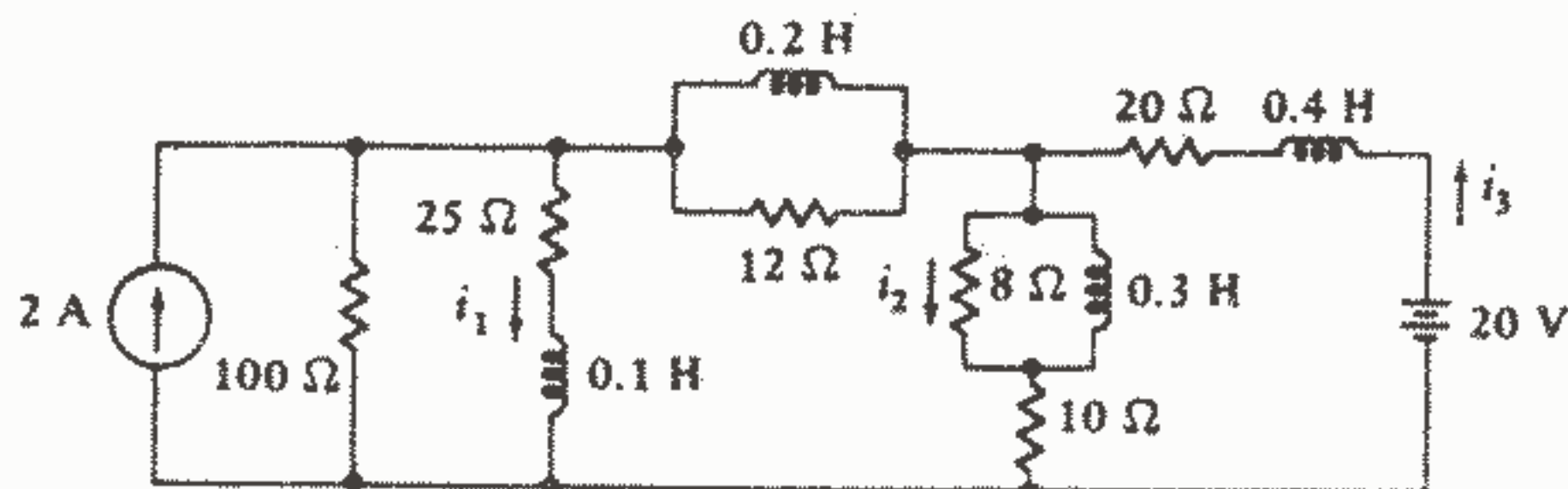
۲ - ۴ - جریان یک سلف $40mH$ به صورت تابعی از زمان در شکل $4b - 5$ نشان داده شده

است. مقدار $v_L(t)$ را در مورد زیر پیدا کنید:

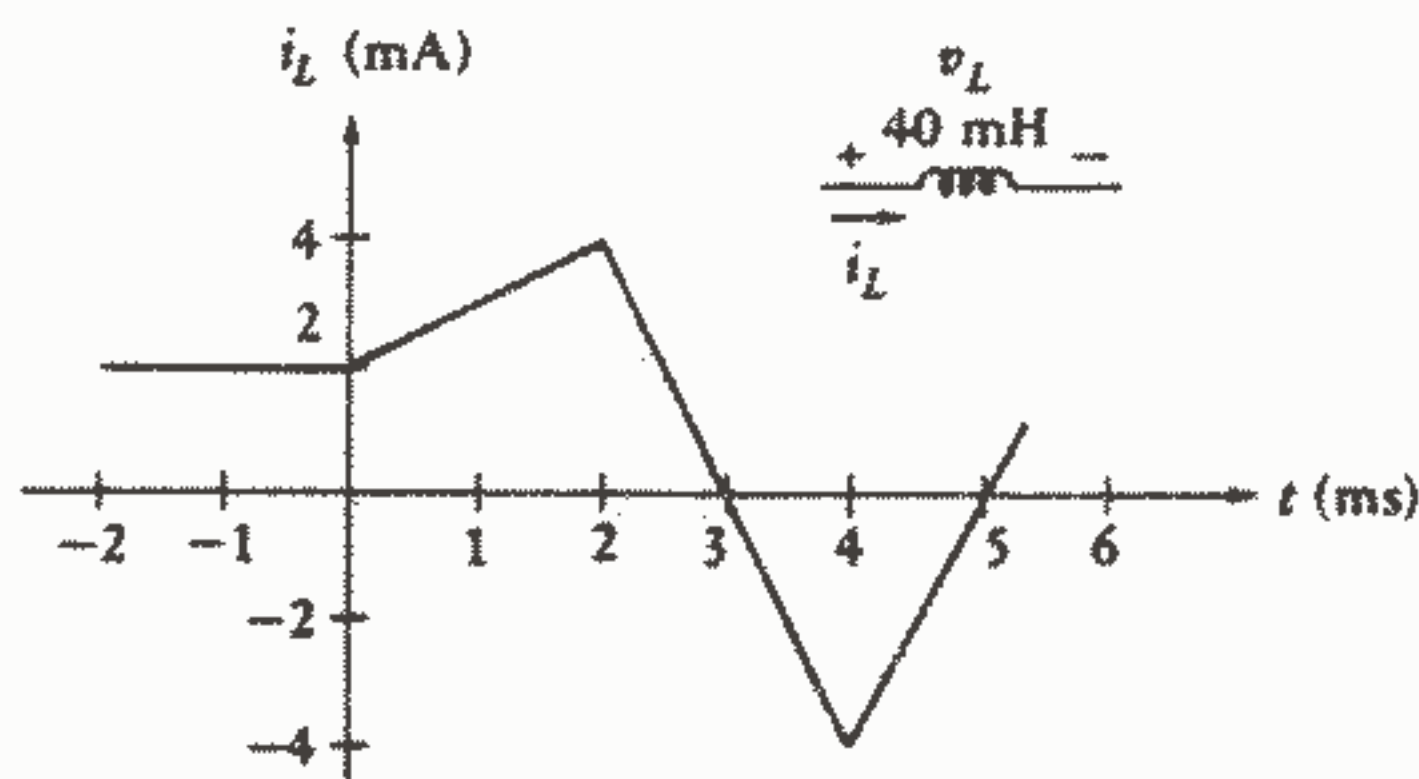
$t=1ms(a)$, $t=3ms(b)$, $t=5ms(c)$

160 , -160 , $40mV$

جواب:



(a)



(b)

شکل ۵ - ۴: به تمرینات ۱ - ۴ و ۲ - ۴ مراجعه کنید.

۳ - ۴ - روابط انتگرالی برای سلف

ما ضریب خود القایی را به وسیله یک معادله دیفرانسیل ساده (۲) $v = L \frac{di}{dt}$ تعریف کرده ایم و قادر بوده ایم چند نتیجه گیری درباره مشخصات یک سلف از این رابطه داشته باشیم. مثلاً دریافته ایم که می توان سلف را برای جریان مستقیم، اتصال کوتاه در نظر گرفت و توافق کرده ایم که نمی توانیم اجازه دهیم جریان یک سلف به طور ناگهانی از یک مقدار به مقدار دیگری تغییر کند زیرا این امر لازمه اش این است که ولتاژ و قدرت سلف بی نهایت شود. با وجود این هنوز معادله تعریف کننده ضریب خود القایی حاوی اطلاعات دیگری نیز هست. اگر معادله (۲) را با کمی تغییر به صورت $di = \frac{1}{L} v dt$ بنویسیم، انتگرال گیری را ایجاب می کند. اجازه دهید ابتدا حدودی را که باید در دو انتگرال قرار دهیم مورد توجه قرار دهیم. جریان i در لحظه t مطلوب است پس این دو کمیت حدود بالایی انتگرالهای سمت چپ و راست می باشند و حدود پایینی را فقط با فرض اینکه جریان در لحظه t_0 عبارت از $i(t_0)$ است، می توان تعیین نمود. بنابراین

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt \Rightarrow i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0) \quad (3)$$

معادله (۲) ولتاژ سلف را بر حسب جریان آن نشان می‌دهد در حالیکه معادله (۳) جریان را بر حسب ولتاژ می‌دهد. شکل‌های دیگری هم برای این معادله اخیر ممکن می‌باشد. ما می‌توانیم انتگرال را به صورت یک انتگرال نامعین به همراه ثابت انتگراسیون K بنویسیم:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt + k \quad (4)$$

می‌توانیم فرض کنیم که داریم یک مسئله واقعی را که در آن اگر $t_0 \rightarrow -\infty$ هیچ جریان یا انرژی در سلف وجود ندارد را حل می‌کنیم. بنابراین اگر $i(t_0) = i(-\infty) = 0$ آنگاه:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt \quad (5)$$

بیا باید کاربرد این انتگرال‌ها را با حل یک مثال ساده بررسی کنیم. فرض کنید که ولتاژ دو سر یک سلف $2H$ برابر با $V = 6 \cos 5t$ باشد. در این صورت چه اطلاعاتی دربارهٔ جریان سلف می‌توان به دست آورد؟ از معادله (۳) داریم:

$$i(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t 6 \cos 5t dt + i(t_0)$$

$$\text{و یا: } i(t) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \sin 5t - \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \sin 5t_0 + i(t_0) = 0,6 \sin 5t - 0,6 \sin 5t_0 + i(t_0)$$

جمله اول در رابطه فوق نشان می‌دهد که جریان سلف به طور سینوسی تغییر می‌کند و جمله دوم و سوم فقط بیانگر یک مقدار ثابت می‌باشند که اگر مقدار عددی جریان در لحظه مشخص از زمان معلوم باشد، این مقدار ثابت معلوم می‌گردد. بیا باید فرض کنیم که بیان مثال ما همچنین نشان می‌دهد که جریان در لحظه $t = -\pi/2$ برابر با $1A$ می‌باشد. بنابراین t_0 را برابر $-\pi/2$ و $i(t_0)$ را برابر 1 می‌گیریم و در می‌یابیم که:

$$i(t) = 0,6 \sin 5t - 0,6 \sin (-2,5\pi) + 1 \rightarrow i(t) = 0,6 \sin 5t + 1,6$$

می‌توانستیم همین نتیجه را از رابطه (۴) هم به دست آوریم. یعنی:

$$i(t) = 0,6 \sin 5t + k$$

و با در نظر گرفتن جریان $1A$ در لحظه $t = -\pi/2$ می‌توانیم مقدار عددی k را به دست آوریم:

$$1 = 0,6 \sin (-2,5\pi) + K \rightarrow K = 1 + 0,6 = 1,6 \rightarrow i(t) = 0,6 \sin 5t + 1,6$$

معادله (۵) با این ولتاژ بخصوص تولید اشکال می‌کند زیرا ما این معادله را بر اساس این فرض که جریان در لحظه $t = -\infty$ صفر می‌باشد بنا نهادیم. این امر باید در دنیای واقعی صادق باشد، اما در زمینه مدل ریاضی داریم کار می‌کنیم و تمام توابع تحریک ایده آل هستند. این مشکل پس از انتگرال گیری یعنی:

$$i(t) = 0,6 \sin 5t \Big|_{-\infty}^t$$

و تلاش برای محاسبه انتگرال در حدود پایین آن بروز می کند:

$$i(t) = 0,6 \sin \Delta t - 0,6 \sin(-\infty)$$

سینوس $\pm \infty$ نامعین می باشد و ما می توانیم آن را با یک ثابت نامعلوم K نشان دهیم، یعنی:

$$i(t) = 0,6 \sin \Delta t + K$$

ملاحظه می کنیم که این نتیجه با نتیجه به دست آمده وقتی که یک ثابت انتگراسیون دلخواه در معادله (۴) فرض نمودیم یکسان می باشد.

ما نباید قضاوت عجولانه ای را بر اساس این مثال انجام دهیم زیرا بسته به اینکه کدام فرم را به کار ببریم هر یک بسته به مسئله و نوع کاربرد دارای مزایایی می باشند. معادله (۳) بیانگر یک روش طولانی و کلی است اما به وضوح نشان می دهد که ثابت انتگراسیون یک جریان می باشد. معادله (۴) بیان خلاصه و جمع و جورتری از معادله (۳) می باشد اما ماهیت ثابت انتگراسیون نامشخص است. و بالاخره معادله (۵) یک بیان عالی می باشد زیرا هیچ مقدار ثابتی لازم ندارد اگر چه فقط وقتی که جریان در $t = -\infty$ برابر صفر باشد و وقتی که بیان تحلیلی جریان نامعین نباشد می توان آن را به کار برد.

حال بیایید توجه خود را معطوف قدرت و انرژی کنیم. قدرت جذب شده به وسیله حاصلضرب ولتاژ - جریان به دست می آید:

$$p = vi = Li \frac{di}{dt} \quad W$$

انرژی کسب شده به وسیله سلف یعنی w_L در میدان مغناطیسی اطراف سیم پیچ ذخیره می شود و به وسیله انتگرال قدرت در فاصله زمانی مورد نظر بیان می شود:

$$\int_{t_0}^t p \, dt = L \int_{t_0}^t i \frac{di}{dt} \, dt = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} i \, di = \frac{1}{2} L \{ [i(t)]^2 - [i(t_0)]^2 \}$$

و از آنجا داریم:

$$w_L(t) - w_L(t_0) = \frac{1}{2} L \{ [i(t)]^2 - [i(t_0)]^2 \} \quad J \quad (6)$$

که باز دوباره فرض کرده ایم جریان در لحظه t_0 عبارت است از $i(t_0)$ هنگام استفاده از رابطه انرژی مرسوم این است که فرض می کنند مقدار t_0 طوری انتخاب شده است که در آن، جریان و انرژی صفر می باشد. بنابراین به طور ساده خواهیم داشت:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2 \quad (7)$$

که ما اکنون می دانیم مبنای ما برای انرژی صفر هر زمانی که در آن جریان سلف صفر است، می باشد. در هر زمان دیگری هم که جریان صفر باشد، هیچ انرژی ذخیره شده ای در

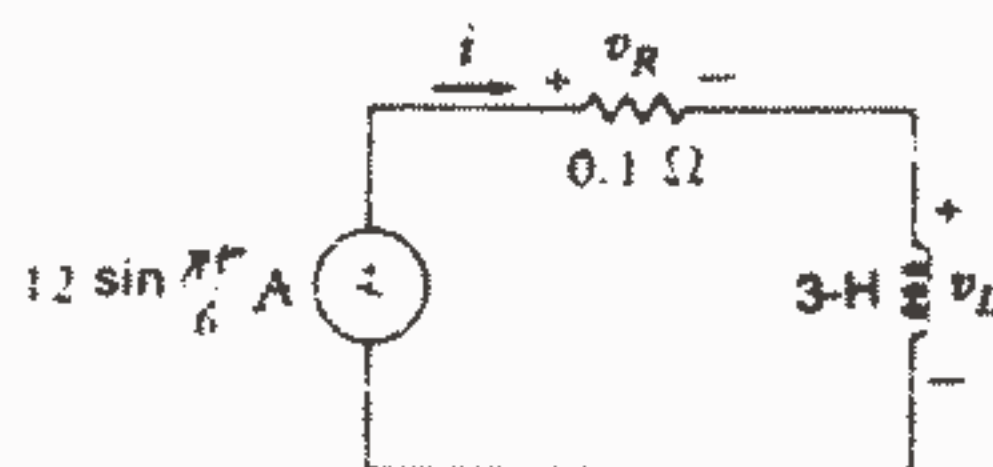
سیم پیچ نخواهیم داشت. هر وقت که جریان صفر نباشد صرفنظر از جهت آن، انرژی در سلف ذخیره می شود. بنابراین نتیجه می گیریم که قدرت باید در بخشی از زمان به سلف تحویل داده شود و بعداً از آن پس گرفته شود. در یک سلف ایده آل تمام انرژی جذب شده را می توان باز پس گرفت و هیچ بار ذخیره و یا تلفاتی در مدل ریاضی وجود ندارد. اگر چه یک سیم پیچ واقعی باید از سیم واقعی ساخته شود و در نتیجه همیشه مقاومتی با آن همراه می باشد. در این صورت دیگر نمی توان انرژی را بدون تلفات، ذخیره و بازیابی نمود.

این ایده ها را می توان با یک مثال ساده توضیح داد. در شکل ۶-۴ یک سلف 3H به طور سری با یک مقاومت 0.1Ω و یک منبع جریان نشان داده شده است. می توانیم مقاومت را به عنوان مقاومت سیم سلف که همیشه همراه با سیم پیچ واقعی می باشد تعبیر کنیم. ولتاژ دو سر مقاومت چنین است:

$$v_R = Ri = 1.2 \sin \frac{\pi}{6} t$$

و ولتاژ دو سر سلف را با استفاده از معادله تعریف کننده خود القایی به دست می آوریم.

$$v_L = L \frac{di}{dt} = 3 \frac{d}{dt} \left(12 \sin \frac{\pi}{6} t \right) = 6\pi \cos \frac{\pi}{6} t$$



شکل ۶-۴: یک جریان سینوسی به عنوان یک تابع تحریک به یک مدار RL سری اعمال شده است.

انرژی ذخیره شده در سلف عبارت است از: $w_L = \frac{1}{2} Li^2 = 216 \sin^2 \frac{\pi}{6} t$ و بدیهی است که این انرژی از مقدار صفر در $t=0$ به 216J در $t=3\text{S}$ افزایش می یابد در طی ۳ ثانیه بعدی، انرژی به طور کامل سلف را ترک می کند. حال بیا بید ببینیم چه بهایی را برای این ذخیره و بازیابی 216J انرژی در این چند ثانیه پرداخته ایم. قدرت تلف شده در مقاومت به سادگی به دست می آید: $p_R = i^2 R = 14.4 \sin^2 \frac{\pi}{6} t$ و انرژی تبدیل شده به حرارت در مقاومت در فاصله زمانی ۶S عبارت است از:

$$w_R = \int_0^6 p_R dt = \int_0^6 14.4 \sin^2 \frac{\pi}{6} t dt = \int_0^6 14.4 \left(\frac{1}{2} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} t \right) dt = 43.2 \text{ J}$$

این مقدار بیانگر ۲۰ درصد ماکزیمم انرژی ذخیره شده می باشد و برای چنین سلفی معقول می باشد. برای سیم پیجهایی که ضریب خود القایی در حدود $100 \mu H$ دارند، باید انتظار اعدادی در حدود ۲ یا ۳ درصد را داشته باشیم. در فصل ۱۴ این مفهوم را با تعریف ضریب کیفیت Q که نسبت ماکزیمم انرژی ذخیره شده به انرژی تلف شده در هر پریود می باشد، فرموله خواهیم کرد. حال بیایید مشخصات یک سلف را که از معادله تعریف کننده آن بر می آید، به صورت زیر فهرست وار بیان کنیم:

- ۱ - اگر جریان سلف با زمان تغییر نکند، ولتاژی در دو سر آن وجود نخواهد داشت، یعنی سلف برای dc اتصال کوتاه می باشد.
- ۲ - در سلف مقدار محدودی انرژی ذخیره می شود حتی اگر ولتاژ دو سر آن صفر باشد، مثلاً مانند موقعی که جریان آن ثابت باشد.
- ۳ - تغییر جریان یک سلف در زمان صفر به یک مقدار محدود غیر ممکن می باشد و برای اینکار ولتاژ بی نهایت در دو سر سلف لازم است. بعدها مفید خواهد بود که چنین ولتاژی را بتوان تولید و به یک سلف اعمال نمود، اما فعلاً ما از چنین تابع تحریک یا پاسخی اجتناب می کنیم یک سلف در برابر تغییر ناگهانی جریان مقاومت می کند درست شبیه یک جرم که در برابر تغییر ناگهانی سرعت مقاومت می کند.
- ۴ - سلف هرگز انرژی را تلف نمی کند، بلکه فقط آن را ذخیره می کند. اگر چه این مطلب فقط برای مدل ریاضی صحیح است و برای یک سلف واقعی صادق نیست.

تمرین

۳ - ۴ - در شکل ۱-۴ مقدار سلف را $L = 50 \text{ mH}$ در نظر بگیرید و ۷ را در لحظه $t = 10 \text{ ms}$ در حالات زیر پیدا کنید: (a) اگر $i = 20(1 - e^{-100t})$ برای $t > 0$ ، (b) اگر انرژی ذخیره شده به وسیله سلف $J = 0.4 \text{ J}$ ، $i(1\%) < 0$ باشد.

(c) پیدا کنید i را در $t = 10 \text{ ms}$ اگر $v = 20t^2 \text{ V}$ برای $t > -0.1 \text{ ms}$ و $i(-2\%) = 5 \text{ mA}$

جواب: 36.87 ، -17 ، 6.2 mA

۴ - ۴ - خازن

عنصر مداری غیرفعال دیگر ما خازن می باشد ما ظرفیت C را به وسیله رابطه ولتاژ - جریان $i = C \frac{dv}{dt}$ (۸) تعریف می کنیم. که در این رابطه i, v مطابق با قرارداد عنصر غیرفعال می باشند که این امر در شکل ۷ - ۴ نشان داده شده است. از معادله (۸) می توانیم واحد ظرفیت را به صورت آمپر ثانیه بر ولت و یا کولن بر ولت تعریف کنیم اما اکنون فاراد (F) را به عنوان یک کولن بر ولت تعریف می کنیم.

باز هم خازنی که ظرفیت آن طبق معادله (۸) تعریف شده است یک مدل ریاضی برای یک وسیله واقعی است. ساختمان این وسیله فیزیکی به وسیله علامت مداری آن که در شکل ۷ - ۴ نشان داده شده است به ذهن القا می شود درست به همان طریقی که علامت حلزونی سلف نمایانگر سیم پیچ در آن وسیله فیزیکی می باشد. یک خازن در عمل از دو صفحه هادی که بار می تواند بر روی آنها جمع شود تشکیل شده است که این دو صفحه به وسیله یک لایه نازک عایق که دارای مقاومت خیلی زیاد است از هم جدا شده اند. اگر فرض کنیم که این مقاومت به اندازه کافی بزرگ باشد که بتوان آن را بی نهایت در نظر گرفت، آنگاه بارهای مساوی و مخالف که بر روی صفحات خازن قرار می گیرند نمی توانند با یکدیگر ترکیب شوند (حداقل به وسیله مسیری در داخل قطعه). حال بیا یک وسیله خارجی مانند یک منبع جریان را تصور کنیم که به این خازن وصل شده است و جریان مثبتی به یکی از صفحات آن وارد می شود و از صفحه دیگر خارج می شود. جریانهای مساوی به ترمینالهای این عنصر وارد می شود و از آن خارج می شود و این همان چیزی است که از هر عنصر مداری انتظار داریم.

حال بیا یک خازن را مورد بررسی قرار دهیم، جریان مثبتی که وارد یکی از صفحات می شود بیانگر بار مثبتی است که از طریق یکی از پایه های آن وارد آن صفحه می شود، این جریان نمی تواند از داخل خازن عبور کند و در نتیجه بر روی آن صفحه جمع می شود در واقع جریان و بار طبق رابطه آشنای $i = \frac{dq}{dt}$ به هم مربوط می شوند.



شکل ۷ - ۴: علائم مبنای ولتاژ و جریان بر روی علامت مداری

خازن نشان داده شده است به طوری که: $i = C dv/dt$

حال بیایید یک مسئله پرزحمت را با در نظر گرفتن این صفحه به عنوان یک گره سر بسته و اعمال قانون جریان کیرشوف، برای خود مطرح کنیم. بدیهی است که آن برقرار نمی باشد زیرا جریان از مدار خارجی به صفحه نزدیک می شود اما از صفحه به داخل «مدار داخلی» جاری نمی شود این معمای پیچیده دانشمند مشهور اسکاتلندی، جیمز کلارک ماکسول، را حدود یک قرن پیش به سختی به زحمت انداخت و پس از اینکه وی تئوری متحد الکترومغناطیسی را وضع نمود در این تئوری یک «جریان جابجایی» را ارائه کرد که در هر جا که یک میدان الکتریکی یا ولتاژ حضور داشته باشد این جریان وجود دارد.

جریان جابجایی که در داخل خازن بین صفحات آن جاری است دقیقاً مساوی است با جریان هدایتی که در پایه های خازن جاری است، بنابراین اگر ما هر دو جریان جابجایی و هدایتی را در نظر بگیریم قانون جریان کیرشوف برقرار می باشد اگر چه در تحلیل مدار با این جریان جابجایی داخلی سروکاری نداریم و از آنجاییکه خوشبختانه این جریان با جریان هدایتی برابر است می توانیم نظریه ماکسول را به این صورت که جریان هدایتی را به ولتاژ متغیر دو سر خازن مربوط می سازد، در نظر بگیریم. این رابطه خطی است و ضریب تناسب، ظرفیت C می باشد:

$$i_{\text{disp}} = i = C \frac{dv}{dt}$$

خازنی که از دو صفحه هادی موازی به سطح A و به فاصله d تشکیل شده باشد و دارای ظرفیت $C = \epsilon A/d$ می باشد که در این رابطه ϵ ضریب نفوذ عایق بین صفحات می باشد و ابعاد صفحات هادی خیلی بزرگتر از d می باشند. برای خلاء و یا هوای آزاد داریم:

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8.854 \text{ Pf/m}$$

مفاهیم میدان الکتریکی، جریان جابجایی و فرم کلی قانون جریان کیرشوف موضوعاتی هستند که برای دروس فیزیک و تئوری الکترومغناطیسی مناسبتر می باشند.

بعضی از مشخصه های مهم مدل ریاضی جدیدمان را می توان از معادله تعریف کنند، (۸) به دست آورد. یک ولتاژ ثابت در دو سر خازن ایجاد می کند که جریان عبوری از آن صفر باشد، بنابراین خازن برای dc «مدار باز» می باشد. این واقعیت را از علامت مداری خازن هم می توان استنباط نمود. همچنین بدیهی است که یک جهش ناگهانی ولتاژ ایجاد می کند که جریان بینهایت باشد. همانگونه که تغییرات ناگهانی جریان در سلف را ممنوع کردیم، در خازن هم نباید اجازه دهیم ولتاژ تغییرات ناگهانی داشته باشد زیرا جریان بی نهایت (و در نتیجه قدرت بی نهایت) غیر عملی می باشد. ما این محدودیت را هنگام در نظر گرفتن ایمپالس جریان، کنار خواهیم گذاشت.

ولتاژ خازن را می‌توان با انتگرال‌گیری از رابطه (۸) بر حسب جریان بیان نمود. ما ابتدا به دست می‌آوریم:

$$dv = \frac{1}{C} i dt$$

و سپس در حدود بین t_0 ، t و ولتاژهای متناظر آنها یعنی $v(t_0)$ ، $v(t)$ انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0) \quad (9)$$

رابطه (۹) را می‌توانیم به صورت یک انتگرال نامعین به اضافه یک ثابت انتگراسیون هم بنویسیم:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt + k \quad (10)$$

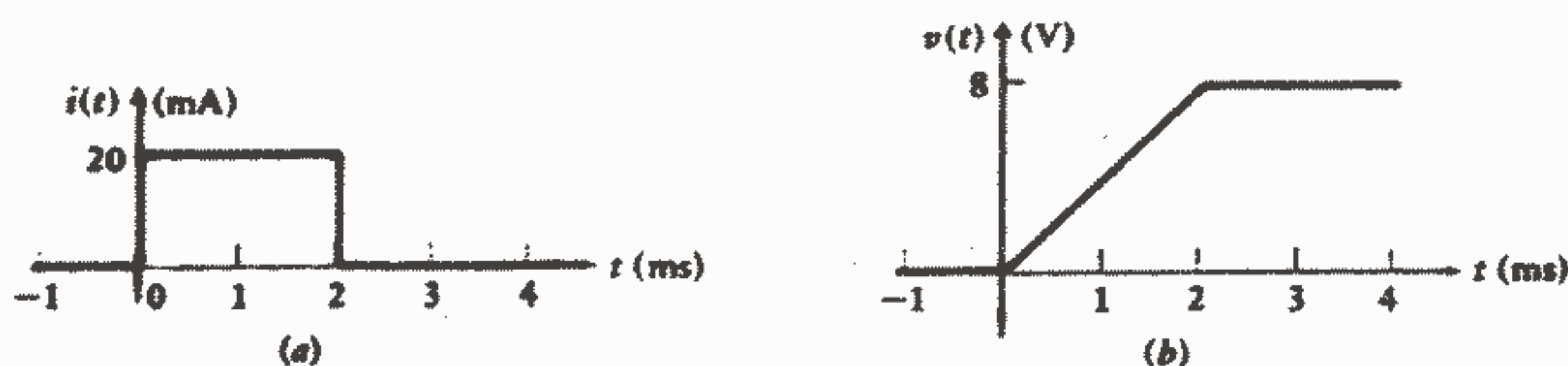
و بالاخره در بسیاری از مسائل واقعی می‌توان t_0 را $-\infty$ و $v(-\infty)$ را صفر در نظر گرفت:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt \quad (11)$$

از آنجاییکه انتگرال جریان در هر فاصله زمانی برابر با باری است که در آن پریود بر روی آن صفحه‌ای از خازن که جریان به آن جاری می‌باشد، جمع می‌شود، بدیهی است که ظرفیت را می‌توان به صورت $q = Cv$ هم تعریف نمود.

تشابه بین چند معادله انتگرالی معرفی شده در این قسمت و آنهایی که برای خود القایی به آنها اشاره شد تداعی‌کننده است و به ذهن القاء می‌کند که تناظری را که بین معادلات گره و چشمه در مدارهای مقاومتی ملاحظه کردیم می‌توان طوری تعمیم داد که خودالقایی و ظرفیت را هم در بر گیرد. اصل تناظر را بعداً در همین فصل مورد بحث قرار خواهیم داد.

به عنوان توضیحی برای کاربرد معادلات انتگرالی فوق‌الذکر، بیایید ولتاژ خازنی را که جریان نشان داده شده در شکل ۸-۴ از آن عبور می‌کند، پیدا کنیم.



شکل ۸ - ۴: (a) شکل موج جریان اعمال شده به یک خازن

$0.5 \mu F$ (b) شکل موج ولتاژ حاصله که به سادگی به

وسیله انتگرال‌گیری ترسیمی به دست می‌آید.

فرض می‌کنیم که پالس مربعی منفرد 20 mA با دوام 2 ms به یک خازن $5\mu\text{f}$ اعمال شود. از تفسیر ترسیمی معادله (۹) می‌دانیم که اختلاف بین مقادیر ولتاژ در t و t_0 متناسب است با سطح زیر منحنی جریان بین همین دو مقدار زمان ضریب تناسب $1/6$ می‌باشد. این سطح را می‌توان از شکل ۸a-۴ با در نظر گرفتن مقادیر t_0 ، t به دست آورد. بنابراین اگر، $t = 0.5$ ، $t_0 = -0.5$ (بر حسب ms) باشند، داریم: $v(0.5) = 2 + v(-0.5)$ و یا اگر $t_0 = 0$ و $t = 3$ داریم: $v(3) = 8 + v(0)$

ما همچنین می‌توانیم نتایجمان را با تقسیم محدوده زمانی مورد نظر به چندین فاصله، به طور عمومی تر بیان کنیم. بیایید نقطه شروع t_0 را قبل از لحظه صفر انتخاب کنیم. در این صورت اولین فاصله t را بین t_0 و صفر انتخاب می‌کنیم:

$$v(t) = 0 + v(t_0), \quad t_0 \leq t \leq 0$$

و از آنجاییکه شکل موج ما بیان می‌دارد که هیچ جریانی قبل از لحظه صفر به این خازن اعمال نشده است، پس داریم: $v(t_0) = 0$ و بنابراین: $v(t) = 0 \quad t \leq 0$

حال اگر فاصله زمانی مشخص شده به وسیله پالس مربعی را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$v(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 2\text{ ms}$$

و برای فاصله نیمه بی‌نهایت بعد از پالس، خواهیم داشت: $v(t) = 8 \quad t \geq 2\text{ ms}$

بنابراین نتایج به دست آمده برای این سه فاصله زمانی روابط تحلیلی ولتاژ خازن را در هر لحظه بعد از $t = t_0$ به ما ارائه می‌کند و زمان t_0 را می‌توان هر اندازه که بخواهیم زود در نظر بگیریم. این نتایج به گونه‌ای خیلی ساده‌تر از این روابط تحلیلی، به صورت نموداری در شکل ۸b-۴ نشان داده شده است.

قدرت تحویل داده شده به یک خازن عبارت است از:

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt}$$

و انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی آن عبارت است از:

$$\int_{t_0}^t p \, dt = C \int_{t_0}^t v \frac{dv}{dt} \, dt = C \int_{v(t_0)}^{v(t)} v \, dv = \frac{1}{2} C \{ [v(t)]^2 - [v(t_0)]^2 \}$$

و در نتیجه داریم:

$$w_C(t) - w_C(t_0) = \frac{1}{2} C \{ [v(t)]^2 - [v(t_0)]^2 \} \quad (12)$$

که در رابطه فوق ولتاژ و انرژی ذخیره شده در لحظه t_0 به ترتیب عبارتند از $v(t_0)$ و $w_C(t_0)$ اگر مبنای انرژی صفر را در لحظه t_0 بگیریم ایجاب می‌کند که ولتاژ خازن هم در این لحظه صفر باشد، آنگاه داریم: (۱۳) $w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2$

بیایید یک مثال عددی ساده را بررسی کنیم. به طوریکه در شکل ۹-۴ رسم شده است فرض

می‌کنیم که یک منبع ولتاژ سینوسی به طور موازی با یک مقاومت $1\text{ M}\Omega$ و خازن $20\text{ }\mu\text{F}$ قرار گرفته است.



شکل ۹ - ۴: یک منبع ولتاژ سینوسی به یک شبکه موازی RC اعمال شده است.

مقاومت موازی را می‌توان به صورت مقاومت عایق و یادی الکتریک بین صفحات یک خازن واقعی در نظر گرفت. جریان مقاومت عبارت است از: $i_R = \frac{v}{R} = 10^{-4} \sin 2\pi t$ و جریان خازن چنین است:

$$i_C = C \, dv/dt = 20 \times 10^{-6} \, d/dt(100 \sin 2\pi t) = 4\pi \times 10^{-3} \cos 2\pi t$$

سپس انرژی ذخیره شده در خازن را به دست می‌آوریم:

$$W_C = \frac{1}{2} C V^2 = 0,1 \sin^2 2\pi t$$

ملاحظه می‌کنیم که انرژی از مقدار صفر در لحظه $t = 0$ به مقدار ماکزیمم $0,1\text{ J}$ در $t = \frac{1}{4}\text{ s}$ افزایش می‌یابد و سپس در $\frac{1}{2}\text{ s}$ بعدی به مقدار صفر تنزل می‌کند. در طی این فاصله زمانی $\frac{1}{4}\text{ s}$ انرژی تلف شده در مقاومت عبارت است از:

$$W_R = \int_0^{1/4} P_R \, dt = \int_0^{1/4} 10^{-2} \sin^2 2\pi t \, dt = 2,5\text{ mJ}$$

بنابراین ۲,۵ درصد ماکزیمم انرژی ذخیره شده در فرآیند ذخیره‌سازی و بازیابی انرژی در خازن ایده آل، تلف می‌شود. در خازنهای «کم اتلاف» مقادیر خیلی کوچکتر هم قابل دسترس می‌باشند اما این درصدهای کوچکتر معمولاً مربوط به خازنهای کوچک می‌باشند. بعضی از مشخصات مهم خازنها به شرح زیر است:

- ۱ - اگر ولتاژ دو سر خازن متغیر با زمان نباشد، جریان آن صفر می‌باشد. بنابراین یک خازن برای dc مدار باز می‌باشد.
- ۲ - انرژی محدودی می‌تواند در خازن ذخیره شود حتی اگر جریان خازن صفر باشد، مانند وقتی که ولتاژ دو سر آن ثابت است.

۳ - تغییر ولتاژ دو سر خازن در زمان صفر به مقدار محدود، غیرممکن می باشد زیرا در این صورت نیاز به جریان بی نهایت در خازن داریم. بعدها مفید خواهد بود که تصور کنیم چنین جریانی بتواند ایجاد شده و به یک خازن اعمال شود اما فعلاً از چنین تابع تحریک و پاسخی اجتناب می کنیم. یک خازن در برابر تغییر ناگهانی ولتاژ دو سرش مقاومت می کند درست شبیه فتری که در برابر تغییر جابجایی ناگهانی اش مقاومت می کند.

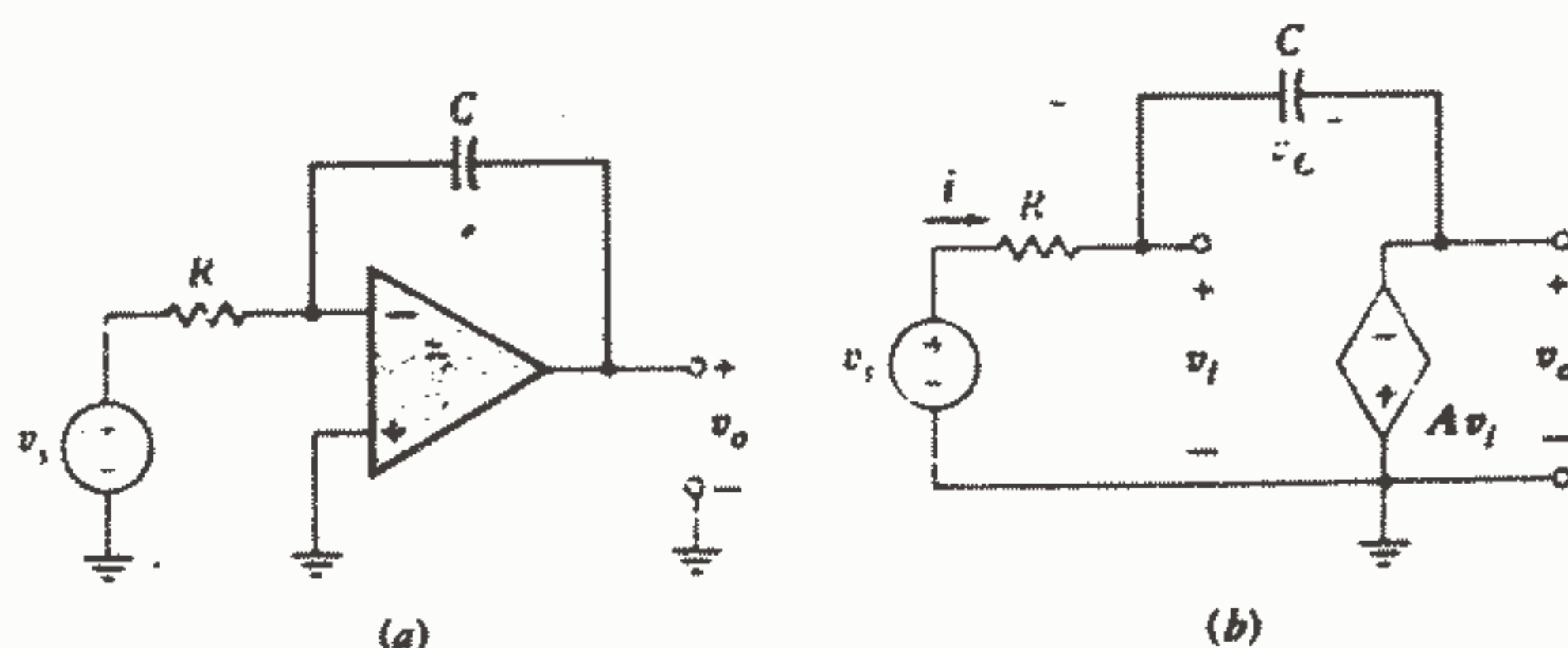
۴ - خازن هرگز انرژی را تلف نمی کند بلکه فقط آن را ذخیره می کند. اگر چه این مطلب فقط برای مدل ریاضی صادق است و برای یک خازن عملی صحیح نمی باشد.

جالب است که بحثمان درباره تناظر را با جایگزین نمودن کلمات بخصوصی، در چهار بند مربوط به مشخصات خازن، با متناظر آنها و مطالعه این چهاربند، کمی جلو بیندازیم. اگر خازن و سلف، ظرفیت و ضریب خودالقایی، ولتاژ و جریان، دو سر با از میان، مدار باز با اتصال کوتاه، فتر با جرم و جابجایی و سرعت با هم عوض شوند (در هر جهت) چهار بیان قبلی مربوط به سلف بدست می آید. معرفی خازن ایده آل را با در نظر گرفتن اینکه چگونه می توان آن را همراه با یک op-amp ایده آل بکار برد، به پایان می بریم. تا کنون ما فقط op-amp را به عنوان یک ولتاژ فالوور یعنی وسیله ای که دارای مقاومت خروجی خیلی کم و ولتاژ خروجی که مجازاً مساوی با ولتاژ ورودی است، مورد بحث قرار داده ایم. ما اکنون نشان خواهیم داد که یک خازن ایده آل و یک مقاومت ایده آل را می توان با یک op-amp ترکیب نمود و وسیله ای ساخت که ولتاژ خروجی آن متناسب با انتگرال زمانی ورودی باشد.

برای ساختن این انتگراتور، ورودی غیرمعکوس کننده op-amp را که دارای مقاومت ورودی بی نهایت و مقاومت خروجی صفر است زمین می کنیم و یک خازن ایده آل را به عنوان فیدبک از خروجی به ورودی معکوس کننده وصل می کنیم و یک منبع سیگنال v_i را از طریق یک مقاومت ایده آل به ورودی معکوس کننده وصل می کنیم. این امر در شکل ۱۰a $i = 10$ نشان داده شده است که در آن $R_i = \infty$ ، $R_o = 0$ می باشد و مدار معادل هم در شکل ۱۰b آمده است. رابطه ولتاژ خروجی با ولتاژ ورودی به صورت $v_o = -A v_i$ می باشد یعنی: (۱۴) $v_i = -v_o/A$ حال بیابید v_o را با فرض اینکه A بی نهایت باشد به v_i مربوط کنیم. از معادله (۱۴) نتیجه می شود $v_i = 0$ و از شکل ۱۰b-۴ ملاحظه می کنیم که: $i = v_i/R$ همچنین با $v_i = 0$ ، ولتاژ خازن v_c برابر است با $(-v_o)$ و داریم:

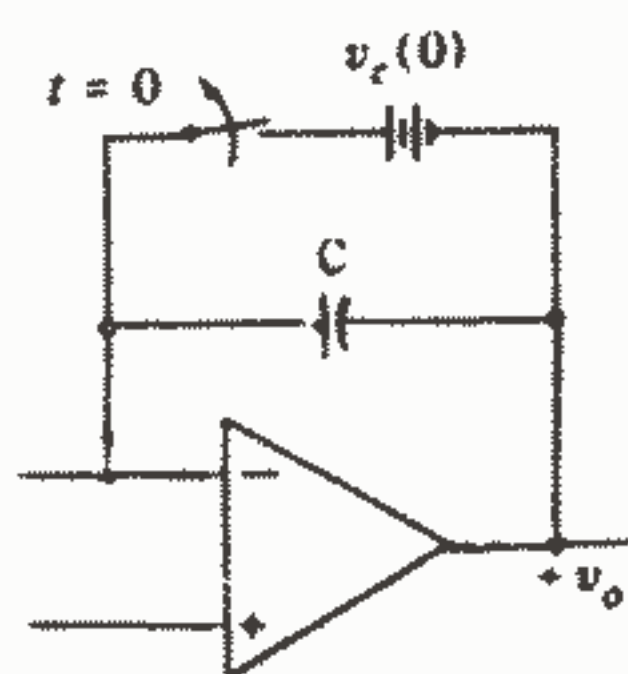
$$v_c = -v_o = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt + v_c(0) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{v_o}{R} \, dt + v_c(0) \rightarrow v_o = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_o \, dt - v_c(0) \quad (15)$$

بنابراین ما یک مقاومت، خازن و یک op-amp را ترکیب کردیم و یک انتگراتور ساختیم.



شکل ۴ - ۱۰: (a) یک op - amp به صورت انتگراتور بسته شده است. (b) مدار معادل آن با فرض $R_i = \infty$ و $R_o = 0$.

توجه داشته باشید که جمله اول خروجی عبارت است از $1/RC$ برابر قرنیة انتگرال ورودی از $t = 0$ تا t و جمله دوم مقدار اولیه v_c می باشد. مقدار RC را می توان طوری انتخاب کرد که برابر یک باشد مثلاً با انتخاب $R = 1M\Omega$, $C = 1\mu F$ و یا انتخابهای دیگری را می توان در نظر گرفت به طوریکه ولتاژ خروجی را افزایش یا کاهش داد. وقتیکه از انتگراتور برای شبیه سازی سیستمهای مهندسی استفاده می شود، اغلب تغییر علامت مفید می باشد. البته علامت خروجی را می توان به وسیله تقویت کننده معکوس کننده هم که مدار آن در فصل ۷ آمده است، تغییر داد. ولتاژ اولیه $v_c(0)$ در معادله (۱۵) را می توان با اضافه کردن یک باتری و یک سوئیچ به مدار انتگراتور اضافه نمود، که این مدار در شکل ۴ - ۱۱ نشان داده شده است. در مدارهای خاص، هم سوئیچ و هم ولتاژ اولیه معمولاً الکترونیکی می باشند از قبیل ترانزیستور و یا op-amp های دیگر.



شکل ۴ - ۱۱: اضافه کردن یک سوئیچ و یک منبع ولتاژ ایده آل این امکان را می دهد که مقدار $v_c(0)$ را در $-v_c(0)$ قرار دهیم.

اگر فرض نکنیم که A بی نهایت باشد، آنگاه می توانیم یک معادله KVL در محیط مدار شکل ۱۰-۴ بنویسیم:

$$-v_s + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + v_c(0) + v_o = 0$$

برای حذف i در نظر بگیرید که $i = v_s - v_i / R$ و برای حذف v_i از معادله (۱۴) استفاده کنید، حاصل عبارت خواهد بود از: (۱۶) $(1 + 1/A)v_o = -1/RC \int_0^t (v_s + v_o/A) dt - v_c(0)$ اگر $A \rightarrow \infty$ آنگاه معادله (۱۶) برابر با معادله (۱۵) خواهد شد.

قبل از اینکه از مدار انتگراتور بگذریم، یک سؤال زود هنگام را از خواننده کنجکاو می پرسیم: «آیا می توانیم به جای خازن از یک سلف استفاده کنیم و مشتق گیر به دست آوریم؟» در واقع می توانیم اما طراحان مدار معمولاً از به کار بردن سلفها حتی الامکان اجتناب می کنند زیرا دارای اندازه، وزن و قیمت زیادی هستند و نیز مقاومت و ظرفیتی هم به همراه دارند.

در عوض می توان جای مقاومت و خازن را در شکل ۱۰-۴ عوض نمود و مشتق گیر به دست آورد. تحلیل این مدار موضوع مسئله ۱۰ می باشد.

تمرین:

۴ - مقدار C را در مدار شکل ۷-۴ برابر $5\mu F$ بگیرید و $i(2\%)$ را در حالات زیر پیدا کنید: (a) اگر $v = 25e^{400t} \sin(20\pi t + 0.1\pi) V$ (b) انرژی ذخیره شده در C برابر $z = 0.10e^{500t}$ (C) مقدار $v(2\%)$ را اگر $i = 2t/(t^2 + 10^4) \mu A$ باشد، $v(0) = 12V$ پیدا کنید.

جواب: $44.27V, -15.16mA, -22.5\mu A$

۵ - در مدار شکل ۱۰-۴ فرض کنید که v_s یک رشته متناوب از پالسهای یک ولتی باشد که به طور لحظه ای در لحظات $t = 0.1, 2, \dots S$ از مقدار ۰ به ۱ صعود می کند و به طور لحظه ای در لحظات $t = 0.1, 1.1, 2.1, \dots S$ به صفر تنزل می کند و $C = 1\mu F, R = 2M\Omega$ و $v_c(0^-) = 0$ در کدام لحظه v_o برابر (a) 17% (b) $-0.127V$ (c) $-5V$ می شود؟

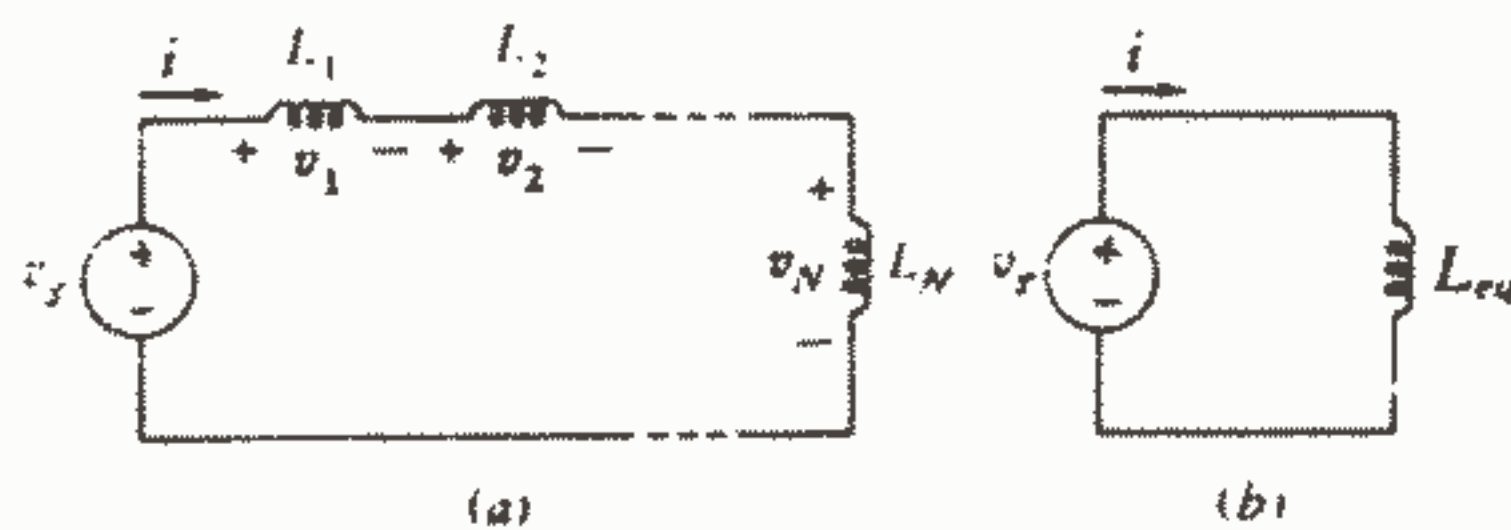
جواب: $2S, 0.4, 1.1, 1.9$

۵-۴ ترکیب نمودن سلفها و خازنها

اکنون که ما سلف و خازن را هم به لیست عناصر مداری غیرفعال خود اضافه کرده ایم لازم است روشن کنیم که آیا روشهایی را که برای تحلیل مدارهای مقاومتی وضع نمودیم هنوز هم صادق است یا خیر. همچنین بهتر است یاد بگیریم که چگونه ترکیبات سری و موازی این عناصر

را با معادله‌های ساده‌تر جایگزین کنیم درست مانند آنچه که برای مقاومتها در فصل ۲ انجام دادیم. ابتدا دو قانون کیرشوف را که هر دو مفید و آموزنده می‌باشند مورد توجه قرار می‌دهیم. اگر چه وقتی که ما این دو قانون را ارائه نمودیم هیچگونه محدودیتی برای نوع عناصر تشکیل دهنده مدار قرار ندادیم بنابراین هر دو قانون صادق می‌باشند.

حال روشهایی را که برای کاهش ترکیبات مختلف مقاومتها به یک مقاومت معادل به دست آورده‌ایم به حالات مشابه سلفها و خازن تعمیم می‌دهیم. ابتدا یک منبع ولتاژ ایده آل را که به ترکیب سری N سلف مطابق شکل ۴-۱۲a اعمال شده است، در نظر می‌گیریم. یک سلف معادل منفرد با ضریب خودالقایی L_{eq} مطلوب می‌باشد که بتوان جایگزین ترکیب سری سلفها نمود به طوریکه جریان منبع $i(t)$ تغییری نکند. مدار معادل در شکل ۴-۱۲b رسم شده است.



شکل ۱۲ - ۴: (a) مداری که شامل N سلف سری است. (b)

مدار معادل مطلوب که در آن $L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$

برای مدار اصلی داریم:

$$\begin{aligned} v_s &= v_1 + v_2 + \dots + v_N = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + \dots + L_N) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

و یا به طور خلاصه تر می‌توان نوشت:

$$v_s = \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N L_n \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} \sum_{n=1}^N L_n$$

$$v_s = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

اما برای مدارهای بالا داریم:

بنابراین اندوکتانس معادل عبارت است از:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N \quad \text{یا} \quad L_{eq} = \sum_{n=1}^N L_n$$

سلفی که معادل چند سلف سری باشد دارای اندوکتانسی برابر با مجموع اندوکتانسهای سلفهای سری می باشد. این دقیقاً همان نتیجه ای است که برای مقاومتهای سری به دست آوردیم. ترکیب موازی سلفها را با نوشتن یک معادله گره برای مدار اصلی شکل ۱۳a-۴ به دست می آوریم:

$$i_s = \sum_{n=1}^N i_n = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{L_n} \int_{t_0}^t v dt + i_n(t_0) \right] = \left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \right] \int_{t_0}^t v dt + \sum_{n=1}^N i_n(t_0)$$

سپس این معادله را با معادله مدار معادل شکل ۱۳b-۴ مقایسه می کنیم:

$$i_s = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v dt + i_s(t_0)$$

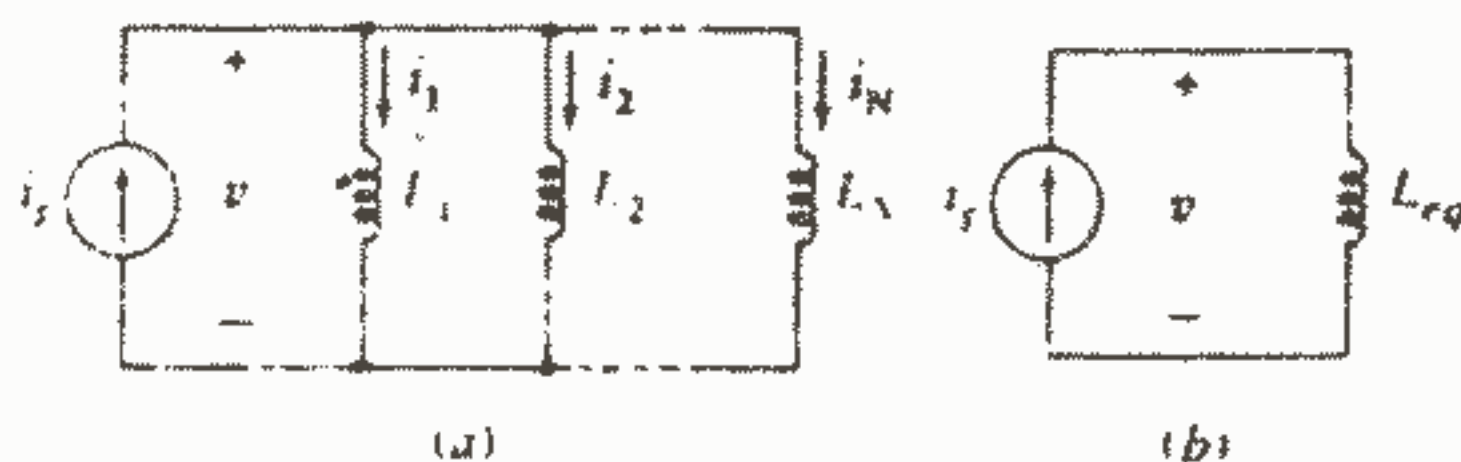
از آنجایی که قانون جریان کیرشوف ایجاب می کند که $i_s(t_0)$ مساوی با مجموع جریانهای شاخه در t_0 باشد، پس دو انتگرال در دو معادله فوق باید برابر باشند، بنابراین:

$$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}}$$

در حالت خاص دو سلف موازی داریم:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

و توجه داریم که سلفهای موازی دقیقاً مانند مقاومتهای موازی ترکیب می شوند.

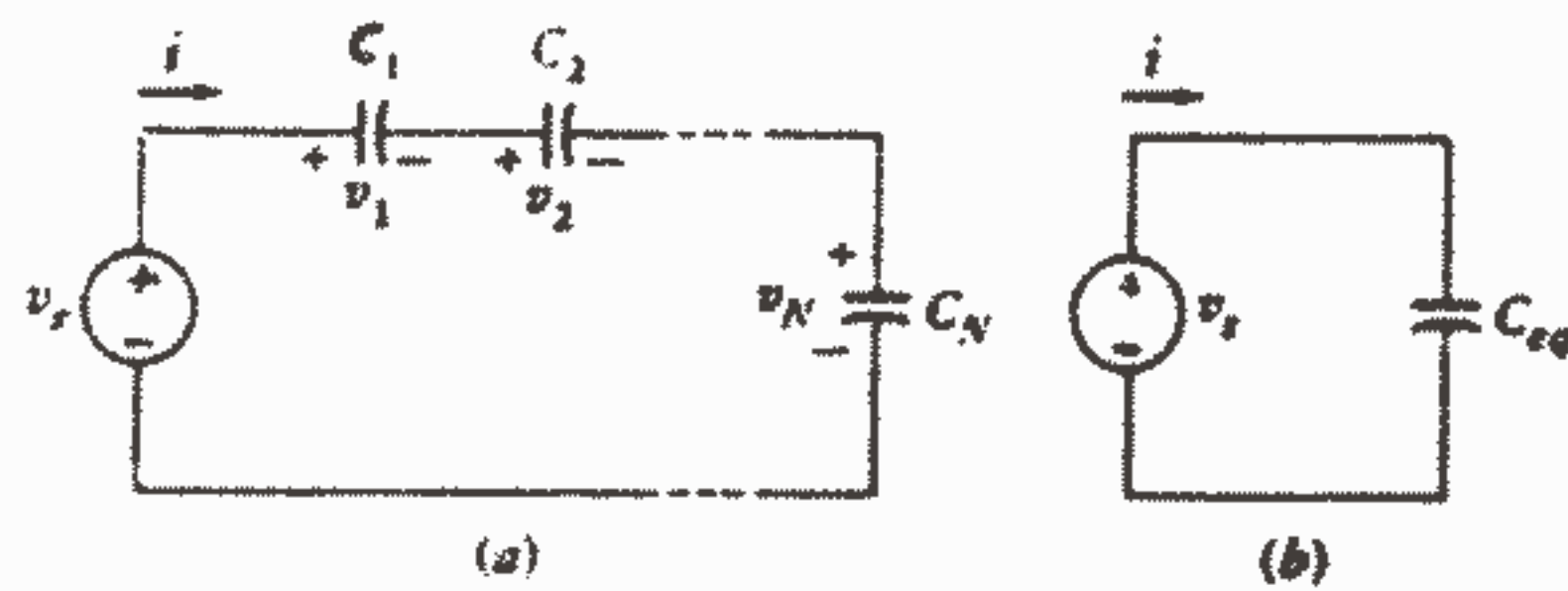


شکل ۱۳ - ۴: (a) ترکیب موازی N سلف. (b) مدار معادل

که در آن: $L_{eq} = 1 / [(1/L_1) + (1/L_2) + \dots + (1/L_N)]$

برای به دست آوردن خازنی که معادل با N خازن سری باشد، از مدار شکل ۱۴a-۴ و معادل آن در شکل ۱۴b-۴ استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$v_s = \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{C_n} \int_{t_0}^t i dt + v_n(t_0) \right] = \left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \right] \int_{t_0}^t i dt + \sum_{n=1}^N v_n(t_0)$$



شکل ۱۴ - ۴: (a) مداری شامل N خازن سری (b) خازن معادل مطلوب.

$$v_s = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i \, dt + v_s(t_0) \quad \text{و:}$$

البته قانون ولتاژ کیرشوف الزام می‌دارد که $v_s(t_0)$ برابر با مجموع ولتاژ خازنها در لحظه t_0 باشد، بنابراین:

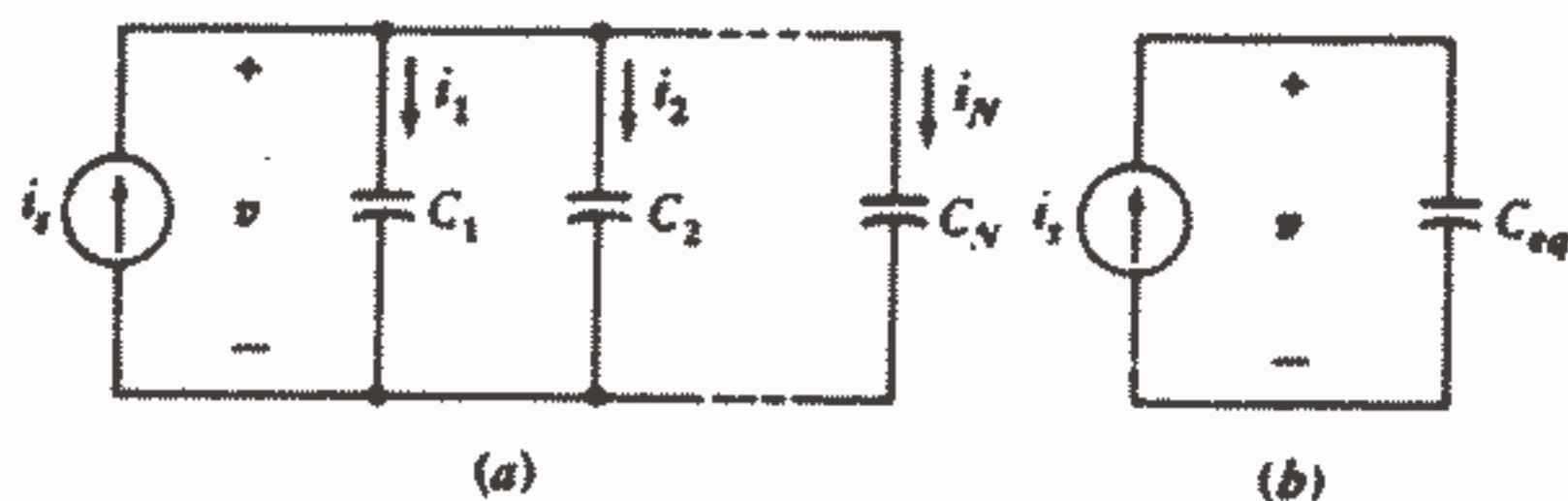
$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$$

وهمانگونه که می‌بینیم خازنهای سری مانند هدایت‌های سری و یا مقاومتهای موازی ترکیب می‌شوند.

و بالاخره مدارهای شکل ۱۵ - ۴ ما را قادر می‌سازند که مقدار خازن معادل N خازن موازی را به دست آوریم:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

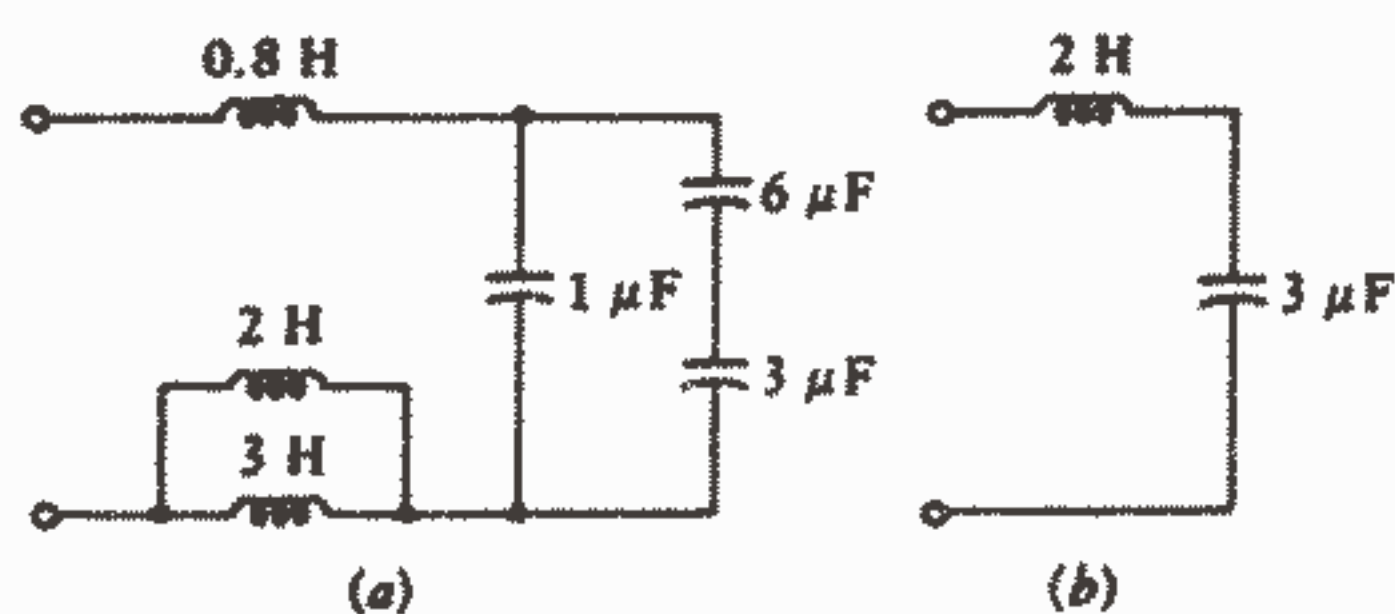
و جای شگفتی نیست که ملاحظه می‌کنیم خازنهای موازی درست شبیه مقاومتهای سری ترکیب می‌شوند یعنی به طور ساده با جمع کردن ظرفیتهای منفرد.



شکل ۱۵ - ۴: (a) ترکیب موازی N خازن (b) مدار معادل که در آن داریم:

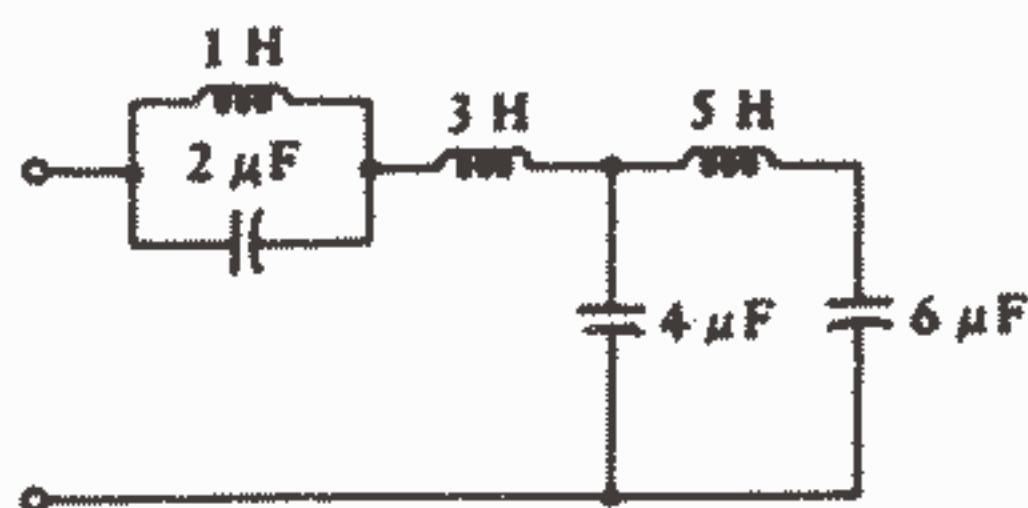
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

به عنوان مثالی که در آن به وسیله ترکیب عناصر مشابه بتوان ساده سازی نمود، شبکه شکل ۱۶a-۴ را در نظر بگیرید. ابتدا خازنهای $3\mu F$ ، $6\mu F$ را به صورت یک خازن معادل $2\mu F$ ترکیب می کنیم و سپس این خازن را با خازن $1\mu F$ که موازی است ترکیب می کنیم تا خازن معادل $3\mu F$ به دست آید. به علاوه، سلفهای $2H$ ، $3H$ را با معادل $1.2H$ جایگزین می کنیم و سپس آن را به سلف $0.8H$ می افزائیم تا اندوکتانس معادل $2H$ به دست آید. مدار معادل ساده تر (و احتمالاً ارزانتر) در شکل ۱۶b-۴ نشان داده شده است.



شکل ۱۶ - ۴: (a) یک شبکه LC. (b) یک مدار معادل ساده.

شبکه شکل ۱۷-۴ شامل سه سلف و سه خازن می باشد اما هیچ ترکیب سری یا موازی سلف یا خازن در آن وجود ندارد و فعلاً این مدار را نمی توانیم ساده کنیم.



شکل ۱۷ - ۴: یک شبکه LC که در آن هیچ ترکیب سری یا موازی سلف و خازن نمی توان ایجاد نمود.

به عنوان قدم بعدی بیايید به تحلیل گره و حلقه و چشمه توجه کنیم. چون ما قبلاً دیدیم که می توانیم با اطمینان قوانین کیرشوف را اعمال کنیم اینک فقط کمی مشکل درباره نوشتن

معادلات کافی و مستقل خواهیم داشت زیرا آنها معادلات انتگرال دیفرانسیلی خطی با ضرایب ثابت خواهند بود. ما اکنون برای کسب آشنایی با نحوه کاربرد قوانین کیرشوف در مدارهای RLC این معادلات را خواهیم نوشت و بحث درباره حل حالت‌های ساده آن را در فصول بعدی ارائه خواهیم کرد.

بیایید سعی کنیم که معادلات گره را برای مدار شکل ۱۸-۴ بنویسیم. ولتاژهای گرهی در شکل مشخص شده‌اند و ما جریانهای خارج شونده از گره مرکزی را جمع می‌کنیم.

$$\frac{1}{L} \int_{t_0}^t (v_1 - v_2) dt + i_L(t_0) + \frac{v_1 - v_2}{R} + C_2 \frac{dv_1}{dt} = 0$$

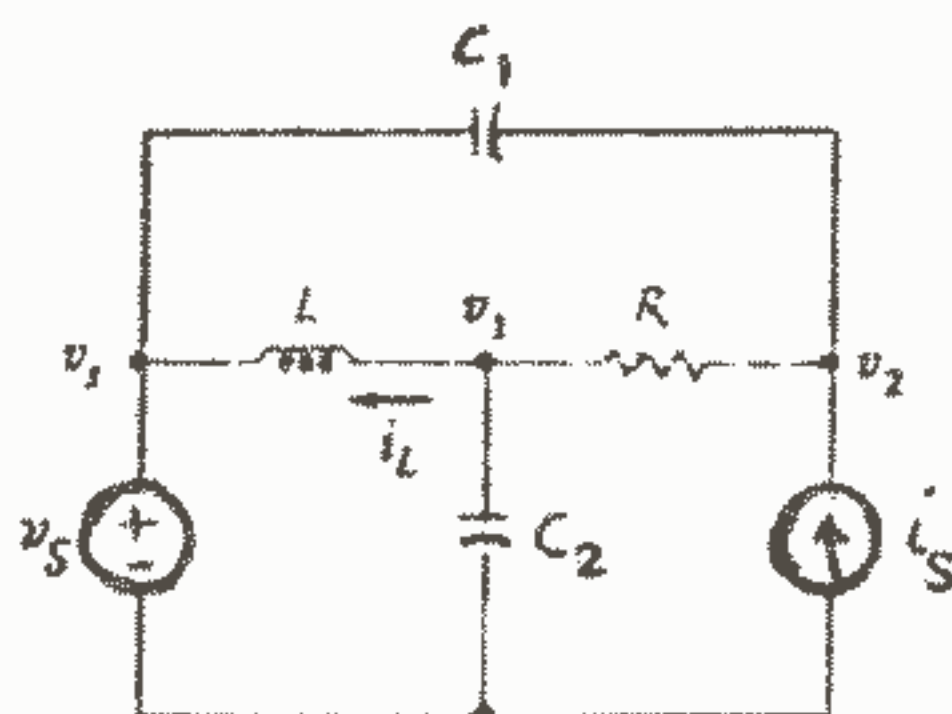
در معادله فوق $i_L(t_0)$ مقدار جریان سلف در لحظه شروع انتگرال‌گیری و یا مقدار اولیه می‌باشد. در گره سمت راست داریم:

$$C_1 \frac{d(v_2 - v_s)}{dt} + \frac{v_2 - v_1}{R} - i_s = 0$$

اگر دو معادله فوق را بازنویسی کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{R} + C_2 \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_1 dt - \frac{v_2}{R} &= \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_s dt - i_L(t_0) \\ -\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + C_1 \frac{dv_2}{dt} &= C_1 \frac{dv_s}{dt} + i_s \end{aligned}$$

اینها همان معادلات انتگرال دیفرانسیلی هستند که وعده آنها را داده بودیم. در این معادلات چند نکته جالب را می‌توانیم ملاحظه کنیم. اول اینکه ولتاژ منبع v_s بصورت انتگرال و مشتق در معادلات ظاهر می‌شود، اما بصورت ساده v_s ظاهر نمی‌شود. و چون هر دو منبع برای



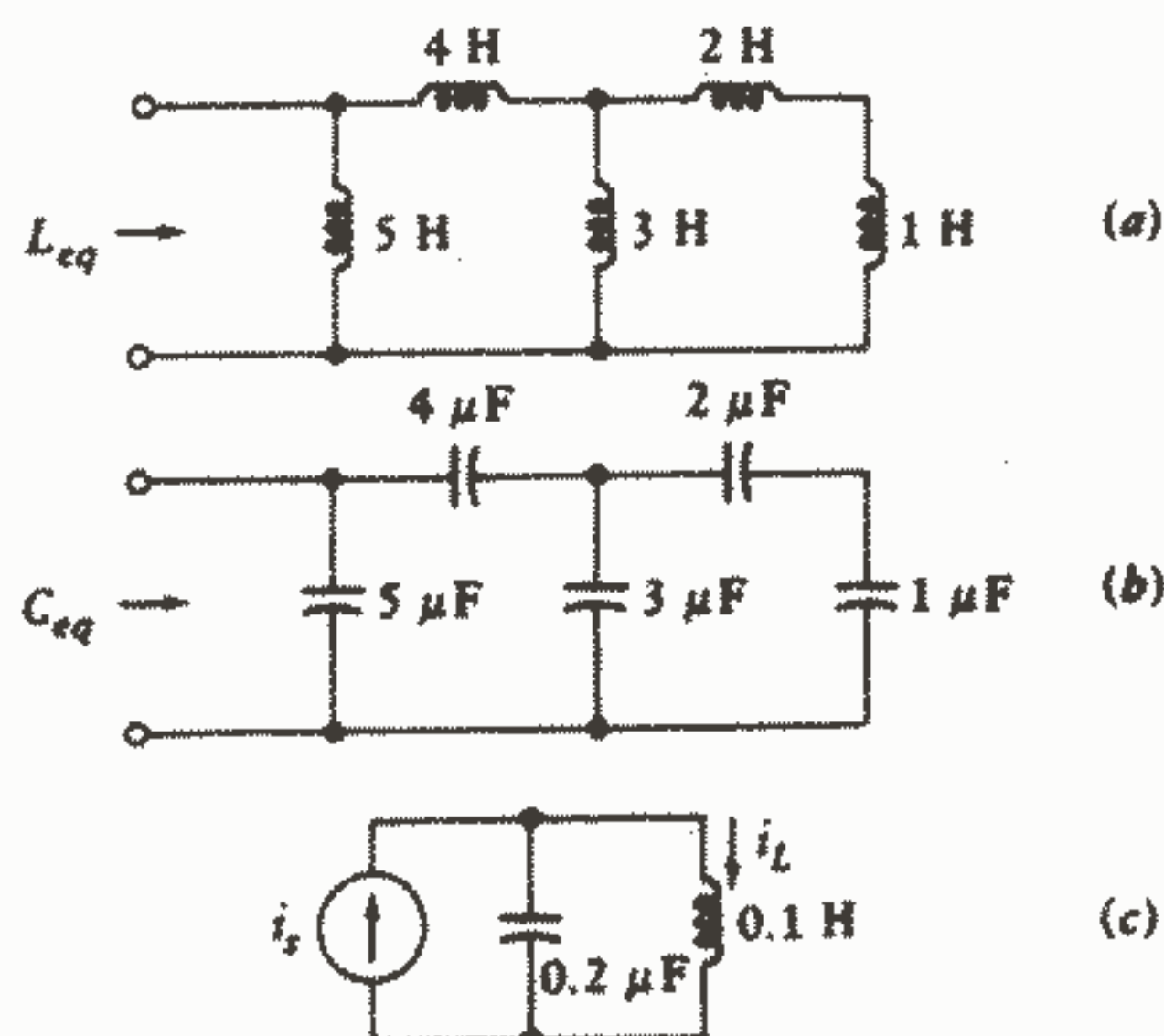
شکل ۱۸-۴: یک مدار RLC چهار گرهی که در آن ولتاژ

گره‌ها مشخص شده‌اند.

تمام زمانها مشخص هستند ما قادر به محاسبه مشتق یا انتگرال می‌باشیم. ثانیاً، مقدار اولیه جریان سلف، $i_L(t_0)$ ، به عنوان یک منبع جریان ثابت در گره مرکزی عمل می‌کند. ما فعلاً این معادلات را حل نخواهیم کرد، اگر چه لازم به ذکر است که وقتی که دو تابع تحریک ولتاژ توابع سینوسی باشند می‌توان یک نسبت ولتاژ به جریان (به نام امپدانس) و یا یک نسبت جریان به ولتاژ (به نام آدmittانس) برای هر یک از سه عنصر غیرفعال تعریف نمود. آنگاه فاکتورهایی که بر روی دو ولتاژ گرهی در معادلات فوق عمل می‌کنند تبدیل به فاکتورهای ضرب ساده می‌شوند و معادلات تبدیل به معادلات جبری خطی می‌شوند که می‌توان آنها را به وسیله دترمینان یا حذف متغیرها، مانند قبل، حل نمود.

تمرین

- ۶ - ۴ (a) L_{eq} را در شکل ۱۹a- پیدا کنید. (b) C_{eq} را در شکل ۱۹b- پیدا کنید. (c) i_L را در شکل ۱۹c- پیدا کنید اگر $i_L = 0.03 \sin 5000t$ A باشد. جواب: 2.62 H, $6.91 \mu F$, 15%



شکل ۱۹ - ۴: به تمرین ۶ - ۴ مراجعه شود.

۶-۴- تناظر

تناظر را قبلاً در رابطه با مدارهای مقاومتی و اخیراً هم در بحث اندوکتانس و ظرفیت ذکر کرده ایم اما توضیحات داده شده مقدماتی بودند، و مانند کسی که سعی می کند تمساحی را اهلی کند، بدون تدارک و نا کافی بودند. اکنون تعریف دقیقی ارائه خواهیم کرد و سپس با استفاده از این تعریف مدارهای متناظر را تشکیل خواهیم داد و در نتیجه از کار تحلیل هم خود مدار و هم متناظر آن اجتناب خواهیم کرد.

ما تناظر را بر حسب معادلات مداری تعریف خواهیم کرد. دو مدار را متناظر گویند هر گاه معادلات چشمه ای که یکی را توصیف می کند از نظر ریاضی دارای همان فرم معادلات گرهی باشد که مدار دیگر را توصیف می کنند. دو مدار را وقتی دقیقاً متناظر می نامند که هر معادله چشمه ای از یک مدار از نظر عددی هم دقیقاً برابر با معادله گرهی متناظر از مدار دیگر باشد البته خود متغیرهای ولتاژ و جریان با هم یکی نخواهند بود. تناظر صرفاً به هر خاصیتی اطلاق می شود که به وسیله مدارهای متناظر بروز داده می شود.

اجازه دهید این تعریف را تفسیر کنیم و از آن برای ایجاد یک مدار متناظر دقیق به وسیله نوشتن دو معادله چشمه ای مدار شکل ۲۰-۴ استفاده کنیم. دو جریان چشمه ای i_1 ، i_2 مشخص شده اند و معادلات چشمه ای عبارتند از:

$$3i_1 + 4 \frac{di_1}{dt} - 4 \frac{di_2}{dt} = 2 \cos 6t \quad (17)$$

$$-4 \frac{di_1}{dt} + 4 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{8} \int_0^t i_2 dt + 5i_2 = -10 \quad (18)$$

باید توجه داشت ولتاژ خازن v_c در لحظه $t = 0$ برابر ۱۰ فرض شده است.

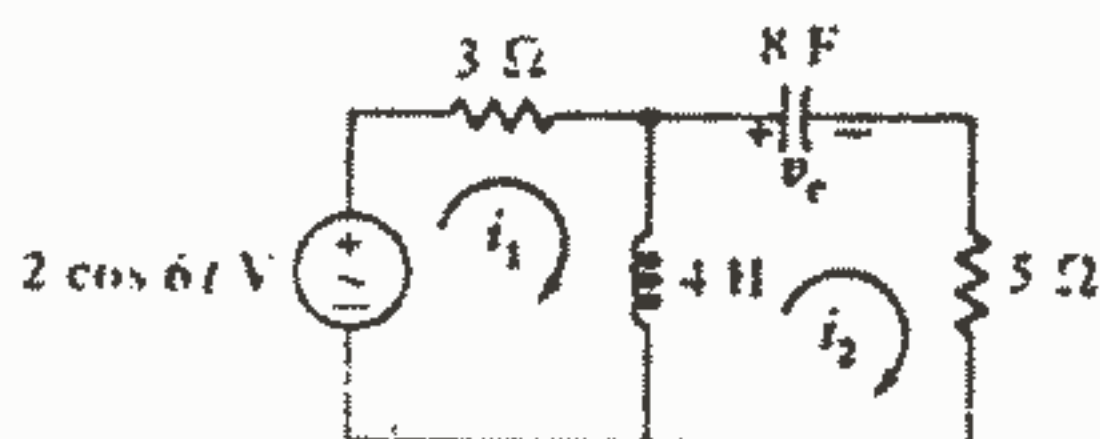
اکنون می توانیم دو معادله ای را که متناظر دقیق مدار داده شده را توصیف می کنند، تشکیل دهیم. ما انتظار داریم که اینها معادلات گره باشند و بنابراین با جایگزینی جریانهای چشمه ای i_1 ، i_2 در معادلات (۱۷) و (۱۸) به وسیله دو ولتاژ گرهی v_1 ، v_2 شروع می کنیم و به دست می آوریم:

$$3v_1 + 4 \frac{dv_1}{dt} - 4 \frac{dv_2}{dt} = 2 \cos 6t \quad (19)$$

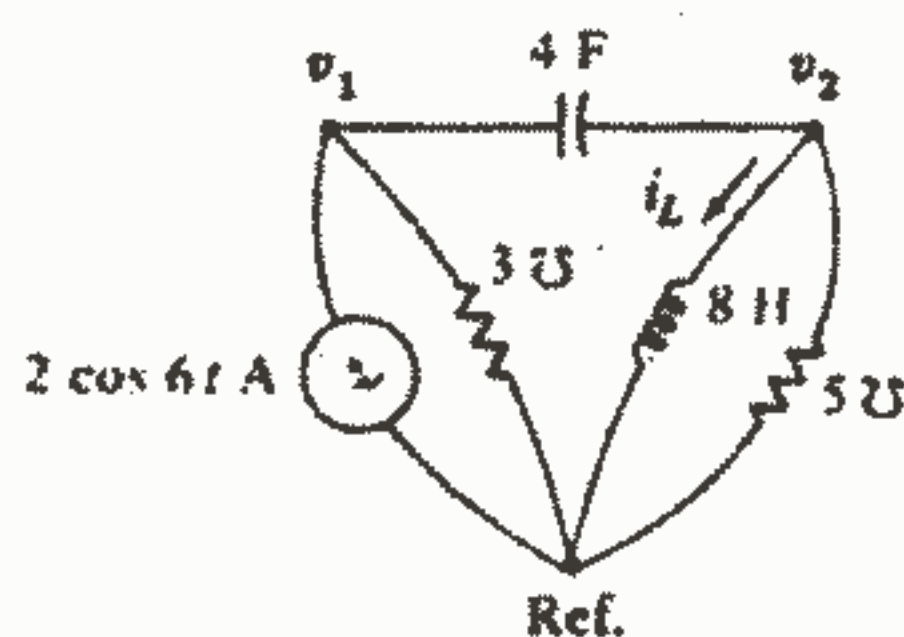
$$-4 \frac{dv_1}{dt} + 4 \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{8} \int_0^t v_2 dt + 5v_2 = -10 \quad (20)$$

و اکنون به جستجوی مداری می پردازیم که بیانگر این دو معادله گرهی باشد.

بیا باید ابتدا خطی رسم کنیم که نشان دهنده گره مبنا باشد و سپس دو گره را که علامت مثبت v_1, v_2 روی آن قرار دارد ایجاد کنیم. معادله (۱۹) نشان می دهد که یک منبع جریان $2 \cos 6t$ بین گره ۱ و گره مبنا به گونه ای وصل شده است که جهت جریان آن وارد گره ۱ می شود. این معادله همچنین نشان می دهد که یک هدایت 3 S بین گره ۱ و گره مبنا وصل می شود. به معادله (۲۰) توجه می کنیم، ابتدا جملات غیر متقابل و یا آنهایی را که در (۱۹) ظاهر نشده اند در نظر می گیریم و آنها به ما می گویند که یک سلف 8 H و یک هدایت 5 S باید به طور موازی بین گره ۲ و گره مبنا وصل شوند. دو جمله مشابه در معادلات (۱۹)، (۲۰) بیانگر یک خازن 4 F می باشد که به طور متقابل بین گره های ۱ و ۲ وصل شده است. این مدار با وصل کردن این خازن بین این دو گره تکمیل می شود. جمله ثابت در سمت راست معادله (۲۰) مقدار جریان سلف در $t = 0$ می باشد یعنی $i_L(0) = 10 \text{ A}$ مدار متناظر در شکل ۲۱-۴ نشان داده شده است و چون دو دسته معادله از نظر عددی یکسان هستند این دو مدار دقیقاً متناظر هستند.



شکل ۲۰-۴: مداری که می توان با اعمال تعریف تناظر مدار متناظر آن را به دست آورد.



شکل ۲۱-۴: متناظر دقیق مدار شکل ۲۰-۴.

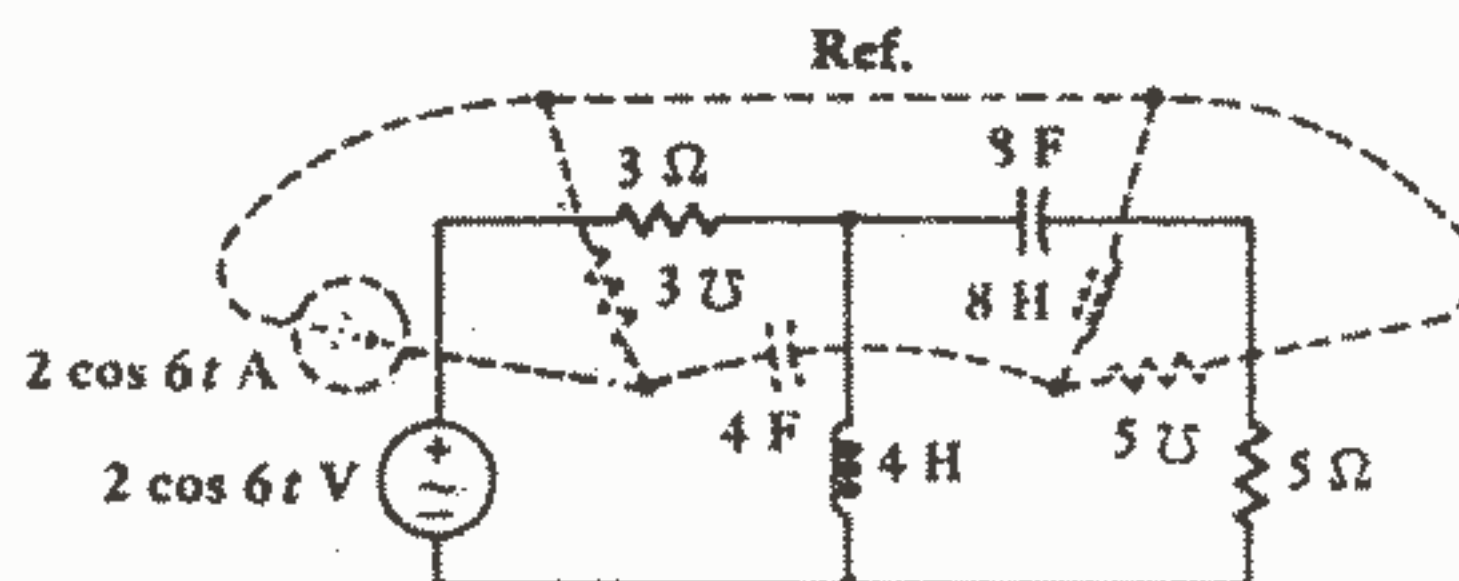
مدارهای متناظر را خیلی راحتتر از روش فوق و بدون نوشتن معادلات هم می توان به دست آورد. برای به دست آوردن متناظر یک مدار داده شده، آن مدار را بر حسب معادلات حلقه در نظر می گیریم. برای هر حلقه یک گره نسبت می دهیم و یک گره مبنا هم در نظر می گیریم. بر

روی دیاگرام مدار یک گره در مرکز هر چشمه قرار می‌دهیم و گره مبنا را به صورت یک خط در نزدیک دیاگرام مدار و یا به صورت محصور کننده آن در نظر می‌گیریم. هر عنصری که به طور مشترک در دو چشمه باشد یک عنصر متقابل می‌باشد و جملات یکسان را در معادله به وجود می‌آورد (به جز علامت). این عنصر را باید با عنصری که در دو معادله گرهی متناظر جمله‌های یکسانی ایجاد کند، جایگزین کنیم. بنابراین، این عنصر متناظر را باید مستقیماً بین دو گرهی که داخل آن چشمه‌هایی هستند که این عنصر در آن چشمه‌ها مشترک است، وصل کنیم. ماهیت عنصر متناظر خود بخود مشخص می‌شود زیرا فرم ریاضی معادلات فقط در صورتی یکسان باقی می‌ماند که ظرفیت با اندوکتانس و مقاومت با هدایت و بالعکس جایگزین شوند. بنابراین سلف H که در چشمه‌های ۱ و ۲ در مدار شکل ۲۰-۴ مشترک می‌باشد به صورت یک خازن F که مستقیماً بین گره‌های ۱ و ۲ در مدار متناظر وصل شده است، ظاهر می‌شود.

عناصری که فقط در یک چشمه ظاهر می‌شوند باید دارای متناظرهایی باشند که بین گره متناظر با آن چشمه و گره مبنا ظاهر می‌شوند. دوباره به شکل ۲۰-۴ مراجعه می‌کنیم، منبع ولتاژ $V \cos \omega t$ فقط در چشمه ۱ ظاهر می‌شود و متناظر آن یک منبع جریان $A \cos \omega t$ می‌باشد که فقط بین گره ۱ و گره مبنا وصل می‌شود و چون منبع ولتاژ در جهت عقربه‌های ساعت است پس منبع جریان باید در جهت رو به گره غیر مبنا باشد. و بالاخره باید فکری هم برای متناظر ولتاژ اولیه دو سر خازن AF در مدار داده شده، کرد. معادلات نشان داده‌اند که متناظر این ولتاژ اولیه در دو سر خازن یک جریان اولیه در سلف مدار متناظر می‌باشد که مقادیر عددی آنها یکسان بوده و علامت صحیح جریان اولیه را می‌توان به سادگی با توجه به ولتاژ اولیه در مدار داده شده و جریان اولیه در مدار متناظر، تعیین نمود. بنابراین اگر v_1 در مدار داده شده به عنوان یک منبع تلقی شود، باید به صورت $v_1 -$ در سمت راست معادله چشمه ظاهر شود و در مدار متناظر اگر i_1 را به عنوان یک منبع تلقی کنیم یک جمله $-i_1$ را در سمت راست معادله گرهی ایجاد خواهد نمود. و چون هر دوی این کمیتها اگر به صورت منبع در نظر گرفته شوند دارای علامت یکسانی می‌باشند بنابراین اگر $v_1(0) = 10V$ آنگاه $i_1(0)$ باید $10A$ باشد.

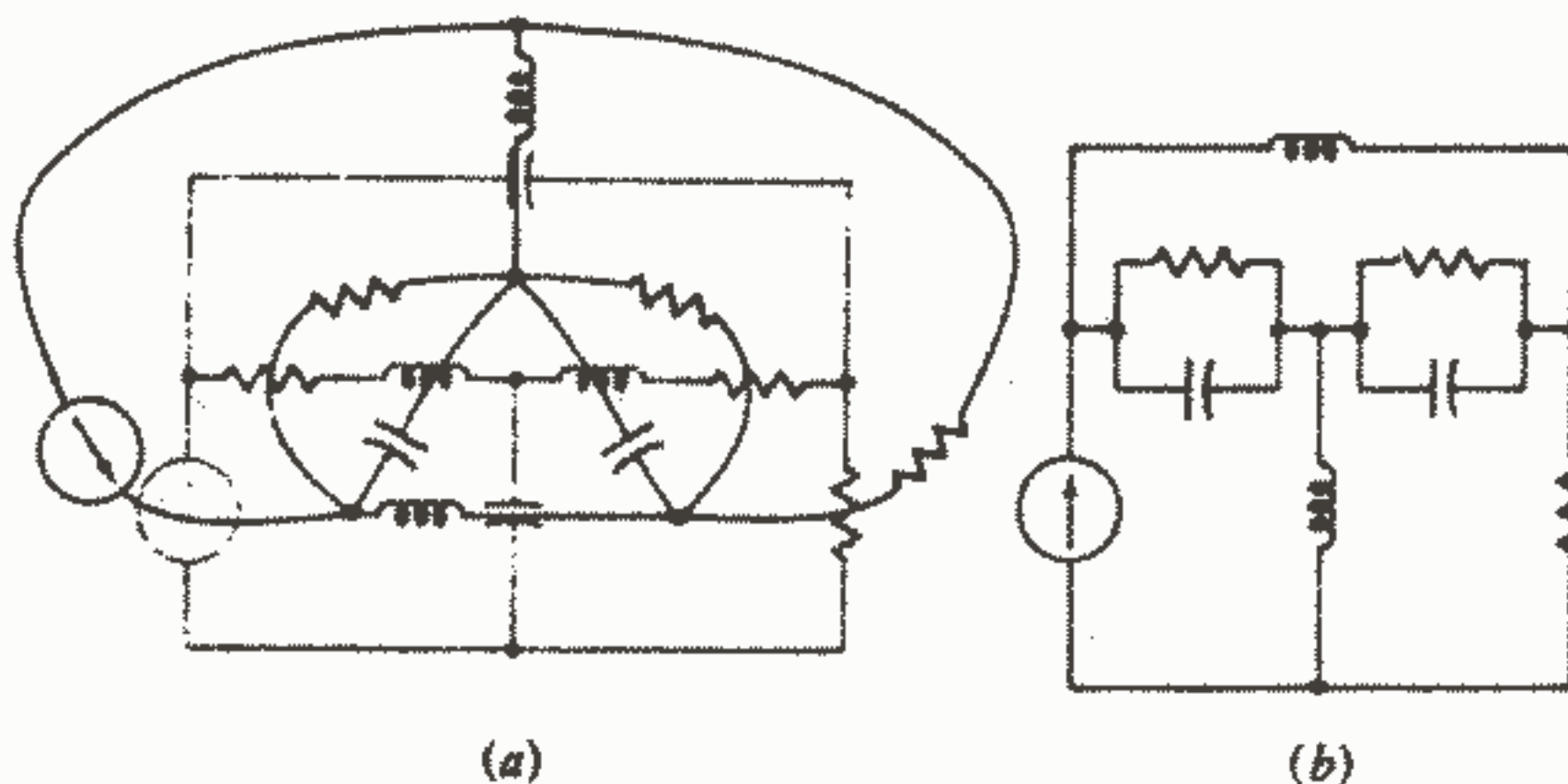
مدار شکل ۲۰-۴ در شکل ۲۲-۴ تکرار شده است و متناظر دقیق آن فقط با ترسیم متناظر هر عنصر بین دو گرهی که در وسط چشمه‌هایی که آن عنصر در آنها مشترک است، به دست آمده است.

یک گره مبنا که مدار داده شده را احاطه کند، می‌تواند مفید باشد بعد از اینکه مدار متناظر به شکل استانداردتری دوباره ترسیم شود به صورت شکل ۲۱-۴ ظاهر می‌شود.



شکل ۲۲ - ۴: متناظر مدار شکل ۲۰ - ۴ مستقیماً از روی دیاگرام مدار به دست آمده است.

مثال دیگری برای ایجاد یک مدار متناظر در شکل‌های b, ۲۳a-۴ نشان داده شده است. از آنجاییکه مقادیر عناصر مشخص نشده است، این دو مدار، متناظر هستند اما دقیقاً متناظر نیستند. مدار اصلی را از مدار متناظر با قرار دادن یک گره در مرکز هر یک از پنج چشمه شکل ۲۳b-۴ و طی مراحلی که قبلاً گفته شد، می‌توان بازیابی نمود.



شکل ۲۳ - ۴: (a) مدار متناظر بر روی مدار اصلی ایجاد شده است. (b) مدار متناظر بطور بهتری رسم شده است.

مفهوم تناظر را می‌توان به زبانی که به وسیله آن تحلیل مدار و عملکرد مدارها را توصیف می‌کنیم، انتقال داد. یک مثال از این مورد را قبلاً در قسمت ۴-۴ مورد بحث قرار دادیم و متناظر چند کلمه در آنجا ارائه شد. بسیاری از این جفتها بدیهی می‌باشند و هر جا که متناظر یک کلمه یا عبارت مورد تقاضا باشد، همیشه می‌توان متناظر مدار را ترسیم و یا در ذهن تجسم نمود و سپس به زبان مشابهی آن را توصیف نمود. مثلاً اگر به ما یک منبع ولتاژ به طور سری با یک خازن داده شده باشد متناظر جمله «منبع ولتاژ باعث جریانی در خازن می‌شود» عبارت است از:

«منبع جریان باعث ولتاژی در دو سر سلف می شود». اگر جمله ما کمی از نظر جمله بندی و ادای کلمات با بی دقتی بیان شده باشد، مانند «جریان در دور تا دور مدار سری جاری می باشد» برای بیان متناظر آن کمی باید مبتکرانه عمل کنیم.^۱

به عنوان تمرینی برای کاربرد زبان تناظر می توان قضیه تونن را مطالعه نمود که متناظر آن می شود قضیه نورتن.

ما درباره عناصر متناظر، زبان تناظر، و مدارهای متناظر صحبت کرده ایم. اما درباره یک شبکه متناظر چه؟ یک مقاومت R را به طور سری با یک سلف L در نظر بگیرید. متناظر این شبکه دو ترمینالی وجود دارد و به سادگی با وصل کردن منبع ایده آلی به این شبکه به دست می آید. سپس مدار متناظر به صورت یک منبع متناظر موازی با یک هدایت G ($G = R$) و یک خازن C ($C = L$) به دست می آید. ما شبکه متناظر را به صورت شبکه دو ترمینالی که به منبع متناظر وصل شده است در نظر می گیریم، بنابراین یک جفت ترمینال وجود دارد که بین آنها G و C به طور موازی وصل شده اند.

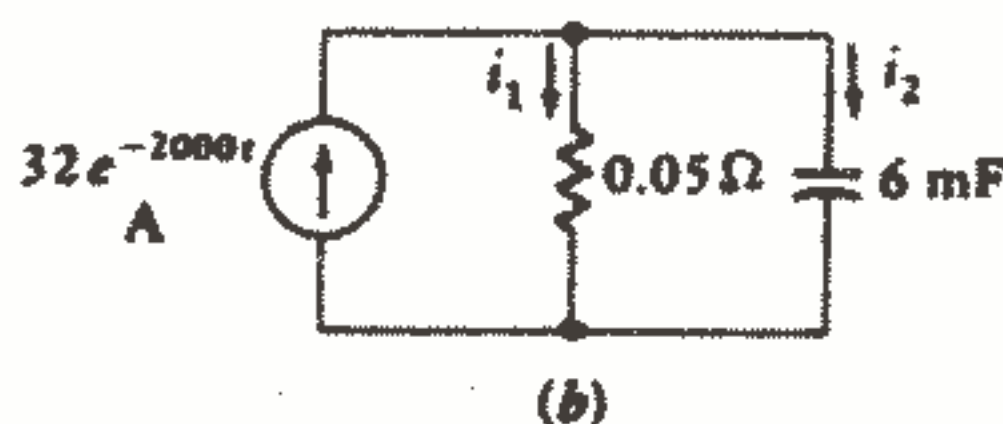
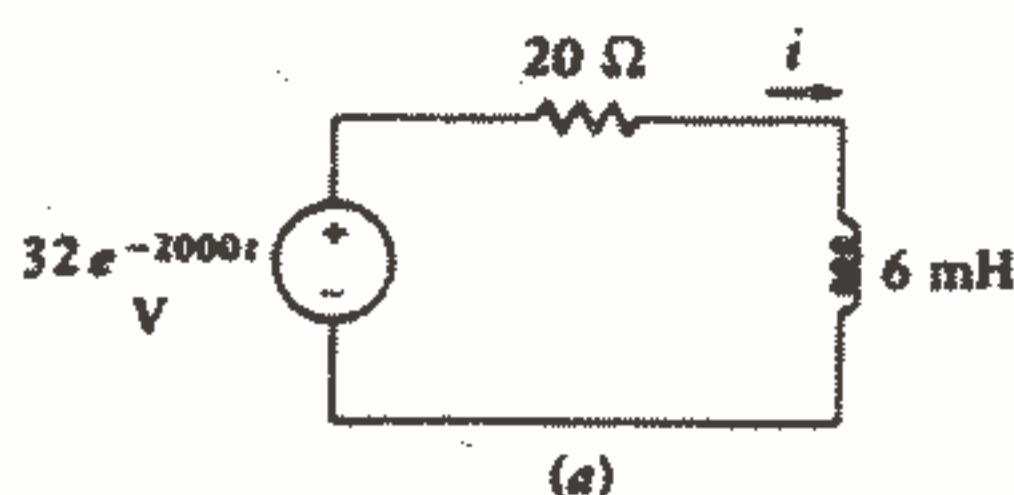
قبل از اینکه از تعریف تناظر بگذریم، باید خاطرنشان کنیم که تناظر بر اساس معادلات چشمه و گره تعریف شده است و چون مدارهای غیرمسطح را نمی توان به وسیله دستگاه معادلات چشمه ای توصیف نمود، بنابراین مداری که مسطح نباشد دارای مدار متناظر نمی باشد.

ما از تناظر عمدتاً برای کاهش کاری که برای تحلیل مدارهای استاندارد ساده باید انجام دهیم، استفاده می کنیم. بعد از اینکه مدار RL سری را تحلیل نمودیم، آنگاه مدار RC موازی نیاز به توجه کمتری دارد البته نه به دلیل اینکه اهمیت آن کمتر است بلکه به خاطر اینکه ما قبلاً تحلیل مدار متناظر را شناخته ایم.

۱ - فردی به اینصورت به ذهنش خطوط کرده است: «ولتاژ در دو سر تمامی مدار موازی می باشد».

تمرین

۷-۴ - معادله تک چشمه مدار شکل ۴-۲۴a را بنویسید و نشان دهید که (با جایگزینی مستقیم) $i = 4e^{-2000t}$ A جواب مسئله می باشد و با توجه به آن به شکل ۴-۲۴b مراجعه کنید و کمیت های مقابل را پیدا کنید: (a) i_1 (b) i_2 .
جواب: $80e^{-2000t}$, $-48e^{-2000t}$.



شکل ۲۴ - ۴: به تمرین ۷ - ۴ مراجعه کنید.

۷-۴ - باز هم خطی بودن و آثار آن حرف

در فصل گذشته آموختیم که اصل جمع اثرها یک پی آمد الزامی مدارهای مقاومتی خطی است. مدارهای مقاومتی خطی هستند زیرا رابطه ولتاژ - جریان آنها خطی است و قوانین کیرشوف هم خطی هستند.

ما اکنون می خواهیم نشان دهیم که فواید خطی بودن شامل حال مدارهای RLC هم می شود. بنابر تعریف قبلی مان از یک مدار خطی، این مدارها هم خطی هستند زیرا روابط ولتاژ - جریان سلف و خازن روابط خطی هستند. برای سلف داریم: $v = L \frac{di}{dt}$ و اگر جریان را در مقدار ثابت K ضرب کنیم ولتاژ هم در عامل K ضرب خواهد شد. به صورت انتگرالی داریم:

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t v dt + i_L(t_0)$$

همانگونه که ملاحظه می‌کنیم اگر هر جمله را در عامل K ضرب کنیم مقدار اولیه جریان هم در فاکتور K ضرب خواهد شد. یعنی فاکتور K نه تنها به جریان و ولتاژ در لحظه t اعمال می‌ود بلکه به مقادیر گذشته آنها هم اثر می‌کند.

بررسی مشابهی برای خازن نشان می‌دهد که آن هم خطی است. بنابراین مداری که متشکل از منابع مستقل، منابع وابسته خطی و مقاومتهای خطی و سلف و خازن باشد یک مدار خطی می‌باشد.

در این مدار خطی باز هم پاسخ متناسب است با تابع تحریک. برای اثبات این مطلب باید ابتدا یک دستگاه کلی از معادلات انتگرال - دیفرانسیلی را مثلاً بر حسب جریانهای حلقه بنویسیم. و سپس جملاتی را که دارای فرم R_i , $L \frac{di}{dt}$, $\frac{1}{C} \int i dt$ هستند را به سمت چپ هر معادله می‌بریم و منابع ولتاژ مستقل را در سمت راست معادلات قرار می‌دهیم. به عنوان یک مثال ساده، یکی از معادلات ممکن است فرم زیر را داشته باشد:

$$R_i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v_c(t_0) = v_s$$

حال اگر هر منبع مستقل در فاکتور K ضرب شود آنگاه طرف راست معادله هم در فاکتور K ضرب می‌شود. حال هر جمله سمت چپ یا یک جمله خطی شامل یک جریان حلقه و یا یک ولتاژ اولیه خازنی می‌باشد. بدیهی است که برای افزایش همه پاسخها (جریانهای حلقه) با فاکتور K ، باید ولتاژ اولیه خازنها را هم با فاکتور K افزایش دهیم. یعنی ما باید ولتاژ اولیه خازن را هم به عنوان یک منبع ولتاژ مستقل تلقی کنیم و آن را هم در فاکتور K ضرب کنیم. به طریق مشابه، جریانهای اولیه سلفی هم باید به عنوان منابع جریان مستقل در نظر گرفته شوند.

بنابراین اصل متناسب بودن بین پاسخ و منبع قابل تعمیم به مدار کلی RLC می‌باشد و در نتیجه اصل جمع اثرها هم به این گونه مدارها قابل اعمال است. باید تأکید نمود که جریان اولیه سلفها و ولتاژ اولیه خازنها را هنگام اعمال اصل جمع اثرها باید به صورت منابع مستقل در نظر گرفت و به نوبت آنها را غیرفعال نمود.

اگر چه قبل از اینکه بتوانیم اصل جمع اثرها را به مدارهای RLC اعمال کنیم ابتدا لازم است که روشهایی برای حل معادلات این مدارها و تئیکه فقط یک منبع مستقل وجود داشته باشد، در نظر گرفته باشیم. اکنون ما باید مجاب شده باشیم که یک مدار خطی دارای پاسخی است که دامنه آن متناسب است با دامنه منبع.

قضایای تونن و نورتن بر اساس خطی بودن مدار اولیه، قابل اعمال بودن قوانین کیرشوف و اصل جمع اثرها می‌باشند. مدار کلی RLC هم با این اصول مطابقت دارد و بنابراین همه مدارهای خطی که شامل هر ترکیبی از منابع ولتاژ و جریان مستقل، منابع ولتاژ و جریان وابسته خطی و مقاومتهای خطی و سلف و خازن باشد را می‌توان با استفاده از این دو قضیه تحلیل نمود. لازم نیست در اینجا این قضایا را تکرار کنیم زیرا آنها را قبلاً به طریقی که قابل اعمال به مدار کلی RLC هم باشد، بیان کرده‌ایم.

مسائل

۱ - فرض کنید که i_L ، v_L در یک سلف 20 mH طوری تعیین شده باشد که مطابق با قرارداد علامت غیرفعال باشد. (a) اگر $i_L = 12e^{-5t} \cos 10t \text{ A}$ آنگاه v_L را در $t = 0.1\text{ S}$ پیدا کنید. (b) اگر $i_L = 8(e^{-6t} - e^{-2t})$ آنگاه v_L و زمانی را که این مقدار ماکزیمم حاصل می‌شود، پیدا کنید.

۲ - جریان یک سلف 2 mH عبارت است از: $i_L = 0$ برای $t < 0$ ، 500 t A برای $0 < t < 10\text{ ms}$ ، 500 t A ، $0 < t < 10\text{ ms}$ ، $10 - 500\text{ t A}$ برای $10 < t < 30\text{ ms}$ ، $-5 \cos^2[50\pi(t - 4\%)] \text{ A}$ برای $30 < t < 40\text{ ms}$ ، -5 A برای $40 < t < 50\text{ ms}$ و $-5 \cos^2[50\pi(t - 4\%)] \text{ A}$ برای $50 < t < 60\text{ ms}$ فاصله زمانی $0 < t < 50\text{ ms}$: (a) i_L را نسبت به t رسم کنید. (b) v_L را نسبت به t با فرض قرارداد علامت غیرفعال رسم کنید.

۳ - در شکل ۲۵-۴، فرض کنید: $v_s(t) = 20\text{ t V}$ برای $0 < t < 3\text{ S}$ ، $v_s = 0$ برای $t > 3$ و $t < 0$. مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) مقدار i در لحظه $t = 4\text{ S}$ (b) انرژی ذخیره شده در سلف در $t = 2\text{ S}$ (c) قدرتی که در لحظه $t = 2\text{ S}$ وارد سلف می‌شود.

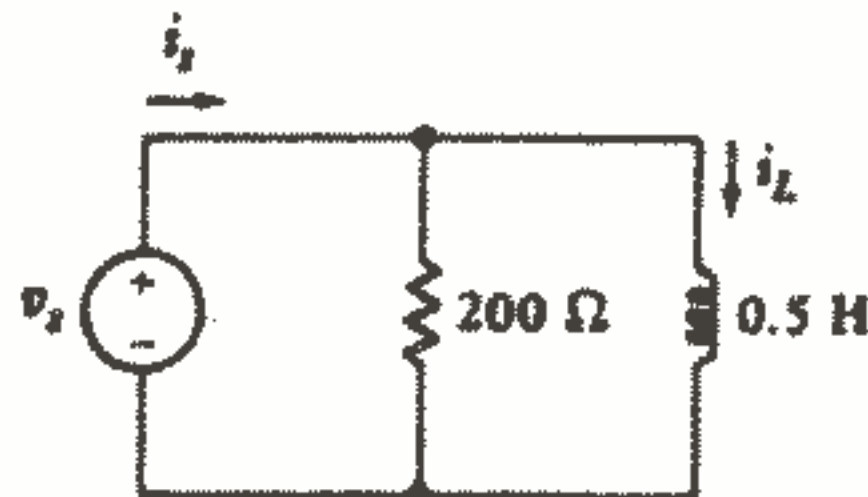


شکل ۲۵ - ۴: به مسئله ۳ مراجعه کنید.

۴ - جریان در یک سلف 0.4 H برای $t < 0$ برابر صفر و برای $t > 0$ برابر $3te^{-t/11}$ می‌باشد. (a) در چه لحظه‌ای ماکزیمم قدرت به سلف داده می‌شود؟ (b) در چه

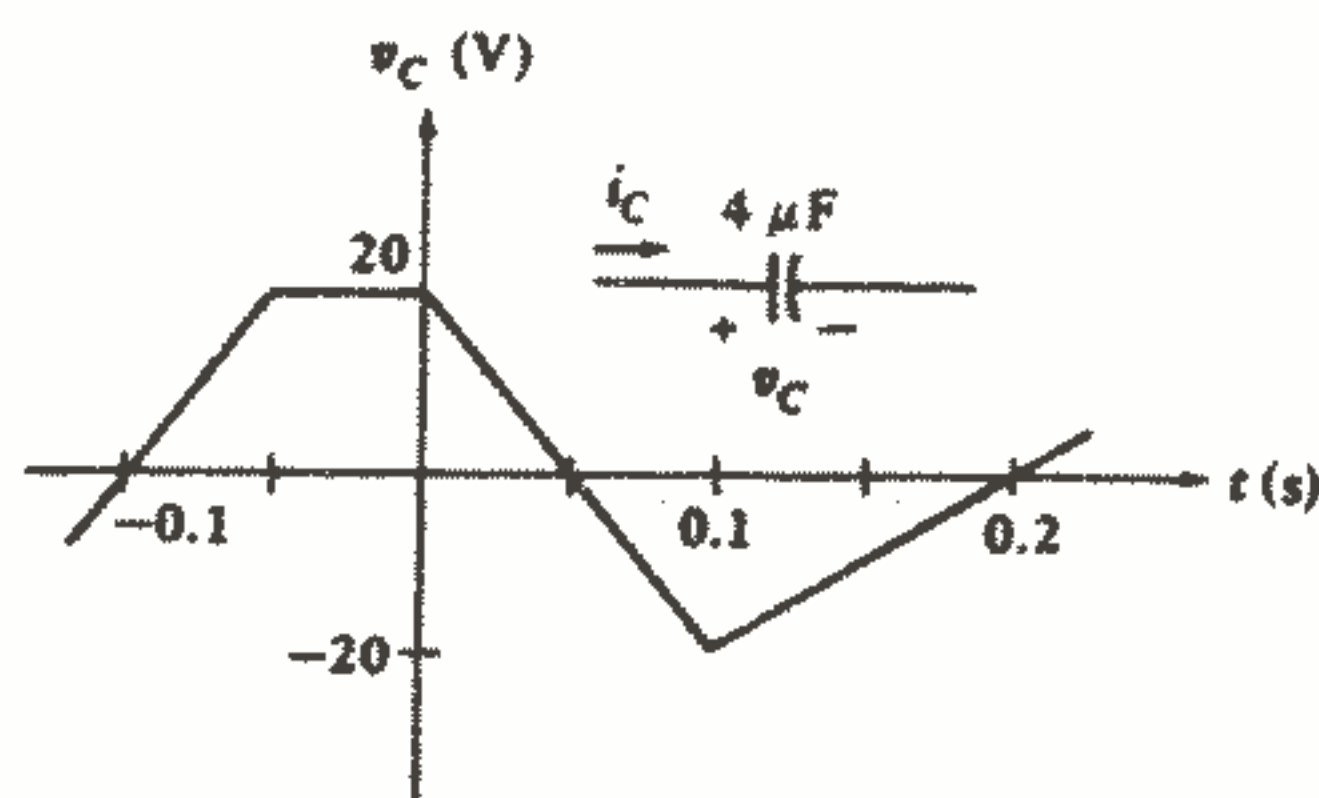
لحظه‌ای انرژی ذخیره شده در سلف ماکزیمم می‌باشد؟

- ۵- در مدار شکل ۴-۲۶ فرض کنید $v_s = 100 \cos 500t \text{ V}$ برای $i_L(0) = -1 \text{ A}$ $t > 0$ باشد. $i_L(t)$ (a) را پیدا کنید. $w_L(t)$ (b) را در $t = 1 \text{ ms}$ پیدا کنید.



شکل ۴-۲۶: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

- ۶- (a) اگر $v_c(t)$ به صورت شکل موج شکل ۴-۲۷ داده شده باشد، $i_c(t)$ را برای $-0.2 < t < 0.1 \text{ s}$ رسم کنید. (b) قدرتی را که در همان فاصله زمانی وارد خازن می‌شود رسم کنید.



شکل ۴-۲۷: به مسئله ۶ مراجعه کنید.

- ۷- جریان یک خازن $0.2 \mu\text{F}$ برابر است با $60 \cos(10^4 t + 36^\circ) \text{ mA}$ برای تمام زمانها و ولتاژ متوسط دو سر خازن صفر می‌باشد. (a) ماکزیمم انرژی ذخیره شده در خازن چقدر است؟ (b) اولین مقدار غیر منفی t که به ازای آن انرژی ذخیره شده ماکزیمم می‌شود چقدر است؟

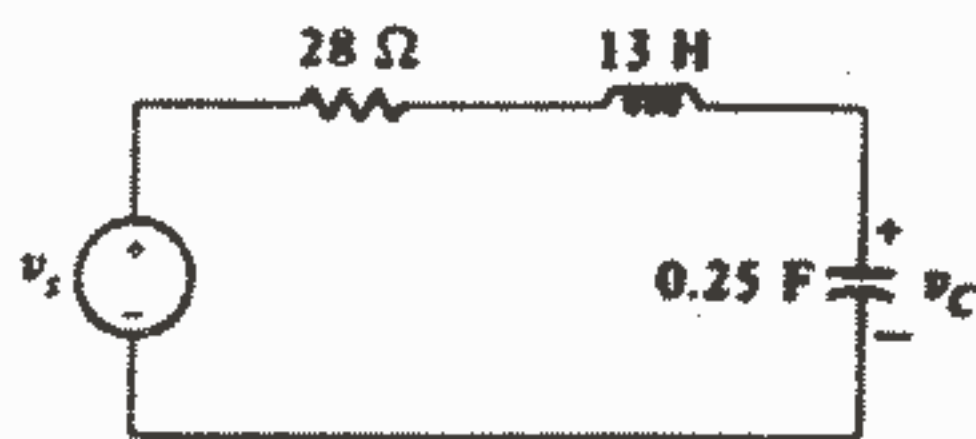
- ۸- انرژی ذخیره شده در یک خازن $50 \mu\text{F}$ به صورت $W_c(t) = 2e^{-500t} \text{ J}$ برای $t > 0$ داده شده است. جریان و ولتاژ خازن و قدرت جذب شده در $t = 30 \text{ ms}$ را پیدا کنید.

- ۹- در مدار شکل ۴-۱۰a، فرض کنید $R_o = 0$ ، $R_i = \infty$ ، $C = 1 \mu\text{F}$ ، $R = 1 \text{ M}\Omega$. فرض کنید که می‌خواهیم خروجی برابر $v_o(t) = e^{-100t} - 1 \text{ V}$ باشد. از معادله

(۱۶) مشتق‌گیری کنید تا $v_s(t)$ لازم برای حالات زیر به دست آید: (a) اگر $A = 1000$ (b) اگر A بی‌نهایت باشد.

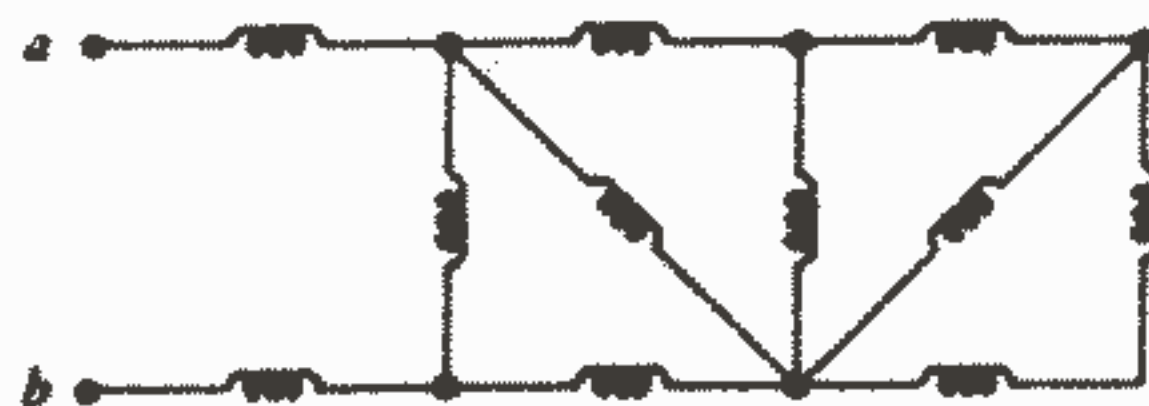
۱۰ - جای C ، R را در مدار شکل ۱۰a- عوض کنید و فرض کنید که برای $op\text{-}amp$ $R_i = \infty$ و $R_o = 0$ ، A بی‌نهایت باشد. (a) $v_c(t)$ را به صورت تابعی از $v_s(t)$ پیدا کنید. (b) اگر A بی‌نهایت فرض نشود رابطه‌ای به دست آورید که $v_s(t)$ را به هم مربوط سازد.

۱۱ - در مدار شکل ۱۱-۲۸، $v_c(t) = 4te^{-2t}$ V در لحظه $t = 0.5$ S می‌باشد. مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) انرژی ذخیره شده در خازن. (b) هر سلف را با یک خازن $1F$ جایگزین کنید و C_{eq} را پیدا کنید.



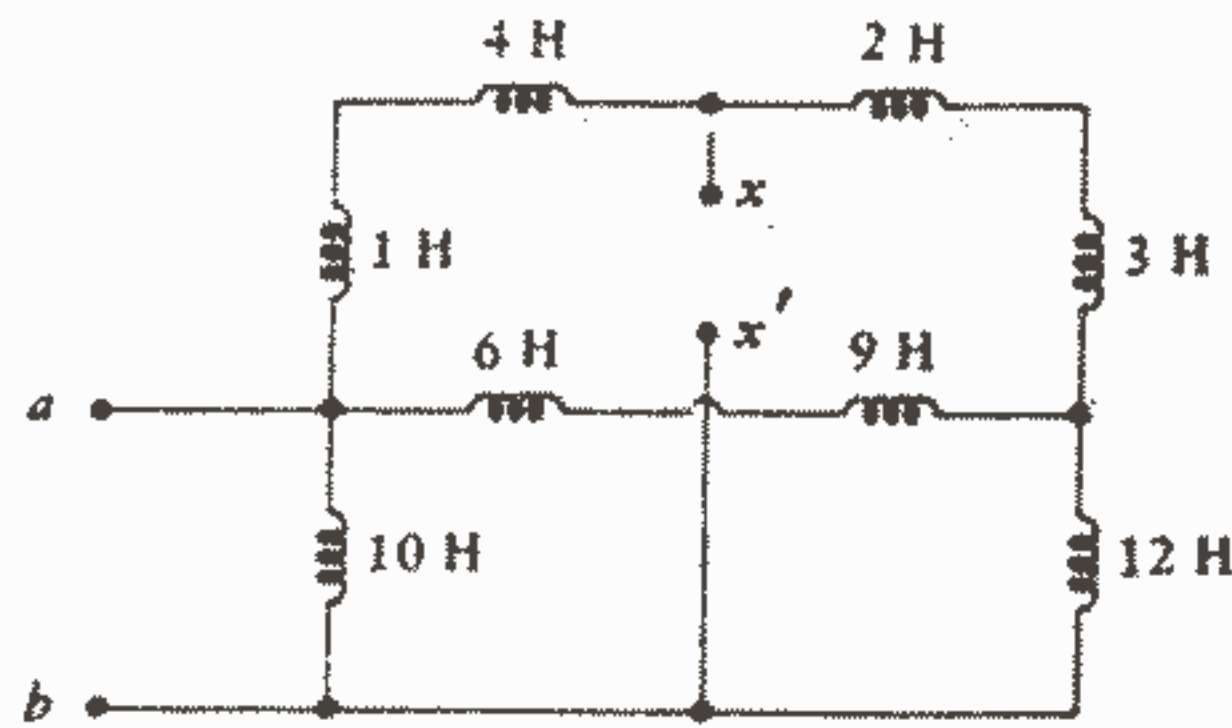
شکل ۲۸ - ۴: به مسئله ۱۱ مراجعه کنید.

۱۲ - (a) اگر هر سلف در شبکه شکل ۱۲-۲۹ برابر $1H$ باشد، سلف معادل را در نقاط a-b پیدا کنید. (b) هر سلف را با یک خازن $1F$ جایگزین کنید و C_{eq} را پیدا کنید.



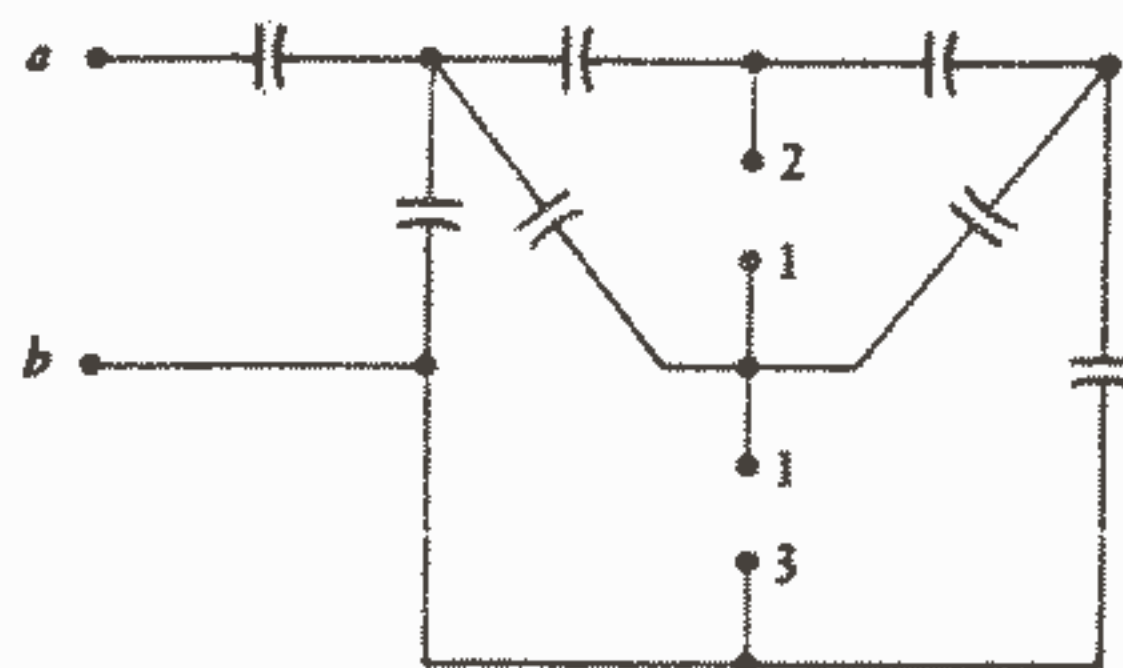
شکل ۲۹ - ۴: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

۱۳ - اندوکتانس معادل را در ترمینالهای a-b در شکل ۱۳-۳۰ پیدا کنید، اگر ترمینالهای $x-x'$: (a) مدار باز شده باشد. (b) اتصال کوتاه شده باشد.



شکل ۳۰ - ۴: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

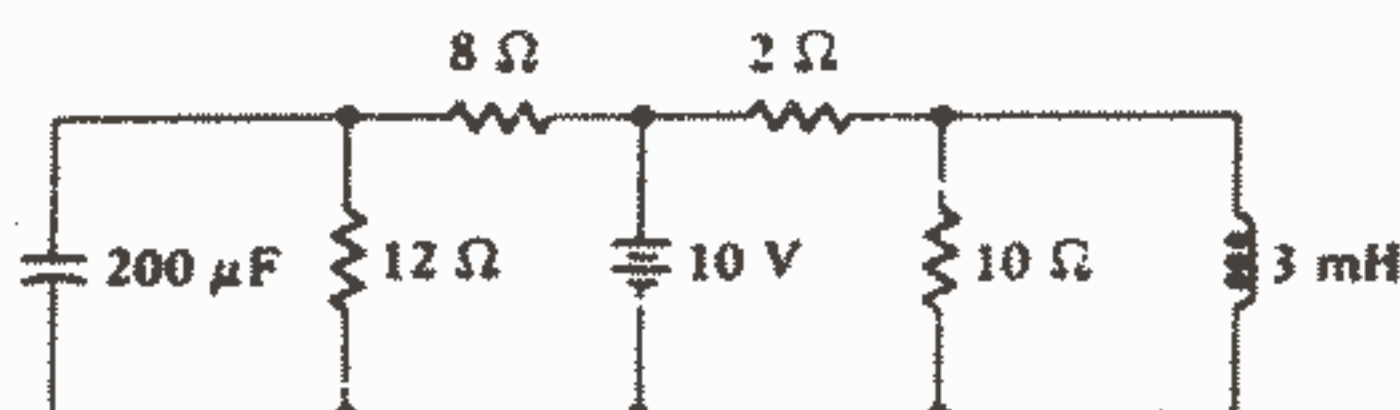
۱۴ - در شکل ۴-۳۱ هر خازن برابر $1 \mu F$ می باشد. C_{eq} را در $a-b$ در حالات زیر پیدا کنید: (a) اگر ۱-۲ و ۱-۳ هر دو مدار باز باشند. (b) اگر ۱-۲ و ۱-۳ هر دو اتصال کوتاه باشند. (c) اگر ۱-۲ مدار باز و ۱-۳ اتصال کوتاه باشد. (d) اگر ۱-۲ اتصال کوتاه و ۱-۳ مدار باز باشد.



شکل ۳۱ - ۴: به مسئله ۱۴ مراجعه کنید.

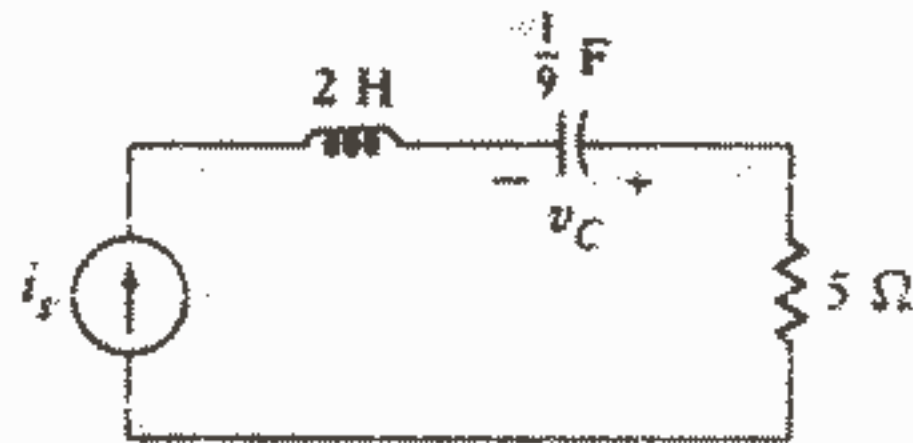
۱۵ - یک سطل کوچک پر از خازن $1 nF$ داریم، نشان دهید که چگونه می توان یک خازن معادل $0.1 nF$ را با حداقل تعداد ممکن از خازنها به دست آورد.

۱۶ - برای مدار شکل ۴-۳۲ مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) W_c ، (b) W_L (c) جریان هر یک از عناصر مدار. (d) ولتاژ دو سر هر یک از عناصر مدار.



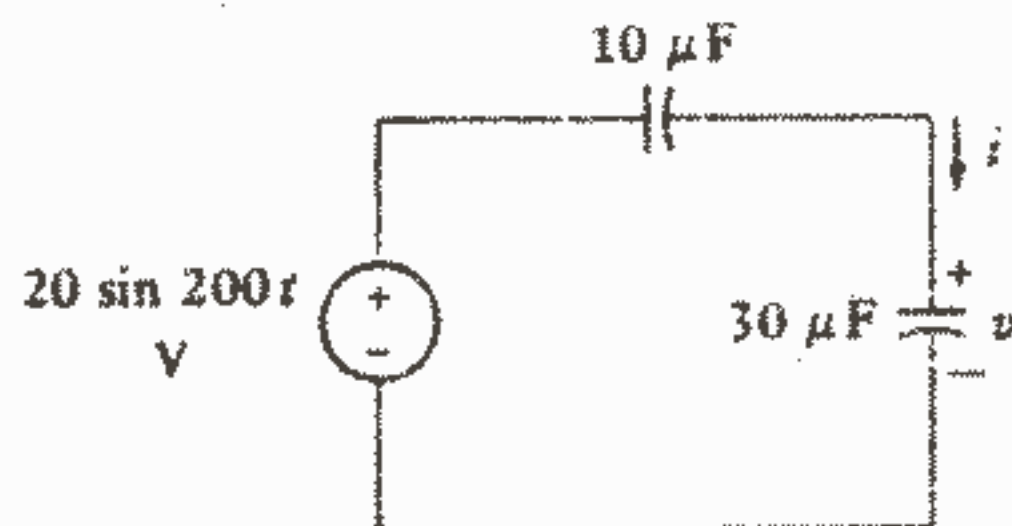
شکل ۳۲ - ۴: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

۱۷ - در مدار شکل ۴-۳۳ فرض کنید، $i_s = 4(1 - 3^{-3t})A$ برای $t > 0$ ، $v_c(0) = 20V$ باشد. در $t = 0/5S$ مقادیر خواسته شده را پیدا کنید: (a) انرژی ذخیره شده در سلف (b) انرژی ذخیره شده در خازن (c) انرژی تلف شده در هر مقاومت از لحظه $t = 0$.



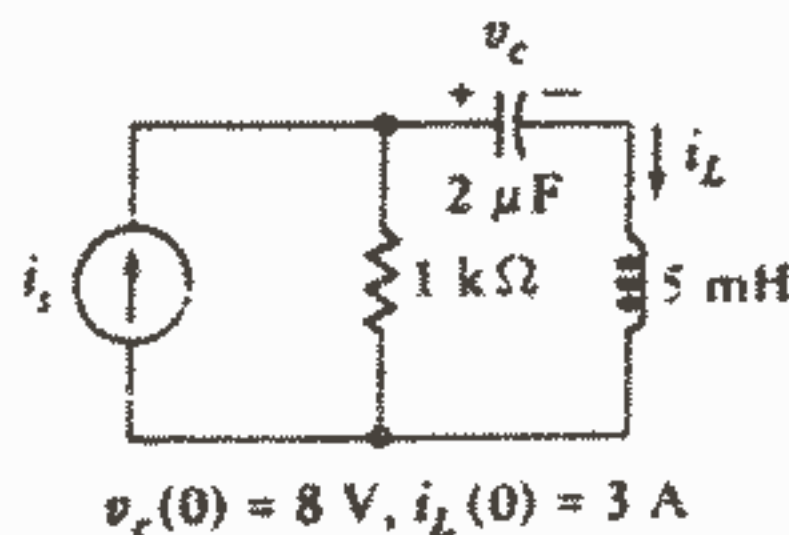
شکل ۴-۳۳: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

۱۸ - فرض کنید که در مدار شکل ۴-۳۴، $v(0) = 10V$ باشد. (a) $i(t)$ را برای تمام مقادیر t به دست آورید. (b) $v(t)$ را به ازای $t \geq 0$ پیدا کنید.



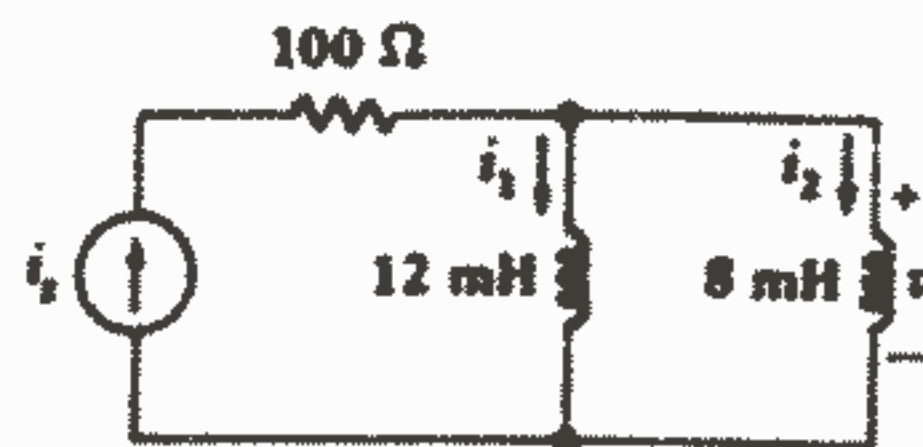
شکل ۴-۳۴: به مسئله ۱۸ مراجعه کنید.

۱۹ - (a) معادلات گرهی را برای مدار شکل ۴-۳۵ بنویسید: (b) معادلات چشمه‌ای را برای همان مدار بنویسید.



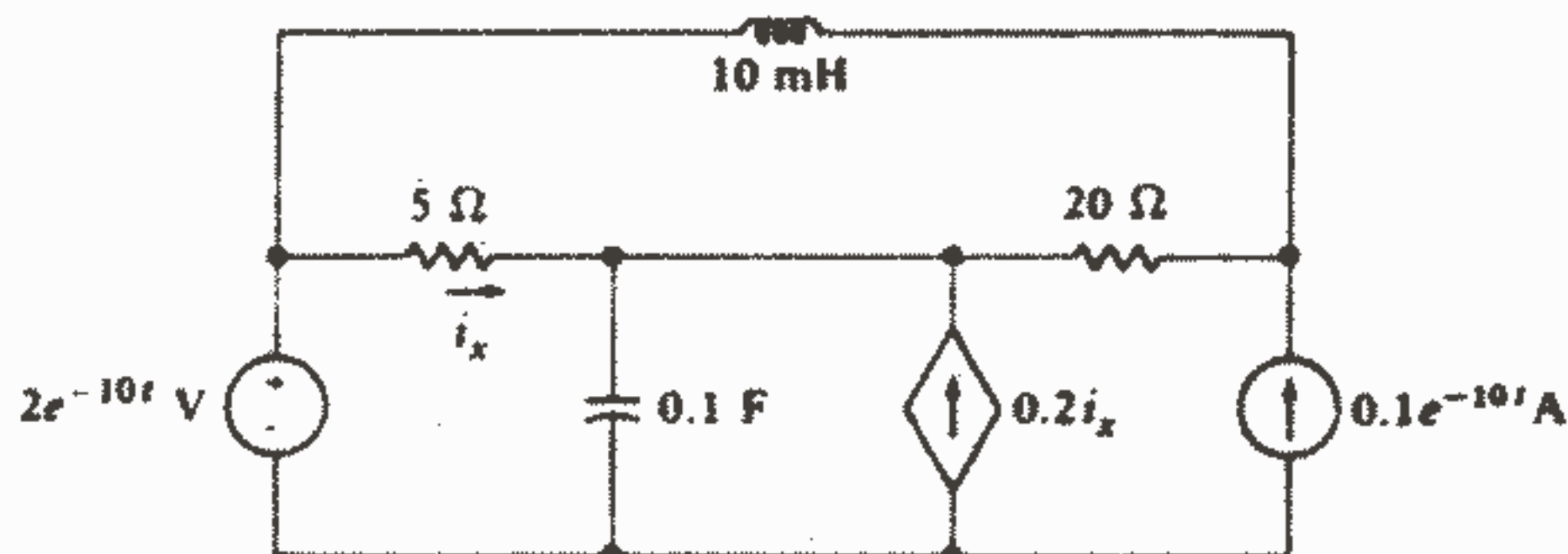
شکل ۴-۳۵: به مسئله ۱۹ مراجعه کنید.

۲۰ - در مدار شکل ۴-۳۶ فرض کنید $i_s = 0.1e^{-4000t}A$ ، $i_r(0) = 3mA$ باشد. (a) $v(t)$ را برای تمام مقادیر t پیدا کنید. (b) $i_r(t)$ را برای $t \geq 0$ پیدا کنید. (c) $i_1(t)$ را به ازای $t \geq 0$ پیدا کنید.



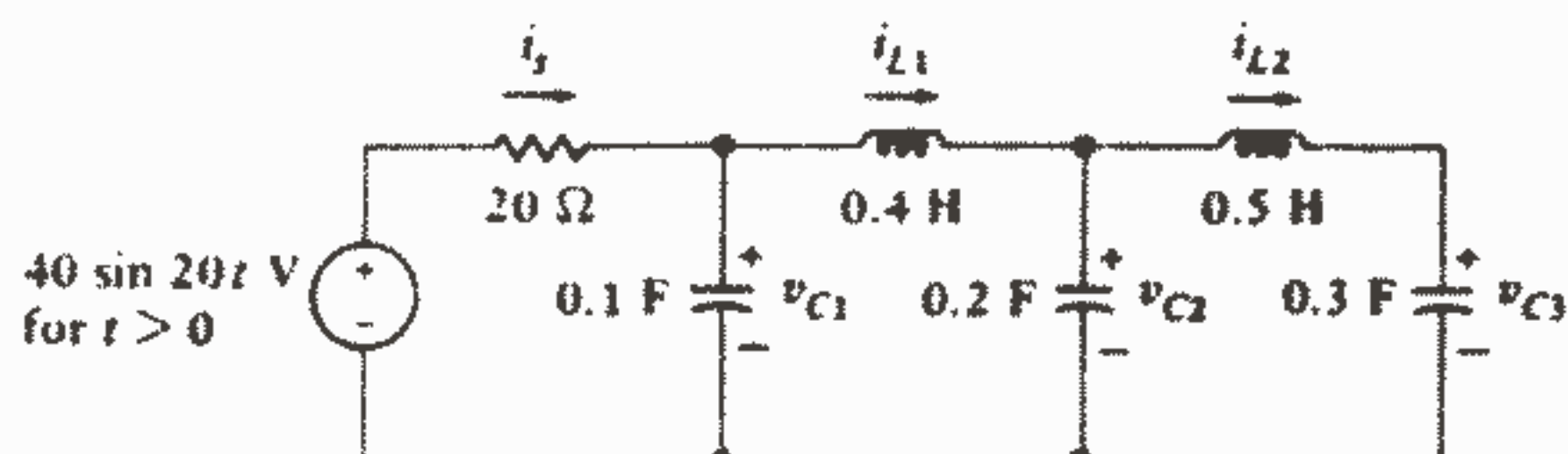
شکل ۳۶ - ۴: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

۲۱ - برای مدار شکل ۳۷-۴ درختی رسم کنید که نه تنها روش ارائه شده در قسمت ۷-۳ و ۸-۳ را برآورده سازد بلکه همه خازن‌ها در درخت و همه سلف‌ها در مکمل درخت قرار گیرند. (a) ولتاژهای شاخه درختی را مشخص کنید و یک دسته معادله گرهی بنویسید و فرض کنید که هیچ ذخیره انرژی در $t = 0$ وجود نداشته باشد. (b) جریانهای لینک را مشخص کنید و یک دسته معادله حلقه بنویسید و باز دوباره فرض کنید که در لحظه $t = 0$ هیچ ذخیره انرژی وجود نداشته باشد.



شکل ۳۷ - ۴: به مسائل ۲۱ و ۲۴ مراجعه کنید.

۲۲ - در مدار شکل ۳۸-۴، فرض کنید $v_{c1}(0) = 5V$ ، $v_{c2}(0) = 6V$ ، $v_{c3}(0) = 7V$ ، $i_{L1}(0) = 8A$ ، $i_{L2}(0) = -4A$ باشد. (a) یک دسته معادله گرهی برحسب متغیرهای v_{c1} ، v_{c2} و v_{c3} بنویسید. (b) یک دسته معادله چشمه‌ای برحسب متغیرهای i_{L1} ، i_{L2} و i_s بنویسید.

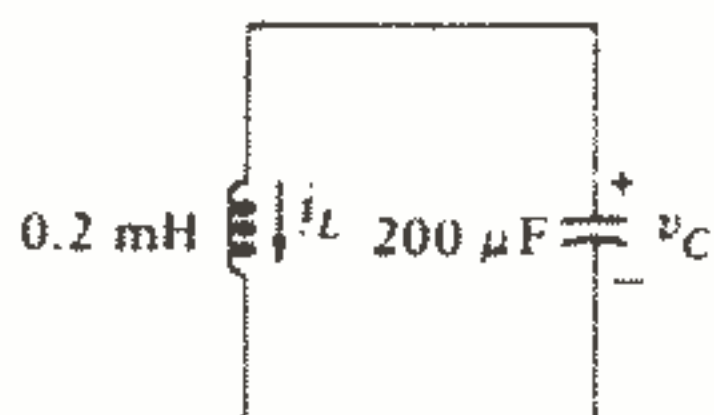


شکل ۳۸ - ۴: به مسائل ۲۲ و ۲۳ مراجعه کنید.

۲۳ - متناظر دقیق مدار شکل ۴-۳۸ را ایجاد کنید و جریانهای سلفها و ولتاژ خازنها را مشخص کنید و مقادیر اولیه آنها را مشخص کنید.

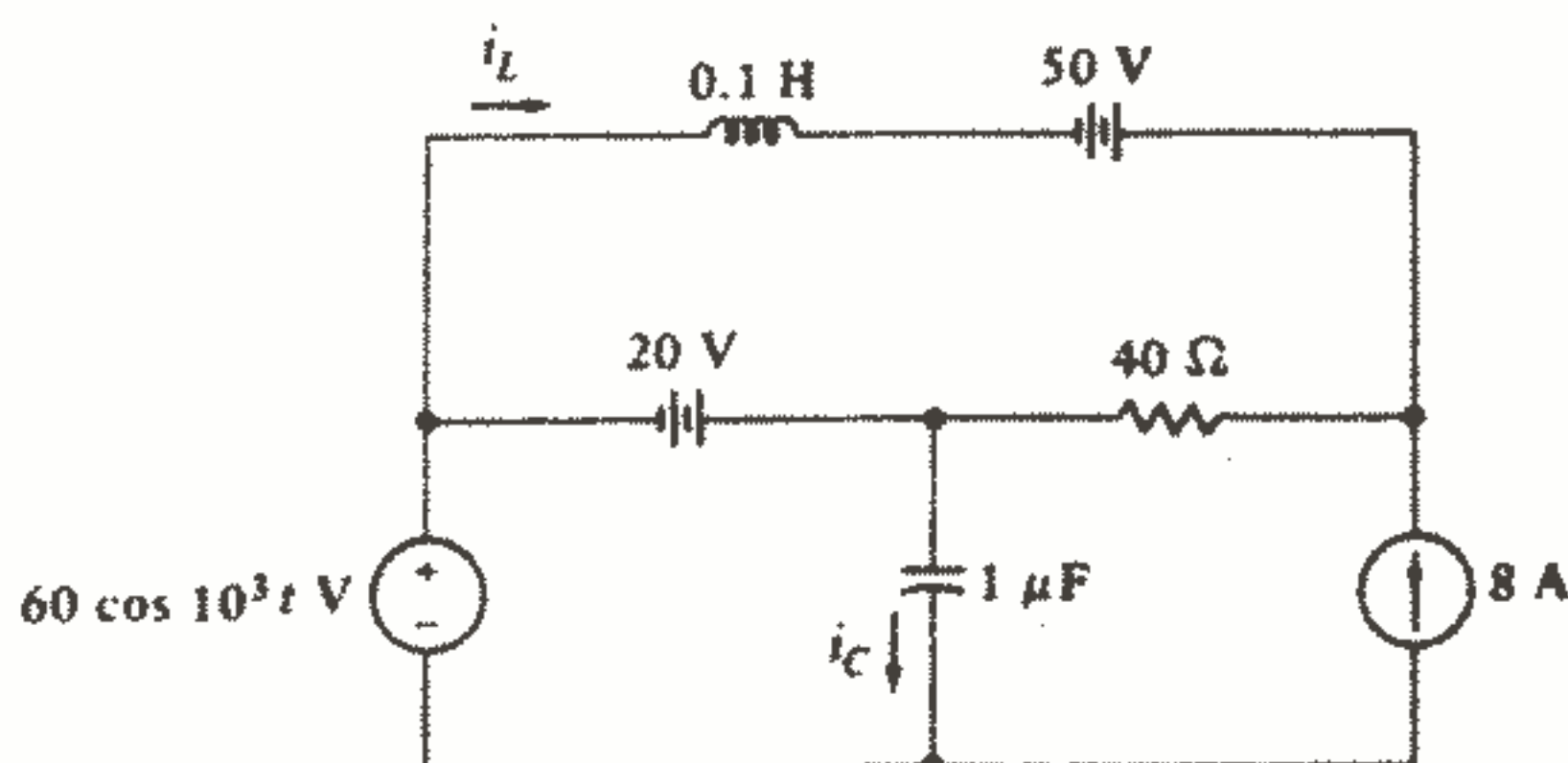
۲۴ - متناظر دقیق مدار شکل ۴-۳۷ را رسم کنید.

۲۵ - اگر در مدار شکل ۴-۳۹، $i_L(0) = 10\text{ A}$ ، $v_C(0) = 4\text{ V}$ باشد، یک معادله گرهی بنویسید و (a) نشان دهید که $v_C = -10 \sin 5000t + 4 \cos 5000t\text{ V}$ در معادله شما صدق می‌کند. (b) مدار متناظر دقیق را به دست آورید و رابطه‌ای برای ولتاژ خازن به دست آورید. (c) مدار اصلی و مدار متناظر را از نظر توپولوژیکی چگونه مقایسه می‌کنید؟



شکل ۴-۳۹: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

۲۶ - در مدار شکل ۴-۴۰ با استفاده از اصل جمع اثرها مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) $i_L(t)$ (b) $i_C(t)$.



شکل ۴-۴۰: به مسئله ۲۶ مراجعه کنید.

فصل ۵

مدارهای RC , RL بدون منبع

۱-۵- مقدمه

در فصل گذشته معادلاتی را که پاسخ مدارهای شامل سلف و خازن را تعیین می نمودند، نوشتیم اما هیچیک از آنها را حل نکردیم. اکنون آماده ایم که اقدام به حل مدارهای ساده بنماییم. ما توجه خود را معطوف به مدارهایی که فقط شامل مقاومت و سلف و یا مقاومت خازن بوده و فاقد منبع می باشند، خواهیم کرد. اگر چه، اجازه خواهیم داد که انرژی ذخیره شده در سلف یا خازن در مدار حضور داشته باشد زیرا بدون این انرژی هر پاسخی صفر خواهد بود.

اگر چه مدارهایی را که ما در شرف بررسی آنها هستیم ظاهری مقدماتی دارند، اما از نظر عملی دارای اهمیت می باشند. آنها کاربردهایی از قبیل شبکه های کوپلینگ در تقویت کننده های الکترونیکی، شبکه های جبران سازی در سیستمهای کنترل اتوماتیک، شبکه های متعادل کننده در کانالهای مخابراتی و بسیاری موارد دیگر دارند. آشنایی با این مدارهای ساده ما را قادر می سازد که میزان دقتی را که خروجی یک تقویت کننده می تواند ورودی متغیر با زمان را تعقیب کند و یا اینکه چقدر سریع سرعت یک موتور در پاسخ به یک تغییر در جریان میدان آن تغییر می کند، را پیشگویی کنیم. اطلاعات ما درباره عملکرد مدارهای RC , RL ساده همچنین ما را قادر می سازد که اصلاحاتی را در تقویت کننده ها و موتورها برای حصول یک پاسخ مطلوب ارائه کنیم.

تحلیل چنین مدارهایی بستگی به فرموله کردن و حل نمودن معادلات دیفرانسیلی دارد که مدار را مشخص می سازند. نوع خاصی از این معادلات را که به دست می آوریم معادله دیفرانسیل خطی خواهیم نامید که به طور ساده معادله دیفرانسیلی است که تمام جملات آن معادله وقتی به دست می آید که مقداری برای متغیر مستقل پیدا کنیم (به صورت تابعی از زمان) که در معادله

دیفرانسیل صدق کند و نیز در توزیع انرژی مشخصی در سلف و خازن در یک لحظه مشخص (معمولاً $t = 0$) صدق کند.

جواب این معادله دیفرانسیل پاسخی از مدار را ارائه می‌کند که به نامهای مختلفی نامیده می‌شود. از آنجاییکه این پاسخ بستگی به «طبیعت» عمومی مدار (نوع عناصر، اندازه آنها و اتصالات عناصر) دارد، آن را اغلب پاسخ طبیعی می‌نامند. همچنین بدیهی است که یک مدار حقیقی نمی‌تواند انرژی را برای همیشه ذخیره کند و مقاومت‌هایی که ضرورتاً به همراه سلف و خازن می‌باشند سرانجام تمام انرژی ذخیره شده را به گرما تبدیل خواهند کرد. در نهایت پاسخ میرا خواهد شد و به همین دلیل پاسخ را پاسخ گذرا هم می‌نامند. و بالاخره باید کمی هم با فهرست واژه‌هایی که ریاضیدانان به کار می‌برند آشنا باشیم، آنها پاسخ یک معادله دیفرانسیل خطی همگن را تابع عمومی می‌نامند. وقتی که ما منابع مستقل را هم در مدار در نظر بگیریم، قسمتی از پاسخ ناشی از ماهیت منبع (تابع تحریک) خواهد بود به همین دلیل این قسمت از پاسخ را پاسخ اجباری و یا پاسخ خصوصی می‌نامند که به وسیله پاسخ عمومی ایجاد شده به وسیله مدار بدون منبع تکمیل می‌شود و مجموع پاسخ عمومی و پاسخ خصوصی، پاسخ کامل مدار را مشخص می‌کند. یعنی پاسخ کامل عبارت است از مجموع پاسخ طبیعی، که در این فصل مطالعه می‌شود، و پاسخ اجباری که در فصل ۶ مورد بررسی قرار خواهیم داد. پاسخ بدون منبع را می‌توان پاسخ طبیعی، پاسخ گذرا، پاسخ آزاد، و یا پاسخ عمومی نامید اما به علت ماهیت توصیفی تر نام «پاسخ طبیعی» ما همین نام را به کار خواهیم برد.

روشهای مختلفی را برای حل این معادلات دیفرانسیل در نظر خواهیم گرفت. اگر چه این موضوع مربوط به ریاضی است و تحلیل مدار نیست. بیشترین توجه ما معطوف حل آنها، مفهوم و تعبیرشان می‌باشد و سعی خواهیم کرد که به اندازه کافی با فرم پاسخ آشنا شویم که بتوانیم جوابهای مدارهای جدید را با کمی فکر کردن بنویسیم، اگر چه وقتی که روشهای ساده‌تر با شکست مواجه شوند، روشهای تحلیلی پیچیده مورد نیاز خواهد بود و یک مهندس باید همیشه به یاد داشته باشد که این روشهای پیچیده فقط ابزاری برای به دست آوردن جوابهای دقیقتر می‌باشند و نه جوابهای مهندسی.

۲-۵- مدار RL ساده

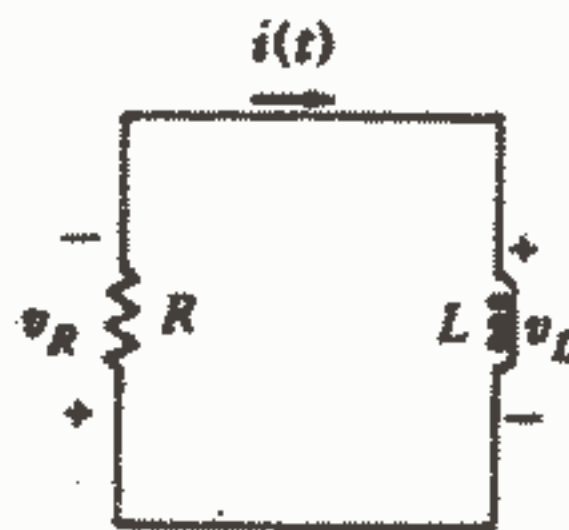
ما بحث خود را درباره تحلیل گذرا با بررسی مدار RL سری ساده شکل ۱-۵ شروع می‌کنیم. بیایید جریان متغیر با زمان را به صورت $i(t)$ در نظر بگیریم و جریان $i(t)$ در لحظه $t=0$

را برابر I_0 بگیریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$v_R + v_L = Ri + L di/dt = 0 \quad \text{یا} \quad di/dt + R/L i = 0 \quad (۱)$$

باید عبارتی برای $i(t)$ پیدا کنیم که در این معادله صدق کند و دارای مقدار I_0 در لحظه $t = 0$ باشد. جواب را می توان به طرق مختلفی به دست آورد. یک روش خیلی سرراست برای حل یک معادله دیفرانسیل عبارت است از اینکه معادله را به گونه ای بنویسیم که متغیرها جدا شوند و سپس از هر طرف معادله انتگرال بگیریم. متغیرهای موجود در معادله (۱) عبارتند از i و t و بدیهی است که معادله را می توان در dt ضرب و به i تقسیم نمود و به گونه ای مرتب نمود که متغیرها جدا شوند.

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt \quad (۲)$$



شکل ۱-۵: یک مدار RL سری که در آن $i(t)$ را باید به گونه ای تعیین نمود که با توجه به شرایط اولیه $i(0) = I_0$ باشد.

چون جریان در لحظه $t = 0$ برابر I_0 و در لحظه t برابر $i(t)$ می باشد، می توانیم دو انتگرال معین را که از انتگرال گیری معین دو طرف بین حدود مربوطه به دست می آید مساوی قرار دهیم:

$$\int_{I_0}^i \frac{di}{i} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt \rightarrow \ln i \Big|_{I_0}^i = -\frac{R}{L} t \Big|_0^t \rightarrow \ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L} (t - 0)$$

و در نتیجه:

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

ما می توانیم جواب را ابتدا با نشان دادن اینکه جایگزینی معادله (۳) در (۱) به تساوی $0 = 0$ می انجامد و سپس با نشان دادن اینکه قرار دادن $t = 0$ در معادله (۳) تساوی $i(0) = I_0$ را ایجاد می کند، چک کنیم. هر دو مرحله لازم است، یعنی پاسخ باید در معادله دیفرانسیل مدار

صدق کند و نیز شرایط اولیه و یا پاسخ در لحظه صفر را هم برآورده سازد. جواب را می توان با کمی تغییر در روش قبلی هم به دست آورد. بعد از تغییر متغیرها می توانیم انتگرال نامعین دو طرف معادله (۲) را به دست آوریم که شامل یک ثابت انتگراسیون هم خواهد بود. بنابراین:

$$\int \frac{di}{i} = - \int \frac{R}{L} dt + K$$

و پس از انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\ln i = - \frac{R}{L} t + K \quad (۴)$$

ثابت K را نمی توان با جایگزینی معادله (۴) در معادله دیفرانسیل اصلی (۱) به دست آورد، اتحاد $0 = 0$ حاصل می شود، زیرا معادله (۴) پاسخ معادله (۱) به ازای همه مقادیر K می باشد. ثابت انتگراسیون را باید طوری انتخاب کرد که شرایط اولیه $i(0) = I_0$ را برآورده سازد. بنابراین در لحظه $t = 0$ ، از معادله (۴) داریم:

$$\ln I_0 = K$$

و ما این مقدار K را در معادله (۴) قرار می دهیم و پاسخ مطلوب را به دست می آوریم

$$\ln i = - \frac{R}{L} t + \ln I_0 \quad \text{یا} \quad i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

هر کدام از روشهای فوق را فقط وقتی که متغیرها قابل تفکیک باشند می توان به کار برد که این حالت هم گاهی پیش می آید. در بقیه حالات باید متوسل به یک روش خیلی موثری شویم که موفقیت آن بستگی به فراست و یا تجربه ما خواهد داشت. ما به طور ساده پاسخ را حدس می زنیم و سپس این حدس خود را ابتدا با قرار دادن در معادله دیفرانسیل و سپس با اعمال شرایط اولیه داده شده، تست می کنیم. چون ما نمی توانیم مقادیر عددی دقیق جواب را حدس بزنیم، جوابی را که شامل چند ثابت مجهول است حدس می زنیم و مقادیری را برای این ثابتها انتخاب می کنیم که در معادله دیفرانسیل و شرایط اولیه صدق کند. اکثر معادلات دیفرانسیلی که در تحلیل مدار با آنها مواجه می شویم دارای جوابی هستند که می توان آن را با تابع نمایی و یا مجموع چند تابع نمایی نشان داد. بیایید جوابی برای معادله (۱) بفرم نمایی $i(t) = A e^{st}$ انتخاب کنیم که در آن A و S_1 ثابتهایی هستند که باید تعیین شوند. بعد از جایگزینی این پاسخ فرضی در معادله (۱)، خواهیم داشت:

$$(S_1 + R/L)Ae^{s_1 t} = 0 \quad \text{یا} \quad AS_1 e^{s_1 t} + R/L Ae^{s_1 t} = 0$$

برای اینکه این پاسخ به ازای جمیع مقادیر زمان در معادله صدق کند لازم است که یا $A = 0$ و یا $S_1 = -\infty$ و یا $S_1 = -R/L$ باشد. اما اگر $A = 0$ و یا $S_1 = -\infty$ آنگاه تمام پاسخها صفر می شوند و جوابی برای مسئله ما به دست نمی آید. بنابراین باید $S_1 = -R/L$ را انتخاب کنیم. و پاسخ فرضی ما به صورت $i(t) = Ae^{-Rt/L}$ در می آید. ثابت دیگر را باید با اعمال شرایط اولیه $i = I_0$ در $t = 0$ به دست آوریم. بنابراین: $I_0 = A$ و به این ترتیب فرم نهایی پاسخ فرضی ما یکبار دیگر به صورت (۵) $i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$ خواهد بود.

ما روش دیگری را برای حل معادله (۱) بررسی نخواهیم کرد، اگر چه از تعدادی روش دیگر هم می توان استفاده نمود. آنها را می توانید در درس معادلات دیفرانسیل مطالعه کنید. قبل از اینکه توجه خود را معطوف تفسیر پاسخ کنیم بیایید روابط قدرت و انرژی را در این مدار بررسی کنیم. قدرت تلف شده در مقاومت عبارت است از:

$$p_R = i^2 R = I_0^2 R e^{-2Rt/L}$$

و انرژی کل تبدیل شده به حرارت در مقاومت را می توان با انتگرال گیری از توان لحظه ای از لحظه صفر تا بی نهایت پیدا کرد:

$$W_R = \int_0^{\infty} p_R dt = I_0^2 R \int_0^{\infty} e^{-2Rt/L} dt = I_0^2 R \left(-\frac{L}{2R} \right) e^{-2Rt/L} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

و این همان نتیجه ای است که انتظار داشتیم، زیرا انرژی کل ذخیره شده اولیه در سلف عبارت از $\frac{1}{2} L I_0^2$ می باشد و هیچ انرژی در زمان بی نهایت در سلف ذخیره نمی شود. تمام انرژی اولیه در مقاومت تلف می شود.

تمرین

۱- ۵- هر یک از مدارهای شکل ۲- ۵ به مدت طولانی در حالت نشان داده شده بوده اند. کلیدهای حالت a, b در لحظه $t = 0$ باز می شوند. کلید شکل C یک کلید Spdt می باشد و به صورتیکه کشیده شده است نشان می دهد که قبل از اینکه مداری را قطع کند مدار دیگر را وصل می کند. آن را «اتصال قبل از قطع» هم می نامند. بعد از اینکه مشخصات سلف را در آخر قسمت ۳- ۴ مرور کردید، $i(0)$ را هر مدار پیدا کنید.

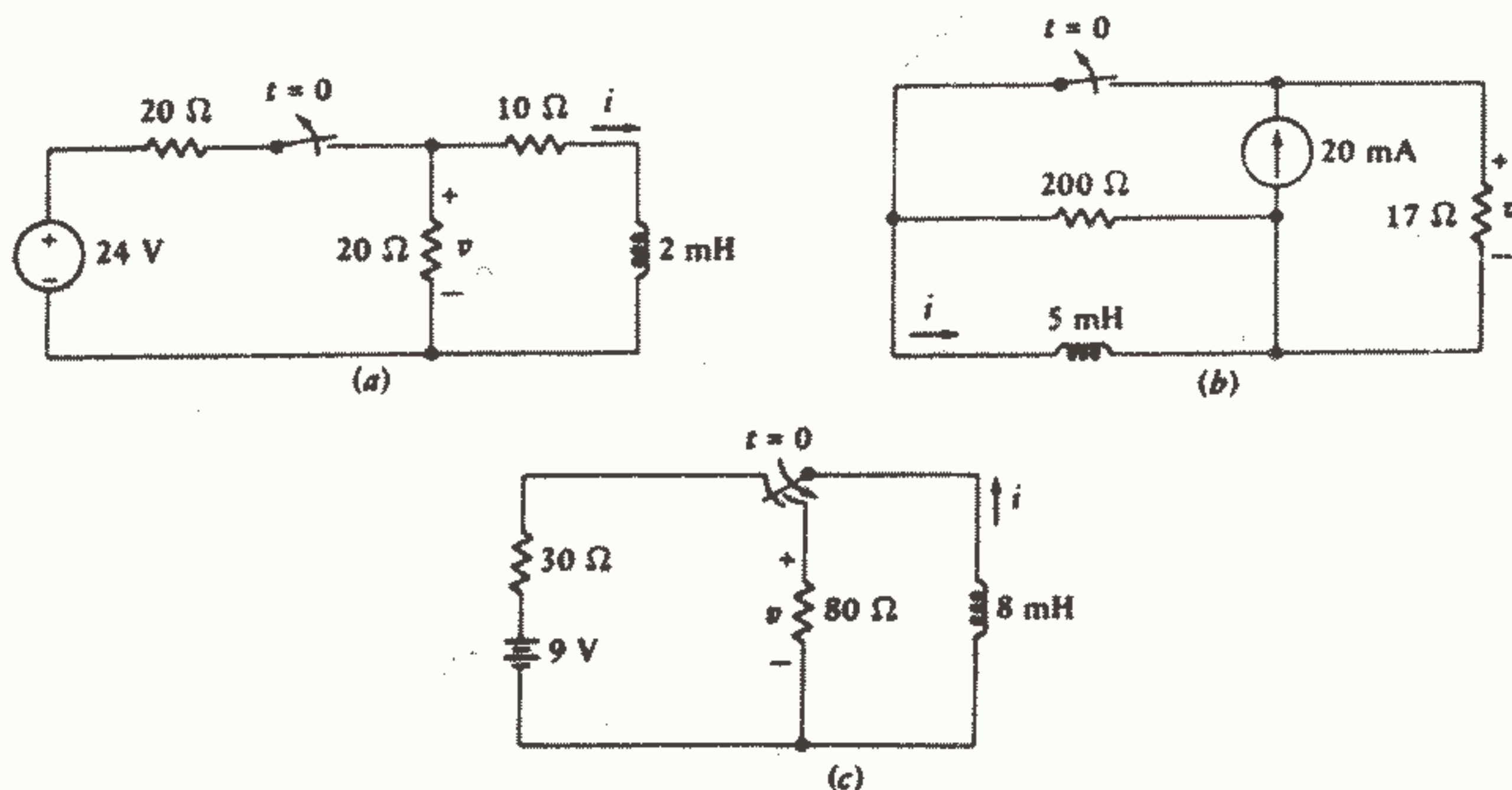
جواب: ۶۰۰mA, ۲۰, ۳۰۰-

۲- ۵- درست در لحظه بعد از تغییر حالت کلید در مدار شکل ۲- ۵ مقدار v را پیدا

کنید. جواب: ۱۲۷-, ۰, ۳۴۰, ۲۴-

۱۹۷ مدارهای RL و RC بدون منبع

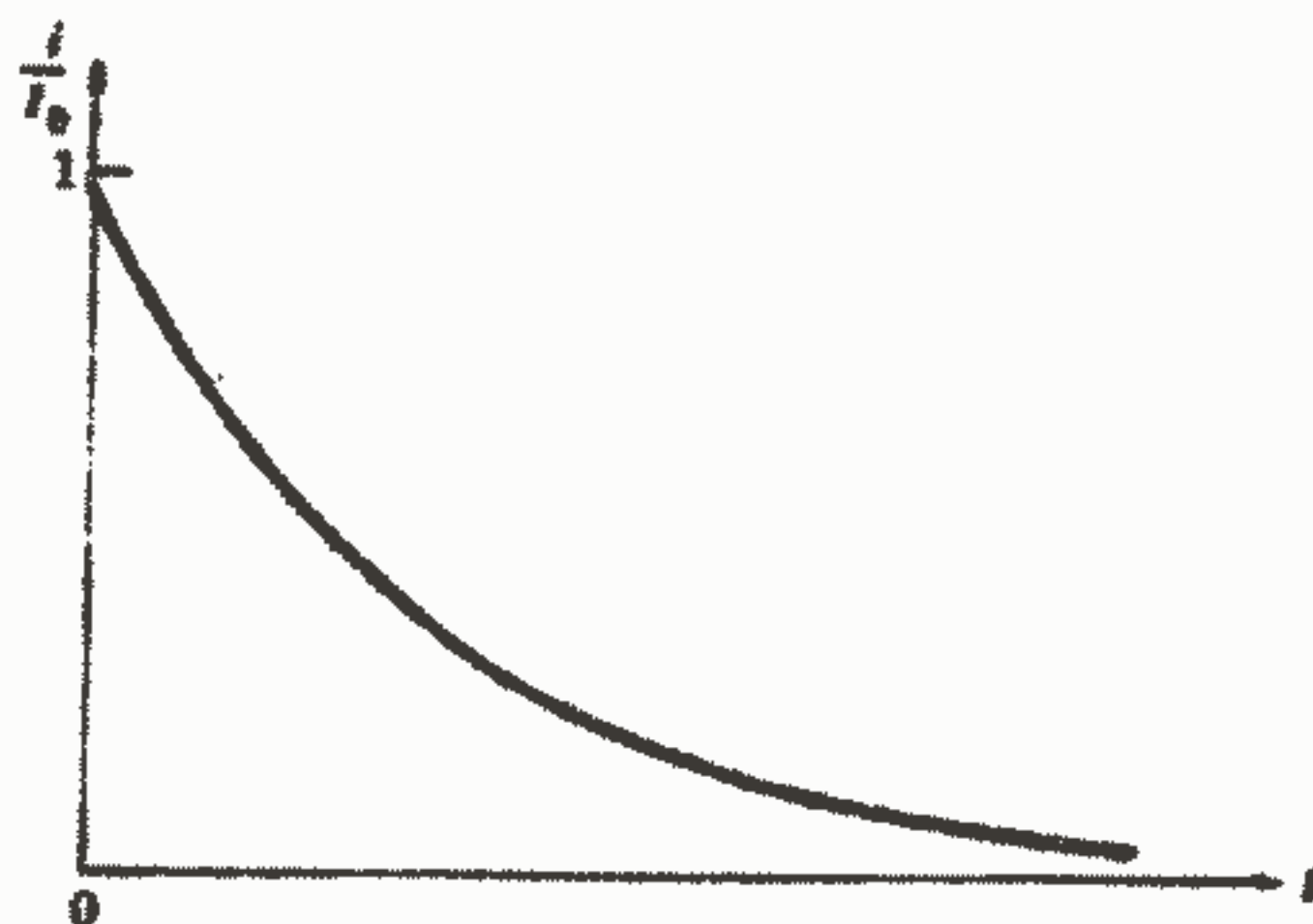
۳-۵. مقادیر عناصر در شکل ۵-۱ عبارتند از: $R = 0,8\Omega$, $L = 1,6H$. در لحظه $t = -1S$ فرض کنید $i = 20A$ و مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) $i(0)$ (b) قدرت جذب شده به وسیله سلف در $t = 1S$, (c) زمانی که در آن انرژی ذخیره شده در سلف $100J$ می باشد.
جواب: $12,13A$, $-43,3W$, $0,1632S$.



شکل ۲-۵: به تمرینات ۱-۵، ۲-۵ و ۵-۵ مراجعه کنید.

۳-۵. خواص پاسخ نمایی

حال بیاید ماهیت پاسخ مدار RL سری را مورد توجه قرار دهیم. قبلاً دریافتیم که جریان با رابطه (۶) $i(t) = I_0 e^{-R/L t}$ بیان می شود. در لحظه صفر، جریان همان مقدار مفروض I_0 را دارد و با افزایش زمان، جریان کاهش می یابد و به صفر میل می کند. شکل این تابع نمایی میرا با رسم $i(t)/I_0$ نسبت به t در شکل ۳-۵ مشاهده می شود. چون تابعی که رسم می کنیم $e^{-R/L t}$ است. اگر R/L تغییر نکند، منحنی تغییر نخواهد کرد. بنابراین، برای هر مدار سری RL که دارای نسبت R/L یا L/R یکسان باشد، منحنی یکسانی به دست می آید. اجازه دهید ببینیم چگونه این نسبت، شکل منحنی را تحت تأثیر قرار می دهد.


 شکل ۳ - ۵: منحنی i/i_0 نسبت به t .

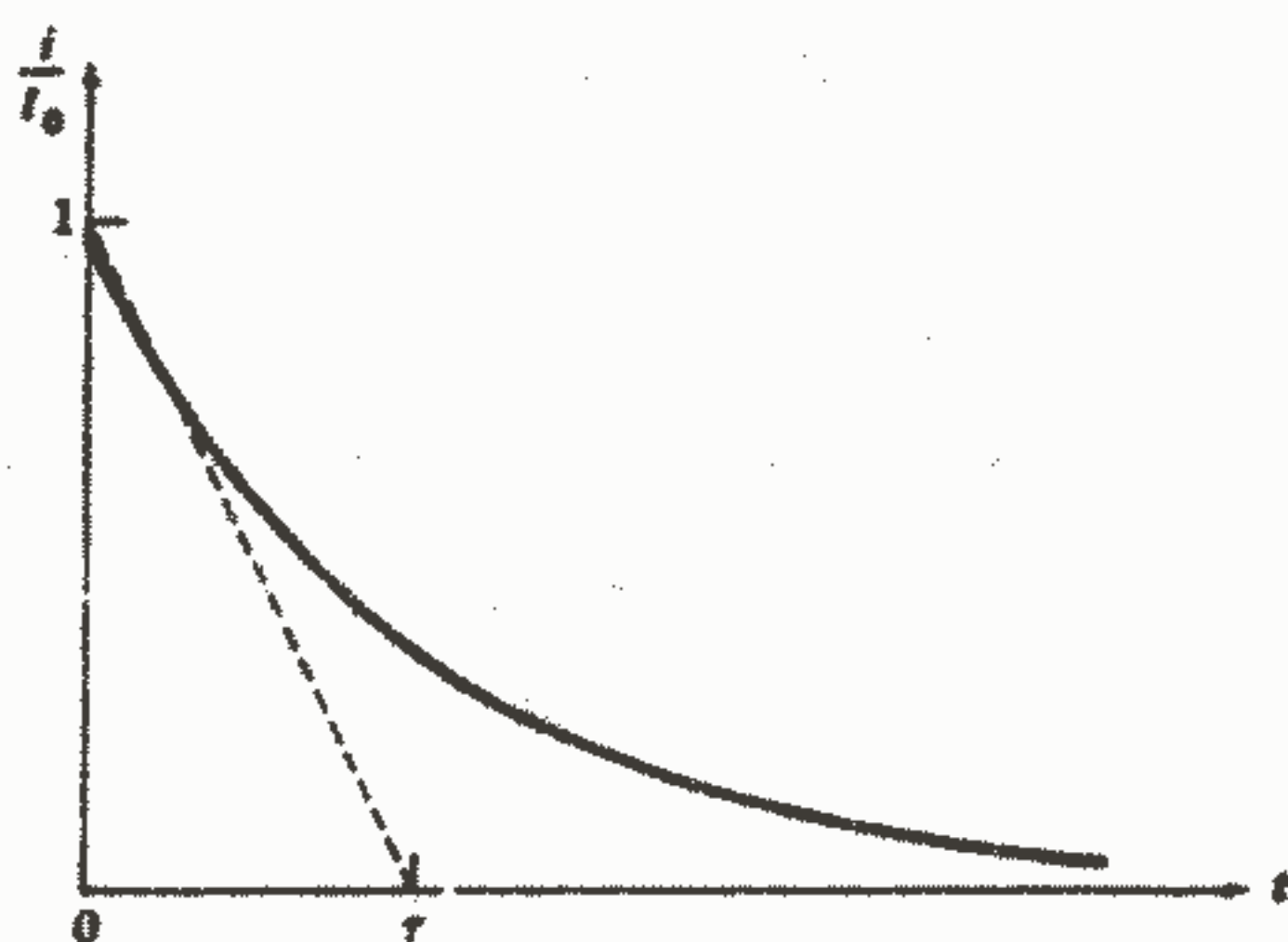
اگر نسبت L به R را دو برابر کنیم، آنگاه اگر L هم دو برابر شود نما تغییر نخواهد کرد. به عبارت دیگر، پاسخ اصلی در زمانی دیرتر روی می‌دهد و منحنی جدید به وسیله انتقال هر نقطه منحنی اصلی دو برابر به راست حاصل می‌شود. با این نسبت L/R بزرگتر، زمان بیشتری طول می‌کشد تا جریان به هر کسری از مقدار اصلی‌اش برسد. ممکن است مایل باشیم که بگوییم «عرض» منحنی دو برابر شده است و یا «عرض» متناسب است با L/R . البته باید کلمه «عرض» را تعریف کنیم زیرا هر منحنی بین ∞ تا $t = 0$ قرار دارد. به جای این کار بیایید زمانی را که لازم است تا جریان، اگر به تنزلش با سرعت اولیه ادامه دهد، به صفر سقوط کند را مورد توجه قرار دهیم.

سرعت اولیه تنزل را با محاسبه مشتق در لحظه صفر به دست می‌آوریم:

$$\left. \frac{d i}{d t} \frac{1}{i_0} \right|_{t=0} = -\frac{R}{L} e^{-Rt/L} \Big|_{t=0} = -\frac{R}{L}$$

مقدار زمانی را که طول می‌کشد تا i/i_0 ، با سرعت تنزل مفروضی، از یک به صفر تنزل کند با حرف یونانی τ (تاو) نشان می‌دهیم. بنابراین $\frac{R}{L}\tau = 1$ یا (۷) $\tau = \frac{L}{R}$ نسبت L/R باید دارای واحد ثانیه باشد زیرا نمای t $-R/L$ باید بدون واحد باشد. این مقدار زمان τ را «ثابت زمانی» می‌نامند و در شکل ۴-۵ نشان داده شده است.

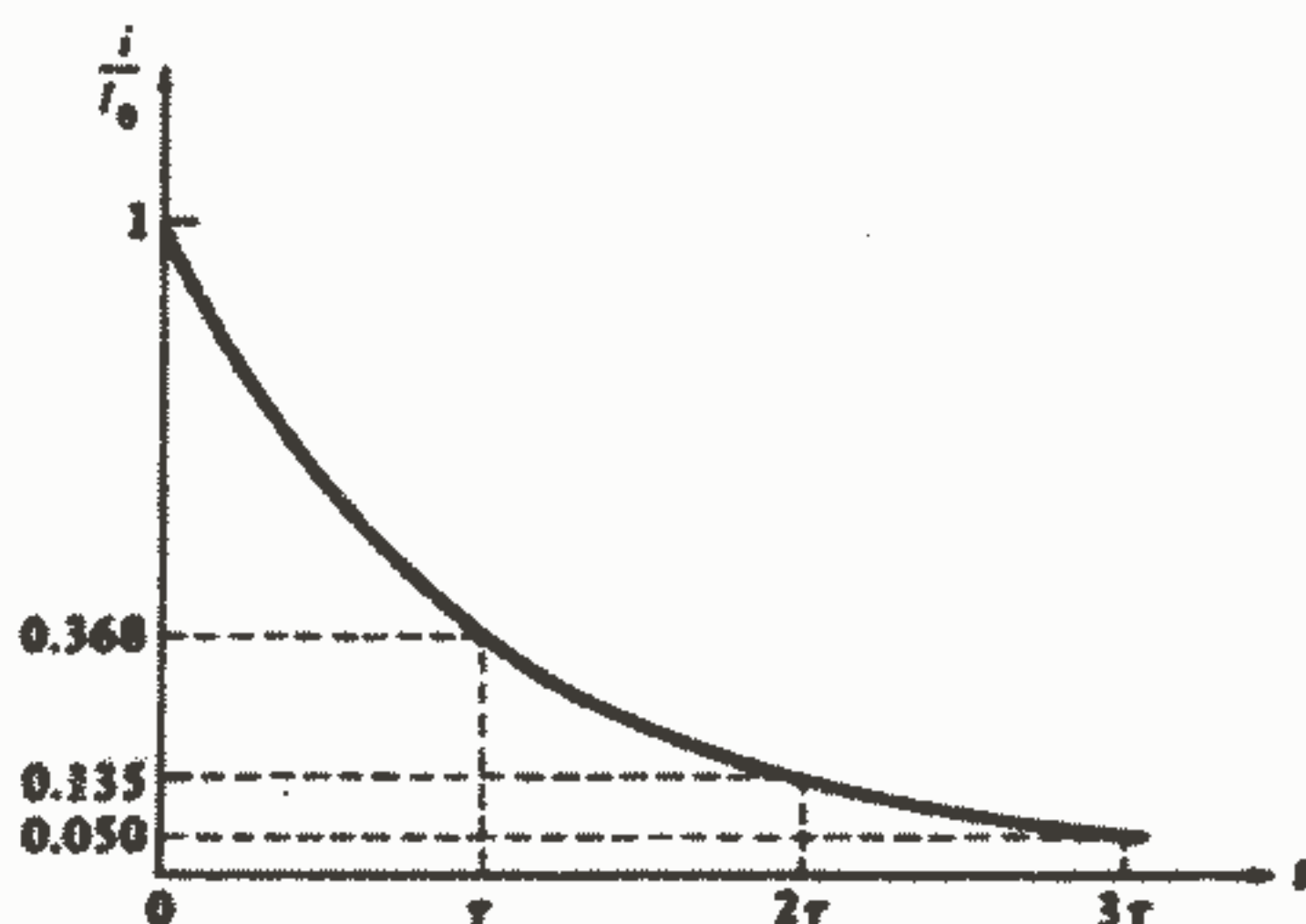
بدیهی است که ثابت زمانی یک مدار RL سری را به سادگی می‌توان از منحنی پاسخ به دست آورد و فقط کافی است که مماسی بر منحنی در $t = 0$ را رسم کنیم و محل تقاطع این



شکل ۴ - ۵: ثابت زمانی τ برای یک مدار سری RL برابر است با L/R و آن زمانی است که لازم است تا منحنی پاسخ با سرعتی که برابر با سرعت اولیهٔ تنزل آن باشد، به صفر تنزل کند.

خط مماس را با محور زمان تعیین کنیم. این روش اغلب روش مناسبی برای تقریب کردن ثابت زمانی از روی اسیلوسکوپ می‌باشد.

تفسیر مهم دیگری از ثابت زمانی τ با تعیین مقدار $i(t)/I_0$ در $t = \tau$ به دست می‌آید که داریم: $i(\tau) = 0,368 I_0$ یا $\frac{i(\tau)}{I_0} = e^{-1} = 0,368$. بنابراین در یک ثابت زمانی پاسخ به مقدار ۳۶٫۸ درصد مقدار اولیه‌اش تنزل پیدا می‌کند و مقدار τ را با توجه به این واقعیت هم می‌توان تعیین نمود که این امر در شکل ۵-۵ نشان داده شده است.



شکل ۵ - ۵: جریان در یک مدار RL سری در لحظات τ و 2τ و 3τ به ترتیب ۳۶٫۸ و ۱۳٫۵ و ۵ درصد مقدار اولیه‌اش است.

بهتر است که افت جریان در فواصل زمانی یک ثابت زمانی را اندازه بگیریم و با استفاده از یک ماشین حساب دستی و یا جدول توابع نمایی منفی نشان دهیم که $i(t)/I_0$ در $t = \tau$ برابر 0.368 و در $t = 5\tau$ برابر 0.0067 می باشد. در نقطه ای بین 3 تا 5 ثابت زمانی بعد از صفر، اکثر ما موافقیم که جریان بخش ناچیزی از مقدار اولیه اش می باشد. بنابراین اگر از ما پرسیده شود، «چقدر طول می کشد تا جریان به مقدار صفر تنزل کند؟» جواب ما می تواند این باشد: «در حدود پنج ثابت زمانی.» در پایان این زمان مقدار جریان کمتر از یک درصد مقدار اولیه اش می باشد.

چرا یک ثابت زمانی بزرگتر L/R منحنی پاسخی ایجاد می کند که آهسته تر تنزل می کند؟ بیایید اثر هر عنصر را بررسی کنیم. افزایش L باعث می شود که انرژی بیشتری به ازای جریان اولیه یکسانی ذخیره شود و این انرژی بیشتر احتیاج به زمان بیشتری برای تلف شدن در مقاومت دارد. ما همچنین می توانیم L/R را با کاهش R افزایش دهیم. در این حالت قدرتی که در مقاومت جاری می شود به ازای جریان اولیه یکسانی کمتر می باشد و باز هم زمان بیشتری لازم است تا انرژی ذخیره شده تلف شود.

بر حسب ثابت زمانی τ ، پاسخ مدار RL سری را می توان به طور ساده به صورت زیر نوشت:

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

تمرین

۴-۵. در یک مدار سری RL نسبت های زیر را پیدا کنید:

(a) $i(2\tau)/i(0)$ (b) $i(4\tau)/i(2\tau)$ (c) $i(t)/i(0)$ اگر $t/\tau = 1$ (d) $i(t) = 0.1i(0)$ اگر $t/\tau = 1$

$$i(t) - i(\tau) = 0.1i(0)$$

جواب: 0.1353 ، 0.1353 ، 0.368 ، 0.760

۴-۵ مدار RL عمومی تر

تعمیم نتایج به دست آمده برای مدار RL سری به مداری که شامل هر تعداد مقاومت و یک سلف باشد، مشکل نیست. برای اینکار توجه خود را به دو ترمینال سلف معطوف می کنیم و مقاومت معادل را در این دو ترمینال به دست می آوریم. به این ترتیب مدار به صورت حالت سری

مدارهای RL و RC بدون منبع ۲۰۱

ساده کاهش پیدا می کند. به عنوان مثال مدار شکل ۵-۶ را در نظر بگیرید. مقاومت معادل یک سلف می بیند عبارت است از:

$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

و در نتیجه ثابت زمانی برابر است با $\tau = L/R_{eq}$ و جریان سلف عبارت است از:

$$i_L = i_L(0)e^{-t/\tau} \quad (۸)$$

و رابطه (۸) را می توانیم جواب اساسی مسئله بنامیم. ممکن است ولتاژ یا جریانی به غیر از i_L مورد نیاز باشد، مانند جریان i_1 در مقاومت R_1 . ما همیشه می توانیم قوانین کیرشوف و قانون اهم را به قسمت مقاومتی مدار بدون هیچ مشکلی اعمال کنیم اما در این مدار تقسیم جریان، جواب سریعتری را ارائه می کند:

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L(0)e^{-t/\tau}$$

همچنین ممکن است اتفاق بیفتد که ما مقدار اولیه جریانی به غیر از جریان سلف را بدانیم. از آنجاییکه جریان یک مقاومت ممکن است تغییرات لحظه ای داشته باشد، ما لحظه بعد از هر تغییری را که ممکن است در $t = 0$ روی دهد با استفاده از علامت 0^+ نشان خواهیم داد که به زبان ریاضی تر، $i_1(0^+)$ حد راست $i_1(t)$ است وقتی که t به سمت صفر میل کند. بنابراین اگر مقدار اولیه i_1 را به صورت $i_1(0^+)$ به ما داده باشند، آنگاه بدیهی است که مقدار اولیه i_2 عبارت خواهد بود از:

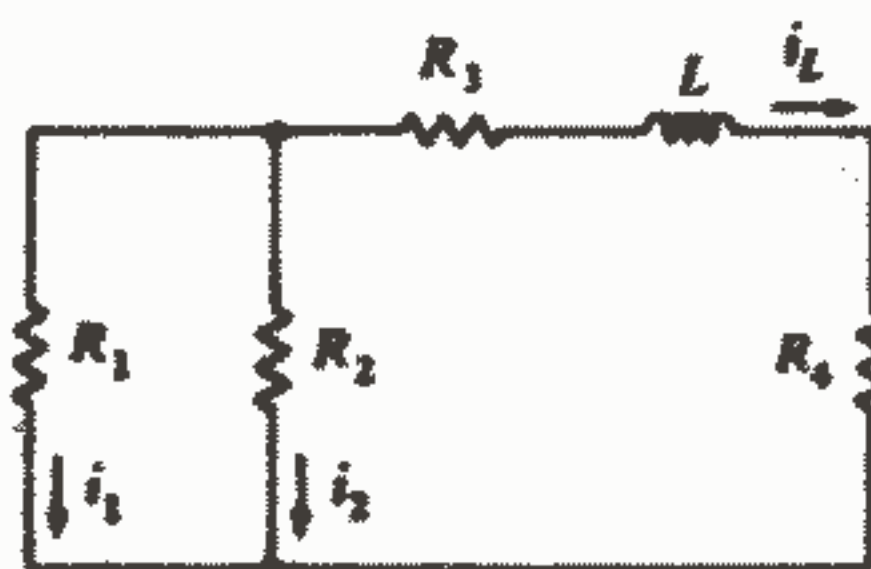
$$i_2(0^+) = i_1(0^+) \frac{R_1}{R_2}$$

از این مقادیر، می توانیم مقدار اولیه $i_L(0)$ (و یا $i_L(0^-)$ ، $i_L(0^+)$) را به دست آوریم:

$$i_L(0) = -[i_1(0^+) + i_2(0^+)] = -\frac{R_1 + R_2}{R_2} i_1(0^+)$$

و از آنجا برای i_2 خواهیم داشت:

$$i_2 = i_1(0^+) \frac{R_1}{R_2} e^{-t/\tau}$$



شکل ۵-۶: یک مدار بدون منبع که شامل یک سلف و چند

مقاومت است به وسیله تعیین ثابت زمانی $\tau = L/R_{eq}$ تحلیل شده

است.

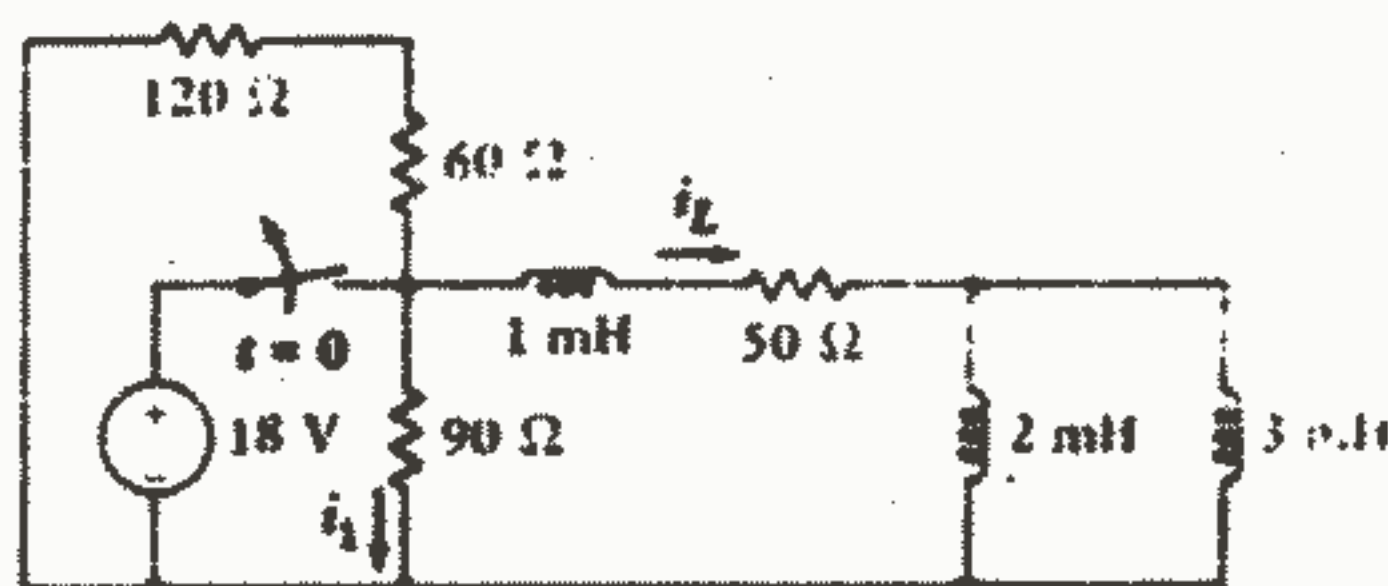
حال بیایید ببینیم که آیا می‌توانیم این رابطه را برای i_r مستقیماً به دست آوریم یا خیر. چون جریان سلف به طور نمایی میرا می‌شود، پس هر جریانی در سرتاسر مدار همین رفتار تابعی را خواهد داشت. این امر وقتی روشن می‌شود که جریان سلف را به عنوان یک منبع جریان که به یک شبکه مقاومتی اعمال شده است در نظر بگیریم. هر جریان یا ولتاژی در شبکه مقاومتی باید دارای وابستگی زمانی یکسانی باشد. با استفاده از این ایده‌ها می‌توانیم i_r را به صورت $i_r = Ae^{-t/\tau}$ بیان کنیم که در آن $\tau = L/R_{eq}$ می‌باشد و A را باید از اطلاعاتی که از مقدار اولیه i_r داریم تعیین کنیم. چون $i_1(0^+)$ معلوم است، پس ولتاژ دو سر R_1 ، R_2 هم معلوم است و داریم:

$$i_r(0^+) = i_1(0^+) R_1/R_2 \rightarrow i_r = i_1(0^+) R_1/R_2 e^{-t/\tau}$$

روشی مشابه مراحل فوق برای بسیاری از مسائل جواب سریعی را به دست می‌دهد. ابتدا یک وابستگی زمانی به صورت نمایی میرا برای پاسخ در نظر می‌گیریم و ثابت زمانی را به وسیله ترکیب مقاومتها پیدا می‌کنیم و جواب را با دامنه مجهولی می‌نویسیم و سپس دامنه را از شرایط اولیه معلومی که داریم تعیین می‌کنیم.

این روش را می‌توانیم برای مدارهایی که شامل یک مقاومت و چند سلف و یا مدارهای که شامل چند مقاومت و چند سلف می‌باشند هم اعمال کنیم زیرا با استفاده از ترکیب مقاومتها و سلفها می‌توانیم اینگونه مدارها را به صورت مدارهای ساده‌ای که فقط شامل یک سلف و یک مقاومت هستند تبدیل کنیم. به عنوان مثالی از اینگونه مدارها شکل ۵-۷ را در نظر می‌گیریم. بعد از $t = 0$ ، وقتی که منبع ولتاژ قطع می‌شود، به سادگی می‌توان سلف و مقاومت معادل را محاسبه نمود:

$$L_{eq} = 2 \times 3 / (2 + 3) + 1 = 2,2 \text{ mH}, R_{eq} = 90(60 + 120) / (90 + 180) + 50 = 110 \Omega$$



شکل ۵-۷: بعد از $t = 0$ این مدار به صورت یک مقاومت معادل 110Ω سری با سلف $L_{eq} = 2,2 \text{ mH}$ درمی‌آید.

و ثابت زمانی هم عبارت است از:

$$\tau = L_{eq}/R_{eq} = 2,2 \times 10^{-3} / 110 = 20 \mu S$$

بنابراین فرم پاسخ طبیعی به صورت $Ae^{-50000t}$ می باشد. وقتی که منبع مستقل وصل باشد $i_L(0^-)$ برابر با $\frac{18}{5}$ و یا $0,36A$ می باشد در حالیکه i_1 برابر $\frac{18}{9}$ و یا $0,2A$ می باشد. در $t = 0^+$ جریان i_L هنوز هم باید $0,36A$ باشد اما i_1 به مقدار جدیدی که به وسیله $i_L(0^+)$ تعیین می شود، جهش خواهد کرد. بنابراین:

$$i_1(0^+) = -i_L(0^+) \frac{18}{27} = -0,24A$$

و در نتیجه داریم:

$$i_1 = -0,24e^{-50000t} (t \geq 0), i_1 = 0,2 (t < 0), i_L = 0,36 (t < 0), i_L = 0,36e^{-50000t} (t \geq 0)$$

در مدارهای ایده آل که در آنها یک حلقه سلفی خالص، مانند سلفهای $2,3mH$ در شکل ۵-۷، وجود دارد، جریان ثابتی وقتی که $t \rightarrow \infty$ در حلقه دور خواهد زد. جریان هر یک از این سلفها دیگر الزاماً به شکل $Ae^{-t/\tau}$ نیست، بلکه به فرم کلی تر $A_1 + A_2 e^{-t/\tau}$ می باشد. این حالت خاص نه چندان مهم در مسئله ۱۴ آخر همین فصل ارائه شده است.

ما تا کنون روش پیدا کردن پاسخ طبیعی هر مداری را که بتوان به وسیله یک مقاومت معادل سری با یک سلف معادل نشان داد، مورد توجه قرار داده ایم. مداری که شامل چند مقاومت و چند سلف باشد به طور کلی دارای فرمی نیست که بتوان مقاومتها و سلفها را به صورت عناصر معادل ترکیب نمود و در این صورت جمله ای به صورت تابع نمایی منفی منفرد و یا ثابت زمانی منفردی برای مدار وجود نخواهد داشت. در عوض به طور کلی چندین جمله نمایی منفی وجود خواهد داشت که تعداد این جملات برابر با تعداد سلفهایی است که بعد از اینکه کلیه ترکیبهای ممکنه برای سلفها انجام شد، در مدار باقی می ماند. پاسخ طبیعی این مدارهای پیچیده را بعداً مطالعه خواهیم کرد. یکی از روشهایی که در اواخر فصل ۱۳ خواهد آمد، بر اساس مفهوم فرکانس مختلط می باشد. موثرترین و کارآمدترین روشها بر اساس تبدیل لاپلاس و فوریه می باشد که در فصل ۱۸ و ۱۹ خواهد آمد.

تمرین

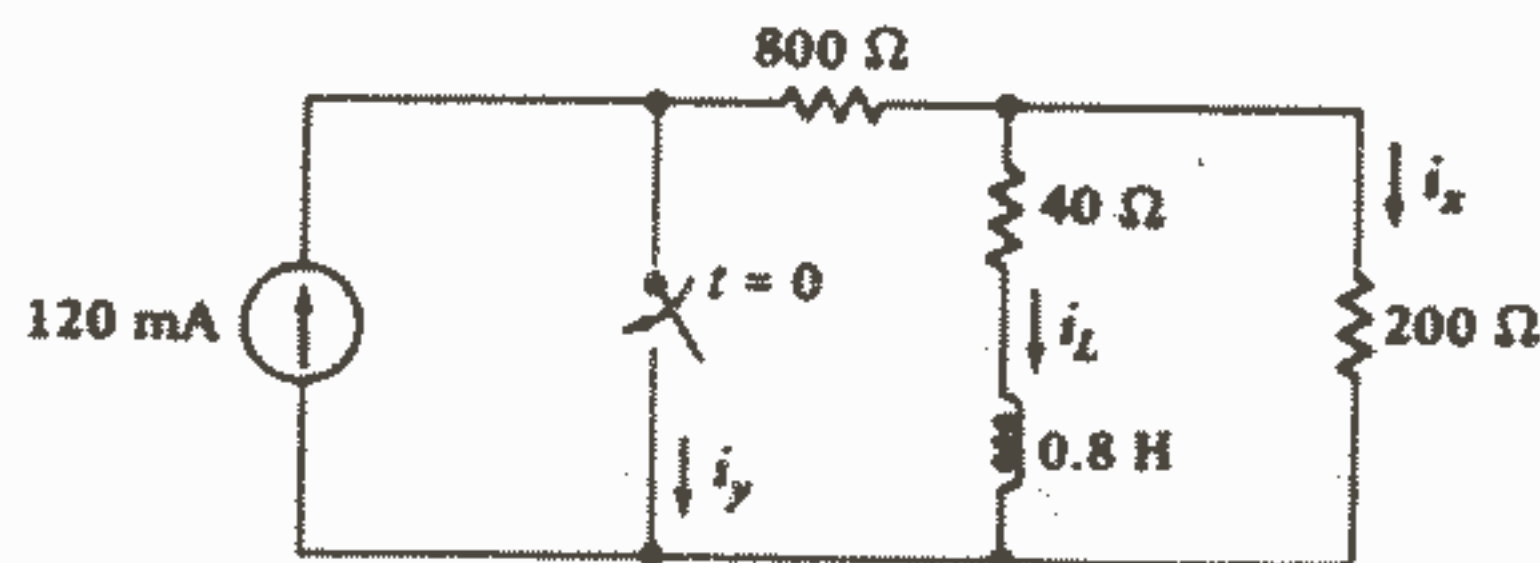
۵-۵ بعد از $t = 0$ هر یک از مدارهای شکل ۵-۲ بدون منبع می‌شوند. مقادیر i, v را در $t = 50 \mu s$ در حالات زیر پیدا کنید: (a) در شکل ۵-۲a (b) در شکل ۵-۲b (c) در شکل ۵-۲c

جواب: $283 \text{ mA}, -5.67 \text{ V}, 2.71 \text{ mA}, 0.340 \text{ V}, -182 \text{ mA}, -14.56 \text{ V}$

۵-۶ مقدار جریانهای زیر را در مدار شکل ۵-۸ در لحظه $t = 5 \text{ ms}$ پیدا کنید:

(a) i_L (b) i_x (c) i_y

جواب: $28.7 \text{ mA}, -22.9, 114.3$

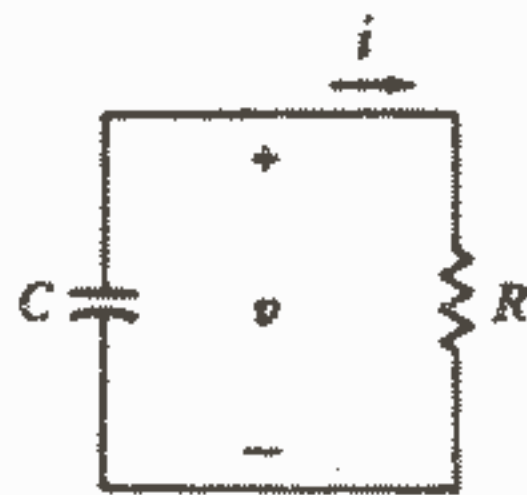


شکل ۵-۸: به تمرین ۵-۶ مراجعه کنید.

۵-۵- مدار RC ساده

ترکیب سری یک مقاومت و خازن اهمیت عملی بیشتری نسبت به ترکیب سری سلف و مقاومت دارد. وقتی که مهندسین در مورد استفاده از خازن و سلف کاملاً آزادی انتخاب داشته باشند مثلاً در شبکه کوپلینگ یک تقویت کننده الکترونیکی و یا شبکه‌های جبران سازی سیستمهای کنترل اتوماتیک و یا سنتر یک شبکه متعادل کننده مخابراتی، آنها حتی الامکان RC را به جای RL انتخاب می‌کنند. دلیل این انتخاب افت کمتر خازنهای واقعی، قیمت کمتر آنها، تقریب بهتری که مدل ریاضی آنها نسبت به عنصر واقعی ارائه می‌کند و اندازه کوچکتر و وزن سبکتری است که خازنها در مدارهای مجتمع و هیبرید از خود نشان می‌دهند.

حال بیایید ببینیم تحلیل مدار RC موازی (و یا سری) چقدر به تحلیل مدار RL متناظر آن نزدیک است. این مدار RC در شکل ۵-۹ نشان داده شده است.



شکل ۹ - ۵: یک مدار RC موازی که در آن باید $v(t)$ را با توجه به اینکه $v(0) = V_0$ می باشد، تعیین کنیم.

با فرض $v(0) = V_0$ فرض می کنیم که انرژی اولیه ای در خازن ذخیره شده باشد. جریان کلی که از گره بالایی مدار خارج می شود باید مساوی صفر باشد، بنابراین:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

که اگر طرفین را بر C تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \quad (۹)$$

معادله (۹) فرم آشنایی دارد که معادله (۱) هم به همین فرم بود:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad (۱)$$

و نشان می دهد که اگر i را با v و L/R را با RC جایگزین کنیم همان معادله ای به دست می آید که قبلاً بررسی کردیم. این امر به خاطر این است که مدار RC که اکنون تحلیل می کنیم متناظر مدار RL است که قبلاً بررسی کردیم. این تناظر الزام می دارد که اگر مقاومت یک مدار با معکوس مقاومت مدار دیگر برابر باشد و L از نظر عددی برابر C باشد، $i(t)$ ، $v(t)$ دارای تابع یکسانی باشند بنابراین پاسخ مدار RL یعنی $i(t) = i(0)e^{-Rt/L} = I_0 e^{-Rt/L}$ ما را قادر می سازد که بلافاصله بنویسیم:

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC} \quad (۱۰)$$

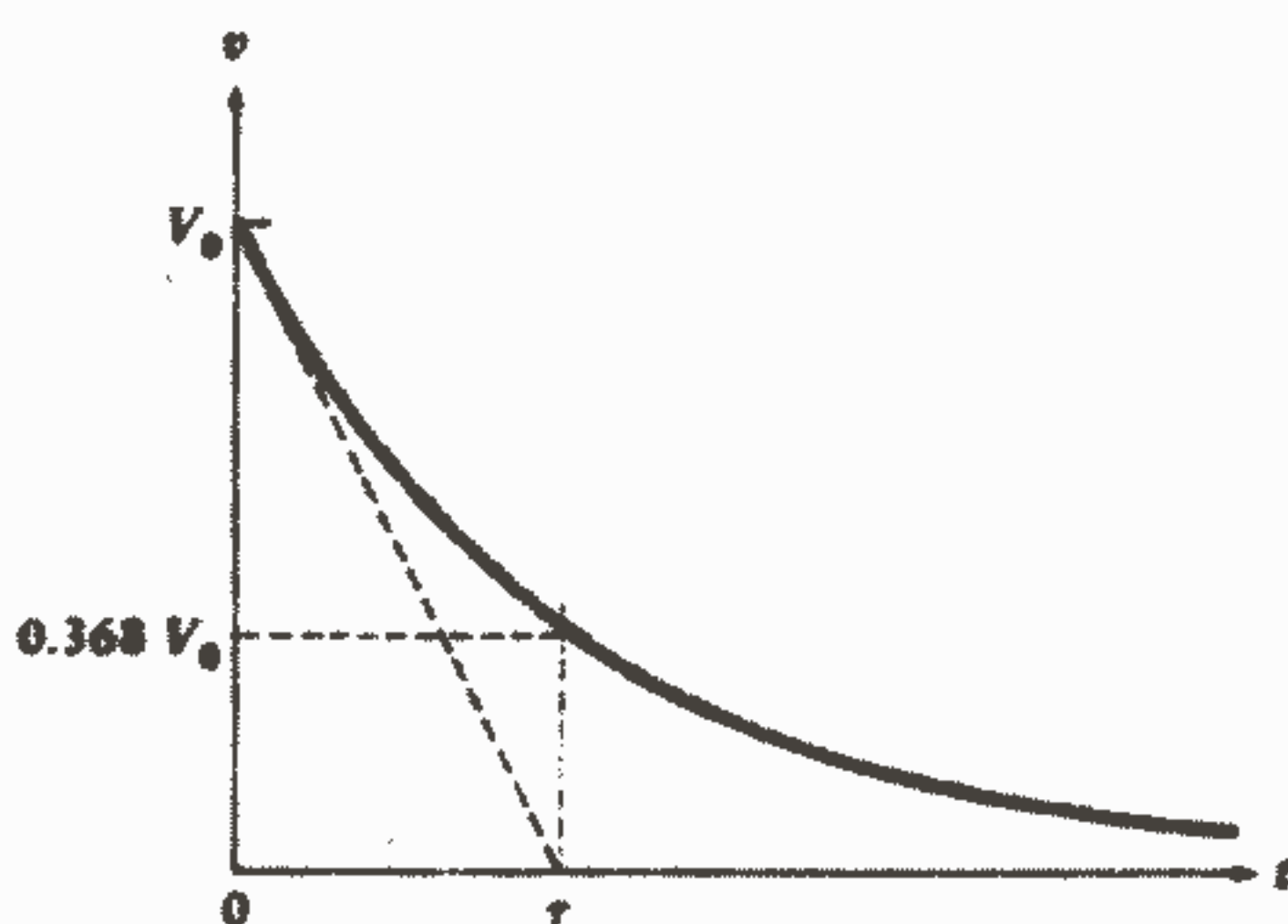
حال بیایید فرض کنیم که در مدار RC مان جریان i را به جای ولتاژ v به عنوان متغیر انتخاب می کردیم. در این صورت با اعمال قانون ولتاژ کیرشوف یک معادله انتگرالی به جای یک معادله دیفرانسیل به دست می آوریم یعنی: $\int_{t_0}^t i dt - v(t_0) + Ri = 0$ اگر چه با مشتق گیری از دو طرف این معادله به دست می آوریم: $\frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} = 0$ (۱۱) که با جایگزینی i به وسیله v/R خواهیم داشت: $\frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} = 0$ که این همان معادله (۹) می باشد. معادله (۱۱) را

می توانستیم به عنوان نقطه شروعی به کار ببریم اما در این صورت تناظر به طور طبیعی مشهود نمی شد.

حال بیایید ماهیت فیزیکی پاسخ ولتاژ مدار RC را که به وسیله معادله (۱۰) بیان شده است، مورد بحث قرار دهیم. در لحظه $t = 0$ شرایط اولیه به دست می آید و وقتی که t بی نهایت می شود ولتاژ به سمت صفر میل می کند. این نتیجه اخیر با این تصور ما که اگر ولتاژی دو سر خازن باقی بماند آنگاه جریان انرژی به داخل مقاومت و اتلاف آن به صورت حرارت ادامه پیدا می کند، توافق دارد. بنابراین ولتاژ نهایی صفر الزامی است. ثابت زمانی مدار RC را می توان با استفاده از تناظر از رابطه ثابت زمانی مدار RL به دست آورد و یا اینکه آن را به سادگی با توجه به زمانیکه پاسخ به 36.8% درصد مقدار اولیه اش افت می کند به دست آورد. یعنی:

$$t/RC = 1 \rightarrow t = RC \quad (12)$$

آشنایی ما با تابع نمایی منفی و مفهوم ثابت زمانی t ما را قادر می سازد که منحنی پاسخ شکل ۱۰-۵ را به راحتی رسم کنیم. مقادیر بزرگتر R یا C ثابت زمانی بزرگتر و اتلاف انرژی کندتر را ارائه می کند. مقاومت بزرگتر قدرت کوچکتري را به ازای ولتاژ معلومی در دو سرش تلف می کند و در نتیجه نیاز به زمان بزرگتری برای تبدیل انرژی ذخیره شده به حرارت دارد و خازن بزرگتر انرژی بیشتری را به ازای ولتاژ معلومی در دو سرش ذخیره می کند و باز هم نیاز به زمان بزرگتر برای اتلاف این انرژی اولیه دارد.



شکل ۱۰-۵: ولتاژ خازن $v(t)$ در مدار RC موازی به صورت تابعی از زمان رسم شده است. مقدار اولیه $v(t)$ برابر V_0 فرض شده است.

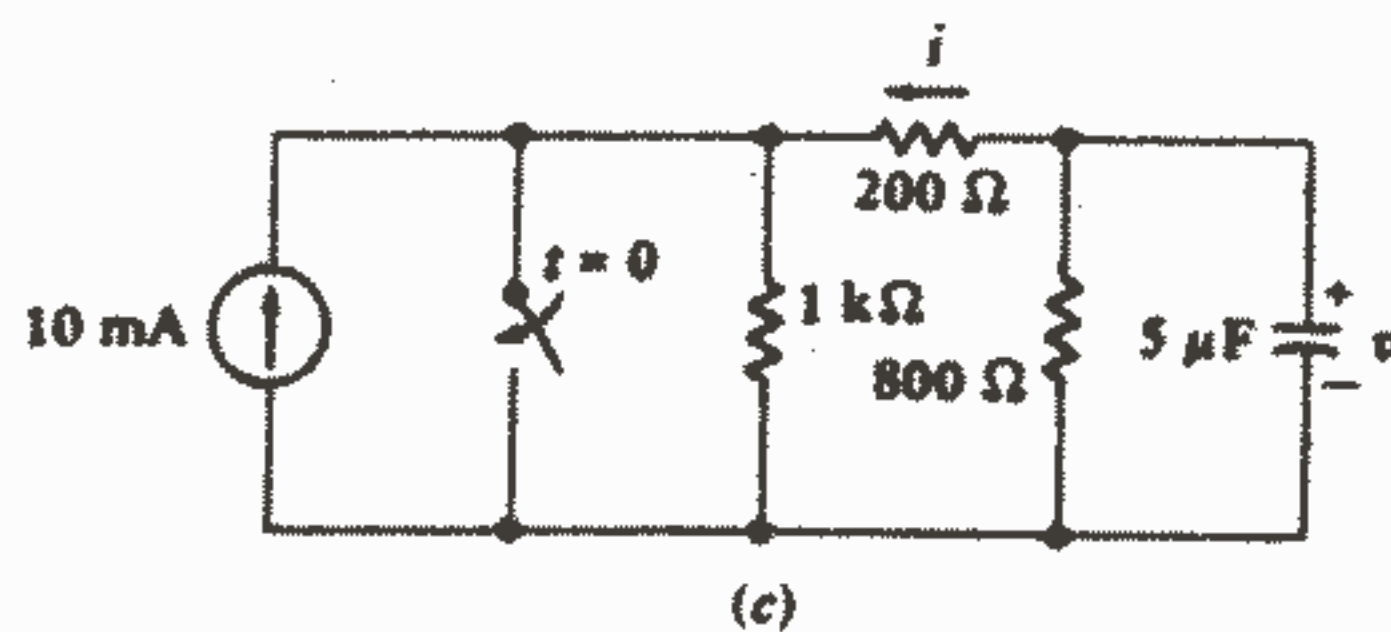
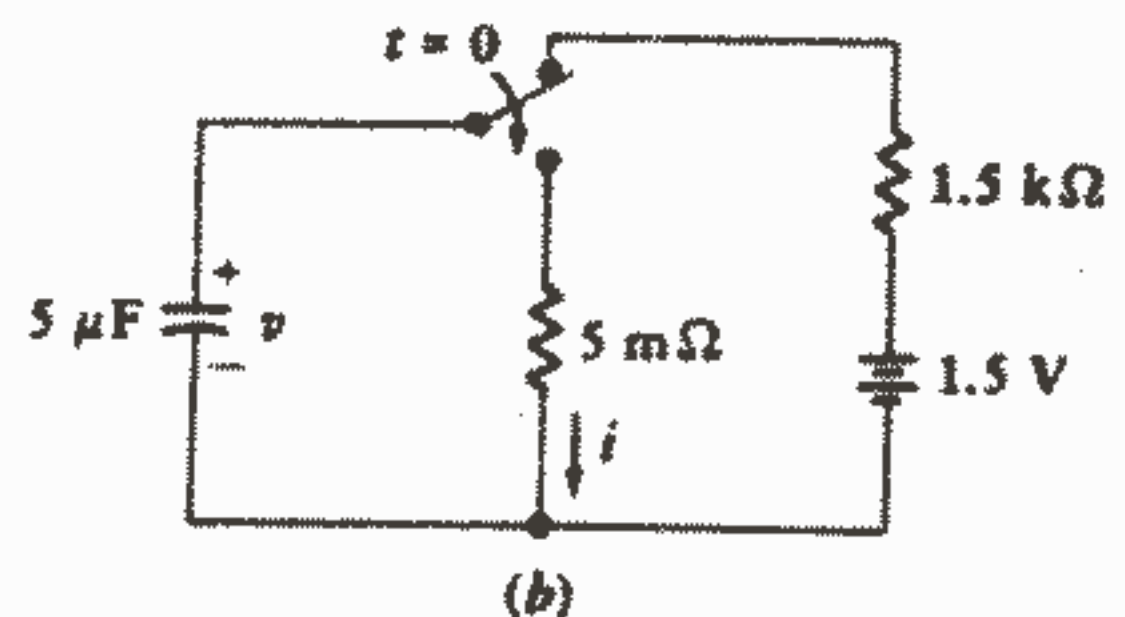
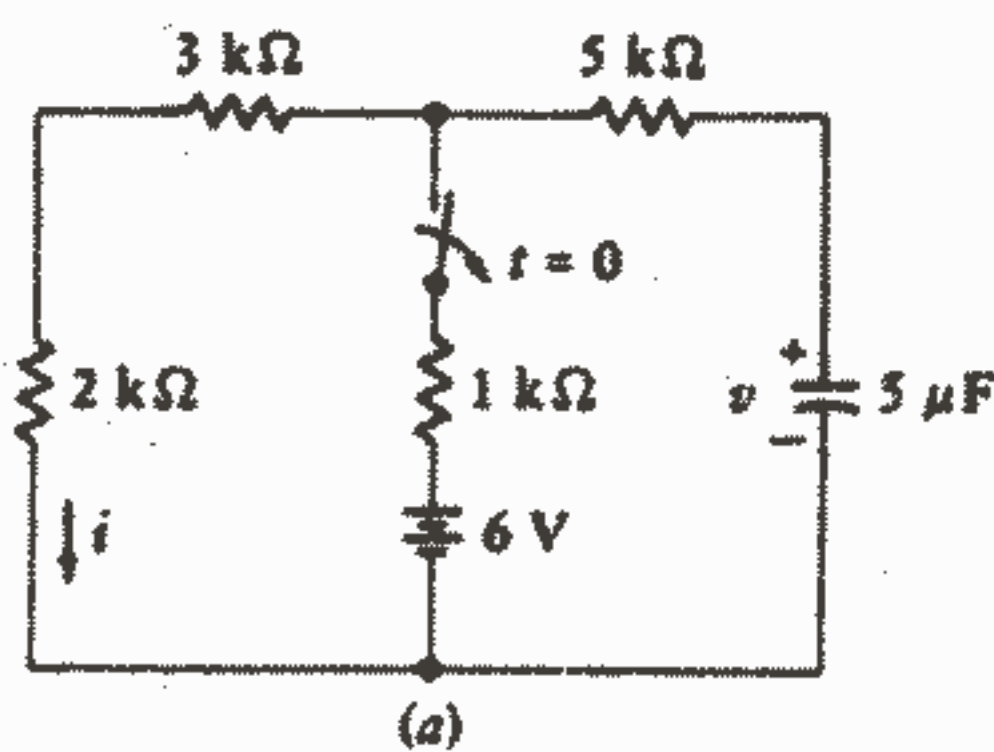
تمرین

۵-۷. $v(0^+)$ را برای هر یک از مدارهای شکل ۵-۱۱ تعیین کنید.

جواب: $5V, 1.5, 4$

۵-۸. $i(0^+)$ را برای هر یک از مدارهای شکل ۵-۱۱ پیدا کنید.

جواب: $0.5mA, 300000, 20$



شکل ۵-۱۱: به تمرینات ۵-۷ و ۵-۸ مراجعه کنید.

۵-۹. مقادیر عناصر در شکل ۵-۹ عبارتند از: $C = 2\mu F$, $R = 500\Omega$. اگر در

لحظه $t = 5\mu S$, $v = 20V$ باشد، پیدا کنید: (a) $v(10\mu S)$, (b) قدرتی که به وسیله خازن

در $t = 12\mu S$ تحویل داده می شود. (c) زمانی که در آن انرژی ذخیره شده در خازن برابر با

$1.5\mu J$ می شود.

جواب: $12, 13V, 197.3mW, 9.90\mu S$

۵-۶. مدار RC کلی تر

اکثر مدارهای RC که ما مایلیم پاسخ طبیعی آنها را پیدا کنیم حاوی بیش از یک مقاومت

منفرد و خازن منفرد می باشند. درست مانند کاری که برای مدارهای RL انجام دادیم، ابتدا

حالاتی را که در آن می‌توان مدار داده شده را به مداری شامل یک مقاومت معادل و یک خازن معادل تقلیل داد، بررسی می‌کنیم.

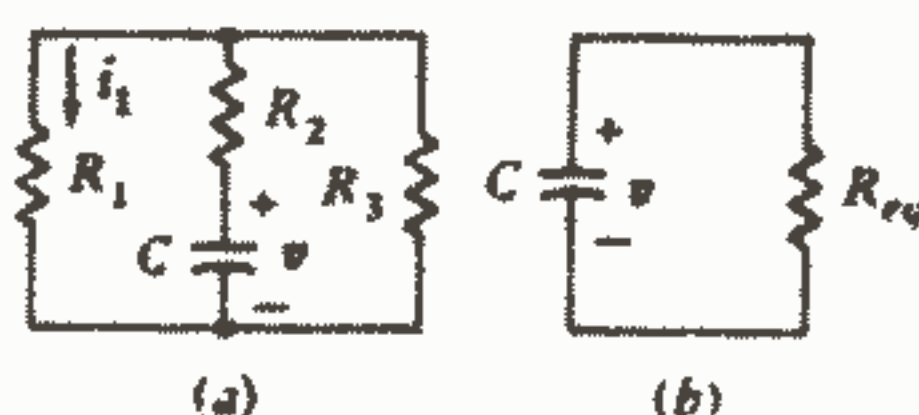
بیایید فرض کنیم که با مداری که حاوی فقط یک خازن و تعداد زیادی مقاومت باشد، مواجهیم. می‌توان شبکه مقاومتی دو ترمینالی را که در دو سر خازن می‌باشد با یک مقاومت معادل جایگزین نمود و فوراً رابطه ولتاژ دو سر خازن را نوشت. به عنوان مثال، مدار شکل ۵-۱۲a را می‌توان به صورت مدار شکل ۵-۱۲b ساده نمود، که با استفاده از آن می‌توان نوشت:

$$v = V_0 e^{-t/R_{eq}C} \quad \text{که در آن داریم: } v(0) = V_0, R_{eq} = R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3)$$

ولتاژی در قسمت مقاومتی مدار باید دارای فرم $A e^{-t/R_{eq}C}$ باشد که در آن A مقدار اولیه آن ولتاژ یا جریان می‌باشد بنابراین جریان i_1 را به عنوان مثال می‌توان به صورت $i_1 = i_1(0^+) e^{-t/\tau}$ بیان نمود که در آن داریم: $\tau = (R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3)) C$ و $i_1(0^+)$ را هم می‌توان از شرایط اولیه تعیین نمود. می‌توانیم تصور کنیم که خازن به وسیله یک منبع مستقل dc، $v(0)$ ، جایگزین شود، بنابراین داریم:

$$i_1(0^+) = \frac{v(0)}{R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3)} \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

که با ترکیب نمودن این نتایج، پاسخ به دست می‌آید.



شکل ۱۲ - ۵: (a) مداری که شامل یک خازن و چند مقاومت

می‌باشد. (b) مقاومت‌ها به وسیله یک مقاومت معادل

منفرد جایگزین شده‌اند که به صورت ثابت زمانی مدار

آشکار می‌باشد.

حالت خاص دیگر مدارهایی هستند که شامل یک مقاومت و چندین خازن می‌باشند. ولتاژ مقاومت را می‌توان به سادگی با تعیین مقدار خازن معادل و تعیین ثابت زمانی به دست آورد. یک بار دیگر عناصر کامل از نظر ریاضی، ممکن است ما را به پدیده‌ای رهنمون شوند که در یک

مدار فیزیکی وجود ندارد. در اینجا دو خازن سری ممکن است دارای ولتاژهای مساوی و مختلف علامه باشند ولی هنوز هم ولتاژ دو سر ترکیب، صفر باشد. بنابراین فرم کلی ولتاژ دو سر هر یک عبارت است از $A_1 + A_2 e^{-t/\tau}$ در حالیکه ولتاژ دو سر ترکیب سری $A e^{-t/\tau}$ می باشد. مثالی برای این وضعیت در مسئله ۲۷ آخر همین فصل ارائه شده است.

بعضی از مدارهای حاوی تعدادی مقاومت و تعدادی خازن را می توان با یک مدار معادل که فقط حاوی یک مقاومت و یک خازن باشد جایگزین نمود و لازم است که مدار اصلی به گونه ای باشد که بتوان آن را به دو قسمت تقسیم نمود که یک قسمت شامل مقاومتها و قسمت دیگر شامل خازنها باشد و دو قسمت فقط به وسیله دو هادی ایده آل به هم وصل شده باشند. این امر به طور عمومی امکان ندارد.

مدارهای پیچیده تر را که نتوان به مدارهای RC سری ساده تقلیل داد، در فصول ۱۳ و ۱۸ و ۱۹ مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

تمرین

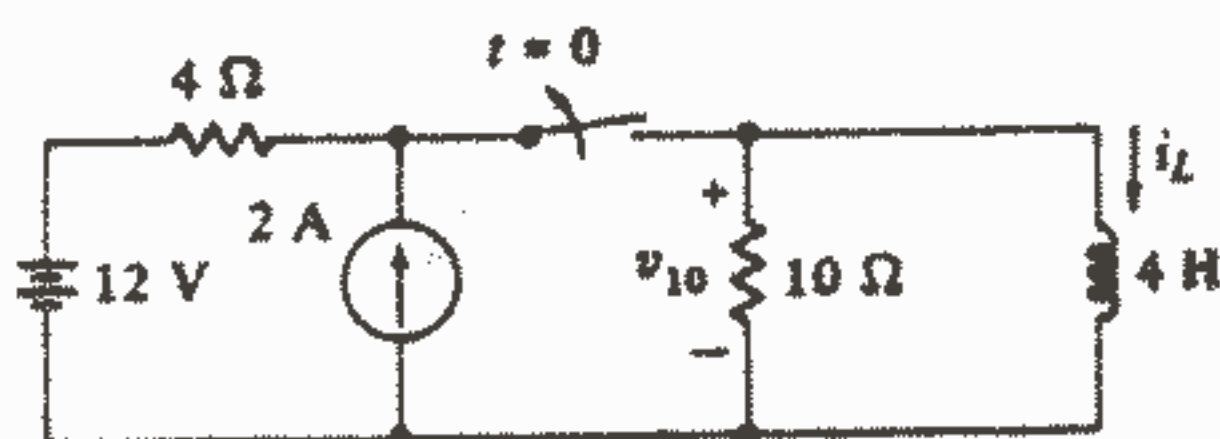
۱۰-۵. در مدارهای زیر مقادیر i ، v را پیدا کنید: (a) شکل ۵-۱۱a در $t = 3\text{ms}$ (b) شکل ۵-۱۱b در $t = 0.1\mu\text{s}$ (c) شکل ۵-۱۱c در $t = 1\text{ms}$

جواب: 2.477mA ، 0.274mA ، 0.275V ، 0.49A ، 1.146V ، 5.73mA

مسائل

۱- در شکل ۵-۱۳ کلید پس از مدت طولانی بسته بودن، در لحظه $t = 0$ باز می شود:

(a) $i_L(0^+)$ ، $v_L(0^+)$ را پیدا کنید. (b) $i_L(t)$ را پیدا کنید. (c) $v_{10}(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۵-۱۳: به مسئله ۱ و ۱۸ مراجعه کنید.

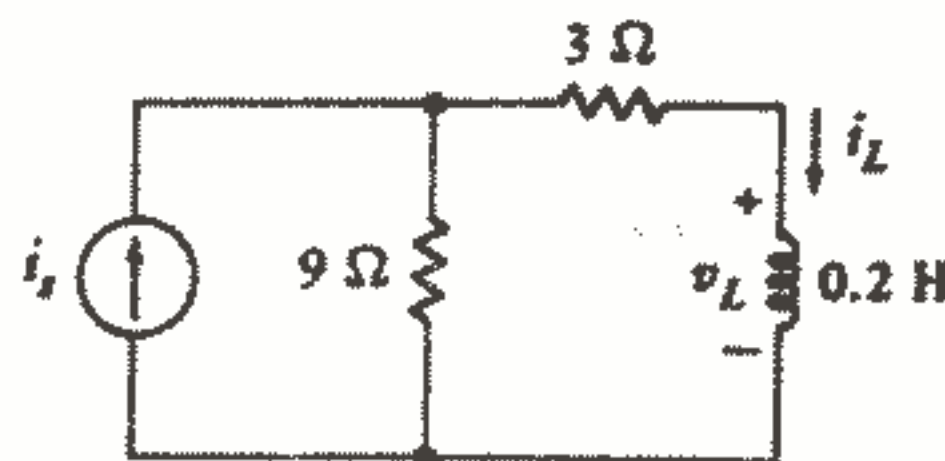
۲- در شکل ۵-۱۴ فرض کنید $i_s = 12\text{A}$ برای $t < 0$ و صفر باشد برای $t > 0$.

(a) $i_L(t)$ را پیدا کنید و آن را برای $0 < t < 5\text{ms}$ رسم کنید.

(b) $v_L(t)$ را پیدا کنید و آن را برای همان فاصله زمانی رسم کنید.

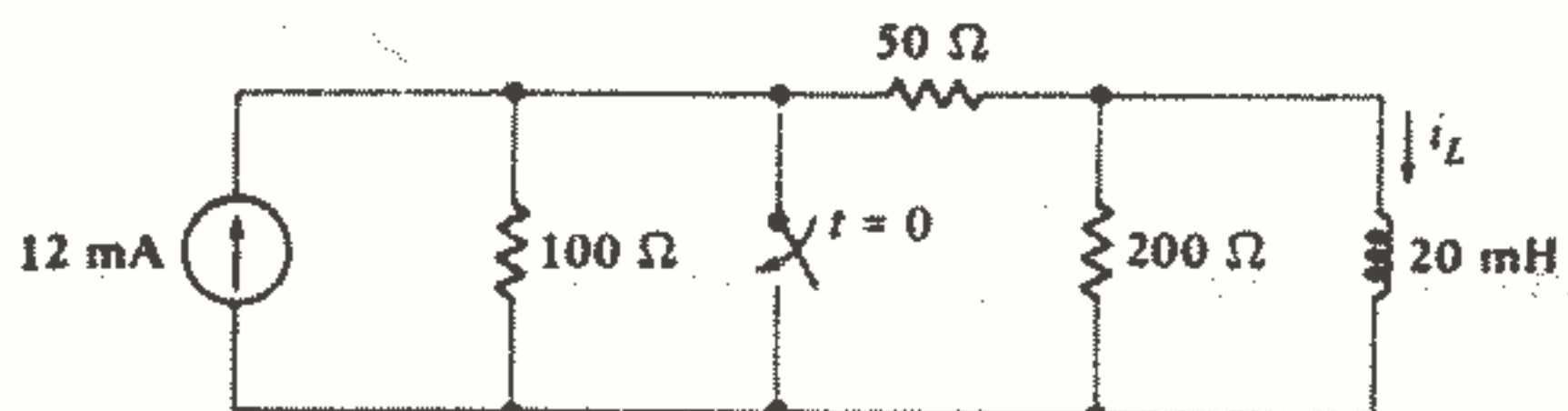
۳ - (a) یک سلف 0.2 H با یک مقاومت 25Ω موازی می‌باشد. اگر $i_L(0) = 5\text{ A}$ آنگاه $i_L(t)$ را پیدا کنید و همچنین مقدار t ، $t = t_1$ را که به ازای آن $i_L = 1\text{ A}$ می‌شود، پیدا کنید.

(b) در این لحظه یک مقاومت 5Ω به طور موازی با مقاومت 25Ω وصل می‌شود. رابطه $i_L(t)$ را برای $t < t_1$ بنویسید و مقدار t ، $t = t_2$ را که در آن $i_L = 1\text{ mA}$ را پیدا کنید.



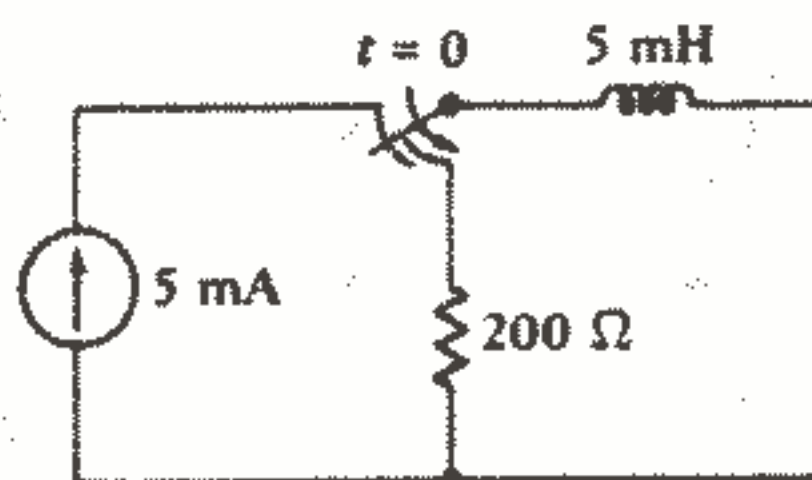
شکل ۱۴ - ۵: به مسئله ۲ مراجعه کنید.

۴ - برای مدار شکل ۱۵ - ۵، $i_L(t)$ را پیدا کنید و آن را برای $t > 0$ رسم کنید.



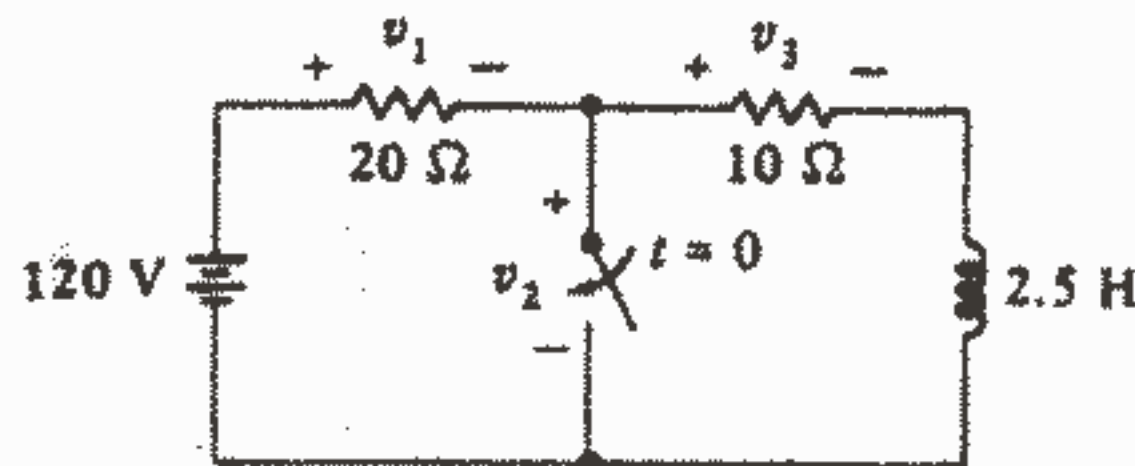
شکل ۱۵ - ۵: به مسئله ۴ مراجعه کنید.

۵ - انرژی ذخیره شده در سلف شکل ۱۶ - ۵ را بیست میکروثانیه بعد از تغییر وضعیت کلید پیدا کنید.



شکل ۱۶ - ۵: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

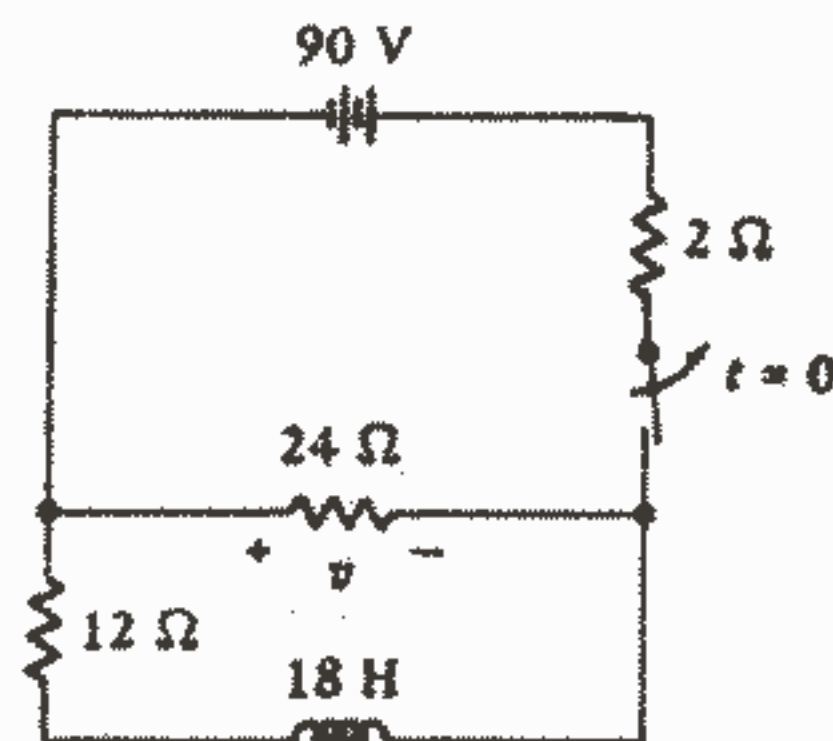
۶- (a) در شکل ۱۷-۵ جریان سلف را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید و منحنی‌های v_1 و v_2 و v_3 را نسبت به زمان برای $1 < t < 10$ - رسم کنید، اگر کلید دیگری یک مقاومت 10Ω دیگر را با مقاومت 10Ω اولیه در لحظه $t = 0, 25S$ موازی کند.



شکل ۱۷-۵: به مسئله ۶ مراجعه کنید.

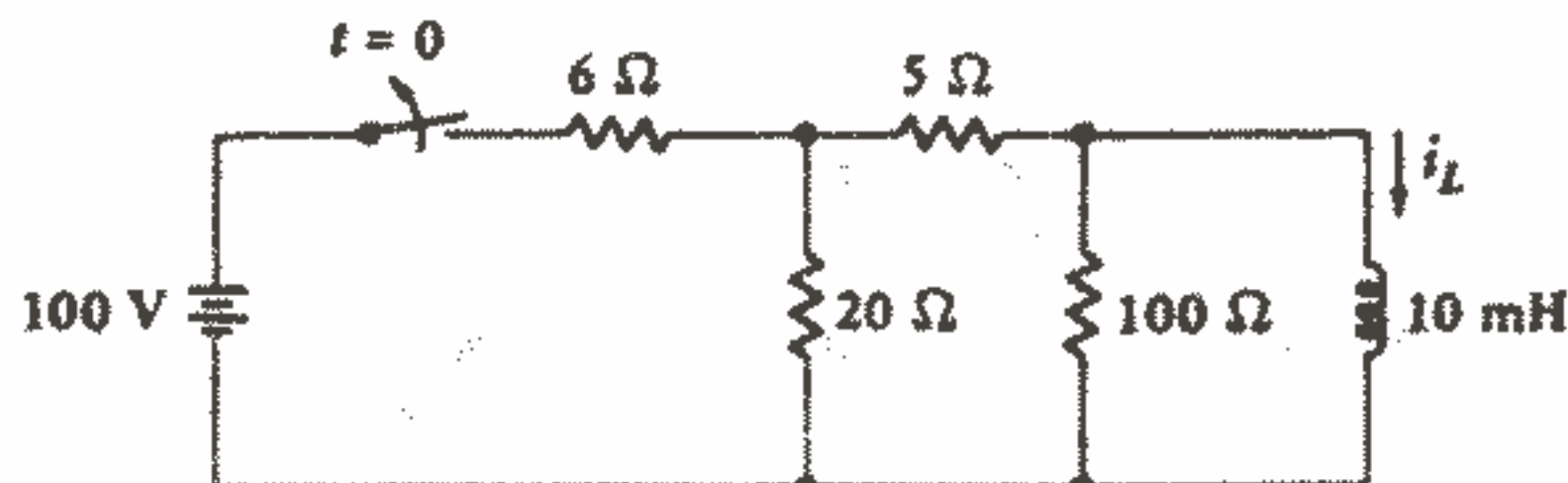
۷- یک مدار RL بدون منبع شامل یک سلف $50H$ می‌باشد که در یک مقاومت 20Ω تخلیه می‌شود. دامنه جریان سلف در $t = 2S$ برابر $18A$ می‌باشد. (a) چه زمانی انرژی ذخیره شده در سلف دو برابر مقدار آن در $t = 2S$ می‌باشد؟ (b) در چه لحظه‌ای قدرت تلف شده در مقاومت برابر $1KW$ می‌باشد؟

۸- کلید مدار شکل ۱۸-۵ در لحظه $t = 0$ باز می‌شود. (a) $v(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید (b) $v(t)$ را برای $1 < t < 10$ - رسم کنید.



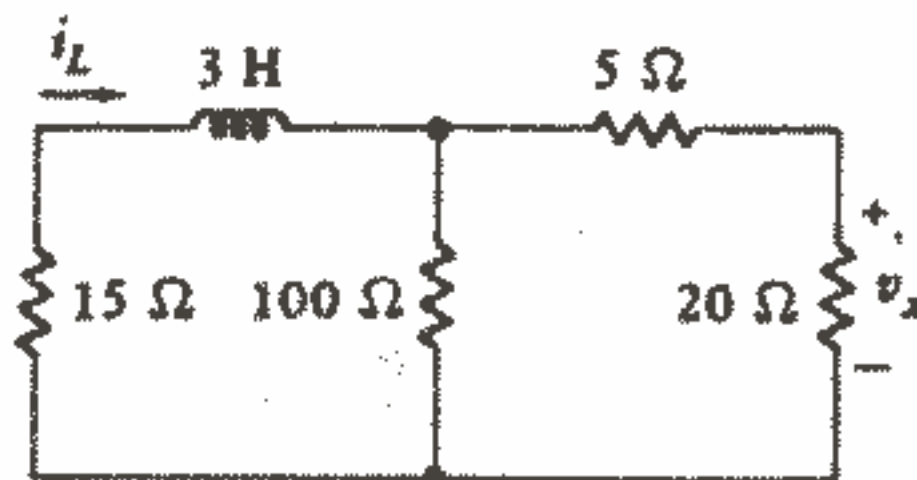
شکل ۱۸-۵: به مسئله ۸ مراجعه کنید.

- ۹- در شکل ۵-۱۹ باتری در $t = 0$ قطع می‌شود. (a) $i_L(0^-)$ را پیدا کنید. (b) $i_L(0^+)$ را پیدا کنید. (c) مقاومت معادل تونن را که به وسیله سلف در زمان $t > 0$ دیده می‌شود پیدا کنید. (d) τ را پیدا کنید. (e) $i_L(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید.



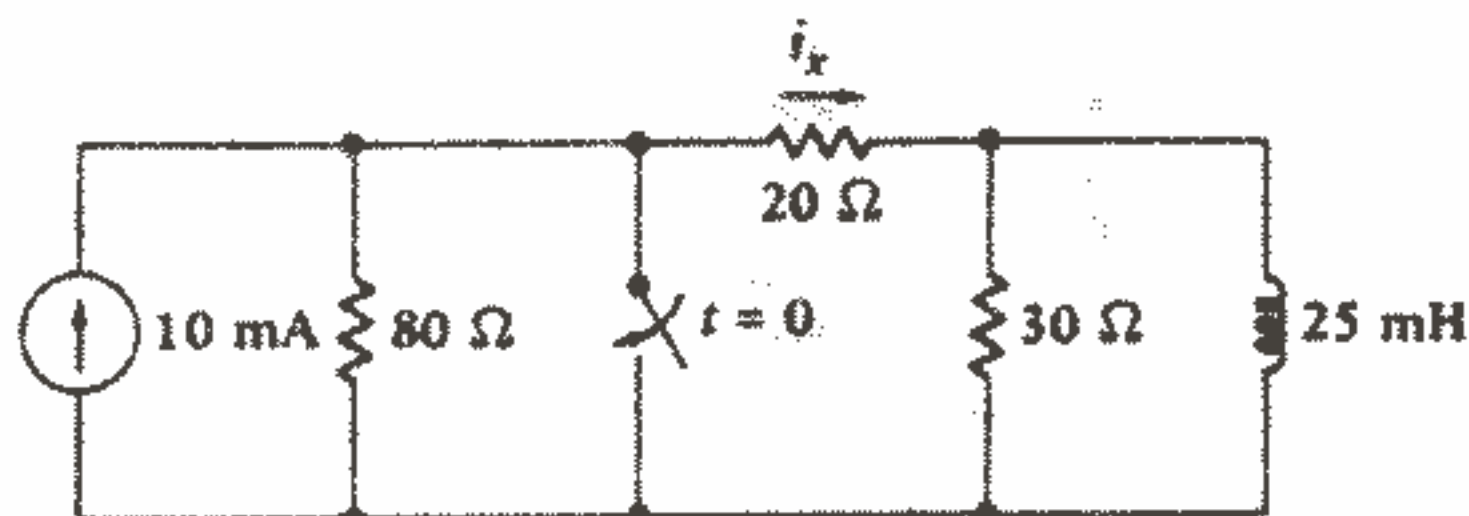
شکل ۵-۱۹: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

- ۱۰- در شکل ۵-۲۰ فرض کنید $i_L(0) = 10A$. $v_x(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید و آن را در فاصله زمانی سه ثابت زمانی رسم کنید.



شکل ۵-۲۰: به مسئله ۱۰ مراجعه کنید.

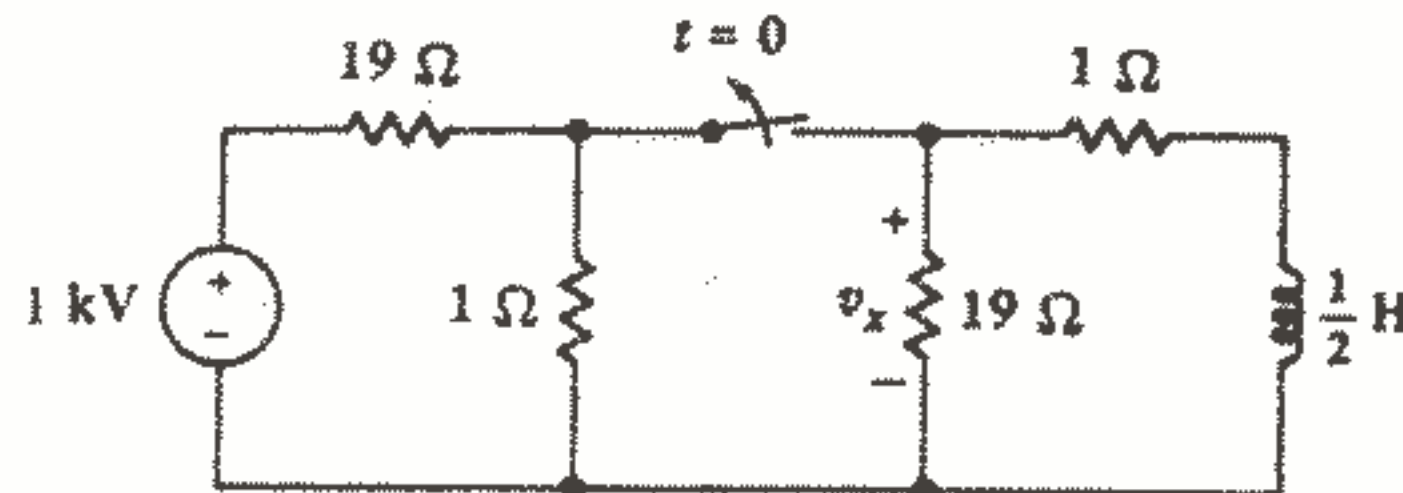
- ۱۱- به شکل ۵-۲۱ مراجعه کنید و $i_x(t)$ را برای همه زمانها پیدا کنید. مقدار عددی آن را در لحظات $t = -2, 0^-, 0^+, 2, 4ms$ پیدا کنید.



شکل ۵-۲۱: به مسئله ۱۱ مراجعه کنید.

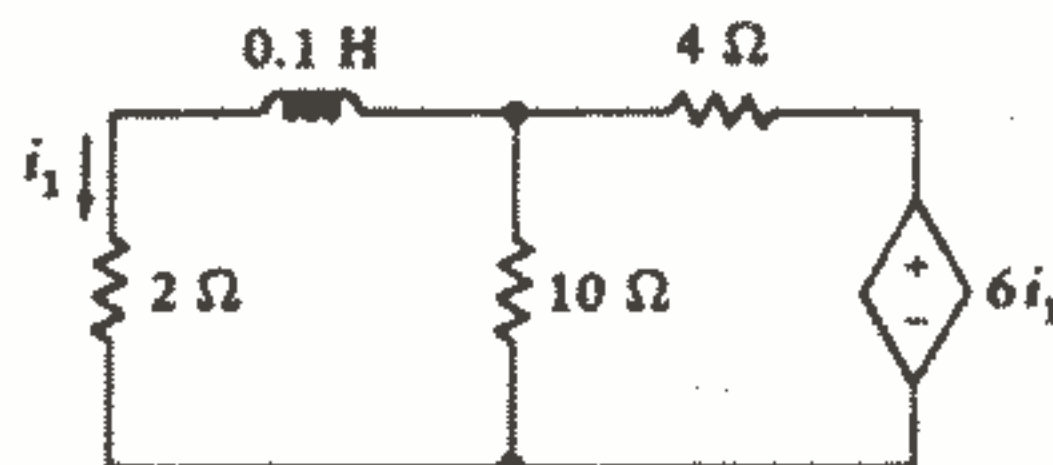
۲۱۳ مدارهای RL و RC بدون منبع

۱۲ - کلید شکل ۲۲ - ۵ در $t = 0$ بعد از مدت طولانی بسته بودن، باز می‌شود. v_x را در $t = -10, 0, 10, 20 \text{ ms}$ پیدا کنید.



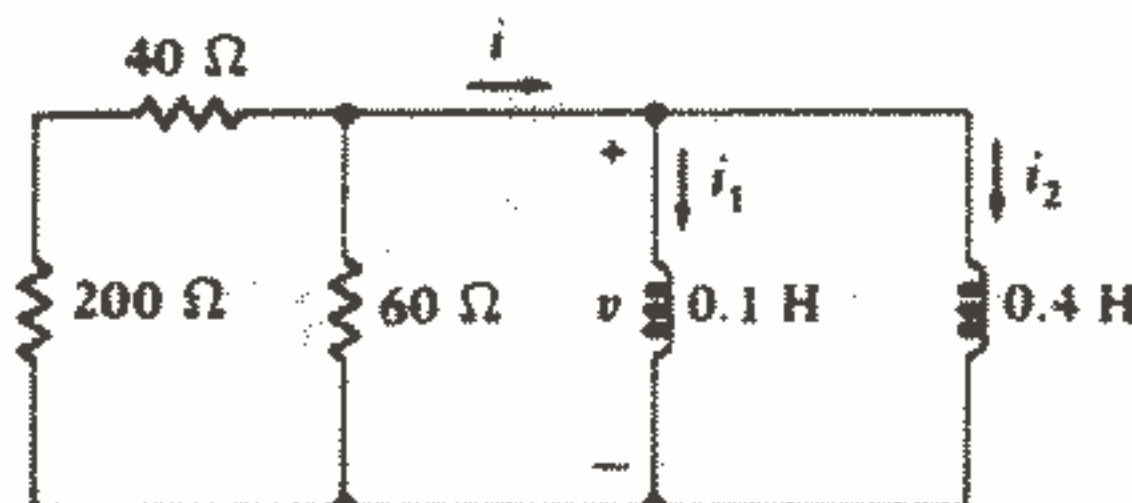
شکل ۲۲ - ۵: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

۱۳ - $i_1(t)$ را برای $t > 0$ در شکل ۲۳ - ۵ پیدا کنید، به شرط اینکه $i_1(0) = 5 \text{ A}$.



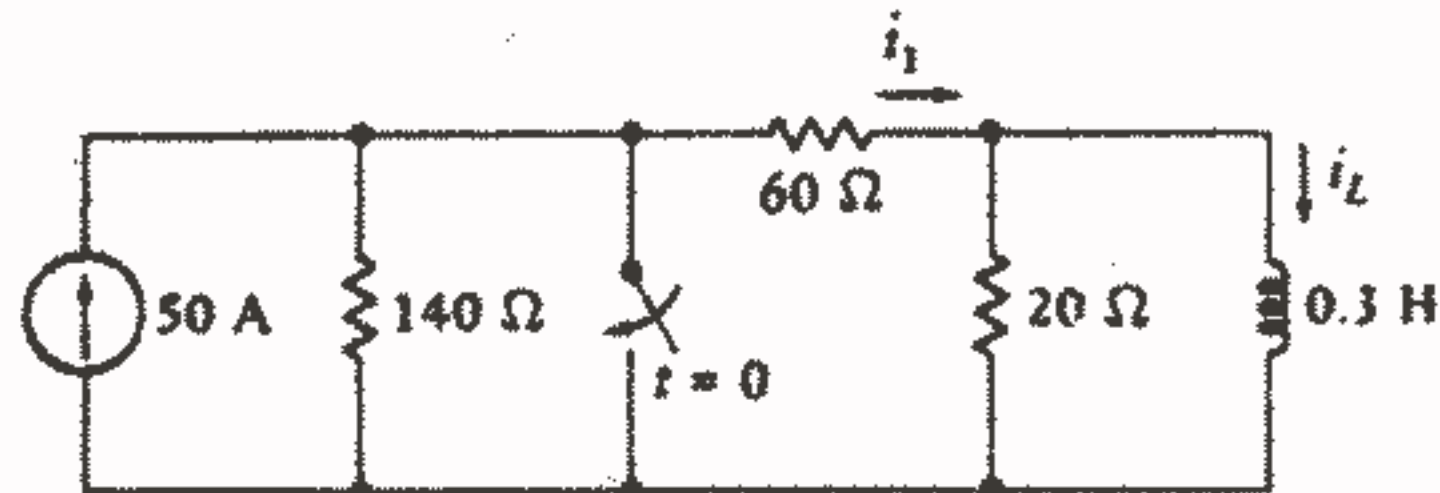
شکل ۲۳ - ۵: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

۱۴ - مدار شکل ۲۴ - ۵ شامل دو سلف موازی است بنابراین فرصتی برای یک جریان به دام افتاده وجود دارد که در حلقه سلفی دور بزند. فرض کنید $i_r(0^-) = 10 \text{ A}$ و $i_1(0^-) = 20 \text{ A}$ باشد. (a) $i_1(0^+)$, $i_r(0^+)$ را پیدا کنید. (b) ثابت زمانی τ را برای $i(t)$ پیدا کنید. (c) $i(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید. (d) $v(t)$ را پیدا کنید. (e) $i_1(t)$, $i_r(t)$ را از $v(t)$ و مقادیر اولیه به دست آورید. (f) نشان دهید که انرژی ذخیره شده در $t = 0$ برابر است با مجموع انرژی تلف شده در شبکه مقاومتی بین $t = 0$ و $t = \infty$ و انرژی ذخیره شده در سلفها در $t = \infty$.



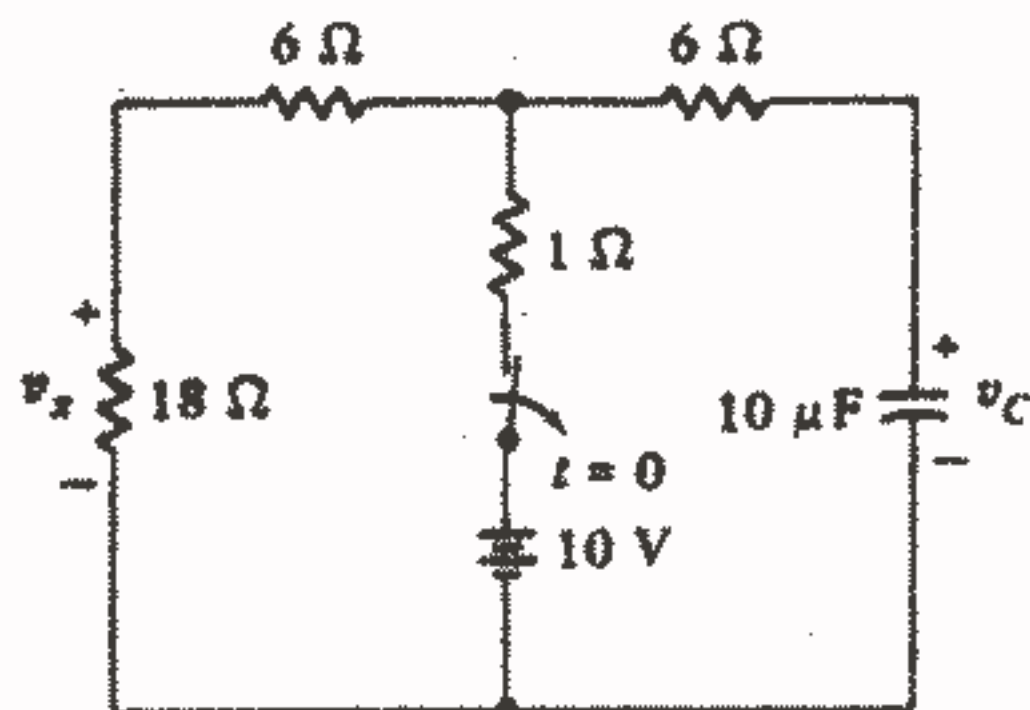
شکل ۲۴ - ۵: به مسئله ۱۴ مراجعه کنید.

۱۵- i_1, i_L را در مدار شکل ۵-۲۵ در لحظات $t = -10, 0^-, 0^+, 10, 20 \text{ ms}$ محاسبه کنید.



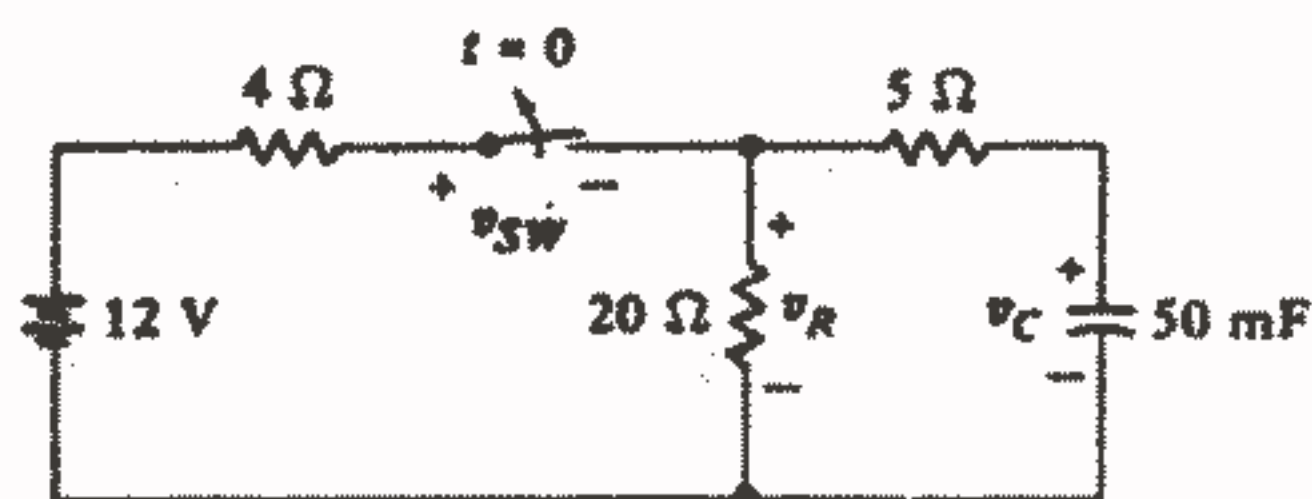
شکل ۵-۲۵: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

۱۶- کلید شکل ۵-۲۶ در لحظه $t = 0$ بعد از مدت طولانی بسته بودن، باز می‌شود. $v_c(t)$ و $v_r(t)$ را در فاصله زمانی $0.5 \text{ ms} < t < 1 \text{ ms}$ در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



شکل ۵-۲۶: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

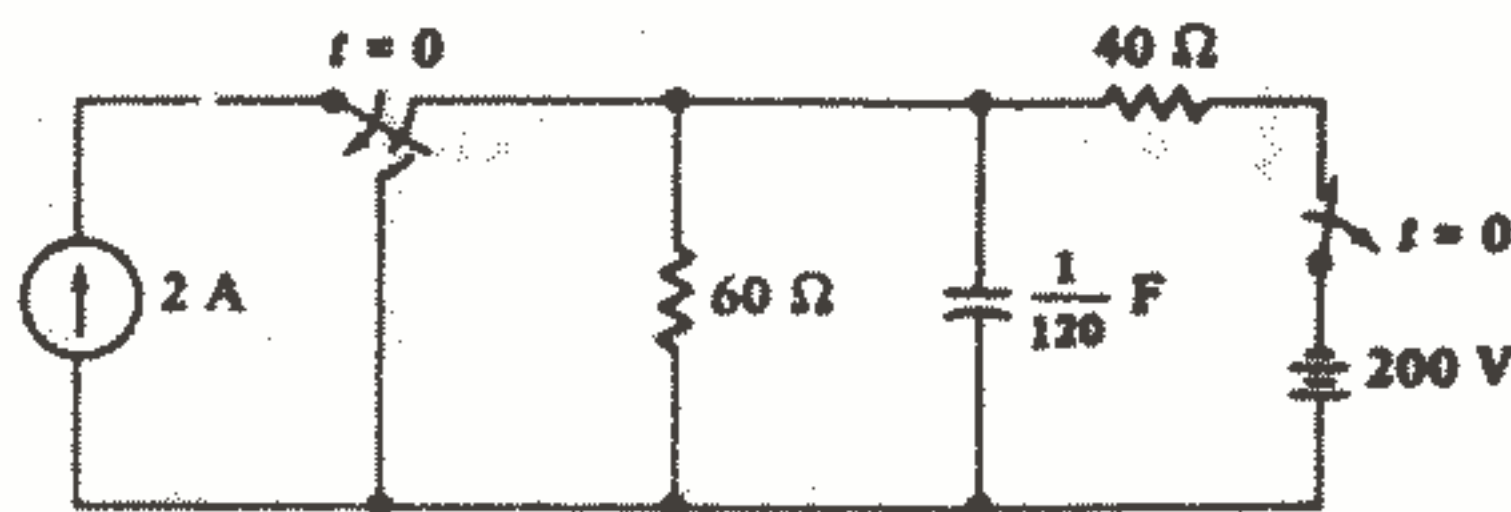
۱۷- با مراجعه به مدار شکل ۵-۲۷ مقادیر زیر را در لحظه $t = 1 \text{ s}$ تعیین کنید:
(a) v_c , (b) v_R , (c) v_{sw}



شکل ۵-۲۷: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

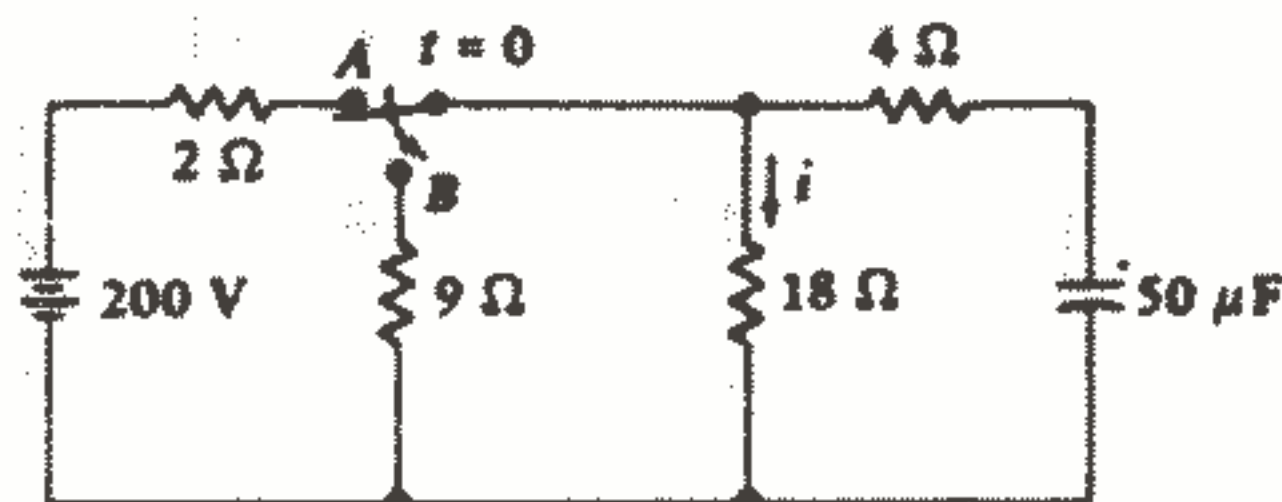
۱۸ - متناظر دقیق مدار مسئله ۱ را ایجاد کنید و متناظر دقیق صورت مسئله را بنویسید و سپس مسئله جدید را حل کنید.

۱۹ - در لحظه $t = 0$ ، کلید سمت چپ مدار شکل ۵-۲۸ پایین می افتد و به طور هم زمان کلید سمت راست باز می شود. کل باری را که از ترمینال پایین خازن در فاصله زمانی $0.3 < t < 1S$ خارج می شود، پیدا کنید.



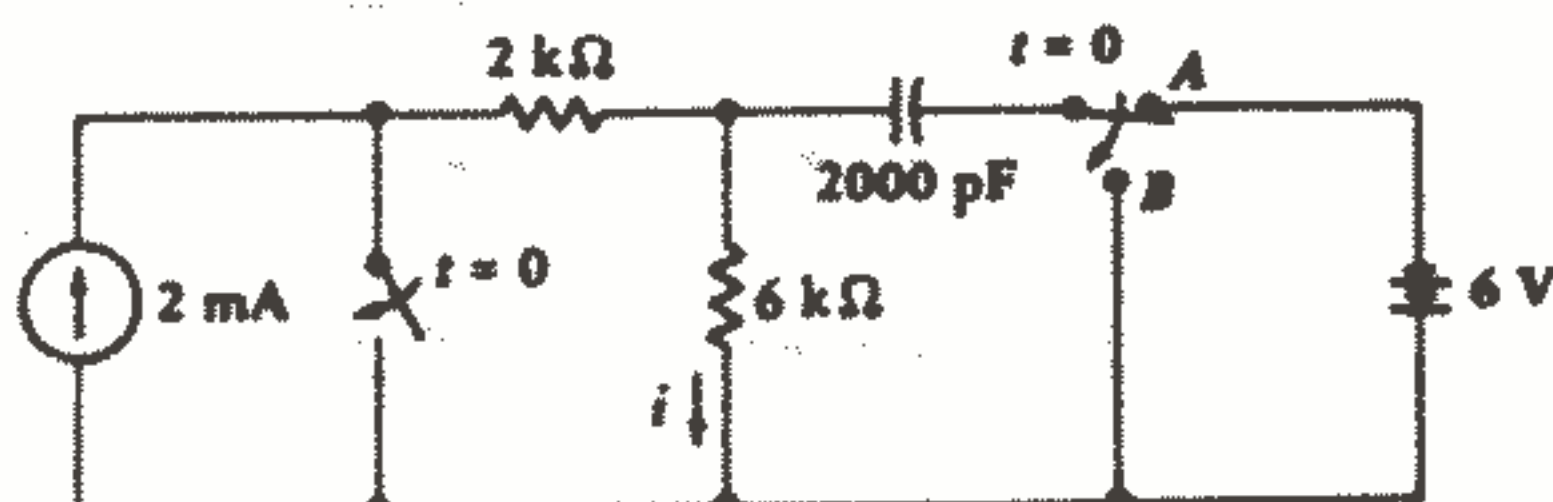
شکل ۵-۲۸: به مسئله ۱۹ مراجعه کنید.

۲۰ - در مدار شکل ۵-۲۹ کلید در لحظه $t = 0$ از A به B می رود. رابطه $i(t)$ را پیدا کنید و آن را در فاصله زمانی $-2 < t < 2ms$ رسم کنید.



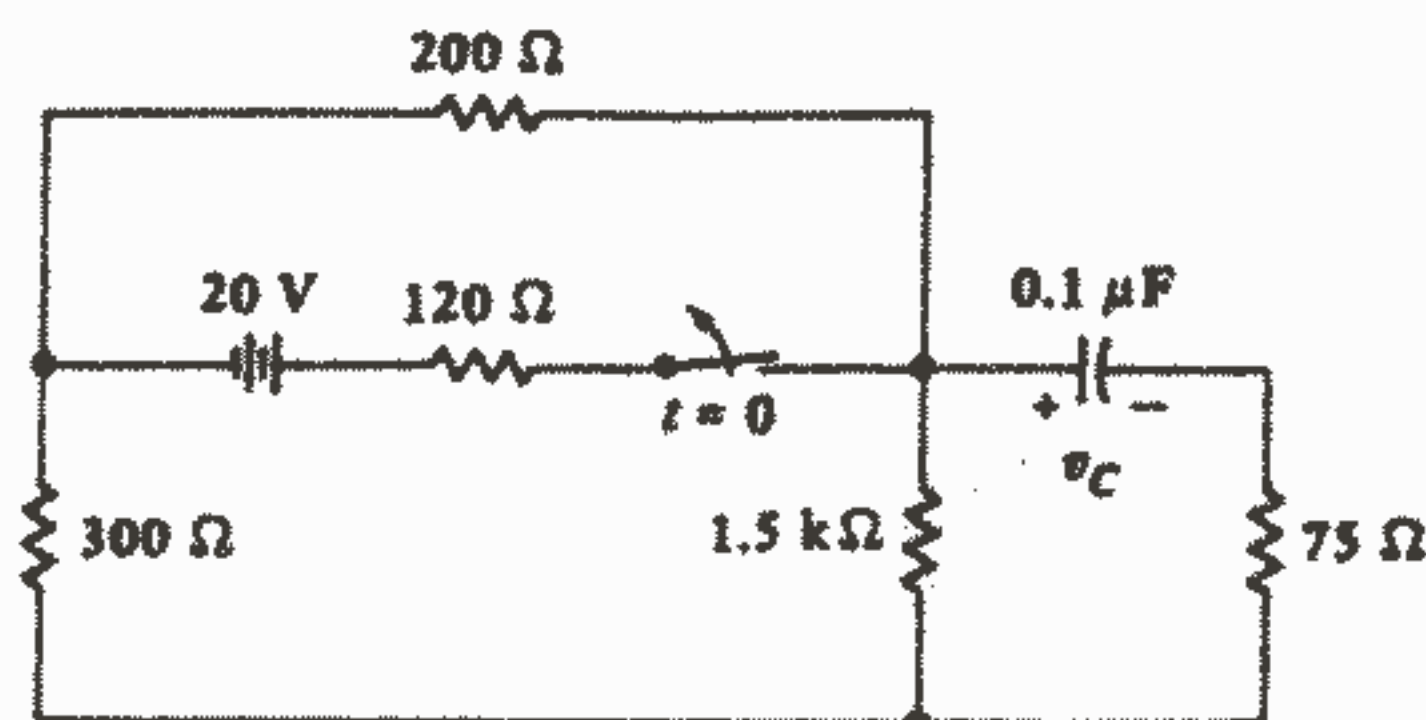
شکل ۵-۲۹: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

۲۱ - در لحظه $t = 0$ ، کلید سمت چپ در شکل ۵-۳۰ بسته می شود در حالیکه کلید سمت راست از A به B انتقال می یابد. در لحظات $+2\mu S$ ، $-2\mu S$ ، $t = 0$ پیدا کنید: (a) i (b) سرعت خروج انرژی از خازن.



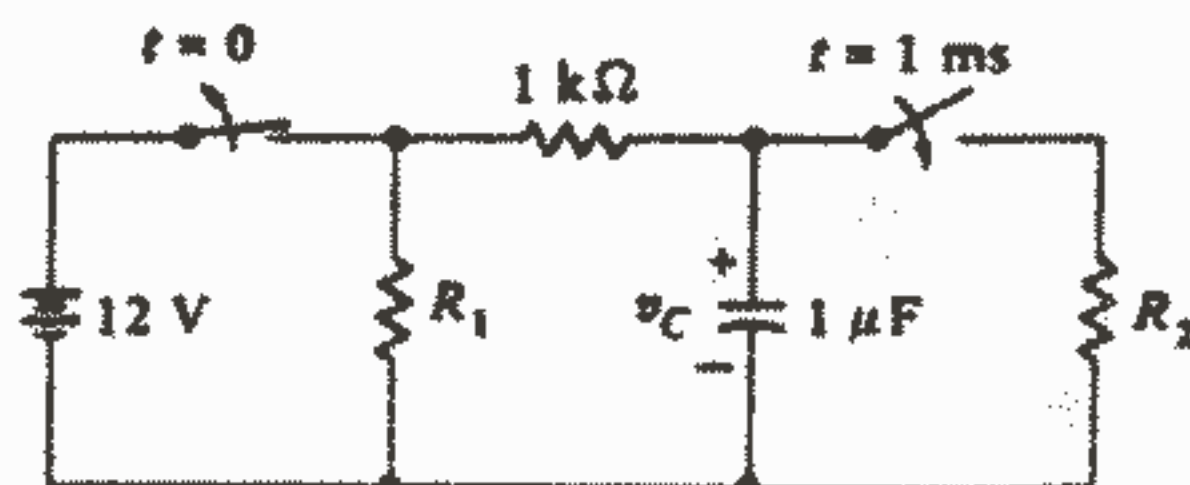
شکل ۵-۳۰: به مسئله ۲۱ مراجعه کنید.

- ۲۲- در مدار شکل ۵-۳۱: (a) $v_C(0)$ را پیدا کنید. (b) τ را محاسبه کنید. (c) رابطه‌ای برای $v_C(t)$ به دست آورید.



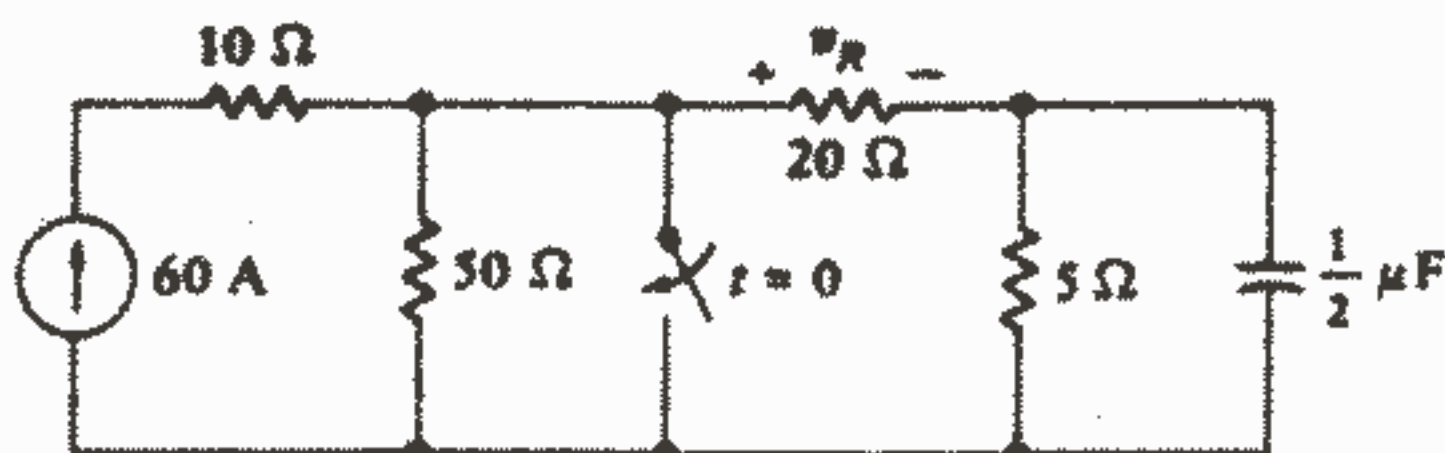
شکل ۵-۳۱: به مسئله ۲۲ مراجعه کنید.

- ۲۳- مقادیر R_1 , R_2 را در شکل ۵-۳۲ طوری انتخاب کنید که $v_C = 10V$ در $t = 0.5ms$ و $v_C = 1V$ در $t = 2ms$ باشد.



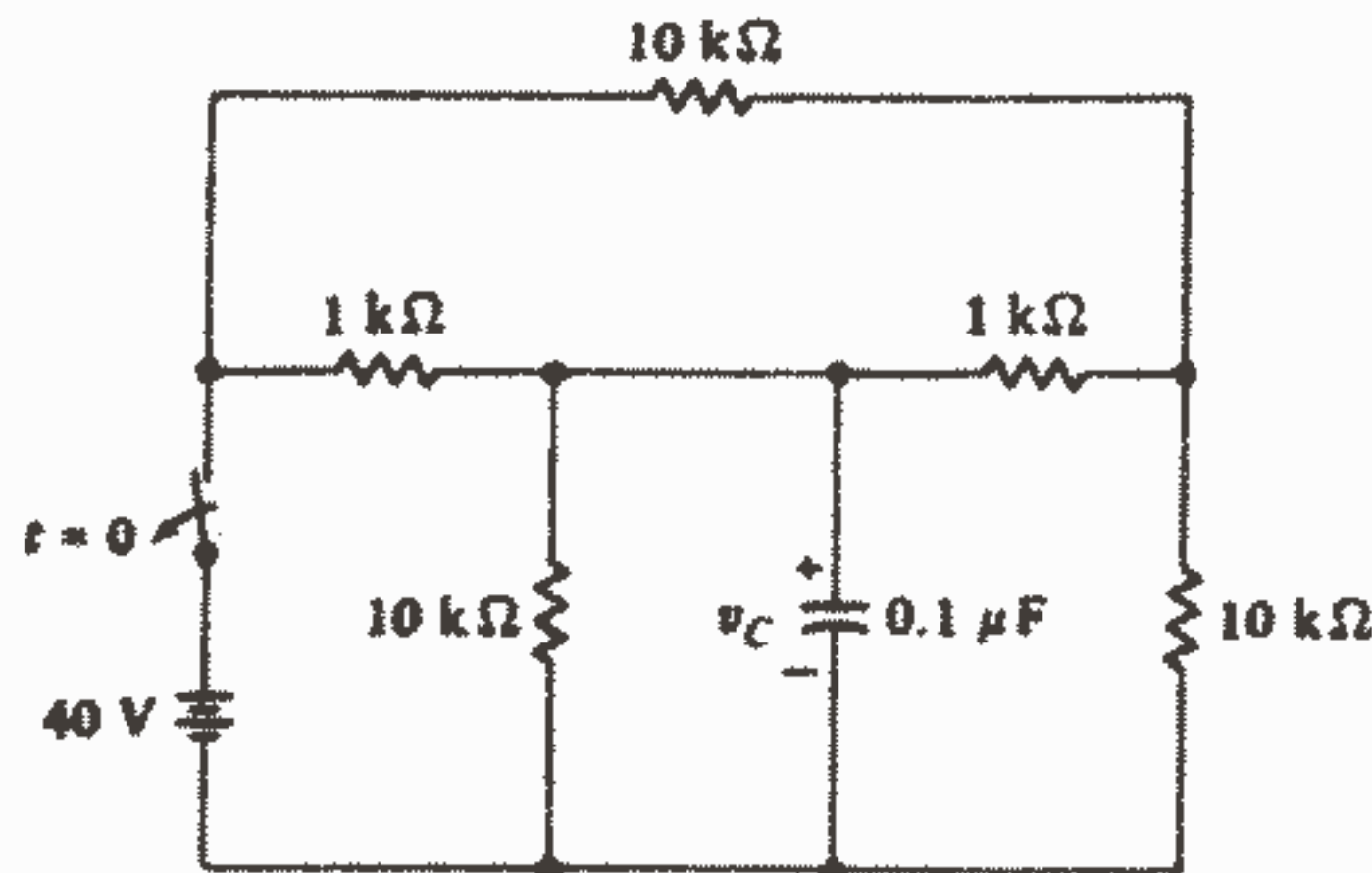
شکل ۵-۳۲: به مسئله ۲۳ مراجعه کنید.

- ۲۴- در مدار شکل ۵-۳۳، v_R را نسبت به t در فاصله $1\mu s < t < 4\mu s$ رسم کنید.



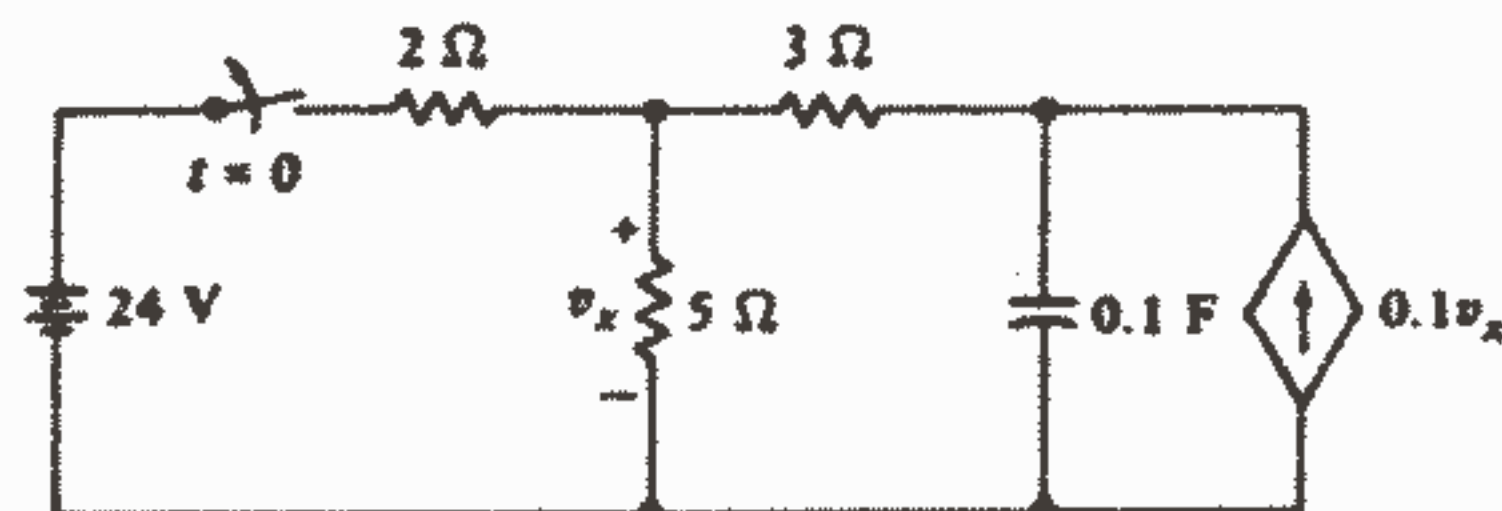
شکل ۵-۳۳: به مسئله ۲۴ مراجعه کنید.

۲۵ - رابطه‌ای برای $v_C(t)$ در شکل ۵-۳۴ پیدا کنید که برای موارد زیر صادق باشد:
(a) $t < 0$ (b) $t > 0$.



شکل ۵-۳۴: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

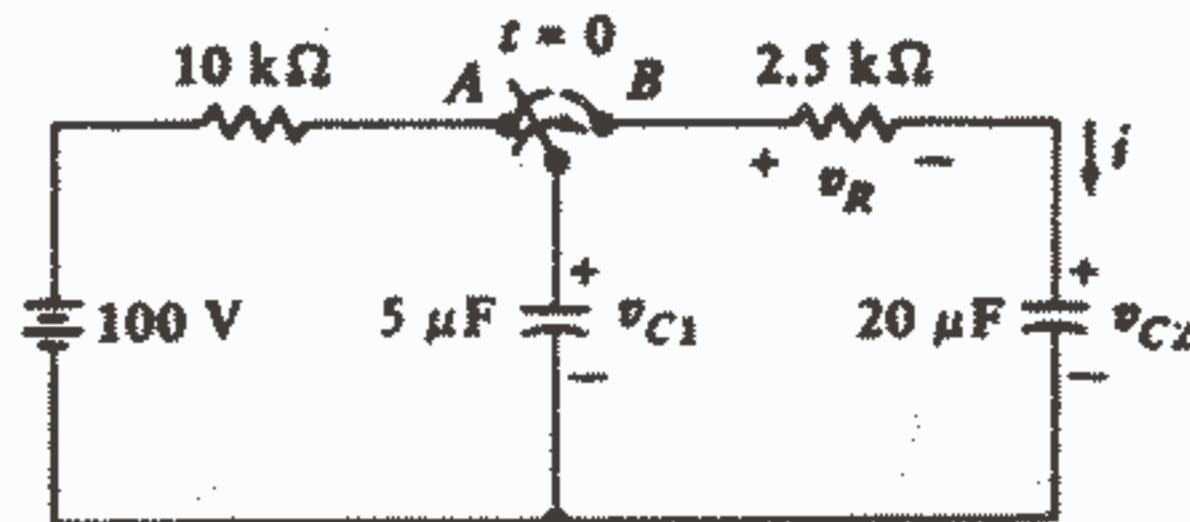
۲۶ - کلید شکل ۵-۳۵ برای مدت طولانی بسته بوده است. v_x را نسبت به t برای فاصله $-1 < t < 3S$ رسم کنید.



شکل ۵-۳۵: به مسئله ۲۶ مراجعه کنید.

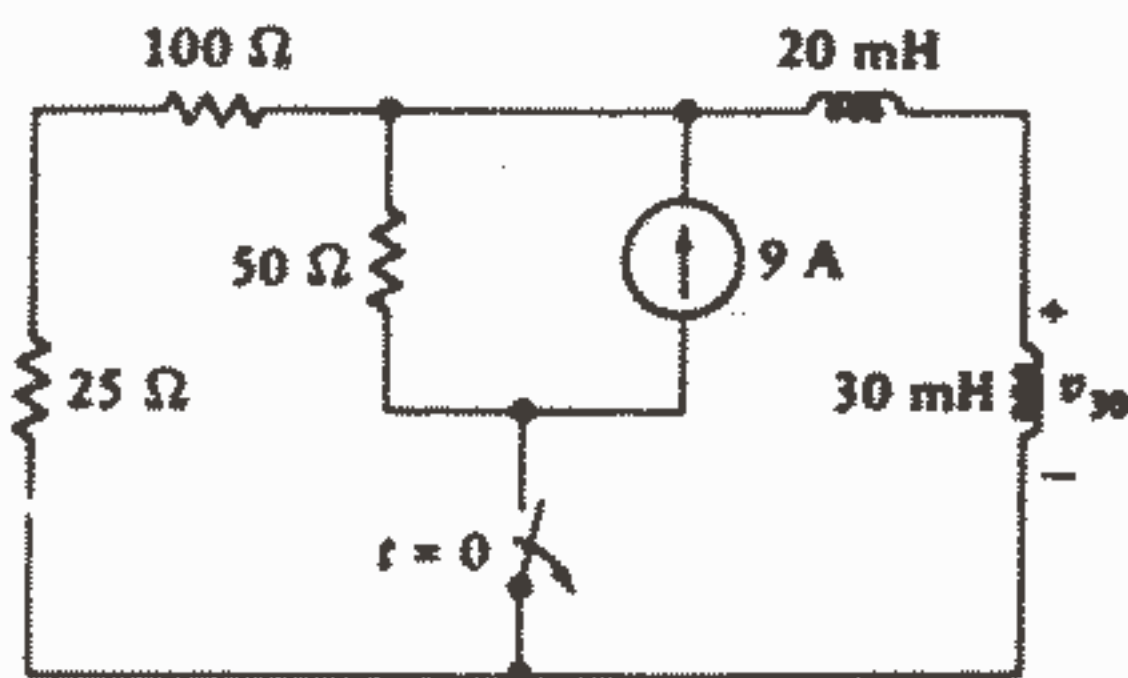
۲۷ - کلید در شکل ۵-۳۶ بعد از مدت طولانی که در وضعیت A بوده است در لحظه $t = 0$ به وضعیت B می‌رود. این کار دو خازن را به طور سری قرار می‌دهد و امکان وجود ولتاژهای dc مساوی و مختلف‌العلامه را در خازن‌ها ایجاد می‌کند. (a) $v_{C1}(0^-)$ و $v_{C2}(0^-)$ را پیدا کنید. (b) $v_{C1}(0^+)$ ، $v_{C2}(0^+)$ ، $v_R(0^+)$ را پیدا کنید. (c) ثابت زمانی τ را پیدا کنید. (d) $v_R(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید. (e) $i(t)$ را پیدا کنید. (f) $v_{C1}(t)$ و $v_{C2}(t)$ را از $i(t)$ و مقادیر اولیه به دست آورید. (g) نشان دهید که انرژی ذخیره شده در $t = \infty$ به اضافه

انرژی کل تلف شده در مقاومت $2.5\text{ k}\Omega$ برابر است با انرژی ذخیره شده در خازن در $t = 0$.



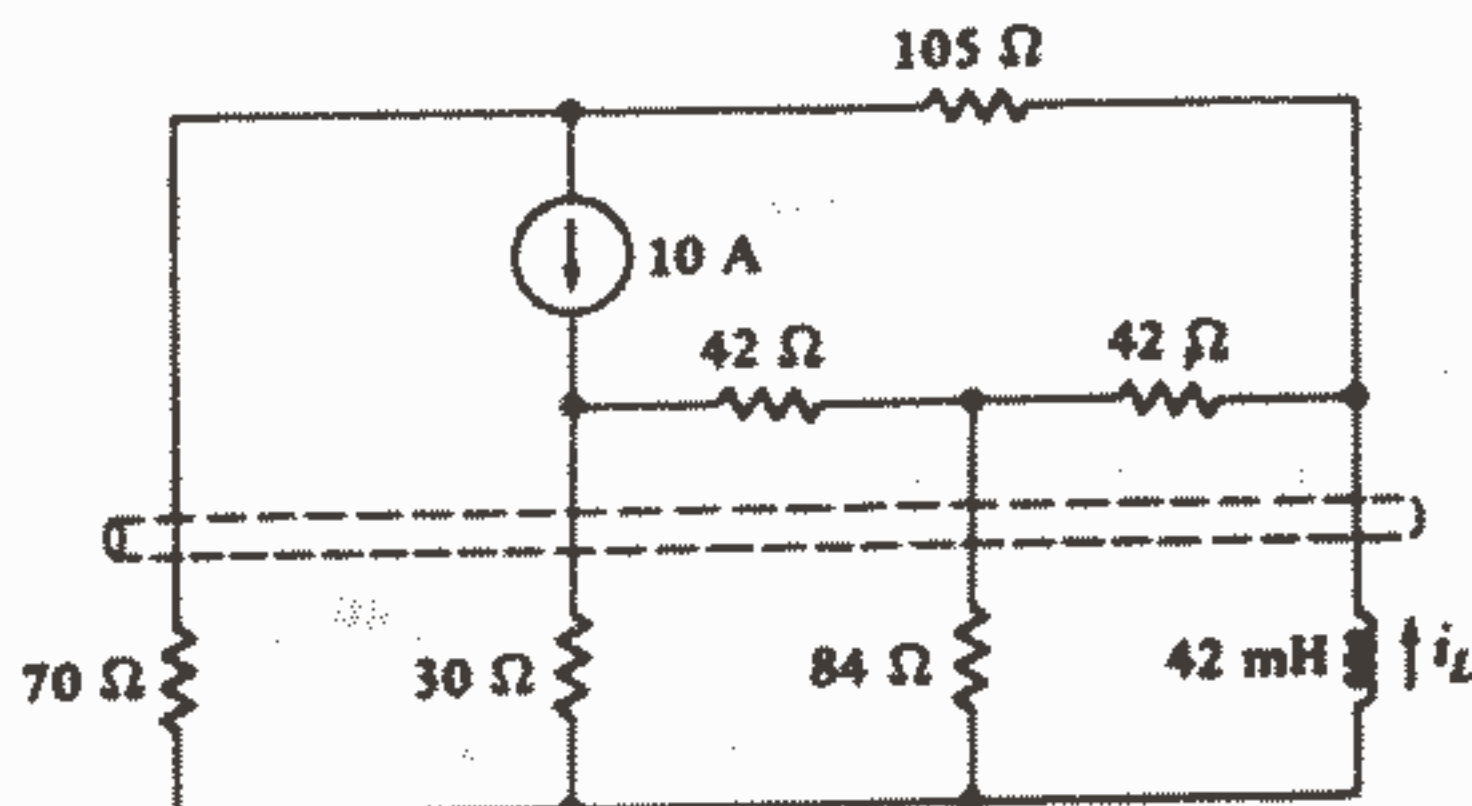
شکل ۳۶ - ۵: به مسئله ۲۷ مراجعه کنید.

۲۸ - در شکل ۳۷-۵ کلید پس از مدت طولانی بسته بودن در لحظه $t = 0$ باز می‌شود. $v_{30}(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید.



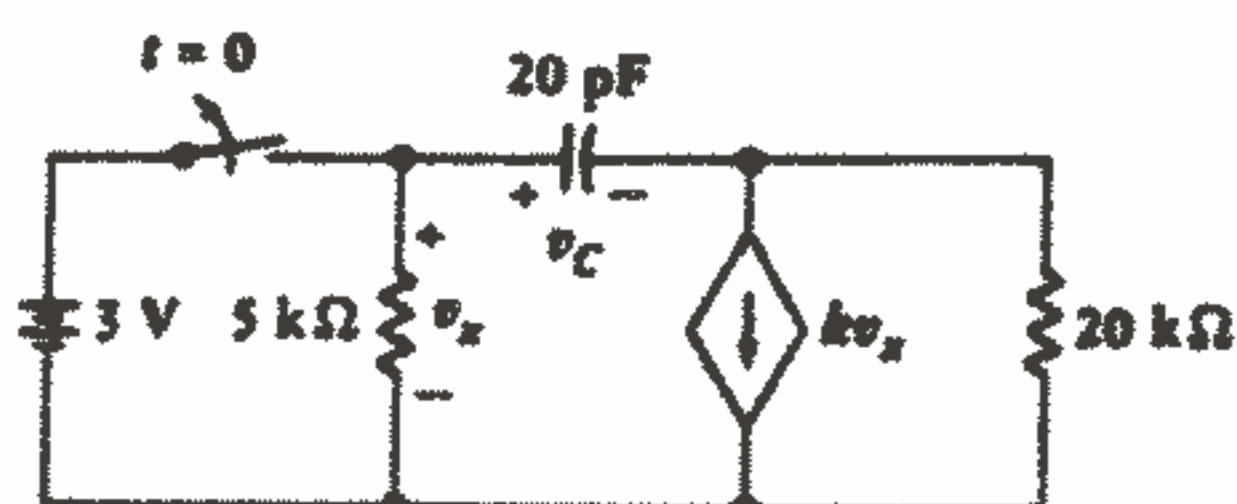
شکل ۳۷ - ۵: به مسئله ۲۸ مراجعه کنید.

۲۹ - مدار شکل ۳۸-۵ برای مدت طولانی در وضعیت نشان داده شده عمل کرده است. در لحظه $t = 0$ یک قطعه سیم مسی می‌افتد روی مدار و ترمینالهای بالایی چهار عنصر را به طوریکه نشان داده شده است، اتصال کوتاه می‌کند. $i_L(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید.



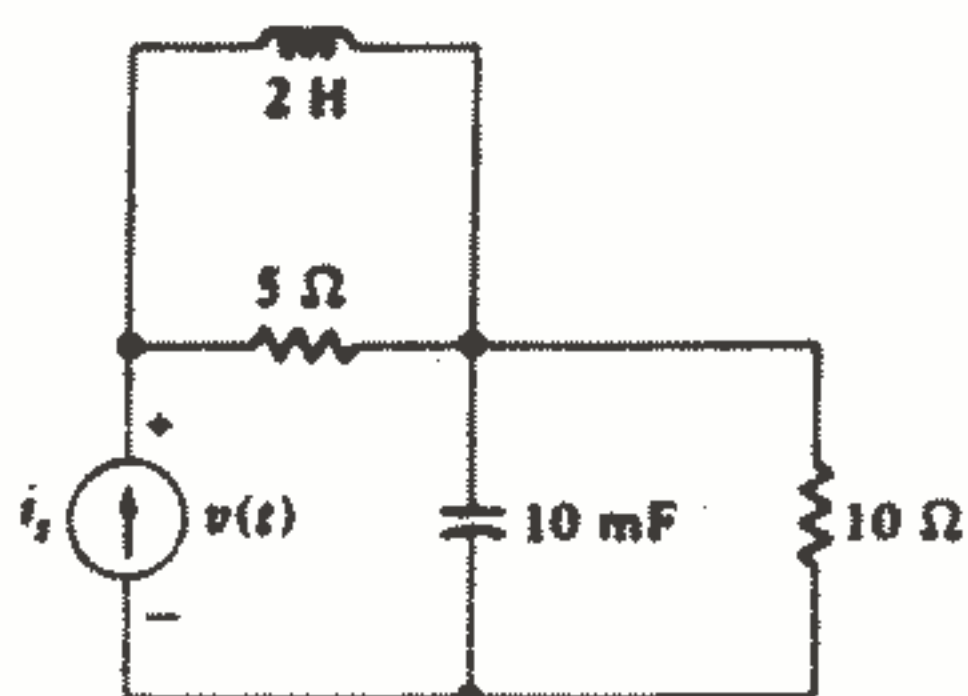
شکل ۳۸ - ۵: به مسئله ۲۹ مراجعه کنید.

۳۰. (a) $v_C(0^-)$ را به صورت تابعی از K برای مدار شکل ۵-۳۹ پیدا کنید. (b) $v_C(t)$ را به صورت تابعی از K برای $t > 0$ پیدا کنید. (C) روابط به دست آمده را به ازای $K = 0$, $K = 10^{-3}$ محاسبه کنید.



شکل ۵-۳۹: به مسئله ۳۰ مراجعه کنید.

۳۱. در مدار شکل ۵-۴۰ فرض کنید $i_s = 50\text{ A}$ برای $t < 0$ و صفر برای $t > 0$ باشد. $v(t)$ را به ازای جميع مقادیر t پیدا کنید.



شکل ۵-۴۰: به مسئله ۳۱ مراجعه کنید.

فصل ۶

اعمال تابع تحریک پله واحد

۱-۶- مقدمه

ما قبلاً به اندازه یک فصل وقت خود را صرف مطالعه پاسخ مدارهای RC و RL بدون منبع کرده ایم، که این پاسخ را به دلیل اینکه فقط بستگی به طبیعت مدار داشت، پاسخ طبیعی نامیدیم. دلیل وجود هر گونه پاسخی ناشی از یک انرژی اولیه ذخیره شده در عناصر سلفی و خازنی مدار می باشد. در بسیاری از مسائل و مثالها، با مدارهایی که شامل منابع و کلیدهایی بودند مواجه شدیم و اطلاع یافتیم که عملیات کلیدزنی خاص در لحظه $t = 0$ انجام می شوند و مقدار معلومی انرژی ذخیره شده در مدار باقی می گذارند. به عبارت دیگر ما تا کنون مسائلی را حل کرده ایم که در آنها منابع انرژی به طور ناگهانی از مدار «قطع» می شدند و اکنون باید پاسخی را که ناشی از «اعمال» ناگهانی منابع انرژی می باشد، مورد توجه قرار دهیم.

ما این فصل را به مطالعه پاسخی که ناشی از اعمال ناگهانی منابع dc می باشد اختصاص خواهیم داد. پس از آنکه منابع سینوسی و نمایی را مطالعه کردیم، می توانیم مسئله کلی اعمال یک منبع کلی تر را مورد بررسی قرار دهیم. از آنجاییکه هر قطعه الکتریکی حداقل برای یک بار می تواند انرژی دار شود و چون اغلب وسایل در طول دوره کارشان به دفعات زیادی روشن و خاموش می شوند، بدیهی است که مطالعه ما قابل استفاده برای بسیاری از حالات عملی می باشد. با وجود اینکه ما اکنون خودمان را محدود به منابع dc کرده ایم هنوز هم حالات بی شماری وجود دارد که در آنها این مثالهای ساده متناظر با عملکرد یک وسیله فیزیکی می باشد. مثلاً، اولین مداری را که تحلیل خواهیم کرد می تواند بیانگر ایجاد جریان میدان هنگام استارت کردن یک موتور dc باشد. تولید و کاربرد پالسهای ولتاژ مربعی لازم برای بیان یک عدد یا یک فرمان

در یک کامپیوتر مثالهای زیادی را در زمینه الکترونیک و مدارهای ترانزیستوری ارائه می کند. به عنوان چند مثال دیگر می توان از مدارهای مشابهی که در مدارهای همزمانی و جاروب در گیرنده های تلویزیون و یا در سیستمهای مخابراتی با مدولاسیون پالس و سیستمهای رادار یافت می شوند، نام برد. به علاوه، بخش مهمی از تحلیل اکثر سر و مکانیسمها عبارت است از تعیین پاسخ آنها به اعمال ناگهانی ورودیهای ثابت.

۲-۶ تابع تحریک پله واحد

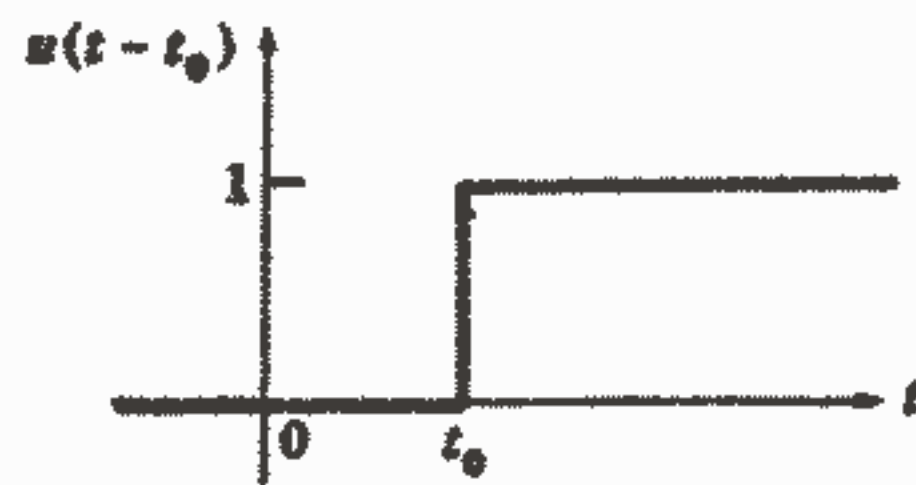
ما تا کنون از «اعمال ناگهانی» یک منبع انرژی صحبت کرده ایم و با این عبارت دلالت بر اعمال آن در زمان صفر داشته ایم. بنابراین عملکرد یک کلید به طور سری با یک باتری معادل است با تابع تحریکی که تا لحظه بسته شدن کلید صفر است و بعد از آن برابر با ولتاژ باتری می شود. این تابع تحریک دارای یک شکستگی و یا گسستگی در لحظه بسته شدن کلید می باشد. توابع تحریک خاصی که پیوسته نیستند و یا دارای مشتقات گسسته می باشند، توابع گسسته نامیده می شوند. دو تا از مهمترین این توابع گسسته عبارتند از تابع پله واحد و تابع ضربه واحد تابع پله واحد موضوع این فصل می باشد و تابع ضربه واحد در فصلهای ۱۸ و ۱۹ بحث خواهد شد.

ما تابع تحریک پله واحد را به عنوان تابعی که به ازای همه مقادیر کوچکتر از صفر برای آرگومانش، مقدار آن صفر است و به ازای همه مقادیر بزرگتر از صفر آرگومانش، مقدار آن یک است، تعریف می کنیم. اگر فرض کنیم که $(t - t_0)$ ، آرگومان باشد و تابع پله واحد را با $u(t - t_0)$ نشان دهیم، آنگاه $u(t - t_0)$ برای همه مقادیر t کوچکتر از t_0 باید صفر باشد و به ازای همه مقادیر $t > t_0$ باید یک باشد. در $t = t_0$ ، $u(t - t_0)$ به طور ناگهانی از صفر به یک تغییر می کند. مقدار آن در $t = t_0$ تعریف نشده است ولی مقدار آن برای همه لحظه ها هر قدر هم که به $t = t_0$ نزدیک باشند معلوم است. ما اغلب این مطلب را به صورت $u(t_0^+) = 1$ ، $u(t_0^-) = 0$ نشان می دهیم. تعریف جمع و جور ریاضی برای تابع تحریک پله واحد عبارت است از:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

که به صورت نمودار در کل ۱-۶ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که یک خط عمودی به طول یک، در $t = t_0$ نشان داده شده است اگرچه این «خیز پله» الزاماً جزئی از تعریف پله واحد نیست ولی معمولاً در نمودارها نشان داده می شود.

ما همچنین ملاحظه می‌کنیم که پله واحد الزاماً تابعی از زمان نیست، اگر چه توجه ما در این فصل فقط معطوف به توابع زمانی خواهد بود. مثلاً، $u(x-x_0)$ می‌تواند برای بیان یک تابع پله واحد به کار رود ولی نمی‌تواند یک تابع تحریک پله واحد باشد زیرا تابع زمان t نمی‌باشد در عوض تابعی است از x ، که x می‌تواند مثلاً فاصله‌ای بر حسب متر و یا یک فرکانس باشد که در فصل ۱۸ مشاهده خواهیم کرد.

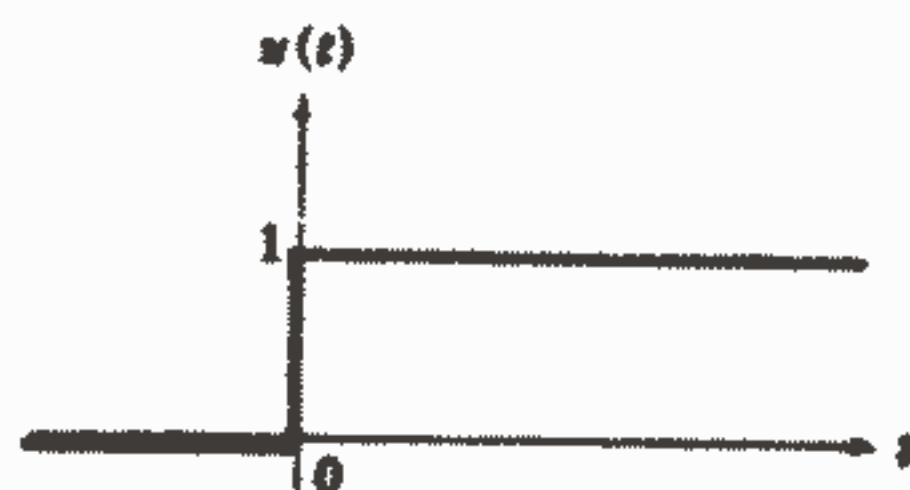


شکل ۱-۶: تابع تحریک پله واحد، $u(t - t_0)$

اغلب در تحلیل مدار، گسستگی و یا عمل سوئیچینگ در لحظه‌ای که به صورت $t = 0$ تعریف می‌شود، روی می‌دهد. در این صورت $t_0 = 0$ می‌باشد و ما تابع تحریک پله واحد را به صورت $u(t-0)$ و یا به طور ساده‌تر به صورت $u(t)$ نشان می‌دهیم. این تابع در شکل ۱-۲ نشان داده شده است و رابطه تحلیلی آن به صورت مقابل می‌باشد:

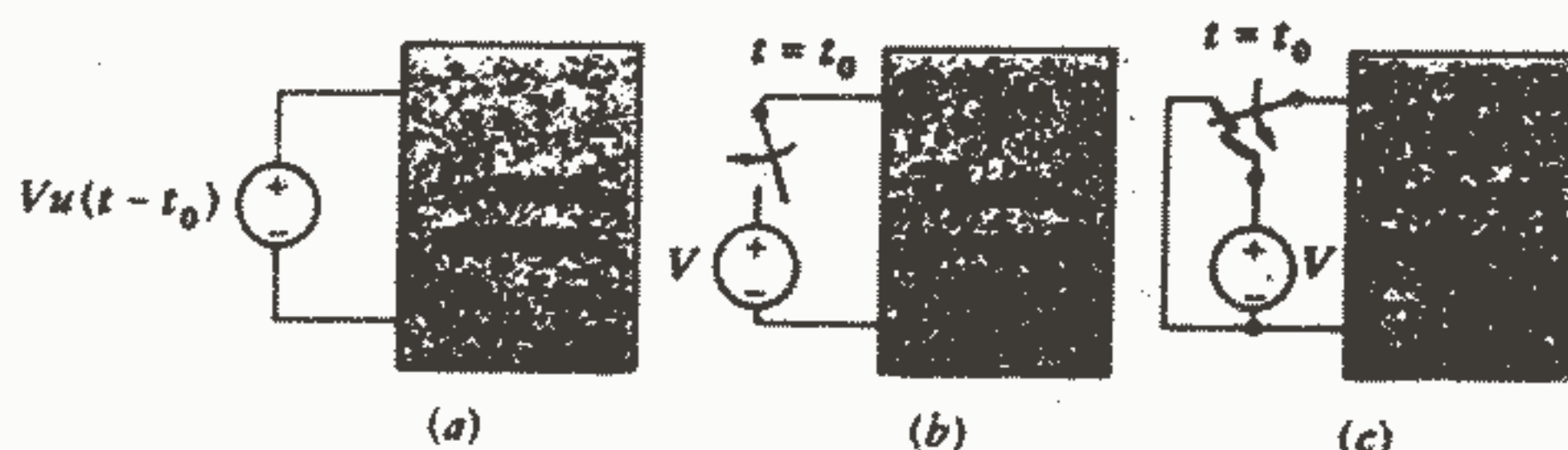
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

تابع تحریک پله واحد به خودی خود بدون واحد می‌باشد و اگر بخواهیم از آن برای نمایش یک ولتاژ استفاده کنیم، باید $u(t-t_0)$ را در ولتاژ ثابتی مانند V ضرب کنیم. بنابراین، $v(t) = Vu(t-t_0)$ یک منبع ولتاژ ایده‌آل است که قبل از $t = t_0$ مقدار آن صفر و بعد از $t = t_0$ مقدار آن برابر V می‌باشد.



شکل ۱-۲: تابع تحریک پله واحد $u(t)$ به صورت تابعی از t نمایش داده شده است.

این تابع تحریک در شکل ۶-۳a به یک شبکه کلی وصل شده است.



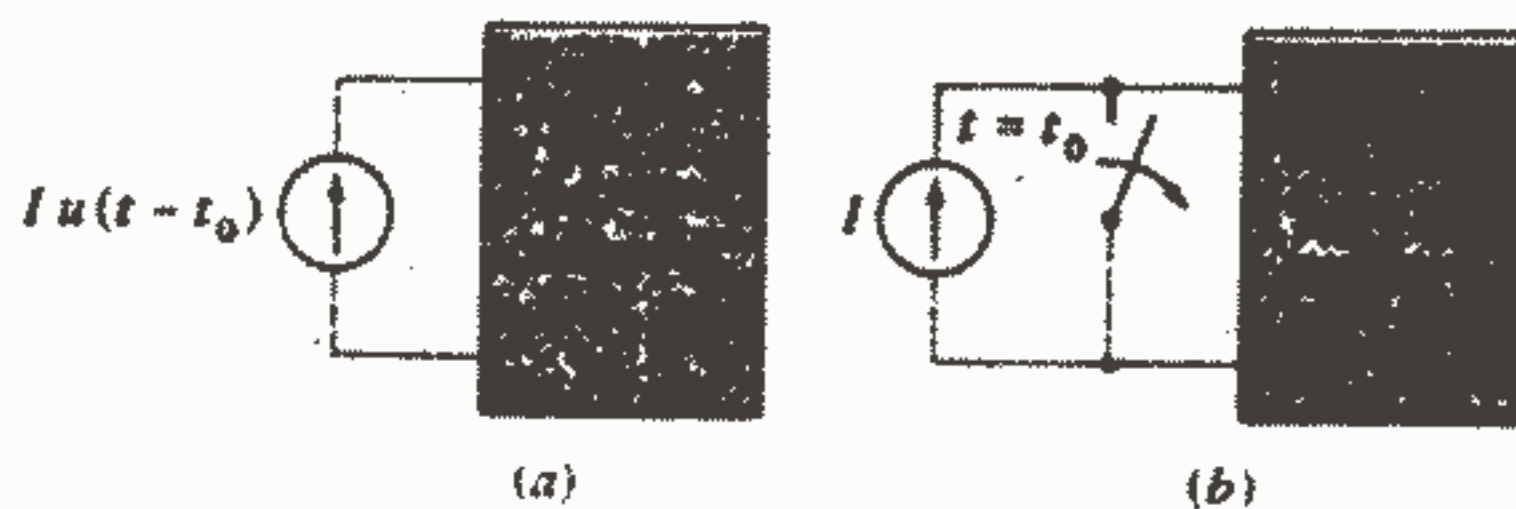
شکل ۶-۳: (a) یک تابع تحریک ولتاژ پله‌ای به صورت منبع تحریک یک شبکه کلی به کار رفته است. (b) یک مدار ساده که اگرچه معادل دقیق (a) نیست ولی در بسیاری از حالات می‌تواند به عنوان معادل آن به کار رود. (c) معادل دقیق مدار a.

اکنون باید به طور منطقی بررسی کنیم که کدام منبع فیزیکی با این تابع تحریک گسسته، معادل است. و یا به عبارت دیگر منظور ما به طور ساده این است که مشخصه ولتاژ - جریان این دو شبکه یکسان می‌باشد.

برای منبع ولتاژ پله‌ای شکل ۶-۳a، مشخصه ولتاژ - جریان کاملاً ساده است، ولتاژ قبل از $t = t_0$ برابر صفر و بعد از $t = t_0$ برابر V می‌باشد و جریان هر مقدار محدودی را در هر یک از دو فاصله زمانی می‌تواند دارا باشد. اولین حالتی که به ذهن ما خطور می‌کند مدار معادل شکل ۶-۳b می‌باشد که یک منبع dc به مقدار V سری با یک کلید که در لحظه $t = t_0$ بسته می‌شود، می‌باشد. اگر چه این مدار برای $t < t_0$ معادل با مدار ۶-۳a نمی‌باشد زیرا ولتاژ دو سر باتری و کلید کاملاً نامشخص است. این منبع «معادل» یک مدار باز است و ولتاژ دو سر آن هر مقداری می‌تواند باشد. بعد از $t = t_0$ ، شبکه‌ها معادل هستند و اگر این تنها فاصله زمانی باشد که مورد توجه ماست و اگر جریانهای اولیه هر دو شبکه در $t = t_0$ یکسان باشند، آنگاه شکل ۶-۳b معادل خوبی برای شکل ۶-۳a می‌باشد.

برای به دست آوردن یک معادل دقیق برای تابع تحریک ولتاژ پله‌ای، می‌توانیم یک کلید Spdt به مدار اضافه کنیم. قبل از $t = t_0$ کلید، ولتاژ صفر را در دو سر ترمینالهای ورودی شبکه کلی ما ایجاد می‌کند و بعد از $t = t_0$ ، کلید طوری تغییر حالت می‌دهد که یک ولتاژ ورودی

ثابت V را تأمین می‌کند. در لحظه $t = t_0$ ، ولتاژ نامعین است (همانگونه که در تابع تحریک پله‌ای می‌باشد) و باتری به طور لحظه‌ای اتصال کوتاه می‌شود و جای خوشبختی اینجاست که ما با مدلهای ریاضی سر و کار داریم. این معادل دقیق شکل ۶-۳a در شکل ۶-۳c نشان داده شده است. قبل از خاتمه بحثمان درباره معادل بودن مدارها، بهتر است معادل دقیق یک باتری و یک کلید را مورد توجه قرار دهیم. تابع تحریک ولتاژ پله‌ای معادل با شکل ۶-۳b، کدام است؟ ما به دنبال آرایشی هستیم که به طور ناگهانی از مدار باز به یک ولتاژ ثابت تغییر حالت دهد، در اینجا تغییری در مقاومت وجود دارد و نقطه پیچیده مسئله ما همین جاست. تابع پله‌ای ما را قادر می‌سازد که یک ولتاژ (یا یک جریان) را به طور ناپیوسته تغییر دهیم، اما در اینجا ما نیاز به یک مقاومت متغیر هم داریم. بنابراین، معادل مورد نظر ما باید شامل یک تابع پله‌ای مقاومت یا هدایت هم باشد، یعنی عنصر غیرفعالی که متغیر با زمان باشد. با وجود اینکه می‌توانیم چنین عنصری را با تابع پله واحد بسازیم، باید توجه داشت که محصول نهایی یک کلید است و یک کلید صرفاً مقاومتی است که به طور لحظه‌ای از صفر به بی‌نهایت اهم و یا برعکس تغییر می‌کند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که معادل دقیق یک باتری و کلید سری با آن باید یک باتری سری با یک مقاومت متغیر با زمان باشد و هیچ ترکیبی از تابع تحریک ولتاژ و جریان نمی‌تواند معادل دقیقی را به ما ارائه دهد. شکل ۶-۴a یک تابع تحریک جریان پله‌ای را نشان می‌دهد که یک شبکه کلی را تحریک می‌کند.



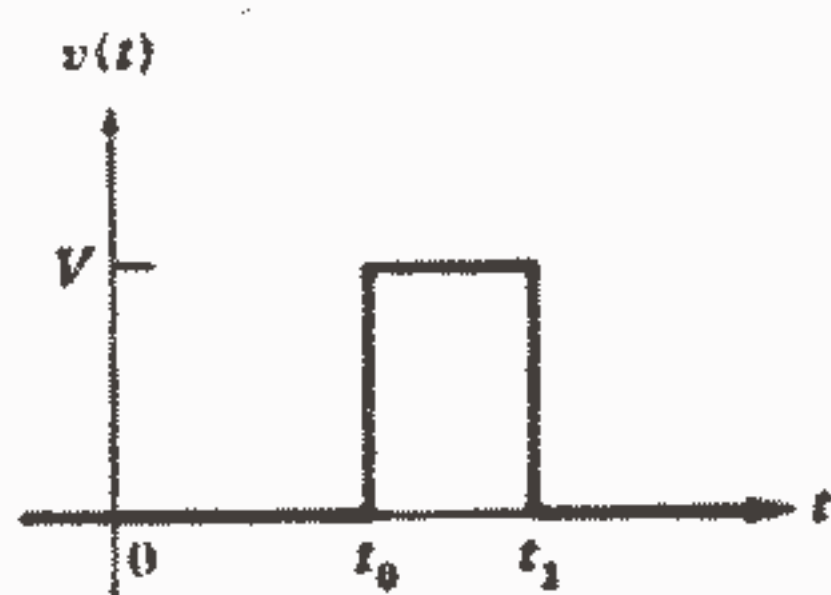
شکل ۶-۴: (a) یک تابع تحریک جریان پله‌ای به یک شبکه کلی اعمال شده است. (b) مدار ساده‌ای که اگرچه معادل دقیق (a) نیست اما در بسیاری از موارد می‌تواند به عنوان معادل آن به کار رود.

۱- اگر اطلاعاتی درباره شبکه کلی داشته باشیم (ولتاژ دو سر کلید در $t_0 < t$) همیشه می‌توان یک معادل را تعیین نمود، ولی ما فرض می‌کنیم که هیچ اطلاعات قبلی درباره شبکه کلی نداریم.

اگر بخواهیم این مدار را با یک منبع dc موازی با یک کلید (که در لحظه $t = t_0$ باز می شود) جایگزین کنیم، باید بدانیم که این مدارها بعد از $t = t_0$ معادل می باشند و پاسخها بعد از $t = t_0$ فقط به شرطی که شرایط اولیه یکسان باشد، مشابه می باشند. پس به طور منطقی اغلب می توانیم مدارهای ۶-۴a، ۶-۴b را به جای یکدیگر به کار ببریم. معادل دقیق شکل ۶-۴a عبارت است از متناظر مدار شکل ۶-۳c و معادل دقیق ۶-۴b را نمی توان با توابع تحریک پله ای ولتاژ یا جریان به تنهایی ایجاد نمود. اگر با مهارت بر روی تابع تحریک پله واحد کار کنیم. می توان توابع تحریک مفیدی را ایجاد نمود یک پالس ولتاژ مربعی را طبق شرایط زیر تعریف می کنیم:

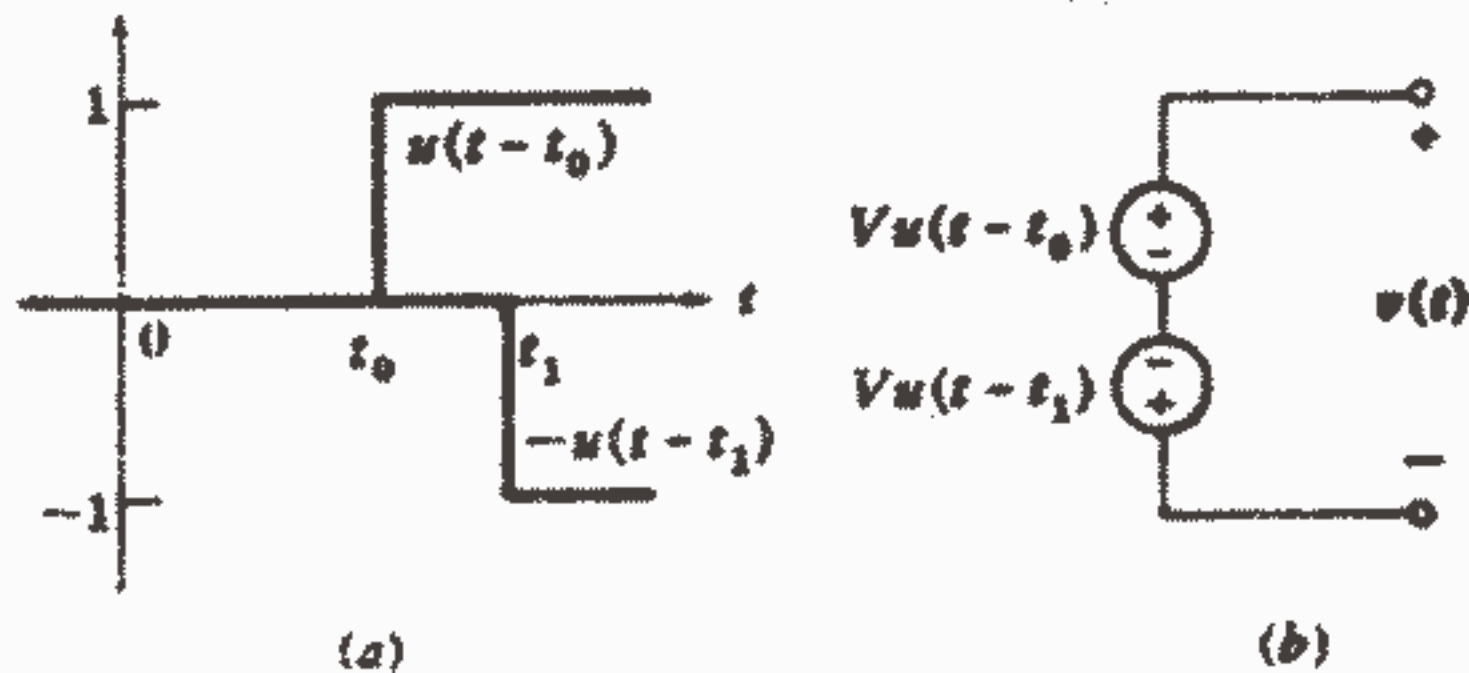
$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t_1 < t \end{cases}$$

این پالس در شکل ۶-۵ نشان داده شده است. آیا می توان این پالس را بر حسب تابع تحریک پله واحد بیان نمود؟



شکل ۶-۵: پالس ولتاژ مربعی، یک تابع تحریک مفید.

حال تفاضل دو پله واحد $u(t - t_0) - u(t - t_1)$ را در نظر می گیریم. این دو پله واحد در شکل ۶-۶a نشان داده شده است و بدیهی است که تفاضل آنها یک پالس مربعی می باشد. منبع $Vu(t - t_0) - Vu(t - t_1)$ که ولتاژ مطلوب را به ما می دهد در شکل ۶-۶b نشان داده شده است.



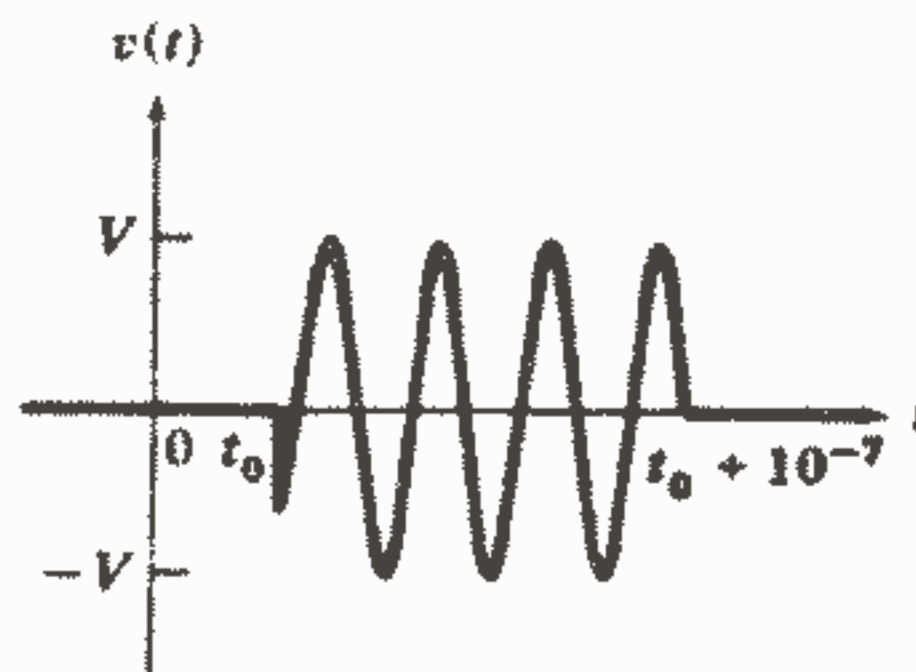
شکل ۶-۶: (a) پله های واحد $u(t - t_0)$ ، $u(t - t_1)$ (b)

منبعی که پالس ولتاژ مربعی شکل ۶-۵ را ارائه می کند.

اگر یک منبع ولتاژ سینوسی $V \sin \omega t$ داشته باشیم که به طور ناگهانی در لحظه $t = t_0$ به یک شبکه وصل شود، آنگاه یک تابع تحریک ولتاژ مناسب برای آن به صورت $v(t) = V u(t - t_0) \sin \omega t$ خواهد بود. اگر بخواهیم یک شلیک انرژی از فرستنده رادار را نشان دهیم، می‌توانیم منبع سینوسی را بعد از $\frac{1}{10} \mu S$ به وسیله یک تابع تحریک پله واحد دیگری خاموش کنیم. در این صورت پالس ولتاژ به صورت

$v(t) = V[u(t - t_0) - u(t - t_0 - 10^{-7})] \sin \omega t$ خواهد بود. این تابع تحریک در شکل

۶-۷ رسم شده است.



شکل ۶-۷: یک پالس فرکانس رادیویی که به صورت

$v(t) = V[u(t - t_0) - u(t - t_0 - 10^{-7})] \sin \omega t$ توصیف شده

است. فرکانس سینوسی پالس در حدود ۳۶ MHz می‌باشد

که برای رادار خیلی کم است ولی برای ایجاد شکل موجی

خوانا و واضح مناسب است.

به عنوان آخرین نکته مقدماتی باید تذکر دهیم که تابع تحریک پله واحد را باید فقط به عنوان مدل ریاضی یک وسیله سونیچینگ عملی به کار برد. هیچ مقاومت و سلف و خازن عملی دقیقاً مانند عنصر مداری ایده آلش کار نمی‌کند و همچنین ما نمی‌توانیم یک عمل کلیدزنی رادر زمان صفر انجام دهیم. اگر چه، زمانهای سونیچینگ کمتر از ۱ ns در بسیاری از مدارات رایج می‌باشند و این زمان اغلب در مقایسه با ثابت زمانی بقیه مدار به اندازه کافی کوتاه است که بتوان از آن صرف نظر کرد.

تمرین

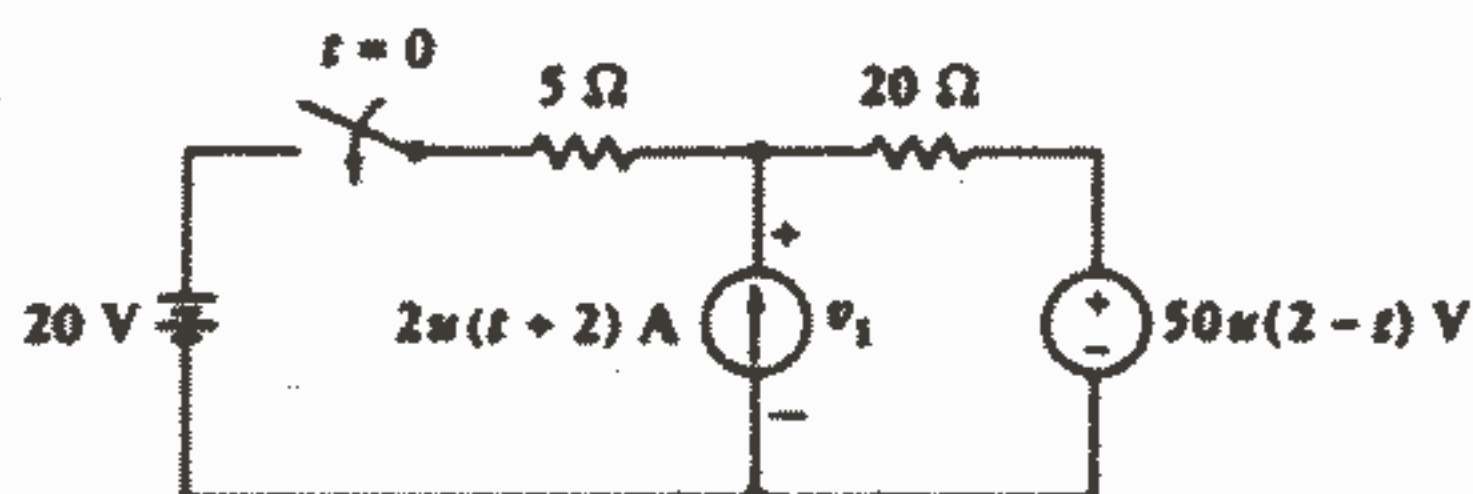
۱-۶. هر یک از مقادیر زیر را به ازای $t = ۱٫۵$ حساب کنید:

(a) $2u(t-2) + u(t+1) + u(t-1)$, (b) $[u(t-1) - u(1-t)]u(t+1)$ (c) $u(\sin \pi t) - u(t+1) + u(t)$

جواب: ۲، ۱، ۰

۲-۶. در مدار شکل ۸-۶، v_1 را به ازای: (a) $t = -5$ ، (b) $t = -1$ ، (c) $t = 1$ ، (d) $t = 3$ پیدا کنید.

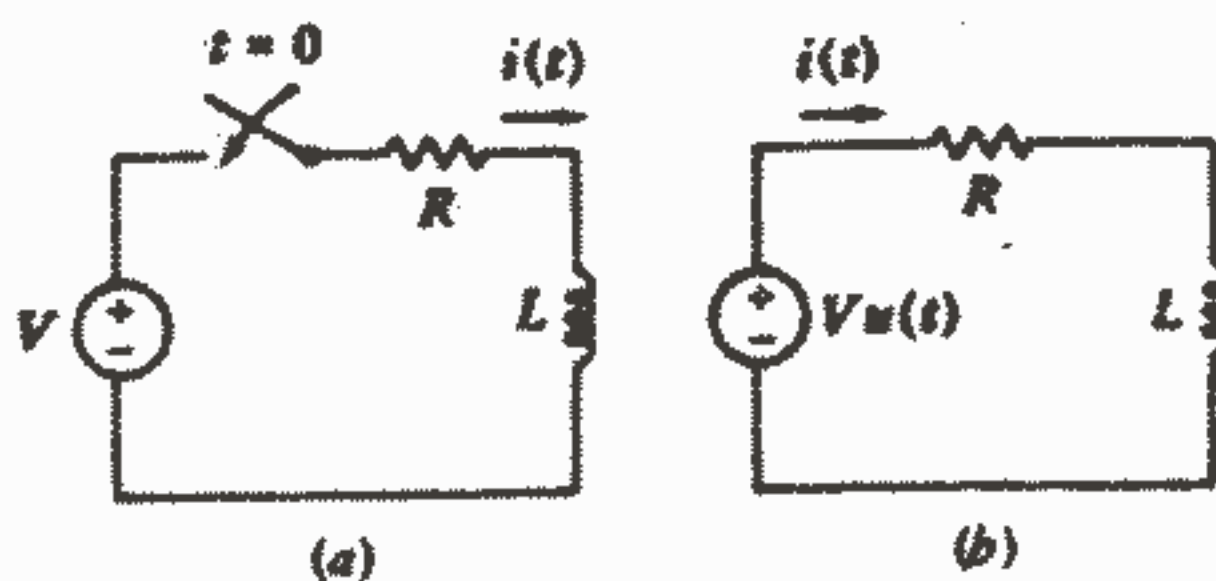
جواب: ۵۰۷، ۹۰، ۳۴، ۲۴



شکل ۸-۶: به مسئله ۲-۶ مراجعه کنید.

۳-۶. نظری بر مدار RL تحریک شده

ما اکنون آماده‌ایم که یک شبکه ساده را در معرض اعمال ناگهانی یک منبع dc قرار دهیم. این مدار شامل یک باتری به ولتاژ V به طور سری با یک کلید، یک مقاومت R و یک سلف می‌باشد. کلید در لحظه $t = 0$ بسته می‌شود که در شکل ۹a-۶ نشان داده شده است. واضح است که جریان $i(t)$ قبل از $t = 0$ صفر می‌باشد و می‌توانیم باتری و کلید را با یک تابع تحریک ولتاژ پله‌ای $Vu(t)$ که آن هم قبل از $t = 0$ هیچ پاسخی را ایجاد نمی‌کند، جایگزین کنیم. بعد از $t = 0$ هر دو مدار یکسان می‌باشند. بنابراین ما جریان $i(t)$ را در مدار شکل ۹a-۶ و یا مدار معادل آن یعنی شکل ۹b-۶ جستجو می‌کنیم.



شکل ۹-۶: (a) یک مدار مفروض. (b) مدار معادلیکه دارای همان پاسخ $i(t)$ برای همه زمانها می‌باشد.

ما فعلاً $i(t)$ را به وسیله نوشتن معادله مداری مناسب و سپس حل کردن آن به وسیله تفکیک متغیر و سپس انتگرال گیری، پیدا خواهیم کرد. بعد از اینکه جواب را به دست آوردیم و دو قسمت تشکیل دهنده آن را بررسی کردیم، مقداری وقت (بخش بعدی را) صرف یادگیری مفهوم کلی این دو جمله خواهیم کرد. ما سپس می توانیم جواب این مسئله را خیلی به آسانی پیدا کنیم و به علاوه قادر خواهیم بود اصول کلی نهفته در این روش ساده را برای کسب جوابهای سریعتر برای هر مسئله ای که شامل اعمال ناگهانی هر منبعی باشد، به کار ببریم، حال بیایید با روش حل رسمی تری مسئله را دنبال کنیم.

با اعمال قانون ولتاژ کیرشوف به مدار شکل ۹b-۶، خواهیم داشت:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = Vu(t)$$

چون تابع تحریک پله واحد در $t = 0$ گسسته می باشد، ابتدا جواب را برای $t < 0$ و سپس برای $t > 0$ بررسی خواهیم کرد. بدیهی است که اعمال ولتاژ صفر از $t = -\infty$ هیچ پاسخی را ایجاد نکرده است، بنابراین: $i(t) = 0$ ، $t < 0$ اگر چه برای زمانهای مثبت، $u(t)$ برابر یک بوده و ما باید معادله $Ri + L \frac{di}{dt} = V$ ، $t > 0$ را حل کنیم. با چند مرحله عملیات جبری ساده می توان متغیرها را جدا نمود، که به دست می آوریم: $\frac{L di}{V - Ri} = dt$ و از هر طرف می توان مستقیماً انتگرال گرفت: $-\frac{L}{R} \ln(V - Ri) = t + k$ برای محاسبه K باید از شرایط اولیه کمک گرفت. قبل از $t = 0$ ، $i(t)$ برابر صفر است و در نتیجه $i(0^-) = 0$ و چون جریان در سلف در زمان صفر نمی تواند بدون ایجاد ولتاژی بی نهایت به مقدار محدودی تغییر یابد، پس $i(0^+) = 0$. اگر در $t = 0$ مقدار i را مساوی صفر بگیریم خواهیم داشت:

$$-\frac{L}{R} \ln V = k \rightarrow -\frac{L}{R} [\ln(V - Ri) - \ln V] = t \rightarrow \frac{V - Ri}{V} = e^{-Rt/L} \rightarrow$$

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R} e^{-Rt/L} \quad t > 0$$

بنابراین رابطه ای که برای همه مقادیر t برای پاسخ صادق باشد عبارت است از:

$$i = \left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R} e^{-Rt/L} \right) u(t) \quad (1)$$

این پاسخ مطلوب ماست اما به ساده ترین روش به دست نیامده است. برای به دست آوردن یک روش مستقیم تر، بیایید دو جمله ظاهر شده در معادله (۱) را تفسیر کنیم. جمله نمایی دارای فرم تابعی پاسخ طبیعی مدار RL می باشد که یک تابع نمایی منفی است و با افزایش زمان به سمت صفر میل می کند و به وسیله ثابت زمانی L/R مشخص می شود. بنابراین فرم تابعی این قسمت از پاسخ با آنچه که برای مدار بدون منبع به دست می آید، یکسان است. اگر چه، دامنه این جمله نمایی بستگی به V دارد. پس باید به طور کلی بیان کنیم که پاسخ عبارت است از

- مجموع دو جمله که یکی دارای فرم تابعی یکسان با پاسخ مدار بدون منبع می باشد منتها دامنه آن بستگی به تابع تحریک دارد. حال بیایید ماهیت قسمت دوم پاسخ را مورد بررسی قرار دهیم.
- معادله (۱) دارای یک جمله ثابت V/R هم می باشد. راستی چرا این جمله وجود دارد؟ جواب ساده است: پاسخ طبیعی به تدریج که انرژی تلف می شود به سمت صفر میل می کند اما پاسخ کلی نباید به سمت صفر میل کند. نهایتاً مدار به صورت یک مقاومت و سلف سری با یک باتری رفتار می کند و جریان مستقیم V/R در آن جاری می باشد. این جریان قسمتی از پاسخ است که می توان مستقیماً آن را به تابع تحریک نسبت داد و ما آن را پاسخ اجباری (یا پاسخ تحریکی forced response) می نامیم. این پاسخ، پاسخی است که پس از مدت طولانی بسته بودن کلید حاصل می شود.

پاسخ کامل از دو قسمت تشکیل می شود، پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری. پاسخ طبیعی مشخصه ای از مدار است و نه از منابع و فرم آن را می توان با توجه به مدار بدون منبع به دست آورد و دامنه آن بستگی به دامنه اولیه منبع و انرژی اولیه ذخیره شده دارد. پاسخ اجباری مشخصه تابع تحریک را دارد و آن را می توان با در نظر گرفتن اینکه از تغییر وضعیت همه کلیدهای مدار مدت طولانی می گذرد، به دست آورد. از آنجاییکه ما فعلاً با کلیدها و منابع dc سرو کار داریم، پاسخ اجباری صرفاً حل یک مسئله ساده مدار dc می باشد.

دلیل وجود دو پاسخ، طبیعی و اجباری را می توان از بحث های فیزیکی هم ملاحظه نمود. می دانیم که مدار ما نهایتاً پاسخ اجباری اختیار خواهد نمود. با وجود این در لحظه ای که کلیدها تغییر وضعیت می دهد جریان اولیه سلف (و یا ولتاژ اولیه خازن در سایر مدارها) دارای مقداری خواهد بود که فقط بستگی به انرژی ذخیره شده در این عناصر دارد. نمی توان انتظار داشت که این جریانها و ولتاژها همانهایی باشند که به وسیله پاسخ اجباری تقاضا می شود. بنابراین باید یک پریود گذرایی وجود داشته باشد که جریانها و ولتاژها از مقادیر اولیه شان به مقادیر نهایی لازم تغییر یابند. بخشی از پاسخ که گذر از مقدار اولیه به مقدار نهایی را ارائه می کند، پاسخ طبیعی می باشد (که همانگونه که قبلاً دیدیم پاسخ گذرا هم نامیده می شود). اگر بخواهیم پاسخ مدار ساده RL بدون منبع را بر حسب بحث فوق توصیف کنیم، آنگاه باید بگوییم که پاسخ اجباری صفر است و پاسخ طبیعی سعی می کند پاسخ اولیه تولید شده به وسیله انرژی ذخیره شده را به مقدار پاسخ اجباری صفر، وصل کند. این توصیف فقط برای مدارهایی که در آنها پاسخ طبیعی نهایتاً میرا می شود، مناسب است. این امر همیشه در مدارهای فیزیکی که مقداری مقاومت با عناصر همراه است روی می دهد اما تعدادی مدارهای پاتولوژیک وجود دارند که در آنها پاسخ طبیعی

وقتی که زمان بی نهایت می شود ناپدید نمی شود، مدارهایی که در آنها جریانهای به دام افتاده در حلقه های سلفی دور می زنند و یا ولتاژهای به دام افتاده در رشته های سری خازنها مثالهایی از مورد فوق می باشند.

حال بیایید اساس ریاضی تقسیم پاسخ به دو قسمت پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری را بررسی کنیم.

تمرین

۳-۶. یک سلف 40 mH ، یک مقاومت 80Ω و یک منبع ولتاژ $v_s = 20 + 40u(t) \text{ V}$ به طور سری می باشند. با استفاده از اصل جمع اثرها دامنه جریان سلف را در حالات زیر پیدا کنید: (a) در $t = 0$ ، (b) در $t = 0^+$ ، (c) وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، (d) در $t = 1 \text{ ms}$.

جواب: $0.682, 0.750, 0.250, 0.250 \text{ A}$

۴-۶. پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری

دلیل ریاضی خوبی هم نیز برای این مطلب که پاسخ کامل ترکیبی از دو قسمت است، وجود دارد. این دلیل بر اساس این حقیقت است که جواب هر معادله دیفرانسیل خطی را می توان به صورت مجموع دو قسمت، یکی جواب عمومی (پاسخ طبیعی) و دیگری پاسخ خصوصی (پاسخ اجباری)، بیان نمود. بدون اینکه عمیقاً در تئوری معادلات دیفرانسیل وارد شویم، بیایید یک معادله عمومی از نوعی که در قسمت قبل دیدیم، را بررسی کنیم:

$$di/dt + Pi = Q \quad \text{یا} \quad di + Pidi = Qdt \quad (2)$$

می توانیم Q را به عنوان تابع تحریک در نظر بگیریم و برای اینکه وابستگی کلی آن را به زمان مورد تأکید قرار داده باشیم، آن را به صورت $Q(t)$ نشان می دهیم. در تمام مدارهای ما، P یک ثابت مثبت خواهد بود اما توضیحاتی که برای حل معادله (۲) در پی می آید برای حالتی که P یک تابع کلی از زمان باشد، هم صادق است. بیایید با فرض اینکه P یک ثابت مثبت باشد، بحث را ساده کنیم. بعداً، همچنین فرض خواهیم کرد که Q هم ثابت است، یعنی خودمان را به توابع تحریک dc محدود خواهیم کرد.

در تمام کتب مربوط به معادلات دیفرانسیل نشان داده شده است که اگر هر دو طرف معادله (۲) را در یک فاکتور انتگرال گیری مجازی ضرب کنیم، آنگاه هر طرف معادله یک دیفرانسیل دقیق می شود که می توان برای به دست آوردن جواب از آن مستقیماً انتگرال گیری کرد. ما

متغیرها را جدا نمی کنیم فقط آنها را طوری مرتب می کنیم که انتگرال گیری ممکن گردد. برای این معادله فاکتور انتگرال گیری عبارت از e^{pt} می باشد و چون P ثابت است می توان آن را به صورت e^{pt} در نظر گرفت. هر دو طرف معادله را در این فاکتور انتگرال گیری ضرب می کنیم و به دست می آوریم:

$$e^{pt} di + iPe^{pt} dt = Qe^{pt} dt$$

حال اگر سمت چپ معادله فوق را به صورت دیفرانسیل دقیق ie^{pt} در نظر بگیریم می توانیم فرم آن را اصلاح کنیم:

$$d(ie^{pt}) = e^{pt} di + iPe^{pt} dt$$

و از آنجا داریم: $d(ie^{pt}) = Qe^{pt} dt$ ، حال می توانیم از هر طرف انتگرال بگیریم که خواهیم داشت: $ie^{pt} = \int Qe^{pt} dt + A$ در این رابطه A ثابت انتگرالسیون می باشد. از آنجاییکه این ثابت به وضوح نشان داده شده است و قتی که آن را محاسبه کنیم دیگر نیازی به اضافه کردن هیچ ثابت انتگرالسیون به انتگرال باقیمانده نخواهد بود. اگر طرفین را در e^{-pt} ضرب کنیم، جواب i به دست می آید: (۳) $i = e^{-pt} \int Qe^{pt} dt + Ae^{-pt}$ اگر تابع تحریک، یعنی $Q(t)$ ، معلوم باشد، در این صورت فقط با محاسبه انتگرال فرم دقیق تابعی $i(t)$ به دست می آید. البته ما نباید برای هر مسئله ای چنین انتگرالی را محاسبه کنیم بلکه ما از آن فقط به عنوان یک راه حل نمونه استفاده نموده و چند نتیجه کلی از آن استخراج خواهیم کرد.

ابتدا باید توجه کنیم که برای یک مدار بدون منبع، Q باید صفر باشد و جواب مسئله همان پاسخ طبیعی می باشد:

$$i_n = Ae^{-pt} \quad (4)$$

ملاحظه خواهیم کرد که ثابت P هرگز منفی نمی شود و مقدار آن فقط بستگی به عناصر مداری غیرفعال و اتصال آنها در مدار دارد^۱ بنابراین پاسخ طبیعی و قتی که زمان بی نهایت افزایش یابد به سمت صفر میل می کند. البته در مدار RL سری ساده باید هم همینطور باشد زیرا انرژی اولیه به تدریج در مقاومت تلف می شود. همچنین مدارهای ایده آل غیرفیزیکی هم وجود دارند که در آنها P صفر می باشد، در این مدارها پاسخ طبیعی میرا نمی شود بلکه به سمت مقدار ثابتی میل می کند که مثالهایی از این مورد، ولتاژها و جریانهای به دام افتاده هستند.

بنابراین دریافتیم که یکی از دو جمله تشکیل دهنده پاسخ کامل، شکل پاسخ طبیعی را دارد و دامنه آن بستگی به مقدار اولیه پاسخ کامل و در نتیجه بستگی به مقدار اولیه تابع تحریک دارد

۱ - اگر مدار شامل یک منبع وابسته و یا مقاومت منفی باشد، آنگاه P می تواند منفی هم باشد.

(اما معمولاً مساوی با آن نیست).

به علاوه ملاحظه می‌کنیم که جمله اول معادله (۳) بستگی به فرم تابعی $Q(t)$ ، یعنی تابع تحریک، دارد. هر جا که مداری داشته باشیم که در آن پاسخ طبیعی و قتیکه i بی‌نهایت می‌شود، به صفر میل کند، آنگاه همین جمله اول فرم پاسخ را پس از محو کامل پاسخ طبیعی، توصیف خواهد کرد. ما این جمله را پاسخ اجباری می‌نامیم که پاسخ حالت ماندگاری، پاسخ خصوصی و یا انتگرال خصوصی هم نامیده می‌شود.

در حال حاضر فقط مسائلی را که شامل اعمال ناگهانی منابع dc هستند در نظر می‌گیریم که در این حالت $Q(t)$ به ازای جميع مقادیر t بعد از بسته شدن کلید در شکل ۶-۹a، مقداری ثابت می‌باشد. اکنون اگر بخواهیم می‌توانیم انتگرال را در معادله (۳) محاسبه کنیم و پاسخ اجباری را به دست آوریم: $i_f = Q/p$ که پاسخ کامل می‌شود: $i(t) = Q/P + Ae^{-pt}$ برای مدار RL سری، $\frac{Q}{P}$ عبارت از جریان ثابت V/R بوده و $1/P$ هم ثابت زمانی τ می‌باشد. ملاحظه می‌کنیم که پاسخ طبیعی را می‌توانستیم بدون محاسبه انتگرال هم به دست آوریم، زیرا آن عبارت است از پاسخ کامل در زمان بی‌نهایت و فقط با تقسیم ولتاژ منبع بر مقاومت سری به دست می‌آید. بنابراین پاسخ اجباری را می‌توانیم به طور نظری به دست آوریم. در بخش بعدی سعی خواهیم کرد پاسخ کامل چند مدار RL را با به دست آوردن پاسخهای طبیعی و اجباری و سپس جمع کردن آنها، پیدا کنیم.

تمرین

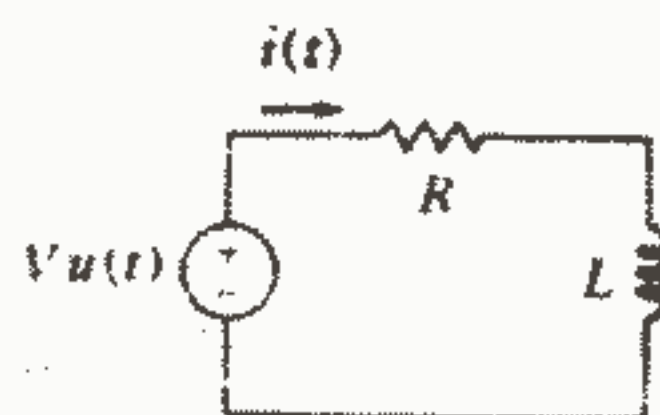
۴-۶. فرض کنید که منبع ولتاژ $v_s = 10e^{-200t}u(t)$ V به طور سری با یک مقاومت 25Ω و سلف 100mH می‌باشد. مقادیر مربوطه را در معادله (۳) قرار دهید و اندازه جریان را در لحظات: (a) $t = 0^+$ (b) $t = 3\text{ms}$ (c) $t = 10\text{ms}$ (d) $t = 50\text{ms}$ به دست آورید.

جواب: $159.9, 320, 204, 0\text{mA}$

۵-۶. مدارهای RL

بیایید از مدار RL سری ساده برای نشان دادن اینکه چگونه پاسخ کامل با جمع کردن پاسخهای طبیعی و اجباری به دست می‌آید، استفاده کنیم. این مدار که در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است قبلاً تحلیل شده است منتها با یک روش طولانی‌تر. پاسخ مطلوب $i(t)$ می‌باشد و ما ابتدا این جریان را به صورت مجموع جریان طبیعی و اجباری بیان می‌کنیم:

$$i = i_n + i_f$$



شکل ۱۰ - ۹: یک مدار RL سری که برای نشان دادن این که

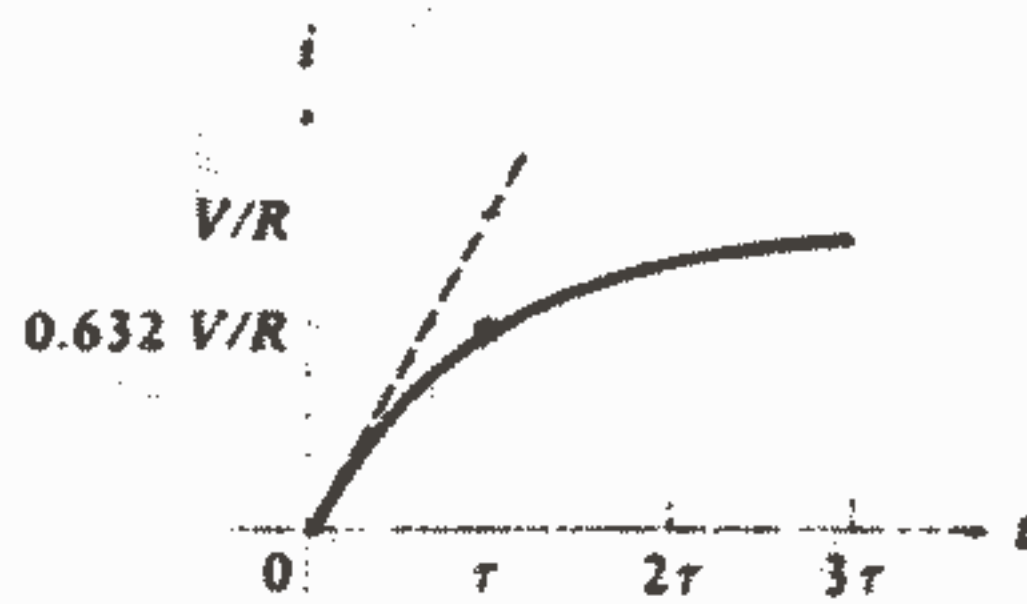
پاسخ کامل برابر است با مجموع پاسخ طبیعی و

اجباری، به کار می‌رود.

فرم تابعی پاسخ طبیعی باید همانی باشد که برای مدارهای بدون منبع به دست آوردیم. بنابراین منبع ولتاژ پله‌ای را با یک اتصال کوتاه جایگزین می‌کنیم و حلقه سری RL قدیمی مان را به دست می‌آوریم. بنابراین: $i_n = Ae^{-Rt/L}$ ، که در آن دامنه A را باید تعیین کنیم سپس پاسخ اجباری، یعنی آن قسمتی از پاسخ را که بستگی به طبیعت تابع تحریک دارد، مورد توجه قرار می‌دهیم. در این مسئله بخصوص، پاسخ اجباری باید مقداری ثابت باشد زیرا منبع عبارت است از مقدار ثابت V برای تمام زمانها. بنابراین پس از اینکه پاسخ طبیعی از بین رفت، هیچ ولتاژی در دو سر سلف وجود نخواهد داشت در نتیجه ولتاژ V در دو سر R ظاهر می‌شود و به طور ساده پاسخ اجباری عبارت خواهد بود از: $i_f = V/R$ توجه داشته باشید که پاسخ اجباری کاملاً تعیین شده است و هیچ دامنه مجهولی وجود ندارد. حال دو پاسخ را ترکیب می‌کنیم: $i = Ae^{-Rt/L} + \frac{V}{R}$ و شرایط اولیه را برای محاسبه A اعمال می‌کنیم. جریان قبل از $t = 0$ برابر صفر است و تغییر لحظه‌ای نمی‌تواند داشته باشد زیرا این جریان در یک سلف جاری می‌باشد. بنابراین، جریان بلافاصله بعد از $t = 0$ برابر صفر می‌باشد و داریم: $0 = A + \frac{V}{R}$ و در نتیجه داریم: (۵) $i = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L})$ دقیقاً توجه داشته باشید که A مقدار اولیه i نیست زیرا $A = -V/R$ در حالیکه $i(0) = 0$. در فصل ۵ که مدارها بدون منبع بودند، A در واقع مقدار اولیه پاسخ بود. البته وقتی که توابع تحریک حضور داشته باشند باید ابتدا مقدار اولیه پاسخ را پیدا کنیم و سپس آن را در معادله پاسخ کامل قرار دهیم و A را پیدا کنیم.

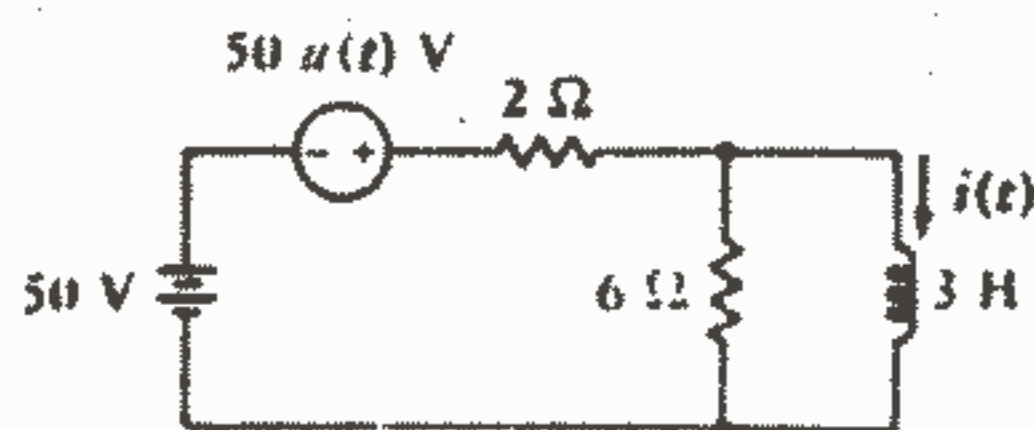
این پاسخ در شکل ۱۱-۶ رسم شده است و ما می‌توانیم ببینیم که چگونه جریان از مقدار اولیه صفر به مقدار نهایی V/R می‌رسد. گذر از صفر به مقدار نهایی به طور کامل در زمان ۳۲ انجام می‌پذیرد. اگر این مدار ما نمایانگر سیم پیچ میدان یک موتور dc بزرگ باشد، می‌توانیم $L = ۱۰H$ ، $R = ۲۰\Omega$ در نظر بگیریم که $\tau = ۰.۵s$ به دست می‌آید. بنابراین جریان میدان در $۱.۵s$ ایجاد می‌شود. در یک ثابت زمانی، جریان ۶۳.۲ درصد مقدار

نهایی‌اش را کسب می‌کند.



شکل ۱۱ - ۶: جریان رابطه (۵) به صورت ترسیمی نشان داده شده است.

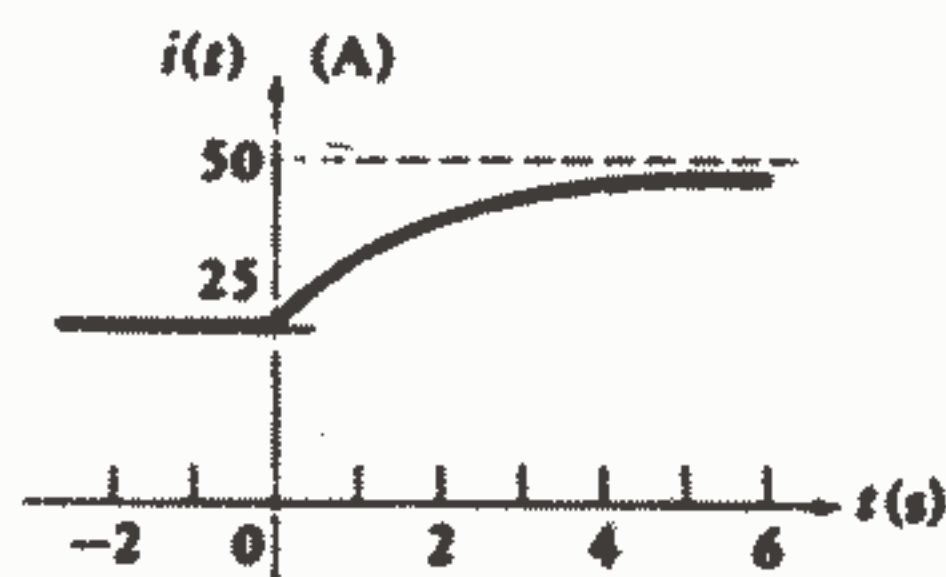
حال این روش را به یک مدار پیچیده‌تر اعمال می‌کنیم. مدار شکل ۱۲-۶ شامل یک منبع ولتاژ dc و یک منبع ولتاژ پله‌ای است.



شکل ۱۲ - ۶: مداری که به عنوان مثال به کار رفته است.

می‌خواهیم $i(t)$ را برای تمام زمانها تعیین کنیم. می‌توانیم هر چیزی را که در سمت چپ سلف می‌باشد با یک معادل تونن جایگزین کنیم، اما به جای این کار بیاپید فقط فرم این معادل را به صورت یک مقاومت سری با منبع ولتاژ در نظر بگیریم. مدار فقط شامل یک عنصر ذخیره‌کننده انرژی، یعنی سلف، می‌باشد و در نتیجه پاسخ طبیعی مانند قبل یک تابع نمایی منفی می‌باشد، یعنی داریم: $i = i_f + i_n$ که در آن $i_n = Ae^{-t/\tau}$ می‌باشد و $\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3}{1.5} = 2$. پاسخ اجباری چیزی است که به وسیله یک ولتاژ ثابت $100V$ ایجاد می‌شود. پاسخ اجباری مقداری است ثابت و هیچ ولتاژی در دو سر سلف وجود ندارد و آن مانند یک اتصال کوتاه رفتار می‌کند، بنابراین داریم: $i_f = \frac{1}{4} = 50$ و در نتیجه پاسخ کامل عبارت است از: $i = 50 + Ae^{-t/2}$ برای محاسبه A ، باید مقدار اولیه جریان سلف را تعیین کنیم. قبل از $t = 0$ این جریان عبارت از $25A$ می‌باشد و نمی‌تواند تغییر لحظه‌ای داشته باشد، بنابراین

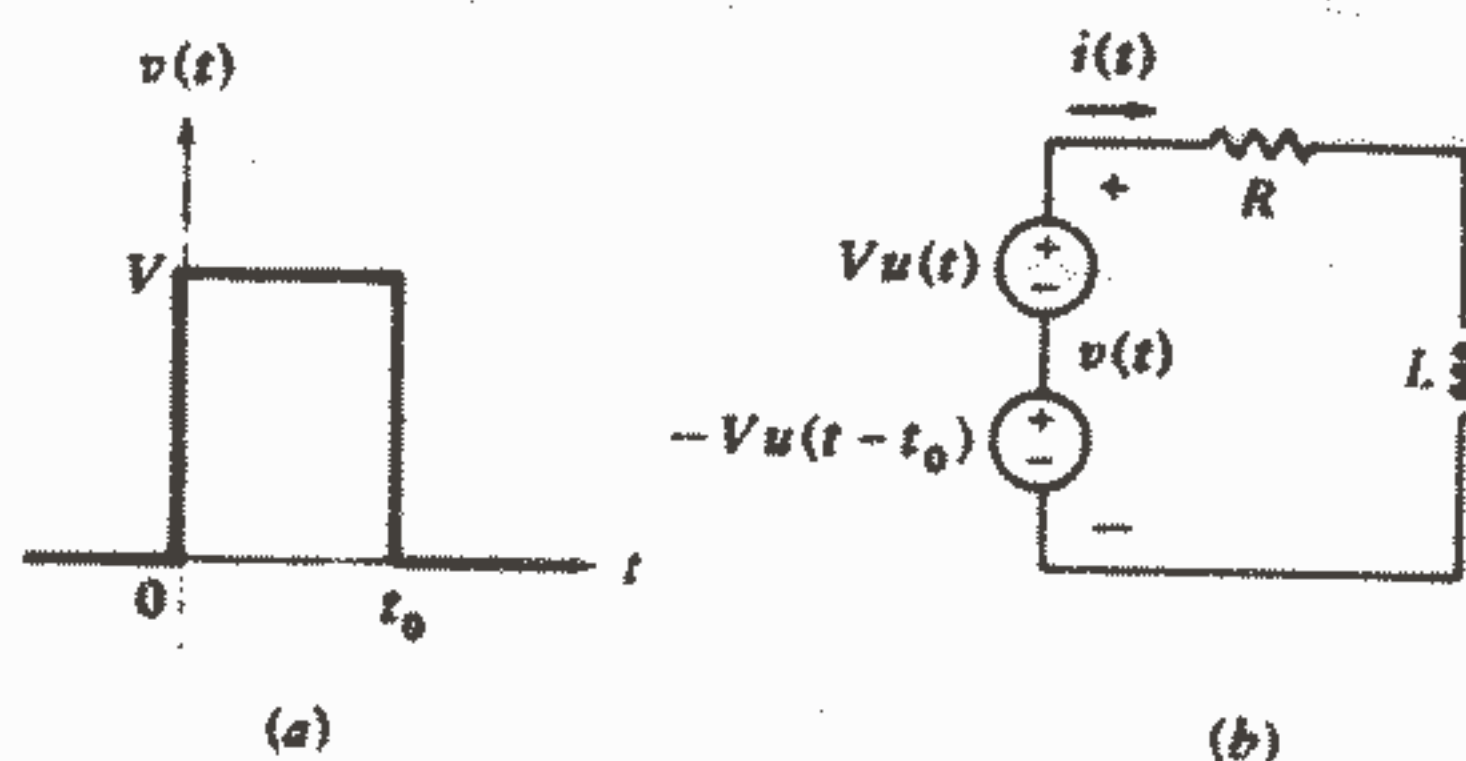
داریم: $A = -25$ و یا $25 = 50 + A$ بنابراین $i = 50 - 25e^{-t/5}$ $t > 0$ حال جواب را با بیان $i = 25$ $t < 0$ کامل می‌کنیم. و با اینکه می‌توانیم یک رابطه واحدی برای کلیه مقادیر t بنویسیم: $i = 25 + 25(1 - e^{-t/5})u(t)$ پاسخ کامل در شکل ۱۳-۶ رسم شده است. توجه بکنید که چگونه پاسخ طبیعی، پاسخ مربوط به $t < 0$ را به پاسخ اجباری ثابت وصل می‌کند.



شکل ۱۳-۶: پاسخ $i(t)$ مربوط به مدار کل ۱۲-۶ برای زمانهای بزرگتر یا مساوی صفر رسم شده است.

به عنوان آخرین مثال از این روش که به وسیله آن پاسخ کامل هر مدار گذرایی را تقریباً به طور نظری می‌توان نوشت، فرض کنید یک پالس ولتاژ مربعی به دامنه V و دوام t_0 را به مدار RL سری ساده اعمال کنیم. تابع تحریک را به صورت مجموع دو منبع ولتاژ پله‌ای $-Vu(t-t_0) + Vu(t)$ که در شکل ۱۴a, b نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم پاسخ را با استفاده از اصل جمع اثرها به دست آوریم. فرض کنید آن قسمت از $i(t)$ را که ناشی از عملکرد جداگانه منبع بالایی $Vu(t)$ می‌باشد با $i_1(t)$ نشان داده باشیم و $i_2(t)$ بیانگر آن قسمت از پاسخ که ناشی از عملکرد منبع $-Vu(t-t_0)$ به تنهایی است، باشد. آنگاه داریم $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

حال هدف ما این است که هر یک از پاسخهای جزئی i_1 , i_2 را به صورت مجموع یک پاسخ طبیعی و یک پاسخ اجباری بنویسیم. پاسخ $i_1(t)$ برایمان آشناست، این مسئله را دو سه صفحه قبل حل کردیم: $i_1(t) = V/R(1 - e^{-Rt/L})$ $t > 0$ توجه داشته باشید که محدوده t ، یعنی $t > 0$ ، که در آن این پاسخ صادق می‌باشد، نشان داده شده است.



شکل ۱۴ - ۶: (a) یک پالس ولتاژ مربعی که بعنوان تابع تحریک در یک مدار RL سری ساده بکار می‌رود. (b) مدار RL سری که تابع تحریک را بصورت ترکیب سری دو منبع ولتاژ پله‌ای مستقل نشان می‌دهد. جریان $i(t)$ مطلوب می‌باشد.

حال توجه خود را معطوف منبع پایین و پاسخ آن یعنی $i_2(t)$ می‌کنیم. فقط پلاریته منبع و زمان اعمال آن فرق دارد. بنابراین نیازی به تعیین فرم پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری نیست. از روی پاسخ $i_1(t)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$i_2(t) = -\frac{V}{R} (1 - e^{-R(t-t_0)/L}) \quad t > t_0$$

که در آن باز هم باید محدوده t ، یعنی $t > t_0$ ، مشخص شده باشد.

حال دو جواب را با هم جمع می‌کنیم ولی باید دقت کنیم زیرا هر جواب در فاصله زمانی متفاوتی صادق است. بنابراین:

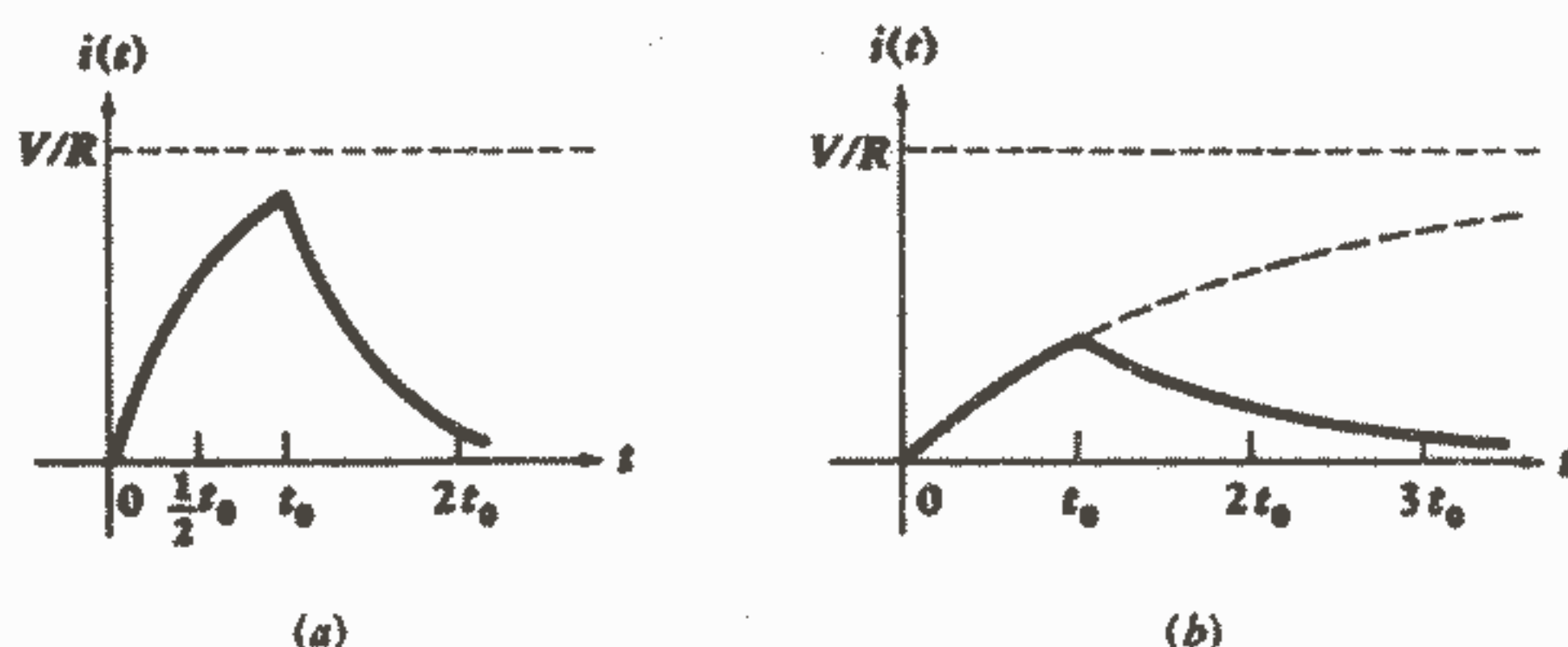
$$i(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad 0 < t < t_0$$

$$i(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L}) - \frac{V}{R} (1 - e^{-R(t-t_0)/L}) \quad t > t_0$$

و یا:

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-Rt/L} (e^{Rt_0/L} - 1) \quad t > t_0$$

جواب با بیان اینکه $i(t)$ برای t های منفی، صفر است و رسم پاسخ به صورت تابعی از زمان، کامل می‌شود. نوع منحنی به دست آمده بستگی به مقادیر نسبی t_0 و ثابت زمانی τ دارد. دو منحنی ممکن در شکل ۱۵-۶ نشان داده شده است.



شکل ۱۵ - ۱۶: دو منحنی پاسخ برای مدار شکل b ۱۴ - ۱۵ نشان داده شده است.

منحنی سمت چپ برای حالتی که ثابت زمانی نصف زمان دوام پالس باشد، رسم شده است، وضعیت متضاد حالت قبل در سمت راست نشان داده شده است که در آن ثابت زمانی دو برابر t_0 است و پاسخ هرگز فرصت پیدا نمی کند که به مقادیر بزرگتری از دامنه برسد.

روشی را که تا به حال برای پیدا کردن پاسخ یک مدار RL بعد از قطع یا وصل منابع dc به مدار در لحظه ای (مثلاً $t = 0$) به کار برده ایم، در زیر خلاصه کرده ایم فرض می کنیم که مدار وقتی که همه منابع مستقل مساوی صفر قرار داده شوند، قابل کاهش به یک مقاومت معادل R_{eq} به طور سری با یک سلف معادل L_{eq} باشد. پاسخی که به دنبال آن هستیم به صورت $f(t)$ بیان شده است.

۱ - با غیرفعال کردن همه منابع، مدار را خلاصه کنید تا L_{eq} و R_{eq} ، $\tau = L_{eq}/R_{eq}$ به دست آید.

۲ - با در نظر گرفتن L_{eq} به صورت اتصال کوتاه، با استفاده از روشهای تحلیل dc $i_L(0^-)$ ، یعنی جریان سلف درست لحظه ای قبل از گسستگی، را پیدا کنید.

۳ - دوباره با در نظر گرفتن L_{eq} به صورت اتصال کوتاه، با استفاده از روشهای تحلیل dc، پاسخ اجباری را پیدا کنید. این مقدار چیزی است که $f(t)$ وقتی که $t \rightarrow \infty$ به آن میل می کند و ما آن را به صورت $f(\infty)$ نشان می دهیم.

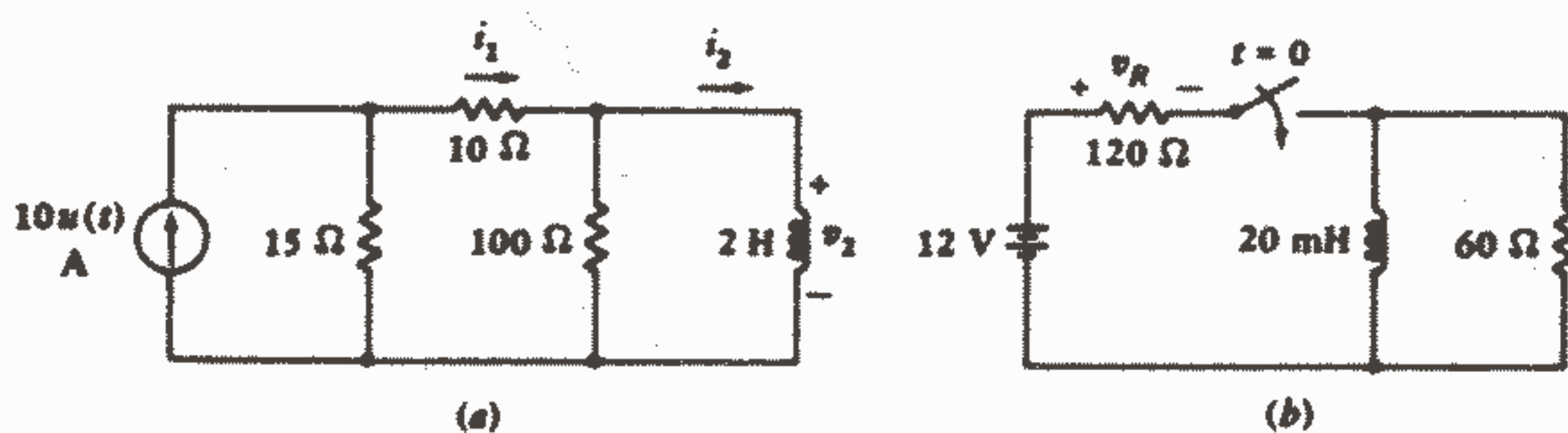
۴ - پاسخ کلی را به صورت مجموع پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری به صورت: $f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$ بنویسید.

۵- $f(0^+)$ را با استفاده از شرایط $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ پیدا کنید. اگر بخواهیم می‌توانیم L_{eq} را، برای محاسبه $f(0^+)$ ، با یک منبع جریان $i_L(0^+)$ [یا یک مدار باز اگر $i_L(0^+) = 0$] جایگزین کنیم. به جز جریان سلف (و ولتاژ خازن)، سایر جریانها و ولتاژهای مدار می‌توانند تغییر ناگهانی داشته باشند.

۶- سپس بنویسید: $f(0^+) = f(\infty) + A$ ، $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$ و یا: $e^{-t/\tau}$ (مقدار نهایی - مقدار اولیه) + مقدار نهایی = پاسخ کلی

تمرین

- ۵-۶- برای مدار شکل ۶-۱۶a مقادیر مقابل را پیدا کنید: (a) $i_1(0^-)$ ، $i_1(0^+)$ و $i_2(0^-)$ ، $i_2(0^+)$ ، $v_R(0^-)$ ، $v_R(0^+)$ ، $i_1(\infty)$ ، $i_2(\infty)$ ، $v_R(\infty)$ (c) $i_1(0,15)$ ، $i_2(0,15)$ ، $v_R(0,15)$ ،
- جواب: $0, 0, 0, 1,2A, 0, 120V, 0, 4,93A, 6A, 6A, 26,8V, 4,66A, 0$
- ۶-۶- v_R را در مدار شکل ۶-۱۶b در لحظات داده شده پیدا کنید: (a) $t = -1ms$ ، (b) 0^- ، (c) 0^+ ، (d) $1ms$
- جواب: $0V, 0, 8, 11,46$



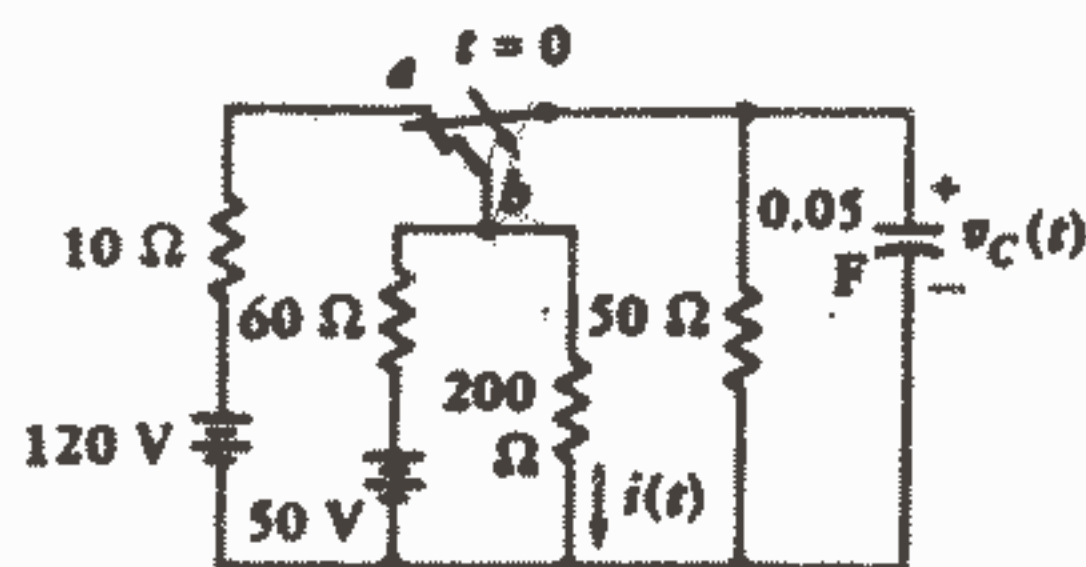
شکل ۱۶-۶: به تمرینات ۵-۶ و ۶-۶ مراجعه کنید

۶-۶- مدارهای RC

پاسخ کامل هر مدار RC را هم می‌توان به صورت مجموع پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری به دست آورد. شکل ۶-۱۷ مداری را نشان می‌دهد که حاوی دو باتری، چهار مقاومت، یک خازن

و یک کلید است. فرض شده است که کلید برای مدت طولانی در وضعیت a بوده است و یا به صورت دیگر، پاسخ طبیعی ناشی از تحریک اولیه مدار میرا شده و به مقدار ناچیزی رسیده است به طوریکه فقط یک پاسخ اجباری ناشی از منبع 120 V باقی مانده است. می‌خواهیم $v_C(t)$ را پیدا کنیم، بنابراین پاسخ اجباری را قبل از $t = 0$ و تئیکه کلید در وضعیت a باشد پیدا می‌کنیم. تمام ولتاژهایی که در سرتاسر مدار هستند ثابت می‌باشند، بنابراین جریانی در خازن جاری نمی‌باشد. با استفاده از یک تقسیم ولتاژ ساده، ولتاژ اولیه به دست می‌آید:

$$v_C(0) = \frac{50}{50 + 10} 120 = 100$$



شکل ۱۷ - ۶: یک مدار RC که در آن پاسخ‌های کامل v_C و i به وسیله جمع کردن یک پاسخ طبیعی و یک پاسخ اجباری به دست می‌آید.

از آنجاییکه ولتاژ خازن نمی‌تواند تغییرات آنی داشته باشد، بنابراین ولتاژ فوق برای $t = 0^-$ ، $t = 0^+$ صادق است.

حال کلید به وضعیت b منتقل می‌شود و جواب کامل عبارت خواهد بود از: $v_C = v_{Cf} + v_{Cn}$ فرم پاسخی طبیعی با اتصال کوتاه کردن منبع 50 V و محاسبه مقاومت معادل مشخص می‌شود:

$$v_{Cn} = Ae^{-t/R_{eq}C}$$

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{50}} = 24$$

$$v_{Cn} = Ae^{-t/1.2}$$

و یا

برای محاسبه پاسخ اجباری در حالتی که کلید در وضعیت b باشد آنقدر صبر می‌کنیم تا کلیه ولتاژها و جریانات از تغییر باز ایستند به طوریکه بتوانیم خازن را مدار باز در نظر بگیریم و

یکبار دیگر با استفاده از تقسیم ولتاژ خواهیم داشت:

$$v_{cr} = \frac{(50)(200)/(50 + 200)}{60 + (50)(200)/(50 + 200)} 50 = 20$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$v_c = 20 + Ae^{-t/1.2}$$

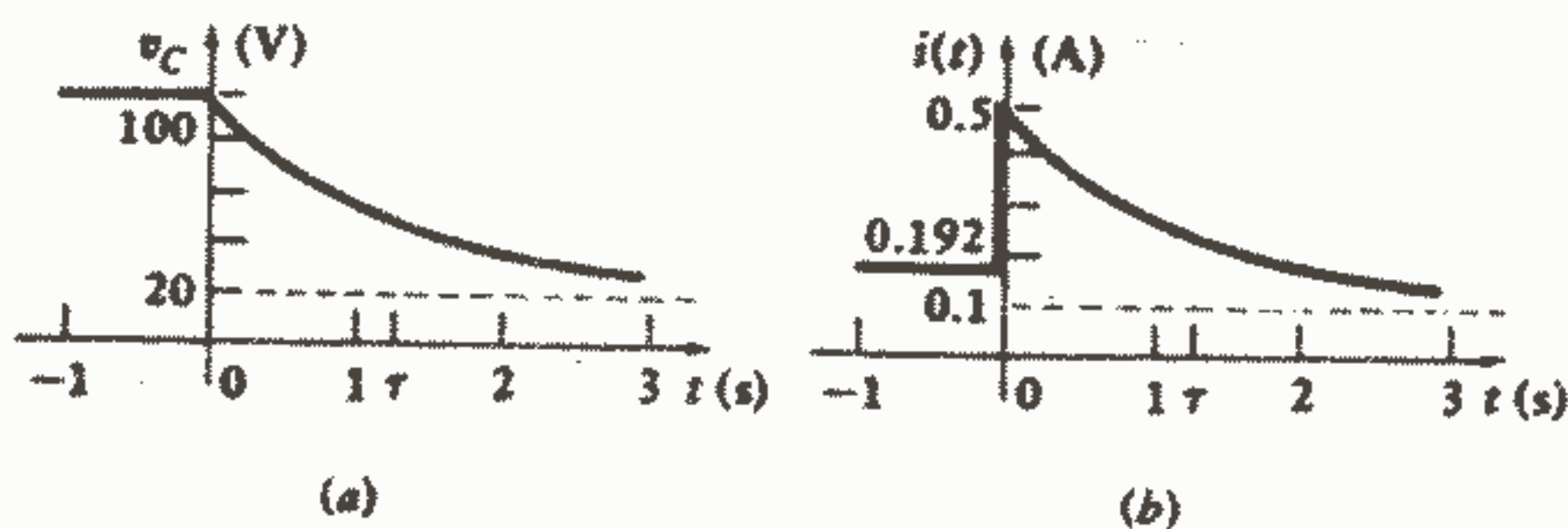
و با استفاده از شرایط اولیه‌ای که قبلاً به دست آمد، داریم:

$$100 = 20 + A \rightarrow v_c = 20 + 80e^{-t/1.2} \quad t > 0$$

این پاسخ در شکل ۱۸a-۶ رسم شده است و باز مشاهده می‌کنیم که پاسخ طبیعی حالت گذرایی از مقدار اولیه به مقدار نهایی را نشان می‌دهد.

و بالاخره بیا باید پاسخی را که لازم نیست در حین لحظه سوئیچینگ ثابت باقی بماند (مانند $i(t)$ در شکل ۱۷-۶) محاسبه کنیم. وقتی که کلید در وضعیت a باشد، واضح است که $i = 50/260 = 0.192A$ ، وقتی که کلید به وضعیت b منتقل می‌شود، پاسخ اجباری برای این جریان عبارت است از:

$$i_f = \frac{50}{60 + (50)(200)/(50 + 200)} \frac{50}{50 + 200} = 0.1$$



شکل ۱۸-۶: پاسخ‌های v_c (a) و i (b) به صورت تابعی از

زمان برای مدار شکل ۱۷-۶ رسم شده‌اند.

فرم پاسخی طبیعی همانی است که قبلاً برای ولتاژ خازن تعیین کردیم:

$$i_n = Ae^{-t/1.2}$$

با ترکیب نمودن پاسخهای طبیعی و اجباری خواهیم داشت:

$$i = 0.1 + Ae^{-t/1.2}$$

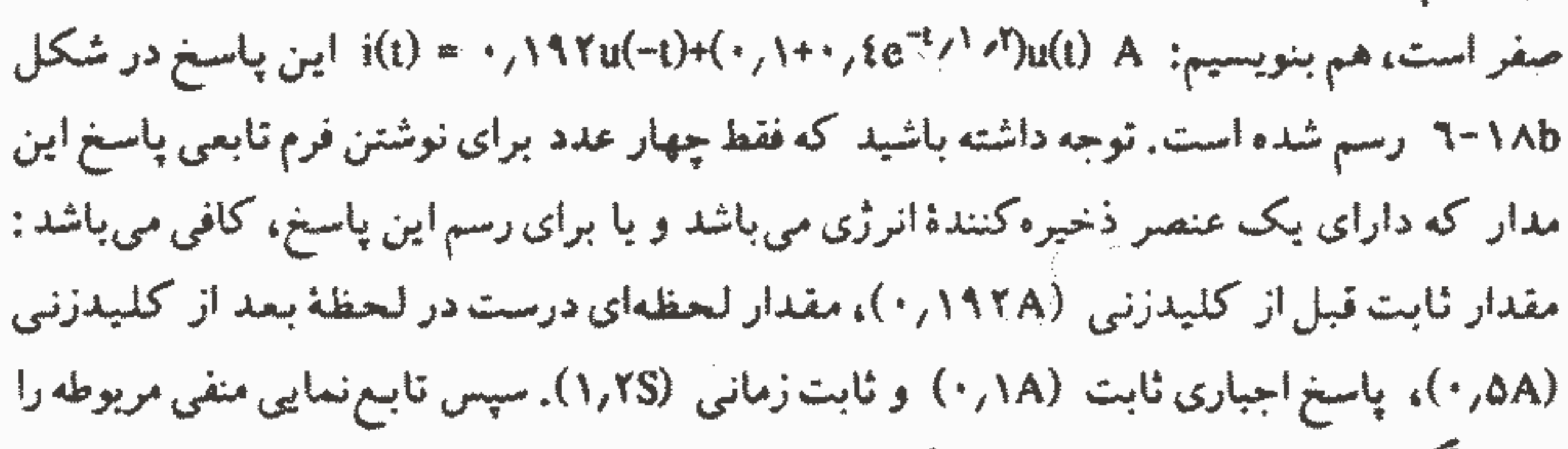
برای محاسبه A ، لازم است که $i(0^+)$ را بدانیم، و برای اینکه آن را پیدا کنیم توجه خود را معطوف عنصر ذخیره‌کننده انرژی (در اینجا خازن) می‌کنیم و این واقعیت را در نظر می‌گیریم که v_c ، که باید در حین فاصله زمانی کلیدزنی در مقدار $100V$ باقی بماند، عامل

کنترل کننده ای است که سایر جریانها و ولتاژها را در لحظه $t = 0^+$ ایجاد می کند. از آنجاییکه $v_c(0^+) = 100V$ ، و چون خازن موازی با مقاومت 200Ω می باشد، در می یابیم که:

$$i(0^+) = 0.5A, A = 0.4 \rightarrow i(t) = 0.192 \text{ A} \quad t < 0$$

$$i(t) = 0.1 + 0.4e^{-t/1.2} \text{ A} \quad t > 0$$

$$i(t) = 0.192 + (-0.92 + 0.4e^{-t/1.2})u(t) \text{ A}$$

که رابطه آخر برای همه مقادیر t صحیح می باشد. پاسخ کامل برای همه مقادیر t را می توانیم به طور خلاصه تر با استفاده از $u(-t)$ ، که به ازای $t < 0$ برابر یک و به ازای $t > 0$ برابر صفر است، هم بنویسیم: $i(t) = 0.192u(-t) + (0.1 + 0.4e^{-t/1.2})u(t) \text{ A}$  رسم شده است. توجه داشته باشید که فقط چهار عدد برای نوشتن فرم تابعی پاسخ این مدار که دارای یک عنصر ذخیره کننده انرژی می باشد و یا برای رسم این پاسخ، کافی می باشد: مقدار ثابت قبل از کلیدزنی $(0.192A)$ ، مقدار لحظه ای درست در لحظه بعد از کلیدزنی $(0.5A)$ ، پاسخ اجباری ثابت $(0.1A)$ و ثابت زمانی $(1.2S)$. سپس تابع نمایی منفی مربوطه را به سادگی می توانیم بنویسیم و یا ترسیم کنیم.

بحث خود را با درج فهرست وار متناظر عباراتی که در انتهای بخش ۵-۶ آمده است، به پایان می بریم.

روشی را که ما تا به حال برای پیدا کردن پاسخ یک مدار RC بعد از وصل یا قطع منابع dc در لحظه ای مانند $t = 0$ ، به کار برده ایم در زیر خلاصه شده است. فرض می کنیم که مدار وقتی که همه منابع مستقل برابر صفر قرار داده شوند قابل کاهش به یک مقاومت معادل R_{eq} موازی با یک خازن معادل C_{eq} باشد. پاسخی را که در جستجوی آن هستیم با $f(t)$ نشان داده ایم.

- ۱ - با غیرفعال نمودن همه منابع مستقل مدار را ساده کنید و R_{eq} ، C_{eq} و ثابت زمانی $\tau = R_{eq}C_{eq}$ را تعیین کنید.
- ۲ - با در نظر گرفتن C_{eq} به عنوان مدار باز و با استفاده از روشهای تحلیل dc مقدار $v_c(0^-)$ را پیدا کنید.
- ۳ - دوباره با در نظر گرفتن C_{eq} به عنوان مدار باز و با استفاده از روشهای تحلیل dc، پاسخ اجباری را پیدا کنید. این مقدار چیزی است که وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، $f(t)$ به آن میل می کند و ما آن را با $f(\infty)$ نشان می دهیم.

۴ - پاسخ کلی را به صورت مجموع پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری بنویسید:

$$f(t) = f(\infty) + Ae^{-\alpha t}$$

۵ - $f(0^+)$ را با استفاده از شرایط $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ پیدا کنید. برای انجام این محاسبه

اگر بخواهید می‌توانید C_{eq} را با یک منبع ولتاژ $v_C(0^+)$ [و اگر $v_C(0^+) = 0$ با یک اتصال کوتاه] جایگزین کنید. به جز ولتاژهای خازنی (و جریان سلفها)، سایر ولتاژها و جریانهای مدار می‌توانند تغییرات ناگهانی داشته باشند.

۶ - سپس خواهیم داشت:

$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\alpha t}, \quad f(0^+) = f(\infty) + A$$

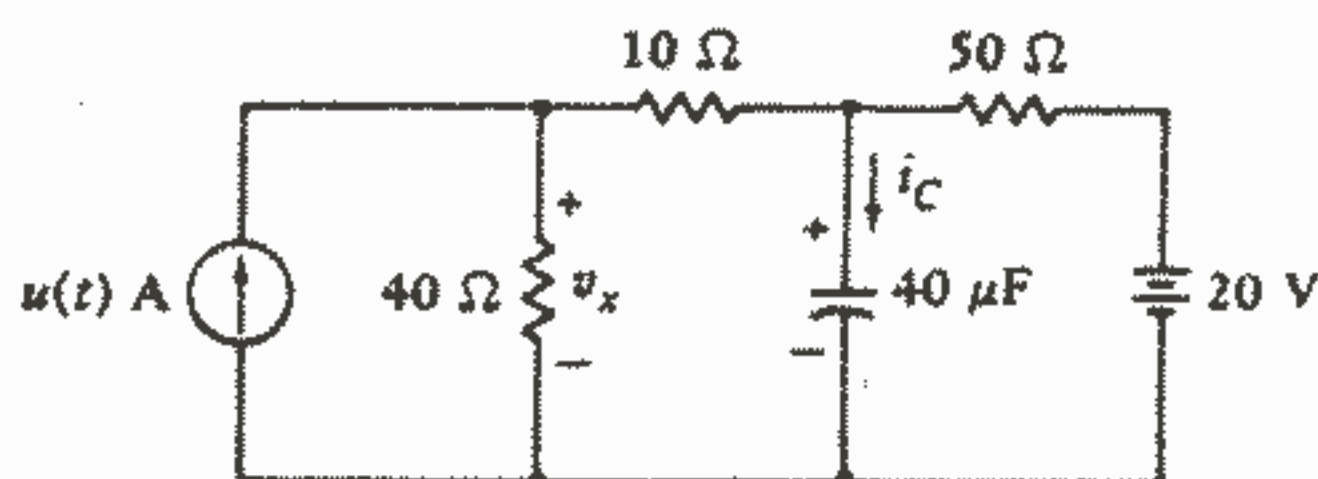
و یا اینکه: $e^{-\alpha t}(\text{مقدار نهایی} - \text{مقدار اولیه}) + \text{مقدار نهایی} = \text{پاسخ کلی}$

تمرین

۷ - ۶ - در لحظه $t = 1 \text{ ms}$ در مدار شکل ۱۹-۶ مقادیر زیر را پیدا کنید:

(a) v_C , (b) i_C , (c) v_x

جواب: $22,6 \text{ V}$, $0,294 \text{ A}$, $26,1 \text{ V}$



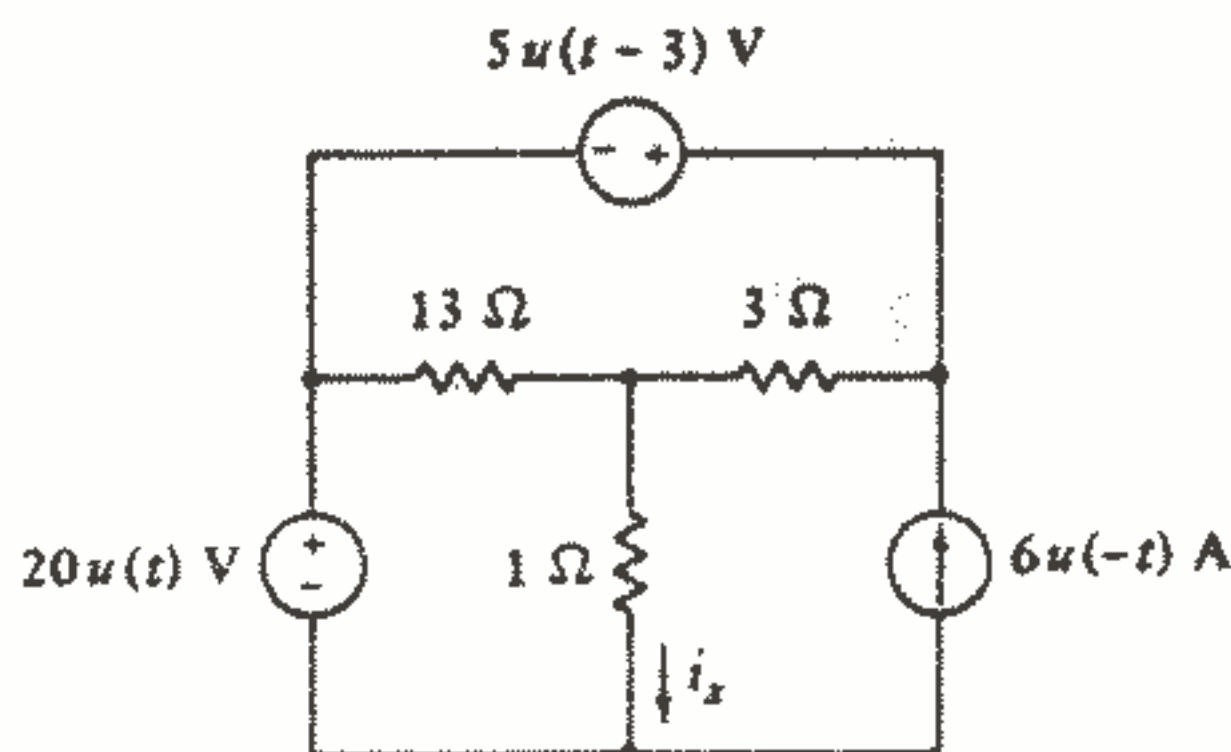
شکل ۱۹ - ۶: به تمرین ۷ - ۶ مراجعه کنید.

مسائل

۱- در لحظه $t = 5S$ مقادیر زیر را در شکل ۶-۲۰ تعیین کنید:

(a) $u(t-6)$ (b) $u(6-t)$ (c) $2-u(t^2-10t+24)$ (d) $(t-2)u(t-2)$

(e) $10u(t-3)$ (f) $-tu(-t)+tu(t)$ (g) i_x



شکل ۶-۲۰: به مسئله ۱ مراجعه کنید.

۲- تابع زمانی $f(t) = [u(t+5)-u(t-5)] [u(\cos \frac{1}{4}\pi t) + u(\sin \pi t)]$ را رسم کنید.

۳- مقدار هر یک از توابع زمانی زیر را به ازای $t = 1,5S$ محاسبه کنید:

(a) $2u(t+1)-3u(t+2)+4u(t-3)$ (b) $2u(t-1)+5[u(t)]^2$ (c) $4u(\cos 3t)$ (d) $4\cos[3u(t)]$

(e) ولتاژی به ازای $t < 0$ برابر $10V$ و به ازای $0 < t < 5S$ برابر $2e^{-0.2t}$ و به ازای

$t > 5S$ برابر صفر است، آن را به صورت یک تابع زمان با استفاده از توابع تحریک پله واحد بیان کنید.

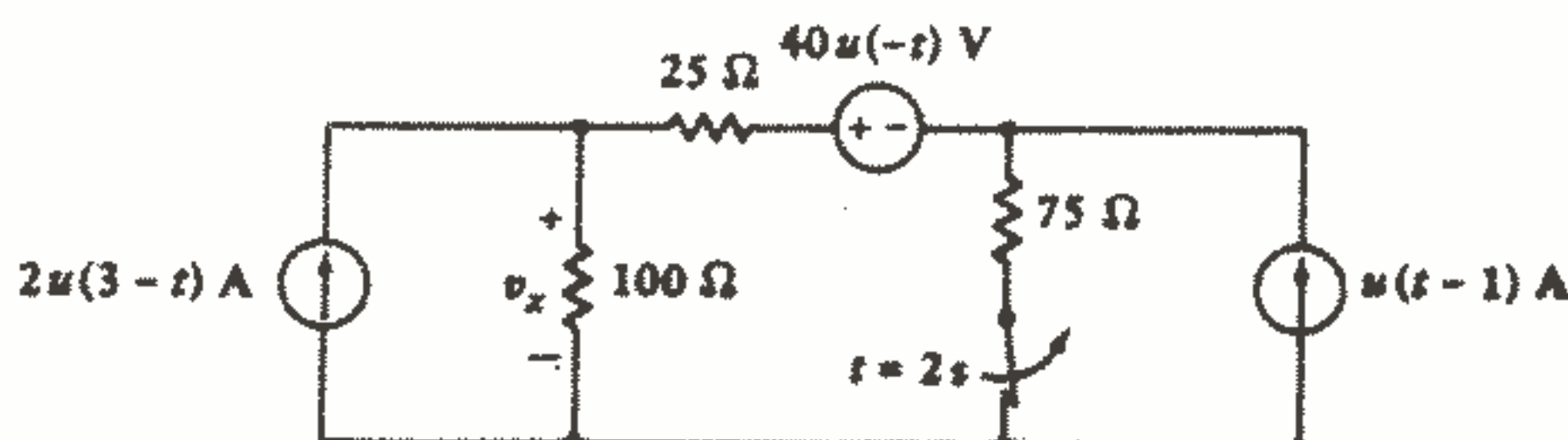
۴- «شبه عمومی» در هر قسمت شکل ۶-۳ شامل یک منبع ولتاژ $10u(2-t)V$ ، با

علامت + در ترمینال بالایی، به طور سری با یک مقاومت 5Ω می باشد. اگر در مدار خارجی

$V = 5V$ و $I_0 = -1S$ باشد، جریان ورودی به شبکه در ترمینال بالایی در هر حالت را رسم کنید.

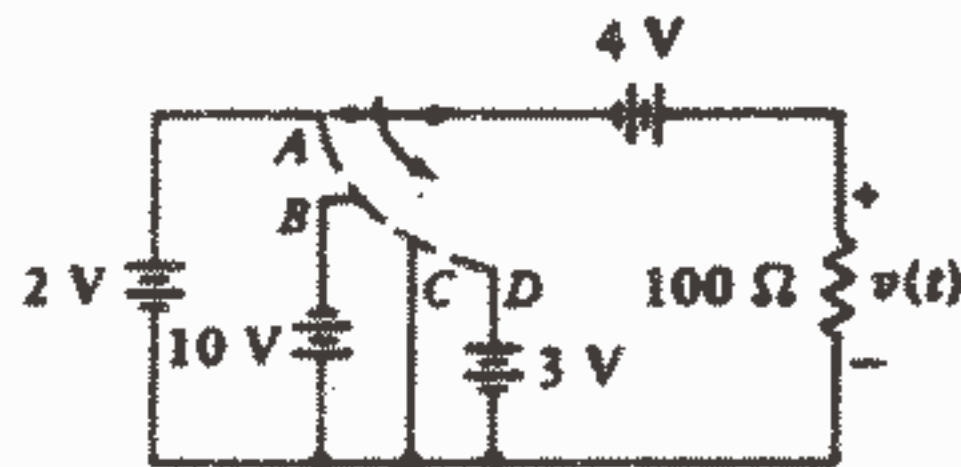
۵- v_x را در شبکه شکل ۶-۲۱ در فواصل زمانی $1S$ از $t = 0,5S$ تا $t = 3,5S$ پیدا

کنید.



شکل ۶-۲۱: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

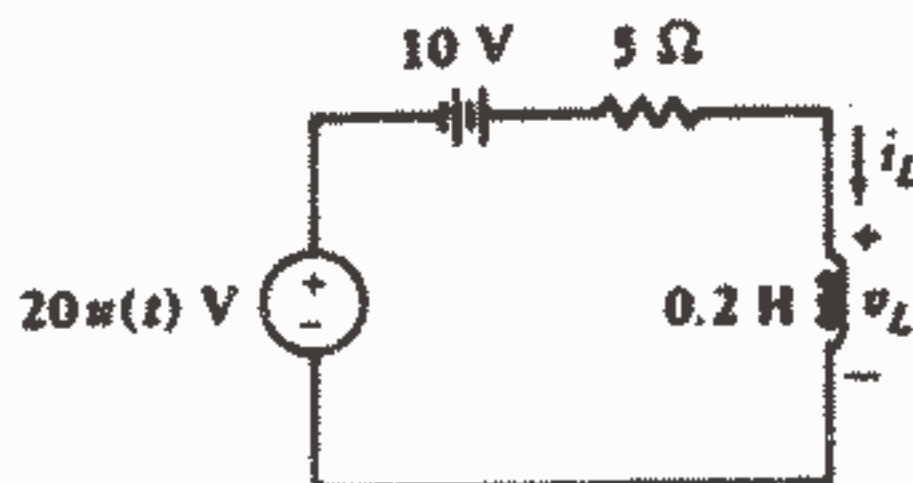
۶ - کلید شکل ۶-۲۲ در $t < 0$ در وضعیت A بوده و در $t = 0$ به وضعیت B می‌رود و سپس در $t = 4S$ به وضعیت C و در $t = 6S$ به وضعیت D منتقل می‌شود و در همانجا می‌ماند. $v(t)$ را به صورت تابعی از زمان رسم کنید و آن را به صورت مجموعی از توابع تحریک پله‌ای بیان کنید.



شکل ۶-۲۲: به مسئله ۶ مراجعه کنید.

۷ - تحریک اعمال شده به مدار RL در شکل ۶-۹b را می‌توان به دو قسمت به صورت زیر: $V_u(t) = V - V_u(-t)$ تقسیم نمود. مولفه اول یک منبع dc به مقدار V ولت است در حالیکه دومی بعد از $t = 0$ یک پاسخ بدون منبع از نوعی که در فصل ۵ توصیف شد، تولید می‌کند. نشان دهید که جمع آثار این دو پاسخ، یک جریان کلی مساوی با معادله (۱) قسمت ۶-۳ ارائه می‌کند.

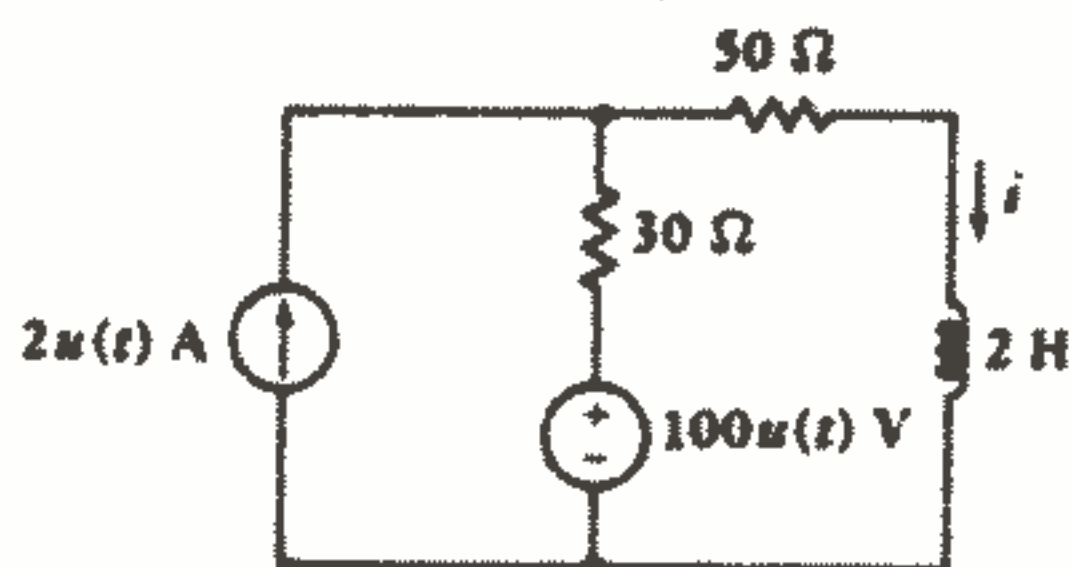
۸ - در مدار شکل ۶-۲۳، $v_L(t)$ ، $i_L(t)$ را نسبت به t در فاصله $-3\tau < t < 3\tau$ رسم کنید.



شکل ۶-۲۳: به مسئله ۸ مراجعه کنید.

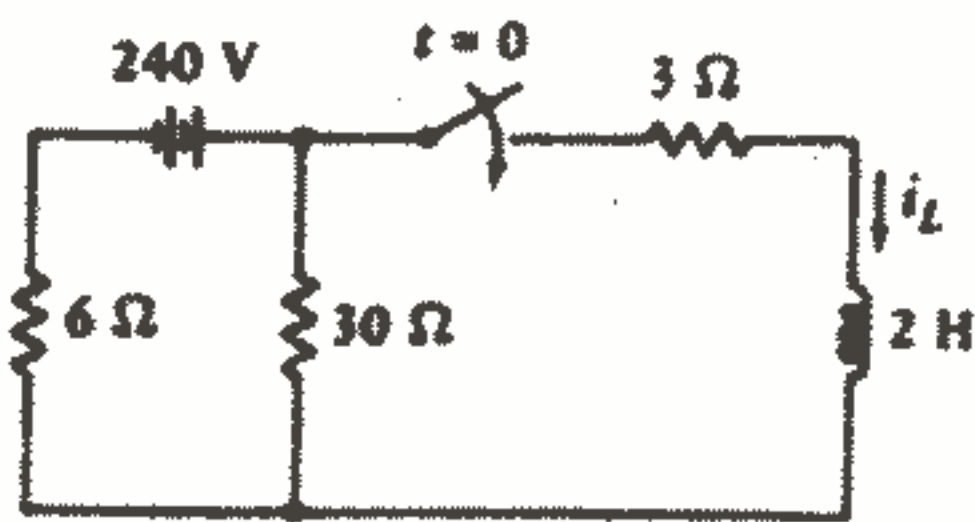
۹ - شبکه سمت چپ سلف را در شکل ۶-۲۴ با معادل تونن آن جایگزین کنید و سپس $i(t)$ را برای $t > 0$ تعیین کنید.

۲۴۵ اعمال تابع تحریک پله واحد



شکل ۲۴ - ۶: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

۱۰ - کلید شکل ۶-۲۵ برای مدت طولانی باز بوده است و در لحظه $t = 0$ بسته می شود. (a) بعد از جایگزین کردن هر چه که در سمت چپ سلف است با معادل تونن آن، $i_L(t)$ را پیدا کنید و آن را برای $t > 0$ رسم کنید. (b) رابطه ای برای $i_L(t)$ پیدا کنید که برای همه مقادیر t صادق باشد.

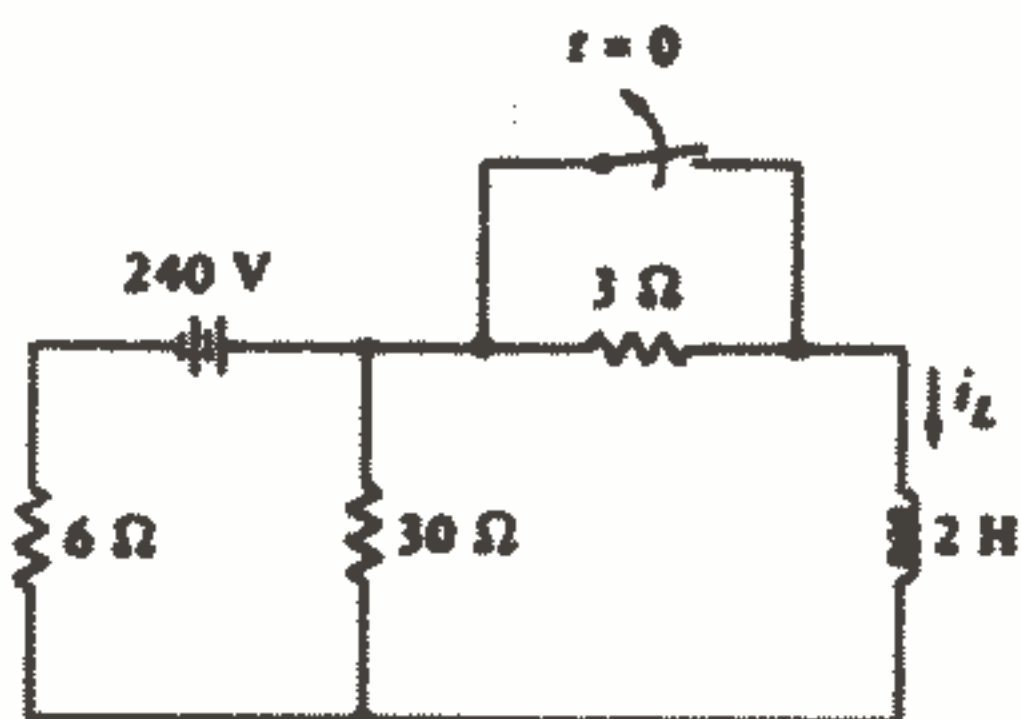


شکل ۲۵ - ۶: به مسئله ۱۰ مراجعه کنید.

۱۱ - معادله (۳) از بخش ۶-۴ بیانگر جواب کلی یک مدار RL سری تحریک شده می باشد که در آن Q تابعی است از زمان و A و P مقادیر ثابت هستند. فرض کنید $R = 200 \Omega$ و $L = 5 H$ آنگاه $i(t)$ را پیدا کنید به شرطی که تابع تحریک ولتاژ $LQ(t)$ مقادیر زیر را داشته باشد:

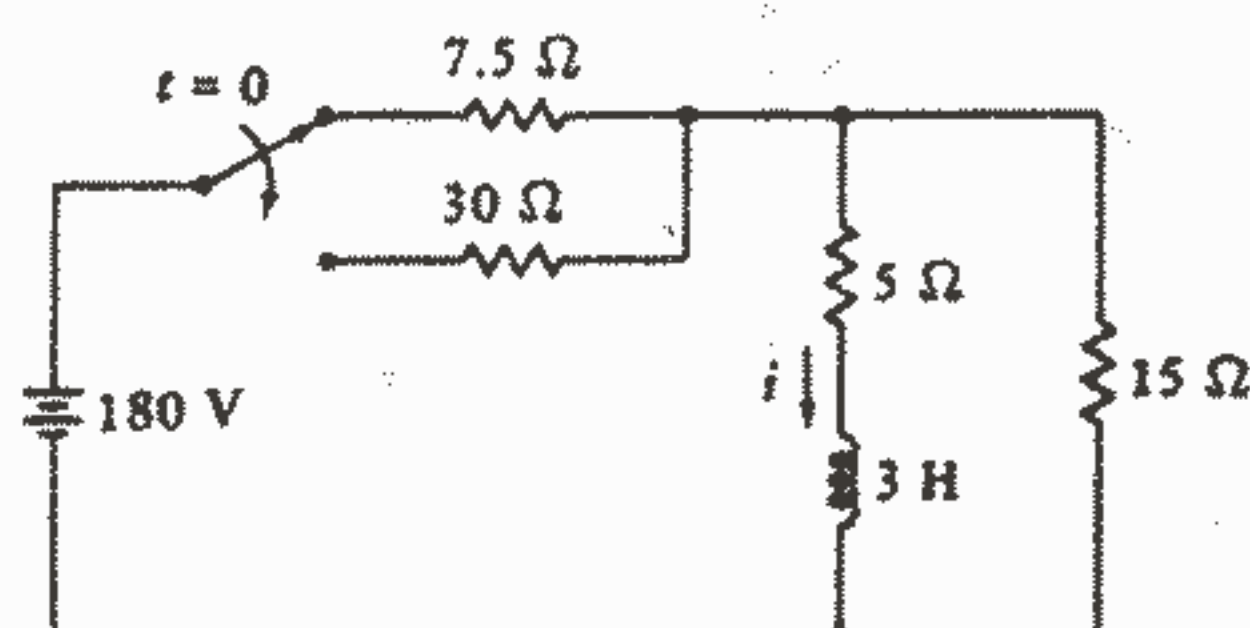
(a) $\Delta u(t)$ V, (b) $\Delta + \Delta u(t)$ V, (c) $\Delta u(t) \sin t$ V

۱۲ - در شکل ۶-۲۶ کلید برای مدت طولانی بسته بوده است و در لحظه $t = 0$ باز می شود. رابطه ای برای $i_L(t)$ به ازای $t < 0$ ، $t > 0$ پیدا کنید و آن را در فاصله زمانی $-1 < t < 1$ رسم کنید.



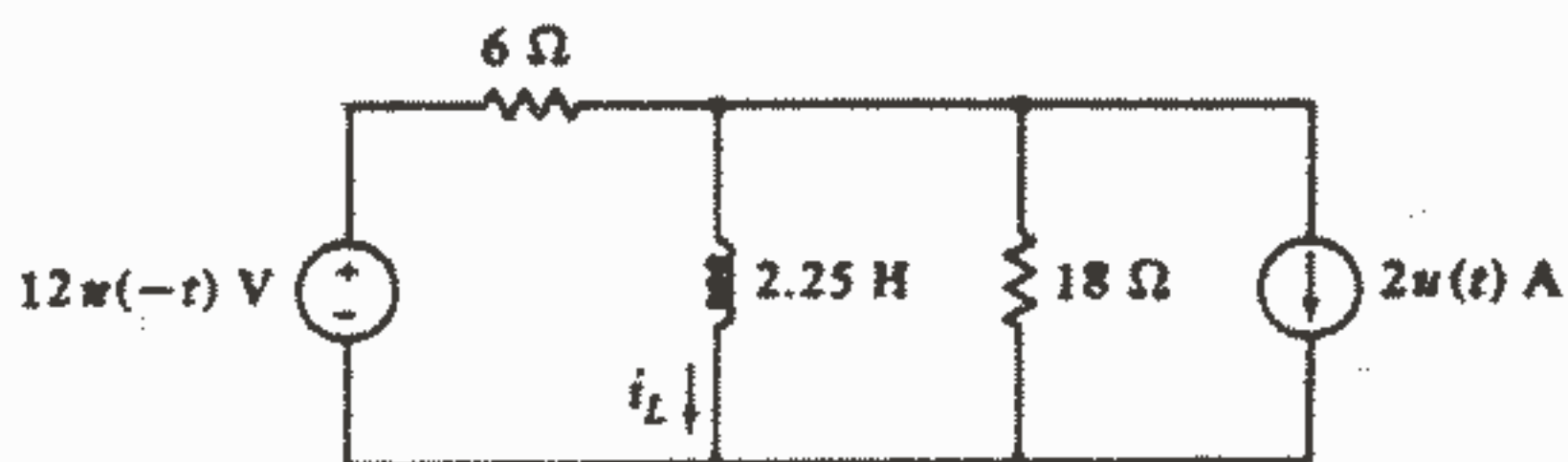
شکل ۲۶ - ۶: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

- ۱۳ - کلید در شکل ۶-۲۷ در لحظه $t = 0$ پایین می افتد. مقادیر زیر را پیدا کنید:
 (a) i در لحظه $t = 0.1$ S, (b) ماکزیمم دامنه ولتاژی که در دو سر سلف ظاهر می شود.



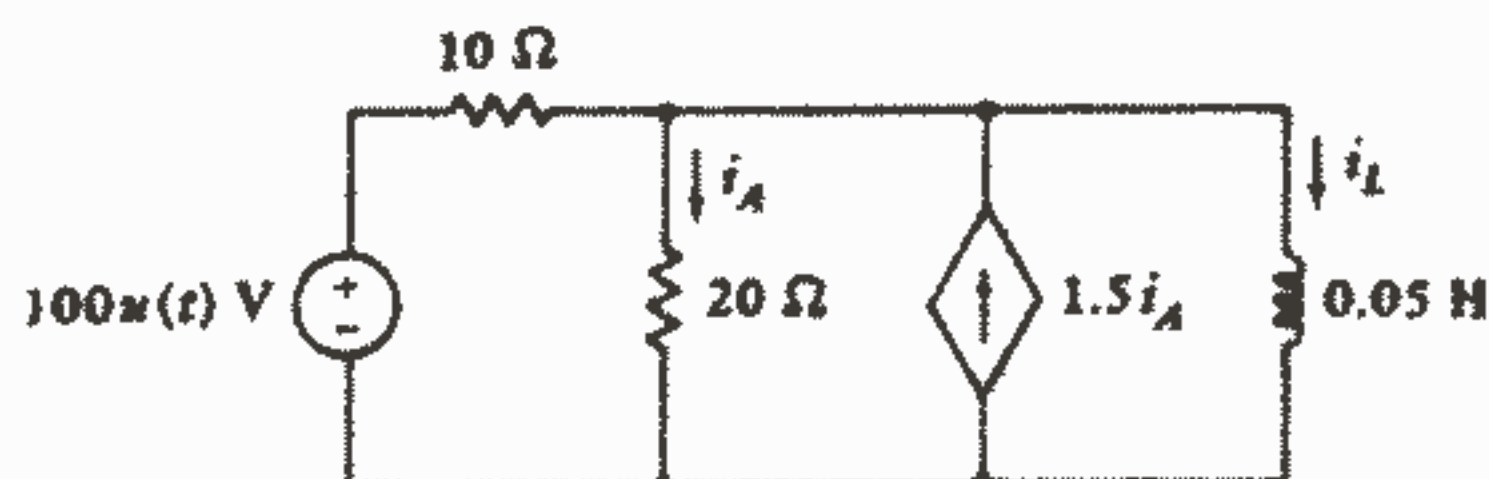
شکل ۶-۲۷: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

- ۱۴ - رابطه‌ای برای i_L در شکل ۶-۲۸ به ازای همه مقادیر غیر منفی t به دست آورید و سپس آن را به طور دقیق نسبت به t رسم کنید (مقادیر مقیاس را روی هر دو محور نشان دهید).



شکل ۶-۲۸: به مسئله ۱۴ مراجعه کنید.

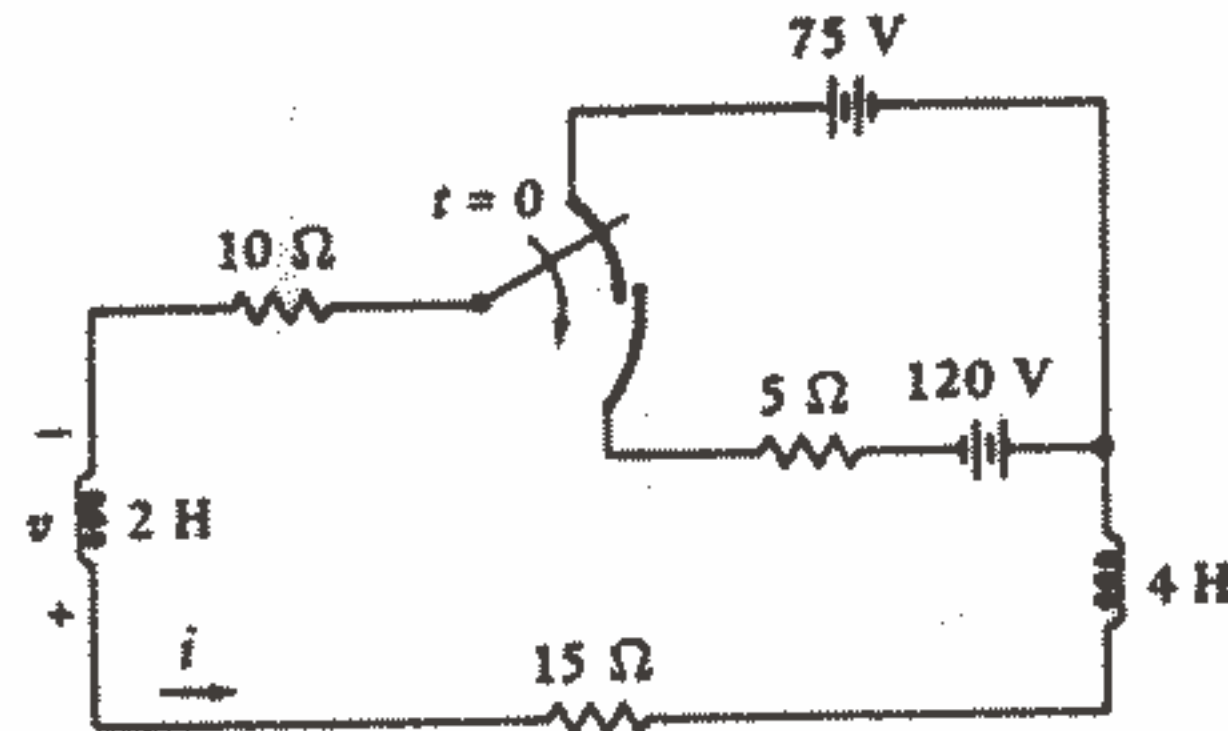
- ۱۵ - $i_L(t)$ را به ازای $t > 0$ در مدار شکل ۶-۲۹ پیدا کنید.



شکل ۶-۲۹: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

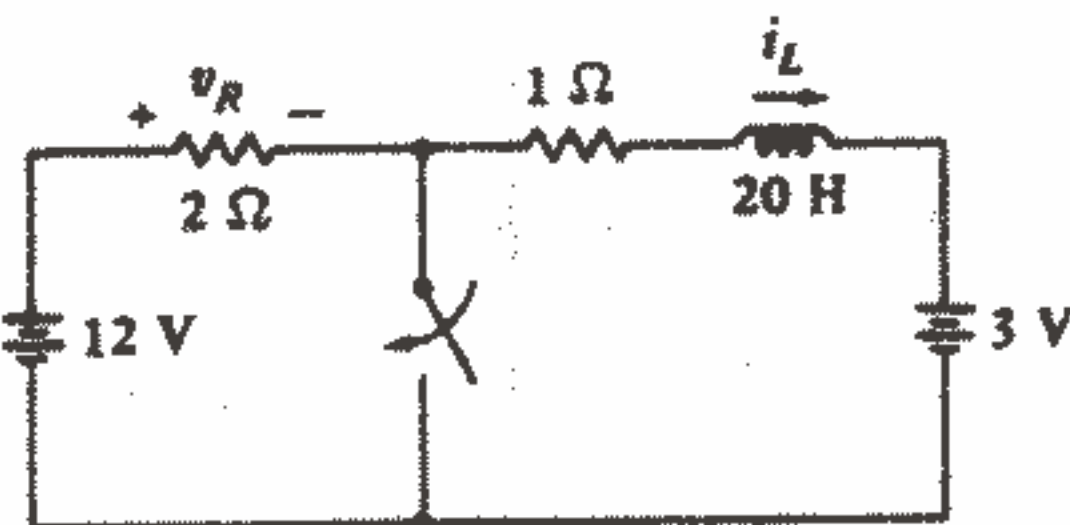
۲۴۷. اعمال تابع تحریک پله واحد

۱۶- اگر در شکل ۶-۳۰ کلید در لحظه $t = 0$ پایین افتد، آنگاه: (a) به ازای چه مقداری از t مقدار i صفر می شود. (b) به ازای $i = 0$ مقدار v چقدر خواهد بود؟



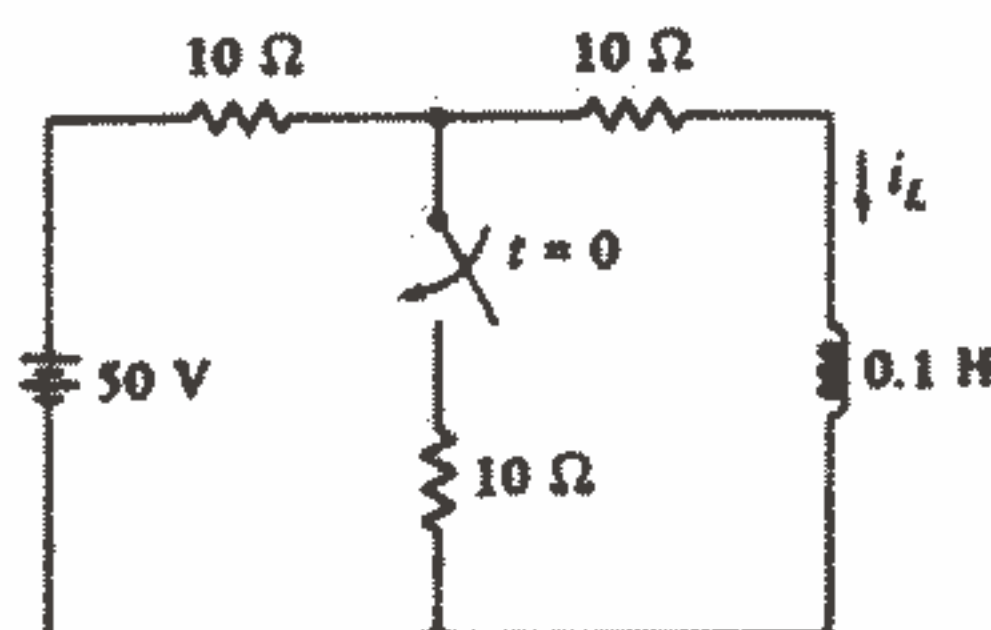
شکل ۶-۳۰: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

۱۷- در شکل ۶-۳۱، قبل و ۱۶S بعد از بسته شدن کلید مقادیر i_L ، v_R را به دست آورید.



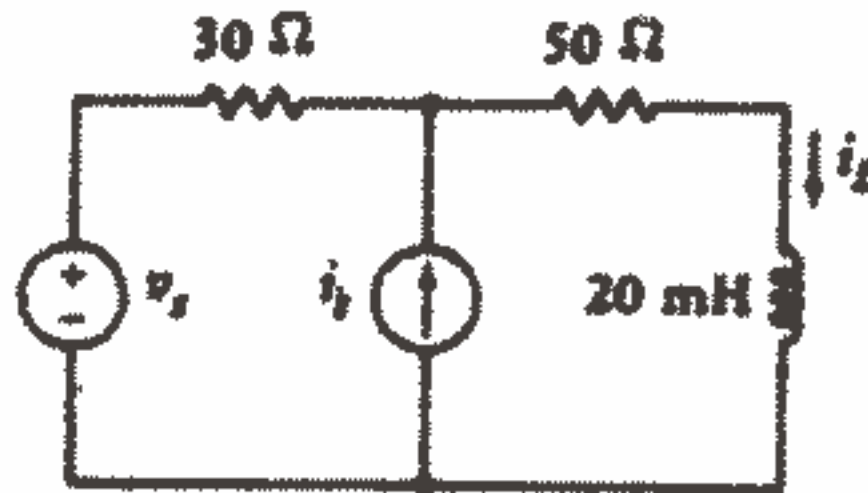
شکل ۶-۳۱: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

۱۸- در شکل ۶-۳۲ مقدار i_L را در لحظات زیر پیدا کنید:
(a) $t = -5\text{ms}$ ، (b) $t = 5\text{ms}$ ، (c) $t = 10\text{ms}$



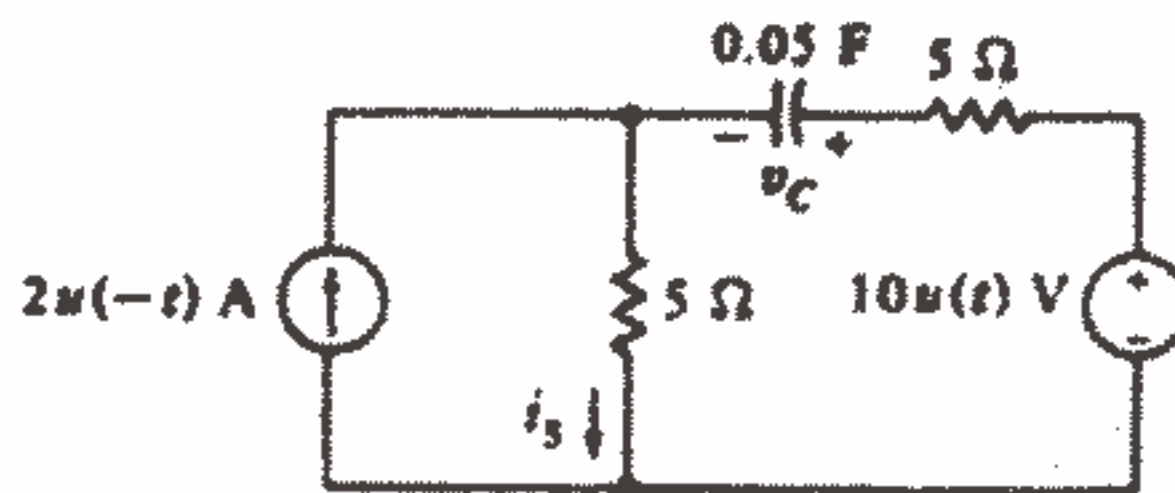
شکل ۶-۳۲: به مسئله ۱۸ مراجعه کنید.

۱۹ - در شکل ۶-۳۳ فرض کنید، $v_s = 2u(t)$ V، $i_s = 80u(t - 0.002)$ mA،
آنگاه $i_L(t)$ را به ازای همه مقادیر t پیدا کنید.



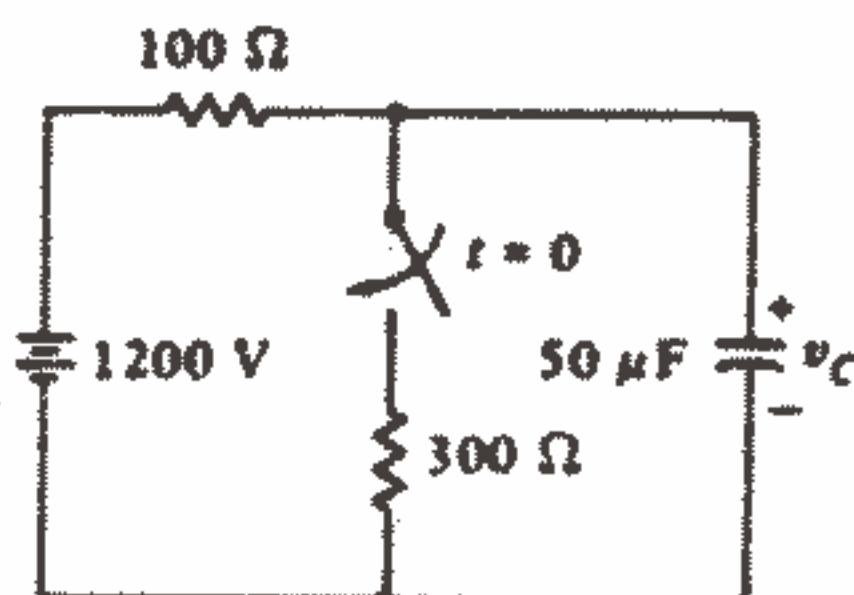
شکل ۶-۳۳: به مسئله ۱۹ مراجعه کنید.

۲۰ - (a) رابطه‌ای برای $v_C(t)$ در مدار شکل ۶-۳۴ به دست آورید و آن را به صورت تابعی از زمان به ازای مقادیر مثبت و منفی t رسم کنید. (b) اینکار را برای $i_s(t)$ هم تکرار کنید.



شکل ۶-۳۴: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

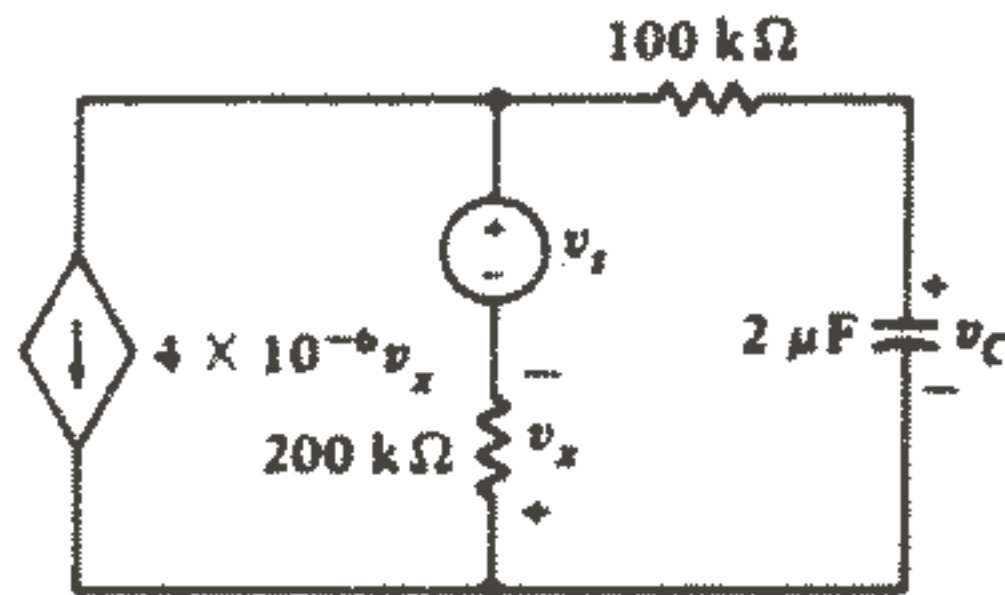
۲۱ - در مدار شکل ۶-۳۵، کلید برای مدت طولانی باز بوده است. (a) مقدار $v_C(2\text{ms})$ ، $v_C(-2\text{ms})$ را حساب کنید. (b) حال اگر کلید برای مدت طولانی بسته بوده باشد، مقدار v_C را دو میلی ثانیه بعد از باز شدن ناگهانی آن پیدا کنید.



شکل ۶-۳۵: به مسئله ۲۱ مراجعه کنید.

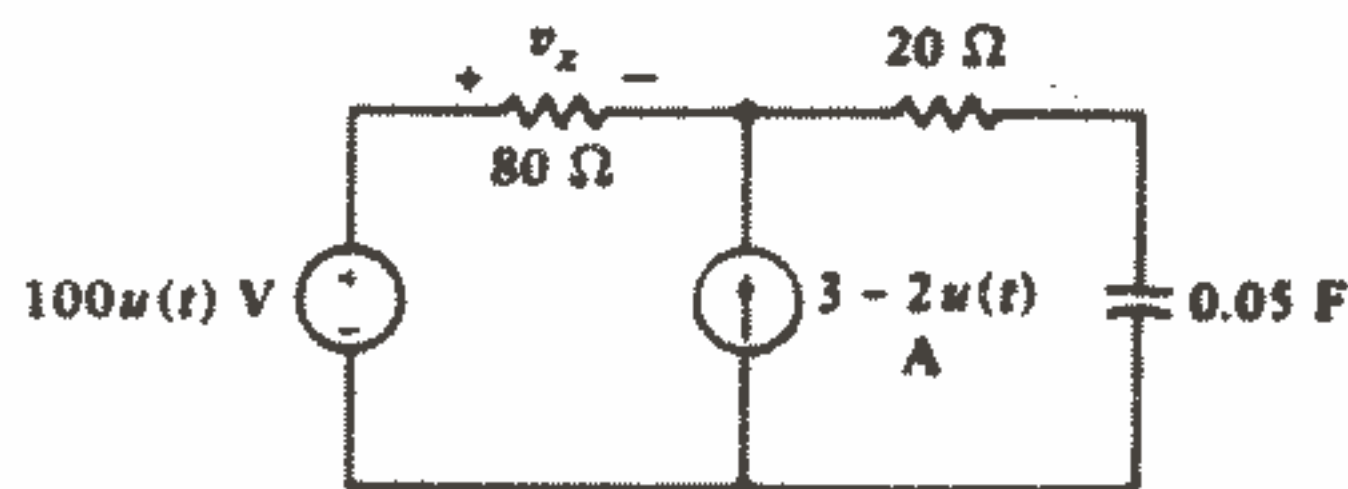
۲۴۹ اعمال تابع تحریک پله واحد

۲۲ - فرض کنید که در مدار شکل ۶-۳۶ داشته باشیم: $v_s = 9 - 12u(t)$ V (a) $v_c(t)$ را به ازای جميع مقادیر t پیدا کنید. (b) v_c را نسبت به t رسم کنید. (c) به ازای چه مقدار t خواهیم داشت: $v_c = 0$ ؟



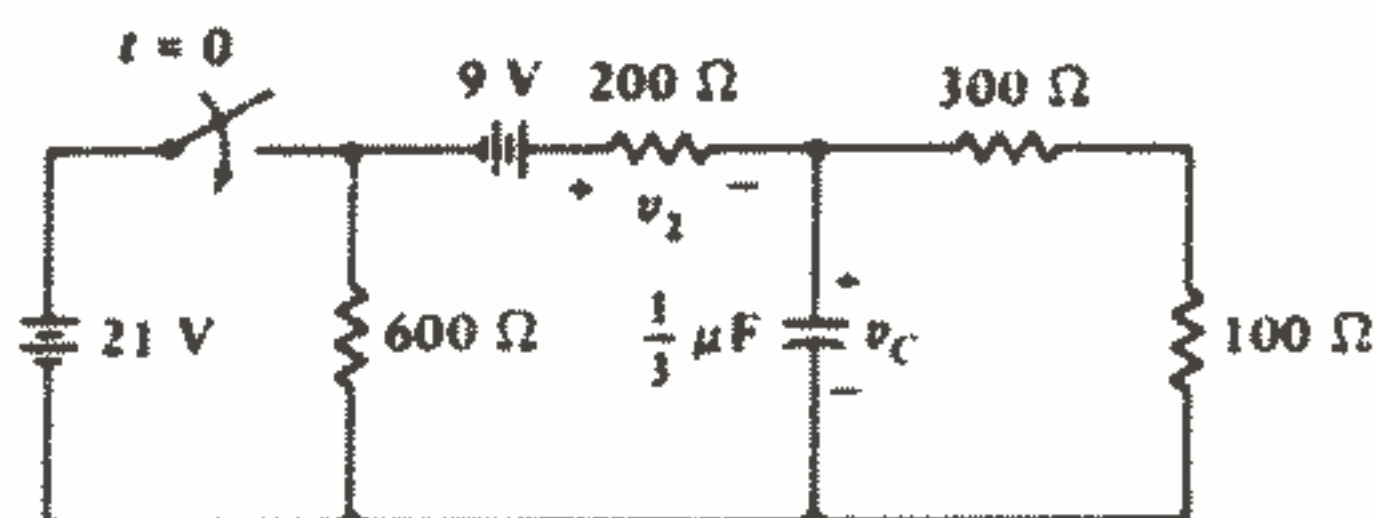
شکل ۶-۳۶: به مسئله ۲۲ مراجعه کنید.

۲۳ - در مدار شکل ۶-۳۷، رابطه‌ای برای $v_x(t)$ پیدا کنید که برای جميع مقادیر t صادق باشد.



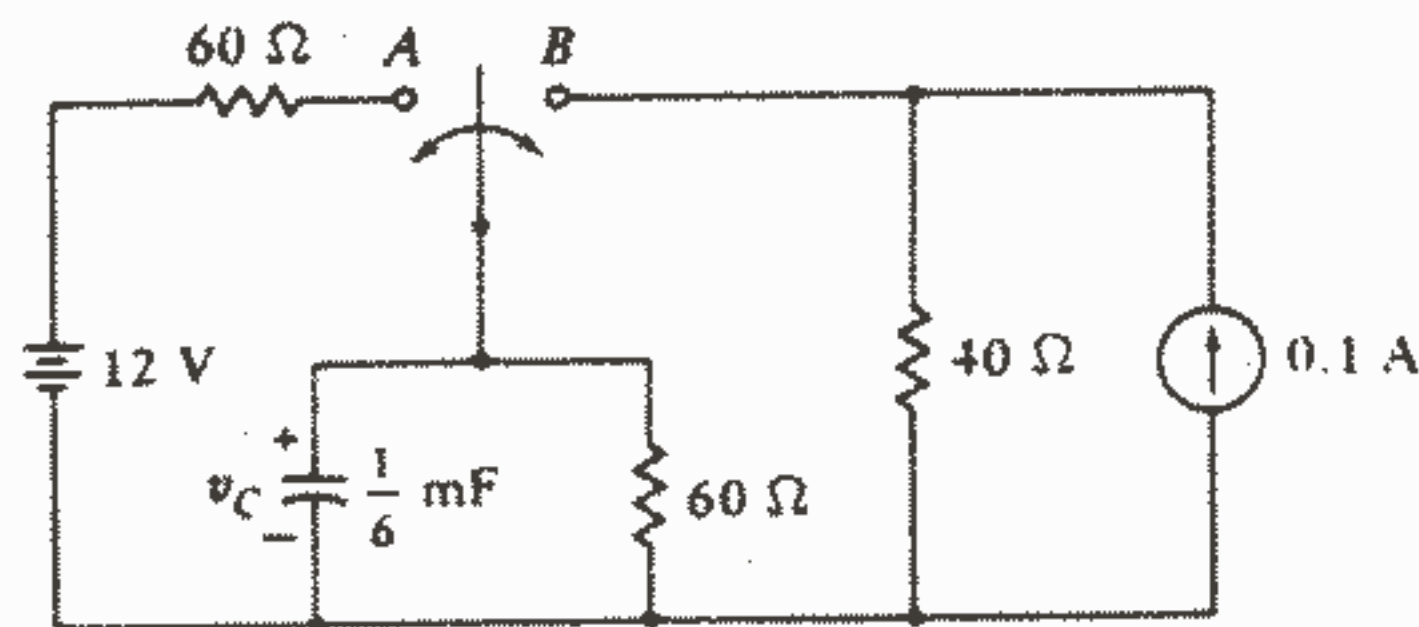
شکل ۶-۳۷: به مسئله ۲۳ مراجعه کنید.

۲۴ - در مدار شکل ۶-۳۸، کلید برای مدت طولانی باز بوده است و در لحظه $t = 0$ بسته می‌شود. برای کمیت‌های زیر روابطی پیدا کنید که به ازای جميع مقادیر t صادق باشد: (a) $v_c(t)$, (b) $v_r(t)$



شکل ۶-۳۸: به مسئله ۲۴ مراجعه کنید.

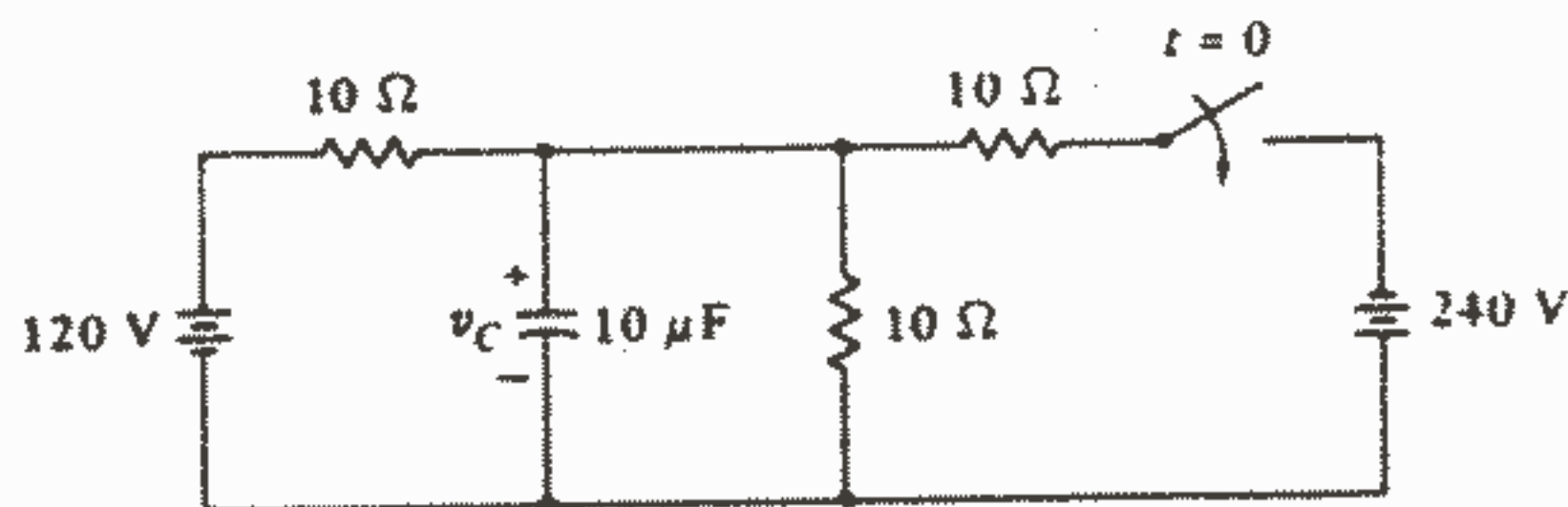
۲۵ - در شکل ۶-۳۹، کلید برای مدت طولانی در وضعیت A بوده است و در لحظه $t = 0$ به وضعیت B منتقل می‌شود. $v_c(t)$ را به ازای $t < 0$ ، $t > 0$ پیدا کنید.



شکل ۶-۳۹: به مسائل ۲۵ و ۲۶ مراجعه کنید.

۲۶ - در شکل ۶-۳۹، کلید برای مدت طولانی در وضعیت B بوده است و در لحظه $t = 0$ به وضعیت A منتقل می‌شود. $v_c(t)$ را به ازای $t < 0$ ، $t > 0$ پیدا کنید.

۲۷ - در شکل ۶-۴۰، کلید برای مدت طولانی باز بوده است. (a) رابطه‌ای برای $v_c(t)$ به صورت تابعی از t به ازای $t > 0$ به دست آورید. (b) در چه زمانی داریم: $v_c(t) = 0$ ؟

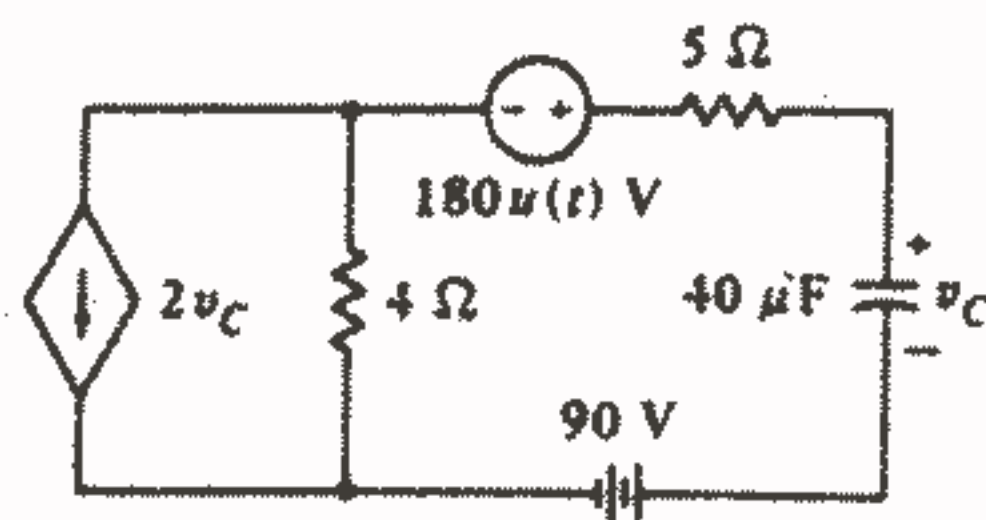


شکل ۶-۴۰: به مسئله ۲۷ مراجعه کنید.

۲۸ - یک منبع جریان $5\text{u}(t)\text{A}$ و اتصال موازی مقاومت 20Ω با سلف 0.8H و اتصال موازی مقاومت 20Ω با خازن C همگی با هم سری می‌باشند. اگر C مقادیر زیر را داشته باشد، اندازه ولتاژ دو سر منبع جریان را به صورت تابعی از زمان رسم کنید:

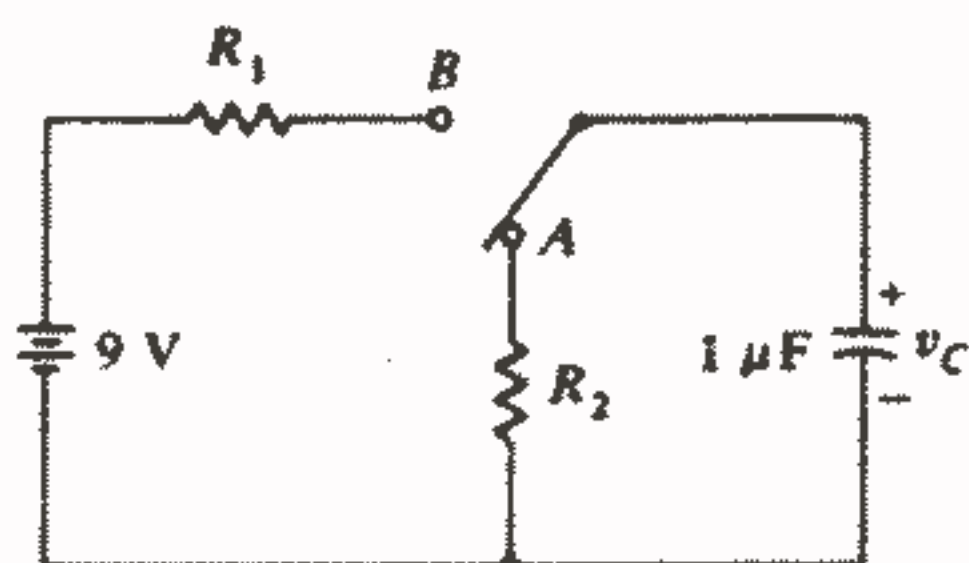
(a) 5mF ، (b) 2mF

۲۹ - زمانی را که در آن ولتاژ خازن در مدار شکل ۶-۴۱ برابر صفر می‌شود، پیدا کنید.



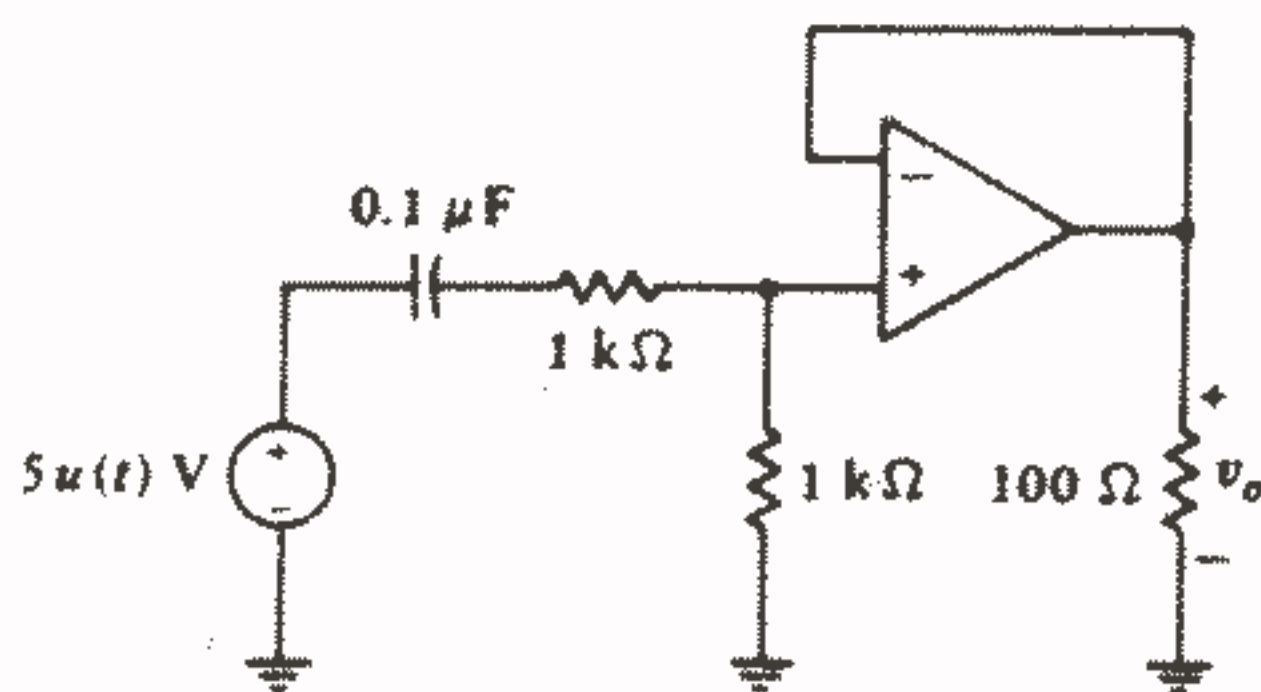
شکل ۴۱ - ۶: به مسئله ۲۹ مراجعه کنید.

۳۰- در شکل ۴۲-۶، کلید برای مدت طولانی در وضعیت A بوده است و در لحظه $t = 0$ به وضعیت B منتقل می‌شود و در لحظه $t = 1$ S به وضعیت A بر می‌گردد. R_1 ، R_2 را طوری پیدا کنید که $v_c = 7.5$ V در $t = 1$ ، $v_c = 1$ V در $t = 1.001$ S باشد.



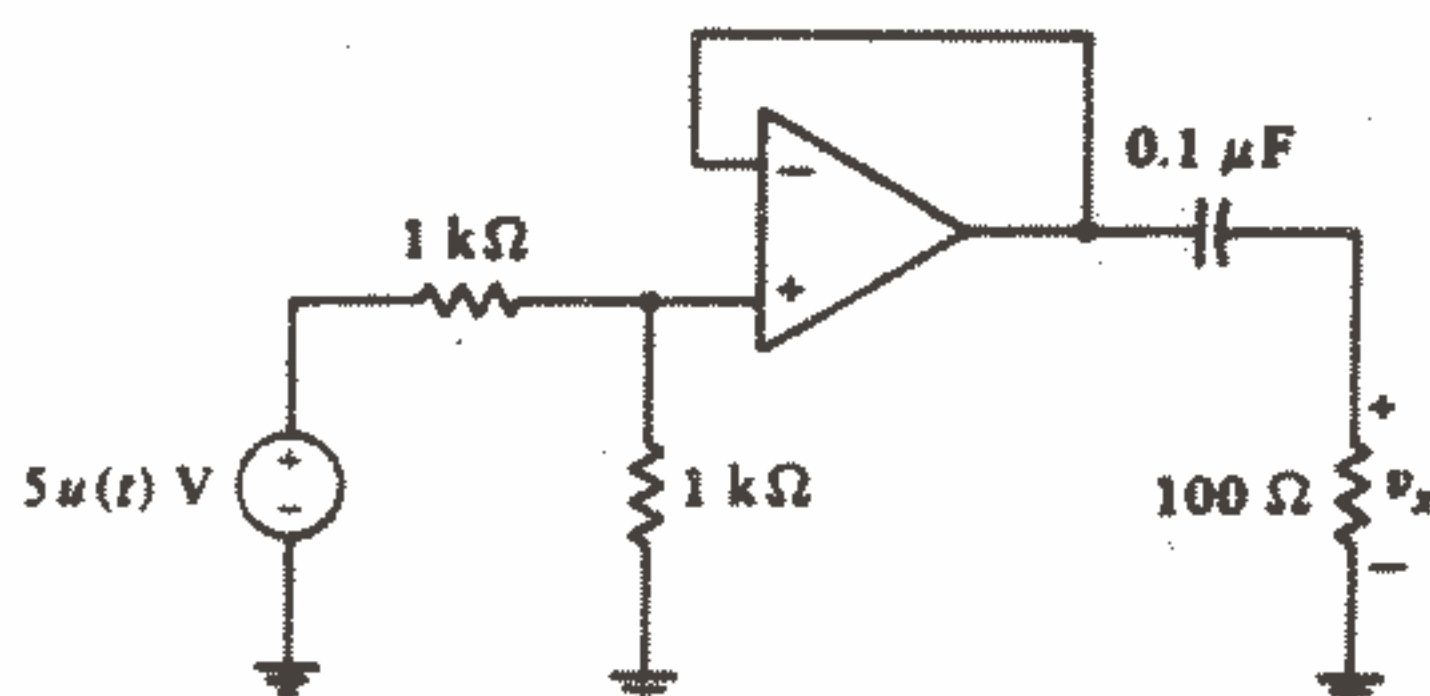
شکل ۴۲ - ۶: به مسئله ۳۰ مراجعه کنید.

۳۱- اگر در شکل ۴۳-۶، op-amp را ایده‌آل فرض کنیم مقدار $v_o(t)$ را به ازای جميع مقادیر t به دست آورید.



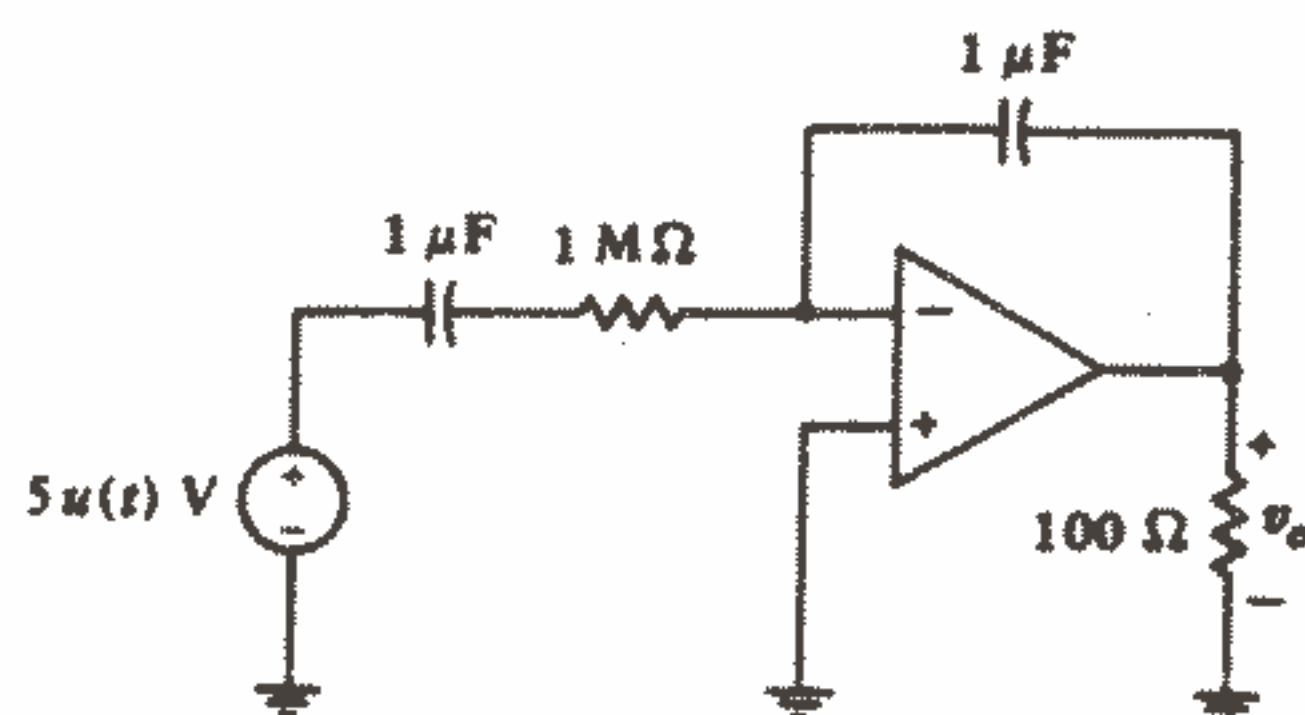
شکل ۴۳ - ۶: به مسئله ۳۱ مراجعه کنید.

۳۲- در شکل ۴۴-۶، op-amp ایده‌آل فرض شده است. $v_o(t)$ را پیدا کنید.



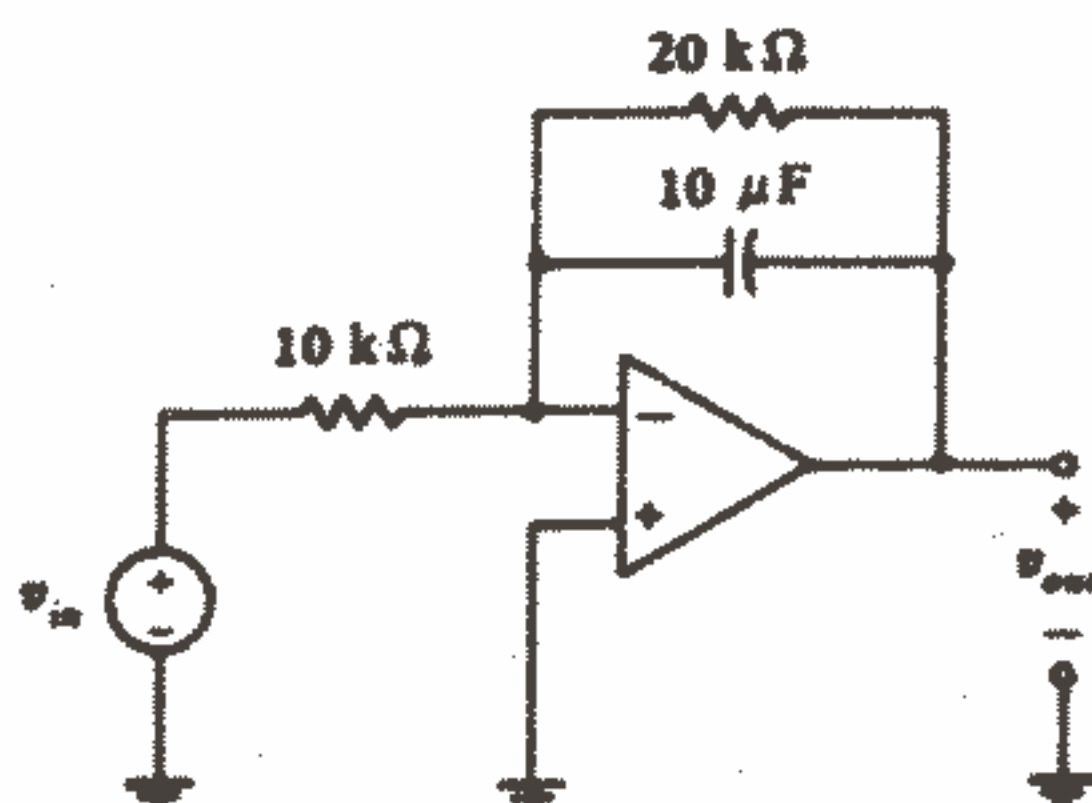
شکل ۴۴ - ۶: به مسئله ۳۲ مراجعه کنید.

۳۳- اگر op - amp شکل ۴۵-۶ ایده آل فرض شود، رابطه‌ای برای $v_o(t)$ پیدا کنید که به ازای جميع مقادیر t صادق باشد.



شکل ۴۵ - ۶: به مسئله ۳۳ مراجعه کنید.

۳۴- فرض کنید که op - amp شکل ۴۶-۶ ایده آل باشد و $v_{out}(0) = 0$ و $v_{in}(t) = u(t)$ V را به ازای پیدا کنید.



شکل ۴۶ - ۶: به مسئله ۳۴ مراجعه کنید.

فصل ۷

مدار RLC

۱-۷ مقدمه

خیلی خوشایند می بود اگر در می یافتیم که مطالعه مفصلی را که تا کنون برای مدارهای RL و RC ، کامل کرده ایم، تحلیل مدار RLC را کار ساده ای خواهد کرد اما متأسفانه این تحلیل به صورت مشکلی باقی است. وجود سلف و خازن هر دو در یک مدار حداقل یک سیستم مرتبه دوم ایجاد می کند که به وسیله یک معادله دیفرانسیل خطی شامل یک مشتق مرتبه دوم و یا به وسیله دو معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول همزمان، مشخص می شود. این افزایش مرتبه لازم می دارد که دو ثابت دلخواه را محاسبه کنیم به علاوه لازم است که شرایط اولیه مشتقات را هم تعیین کنیم. و بالاخره خواهیم دید که وجود سلف و خازن هر دو در یک مدار ما را به پاسخی رهنمون می سازد که فرمهای تابعی مختلفی را برای مدارهایی که دارای آرایش یکسان ولی مقادیر عناصر مختلف هستند، دارا می باشند. با این اخبار خوشحال کننده بیایید روشها و نتایجی را که برای دستگاههای مرتبه اول مفید یافتیم به منظور تعمیم هر چه هوشیارانه تر آنها به دستگاه مرتبه دوم، به سرعت مرور کنیم.

ابتدا دستگاه مرتبه اول بدون منبع را بررسی کردیم و پاسخ را پاسخ طبیعی نامیدیم که کاملاً به وسیله نوع عناصر غیرفعال در شبکه و نحوه اتصال آنها و به وسیله شرایط اولیه ای که به وسیله انرژی ذخیره شده، ایجاد می شد، مشخص می گردید. این پاسخ طبیعی همیشه یک تابع نمایی نزولی از زمان بود که با میل زمان به سمت بی نهایت، مقدار آن به سمت مقدار ثابتی میل می کرد. این مقدار ثابت معمولاً صفر بود، به جز در مدارهایی که در آنها در سلفهای موازی و یا خازنهای سری و جریانها و ولتاژهای در دام افتاده ظاهر می گردد.

افزودن منبع به دستگاه مرتبه اول نتیجه اش یک پاسخ دو قسمتی بود، یکی پاسخ آشنای طبیعی و دیگری جمله ای که پاسخ اجباری نامیده شد. این جمله اخیر از نظر مفهوم مربوط به تابع تحریک بود که فرم تابعی آن همان فرم تابعی تابع تحریک بود به علاوه انتگرال و مشتق اول تابع تحریک^۱. از آنجاییکه ما فقط با یک تابع تحریک ثابت سر و کار داشتیم، احتیاج نداشته ایم که به فرم خاصی از تابع تحریک توجه کنیم و این مسئله را تا وقتی که با توابع تحریک سینوسی در فصل بعدی مواجه شویم، حل نخواهیم کرد. ما به این پاسخ اجباری شناخته شده یک عبارتی به عنوان پاسخ طبیعی اضافه کردیم که پاسخ ما کامل شد البته به جز یک ضریب ثابتی که باید تعیین می کردیم. این ضریب ثابت را طوری محاسبه کردیم که پاسخ کامل مطابق با شرایط اولیه تعیین شده باشد.

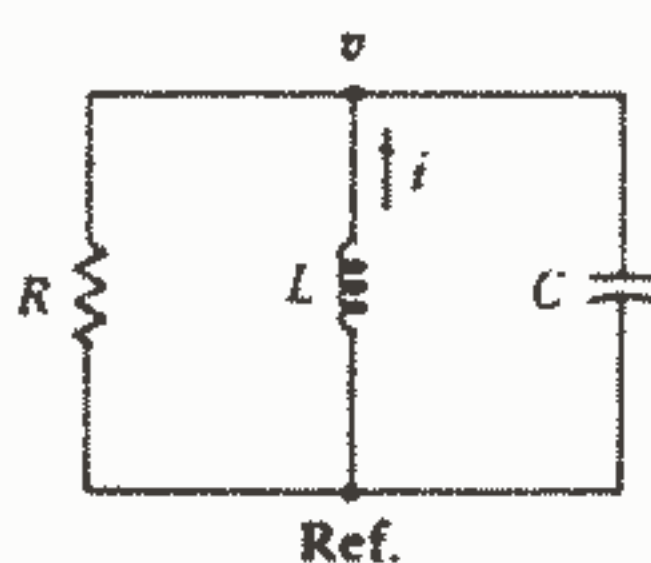
اکنون توجه خود را معطوف مداراتی می کنیم که به وسیله معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم مشخص می شوند. اولین کار ما تعیین پاسخ طبیعی است. بهترین راه انجام این کار در نظر گرفتن مدار بدون منبع می باشد. سپس می توانیم منابع dc کلید و یا منابع پله ای را هم در مدار وارد کنیم و پاسخ کلی را یک بار دیگر به صورت مجموع پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری (که معمولاً ثابت است) بیان کنیم. سیستم مرتبه دوم که ما در شرف تحلیل آن هستیم اساساً با هر سیستم مرتبه دوم مکانیکی با ثابتهای فشرده (lumped - constant) یکسان است. مثلاً نتایج ما می تواند مستقیماً مورد استفاده یک مهندس مکانیک که علاقمند به جایگزینی یک جرم متصل به فنر میراشونده در داخل یک ویسکوز می باشد و قرار گیرد و یا مورد استفاده برای سیستمی که بتواند حرکت عمودی یک اتومبیل با ضربه گیرهای میراکننده را تقریب کند قرار گیرد. نتایج ما همچنین، اگر چه نه به صورت کاملاً مستقیم، قابل اعمال به هر سیستم مرتبه دوم با پارامترهای توزیع شده (distributed - parameter)، مانند یک خط انتقال اتصال کوتاه شده، یک تخته شیرجه، یک فلوت و یا اکولوژی موش صحرائی قطبی می باشد.

۱ - مشتقات مرتبه بالاتر در سیستم های مرتبه بالاتر ظاهر می شوند و اگر بخواهیم دقیق تر صحبت کنیم باید بگوییم که همه مشتقات حضور دارند ولو با دامنه صفر. توابع تحریکی که دارای تعداد محدودی مشتقات مختلف نیستند، مشتقی هستند که ما آنها را بررسی نمی کنیم، البته بجز توابع گسسته.

۲-۷- مدار موازی بدون منبع

اولین هدف ما تعیین پاسخ طبیعی یک مدار ساده متشکل از اتصال موازی C, L, R می باشد. این ترکیب خاص از عناصر ایده آل مدل مناسبی برای اجزاء بسیاری از مدارهای مخابراتی می باشد. مثلاً آن نماینده قسمت مهمی از برخی تقویت کننده های الکترونیکی است که در هر گیرنده رادیویی یافت می شود که تقویت کننده را قادر می سازد تقویت ولتاژ زیادی را در یک باند باریک فرکانسی ایجاد کند و در بیرون این باند تقریباً تقویت صفر باشد. سلکتیویته فرکانسی این نوع مدار ما را قادر می سازد که به یک پنخس ایستگاه گوش دهیم در حالیکه پنخس سایر ایستگاهها حذف می شود. سایر کاربردهای این مدار عبارتند از استفاده مدارات RLC موازی در فیلترهای مولتی پلکس، فیلترهای فرونشانی هارمونیک و غیره. اما حتی بحث ساده ای درباره این اصول نیاز به درکی از عباراتی مانند رزونانس، پاسخ فرکانسی و امپدانس دارد که ما هنوز درباره آنها بحثی نکرده ایم. بنابراین بیاید به گفتن این مطلب بسنده کنیم که درکی از رفتار طبیعی مدار RLC موازی دارای اهمیت اساسی در مطالعات آینده ما درباره مدارهای مخابراتی و طراحی فیلتر خواهد بود.

وقتیکه یک سلف واقعی به طور موازی با یک خازن بسته شود و سلف دارای یک مقاومت اهمی به همراه خود باشد مدار معادل این اتصال به صورت شکل ۷-۱ می باشد.



شکل ۷-۱: مدار RLC موازی بدون منبع.

اتلاف انرژی در سلف واقعی را به وسیله وجود مقاومت ایده آل R که وابسته به مقاومت اهمی سلف (و نه مساوی با آن) می باشد منظور می کنیم.

در تحلیلی که در پی می آید فرض خواهیم کرد که انرژی به صورت اولیه بتواند در سلف و خازن ذخیره شود و در نتیجه مقادیر اولیه جریان سلف و ولتاژ خازن غیر صفر می باشند. با مراجعه

به مدار شکل ۱-۷ می‌توانیم تک معادله گرهی مدار را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v \, dt - i(t_0) + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1)$$

توجه داشته باشید که علامت منفی نتیجه جهت فرضی i می‌باشد. ما باید معادله (۱) را با توجه به شرایط اولیه زیر حل کنیم:

$$i(0^+) = I_0 \quad (2)$$

$$v(0^+) = V_0 \quad (3)$$

اگر از هر دو طرف معادله (۱) یک بار نسبت به زمان مشتق بگیریم نتیجه حاصل یک معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه دوم خواهد بود:

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0 \quad (4)$$

که جواب $v(t)$ آن، پاسخ طبیعی مطلوب ما می‌باشد.

روشهای جالبی برای حل معادله (۴) موجود است. ما این روشها را به درس معادلات دیفرانسیل واگذار می‌کنیم و فقط سریعترین و ساده‌ترین روش را اکنون مورد استفاده قرار می‌دهیم. ما پاسخی را بسته به تبحر و تجربه‌مان در انتخاب فرم مناسبی از چندین فرم ممکن، فرض خواهیم نمود. تجربه ما درباره معادله مرتبه اول به ما القاء می‌کند که حداقل یک بار دیگر فرم نمایی را محک بزنیم. به علاوه، فرم معادله (۴) نشان می‌دهد که این کار را می‌توان کرد زیرا ما باید سه جمله را با هم جمع کنیم یعنی مشتق دوم، مشتق اول و خود تابع که هر یک در عامل ثابتی ضرب شده‌اند و حاصل جمع صفر می‌باشد. بدیهی است که تابعی که مشتقاتش فرم خود تابع را داشته باشند یک انتخاب معقول می‌باشد با امید موفقیت فرض می‌کنیم:

$$v = Ae^{st} \quad (5)$$

که در حالت کلی‌تر در صورت لزوم می‌توانیم S, A را اعداد مختلط در نظر بگیریم^۱. با قرار دادن معادله (۵) در معادله (۴) خواهیم داشت:

۱ - البته دلیلی برای ترس وجود ندارد زیرا اعداد مختلط در این فصل فقط بصورت مقدماتی در مشتقات ظاهر می‌شوند و کاربرد آنها بعنوان یک ابزار اصلی در فصل ۹ ضروری خواهد بود.

$$CA s^2 e^{st} + \frac{1}{R} A s e^{st} + \frac{1}{L} A e^{st} = 0$$

و یا:

$$A e^{st} \left(C s^2 + \frac{1}{R} s + \frac{1}{L} \right) = 0$$

برای اینکه این معادله به ازای جميع زمانها صادق باشد باید حداقل یکی از سه عامل ضرب مساوی صفر باشد. اگر هر یک از دو عامل اول مساوی صفر باشند آنگاه $v(t) = 0$ این جواب یک جواب کم ارزشی برای معادله دیفرانسیل می باشد که نمی تواند شرایط اولیه مفروض ما را برآورده سازد. بنابراین ما عامل باقی مانده دیگر را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$C s^2 + \frac{s}{R} + \frac{1}{L} = 0 \quad (6)$$

این معادله معمولاً توسط ریاضیدانان، معادله کمکی و یا معادله مشخصه نامیده می شود. اگر این معادله برقرار باشد آنگاه جواب مفروض ما صحیح است. از آنجاییکه معادله (6) یک معادله درجه دوم است، دو جواب برای آن موجود است که با S_1, S_2 آنها را نشان می دهیم:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (7)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8)$$

اگر هر کدام از این دو مقدار را برای S در پاسخ مفروض به کار ببریم، آن پاسخ در معادله دیفرانسیل مفروض صدق می کند و در نتیجه یک پاسخ قطعی برای معادله دیفرانسیل می باشد.

بیایید فرض کنیم که در معادله (5)، به جای S قرار دهیم S_1 ، خواهیم داشت:

$$v_1 = A_1 e^{s_1 t}$$

و به طریق مشابه:

$$v_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

متغیر قبلی در معادله دیفرانسیل صدق می کند:

$$C \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L} v_1 = 0$$

و متغیر دوم هم در معادله صدق می کند:

$$C \frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L} v_2 = 0$$

با جمع کردن این دو معادله دیفرانسیل و ترکیب کردن جملات مشابه داریم:

$$C \frac{d^2 (v_1 + v_2)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + \frac{1}{L} (v_1 + v_2) = 0$$

و باز هم خطی بودن پیروز می شود و مشاهده می کنیم که مجموع دو پاسخ نیز یک پاسخ

می باشد. بنابراین فرم پاسخ طبیعی عبارت است از:

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9)$$

که در آن s_1, s_2 به وسیله معادله (۷) و (۸) داده شده اند و A_1, A_2 دو ثابت دلخواه می باشند که باید طوری انتخاب شوند که دو شرط اولیه را برآورده سازند. فرم پاسخ طبیعی به صورتیکه در فوق آمده است به سختی می توان انتظار داشت که حالت شگفت انگیز مطلوب ما را متجلی سازد زیرا در شکل موجود، آن معادله دید باطنی محدودی را نسبت به طبیعت منحنی $v(t)$ ارائه می کند. مثلاً دامنه های نسبی A_1, A_2 مطمئناً در تعیین شکل منحنی پاسخ حائز اهمیت خواهند بود. به علاوه، ثابتهای s_1, s_2 بسته به مقادیر C, L, R در شبکه داده شده می توانند اعداد حقیقی و یا اعداد مزدوج مختلط باشند. این دو حالت پاسخهایی را که در اساس با یکدیگر متفاوتند، تولید می کنند. بنابراین انجام کمی ساده سازی در رابطه (۹) به منظور وضوح در تجسم و درک مطلب مفید خواهد بود.

از آنجاییکه نماهای s_1, s_2 باید بدون واحد باشند، بنابراین s_1, s_2 باید دارای دیمانسیون s^{-1} باشند. از روابط (۷) و (۸) پیدا است که واحد $1/\sqrt{LC}$ ، $1/2RC$ هم باید s^{-1} باشد. واحدهایی از این نوع، «فرکانس» نامیده می شوند. با وجود اینکه ما این مفهوم را با جزئیات بیشتر در فصل ۱۳ بسط خواهیم داد، ولی اکنون چند اصطلاح را در اینجا معرفی می کنیم. بیایید $1/\sqrt{LC}$ را با ω_0 نشان دهیم:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10)$$

و عبارت «فرکانس تشدید» را به آن اختصاص دهیم. $1/2RC$ از طرف دیگر، α را «فرکانس نپر» و یا «ضریب میرایی نمایی» می نامیم و آن را به وسیله علامت α (آلفا) نشان می دهیم:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (11)$$

این عبارت توصیفی اخیر را به این دلیل به کار می بریم که α معیاری است از اینکه با چه سرعتی پاسخ طبیعی میرا می شود و به مقدار پایدار نهایی اش (معمولاً صفر) می رسد. ۲ و بالاخره s_1, s_2, s که کمیت هایی هستند که اساس برخی کارهای بعدی ما را تشکیل می دهند، فرکانس

۱ - به طور دقیق باید بگوییم: فرکانس رادیویی تشدید.

۲ - نسبت α به ω_0 را مهندسين سیستم های کنترل، نسبت میرایی می نامند و با γ (زتا) نشان می دهند که ما در فصل ۱۴ دوباره با آن مواجه خواهیم شد.

مختلط نامیده می‌شوند.

باید تذکر دهیم که $\omega_0, \alpha, S_1, S_2$ صرفاً علائمی هستند که برای ساده کردن بحث مدارات RLC به کار می‌روند و خواص جدید عجیبی نیستند. مثلاً گفتن «آلفا» آسانتر از گفتن «معکوس RC» می‌باشد.

بیایید این نتایج را جمع‌بندی کنیم. پاسخ طبیعی مدار RLC موازی عبارت است از:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9)$$

که داریم:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (12)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (11)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10)$$

و A_1, A_2 را باید با اعمال شرایط اولیه داده شده پیدا کنیم.

پاسخ توصیف شده به وسیله معادلات فوق‌تر تنها برای ولتاژ $v(t)$ ، بلکه برای جریانی که در هر یک از سه عنصر مداری جاری می‌شود، به کار می‌رود. البته مقادیر ثابتهای A_1, A_2 برای $v(t)$ متفاوت از مقادیر مربوط به جریانه‌ها خواهند بود. اکنون واضح است که طبیعت پاسخ بستگی به اندازه‌های نسبی α و ω_0 دارد. رادیکالهای ظاهر شده در روابط S_1 و S_2 وقتی که α بزرگتر از ω_0 باشد، حقیقی و وقتی که α کوچکتر از ω_0 باشد، موهومی و وقتی که α مساوی ω_0 باشد، صفر خواهند بود. هر یک از این حالات را در سه قسمت زیر به طور جداگانه مورد بررسی قرار خواهیم داد.

تمرین

۷-۱. یک مدار RLC موازی شامل یک سلف 100 mH و دارای مقادیر $\omega_0 = 2000 \text{ rad/s}$ و $\alpha = 2500 \text{ s}^{-1}$ می‌باشد. پیدا کنید: (a) C , (b) R , (c) S_1 , (d) S_2 .

جواب: $2.5 \mu\text{F}$, 80Ω , -1000 s^{-1} , -4000 s^{-1} .

۳-۷- مدار RLC موازی فوق میرایی

مقایسه رابطه (۱۰) و (۱۱) در قسمت ۷-۲ نشان می‌دهد که اگر $\{R^2 C^2\} LC >$ آنگاه α بزرگتر از ω_0 می‌باشد. در این حالت رادیکال به کار رفته در محاسبه S_1, S_2 حقیقی می‌باشد و S_1, S_2 هم حقیقی می‌باشند. به علاوه، می‌توانیم نامساویهای زیر را

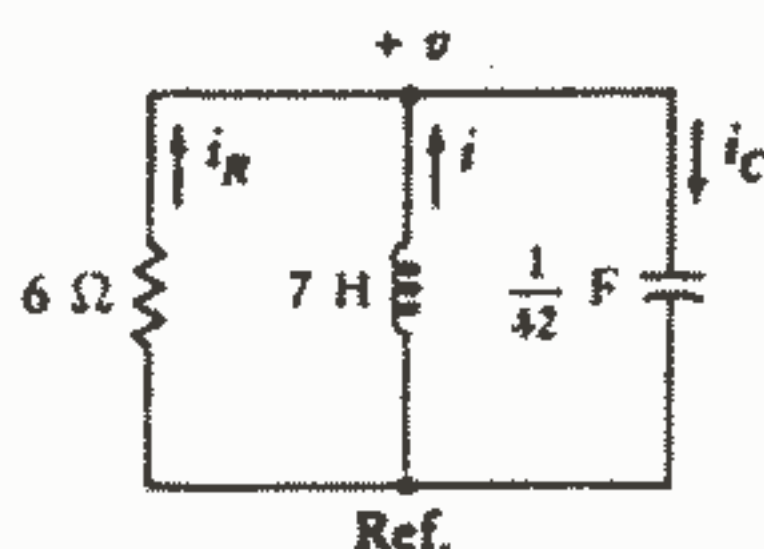
$$(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < 0, (-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < 0, \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

به روابط (۱۲) و (۱۳) اعمال کنیم تا نشان دهیم که S_1, S_2 هر دو اعداد حقیقی منفی هستند. بنابراین پاسخ $v(t)$ را می‌توان به صورت مجموع جبری توابع نمایی نزولی، که هر دو با میل زمان به سمت بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کنند، بیان نمود.

در واقع چون قدر مطلق S_1 بزرگتر از S_2 است، جمله‌ای که شامل S_1 است دارای سرعت تنزل بیشتری است و برای مقادیر بزرگ زمان می‌توانیم روابط حدی را به صورت زیر بنویسیم:

$$v(t) \rightarrow A_1 e^{s_1 t} \rightarrow 0 \quad \text{وقتی که } t \rightarrow \infty$$

به منظور بحث درباره‌ی روش انتخاب ثابتهای A_1, A_2 به طوریکه مطابق با شرایط اولیه باشند و نیز به منظور ارائه یک منحنی پاسخ نمونه، بیاید یک مثال عددی را در نظر بگیریم. ما یک مدار RLC موازی را با مقادیر $R = 6\Omega$ ، $L = 7\text{H}$ و برای سهولت محاسبه مقدار غیرعملی و بزرگ $C = 1/42\text{F}$ ، در نظر می‌گیریم. انرژی اولیه ذخیره شده با انتخاب ولتاژ اولیه $v(0) = 0$ در دو سر مدار و جریان اولیه سلف $i(0) = 10\text{A}$ ، مشخص می‌شود که i, v در شکل ۷-۲ تعریف شده‌اند.



شکل ۷-۲: یک مدار RLC موازی که به عنوان یک مثال

عددی به کار رفته است. مدار در حالت فوق میرایی است.

به سادگی می‌توانیم مقادیر پارامترهای مختلف را تعیین کنیم:
(همگی بر حسب S^{-1})

$$\alpha = 3.5 \quad \omega_0 = \sqrt{6}$$

$$s_1 = -1 \quad s_2 = -6$$

و بلافاصله می‌توانیم فرم کلی پاسخ طبیعی را بنویسیم:

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \quad (14)$$

حال فقط محاسبه دو ثابت A_1, A_2 باقی می‌ماند. اگر ما پاسخ $v(t)$ را به ازای دو مقدار مختلف زمان بدانیم این مقادیر را می‌توانیم در روابط (14) و (15) جایگزین کنیم و A_1, A_2 را به سادگی به دست آوریم. البته ما فقط یک مقدار لحظه‌ای برای $v(t)$ می‌دانیم و آنهم $v(0) = 0$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$0 = A_1 + A_2 \quad (15)$$

رابطه دیگری هم به دست خواهیم آورد که A_1, A_2 را به هم مربوط سازد که این رابطه را با مشتق‌گیری از $v(t)$ در رابطه (14) نسبت به زمان و تعیین مقدار اولیه آن به وسیله شرایط اولیه دیگری که داریم یعنی $i(0) = 10$ و مساوی قرار دادن نتایج، به دست می‌آید. از دو طرف رابطه (14) مشتق می‌گیریم: $dv/dt = -A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{-6t}$ و مقدار این مشتق را به ازای $t = 0$ محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -A_1 - 6A_2$$

سپس کمی مکث می‌کنیم که ببینیم چگونه می‌توانیم مقدار اولیه مشتق را به طور عددی پیدا کنیم. این قدم اخیر همیشه به وسیله خود مشتق تحمیل می‌شود، dv/dt جریان خازن را به ذهن خطور می‌دهد زیرا: $i_C = C \frac{dv}{dt}$ در نتیجه:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i(0) + i_R(0)}{C} = \frac{i(0)}{C} = 420 \text{ V/S}$$

از آنجاییکه ولتاژ اولیه صفر در دو سر مقاومت، جریان اولیه صفر را در آن ایجاد می‌کند پس معادله دوم ما عبارت خواهد بود از:

$$420 = -A_1 - 6A_2 \quad (16)$$

و با حل هم‌زمان معادلات (۱۵) و (۱۶) خواهیم داشت: $A_2 = -84$, $A_1 = 84$

جواب عددی نهایی برای پاسخ طبیعی عبارت است از:

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t}) \quad (17)$$

محاسبه A_2, A_1 برای سایر شرایط انرژی اولیه ذخیره شده، از قبیل انرژی اولیه ذخیره شده در خازن، در اولین تمرین این قسمت مورد بررسی قرار گرفته است.

حال بیایید ببینیم که چه اطلاعاتی را می‌توانیم بدون انجام محاسبات بی‌مورد، از رابطه (۱۷) استخراج کنیم. تذکر می‌دهیم که $v(t)$ در $t = 0$ برابر صفر است که این یک چک راحت برای فرض اولیه مان می‌باشد. همچنین می‌توانیم جمله‌نمایی اول را به عنوان اینکه دارای ثابت زمانی $1S$ می‌باشد و جمله دوم را با ثابت زمانی $1/6 S$ تفسیر کنیم. هر یک از این جملات با دامنه واحد شروع می‌شوند اما جمله اخیر سریعتر میرا می‌شود و $v(t)$ هرگز منفی نمی‌شود و قتیکه زمان بی‌نهایت می‌شود، هر جمله به سمت صفر میل می‌کند و همانگونه که انتظار می‌رود پاسخ سرانجام صفر می‌شود. بنابراین ما یک منحنی پاسخ داریم که به ازای $t = 0$, $t = \infty$ برابر صفر است و هرگز منفی نمی‌شود و چون همه جا صفر نمی‌باشد باید اقلاً دارای یک ماکزیمم باشد که پیدا کردن مقدار دقیق آن مشکل نمی‌باشد. از پاسخ مشتق می‌گیریم:

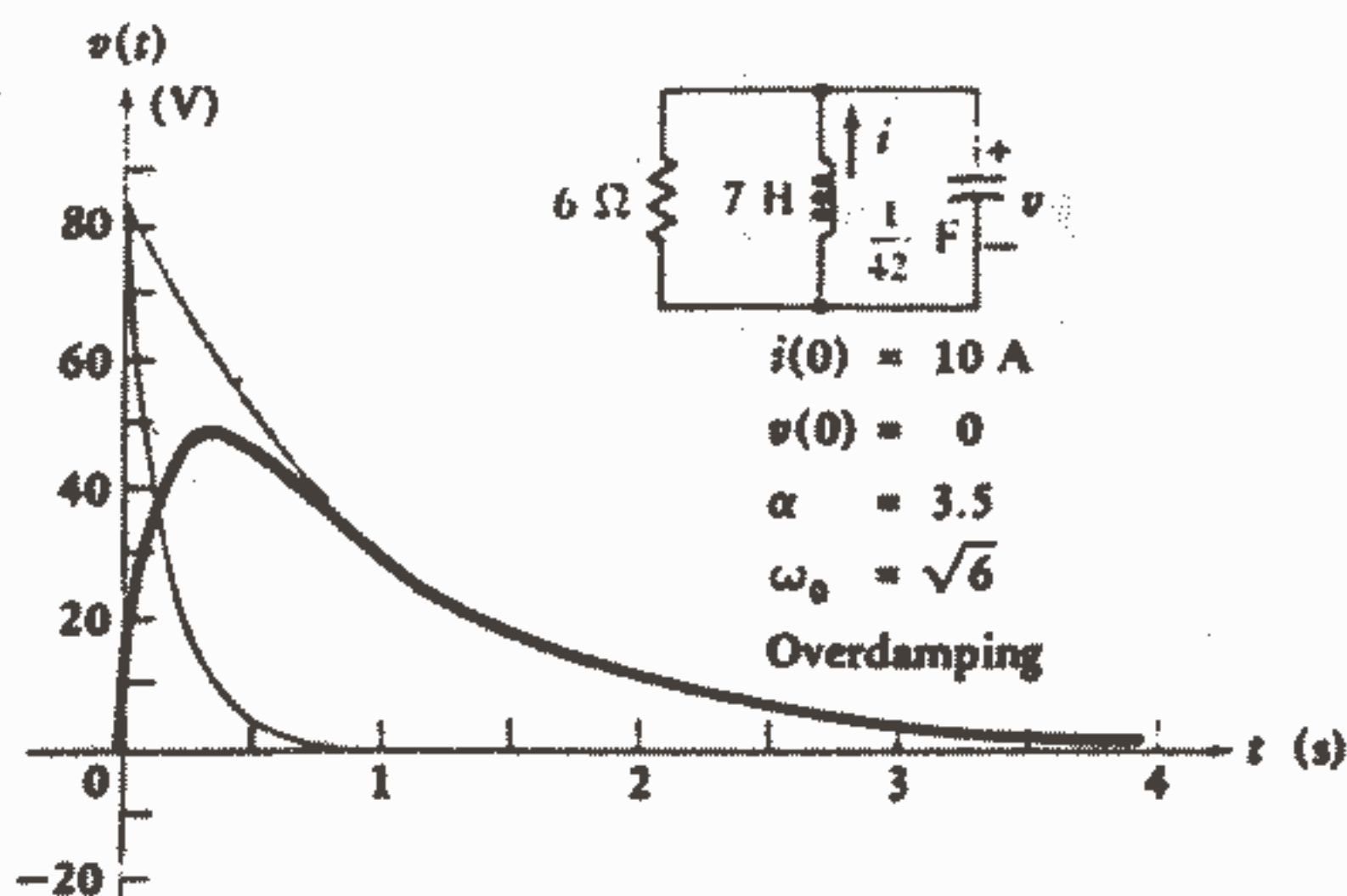
$dv/dt = 84(-e^{-t} + 6e^{-6t})$ و سپس مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا زمان t_m که در آن ولتاژ ماکزیمم می‌شود تعیین شود: $0 = -e^{-t_m} + 6e^{-6t_m}$ پس از ساده کردن داریم: $e^{5t_m} = 6$ و از آنجا به دست می‌آید: $t_m = 0.358S$, $v(t_m) = 48.9V$

یک روش معقول برای رسم پاسخ این است که دو جمله‌نمایی $84e^{-t}$, $84e^{-6t}$ را جداگانه رسم کنیم و سپس تفاضل آنها را به دست آوریم. مفید بودن این روش به وسیله منحنی‌های شکل ۷-۳ نشان داده شده است که در آن دو تابع‌نمایی مذکور کم‌رنگ‌تر نشان داده شده‌اند.

این منحنی‌ها پیش‌بینی قبلی ما را مبنی بر اینکه رفتار تابعی $v(t)$ برای مقادیر بزرگ t عبارت از $84e^{-t}$ می‌باشد، را تأیید می‌کنند.

سوال دیگری که اغلب در بررسی پاسخ مدار پیش می‌آید مربوط به طول مدتی است که طول می‌کشد تا قسمت گذرای پاسخ ناپدید (و یا میرا) شود در عمل، اغلب مطلوب است که بگذاریم این پاسخ گذرا هر چه سریعتر به صفر میل کند یعنی زمان فروکش (settling time) t_s را به حداقل برسانیم. البته از نظر تئوری t_s بی‌نهایت می‌باشد زیرا $v(t)$ هرگز در یک زمان محدود

به صفر نمی‌رسد. اگر چه پس از اینکه دامنه $v(t)$ به مقداری کمتر از قدر مطلق ماکزیمم آن $|v_m|$ افت کند فقط پاسخ ناچیزی باقی می‌ماند. زمانی را که لازم است تا این امر اتفاق افتد به عنوان زمان فروکش^۱ تعریف می‌کنیم. از آنجاییکه برای مثال ما داریم: $|v_m| = v_m = 48.9V$ بنابراین زمان فروکش زمانی است که لازم است تا پاسخ به مقدار $0.489V$ افت کند. اگر این مقدار $v(t)$ را در معادله (۱۷) جایگزین کنیم و از جمله‌نمایی دوم صرف‌نظر کنیم (که می‌دانیم در اینجا قابل چشم‌پوشی می‌باشد)، زمان فروکش را $5.15S$ به دست می‌آوریم.



شکل ۳ - ۷: پاسخ $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-4t})$ مربوط به مدار شکل ۲ - ۷.

در مقایسه با پاسخ‌هاییکه در دو قسمت بعدی به دست خواهیم آورد، این زمان فروکش نسبتاً بزرگ می‌باشد و زمان میرایی طولانی است و به همین دلیل این پاسخ، فوق میرایی نامیده می‌شود. حالتی را که در آن α بزرگتر از ω_0 باشد حالت «فوق میرایی» خواهیم نامید. حال بیاید ببینیم با کاهش α چه اتفاقی می‌افتد.

تمرین

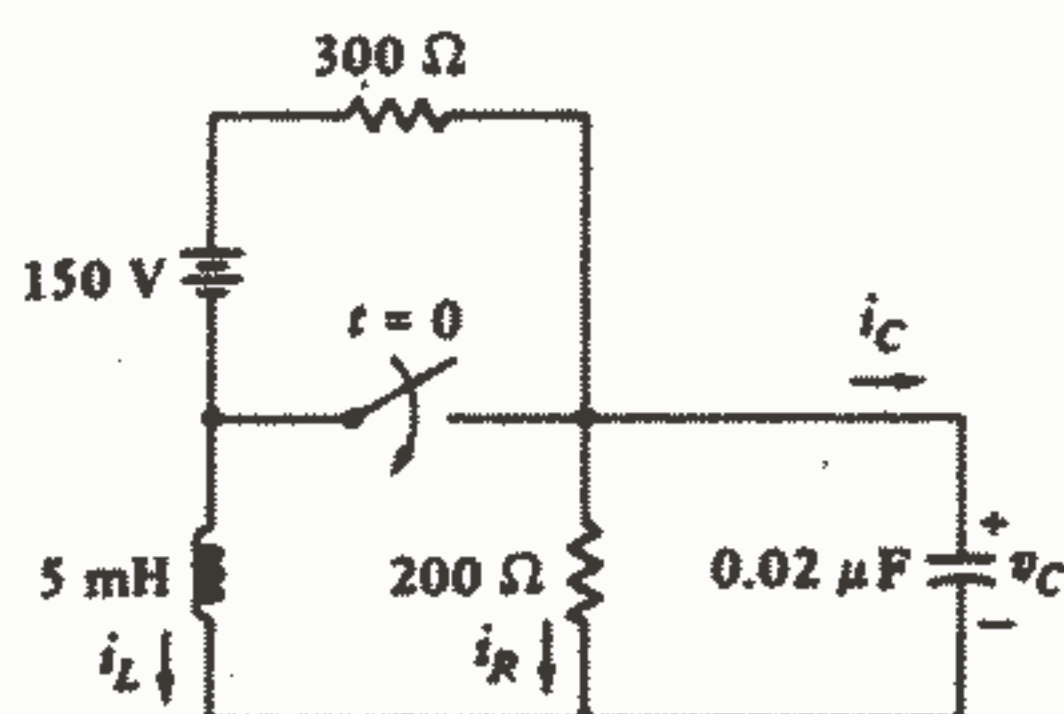
۲ - ۷ - اگر ولتاژ اولیه در دو سر یک مدار RLC موازی صفر نباشد، آنگاه مقدار حاصله برای جریان اولیه مقاومت باید در محاسبه dv/dt در نظر گرفته شود. در مثال عددی قسمت قبل فرض کنید داشته باشیم: $v(0) = 30V$ ، $i(0) = 10A$ حال مقادیر زیر را پیدا کنید:

A_1 (a), A_2 (b), v_{max} (c)

جواب: 787 , -48 , 50.1

۳ - ۷ - کلید شکل ۴-۷ پس از اینکه به مدت بیش از ۲ ساعت بسته بوده است، در لحظه $t = 0$ باز می‌شود. مقادیر زیر را پیدا کنید:

(a) $v_C(0^+)$, (b) $i_L(0^+)$, (c) $i_R(0^+)$, (d) $i_C(0^+)$, (e) $v_C(10 \mu s)$
 جواب: $60V$, $-0.3A$, $0.3A$, 0 , $45.8V$



شکل ۴-۷: به تمرین ۳-۷ مراجعه کنید.

۴-۷ - میرایی بحرانی

حالت فوق میرایی با شرط $\alpha > \omega_0$ و یا $LC > \{R^2 C^2\}$ مشخص می‌شود و مقادیر حقیقی منفی برای S_1, S_2 ایجاد می‌شود و پاسخی را به دست می‌دهد که به صورت مجموع جبری دو تابع نمایی منفی بیان می‌شود. فرم نمونه پاسخ $v(t)$ در مثال عددی قسمت قبل و تمرینات متعاقب آن به دست آمده است.

حال اجازه دهید مقادیر عناصر را طوری تنظیم کنیم که α, ω_0 مساوی باشند. این یک حالت خیلی خاص می‌باشد که «میرایی بحرانی» نامیده می‌شود. اگر ما سعی در ایجاد یک مدار RLC موازی در حالت میرایی بحرانی داشته باشیم، سعی ما بیهوده خواهد بود زیرا ما هرگز نمی‌توانیم α را دقیقاً مساوی ω_0 ایجاد کنیم. حاصل این تلاش ما یک مدار فوق میرا یا زیر میرا (که در قسمت بعدی درباره آن بحث خواهیم کرد) خواهد بود. البته به منظور کامل بودن بحث، مدار میرایی بحرانی را در اینجا مورد بحث قرار می‌دهیم زیرا این حالت، انتقال جالبی بین حالت زیر میرایی و فوق میرایی را نشان می‌دهد.

میرایی بحرانی وقتی حاصل می‌شود که:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \omega_0 \\ LC &= \{R^2 C^2\} \\ L &= \{R^2 C\} \end{aligned} \right\} \text{ میرایی بحرانی:}$$

واضح است که میرایی بحرانی را می‌توانیم با تغییر دادن مقدار هر یک از سه عنصر در مثال عددی قبل ایجاد کنیم. ما مقاومت R را انتخاب می‌کنیم و مقدار آن را تا حصول میرایی بحرانی افزایش می‌دهیم و بنابراین ω_0 را بدون تغییر باقی می‌گذاریم. مقدار لازم R عبارت است از $\sqrt{6}/2\Omega$ و L هنوز VH می‌باشد و C برابر $F \frac{1}{4}$ باقی می‌ماند. بنابراین خواهیم داشت:

$$S_1 = S_2 = -\sqrt{6}, \alpha = \omega_0 = \sqrt{6}$$

حال به صورت نه چندان واضح و روشن پاسخ را به صورت مجموع دو تابع نمایی بیان می‌کنیم:

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_1 e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

که می‌توان آن را به صورت $v(t) = A_2 e^{-\sqrt{6}t}$ نوشت.

در اینجا بعضی از ما باید احساس کنیم که راه خود را گم کرده‌ایم. ما پاسخی داریم که فقط شامل یک ثابت دلخواه است اما دو شرط اولیه $v(0) = 0$ ، $i(0) = 10$ را داریم که باید در این ثابت منفرد صدق کنند. این امر به طور کلی غیرممکن است. مثلاً در این حالتی که ما داریم اولین شرط اولیه الزام می‌دارد که A_2 باید صفر باشد و در این صورت غیرممکن است که شرط اولیه دوم در آن صدق کند.

اصول ریاضی و الکتریسته ما بدون نقص می‌باشند، بنابراین اگر اشتباهی ما را دچار مشکل نکرده باشد، ما باید با یک فرض غلط کار را شروع کرده باشیم و ما فقط یک فرض انجام داده‌ایم. ما در ابتدا بیان کردیم که معادله دیفرانسیل را می‌توان با فرض کردن یک جواب نمایی حل نمود و به نظر می‌رسد که این مطلب برای این حالت خاص میرایی بحرانی غلط از آب در می‌آید. وقتی که $\alpha = \omega_0$ باشد، معادله دیفرانسیل (۴) می‌شود:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv}{dt} + \alpha^2 v = 0$$

حل این معادله روند خیلی مشکلی نیست اما باید از بسط و توسعه آن در اینجا اجتناب کنیم زیرا این معادله یک نوع استاندارد می‌باشد که در کتب رایج معادلات دیفرانسیل یافت می‌شود.

$$v = e^{-\alpha t} (A_1 t + A_2) \quad (18) \quad \text{جواب عبارت است از:}$$

باید یادآوری کنیم که جواب را می‌توان به صورت مجموع دو جمله که یکی همان تابع نمایی منفی آشنای ماست و دیگری t برابر یک تابع نمایی منفی می‌باشد، بیان نمود همچنین باید یادآور شویم که جواب این معادله شامل همان دو ثابتی که انتظار آن می‌رفت، می‌باشد. حال مثال عددی خود را کامل می‌کنیم. بعد از جایگذاری مقدار معلوم

α در معادله (۱۸) یعنی در معادله $v = A_1 t e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$ ، مقادیر A_1, A_2 را ابتدا با اعمال شرایط اولیه برخورد $v(t)$ یعنی $v(0) = 0$ تعیین می‌کنیم. بنابراین داریم $A_2 = 0$. این نتیجه ساده به این دلیل حاصل می‌شود که مقدار اولیه پاسخ صفر انتخاب شده است. حالت کلی‌تر که به معادله‌ای برای تعیین A_2 منجر می‌شود در تمرینات آمده است. شرط اولیه دیگر را درست مانند حالت فوق میرایی به مشتق dv/dt اعمال می‌کنیم. بنابراین با توجه به اینکه $A_2 = 0$ مشتق می‌گیریم: $\frac{dv}{dt} = A_1 t(-\sqrt{6})e^{-\sqrt{6}t} + A_1 e^{-\sqrt{6}t}$ و مقدار آن را در $t = 0$ محاسبه می‌کنیم: $\frac{dv}{dt}\bigg|_{t=0} = A_1$ و مشتق را بر حسب جریان اولیه خازن بیان می‌کنیم: $\frac{dv}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_R(0)}{C} + \frac{i(0)}{C}$

که جهت مبنا برای i, i_R, i_C در شکل ۲-۷ تعریف شده است. بنابراین: $A_1 = 420$ و در نتیجه پاسخ عبارت است از: $v(t) = 420 t e^{-2/45t}$ (۱۹)

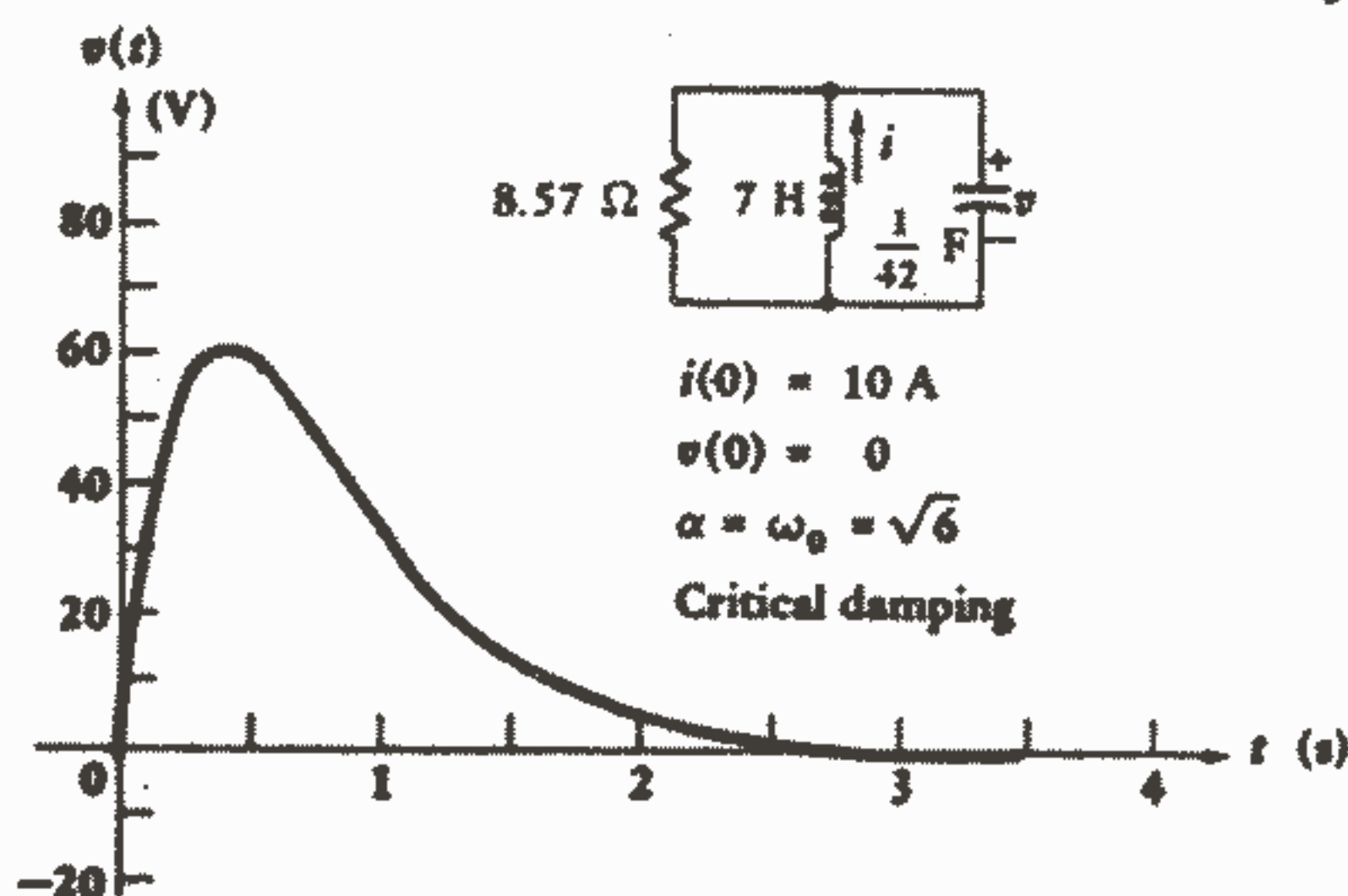
قبل از رسم مفصل این پاسخ، بیایید دوباره با یک بحث کیفی فرم آن را پیش بینی کنیم. شرایط اولیه تعیین شده عبارت از صفر می‌باشد و با رابطه (۱۹) توافق دارد. نمی‌توان فوراً مشاهده نمود که پاسخ وقتی که t بی‌نهایت می‌شود به سمت صفر میل می‌کند، زیرا جمله $t e^{-2/45t}$ فرم نامعینی دارد. اگرچه این مانع جزئی را می‌توان به سادگی با استفاده از قاعده هسپیتال برطرف نمود. بنابراین داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 420 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{2.45t}} = 420 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2.45 e^{2.45t}} = 0$$

و یک بار دیگر پاسخی داریم که در صفر شروع می‌شود و خاتمه می‌یابد و به ازای کلیه زمانهای دیگر دارای مقادیر مثبت می‌باشد. یک مقدار ماکزیمم v_m هم در زمان t_m روی می‌دهد که برای مثال ما داریم: $t_m = 0.408S$, $v_m = 63.1V$

این ماکزیمم بزرگتر از آنی است که برای حالت فوق میرایی به دست آمد و نتیجه‌ای است از تلفات کمتری که در مقاومت بزرگتر روی می‌دهد. زمان پاسخ ماکزیمم کمی دیرتر از زمان مربوطه در حالت فوق میرایی می‌باشد. زمان فروکش را هم می‌توان با حل معادله $v_m/100 = 420 t_s e^{-2/45t_s}$ نسبت به t_s (به وسیله روشهای سعی و خطا و یا با استفاده از روتین SOLVE یک ماشین حساب) تعیین نمود که برابر است با: $t_s = 3.12S$ که مقدار کوچکتري نسبت به حالت فوق میرایی (۵/۱۵S) می‌باشد. در واقع می‌توان نشان داد که به ازای مقادیر معلوم C, L ، انتخاب مقداری از R که میرایی بحرانی را ارائه کند همیشه زمان فروکش کمتری را نسبت

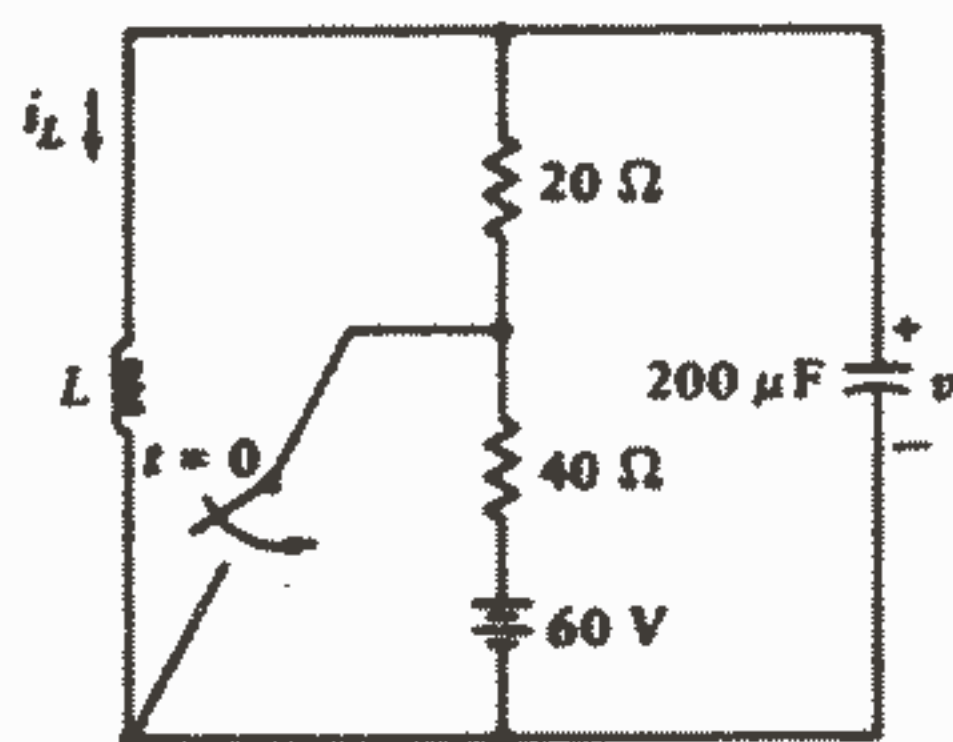
به هر انتخابی از R در حالت فوق میرایی ارائه می کند. البته می توان با افزایش کمی در مقاومت، اصلاح کمی (کاهش) در زمان فروکش به دست آورد. منحنی پاسخ حالت میرایی بحرانی در شکل ۷-۵ رسم شده است که می توان آن را با حالت فوق میرایی (وزیر میرایی) با مراجعه به شکل ۷-۸ مقایسه نمود.



شکل ۷-۵: پاسخ $v(t) = 420 te^{-2.45t}$ مربوط به شبکه شکل ۷-۲ که در آن R را طوری تغییر دادیم که میرایی بحرانی حاصل شود.

تمرین

۷-۴. کلید شکل ۷-۶ پس از مدت طولانی باز بودن در لحظه $t = 0$ بسته می شود. (a) L را طوری پیدا کنید که مدار در حالت میرایی بحرانی باشد. با استفاده از این مقدار L مقادیر زیر را پیدا کنید: (b) $i_L(0^+)$ ، (c) $v(0^+)$ ، (d) $i_L(1\text{ms})$.
جواب: 320mH ، 1A ، 0 ، 993mA



شکل ۷-۶: به تمرین ۷-۴ مراجعه کنید.

۵-۷- مدار RLC موازی در حالت زیر میرایی

حال بیایید روندی را که در قسمت قبل آغاز کردیم با افزایش دوباره R ادامه دهیم. در این صورت ضریب میرایی α وقتی که ω_0 ثابت بماند، کاهش می‌یابد و α^2 کمتر از ω_0^2 می‌شود و رادیکال موجود در روابط S_1, S_2 منفی می‌شود. این امر باعث می‌شود که پاسخ، ماهیت کاملاً متفاوتی داشته باشد اما خوشبختانه لازم نیست دوباره به معادله دیفرانسیل بنیادی باز گردیم. با استفاده از اعداد مختلط، پاسخ نمایی تبدیل به یک پاسخ سینوسی میرا می‌شود که این پاسخ کاملاً از کمیت‌های حقیقی تشکیل شده است و کمیت‌های مختلط فقط برای مشتق‌گیری لازم می‌شوند^۱ بنابراین با فرم نمایی آغاز می‌کنیم:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

که در آن داریم:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

و سپس:

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

که در آن $j = \sqrt{-1}$ می‌باشد.

ما اکنون رادیکال جدیدی به دست می‌آوریم که در حالت زیر میرایی حقیقی می‌باشد و آن را با ω_d نشان می‌دهیم و فرکانس رزونانس طبیعی می‌نامیم: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ حال با جمع‌بندی مطالب فوق می‌توانیم پاسخ را به صورت زیر بنویسیم:

$$v(t) = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t})$$

و یا به فرم طولانی‌تر می‌توان نوشت:

$$v(t) = e^{-\alpha t} \left\{ (A_1 + A_2) \left[\frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2} \right] + j(A_1 - A_2) \left[\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{j2} \right] \right\}$$

حال می‌توان از دو تا از مهمترین اتحادهای مربوط به اعداد مختلط که بعداً در ضمیمه ۴ اثبات خواهند شد، استفاده نمود. گروه اول در معادله فوق برابر است با $\cos \omega_d t$ و گروه دوم برابر

۱- مقدمه‌ای برای استفاده از اعداد مختلط در فصل ۹ و ضمیمه ۴ ظاهر می‌شود. در آن موقع ما طبیعت عمومی‌تر کمیت‌های مختلط را با نشان دادن آنها به وسیله حروف درشت مورد تأکید قرار خواهیم داد و در این چند صفحه علائم خاصی را به کار نخواهیم برد.

است با $\sin \omega_d t$. بنابراین:

$$v(t) = e^{-\alpha t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2) \sin \omega_d t]$$

و می توان ضرایب را با علائم جدیدی مانند B_1, B_2 نشان داد:

$$v(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad (20)$$

حال که با حالت زیر میرایی سر و کار داریم، اعداد مختلط را پشت سر گذاشته ایم. این امر صحیح است زیرا α, ω_d, t اعداد حقیقی هستند و خود $v(t)$ هم باید یک کمیت حقیقی باشد (که می توان آن را بر روی یک اسیلوسکوپ و یا ولت متر و یا یک کاغذ گراف نمایش داد) و در نتیجه اعداد B_1, B_2 هم حقیقی می باشند. معادله (20) دارای فرم تابعی مطلوب برای پاسخ زیر میرایی می باشد و درستی آن را می توان با جایگذاری مستقیم در معادله دیفرانسیل اولیه چک نمود که این کار را به عنوان تمرین به عهده خواننده کنجکا و قرار می دهیم. دو مقدار ثابت B_1, B_2 را باز هم طوری انتخاب می کنیم که شرایط اولیه داده شده را برآورده سازند. حال مقدار مقاومت را در مثال خودمان از $7\sqrt{6}/2 \Omega$ و یا $8/57 \Omega$ به $10/5 \Omega$ افزایش می دهیم و C, L بدون تغییر می مانند. بنابراین داریم:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{6}, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2} \text{ (rad/s)}$$

به جز مقادیر ثابت دلخواه که باید محاسبه شوند، اکنون پاسخ برایمان معلوم شده است:

$$v(t) = e^{-2t} (B_1 \cos \sqrt{2}t + B_2 \sin \sqrt{2}t)$$

محاسبه دو مقدار ثابت مانند قبل می باشد. اگر دوباره فرض کنیم که $v(0) = 0$ و $i(0) = 10$ آنگاه B_1 باید صفر باشد و در نتیجه داریم: $v(t) = B_2 e^{-2t} \sin \sqrt{2}t$ که مشتق آن می شود: $dv/dt = \sqrt{2} B_2 e^{-2t} \cos \sqrt{2}t - 2 B_2 e^{-2t} \sin \sqrt{2}t$ و در لحظه $t = 0$ مقدار آن عبارت است از:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \sqrt{2} B_2 = \frac{i_C(0)}{C} = 420$$

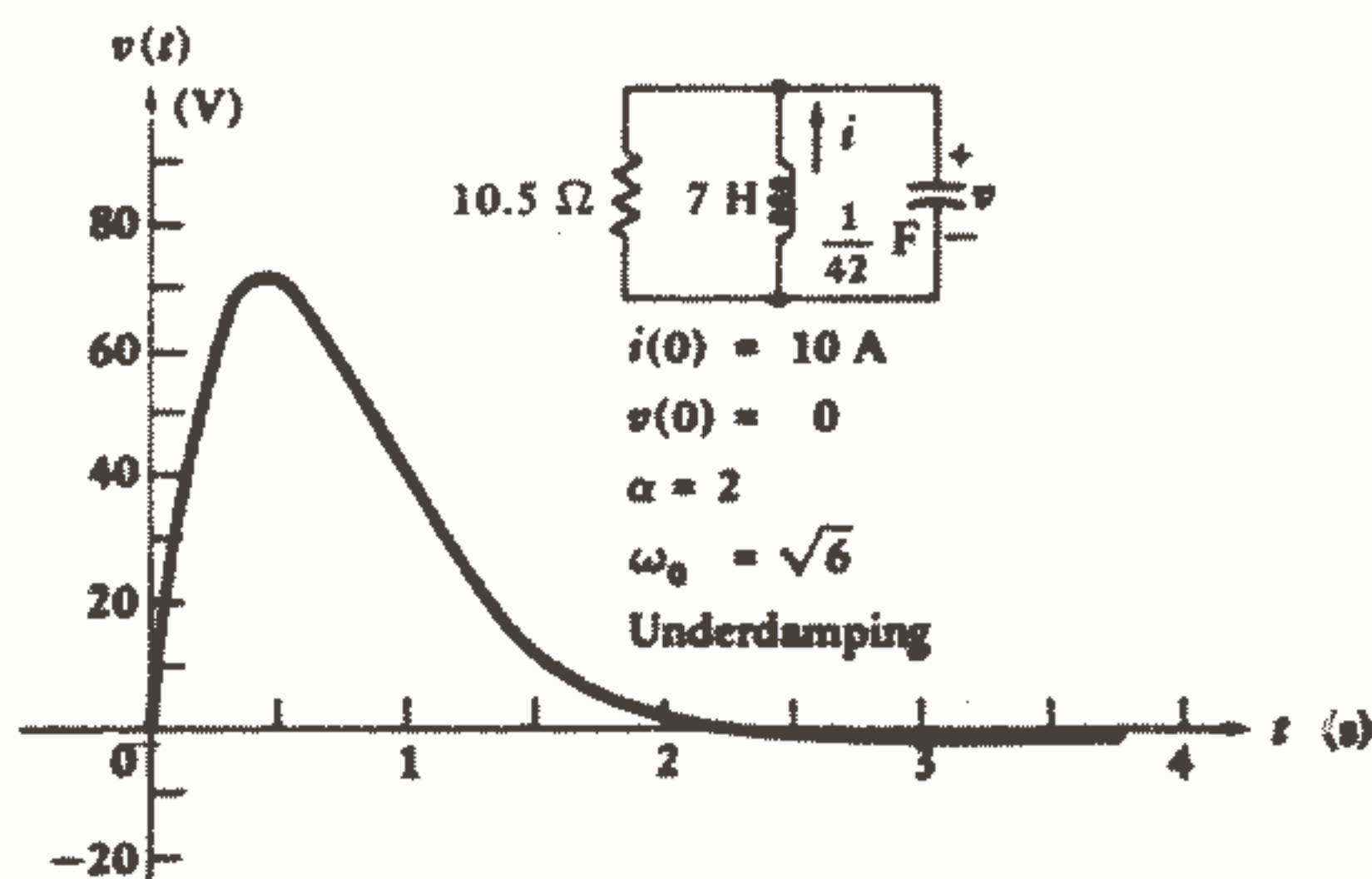
که i_C در شکل ۷-۲ تعریف شده است. بنابراین خواهیم داشت:

$$v(t) = 210 \sqrt{2} e^{-2t} \sin \sqrt{2}t$$

توجه داشته باشید که، مانند قبل، این پاسخ دارای مقدار اولیه صفر می باشد و این به دلیل شرایط اولیه ولتاژ می باشد که اعمال کرده ایم و همچنین مقدار نهایی آن هم صفر می باشد زیرا جمله نمایی به ازای مقادیر بزرگ t ناپدید می شود. وقتی که t از صفر به مقادیر مثبت کوچکی افزایش یابد، $v(t)$ به صورت $210 \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t$ افزایش می یابد زیرا جمله نمایی اساساً برابر

با یک باقی می ماند. اما در یک زمانی مانند t_m ، تابع نمایی شروع به کاهش می کند که این کاهش سریعتر از افزایش $\sin \sqrt{2}t$ می باشد، بنابراین $v(t)$ به مقدار ماکزیممی مانند v_m می رسد و سپس شروع به کاهش می کند. لازم به ذکر است که t_m مقداری از t نیست که به ازای آن $\sin \sqrt{2}t$ ماکزیمم می شود. بلکه اندکی بعد از آن $\sin \sqrt{2}t$ ماکزیمم می شود. وقتی که $t = \pi/\sqrt{2}$ مقدار $v(t)$ صفر است و در فاصله $\pi/\sqrt{2} < t < \sqrt{2}\pi$ پاسخ منفی می شود و دوباره در $t = \sqrt{2}\pi$ برابر صفر می شود. بنابراین $v(t)$ یک تابع اسیلاتوری از زمان است و محور زمان را بی نهایت مرتبه در لحظات $t = n\pi/\sqrt{2}$ قطع می کند (n یک عدد صحیح مثبت می باشد). البته در مثال ما، پاسخ فقط کمی زیر میرایی است و جمله نمایی باعث می شود که تابع به قدری سریع میرا شود که اکث صفر تلاقی ها (Zero Crossing) در نمودار مشهود نمی باشند.

با کاهش α طبیعت اسیلاتوری پاسخ قابل ملاحظه تر می شود. اگر α صفر باشد که متناظر با مقدار مقاومت بی نهایت می باشد، آنگاه $v(t)$ یک سینوس غیرمیرا می باشد که با دامنه ثابتی نوسان می کند. هرگز زمانی وجود ندارد که در آن $v(t)$ به پایین تر از یک درصد مقدار ماکزیمم اش افت کند و در آن مقدار بماند، بنابراین زمان فروکش بی نهایت می باشد. این یک حرکت دائمی نیست و فقط فرض کرده ایم که یک انرژی اولیه در مدار باشد و هیچ وسیله ای برای اتلاف این انرژی نباشد. که این انرژی از محل اولیه اش در سلف به خازن منتقل می شود و سپس به سلف باز می گردد و الی آخر.



شکل ۷-۷: پاسخ $v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$ مربوط به شبکه شکل ۷-۲ که در آن R بگونه ای افزایش یافته است که تولید پاسخ زیر میرایی کند.

یک مقدار محدود R در مدار RLC موازی مانند نوعی واسطه انتقال الکتریکی عمل می‌کند. هر لحظه که انرژی از L به C و بالعکس منتقل می‌شود، این واسطه مأموریت خود را انجام می‌دهد. دیری نمی‌گذرد که این واسطه تمام انرژی را می‌گیرد و تاژول آخر آن را تلف می‌کند و حتی یک ژول انرژی هم برای C, L باقی نمی‌ماند و بدون ولتاژ و جریان باقی می‌ماند. مدارهای RLC موازی عملی می‌توان ساخت که مقادیر موثر R آنها به قدری بزرگ باشد که یک پاسخ سینوسی غیرمیرا در آنها برای سالها بدون اعمال انرژی اضافی، باقی بماند. همچنین می‌توانیم شبکه‌های فعالی بسازیم که مقدار کافی انرژی در طی هر نوسان $v(t)$ ارائه کنند به طوریکه یک پاسخ سینوسی تقریباً کامل بتواند تا هر زمانی که بخواهیم باقی بماند. این وسیله یک اسیلاتور سینوسی یا سیگنال ژنراتور است که یک وسیله مهم آزمایشگاهی می‌باشد. در قسمت ۷-۸ یک نوع op-amp ی از این اسیلاتور سینوسی ارائه شده است. با مراجعه به مثال عددی مان و با مشتق‌گیری اولین ماکزیمم $v(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

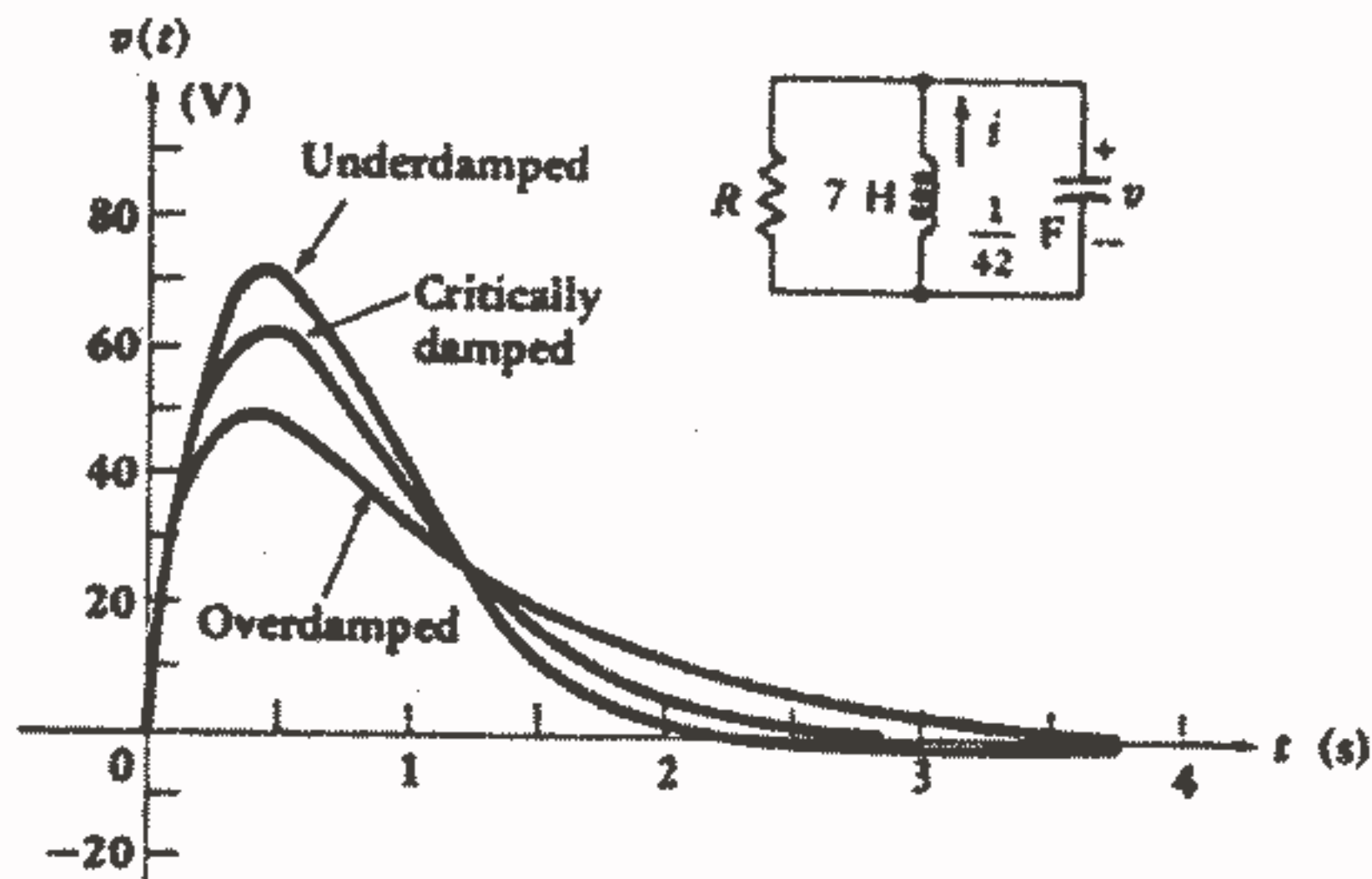
$$t_{m1} = 0,435S \text{ در } v_{m1} = 71,8V$$

و می‌نیم متوالی آن عبارت است از: $v_{m2} = -0,845V$ در $t_{m2} = 2,65VS$ والی آخر. زمان فروکش را می‌توان با روش سعی و خطا به دست آورد که عبارت از $2,92S$ می‌باشد که کوچکتر از زمان مربوطه برای حالت میرایی بحرانی می‌باشد. توجه داشته باشید که t_2 بزرگتر از t_{m2} می‌باشد زیرا دامنه v_{m2} بزرگتر از یک درصد دامنه v_{m1} می‌باشد این امر به ذهن چنین القا می‌کند که کاهش کمی در R باعث کاهش دامنه undershoot می‌شود و اجازه می‌دهد که t_2 کمتر از t_{m2} باشد. مسئله ۳۰ در آخر این فصل ارائه شده است تا هر دانشجویی بتواند حس کنجکاوی اجتناب‌ناپذیر برانگیخته شده به وسیله این توضیحات را ارضاء کند و مقدار عددی می‌نیم زمان فروکش برای این مدار را، همراه با مقدار R که آن را ایجاد می‌کند، تعیین کند.

پاسخهای فوق میرایی، میرایی بحرانی و زیر میرایی برای این مدار در یک نمودار در شکل ۷-۸ نشان داده شده است. مقایسه سه منحنی نتایج کلی زیر را به دست می‌دهد:

۱ - وقتی که به وسیله تنظیم اندازه مقاومت موازی، میرایی عوض می‌شود ماکزیمم اندازه پاسخ برای میرایی کوچکتر، بزرگتر می‌باشد.

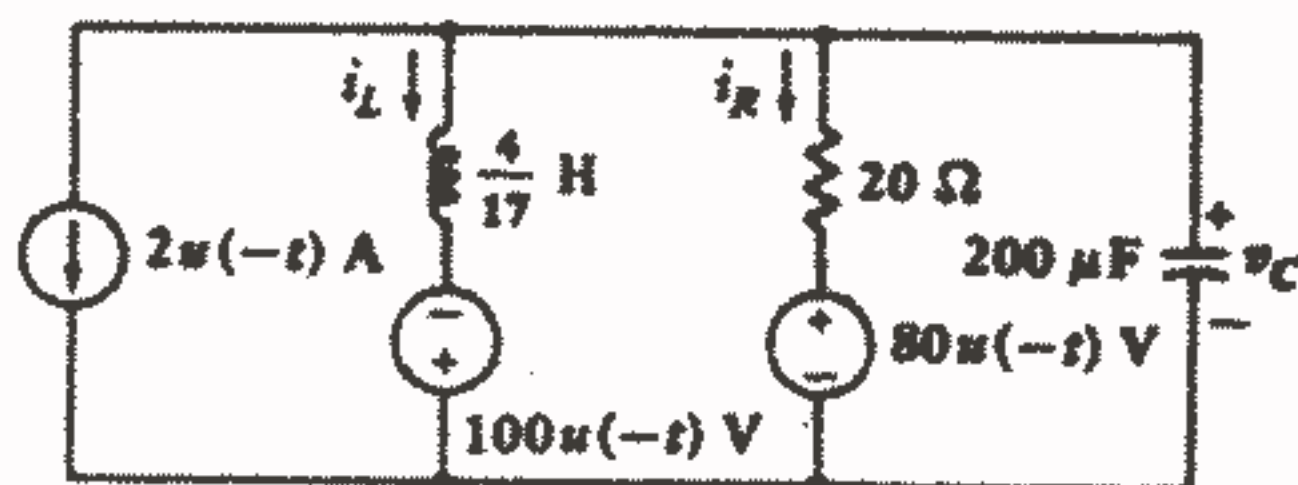
۲ - در حالت زیر میرایی پاسخ نوسانی می‌شود و می‌نیم زمان فروکش برای زیر میرایی کم، حاصل می‌شود.



شکل ۸-۷: سه منحنی برای یک مدار RLC موازی که در آن $\omega_0 = \sqrt{6}$ و $V(0) = 0$ و $i(0) = 10\text{ A}$ و α برابر $3,5$ (برای فوق میرایی) و $2,45$ (برای میرایی بحرانی) و 2 (برای زیر میرایی) می باشد.

تمرین

۵-۷: سه منبع مدار شکل ۷-۹ در لحظه $t = 0$ خاموش می شوند. پیدا کنید:
 (a) $v_c(0)$, (b) $i_L(0)$, (c) $i_R(0^+)$, (d) $i_L(10\text{ms})$
 جواب: -100 V , 7 A , -5 A , $2,64\text{ A}$



شکل ۹-۷: به تمرین ۵-۷ مراجعه کنید.

۶-۷ مدار RLC سری بدون منبع

اکنون می‌خواهیم پاسخ طبیعی یک مدار متشکل از یک مقاومت ایده‌آل، یک سلف ایده‌آل و یک خازن ایده‌آل را که به طور سری متصل شده‌اند، تعیین کنیم. مقاومت ایده‌آل ممکن است بیانگر یک مقاومت فیزیکی باشد که به یک مدار LC یا RLC وصل شده است و یا نماینده تلفات اهمی و تلفات هسته فرو مغناطیسی سلف باشد و یا اینکه برای نمایش همه موارد فوق و سایر وسایل جذب کننده انرژی به کار رفته باشد. در حالت خاص اندازه مقاومت ایده‌آل می‌تواند حتی دقیقاً مساوی با مقاومت اهمی سیمی باشد که سلف واقعی از آن ساخته می‌شود.

مدار RLC سری متناظر مدار RLC موازی می‌باشد و همین یک واقعیت کافی است که تحلیل آن را کاری ساده و کم‌زحمت سازد. شکل ۷-۱۰a این مدار سری را نشان می‌دهد. معادله انتگرال - دیفرانسیلی اولیه به صورت زیر می‌باشد:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt - v_C(t_0) = 0$$

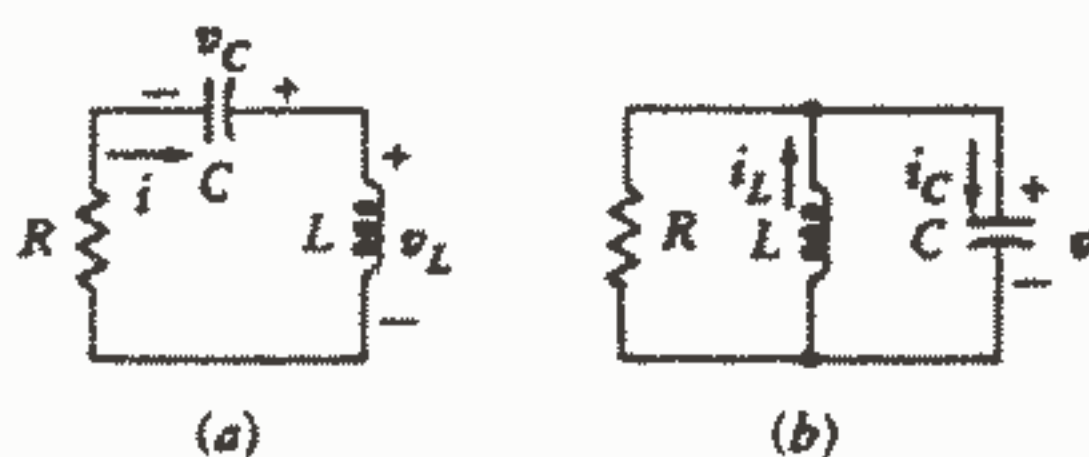
که می‌توان آن را با معادله متناظرش برای مدار RLC موازی، که مجدداً در شکل ۷-۱۰b آمده است، مقایسه نمود.

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} v + \frac{1}{L} \int_0^t v dt - i_L(t_0) = 0$$

معادلات مرتبه دومی هم که به وسیله مشتق‌گیری از هر یک از معادلات فوق به دست می‌آیند نیز متناظر می‌باشند:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (21)$$

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0 \quad (22)$$



شکل ۷-۱۰: (a) مدار RLC سری که متناظر مدار RLC

موازی شکل (b) می‌باشد. البته مقادیر عناصر در

مدارهای (a) و (b) یکسان نیستند.

بدیهی است که بحث کلی ما دربارهٔ مدار RLC موازی مستقیماً قابل اعمال به مدار RLC سری می باشد البته شرایط اولیهٔ مربوط به ولتاژ خازنی و جریان سلفی معادل خواهد بود با شرایط اولیهٔ مربوط به جریان سلفی و ولتاژ خازنی و نیز پاسخ ولتاژ تبدیل به پاسخ جریان خواهد شد. این امکان وجود دارد که چهار قسمت قبلی (شامل تمرینات) را با استفاده از زبان تناظر بازخوانی نمود و به وسیلهٔ آن شرح کاملی از مدار RLC سری به دست آورد البته این کار پس از چند پاراگراف اولیهٔ ممکن است گیج کننده شود و واقعاً انجام آن ضروری به نظر نمی رسد. خلاصه ای از پاسخ مدار سری به سادگی گردآوری می شود، که با توجه به مدار شکل ۷-۱۰a، پاسخ فوق میرایی عبارت است از:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

که در آن داریم:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

و بنابراین:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

فرم پاسخ میرایی بحرانی عبارت است از:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (A_1 t + A_2)$$

و سرانجام پاسخ زیر میرایی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

که در رابطه فوق

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

بدیهی است که اگر برحسب پارامترهای α ، ω_0 ، ω_d عمل کنیم، فرم ریاضی پاسخ ها در وضعیت های متناظر، یکسان خواهند بود. افزایش α در مدار سری یا موازی، در حالیکه ω ثابت نگهداشته شود، ما را بسوی یک پاسخ فوق میرایی رهنمون می شود. تنها تذکری که لازم است بدهیم دربارهٔ محاسبهٔ α می باشد که برای مدار موازی $1/2RC$ و در مدار سری برابر $R/2L$ می باشد، بنابراین α با افزایش مقاومت سری و با کاهش مقاومت موازی، افزایش می یابد. برای اینکه هرگز

۱- در واقع در حین نوشتن چاپ اول این متن، مؤلفین ابتدا این قسمت ها را برای توصیف مدار RLC سری نوشتند. اما بعد از اینکه تصمیم گرفته شد که ارائه تحلیل مدار RLC موازی (که عملی تر است) بهتر است، بازگشت به نوشته اصلی و جایگزینی آن با متناظرش ساده گردید.

فراموشمان نشود این موضوع را در کادر قرار می‌دهیم:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \alpha = \frac{R}{2L}$$

(موازی) (سری)

بعنوان یک مثال عددی، یک مدار RLC سری در نظر می‌گیریم که در آن $L = 1\text{H}$ ، α برابر 1000 و ω_0 برابر 20025 می‌باشد و در نتیجه پاسخ، زیر میرایی می‌باشد و بنابراین مقدار ω_0 را محاسبه می‌کنیم که برابر 20000 می‌باشد. اکنون بجز دو مقدار ثابت دلخواه که باید محاسبه شوند، پاسخ بطور کامل مشخص شده است:

$$i(t) = e^{-10000t} (B_1 \cos 20000t + B_2 \sin 20000t)$$

با اعمال شرایط اولیه جریان، خواهیم داشت: $B_1 = 0.002$ و در نتیجه داریم:

$$i(t) = e^{-10000t} (0.002 \cos 20000t + B_2 \sin 20000t)$$

شرط اولیه دیگری را که باقیمانده است به مشتق اعمال می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{di}{dt} = e^{-10000t} (-20000 \sin 20000t + 20000 B_2 \cos 20000t - 2 \cos 20000t - 10000 B_2 \sin 20000t)$$

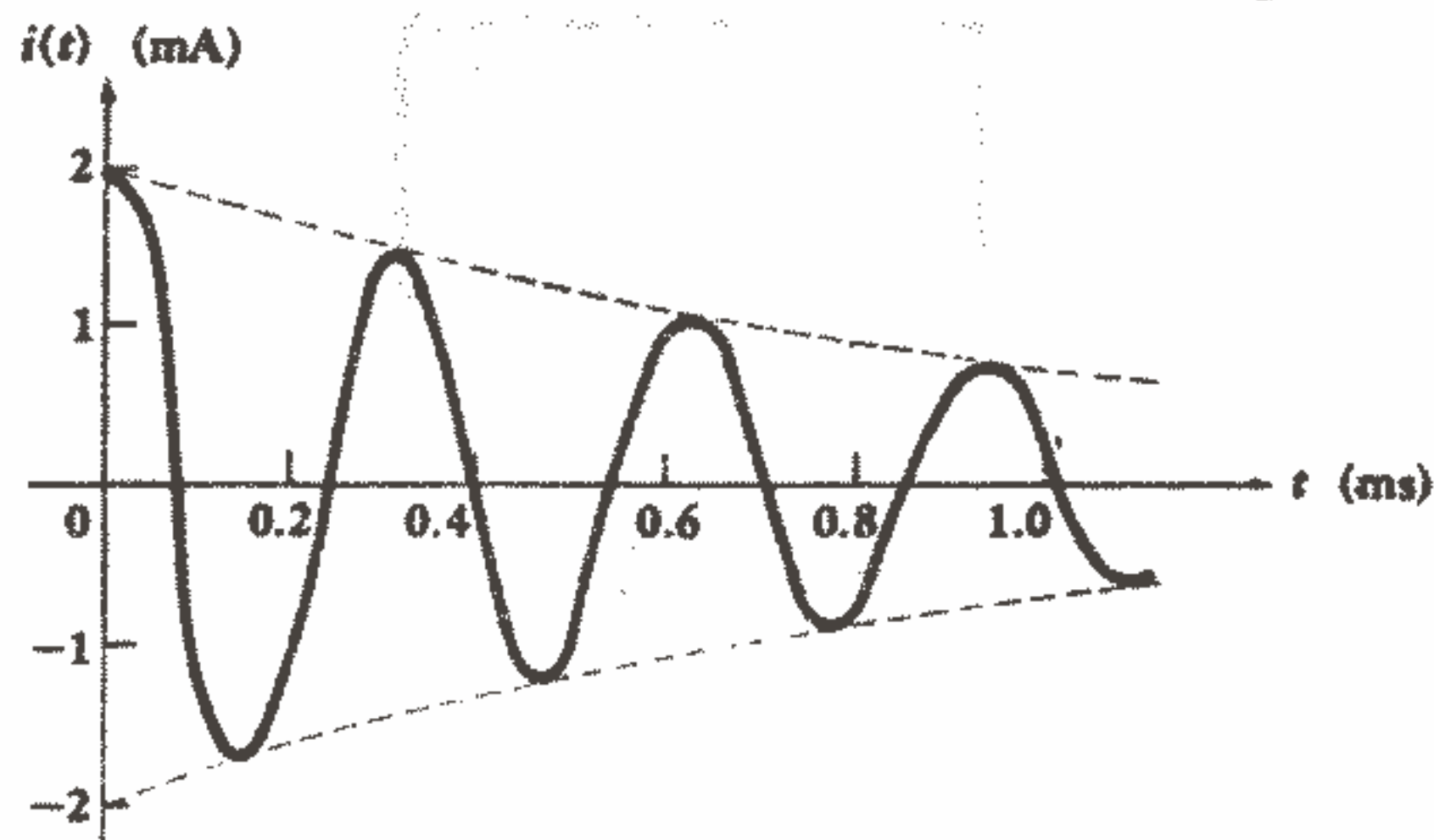
$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 20000B_2 - 2 = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0) - Ri(0)}{L} = \frac{2 - 2000(0.002)}{1} = -2$$

و از آنجا داریم: $B_2 = 0$

بنابراین پاسخ مطلوب چنین است: $i(t) = 2e^{-10000t} \cos 20000t \text{ mA}$

این پاسخ از هر پاسخی که تابحال بررسی کرده‌ایم نوسانی‌تر است و محاسبه مستقیم نقاط کافی برای رسم یک پاسخ واضح، کاری است طاقت‌فرسا. ترسیم خوب را می‌توان ابتدا با رسم دو پوش نمایی $0.002e^{-10000t}$ و $-0.002e^{-10000t}$ که در شکل ۱۱-۷ با خط چین نمایش داده شده است، بدست آورد. سپس محل نقاط ربع سیکل موج سینوسی در $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \dots$ و یا $t = 7854k\text{ms}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) که بوسیله علائم کم‌رنگ بر روی محور زمان در شکل مشخص شده‌اند، بما اجازه می‌دهند که منحنی نوسانی را با سرعت رسم کنیم. زمان فروکش را در اینجا می‌توان بسادگی با استفاده از قسمت فوقانی پوش، تعیین نمود. یعنی،

$(0,002) = 0,01$ و از آنجا بدست می آید، $t_s = 461 \mu s$ که یک مقدار تقریبی است که معمولاً بکار می رود.



شکل ۱۱ - ۷: پاسخ جریان در یک مدار RLC سری زیر میرایی، که در آن $i(0) = 2 \text{ mA}$, $\omega_d = 20000 \text{ S}^{-1}$, $\alpha = 10000 \text{ S}^{-1}$ و $v_c(0) = 2 \text{ V}$ می باشد. ترسیم منحنی به وسیله رسم آن در داخل دو پو (نقطه چین) ساده تر شده است.

تمرین

۶ - ۷ - با مراجعه به شکل ۱۲ - ۷ مقادیر زیر را تعیین کنید:

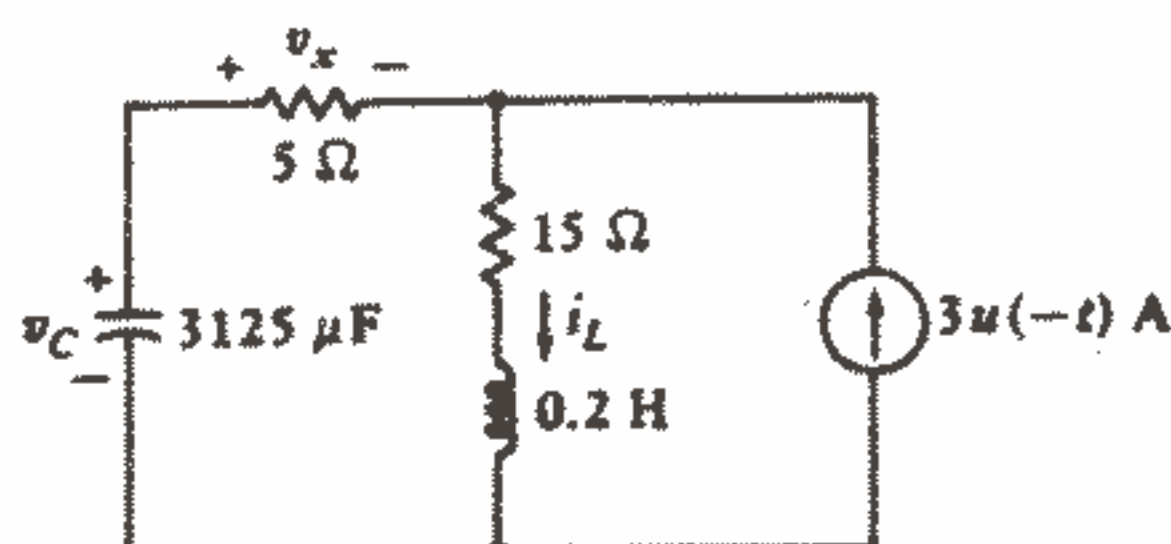
(a) $v_c(0)$, (b) $i_L(0)$, (c) $v_x(0^-)$, (d) $v_x(0^+)$, (e) $v_c(20 \text{ ms})$

جواب: 45 V , 3 A , 0 , 15 V , $29,7 \text{ V}$

۷ - ۷ - مقاومت 15Ω را در شکل ۱۲ - ۷ به $4,6 \Omega$ تبدیل کنید و تمرین ۶ - ۷ را

تکرار کنید.

جواب: $13,8 \text{ V}$, 3 A , 0 , 15 V , $-0,412 \text{ V}$



شکل ۱۲ - ۷: به تمرینات ۶ - ۷ و ۷ - ۷ مراجعه کنید.

۷-۷ - پاسخ کامل مدار RLC

اکنون باید آن دسته از مدارهای RLC را بررسی کنیم که در آنها منابع dc به شبکه سوئیچ می‌شوند و تولید پاسخ‌های اجباری می‌کنند که تا زمان بینهایت محو نمی‌شوند راه حل کلی به همان روشی که در مورد مدارهای RL و RC دنبال شد، بدست می‌آید یعنی: پاسخ اجباری بطور کامل تعیین می‌شود و پاسخ طبیعی بصورت فرم تابعی مناسبی که شامل تعداد مناسبی از ثابت‌های دلخواه است بدست می‌آید و پاسخ کامل بصورت مجموع پاسخ‌های طبیعی و اجباری نوشته می‌شود و سپس شرایط اولیه تعیین می‌شوند و برای پیدا کردن مقادیر ثابت‌ها به پاسخ کامل اعمال می‌شوند. همین مرحله آخر می‌باشد که معمولاً پرزحمت‌ترین کار برای دانشجویان است. بنابراین، با وجود اینکه تعیین شرایط اولیه برای مدارهای شامل منابع dc اساساً فرقی با مدارهای بدون منبع که قبلاً بطور مفصل بررسی کردیم ندارد، این موضوع را در مثال زیر مورد تأکید قرار خواهیم داد.

قسمت اعظم آشننگی و در دسری که در تعیین و اعمال شرایط اولیه بروز می‌کند. بدلیل این علت ساده است که ما برای خود مجموعه قواعد منسجم و قطعی تدوین نکرده‌ایم. در هر تحلیل در برخی نکات وضعیتی بروز می‌کند که در آن تدبیری وجود دارد که کم و بیش منحصر به همان مسئله بخصوص است. این ابتکار و قابلیت انعطاف در تفکر که پس از حل مسائل زیادی و در اثر تمرین حاصل می‌شود، منشاء مشکلات ما می‌باشد.

پاسخ کامل یک دستگاه مرتبه دوم (که بطور دلخواه آنرا یک پاسخ ولتاژ فرض می‌کنیم) شامل یک پاسخ اجباری، که برای تحریک dc مقدار ثابتی است $v_f(t) = V_f$ و یک پاسخ طبیعی $v_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$v(t) = V_f + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

اکنون فرض می‌کنیم که V_f , S_1 , S_2 قبلاً از روی مدار و توابع تحریک داده شده، تعیین شده‌اند و فقط A و B باقی مانده‌اند که باید تعیین شوند. معادله اخیر وابستگی تابعی A, B, v و t را نشان می‌دهد و جایگذاری مقدار معلوم v در لحظه $t = 0^+$ یک معادله بر حسب A و B را بدست می‌دهد که این، قسمت آسان مسئله است. متأسفانه رابطه دیگری بین A و B لازم است که بوسیله مشتق گیری از پاسخ و قرار دادن مقدار معلوم dv/dt در لحظه $t = 0^+$ بدست می‌آید.

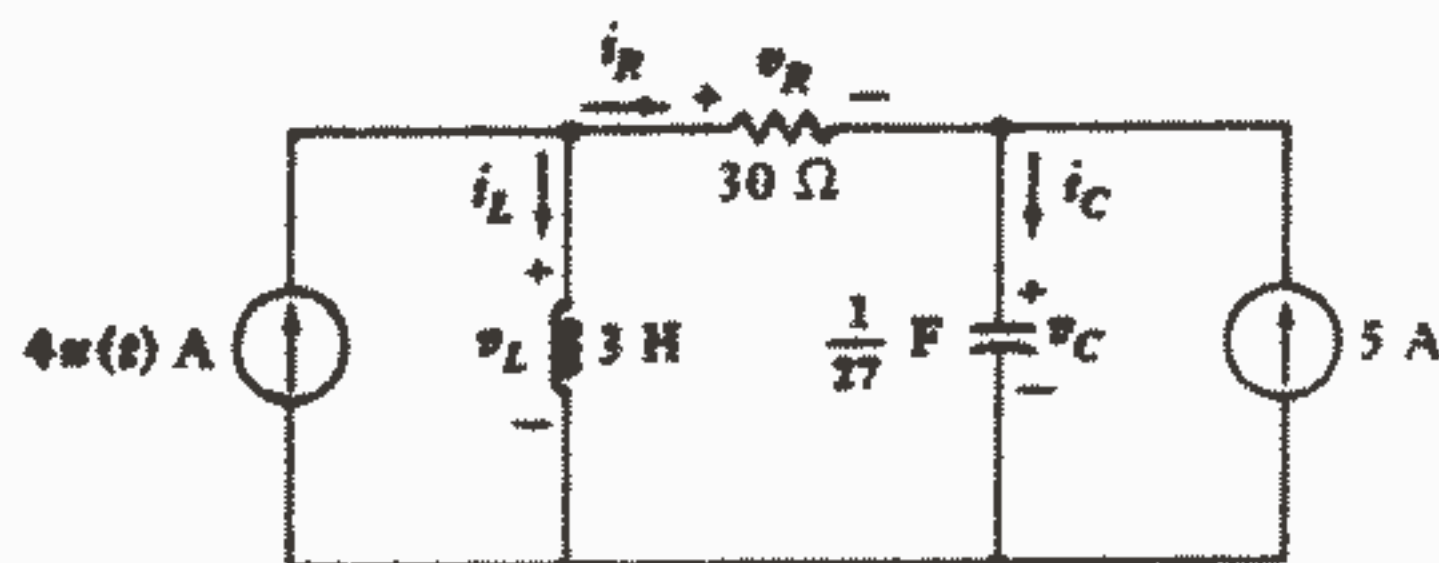
$$dv/dt = 0 + S_1 Ae^{s_1 t} + S_2 Be^{s_2 t}$$

دلیلی وجود ندارد که نتوانیم این روند را ادامه دهیم یعنی می‌توان مشتق دوم را گرفت و

اگر مقدار d^2v/dt^2 در $t = 0^+$ بکار گرفته شود، رابطهٔ سومی هم بین A و B بدست می‌آید. اگرچه این مقدار در یک سیستم مرتبه دوم معمولاً معلوم نیست ولی در واقع ما بیشتر تمایل داریم که از این روش برای پیدا کردن مقدار اولیهٔ مشتق دوم (در صورت نیاز) استفاده کنیم. بنابراین اکنون ما دو معادله برحسب A و B داریم که می‌توان آنها را حل نمود و دو مقدار ثابت را محاسبه نمود.

حال تنها مسئلهٔ باقی‌مانده عبارت است از تعیین مقادیر v و dv/dt در لحظهٔ $t=0^+$ فرض می‌کنیم که v یک ولتاژ خازنی بصورت $v = v_c$ باشد. از آنجاییکه $i_c = C dv_c/dt$ ، ما باید رابطهٔ بین مقدار اولیه dv/dt و مقدار اولیهٔ جریان خازن را تشخیص دهیم. اگر بتوانیم مقداری برای این جریان اولیهٔ خازن بدست آوریم آنگاه بطور اتوماتیک خواهیم توانست مقداری برای dv/dt بدست آوریم. دانشجویان معمولاً می‌توانند براحتی $v(0^+)$ را بدست آورند اما در پیدا کردن مقدار اولیهٔ dv/dt کمی دچار اشتباه و گمراهی می‌شوند. اگر یک جریان سلفی را بعنوان پاسخ خودمان انتخاب کرده بودیم آنگاه مقدار اولیهٔ di_L/dt با مقدار اولیهٔ یک ولتاژ سلفی ارتباط پیدا می‌کرد. متغیرهایی بجز ولتاژهای خازنی و جریان‌های سلفی بوسیله بیان کردن مقادیر اولیهٔ آنها و مقادیر اولیهٔ مشتقاتشان برحسب مقادیر متناظر v_c و i_L تعیین می‌شوند.

ما این روش را بوسیله تحلیل دقیق مدار شکل ۱۳ - ۷ توضیح داده و تمام مقادیر را پیدا خواهیم کرد. برای آسانی کردن تحلیل باز هم از یک ظرفیت خازنی خیلی بزرگ و غیر واقعی استفاده شده است. هدف ما پیدا کردن مقدار هر جریان و ولتاژ در لحظات $t=0^-$ و $t=0^+$ می‌باشد که با معلوم بودن این مقادیر، مشتقات مورد نیاز را بسادگی می‌توان محاسبه نمود.



شکل ۱۳ - ۷: یک مدار RLC که برای توضیح روش به دست

آوردن شرایط اولیه به کار رفته است. پاسخ مطلوب $v_c(t)$ می‌باشد.

در لحظه $t = 0^-$ ، فقط منبع جریان سمت راست فعال است. بعلاوه فرض شده است که مدار برای همیشه در این حالت بوده است و همه ولتاژها و جریان‌ها ثابت فرض شده‌اند. عبارت دیگر یک شرایط پایداری حاصل شده است و پاسخ اجباری حاصله دارای فرم تابع تحریک و انتگرال و مشتقات آن می‌باشد. انتگرال تابع تحریک (یک تابع صعودی خطی از زمان) در این مدار وجود ندارد زیرا آن فقط وقتی که یک جریان ثابت به خازنی اعمال شود و یا ولتاژ ثابتی در دو سر سلف موجود باشد. واقع می‌شود. این حالت بطور طبیعی نباید موجود باشد زیرا ولتاژ خازن و یا جریان سلف در لحظه $t = 0^-$ مقدار بینهایت پیدا می‌کنند. بنابراین حضور یک جریان ثابت در سلف الزام می‌دارد که ولتاژ دو سر آن صفر باشد: $v_L(0^-) = 0$ و یک ولتاژ ثابت در دو سر خازن ایجاب می‌کند که جریان آن صفر باشد: $i_C(0^-) = 0$ سپس قانون جریان کیرشوف را به گره سمت راست اعمال می‌کنیم تا بدست آوریم $i_R(0^-) = -5A$ که از آن نتیجه می‌شود: $v_R(0^-) = -150V$ حال می‌توانیم قانون ولتاژ کیرشوف را در حلقه وسطی بکار برده و $v_C(0^-) = 150V$ را بدست آوریم و در همین حال قانون KCL ما را قادر می‌سازد که جریان سلف را پیدا کنیم: $i_L(0^-) = 5A$ با وجود اینکه مشتقات در لحظه $t = 0^-$ برای ما چندان مورد توجه نیستند، اما واضح است که همگی آنها برابر صفر می‌باشند.

حال اجازه دهید که زمان یک افزایش نموی پیدا کند. در طی فاصله زمانی از $t = 0^-$ تا $t = 0^+$ منبع جریان سمت چپ فعال می‌شود و اغلب مقادیر ولتاژها و جریان‌ها در لحظه $t = 0^-$ بطور ناگهانی تغییر می‌یابند. با وجود این ما باید با متمرکز نمودن توجه خود به کمیت‌هایی که نمی‌توانند تغییر کنند، یعنی جریان سلف و ولتاژ خازن، کار خود را شروع کنیم. هر دو این کمیت‌ها باید در حین کلید زنی ثابت بمانند. بنابراین:

$$i_L(0^+) = 5A, \quad v_C(0^+) = 150V$$

چون اکنون دو جریان گره چپ معلوم شده‌اند، خواهیم داشت:^۱

$$i_R(0^+) = -1A, \quad v_R(0^+) = -30V$$

۱- این جریان تنها کمیت، از چهار کمیت باقی مانده است که می‌توان در یک مرحله آنرا بدست آورد. در مدارهای پیچیده‌تر امکان دارد که هیچیک از مقادیر اولیه باقیمانده را نتوان با یک قدم بدست آورد که در اینصورت باید یا معادلات مداری را نوشت و یا مدار معادل مقاومتی ساده‌تری را رسم نمود.

بنابراین:

$$i_C(0^+) = 4 \text{ A} , \quad v_L(0^+) = 120 \text{ V}$$

حال فقط شش مشتق باقی می‌مانند که باید محاسبه شوند، البته همه آنها برای محاسبه دو مقدار ثابت دلخواه لازم نیستند. روند را باید به وسیله اعمال مستقیم معادلات تعریف کننده عناصر ذخیره کننده انرژی شروع کنیم. برای سلف داریم:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

و به طور اخص داریم:

$$v_L(0^+) = L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+}$$

بنابراین:

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = 40 \text{ A/s}$$

به طور مشابه داریم:

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = 108 \text{ V/s}$$

چهار مشتق دیگر را با در نظر گرفتن اینکه KVL, KCL هر دو به وسیله مشتقات هم اقناع می‌شوند، می‌توان تعیین نمود. مثلاً در گره سمت چپ داریم:

$$4 - i_L - i_R = 0 \quad t > 0 \rightarrow 0 - \frac{di_L}{dt} - \frac{di_R}{dt} = 0 \quad t > 0$$

و بنابراین داریم:

$$\left. \frac{di_R}{dt} \right|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

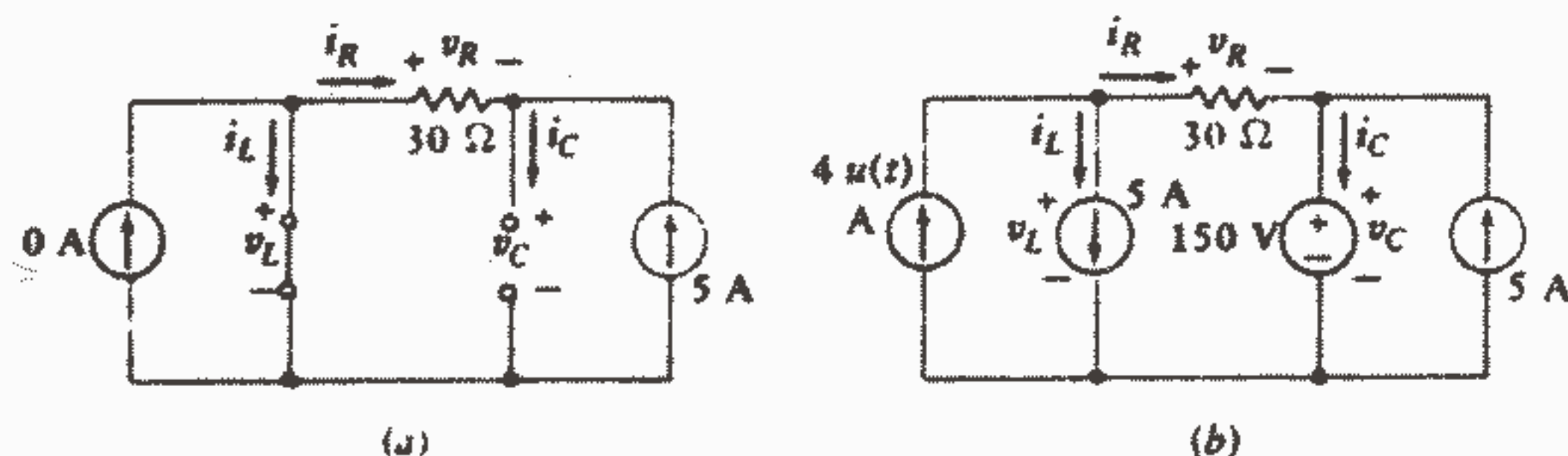
سه مقدار اولیه مربوط به مشتقات دیگر را به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$\left. \frac{dv_R}{dt} \right|_{t=0^+} = -1200 \text{ V/s} \quad \left. \frac{dv_L}{dt} \right|_{t=0^+} = -1092 \text{ V/s} \quad \left. \frac{di_C}{dt} \right|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

حال بیاید روشی را که کمی متفاوت است و به وسیله آن می‌توان همه این جریانها، ولتاژها و مشتقات را در لحظه $t = 0^-$ ، $t = 0^+$ محاسبه نمود، بررسی کنیم. دو مدار معادل مختلف ایجاد خواهیم کرد که یکی برای شرایط حالت پایدار که در $t = 0^-$ برقرار است، صادق است و دیگری برای فاصله زمانی سونیچینگ صادق می‌باشد. بحثی که در پی می‌آید براساس استدلالاتی است که قبلاً انجام داده‌ایم و به همین دلیل کوتاهتر از حالتی است که اگر این بحث را در ابتدا ارائه می‌کردیم، می‌شد.

قبل از انجام عمل سونیچینگ، فقط جریانها و ولتاژهای مستقیم در مدار وجود دارند و بنابراین سلف را می‌توان با یک اتصال کوتاه (معادل dc آن) و خازن را بایک مدار باز جایگزین

نمود. اگر مدار شکل ۷-۱۳ را طبق این روش بنخواهیم دوباره ترسیم کنیم مدار شکل ۷-۱۴a به دست می‌آید. اکنون سه جریان و سه ولتاژ به راحتی به وسیله روشهای تحلیل مدارهای مقاومتی پیدا می‌شوند که مقادیر عددی آنها همانهایی هستند که قبلاً به دست آوردیم.



شکل ۷-۱۴: (a) مدار معادل شکل ۷-۱۳ در لحظه $t = 0^-$
(b) مدار معادل شکل ۷-۱۳ در طی عمل سوئیچینگ.

اکنون مسئله ترسیم مدار معادلی را که در پیدا کردن ولتاژها و جریانها در لحظه $t = 0^+$ ما را یاری دهد، مورد توجه قرار می‌دهیم. هر ولتاژ خازنی و جریان سلفی باید در حین سوئیچینگ ثابت بماند. این شرایط را می‌توان با جایگزین نمودن سلف به وسیله یک منبع جریان و خازن به وسیله یک منبع ولتاژ مورد تأکید قرار داد. هر منبعی پاسخ مورد لزوم را در طی عمل سوئیچینگ ثابت نگه می‌دارد. به این ترتیب مدار معادل شکل ۷-۱۴b حاصل می‌شود و باید توجه داشت که این مدار یک معادل حقیقی در لحظه $t = 0^-$ می‌باشد زیرا دارای همان ولتاژها و جریانهای مدار معادل ساده شکل ۷-۱۴a می‌باشد و نیز مدار معادل حقیقی در لحظه $t = 0^+$ هم می‌باشد زیرا منبع جریان پله‌ای به صورت تابعی از زمان ظاهر می‌شود و نه صرفاً به صورت $0A$ یا $4A$.

جریانها و ولتاژها را در لحظه $t = 0^+$ می‌توان با فرض $u(t) = 4A$ و حل کردن مدار dc حاصله، به دست آورد. راه حل این مسئله مشکل نیست اما حضور تعداد نسبتاً زیاد منابع در مدار، ظاهر نسبتاً غریبی را به مدار داده است. اگر چه اینگونه مسائل در فصل ۳ حل شده‌اند و مطلب جدیدی در مورد آنها وجود ندارد. شش پاسخ حاصله در لحظه $t = 0^+$ باید با آنهایی که به وسیله روش قبلی به دست آمد موافقت داشته باشند.

قبل از خاتمه بحث مربوط به مسئله تعیین شرایط اولیه ضروری، باید خاطر نشان ساخت که حداقل یک روش قدرتمند دیگر برای تعیین شرایط اولیه از قلم افتاده است یعنی ما می‌توانستیم معادلات کلی گره و یا حلقه را برای مدار اصلی بنویسیم و سپس با جایگذاری مقادیر معلوم صفر

برای ولتاژ سلف و جریان خازن در لحظه $t = 0^-$ سایر پاسخها را در لحظه $t = 0^-$ برایمان معلوم می‌کرد و ما را قادر می‌ساخت که بقیه مجهولات را به آسانی پیدا کنیم. سپس تحلیل مشابهی را در لحظه $t = 0^+$ باید انجام داد. این روش یک روش مهمی است و در مدارهای پیچیده‌تر که نتوان آنها را به وسیله روش قدم به قدم تحلیل نمود، استفاده از آن ضروری می‌شود.

حال اجازه دهید تعیین پاسخ $v_c(t)$ را برای مدار اصلی شکل ۱۳-۷ به طور خلاصه تکمیل نماییم. اگر هر دو منبع را غیرفعال کنیم، مدار به صورت یک مدار RLC سری ظاهر می‌شود و به سادگی می‌توان S_1, S_2 را پیدا نمود که به ترتیب برابر $-۱, -۹$ می‌باشند. پاسخ اجباری را می‌توان به طور ذهنی و یا به وسیله ترسیم مدار معادل dc و با اضافه نمودن یک منبع جریان ۴A (که شبیه شکل ۱۴a-۷ می‌شود) پیدا نمود که برابر ۱۵۰V می‌باشد. بنابراین داریم:

$$v_c(t) = 150 + Ae^{-t} + Be^{-9t}$$

و

$$v_c(0^+) = 150 = 150 + A + B$$

و سپس:

$$dv_c/dt = -Ac^{-t} - 9Be^{-9t}$$

و از آنجا داریم:

$$dv_c/dt \Big|_{t=0^+} = 108 = -A - 9B$$

و سرانجام خواهیم داشت:

$$v_c(t) = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t}), B = -13.5, A = 13.5$$

پس به طور خلاصه هر وقت که بخواهیم رفتار گذرای یک مدار RLC ساده سه عنصری را تعیین کنیم، ابتدا باید مشخص کنیم که با یک مدار سری یا موازی مواجهیم، به طوریکه بتوانیم از رابطه صحیحی برای α استفاده کنیم. دو معادله مربوطه برای α عبارتند از:

$$\alpha = 1/2RC \text{ (موازی RLC)}$$

$$\alpha = R/2L \text{ (سری RLC)}$$

تصمیم بعدی ما بعد از مقایسه α با ω_0 (که برای هر دو مدار برابر $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ می‌باشد) گرفته می‌شود. اگر $\alpha > \omega_0$ ، آنگاه مدار فوق میرا می‌باشد و پاسخ طبیعی به صورت $fn(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ می‌باشد که در آن داریم:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

اگر $\alpha = \omega_0$ ، آنگاه مدار در حالت میرایی بحرانی است و داریم: $f_n(t) = e^{-\alpha t} (A_1 t + A_2)$ و بالاخره اگر $\alpha < \omega_0$ ، آنگاه ما با یک پاسخ زیر میرا مواجهیم یعنی:

$$f_n(t) = e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

که در آن داریم:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

تصمیم آخر ما بستگی به منابع مستقل در مدار دارد. اگر هیچیک از آنها بعد از تکمیل عمل سونیچینگ و یا گسستگی در مدار فعال نباشند، آنگاه مدار، بدون منبع می باشد و پاسخ کامل را همان پاسخ طبیعی تشکیل می دهد و اگر منابع مستقل هنوز در مدار حضور داشته باشند آنگاه مدار، تحریک شده می باشد و باید پاسخ اجباری را هم تعیین نمود. در این صورت پاسخ کامل عبارت است از مجموع: $f(t) = f_p(t) + f_n(t)$ که این رابطه را می توان به هر جریان و یا ولتاژی در مدار اعمال نمود.

تمرین

۷-۸. در مدار شکل ۷-۱۵ مقادیر زیر را در لحظات $t = 0^-$ ، 0^+ پیدا کنید:

i_1 (a) ، i_2 (b) ، i_3 (c)

جواب: $0.6A$ ، $0.6A$ ، 0 ، $-0.3A$ ، $-0.6A$ ، $-0.6A$

۷-۹. در مدار شکل ۷-۱۵ مقادیر زیر را در لحظات $t = 0^-$ ، 0^+ پیدا کنید:

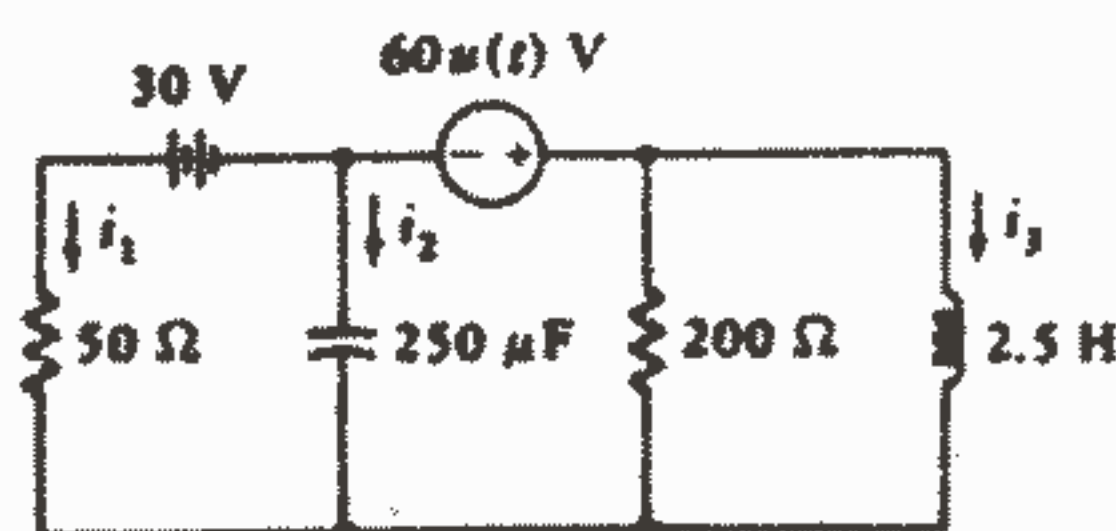
di_1/dt (a) ، di_2/dt (b) ، di_3/dt (c)

جواب: $0A/s$ ، $-24A/s$ ، 0 ، $6A/s$ ، 0 ، $24A/s$

۷-۱۰. در مدار شکل ۷-۱۵ مقادیر زیر را در لحظه $t = 25ms$ پیدا کنید:

i_1 (a) ، i_2 (b) ، i_3 (c)

جواب: $0.1278A$ ، $-0.1820A$ ، $-0.1278A$

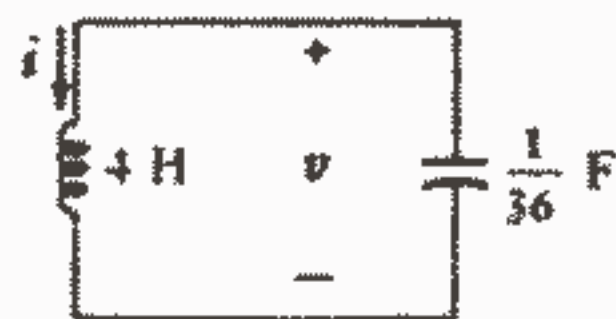


شکل ۷-۱۵: به تمرینات ۷-۸ تا ۷-۱۰ مراجعه کنید.

۸-۷- مدار LC بدون افت

اگر مقدار مقاومت در یک مدار RLC موازی بی نهایت شود و یا در یک مدار RLC سری صفر شود، در این صورت یک حلقه ساده LC خواهیم داشت که در آن یک پاسخ نوسانی می تواند برای همیشه وجود داشته باشد حال بیایید به طور اجمال مثالی از اینگونه مدارها را بررسی کنیم و سپس وسیله دیگری را برای به دست آوردن همین پاسخ اما بدون به کار بردن سلف، مورد بحث قرار خواهیم داد.

مدار شکل ۷-۱۶ را در نظر بگیرید که در آن مقادیر بزرگ $C = 1/36 \text{ F}$ ، $L = 4 \text{ H}$ فرض شده اند تا محاسبات ریاضی ساده باشند. فرض می کنیم که $v(0) = 0$ ، $i(0) = -1/6 \text{ A}$ باشد مدار بدون منبع است و $\alpha = 0$ ، $\omega_0^2 = 9$ می باشد، بنابراین $\omega_d = \omega_0 = 3$ و ولتاژ عبارت است از: $v = A \cos 3t + B \sin 3t$ و چون $v(0) = 0$ ، می بینیم که $A = 0$ سپس داریم: $dv/dt|_{t=0} = 3B = \frac{-i(0)}{C}$ اما $i(0) = -1/6$ و بنابراین در لحظه $t = 0$ داریم: $dv/dt = 6 \text{ V/s}$ و $B = 2 \text{ V}$. بنابراین: $v = 2 \sin 3t \text{ V}$ که یک پاسخ سینوسی غیر میرا می باشد.



شکل ۷-۱۶: این مدار بدون تلفات است و یک پاسخ غیر میرا ارائه می کند و اگر $v(0) = 0$ و $i(0) = -1/6 \text{ A}$ باشد آنگاه: $v = 2 \sin 3t$

حال بیایید ببینیم که چگونه می توانیم این ولتاژ را بدون استفاده از یک مدار LC به دست آوریم. هدف ما نوشتن معادله دیفرانسیلی است که v در آن صدق کند و سپس تشکیل آرایشی از op-amp ها که بتواند پاسخ معادله را ارائه کند. با وجودیکه بر روی یک مثال بخصوص کار می کنیم اما این تکنیک یک روش کلی است که می تواند برای حل هر معادله دیفرانسیل خطی همگن مورد استفاده قرار گیرد.

در مدار LC شکل ۷-۱۶، v را به عنوان متغیر انتخاب می کنیم و مجموع جریانهای رو

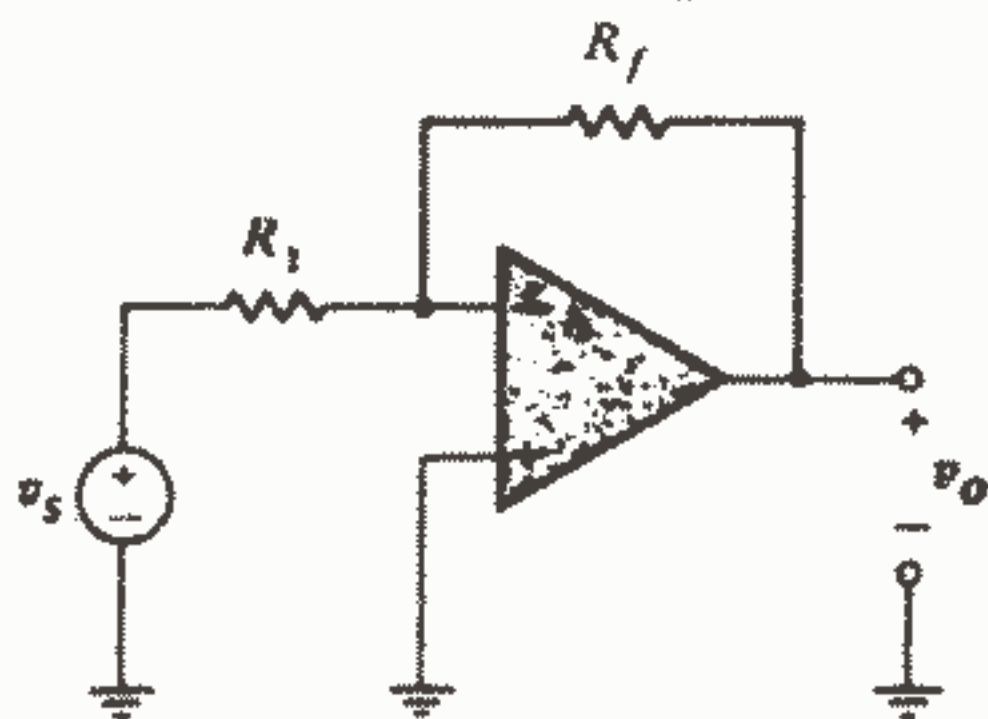
به پایین سلف و خازن را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$1/4 \int_0^t v dt - 1/6 + 1/36 dv/dt = 0$$

اگر یک بار از طرفین معادله فوق مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$1/4 v + 1/36 d^2v/dt^2 = 0 \quad \text{یا} \quad d^2v/dt^2 = -9v$$

برای حل این معادله دو بار از یک تقویت کننده عملیاتی به عنوان انتگراتور استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که بالاترین مرتبه مشتق که در معادله دیفرانسیل موجود است (d^2v/dt^2 در اینجا) در نقطه‌ای از آرایش op-amp های ما (مثلاً در نقطه دلخواهی مانند A) قابل دسترس باشد. اکنون از انتگراتوری با $RC = 1$ ، که در قسمت ۴-۴ مورد بحث قرار گرفت، استفاده می‌کنیم. ورودی عبارت از d^2v/dt^2 و خروجی عبارت از $-dv/dt$ می‌باشد که تغییر علامتی را در انتگراتور فرض کرده‌ایم. مقدار اولیه dv/dt برابر $6V/s$ می‌باشد (به طوریکه در تحلیل اولیه مان در مدار نشان دادیم) و بنابراین مقدار اولیه $-6V$ را باید در انتگراتور ایجاد نمود. اکنون قرنیۀ مشتق اول، ورودی انتگراتور دوم را تشکیل می‌دهد. بنابراین خروجی آن عبارت از $v(t)$ می‌باشد و مقدار اولیه عبارت است از $v(0) = 0$. حال تنها کاری که باقیمانده است ضرب کردن v در -9 برای به دست آوردن مشتق دومی است که در نقطه A فرض کردیم. این امر یک تقویت با ضریب ۹ همراه با یک تغییر علامت می‌باشد و می‌توان آن را به سادگی با استفاده از op-amp به عنوان یک تقویت کننده معکوس کننده به دست آورد. شکل ۷-۱۷ مدار یک تقویت کننده معکوس کننده را نشان می‌دهد.

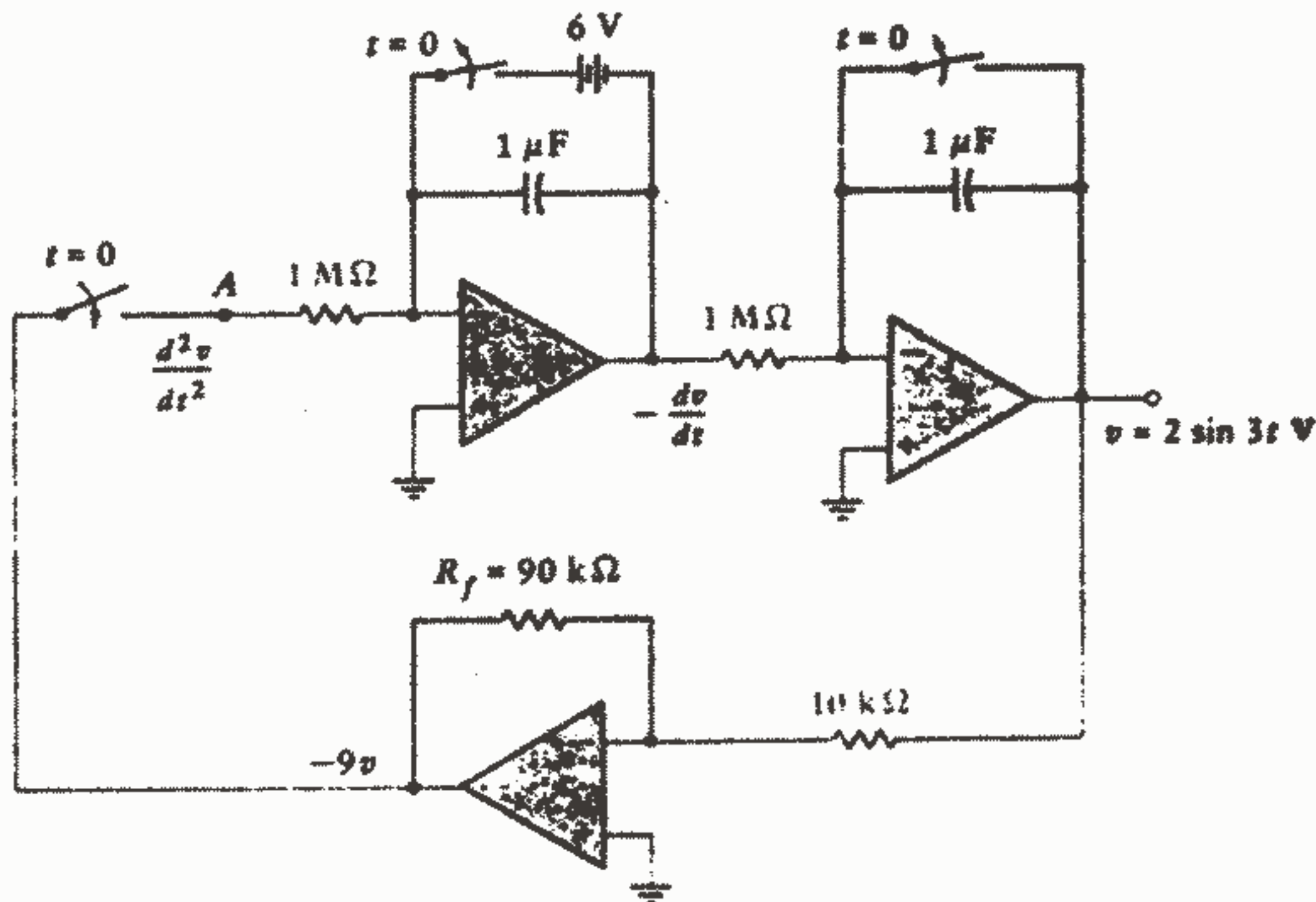


شکل ۷-۱۷: تقویت کننده عملیاتی معکوس کننده که بهره $\frac{v_o}{v_s} = \frac{-R_f}{R_1}$ را با یک op-amp ایده‌آل ارائه می‌کند.

در یک op-amp ایده آل هم جریان ورودی و هم ولتاژ ورودی صفر می باشند. بنابراین جریانی که از مقاومت R_1 به سمت شرق عبور می کند برابر v_g/R_1 می باشد در حالیکه جریان عبوری از R_f به سمت غرب برابر v_o/R_f می باشد. و چون مجموع آنها صفر است، خواهیم داشت: $v_o/v_g = -R_f/R_1$ بنابراین مثلاً با قرار دادن $R_1 = 10\text{ K}\Omega$ ، $R_f = 90\text{ K}\Omega$ می توانیم بهره ۹- را به دست آوریم.

اگر در هر یک از انتگرالورها فرض کنیم R برابر $1\text{ M}\Omega$ ، C برابر $1\text{ }\mu\text{F}$ باشد آنگاه در هر حالت داریم: $v_o = -\int_0^t v_g dt + v_o(0)$.

حال خروجی تقویت کننده معکوس کننده ورودی مفروض را در نقطه A تشکیل می دهد که ما را به آرایش op-amp مطابق شکل ۷-۱۸ رهنمون می شود.



شکل ۷-۱۸: دو انتگرالور و یک تقویت کننده معکوس کننده طوری

بسته شده اند که پاسخ معادله دیفرانسیل $d^2v/dt^2 = -9V$

را ارائه می کنند.

اگر کلید سمت چپ در لحظه $t = 0$ بسته شود در حالیکه دو کلید شرایط اولیه به طور هم زمان باز باشند، خروجی انتگرالور دوم عبارت از موج سینوسی غیرمیرا خواهد بود یعنی:

$$v = 2 \sin 3t \text{ V}$$

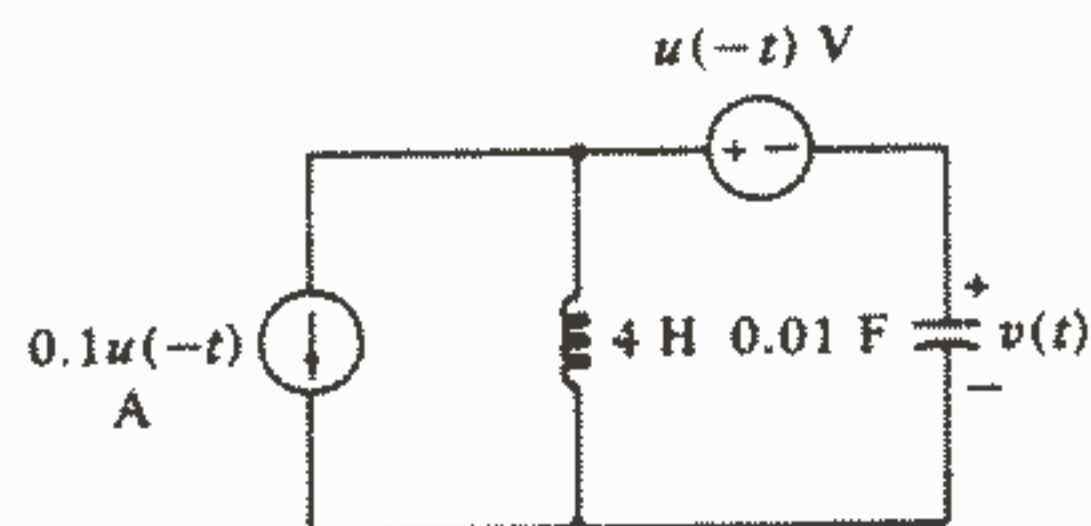
توجه داشته باشید که هم مدار LC شکل ۱۶-۷ و هم مدار op-amp شکل ۱۸-۷ دارای

خروجی یکسانی می‌باشند اما مدار op-amp شامل سلف نمی‌باشد. این مدار بطور ساده مانند حالتی که شامل سلف می‌باشد عمل می‌کند و این امر یک مزیت اقتصادی و عملی مهمی در طراحی مدار باشد.

تمرین

۱۱-۷. مقادیر جدید را برای دو ولتاژ اولیه و R_f در مدار شکل ۱۸-۷ پیدا کنید، اگر خروجی آن بیانگر ولتاژ $v(t)$ در مدار شکل ۱۹-۷ در زمان $t > 0$ باشد و $R_1 = 10k\Omega$ باشد.

جواب: $-10V$ ، $-1V$ ، $250K\Omega$



شکل ۱۹-۷: به تمرین ۱۱-۷ مراجعه کنید.

مسائل

۱- مقادیر عناصر را در یک مدار RLC موازی طوری انتخاب کنید که: $S_1 = -200s^{-1}$ و $S_2 = -500s^{-1}$ باشد و جریان اولیه مقاومت (بر حسب mA) از نظر مقدار عددی برابر با ولتاژ اولیه خازن (بر حسب V) باشد.

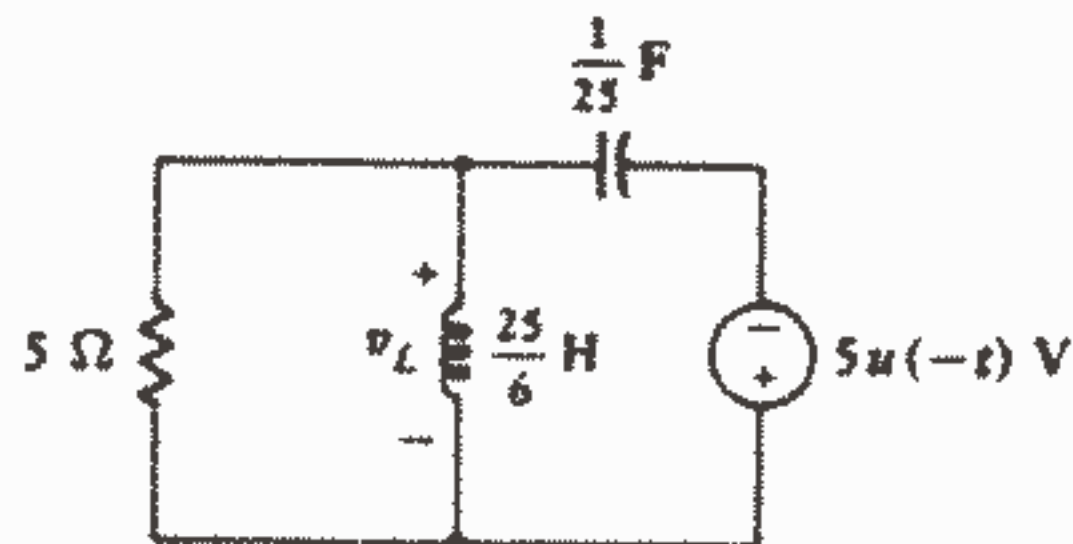
۲- جریان سلف در مدار شکل ۲۰-۷ برابر با $i = 2e^{-5t} - 5e^{-10t} A$ می‌باشد. اگر $L = 0.2H$ باشد آنگاه مقادیر زیر را پیدا کنید:

(a) $v(t)$ ، (b) $i_R(t)$ ، (c) $i_C(t)$



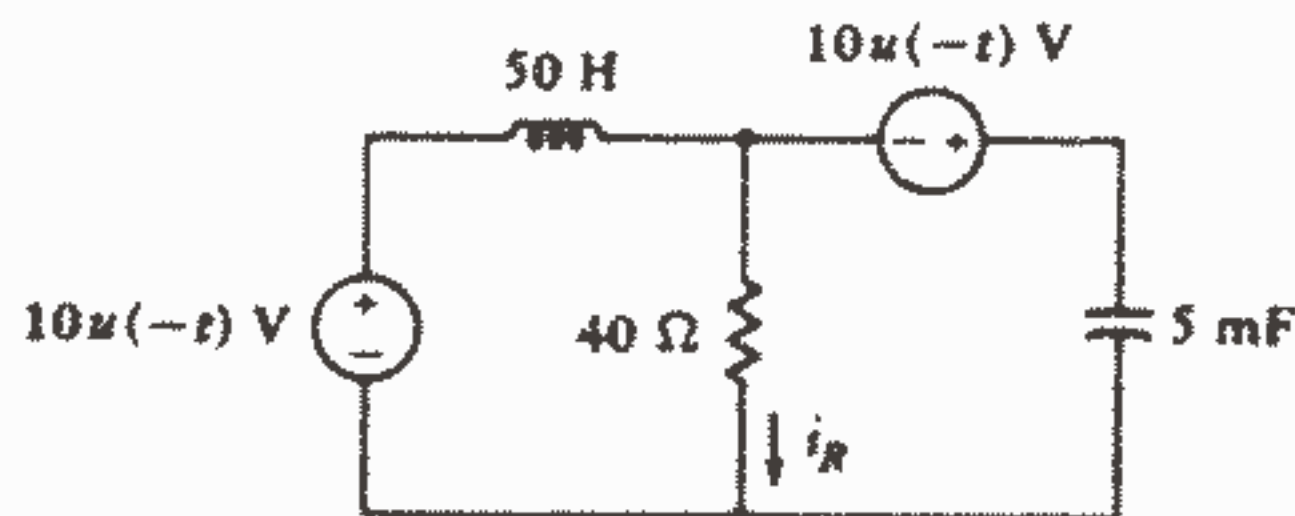
شکل ۲۰-۷: به مسائل ۲، ۳، ۸، ۱۰ و ۱۱ مراجعه کنید.

- ۳- مقادیر عناصر در شکل ۷-۲۰ عبارتند از $C = 50 \mu\text{F}$, $L = 1/32 \text{H}$, $R = 10 \Omega$ اگر $v(0) = 40 \text{V}$, $i(0) = -2 \text{A}$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید.
 ۴- $v_L(t)$ را در مدار شکل ۷-۲۱ پیدا کنید.



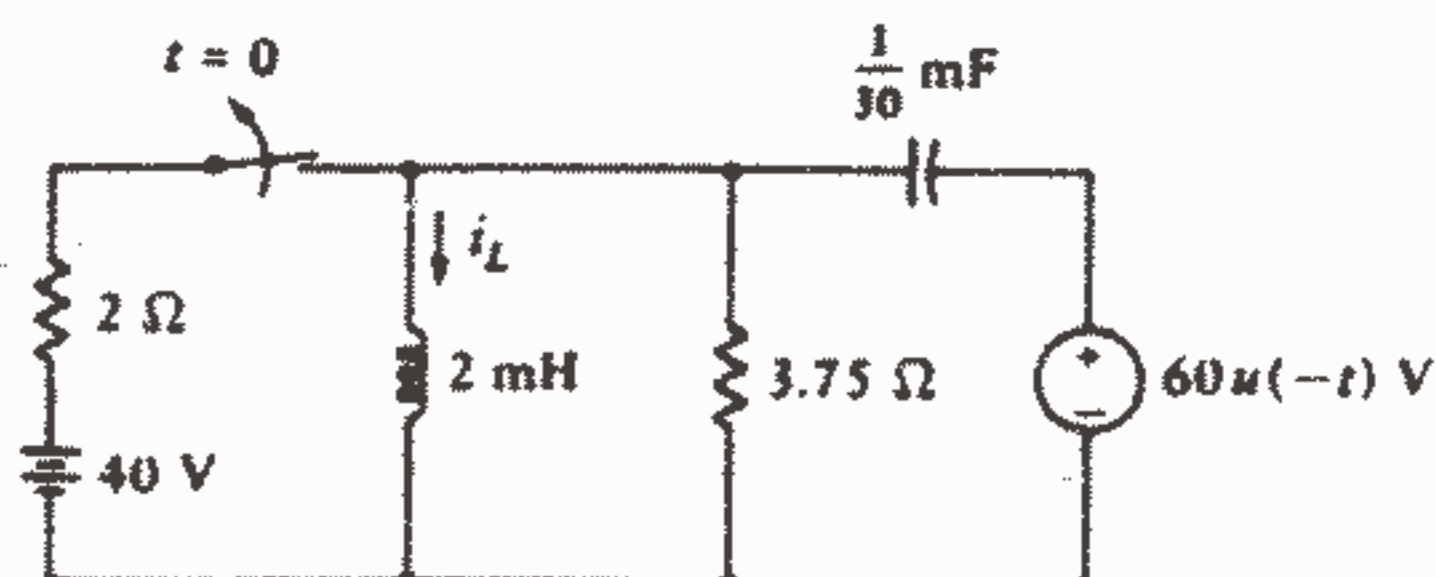
شکل ۷-۲۱: به مسئله ۴ مراجعه کنید.

- ۵- در مدار RLC شکل ۷-۲۲: (a) $i_R(t)$ را پیدا کنید. (b) زمانی را که در آن $i_R = 250 \text{mA}$ پیدا کنید.



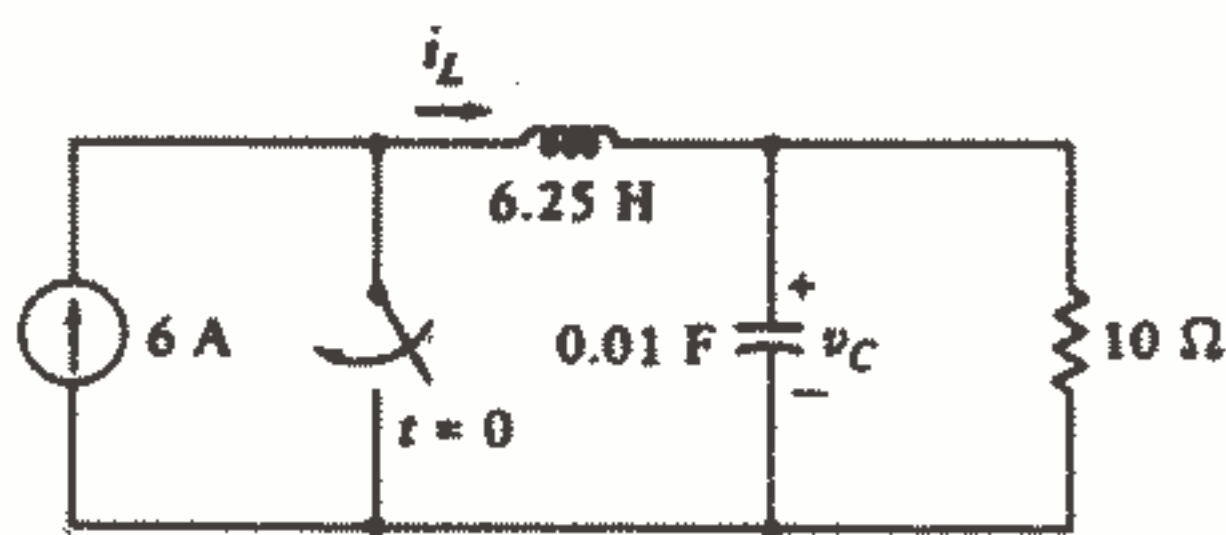
شکل ۷-۲۲: به مسئله ۵ مراجعه کنید.

- ۶- در شکل ۷-۲۳ کلید برای مدت طولانی بسته بوده است: (a) $i_L(t)$ را به ازای همه زمانها پیدا کنید. (b) $i_L(t)$ را در فاصله زمانی $1 \text{ms} < t < 1$ پیدا کنید.



شکل ۷-۲۳: به مسئله ۶ مراجعه کنید.

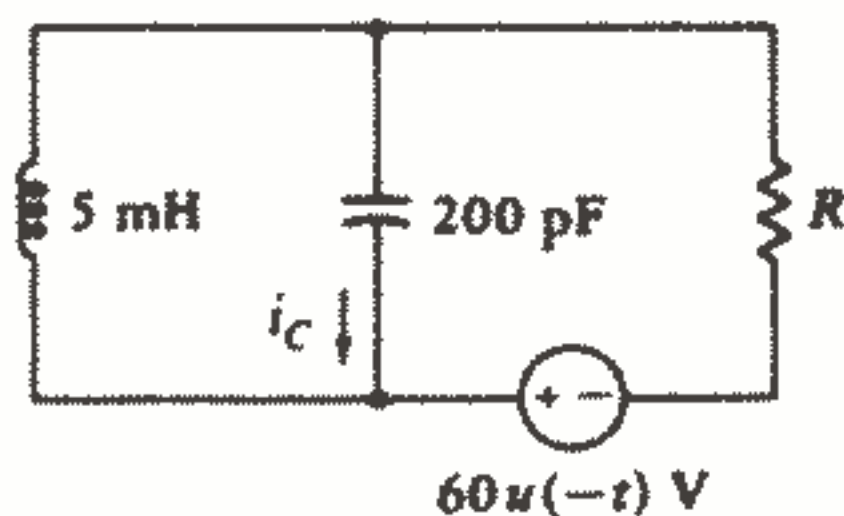
۷ - بعد از مدت یک ساعت که کلید شکل ۷-۲۴ باز بوده است در لحظه $t = 0$ بسته می شود. (a) مقدار $v_C(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید. (b) $i_L(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید. (c) زمان فروکش i_L را برای v_C پیدا کنید. (d) i_L را برای $t > 0$ پیدا کنید.



شکل ۷-۲۴: به مسئله ۷ مراجعه کنید.

۸ - فرض کنید که مدار شکل ۷-۲۰ میرای بحرانی با مقادیر $i(0) = 4A$ ، $v(0) = 100V$ باشد. آنگاه اگر $R = 10\Omega$ ، $\alpha = 100 \text{ Np/s}$ باشد: (a) C, L را پیدا کنید. (b) $v(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید و پاسخ را به صورت تابعی از زمان رسم کنید. (c) در چه زمانی $v = 0$ می باشد؟ (d) زمان فروکش i_L را پیدا کنید.

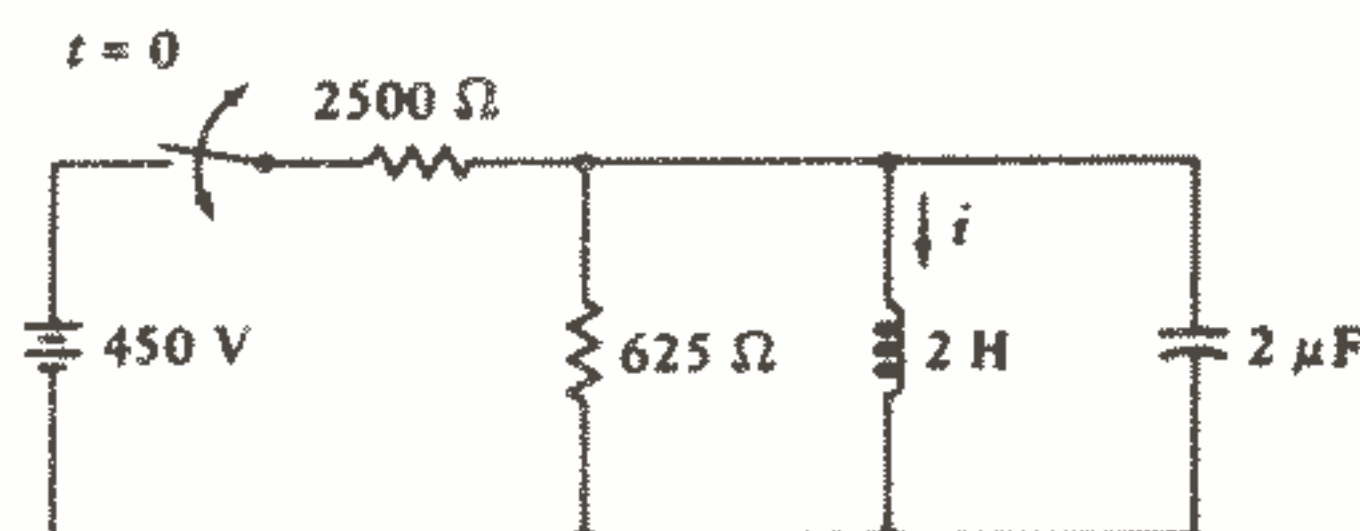
۹ - (a) در مدار شکل ۷-۲۵ چه مقداری از R میرایی بحرانی ایجاد می کند؟ (b) با استفاده از این مقدار R ، مقدار $i_C(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید. (c) i_L را برای $t > 0$ پیدا کنید؟



شکل ۷-۲۵: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

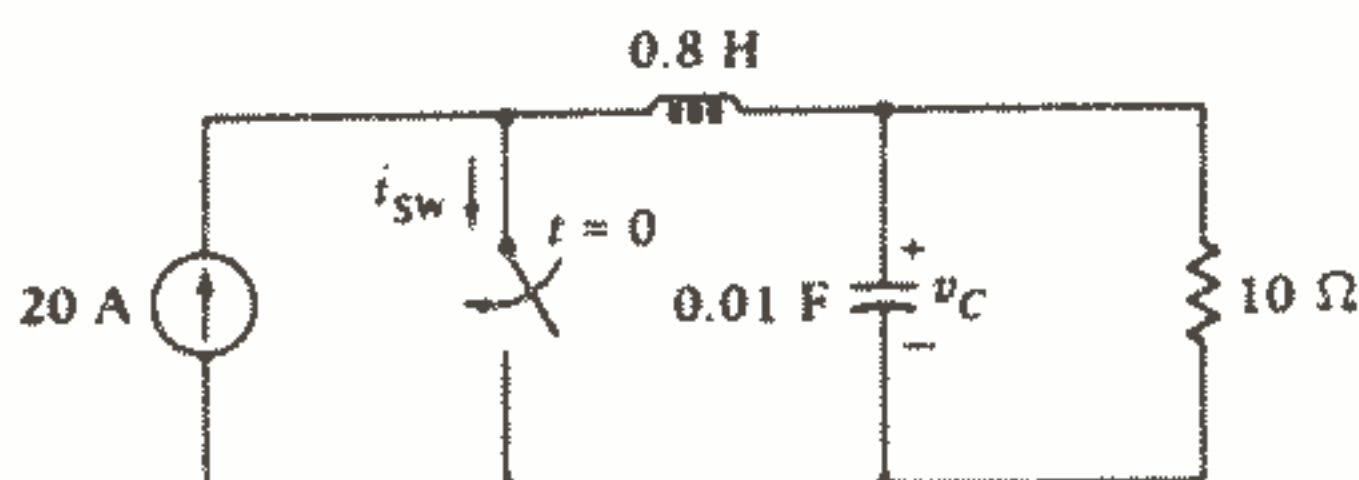
۱۰ - فرض کنید که در مدار شکل ۷-۲۰ داشته باشیم: $v(0) = 0$ ، $i(0) = 5A$ اگر $L = 0.1H$ ، $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$ و مدار در حالت میرایی بحرانی باشد: (a) مقدار C, R را پیدا کنید. (b) $v(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید. (c) $|v|_{\max}$ و زمان t_m را که در آن ماکزیمم مذکور حاصل می شود، پیدا کنید. (d) زمان فروکش i_L را پیدا کنید.

- ۱۱ - در مدار شکل ۷-۲۰ فرض کنید که $i = 10e^{-t} \sin 2\pi t$ اگر $R = 200 \Omega$ آنگاه مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) $v(t)$, (b) $i_c(t)$, (c) $i_R(t)$.
- ۱۲ - در شکل ۷-۲۶ کلید برای مدت طولانی بسته بوده است. پس از اینکه در لحظه $t = 0$ کلید باز شود، $i(t)$ را پیدا کنید.



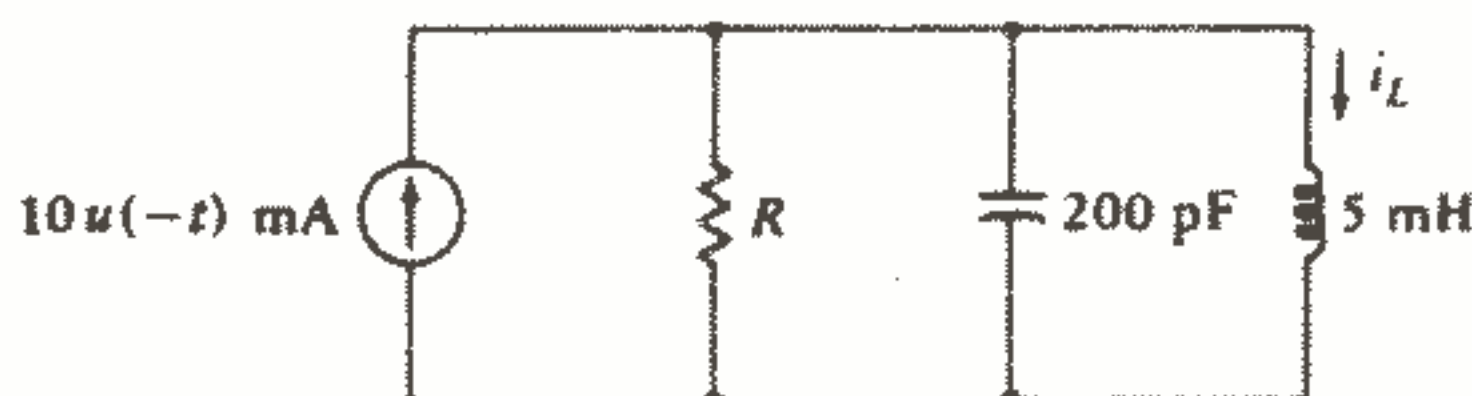
شکل ۷-۲۶: به مسائل ۱۲ و ۲۷ مراجعه کنید.

- ۱۳ - در مدار شکل ۷-۲۷ کلید قبل از اینکه در لحظه $t = 0$ بسته شود، برای مدت طولانی باز بوده است. (a) $v_c(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید. (b) i_{sw} را به ازای $t > 0$ پیدا کنید.



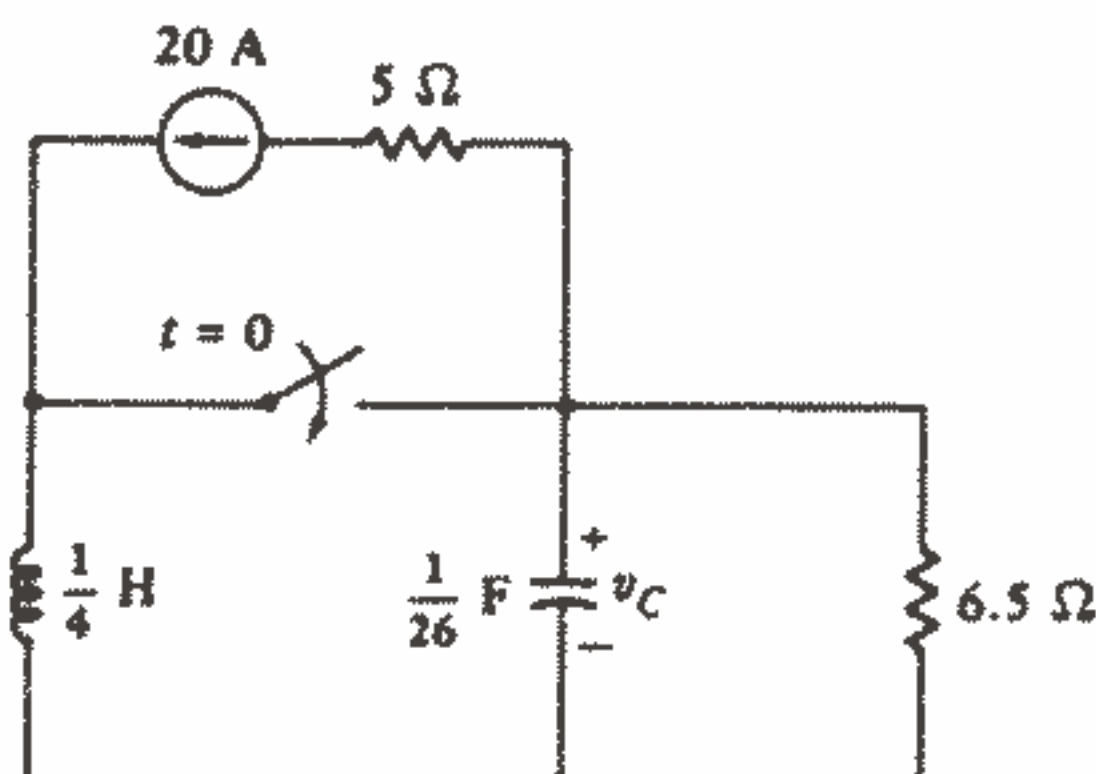
شکل ۷-۲۷: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

- ۱۴ - (a) در مدار شکل ۷-۲۸ مقدار R را طوری انتخاب کنید که داشته باشیم: $\omega_d = 800 \text{ krad/s}$ و سپس مقدار i_L را برای $t > 0$ پیدا کنید. (b) i_L را نسبت به t در فاصله $-1 \leq t \leq 7 \mu\text{s}$ رسم کنید.



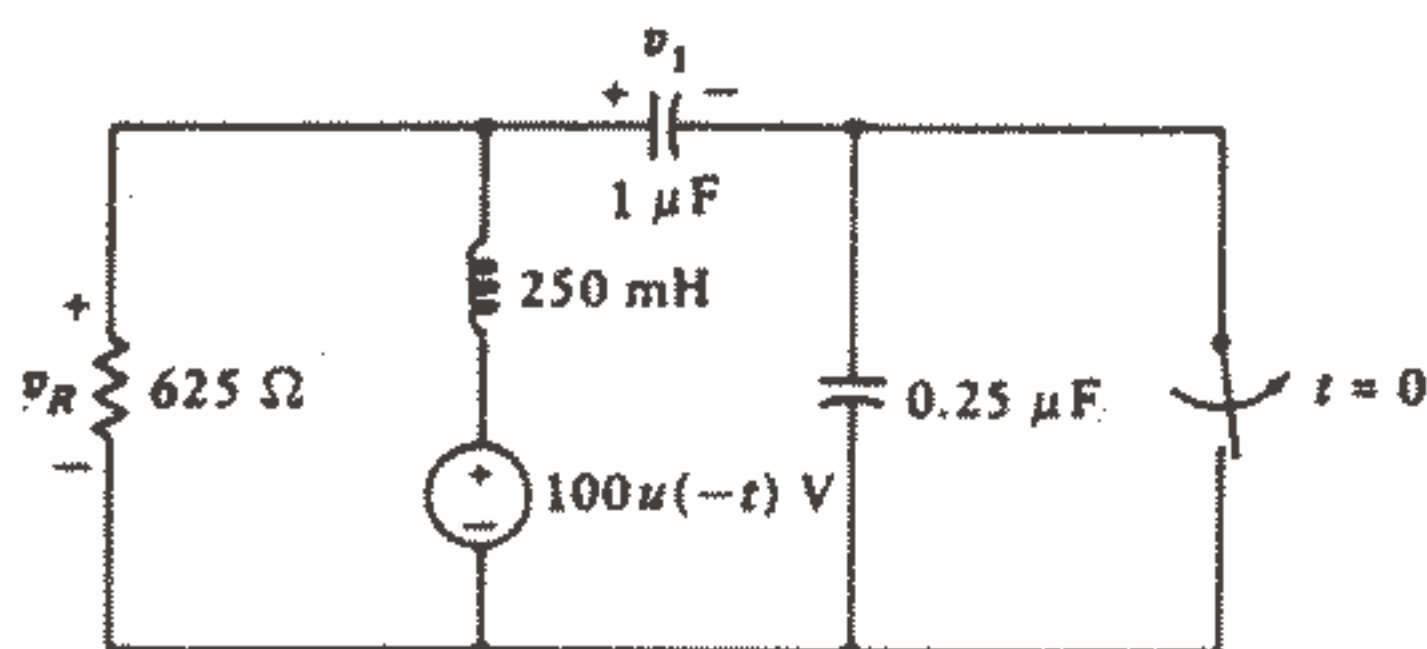
شکل ۷-۲۸: به مسئله ۱۴ مراجعه کنید.

۱۵ - پس از اینکه برای مدت طولانی کلید در مدار شکل ۷-۲۹ باز بوده است، در لحظه $t = 0$ بسته می‌شود. (a) $v_C(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید. (b) مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم $v_C(t)$ را پیدا کنید.



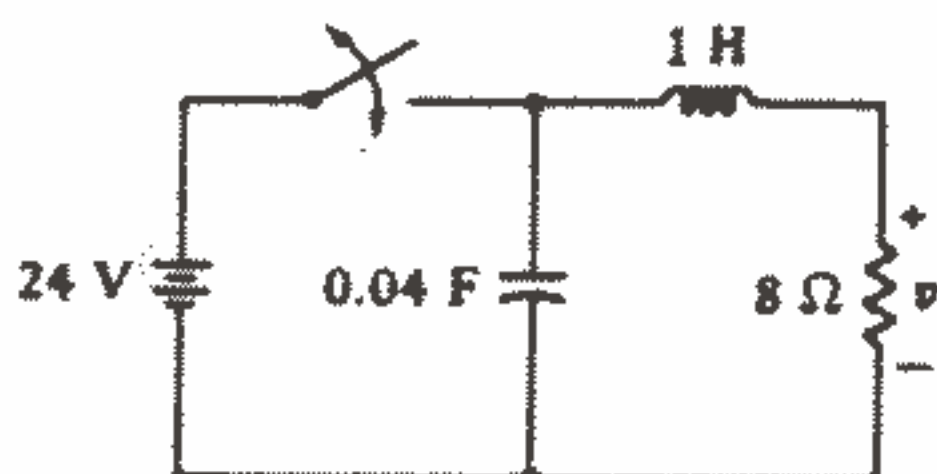
شکل ۷-۲۹: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

۱۶ - کلید در مدار شکل ۷-۳۰ برای مدت طولانی بسته بوده است و در لحظه $t = 0$ درست در لحظه‌ای که منبع خاموش می‌شود، باز می‌شود. (a) $v_R(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید. (b) $v_1(t)$ را برای $t > 0$ پیدا کنید.



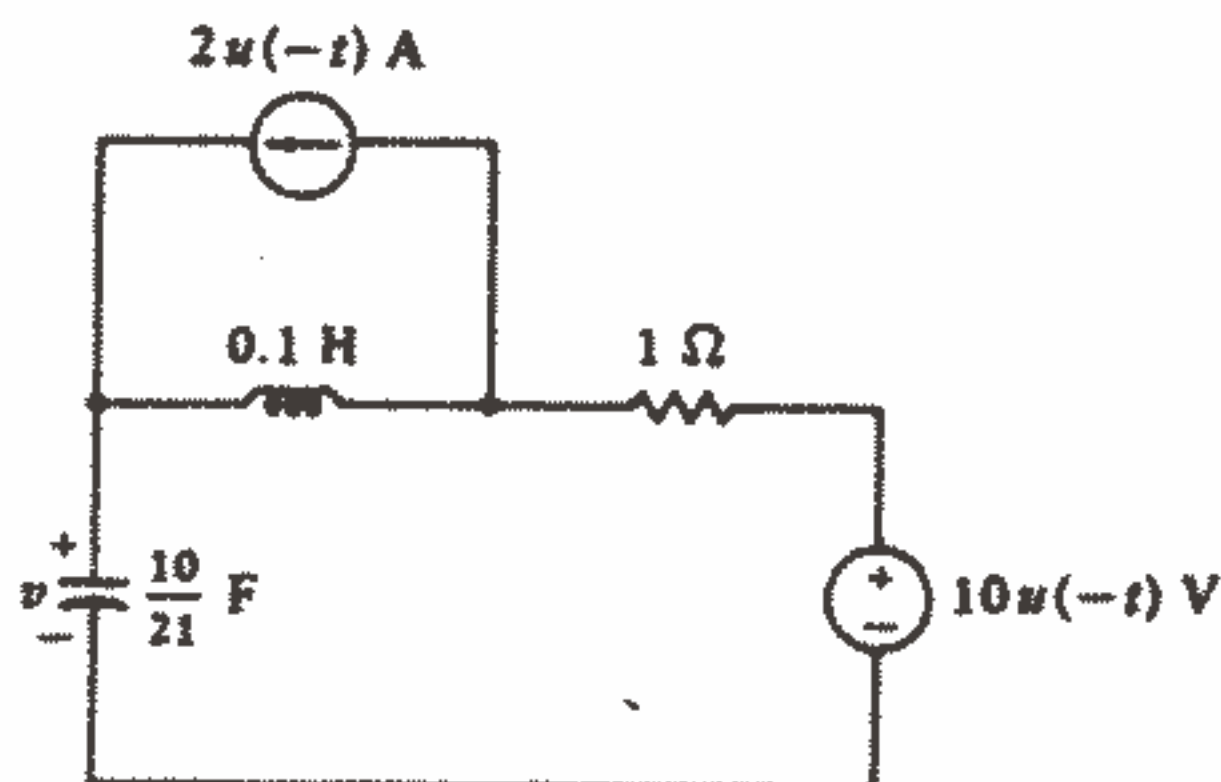
شکل ۷-۳۰: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

۱۷ - اگر کلید در مدار شکل ۷-۳۱ در لحظه $t = -10^{-3} \text{ s}$ بسته بوده و در لحظه $t = 0$ باز شود مقدار $v(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید.



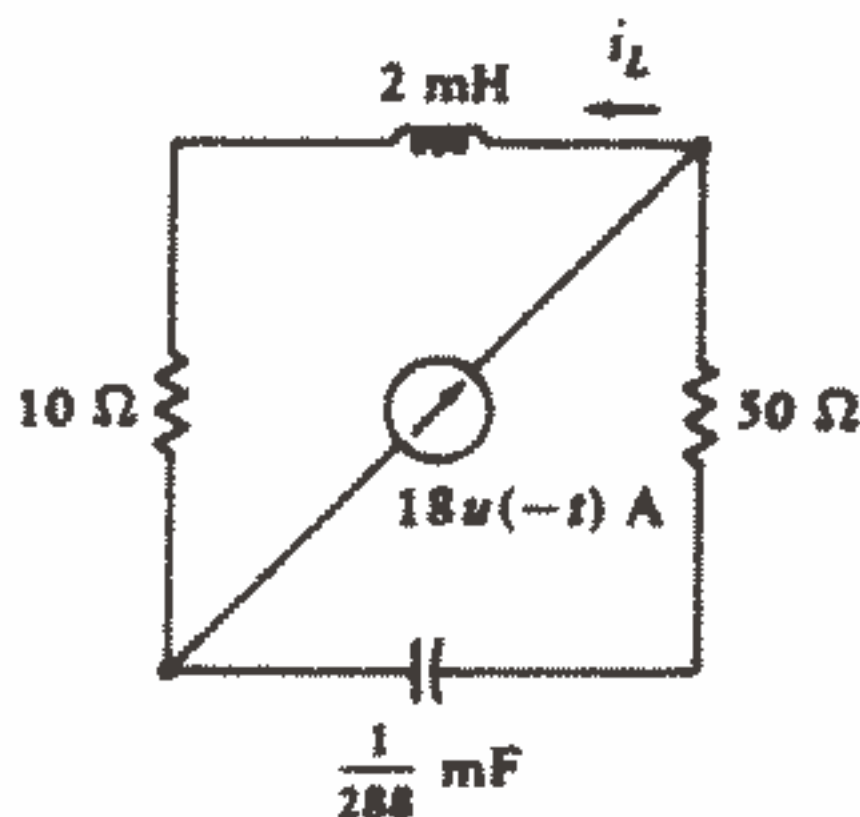
شکل ۷-۳۱: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

- ۱۸- (a) مقدار $v(t)$ را به ازای $t > 0$ در شکل ۷-۳۲ پیدا کنید. (b) مقدار t_s برای $v(t)$ چیست؟



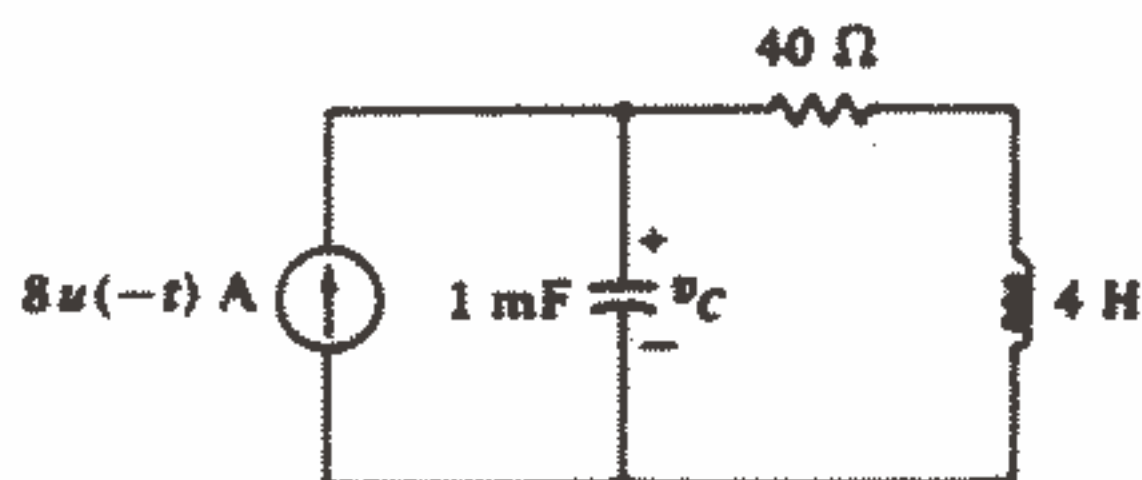
شکل ۷-۳۲: به مسئله ۱۸ مراجعه کنید.

- ۱۹- (a) $i_L(t)$ را در مدار شکل ۷-۳۳ پیدا کنید. (b) مقدار d^2i_L/dt^2 در لحظه $t = 0^+$ چقدر است؟



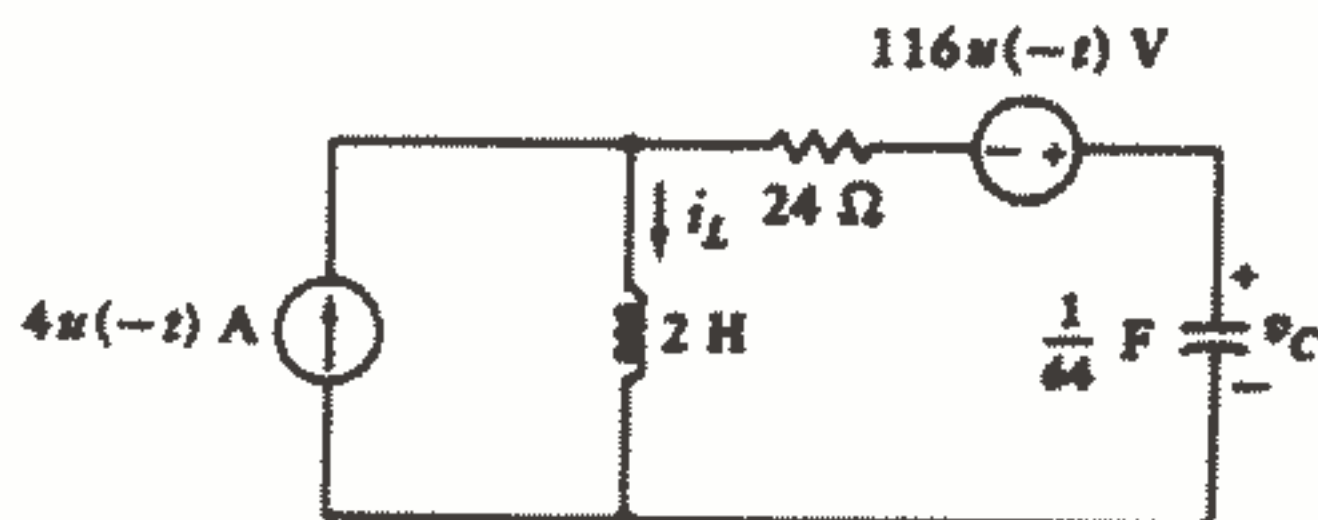
شکل ۷-۳۳: به مسئله ۱۹ مراجعه کنید.

- ۲۰- $v_c(t)$ را در مدار شکل ۷-۳۴ پیدا کنید و پاسخ را رسم کنید.



شکل ۷-۳۴: به مسائل ۲۰ و ۲۵ مراجعه کنید.

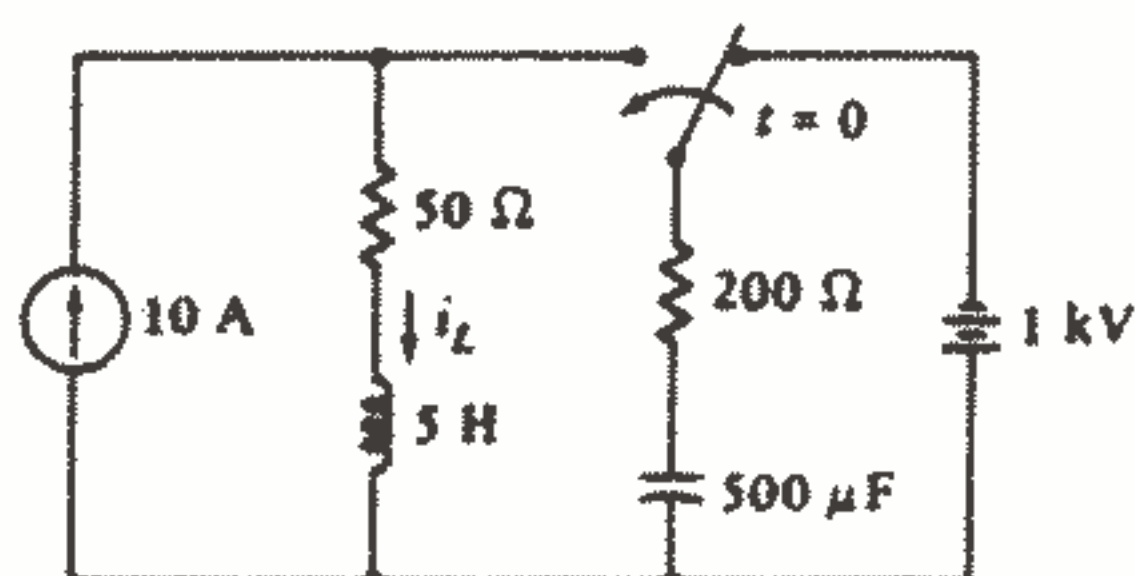
۲۱- در مدار شکل ۷-۳۵: (a) $i_L(t)$ را به ازای جميع مقادير t پيدا كنيد. (b) $v_C(t)$ را به ازای $t > 0$ پيدا كنيد.



شکل ۷-۳۵: به مسائل ۲۱ و ۲۴ مراجعه كنيد.

۲۲- در يك مدار RLC سري كه در آن $\omega_d = 25 \text{ rad/s}$ ، $v_C(0^+) = 0$ ، $\alpha = 1 \text{ Np/s}$ و $v_C'(0^+) = 100 \text{ V/s}$ باشد، v_C را نسبت به t در فاصله $0 < t < 3 \text{ s}$ رسم كنيد.

۲۳- (a) در مدار شکل ۷-۳۶، $i_L(t)$ را به ازای $t > 0$ پيدا كنيد و (b) مقدار ماكزيمم و مي نيم آن را پيدا كنيد.

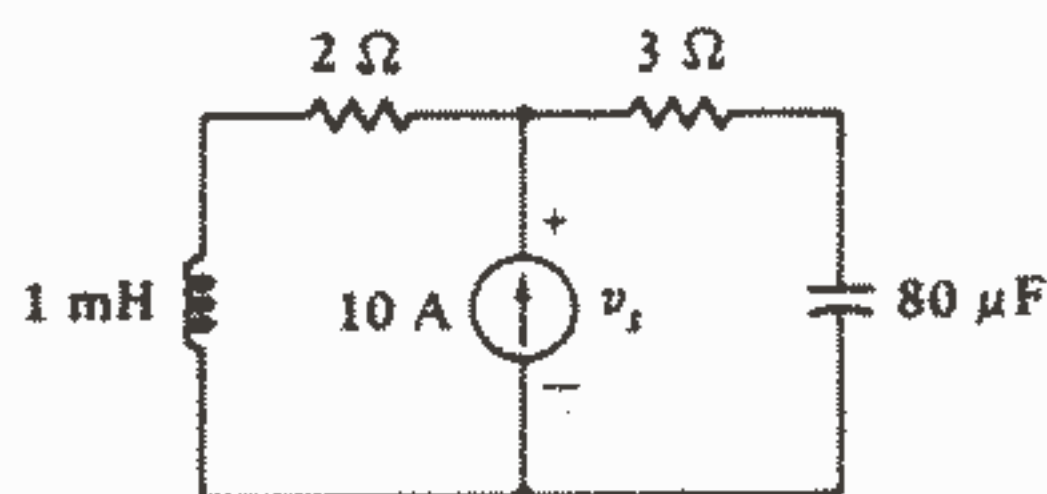


شکل ۷-۳۶: به مسئله ۲۳ مراجعه كنيد.

۲۴- در شکل ۷-۳۵، $u(-t) \text{ A}$ را به $u(t) \text{ A}$ تبديل كنيد و مسئله ۲۱ را يك بار ديگر حل كنيد.

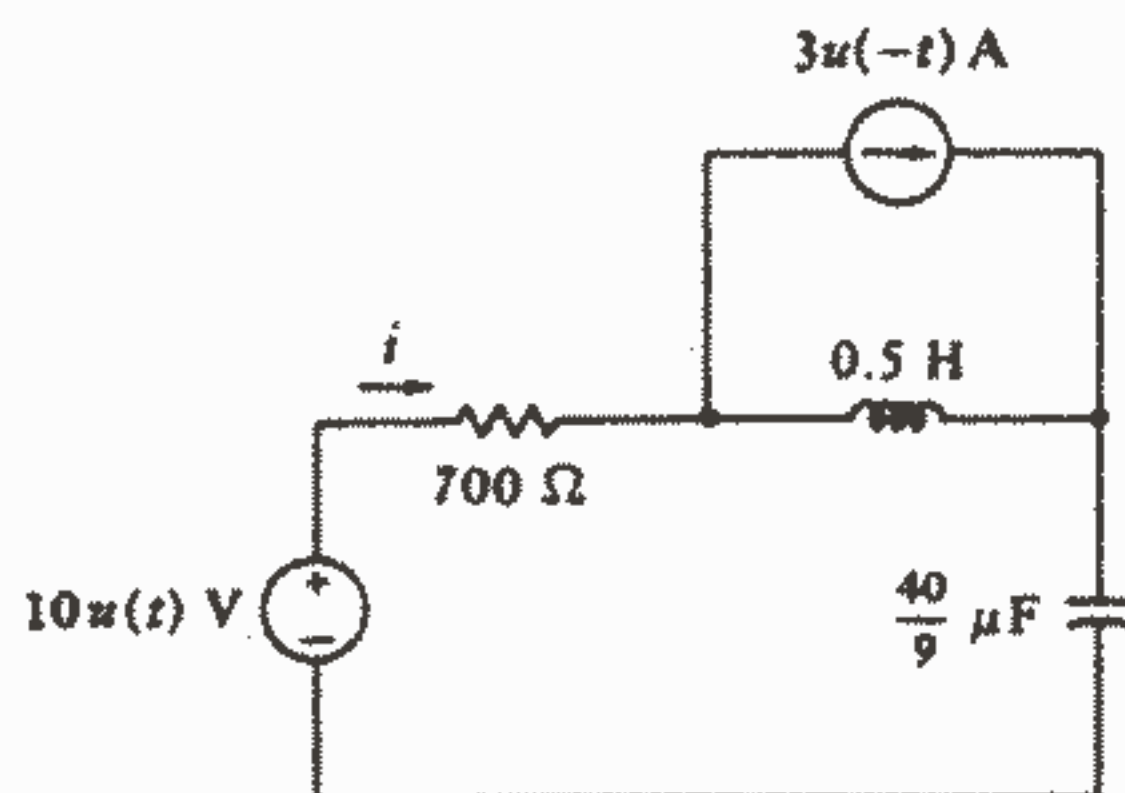
۲۵- منبع در مدار شکل ۷-۳۴ از $8u(-t)$ به $u(t) + 4 \text{ A}$ تغيير مي يابد. (a) $v_C(t)$ را به ازای $t > 0$ پيدا كنيد. (b) $V_{C_{\max}}$ را پيدا كنيد.

۲۶- در لحظه $t = 0$ شدت جريان منبع در شکل ۷-۳۷ به طور ناگهانی از ۱۰ به ۲۰ A افزايش مي يابد. مقدار v_p را به ازای $t > 0$ پيدا كنيد.



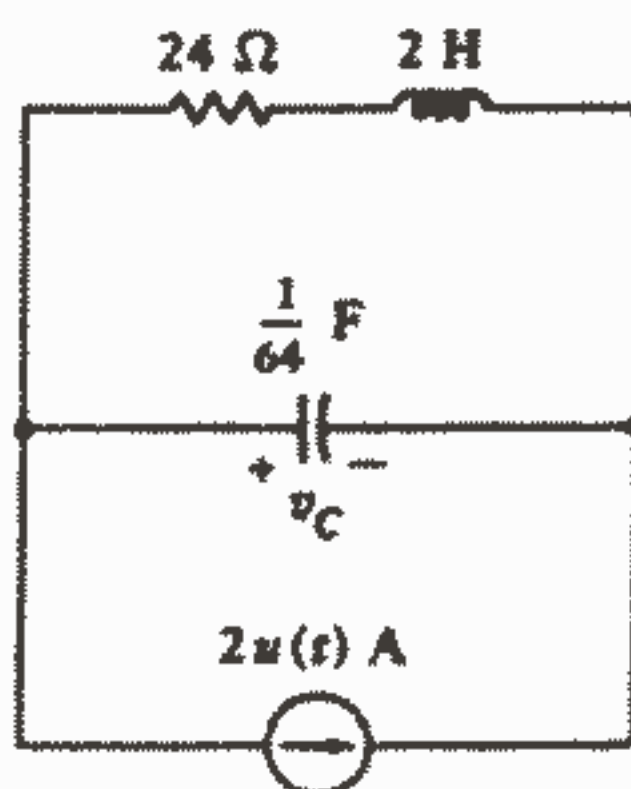
شکل ۳۷ - ۷: به مسئله ۲۶ مراجعه کنید.

- ۲۷ - فرض کنید که کلید در شکل ۲۶-۷ برای مدت طولانی باز بوده است و در لحظه $t = 0$ بسته می‌شود. مقدار $i(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید.
- ۲۸ - (a) با مراجعه به شکل ۳۸-۷ مقدار $i(t)$ را به ازای $t > 0$ پیدا کنید. (b) نمودار جریان را به صورت تابعی از زمان در فاصله $-1 < t < 4 \text{ mA}$ رسم کنید.



شکل ۳۸ - ۷: به مسئله ۲۸ مراجعه کنید.

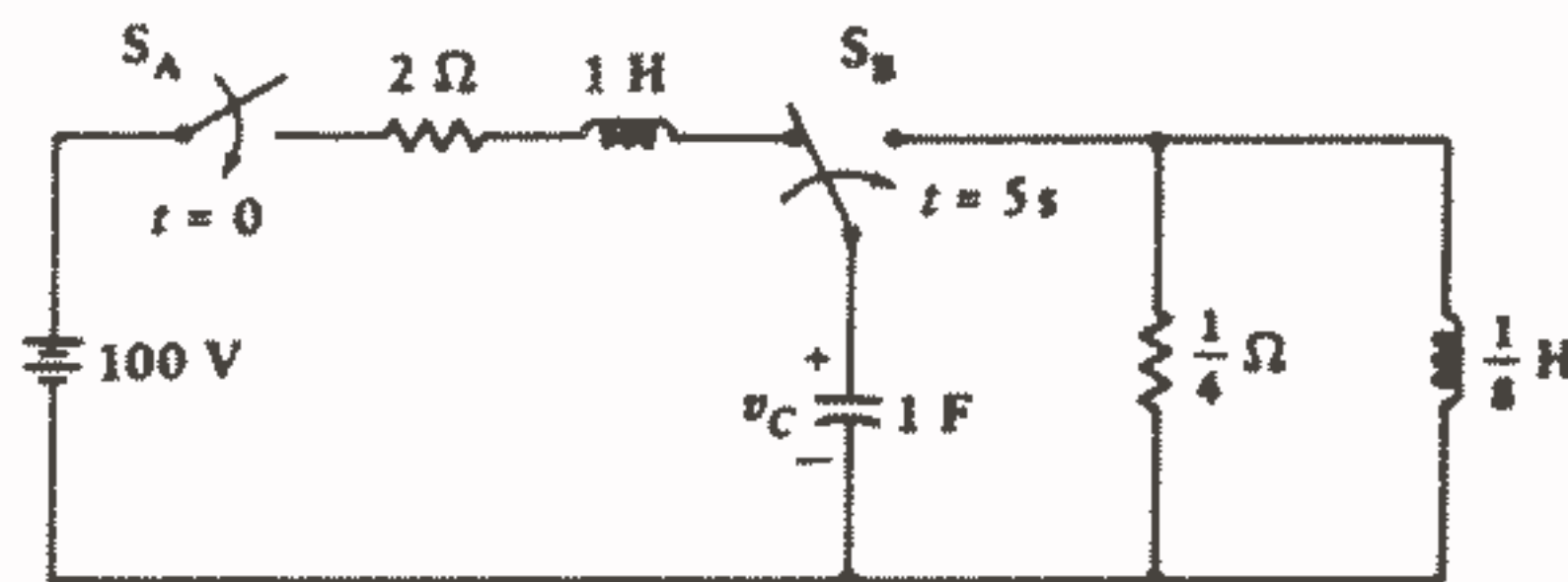
- ۲۹ - (a) در مدار شکل ۳۹-۷ رابطه صحیحی برای $v_c(t)$ پیدا کنید. (b) معادله دیفرانسیل $v_c(t)$ را بنویسید و با استفاده از آن مقادیر $d^2 v_c / dt^2$ ، $d^3 v_c / dt^3$ را در لحظه $t = 0^+$ پیدا کنید.



شکل ۳۹ - ۷: به مسئله ۲۹ مراجعه کنید.

۳۰. مقدار R را در مدار زیر میرای قسمت ۷-۵، $(C = 1/42 F, i(0) = 10 A, L = 7 H, v(0) = 0)$ طوری پیدا کنید که مقدار زمان فروکش می نیمم شود. مقدار i_s چقدر است؟

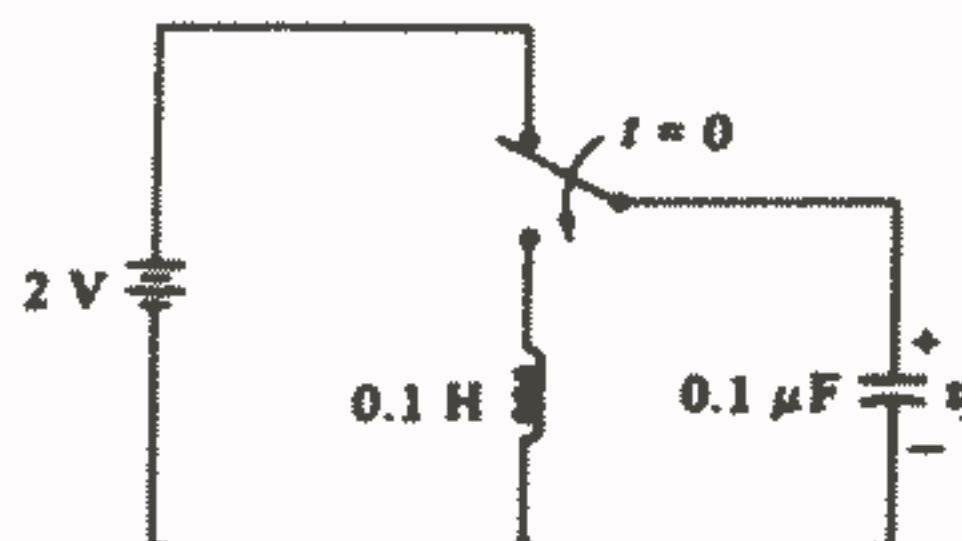
۳۱. هر دو کلید در مدار شکل ۷-۴۰ برای مدت طولانی در وضعیت نشان داده شده، بوده اند. در لحظه $t = 0$ ، S_A بسته می شود. (a) با فرض $v_c(0) = 0$ ، $v_c(t)$ را پیدا کنید و در فاصله $0 < t < 5s$ رسم کنید. (b) در لحظه $t = 5s$ ، S_B به راست انتقال می یابد، $v_c(t)$ را در فاصله $5 < t < 8s$ پیدا کنید و سپس رسم کنید.



شکل ۷-۳۰: به مسئله ۳۱ مراجعه کنید.

۳۲. به مدار RC موازی ساده شکل ۷-۹ که در آن $v(0) = 10 V, C = 5 \mu F, R = 10 K\Omega$ است مراجعه کنید. معادله دیفرانسیل v_s را به ازای $t > 0$ بنویسید و مداری با استفاده از یک انتگراتور op-amp طرح کنید که $v(t)$ را در خروجی ارائه کند. ابتدا از انتگراتوری استفاده کنید که دارای $R_1 = 1 m\Omega$ و $C_f = 1 \mu F$ باشد و سپس با مقادیر $R_1 = 10 k\Omega$ و $C_f = 5 \mu F$ کار را تکرار کنید.

۳۳. در مدار شکل ۷-۴۱ پس از اینکه کلید برای مدت طولانی در وضعیت نشان داده شده بوده است، در لحظه $t = 0$ پایین می افتد. یک مدار op-amp بکشید که خروجی آن به ازای $t > 0$ عبارت از $v(t)$ باشد.



شکل ۷-۴۱: به مسئله ۳۳ مراجعه کنید.

فصل ۸

تابع تحریک سینوسی

۱-۸- مقدمه

پاسخ کامل یک مدار الکتریکی خطی ترکیبی است از دو قسمت یکی پاسخ طبیعی و دیگری پاسخ اجباری. اولین قسمت مطالعه ما اختصاص به مدارهای مقاومتی داشت که در آنها فقط پاسخ اجباری حضور داشت و مورد نیاز بود. به منظور سادگی، معمولاً توابع تحریک مان را به منابع dc محدود کردیم و بنابراین به طور فزاینده‌ای با تکنیکهای مختلف مفیدی برای پیدا کردن پاسخهای اجباری dc ، آشنا شدیم. سپس به قسمت بعدی پرداختیم و پاسخ طبیعی تعدادی از مدارهای مختلف حاوی یک یا دو عنصر ذخیره‌کننده انرژی را مورد بررسی قرار دادیم. سپس بدون زحمت چندان زیادی قادر به تعیین پاسخ کامل این مدارها به وسیله جمع کردن پاسخ طبیعی و پاسخ اجباری گشتیم. بنابراین اکنون در وضعیتی هستیم که تسلط مان در پاسخ طبیعی بیشتر از دانش ما درباره پاسخ اجباری می‌باشد.

در این بخش سوم مطالعه مان، اطلاعات خود را درباره پاسخ اجباری با بررسی تابع تحریک سینوسی، توسعه خواهیم داد.

چرا باید تابع تحریک سینوسی را به عنوان دومین فرم تابعی برای مطالعه انتخاب کنیم؟ چرا تابع خطی، تابع نمایی و یا یک تابع بسل اصلاح شده نوع دوم را نه؟ دلایل زیادی برای انتخاب تابع سینوسی وجود دارد که هر یک از آنها به تنهایی کافی است که ما را به این مسیر هدایت کند.

یکی از این دلایل از نتایج فصل قبلی مشهود است، یعنی اینکه پاسخ طبیعی یکی سیستم مرتبه دوم در حالت زیر میرایی، یک تابع سینوسی میرا می‌باشد و اگر تلفاتی وجود نداشته باشد

یک تابع سینوسی خالص خواهد بود. بنابراین تابع سینوسی به طور طبیعی ظاهر می‌شود (همانگونه که تابع نمایی منفی عمل می‌کند). در واقع، به طور کلی به نظر می‌رسد که طبیعت، شخصیتی سینوسی دارد، حرکت یک آونگ، جهش یک توپ، نوسان یک تار گیتار، جو سیاسی هر کشور، و کنگره‌ها و موجهای موجود بر سطح یک لیوان شیر کا کائو، همواره یک ماهیت سینوسی معقولی را به نمایش می‌گذارند.

شاید همین مشاهدات بود که ریاضیدان بزرگ فرانسوی فوریه را به کشف روش تحلیلی مهمی که در قالب قضیه فوریه بیان شده است، رهنمون شد. در فصل ۱۷ خواهیم دید که این قضیه ما را قادر می‌سازد که بسیاری از توابع ریاضی مفید از زمان را که f مرتبه در ثانیه عیناً تکرار می‌شوند، به صورت مجموع بی‌نهایت تابع زمانی سینوسی با فرکانس‌هایی که مضارب صحیحی از f هستند نشان دهیم. تابع متناوب $f(t)$ را همچنین می‌توانیم با هر دقتی که بخواهیم به طور تقریبی به صورت مجموع تعداد محدودی از اینگونه جملات نشان دهیم، ولو اینکه نمودار $f(t)$ ممکن است کاملاً غیرسینوسی به نظر برسد. دقت چنین تقریبی به وسیله تمرین ۱-۸ توضیح داده شده است.

این تجزیه یک تابع تحریک متناوب به تعدادی از توابع تحریک سینوسی تقریبی، روش تحلیلی نیرومندی است زیرا ما را قادر می‌سازد که پاسخهای جزئی تولید شده در هر مدار خطی به وسیله هر مؤلفه سینوسی را جمع کنیم و پاسخ مطلوب ناشی از تابع تحریک متناوب مورد نظر را به دست آوریم. بنابراین دلیل دیگر مطالعه پاسخ ناشی از یک تابع تحریک سینوسی در وابستگی سایر توابع تحریک به تحلیل توابع سینوسی نهفته است.

دلیل سوم عبارت است از یک خاصیت مهم ریاضی است که تابع سینوسی دارد، یعنی مشتقات و انتگرال‌های آن هم، همگی سینوسی^۱ می‌باشند. از آنجاییکه پاسخ اجباری فرم تابع تحریک، مشتقات آن و انتگرال آن را دارد بنابراین تابع تحریک سینوسی، یک پاسخ اجباری سینوسی در سرتاسر مدار ایجاد می‌کند. بنابراین تابع تحریک سینوسی تحلیل ریاضی بسیار ساده‌تری نسبت به سایر توابع تحریک ارائه می‌کند.

سرانجام، تابع تحریک سینوسی دارای کاربردهای عملی مهمی است، چرا که تابعی است که تولید آن آسان است و شکل موجی است که در سرتاسر صنعت برق به کار می‌رود و هر

۱- ما در اینجا کلمه «سینوسی» را به طور مختصر به کار می‌بریم که شامل توابع کسینوسی از زمان هم می‌باشد زیرا به طور کلی یک تابع کسینوسی را هم اگر زاویه‌اش را 90° زیاد کنیم می‌توان به صورت یک سینوس بیان نمود.

آزمایشگاه الکتریسته دارای تعدادی مولد سینوسی می باشد که در رنج وسیعی از فرکانسهای مفید کار می کنند.

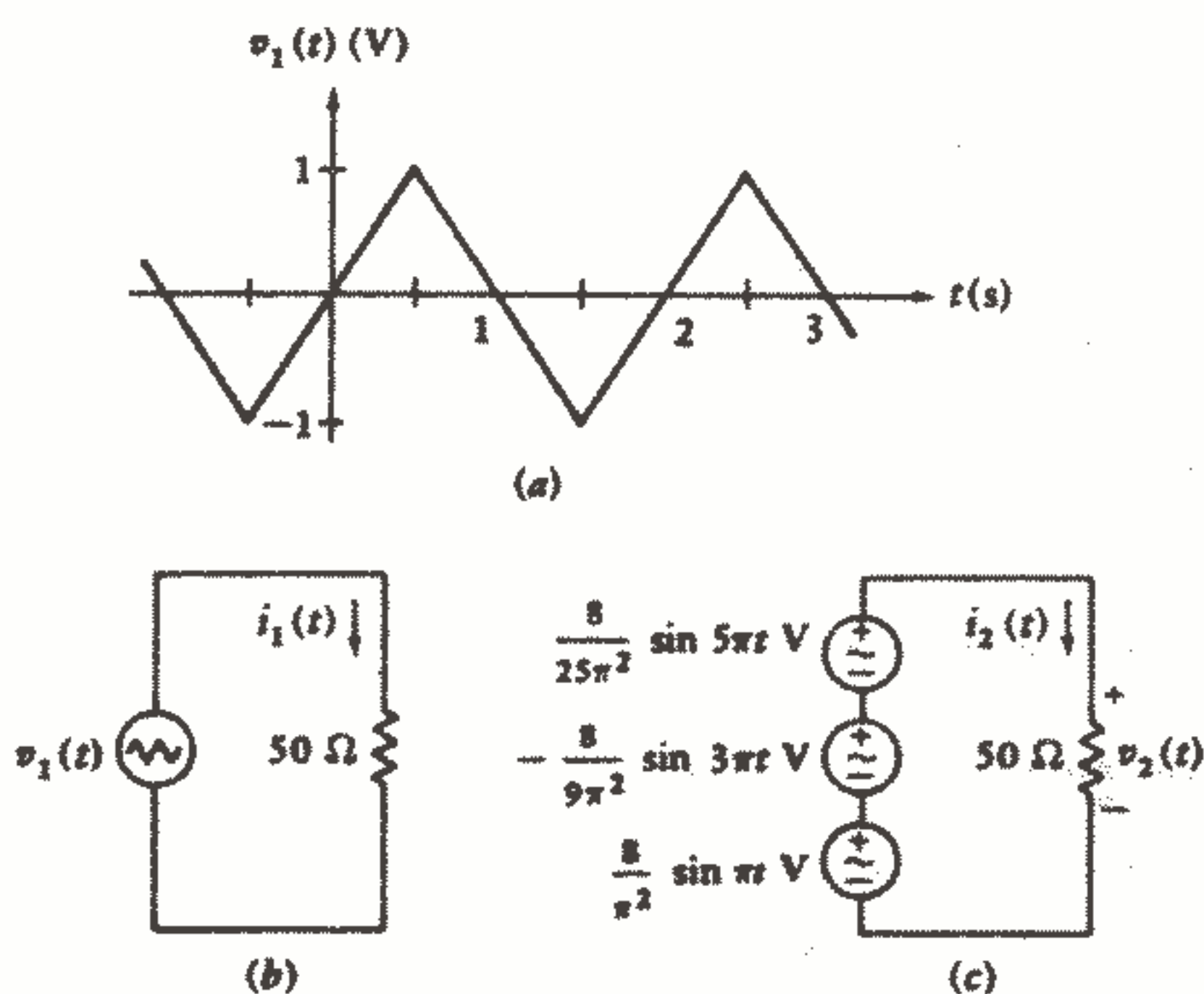
تمرین

۸-۱ قضیه فوریه، که در فصل ۱۷ آن را مطالعه خواهیم کرد، نشان می دهد که شکل موج مثلی متناوب $v_1(t)$ در شکل ۸-۱a و مجموع بی نهایت جمله سینوسی به صورت:

$$v_1(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \pi t - \frac{1}{3^2} \sin 3\pi t + \frac{1}{5^2} \sin 5\pi t - \frac{1}{7^2} \sin 7\pi t + \dots \right)$$

مساوی می باشند. فرض کنید که مجموع سه جمله اول این سری را $v_2(t)$ بنامیم و به عنوان تقریبی برای $v_1(t)$ به کار ببریم. شکلهای ۸-۱b,c توابع $v_1(t)$, $v_2(t)$ را به صورت منابعی در مدارهای مقاومتی یکسان نشان می دهند. مقادیر $i_1(t)$, $i_2(t)$ را به ازای: (a) $0/3S$, (b) $1/56S$ محاسبه کنید.

جواب: $12mA$, $11/91$, -20 , $-18/66$

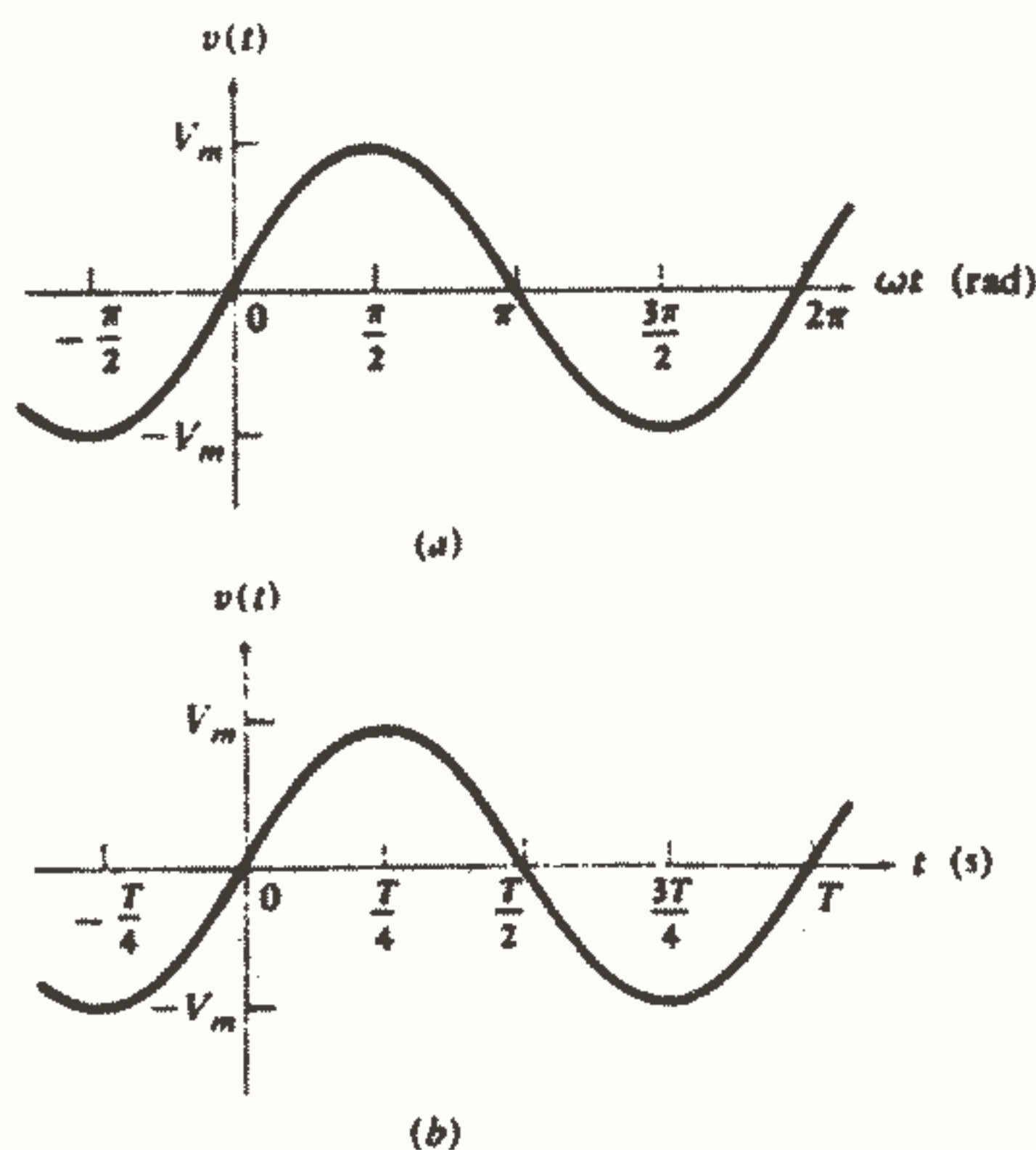


شکل ۸-۱: به تمرین ۸-۱ مراجعه کنید.

۸-۲ - مشخصات موج سینوسی

در این قسمت واژه های مثلثاتی را که برای توصیف توابع سینوسی (یا کسینوسی) مورد استفاده قرار می گیرد، تعریف خواهیم کرد. این تعاریف برای اکثر ما آشنا می باشند و اگر

اندکی از مثلثات را به یاد آوریم مطالعه این قسمت به سرعت انجام خواهد گرفت. ولتاژ سینوسی $v(t) = V_m \sin \omega t$ را که در شکل‌های ۸-۲a, b نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. دامنه موج سینوسی عبارت از V_m و آرگومان آن ωt می‌باشد که ω فرکانس زاویه‌ای نامیده می‌شود. در شکل ۸-۲a $V_m \sin \omega t$ به صورت تابعی از آرگومان ωt رسم شده است و طبیعت متناوب موج سینوسی مشهود است.



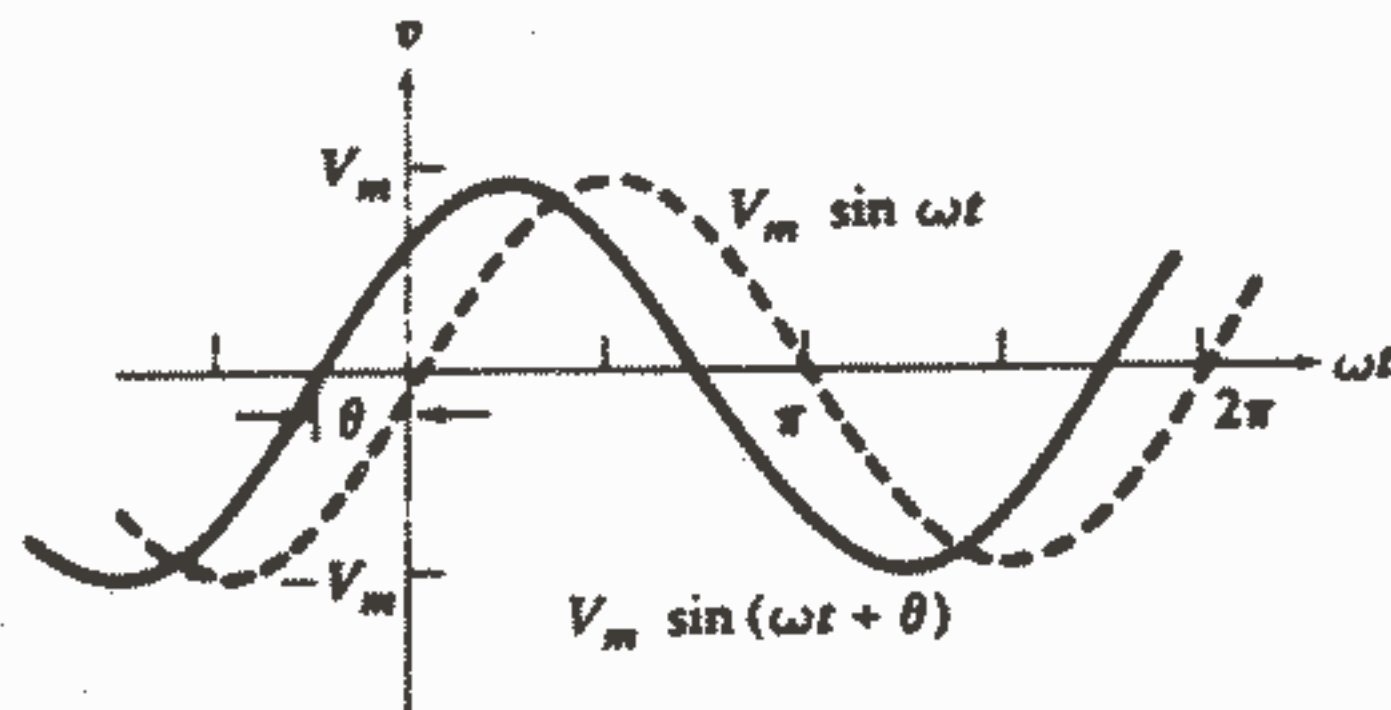
شکل ۸-۲: تابع سینوسی $v(t) = V_m \sin \omega t$
(a) نسبت به ωt (b) نسبت به t رسم شده است.

این تابع خودش را در هر 2π رادیان تکرار می‌کند و بنابراین پریود آن برابر با 2π رادیان می‌باشد در شکل ۸-۲b $V_m \sin \omega t$ به صورت تابعی از t رسم شده است که اکنون پریود آن T می‌باشد. پریود ممکن است بر حسب درجه و یا گاهی اوقات بر حسب واحدهای دیگری مانند سانتی متر یا اینچ هم بیان شود. یک موج سینوسی که دارای پریود T می‌باشد در هر ثانیه باید $1/T$ پریود را ایجاد کند که فرکانس آن یعنی f برابر $1/T$ هرتز (با علامت اختصاری Hz) می‌باشد. بنابراین یک هرتز برابر با یک «سیکل بر ثانیه» می‌باشد البته امروزه استفاده از عبارت «سیکل بر ثانیه» تقریباً منسوخ شده است زیرا اکثراً آن را به غلط «سیکل»

استعمال می‌کنند. بنابراین $f = 1/T$ و چون $\omega t = 2\pi$ رابطه متداولی را بین فرکانس و فرکانس زاویه‌ای به دست می‌آوریم: $\omega = 2\pi f$ فرم کلی‌تر تابع سینوسی به صورت:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (1)$$

می‌باشد که حاوی یک زاویه فاز θ در آرگومانش می‌باشد. معادله (۱) در شکل ۳-۸ به صورت تابعی از ωt رسم شده است و زاویه فاز به صورت تعداد رادیانهایی که موج سینوسی اولیه (که به صورت نقطه چین نمایش داده شده است) به سمت چپ انتقال پیدا کرده و یا از نظر زمانی زودتر واقع شده است، ظاهر گردیده است. چون نقاط موجود در تابع سینوسی $V_m \sin(\omega t + \theta)$ به اندازه θ رادیان و یا θ/ω s زودتر واقع می‌شوند بنابراین می‌گوییم $V_m \sin(\omega t + \theta)$ نسبت به $V_m \sin \omega t$ به اندازه θ رادیان تقدم دارد و بالعکس صحیح است اگر بگوییم که $V_m \sin \omega t$ به اندازه θ رادیان نسبت به $V_m \sin(\omega t + \theta)$ تاخیر دارد.



شکل ۳-۸: موج سینوسی $V_m \sin(\omega t + \theta)$ نسبت به

$V_m \sin \omega t$ به اندازه θ رادیان تقدم دارد.

در هر دو حالت تقدم یا تاخیر می‌گوییم این موجهای سینوسی غیرهم فاز هستند و اگر زاویه‌های فاز مساوی باشند آنها را هم فاز می‌نامیم.

در مهندسی برق معمولاً زاویه فاز را به جای رادیان بر حسب درجه بیان می‌کنند و هیچگونه اشکال و آشفتگی پیش نخواهد آمد اگر علامت درجه را همیشه بکار ببریم. بنابراین به عوض اینکه بنویسیم $v = 100 \sin(2\pi 1000t - \pi/6)$ معمولاً می‌نویسیم:

$$v = 100 \sin(2\pi 1000t - 30^\circ)$$

برای محاسبه عبارت فوق در لحظه مشخصی از زمان، مثلاً $t = 10^{-4}$ s، مقدار

تابع تحریک سینوسی ۳۰۱

$2\pi 1000t$ می شود. $0,2\pi$ رادیان، که باید آن را قبل از اینکه 30° را از آن کم کنیم، به صورت 36° بیان کنیم.

دو موج سینوسی را که می خواهیم از نظر هم فاز بودن مقایسه کنیم باید هر دو به صورت موج سینوسی و یا هر دو به صورت کسینوسی و نیز هر دو با دامنه های مثبت و فرکانس یکسانی نوشته شوند. همچنین بدیهی است که اگر مضارب 360° را به آرگومان هر تابع سینوسی جمع و یا تفریق کنیم تغییری در مقدار تابع داده نمی شود. بنابراین می توانیم بگوییم که $v_1 = V_{m1} \sin(\Delta t - 30^\circ)$ نسبت به $v_2 = V_{m2} \cos(\Delta t + 10^\circ)$ به اندازه 130° تاخیر دارد و یا می توانیم بگوییم که v_1 نسبت به v_2 به اندازه 230° تقدم دارد. از آنجایی که می توان v_2 را به صورت $v_2 = V_{m2} \sin(\Delta t - 260^\circ)$ نوشت بنابراین v_{m1} ، v_{m2} هر دو کمیت های مثبتی فرض شده اند. معمولاً اختلاف فاز بین دو موج سینوسی با آن زاویه ای که کمتر از 180° باشد بیان می شود.

مفهوم تقدم و تاخر بین دو تابع سینوسی به طور گسترده ای استعمال خواهد شد و باید هم از نظر ریاضی و هم از نظر ترسیمی آن را درک نمود.

تمرین

۲-۸. زاویه ای را که i_2 نسبت به i_1 تقدم دارد پیدا کنید، اگر $i_1 = 120 \cos(100\pi t + 30^\circ)$ و i_2 برابر با: (a) $-0,1 \cos(100\pi t + 100^\circ)$ ، (b) $20 \sin(100\pi t - 50^\circ)$ ، (c) $-18 \sin(100\pi t + 40^\circ)$ باشد.

جواب: 100° ، -170° ، -110°

۳-۸. A ، B ، C ، ϕ را پیدا کنید، اگر:

$$-50 \cos(120\pi t + 30^\circ) + 20 \sin(120\pi t - 40^\circ) = A \cos(120\pi t + B \sin 120\pi t = C \cos(120\pi t + \phi)$$

جواب: $-56,2$ ، $40,3$ ، $69,1$ ، $-144,3$

۳-۸. پاسخ اجباری ناشی از توابع تحریک سینوسی

اکنون که با مشخصات ریاضی توابع سینوسی آشنا شده ایم و می توانیم به طور آگاهانه آنها را توصیف و مقایسه کنیم، آماده ایم تا یک تابع تحریک سینوسی را به یک مدار ساده اعمال کنیم و پاسخ اجباری آن را به دست آوریم. ابتدا باید معادله دیفرانسیلی مدار مورد نظر را

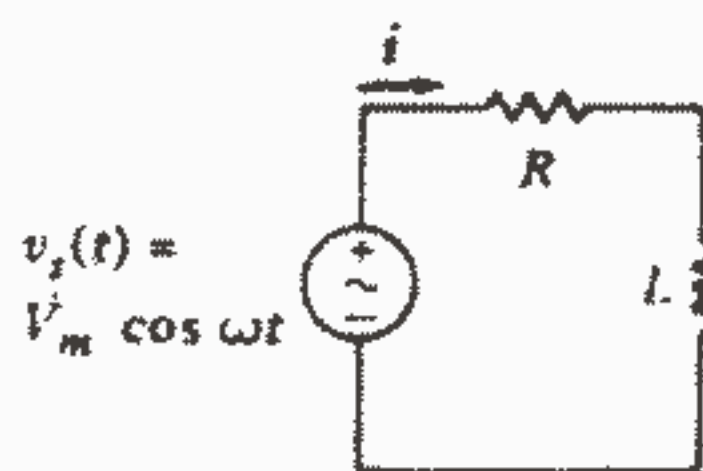
بنویسیم. پاسخ کامل این معادله از دو قسمت تشکیل شده است، پاسخ عمومی (که ما آن را پاسخ طبیعی می‌نامیم) و انتگرال خصوصی (یا پاسخ اجباری). پاسخ طبیعی مستقل از فرم ریاضی تابع تحریک می‌باشد و فقط بستگی به نوع مدار، مقادیر عناصر و شرایط اولیه دارد و ما آن را با صفر کردن همه توابع تحریک و در نتیجه کاهش معادله به معادله دیفرانسیل خطی همگن، پیدا می‌کنیم. ما قبلاً پاسخ طبیعی بسیاری از مدارات RL ، RC ، RLC را پیدا کرده‌ایم.

پاسخ اجباری همیشه فرم ریاضی تابع تحریک به علاوه مشتقات و انتگرال آن را دارا می‌باشد. با توجه به این اطلاعات، بدیهی است که یکی از روش‌هایی که به وسیله آن می‌توان پاسخ اجباری را پیدا نمود این است که پاسخی متشکل از مجموع چنین توابعی را فرض کنیم که هر تابعی دارای دامنه مجهولی باشد که باید آن را به وسیله جایگزینی مستقیم در معادله دیفرانسیل پیدا کنیم.

این روش، طولانی می‌باشد اما تنها روشی است که باید در این فصل برای معرفی تحلیل سینوسی به کار ببریم زیرا حداقل مفاهیم جدیدتر را در بر دارد. البته، اگر روش ساده‌تری که در فصل‌های آینده توصیف شده است نمی‌بود، تحلیل مدار یک هنر غیرعملی و بلااستفاده‌ای می‌شد.

واژه «پاسخ حالت پایدار» به طور مترادف برای پاسخ اجباری به کار می‌رود و مدارهایی را که در شرف تحلیل آنها هستیم معمولاً گفته می‌شود که در حالت پایدار سینوسی هستند. متأسفانه کلمه حالت پایدار، مفهوم «غیرمتغیر با زمان» را به ذهن اغلب دانشجویان تداعی می‌کند. این مطلب در مورد توابع تحریک dc صادق است اما پاسخ حالت پایدار سینوسی قطعاً و به وضوح متغیر با زمان می‌باشد. عبارت «حالت پایدار» به طور ساده اشاره به وضعیتی دارد که پس از میرا شدن پاسخ طبیعی یا گذرا حاصل می‌شود.

حال بیایید مدار RL سری نشان داده شده در شکل ۴-۸ را در نظر بگیریم.



شکل ۴-۸: یک مدار RL سری که پاسخ اجباری آن مطلوب است.

ولتاژ سینوسی $v_s = V_m \cos \omega t$ در زمان دوری در گذشته به مدار اعمال شده است و پاسخ طبیعی کاملاً میرا شده است. ما در جستجوی پاسخ اجباری، یا پاسخ حالت پایدار، هستیم که باید در معادله دیفرانسیل $L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$ صدق کند. سپس فرم تابعی پاسخ اجباری به وسیله انتگرال گیری و مشتق گیری مکرر از تابع تحریک به دست می آید. فقط دو فرم مختلف به دست می آید، $\cos \omega t$ ، $\sin \omega t$. بنابراین پاسخ اجباری باید دارای فرم کلی $i(t) = I_1 \cos \omega t + i_2 \sin \omega t$ باشد، که در آن I_1 ، i_2 ثابتهای حقیقی هستند که مقدار آنها بستگی به V_m ، R ، L ، ω دارد. هیچ مقدار ثابت و یا تابع نمایی نمی تواند وجود داشته باشد. حال با جایگزینی فرم مفروض پاسخ در معادله دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$L(-I_1 \omega \sin \omega t + I_2 \omega \cos \omega t) + R(I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t) = V_m \cos \omega t$$

که اگر جملات سینوسی و کسینوسی را تفکیک کنیم، به دست می آید:

$$(-LI_1 \omega + RI_2) \sin \omega t + (LI_2 \omega + RI_1 - V_m) \cos \omega t = 0$$

این معادله باید به ازای جمیع مقادیر t صادق باشد و این حالت فقط وقتی میسر است که ضرایب $\cos \omega t$ ، $\sin \omega t$ هر کدام مساوی صفر باشند. بنابراین:

$$- \omega LI_1 + RI_2 = 0, \quad \omega LI_2 + RI_1 - V_m = 0$$

اگر دو معادله دو مجهولی فوق را نسبت به I_1 ، I_2 حل کنیم، خواهیم داشت:

$$I_1 = RV_m / R^2 + \omega^2 L^2, \quad I_2 = \omega LV_m / R^2 + \omega^2 L^2$$

بنابراین پاسخ اجباری حاصله عبارت است از:

$$i(t) = RV_m / R^2 + \omega^2 L^2 \cos \omega t + \omega LV_m / R^2 + \omega^2 L^2 \sin \omega t \quad (2)$$

البته رابطه فوق کمی پیچیده و شلوغ است و تصویر واضح تری از پاسخ را می توان با بیان پاسخ به صورت یک تابع منفرد سینوسی و یا کسینوسی با یک اختلاف فاز، به دست آورد. بیایید به عنوان پیش درآمدی بر روش ارائه شده در فصل بعدی، تابع کسینوسی را انتخاب کنیم:

$$i(t) = A \cos(\omega t - \theta) \quad (3)$$

حداقل دو روش برای به دست آوردن مقادیر A ، θ به ذهن خطور می کند. می توانیم رابطه

(۳) را مستقیماً در معادله دیفرانسیل اولیه جایگزین کنیم و یا اینکه به سادگی دو پاسخ (۲) و

(۳) را با هم مساوی قرار دهیم. اجازه دهید روش دوم را انتخاب کنیم زیرا روش اول تمرین خوبی

برای آخر فصل می باشد. پس از بسط تابع $\cos(\omega t - \theta)$ و مساوی قرار دادن معادلات (۲)،

(۳) خواهیم داشت:

$$A \cos \theta \cos \omega t + A \sin \theta \sin \omega t =$$

$$= (RV_m / R^2 + \omega^2 L^2) \cos \omega t + (\omega LV_m / R^2 + \omega^2 L^2) \sin \omega t$$

پس از ساده کردن و قرار دادن ضرایب $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ برابر با صفر، خواهیم داشت:

$$A \cos \theta = R V_m / R^2 + \omega^2 L^2, \quad A \sin \theta = \omega L V_m / R^2 + \omega^2 L^2$$

برای به دست آوردن A , θ دو طرف معادلات فوق را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$A \sin \theta / A \cos \theta = \tan \theta = \omega L / R$$

و نیز هر دو معادله را بتوان ω^2 رسانده و با هم جمع می‌کنیم:

$$A^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta = A^2 = R^2 V_m^2 / (R^2 + \omega^2 L^2)^2 + \omega^2 L^2 V_m^2 / (R^2 + \omega^2 L^2)^2 = V_m^2 / R^2 + \omega^2 L^2$$

بنابراین:

$$A = V_m / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \omega L / R$$

و به این ترتیب فرم دیگر پاسخ اجباری به صورت زیر می‌باشد:

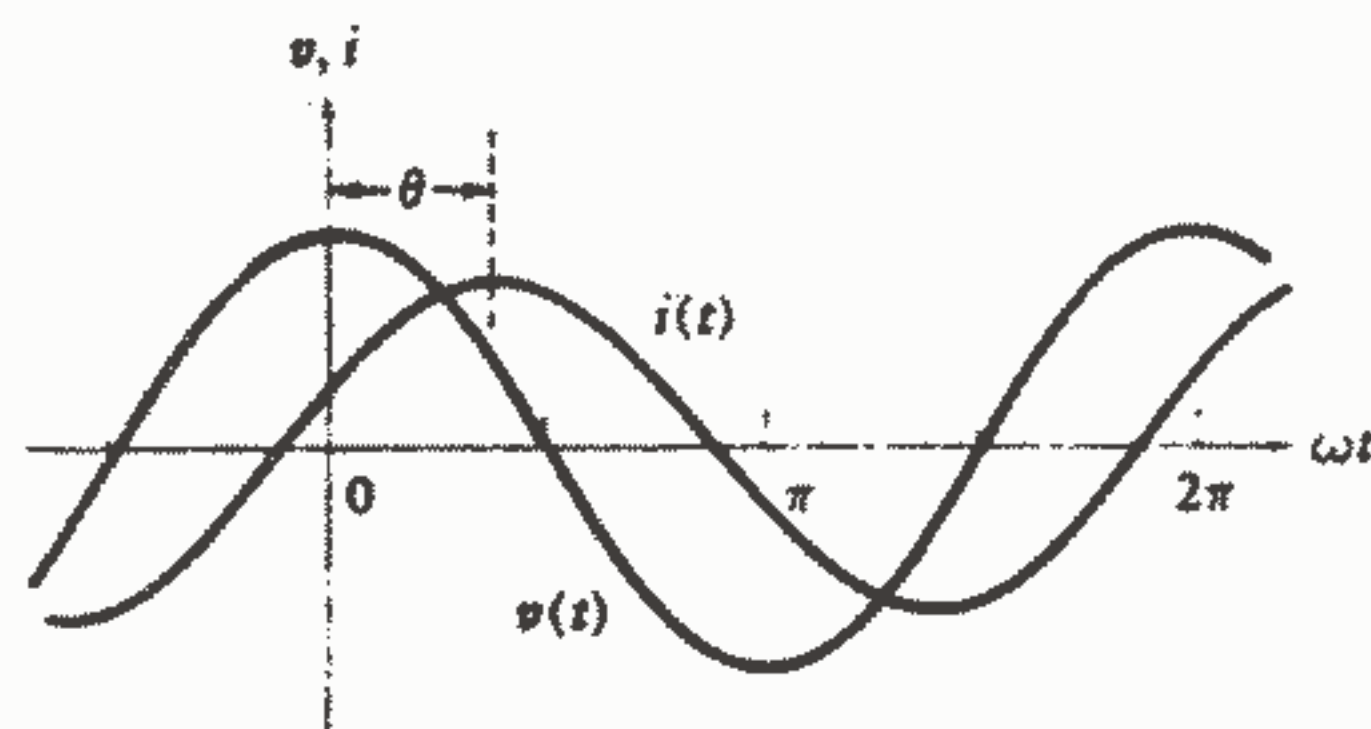
$$i(t) = V_m / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cos (\omega t - \tan^{-1} \omega L / R) \quad (4)$$

اکنون باید خصوصیات الکتریکی پاسخ $i(t)$ را مورد توجه قرار دهیم. دامنه پاسخ متناسب است با دامنه تابع تحریک و اگر چنین نباشد مفهوم خطی بودن نقض می‌شود. همچنین دامنه پاسخ با افزایش R , L , ω کاهش می‌یابد (اما نه به طور متناسب). این مطلب به وسیله معادله دیفرانسیل تأیید می‌شود یعنی افزایش R , L و یا di/dt کاهش در دامنه جریان را ایجاد می‌کند البته اگر دامنه ولتاژ منبع تغییر نکند. مشاهده می‌شود که جریان به اندازه $\tan^{-1}(\omega L / R)$ نسبت به ولتاژ اعمال شده تاخیر دارد. اگر $\omega = 0$ و یا $L = 0$ باشد، جریان باید با ولتاژ هم فاز باشد و انتظار این امر را هم داریم زیرا در حالت اول جریان مستقیم و در حالت دوم مدار مقاومتی خالص خواهیم داشت. اگر $R = 0$ ، جریان به اندازه 90° نسبت به ولتاژ تاخیر دارد و آنگاه $v_s = L di/dt$ و رابطه مشتق - انتگرالی بین سینوس و کسینوس وجود اختلاف فاز 90° را نشان می‌دهد. سپس در یک سلف تنها، اگر قرارداد علامت غیرفعال صادق باشد جریان نسبت به ولتاژ 90° تاخیر دارد. به طور مشابه می‌توانیم نشان دهیم که جریان خازن نسبت به ولتاژ آن 90° تقدم فاز دارد. ولتاژ اعمال شده و جریان حاصله هر دو در یک محور ωt در شکل ۵-۸ رسم شده‌اند. واقعیت تاخیر فاز جریان نسبت به ولتاژ در این مدار RL ساده به وضوح مشاهده می‌شود. بعدها قادر خواهیم بود که به سادگی نشان دهیم که این رابطه فازی در ورودی هر مداری که فقط متشکل از سلف و خازن باشد، موجود است.

اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ بستگی به نسبت کمیت ωL به R دارد. ما ωL را رآکتانس سلفی یک سلف می‌نامیم که بر حسب اهم اندازه‌گیری می‌شود و معیاری است از

مخالفت یک سلف در برابر عبور جریان سینوسی از آن. در فصل بعدی دربارهٔ راکتانس بیشتر صحبت خواهیم کرد.^۱

روشی که به وسیله آن پاسخ حالت پایدار سینوسی را به دست آورده‌ایم مسئلهٔ کم‌ارزش و پیش پا افتاده‌ای نیست. ما باید به پیچیدگیهای تحلیلی که از حضور سلف ناشی می‌شود فکر کنیم، اگر هر دو عنصر غیرفعال مقاومت می‌بودند، تحلیل بسیار ساده می‌شد، حتی اگر تابع تحریک سینوسی می‌بود. دلیل اینکه اینقدر تحلیل ساده می‌شد از رابطهٔ سادهٔ ولتاژ - جریان قانون اهم بر می‌آید. رابطهٔ ولتاژ - جریان یک سلف به آن سادگی نیست و به جای حل کردن یک معادلهٔ جبری، با یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرهمگن مواجه می‌شویم. البته کاملاً غیرعملی است که هر مداری را با روش فوق تحلیل کنیم و در فصل بعدی مراحل را برای ساده کردن تحلیل ارائه خواهیم کرد. نتیجهٔ حاصله، رابطه‌ای جبری بین ولتاژ و جریان سینوسی سلف و خازن مانند مقاومتها خواهد بود و قادر خواهیم بود یک دسته معادله جبری برای مداری هر قدر پیچیده بنویسیم. متغیرها و ضرایب ثابت در این معادلات جبری، به جای اعداد حقیقی اعداد مختلط خواهند بود اما در عوض تحلیل هر مداری در حالت پایدار سینوسی تقریباً به سادگی تحلیل مدار مقاومتی مشابه خواهد بود.



شکل ۵ - ۸: تابع تحریک سینوسی اعمال شده و پاسخ جریان

سینوسی حاصله در مدار RL سری شکل ۴ - ۸.

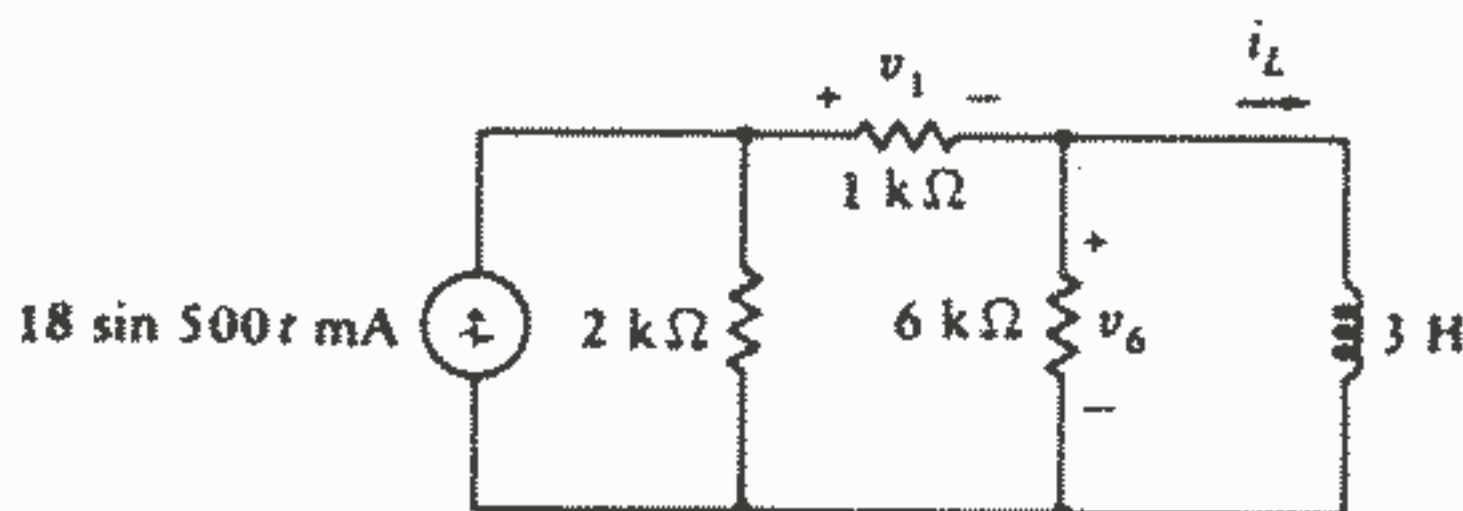
۱ - زمانی از علامت E (نیروی الکتروموتوری) برای نشان دادن ولتاژ استفاده می‌شد. آنگاه هر دانشجویی از عبارت «ELI the ICE man» به عنوان یادآوری کنندهٔ اینکه در یک مدار سلفی ولتاژ مقدم به جریان و در یک مدار خازنی جریان مقدم بر ولتاژ است، استفاده می‌نمود.

تمرین

۸-۴. در مدار شکل ۸-۴، R را برابر 200Ω و L را برابر 8mH در نظر بگیرید. اگر $v_s = 40 \cos 10^4 t \text{ V}$ پیدا کنید: (a) ولتاژ دوسر R با علامت + در سمت چپ. (b) ولتاژ دوسر L با علامت + در بالا، (c) $P_s(t)$ ، قدرت تحویل داده شده به وسیله منبع.

جواب: $37.1 \cos(10^4 t - 21.8^\circ) \text{ V}$ ، $14.86 \cos(10^4 t + 68.2^\circ)$ و $7.43 \cos 10^4 t \cos(10^4 t - 21.8^\circ) \text{ W}$

۸-۵. از قضیه تونن برای ساده کردن مدار شکل ۸-۶ استفاده کنید و سپس مقادیر زیر به ازای $t = 0$ پیدا کنید: (a) i_L ، (b) v_6 ، (c) v_1 .
جواب: -5.76 mA ، 11.52 V ، -3.84 V



شکل ۸-۶: به تمرین ۸-۵ مراجعه کنید.

مسائل

۱- اگر $y(t) = 26 \cos 190t - 18 \sin 190t$ مقادیر زیر را برای y پیدا کنید. (a) $f(t)$ ، (b) T ، (c) w ، (d) دامنه، (e) زاویه‌ای که $y(t)$ نسبت به $5 \cos 190t$ تقدم دارد، (f) زاویه‌ای که $y(t)$ نسبت به $8 \sin 190t$ تاخر دارد. (g) A ، θ اگر $A \cos(190t + \theta) = y(t) + 20 \cos(190t + 160^\circ)$

۲- با دادن مقادیر به A . هر یک از ولتاژهای زیر را به صورت $v(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ بیان کنید: (a) $6 \sin 20t$ ، (b) $4 \sin(20t - 20^\circ)$ ، (c) $8 \cos 5t + 3 \sin 5t$ ، (d) کوچکترین مقدار مثبت t که به ازای آن $5 \cos(100t + 40^\circ) = 0$ کدام است؟ (e) کوچکترین مقدار مثبت t که به ازای آن $-3 \cos 20t + 2 \sin 20t$ ماکزیمم می‌شود کدام است و مقدار این ماکزیمم چقدر است؟

تابع تحریک سینوسی ۳۰۷

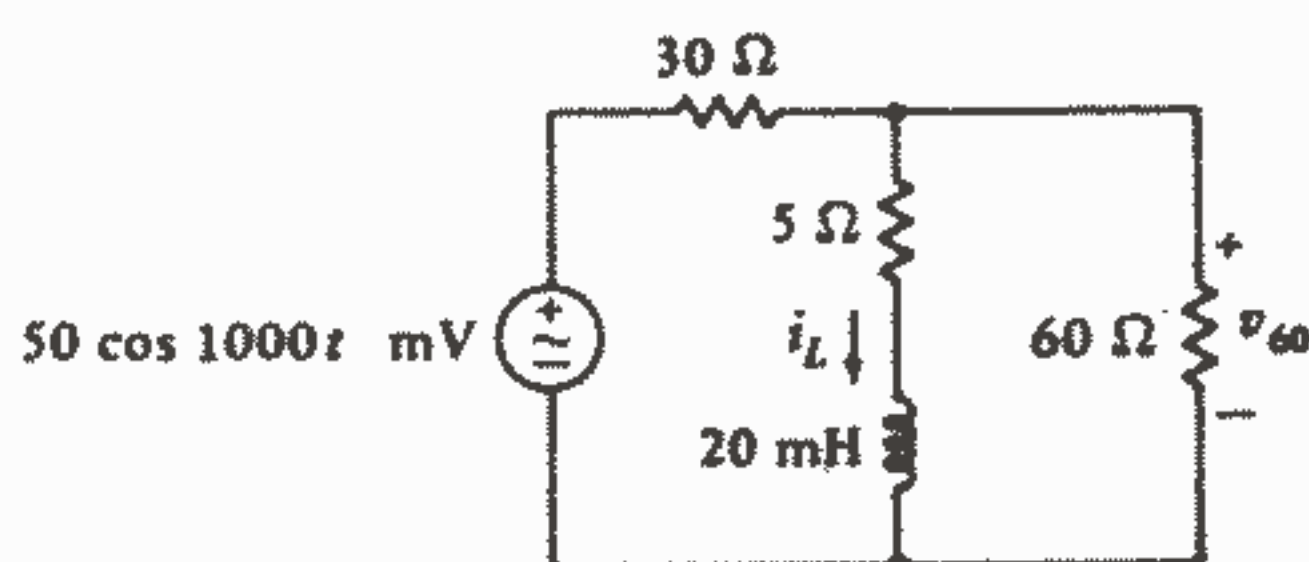
- ۳ - (a) یک تابع سینوسی 100 Hz دارای مقدار ماکزیمم مثبت 50 در لحظه $t = 0,1234 \text{ s}$ می باشد. آن را به صورت $A \cos \omega t + B \sin \omega t$ بیان کنید. (b) سینوس نشان داده شده در شکل ۸-۲b هر 2 میلی ثانیه از صفر عبور می کند و دارای مقدار 12 - در لحظه $t = 2,4 \text{ ms}$ می باشد. آن را به فرم $C \cos (\omega t + \phi)$ بیان کنید.
- ۴ - تمرین ذکر شده در متن را با جایگزینی مستقیم پاسخ جریان مفروض (۳)، $i(t) = A \cos(\omega t - \phi)$ ، در معادله دیفرانسیل $L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$ انجام دهید و نشان دهید که مقادیر به دست آمده برای θ, A با رابطه (۴) موافقت دارد.
- ۵ - در شکل ۸-۴ فرض کنید.

$$v_R = k \cos(500t + 45^\circ), \quad v_s = 20 \cos(500t + 100^\circ) \text{ V}$$

(علامت + در چپ)

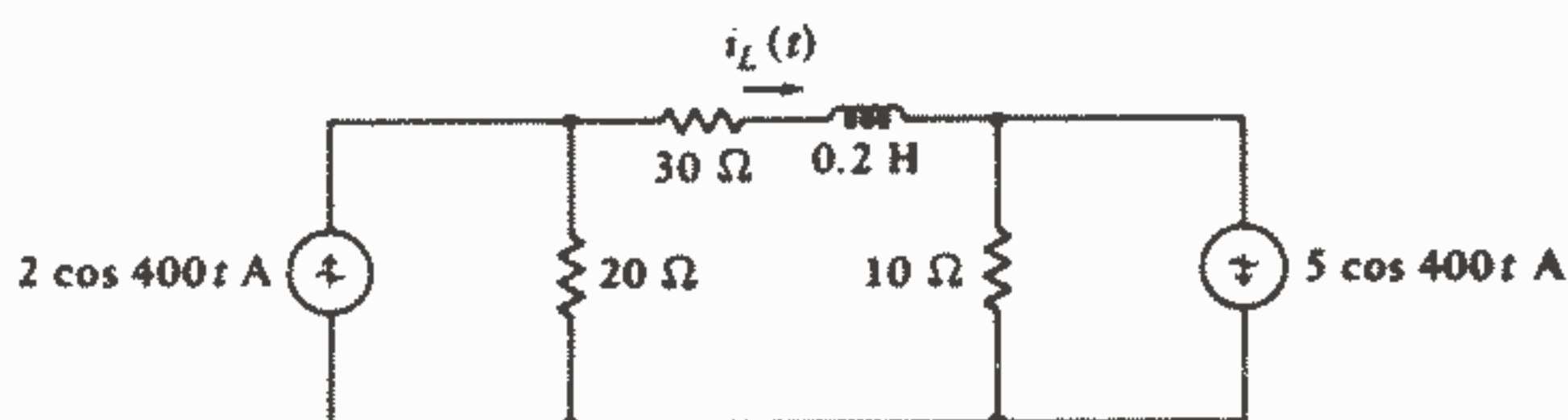
- ۶ - یک سلف $0,2 \text{ H}$ با یک مقاومت 10Ω و یک مقاومت 30Ω و یک منبع ولتاژ $v_s = 100 \cos 300t \text{ V}$ سری می باشد. دامنه ولتاژ دو سر اتصال سری سلف و مقاومت 10Ω را تعیین کنید.

- ۷ - یک منبع ولتاژ $v_s = 10 \cos(800t - 30^\circ)$ ، یک مقاومت 20Ω و یک سلف 50 mH به طور سری می باشند. دامنه ماکزیمم قدرت لحظه ای را که: (a) به وسیله منبع تولید می شود. (b) به وسیله مقاومت تلف می شود. (c) به وسیله سلف جذب می شود، پیدا کنید.
- ۸ - در مدار شکل ۸-۷ با استفاده از قضیه تونن: (a) i_L ، (b) v_L را پیدا کنید.



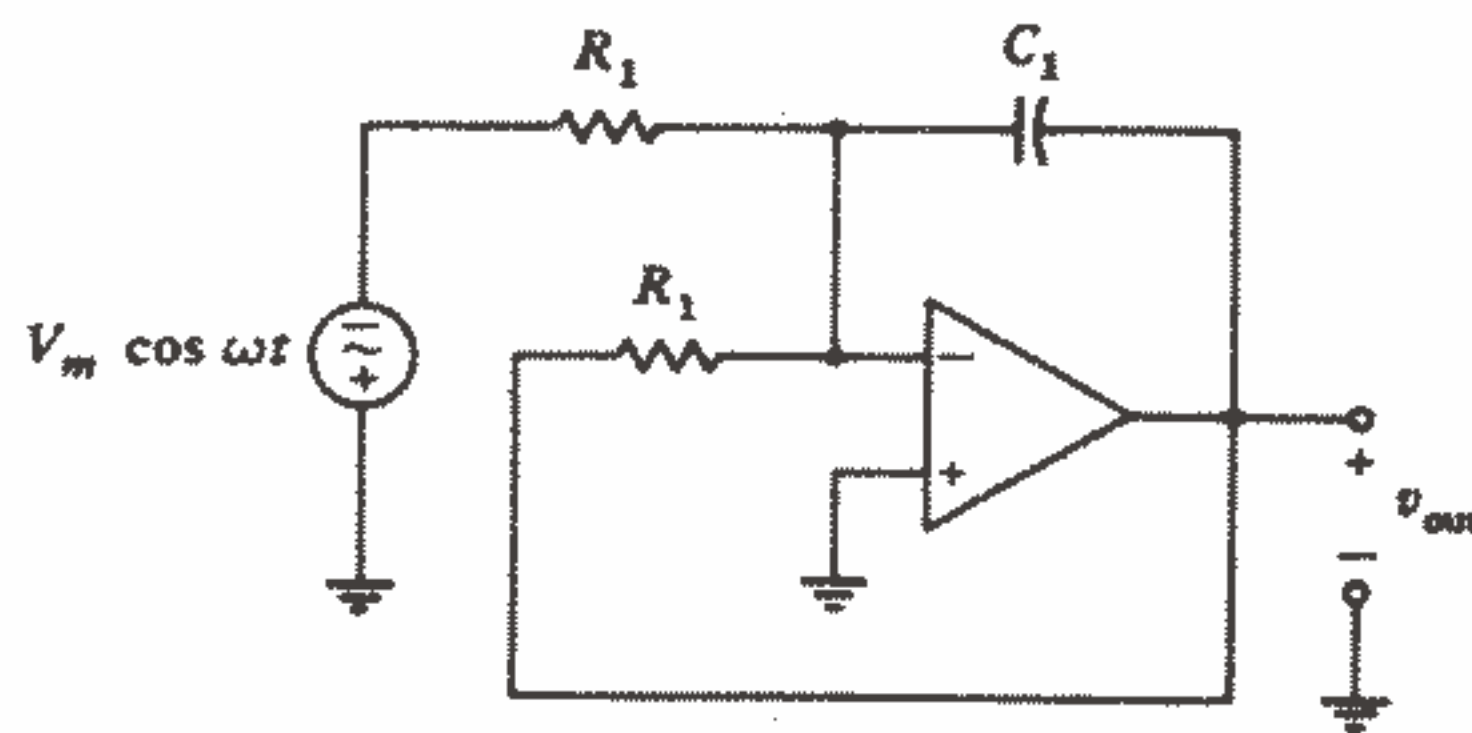
شکل ۸-۷: به مسئله ۸ و ۱۰ مراجعه کنید.

- ۹ - با استفاده متوالی از تبدیل منابع در مدار شکل ۸-۸، $i_L(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۸-۸: به مسائل ۹ و ۱۱ مراجعه کنید.

- ۱۰ - مقاومت 5Ω را در شکل ۷-۸ با یک منبع ولتاژ وابسته (علامت + در بالا) با مقدار $0.17V$ جایگزین کنید و مسئله ۸a را تکرار کنید.
- ۱۱ - منبع جریان سمت راست در شکل ۸-۸ با $5 \cos 200t$ جایگزین کنید و مسئله ۹ را تکرار کنید.
- ۱۲ - فرض کنید که op-amp در شکل ۹-۸ ایده آل است ($R_i = \infty$, $R_o = 0$, $A = \infty$). همچنین توجه داشته باشید که به ورودی انتگراتور دو سیگنال اعمال می‌شود، $-V_m \cos \omega t$ و v_{out} اگر حاصلضرب $R_1 C_1$ با نسبت L/R در مدار RL سری شکل ۴-۸ مساوی قرار داده شود، نشان دهید که v_{out} برابر است با ولتاژ دو سر R (علامت + در چپ) در آن مدار.



شکل ۹ - ۸: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

- ۱۳ - یک منبع ولتاژ $V_m \cos \omega t$ ، یک مقاومت R و یک خازن C همه با هم سری می‌باشند. (a) یک معادله انتگرالی بر حسب جریان حلقه i بنویسید و سپس با مشتق‌گیری از آن معادله دیفرانسیل مدار را به دست آورید. (b) فرم کلی مناسبی برای پاسخ اجباری $i(t)$ فرض کنید و آن را در معادله دیفرانسیل قرار دهید و فرم دقیق پاسخ اجباری را به دست آورید.

فصل ۹

مفهوم فیزور

۱ - ۹ مقدمه

در سرتاسر قسمتهای قبلی مطالعه‌مان درباره تحلیل مدار، تمام توجهمان را معطوف مدارهای مقاومتی کردیم. البته ممکن است به خاطر آوریم که اغلب به ما قول داده می‌شد که روشهایی که به مدارهای مقاومتی اعمال می‌کنیم بعدها در مورد مدارهای شامل سلف و خازن هم صادق خواهند بود. در این فصل شالوده‌ای را پی‌ریزی خواهیم کرد که این پیشگویی را قرین واقعیت سازد. روشی را برای بیان یک تابع تحریک سینوسی یا یک پاسخ سینوسی به وسیله نمادی از اعداد مختلط به نام تبدیل فیزور و با به‌طور مختصر «فیزور» وضع خواهیم کرد. که این چیزی نیست به جز یک عدد که با تعیین دامنه و زاویه فاز یک سینوس آن تابع سینوسی را درست مانند موقعی که به صورت یک تابع تحلیلی از زمان بیان شده باشد، مشخص می‌کند. اگر با فیزورها به جای مشتقات و انتگرالهای سینوسها کار کنیم، کار مهمی را در جهت ساده کردن تحلیل حالت پایدار سینوسی مدارهای RLC کلی، انجام داده‌ایم. این ساده‌سازی تا پایان این فصل کاملاً روشن خواهد شد.

استفاده از یک تبدیل ریاضی برای ساده کردن یک مسئله نباید ایده جدیدی برای ما باشد مثلاً همه ما با روش استفاده از لگاریتم برای ساده کردن ضرب و تقسیم در حساب آشنایی داریم. برای ضرب چند عدد در یکدیگر، ابتدا لگاریتم هر یک از این اعداد را به دست آوردیم و یا اینکه این اعداد را به فرم ریاضی دیگری «تبدیل» نمودیم که اکنون می‌توانیم آن عمل را به عنوان به دست آوردن «تبدیل لگاریتمی» بنامیم. سپس همه لگاریتمها را با هم جمع نمودیم تا لگاریتم حاصلضرب مطلوب به دست آید. و سرانجام آنتی لگاریتم (عملی که می‌توان آن را «تبدیل

معکوس» نامید) را به دست می آوریم که جواب ما همین آنتی لگاریتم می باشد. این راه حل ما را از حوزه اعداد معمولی به حوزه لگاریتمها برد و برگرداند.

مثالهای آشنای دیگر از عملیات تبدیل را می توان در بیانهای مختلف یک دایره به صورت یک معادله ریاضی، به صورت یک شکل هندسی بر یک صفحه مختصات و یا صرفاً به صورت یک مجموعه سه عددی (که عدد اول مختص x مرکز و عدد دوم مختص y مرکز و عدد سوم مقدار شعاع است) مشاهده نمود. هر یک از این سه بیان دقیقاً حاوی اطلاعات یکسانی است و اگر قواعد تبدیلات در هندسه تحلیلی تدوین شده باشد هیچ مشکلی در عبور از حوزه جبر به حوزه هندسه و یا به «حوزه سه تایی های مرتب» نخواهیم داشت.

۲-۹ تابع تحریک مختلط

اکنون آماده ایم تا درباره اعمال یک تابع تحریک مختلط (یعنی تابعی که یک قسمت حقیقی و یک قسمت موهومی داشته باشد) به یک شبکه الکتریکی فکر کنیم^۱ ممکن است عجیب به نظر آید اما در خواهیم یافت که استفاده از کمیتهای مختلط در تحلیل حالت پایدار سینوسی ما را به روشهایی رهنمون می شود که خیلی ساده تر از آنهایی است که شامل کمیتهای حقیقی خالص هستند. ما باید انتظار داشته باشیم که یک تابع تحریک مختلط تولید یک پاسخ مختلط بنماید و حتی می توانیم گمان کنیم که قسمت حقیقی تابع تحریک تولید قسمت حقیقی پاسخ را نموده در حالیکه قسمت موهومی تابع تحریک هم قسمت موهومی پاسخ را ایجاد خواهد کرد. هدف ما در این قسمت این است که ثابت کنیم (و یا حداقل نشان دهیم) که این گمانها صحیح می باشند. بیایید ابتدا مسئله را با عباراتی نسبتاً کلی بیان کنیم و روشی را که می توانیم به وسیله آن ادعایمان را برای ایجاد یک شبکه کلی و تحلیل آن به وسیله یک دسته معادله ثابت کنیم، ارایه نمائیم. در شکل ۹-۱ یک منبع سینوسی $V_m \cos(\omega t + \theta)$ (۱) به شبکه کلی وصل شده است



شکل ۹-۱: تابع تحریک سینوسی

$V_m \cos(\omega t + \theta)$ پاسخ سینوسی پایدار $I_m \cos(\omega t + \phi)$ را ایجاد می کند.

۱- در ضمیمه ۴ تعریف اعداد مختلط و روابط مربوطه و نیز توصیف عملیات حسابی بر روی اعداد مختلط آمده است. ضمناً اتحاد اولر و فرم نمایی و قطبی هم ذکر شده است.

(که به طور اختیاری آن را غیرفعال فرض کنیم تا بعداً استفاده از اصل جمع اثرها پیچیده نباشد). یک پاسخ جریان را در شاخه دیگری از شبکه باید تعیین کنیم.

پارامترهای ظاهر شده در معادله (۱) همگی کمیت‌های حقیقی هستند.

بحثی که در فصل ۸ درباره تعیین پاسخ ناشی از یک تابع تحریک سینوسی به وسیله فرض نمودن یک فرم سینوسی دلخواه با دامنه و فاز اختیاری به عمل آمد، نشان می‌دهد که می‌توان پاسخ را به صورت (۲) $I_m \cos(\omega t + \varphi)$ بیان نمود. یک تابع تحریک سینوسی همواره یک پاسخ اجباری سینوسی در یک مدار خطی ایجاد می‌کند.

حال بیایید مبنای زمانی خود را با انتقال فاز تابع تحریک به اندازه 90° ، شیفت دهیم و یا

لحظه $t = 0$ را عوض کنیم. بنابراین تابع تحریک عبارت خواهد بود از:

$$V_m \cos(\omega t + \varphi - 90^\circ) = V_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

که اگر آن را به همان مدار اعمال کنیم پاسخ زیر را ایجاد خواهد کرد:

$$I_m \cos(\omega t + \varphi - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

در مرحله بعدی باید از واقعیات فیزیکی کمی جدا شویم و یک تابع تحریک موهومی را هم به مدار اعمال کنیم (البته این تابع تحریک را در آزمایشگاه نمی‌توان ایجاد نمود ولی به طور ریاضی می‌توان آن را اعمال نمود).

به طور خیلی ساده می‌توانیم یک منبع موهومی را با ضرب کردن مقدار آن منبع، که در

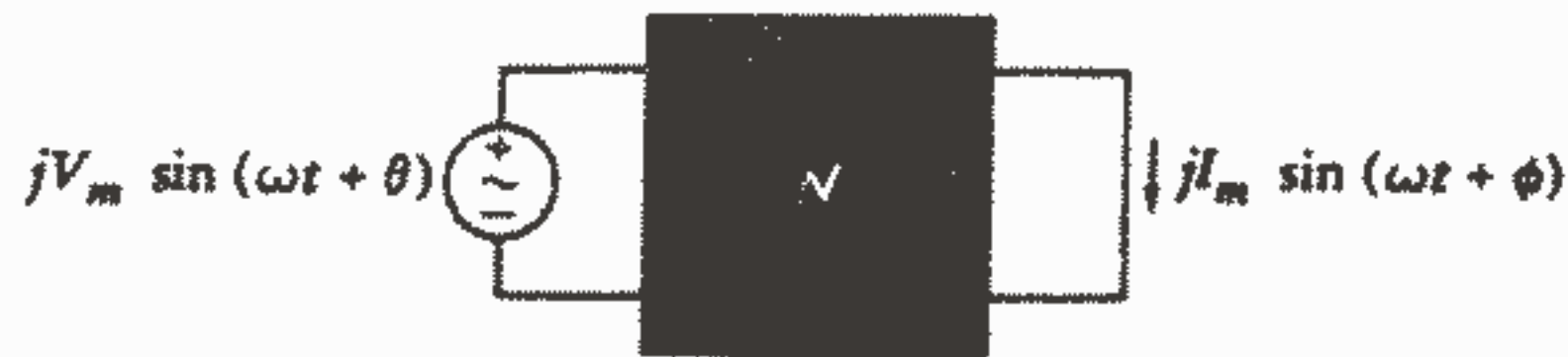
رابطه (۳) ظاهر شده است، در اپراتور موهومی ایجاد کنیم. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$jV_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

پاسخ چه خواهد بود؟ اگر ما مقدار منبع را دو برابر کرده بودیم، آنگاه اصل خطی بودن ایجاب می‌کرد که پاسخ هم دو برابر شود و به طور کلی اگر تابع تحریک را در مقدار ثابت K ضرب کنیم پاسخ هم در ثابت K ضرب خواهد شد و این واقعیت که این مقدار ثابت، اپراتور موهومی j می‌باشد موضوع فوق را نقض نمی‌کند و لولاینکه در تعریف و بحث قبلی مان درباره خطی بودن به طور اخص ثابت‌های مختلط را نگنجانده بودیم. اکنون به طور واقع بینانه‌تری می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که بحث ما اعداد مختلط را مستثنی نمی‌کرد و به طور کلی در مورد آنها هم صادق است. بنابراین پاسخ ناشی از منبع موهومی رابطه (۵) به صورت:

$$jI_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

می‌باشد، منبع موهومی و پاسخ آن در شکل ۲-۹ نشان داده شده است.



شکل ۲ - ۹: تابع تحریک سینوسی موهومی $jV_m \sin(\omega t + \theta)$ که در شبکه شکل ۱ - ۹ پاسخ سینوسی موهومی $jI_m \sin(\omega t + \phi)$ را ایجاد می‌کند.

همانطور که ملاحظه کردید ما یک منبع حقیقی اعمال کرده و یک پاسخ حقیقی به دست آورده‌ایم و همچنین یک منبع موهومی اعمال کرده و پاسخ موهومی به دست آورده‌ایم، حال می‌توانیم با استفاده از قضیه جمع آثار پاسخ ناشی از تابع تحریک مختلط را که مجموع توابع تحریک حقیقی و موهومی است به دست آوریم. البته کاربرد اصل جمع آثار به وسیله خطی بودن مدار کاملاً میسر است و بستگی به فرم توابع تحریک ندارد. بنابراین مجموع توابع تحریک (۱) و (۵) یعنی:

$$V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \quad (۷)$$

باید تولید پاسخی بنماید که مجموع (۲) و (۶) می‌باشد، یعنی:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \quad (۸)$$

منبع و پاسخی مختلط را می‌توان به طور ساده‌تر با استفاده از اتحاد اولر بیان نمود. بنابراین منبع معادله (۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (۹)$$

و همچنین پاسخ (۸) عبارت خواهد بود از:

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} \quad (۱۰)$$

منبع و پاسخ مختلط در شکل ۳-۹ نشان داده شده است.

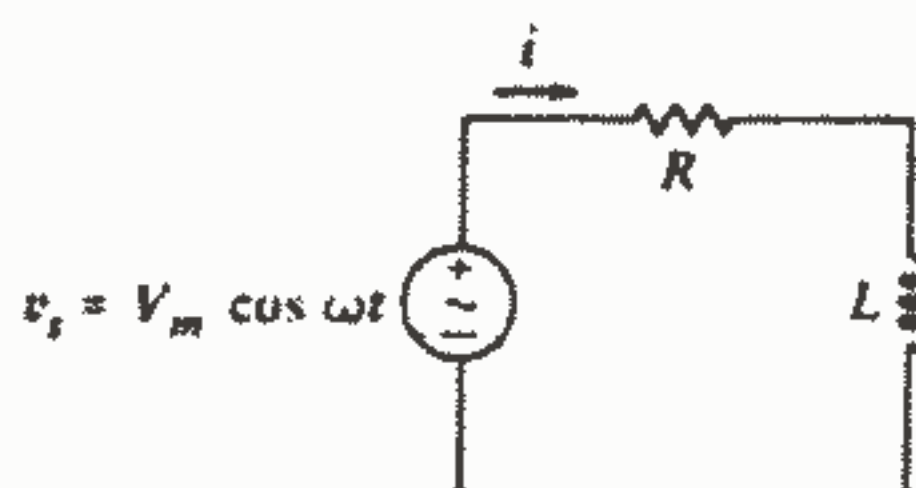


شکل ۳ - ۹: تابع تحریک مختلط $V_m e^{j(\omega t + \theta)}$ پاسخ مختلط $I_m e^{j(\omega t + \phi)}$ را در مدار شکل ۱ - ۹ تولید می‌کند.

چند نتیجه مهم از مثال کلی فوق به دست می آید یک تابع تحریک حقیقی، موهومی و یا مختلط به ترتیب تولید یک پاسخ حقیقی، موهومی و یا مختلط می کند، به علاوه یک تابع تحریک مختلط را با استفاده از اتحاد اولر و قضیه جمع آثار می توان به صورت مجموع یک تابع تحریک حقیقی و موهومی دانست که قسمت حقیقی پاسخ مختلط به وسیله قسمت حقیقی تابع تحریک مختلط و قسمت موهومی آن هم به وسیله قسمت موهومی تابع تحریک تولید می شود.

به جای اینکه یک تابع تحریک حقیقی را برای به دست آوردن پاسخ حقیقی مطلوب اعمال کنیم، تابع تحریک مختلطی را که قسمت حقیقی آن پاسخ حقیقی مورد نظر باشد، به کار می بریم. به این ترتیب معادلات انتگرال دیفرانسیلی توصیف کننده پاسخ حالت پایدار یک مدار تبدیل به معادلات جبری ساده می گردند.

اجازه دهید این ایده را بر روی مدار سری RL ساده در شکل ۴-۹ پیاده کنیم. در این مدار منبع حقیقی $V_m \cos \omega t$ اعمال شده است و پاسخ حقیقی $i(t)$ مطلوب می باشد.



شکل ۴ - ۹: یک مدار ساده در حالت پایدار سینوسی که به وسیله اعمال یک تابع تحریک مختلط مورد تحلیل قرار می گیرد.

ابتدا تابع مختلطی را که با استفاده از اتحاد اولر، تابع تحریک حقیقی را به دست می دهد، ایجاد می کنیم. چون $\cos \omega t = \operatorname{Re} e^{j\omega t}$ پس منبع مختلط مورد نظر عبارت است از: $V_m e^{j\omega t}$ پاسخ مختلط حاصله را بر حسب یک دامنه مجهول I_m و یک زاویه فاز مجهول ϕ بیان می کنیم: $I_m e^{j(\omega t + \phi)}$ معادله دیفرانسیل این مدار را می نویسیم: $Ri + L \frac{di}{dt} = v_s$ و روابط مختلط مربوط به i, v_s را در آن داخل می کنیم:

$$RI_m e^{j(\omega t + \phi)} + L \frac{d}{dt} (I_m e^{j(\omega t + \phi)}) = V_m e^{j\omega t}$$

پس از محاسبه مشتق داریم:

$$RI_m e^{j(\omega t + \phi)} + j\omega LI_m e^{j(\omega t + \phi)} = V_m e^{j\omega t}$$

حال برای تعیین ϕ, I_m طرفین معادله را بر عامل مشترک $e^{j\omega t}$ تقسیم می‌کنیم:

$$RI_me^{j\phi} + j\omega LI_me^{j\phi} = V_m \quad (11)$$

از سمت چپ معادله فاکتورگیری می‌کنیم:

$$I_me^{j\phi}(R + j\omega L) = V_m$$

و پس از مرتب کردن داریم:

$$I_me^{j\phi} = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

حال اگر سمت راست معادله را به صورت فرم نمایی یا قطبی نمایش دهیم می‌توانیم ϕ, I_m را

تعیین کنیم:

$$I_me^{j\phi} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(-\tan^{-1}(\omega L/R))} \quad (12)$$

$$\rightarrow I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

پاسخ مختلط به وسیله رابطه (۱۲) به دست می‌آید و چون ϕ, I_m به سادگی تعیین می‌شوند، می‌توانیم رابطه مربوط به $i(t)$ را فوراً بنویسیم. با استفاده از یک روش دشوار می‌توانیم پاسخ حقیقی $i(t)$ را با وارد کردن عامل $e^{j\omega t}$ در طرفین رابطه (۱۲) و به دست آوردن قسمت حقیقی آن با استفاده از فرمول کارساز اولر، پیدا کنیم. بنابراین داریم:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right)$$

که با پاسخ به دست آمده برای همین مدار در فصل قبلی (معادله ۴-۸) موافقت دارد. با وجود اینکه یک مسئله حالت پایدار سینوسی را با اعمال یک تابع تحریک مختلط و به دست آوردن یک پاسخ مختلط با موفقیت حل کرده‌ایم، اما هنوز مزیت نمایش به صورت مختلط را به طور تمام و کمال ارایه نکرده‌ایم. برای انجام این کار باید مفهوم منبع مختلط را یک مرحله فراتر ببریم و کمیتی به نام «فیزور» را تعریف کنیم.

تمرین

۱-۹. (اگر کسی در حل این تمرین مشکل داشته باشد، باید ضمیمه ۴ را مطالعه کند).

در قسمتهای (a)، (b) محاسبات را انجام داده و نتیجه را به فرم قائم بیان کنید:

(a) $5e^{-j100^\circ} - \angle 35^\circ$ (b) $\frac{1}{j3} + [4/3 - j2]$ در حالات (c)، (d) محاسبات را

انجام داده و نتیجه را به فرم قطبی بیان کنید: (c) $j8 - 2/5 \angle -120^\circ$ (d) $(4 + j3)e^{j(200t - 50^\circ)}$ در لحظه $t = 4 \text{ ms}$.

جواب: $5 \angle 132.7^\circ$, $10.24 \angle -97^\circ$, $0.923 + j0.282$, $7.42 + j9.51$

۲-۱. با فرض اینکه از قرارداد علامت غیرفعال استفاده شده باشد در موارد زیر کمیت مختلط کل را به دست آورید: (a) جریان حاصله از اعمال ولتاژ $7e^{j(500t - 50^\circ)}$ به مدار موازی متشکل از مقاومت 20Ω و خازن 0.1 mF . (b) ولتاژ حاصله از اعمال جریان مختلط $5e^{j(500t + 90^\circ)} \text{ A}$ به اتصال سری مقاومت 3Ω و سلف 2 mH .

جواب: $15.81e^{j(500t - 108.4^\circ)} \text{ V}$, $4/24e^{j(500t - 50^\circ)} \text{ A}$

۳-۹ فیزور

یک ولتاژ یا جریان سینوسی در فرکانس مشخصی را می توان فقط با دو پارامتر (یک دامنه و یک زاویه فاز) مشخص نمود. فرم مختلط ولتاژ یا جریان را هم با همین دو پارامتر می توان مشخص نمود. مثلاً فرم سینوسی فرض شده برای پاسخ جریان در مثال فوق عبارت بود از:

$$I_m \cos(\omega t + \phi)$$

و نمایش این جریان به فرم مختلط عبارت است از: $I_m e^{j(\omega t + \phi)}$

که اگر ϕ, I_m تعیین شوند، جریان دقیقاً مشخص می شود. در هر مدار خطی که در حالت پایدار سینوسی در فرکانس منفرد ω کار می کند، هر جریان یا ولتاژ را می توان با دانستن دامنه و زاویه فاز آن، کاملاً مشخص نمود. به علاوه، فرم مختلط هر ولتاژ و جریان حاوی عامل $e^{j\omega t}$ یکسانی خواهد بود که این عامل زائد می باشد زیرا برای همه کمیتها یکسان است و اطلاعات مفیدی را در بر ندارد. البته مقدار فرکانس را می توان با بررسی یکی از این عاملها تشخیص داد، اما بسیار ساده تر است که مقدار فرکانس را کنار مدار بنویسیم و برای همیشه از اطلاعات اضافی و زائد در سرتاسر مسئله اجتناب کنیم. بنابراین می توانیم منبع ولتاژ و پاسخ جریان این مثال را با بیان خلاصه آنها به شکل زیر ساده نماییم: $V_m e^{j\omega t}$ یا V_m

این کمیتها را معمولاً به عوض فرم نمایی به صورت فرم قطبی می نویسند تا هم راحت تر باشد و هم در وقت صرفه جویی شود. بنابراین ولتاژ منبع $v(t) = V_m \cos \omega t$ را به صورت فرم مختلط $V_m \angle 0^\circ$ و پاسخ جریان $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ به فرم $I_m \angle \phi$ می باشد. این نمایش مختلط اختصاری را فیزور^۱ می نامند. بیایید مراحل را که به وسیله آن یک

۱- برخلاف تصور عامه، فیزور به وسیله کاپیتان کرک ابداع نشده است.

جریان یا ولتاژ سینوسی حقیقی به فرم فیزور تبدیل می شود، مرور کنیم و سپس قادر خواهیم بود فیزور را به طور روشن تری تعریف نموده و نمادی برای نمایش آن وضع کنیم.

جریان سینوسی حقیقی $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ به صورت قسمت حقیقی یک کمیت مختلط با استفاده از اتحاد اولر تعریف می شود، یعنی: $i(t) = \text{Re}(I_m e^{j(\omega t + \phi)})$ پس با حذف Re جریان مذکور به صورت یک کمیت مختلط بیان می شود که یک مؤلفه موهومی هم بدون اینکه بر مؤلفه حقیقی تأثیر داشته باشد به آن اضافه شده است. اختصار بیشتر با حذف عامل $e^{j\omega t}$ حاصل می شود:

$$I = I_m e^{j\phi}$$

که آن را هم به فرم قطبی می نویسیم: $I = I_m / \phi$ این نمایش اختصاری مختلط را فیزور می نامیم که چون کمیتی است مختلط، با حروف چاپی ضخیم و پررنگ نمایش داده می شود. برای نمایش فیزوری یک کمیت الکتریکی از حروف بزرگ استفاده می شود زیرا فیزور یک تابع لحظه ای از زمان نیست و فقط حاوی اطلاعات مربوط به دامنه و فاز می باشد. ما این تفاوت را با نامیدن $i(t)$ به عنوان نمایش در حوزه زمان و I به عنوان نمایش حوزه فرکانس مشخص می کنیم. باید توجه داشت که بیان حوزه فرکانسی یک ولتاژ یا جریان به طور صریح شامل فرکانس نمی باشد، البته می توانیم اینطور فکر کنیم که فرکانس به قدری در حوزه فرکانس اساسی می باشد که نیازی به ذکر آن نیست و به خاطر واضح و مسلم بودن این واقعیت دیگری نیازی به ذکر فرکانس نیست و از نوشتن آن به طور صریح خودداری می شود.^۱

روندی را که به وسیله آن $i(t)$ را به I تبدیل می کنیم، تبدیل فیزوری از حوزه زمان به حوزه فرکانس نامیده می شود. مراحل ریاضی تبدیل از حوزه زمان به حوزه فرکانس به شرح زیر می باشند:

- ۱ - تابع سینوسی $i(t)$ داده شده در حوزه زمان را به صورت یک تابع کسینوس با یک زاویه فاز بنویسید. مثلاً، $\sin \omega t$ را باید به صورت $\cos(\omega t - 90^\circ)$ نوشت.
- ۲ - موج کسینوسی را با استفاده از اتحاد اولر به صورت قسمت حقیقی یک کمیت مختلط بیان کنید.

۳ - Re را حذف کنید.

۴ - $e^{j\omega t}$ را حذف کنید.

۱ - همانگونه که در این کشور، پستهای محلی بسیار قلیلی وجود دارند که در آدرس خود «U.S.A» را ذکر کرده باشند.

در عمل بسیار ساده تر است که مستقیماً از مرحله اول به جواب جهش کنیم (با استخراج دامنه و فاز موج سینوسی از رابطه حوزه زمان آن). مراحل چهار گانه فوق فقط به جهت تکمیل شدن بحث از نظر تکنیکی، ارائه شده است. به عنوان یک مثال، ولتاژ حوزه زمان $v(t) = 100 \cos(100t - 30^\circ)$ را به حوزه فرکانس تبدیل می کنیم. فرم حوزه زمان خودش به شکل موج کسینوسی با یک زاویه فاز می باشد و تبدیل مفصل از حوزه زمان به حوزه فرکانس با گرفتن قسمت حقیقی از نمایش مختلط شروع می شود:

$$v(t) = \text{Re}(100e^{j(100t - 30^\circ)})$$

و سپس Re ، $e^{j\omega t}$ را حذف می کنیم: $V = 100 \angle -30^\circ$

البته بسیار ساده تر است که از فرم حوزه زمان مقادیر ۱۰۰ و -30° را مشخص کنیم. به طریق مشابه، جریان حوزه زمان $i(t) = 5 \sin(377t + 15^\circ)$ به صورت فیزوری $I = 5 \angle 15^\circ$ در می آید.

قبل از اینکه تحلیل مدارهای حالت پایدار سینوسی را مورد بررسی قرار دهیم، لازم است که تبدیل معکوس از حوزه فرکانس به حوزه زمان را بیاموزیم. روش کار دقیقاً معکوس مراحل است که در بالا آمده است. بنابراین مراحل دقیق تبدیل از حوزه فرکانس به حوزه زمان به شرح زیر است:

۱ - جریان فیزوری I را که در حوزه فرکانس به صورت قطبی داده شده است به فرم مختلط نمایی بنویسید.

۲ - حاصل را در عامل $e^{j\omega t}$ ضرب کنید.

۳ - اپراتور Re را به کار ببرید.

۴ - فرم حوزه زمان را با استفاده از اتحاد اولر به دست آورید. رابطه کسینوسی به دست آمده

را، در صورت تمایل، با اضافه نمودن 90° به آرگومان می توان به صورت سینوسی در آورد.

یک بار دیگر یاد آور می شویم که ما باید قادر باشیم بدون مراحل ریاضی، میان بر زده و با

استفاده از دامنه و زاویه فاز فرم قطبی، رابطه حوزه زمان را به دست آوریم. بنابراین اگر ولتاژ

فیزوری $v = 115 \angle -45^\circ$ را داشته باشیم می توانیم مستقیماً معادل حوزه زمان آن را به صورت

$v(t) = 115 \cos(\omega t - 45^\circ)$ به دست آوریم و همین ولتاژ به صورت موج سینوسی عبارت است

از: $v(t) = 115 \sin(\omega t + 45^\circ)$

قبل از کاربرد فیزورها در تحلیل مدارهای حالت پایدار سینوسی می توانیم با مراجعه به مثال

مدار RL سری مرور سریعی بر روشهای مذکور داشته باشیم. معادله رابطه (۱۱) را یک بار دیگر

می‌نویسیم:

$$RI_m e^{j0} + j\omega L I_m e^{j0} = V_m$$

اگر برای جریانها از فیزور $I = i_m / \phi$ و برای ولتاژ از فیزور $V = v_m / \angle 0^\circ$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$RI + j\omega L I = V$$

$$(R + j\omega L) I = V \quad \text{و یا: (۱۳)}$$

که این معادله یک معادله مختلط جبری می‌باشد که در آن ولتاژ و جریان به فرم فیزیوری بیان شده‌اند. این معادله فقط کمی پیچیده‌تر از قانون اهم برای یک مقاومت منفرد می‌باشد. بار دیگر که خواستیم این مدار را تحلیل کنیم، با معادله (۱۳) کارمان را آغاز خواهیم کرد.

تمرین:

۳-۹. هر یک از جریانهای زیر را به صورت یک فیزور بیان کنید:

$$6 \sin \omega t - 2 \cos \omega t \text{ A (b)}, 8 \sin(\omega t - 20^\circ) \text{ A (a)}$$

$$4 \cos(\omega t - 80^\circ) - 3 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ (c)}$$

$$\text{جواب: } 1.564 \angle 121.0^\circ \text{ A}, 6.32 \angle -108.4^\circ, 8 \angle 110^\circ$$

۴-۹. اگر $f = 60 \text{ Hz}$ ، مقدار لحظه‌ای ولتاژی را که به صورت فیزیوری زیر نمایش داده

شده است در لحظه $t = 1 \text{ ms}$ پیدا کنید:

$$50 + 80 \angle 70^\circ \text{ V (c)}, 80 + j75 \text{ V (b)}, 120 \angle 0^\circ \text{ V (a)}$$

$$\text{جواب: } 111.6 \text{ V}, 46.8, 44.3$$

۴-۹- روابط فیزیوری برای C, L, R

اکنون که قادر به تبدیل از حوزه زمان به حوزه فرکانس و برعکس گشته‌ایم، ساده کردن تحلیل مدارات حالت پایدار سینوسی را با معرفی روابط فیزیوری ولتاژ و جریان برای هر یک از سه عنصر غیرفعال شروع می‌کنیم. این کار را با معادله تعریف کننده هر عنصر آغاز نموده و رابطه حوزه زمان آن را نوشته و سپس جریان و ولتاژ را به صورت کمیت‌های مختلط در نظر خواهیم گرفت. پس از حذف $e^{j\omega t}$ از طرفین معادله، رابطه مطلوب بین فیزور جریان و فیزور ولتاژ ظاهر خواهد گشت.

ساده ترین حالت مربوط به مقاومت می باشد، که طبق شکل ۵a - ۹ معادله تعریف کننده آن عبارت است از:

$$v(t) = Ri(t) \quad (14)$$

حال ولتاژ مختلط را به کار می بریم:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = V_m \cos(\omega t + \theta) + j V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (15)$$

و فرض می کنیم که پاسخ جریان مختلط به صورت زیر باشد:

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} = I_m \cos(\omega t + \phi) + j I_m \sin(\omega t + \phi) \quad (16)$$

و سپس خواهیم داشت:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = R I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

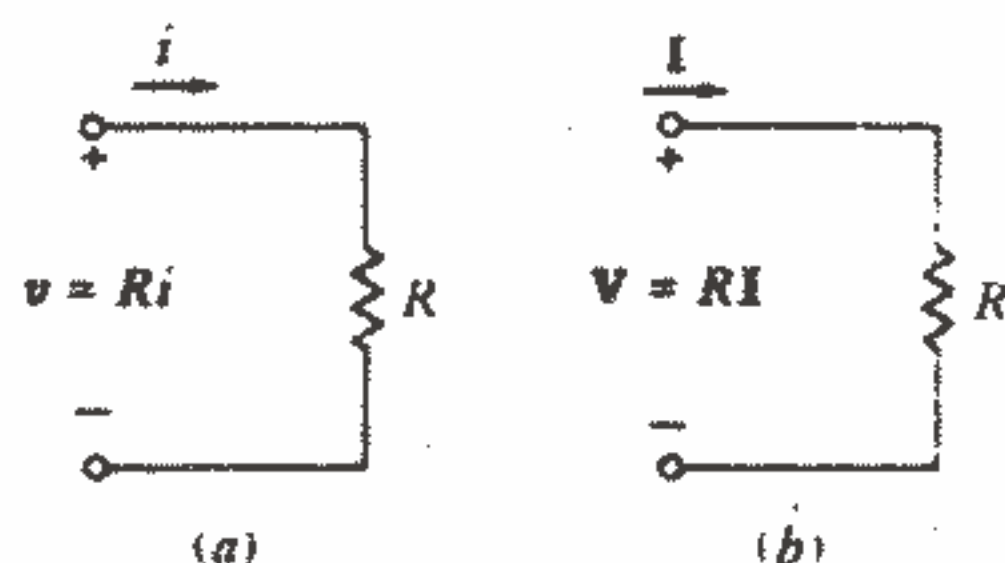
پس از تقسیم طرفین بر $e^{j\omega t}$ (و یا حذف $e^{j\omega t}$ از دو طرف)، خواهیم داشت:

$$V_m e^{j\theta} = R I_m e^{j\phi}$$

و یا به فرم قطبی: $V_m \angle \theta = R I_m \angle \phi$ اما $I_m \angle \phi$ ، $V_m \angle \theta$ صرفاً بیان کننده فیزورهای ولتاژ و جریان I, V می باشند، بنابراین داریم:

$$\mathbf{V} = R \mathbf{I} \quad (17)$$

رابطه ولتاژ - جریان یک مقاومت در حالت فیزیوری دارای همان شکل رابطه ولتاژ جریان در حوزه زمان می باشد. معادله تعریف کننده در حالت فیزیوری در شکل ۵b - ۹ نشان داده شده است.



شکل ۵ - ۹: یک مقاومت و ولتاژ و جریان مربوطه آن در: (a)

حوزه زمان، (b) حوزه فرکانس. $V = RI$

تساوی زاویه های ϕ, θ مشهود است و در نتیجه جریان و ولتاژ هم فاز می باشند. به عنوان مثالی برای کاربرد روابط حوزه زمان و فرکانس، ولتاژ

$8 \cos(100t - 50^\circ) \text{ V}$ را در دو سر یک مقاومت 4Ω در نظر می‌گیریم. در حوزه زمان جریان عبارت است از:

$$i(t) = v(t)/R = 2 \cos(100t - 50^\circ)$$

فرم فیزیکی همان ولتاژ عبارت است از: $8 \angle -50^\circ \text{ V}$ و بنابراین داریم:

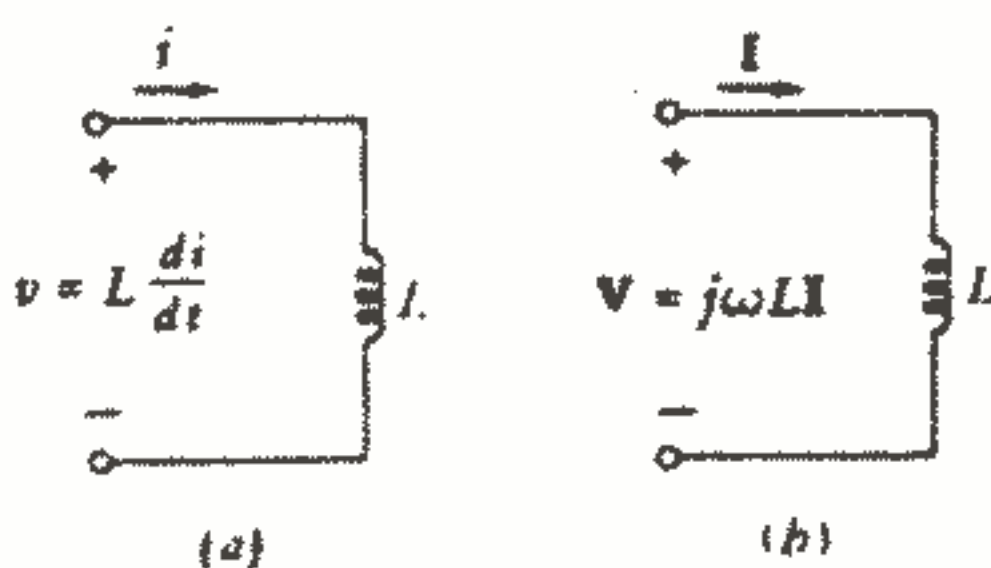
$$I = \frac{V}{R} = 2 \angle -50^\circ \text{ A}$$

اگر همین رابطه را به حوزه زمان برگردانیم، بدیهی است که همان رابطه قبلی برای جریان به دست می‌آید.

بدیهی است که تحلیل یک مدار مقاومتی در حوزه زمان هیچ گونه صرفه جویی در وقت و کار ارائه نمی‌کند و در واقع در اینگونه مدارها به جای اینکه یک بار تبدیل به حوزه فرکانس انجام داده و پس از حل مسئله دوباره به حوزه زمان برگردیم، بهتر است از همان ابتدا مسئله را در حوزه زمان حل کنیم. این امر در مورد مدارهایی که علاوه بر مقاومت شامل یک سلف و یا یک خازن هم هستند صادق نیست مگر اینکه پیچیدگی مسئله استفاده از یک کامپیوتر دیجیتال را ایجاب کند.

حال بیایید به سلف پردازیم. مدار حوزه زمان در شکل ۹-۶a نشان داده شده است و معادله تعریف کننده آن در حوزه زمان عبارت است از:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (18)$$



شکل ۹ - ۶: یک سلف و ولتاژ جریان آن: (a) در حوزه زمان

(b) در حوزه فرکانس $V = j\omega LI$

بعد از جایگذاری معادله ولتاژ مختلط (۱۵) و معادله جریان مختلط (۱۶) در معادله (۱۸)، خواهیم داشت:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = L \frac{d}{dt} (I_m e^{j(\omega t + \phi)})$$

و پس از محاسبه مشتق داریم:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = j\omega L I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

حال در معادله فوق عامل $e^{j\omega t}$ را حذف می‌کنیم:

$$V_m e^{j\theta} = j\omega L I_m e^{j\phi}$$

و به این ترتیب رابطه فیزوری مطلوب به دست می‌آید:

$$V = j\omega L I \quad (19)$$

ملاحظه می‌کنیم که معادله دیفرانسیل حوزه زمان یعنی معادله (۱۸) تبدیل به یک معادله جبری در حوزه فرکانس شده است. رابطه فیزوری در شکل ۹-۶b نشان داده شده است. توجه داشته باشید که زاویه عامل $j\omega L$ دقیقاً $+90^\circ$ است و در نتیجه I باید در یک سلف به اندازه 90° عقب‌تر از V باشد.

به منظور تجسم و توضیح رابطه فیزوری ولتاژ $V = 8 \angle -50^\circ$ رادرفرکانس $\omega = 100 \text{ rad/s}$ به یک سلف $4H$ وصل می‌کنیم. از رابطه (۱۹) جریان فیزوری عبارت است از:

$$I = \frac{V}{j\omega L} = \frac{8 \angle -50^\circ}{j100(4)} = -j0.02 \angle -50^\circ \rightarrow I = 0.02 \angle -140^\circ \text{ A}$$

این پاسخ را می‌توانیم در حوزه زمان هم به سادگی به دست آوریم ولی اگر یک مقاومت و یا خازن هم با سلف مورد نظر ترکیب شود مسئله در حوزه زمان به سادگی حل نخواهد شد. آخرین عنصری که باید مورد بررسی قرار دهیم خازن می‌باشد. تعریف خازن به صورت رابطه آشنای زیر می‌باشد:

$$i(t) = C dv(t)/dt \quad (20)$$

باز هم اگر بخواهیم رابطه معادل رابطه (۲۰) را در حوزه فرکانس به دست آوریم، $i(t)$ و $v(t)$ را با کمیت‌های مختلط (۱۵) و (۱۶) جایگزین می‌کنیم و پس از محاسبه مشتق و حذف $e^{j\omega t}$ خواهیم داشت:

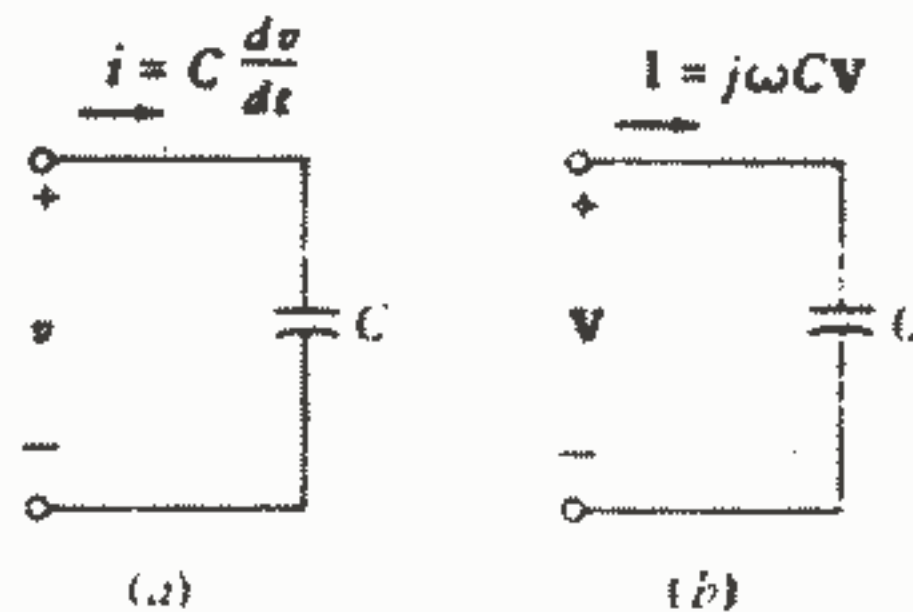
$$I = j\omega C V \quad (21)$$

بنابراین در خازن I به اندازه 90° از V جلوتر است. البته این مطلب به معنای این نیست که پاسخ جریانی به اندازه یک ربع پریود زودتر از ولتاژ ایجاد کننده آن وجود دارد! ما در حال مطالعه پاسخ حالت پایدار هستیم و در می‌یابیم که ما کزیمم جریان حاصله به وسیله ولتاژ فزاینده 90° زودتر از ما کزیمم ولتاژ واقع می‌شود.

اگر ولتاژ فیزوری $V = 8 \angle -50^\circ$ به یک خازن $4F$ در فرکانس $\omega = 100 \text{ rad/s}$ اعمال

شود، جریان فیزیوری عبارت خواهد بود از: $I = 3200 \angle 40^\circ / 8 \angle -50^\circ = 3200 \angle 90^\circ$ A دامنه جریان به طور اغراق آمیزی بزرگ است اما باید توجه داشت که خازن مورد نظر هم دارای مقدار بزرگ و غیرواقعی می باشد، به طوریکه اگر بخواهیم یک خازن 4 F را با دو صفحه تخت که به فاصله 1 mm با عایق هوا مقابل هم قرار گرفته باشند بسازیم، هر صفحه باید دارای مساحتی معادل 85000 برابر یک میدان فوتبال باشد.

نمایش حوزه زمان و حوزه فرکانس در شکلهای ۹-۷a,b مقایسه شده اند.



شکل ۹-۷: (a) روابط حوزه زمانی و (b) روابط حوزه فرکانس بین ولتاژ و جریان خازن.

تاکنون روابط $V-I$ را برای هر سه عنصر غیرفعال به دست آورده ایم و این نتایج را در جدول ۹-۱ خلاصه کرده ایم که روابط حوزه زمان $v-i$ و حوزه فرکانس $V-I$ در ستونهای مجاور درج شده اند. همه معادلات فیزیوری، جبری و خطی می باشند و روابط مربوط به سلف و خازن شباهت زیادی به قانون اهم دارند که ما آنها را به همان ترتیبی که قانون اهم را به کار می بریم، مورد استفاده قرار خواهیم داد.

جدول ۹-۱: مقایسه و خلاصه ای از روابط بین v و i در حوزه زمان و V و I در حوزه فرکانس برای R و L و C .

Time domain		Frequency domain	
	$v = Ri$	$V = RI$	
	$v = L \frac{di}{dt}$	$V = j\omega LI$	
	$v = \frac{1}{C} \int i dt$	$V = \frac{1}{j\omega C} I$	

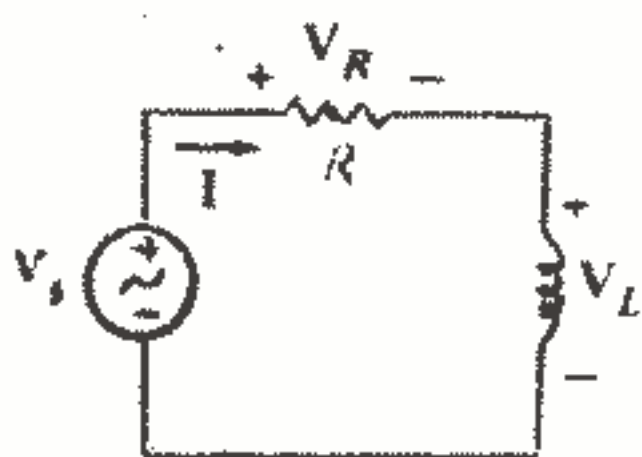
قبل از این کار باید نشان دهیم که فیزورها در دو قانون کیرشوف صدق می کنند. قانون ولتاژ کیرشوف در حوزه زمان عبارت است از:

$$v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_N(t) = 0$$

حال با استفاده از اتحاد اولر هر ولتاژ حقیقی را با ولتاژ مختلطی که دارای همان قسمت حقیقی باشد جایگزین می کنیم و پس از حذف $e^{j\omega t}$ خواهیم داشت:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n = 0$$

به طریق مشابهی می توان مطلب فوق را در مورد قانون جریان کیرشوف هم نشان داد. حال بیایید مدار سری RL را که قبلاً چندین بار مورد بررسی قرار داده ایم، به طور خلاصه مرور کنیم. این مدار در شکل ۸-۹ نشان داده شده است و یک جریان فیزیوری و چند ولتاژ فیزیوری مشخص شده اند. ما می توانیم پاسخ مطلوب مان را (یک جریان در حوزه زمان) ابتدا با پیدا کردن جریان فیزیوری، به دست آوریم. روش کار مشابه چیزی است که در تحلیل اولین مدار تک حلقه ای مقاومتی به کار بردیم.



شکل ۸-۹: مدار RL سری با یک منبع ولتاژ فیزیوری.

با استفاده از قانون ولتاژ کیرشوف داریم:

$$V_R + V_L = V_s$$

و با توجه به روابط $V-I$ که جدیداً برای عناصر به دست آوردیم، خواهیم داشت:

$$RI + j\omega L I = V_s$$

پس جریان فیزیوری را بر حسب ولتاژ منبع V_s به دست می آوریم:

$$I = V_s / R + j\omega L$$

حال دامنه ولتاژ را V_m و زاویه فاز را 0° فرض می کنیم، بنابراین داریم:

$$I = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R + j\omega L}$$

پس جریان فوق را ابتدا به فرم قطبی می نویسیم:

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

و پس از طی مراحل آشنای ذکر شده در قبل، به سادگی می‌توانیم همان نتایجی را که در قسمت ۳-۸ و در معادله (۴) با مراحل سخت‌تری به دست آمد، کسب کنیم.

تمرین

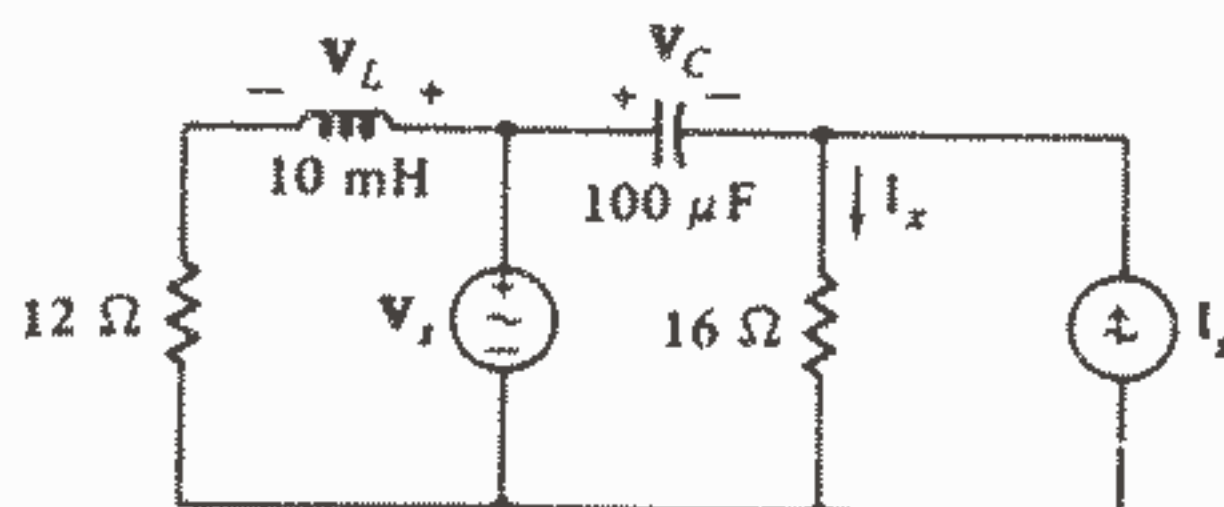
۵-۹- در شکل ۹-۹ فرض کنید،

$\omega = 800 \text{ rad/s}$ ، $V_L = 66 \angle 57^\circ \text{ V}$ ، $V_C = 50 \angle -85^\circ \text{ V}$ و سپس مقادیر زیر را پیدا

کنید:

V_s (a) ، I_s (b) ، $i_x(t)$ (c)

جواب: $119.0 \angle 0.7^\circ \text{ V}$ ، $4.27 \angle 41.9^\circ \text{ V}$ ، $7.85 \cos(800t + 24.1^\circ) \text{ A}$



شکل ۹-۹: به تمرین ۵-۹ مراجعه کنید.

۵-۹-۱ امپدانس

روابط ولتاژ-جریان برای سه عنصر غیرفعال در حوزه فرکانس (با فرض برقرار بودن

قرارداد علامت غیرفعال) عبارتند از:

$$V = RI \quad V = j\omega LI \quad V = \frac{I}{j\omega C}$$

اگر این معادلات را به صورت نسبت ولتاژ به جریان فیزیوری بنویسیم:

$$\frac{V}{I} = R \quad \frac{V}{I} = j\omega L \quad \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

در می‌یابیم که این نسبتها در مورد سلف و خازن توابع ساده‌ای از مقدار عنصر و فرکانس می‌باشند. ما با این نسبتها درست مانند مقاومت رفتار می‌کنیم به جز اینکه آنها کمیت‌های مختلط هستند و همه عملیات جبری باید آنها را به صورت اعداد مختلط می‌باشند.

نسبت ولتاژ فیزیوری به جریان فیزیوری به صورت امپدانس تعریف می‌کنیم و با علامت

Z نمایش می‌دهیم. امپدانس یک کمیت مختلط است و دارای دیمانیسیون اهم می‌باشد. امپدانس یک فیزور نیست و نمی‌توان به وسیله ضرب کردن در عامل $e^{j\omega t}$ و گرفتن قسمت حقیقی آن را به حوزه زمان تبدیل کرد. در عوض، ما یک سلف را در حوزه زمان با ضریب خودالقایی L و در حوزه فرکانس با امپدانس آن یعنی $j\omega L$ نمایش می‌دهیم و همچنین خازن در حوزه زمان دارای ظرفیت C بوده و در حوزه فرکانس امپدانس آن $1/j\omega C$ می‌باشد. امپدانس متعلق به حوزه فرکانس است و مفهومی که جزئی از حوزه زمان باشد، نیست.

صادق بودن قوانین کیرشوف در حوزه فرکانس این امکان را می‌دهد که به سادگی نشان دهیم امپدانسها را دقیقاً مانند مقاومتها می‌توان به طور سری و موازی ترکیب نمود. مثلاً در فرکانس $\omega = 10^4 \text{ Rad/s}$ یک سلف 5 mH سری با یک خازن $10 \mu\text{F}$ را می‌توان با یک امپدانس منفرد که عبارت از مجموع هر یک از امپدانسهای سلف و خازن می‌باشد، جایگزین نمود. امپدانس سلف عبارت است از: $Z_L = j\omega L = j50 \Omega$ و امپدانس خازن برابر است با: $Z_C = 1/j\omega C = -j1 \Omega$ بنابراین امپدانس کل ترکیب سری فوق چنین خواهد بود: $Z_{eq} = j50 - j1 = j49 \Omega$ امپدانس سلف و خازن تابعی است از فرکانس، بنابراین امپدانس معادل فوق فقط در فرکانس مورد نظر $\omega = 10000$ صادق است و در فرکانس $\omega = 5000$ مقدار آن برابر است با: $Z_{eq} = j23 \Omega$ ترکیب موازی دو امپدانس مذکور در فرکانس $\omega = 10^4$ برابر است با حاصلضرب آنها تقسیم بر مجموعشان، یعنی:

$$Z_{eq} = (j50)(-j1)/(j50 - j1) = 50/j49 = -j1.02 \Omega$$

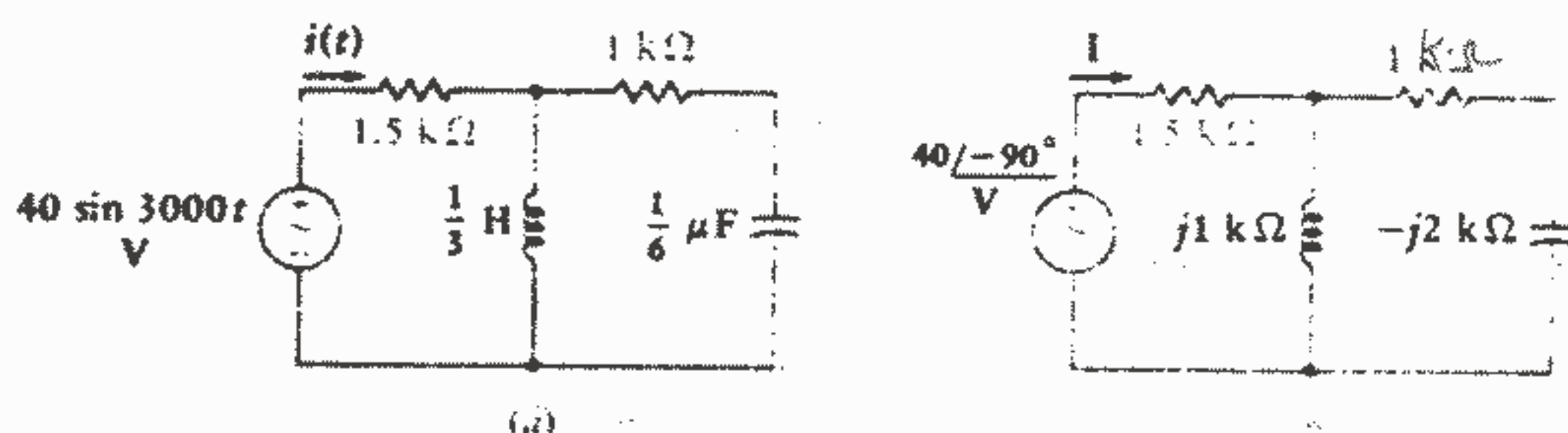
در فرکانس $\omega = 5000$ امپدانس معادل اتصال موازی برابر است با: $-j2.17 \Omega$ عدد مختلطی را که نمایانگر امپدانس می‌باشد می‌توان به فرم قطبی یا قائم نمایش داد. مثلاً امپدانس $100 \angle -60^\circ$ در حالت قطبی را می‌توان اینگونه توصیف نمود که دارای اندازه امپدانس 100Ω و زاویه فاز -60° می‌باشد در حالیکه همین امپدانس در حالت قائم یعنی $86.6 - j50$ را می‌گوئیم که دارای مؤلفه مقاومتی و یا مقاومت 50Ω و مؤلفه مقاومتی عبارت است از قسمت حقیقی امپدانس و مؤلفه را کتیو همان مؤلفه موهومی امپدانس می‌باشد (البته بدون اپراتور موهومی j).

باید توجه داشت که مؤلفه مقاومتی امپدانس الزاماً برابر با مقاومت موجود در مدار نمی‌باشد. مثلاً یک مقاومت 20Ω سری با یک سلف 5 H در فرکانس $\omega = 4$ دارای یک امپدانس معادل $Z = 20 + j20 \Omega$ می‌باشد که در فرم قطبی عبارت است از $28.3 \angle 45^\circ$ که البته در این حالت مؤلفه مقاومتی امپدانس، به دلیل اینکه شبکه مورد نظر یک اتصال سری ساده

می باشد و برابر است با مقاومت موجود در مدار. اما اگر همین دو عنصر را به طور موازی اتصال دهیم، امپدانس معادل برابر خواهد بود با $10 + j10 \Omega$ یا $20 + j20 / 20 = 10 + j10 \Omega$ که مؤلفه مقاومتی امپدانس اکنون عبارت از 10Ω می باشد.

علامت اختصاری بخصوصی برای دامنه امپدانس و زاویه فاز اختصاص نیافته است و فرم کلی یک امپدانس را در حالت قطبی می توان به صورت $Z = |Z| \angle \theta$ نمایش داد. در حالت قائم، مؤلفه مقاومتی را با R و مؤلفه راکتیو را با X نمایش می دهند. بنابراین داریم: $Z = R + jX$

حال بیایید از مفهوم امپدانس برای تحلیل مدار RLC شکل ۹-۱۰a استفاده کنیم. این مدار در حوزه زمان نشان داده شده است و پاسخ جریان $i(t)$ در حوزه زمان مطلوب می باشد. با وجود این بایستی تحلیل را در حوزه فرکانس انجام داد. بنابراین مدار را در حوزه فرکانس رسم می کنیم که منبع آن پس از تبدیل به حوزه فرکانس برابر با $40 \angle -90^\circ \text{ V}$ و پاسخ آن در حوزه فرکانس عبارت از I و امپدانسهای سلف و خازن در فرکانس $\omega = 3000$ به ترتیب برابر با $j1 \text{ k}\Omega$ و $-j2 \text{ k}\Omega$ می باشند. مدار حوزه فرکانس در شکل ۹-۱۰b نمایش داده شده است.



شکل ۹-۱۰: (a) یک مدار RLC که پاسخ اجباری سینوسی $i(t)$ در آن مطلوب می باشد. (b) مدار معادل حوزه فرکانس برای مدار مورد نظر در فرکانس $\omega = 3000 \text{ Rad/s}$

اکنون امپدانس معادلی را که منبع می بیند محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= 1.5 + \frac{(j1)(1-j2)}{j1 + 1-j2} = 1.5 + \frac{2+j1}{1-j1} \\ &= 1.5 + \frac{2+j1}{1-j1} \frac{1+j1}{1+j1} = 1.5 + \frac{1+j3}{2} \\ &= 2 + j1.5 = 2.5 \angle 36.9^\circ \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

بنابراین جریان فیزوری عبارت است از:

$$I = \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.9^\circ} = 16 \angle -126.9^\circ \text{ mA}$$

پس از تبدیل جریان به حوزه زمان، پاسخ مطلوب به دست می آید:

$$i(t) = 16 \cos(3000t - 126.9^\circ) \text{ mA}$$

اگر جریان خازن مطلوب باشد، باید در حوزه فرکانس از تقسیم جریان استفاده کنیم. قبل از اینکه شروع به نوشتن معادلات زیاد در حوزه زمان یا حوزه فرکانس بکنیم، لازم است که اکیداً از نوشتن معادلاتی که قسمتی از آنها در حوزه زمان و قسمتی در حوزه فرکانس است اجتناب کنیم. یکی از نشانه‌های ارتکاب چنین اشتباهی، وجود یک عدد مختلط و متغیر t در یک معادله می‌باشد، البته به جز حالتی که $e^{j\omega t}$ وجود داشته باشد. مثلاً در معادله

$$I = \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.9^\circ} = 16 \angle -126.9^\circ \text{ mA}$$

هرگز معادلاتی به صورت زیر را ننویسید:

(هرگز! هرگز! هرگز!)

$$i(t) = \frac{40 \sin 3000t}{2.5 \angle 36.9^\circ}$$

$$i(t) = \frac{40 \sin 3000t}{2 + j1.5}$$

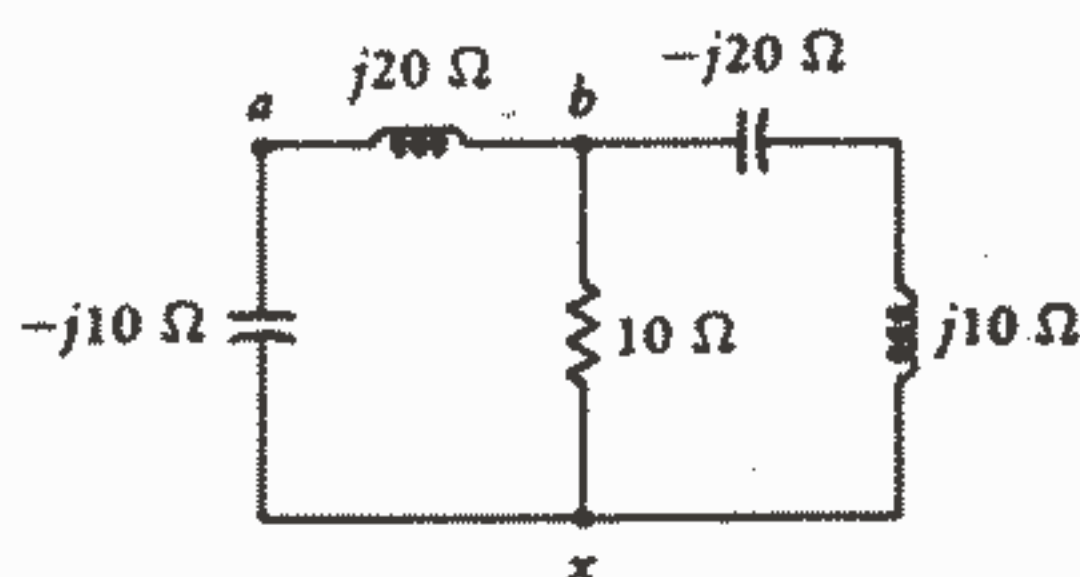
و یا

تمرین

۶-۹. در مدار شکل ۱۱-۹ امپدانس ورودی بین نقاط زیر را پیدا کنید:

(a) $a - x$, (b) $b - x$, (c) $a - b$

جواب: $10 - j20 \Omega$, $10 + j0$, $40 - j20$



شکل ۱۱-۹: به تمرین ۶-۹ مراجعه کنید.

۷-۹- اگر مکان سلف و خازن در مدار شکل ۱۰-۹ تعویض شود، دامنه ولتاژ دو سر هر یک از چهار عنصر مداری را به دست آورید.

جواب: ۷، ۱۷/۱۴، ۲۲/۹، ۱۶/۱۶، ۱۶/۱۶

۶-۹- آدمیتانس

درست مانند هدایت (عکس مقاومت) که کمیت مفیدی در تحلیل مدارهای مقاومتی می باشد، معکوس امپدانس هم در تحلیل حالت پایدار سینوسی یک مدار RLC کلی، کار را تا حدودی آسان می کند. آدمیتانس Y یک عنصر مداری را به صورت نسبت جریان فیزیوری به ولتاژ فیزیوری تعریف می کنیم (البته با فرض اینکه قرارداد علامت غیر فعال برقرار باشد):

$$Y = I/V$$

و در نتیجه

$$Y = 1/Z$$

قسمت حقیقی آدمیتانس را هدایت G و قسمت موهومی آن را سوسپتانس B ، می نامند.

بنابراین:

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} \quad (22)$$

معادله (۲۲) را باید با دید موشکافانه دقیق مورد توجه قرار دهیم و به یاد داشته باشیم که این معادله بیان نمی دارد که قسمت حقیقی آدمیتانس برابر با معکوس قسمت حقیقی امپدانس و قسمت موهومی آدمیتانس برابر با معکوس قسمت موهومی امپدانس می باشد. آدمیتانس، هدایت و سوسپتانس همگی با مهو اندازه گیری می شوند. به عنوان مثال امپدانس $Z = 1 - j2\Omega$ را که می توان به صورت یک مقاومت 1Ω سری با یک خازن $0.1\mu F$ در فرکانس $\omega = 5M \text{ rad/s}$ تصور نمود، دارای آدمیتانس زیر می باشد:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 - j2} = \frac{1}{1 - j2} \frac{1 + j2}{1 + j2} = 0.2 + j0.4 \text{ U}$$

بدیهی است که آدمیتانس معادل یک شبکه متشکل از چند شاخه موازی، برابر است با مجموع آدمیتانس های هر یک از شاخه ها. بنابراین مقدار عددی آدمیتانس فوق را می توان از یک هدایت 0.2 U که موازی با یک سوسپتانس مثبت 0.4 U می باشد به دست آورد، که اولی را می توان با یک مقاومت 5Ω و دومی را با یک خازن $0.1\mu F$ در فرکانس $\omega = 5M \text{ rad/s}$ نمایش داد (زیرا آدمیتانس یک خازن $j\omega C$ می باشد).

به عنوان چک کردن تحلیل فوق، امپدانس مدار اخیر (یعنی یک مقاومت 5Ω به طور سری با یک خازن $8\mu F$ در فرکانس $\omega = 5M \text{ rad/s}$) را محاسبه می‌کنیم. امپدانس معادل، مانند قبل، عبارت است از:

$$Z = \frac{5(1/j\omega C)}{5 + 1/j\omega C} = \frac{5(-j2.5)}{5 - j2.5} = 1 - j2 \Omega$$

این دو مدار فقط ۲ تا از بی‌نهایت مداری هستند که دارای آدمیتانس و امپدانس مذکور در فرکانس مورد نظر می‌باشند. آنها همچنین تنها مدارهای دو عنصری هستند که مشخصات مذکور را دارا می‌باشند. بنابراین می‌توان آنها را ساده‌ترین مدارهایی دانست که دارای امپدانس $1-j2\Omega$ و آدمیتانس $0.2 + j0.4 \text{ S}$ در فرکانس $\omega = 5 \times 10^6 \text{ rad/s}$ می‌باشند. کلمه «امیتانس» که ترکیبی است از کلمات «امپدانس» و «آدمیتانس» گاهی اوقات به عنوان یک اصطلاح کلی برای هر دو مفهوم امپدانس و آدمیتانس به کار می‌رود. مثلاً بدیهی است که اگر ولتاژ فیزیوری دو سر یک امیتانس را بدانیم می‌توانیم جریان آن را محاسبه نماییم.

تمرین

۸-۹. آدمیتانسهای زیر را به صورت قائم پیدا کنید:

(a) شبکه‌ای که امپدانس آن برابر است با $100 - j160\Omega$

(b) ترکیب سری عناصر 50Ω ، 20 mH ، $2\mu F$ اگر $\omega = 4K \text{ rad/s}$

(c) ترکیب موازی عناصر 50Ω ، 20 mH ، $2\mu F$ در فرکانس $4K \text{ rad/s}$.

جواب: $20 - j4.5$ ، $11.05 + j9.94$ ، $2.81 + j4.49 \text{ mS}$

۹-۹. یک سلف 15 mH با ترکیب موازی مقاومت R و خازن $20\mu F$ در فرکانس

$\omega = 1000 \text{ Rad/s}$ سری می‌باشد. (a) آدمیتانس شبکه را اگر $R = 80\Omega$ باشد، پیدا

کنید. (b) اگر $Y = G - j0.02 \text{ S}$ ، مقدار R را پیدا کنید.

جواب: 21Ω ، $23.8 + j22.2 \text{ mS}$

مسائل

۱- مقادیر زیر را به فرم قطبی پیدا کنید:

(a) $5 \angle 27^\circ - 3 \angle 112^\circ$ ، (b) $4 \angle 30^\circ / 1 + 2 \angle -70^\circ$ ، (c) $-4 + j5 / 1 + j0.4$

مقادیر خواسته شده در بندهای (d)، (c) را به فرم قائم به دست آورید:

(d) $(2 \angle 30^\circ + 1 \angle 60^\circ)^2$ ، (c) $8e^{j0.5}$

۲- محاسبات (a) ، (b) را به فرم قطبی انجام دهید:

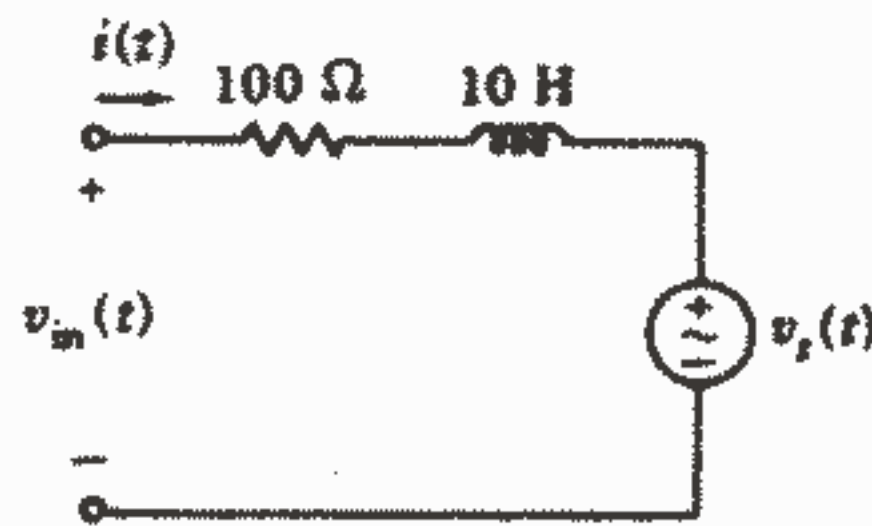
$$(a) \frac{1}{j} (36 \angle 21^\circ) + 19 \angle -108^\circ \quad (b) \sqrt{80} \angle 83^\circ + 11j$$

محاسبات بندهای (c) ، (d) را در حالت قائم انجام دهید:

$$(c) \frac{1}{\frac{1}{7-j3.1} + \frac{1}{4+j9.2}} \quad (d) I_m [4.18 \angle -99^\circ] + [5.50 \angle 412^\circ] + \operatorname{Re}[6.11 \angle 26^\circ]$$

۳- در شکل ۹-۱۲ فرض کنید که $i(t)$ عبارت از جریان مختلط $0.8e^{j20t}$ A و ولتاژ

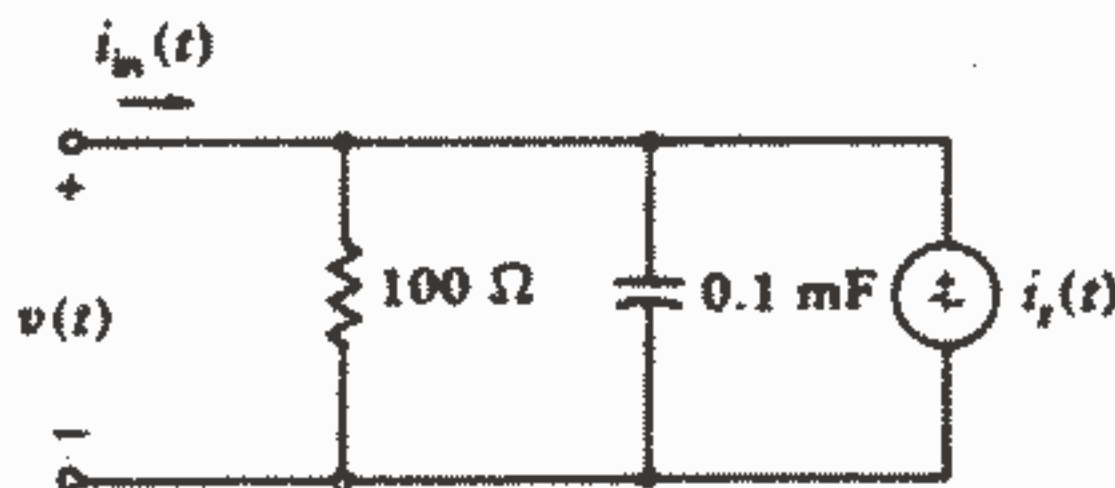
$v_s(t)$ برابر با $V \ 240e^{j20t} (30 - j40)$ باشد و سپس ولتاژ ورودی مختلط $v_{in}(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۹-۱۲: به مسئله ۳ مراجعه کنید.

۴- در مدار شکل ۹-۱۳ فرض کنید: $i_s(t) = j2e^{j50t}$ A ، $v(t) = 240e^{j50t}$ V و سپس

$i_{in}(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۹-۱۳: به مسئله ۴ مراجعه کنید.

۵- در یک شبکه خطی، شبیه شکل ۹-۱، یک منبع ولتاژ سینوسی

$v_s = 40 \cos 1000t$ V ، پاسخ جریان $i_o = 2.5 \cos(1000t - 24^\circ)$ A را ایجاد

می‌کند. $i_o(t)$ را اگر $v_s(t)$ مقادیر زیر را داشته باشد، پیدا کنید:

$$(a) 20 \sin 1000t \text{ V} \quad (b) 20 \cos(1000t - 40^\circ) \text{ V} \quad (c) 20e^{j27^\circ} e^{j1000t} \text{ V}$$

$$(d) (10 - j6)e^{j1000t} \text{ V}$$

۶ - کمیت‌های مذکور در بندهای (a) ، (b) را به صورت یک فیزور بیان کنید:

$$i(t) = 2 \cos 10^3 t + 3 \sin 10^3 t \text{ mA (b)}, v(t) = 165 \cos(120\pi t + 30^\circ) \text{ V (a)}$$

مقادیر لحظه‌ای کمیت‌های مذکور در بندهای (c) ، (d) را به ازای $t = 1 \text{ ms}$ پیدا کنید:

$$f = 60 \text{ Hz}, \mathbf{I} = -8/1 - j2/4 \text{ A (d)}, \mathbf{V} = 40 - j70 \text{ V}, \omega = 400 \text{ rad/s}$$

۷ - فرض کنید $\mathbf{I} = 10 \angle -130^\circ \text{ A}$ را در لحظه $t = 1 \text{ ms}$ پیدا کنید اگر ω برابر

مقادیر زیر باشد: (a) 1200 rad/s ، (b) 600 rad/s ، (c) فرض کنید:

$$i_1 = 5 \cos(100t + 50^\circ), i_2 = 4 \cos 100t, i_3 = 3 \sin(100t + 70^\circ) \text{ A}$$

با تبدیل i_1, i_2, i_3 به صورت فیزور، کمیت‌های \mathbf{I}_x و $i_x(t)$ را پیدا

کنید.

۸ - اگر $\omega = 200 \text{ rad/s}$ باشد، مقدار لحظه‌ای کمیت‌های زیر را در لحظه $t = 1 \text{ ms}$ پیدا

کنید:

$$\mathbf{I} = 4 - j1 \text{ A (b)}, \mathbf{I} = 2 \angle 70^\circ \text{ A (a)}$$

ولتاژ فیزیوری متناظر با کمیت‌های زیر را پیدا کنید:

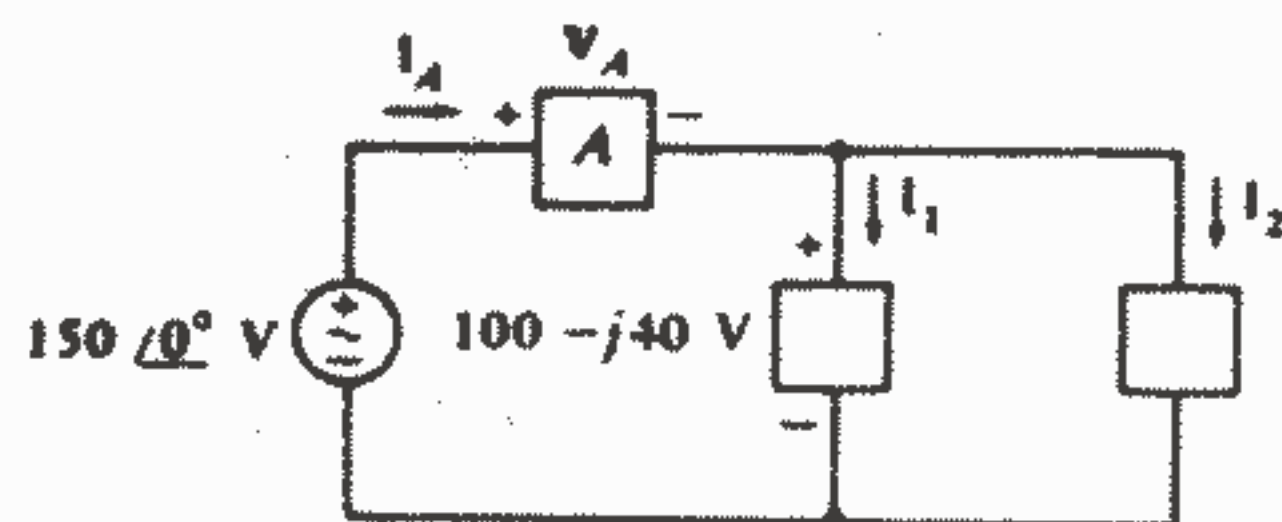
$$v(t) = -3 \cos 50t + 6 \sin 50t \text{ V (d)}, v(t) = 6 \sin(500t - 50^\circ) \text{ V (c)}$$

$$8 \cos(100t - 100^\circ) - 6 \cos(100t - 40^\circ) \text{ V (c)}$$

۹ - در شکل ۹-۱۴ فرض کنید: $\mathbf{I}_1 = 6 + j1 \text{ A}$ ، $\mathbf{I}_2 = 2 - j5 \text{ A}$ ، $\omega = 1 \text{ K rad/s}$

در لحظه $t = 2.5 \text{ ms}$ مقدار لحظه‌ای کمیت‌های مذکور در بندهای (a) ، (b) را پیدا

کنید: (a) v_A ، (b) i_A ، (c) قدرتی که به وسیله عنصر A جذب می‌شود.



شکل ۹-۱۴: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

۱۰ - یک جعبه با نوار ارغوانی و زرد، حاوی یک منبع ولتاژ V_{s1} و یک منبع جریان \mathbf{I}_{s2}

می‌باشد. ولتاژ بین دو ترمینال قابل دسترس آن، V_{AB} می‌باشد. اگر $V_{s1} = 10 \angle 20^\circ \text{ V}$ و

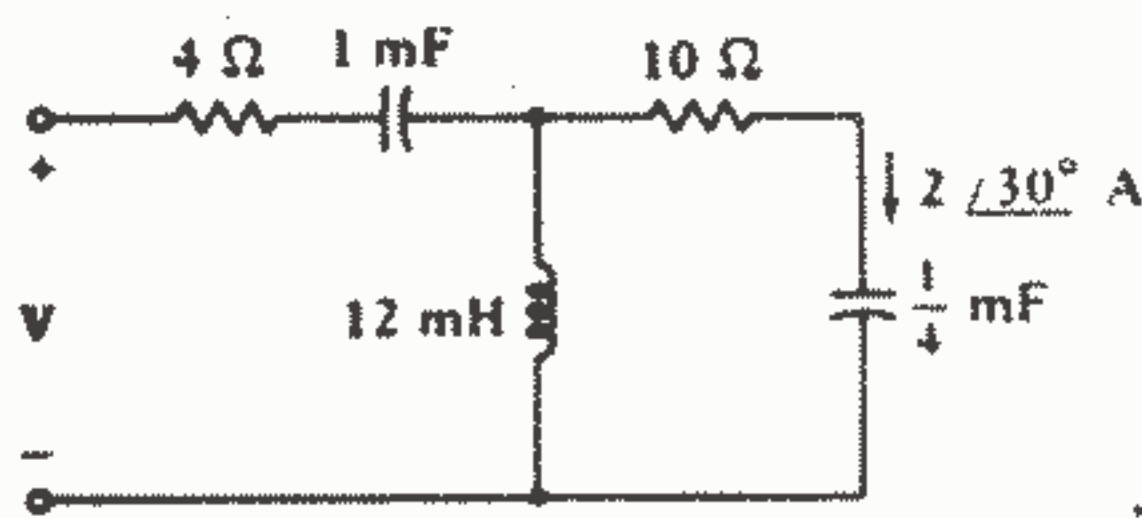
$$I_{s2} = 0.2 \angle 30^\circ \text{ A} \quad V_{AB} = -50 + j80 \text{ V}$$

$$V_{s1} = 20 \angle -80^\circ \text{ V} \quad I_{s2} = 0.5 \angle 30^\circ \text{ A} \quad V_{AB} = 40 + j60 \text{ V}$$

$$V_{s1} = 10 - j30 \text{ V} \quad I_{s2} = 0.3 - j0.1 \text{ A} \quad V_{AB} \text{ مقدار را پیدا کنید.}$$

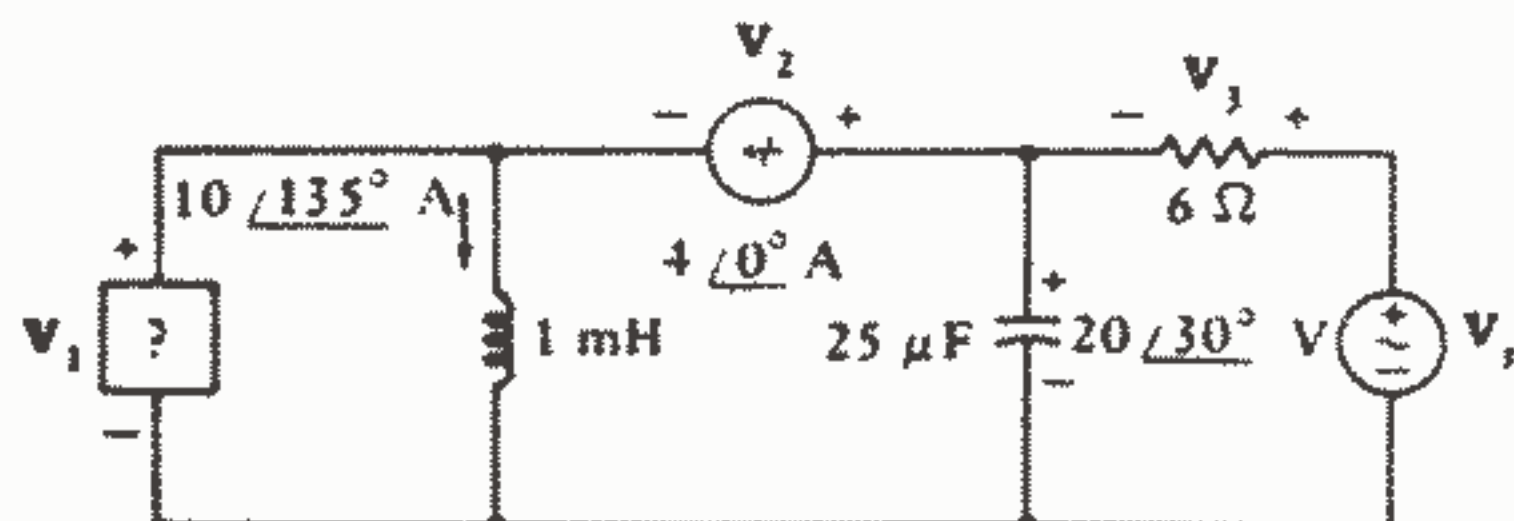
۱۱. یک مقاومت R ، یک سلف L و یک منبع ایده آل $v_s = 100 \cos \omega t \text{ V}$ به طور سری می باشند. اگر $\omega = 200 \text{ rad/s}$ ، آنگاه جریان فیزیکی برابر خواهد بود با $1.5 - j2 \text{ A}$. اگر $\omega = 400 \text{ rad/s}$ جریان فیزیکی چقدر خواهد بود؟

۱۲. در شکل ۹-۱۵ فرض کنید $\omega = 500 \text{ rad/s}$ و ولتاژ فیزیکی V را پیدا کنید.



شکل ۹-۱۵: به مسائل ۱۲ و ۱۶ مراجعه کنید.

۱۳. $v_1(t)$ ، $v_2(t)$ ، $v_3(t)$ را در مدار شکل ۹-۱۶ به ازای $\omega = 5 \text{ K rad/s}$ پیدا کنید.



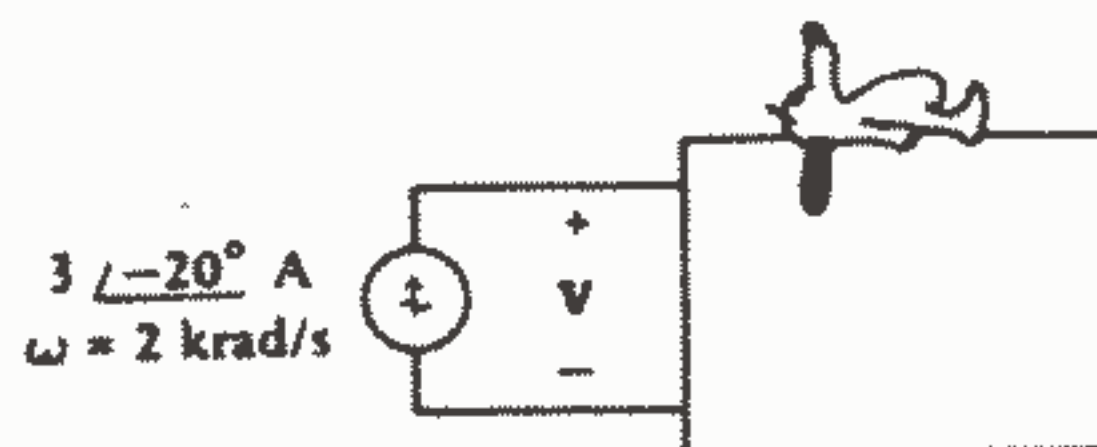
شکل ۹-۱۶: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

۱۴. در شکل ۹-۱۷ مقدار V را پیدا کنید، اگر جعبه حاوی: (a) یک مقاومت

8Ω به طور سری با یک سلف 5 mH باشد. (b) یک مقاومت 8Ω به طور سری با یک خازن

$50 \mu\text{F}$ باشد. (c) یک مقاومت 8Ω و سلف 5 mH و خازن $50 \mu\text{F}$ به طور سری باشند.

$$\omega = 4 \text{ K rad/s}$$



شکل ۹-۱۷: به مسئله ۱۴ مراجعه کنید.

۱۵ - یک مقاومت 200Ω و یک خازن $25\mu F$ و یک سلف L به طور موازی می باشند. ولتاژ فیزیوری دو سر این ترکیب برابر با $V \angle 100^\circ$ می باشد. (a) اگر جریانی که از ترمینال مثبت وارد می شود برابر $I = 0.5 - j2A$ ، $\omega = 1K \text{ rad/s}$ مقدار L را پیدا کنید. (b) L را پیدا کنید اگر $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ، $I = 1A$.

۱۶ - امپدانس ورودی مدار شکل ۱۵-۹ را به ازای $\omega = 500 \text{ rad/s}$ پیدا کنید.

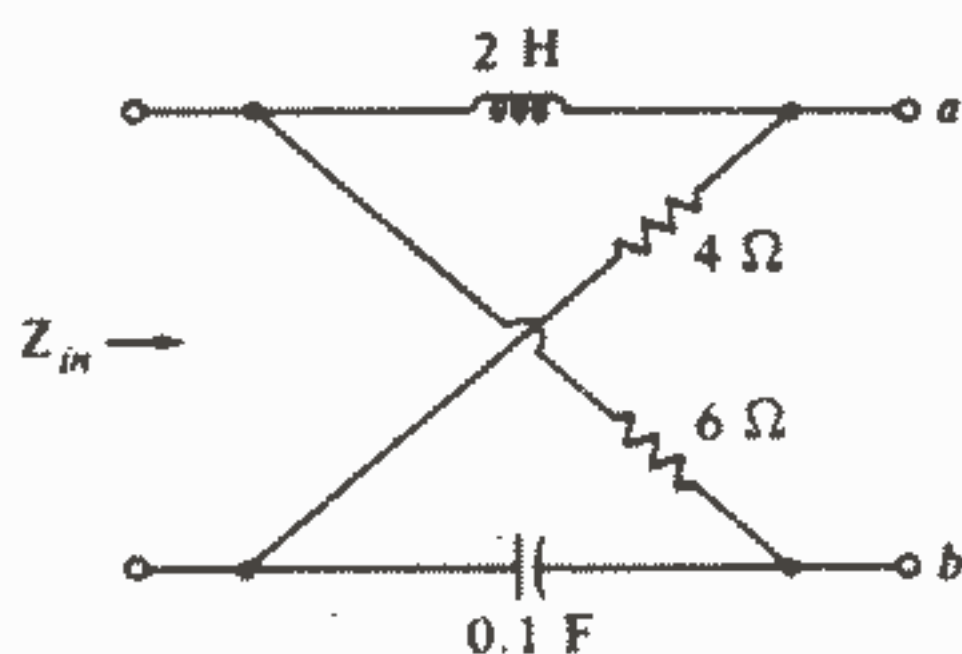
۱۷ - یک مقاومت 200Ω و خازن $25\mu F$ و سلف L به طور موازی می باشند. (a) امپدانس این ترکیب موازی را به ازای $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ، $L = 10H$ پیدا کنید. (b) اگر دامنه امپدانس در $\omega = 100 \text{ rad/s}$ برابر 80Ω باشد، L را پیدا کنید. (c) به ازای چه مقدار ω ، دامنه امپدانس به ازای $L = 10H$ برابر 150Ω می شود؟

۱۸ - یک مقاومت $2K\Omega$ با یک خازن $4\mu F$ موازی می باشد. اگر امپدانس این ترکیب موازی برابر Z_{in} باشد، به ازای چه فرکانسی: (a) $|Z_{in}| = 1500\Omega$ (b) زاویه Z_{in} برابر -30° می شود؟ (c) $\text{Re } |Z_{in}| = 200\Omega$ (d) $|X_{in}| = 400\Omega$ ؟

۱۹ - یک شبکه دو ترمینالی دارای امپدانس ورودی $5 - j8\Omega$ در فرکانس

$4K \text{ rad/s}$ می باشد. چه سلفی باید با آن موازی شود تا امپدانس ورودی آن دارای مشخصات زیر باشد: (a) رآکتانس صفر؟ (b) دامنه 4Ω ؟

۲۰ - Z_{in} را در فرکانس $\omega = 5 \text{ rad/s}$ برای شبکه شکل ۱۸-۹ پیدا کنید، اگر ترمینالهای a-b: (a) مدار باز باشند. (b) اتصال کوتاه باشند.



شکل ۱۸-۹: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

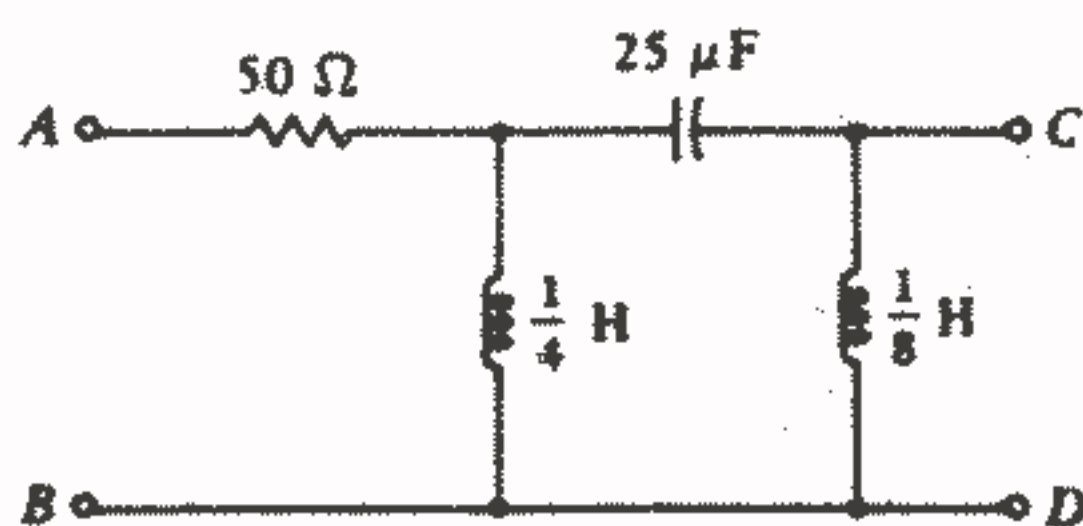
۲۱ - یک مقاومت 10Ω یک سلف $2mH$ و یک خازن $0.2\mu F$ سری می باشند.

امپدانس این اتصال سری، Z_{in} می باشد. (a) به ازای چه مقدار ω مقدار Z_{in} می نیمم می شود؟ (b) به ازای چه مقدار ω داریم: $|Z_{in}| = 2|Z_{in}|_{min}$ ؟

۲۲. یک مقاومت 2Ω و یک خازن $0.5F$ به طور سری می‌باشند و یک سلف $3H$ با این ترکیب به طور موازی می‌باشد. اگر امپدانس شبکه موازی برابر با $Z_{in}(\omega) = R_{in}(\omega) + jX_{in}(\omega)$ باشد مقدار $R_{in}(\omega)$ ، $X_{in}(\omega)$ را پیدا کنید.

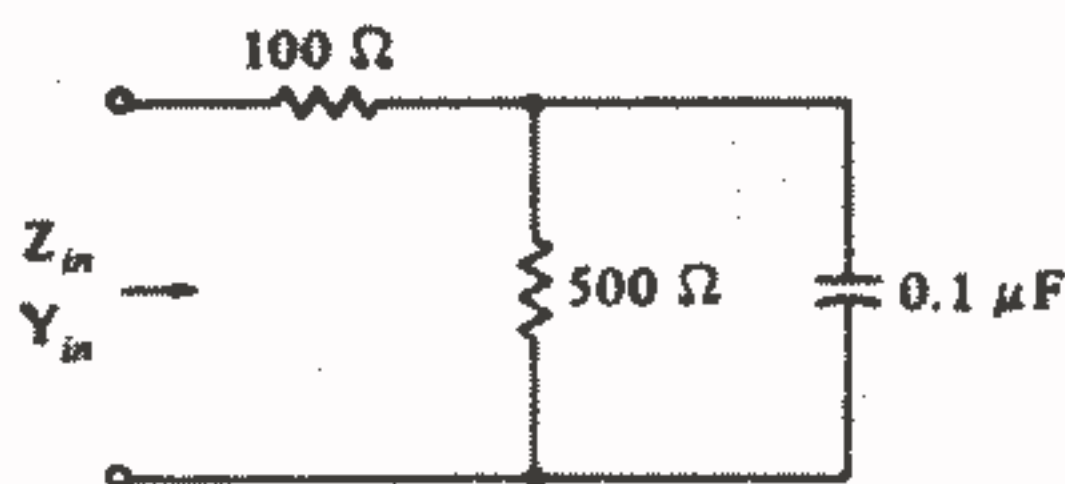
۲۳. یک مقاومت 100Ω با یک خازن $10\mu F$ به طور سری می‌باشد. فرض کنید آدمیتانس این ترکیب سری برابر با $Y_{in} = G_{in} + jB_{in}$ باشد. در کدام فرکانس: (a) دامنه Y_{in} برابر با $4m\Omega$ می‌شود؟ (b) دامنه G_{in} برابر با $4m\Omega$ می‌شود؟ (c) دامنه B_{in} برابر با $4m\Omega$ می‌شود؟

۲۴. در مدار شکل ۱۹-۹ فرض کنید $\omega = 400 \text{ rad/s}$ ، و مقادیر زیر را پیدا کنید: (a) امپدانس که در ترمینالهای A - B دیده می‌شود اگر ترمینالهای C - D مدار باز باشند. (b) آدمیتانس که در ترمینالهای C - D دیده می‌شود اگر ترمینالهای A - B اتصال کوتاه باشند.



شکل ۱۹ - ۹: به مسئله ۲۴ مراجعه کنید.

۲۵. در مدار شکل ۲۰-۹ در کدام فرکانس: (a) $R_{in} = 200\Omega$ ؟ (b) $X_{in} = -200\Omega$ ؟ (c) $G_{in} = 1/200\Omega$ ؟ (d) $B_{in} = 1/240\Omega$ ؟



شکل ۲۰ - ۹: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

۲۶. سه آدمیتانس $Y_1 = 2 - j4m\Omega$ ، $Y_2 = 4 - j1m\Omega$ ، $Y_3 = 1 + j3m\Omega$ به طور سری می‌باشند و جریان $I = 20 \angle 40^\circ \mu A$ از این ترکیب سری عبور می‌کند. دامنه ولتاژ دو سر

هر آدمیتانس و ولتاژ دو سر کل ترکیب سری را به دست آورید.

۲۷ - آدمیتانس ترکیب موازی 100Ω , $0.2H$ در فرکانس $\omega = 1500 \text{ rad/s}$ برابر با آدمیتانس ترکیب سری R_1 , L_1 در همان فرکانس می باشد. (a) R_1 , L_1 را پیدا کنید. (b) همان مقادیر را در فرکانس $\omega = 500 \text{ rad/s}$ پیدا کنید.

۲۸ - شبکه ای متشکل از اتصال موازی $5K\Omega$, $0.1H$, $0.1\mu F$ داریم. (a) در چه فرکانسی آدمیتانس ورودی دارای حداقل دامنه می باشد؟ (b) در چه فرکانسی زاویه فاز آدمیتانس ورودی برابر با 45° می باشد؟ (c) در چه فرکانس زاویه فاز آدمیتانس ورودی برابر با -45° می باشد؟

فصل ۱۰

پاسخ حالت پایدار سینوسی

۱ - ۱۰ - مقدمه

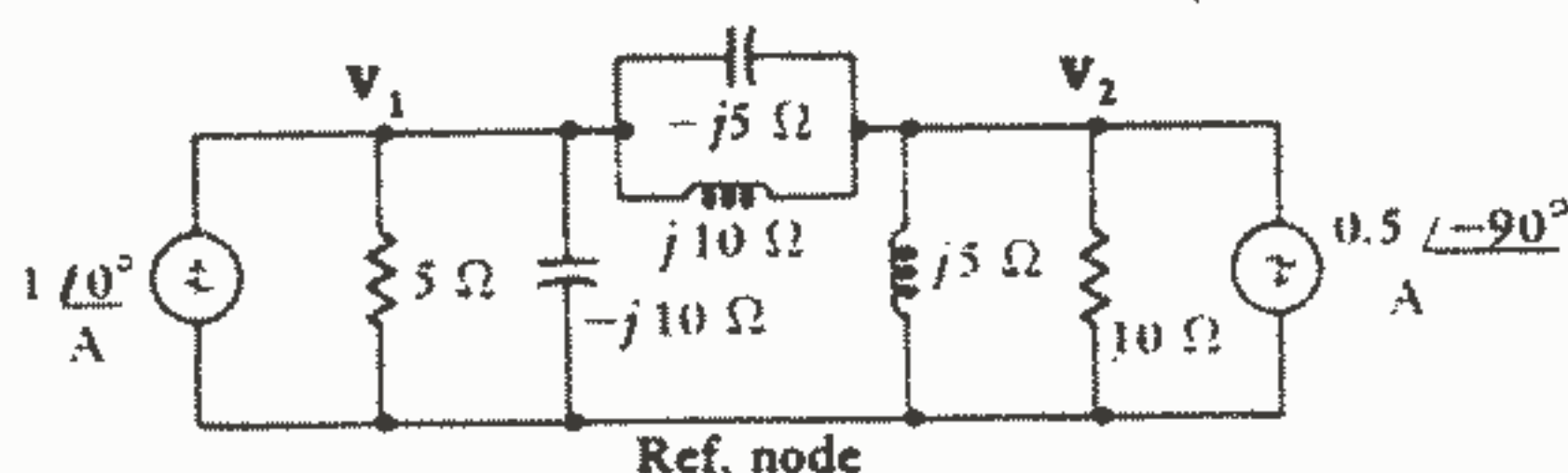
در فصل ۲ و بخصوص در فصل ۳ چند روش مفید برای تحلیل مدارهای مقاومتی آموختیم و اکنون صرفنظر از اینکه مدار مقاومتی هر قدر پیچیده باشد با استفاده از تحلیل گرهی، چشمه‌ای و حلقه‌ای و یا تکنیکهای جمع آثار و تبدیل منابع و قضایای تونن و نورتن قادر به تعیین پاسخ مطلوب مدار می‌باشیم. گاهی اوقات یک روش کافی است اما اغلب ترکیب چند روش برای به دست آوردن پاسخ، مناسب‌تر است. حال می‌خواهیم این تکنیکها را برای تحلیل مدارها در حالت پایدار سینوسی تعمیم دهیم و قبلاً هم دیده‌ایم که امپدانسها را مانند مقاومتها می‌توانیم ترکیب کنیم. قبلاً، تعمیم تکنیکهای مربوط به تحلیل مدارهای مقاومتی را بارها قول داده‌ایم و اکنون پی خواهیم برد که چرا این تعمیم، عاقلانه و موجه است.

۲ - ۱۰ - تحلیل گرهی، چشمه‌ای و حلقه‌ای

ابتدا بحث مربوط به تحلیل گرهی در یک مدار مقاومتی خالص N گرهی را مرور می‌کنیم. پس از تعیین یک گره مبنا و مشخص کردن متغیرهای ولتاژ بین هر یک از $N-1$ گره باقیمانده و گره مبنا، قانون جریان کیرشوف را به هر یک از این $N-1$ گره اعمال نمودیم و پس از کاربرد قانون اهم برای همه مقاومتها، $N-1$ معادله بر حسب $N-1$ مجهول به دست آوردیم (البته اگر منابع ولتاژ و یا منابع وابسته در مدار وجود نمی‌داشت در غیراین صورت بسته به نوع منابع موجود باید معادلات اضافی هم نوشته می‌شد).

اکنون می‌خواهیم ببینیم که آیا روش مشابهی بر حسب فیزورها و امپدانسها در حالت پایدار

سینوسی وجود دارد؟ قبلاً دیدیم که هر دو قانون کیرشوف در مورد فیزورها صادق است و نیز قانونی شبیه قانون اهم برای عناصر غیرفعال داریم، یعنی: $V = ZI$. به عبارت دیگر قانون تحلیل گرهی در مورد فیزورها صادق است و در نتیجه می‌توانیم در حالت پایدار سینوسی هم مدارها را به وسیله تحلیل گرهی حل کنیم. به همین طریق معلوم می‌گردد که روشهای تحلیل چشمه‌ای و حلقه‌ای هم صادق می‌باشند. به عنوان مثالی برای تحلیل گرهی، مدار شکل ۱-۱۰ را که در حوزه فرکانس می‌باشد در نظر می‌گیریم.



شکل ۱-۱۰: مداری در حوزه فرکانس که در آن ولتاژهای گرهی V_1 و V_2 مشخص شده‌اند.

دو منبع جریان به صورت فیزیوری داده شده‌اند و ولتاژهای گرهی فیزیوری V_1 ، V_2 مشخص گشته‌اند. در گره سمت چپ از KCL و $I = V/Z$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{-j10} + \frac{V_1 - V_2}{-j5} + \frac{V_1 - V_2}{j10} = 1 + j0$$

و در گره سمت راست داریم:

$$\frac{V_2 - V_1}{-j5} + \frac{V_2 - V_1}{j10} + \frac{V_2}{j5} + \frac{V_2}{10} = -(-j0.5)$$

پس از ساده کردن داریم:

$$(0.2 + j0.2)V_1 - j0.1V_2 = 1 \quad (1)$$

$$-j0.1V_1 + (0.1 - j0.1)V_2 = j0.5 \quad (2)$$

با استفاده از دترمینان معادلات (۱) و (۲) را حل می‌کنیم:

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -j0.1 \\ j0.5 & (0.1 - j0.1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.2 + j0.2) & -j0.1 \\ -j0.1 & (0.1 - j0.1) \end{vmatrix}} = \frac{0.1 - j0.1 - 0.05}{0.02 - j0.02 + j0.02 + 0.02 + 0.01} = \frac{0.05 - j0.1}{0.05} = 1 - j2 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.2 + j0.2) & 1 \\ -j0.1 & j0.5 \end{vmatrix}}{0.05} = \frac{-0.1 + j0.1 + j0.1}{0.05} = -2 + j4 \text{ V}$$

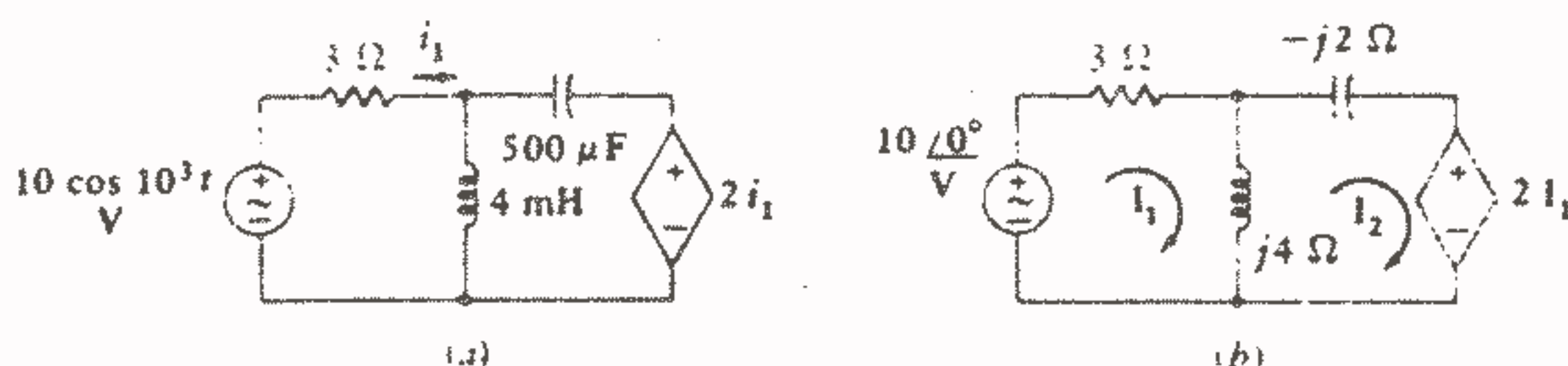
برای به دست آوردن پاسخ حوزه زمان، ابتدا V_1 ، V_2 را به فرم قطبی بیان می کنیم:

$$V_1 = 2.24 \angle -63.4^\circ \quad V_2 = 4.47 \angle 116.6^\circ$$

و سپس آنها را به حوزه زمان تبدیل می کنیم:

$$v_1(t) = 2.24 \cos(\omega t - 63.4^\circ) \quad v_2(t) = 4.47 \cos(\omega t + 116.6^\circ) \text{ V}$$

به عنوان مثالی برای تحلیل چشمه ای یا حلقه ای، مدار شکل ۱۰-۲a را در نظر می گیریم. از منبع سمت چپ پیدا است که $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ ، سپس مدار حوزه فرکانسی را مطابق شکل ۱۰-۲b رسم می کنیم و جریانهای چشمه ای I_1 ، I_2 را مشخص می نماییم.



شکل ۱۰-۲: (a) مداری در حوزه زمان که دارای یک منبع

وابسته می باشد. (b) مدار متناظر در حوزه فرکانس که

در آن جریانهای چشمه ای I_1 و I_2 مشخص شده اند.

در چشمه ۱ داریم:

$$3I_1 + j4(I_1 - I_2) = 10 \angle 0^\circ$$

و یا:

$$(3 + j4)I_1 - j4I_2 = 10$$

و در چشمه ۲ خواهیم داشت:

$$j4(I_2 - I_1) - j2I_2 + 2I_1 = 0$$

و یا:

$$(2 - j4)I_1 + j2I_2 = 0$$

و پس از حل معادلات فوق، به دست می آوریم:

$$I_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24 \angle 29.7^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77 \angle 56.3^\circ \text{ A}$$

و سپس

$$i_1(t) = 1.24 \cos(10^3 t + 29.7^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2.77 \cos(10^3 t + 56.3^\circ) \text{ A}$$

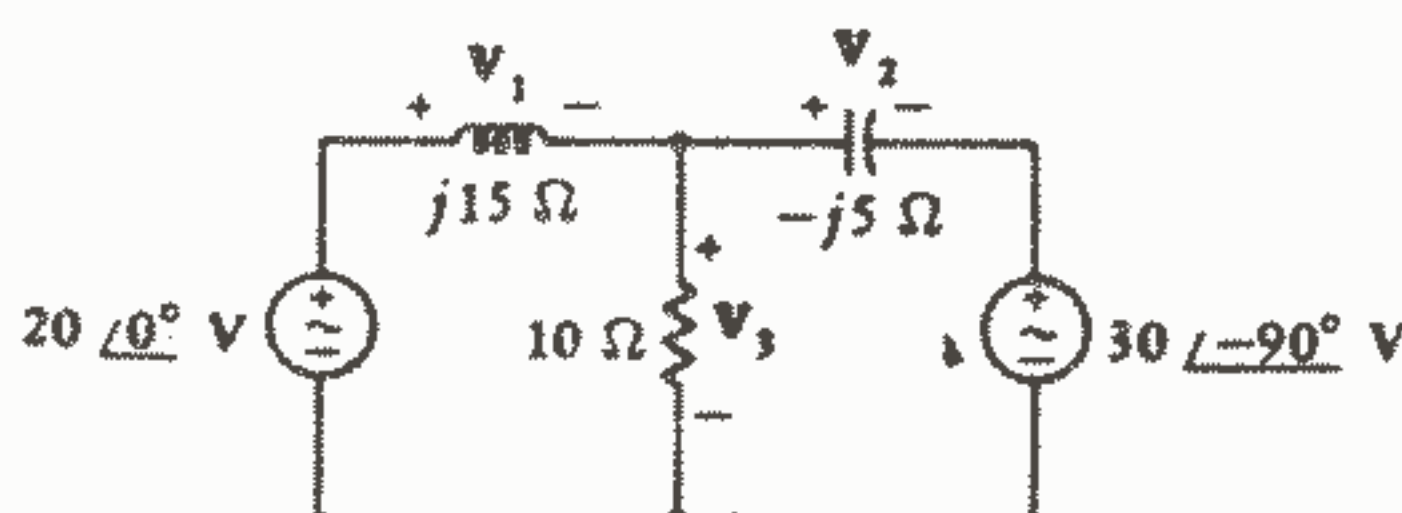
صحت راه حل مسائل فوق را می توان با حل آنها تماماً در حوزه زمان، چک نمود، اما از این کار صرف نظر می کنیم زیرا روش فیزیکی بسیار ساده تر و کم زحمت تر است.

تمرین

۱-۱۰. با فرض اینکه هر دو منبع در شکل ۱۰-۳ در فرکانس یکسانی کار کنند،

کمتهای زیر را پیدا کنید: V_1 (a), V_2 (b), V_3 (c)

جواب: $33,9 \angle 81,9^\circ$ V, $15,62 \angle -13,32^\circ$ V, $36,9 \angle -65,7^\circ$ V

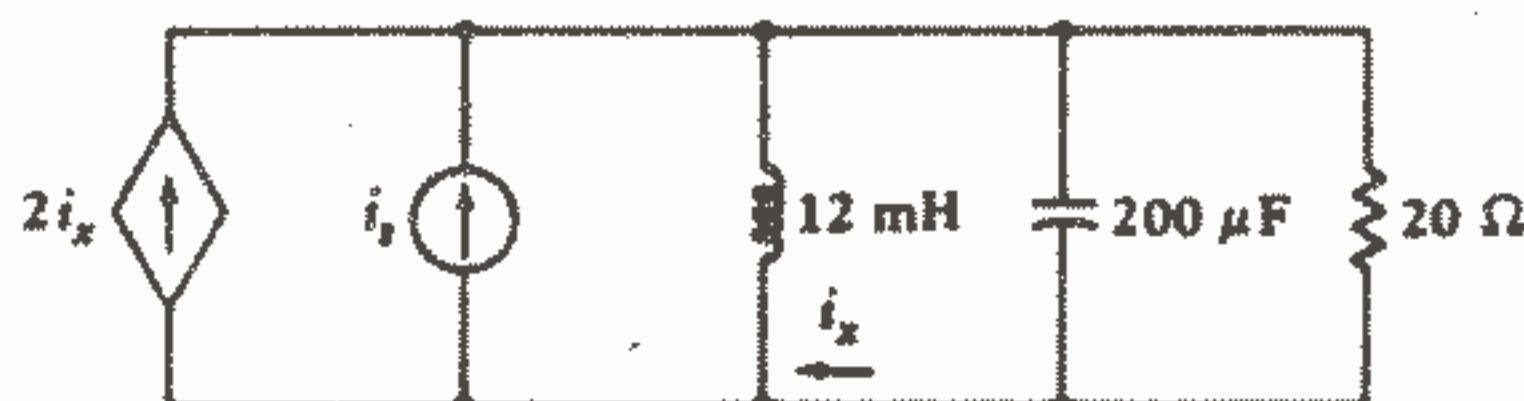


شکل ۱۰-۳: به تمرین ۱-۱۰ مراجعه کنید.

۲-۱۰. اگر $i_s = 3 \cos 500t$ A باشد، مدار شکل ۱۰-۴ را به حوزه فرکانس تبدیل

کنید و دامنه جریان را در عناصر زیر پیدا کنید: (a) سلف، (b) خازن، (c) مقاومت.

جواب: $0,553$ A, $1,106$ A, $1,843$ A



شکل ۱۰-۴: به تمرین ۲-۱۰ مراجعه کنید.

۳-۱۰. اصل جمع آثار، تبدیل منابع و قضیه تونن

پس از اینکه در فصل ۴ سلف و خازن را معرفی کردیم، دریافتیم که مدارهای شامل این عناصر باز هم خطی می باشند و مزایای خطی بودن در مورد آنها هم صادق است. از مزایای مذکور می توان اصل جمع آثار، قضایای تونن و نورتن و تبدیل منابع را نام برد. بنابراین اکنون

می‌دانیم که از روشهای فوق‌الذکر می‌توانیم در تحلیل مدارهایی که اکنون بررسی خواهیم کرد استفاده کنیم و سینوسی بودن منبع و اینکه به دنبال پاسخ اجباری هستیم، اهمیتی ندارد و خللی در روشهای ما ایجاد نمی‌کند. همچنین، ممکن است فکر کنیم که هنگام ترکیب کردن منابع حقیقی و موهومی برای به دست آوردن یک منبع مختلط، خطی بودن و اصل جمع آثار نقض شده است.

حال چند مثال را که پاسخ آنها به سادگی از طریق اعمال اصل جمع آثار، تبدیل منابع و یا قضایای تونن و نورتن به دست می‌آید، بررسی می‌کنیم.

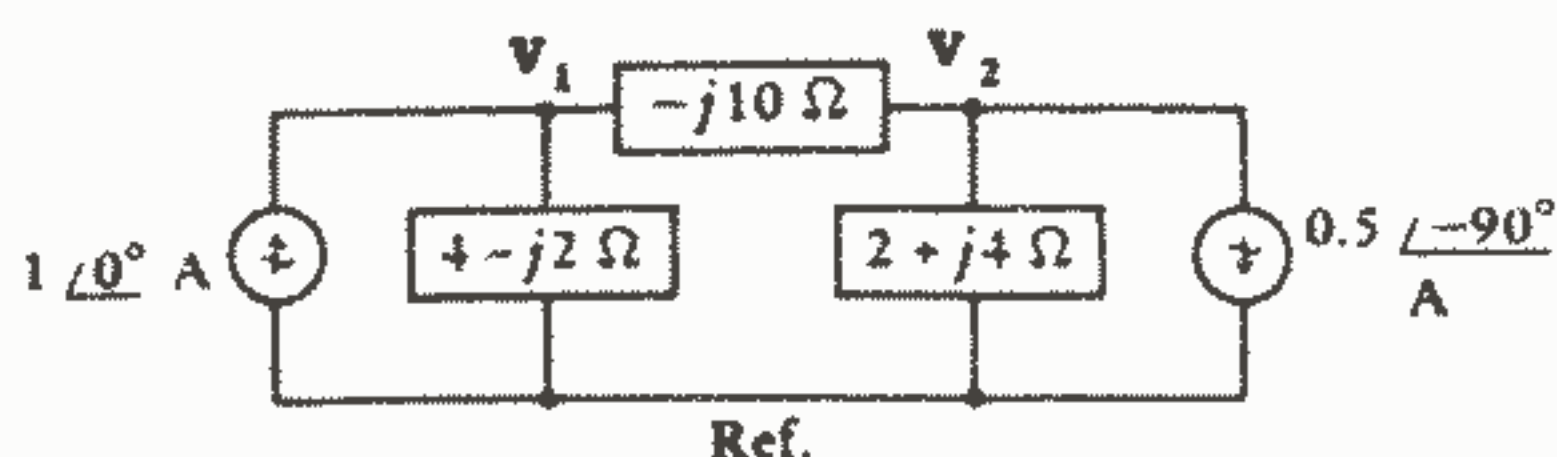
ابتدا مدار شکل ۱-۱۰ را که مجدداً در شکل ۵-۱۰ رسم شده است در نظر می‌گیریم که در آن هر جفت امپدانس موازی با یک امپدانس معادل جایگزین شده است. یعنی امپدانس ۵ و $-j10$ که موازی هستند امپدانس $4 - j2\Omega$ را ایجاد می‌کنند و امپدانسهای $j10$ ، $-j5$ که موازی هستند دارای معادل $-j10\Omega$ می‌باشند و نیز معادل، 10 موازی با $j5$ ، عبارت است از $2 + j4\Omega$. برای پیدا کردن V_1 ، ابتدا فقط منبع سمت چپ را به طور فعال فرض می‌کنیم و پاسخ جزئی ناشی از آن را به دست می‌آوریم:

$$V_{1L} = 1\angle 0^\circ \frac{(4 - j2)(-j10 + 2 + j4)}{4 - j2 - j10 + 2 + j4} = \frac{-4 - j28}{6 - j8} = 2 - j2$$

و اگر فقط منبع سمت راست فعال باشد، با استفاده از تقسیم جریان خواهیم داشت:

$$V_{1R} = (-0.5\angle -90^\circ) \left(\frac{2 + j4}{4 - j2 - j10 + 2 + j4} \right) (4 - j2) = \frac{-6 + j8}{6 - j8} = -1$$

و پس از جمع کردن دو مؤلفه فوق، خواهیم داشت: $V_1 = 2 - j2 - 1 = 1 - j2$ که با نتایج قبلی مان موافقت دارد.



شکل ۵-۱۰: V_1 و V_2 را می‌توان با استفاده از اصل جمع آثار و جمع نمودن پاسخهای فیزیکی جداگانه، به دست آورد.

همچنین می‌توانیم مشاهده کنیم که قضیه تونن هم در مورد این مدار (شکل ۵-۱۰) صادق است یا خیر. فرض کنید که می‌خواهیم مدار معادل تونن را از دید امپدانس $-j10\Omega$ به دست

آوریم. ولتاژ مدار باز (اگر قطب + را در سمت چپ فرض کنیم) عبارت است از:

$$V_{oc} = (1 \angle 0^\circ)(4 - j2) + (0.5 \angle -90^\circ)(2 + j4) = 4 - j2 + 2 - j1 = 6 - j3$$

امپدانس مدار غیرفعال که از ترمینالهای بار دیده می شود عبارت است از مجموع دو امپدانس باقیمانده، یعنی:

$$Z_{in} = 6 + j2$$

بنابراین، اگر مجدداً مدار را وصل کنیم، جریانی که از گره ۱ به سمت گره ۲ از طریق امپدانس $-j10\Omega$ جاری می شود عبارت است از:

$$I_{12} = \frac{6 - j3}{6 + j2 - j10} = 0.6 + j0.3$$

اگر این مقدار را از جریان منبع کم کنیم، جریانی که از شاخه $4 - j2\Omega$ رو به پایین جاری می شود برابر خواهد بود با:

$$I_1 = 1 - 0.6 - j0.3 = 0.4 - j0.3$$

و از آنجا داریم:

$$V_1 = (0.4 - j0.3)(4 - j2) = 1 - j2 \quad V$$

البته اگر کمی دقت به خرج می دادیم می توانستیم قضیه نورتن را هم با فرض اینکه توجه اصلی ما معطوف V_1 است، در مورد سه عنصر سمت راست به کار ببریم. تبدیل منابع را هم می توانیم به طور تکراری برای ساده کردن این مدار مورد استفاده قرار دهیم. بنابراین همه تکنیکها و راههای میانبر و لم هایی را که در فصل ۲ و ۳ دیدیم برای تحلیل مدارها در حوزه فرکانس می توانیم مورد استفاده قرار دهیم. فقط اندکی پیچیدگی که ممکن است در حل مدارات حوزه فرکانس وجود داشته باشد مربوط به استعمال اعداد مختلط می باشد و گرنه از نظر ملاحظات تئوریک هیچ اشکالی وجود ندارد.

و بالاخره، بهتر است این خبر خوشحال کننده را هم به شما بدهیم که روشهای مذکور را می توانیم برای پیدا کردن پاسخ اجباری مداراتی که تابع تحریک آنها سینوسی میرا، تابع نمایی و بطور کلی توابع تحریکی با فرکانس مختلط می باشد، نیز به کار ببریم. بنابراین، روشهای فوق الذکر را در فصل ۱۳ دوباره خواهیم دید.

تمرین

۳-۱۰. اگر از اصل جمع آثار برای پیدا کردن پاسخ حوزه فرکانس یعنی I در مدار

شکل ۱۰-۶a استفاده شده باشد، پاسخهای جزئی تولید شده به وسیله منابع زیر را پیدا کنید:

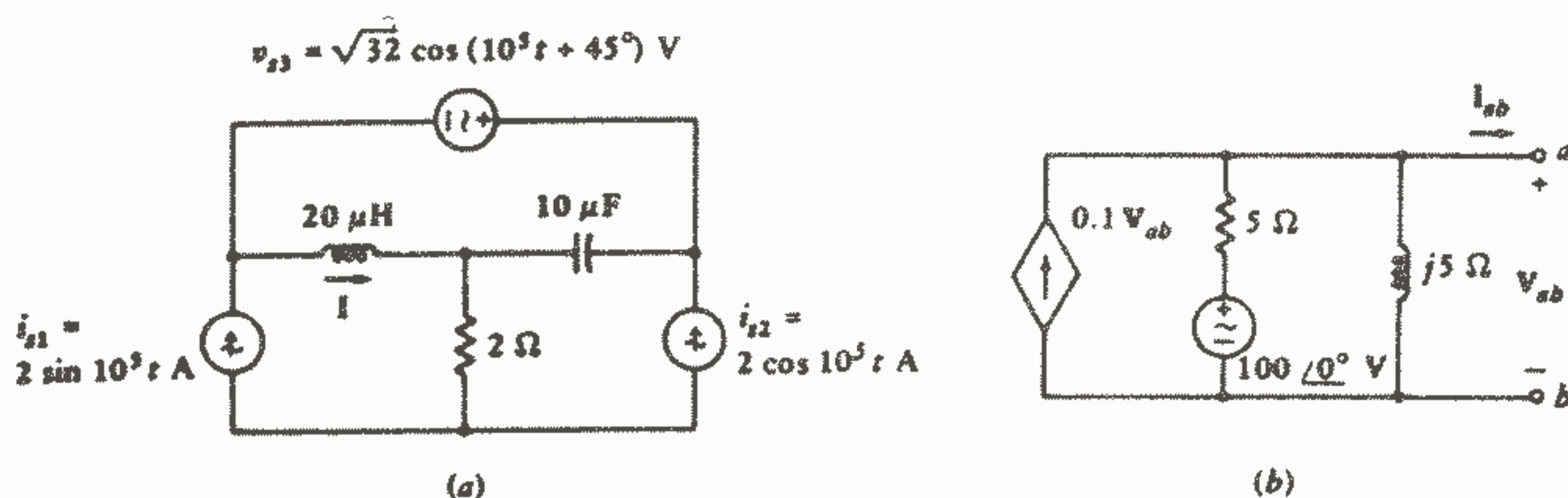
$$v_{s3} \text{ (c)}, i_{s2} \text{ (b)}, i_{s1} \text{ (a)}$$

$$\text{جواب: } j2A, -2, -4 + j4$$

۴-۱۰. مدار معادل تونن و نورتن را برای شبکه شکل ۱۰-۶b به دست آورید و مقادیر

زیر را پیدا کنید: (a) ولتاژ مدار باز V_{ab} , (b) جریان اتصال کوتاه I_{ab} , (c) امپدانس تونن Z_{in}

$$\text{جواب: } V = 89.4 \angle 63.4^\circ, I = 20 \angle 0^\circ A, Z = 2 + j4 \Omega$$



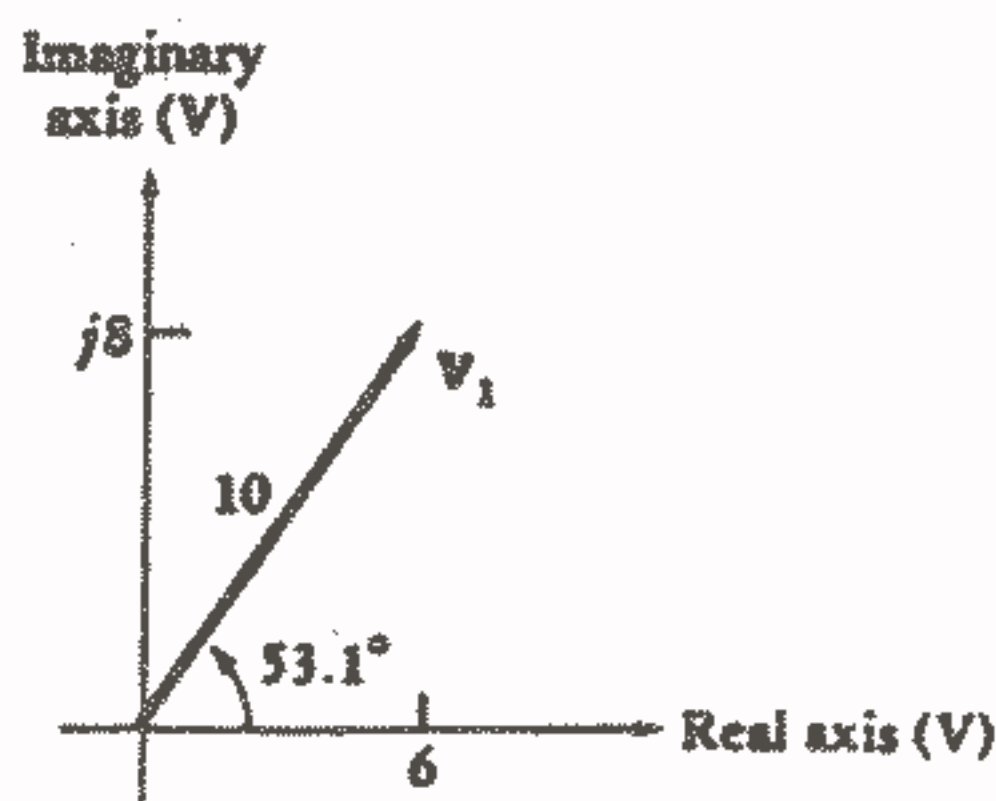
شکل ۱۰-۶: (a) به تمرین ۳-۱۰ مراجعه کنید. (b) به

تمرین ۴-۱۰ مراجعه کنید.

۴-۱۰- دیاگرام فیزوری

دیاگرام فیزوری نامی است که به نمودارهای داخل صفحه مختلط ولتاژها و جریانهای فیزوری داده شده است، این دیاگرام همچنین یک روش ترسیمی برای حل مسائل خاصی ارائه می کند و به عنوان یک روش چک برای روشهای تحلیلی دقیق تر می باشد. این دیاگرام کمک قابل توجهی را در ساده کردن حل تحلیلی مسائل چند فاز متقارن ارائه می کند. در فصل بعدی با دیاگرامهای مشابهی روبرو خواهیم شد که روابط قدرت مختلط را در حالت پایدار سینوسی نمایش می دهند. کاربرد سایر صفحات مختلط در رابطه با فرکانس مختلط در فصل ۱۳ ظاهر خواهد گشت.

ما قبلاً با کاربرد صفحه مختلط در نمایش ترسیمی اعداد مختلط و جمع و تفریق آنها آشنا شده ایم. از آنجاییکه ولتاژها و جریانهای فیزوری، اعداد مختلط می باشند می توانیم آنها را هم با نقاطی در صفحه مختلط نمایش دهیم. مثلاً ولتاژ فیزوری $V_1 = 6 + j8 = 10 \angle 53.1^\circ$ در صفحه مختلط ولتاژ در شکل ۱۰-۷ نمایش داده شده است. محورهای عبارتند از محور ولتاژ حقیقی و محور ولتاژ موهومی و ولتاژ V_1 به وسیله یک پیکان که از مبدأ رسم می شود نمایش داده شده است.

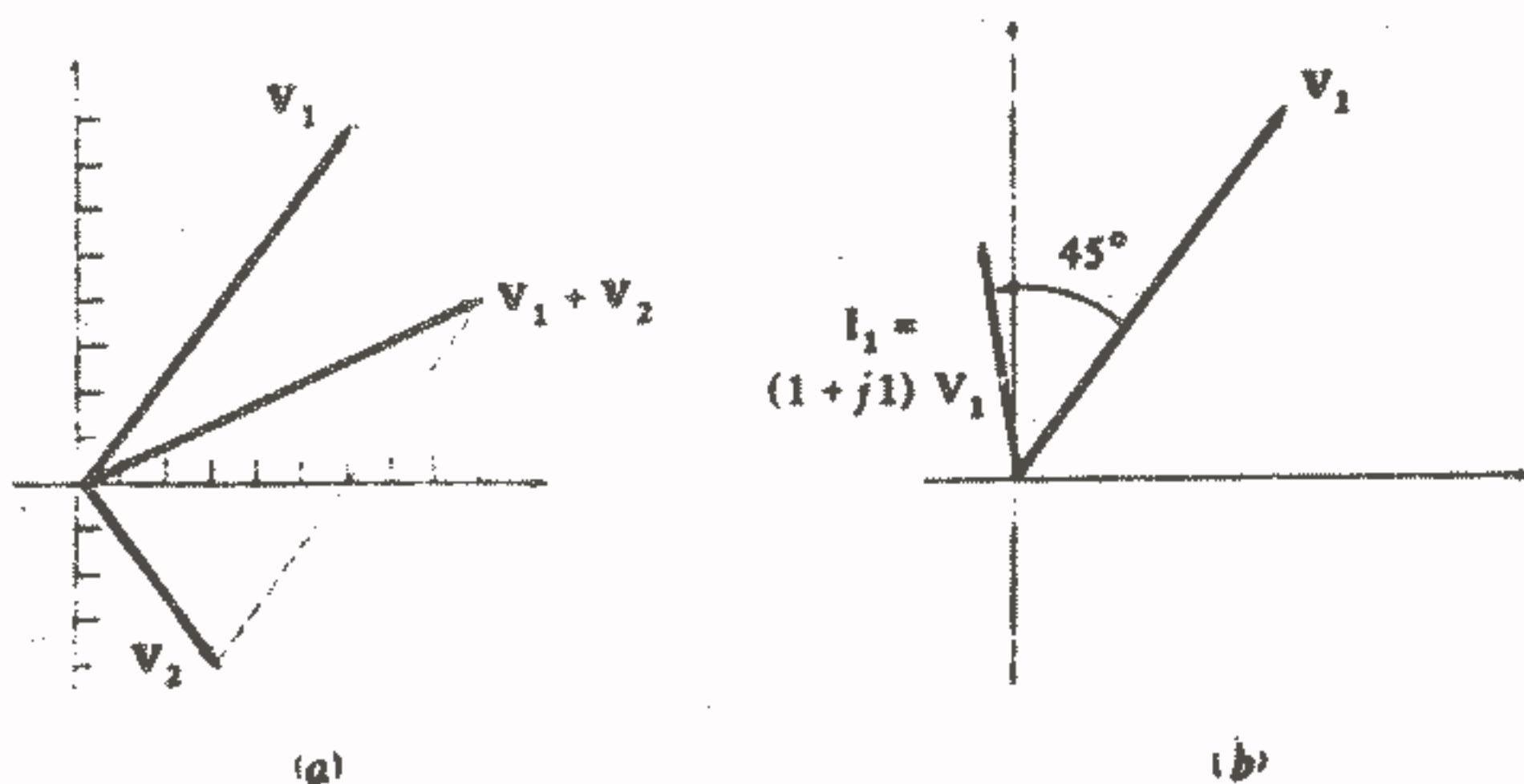


شکل ۷-۱۰: یک دیاگرام فیزوری ساده که ولتاژ فیزوری

$$V_1 = 6 + j8 = 10 \angle 53.1^\circ \text{ V}$$

را نمایش می‌دهد.

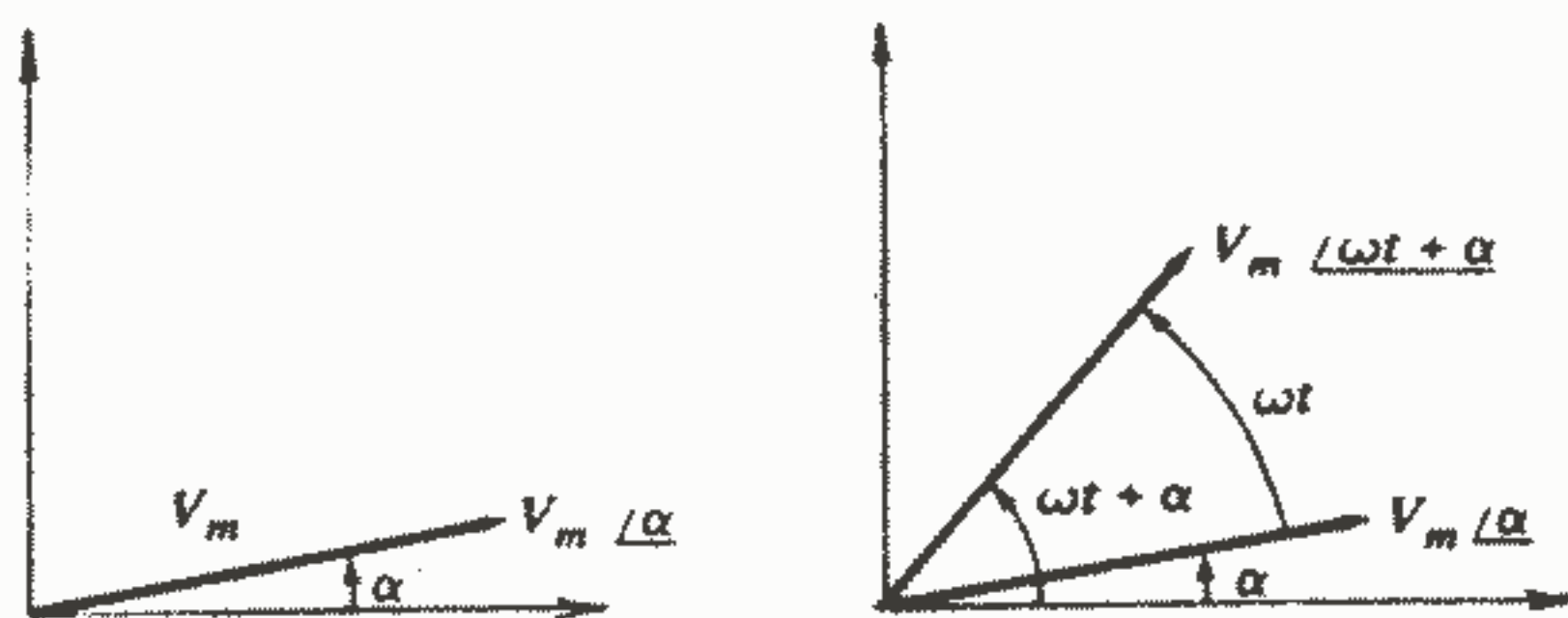
از آنجاییکه انجام دادن و نمایش جمع و تفریق در صفحه مختلط آسان می‌باشد، بدیهی است که فیزورها را به سادگی می‌توان در یک دیاگرام فیزوری جمع و تفریق نمود. در ضرب و تقسیم زاویه‌ها به ترتیب جمع و یا تفریق می‌شوند و دامنه هم تغییر می‌کند که این امر به وضوح نشان داده نمی‌شود زیرا تغییر دامنه بستگی به دامنه هر یک از فیزورها و مقیاس دیاگرام دارد. در شکل ۸a-۱۰ مجموع V_1 با فیزور ولتاژ دیگری مانند $V_2 = 3 - j4 = 5 \angle -53.1^\circ$ نشان داده شده و در شکل ۸b-۱۰ جریان I_1 که حاصل ضرب V_1 با آدmittانس از $Y = 1 + j1$ می‌باشد نمایش داده شده است.



شکل ۸-۱۰: (a) یک دیاگرام فیزوری که نمایش دهنده مجموع $V_1 + V_2 = 9 + j4 = 9.85 \angle 23.1^\circ$ یعنی $V_2 = 3 - j4$ و $V_1 = 6 + j8$ می‌باشد. (b) یک دیاگرام فیزوری که نشان دهنده V_1 و I_1 می‌باشد بطوریکه: $I_1 = YV_1$ و $Y = 1 + j1 \Omega$

در دیاگرام فیزوری اخیر دو فیزور ولتاژ و جریان در یک صفحه مختلط نمایش داده شده‌اند و در می‌یابیم که هر یک از این فیزورها مقیاس دامنه خاص خودشان را دارند اما هر دو دارای یک مقیاس زاویه مشترک می‌باشند مثلاً یک فیزور ولتاژ به طول ۱cm ممکن است نشان‌دهنده $3mA$ باشد.

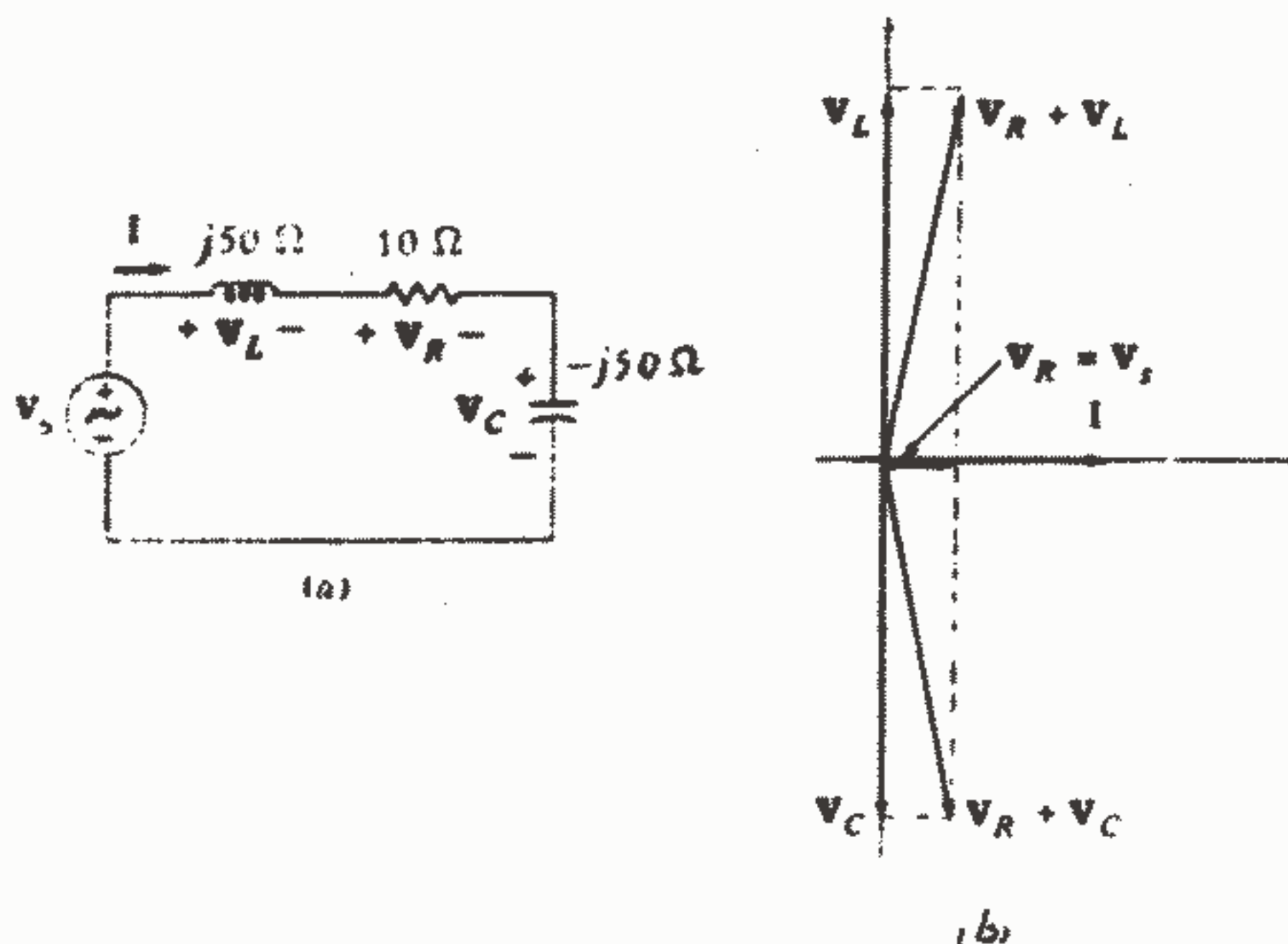
دیاگرام فیزوری همچنین تفسیر و توصیف خوبی از تبدیل حوزه زمان به حوزه فرکانس بدست می‌دهد، زیرا این دیاگرام را هم از نقطه نظر حوزه زمان و هم حوزه فرکانس می‌توان تفسیر نمود. تا به اینجا واضح است که ما فقط تعبیر حوزه فرکانسی را به کار برده‌ایم زیرا فیزورها را مستقیماً در دیاگرام فیزوری نمایش داده‌ایم، اما اکنون می‌خواهیم با نشان دادن فیزور $V = V_m/\alpha$ (مطابق شکل ۹a-۱۰) از نقطه نظر حوزه زمان هم تفسیری ارائه دهیم.



شکل ۹ - ۱۰: (a) ولتاژ فیزوری V_m/α . (b) ولتاژ مختلط $V_m/\omega t + \alpha$ به صورت یک فیزوری در یک لحظه به خصوصی از زمان نشان داده می‌شود. این فیزور به اندازه ωt رادیان نسبت به V_m/α تقدم دارد.

برای تبدیل V به حوزه زمان، قدم بعدی ضرب کردن این فیزور در $e^{j\omega t}$ می‌باشد یعنی اکنون خواهیم داشت: $V_m e^{j\omega t} e^{j\alpha} = V_m/\omega t + \alpha$. این ولتاژ را هم می‌توانیم به صورت فیزوری تعبیر کنیم که دارای زاویه فازی است که به طور خطی با زمان افزایش می‌یابد. بنابراین فیزور مذکور در یک دیاگرام فیزوری نشان‌دهنده یک قطعه خط در حال چرخش می‌باشد که به اندازه ωt رادیان جلوتر از V_m/α می‌باشد (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت). هر دو در دیاگرام فیزوری شکل ۹b-۱۰ نشان داده شده‌اند.

حال برای تکمیل روند انتقال به حوزه زمان باید از $V_m/\omega t + \alpha$ قسمت حقیقی بگیریم. بنابراین به طور خلاصه فیزور حوزه فرکانس در دیاگرام فیزوری ظاهر می شود و اگر اجازه دهیم این فیزور در خلاف جهت عقربه های ساعت با سرعت زاویه ای ω rad/s بچرخد و سپس تصویر آن را روی محور حقیقی در نظر بگیریم، در این صورت انتقال به حوزه زمان صورت می گیرد. بهتر است پاره خط جهت داری که بیانگر فیزور V می باشد را به صورت یک عکس فوری که در لحظه $\omega t = 0$ از پاره خط جهت دار در حال چرخش گرفته شده است تصور کنیم.

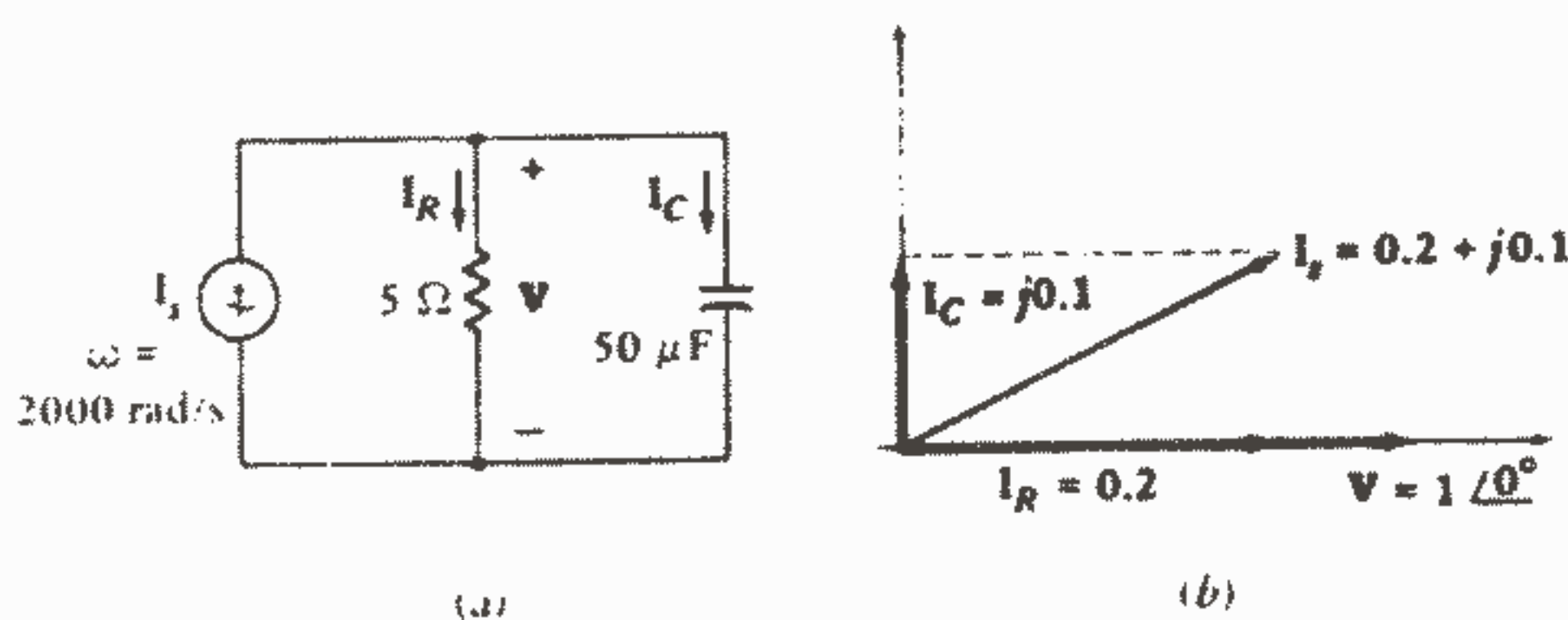


شکل ۱۰-۱۰: (a) یک مداری RLC سری که در حوزه فرکانس نشان داده شده است. (b) دیاگرام فیزوری مربوطه که در آن جریان چشمه ای را به عنوان فیزور مبنا در نظر گرفتیم.

حال دیاگرام فیزوری چند مدار ساده را تشکیل می دهیم. مدار RLC سری در شکل ۱۰-۱۰a دارای چند ولتاژ مشخص شده می باشد ولی فقط یک جریان برایش تعریف شده است. دیاگرام فیزوری را با در نظر گرفتن این جریان منفرد به عنوان فیزور مبنا، به سادگی می توان تشکیل داد. به طور دلخواه $I = I_m/0^\circ$ را انتخاب کرده و آن را بر روی محور حقیقی دیاگرام فیزوری (مطابق شکل ۱۰-۱۰b) قرار می دهیم. سپس می توانیم ولتاژهای مقاومت، خازن و سلف را محاسبه نموده و در دیاگرام قرار دهیم که روابط فازی 90° هم به وضوح مشهود است. مجموع

این سه ولتاژ برابر است با ولتاژ منبع و در مورد این مدار که در شرایط رزونانس می باشد (یعنی $Z_c = -Z_L$)، ولتاژ منبع و ولتاژ مقاومت با هم مساویند. ولتاژ کلی دو سر مقاومت و سلف با مقاومت و خازن به سادگی از دیاگرام فیزوری به دست می آید.

شکل ۱۱a-۱۰ مدار موازی ساده ای را نشان می دهد که در آن استفاده از ولتاژ منفرد بین دو گره به عنوان فیزور مبنا منطقی به نظر می رسد. فرض کنید $V = 1 \angle 0^\circ$ باشد. جریان مقاومت با این ولتاژ هم فاز است یعنی $I_R = 0.2 \angle 0^\circ$ A و جریان خازن از ولتاژ مبنا 90° جلوتر است یعنی $I_C = j0.1$ A. بعد از اینکه این دو جریان به دیاگرام فیزوری اضافه شوند (مطابق شکل ۱۱b-۱۰) می توان آنها را جمع نموده و جریان منبع را به دست آورد. حاصل اینکار عبارت است از $I_s = 0.2 + j0.1$ A.



شکل ۱۱ - ۱۰: (a) یک مدار RC موازی. (b) دیاگرام فیزوری این مدار که در آن ولتاژ گره V به عنوان یک فیزور مبنای مناسب به کار رفته است.

اگر جریان منبع از ابتدا معلوم می بود (مثلاً $1 \angle 0^\circ$ A) و ولتاژ گره از ابتدا معلوم نمی بود باز هم مناسب تر این بود که یک ولتاژ گرهی فرض کنیم (مثلاً $V = 1 \angle 0^\circ$) و آن را به عنوان فیزور مبنا به کار ببریم. سپس دیاگرام را مانند قبل کامل می کنیم و جریان منبعی که حاصل از ولتاژ گرهی مفروض می باشد، باز هم برابر با $0.2 + j0.1$ A خواهد بود که البته جریان منبع واقعی عبارت از $1 \angle 0^\circ$ A می باشد بنابراین ولتاژ گرهی واقعی به اندازه $0.2 + j0.1 \angle 0^\circ$ بزرگتر می باشد یعنی برابر است با: $V = 4 - j2$.

ولتاژ فرض شده یک دیاگرام فیزوری را ایجاد می کند که با دیاگرام فیزوری واقعی در یک تغییر مقیاس با هم تفاوت دارند (دیاگرام مفروض به اندازه عامل $1/\sqrt{2}$ کوچکتر می باشد) و نیز یک چرخش زاویه ای هم نسبت به یکدیگر دارند (دیاگرام فرض شده به اندازه $26,6^\circ$ در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت چرخیده است).

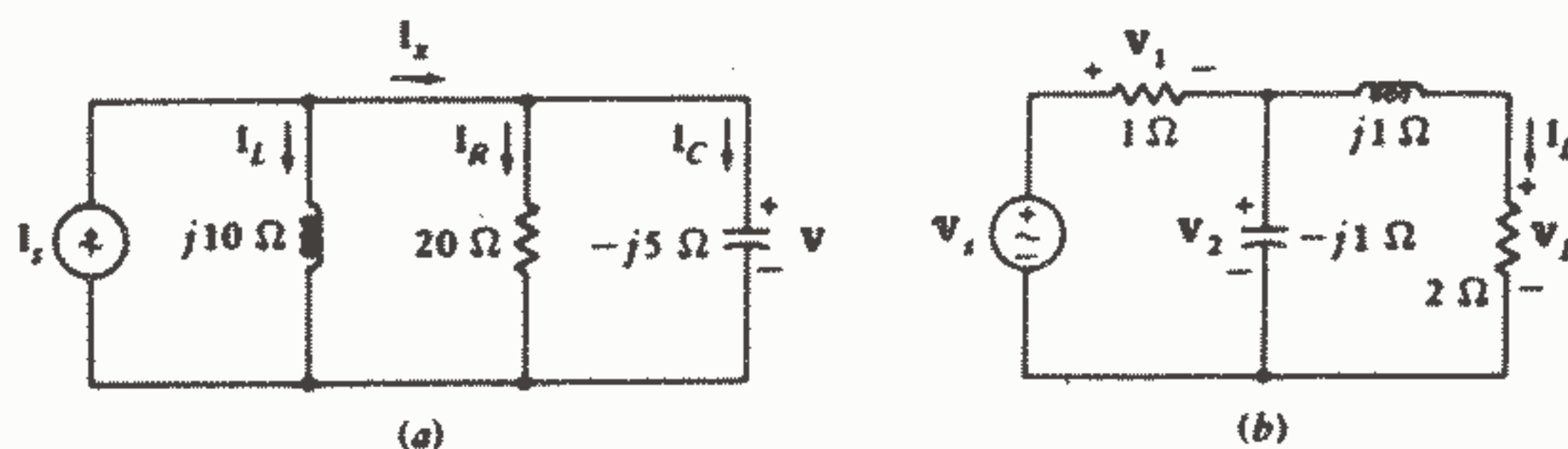
رسم دیاگرامهای فیزوری معمولاً بسیار ساده است و تحلیل حالت پایدار سینوسی در اکثر موارد اگر همراه با چنین دیاگرامی باشد قابل فهم تر خواهد بود. مثالهای دیگری از کاربرد دیاگرامهای فیزوری بطور مکرر در باقیمانده مطالعه مان ارائه خواهد شد.

تمرین

۵ - ۱۰ - مقدار مناسبی برای V در شکل ۱۲a-۱۰ فرض کنید و یک دیاگرام فیزوری رسم کنید که I_L , I_C , I_R را نشان دهد. با ترکیب این جریانها، زاویه تقدم فاز I_L را نسبت به جریانهای زیر پیدا کنید:

$$I_L (a), I_C (b), I_R (c)$$

$$\text{جواب: } 63^\circ, -27^\circ, -13^\circ$$



شکل ۱۲ - ۱۰: (a) به تمرین ۵ - ۱۰ مراجعه کنید. (b) به

تمرین ۶ - ۱۰ مراجعه کنید.

۶ - ۱۰ - یک مقدار مبناء برای I_L در شکل ۱۲b-۱۰ انتخاب کنید و یک دیاگرام فیزوری رسم کنید که نشان دهنده V_L , V_R , V_1 , V_s باشد و نسبت طولهای زیر را پیدا کنید:

$$V_s (a) \text{ به } V_1, V_s (b) \text{ به } V_R, V_s (c) \text{ به } V_L.$$

$$\text{جواب: } 1,80, 1,61, 1,80$$

۵-۱۰. پاسخ به صورت تابعی از ω

اکنون می‌خواهیم روشهای به‌دست آوردن و بیان پاسخ یک مدار با تحریک سینوسی را به صورت تابعی از فرکانس زاویه‌ای ω ، بررسی کنیم. به استثناء فرکانس برق شهر 60 Hz که در آن فرکانس ثابت و بار متغیر است در بقیه موارد پاسخ فرکانس سینوسی تقریباً در تمام شاخه‌های مهندسی برق و سایر زمینه‌های مرتبط از قبیل تئوری ارتعاشات مکانیکی حائز اهمیت زیادی است.

بیایید فرض کنیم که مداری با تحریک $V_s = V_s \angle \theta$ داریم. این ولتاژ فیزیوری را می‌توان به صورت ولتاژ منبعی در حوزه زمان یعنی $V_s \cos(\omega t + \theta)$ هم تبدیل نمود. پاسخ مطلوب ما در گوشه‌ای از مدار مثلاً به صورت یک جریان I می‌باشد. همانگونه که می‌دانیم این پاسخ فیزیوری، یک عدد مختلط می‌باشد و مقدار آن را نمی‌توان به طور کلی بدون استفاده از دو کمیت نشان داد که این دو کمیت یکی قسمت حقیقی و دیگری قسمت موهومی و یا یک دامنه با یک زاویه فاز می‌باشند. که جفت کمیت اخیر مفیدتر است و به طور تجربی می‌توان به سادگی آنها را تعیین نمود که این اطلاعات را ما به طور تحلیلی به صورت تابعی از فرکانس به دست خواهیم آورد. این اطلاعات را به صورت دو منحنی که یکی دامنه پاسخ به صورت تابعی از ω و دیگری زاویه فاز پاسخ به صورت تابعی از ω می‌باشند می‌توان بیان نمود اغلب این منحنی‌ها را نرمالیزه می‌کنیم و دامنه نسبت جریان به ولتاژ و زاویه فاز نسبت جریان به ولتاژ را به صورت تابعی از ω می‌باشد. این آدمیتانس می‌تواند یک آدمیتانس ورودی باشد و یا اگر جریان و ولتاژ در مکانهای مختلفی از مدار اندازه‌گیری شده باشند، می‌تواند یک آدمیتانس انتقالی باشد. اگر پاسخ ولتاژ را نسبت به یک منبع جریان نرمالیزه کنیم در این صورت منحنی‌ها عبارت از دامنه یا زاویه فاز یک امپدانس ورودی یا انتقالی بر حسب ω خواهند بود. سایر حالت‌هایی که می‌توان در نظر گرفت نسبت ولتاژ به ولتاژ (بهره ولتاژ) و یا نسبت جریان به جریان (بهره جریان) می‌باشد. حال جزئیات این روند را با مورد بحث قرار دادن دو مثال بررسی می‌کنیم.

به عنوان مثال اول، مدار RL سری را انتخاب می‌کنیم. ولتاژ فیزیوری V_s را به این مدار ساده اعمال می‌کنیم و جریان فیزیوری I (که از قطب مثبت منبع ولتاژ خارج می‌شود) پاسخ مورد نظر ما می‌باشد. فقط پاسخ اجباری، مورد نظر ما می‌باشد و به وسیله روشهای آشنای فیزیوری خواهیم داشت:

$$I = V_s / R + j\omega L$$

این نتیجه را بلافاصله به صورت یک نسبت جریان به ولتاژ یعنی آدمیتانس ورودی بیان می‌کنیم:

$$Y = I/V_s$$

و یا

$$Y = 1/R + j\omega L \quad (3)$$

اگر بخواهیم می‌توانیم آدمیتانس را به صورت جریانی که به وسیله یک منبع ولتاژ $V \angle 0^\circ$ تولید شده است، در نظر بگیریم. دامنه پاسخ عبارت است از:

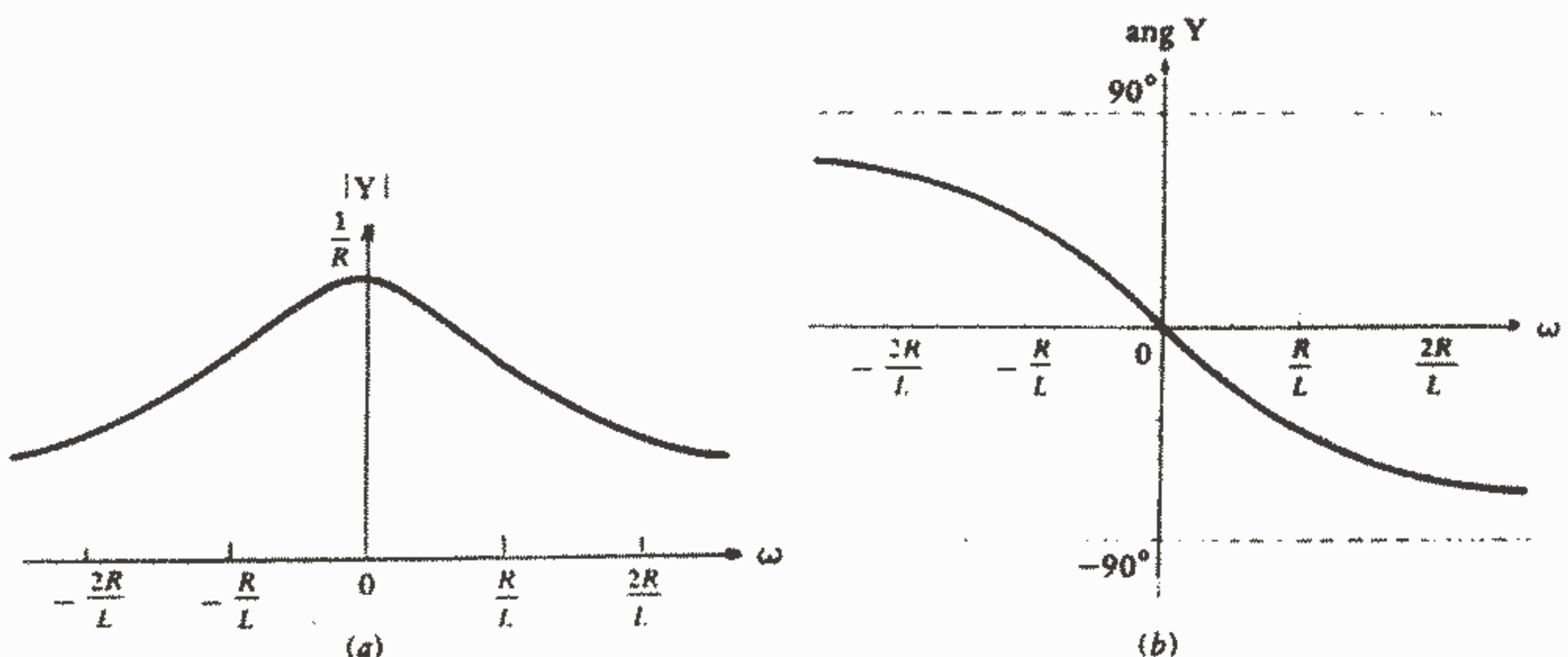
$$|Y| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (4)$$

و زاویه پاسخ عبارت است از:

$$\text{ang } Y = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (5)$$

معادلات (۴) و (۵) روابط تحلیلی برای دامنه و زاویه فاز پاسخ به صورت تابعی از ω می‌باشند و حالا می‌خواهیم همین اطلاعات را به صورت ترسیمی بیان کنیم.

ابتدا منحنی دامنه را در نظر می‌گیریم. باید توجه داشت که ما قدر مطلق یک کمیت را بر حسب ω رسم می‌کنیم و بنابراین کل منحنی باید بالای محور ω قرار گیرد. منحنی پاسخ با توجه به این که مقدار پاسخ در فرکانس صفر برابر است با $1/R$ و شیب اولیه صفر است و نیز وقتی که فرکانس به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، پاسخ به سمت صفر میل می‌کند، به دست می‌آید که این منحنی در شکل ۱۰-۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۱۰ - ۱۳: (a) دامنه $Y = I/V_s$ و (b) زاویه Y به صورت تابعی از ω برای یک مدار RL سری با تحریک سینوسی رسم شده‌اند.

به منظور کلی بودن و کامل بودن منحنی، آن را برای مقادیر مثبت و منفی فرکانس رسم کرده‌ایم و تقارن موجود در شکل از معادله (۴) هم مشهود است زیرا در این معادله اگر ω را به $(-\omega)$ تبدیل کنیم مقدار $|V|$ تغییری نمی‌کند. تعبیر فیزیکی فرکانس زاویه‌ای منفی (مثلاً $\omega = -100 \text{ rad/s}$) بستگی به تابع حوزه زمانی دارد و همیشه می‌توان آن را با بررسی تابع زمانی به دست آورد. مثلاً ولتاژ $v(t) = 50 \cos(\omega t + 30^\circ)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $\omega = 100$ باشد ولتاژ مذکور برابر خواهد بود با $v(t) = 50 \cos(100t + 30^\circ)$ ، اما اگر $\omega = -100$ باشد، خواهیم داشت:

$$v(t) = 50 \cos(-100t + 30^\circ) \text{ و یا } v(t) = 50 \cos(100t - 30^\circ)$$

که همانگونه که می‌بینیم این ولتاژها در لحظه $t = 1 \text{ ms}$ دارای مقادیر مختلفی هستند. هر پاسخ سینوسی را می‌توان به طریق مشابهی تفسیر نمود.

قسمت دوم پاسخ، یعنی زاویه فاز V نسبت به ω ، یک تابع تانژانت معکوس می‌باشد. تابع تانژانت، خودش برای ما کاملاً آشناست و اگر آن را به پهلو بخوابانیم و مجانبهای $\pm 90^\circ$ را در نظر بگیریم، منحنی مطلوب به دست می‌آید. منحنی پاسخ در شکل ۱۳b-۱۰ نشان داده شده است. نقاطی که در آنها $\omega = \pm R/L$ است در هر دو منحنی دامنه و فاز مشخص شده‌اند. در این فرکانسها، دامنه برابر است با 0.707 ، برابر ماکزیمم دامنه در فرکانس صفر و زاویه فاز برابر است با 45° در فرکانسی که دامنه آدامیتانس 0.707 برابر ماکزیمم مقدارش می‌باشد، دامنه جریان برابر است با 0.707^2 یا 0.5 برابر مقدار ماکزیمم آن. بنابراین منطقی است که $\omega = R/L$ را به عنوان فرکانس «نیم قدرت» در نظر بگیریم.

به عنوان مثال دوم، یک مدار LC موازی را که با یک منبع جریان سینوسی تحریک می‌شود در نظر می‌گیریم، که در شکل ۱۴a-۱۰ نشان داده شده است.

پاسخ ولتاژ V به سادگی به دست می‌آید:

$$V = I_s \frac{(j\omega L)(1/j\omega C)}{j\omega L - j(1/\omega C)}$$

که می‌توانیم آن را به صورت یک امپدانس ورودی بیان کنیم:

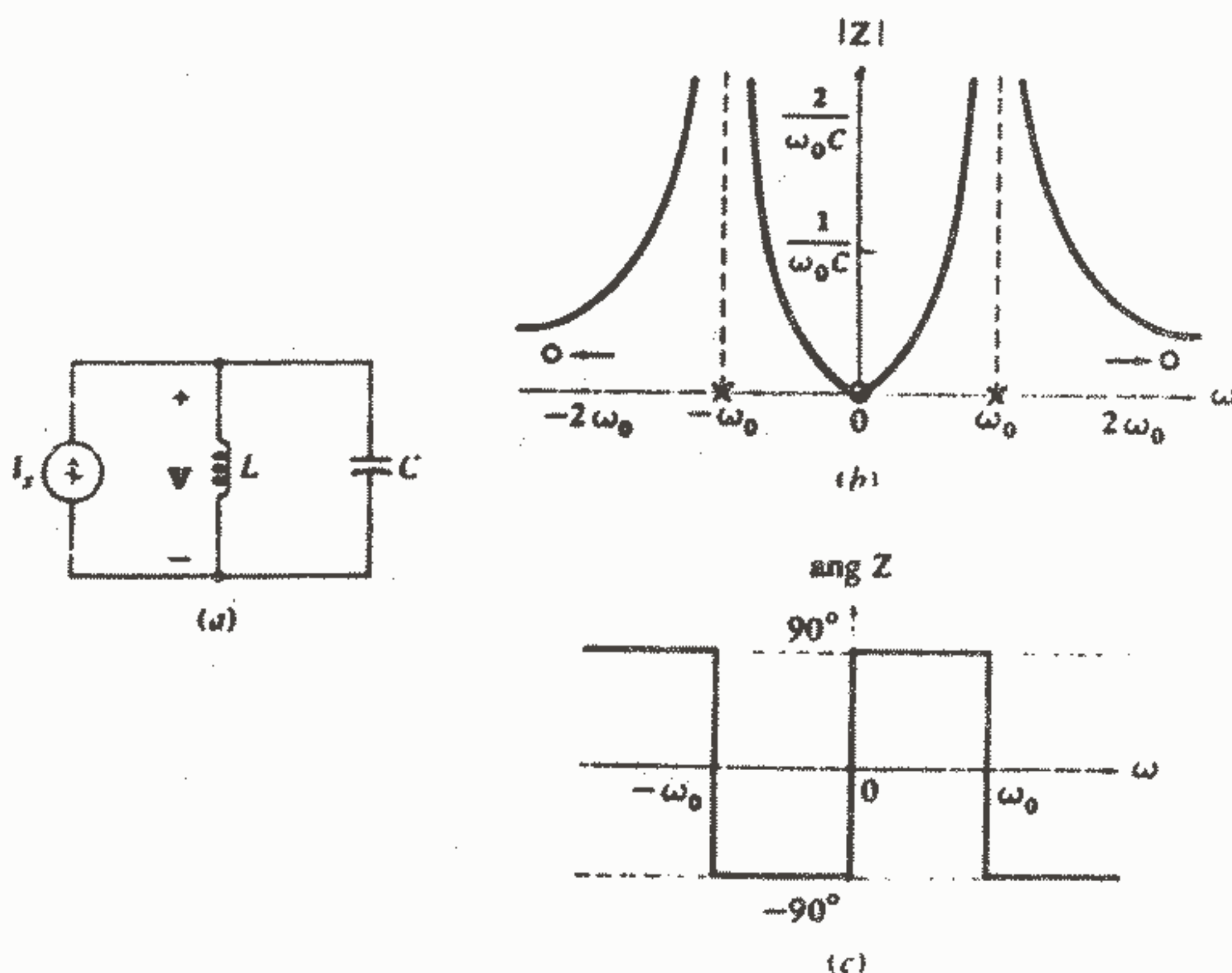
$$Z = \frac{V}{I_s} = \frac{L/C}{j(\omega L - 1/\omega C)}$$

و یا:

$$Z = -j \frac{1}{C} \frac{\omega}{\omega^2 - 1/LC} \quad (6)$$

که اگر $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ را در رابطه (۶) قرار دهیم و دامنه امپدانس ورودی را محاسبه کنیم، فرکانسهایی که در آن، پاسخ برابر با صفر یا بی نهایت می‌شود به دست می‌آید.

$$|Z| = \frac{1}{C} \frac{|\omega|}{|(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)|} \quad (v)$$



شکل ۱۴ - ۱۰: یک مدار LC موازی با تحریک سینوسی.
 (b) دامنه امپدانس ورودی $Z = V/I_s$ (c) زاویه امپدانس
 ورودی که به صورت تابعی از ω رسم شده است.

چنین فرکانسهایی را فرکانس بحرانی می‌نامیم و تعریف قبلی آنها ترسیم منحنی پاسخ را آسان می‌سازد. ابتدا توجه می‌کنیم که پاسخ در $\omega = 0$ دارای دامنه صفر است و می‌گوییم که پاسخ در $\omega = 0$ دارای یک «صفر» می‌باشد. دامنه بی‌نهایت پاسخ در $\omega = \pm \omega_0$ روی می‌دهد که این فرکانسها را قطب می‌نامند و می‌گوییم که پاسخ در هر یک از این فرکانسها دارای یک قطب است. و بالاخره باید توجه داشته باشیم که وقتی که $\omega \rightarrow \infty$ پاسخ میل می‌کند به سمت صفر و بنابراین $\omega = \pm \infty$ هم یک صفر می‌باشد.^۱

محل فرکانسهای بحرانی را باید بر روی محور ω مشخص نمود که این کار را با استفاده از دایره‌های کوچک توخالی برای صفرها و علامت ضربدر برای قطبها انجام می‌دهیم. صفرها و یا قطبهایی که در بی‌نهایت هستند باید به وسیله یک فلش در نزدیکی محور مشخص شوند که این

۱ - مرسوم است که مثبت بی‌نهایت و منفی بی‌نهایت را یک نقطه در نظر می‌گیرند، البته زاویه فاز پاسخ لازم نیست که به ازای مقادیر خیلی بزرگ مثبت و منفی ω با هم یکی باشند.

مطلب در شکل ۱۰-۱۴b نشان داده شده است. اگر خط چین های عمودی به عنوان مجانب در محل هر قطب اضافه کنیم رسم منحنی آسانتر می شود. نمودار کامل دامنه بر حسب ω در شکل ۱۰-۱۴b نشان داده شده است که شیب منحنی در مبداء صفر نیست.

بررسی معادله (۶) نشان می دهد که زاویه فاز امپدانس ورودی باید $+90^\circ$ و یا -90° باشد و مقدار دیگری نمی تواند باشد که این امر برای هر مداری که فقط متشکل از سلف و خازن باشد بدیهی می باشد. بنابراین روابط تحلیلی مربوط به $\text{ang } Z$ باید شامل یک سری روابطی باشد که نشان دهد زاویه مورد نظر در فرکانسهای مشخصی $+90^\circ$ یا -90° است، که خیلی راحت تر است این اطلاعات به طور ترسیمی مطابق شکل ۱۰-۱۴C نمایش داده شود.

تمرین

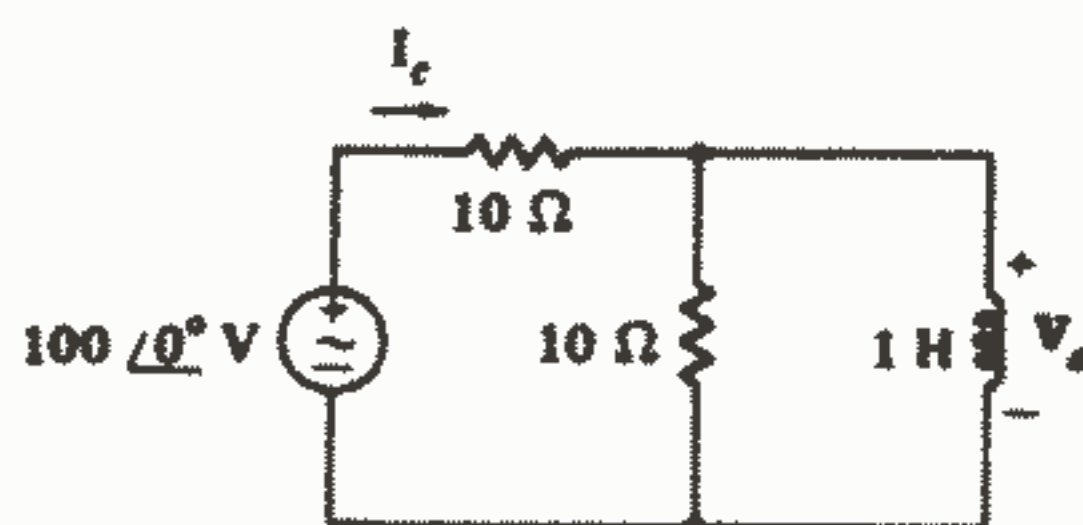
۷- ۱۰. برای مدار شکل ۱۰-۱۵ کمیت های زیر را به صورت تابعی از ω رسم کنید:

$$|V_o| \text{ (a)} \quad |V_o| \text{ (b)} \quad \text{ang } V_o \text{ (c)} \quad |I_c|$$

جواب: $|V_o(j3)| = 25.7$, $\text{ang } V_o(-j10) = -26.6^\circ$, $|I_c(j5)| = 7.91 \text{ A}$

۸- ۱۰. دو مقاومت 10Ω را در مدار شکل ۱۰-۱۵ با دو خازن $100\mu\text{F}$ جایگزین کنید و فرض کنید I_c پاسخ مطلوب باشد. دامنه و زاویه فاز پاسخ را به صورت تابعی از ω رسم کنید و کلیه فرکانسهای بحرانی پاسخ را تعیین کنید.

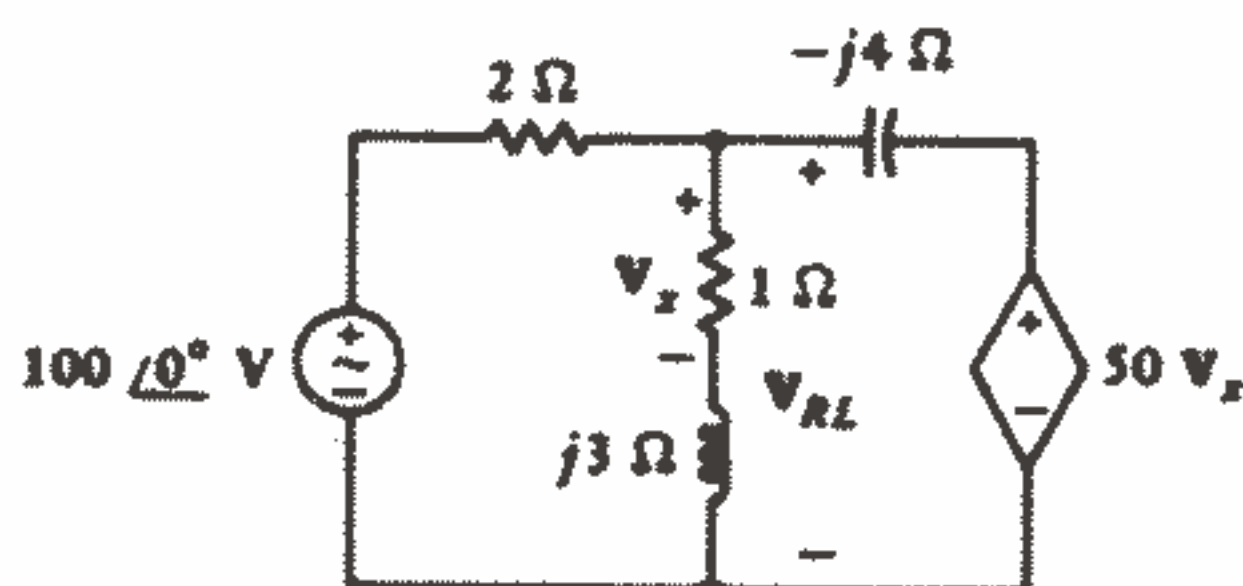
جواب: $I_c(j80) = 1.03 \angle -90^\circ \text{ A}$, 0 , 70.7 , $\pm 100 \text{ rad/s}$



شکل ۱۵- ۱۰: به تمرینات ۷- ۱۰ و ۸- ۱۰ مراجعه کنید.

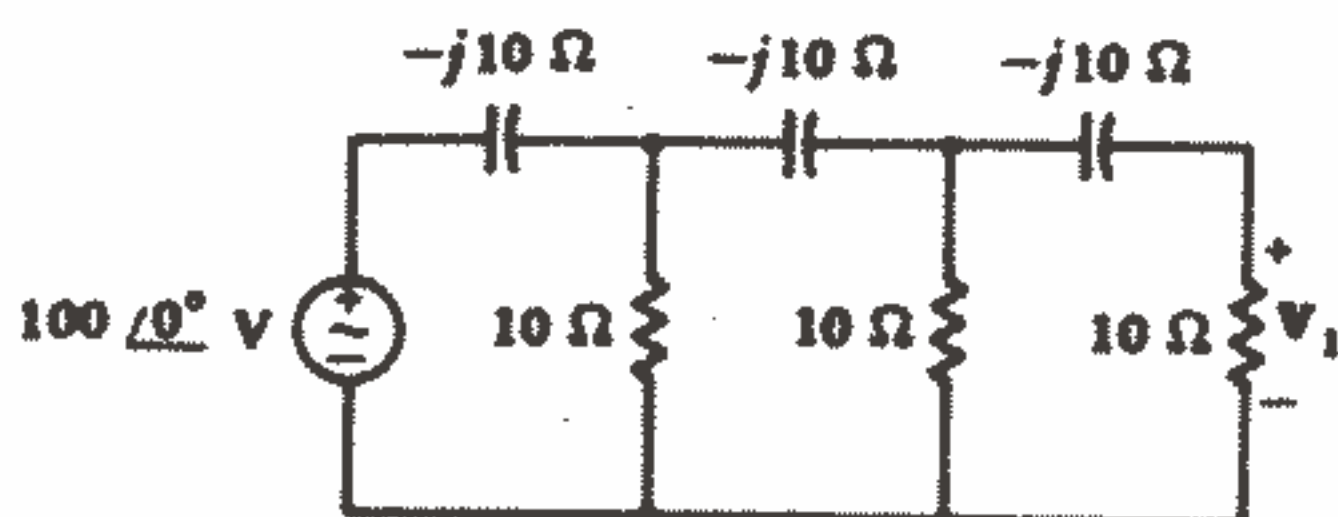
مسائل

۱- با استفاده از تحلیل گرهی در مدار شکل ۱۰-۱۶ ولتاژ فیزیوری V_{RL} را پیدا کنید.



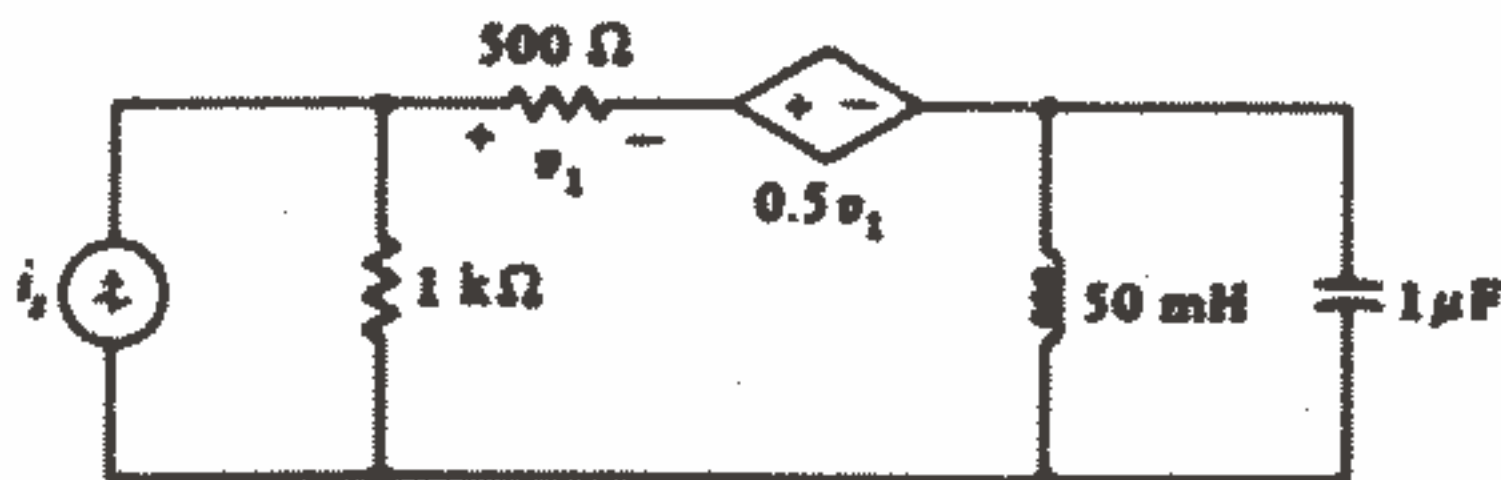
شکل ۱۰-۱۶: به مسئله ۱ مراجعه کنید.

۲- (a) در شکل ۱۰-۱۷ V_1 را پیدا کنید. (b) امپدانسهای خازنی را به چه مقداری باید تغییر دهیم تا V_1 به مقدار 180° با ولتاژ منبع اختلاف فاز داشته باشد؟



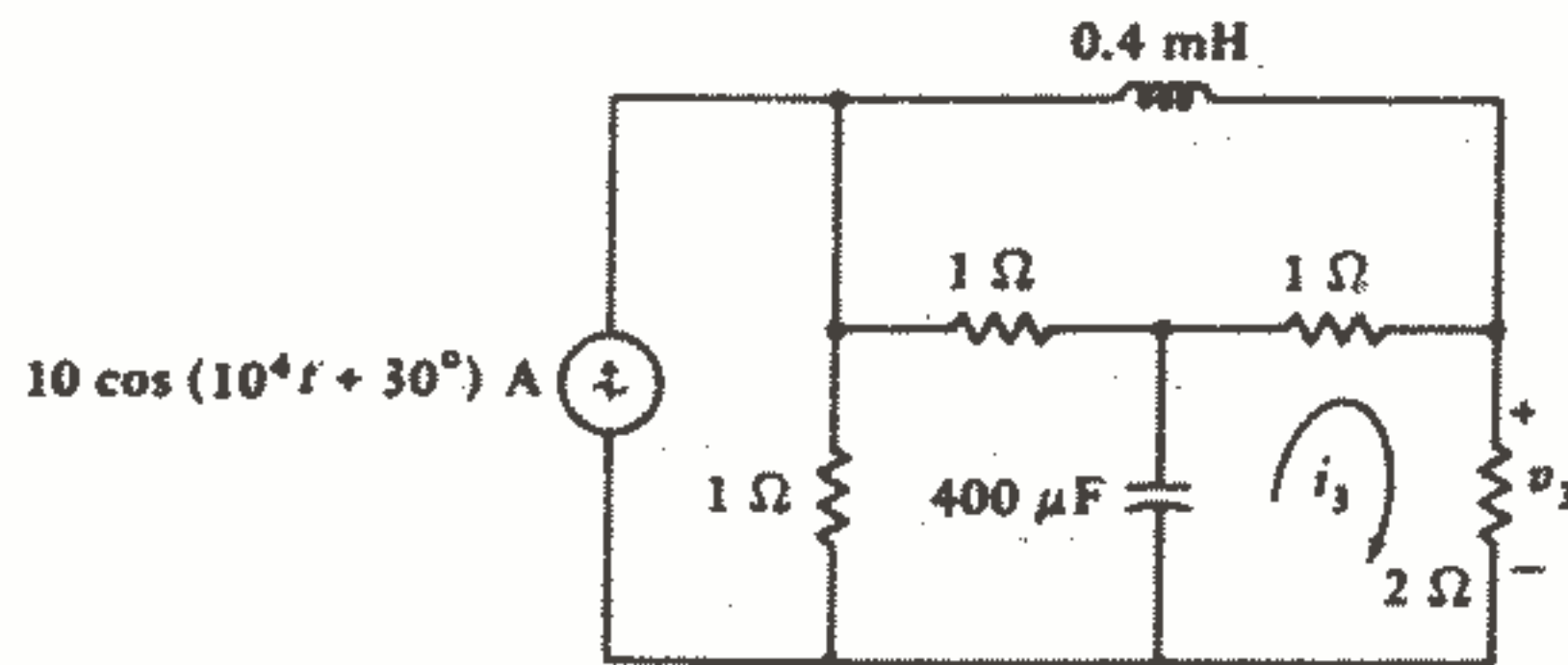
شکل ۱۰-۱۷: به مسئله ۲ مراجعه کنید.

۳- اگر $i_s(t) = 10^{-3} \cos 10^4 t$ باشد در مدار شکل ۱۰-۱۸ مقدار $V_1(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۱۰-۱۸: به مسئله ۳ مراجعه کنید.

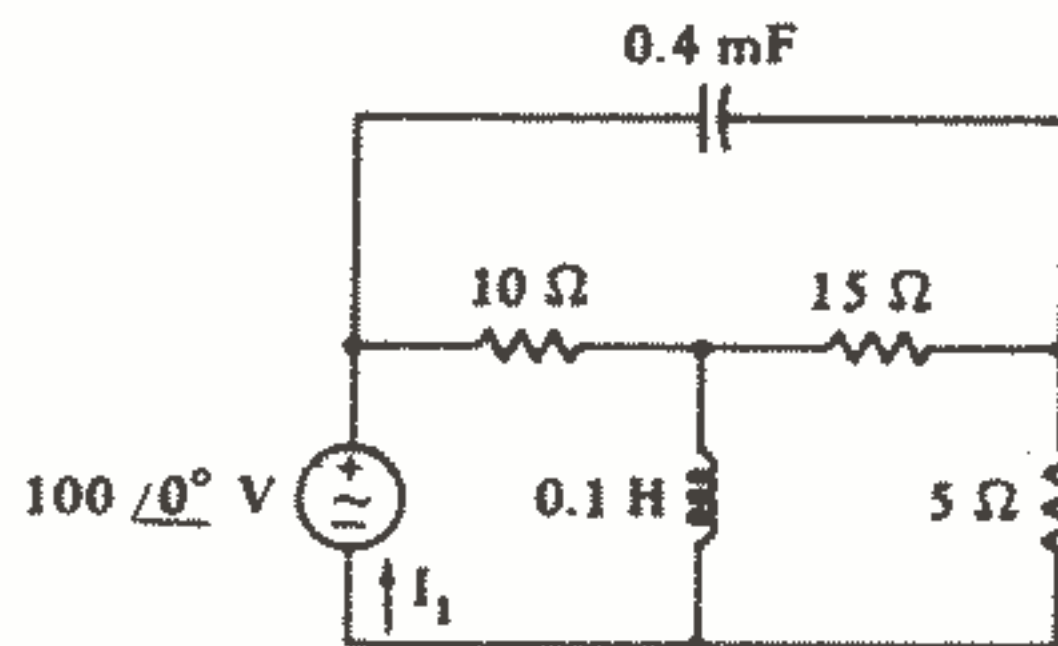
۴- با استفاده از تحلیل گرهی در مدار شکل ۱۹-۱۰، $v_p(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۱۹-۱۰: به مسائل ۴ و ۵ مراجعه کنید.

۵- سه معادله چشمه‌ای نوشته و با حل آنها $i_p(t)$ را در مدار شکل ۱۹-۱۰ پیدا کنید.

۶- اگر در منبع شکل ۲۰-۱۰، $\omega = 100 \text{ rad/s}$ باشد، I_1 را پیدا کنید.



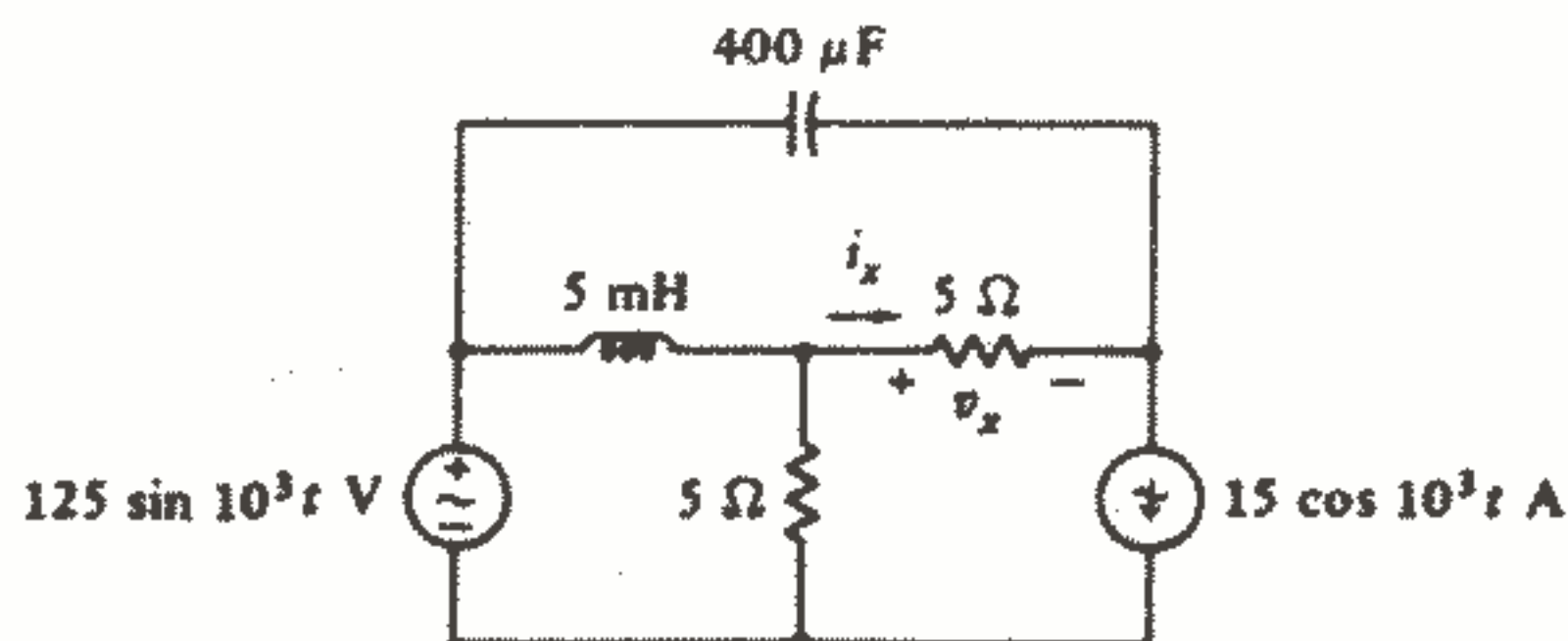
شکل ۲۰-۱۰: به مسئله ۶ مراجعه کنید.

۷- (a) یک درخت برای مدار شکل ۲۱-۱۰ رسم کنید بطوریکه i_x یک جریان لینک

باشد. مجموعه کاملی از جریانهای لینک مشخص کنید و $i_x(t)$ را پیدا کنید. (b) درخت

دیگری رسم کنید که در آن v_x یک ولتاژ شاخه درختی باشد و مجموعه کاملی از ولتاژهای

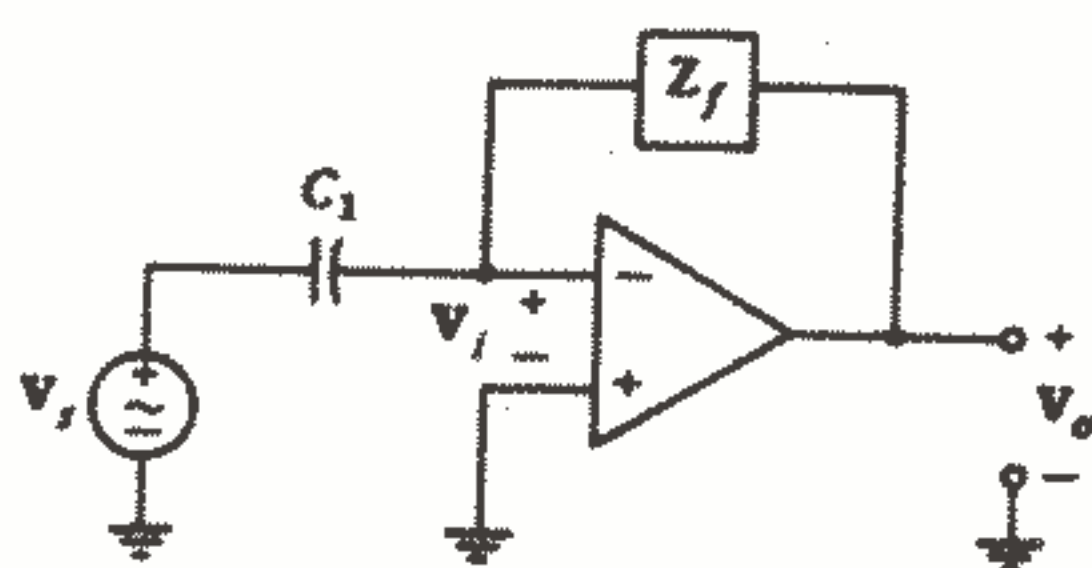
شاخه درختی تعیین کنید و $v_x(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۲۱-۱۰: به مسئله ۷ مراجعه کنید.

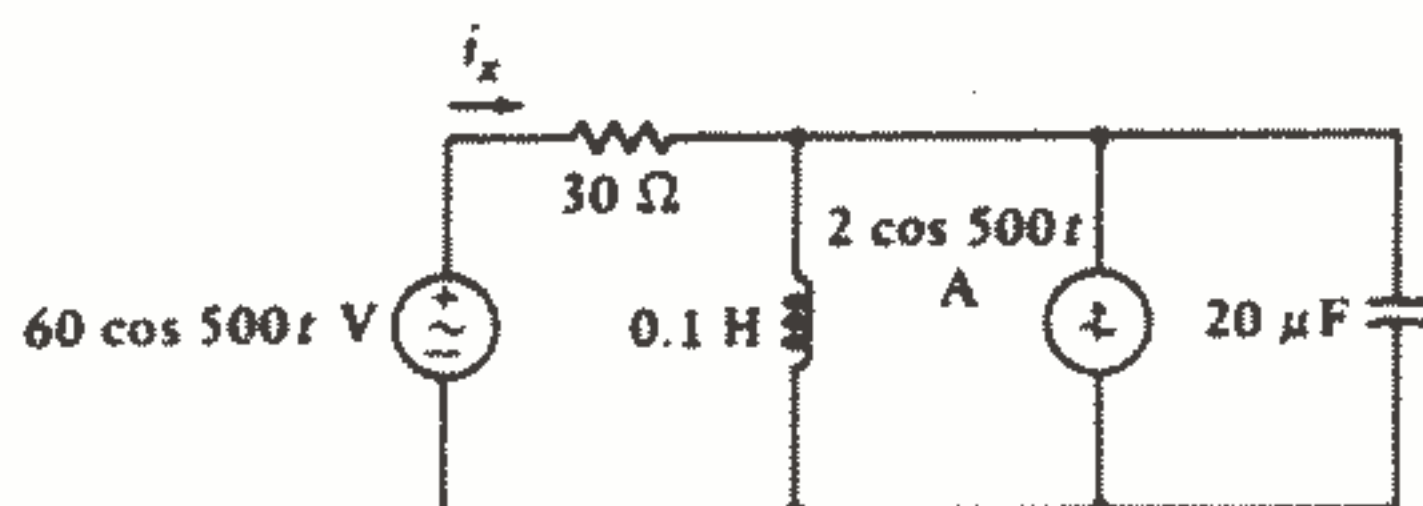
۸ - op - amp شکل ۲۲-۱۰ دارای یک امپدانس ورودی بی‌نهایت و امپدانس خروجی صفر و دارای گین بزرگ $A = -V_o / V_i$ می‌باشد. (a) یک مشتق‌گیر با فرض $Z_f = R_f$ بکشید و V_o / V_s را پیدا کنید و سپس نشان دهید که $V_o / V_s \longrightarrow -j\omega C_1 R_f$ وقتی که $A \rightarrow \infty$. (b) فرض کنید که Z_f عبارت است از R_f موازی با C_f و سپس V_o / V_s را پیدا کنید و نشان دهید که:

$$A \longrightarrow \infty \quad V_o / V_s \longrightarrow -j\omega C_1 R_f / (1 + j\omega C_f R_f)$$



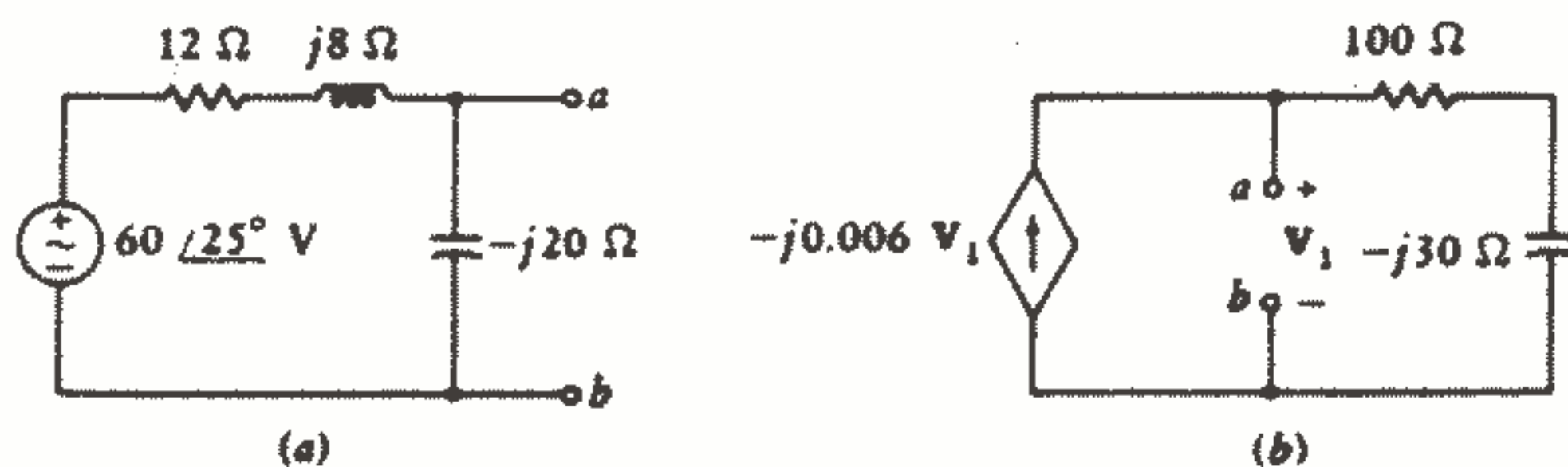
شکل ۲۲-۱۰: به مسئله ۸ نگاه کنید.

۹ - با استفاده از جمع آثار I_x ، $i_x(t)$ را در مدار شکل ۲۳-۱۰ پیدا کنید.



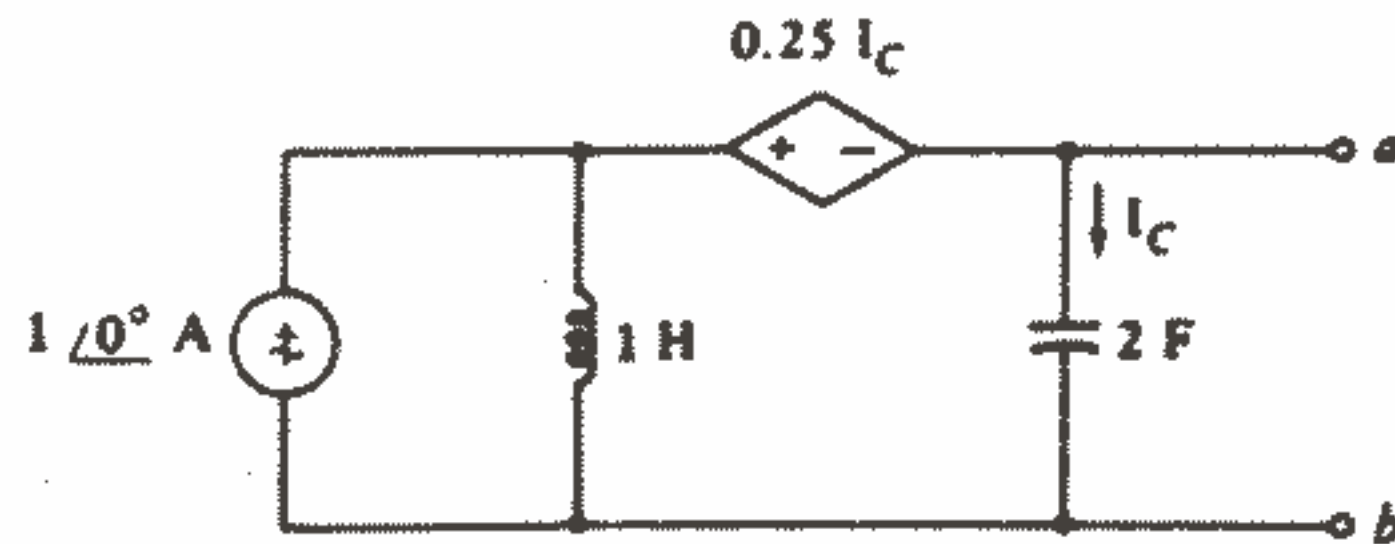
شکل ۲۳-۱۰: به مسئله ۹ مراجعه کنید.

۱۰ - در شکل‌های a-۲۴-۱۰، مدار معادل تونن را پیدا کنید.



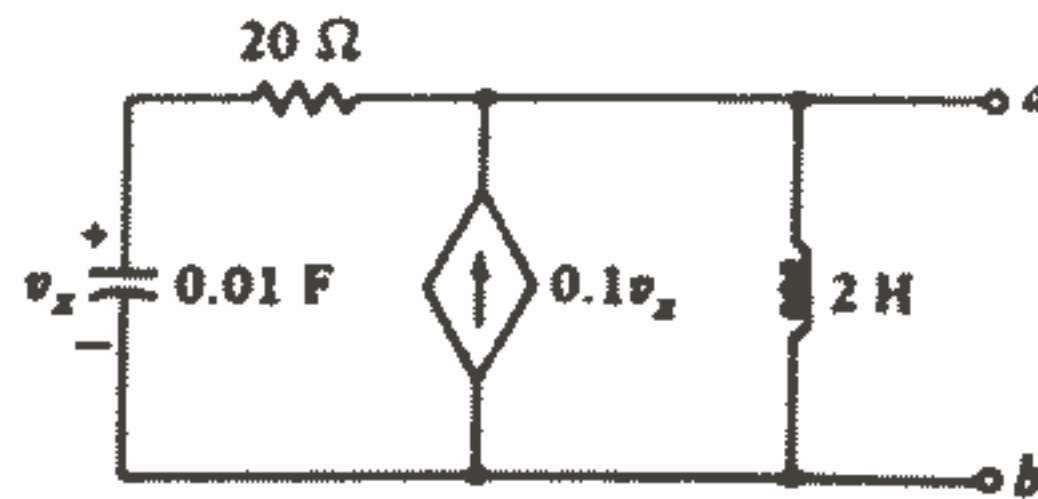
شکل ۲۴-۱۰: به مسئله ۱۰ مراجعه کنید.

۱۱- در شکل ۱۰-۲۵ فرض کنید $\omega = 1 \text{ rad/s}$ و معادل تونن را از دید ترمینالهای a-b پیدا کنید و مدار معادل را به صورت یک منبع ولتاژ V_{th} به طور سری با یک مقاومت R_{th} و یک سلف L_{th} یا یک خازن C_{th} رسم کنید.



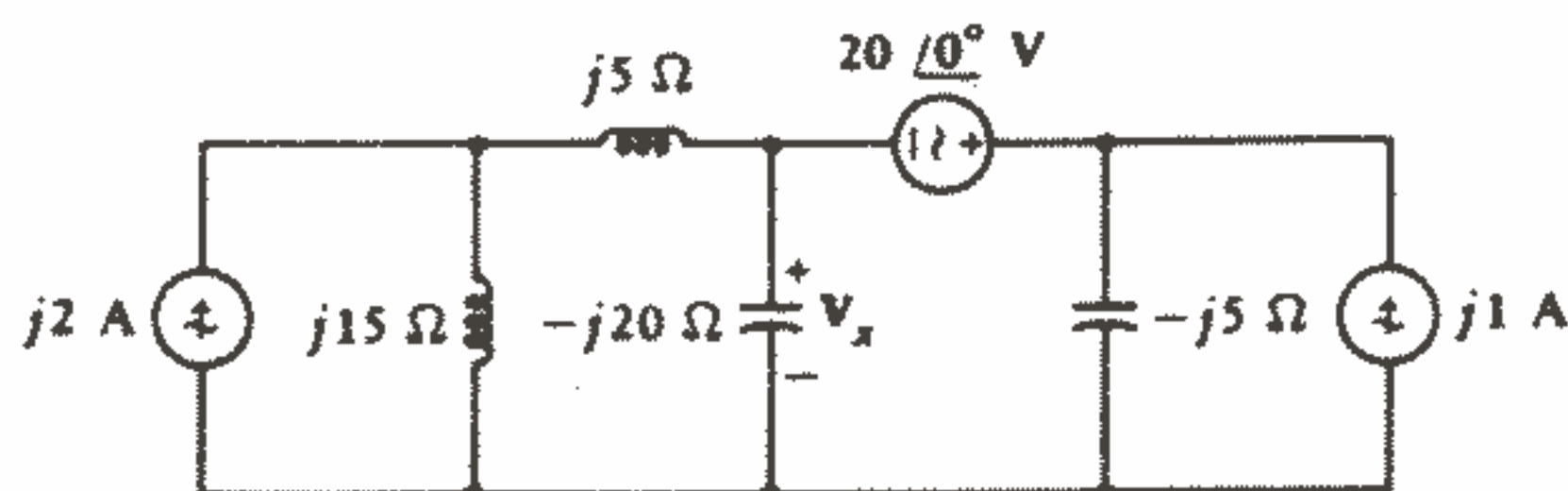
شکل ۱۰-۲۵: به مسئله ۱۱ مراجعه کنید.

۱۲- مدار معادل تونن مدار شکل ۱۰-۲۶ را در: (a) $\omega = 10 \text{ rad/s}$, (b) $\omega = 20 \text{ rad/s}$ رسم کنید.



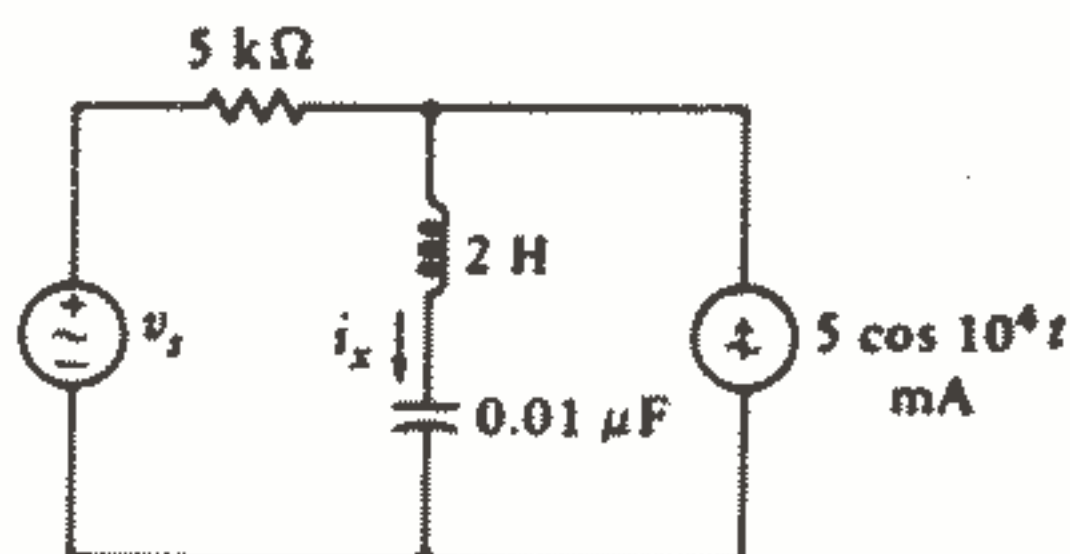
شکل ۱۰-۲۶: به مسئله ۱۲ مراجعه کنید.

۱۳- V_x را در مدار شکل ۱۰-۲۷ به وسیله: (a) جمع آثار (b) تبدیل منابع تکراری، پیدا کنید.



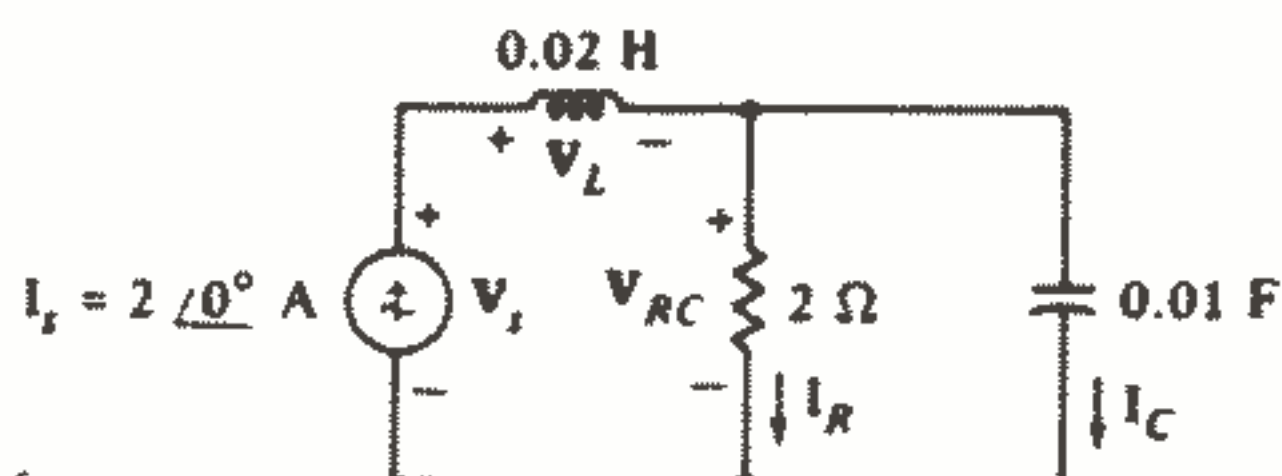
شکل ۱۰-۲۷: به مسئله ۱۳ مراجعه کنید.

۱۴- اگر $v_s(t)$ مقادیر زیر را داشته باشد با استفاده از اصل جمع آثار در مدار شکل ۲۸-۱۰، $i_x(t)$ را پیدا کنید.



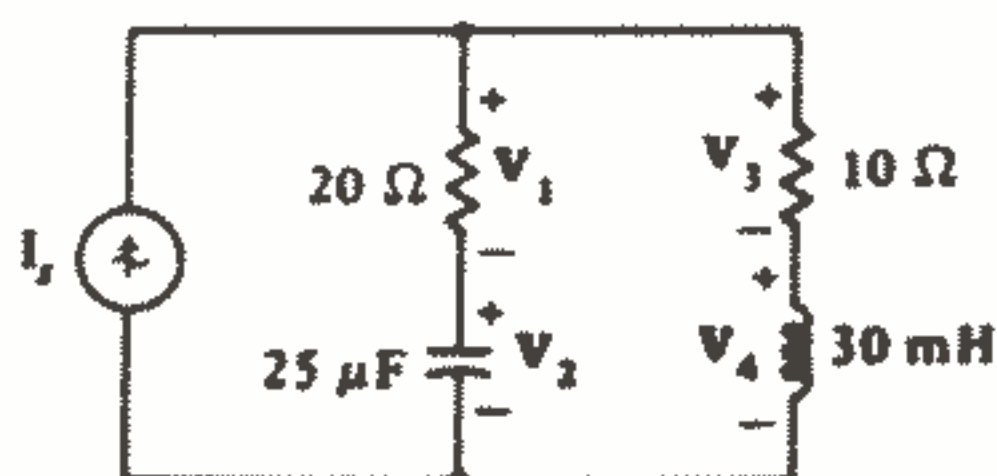
شکل ۲۸ - ۱۰: به مسئله ۱۴ مراجعه کنید.

۱۵- در منبع شکل ۲۹-۱۰ فرض کنید $\omega = 50 \text{ rad/s}$. (a) یک دیاگرام فیزوری بکشید که نشان دهنده سه جریان باشد. از مقیاس 1 A/in استفاده کنید. (b) دیاگرام فیزوری دیگری رسم کنید که نشان دهنده هر سه جریان با مقیاس 1 V/in باشد.



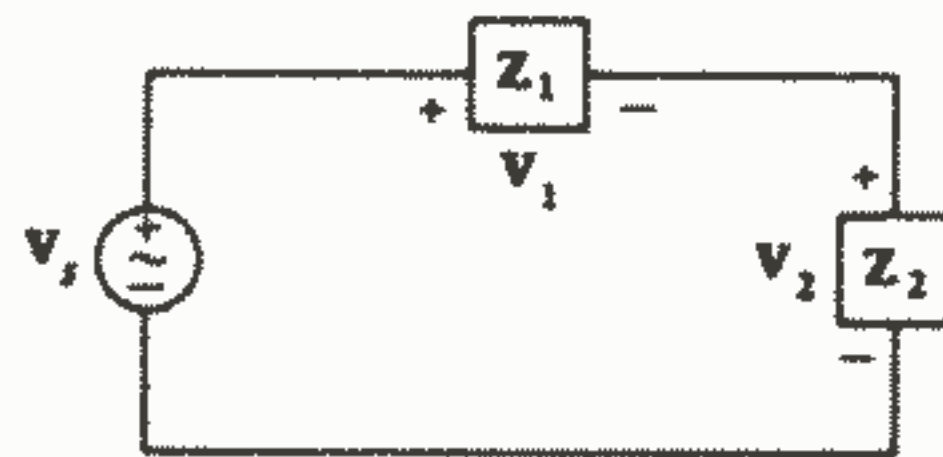
شکل ۲۹ - ۱۰: به مسئله ۱۵ مراجعه کنید.

۱۶- در شکل ۳۰-۱۰ فرض کنید I_s یک منبع جریان با دامنه 3 A در 1000 rad/s باشد. با استفاده از این جریان به عنوان فیزور مبنا، چهار ولتاژ مشخص شده را پیدا کنید و آنها را در یک دیاگرام فیزوری دقیق نمایش دهید. و درستی تساوی $V_1 + V_2 = V_3 + V_4$ را نشان دهید.



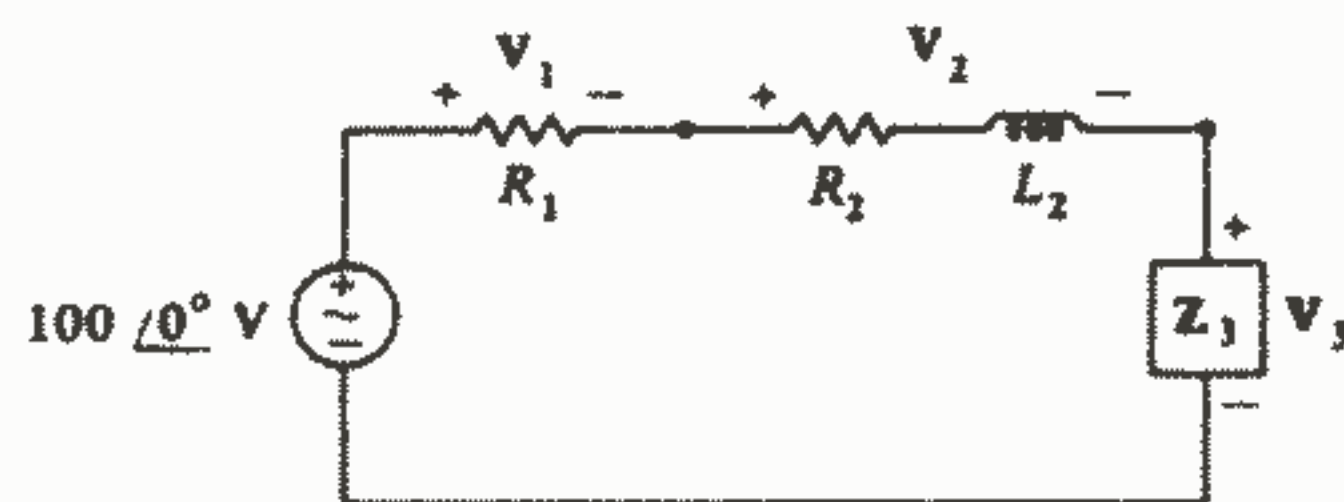
شکل ۳۰ - ۱۰: به مسئله ۱۶ مراجعه کنید.

۱۷- در مدار شکل ۱۰-۳۱ فرض کنید $V_s = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ ، $V_1 = 80 \text{ V}$ و $V_2 = 50 \text{ V}$.
 (a) با استفاده از یک دیاگرام فیزوری، V_1 ، V_2 را تعیین کنید. دو جواب وجود دارد،
 هر دو را پیدا کنید. (b) اگر Z_1 یک امپدانس سلفی و Z_2 یک امپدانس خازنی باشد، V_2 ،
 V_1 را پیدا کنید.



شکل ۱۰-۳۱: به مسئله ۱۷ مراجعه کنید.

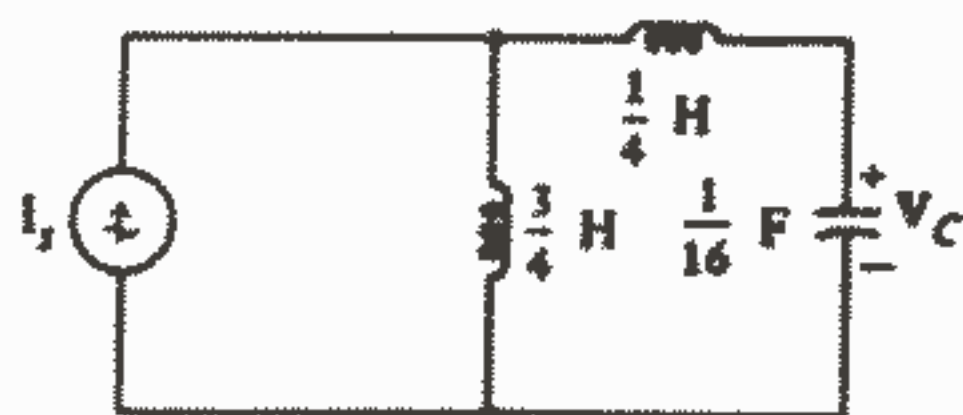
۱۸- در مدار شکل ۱۰-۳۲ می‌دانیم که: $V_1 = 50 \text{ V}$ ، $V_2 = 125 \text{ V}$ ، $V_3 = 200 \angle -45^\circ \text{ V}$.
 با استفاده از روشهای ترسیمی (گونیا، خط کش، نقاله، پرگار و سایر وسایل) زاویه V_1 را پیدا کنید. با وجود اینکه ممکن است به نظر برسد که این مسئله دو جواب دارد اما یکی صحیح است و دیگری غلط می‌باشد.



شکل ۱۰-۳۲: به مسئله ۱۸ مراجعه کنید.

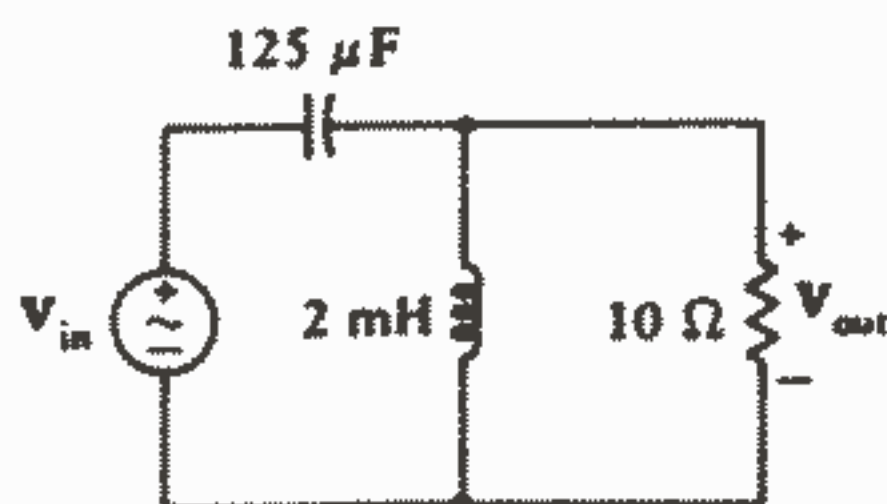
۱۹- یک مقاومت 4Ω با یک خازن $125 \mu\text{F}$ موازی است و کل این مجموعه با یک سلف 2 mH و یک منبع ولتاژ سینوسی V_s سری می‌باشد. بروش نقطه یابی منحنی دامنه نسبت ولتاژ خازن به ولتاژ منبع را رسم کنید (در فاصله $0 \leq \omega \leq 5 \text{ k rad/s}$).

۲۰- در مدار شکل ۱۰-۳۳: (a) محل کلیه فرکانسهای بحرانی پاسخ V_c/I_s را مشخص کنید. (b) مقدار پاسخ را در نقطه‌ای بین هر جفت فرکانسهای بحرانی محاسبه کنید. (c) پاسخ را در فاصله $-10 < \omega < 10 \text{ rad/s}$ رسم کنید.



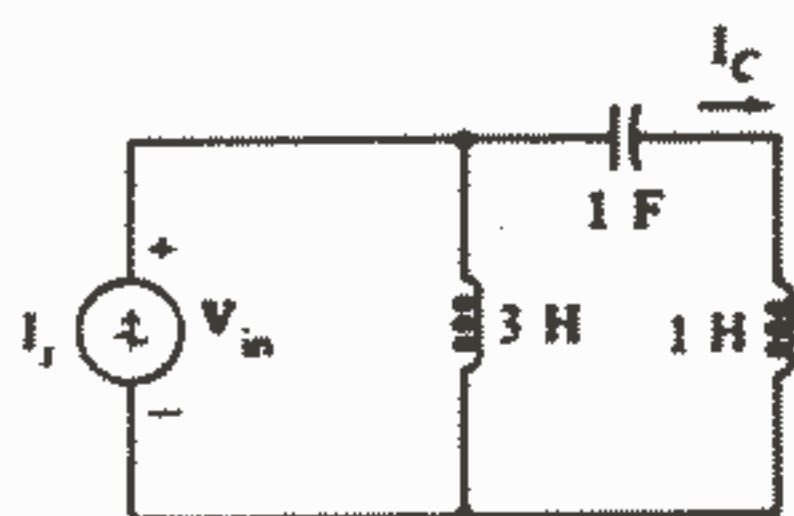
شکل ۳۳ - ۱۰: به مسئله ۲۰ مراجعه کنید.

۲۱ - در مدار شکل ۱۰-۳۴ منحنی $|V_{out}/V_{in}|$ را نسبت به ω در فاصله $-5000 < \omega < 5000 \text{ rad/s}$ رسم کنید.



شکل ۳۴ - ۱۰: به مسئله ۲۱ مراجعه کنید.

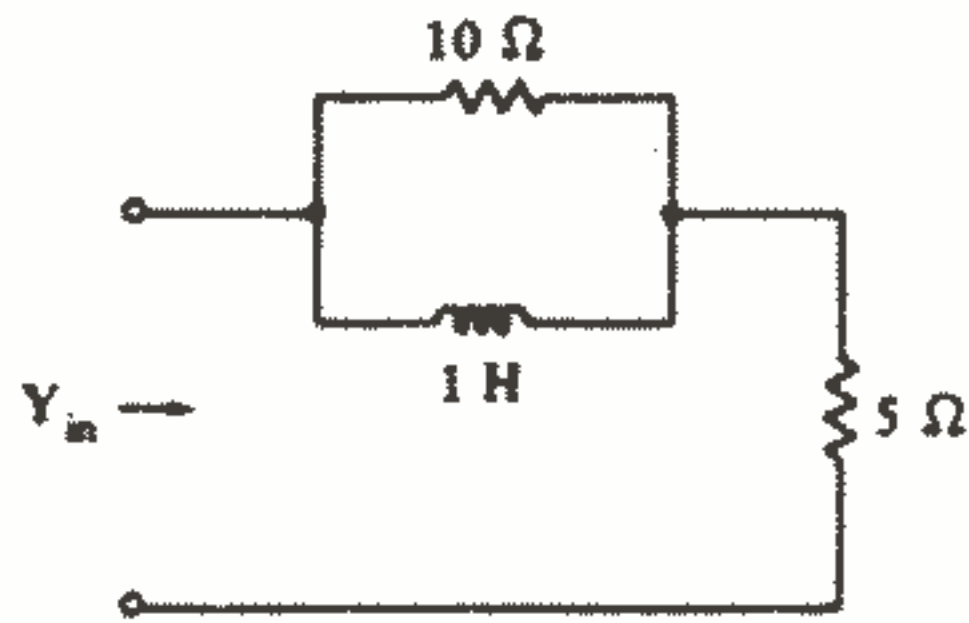
۲۲ - در مدار شکل ۱۰-۳۵ کلیه فرکانسهای بحرانی را تعیین کنید و سپس نمودار دامنه و فاز را در حالتی زیر رسم کنید:



شکل ۳۵ - ۱۰: به مسئله ۲۲ مراجعه کنید.

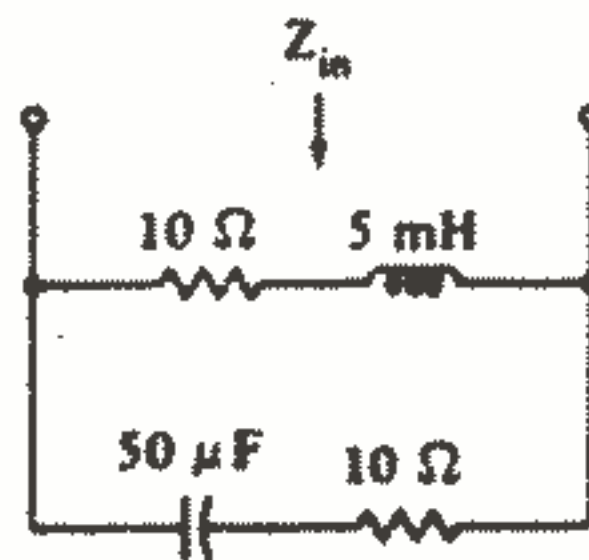
۲۳ - یک شبکه دو ترمینالی تشکیل شده است از یک سلف 80 mH بطور سری با ترکیب موازی سلف 100 mH و خازن $10 \mu\text{F}$. منحنیهای دامنه و فاز Z_{in} را نسبت به ω در فاصله $-4000 < \omega < 4000 \text{ rad/s}$ رسم کنید.

۲۴ - در مدار شکل ۱۰-۳۶ منحنیهای $|Y_{in}|$ ، $\text{ang } Y_{in}$ را نسبت به ω رسم کنید. بر روی محور طولها ω را در محدوده ۰ تا 30 rad/s در نظر بگیرید.



شکل ۳۶ - ۱۰: به مسئله ۲۴ مراجعه کنید.

۲۵ - منحنی‌های $|Z_{in}|$ ، $\text{ang } Z_{in}$ را نسبت به ω در شبکه دو ترمینالی شکل ۳۷-۱۰ رسم کنید.



شکل ۳۷ - ۱۰: به مسئله ۲۵ مراجعه کنید.

Appendix 5

Answers to Odd-Numbered Problems

Chapter 1

- 1 (a) 1342 mi/h; (b) 196.1 kJ; (c) 22.7 days; (d) Lois Lane
 3 (a) 6.97 horses; (b) 0.543 liter
 5 15 C
 7 (a) -35.6 mC; (b) -34.0 mA; (c) 13.41 μ C
 9 (a) 4.38 W; (b) 0.400 J
 11 (a) 0; (b) 0
 13 -32 W, -16 W, 24 W, 56 W, -32 W

Chapter 2

- 1 (a) 1.667 Ω ; (b) 0.144 Ω ; (c) 640 W
 3 (a) 156.7 ft; (b) 1.410 W
 5 (a) -26 V; (b) 320 W; (c) 6 V
 7 (a) -96 W; (b) 32 W; (c) 21.3 W; (d) 16.67 W; (e) 10 W
 9 (a) 51.1 mW; (b) 52.2 mW; (c) -51.5 mW; (d) -51.0 mW
 11 (a) 1.110 Ω ; (b) 1.230 Ω ; (c) 1.241 Ω
 13 (a) $p_{30} = -600$ W, $p_{0.2} = 80$ W, $p_x = 280$ W, $p_{0.6} = 240$ W;
 (b) 0.7 Ω , 14 V (+ at top), 20 A (down); (c-a) 600 W, 80 W, -920 W,
 240 W; (c-b) -2.3 Ω , 46 V (+ at top), 20 A (up)
 15 $p_{0.2} = -148.8$ W, $p_{70} = -1090.9$ W, $p_4 = 743.8$ W, $p_6 = 495.9$ W
 17 $p_1 = 10.45$ mW, $p_5 = -45.7$ mW, $p_2 = 41.8$ mW, $p_{-3} = -27.4$ mW,
 $p_4 = 20.9$ mW
 19 (a) $p_{25} = 576$ W, $p_5 = -600$ W, $p_x = -120$ W, $p_{100} = 144$ W;
 (b) -120 Ω , 1 A (up), 120 V (+ at top); (c-a) 576 W, 600 W, -1320 W,
 144 W; (c-b) -10.91 Ω , 11 A (down), 120 V (+ at bottom)
 21 (a) 25 Ω ; (b) 20.3 Ω ; (c) 22.5 Ω
 23 (a) 22.3 Ω ; (b) 21.8 Ω ; (c) 22.7 Ω
 25 5 A, 17.5 V
 27 (a) 11.78 mV; (b) 4.32 V
 29 (a) 2.29 mA, (b) 2.67 A
 31 (a) 300 V; (b) 120 V; (c) 0.333 A
 33 (a) 1.481 A; (b) 5.39 Ω

- 35 (a) 0.999 950 V; (b) $-50.0 \mu\text{V}$; (c) 0.999 950 nW
 37 (a) 2 V; (b) 0.5 V

Chapter 3

- 1 (a) -4.83 ; (b) 200
 3 (a) -60.9 V ; (b) 195.7 W
 5 25.6 W
 7 12.13 W
 9 (a) 2580 W; (b) -32 V
 11 1 A
 13 1.2 A, 4.2 A, 2 A, 3.2 A
 15 (a) 3.75 A; (b) 4.43 A
 17 2.625 A, 43.75 V, 45.9 W
 19 4 A
 21 1.55 V, 1.7 Ω
 23 (a) 12 Ω , 0.75 W; (b) ∞ , 6 V; (c) 0, 0.5 A
 25 (a) -22.5 V , -2.4 A , 9.375 Ω ; (b) -22.5 V , 9.375 Ω ; -2.4 A , 9.37
 27 (a) 32 V, 4 Ω ; 8 A, 4 Ω ; (b) 48.6 V, 3.24 Ω ; 15 A, 3.24 Ω
 29 (a) 20 V, -8Ω ; (b) 4 A; (c) -4 A
 31 238 Ω
 33 4.999 500 V, 0.199 976 Ω
 35 19.02 V
 37 7 V
 39 (a) $8i_1 + 6(i_1 - 2) - 20 - 4i_1 + 30 = 0$; (b) 0.2 A
 41 1.818 A

Chapter 4

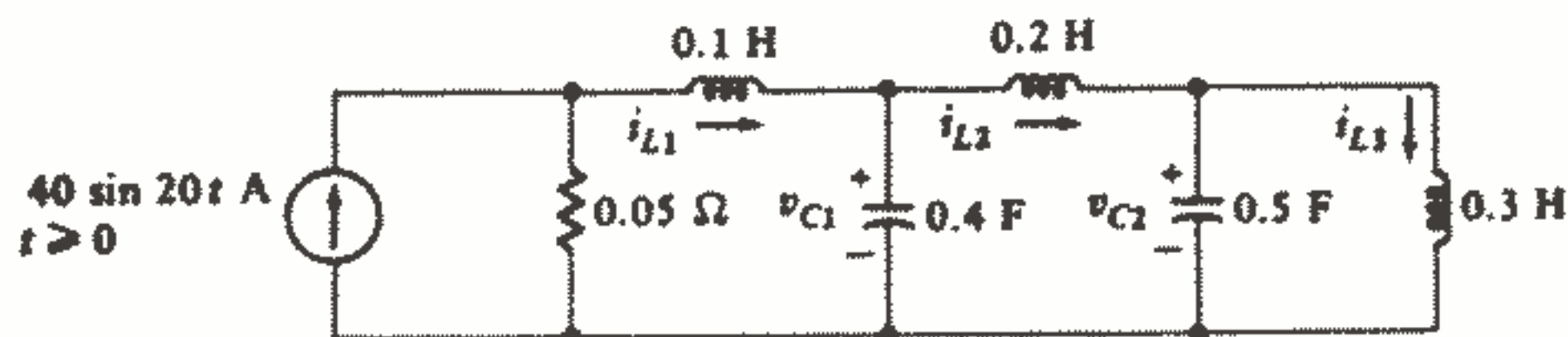
- 1 (a) -1.618 V ; (b) 0.0711 V, 0.549 s
 3 (a) 18 A; (b) 160 J; (c) 320 W
 5 (a) $-1 + 0.5 \cos 500t + 0.4 \sin 500t \text{ A}$; (b) 0.1633 J
 7 (a) 90 μJ ; (b) 94.2 μs
 9 (a) $10.009e^{-10t} + 0.001 \text{ V}$; (b) $10e^{-10t} \text{ V}$
 11 (a) 0.0677 J; (b) 0; (c) -8.83 V
 13 (a) 6.43 H; (b) 2.83 H
 15 5 in series in parallel with 2 in series
 17 (a) 9.66 J; (b) 7.12 J; (c) 11.24 J
 19 (a) $10^{-3}v_1 + 2 \times 10^{-4}(v_1' - v_2') = i_s$, $2 \times 10^{-4}(v_2' - v_1') + 200 \int_0^t v_2 dt + 3 = 0$ ($+v_1$ top left, $+v_2$ top right);
 (b) $1000(i_L - i_s) + 5 \times 10^5 \int_0^t i_L dt + 8 + 0.005i_L' = 0$
 21 (a) See sketch below; $0.2(v_C - 2e^{-10t}) + 0.1v_C' - 0.04(2e^{-10t} - v_C) + 0.05v_R = 0$, $-0.05v_R - 0.1e^{-10t} + 100 \int_0^t (-v_R + v_C - 2e^{-10t}) dt = 0$;
 (b) see sketch below; $5i_x + 10 \int_0^t (i_x + 0.2i_x + i_L + 0.1e^{-10t}) dt - 2e^{-10t} = 0$, $0.01i_L' + 20(i_L + 0.1e^{-10t}) + 10 \int_0^t (1.2i_x + i_L + 0.1e^{-10t}) dt - 2e^{-10t} = 0$

P4-21



- 23 See sketch below; $v_{C1}(0) = 8 \text{ V}$, $v_{C2}(0) = -4 \text{ V}$, $i_{L1}(0) = 5 \text{ A}$, $i_{L2}(0) = 6 \text{ A}$, $i_{L3}(0) = 7 \text{ A}$

P4-23



- 25 (a) $2 \times 10^{-4} v_C' + 5000 \int_0^t v_C dt + 10 = 0$, OK; (b) $v_{C,dual} = 10 \cos 5000t + 4 \sin 5000t \text{ V}$; (c) self-duals

Chapter 5

- 1 (a) 5 A, 50 J; (b) $5e^{-2.5t} \text{ A}$; (c) $-50e^{-2.5t} \text{ V}$
 3 (a) $5e^{-125t} \text{ A}$, $t_1 = 12.88 \text{ ms}$; (b) $e^{-20.83(t-t_1)} \text{ A}$, $t_2 = 344 \text{ ms}$
 5 12.62 nJ
 7 (a) 1.134 s; (b) 4.34 s
 9 (a) 8 A; (b) 8 A; (c) 20 ohm; (d) 0.5 ms; (e) $8e^{-2000t} \text{ A}$
 11 8 mA, $t < 0$, and $4.8e^{-480t} \text{ mA}$, $t > 0$; 8 mA, 8 mA, 4.8 mA, 1.838 mA, 0.704 mA
 13 $5e^{-5.71t} \text{ A}$
 15 35 A, 35 A; 35 A, 35 A; 35 A, 8.75 A; 21.2 A, 5.31 A; 12.88 A, 3.22 A
 17 (a) 4.49 V; (b) 3.59 V; (c) 8.41 V
 19 0.248 C
 21 (a) 2 mA, 1.540 mA; (b) 0, 56.9 mW
 23 $R_1 = 1742 \text{ ohm}$, $R_2 = 570 \text{ ohm}$
 25 (a) 34.2 V; (b) $34.2e^{-1916t} \text{ V}$
 27 (a) 100 V, 0; (b) 100 V, 0, 100 V; (c) 0.01 s; (d) $100e^{-100t} \text{ V}$; (e) $40e^{-1130t} \text{ mA}$; (f) $20 + 80e^{-100t} \text{ V}$, $20 - 20e^{-100t} \text{ V}$; (g) $5 + 20 = 25 + 0 \text{ mJ}$
 29 $2e^{-400t} \text{ A}$
 31 500 V, $t < 0$; $250(2e^{-10t} - e^{-2.5t}) \text{ V}$, $t > 0$

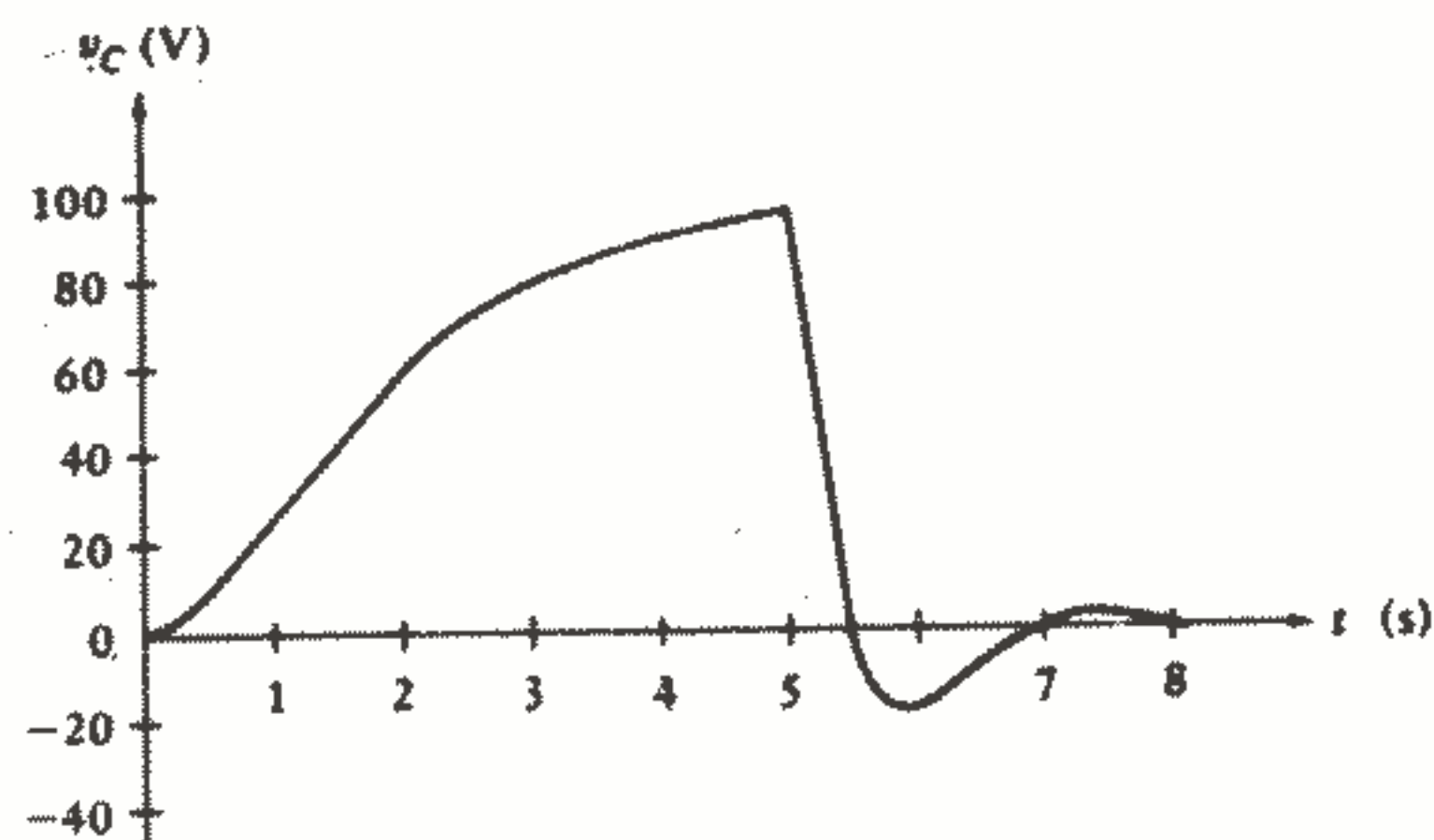
Chapter 6

- 1 (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3; (e) 4; (f) 5; (g) 7 (surprise!)
- 3 (a) -1; (b) 5; (c) 0; (d) -3.96; (e) $10u(-t) + 2e^{-0.4t}[u(t) - u(t-5)]$
- 5 120 V, 100 V, 137.5 V, 300 V, 100 V
- 7 Let $i = i_1 + i_2$. Then the current due to V is $i_1 = V/R$. The current due to $-Vu(-t)$ is $i_2 = (-V/R)u(-t) - (V/R)e^{-Rt/L}u(t)$. Therefore, $i(t) = (V/R)(1 - e^{-Rt/L})u(t)$
- 9 $2(1 - e^{-40t})$ A
- 11 (a) $25(1 - e^{-40t})$ mA; (b) 25 mA, $t < 0$; $50 - 25e^{-40t}$ mA, $t > 0$;
(c) $12.5(\sin 40t - \cos 40t) + 12.5e^{-40t}$ mA, $t > 0$
- 13 (a) 8.85 A; (b) 120 V
- 15 $10(1 - e^{-267t})u(t)$ A
- 17 3 A, -0.304 A, 6 V, 12 V
- 19 0, $t < 0$; $25(1 - e^{-4000t})$ mA, $0 < t < 0.2$ ms; $55 - 41.2e^{-4000(t-0.0002)}$ mA, $t > 0.2$ ms
- 21 (a) 1200 V, 1076 V; (b) 999 V
- 23 $-240u(-t) - (80 + 48e^{-0.2t})u(t)$ V
- 25 6 V, $t < 0$; $2.4 + 3.6e^{-250t}$ V, $t > 0$
- 27 (a) $-40 + 100e^{-30000t}$ V; (b) 30.5 μ s
- 29 27.7 μ s
- 31 $2.5e^{-5000t}u(t)$ V
- 33 $5(e^{-t} - 1)u(t)$ V

Chapter 7

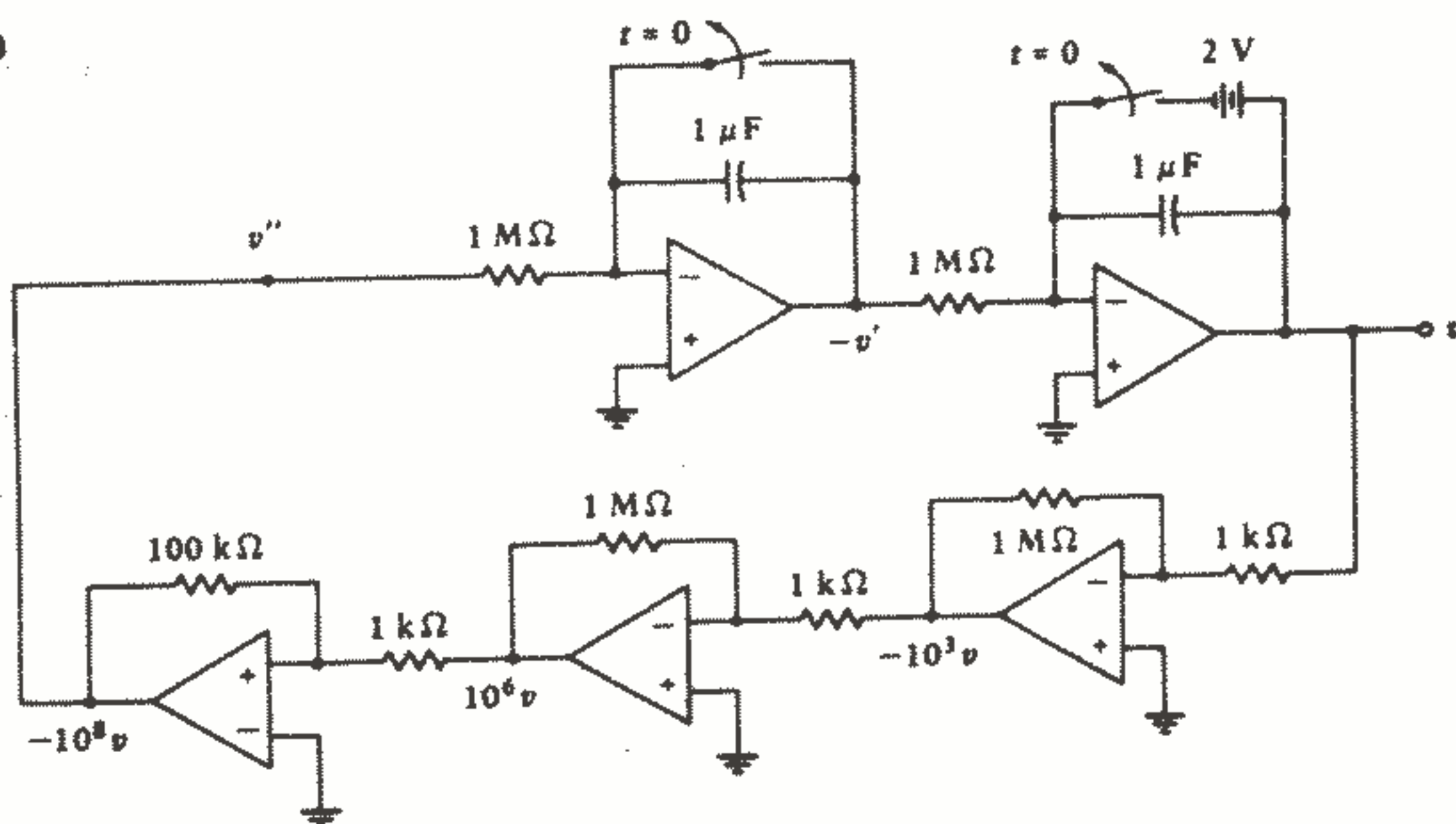
- 1 1 k Ω , 1.429 μ F, 7 H
- 3 $-1.6e^{-400t} - 0.4e^{-1600t}$ A
- 5 (a) $0.25(e^{-t} + e^{-4t})u(t)$ A; (b) 0.322 s
- 7 (a) $80e^{-2t} - 20e^{-8t}$ V; (b) $6.4e^{-2t} - 0.4e^{-8t}$ A; (c) 2.45 s; (d) 2.33 s
- 9 (a) 2.5 k Ω ; (b) $24e^{-10^6t}(1 - 10^6t)$ mA; (c) 6.27 μ s
- 11 (a) $e^{-4t}(560 \cos 28t - 80 \sin 28t)$ V;
(b) $e^{-4t}(-2.8 \cos 28t - 9.6 \sin 28t)$ A;
(c) $e^{-4t}(2.8 \cos 28t - 0.4 \sin 28t)$ A
- 13 (a) $e^{-5t}(200 \cos 10t + 100 \sin 10t)$ V;
(b) $20 + e^{-5t}(15 \sin 10t - 20 \cos 10t)$ A
- 15 (a) $e^{-2t}(-130 \cos 10t - 26 \sin 10t)$ V; (b) 69.4 V, -130 V
- 17 $e^{-4t}(24 \cos 3t + 32 \sin 3t)$ V
- 19 (a) $-e^{-6000t} + 19e^{-24000t}$ A; (b) 1.091×10^{10} A/s²
- 21 (a) $4u(-t) + (10.5e^{-4t} - 6.5e^{-8t})u(t)$ A; (b) $168e^{-4t} - 52e^{-8t}$ V
- 23 (a) $10 - 10e^{-10t} + 10e^{-40t}$ A; (b) 5.28 A, 10 A
- 25 (a) $320 + e^{-5t}(-160 \cos 15t + 213 \sin 15t)$ V; (b) 455 V
- 27 $0.18 + e^{-500t}(-90t - 0.18)$ A
- 29 (a) $-48 + 64e^{-4t} - 16e^{-8t}$ V; (b) 0 V/s², 4096 V/s³
- 31 (a) $100[1 - e^{-t}(t+1)]$ V, $0 < t < 5$ s; see sketch below;
(b) $96.0e^{-2(t-5)}\{\cos[2(t-5)] - \sin[2(t-5)]\}$ V, $5 < t < 8$ s; see sketch below

P7-31a,b



33 See sketch below

P7-33



Chapter 8

- 1 (a) 30.2 Hz; (b) 33.1 ms; (c) 190 rad/s; (d) 31.6; (e) 34.7°; (f) -124.7°; (g) 25.9, 73.8°
- 3 (a) $-26.8 \cos 200\pi t + 42.2 \sin 200\pi t$; (b) $20.4 \cos (500\pi t - 90^\circ)$
- 5 28.0 Ω , 11.47 V, $0.410 \cos (500t + 45^\circ)$ A, $16.38 \cos (500t + 135^\circ)$ V
- 7 (a) 1.618 W; (b) 1 W; (c) 1 W
- 9 $0.9 \cos (400t - 53.1^\circ)$ A
- 11 $0.4 \cos (400t - 53.1^\circ) + 0.693 \cos (200t - 33.7^\circ)$

$$13 \text{ (a) } -V_m \cos \omega t + Ri + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt = 0, \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = -\frac{\omega V_m}{R} \sin \omega t;$$

$$(b) i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \cos \left(\omega t + \tan^{-1} \frac{1}{\omega CR} \right)$$

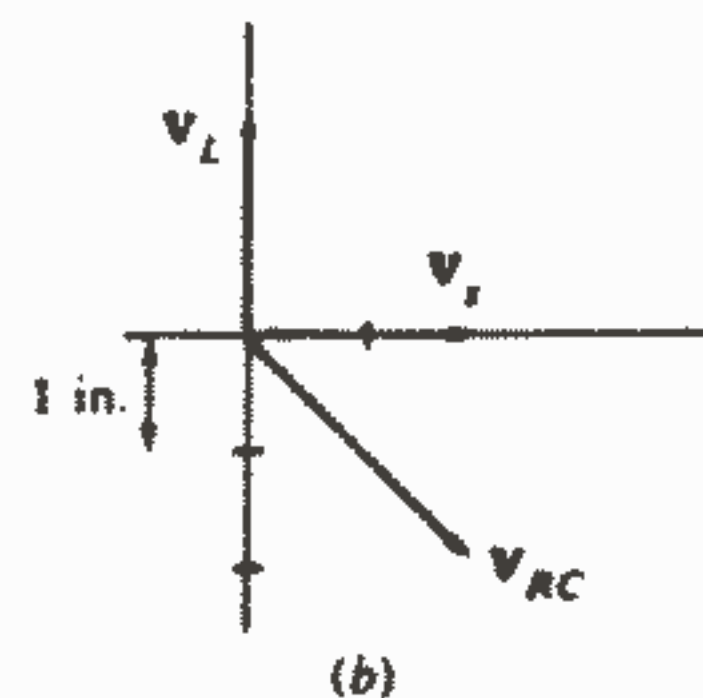
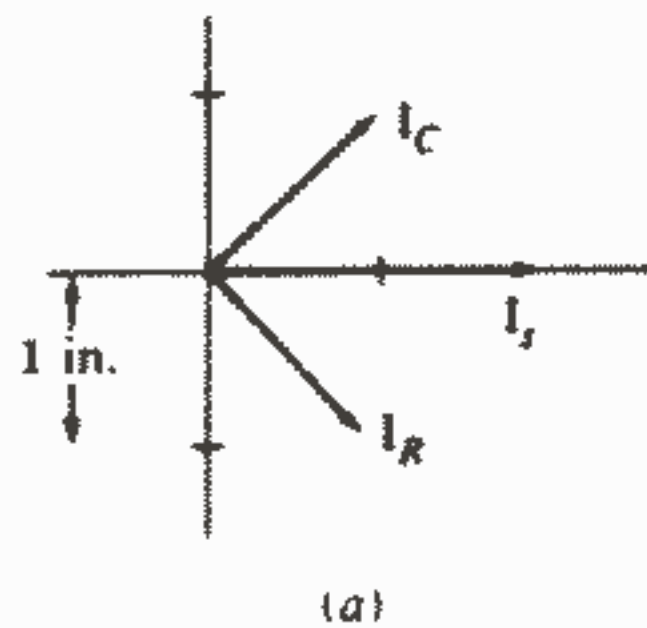
Chapter 9

- 1 (a) $5.60/-5.24^\circ$; (b) $1.585/78.1^\circ$; (c) $5.95/106.9^\circ$; (d) $1.500 + j8.33$; (e) $7.02 + j3.84$
 3 $162.8e^{j(20t+47.5^\circ)} \text{ V}$
 5 (a) $1.25 \cos(1000t - 114^\circ) \text{ A}$; (b) $1.25 \cos(1000t - 64^\circ) \text{ A}$; (c) $1.25e^{j(1000t-3^\circ)} \text{ A}$; (d) $0.729e^{j(1000t-35.0^\circ)} \text{ A}$
 7 (a) 4.81 A ; (b) -0.980 A ; (c) $10.42/15.62^\circ$, $10.42 \cos(100t + 15.62^\circ) \text{ A}$
 9 (a) -64.0 V ; (b) -4.02 A ; (c) 257 W
 11 $3.54 - j2.83 \text{ A}$
 13 $50 \cos(5000t - 135^\circ) \text{ V}$, $69.5 \cos(5000t + 40.7^\circ) \text{ V}$, $21 \cos(5000t + 38.2^\circ) \text{ V}$
 15 (a) $1/45 \text{ H}$; (b) 0.896 H
 17 (a) $183.5 - j55.0 \, \Omega$; (b) 0.717 H ; (c) 20.3 and 196.7 rad/s
 19 (a) 2.78 mH ; (b) 0.750 mH
 21 (a) 50 krad/s ; (b) 45.9 and 54.5 krad/s
 23 (a) 436 rad/s ; (b) 816 rad/s ; (c) 500 and 2000 rad/s
 25 (a) 40 krad/s ; (b) 40 and 10 krad/s ; (c) 98.0 krad/s ; (d) 120 krad/s
 27 (a) $90 \, \Omega$, 20 mH ; (b) $50 \, \Omega$, 100 mH

Chapter 10

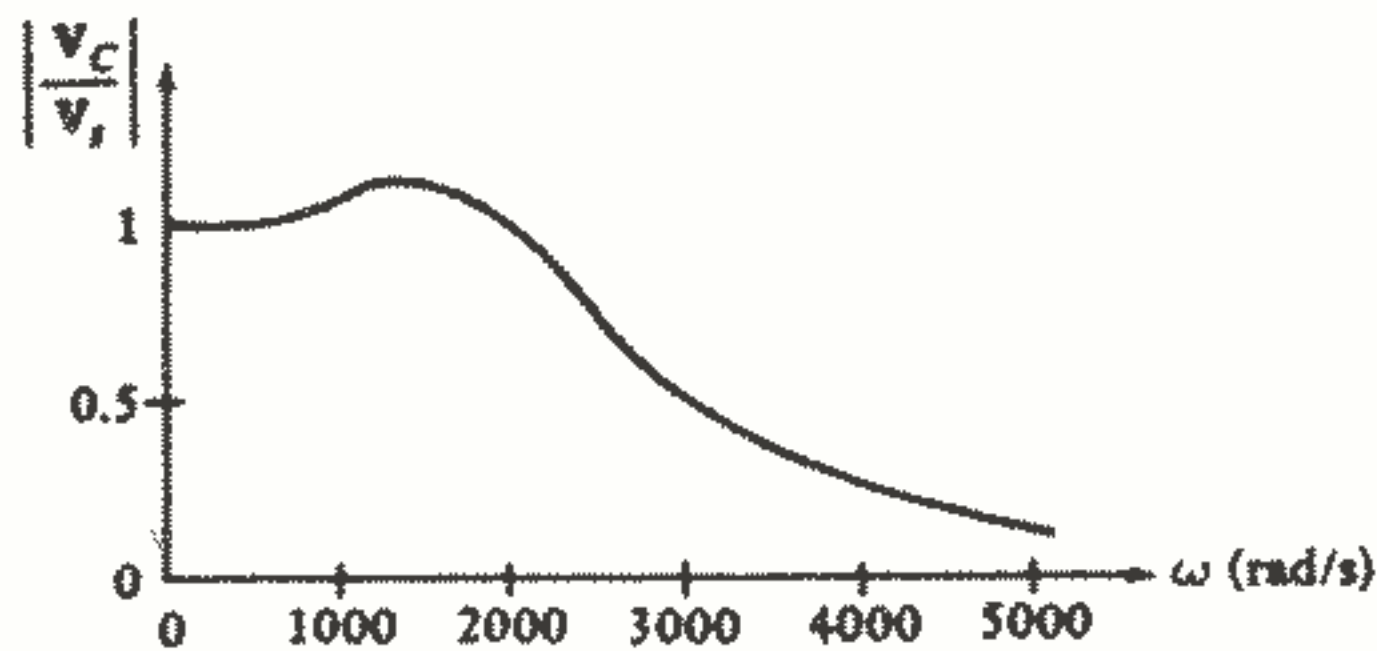
- 1 $14.67/157.6^\circ \text{ V}$
 3 $0.285 \cos(10^4t + 4.09^\circ) \text{ V}$
 5 $0.808 \cos(10^4t - 46.0^\circ) \text{ A}$
 7 (a) Tree: $400 \, \mu\text{F}$, v_1 , central $5 \, \Omega$; i_L to right in 5 mH ; $i_r(t) = 8.98 \cos(1000t + 158.2^\circ) \text{ A}$; (b) tree: v_1 , $400 \, \mu\text{F}$, right $5 \, \Omega$; v_C with $+$ at left; $v_C(t) = 44.9 \cos(1000t + 158.2^\circ) \text{ V}$
 9 $2/-146.6^\circ$ and $2 \cos(500t - 146.6^\circ) \text{ A}$
 11 $0.894/-63.4^\circ \text{ V}$ in series with $0.4 \, \Omega$ and 1.25 F
 13 (a) and (b) $\mathbf{V}_s = -7.5 + j0 \text{ V}$
 15 See sketches below

P10-15



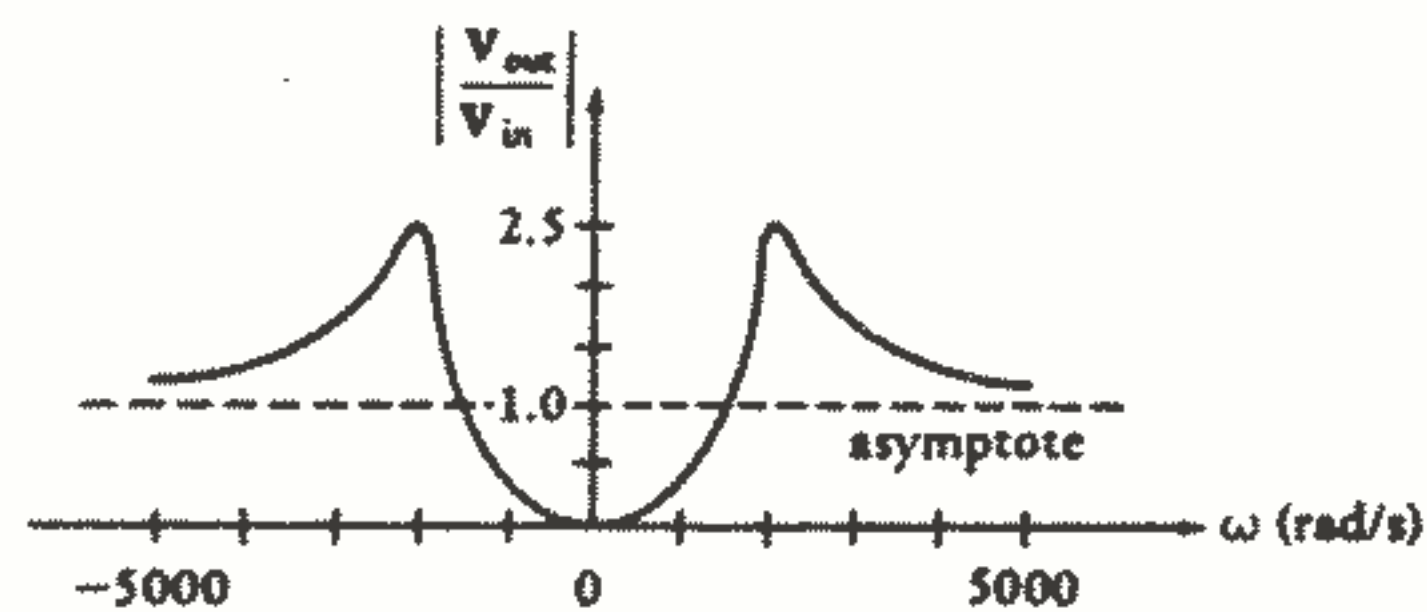
- 17 (a) $V_1 = 80/30^\circ (29.69^\circ) \text{ V}$, $V_2 = 50/-52^\circ (-52.41^\circ) \text{ V}$ or $V_1 = 80/-30^\circ \text{ V}$, $V_2 = 50/52^\circ \text{ V}$, (b) $V_1 = 80/30^\circ \text{ V}$, $V_2 = 50/-52^\circ \text{ V}$
 19 See sketch below

P10-19



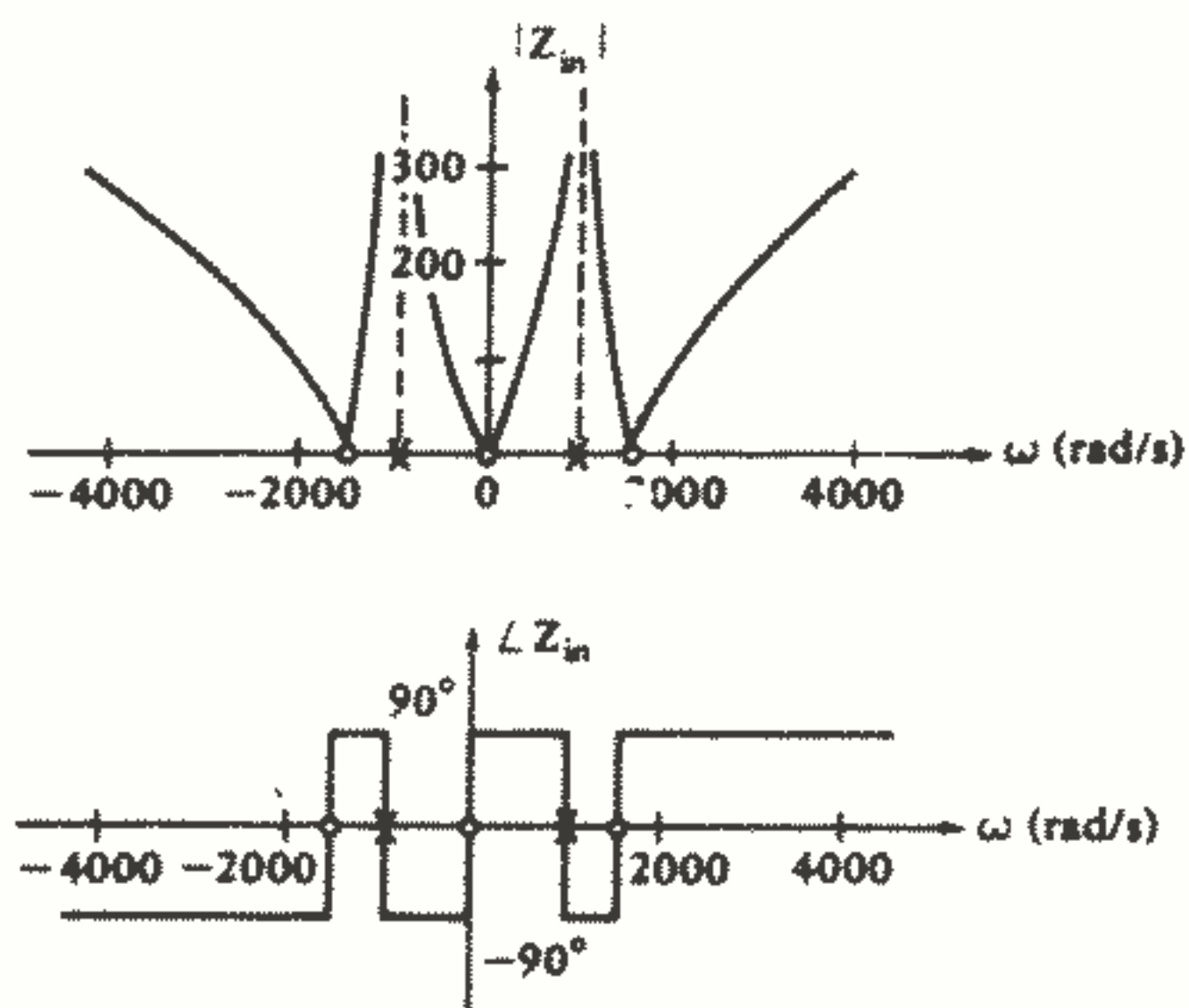
- 21 See sketch below

P10-21



- 23 See sketches below

P10-23



P10-25

