

# تحلیل مهندسی مدار

ویراست هفتم - ۲۰۰۷

ویلیام هیت  
جک کمرلی  
استیون دوربن

دکتر قدرت الله سپیدنام

(عضو هیأت علمی دانشگاه فردوسی مشهد)



علوم رایانه

چاپ پنجم

ویراست هفتم - ۲۰۰۷

# تحلیل مهندسی مدار

دکتر قدرت الله سپیدنام

(عضو هیأت علمی دانشگاه فردوسی مشهد)

ویلیام هیت

جک کمرلی

استیون دوربن

آدرس سایت انتشارات: [www.olomrayaneh.net](http://www.olomrayaneh.net)



# فهرست مطالب

|     |                                       |    |
|-----|---------------------------------------|----|
| ۴-۳ | تحلیل مش.....                         | ۷۷ |
| ۴-۴ | آبرمش.....                            | ۸۲ |
| ۴-۵ | تحلیل گرهی و تحلیل مش: یک مقایسه..... | ۸۴ |
| ۴-۶ | تحلیل کامپیوتری مدار.....             | ۸۵ |
| ۴-۷ | خلاصه فصل و مرور.....                 | ۸۹ |
| ۴-۸ | خواندنی‌های کمیکی.....                | ۹۰ |
| ۴-۹ | مسائل.....                            | ۹۰ |

## فصل پنجم: تکنیک‌های مفید تحلیل مدار

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| ۵-۱ | خطی بودن و تجمیع.....                  | ۹۹  |
| ۵-۲ | تبدیل منابع.....                       | ۱۰۶ |
| ۵-۳ | مدارهای معادل تونن و نورتن.....        | ۱۱۲ |
| ۵-۴ | حداکثر انتقال توان.....                | ۱۱۹ |
| ۵-۵ | تبدیل ستاره - مثلث.....                | ۱۲۱ |
| ۵-۶ | انتخاب روش: مقایسه انواع تکنیک‌ها..... | ۱۲۳ |
| ۵-۷ | خلاصه فصل و مرور.....                  | ۱۲۴ |
| ۵-۸ | خواندنی‌های کمیکی.....                 | ۱۲۵ |
| ۵-۹ | مسائل.....                             | ۱۲۵ |

## فصل ششم: تقویت‌کننده عملیاتی

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| ۶-۱ | پیش‌زمینه.....                                       | ۱۳۵ |
| ۶-۲ | تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل.....                     | ۱۳۶ |
| ۶-۳ | طبقات پی‌درپی.....                                   | ۱۴۳ |
| ۶-۴ | مدارهای منابع ولتاژ و جریان.....                     | ۱۴۵ |
| ۶-۵ | ملاحظات عملی.....                                    | ۱۴۸ |
| ۶-۶ | مقایسه گرها و تقویت‌کننده‌های وسایل اندازه‌گیری..... | ۱۵۷ |
| ۶-۷ | خلاصه فصل و مرور.....                                | ۱۵۹ |
| ۶-۸ | خواندنی‌های کمیکی.....                               | ۱۶۰ |
| ۶-۹ | مسائل.....   | ۱۶۰ |

## فصل هفتم: خازن‌ها و القاگرها

|     |                               |     |
|-----|-------------------------------|-----|
| ۷-۱ | خازن.....                     | ۱۶۹ |
| ۷-۲ | القاگر.....                   | ۱۷۵ |
| ۷-۳ | ترکیب القاگرها و خازن‌ها..... | ۱۸۲ |

## فصل اول: تحلیل مدار و مهندسی برق

|     |                                 |    |
|-----|---------------------------------|----|
| ۱-۱ | پیشگفتار.....                   | ۹  |
| ۱-۲ | مروری بر این کتاب.....          | ۱۰ |
| ۱-۳ | رابطه تحلیل مدار با مهندسی..... | ۱۲ |
| ۱-۴ | تحلیل و طراحی.....              | ۱۲ |
| ۱-۵ | تحلیل به کمک کامپیوتر.....      | ۱۳ |
| ۱-۶ | استراتژی موفق حل مسئله.....     | ۱۴ |
| ۱-۷ | خواندنی‌های کمیکی.....          | ۱۵ |

## فصل دوم: قطعات اساسی و مدارهای الکتریکی

|     |  |    |
|-----|--|----|
| ۲-۱ | واحدها و مقیاس‌ها.....                 | ۱۷ |
| ۲-۲ | بار الکتریکی، جریان، ولتاژ و توان..... | ۱۹ |
| ۲-۳ | منابع ولتاژ و جریان.....               | ۲۴ |
| ۲-۴ | قانون اهم.....                         | ۲۸ |
| ۲-۵ | خلاصه فصل و مرور.....                  | ۳۲ |
| ۲-۶ | خواندنی‌های کمیکی.....                 | ۳۲ |
| ۲-۷ | مسائل.....                             | ۳۳ |

## فصل سوم: قوانین ولتاژ و جریان

|      |                                       |    |
|------|---------------------------------------|----|
| ۳-۱  | گردها، حلقه‌ها، مسیرها و شاخه‌ها..... | ۳۷ |
| ۳-۲  | قانون جریان کیرشهف.....               | ۳۸ |
| ۳-۳  | قانون ولتاژ کیرشهف.....               | ۴۰ |
| ۳-۴  | مدار تک حلقه‌ای.....                  | ۴۲ |
| ۳-۵  | مدار زوج تگ‌گره.....                  | ۴۵ |
| ۳-۶  | منابع مستقل سری و موازی.....          | ۴۷ |
| ۳-۷  | مقاومت‌های سری و موازی.....           | ۴۹ |
| ۳-۸  | تقسیم ولتاژ و جریان.....              | ۵۳ |
| ۳-۹  | خلاصه فصل و مرور.....                 | ۵۵ |
| ۳-۱۰ | خواندنی‌های کمیکی.....                | ۵۷ |
| ۳-۱۱ | مسائل.....                            | ۵۷ |

## فصل چهارم: تحلیل گره‌ای و مش

|     |                 |    |
|-----|-----------------|----|
| ۴-۱ | تحلیل گرهی..... | ۶۷ |
| ۴-۲ | آبرگره.....     | ۷۴ |

سرشناسه

: هیت، ویلیام هارت، ۱۹۲۰-م.

Hoyt, William Hart

عنوان و نام پدیدآور : تحلیل مهندسی مدار / ویلیام هیت، جک کمرلی، استیون دوربن: [مترجم]  
قدرت‌الله سپیدنام.

: بابل: علوم رایانه، ۱۳۸۶.

: ۶۴۰ ص: مصور (رنگی)، جدول، نمودار.

: 978-964-8996-43-2

وضعیت فهرست‌نویسی : فیفا

: عنوان اصلی: Engineering circuit analysis, 7th ed < c2006.

: کتاب حاضر قبلاً توسط ناشرین متفاوت به چاپ رسیده است.

: مدارهای برقی -- تجزیه و تحلیل.

: برقی -- شبکه‌ها -- تجزیه و تحلیل.

: کمرلی، جک‌الزورث، ۱۹۲۴ - م.

: Kemmerly, Jack Ellsworth

: دوربن، استیون

: Durbin, Steven M

: سپیدنام، قدرت‌الله، ۱۳۲۴ - مترجم.

: الف ۱۳۸۶ ت ۳ ۴۵۴ TK

: ۶۲۱/۳۱۹۲

: شماره کتابشناسی ملی : ۱۰۹۳۷۹۱



www.olomrayaneh.net

علوم رایانه بابل، صندوق پستی: ۴۷۱۳۵-۸۹۱ تلفن: ۰۱۱۱-۳۲۶۰۷۷۲

تحلیل مهندسی مدار (ویراست هفتم - ۲۰۰۷)

تألیف: ویلیام هیت - جک کمرلی - استیون دوربن

ترجمه: دکتر قدرت‌الله سپیدنام (عضو هیأت علمی دانشگاه فردوسی مشهد)

ناشر: علوم رایانه

چاپ پنجم (ویراست هفتم - چاپ دوم): پاییز ۱۳۸۸

جلد ۲۰۰۰

شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۸۹۹۶-۴۳-۲

حروفچینی و صفحه‌آرایی: علوم رایانه

قیمت: ۱۱۰۰۰ تومان

تهران، خیابان انقلاب، خیابان اردیبهشت، نیش وحید نظری، شماره ۱۴۲ تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ - ۶۶۴۰۰۱۴۴



|            |  |     |
|------------|--|-----|
| ۷-۴        | نتایج خطی بودن.....                        | ۱۸۵ |
| ۷-۵        | مدارهای op amp ساده با خازن.....           | ۱۸۶ |
| ۷-۶        | دوگانگی.....                               | ۱۸۸ |
| ۷-۷        | مدل سازی خازن ها و القاگرها با PSpice..... | ۱۹۰ |
| ۷-۸        | خلاصه فصل و مرور.....                      | ۱۹۲ |
| ۷-۹        | خواندنی های کمی.....                       | ۱۹۳ |
| مسائل..... |  | ۱۹۳ |

#### فصل هشتم: مدارهای RL و RC

|            |   |     |
|------------|---|-----|
| ۸-۱        | مدار RL بدون منبع.....                      | ۲۰۱ |
| ۸-۲        | خواص پاسخ نمایی.....                        | ۲۰۶ |
| ۸-۳        | مدار RC بدون منبع.....                      | ۲۰۹ |
| ۸-۴        | تعمیم دیدگاه.....                           | ۲۱۱ |
| ۸-۵        | تابع پله واحد.....                          | ۲۱۷ |
| ۸-۶        | مدارهای RL واداشته.....                     | ۲۲۰ |
| ۸-۷        | پاسخ طبیعی و واداشته.....                   | ۲۲۲ |
| ۸-۸        | مدارهای RC واداشته.....                     | ۲۲۷ |
| ۸-۹        | پیش بینی پاسخ مدارهای سوئیچ شده متوالی..... | ۲۳۱ |
| ۸-۱۰       | خلاصه فصل و مرور.....                       | ۲۳۶ |
| ۸-۱۱       | خواندنی های کمی.....                        | ۲۳۷ |
| مسائل..... |   | ۲۳۷ |

#### فصل نهم: مدار RLC

|            |                              |     |
|------------|------------------------------|-----|
| ۹-۱        | مدار موازی بدون منبع.....    | ۲۴۹ |
| ۹-۲        | مدار RLC موازی فوق میرا..... | ۲۵۳ |
| ۹-۳        | میرای بحرانی.....            | ۲۵۷ |
| ۹-۴        | مدار RLC موازی زیرمیرا.....  | ۲۶۰ |
| ۹-۵        | مدار RLC سری بدون منبع.....  | ۲۶۵ |
| ۹-۶        | پاسخ کامل مدار RLC.....      | ۲۶۹ |
| ۹-۷        | مدار LC بدون اتلاف.....      | ۲۷۵ |
| ۹-۸        | خلاصه فصل و مرور.....        | ۲۷۶ |
| ۹-۹        | خواندنی های کمی.....         | ۲۷۷ |
| مسائل..... |                              | ۲۷۷ |

#### فصل دهم: تحلیل حالت ماندگار سینوسی مدار

|      |                                   |     |
|------|-----------------------------------|-----|
| ۱۰-۱ | ویژگی های توابع سینوسی.....       | ۲۸۳ |
| ۱۰-۲ | پاسخ واداشته به توابع سینوسی..... | ۲۸۵ |
| ۱۰-۳ | تابع تحریک مختلط.....             | ۲۸۸ |
| ۱۰-۴ | فیزور.....                        | ۲۹۲ |
| ۱۰-۵ | روابط فیزوری برای R، L و C.....   | ۲۹۴ |
| ۱۰-۶ | امپدانس.....                      | ۲۹۸ |

|            |                                   |     |
|------------|-----------------------------------|-----|
| ۱۰-۷       | ادمیتانس.....                     | ۳۰۱ |
| ۱۰-۸       | تحلیل گرهی و مش.....              | ۳۰۲ |
| ۱۰-۹       | تجمع، تبدیل منبع و قضیه تونن..... | ۳۰۵ |
| ۱۰-۱۰      | نمودارهای فیزوری.....             | ۳۰۹ |
| ۱۰-۱۱      | خلاصه فصل و مرور.....             | ۳۱۲ |
| ۱۰-۱۲      | خواندنی های کمی.....              | ۳۱۳ |
| مسائل..... |                                   | ۳۱۳ |

#### فصل یازدهم: تحلیل منابع انرژی AC

|            |                                |     |
|------------|--------------------------------|-----|
| ۱۱-۱       | توان لحظه ای.....              | ۳۲۳ |
| ۱۱-۲       | توان متوسط.....                | ۳۲۵ |
| ۱۱-۳       | مقادیر ولتاژ و جریان موثر..... | ۳۲۳ |
| ۱۱-۴       | توان ظاهری و ضریب توان.....    | ۳۲۷ |
| ۱۱-۵       | توان مختلط.....                | ۳۲۹ |
| ۱۱-۶       | مقایسه واژه های توان.....      | ۳۴۳ |
| ۱۱-۷       | خلاصه فصل و مرور.....          | ۳۴۵ |
| ۱۱-۸       | خواندنی های کمی.....           | ۳۴۵ |
| مسائل..... |                                | ۳۴۵ |

#### فصل دوازدهم: مدارهای چندفاز

|            |   |     |
|------------|---|-----|
| ۱۲-۱       | سیستم های چند فاز.....                    | ۳۵۱ |
| ۱۲-۲       | سیستم های تک فاز سه سیم.....              | ۳۵۳ |
| ۱۲-۳       | اتصال سه فاز Y-Y.....                     | ۳۵۶ |
| ۱۲-۴       | اتصال مثلث یا دلتا (D).....               | ۳۶۱ |
| ۱۲-۵       | اندازه گیری توان در سیستم های سه فاز..... | ۳۶۵ |
| ۱۲-۶       | خلاصه فصل و مرور.....                     | ۳۷۲ |
| ۱۲-۷       | خواندنی های کمی.....                      | ۳۷۳ |
| مسائل..... |   | ۳۷۳ |

#### فصل سیزدهم: مدار با کوپل مغناطیسی

|            |                            |     |
|------------|----------------------------|-----|
| ۱۳-۱       | القای متقابل.....          | ۳۷۷ |
| ۱۳-۲       | ملاحظات انرژی.....         | ۳۸۳ |
| ۱۳-۳       | ترانسفورماتورهای خطی.....  | ۳۸۶ |
| ۱۳-۴       | ترانسفورماتور ایده آل..... | ۳۹۱ |
| ۱۳-۵       | خلاصه فصل و مرور.....      | ۳۹۹ |
| ۱۳-۶       | خواندنی های کمی.....       | ۳۹۹ |
| مسائل..... |                            | ۳۹۹ |

#### فصل چهاردهم: فرکانس مختلط و تبدیل لاپلاس

|      |                             |     |
|------|-----------------------------|-----|
| ۱۴-۱ | فرکانس مختلط.....           | ۴۰۷ |
| ۱۴-۲ | تابع تحریک سینوسی میرا..... | ۴۱۰ |

|            |                                       |     |
|------------|---------------------------------------|-----|
| ۱۴-۳       | تعریف تبدیل لاپلاس.....               | ۴۱۳ |
| ۱۴-۴       | تبدیل لاپلاس توابع زمانی ساده.....    | ۴۱۵ |
| ۱۴-۵       | تکنیک های عکس تبدیل لاپلاس.....       | ۴۱۷ |
| ۱۴-۶       | قضایای اصلی در تبدیل لاپلاس.....      | ۴۲۴ |
| ۱۴-۷       | قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی..... | ۴۳۰ |
| ۱۴-۸       | خلاصه فصل و مرور.....                 | ۴۳۲ |
| ۱۴-۹       | خواندنی های کمی.....                  | ۴۳۳ |
| مسائل..... |                                       | ۴۳۳ |

#### فصل پانزدهم: تحلیل مدار در حوزه S

|            |   |     |
|------------|---|-----|
| ۱۵-۱       | Y(s) و Z(s).....                                      | ۴۳۹ |
| ۱۵-۲       | تحلیل گرهی و تک حلقه ای در حوزه S.....                | ۴۴۴ |
| ۱۵-۳       | تکنیک های دیگر در تحلیل مدار.....                     | ۴۴۸ |
| ۱۵-۴       | قطب ها، صفرها و توابع تبدیل.....                      | ۴۵۱ |
| ۱۵-۵       | کانولوشن.....   | ۴۵۱ |
| ۱۵-۶       | صفحه فرکانس مختلط.....                                | ۴۶۰ |
| ۱۵-۷       | پاسخ طبیعی و صفحه S.....                              | ۴۶۵ |
| ۱۵-۸       | تکنیک سنتز نسبت ولتاژها $V_{out}/V_{in} = H(s)$ ..... | ۴۷۰ |
| ۱۵-۹       | خلاصه فصل و مرور.....                                 | ۴۷۲ |
| ۱۵-۱۰      | خواندنی های کمی.....                                  | ۴۷۲ |
| مسائل..... |   | ۴۷۳ |

#### فصل شانزدهم: پاسخ فرکانس

|            |                                |     |
|------------|--------------------------------|-----|
| ۱۶-۱       | تشدید موازی.....               | ۴۷۹ |
| ۱۶-۲       | عرض باند و مدارهای Q بالا..... | ۴۸۶ |
| ۱۶-۳       | تشدید سری.....                 | ۴۹۰ |
| ۱۶-۴       | دیگر فرم های تشدید.....        | ۴۹۲ |
| ۱۶-۵       | تغییر مقیاس.....               | ۴۹۸ |
| ۱۶-۶       | نمودار بُود.....               | ۵۰۱ |
| ۱۶-۷       | فیلترها.....                   | ۵۱۲ |
| ۱۶-۸       | خلاصه فصل و مرور.....          | ۵۱۸ |
| ۱۶-۹       | خواندنی های کمی.....           | ۵۱۹ |
| مسائل..... |                                | ۵۱۹ |

#### فصل هفدهم: شبکه های دودرگاهی

|      |                          |     |
|------|--------------------------|-----|
| ۱۷-۱ | شبکه های یک درگاهی.....  | ۵۲۷ |
| ۱۷-۲ | پارامترهای ادمیتانس..... | ۵۳۰ |
| ۱۷-۳ | چند شبکه معادل.....      | ۵۳۶ |
| ۱۷-۴ | پارامترهای امپدانس.....  | ۵۴۲ |
| ۱۷-۵ | پارامترهای هیبرید.....   | ۵۴۶ |
| ۱۷-۶ | پارامترهای انتقال.....   | ۵۴۸ |
| ۱۷-۷ | خلاصه فصل و مرور.....    | ۵۵۱ |

|            |                      |     |
|------------|----------------------|-----|
| ۱۷-۸       | خواندنی های کمی..... | ۵۵۲ |
| مسائل..... |                      | ۵۵۲ |

#### فصل هجدهم: تحلیل فوریه مدار

|            |   |     |
|------------|---|-----|
| ۱۸-۱       | فرم مثلثاتی سری فوریه.....                      | ۵۵۹ |
| ۱۸-۲       | استفاده از تقارن.....                           | ۵۶۵ |
| ۱۸-۳       | پاسخ کامل به توابع تحریک متناوب.....            | ۵۶۹ |
| ۱۸-۴       | فرم مختلط سری فوریه.....                        | ۵۷۱ |
| ۱۸-۵       | تعریف تبدیل فوریه.....                          | ۵۷۵ |
| ۱۸-۶       | بعضی از خواص تبدیل فوریه.....                   | ۵۷۸ |
| ۱۸-۷       | جفت تبدیل فوریه برای بعضی توابع زمانی ساده..... | ۵۸۱ |
| ۱۸-۸       | تبدیل فوریه یک تابع زمانی متناوب کلی.....       | ۵۸۵ |
| ۱۸-۹       | تابع سیستم و پاسخ در حوزه فرکانس.....           | ۵۸۶ |
| ۱۸-۱۰      | اهمیت فیزیکی تابع سیستم.....                    | ۵۹۰ |
| ۱۸-۱۱      | خلاصه فصل و مرور.....                           | ۵۹۵ |
| ۱۸-۱۲      | خواندنی های کمی.....                            | ۵۹۵ |
| مسائل..... |   | ۵۹۵ |

#### پیوست ۱ مقدمه ای بر توپولوژی شبکه

|       |                               |     |
|-------|-------------------------------|-----|
| پ ۱-۱ | درخت ها و تحلیل گرهی کلی..... | ۶۰۱ |
| پ ۱-۲ | تحلیل حلقوی.....              | ۶۰۵ |

#### پیوست ۲ حل معادلات همزمان

|       |                        |     |
|-------|------------------------|-----|
| پ ۲-۱ | حل معادلات همزمان..... | ۶۱۱ |
|-------|------------------------|-----|

#### پیوست ۳ اثبات قضیه تونن

|       |                      |     |
|-------|----------------------|-----|
| پ ۳-۱ | اثبات قضیه تونن..... | ۶۱۵ |
|-------|----------------------|-----|

#### پیوست ۴ آموزش PSpice

|       |                   |     |
|-------|-------------------|-----|
| پ ۴-۱ | آموزش PSpice..... | ۶۱۷ |
|-------|-------------------|-----|

#### پیوست ۵ اعداد مختلط

|       |                |     |
|-------|----------------|-----|
| پ ۵-۱ | عدد مختلط..... | ۶۲۱ |
| پ ۵-۲ | اتحاداولر..... | ۶۲۳ |
| پ ۵-۳ | فرم نمایی..... | ۶۲۴ |
| پ ۵-۴ | فرم قطبی.....  | ۶۲۵ |

#### پیوست ۶ آموزش مختصر متلب

|       |                       |     |
|-------|-----------------------|-----|
| پ ۶-۱ | آموزش مختصر متلب..... | ۶۲۷ |
|-------|-----------------------|-----|

#### پیوست ۷ قضایای اضافی در تبدیل لاپلاس

|       |                                   |     |
|-------|-----------------------------------|-----|
| پ ۷-۱ | قضایای اضافی در تبدیل لاپلاس..... | ۶۳۱ |
|-------|-----------------------------------|-----|

#### واژه نامه انگلیسی به فارسی

|       |                                 |     |
|-------|---------------------------------|-----|
| پ ۷-۲ | واژه نامه انگلیسی به فارسی..... | ۶۳۴ |
|-------|---------------------------------|-----|

#### واژه نامه فارسی به انگلیسی

|       |                                 |     |
|-------|---------------------------------|-----|
| پ ۷-۳ | واژه نامه فارسی به انگلیسی..... | ۶۳۷ |
|-------|---------------------------------|-----|



## مقدمه

توکل بر الطاف بی‌بدیل یکتای بی‌همتا و سلام بر دوستاران اهل علم و قلم. هرچند که به نظر رسید نوشتن مقدمه‌ای بر این مکتوب جایگاهی نداشته باشد، و اهل فن، بر علم و توانمندی نویسنده کتاب و دستیارانش وقوف کامل دارند ولی نگاهی چند سطر در راستای آشنایی تازه‌واردان به عرصه مهندسی مدار در ریغ نشد.

اعمال دقت وافر و وسواس در انتخاب و معرفی کتاب اولین گام در راستای تهیه این مکتوب بود که مورد پسند عامه و استفاده علاقمندان و اهل فن در این رشته بوده است. دقت در ترجمه متون و بیان آن‌ها با زبانی ساده گام دیگری است که در فرآیند نشر آن برداشته شده است، ضمن آن‌که پایین بودن بهای کتاب نیز فراموش نشده است.

در این نسخه از کتاب همچون نسخ اصلی قبل، خواننده با مدارهای ac و dc آشنا شده در راستای تحلیل و طراحی شبکه‌های الکتریکی با قوانین و قضایای موجود آشنا می‌گردد. به کارگیری فنون و شردهای مختلف رایج در تحلیل و طراحی شبکه‌های الکتریکی خواننده را با شیئی ملایم به اوج دانش و فن می‌رساند. مطالب هر فصل و فصول مختلف گام به گام و زنجیروار به هم پیوند شده‌اند و بدین ترتیب عواملی چون ناپیوستگی در متن یا در موضوع ذهن خواننده را مشوش نمی‌کنند.

در این ویرایش علاوه بر افزودن اصلاح بر موضوع و متن‌های قبل، خواننده با نرم‌افزار متلب نیز آشنا می‌شود. تمرینان و مسائلی هم در این باب ارائه شده است. مثال‌ها و مسائل متعدد در متن و انتهای هر فصل به درک موضوع تحلیل و طراحی کمک شایانی نموده است. مسائلی که در آخر هر فصل با علامت "ط" (به معنی مسائل طراحی) معرفی شده‌اند می‌توانند به وسیله کاربر در طراحی مسائل نمونه به کار گرفته شوند.

مع الوصف از خوانندگان عزیزی که این کتاب را مطالعه می‌نمایند تقاضا می‌شود هرگونه ارشاد و راهنمایی را در ریغ نمایند و ما را در این امر فرهنگی راهنمایی نمایند.

دکتر قدرت‌الله سپیدنام

(عضو هیأت علمی دانشگاه فردوسی مشهد)

بسم الله الرحمن الرحيم

یکی از پایه‌های توسعه فرهنگی و رشد و شکوفایی استعدادها، مقوله کتاب و کتابخوانی است. نیاز به کتاب به سرعت در حال رشد است و انتشار نتیجه مطالعات پژوهشگران و اندیشمندان پاسخگوی این نیاز خواهد بود. جهت تحقق این امر و گام برداشتن به سمت خودکفایی، چاپ کتب علمی، به خصوص در زمینه فناوری جدید، یعنی کامپیوتر، که توسعه سایر فناوری‌ها نیز به آن وابسته است، ضروری است.

عین‌اله جعفرنژاد قمی

انتشارات علوم رایانه

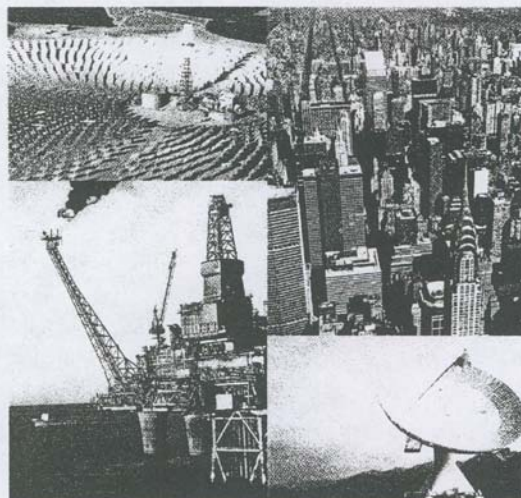


## تحلیل مدار و مهندسی برق

### ۱-۱ پیشگفتار

امروزه فارغ التحصیلان مهندسی، تنها به خاطر کار بر روی جنبه‌های طراحی فنی مسائل مهندسی، استخدام نمی‌شوند. تلاش آن‌ها اکنون، از خلق کامپیوترها و سیستم‌های مخابراتی بهتر، فراتر رفته و در راستای حل مسائل اقتصادی - اجتماعی مانند آلودگی آب و هوا، برنامه‌ریزی شهری، حمل و نقل عمومی، کشف منابع انرژی جدید، نگهداری منابع طبیعی به خصوص نفت و گاز طبیعی جهت یافته است.

برای ایفای نقشی موثر در حل این مسائل، مهارت‌های بسیاری لازم است که یکی از آن‌ها، دانش تحلیل مدار الکتریکی می‌باشد. اگر از قبل وارد این‌گونه برنامه‌ها شده باشید یا بخواهید وارد یک برنامه در زمینه مهندسی برق شوید، تحلیل مدار مقدمه‌ای بر این رشته است. اگر با بخش‌های دیگری از مهندسی سروکار دارید، آن‌گاه تحلیل مدار بخش عمده مطالعات شما را در مهندسی برق شامل می‌شود؛ به هر حال، این بحث شما را قادر می‌سازد تا در زمینه‌های الکترونیک، ابزار اندازه‌گیری دقیق و دیگر زمینه‌های مشابه به‌طور موثر کار کنید. مهم‌تر از همه، این امکان فراهم می‌شود تا اطلاعات شما گسترش یافته و در تیمی که بکار ساخت دستگاه‌های الکتریکی و سیستم‌های برقی مشغولند، عضو موثری باشید. تبادل اطلاعات موثر در چنین تیمی هنگامی حاصل می‌شود که زبان و مفاهیم به کار رفته، برای همگان آشنا باشد. در این فصل مروری بر عناوین مطرح شده در این کتاب خواهیم داشت، و به‌طور خلاصه رابطه بین تحلیل و طراحی و نقشی که ابزارهای کامپیوتری امروزی در تحلیل مدارهای مدرن بازی می‌کنند، بررسی خواهد شد.



#### مفاهیم کلیدی

جنبه‌های تحلیل مدار: تحلیل dc، تحلیل گذرا، تحلیل ac، و تحلیل فرکانس

تحلیل و طراحی

تحلیل به کمک کامپیوتر

استراتژی موفق حل مسئله





مدارهایی که در فصل‌های بعد با آن‌ها مواجه خواهیم شد، همگی تقریب‌های خطی را برای مدارهای الکتریکی فیزیکی ارائه می‌دهند. هر چه که لازم باشد از کمی دقت و یا محدودیت‌ها برای این مدل‌ها صحبت خواهیم کرد، اما به‌طور کلی، به نظر می‌رسد که آن‌ها دقت مناسبی را برای بسیاری از کاربردها دارند. در مواردی که در عمل، دقت بیشتر لازم باشد، از مدل‌های غیرخطی استفاده می‌شود که این خود پیچیدگی قابل توجهی را در حل مسائل دربر خواهد داشت. بحث دقیق‌تر از آنچه که یک مدار الکتریکی خطی را می‌سازد در فصل ۲ آمده است.

تحلیل مدارهای خطی را می‌توان به چهار بخش تقسیم کرد: تحلیل مدارهای مقاومتی یا  $dc$ ، تحلیل گذرا، تحلیل  $ac$  و تحلیل حوزه فرکانس. مطالعه خود را با عنوان مدارهای مقاومتی یا  $dc$  آغاز می‌کنیم که می‌تواند مسئله ساده چراغ‌قوه یا یک ترستر باشد. بدین ترتیب فرصت خوبی برای آموختن تکنیک‌های متعدد تحلیل مدار مانند تحلیل گره‌ای، تحلیل مش یا تک‌حلقه‌ای، تجمیع، تبدیل منبع، قضیه تونن و قضیه نورتن، همراه با روش‌های جایگزینی قطعاتی از مدار که به صورت سری یا موازی به دست خواهد آمد. مهم‌ترین ویژگی مدارهای مقاومتی این است که هر کمیت وابسته به زمان موردنظر در این مدارها، نمی‌تواند روال تحلیل را تحت تأثیر قرار دهد. بنابراین اگر مقدار پارامتری در یک لحظه از زمان خواسته شود، نیازی به تحلیل مدار در همه لحظات وجود ندارد. بنابراین ما بیشترین تلاش را در بررسی مدارهای  $dc$  خواهیم داشت. در این مدارها پارامترهای الکتریکی با زمان تغییر نمی‌کنند.

گرچه مدارهای  $dc$  مانند چراغ‌قوه یا چراغ مه‌شکن پنجره عقب خودرو در تمام روزهای زندگی اهمیت دارند ولی موارد جالب‌تر هنگامی است که چیزی ناگهان رخ دهد (تصور کنید که چه می‌شد اگر ترقه‌ای ۱۰۰ سال طول می‌کشید تا از وضعیتی آرام به حالت ترق و تروق می‌رفت!). در نحوه تحلیل مدار، منظور ما از تحلیل گذرا<sup>۱</sup>، اشاره به روش‌های به کاررفته در مطالعه مدارهایی است که ناگهان تحریک می‌شوند یا از کار می‌افتند. برای این‌که این مدارها مورد توجه قرار گیرند ما باید عناصری به مدار اضافه کنیم که به تغییر کمیت‌های الکتریکی واکنش نشان دهد. که این منجر به معادلات مداری می‌شود که در آن‌ها مشتق و انتگرال وجود دارد. خوشبختانه ما می‌توانیم اینگونه معادلات را با استفاده از روش‌های ساده‌ای که در بخش اول مطالعه خود آموختیم، به دست آوریم.

البته همه مدارهای متغیر با زمان ناگهان خاموش و روشن نمی‌شوند. تهویه هوا، فن‌ها و لامپ‌های فلورسنت تنها چند نمونه از آنچه که روزانه می‌بینیم هستند. در این موارد یک روش مبتنی بر حساب دیفرانسیل برای هر تحلیل می‌تواند خسته‌کننده و وقت‌گیر باشد. خوشبختانه راه‌حل بهتری برای مواردی وجود دارد که به امکانات اجازه داده شده در آن‌ها اثر گذرا طولانی‌تر باشد و به این مورد به تحلیل  $ac$  اشاره شده است و گاهی به آن تحلیل فیزور<sup>۲</sup> می‌گویند.

بخش آخر مربوط به موضوعی تحت عنوان پاسخ فرکانس است. کار مستقیم با معادلات دیفرانسیل که در حوزه زمان به دست آمد به ما کمک می‌کند تا درک سریعی برای عملکرد مدارهای حاوی عناصر ذخیره‌کننده انرژی داشته باشیم (به عنوان مثال خازن‌ها و القاگرها). با این وجود همان‌طور که خواهیم دید حتی مدارهایی که دارای تعداد نسبتاً کمی از عناصر هستند، می‌توانند به‌هنگام تحلیل مشکل‌زا باشند و بنابراین باید راه مستقیم و مقاوم‌تری یافت. این مطالب مبنای تحلیل در حوزه فرکانس است که به ما اجازه می‌دهد تا معادلات دیفرانسیل را به فرم ساده‌تر معادلات جبری درآوریم. چنین روش‌هایی ما را قادر می‌کنند تا مدارهایی طراحی کنیم که به طریقی خاص، به فرکانس‌های مشخصی پاسخ دهند. ما همه روزه مدارهای وابسته به فرکانس را وقتی که ایستگاه رادیویی خود را انتخاب می‌کنیم، یا از تلفن سکه‌ای استفاده می‌نماییم، و یا به اینترنت وصل می‌شویم به کار می‌بریم.

## ۱-۲ مروری بر این کتاب

موضوع اصلی این کتاب درباره تحلیل مدار خطی است که بلافاصله برای بعضی از خوانندگان ممکن است این سوال را مطرح کند:

"آیا تحلیل مدار غیرخطی وجود دارد؟"

بلی، ما همه روزه با مدارهای غیرخطی مواجه هستیم: این مدارها سیگنال‌ها را برای TV و رادیو گرفته و دیکد می‌نمایند، میلیون‌ها محاسبه را در هر ثانیه در داخل ریزپردازنده انجام می‌دهند، و صدا را برای انتقال از طریق خطوط تلفن به سیگنال‌های الکتریکی تبدیل می‌کنند، و چندین عمل را در بیرون انجام می‌دهند که از دید ما خارج است. در طراحی، تست و پیاده‌سازی چنین مدارهای غیرخطی تحلیل دقیق اجتناب‌ناپذیر است. اکنون ممکن است بپرسید:

"پس چرا ما مدارهای خطی را مطالعه می‌کنیم؟"

سوال خوبی است. واقعیتی مسلم از موضوع این است که هیچ سیستم فیزیکی (از جمله مدارهای الکتریکی) به‌طور ایده‌آل خطی نیست. با این وجود خوشبختانه تعداد زیادی از سیستم‌ها در گستره‌ای محدود رفتاری تقریباً خطی دارند و این به ما اجازه می‌دهد تا آن‌ها را به عنوان سیستم‌های خطی با حفظ محدودیت‌ها مدل‌سازی کنیم.

مثلاً تابع آشنای زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = e^x$$

یک تقریب خطی برای این تابع عبارتست از:

$$f(x) \approx 1 + x$$

اجازه بدهید ببینیم این چگونه است. جدول ۱-۱ هم مقدار دقیق و هم مقدار تقریبی  $f(x)$  را برای محدوده‌ای از  $x$  نشان می‌دهد. جالب است، تقریب خطی استثناً تا حدود  $x = 0.1$  دقیق است، و خطای نسبی هنوز کمتر از ۱٪ است. گرچه بسیاری از مهندسين با داشتن یک ماشین حساب می‌توانند خیلی سریع عمل کنند ولی مشکل است بتوان ادعا کرد که هر روشی سریعتر از فقط افزودن یک عدد ۱ به  $x$  می‌باشد.

جدول ۱-۱ مقایسه یک مدل خطی برای  $e^x$  با مقدار دقیق.

| $x$    | $f(x)^*$ | $1 + x$ | خطای نسبی** |
|--------|----------|---------|-------------|
| 0.0001 | 1.0001   | 1.0001  | 0.0000005%  |
| 0.001  | 1.0010   | 1.001   | 0.00005%    |
| 0.01   | 1.0101   | 1.01    | 0.005%      |
| 0.1    | 1.1052   | 1.1     | 0.5%        |
| 1.0    | 2.7183   | 2.0     | 26%         |

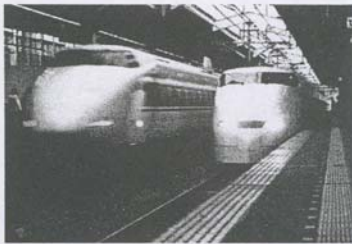
\* تا چهار رقم اعشار بیان شده است  
 \*\* خطای نسبی  $\Delta = \left| 100 \times \frac{e^x - (1+x)}{e^x} \right|$

مسائل خطی ذاتاً ساده‌تر از نوع غیرخطی‌شان حل می‌شوند. بنابراین به عنوان یک مهندس، اغلب به دنبال یافتن روش‌های تقریبی خطی دقیقی (یا مدل‌ها) برای موارد فیزیکی هستیم. علاوه بر آن مدل‌های خطی ساده‌تر دستکاری شده و درک می‌شوند و لذا طراحی را سراسر آسان‌تر می‌نمایند.

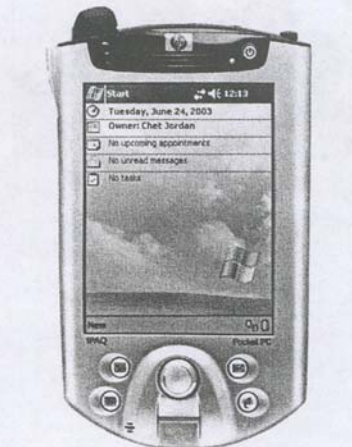
همه مهندسين برق به‌طور روزمره تحلیل مدار را انجام نمی‌دهند، ولی تحلیل‌ها و راهکارها و مهارت‌های حل مسائل آموخته‌شده را از اول حرفه به یاد می‌آورند. یک دوره تحلیل مدار یکی از ابتدایی‌ترین نمایش‌ها برای این مفاهیم است (Solar Mirrors: © Corbis; Skyline: © Getty Images/J.Luke/PhotoLink)



دستگاه تلویزیون دارای مدارهای متعدد غیرخطی است. بخش عمده‌ای از آن‌ها را می‌توان درک کرده و به کمک مدارهای خطی تحلیل نمود.

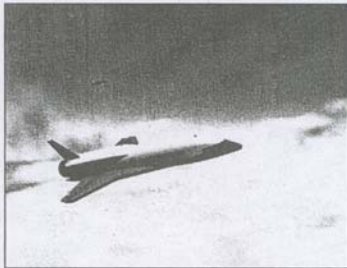
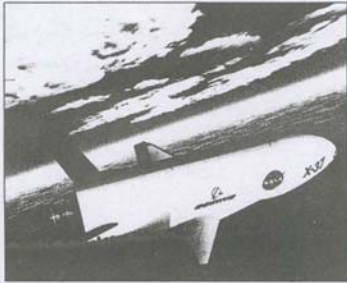


ترن‌های مدرن به وسیله موتورهای الکتریکی انرژی می‌گیرند. سیستم الکتریکی آن‌ها با روش‌های فیزوری یا  $ac$  بهتر تحلیل می‌شود.



مدارهای وابسته به فرکانس در قلب بسیاری از وسایل الکترونیک قرار دارند و می‌توانند سرگرمی‌های زیادی را در طراحی به وجود آورند.





دو طرح پیشنهادی برای نسل بعد فضایی شاتل. گرچه هر دو حاوی اجزای مشابه‌اند، هر کدام منحصر به فرد است.

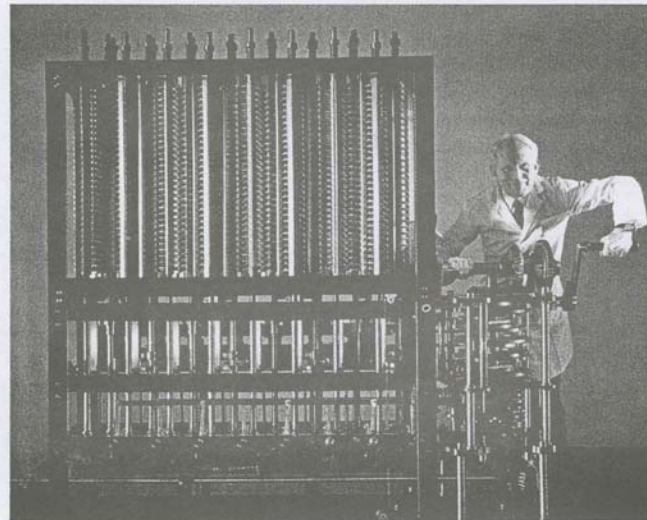
راه‌حلی برای یک مسئله مفروض می‌رسند. **تحلیل** فرآیندی است که از طریق آن ما دیدگاه یک مسئله را فراهم می‌کنیم، اطلاعات لازم را برای درک آن کسب می‌کنیم، و پارامترهای موردنظر را محاسبه می‌نماییم. **طراحی** فرآیندی است که به وسیله آن ما چیزی جدید را به عنوان بخشی از حل مسئله خلق می‌کنیم. کلی‌تر بگوییم این انتظار می‌رود که هر مسئله‌ای که نیاز به طراحی داشته باشد، راه‌حل منحصر به فردی ندارد، درحالی‌که فاز تحلیل چنین نیست. بنابراین آخرین گام در طراحی همیشه تحلیل نتیجه است تا مشاهده شود که آیا با مشخصات تطبیق می‌کند یا خیر.

این کتاب بر توسعه توانمندی ما برای تحلیل و حل مسائل توجه دارد زیرا نقطه شروع هر موضوع مهندسی است. فلسفه این کتاب این است که ما نیاز به توضیح واضح، مثال‌های به موقع، و تمرینات زیادی برای گسترش چنین توانایی داریم. بنابراین عناصر طراحی در انتهای مسائل آخر فصل و فصل‌های بعدی طوری جمع‌آوری شده است که مسرت‌بخش باشد تا ملال‌آور.

## ۵-۱ تحلیل به کمک کامپیوتر

حل انواع معادلات که از تحلیل مدارها به دست می‌آیند اغلب حتی برای مدارهای نسبتاً پیچیده مشکل است. البته این احتمال بروز خطا را علاوه بر صرف زمان زیاد محاسبات، افزایش می‌دهد. میل به یافتن ابزاری برای کمک به این فرآیند در واقع به قبل از دوره کامپیوترهای الکترونیک برمی‌گردد، که در آن کامپیوترهای کاملاً مکانیکی مانند موتور تحلیل طراحی شده به وسیله چارلز بیبج در سال ۱۸۸۰ به عنوان حل‌های ممکن پیشنهاد شد. شاید قدیمی‌ترین کامپیوتر الکترونیک موفق که برای حل معادلات دیفرانسیل طراحی شد، کامپیوتر انیاک در دهه ۱۹۴۰ بود که لامپ‌های الکترونیکی آن یک اتاق بزرگ را پر می‌کرد. با اختراع کامپیوترهای شخصی تحلیل مدار به کمک کامپیوتر به صورت ابزاری ارزشمند نه فقط در تحلیل بلکه در طراحی درآمد.

یکی از ویژگی‌های مهم طراحی به کمک کامپیوتر اجتماع چند برنامه به صورت شفاف برای کاربو است. این امکان اجازه می‌دهد که مدار به صورت شماتیک و با سرعت روی صفحه نمایش ظاهر شده و به‌طور خودکار به قالبی که برای برنامه تحلیل لازم است کاهش یابد (مانند

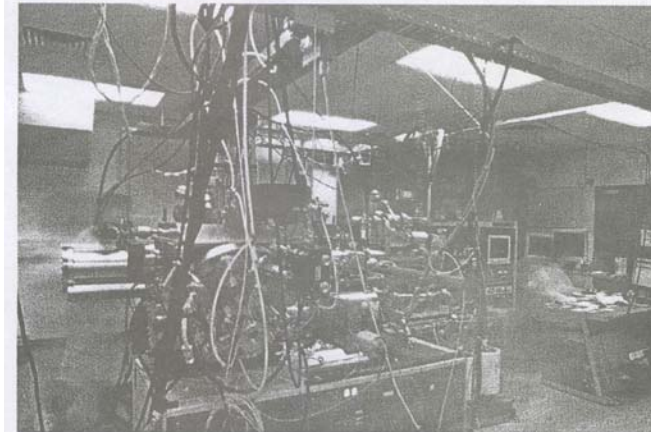


ماشین تفاضلی شماره ۲ چارلز بیبج که در سال ۱۹۹۱ در موزه لندن جمع‌آوری و تکمیل شد.

## ۳-۱ رابطه تحلیل مدار با مهندسی

خواه بخواهیم که در تکمیل این بحث تحلیل مدار بیشتری را دنبال کنیم یا نکنیم، ارزشمند است که بدانیم چندین لایه برای مفاهیم تحت مطالعه وجود دارد. ورای پیچ و مهره‌های تکنیک‌های تحلیل مدار فرصت‌هایی وجود دارد که با آن یک روش متدلوژیک برای حل مسئله ایجاد می‌شود، توانمندی تعیین هدف یا اهداف برای یک مسئله خاص معین می‌گردد، مهارت در جمع‌آوری اطلاعات لازم برای حل کسب می‌شود و شاید با همان اهمیت، فرصت برای تمرین و آزمایش تصدیق دقت در حل پیش می‌آید.

دانشجویانی که با مطالعه دیگر عناوین مهندسی مانند حرکت سیالات، سیستم‌های تعلیق، طراحی پل، مدیریت‌های تهیه و توزیع، و دیگر فرآیندهای کتتری آشنا هستند فرم کلی معادلات دیفرانسیلی را که ما برای توصیف رفتار مدارهای مختلف ارائه می‌کنیم تشخیص خواهند داد. ما فقط کافی است متغیرهای مختلف را تبدیل کنیم (به عنوان مثال، ولتاژ را با نیرو، بار را با فاصله، مقاومت را با ضریب اصطکاک، و غیره جایگزین نماییم) تا به این ترتیب بدانیم چگونه با یک مسئله جدید کار کنیم. اغلب اگر از کارهای قبلی خود تجربه‌ای اندوخته‌ایم درک شهودی می‌تواند راهنمای ما در حل یک مسئله کاملاً جدید باشد.



مثالی از یک مانیپولاتور (عملگر) رویاتی. می‌توان سیستم کنترل پسخوردی را با عناصر مدار خطی برای تعیین شرایط بی‌ثباتی مدل‌سازی کرد.

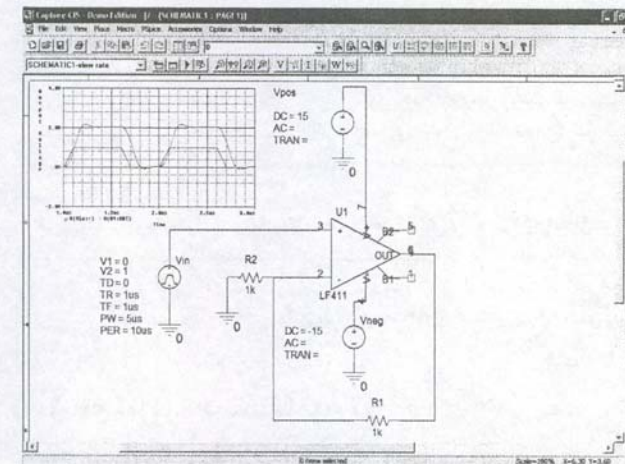
آنچه را که ما در رابطه با تحلیل مدار خطی قصد آموختن آن را داریم، مبنای بسیاری از دوره‌های بعدی مهندسی برق را تشکیل می‌دهد. مطالعه الکترونیک مبتنی است بر تحلیل مدارهای دیودی و ترانزیستوری که در ساخت منابع تغذیه، تقویت‌کننده‌ها و مدارهای دیجیتال به کار می‌روند. این مهارت‌ها که مادر حال پی‌ریزی آن‌ها هستیم قابل استفاده سریع و روش‌مند به وسیله هر مهندس الکترونیک است و نامبرده می‌تواند یک مدار پیچیده را بدون حتی دست‌زدن به یک قلم حل کند! فصل‌های مربوط به حوزه زمان و حوزه فرکانس این کتاب مستقیماً به بحث‌هایی درباره‌ی پردازش سیگنال، خازن، انتقال نیرو، تئوری کنترل، و مخابرات منتهی می‌شود. خواهیم دید که تحلیل حوزه فرکانس به خصوص تکنیکی بسیار قوی است و به سادگی به هر سیستم فیزیکی تحت نیروی وابسته به زمان قابل اعمال است.

## ۴-۱ تحلیل و طراحی

مهندسين درکی بنیادی را از اصول دانشمندان کسب می‌کنند، و از ترکیب آن با دانش عملی خود که اغلب به صورت جملات ریاضی بیان می‌شود و با خلاقیت‌های قابل ملاحظه مکرر به



یک تقویت‌کننده که با بسته نرم‌افزاری اخذ شماتیک تجاری ترسیم شده است. خروجی شبیه‌سازی شده وابسته به زمان است.



SPICE که در فصل ۴ معرفی شده است). نتایج حاصل به آرامی به برنامه سومی منتقل می‌گردد تا در آن جاکمیت‌های مطلوب در مدار موردنظر رسم شود. به محض این‌که مهندس با رفتار ناشی از شبیه‌سازی راضی شد همان نرم‌افزار می‌تواند مدار چاپی را تولید کند و برای اجرای آن از پارامترهای هندسی موجود در کتابخانه استفاده می‌نماید. این سطح از مجتمع کاری سطور پیوسته در حال افزایش است تا جایی که یک مهندس خواهد توانست یک شماتیک را ترسیم کند، چند دکمه را بفشارد و به سمت دیگر میز رفته تا نوع تولید شده صنعتی مدار را که آماده تست است بردارد.

با این وجود به خواننده گوشزد می‌شود که: به دلایل متعدد نرم‌افزارهای تحلیل مدار به هیچ وجه جایگزین تحلیل دستی قدیمی نمی‌گردند. ما باید درک منسجمی از چگونگی کار مدار داشته باشیم تا بتوانیم آن‌ها را طراحی کنیم. رفتن به سراغ یک بسته نرم‌افزاری خاص و اجرای آن ممکن است به ما در رسیدن به یک پاسخ برای سوالاتی ساده کمک کند، ولی این مشابه یک بازی لاتاری است: با خطاهای تولید شده انسانی، پارامترهای پنهان پیش فرض در منوهای فراوان قابل انتخاب و کمبودهای گهگاه کد نوشته شده به وسیله انسان جایگزینی برای داشتن حداقل ایده از رفتار موردنظر مدار وجود ندارد. آن وقت اگر نتایج شبیه‌سازی با آنچه انتظار می‌رود همخوانی نداشته باشد، می‌توان خطا را زودتر از آنکه دیر شود پیدا کنیم. تحلیل کامپیوتری هنوز ابزاری قوی است. این ابزار اجازه می‌دهد تا مقادیر پارامترها تغییر کند و تغییر رفتار مدار ارزیابی شود، و چندین تغییر برای یک طراحی به روشی سرراست مورد ملاحظه قرار گیرد. در نتیجه کارهای تکراری کاهش یافته و فرصت بیشتری برای پرداختن به جزئیات مهندسی وجود خواهد داشت.

## ۱-۶ استراتژی موفق حل مسئله

هنگامی که مایوس‌کننده‌ترین بخش تحلیل مدار از دانشجویان سوال شود عده زیادی از آن‌ها خواهند گفت، نقطه شروع کجاست. دومین بخشی که مشکل به نظر می‌رسد، یافتن مجموعه کاملی از معادلات و سازمان‌دهی آن‌ها می‌باشد به نحوی که قابل مدیریت باشد.

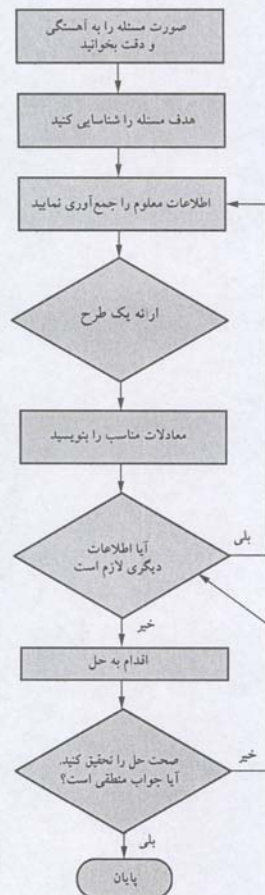
حرکت اصولی در این مورد خواندن سریع صورت مسئله است و سپس باید بلافاصله برای یافتن معادلات مناسب اقدام کرد. در این میان آرزوی زمانی را داریم که قطر دایره‌ای داده شده و محیط آن خواسته می‌شد، یا ابعاد یک هرمی را می‌داشتیم و حجم آن را محاسبه می‌کردیم.

گرچه جست‌وجو برای یافتن حل سریع و سوسه‌انگیز است، ولی پافشاری در دنبال کردن روشی با قاعده در درازمدت به حل بهتری منجر می‌شود.

چارتی که ملاحظه می‌کنید، برای کمک به حل دو مشکل رایج طراحی شده است: یکی شروع مسئله و دیگری هدایت در راستای حل. گرچه بعضی از مراحل کاملاً واضح به نظر می‌رسد، ولی ترتیب پیشروی و انجام هر مرحله عامل موفقیت در رسیدن به هدف است. در هر صورت کلید واقعی موفقیت در تحلیل مدار ممرست است. تجربه بهترین معلم است و آموختن از اشتباهات همیشه بخشی از فرآیندی است که فرد یک مهندس موفق باشد.

## ۷-۱ خواندنی‌های کمی

G. polya, How to solve it, Princeton University Press, 1971. ISBN: 0691023565. کتابی است ارزان‌قیمت، پرفروش و مشهور و به خواننده چگونگی ایجاد یک استراتژی در حل مسئله را برای مسائل ظاهراً ناممکن می‌آموزد.





## فصل دوم

# قطعات اساسی و مدارهای الکتریکی

## مقدمه

موضوع اصلی در این کتاب تحلیل مدارهای الکتریکی و سیستم‌ها است. در ارتباط با یک تحلیل خاص، ما اغلب به دنبال یافتن جریان‌ها، ولتاژها، یا توان‌های خاص هستیم، لذا ما با توصیف خلاصه‌ای از این کمیت‌ها آغاز می‌کنیم. به لحاظ تعداد قطعات مورد استفاده در ایجاد مدارهای الکتریکی، محدودیت زیادی در انتخاب داریم. بنابراین بدون هرگونه غرق شدن، ما ابتدا بر مقاومت، که قطعه‌ای غیرفعال است، و گستره‌ای از منابع فعال ایده‌آل از ولتاژ و جریان، توجه خواهیم کرد. به تدریج که جلوتر برویم، قطعات جدیدی اضافه خواهند شد، تا مدارهای پیچیده‌تر و مفیدتری مورد بررسی قرار گیرند.

مضمون یک نصیحت سریعی قبل از شروع به بررسی چنین است: به نقش علامت‌های "+" و "-" به هنگام برچسب‌زنی ولتاژها به دقت توجه کنید، و به اهمیت جهت فلش (پیکان) جریان دقت نمایید؛ آن‌ها اغلب پاسخ‌های غلط و صحیح را از هم متمایز می‌کنند.

## ۲-۱ واحدها و مقیاس‌ها

برای بیان هر کمیت قابل اندازه‌گیری باید یک عدد و یک واحد برای آن مشخص کنیم، مانند "۳ اینچ". خوشبختانه همه ما از یک سیستم اعداد استفاده می‌کنیم. ولی در سیستم آحاد چنین نیست و برای آشنایی با یک سیستم مناسب باید کمی وقت صرف کرد. ما باید در مورد یک واحد استاندارد به توافق برسیم و از بقاء پذیرش آن توسط عامه مطمئن باشیم. مثلاً واحد استاندارد برای طول نمی‌تواند برحسب فاصله بین دو علامت روی یک نوار لاستیکی تعریف شود، زیرا این تعریف دوام ندارد و علاوه بر آن دیگران هم استاندارد خود را به کار خواهند برد.

در مورد انتخاب سیستم آحاد، دستان چندان باز نیست. سیستمی که به کار خواهیم برد در سال ۱۹۶۴ به وسیله موسسه ملی استاندارد پذیرفته شد و اکثر جوامع علمی نیز آن را به کار می‌برند و امروزه کتاب‌ها نیز با زبان آن نوشته می‌شوند. این سیستم بین‌المللی آحاد است (که در تمام زبان‌ها با نام اختصاری SI خوانده می‌شود). سیستم مذکور در کنفرانس بین‌المللی اوزان و مقادیر در سال ۱۹۶۰ پذیرفته شد. SI بر اساس هفت واحد بنیادی متر، کیلوگرم، ثانیه، آمپر، کلوین، مول و شمع پایه‌ریزی شده است (جدول ۲-۱ ملاحظه شود). این سیستم که یک سیستم متری است، علی‌رغم این‌که هنوز به‌طور گسترده در ایالات متحده به کار نمی‌رود، در بسیاری از کشورهای پیشرفته متداول است. واحد کمیات دیگر مانند حجم، نیرو، انرژی و غیره از این هفت واحد اصلی به‌دست می‌آیند.

واحد اصلی کار یا انرژی ژول است (J). یک ژول (یک کیلوگرم متر بر مجذور ثانیه در واحد SI) معادل است با 0.7376 فوت پوند نیرو و (ft-lb-f). دیگر واحدهای انرژی از جمله

### مفاهیم کلیدی

کمیت‌های اصلی الکتریکی و واحدهای مربوطه: بار، جریان، ولتاژ و توان

جهت جریان و قطب‌های ولتاژ

قرارداد علامت غیرفعال برای محاسبه توان

منابع جریان ولتاژ ایده‌آل

منابع وابسته

مقاومت و قانون اهم



جدول ۲-۱ واحدهای بنیادی SI.

| کمیت              | نام     | نماد |
|-------------------|---------|------|
| طول               | متر     | m    |
| جرم               | کیلوگرم | kg   |
| زمان              | ثانیه   | s    |
| جریان الکتریکی    | آمپر    | A    |
| دمای ترمودینامیکی | کلوین   | K    |
| مقدار ماده        | مول     | mol  |
| شدت نور           | شمع     | cd   |



## ۲-۲ بار الکتریکی، جریان، ولتاژ و توان

### بار

یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در تحلیل یک مدار الکتریکی اصل بقا بار الکتریکی است. با توجه به فیزیک مقدماتی می‌دانیم دو نوع بار وجود دارد: مثبت (مربوط به یک پروتون) و منفی (مربوط به یک الکترون). در بیشتر بخش‌های این کتاب فرض بر این است که در مدار فقط جریان الکترون وجود دارد. در بسیاری از وسایل یا دستگاه‌ها مانند باتری‌ها، دیودها و ترانزیستورها حرکت بار مثبت برای درک عملکرد درونی مهم است، ولی از دیدگاه بیرونی معمولاً بر حرکت الکترون‌ها از سیم‌های رابط توجه داریم. گرچه بارها دائماً بین بخش‌های مختلف یک مدار انتقال می‌یابند، ولی در مجموع کل بار تغییر نمی‌کند. به بیان دیگر هنگام به کاراندازی یک مدار الکتریکی، ما نه الکترون‌ها (پروتون‌ها) را از بین می‌بریم و نه آن‌ها را ایجاد می‌کنیم. بار الکتریکی متحرک نمایانگر یک جریان است.

در سیستم SI واحد اصلی بار **کولن** (C) است. کولن برحسب آمپر با شمارش بار کلی که از یک سطح مقطع دلخواه در فاصله زمانی یک ثانیه عبور می‌کند، تعریف می‌شود. یک کولن مقدار بار مربوط به جریان یک آمپر در هر ثانیه است (شکل ۲-۱). در این سیستم واحدهای الکترون دارای بار  $1.602 \times 10^{-19}$  C و یک پروتون دارای بار  $1.602 \times 10^{-19}$  C است. کمیتی از بار که در طول زمان تغییر نکند با Q نشان داده می‌شود. مقدار بار لحظه‌ای (که ممکن است با زمان تغییر کند یا نکند) معمولاً به وسیله  $q(t)$  و یا فقط با q نشان داده می‌شود. این قرارداد در سرتاسر مطالب این کتاب رعایت خواهد شد: حروف بزرگ برای کمیت‌های ثابت (ثابت در طول زمان) به کار می‌رود، درحالی‌که حروف کوچک نمایشگر حالات لحظه‌ای است. بنابراین یک بار ثابت را ممکن است با Q یا q نشان داد، ولی مقدار باری که در طول زمان تغییر کند حتماً باید با حرف q نشان داده شود.

### جریان

ایده انتقال بار یا "بار متحرک" اهمیت بسیاری در مطالعه مدارهای الکتریکی دارد زیرا ما در حرکت بار از یک مکان به مکان دیگر، ممکن است انرژی را از یک جا به جای دیگری انتقال دهیم. خطوط آشنای انتقال نیروی الکتریکی در سرتاسر کشور مثالی عملی از یک وسیله انتقال انرژی است. تغییر آهنگ انتقال بار برای مبادله اطلاعات از اهمیت مشابهی برخوردار است. این فرآیند مبنای سیستم‌های مخابراتی، مانند رادیو - تلویزیون و تله‌متری (سنجش از راه دور) را تشکیل می‌دهد.

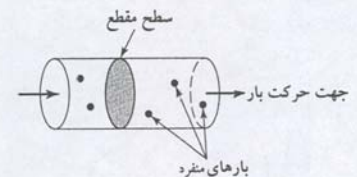
جریان موجود در یک مسیر مجزا مانند یک سیم فلزی، علاوه بر مقدار عددی، جهت هم دارد. جریان، آهنگ عبور بار از یک نقطه مرجع در یک جهت خاص است.

پس از مشخص کردن جهت مرجع، جریان کلی که از  $t = 0$  به بعد از یک نقطه مرجع در آن جهت عبور کرده را  $q(t)$  می‌نامیم. اگر بار منفی در جهت مرجع و یا باری مثبت در خلاف آن حرکت کند از بار کل کم می‌شود. شکل ۲-۲ تاریخچه بار کل  $q(t)$ ، که از یک نقطه مرجع مفروض در یک سیم عبور کرده است را نشان می‌دهد (مثل آنچه در شکل ۲-۱ دیدیم).

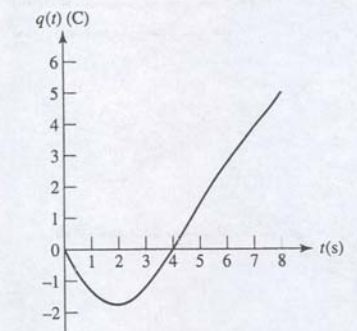
ما جریان در یک نقطه خاص و جهتی خاص را به صورت تغییرات لحظه‌ای بار مثبت کلی که نقطه مذکور در آن جهت عبور می‌کند تعریف می‌کنیم. متأسفانه این جهت مثبت جنبه تاریخی دارد و قبل از این که مشخص شود جریان در یک سیم در واقع به دلیل بار منفی است نه مثبت، مورد توجه قرار گرفت. جریان را با  $i$  نشان می‌دهیم بنابراین

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1)$$

همان‌طور که از جدول ۲-۱ ملاحظه می‌شود واحدهای اصلی SI از کمیت فیزیکی به دست نمی‌آیند در عوض بر اساس اندازه‌گیری منجر به تعاریفی می‌شوند که از گذشته پذیرفته شده‌اند. مثلاً اگر به طور فیزیکی آمپر را بر اساس بار الکتریکی تعریف کنیم معقولتر است.



شکل ۲-۱ بار جاری در مدار، که تعریف کولن را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۲ نمودار مقدار لحظه‌ای کل بار  $q(t)$  که از نقطه مرجع از  $t = 0$  به بعد عبور می‌کند.

کالری (CAL)، معادل است با 4.187 ژول (J)؛ واحد گرمایی انگلیسی (BTU) که برابر است با 1055 ژول و کیلووات ساعت (kWh)، معادل است با  $3.6 \times 10^6$  J. توان به صورت میزان کار انجام‌شده یا انرژی تلف‌شده تعریف می‌شود. واحد اصلی توان با وات (W) تعریف می‌شود که برابر است با یک ژول بر ثانیه. یک وات برابر است با 0.7376 فوت نیرو بر ثانیه (ft-lbf/s) یا معادل است با  $\frac{1}{745.7}$  اسب بخار (hp).

SI از سیستم دهدهی برای ارتباط واحدهای بزرگ‌تر و کوچک‌تر به واحد اصلی استفاده می‌کند و برای نشان دادن آن‌ها توان‌هایی از 10 را به عنوان پیشوند به کار می‌گیرد. پیشوند و نماد آن‌ها در جدول ۲-۲ آمده است. واحدهایی که بیشتر در مهندسی رایج هستند در درون جدول سایه زده شده‌اند.

جدول ۲-۲ پیشوندهای SI.

| ضریب       | نام   | نماد  | ضریب      | نام  | نماد |
|------------|-------|-------|-----------|------|------|
| $10^{-24}$ | یوکتو | y     | $10^{24}$ | یوتا | Y    |
| $10^{-21}$ | زپتو  | z     | $10^{21}$ | زتا  | Z    |
| $10^{-18}$ | آتو   | a     | $10^{18}$ | اکسا | E    |
| $10^{-15}$ | فمتو  | f     | $10^{15}$ | پتا  | P    |
| $10^{-12}$ | پیکو  | p     | $10^{12}$ | ترا  | T    |
| $10^{-9}$  | نانو  | n     | $10^9$    | گیگا | G    |
| $10^{-6}$  | میکرو | $\mu$ | $10^6$    | مگا  | M    |
| $10^{-3}$  | میلی  | m     | $10^3$    | کیلو | k    |
| $10^{-2}$  | سانتی | c     | $10^2$    | هکتو | h    |
| $10^{-1}$  | دسی   | d     | $10^1$    | دکا  | da   |

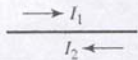
به‌خاطر سپردن این پیشوندها ارزش دارد زیرا به دفعات در این کتاب و دیگر مقالات تکنیکی به کار رفته‌اند. ترکیب چندین پیشوند مانند میلی میکرو ثانیه پذیرفته نیست. همچنین بهتر است از میکرون ( $\mu\text{m}$ ) به جای میکرومتر و آنگستروم ( $\text{\AA}$ ) برای  $10^{-10}\text{m}$  استفاده کنیم. بالاخره در تحلیل مدار و به‌طور کلی مهندسی بهتر است اعداد برحسب واحدهای مهندسی بیان شوند. در نمایش مهندسی، یک کمیت به وسیله عددی بین 1 و 999 و واحد متریک مناسبی نمایش داده می‌شود. بنابراین برای کمیت 0.048 W به جای نمایش آن به صورت 4.8 cW یا  $4.8 \times 10^{-2}$  W یا  $48000\mu\text{W}$  می‌نویسیم 48 mW.

### تمرین

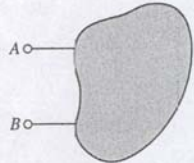
|       |   |
|-------|---|
| ۲-۱   | یک لیزر کریبتون فلوراید، نوری با طول موج 248 nm منتشر می‌کند. این مقدار برابر است با: الف. 0.0248mm ب. $2.48 \mu\text{m}$ ج. $0.248 \mu\text{m}$ د. 24,800 Å                            |
| ۲-۲   | در یک مدار مجتمع دیجیتال معین، یک گیت منطقی از حالت "روشن" در مدت 1ns به حالت خاموش سوئیچ می‌کند. این زمان برابر است با: الف. 0.1 ps ب. 10 ps ج. 100 ps د. 1000ps                       |
| ۲-۳   | یک لامپ مطالعه با 60 W کار می‌کند. اگر به‌طور ثابت رها شود، هر روز چقدر انرژی مصرف می‌کند (برحسب ژول (J))، و اگر انرژی با میزان هر کیلووات 12.5 سنت محاسبه شود، مصرف هفتگی اش چقدر است؟ |
| جواب: | ۲-۱ (ج) ۲.۲، (د) ۲.۳ و 5.18 MJ و \$1.26.  |



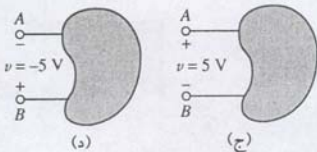
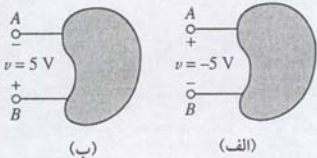
## تمرین



شکل ۲-۷



شکل ۲-۸ یک عنصر مداری کلی دو پایانه.



شکل ۲-۹ (الف و ب) پایانه B نسبت به پایانه A، 5 ولت مثبت است. (ج و د) پایانه A نسبت به پایانه B، 5 ولت مثبت است.



۲-۴ در سیم شکل ۲-۷ الکترون‌ها از چپ به راست برای ایجاد جریان 1 میلی آمپر حرکت می‌کنند.  $I_1$  و  $I_2$  را معین کنید.  
جواب:  $I_2 = +1 \text{ mA}$  و  $I_1 = -1 \text{ mA}$

## ولتاژ

ما اکنون به یک عنصر مداری یعنی چیزی که به‌طور کلی بهترین نقطه شروع است، مراجعه می‌کنیم. وسایل الکتریکی مانند فیوز، لامپ، مقاومت، باتری، خازن، مولد و کوئل اتومبیل را می‌توان با ترکیب عناصر ساده مداری نشان داد. بحث را با یک عنصر کلی مداری و به‌صورت شیئی نامشخص با دو پایانه قابل اتصال به عناصر دیگر آغاز می‌کنیم (شکل ۲-۸).

برای ورود یا خروج از این عنصر دو مسیر وجود دارد در بحث‌های بعد، هر عنصر را برای مدار با توصیف مشخصات الکتریکی مشاهده‌شده از این دو پایانه تعریف می‌کنیم. فرض کنید که در شکل ۲-۸ یک جریان dc به پایانه A وارد شده، از عنصر گذشته، و از پایانه B خارج شده است. همچنین فرض کنید که عبور بار از طریق عنصر نیاز به صرف انرژی دارد. آن‌گاه می‌گوییم بین دو پایانه یک ولتاژ الکتریکی برقرار است (یا اختلاف پتانسیل)، و یا این‌که می‌گوییم ولتاژی در دو سر عنصر موجود است؛ بنابراین ولتاژ بین یک جفت پایانه معیاری از کار لازم برای عبور بار از عنصر است. واحد ولتاژ، ولت، و 1 ولت برابر 1 J/C است. ولتاژ را با V یا v نمایش می‌دهند.

ممکن است بین دو پایه الکتریکی، ولتاژ یا اختلاف پتانسیلی موجود باشد، خواه جریان از آن بگذرد یا نگذرد. برای مثال بین پایانه‌های باتری اتومبیل، هر چند که بهم وصل نشده باشند، 12 ولت اختلاف پتانسیل وجود دارد.

بنابر اصل بقای انرژی، انرژی مصرف‌شده برای عبور بارها از عنصر باید در جایی ظاهر گردد. بعداً ضمن برخورد با عناصر مداری خاص خواهیم دید که این انرژی یا در عنصر ذخیره می‌شود، که در این صورت می‌توان آن را باز هم به‌صورت یک انرژی الکتریکی باز پس گرفت، و یا به‌طور برگشت‌ناپذیر به گرما، انرژی صوتی یا یک انرژی غیر الکتریکی دیگر تبدیل می‌گردد.

اکنون باید قراری را بنیان بگذاریم که بر اساس آن بتوان انرژی که به یک عنصر داده می‌شود را از انرژی که به وسیله عنصر تولید می‌گردد تفکیک کرد. ما این کار را با تخصیص علامت ولتاژ برای پایانه A نسبت به پایانه B انجام می‌دهیم. اگر جریان مثبتی وارد پایانه A بشود، و منبع انرژی برای عبور آن انرژی مصرف کند، آن‌گاه پایانه A نسبت به پایانه B مثبت خواهد بود. بر عکس می‌توان گفت پایانه B نسبت به پایانه A منفی است.

جهت ولتاژ با یک جفت علامت جبری مثبت و منفی نمایش داده می‌شود. به‌عنوان مثال در شکل ۲-۹ (الف) استقرار علامت مثبت در پایانه A به این معنی است که پایانه A به اندازه ۷ ولت نسبت به پایانه B مثبت است. اگر بعداً دریابیم که ۷ ولت دارای مقدار عددی 5V- می‌باشد، آن‌گاه می‌توانیم بگوییم که A به اندازه 5V- نسبت به B مثبت است و یا این‌که B نسبت به اندازه 5V نسبت به A مثبت می‌باشد. دیگر حالات در شکل ۲-۹ (ب، ج و د) دیده می‌شوند.

همان‌طور که در مورد تعریف جریان اشاره شد، لازم است بدانیم که علامت جبری مثبت یا منفی، پلارته واقعی ولتاژ را مشخص نمی‌کند بلکه ما را توانایی‌سازد تا در مورد ولتاژ دو سر جفت

واحد جریان آمپر (A) است، که پس از فیزیکدان فرانسوی ای.ام. آمپر<sup>۱</sup> انتخاب شد. امروزه آن را به صورت خلاصه تر "amp" نشان می‌دهند هر چند که استفاده از این اختصار رسمیت ندارد. با استفاده از معادله (۱)، جریان لحظه‌ای را محاسبه کرده و شکل ۲-۳ را به‌دست می‌آوریم. استفاده از حرف کوچک  $i$  به دلیل مقدار لحظه‌ای آن و حرف بزرگ  $I$  به معنی ثابت بودن کمیت جریان است.

بار انتقالی بین زمان  $t_0$  و  $t$  می‌تواند به‌صورت انتگرال معین زیر تعریف شود:

$$\int_{q(t_0)}^{q(t)} dq = \int_{t_0}^t i dt'$$

بار کل انتقال یافته در یک فاصله زمانی با جمع  $q(t_0)$  و بار انتقال یافته از لحظه  $t_0$  تا  $t$  از عبارت زیر حاصل می‌گردد:

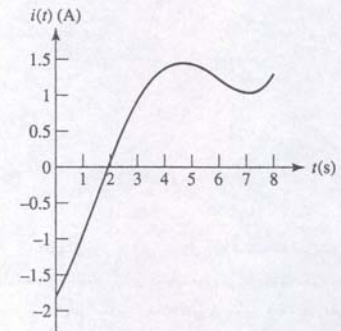
$$q(t) = \int_{t_0}^t i dt' + q(t_0) \quad (۲)$$

چند نمونه جریان مختلف در شکل ۲-۴ نمایش داده شده است. جریانی که در طول زمان ثابت باشد را جریان مستقیم یا ساده‌تر بگوییم dc نامیده و با شکل ۲-۴ (الف) نشان می‌دهیم. در بسیاری از موارد عملی تغییرات جریان را نسبت به زمان مطابق شکل ۲-۴ (ب) سینوسی می‌یابیم؛ اینگونه جریان‌ها در مدارهای خانگی دیده می‌شوند. جریان‌هایی از این نوع را جریان متناوب یا ac می‌نامیم. با جریان‌های نمایی و سینوسی میرا (شکل ۲-۴ ج و د) بعداً مواجه خواهیم شد.

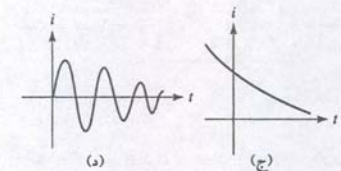
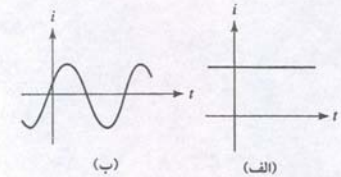
برای نمایش وجود جریان از یک پیکان در کنار حامل آن استفاده می‌کنیم. بنابراین در شکل ۲-۵ (الف) جهت پیکان و مقدار "۳ آمپر" به این معنی است که بار مثبت ۳ کولن بر ثانیه (C/s) به سمت راست یا بار منفی 3 C/s- به سمت چپ حرکت می‌کند. در شکل ۲-۵ (ب) هم دو امکان وجود دارد: یا این‌که 3A- به سمت چپ و یا 3A+ به سمت راست حرکت می‌نماید. چهار حالت فوق جریان‌هایی را نشان می‌دهند که آثار الکتریکی آن‌ها یکسان است. یعنی این جریان‌ها برابرند. یک بحث مشابه غیر الکتریکی که ساده‌تر قابل تجسم است حساب پس‌انداز شخصی می‌باشد: مثلاً در یک حساب پس‌انداز می‌توان تصور کرد که جریان نقدینگی منفی به خارج از حساب شما و جریان مثبت به داخل حساب شما می‌آید.

هر چند در رسانه‌ها یا هادی‌های فلزی جریان از حرکت الکترون ناشی می‌شود ولی بهتر است که جریان را نتیجه حرکت بارهای مثبت بدانیم. در گازهای یونیزه، در محلول‌های الکترولیت و در بعضی از مواد نیمه‌هادی بارهای مثبت در حال حرکت، بخشی از جریان یا تمام آن را تشکیل می‌دهند. بنابراین هر تعریفی از جریان بر طبیعت فیزیکی رسانه‌ها منطبق است. تعاریف و سمبل‌های معرفی شده همگی استاندارد هستند.

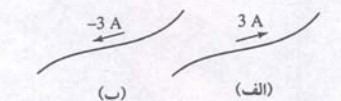
در این صورت باید توجه کنیم که پیکان جریان نشانگر جهت واقعی نیست بلکه فقط بخشی از یک قرارداد است که به ما اجازه می‌دهد درباره "جریان در سیم" بدون ابهام صحبت کنیم. پیکان جزء اصلی جریان است! بنابراین صحبت از  $i_1(t)$  بدون مشخص کردن پیکان، بحثی مبهم خواهد بود. به‌عنوان مثال شکل‌های ۲-۶ (الف و ب) نمایش‌های نامفهوم  $i_1(t)$  می‌باشند درحالی‌که شکل ۲-۶ (ج) روش صحیح نمایش آن است.



شکل ۲-۳ جریان لحظه‌ای  $i = dq/dt$ ، متناظر با q در شکل ۲-۲.



شکل ۲-۴ انواع جریان‌ها: (الف) جریان مستقیم (dc)؛ (ب) جریان سینوسی (ac)؛ (ج) جریان نمایی و (د) جریان سینوسی میرا.

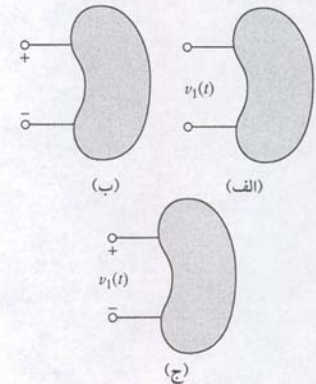


شکل ۲-۵ دو نمایش از یک جریان.

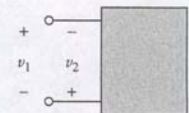


شکل ۲-۶ (الف و ب) تعاریف ناقص، غیر صحیح و نامناسب یک جریان. (ج) تعریف صحیح  $i_1(t)$ .

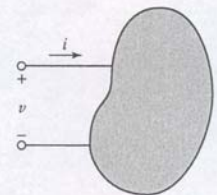




شکل ۲-۱۰ (الف و ب) این‌ها تعاریف نامناسبی از یک ولتاژاند. (ج) تعریف صحیح شامل هر دو سمبل برای متغیر و یک جفت علامت مثبت-منفی.



شکل ۲-۱۱



شکل ۲-۱۲ توان جذب‌شده به وسیله عنصر با حاصل‌ضرب  $p = vi$  داده می‌شود. برعکس می‌توان گفت که عنصر توان  $-vi$  را تولید می‌نماید.

پایانه‌ها بدون ابهام صحبت کنیم. توجه: تعریف هر ولتاژ باید همراه با جفت علامت مثبت و منفی باشد! استفاده از کمیت  $i_1(t)$  بدون این‌که علامت مثبت و منفی آن مشخص باشد به معنی استفاده از یک کمیت تعریف نشده است. شکل‌های ۲-۱۰ (الف و ب) ولتاژ  $v_1$  را تعریف نمی‌کنند ولی شکل ۲-۱۰ (ج) این ولتاژ را تعریف می‌نماید.

۲-۵ برای عنصر شکل ۲-۱۱،  $v_1 = 17V$  است.  $v_2$  را معین کنید.

جواب:  $v_2 = -17V$

### توان

اکنون می‌خواهیم توان جذب‌شده در هر عنصر را بر حسب ولتاژ و جریان آن عنصر معین کنیم. ولتاژ را قبلاً بر حسب انرژی مصرفی تعریف کردیم و توان میزان تغییرات انرژی مصرفی بود. با این وجود راجع به مصرف انرژی در چهار حالت شکل ۲-۹ هیچ صحبتی نمی‌توان کرد، مگر این‌که ابتدا جهت جریان مشخص شود. تصور کنید پیکان جریان در امتداد هر یک از سیم‌های بالایی به سمت راست با " $2A$ " رسم شده باشد. سپس، چون در دو حالت (ج) و (د) پایانه A، ۵ ولت نسبت به پایانه B مثبت‌تر است، و چون یک جریان مثبت وارد پایانه A می‌شود، انرژی به عنصر تحویل شده است. در دو حالت باقیمانده عنصر انرژی را به بعضی از وسایل متصل به آن منتقل می‌سازد.

قبلاً توان را تعریف کردیم و از این پس آن را با  $P$  یا  $p$  نشان خواهیم داد. اگر در انتقال یک کولن بار از یک وسیله، یک ژول انرژی در یک ثانیه مصرف شود، در این صورت انرژی مصرفی یک وات است. توان جذب‌شده باید با جریان (تعداد بار جابه‌جایی در یک ثانیه) و با ولتاژ (انرژی لازم برای انتقال یک کولن بار از عنصر) متناسب باشد. بنابراین

$$p = vi \quad (3)$$

از لحاظ بُعد، سمت راست این معادله حاصل ضرب ژول بر کولن ضربدر کولن بر ثانیه است که بُعد مورد انتظار ژول بر ثانیه یا وات را تولید می‌کند. توافقی‌های مربوط به جریان، ولتاژ، توان در شکل ۲-۱۲ دیده می‌شود.

ما اکنون عبارتی برای توان داریم که به وسیله عنصر مدار جذب می‌شود و بر حسب ولتاژ دو سر آن و جریان عبوری از آن است. ولتاژ بر حسب انرژی هزینه‌شده تعریف شد و توان میزان تغییر انرژی هزینه شده است. با این وجود نمی‌توان عباراتی را در هر یک از چهار حالت در شکل ۲-۹ ارائه کرد، مگر این‌که مثلاً جهت جریان مشخص گردد. اجازه بدهید که پیکان (جهت) جریان در راستای هر سیم فوقانی و به سمت راست بوده و با " $2A$ " برچسب خورده باشد. ابتدا حالت شکل ۲-۹ (ج) را در نظر بگیرید. اگر پایانه A برابر  $5V$  مثبت نسبت به پایانه B باشد، به این معنی است که  $5J$  انرژی برای حرکت هر کولن بار مثبت به پایانه A لازم است، سپس به داخل شیء رفته و از پایانه B خارج می‌گردد. چون ما جریان  $2A$  را به پایانه A تزریق می‌کنیم (جریان  $2$  کولن بار در هر ثانیه)، پس ما  $10J = (5J/C) \times (2C/s)$  کار را روی شیء انجام می‌دهیم. به بیان دیگر، شیء  $10W$  توان را از هر چیزی که جریان را تزریق می‌کند، جذب می‌نماید.

از بحث قبل می‌دانیم که تفاوتی میان شکل ۲-۹ (ج) و شکل ۲-۹ (د) وجود ندارد، بنابراین انتظار داریم که شکل ترسیم‌شده در ۲-۹ (د) هم  $10W$  انرژی را جذب کند. ما می‌توانیم به سادگی این را چک کنیم: ما  $2A$  جریان را در پایانه A تزریق کرده‌ایم، بنابراین  $2A$  جریان از پایانه B خواهیم داشت. راه دیگر بیان این مطلب این است که بگوییم  $2A$  جریان به پایانه B تزریق شده است. باید  $5J/C$  را صرف حرکت بار از پایانه B به پایانه A نمود، بنابراین شیء  $10W = (-2C/e) \times (-5J/C)$  انرژی را همان‌طور که انتظار می‌رود، جذب کرده

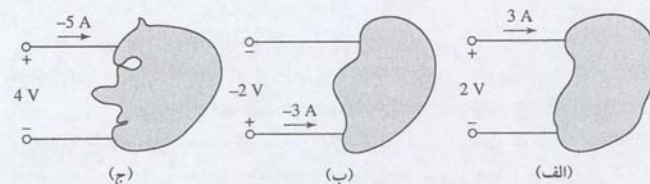
است. تنها مشکل در توصیف این حالت خاص نگه‌داشتن علامت منفی است، ولی با کمی دقت می‌بینیم که پاسخ صحیح جدا از انتخاب پایانه مرجع مثبت حاصل می‌گردد (پایانه A در شکل ۲-۹ (ج) و پایانه B در شکل ۲-۹ (د)).

اکنون اجازه بدهید تا به وضعیت شکل ۲-۹ (الف) با  $2A$  بازگردیم که به پایانه A تزریق شده است. چون برای حرکت بار از پایانه A به B،  $5J/C$  انرژی لازم است، شیء  $10W = (-2C/s) \times (-5J/C)$  را جذب می‌نماید. راستی این به چه معنی است؟ چگونه یک شیء توان منفی جذب می‌نماید؟ اگر ما در این مورد بر حسب انتقال انرژی صحبت کنیم،  $10J$  در هر ثانیه از طریق پایانه A با جریان  $2A$ ،  $10J$  به شیء انتقال می‌یابد. در واقع شیء انرژی را از دست می‌دهد و سرعت آن  $10J/s$  است. به بیان دیگر،  $10J/s$  (یعنی  $10W$ ) را به چند شیء دیگر که در شکل نشان داده نشده تحویل می‌دهد. پس توان منفی جذب‌شده معادل با توان مثبت تحویل‌شده است.

شکل ۲-۱۲ نشان می‌دهد که اگر یک پایانه عنصر  $v$  ولت مثبت‌تر از پایانه دیگر باشد، و اگر جریان  $i$  از طریق آن پایانه وارد عنصر شود، آن‌گاه توانی برابر با  $p = vi$  به وسیله عنصر جذب می‌شود. همچنین می‌توان گفت که توان  $p = vi$  به این عنصر انتقال یافته است. اگر پیکان جریان در پایانه با علامت مثبت و به طرف داخل عنصر باشد، قرارداد علامت عناصر غیر فعال رعایت شده است. این قرارداد را باید خوب مطالعه کرد، فهمید و به‌خاطر سپرد. به عبارتی دیگر این قرارداد چنین می‌گوید که اگر پیکان جریان ورود آن را به پایانه مثبت نشان دهد، حاصل ضرب مقدار جریان و مقدار ولتاژ تعیین‌شده با توجه به این علامت، توان داده‌شده به عنصر خواهد بود. اگر علامت این حاصل ضرب منفی باشد عنصر توان منفی جذب کرده و یا در واقع توان تولید نموده است. مثلاً در شکل ۲-۱۲،  $v = 5V$  و  $i = 4A$ ، عنصر ممکن است به عنوان جذب‌کننده  $20W$  و یا تولیدکننده  $20W$  توصیف گردد.

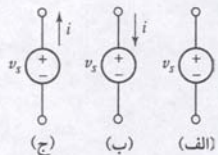
توافقی‌ها موقعی مورد لزومند که برای انجام کاری بیش از یک راه وجود داشته باشد، و اگر دو گروه مختلف سعی در انجام آن کنند دوگانگی پیش می‌آید. مثلاً نوشتن "شمال" در بالای یک نقشه امری است اختیاری و عقربه قطب‌نما هم در هر صورت رو به بالا نیست. اکنون فکر کنید اگر با کسانی که قرارداد مخالفی را انتخاب کرده و "جنوب" را در بالای نقشه خود قرار می‌دهند صحبت کنیم چه پیش خواهد آمد! به نحوی مشابه انجمن مهندسين برق والکترونیک<sup>۱</sup> IEEE قرارداد کرده‌اند که همیشه پیکان جریان را به سمت پایانه ولتاژ مثبت نشان دهند خواه عنصر جاذب و یا تولیدکننده توان باشد. این قرارداد غلط نیست ولی گاهی در جهت مخالف جریان‌هایی است که روی نمودار مدار مشخص شده‌اند. دلیل این‌است که انتخاب جهت مثبت جریان به بیرون از منبع ولتاژ یا جریانی که توان مثبتی را به یک یا چند عنصر مدار می‌رساند طبیعی‌تر است.

توان جذب‌شده به وسیله هر بخش از شکل ۲-۱۳ را محاسبه کنید.



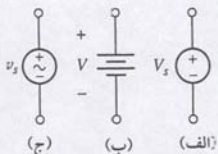
شکل ۲-۱۳ مثال‌هایی از عناصر دو پایانه.





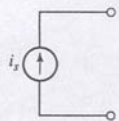
شکل ۲-۱۵ سمبل مداری یک منبع ولتاژ مستقل.

آیا هرگز توجه کرده‌اید که وقتی دستگاه تهریه مطبوع روشن می‌شود، لامپ اتاق کم‌نور می‌گردد. دلیل این‌است که تغییر جریان بزرگ ناکهانی منجر به افت ولتاژ می‌گردد. پس از راه‌افتادن موتور، جریان کمتری برای حفظ گردش آن لازم است. در این حال، جریان مورد تقاضا کاهش می‌یابد و ولتاژ به مقدار اولیه‌اش باز می‌گردد و مجدداً به عنوان یک منبع ولتاژ ایده‌آل عمل خواهد کرد. پریز برق تقریب خوبی از یک منبع ولتاژ ایده‌آل است.



شکل ۲-۱۶ (الف) سمبل منبع ولتاژ، (ب) سمبل باطری و (ج) سمبل منبع ولتاژ ac.

عبارت‌هایی مانند "ولتاژ dc" و "منبع جریان dc" زیاد به‌کار می‌روند. در مقالات از آن‌ها به ترتیب با نام منبع ولتاژ، ولتاژ مستقیم، منبع جریان و جریان مستقیم یاد می‌شود. گرچه این جملات ممکن‌است غیرعادی و حتی بیخود به‌نظر برسند ولی این اصطلاحات به‌طور گسترده به‌کار رفته و دلیلی برای مقابله با آن‌ها نیست.



شکل ۲-۱۷ سمبل مداری برای منبع جریان مستقل.

وابسته می‌خوانند. منابع وابسته به میزان قابل توجهی در الکترونیک برای مدل‌سازی dc و ac رفتار ترانزیستورها به‌خصوص در مدارهای تقویت‌کننده به‌کار می‌روند.

### منابع ولتاژ مستقل

اولین عنصر مورد بررسی، **منبع ولتاژ مستقل** می‌باشد. سمبل مداری منبع ولتاژ مستقل در شکل ۲-۱۵ (الف) نشان داده شده است، زیر نویس s نشان می‌دهد که این ولتاژ، ولتاژ یک منبع می‌باشد و به‌کارگیری آن فقط متداول است ولی الزامی نیست. مشخصه یک منبع ولتاژ مستقل این‌است که ولتاژ پایانه‌اش کاملاً مستقل از جریان عبوری از آن است. بنابراین اگر منبع ولتاژ مستقلی مفروض باشد و مشخص گردد که ولتاژ پایانه 12 V دارد، آن‌گاه همواره فرض خواهیم کرد این ولتاژ، مستقل از جریان جاری شده در آن است.

منبع ولتاژ مستقل منبعی ایده‌آل است و هیچ وسیله فیزیکی واقعی را نمایش نمی‌دهد زیرا منبع ایده‌آل به‌طور تئوری مقدار انرژی بی‌نهایتی را به پایانه‌هایش منتقل می‌سازد. با این وجود این منبع ولتاژ ایده‌آل تعبیر خوبی برای انواع منابع ولتاژ عملی است. مثلاً باطری یک اتومبیل دارای ولتاژ پایانه 12 V است و مادامی که جریان از آن چند آمپر تجاوز نکند ثابت باقی می‌ماند. در باطری ممکن‌است جریان از هر دو جهت عبور کند. اگر جریان مثبت باشد و به خارج از پایانه مثبت جریان یابد، آن‌گاه باطری به‌عنوان مثال توانی را به چراغ‌ها ارسال می‌دارد. اگر جریان مثبت به داخل پایانه مثبت وارد شود در این صورت باطری با جذب انرژی از دینام در حال شارژ شدن است. یک پریز برق خانگی نیز یک منبع ولتاژ مستقل را به‌طور تقریبی نشان می‌دهد و ولتاژی برابر با  $V = 115 \sqrt{2} \cos 2\pi 60t$  را فراهم می‌سازد. مشروط بر این‌که جریان کمتر از 20A و نظایر آن باشد.

بیان نکته‌ای ارزشمند این‌است که علامت مثبت در انتهای بالایی فاز در شکل ۲-۱۵ (الف) لزوماً به معنی مثبت‌تر بودن پایانه بالایی نسبت به پایینی نیست، بلکه به این معنی است که پایانه بالایی نسبت به پایینی  $V_s$  ولت مثبت‌تر می‌باشد. اگر در یک لحظه  $V_s$  منفی شود، آن‌گاه پایانه بالایی در واقع نسبت به پایینی در آن لحظه منفی‌تر است.

پیکان جریان  $i_s$  را که در کنار هادی بالایی منبع طبق شکل ۲-۱۵ (ب) قرار دارد، ملاحظه کنید. جریان  $i_s$  وارد پایانه‌ای می‌شود که علامت مثبت روی آن گذاشته شده، قرارداد علامت عناصر غیرفعال در مورد آن صادق بوده و منبع، توان  $P = V_s i_s$  را جذب می‌کند. اغلب انتظار داریم که یک منبع توانی را به یک شبکه انتقال دهد و نه آن‌که آن را جذب نماید. در نتیجه ما ممکن‌است پیکان را طبق شکل ۲-۱۵ (ج) انتخاب کنیم به‌نحوی که  $i_s$  توان تأمین شده به‌وسیله منبع باشد. معمولاً هر جهتی برای پیکان قابل انتخاب است. ما در این کتاب برای منابع جریان و ولتاژ قرارداد شکل ۲-۱۵ (ج) را انتخاب می‌کنیم زیرا معمولاً آن‌ها وسایل غیرفعال در نظر گرفته نمی‌شوند. یک منبع ولتاژ مستقل با ولتاژ پایانه ثابت اغلب به‌نام منبع ولتاژ dc مستقل خوانده می‌شود و می‌تواند به‌وسیله هر یک از نمادهای شکل ۲-۱۶ (الف و ب) نمایش داده شود. در شکل ۲-۱۶ (ب) دقت کنید. ساختار فیزیکی جوشن باطری تداعی شده و در آن جوشن بزرگ‌تر به پایانه مثبت متعلق است، در این حالت علامت‌های مثبت و منفی دیگر نقشی ندارند، ولی معمولاً در شکل لحاظ می‌شوند. در خاتمه و به منظور تکمیل مطلب، نماد یک منبع ولتاژ ac مستقل هم در شکل ۲-۱۶ (ج) نشان داده شده است.

### منابع جریان مستقل

منبع ایده‌آل بعدی که نیاز داریم **منبع جریان مستقل** است. در این‌جا جریان عبوری از عنصر کاملاً مستقل از ولتاژ دو سر آن است. نماد یک منبع جریان مستقل در شکل ۲-۱۷ دیده می‌شود

در شکل ۲-۱۳ (الف) می‌بینیم که جریان مرجع با قرارداد علامت عناصر غیرفعال تطابق دارد و لذا فرض می‌شود که عنصر جاذب توان است. با جریانی معادل 3A+ به داخل پایانه مرجع مثبت چنین محاسبه می‌کنیم.

$$P = (2 \text{ V})(3 \text{ A}) = 6 \text{ W}$$

که میزان توان جذب‌شده به وسیله عنصر است.

شکل ۲-۱۳ (ب) تصویر نسبتاً متفاوتی را نشان می‌دهد. اکنون جریان 3A- را به داخل پایانه مرجع مثبت داریم. ولی ولتاژ هم به‌صورت منفی تعریف شده است. این انتخاب توان جذب‌شده زیر را خواهد داد.

$$P = (-2 \text{ V})(-3 \text{ A}) = 6 \text{ W}$$

پس در واقع این دو حالت معادلند. ما جای پایانه مثبت را عوض کرده‌ایم پس باید ولتاژ اصلی را در 1- ضرب کنیم. جریان 3A+ که به داخل پایانه بالایی وارد می‌شود همان جریان 3A+ خارج‌شده از پایانه پایینی است، یا به‌طور معادل این آخری برابر است با جریان 3A- که به داخل پایانه پایینی وارد می‌شود.

در شکل ۲-۱۳ (ج) باز قرارداد عناصر غیرفعال رعایت شده است. توان جذب‌شده را به‌دست می‌آوریم.

$$P = (4 \text{ V})(-5 \text{ A}) = -20 \text{ W}$$

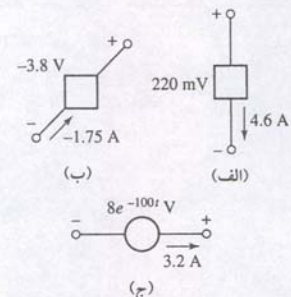
چون توان جذب‌شده منفی است، پس در واقع عنصر شکل ۲-۱۳ (ج)، 20W+ توان تولید می‌کند (یعنی منبع انرژی است).

### تمرین

۲-۶ توان جذب‌شده به‌وسیله عنصر مدار شکل ۲-۱۴ (الف) را پیدا کنید.

۲-۷ توان تولیدشده به وسیله عنصر مدار شکل ۲-۱۴ (ب) را به‌دست آورید.

۲-۸ توان انتقال یافته به عنصر مدار شکل ۲-۱۴ (ج) در  $t = 5 \text{ ms}$  چقدر است؟  
جواب: 1.012 W، 6.65 W، -15.53 W



شکل ۲-۱۴

از این به بعد عبارت "عنصر مداری" را تنها برای مدل ریاضی به‌کار خواهیم برد. انتخاب یک مدل خاص برای هر وسیله واقعی باید بر اساس داده‌های آزمایشی یا تجربه باشد. در این‌جا فرض می‌کنیم که این انتخاب قبلاً انجام شده است. در آغاز به‌خاطر سادگی، مدارهایی را بررسی خواهیم کرد که اجزای ایده‌آل دارند و با مدل‌های ساده نمایش داده می‌شوند.

همه عناصر یک مدار ساده بر طبق رابطه جریان درون آن به ولتاژ دو سرش قابل دسته‌بندی است. مثلاً اگر ولتاژ دو سر عنصر به‌طور خطی با جریان درون آن متناسب باشد آن عنصر را یک مقاومت می‌خوانیم. دیگر انواع عناصر مداری ساده ممکن‌است دارای ولتاژی متناسب با مشتق جریان نسبت به زمان باشند (مثل یک القاگر) یا ممکن‌است متناسب با انتگرال جریان نسبت به زمان باشد (مثل یک خازن). همچنین عناصری وجود دارند که به کلی ولتاژ آن‌ها از جریانشان مستقل است و یا این‌که جریان مستقل از ولتاژ می‌باشد که به آن‌ها منابع مستقل می‌گویند. به‌علاوه گاهی لازم است انواع خاصی از منابع را تعریف کنیم که در آن‌ها ولتاژ یا جریان منبع به ولتاژ یا جریان بخش دیگری از مدار وابسته است. چنین منابعی را منابع

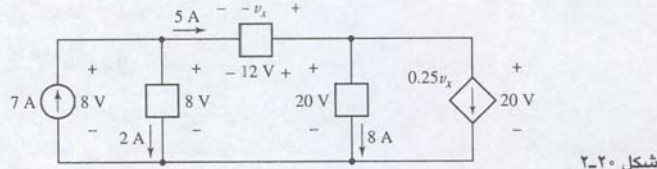
بنابنه تعریف، یک عنصر مداری ساده، مدل ریاضی یک وسیله الکتریکی دو پایانه است و کاملاً با رابطه ولتاژ-جریان خود مشخص می‌شود و نمی‌توان آن را به اجزای جزئی‌تر دو پایانه تجزیه کرد.



در این جا، به شرطی مسئله قابل حل است که ما مقدار  $v_2$  را بدانیم!

به نمودار باز می گردیم، می بینیم که در واقع  $v_2$  را می دانیم یعنی  $v_2 = 3V$ . اگر مقدار منبع وابسته را در شکل ۲-۱۹ (ب) قرار دهیم،  $v_L = 15V$  خواهد بود. زمانی که طول می کشد تا نمودار مدار تکمیل گردد هدر نرفته است. تستی سریع نشان می دهد که پاسخ ما صحیح است.

۲-۹ توان جذب شده به وسیله هر عنصر مدار شکل ۲-۲۰ را پیدا کنید.



شکل ۲-۲۰

جواب: (-60W, 160W, -60W, 16W, -56W)

منابع ولتاژ و جریان مستقل و وابسته عناصر فعال هستند. این منابع می توانند به بعضی از عناصر دیگر توان بدهند. در حال حاضر ما درباره عناصر غیرفعال که قادر به دریافت توان هستند صحبت می کنیم. با این وجود بعداً خواهیم دید که چند نوع عنصر وجود دارد که می توانند مقدار معینی از انرژی را ذخیره کرده و سپس آن را به وسایل دیگر مختلفی باز گردانند. چون ما هنوز اصرار داریم آن ها را عناصر غیرفعال بنامیم اصلاحی برای دو تعریف فوق لازم است که بعداً ارائه می شود.

### شبکه ها و مدارها

اتصالات درونی دو یا چند عنصر ساده یک مدار یک شبکه الکتریکی را به وجود می آورد. اگر شبکه حداقل دارای یک مسیر بسته باشد آن را یک مدار الکتریکی می نامیم. توجه: هر مدار یک شبکه است ولی همه شبکه ها لزوماً مدار نیستند (شکل ۲-۲۱ ملاحظه شود).

شبکه ای که حداقل یک عنصر فعال مانند یک منبع جریان یا ولتاژ مستقل داشته باشد یک شبکه فعال است. شبکه ای که هیچ عنصر فعالی ندارد شبکه غیرفعال خوانده می شود.

اکنون مقصود ما از عبارت عنصر مداری روشن شده است و تعاریف چند عنصر مداری خاص مانند منابع جریان و ولتاژ مستقل و وابسته را ارائه نموده ایم. در بقیه کتاب ما فقط پنج عنصر مداری دیگر را تعریف می کنیم: یعنی مقاومت، القاگر، خازن، مبدل و تقویت کننده های عملیاتی (که به طور خلاصه آن ها op amp می گویند). همه آن ها عناصر ایده آل هستند. اهمیت آن ها در این است که می توان با ترکیب آن ها مدل خوبی از عناصر فیزیکی واقعی به دست آورده و تا حد دلخواه آن را دقیق کنیم. بنابراین ترانزیستور شکل ۲-۲۲ (الف) و (ب) را می توان با ولتاژ پایانه ای  $v_{gs}$  و یک منبع جریان وابسته مانند شکل ۲-۲۲ (ج) مدل سازی کرد. توجه کنید که منبع جریان وابسته جریانی تولید می کند که به ولتاژی در نقطه دیگری از مدار وابسته است. پارامتر  $g_m$ ، که به آن رسانایی انتقالی (transconductance) می گویند با توجه به مشخصات ترانزیستور و نیز نقطه کار تعیین شده به وسیله مدار متصل به ترانزیستور محاسبه می گردد. این پارامتر معمولاً مقدار کوچکی است از مرتبه  $10^{-2}$  و شاید  $10 A/V$ . این مدل مادامی که فرکانس منبع سینوسی متصل به آن نه خیلی بزرگ نه خیلی کوچک باشد به خوبی کار می کند. می توان مدل را برای لحاظ وابستگی فرکانس با افزودن عناصر مداری ایده آل مانند مقاومت ها و خازن ها اصلاح نمود.

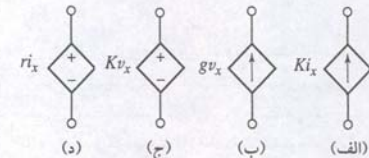
اگر ثابت باشد، ما منبع را منبع جریان dc مستقل خواهیم خواند. منبع جریان ac اغلب با یک نشانه پیکان مشابه با منبع ولتاژ شکل ۲-۱۶ (ج) نشان داده می شود. همچون منبع ولتاژ مستقل، منبع جریان مستقل هم برای یک عنصر فیزیکی به طور تقریبی بیان می شود. به صورت تئوری، منبع می تواند بی نهایت انرژی را از پایانه هایش منتقل کند، زیرا ولتاژ دو سرش هر چه قدر بزرگ باشد، جریان ثابتی را تولید می نماید. در هر صورت این تعریف، تقریب خوبی برای بسیاری از مدارهای عملی خصوصاً در مدارهای الکتریکی است.

گرچه بسیاری از دانشجویان با داشتن یک منبع ولتاژ مستقل که ولتاژ ثابتی تهیه کند خوشحال به نظر می رسند، ولی در واقع این اشتباه است که یک منبع جریان با ولتاژ صفر در دو سرش که جریان ثابتی می دهد را مستقل فرض کرد. در واقع ما پیشاپیش نمی دانیم که ولتاژ دو سر آن چه خواهد بود. یعنی این کلاً به مدار متصل به آن مربوط است.

### منابع وابسته

دو نوع منبع ایده آلی که تاکنون در مورد آن ها بحث کردیم منابع مستقل نام داشتند زیرا مقدار کمیت منبع به هیچ وجه تحت تأثیر تحولات بقیه مدار نیست. این منبع برخلاف نوع ایده آل، منبع وابسته یا کنترل شده می باشد، و در آن کمیت منبع به وسیله ولتاژ یا جریان موجود در دیگر نقاط مدار تحت بررسی، معین می شود. اینگونه مدارها در مدل های الکتریکی معادل برای قطعات الکترونیک مانند ترانزیستورها، تقویت کننده های عملیاتی و مدارهای مجتمع ظاهر می گردند. برای تفکیک منابع وابسته و مستقل ما سمبل های لوزی شکل را طبق شکل ۲-۱۸ انتخاب می کنیم و در شکل ۲-۱۸ (الف و ج)، K ثابتی بدون بُعد است. در شکل ۲-۱۸ (ب)، g، ضریب مقیاس با واحد A/V می باشد. در شکل ۲-۱۸ (د)، ضریب مقیاس با واحد V/A می باشد. جریانی کنترلی  $i_x$  و ولتاژ کنترلی  $v_x$  باید در مدار تعریف شده باشد.

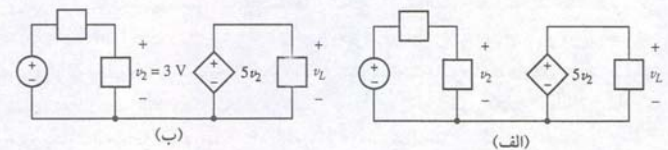
ابتدا داشتن منبع جریانی که مقدارش به یک ولتاژ وابسته باشد یا منبع ولتاژی که به وسیله جریانی جاری در عنصری دیگر وابسته باشد، غیر عادی به نظر می رسد. حتی منبع ولتاژی که به یک ولتاژ دور دست بستگی داشته باشد عجیب به نظر می رسد. چنین منابعی برای مدل سازی سیستم های پیچیده بی ارزش اند، با این وجود، تحلیل جبری سراسر است. مثال ها شامل جریان درین (drain) در یک ترانزیستور اثر میدان به صورت تابعی از ولتاژ گیت، یا ولتاژ خروجی یک مدار مجتمع به صورت تفاضل ولتاژهای ورودی است. ضمن مواجهه در هنگام تحلیل، ما تمام عبارات کنترل کننده را برای منابع وابسته می نویسیم، درست مثل این که عدد متعلق به یک منبع مستقل نوشته می شود. نتیجه اغلب به صورت نیاز به یک معادله اضافی برای تکمیل تحلیل است، مگر این که ولتاژ کنترل کننده و یا جریانی یکی از مجهولات مشخص شده در سیستم معادلات ما باشد.



شکل ۲-۱۸ چهار نوع منبع وابسته متفاوت. (الف) منبع جریان کنترل شده با جریان. (ب) منبع جریان کنترل شده با ولتاژ. (ج) منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ. (د) منبع ولتاژ کنترل شده با جریان.

### مثال ۲-۲

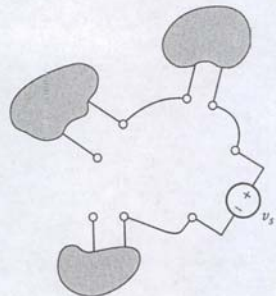
در مدار شکل ۲-۱۹ (الف) اگر  $v_2$  مساوی 3V باشد،  $v_L$  را پیدا کنید.



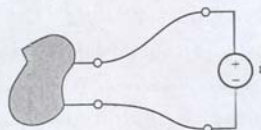
آنچه در اختیار ما قرار دارد نمودار مداری است که تا حدی مقدارگذاری شده و نیز  $v_2 = 3V$  می باشد. بد نیست این کمیت را طبق شکل ۲-۱۹ (ب) به نمودار اضافه کنیم. اکنون به عقب بازگشته و اطلاعات جمع آوری شده را نگاه می کنیم. با بررسی نمودار در می یابیم که ولتاژ مطلوب  $v_L$  همان ولتاژ دو سر منبع وابسته است. بنابراین:

$$v_L = 5v_2$$

شکل ۲-۱۹ (الف) مثال هایی از یک مدار حاوی منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ. (ب) اطلاعات اضافی روی نمودار تهیه شده است.



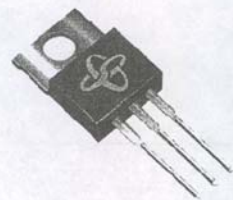
(الف)



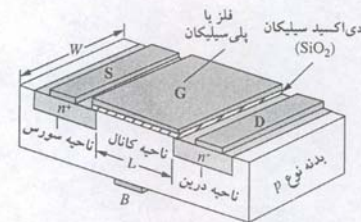
(ب)

شکل ۲-۲۱ (الف) شبکه ای که یک مدار نیست. (ب) شبکه ای که مدار هست.

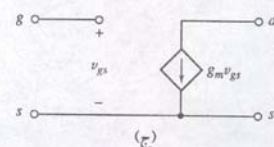




(الف)

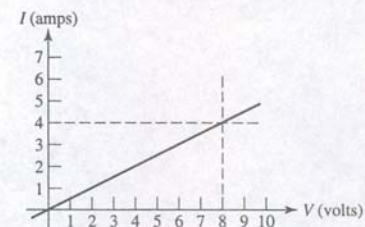


(ب)



(ج)

شکل ۲-۲۲ ترانزیستور اثر میدانی نیم رسانای اکسید فلز (MOSFET). (الف) ترانزیستور در بسته بندی TO-5، (ب) تصویر برش خورده و (ج) یک مدل مدار معادل برای تحلیل ac.



شکل ۲-۲۳ رابطه جریان-ولتاژ برای مقاومت خطی 2Ω.

ترانزیستورهایی از این نوع تنها بخش کوچکی از مدار مجتمع را که کمتر از ۲ میلی متر در ۲ میلی متر مساحت و ۲۰۰ μm ضخامت دارد، اشغال می نمایند. مدارات مجتمع قادرند چندین هزار ترانزیستور به علاوه انواع مقاومت ها و خازن ها را در خود جای دهند. بنابراین ما وسیله ای فیزیکی در اختیار داریم که به اندازه یک حرف در روی این صفحه کاغذ بزرگی دارد ولی مدل آن از ده ها هزار عنصر مداری ساده تشکیل شده است. ما این مفهوم "مدل سازی مدار" را در تعدادی از عناوین مهندسی برق از جمله الکترونیک، تبدیل انرژی و آنتن ها به کار خواهیم برد.

## ۲-۴ قانون اهم

تا این جا با منابع ولتاژ و جریان وابسته و غیر وابسته آشنا شدیم و تذکر دادیم که آن ها عناصر فعال ایده آلی هستند که فقط به صورت تقریب می توانند در یک مدار واقعی وجود داشته باشند. اکنون آماده ایم تا با عنصر ایده آل دیگری به نام مقاومت خطی آشنا شویم. مقاومت ساده ترین عنصر غیر فعال است و ما بحث خود را با ملاحظه کار فیزیکی گمنام آلمانی به نام جرج سیمون اهم<sup>۱</sup> آغاز می کنیم. وی در سال ۱۸۲۷ نتایج تلاش های خود را در رابطه با اندازه گیری جریان ها و ولتاژها و توصیف ارتباط ریاضی آن ها به چاپ رساند. یکی از این نتایج، رابطه اساسی **قانون اهم** است. با این وجود، می دانیم که این قانون را هنری کاوندیش<sup>۲</sup> ۴۶ سال قبل از اهم کشف کرده بود ولی هیچ کس حتی اهم از کار کاوندیش اطلاع نداشت و نوشته های وی نیز سال ها پس از مرگش منتشر شد. نظریه اهم در ابتدا به ناحق با انتقاد شدید مواجه گشت ولی بعداً پذیرفته شد و او را به شهرت رساند.

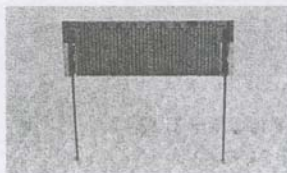
قانون اهم بیان می دارد که ولتاژ دو سر یک ماده هادی مستقیماً متناسب با جریان عبوری از آن ماده است، یا:

$$v = i R \quad (۴)$$

ضریب تناسب R را **مقاومت** می نامند. واحد مقاومت، اهم است و برابر است با 1 V/A که به طور خلاصه آن ها را با Ω (اُمگا) نشان می دهند.

هنگامی که این معادله به صورت نمودار  $\bar{v}$  در برابر  $\bar{i}$  رسم شود، خط راستی به دست می آید که از مبدأ می گذرد، شکل ۲-۲۳. معادله (۴) یک معادله خطی است، و ما آن را به عنوان تعریف یک مقاومت خطی می شناسیم. در این صورت اگر نسبت جریان و ولتاژ مربوط به هر عنصر ثابت مقدار ثابتی باشد، آن گاه عنصر یک **مقاومت خطی** است و دارای مقداری برابر نسبت ولتاژ به جریان است. معمولاً مقاومت یک کمیت نسبتی تلقی می شود، بنابراین مقاومت های منفی نیز ممکن است به وسیله مدارهای خاصی تولید شوند.

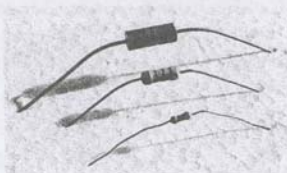
دوباره تأکید می شود که مقاومت خطی، یک عنصر ایده آل مدار است، و فقط مدلی ریاضی از یک وسیله فیزیکی حقیقی است. یک مقاومت را می توانید به راحتی بخرید یا بسازید ولی به زودی متوجه خواهید شد که نسبت ولتاژ به جریان فقط در محدوده خاصی از ولتاژ، جریان و توان به میزان قابل قبولی ثابت است ولی به دما و عوامل محیطی دیگر نیز بستگی دارد. ما معمولاً مقاومت خطی را فقط مقاومت می خوانیم. هر مقاومت غیر خطی را به همان صورت غیر خطی بیان خواهیم کرد. البته نباید مقاومت های غیر خطی را لزوماً عناصر نامطلوب خواند. گرچه وجود آن ها در مدار، تحلیل را پیچیده می کند، ولی رفتار قطعه ممکن است عمدتاً به وسیله حالت غیر خطی اصلاح گردد. مثلاً فیوزهای حفاظتی و دیودهای زنر برای تنظیم ولتاژ طبیعتاً بسیار غیر خطی اند ولی استفاده از آن ها در طراحی مدار بسیار مفید است.



(ج)



(ب)



(الف)

## توان مصرفی

شکل ۲-۲۴ چندین بسته مقاومت مختلف را همراه با سمبل رایج مدار برای یک مقاومت نشان می دهد. بر اساس قراردادهای مربوط به ولتاژ، جریان و توانی که قبلاً اختیار شد حاصل ضرب  $\bar{v}$  و  $\bar{i}$  توان جذب شده به وسیله مقاومت را نشان می دهد. یعنی  $\bar{v}$  و  $\bar{i}$  طوری انتخاب شده اند تا قرارداد علامت عنصر غیر فعال را برآورده کنند. توان جذب شده به طور فیزیکی به صورت گرما یا نور ظاهر شده و همواره مثبت است. یک مقاومت (مثبت) یک عنصر غیر فعال است و نمی تواند توان را تولید کند یا آن را ذخیره نماید. عبارت دیگری برای توان جذب شده به صورت زیر است:

$$p = vi = i^2 R = v^2 / R \quad (۵)$$

یکی از مولفان تجربه ناخوشایندی از اتصال یک مقاومت 100Ω دو واتی به یک منبع 110V ارائه کرده است. با دود و آتش ناشی از این آزمایش کار چندانی نداریم ولی این تجربه نشان داد که مقاومت های واقعی هم تنها در یک محدوده خاصی همچون مدل ایده آل مقاومت خطی عمل می کنند. در این آزمایش انتظار این بود که مقاومت 121 W توان جذب کند، ولی چون فقط برای جذب 2W طراحی شده بود نمی توان عکس العمل آن را غیر عادی تلقی کرد.

مقاومت نشان داده شده در شکل ۲-۲۴ (ب) در مداری بسته شده است که جریان 428 mA در آن عبور می کند. ولتاژ در دو سر پایانه و توان مصرفی را محاسبه کنید.

ولتاژ دو سر یک مقاومت با قانون اهم مطابق زیر مشخص می گردد:

$$v = R i = (560)(0.428) = 239.7 \text{ V}$$

ما می توانیم توان تلف شده در مقاومت را به چند طریق به دست آوریم. چون هم ولتاژ دو سر پایانه ها و هم جریان داخلی را داریم،

$$p = vi = (239.7)(0.428) = 102.6 \text{ W}$$

که تقریباً 20% حداکثر مقدار 500 W می باشد. ما نتایج خود را با دو معادله زیر چک می کنیم:

$$p = v^2 / R = (239.7)^2 / 560 = 102.6 \text{ W}$$

$$p = i^2 R = (0.428)^2 560 = 102.6 \text{ W}$$

که همان مقدار مورد انتظار است.

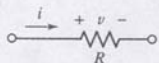
با توجه به تعریف  $\bar{v}$  و  $\bar{i}$  در شکل ۲-۲۵ کمیت های زیر را محاسبه کنید

۲-۱۰ اگر  $\bar{i} = -1.6 \text{ mA}$  و  $\bar{v} = -6.3 \text{ V}$  باشد R را به دست آورید

۲-۱۱ اگر  $\bar{v} = -6.3 \text{ V}$  و  $\bar{i} = 21 \text{ A}$  باشد توان جذب شده را بیابید.

۲-۱۲ اگر  $\bar{v} = -8 \text{ V}$  و مقدار 0.24 W انرژی را جذب کند  $\bar{i}$  چقدر است؟

جواب: 3.94 kΩ، 1.89 W، و -30.0 mA



شکل ۲-۲۵



## معيار اندازه گيري مقاومت سيم

از نظر فنی، هر ماده‌ای در برابر حرکت جریان بار دارای مقاومت است. همچون دیگر کتب مقدماتی مدارها مانیز فرض خواهیم کرد که سیم‌ها در نمودار مدار دارای مقاومت صفر باشند. این به آن معنی است که اختلاف پتانسیلی بین دو سر یک سیم وجود ندارد، بنابراین توانی جذب نشده و گرمایی تولید نمی‌شود. گرچه فرض چندان نامطلوب نیست ولی توجه و دقت ما را هنگام انتخاب سیمی با قطری مناسب برای یک کاربرد خاص از بین می‌برد.

مقاومت یک ماده معمولاً با (۱) مقاومت مخصوص ذاتی ماده و (۲) ابعاد آن تعیین می‌شود. مقاومت مخصوص که به وسیله سمبل  $\rho$  نشان داده می‌شود معیاری از سهولت حرکت الکترون‌ها از یک ماده خاص است. چون این کمیت، نسبت میدان الکتریکی ( $V/m$ ) به چگالی جریان در ماده است ( $A/m^2$ ) واحد عمومی  $\rho$  برابر است با  $\Omega \cdot m$ . هر چند که پیشوندهای متریک هم استفاده می‌گردد. هر ماده دارای مقاومت مخصوص ذاتی خاص خود است که به دما وابسته است. چند مثال در جدول ۲-۳ نشان داده شده است و می‌توان دید که کمتر از ۱٪ تفاوت بین انواع مس وجود دارد ولی اختلاف زیادی بین موارد مختلف وجود دارد. به خصوص هر چند استیل (فولاد) محکم‌تر از مس است، ولی سیم استیل چند برابر مقاومت بیشتری دارد. در بعضی از بحث‌های تکنیکی رایج است که هدایت (با علامت  $\sigma$ ) را برای یک ماده بیان می‌کنند که عکس مقاومت است.

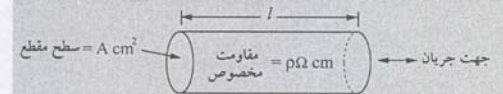
## جدول ۲-۳ مواد سیم‌های الکتریکی و مقاومت مخصوص آن‌ها.

| مقاومت مخصوص در 20°C ( $\mu\Omega \cdot cm$ ) | ماده و شکل                           | مشخصات |
|---|--------------------------------------|--------|
| 1.7654  | مس - نرم - گرد                       | B33    |
| 1.7241  | مس - لوله‌ای، نرم - مس OF            | B75    |
| 1.7521  | مس - لوله‌ای، سخت - مربعی یا مستطیلی | B188   |
| 1.7654  | مس - نرم - پوشش سرب - گرد            | B189   |
| 2.8625  | آلومینیوم، سخت - گرد                 | B230   |
| 4.3971  | مس - پوشش استیل - سخت - گرد          | B227   |
| 1.9592  | مس - پوشش نیکل - نرم - گرد           | B355   |
| 8.4805  | آلومینیوم - پوشش استیل، سخت، گرد     | B415   |

مقاومت یک شیئی خاص، با ضرب ضرب مقاومت در طول  $l$  از آن، و تقسیم بر سطح مقطع ( $A$ ) طبق معادله (۶) به دست می‌آید. این پارامترها در شکل ۲-۲۶ نشان داده شده‌اند.

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (6)$$

مقاومت مخصوص (ویژه) با انتخاب ماده‌ای که سیم از آن ساخته می‌شود و با توجه به دمای محیط کار معین می‌گردد. چون در عمل مقدار توان معینی به وسیله سیم به دلیل وجود مقاومت جذب می‌شود، جریان عبوری به تولید گرما منجر می‌گردد. سیم‌های ضخیم‌تر مقاومت کمتری دارند و همچنین گرما را ساده‌تر تلف می‌کنند، ولی سنگین‌ترند، حجم بیشتری دارند، و نیز گران‌ترند. بنابراین ما توجیه شده‌ایم که کوتاه‌ترین سیم را برگزینیم به نحوی که کار را با امنیت لازم انجام دهد و نه این‌که قطورترین سیم به خاطر حداقل کردن مقاومت برگزیده شود.



شکل ۲-۲۶ تعریف پارامترهای هندسی به کاررفته در محاسبه مقاومت یک سیم. ضرب مقاومت ماده یکتاوت فرض می‌شود.

معيار اندازه گيري مقاومت سيم آمريکايي (AWG) سيستم استاندارد برای تعیین سائز یا نمره سیم است. هنگام انتخاب یک سیم، AWG کوچک‌تر مربوط به یک سیم با ابعاد بزرگ‌تر است. خلاصه‌ای از معیارهای اندازه‌گیری در جدول ۲-۴ آمده است. استانداردهای الکتریکی معیارها را برای کاربرد سیم‌ها بر مبنای حداکثر جریان و محل استفاده دیکته می‌کنند.

## جدول ۲-۴ چند سیم مسی متداول و مقاومت آن‌ها.

| نمره سیم AWG | مساحت مقطع ( $mm^2$ ) | اهم در 1000ft (در 20°C) |
|--------------|-----------------------|-------------------------|
| 28           | 0.0804                | 65.3                    |
| 24           | 0.205                 | 25.7                    |
| 22           | 0.324                 | 16.2                    |
| 18           | 0.823                 | 6.39                    |
| 14           | 2.08                  | 2.52                    |
| 12           | 3.31                  | 1.59                    |
| 6            | 13.3                  | 0.3952                  |
| 4            | 21.1                  | 0.2485                  |
| 2            | 33.6                  | 0.1563                  |

سیمی برای روشن کردن لامپی پرقدرت واقع در فاصله 2000ft کشیده شده و از آن 100A جریان می‌گذرد. اگر در این کار کابل نمره 4 AWG به کار رفته باشد توان تلف‌شده در سیم چقدر است؟

بهترین حرکت در راستای حل این مسئله، رسم سریع تصویری از آن مطابق شکل ۲-۲۷ است. از جدول ۲-۴ می‌بینیم که سیم 4 AWG در هر 1000ft،  $0.2485\Omega$  مقاومت دارد. سیمی که به لامپ می‌رود 2000ft و برگشت آن هم 2000ft طول دارد که جمعاً 4000ft خواهد شد. بنابراین مقاومت آن برابر است با:

$$R = (4000ft) (0.2485\Omega/1000ft) = 0.994 \Omega$$

توان تلف‌شده با رابطه  $i^2 R$  مشخص می‌شود که در آن  $i = 100A$  است. بنابراین توان تلف‌شده به وسیله سیم، 9940 W یا 9.94 KW است. می‌بینیم که با این مقاومت کمتر از 1 توان قابل توجهی تلف شده است. این توان هم باید به وسیله منبع تولید شود ولی هرگز به لامپ نمی‌رسد.

۲-۱۳ با توجه به اهمیت توان تلف‌شده‌ای که در مثال ۲-۴ گفته شد مدیرتان به شما جایگزینی یک سیم 4 AWG با 2 AWG را توصیه می‌کند. مطلوب است توان تلف‌شده در سیم جدید با این فرض که لامپ هنوز 100 A جریان می‌کشد؟ وزن سیم جدید خارج از این بحث چقدر است (دو بار بیشتر، چهار بار بیشتر و غیره).

جواب: 6.25 kW، 1.59 بار بیشتر

## هدایت

برای یک مقاومت خطی نسبت جریان به ولتاژ نیز ثابت است

$$\frac{i}{v} = \frac{1}{R} = G \quad (7)$$

که در آن  $G$  هدایت یا رسانایی خوانده می‌شود. واحد SI برای هدایت زیمنس ( $S$ )، و معادل  $1 A/V$  است. واحد غیررسمی قدیمی‌تر برای هدایت  $mho$  است که به‌طور خلاصه حرف بزرگ معکوس شده  $\Omega$  می‌باشد. شما به ندرت آن را در روی نمودارهای مدار و نیز در کاتالوگ‌ها و کتاب‌ها ملاحظه می‌کنید. برای نمایش مقاومت و هدایت سمبل یا نماد یکسانی به کار می‌رود (شکل ۲-۲۴). (د). توان جذب‌شده مجدداً مثبت بوده و می‌توان آن را برحسب هدایت با رابطه زیر نشان داد:

$$p = vi = v^2 G = \frac{i^2}{G} \quad (8)$$

بنابراین یک مقاومت 2 اهمی دارای هدایت  $\frac{1}{2}$  زیمنس بوده و اگر جریان 5A از آن عبور کند آن‌گاه ولتاژ دو سرش 10 ولت و توان جذب‌شده در آن 50 وات خواهد بود. در این بخش تاکنون همه عبارات برحسب جریان، ولتاژ و توان لحظه‌ای داده شده‌اند. مانند  $iR = v$  و  $p = vi$ . باید یادآوری کنیم که آن‌ها، همان علائم اختصاری روابط  $Ri(t) = v(t)$  و  $i(t) = v(t)$  می‌باشند. پس جریان عبوری از مقاومت و یا ولتاژ دو سر آن باید در طول زمان به‌طور مشابهی تغییر کنند. بنابراین اگر  $R = 10 \Omega$  و  $v = 2 \sin 100t$  باشد آن‌گاه  $i = 0.2 \sin 100t$  خواهد بود. توجه داشته باشید که توان با رابطه  $0.4 \sin^2 100t$  W داده می‌شود و نمودار

## مثال ۲-۴



شکل ۲-۲۷ ترسیم سرسری مدار یک لامپ.

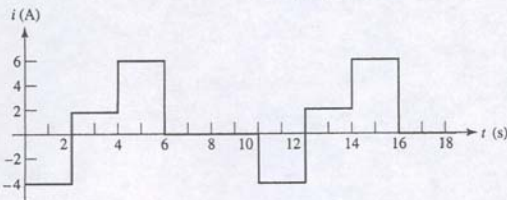
## تمرین



به‌طور خطی از  $10\text{ W}$  به  $0$  در مدت  $5$  دقیقه افت می‌کند. (الف) ظرفیت ذخیره انرژی باتری چقدر است؟ (ب) چقدر انرژی در  $5$  دقیقه آخر سیکل شارژر حمل شده است؟

## ۲-۲ بار الکتریکی، جریان، ولتاژ و توان

۱۰. بار کل ذخیره‌شده به وسیله دستگاه خاصی به‌صورت تابعی از زمان با رابطه  $q = 18t^2 - 2t^4$  (در سیستم SI) داده شده است. (الف) بار کل ذخیره‌شده در  $2\text{ s}$   $t$  چقدر است؟ (ب) حداکثر بار ذخیره‌شده در فاصله زمانی  $0 < t \leq 3\text{ s}$  چقدر است و چه موقعی رخ می‌دهد؟ (ج) در  $t = 0.8\text{ s}$  سرعت ذخیره بار چه میزان است؟ (د) منحنی‌های  $q$  در برابر  $t$  و  $i$  در برابر  $t$  در فاصله زمانی  $0 \leq t \leq 3\text{ s}$  را رسم کنید.
۱۱. جریان  $i_1(t)$  شکل ۲۶ (ج) به‌صورت  $3e^{-5t} + 2$  برای  $0 < t$  و  $3e^{3t} - 2$  برای  $t > 0$  داده شده است. پیدا کنید (الف)  $i_1(0.2)$ ، (ب)  $i_1(0.2)$  و (ج) لحظاتی که در آن  $i = 0$  است. (د) بار کلی که از چپ به راست در فاصله زمانی  $0.1\text{ s} < t < 0.8\text{ s}$  از هادی گذشته است.
۱۲. شکل موج ۲۸ دارای پریود  $10$  ثانیه است. (الف) مقدار متوسط جریان در این فاصله چقدر است؟ (ب) در فاصله  $12\text{ s} < t < 1\text{ s}$  چه مقدار بار عبور کرده است؟ (ج) اگر  $q(0) = 0$  باشد،  $q(t)$  را در فاصله زمانی  $0 < t < 16\text{ s}$  رسم کنید.



شکل ۲۸

۱۳. مسیری با نقاط جدا از هم  $A, B, C, D$  و  $E$  را در نظر بگیرید. برای انتقال یک الکترون از  $A$  به  $B$  یا از  $B$  به  $C$ ،  $2\text{ pJ}$  لازم است. برای انتقال از  $C$  به  $D$ ،  $3\text{ pJ}$  لازم است. برای انتقال از  $D$  به  $E$ ، انرژی لازم نیست. الف. اختلاف پتانسیل (به ولت) بین  $A$  و  $B$  چقدر است (مرجع + در  $B$  است). ب. اختلاف پتانسیل (به ولت) بین  $D$  و  $E$  چقدر است (مرجع + در  $E$  است). ج. اختلاف پتانسیل (به ولت) بین  $C$  و  $D$  چقدر است (مرجع + در  $D$  است). د. اختلاف پتانسیل (به ولت) بین  $D$  و  $B$  چقدر است (مرجع + در  $D$  است).
۱۴. یک جعبه بدون علامت در گوشه‌ای از آزمایشگاه پیدا شده است. جعبه دارای دو سیم است که با رنگ‌های نارنجی و ارغوانی مشخص شده است. یک ولت‌متر به دو سیم وصل است و مرجع + آن به سیم ارغوانی متصل شده است. در این حالت ولتاژ  $2.86\text{ V}$  اندازه‌گیری شده است. اگر جهت اتصال باتری معکوس گردد، چه مقدار خوانده خواهد شد.

## مسائل

### ۲-۱ واحدها و مقیاس‌ها

۱. کمیت‌های زیر را به نمادهای مهندسی تبدیل کنید:
 

|  |                                |
|--|--------------------------------|
| الف. $1.2 \times 10^{-5}\text{ s}$     | ب. $750\text{ mJ}$             |
| ج. $1130\ \Omega$                      | د. $3,500,000,000\text{ bits}$ |
| ه. $0.0065\ \mu\text{m}$               | و. $13,560,000\text{ Hz}$      |
| ز. $0.039\text{ nA}$                   | ح. $49,000\ \Omega$            |
| ط. $1.173 \times 10^{-5}\ \mu\text{m}$ |                                |
۲. کمیت‌های زیر را با نماد مهندسی نمایش دهید:
 

|                               |                                    |
|-------------------------------|------------------------------------|
| الف. $1,000,000\text{ W}$     | ب. $12.35\text{ mm}$               |
| ج. $47,000\text{ W}$          | د. $0.00546\text{ A}$              |
| ه. $0.033\text{ mJ}$          | و. $5.33 \times 10^{-6}\text{ mW}$ |
| ز. $0.000000001\text{ s}$     | ح. $5555\text{ kW}$                |
| ط. $32,000,000,000\text{ pm}$ |                                    |
۳. واحدهای SI زیر را تبدیل کنید. از علائم مهندسی استفاده نمایید و چهار رقم بالارزش را نگه دارید:
 

|                      |                                     |                     |
|----------------------|-------------------------------------|---------------------|
| الف. $400\text{ hp}$ | ب. $12\text{ ft}$                   | ج. $2.54\text{ cm}$ |
| د. $67\text{ Btu}$   | ه. $285.4 \times 10^{-15}\text{ s}$ |                     |
۴. یک باتری خشک  $15\text{ V}$  تخلیه‌شده، یک جریان  $100\text{ mA}$  لازم دارد تا در مدت  $3\text{ hr}$  کاملاً شارژ گردد. ظرفیت ذخیره انرژی باتری چقدر است، با این فرض که ولتاژ به وضعیت شارژ بستگی ندارد.
۵. یک اتومبیل برقی کوچک با یک موتور  $175\text{ hp}$  مجهز شده است. (الف) اگر فرض کنیم راندمان در تبدیل نیروی الکتریکی به مکانیکی صددرصد است برای رانیدن موتور چند کیلووات انرژی لازم است؟ (ب) اگر موتور  $3$  ساعت کار کند چقدر انرژی برحسب ژول لازم دارد. (ج) اگر یک باطری اسیدی دارای  $430$  کیلووات ساعت ظرفیت ذخیره‌سازی باشد چند باطری لازم است؟
۶. یک مولد نیروی  $400\text{ mJ}$  پالس لیزری را با دوره  $20\text{ ms}$  تولید می‌کند. (الف) توان اوج لحظه‌ای لیزر چقدر است؟ (ب) اگر در هر ثانیه فقط  $20$  پالس تولید شود توان متوسط خروجی لیزر چقدر است؟
۷. یک مولد لیزری تقویت‌شده پالس‌های لیزری  $1\text{ mJ}$  را در طول  $75\text{ fs}$  تولید می‌کند. (الف) توان لحظه‌ای اوج لیزر چقدر است؟ (ب) اگر در هر ثانیه فقط  $100$  پالس تولید شود توان متوسط خروجی لیزر چقدر می‌باشد؟
۸. توان تولیدی یک باطری در  $6$  دقیقه اول  $6$  وات و در  $2$  دقیقه بعدی صفر است آن‌گاه در طول  $10$  دقیقه بعد به‌طور خطی از صفر به  $10$  وات می‌رسد و در هر دقیقه بعد از آن به‌طور خطی از  $10$  وات به صفر بازمی‌گردد. (الف) انرژی کل تولیدشده در طول فاصله زمانی  $24$  دقیقه چقدر است؟ (ب) متوسط توان برحسب  $\text{Btu/h}$  در این مدت چقدر است؟
۹. نوع جدیدی از باتری می‌تواند  $10\text{ W}$  انرژی را برای مدت  $8\text{ hr}$  بدون تغییر جریان یا ولتاژ تحویل نماید. با این وجود پس از  $8\text{ hr}$  توان خروجی

ساده‌ای از آن بیانگر طبیعت متفاوت تغییراتش نسبت به زمان است. گرچه ولتاژ و جریان در طول زمان معنی منفی هستند توان جذب‌شده هرگز منفی نیست! مقاومت می‌تواند مبنای تعریف دو عبارت رایج اتصال کوتاه و مدار باز باشد. ما اتصال کوتاه را به‌عنوان مقاومت صفر اهمی تعریف می‌کنیم، آن‌گاه چون  $iR = v$  است، علی‌رغم وجود جریان در درون آن ولتاژ دو سر یک مدار اتصال کوتاه باید صفر باشد. به طریقی مشابه یک مدار باز را به‌صورت مقاومت بی‌نهایت تعریف می‌کنیم. از قانون اهم نتیجه می‌شود که جریان، جدا از ولتاژ دو سر یک مدار باز، صفر است. گرچه سیم‌های حقیقی دارای مقاومت کوچکی هستند ما همواره آن‌ها را دارای مقاومت صفر فرض خواهیم کرد مگر آن‌که بیان شود. بنابراین در همه نمودارهای مدار، سیم‌ها به‌صورت ایده‌آل اتصال کوتاه فرض خواهند شد.



## ۲-۵ خلاصه فصل و مرور

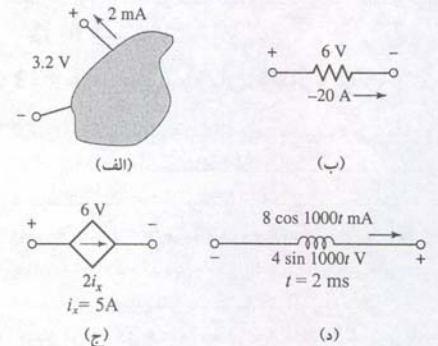
- سیستم احاد رایجی که باید در مهندسی برق به کار رود SI است.
- جهتی که بارهای مثبت حرکت می‌کنند جهت مثبت جریان است. جریان مثبت در جهت مخالف حرکت الکترون‌ها است.
- در تعریف جریان، مقدار و جهت آن باید مشخص باشد. جریان‌های ثابت (dc) را معمولاً با حرف بزرگ "I" و جریان‌های دیگر را با  $i(t)$  و یا ساده‌تر بگوییم  $i$  نشان می‌دهیم.
- برای تعریف ولتاژ دو سر یک عنصر لازم است پایانه‌ها را + و - علامت بزنیم و نیز مقداری را به آن نسبت دهیم (یک نماد جبری یا یک مقدار عددی).
- عنصری توان مثبت تولید می‌کند که جریان مثبت از پایانه + آن خارج شود. هر عنصری که انرژی مثبت جذب کند جریان مثبت وارد پایانه ولتاژ + آن خواهد شد.
- شش نوع منبع وجود دارد: منبع ولتاژ مستقل، منبع جریان مستقل، منبع جریان وابسته کنترل‌شده با جریان، منبع جریان وابسته کنترل‌شده با ولتاژ، منبع ولتاژ وابسته کنترل‌شده با ولتاژ و منبع ولتاژ وابسته کنترل‌شده با جریان.
- قانون اهم بیان می‌دارد که ولتاژ دو سر یک مقاومت خطی مستقیماً متناسب با جریان عبوری از آن است، یعنی  $v = iR$ .
- توان تلف‌شده به وسیله یک مقاومت که منجر به تولید گرما می‌شود با رابطه  $p = vi = i^2R = v^2/R$  داده می‌شود.
- معمولاً مقاومت سیم‌های به‌کاررفته در تحلیل مدار صفر فرض می‌شوند. هنگام انتخاب سیم برای کاربردی خاص با اداره برق محلی خود مشورت کنید.

## ۲-۶ خواندنی‌های کمی

- A good book that discusses the properties and manufacture of resistors in considerable depth:
- Felix Zandman, Paul-René Simon, and Joseph Szwarc, *Resistor Theory and Technology*. Raleigh, N.C.: SciTech Publishing, 2002.
- A good all-purpose electrical engineering handbook:
- Donald G. Fink and H. Wayne Beaty, *Standard Handbook for Electrical Engineers*, 13th ed., New York: McGraw-Hill, 1993.
- In particular, pp. 1-1 to 1-51, 2-8 to 2-10, and 4-2 to 4-207 provide an in-depth treatment of topics related to those discussed in this chapter.
- A detailed reference for the SI is available on the Web from the National Institute of Standards:
- Barry N. Taylor, *Guide for the Use of the International System of Units (SI)*, NIST Special Publication 811, 1995 Edition, [www.nist.gov](http://www.nist.gov).

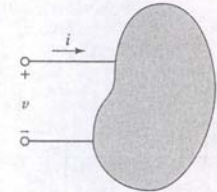


۱۵. توان جذب‌شده به وسیله هر عنصر مدار شکل ۲-۲۹ را معین نمایید.



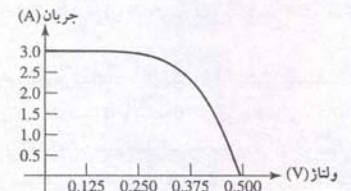
شکل ۲-۲۹

۱۶. فرض کنید برای عنصر مداری شکل ۲-۳۰،  $i = 3te^{-100t}$  mA،  $v = (0.006 - 0.6t)e^{-100t}$  V باشد. (الف) این عنصر مداری چه توانی را در  $t = 5$  ms جذب می‌کند؟ (ب) چه مقدار انرژی در فاصله زمانی  $0 < t < \infty$  به این عنصر تحویل شده است؟



شکل ۲-۳۰

۱۷. فرض کنید در شکل ۲-۳۰،  $i = 3e^{-100t}$  A باشد. توان جذب‌شده به وسیله عنصر مداری را در  $t = 8$  ms پیدا کنید، به شرطی که  $v$  برابر باشد با: (الف)  $40i$ ، (ب)  $0.2 \frac{di}{dt}$  و (ج)  $20V + \int_0^t i dt$ .  
۱۸. مشخصه جریان - ولتاژ یک سولور خورشیدی در ساعت ۱۲ ظهر که در جهت خورشید قرار گرفته است در شکل ۲-۳۱ دیده می‌شود. برای به‌دست‌آوردن این مشخصه، مقاومت‌های مختلف در دو سر پایانه‌های این وسیله قرار گرفته و ولتاژها و جریان‌ها اندازه‌گیری شده‌اند. (الف) جریان اتصال کوتاه چقدر است؟ (ب) مقدار ولتاژ مدار باز چقدر است؟ (ج) توان ماکزیمی که از این وسیله به‌دست‌می‌آید را تخمین بزنید.

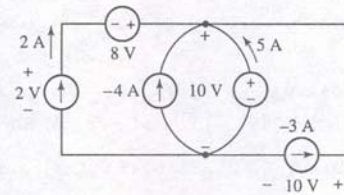


شکل ۲-۳۱

۱۹. جریانی که در یک مدار خاص جاری است در طول زمان به دقت ردیابی می‌شود. همه ولتاژهای بیان‌شده فرض می‌کنند که پایانه مرجع پایانه بالایی مدار است. دیده شده است که در دو ساعت اول، جریان 1 mA وارد پایانه بالایی می‌شود و ولتاژ  $+5$  V است. در 30 دقیقه بعد، جریانی وارد یا خارج نمی‌شود. سپس برای 2 ساعت، یک جریان 1 mA از پایانه بالایی بیرون می‌آید، و ولتاژ اندازه‌گیری شده  $+2$  V است. پس از آن دوباره جریان وارد و خارج نمی‌شود. فرض کنید که مدار از ابتدا هیچ انرژی را ذخیره نکرده است. به سوالات زیر پاسخ دهید:  
الف. در هر یک از سه دوره چقدر توان به مدار حمل شده است.  
ب. چقدر انرژی در حین دو ساعت اول جذب به مدار حمل شده است.  
ج. اکنون چقدر انرژی در مدار نگهداری می‌شود.

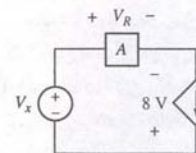
### ۲-۳ منابع ولتاژ و جریان

۲۰. معین کنید کدام یک از پنج منبع شکل ۲-۳۲ انرژی مثبت جذب می‌کنند و نشان دهید که جمع جبری پنج توان جذب‌شده برابر با صفر است.



شکل ۲-۳۲

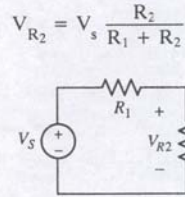
۲۱. به شکل ۲-۳۲ مراجعه نمایید. هر جریان و ولتاژ را در 4 ضرب کنید و مشخص کنید که کدام یک از پنج منبع به عنوان مولد انرژی (تهیه‌کننده انرژی مثبت به دیگر عناصر) عمل می‌کند.  
۲۲. در مدار ساده شکل ۲-۳۳ جریان در هر عنصر با دیگری برابر است. اگر  $v_x = 1$  V و  $v_R = 9$  V باشد مطلوب است محاسبه: (الف) توان جذب‌شده توسط عنصر A. (ب) توان تولیدشده به وسیله هر یک از دو منبع. (ج) آیا کل توان تولیدشده مساوی با کل توان جذب‌شده می‌باشد؟ آیا یافته‌های شما منطقی است؟ چرا (چرا نه)؟



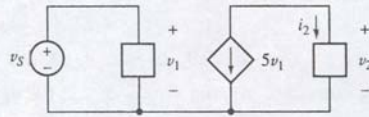
شکل ۲-۳۳

۲۳. برای مدار شکل ۲-۳۴، اگر  $i_2 = 1000$  A و  $v_2 = 5$  mA باشد  $i_2$  باشد  $v_s$  چقدر است؟

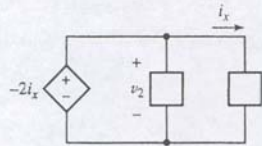
۲۴. برای مدار شکل ۲-۳۵، اگر  $i_2 = -1$  mA باشد، ولتاژ  $v_2$  را حساب کنید.



شکل ۲-۳۶



شکل ۲-۳۷



شکل ۲-۳۸

۲۵. یک مدار ساده با استفاده از باتری اسیدی 12V و یک چراغ اتومبیل تشکیل شده است. اگر باتری انرژی کل 460.8 وات ساعت در پرپود 8 ساعت تولید کند: (الف) چقدر توان به چراغ انتقال یافته است؟ (ب) جریان عبوری از لامپ چقدر است؟ (فرض کنید ولتاژ باتری در حین تخلیه ثابت باقی می‌ماند).

۲۶. برای کاربرد خاصی باید فیوزی را انتخاب کنید، شما می‌توانید فیوزهایی که در جریان‌هایی بیش از 1.5A، 3A، 4.5A، یا 5A می‌سوزند انتخاب نمایید. اگر ولتاژ تولیدی 110 ولت و حداکثر توان مجاز 500 وات باشد کدام فیوز را باید انتخاب کرد و چرا؟

### ۲-۴ قانون اهم

۲۷. خطای 10% در مقاومت 1 kΩ ممکن است هر مقداری از مقاومت‌های بین 900 تا 1100 اهم را داشته باشد. اگر ولتاژ دو سر آن 5.0 V فرض شود (الف) محدوده جریان‌های ممکن اندازه‌گیری شده چقدر است؟ (ب) محدوده توان اندازه‌گیری شده چقدر است؟  
۲۸. یک جریان 2 mA و مدار به عبور از یک مقاومت 470 Ω خطای 5% شده است. مقاومت باید چه میزان توان داشته باشد و چرا؟ (توجه کنید که 5% خطا به معنی این است که مقاومت دارای مقادیر 446.5 Ω و 493.5 Ω است).

۲۹. مقاومت  $R = 1200 \Omega$  برای شکل ۲-۲۴ (د) مفروض است. توان جذب‌شده به وسیله R در  $t = 0.1$  s را به شرط (الف)  $i = 20e^{-12t}$  mA،  $i = 40 \cos 20t$  V و (ج)  $v_i = 8t^{1.5}$  V را بیابید.

۳۰. ولتاژی برای 20 ms در  $+10$  ولت و در 20 ms بعدی در  $-13$  V به‌طور پیوسته نوسان می‌کند. ولتاژ به مقاومتی 50 اهمی اعمال شده است. در فاصله 40 میلی‌ثانیه (الف) حداکثر مقدار ولتاژ را بیابید، (ب) متوسط مقدار ولتاژ را پیدا کنید، (ج) متوسط مقدار جریان مقاومت چقدر است، (د) حداکثر مقدار توان جذب‌شده چقدر است و (ه) متوسط توان جذب‌شده را مشخص کنید.

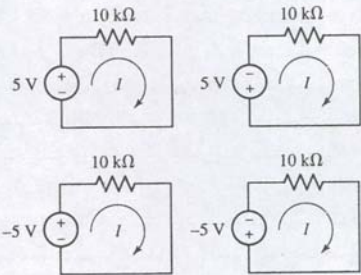
۳۱. بر اساس اصل بقا انرژی در شکل ۲-۳۶، از هر سه عنصر بابت جریان بگذرد. با توجه به این که کل انرژی تولیدی برابر با کل انرژی جذب‌شده می‌باشد نشان دهید که ولتاژ دو سر مقاومت  $R_2$  از رابطه زیر به‌دست‌می‌آید:

۳۲. نتایج تجربی زیر روی یک وسیله دو پایانه با تنظیم مقادیر حاصل از یک منبع تغذیه به‌دست‌آمده است. جریان‌های وارده به یک پایانه نیز اندازه‌گیری شده است.

| ولتاژ (V) | جریان (mA)            |
|-----------|-----------------------|
| -1.5      | -3.19                 |
| -0.3      | -0.638                |
| 0.0       | $1.01 \times 10^{-8}$ |
| 1.2       | 2.55                  |
| 2.5       | 5.32                  |

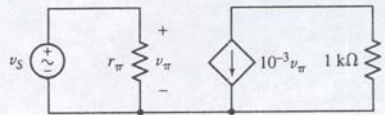
(الف) مشخصه جریان - ولتاژ را ترسیم کنید. (ب) ضریب هدایت موثر و مقاومت وسیله را به‌دست‌آورید. (ج) روی کاغذ جداگانه مشخصه جریان در مقابل ولتاژ را رسم کنید به شرطی که مقاومت وسیله سه برابر شده باشد.

۳۳. برای هر یک از مدارهای شکل ۲-۳۷ جریان I را پیدا کنید و توان جذب‌شده در مقاومت را محاسبه نمایید.



شکل ۲-۳۷

۳۴. مشاهده زیرنویس روی ولتاژها و جریان‌ها در نمودارهای مدار چیز ناآشنایی نیست. در مدار شکل ۲-۳۸ ولتاژ  $v_{\pi}$  در دو سر مقاومت  $R_{\pi}$  ایجاد شده است.  $v_{out}$  را اگر  $v_s$  برابر با  $0.01 \cos 1000t$  V باشد، پیدا کنید.



شکل ۲-۳۸



۳۵. مدار شکل ۲.۲۸ طوری ساخته شده که  $V_s = 2 \sin 5t$  و  $r_{out} = 80 \Omega$  و  $\tau = 314 \text{ ms}$  و  $l = 0$  را در  $t = 0$  محاسبه کنید.

۳۶. یک مفتول مسی به نمره 18 AWG در طول مسیری برای اتصال یک سنسور به سیستم کامپیوتر مرکزی کشیده شده است. اگر مقاومت سیم 53Ω باشد طول کل سیم چقدر است؟ (دما را 20 درجه سانتیگراد فرض کنید).

۳۷. فرض کنید که در کنار یک ساحل متروک قرار دارید و دمای هوا 108 درجه فارنهایت است. ناگهان ملاحظه می‌کنید که فرستنده شما کار نمی‌کند، آن‌گاه مشکل را دنبال می‌کنید تا به یک مقاومت 470 اهمی برسید. خوشبختانه قرقره‌ای از سیم 28 AWG را در آن‌جا پیدا می‌کنید. چند فوت از سیم برای جایگزینی مقاومت 470 اهمی لازم است؟ توجه کنید که چون جزیره در منطقه گرمسیر است دما کمی بیشتر از 20 درجه سانتی‌گراد است و نمی‌توان مقادیر مقاومت جدول ۲.۴ را به کاربرد. شما می‌توانید از رابطه زیر برای اصلاح مقادیر جدول ۲.۴ استفاده کنید:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{234.5 + T_2}{234.5 + T_1}$$

که در آن  $T_1$  مساوی با دمای مرجع (20 درجه در این حالت)،  $R_1$  مقاومت در دمای مرجع،  $T_2$  دمای جدید (درجه سانتی‌گراد) و  $R_2$  مقاومت در دمای جدید است.

۳۸. مقاومت یک هادی به طول  $l$  و سطح مقطع یکنواخت  $A$  با رابطه  $R = \frac{l}{\sigma A}$  داده می‌شود.  $\sigma$  ضریب هدایت الکتریکی است. اگر برای مس  $\sigma = 5.8 \times 10^7$  باشد: (الف) مقاومت یک سیم مسی نمره 18 (با قطر 1.024 میلی‌متر) که 50 فوت طول داشته باشد چقدر است؟ (ب) روی مدار چاپی، یک فویل مسی نواری با  $33 \mu\text{m}$  ضخامت و 0.5mm عرض را داریم که می‌تواند 3A جریان را در  $50^\circ\text{C}$  به راحتی حمل کند، مقاومت 15 سانتی‌متر از این نوار مسی و توان انتقال یافته به وسیله 3A جریان چقدر است؟

۳۹. جدول ۲.۳ چندین نوع استاندارد سیم مسی را لیست کرده است، که ضریب مقاومت تقریباً  $1.7 \mu\Omega/\text{cm}$  است. از اطلاعات جدول ۲.۴ برای سیم 28 AWG استفاده کنید و مقاومت سیم مسی نرم را به دست آورید. آیا مقدار شما با جدول ۲.۳ هم‌خوانی دارد؟

۴۰. (الف) سه مثال برای مقاومت‌های غیرخطی بزنید. (ب) تصور کنید که یک باتری به یک مقاومت وصل است. انرژی از باتری به مقاومت منتقل

می‌شود تا باتری کلاً تخلیه شود. با توجه به اصل بقای انرژی، انرژی باتری به کجا رفته است؟

۴۱. اگر مس B33 برای ساختن سیم‌گرد با قطر 1 mm به کار رود، چقدر توان در 100 m سیمی که جریان 1.5 A را حمل می‌کند، تلف خواهد شد؟

۴۲. بر اساس جدول ۲.۴، یک وسیله مکانیکی بسازید که به عنوان مقاومت متغیر می‌کند (یک سیم‌پیچ می‌تواند به این کار کمک نماید).

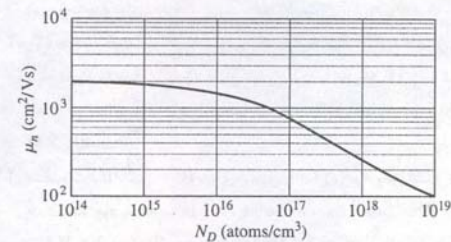
۴۳. دیود یک قطعه رایج دو پایانه غیرخطی است، می‌توان آن را با استفاده از رابطه جریان - ولتاژ زیر مدل‌سازی کرد:

$$I = 10^{-9} (e^{39V} - 1)$$

(الف) مشخصه جریان - ولتاژ آن را برای  $+0.7V$  تا  $-0.7V$  رسم کنید. (ب) مقاومت مؤثر دیود در  $V = 0.55V$  چقدر است؟ (ج) در چه جریانی مقاومت دیود  $1\Omega$  است؟

۴۴. یک مقاومت  $10\Omega$  برای تعمیر مدار رگولاتور ولتاژ لازم است. تنها مواد اولیه موجود قرقره‌هایی به طول ده‌هزار فوت از هر نوع سیم در جدول ۲.۴ است. مقاومت مناسب را طراحی کنید.

۴۵. مقاومت مخصوص کریستال سیلیکان نوع n با رابطه  $\rho = \frac{1}{q} N_D \mu_n$  داده شده است، که  $q$  بار هر الکترون و برابر با  $1.602 \times 10^{-19}$  کولن،  $N_D$  مساوی با تعداد اتم‌های ناخالص فسفر در هر سانتی‌متر مکعب  $\mu_n$  قابلیت تحرک الکترون (برحسب  $\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ ) می‌باشد. قابلیت تحرک و چگالی ناخالصی با شکل ۲.۳۹ به هم مرتبط‌اند. با این فرض که ویفر سیلیکانی 6 اینچ قطر و  $250 \mu\text{m}$  ضخامت داشته باشد، با تزریق ماده فسفری در محدوده  $10^{15} \leq N_D \leq 10^{18} \text{ atoms/cm}^3$  و ابعاد هندسی مناسب یک مقاومت 100 اهمی طراحی کنید.



شکل ۲-۳۹

## قوانین ولتاژ و جریان

### مقدمه

در فصل ۲ مقاومت و چند نوع منبع معرفی شدند. پس از تعریف چند واژه جدید مدار، آماده‌ایم تا مدارهای ساده ساخته شده از این قطعات را تحلیل کنیم. تکنیک‌هایی که خواهیم آموخت بر اساس دو قانون ساده است: قانون جریان کیرشهف (KCL) و قانون ولتاژ کیرشهف (KVL). KCL بر اصل بقای بار و KVL بر اصل بقای انرژی مبتنی است که هر دو از قوانین اساسی فیزیک است. پس از آشنایی با این تحلیل ساده، از KCL و KVL استفاده بیشتری کرده و از آن‌ها برای ساده کردن ترکیبات سری و موازی مقاومت‌ها، منابع ولتاژ، یا منابع جریان استفاده می‌کنیم و مفاهیم مهم تقسیم جریان و ولتاژ را توسعه می‌دهیم. در فصل‌های بعد، تکنیک اضافه‌تری را خواهیم آموخت که به ما اجازه می‌دهند به‌طور مؤثر شبکه‌های پیچیده‌تر را تحلیل کنیم.

### ۱-۳ گره‌ها، حلقه‌ها، مسیرها و شاخه‌ها

اینک آماده‌ایم روابط جریان - ولتاژ را در مدارهای ساده تشکیل شده از دو یا چند عنصر معین کنیم. عناصر به‌وسیله سیم‌ها به هم متصلند و فرض می‌کنیم مقاومتشان صفر باشد. چون در این حال شبکه به‌صورت تعدادی عنصر ساده و مجموعه‌ای از سیم‌های اتصال درمی‌آید، به آن **شبکه با پارامترهای فشرده یا یکپارچه** می‌گوییم. تحلیل شبکه‌هایی که در آن‌ها پارامترها توزیع شده‌اند و در واقع حاوی عناصر بی‌نهایت کوچک هستند مشکل‌تر است. ما در این کتاب بر نوع یکپارچه تأکید داریم.

نقطه‌ای که در آن دو یا چند عنصر اتصال مشترکی دارند **گره** نامیده می‌شود. مثلاً شکل ۳۱-۱ (الف) مدار یک شبکه سه‌گره‌ای را نشان می‌دهد. گاهی مدارها طوری رسم می‌شوند که تعداد گره‌ها بیش از آن‌چه که واقعیت دارد به‌نظر می‌رسد. مثلاً گره شماره 1 در شکل ۳۱-۱ (الف) به‌صورت دو اتصال جدا از هم که با هادی صفر اهمی به هم وصلند، طبق شکل ۳۱-۱ (ب)، نشان داده می‌شود. با این وجود تنها کاری که صورت گرفته، جداسازی نقاط مشترک به‌صورت یک خط مشترک با مقاومت صفر است. بنابراین ما باید لزوماً همه سیم‌های هادی یا بخشی از آن را که متصل به گره است، جزئی از آن گره بدانیم. توجه کنید که هر عنصر باید در هر سمت خود یک گره داشته باشد.

فرض کنید که از یک گره در یک شبکه شروع کنیم و از یک عنصر ساده عبور نماییم تا به یک گره در انتهای دیگر آن برسیم. آن‌گاه از این گره وارد عنصر دیگری شده به گره بعدی برویم و این حرکت را آن‌قدر ادامه دهیم تا از هر تعداد عنصر عبور کنیم. اگر با هیچ گره‌ای بیش از یک بار مواجه نشویم، آن‌گاه مجموعه گره‌ها و عناصری که ما از آن‌ها عبور کرده‌ایم یک

#### مفاهیم کلیدی

واژه‌های جدید مدار: گره، مسیر، حلقه، و انشعاب

قانون جریان کیرشهف (KCL)

قانون ولتاژ کیرشهف (KVL)

تحلیل مدارهای ساده سری و موازی

ترکیب منابع سری و موازی

تقلیل ترکیب مقاومت سری و موازی

تقسیم ولتاژ و جریان

اتصالات زمین



در مدارهای واقعی سیم‌ها دارای مقاومت محدودی هستند. ولی این مقاومت‌ها در مقایسه با دیگر مقاومت‌های مدار آن‌قدر کوچکند که می‌شود از آن‌ها چشم‌پوشی کرد بدون این‌که خطای زیادی ایجاد شود. پس در مدارهای ایده‌آل سیم‌ها را با مقاومت صفر در نظر می‌گیریم.





قانون جریان کیرشهف می‌تواند به شکل فشرده زیر بیان شود:

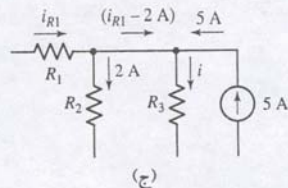
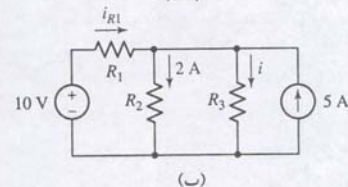
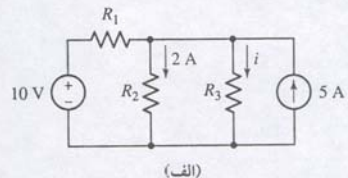
$$\sum_{n=1}^N i_n = 0 \quad (۱)$$

که در واقع نمایش کوتاه عبارت زیر می‌باشد:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N = 0 \quad (۲)$$

وقتی که معادله (۱) یا (۲) را به کار می‌بریم، دقت کنید که N جریان موجود باید همگی به سمت گره و یا همگی به خارج گره باشند.

### مثال ۳-۱



شکل ۳-۳ (الف) مدار ساده‌ای که جریان درون مقاومت  $R_3$  در آن مورد نظر است. (ب) جریان درون  $R_1$  مشخص شده تا معادله KCL نوشته شود. (ج) برای وضوح جریان‌های وارده به گره بالایی دوباره مشخص شده‌اند.

برای مدار شکل ۳-۳ (الف) اگر منبع ولتاژ جریان ۳ آمپر را فراهم کنند، جریان عبوری از مقاومت  $R_3$  چقدر است؟

■ هدف مسئله را شناسایی کنید.

جریان داخل  $R_3$  روی نمودار مدار، نام گرفته است.

■ اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

جریان از گره بالایی  $R_3$  که به سه شاخه دیگر متصل است وارد آن می‌شود. جریان‌های وارده از هر شاخه به گره با یکدیگر جمع می‌شوند تا جریان  $i$  تشکیل گردد.

■ ارائه یک طرح.

جریان مقاومت  $R_1$  را طبق شکل ۳-۳ (ب) مشخص می‌کنیم تا بتوان معادله KCL را در گره بالایی مقاومت‌های  $R_2$  و  $R_3$  نوشت.

■ معادلات مناسب را بنویسید.

جمع جریان‌های عبوری از گره برابر است با:

$$i_{R1} - 2 - i + 5 = 0$$

جریان‌هایی که از این گره عبور می‌کنند، در نمودار شکل ۳-۳ (ج) به وضوح نشان داده شده‌اند.

■ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

می‌بینیم یک معادله ولی دو مجهول وجود دارد. این بدان معنی است که به یک معادله دیگر نیازمندیم. می‌دانیم که منبع 10 ولت، جریان 3 آمپر فراهم می‌کند: KCL به ما نشان می‌دهد که این جریان همان  $I_{R1}$  است.

■ اقدام به حل.

با جایگزینی می‌بینیم که  $i = 3 - 2 + 5 = 6A$ .

■ صحت حل را تحقیق کنید. آیا جواب منطقی است؟

همیشه تست مجدد کار ارزشمندی است. همچنین می‌توان دید که آیا اندازه جواب منطقی است یا خیر. در این جا دو منبع داریم که یکی از آن‌ها 5A و دیگری 3A جریان می‌دهد. هیچ منبع دیگری چه مستقل و چه وابسته وجود ندارد. بنابراین انتظار نداریم که جریانی بیش از 8 آمپر در مدار پیدا کنیم.

مسیر را تعریف می‌کنند. اگر گره شروع و گره خاتمه یکی باشند، آن‌گاه بنا بر تعریف مسیر، یک مسیر بسته یا یک حلقه خواهیم داشت.

مثلاً در شکل ۳-۱ (الف) اگر از گره 2 و از طریق منبع جریان به گره 1 برویم و آن‌گاه از طریق مقاومت سمت راست بالا به گره 3 برسیم، یک مسیر را ایجاد کرده‌ایم. چون به گره 2 مجدداً نرفته‌ایم، یک حلقه تشکیل نشده است. اگر از گره 2 به گره 1 از طریق منبع جریان و از آن‌جا از طریق مقاومت سمت چپ به گره 2 و سپس از طریق مقاومت مرکزی به گره 1 بازگردیم، یک مسیر به وجود نیامده است، چون گره 2 بیش از یک بار در مسیر بوده است. همچنین یک حلقه نیز تشکیل نشده است، زیرا حلقه باید یک مسیر باشد.

اصطلاح دیگری که زیاد مورد استفاده است **انشعاب** یا **شاخه** می‌باشد. ما یک شاخه را یک مسیر ساده در یک شبکه می‌دانیم که از یک عنصر ساده و گرهی در هر انتهای آن عنصر تشکیل شده است. بنابراین یک مسیر، مجموعه خاصی از شاخه‌ها است. مدار شکل ۳-۱ (الف) و (ب) حاوی پنج شاخه‌اند.

## ۳-۲ قانون جریان کیرشهف

اکنون می‌توانیم اولین قانون کیرشهف<sup>۱</sup> را ملاحظه کنیم. وی پروفیسور یک دانشگاه آلمانی بود که همزمان با کارهای تجربی مهم متولد شد. این قانون یک قانون بدیهی است که به نام قانون جریان کیرشهف خوانده شده (به‌طور خلاصه KCL) و به صورت ساده زیر بیان می‌شود:

جمع جبری جریان‌های وارده به هر گره صفر است.

این قانون یک عبارت ریاضی است و این واقعیت را نشان می‌دهد که بار نمی‌تواند در یک گره جمع شود. یک گره یک عنصر مداری نیست و مطمئناً نمی‌تواند بار الکتریکی را ذخیره، نابود و یا تولید کند. بنابراین جمع جبری جریان‌های وارده باید صفر باشد. مثالی در مورد هیدرولیک می‌تواند در این جا به درک موضوع کمک کند: مثلاً سه لوله آب را در نظر بگیرید که به شکل Y به هم وصل شده باشند. ماسه جریان را که به داخل هر سه لوله وارد می‌شوند در نظر می‌گیریم. اگر اصرار داشته باشیم که همیشه آب در جریان است، مسلماً نمی‌توانیم سه جریان آب مثبت داشته باشیم، زیرا سوراخی خواهد ترکید. بنابراین مقدار یک یا دو جریان بایستی منفی تعریف شود.

گره شکل ۳-۲ را ملاحظه کنید. جمع جبری چهار جریان وارده به این گره باید صفر باشد:

$$i_A + i_B + (-i_C) + (-i_D) = 0$$

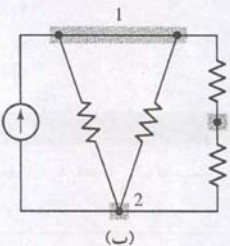
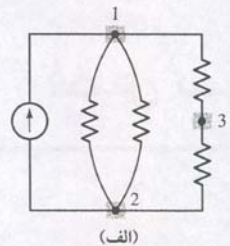
واضح است که قانون فوق برای جمع جبری جریان‌هایی که گره را ترک می‌کنند هم به همان صورت قابل اعمال است:

$$(-i_A) + (-i_B) + i_C + i_D = 0$$

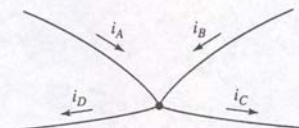
همچنین می‌توانیم جمع جریان‌هایی را که پیکانشان به سمت یک گره است با جمع جریان‌هایی که پیکانشان به سمت خارج آن گره است برابر قرار دهیم:

$$i_A + i_B = i_C + i_D$$

که می‌گویید جمع جریان‌های وارده به گره باید برابر با جمع جریان‌های خارج شده از گره باشد.

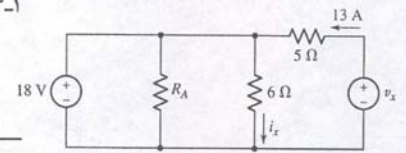


شکل ۳-۱ (الف) مداری شامل سه گره و پنج شاخه. (ب) گره 1 طوری رسم شده است که شبیه دو گره باشد. ولی در واقع یک گره است.

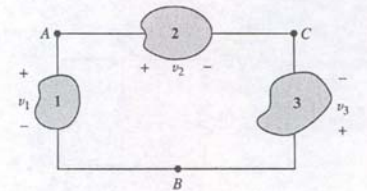


شکل ۳-۲ گره نمونه برای تشریح کاربرد قانون جریان کیرشهف.





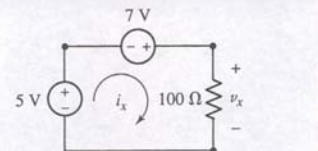
شکل ۳-۴



شکل ۳-۵ اختلاف پتانسیل بین A و B مستقل از مسیر انتخابی است.



مثال ۳-۲



شکل ۳-۶ مداری ساده با دو منبع ولتاژ و یک مقاومت.

۳-۱ تعداد شاخه‌ها و گره‌های مدار شکل ۳-۴ را بشمارید. اگر  $i_x = 3A$  و منبع 18 ولتی مقدار 8A جریان را به مدار تحویل دهد، مقدار  $R_A$  چقدر است؟ (راهنمایی: می‌توانید از قانون اهم و KCL استفاده کنید).

جواب: پنج شاخه، 3 گره، 1 اهم

### ۳-۳ قانون ولتاژ کیرشهف

جریان، مرتبط با بارهای در حال حرکت در یک عنصر مدار است، در صورتی که ولتاژ معیاری از اختلاف انرژی پتانسیل دو سر آن عنصر می‌باشد. در تئوری مدار برای ولتاژ فقط یک مقدار منحصر به فرد وجود دارد. بنابراین انرژی لازم برای حرکت یک بار واحد از نقطه A به نقطه B در یک مدار باید مستقل از مسیر اختیار شده بین نقطه A و B باشد (اغلب بیش از یک مسیر وجود دارد). اکنون مطالب فوق را تحت قانون ولتاژ کیرشهف (به‌طور خلاصه KVL) بیان می‌کنیم:

جمع جبری ولتاژ حول هر مسیر بسته صفر است.

ما اگر در شکل ۳-۵ یک کولن را از A به B و از طریق عنصر 1 حمل کنیم، علامت پلاریته مرجع برای  $v_1$  نشان می‌دهد که کار لازم  $v_1$  ژول است. اکنون اگر برای رفتن از نقطه A به نقطه B از طریق گره C به پیش برویم، آن‌گاه  $v_3 - v_2$  ژول انرژی به کار خواهیم برد. با این وجود کار انجام شده مستقل از مسیر انتخابی در مدار است و این مقادیر باید برابر باشند. انتخاب هر مسیر باید منجر به رسیدن به یک مقدار برای ولتاژ باشد. بنابراین:

$$v_1 = v_2 - v_3 \quad (۳)$$

به این ترتیب اگر یک مسیر بسته را دنبال کنیم، جمع جبری ولتاژهای عناصر حول آن باید صفر باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N = 0$$

یا به‌طور ساده‌تر:

$$\sum_{n=1}^N v_n = 0 \quad (۴)$$

قانون KVL را می‌توان به صورت مختلف روی یک مدار اعمال کرد. روشی که کمتر به اشتباه منجر می‌شود این است که روی مسیر بسته‌ای در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم و تمام ولتاژهایی که از آن‌ها می‌گذریم را بنویسیم. هر گاه از طرف علامت مثبت ولتاژ وارد یک عنصر شدیم آن را مثبت و اگر از طرف علامت منفی وارد شدیم آن ولتاژ را با علامت منفی به حساب آوریم. به عنوان مثال برای حلقه مدار شکل ۳-۵ داریم:

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

که با نتایج قبلی معادله (۳) توافق دارد.

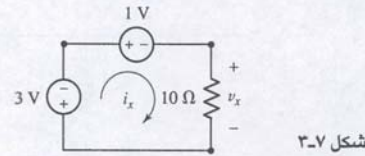
در مدار شکل ۳-۶،  $v_x$  و  $i_x$  را پیدا کنید.

ما ولتاژ دو عنصر از سه عنصر در مدار را می‌دانیم. بنابراین KVL به راحتی برای یافتن  $v_x$  اعمال می‌شود. با شروع از گره پایینی منبع 5 ولت، قانون ولتاژ کیرشهف را حول حلقه در جهت عقربه‌های ساعت اعمال می‌نماییم:

$$-5 - 7 + v_x = 0$$

بنابراین  $v_x = 12V$ . قانون KCL به این مدار می‌تواند اعمال شود ولی در این جا جریان  $i_x$  از هر سه عنصر عبور می‌کند. با این وجود ما اکنون ولتاژ دو سر مقاومت 100 اهم را می‌دانیم. با استفاده از قانون اهم داریم:  $A = 120 \text{ mA}$   $i_x = \frac{v_x}{100} = \frac{12}{100}$

۳-۲  $i_x$  و  $v_x$  را در مدار شکل ۳-۷ بیابید.

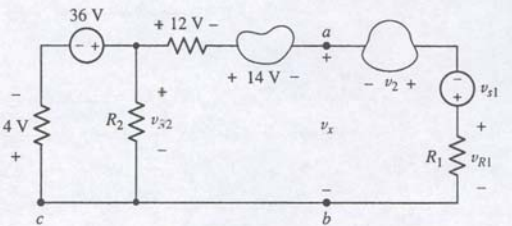


شکل ۳-۷

جواب:  $i_x = -400 \text{ mA}$  و  $v_x = -4V$

مثال ۳-۳

در مدار شکل ۳-۸، هشت عنصر وجود دارد. ولتاژها با جفت علامت مثبت و منفی در دو سر هر عنصر نشان داده شده‌اند.  $v_{R2}$  (ولتاژ دو سر  $R_2$ ) و ولتاژ  $v_x$  را بیابید.

شکل ۳-۸ مداری با هشت عنصر که در آن  $v_{R2}$  و  $v_x$  مورد توجه‌اند.

بهترین راه برای یافتن  $v_{R2}$  این است که به دنبال حلقه‌ای برای اعمال قانون KVL بگردیم. چند گزینه وجود دارد، ولی پس از نگاهی دقیق به مدار مشاهده می‌کنیم که حلقه سمت چپ مسیری سرراست‌تر می‌باشد، زیرا در آن دو ولتاژ مشخص شده است. بنابراین با نوشتن معادله KVL حول حلقه سمت چپ و شروع از نقطه c داریم:

$$4 - 36 + v_{R2} = 0$$

که از آن  $v_{R2} = 32V$  نتیجه می‌شود.

برای یافتن  $v_x$  می‌توانیم آن را جمع ولتاژهای دو سر سه عنصر سمت راست بدانیم. با این وجود چون برای این کمیت‌ها مقداری نداریم، اتخاذ چنین روشی منجر به جواب عددی نمی‌گردد. در عوض ما با شروع از نقطه c به سمت بالا و به طرف نقطه a از طریق  $v_x$  به b و سپس رابطه به نقطه شروع داریم:

$$+4 - 36 + 12 + 14 + v_x = 0$$

بنابراین  $v_x = 6V$ .

روش دیگر: با این فرض که  $v_{R2}$  معلوم باشد می‌توان از طریق  $R_2$  مسیر کوتاه‌تری اختیار کرد:

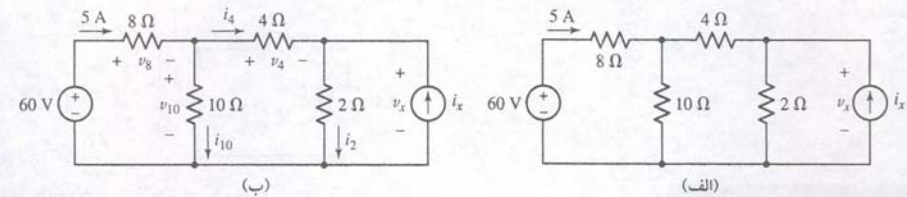
$$-32 + 12 + 14 + v_x = 0$$

که از آن  $v_x = 6V$  نتیجه می‌شود.

کلید دستیابی به یک تحلیل صحیح این است که ابتدا تمام ولتاژها و جریان‌ها را روی مدار مشخص کنیم. به این ترتیب با نوشتن دقیق معادلات KVL و روابط صحیح حاصل خواهد شد، و اگر تعداد مجهولات بیش از معادلات باشد می‌توان قانون اهم را هم در صورت لزوم به کاربرد. ما این اصول را با مثالی مشروح‌تر توضیح می‌دهیم.



در مدار شکل ۳-۹ (الف)  $v_x$  را معین کنید.



(ب)

شکل ۳-۹ (الف) مداری که در آن  $v_x$  با KVL معین می‌شود. (ب) مدار با برچسب ولتاژها و جریان‌ها.

حل را با مشخص کردن ولتاژها و جریان‌ها روی بقیه عناصر مدار آغاز می‌کنیم (شکل ۳-۹ (ب)). توجه کنید که  $v_x$  ولتاژ دو سر مقاومت ۲ اهم و نیز دو سر منبع جریان  $i_x$  است. اگر بتوانیم جریان درون مقاومت ۲ اهم را به دست آوریم، استفاده از قانون اهم منجر به یافتن  $v_x$  می‌گردد. با نوشتن معادله KCL مناسب، می‌بینیم که:

$$i_2 = i_4 + i_x$$

متأسفانه برای این سه کمیت مقداری نداریم و حل مافعالاً متوقف می‌شود.

چون جریان خارج شده از منبع ۶۰V معین است تصمیم می‌گیریم حل را از آن نقطه ادامه دهیم. می‌توانیم به جای استفاده از  $i_2$  برای یافتن  $v_x$ ، ولتاژ  $v_x$  را مستقیماً از KVL به دست آوریم. یک معادله KVL ممکن چنین است:

$$-60 + v_8 + v_{10} = 0$$

و

$$-v_{10} + v_4 + v_x = 0 \quad (۵)$$

ما اکنون دو معادله و چهار مجهول داریم. اصلاحی کوچک در یک معادله که همه جملات آن مجهول است انجام می‌دهیم. در واقع می‌دانیم که  $v_8 = 40$  است که بر اساس قانون اهم حاصل شده، زیرا به ما گفته شده است که از مقاومت ۸ Ω جریان ۵ A می‌گذرد. بنابراین  $v_{10} = 0 + 60 - 40 = 20$  V است. پس معادله (۵) به فرم زیر کاهش می‌یابد:

$$v_x = 20 - v_4$$

اگر بتوانیم  $v_4$  را معین نماییم، مسئله حل است.

بهترین راه یافتن  $v_4$  در این حالت استفاده از قانون اهم است که مقداری برای  $i_4$  لازم دارد. از KCL می‌بینیم که:

$$i_4 = 5 - i_{10} = 5 - \frac{v_{10}}{10} = 5 - \frac{20}{10} = 3$$

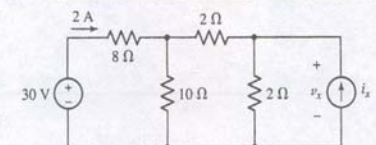
بنابراین  $12 \text{ V} = (4)(3) = v_4$  و بنابراین  $v_x = 20 - 12 = 8 \text{ V}$  خواهد شد.

۳-۳ در مدار شکل ۳-۱۰،  $v_x$  را به دست آورید.

جواب:  $v_x = 12.8 \text{ V}$

### ۳-۴ مدار تک حلقه‌ای

دیدیم که استفاده مکرر از KCL و KVL در کنار قانون اهم می‌تواند به مدارهای پیچیده حاوی چند حلقه و تعدادی عناصر متفاوت اعمال گردد. قبل از ادامه پیشروی در موضوع اکنون وقت خوبی برای تمرکز بر مفهوم مدارهای سری (و در بخش بعد موازی) است زیرا آن‌ها مبنای هر شبکه‌ای را تشکیل می‌دهند که ما در آینده با آن مواجه خواهیم شد.



شکل ۳-۱۰

تمام عناصری که در یک مدار، جریان یکسانی را از خود عبور می‌دهند سری نامیده می‌شوند. عناصر ممکن است جریان برابری را از خود عبور بدهند ولی سری نباشند، مثلاً دو لامپ ۱۰۰ وات در منزل دو همسایه ممکن است جریان برابری داشته باشند ولی آن‌ها یک جریان (همان جریان) را حمل نمی‌کنند پس سری نیستند.

شکل ۳-۱۱ (الف)، مدار ساده را که از دو باتری و دو مقاومت تشکیل شده است، نشان می‌دهد. فرض می‌شود پایانه، سیم اتصال و لحیم آن‌ها دارای مقاومت صفر بوده و به همراه هم یک گره خاص از مدار را در شکل ۳-۱۱ (ب) تشکیل دهند. به جای هر دو باتری منابع ولتاژ ایده‌آل را گذاشته‌ایم و فرض کرده‌ایم که مقاومت‌های احتمالی آنقدر کوچکند که می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت. دو مقاومت واقعی را نیز با دو مقاومت ایده‌آل (خطی) جایگزین کرده‌ایم.

خواهیم کوشید که جریان در هر عنصر، ولتاژ و دو سر آن و توان جذب شده‌اش را بیابیم. گام اول تحلیل، یافتن جهت مرجع برای جریان‌های مجهول است. به طور دلخواه بیابید جریان ساعتگرد  $i$  را که از پایانه بالایی منبع ولتاژ در سمت چپ خارج می‌شود انتخاب کنید. این انتخاب با رسم پیکانی با برچسب  $i$  در آن نقطه در شکل ۳-۱۱ (ج) نشان داده شده است. استفاده از قانون جریان کیرشهف نشان می‌دهد که جریان یکسانی باید در هر عنصر این مدار وجود داشته باشد و مابرای تأکید بر این واقعیت چند سمبل جریان در نقاط دیگر این مدار قرار می‌دهیم. گام دوم در تحلیل انتخاب ولتاژ مرجع برای هر دو مقاومت است. قرارداد علامت عناصر غیرفعال لازم می‌دارد که متغیرهای ولتاژ و جریان درون مقاومت طوری تعریف شوند که جریان از پایانه مثبت وارد شود. چون ما قبلاً جهت جریان را انتخاب کرده‌ایم،  $v_{R1}$  و  $v_{R2}$  باید طبق شکل ۳-۱۱ (ج) تعریف شوند.

سومین گام، کاربرد قانون ولتاژ کیرشهف در تنها مسیر بسته است. بیابید از گوشه سمت چپ پایین در جهت ساعتگرد در مدار بچرخیم و هر ولتاژی را که دیدیم بنویسیم. اگر با قطب مثبت ولتاژ برخورد کردیم، آن را با علامت مثبت و اگر با قطب منفی روبه‌رو شدیم آن را با علامت منفی ذکر کنیم. بنابراین:

$$-v_{s1} + v_{R1} + v_{s2} + v_{R2} = 0 \quad (۶)$$

آنگاه با اعمال قانون اهم به عناصر مقاومتی داریم:

$$v_{R1} = R_1 i \quad \text{و} \quad v_{R2} = R_2 i$$

از جایگزینی در معادله (۶) خواهیم داشت:

$$-v_{s1} + R_1 i + v_{s2} + R_2 i = 0$$

چون فقط  $i$  نامعلوم است می‌یابیم که:

$$i = \frac{v_{s1} + v_{s2}}{R_1 + R_2}$$

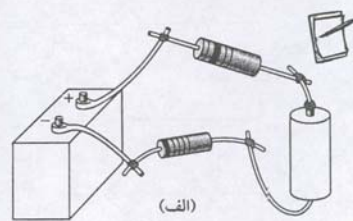
کنون می‌توان ولتاژ یا جریان مربوط به هر عنصر را با اعمال رابطه  $v = iR$  و  $p = vi$  و یا  $p = i^2 R$  به دست آورد.

۳-۲ در مدار شکل ۳-۱۱ (ب)،  $v_{s1} = 120 \text{ V}$ ،  $v_{s2} = 30 \text{ V}$ ،  $R_1 = 30 \Omega$  و  $R_2 = 15 \Omega$  است توان جذب شده به وسیله هر عنصر را به دست آورید.

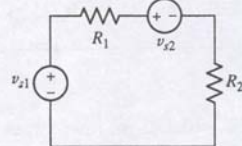
جواب:  $p_{120 \text{ V}} = -60 \text{ W}$ ،  $p_{30 \text{ V}} = 120 \text{ W}$ ،  $p_{30 \Omega} = 60 \text{ W}$  و  $p_{15 \Omega} = 240 \text{ W}$

توان جذب شده در هر عنصر از مدار شکل ۳-۱۲ (الف) را محاسبه کنید.

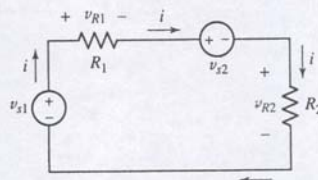
بتدا جهت مرجعی را به جریان  $i$  و پلاریته مرجعی را به  $v_{30}$  تخصیص می‌دهیم (شکل ۳-۱۲ (ب)). بازی به تخصیص ولتاژ به مقاومت  $15 \Omega$  وجود ندارد، زیرا ولتاژ کنترل شده  $v_A$  برای منبع وابسته



(الف)



(ب)

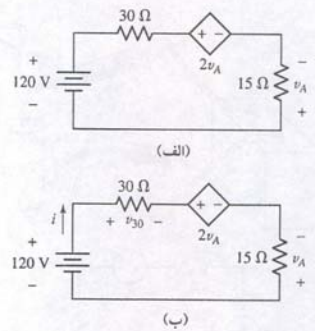


(ج)

شکل ۳-۱۱ (الف) مدار یک حلقه با چهار عنصر. (ب) مدل مداری همراه با مقادیر ولتاژ منبع و مقاومت‌ها. (ج) علامت‌های مرجع ولتاژ و جریان به مدار اضافه شده است.

### تمرین





شکل ۳-۱۲ (الف) مدار یک حلقه‌ای حاوی یک منبع وابسته. (ب) جریان  $i$  و ولتاژ  $V_{30}$  مشخص شده‌اند.

از قبل موجود است (با این وجود توجه کنید که علامت  $V_A$  عکس قرارداد علامت عناصر غیر فعال می‌باشد).

این مدار حاوی منبع ولتاژ وابسته است، که مقدار آن تا تعیین  $V_A$  مجهول خواهد ماند. با این وجود می‌توان از مقدار جبری  $2V_A$  استفاده کرد. بنابراین قانون KVL نتیجه می‌دهد:

$$-120 + v_{30} + 2V_A - V_A = 0 \quad (V)$$

با اعمال قانون اهم به مقاومت‌ها می‌توان نوشت:

$$V_{30} = 30i \quad \text{و} \quad V_A = -15i$$

چون  $i$  وارد پایانه منفی  $V_A$  می‌شود علامت منفی لازم است. با جایگزینی در معادله (V) داریم:

$$-120 + 30i - 30i + 15i = 0$$

و بنابراین درمی‌یابیم که:

$$i = 8A$$

با محاسبه توان جذب شده به وسیله هر عنصر داریم:

$$P_{120V} = (120)(-8) = -960W$$

$$P_{30\Omega} = (8)^2(30) = 1920W$$

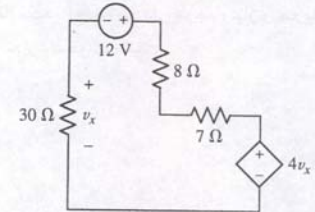
$$P_{\text{وابسته}} = (2V_A)(8) = 2[(-15)(8)](8) = -1920W$$

$$P_{15\Omega} = (8)^2(15) = 960W$$

اگر همه توان‌های جذب شده را با هم جمع کنیم مقدار حاصل صفر است و این همان چیزی است که انتظار می‌رود.

### تمرین

۳-۵ در مدار (شکل ۳-۱۳) توان جذب شده به وسیله هر یک از پنج عنصر مدار را مشخص کنید. جواب: (در جهت ساعتگرد)  $0.1792W$ ,  $0.205W$ ,  $1.920W$ ,  $0.768W$  و  $-3.07W$



شکل ۳-۱۳ مدار یک حلقه‌ای ساده.

در مثال و تمرین قبل از ما خواسته شد تا توان جذب شده به وسیله هر عنصر از مدار را محاسبه کنیم. با این وجود فکر درباره وضعیتی که در آن همه کمیت‌های جذب شده در یک مدار مثبت باشد، مشکل است، به این دلیل که انرژی باید از یک جایی بیاید. بنابراین، با توجه به بقای انرژی انتظار داریم که مجموع توان‌های جذب شده هر مدار صفر باشد. به بیان دیگر، حداقل یکی از کمیت‌ها باید منفی باشد (با نادیده گرفتن موارد جزئی که در آن مدار کار نمی‌کند). به نحوی دیگر بگوییم، مجموع توان تهیه شده برای هر عنصر باید صفر باشد. دقیق‌تر بگوییم، مجموع توان جذب شده برابر با مجموع توان تحویل داده شده است که به قدر کافی منطقی به نظر می‌رسد.

بیایید مطالب فوق را با مدار شکل ۳-۱۲ از مثال ۳-۵ آزمایش کنیم، که متشکل از دو منبع (یکی مستقل و دیگری وابسته) و دو مقاومت است. با جمع توان‌های جذب شده توسط هر عنصر داریم:

$$\sum_{\text{همه عناصر}} P_{\text{جذب شده}} = -960 + 1920 - 1920 + 960 = 0$$

در واقع منبع 120 ولت  $960W$  و منبع وابسته  $1920W$  را تهیه می‌کنند. بنابراین منابع جمعاً  $960 + 1920 = 2880W$  را فراهم می‌کنند. انتظار می‌رود مقاومت‌ها توان مثبت را جذب کنند که در این حالت  $1920 + 960 = 2880W$  است. بنابراین اگر همه عناصر از مدار را به حساب آوریم داریم:

$$\sum P_{\text{تهیه شده}} = \sum P_{\text{جذب شده}}$$

که انتظار آن هم می‌رفت.

اکنون توجه خود را به تمرین ۳-۵ معطوف می‌داریم، که خواننده ممکن است مایل به تصدیق آن باشد. می‌بینیم که توان جذب شده برابر است با:

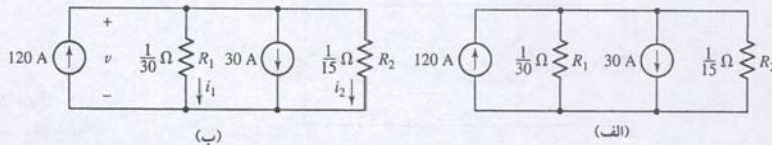
$$0.768 + 1.92 + 0.2048 + 0.1792 - 3.072 = 0$$

جالب است که می‌بینیم یک منبع مستقل  $12V$ ، مقدار  $1.92W$  را جذب می‌کند و به این معنی است که این منبع توان را مصرف می‌کند و نه این که آن را تهیه نماید. در عوض منبع وابسته به نظر می‌رسد که همه توان را در این مدار خاص فراهم می‌سازد. آیا چنین چیزی ممکن است؟ ما معمولاً انتظار داریم که منبع توان مثبتی را تهیه کند اما چون ما منابع ایده‌آلی را در مدارمان اختیار کرده‌ایم، این احتمال وجود دارد تا یک جریان توان خالصی به داخل هر منبعی داشته باشیم. اگر مدار به طریقی تغییر کند، می‌توان منبعی مشابه را یافت که توان مثبتی را فراهم می‌سازد. راجع به نتیجه نمی‌توان پیشگویی کرد مگر این که تحلیل آن کامل شود.

### ۳-۵ مدار زوج تک‌گره

مدار زوج تک‌گره همسان با مدار یک حلقه‌ای مورد بحث در بخش ۳-۴ است، که در آن هر یک از عناصر ساده، بین یک جفت گره قرار گرفته است. مثالی از این نوع مدار در شکل ۳-۱۴ (الف) دیده می‌شود. دو منبع جریان و مقادیر مقاومت معلومند. ابتدا ولتاژی را در دو سر هر عنصر فرض می‌کنیم و پلاریته دلخواهی را به آن نسبت می‌دهیم. آن‌گاه KVL به ما اجازه می‌دهد تا ولتاژ دو سر هر انشعاب برابر با ولتاژ دو سر انشعاب دیگر باشد. عناصری در یک مدار که ولتاژ مشترکی در دو سر آن‌ها وجود دارد با هم موازی خوانده می‌شوند.

ولتاژ، جریان و توان مربوط به هر عنصر را در مدار شکل ۳-۱۴ (الف) پیدا کنید.



شکل ۳-۱۴ (الف) مدار زوج تک‌گره. (ب) یک ولتاژ و دو جریان تخصیص یافته‌اند.

در اولین گام ولتاژ  $v$  و پلاریته اختیاری آن را طبق شکل ۳-۱۴ (ب) انتخاب می‌نماییم. دو جریان داخل مقاومت‌ها بر اساس قرارداد علامت عناصر غیر فعال اختیار شده‌اند. این جریان‌ها نیز در شکل ۳-۱۴ (ب) دیده می‌شوند.

تعیین هر یک از دو مقدار  $i_1$  یا  $i_2$  می‌تواند در یافتن ولتاژ  $v$  به ماکمک کند. بنابراین گام بعدی ما اعمال KCL به هر یک از دو گره در مدار است. بهتر است آن را به گرهی که در آن ولتاژ مرجع مثبت است اعمال کنیم و بنابراین جمع جبری جریان‌هایی که گره بالایی را ترک می‌کنند، مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$-120 + i_1 + 30 + i_2 = 0$$

با نوشتن هر دو جریان برحسب  $v$  و به کارگیری قانون اهم،

$$i_1 = 30v \quad \text{و} \quad i_2 = 15v$$

پس داریم:

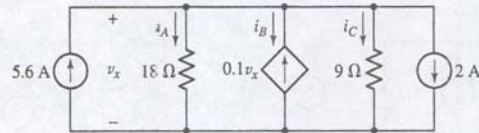
$$-120 + 30v + 30 + 15v = 0$$

با حل این معادله برای  $v$  داریم:

$$v = 2V$$



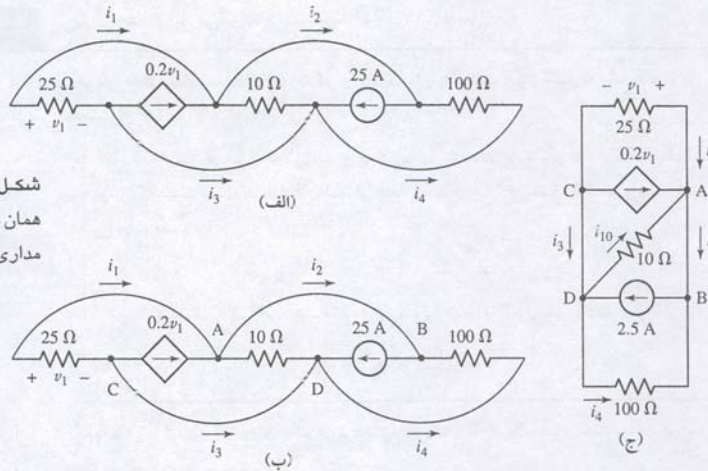
شکل ۳-۱۷



مثال ۳-۸

در شکل ۳-۱۸ الف)،  $i_1$ ،  $i_2$ ،  $i_3$  و  $i_4$  را بیابید.

طبق آن چه که ترسیم شده است، تحلیل این مدار کمی مشکل است، بنابراین مصمم هستیم تا بعد از نامگذاری نقاط A، B، C و D طبق شکل ۳-۱۸ (ب و ج)، آن را دوباره ترسیم نماییم. جریان  $i_{10}$  را در مقاومت  $10\Omega$  تعریف کرده و KCL را اجرا می کنیم.



شکل ۳-۱۸ الف) یک مدار جفت‌گرهی. (ب) همان مدار با نامگذاری نقاط در ترسیم مجدد. (ج) مداری ساده‌تر.

هیچ یک از جریان‌های موردنظر در این نمودار مدار معین نیستند، بنابراین سعی می کنیم آن‌ها را با قانون اهم بیابیم. در دو سر هر یک از سه مقاومت ولتاژ  $v_1$  برقرار است و به توجه به آن جمع جریان‌های وارده به سمت راست ترین گره را می نویسیم:

$$-\frac{v_1}{100} - 2.5 - \frac{v_1}{10} + 0.2v_1 - \frac{v_1}{25} = 0$$

با حل آن  $v_1 = 250/5 = 50V$  خواهد بود.

با نگاهی به پایین مدار داریم:

$$i_4 = \frac{-v_1}{100} = -\frac{50}{100} = -0.5A$$

بطریقی مشابه  $i_1 = -2A$  به دست می آید. دو جریان باقیمانده  $i_2$  و  $i_3$  با به کارگیری جمع جریان‌های معلوم گره‌های سمت راست و چپ به دست می آید. بنابراین:

$$i_2 = i_1 + 0.2v_1 + i_{10} = -2 + 10 - 5 = 3A$$

و

$$i_3 = i_{10} - 2.5 + i_4 = -5 - 2.5 - 0.5 = -8A$$

### ۳-۶ منابع مستقل سری و موازی

به نظر می رسد که می توان با ترکیب منابع از نوشتن برخی معادلات در مدارهای سری یا موازی پرهیز کرد. با این وجود، دقت کنید که روابط جریان، ولتاژ و توان در بخش‌های دیگر مدار

سپس قانون اهم را به کار می‌بریم:

$$i_1 = 60A \quad \text{و} \quad i_2 = 30A$$

توان جذب شده در هر عنصر، اکنون محاسبه می‌شود. در دو مقاومت:

$$P_{R1} = 30(2)^2 = 120W \quad \text{و} \quad P_{R2} = 15(2)^2 = 60W$$

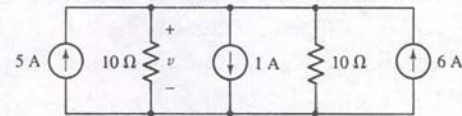
و برای دو منبع داریم:

$$P_{120A} = 120(-2) = -240W \quad \text{و} \quad P_{30A} = 30(2) = 60W$$

چون منبع  $120A$  توان منفی  $240W$  را جذب می‌کند، این توان در واقع توان تولیدی برای دیگر عناصر مدار است. به نحوی مشابه، می‌بینیم که منبع  $30-A$  به جای تولید، در واقع توان جذب می‌نماید.

### تمرین

۳-۶ ۷ را در مدار شکل ۳-۱۵ معین کنید.

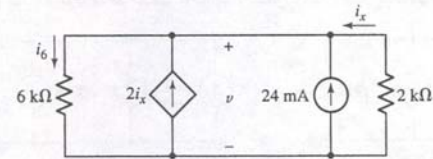


شکل ۳-۱۵

جواب:  $50V$ .

مثال ۳-۷

مقدار ۷ و توان تولیدی به وسیله منبع جریان مستقل در شکل ۳-۱۶ را به دست آورید.



شکل ۳-۱۶ ولتاژ ۷ و جریان  $i_6$  در مدار جفت‌گرهی حاوی منبع وابسته مشخص شده‌اند.

با به کارگیری KCL، جمع جریان‌هایی که گره بالایی را ترک می‌کنند باید صفر باشد، به نحوی که:

$$i_6 - 2i_x - 0.024 - i_x = 0$$

دوباره توجه کنید که علی‌رغم نامشخص بودن جریان تا پایان تحلیل، مقدار منبع وابسته ( $2i_x$ ) همچون جریان معمولی در نظر گرفته می‌شود.

اکنون قانون اهم را به هر مقاومت اعمال می‌نماییم:

$$i_6 = \frac{v}{6000} \quad \text{و} \quad i_x = \frac{-v}{2000}$$

بنابراین:

$$\frac{v}{6000} - 2\left(\frac{-v}{2000}\right) - 0.024 - \left(\frac{-v}{2000}\right) = 0$$

$$\text{و لذا } v = (600)(0.024) = 14.4V$$

اکنون هر اطلاعات دیگری که بخواهیم به راحتی حاصل می‌شود. مثلاً، توان تولیدی به وسیله منبع مستقل،  $P_{24} = 14.4(0.024) = 0.3456 W (345.6mW)$ ، است.

### تمرین

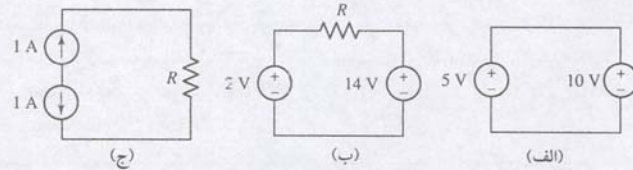
۳-۷ برای مدار جفت‌گرهی شکل ۳-۱۷،  $i_A$ ،  $i_B$  و  $i_C$  را به دست آورید.

جواب:  $3A$ ،  $-5.4A$  و  $6A$ .



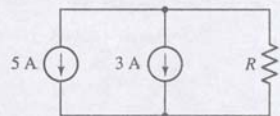
## مثال ۳-۱۰

شکل ۳-۲۲ (الف) تا (ج) مثال‌هایی از مدارهای چندمنبعی که بعضی از آن‌ها از قانون کیرشهف تبعیت نمی‌کنند.



در شکل ۳-۲۲ (الف)، مدار از دو منبع موازی تشکیل شده است. مقدار هر منبع متفاوت است، پس این مدار قانون ولتاژ کیرشهف را نقض می‌نماید. مثلاً اگر مقاومتی با منبع 5V موازی شود، با منبع 10V هم موازی است. بنابراین ولتاژ واقعی دو سر آن مبهم است، و آن‌طور که بیان شده است قابل ساخت نیست. اگر به‌طور واقعی سعی در ساخت چنین مداری کنیم، درمی‌یابیم که ایجاد یک منبع ولتاژ ایده‌آل غیرممکن است، یعنی همه منابع واقعی دارای مقاومت داخلی‌اند. وجود چنین مقاومتی اختلاف ولتاژ را بین دو منبع واقعی به‌وجود می‌آورد. در این راستا مدار شکل ۳-۲۲ (ب) کاملاً معتبر است. مدار شکل ۳-۲۲ (ج)، قانون KCL را نقض می‌کند، زیرا جریان داخل مقاومت R نامشخص است.

## تمرین



شکل ۳-۲۳

اکثراً می‌توانیم ترکیبات پیچیده‌ای از مقاومت را با یک مقاومت معادل ساده جایگزین کنیم. این کار در مواردی مفید است که کاری با جریان، ولتاژ یا توان هیچ‌یک از مقاومت‌های مذکور نداشته باشیم. با این جایگزینی همه مقادیر جریان، ولتاژ و توان در بقیه مدار ثابت باقی می‌مانند.

ترکیب سری N مقاومتی شکل ۳-۲۴ (الف) را ملاحظه نمایید. می‌خواهیم N مقاومت را با یک مقاومت معادل  $R_{eq}$  به نحوی جایگزین کنیم که بقیه مدار، در این حالت خاص منبع ولتاژ، تغییری را حس نکند. جریان، ولتاژ و توان منبع قبل و بعد از جابه‌جایی نباید تغییر کنند.

در گام اول KVL را اعمال می‌کنیم:

$$v_s = v_1 + v_2 + \dots + v_N$$

و سپس قانون اهم را به کار می‌بریم:

$$v_s = R_1 i + R_2 i + \dots + R_N i = (R_1 + R_2 + \dots + R_N) i$$

اکنون این نتیجه را با معادله ساده اعمال‌شده در مدار معادل شکل ۳-۲۴ (ب) مقایسه می‌نماییم:

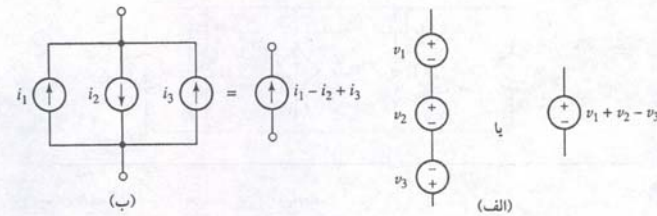
$$v_s = R_{eq} i$$

بنابراین مقدار مقاومت معادل برای N مقاومت سری چنین است:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (A)$$

پس می‌توانیم یک شبکه دو پایانه متشکل از N مقاومت سری را با یک مقاومت دو پایانه  $R_{eq}$  جایگزین کنیم و همان رابطه  $i-v$  را داشته باشیم.

شکل ۳-۲۴ (الف) ترکیب سری N مقاومت. (ب) مدار معادل التکریکی.



باید بدون تغییر باقی بماند. مثلاً چند منبع ولتاژ سری را می‌توان با یک منبع ولتاژ معادل با جمع جبری همه منابع جایگزین کرد، شکل ۳-۱۹ (الف). منابع جریان موازی هم قابل ترکیب بوده معادل آن‌ها از جمع جبری همه منابع جریان‌ها به‌دست می‌آید، و دیگر عناصر موازی دوباره مطابق میل می‌توانند مرتب شوند (شکل ۳-۱۹ (ب)).

جریان داخل مقاومت  $470 \Omega$  در شکل ۳-۲۰ (الف) را با ترکیب چهار منبع به یک منبع ولتاژ به دست آورید.

ما چهار منبع ولتاژ داریم که به‌طور سری به هم وصل شده‌اند. با جایگزینی آن‌ها با یک منبع تک‌ولتاژ که قطب مثبت آن در بالا باشد، از نقطه پایانه مرجع "+" منبع 3V شروع می‌کنیم و چنین می‌نویسیم:

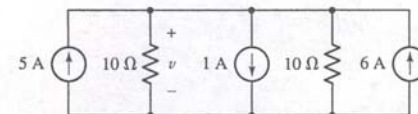
$$+3 + 5 - 1 + 2 = 9 \text{ V}$$

مدار معادل در شکل ۳-۲۰ (ب) مشاهده می‌شود. اکنون  $i$  را با قانون اهم به دست می‌آوریم:

$$i = \frac{9}{470} = 19.15 \text{ mA}$$

معمولاً از ترکیب یک منبع وابسته در ترکیب منبع ولتاژ یا جریان چیزی عایدمان نمی‌شود، ولی انجام آن غلط نیست.

۳-۸ مقدار  $i$  را در شکل ۳-۲۱ با ترکیب سه منبع جریان معین کنید.  
جواب: 50V

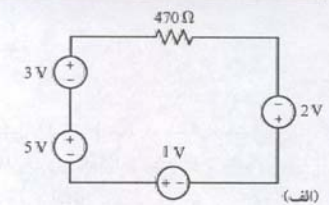


شکل ۳-۲۱

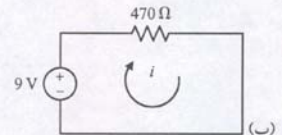
به‌منظور جمع‌بندی از بحث ترکیب منابع سری و موازی، ترکیب موازی دو منبع ولتاژ و ترکیب سری دو منبع جریان را ملاحظه خواهیم کرد. مثلاً معادل یک منبع ولتاژ 5V موازی با منبع ولتاژ 10V چقدر است؟ بنا به تعریف یک منبع ولتاژ، ولتاژ دو سر منبع نمی‌تواند تغییر نماید. در این صورت با توجه به قانون ولتاژ کیرشهف 5 برابر با 10 شده و یک وضعیت غیرممکن فیزیکی خواهیم داشت. بنابراین فقط هنگامی دو منبع ایده‌آل می‌توانند به‌طور موازی به هم وصل شوند که در هر لحظه ولتاژ پایانه برابری داشته باشند. به‌همین ترتیب دو منبع جریان به‌طور سری بسته نمی‌شوند، مگر این‌که جریان هر کدام با دیگری همراه با علامت در هر لحظه برابر باشد.

شکل ۳-۱۹ (الف) منابع ولتاژ سری را می‌توان با یک منبع ولتاژ جایگزین نمود. (ب) منابع جریان موازی را می‌توان با یک منبع جریان جایگزین کرد.

## مثال ۳-۹



(الف)



(ب)

شکل ۳-۲۰ (الف) یک مدار حلقوی ساده حاوی چهار منبع ولتاژ به‌طور سری. (ب) مدار معادل.

## تمرین



و یا برحسب هدایت به شکل زیر نوشته می شود:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_N$$

مدار ساده شده در شکل ۳-۲۷ (ب) ملاحظه می گردد.

ترکیب موازی عناصر با رابطه ساده زیر نمایش داده می شود:

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 \parallel R_3$$

حالت خاص دو مقاومتی اغلب در مدارها مشاهده شده و معاد آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

یا ساده تر بگوییم:

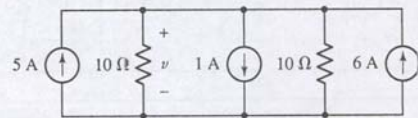
$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (۱۰)$$

حفظ آخرین رابطه توصیه می شود ولی به خاطر سپردن حالت کلی معادله (۸) با بیش از دو مقاومت، خطا است. مثلاً

$$R_{eq} \neq \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

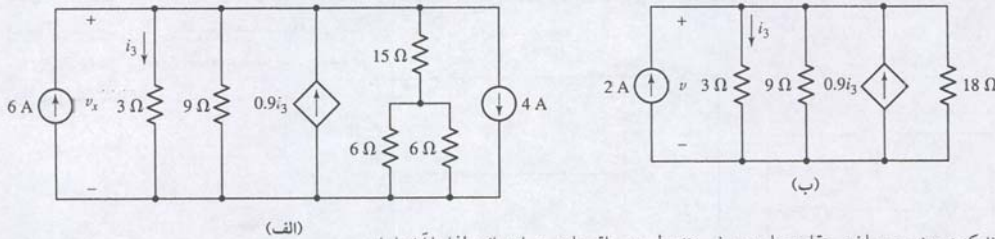
نگاهی سریع به واحدهای این معادله نشان می دهد که این عبارت نمی تواند صحیح باشد.

۳-۱۱ با ترکیب سه منبع جریان و سپس دو مقاومت  $10\Omega$ ، مقدار  $7V$  را در شکل ۳-۲۸ به دست آورید.  
جواب:  $50V$



شکل ۳-۲۸

توان و ولتاژ منبع وابسته به شکل ۳-۲۹ (الف) را محاسبه نمایید.



(الف)

هرچند که دو منبع جریان مستقل مجاور هم نیستند ولی در واقع با هم موازی اند، لذا ما آن ها را با یک منبع  $2A$  جایگزین می کنیم.

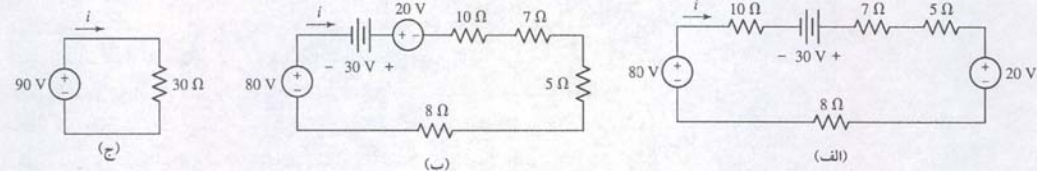
دو مقاومت  $6\Omega$  هم موازی و با یک مقاومت  $3\Omega$  سری با  $15\Omega$  جایگزین می شوند. بنابراین دو مقاومت  $6\Omega$  و مقاومت  $15\Omega$  با مقاومت  $18\Omega$  جایگزین شده است (شکل ۳-۲۹ (ب)). بدون توجه به انگیزه، ما نباید سه مقاومت باقیمانده را با هم ترکیب کنیم. کنترل متغیر  $i_3$  به مقاومت  $3\Omega$  وابسته است و بنابراین مقاومت مذکور باید دست نخورده باقی بماند. تنها ساده سازی اضافه تر طبق شکل ۳-۲۹ (ج)،  $6\Omega \parallel 18\Omega = 9\Omega$  است.

دوباره تأکید می کنیم که اگر بخواهیم جریان، ولتاژ و یا توان یکی از عناصر اصلی را بدانیم نباید آن را با عناصر دیگر ترکیب کنیم. مثلاً اگر ولتاژ منبع ولتاژ وابسته، به ولتاژ دوسر  $R_3$  بستگی داشته باشد، به محض ترکیب  $R_3$  با چند مقاومت برای یافتن مقاومت معادل، موجودیت آن از بین رفته و دیگر نمی توان آن را محاسبه کرد، مگر این که  $R_3$  شناسایی شده و از ترکیب کنار گذاشته شود. در این حال بهتر است به عملیات آینده توجه داشته و از همان اول  $R_3$  را بخشی از ترکیب ندانیم. نکته ای دیگر: بررسی معادله KVL برای یک مدار سری نشان می دهد که ترتیب عناصر در نتیجه حاصل تأثیری ندارد.



### مثال ۳-۱۱

با استفاده از ترکیب مقاومت ها و نیز منابع، جریان  $i$  و توان تولیدی به وسیله منبع  $80V$  را در شکل ۳-۲۵ (الف) به دست آورید.



ابتدا محل عناصر را در شکل جابه جا می کنیم به نحوی که منابع پهلوی هم و مقاومت هانیز پهلوی هم قرار گیرند (شکل ۳-۲۵ (ب)). قدم بعدی تبدیل سه منبع به یک منبع معادل  $90V$ ، و چهار مقاومت به یک مقاومت معادل  $30\Omega$  است (شکل ۳-۲۵ (ج)). بنابراین در عوض نوشتن رابطه

$$-80 + 10i - 30 + 7i + 5i + 20 + 8i = 0$$

رابطه ساده زیر را داریم:

$$-90 + 30i = 0$$

و به این ترتیب خواهیم داشت:

$$i = 3A$$

برای محاسبه توان تولیدی به وسیله منبع  $80V$  و انتقال آن به مدار، لازم است با علم به  $3A$  بودن جریان به شکل ۳-۲۵ (الف) بازگردیم. در این صورت توان مطلوب  $80V \times 3A = 240W$  خواهد بود.

جالب است توجه کنیم که هیچ یک از عناصر مدار اصلی در مدار معادل حضور ندارند.

### تمرین

۳-۱۰  $i$  را در مدار شکل ۳-۲۶ معین کنید.  
جواب:  $-333mA$

ساده سازی مشابهی را می توان به مدارهای موازی اعمال کرد. در مداری با  $N$  مقاومت موازی طبق شکل ۳-۲۷ (الف) معادله KCL چنین نوشته می شود:

$$i_s = i_1 + i_2 + \dots + i_N$$

یا

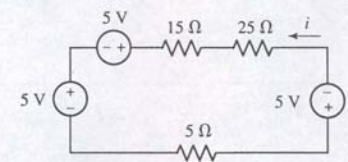
$$i_s = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \dots + \frac{v}{R_N} = \frac{v}{R_{eq}}$$

و یا

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad (۹)$$

که به صورت

$$R_{eq}^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} + \dots + R_N^{-1}$$

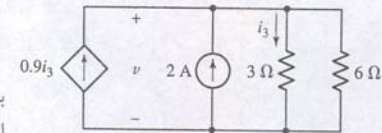


شکل ۳-۲۶

### تمرین

### مثال ۳-۱۲





(ج)

شکل ۳-۲۹ (ج) مدار معادل ساده‌شده.

با اعمال KCL به گره بالایی در شکل ۳-۲۹ (ج) داریم:

$$-0.9i_3 - 2 + i_3 + \frac{v}{6} = 0$$

برای تعیین ولتاژ  $v$  در دو سر منبع وابسته، ابتدا جریان کنترلی  $i_3$  را به دست می‌آوریم. با قانون اهم داریم:

$$v = 3i_3$$

که به ما اجازه می‌دهد تا کمیت  $i_3$  را محاسبه کنیم.

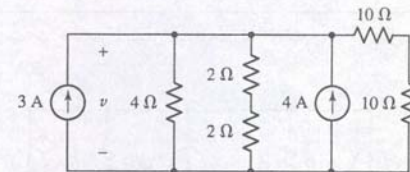
$$i_3 = \frac{10}{3} \text{ A}$$

بنابراین ولتاژ دو سر منبع وابسته (که برابر ولتاژ در دو سر مقاومت  $3\Omega$  است):

$$v = 3i_3 = 10 \text{ V}$$

پس توان تحویلی توسط منبع وابسته به بقیه مدار  $10(0.9)(10/3) = 30 \text{ W}$  است. اکنون اگر بخواهیم توان تلف‌شده در مقاومت  $15\Omega$  را محاسبه نماییم باید به مدار اصلی بازگردیم. این مقاومت با مقاومت معادل  $3\Omega$  سری شده و ولتاژ دو سر این ترکیب  $10 \text{ V}$  است. بنابراین جریان  $5/9 \text{ A}$  از مقاومت  $15\Omega$  عبور کرده و توان جذب‌شده به وسیله آن  $(5/9)^2(15)$  یا  $4.63 \text{ W}$  خواهد شد.

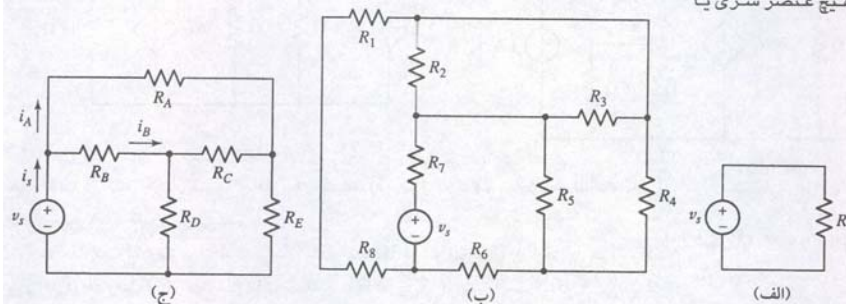
## تمرین

۳-۱۲ برای مدار شکل ۳-۳۰، ولتاژ  $v$  را بیابید.جواب:  $12.73 \text{ V}$ 

شکل ۳-۳۰

سه نکته دیگر برای ترکیب‌های سری و موازی باقی مانده است. نکته اول با توجه به شکل ۳-۳۱ (الف) و طرح سوال "آیا  $v_s$  و  $R$  سری‌اند یا موازی؟" ارائه می‌گردد. جواب "هر دو" است. هر دو عنصر جریان برابری را حمل می‌کنند و بنابراین سری‌اند. این دو، ولتاژ برابری را نیز دارا هستند، پس موازی‌اند.

شکل ۳-۳۱ (الف) عناصر این مدار هم سری و هم موازی‌اند. (ب)  $R_2$  و  $R_3$  موازی‌اند و  $R_1$  و  $R_8$  سری‌اند. (ج) در این مدار هیچ عنصر سری یا موازی وجود ندارد.



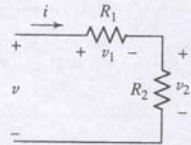
(الف)

(ب)

(ج)

## ۳-۸ تقسیم ولتاژ و جریان

دومین نکته هشجاری است. ممکن است مدار توسط دانشجوی کم تجربه و با مربی زیرکی طوری ترسیم شود که به راحتی قابل تشخیص نباشد. مثلاً در شکل ۳-۳۱ (ب) تنها مقاومت‌های  $R_2$  و  $R_3$  به‌طور موازی بسته شده‌اند و  $R_1$  و  $R_8$  هم تنها مقاومت‌های سری‌اند. آخرین نکته این که لزومی ندارد یک عنصر ساده با عنصر ساده دیگری در مدار، سری یا موازی باشد. مثلاً  $R_4$  و  $R_5$  در شکل ۳-۳۱ (ب) با هیچ یک از عناصر ساده دیگر سری یا موازی نیستند، و نیز در شکل ۳-۳۱ (ج) عنصر مداری ساده‌ای وجود ندارد که با دیگر عنصر مدار، سری یا موازی باشد. به بیان دیگر با به کارگیری هیچ تکنیکی بیش از این نمی‌توان مدار را ساده‌تر کرد.



شکل ۳-۳۲ نمایش تقسیم ولتاژ.

با ترکیب مقاومت‌ها و منابع روشی را برای کاهش تحلیل یک مدار یافتیم. تکنیک مفید دیگر در کاهش تحلیل، کاربرد تقسیم ولتاژ و جریان است. تقسیم ولتاژ برای بیان ولتاژ دو سر یکی از چند مقاومت سری، برحسب ولتاژ دو سر ترکیب آن‌ها ست. در شکل ۳-۳۲، ولتاژ دو سر  $R_2$  با KVL و قانون اهم به دست می‌آید:

$$v = v_1 + v_2 = iR_1 + iR_2 = i(R_1 + R_2)$$

بنابراین:

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2}$$

پس

$$v_2 = iR_2 = \left(\frac{v}{R_1 + R_2}\right)R_2$$

یا

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

و به این ترتیب ولتاژ دو سر  $R_1$  برابر است با:

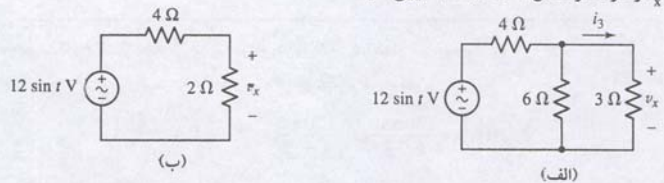
$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v$$

اگر در مدار شکل ۳-۳۲ به جای  $R_2$  ترکیب سری  $R_2$ ،  $R_3$ ، ...،  $R_N$  داشته باشیم، فرم کلی تقسیم ولتاژ در دو سر  $N$  مقاومت سری چنین است:

$$v_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} v \quad (11)$$

که امکان محاسبه ولتاژ  $v_k$  را در دو سر یک مقاومت اختیاری  $R_k$  فراهم می‌سازد:

$v_x$  را در مدار شکل ۳-۳۳ (الف) تعیین کنید.



(الف)

(ب)

ابتدا با مقاومت‌های  $6\Omega$  و  $3\Omega$  را ترکیب کرده و آن‌ها را با  $2\Omega$  برابر می‌نماییم. چون  $v_x$  در دو سر ترکیب موازی برقرار است، ساده‌سازی موجب از دست رفتن این کمیت نمی‌گردد. با این وجود در ادامه ساده‌سازی مدار که از جایگزینی مقاومت  $4\Omega$  با این مقاومت ۲ اهمی صورت می‌گیرد این اشکال به وجود خواهد آمد.



شکل ۳-۳۳ مثالی عددی که ترکیب مقاومت‌ها و تقسیم ولتاژ را نشان می‌دهد. (الف) مدار اصلی. (ب) مدار ساده‌شده.

مثال ۳-۱۳

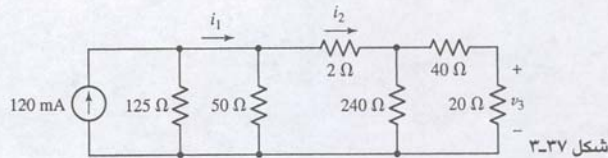


متاسفانه تقسیم جریان هنگامی که قابل اعمال نیست، به کار برده می شود. مثلاً دوباره مدار شکل ۳-۳۱ (ج) را ملاحظه کنید. قبلاً دیدیم که در این مدار هیچ عنصری موازی با سری نیست. بدون مقاومت موازی نمی توان تقسیم جریان را به کار برد. با وجود این دانشجویان زیادی هستند که با نگاهی سریع به مقاومت های  $R_A$  و  $R_B$  رابطه غلط زیر را هم بنویسند:

$$i_A \neq i_s \frac{R_B}{R_A + R_B}$$

توجه داشته باشید که مقاومت های موازی باید شاخه هایی بین یک جفت گره باشند.

۳-۱۴ در مدار شکل ۳-۲۷، با روش ترکیب مقاومت ها و تقسیم جریان  $i_1$ ،  $i_2$  و  $i_3$  را بیابید. جواب:  $100\text{mA}$ ،  $50\text{mA}$  و  $0.8\text{V}$ .



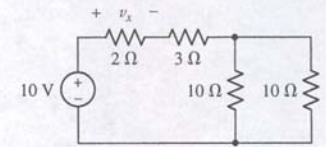
## ۳-۹ خلاصه فصل و مرور

- قانون جریان کیرشهف (KCL) چنین بیان می کند که جمع جبری جریان های وارده به هر گروه صفر است.
- قانون ولتاژ کیرشهف (KVL) بیان می کند که جمع جبری ولتاژهای حول یک مسیر بسته در یک مدار صفر است.
- همه عناصری که جریان یکسانی را حمل می کنند، به طور سری به هم متصل اند.
- همه عناصر یک مدار که در دو سر آنها ولتاژ مشترکی برقرار است موازی نامیده می شوند.
- ترکیب سری  $N$  مقاومت را می توان با یک مقاومت  $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$  جایگزین کرد.
- ترکیب موازی  $N$  مقاومت را می توان با یک مقاومت معادل که مقدار زیر را دارد جایگزین نمود:
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$
- منابع ولتاژ سری با یک منبع قابل تعویضند. به پلاریته هر یک باید خصوصاً توجه نمود.
- منابع جریان موازی را می توان با یک منبع تعویض کرد. به جهت جریان هر منبع باید دقت نمود.
- تقسیم ولتاژ این امکان را فراهم می سازد که بدانیم چه کسری از ولتاژ کل دو سر همه مقاومت های سری در دو سر هر یک از مقاومت ها، افت پیدا می کند.
- تقسیم جریان اجازه می دهد تا بدانیم چه کسری از جریان کل موجود در همه مقاومت های موازی، در یکی از مقاومت ها جریان دارد.

اینک تقسیم ولتاژ را به مدار شکل ۳-۳۳ (ب) اعمال می نماییم.

$$v_x = (12 \sin t) \frac{2}{4+2} = 4 \sin t \text{ volts}$$

۳-۱۳ برای تعیین  $v_x$  در مدار شکل ۳-۲۴، تقسیم ولتاژ را به کار ببرید. جواب:  $2\text{V}$ .



شکل ۳-۲۴

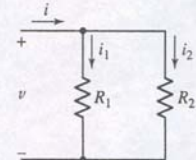
$$i_2 = \frac{v}{R_2} = \frac{i(R_1 \parallel R_2)}{R_2} = \frac{i}{R_2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

یا

$$i_2 = i \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (12)$$

و به طور مشابه:

$$i_1 = i \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (13)$$



شکل ۳-۳۵ نمونه ای از تقسیم جریان.

هنوز از طبیعت و ساختار این دو معادله چندان خوشنود نیستیم، چون ضرایب در دو معادله فوق با ضرایب متعلق به تقسیم ولتاژ تفاوت دارد و باید سعی کنیم از بروز هر گونه خطایی جلوگیری شود. بسیاری از دانشجویان رابطه تقسیم ولتاژ را "ساده" ولی رابطه جریان را "مشکل" می پندارند. برای جلوگیری از اشتباه باید به خاطر سپرد که مقاومت بزرگ تر در میان دو مقاومت موازی، همیشه جریان کمتری را از خود عبور می دهد. برای ترکیب موازی  $N$  مقاومت، جریان درون  $R_k$  برابر است با:

$$i_k = i \frac{\frac{1}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}} \quad (14)$$

و اگر آن را بر حسب هدایت بنویسیم:

$$i_k = i \frac{G_k}{G_1 + G_2 + \dots + G_N}$$

که به شدت معادله (۱۱) برای تقسیم ولتاژ را تداوی می کند.

(در شکل ۳-۳۶) عبارتی برای جریان درون  $3\Omega$  در مدار بنویسید.

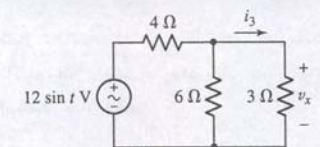
جریان کل در ترکیب دو مقاومت  $3\Omega$  و  $6\Omega$  برابر است با:

$$i(t) = \frac{12 \sin t}{4+3 \parallel 6} = \frac{12 \sin t}{4+2} = 2 \sin t \text{ A}$$

و بنابراین جریان مطلوب با رابطه تقسیم جریان داده می شود:

$$i_3(t) = (2 \sin t) \left( \frac{6}{6+3} \right) = \frac{4}{3} \sin t \text{ A}$$

## مثال ۳-۱۴



شکل ۳-۳۶ مداری که به عنوان مثالی از تقسیم جریان به کار رفته است. خط موج در سمبل منبع ولتاژ به معنی ولتاژ سینوسی متغیر با زمان است.

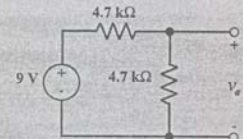


## کاربردهای عملی

## این زمین غیر جغرافیایی

تا بدینجا، ما شماتیک مدارها را مشابه شکل ۳-۳۸ ترسیم می کردیم، و در آن ولتاژها در دو سر دو پایانه مشخص تعریف می شدند. سعی شد از تعریف ولتاژ در یک نقطه جلوگیری شود. دلیل آن هم تعریف اختلاف پتانسیل بین دو نقطه بود. با این وجود، بسیاری از نمودارها از قرارداد تعریف ولتاژ زمین صفر ولت استفاده می کنند، به این ترتیب که همه ولتاژهای دیگر نسبت به آن سنجیده می شود. این مفهوم که زمین<sup>۱</sup> خوانده شده اساساً به قوانین حفاظت برای ممانعت از آتش سوزی، شوک های الکتریکی مخرب و عوارض مربوطه گره خورده است. علامت اتصال زمین در شکل ۳-۳۹ (الف) مشاهده می شود.

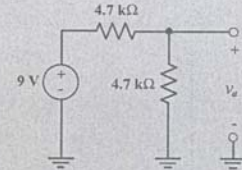
چون اتصال زمین به عنوان مرجع صفر ولت تعریف شده است، غالباً استفاده از آن به عنوان پایانه مشترک رایج است. مدار شکل ۳-۳۸ بر اساس این روش در شکل ۳-۴۰ دوباره ترسیم شده و در آن اتصال زمین با یک گره مشترک نشان داده شده است. توجه داشته باشید که هر دو مدار به لحاظ مقدار  $V_o$  یکی هستند (4.5V) در هر یک از آنها) ولی در واقع آن ها مدار یکسانی نیستند. مدار شکل ۳-۳۸ را "شناور" گوئیم به این علت که می تواند برای هر هدفی عملی، در یک مدار حتی روی یک ماهواره نصب گردد. با این وجود مدار شکل ۳-۴۰ پنحوی به طور فیزیکی از طریق یک مسیر اتصال به زمین وصل شده است. به این علت دو سمبل دیگر نیز گاه برای بیان یک پایانه مشترک به کار می رود. شکل ۳-۳۹ (ب) آن چه را که به نام زمین سیگنال<sup>۲</sup> خوانده می شود، نشان می دهد. غالباً ولتاژ قابل توجهی بین اتصال زمین و هر پایانه زمین سیگنال می تواند وجود داشته باشد (و دارد). این که پایانه مشترک یک مدار ممکن است به بعضی مسیرهای کم مقاومت به صفر زمین وصل باشد یا نباشد، منجر به ایجاد وضعیت خطرناک پتانسیلی می گردد. نمودار شکل ۳-۴۱ (الف) را ملاحظه نمایید، که در آن یک شخص بی گناه می خواهد دستگاهی را که به برق ac وصل است لمس کند. برای سوکت روی دیوار تنها دو سیم در نظر گرفته شده است و سیم سوم آزاد رها شده است. ترمینال مشترک هر مدار در دستگاه به هم وصل و جمعاً به شاسی دستگاه



شکل ۳-۳۸ مدار ساده شده با ولتاژ  $V_o$  بین دو پایانه.



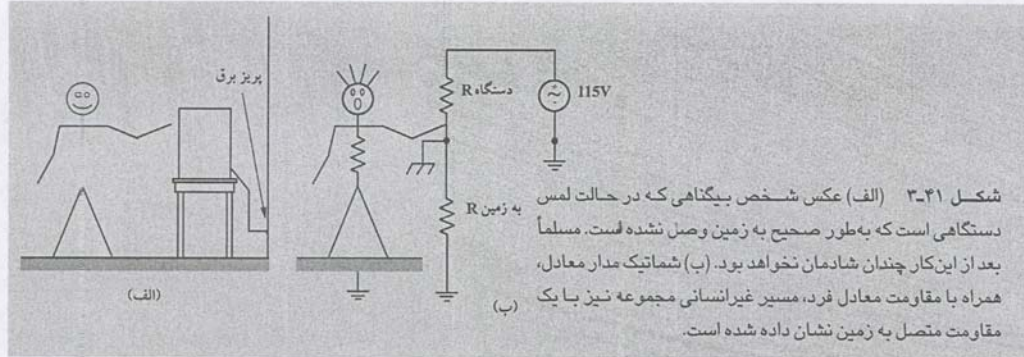
شکل ۳-۳۹ سه سمبل متفاوت برای نمایش اتصال زمین با پایانه مشترک. (الف) زمین، (ب) زمین سیگنال و (ج) زمین شاسی.



شکل ۳-۴۰ مدار شکل ۳-۳۸ با سمبل زمین دوباره رسم شده است. سمبل زمین سمت راست اضافی است. این علامت فقط برای نامگذاری پایانه مثبت و منفی  $V_o$  لازم است.

متصل شده اند. این پایانه اغلب با سمبل زمین شاسی شکل ۳-۳۹ (ج) نشان داده می شود. با این وجود، اتصال الکتریکی به زمین یک مقاومت غیر صفری را می سازد. در هر حالت، دلیلی وجود ندارد که زمین شاسی در سطح ولتاژ زمین باشد. یک شبه نمودار از آنچه که بیان شد در شکل ۳-۴۱ (ب) دیده می شود (در این شکل مقاومت معادل فرد نیز در بدن او کشیده شده است). اگر مقاومت معادل فرد به مقدار قابل توجهی از دیگر مقاومت های واقع در مسیر زمین کمتر باشد، ... اجازه بدهید که دیگر بیش از این سخن نگوییم که چه اتفاقی در پایان افتاده است.

این واقعیت که "زمین" همیشه "زمین واقعی" نیست می تواند موجب ظهور مشکلات عدیده ناشی از پارازیت های الکتریکی گردد. مثالی از این گونه مشکلات گاهی در ساختمان های قدیمی دیده می شود، که در آن ها لوله های آب از مس ساخته می شوند. در این ساختمان ها، از لوله های آب به عنوان مسیرهای کم مقاومت به زمین در بسیاری از ارتباطات برقی استفاده می شود. با این وجود، اگر این لوله ها با لوله های مدرن تر و لوله های عایق PVC جایگزین شوند، دیگر مسیر کم مقاومت وجود ندارد. در محل هایی هم که ترکیب زمین از نقطه ای به نقطه دیگر خیلی متفاوت است مشکل مشابهی مشاهده می شود. در واقع، در چنین مواردی ممکن است بین دو ساختمان زمین یکسانی نباشد و در نتیجه جریانی بین آن ها جاری شود. در این کتاب، سمبل صفر زمین به کار برده خواهد شد. با این وجود، باید به خاطر داشت که همه زمین ها در عمل یکسان نیستند.



شکل ۳-۴۱ (الف) عکس شخص بیگناهی که در حالت لمس دستگاهی است که به طور صحیح به زمین وصل نشده است. مسلماً بعد از این کار چندان شادمان نخواهد بود. (ب) شماتیک مدار معادل، همراه با مقاومت معادل فرد، مسیر غیر انسانی مجموعه نیز با یک مقاومت متصل به زمین نشان داده شده است.

## ۳-۱۰ خوانندگی های کمی

A discussion of the principles of conservation of energy and conservation of charge, as well as Kirchhoff's laws, can be found in

R. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1989, pp. 4-1, 4-7, and 25-9.

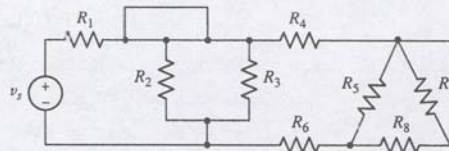
A very detailed discussion of grounding practices consistent with the 1996 National Electrical Code® can be found in

J. F. McPartland and B. J. McPartland, *McGraw-Hill's National Electrical Code® Handbook*, 22nd ed. New York: McGraw-Hill, 1996, pp. 337-485.

## مسائل

## ۳-۱ گره ها، حلقه ها، مسیرها و شاخه ها

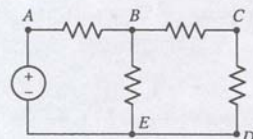
۱. مدار شکل ۳-۴۲ را دوباره بکشید. تعداد گره ها را به حداقل برسانید.



شکل ۳-۴۲

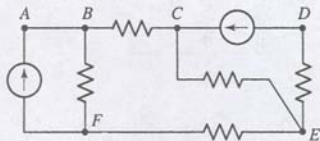
۲. در مدار شکل ۳-۴۲، تعداد (الف) گره ها، (ب) تعداد شاخه ها را بشمارید.

۳. در شکل ۳-۴۳، (الف) چند گره وجود دارد؟ (ب) چند شاخه موجود است؟ و (ج) اگر از A به B به E به D به C و به B برویم، آیا یک مسیر ساخته ایم؟ یا یک حلقه؟



شکل ۳-۴۳

۴. در شکل ۳-۴۴، (الف) چند گره وجود دارد؟ (ب) چند شاخه وجود دارد؟ و (ج) اگر از B به F به E و به C حرکت کنیم، آیا یک مسیر راطی کرده ایم؟ یا یک حلقه را؟



شکل ۳-۴۴

۵. با مراجعه به مدار شکل ۳-۴۳:

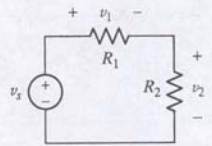
- الف. اگر یک سیم ثانوی بین نقاط E و D از مدار وصل شود. مدار جدید چند گره دارد؟  
ب. اگر یک مقاومت به مدار اضافه شود به نحوی که یک پایانه به نقطه C وصل شود و پایانه دیگر آزاد شود، مدار چند گره دارد؟  
ج. کدام یک از موارد زیر حلقه ها را نشان می دهد؟

۱. حرکت از نقطه A به B به C به D به E به A
۲. حرکت از B به E به A به B
۳. حرکت از B به C به D به E به B
۴. حرکت از A به B به C به A
۵. حرکت از A به B به C به B به A



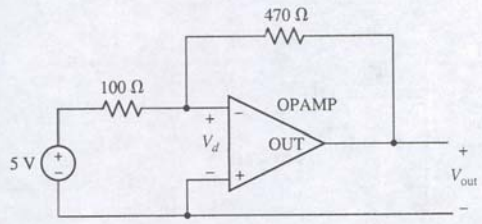
۱۸. مدار ساده شکل ۳-۵۴ را ملاحظه نمایید. با KVL، عبارات زیر را به دست آورید:

$$v_2 = v_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ و } v_1 = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



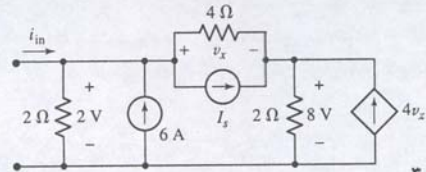
شکل ۳-۵۴

۱۹. مدار شکل ۳-۵۵ شامل یک وسیله به نام op-amp (تقویت‌کننده عملیاتی) است. این وسیله دو خاصیت غیرعادی دارد که در مدار نشان داده شده است: (۱)  $V_d = 0 \text{ V}$  و (۲) هیچ جریانی نمی‌تواند از هر یک از پایانه‌ها داخل شود (با علامت "–" و "+" در داخل نماد)، ولی می‌تواند از خروجی جریان یابد (با "out" علامت خورده است). این وضعیت به ظاهر ناممکن است. که در تقابل مستقیم با KCL است. نتیجه سیم‌های انرژی است که در شکل نشان داده نشده است. بر اساس این اطلاعات،  $V_{out}$  را محاسبه کنید (راهنمایی: دو معادله KVL لازم است، هر دو منبع 5 V شامل می‌شوند).



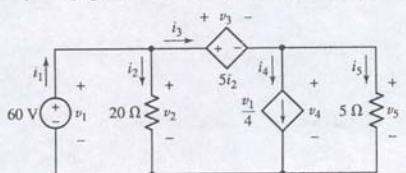
شکل ۳-۵۵

۲۰. قوانین اهم و کیرشهف را در شکل ۳-۵۶ برای یافتن (الف)  $v_x$ ، (ب)  $i_{in}$  و (ج)  $I_s$ ، به کار ببرید. (د) توان تهیه‌شده به وسیله منبع وابسته چقدر است؟

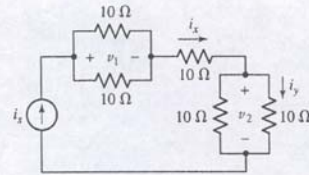


شکل ۳-۵۶

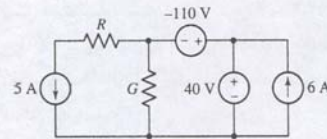
۲۱. (الف) با به کارگیری گام به گام قوانین اهم و کیرشهف، همه جریان‌ها و ولتاژها را در مدار شکل ۳-۵۷ به دست آورید. (ب) توان جذب‌شده به وسیله هر پنج عنصر مدار را محاسبه کنید و نشان دهید که مجموع آن‌ها صفر است.



شکل ۳-۵۷



(الف)

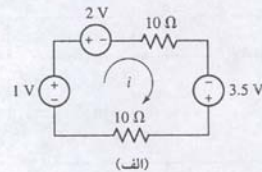


(ب)

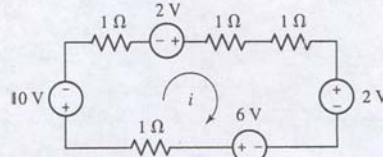
شکل ۳-۵۱

### ۳-۳ قانون ولتاژ کیرشهف

۱۶. در مدار شکل ۳-۵۲ (الف) و (ب) جریان  $i$  را معین نمایید.



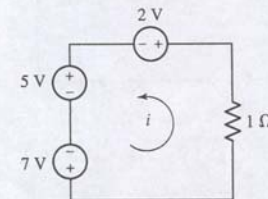
(الف)



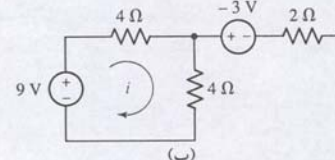
(ب)

شکل ۳-۵۲

۱۷. مقدار  $i$  را در هر یک از مدارهای شکل ۳-۵۳ محاسبه نمایید.



(الف)



(ب)

شکل ۳-۵۳

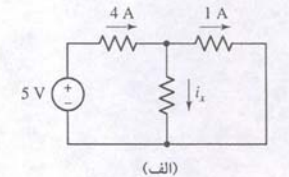
## ۳-۲ قانون جریان کیرشهف

۶. (الف) جریان  $i_z$  در مدار شکل ۳-۴۵ را معین کنید. (ب) اگر مقاومت حمل‌کننده 3A، برابر 1 ohm باشد، مقاومتی که جریان 5A را حمل می‌کند چقدر است؟

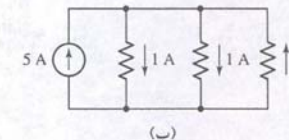


شکل ۳-۴۵

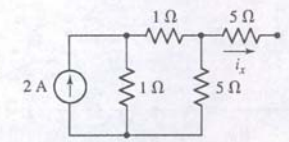
۷. در هر یک از مدارهای شکل ۳-۴۶، جریان  $i_x$  را بیابید.



(الف)



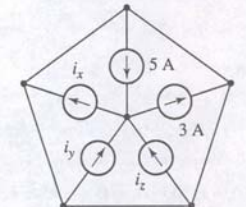
(ب)



(ج)

شکل ۳-۴۶

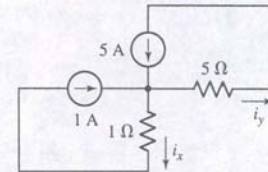
۸. به شکل ۳-۴۷ مراجعه کنید. (الف) اگر  $i_y = 2A$  و  $i_z = 0A$  باشد،  $i_x$  را پیدا کنید. (ب) اگر  $i_x = 2A$  و  $i_z = 2i_y$  باشد،  $i_y$  را به دست آورید. (ج) اگر  $i_x = i_y = i_z$  باشد،  $i_z$  را به دست آورید.



شکل ۳-۴۷

۹.  $i_x$  و  $i_y$  را در مدار شکل ۳-۴۸ بیابید.

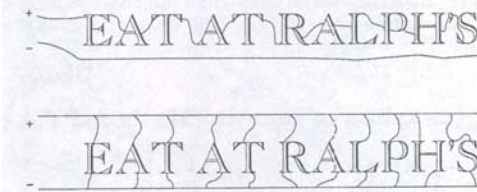
۱۰. یک لامپ حیاتی 100 W، یک لامپ 60 W و یک لامپ 40 W هم به طور موازی بسته شده‌اند و جمعاً به ولتاژ منبع 115 V وصل شده‌اند. جریان در هر لامپ و جریان کل از منبع را بدست آورید.



شکل ۳-۴۸

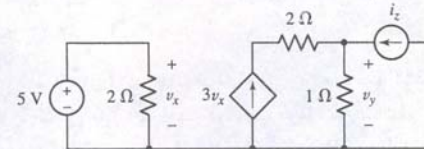
۱۱. یک موسی‌متر دیجیتال (DMM) وسیله‌ای است که عموماً برای اندازه‌گیری ولتاژها به کار می‌رود. این وسیله مجهز به دو سیم (معمولاً قرمز برای مرجع مثبت و سیاه برای مرجع منفی) و یک نمایشگر LCD است. بیابید فرض کنید که یک DMM به مدار شکل ۳-۴۶ (ب) چنان وصل شده که سیم مثبت در گره بالا و سیم منفی در گره پایین باشد. با استفاده از KCL توضیح دهید که چرا به طور ایده‌آل می‌خواهیم DMM به کار رفته دارای مقاومت بینهایت در برابر مقاومت صفر باشد؟

۱۲. یک رستوران محلی دارای تابلوی نئون ساخته‌شده از 12 لامپ جداگانه است؛ وقتی که لامپ خراب شود، مقاومت بینهایت داشته و جریانی نخواهد بود. در سیم‌کشی تابلو سازنده دو راه را پیشنهاد نموده است (شکل ۳-۴۹). از کدام یک KCL را می‌آموزید، مالک رستوران کدام یک را باید انتخاب کند؟ توضیح دهید.



شکل ۳-۴۹

۱۳. در مدار شکل ۳-۵۰، اگر  $i_z = -3A$  باشد،  $v_y$  را محاسبه کنید. (ب) منبع 5V را به چه ولتاژی جایگزین کنیم تا در  $i_z = 0.5A$  ولتاژ  $v_y$  به دست آید؟

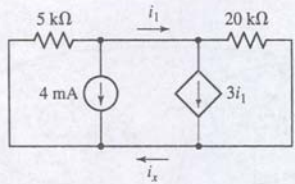


شکل ۳-۵۰

۱۴. با توجه به شکل ۳-۵۱، اگر  $i_x = 5A$  باشد،  $v_1$  و  $i_y$  را بیابید. (ب) اگر  $v_1 = 3V$  باشد،  $i_x$  و  $i_y$  را پیدا کنید. (ج) چه مقداری از  $i_s$  منجر به  $v_1 \neq v_2$  می‌گردد؟

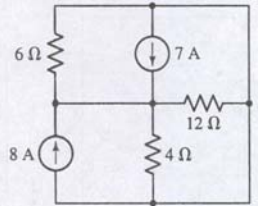
۱۵.  $R$  و  $G$  را در مدار شکل ۳-۵۱ (ب) به دست آورید. با این فرض که منبع 5A، توان 100W و منبع 40V توان 500W را تولید کند.





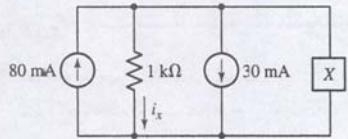
شکل ۳-۶۹

۳.۲۷. توان جذب‌شده به‌وسیله هر عنصر را در مدار جفت‌گره شکل ۳.۲۷۰ بیابید.



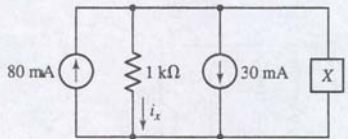
شکل ۳-۷۰

۳.۲۸. توان جذب‌شده به‌وسیله عنصر  $X$  در مدار شکل ۳.۲۷۱ را پیدا کنید به‌شرطی که (الف) مقاومت  $4k\Omega$  باشد، (ب) منبع جریان مستقل  $20mA$ ، پیکان مرجع رو به پایین، (ج) منبع جریان وابسته، پیکان مرجع رو به پایین و با  $2i_x$  برچسب خورده باشد و (د) منبع ولتاژ  $60V$  و قطب  $+$  در بالا باشد.



شکل ۳-۷۱

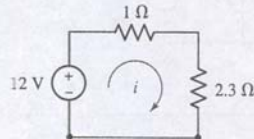
۳.۲۹. (الف) فرض کنید که  $X$  در شکل ۳.۲۷۲، یک منبع جریان مستقل  $i_x$  پیکان رو به بالا باشد، اگر هیچ‌یک از چهار عنصر مدار توانی جذب نکنند،  $i_x$  چقدر است؟ (ب) فرض کنید که عنصر  $X$  یک منبع ولتاژ مستقل، علامت  $+$  در سمت بالا و با علامت  $v_x$  برچسب خورده باشد. گر منبع ولتاژ توانی جذب نکند،  $v_x$  چقدر است؟



شکل ۳-۷۲

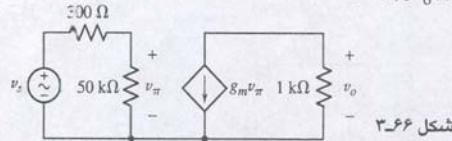
۴.۰. (الف) تکسیک‌های تحلیل جفت‌گره‌ی رابه‌گره سمت راست بالا در شکل ۳.۲۳ اعمال کرده و  $i_x$  را بیابید. (ب) اکنون با گرهِ سمت چپ بالا کار کرده و  $v_x$  را پیدا کنید. (ج) منبع  $5A$  چه توانی را تولید می‌کند؟ ۴.۱. توان جذب‌شده با مقاومت  $5\Omega$  در شکل ۳.۲۴ چقدر است؟ ۴.۲. توان تولیدی به‌وسیله هر منبع در شکل ۳.۲۵ را محاسبه نمایید.

۳.۲۲. با ارجاع به جدول ۲.۴، اگر قطعه سیم تختانی در مدار شکل ۳.۶۵ از نوع مسی 22AWG با طول 3000ft باشد، جریان  $i$  را محاسبه کنید.



شکل ۳-۶۵

۳.۲۳. در شکل ۳.۶۶، اگر  $i_g = 2.5 \times 10^{-3} A$  و  $v_s = 10 \cos 5t \text{ mV}$  باشد  $v_o(t)$  را پیدا کنید.

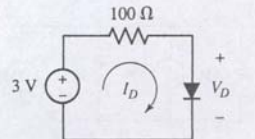


شکل ۳-۶۶

۳.۲۴. قوانین کیرشهف مستقل از قانون اهم روی یک عنصر خاص معتبرند. مثلاً مشخصه  $I-V$  یک دیود با رابطه زیر داده می‌شود:

$$I_D = I_S (e^{V_D/V_T} - 1)$$

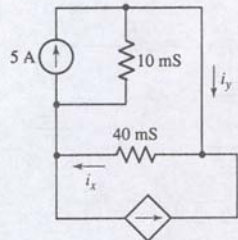
که در آن  $V_T = 27 \text{ mV}$  در دمای اتاق و  $I_S$  می‌تواند بین  $10^{-12} A$  تا  $10^{-3} A$  تغییر نماید. در مدار شکل ۳.۶۷ با استفاده از KVL/KCL،  $V_D$  را به ازای  $I_S = 3 \mu A$  معین کنید (توجه: این مسئله روش حل "تکرار" را برای یافتن حل عددی می‌طلبد. بسیاری از ماشین‌حساب‌ها قادرند این نوع تابع را حل کنند).



شکل ۳-۶۷

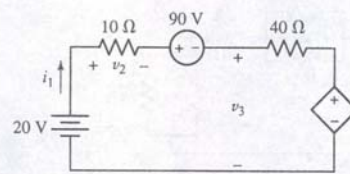
### ۳-۵ مدار زوج تگ‌گره‌ی

۳.۲۵. توان جذب‌شده به‌وسیله هر عنصر از مدار شکل ۳.۶۸ را بیابید به‌شرطی که کنترل منبع وابسته (الف)  $0.8i_x$  و (ب)  $0.8i_y$  باشد.



شکل ۳-۶۸

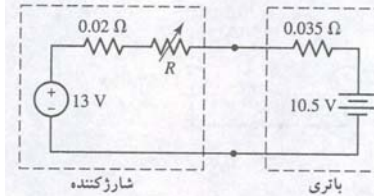
۳.۲۶. در مدار شکل ۳.۶۹،  $i_x$  را پیدا کنید.



شکل ۳-۶۱

۲.۷. در شکل ۳.۶۱ منبع وابسته را  $1.8V_3$  فرض کنید. اگر (الف) منبع  $90V$  توان  $180W$  را تولید کند، (ب) منبع  $90V$  توان  $180W$  را جذب نماید، (ج) منبع وابسته  $100W$  را تولید نماید و (د) منبع وابسته  $100W$  را جذب کند،  $V_3$  را بیابید.

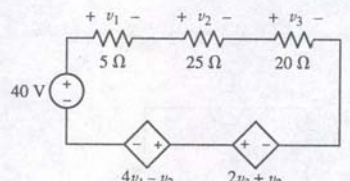
۲.۸. برای مدار شارژ باتری شکل ۳.۶۲ مقدار مقاومت قابل تنظیم را پیدا کنید به‌نحوی که (الف) جریان شارژ  $4A$  باشد. (ب) توان  $25W$  به باتری منتقل گردد ( $10.5V$  و  $0.035\Omega$ ) (ج) ولتاژی برابر  $11V$  در پایانه‌های باتری ایجاد شود ( $10.5V$  و  $0.035\Omega$ ).



شکل ۳-۶۲

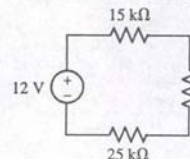
۲.۹. مدار شکل ۳.۶۲ با نصب یک منبع ولتاژ وابسته سری با باتری اصلاح‌شده است. مرجع  $+$  را در پایین قرار دهید و کنترل را  $0.05i$  اختیار نمایید، که  $i$  حلقه جریان ساعتگرد است. جریان و ولتاژ باتری را ضمن لحاظ منبع وابسته، اگر  $R = 0.5\Omega$  باشد، پیدا کنید.

۳.۰. توان جذب‌شده به‌وسیله هر شش عنصر شکل ۳.۶۳ را بیابید.



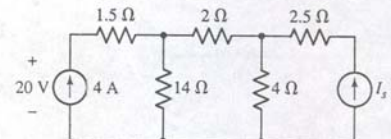
شکل ۳-۶۳

۳.۱. برای مدار شکل ۳.۶۴، (الف) مقاومت  $R$  را طوری تعیین کنید که مقاومت  $25k\Omega$  توان  $2mW$  را جذب نماید. (ب) مقاومت  $R$  را طوری معین کنید که منبع  $12V$ ، توان  $3.6mW$  را به مدار حمل نماید. (ج) مقاومت  $R$  را با یک منبع ولتاژ جایگزین نمایید به‌نحوی که هیچ توانی به وسیله مقاومت‌ها جذب نشود. مدار را رسم کنید و ولاریته منبع جدید را مشخص کنید.



شکل ۳-۶۴

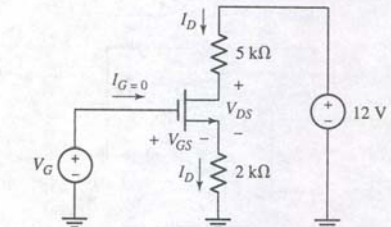
۲.۲. با مراجعه به شکل ۳.۵۸، توان جذب‌شده به‌وسیله هر هفت عنصر مدار را معین کنید.



شکل ۳-۵۸

۲.۳. مداری دارای شش عنصر و چهار گرهِ با شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ است. هر عنصر مداری بین دو گرهِ واقع است. ولتاژ  $V_{12}$  (مرجع در اولین گرهِ) برابر  $12V$  و  $-8V$  است.  $V_{34}$  برابر  $0$  (الف)  $0$ ، (ب)  $6V$  و (ج)  $-6V$  باشد، مقادیر  $V_{13}$ ،  $V_{23}$  و  $V_{24}$  را بیابید.

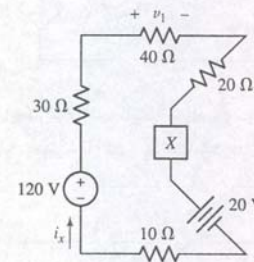
۲.۴. به مدار ترانزیستوری شکل ۳.۵۹ مراجعه کنید. به‌خاطر بسیاری که گرچه روابط ولتاژ-جریان آنرا نمی‌دانیم ولی از KVL و KCL تبعیت می‌کنند. (الف) اگر  $I_D = 1.5mA$  باشد  $V_{DS}$  را محاسبه کنید. (ب) اگر  $I_D = 2mA$  و  $V_G = 3V$  باشد  $V_{GS}$  را محاسبه نمایید.



شکل ۳-۵۹

### ۳-۶ مدار یک‌حلقه‌ای

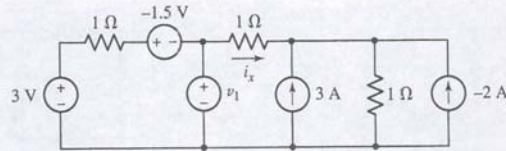
۲.۵. توان جذب‌شده با عنصر  $X$  در شکل ۳.۶۰ را (الف) با مقاومت  $100\Omega$ ، (ب) با منبع ولتاژ مستقل  $40V$  و علامت  $+$  در بالا، (ج) منبع ولتاژ وابسته  $25i_x$  و علامت مرجع  $+$  در بالا، (د) منبع ولتاژ وابسته  $0.8V_1$  و علامت  $+$  در بالا، (ه) منبع جریان مستقل، با پیکان جریان رو به بالا، به‌دست‌آورید.



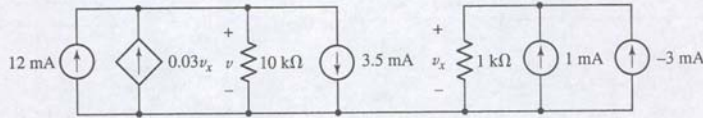
شکل ۳-۶۰

۲.۶.  $i_1$  را در مدار شکل ۳.۶۱ بیابید به‌شرطی که منبع ولتاژ وابسته (الف)  $2V_2$ ، (ب)  $1.5V_3$  و (ج)  $-15i_1$  باشد.



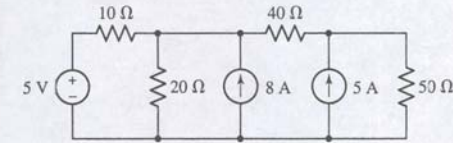


شکل ۳-۸۲

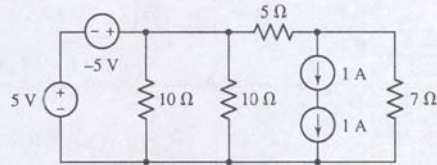


شکل ۳-۸۳

۵۵. با فرض وجود سه مقاومت  $10k\Omega$ ، سه مقاومت  $47k\Omega$  و سه مقاومت  $1k\Omega$  ترکیبات زیر را به دست آورید (لزومی ندارد که همه مقاومت‌ها به کار روند): (الف)  $5k\Omega$ ، (ب)  $47333\Omega$  و (ج)  $29.5k\Omega$ .



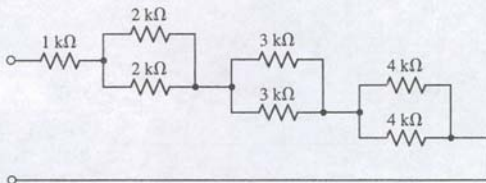
(الف)



(ب)

شکل ۳-۸۷

۵۷. مقاومت معادل را برای مدار شکل ۳-۸۸ حساب نمایید.



شکل ۳-۸۸

۵۸.  $R_{eq}$  را در هر شبکه مقاومتی از شکل ۳-۸۹ بیابید.

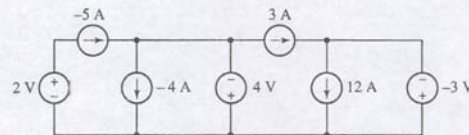
۵۹. در شبکه شکل ۳-۹۰: (الف)  $R = 80\Omega$  را پیدا کنید، (ب) اگر  $R_{eq} = 80\Omega$  باشد،  $R$  را به دست آورید، (ج) اگر  $R_{eq} = R$  باشد،  $R$  را بیابید.

۶۰. نشان دهید که با ترکیب 4 مقاومت  $100\Omega$  چگونه می‌توان مقاومت معادل (الف)  $25\Omega$ ، (ب)  $60\Omega$  و (ج)  $40\Omega$  را به دست آورد.

۵۰. در مدار شکل ۳-۸۲،  $v_1$  را برای دستیابی به  $i_x = 2A$  انتخاب نمایید.

۵۱. ولتاژ  $v_1$  را در مدار شکل ۳-۸۳ پیدا کنید.

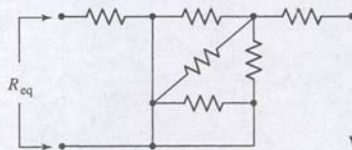
۵۲. مدار شکل ۳-۸۴ حاوی چندین مثال از منابع جریان و ولتاژ سری و موازی است. (الف) توان جذب‌شده به وسیله هر منبع را معین کنید. (ب) برای کاهش توان تولیدی از منبع  $-5A$  به صفر، منبع  $4V$  چقدر باید تغییر نماید.



شکل ۳-۸۴

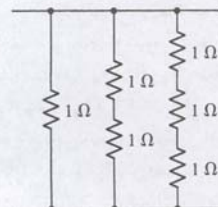
### ۳-۷ مقاومت‌های سری و موازی

۵۳. مقاومت معادل  $R_{eq}$  را در شکل ۳-۸۵ محاسبه نمایید، به شرطی که هر مقاومت  $1k\Omega$  باشد.

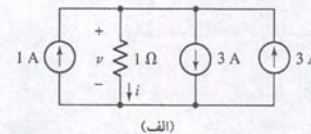


شکل ۳-۸۵

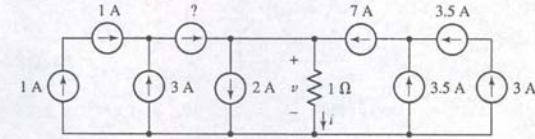
۵۴. برای مدار شکل ۳-۸۶: (الف) مقاومت معادل را محاسبه نمایید. (ب) عبارتی برای مقاومت معادل پیدا کنید. به شرطی که تعداد شاخه‌ها یا انشعاب‌های مدار تا ۳ گسترش یابد، و هر شاخه یک مقاومت بیش از شاخه سمت چپ داشته باشد.



شکل ۳-۸۶

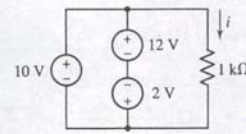


(الف)

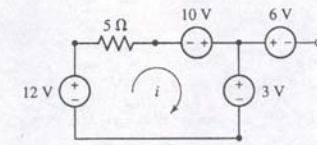


(ب)

شکل ۳-۷۸



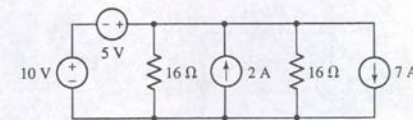
(الف)



(ب)

شکل ۳-۷۹

۴۸. توان جذب‌شده به وسیله هر یک از مقاومت‌های 16 اهم در شکل ۳-۸۰ را بیابید.



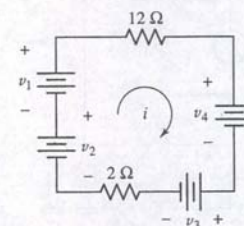
شکل ۳-۸۰

۴۹. برای مدار شکل ۳-۸۱،  $i_x$  را محاسبه کنید به شرطی که:

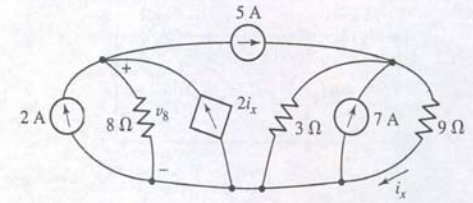
(الف)  $v_1 = v_2 = 10V$  و  $v_3 = v_4 = 6V$

(ب)  $v_1 = v_3 = 3V$  و  $v_2 = v_4 = 2.5V$

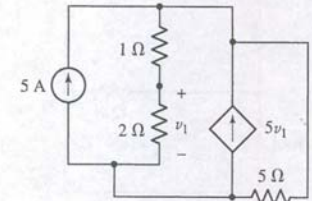
(ج)  $v_1 = -3V$  و  $v_2 = 1.5V$ ،  $v_3 = -0.5V$  و  $v_4 = 0V$  باشد.



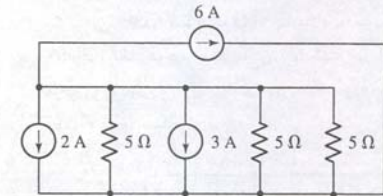
شکل ۳-۸۱



شکل ۳-۷۳

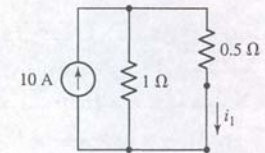


شکل ۳-۷۴



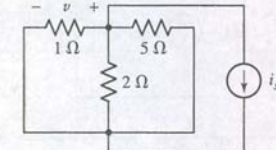
شکل ۳-۷۵

۴۳. با مراجعه به جدول ۲-۴، برای قطعه سیم شکل ۳-۷۶ چقدر سیم مسی شماره 28AWG لازم است تا  $i_1 = 5A$  به دست آید.



شکل ۳-۷۶

۴۴. اگر در مدار شکل ۳-۷۷،  $v = 6V$  باشد،  $i_s$  را بیابید.



شکل ۳-۷۷

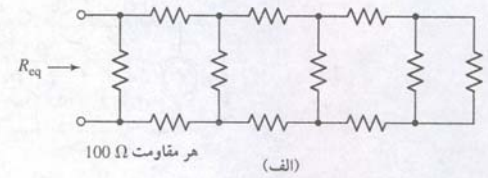
### ۳-۶ منابع متصل سری و موازی

۴۵. با استفاده از ترکیب سری منابع،  $i_x$  را برای هر دو مدار شکل ۳-۷۸ محاسبه کنید.

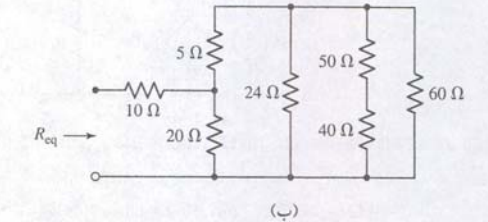
۴۶. برای هر مدار در شکل ۳-۷۸،  $v_1$  را پس از ترکیب منابع، به دست آورید.

۴۷. جریان  $i_x$  را در هر مدار شکل ۳-۷۹ محاسبه نمایید.

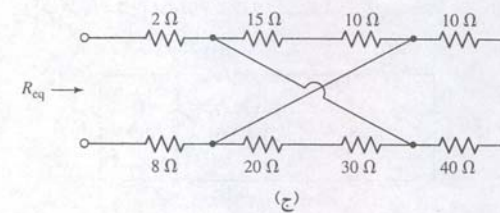




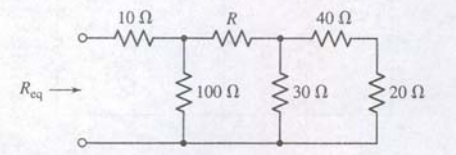
شکل ۳-۹۵



شکل ۳-۹۶

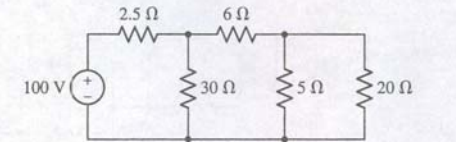


شکل ۳-۹۲



شکل ۳-۹۳

۶۱. توان جذب‌شده توسط هر مقاومت در مدار شکل ۳-۹۱ را پیدا کنید.



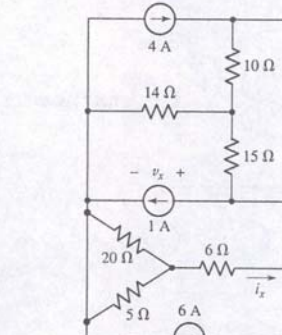
شکل ۳-۹۴

۶۲. از روش ترکیب منبع و مقاومت برای یافتن  $i_x$  و  $v_x$  در شکل ۳-۹۲ استفاده نمایید.

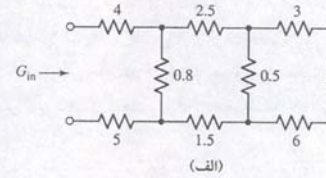
۶۳. در هر یک از شبکه‌های شکل ۳-۹۳،  $G_{in}$  را تعیین نمایید. همه مقادیر به میلی‌زیمنس (mS) هستند.

### ۳-۸ تقسیم ولتاژ و جریان

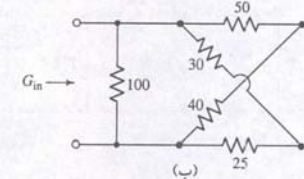
۶۴. از ترکیب مقاومت و منبع و تقسیم جریان در مدار شکل ۳-۹۴ برای یافتن توان جذب‌شده به وسیله مقاومت‌های 15Ω، 10Ω و 13Ω استفاده کنید.



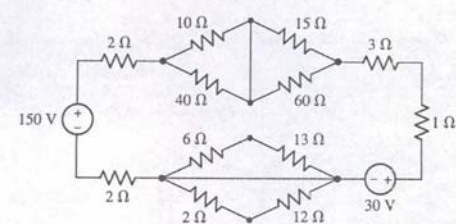
شکل ۳-۹۷



شکل ۳-۹۸



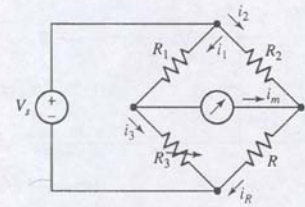
شکل ۳-۹۹



شکل ۳-۱۰۰

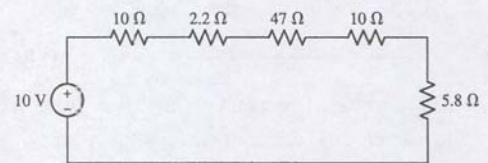
۶۵. پل ویتستون (شکل ۳-۹۵) یکی از شناخته‌شده‌ترین مدارهای الکتریکی است. در اندازه‌گیری مقاومت استفاده می‌شود. مقاومتی که یک پیکان (فلش) بر روی سمبلش دارد ( $R_3$ ) یک مقاومت متغیر است و گاهی به آن پتانسیومتر می‌گویند. مقدار آن می‌تواند با چرخش پیچ ولوم آن، تغییر یابد. آمپرتر که با یک دایره با یک پیکان در داخل آن مشخص شده، جریان درون سیم وسط را اندازه می‌گیرد. ما فرض می‌کنیم که این آمپرتر ایده‌آل است، به نحوی که مقاومت درونی آن صفر است.

طرز کار ساده است. مقدار  $R_1$ ،  $R_2$  و  $R_3$  معلوم‌اند، و مقدار  $R$  موردنظر است. مقاومت  $R_3$  تنظیم می‌شود تا  $i_m = 0$  گردد. به بیان دیگر تازمانی که جریانی از آمپرتر نگذرد، می‌گویند در این نقطه پل بالانس است. با استفاده از KVL و KCL نشان دهید که  $R = \frac{R_2}{R_1} R_3$  (راهنمایی:  $i_1 = i_3$ ،  $i_2 = i_R$  و افت ولتاژی در دو سر آمپرتر نیست).



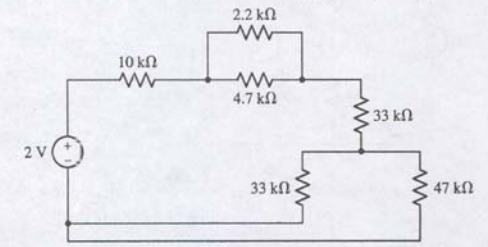
شکل ۳-۱۰۱

۶۶. مدار شکل ۳-۹۶ متشکل از چند مقاومت متصل سری است. از تقسیم ولتاژ استفاده کنید و افت ولتاژ در دو سر کوچک‌ترین مقاومت و بزرگ‌ترین مقاومت را به دست آورید.



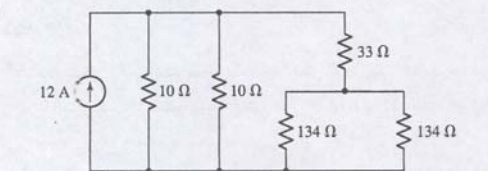
شکل ۳-۱۰۲

۶۷. از تقسیم ولتاژ استفاده کنید و افت ولتاژ را در دو سر مقاومت 47 kΩ در شکل ۳-۹۷ به دست آورید.



شکل ۳-۱۰۳

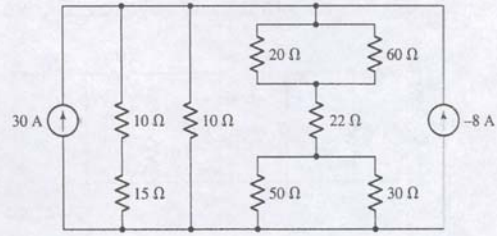
۶۸. با مراجعه به شکل ۳-۹۸، از تقسیم جریان برای محاسبه جریان از بالا به پایین در (الف) مقاومت 33Ω، (ب) مقاومت 134Ω سمت راست استفاده کنید.



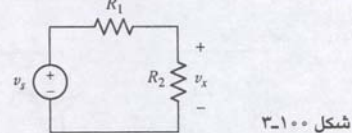
شکل ۳-۱۰۴

۶۹. در شکل ۳-۹۹ ولتاژ دو سر مقاومت 15Ω موردنظر است. از تقسیم جریان برای محاسبه آن استفاده کنید.

۷۰. با انتخاب مقاومت‌های زیر  $v_s$ ،  $R_1$  و  $R_2$  را در شکل ۳-۱۰۰ انتخاب کنید تا  $v_x = 5.5V$  باشد (ممکن است مقاومت‌ها را بیش از یک بار به کار ببرید). [10kΩ و 4.7kΩ، 3.3kΩ، 1kΩ]

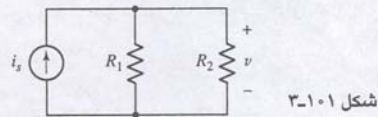


شکل ۳-۱۰۰



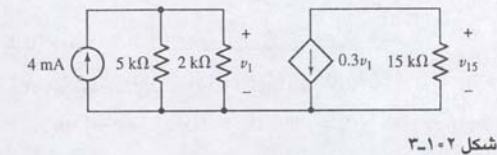
شکل ۳-۱۰۱

۷۱. با انتخاب مقادیر مقاومت زیر (ممکن است بیش از یک بار به کار روند) مقادیر  $i_s$ ،  $R_1$  و  $R_2$  را در شکل ۳-۱۰۱ تنظیم کنید تا  $v = 5.5$  گردد. [10kΩ و 4.7kΩ، 3.3kΩ، 1kΩ]



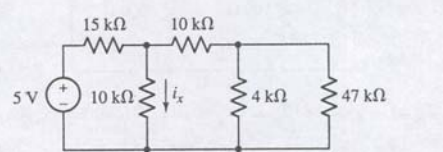
شکل ۳-۱۰۳

۷۲. توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 15kΩ در شکل ۳-۱۰۲ را معین کنید.



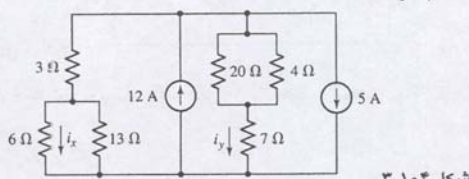
شکل ۳-۱۰۴

۷۳. برای مدار شکل ۳-۱۰۳،  $i_x$  را مشخص کنید و توان جذب‌شده با مقاومت 15kΩ را محاسبه نمایید.



شکل ۳-۱۰۶

۷۴. برای مدار شکل ۳-۱۰۴،  $i_x$  و  $i_y$  را توان تلف‌شده به وسیله مقاومت 3Ω چقدر است؟



شکل ۳-۱۰۷



## فصل چهارم

## تحلیل گرهی و مش

## مقدمه

## مفاهیم کلیدی

## تحلیل گرهی

## آبرگره

## تحلیل مش

## آبرمش

## تحلیل گرهی و تحلیل مش: یک مقایسه

## تحلیل کامپیوتری مدار



تحلیل یک مدار ساده خطی مجهز به قوانین اهم و کیرشهف برای به دست آوردن اطلاعات مفیدی مانند جریان، ولتاژ یا توان مربوط به یک قطعه، شاید نقطه شروعی مستقیم به نظر برسد. حداقل برای بررسی فعلی، هر مدار منحصر به نظر می رسد، و نیاز به خلاقیت برای رسیدن به هدف توسط روش تحلیل دارد. در این فصل، ما تحلیل دو مدار پایه را می آموزیم - یکی تحلیل گرهی و دیگری تحلیل مش (تک حلقه). هر دو روش به ما اجازه می دهند تا مدارهای مختلف متعددی را با یک روش منسجم و سبک دار مورد بررسی و تحقیق قرار دهیم. نتیجه این بررسی تحلیلی پربازده، سطح یکنواختی از پیچیدگی، خطاهای کمتر و شاید بهتر از همه، کاهش عباراتی چون "من نمی دانم حتی چگونه شروع کنم" است.

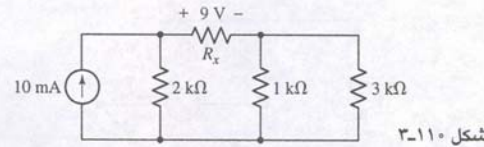
بسیاری از مدارهایی که تاکنون دیده ایم در واقع خیلی ساده بوده اند. با این وجود اینگونه مدارها در کمک به ما برای یادگیری اعمال تکنیک های اساسی، ارزشمند هستند. هرچند مدارهای پیچیده تری که در این فصل آمده اند ممکن است ارائه دهنده انواع سیستم های الکتریکی از جمله مدارهای کنترل، شبکه های مخابراتی، موتورها، یا مدارهای مجتمع و نیز مدلهایی از مدارهای الکتریکی سیستم های غیرالکتریکی باشند، ولی معتقدیم بهتر است یاد بر روی این موارد خاص در این مرحله تأکید نکنیم. بکه بهتر است که در آغاز بر تداولوی حل مسئله توجه نماییم که در سرتاسر کتاب تکمیل خواهد شد.

## ۴-۱ تحلیل گرهی

اروش های ساده سازی مدار را با روش قدرتمند KCL به نام **تحلیل گرهی** آغاز می کنیم. در فصل ۳، ما تحلیل یک مدار ساده با دو گره را ملاحظه نمودیم. دیدیم که قدم اساسی تحلیل، افتن یک معادله یک مجهولی، برای ولتاژ بین دو گره بود.

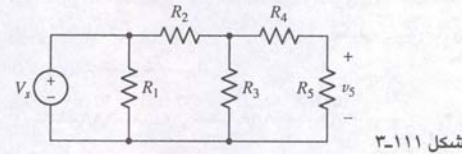
حال تعداد گره ها را افزایش می دهیم و در نتیجه در ازای هر گره اضافی، یک معادله و یک مجهول اضافه می گردد. بنابراین یک مدار سه گرهی، دو ولتاژ مجهول و دو معادله، و یک مدار 11 گرهی تعداد 9 ولتاژ مجهول و 9 معادله دارد و بالاخره یک مدار N گرهی، (N - 1) ولتاژ مجهول و (N - 1) معادله خواهد داشت. هر معادله، در واقع یک معادله ساده KCL است.

برای تشریح تکنیک مدار سه گرهی شکل ۴-۱ (الف) را در نظر می گیریم. در اولین گام، منظور تأکید بر سه گرهی بودن مدار، آن را دوباره طبق شکل ۴-۱ (ب) شماره گذاری می کنیم. هدف تعیین ولتاژ دو سر هر عنصر است و لذا گام بعدی تحلیل حساس خواهد بود. ما یک گره



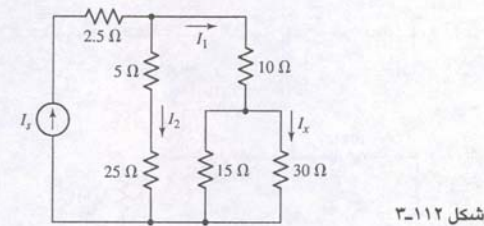
شکل ۳-۱۱

۸۱. با استفاده از تقسیم جریان و ولتاژ عبارتی برای  $V_x$  در شکل ۳-۱۱ بیابید.



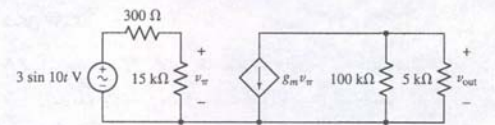
شکل ۳-۱۲

۸۲. در شکل ۳-۱۲، اگر  $I_1 = 12 \text{ mA}$  باشد،  $I_x$  را به دست آورید. (ب) اگر  $I_x = 12 \text{ mA}$  باشد  $I_1$  را پیدا کنید، (ج) اگر  $I_2 = 15 \text{ mA}$  باشد  $I_x$  چقدر است و (د) اگر  $I_s = 60 \text{ mA}$  باشد،  $I_x$  را معین کنید.



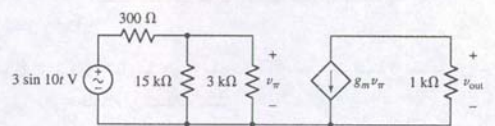
شکل ۳-۱۳

۸۳. مدار شکل ۳-۱۳ معادل رایجی در مدل سازی یک مدار تقویت کننده MOSFET است. اگر  $g_m = 4 \text{ mS}$  باشد،  $V_{out}$  را محاسبه کنید.



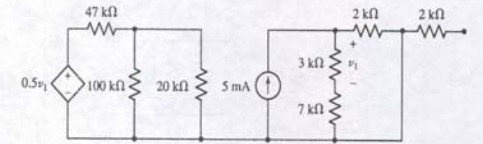
شکل ۳-۱۴

۸۴. مدار شکل ۳-۱۴ مدار معادل رایجی در مدل سازی رفتار ac یک مقدار تقویت کننده ترانزیستور پیوندی دوقطبی است. اگر  $g_m = 38 \text{ mS}$  باشد،  $V_{out}$  را حساب نمایید.



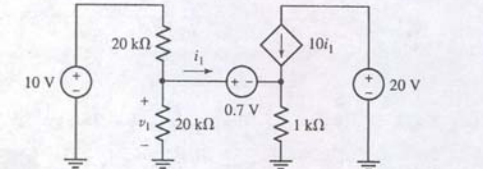
شکل ۳-۱۵

۷۵. توان تلف شده به وسیله مقاومت  $47 \text{ k}\Omega$  در شکل ۳-۱۵ چقدر است؟



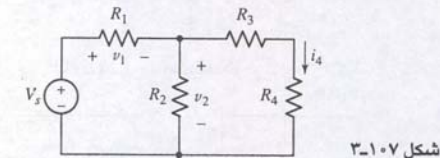
شکل ۳-۱۶

۷۶. بگویید چرا تقسیم ولتاژ نمی تواند برای تعیین  $V_1$  در شکل ۳-۱۶ به کار رود.



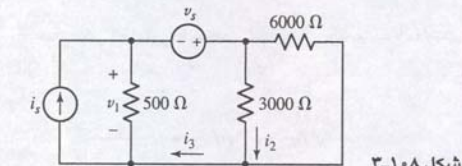
شکل ۳-۱۷

۷۷. از تقسیم جریان و ولتاژ در مدار شکل ۳-۱۷ عبارتی برای (الف)  $V_2$ ، (ب)  $V_1$  و (ج)  $I_4$  پیدا کنید.



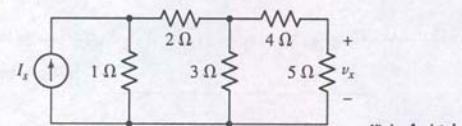
شکل ۳-۱۸

۷۸. با مراجعه به مدار شکل ۳-۱۸: (الف) با فرض  $V_3 = 40 \text{ V}$ ،  $i_s = 0$ ،  $V_1$  را پیدا کنید، (ب) با فرض  $V_s = 0$  و  $i_s = 3 \text{ mA}$ ،  $i_2$  و  $i_3$  را معین کنید.



شکل ۳-۱۹

۷۹. در شکل ۳-۱۹: (الف) اگر  $V_x = 10 \text{ V}$  باشد،  $I_s$  را به دست آورید. (ب) اگر  $I_s = 50 \text{ A}$  باشد،  $V_x$  را پیدا کنید و (ج) نسبت  $V_x/I_s$  را محاسبه نمایید.



شکل ۳-۲۰

۸۰. چقدر توان به وسیله  $R_x$  در شکل ۳-۲۰ جذب می شود.

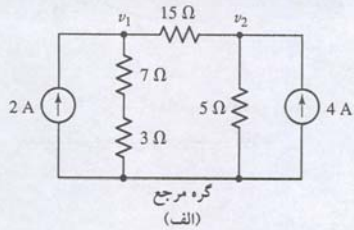


که هر کدام از آن‌ها معادل با معادله (۱) است. سوال این است که آیا یک راه از دیگری بهتر است؟ هر معلم یا شاگردی خواسته‌های خود را گسترش می‌دهد و در پایان روز مهمترین چیز این است که پاسخ درست از آب درآید. نویسندگان ترجیح می‌دهند که معادلات KCL را برای تحلیل گره‌ی تشکیل دهند و در انتها همه جملات منبع جریان در یک سمت و جملات مقاومت در سمت دیگر قرار خواهد گرفت. یعنی:

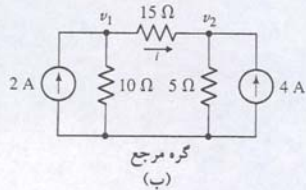
$$\begin{aligned} \Sigma \text{مجموع جریان‌های وارده به یک گره از منابع جریان} \\ \Sigma \text{مجموع جریان‌های خارج شده از گره به مقاومت‌ها} = \end{aligned}$$

در این گونه روش‌ها چندین مزیت وجود دارد. ابتدا این‌که هرگز اشتباهی در رابطه با جملاتی مانند اینکه کدام یک از " $v_1 - v_2$ " یا " $v_2 - v_1$ " صحیح است، وجود نخواهد داشت. اولین ولتاژ در هر عبارت جریان در مقاومت متعلق به گره‌ی است که برای آن معادله KCL، مانند معادلات (۱) یا (۳)، نوشته شده‌اند. دوم، چک سریعی را فراهم می‌کند تا ببینیم جمله‌ای به‌طور اتفاقی حذف شده است یا نه. کافی است تعداد منابع جریان متصل به یک گره را بشمارید و سپس مقاومت‌ها را شمارش نمایید؛ آن‌ها را به فرمی که بیان شده دسته‌بندی نمایید تا مقایسه کمی ساده‌تر شود.

مثال ۴-۱



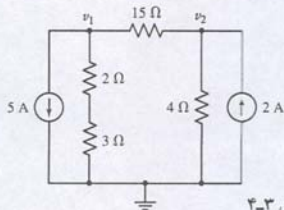
گره مرجع (الف)



گره مرجع (ب)

شکل ۴-۲ (الف) مدار چهارگره‌ی شامل دو منبع جریان مستقل. (ب) دو مقاومت سری با یک مقاومت 10 Ω جایگزین شده است تا تعداد گره‌ها به ۳ برسد.

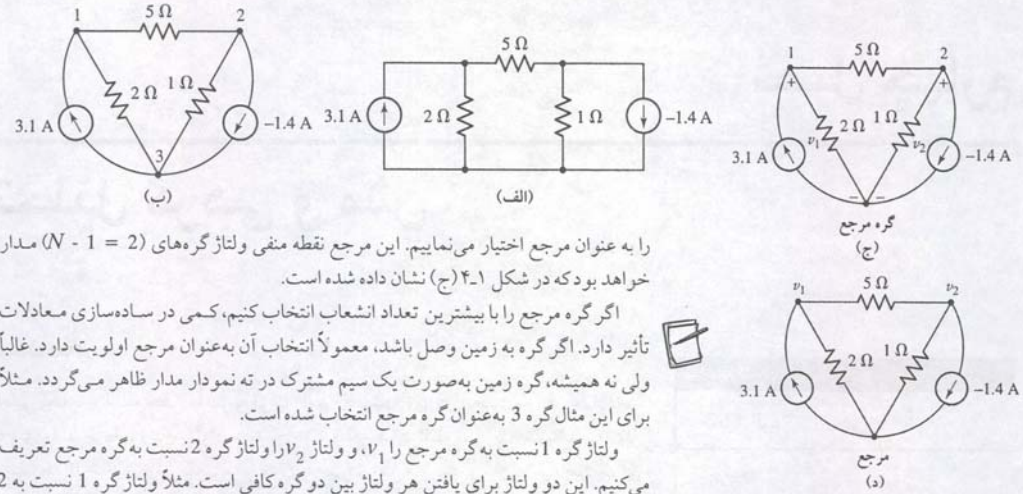
## تمرین



شکل ۴-۳

۴-۱ برای مدار شکل ۴-۳ ولتاژهای  $v_1$  و  $v_2$  را محاسبه کنید.  
جواب:  $v_1 = -145/8V$   
 $v_2 = 5/2V$

حال بپایید تعداد گره‌ها را افزایش دهیم و به این ترتیب مسئله را کمی مشکل‌تر کنیم.



را به عنوان مرجع اختیار می‌نماییم. این مرجع نقطه منفی ولتاژ گره‌های ( $N - 1 = 2$ ) مدار خواهد بود که در شکل ۴-۱ (ج) نشان داده شده است.

اگر گره مرجع را با بیشترین تعداد انشعاب انتخاب کنیم، کمی در ساده‌سازی معادلات تأثیر دارد. اگر گره به زمین وصل باشد، معمولاً انتخاب آن به عنوان مرجع اولویت دارد. غالباً ولی نه همیشه، گره زمین به صورت یک سیم مشترک در ته نمودار مدار ظاهر می‌گردد. مثلاً برای این مثال گره ۳ به عنوان گره مرجع انتخاب شده است.

ولتاژ گره ۱ نسبت به گره مرجع را  $v_1$ ، و ولتاژ  $v_2$  را ولتاژ گره ۲ نسبت به گره مرجع تعریف می‌کنیم. این دو ولتاژ برای یافتن هر ولتاژ بین دو گره کافی است. مثلاً ولتاژ گره ۱ نسبت به ۲ برابر  $v_1 - v_2$  است. ولتاژهای  $v_1$  و  $v_2$  و علامت‌های مربوط به آن‌ها در شکل ۴-۱ (ج) نشان داده شده‌اند. معمولاً با مشخص شدن گره مرجع، علامت مرجع نیز حذف می‌گردد، و گره‌ی که با ولتاژی علامت‌گذاری می‌شود پایانه مثبت فرض خواهد شد (شکل ۴-۱ (د)). این روال را نوعی تندنویسی ولتاژ می‌دانیم.

اکنون قانون KCL را به گره‌های ۱ و ۲ اعمال می‌کنیم. برای این کار جریان کل خارج شده از گره را با جریان وارده به آن مساوی قرار می‌دهیم. بنابراین:

$$\frac{v_1}{2} + \frac{v_1 - v_2}{5} = 3.1 \quad (۱)$$

یا

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = 3.1 \quad (۲)$$

در گره ۲ داریم:

$$\frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_1}{5} = -(-1.4) \quad (۳)$$

یا

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = 1.4 \quad (۴)$$

معادلات (۲) و (۴)، دو معادله مربوط به دو مجهول‌اند و می‌توان آن‌ها را به راحتی حل کرد. نتایج عبارتند از  $v_1 = 5V$  و  $v_2 = 2V$ .

با نتایج فوق می‌توان ولتاژ دو سر مقاومت 5Ω یعنی  $v_1 - v_2 = 3V$  را معین کرد. جریان و توان جذب شده نیز در یک گام قابل محاسبه‌اند.

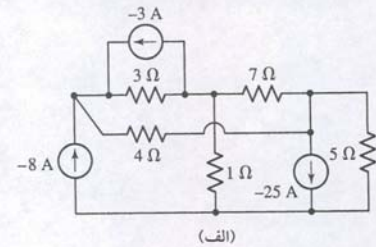
باید توجه داشته باشیم که در نوشتن معادلات KCL در تحلیل گره‌ی، بیش از یک روش وجود دارد. مثلاً خواننده ممکن است مجموع همه جریان‌های وارده به یک گره مفروض را ترجیح دهد و این مجموع را برابر با صفر قرار دهد. بنابراین برای گره ۱، ممکن است چنین بنویسیم:

$$3.1 - \frac{v_1}{2} - \frac{v_1 - v_2}{5} = 0$$

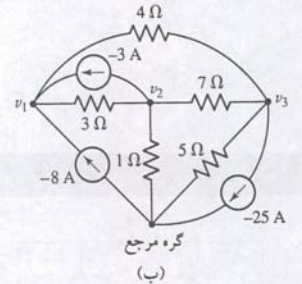
یا

$$3.1 + \frac{-v_1}{2} + \frac{v_2 - v_1}{5} = 0$$





(الف)



(ب)

شکل ۴-۴ (الف) مدار چهارگره‌ای. (ب) ترسیم مجدد با گره مرجع و برچسب ولتاژها.

ولتاژگره‌ها را در مدار شکل ۴-۴ (الف) بیابید.

- هدف مسئله را شناسایی کنید.
- در مدار چهارگره وجود دارد. با انتخاب گره پایین به عنوان مرجع، سه گره دیگر را مشابه شکل ۴-۴ (ب) نام‌گذاری می‌کنیم و شکل مدار را هم به صورت مناسب‌تری می‌کشیم.
- اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.
- سه ولتاژ مجهول  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  وجود دارند. همه مقاومت‌ها و منابع جریان مقداردهی شده‌اند.

- ارائه یک طرح.
- روش اخیر تحلیل گرگی برای حل این مسئله بسیار مناسب است. با این روش می‌توان سه معادله KCL مستقل را برحسب منابع جریان و جریان هر مقاومت نوشت.

- معادلات مناسب را بنویسید.

حل را با نوشتن KCL برای گره ۱ شروع می‌کنیم:

$$-8 - 3 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

یا

$$0.5833v_1 - 0.3333v_2 - 0.25v_3 = -11 \quad (۷)$$

در گره ۲:

$$-(3) = \frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$

یا

$$-0.3333v_1 + 1.4762v_2 - 0.1429v_3 = 3 \quad (۸)$$

و در گره ۳:

$$-(25) = \frac{v_3}{5} + \frac{v_3 - v_2}{7} + \frac{v_3 - v_1}{4}$$

یا ساده‌تر

$$-0.25v_1 - 0.1429v_2 + 0.5929v_3 = 25 \quad (۹)$$

- آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

ما سه معادله و سه مجهول داریم. با این شرط که آن‌ها مستقلند، این سه معادله برای یافتن ولتاژها کفایت می‌کند.

- اقدام به حل.

معادلات (۳) تا (۵) را می‌توان با حذف متوالی متغیرها، روش‌های ماتریسی یا دستور کرامر و دترمینان حل کرد، یا به کارگیری آخرین روش داریم:

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -0.3333 & -0.2500 \\ 3 & 1.4762 & -0.1429 \\ 25 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.2500 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.2500 & -0.1429 & 0.5929 \end{vmatrix}} = \frac{1.714}{0.3167} = 5.412 \text{ V}$$

به طور مشابه:

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -11 & -0.2500 \\ -0.3333 & 3 & -0.1429 \\ -0.2500 & 25 & 0.5929 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{2.450}{0.3167} = 7.736 \text{ V}$$

و

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -11 \\ -0.3333 & 1.4762 & 3 \\ -0.2500 & -0.1429 & 25 \end{vmatrix}}{0.3167} = \frac{14.67}{0.3167} = 46.32 \text{ V}$$

- صحت حل را تحقیق کنید. آیا جواب منطقی است؟

یکی از روش‌های تحقیق، حل سه معادله با روشی دیگر است. بعد از آن، ممکن است منطقی بودن مقادیر ولتاژ را بیابیم. حداکثر جریان ممکن در مدار  $3 + 8 + 25 = 36 \text{ A}$  است. بزرگ‌ترین مقاومت مدار  $7 \Omega$  می‌باشد، بنابراین ولتاژی بزرگ‌تر از  $7 \times 36 = 252 \text{ V}$  را نمی‌توان انتظار داشت.

البته روش‌های متعددی برای حل سیستم معادلات خطی موجود است و ما چند نمونه از آن‌ها را در پیوست ۲ توصیف کرده‌ایم. قبل از پیدایش ماشین حساب‌های علمی، قانون کرامر (Cramer) که در مثال ۲ آن را دیدیم در تحلیل مدارها خیلی رایج بود، هرچند که گاهی پیاده کردن آن‌ها خسته‌کننده است. با این وجود، استفاده از یک ماشین حساب ساده چهار عمل اصلی و آگاهی از تکنیک می‌تواند مفید واقع شود. از طرف دیگر نرم‌افزار متلب (MATLAB) هرچند که چندان در دسترس به نظر نمی‌رسد، بسته نرم‌افزاری قوی است که فرآیند حل را بسیار ساده می‌کند؛ در پیوست ۶ می‌توانید خلاصه‌ای راجع به آن را برای شروع مطالعه نمایید.

برای وضعیتی که در مثال ۴-۲ با آن مواجه شدید، چند انتخاب از طریق متلب وجود دارد. اول، ما می‌توانیم معادلات (۷)–(۹) را به صورت ماتریس درآوریم:

$$\begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

به نحوی که

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5833 & -0.3333 & -0.25 \\ -0.3333 & 1.4762 & -0.1429 \\ -0.25 & -0.1429 & 0.5929 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix}$$

در متلب چنین می‌نویسیم:

```
>> a = [0.5833 -0.3333 -0.25; -0.3333 1.4762 -0.1429;
-0.25 -0.1429 0.5929];
>> c = [-11; 3; 25];
>> b = a^-1 * c
b =
5.4124
7.7375
46.3127
>>
```



ما گره پایین را به عنوان مرجع انتخاب می‌کنیم، زیرا بیشترین تعداد انشعاب را دارد و با برچسب‌زنی ولتاژهای  $v_1$  و  $v_2$  طبق شکل ۴-۶ (ب) جلو می‌رویم. در واقع  $v_x$  برابر با  $v_2$  است. در گره ۱ داریم:

$$15 = \frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1}{2} \quad (10)$$

و در گره ۲:

$$3i_1 = \frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \quad (11)$$

متأسفانه، ما دو معادله و سه مجهول داریم؛ این نتیجه مستقیم وجود یک منبع جریان وابسته است. زیرا به وسیله یک ولتاژ گره کنترل نمی‌شود. بنابراین ما باید یک معادله دیگری که جریان  $i_1$  را به ولتاژهای گره‌ی بیشتری ارتباط دهد پیدا کنیم.

در این حالت داریم:

$$i_1 = \frac{v_1}{2} \quad (12)$$

که با جایگزینی در معادله (۱۱) داریم:

$$3v_1 - 2v_2 = 30 \quad (13)$$

و معادله (۱۰) منجر می‌شود به:

$$15v_1 + 8v_2 = 0 \quad (14)$$

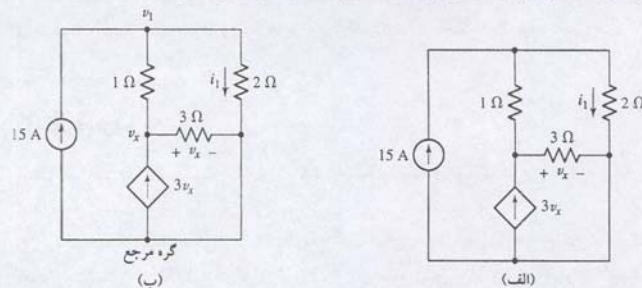
از حل آن‌ها داریم  $v_1 = -40$  V،  $v_2 = -75$  V،  $i_1 = 0.5v_1 = -20$  A. بنابراین توان تحویلی به وسیله منبع وابسته به مدار برابر است با:

$$(3i_1)(v_2) = (-60)(-75) = 4.5 \text{ kW}$$



می‌بینیم که وجود یک منبع وابسته نیاز به خلق یک معادله اضافی در تحلیل ما دارد، و این هنگامی است که کمیت کنترل‌کننده یک ولتاژ گره نباشد. اکنون اجازه بدهید به همین مدار نگاه کنیم ولی این بار متغیر کنترل‌کننده منبع جریان وابسته به کمیت متفاوتی تغییر کند - یعنی ولتاژ دو سر مقاومت ۳ اهمی، که در واقع یک ولتاژ گره است. ما درخواست یافت که فقط دو معادله برای تکمیل تحلیل لازم است.

توان تولیدشده به وسیله منبع وابسته شکل ۴-۷ (الف) را معین نمایید.



شکل ۴-۷ (الف) یک مدار چهار گره‌ی ما منبع جریان وابسته. (ب) مدار برچسب‌زده‌شده برای تحلیل گره‌ی.

ما گره پایین را به عنوان مرجع انتخاب کرده و ولتاژ گره‌ها را طبق شکل ۴-۷ (ب) برچسب می‌زنیم. ما ولتاژ  $v_x$  را به خاطر صراحت جداگانه نام‌گذاری کرده‌ایم ولی این افزونی در نام‌گذاری لزومی هم ندارد. توجه کنید که انتخاب ما در گره مرجع در این حالت مهم است؛ این انتخاب منجر به کمیت  $v_x$  به عنوان ولتاژ گره می‌گردد.

که در آن فاصله‌ها عناصر را در یک سطر از هم جدا می‌کنند و یک نقطه ویرگول (;) سطرها را جدا می‌نماید. ماتریس **b** که به صورت یک بردار به آن اشاره می‌شود، در حال ما یک ستون است. بنابراین  $v_1 = 5.412$  V،  $v_2 = 7.738$  V،  $v_3 = 46.31$  V (البته خطای گرد کردن وجود دارد).

ما می‌توانیم معادلات KCL را همان‌طور که آن‌ها را نوشتیم به کار برده و پردازنده نمادین متلب را استفاده کنیم.

```
>> eqn1 = '-8 -3 = (v1 - v2) / 3 + (v1 - v3) / 4';
>> eqn2 = '-(-3) = (v2 - v1) / 3 + v2 / 1 + (v2 - v3) / 7';
>> eqn3 = '-(-25) = v3 / 5 + (v3 - v2) / 7 + (v3 - v1) / 4';
>> answer = solve(eqn1, eqn2, eqn3, 'v1', 'v2', 'v3');
>> answer.v1
```

ans =

720/133

>> answer.v2

ans =

147/19

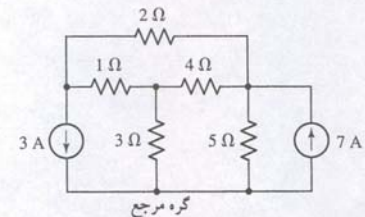
>> answer.v3

ans =

880/19

>>

که به پاسخ‌های دقیقاً یکسانی منتهی می‌گردد. روال  $\text{solve}()$  با لیستی از معادلات سمبلیک که ما آن‌ها را eqn1، eqn2، eqn3 می‌نامیم فراخوانده می‌شود، ولی متغیرهای  $v_1$ ،  $v_2$ ،  $v_3$  باید مشخص شوند. اگر  $\text{solve}()$  با متغیرهای کمتر از مجهولات فراخوانده شود، یک حل جبری بازگردانده می‌شود. فرم حل ارزش یک اظهار نظر سریع را دارد؛ پاسخ به اصطلاحی که در برنامه‌نویسی به آن اشاره می‌شود، یعنی به یک ساختار برمی‌گردد. در این حالت ما ساختار خود را "answer" می‌نامیم. هر مولفه از ساختار به‌طور جداگانه با نام نشان داده شده دستیابی می‌شود.



شکل ۴-۵

## تمرین

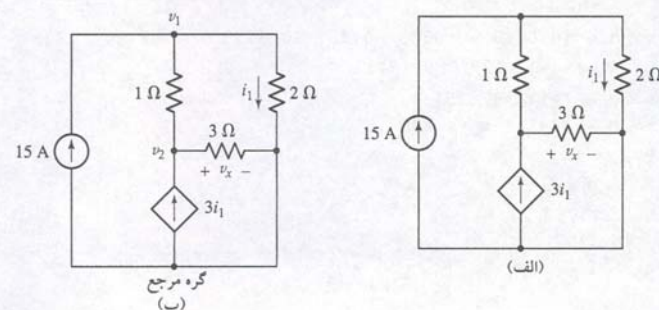
۴-۲ برای مدار شکل ۴-۵، ولتاژ دو سر هر منبع جریان را محاسبه نمایید.

جواب:  $v_{3A} = 5.235$  V و  $v_{7A} = 11.47$  V.

مثال قبل روشی پایه را در تحلیل گره‌ی نشان می‌دهد، ولی بررسی حالتی که منابع وابسته به هم وجود دارد ارزشمند است.

## مثال ۴-۳

توان تحویل‌داده‌شده به وسیله منبع وابسته شکل ۴-۶ (الف) را معین نمایید.



شکل ۴-۶ (الف) یک مدار چهار گره‌ی حاوی یک منبع جریان وابسته. (ب) مدار برچسب‌دار برای تحلیل گره‌ی.



معادله KCL برای گره 1 برابر است با:

$$15 = \frac{v_1 - v_x}{1} + \frac{v_1}{2} \quad (15)$$

و برای گره ۲ داریم:

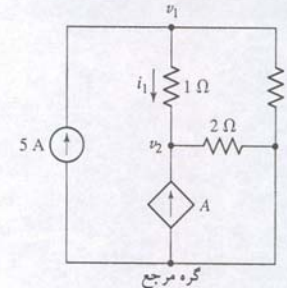
$$3v_x = \frac{v_x - v_1}{1} + \frac{v_2}{3} \quad (16)$$

با دسته‌بندی و حل مجهولات داریم  $v_1 = \frac{50}{7} V$  و  $v_x = -\frac{30}{7} V$ . بنابراین منبع وابسته در مدار توان  $W = 55.1$  را تولید می‌کند.

## تمرین

۴-۳ برای مدار شکل ۴-۸ ولتاژ گره  $v_1$  اگر  $A$  برابر (الف)  $2i_1$ ؛ (ب)  $2v_1$  باشد را پیدا کنید.

جواب: (الف)  $V + \frac{70}{9}$ ؛ (ب)  $-10 V$ .



شکل ۴-۸

خلاصه‌ای از رویه تحلیل گره‌ی پایه

۱. تعداد گره‌ها را بشمارید ( $N$ ).

۲. یک گره مرجع انتخاب نمایید. تعداد جملات در معادلات گره با انتخاب گره‌ی که بیشترین انشعاب را دارد، حداقل می‌شود.

۳. ولتاژهای گره را برحسب بزنید (نام‌گذاری کنید). تعداد آن‌ها  $N - 1$  است.

۴. یک معادله KCL برای هر گره غیر مرجع بنویسید. مجموع جریان‌های جاری به یک گره از منابع در یک سمت معادله است. در سمت دیگر مجموع جریان‌های خارج‌شده از گره به مقاومت‌ها است. توجه دقیقی به علامت‌های "+" و "-" بشود.

۵. هر مجهول اضافی دیگر مانند جریان‌ها یا ولتاژها را به جز گره‌ها برحسب ولتاژ گره‌ها بنویسید. این وضعیت هنگامی اتفاق می‌افتد که منابع ولتاژ یا منابع وابسته در مدار ما پیدا شوند.

۶. معادلات را سازمان‌دهی کنید. جملات را برطبق ولتاژ گره‌ها دسته‌بندی نمایید.

۷. سیستم معادلات را برای ولتاژ گره‌ها حل کنید (تعداد  $N - 1$  عدد وجود دارد).

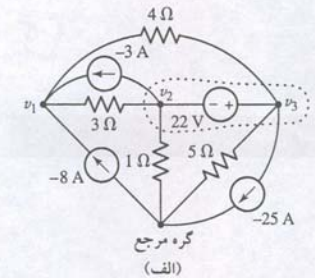
این هفت گام اصلی روی هر مداری که ما با آن مواجه شویم کار می‌کند، در هر صورت وجود منابع ولتاژ دقت بیشتری نیاز دارد. این وضعیت‌ها در بخش ۴-۲ مورد بحث قرار گرفته است.

## ۴-۲ آبرگره

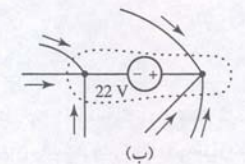
اینک خواهیم دید که چگونه منابع ولتاژ و نیز منابع وابسته بر تحلیل گره‌ی تأثیر می‌گذارند. ابتدا اثر یک منبع ولتاژ را بررسی می‌کنیم.

به‌عنوان مثال، مدار شکل ۴-۹ (الف) را ملاحظه نمایید. مدار چهارگره‌ی اصلی شکل ۴-۲ با جایگزینی مقاومت  $7\Omega$  بین گره‌های ۲ و ۳، از یک منبع ولتاژ  $22V$  کمی تغییر یافته است. باز هم همان ولتاژهای  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  را به گره‌ها نسبت می‌دهیم. قبلاً گام بعدی تحلیل شامل اعمال قانون KCL به هر سه گره غیر مرجع بود. اگر ما آن گام را مجدداً تکرار کنیم، در هر دو گره ۲ و ۳ به اشکال برمی‌خوریم، زیرا جریان شاخه‌ای که منبع ولتاژ در آن است را نمی‌دانیم. چون ولتاژ یک منبع ولتاژ، مستقل از جریان آن است، بهیچ وجه نمی‌توانیم جریان آن را بیان کنیم.

برای غلبه بر این مشکل دو راه وجود دارد. مشکل‌ترین راه تخصیص جریان نامعلوم به شاخه‌ای است که منبع ولتاژ در آن قرار دارد. آن‌گاه KCL را سه بار اعمال می‌کنیم و بین



شکل ۴-۹



شکل ۴-۹

شکل ۴-۹ (الف) مدار مثال ۴-۲ با منبع  $22V$ .  
(ب) گسترش ناحیه آبرگره: KCL بیان می‌کند که جمع همه جریان‌ها در این ناحیه باید صفر باشد و یا در غیر این صورت الکترون‌ها تجمع کنند و یا ناحیه با کمبود الکترون مواجه شود.

گره‌های ۲ و ۳ یک معادله KVL ( $v_3 - v_2 = 22$ ) می‌نویسیم. حاصل این کار برای این مدار چهار معادله است.

راه ساده‌تر این است که گره‌های ۲ و ۳ و منبع ولتاژ را به صورت نوعی ابرگره تصور کرده و KCL را به‌طور همزمان به هر دو گره اعمال نماییم. ابرگره به وسیله ناحیه‌ای که با خط چین محصور شده شناخته می‌شود (شکل ۴-۹ (الف)). این کار مسلماً مجاز است، زیرا اگر جریان کل خارج‌شده از گره ۲ و جریان کل خارج‌شده از گره ۳ برابر صفر باشند، آن‌گاه جریان خارج‌شده از هر دو گره صفر خواهد بود. این مفاهیم در شکل ۴-۹ (ب) با گسترش تصویر نشان داده شده است.

مقدار ولتاژ گره  $v_1$  در مدار شکل ۴-۹ (الف) را معین کنید.

معادله KCL در گره ۱، با توجه به مثال قبل بدون تغییر است:

$$-8 - 3 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

یا

$$-11 = 0.5833v_1 - 0.3333v_2 - 0.2500v_3 \quad (17)$$

کار را با مساوی قرار دادن حاصل جمع شش جریان و برابر قرار دادن ابرگره با صفر آغاز می‌نماییم. برای آبرگره، با انشعاب مقاومت  $3\Omega$  شروع کرده و در جهت ساعتگرد کار می‌کنیم.

$$3 + 25 = \frac{v_2 - v_1}{3} + \frac{v_3 - v_1}{4} + \frac{v_3}{5} + \frac{v_2}{1}$$

یا

$$28 = 0.5833v_1 + 1.3333v_2 + 0.45v_3 \quad (18)$$

چون سه مجهول داریم، به یک معادله اضافی دیگر نیاز است، همچنین باید این واقعیت که، یک منبع  $22V$  بین گره‌های ۲ و ۳ واقع است را نیز در نظر گرفت.

$$v_2 - v_3 = -22 \quad (19)$$

از حل معادلات (۱۷) تا (۱۹)، حل  $v_1 = 1.071V$  به دست می‌آید.

۴-۴ برای مدار شکل ۴-۱۰، ولتاژ دو سر هر منبع جریان را به دست آورید.  
جواب:  $5.375V$  و  $375mV$

بنابراین جدا از وجود منبع ولتاژ در بین دو گره و یا بین یک گره و مرجع، وجود منبع ولتاژ تعداد گره‌های غیر مرجعی که باید در آن‌ها قانون KCL را نوشت، یک واحد کم می‌کند. همچنین در تحلیل مدارهایی چون مسئله ۴-۴ باید دقت کافی مبذول داریم، زیرا هر دو انتهای مقاومت‌ها بخشی از آبرگره هستند، و ما باید دو جمله جریان در معادله KCL داشته باشیم ضمن آن که آن‌ها یکدیگر را حذف می‌کنند. می‌توانیم روش آبرگره را مطابق زیر خلاصه کنیم.

خلاصه تحلیل رویه تحلیل آبرگره

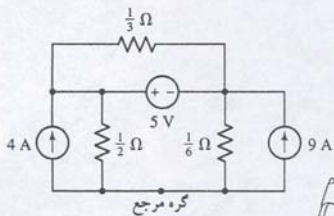
۱. تعداد گره‌ها را بشمارید ( $N$ ).

۲. گره مرجع را مشخص نمایید. تعداد جملات در معادلات گره با انتخاب گره‌ی که بیشترین تعداد انشعاب را دارد حداقل می‌شود.

۳. ولتاژهای گره را نام‌گذاری کنید ( $N - 1$  عدد).

## مثال ۴-۵

## تمرین



شکل ۴-۱۰



۴. اگر مدار حاوی منابع ولتاژ باشد، حول هر یک، یک آبرگره ایجاد کنید. این کار با محصور کردن منبع، دو پایانه‌اش، و هر عنصر دیگری که بین دو پایانه است در یک حصار خط‌چین انجام می‌شود.

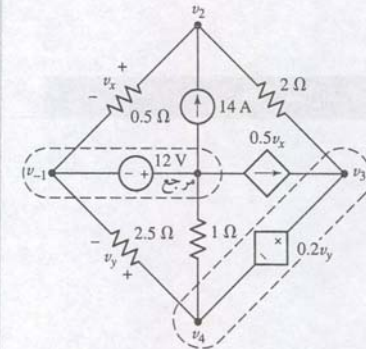
۵. یک معادله KCL برای هر گره غیر مرجع و هر آبرگره که حامل گره مرجع نیست بنویسید. مجموع جریان‌های جاری در یک گره / آبرگره از منابع جریان در یک سمت معادله است. در سمت دیگر مجموع جریان‌های جاری به خارج گره / آبرگره قرار دارد که از مقاومت‌ها می‌گذرند. به علامت "-" توجه کنید.

۶. ولتاژ دو سر هر منبع را به ولتاژهای گره‌ها مرتبط کنید. این کار با اعمال KVL انجام می‌شود. تعریف یک چنین معادله‌ای برای هر آبرگره صورت می‌گیرد.

۷. هر مجهول دیگر (یعنی جریان یا ولتاژ به جز ولتاژهای گره) را برحسب ولتاژهای گره‌های مناسب بنویسید. این وضعیت هنگامی پیش می‌آید که منابع وابسته در مدار پیدا شود.

۸. معادلات را سازمان‌دهی کنید. جملات را برطبق ولتاژگره‌ها دسته‌بندی کنید.

۹. سیستم معادلات را برای ولتاژگره‌ها حل کنید ( $N - 1$  عدد از آن‌ها وجود دارد).



شکل ۴-۱۱ یک مدار پنج گره‌ای با چهار نوع منبع متفاوت.

#### مثال ۴-۶

ولتاژهای گره به مرجع را در شکل ۴-۱۱ به دست آورید.

پس از ایجاد آبرگره حول هر منبع ولتاژ، می‌بینیم که KCL را باید فقط در گره ۲ و آبرگره مربوط به منبع ولتاژ وابسته بنویسیم. هیچ معادله اضافی برای آبرگره شامل گره ۱ و منبع ولتاژ مستقل لازم نیست، زیرا واضح است که  $v_1 = -12V$ .

در گره ۲:

$$\frac{v_2 - v_1}{0.5} + \frac{v_2 - v_3}{2} = 14 \quad (20)$$

ضمن این‌که در آبرگره ۳-۴

$$0.5v_x = \frac{v_3 - v_2}{2} + \frac{v_4}{1} + \frac{v_4 - v_1}{2.5} \quad (21)$$

سپس ولتاژ منابع را به ولتاژگره‌ها ربط می‌دهیم:

$$v_3 - v_4 = 0.2v_y \quad (22)$$

و

$$0.2v_y = 0.2(v_4 - v_1) \quad (23)$$

بالاخره منبع جریان وابسته را برحسب متغیرها بیان می‌کنیم:

$$0.5v_x = 0.5(v_2 - v_1) \quad (24)$$

در تحلیل گره‌ی چهار KCL، پنج گره لازم است ولی ما این نیاز را به ۲ رساندیم و این کار با ایجاد دو آبرگره جداگانه حاصل شد. هر آبرگره یک معادله KVL لازم دارد (معادله ۲۲) و  $v_1 = -12$ ، که بعدی هم با مشاهده نوشته شده است. هیچ یک از منابع ولتاژ با ولتاژهای گره کنترل نشده است، در نتیجه دو معادله اضافی دیگر لازم است.

با انجام این کار، اکنون ما می‌توانیم  $v_x$  و  $v_y$  را برای به دست آوردن مجموع چهار معادله در چهار گره ولتاژ، حذف کنیم.

$$\begin{aligned} -2v_1 + 2.5v_2 - 0.5v_3 &= 14 \\ 0.1v_1 - v_2 + 0.5v_3 + 1.4v_4 &= 0 \\ v_1 &= -12 \\ 0.2v_1 + v_3 - 1.2v_4 &= 0 \end{aligned}$$

از حل آن‌ها  $v_1 = -12V$ ،  $v_2 = -4V$ ،  $v_3 = 0V$  و  $v_4 = -2V$  به دست می‌آیند.

۴-۵ ولتاژهای گره‌ها را در مدار شکل ۴-۱۲ معین کنید.

جواب:  $v_1 = 3V$ ،  $v_2 = 5.09V$ ،  $v_3 = 1.28V$  و  $v_4 = 1.68V$ .

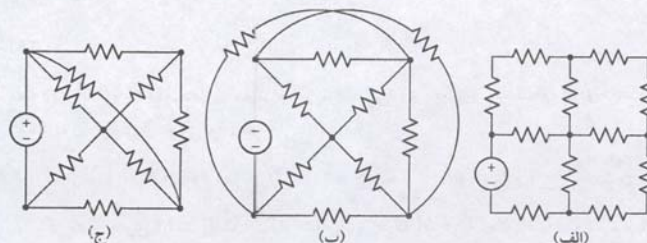
### ۴-۳ تحلیل مش

تکنیک تحلیل گره‌ی مورد بحث در بخش قبل کاملاً کلی و به هر شبکه الکتریکی قابل اعمال است. روشی دیگر که گاهی اعمال آن به بعضی مدارها ساده‌تر است، تحلیل مش یا تک حلقه‌ای می‌باشد. حتی اگر این تکنیک به هر مداری قابل اعمال نباشد، اکثر مدارهای مورد نظر ما با این روش حل می‌شوند. تحلیل مش تنها به آن دسته از مدارها که به صورت مسطح هستند قابل اعمال است، و لذا به تعریف این کلمه می‌پردازیم.

می‌توان نمودار یک مدار را در صفحه‌ای مسطح چنان رسم کرد که هیچ انشعابی از بالا و یا از زیر انشعابی دیگر نگذرد. آن‌گاه این مدار را مسطح یا صفحه‌ای می‌نامیم. بنابراین شکل ۴-۱۳ (الف) مدار مسطح، شکل ۴-۱۳ (ب) یک مدار غیر مسطح و شکل ۴-۱۳ (ج) هم یک مدار مسطح است، هر چند که این مدار در نگاه اول غیر مسطح به نظر می‌رسد.

در بخش ۳-۱ کلمات مسیر<sup>۱</sup>، مسیر بسته<sup>۲</sup> و حلقه<sup>۳</sup> را تعریف کردیم. قبل از این‌که مش را تعریف کنیم، اجازه بدهید تا مجموعه‌ای از انشعابات که در شکل ۴-۱۴ پررنگ رسم شده‌اند را بررسی نماییم. اولین انشعاب یا شاخه مسیر نیست، زیرا چهار شاخه به گره مرکزی متصلند و مسلم است که این شاخه‌ها حلقه هم نمی‌باشند. شاخه‌های دوم مسیر نیستند زیرا در طی آن‌ها باید از گره مرکزی بگذریم. چهار مسیر باقیمانده همگی حلقه می‌باشند. این مدار ۱۱ انشعاب دارد.

مش بخشی از مدارهای مسطح است و برای یک مدار غیر مسطح تعریف نمی‌شود. ما مش را حلقه‌ای تصور می‌کنیم که در داخل آن حلقه دیگری وجود ندارد. بنابراین حلقه‌های شکل ۴-۱۴ (ج) و (د) مش نیستند، ولی آن‌هایی که در (ه) و (و) آمده‌اند، مش می‌باشند. به محض ترسیم مرتب و مسطح یک مدار، معمولاً یک مش به صورت پنجره‌ای مشبک درمی‌آید که محیط هر شیشه این پنجره را می‌توان یک مش در نظر گرفت.

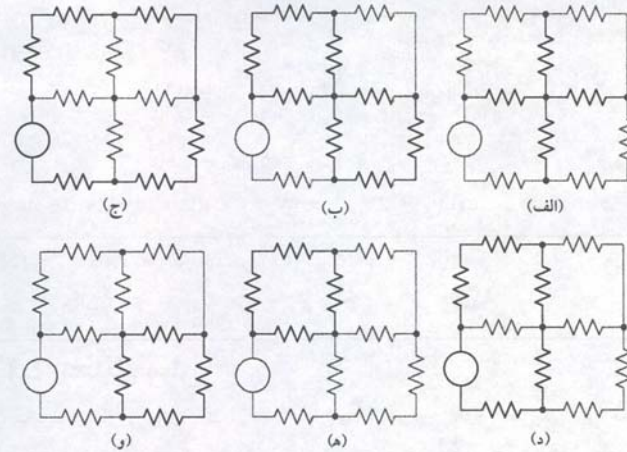


شکل ۴-۱۳ مثال‌هایی از شبکه‌های مسطح (صفحه‌ای) و غیر مسطح. تقاطع‌هایی که در آن‌ها نقطه پررنگ وجود ندارد از لحاظ فیزیکی یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

1. mesh analysis
2. path
3. closed path
4. loop



شکل ۴-۱۴ (الف) شاخه‌های پُررنگ نه مسیرند و نه حلقه. (ب) شاخه‌های پُررنگ مسیر نیستند، زیرا برای پیمودن آن‌ها باید دو بار از گره مرکزی بگذریم. (ج) این مسیر یک حلقه است ولی مش نیست، زیرا حلقه دیگری را دربرمی‌گیرد. (د) این مسیر هم حلقه است، ولی مش نیست. (ه) و (و) هر دو مسیر هم حلقه هستند و هم مش.



اگر شبکه‌ای مسطح باشد، برای تحلیل آن می‌توان از روش مش استفاده کرد. در این روش مفهوم جریان مش به کار برده می‌شود، که ما آن را با توجه به مدار دو مش شکل ۴-۱۵ معرفی خواهیم کرد.

به همان فرمی که در مدار تک‌حلقه‌ای عمل کردیم، تحلیل را با تعریف جریان در یکی از شاخه‌ها آغاز می‌نماییم. بیایید جریانی که از مقاومت  $6\Omega$  می‌گذرد را  $i_1$  بنامیم. می‌خواهیم KVL را در هر دو مش اعمال کنیم، و دو معادله حاصل از آن هم برای تعیین جریاناتی مجهول کافی است. پس جریان  $i_2$  را معرفی می‌کنیم که از مقاومت  $4\Omega$  به سمت راست جاری است. جریانی که از شاخه مرکزی به پایین می‌رود را  $i_3$  می‌خوانیم ولی از KCL واضح است که  $i_3$  را می‌توان به صورت  $(i_1 - i_2)$  هم نوشت. جریانات انتخابی در شکل ۴-۱۵ (ب) نشان داده شده‌اند.

با توجه به روش حل مدار تک‌حلقه، اکنون KVL را به مش سمت چپ اعمال می‌کنیم:

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

یا

$$9i_1 - 3i_2 = 42 \quad (25)$$

با اعمال KVL به مش سمت راست داریم:

$$-3(i_1 - i_2) + 4i_2 - 10 = 0$$

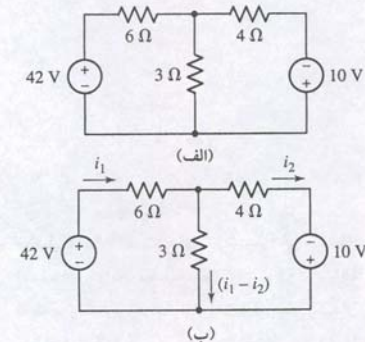
یا

$$-3i_1 + 7i_2 = 10 \quad (26)$$

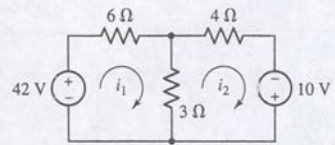
معادلات (۲۵) و (۲۶) مستقل از هم‌اند و نمی‌توان یکی را از دیگری به‌دست‌آورد. دو معادله و دو مجهول وجود دارد و می‌توان به‌راحتی آن‌ها را حل کرد:

$$i_1 = 6A \quad i_2 = 4A \quad (i_1 - i_2) = 2A$$

اگر مدار حاوی M مش باشد، آنگاه انتظار می‌رود که M جریان مش انتخاب کنیم و M معادله مستقل بنویسیم.



شکل ۴-۱۵ مدار ساده‌ای که جریانات آن‌ها مورد تقاضا است.



شکل ۴-۱۶ همان مدار شکل ۴-۱۵ (ب) با کمی تفاوت دید.

جریان مش به‌عنوان جریان یک شاخه شناخته می‌شود. مثلاً  $i_1$  و  $i_2$  در این مثال از آن جمله‌اند. البته همیشه این‌طور نیست. به‌زودی خواهیم دید که در یک شبکه 9 حلقه‌ای جریانات حلقه وسط در هیچ شاخه یا انشعابی نیست.

حال بیایید همین مسئله را با در نظر گرفتن جریاناتی می‌شود که کمی با روش قبل تفاوت دارد حل کنیم. جریان مش را جریانی که از پیرامون آن می‌گذرد تعریف می‌کنیم. یکی از مزایای مهم در به‌کارگیری جریاناتی مش این است که قانون جریان کیرشهف به‌طور خودکار رعایت می‌شود. اگر جریان شبکه وارد گرهی شود، مسلماً از آن خارج هم خواهد شد.

اگر مش سمت چپ را با 1 شماره‌گذاری کنیم، می‌توان جریانات مش  $i_1$  را در آن و در جهت ساعتگرد ایجاد کرد. یک جریانات مش با یک پیکان قوسی که بر روی خودش تقریباً بسته می‌شود طبق شکل ۴-۱۶ مشخص می‌گردد. جریانات  $i_2$  در مش باقیمانده و دوباره در جهت ساعتگرد فرض می‌شود. گرچه انتخاب جهت اختیاری است، ولی همواره جهت ساعتگرد انتخاب می‌شود تا خطای ناشی از آن کاهش یابد. در مدار دیگر هیچ جریانی با پیکان جریانی مستقیماً روی هر انشعاب نشان داده نشده است. جریانات هر شاخه باید با ملاحظه جریاناتی هر مشی که انشعاب متعلق به آن است معین شود. این کار چندان مشکل نیست، زیرا هیچ انشعابی در بیش از دو مش ظاهر نمی‌گردد. مثلاً مقاومت  $3\Omega$  در دو مش وجود دارد و جریانات رو به پایین آن،  $i_2 - i_1$  است. مقاومت  $6\Omega$  تنها در مش 1 قرار داشته و جریانات  $i_1$  به سمت راست آن جریان دارد.

برای مش سمت چپ:

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

درحالی‌که برای مش سمت راست

$$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0$$

این دو، معادلات (۲۵) و (۲۶) می‌باشند.

توان تولیدشده به وسیله منبع 2 V شکل ۴-۱۷ (الف) را معین نمایید.

ما ابتدا دو جریانات مش در جهت عقربه ساعت را طبق شکل ۴-۱۷ (ب) تعریف می‌کنیم. با شروع در سمت چپ پایین مش 1، ما معادله KVL زیر را ضمن دنبال کردن جهت عقربه ساعت از انشعاب‌ها می‌نویسیم:

$$-5 + 4i_1 + 2(i_1 - i_2) - 2 = 0$$

با تکرار این کار در مش 2 داریم:

$$+2 + 2(i_2 - i_1) + 5i_2 + 1 = 0$$

با مرتب کردن و گروه‌بندی جملات داریم:

$$6i_1 - 2i_2 = 7$$

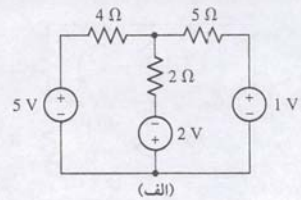
$$-2i_1 + 7i_2 = -3$$

ما حل آن‌ها داریم:

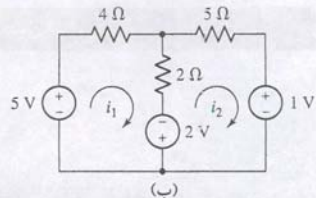
$$i_2 = -\frac{2}{19} = -0.1053 A \quad i_1 = \frac{42}{38} = 1.132 A$$

جریان خارج‌شده از مرجع مثبت منبع 2 V برابر است با  $i_1 - i_2$ . بنابراین منبع 2 V توان  $2(1.237) = 2.474 W$  را تولید می‌کند.

مثال ۴-۷



(الف)

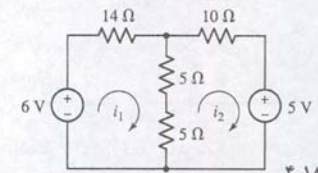


(ب)

شکل ۴-۱۷ (الف) مدار دو مش حامل سه منبع. (ب) مدار برچسب‌خورده برای تحلیل مش.

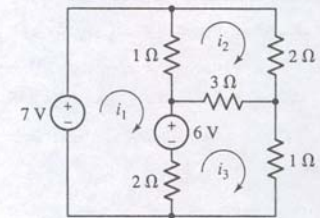


## تمرین



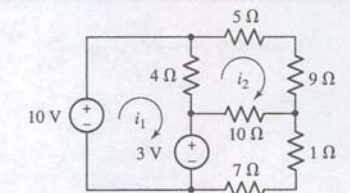
شکل ۴-۱۸

## مثال ۴-۸



شکل ۴-۱۹ مدار پنج‌گره‌ای، هفت شاخه‌ای و سه مش.

## تمرین



شکل ۴-۲۰

## مثال ۴-۹

۴-۶ در مدار شکل ۴-۱۸،  $i_1$  و  $i_2$  را معین کنید.

جواب:  $i_1 = +184.2\text{mA}$  و  $i_2 = -157.9\text{mA}$

بگذارید مدار شکل ۴-۱۹ را با پنج گره، هفت انشعاب و سه مش در نظر بگیریم. این مسئله کمی پیچیده‌تر است زیرا یک مش اضافی دارد.

برای تعیین جریان مش شکل ۴-۱۹ از تحلیل مش استفاده کنید.

سه جریان مش در شکل ۴-۱۹ وجود دارند و ما KVL را حول هر مش اعمال می‌کنیم:

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 6 + 2(i_1 - i_3) = 0$$

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

$$2(i_3 - i_1) - 6 + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

پس از ساده‌سازی:

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1$$

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$

$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6$$

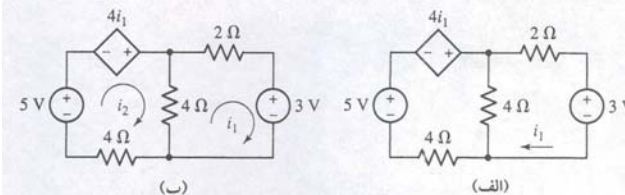
از حل آن‌ها خواهیم داشت  $i_1 = 3\text{A}$ ،  $i_2 = 2\text{A}$ ،  $i_3 = 3\text{A}$ .

۴-۷  $i_1$  و  $i_2$  را در مدار شکل ۴-۲۰ بیابید.

جواب:  $2.220\text{A}$  و  $470.0\text{mA}$

مثال‌های قبل در مورد مدارهایی بحث کردند که به وسیله منابع ولتاژ مستقلی فعال می‌شدند. اگر در یک مدار منبع جریانی لحاظ شود، ممکن است طبق بخش ۴-۴ تحلیل را ساده و یا پیچیده‌تر کند. طبق معادلات ما در تکنیک تحلیل گره‌ای، منابع وابسته عموماً به یک معادله اضافی در کنار M معادله مش نیاز دارند، مگر این‌که متغیر کنترل‌کننده یک جریان مش باشد (یا مجموع جریان‌های مش). ما این نکته را با مثال زیر باز می‌کنیم.

جریان  $i_1$  را در مدار شکل ۴-۲۱ (الف) معین کنید.



جریان  $i_1$  در واقع یک جریان مش است، لذا به جای تعریف مجدد آن ما جریان مش سمت راست را  $i_1$  می‌نامیم و یک جریان ساعتگرد  $i_2$  را برای مش سمت چپ، طبق شکل ۴-۲۱ (ب) برمی‌گزینیم.

برای مش سمت چپ، KVL به ما می‌دهد:

$$-5 - 4i_1 + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \quad (27)$$

و برای مش سمت راست داریم:

$$-(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0 \quad (28)$$

با دسته‌بندی جملات، این معادلات به صورت فشرده‌تر زیر درمی‌آیند:

$$6i_1 - 4i_2 = -3 \quad \text{و} \quad -8i_1 + 8i_2 = 5$$

با حل آن‌ها  $i_1 = -250\text{mA}$  و  $i_2 = 375\text{mA}$  خواهد بود.

چون منبع وابسته در شکل ۴-۲۱ به وسیله جریان مش  $(i_1)$  کنترل می‌شود، تنها دو معادله (۲۷) و (۲۸) برای تحلیل مدار دو مش لازم شد. در مثال زیر، ما وضعیتی را بررسی می‌کنیم که متغیر کنترل‌کننده یک جریان مش نیست.

جریان  $i_1$  را در مدار شکل ۴-۲۲ (الف) معین نمایید.

برای این‌که بتوانیم مقایسه‌ای با مثال ۴-۹ داشته باشیم، ما همان تعاریف جریان مش را طبق شکل ۴-۲۲ (ب) به کار می‌بریم.

برای مش سمت چپ، KVL نتیجه می‌دهد:

$$-5 - 2v_x + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 = 0 \quad (29)$$

و برای مش سمت راست، ما مثل قبل عمل می‌کنیم، یعنی:

$$4(i_1 - i_2) + 2i_1 + 3 = 0 \quad (30)$$

چون منبع وابسته با ولتاژ ناشناخته  $v_x$  کنترل شده است، ما با دو معادله و سه مجهول مواجه هستیم. راه خروجی از این مشکل ساخت یک معادله برای  $v_x$  برحسب جریان‌های مش مانند زیر است:

$$v_x = 4(i_2 - i_1) \quad (31)$$

ما این سیستم معادلات را با جایگزینی معادله (۳۱) در معادله (۲۹) ساده می‌کنیم، نتیجه آن چنین است:

$$4i_1 = 5$$

با حل آن  $i_1 = 1.25\text{A}$  خواهد شد. در این لحظه خاص، معادله (۳۰) لازم نیست مگر این‌که مقداری برای  $i_2$  موردنظر باشد.

۴-۸  $i_1$  را در مدار شکل ۴-۲۳ معین کنید، به شرطی که کمیت A برابر باشد با: (الف)  $2i_2$  و (ب)  $2v_x$ .

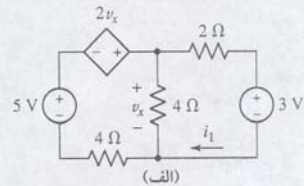
جواب: (الف)  $1.35\text{A}$  و (ب)  $546\text{mA}$ .

رویه تحلیل مش را می‌توان طی هفت گام مطابق زیر خلاصه کرد. اگر ما روی هر مدار مسطحی کار کنیم همیشه با آن مواجهیم، هرچند منابع جریانی نیز به دقت بیشتری دارد. چنین مواردی در بخش ۴-۴ بحث شده است.

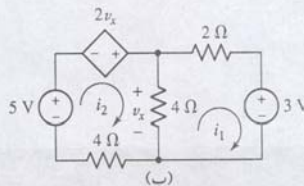
## خلاصه رویه تحلیل مش پایه

۱. مشخص کنید که آیا مدار از نوع مسطح است. اگر خیر در عوض تحلیل گره‌ای را اجرا کنید.
۲. تعداد مش‌ها را بشمارید ( $M$ ). در صورت لزوم مدار را دوباره رسم کنید.
۳. هر جریان مش  $M$  را نام‌گذاری نمایید. معمولاً تعریف همه جریان‌ها در جهت عقربه ساعت تحلیل را ساده‌تر می‌نماید.

## مثال ۴-۱۰



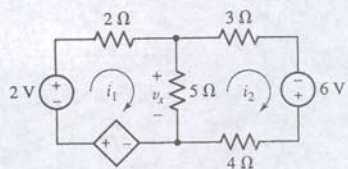
(الف)



(ب)

شکل ۴-۲۲ (الف) مداری با یک منبع وابسته کنترل‌شده با یک ولتاژ. (ب) مدار برچسب‌خورده برای تحلیل مش.

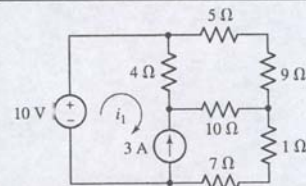
## تمرین



شکل ۴-۲۳



## تمرین



شکل ۴-۲۵

۴-۹ جریان  $i_1$  را در مدار شکل ۴-۲۵ معین نمایید.

جواب:  $-1.93A$

حضور یک یا چند منبع وابسته لازم می‌دارد تا مقدار این منابع و متغیر وابسته به آن بر حسب جریان‌های مش بیان شوند. مثلاً در شکل ۴-۲۶ می‌بینیم که هر دو منبع جریان وابسته و مستقل لحاظ شده‌اند. بگذارید ببینیم چگونه وجود آن‌ها روی تحلیل تأثیر کرده و آن‌ها را در واقع ساده می‌کند.

از تحلیل مش برای محاسبه سه جریان مجهول در مدار شکل ۴-۲۶ استفاده کنید.

منابع جریان در تک‌حلقه‌های ۱ و ۳ قرار دارند. چون منبع ۱۵ A در پیرامون مدار واقع است می‌توانیم مش ۱ را حذف نماییم، چون واضح است که  $i_1 = 15A$  می‌باشد. چون اکنون یکی از دو جریان مش مربوط به منبع جریان وابسته را می‌دانیم، لازم نیست معادله آبرمش را درباره مش‌های ۱ و ۳ بنویسیم. در عوض ما با استفاده از منبع وابسته به کمک KCL،  $i_1$  و  $i_3$  را به هم ربط می‌دهیم:

$$\frac{v_x}{9} = i_3 - i_1 = \frac{3(i_3 - i_2)}{9}$$

که به صورت فشرده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$-i_1 + \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3}i_2 + \frac{2}{3}i_3 = 15 \quad (۳۵)$$

با یک معادله و دو مجهول، آنچه باقی می‌ماند نوشتن قانون ولتاژ کیرشلف KVL حول مش ۲ است:

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

یا

$$6i_2 - 3i_3 = 15 \quad (۳۶)$$

با حل معادلات (۳۵) و (۳۶) داریم  $i_2 = 11A$  و  $i_3 = 17A$ . ما قبلاً مشخص کردیم که  $i_1 = 15A$  است.

۴-۱۰ از تحلیل مش برای یافتن  $v_3$  در مدار شکل ۴-۲۷ استفاده کنید.

جواب:  $104.2V$

اکنون روش کلی نوشتن معادلات مش را خلاصه می‌کنیم، خواه منابع وابسته، منابع ولتاژ، و یا منابع جریان وجود داشته باشند یا خیر، به شرطی که مدار را بتوان به‌طور مسطح تصور کرد.

## خلاصه رویه تحلیل آبرمش

۱. مشخص کنید که آیا مدار مسطح است یا خیر. اگر خیر در عوض تحلیل گره‌ی را پیاده کنید.
۲. تعداد مش‌ها را بشمارید ( $M$ ). در صورت لزوم مدار را دوباره رسم کنید.
۳. هر یک از  $M$  جریان مش را نام‌گذاری نمایید. معمولاً تعریف همه جریان‌های مش در راستای عقربه ساعت تحلیل را ساده‌تر می‌کند.
۴. اگر مدار دارای منبع جریان مشترکی بین دو مش باشد، یک آبرمش برای محصورکردن هر دو مش ایجاد نمایید.

۴. معادله KVL را حول هر مش بنویسید. از یک گره قراردادی شروع کرده و در جهت جریان مش جلو بروید. توجه خاصی به علامت "+" داشته باشید. اگر منبع جریان در مرز مش باشد، معادله KVL لازم نیست و جریان مش با واری معین می‌گردد.

۵. هر مجهول اضافی مانند ولتاژ یا جریان‌هایی به جز جریان‌های مش را برحسب جریان مش مناسب بنویسید. این هنگامی اتفاق می‌افتد که منابع وابسته یا منابع جریان در مدار ما ظاهر گردند.

۶. معادلات را سازمان‌دهی نمایید. جملات را بر حسب جریان مش‌ها دسته‌بندی کنید.

۷. سیستم معادلات را برای جریان‌های مش حل کنید ( $M$  عدد از آن‌ها را داریم).

## ۴-۴ آبرمش

اگر منبع جریانی در شبکه باشد، روش سرراست فوق را چگونه باید اصلاح کرد؟ با توجه به تحلیل گره‌ی دو روش زیر پیشنهاد می‌شود: اول این‌که ولتاژ مجهولی به دو سر منبع جریان نسبت دهیم و قانون KVL را مثل قبل حول هر مش اعمال کنیم. سپس جریان منبع را به جریان‌های هر مش مربوط نماییم. این روش معمولاً مشکل است.

تکنیکی بهتر این است که کاملاً مشابه با روش تحلیل گره‌ی عمل کنیم. در آن‌جا یک ابرگره ایجاد کردیم و منبع ولتاژ را کاملاً با آن احاطه نمودیم و تعداد گره‌های غیر مرجع را ۱ واحد در ازای هر منبع ولتاژ کم کردیم. در این‌جا "آبرمش" را از دو مش تعریف می‌کنیم که منبع جریان به عنوان عنصر مشترک آن‌ها است. بنابراین به ازای هر منبع جریان، تعداد مش‌ها یک واحد کم می‌شود. اگر منبع جریان در محیط مدار قرار داشت، از مشی که آن را شامل می‌شود چشم می‌پوشیم. سپس قانون ولتاژ کیرشلف را تنها به مش‌ها و ابرمش‌های مدار اصلاح‌شده اعمال می‌نماییم.

با تکنیک مش، مدار سه‌حلقه‌ای شکل ۴-۲۴ (الف) را تحلیل نمایید.

ملاحظه می‌شود که در این شکل یک منبع جریان مستقل ۷A در مرز مشترک دو مش قرار دارد. جریان‌های مش  $i_1$ ،  $i_2$  و  $i_3$  را قبلاً تخصیص داده‌ایم و به علت وجود منبع جریان، مش‌های ۱ و ۳ را یک ابرمش در نظر می‌گیریم (شکل ۴-۲۴ (ب)). با اعمال KVL حول این حلقه داریم:

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$

یا

$$i_1 - 4i_2 + 4i_3 = 7 \quad (۳۲)$$

و حول مش ۲

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

یا

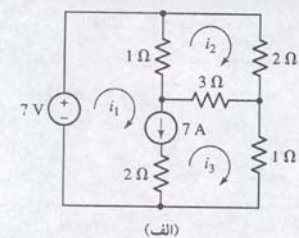
$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0 \quad (۳۳)$$

بالاخره منبع جریان مستقل به جریان‌های فرضی مش‌ها مربوط می‌شوند.

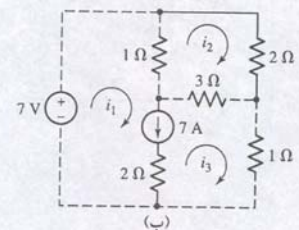
$$i_1 - i_3 = 7 \quad (۳۴)$$

با حل معادلات (۳۲) تا (۳۴) داریم  $i_1 = 9A$ ،  $i_2 = 2.5A$  و  $i_3 = 2A$ .

مثال ۴-۱۱



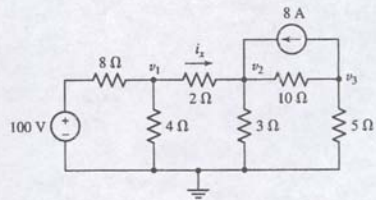
(الف)



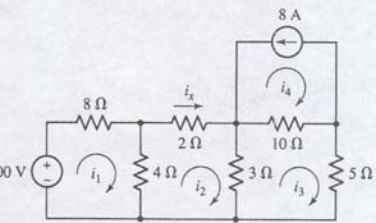
(ب)

شکل ۴-۲۴ (الف) یک مدار سه‌حلقه‌ای با منبع جریان مستقل. (ب) یک آبرمش با خط‌چین تعریف شده است.





شکل ۴-۲۹ مدار شکل ۴-۲۸ با ولتاژ گره‌هایی که نام‌گذاری شده‌اند. توجه کنید که سمبل زمین برای نام‌گذاری پایانه مرجع انتخاب شده است.



شکل ۴-۳۰ مدار شکل ۴-۲۸ با جریان‌های مش.

گره پایینی را به عنوان مرجع اختیار می‌کنیم، ضمن این‌که چهار گره غیر مرجع هم وجود دارد. گرچه این بدان معنی است که می‌توان چهار معادله مستقل نوشت، نیازی به نام‌گذاری گره بین منبع 100V و مقاومت 8Ω وجود ندارد، زیرا ولتاژ گره 100V است. ولتاژ بقیه گره‌ها را  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  می‌نامیم (شکل ۴-۲۹).  
سه معادله زیر را می‌نویسیم:

$$(۳۷) \quad \frac{v_1}{8} - \frac{v_1}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2} = 0 \quad \text{یا} \quad 0.875v_1 - 0.5v_2 = 12.5$$

$$(۳۸) \quad \frac{v_2}{2} - \frac{v_2}{3} + \frac{v_2 - v_3}{10} - 8 = 0 \quad \text{یا} \quad -0.5v_1 - 0.9333v_2 - 0.1v_3 = 8$$

$$(۳۹) \quad \frac{v_3}{10} - \frac{v_3}{5} + 8 = 0 \quad \text{یا} \quad -0.1v_2 + 0.3v_3 = -8$$

با حل آن‌ها داریم  $v_1 = 25.89V$  و  $v_2 = 20.31V$ . با اعمال قانون اهم جریان  $i_x$  را به دست می‌آوریم:

$$(۴۰) \quad i_x = \frac{v_1 - v_2}{2} = 2.79A$$

سپس همان مدار را با تحلیل مش بررسی می‌نماییم. در شکل ۴-۳۰ چهار مش داریم، که در آن  $i_4 = -8A$  است. بنابراین چهار معادله جداگانه را می‌نویسیم.  
معادله KVL را در حلقه‌های 1، 2 و 3 می‌نویسیم:

$$(۴۱) \quad -100 + 8i_1 + 4(i_1 - i_2) = 0 \quad \text{یا} \quad 12i_1 - 4i_2 = 100$$

$$(۴۲) \quad 4(i_2 - i_1) + 2i_2 - 3(i_2 - i_3) = 0 \quad \text{یا} \quad -4i_1 + 9i_2 - 3i_3 = 0$$

$$(۴۳) \quad 3(i_3 - i_2) + 10(i_3 + 8) + 5i_3 = 0 \quad \text{یا} \quad -3i_2 + 18i_3 = -80$$

با حل آن‌ها، درمی‌یابیم که  $i_x (=i_2) = 2.79A$ . در این مسئله خاص، تحلیل مش ساده‌تر است. با این وجود چون هر دو روش معتبر است، کار با هر روش می‌تواند به معنی چک کردن روش دیگر باشد.

## ۶-۶ تحلیل کامپیوتری مدار

دیدیم که ایجاد یک مدار پیچیده نیاز به قطعات خیلی زیادی ندارد. با ادامه بررسی مدارهای حتی پیچیده‌تر، می‌بینیم که احتمال انجام اشتباه در تحلیل زیاد است، و تحقیق درستی جواب‌ها با دست‌کاری وقت‌گیر است. یک بسته نرم‌افزاری قوی با نام PSpice وجود دارد که به طور رایج برای تحلیل سریع مدارها به کار می‌رود، و ابزارهای رسم شماتیک آن با ابزارهای مدار چاپی (PCB) یا طرح‌های مجتمع (IC) ارتباط دارند، امروزه PSpice در دهه ۱۹۷۰ در دانشگاه برکلی ساخته شد در سطح استاندارد است. شرکت MicroSim در سال ۱۹۸۴، PSpice را همراه با امکانات گرافیکی حول هسته ارائه نمود. بسته به نوع کاربرد مدار، اکنون چندین شرکت، گونه‌های مختلف PSpice را ارائه می‌کنند.

گرچه تحلیل کامپیوتری راه سریعی برای تعیین ولتاژها و جریان‌ها در مدار است، ولی نباید بگذاریم که بسته‌های نرم‌افزاری کاملاً جایگزین روش‌های تحلیل سنتی با "کاغذ و قلم" گردند. برای این امر چندین دلیل وجود دارد. اول این‌که برای طراحی باید بتوانیم تحلیل کنیم. اتکاء بیش از حد بر ابزارهای نرم‌افزاری مانع رشد مهارت‌های تحلیلی لازم می‌شود، و مثل این است که به بچه‌های دبستانی ماشین حساب داده شود. دوم، در استفاده بلندمدت از

۵. یک معادله KVL حول هر مش / آزمون بنویسید. از یک گره مناسب شروع کرده و در جهت جریان مش پیشروی کنید. توجه به علامت "-" لازم است. اگر منبع جریان حاشیه مش قرار گیرد، معادله KVL لازم نیست و جریان مش با وارسی معین می‌گردد.

۶. جریان جاری شده از هر منبع جریان را به جریان‌های مش مرتبط کنید. این کار به راحتی با اعمال KCL انجام می‌شود. برای هر آزمون تعریف‌شده یک چنین معادله‌ای لازم است.

۷. هر مجهول اضافی مانند ولتاژها یا جریان‌هایی به جز جریان‌های مش را برحسب جریان‌های مش بیان نمایید. این وضعیت هنگامی رخ می‌دهد که منابع وابسته در مدار پیدا شوند.

۸. معادلات را سازمان‌دهی کنید. جملات را برطبق جریان مش‌ها مرتب کنید.

۹. سیستم معادلات را برای جریان‌های مش حل کنید ( $M$  عدد از آن‌ها موجود است).

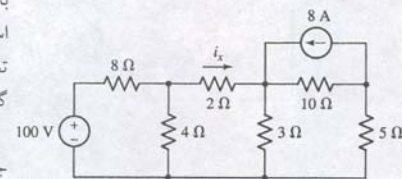
## ۵-۵ تحلیل گره‌ی و تحلیل مش: یک مقایسه

اکنون که دو روش جدا از هم را برای تحلیل مدار بررسی کردیم، به نظر می‌رسد طرح این سوال که کدام یک بر دیگری مزیت دارد، منطقی باشد. اگر مدار غیرمسطح باشد، آن‌گاه هیچ راهی به جز انتخاب گره‌ی وجود ندارد.

در مواردی که مدار مسطحی را تحلیل می‌کنیم ممکن است یک تکنیک نسبت به دیگری کمی موفق داشته باشد. اگر برای استفاده از تحلیل گره‌ی برنامه‌ریزی کرده‌ایم، آن‌گاه مداری با  $N$  گره منجر به  $(N - 1)$  معادله KCL می‌گردد. هر ابرگره‌ی این عدد را یک واحد کم می‌کند. اگر همان مدار  $M$  مش جدا داشته باشد، آن‌گاه  $M$  معادله KVL را خواهیم داشت. هر ابرمشی این عدد را یک واحد کم می‌نماید. بر اساس این واقعیت‌ها باید روشی را اختیار کنیم که منجر به معادلات همزمان کمتری گردد.

اگر یک یا چند منبع وابسته در مدار لحاظ شوند، آن‌گاه هر کمیت‌کننده ممکن است بر انتخاب تحلیل گره‌ی یا مش ما تأثیر بگذارد. مثلاً یک منبع ولتاژ وابسته کنترل‌شده با ولتاژ گره نیازی به یک معادله اضافی در تحلیل گره‌ی ندارد. به همین ترتیب منابع جریان کنترل‌شده به وسیله یک جریان مش نیازی به یک معادله اضافی به هنگام تحلیل مش ندارد. اما در مورد وضعیتی که یک منبع ولتاژ وابسته به وسیله یک جریان کنترل شود، چگونه است؟ یا برعکس، اگر منبع ولتاژ وابسته به وسیله ولتاژ کنترل شود وضع چگونه می‌باشد؟ با این شرط که کمیت کنترل‌کننده به سادگی به جریان مش مرتبط گردد، ما ممکن است انتظار داشته باشیم تحلیل مش سراسر است باشد. به همین ترتیب اگر کمیت کنترل‌کننده به سادگی مرتبط با ولتاژهای گره باشد، تحلیل گره‌ی ترجیح داده می‌شود. یک نکته نهایی در این رابطه حفظ مکان منبع در ذهن است؛ منابع جریانی که در حوضی مش قرار دارند خواه وابسته و یا مستقل، به راحتی در تحلیل مش قابل استفاده‌اند؛ منابع ولتاژی که متصل به پایانه مرجع هستند به خوبی در تحلیل گره‌ی استفاده می‌گردند.

اگر هر یک از دو روش به تعداد معادلات برابری دست یابند، آن‌گاه باید کمیت مورد جست‌وجو را مدنظر قرار داد. تحلیل گره‌ی مستقیماً ولتاژ گره‌ها را محاسبه می‌کند، در صورتی که تحلیل مش جریان‌ها را مشخص می‌نماید. اگر جریان‌های درون مقاومت‌ها مورد سوال باشد، باید از قانون اهم در هر مقاومت برای تعیین جریان استفاده کنیم. به عنوان مثال، مدار شکل ۴-۲۸ را ملاحظه نمایید. می‌خواهیم جریان  $i_x$  را محاسبه نماییم.

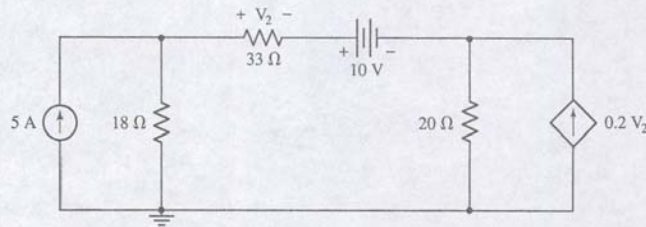


شکل ۴-۲۸ یک مدار مسطح با پنج گره و چهار مش.

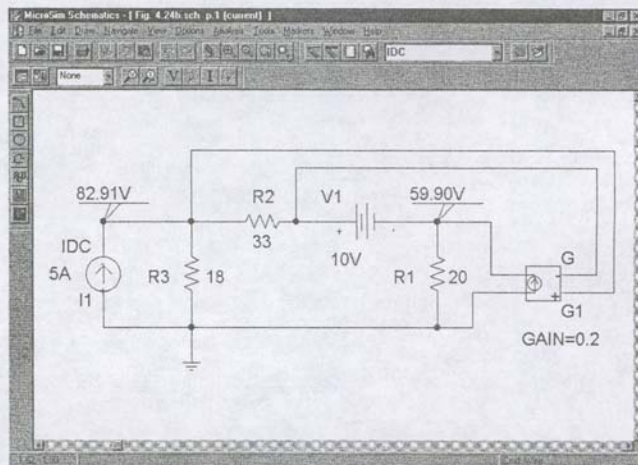


برای تعیین جریان‌های مش، فقط لازم است یک نقطه بایاس را اجرا کنیم. تحت **PSpice**، پرو فایل **New Simulation** را انتخاب کنید. مثال اول را تایپ کنید (یا هر چه را که می‌خواهید) و روی **Create** کلیک نمایید. زیر **Analysis Type** منو را پایین بیاورید، **Bias Point** را انتخاب کرده سپس دکمه **OK** را کلیک کنید. به پنجره شماتیک اولیه برگردید، زیر **PSpice**، **Run** را انتخاب نمایید (یا هر یک از دو فرم shortcut را به کار ببرید: کلید **F11** را فشار دهید یا نماد "Play" آبی را کلیک نمایید). برای مشاهده جریان محاسبه شده به وسیله **PSpice**، مطمئن شوید که دکمه جریان انتخاب شده است (شکل ۴-۳۱ (ب)). نتیجه شبیه سازی ما در شکل ۴-۳۱ (ج) دیده می‌شود. می‌بینیم که جریان‌های  $I_1$  و  $I_2$  به ترتیب 6A و 4A می‌باشند.

به عنوان مثالی دیگر، مدار شکل ۴-۳۲ (الف) را در نظر بگیرید. این مدار یک منبع ولتاژ dc، یک منبع جریان dc، و یک منبع جریان کنترل شده با ولتاژ مدار است. ما علاقمند به سه ولتاژ گره‌ها هستیم که از هر یک از تحلیل‌های گره یا مش برابر  $82.91\text{ V}$ ،  $69.9\text{ V}$  و  $59.9\text{ V}$  به دست می‌آید، و این ضمن حرکت از چپ به راست در بالای مدار حاصل می‌گردد. شکل ۴-۳۲ (ب) این مدار را نشان می‌دهد که از ابزار شماتیک<sup>۱</sup> برای رسم آن پس از شبیه سازی استفاده شده است. سه ولتاژ گره مستقیماً روی تصویر نشان داده شده‌اند. دقت کنید که در ترسیم یک منبع وابسته با ابزار شماتیک، ما باید دو پایانه منبع کنترل کننده ولتاژ یا جریان را متصل کنیم.



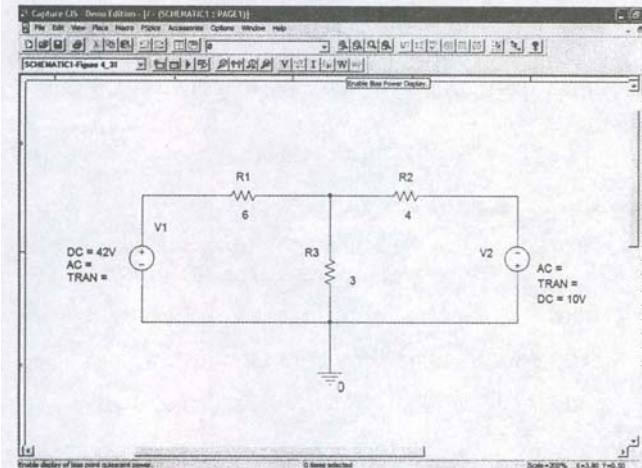
(الف)



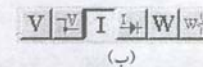
(ب)

شکل ۴-۳۲ (الف) مداری با منبع جریان وابسته. (ب) مداری که با ابزار رسم شماتیک کشیده شده است و نتایج شبیه سازی هم روی شماتیک آمده است.

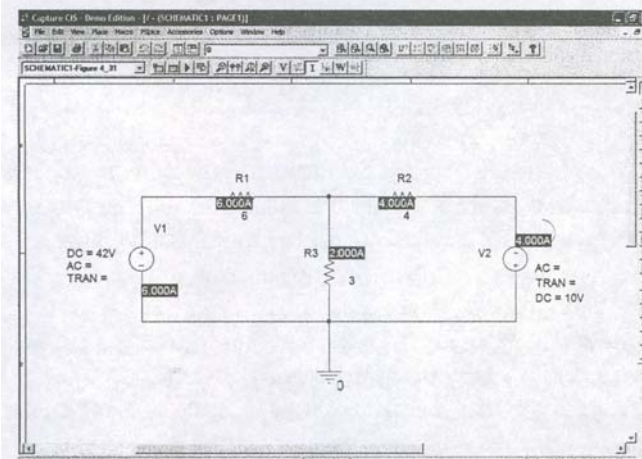
بسته‌های نرم افزاری پیچیده بعید است در تحویل داده اشتباه نکنیم. اگر از قبل ایده‌ای از نوع پاسخ در شبیه سازی نداریم، هیچ اطمینانی به پاسخ نمی‌توان داشت. بنابراین نام "تحلیل به کمک کامپیوتر" نام مناسبی است. مغز انسان عضوی هیچ کاره نیست. لااقل هنوز نه! به عنوان مثال، مدار شکل ۴-۱۵ (ب) را در نظر می‌گیریم که دارای دو منبع ولتاژ dc و سه مقاومت است. می‌خواهیم این مدار را با **PSpice** شبیه سازی کنیم به نحوی که جریان‌های  $I_1$  و  $I_2$  به دست آیند. شکل ۴-۳۱ (الف) مدار را که با برنامه رسم شماتیک رسم شده است، نشان می‌دهد.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۴-۳۱ (الف) مدار شکل ۴-۱۵ (الف) که با نرم افزار Orcad رسم شده است. (ب) دکمه جریان، ولتاژ و توان. (ج) مدار پس از اجرای شبیه سازی که در آن نمایش جریان فعال شده است.



## کاربردهای عملی

## ایجاد شماتیک PSpice مبتنی بر گره

رایج‌ترین روش توصیف یک مدار همراه با تحلیل کامپیوتر استفاده از بعضی بسته‌های ترسیم شماتیک گرافیکی است که مثالی از آن در شکل ۴-۳۲ ملاحظه شد. با این وجود SPICE قبل از پیدایش این برنامه‌ها نوشته شده بود و توصیف مدار در آن با قالب‌های متنی صورت می‌گرفت. ریشه قالب در قالب کارت‌های پانچی بوده است و به همین دلیل ظاهری تفاوت دارد. مبنای توصیف مدار تعریف عناصر می‌باشد، که به هر پایانه آن یک شماره گره اختصاص یافته است، بنابراین هر چند که اکنون در روش کلی تحلیل گره‌ی و مش را ملاحظه کردیم ولی جالب است بدانیم که

SPICE و PSpice بر اساس روش تحلیل گره‌ی نوشته شده است. گرچه تحلیل مدار مدرن با استفاده از نرم‌افزارهای محاوره‌ای گرافیک محوری انجام می‌شود، وقتی خطایی تولید می‌شود (به دلیل اشتباه در ترسیم شماتیک، یا در انتخاب ترکیبی از تحلیل‌های اختیاری)، هنگام ردیابی یک مسئله خاص، خواندن شماتیک تولید شده می‌تواند با ارزش باشد. ساده‌ترین راه در ایجاد این توانمندی، خواندن چگونگی اجرای PSpice از deck user-written input است. مثلاً بسته ورودی زیر را ملاحظه نمایید (خطوط ستاره‌دار، توضیحات است):

\* Example input deck for a simple voltage divider.

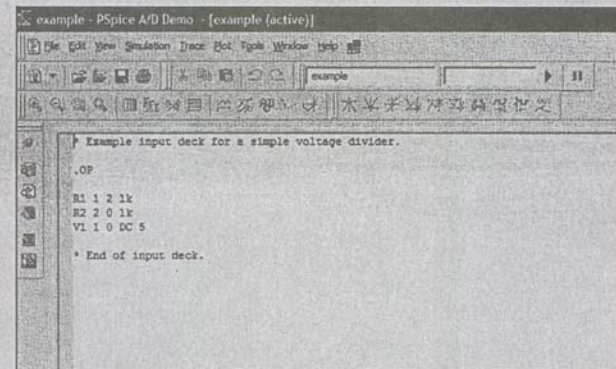
.OP  
R1 1 2 1k  
R2 2 0 1k  
V1 1 0 DC 5

از SPICE تعیین نقطه کار dc مدار را سوال می‌کند.  
R1 بین گره‌های 1 و 2 است؛ مقدار آن 1k $\Omega$  است.  
R2 بین گره‌های 2 و 0 است؛ مقدار آن 1k $\Omega$  است.  
V1 بین گره‌های 1 و 0 است؛ مقدار آن dc 5 V است.

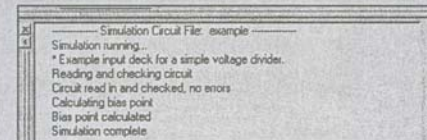
\* End of input deck.

را انتخاب نمایید. پس از انتخاب فایل و کلیک Open می‌بینیم که پنجره PSpice A/D با فایل مدار ما باز شده است (شکل ۴-۳۳ (الف)). یک چنین netlist، حاوی دستورات برای اجرای شبیه‌سازی، می‌تواند تا نرم‌افزار شماتیک یا دستی مثل این مثال، تولید گردد.

می‌توانیم بسته ورودی را با برنامه Notepad از ویندوز ایجاد کنیم. با ذخیره فایل تحت نام example.cir، PSpice A/D را فرا می‌خوانیم (پیوست ۴). تحت Open، File را انتخاب می‌نماییم. دایرکتوری را مشخص کنید و فایل example.cir را انتخاب نمایید. برای Files of Type: Circuit Files (\*.cir)



(الف)



(ب)

شکل ۴-۳۳ (الف) پنجره PSpice A/D با فایل مدار باز شده. (ب) خلاصه اعمال شبیه‌سازی.

ما شبیه‌سازی را با کلیک روی نماد "play" در سمت راست بالا یا انتخاب Run زیر Simulation انجام می‌دهیم. در گوشه سمت چپ پایین از ویندوز اصلی، یک پنجره

خلاصه کوچکتر اطلاع می‌دهد که شبیه‌سازی با موفقیت اجرا شده است (شکل ۴-۳۳ (ب)). برای مشاهده نتایج، ما Output File را از زیر منوی View انتخاب کرده و می‌بینیم:

\*\*\*\* 02/18/04 09:53:57 \*\*\*\*\* PSpice Lite (Jan 2003) \*\*\*\*\*

\* Example input deck for a simple voltage divider.

\*\*\*\* CIRCUIT DESCRIPTION

\*\*\*\*\*

.OP

R1 1 2 1k

R2 2 0 1k

V1 1 0 DC 5

\* End of input deck.

ورودی در خروجی نیز درج می‌شود تا به آن مراجعه شود.

\*\*\*\* 02/18/04 09:53:57 \*\*\*\*\* PSpice Lite (Jan 2003) \*\*\*\*\*

\* Example input deck for a simple voltage divider.

\*\*\*\* SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION TEMPERATURE = 27.000 DEG C

\*\*\*\*\*

NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE

( 1) 5.0000 ( 2) 2.5000  
VOLTAGE SOURCE CURRENT  
NAME CURRENT

V1 -2.500E-03

در خلاصه خروجی، ولتاژ بین هر گره و گره 0 داده شده است. منبع 5 V ما بین گره‌های 1 و 0 است؛ مقاومت R2 بین گره‌های 2 و 0 بوده و دو سر آن 2.5 V می‌باشد.

TOTAL POWER DISSIPATION 1.25E-02 WATTS

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، استفاده از روش‌های مبتنی بر متن در توصیف مدارها در مقایسه با ابزارهای رسم شماتیکی چندان آسان نیست. خصوصاً معرفی خطاها به یک شبیه‌ساز از طریق اشتباه در تعداد گره‌ها به سادگی صورت می‌گیرد. با این وجود تفسیر خروجی بسیار ساده است و تلاش در خواندن چند فایل از این نوع ارزش دارد.

## ۴-۷ خلاصه فصل و مرور

- قبل از شروع تحلیل، یک نمودار ساده و مرتب بسازید. همه مقادیر عناصر و منابع را مشخص کنید. هر منبع باید یک سمبل مرجع داشته باشد.
- اگر تحلیل گره‌ی روش انتخابی است.
  - یکی از گره‌ها را به عنوان گره مرجع اختیار نمایید. آن‌گاه ولتاژ گره‌ها را با  $V_1, V_2, \dots, V_{N-1}$  علامت بزنید و به‌خاطر بسپارید که هر کدام نسبت به مرجع اندازه‌گیری می‌شود.
  - اگر مدار حاوی تنها منبع جریان باشد، در هر گره غیر مرجع KCL را اعمال کنید.
  - اگر مدار حاوی منابع ولتاژ است، یک ابرگره حول هر یک ایجاد نمایید و سپس KCL را در همه گره‌های غیر مرجع و ابرگره اعمال کنید.
- اگر تحلیل مش را انتخاب کرده‌اید، ابتدا مطمئن شوید که مش از نوع مسطح است.
  - در هر مش در جهت ساعت‌گرد یک جریان تخصیص دهید.
  - اگر مدار حاوی فقط منابع ولتاژ باشد، KVL را حول هر مش اجرا کنید.
  - اگر مدار حاوی منابع جریان باشد، ابرمش را برای هر یک که در بین دو مش مشترک است ایجاد نمایید و سپس KVL را برای هر مش و ابرمش اجرا کنید.



- برای تصمیم‌گیری در استفاده از تحلیل گرهی یا مش برای مدار مسطح، مداری با گره‌الپر گره کمتر، معادلات کمتری را در تحلیل گرهی دارد.
- تحلیل به کمک کامپیوتر، برای تست نتایج و تحلیل مدارهایی که تعداد عناصر زیادی دارند مفید است. با این وجود برای تست نتایج شبیه‌سازی، باید موضوع را درک کرد.

## ۴-۸ خواندنی‌های کمکی

A detailed treatment of nodal and mesh analysis can be found in:

R. A. DeCarlo and P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

A solid guide to SPICE is

P. Tuinenga, *SPICE: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSpice*, 3rd ed. Upper Saddle River, N. J.: Prentice-Hall, 1995.

## مسائل

### ۴-۱ تحلیل گرهی

۱. (الف) اگر  $0.1v_1 - 0.3v_2 - 0.4v_3 = 0$ ،  $-0.5v_1 + 0.1v_2 = 4$  و  $0.2v_1 - 0.3v_2 + 0.4v_3 = 6$  باشد،  $v_2$  را پیدا کنید. (ب) دترمینان زیر را محاسبه نمایید.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

۲. (الف) اگر  $2v_B + 16 = v_A - 3v_C$ ،  $v_A + v_B + v_C = 27$  و  $4v_C + 2v_A + 6 = 0$  باشد،  $v_A$ ،  $v_B$  و  $v_C$  را بیابید. (ب) دترمینان زیر را محاسبه نمایید.

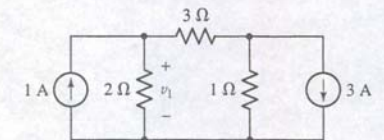
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

۳. (الف) سیستم معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} 4 &= v_1/100 + (v_1 - v_2)/20 + (v_1 - v_3)/50 \\ 10 - 4 - (-2) &= (v_3 - v_1)/50 + (v_3 - v_2)/40 \\ -2 &= v_2/25 + (v_2 - v_3)/40 + (v_2 - v_1)/20 \end{aligned}$$

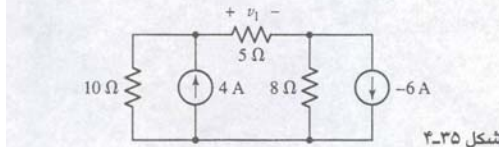
(ب) با متلب حل خود را تصدیق کنید.

۴. مقدار ولتاژ  $v_1$  را در شکل ۴-۳۴ معین کنید.



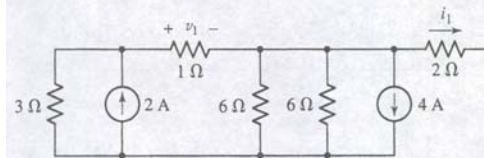
شکل ۴-۳۴

۵. مقدار ولتاژ  $v_1$  را در شکل ۴-۳۵ معین کنید.



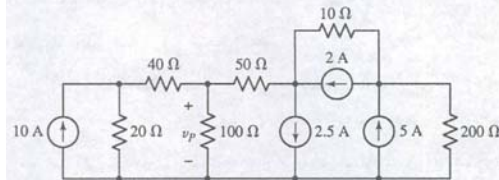
شکل ۴-۳۵

۶. برای مدار شکل ۴-۳۶ مقدار ولتاژ  $v_1$  و جریان  $i_1$  را به دست آورید.



شکل ۴-۳۶

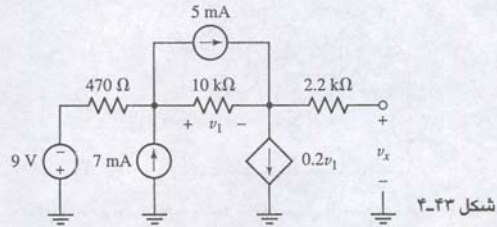
۷. با تحلیل گرهی  $v_p$  را در مدار شکل ۴-۳۷ به دست آورید.



شکل ۴-۳۷

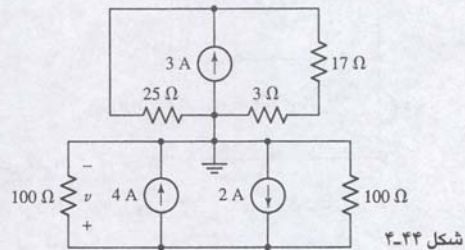
۸. برای یافتن  $v_x$  در مدار شکل ۴-۳۸ از تحلیل گرهی استفاده نمایید.
۹. برای شکل ۴-۳۹، (الف) از تحلیل گرهی برای تعیین  $v_1$  و  $v_2$  استفاده کنید. (ب) توان جذب‌شده به وسیله مقاومت  $6S$  چقدر است.
۱۰. تحلیل گرهی را برای یافتن  $v_1$  و  $i_2$  در مدار شکل ۴-۴۰، به کار ببرید.
۱۱. با مراجعه به شکل ۴-۴۱، تحلیل گرهی را برای تعیین  $v_2$  که  $v_1 = 0$  را نتیجه دهد، به کار ببرید.

۱۳. با تحلیل گرهی، مقدار  $v_2$  را در شکل ۴-۴۳ به دست آورید.



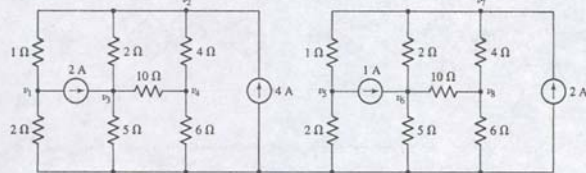
شکل ۴-۴۳

۱۴. با تحلیل گرهی، ولتاژ  $v_1$  را در شکل ۴-۴۴ معین کنید.



شکل ۴-۴۴

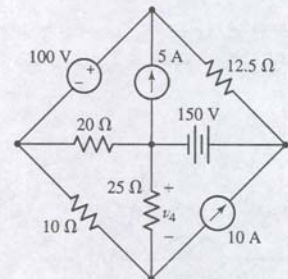
۱۵. ولتاژهای گره مشخص‌شده در شکل ۴-۴۵ را معین نمایید.



شکل ۴-۴۵

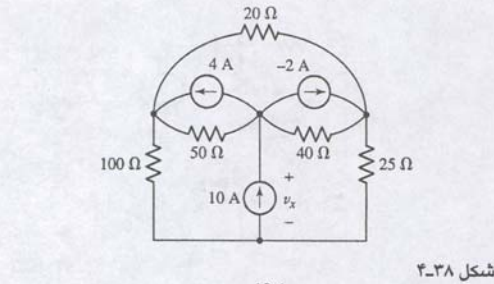
### ۴-۲ ابرگره

۱۶.  $v_4$  را در مدار شکل ۴-۴۶ به کمک تحلیل گرهی به دست آورید.

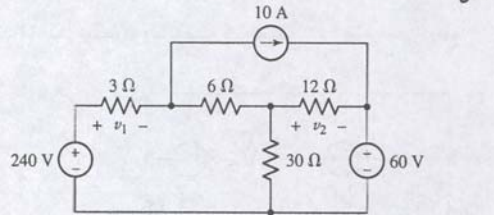


شکل ۴-۴۶

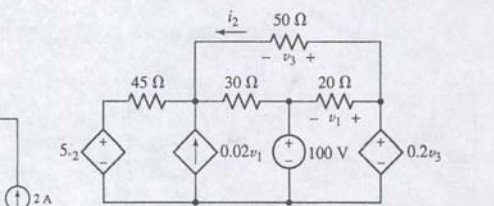
۱۷. با تحلیل گرهی مدار شکل ۴-۴۷، (الف)  $v_A$  را به دست آورید، (ب) توان تلف‌شده در مقاومت  $2.5S$  چقدر است.



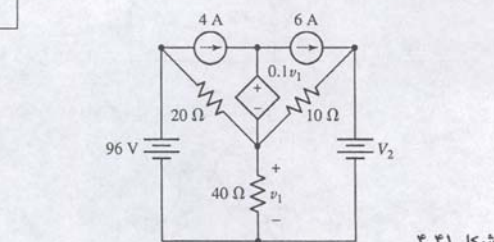
شکل ۴-۳۸



شکل ۴-۳۹

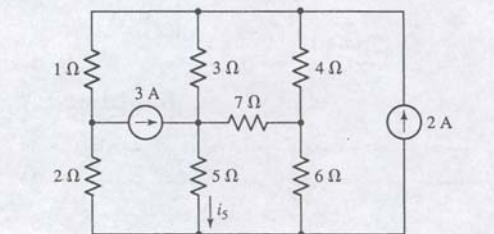


شکل ۴-۴۰



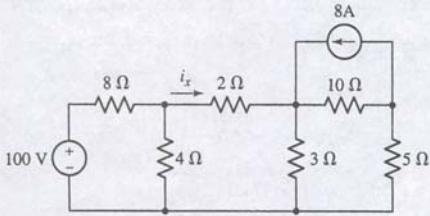
شکل ۴-۴۱

۱۲. برای مدار شکل ۴-۴۲، تحلیل گرهی را برای تعیین جریان  $i_5$  به کار ببرید.

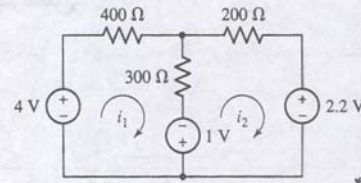


شکل ۴-۴۲

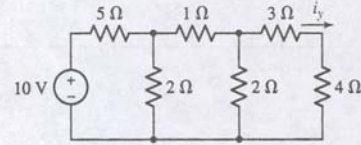




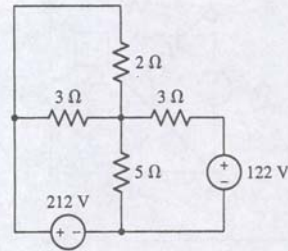
شکل ۴-۵۶



شکل ۴-۵۷

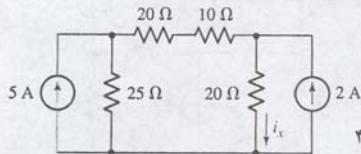


شکل ۴-۵۸



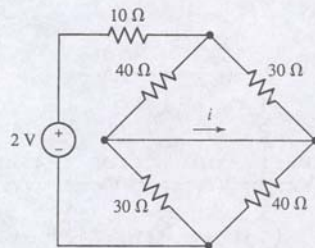
شکل ۴-۵۹

۲۹. در مدار شکل ۴-۵۹، تحلیل مش را برای (الف) جریان  $i_x$  و (ب) توان جذب شده به وسیله مقاومت  $25\Omega$  تعیین کنید.



شکل ۴-۶۰

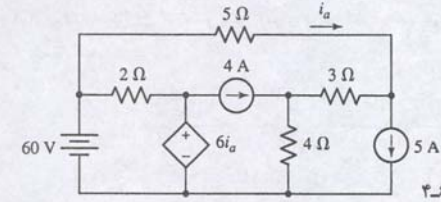
۳۰. از تحلیل مش برای تعیین جریان  $i$  در مدار شکل ۴-۶۰ استفاده نمایید.



شکل ۴-۶۱

۳۱. برای یافتن  $i_x$  در شکل ۴-۶۱ از تحلیل مش استفاده کنید.

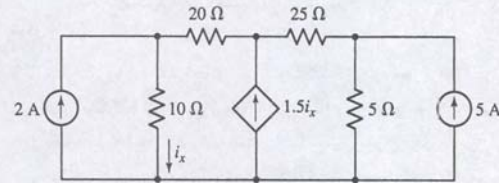
۳۲. در مدار شکل ۴-۶۲ توان تلف شده در مقاومت  $2\Omega$  را محاسبه نمایید.



شکل ۴-۶۲

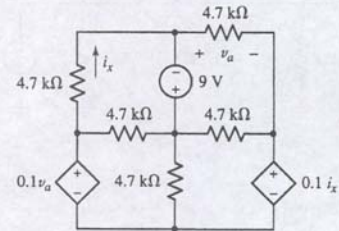
۳۳. از تحلیل مش برای مدار شکل ۴-۴۸ استفاده کرده و توان تولیدی به وسیله منبع ولتاژ وابسته را حساب کنید.

۳۴. از تحلیل مش برای یافتن  $i_x$  در شکل ۴-۶۳ استفاده کنید.



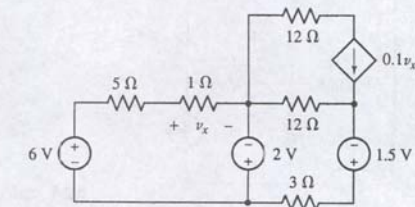
شکل ۴-۶۳

۳۵. برای شکل ۴-۶۴ جریان های مش ساعت گرد را حساب نمایید.

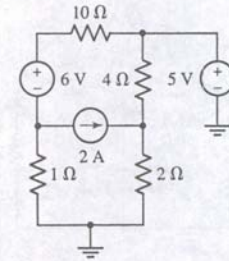


شکل ۴-۶۴

۳۶. هر جریان مش را در مدار شکل ۴-۶۵ محاسبه کنید.

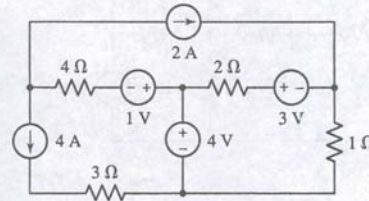


شکل ۴-۶۵



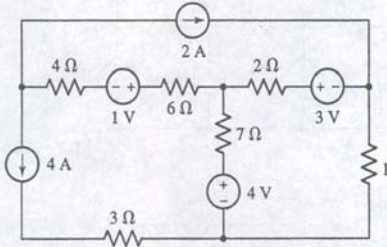
شکل ۴-۵۲

۲۳. توان تولیدی به وسیله منبع  $2A$  در شکل ۴-۵۲ چقدر است؟



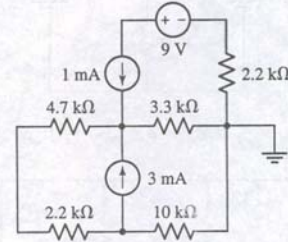
شکل ۴-۵۳

۲۴. توان تولیدی به وسیله منبع  $2A$  در شکل ۴-۵۳ چقدر است؟



شکل ۴-۵۴

۲۵. ولتاژهای گره در شکل ۴-۵۵ را تعیین کنید.



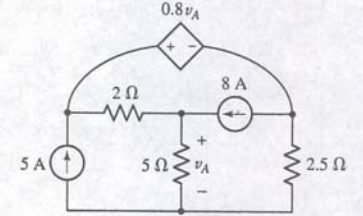
شکل ۴-۵۵

### ۴-۳ تحلیل مش

۲۶. جریان های مش  $i_1$  و  $i_2$  را طبق مدار شکل ۴-۵۶ به دست آورید.

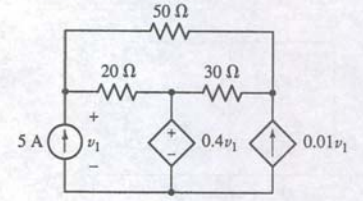
۲۷. با توجه به شکل ۴-۵۷، تحلیل مش را برای (الف) جریان  $i_y$  و (ب) توان تولیدی به وسیله منبع  $10V$  تعیین کنید.

۲۸. تحلیل مش را برای تعیین جریان در مدار شکل ۴-۵۸ از (الف) مقاومت  $2\Omega$  و (ب) مقاومت  $5\Omega$  به دست آورید.



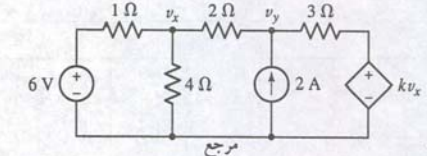
شکل ۴-۴۷

۱۸.  $v_1$  و توان تولید شده به وسیله منبع جریان وابسته در شکل ۴-۴۸ را با تحلیل گرهی مشخص کنید.



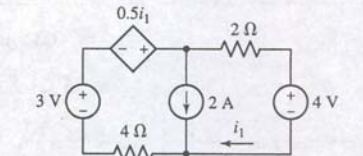
شکل ۴-۴۸

۱۹. در شکل ۴-۴۹، با تحلیل گرهی، مقدار  $k$  را که موجب  $v_y = 0$  می شود، پیدا کنید.



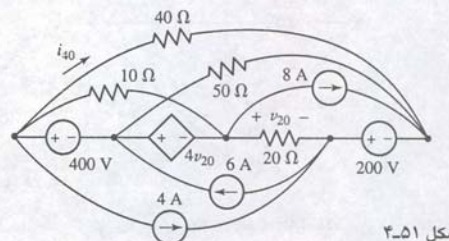
شکل ۴-۴۹

۲۰. مدار شکل ۴-۵۰ را ملاحظه نمایید. جریان  $i_1$  را به دست آورید.



شکل ۴-۵۰

۲۱. از مفهوم ابرگره در تعیین  $v_{20}$  در شکل ۴-۵۱ استفاده کنید. خطوط متقاطع از نظر فیزیکی یکدیگر را قطع نمی کنند، مگر این که در محل برخورد نقطه سیاه باشد.



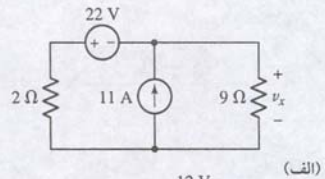
شکل ۴-۵۱

۲۲. برای مدار شکل ۴-۵۲، ولتاژ هر چهار گره را به دست آورید.

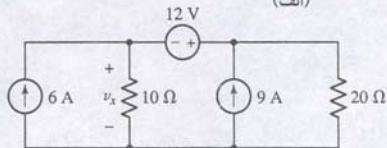


## ۴-۵ تحلیل گرهی و تحلیل مش: یک مقایسه

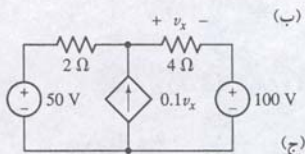
۴۹. در هر یک از مدارهای شکل ۴-۷۸، ولتاژ  $v_x$  را تعیین نمایید.



(الف)



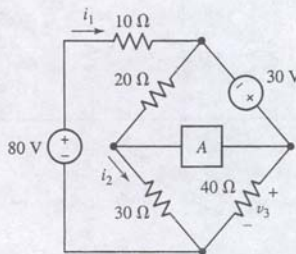
(ب)



(ج)

شکل ۴-۷۸

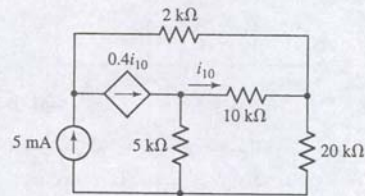
۵۰. در مدار شکل ۴-۷۹ را پیدا کنید، اگر عنصر  $A$  (الف) یک مدار اتصال کوتاه باشد. (ب) یک منبع ولتاژ مستقل 9V، با مرجع مثبت در سمت چپ، (ج) یک منبع جریان وابسته، با پیکان به سمت چپ و برجسب  $5i_1$  باشد.



شکل ۴-۷۹

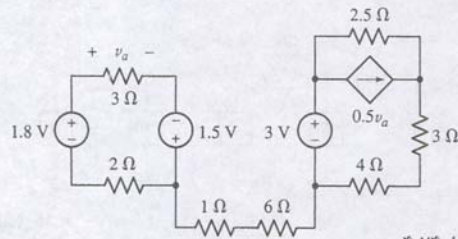
۵۱. جریانهای  $i_1$  و  $i_2$  در مدار شکل ۴-۷۹ را معین کنید، به شرطی که عنصر  $A$  یک مقاومت 12Ω باشد. منطق خود را در مورد انتخاب تحلیل گرهی مش بیان کنید.

۵۲. در مدار شکل ۴-۸۰، جریان  $i_{10}$  را به دست آورید.



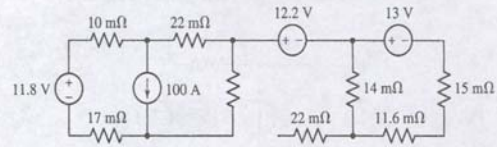
شکل ۴-۸۰

۴۵. برای تهیه ولتاژ دو سر مقاومت 2.5Ω در شکل ۴-۷۴ از تحلیل مش استفاده نمایید.



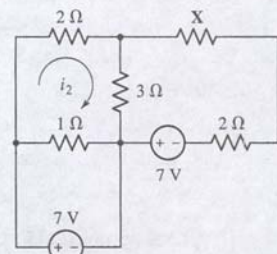
شکل ۴-۷۴

۴۶. جریانهای مش را برای شکل ۴-۷۵ محاسبه کنید.



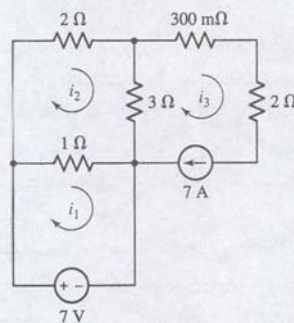
شکل ۴-۷۵

۴۷. برای مدار شکل ۴-۷۶ مقدار مقاومت  $X$  را به دست آورید. به شرطی که  $i_2 = 2.273A$  باشد.



شکل ۴-۷۶

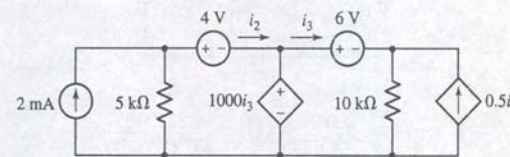
۴۸. مدار شکل ۴-۷۷ را ملاحظه کنید. سه جریان مش را محاسبه کنید



شکل ۴-۷۷

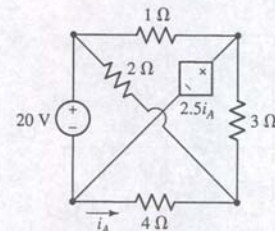
## ۴-۶ ابرمش

۴۱. برای یافتن توان تولیدی به وسیله هر یک از پنج منبع شکل ۴-۷۰ از تحلیل مش استفاده کنید.



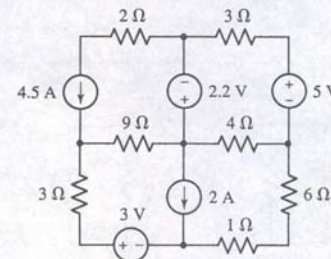
شکل ۴-۷۰

۴۲. در مدار شکل ۴-۷۱،  $i_A$  را بیابید.



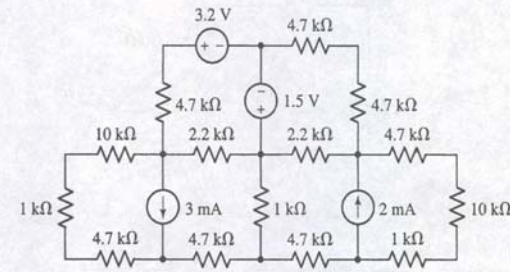
شکل ۴-۷۱

۴۳. با استفاده از مفهوم برمش توان تولید شده به وسیله منبع 2.2V در شکل ۴-۷۲ را معین نمایید.



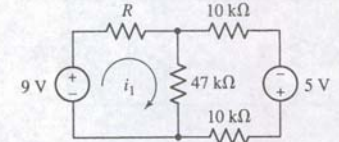
شکل ۴-۷۲

۴۴. ولتاژ دو سر منبع 2mA در شکل ۴-۷۳ را با فرض زمین بودن گره پایینی تعیین کنید.



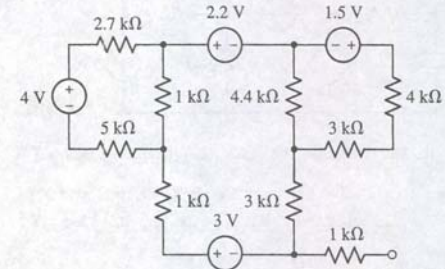
شکل ۴-۷۳

۳۷. (الف) با مراجعه به مدار شکل ۴-۶۶، مقدار  $R$  چقدر باشد تا جریان مش  $i_1 = 1.5mA$  شود. (ب) آیا مقدار  $R$  لزوماً منحصر به فرد است؟ توضیح دهید.



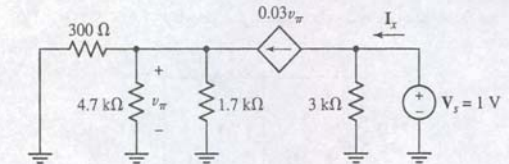
شکل ۴-۶۶

۳۸. در مدار شکل ۴-۶۷، تحلیل مش را برای یافتن توان جذب شده در هر مقاومت به کار ببرید.



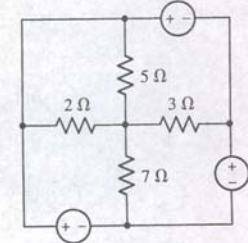
شکل ۴-۶۷

۳۹. مدار شکل ۴-۶۸ معادل یک تقویت کننده ترانزیستوری دو قطبی بیس مشترک است. منبع ورودی اتصال کوتاه و به جای وسیله خروجی یک منبع 1V جایگزین شده است. (الف) تحلیل مش را برای یافتن  $I_x$  استفاده نمایید. (ب) حل بخش (الف) را با روش تحلیل گرهی تحقیق کنید. (ج) اهمیت فیزیکی  $V_o/I_x$  چیست؟



شکل ۴-۶۸

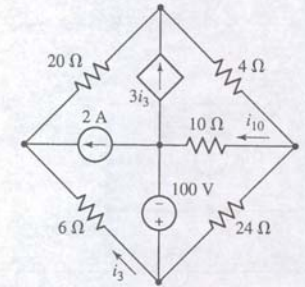
۴۰. مقادیر غیر صفر را برای سه منبع ولتاژ در شکل ۴-۶۹، طوری انتخاب کنید که هیچ جریانی از مقاومتها نگذرد.



شکل ۴-۶۹

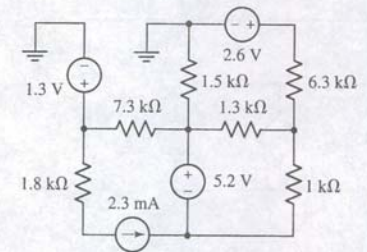


۵۳. دو جریان مجهول را در شکل ۴-۸۱ معین نمایید.



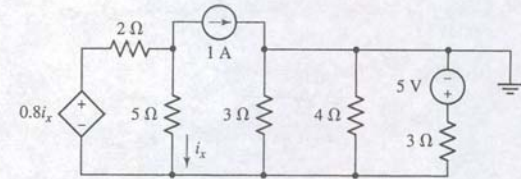
شکل ۴-۸۱

۵۴. برای مدار شکل ۴-۸۲ ولتاژ گره مرکزی را حساب نمایید.



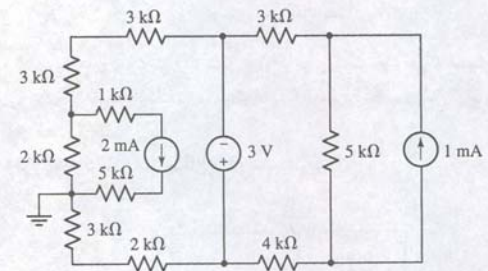
شکل ۴-۸۲

۵۵. جریان درون هر انشعاب را در مدار شکل ۴-۸۳ به دست آورید.



شکل ۴-۸۳

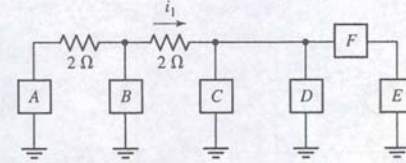
۵۶. ولتاژ دو سر منبع جریان 2mA در شکل ۴-۸۴ را تعیین کنید.



شکل ۴-۸۴

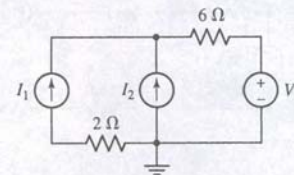
۵۷. برای مدار شکل ۴-۸۵، اجازه بدهید تا A یک منبع ولتاژ 5V با مرجع مثبت در بالا، B یک منبع جریان 3A با پیکانی به سمت زمین، C یک

مقاومت 3Ω، D یک منبع جریان 2A با پیکان به سمت زمین، F یک منبع ولتاژ 1V با مرجع منفی به راست و E یک مقاومت 4Ω باشد،  $i_1$  را محاسبه کنید.



شکل ۴-۸۵

۵۸. مقادیر غیر صفری را برای  $I_1$ ،  $I_2$  و  $V_1$  طوری انتخاب کنید که 6W توان به وسیله مقاومت 6Ω در مدار شکل ۴-۸۶ تلف شود.



شکل ۴-۸۶

۵۹. با مراجعه به شکل ۴-۸۴، منبع جریان 2mA را با یک منبع ولتاژ 2V و منبع 3V را با منبع جریان 7mA جایگزین کنید. برای مدار جدید جریان مش را به دست آورید.

۶۰. در مدار شکل ۴-۸۵، یک منبع جریان وابسته با پیکانی به سمت پایین و برچسب جریان  $5i_1$  است. اگر A و B مقاومت‌های 2Ω باشند، اجازه بدهید که C یک منبع جریان 2A به سمت زمین، F یک منبع ولتاژ با قطب منفی متصل به زمین، D یک منبع جریان در جهت بالا باشد. ولتاژ گره‌ها و جریان مش را به دست آورید.

## ۶-۲ تحلیل کامپیوتری مدار

۶۱. برای تحقیق صحت حل تمرین ۴-۵۲ از PSpice استفاده کنید. یک شماتیک با نام‌گذاری مناسب تحویل دهید. محاسبات دستی را ضمیمه نمایید.

۶۲. برای تحقیق صحت حل تمرین ۴-۵۴ از PSpice استفاده نمایید. یک شماتیک با نام‌گذاری مناسب تحویل دهید. محاسبات دستی را ضمیمه نمایید.

۶۳. برای تحقیق صحت حل تمرین ۴-۵۶ از PSpice استفاده نمایید. یک شماتیک با برچسب‌های مناسب تحویل دهید. محاسبات دستی را ضمیمه کنید.

۶۴. برای تحقیق صحت حل تمرین ۴-۵۸ از PSpice استفاده نمایید. یک شماتیک آن را با برچسب‌های مناسب تحویل دهید. محاسبات دستی را ضمیمه نمایید.

۶۵. برای تحقیق صحت حل تمرین ۴-۶۰ از PSpice استفاده نمایید. یک شماتیک آن را با برچسب‌های مناسب تحویل دهید. محاسبات دستی را ضمیمه کنید.

۶۶. مداری متشکل از منبع 5V سری با مقاومت 100Ω به شبکه‌ای حاوی حداقل یک منبع 3A، سه مقاومت مختلف و یک منبع جریان کنترل‌شده با ولتاژ، که به ولتاژ دو سر مقاومت 100Ω وابسته است وصل شده است. (الف) همه ولتاژهای گرهی و همه جریان‌های شاخه‌ها را به دست آورید. (ج) برای تحقیق نتایج از PSpice استفاده کنید.

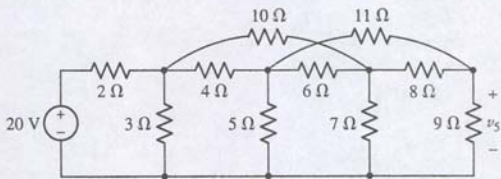
۶۷. مداری با باتری 10V، یک منبع 3A و به هر تعداد مقاومت 1Ω بسازید تا پتانسیل 5V در دو سر منبع 3A ایجاد شود. صحت محاسبات دستی را با PSpice تحقیق کنید.

۶۸. یک بسته ورودی برای SPICE بنویسید تا  $V_1$  را در مدار شکل ۴-۸۷ پیدا کنید. از فایل خروجی لیست بگیرید، ضمن این‌که حل را پررنگ‌تر چاپ می‌کنید.

۶۹. با باتری 9V و مقاومت‌های مناسب ولتاژهای گره 2V، 3V، 4V بسازید. یک بسته ورودی برای SPICE برای شبیه‌سازی حل خود بنویسید و فایل خروجی را چاپ کنید. یک شماتیک با برچسب روی مرجع رسم کنید و شماره گره‌ها را مشخص کنید.

## ۷-۲ تحلیل گرهی و مش

۷۰. یک رشته طولیل از یک سری لامپ‌های رنگی در یک منزل کشیده شده است. پس از اعمال برق صاحبخانه متوجه می‌شود که دو لامپ سوخته است. (الف) آیا لامپ‌ها سری‌اند یا موازی؟ (ب) یک بسته ورودی SPICE برای شبیه‌سازی لامپ‌ها بنویسید، با این فرض که سیم 20AWG است، منبع تغذیه 115Vac می‌باشد، و توان هر لامپ 1W است، در رشته 400 لامپ وجود دارد. یک مدار با کمتر از 25 قطعه شبیه‌سازی نمایید. از فایل خروجی لیست بگیرید. توان به وسیله سوکت روی دیوار شاخص‌تر باشد. (ج) پس از تعویض لامپ‌های سوخته، صاحبخانه متوجه می‌شود که لامپ‌های نزدیک خروجی 10% روشن‌تر از لامپ‌های انتهایی رشته‌اند. توضیح لازم را ارائه نمایید و به خاطر بسپارید که رشته سیم مقاومت صفر دارد.



شکل ۴-۸۷



## تکنیک‌های مفید تحلیل مدار

### مقدمه

تکنیک‌های تحلیل گره و مش توصیف‌شده در فصل ۴، روش‌های قابل اطمینان و قدرتمندی هستند. با این وجود به‌طور کلی هر دو لازم می‌دارند تا مجموعه معادلاتی را برای توصیف یک مدار خاص ایجاد کنیم، حتی اگر تنها کمیت یک جریان، ولتاژ یا توان خاصی مورد نظر باشد. در این فصل ما چند تکنیک متفاوت دیگر را جهت جدا کردن بخش‌های خاصی از یک مدار بررسی می‌کنیم تا تحلیل را ساده کنیم. پس از بررسی کاربرد این تکنیک‌ها، ما توجه خود را به چگونگی انتخاب یک روش معطوف خواهیم کرد.

### ۵-۱ خطی‌بودن و تجمیع

همه مدارهایی که قصد تحلیل آن‌ها را داریم از نوع خطی‌اند. بنابراین اکنون لحظه مناسبی برای تعریف دقیق‌تر آن‌چه می‌گوییم است. پس از آن می‌توانیم نتایج مهم‌تر خطی‌بودن یعنی **اصل تجمیع** (برهم‌نهی یا ترکیب) را بررسی نماییم. این اصل بسیار ساده بوده و کراراً در تحلیل مدارهای خطی به کار خواهد رفت. در واقع مشکل تحلیل مدارهای غیرخطی به دلیل عدم امکان اصل تجمیع است!

اصل تجمیع چنین می‌گوید که پاسخ (جریان ولتاژ) در یک مدار خطی با بیش از یک منبع مستقل می‌تواند از جمع پاسخ‌های جداگانه حاصل از منابع مستقل به دست آید.

### عناصر خطی و مدارهای خطی

بیا باید عنصر خطی را عنصر غیرفعال تعریف کنیم که دارای رابطه ولتاژ - جریان خطی باشد. منظور ما از رابطه ولتاژ - جریان خطی این است که اگر جریان داخل یک عنصر در ثابت  $K$  ضرب شود، ولتاژ روی عنصر در همان ثابت  $K$  ضرب می‌شود. تا این جا تنها عنصر غیرفعال مقاومت و رابطه ولتاژ - جریان آن را تعریف کرده‌ایم:

$$v(t) = Ri(t)$$

که کاملاً خطی است. یعنی اگر  $v(t)$  به عنوان تابعی از  $i(t)$  ترسیم شود، نتیجه یک خط راست است. منبع وابسته خطی را نیز باید به صورت منبعی تعریف کنیم که جریان یا ولتاژ خروجی آن با توان اول جریان یا ولتاژ متغیری از مدار یا ترکیب آن‌ها متناسب باشد، مثلاً منبع ولتاژ وابسته  $v_s = 0.6t_1 - 14v_2$  خطی است، ولی  $v_s = 0.6t_1^2 + v_s = 0.6t_1v_2$  نیستند.

اکنون مدار خطی را به صورت ترکیبی از منابع مستقل، منابع وابسته خطی و عناصر خطی تعریف می‌کنیم. با این تعریف می‌توان نشان داد که پاسخ یا منبع متناسب است، یا ضرب تمام منابع مستقل ولتاژ و جریان در ثابت  $K$  باعث می‌شود که تمام ولتاژها و جریان‌ها در همان ثابت‌ها ضرب شوند\* (حتی ولتاژ یا جریان منابع وابسته).

#### مفاهیم کلیدی

تجمیع به معنی تعیین سهم تک تک منابع مختلف برای هر جریان یا ولتاژ است

تبدیل منبع برای ساده کردن مدار است

تئوری تونن

تئوری نورتن

شبکه‌های معادل تونن و نورتن

حداکثر انتقال توان

تبدیل‌های ستاره - مثلث برای شبکه‌های مقاومتی

انتخاب یک ترکیبی خاص از تکنیک‌های تحلیل

اجرای Sweep Simulations با PSpice



\* برای اثبات این مطلب، ابتدا نشان می‌دهیم که اعمال تحلیل گره‌ی به یک مدار خطی فقط می‌تواند معادلاتی خطی به صورت زیر باشد:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = b$$

که در آن ضرایبی چون  $a_n$  مقادیر ثابت (ترکیب مقادیر مقاومت‌ها و هدایت‌ها، ثابت‌های مربوط به منابع وابسته یا  $\pm 1$ ) ولتاژهای گره‌ی (پاسخ) و  $b$  مقدار منبع مستقل یا مجموع مقادیر منابع مستقل است. اگر در چنین مجموعه‌ای از معادلات تمام  $b$ ها را در  $K$  ضرب کنیم، واضح است که حل معادلات جدید،  $Kv_1, Kv_2, \dots, Kv_n$  است.



در هر شبکه مقاومتی خطی، ولتاژ دو سر یا جریان درون هر مقاومت یا منبع با جمع جبری ولتاژها یا جریان‌های حاصل از منابع جدا از هم حاصل می‌گردد. در این حال همه منابع ولتاژ مستقل با اتصال کوتاه و همه منابع جریان مستقل با مدار باز جایگزین می‌شوند.



بنابراین اگر  $N$  منبع مستقل وجود داشته باشد، باید  $N$  آزمایش انجام داد و هر بار یک منبع مستقل را فعال و بقیه را غیر فعال (خروجی خاموش یا صفر) نمود. توجه کنید که منابع وابسته همواره در هر آزمایش فعالند.

مداری که در بالا به عنوان مثال به کار بردیم، می‌گوید که باید قضیه قوی‌تری را بیان کرد. اگر بخواهیم می‌توان گروهی از منابع مستقل را به‌طور دلخواه فعال و غیر فعال نمود. مثلاً فرض کنید که سه منبع مستقل وجود داشته باشد. قضیه می‌گوید که می‌توان پاسخ مفروضی را با ملاحظه هر منبع به تنهایی و نتیجه را از جمع آن‌ها به‌دست آورد. به همین ترتیب ممکن است پاسخ توأم جمع منابع اول و دوم را بدون منبع سوم به‌دست آوریم. سپس منبع سوم به تنهایی عمل کند و نتیجه به پاسخ دوم اضافه شود. این عمل نیز نوعی تجمیع است.

البته لزومی ندارد که برای یک منبع مستقل مقدار اصلی یا صفری را در چند آزمایش فرض کنیم، بلکه فقط کافی است که جمع چند مقدار با مقدار اصلی برابر باشد. با این وجود غیر فعال کردن مدار همیشه ساده‌ترین مدار را می‌دهد.

اجازه بدهید کاربرد اصل تجمیع را با بررسی مثالی از یک مدار روشن کنیم که در آن هر دو نوع منبع وجود دارد.

### مثال ۵-۱

برای مدار شکل ۵-۳ (الف) از اصل تجمیع برای نوشتن عبارتی برای جریان  $i_x$  استفاده کنید.

ابتدا منبع جریان را صفر می‌کنیم و مدار را دوباره طبق شکل ۵-۳ (ب) رسم می‌نماییم. بخشی از  $i_x$  متعلق به منبع ولتاژ، با  $i_x'$  نشان داده شده است تا از هر گونه اشتباه جلوگیری شود و به راحتی می‌توان مقدار  $0.2A$  را برای آن یافت.

سپس منبع ولتاژ را در شکل ۵-۳ (الف) صفر کرده و مطابق شکل ۵-۳ (ج) آن را دوباره ترسیم می‌کنیم. استفاده از روش تقسیم جریان اجازه می‌دهد تا  $i_x''$  (بخشی از  $i_x$  متعلق به منبع  $2A$ ) برابر  $0.8A$  گردد.

اکنون می‌توان جریان کل  $i_x$  را از جمع دو مولفه جزئی فوق به‌دست آورد:

$$i_x = i_x' + i_x'' = i_x' |_{3V} + i_x'' |_{2A} = i_x' + i_x''$$

$$i_x = \frac{3}{6+9} + 2\left(\frac{6}{6+9}\right) = 0.2 + 0.8 = 1.0A$$

نگاهی متفاوت به این مثال این است که بگوییم منبع  $3V$  و منبع  $2A$  روی مدار کار انجام می‌دهند، تا به این ترتیب جریان  $i_x$  از مقاومت  $9\Omega$  عبور کند. با این وجود، نقش منبع  $3V$  روی  $i_x$  به نقش منبع  $2A$  روی آن وابسته نیست و بالعکس.

مثلاً اگر خروجی منبع  $2A$  را به  $4A$  یعنی دو برابر افزایش دهیم، جریان  $i_x$  که از مقاومت  $9\Omega$  می‌گذرد نیز دو برابر شده و  $1.6A$  خواهد شد. با این وجود نقش منبع  $3V$  همان  $0.2A$  بوده و جریان جدید  $1.6 + 0.2 = 1.8A$  می‌شود.

### اصل تجمیع

مهم‌ترین اثر خطی بودن تجمیع است. بیایید ابتدا با در نظر گرفتن مدار شکل ۵-۱ به بررسی اصل تجمیع بپردازیم. این مدار دو منبع مستقل جریان دارد که جریان‌های  $i_a$  و  $i_b$  را به مدار می‌فرستند. به این دلیل این منابع را اغلب توابع تحریک و ولتاژ در گره‌های آن‌ها را توابع پاسخ می‌گویند. هر دو تابع تحریک و پاسخ ممکن است تابعی از زمان باشند. دو معادله گرهی برای این مدار، عبارتند از:

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \quad (۱)$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \quad (۲)$$

اکنون اجازه بدهید آزمایش  $x$  را انجام دهیم. ابتدا دو تابع تحریک را  $i_{ax}$  و  $i_{bx}$  می‌نامیم و در این حال دو ولتاژ مجهول نیز متفاوت و برابر  $v_{1x}$  و  $v_{2x}$  خواهند بود. بنابراین:

$$0.7v_{1x} - 0.2v_{2x} = i_{ax} \quad (۳)$$

$$-0.2v_{1x} + 1.2v_{2x} = i_{bx} \quad (۴)$$

سپس آزمایش  $y$  را با تغییر جریان‌های منبع به  $i_{ay}$  و  $i_{by}$  انجام می‌دهیم و پاسخ‌ها را  $v_{1y}$  و  $v_{2y}$  می‌خوانیم:

$$0.7v_{1y} - 0.2v_{2y} = i_{ay} \quad (۵)$$

$$-0.2v_{1y} + 1.2v_{2y} = i_{by} \quad (۶)$$

این سه مجموعه معادله، یک مدار را با سه مجموعه جریان‌های منبع توصیف می‌کنند. اجازه بدهید تا دو معادله آخر را با هم جمع یا به اصطلاح **تجمیع** کنیم. از جمع معادلات (۳) و (۵) داریم:

$$(0.7v_{1x} + 0.7v_{1y}) - (0.2v_{2x} + 0.2v_{2y}) = i_{ax} + i_{ay} \quad (۷)$$

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_a \quad (۱)$$

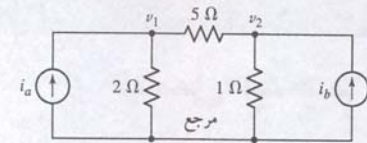
از جمع معادلات (۴) و (۶) نتیجه می‌شود:

$$-(0.2v_{1x} + 0.2v_{1y}) + (1.2v_{2x} + 1.2v_{2y}) = i_{bx} + i_{by} \quad (۸)$$

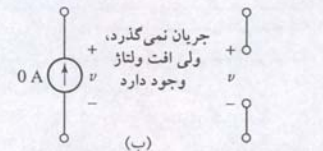
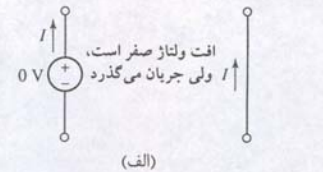
$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \quad (۲)$$

که معادله (۱) بلافاصله زیر معادله (۷) و معادله (۲) زیر معادله (۸) نوشته شده است تا مقایسه شوند. خطی بودن همه این معادلات اجازه می‌دهد تا معادله (۷) را با معادله (۱) و معادله (۸) را با معادله (۲) مقایسه نموده و نتیجه جالبی را به‌دست آوریم. اگر جمع  $i_{ax}$  و  $i_{ay}$  و  $i_{bx}$  و  $i_{by}$  را در نظر بگیریم، آنگاه از جمع  $v_{1x}$  و  $v_{1y}$  مقدار  $v_1$  و  $v_{2x}$  و  $v_{2y}$  نیز مقدار  $v_2$  حاصل می‌شود. به بیان دیگر، ما می‌توانیم آزمایش  $x$  را انجام داده و پاسخ را به‌دست آوریم، سپس آزمایش  $y$  را انجام داده و پاسخ آن را ملاحظه کنیم و آنگاه دو مجموعه پاسخ را با هم جمع نماییم. این عمل ما را به مفهوم اساسی در اصل تجمیع رهنمون می‌شود و آن این‌که هر بار به یک منبع مستقل (و پاسخ آن) نگاه کرده و دیگر منابع مستقل را خاموش (یعنی خروجی صفر) در نظر می‌گیریم. اگر منبع ولتاژ را به صفر ولت کاهش دهیم، در واقع یک اتصال کوتاه را ایجاد کرده‌ایم (شکل ۵-۲ (الف)). صفر کردن منبع جریان به معنی مدار باز بودن (شکل ۵-۲ (ب)) آن است.

بنابراین **قضیه تجمیع** به صورت زیر بیان می‌شود:



شکل ۵-۱ مداری با دو منبع مستقل.

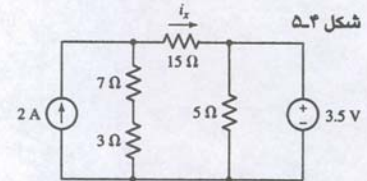


شکل ۵-۲ (الف) منبع ولتاژ در صفر تنظیم شده تا مثل اتصال کوتاه عمل کند. (ب) منبع جریان در صفر تنظیم شده تا مثل مدار باز عمل نماید.

شکل ۵-۳ (الف) مدار نمونه‌ای با دو منبع که جریان شاخه  $i_x$  در آن مورد نظر است. (ب) همان مدار با قطع منبع. (ج) مدار اصلی با منبع ولتاژ اتصال کوتاه شده.



## تمرین



۵-۱ برای مدار شکل ۵-۴، از تجمیع برای محاسبه جریان  $i_x$  استفاده نمایید.  
جواب: 660mA

همان‌طور که خواهیم دید، تجمیع، بار کاری ما را حین بررسی یک مدار چندان کاهش نمی‌دهد، زیرا منجر به تحلیل چند مدار جدید برای تهیه پاسخ مطلوب می‌گردد. با این وجود در شناخت نقش اجزای مختلف در یک مدار پیچیده‌تر بسیار مفید می‌باشد.

با مراجعه به مدار شکل ۵-۵ (الف)، حداکثر جریان مثبتی را معین کنید که قبل از عبور جریان هر مقاومت از حد مجاز و گرم شدن آن، می‌تواند وجود داشته باشد.

■ هدف مسئله را شناسایی کنید.

هر مقاومت دارای 250mW توان می‌باشد. اگر مدار اجازه دهد که این مقدار فراتر برود (با عبور جریان بالایی از آن) گرمای زاید الوصفی که احتمالاً منجر به حادثه شود تولید می‌گردد. منبع 6V نمی‌تواند تغییر یابد، بنابراین به دنبال معادله‌ای برحسب  $i_x$  و جریان حداکثر از هر مقاومت خواهیم گشت.

■ اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

بر اساس توان مجاز 250mW، حداکثر جریان قابل تحمل در مقاومت 100Ω برابر است با:

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{P_{\max}}{R}} = \sqrt{\frac{0.250}{100}} = 50\text{mA}$$

و به‌طور مشابه جریان در مقاومت 64Ω باید کمتر از 62.5mA باشد.

■ ارائه طرح.

تحلیل گره یا تک‌حلقه می‌تواند برای حل این مسئله به‌کار رود، ولی روش تجمیع ممکن است کمی مشکل‌ساز باشد، زیرا ما به اثر منبع جریان علاقمندیم.

■ معادلات مناسب را بنویسید.

با استفاده از اصل تجمیع، مدار را چون شکل ۵-۵ (ب) ترسیم می‌کنیم و درمی‌یابیم که منبع 6V به میزان

$$i_{100\Omega} = \frac{6}{100 + 64} = 36.59\text{mA}$$

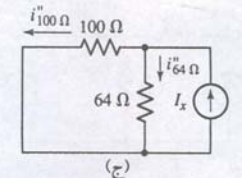
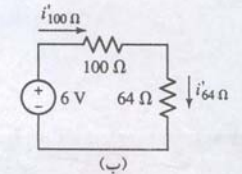
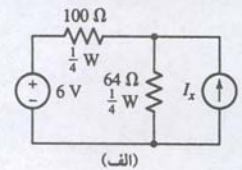
در جریان مقاومت 100Ω نقش دارد و چون با مقاومت 64Ω سری است  $i_{64\Omega} = 36.59\text{mA}$  خواهد بود. بنابراین، اگر منبع 6V به تنهایی عمل کند مشکل گرمایی برای هیچ مقاومتی به‌وجود نمی‌آورد. با ملاحظه تقسیم‌کننده جریان در شکل ۵-۵ (ج) می‌بینیم که  $i_{64\Omega} = 36.59\text{mA}$  اضافه می‌شود، ولی  $i_{100\Omega}$  در جهت خلاف  $i_{100\Omega}$  است. بنابراین با اطمینان کافی جریان درون مقاومت 64Ω برابر است با  $36.59 - 25.91\text{mA}$  و  $62.5 - 36.59 = 25.91\text{mA}$  تا 100Ω درون مقاومت 100Ω محدودیت زیر را بر  $i_x$  تحمیل می‌نماید:

$$i_x < (86.59 \times 10^{-3}) \left( \frac{100 + 64}{64} \right)$$

برای مقاومت 64Ω داریم:

$$i_x < (25.91 \times 10^{-3}) \left( \frac{100 + 64}{64} \right)$$

## مثال ۵-۲



شکل ۵-۵ (الف) مداری با دو مقاومت هر کدام  $\frac{1}{4}\text{W}$ . (ب) مدار با منبع 6V. (ج) مدار با منبع  $i_x$  فعال.

■ اقدام به حل.

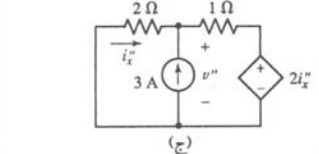
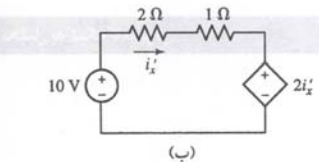
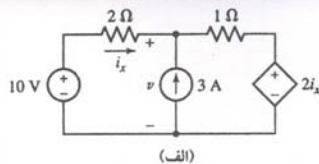
ابتدا مقاومت 100Ω را ملاحظه نماییم، می‌بینیم که  $i_x$  به مقدار  $221.9\text{mA}$  محدود شده است. مقاومت 64Ω محدودیت  $i_x < 42.49\text{mA}$  را تحمیل می‌نماید.

■ صحت حل را تحقیق نمایید. آیا جواب منطقی است؟

برای برآورده کردن هر دو محدودیت،  $i_x$  باید کوچک‌تر از 42.49mA باشد. اگر مقدار آن افزایش یابد، مقاومت 64Ω قبل از گرم شدن مقاومت 100Ω، گرم می‌شود. روشی مفید برای ارزیابی حل، اجرای تحلیل dc sweep در PSpice است که بعد از مثال بعد تشریح شده است. در هر صورت سوال جالبی که مطرح می‌باشد این است که آیا انتظار داشتیم مقاومت 64Ω ابتدا گرم شود.

در آغاز می‌بینیم که مقاومت 100Ω جریان کمتری دارد بنابراین منطقی است تصور کنیم که  $i_x$  را محدود کند. با این وجود چون  $i_x$  با جریان ارسالی از منبع 6V از طریق مقاومت 100Ω مخالفت می‌کند ولی به جریان منبع 6V از مقاومت 64Ω اضافه می‌شود، بنابراین عمل عکس صورت خواهد گرفت یعنی مقاومت 64Ω جریان  $i_x$  را محدود می‌نماید.

## مثال ۵-۳



در مدار شکل ۵-۳ (الف) با استفاده از اصل ترکیب مقدار  $i_x$  را مشخص نمایید.

ابتدا منبع 3A را باز می‌کنیم (شکل ۵-۳ (ب)). معادله تک‌حلقه برابر است با:

$$-10 + 2i'_x + 1i'_x + 2i'_x = 0$$

به نحوی که

$$i'_x = 2\text{A}$$

سپس منبع 10V را اتصال کوتاه می‌کنیم (شکل ۵-۳ (ج)) و معادله تک‌گره را می‌نویسیم.

$$\frac{v}{2} + \frac{v - 2i''_x}{1} = 3$$

که کمیت منبع وابسته را به  $v''$  مربوط می‌سازد:

$$v = 2(-i''_x)$$

و یا

$$i''_x = -0.6\text{A}$$

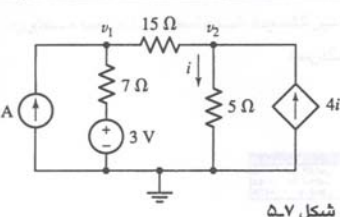
و بنابراین

$$i_x = i'_x + i''_x = 2 + (-0.6) = 1.4\text{A}$$

توجه کنید که در ترسیم هر مدار فرعی همیشه باید نمادها را کمی تغییر داد تا مشخص شود که با متغیرهای اصلی کار نمی‌کنیم. در نتیجه از ظهور هر خطای احتمالی جلوگیری خواهد شد.

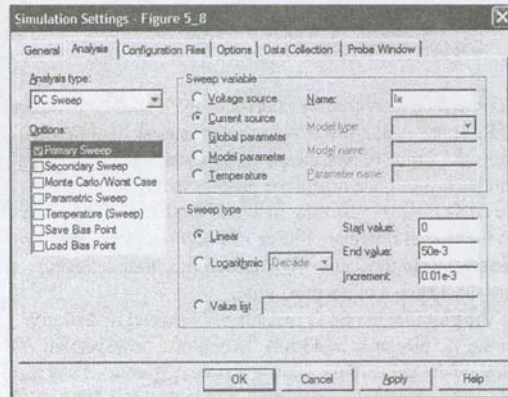
۵-۲ در شکل ۵-۷ برای به‌دست آوردن ولتاژ دو سر هر منبع جریان استفاده نمایید.

جواب:  $v_2|_{3V} = -0.246\text{V}$ ,  $v_1|_{3V} = 1.967\text{V}$ ,  $v_2|_{2A} = -1.148\text{V}$ ,  $v_1|_{2A} = 9.180\text{V}$   
 $v_2 = -1.394\text{V}$  و  $v_1 = 11.147\text{V}$



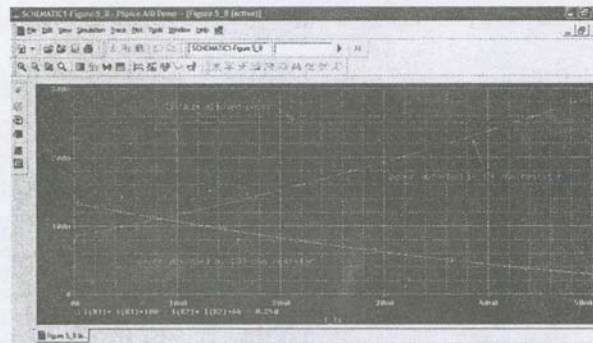


شکل ۵۹ جعبه محاوره dc sweep، با  $I_x$  به عنوان متغیر.



پس از ورود و ذخیره شماتیک، باید پارامترهای جاروب dc را مشخص کنیم. این انتخاب اجازه می‌دهد تا گستره‌ای از مقادیر را برای یک ولتاژ یا جریان و نه یک مقدار خاص، تعیین نماییم (در این حالت منبع جریان  $I_x$ ). تحت منوی Analysis، ما setup را اختیار می‌کنیم و سپس روی انتخاب DC sweep کلیک می‌نماییم. در این هنگام یک جعبه محاوره (dialog box) مانند شکل ۵۹ باز می‌گردد. ابتدا "sweep variable type" را به عنوان current source مشخص کرده و در جعبه Name،  $I_x$  را تایپ می‌نماییم. زیر sweep type گزینه دیده می‌شود: Linear، Logarithmic و Value list. گزینه آخر به ما اجازه می‌دهد تا هر مقداری را به  $I_x$  نسبت دهیم. برای ترسیم یک نمودار صاف، ما جاروب خطی (Linear) را اختیار می‌نماییم و به مقدار شروع (Start Value) مقدار صفر و به مقدار نهایی (End value) 50mA می‌دهیم که در آن نمو (increment) نیز 0.1mA است.

پس از انجام شبیه‌سازی بسته خروجی گرافیکی Probe به‌طور خودکار اجرا خواهد شد. پس از ظهور درجچه، محور افقی (متعلق به متغیر  $I_x$ ) نمایش داده می‌شود، ولی محور عمودی باید انتخاب گردد. با انتخاب Add trace، از منوی Trace، روی  $I(R1)$  کلیک می‌کنیم، سپس یک علامت ستاره در جعبه Trace expression تایپ، روی  $I(R1)$  یک بار دیگر کلیک، یک ستاره دیگر وارد و بالاخره 100 را وارد می‌کنیم. این کار از probe می‌خواهد تا توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 100Ω را رسم کند. به‌طریقی مشابه، فرآیند را تکرار می‌کنیم تا توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 64Ω به‌دست‌آید و در نتیجه نموداری شبیه به شکل ۵۱۰ (الف) به‌دست‌آید.



شکل ۵۱۰ (الف) خروجی probe با برجسب‌هایی برای شناسایی توان جذب‌شده به وسیله هر یک از مقاومت‌ها. خط افقی 250mA نیز کشیده شده است. (ب) جعبه محاوره مکان‌نما.

Probe Cursor  
R1 = 42.53mW, 39.953m  
R2 = 25.14mW, 25.14mW  
diff = 0.000, -219.193m

(ب)

(الف)

خلاصه‌ای از رویه تجمیع مینا

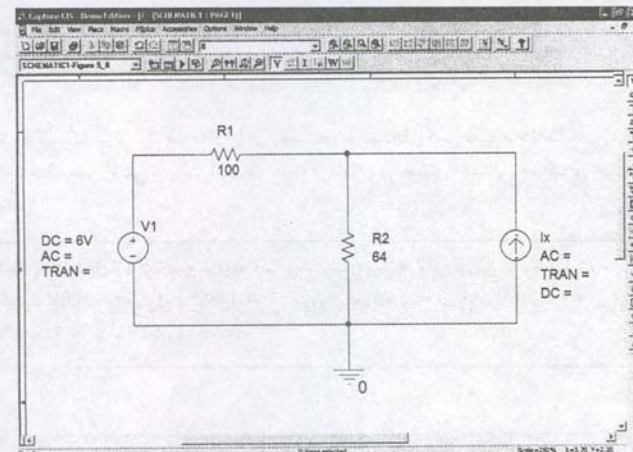
۱. یکی از منابع مستقل را انتخاب نمایید. همه منابع مستقل دیگر را صفر کنید. این بدان معنی است که منابع ولتاژ اتصال کوتاه و منابع جریان با یک مدار باز می‌گردند. منابع وابسته را رها کنید.
۲. ولتاژها و جریان‌ها را با علائم مناسب نام‌گذاری کنید (مثل  $V_1$ ،  $I_x$ ). دقت کنید که متغیرهای کنترل‌کننده منابع وابسته هم به خاطر پرهیز از اشتباه نام‌گذاری شود.
۳. مدار ساده‌شده را تحلیل کنید تا جریان‌ها یا ولتاژهای موردنظر به دست‌آید.
۴. مراحل ۱ تا ۳ را تکرار کنید تا هر منبع مستقل مورد بررسی قرار گیرد.
۵. جریان‌ها و ولتاژهای جزئی که از تحلیل‌های جدا از هم به دست آمده را با هم جمع کنید. به دقت توجه کنید تا علامت ولتاژها و جهت جریان‌ها به هنگام جمع، لحاظ شوند.
۶. کمیت‌های توان را جمع نکنید. اگر کمیت‌های توان مورد توجه است آن را فقط پس از جمع ولتاژها و جریان‌های جزئی به دست آورید.

توجه کنید که گام ۱ ممکن است به چند طریق تغییر یابد. ابتدا منابع مستقل می‌تواند به صورت گروه‌ها برخلاف تک‌تک در نظر گرفته شود، به شرطی که تحلیل ساده‌تر شود، البته شرط دیگر این است که در هر مدار جزئی بیش از یک منبع نباشد. دوم به‌طور تکنیکی لزومی ندارد تا منابع در صفر تنظیم شوند، هر چند این تقریباً بهترین است. مثلاً یک منبع 3 V ممکن است در دو مدار جزئی به صورت 1.5 V ظاهر شود زیرا  $1.5 + 1.5 = 3V$  و یا  $1.5 + 3 = 4.5V$  است. چون به نظر نمی‌رسد تحلیل ما به این ترتیب ساده شود، توجه کمی به این گونه تمرین می‌شود.

#### تحلیل به کمک کامپیوتر

گرچه PSpice در تحقیق صحت تحلیل یک مدار بسیار مفید است، ولی می‌تواند در تعیین نقش هر منبع در پاسخ نیز به ما یاری دهد. به این علت از dc parameter sweep (جاروب پارامتر dc) استفاده می‌کنیم.

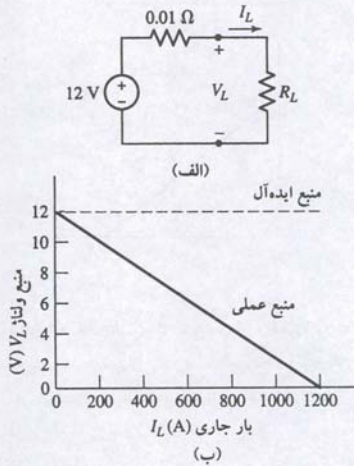
در مدار مثال ۵۲ خواسته شده بود تا حداکثر جریان مثبت از مقاومت، بدون تجاوز از حد مجاز را مشخص کنیم. مدار در شکل ۵۸ به کمک ابزار رسم شماتیک Orcad CIS کشیده شده است. توجه کنید که برای منبع جریان مقدار معین نکرده‌ایم.



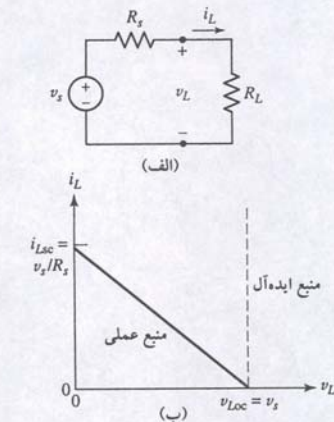
شکل ۵۸ مدار مثال ۵۲



- از این پس کمیت‌های dc را با حروف بزرگ نشان می‌دهیم. حروف کوچک کمیتی متغیر با زمان ac را نشان می‌دهند. در مواردی که هم ac و هم dc صحیح است از حروف کوچک استفاده خواهد شد.



شکل ۵-۱۲ (الف) منبع واقعی که رفتار یک باتری اتومبیل 12V را تقریب کرده، و به مقاومت بار  $R_L$  متصل شده است. (ب) رابطه بین  $V_L$  و  $I_L$  خطی است.



شکل ۵-۱۳ (الف) یک منبع ولتاژ واقعی متصل به مقاومت  $R_L$ . (ب) ولتاژ پایانه منبع ولتاژ واقعی با افزایش  $I_L$ ، کاهش می‌یابد و لذا  $R_L = V_L / I_L$  کم می‌شود. ولتاژ پایانه یک منبع ولتاژ ایده‌آل در ازای هر جریان بار ثابت می‌ماند.

تعریف بهتری از رفتار یک وسیله واقعی این است که در جریان‌های بالا برای ولتاژ پایانه‌ها افتی در نظر گرفته شود. اجازه بدهید که فرض کنیم باتری در جریان خروجی صفر، 12V و به ازای جریان 100A، 11V باشد. چگونه می‌توان این رفتار را مدل‌سازی کرد. مدل دقیق‌تر این منبع می‌تواند از یک منبع ولتاژ 12V ایده‌آل، سری با مقاومتی که در جریان 100A، ولتاژ 1V را در دو سر خود دارد، تشکیل شود. یک محاسبه سرانگشتی نشان می‌دهد که مقدار مقاومت  $0.01\Omega = 1V/100A$  است و منبع ولتاژ ایده‌آل به همراه این مقاومت، منبع ولتاژ واقعی را تشکیل می‌دهد (شکل ۵-۱۱(ب)). بنابراین ما از ترکیب سری عناصر مدار ایده‌آل شامل یک منبع مستقل ولتاژ و یک مقاومت، یک مدل واقعی را پیاده کرده‌ایم. البته نباید انتظار داشتیم تا چنین ترکیبی را در باتری اتومبیل خود بباییم. هر دستگاه واقعی با مشخصه جریان-ولتاژ پایانه‌هایش تعریف می‌شود، و تلاش ما باید در این راستا باشد که با ترکیب عناصر ایده‌آل مشخصه جریان-ولتاژ مشابهی را حداقل در یک محدوده‌ای از جریان، ولتاژ یا توان به دست آوریم. در شکل ۵-۱۲(الف)، مدل دو جزئی واقعی باتری را که به یک مقاومت بار  $R_L$  وصل است می‌بینیم. ولتاژ پایانه منبع واقعی برابر با ولتاژ دو سر  $R_L$  است و با  $V_L$  نشان داده شده است. شکل ۵-۱۲(ب) نمودار جریان بار  $I_L$  را به عنوان تابعی از ولتاژ بار  $V_L$  برای این منبع واقعی نشان می‌دهد. معادله KVL برای مدار شکل ۵-۱۲(الف) برحسب  $I_L$  و  $V_L$  چنین است:

$$12 = 0.01I_L + V_L$$

و بنابراین

$$I_L = 1200 - 100V_L$$

این یک معادله خطی از  $I_L$  و  $V_L$  است و نمودار آن در شکل ۵-۱۲(ب) نیز خط مستقیمی است. هر نقطه روی خط متعلق به یک مقدار از  $R_L$  است. مثلاً نقطه وسط خط راست وقتی به دست می‌آید که مقاومت بار برابر مقاومت داخلی منبع واقعی، یا  $R_L = 0.01\Omega$  باشد. در این جا ولتاژ بار دقیقاً نصف ولتاژ منبع ایده‌آل است.

وقتی  $R_L = \infty$  باشد و هیچ جریانی به وسیله بار کشیده نشود، منبع واقعی مدار باز بوده و ولتاژ پایانه، یا ولتاژ مدار باز  $V_{Loc} = 12V$  می‌گردد. از طرف دیگر اگر  $R_L = 0$  باشد، آن‌گاه جریان بار اتصال کوتاه  $I_{Lsc} = 1200A$  می‌گردد. در عمل چنین کاری موجب تخریب باتری و تجهیزات اندازه‌گیری می‌شود.

چون نمودار  $I_L$  در برابر  $V_L$  خط مستقیمی است، بنابراین دو مقدار  $V_{Loc}$  و  $I_{Lsc}$  به تنهایی منحنی  $V_L - I_L$  را معین می‌کنند.

خط بریده افقی در نمودار  $V_L - I_L$  شکل ۵-۱۲(ب) را برای یک منبع ولتاژ ایده‌آل نشان می‌دهد و در آن ولتاژ پایانه در ازای هر مقدار جریان بار ثابت می‌ماند. برای منبع ولتاژ واقعی، ولتاژ پایانه فقط در جریان‌های پایین مقدار نزدیک به منبع ایده‌آل دارد.

اکنون یک منبع ولتاژ واقعی کلی را مطابق شکل ۵-۱۳(الف) در نظر بگیرید. ولتاژ منبع ایده‌آل  $V_s$  و مقاومت  $R_s$  که مقاومت درونی یا مقاومت خروجی نام دارد، با آن سری است. مجدداً ما باید توجه کنیم که مقاومت واقعاً به صورت یک مقاومت جداگانه وجود ندارد بلکه فقط کاهش ولتاژ را در ازای افزایش جریان موجب می‌گردد. وجود آن موجب می‌شود تا ما رفتار یک منبع ولتاژ را بهتر مدل‌سازی کنیم.

رابطه خطی بین  $V_L$  و  $I_L$  برابر است با:

$$V_L = V_s - R_s I_L \quad (9)$$

که در شکل ۵-۱۳(ب) ترسیم شده است. ولتاژ مدار باز  $R_L = \infty$  و بنابراین  $I_L = 0$  برابر است با:

$$V_{Loc} = V_s \quad (10)$$

خط مرجع افقی در 250mW نیز با تایپ 0.250 در جعبه Trace expression، پس از انتخاب Add trace از منوی Trace، اضافه شده است.

می‌بینیم که نمودار مربوط به مقاومت 64Ω در نزدیکی  $I_x = 43mA$  از 250mW تجاوز می‌کند. با این وجود، تازمانی که جریان منبع  $I_x$  بین 0 تا 50mA باشد، مقاومت 100Ω هرگز 250mW تلف نمی‌کند و در واقع با افزایش جریان منبع توان جذب‌شده در آن کاهش می‌یابد. اگر مایل به کسب جواب دقیق‌تری باشیم فقط کافی است ابزار مکان‌نما را به کار ببریم. شکل ۵-۱۰(ب) نتیجه جابه‌جایی هر دو مکان‌نما به 42.53mA را نشان می‌دهد. درست در این میزان مقاومت 64Ω کمی از سطح توان مجازش گذشته است. دقت بهتری را با کاهش مقدار نمو de sweep می‌توان به دست آورد. این تکنیک در تحلیل مدارهای الکترونیک بسیار موثر است. در این مدارها ممکن است بخواهیم مقدار ولتاژ ورودی به یک مقدار تقویت‌کننده پیچیده را تعیین کنیم تا ولتاژ خروجی صفر به دست‌آید. البته باید متذکر شد که چند نوع دیگر پارامتر از جمله dc voltage sweep وجود دارند که می‌توان آن‌ها را اجرا کرد. امکان تغییر حرارت فقط هنگامی مفید است که با مدل قطعات وابسته به پارامتر حرارت مانند دیود و ترانزیستور سروکار داشته باشیم.

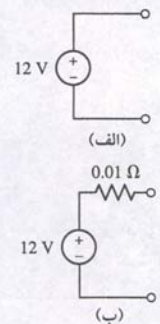
متأسفانه زمان صرفه‌جویی شده در اصل تجمع، اگر وجود داشته باشد بسیار کم است، و علاوه بر آن باید حداقل دو منبع وجود داشته باشند: یکی منبع مستقل و بقیه منابع وابسته. همواره باید محدودیت‌های روش تجمع را در نظر داشته باشیم. این روش فقط به پاسخ‌های خطی اعمال می‌شود و بنابراین بسیاری از پاسخ‌های غیرخطی رایج را پوشش نمی‌دهد. مثلاً دو باتری 1 ولت سری شده با مقاومت 1kΩ را در نظر بگیرید. توان تحویلی به مقاومت، مسلماً 4W است؛ ولی اگر به اشتباه روش تجمع را به کار ببریم، هر باتری 1W توان را می‌پوشاند و بنابراین کل توان 2W خواهد شد. این پاسخ اشتباه است ولی به سادگی می‌توان چنین اشتباهی کرد.

## ۵-۲ تبدیل منابع

### منابع ولتاژ واقعی

تاکنون با منابع ولتاژ و جریان ایده‌آل کار می‌کردیم، و حالا وقت آن است که با ملاحظه منابع واقعی قدمی به سمت واقعیت برداریم. این منابع موجب می‌شوند تا دید واقع‌بینانه‌تری از وسایل فیزیکی داشته باشیم. با تعریف منابع واقعی خواهیم دید که منابع ولتاژ و جریان بدون تأثیر بقیه مدار به یکدیگر قابل تبدیل‌اند. این منابع را معادل می‌خوانیم. روش ما بر هر دو نوع منبع وابسته و مستقل قابل اعمال است، با این وجود خواهیم دید که این کار در مورد منبع وابسته چندان مفید نیست.

منبع ولتاژ ایده‌آل را به صورت منبعی تعریف کردیم که ولتاژ دوسرش مستقل از جریان آن بود. یک منبع dc، 1V جریان 1 آمپری را از مقاومت 1Ω و جریان 1000000A را از مقاومت 1μΩ عبور می‌دهد و قادر است توان نامحدودی را تولید کند. البته در عمل چنین وسیله‌ای وجود ندارد و قبلاً نشان دادیم که یک منبع ولتاژ فیزیکی در جریان‌ها یا توان‌های کوچک دریافتی از آن ایده‌آل است. مثلاً یک باتری ماشین می‌تواند، یک منبع ولتاژ 12Vdc ایده‌آل تصور شود، به شرطی که جریان در چند آمپر محدود باشد (شکل ۵-۱۱(الف)). با این وجود هر کسی متوجه شده است که در اتومبیلی که چراغ‌هایش روشن است، هنگام استارت‌زدن چراغ‌ها ضعیف می‌شوند، زیرا از باتری خواسته می‌شود که علاوه بر جریان لازم برای لامپ‌ها، حدود 100A را تحویل دهد. تحت این شرایط، یک منبع ولتاژ ایده‌آل نمایش صحیحی از یک باتری نیست.



شکل ۵-۱۱ (الف) یک منبع ولتاژ 12Vdc برای مدل‌سازی باتری یک اتومبیل. (ب) مدل دقیق‌تری که در آن افت ولتاژ در جریان‌های بالا لحاظ شده است.



و جریان اتصال کوتاه ( $V_L = 0$  و  $R_L = 0$ ) برابر است با:

$$i_{Lsc} = \frac{V_s}{R_s} \quad (11)$$

مجدداً ملاحظه می شود که این مقادیر محل برخورد خط راست شکل ۵-۱۳ (ب) با محورهای می باشند و آن را کاملاً تعریف می کنند.

### منابع جریان واقعی

در دنیای واقعی، منبع جریان ایده آل وجود ندارد، و نمی توان وسیله ای فیزیکی یافت که مستقل از مقاومت بار جریان ثابتی را به مداری تحویل دهد یا ولتاژ دو سر پایانه هایش ثابت باشد. گرچه مدارهای ترانزیستوری معینی وجود دارند که جریان ثابتی را به گستره وسیعی از مقاومت ها حمل می کنند، ولی مقاومت بار را می توان آنقدر بزرگ اختیار کرد که جریان آن بسیار کوچک باشد. در واقع توان بینهایت متأسفانه هرگز وجود ندارد.

یک منبع جریان واقعی به صورت ترکیبی از یک منبع جریان ایده آل موازی با یک مقاومت داخلی  $R_p$  تعریف می شود. چنین منبعی در شکل ۵-۱۴ (الف) نشان داده شده است که در آن جریان  $i_L$  و ولتاژ  $V_L$  مربوط به  $R_L$  نیز مشخص شده اند، با به کارگیری KCL داریم:

$$i_L = i_s - \frac{V_L}{R_p} \quad (12)$$

که باز هم رابطه ای خطی است. ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه عبارتند از:

$$V_{Loc} = R_p i_s \quad (13)$$

و

$$i_{Lsc} = i_s \quad (14)$$

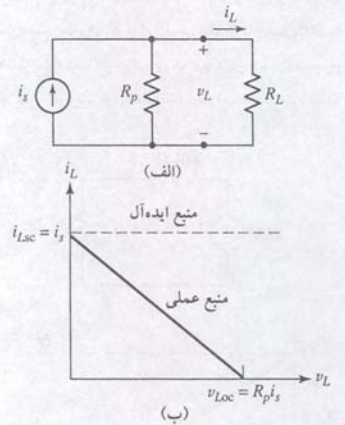
تغییرات جریان بار و تغییر ولتاژ بار را می توان با تغییر مقدار  $R_L$  تحقیق کرد، شکل ۵-۱۴ (ب). خط راست از انتهای اتصال کوتاه (شمال غربی) به مدار باز (در جنوب شرقی) با تغییر  $R_L$  از صفر تا بی نهایت اهم کشیده می شود. نقطه وسط خط در  $R_L = R_p$  قرار دارد. واضح است که جریان باز  $i_L$  و جریان منبع ایده آل تقریباً فقط بری مقادیر کوچک ولتاژ بار با هم برابرند و این هنگامی صحیح است که مقاومت  $R_L$  نسبت به  $R_p$  کوچک باشد.

### منابع واقعی معادل

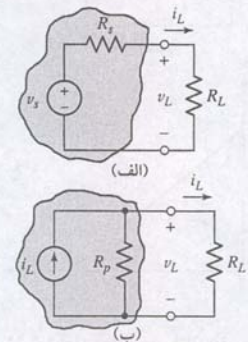
با تعریف هر دو منبع واقعی، اکنون آماده ایم تا معادل های آن ها را مورد بحث قرار دهیم. دو منبع را معادل گوئیم اگر بتوانند مقادیری برابر با  $V_L$  و  $i_L$  را هنگام اتصال به  $R_L$  تولید کنند. البته این که مقدار  $R_L$  چقدر است اهمیتی ندارد. چون  $R_L = 0$  و  $R_L = \infty$  دو مقاومت باز هستند، منابع معادل ولتاژ مدار باز و جریان مدار بسته یکسانی تولید خواهند کرد. به بیان دیگر، اگر دو منبع معادل ولتاژ واقعی و معادل جریان واقعی داشته باشیم، هر دو را می توان در داخل جعبه سیاهی تصور کرد که فقط یک جفت پایانه دارند، و در این حال به هیچ وجه با اندازه گیری جریان یا ولتاژ در یک بار مقاومتی نمی توان گفت که کدام منبع در کدام جعبه قرار گرفته است. منبع ولتاژ واقعی و مقاومت  $R_L$  شکل ۵-۱۵ (الف) را به همراه مداری مرکب از منبع

جریان واقعی و مقاومت  $R_L$  شکل ۵-۱۵ (ب) در نظر بگیرید، محاسبه ای ساده نشان می دهد که ولتاژ دو سر مقاومت بار  $R_L$  در شکل ۵-۱۵ (الف) برابر است با:

$$V_L = V_s \frac{R_L}{R_s + R_L} \quad (15)$$



شکل ۵-۱۴ (الف) یک منبع جریان واقعی کلی که به یک مقاومت بار  $R_L$  وصل است. (ب) جریان بار تولیدشده با منبع جریان واقعی به عنوان تابعی از ولتاژ بار.



شکل ۵-۱۵ (الف) یک منبع ولتاژ واقعی متصل به بار  $R_L$ . (ب) منبع جریان واقعی معادل متصل به همان بار.

محاسبه ساده دیگری نشان می دهد که ولتاژ دو سر مقاومت بار  $R_L$  در شکل ۵-۱۵ (ب) چنین است:

$$V_L = [i_s \frac{R_p}{R_p + R_L}] \cdot R_L$$

به لحاظ الکتریکی دو منبع واقعی با هم معادند به شرطی که:

$$R_s = R_p \quad (16)$$

و

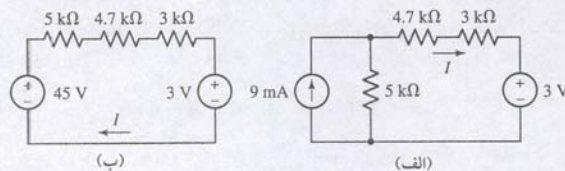
$$V_s = R_p i_s = R_s i_s \quad (17)$$

که در این جا به عنوان انتخابی مناسب،  $R_s$  را به عنوان مقاومت داخلی هر یک از دو مقاومت فرض می کنیم.

به منظور شرحی بر کاربرد این ایده، منبع جریان واقعی شکل ۵-۱۶ (الف) را در نظر بگیرید. چون مقاومت داخلی آن  $2\Omega$  است، مقاومت داخلی معادل منبع ولتاژ واقعی نیز  $2\Omega$  است. ولتاژ منبع ولتاژ ایده آل در منبع ولتاژ واقعی  $6V = (2)(3)$  می باشد. این منبع ولتاژ واقعی معادل در شکل ۵-۱۶ (ب) دیده می شود.

برای تست معادله، اجازه بدهید، تا مقاومت  $4\Omega$  را متصل به هر یک از دو منبع تصور کنیم. در هر دو حال جریان بار  $1A$ ، ولتاژ بار  $4V$  و توان مصرفی  $4W$  را در مقاومت  $4\Omega$  ایجاد می نماید، با این وجود توجه کنید که منبع جریان ایده آل توان  $12W$  را به مقاومت حمل می کند، در حالی که منبع ولتاژ ایده آل فقط  $6W$  حمل می نماید. علاوه بر آن، مقاومت داخلی منبع ولتاژ واقعی فقط  $8W$  توان را جذب می کند، در حالی که مقاومت داخلی منبع ولتاژ واقعی فقط  $2W$  توان مصرف می نماید. بنابراین می بینیم که دو منبع واقعی فقط نسبت به آن چه انتقال می دهند معادند و دروناً با هم معادل نیستند!

جریان داخل مقاومت  $4.7k\Omega$  را در شکل ۵-۱۷ (الف) پس از تبدیل منبع  $9mA$  به معادل منبع ولتاژ محاسبه کنید.



منبع معادل از یک منبع ولتاژ مستقل  $45V = (9mA) \times (5k\Omega)$  سری با یک مقاومت  $5k\Omega$  تشکیل شده است، شکل ۵-۱۷ (ب).

معادله KVL حول حلقه را می نویسیم:

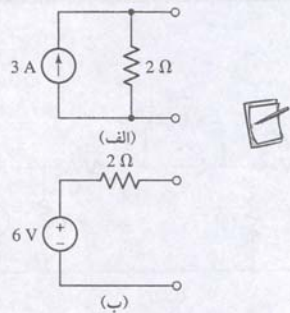
$$-45 + 5000I + 4700I + 3000I + 3 = 0$$

که به راحتی قابل حل بوده و جریان  $I = 3.307mA$  از آن حاصل می گردد.

۵-۳ برای مدار شکل ۵-۱۸ جریان  $I_x$  در مقاومت  $47k\Omega$  پس از اجرای تبدیل منبع ولتاژ به دست آورید.

جواب:  $192\mu A$

شکل ۵-۱۸

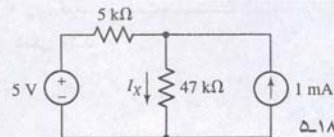


شکل ۵-۱۶ (الف) یک منبع جریان واقعی. (ب) منبع ولتاژ معادل واقعی.

### مثال ۵-۴

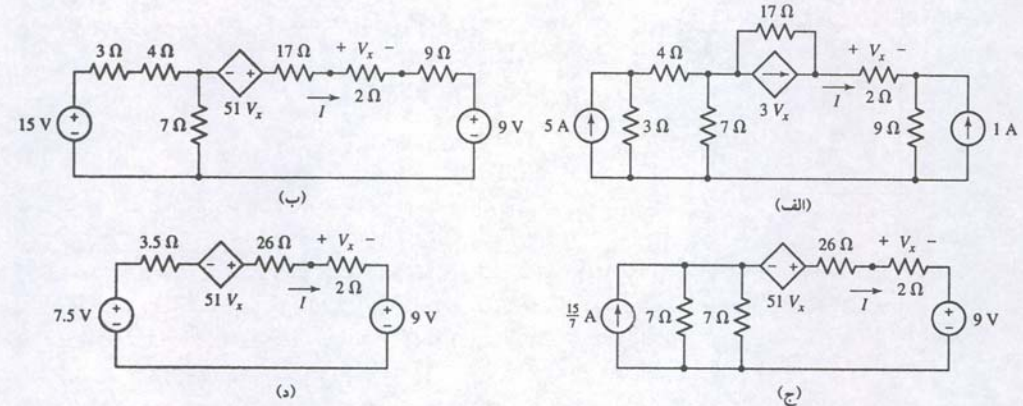
شکل ۵-۱۷ (الف) مداری با هر دو نوع منبع ولتاژ و جریان. (ب) مدار پس از تبدیل منبع جریان به یک منبع ولتاژ معادل.

### تمرین





با استفاده از تبدیل منبع، جریان عبوری از مقاومت  $2\Omega$  در شکل ۵-۱۹ (الف) را محاسبه نمایید.



شکل ۵-۱۹ (الف) مداری با دو منبع جریان مستقل و یک منبع وابسته. (ب) مدار پس از تبدیل هر منبع به یک منبع ولتاژ. (ج) منبع پس از ادغام بیشتر. (د) مدار نهایی.

حل را با تبدیل هر منبع جریان به منبع ولتاژ (شکل ۵-۱۵ (ب)) آغاز می‌کنیم و هدف از این کار تبدیل مدار به یک حلقه ساده است.

به دو دلیل باید مراقب باشیم تا مقاومت  $2\Omega$  در مدار نگهداری شود: یکی این که متغیر کنترل منبع وابسته در دو سر آن ظاهر می‌گردد و دوم می‌خواهیم جریان داخل آن را بیابیم. معهذاً می‌توان مقاومت‌های  $17\Omega$  و  $9\Omega$  را با هم ترکیب کرد، زیرا با هم سری‌اند. همچنین می‌توان مقاومت‌های  $3\Omega$  و  $4\Omega$  را با هم ترکیب کرده و مقاومت  $7\Omega$  به دست آورد. سپس در تبدیل منبع  $15V$  به منبع  $15/7A$  طبق شکل ۵-۱۹ (ج) از آن استفاده می‌شود.

در آخرین گام ساده‌سازی می‌بینیم که می‌توان دو مقاومت  $7\Omega$  را با هم ترکیب کرده و به یک مقاومت  $3.5\Omega$  تبدیل نمود، و سپس به کمک آن منبع جریان  $15/7A$  به منبع ولتاژ  $7.5V$  تبدیل می‌گردد. حاصل کار مدار تک‌حلقه شکل ۵-۱۹ (د) است. اکنون جریان  $I$  با استفاده از KVL به دست می‌آید:

$$-7.5 + 3.5I - 51V_x + 28I + 9 = 0$$

که

$$V_x = 2I$$

بنابراین

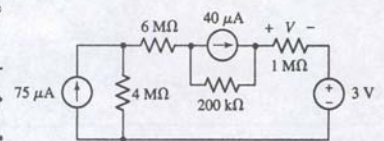
$$I = 21.28mA$$

### تمرین

۵-۴ برای مدار شکل ۵-۲۰، ولتاژ  $V$  را در دو سر مقاومت  $1M\Omega$  با تبدیلات متوالی منبع به دست آورید. جواب:  $27.23V$

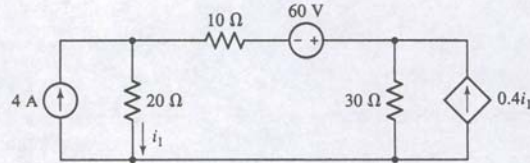
### چند نکته کلیدی

ما از منابع واقعی و تبدیل منابع با چند مشاهده خاص چنین جمع‌بندی می‌کنیم. اول، وقتی ما یک منبع ولتاژ را تبدیل می‌کنیم، باید مطمئن باشیم که منبع با مقاومت تحت بررسی سری است. مثلاً در شکل ۵-۲۱، تبدیل منبع ولتاژ با استفاده از مقاومت  $10\Omega$  پذیرفته است، زیرا آن‌ها سری هستند. با این وجود این درست نیست که با منبع ولتاژ  $60V$  و مقاومت  $30\Omega$  عمل تبدیل صورت گیرد و این خطایی است که به دفعات رخ می‌دهد.



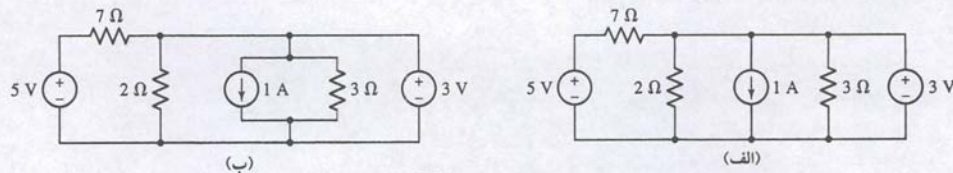
شکل ۵-۲۰

شکل ۵-۲۱ مدار نمونه‌ای که نشان می‌دهد تبدیل منبع چگونه می‌تواند تعیین شود.



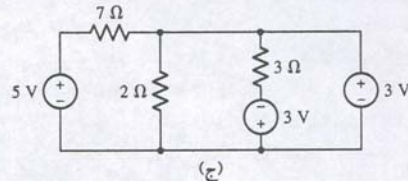
به طریقی مشابه وقتی منبع جریانی را با ترکیبی از مقاومت تبدیل می‌کنیم باید مطمئن باشیم که آن‌ها موازی‌اند. منبع جریان شکل ۵-۲۲ (الف) را در نظر بگیرید. ما می‌توانیم تبدیل منبع جریانی را با مقاومت  $3\Omega$  انجام دهیم چون آن‌ها موازی‌اند. اما پس از تبدیل ممکن است این ابهام پیش آید که مقاومت را کجا بگذاریم. در این مواقع بهتر است تا قطعات تبدیل شونده را مطابق شکل ۵-۲۲ (ب) دوباره ترسیم نماییم. آن‌گاه تبدیل به یک منبع ولتاژ با استقرار صحیح مقاومت طبق شکل ۵-۲۲ (ج) را انجام می‌دهیم. البته مقاومت می‌تواند بالا یا پایین منبع ولتاژ باشد.

همچنین بررسی حالت غیرعادی سری بودن منبع جریانی با یک مقاومت و دوگان آن ارزشمند است. بگذارید با مدار ساده شکل ۵-۲۳ (الف) شروع کنیم که در آن ما علاقمند به ولتاژ دو سر مقاومت  $R_2$  هستیم. توجه داریم که جدا از مقدار  $R_1$ ،  $R_2 = I_x R_2$  است. گرچه ممکن است تلاش در تبدیل نامناسب منبع در چنین مداری نکنیم، در واقع ممکن است به سادگی  $R_1$  را چشم‌پوشی کنیم (با این شرط که مورد توجه ما نباشد). وضع مشابهی هنگامی رخ می‌دهد که منبع ولتاژ موازی مقاومتی باشد (شکل ۵-۲۳ (ب)). دوباره اگر ما فقط به کمیتی مربوط به  $R_2$  علاقمند باشیم، ممکن است خود را درگیر با نوعی تبدیل منبع روی منبع ولتاژ و مقاومت  $R_1$  ببینیم. در واقعیت ما ممکن است تا جایی که  $R_2$  مورد توجه است، از مقاومت  $R_1$  چشم‌پوشیم - یعنی وجود آن تغییر در ولتاژ دو سر  $R_2$  با جریان درون آن و یا توان تلف‌شده به وسیله آن را نخواهد داشت.



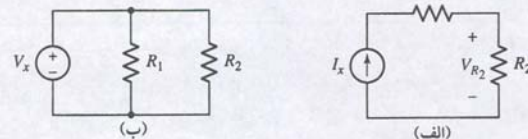
(ب)

(الف)



(ج)

شکل ۵-۲۲ (الف) مداری با منبع جریان باید به منبع ولتاژ تبدیل شود. (ب) رسم مجدد مدار برای اجتناب از خطاها. (ج) ترکیب منبع / مقاومت تبدیل‌شده.

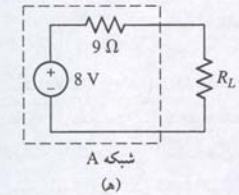
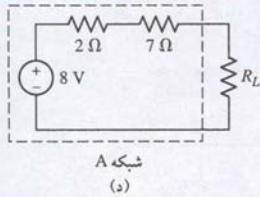
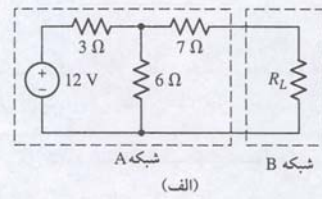
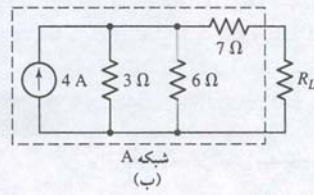
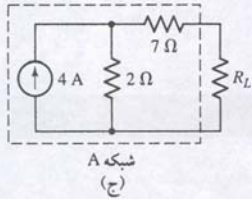


(ب)

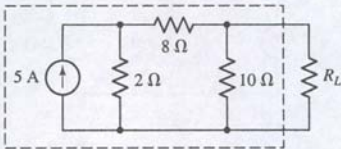
(الف)

شکل ۵-۲۳ (الف) مدار با یک مقاومت سری با منبع جریان. (ب) منبع ولتاژ موازی با دو مقاومت.





شکل ۵-۲۵ (الف) مداری که به دو بخش تقسیم شده است. (ب) تا (د) مراحل میانی ساده‌سازی شبکه. (ه) مدار معادل تونن.



شکل ۵-۲۶

\* اثبات قضیه تونن چون طولانی است در پیوست (۳) قرار داده شده است تا دانشجویان علاقمند به آن مراجعه نمایند.

آن‌گاه، مقاومت‌های موازی با هم ترکیب شده و از آن مقاومت  $2\Omega$  حاصل می‌شود (شکل ۵-۲۵ (ج)) و منبع جریان واقعی حاصل از تبدیل نیز به منبع ولتاژ واقعی بازگردانده می‌شود (شکل ۵-۲۵ (د)). نتیجه نهایی در شکل ۵-۲۵ (ه) دیده می‌شود.

از دید مقاومت بار  $R_L$ ، این مدار (معادل تونن) معادل است با مدار اصلی، و از دید ما، مدار بسیار ساده‌تر می‌باشد، و ما می‌توانیم به راحتی توان انتقالی به بار را محاسبه کنیم:

$$P_L = \left(\frac{8}{9 + R_L}\right)^2 R_L$$

علاوه بر آن از مدار معادل می‌بینیم که حداکثر ولتاژ حاصل در دو سر  $R_L$  برابر ۸V است که مربوط به  $R_L = \infty$  می‌باشد. تبدیل سریع شبکه A به منبع جریان واقعی (معادل نورتون) بیان می‌دارد که حداکثر جریان انتقالی به بار،  $8/9A$  است و در  $R_L = 0$  رخ می‌دهد. هیچ‌یک از این واقعیت‌ها به راحتی در مدار اصلی آشکار نیست.

### تمرین

۵-۵ باروش تکرار تبدیل منبع، معادل نورتون داخل بخش خط‌چین شکل ۵-۲۶ را به دست آورید. جواب:  $1A$  و  $5\Omega$ .

### قضیه تونن

استفاده از تبدیل منبع برای یافتن شبکه معادل تونن یا نورتون به خوبی در مثال ۵-۶ کار کرد، ولی به سرعت می‌تواند در مواردی که منابع وابسته وجود دارند یا مدار مرکب از تعداد زیادی عنصر باشد، غیر عملی گردد. روشی دیگر استفاده از تئوری یا قضیه تونن (یا نورتون) است. ما قضیه را به نحوی به صورت رویه‌ای اسلوب‌دار بیان می‌کنیم تا روش طبق وضعیتی که با آن مواجه می‌شود عملی‌تر گردد.

#### قضیه تونن\*

۱. داشتن هر مدار خطی، آن را دوباره مرتب کنید تا به فرم دو شبکه A و B درآمده و به وسیله دو سیم مرتب گردد. A شبکه‌ای است که باید ساده شود و B دست‌نخورده می‌ماند.
۲. شبکه B را جدا کنید. ولتاژ  $V_{oc}$  را به عنوان ولتاژی که اکنون در دو سر پایانه‌های شبکه A ظاهر می‌گردد تعریف نمایید.
۳. هر منبع مستقل را در شبکه A خاموش (حذف) نمایید تا یک شبکه غیرفعال حاصل شود. منابع وابسته را به همان شکل رها کنید.
۴. یک منبع ولتاژ مستقل با مقدار  $V_{oc}$  را با شبکه غیرفعال سری کنید. مدار را کامل ننیدید. دو پایانه را غیرمتصل رها کنید.
۵. شبکه B را به پایانه‌های شبکه A جدید وصل نمایید. همه جریان‌ها و ولتاژها در B دست‌نخورده می‌مانند.

#### خلاصه تبدیل منبع

۱. هدف رایج در تبدیل منبع داشتن فقط منبع جریان یا فقط منبع ولتاژ در مدار است. خصوصاً اگر روش تحلیل مدار تحلیل گرهی یا تحلیل مش باشد، روشن و ساده‌تر خواهد بود.
۲. تکرار تبدیل منبع می‌تواند برای ساده‌سازی مدار و نهایتاً ترکیب منابع و مقاومت‌ها استفاده شود.
۳. مقدار مقاومت در حین یک انتقال منبع تغییر نمی‌یابد ولی همان مقاومت نیست (در همان مکان نیست). این بدان معنی است که جریان‌ها و ولتاژهای مربوط به مقاومت اصلی به‌طور غیرقابل برگشتی وقتی که تبدیل منبع انجام می‌شود از دست می‌روند.
۴. اگر ولتاژ یا جریان مربوط به یک مقاومت خاص به صورت متغیر کنترل‌کننده برای منبع وابسته عمل می‌نماید، نباید در هیچ تبدیل منبعی نقش داشته باشد. مقاومت اولیه باید در مدار نهایی حفظ شود و دست‌نخورده.
۵. اگر ولتاژ یا جریان یک عنصر خاص موردنظر است، آن عنصر نباید در تبدیل منبع شرکت داشته باشد. عنصر اصلی باید در مدار نهایی دست‌نخورده بماند.
۶. در یک تبدیل منبع، نوک پیکان منبع جریان مربوط به پایانه «+» منبع ولتاژ است.
۷. یک تبدیل منبع روی یک منبع جریان و مقاومت لازم دارد که دو عنصر موازی باشند.
۸. یک تبدیل منبع روی یک منبع ولتاژ و مقاومت لازم دارد که دو عنصر سری باشند.

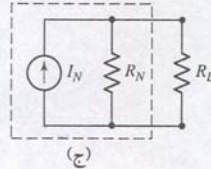
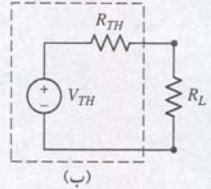
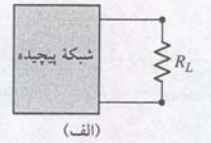
### ۵-۳ مدارهای معادل تونن و نورتون

اکنون که تبدیل منبع و اصل تجزیه را معرفی کردیم، دو تکنیک دیگر را بیان می‌کنیم تا به‌طور گسترده در تحلیل مدارهای خطی به کار روند. اولین تکنیک به نام مهندس فرانسوی ام‌ایل تونن<sup>۱</sup> که در زمینه تلگراف کار می‌کرد و در سال ۱۸۸۳ طی مقاله‌ای تئوری را به چاپ رساند، خواننده شده است. تکنیک دوم نتیجه‌ای از اولی است و به نام دانشمند آزمایشگاه تلفن بل، ای.ل. نورتون<sup>۲</sup> نامیده شده است.

اکنون فرض کنید فقط به تحلیل بخشی از مدار علاقمندیم. مثلاً، بخواهیم جریان، ولتاژ و توان انتقالی به یک بار مقاومتی را توسط بقیه مدار معین کنیم. بقیه مدار می‌تواند از مقاومت‌ها و منابع تشکیل شده باشد (شکل ۵-۲۴ (الف)). یا شاید بخواهیم پاسخ را برای مقادیر متفاوت مقاومت به دست آوریم. قضیه تونن می‌گوید که می‌توان همه چیز، به‌جز مقاومت بار را، با یک منبع ولتاژ مستقل سری شده با یک مقاومت جایگزین کرد (شکل ۵-۲۴ (ب)).

در این تبدیل پاسخ اندازه‌گیری شده در مقاومت بدون تغییر باقی می‌ماند. با استفاده از قضیه نورتون، مدار معادلی متشکل از یک منبع جریان مستقل موازی با یک مقاومت، حاصل می‌گردد (شکل ۵-۲۴ (ج)). بنابراین واضح است که یکی از کاربردهای قضایای نورتون و تونن جایگزینی بخش عمده‌ای از مدار، یعنی بخش پیچیده و نامطلوب با معادل بسیار ساده آن است. مدار جدید و ساده اجازه می‌دهد تا محاسبات ولتاژ، جریان و توان انتقالی به بار از مدار اصلی به سادگی محاسبه گردد. همچنین این مدار معادل، ما را در انتخاب مناسب‌ترین مقاومت کمک می‌کند. مثلاً در یک مدار ترانزیستوری، معادل تونن و نورتون ما را قادر می‌سازد تا حداکثر توان دریافتی از تقویت‌کننده و انتقالی به بلندگو تعیین شود.

در مدار شکل ۵-۲۵ (الف)، معادل‌های تونن و نورتون را برای بخش سمت چپ  $R_L$  معین کنید. نواحی خط‌چین، شبکه را به بخش‌های A و B تفکیک می‌کنند. فرض می‌کنیم شبکه B که تنها از مقاومت بار  $R_L$  تشکیل شده، مورد توجه ما باشد. شبکه A با تکرار تبدیل منبع و جایگزینی آن با یک منبع جریان واقعی ۴A، موازی با مقاومت  $3\Omega$ ، ساده می‌گردد (شکل ۵-۲۵ (ب)).



شکل ۵-۲۴ (الف) یک شبکه پیچیده با مقاومت بار  $R_L$ . (ب) یک شبکه معادل تونن متصل به مقاومت  $R_L$ . (ج) شبکه معادل نورتون متصل به مقاومت  $R_L$ .

#### مثال ۵-۶



## نورتن

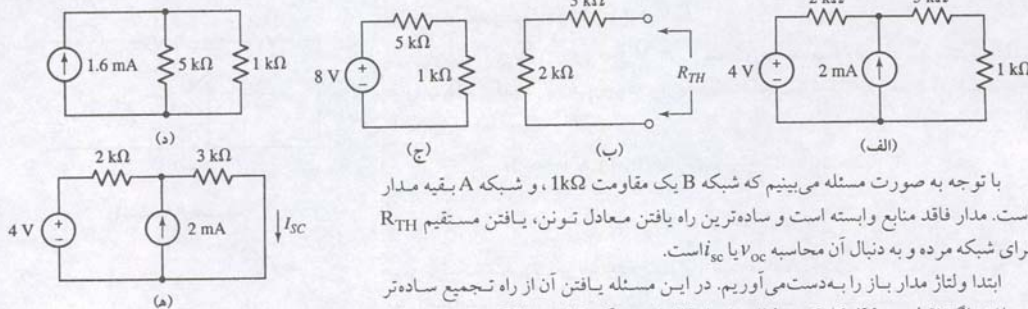
۱. هر مدار خطی مفروض را دوباره به صورت دو شبکه  $A$  و  $B$  مرتب کنید که با دو سیم به هم وصل شده باشند.  $A$  شبکه‌ای است که قرار است ساده شود؛  $B$  دست‌نخورده می‌ماند. مثل قبل، اگر هر یک از دو شبکه حاوی منبع وابسته باشد، متغیر کنترل‌کننده آن باید در همان شبکه باشد.
۲. شبکه  $B$  را قطع کنید و پایانه‌های  $A$  را اتصال کوتاه نمایید. یک جریان  $I_{sc}$  را به عنوان جریانی که اکنون از پایانه‌های اتصال کوتاه شده  $A$  می‌گذرد، تعریف نمایید.
۳. منابع مستقل را در شبکه خاموش (صفر یا حذف) نمایید تا یک شبکه غیرفعال حاصل شود. منابع وابسته را دست‌نخورده بگذارید.
۴. منبع جریان مستقل با مقدار  $I_{sc}$  را موازی با شبکه غیرفعال وصل کنید. مدار را کامل نکنید. دو پایانه آزاد را بگذارید.
۵. شبکه  $B$  را به پایانه‌های جدید شبکه  $A$  وصل کنید.

معادل نورتن یک شبکه خطی برابر است با منبع جریان  $I_{sc}$  که با مقاومت  $R_{TH}$  موازی شده باشد. بنابراین ملاحظه می‌شود که می‌توان معادل نورتن شبکه را از تبدیل معادل تونن هم به‌دست آورد. حاصل این عمل رابطه مستقیم بین  $V_{oc}$ ،  $I_{sc}$  و  $R_{TH}$  است.

$$V_{oc} = R_{TH} I_{sc} \quad (۱۸)$$

در مدارهای مقاومتی با منابع وابسته، اغلب می‌بینیم که در تعیین معادل تونن یا نورتن بهتر است که هم ولتاژ مدار باز و هم جریان اتصال کوتاه را پیدا کنیم و  $R_{TH}$  را از تقسیم این دو مقدار به‌دست آوریم. بنابراین توصیه می‌شود در هنگام یافتن ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه، حتی در مسائل ساده بعدی مهارت لازم را کسب نمایید. اگر معادل‌های تونن و نورتن مستقیماً به‌دست آمدند رابطه (۱۸) برای تست بسیار مفید است. اکنون سه مثال متفاوت را برای تعیین مدار معادل تونن یا نورتن ملاحظه می‌کنیم.

مدارهای معادل تونن و نورتن شبکه‌ای را که در شکل ۵-۲۹ (الف) به مقاومت  $1k\Omega$  وصل است بیابید.



**شکل ۵-۲۹** (الف) مدار مفروضی که در آن مقاومت  $1k\Omega$  به‌عنوان شبکه  $B$  است. (ب) شبکه  $A$  با همه منابع کشته‌شده. (ج) معادل تونن در شبکه  $A$  نشان داده شده است. (د) معادل نورتن برای شبکه  $A$ . (ه) مداری برای تعیین  $I_{sc}$ .

با توجه به صورت مسئله می‌بینیم که شبکه  $B$  یک مقاومت  $1k\Omega$ ، و شبکه  $A$  بقیه مدار است. مدار فاقد منابع وابسته است و ساده‌ترین راه یافتن مستقیم  $R_{TH}$  برای شبکه مرده و به دنبال آن محاسبه  $V_{oc}$  یا  $I_{sc}$  است. ابتدا ولتاژ مدار باز را به‌دست می‌آوریم. در این مسئله یافتن آن از راه جمع ساده‌تر می‌باشد. اگر فقط منبع  $4V$  کار کند، ولتاژ مدار باز  $4V$  است. اگر فقط منبع  $2mA$  روشن باشد ولتاژ مدار باز  $4V = 2k\Omega \times 2mA$  خواهد شد. به‌هنگام قطع مقاومت  $1k\Omega$ ، هیچ جریانی از مقاومت  $3k\Omega$  عبور نمی‌کند. اگر هر دو منبع مستقل روشن فرض شوند داریم:  $V_{oc} = 4 + 4 = 8V$ . سپس هر دو منبع مستقل را می‌کشیم تا شبکه مرده  $A$  به‌دست آید. به این ترتیب با اتصال کوتاه‌شدن منبع ولتاژ  $4V$  و قطع منبع جریان  $2mA$ ، طبق شکل ۵-۲۹ (ب) دو مقاومت  $2k\Omega$  و  $3k\Omega$  به‌صورت سری در می‌آیند و معادل آن‌ها مقاومت  $5k\Omega$  است.

توجه کنید که اگر هر قسمت از شبکه دارای منبع وابسته باشد، متغیر کنترل آن باید در همان بخش شبکه منبع وابسته باشد.

بگذارید ببینیم که آیا قضیه تونن را می‌توان به مدار شکل ۵-۲۵ با موفقیت اعمال نمود. ما معادل سمت چپ  $R_L$  را در مثال ۵-۶ ملاحظه کردیم، ولی مایلیم با روشی ساده‌تر همان حل را به‌دست آوریم.

برای تعیین معادل تونن سمت چپ  $R_L$  مدار شکل ۵-۲۵ (الف) از قضیه تونن استفاده کنید.

کار را با قطع  $R_L$  و توجه به این نکته که جریانی از مقاومت  $7\Omega$  در مدار شکل ۵-۲۷ (الف) عبور نمی‌کند آغاز می‌کنیم. بنابراین  $V_{oc}$  در دو سر مقاومت  $6\Omega$  افت می‌کند (وقتی از مقاومت  $7\Omega$  جریانی نگذرد، افت ولتاژی هم در آن نداریم). پس با تقسیم ولتاژ داریم:

$$V_{oc} = 12 \left( \frac{6}{3+6} \right) = 8V$$

با کشتن شبکه  $A$  یعنی جایگزینی منبع  $12V$  با یک مدار اتصال کوتاه، می‌بینیم که در شبکه مرده مقاومت  $7\Omega$  با ترکیب موازی مقاومت‌های  $6\Omega$  و  $3\Omega$  به‌طور سری بسته شده است (شکل ۵-۲۷ (ب)).

بنابراین، شبکه مرده قابل نمایش با یک مقاومت  $9\Omega$  با نام مقاومت معادل تونن شبکه  $A$  می‌باشد. پس معادل تونن برابر  $V_{oc}$  سری شده با مقاومت  $9\Omega$  بوده و با نتیجه قبلی ما وفاق دارد.

## تمرین

۵-۶ به‌وسیله قضیه تونن جریان درون مقاومت  $2\Omega$  را در مدار شکل ۵-۲۸ بیابید (راهنمایی: مقاومت  $2\Omega$  را به‌عنوان بخش  $B$  در نظر بگیرید).

$$\text{جواب: } I_{2\Omega} = 260.8mA \text{ و } R_{TH} = 7.857\Omega, V_{TH} = 2.571V$$

## چند نکته کلیدی

مدار معادلی که چگونگی به‌دست آوردن آن را آموختیم کلاً از شبکه  $B$  مستقل است، زیرا ابتدا شبکه  $B$  را حذف کردیم سپس ولتاژ مدار باز تولیدی به‌وسیله شبکه  $A$  را به هر طریقی به‌دست آوردیم. شبکه  $B$  را به این خاطر ذکر کردیم که بگوییم فرقی نمی‌کند چه شبکه‌ای به دو سر شبکه  $A$  متصل است. شبکه  $B$  بیانگر این شبکه کلی است.

نکاتی چند در مورد این قضیه وجود دارد که ذکر آن‌ها ارزشمند است:

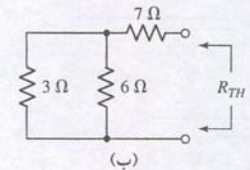
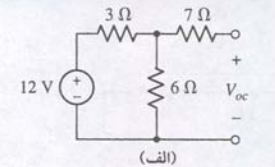
- تنها محدودیت اعمال‌شده در  $A$  یا  $B$  این است که همه منابع وابسته در  $A$  (یا  $B$ ) متغیرهای کنترلی را نیز در همان سمت  $A$  (یا  $B$ ) دارند.
- در مورد پیچیدگی  $A$  یا  $B$  هیچ محدودیتی موجود نیست. هر یک از آن‌ها ممکن است هر ترکیبی از منابع ولتاژ یا جریان مستقل، منابع جریان یا ولتاژ وابسته خطی، مقاومت یا هر عنصری که خطی باشد را دارا باشند.
- شبکه مرده  $A$  را می‌توان با یک مقاومت  $R_{TH}$  که آن را مقاومت تونن می‌خوانیم نمایش داد. وجود منابع وابسته یا عدم وجود آن‌ها در شبکه مرده اهمیتی ندارد.
- معادل تونن از دو مولفه تشکیل شده است: یک منبع ولتاژ سری با یک مقاومت. هر یک از آن‌ها ممکن است صفر هم باشد ولی معمولاً این چنین نیست.

## قضیه نورتن

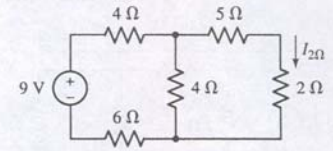
قضیه نورتن مفهوم نزدیکی به قضیه تونن دارد و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:



## مثال ۵-۷



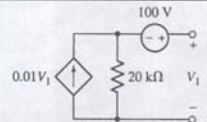
**شکل ۵-۲۷** (الف) مدار شکل ۵-۲۵ (الف) با شبکه  $B$  (مقاومت  $R_L$ ) که قطع شده است و ولتاژ دو سر پایانه‌ها با  $V_{oc}$  مشخص شده است. (ب) منبع متصل در شکل ۵-۲۵ (الف) کشته شده و ما به پایانه‌ای نگاه می‌کنیم که شبکه  $B$  برای تعیین مقاومت موثر شبکه  $A$  به آن وصل شده است.



شکل ۵-۲۸

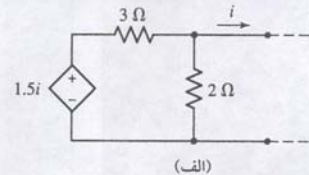


## تمرین

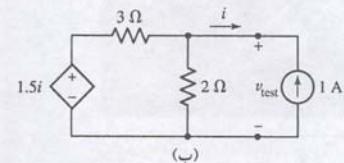


شکل ۵-۳۲

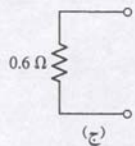
## مثال ۵-۱۰



(الف)



(ب)



(ج)

**شکل ۵-۳۳** (الف) شبکه بدون منبع مستقل و (ب) روشی برای تهیه  $R_{TH}$ . (ج) معادل تونن برای مدار اصلی.

**۵-۸** معادل تونن را برای شبکه ۵-۳۲ به‌دست‌آوردید (راهنمایی: تبدیل سریع روی منبع وابسته می‌تواند کارساز باشد).  
جواب:  $502.5\text{mV}$  و  $-100.5\Omega$ .

به‌عنوان آخرین مثال، شبکه‌ای که فقط منبع وابسته دارد را ملاحظه می‌نماییم.

**معادل تونن مدار شکل ۵-۳۳ (الف) را به‌دست‌آوردید.**

چون پایانه‌های سمت راست مدار قبلاً باز بوده‌اند،  $i = 0$  است. در نتیجه، منبع وابسته مرده است، و لذا  $V_{OC} = 0$  خواهد بود.

اکنون به جست‌وجوی مقدار  $R_{TH}$  که نمایشگر شبکه دو پایانه است می‌پردازیم. با این وجود نمی‌توانیم  $V_{OC}$  و  $i_{SC}$  را یافته و حاصل تقسیم آن‌ها را بیابیم، زیرا مدار فاقد منبع مستقل است و  $V_{OC}$  و  $i_{SC}$  هر دو صفراند. بنابراین باید حقه‌ای سوار کنیم.

از خارج مدار یک منبع  $1\text{A}$  به آن وصل می‌کنیم، و ولتاژ  $V_{test}$  حاصل را اندازه می‌گیریم و سپس  $R_{TH} = V_{test}/I$  را به‌دست می‌آوریم. با مراجعه به شکل ۵-۳۳ (ب)، می‌بینیم که  $-1\text{A} = i$  است. با تحلیل گره داریم:

$$\frac{V_{test} - 1.5(-1)}{3} + \frac{V_{test}}{2} = 1$$

پس

$$V_{test} = 0.6\text{V}$$

و بنابراین  $R_{TH} = 0.6\Omega$ . معادل تونن در شکل ۵-۳۳ (ج) نشان داده شده است.

## خلاصه‌ای از روش‌های به‌کاررفته

اکنون سه مثالی را بررسی می‌کنیم که برای آن‌ها معادل تونن و نورتن را به‌دست‌آوردیم. اولین مثال (شکل ۵-۲۹) فقط منابع مستقل و مقاومت داشت و می‌توانستیم چند روش مختلف را به آن اعمال نماییم. در تحلیل آن می‌باید  $R_{TH}$  را برای شبکه مرده و  $V_{OC}$  را برای شبکه روشن یا زنده حساب کنیم. همچنین می‌توانستیم  $R_{TH}$ ،  $I_{SC}$ ، یا  $V_{OC}$  و  $I_{SC}$  را به‌دست‌آوریم.

## کاربرد عملی

## مولتی‌متر دیجیتال

یکی از رایج‌ترین وسایل تست الکتریکی در آزمایشگاه، DMM یا مولتی‌متر دیجیتال است (شکل ۵-۳۴)، که برای اندازه‌گیری ولتاژ، جریان و مقاومت طراحی شده است.

برای اندازه‌گیری ولتاژ، دو سیم از DMM به دو طرف عنصر مداری (شکل ۵-۳۵) وصل می‌شود. یک پایانه معمولاً با " $V/\Omega$ " مشخص می‌شود که مثبت است و پایانه دیگر معمولاً با علامت زمین مشخص می‌گردد. در این نوع اندازه‌گیری هیچ توانی از DMM به مدار منتقل نمی‌شود.

با توجه به بحث معادل‌های تونن و نورتن قبلی، واضح است که DMM دارای مقاومت تونن خاص خود است. این مقاومت

معادل تونن موازی با مدار خواهد بود و مقدار آن ممکن است بر مقادیر اندازه‌گیری  $R_{DMM}$  تأثیر بگذارد (شکل ۵-۳۶). مقاومت ورودی یک DMM حدود  $10\text{M}\Omega$  یا بیشتر است. بنابراین ولتاژ اندازه‌گیری شده  $V$  در دو سر  $999.9\Omega \parallel 10\text{M}\Omega = 999.9\text{k}\Omega$  ظاهر می‌گردد. با استفاده از تقسیم ولتاژ درمی‌یابیم که  $V = 4.4998$  ولت است، که کمی کمتر از مقدار مورد انتظار  $4.5$  ولت می‌باشد. بنابراین مقدار مقاومت معین ولت‌متر خطایی جزئی را در مقدار اندازه‌گیری شده ایجاد می‌نماید. برای اندازه‌گیری جریان، DMM باید با یک عنصر از مدار سری باشد و عموماً برای انجام آن باید سیمی را برید (شکل ۵-۳۷).

به‌این ترتیب معادل تونن مدار مطابق شکل ۵-۲۹ (ج) به‌دست می‌آید و از آن نیز می‌توان سریعاً معادل نورتن شکل ۵-۲۹ (د) را تعیین نمود. به منظور تست، اجازه بدهید  $I_{SC}$  را برای مدار مفروض شکل ۵-۲۹ (و) به‌دست‌آوریم. از روش جمع و کمی تقسیم جریان استفاده می‌کنیم:

$$I_{SC} = I_{SC} \Big|_{4\text{V}} + I_{SC} \Big|_{2\text{mA}} = \frac{4}{2+3} + (2) \frac{2}{3} = 0.8 + 0.8 = 1.6\text{mA}$$

که صحت پاسخ را نشان می‌دهد.\*

**۵-۷** معادل‌های تونن و نورتن مدار شکل ۵-۳۰ را معین کنید.

جواب:  $7.857\text{V}$ ،  $-3.235\text{mA}$  و  $2.429\text{k}\Omega$

## چه وقت منابع وابسته وجود دارند

فنی‌تر صحبت کنیم، همیشه برای ما یک "شبکه B" وجود ندارد تا ما قضیه تونن یا نورتن را برای آن به‌کار ببریم؛ در عوض می‌توانیم مدار معادلی از یک شبکه با دو پایانه را جست‌وجو کنیم که هنوز به شبکه دیگری وصل نیست. به‌هرحال اگر یک شبکه مانند B وجود داشته باشد که ما نمی‌خواهیم آن را در روند ساده‌سازی دخالت دهیم، ما باید اگر حاوی منابع وابسته است، کمی احتیاط را رعایت کنیم. در این‌گونه وضعیت‌ها، متغیر کنترل‌کننده یا عنصر مربوطه باید در شبکه B لحاظ شده و از شبکه A جدا شوند. در غیر این صورت راهی برای تحلیل مدار نهایی وجود ندارد زیرا کمیت منبع کنترل‌کننده از دست می‌رود.

اگر شبکه A حاوی منبع وابسته باشد، آن‌گاه دوباره ما باید مطمئن شویم که متغیر کنترل‌کننده و عنصر یا عناصر مربوط به آن نمی‌توانند در شبکه B باشند. تا این‌جا، ما فقط مدارهایی را ملاحظه کردیم که مقاومت‌ها و منابع مستقل داشتند. هر چند تکنیکی بگوییم رها کردن یک منبع به صورت "مرده" یا "غیرفعال" هنگام ایجاد یک معادل تونن یا نورتن صحیح است، در عمل هیچ ساده‌سازی صورت نمی‌گیرد. چیزی که ما می‌خواهیم منبع ولتاژ مستقلی است که با یک مقاومت سری باشد، و یا منبع جریان مستقلی که با یک مقاومت تنها موازی شود. به بیان دیگر، یک معادل دو قطعه‌ای را نیاز داریم. در مثال‌های زیر ما معانی کاهش شبکه‌ها را با منابع وابسته و مقاومت‌ها به صورت یک مقاومت تنها ملاحظه می‌کنیم.

**مطلوبست معادل تونن در شکل ۵-۳۱ (الف).**

برای یافتن  $V_{OC}$ ، می‌بینیم که  $V_X = V_{OC}$  است و جریان منبع وابسته هم باید از مسیر مقاومت  $2\text{k}\Omega$  بگذرد زیرا هیچ جریانی از مقاومت  $3\text{k}\Omega$  نمی‌تواند عبور نماید. با استفاده از KVL حول حلقه بیرونی داریم:

$$-4 + 2 \times 10^3 \left(-\frac{V_X}{4000}\right) + 3 \times 10^3(0) + V_X = 0$$

و

$$V_X = 8\text{V} = V_{OC}$$

سپس به کمک قضیه تونن، می‌توان مدار معادل را با شبکه مرده A که طبق شکل ۵-۳۱ (ب) به منبع  $8\text{V}$  سری شده است، به‌دست‌آورد. البته بیان این مطلب صحیح است ولی چندان ساده و مفید نیست. در شبکه‌های مقاومتی خطی، مطمئناً معادل ساده‌تری مثل  $R_{TH}$  برای شبکه A می‌توان به‌دست‌آورد.

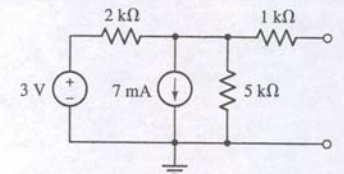
وجود مدار وابسته مانع از این می‌شود تا  $R_{TH}$  را مستقیماً از ترکیب مقاومت در شبکه غیرفعال به‌دست‌آوریم. پس از اتصال کوتاه پایانه‌های خروجی در شکل ۵-۳۱ (الف) واضح است که  $V_X = 0$  و جریان منبع وابسته صفر است. بنابراین  $I_{SC} = 4/(5 \times 10^3) = 0.8\text{mA}$  خواهد شد. به این ترتیب:

$$R_{TH} = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} = \frac{8}{(0.8 \times 10^{-3})} = 10\text{k}\Omega$$

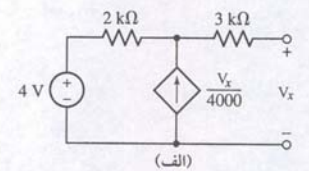
و لذا معادل تونن در شکل ۵-۳۱ (ج) به‌دست آمده است.

\* اگر مقاومت‌ها به  $\text{k}\Omega$  باشند، و ولتاژ به ولت، آن‌گاه به‌طور خودکار جریان به  $\text{mA}$  است.

## تمرین



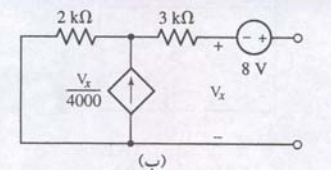
شکل ۵-۳۰



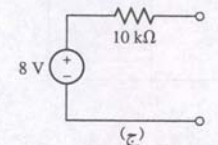
(الف)

**شکل ۵-۳۱** (الف) شبکه مفروضی که در آن معادل تونن موردنظر است.

## مثال ۵-۹



(ب)



(ج)

**شکل ۵-۳۱** (ب) فرم ممکن ولی بدون استفاده معادل تونن. (ج) بهترین معادل تونن برای این شبکه مقاومتی خطی.



در مثال دوم (شکل ۵۳۱) هر دو منبع وابسته و مستقل وجود داشتند، و در روش به کاررفته لازم بود تا  $v_{oc}$  و  $I_{sc}$  به دست آید. در این مثال مقدار  $R_{TH}$  به راحتی برای شبکه مرده به دست نمی آمد زیرا امکان غیرفعال کردن منبع وابسته وجود نداشت.

مثال سوم فاقد هر گونه منبع مستقل بود، و بنابراین معادله‌های تونن و نورتن منبع مستقل نداشتند. ما  $R_{TH}$  را با اعمال جریان  $1A$  و یافتن  $V_{test} = 1 \times R_{TH}$  به دست آوردیم. می توانستیم  $1V$  به مدار اعمال کنیم و از  $i = 1/R_{TH}$  مقاومت را به دست آوریم. این دو تکنیک مرتبط را می توان به هر مداری با منابع وابسته و با صفرکردن منابع مستقل، اعمال نمود.

دو روش دیگر دارای جاذبه هستند زیرا می توان آن‌ها را برای هر یک از سه شبکه مورد بحث فوق به کاربرد. در اولی کافی است که شبکه  $B$  را با  $v_s$  جایگزین کنید، جریانی که از پایانه مثبت آن خارج می شود را  $i$  بنامید. بعد با تحلیل شبکه  $A$ ،  $i$  را به دست آورید و سپس معادله را به شکل  $ai + b = v_s$  درآورید. در این صورت  $a = R_{TH}$  و  $b = v_{oc}$  خواهد بود.

می توان منبع جریانی چون  $i_s$  را به کاربرد، ولتاژ آن را  $v$  در نظر گرفت و سپس  $i_s = cv$  را تشکیل داد که  $c = 1/R_{TH}$  و  $d = i_s$ . این دو روش اخیر به هر مداری قابل اعمال است ولی دیگر روش‌هایی نیز می توان یافت که ساده تر و سریع ترند.

هرچند که ما همه توجه خود را به تحلیل مدارهای خطی معطوف داشته ایم، ولی بد نیست بدانیم که هر دو قضیه تونن و نورتن در شبکه غیرخطی  $B$  نیز معتبراند و کافی است فقط شبکه  $A$  خطی باشد.

۵۳۹ معادل تونن شبکه شکل ۵۳۹ را پیدا کنید (راهنمایی: از منبع تست  $1V$  استفاده نمایید).  
جواب:  $I_{test} = 50mA$  پس  $R_{TH} = 20\Omega$ .

## ۵-۴ حداکثر انتقال توان

با توجه به یک منبع ولتاژ یا جریان واقعی می توان قضیه جالبی را برای توان بیان کرد. برای منبع ولتاژ واقعی (شکل ۵۴۰) توان انتقالی به بار  $R_L$  برابر است با:

$$(۱۹) \quad p_L = i_L^2 R_L = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2}$$

برای یافتن مقداری از  $R_L$  که حداکثر توان ممکن را از یک منبع جذب کند، از رابطه فوق نسبت به  $R_L$  مشتق می گیریم:

$$\frac{d p_L}{d R_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 v_s^2 - v_s^2 R_L (2)(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4}$$

آن‌گاه مشتق را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$2R_L(R_s + R_L) = (R_s + R_L)^2$$

یا

$$R_s = R_L$$

چون مقادیر  $R_L = 0$  و  $R_L = \infty$  هر دو یک می نیم را به دست می دهند ( $p_L = 0$ ) و نیز معادل بودن منبع ولتاژ واقعی و منبع جریان واقعی بیان شد، می توان قضیه حداکثر انتقال توان را اثبات شده دانست:

یک منبع ولتاژ مستقل سری با مقاومت  $R_s$ ، یا یک منبع جریان مستقل موازی با مقاومت  $R_s$  حداکثر توان را به شرطی به بار  $R_L$  می دهد که در آن  $R_L = R_s$  باشد.

خواننده ممکن است این قضیه را برحسب مقاومت معادل تونن شبکه بیان کند:

یک شبکه، حداکثر توان را هنگامی به مقاومت بار  $R_L$  تحویل می دهد که در آن  $R_L$  با مقاومت معادل تونن شبکه برابر باشد.

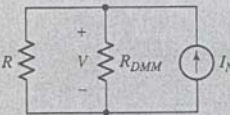
یک سیم DMM به پایانه زمین دستگاه و سیم دیگر به ورودی "A" وصل می شود تا جریان را اندازه بگیرد. در این حالت نیز DMM هیچ توانی را به مدار تحویل نمی دهد. در این شکل مقاومت معادل تونن ( $R_{DMM}$ ) مربوط به DMM با مدار ماسری و بنابراین مقاومت آن می تواند اندازه گیری را متاثر سازد. معادله KVL را حول حلقه می نویسیم:

$$-9 + 1000I + R_{DMM}I + 1000I = 0$$

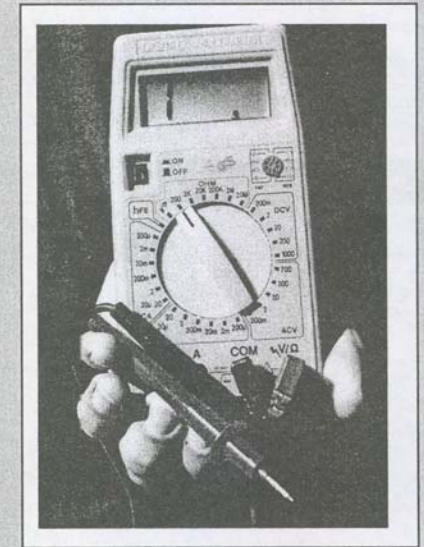
توجه کنید که چون آرایش دستگاه را برای اندازه گیری جریان تغییر داده ایم، مقاومت معادل تونن با حالتی که برای اندازه گیری ولتاژ به کاررفت یکی نیست. در واقع ما مایلیم که به طور ایده آل  $R_{DMM}$  به هنگام اندازه گیری جریان برابر صفر، و در اندازه گیری ولتاژ برابر  $\infty$  باشد. اگر در اندازه گیری جریان  $R_{DMM} = 0.1\Omega$  باشد، جریان  $4.4998mA$  است که مختصر اختلافی را با مقدار مورد انتظار  $4.5$  دارا است. بسته به تعداد ارقام قابل نمایش به وسیله دستگاه، ما ممکن است حتی متوجه اثر مقاومت غیر صفر DMM روی اندازه گیری خود نشویم.

از همین دستگاه می توان برای اندازه گیری مقاومت مورد نظری استفاده کرد به شرطی که در حین اندازه گیری هیچ منبع مستقلی فعال نباشد. از درون دستگاه جریانی به مقاومت مورد نظر ارسال می گردد و مدار ولت‌متر برای اندازه گیری ولتاژ حاصل به کار می رود. از جایگزینی DMM با معادل نورتن (که اکنون شامل یک منبع جریان مستقل برای تولید جریان از پیش تعیین شده است) می بینیم که  $R_{DMM}$  با مقاومت معلوم  $R$  موازی می شود (شکل ۵۳۸).

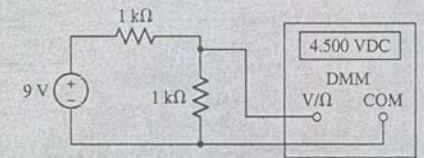
در نتیجه، در واقع DMM مقدار  $R \parallel R_{DMM}$  را اندازه می گیرد. اگر  $R_{DMM} = 10M\Omega$  و  $R = 10\Omega$  باشد،  $9.99999\Omega$  اندازه گیری شده خواهد شد، که برای بسیاری از اهداف بیش از اندازه دقیق است. با این وجود اگر  $R = 10M\Omega$  باشد  $5M\Omega$  اندازه گیری شده می گردد. بنابراین مقاومت ورودی DMM عملاً محدوده بالایی را برای مقادیر مقاومت زیر تست ایجاد می کند. باید توجه داشت که اگر یک مولتی متر دیجیتال بر اساس آگاهی از  $R_{DMM}$  برنامه ریزی شود، امکان جبران و اندازه گیری مقاومت‌های بزرگ تر در آن وجود دارد.



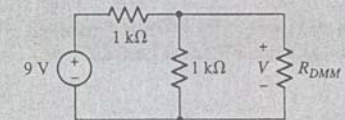
۵۳۸ DMM برای اندازه گیری مقاومت که با معادل نورتن جایگزین شده است. دیده می شود که  $R_{DMM}$  با مقاومت مجهول مورد اندازه گیری موازی است.



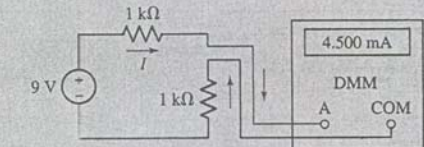
شکل ۵۳۳ یک مولتی متر دیجیتال دستی.



شکل ۵۳۵ DMM برای اندازه گیری ولتاژ dc وصل شده است.

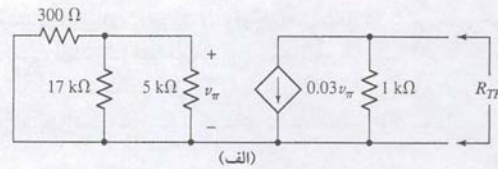


شکل ۵۳۶ DMM شکل ۵۳۵ به فرم مقاومت معادل تونن  $R_{DMM}$ .

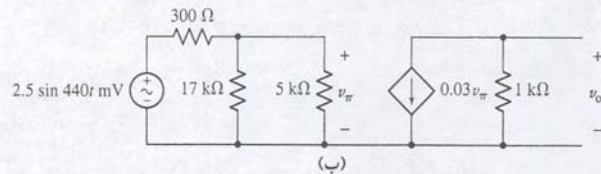


شکل ۵۳۷ DMM متصل شده تا جریان را اندازه بگیرد.





(الف)



(ب)

شکل ۵-۴۲ (الف) مدار پس از حذف  $R_L$  و اتصال کوتاه‌شدن منبع مستقل. (ب) مدار برای تعیین  $V_{TH}$ .

برای حمل حداکثر توان به مقاومت بار باید  $R_L$  در مقدار  $R_{TH} = 1 \text{ k}\Omega$  تنظیم شود. برای یافتن  $V_{TH}$  مدار شکل ۵-۴۲ (ب) را ملاحظه نمایید که همان شکل ۵-۴۱ است که  $R_L$  در آن حذف شده است. ما ممکن است بنویسیم:

$$v_{OC} = -0.03 v_{\pi} (1000) = -30 v_{\pi}$$

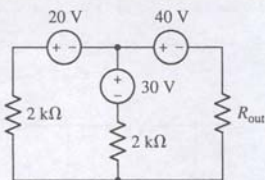
که  $v_{\pi}$  از یک رابطه تقسیم ولتاژ ساده به دست می‌آید:

$$v_{\pi} = (2.5 \times 10^{-3} \sin 440t) \left( \frac{3864}{300 + 3864} \right)$$

به نحوی که معادله تونن یک ولتاژ  $69.6 \sin 440t \text{ mV}$  است که با مقاومت  $1 \text{ k}\Omega$  سری است. حداکثر توان با رابطه زیر داده می‌شود:

$$p_{\max} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}} = 1.211 \sin^2 440t \text{ } \mu\text{W}$$

## تمرین



شکل ۵-۴۳

۵-۴۳ مدار شکل ۵-۴۳ را ملاحظه نمایید.

الف. اگر  $R_{out} = 3 \text{ k}\Omega$  باشد، توان حمل‌شده به آن را پیدا کنید.

ب. حداکثر توان حمل‌شده به هر مقاومت  $R_{out}$  چقدر است؟

ج.  $R_{out}$  در دو مقدار  $20 \text{ mW}$  توان جذب می‌کند. این دو مقدار را بیابید.

جواب:  $16.88 \Omega$  و  $59.2 \text{ k}\Omega$ ،  $306 \text{ mW}$ ،  $230 \text{ mW}$

## ۵-۵ تبدیل ستاره-مثلث

قبل دیدیم که ترکیب‌های سری و موازی مقاومت‌ها اغلب به کاهش قابل توجه پیچیدگی مدار منجر می‌گردد. در مواردی که چنین ترکیباتی وجود ندارد، برای دستیابی به آن، می‌توان منابع را تبدیل نمود. راه دیگر حصول به این هدف تکنیک مفیدی به نام تبدیل  $\Delta$ -Y (ستاره-مثلث) است که از نظریه شبکه‌ها حاصل می‌شود.

مدارهای شکل ۵-۴۴ را ملاحظه کنید، در این شکل هیچ ترکیب موازی یا سری از مقاومت‌ها که مدار را ساده کند دیده نمی‌شود (توجه کنید که شکل ۵-۴۴ (الف) و (ب) و نیز ۵-۴۴ (ج) و (د) یکسانند و چون منبعی وجود ندارد، نمی‌توان تبدیل منبع انجام داد. با این وجود می‌توان این دو نوع شبکه را به هم تبدیل کرد.

با توجه به قضیه حداکثر انتقال توان در شکل ۵-۱۶ یک مقاومت  $2 \text{ اهمی}$  از هر دو منبع واقعی بیشترین توان را می‌گیرد ( $4.5 \text{ W}$ ). مقدار مقاومتی که حداکثر توان ( $3.6 \text{ kW}$ ) را از منبع شکل ۵-۱۱ جذب می‌کند  $0.01 \Omega$  می‌باشد.

تفاوت عمده‌ای بین کشیدن حداکثر توان از یک منبع و حمل حداکثر توان به یک بار وجود دارد. اگر بار طوری باشد که مقاومت تونن آن معادل با مقاومت تونن شبکه‌ای باشد که به آن متصل است، حداکثر توان را از آن شبکه خواهد گرفت. هر تغییر در مقاومت بار موجب کاهش توان حمل‌شده به بار می‌گردد. با این وجود، فقط معادل تونن خود شبکه را در نظر بگیرید. ما حداکثر توان ممکن را از منبع ولتاژ با کشیدن حداکثر جریان ممکن اخذ می‌کنیم، که این کار با اتصال کوتاه پایانه‌ها انجام می‌شود! با این وجود در این حالت غیر متعارف ما توان صفر را به بار منتقل می‌نماییم - زیرا در این حالت  $i^2 R = p$  است و ما با  $R = 0$  عمل اتصال کوتاه را انجام داده‌ایم.

با اِعمال عملیات جبری کمی به معادله (۱۹) که با حداکثر توان انتقالی برای  $R_L = R_S = R_{TH}$  مرتبط است داریم:

$$p_{\max} | \text{delivered to load} = \frac{v_s^2}{4R_s} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}}$$

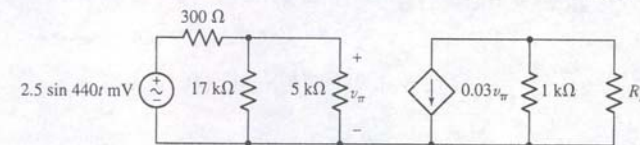
که  $v_{TH}$  و  $R_{TH}$  نشان می‌دهند که منبع ولتاژ عملی شکل ۵-۴۰ هم به عنوان منبع معادل بعضی از منابع خاص می‌تواند شناخته شود.

همچنین غیر عادی نیست که قضیه حداکثر توان به غلط تفسیر شود. این قضیه برای کمک به ما برای یک بار بهینه جهت جذب حداکثر توان ارائه شده است. اگر مقاومت بار قبلاً مشخص شده باشد قضیه حداکثر توان کمکی نمی‌نماید. اگر به دلایلی ما بتوانیم مقاومت معادله معادل تونن شبکه را که به بار وصل است عوض کنیم، با تنظیم آن با بار تضمین‌کننده انتقال حداکثر توان نیست. یک بررسی سریع اتلاف توان در مقاومت تونن این مطلب را روشن می‌کند.



## مثال ۵-۱۱

در مدار شکل ۵-۴۱ مدلی از یک تقویت‌کننده ترانزیستوری آمپتر مشترک دیده می‌شود. مقدار مقاومت بار  $R_L$  را طوری معین نمایید که طبقه اول حداکثر توان را به طبقه دوم منتقل کند و توان جذب‌شده واقعی را محاسبه کند.



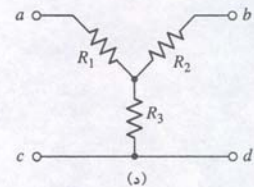
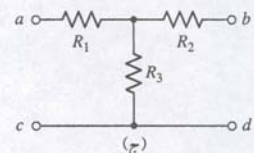
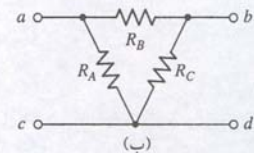
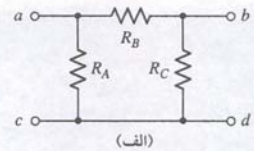
شکل ۵-۴۱ یک تقویت‌کننده آمپتر مشترک که در آن  $R_L$  برای انتقال توان ماکزیم نامشخص است.

چون از ما تعیین مقاومت بار خواسته شده است، تئوری حداکثر توان را اِعمال می‌کنیم. گام اول یافتن معادل تونن بقیه مدار است.

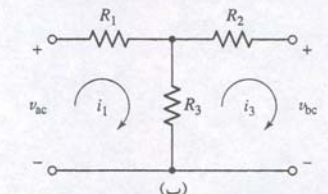
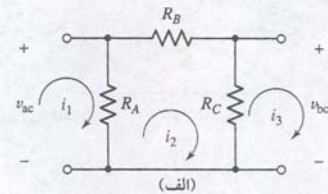
ما ابتدا مقاومت معادل تونن را به دست می‌آوریم که لازم می‌دارد تا  $R_L$  حذف شده و منبع مستقل اتصال کوتاه گردد (شکل ۵-۴۲ (الف)).

چون  $v_{\pi} = 0$  است، منبع جریان وابسته یک مدار باز است، پس  $R_{TH} = 1 \text{ k}\Omega$  می‌باشد. این مقدار را می‌توان با اتصال یک منبع جریان  $1 \text{ A}$  به دو سر مقاومت  $1 \text{ k}\Omega$  تصدیق نمود؛  $v_{\pi}$  هنوز صفر خواهد بود، بنابراین منبع وابسته غیر فعال باقی می‌ماند و لذا برای  $R_{TH}$  نقشی ندارد.





**شکل ۵-۴۴** (الف) شبکه  $\pi$  متشکل از سه مقاومت و سه اتصال منحصربه‌فرد. (ب) همان شبکه به صورت  $\Delta$  ترسیم شده است. (ج) یک شبکه T متشکل از سه مقاومت. (د) همان شبکه به صورت یک شبکه Y.



**شکل ۵-۴۵** (الف) شبکه با برچسب T. (ب) شبکه با برچسب T.

ما ابتدا دو ولتاژ  $v_{cd}$  و  $v_{ab}$  و سه جریان  $i_1$ ،  $i_2$  و  $i_3$  را طبق شکل ۵-۴۵ تعریف می‌کنیم. اگر دو شبکه معادل باشند، آن‌گاه ولتاژها و جریان‌های پایانه‌ها باید برابر باشند (جریان  $i_2$  در شبکه T متصل وجود ندارد). اینک مجموعه‌ای از روابط بین  $R_A$ ،  $R_B$ ،  $R_C$  و  $R_1$ ،  $R_2$ ،  $R_3$  با تحلیل مش قابل تعریف است. مثلاً برای شبکه شکل ۵-۴۵ (الف) می‌توان نوشت:

$$R_A i_1 - R_A i_2 = v_{ac} \quad (۲۰)$$

$$-R_A i_1 + (R_A + R_B + R_C) i_2 - R_C i_3 = 0 \quad (۲۱)$$

$$-R_C i_2 + R_C i_3 = -v_{bc} \quad (۲۲)$$

و برای شبکه شکل ۵-۴۵ (ب) داریم:

$$(R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_3 = v_{ac} \quad (۲۳)$$

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_3 = -v_{bc} \quad (۲۴)$$

سپس  $i_2$  را با استفاده از معادله (۲۱) از معادلات (۲۰) و (۲۲) حذف می‌کنیم، در نتیجه:

$$\left(R_A - \frac{R_A^2}{R_A + R_B + R_C}\right) i_1 - \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} i_3 = v_{ac} \quad (۲۵)$$

و

$$-\frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C} i_1 + \left(R_C - \frac{R_C^2}{R_A + R_B + R_C}\right) i_3 = -v_{bc} \quad (۲۶)$$

با مقایسه جملات بین معادله (۲۵) و معادله (۲۳) می‌بینیم که:

$$R_3 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

به طریقی مشابه ما ممکن است عباراتی برای  $R_1$  و  $R_2$  برحسب  $R_A$ ،  $R_B$  و  $R_C$  و نیز عباراتی برای  $R_A$ ،  $R_B$  و  $R_C$  برحسب  $R_1$ ،  $R_2$  و  $R_3$  بنویسیم. ما بقیه کار را به خواننده واگذار می‌کنیم. بنابراین برای تبدیل از شبکه Y به یک شبکه  $\Delta$  مقادیر جدید مقاومت چنین محاسبه می‌شوند:

$$R_A = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

و در تبدیل شبکه  $\Delta$  به Y، روابط زیر به کار می‌رود:

$$R_1 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}$$

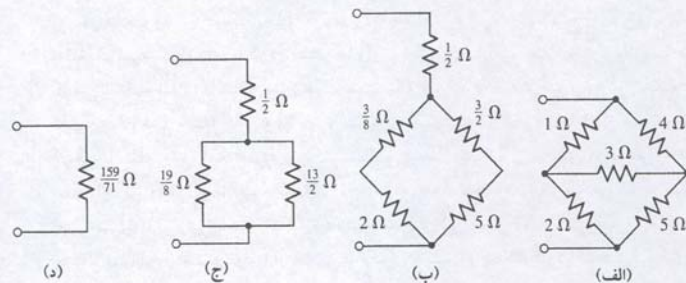
$$R_2 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}$$

$$R_3 = \frac{R_C R_A}{R_A + R_B + R_C}$$

استفاده از این روابط بسیار ساده است، معهذا شناخت چنین شبکه‌ها کمی تمرکز نیاز دارد.

## مثال ۵-۱۲

با تبدیل Y- $\Delta$  مقاومت معادل تونن شکل ۵-۴۶ (الف) را پیدا کنید.



**شکل ۵-۴۶** (الف) یک شبکه مقاومتی مفروض که مقاومت ورودی آن خواسته شده است. (ب) شبکه  $\Delta$  فوقانی با یک شبکه Y معادل جایگزین شده است. (ج) و (د) ترکیبات سری و موازی که به یک مقاومت تنها تبدیل شده‌اند.

می‌بینیم که شبکه شکل ۵-۴۶ (الف) از دو شبکه  $\Delta$  که در مقاومت  $3\Omega$  شریکند تشکیل شده است. باید دقت کنیم که عجولانه هر دو شبکه  $\Delta$  را به شبکه‌های Y تبدیل نکنیم. دلیل این امر پس از تبدیل شبکه فوقانی متشکل از مقاومت‌های  $1\Omega$ ،  $3\Omega$  و  $4\Omega$  به شبکه Y واضح‌تر خواهد شد (شکل ۵-۴۶ (ب)).

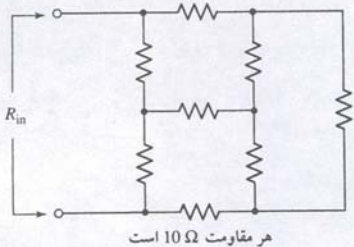
توجه کنید که در تبدیل شبکه بالایی به شبکه Y، مقاومت  $3\Omega$  را حذف کرده‌ایم. در نتیجه، راهی برای تبدیل شبکه اولیه  $\Delta$  متشکل از مقاومت‌های  $2\Omega$ ،  $5\Omega$  و  $3\Omega$  به شبکه Y وجود ندارد. تبدیل را با ترکیب مقاومت‌های  $2\Omega$  و  $3\Omega$  موازی با  $5\Omega$  (طبق شکل ۵-۴۶ (ج)) پیش می‌بریم. آن‌گاه مقاومت  $19/8\Omega$  موازی با  $13/2\Omega$  خواهد بود و این ترکیب با مقاومت  $1/2\Omega$  سری است. بنابراین می‌توان مدار اصلی شکل ۵-۴۶ (الف) را با یک مقاومت  $159/71\Omega$  جایگزین کرد (شکل ۵-۴۶ (د)).

**۵-۱۱** با استفاده از تبدیل Y- $\Delta$  مقاومت معادل تونن مدار شکل ۵-۴۷ را به دست آورید.

**جواب:**  $11.43\Omega$

## ۵-۶ انتخاب روش: مقایسه انواع تکنیک‌ها

در فصل ۳، قوانین جریان کیرشهف (KCL) و ولتاژ کیرشهف (KVL) معرفی شدند. این دو قانون به هر مداری قابل اعمال هستند، مشروط بر این‌که مدار را در نظر داشته باشیم. دلیل این است KCL و KVL به ترتیب از اصل بقا بار و بقا انرژی، که اصول اساسی اند، اخذ شده‌اند. بر اساس KCL، روش قوی تحلیل گرهی را خواهیم داشت. تکنیکی مشابه که بر KVL متکی است (و متأسفانه بر مدارهای سطح قابل اعمال است) و به تحلیل تک‌حلقه معروف است، نیز روش تحلیل مدار مفیدی به حساب می‌آید. در بیشتر بخش‌های این کتاب به مهارت‌های تحلیلی مربوط به مدارهای خطی توجه می‌شود. اگر بدانیم که مدار از اجزای خطی ساخته شده است، به بیان دیگر، همه ولتاژها و جریان‌ها با توابع خطی به هم مرتبط‌اند، آن‌گاه مدار را قبل از به کارگیری تحلیل گرهی یا تک‌حلقه ساده می‌کنیم. شاید مهم‌ترین نتیجه حاصل از این‌که با سیستم‌های کاملاً خطی سروکار داریم این باشد که بتوانیم اصل تجزیه را اعمال نماییم. با داشتن چندین منبع مستقل که بر روی مدار عمل می‌کنند، می‌توانیم سهم هر منبع را مستقل از دیگر منابع در پاسخ کل تعیین کنیم. این تکنیک در همه زمینه‌های مهندسی فراگیر بوده و ما با آن به دفعات سروکار خواهیم داشت. در بسیاری از موارد واقعی خواهیم



**شکل ۵-۴۷**

هر مقاومت  $10\Omega$  است



## ۵-۸ خواندنی‌های کمی

A book about battery technology, including characteristics of built-in resistance:  
D. Linden, *Handbook of Batteries*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1995.  
An excellent discussion of pathological cases and various circuit analysis theorems can be found in:

R. A. DeCarlo and P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

## مسائل

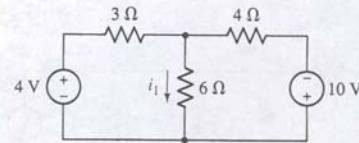
### ۵-۱ خطی بودن و تجمیع

۱. مفهوم خطی بودن بسیار با اهمیت است به این دلیل که سیستم‌های خطی راحت‌تر از سیستم‌های غیرخطی تحلیل می‌شوند. متأسفانه اکثر سیستم‌های واقعی طبیعتاً غیرخطی‌اند. با این وجود ممکن است برای یک سیستم غیرخطی مدلی خطی ایجاد کرد تا در محدوده کوچکی از متغیر کنترل معتبر باشد. به عنوان مثالی از این مطلب تابع نمایی ساده  $e^x$  را ملاحظه کنید. نمایش سری تیلور این تابع عبارتست از:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

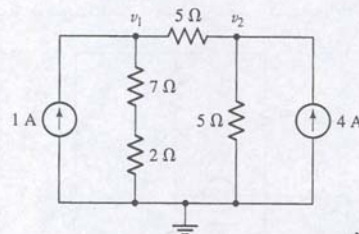
برای این تابع پس از حذف جملات  $x$  به بعد، یک مدل خطی بسازید. تابع جدید خود را در 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.10, 0.5, 1.0, 5.0 برای ارزیابی کنید. برای چه مقداری از  $x$  مدل خطی تقریب خوبی را برای  $e^x$  تولید می‌کند؟

۲. در شکل ۵-۴۸، (الف) سهم منبع 4 V را در جریان  $i_1$  مشخص کنید، (ب) سهم منبع 10 V را در  $i_1$  معین نمایید و (ج)  $i_1$  را تعیین کنید.



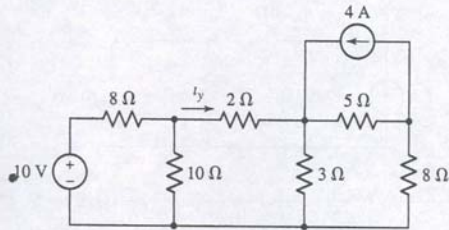
شکل ۵-۴۸

۳. با مراجعه به مدار دومینعی شکل ۵-۴۹، سهم منبع 1 A را در  $v_1$  به دست آورید و جریان کل درون مقاومت  $7\Omega$  را معین سازید.



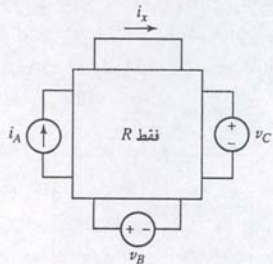
شکل ۵-۴۹

۴. اصل تجمیع را برای تعیین جریان  $i_2$  در مدار شکل ۵-۵۰ با ملاحظه تک‌تک منابع تعیین نمایید.



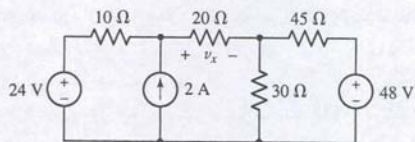
شکل ۵-۵۰

۵. برای مدار شکل ۵-۴۸ تنها مقادیر منبع را عوض کنید تا جریان  $i_1$  ۱۰ برابر شود. هر دو مقدار جریان باید عوض شود و هیچ‌کدام صفر نباشد.
۶. وقتی در مدار شکل ۵-۵۱، منابع  $i_A$  و  $v_B$  فعال‌اند و  $v_C = 0$ ،  $i_x = 20A$  با فعال بودن  $i_A$ ،  $v_C = 0$  و  $v_B = 5A$  آنگاه  $i_x$  و بالاخره با روشن بودن هر سه منبع،  $i_x = 12A$  است. اگر تنها منبع فعال، (الف)  $i_A$ ، (ب)  $v_B$  و (ج)  $v_C$  باشد،  $i_x$  را حساب کنید. (د) اگر  $i_A$  و  $v_C$  از نظر اندازه دوبرابر شوند و  $v_B$  منفی شود،  $i_x$  را به دست آورید.



شکل ۵-۵۱

۷. با استفاده از تجمیع مقدار  $v_x$  در مدار شکل ۵-۵۲ را پیدا کنید.
۸. با به کارگیری تجمیع به مدار شکل ۵-۵۳،  $i_2$  را بیابید.



شکل ۵-۵۲

دید که هر چند منابع به‌طور همزمان روی سیستم ما عمل می‌کنند، ولی معمولاً یکی از آن‌ها بر پاسخ سیستم غلبه داشته و کنترل آن را در دست دارد. اصل تجمیع امکان شناسایی سریع آن منبع را برای ما فراهم می‌سازد، به شرطی که مدل سیستم با دقتی کافی خطی باشد.

در هر صورت، از دیدگاه تحلیل یک مدار، به‌جز در مواردی که سهم منبع خاصی روی یک پاسخ خواسته شده باشد، با لازدن آستین‌ها و به کارگیری مستقیم یکی از دو روش تحلیل گرهی یا تک‌حلقه‌ای تاکتیکی سر راست است. دلیل این است که به کارگیری روش تجمیع در مداری با 12 منبع مستقل نیاز به 12 بار ترسیم مدار اصلی دارد و آن وقت باید باز هم تحلیل گرهی یا حلقه را به کار بگیریم. ولی تکنیک تبدیل منابع اغلب ابزار مفیدی در تحلیل مدار است. اجرای روش تبدیل منابع به ما این اجازه را می‌دهد تا مقاومت‌ها و منابعی که در مدار اصلی سری یا موازی نیستند را یکپارچه کنیم. همچنین این روش اجازه می‌دهد تا همه یا حداقل بسیاری از منابع در مدار اصلی از یک نوع شده و به کارگیری تحلیل گرهی یا تک‌حلقه‌ای سراسر مدار شود.

قضیه تونن به دلایل متعددی بسیار مهم است. هنگام کار با مدارهای الکترونیک، همواره نگران مقاومت معادل تونن در بخش‌های مختلف آن هستیم. این نگرانی خصوصاً در ورودی و خروجی طبقات مختلف اهمیت بیشتری دارد. علت این است که بهترین راه رسیدن به یک سیستم با رفتار بهینه، تطبیق مقاومت‌های آن‌ها است. ما مختصری از این خاصیت را در بحث انتقال توان حداکثر ملاحظه کردیم و دیدیم که مقاومت بار باید طوری انتخاب شود که با مقاومت معادل تونن مداری که بار به آن وصل است تطابق داشته باشد. با این وجود، در تحلیل‌های مکرر روزانه می‌بینیم که تبدیل بخشی از یک مدار به معادل تونن یا نورتن به اندازه تحلیل کامل آن کار می‌برد. بنابراین همچون روش تجمیع، روش‌های تونن و نورتن هنگامی اعمال می‌گردند که اطلاعات خاصی از بخش موردنظری از مدار لازم باشد.

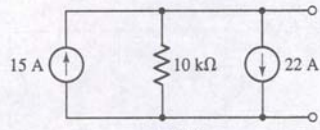
## ۵-۷ خلاصه فصل و مرور

- اصل تجمیع بیان می‌دارد که پاسخ کل در یک مدار خطی را، از جمع پاسخ‌های جزئی حاصل از تک‌تک منابع که به تنهایی عمل می‌کنند می‌توان به دست آورد.
- روش تجمیع در مواردی به کار می‌رود که هدف تعیین سهم یک منبع خاص در پاسخ باشد.
- مدلی عملی برای یک ولتاژ واقعی ترکیب سری مقاومت و یک منبع ولتاژ مستقل است. همچنین مدلی عملی برای یک منبع جریان واقعی، عبارت است از مقاومتی موازی با یک منبع جریان مستقل.
- تبدیل منابع به ما اجازه می‌دهد تا یک منبع ولتاژ واقعی را به یک منبع جریان واقعی تبدیل کنیم.
- تکرار تبدیل منابع که ضمن آن ترکیب مقاومت‌ها و منابع صورت می‌گیرد در ساده‌سازی مدار اهمیت بسزایی دارد.
- معادل تونن یک شبکه، مقاومتی سری با یک منبع ولتاژ مستقل است. مدار معادل نورتن نیز همان مقاومت ولی موازی با یک منبع جریان می‌باشد.
- روش‌های متنوعی برای به دست آوردن مقاومت معادل تونن وجود دارد که به بود یا نبود منابع وابسته، بستگی دارد.
- حداکثر توان انتقالی هنگامی رخ می‌دهد که مقاومت بار با مقاومت معادل تونن شبکه متصل به آن تطابق داشته باشد.
- وقتی که با یک شبکه مقاومتی اتصال  $\Delta$  مواجه می‌شوید تبدیل آن به یک شبکه  $Y$  ساده است. این می‌تواند در ساده‌سازی شبکه قبل از تحلیل کمک کند. برعکس یک شبکه مقاومتی اتصال  $Y$  می‌تواند به شبکه اتصال  $\Delta$  تبدیل شود تا در ساده کردن یک شبکه کمک کند.

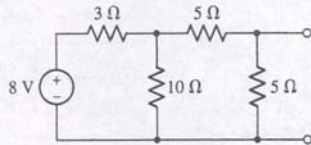


## تکنیک‌های مفید تحلیل مدار ۱۲۷

کنید. برای هر دو (الف) و (ب)، پایانه‌های سمت راست را در مدار نهایی آزاد بگذارید.

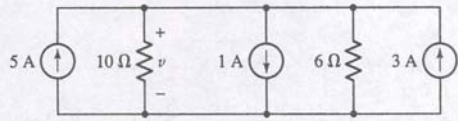


شکل ۵۶۵ (الف)



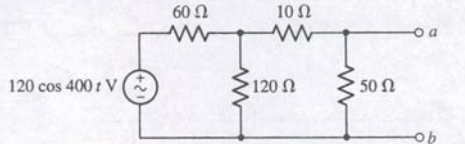
شکل ۵۶۵ (ب)

۲۱. (الف) از روش تبدیل منبع برای کاهش مدار شکل ۵۶۶ به یک منبع ولتاژ واقعی سری با مقاومت  $10 \Omega$  استفاده کنید. (ب)  $V$  را محاسبه کنید. (ج) توضیح دهید که چرا مقاومت  $10 \Omega$  نباید در تبدیل منبع لحاظ شود.

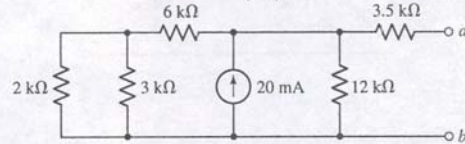


شکل ۵۶۶

۲۲. از تبدیل منابع و ترکیب مقاومت‌ها برای ساده‌سازی هر دو شبکه شکل ۵۶۷ استفاده کنید تا در سمت چپ پایانه‌های  $a$  و  $b$  فقط دو عنصر باقی بمانند.

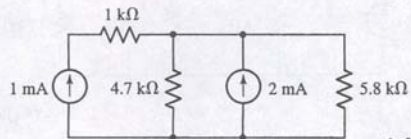


شکل ۵۶۷ (الف)



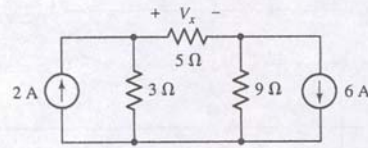
شکل ۵۶۷ (ب)

۲۳. با تبدیل منبع، توان تلف‌شده در مقاومت  $5.8 k\Omega$  شکل ۵۶۸ را معین نمایید.



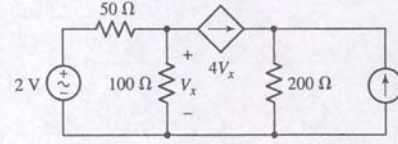
شکل ۵۶۸

۱۷. برای مدار شکل ۵۶۲: (الف) از تجمیع برای محاسبه  $V_x$  استفاده نمایید. (ب) سهم هر منبع در  $V_x$  را با استفاده از تحلیل dc sweep PSpice بررسی کنید. یک شماتیک نام‌گذاری شده، خروجی probe وابسته به آن و خلاصه‌ای از نتایج را ارائه کنید.



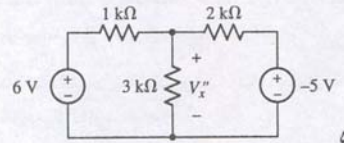
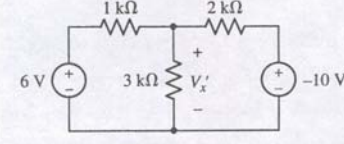
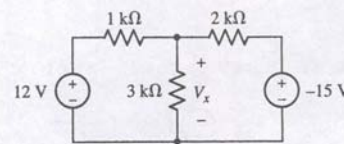
شکل ۵۶۲

۱۸. برای مدار شکل ۵۶۳: (الف) برای محاسبه  $V_x$  از تجمیع استفاده نمایید. (ب) نقش و سهم هر منبع را در  $V_x$  با تحلیل dc sweep PSpice بررسی کنید. یک شماتیک نام‌گذاری شده، خروجی probe و خلاصه‌ای از نتایج را ارائه دهید.



شکل ۵۶۳

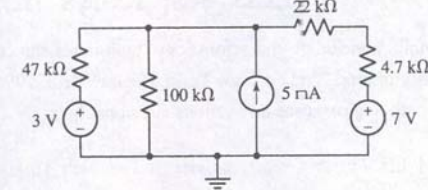
۱۹. سه مدار شکل ۵۶۴ را ملاحظه نمایید. هر مدار را تحلیل کنید و نشان دهید که  $V_x = V'_x + V''_x$  (یعنی تجمیع هنگامی ارجحیت دارد که منابع صفر شوند، ولی این اصل خیلی فراتر از آن است).



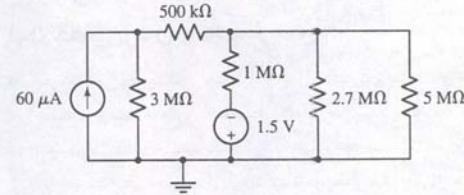
شکل ۵۶۴

## ۵-۲ تبدیل منابع

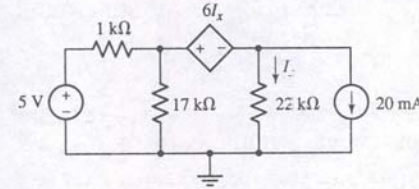
۲۰. به کمک روش تبدیل منبع، (الف) مدار شکل ۵۶۵ را به یک منبع ولتاژ مستقل سری با یک مقاومت تقریباً برابر و (ب) مدار شکل ۵۶۵ (ب) را به یک منبع جریان مستقل با مقاومتی برابر و موازی با منبع تبدیل



شکل ۵۵۷

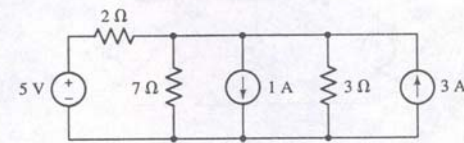


شکل ۵۵۸



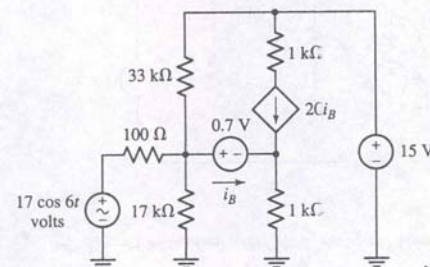
شکل ۵۵۹

۱۵. کدام منبع در شکل ۵۶۰ در توان تلف‌شده در مقاومت  $2\Omega$  سهم بیشتری دارد؟ کمترین سهم کدام است؟ مقدار توان تلف‌شده در مقاومت  $2\Omega$  را به‌دست‌آورید.

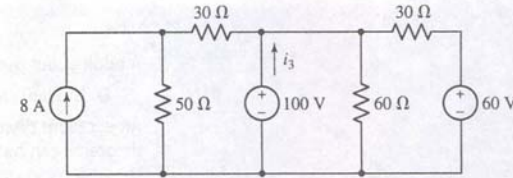


شکل ۵۶۰

۱۶. از اصل تجمیع برای یافتن  $I_B$  در مدار شکل ۵۶۱ استفاده کنید. این مدل متعلق به تقویت‌کننده ترانزیستوری دوقطبی است.

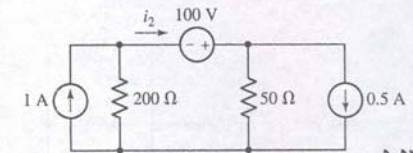


شکل ۵۶۱



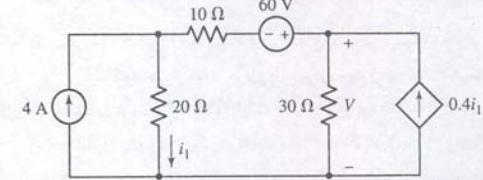
شکل ۵۵۳

۹. (الف) با استفاده از قضیه تجمیع،  $I_2$  را در مدار شکل ۵۵۴ به‌دست‌آورید و (ب) توان جذب‌شده به‌وسیله هر یک از پنج عنصر مدار را محاسبه کنید.



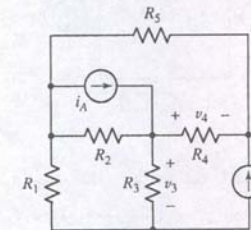
شکل ۵۵۴

۱۰. تجمیع را روی مدار شکل ۵۵۵ اعمال کرده و ولتاژ  $V$  را به‌دست‌آورید. توجه کنید که یک منبع وابسته وجود دارد.



شکل ۵۵۵

۱۱. در مدار شکل ۵۵۶: (الف) اگر  $I_A = 10 A$  و  $I_B = 0$  باشد، آن‌گاه  $V_3 = 80 V$  است. اگر  $I_A = 25 A$  و  $I_B = 0$  باشد،  $V_3$  را پیدا کنید. (ب) اگر  $I_A = 10 A$  و  $I_B = 25 A$  باشد در این صورت  $V_4 = 100 V$  است ولی اگر  $I_A = 25 A$  و  $I_B = 10 A$  شود،  $V_4 = -50 V$  می‌گردد، اگر  $I_A = 20 A$  و  $I_B = -10 A$  باشد،  $V_4$  را بیابید.



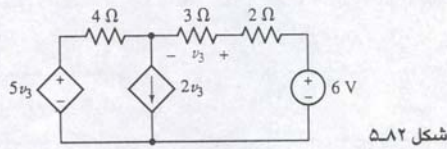
شکل ۵۵۶

۱۲. از تجمیع برای تعیین ولتاژ دو سر منبع جریان شکل ۵۵۷ استفاده کنید. ۱۳. از تجمیع استفاده کنید و توان تلف‌شده به‌وسیله مقاومت  $500 k\Omega$  در شکل ۵۵۸ را محاسبه نمایید.

۱۴. از تجمیع برای تعیین ولتاژ دو سر مقاومت  $17 k\Omega$  در شکل ۵۵۹ استفاده نمایید. اگر میزان توان تلف‌شده مقاومت  $250 mW$  باشد حداکثر ولتاژ مثبتی که منبع  $5 V$  قبل از داغ شدن دارد چقدر است؟

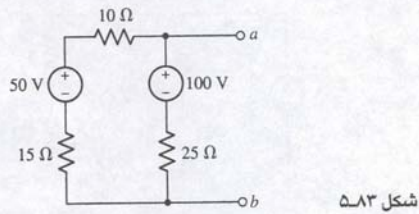


۳۹. برای مدار شکل ۵۸۲ همه منابع را (هم وابسته و هم مستقل) به منابع جریان تبدیل کنید، منابع مستقل را ترکیب نموده و ۷۳ را محاسبه نمایید.



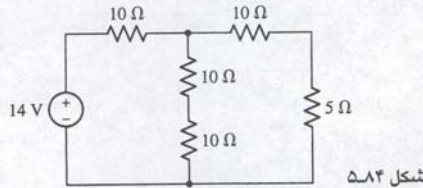
شکل ۵۸۲

۴۰. (الف) معادل تونن را در پایانه‌های  $a$  و  $b$  شکل ۵۸۳ بیابید. به مقاومت متصل به  $a$  و  $b$  چقدر توان منتقل می‌گردد به شرطی که  $R_{ab}$  برابر (ب)  $50\Omega$  و (ج)  $12.5\Omega$  باشد.



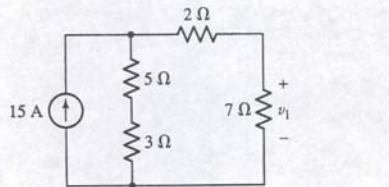
شکل ۵۸۳

۴۱. (الف) قضیه تونن را برای ساده کردن شبکه متصل به مقاومت  $5\Omega$  شکل ۵۸۴ (الف) به کار ببرید. (ب) توان جذب‌شده به وسیله مقاومت  $5\Omega$  را با استفاده از مدار ساده‌شده حساب کنید. (ج) صحت حل خود را با PSpice به دست آورید. شماتیک برچسب‌خورده را برای هر مدار با توان موردنظر مشخص‌شده تحویل دهید.



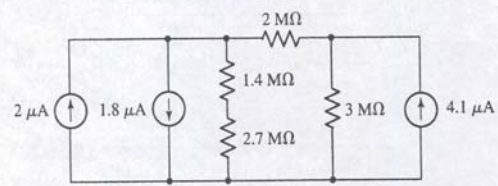
شکل ۵۸۴

۴۲. (الف) معادل تونن شبکه متصل به مقاومت  $7\Omega$  شکل ۵۸۵ را به دست آورید. (ب) معادل نورتن شبکه متصل به مقاومت  $7\Omega$  را پیدا کنید. (ج) ولتاژ  $V_1$  را برای هر دو مدار خود محاسبه کنید. (د) مقاومت  $7\Omega$  را با یک مقاومت  $1\Omega$  جایگزین کرده و  $V_1$  را دوباره برای هر مدار محاسبه نمایید.



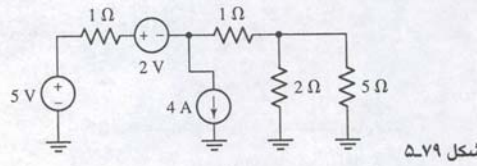
شکل ۵۸۵

۳۴. از داده‌های جدول ۵-۱ برای ساخت یک مدل منبع جریان واقعی دوعنصری، که در محدوده ۱ الی  $20\text{mA}$  نسبتاً دقیق است، استفاده نمایید. توجه کنید که علاوه بر خطای مسلم اندازه‌گیری مقاومت داخلی باتری به میزان قابل توجهی در محدوده جریان اندازه‌گیری شده تغییر می‌کند.



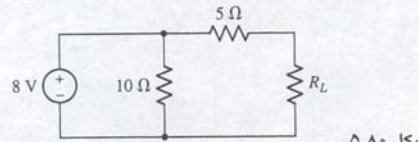
شکل ۵۷۸

۳۶. توان جذب‌شده در مقاومت  $5\Omega$  شکل ۵۷۹ چقدر است؟



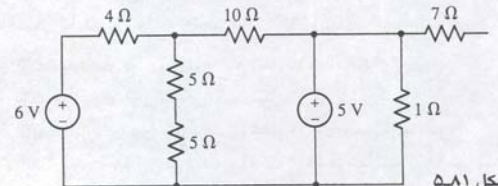
شکل ۵۷۹

۳۷. (الف) مدار شکل ۵۸۰ را به یک منبع جریان واقعی موازی با  $R_L$  تبدیل کنید. صحت پاسخ خود را با PSpice با مقدار  $5\Omega$  برای  $R_L$  تحقیق کنید. برای هر مدار شماتیک مناسب را تحویل دهید و در آن ولتاژ دو سر  $R_L$  را مشخص کنید.

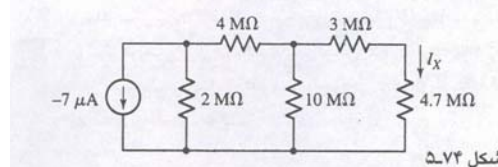


شکل ۵۸۰

۳۸. (الف) مدار شکل ۵۸۱ را تا حد ممکن کاهش دهید، دو منبع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل نمایید، سپس توان تلف‌شده در مقاومت  $5\Omega$  بالا را محاسبه کنید. (ب) صحت پاسخ خود را با شبیه‌سازی هر دو مدار به وسیله PSpice تحقیق نمایید. یک مدار با برچسب‌های مناسب را برای هر مدار تحویل دهید به نحوی که توان تلف‌شده در مقاومت موردنظر به وضوح مشخص باشد. (ج) آیا مقدار  $1\Omega$  یا  $7\Omega$  در پاسخ شما به هر طریقی تأثیرگذارند. توضیح دهید؟ بگویید چرا بله و چرا خیر؟

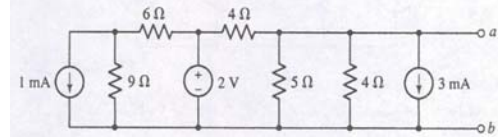


شکل ۵۸۱



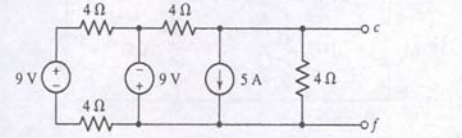
شکل ۵۷۴

۳۰. مدار شکل ۵۷۵ را به یک منبع موازی با یک مقاومت تبدیل نمایید.



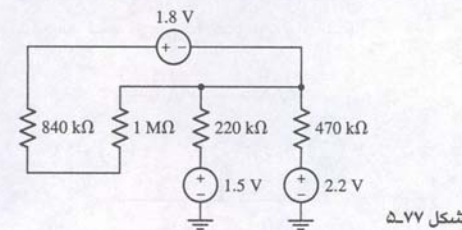
شکل ۵۷۵

۳۱. با تبدیل منبع مدار شکل ۵۷۶ را به یک منبع جریان موازی با یک مقاومت تبدیل نمایید.



شکل ۵۷۶

۳۲. توان تلف‌شده به وسیله مقاومت  $1\text{M}\Omega$  در مدار شکل ۵۷۷ را معین کنید.



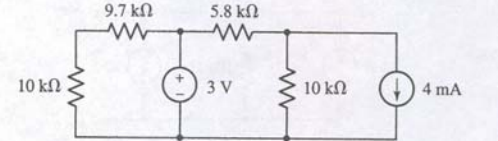
شکل ۵۷۷

۳۳. اندازه‌گیری‌های جدول ۵-۱ روی یک باتری  $1.5\text{V}$  آلکالاین انجام شده است. از اطلاعات موجود استفاده کرده، یک مدل منبع ولتاژ عملی دوعنصری برای باتری بسازید تا در محدوده ۱ الی  $20\text{mA}$  نسبتاً دقیق باشد. توجه کنید که علاوه بر خطای اندازه‌گیری مسلم، مقاومت درونی باتری به مقدار قابل توجهی در محدوده اندازه‌گیری تغییر می‌یابد.

جدول ۵-۱ مشخصات اندازه‌گیری‌شده ولتاژ-جریان یک باتری  $1.5\text{V}$  متصل به یک مقاومت متغیر.

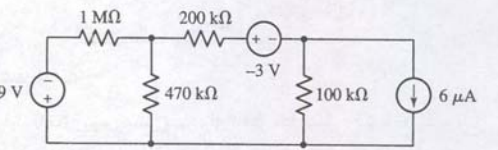
| ولتاژ پایانه‌ای (V) | جریان خروجی (mA) |
|---------------------|------------------|
| 1.584               | 0.000589         |
| 1.582               | 0.3183           |
| 1.567               | 1.4398           |
| 1.563               | 7.010            |
| 1.558               | 12.58            |

۲۴. با تبدیل منبع، توان تلف‌شده در مقاومت  $5.8\text{k}\Omega$  شکل ۵۶۹ را معین نمایید.



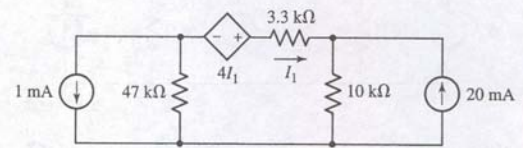
شکل ۵۶۹

۲۵. توان تلف‌شده به وسیله مقاومت  $1\text{M}\Omega$  را با استفاده از تبدیل منبع در مدار شکل ۵۷۰ به دست آورید.



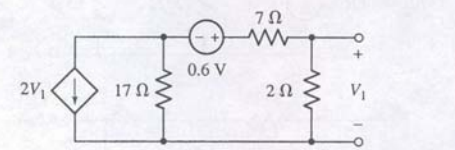
شکل ۵۷۰

۲۶. با تبدیل منبع، مدار شکل ۵۷۱ را ساده کنید و  $I_1$  را مشخص نمایید.



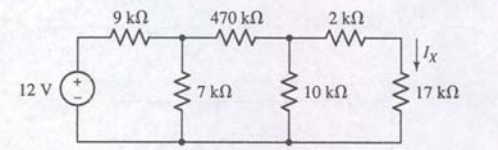
شکل ۵۷۱

۲۷. (الف) با تبدیل منبع مدار شکل ۵۷۲ را ساده کنید و سپس  $V_1$  را به دست آورید. (ب) صحت تحلیل خود را با اجرای تحلیل PSpice مدار شکل ۵۷۲ تحقیق نمایید.



شکل ۵۷۲

۲۸. (الف) با تکرار تبدیل منبع،  $I_X$  را در شکل ۵۷۳ بیابید. (ب) با تحلیل PSpice در شکل ۵۷۳، صحت تحلیل خود را تحقیق نمایید.



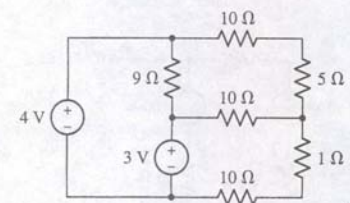
شکل ۵۷۳

۲۹. با تکرار تبدیل منبع، جریان  $I_X$  را در مدار شکل ۵۷۴ معین کنید.



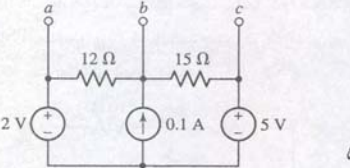
۴۳. (الف) یک لامپ تنگستن به ولتاژ تست  $10\text{ mV}$  وصل است و جریان  $400\text{ }\mu\text{A}$  اندازه گیری شده است. معادله تونن لامپ چیست؟ اکنون لامپ به یک منبع تغذیه  $110\text{ V}$  متصل است و جریان  $363.6\text{ mA}$  اندازه گیری شده است. معادل تونن را بر اساس این اندازه گیری معین نمایید. چرا معادل تونن لامپ به شرایط تست وابسته است، و چه استدلالی اگر بخواهیم مدار حاوی لامپ را تحلیل کنیم، دارید.

۴۴. (الف) معادل های تونن و نورتن را برای شبکه متصل به مقاومت  $1\text{ }\Omega$  شکل ۵۸۶ پیدا کنید. (ب) توان جذب شده به وسیله مقاومت  $1\text{ }\Omega$  را با استفاده از مدارهای معادل محاسبه کنید. (ج) با PSpice صحت را تحقیق نمایید. شماتیک هر سه مدار را با مشخص نمودن توان مورد تقاضا تحویل دهید.



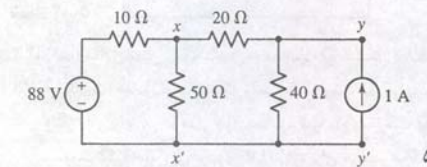
شکل ۵۸۶

۴۵. برای شبکه شکل ۵۸۷: (الف) پایانه c را حذف کنید و معادل تونن را از پایانه های a و b بیابید. (ب) پایانه a را حذف کنید و مرحله قبل را برای b و c تکرار نمایید.



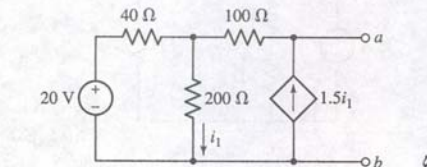
شکل ۵۸۷

۴۶. معادل تونن شبکه شکل ۵۸۸ را از پایانه های: (الف) x و x', (ب) y و y', به دست آورید.



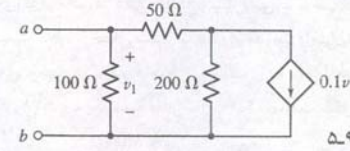
شکل ۵۸۸

۴۷. (الف) معادل تونن شبکه شکل ۵۸۹ را بیابید. (ب) چه توانی به مقاومت  $100\text{ }\Omega$  در b و a انتقال می یابد؟



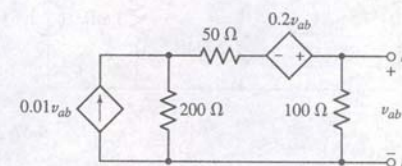
شکل ۵۸۹

۴۸. معادل نورتن شبکه شکل ۵۹۰ را بیابید.



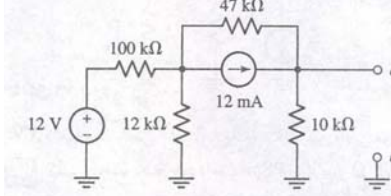
شکل ۵۹۰

۴۹. معادل تونن شبکه دو پایانه شکل ۵۹۱ را معین کنید.



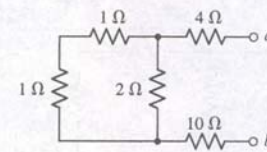
شکل ۵۹۱

۵۰. معادل تونن شکل ۵۹۲ را به دست آورید.



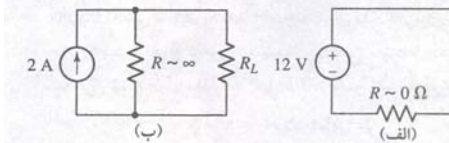
شکل ۵۹۲

۵۱. برای شبکه شکل ۵۹۳: (الف) معادل تونن و (ب) معادل نورتن را تعیین نمایید.



شکل ۵۹۳

۵۲. برای مدار شکل ۵۹۴: (الف) معادل نورتن شبکه متصل به  $R_L$  را به دست آورید. برای مدار شکل ۵۹۴ (ب) معادل تونن شبکه متصل به  $R_L$  را تعیین کنید.



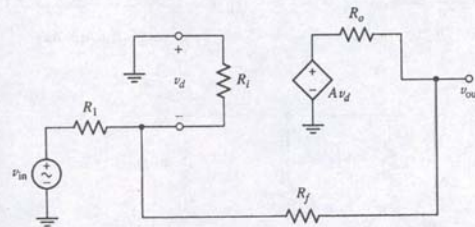
شکل ۵۹۴

۵۳. معادل های تونن و نورتن شبکه شکل ۵۹۵ را بیابید.

۵۴. معادل های تونن و نورتن شبکه شکل ۵۹۶ را تعیین کنید.

۵۵. معادل های تونن و نورتن شبکه شکل ۵۹۷ را به دست آورید.

۵۶. مقاومت معادل تونن از دید مقاومت  $2\text{ k}\Omega$  در مدار شکل ۵۹۸ را پیدا کنید. از خط چین شکل چشم پوشی نمایید.

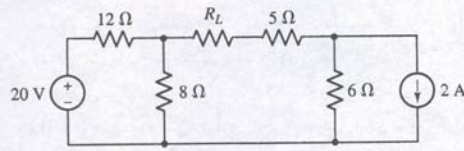


شکل ۵۱۰۰

## ۵.۲ حداکثر انتقال توان

۶۰. با فرض این که می توانیم مقاومت معادل پریز برق خود را تعیین نماییم چرا سازندگان توستر، آون، مایکروویو و تلویزیون مقاومت معادل تونن هر وسیله را با آن تطبیق نمی دهند. آیا این کار انتقال حداکثر توان را موجب نمی شود.

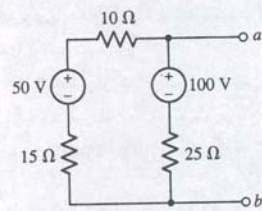
۶۱. اگر بتوان هر مقداری برای  $R_L$  در شکل ۵۱۰۱ انتخاب کرد، حداکثر توان مصرفی در  $R_L$  چقدر می باشد؟



شکل ۵۱۰۱

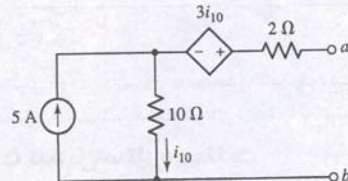
۶۲. (الف) معادل تونن را در پایانه های a و b برای شکل ۵۱۰۲ به دست آورید.

چقدر توان به مقاومت متصل به a و b منتقل می گردد به شرطی که  $R_{ab}$  برابر با (ب)  $10\text{ }\Omega$  و (ج)  $75\text{ }\Omega$  باشد؟

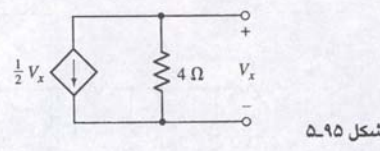


شکل ۵۱۰۲

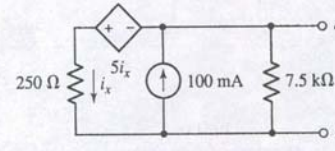
۶۳. (الف) معادل تونن شبکه شکل ۵۱۰۳ را معین کنید و (ب) حداکثر توان دریافتی از آن چقدر است؟



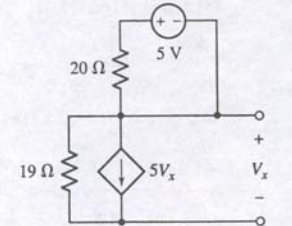
شکل ۵۱۰۳



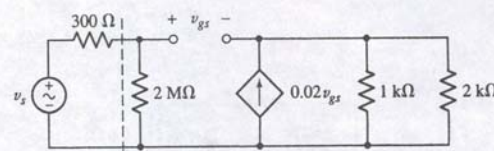
شکل ۵۹۵



شکل ۵۹۶



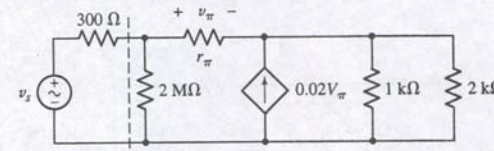
شکل ۵۹۷



شکل ۵۹۸

۵۷. با مراجعه به شکل ۵۹۸، مقاومت معادل تونن مدار سمت راست خط چین را معین نمایید. این مدار یک تقویت کننده ترانزیستوری سورس مشترک است. شما مقاومت ورودی آن را محاسبه می نمایید.

۵۸. با توجه به شکل ۵۹۹، مقاومت معادل تونن مدار سمت راست خط چین را به دست آورید. این مدار یک تقویت کننده ترانزیستوری امیتر مشترک است و شما مقاومت ورودی آن را محاسبه می کنید.

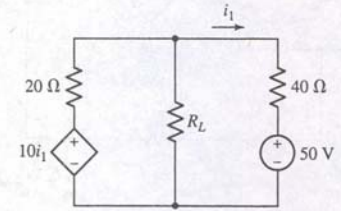


شکل ۵۹۹

۵۹. مدار شکل ۵۱۰۰ یک مدل نسبتاً دقیقی از یک تقویت کننده عملیاتی (op-amp) است. در مواردی که  $R_1$  و  $A$  خیلی بزرگ اند،  $R_0 \sim 0$  است، یک مقاومت باری (مانند بلندگو) متصل بین زمین و پایانه  $v_{out}$  ولتاژ  $-R_1/R_1$  برابر بزرگتر از سیگنال  $v_{in}$  می بیند. مدار معادل تونن را پیدا کنید.



۶۴. در شکل ۵-۱۰۴: (الف) مقدار  $R_L$  که حداکثر توان به آن منتقل می‌گردد چقدر است، (ب) ولتاژ دو سر  $R_L$  را محاسبه کنید (علامت + در بالا).



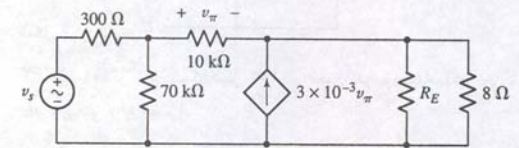
شکل ۵-۱۰۴

۶۵. یک منبع ولتاژ dc واقعی جریان  $2.5A$  را وقتی یک لحظه اتصال کوتاه شده، فراهم ساخته و می‌تواند  $80W$  توان را به بار  $20\Omega$  منتقل سازد. (الف) ولتاژ مدار باز را پیدا کنید. (ب) حداکثر توانی که می‌تواند به مقاومت منتخب بهینه انتقال دهد چقدر است؟ برای توان ماکزیمم،  $R_L$  چقدر باید باشد؟

۶۶. یک منبع جریان واقعی  $10W$  توان را به مقاومت بار  $250\Omega$  و  $20W$  توان را به یک بار  $80\Omega$  انتقال می‌دهد. یک مقاومت  $R_L$  با ولتاژ  $7V$  و جریان  $i_L$  به آن وصل است. مقادیر  $R_L$ ،  $i_L$  و  $v_L$  را پیدا کنید اگر (الف)  $i_L$  حداکثر باشد، (ب)  $v_L$  حداکثر باشد و (ج)  $i_L$  حداکثر باشد.

۶۷. یک باتری می‌تواند به دقت به عنوان یک منبع ولتاژ  $9V$  سری با مقاومت  $1.2\Omega$  در محدوده مورد نظری از جریان، مدل سازی شود. اگر یک مقاومت بی‌نهایت به باتری وصل شود هیچ جریانی از باتری عبور نمی‌کند. ضمناً می‌دانیم که حداکثر توان به مقاومت  $1.2\Omega$  انتقال می‌یابد، و به مقاومت‌های  $1.1\Omega$  و  $1.3\Omega$  توان منتقل شده کمتر است. با این وجود اگر پایانه‌های باتری را اتصال کوتاه کنیم (البته پیشنهاد نمی‌شود)، جریان بیشتری نسبت به مقاومت  $1.2\Omega$  به دست خواهیم آورد. آیا این در تضاد با آن چه برای بار مقاومت  $1.2\Omega$  دیدیم نیست (آیا توان متناسب با  $i^2$  نمی‌باشد)؟ توضیح دهید.

۶۸. مدار شکل ۵-۱۰۵ بخشی از یک تقویت‌کننده صوتی است. اگر بخواهیم حداکثر توان را به بلندگوی  $8\Omega$  منتقل کنیم، چه مقداری از  $R_E$  مورد نیاز است؟ حل خود را با PSpice به تأیید برسانید.

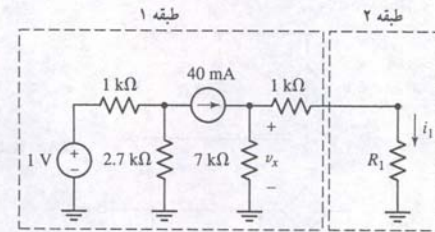


شکل ۵-۱۰۵

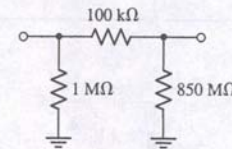
۶۹. شکل ۵-۱۰۶ مداری را که به دو بخش تفکیک شده نشان می‌دهد.  $R_L$  را طوری انتخاب کنید که حداکثر توان از طبقه ۱ به طبقه ۲ منتقل گردد.

## ۵-۵ تبدیل ستاره-مثلث

۷۰. شبکه شکل ۵-۱۰۷ را به شبکه Y تبدیل نمایید.

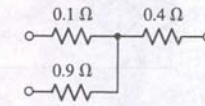


شکل ۵-۱۰۶



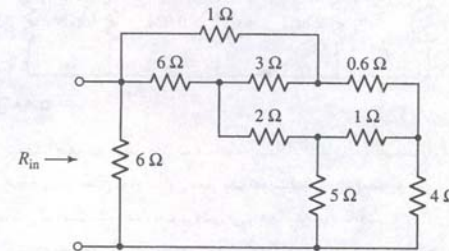
شکل ۵-۱۰۷

۷۱. شبکه شکل ۵-۱۰۸ را به شبکه  $\Delta$  تبدیل کنید.



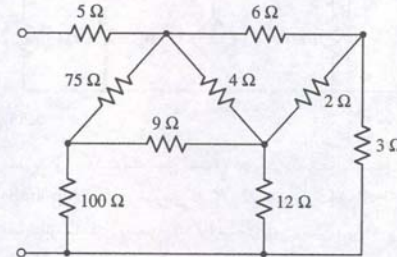
شکل ۵-۱۰۸

۷۲.  $R_{in}$  را در شبکه شکل ۵-۱۰۹ پیدا کنید.



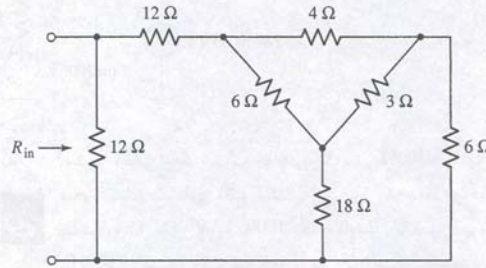
شکل ۵-۱۰۹

۷۳. از تبدیل Y- $\Delta$  و Y- $\Delta$  برای یافتن مقاومت شبکه شکل ۵-۱۱۰ استفاده نمایید.



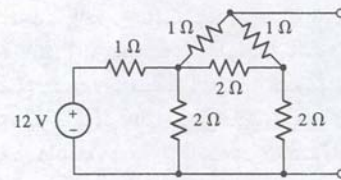
شکل ۵-۱۱۰

۷۴.  $R_{in}$  را برای مدار شکل ۵-۱۱۱ بیابید.



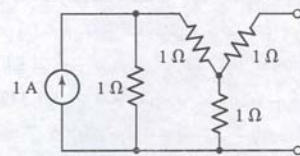
شکل ۵-۱۱۱

۷۵. معادل تونن مدار شکل ۵-۱۱۲ را به دست آورید.



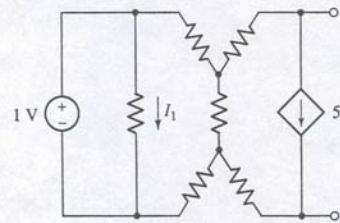
شکل ۵-۱۱۲

۷۶. معادل نورتن مدار شکل ۵-۱۱۳ را پیدا کنید.



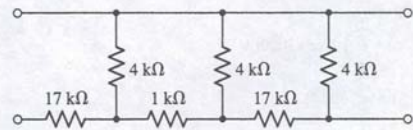
شکل ۵-۱۱۳

۷۷. اگر همه مقاومت‌ها در شکل ۵-۱۱۴ برابر  $10\Omega$  باشند، معادل تونن را برای مدار به دست آورید.



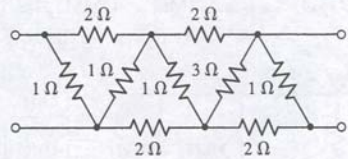
شکل ۵-۱۱۴

۷۸. (الف) شبکه شکل ۵-۱۱۵ را با سه مقاومت Y جایگزین کنید. (ب) تحلیل PSpice را برای تحقیق معادل بودن جواب به کار ببرید (راهنمایی: یک مقاومت بار اضافه نمایید).



شکل ۵-۱۱۵

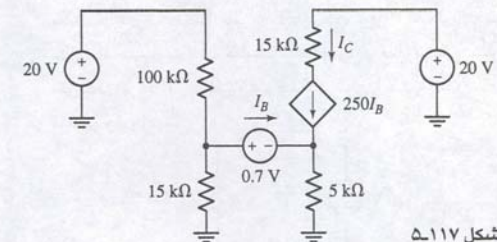
۷۹. (الف) به جای شبکه شکل ۵-۱۱۶ یک شبکه  $\Delta$  سه مقاومتی قرار دهید. (ب) با تحلیل PSpice صحت جواب را نشان دهید. (راهنمایی: یک مقاومت بار اضافه نمایید).



شکل ۵-۱۱۶

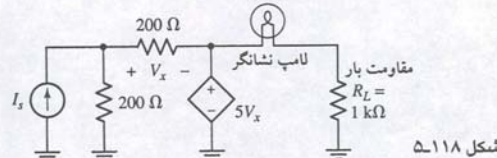
## ۵-۶ انتخاب روش: مقایسه انواع تکنیک‌ها

۸۰. مدار شکل ۵-۱۱۷ مدل نسبتاً دقیقی برای یک ترانزیستور دوقطبی پیوندی در ناحیه فعال مستقیم است. جریان کلکتور  $I_C$  را به دست آورید. صحت پاسخ خود را با PSpice تحقیق کنید.



شکل ۵-۱۱۷

۸۱. مقاومت بار در شکل ۵-۱۱۸ می‌تواند به راحتی تا  $1W$  توان را قبل از داغ شدن و آتش گرفتن تلف نماید. لامپ را می‌توان مقاومتی  $10.6\Omega$  تصور کرد، به شرطی که جریانی کمتر از  $1A$  از آن عبور کند. برای بیش از  $1A$ ، مقاومت آن  $15\Omega$  می‌باشد. حداکثر مقدار مجاز  $I_L$  چقدر است؟ پاسخ خود را با PSpice تست کنید.



شکل ۵-۱۱۸

۸۲. گوش انسان می‌تواند امواج بین  $20Hz$  تا  $20kHz$  را بشنود. اگر هر مقاومت در شکل ۵-۱۱۹ یک بلندگوی  $8\Omega$  باشد، کدام یک از سیگنال ژنراتورها (که به عنوان یک منبع ولتاژ عملی مدل سازی می‌شود)



## فصل ششم

## تقویت‌کننده عملیاتی

## مقدمه

تاکنون به‌قدر کافی قوانین اصلی و تکنیک‌های تحلیل مدار به ما معرفی شده است تا بتوانیم آن‌ها را به چند مدار عملی جالب اعمال کنیم. در این فصل ما بر یک وسیله الکتریکی مفید به نام تقویت‌کننده‌های عملیاتی<sup>۱</sup> یا به‌طور خلاصه op amp توجه خواهیم کرد.

## ۶-۱ پیش‌زمینه

پیدایش تقویت‌کننده عملیاتی اولیه به دهه ۱۹۴۰ باز می‌گردد که در آن زمان مدارهای اصلی با استفاده از لامپ‌های خلاء برای انجام جمع، تفریق، تقسیم، مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری ساخته شد و به این ترتیب انجام آن‌ها با کامپیوترهای آنالوگ اولیه امکان‌پذیر گردید. این پیدایش ساخت کامپیوترهای آنالوگ (در برابر دیجیتال) را به دنبال داشت تا معادلات دیفرانسیل پیچیده را حل کند. اولین قطعه op amp تجاری که K2-W نام داشت، در حدود سال ۱۹۵۲ و به وسیله Philbrick Researches inc. از بوستون ساخته شد و تا اواخر دهه ۱۹۷۰ ادامه یافت (شکل ۶-۱ الف)). این قطعات لامپ خلاء<sup>۲</sup> اولیه با ۳ اونس وزن (85 g) و ابعاد  $47/64" \times 29/64" \times 133/64"$  (3.8 cm × 5.4 cm × 10.4 cm)، حدود US\$0.22 فروخته می‌شد برعکس op amp های مدرن مدار مجتمع (IC) مانند Fairchild KA741 وزنی کمتر از 500 mg و ابعاد 5.7 mm × 4.9 mm × 1.8 mm داشته و تقریباً به US\$0.22 فروخته می‌شوند.

در مقایسه با op amp های مبتنی بر لامپ‌های خلاء، op amp های مدرن از حدود 25 ترانزیستور یا بیشتر به همراه چندین مقاومت و خازن جهت تولید مشخصه رفتاری مطلوب در یک تراشه سیلیکان ساخته شده‌اند. بنابراین آن‌ها در سطح ولتاژ تغذیه بسیار پایین‌تری (مثلاً  $\pm 18\text{ V}$  در برابر  $\pm 300\text{ V}$  مربوط به K2-W) کار می‌نمایند و قابل اطمینان‌تر و کوچک‌ترند (شکل ۶-۱ ب) و (ج)). در بعضی موارد IC ممکن است چندین op amp داشته باشد.

شکل ۶-۱ مدار op amp Philbrick K2-W بر اساس یک جفت لامپ خلاء 12AX7A (ب). LMV321 op amp (پ) که در انواع تلفن‌ها و بازی‌ها به کار می‌رود. (ج) LMC6035 op amp که در آن ۱۱۴ ترانزیستور فشرده شده و به قدری کوچک است که در بالای یک میخ قرار می‌گیرد.



(ج)



(ب)



(الف)

## مفاهیم کلیدی

مشخصات ایده‌آل op amp ها

تقویت‌کننده‌های معکوس‌کننده و معکوس‌نکننده

مدارهای تقویت‌کننده جمع و تفاضل

طبقات op amp پی‌درپی

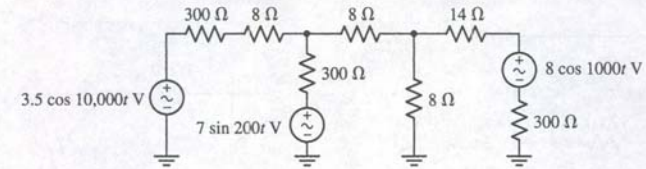
استفاده از op amp در ساخت منابع ولتاژ و جریان

مشخصات غیرایده‌آل op amp ها

بهره ولتاژ و پسخورد

مقایسه گره‌های پایه مدارهای تقویت‌کننده در

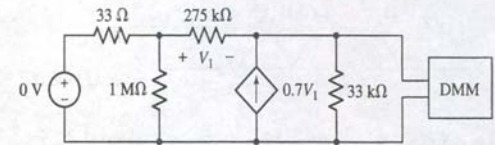
وسایل اندازه‌گیری



شکل ۵-۱۱۹

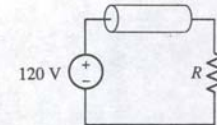
بیشترین صدا را تولید می‌کند؟ (بلندی صدا را متناسب با توان انتقالی به بلندگو تصور کنید) چون هر منبع در فرکانس متفاوتی عمل می‌کند، جمع توان در این جا قابل اعمال است.

۸۳ یک DMM طبق شکل ۵-۱۲۰ به مقاومتی وصل است. اگر مقاومت داخلی DMM برابر  $1\text{ M}\Omega$  باشد، به هنگام اندازه‌گیری مقاومت، چه مقدار نمایش داده می‌شود؟



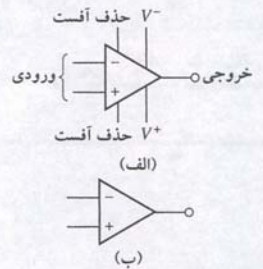
شکل ۵-۱۲۰

۸۴ یک ماده فلزی از یک شهاب‌سنگ در روستایی از ایالت ایندیانا یافت شده است. این ماده دارای مقاومت ویژه  $50\Omega\text{cm}$  بوده و در یک سیلندر جاسازی شده است. سیلندر به مدار شکل ۵-۱۲۱ وصل است و وابستگی‌های  $T = 200\text{ P}^{0.25}\text{ C}$  دارد، که توان P انتقال یافته به سیلندر برحسب وات است. مقاومت ماده آنقدرها به دما وابستگی نشان نمی‌دهد. اگر  $R = 10\Omega$  باشد و حداکثر توان را جذب کند، دمای سیلندر چقدر است؟



شکل ۵-۱۲۱





شکل ۶-۲ (الف) نماد الکترونیکی op amp. (ب) حداقل اتصال‌های لازم برای نمایش شماتیک op amp

علاوه بر پایه خروجی و دو پایه ورودی، پایه‌های دیگری وجود دارند که از طریق آن‌ها انرژی لازم برای روشن شدن ترانزیستورها، تنظیم‌های بیرونی برای بالانس و جبران خروجی op amp فراهم می‌گردد. سمبل یا نماد به کاررفته برای یک تقویت‌کننده عملیاتی در شکل ۶-۲ (الف) ملاحظه می‌شود. در این جا ما به مدار درونی op amp یا IC کاری نداریم، بلکه فقط روابط ولتاژ و جریان بین پایه‌های ورودی و خروجی را بررسی خواهیم کرد. بنابراین فعلاً نماد الکتریکی ساده‌تری مطابق شکل ۶-۲ (ب) را به کار می‌بریم. دو پایه ورودی در سمت چپ و تنها پایه خروجی در سمت راست دیده می‌شوند. پایه‌ای که با "+" علامت خورده است به ورودی معکوس‌نکننده یا (غیر معکوس گر) و "-" ورودی معکوس‌کننده یا (معکوس گر و یا وارونگر) معروفند.

## ۶-۲ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل

مهندسين مدارهای مجتمع هنگام طراحی یک op amp، می‌کوشند تا مشخصه مدار حاصل ایده‌آل باشد. در عمل خواهیم دید که اغلب تقویت‌کننده‌ها چنان خوب کار می‌کنند که می‌توان آن‌ها را ایده‌آل فرض کرد. مشخصه‌های یک op amp ایده‌آل، مبنای دو اصل یا قاعده اساسی را که تا حدی غیرعادی است تشکیل می‌دهند.

قواعد یک op amp ایده‌آل:

- هیچ جریانی از هیچ یک از پایه‌های ورودی داخل نمی‌شود.
- بین دو پایه ورودی اختلاف پتانسیلی وجود ندارد.

در یک op amp واقعی جریان نشی بسیار کمی به ورودی وارد می‌شود (گاهی به کوچکی 40 femtoamps). همچنین ممکن است در بعضی مواقع اختلاف پتانسیل کوچکی بین دو پایه ورودی مشاهده کرد. با این وجود در مقایسه با دیگر ولتاژها و جریان‌ها در مدار این مقادیر آن‌قدر کوچکند که لحاظ آن‌ها در تحلیل، معمولاً تغییری در محاسبات مانعی دهد. هنگام تحلیل مدار op amp، یک نکته دیگر را باید به خاطر بسپاریم. برخلاف مدارهایی که تاکنون مطالعه کرده‌ایم، مدار op amp همواره بسته به ورودی، دارای خروجی است. بنابراین ما مدارهای op amp را با هدف دستیابی به عبارتی برای خروجی برحسب کمیت‌های ورودی بررسی خواهیم کرد. معمولاً بهتر است تحلیل مدار op amp را از ورودی شروع و به سمت خروجی پیش ببریم.

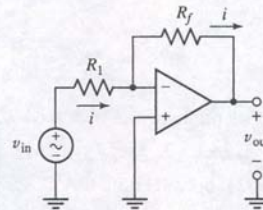
مدار شکل ۶-۳ به نام تقویت‌کننده معکوس گر شناخته می‌شود. ما این مدار را با شروع از منبع ولتاژ و ورودی برای تحلیل به کمک KVL انتخاب کرده‌ایم. جریان  $i$  فقط از مقاومت‌های  $R_1$  و  $R_f$  عبور می‌کند. اولین قاعده op amp ایده‌آل بیان می‌کند که هیچ جریانی وارد پایه معکوس گر نمی‌گردد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$-v_{in} + R_1 i + R_f i + v_{out} = 0$$

و می‌توان آن را طوری مرتب کرد که ورودی را به خروجی مرتبط سازد:

$$v_{out} = v_{in} - (R_1 + R_f)i \quad (1)$$

ولی اکنون یک معادله و دو مجهول داریم، زیرا  $v_{in} = 5 \sin 3t$  mV و  $R_1 = 4.7$  k $\Omega$  و  $R_f = 47$  k $\Omega$  می‌باشد. پس برای محاسبه ولتاژ خروجی نیاز به یک معادله دیگر است تا  $i$  را فقط برحسب  $v_{in}$  و  $R_1$  و  $R_f$  بیان دارد.



شکل ۶-۳ op amp برای ساختن یک تقویت‌کننده معکوس گر به کاررفته است و در آن  $v_{in} = 5 \sin 3t$  mV،  $R_1 = 4.7$  k $\Omega$  و  $R_f = 47$  k $\Omega$  می‌باشد.

اکنون زمان مناسبی است تا متذکر شویم ما هنوز از قاعده ۲ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل استفاده نکرده‌ایم. چون ورودی معکوس‌نکننده به زمین وصل است، ولتاژ آن در صفر است. طبق قاعده ۲ از op amp، ورودی معکوس گر نیز در صفر ولت است. این بدان معنی نیست که دو ورودی به‌طور فیزیکی به هم اتصال دارند و ما نیز نباید چنین فرض‌هایی کنیم. در واقع دو ولتاژ یکدیگر را دنبال می‌کنند: اگر ماسه‌ی در تغییر ولتاژ یک پایه بکنیم، پایه دیگر به سمت آن خواهد رفت. بنابراین می‌توان یک معادله KVL دیگر نوشت:

$$-v_{in} + R_1 i + 0 = 0$$

یا

$$i = \frac{v_{in}}{R_1} \quad (2)$$

با ترکیب معادلات (۲) و (۱)، عبارتی برای  $v_{out}$  برحسب  $v_{in}$  خواهیم داشت:

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1} v_{in} \quad (3)$$

با جایگزینی  $v_{in} = 5 \sin 3t$  mV،  $R_1 = 4.7$  k $\Omega$  و  $R_f = 47$  k $\Omega$  داریم:

$$v_{out} = -50 \sin 3t \text{ mV}$$

فرض کرده بودیم  $R_f > R_1$ ، پس این مدار سیگنال ورودی  $v_{in}$  را تقویت می‌کند. اگر  $R_f < R_1$  باشد مدار سیگنال ورودی را تضعیف خواهد کرد. همچنین توجه کنید که علامت ولتاژ خروجی مخالف ورودی است و به این دلیل نام **تقویت‌کننده معکوس گر** برای آن اختیار شده است. شکل ۶-۴ به منظور مقایسه، خروجی در برابر ورودی ترسیم شده است.

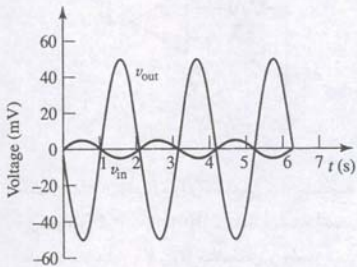
در این جا چنین به نظر می‌رسد که op amp ایده‌آل قانون KCL را نقض کرده است. خصوصاً این که هیچ جریانی از پایه‌های ورودی وارد یا خارج نمی‌شود، ولی تا مقداری جریان از پایه خروجی را داریم شاید این وضعیت اینگونه تعبیر شود که op amp به نوعی از هیچ، الکترون تولید می‌کند و یا آن‌ها را همواره و برای همیشه نابود می‌نماید (بسته به جهت جریان). مسلماً این امکان‌پذیر نیست. مشکل این جا است که ما op amp را به همان طریق عناصر غیرفعال مورد توجه قرار داده‌ایم. در واقع، op amp نمی‌تواند کار کند مگر این که به منبع بیرونی وصل شده باشد و در واقع جریان پایه خروجی آن از این منابع تأمین می‌شود. هرچند نشان دادیم که مدار تقویت‌کننده معکوس گر شکل ۶-۳ می‌تواند یک سیگنال ac را تقویت کند (در این جا یک موج سینوسی با فرکانس 3 rad/s و دامنه 5 mV)، با ورودی dc هم به همان خوبی کار می‌کند. ما این نوع عملکرد را در شکل ۶-۵ بررسی می‌کنیم، که مقادیر  $R_1$  و  $R_f$  طوری انتخاب می‌شوند که ولتاژ خروجی حاصل 10 V باشد.

این همان مداری است که در شکل ۶-۳ ملاحظه کردیم ولی ولتاژ dc ورودی 2.5 V است. چون تغییر دیگری به عمل نیامده است، عبارتی که در معادله (۳) آمده است برای این مدار هم معتبر است. برای به دست آوردن خروجی مطلوب، ما به دنبال نسبت  $R_f$  به  $R_1$  به مقدار 10/2.5 یا 4 هستیم. چون تنها نسبت اهمیت دارد، فقط کافی است که مقدار مناسبی را برای یک مقاومت انتخاب کنیم، آن‌گاه مقدار دومی مشخص خواهد شد. مثلاً ما می‌توانیم  $R_1 = 100$   $\Omega$  را برگزینیم (بنابراین  $R_f = 400$   $\Omega$  است) یا حتی  $R_f = 8$  M $\Omega$  را انتخاب کنیم (که در این صورت  $R_1 = 2$  M $\Omega$  است) و در عمل قیودی دیگر ممکن است انتخاب‌های ما را محدودتر سازند (مانند جریان تغذیه).

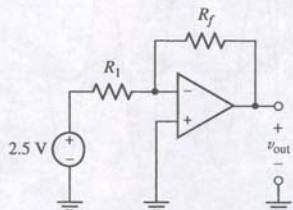
بنابراین آرایش مدار همچون یک نوع تقویت‌کننده معمولی ولتاژ کار می‌کند (با یک تضعیف‌کننده، اگر نسبت  $R_f$  به  $R_1$  کمتر از 1 باشد)، ولی به نوعی خاصیت غیرمعمول تغییر علامت ورودی را دارد. با این وجود راه دیگری هم وجود دارد که به همان سادگی قابل تحلیل است. تقویت‌کننده غیر معکوس گر در شکل ۶-۶ نشان داده شده است. ما چنین مداری را در مثال زیر بررسی می‌کنیم.



چون در چنین آرایشی پایانه ورودی معکوس گر ولتاژ صفر پیدا می‌کند به آن نام زمین مجازی می‌دهند. این به معنی زمین شدن این پایه نیست. این نام گاهی مشتق از اشتباه در دانشجویان می‌شود. تمام کارهای لازم برای ممانعت از ایجاد اختلاف پتانسیل بین پایه‌های ورودی در درون op amp انجام می‌شود. پایه‌های ورودی به هم اتصال کوتاه نمی‌شوند.



شکل ۶-۴ شکل موج‌های ورودی و خروجی در مدار تقویت‌کننده معکوس گر.



شکل ۶-۵ یک مدار تقویت‌کننده معکوس گر با 2.5 V ورودی.



## مثال ۶-۱

شکل موج خروجی را برای مدار op amp معکوس‌نکننده شکل ۶-۶ (الف) رسم نمایید. از  $R_f = 47k\Omega$  و  $R_1 = 4.7k\Omega$ ،  $v_{in} = 5\sin 3t$  mV استفاده کنید.

■ هدف مسئله را شناسایی کنید.

ما به دنبال عبارتی برای  $v_{out}$  هستیم که فقط به کمیت‌های معلوم  $v_{in}$ ،  $R_1$  و  $R_f$  وابسته باشد.

■ اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

چون مقادیر مقاومت‌ها و ورودی مشخص شده‌اند ما با نام‌گذاری جریان  $i$ ، و دو ولتاژ ورودی طبق شکل ۶-۵ (ب) شروع می‌کنیم. ضمناً فرض می‌کنیم که op amp ایده‌آل است.

■ ارائه طرح.

گرچه تحلیل مش‌روش مناسبی برای دانشجویان است، ولی به‌نظر می‌رسد که برای op amp، تحلیل گرهی عملی‌تر است، زیرا راه مستقیمی برای تعیین جریان خارج‌شده از op amp وجود ندارد.

■ معادلات مناسب را بنویسید.

دقت کنید که ما قاعده ۱ مربوط به op amp را به‌کار می‌بریم و جریان یکسانی را در دو مقاومت فرض می‌کنیم؛ یعنی هیچ جریانی وارد پایانه ورودی نمی‌گردد. با استفاده از تحلیل گرهی برای یافتن عبارتی برای  $v_{out}$  برحسب  $v_{in}$  خواهیم داشت:

$$(۴) \quad 0 = \frac{v_a}{R_1} + \frac{v_a - v_{out}}{R_f} \quad \text{در گره } a$$

$$(۵) \quad v_b = v_{in} \quad \text{در گره } b$$

■ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

هدف یافتن عبارتی است که ولتاژ خروجی را برحسب ولتاژ ورودی به‌دست‌دهد. زیرا به‌نظر نمی‌رسد که معادله (۴) یا (۵) این کار را انجام دهند. معهداً ما هنوز قاعده ۲ تقویت‌کننده ایده‌آل را به‌کار نبرده‌ایم و خواهیم دید که تقریباً در هر مدار تقویت‌کننده، هر دو قاعده باید به‌کار روند تا چنین عبارتی به‌دست‌آید. بنابراین داریم:  $v_a = v_b = v_{in}$  و معادله (۴) چنین خواهد شد:

$$0 = \frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_{in} - v_{out}}{R_f}$$

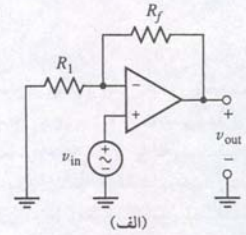
■ اقدام به حل.

با مرتب‌کردن عبارت فوق، عبارتی برای ولتاژ خروجی برحسب ورودی  $v_{in}$  خواهیم داشت:

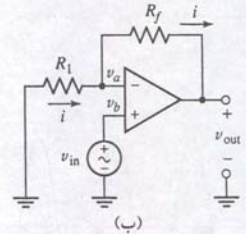
$$v_{out} = (1 + \frac{R_f}{R_1})v_{in} = 11v_{in} = 55 \sin 3t \text{ mV}$$

• صحت حل را تحقیق کنید. آیا جواب منطقی است؟

به‌منظور مقایسه، موج خروجی همراه با موج ورودی در شکل ۶-۷ ترسیم شده است. برخلاف شکل موج خروجی تقویت‌کننده معکوس‌گر، ورودی و خروجی برای نوع معکوس‌نکننده (غیر معکوس‌گر) هم‌فازند. البته نباید چنین انتظار نداشت؛ این وضعیت از نام آن مشهود است. توجه کنید که این مدار قادر نیست فرکانس شکل موج را اصلاح کند، بلکه فقط روی دامنه آن اثر دارد.

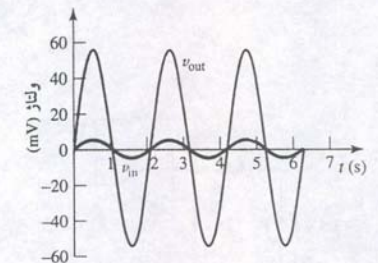


(الف)



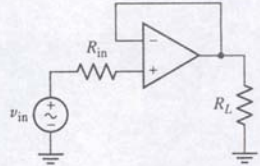
(ب)

شکل ۶-۶ (الف) برای ساختن تقویت‌کننده غیر معکوس‌گر از op amp استفاده شده است. (ب) جریان‌های  $R_1$  و  $R_f$  مشخص و ولتاژهای پایانه‌های ورودی نامگذاری شده است.



شکل ۶-۷ شکل موج‌های ورودی و خروجی مدار تقویت‌کننده غیر معکوس‌گر.

## تمرین



شکل ۶-۸

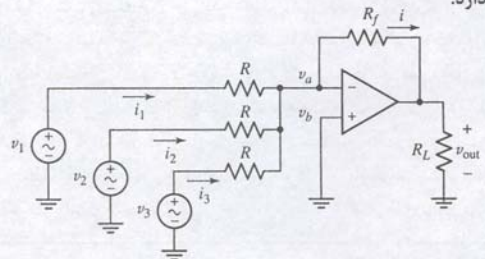
۶-۱ عبارتی برای  $v_{out}$  برحسب  $v_{in}$  برای مدار شکل ۶-۸ به‌دست‌آورید.

جواب:  $v_{out} = v_{in}$ . مدار به‌نام "دنبالگر ولتاژ" معروف است، زیرا ولتاژ خروجی، ولتاژ ورودی را ردیابی یا دنبال می‌کند.

درست همچون تقویت‌کننده معکوس‌گر، تقویت‌کننده غیر معکوس‌گر هم با ورودی‌های dc و ac کار می‌کند، ولی دارای بهره ولتاژ  $(R_f/R_1) + 1$  است. بنابراین اگر ما  $R_1 = 1\Omega$  و  $R_f = 9\Omega$  را انتخاب کنیم، ولتاژ خروجی  $v_{out}$ ،  $10^\circ$  برابر بزرگتر از ولتاژ ورودی  $v_{in}$  خواهد بود. برعکس تقویت‌کننده معکوس‌گر، خروجی و ورودی تقویت‌کننده غیر معکوس‌گر (یا معکوس‌نکننده) دارای علامت یکسانی هستند و ولتاژ خروجی نمی‌تواند کمتر از ورودی باشد؛ زیرا حداقل بهره برابر 1 است. تقویت‌کننده‌ای که انتخاب می‌شود به کاربرد موردنظر ما بستگی دارد. در حالت خاص مدار دنبال‌گر ولتاژ شکل ۶-۸ نمایش‌دهنده یک تقویت‌کننده غیر معکوس‌کننده است که در آن  $R_1$  در  $\infty$  و  $R_f$  در صفر تنظیم شده است. خروجی به لحاظ علامت و مقدار با ورودی برابر است. شاید این مدار به عنوان یک نوع مدار قابل طرح نباشد، ولی ما باید به خاطر بسپاریم که دنبال‌گر ولتاژ جریانی از ورودی نمی‌کشد (البته در حالت ایده‌آل). یعنی می‌تواند بین ولتاژ ورودی  $v_{in}$  و یک بار مقاومتی که به خروجی تقویت‌کننده وصل است،  $R$ ، به عنوان بافر عمل کند.

ما قبلاً ذکر کردیم نام "تقویت‌کننده عملیاتی" از استفاده از چنین وسایلی که اعمال حسابی روی سیگنال‌های آنالوگ انجام دهد نشأت گرفته است (آنالوگ یعنی غیردیجیتال، بلادرنگ، دنیای واقعی). همان‌طور که ما در دو مثال زیر خواهیم دید، این شامل هر دو عمل جمع و تفریق سیگنال‌های ورودی است.

برای مدار op amp شکل ۶-۹،  $v_{out}$  را برحسب  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  به‌دست‌آورید. این مدار تقویت‌کننده مجموع هم نام دارد.



شکل ۶-۹ مدار تقویت‌کننده مجموع سه ورودی.

در آغاز ملاحظه می‌شود که مدار فوق مشابه با مقدار تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۶-۳ است. مجدداً هدف به‌دست‌آوردن عبارتی برای  $v_{out}$  (که در این حالت ولتاژ دو سر  $R_f$  است) برحسب ورودی‌های (در این جا  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$ ) می‌باشد. چون هیچ جریانی نمی‌تواند وارد پایانه معکوس‌کننده شود، می‌دانیم:

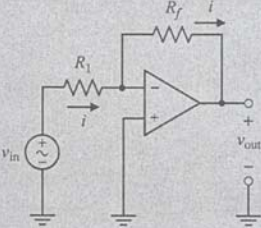
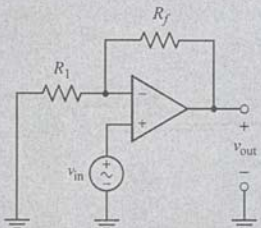
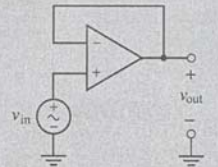
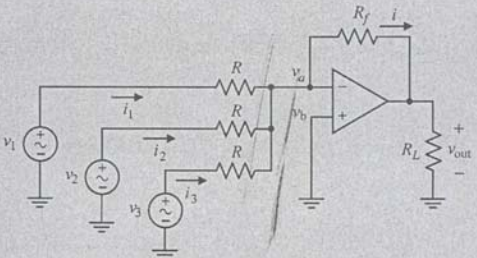
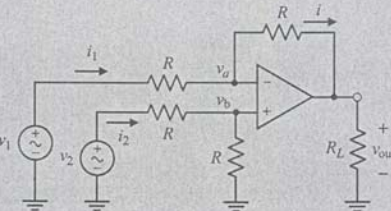
$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

بنابراین می‌توانیم معادله زیر را در گره  $v_a$  بنویسیم:

$$0 = \frac{v_a - v_{out}}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} + \frac{v_a - v_3}{R}$$



جدول ۶-۱ خلاصه مدارهای op amp پایه.

| Input-Output Relation                        | Circuit Schematic   | Name  |
|--|---|---|
| $v_{out} = -\frac{R_f}{R_1} v_{in}$          |    | تقویت‌کننده معکوس‌گر                                  |
| $v_{out} = (1 + \frac{R_f}{R_1}) v_{in}$     |    | تقویت‌کننده غیرمعکوس‌گر                               |
| $v_{out} = v_{in}$                           |    | دنبال‌گر ولتاژ (به آن تقویت‌کننده بهره واحد می‌گویند) |
| $v_{out} = -\frac{R_f}{R} (v_1 + v_2 + v_3)$ |   | تقویت‌کننده مجموع                                     |
| $v_{out} = v_2 - v_1$                        |  | تقویت‌کننده تفاضل‌گر                                  |

این معادله حاوی  $v_{out}$  و ولتاژهای ورودی است، ولی متأسفانه ولتاژ گرهی  $v_a$  نیز در آن هست. برای حذف این کمیت نامشخص از عبارت فوق، باید معادله دیگری که  $v_a$  را به  $v_{out}$ ، ولتاژهای ورودی،  $R_f$  و  $R$  ربط دهد بنویسیم. در این جا به‌خاطر می‌آوریم که هنوز قاعده ۲ تقویت‌کننده عملیاتی را به کار نبرده‌ایم و مطمئناً استفاده از هر دو قاعده را هنگام تحلیل مدار لازم داریم. بنابراین چون  $v_b = 0$  است می‌توان نوشت:

$$0 = \frac{v_{out}}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + \frac{v_3}{R}$$

با مرتب‌کردن رابطه فوق عبارتی برای  $v_{out}$  به دست می‌آید:

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R} (v_1 + v_2 + v_3) \quad (۶)$$

و در حالت خاص که  $v_2 = v_3 = 0$  است می‌بینیم که نتیجه ما با معادله (۳) توافق دارد که برای مدار مشابهی طراحی شد.

در این نتیجه چندین نکته جالب دیده می‌شود، اول این که اگر  $R_f = R$  باشد، آن‌گاه خروجی منفی مجموع  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  است. علاوه بر آن ما می‌توانیم نسبت  $R_f$  را به  $R$  انتخاب کنیم تا جمع را در مقدار ثابتی ضرب کند. بنابراین، به عنوان مثال اگر سه ولتاژ سیگنال‌هایی را از سه منبع با مقیاس جداگانه نشان دهند، و طوری کالیبره شده باشند که  $1 \text{ V} = 1 \text{ lb}$  (برابر با پوند وزن است)، می‌توانیم  $R_f = R/2.205$  را برای یافتن ولتاژی که نمایش‌دهنده ترکیب وزن به کیلوگرم است، انتخاب کنیم (به دلیل ضرب تبدیل با خطایی حدود ۱ درصد).

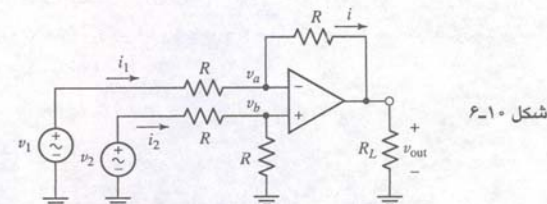
همچنین می‌بینید که  $R_f$  در عبارت نهایی به چشم نمی‌خورد. مادامی که  $R_f$  خیلی کوچک نباشد، روی عملکرد مدار تأثیری ندارد. در حال حاضر ما موضوع را تا آن حد دقیق بررسی نکرده‌ایم که این مسائل پیش‌بینی شود. این مقاومت درواقع معادل تونن و وسیله‌ای را نشان می‌دهد که به خروجی op amp وصل می‌باشد. اگر وسیله خروجی یک ولت‌متر ساده باشد، آن‌گاه  $R_f$  همان مقاومت معادل تونن در دو پایانه ولت‌متر است (حدود  $10 \text{ M}\Omega$  یا بیشتر). همچنین ممکن است وسیله خروجی یک بلندگو باشد (معمولاً  $8\Omega$ )، که در این صورت صدای سه منبع را خواهیم شنید، در این حالت  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  می‌توانند میکروفون‌ها را نشان دهند.

یک نکته احتیاطی: اغلب بالاچار تصور می‌شود که جریان  $i$  در شکل ۶-۹ نه فقط از  $R_f$  که از  $R_f$  نیز عبور می‌کند. ولی این چنین نیست! ممکن است جریان وارد پایانه op amp هم بشود، بنابراین جریان داخل دو مقاومت برابر نیستند. به این دلیل از نوشتن معادلات کیرشهف، KCL در پایانه خروجی op amp خودداری می‌کنیم. چون جریان خروجی op amp نامعلوم است، تحلیل گرهی بر مبنای مدارهای op amp ارجحیت دارد.



## تمرین

۶-۲ عبارتی برای  $v_{out}$  برحسب  $v_1$  و  $v_2$  در شکل ۶-۱۰ به دست آورید. این مدار به تقویت‌کننده تفاضلی معروف است.



شکل ۶-۱۰

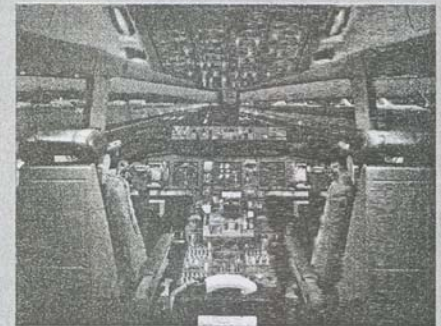
جواب:  $v_{out} = v_2 - v_1$ . راهنمایی: برای به دست آوردن  $v_b$  از تقسیم ولتاژ استفاده نمایید.



## کاربرد عملی

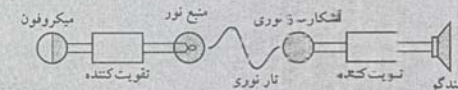
## سیستم درون ارتباطی فیبر نوری

سیستم ارتباط درونی بین - نقطه‌ای می‌توان بسته به محیط مورد استفاده، به روش‌های متعددی برپا کرد. سیستم‌های فرکانس رادیویی توان پایین خوب کار می‌کند. ولی در معرض تداخل دیگر امواج RF و استراق سمع می‌باشد. استفاده از یک سیم ساده برای اتصال میکروفون به یک بلندگو بسیاری از تداخل‌های RF را حذف می‌کند (البته به همراه یک تقویت‌کننده مناسب). ولی سیم‌ها به علت فرسایش روکش در معرض خوردگی و اتصالی هستند و نیز وزن آن‌ها در هواپیماها و کاربردهای نظیر ن‌میشه‌ساز است (شکل ۶-۱۱).



شکل ۶-۱۱ این محیط کاربرد اغلب قیدهای طراحی را تعیین می‌کند.

روشن دیگر تبدیل سیگنال الکتریکی از میکروفون به یک سیگنال نوری است، که می‌تواند از فیبر نوری نازک با قطر حدود 50 μm انتقال یابد. آن‌گاه سیگنال نوری دوباره به سیگنال الکتریکی از گرما تاده شده و پس از تقویت به بلندگو ارسال می‌گردد. نمودار شماتیک چنین سیستمی در شکل ۶-۱۲ مشاهده می‌گردد. یوری مخابوه دوحرفه، دو سیستم از این نوع لازم است.

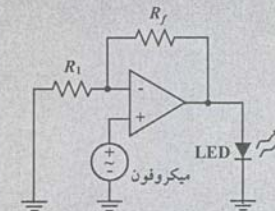


شکل ۶-۱۲ مفیدار یک سیستم مخابراتی ساده فیبر نوری.

ما ارسال و دریافت سیگنال نوری را جداگانه بررسی خواهیم کرد، زیرا در واقع مدار الکتریکی آن‌ها مستقل از یکدیگرند. شکل ۶-۱۳ مدار مولد سیگنال را نشان می‌دهد و شامل یک میکروفون، یک دیود تولیدکننده نور (LED)، و یک مدار تقویت‌کننده غیر معکوس‌گر برای راه‌اندازی LED است. آنچه دیده نمی‌شود اتصالات لازم نوری برای خود op amp ها است. نور خارج شده از LED حدوداً متناسب با جریان آن است. می‌دانیم که بهره ولتاژ تقویت‌کننده با رابطه زیر داده می‌شود،

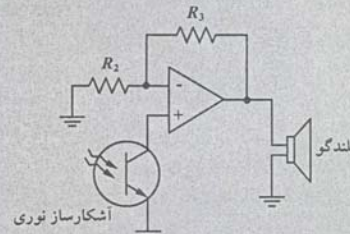
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

که مستقل از مقاومت LED است. برای انتخاب مقدار  $R_1$  و  $R_f$ ، ما باید ولتاژ ورودی از میکروفون و خروجی لازم به بلندگو را بدانیم تا LED را روشن کنیم. یک اندازه‌گیری ساده نشان می‌دهد که حداکثر ولتاژ خروجی میکروفون وقتی که از صوت معمولی استفاده می‌کند، حدود 40mV است. طبق مشخصات سازندگان حداکثر ولتاژ دو سر LED برابر 1.6V است. بهره طراحی را  $40 = 1.6/0.04$  اختیار می‌نماییم. با انتخاب  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ، مقدار  $R_f = 39 \text{ k}\Omega$  خواهد شد.



شکل ۶-۱۳ مدار تبدیل سیگنال الکتریکی حاصل از میکروفون به سیگنال نوری.

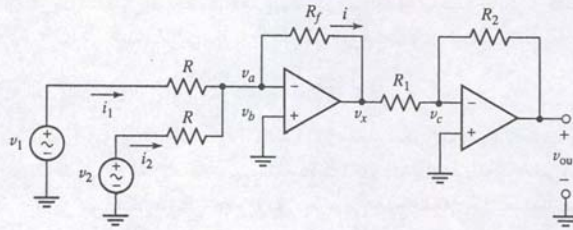
مدار شکل ۶-۱۴ بخش گیرنده سیستم ارتباط درونی ما است. این مدار، سیگنال نوری را از فیبر به سیگنال الکتریکی تبدیل می‌کند به نحوی که صدای قابل شنودی از بلندگو شنیده می‌شود.



شکل ۶-۱۴ مدار گیرنده برای تبدیل سیگنال نوری به سیگنال صوتی.

پس از اتصال خروجی LED به فیبر نوری، سیگنالی حدود 10mV (حداکثر) به وسیله آشکارساز نوری اندازه‌گیری می‌شود. بلندگو با حداکثر توان 100mV و مقاومت معادل 8Ω انتخاب شده است. پس ولتاژ ماکزیمم مجاز آن 894mV است. بنابراین باید با انتخاب  $R_2$  و  $R_3$  تقویت‌کننده‌ای با بهره  $89.4 = 894/10$  طراحی کنیم. با انتخاب  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$  می‌بینیم که باید  $R_3 = 884 \text{ k}\Omega$  باشد و به این ترتیب طراحی پایان می‌یابد. در عمل مدار کار خواهد کرد ولی به دلیل غیرخطی بودن LED، صوت حاصل کمی اعوجاج‌دار خواهد بود. ما اثبات طراحی را به متون پیشرفته‌تر الکترونیک محول می‌کنیم.

شکل ۶-۱۵ یک مدار op amp دو طبقه تشکیل شده از یک تقویت‌کننده جمع‌کننده و یک مدار تقویت‌کننده معکوس‌گر.



## ۶-۳ طبقات پی‌درپی

گرچه op amp وسیله کاملاً انعطاف‌پذیری است، کاربردهای بسیار زیادی وجود دارند که یک op amp برای آن کفایت نمی‌کند. در این موارد، می‌توان نیازهای کاربرد را با اتصال پی‌درپی (متوالی) چند op amp در یک مدار مرتفع کرد. مثالی از این نوع در شکل ۶-۱۵ ملاحظه می‌گردد، که متشکل از مدار تقویت‌کننده مجموع شکل ۶-۹، با تنها دو منبع ورودی و خروجی آن به یک تقویت‌کننده ساده معکوس‌گر متصل است. نتیجه این کار یک مدار op amp دو طبقه یا دو مرحله است.

ما قبلاً هر یک از این دو مدار را به‌طور جداگانه تحلیل کردیم. بر اساس تجربیات قبلی مان، اگر دو تقویت‌کننده جدا از هم باشند انتظار داریم که:

$$v_x = -\frac{R_f}{R} (v_1 + v_2) \quad (۷)$$

و

$$v_{out} = -\frac{R_2}{R_1} v_x \quad (۸)$$

در واقع چون دو مدار به یک نقطه وصلند و ولتاژ  $v_x$  با این اتصال تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد، ما می‌توانیم معادلات (۷) و (۸) را ترکیب کنیم:

$$v_{out} = \frac{R_2}{R_1} \frac{R_f}{R} (v_1 + v_2) \quad (۹)$$

که مشخصه ورودی - خروجی مدار شکل ۶-۱۵ را توصیف می‌نماید. ما ممکن است همیشه نتوانیم چنین کاهشی انجام داده و طبقات را شناسایی کنیم. بنابراین ارزشمند است که ببینیم چگونه یک مدار دو طبقه شکل ۶-۱۵ به‌طور کلی قابل تحلیل است.

وقتی که مدارهای پی‌درپی را تحلیل می‌کنیم، بهتر است از طبقه آخر شروع کرده و به سمت طبقه ورودی باز گردیم. با توجه به قاعده 1 در op amp ایده‌آل، از هر دو مقاومت  $R_1$  و  $R_2$  جریان یکسانی عبور می‌کند. با نوشتن معادله گرهی مناسبی در نقطه  $v_c$  داریم:

$$0 = \frac{v_c - v_x}{R_1} + \frac{v_c - v_{out}}{R_2} \quad (۱۰)$$

با اعمال قاعده ۲ در یک op amp ایده‌آل، می‌توان در معادله (۸)،  $v_c = 0$  را در نظر گرفت. در نتیجه:

$$0 = \frac{v_x}{R_1} + \frac{v_{out}}{R_2} \quad (۱۱)$$

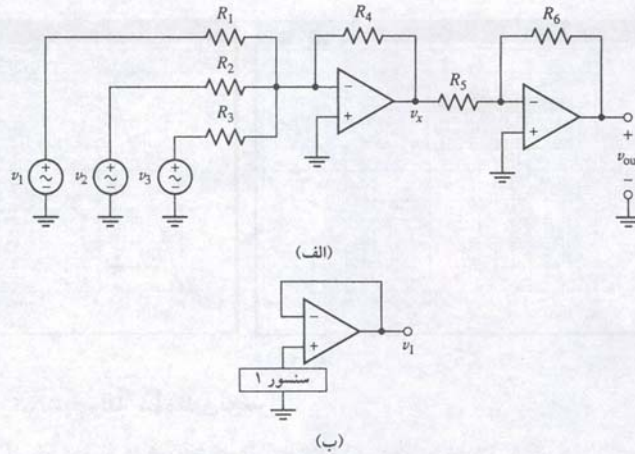
چون هدف یافتن  $v_{out}$  بر حسب  $v_1$  و  $v_2$  است به اولین op amp باز می‌گردیم تا  $v_x$  را بر حسب دو کمیت ورودی به دست آوریم.

با اعمال قاعده ۱ تقویت‌کننده در ورودی معکوس‌کننده اولین op amp داریم:

$$0 = \frac{v_a - v_x}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R} + \frac{v_a - v_2}{R} \quad (۱۲)$$



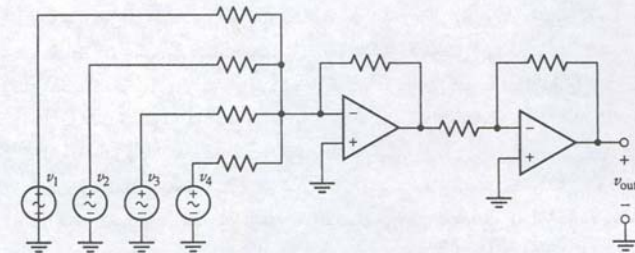
شکل ۶-۱۶ (الف) مدار پیشنهادی برای خواندن مانده سوخت. (ب) طراحی بافر برای پرهیز از خطاهای مربوطه با مقاومت سنسور و محدودیت‌های ناشی از توانایی تهیه جریان. چنین بافری برای هر سنسور به کار می‌رود و به این ترتیب ورودی‌های  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  برای طبقه تقویت‌کننده مجموع فراهم می‌گردد.



## تمرین

۶-۳ یک پل تاریخی در حال نابودی است. تا بازسازی آن، تصمیم بر این است که فقط اتومبیل‌های زیر 1600 kg وزن اجازه عبور داشته باشند. برای ردیابی آن، یک سیستم توزین طراحی شده است. چهار سیگنال ولتاژ مستقل از چهار گوشه سیستم توزین اخذ شده است که در آن  $1 \text{ mV} = 1 \text{ kg}$  است. مداری طراحی کنید تا سیگنال ولتاژ مثبتی را روی یک DMM (مولتی متر دیجیتالی) به عنوان وزن کل خودرو نشان دهد به نحوی که  $1 \text{ mV} = 1 \text{ kg}$  باشد. شما می‌توانید تصور کنید که برای سیگنال ولتاژ حاصل از سنسورها نیازی به بافر نیست. جواب: شکل ۶-۱۷ را ملاحظه کنید.

شکل ۶-۱۷ یک حل ممکن برای تمرین ۶-۳ این است که همه مقاومت‌ها 10 kΩ باشند (هرچند مادامی که همه مقاومت‌ها یکسان گرفته شوند، مقدار مهم نیست). ولتاژهای ورودی  $v_1$ ،  $v_2$ ،  $v_3$  و  $v_4$  سیگنال‌های ولتاژ را از سنسورها و  $v_{out}$  سیگنال ولتاژ را برای اتصال به پایانه ورودی مثبت DMM نشان می‌دهند. ولتاژ مرجع برای هر پنچ ولتاژ و نیز DMM، نقطه زمین است.



## ۶-۴ مدارهای منابع ولتاژ و جریان

در این فصل و فصل قبل به دفعات استفاده از منابع جریان یا ولتاژ ایده‌آل را مطرح کردیم که این مدارها بدون توجه به مدار متصل به آن‌ها، فرض می‌شود که جریان یا ولتاژ خروجی آن‌ها ثابت باشد. البته همان‌طور که در بخش ۵.۲ ذکر شد به هنگام استفاده از منابع واقعی که در داخل آن‌ها مقاومتی گذاشته شده یا ذاتاً آن را دارند، فرض ما در رابطه با این استقلال محدودیت دارد. اثر چنین مقاومتی کاهش در ولتاژ خروجی منبع در مواردی است که تقاضای جریان زیاد باشد، و یا کاهش جریان در مواردی است که ولتاژ بیشتری از منبع جریان خواسته شود. همان‌طور که در این بخش بحث شد، امکان دارد مدارهایی با مشخصه‌های اطمینان‌بخش‌تری را با op amp ساخت.

قاعده ۲ تقویت‌کننده ایده‌آل اجازه می‌دهد تا  $v_d$  را در معادله (۱۲) با صفر جایگزین کنیم چون  $v_d = v_b = 0$  می‌باشد. بنابراین معادله (۱۲) چنین خواهد شد:

$$(13) \quad 0 = \frac{v_x}{R_f} + \frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R}$$

اکنون معادله‌ای برای  $v_{out}$  برحسب  $v_x$  (معادله ۱۱) و معادله دیگری برای  $v_x$  برحسب  $v_1$  و  $v_2$  (معادله ۱۳) داریم. این معادلات به ترتیب با معادلات (۷) و (۸) برابرند و به این معنی است که اتصال پی‌درپی طبق شکل ۶-۱۵ رابطه ورودی - خروجی هیچ طبقه‌ای را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد. با ادغام معادلات (۱۱) و (۱۳) می‌بینیم که رابطه ورودی - خروجی برای op amp پی‌درپی یا متوالی برابر است با:

$$(14) \quad v_{out} = \frac{R_2}{R_1} \frac{R_f}{R} (v_1 + v_2)$$

که با معادله (۹) برابر است.

بنابراین مدار پی‌درپی همچون تقویت‌کننده مجموع، ولی بدون معکوس کردن فاز بین ورودی و خروجی عمل می‌کند. با انتخاب دقیق مقاومت، می‌توان مجموع دو ولتاژ ورودی را تقویت یا تضعیف کرد. اگر  $R_2 = R_1$  و  $R_f = R$  باشد، می‌توان مداری با خروجی  $v_{out} = v_1 + v_2$  داشت.

## مثال ۶-۳

جدول ۶-۲ داده‌های تکنیکی سیستم ردیابی فشار.

|                   |                  |
|-------------------|------------------|
| ظرفیت تانک ۱      | 10,000 psia      |
| ظرفیت تانک ۲      | 10,000 psia      |
| ظرفیت تانک ۳      | 2000 psia        |
| محدوده فشار سنسور | 0 to 12,500 psia |
| ولتاژ خروجی سنسور | 0 to 5 Vdc       |

یک سیستم سوخت‌گازی چندتانگی در یک ماهواره کوچک نصب است. مقدار سوخت در هر تانک با اندازه‌گیری فشار (به psia) ردیابی می‌شود. جزئیات تکنیکی ظرفیت تانک و فشار سنسور و محدوده ولتاژ در جدول ۶-۲ داده شده است. مداری طراحی کنید که یک ولتاژ مثبت dc را برای باقیمانده سوخت، مثلاً  $100\% = 1 \text{ V}$  را فراهم کند.

از جدول ۶-۲ ملاحظه می‌شود که سیستم دارای سه تانک گاز جداگانه است و بنابراین سنسورهای جداگانه‌ای لازم است. هر سنسور می‌تواند در ازای فشاری از 12500 psia تا 5 V متناظر آن را تولید کند. بنابراین وقتی تانک ۱ پر است، سنسور آن  $4 \text{ V} = (10000/12500) \times 5$  را تولید خواهد کرد. وضع مشابهی برای ردیاب تانک ۲ وجود دارد. با این وجود سنسور متصل به تانک ۳ حداکثر  $800 \text{ mV} = (2000/12500) \times 5$  را تولید خواهد کرد.

یک راه‌حل ممکن مدار شکل ۶-۱۶ (الف) است که از یک طبقه تقویت‌کننده مجموع تشکیل شده و  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  خروجی‌های سه سنسور را نشان می‌دهد، و به دنبال آن یک تقویت‌کننده معکوس‌گر آمده است که برای تنظیم مقدار و علامت ولتاژ است. چون مقاومت خروجی سنسور به ما گفته نشده است، ما بافری مطابق شکل ۶-۱۶ (ب) را برمی‌گیریم، در نتیجه جریان از سنسور جاری نخواهد شد.

برای حفظ سادگی طراحی، ما با انتخاب  $R_1$ ،  $R_2$ ،  $R_3$  و  $R_4$  به مقدار  $1 \text{ k}\Omega$  شروع می‌کنیم، البته هر مقدار کار را مادامی که هر چهار مقاومت مساوی باشند انجام می‌دهد. بنابراین خروجی طبقه جمع‌کننده برابر است با:

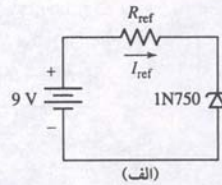
$$v_x = -(v_1 + v_2 + v_3)$$

مرحله آخر باید این ولتاژ را معکوس کرده و آن را طوری مقیاس‌بندی کند که ولتاژ خروجی  $1 \text{ V}$  در ازای پر بودن هر سه تانک حاصل گردد. نتیجه حالت پر عبارت است از  $v_x = -(4 + 4 + 8.8) = -8.8 \text{ V}$ . بنابراین آخرین حالت به نسبت ولتاژ  $R_6/R_5 = 1/8.8$  نیاز دارد. با انتخاب اختیاری  $R_6 = 1 \text{ k}\Omega$  ما درمی‌یابیم که باید  $R_5 = 8.8 \text{ k}\Omega$  باشد تا طرح تکمیل گردد.

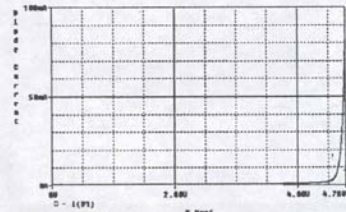


©Corbis

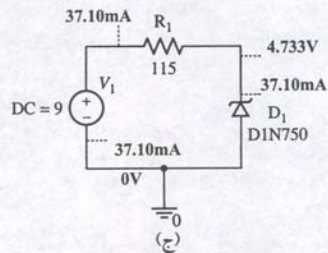




(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۶-۱۹ (الف) مدار مرجع ولتاژ مبتنی بر دیود زنر 1N750. (ب) رابطه  $I-V$  دیود. (ج) شبیه‌سازی PSpice طرح نهایی.

یک مدار ساده مانند آنچه در شکل ۶-۱۹ (الف) دیده می‌شود برای هدف ما مناسب است. تنها موضوع تعیین مقدار مناسبی برای مقاومت  $R_{ref}$  است. اگر در دو سر دیود 4.7 V افت وجود داشته باشد، آن‌گاه افت ولتاژ دو سر  $R_{ref}$  برابر  $9 - 4.7 = 4.3$  V است. بنابراین:

$$R_{ref} = \frac{9 - V_{ref}}{I_{ref}} = \frac{4.3}{75 \text{ mA}}$$

با تعیین مقدار جریان،  $R_{ref}$  را می‌توان مشخص کرد. ما می‌دانیم که  $I_{ref}$  نباید از 75 mA برای این دیود تجاوز نماید، و مقادیر بزرگ‌تر جریان سبب دشارژ سریع‌تر باتری خواهد شد. با این وجود همان‌طور که در شکل ۶-۱۹ (ب) دیده می‌شود، ما نمی‌توانیم به راحتی  $I_{ref}$  را انتخاب کنیم. جریان‌های خیلی پایین اجازه کار دیود را در ناحیه شکست نمی‌دهند. در غیاب وجود رابطه جریان-ولتاژ (که غیرخطی است) ما در قبال 50% حداکثر جریان، به‌طور سرانگشتی، طراحی را ادامه می‌دهیم. بنابراین

$$R_{ref} = \frac{4.3}{0.0375} = 115 \Omega$$

جزئیات عملیات را می‌توانید با اجرای شبیه‌سازی PSpice مدار آخر به دست آورید، هر چند از شکل ۶-۱۹ (ج) می‌بینیم که نتیجه اولیه ما منطقی با ۱ درصد به هدف نزدیک است.

ولتاژ مرجع دیود زنر مدار شکل ۶-۱۸ (الف) در بسیاری از موارد خیلی خوب کار می‌کند، ولی ما به نوعی از نظر مقدار ولتاژ وابسته به دیودهای زنر موجود، محدودیت داریم. همچنین اغلب درمی‌یابیم که مداری که در شکل نشان داده شده است مناسب کاربردهایی که بیش از چند میلی‌آمپر جریان لازم دارند، نیست. در این موارد، ما ممکن است از مدار مرجع زنر در کنار یک طبقه تقویت‌کننده مطابق شکل ۶-۲۰ استفاده کنیم. نتیجه این کار ولتاژ با ثباتی خواهد بود که می‌تواند با تنظیم مقدار  $R_f$  بدون سوئیچ به دیود زنر دیگر، کنترل شود.

### تمرین

۶-۴ مداری برای تهیه یک ولتاژ مرجع 6 V با استفاده از دیود زنر 1N750 و یک تقویت‌کننده معکوس‌نکننده طراحی کنید.

جواب: با استفاده از مدار شکل ۶-۲۰ مقادیر  $R_{ref} = 115 \Omega$ ،  $V_{bat} = 9$  V و  $R_f = 26 \Omega$  را انتخاب کنید.

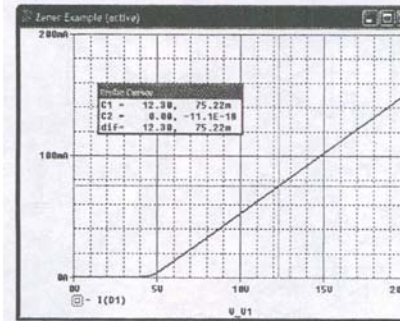
### یک منبع جریان قابل اطمینان

مدار شکل ۶-۲۱ (الف) را در نظر بگیرید که  $V_{ref}$  با منبع ولتاژ تنظیم‌شده مانند شکل ۶-۱۹ (الف) تهیه شده است. خواننده ممکن است تشخیص دهد که این مدار یک تقویت‌کننده معکوس‌گر است که ما پایه خروجی را در نظر می‌گیریم. ما می‌توانیم از این مدار به عنوان یک منبع جریان استفاده کنیم، که  $R_L$  یک بار مقاومتی را نشان می‌دهد.

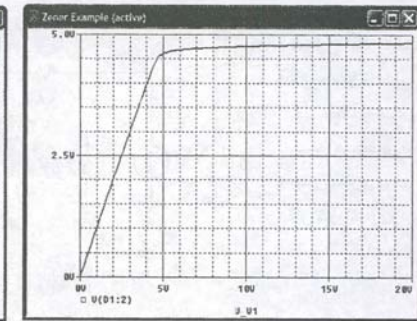
ولتاژ ورودی  $V_{ref}$  در دو سر مقاومت مرجع  $R_{ref}$  ظاهر می‌شود، چون ورودی معکوس‌نکننده تقویت‌کننده به زمین وصل شده است. با نبود جریان در ورودی معکوس‌گر، جریان جاری در مقاومت بار  $R_L$  برابر است با:

$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

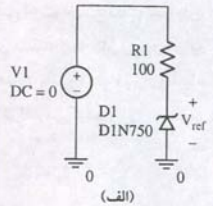
به بیان دیگر جریان تحویلی به  $R_L$  به مقاومت آن بستگی ندارد و این از صفات اصلی یک منبع جریان است. همچنین ارزشمند است بدانیم که ما در این جا ولتاژ خروجی را به عنوان



(ج)



(ب)



(الف)

### یک منبع ولتاژ اطمینان بخش

یکی از رایج‌ترین مفاهیم تهیه یک ولتاژ مرجع مقاوم<sup>۱</sup> استفاده از قطعه‌ای به نام دیود زنر است. نماد این دیود مثلی با خطی Z مانند در آن، مانند شکل ۶-۱۸ (الف) است که برای دیود 1N750 نشان داده شده است.

هرچند که قطعه دو پایانه است، دیود زنر با یک مقاومت (خطی) تفاوت بسیار دارد. خصوصاً درحالی‌که مقاومت یک قطعه متقارن است، یک دیود چنین نیست. در عوض دو پایانه آن با آند<sup>۲</sup> (بخش قاعده مثلث دیود) و کاتد<sup>۳</sup> (سمت رأس مثلث) نام‌گذاری شده، و بسته به این‌که از چه سمت در مدار قرار گیرد رفتار بسیار متفاوتی را از خود به نمایش می‌گذارد. دیود زنر نوع خاصی از دیود زنر است که برای استفاده با ولتاژ مثبت در کاتد نسبت به آند طراحی شده است. وقتی که به این طریق بسته شود گوییم که دیود به‌طور معکوس تغذیه شده است. برای ولتاژهای کم، دیود مثل مقاومت عمل می‌کند، و با افزایش ولتاژ، جریان به صورت خطی افزایش کوچکی می‌یابد. به محض این‌که ولتاژ به حد معینی ( $V_{BR}$ ) برسد - که به آن ولتاژ شکست معکوس یا ولتاژ زنری دیود می‌گویند - ولتاژ دیگر به اندازه قابل توجهی افزایش پیدا نمی‌کند، ولی در اصل هر جریانی می‌تواند تا میزان حداکثر دیود (75 mA برای 1N750)، که ولتاژ زنر آن 4.7 V است) جریان داشته باشد.

اجازه بدهید تا نتیجه شبیه‌سازی در شکل ۶-۱۸ (ب) را ملاحظه کنیم، که ولتاژ  $V_{ref}$  دو سر دیود را ضمن تغییر ولتاژ منبع  $V_1$  از 0 تا 20 V نشان می‌دهد. به شرطی که  $V_1$  در بالای 5 V باقی بماند، ولتاژ دو سر دیود اساساً ثابت است. بنابراین ما می‌توانیم  $V_1$  را با یک باتری 9 V جایگزین کنیم و زیاد به افت ولتاژ مرجع که به علت دشارژ باتری است توجه نکنیم. هدف از  $R_1$  در این مدار در واقع تهیه افت ولتاژ لازم بین باتری و دیود است. مقدار آن باید طوری انتخاب شود که کار دیود زنر را در ولتاژ زنری اش تضمین کند ولی کمتر از حداکثر جریان باشد. مثلاً شکل ۶-۱۸ (ج) نشان می‌دهد که در مدار، جریان از حداکثر مقدار 75 mA به شرطی عبور می‌کند که ولتاژ  $V_1$  بزرگتر از 12 V باشد. بنابراین مقدار مقاومت  $R_1$  باید بر طبق ولتاژ منبع موجود مقدار بگیرد. ما این مطلب را در مثال ۶-۴ می‌شکافیم.

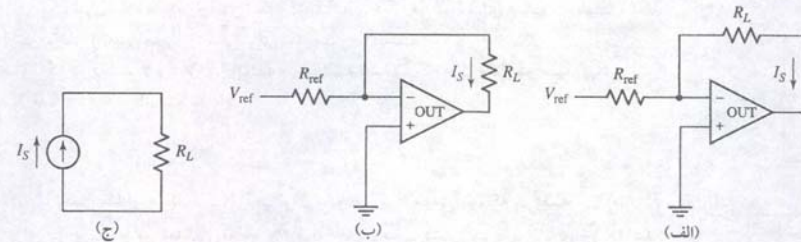
یک مدار مبتنی بر دیود زنر 1N750 طراحی کنید که با یک باتری 9V راه می‌افتد و ولتاژ مرجع 4.7 V تولید می‌کند.

1N750 دارای قابلیت حداکثر جریان 75 mA و ولتاژ زنری 4.7 V است. ولتاژ 9 V باتری می‌تواند کمی بسته به حالت شارژ آن تغییر کند، ولی ما این را به خاطر طراحی فعلی چشم می‌پوشیم.

شکل ۶-۲۰ یک منبع ولتاژ آمپلی‌فایری (تقویت‌کننده) بر اساس مرجع ولتاژ زنر.



شکل ۶-۲۱ (الف) یک منبع جریان مبتنی بر op amp با ولتاژ مرجع  $V_{ref}$  (ب) ترسیم مجدد مدار برای مشخص کردن بار. (ج) مدل مدار. مقاومت  $R_L$  معادل نورتن یک مدار با بار غیرفعال نامشخص.



یک کمیت مطلوب در نظر نگرفته ایم. در عوض، ممکن است مقاومت بار را به عنوان نوعی معادل نورتن (یا تونن) مدار بار غیرفعال در نظر بگیریم که توان را از مدار op amp دریافت می کند. با ترسیم مجدد مدار مطابق شکل ۶-۲۱ (ب) می بینیم که اشتراک زیادی با مدار شکل ۶-۲۱ (ج) دارد. به بیان دیگر می توانیم این مدار تقویت کننده را به صورت منبع جریان به کار ببریم و مشخصه های آن تا حد جریان خروجی ماکزیمم انتخاب شود.

## مثال ۶-۵

یک منبع جریان که  $1 \text{ mA}$  جریان را به یک بار مقاومتی حمل می کند طراحی کنید.

بر اساس طراحی مدارهای شکل ۶-۲۰ و ۶-۲۱ (الف)، می دانیم که جریان در مقاومت با  $R_L$  چنین است:

$$I_s = \frac{V_{ref}}{R_{ref}}$$

که مقادیر  $V_{ref}$  و  $R_{ref}$  باید انتخاب شوند و مداری که  $V_{ref}$  را تهیه می کند نیز باید طراحی گردد. ما اگر از دیود زener 1N750 استفاده کنیم که با یک باتری  $9 \text{ V}$  و مقاومت  $100 \Omega$  سری است، با توجه به شکل ۶-۱۸ (ب) ولتاژ  $4.9 \text{ V}$  در دو سر دیود وجود خواهد داشت. بنابراین  $V_{ref} = 4.9 \text{ V}$  مقاومت  $R_{ref}$  را برابر  $4.9 \text{ k}\Omega = 4.9/10^{-3}$  دیکته می کند. مدار کامل در شکل ۶-۲۲ دیده می شود.

دقت کنید که اگر ما فرض کنیم ولتاژ دیود  $4.7 \text{ V}$  است، خطا در جریان طراحی شده فقط چند درصد است و در داخل  $5$  تا  $10$  درصد تغییر مقاومت است که انتظار آن را می توان داشت. تنها موضوع باقیمانده این است که آیا می توان  $1 \text{ mA}$  جریان را برای هر مقداری از  $R_L$  تهیه کرد. برای حالت  $R_L = 0$ ، خروجی op amp برابر  $4.9 \text{ V}$  خواهد بود که غیر منطقی نیست. با افزایش مقاومت بار، در هر صورت، ولتاژ خروجی op amp افزایش پیدا می کند. در نهایت ما باید به نوعی محدودیت، طبق بحث بخش ۶-۵ برخورد کنیم.

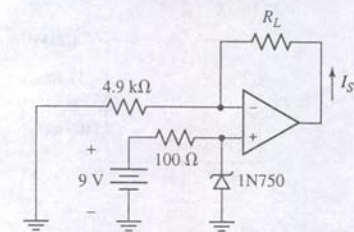
۶-۵ یک منبع جریان که بتواند  $500 \mu\text{A}$  را برای یک بار مقاومتی تولید کند، طراحی نمایید.

جواب: شکل ۶-۲۳ را به عنوان یک راه حل نگاه کنید.

## ۶-۵ ملاحظات عملی

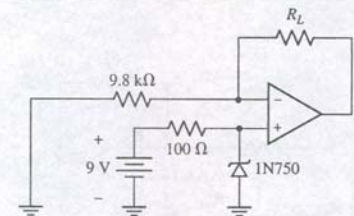
## مدلی دقیق تر برای op amp

می توان یک op amp را با کاهش ساختارش به عنوان یک منبع ولتاژ وابسته کنترل شده با ولتاژ تصور کرد. منبع ولتاژ وابسته خروجی op amp را فراهم می کند و ولتاژی که به آن بستگی دارد همان ولتاژ اعمال شده به پایانه های ورودی است. نمودار شماتیک یک مدل نسبتاً عملی op amp در شکل ۶-۲۴ دیده می شود که شامل منبع ولتاژ وابسته با بهره ولتاژ  $A$ ، یک مقاومت خروجی  $R_o$  و یک مقاومت ورودی  $R_i$  است. جدول ۶-۳ نمونه ای از مقادیر را برای این پارامترها در انواع تجاری تقویت کننده های عملیاتی نشان می دهد.



شکل ۶-۲۲ یک طرح ممکن برای منبع جریان مطلوب. به تغییر جهت جریان در شکل ۶-۲۱ (ب) توجه کنید.

## تمرین



شکل ۶-۲۳ یک حل ممکن برای تمرین ۶-۵

جدول ۶-۳ پارامترهای نوعی چند op amp مختلف.

| Part Number          | $\mu\text{A}741$            | LM324              | LF411                            | AD549K                      | OPA690                          |
|----------------------|-----------------------------|--------------------|----------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| Description          | General purpose             | Low-power quad     | Low-offset, low-drift JFET input | Ultralow input bias current | Wideband video frequency op amp |
| Open loop gain A     | $2 \times 10^5 \text{ V/V}$ | $10^5 \text{ V/V}$ | $2 \times 10^5 \text{ V/V}$      | $10^6 \text{ V/V}$          | $2800 \text{ V/V}$              |
| Input resistance     | $2 \text{ M}\Omega$         | *                  | $1 \text{ T}\Omega$              | $10 \text{ T}\Omega$        | $190 \text{ k}\Omega$           |
| Output resistance    | $75 \Omega$                 | *                  | $\sim 1 \Omega$                  | $\sim 15 \Omega$            | *                               |
| Input bias current   | $80 \text{ nA}$             | $45 \text{ nA}$    | $50 \text{ pA}$                  | $75 \text{ fA}$             | $3 \mu\text{A}$                 |
| Input offset voltage | $1.0 \text{ mV}$            | $2.0 \text{ mV}$   | $0.8 \text{ mV}$                 | $0.150 \text{ mV}$          | $\pm 1.0 \text{ mV}$            |
| CMRR                 | $90 \text{ dB}$             | $85 \text{ dB}$    | $100 \text{ dB}$                 | $100 \text{ dB}$            | $65 \text{ dB}$                 |
| Slew Rate            | $0.5 \text{ V}/\mu\text{s}$ | *                  | $15 \text{ V}/\mu\text{s}$       | $3 \text{ V}/\mu\text{s}$   | $1800 \text{ V}/\mu\text{s}$    |
| PSpice Model         | ✓                           | ✓                  | ✓                                |                             |                                 |

پارامتر  $A$  بهره ولتاژ حلقه باز تقویت کننده می نامند و معمولاً در محدوده  $10^5$  تا  $10^6$  است. با توجه به لیست تقویت کننده های جدول ۶-۳ ملاحظه می شود که همه آن ها در مقایسه با بهره ولتاژ  $11$  در مثال ۶-۱ بهره ولتاژ خیلی بالایی دارند. باید به خاطر سپرد که تفکیک بهره ولتاژ حلقه باز خود op amp و بهره ولتاژ حلقه بسته یک op amp خاص مهم است. در این جا منظور از "حلقه" مسیر بیرونی بین پایه خروجی و پایه ورودی معکوس کننده است، که می تواند یک سیم، یک مقاومت یا بسته به نوع کاربرد، نوع دیگری از عناصر باشد.  $\mu\text{A}741$  یک op amp بسیار متداول است که در اصل به وسیله فرچایلد (Fairchild corporation) در سال ۱۹۶۸ ساخته شد، این تقویت کننده دارای بهره ولتاژ حلقه باز  $200,000$ ، یک مقاومت ورودی  $2 \text{ M}\Omega$  و یک مقاومت خروجی  $75 \Omega$  است. برای این که ببینیم چگونه یک تقویت کننده ایده آل رفتار این دستگاه خاص را تقریب می نماید، اجازه بدهید تقویت کننده معکوس گر شکل ۶-۳ را دوباره بررسی کنیم.

با استفاده از مقادیر مناسب مدل تقویت کننده  $\mu\text{A}741$  در شکل ۶-۲۴، مدار تقویت کننده معکوس گر شکل ۶-۳ را دوباره تحلیل کنید.

حل را با جایگزینی نماد op amp ایده آل شکل ۶-۳ با مدل مشروح تر شروع می کنیم که حاصلش شکل ۶-۲۵ است.

دقت کنید که شما دیگر نمی توانید قواعد op amp ایده آل را به کاربرد زیرا مدل ایده آل را استفاده نمی کنیم. بنابراین دو معادله گرهی را می نویسیم:

$$0 = \frac{-v_d - v_{in}}{R_1} + \frac{-v_d - v_{out}}{R_f} + \frac{-v_d}{R_i}$$

$$0 = \frac{v_{out} + v_d}{R_f} + \frac{v_{out} - Av_d}{R_o}$$

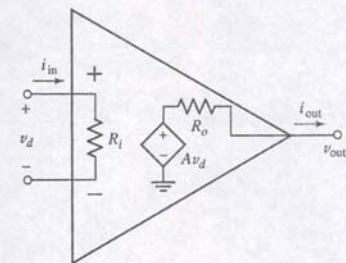
با اجرای مقداری عملیات جبری سرراست ولی نسبتاً طولانی،  $v_d$  را در دو معادله برای یافتن عبارتی برای  $v_{out}$  بر حسب  $v_{in}$  حذف می کنیم:

$$v_{out} = \left[ \frac{(R_o + R_f)}{R_o - AR_f} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_i} \right) - \frac{1}{R_f} \right]^{-1} \frac{v_{in}}{R_i} \quad (۵)$$

با جایگزینی  $R_1 = 2 \text{ M}\Omega$ ،  $R_o = 75 \Omega$ ،  $R_f = 47 \text{ k}\Omega$ ،  $R_i = 4.7 \text{ k}\Omega$ ،  $v_{in} = 5 \sin 3t \text{ mV}$  و  $A = 2 \times 10^5$  داریم:

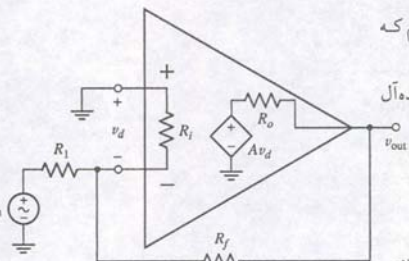
$$v_{out} = -9.999448 v_{in} = -49.99724 \sin 3t \text{ mV}$$

از مقایسه این رابطه با عبارت حاصل برای یک op amp ایده آل  $(v_{out} = -10 v_{in} = -50 \sin 3t \text{ mV})$  می بینیم که یک op amp ایده آل مدل نسبتاً دقیقی است.



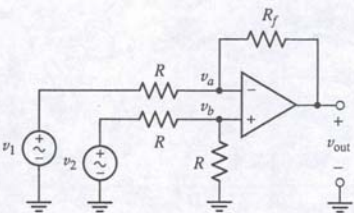
شکل ۶-۲۴ مدل دقیق تر op amp

## مثال ۶-۶



شکل ۶-۲۵ مدار تقویت کننده معکوس گر با استفاده از مدل دقیق تر op amp





شکل ۶-۲۶ نقش تقویت‌کننده تفاضلی.

از بحث فوق نتیجه می‌گیریم که بهره ولتاژ حلقه باز و مقاومت ورودی یک op amp ایده‌آل بی‌نهایت است. معیناً هنوز مقاومت خروجی و اثرات احتمالی آن را در مدار بررسی نکرده‌ایم. در شکل ۶-۲۴ داریم:

$$v_{out} = A v_d - R_o i_{out}$$

که  $i_{out}$  پایه خروجی op amp جاری است. پس هر مقدار غیرصفری از  $R_o$  ولتاژ خروجی را کاهش می‌دهد. افزایش جریان هم تأثیر مشابهی دارد. بنابراین مقاومت خروجی تقویت‌کننده را صفر در نظر می‌گیرند. حداکثر مقاومت خروجی تقویت‌کننده‌ای 741A، برابر 75Ω و حتی در انواع جدی‌تر AD549 و AD515A کمتر از آن است.

### حذف حالت مشترک

op amp را تقویت‌کننده تفاضلی هم می‌خوانند، چون خروجی متناسب با تفاضل ولتاژ بین دو پایانه ورودی است. به این معنی اگر ولتاژ برابری را به هر دو پایانه ورودی اعمال کنیم، انتظار داریم خروجی صفر باشد. این قابلیت op amp یکی از مهم‌ترین جاذبه‌های آن است و به نام حذف حالت مشترک شناخته می‌شود. مدار شکل ۶-۲۶ چنان وصل شده است تا ولتاژ خروجی زیر را تولید نماید:

$$v_{out} = v_2 - v_1$$

اگر  $v_1 = 2 + 3 \sin 3t$  V و  $v_2 = 2$  V باشند، انتظار داریم که خروجی  $v_{out} = -3 \sin 3t$  V بشود؛ ولتاژ 2 V مولفه‌ای مشترک برای  $v_1$  و  $v_2$  می‌باشد که نباید تقویت شود و در خروجی هم ظاهر نگردد.

برای تقویت‌کننده‌های عملی، مادر واقع سهم کمی از خروجی را در پاسخ به سیگنال‌های مشترک داریم. برای مقایسه یک op amp با دیگری، اغلب بیان توانمندی یک تقویت‌کننده به حذف سیگنال‌های مد مشترک به وسیله پارامتری به نام نسبت حذف حالت مشترک<sup>۱</sup> یا CMRR صورت می‌گیرد. با تعریف  $v_{OCM}$  به عنوان خروجی حاصل به هنگام برابری ورودی‌ها ( $v_1 = v_2 = v_{CM}$ )، می‌توان بهره حالت مشترک یک تقویت‌کننده را چنین تعریف کرد:

$$A_{CM} = \left| \frac{v_{OCM}}{v_{CM}} \right|$$

سپس CMRR را برحسب نسبت بهره مد تفاضلی به بهره مد مشترک تعریف می‌کنیم:

$$CMRR \equiv \left| \frac{A}{A_{CM}} \right| \quad (18)$$

اغلب این رابطه به صورت دسی‌بل (dB) در مقیاس لگاریتمی بیان می‌شود:

$$CMRR_{(dB)} \equiv 20 \log_{10} \left| \frac{A}{A_{CM}} \right| \text{ dB} \quad (19)$$

مقادیر نمونه چند نوع op amp در جدول ۶-۳ آمده است؛ یک مقدار 100 dB متعلق به نسبت مطلق  $10^5$  برای A به  $A_{CM}$  است.

### پس‌خورد منفی

دیدیم که بهره حلقه باز یک op amp خیلی بزرگ و به‌طور ایده‌آل بی‌نهایت است، ولی در عمل مقدار واقعی آن می‌تواند با مقدار تعیین‌شده به وسیله سازنده متفاوت باشد. مثلاً دما

به علاوه فرض دیود ایده‌آل کاهش قابل توجهی را در جبر مورد نیاز موجب می‌شود. توجه کنید که اگر  $A \rightarrow \infty$ ،  $R_o \rightarrow 0$ ،  $R_i \rightarrow \infty$  میل کنند، معادله (۱۵) به معادله زیر کاهش می‌یابد:

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_i} v_{in}$$

و این همان چیزی است که قبلاً برای ایده‌آل بودن تقویت‌کننده به دست آوردیم.

عبر برای مدار op amp شکل ۶-۳ با فرض بهره حلقه باز معین (A)، مقاومت ورودی معین ( $R_i$ ) و مقاومت خروجی صفر ( $R_o$ ) عبارتی برای  $v_{out}$  برحسب  $v_{in}$  به دست آورید. جواب:  $v_{out}/v_{in} = -AR_f R_i / (R_f R_i + R_i R_i + R_i R_f - AR_i R_i)$

### به‌دست آوردن قواعد op amp

دیدیم که op amp ایده‌آل مدل تقریباً دقیقی برای رفتار انواع واقعی آن است. با این وجود استفاده از نوع دقیق‌تر آن که بهره حلقه باز معین، مقاومت ورودی معین و مقاومت خروجی غیرصفر دارد، راه سراسر تری در به‌دست آوردن دو قاعده op amp ایده‌آل می‌باشد. با مراجعه به شکل ۶-۲۴، می‌بینیم که ولتاژ خروجی مدار باز یک op amp واقعی به صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$v_{out} = A v_d \quad (16)$$

$v_d$  را که گاهی به آن ولتاژ ورودی تفاضلی گفته می‌شود به صورت زیر می‌نویسیم:

$$v_d = \frac{v_{out}}{A} \quad (17)$$

انتظار داریم محدودیت‌های عملی بر ولتاژ خروجی  $v_{out}$  حاصل از op amp واقعی وجود داشته باشد. در بخش بعد خواهیم دید که باید op amp را به منابع تغذیه ولتاژ dc بیرونی برای راه‌اندازی مدار داخلی وصل کرد. این منابع ولتاژ، حداکثر مقدار  $v_{out}$  را تعیین می‌کنند و معمولاً در محدوده 5 تا 24V می‌باشند. اگر ولتاژ 24V را بر بهره حلقه باز 741A ( $2 \times 10^5$ ) تقسیم کنیم، داریم  $v_d = 120 \mu\text{V}$ . گرچه مقدار این ولتاژ صفر ولت نیست، ولی این ولتاژ کوچک در مقایسه با ولتاژ خروجی 24V، عملاً صفر است. یک op amp ایده‌آل دارای بهره حلقه باز بی‌نهایت است و در نتیجه مستقل از  $v_{out}$ ، ولتاژ  $v_d = 0$  می‌باشد که منجر به قاعده ۲ op amp می‌گردد.

قاعده ۱ برای op amp بیان می‌دارد که "به هیچ وجه جریانی در هیچ یک از ورودی‌ها جریان پیدا نمی‌کند". با توجه به شکل ۶-۲۳، جریان ورودی op amp برابر است با:

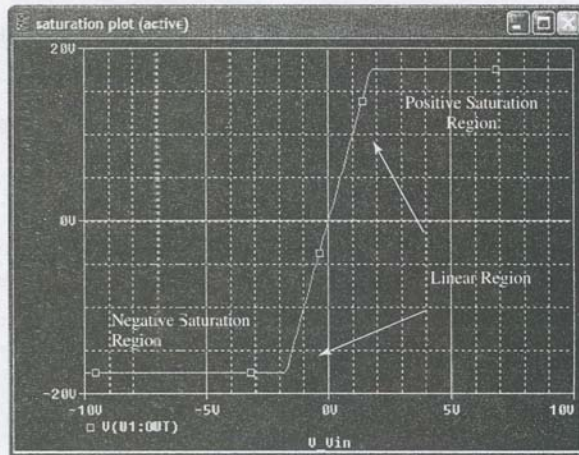
$$i_{in} = \frac{v_d}{R_i}$$

چند لحظه قبل دیدیم که  $v_d$  نوعاً ولتاژی کوچک است. همان‌طور که از جدول ۶-۳ می‌توان ملاحظه کرد مقاومت ورودی یک op amp نوعی خیلی بزرگ و از مگاهم تا تراهم است. با توجه به  $v_d = 120 \mu\text{V}$  در بالا و  $R_i = 2 \text{ M}\Omega$ ، جریان ورودی 60pA حاصل می‌گردد. این جریانی فوق‌العاده کوچک است و برای اندازه‌گیری آن آمپرمتر خاصی به نام پیکو آمپرمتر نیاز داریم. از جدول ۶-۳ درمی‌یابیم که جریان ورودی نوعی (یا دقیقتر بگوییم جریان تغذیه، یا بایاس ورودی) از یک 741A تنها 80nA است که سه برابر بیش از تخمین ماست. این یکی از معایب مدل op amp مورد استفاده ماست که برای تهیه جریان دقیق ورودی تهیه نشده است. در مقایسه با دیگر جریان‌ها در مدار یک op amp، این مقدار هم اساساً صفر می‌باشد. op amp های مدرن‌تر (مانند AD549) جریان بایاس کمتری دارند. پس نتیجه می‌شود که قانون 1 op amp ایده‌آل فرضی منطقی است.

### تمرین



شکل ۶-۲۸ مشخصه ورودی-خروجی یک op amp  $\mu A741$  با بهره 10 و تغذیه  $\pm 18$  که به صورت معکوس‌نکننده است.

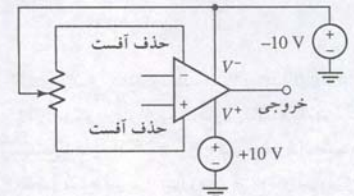


در خارج این محدوده، دیگر خروجی متناسب با ورودی نیست و به حداکثر مقدار  $17.6\text{ V}$  می‌رسد. این اثر غیرخطی به اشباع معروف است و به این حقیقت اشاره دارد که افزایش بیشتر در ولتاژ ورودی تغییری در ولتاژ خروجی نمی‌دهد. این پدیده به این دلیل رخ می‌دهد که خروجی op amp نمی‌تواند از ولتاژ تغذیه تجاوز کند. مثلاً اگر op amp را با  $+9\text{ V}$  و  $-5\text{ V}$  راه بیندازیم آن‌گاه ولتاژ خروجی به  $-5\text{ V}$  و  $+9\text{ V}$  محدود خواهد شد. خروجی op amp پاسخی خطی و محدود به نواحی اشباع مثبت و منفی است و به عنوان یک قاعده کلی سعی خواهیم کرد که هنگام طراحی مدار، ندانسته وارد ناحیه اشباع نشویم. بنابراین باید ولتاژ کار به دقت بر اساس بهره حلقه بسته و حداکثر ولتاژ ورودی انتخاب گردد.

### ولتاژ آفست ورودی

چند نکته عملی وجود دارند که باید هنگام کار با یک op amp در نظر گرفته شوند. یکی از این نکات غیرایده‌آل که ارزش گفتن ندارد، تمایل op amp به داشتن خروجی غیر صفر حتی به هنگام اتصال دو ورودی است. مقدار خروجی تحت این شرایط به نام ولتاژ آفست خوانده می‌شود و ورودی لازم برای کاهش خروجی به صفر را ولتاژ آفست ورودی گویند. با مراجعه به جدول ۶-۳ ملاحظه می‌شود که مقادیر نمونه برای ولتاژ آفست ورودی حدود میلی‌ولت یا کمتر است.

اغلب تقویت‌کننده‌ها با دو پایانه‌ای که روی آن "صفر آفست" یا "ایلاس" نوشته شده ارائه می‌گردند. این پایانه‌ها را با اتصال به یک مقاومت متغیر می‌توان برای تنظیم ولتاژ خروجی به کاربرد. یک مقاومت متغیر، قطعه‌ای سه پایانه است که به طور متداولی در موارد مسابهی به عنوان کنترل ولوم رادیو و نظایر آن به کار می‌رود. این وسیله دارای پیچ ولومی است که برای انتخاب مقدار واقعی مقاومت قابل چرخش است. اگر مقاومت متغیر فقط با دو پایانه انتهایی‌اش مورد استفاده قرار گیرد مقاومت آن جدا از وضعیت ولوم، مقداری ثابت خواهد بود. با استفاده از پایانه وسط و یکی از دو انتها مقاومتی دیده می‌شود که مقدارش به وضعیت ولوم وابسته است. شکل ۶-۲۹ نمونه‌ای از مدار را نشان می‌دهد که برای تنظیم ولتاژ خروجی یک op amp به کار رفته است. برگه اطلاعات سازندگان ممکن است مدار جداگانه و مقنونی را برای یک وسیله پیشنهاد نماید.



شکل ۶-۲۹ مدار خارجی پیشنهادی برای تهیه ولتاژ خروجی صفر. منابع تغذیه  $10\text{ V}$   $\pm$  نشان داده شده تنها یک مثال هستند. در مدار نهایی ولتاژ تغذیه واقعی به طور عملی انتخاب می‌گردد.

می‌تواند اثرات قابل توجهی روی عملکرد یک op amp داشته باشد به نحوی که رفتار آن در  $20^\circ\text{C}$  به کلی با دمای روزی آفتابی متفاوت است. همچنین بین انواع ساخته شده در زمان‌های مختلف نیز تفاوت چشمگیری ملاحظه می‌شود. اگر مداری طراحی کنیم که در آن بهره حلقه باز ضربدر ولتاژ یکی از پایانه‌های ورودی باشد، پیش‌بینی ولتاژ خروجی با دقتی مناسب مشکل خواهد بود، و انتظار می‌رود با دما تغییر کند.

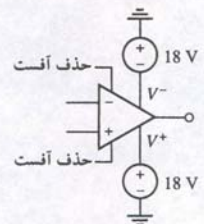
راه‌حل چنین مشکل بالقوه به کارگیری **پسخور منفی** است. این تکنیک عبارت است از فرآیند تفاضل بخش کوچکی از خروجی از ورودی. اگر پدیده‌هایی بتوانند مشخصات مدار را به نحوی تغییر دهند که خروجی تمایل به افزایش داشته باشد، در همان زمان ورودی کم می‌شود. پسخور منفی زیاد مانع از هر گونه تقویت مفید می‌گردد، ولی مقدار کم آن ثبات و پایداری را به دنبال دارد. مثالی از یک پسخور منفی احساس ناخوشایندی است که در دستان خود در نزدیکی شعله آتش داریم. هرچه بیشتر به آتش نزدیک شویم، سیگنال منفی بزرگ‌تری از دستان خود حس خواهیم کرد. با این وجود، زیاده‌روی در پسخور منفی می‌تواند موجب انزجار از گرما و نهایتاً انجماد و به دنبال آن مرگ شود. پسخور مثبت فرآیندی است که در آن بخشی از سیگنال خروجی به ورودی بازگردانده شده است. مثال رایجی از آن هنگامی است که یک میکروفون به سمت گوینده گرفته شده و صدای خیلی ملایمی به سرعت تقویت شده و این تقویت به فریاد تبدیل می‌شود. پسخور مثبت نهایتاً سیستمی ناپایدار را به دست می‌دهد.

همه مدارهایی که در این فصل ملاحظه می‌شوند پسخور منفی را به وسیله یک مقاومت بین پایه خروجی و پایه ورودی معکوس‌گر خواهند داشت. حلقه حاصل بین خروجی و ورودی، وابستگی ولتاژ خروجی روی مقدار واقعی بهره حلقه باز را کاهش می‌دهد (در مثال ۶-۴ ملاحظه شد). پس لزومی ندارد که بهره حلقه باز دقیق op amp مورد استفاده معلوم باشد، زیرا تغییرات اثر مهمی بر رفتار مدار ندارد. پسخور منفی، همچنین پایداری را در مواردی که A به محیط op amp حساس است، افزایش می‌دهد. مثلاً اگر A ناگهان در پاسخ به یک تغییر در دمای محیط افزایش یابد، یک ولتاژ پسخور بزرگ‌تری به ورودی معکوس‌گر اضافه می‌شود. این خود موجب کاهش تفاضل ولتاژ ورودی و بنابراین تغییر کمتر  $A_V$  می‌گردد. باید توجه داشت که بهره مدار حلقه بسته همیشه کمتر از بهره آن در حلقه باز است. این بهایی است که ما برای پایداری و کاهش حساسیت به تغییرات پارامتر می‌پردازیم.

### اشباع<sup>۱</sup>

تاکنون op amp را با فرض این که مشخصات آن مستقل از نحوه اتصال آن در مدار است کاملاً خطی فرض کردیم. در عمل، لازم است تغذیه‌ای را به op amp متصل کنیم تا مدار راه‌اندازی شود (شکل ۶-۲۷). معمولاً یک تغذیه مثبت بین 5 تا  $24\text{ V}$  به پایانه  $V^+$  و تغذیه‌ای منفی به همان اندازه به پایانه  $V^-$  وصل می‌گردد. در عمل مواردی وجود دارد که تنها یک تغذیه متصل می‌گردد و نیز دو مقدار ولتاژ با هم اختلاف دارند. سازندگان op amp معمولاً حداکثر ولتاژ تغذیه را مشخص می‌کنند و مقادیر فراتر از آن به ترانزیستورهای داخلی آسیب می‌رسانند.

ولتاژهای تغذیه به هنگام طراحی اهمیت خاصی دارند زیرا مقدار آن‌ها بیانگر حداکثر ولتاژ ممکن خروجی op amp می‌باشد. در عمل این ولتاژ خروجی حداکثر حدود یک ولت از تغذیه کمتر می‌باشد. به عنوان مثال مدار op amp شکل ۶-۲۶ را در نظر بگیرید که اینک به عنوان تقویت‌کننده معکوس‌نکننده با بهره 10 متصل شده است. همان‌طور که در شبیه‌سازی PSpice در شکل ۶-۲۸ ملاحظه می‌شود، در واقع مارفتاری خطی از op amp را مشاهده می‌کنیم ولی این رفتار فقط در محدوده  $1.71\text{ V} \pm$  برای ولتاژ ورودی است.



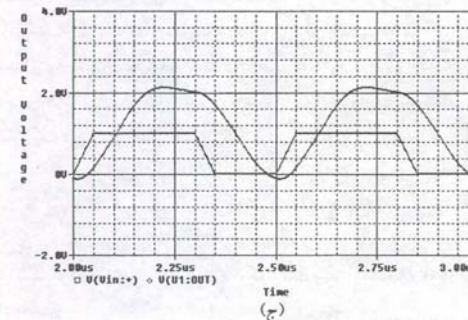
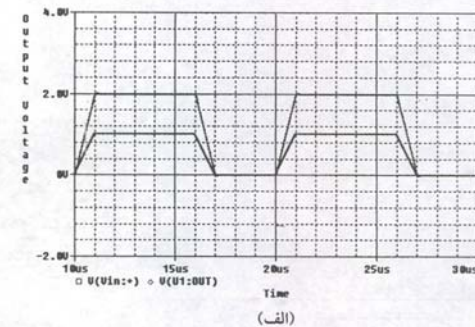
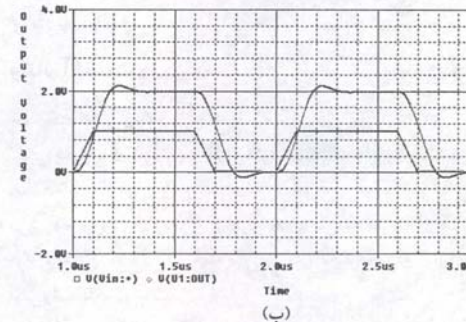
شکل ۶-۲۷ op amp با منابع تغذیه مثبت و منفی. برای مثال دو منبع  $18\text{ V}$  به کار رفته است؛ به پلاریته هر منبع توجه نمایید.



سرعت واکنش<sup>۱</sup>

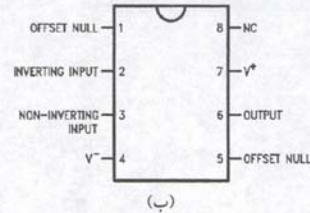
تاکنون، ما فرض کردیم که op amp به سیگنال‌ها با هر فرکانسی به‌طور یکسان پاسخ می‌دهد، ولی جای تعجب نیست که بدانیم در عمل از این بابت محدودیت‌هایی وجود دارد. چون می‌دانیم که مدارهای op amp در dc به خوبی کار می‌کنند، که در واقع در فرکانس صفر است، باید رفتار آن را ضمن افزایش فرکانس بررسی کنیم. یک معیار از رفتار فرکانسی یک op amp، سرعت واکنش آن است که عبارت‌انداز سرعت پاسخ ولتاژ خروجی به تغییرات ورودی. اغلب آن را به صورت  $V/\mu s$  بیان می‌کنند. مشخصات نمونه از سرعت واکنش چند قطعه موجود تجاری در جدول ۶-۳ ارائه شده است که مقادیری از مرتبه چند ولت بر میلی‌ثانیه را به دست می‌دهد. یک نمونه استثنایی OPA690 است که به عنوان یک op amp برای کاربردهای ویدیویی طراحی شده است و در چند صد MHz کار می‌کند. خواهیم دید که سرعت واکنش  $1800 V/\mu s$  برای این وسیله دور از واقعیت نیست، هرچند دیگر پارامترهای آن چون جریان تغذیه ورودی و  $CMRR$  به همین علت آسیب دیده‌اند.

شبیه‌سازی PSpice در شکل ۶-۳۰ نزول در عملکرد یک op amp را به علت محدودیت سرعت واکنش نشان می‌دهد. مدار شبیه‌سازی از یک LF411 است که به عنوان تقویت‌کننده غیر معکوس‌کننده با بهره 2 و تغذیه  $\pm 15 V$  آرایش یافته است. شکل موج ورودی، موج‌زیرین بوده و مقدار پیک آن  $1 V$  است؛ خروجی در قسمت بالاتر کشیده شده است. شبیه‌سازی مربوط به شکل ۶-۳۰ (الف) دارای زمان صعود و نزول  $1 \mu s$  است که از نظر انسان زمانی کوتاه است ولی به راحتی LF411 از عهده آن برمی‌آید. با کاهش زمان صعود و نزول به اندازه  $10 ns$  تا  $100 ns$  (شکل ۶-۳۰ (ب)) ملاحظه می‌کنیم که LF411 در دنبال‌کردن ورودی کمی مشکل پیدا کرده است. در زمان صعود و نزول  $50 ns$  (شکل ۶-۳۰ (ج)) می‌بینیم نه فقط



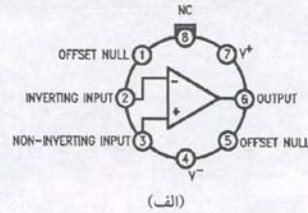
شکل ۶-۳۰ عملکرد شبیه‌سازی شده op amp LF411 که به عنوان یک معکوس‌کننده با بهره 2، منبع تغذیه  $\pm 15 V$  و ورودی پالس‌داده شده متصل شده است. (الف) زمان صعود و نزول =  $1 \mu s$ ، پهنای پالس =  $5 \mu s$ ، (ب) زمان صعود و نزول =  $100 ns$ ، پهنای پالس =  $500 ns$  (ج) زمان صعود و نزول =  $50 ns$ ، پهنای پالس =  $250 ns$ .

Dual-In-Line or S.O. Package

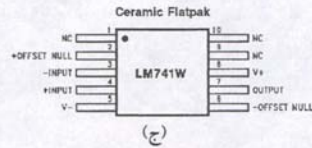


(ب)

Metal Can Package



(الف)



(ج)

شکل ۶-۳۱ چند بسته‌بندی مختلف op map LM741. (الف) بسته‌بندی فلزی استوانه‌ای. (ب) بسته‌بندی دو ردیفه. (ج) بسته‌بندی مسطح سرامیکی.

تأخیری قابل توجه بین خروجی و ورودی وجود دارد، بلکه شکل موج به مقدار قابل توجهی تغییر شکل یافته است که ویژگی خوبی برای یک تقویت‌کننده نیست. این رفتار مشاهده شده با سرعت واکنش  $15 V/\mu s$  در جدول ۶-۳ ارتباط دارد، و بیان می‌کند که خروجی برای تغییر از 0 به  $2 V$  (یا از  $2 V$  به 0) ممکن است نیاز به  $130 ns$  داشته باشد.

## بسته‌بندی

تقویت‌کننده‌های عملیاتی جدید بسته به محیط مصرف در انواع متنوعی از بسته‌بندی در دسترسند. بعضی از آن‌ها برای دماهای بالا مناسبند و به طرق مختلف بر روی مدار چاپی نصب می‌گردند. شکل ۶-۳۱ چند نمونه مختلف از LM741 که به وسیله ناسیونال ساخته شده را نشان می‌دهد. عبارت "NC" که در کنار یک پایه قرار دارد به معنی "نبود اتصال" است. این بسته‌بندی‌ها استاندارد هستند و در رابطه با مدارات مجتمع مختلف به کار گرفته می‌شوند. معمولاً تعداد پایه‌ها از حد لازم بیشتر است.

همان‌طور که دیدیم PSpice در پیش‌بینی خروجی یک مدار op amp، بسیار مفید است خصوصاً در حالتی که ورودی‌ها با زمان تغییر کنند. با این وجود خواهیم دید که مدل ایده‌آل op amp، به‌خوبی با شبیه‌سازی‌های PSpice هم‌خوانی دارد. هنگام اجرای شبیه‌سازی یک مدار op amp باید توجه داشت که منابع تغذیه مثبت و منفی به آن وصل شوند. گرچه مدل، پایه‌های صفر آفست را که برای صفرکردن ولتاژ خروجی نشان می‌دهد، ولی PSpice از آن‌ها استفاده نمی‌کند و بنابراین آزاد رها می‌شوند.

جدول ۶-۳ شماره قطعه متفاوتی را در حد ارزیابی آن نشان می‌دهد. انواع مدل‌های تجاری این نرم‌افزار در دسترس‌اند.

با PSpice مدار شکل ۶-۳ را شبیه‌سازی کنید. اگر منبع تغذیه dc،  $\pm 15 V$ ، به کار رفته باشد نقطه‌های) شروع اشباع را مشخص نمایید. بهره محاسبه شده را با آنچه که برای مدل op amp ایده‌آل پیش‌بینی شده بود، مقایسه کنید.

کار را با ترسیم مدار تقویت‌کننده معکوس‌گر شکل ۶-۳ با استفاده از ابزار ترسیمی شماتیک شکل ۶-۳۲ آغاز می‌کنیم. توجه کنید که دو منبع تغذیه dc جداگانه  $15 V$  برای تغذیه op amp لازم است.

تحلیل قبلی ما بهره 10- را برای op amp ایده‌آل پیش‌بینی کرده بود. با یک ورودی  $5 \sin 3t \text{ mV}$  خروجی  $50 \sin 3t \text{ mV}$  به دست خواهد آمد. با این وجود به‌طور ضمنی فرض کردیم که هر ولتاژ ورودی با ضریب 10- تقویت می‌شود. بر اساس ملاحظات عملی، انتظار داریم که این مطالب برای ولتاژهای کوچک ورودی صحت داشته باشد، ولی خروجی نهایتاً به مقداری در حد ولتاژ تغذیه به اشباع می‌رسد.



شکل ۶-۳۴ (الف) ولتاژ خروجی مدار op amp که با ابزار مکان‌نما ترسیم و در آن ناحیه اشباع مشخص است. (ب) پنجره بزرگ‌شده مکان‌نمای prob.

| Probe Cursor |             |
|--------------|-------------|
| A1 =         | -1.45, 14.5 |
| A2 =         | 1.45, -14.5 |
| dif =        | -2.91, 29.0 |

(ب)

## تمرین

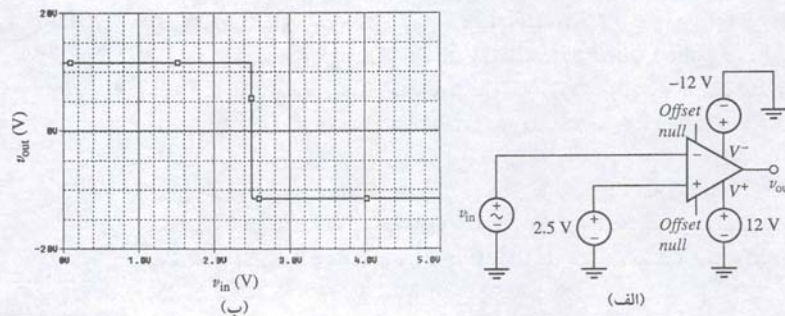
۶-۷ بقیه مدارهای op amp این فصل را شبیه‌سازی کنید و نتایج باقیمانده را با آنچه در مدل ایده‌آل پیش‌بینی شده بود مقایسه نمایید.

## ۶-۶ مقایسه‌گرها و تقویت‌کننده‌های وسایل اندازه‌گیری

## مقایسه‌گرها

هر مدار op amp که تاکنون مورد بررسی قرار گرفته است اتصالی را بین پایه خروجی و پایه معکوس‌گر ورودی داشته است. این عمل را حلقه بسته<sup>۱</sup> می‌نامند و برای تهیه پسخورد منفی طبق آنچه که قبلاً بحث شد از آن استفاده می‌شود. حلقه بسته روشی ارجح در استفاده از یک op amp به عنوان تقویت‌کننده است زیرا رفتار مدار را از تغییرات ناشی از بهره حلقه باز که به علت تغییر دما یا تفاوت‌های ساخت می‌باشد، جدا می‌سازد. البته مواردی وجود دارد که در آن آرایش حلقه باز برای op amp ترجیح داده می‌شود. وسایلی که در این گونه کاربردها به دفعات استفاده می‌شوند را مقایسه‌گر<sup>۲</sup> می‌نامند. زیرا آن‌ها کمی متفاوت با op amp های معمولی ساخته می‌شوند تا سرعت آن‌ها در اعمال حلقه باز بهبود یابد.

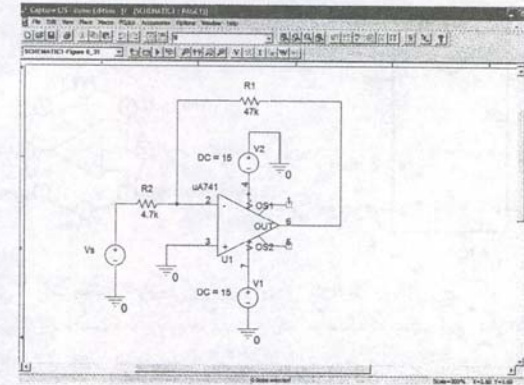
شکل ۶-۳۵ (الف) یک مدار مقایسه‌گر ساده است که یک ولتاژ مرجع به ورودی معکوس‌نکننده آن متصل بوده و ولتاژ مورد مقایسه ( $V_{in}$ ) هم به ورودی معکوس‌گر وصل است.



شکل ۶-۳۵ (الف) یک مدار مقایسه‌گر ساده با 2.5 V ولتاژ مرجع. (ب) گراف مشخصه ورودی-خروجی.

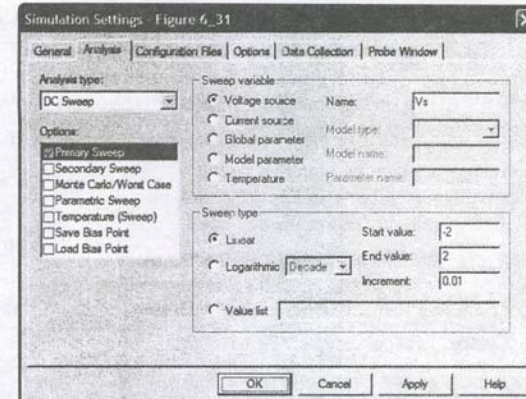
1. closed loop 2. comparator

شکل ۶-۳۲ مدار تقویت‌کننده معکوس‌گر A741، شکل ۶-۳ که با ابزار رسم شماتیک کشیده شده است.



نتیجه تحلیل dc sweep برای  $2 < V_s < -2$  در شکل ۶-۳۳ نشان داده شده است که کمی وسیع‌تر از ولتاژ تغذیه تقسیم بر بهره ولت است بنابراین نتایج شامل نواحی اشباع مثبت و منفی خواهد بود. با استفاده از cursor tool هم می‌بینیم که مشخصه ورودی - خروجی تقویت‌کننده در شکل ۶-۳۴ (الف) نیز در محدوده وسیعی مربوط به  $-1.462V < V_s < +1.462V$  خطی است، که دوباره در شکل ۶-۳۴ (ب) برای وضوح بیشتر نشان داده شده است. این محدوده کمی کوچک‌تر از محدوده‌ای است که از تقسیم ولتاژهای مثبت و منفی تغذیه بر بهره به دست می‌آید. در خارج این محدوده، خروجی op amp به اشباع می‌رسد، و فقط به مقدار کمی به ولتاژ ورودی وابسته است. در دو ناحیه اشباع، مدار به عنوان یک تقویت‌کننده عمل نمی‌کند.

با افزایش تعداد ارقام مکان‌نما (Tools, options, Number of cursor digit) به 10، درمی‌یابیم که به ازای ولتاژ ورودی  $V_s = 1.0V$ ، ولتاژ خروجی  $-9.9958340$  است که کمی کوچک‌تر از مقدار پیش‌بینی شده 10- در مدل تقویت‌کننده ایده‌آل است، و نیز کمی با مقدار حاصل در مثال ۶-۳، یعنی  $-9.999448$  تفاوت دارد. هنوز نتایج پیش‌بینی شده با PSpice برای A741 در چند صدم درصدی مدل تحلیلی است و نشان می‌دهد که مدل op amp ایده‌آل تقریب بسیار خوبی برای مدارهای مجتمع است.



شکل ۶-۳۳ پنجره DC Sweep Setup.



حداکثر شود، انتظار داریم  $R_4/R_3 = R_2/R_1$  باشد، به نحوی که تقویت برابر مولفه‌های حالت مشترک سیگنال‌های ورودی به دست آید. برای شکافتن بیشتر موضوع، ولتاژ را در خروجی دنبال‌گر ولتاژ بالا " $v_-$ " و ولتاژ در خروجی دنبال‌گر ولتاژ پایین را " $v_+$ " می‌نامیم. با فرض این‌که هر سه تقویت‌کننده ایده‌آل باشند و نام‌گذاری ولتاژ در هر ورودی طبقه تفاضلی با  $v_x$  می‌توان معادلات گرهی زیر را نوشت:

$$\frac{v_x - v_-}{R_1} + \frac{v_x - v_{out}}{R_2} = 0 \quad (۲۰)$$

و

$$\frac{v_x - v_+}{R_3} + \frac{v_x}{R_4} = 0 \quad (۲۱)$$

با حل معادله (۲۱) برای  $v_x$  داریم:

$$v_x = \frac{v_+}{1 + R_3/R_4} \quad (۲۲)$$

و با جایگزین در معادله (۲۰) عبارتی برای  $v_{out}$  برحسب ورودی داریم:

$$v_{out} = \frac{R_4}{R_3} \left( \frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_4/R_3} \right) v_+ - \frac{R_2}{R_1} v_- \quad (۲۳)$$

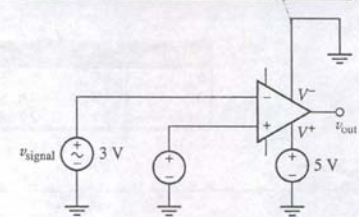
واضح است که معادله (۲۳)، در حالت کلی اجازه تقویت مولفه‌های حالت مشترک را می‌دهد. در حالت خاص که به هر حال  $R_4/R_3 = R_2/R_1 = K$  است، معادله (۲۳) به  $Kv_d = K(v_+ - v_-)$  کاهش می‌یابد به طوری که برای op amp های ایده‌آل تنها تفاضل تقویت می‌شود و بهره هم با نسبت مقاومت‌ها تعیین می‌گردد. چون این مقاومت‌ها برای تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری درونی است و به وسیله کاربر قابل دسترسی نیستند. قطعات عملی مانند AD622 اجازه تنظیم بهره را بین 1 الی 1000 می‌دهند که این کار به وسیله مقاومت خارجی بین دو پایه که در شکل ۶-۳۸ (ب) نشان داده شده است، انجام می‌گردد.

## ۶-۷ خلاصه فصل و مرور

- در تحلیل op amp ایده‌آل دو قاعده اساسی را باید به کاربرد:
  - هیچ جریانی به هیچ‌یک از پایه‌های ورودی وارد نمی‌شوند.
  - هیچ اختلاف پتانسیلی بین پایه‌های ورودی وجود ندارد.
- هدف از تحلیل مدارهای op amp معمولاً یافتن ولتاژ خروجی برحسب بعضی از کمیت یا کمیت‌های ورودی است.
- تحلیل گرهی معمولاً بهترین انتخاب در op amp است و بهتر است از ورودی شروع و به سمت خروجی ادامه یابد.
- برای جریان خروجی op amp نمی‌توان مقدار فرض کرد، بلکه باید پس از تعیین ولتاژ خروجی، آن را به دست آورد.
- بهره مدار op amp معکوس‌گر با معادله زیر داده می‌شود:
 
$$v_{out} = - \frac{R_f}{R_{in}} v_{in}$$
- بهره مدار op amp معکوس‌نکننده با معادله زیر داده می‌شود:
 
$$v_{out} = (1 + \frac{R_f}{R_1}) v_{in}$$

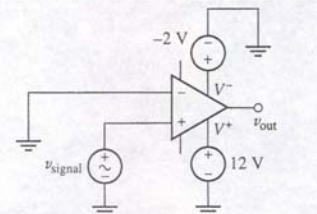
چون op amp دارای بهره حلقه باز،  $A$ ، خیلی بزرگی است ( $10^5$  یا بیشتر که معمولاً می‌توان در جدول ۶-۳ مشاهده کرد)، اختلاف ولتاژ زیادی بین پایه‌های ورودی لازم نیست تا آن را به حالت اشباع برود. در واقع یک اختلاف ولتاژ ورودی به اندازه ولتاژ تغذیه تقسیم بر  $A$  لازم است - تقریباً  $\pm 120 \mu V$  برای مدار شکل ۶-۳۵ (الف) و  $A = 10^5$ . خروجی تفکیک‌شده (جدا از هم شده) مقایسه‌گر در شکل ۶-۳۵ (ب) دیده می‌شود که پاسخ بین دو مقدار اشباع مثبت و منفی تغییر کرده است و در آن هیچ ناحیه تقویت خطی ملاحظه نمی‌شود. بنابراین یک خروجی 12 V از مقایسه‌گر نشانگر ورودی کمتر از ولتاژ مرجع، و یک خروجی 12 V منفی بیانگر ورودی بزرگتر از مرجع است اگر ما ولتاژ مرجع را به ورودی معکوس‌گر ببندیم رفتار حاصل مخالف خواهد بود.

مثال ۶-۸

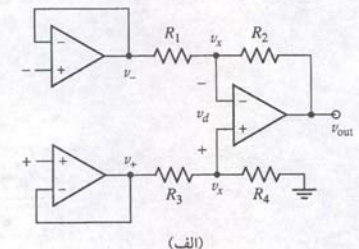


شکل ۶-۳۶ یک طراحی برای مدار موردنظر.

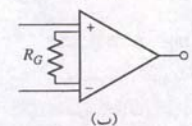
## تمرین



شکل ۶-۳۷ یک راه‌حل ممکن برای تمرین ۶-۸



(الف)



(ب)

شکل ۶-۳۸ (الف) تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری مبتنا. (ب) نماد مورد استفاده رایج.

یک مدار طراحی کنید که یک خروجی "منطق 1" را اگر سیگنال ولتاژ به زیر 3 V برود تهیه نماید و در غیر این صورت صفر ولت است.

چون می‌خواهیم خروجی مقایسه‌گر ما بین 0 و 5 V نوسان کند، ما از یک op amp با یک تغذیه تک‌ورودی 5 V استفاده می‌کنیم که مطابق شکل ۶-۳۶ متصل شده است. ما یک ولتاژ مرجع 3 V + به ورودی معکوس‌نکننده وصل می‌کنیم که ممکن است با دو باتری 1.5 V سری یا یک مدار مرجع دیود زئر مناسب فراهم شده باشد. سیگنال ولتاژ ورودی ( $v_{signal}$ ) هم به ورودی معکوس‌گر وصل است. در واقع محدوده ولتاژ اشباع یک مدار مقایسه‌گر کمی کمتر از ولتاژ منبع تغذیه است، بنابراین کمی تنظیم ممکن است همراه با اشباع یا تست لازم باشد.

۶-۸ مداری طراحی کنید که اگر  $v_{signal}$  از 0 V تولید کند، خروجی 12 V را تولید می‌نماید در غیر این صورت -2 V تولید می‌شود.

جواب: یک راه ممکن شکل ۶-۳۷ است.

## تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری

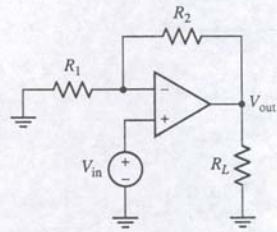
مدار مقایسه‌گر مینا بر روی اختلاف ولتاژ بین دو پایه ورودی به دستگاه عمل می‌کند، ولی سیگنال‌ها را تقویت نمی‌کند زیرا خروجی متناسب با ورودی نیست. تقویت‌کننده تفاضلی شکل ۶-۱۰ هم مادامی که به اشباع نرود بر روی اختلاف ولتاژ بین ورودی‌های معکوس‌کننده و معکوس‌نکننده عمل کرده و خروجی متناسب با این تفاضل تولید می‌نماید. با این وجود وقتی که با ولتاژ ورودی کوچک سروکار داریم، راه بهتر وسیله‌ای به نام تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری است، که در واقع از سه تقویت‌کننده در یک بسته استفاده می‌نماید.

مثالی از یک آرایش تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری در شکل ۶-۳۸ (الف) و نماد آن در شکل ۶-۳۸ (ب) دیده می‌شود. هر ورودی مستقیماً به طبقه دنبال‌گر ولتاژ<sup>۱</sup> (ولتاژ فالوور) اعمال شده و هر دو خروجی دنبال‌گرها به یک طبقه تقویت‌کننده تفاضلی اعمال می‌گردد. این وسیله خصوصاً در مواردی مناسب است که سیگنال ولتاژ ورودی خیلی کوچک است (مثلاً از مرتبه میلی‌ولت) از ولتاژ تولیدشده به وسیله ترموکوپل‌ها، یا گیت‌های کششی<sup>۲</sup>، یا یک سیگنال پارازیت حالت مشترک در حد چند ولت می‌توان نام برد.

اگر اجزای تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری همگی در یک تراشه ساخته شوند، آن‌گاه ممکن است انتظار داشت که مشخصه‌های وسیله هم‌خوانی داشته باشند و به نسبت به مقاومت‌های دقیقی دست یابیم. برای این‌که CMRR تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری

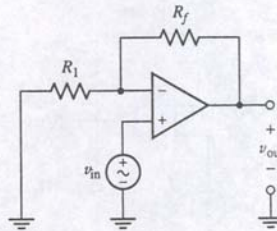


و (ج)  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ،  $R_L = 330 \Omega$ ،  $V_{in} = 100 \text{ mV}$  و  $R_2 = 6.8 \text{ k}\Omega$ .



شکل ۶-۴۳

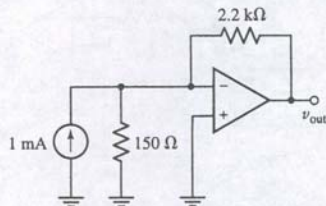
۱۱. در مدار شکل ۶-۴۵  $R_1 = R_f = 1 \text{ k}\Omega$  است. ولتاژ خروجی  $V_{out}$  را رسم کنید اگر  
الف.  $V_{in} = 4 \sin 10t \text{ V}$   
ب.  $V_{in} = 1 + 0.255 \sin 10t \text{ V}$  باشد.



شکل ۶-۴۵

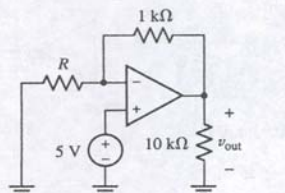
۱۲. در مدار op amp شکل ۶-۴۵  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$  و  $R_f = 1 \text{ k}\Omega$  است. ولتاژ خروجی  $V_{out}$  را رسم کنید اگر (الف)  $V_{in} = 2 \cos 2t \text{ V}$  و (ب)  $V_{in} = 4 + \cos 2t \text{ V}$ .

۱۳. با مراجعه به شکل ۶-۴۶، ولتاژ  $V_{out}$  را محاسبه کنید.

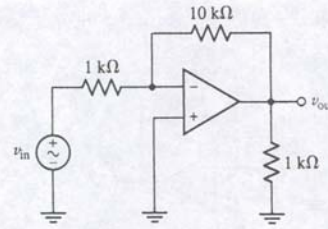


شکل ۶-۴۶

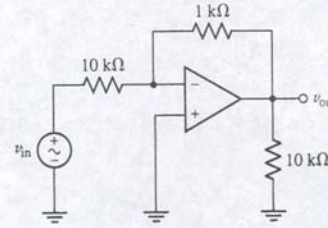
۱۴. در مدار شکل ۶-۴۷، چه مقداری برای  $R$  لازم است تا توان  $150 \text{ mW}$  به مقاومت  $10 \text{ k}\Omega$  منتقل شود.



شکل ۶-۴۷



شکل ۶-۴۱



شکل ۶-۴۲

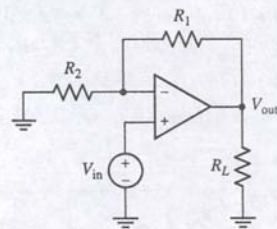
۵. مداری رسم کنید که  $-9 \text{ V}$  را به بار  $47 \text{ k}\Omega$  حمل کند، اگر فقط  $\pm 5 \text{ V}$  برای تغذیه موجود باشد (برای این مسئله لازم نیست منابع تغذیه که به  $\pm 5 \text{ V}$  محدود نیستند را رسم کرد).

۶. مداری برای حمل  $20 \text{ V}$  به یک مقاومت  $1 \text{ k}\Omega$  رسم کنید، اگر منابع تغذیه  $\pm 5 \text{ V}$  باشد (لازم نیست منابع تغذیه که به  $\pm 5 \text{ V}$  محدود نیستند را رسم کرد).

۷. مداری طراحی کنید که  $1.5 \text{ V}$  را به یک بار نامشخص حمل کند، اگر فقط یک منبع تغذیه موجود باشد. لازم نیست منبع تغذیه را در op amp لحاظ کنید.

۸. یک مدار برای حمل  $3 \text{ V}$  به بار ناشناخته‌ای طراحی کنید. اگر فقط یک منبع تغذیه موجود باشد لازم نیست منبع تغذیه را در op amp لحاظ کنید.

۹. برای مدار op amp شکل ۶-۴۳،  $V_{out}$  را به دست آورید اگر (الف)  $V_{in} = 300 \text{ mV}$  و  $R_1 = 47 \Omega$  و  $R_2 = 10 \Omega$  باشد؛ (ب)  $V_{in} = 1.5 \text{ V}$  و  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$  و  $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$  و (ج)  $V_{in} = -1 \text{ V}$  و  $R_1 = 4.7 \text{ k}\Omega$  و  $R_2 = 3.3 \text{ k}\Omega$ .



شکل ۶-۴۳

۱۰. برای مدار شکل ۶-۴۴،  $V_{out}$  را به دست آورید اگر (الف)  $V_{in} = 200 \text{ mV}$  و  $R_1 = 10 \Omega$  و  $R_2 = 47 \Omega$  و  $R_L = 10 \text{ k}\Omega$  باشد؛ (ب)  $V_{in} = -9 \text{ V}$  و  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$  و  $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$  و  $R_L = 1 \text{ k}\Omega$ .

- همواره یک مقاومت از پایه خروجی یک op amp به پایه ورودی معکوس‌گر وصل می‌شود تا بدین‌وسیله با پس‌خورد منفی، پایداری را افزایش دهد.
- مدل op amp ایده‌آل بر پایه بهره حلقه باز بینهایت A، مقاومت ورودی بی‌نهایت و مقاومت صفر خروجی،  $R_o$ ، استوار است.
- در عمل، محدوده ولتاژ خروجی op amp با ولتاژهای تغذیه تعیین می‌گردد.

## ۶-۸ خواندنی‌های کمکی

Two very readable books which deal with a variety of op amp applications are:  
R. Mancini (ed.), *Op Amps Are For Everyone*, 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003. Also available on the Texas Instruments website ([www.ti.com](http://www.ti.com)).  
W. G. Jung, *Op Amp Cookbook*, 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997.  
Characteristics of Zener and other types of diodes are covered in Chapter 1 of W. H. Hayt, Jr. and G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design*, 2nd ed. New York: Wiley, 1995.

One of the first reports of the implementation of an "operational amplifier" can be found in

J. R. Ragazzini, R. M. Randall, and F. A. Russell, "Analysis of problems in dynamics by electronic circuits," *Proceedings of the IRE* **35**(5), 1947, pp. 444-452.

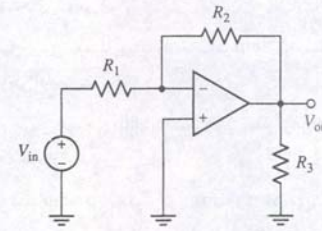
And an early applications guide for the op amp can be found on the Analog Devices, Inc. website ([www.analog.com](http://www.analog.com)):

George A. Philbrick Researches, Inc., *Applications Manual for Computing Amplifiers for Modelling, Measuring, Manipulating & Much Else*. Norwood, Mass.: Analog Devices, 1998.

## مسائل

### ۶-۲ تقویت‌کننده عملیاتی ایده‌آل

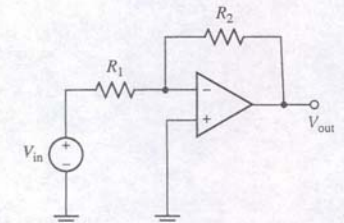
۱. برای مدار op amp شکل ۶-۳۹،  $V_{out}$  را به دست آورید اگر (الف)  $V_{in} = 3 \text{ V}$  و  $R_1 = 10 \Omega$  و  $R_2 = 100 \Omega$  باشد؛ (ب)  $V_{in} = 2.5 \text{ V}$  و  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$  و  $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$  و (ج)  $V_{in} = -1 \text{ V}$  و  $R_1 = 3.3 \text{ k}\Omega$  و  $R_2 = 4.7 \text{ k}\Omega$ .



شکل ۶-۴۰

۳. ولتاژ خروجی  $V_{out}$  برای مدار op amp در شکل ۶-۴۱ را رسم کنید اگر (الف)  $V_{in} = 2 \sin 5t \text{ V}$  و  $V_{in} = 1 + 0.5 \sin 5t \text{ V}$  باشد.

۴. ولتاژ خروجی  $V_{out}$  برای مدار op amp در شکل ۶-۴۲ را رسم کنید اگر (الف)  $V_{in} = 10 \cos 4t \text{ V}$  و (ب)  $V_{in} = 15 + 4 \cos 4t \text{ V}$  باشد.



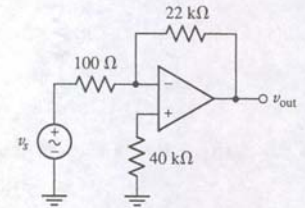
شکل ۶-۳۹

۲. برای مدار تقویت‌کننده شکل ۶-۴۰،  $V_{out}$  را به دست آورید اگر (الف)  $V_{in} = 1.5 \text{ V}$  و  $R_1 = 10 \Omega$  و  $R_2 = 47 \Omega$  و  $R_3 = 10 \Omega$  باشد؛ (ب)  $V_{in} = -9 \text{ V}$  و  $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$  و  $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$  و  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$  و (ج)



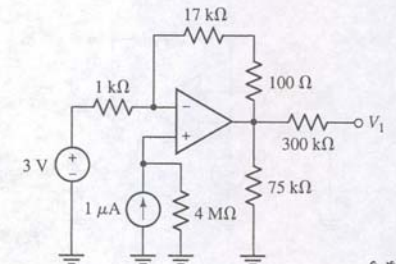
۱۵. یک میکروفون می‌تواند 0.5V را وقتی کسی در فاصله 20ft دست می‌زند، انتقال دهد. یک سوئیچ الکترونیک مقاومت تونن معادل 670Ω را داشته و برای فعال شدن به 100mA جریان نیاز دارد. مداری طراحی کنید که میکروفون را به سوئیچ الکترونیک وصل کند که با دست زدن فردی فعال شود.

۱۶. برای مدار شکل ۶-۴۸، عبارتی برای  $v_{out}$  بر حسب  $v_s$  به دست آورید.



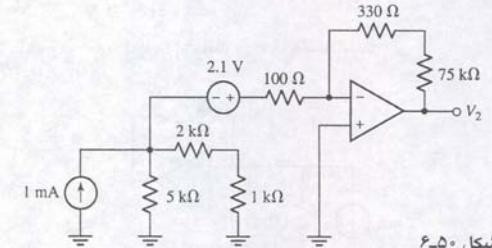
شکل ۶-۴۸

۱۷. برای مدار شکل ۶-۴۹،  $v_1$  را محاسبه کنید.



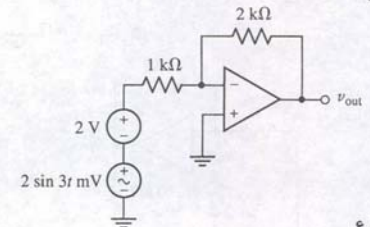
شکل ۶-۴۹

۱۸. برای مدار شکل ۶-۵۰،  $v_2$  را محاسبه نمایید.



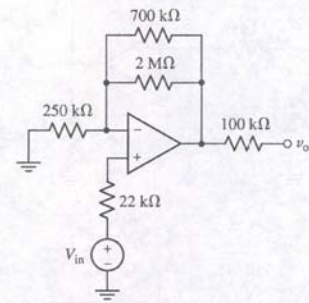
شکل ۶-۵۰

۱۹. عبارتی برای  $v_{out}$  در مدار شکل ۶-۵۱ پیدا کنید و در  $t = 3$  آن را ارزیابی نمایید.



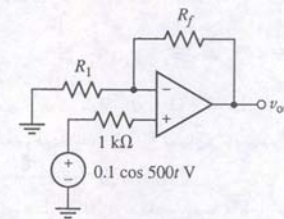
شکل ۶-۵۱

۲۰. چه مقداری از  $v_{in}$  منجر به خروجی 18V در مدار شکل ۶-۵۲ می‌گردد؟



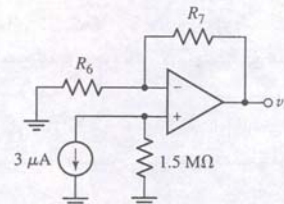
شکل ۶-۵۲

۲۱.  $R_1$  و  $R_f$  را در شکل ۶-۵۳ برای محاسبه  $v_{out} = 23.7 \cos 500t$  V انتخاب کنید.



شکل ۶-۵۳

۲۲. عبارتی برای  $v_{out}$  در شکل ۶-۵۴ بدون استفاده از تبدیل منبع به دست آورید.



شکل ۶-۵۴

۲۳. با مراجعه به مدار شکل ۶-۵۵:

(الف) اگر  $R_A = R_B = 10k\Omega$ ,  $v_B = 1V$ ,  $v_A = 0$

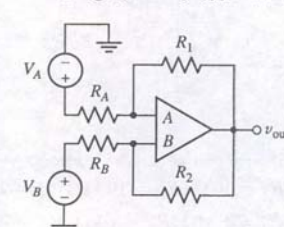
$R_1 = 70k\Omega$ ,  $R_2 = \infty$  و  $v_{out} = 8V$  باشد، کدام پایانه (A یا B) معکوس‌نکننده است؟

(ب)  $v_B = 0V$ ,  $v_A = 10V$  است. اگر B ورودی وارونگر باشد،  $R_A$ ,

$R_B$  و  $R_2$  را برای تولید یک ولتاژ خروجی 20 V انتخاب نمایید.

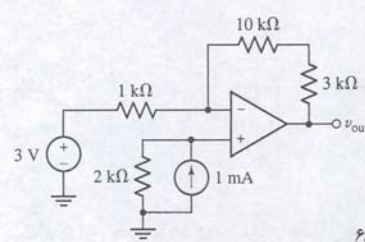
(ج)  $v_A = v_B = 1V$ ,  $R_1 = 0$  و  $R_2 = \infty$  است. کدام پایانه

ورودی (A یا B) وارونگر است؟ توضیح دهید.



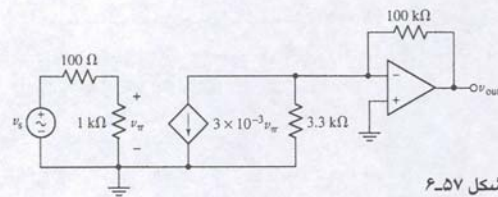
شکل ۶-۵۵

۲۴. برای مدار op amp شکل ۶-۵۶،  $v_{out}$  را حساب کنید.



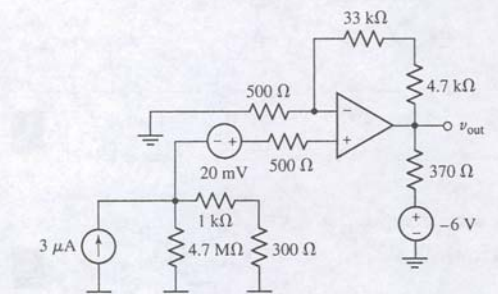
شکل ۶-۵۶

۲۵. اگر در مدار شکل ۶-۵۷  $v_s = 5 \sin 3t$  V باشد،  $v_{out}$  را در  $t = 0.25s$  به دست آورید.



شکل ۶-۵۷

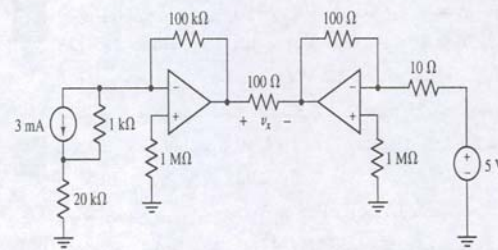
۲۶. از تکنیک‌های تحلیل مدار مناسب برای محاسبه  $v_{out}$  در شکل ۶-۵۸ استفاده نمایید.



شکل ۶-۵۸

۲۷. در شکل ۶-۵۸، منبع  $3\mu A$  را با منبع  $27\mu A$  جایگزین کرده سپس  $v_{out}$  را محاسبه کنید.

۲۸.  $v_x$  را برای مدار دو تقویت‌کننده‌های شکل ۶-۵۹ به دست آورید.

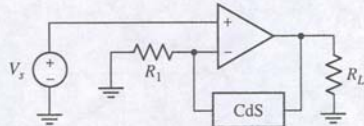


شکل ۶-۵۹

۲۹. عبارتی برای تقویت‌کننده مجموع، که در آن هر مقاومت مقدار خاص خود را دارد به دست آورید.

۳۰. عبارتی برای تقویت‌کننده تفاضلی، که در آن هر مقاومت مقدار خاصی را دارد، به دست آورید.

۳۱. سولفید کادمیوم (CdS) معمولاً برای ساخت مقاومت‌های حساس به نور در سطح آن استفاده می‌شود. در شکل ۶-۶۰ یک فوسل به عنوان مقاومت پسخورد  $R_f$  به کار رفته‌است. در تاریکی محض، مقاومت آن 100kΩ و در نور 6 شمع برابر 10kΩ است.  $R_L$  معادل تونن مداری است که به هنگام اعمال 1.5 V یا کمتر به پایانه‌هایش فعال می‌شود.  $R_1$  و  $v_s$  را طوری تعیین کنید که مقدار  $R_L$  با نور 2 شمع یا بیشتر فعال شود.



شکل ۶-۶۰

۳۲. دو میکروفون در یک استودیو ضبط مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یکی برای صوت و دیگری برای آلات موسیقی. مداری طراحی کنید که بتواند خروجی هر دو میکروفون را ترکیب نماید، ولی صوت دو برابر آلات موسیقی، تقویت شود.

۳۳. یک سیگنال سینوسی روی آفست 2V، dc، سوار است (به بیان دیگر مقدار متوسط موج سینوسی 2V است). مداری برای حذف آفست dc طراحی کنید و سیگنال سینوسی را با ضریب 100 تقویت نمایید (بدون معکوس کردن فاز).

### ۶-۳ طبقات پی‌درپی

۳۴. مداری طراحی کنید که متوسط سه ولتاژ  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  را در خروجی‌اش تولید نماید.

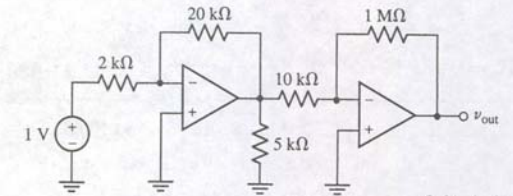
۳۵. یک سیستم موجودی فروشگاه الکترونیکی از یک ترازو در زیر هر پالت استفاده می‌کند، خروجی ترازو طوری تنظیم شده است که در ازای هر کیلوگرم 1 mV را تولید می‌کند. یک مدار طراحی نمایید تا ولتاژ خروجی متناسب با وزن کل گروهی از اقلام مشابه در انبار را تولید (توزیع‌شده بین چهار پالت)، و در آن وزن هر پالت کسر شده باشد (وزن پالت به عنوان ولتاژ مرجع برای هر پالت در نظر گرفته شود). ولتاژ خروجی شما باید چنان کالیبره شود که 1 mV برای 1 kg باشد.

۳۶. یک فتنگ رادار سازنده‌ای برای اندازه‌گیری، سرعت عمودی یک ولتاژ خروجی متناسب با سرعت شیئی که هدف است را فراهم می‌کند، به نحوی که  $1 \text{ mph} = 10 \text{ mV}$ . اگر سرعت‌سنج خودرو طوری تنظیم شود تا یک سیگنال متناسب با سرعتش تولید کند، و  $1 \text{ mph} = 10 \text{ mV}$  باشد، یک مدار چندطبقه طراحی کنید که (الف) یک سیگنال ولتاژ برابر با اختلاف سرعت خودروی سرعت‌دار و خودروی پلیس را تولید نماید (به طوری که سرعت پلیس در 1 mph کمتر =



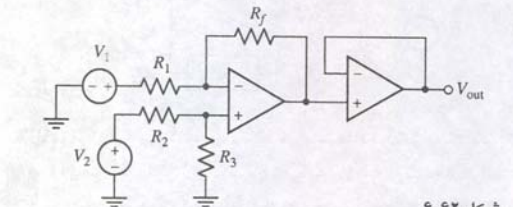
۱۰ mV) و (ب) سیگنال ولتاژی برای هر یک از سه کمیت به kph فراهم کند به طوری که  $1 \text{ kph} = 10 \text{ mV}$  باشد.

۳۷. عبارتی برای  $V_{out}$  برای مدار شکل ۶-۶۱ محاسبه کنید.



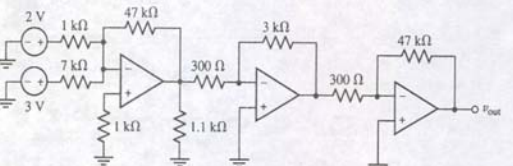
شکل ۶-۶۱

۳۸. عبارتی برای  $V_{out}$  برحسب  $V_1$  و  $V_2$  برای مدار شکل ۶-۶۲ به دست آورید.



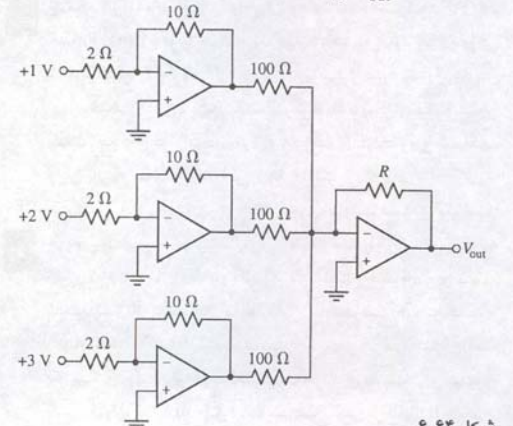
شکل ۶-۶۲

۳۹. برای مدار op amp پی‌درپی در شکل ۶-۶۳، ولتاژ خروجی هر طبقه را محاسبه نمایید.



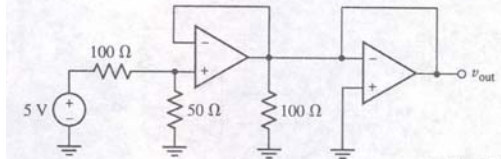
شکل ۶-۶۳

۴۰. با مراجعه به مدار op amp شکل ۶-۶۴ چه مقداری از R برای تهیه  $V_{out} = 10 \text{ V}$  لازم است؟



شکل ۶-۶۴

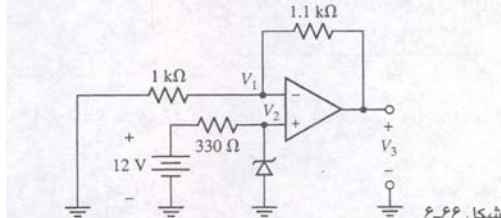
۴۱.  $V_{out}$  را برای مدار دو طبقه op amp شکل ۶-۶۵ حساب کنید.



شکل ۶-۶۵

## ۶-۴ مدارهای مربوط به منابع ولتاژ و جریان

۴۲. (الف) مدار شکل ۶-۶۶ از یک دیود 1N750 استفاده می‌نماید که با ولتاژ زنر  $4.7 \text{ V}$  مشخص شده است. ولتاژهای  $V_1$  و  $V_2$  را تعیین کنید. (ب) صحت تحلیل خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید، یک شماتیک را با برچسب مناسب نشان دهید و روی منابع هر اختلاف بین دو تحلیل اظهارنظر نمایید.



شکل ۶-۶۶

۴۳. مداری برای تولید یک ولتاژ مرجع  $5.1 \text{ V}$  به عنوان ورودی به یک دنبال‌گر ولتاژ طراحی کنید اگر فقط باتری  $9 \text{ V}$  موجود باشد. از دیود 1N4733 که ولتاژ زنری  $5.1 \text{ V}$  را در جریان  $76 \text{ mA}$  تولید کند استفاده کنید.

۴۴. یک مدار برای تولید ولتاژ مرجع  $2.5 \text{ V}$  را در ورودی یک دنبال‌گر ولتاژ طراحی کنید اگر باتری‌های  $9 \text{ V}$  موجود باشد. از یک دیود 1N4740 که ولتاژ زنری  $10 \text{ V}$  در جریان  $25 \text{ mA}$  را دارا است استفاده کنید.

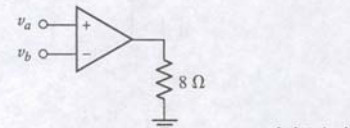
۴۵. مداری برای تولید یک ولتاژ مرجع  $12 \text{ V}$  به عنوان ورودی به یک دنبال‌گر ولتاژ طراحی کنید اگر باتری‌های  $9 \text{ V}$  موجود باشد. از یک دیود 1N4747 استفاده کنید که ولتاژ زنری  $20 \text{ V}$  در جریان  $12.5 \text{ mA}$  دارد. (الف) مداری برای تولید ولتاژ مرجع  $5 \text{ V}$  به عنوان یک ورودی به دنبال‌گر ولتاژ به کار می‌رود، اگر باتری‌های  $9 \text{ V}$  موجود باشند. از دیود 1N4728 استفاده کنید که ولتاژ زنری  $3.3 \text{ V}$  در جریان  $76 \text{ mA}$  دارد. (ب) طرح خود را برای تهیه ولتاژ مرجع  $2.2 \text{ V}$  اصلاح کنید.

۴۷. یک مدار منبع جریان طراحی کنید که بتواند  $25 \text{ mA}$  را به یک بار نامشخص بدهد. از دیود زنر 1N4740 استفاده نمایید که ولتاژ شکست آن  $10 \text{ V}$  در جریان  $25 \text{ mA}$  است.

۴۸. یک مدار منبع جریان که بتواند  $12.5 \text{ mA}$  برای یک بار ناشناخته تولید کند، طراحی نمایید. از دیود زنر 1N4747 استفاده کنید که دارای ولتاژ شکست  $20 \text{ V}$  در جریان  $12.5 \text{ mA}$  است.

۴۹. یک منبع جریان طراحی کنید که بتواند جریان  $75 \text{ mA}$  را برای بار ناشناخته‌ای تولید نماید. از یک دیود 1N4747 استفاده کنید، که ولتاژ شکست  $20 \text{ V}$  در جریان  $12.5 \text{ mA}$  تولید کند. اگر تقویت‌کننده با  $\pm 15 \text{ V}$  تغذیه شود، محدود باری که می‌تواند به طرح شما متصل شود را مشخص کنید. با استفاده از مدل دقیق تر  $\mu A741$ ، توان انتقالی به مقاومت  $8\Omega$  در شکل ۶-۶۷ چقدر است. به‌شرطی که:

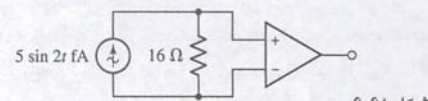
الف.  $v_a = v_b = 1 \text{ nV}$  ب.  $v_c = 0$  ج.  $v_b = 1 \text{ fV}$ ،  $v_a = 2 \text{ pV}$ ،  $v_b = -4 \mu\text{V}$ ،  $v_a = 50 \mu\text{V}$



شکل ۶-۶۷

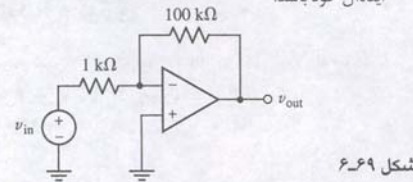
۵۱. یک مدار op amp معکوس‌گر با AD549 ساخته شده است. اگر  $R_f = 1 \text{ M}\Omega$  و  $R_1 = 270 \text{ k}\Omega$  باشند، چه جریان ورودی تغذیه‌ای (بی‌ایس) لازم است. (الف)  $v_s = 1 \text{ mV}$ ، (ب)  $v_s = -7.5 \text{ mV}$  و (ج)  $v_s = 1 \text{ V}$ .

۵۲.  $V_{out}$  را برای مدار شکل ۶-۶۸ به دست آورید، اگر: الف.  $10^5 \text{ A}$ ،  $R_1 = 100 \text{ M}\Omega$  و  $R_0 = 0$  باشد. ب.  $10^6 \text{ A}$ ،  $R_1 = 1 \text{ T}\Omega$  و  $R_0 = 0$  باشد.



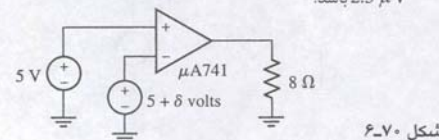
شکل ۶-۶۸

۵۳. برای مدار شکل ۶-۶۹، عبارتی برای  $V_{out}/V_{in}$  به دست آورید به‌شرطی که  $R_0 = 0$ ،  $R_1 = \infty$  بی‌نهایت باشد. (ب) چه مقداری برای بهره حلقه باز A لازم است تا بهره حلقه بسته در یک درصد مقدار ایده‌آل خود باشد.



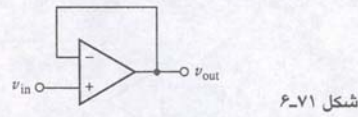
شکل ۶-۶۹

۵۴. برای مدار شکل ۶-۷۰، توان تلف‌شده به وسیله مقاومت  $8\Omega$  را به دست آورید. به‌شرطی که  $i_b$  برابر با (الف)  $0 \text{ V}$ ، (ب)  $1 \text{ nV}$  و (ج)  $2.5 \mu\text{V}$  باشد.



شکل ۶-۷۰

۵۵. با استفاده از پارامترهای AD549،  $V_{out}$  را برای مدار شکل ۶-۷۱ محاسبه کنید به‌شرطی که  $v_{in} = -16 \text{ mV}$  باشد.



شکل ۶-۷۱

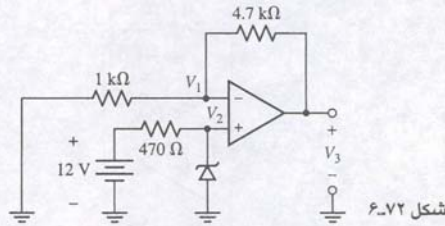
## ۶-۵ ملاحظات عملی

۵۶. یک عبارت برای ولتاژ خروجی دنبال‌گر برحسب ولتاژ  $V_{in}$  برای حالتی که بهره حلقه باز متناهی و مقاومت ورودی و معین و مقاومت خروجی غیرصفر است طراحی کنید. نشان دهید که برای حالت op amp ایده‌آل، عبارت به  $V_{out} = v_{in}$  کاهش می‌یابد.

۵۷. (الف) یک مدل کامل op amp که شامل بهره حالت مشترک  $A_{CM}$  در خروجی باشد، بسازید. (ب) از مدل برای  $10^5$ ،  $R_1 = \infty$ ،  $A_{CM} = 0$  و  $R_0 = 10$  استفاده کنید. (ج) پاسخ خود را با مقایسه کنید.

۵۸. سرعت واکنش را تعریف نمایید و اهمیت آن را در موج خروجی یک مدار توضیح دهید.

۵۹. مدار شکل ۶-۷۲ از یک دیود 1N750 استفاده می‌نماید، که با یک ولتاژ  $4.7 \text{ V}$  مشخص شده است. (الف) ولتاژهای  $V_1$  و  $V_2$  را تعیین نمایید. (ب) پاسخ خود را با اجرای شبیه‌سازی PSpice، و استفاده از  $\mu A741$  و تغذیه  $\pm 18 \text{ V}$  تحقیق نمایید. نتیجه خود را به درستی نام‌گذاری (برچسب‌زنی) کنید. اگر حل شبیه‌سازی دقیقاً موافق با محاسبه دستی نیست، سعی کنید که عامل اختلاف را پیدا کنید. (ج) حداقل مقداری که با آن منبع می‌تواند به  $12 \text{ V}$  قبل از توقف مدار زنر، کاهش یابد چقدر است.



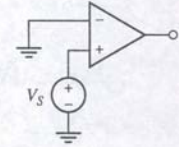
شکل ۶-۷۲

۶۰. به کمک PSpice یک مدار op amp،  $\mu A741$ ، با تغذیه  $\pm 15 \text{ V}$ ،  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  و  $R_f = 1 \text{ M}\Omega$  را شبیه‌سازی کنید. مشخصه ورودی - خروجی را ترسیم نمایید و نواحی خطی و اشباع مثبت و منفی را برچسب بزنید. آیا بهره پیش‌بینی‌شده به‌وسیله شبیه‌سازی با مدل ایده‌آل وفاق دارد.

۶۱. اگر بدانیم که کاربردهای ما فقط نیاز به معکوس‌کردن آرایش op amp دارد و نیازی به قطع ولتاژ خروجی نیست، حداقل تعداد پایه‌های لازم برای بسته‌بندی op amp چیست؟ هر کدام را با نام لیست نمایید.

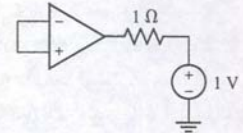


۶۲. مدار شکل ۶-۷۳ را با PSpice شبیه‌سازی کنید. به شرطی که (الف) از  $\mu A741$  استفاده شود، (ب) LM324 استفاده شده باشد، (ج) LF411 به کار رفته باشد. ولتاژ تفاضل ورودی  $V_s$  لازم برای اشباع هر کدام را اگر تغذیه  $15 \pm$  باشد به دست آورید.



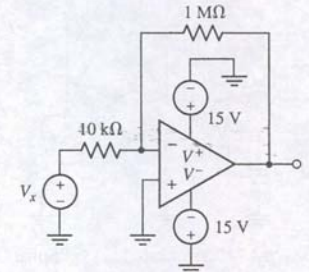
شکل ۶-۷۳

۶۳. با PSpice مدار op amp معکوس‌نکننده  $\mu A741$  را با تغذیه  $R_f = 1M\Omega$  و  $R_1 = 4.7k\Omega$ ،  $\pm 15V$  شبیه‌سازی کنید. مشخصه‌های ورودی-خروجی را ترسیم نمایید و نواحی خطی و اشباع را معین کنید. آیا بهره به آنچه به مدل ایده‌آل متعلق است همخوانی دارد؟ ۶۴. از مفهوم مدار شکل ۶-۷۴ برای تعیین مقاومت خروجی  $\mu A741$  و LF411 استفاده کنید. ولتاژ تغذیه را تغییر دهید و ببینید آیا نتایج شبیه‌سازی تغییر می‌کند یا نه.



شکل ۶-۷۴

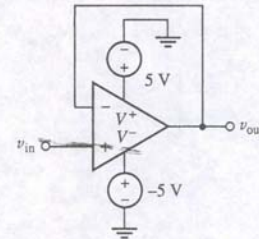
۶۵. مدار شکل ۶-۷۵ را با LM324 شبیه‌سازی کنید. (الف) جریان تغذیه و ولتاژ ورودی تفاضلی را معین کنید. این نتایج را با مقادیر مربوط به مدل مشروح و جدول ۶-۳ مقایسه کنید. (ب) بگویید آیا ولتاژ تغذیه مقادیر به دست آمده را تحت تأثیر قرار می‌دهد یا خیر.



شکل ۶-۷۵

۶۶. سنسوری یک سیگنال ولتاژ بین  $-30mV$  و  $+75mV$  را تولید می‌کند. (الف) اگر یک تقویت‌کننده معکوس‌گر با بهره ولتاژ  $|v_{out}/v_{in}| = 1000$ ، تغذیه dc،  $\pm 15V$  به کار رود محدوده ولتاژ مورد انتظار چقدر است. (ب) اگر تقویت‌کننده از نوع معکوس‌نکننده و تغذیه نیز  $\pm 15V$  باشد حداکثر نسبت مقاومت  $R_f/R_1$  به کار رفته بدون اشباع چقدر است؟

۶۷. (الف) مدار شکل ۶-۷۶ را با استفاده از  $\mu A741$  در محدوده  $+10V < v_{in} < -10V$  شبیه‌سازی کنید. ولتاژهای دقیق شروع اشباع را با ابزار مکان‌نما معین نمایید. (ب) یک  $\mu A741$  op amp قادر به تولید تا  $35mA$  جریان تحت شرایط اتصال کوتاه داریم است. حداکثر مقدار ممکن را برای جریان اتصال کوتاه مجاز به وسیله مدل PSpice معین نمایید.



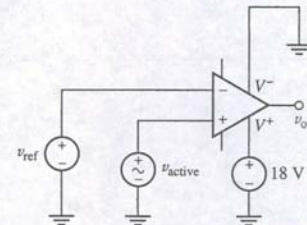
شکل ۶-۷۶

۶۸. طی تلاش برای اصلاح امنیت انتقال، یک سیگنال وابسته به زمان به یک سیگنال رادیویی قبل از مخابره اضافه شده است. همان سیگنال با فرکانس دیگری نیز مخابره شده است. با فرض این‌که هر آنتن گیرنده به صورت یک منبع ولتاژ وابسته به زمان، موازی با مقاومت  $300\Omega$  مدل‌سازی شود، مداری برای جدا کردن دو سیگنال طراحی کنید، سیگنال اصلی را حذف کنید و سیگنال صوتی را با ضریب 10 تقویت نموده و حاصل آن را به بلندگوی  $8\Omega$  منتقل نمایید.

۶۹. یک مدار تقویت‌کننده که بتواند یک ولتاژ خروجی برابر با متوسط سه ولتاژ ورودی تولید کند، طراحی نمایید. شما می‌توانید فرض کنید که ولتاژهای ورودی در محدوده  $-10V < v_{in} < +10V$  مورد اعتمادند. تحقیق کنید.

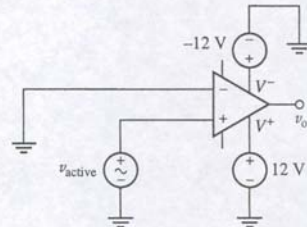
## ۶-۶ مقایسه گر ها و تقویت‌کننده دستگاه اندازه گیری

۷۰. برای مدار شکل ۶-۷۷ ولتاژ مورد انتظار خروجی  $v_{out}$  را به صورت تابعی از  $v_{active}$  برای  $-5V \leq v_{active} \leq +5V$  رسم کنید، به شرطی که  $v_{ref}$  برابر باشد با (الف)  $-3V$  و (ب)  $+3V$ .



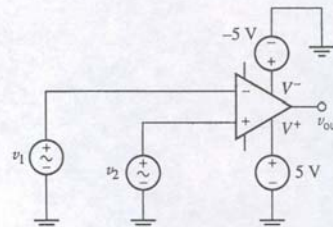
شکل ۶-۷۷

۷۱. برای مدار شکل ۶-۷۸، ولتاژ خروجی  $v_{out}$  را به صورت تابعی از  $v_{active}$  رسم کنید اگر  $-2V \leq v_{active} \leq +2V$  باشد. صحت حل خود را با استفاده از  $\mu A741$  تحقیق کنید (هرچند که این تقویت‌کننده برای استفاده به عنوان مقایسه‌گر کند است ولی شبیه‌سازی آن خوب کار می‌کند). روی نتایج نام‌گذاری مناسبی به کار ببرید.



شکل ۶-۷۸

۷۲. برای مدار شکل ۶-۷۹، (الف) ولتاژ خروجی مورد انتظار  $v_{out}$  را به صورت تابعی از  $v_1$  برای  $-5V \leq v_1 \leq +5V$  رسم کنید، اگر  $v_2 = +2V$  باشد، (ب) ولتاژ خروجی را به صورت تابعی از  $v_2$  با  $v_1 = +5V$  تا  $-5V$  رسم کنید اگر  $v_1 = +2V$  باشد.

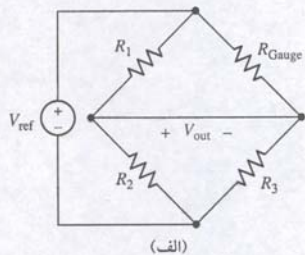


شکل ۶-۷۹

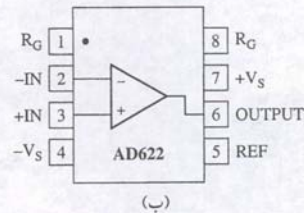
۷۳. در کاربردهای منطقی دیجیتال، یک سیگنال  $+5V$  با حالت منطقی "1" و یک سیگنال  $0V$  با حالت منطقی "0" نشان داده می‌شود. برای پردازش یک سری اطلاعات واقعی با کامپیوتر دیجیتال، نوعی واسط لازم است که معمولاً یک مبدل آنالوگ به دیجیتال (A/D) است. که وسیله‌ای برای تبدیل سیگنال‌های آنالوگ به دیجیتال می‌باشد. مداری طراحی کنید که به صورت یک A/D یک بیت (1 bit) کار کند و هر ولتاژ کمتر از  $1.5V$  در منطق "0" و هر سیگنال بیشتر از  $1.5V$  به صورت منطق "1" نشان داده شود.

۷۴. برای تقویت‌کننده‌های دستگاه‌های اندازه‌گیری در شکل ۶-۲۸ (الف) فرض کنید که سه op amp داخلی ایده‌آل هستند، سپس CMRR را برای موارد زیر معین کنید: (الف)  $R_1 = R_3$  و  $R_2 = R_4$ ؛ (ب) هر چهار مقاومت متفاوت اند.

۷۵. یک کاربرد رایج برای تقویت‌کننده‌های دستگاه‌های اندازه‌گیری، اندازه‌گیری ولتاژها در مدارهای گنج کشش مقاومتی است. این سنسورهای گنج کششی با تغییر مقاومت‌هایی که به علت تغییر شکل رخ می‌دهند کار می‌کنند (شکل ۶ در فصل ۲). آن‌ها اغلب بخشی از مدار پل می‌باشد (شکل ۶-۸۰ الف)، که در آن گنج کششی با  $R_G$  نشان داده شده است. (الف) نشان دهید که  $V_{out} = V_{in} \left[ \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_{Gauge}} \right]$ . (ب) تحقیق کنید که  $V_{out} = 0$  خواهد بود اگر سه مقاومت  $R_3$  و  $R_2$ ،  $R_1$  همگی با مقاومت  $R_{Gauge}$  غیرکششی برابر باشند. (ج) برای کاربرد موردنظر، گنج انتخابی دارای یک مقاومت غیرکششی  $5k\Omega$  است و یک افزایش مقاومت حداکثر  $50m\Omega$  مورد انتظار است. تنها منبع تغذیه  $\pm 12V$  موجود است. با استفاده از تقویت‌کننده دستگاه اندازه‌گیری شکل ۶-۸۰ (ب) مداری طراحی کنید که یک سیگنال ولتاژ  $+1V$  را وقتی گنج در حداکثر بار است تولید نماید.



(الف)



(ب)

شکل ۶-۸۰

### مشخصات AD622

بهره تقویت‌کننده  $G$  می‌تواند از 2 تا 100 با اتصال مقاومتی بین پایه‌های 1 الی 8 و رابطه زیر تغییر کند:

$$R = \frac{50.5}{G - 1} k\Omega$$



## خازن‌ها و القاگرها

### مقدمه

در این فصل ما دو عنصر غیرفعال جدید، یعنی خازن و القاگر را معرفی می‌کنیم که هر یک می‌توانند هم مقدار معینی انرژی را ذخیره کنند و هم تحویل دهند. از این دیدگاه آن‌ها با منابع ایده‌آل تفاوت دارند، زیرا آن‌ها نمی‌توانند مقدار انرژی معینی را برای فاصله زمانی نامتناهی ارائه کنند. گرچه آن‌ها به عنوان عناصر خطی کلاسه‌بندی شده‌اند، رابطه جریان-ولتاژ برای این عناصر جدید به زمان وابسته است، و منتهی به مدارهای جالب زیادی می‌گردد. همان‌طور که به زودی خواهیم دید، محدوده مقادیر ظرفیت و القایی که با آن‌ها مواجه می‌شویم خیلی بزرگ است و ممکن است در مقطعی از زمان بر رفتار سیستم تأثیر بگذارند و در مواردی دیگر هم اهمیت نداشته باشند. چنین موضوعاتی در کاربردهایی مدرن از مدارها، خصوصاً سیستم‌های کامپیوتر و مخابرات که رفته رفته در آن‌ها فرکانس‌های کاری و چگالی عناصر زیاد می‌شود، به‌طور پیوسته‌ای اهمیت بیشتری پیدا می‌کنند.

### ۷-۱ خازن

#### مدل خازن ایده‌آل

قبلاً منابع ولتاژ و جریان ایده‌آل را عناصر فعال خواندیم ولی یک مقاومت خطی را عنصری غیرفعال نام نهادیم. با این وجود تعاریف فعال و غیرفعال هنوز کمی مبهم‌اند و باید روی آن‌ها بیشتر تمرکز کرد. اکنون یک عنصر فعال را به‌صورت عنصری تعریف می‌کنیم که بتواند توان متوسط بزرگ‌تر از صفری را به تعدادی عناصر خارجی (بیرون) تحویل نماید، و متوسط‌گیری نیز در فاصله زمانی بی‌نهایت انجام می‌شود. منابع ایده‌آل، عناصری فعال‌اند، و تقویت‌کننده‌های عملیاتی نیز وسایلی فعال محسوب می‌شوند. با این وجود یک عنصر غیرفعال به‌صورت عنصری تعریف می‌شود که نمی‌تواند در مدت‌زمان بی‌نهایت، توان متوسط بزرگ‌تر از صفری را تحویل دهد. مقاومت، در این دسته‌بندی قرار می‌گیرد و انرژی دریافتی به وسیله آن نیز به‌گرمای تبدیل می‌شود و هرگز انرژی‌ای را تولید نمی‌کند.

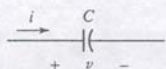
اکنون عنصر غیرفعال جدیدی که خازن نام دارد را معرفی می‌کنیم. ما خازن C را با رابطه ولتاژ-جریان زیر معرفی می‌کنیم:

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

که ۷ و ۱ قرار داده‌ای یک عنصر غیرفعال را طبق شکل ۷-۱ ارضا می‌کنند. باید همواره به خاطر بسپاریم که ۷ و ۱ توابعی از زمان هستند و حتی به منظور تأکید، اگر گاهی لازم باشد آن‌ها را با  $i(t)$  و  $v(t)$  نشان خواهیم داد. از معادله (۱) می‌توان واحد ظرفیت خازن را به‌صورت آمپر ثانیه بر ولت یا کولن بر ولت تعریف کرد. ما از این پس یک کولن بر ولت را فاراد<sup>۱</sup> نامیده و آن را به‌عنوان واحد ظرفیت برمی‌گزینیم.

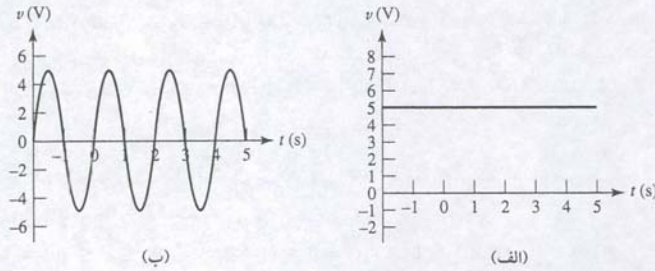
#### مفاهیم کلیدی

- رابطه ولتاژ-جریان برای یک خازن ایده‌آل
- رابطه ولتاژ-جریان یک القاگر ایده‌آل
- محاسبه انرژی ذخیره‌شده در خازن‌ها و القاگرها
- تحلیل پاسخ خازن و القاگر به امواج متغیر با زمان
- ترکیب سری و موازی القاگرها
- مدار op amp با استفاده از خازن‌ها
- مدل‌سازی PSpice برای عناصر ذخیره‌ساز انرژی



شکل ۷-۱ نماد و قرارداد عناصر غیرفعال ولتاژ و جریان خازن.





شکل ۷-۳ (الف) یک ولتاژ dc به پایانه‌های خازن اعمال شده است. (ب) به پایانه‌های خازن یک ولتاژ سینوسی اعمال شده است.

برای شکل موج ترسیم شده در شکل ۷-۳ (الف)،  $\frac{dv}{dt} = 0$ ، پس  $i = 0$  می‌باشد؛ نتیجه در شکل ۷-۴ (الف) رسم شده است. برای حالت موج سینوسی شکل ۷-۳ (ب) انتظار داریم که جریان کسینوسی به عنوان پاسخ جاری شده و فرکانس برابری با دو برابر اندازه داشته باشد (چون  $C = 2F$  است). نتیجه در شکل ۷-۴ (ب) ملاحظه می‌شود.

۷-۱ جریان جاری در خازن  $5 \text{ mF}$  را در پاسخ به ولتاژ  $v$  تعیین کنید. (الف)  $20 \text{ V}$  و (ب)  $-2e^{-5t} \text{ V}$ .  
جواب: (الف)  $0 \text{ A}$ ؛ (ب)  $-50e^{-5t} \text{ mA}$ .

### روابط ولتاژ-جریان انتگرالی

ولتاژ خازن را می‌توان با انتگرال‌گیری از معادله (۱) بیان کرد، ابتدا رابطه زیر را می‌نویسیم:

$$dv = \frac{1}{C} i(t) dt$$

و سپس در فاصله زمانی  $t_0$  و  $t$  از رابطه ولتاژهای مربوط به آن‌ها انتگرال می‌گیریم:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' + v(t_0) \quad (2)$$

معادله (۲) را می‌توان به صورت انتگرالی نامعین به علاوه یک ثابت انتگرال نوشت:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt + k$$

بالاخره در بسیاری از مسائل واقعی نمی‌توان  $v(t_0)$ ، که همان ولتاژ اولیه دو سر خازن است را نادیده گرفت. در این گونه موارد از لحاظ ریاضی  $t_0 = -\infty$  و  $t = 0$  و  $v(-\infty) = 0$  فرض می‌شود و در این صورت:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt'$$

توجه کنید در مواردی که متغیر  $t$  یکی از حدود انتگرال است، از متغیر فرضی  $t'$  استفاده می‌کنیم که از لحاظ مباحث ریاضی ایرادی ندارد.

چون انتگرال جریان در هر فاصله زمانی با بار ذخیره شده در آن فاصله بر روی صفحات خازن برابر است می‌توان ظرفیت را چنین تعریف نمود:

$$q(t) = Cv(t)$$

که  $q(t)$  و  $v(t)$  به ترتیب مقادیر لحظه‌ای بار روی صفحات و ولتاژ بین صفحات می‌باشند.

ولتاژ خازن مربوط به جریان ترسیمی در شکل ۷-۵ (الف) را بیابید.

با تفسیر گرافیکی معادله (۲) می‌بینیم که اختلاف بین مقادیر ولتاژ در  $t_0$  متناسب با سطح زیر منحنی جریان بین این دو زمان است. ضریب تناسب  $1/C$  است. می‌توان سطح را از

خازن ایده‌آل تعریف شده با رابطه (۱) فقط یک مدل ریاضی از یک وسیله واقعی است. یک خازن از دو سطح هادی که بار بر روی آن پهن می‌شود، تشکیل شده است. این صفحات با لایه‌ای از عایق که مقاومت بالایی دارد، از یکدیگر جدا شده‌اند. اگر این مقاومت بسیار بزرگ و مثلاً بی‌نهایت فرض شود، آن‌گاه بارهای مخالف و مساوی واقع بر صفحات خازن هرگز دوباره از داخل عنصر با هم ترکیب نمی‌شوند. ساخت قطعه فیزیکی با توجه به نماد مداری شکل ۷-۱ صورت می‌گیرد. بیا باید فرض کنیم که یک منبع خارجی به این خازن متصل شده و جریان مثبتی از یک صفحه آن وارد و از صفحه دیگر خارج می‌شود. هر جریانی که وارد شود به همان اندازه از آن خارج می‌گردد و جز این هم از یک عنصر دو پایانه نمی‌توان انتظار داشت. اکنون درون خازن را بررسی می‌کنیم. جریان مثبت وارده به یک صفحه نشان‌دهنده بار مثبتی است که از طریق سیم پایانه به سمت صفحه آن حرکت می‌کند. این بار نمی‌تواند از خازن عبور کند و بنابراین روی صفحه انبار می‌شود. در واقع جریان و بار رو به افزایش با معادله زیر به هم ارتباط دارند:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

اکنون این صفحه را به صورت یک گره بزرگ در نظر بگیرید و قانون جریان کیرشهف را اعمال کنید. ظاهراً این قانون معتبر نیست، جریان از یک سمت و از مدار خارجی وارد صفحه می‌شود، ولی از صفحه بیرون نمی‌رود. این مطلب بیش از یک قرن قبل، ذهن دانشمند اسکاتلندی، جی.سی. ماکسول را مشغول کرده بود. تئوری الکترومغناطیسی تک‌میدانی را که نهایتاً وی ارائه کرد، فرضیه "جریان جابه‌جایی" را مطرح می‌کند و در هر جا که میدان الکتریکی یا ولتاژ با زمان تغییر نماید، وجود دارد. جریان جابه‌جایی بین صفحه خازن و درون آن، درست شبیه جریان در یک هادی می‌باشد. بنابراین اگر هر دو جریان جابه‌جایی و هدایتی را در نظر بگیریم قانون جریان کیرشهف صادق است. البته تحلیل مدار این جریان جابه‌جایی داخلی را در نظر نمی‌گیرد و چون خوشبختانه با جریان هدایت مدار برابر است، می‌توان فرضیه ماکسول را به عنوان تغییر ولتاژ دو سر خازن لحاظ نمود.

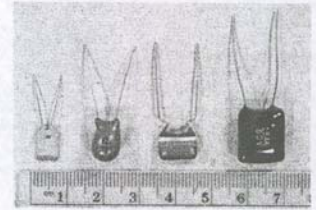
خازنی با دو صفحه موازی  $A$ ، و فاصله صفحات  $d$  دارای ظرفیت  $C = \epsilon A/d$  می‌باشد که در آن  $\epsilon$  ضریب گذردهی خازن یا ضریب عایق‌سازی ماده بین صفحات می‌باشد. در ساختار خازن فرض می‌شود که ابعاد صفحات خازن خیلی بزرگ‌تر از  $d$  است. برای هوا یا خلاء  $\epsilon = \epsilon_0 = 8.854 \text{ pF/m}$  است. بسیاری از خازن‌ها از لایه دی‌الکتریک یا عایق نازکی با ضریب گذردهی بزرگ‌تر استفاده می‌نمایند تا ابعاد آن کوچک شود. نمونه‌هایی از انواع خازن‌های تجاری در شکل ۷-۲ دیده می‌شود. باید به‌خاطر داشته باشیم که هر دو صفحه هادی که به هم مستقیماً نجسیده باشند، ظرفیت غیر صفری (هرچند خیلی کوچک) دارند. ضمناً باید توجه داشت که ظرفیت چندصد میکرو فاراد از لحاظ مقدار، بزرگ تلقی می‌شود.

با معرفی معادله (۱) چندین مشخصه مهم از مدل ریاضی استنتاج می‌گردد. یک ولتاژ ثابت در دو سر خازن جریان صفری را در آن نشان می‌دهد. بنابراین یک خازن برای dc به صورت "مدار باز" است. علامت خازن هم این خاصیت را نشان می‌دهد. همچنین هر تغییر ناگهانی در ولتاژ دو سر آن به یک منبع جریان بی‌نهایت نیاز دارد. چون چنین منبعی جنبه فیزیکی ندارد، بنابراین معتقدیم که ولتاژ دو سر خازن آن‌ا عوض نمی‌شود.

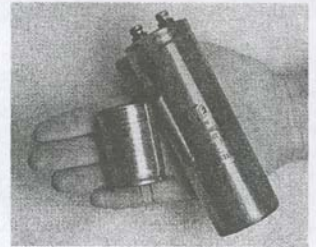
اگر  $C = 2F$  باشد، جریان جاری در خازن شکل ۷-۱ را برای دو موج شکل ۷-۳ معین کنید.

جریان خازن  $i$  به ولتاژ دو سر آن  $v$  با معادله (۱) مرتبط می‌شود:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۷-۲ چند مثال از خازن‌های تجاری موجود. (الف) از چپ به راست: سرامیک  $270 \text{ pF}$ ، تانتالیوم  $20 \mu\text{F}$ ، پلی‌استر  $15 \text{ nF}$  و پلی‌استر  $150 \text{ nF}$ . (ب) از چپ: الکترولیت  $40 \mu\text{F}$   $2000 \text{ VDC}$  و الکترولیت  $35 \mu\text{F}$   $25,000 \text{ VDC}$ . (ج) شروع از کوچکتر در جهت عقربه ساعت: الکترولیت  $63 \mu\text{F}$   $100 \text{ VDC}$ ، الکترولیت  $50 \mu\text{F}$   $2200 \text{ VDC}$ ، الکترولیت  $2.5 \mu\text{F}$   $55 \text{ VDC}$  و الکترولیت  $50 \mu\text{F}$   $4800 \text{ VDC}$ . دقت کنید که با یک استثنا، مقادیر بزرگ بسته‌بندی بزرگتری دارند. در آن حالت مصالحه چیست؟

### مثال ۷-۱

### مثال ۷-۲



## مثال ۷-۳

حداکثر انرژی ذخیره‌شده در خازن شکل ۷-۷ و انرژی تلف‌شده در مقاومت را در فاصله زمانی  $0 < t < 0.5\text{s}$  بیابید.

- هدف مسئله را شناسایی نمایید.
- انرژی ذخیره‌شده در خازن با زمان تغییر می‌نماید. از ما حداکثر مقدار در یک فاصله زمانی خاص خواسته شده است. همچنین کل انرژی تلف‌شده در مقاومت در همین فاصله مورد تقاضا است. در واقع این دو سوال کاملاً از هم جدا هستند.
- اطلاعات معلوم را جمع‌آوری کنید.
- تنها منبع انرژی در مدار، منبع ولتاژ مستقل است، که مقدار  $100 \sin 2\pi t \text{ V}$  را دارد. البته فقط زمان  $0 < t < 0.5\text{s}$  مورد توجه ما است. مدار به‌طور صحیحی نام‌گذاری شده است.
- ارائه طرح.
- ما انرژی خازن را با ارزیابی ولتاژ معین خواهیم کرد. برای یافتن انرژی تلف‌شده در مقاومت، در یک فاصله زمانی، باید از  $P_R = i_R^2 \cdot R$  انتگرال بگیریم.
- معادلات مناسب را بنویسید.
- انرژی ذخیره‌شده برابر است با:

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2 = 0.1 \sin^2 2\pi t \quad \text{J}$$

حالا عبارتی را برای توان تلف‌شده در مقاومت برحسب جریان  $i_R$  به‌دست می‌آوریم:

$$i_R = \frac{v}{R} = 10^{-4} \sin 2\pi t \quad \text{A}$$

بنابراین انرژی تلف‌شده در مقاومت بین 0 و 0.5 ثانیه برابر است با:

$$w_R = \int_0^{0.5} p_R dt = \int_0^{0.5} 10^{-2} \sin^2 2\pi t dt \quad \text{J}$$

شکل ۷-۸ نمودار انرژی ذخیره‌شده در خازن برحسب زمان.

- آیا اطلاعات دیگری لازم است.
- برای ذخیره انرژی در خازن عبارتی وجود دارد. نمودار آن در شکل ۷-۸ ترسیم شده است. انرژی تلف‌شده در مقاومت شامل کمیت‌های نامشخص نیست و بنابراین باید به راحتی محاسبه شود.
- اقدام به حل.
- از نمودار مربوط به انرژی ذخیره‌شده در خازن، می‌بینیم که از مقدار 0 در  $t = 0$  به یک مقدار  $100\text{mJ}$  در  $t = \frac{1}{4}\text{s}$  می‌رسد، و سپس در مدت  $\frac{1}{4}\text{s}$  دیگر به صفر باز می‌گردد. بنابراین  $w_{C\max} = 100\text{mJ}$  خواهد بود. با ارزیابی عبارت انتگرال برای انرژی تلف‌شده در مقاومت، داریم  $w_R = 2.5\text{mJ}$ .
- صحت حل را تحقیق کنید. آیا جواب منطقی است؟
- ما انتظار نداریم که یک انرژی ذخیره‌شده منفی را که در نمودار حذف شده است، محاسبه کنیم. علاوه بر آن، چون حداکثر مقدار  $\sin 2\pi t$  برابر 1 است، حداکثر انرژی مورد انتظار  $100\text{mJ} = (100)(20 \times 10^{-6})^2 (1/2) = 100\text{mJ}$  خواهد بود.
- مقاومت در یک پریود 0 تا  $500\text{ms}$ ، انرژی  $2.5\text{mJ}$  را تلف کرده است، ولی خازن حداکثر  $100\text{mJ}$  را در همان فاصله زمانی ذخیره کرده است. پس بر سر  $97.5\text{mJ}$  دیگر چه آمده است؟ برای پاسخ به آن جریان خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$i_C = 20 \times 10^{-6} \frac{dv}{dt} = 0.004\pi \cos 2\pi t$$

شکل ۷-۵ (الف) و با بررسی مقادیر مطلوب  $t_0$  و  $t$  به‌دست آورد. اجازه بدهید نقطه شروع  $t_0$  را قبل از زمان صفر اختیار کنیم. برای راحتی کار اولین فاصله زمانی بین  $-\infty$  و 0 اختیار شده است و چون شکل موج بیان می‌دارد که هرگز جریانی از ابتدا به خازن اعمال نشده، پس:

$$v(t_0) = v(-\infty) = 0$$

با توجه به معادله (۲)، انتگرال جریان بین  $t_0 = -\infty$  و  $t_0 = 0$ ، برابر صفر می‌باشد. زیرا در این فاصله  $i = 0$  است، پس:

$$v(t) = 0 \quad t \leq 0 \quad \text{یا} \quad v(t) = 0 + v(-\infty) \quad -\infty \leq t \leq 0$$

اگر حالا فاصله زمانی را محدوده موج مربعی  $0 \leq t \leq 2\text{ms}$  فرض کنیم، داریم:

$$v(t) = \frac{1}{5 \times 10^{-6}} \int_0^t 20 \times 10^{-3} dt' + v(0)$$

چون  $v(0) = 0$  بنابراین:

$$v(t) = 4000t \quad 0 < t \leq 2\text{ms}$$

برای فاصله نیم بی‌نهایت بعد از پالس، انتگرال  $i(t)$  مجدداً صفر است، به نحوی که:

$$v(t) = 8 \quad t \geq 2\text{ms}$$

نتایج ترسیمی ساده‌تر از عبارات ریاضی به‌نظر می‌رسند (شکل ۷-۵ (ب)).

۷-۲ جریان داخل خازن  $100\text{pF}$  را اگر ولتاژ آن به صورت تابع زمانی شکل ۷-۶ باشد معین کنید. جواب: در  $-\infty \leq t \leq 1\text{ms}$ ،  $0\text{A}$ ؛ در  $1\text{ms} \leq t \leq 2\text{ms}$ ،  $200\text{nA}$  و در  $t \geq 2\text{ms}$ ،  $0\text{A}$ .

## ذخیره‌سازی انرژی

توان انتقالی به یک خازن با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt}$$

انرژی ذخیره‌شده در میدان الکتریکی اش برابر است با:

$$\int_{t_0}^t p dt = C \int_{t_0}^t v \frac{dv}{dt} dt = C \int_{v(t_0)}^t v dv = \frac{1}{2} C \{ [v(t)]^2 - [v(t_0)]^2 \}$$

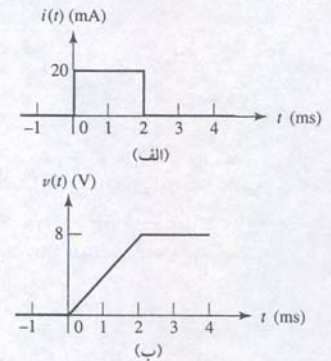
و بنابراین:

$$w_C(t) - w_C(t_0) = \frac{1}{2} C \{ [v(t)]^2 - [v(t_0)]^2 \} \quad (۳)$$

که انرژی ذخیره‌شده  $w_C(t_0)$  برحسب ژول (J) و ولتاژ در  $t_0$  برابر  $v(t_0)$  می‌باشد. اگر انرژی در  $t_0$  را صفر فرض کنیم با بیان این‌که ولتاژ خازن هم در آن لحظه صفر است، آن‌گاه:

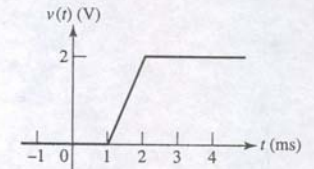
$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2 \quad (۴)$$

بیباید یک مثال عددی ساده را ملاحظه نماییم. همان‌طور که در شکل ۷-۷ ملاحظه می‌کنید، یک منبع ولتاژ سینوسی با یک مقاومت  $1\text{M}\Omega$  و یک خازن  $20\mu\text{F}$  موازی است. می‌توان مقاومت موازی را نمایشی از مقاومت معین دی‌الکتریک بین صفحات خازن فیزیکی دانست (مقاومت ایده‌آل دارای مقاومت بی‌نهایت است).

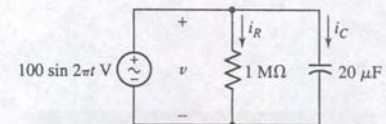


شکل ۷-۵ (الف) شکل موج جریان اعمال‌شده به خازن  $5\mu\text{F}$  (ب) موج ولتاژ حاصل با انتگرال‌گیری ترسیمی (جمع).

## تمرین



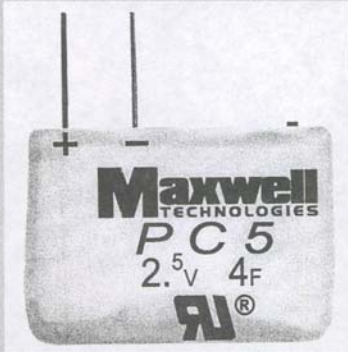
شکل ۷-۶



شکل ۷-۷ یک منبع ولتاژ سینوسی به یک شبکه RC موازی وصل شده است. مقاومت  $1\text{M}\Omega$  می‌تواند نشان‌دهنده مقاومت لایه دی‌الکتریک خازن واقعی باشد.



جریان برای مدت کوتاهی تقویت می‌شود. با این وجود اگر عمل ارسال کوتاه‌مدت باشد، خازن به خوبی می‌تواند باتری را کمک کرده و از خاموشی مدار جلوگیری کند. در فصل ۸، خواهید دید که چطور می‌توان با دانستن مقاومت تونن باتری و مدار، مدت زمان کمک خازن به باتری را حساب کرد.



شکل ۷-۱۲ ترکیبی از باتری-فوق خازن.

اگر جریان اوج در بافتی طوری باشد که ولتاژ باتری به کمتر از ولتاژ قطع افت کند، در این صورت به باتری بزرگ‌تری نیاز است. با این وجود، این امر در وسایل متحرک مطلوب نیست بلکه باتری‌های سبک و کوچک ترجیح داده می‌شوند. راه حل دیگر استفاده از قطعه‌ای هیبرید متشکل از یک باتری استاندارد و یک خازن خاص می‌باشد (گاهی آن را خازن الکتروشیمیایی یا فوق خازن می‌گویند). مثالی از این قطعه تجاری در شکل ۷-۱۲ دیده می‌شود.

اساس کار وسیله هیبرید، این است که وقتی باتری جریان لازم برای مدار را تأمین می‌کند (مثل وقتی که تلفن در مد دریافت است)، خازن انرژی را از باتری کسب می‌نماید ( $\frac{1}{2} CV^2$ ). اگر تقاضای جریان ناگهان بالا برود (مثل ارسال به وسیله تلفن)، ولتاژ باتری کاهش خواهد یافت. در این لحظه جریانی در پاسخ به  $\frac{dv}{dt}$  حاصل از خازن شارژ شده خارج می‌گردد. با این شرط که مقاومت معادل تونن خیلی کوچک‌تر از مقاومت داخلی باتری باشد، جریان به جای حرکت به سمت باتری به سمت تلفن خواهد رفت. بار، خازن را به سرعت ترک می‌کند و به این ترتیب این

### مشخصات مهم یک خازن ایده‌آل:

۱. اگر ولتاژ دو سر خازن با زمان تغییر نکند جریان عبوری از آن صفر است. بنابراین خازن برای dc به صورت مدار باز عمل می‌کند.
۲. می‌توان مقدار انرژی محدودی در خازن ذخیره کرد، حتی اگر جریان عبوری از آن صفر باشد، مانند هنگامی که ولتاژ دو سرش ثابت می‌باشد.
۳. ولتاژ خازن هرگز به‌طور ناگهانی تغییر نمی‌کند، مگر این‌که جریان عبوری از خازن بی‌نهایت باشد. یک خازن به هر تغییر ناگهانی ولتاژ دو سرش همچون مقاومت فنر در برابر نیرو، از خود واکنش نشان می‌دهد.
۴. خازن هرگز انرژی تلف نمی‌کند و فقط آن را ذخیره می‌نماید. البته این جمله برای مدل ریاضی آن صحت دارد ولی برای خازن فیزیکی به دلیل وجود مقاومت صحیح نیست.

## ۷-۲ القاگر

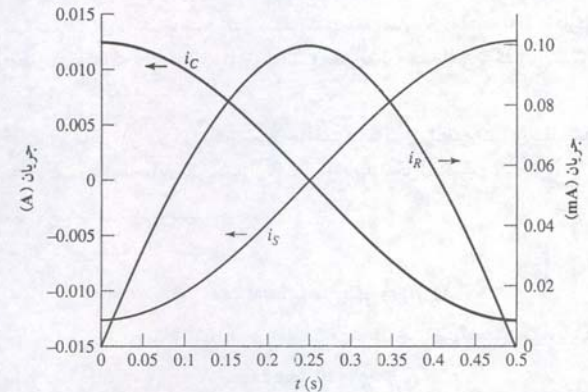
### مدل القاگر ایده‌آل

هرچند که از نقطه نظر یک مدار، القاگر را با معادله ولتاژ-جریان تعریف می‌کنیم، چند اظهار نظر در مورد تئوری میدان مغناطیسی به درک بهتر تعریف کمک خواهد کرد. در اوایل سال‌های ۱۸۰۰ دانشمند دانمارکی نشان داد که یک هادی حامل جریان، می‌تواند یک میدان مغناطیسی تولید کند (هنگامی که جریان برقرار باشد سوزن قطب‌نما در جوار آن

و جریان  $i_s$  که از منبع ولتاژ می‌گذرد برابر است با:

$$i_s = -i_C - i_R$$

که هر دوی آن‌ها در شکل ۷-۹ ترسیم شده‌اند. مشاهده می‌کنید که جریان جاری شده در مقاومت بخش کوچکی از جریان منبع است؛ البته جای تعجب نیست زیرا  $1\text{ M}\Omega$  نسبتاً مقاومت بزرگی است. با عبور جریان از منبع، مقدار کمی به سمت مقاومت هدایت می‌شود، و بقیه آن به خازن رفته و آن را شارژ می‌کند. پس از زمان  $t = 250\text{ ms}$ ، به نظر می‌رسد جریان منبع تغییر علامت می‌دهد؛ اینک جریان از خازن به منبع باز می‌گردد. بخش عمده‌ای از انرژی ذخیره شده در خازن به منبع ولتاژ ایده‌آل باز می‌گردد، و فقط مقدار کمی از آن در مقاومت تلف شده است.



شکل ۷-۹ نمودار جریان‌های مقاومت، خازن و منبع در فاصله زمانی 0 تا 500 ms.

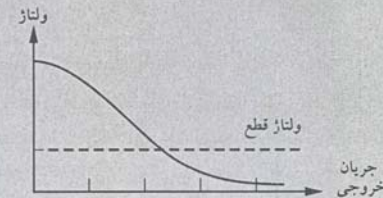
### تمرین

۷-۳ انرژی ذخیره شده در خازن  $1000\mu\text{F}$  در  $t = 50\mu\text{s}$  را محاسبه کنید. به شرطی که ولتاژ دو سر آن  $\cos 10^5 t$  1.5 ولت باشد.  
جواب:  $90.52\mu\text{J}$

### کاربرد عملی

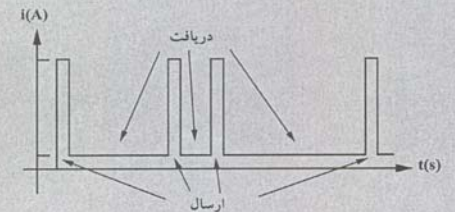
#### باتری هیبرید - وسایل فوق خازن

همان‌طور که در فصل ۵ دیدیم، باتری‌ها فقط در جریان‌های کم ولتاژ ثابتی را تحویل می‌دهند. بنابراین وقتی که تقاضای جریان افزایش یابد، ولتاژ باتری افت پیدا می‌کند (شکل ۷-۱۱). این کاهش منجر به ایجاد مشکلاتی می‌گردد، زیرا اکثر مدارها دارای حداقل ولتاژ یا ولتاژ قطعی هستند که در کمتر از آن به درستی کار نمی‌کنند.



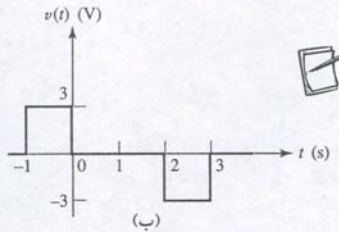
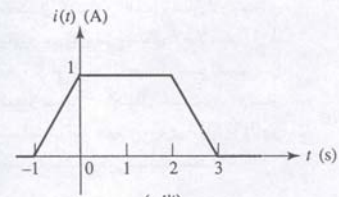
شکل ۷-۱۱ مثالی از رابطه ولتاژ-جریان یک باتری.

تلفن‌های دیجیتال موبایل و ماهواره‌ای سه مد کاری اساسی دارند: غیرفعال، دریافت و ارسال. معمولاً دریافت سیگنال نیاز به مصرف جریان زیاد از باتری ندارد، ولی ارسال آن جریان زیادی را لازم دارد (شکل ۷-۱۰). در مقابل زمان تلف شده در ارسال معمولاً کسر کوچکی از کل زمان جذب انرژی به وسیله سیستم است (شکل ۷-۱۰).



شکل ۷-۱۰ نمودار نمونه دوره کاری تلفن موبایل که جریان لازم برای ارسال و دریافت را نشان می‌دهد.





شکل ۷-۱۵ (الف) شکل موج جریان در یک القاگر 3H (ب) شکل موج ولتاژ مربوط به  $v = 3 di/dt$ .



مثال ۷-۴

اکنون بیایید معادله (۵) را واریسی نماییم تا بعضی از مشخصات الکتریکی این مدل ریاضی را تعیین کنیم. این معادله نشان می‌دهد که ولتاژ دو سر یک القاگر متناسب است با آهنگ زمانی تغییرات جریانی که از آن می‌گذرد. به خصوص این معادله نشان می‌دهد که در دو سر القاگر که جریان ثابتی را حمل می‌کند، جدا از اندازه جریان، ولتاژی وجود ندارد. بر طبق این مطلب، می‌توان به یک القاگر به دینده یک "مدار اتصال کوتاه برای dc" نگاه کرد.

واقعیت دیگری که از معادله (۵) حاصل می‌شود این است که یک تغییر ناگهانی یا ناپایسته در جریان به ولتاژ بی‌نهایتی در دو سر القاگر نیاز دارد. به بیان دیگر اگر بخواهیم یک تغییر ناگهانی در یک جریان القاگر ایجاد نماییم باید ولتاژ بی‌نهایتی به آن اعمال کنیم. هرچند که به لحاظ تئوری اعمال تابع ولتاژ بی‌نهایت مانعی ندارد ولی در یک سیستم واقعی فیزیکی چنین چیزی دارای مفهوم نیست. به زودی خواهیم دید که یک تغییر ناگهانی در جریان القاگر، به تغییر ناگهانی انرژی در القاگر احتیاج داشته، و این خود نیز توان بی‌نهایت منبع در آن لحظه را لازم دارد و دوباره توان بی‌نهایت در جریان واقعی وجود ندارد. برای دوری از ولتاژ و توان بی‌نهایت، نباید اجازه دهیم تا جریان القاگر از یک مقدار به مقدار دیگری ناگهان پرش کند.

اگر بخواهیم مدار یک القاگر فیزیکی را که جریان از آن عبور می‌کند باز کنیم، در دو سر کلید جرقه‌ای ظاهر خواهد شد. این پدیده در سیستم برق بعضی از اتومبیل‌ها به کار می‌رود که در آن‌ها جریان کوئل به وسیله دکل متوقف شده و جرقه‌ای در دو سر شمع ایجاد می‌گردد. گرچه این وضع آن‌را رخ نمی‌دهد ولی زمان آن بسیار کوتاه است و در نتیجه ولتاژ زیادی تولید می‌گردد. وجود ولتاژ بالا در دو سر فاصله‌ای کوچک میدان الکتریکی قوی را به وجود می‌آورد، و انرژی ذخیره شده ضمن یونیزه کردن هوا، جرقه‌ای را تولید می‌نماید.

می‌توان معادله (۵) را به صورت گرافیکی تفسیر کرد و در صورت لزوم حل نمود.

مثال ۷-۴ را در این مورد ملاحظه کنید.

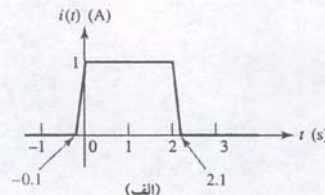
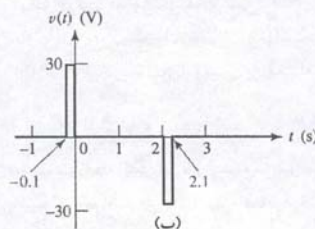
اگر مطابق شکل ۷-۱۵ (الف) موج جریان در یک القاگر 3H باشد، ولتاژ القاگر را به دست آورده آن را رسم کنید.

اگر ولتاژ ۷ جریان  $i$  طوری تعریف شود که قرارداد عناصر غیرفعال معتبر باشد، آن‌گاه می‌توانیم از معادله (۵) برای یافتن شکل موج ولتاژ استفاده کنیم:

$$v = 3 \frac{di}{dt}$$

چون جریان در  $-1s < t$  صفر است، ولتاژ نیز در این فاصله صفر می‌باشد. سپس جریان با آهنگ خطی 1A/s شروع به افزایش می‌نماید و به این ترتیب ولتاژ ثابت  $\frac{di}{dt} = 3V$  تولید می‌گردد. در طی 2 ثانیه بعدی، جریان ثابت و لذا ولتاژ صفر می‌گردد. کاهش نهایی جریان منجر به  $\frac{di}{dt} = -1 A/s$  و بنابراین  $v = -3V$  می‌شود. برای  $t > 3s$ ،  $i(t)$  ثابت (صفر) است و بنابراین برای آن فاصله زمانی  $v(t) = 0$  خواهد شد. شکل موج کامل در شکل ۷-۱۵ (ب) ترسیم شده است. اکنون بیایید اثر افزایش و یا افول سریع‌تر جریان بین صفر و 1A را بررسی کنیم.

ولتاژ القاگر حاصل از اعمال موج جریان شکل ۷-۱۶ (الف) در القاگر مثال ۷-۴ را بیابید.



شکل ۷-۱۶ (الف) زمان لازم برای تغییر جریان شکل ۷-۱۵ (الف)، از 0 به 1 و از 1 به 0، یک دهم شده است. (ب) ولتاژ حاصل. توجه کنید که برای وضوح بیشتر عرض پالس بزرگ‌تر از آنچه هست در نظر گرفته شده است.

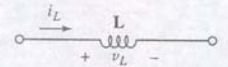
متخرف می‌گردد) چندی بعد دانشمند فرانسوی آمپر<sup>۱</sup> اندازه‌گیری‌هایی را انجام داد و نشان داد که این میدان مغناطیسی به‌طور خطی با جریانی که آن را تولید کرده است متناسب می‌باشد. قدم بعدی ۲۰ سال بعد و به هنگامی رخ داد که دانشمند انگلیسی مایکل فارادی<sup>۲</sup> و مخترع آمریکایی ژوزف هنری<sup>۳</sup>، هر دو تقریباً به‌طور همزمان اعلام نمودند که تغییر میدان مغناطیسی می‌تواند یک ولتاژ را در مدار مجاور القاء نماید، ضریب تناسب را ضریب القاء یا القاکنایی می‌نامیم و با  $L$  نشان داده می‌شود. پس:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (5)$$

باید توجه داشت که  $v$  و  $i$  توابعی از زمان هستند. وقتی که بخواهیم بر این خصوصیت تأکید کنیم آن‌ها را با  $v(t)$  و  $i(t)$  نشان می‌دهیم.

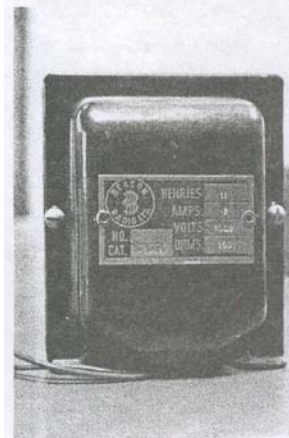
سمبل یا نماد مدار برای القاگر در شکل ۷-۱۳ ملاحظه می‌گردد. لازم به ذکر است که قرارداد عناصر غیرفعال درست مثال مقاومت و خازن، رعایت شده است. واحد اندازه‌گیری القاگر یا القاکنایی هنری (H) است و معادله مربوط به آن نشان می‌دهد که هنری بیان کوتاه ولت‌ثابت بر آمپر است.

القاگر که القاکنایی آن با معادله (۵) تعریف شود، مدلی ریاضی است و عنصری ایده‌آل می‌باشد که ما از آن برای تقریب القاگر واقعی استفاده خواهیم کرد. برای ساخت یک القاگر فیزیکی ممکن است یک سیم را به صورت سیم‌پیچ (سیم‌لوله) درآوریم. پیچیدن سیم باعث می‌شود تا اثر جریان مولد میدان مغناطیسی و تعداد مدارهای مجاور میدان که ولتاژ فارادی در آن‌ها القا می‌شود، افزایش یابد. نتیجه این اثر دوگانه این است که القاکنایی یک سیم‌پیچ تقریباً متناسب با مربع تعداد دورهای کامل آن است. مثلاً یک القاگر یا پیچک که از مارپیچ بلندی با دورهای نزدیک بهم تشکیل شده است، القاکنایی  $\mu N^2 A/s$  را دارد که در آن  $A$  سطح مقطع،  $s$  طول محوری سیم‌پیچ،  $N$  تعداد دور و  $\mu$  ثابت ماده داخل سیم‌پیچ موسوم تراوایی<sup>۴</sup> است. برای فضای آزاد (و تقریباً هوا)  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m = 4\pi n H/cm$  است. چند نمونه از القاگرهای تجاری در شکل ۷-۱۴ نشان داده شده است.

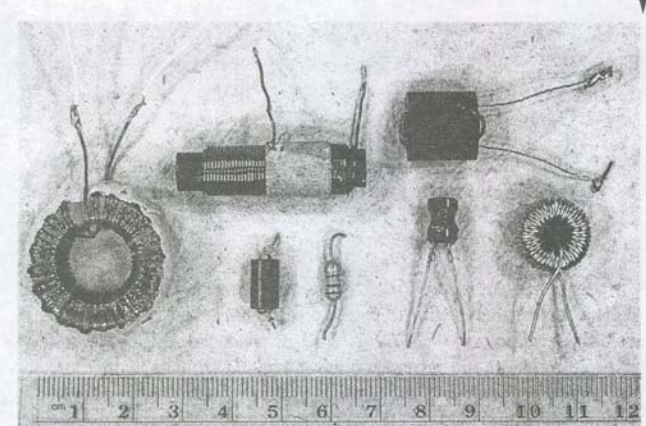


شکل ۷-۱۳ نماد الکتریکی و قرارداد ولتاژ و جریان برای القاگر.

شکل ۷-۱۴ (الف) چندین نمونه القاگر تجاری که گاهی "چوک" نامیده می‌شوند. در جهت عقربه ساعت و شروع از چپ: القاگر هسته فزیت تیوبی شکل  $287 \mu H$ ، القاگر سیلندری هسته فزیت  $266 \mu H$ ، القاگر سیلندری هسته فزیت  $215 \mu H$  طراحی شده برای فرکانس‌های VHF. القاگر تیوبی هسته پودر آهن  $85 \mu H$ ، القاگر شکل بوبین  $10 \mu H$ . القاگر سیم محوری  $100 \mu H$  و القاگر هسته پنهان  $7 \mu H$  که برای RF به کار می‌رود. (ب) یک القاگر 11 H، با ابعاد 10 cm (ارتفاع)  $8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$  (پهنای)  $8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$  (ضخامت).



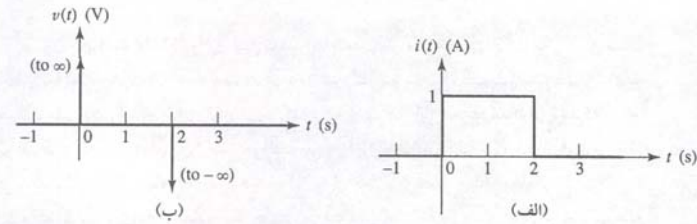
(ب)



(الف)



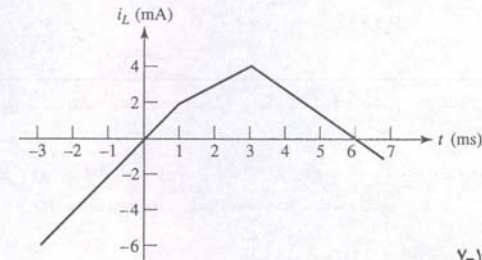
شکل ۷-۱۷ الف) زمان لازم برای تغییر جریان موج شکل ۷-۱۶ الف) از 0 به 1 و از 1 به 0، صفر شده است؛ پس تغییر جریان ناگهانی است. ب) ولتاژ متناظر با این جریان، روی القاگر 3H دو ضربه با اندازه بی‌نهایت است.



توجه کنید که زمان صعود و نزول به 0.1s کاهش یافته است. بنابراین اندازه هر مشتق، 10 بار بزرگ‌تر خواهد شد. این وضعیت جریان و ولتاژ در شکل ۷-۱۶ الف) و ب) نشان داده شده است. در امواج شکل ۷-۱۵ ب) و ۷-۱۶ ب) جالب این است که سطح زیر هر پالس ولتاژ 3Vs است. اجازه بدهید تا به بررسی موضوع ادامه دهیم. کاهش بیشتر زمان صعود و نزول موج جریان مقدار ولتاژ متناسب بیشتری را تولید می‌کند ولی این تغییر فقط در فاصله‌ای از زمان است که جریان افزایش یا کاهش یابد. تغییر ناگهانی در جریان موجب تولید جرقه یا ولتاژی بی‌نهایت می‌گردد (هر کدام سطح 3Vs را دارند) که در شکل‌های ۷-۱۷ الف) و ب) نشان داده شده است. این جرقه‌ها از لحاظ مقدار برابر ولی در جهات مختلف تولید می‌شوند و برای تغییر ناگهانی جریان لازمند.

## تمرین

۷-۴ جریان درون القاگر 0.2H در شکل ۷-۱۸ دیده می‌شود. فرض کنید قرارداد عناصر غیرفعال معتبر باشد آن‌گاه  $v_L$  را در T برابر با: الف) 0، ب) 2ms و ج) 6ms بیابید. جواب: 0.4V، 0.2V، -0.267V.



شکل ۷-۱۸

## رابطه انتگرالی ولتاژ - جریان

الفاکانایی را با معادله مشتقی ساده‌ای تعریف کردیم:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

و توانستیم چندین نتیجه را در مورد مشخصه‌های یک القاگر از این رابطه به‌دست آوریم. مثلاً دریافتیم که می‌توان یک القاگر را در جریان ثابت به‌صورت یک اتصال کوتاه تصور کرد و توافق کردیم که جریان القاگر نمی‌تواند از یک مقدار به مقدار دیگر ناگهان تغییر یابد، زیرا لازمه آن وجود منبع ولتاژ و توان بی‌نهایت در کنار القاگر می‌باشد. این معادله ساده هنوز حاوی اطلاعات زیادی است. با نوشتن این معادله به فرم زیر:

$$di = \frac{1}{L} v dt$$

به سمت رابطه انتگرالی سوق داده می‌شویم. بگذارید اول محدوده‌های انتگرال را مشخص کنیم. می‌خواهیم جریان  $i$  در زمان  $t$  برقرار و دو مقدار، محدوده‌های بالای انتگرال را در دو

طرف انتگرال تشکیل دهند. محدوده‌های پایین هم می‌توانند با فرض جریان  $i(t_0)$  در زمان  $t_0$ ، به‌طور کلی تعریف شوند، بنابراین:

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di' = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

که به معادله زیر منجر می‌گردد:

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt'$$

یا

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt' + i(t_0) \quad (۶)$$

معادله (۵) ولتاژ القاگر را برحسب جریان بیان می‌کند، در صورتی که معادله (۶) جریان برحسب ولتاژ است. برای معادله آخر فرم‌های دیگری هم پیشنهاد شده است. ما آن را به صورت انتگرال نامعین همراه با ثابت انتگرال خواهیم نوشت:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt + k \quad (۷)$$

همچنین فرض می‌کنیم که ما مسئله ایده‌آلی را حل می‌کنیم و در آن در  $t_0 = -\infty$  جریانی و یا انرژی در القاگر وجود ندارد. بنابراین  $i(-\infty) = i(t_0) = 0$  بوده و آن‌گاه

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt' \quad (۸)$$

خواهد بود. بیا بید کاربرد چنین انتگرالی را با مثال ساده‌ای که در آن ولتاژ دو سر القاگر معین است. بررسی کنیم.

ولتاژ دو سر یک القاگر 2H برابر  $6 \cos 5t$  است. اگر  $i(t = -\frac{\pi}{2}) = 1A$  باشد، جریان القاگر را به‌دست آورید.

از معادله (۶):

$$i(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t 6 \cos 5t' dt' + i(t_0)$$

یا

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{6}{5} \right) \sin 5t - \frac{1}{2} \left( \frac{6}{5} \right) \sin 5t_0 + i(t_0) \\ &= 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin 5t_0 + i(t_0) \end{aligned}$$

اولین جمله نشان می‌دهد که جریان القاگر به‌صورت سینوسی تغییر می‌کند. جملات دوم و سوم مقادیر ثابتی هستند که صرفاً وقتی مقدار جریان در زمان مشخصی به صورت عددی معین شود مفهوم پیدا می‌کنند. با فرض این که جریان در  $t = -\frac{\pi}{2}$  برابر 1A باشد، ما  $t_0 = -\frac{\pi}{2}$  و  $i(t_0) = 1$  را در نظر می‌گیریم و در این صورت:

$$i(t) = 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin(-2.5\pi) + 1$$

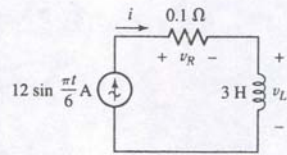
یا

$$i(t) = 0.6 \sin 5t + 1.6$$

این نتیجه را می‌توان از معادله (۷) هم به‌دست آورد. داریم:

$$i(t) = 0.6 \sin 5t + k$$





**شکل ۷-۱۹** استفاده از یک منبع جریان سینوسی به عنوان تابع تحریک مدار سری  $RL$ . مقاومت  $0.1\Omega$  مقاومت ذاتی سیمی است که القاگر با آن ساخته شده است.

## مثال ۷-۷

به این ترتیب از این پس به عنوان مرجع، انرژی صفر هنگامی فرض می‌شود که جریان القاگر در آن لحظه نیز صفر باشد. از آن لحظه به بعد، که جریان صفر است، هیچ انرژی در سیم‌پیچ ذخیره نمی‌گردد. هر وقت جریان صفر نبود، مستقل از جهت و علامت آن، انرژی در القاگر ذخیره می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که انرژی برای مدتی به القاگر تحویل و مدتی دیگر از آن باز پس گرفته می‌شود. همه انرژی ذخیره‌شده در یک القاگر ایده‌آل از آن باز پس گرفته می‌شود و در مدل ریاضی هیچ جای مصرف وجود ندارد، با این وجود یک سیم‌پیچ فیزیکی باید از سیم واقعی ساخته شود و بنابراین مقاومت به همراه آن است. پس انرژی نمی‌تواند ذخیره و بدون تلفات بازبایی شود.

این ایده‌ها را می‌توان با مثال ساده‌ای روشن کرد. در شکل ۷-۱۹ یک القاگر  $3H$  با مقاومت  $0.1\Omega$  و منبع جریان  $i = 12 \sin \frac{\pi t}{6}$  سری شده است. مقاومت را می‌توان مقاومت سیم مربوط به سیم‌پیچ فیزیکی تصور کرد.

حداکثر انرژی ذخیره‌شده در القاگر شکل ۷-۱۹ را بیابید و انرژی تلف‌شده در مقاومت را حین ذخیره انرژی و بازیافت آن محاسبه کنید.

انرژی ذخیره شده در القاگر برابر است با:

$$w_L = \frac{1}{2} Li^2 = 216 \sin^2 \frac{\pi t}{6} \text{ J}$$

که این انرژی از عدد صفر در  $t = 0$  به  $t = 216 \text{ J}$  در  $t = 3 \text{ s}$  افزایش می‌یابد. بنابراین حداکثر انرژی ذخیره‌شده همان  $216 \text{ J}$  خواهد بود.

پس از رسیدن به اوج در  $t = 3 \text{ s}$ ، انرژی کل القاگر را ترک می‌کند. بیا بید بینیم در ازای ذخیره و بازبایی این انرژی  $216 \text{ J}$  در  $6$  ثانیه چه بهایی را پرداخته‌ایم. توان تلف‌شده در مقاومت به راحتی محاسبه می‌شود:

$$p_R = i^2 R = 14.4 \sin^2 \frac{\pi t}{6} \text{ W}$$

بنابراین انرژی تبدیل شده به گرما در این مدت برابر است با:

$$w_R = \int_0^6 p_R dt = \int_0^6 14.4 \sin^2 \frac{\pi}{6} t dt$$

یا

$$w_R = \int_0^6 14.4 \left( \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \cos \frac{\pi}{3} t \right) dt = 43.2 \text{ J}$$

بنابراین در فرآیند ذخیره و بازبایی  $216 \text{ J}$  انرژی در  $6$  ثانیه،  $43.2 \text{ J}$  هزینه کرده‌ایم. این مقدار  $20\%$  از حداکثر انرژی ذخیره شده است ولی در بسیاری از القاگرها این مقدار بزرگ ضریب القاء، کمیتی منطقی است. برای ضریب القاء  $100\mu\text{H}$ ، می‌توان به حوالی  $2$  یا  $3$  درصدی انرژی حداکثر رسید.

**۷-۶** فرض کنید در شکل ۷-۲۰،  $L = 25 \text{ mH}$ ،  $\gamma = 20$ ،  $t = 12 \text{ ms}$  به دست آورید. به شرطی که  $i = 10te^{-100t} \text{ A}$  باشد. (ب)  $i$  را در  $t = 0.1 \text{ s}$  محاسبه کنید، اگر  $v = 6e^{-12t} \text{ V}$  و  $i(0) = 10 \text{ A}$  باشد. اگر  $i(0) = 8(1 - e^{-40t}) \text{ mA}$  باشد. (ج) توان حمل شده به القاگر در  $t = 50 \text{ ms}$  و (د) انرژی ذخیره‌شده در القاگر در  $t = 40 \text{ ms}$ .  
جواب:  $0.510 \mu\text{J}$  و  $7.49 \mu\text{W}$ ،  $24.0 \text{ A}$ ،  $-15.06 \text{ mV}$ .

و با جریان  $1 \text{ A}$  در  $t = -\frac{\pi}{2}$  مقدار عددی  $k$  را مطابق زیر به دست می‌آوریم:

$$1 = 0.6 \sin(-2.5\pi) + k$$

یا

$$k = 1 + 0.6 = 1.6$$

و مطابق قبل

$$i(t) = 0.6 \sin 5t + 1.6$$

با این ولتاژ خاص در این مثال، معادله (۸) می‌رود که مشکل دار شود. ما معادله را بر این فرض استوار کردیم که در  $t = -\infty$  جریان آن صفر است. برای اطمینان، این شرط باید در دنیای فیزیکی واقعیت داشته باشد و نه در مدل ریاضی. در مدل ریاضی همه عناصر و توابع تحریک ایده‌آل در نظر گرفته شدند. مشکل پس از انتگرال‌گیری ظهور می‌کند یعنی داریم:

$$i(t) = 0.6 \sin 5t' \Big|_{-\infty}^{t'}$$

انتگرال را در حد پایین ارزیابی می‌نماییم:

$$i(t) = 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin(-\infty)$$

سینوس  $-\infty$  نامعین است و بنابراین ما نمی‌توانیم عبارت خود را ارزیابی کنیم. معادله (۷) فقط هنگامی مفید است که ما توابعی را که در  $t \rightarrow -\infty$  به سمت صفر می‌روند، ارزیابی کنیم.

## تمرین

**۷-۵** یک القاگر  $100 \text{ mH}$  دارای ولتاژ  $v_L = 2e^{-3t} \text{ V}$  در دو سر پایانه‌اش است. جریان القاگر حاصل را اگر  $i_L(-0.5) = 1 \text{ A}$  باشد، معین کنید.  
جواب:  $-\frac{20}{3} e^{-3t} + 30.9 \text{ A}$ .

با این وجود نباید زود قضاوت کنیم، زیرا هر کدام از معادلات (۶)، (۷) و (۸) که از این پس از آن‌ها استفاده می‌کنیم بسته به مسئله و کاربرد مزایای خاص خود را دارد. معادله (۶) روشی طولانی و عمومی را نمایانگر است و نشان می‌دهد که ثابت انتگرال، از جنس جریان است. معادله (۸) کمی از معادله (۷) خلاصه‌تر است و در آن نقش ثابت انتگرال حذف شده است. بالاخره معادله (۸) عبارتی فوق‌العاده است، زیرا ثابتی لازم ندارد، با این وجود، فقط برای جریان صفر در  $t = -\infty$  و هنگامی که عبارت تحلیلی جریان در  $-\infty$  معین است کاربرد دارد.

## ذخیره انرژی

اکنون بیا بید توجه خود را به توان و انرژی معطوف کنیم. توان جذب‌شده حاصل ضرب جریان و ولتاژ است:

$$p = vi = Li \frac{di}{dt}$$

انرژی  $w_L$  جذب‌شده به وسیله القاگر در میدان مغناطیسی حول سیم‌پیچ ذخیره می‌گردد و به صورت انتگرال توان در یک فاصله مطلوب زمانی بیان می‌شود:

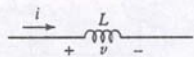
$$\int_{t_0}^t p dt' = L \int_{t_0}^t \frac{di}{dt'} dt' = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} i di = \frac{1}{2} L \{ [i(t)]^2 - [i(t_0)]^2 \}$$

بنابراین

$$w_L(t) - w_L(t_0) = \frac{1}{2} L \{ [i(t)]^2 - [i(t_0)]^2 \} \quad (۹)$$

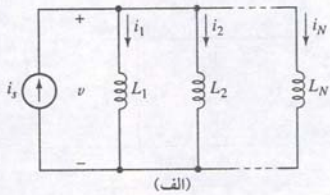
که مجدداً فرض می‌کنیم در  $t_0$  مقدار جریان  $i(t_0)$  است. هنگام استفاده از عبارت انرژی مرسوم است که جریان در  $t_0$  را صفر اختیار کنند، و نیز فرض می‌شود که انرژی هم در این زمان صفر باشد. در این صورت داریم:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2 \quad (۱۰)$$



شکل ۷-۲۰





ولی برای مدار معادل داریم:

$$v_s = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

و بنابراین القاکنایی معادل برابر است با:

$$L_{eq} = (L_1 + L_2 + \dots + L_N)$$

یا

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^N L_n \quad (11)$$

القاگری که معادل با چند القاگر سری است، القاکنایی یا ضریب القایی آن با جمع القاکنایی القاگرها در مدار اصلی برابر است. این دقیقاً شبیه نتیجه‌ای است که ما برای مقاومت‌های سری به دست آوردیم.

### القاگرهای موازی

ترکیب تعدادی القاگر موازی با نوشتن تنها معادله گری برای مدار اصلی، شکل ۷-۲۲ (الف)

$$\begin{aligned} i_s &= \sum_{n=1}^N i_n = \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{L_n} \int_{t_0}^t v dt + i_n(t_0) \right] \\ &= \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \right) \int_{t_0}^t v dt + \sum_{n=1}^N i_n(t_0) \end{aligned}$$

و مقایسه آن با مدار معادل شکل ۷-۲۲ (ب) حاصل می‌شود:

$$i_s = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v dt + i_s(t_0)$$

چون قانون جریان کیرشهف لازم می‌دارد که  $i_s(t_0)$  با مجموع جریان شاخه‌ها در  $t_0$  برابر باشد، دو جمله انتگرال نیز باید با یکدیگر برابر باشند، از این رو:

$$L_{eq} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + \dots + 1/L_N} \quad (12)$$

در حالت خاص که دو القاگر با هم موازی اند:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (13)$$

می‌بینیم که القاگرهای موازی درست مثل مقاومت‌های موازی با هم ترکیب می‌شوند.

### خازن‌های سری

برای یافتن خازنی که معادل N خازن سری باشد، مدار شکل ۷-۲۳ (الف) و معادل آن در شکل ۷-۲۳ (ب) را به کار برده و چنین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v_s &= \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{C_n} \int_{t_0}^t i dt + v_n(t_0) \right] \\ &= \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^t i dt + \sum_{n=1}^N v_n(t_0) \end{aligned}$$

شکل ۷-۲۳ (الف) مداری شامل N خازن سری.

(ب) مدار معادل که در آن

$$C_{eq} = [1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_N]^{-1}$$

اکنون اجازه بدهید چهار مشخصه کلیدی یک القاگر را که از تعریف معادله  $v = L \frac{di}{dt}$  به دست می‌آید، جمع بندی کنیم.

### مشخصه‌های مهم یک القاگر ایده‌آل:

۱. اگر جریانی که از القاگر عبور می‌کند با زمان تغییر نکند، ولتاژی در دو سر آن وجود نخواهد داشت. بنابراین القاگر برای اتصال کوتاه است.
۲. حتی اگر ولتاژ دو سر القاگری صفر باشد، مقدار معینی انرژی می‌تواند در آن ذخیره شود. مثلاً اگر جریان عبوری از آن ثابت باشد این نکته معتبر است.
۳. امکان تغییر جریان درون یک القاگر در مدت زمان صفر وجود ندارد. برای تحقق آن باید ولتاژ دو سر القاگر بی‌نهایت باشد. القاگر در برابر هر تغییر در جریان خود، شبیه به مقاومت جرم در برابر تغییر سرعت، از خود مقاومت نشان می‌دهد.
۴. القاگر هرگز انرژی را مصرف نمی‌کند. بلکه فقط آن را ذخیره می‌نماید. گرچه این مطلب برای مدل ریاضی کاملاً صحیح است، به دلیل وجود مقاومت در القاگر فیزیکی صحت ندارد.

با مطالعه مجدد چهار عبارت و جایگزینی دوگان بعضی از کلمات به نتایج جالبی می‌رسیم. اگر در چهار عبارت فوق، القاگر با خازن، ضریب القا با ظرفیت، ولتاژ و جریان دو سر و عبوری از آن، مدار باز و اتصال کوتاه، فتر و جرم، تغییر مکان یا جابه‌جایی با سرعت تعویض شود، چهار عبارت قبلی متعلق به خازن به دست می‌آیند.

### ۷-۳ ترکیب القاگرها و خازن‌ها

اکنون که خازن و القاگر را به لیست عناصر مدار غیر فعال خود اضافه نمودیم، باید ببینیم آیا روش‌هایی که در تحلیل مدارهای مقاومتی معرفی کردیم معتبرند یا خیر. همچنین بد نیست طریقه جایگزینی ترکیبات سری و موازی آن‌ها را با معادل ساده‌تر همچون فصل ۳ بیاموزیم. ابتدا به دو قانون کیرشهف نگاه می‌کنیم، که هر دو آن‌ها اصل بحث ما را تشکیل می‌دهند. با این وجود هنگام بیان این دو موضوع، هیچ محدودیتی بر نوع عناصر تشکیل دهنده شبکه نیست. بنابراین هر دو آن‌ها معتبر باقی می‌مانند.

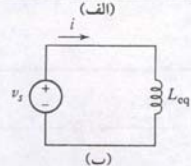
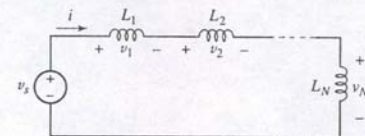
### القاگرهای سری

اکنون می‌توانیم روال‌های مربوط به کاهش مقاومت‌ها را به معادلشان تعمیم داده و به‌طور مشابه به القاگرها و خازن‌ها اعمال کنیم. ابتدا منبع ولتاژ ایده‌آلی را که به N القاگر سری، طبق شکل ۷-۲۱ (الف) وصل است ملاحظه می‌نماییم. می‌خواهیم القاگری معادل با القاکنایی  $L_{eq}$  به دست آوریم، به طوری‌که اگر جایگزین این N القاگر شود، جریان  $i(t)$  تغییر نکند. مدار معادل در شکل ۷-۲۱ (ب) رسم شده است. با اعمال KVL به مدار اصلی داریم:

$$\begin{aligned} v_s &= v_1 + v_2 + \dots + v_N \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + \dots + L_N) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

یا به‌طور خلاصه:

$$v_s = \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N L_n \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} \sum_{n=1}^N L_n$$

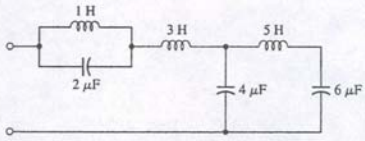


شکل ۷-۲۱ (الف) مداری شامل N القاگر سری.

(ب) مدار معادل مطلوب که در آن

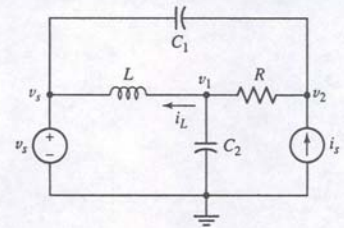
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$$





شکل ۷-۲۷ یک شبکه LC بدون قابلیت ترکیب سری یا موازی خازن‌ها و القاگرها.

مثال ۷-۹



شکل ۷-۲۸ یک مدار RLC چهار گره‌ای و ولتاژ گره‌های آن‌ها.

## ۷-۴ نتایج خطی بودن

اجازه بدهید به تحلیل مش و گرهی بازگردیم. چون می‌توانیم قانون کیرشهف را با حاشیه امنیت کافی اعمال کنیم، مشکلی در نوشتن معادلاتی که کافی و مستقلند نداریم. این معادلات انتگرال - مشتق خطی با ضرایب ثابتند که حتی ذکر آن‌ها مشکل است، چه رسد به حل آن‌ها. بنابراین ما فقط به نوشتن آن‌ها اکتفا می‌کنیم تا با کاربرد قوانین کیرشهف در مدارهای RLC آشنا شویم. حل معادلات ساده‌تر را در فصل‌های بعدی بحث خواهیم کرد.

معادلات گرهی را برای مدار شکل ۷-۲۸ بنویسید.

ولتاژهای گرهی طبق شکل انتخاب شده‌اند، و ما جمع جریان‌هایی که گره مرکزی را ترک می‌کنند، می‌نویسیم:

$$\frac{1}{L} \int_{t_0}^t (v_1 - v_s) dt + i_L(t_0) + \frac{v_1 - v_2}{R} + C_2 \frac{dv_1}{dt} = 0$$

که در آن  $i_L(t_0)$  مقدار جریان القاگر در آغاز انتگرال‌گیری است. در گره سمت راست داریم:

$$C_1 \frac{d(v_2 - v_s)}{dt} + \frac{v_2 - v_1}{R} - i_s = 0$$

با نوشتن مجدد دو رابطه اخیر داریم:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{R} + C_2 \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_1 dt - \frac{v_2}{R} &= \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_s dt - i_L(t_0) \\ -\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + C_1 \frac{dv_2}{dt} &= C_1 \frac{dv_s}{dt} + i_s \end{aligned}$$

این معادلات انتگرال - مشتق، همان‌هایی هستند که وعده داده بودیم و در این‌جا به چند نکته جالب در مورد آن‌ها اشاره می‌نماییم. اول این‌که در معادلات فوق منبع ولتاژ  $v_s$  به فرم عبارات انتگرالی و مشتقی ظاهر شده است و نه به فرم ساده  $v_s$ . چون هر دو منبع برای همه زمان‌ها وجود دارند باید بتوانیم عبارات انتگرالی و مشتقی را ارزیابی نماییم. دوم، مقدار جریان اولیه در القاگر،  $i_L(t_0)$  به عنوان منبع جریان (ثابت) در گره وسطی عمل می‌کند.

۷-۸ اگر  $v_C(t) = 4 \cos 10^5 t$  V در مدار شکل ۷-۲۹ باشد،  $v_s(t)$  را بیابید.  
جواب:  $v = -2.4 \cos 10^5 t$  V

در این لحظه ما سعی نخواهیم کرد تا معادلات انتگرال - مشتق را حل کنیم. با این وجود بد نیست وقتی که نیروهای محرکه توابع سینوسی هستند، مدار را بررسی کنیم و در صورت امکان نسبت ولتاژ - جریان (به نام امپدانس) یا جریان - ولتاژ (ادمیتانس) را برای هر سه عنصر غیرفعال تعریف نماییم. آن‌گاه ولتاژهای گرهی تنها با یک ضرب وارد معادلات می‌شوند و نه به صورت مشتق و انتگرال و دوباره یک مجموعه معادله جبری خطی خواهیم داشت. این معادلات جبری را می‌توان به کمک دترمینان یا با روش حذف متغیرها حل کرد.

می‌توان نشان داد که مزیت خطی بودن شامل مدارهای RLC نیز می‌گردد. طبق تعاریف قبلی ما در مورد یک مدار خطی، این مدارها نیز خطی هستند زیرا رابطه ولتاژ - جریان برای القاگر و یا خازن رابطه‌ای خطی است. برای القاگر داریم:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

و

$$v_s = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i dt + v_s(t_0)$$

با این وجود قانون ولتاژ کیرشهف برابری  $v_s(t_0)$  و مجموع ولتاژ خازن‌ها در  $t_0$  را برقرار می‌کند. بنابراین:

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_N} \quad (14)$$

بنابراین خازن‌های سری، همچون سری شدن رسانایی‌ها و یا مقاومت‌های موازی با یکدیگر ترکیب می‌شوند. حالت خاص معادل دو خازن سری به رابطه زیر منتهی می‌گردد:

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (15)$$

## خازن‌های موازی

بالاخره به کمک شکل ۷-۲۴ ظرفیت معادل N خازن موازی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

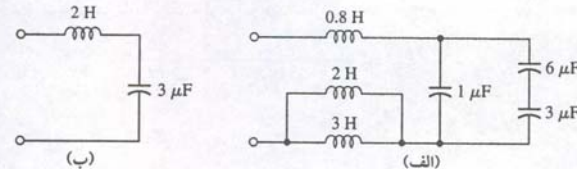
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N \quad (16)$$

و جای تعجبی ندارد که ببینیم خازن‌های موازی چون مقاومت‌های سری با یکدیگر ترکیب می‌شوند، یعنی کافی است همه ظرفیت‌ها را با هم جمع کنیم.

این فرمول‌ها ارزش حفظ کردن را دارند. فرمول‌های اعمال شده به ترکیبات سری و موازی القاگرها با فرمول‌های نظیرشان در ترکیب مقاومت‌ها یکی هستند، بنابراین فرمول‌های مذکور واضح به نظر می‌رسند. با این وجود باید دقت کرد که در ترکیب‌های سری و موازی خازن‌ها، عبارت برخلاف مقاومت‌ها و القاگرها است و اغلب به هنگام عمل موجب خطاهای فاحش در محاسبات می‌گردد.

مثال ۷-۸

شیکه شکل ۷-۲۵ (الف) را با ترکیب سری و موازی ساده بیان کنید.



شکل ۷-۲۵ (الف) یک شبکه مفروض LC. (ب) مدار معادل آن.

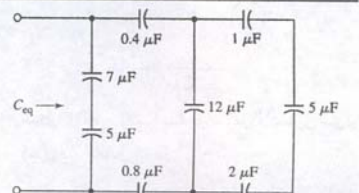
ابتدا خازن‌های 3 و  $6\mu F$  به معادل  $2\mu F$  خود تبدیل می‌شوند و آن‌گاه این خازن با عنصر  $1\mu F$  موازی است ترکیب می‌گردد و حاصل آن معادل  $3\mu F$  می‌باشد. به علاوه القاگرهای 3 و 2H با معادل 1.2H جایگزین شده و سپس با عنصر 0.8H جمع می‌شود تا القاکنایی 2H به دست آید. مدار معادل ساده‌شده در شکل ۷-۲۵ (ب) دیده می‌شود.

## تمرین

۷-۷  $C_{eq}$  را برای شبکه شکل ۷-۲۶ بیابید.

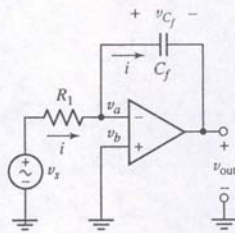
جواب:  $3.18\mu F$

شیکه شکل ۷-۲۷ حاوی سه القاگر و سه خازن است ولی سری یا موازی هیچ یک از دو عنصر خازن و القاگر وجود ندارد. ساده‌سازی این شبکه با تکنیک‌های ارائه شده امکان‌پذیر نیست.



شکل ۷-۲۶





شکل ۷-۳۰ op amp ایده‌آلی که به عنوان انتگرال‌گیر وصل شده است.

برای ساخت یک انتگرال‌گیر با استفاده از op amp، ما ورودی معکوس‌نکننده را به زمین وصل می‌کنیم و یک خازن ایده‌آل به عنوان عنصر پس‌خورده از خروجی به این ورودی وصل می‌نماییم و بالاخره یک منبع سیگنال  $v_s$  را از طریق مقاومت ایده‌آل طبق شکل ۷-۳۰ به آن متصل می‌کنیم.

با اجرای تحلیل گرهی در ورودی وارونگر داریم:

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + i$$

می‌توانیم جریان  $i$  را به ولتاژ دو سر خازن مرتبط نماییم:

$$i = C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

و بنابراین:

$$0 = \frac{v_a - v_s}{R_1} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

با به کارگیری قاعده ۲ برای op amp ایده‌آل، می‌دانیم  $v_a = v_b = 0$  است، بنابراین:

$$0 = \frac{-v_s}{R_1} + C_f \frac{dv_{C_f}}{dt}$$

با انتگرال‌گیری و حل  $v_{out}$  داریم:

$$v_{C_f} = v_a - v_{out} = 0 - v_{out} = \frac{1}{R_1 C_f} \int_0^t v_s dt' + v_{C_f}(0)$$

یا

$$v_{out} = -\frac{1}{R_1 C_f} \int_0^t v_s dt' - v_{C_f}(0) \quad (۷)$$

بنابراین برای ساخت یک **انتگرال‌گیر**، یک مقاومت، یک خازن و یک op amp را با هم ترکیب کردیم. توجه کنید که اولین جمله خروجی  $\frac{1}{RC}$  ضربدر منفی انتگرال ورودی از  $t' = 0$  تا  $t$  است و دومین جمله منفی مقدار اولیه  $v_{C_f}$  می‌باشد. مثلاً مقدار  $(RC)^{-1}$  را با  $C = 1\mu F$  و  $R = 1M\Omega$  می‌توان به واحد تبدیل کرد. دیگر ترکیبات می‌تواند ولتاژ خروجی را افزایش یا کاهش دهد.

قبل از این که مدار انتگرال‌گیر را به کناری بگذاریم، ممکن است سوالی از طرف خواننده مطرح شود "آیا می‌توانیم به جای خازن از القاگر استفاده کرده و یک مشتق‌گیر بسازیم". البته می‌توانیم ولی طراحان مدار معمولاً از به کارگیری القاگرها حتی الامکان به دلیل سایز، وزن، قیمت، مقاومت و ظرفیت آن خودداری می‌کنند. در عوض محل مقاومت و خازن را در شکل ۷-۲۷ تعویض می‌نمایند و به این ترتیب یک مشتق‌گیر ساخته می‌شود.

عبارتی برای ولتاژ خروجی مدار op amp شکل ۷-۳۱ به دست آورید.

حل را با معادله گرهی در پایه وارونگر با  $v_{C_1} = v_a - v_s$  آغاز می‌کنیم.

$$0 = C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + \frac{v_a - v_{out}}{R_f}$$

با به کارگیری قاعده ۲،  $v_a - v_b = 0$  است. بنابراین:

$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{v_{out}}{R_f}$$

و ضرب جریان در ثابت  $K$ ، ولتاژی را به دست می‌دهد که  $K$  برابر بزرگ‌تر است. در فرم انتگرال:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt' + i(t_0)$$

می‌توان دید که اگر هر عبارت  $K$  برابر شود، آنگاه جریان اولیه هم باید در  $K$  ضرب گردد. بررسی مشابهی در مورد خازن نشان می‌دهد که خازن هم خطی است. بنابراین مداری متشکل از منابع مستقل منابع وابسته خطی، القاگرها و خازن‌ها، یک مدار خطی می‌باشد. در این مدار خطی مجدداً پاسخ متناسب با نیروی محرکه است. برای اثبات این ادعا، معادلات انتگرال - مشتق را برای مجموعه می‌نویسیم. بیایید همه جملاتی که فرم  $L di/dt$ ،  $Ri$  و  $\int i dt / C$  دارند را در سمت چپ معادله بنویسیم و ولتاژ منابع مستقل را به سمت راست منتقل کنیم. به عنوان مثالی ساده، یکی از معادلات می‌تواند فرم زیر را داشته باشد:

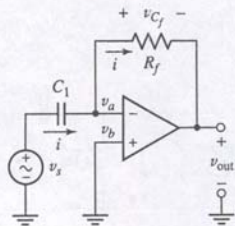
$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + v_C(t_0) = v_s$$

اگر هر منبع مستقلی  $K$  برابر شود آنگاه سمت راست هر معادله به اندازه  $K$  برابر می‌شود. اکنون هر جمله در سمت چپ یا جمله‌ای خطی شامل چند جریان حلقه یا یک ولتاژ اولیه حلقه است. برای این که همه پاسخ‌ها (جریان حلقه‌ها)  $K$  برابر شوند، باید ولتاژ خازن را هم در  $K$  ضرب کنیم. یعنی باید ولتاژ اولیه خازن را مانند یک منبع مستقل در نظر بگیریم و آن را هم  $K$  برابر نماییم. به طریقی مشابه جریان‌ها نیز در تحلیل گرهی به صورت جریان منابع مستقل ظاهر می‌شوند.

بنابراین اصل تناسب منبع و پاسخ قابل تعمیم به یک مدار کلی، RLC نیز هست و به دنبال آن می‌توان گفت که اصل تجمع نیز معتبر می‌باشد. تأکید می‌کنیم که مقدار جریان‌های اولیه در القاگرها و ولتاژ در هر خازن باید در اصل تجمع به صورت منابع مستقل در نظر گرفته شوند و هر یک از آن‌ها به نوبت غیر فعال شوند. در فصل ۵ آموختیم که اصل تجمع، نتیجه طبیعت خطی مدارهای مقاومتی است. این مدارها به این دلیل خطی‌اند که رابطه ولتاژ - جریان برای مقاومت خطی و نیز قوانین کیرشهف هم خطی‌اند. قبل از اعمال اصل تجمع به مدارهای RLC، لازم است روشی را برای حل معادلات توصیف‌کننده آن‌ها هنگامی که فقط یک منبع وجود دارد، معرفی کنیم. در این جا باید احساس اطمینان کنیم که هر مدار خطی پاسخی را که دامنه‌اش با دامنه منبع متناسب است، تولید خواهد کرد. آنگاه آماده‌ایم تا اصل تجمع را اعمال کنیم و در آن القاگر یا خازنی را در نظر بگیریم که در آن جریان القاگر و ولتاژ خازن در  $t - t_0$  مشخص شده و هرگاه نوشتش فراموش فراموش شده است. قضایای تونن و نورتن بر خطی بودن مدار اولیه، قابلیت اعمال قضایای کیرشهف و اصل تجمع استوار است. مدار RLC کلی کاملاً با این شرایط مطابقت دارد، و بنابراین نتیجه می‌شود که همه مدارهای خطی حاوی هر ترکیبی از منابع ولتاژ و جریان مستقل، منابع جریان و ولتاژ وابسته خطی، مقاومت‌های خطی، القاگرها و خازن‌ها را می‌توان با این دو قضیه تحلیل کرد. در این جا لازم نیست مجدداً قضایا را تکرار کنیم زیرا قبلاً چنان بیان شده‌اند که به مدار کلی RLC نیز قابل اعمال باشند.

## ۷-۵ مدارهای op amp ساده با خازن

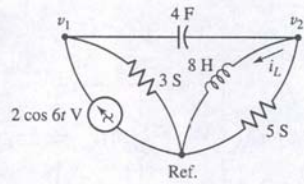
در فصل ۶ چند نوع مدار تقویت‌کننده مبتنی بر op amp ایده‌آل آشنا شدیم. تقریباً در هر مورد، دیدیم که خروجی با ترکیبی از مقاومت به ولتاژ ورودی مرتبط است. اگر یک یا چند عدد از این مقاومت‌ها را با یک خازن تعویض کنیم، امکان دارد مدار جالبی به دست آید و در آن خروجی با مشتق یا انتگرال ولتاژ ورودی متناسب باشد. در عمل این‌گونه مدارها کاربرد وسیعی دارند. مثلاً یک سنسور سرعت را می‌توان به مدار یک op amp وصل کرد تا سیگنالی متناسب با شتاب را تولید نماید. یا سیگنال خروجی می‌تواند نشان‌دهنده برخورد بار روی یک الکتروود فلزی در پریود خاصی باشد که این کار فقط با اندازه‌گیری جریان انجام می‌گردد.



شکل ۷-۳۱ یک op amp ایده‌آل به عنوان مشتق‌گیر.

مثال ۷-۱۰





شکل ۷-۳۳ مدار دوگان دقیق مدار شکل ۷-۳۲.

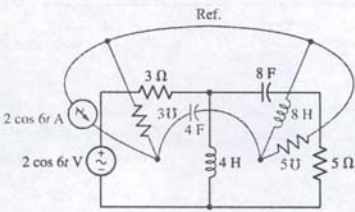
مدار دوگان در شکل ۷-۳۴ نشان داده شده است. چون در مجموعه معادلات از لحاظ عددی یکسانند، مدارها دقیقاً دوگان یکدیگرند.

برای یافتن مدارهای دوگان می‌توان روشی ساده‌تر را هم به کاربرد و حتی معادلات را هم نوشت. بنابراین در این‌گونه موارد به معادلات مش یا تک‌حلقه آن‌ها فکر می‌کنیم. در هر مش باید یک گره غیر مرجع داشته باشیم، و به علاوه گره مرجع هم باید باشد. بنابراین روی نمودار داده شده در وسط هر مش گره‌ای را مستقر می‌نماییم و گره مرجع را به صورت خطی نزدیک نمودار و یا یک حلقه به دور مدار در نظر می‌گیریم. هر عنصری که در مرز دو مش قرار دارد، یک عنصر مشترک است و در دو معادله مش به صورت جملاتی یکسان و با علائم مختلف ظاهر می‌شود. به جای این عنصر، باید عنصری را جایگزین کرد که در دو معادله گره‌ای ظاهر می‌شود. بنابراین آن را بین گره غیر مرجع داخل حلقه‌ای که عنصر دوگان بین آن‌ها قرار دارد، می‌گذاریم. نوع عنصر دوگان را هم به آسانی می‌توان تعیین کرد. اگر به جای القاگر از خازن، به جای خازن از القاگر، به جای مقاومت از رسانایی و به جای رسانایی از مقاومت استفاده کنیم، شکل ریاضی و معادلات تغییر نمی‌یابد. بنابراین القاگر 4H که بین مش‌های 1 و 2 در مدار شکل ۷-۳۳ مشترک است به صورت خازن 4F ظاهر می‌شود که در مدار دوگان بین گره‌های 1 و 2 قرار دارد.

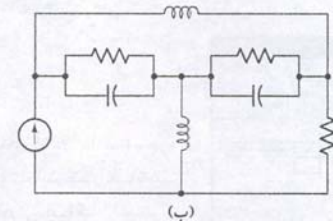
دوگان عنصری که تنها در یک حلقه قرار دارند، باید بین گره متناظر آن حلقه و گره مرجع قرار گیرند. مجدداً با توجه به شکل ۷-۳۳ ولتاژ 2 cos 6t V فقط در مش 1 وجود دارد. دوگان آن منبع جریان 2 cos 6t است که فقط به گره 1 و گره مرجع وصل است. چون منبع ولتاژ در جهت ساعتگرد است، منبع جریان هم باید به طرف گره غیر مرجع باشد. بالاخره، برای ولتاژ اولیه موجود در دو سر خازن 8F در مدار مفروض باید اولویت قابل شد. معادلات نشان می‌دهند که دوگان این ولتاژ اولیه در دو سر خازن، جریان اولیه‌ای است که در مدار دوگان از القاگر عبور می‌کند. مقادیر عددی یکسانند و علامت صحیح جریان اولیه به راحتی با ملاحظه ولتاژ اولیه در مدار مفروض و جریان اولیه مدار دوگان، به عنوان منبع به راحتی معین می‌شوند. بنابراین اگر ۷C در مدار اصلی به عنوان منبع تصور شود به صورت ۷C- در سمت راست معادله حلقه ظاهر می‌گردد. در مدار دوگان تصور جریان ۷C- به عنوان منبع منجر به جمله ۷C- در سمت راست معادله گره‌ای می‌شود. چون هر دو به هنگام ایفای نقش منبع علامت یکسانی دارند، آن‌گاه اگر 10V = ۷C(0) باشد ۷C(0) نیز 10A خواهد بود.

مدار شکل ۷-۳۳ در شکل ۷-۳۵ تکرار شده و دوگان دقیق آن نیز روی همان نمودار رسم شده است. برای رسم آن، هر عنصر را بین گره‌های واقع در مرکز هر مش و گره مرجع قرار می‌دهیم. کشیدن یک گره مرجع بزرگ به دور مدار، کار را آسان می‌کند. پس از رعایت استاندارد در ترسیم، شکل ۷-۳۴ به دست خواهد آمد.

مثال دیگری از ایجاد دوگان یک مدار در شکل ۷-۳۶ (الف) و (ب) دیده می‌شود. چون هیچ مقداری برای عنصری مشخص نشده است، این دو مدار دوگان هستند ولی لزوماً دوگان دقیق نیستند. مدار اصلی را می‌توان با فرض یک گره در مرکز هر یک از پنج مش شکل ۷-۳۶ (ب) و ادامه روش فوق به دست آورد.



شکل ۷-۳۵ دوگان مدار شکل ۷-۳۳ که مستقیماً از مدار به دست آمده است.



شکل ۷-۳۶ (الف) دوگان مدار، روی خود مدار رسم شده است. (ب) شکل مناسب‌تر مدار دوگان.

با حل برای  $v_{out}$  داریم:

$$v_{out} = R_f C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt}$$

$$\text{چون } v_{C_1} = v_a - v_b = v_s$$

$$v_{out} = -R_f C_1 \frac{dv_s}{dt}$$

بنابراین با تعویض مقاومت و خازن در شکل ۷-۳۰ به جای انتگرال‌گیر یک مشتق‌گیر خواهیم داشت.

۷-۹ عبارتی برحسب  $v_{in}$  برای  $v_{out}$  در مدار شکل ۷-۳۲ به دست آورید.

$$\text{جواب: } v_{out} = -L_p/R_1 dv_s/dt$$

## ۷-۶ دوگانگی

مفهوم دوگانگی به بسیاری از مفاهیم اصول مهندسی اعمال می‌شود. در این بخش، دوگانگی را برحسب معادلات مدار تعریف می‌کنیم. دو مدار را "دوگان" یکدیگر گوییم اگر معادلات مشی که یکی از آن‌ها را بیان می‌کند، از لحاظ ریاضی با معادلات گره‌ای دیگری همشکل باشد. اگر معادله مش یک مدار با معادله گره‌ای متناظر با مدار دیگر از لحاظ عادی هم، شبیه باشند، آن دو مدار را دقیقاً دوگان یکدیگر گوییم. البته متغیرهای ولتاژ و جریان نمی‌توانند یکسان باشند. دوگانگی به خواصی اشاره دارد که به وسیله مدارهای دوگان بروز داده می‌شود.

بیایید تعریف را تفسیر کنیم و از آن با نوشتن دو معادله مش در شکل ۷-۳۳ مدار دوگان را بسازیم. دو جریان حلقه‌ای  $i_1$  و  $i_2$  را تخصیص می‌دهیم و معادلات مش زیر را می‌نویسیم:

$$3i_1 + 4 \frac{di_1}{dt} - 4 \frac{di_2}{dt} = 2 \cos 6t \quad (18)$$

$$-4 \frac{di_1}{dt} + 4 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{8} \int_0^t i_2 dt + 5i_2 = -10 \quad (19)$$

البته فرض بر این است که در  $t = 0$  ولتاژ 10V =  $v_C$  باشد.

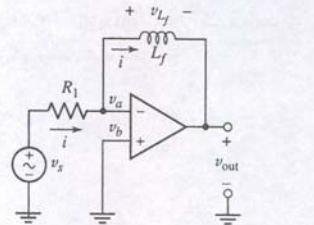
اکنون دو معادله‌ای را می‌سازیم که دقیقاً دوگان مدار را تشکیل دهند. می‌خواهیم این دو از نوع معادلات گره‌ای باشند و لذا شروع به جایگزینی جریان‌های حلقه  $i_1$  و  $i_2$  با ولتاژهای گره‌ای  $v_1$  و  $v_2$  در معادلات (۹) و (۱۰) می‌کنیم. آن‌گاه داریم:

$$3v_1 + 4 \frac{dv_1}{dt} - 4 \frac{dv_2}{dt} = 2 \cos 6t \quad (20)$$

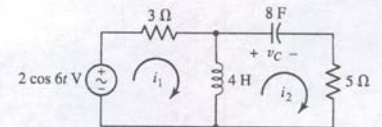
$$-4 \frac{dv_1}{dt} + 4 \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{8} \int_0^t v_2 dt + 5v_2 = -10 \quad (21)$$

حال به دنبال مداری خواهیم گشت که توسط دو معادله فوق بیان شود.

ابتدا خطی را برای نمایش گره مرجع خطی می‌کشیم و سپس دو گره با ولتاژهای  $v_1$  و  $v_2$  را نسبت به مرجع مشخص می‌کنیم. معادله (۲۰) نشان می‌دهد که یک منبع جریان 2 cos 6t A بین گره 1 و گره مرجع وصل است و جهت آن طوری است که جریان وارد گره 1 می‌شود. این معادله همچنین نشان می‌دهد که بین گره 1 و گره مرجع یک رسانایی 3S قرار دارد. به سراغ معادله (۲۱) می‌رویم و ابتدا جملات غیر مشترک یعنی آن‌هایی که در معادله (۲۰) نیستند را در نظر می‌گیریم. این جملات نشان می‌دهند که بین گره 2 و گره مرجع یک القاگر 8H و یک رسانای 5S وجود دارد. دو جمله مشابه در معادلات (۲۰) و (۲۱) نشان می‌دهد که یک خازن 4F در میان دو گره قرار دارد. مدار با نصب این خازن در بین دو گره کامل می‌شود. جمله ثابت در سمت راست معادله (۲۱) مقدار جریان القاگر در  $t = 0$  است. به بیان دیگر  $i(0) = 10A$ .



شکل ۷-۳۲

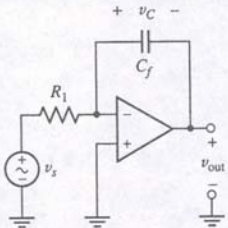


شکل ۷-۳۳ مداری که می‌خواهیم با استفاده از تعریف دوگانگی مدار دقیقاً دوگانش را به دست آوریم.



یک جعبه محاوره مشابهی را می‌توان با دو بار کلیک بر روی سمبل القاگر به دست آورد. اگر بخواهیم مقادیر اولیه روی شماتیک قرار گیرند، باید روی Change Display کلیک کنیم و انتخاب مناسب را انجام دهیم. توجه کنید که وقتی ابتدا خازن روی شماتیک قرار گیرد، به صورت افقی مستقر می‌شود و پایانه مرجع مثبت برای ولتاژ اولیه پایانه سمت چپ است.

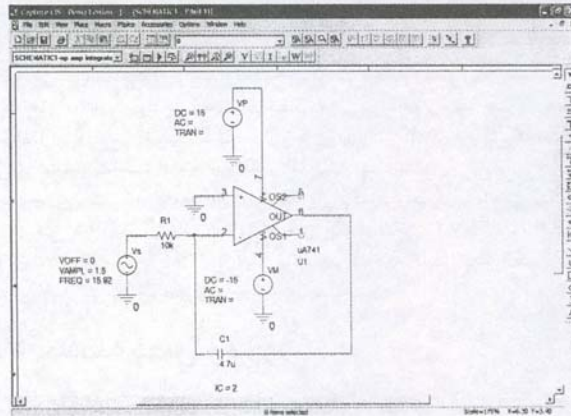
مثال ۷-۱۱



شکل ۷-۳۹ یک مدار انتگرال‌گیر op amp.

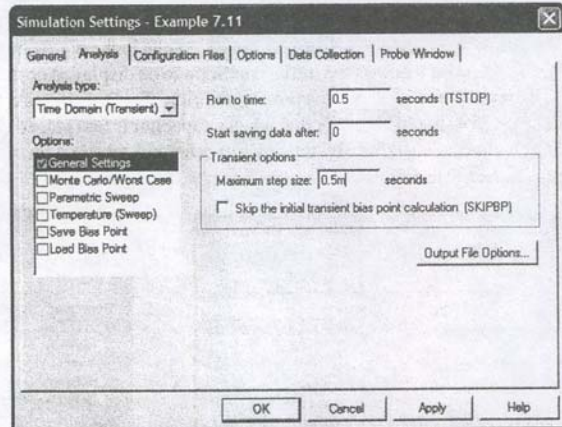
موج ولتاژ خروجی مدار شکل ۷-۳۹ را شبیه‌سازی کنید، به‌شرطی که  $v_s = 5 \sin 100t$  V،  $v_C(0) = 2$  V و  $C_f = 4.7 \mu\text{F}$ ،  $R_1 = 100\text{k}\Omega$  باشد.

با ترسیم شماتیک مدار آغاز می‌کنیم و سعی خواهیم کرد تا ولتاژ اولیه را در دو سر خازن (شکل ۷-۴۰) برقرار کنیم. توجه کنید که باید فرکانس از  $100\text{rad/s}$  به  $100/2\pi = 15.92\text{Hz}$  تبدیل شود.



شکل ۷-۴۰ رسم مدار شکل ۷-۳۹ با ابزار ترسیم شماتیک.

برای فراهم کردن ولتاژها و جریان‌های متغیر با زمان باید آن‌چه که تحلیل گذرا خوانده می‌شود را اجرا نماییم. تحت منوی Setup، سعی در انتخاب Transient Analyses کنید، در این حالت جعبه محاوره شکل ۷-۴۱ باید ظاهر گردد.



شکل ۷-۴۱ کادر محاوره تنظیم پارامترهای تحلیل گذرا. زمان نهایی را 0.5s گذاشته‌ایم تا چند تناوب از شکل موج به دست آید.  
( $1/15.92 \approx 0.063$ )

مفهوم دوگانگی را می‌توان در زبانی که با آن تحلیل و طرز کار مدار بیان می‌شود هم وارد کرد. مثلاً اگر منبع ولتاژی با یک خازن سری باشد و بخواهیم جمله "منبع ولتاژ موجب ایجاد جریان در خازن می‌شود" را بیان کنیم، جمله دوگان "منبع جریان موجب ایجاد ولتاژ در دو سر القاگر می‌شود" خواهد بود. اگر در بیان جمله دقت نشود، مانند "جریان دور مدار سری می‌چرخد" برای درک دوگان آن باید ابتکار به خرج داد.

برای تمرین در به کار بردن زبان دوگانگی، می‌توانید دوگان قضیه تونن را بیان کنید. حاصل، قضیه نورتن خواهد بود.

صحبت از عناصر دوگان، زبان دوگان و مدارهای دوگان کردیم. و اما شبکه دوگان چیست؟ مقاومت R و القاگر L سری یا آن را در نظر بگیرید. در دوگان این شبکه دو پایانه وجود داشته و به راحتی با اتصال چند منبع ایده‌آل به شبکه مفروض به دست می‌آید. آن‌گاه مدار دوگان به صورت منبع دوگان موازی با رسانایی G که همان مقدار R دارد و یک ظرفیت C که دارای اندازه L است به دست خواهد آمد. ما شبکه دوگان را به صورت شبکه‌ای دو پایانه‌ای که به منبع دوگان وصل شده ملاحظه می‌کنیم. بنابراین جفت پایانه‌های بین C و G به صورت موازی به هم وصل می‌شوند.

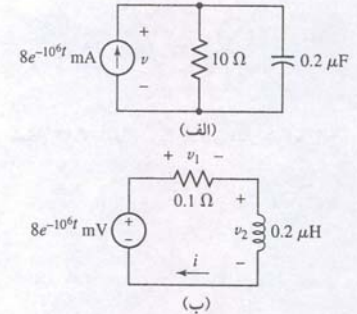
قبل از پایان بحث، باید متذکر شویم که دوگانگی بر اساس معادلات مش و گرهی تعریف شد. چون مدارهای غیرمسطح نمی‌توانند با معادلات مش بیان شوند، مداری که در صفحه ترسیم نشود دوگان ندارد.

ما از اصل دوگان برای کاهش کاری که باید در تحلیل مدارهای استاندارد ساده انجام شود، استفاده می‌کنیم. پس از تحلیل مدار سری RL، مدار RC موازی به توجه کمتری نیاز دارد، نه به این علت که اهمیتش کمتر است، بلکه به دلیل این که تحلیل دوگان آن را می‌دانیم. چون حاصل تحلیل مدارهای پیچیده را نمی‌توان به خاطر سپرد، معمولاً دوگان در تحلیل این مدارها، حل سریعی را در اختیار نمی‌گذارد.

۷-۱۰ یک مساعده گرهی برای مدار شکل ۷-۳۷ (الف) بنویسید و یا جایگزینی نشان دهید که  $v = -80e^{-106t}$  mV یک حل است. با این فرض، پیدا کنید (الف)  $v_1$ ، (ب)  $v_2$  و (ج)  $i$  را برای مدار شکل ۷-۳۷ (ب).  
جواب:  $v_1 = -80e^{-106t}$  mV،  $v_2 = 16e^{-106t}$  V،  $i = -80e^{-106t}$  mA

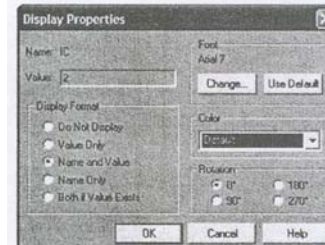
## ۷-۷ مدل‌سازی خازن‌ها و القاگرها با PSpice

هنگام استفاده از PSpice برای تحلیل مدارهای حاوی القاگرها و خازن‌ها، اغلب لازم است تا مقدار اولیه هر عنصر را مشخص کنیم (یعنی  $i_L(0)$ ،  $v_C(0)$ ). برای این کار باید روی نماد آن عنصر دو بار کلیک کرد تا جعبه گفتگوی شکل ۷-۳۸ (الف) ظاهر شود. همچنانکه خواهیم دید در جوار مقدار ظرفیت (InF) در پیش فرض، می‌توان مقدار اولیه ( $IC=$ ) را هم مشخص کرد.

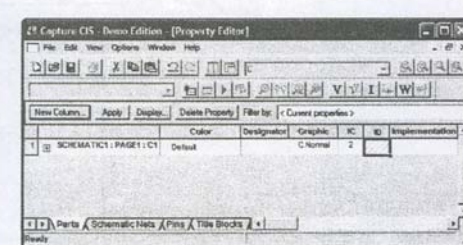


شکل ۷-۳۷

## تمرین



(ب)

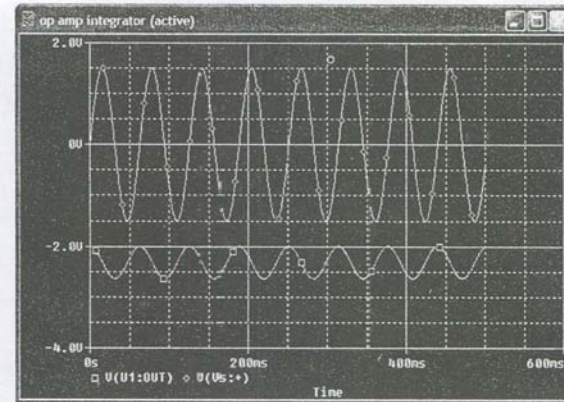


(الف)

شکل ۷-۳۸ (الف) پنجره ویرایش‌گر خاصیت خازنی. (ب) کادر دیالوگ خصوصیات نمایشگر.



شکل ۷-۴۲ خروجی probe مدار انتگرال شبیه‌سازی شده همراه با ورودی برای مقایسه.



مشخص می‌سازد. PSpice خود اقدام به انتخاب فواصل زمانی منفصل، برای محاسبه ولتاژها و جریان‌های مختلف می‌نماید. گاهی پیام خطایی مبنی بر عدم وجود حل گذرا دریافت می‌شود. در این گونه موارد، بهتر است مقداری برای Step Ceiling وارد کنیم که حداکثر گام زمانی بین محاسبات است. البته هرچه گام کوتاه‌تر باشد بهتر است. با توجه به تحلیل قبلی و معادله (۱۷)، انتظار داریم که خروجی برابر با منفی انتگرال موج ورودی یعنی  $V = 2.319 \cos 100t - 0.319 v_{out}$  که در شکل ۷-۴۲ می‌بینیم باشد. مقدار اولیه ولت در دو سر خازن با مقدار ثابتی ترکیب می‌شود که حاصل انتگرال‌گیری است و نتیجه‌اش مقدار متوسط غیر صفری در خروجی است.

## ۷-۸ خلاصه فصل و مرور

- جریان درون یک خازن  $i = C \frac{dv}{dt}$  است.
  - ولتاژ دو سر خازن با رابطه زیر به جریانش مرتبط است:
- $$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' + v(t_0)$$
- یک خازن برای جریان‌های  $dc$  به صورت مدار باز عمل می‌کند.
  - ولتاژ دو سر یک القاگر با رابطه  $\frac{di}{dt} = L$  معین می‌گردد.
  - جریان عبوری از القاگر با رابطه زیر به ولتاژش مربوط می‌شود:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt' + i(t_0)$$

- یک القاگر در جریان‌های  $dc$  به صورت مدار اتصال کوتاه عمل می‌نماید.
- انرژی ذخیره‌شده فعلی در یک خازن برابر  $\frac{1}{2} C v^2$  است، دجانی که انرژی ذخیره‌شده در یک القاگر  $\frac{1}{2} L i^2$  می‌باشد. مرجع هر دوی آن‌ها به زمانی است که در آن‌ها انرژی نبوده است.
- ترکیبات سری و موازی القاگرها را می‌توان با روابطی مشابه مقاومت‌ها در هم ادغام کرد.
- ترکیبات سری و موازی خازن‌ها را می‌توان برعکس مقاومت‌ها تصور کرد.
- خازنی که در یک op amp معکوس‌گر به عنوان عنصر پسخورد به کار می‌رود ولتاژ خروجی متناسب با انتگرال ولتاژ ورودی را تولید می‌نماید. با تعویض مقاومت ورودی با خازن پسخورد، ولتاژ خروجی متناسب با مشتق ورودی خواهد بود.
- چون خازن‌ها و القاگرها عناصر خطی‌اند، KVL، KCL، تجمیع، قضایای تونن و نورتن و تحلیل‌های گرهی و مش به مدار آن‌ها قابل اعمال است.

- مفهوم دوگانگی تصویر دیگری، در روابط بین مدارهای حاوی القاگر و خازن را به دست می‌دهد.
- PSpice اجازه می‌دهد تا ولتاژ اولیه‌ای در دو سر یک خازن یا جریان اولیه‌ای در یک القاگر ایجاد کنیم. تحلیل گذرا جزئیات پاسخ وابسته به زمان مدارهای حاوی انواع عناصر را تهیه می‌کند.

## ۷-۹ خواندنی‌های کمی

A detailed guide to characteristics and selection of various capacitor and inductor types can be found in:

- H. B. Drexler, *Passive Electronic Component Handbook*, 2nd ed., C. A. Harper, ed. New York: McGraw-Hill, 2003, pp. 69–203.
- C. J. Kaiser, *The Inductor Handbook*, 2nd ed. Olathe, Kans.: C.J. Publishing, 1996.

Two books that describe capacitor-based op amp circuits are:

- R. Mancini, (ed.). *Op Amps Are For Everyone*, 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003.
- W. G. Jung, *Op Amp Cookbook*, 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997.

## مسائل

### ۷-۱ خازن

که برای سلیکان  $K_s = 11.8$  است،  $\epsilon_0$  ضریب گذردهی خلاء،  $A$  برابر سطح مقطع پیوند و  $W$  عرض ناحیه تهی پیوند است.  $W$  نه تنها به ساخت آن بلکه به ولتاژ اعمال شده به دو پایانه نیز بستگی دارد:

$$W = \sqrt{\frac{2K_s \epsilon_0}{qN} (V_{bi} - V_A)}$$

بنابراین دیویدا غالباً در مدارهای الکترونیک به عنوان خازن‌های کنترل شده با ولتاژ به کار می‌روند. با این فرض که مقادیر پارامترها،  $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$  و  $V_{bi} = 0.57 \text{V}$ ،  $N = 10^{18} \text{cm}^{-3}$  باشند، ظرفیت خازن دیود با سطح مقطع  $1 \mu\text{m} \times 1 \mu\text{m}$  و ولتاژ  $-10 \text{V}$ ،  $-5$  و  $-1$   $V_A$  را به دست آورید.

۷. خازنی طراحی کنید که ظرفیتش به صورت دستی با چرخش ولوم بین  $10 \text{pF}$  و  $1 \text{nF}$  تغییر کند. طرح خود را با برچسب‌های مناسب توضیح دهید.

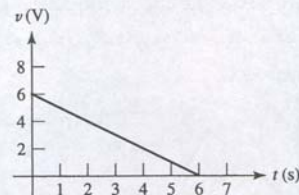
۸. ولتاژ زیر به یک خازن  $300 \mu\text{F}$  وصل است:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 3e^{-t/5} \text{ V} & t > 0 \end{cases}$$

(الف) انرژی ذخیره‌شده در خازن در  $t = 2 \text{ms}$  چقدر است. (ب) در چه مدتی انرژی ذخیره‌شده در خازن به  $37\%$  مقدار حداکثرش افت می‌کند. (ج) جریان عبوری از خازن در  $t = 1.2 \text{s}$  را معین نمایید. (د) توان انتقالی به وسیله خازن به مدار خاصی در  $t = 2 \text{s}$  را حساب کنید.

۹. جری درون خازن  $47 \mu\text{F}$  در شکل ۷-۴۴ دیده می‌شود. ولتاژ دو سر آن را در (الف)  $t = 2 \text{ms}$ ، (ب)  $t = 4 \text{ms}$  و (ج)  $t = 5 \text{ms}$  حساب کنید.

۱. جریان درون خازن  $10 \mu\text{F}$  را در ازای ولتاژهای دو سر آن حساب کنید: (الف)  $5 \text{ V}$ ، (ب)  $115 \sqrt{2} \cos 120 \pi t \text{ V}$  و (ج)  $4e^{-t} \text{mV}$ .
۲. جریان درون خازن  $4.7 \mu\text{F}$  را در پاسخ به موج شکل ۷-۴۳ رسم کنید. فرض کنید که جریان و ولتاژ طبق قرارداد علامت عناصر غیرفعال همخوانی دارد.



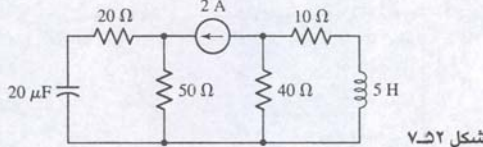
شکل ۷-۴۳

۳. جریان جاری درون خازن  $1 \text{ mF}$  را در پاسخ به  $1 \text{ V}$  دو سر پایانه‌ها را حساب کنید، اگر  $17$  برابر باشد با: (الف)  $30te^{-t} \text{V}$  و (ب)  $4e^{-5t} \sin 100t \text{V}$ .
۴. حداکثر مقدار انرژی که در هر یک از خازن‌های الکترولیت شکل ۷-۲ (ب) و (ج) می‌توان ذخیره کرد چقدر است؟
۵. خازنی از دو قرص آلومینیومی نازک با قطر  $1 \text{ cm}$  و فاصله  $100 \mu\text{m}$  از یکدیگر ساخته شده است. (الف) ظرفیت آن را حساب کنید با فرض این که فقط هوا در بین صفحات وجود داشته باشد. (ب) ولتاژی را معین کنید که باید برای ذخیره  $1 \text{ mJ}$  انرژی در خازن به کار ببریم. (ج) اگر بخواهیم خازن  $2.5 \mu\text{F}$  انرژی را در  $100 \text{V}$  ذخیره کند ضریب گذردهی نسبی  $\epsilon/\epsilon_0$  برای ناحیه بین صفحات را مشخص کنید.
۶. یک دیود پیوندی pn با ظرفیت پیوندی زیر تعریف شده است:

$$C_j = \frac{K_s \epsilon_0 A}{W}$$

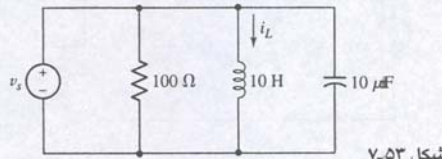


۲۷. با مراجعه به شکل ۷.۵۲  $w_L$  (الف)،  $w_C$  (ب)، ولتاژ دو سر هر عنصر مدار و (د) جریان در هر عنصر را بیابید.



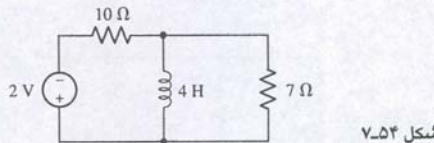
شکل ۷.۵۲

۲۸. اجازه بدهید  $t > 0$  و  $v_s = 400t^2$  V و  $i_L(0) = 0.5$  A را در مدار شکل ۷.۵۳ داشته باشیم. در  $t = 0.4$  s، مقادیر انرژی (الف) ذخیره شده در خازن، (ب) ذخیره شده در القاگر و (ج) تلف شده در مقاومت را از  $t = 0$  تا  $t = 0.4$  s حساب کنید.



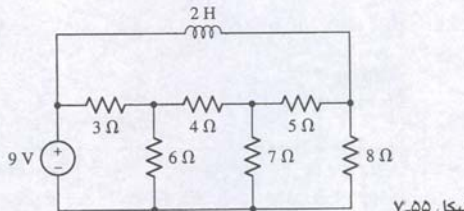
شکل ۷.۵۳

۲۹. برای مدار شکل ۷.۵۴، توان تلف شده با مقاومت‌های  $7\Omega$  و  $10\Omega$  را محاسبه کنید. صحت جواب را با PSpice تحقیق نمایید.



شکل ۷.۵۴

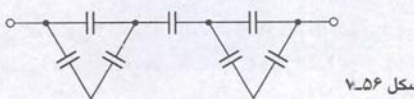
۳۰. (الف) معادل تونن شبکه متصل القاگر شکل ۷.۵۵ را به دست آورید. (ب) جریان داخل القاگر را به دست آورید. (ج) صحت جواب خود را با PSpice تحقیق نمایید، به نتایج خود نام مناسبی بدهید.



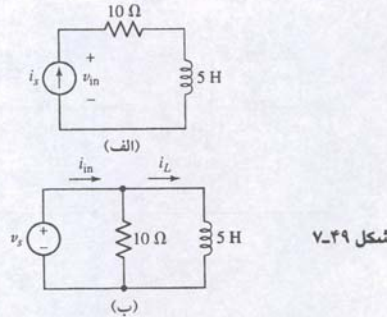
شکل ۷.۵۵

### ۷-۳ ترکیب القاگرها و خازن‌ها

۳۱. ظرفیت معادل شبکه شکل ۷.۵۶ را اگر همه خازن‌ها  $10\mu F$  باشند، معین کنید.



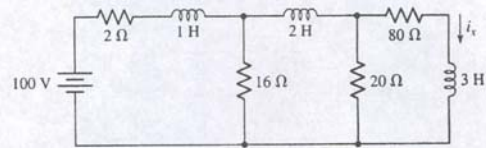
شکل ۷.۵۶



شکل ۷.۴۹

۳۳. ولتاژ  $v_L$  در دو سر القاگر  $0.2$  H در  $0 < t \leq 10$  ms برابر  $100$  V است. در فاصله زمانی  $10 < t < 20$  ms به طور خطی به صفر می‌رود، در  $20 < t < 30$  ms برابر  $0$  و در  $30 < t < 40$  ms برابر  $100$  V و پس از آن صفر است. با فرض قرارداد علامت عنصر غیرفعال برای  $v_L$  و  $i_L$  (الف)  $i_L$  را در  $t = 8$  ms به دست آورید، به شرطی که  $i_L(0) = -2$  A. (ب) انرژی ذخیره شده در  $t = 22$  ms را معین کنید، به شرطی که  $i_L(0) = 0$  فرض شود.

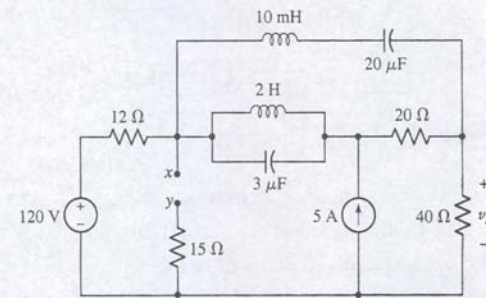
۳۴. مدار شکل ۷.۵۰ از مدت‌ها قبل وصل شده است،  $i_x$  را پیدا کنید.



شکل ۷.۵۰

۳۵. ولتاژ دو سر یک القاگر  $5$  H برابر  $v_L = 10(e^{-t} - e^{-2t})$  است. اگر  $i_L(0) = 80$  mA باشد و  $v_L$  و  $i_L$  طبق قرارداد عناصر غیرفعال تعریف شده باشند (الف)  $v_L(1$  s)، (ب)  $i_L(1$  s) و (ج)  $i_L(\infty)$  را به دست آورید.

۳۶. پس از مدت زمان طولانی از وصل مدار شکل ۷.۵۱،  $v_x$  را بیابید، به شرطی که (الف) خازن بین  $x$  و  $y$  باشد و (ب) یک القاگر بین  $x$  و  $y$  باشد.

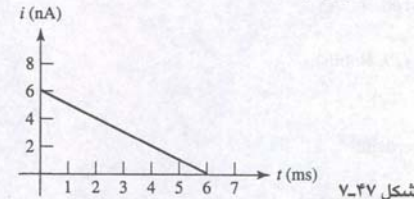


شکل ۷.۵۱

### ۷-۲ القاگر

۱۵. ولتاژ دو سر یک القاگر را حساب کنید، اگر جریان وارده به پایانه مرجع "+" برابر باشد با: (الف)  $5$  mA، (ب)  $115\sqrt{2} \cos 120\pi t$  A و (ج)  $4e^{-6t}$  mA.

۱۶. ولتاژ ظاهر شده در دو سر القاگر  $1$  pH را در پاسخ به جریان شکل ۷.۴۷ رسم کنید. فرض کنید که تعریف جریان و ولتاژ با قرارداد قطعات غیرفعال همخوانی دارد.

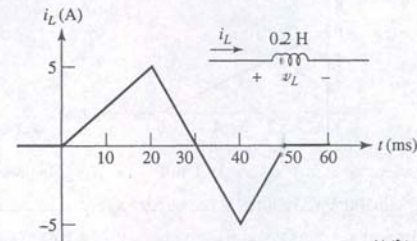


شکل ۷.۴۷

۱۷. ولتاژی را که در دو سر القاگر  $5$  μH در پاسخ به جریان پایانه مرجع "+" ایجاد می‌شود را محاسبه نمایید، اگر  $i$  برابر باشد با: (الف)  $30te^{-t}$  nA و (ب)  $4e^{-t} \sin 100t$  mA.

۱۸. حداکثر انرژی ذخیره شده در یک القاگر  $5$  mH چقدر است اگر سیم برای حداکثر جریان  $1.5$  A در نظر گرفته شده باشد؟ جواب خود را تشریح کنید.

۱۹. با مراجعه به شکل ۷.۴۸: (الف)  $v_L$  را به عنوان تابعی از زمان بین  $0 < t < 60$  ms رسم کنید. (ب) زمانی که در آن القاگر حداکثر توان را جذب کند، پیدا کنید. (ج) زمان تولید توان حداکثر را به دست آورید و (د) انرژی ذخیره شده در القاگر در  $t = 40$  ms چقدر است.

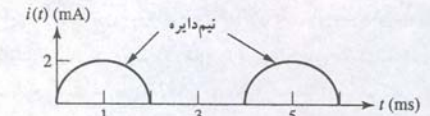


شکل ۷.۴۸

۲۰. در شکل ۷.۱۳، فرض کنید  $L = 50$  mH باشد. با فرض  $i_L = 0$  در  $t < 0$  و  $80te^{-100t}$  mA در  $t > 0$ ، حداکثر مقدار  $|i_L|$  و  $|v|$  و زمانی که این حداکثرها رخ می‌دهند را تعیین نمایید.

۲۱. (الف) اگر در مدار شکل ۷.۴۹ (الف) در  $t > 0$ ،  $i_s = 0.4t^2$  A باشد،  $v_{in}(t)$  را برای  $t > 0$  در شکل ۷.۴۹ (ب) رسم کنید.

۲۲. ولتاژ  $20 \cos 1000t$  V به القاگر  $25$  mH اعمال شده است. اگر در  $t = 0$  جریان القاگر صفر باشد، در  $0 < t < 2\pi$  ms، (الف) توان جذب شده به وسیله القاگر را رسم کنید. (ب) انرژی ذخیره شده در آن را بیابید.

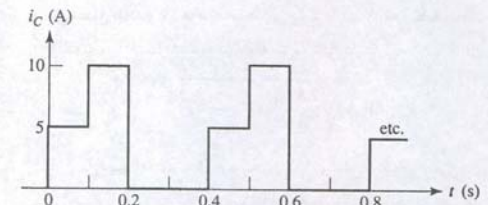


شکل ۷.۴۴

۱۰. جریان در یک خازن با رابطه  $i(t) = 7 \sin \pi t$  mA داده شده است. اگر انرژی ذخیره شده در  $t = 200$  ms برابر  $3\mu J$  باشد، مقدار ظرفیت چقدر است؟

۱۱. (الف) اگر خازن شکل ۷-۱ دارای ظرفیت  $0.2\mu F$  باشد، با  $v_C = 5 + 3 \cos^2 200t$  V مقدار  $i_C(t)$  را به دست آورید. (ب) حداکثر انرژی ذخیره شده در خازن چیست؟ (ج) اگر در  $t < 0$ ،  $i_C = 0$  و در  $t > 0$ ، برابر  $i_C = 8e^{-100t}$  mA باشد، برای  $t > 0$  مقدار  $v_C(t)$  را پیدا کنید. (د) اگر برای  $t > 0$ ،  $i_C = 8e^{-100t}$  mA و  $v_C(0) = 100$  V باشد،  $v_C(t)$  را برای  $t > 0$  به دست آورید.

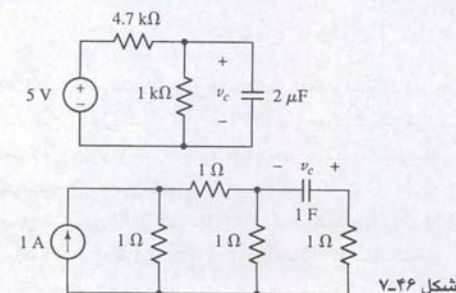
۱۲. شکل موج جریان برای  $t > 0$  در شکل ۷.۴۵ به خازن  $2$  mF اعمال شده است. با فرض  $v_C(0) = 250$  V و فرض قرارداد علامت عناصر غیرفعال، در چه فاصله زمانی  $v_C$  بین  $2000$  و  $2100$  V قرار می‌گیرد؟



شکل ۷.۴۵

۱۳. مقاومت  $R$  با خازن  $1\mu F$  موازی است. برای هر  $t \leq 0$  انرژی ذخیره شده در خازن برابر  $20e^{-1000t}$  mJ است. (الف)  $R$  را پیدا کنید. (ب) با انتگرال‌گیری، نشان دهید که انرژی تلف شده در فاصله  $0 < t < \infty$  برابر  $0.02$  J است.

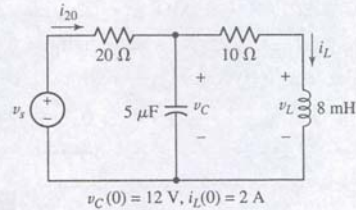
۱۴. برای مدارهای شکل ۷.۴۶، ولتاژ دو سر هر خازن را محاسبه کنید. (ب) صحت پاسخ خود را با PSpice تحقیق نمایید.



شکل ۷.۴۶

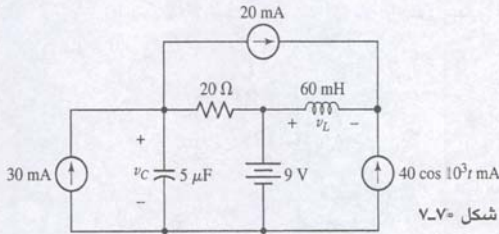


۴۸. (الف) معادلات گرهی را برای شکل ۷-۶۹ بنویسید. (ب) معادلات متی را برای آن بنویسید.



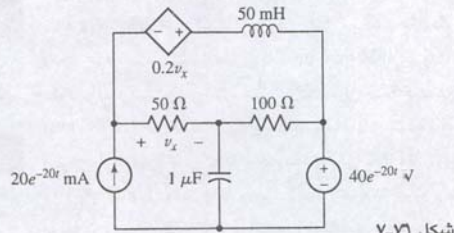
شکل ۷-۶۹

۴۹. اگر فرض شود که همه منابع در شکل ۷-۷۰ برای مدت مدیدی وصل و کار کرده باشند، از اصل تجمیع برای یافتن  $v_C(t)$  و  $i_L(t)$  استفاده کنید.



شکل ۷-۷۰

۵۰. برای مدار شکل ۷-۷۱، فرض کنید در  $t = 0$  هیچ انرژی ذخیره نشده است. مجموعه معادلات گرهی را بنویسید.

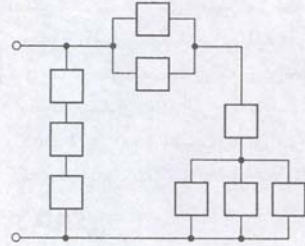


شکل ۷-۷۱

## ۷-۵ مدارهای op amp ساده با خازن

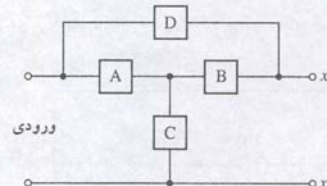
۵۱. جی مقاومت  $R$  و  $C$  را در مدار شکل ۷-۳۰ تعویض کرده و فرض کنید  $R_1 = \infty$  و  $A = \infty$  است. (الف)  $v_O(t)$  را به صورت تابعی از  $v_S(t)$  رسم کنید. (ب) معادله‌ای به‌دست آورید که  $v_O(t)$  و  $v_S(t)$  را به هم مربوط سَرد. به‌شرطی که  $A$  بی‌نهایت نباشد.

۵۲. کشت‌دهنده یونی دستگاهی است که برای تزریق اتم‌های یونیزه در سیلیکان به‌کار می‌رود، تا مشخصه‌های الکتریکی ساخت دیودها و ترانزیستورها را اصلاح نماید. یون‌هایی که به سیلیکان برخورد می‌کنند، به جریانی تبدیل می‌شوند و نهایتاً به مقاومت معلومی هدایت می‌گردند. جریان مستقیماً با شدت یون (یعنی تعداد برخورد یون‌ها در ثانیه  $i = 1.602 \times 10^{-19}$ ) متناسب است. اگر برای تشخیص جریان از مقاومت  $1.000 \text{ M}\Omega$  استفاده شده باشد، مداری طراحی کنید که



شکل ۷-۶۵

۴۴. در شکل ۷-۶۶ اجازه دهید تا  $C, B, A$  و  $D$  (الف) به ترتیب القاگرهایی با  $1 \text{ H}, 2 \text{ H}, 3 \text{ H}$  و  $4 \text{ H}$  باشند، القاکنایی ورودی را با  $X - X'$  باز و سپس اتصال کوتاه پیدا کنید. (ب) به ترتیب خازن‌های  $1 \text{ F}, 2 \text{ F}, 3 \text{ F}$  و  $4 \text{ F}$  باشند و آن‌گاه ظرفیت ورودی را با  $X - X'$  باز و سپس بسته به‌دست آورید.

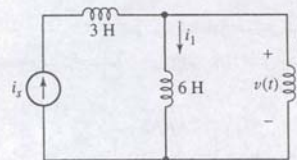


شکل ۷-۶۶

۴۵. با جعبه‌ای پر از خازن‌های  $1 \text{ nF}$  و استفاده از حداقل خازن‌ها، نشان دهید چگونه می‌توان ظرفیت معادل (الف)  $2.25 \text{ nF}$ ، (ب)  $0.75 \text{ nF}$  و (ج)  $0.45 \text{ nF}$  را به‌دست آورد.

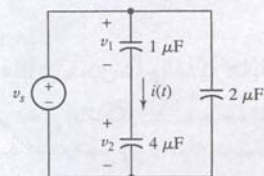
## ۷-۴ نتایج خطی بودن

۴۶. در مدار شکل ۷-۶۷، اگر  $i_s = 60e^{-200t} \text{ mA}$  با  $i_1(0) = 20 \text{ mA}$  باشد، (الف)  $v(t)$  را برای همه مقادیر  $t$  بیابید. (ب)  $i_1(t)$  را برای  $t \geq 0$  به‌دست آورید. (ج)  $i_2(t)$  را برای  $t \geq 0$  معین کنید.

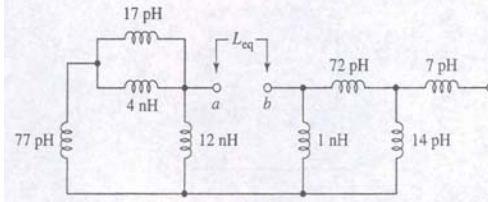


شکل ۷-۶۷

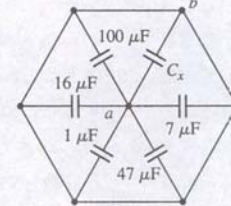
۴۷. اگر در مدار شکل ۷-۶۸،  $v_s = 100e^{-80t} \text{ V}$  و  $v_1(0) = 20 \text{ V}$  باشد. (الف)  $i(t)$  را برای همه مقادیر  $t$  به‌دست آورید. (ب)  $v_1(t)$  را در  $t \geq 0$  پیدا کنید و (ج)  $v_2(t)$  را برای  $t \geq 0$  بیابید.



شکل ۷-۶۸

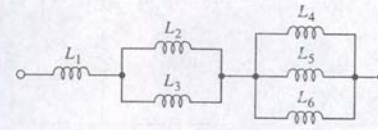


شکل ۷-۶۱



شکل ۷-۶۲

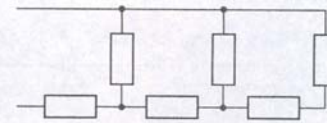
۳۸. شبکه شکل ۷-۶۳ از سه طبقه سری تشکیل شده است که هر کدام تعدادی القاگر موازی دارد. (الف) اگر همه القاگرها  $1.5 \text{ H}$  باشند، القاگر معادل را پیدا کنید. (ب) عبارتی کلی برای شبکه از این نوع با  $N$  طبقه به‌دست آورید.



شکل ۷-۶۳

۳۹. برای شبکه شکل ۷-۶۳،  $L_1 = 1 \text{ H}$ ،  $L_2 = L_3 = 2 \text{ H}$ ،  $L_4 = L_5 = L_6 = 3 \text{ H}$  است. (الف) القاگر معادل را بیابید. (ب) عبارتی برای این نوع شبکه با  $N$  طبقه به‌دست آورید، با این فرض که طبقه  $N$  از القاگر و هر القاگر دارای القاکنایی  $N$  است.

۴۰. اگر در شکل ۷-۶۴ هر عنصر یک خازن  $2 \text{ pF}$  باشد، باگسترش تبدیل  $\Delta-Y$  آن را ساده کنید.



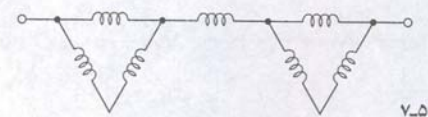
شکل ۷-۶۴

۴۱. از بسط مفهوم تبدیل  $\Delta-Y$  شبکه شکل ۷-۶۴ را ساده کنید. هر عنصر یک القاگر  $1 \text{ nH}$  است.

۴۲. با جعبه‌ای پر از القاگرهای  $1 \mu\text{H}$  بگویید با حداقل اجزا چگونه می‌توان القاگر معادل (الف)  $2.25 \mu\text{H}$ ، (ب)  $750 \text{ nH}$  و (ج)  $450 \text{ nH}$  داشت.

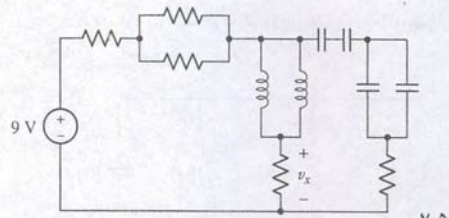
۴۳. با توجه به شکل ۷-۶۵، (الف) اگر هر عنصر یک مقاومت  $10 \Omega$  باشد،  $R_{eq}$  را به‌دست آورید. (ب) اگر هر عنصر یک القاگر  $10 \text{ H}$  باشد،  $L_{eq}$  را تعیین کنید و (ج) اگر هر عنصر یک خازن  $10 \text{ F}$  باشد  $C_{eq}$  چقدر است؟

۳۲. القاء معادل شبکه شکل ۷-۵۷ را اگر همه القاگرها  $77 \text{ pH}$  باشند، معین نمایید.



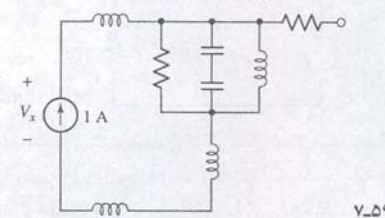
شکل ۷-۵۷

۳۳. برای مدار شکل ۷-۵۸، (الف) مدار را با استفاده از ترکیب سری موازی تا حداقل اجزا کاهش دهید.



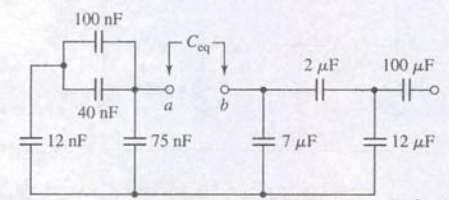
شکل ۷-۵۸

۳۴. برای مدار شکل ۷-۵۹، (الف) مدار را با حداقل استفاده از ترکیب سری موازی تا حداقل اجزا کاهش دهید. (ب) اگر همه مقاومت‌ها  $1 \Omega$  باشند، همه خازن‌ها  $50 \mu\text{F}$  و همه القاگرها  $10 \text{ nH}$  باشند،  $V_x$  را تعیین نمایید.



شکل ۷-۵۹

۳۵. شبکه شکل ۷-۶۰ را با نظاره از پایانه‌های  $a$  و  $b$  به یک خازن تقلیل دهید.



شکل ۷-۶۰

۳۶. با نظاره از پایانه‌های  $a$  و  $b$  در شکل ۷-۶۱، شبکه را به یک القاگر کاهش دهید.

۳۷. اگر شبکه شکل ۷-۶۲ در  $a$  و  $b$  به ولتاژ  $2.5 \text{ V}$  وصل شود، انرژی ذخیره شده  $534.8 \mu\text{J}$  خواهد بود، مقدار  $C_x$  چقدر است؟

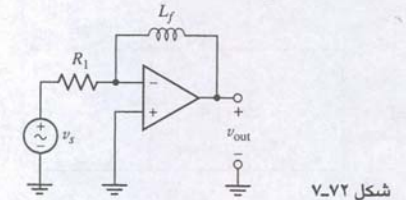


خروجی اش مستقیماً متناسب با کل یون های برخوردی با سیلیکان باشد (به آن dose می گویند).

۵۳. در مدار شکل ۷.۳۰،  $C = 2\mu F$ ،  $R = 0.5M\Omega$ ،  $R_1 = \infty$  و  $R_0 = 0$  می باشد. فرض کنید که می خواهیم خروجی  $V_{out} = \cos 10t - 1$  باشد.  $V_s(t)$  را به دست آورید. (الف) اگر  $A = 2000$  و (ب) بی نهایت باشد.

۵۴. یک سنسور سرعت به یک چرخ دوار وصل است. مداری طراحی کنید که ولتاژ مثبتی تولید کند که اندازه اش با شتاب چرخ متناسب باشد (دور بر دقیقه بر دقیقه). فرض کنید خروجی سنسور سرعت  $1 \frac{mV}{rpm}$  و چرخ در کمتر از 3500rpm دور می زند.

۵۵. (الف) در مدار شکل ۷.۷۲، مقاومت و القاگر را عوض می کنیم. عبارتی برای  $V_{out}$  برحسب  $V_s$  به دست آورید. (ب) بگویید چرا چنین مداری در عمل به کار نمی رود.



شکل ۷.۷۲

۵۶. یک نورسنج که به یک دوربین وصل است یک خروجی را متناسب با سرعت نور تهیه می کند به طوری که  $1 mV = 1 mcd$  است. مداری طراحی کنید که یک خروجی ولتاژ متناسب با انتگرال (مجموع) شدت نور باشد به طوری که  $1 mV = 1 mcd$  شود.

۵۷. یک فرایند شیشه گری لازم می دارد که میزان خنک کنندگی از  $100^\circ C/min$  تجاوز نکند. ولتاژی متناسب با دمای شبیه مذاب موجود است به طوری که در محدوده  $500$  الی  $2000^\circ C$  داریم  $1 mV = 1^\circ C$ . مداری طراحی کنید که ولتاژ خروجی اش نمایش دهنده سرعت خنک شدن باشد به طوری که  $1 V = 100^\circ C/min$ .

۵۸. یک سنسور شناور در یک تانک سوخت برای اندازه گیری سوخت باقیمانده نصب شده است. سنسور طوری کالیبره شده است که  $1 volt = 10$  liters می باشد. مداری طراحی کنید که ولتاژ خروجی اش مصرف سوخت را به لیتر بر ثانیه فراهم کند به نحوی که  $1 V = 1 l/s$ .

۵۹. قرار است یک باتری برای انرژی که می تواند به یک بار مقاومتی  $1\Omega$  حمل کند، مورد تست قرار گیرد. دو سیگنال در اختیار است: یکی سیگنال ولتاژ برای مربع ولتاژ باتری ( $1 mV = 1 V^2$ ) و یک سیگنال ولتاژ برای نشان دادن مربع جریان خروجی باتری ( $1 mV = 1 A^2$ ). مداری طراحی کنید که در آن ولتاژ خروجی متناسب با کل انرژی حمله شده باشد به طوری که  $1 mV = 1 J$  انرژی تحویل شده به بار باشد.

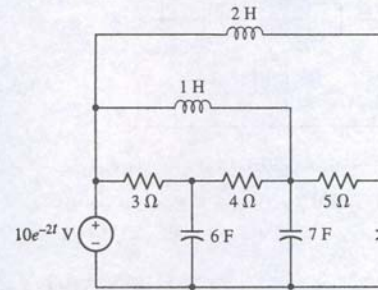
۶۰. مهندسين تست یک هواپیمای آزمایشی می خواهند شتاب منفی را در هنگام فرود آمدن اندازه بگیرند، زیرا آن ها در مورد سیستم تعلیق چرخ ها در ضمن فرود و میزان فشار بر آن تحقیق می کنند. اگر آن ها برای شما سیگنال ولتاژ از چرخ دنده ها را تهیه کنند به طوری که  $1 mV = 1 mph$  باشد، مداری طراحی کنید که خروجی اش متناسب با شتاب منفی ( $1 V = 1 km/s^2$ ) باشد.

## ۷-۶ دوگانگی

۶۱. (الف) دوگان دقیق مدار شکل ۷.۶۹ را بکشید. متغیرهای دوگان و مقادیر اولیه دوگان را مشخص نمایید. (ب) معادلات گرهی را برای مدار دوگان بنویسید. (ج) معادلات مش را برای مدار دوگان بنویسید.

۶۲. دوگان دقیق مدار شکل ۷.۵۱ را رسم کنید. مدار را به فرم مرتب و تمیز با گونیا برای مدار دوگان رسم نمایید.

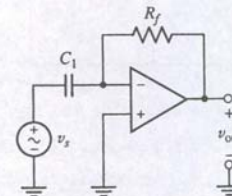
۶۳. دوگان دقیق در مدار شکل ۷.۷۳ را ترسیم نمایید. سعی کنید منظم باشد.



شکل ۷.۷۳

۶۴. (الف) دوگان دقیق مدار تمرین ۴۷ را رسم نمایید و در آن متغیرها را نشان دهید. (ب) دوگان مسئله را برای تمرین ۴۷ بنویسید. (ج) تمرین ۴۷ جدید را حل کنید.

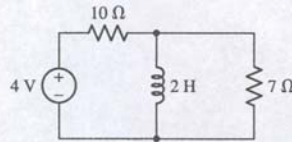
۶۵. دوگان مدار ۷.۷۴ را ترسیم کنید و عبارتی برای  $V_{out}$  برحسب  $V_s$  به دست آورید (راهنمایی: برای op amp مدل مشروح استفاده کنید).



شکل ۷.۷۴

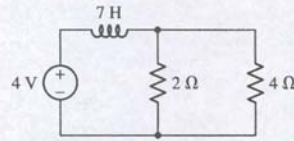
## ۷-۷ مدل سازی خازن ها و القاگرها با PSpice

۶۶. انرژی ذخیره شده در القاگر شکل ۷.۷۵ را محاسبه کنید. نتیجه خود را با PSpice چک کنید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب نمایید.



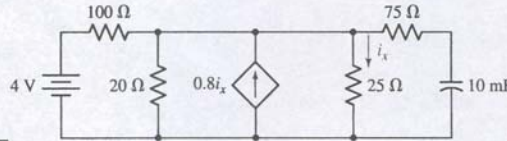
شکل ۷.۷۵

۶۷. انرژی ذخیره شده در القاگر شکل ۷.۷۶ را محاسبه نمایید. نتیجه حل را با PSpice مقایسه کنید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب کنید.



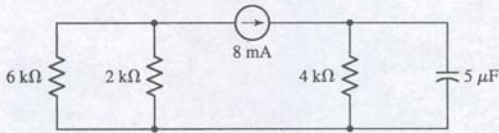
شکل ۷.۷۶

۶۸. انرژی ذخیره شده در خازن شکل ۷.۷۷ را محاسبه نمایید. نتیجه حل را با PSpice چک کنید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب کنید.



شکل ۷.۷۷

۶۹. انرژی ذخیره شده در خازن شکل ۷.۷۸ را محاسبه نمایید. نتیجه حل را با PSpice چک کنید. نام مناسبی برای نتیجه انتخاب کنید.



شکل ۷.۷۸

۷۰. برای op amp تفاضلی شکل ۷.۲۱،  $C_1 = 5 nF$  و  $R_f = 100 M\Omega$  را اختیار کنید. (الف) اگر  $V_s = 3 \sin 10t V$  باشد، خروجی را پیش بینی کنید. (ب) حل خود را با PSpice چک کنید. نام مناسبی برای حل انتخاب نمایید.

۷۱. با استفاده از PSpice نشان دهید که انرژی ذخیره شده در یک خازن  $33\mu F$  در  $t = 10^{-2}s$  وقتی به منبع ولتاژ  $V(t) = 5 \cos 75t$  وصل است  $221\mu J$  می باشد (راهنمایی: از قطعه VSIN استفاده کنید).

۷۲. با PSpice نشان دهید که انرژی ذخیره شده در یک القاگر  $100pH$  در  $t = 0.01s$  وقتی که منبع جریان  $i(t) = 5 \cos 75t A$  باشد برابر  $669pJ$  است (راهنمایی: از قطعه ISIN استفاده نمایید).

۷۳. برای مدار شکل ۷.۷۲،  $R_1$  و  $L_f$  را طوری انتخاب کنید که خروجی دو برابر مشتق ولتاژ ورودی باشد که ولتاژ ورودی هم  $V_s = A \cos 2M10^3 t V$  است. صحت طراحی را با PSpice مشخص کنید.

۷۴. مسئله ۷.۷۱ را با  $V(t) = 5 \cos 75t - 7$  تکرار کنید.

۷۵. مسئله ۷.۷۲ را با  $i(t) = 5 \cos 75t - 7$  تکرار کنید.



## مدارهای RC و RL

### مفاهیم کلیدی

ثابت‌های زمانی RC و RL

پاسخ طبیعی واداشته

محاسبه پاسخ وابسته به زمان برای محرک DC

چگونگی تعیین مقادیر اولیه و اثر آنها در پاسخ مدار

تحلیل مدارها با ورودی پله و با سوئیچ‌ها

ایجاد امواج پالسی با توابع پله واحد

پاسخ مدارهایی که به طور متوالی سوئیچ شده‌اند



### مقدمه

در فصل ۷ معادلات حاکم بر پاسخ چند مدار حاوی القاگر و خازن را نوشتیم، ولی هیچ‌یک از آن‌ها را حل نکردیم. در این‌جا آماده‌ایم تا با حل معادلات ساده‌تر پیش رفته، توجه خود را به آن‌هایی که حاوی مقاومت و القاگر و یا مقاومت و خازن هستند، معطوف داریم. گرچه مدارهایی که مایلیم آن‌ها را بررسی کنیم ظاهری ساده دارند، ولی دارای اهمیت عملی هستند. این‌گونه شبکه‌ها در مدارهای تقویت‌کننده الکترونیک سیستم‌های کنترل خودکار، تقویت‌کننده‌های عملیاتی، تجهیزات مخابراتی و بسیاری از کاربردهای دیگر مورد استفاده‌اند. آشنایی با این مدارهای ساده ما را قادر می‌سازد تا پیش‌بینی کنیم که خروجی یک تقویت‌کننده در دنبال‌کردن تغییرات ورودی چه دقتی دارد و یا ببینیم تغییر سرعت یک موتور در پاسخ به تغییر میدان حاصل از جریان چگونه است. درک ما از رفتار مدارهای ساده RC و RL موجب می‌شود تا اصلاحاتی بر تقویت‌کننده یا موتورها صورت دهیم تا پاسخی مطلوب‌تر حاصل گردد.

### ۸-۱ مدار RL بدون منبع

تحلیل مدارهای حاوی القاگرها و یا خازن‌دار به فرمول‌بندی و حل معادله انتگرال-مشتق توصیف‌کننده مدار وابسته است. معادله خاصی را که به دست می‌آوریم، معادله دیفرانسیل **خطی همگن** می‌نامیم و در واقع معادله دیفرانسیلی است که در آن هر جمله مرتبه اول متغیر وابسته یا یکی از مشتقات آن است. برای این مدار هنگامی حلی به‌دست می‌آید که برای متغیر مستقل تابعی بیابیم و این تابع در معادله دیفرانسیل صدق کند و نیز توزیع اولیه انرژی در زمان خاصی، مثل  $t = 0$  را نیز برآورده نماید.

حل معادله دیفرانسیل معمولاً پاسخ مدار را نشان می‌دهد و نام‌های متعددی برای آن انتخاب شده است. چون این پاسخ به طبیعت کلی مدار (نوع عناصر، ابعاد آن‌ها و اتصالات درونی آن‌ها) بستگی دارد، اغلب آن را **پاسخ طبیعی** می‌خوانند. با این وجود مدارهای واقعی ساخته ما نمی‌توانند انرژی را تا ابد در خود ذخیره کنند و مقاومت ذاتی خازن‌ها و القاگرها نهایتاً همه انرژی را به گرما تبدیل می‌کند. پاسخ نهایتاً از بین می‌رود و به این دلیل غالباً به آن **پاسخ گذرا** هم می‌گویند. باید با اصطلاح به کاررفته به وسیله ریاضی‌دانان نیز آشنا شویم. آن‌ها پاسخ یک معادله دیفرانسیل خطی همگن را تابع مکمل می‌نامند.

وقتی منابع مستقلی بر مداری عمل کنند، بخشی از پاسخ به طبیعت منبع خاص (یا تابع محرک) به کاررفته بستگی دارد. این بخش از پاسخ را حل خصوصی یا پاسخ ماندگار و یا پاسخ واداشته می‌نامیم که با پاسخ تولیدشده در مدار عادی از منبع ممکن می‌گردد. در این صورت پاسخ کامل مدار از جمع تابع مکمل، حل خصوصی به‌دست می‌آید. به بیان دیگر، پاسخ کامل مجموع پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته است. پاسخ بی‌منبع را پاسخ طبیعی، پاسخ گذرا، پاسخ آزاد یا تابع مکمل هم می‌گویند. ولی به دلیل طبیعت توصیفی‌اش آن را پاسخ طبیعی خواهیم خواند.



که  $L = 50 \text{ mH}$ ,  $R = 200 \Omega$  و  $I_0$  مقدار اولیه جریان در القاگر در  $t = 0$  است. پس:

$$i_L(t) = 2e^{-4000t}$$

با جایگزینی  $t = 200 \times 10^{-6} \text{ s}$  داریم  $i_L(t) = 898.7 \text{ mA}$  که کمتر از نصف مقدار اولیه می باشد.

۸-۱ اگر  $i_R(0) = 6 \text{ A}$  باشد جریانی  $i_R$  را در داخل مقاومت شکل ۸-۳ در  $t = 1 \text{ ns}$  به دست آورید. جواب: ۸۱۲ mA

### روندی دیگر

حل را می توان با روشی که کمی با روش بالا تفاوت دارد نیز به دست آورد. پس از تفکیک متغیرها، می توان از طرفین معادله (۲) انتگرال نامعین گرفت و یک ثابت انتگرال گیری هم وارد حل کرد. بنابراین:

$$\int \frac{di}{i} = - \int \frac{R}{L} dt + K$$

که نتیجه می شود:

$$\ln i = - \frac{R}{L} t + K \quad (۴)$$

از جایگزینی معادله (۴) در معادله دیفرانسیل اولیه (۱) نمی توان ثابت  $K$  را مشخص کرد. البته اتحاد  $0 = 0$  حاصل می گردد زیرا معادله (۴) حل معادله (۱) در قبال هر مقداری از  $K$  است. ثابت انتگرال باید مقدار اولیه  $i(0) = I_0$  را تأیید نماید. بنابراین در  $t = 0$  معادله (۴) برابر است با:

$$\ln I_0 = K$$

این مقدار  $K$  را در معادله (۴) قرار می دهیم تا پاسخ مطلوب به دست آید:

$$\ln i = - \frac{R}{L} t + \ln I_0$$

یا

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

که مثل قبل است.

### روند کلی تر حل

هنگامی که متغیرها تفکیک پذیر باشند هر یک از روش های فوق قابل استفاده اند، ولی همواره چنین نیست. در ادامه بحث، ما بر روشی قویتر تکیه خواهیم کرد که موفقیت در آن به بصیرت و تجربه ما وابسته است. در این روش جوابی را حدس می زنیم یا فرض می کنیم، سپس آن را در معادله دیفرانسیل می گذاریم و آن گاه فرضیات را تست می نماییم و این کار را با جایگزینی فرض در معادله دیفرانسیل بعد با اعمال مقادیر اولیه انجام می دهیم. چون انتظار نمی رود که عبارت عددی دقیقی را برای حل حدس بزنیم حل را حاوی چندین ثابت نامعلوم و انتخاب مقدار برای این ثابت ها انتخاب می نماییم، تا در معادله دیفرانسیل صدق کرده و مقدار اولیه را تأیید کند. حل بسیاری از معادلات دیفرانسیلی که ما با آن ها مواجهیم با تابعی نمایی یا مجموعی از توابع نمایی نشان داده می شود. بیایید حل معادله (۱) را با فرم نمایی زیر نشان دهیم:

$$i(t) = Ae^{s_1 t} \quad (۵)$$

که  $A$  و  $s_1$  ثابت هایی هستند که باید معین شوند. پس از جایگزینی این حل مفروض در معادله (۱) داریم:

$$As_1 e^{s_1 t} + A \frac{R}{L} e^{s_1 t} = 0$$

برای حل این معادلات دیفرانسیل چندین روش مختلف را ملاحظه خواهیم کرد. با این وجود دستکاری های ریاضی، تحلیل مدار نیست. بیشترین توجه ما به خود حل، مفهوم و تفسیر آن است و سعی خواهیم کرد بقدر کافی با فرم پاسخ آشنا شویم تا بتوانیم با کمی تفکر جواب یک مدار جدید را بنویسیم. گرچه به هنگام عدم موفقیت در روش های ساده روش های تحلیلی پیچیده تری لازم است، ولی درکی که بخوبی ایجاد شده باشد منبعی ارزشمند است. ما مطالعه خود را با تحلیل گذرا و ملاحظه مدار سری شکل ۸-۱ آغاز می کنیم. بیایید جریان متغیر با زمان را  $i(t)$  بنویسیم. ما مقدار  $i(t)$  را در  $t = 0$  با  $I_0$  نشان می دهیم، به بیان دیگر  $i(0) = I_0$  است. بنابراین داریم:

$$Ri + v_L = Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

یا

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad (۱)$$

هدف یافتن عبارتی برای  $i(t)$  است تا در این معادله صدق کند و نیز در  $t = 0$  جریان برابر  $I_0$  باشد. حل را به چند روش می توان به دست آورد.

### روند مستقیم

یک روش بسیار سراسر برای حل معادله دیفرانسیل این است که متغیرها را یکدیگر جدا شوند و سپس از هر سمت معادله انتگرال بگیریم. متغیرهای موجود در معادله (۱) عبارتند از  $i$  و  $t$  و واضح است که می توان معادله را در  $dt$  ضرب، بر  $i$  تقسیم و با تفکیک متغیرها آن را مرتب نمود:

$$\frac{di}{i} = - \frac{R}{L} dt \quad (۲)$$

چون جریان در  $t = 0$  برابر  $I_0$  و در زمان  $t$  نیز  $i(t)$  است، می توانیم از دو طرف معادله بین مقادیر متناظر انتگرال بگیریم:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di'}{i'} = \int_0^t - \frac{R}{L} dt'$$

با اجرای انتگرال گیری،

$$\ln i' \Big|_{I_0}^i = - \frac{R}{L} t' \Big|_0^t$$

و بنابراین:

$$\ln i - \ln I_0 = - \frac{R}{L} (t - 0)$$

پس از کمی دستکاری جریانی  $i(t)$  مطابق رابطه زیر به دست می آید:

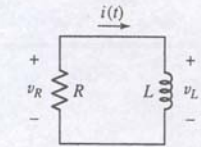
$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \quad (۳)$$

جواب را با گذاشتن معادله (۳) در معادله (۱) و رسیدن به اتحاد  $0 = 0$  چک کنید و سپس نشان دهید که جایگزینی  $t = 0$  در معادله (۳)،  $i(0) = I_0$  را نتیجه می دهد. هر دو مرحله الزامی اند، جواب هم باید در معادله دیفرانسیل صدق کند و هم شرایط اولیه را تأیید نماید.

اگر القاگر شکل ۸-۲ دارای جریان  $i_L = 2 \text{ A}$  در زمان  $t = 0$  باشد، عبارتی برای  $i_L(t)$  معتبر در  $t > 0$  بیابید و مقدار آن را در  $t = 200 \mu\text{s}$  پیدا کنید.

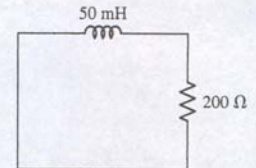
این مشابه با مداری است که در قسمت های قبل بررسی شد، بنابراین انتظار داریم که جریان القاگر چنین باشد:

$$i_L(t) = I_0 e^{-R/L t}$$



شکل ۸-۱ یک مدار ساده RL که  $i(t)$  آن باید به ازای شرط اولیه  $i(0) = I_0$  تعیین شود.

مطرح نمودن وجود جریان متغیر با زمان در مداری بدون منبع خیلی عجیب به نظر می رسد! به یاد داشته باشید که فقط جریان در  $t = 0$  را می دانیم؛ جریان قبل از این زمان مشخص نیست و نیز نمی دانیم مدار قبل از  $t = 0$  چگونه بوده است. برای وجود جریان باید منبعی وجود داشته باشد، ولی از آن اطلاعی نداریم. خوشبختانه برای تحلیل مدار داده شده به این اطلاعات نیازی نیست.



شکل ۸-۲ یک مدار ساده RL که در آن انرژی در القاگر در  $t = 0$  ذخیره شده است.



مثال ۸-۱





شکل ۸۴ فلوجارت برای روش کلی. برای حل معادلات مرتبه اول، مبتنی بر تجربه، می‌توان فرم حل را حدس زد.

## مثال ۸-۲

برای مدار شکل ۸-۵ (الف)، جریان داخل القاگر ۵H را در  $t = 200\text{ms}$  بیابید.

- هدف مسئله را شناسایی کنید.

شماتیک شکل ۸-۵ (الف) در واقع دو مدار مختلف را نشان می‌دهد: یکی با کلید بسته و دیگری با کلید باز. برای اجرای تحلیل، لازم است تا دو مدار طبق شکل‌های ۸-۵ (ب) و (ج) ترسیم شود. می‌خواهیم جریان  $i_L$  را طبق شکل ۸-۵ (ج) در  $t = 200\text{ms}$  بیابیم.

- اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

هرگاه مدار را ترسیم کردیم، باید مطمئن شویم که کار را صحیح انجام داده‌ایم. ما مقادیر عناصر و جریان  $i_L$  را روی هر مدار به دقت مشخص کرده‌ایم. باید فرض کنیم که مدار

یا

$$(s_1 + \frac{R}{L}) A e^{s_1 t} = 0 \quad (۶)$$

برای صحت این معادله در همه زمان‌ها، لازم است  $A = 0$  یا  $s_1 = -\infty$  یا  $s_1 = -\frac{R}{L}$  باشد و اما اگر  $A = 0$  یا  $s_1 = -\infty$  باشد، آن‌گاه پاسخ همیشه صفر است، که نمی‌تواند حل مسئله ما باشد. بنابراین باید جواب زیر را انتخاب کنیم:

$$s_1 = -\frac{R}{L} \quad (۷)$$

و حل مربوط به شکل زیر خواهد بود:

$$i(t) = A e^{-Rt/L}$$

ثابت باقیمانده باید با اعمال مقدار اولیه  $i(0) = I_0$  به دست آید. بنابراین  $A = I_0$  شده و فرم نهایی حل موردنظر مجدداً مطابق زیر است:

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

خلاصه‌ای از روش اصلی در شکل ۸-۴ ارائه شده است.

در واقع راه مستقیم‌تری برای انتخاب وجود دارد. با معادله (۷) داریم:

$$s_1 + \frac{R}{L} = 0 \quad (۸)$$

که به معادله مشخصه معروف است. ما می‌توانیم معادله مشخصه را مستقیماً از معادله دیفرانسیل به دست آوریم بدون آن‌که به جایگزینی حل فرضی در معادله نیاز باشد. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$a \frac{df}{dt} + bf = 0$$

که  $a$  و  $b$  مقادیر ثابت‌اند. ما  $s$  را به جای  $\frac{df}{dt}$  و  $f$  را به جای  $f$  می‌کاریم که نتیجه چنین است:

$$a \frac{df}{dt} + bf = (as + b)f = 0$$

از این رابطه مستقیماً معادله مشخصه را به دست می‌آوریم:

$$as + b = 0$$

که یک ریشه در  $s = -\frac{b}{a}$  دارد. آن‌گاه حل معادله دیفرانسیل چنین خواهد شد:

$$f = A e^{-bt/a}$$

این روش ساده به راحتی به معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم قابل توسعه است، و ما آن را در فصل ۹ خواهیم دید.

شکل ۸-۵ (ب) مدت‌ها به همین فرم وصل بوده و هر تأثیرگذاری حاصل از منبع  $24\text{V}$  که هنگام روشن شدن وجود دارد، مدت‌ها است که از بین رفته است.

- ارائه طرح.

با نوشتن معادله KVL می‌توان شکل ۸-۵ (ج) را تحلیل کرد. نهایتاً ما معادله دیفرانسیلی می‌خواهیم با  $v$  و  $i$  به عنوان متغیر؛ این خود معادلاتی اضافی همراه با جایگزینی‌ها را لازم دارد. آن‌گاه معادله را برای  $v(t)$  حل می‌کنیم.

- معادلات مناسب را بنویسید.

با مراجعه به شکل ۸-۵ (ج) می‌توان نوشت:

$$-v + 10i_L + 5 \frac{di_L}{dt} = 0$$

از جایگزینی  $i_L = -v/40$  داریم:

$$\frac{5}{40} \frac{dv}{dt} + \left(\frac{10}{40} + 1\right)v = 0$$

یا ساده‌تر

$$\frac{dv}{dt} + 10v = 0 \quad (۹)$$

- آیا اطلاعات دیگری لازم است.

با توجه به تجربه قبلی می‌دانیم که یک عبارت کامل برای  $v$  نیاز به شناخت  $v$  در یک لحظه خاص از زمان دارد که  $t = 0$  بهترین آن است. ما می‌توانیم به شکل ۸-۵ (ب) نگاه کرده و  $v(0) = 24$  و  $i(0) = 0$  بنویسیم، ولی این فقط برای قبل از باز شدن سوئیچ صحیح است. ولتاژ مقاومت در لحظه تعویض وضعیت کلید هر چیزی می‌تواند باشد و تنها چیزی که تغییر نمی‌کند جریان القاگر است.

در مدار شکل ۸-۵ (ب)  $i_L = \frac{24}{10} = 2.4\text{ A}$  است، زیرا القاگر مثل یک اتصال کوتاه به یک جریان dc عمل می‌کند. بنابراین  $i_L(0) = 2.4\text{ A}$  در مدار شکل ۸-۵ (ج) خواهد بود. که نقطه کلیدی در تحلیل این نوع مدار است. بنابراین در مدار شکل ۸-۵ (ج)  $v(0) = (40)(-2.4) = -9.6\text{ V}$  است.

- اقدام به حل.

هر یک از سه روش حل را می‌توان انتخاب کرد. بر اساس تجربه، اجازه بدهید با نوشتن معادله مشخصه متعلق به معادله (۹) شروع کنیم:

$$s + 10 = 0$$

با حل آن داریم  $s = -10$ ، یا

$$v(t) = A e^{-10t} \quad (۱۰)$$

که پس از جایگزینی در سمت چپ معادله (۹) داریم:

$$-10A e^{-10t} + 10A e^{-10t} = 0$$

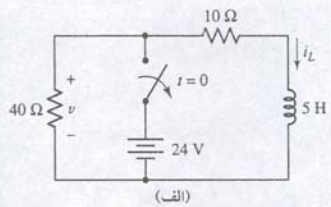
(که انتظار آن را داریم).

ما  $A$  را با  $t = 0$  در معادله (۱۰) و این که  $v(0) = -9.6\text{ V}$  است، به دست می‌آوریم.

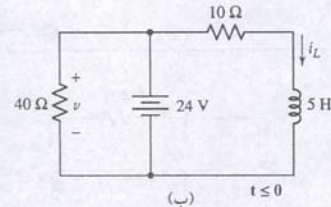
بنابراین:

$$v(t) = -9.6 e^{-10t} \quad (۱۱)$$

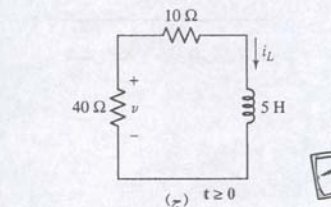
و بنابراین  $v(0.2) = -12.99\text{ V}$  می‌باشد که از  $-9.6\text{ V}$  به آن رسیده است.



(الف)



(ب)



(ج)



شکل ۸-۵ (الف) یک مدار ساده RL که در  $t = 0$  سوئیچ در آن باز شده است. (ب) مدار قبل از  $t = 0$  و (ج) مدار پس از قطع کلید.



## ■ صحت حل را تحقیق کنید.

ما می‌توانیم جریان القاگر را با توجه به این حقیقت که القاگر مقاومتی  $50 \Omega$  را در شکل ۸۵ (ج) دارد، ببینیم. بنابراین یک ثابت زمانی  $\tau = 50/5 = 10 \text{ s}$  را خواهیم داشت. اکنون با توجه به این که  $i_L(0) = 2.4 \text{ A}$  است می‌توان نوشت:

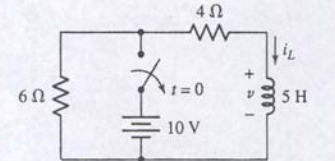
$$i_L(t) = 2.4e^{-10t} \text{ A} \quad t > 0$$

از قانون اهم  $-96e^{-10t} \text{ V} = -40i_L(t) = v(t)$  خواهد شد که همان معادله (۱۱) را داریم. این یک اتفاق نیست که جریان القاگر و ولتاژ مقاومت دارای وابستگی نمایی یکسانی هستند.

## تمرین

۸-۲ ولتاژ القاگر  $v$  را در مدار شکل ۸۶ برای  $t > 0$  معین کنید.

پاسخ:  $-25e^{-2t} \text{ V}$ .



شکل ۸۶ مدار تمرین ۸-۲

## محاسبه انرژی

قبل از این که به تفسیر پاسخ بپردازیم، بگذارید به شکل ۸-۱ برگردیم و رابطه توان و انرژی را در این مدار چک کنیم. توان تلف شده در مقاومت برابر است با:

$$p_R = i^2 R = I_0^2 R e^{-2Rt/L}$$

و انرژی کل تبدیل شده در مقاومت به گرما با انتگرال توان از لحظه صفر تا زمان معین حاصل می‌گردد:

$$w_R = \int_0^\infty p_R dt = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt = I_0^2 R \left( \frac{-L}{2R} \right) e^{-2Rt/L} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} L I_0^2$$

این جوابی است که انتظار آن را داریم، زیرا انرژی کل ذخیره شده اولیه در القاگر  $\frac{1}{2} L I_0^2$  است و پس از گذشت زمان طولانی هیچ انرژی در القاگر باقی نمی‌ماند. بنابراین تمام انرژی اولیه در مقاومت مصرف خواهد شد.

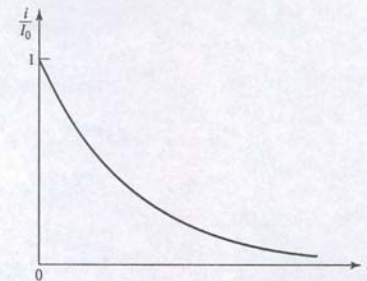
## ۸-۲ خواص پاسخ نمایی

اکنون بیایید طبیعت پاسخ را در مدار RL سری ملاحظه کنیم. دیدیم که جریان القاگر فرم زیر را دارد:

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

در  $t = 0$ ، جریان مقدار  $I_0$  را دارا است، ولی با گذشت زمان، جریان به صفر کاهش می‌یابد. این کاهش نمایی با رسم  $i(t)/I_0$  در برابر  $t$  در شکل ۸-۷ نشان داده شده است. چون تابع ترسیمی  $e^{-Rt/L}$  است، اگر  $R/L$  بدون تغییر باشد منحنی تغییر نخواهد کرد، بنابراین برای هر مدار RL سری که نسبت  $R/L$  یا  $L/R$  ثابتی داشته باشد، منحنی یکسانی به دست خواهد آمد. بگذارید نشان دهیم که چگونه این کسر روی شکل منحنی تأثیر می‌گذارد.

اگر نسبت  $L/R$  را دو برابر کنیم، و اگر  $t$  نیز دو برابر شود، آن‌گاه نما تغییر نمی‌کند. به بیان دیگر پاسخ اصلی در مدت طولانی‌تری رخ می‌دهد و در منحنی جدید باید هر نقطه منحنی قبل را به اندازه دو برابر فاصله تا محور عمودی به سمت راست ببریم، با این نسبت بزرگ‌تر  $L/R$ ، جریان زمان بیشتری را لازم خواهد داشت تا به کسری از مقدار اولیه خود برسد. دلمان می‌خواهد بگوییم که عرض منحنی زیاد شده است یا این که عرض متناسب با  $L/R$  است. با این وجود طرح تعریف عرض مشکل است زیرا هر منحنی از  $t = 0$  تا بی‌نهایت طول می‌کشد! به جای این کار زمان لازم برای رسیدن جریان به صفر را اگر با همان آهنگ اولیه کاهش یابد، به دست می‌آوریم.



شکل ۸-۷ نمودار  $e^{-Rt/L}$  برحسب  $t$ .

آهنگ اولیه کاهش جریان را با ارزیابی مشتق در زمان صفر به دست می‌آوریم:

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{i}{I_0} \right|_{t=0} = -\frac{R}{L} e^{-Rt/L} \Big|_{t=0} = -\frac{R}{L}$$

زمان لازم برای این که  $i/I_0$  با آهنگ کاهش ثابت، از 1 به صفر برسد را با حرف یونانی  $\tau$  نشان می‌دهیم. به این ترتیب:

$$\left( \frac{R}{L} \right) \tau = 1$$

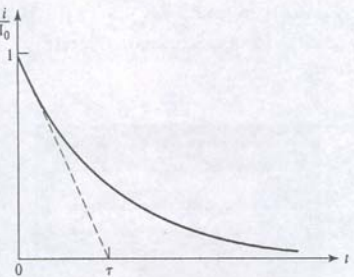
یا

$$(۱۲) \quad \tau = \frac{L}{R}$$

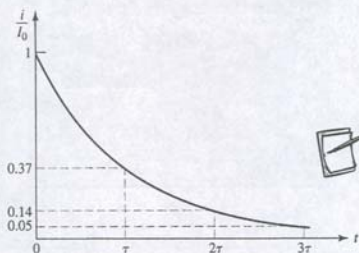
کسر  $L/R$  دارای واحد ثانیه است زیرا  $Rt/L$  باید بدون بعد باشد. این زمان  $\tau$  را ثابت زمانی می‌نامند و در شکل ۸-۸ به تصویر کشیده شده است، ثابت زمانی یک مدار RL سری را می‌توان به طور گرافیکی از منحنی پاسخ هم به دست آورد. برای این کار فقط کافی است که خط مماس را بر منحنی در  $t = 0$  رسم کرده و محل تقاطع آن با محور زمان را به دست آوریم. معمولاً این بهترین راه به دست آوردن ثابت زمانی تقریبی از صفحه نمایش اسیلوسکوپ است. تعبیر هم‌ارزی از ثابت زمانی  $\tau$  را می‌توان از  $i(t)/I_0$  در  $t = \tau$  به دست آورد. داریم:

$$\frac{i(\tau)}{I_0} = e^{-1} = 0.3679 \quad \text{یا} \quad i(\tau) = 0.3679 I_0$$

بنابراین در یک ثابت زمانی، پاسخ به 36.8% مقدار اولیه اش افت می‌کند.  $\tau$  را می‌توان با استفاده از این تعبیر هم طبق شکل ۸-۹ به دست آورد. بهتر است افت جریان را در فواصل یک ثابت زمانی اندازه بگیریم. با مراجعه به یک ماشین حساب یا جدول نماهای منفی می‌بینیم که نسبت  $i(t)/I_0$  در  $t = \tau$  برابر است با 0.3679، در  $t = 2\tau$  برابر 0.1353 و در  $t = 3\tau$  برابر است با 0.04979، در  $t = 4\tau$  برابر 0.01832 و در  $t = 5\tau$  هم 0.006738 است. اغلب قبول داریم در زمانی بین 3 الی 5 ثابت زمانی جریان به کسر کوچکی از مقدار اولیه اش می‌رسد. بنابراین سوال ممکن است چنین باشد "چقدر طول می‌کشد تا جریان به صفر برسد؟" پاسخ شاید چنین باشد، "حدود پنج ثابت زمانی". در این جا جریان حدود 1% مقدار اولیه اش خواهد بود.



شکل ۸-۸ ثابت زمانی  $t$  برای مدار RL سری،  $L/R$  است و آن زمانی است که طی آن اگر نمودار با همان آهنگ کاهش اولیه نزول کند، مقدار به صفر می‌رسد.



شکل ۸-۹ جریان در مدار سری RL در زمان  $\tau$ ،  $2\tau$  و  $3\tau$  به ترتیب 37، 14 و 5 درصد مقدار اولیه خود را دارد.

## تمرین

۸-۳ در یک مدار بدون منبع RL سری، مقدار عددی کسرهایی زیر را به دست آورید:

(الف)  $i(2\tau)/i(\tau)$ ، (ب)  $i(0.5\tau)/i(0)$ ، (ج)  $t/\tau$  اگر  $i(t)/i(0) = 0.2$  باشد، (د)  $t/\tau$  اگر  $i(0) - i(t) = i(0) \ln 2$  باشد.

جواب: 0.368، 0.607، 1.609 و 1.181.

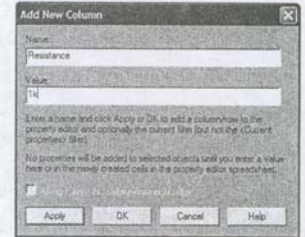
## تحلیل کامپیوتری

توانمندی تحلیل گذرای PSpice هنگام توصیف مدارهای بدون منبع مفید است. در این مثال، از امکان خاصی استفاده می‌کنیم که به ما اجازه می‌دهد تا پارامتر قطعه را مثل تغییر ولتاژ dc در دیگر شبیه‌سازی‌ها تغییر دهیم. به این منظور عنصر PARAM را به شماتیک می‌افزاییم. ما آن را در هر جایی قرار می‌دهیم ولی به مدار وصل نمی‌کنیم. مدار کامل RL در شکل ۸-۱۰ نشان داده شده است، که شامل جریان اولیه 1mA در القاگر است.

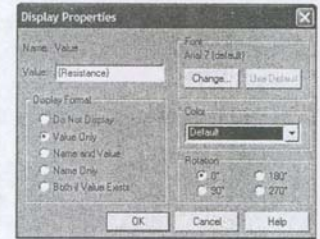
برای این که مقدار مقاومت را به پارامتر مرتبط سازیم، باید دو کار انجام دهیم. ابتدا این که اسمی برای پارامتر خود انتخاب کنیم، که ما آن را به خاطر سادگی "مقاومت" می‌خوانیم. این کار با دو بار کلیک بر روی PARAMETERS صورت می‌گیرد، یعنی برچسبی در شماتیک که Property Editor را برای این شبه قطعه باز می‌کند. کلیک بر روی New Column سبب



شکل ۸-۱۰ مدار RL ساده‌ای که با استفاده از ابزار Schematic Capture طراحی شده است.

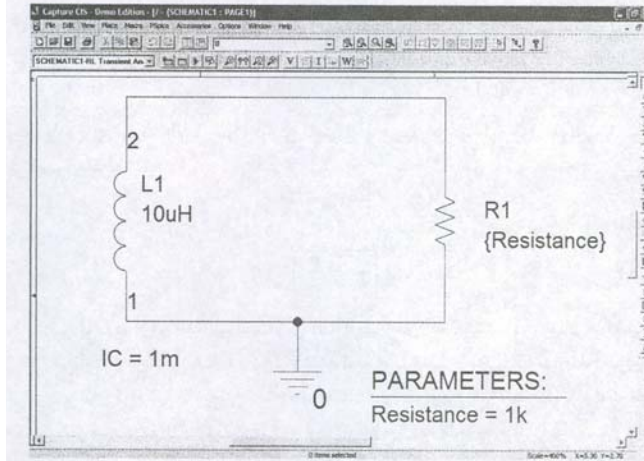


(الف)



(ب)

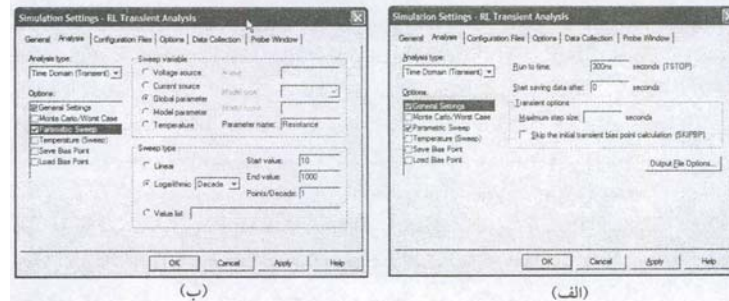
شکل ۸-۱۱ (الف) کادر محاوره New Column را در Property Editor برای PARAM اضافه کنید. (ب) کادر محاوره مقدار مقاومت.



می‌شود تا کادر محاوره شکل ۸-۱۱ (الف) به دست آید، که ما مقاومت را تحت Name وارد می‌کنیم و یک مقدار 1 k را در Value قرار می‌دهیم. کار دوم ما متشکل از ارتباط مقاومت  $R_1$  در Parameter Sweep است، که با دو کلیک روی مقدار پیش فرض  $R_1$  در شماتیک انجام شده و کادر محاوره شکل ۸-۱۱ (ب) به دست می‌آید. تحت Value، فقط {Resistance} را وارد می‌نماییم (دقت کنید که کروه لازم است).

وظیفه سوم ما متشکل از برپایی شبیه‌سازی است که شامل تنظیم پارامترهای تحلیل گذرا و نیز مقادیر مورد نظر  $R_1$  است. تحت PSpice، New Simulation Profile را انتخاب می‌کنیم (شکل ۸-۱۲ (الف))، که در آن Time Domain (Transient) برای Analysis type و 300 ns برای Run to time انتخاب می‌شود و Parametric Sweep box در زیر Options تیک می‌خورد. این آخرین عمل کادر محاوره (جعبه دیالوگ) شکل ۸-۱۲ (ب) را به دست می‌دهد و ما Global parameter را برای Sweep variable انتخاب و Resistance را برای Parameter name وارد می‌کنیم. آخرین گام در تنظیم لازم دارد تا Logarithmic را در زیر Sweep type برگزینیم. Start value را 10 بدهیم، مقدار 1000 را به End value اختصاص دهیم و نیز Points/Decade هم 1 باشد. به همین ترتیب می‌توانیم مقادیر مقاومت مورد نظر را با استفاده از Value list لیست کنیم.

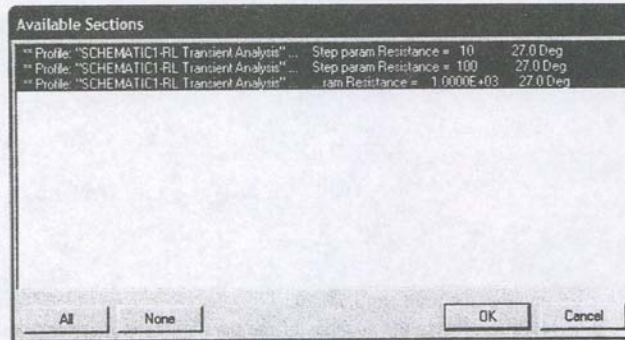
پس از اجرای شبیه‌سازی جعبه محاوره شکل ۸-۱۳ ظاهر می‌گردد که مجموعه داده‌های مختلف را برای ترسیم در اختیار می‌گذارد (در این مسئله مقادیر مقاومت 10، 100 و 1000). ما همه مجموعه را انتخاب خواهیم کرد. خروجی در شکل ۸-۱۴ دیده می‌شود.



(ب)

(الف)

شکل ۸-۱۲ (الف) کادر محاوره شبیه‌سازی. (ب) کادر محاوره Parameter sweep.

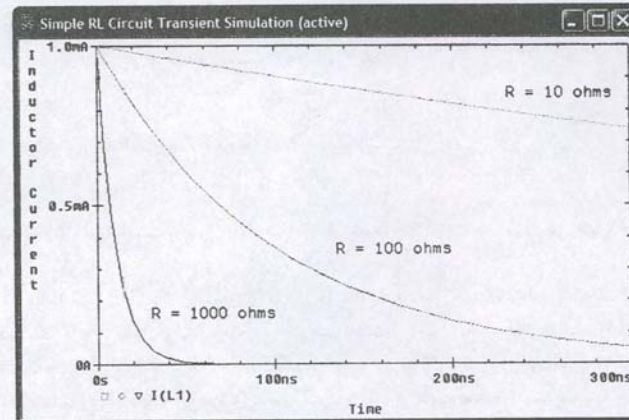


شکل ۸-۱۳ جعبه محاوره بخش‌های داده.

چرا با مقادیر بزرگتر  $L/R$ ، منحنی پاسخ افول آهسته‌تری را دارد؟ اجازه دهید تا تأثیر هر عنصر را ببینیم. پاسخ مدار RL سری برحسب ثابت زمانی  $\tau$  فرم زیر را دارد:

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

افزایشی در  $L$  امکان ذخیره انرژی بیشتری را با جریان اولیه یکسان به ما می‌دهد و زمان بیشتری طول می‌کشد تا این انرژی در مقاومت مصرف شود. با کاهش  $R$  هم می‌توان نسبت  $L/R$  را افزایش داد. در این حالت، توان انتقالی به مقاومت برای جریان اولیه یکسان بیشتر است. مجدداً زمان بیشتری برای مصرف انرژی ذخیره شده لازم است. این اثر به وضوح در نتیجه شبیه‌سازی ما در شکل ۸-۱۴ قابل ملاحظه است.

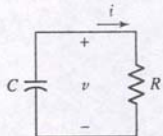


شکل ۸-۱۴ خروجی probe برای سه مقاومت مختلف.

### ۸-۳ مدار RC بدون منبع

مدارهای مبتنی بر ترکیب مقاومت - خازن رایج‌تر از نوع مشابه مقاومت - القاگر می‌باشند. دلیل اصلی این توجه، اتلاف کمتر انرژی در خازن واقعی، قیمت پایین‌تر، شباهت نزدیکتر مدل ریاضی و قطعه فیزیکی و نیز ابعاد کوچک‌تر و سبکی می‌باشند که هر دو آن‌ها در کاربردهای مدار مجتمع مورد استفاده‌اند. بگذارید ببینیم که تحلیل مدار RC موازی شکل ۸-۱۵ چقدر با مدار RL شباهت دارد. با انتخاب رابطه زیر انرژی اولیه ذخیره‌شده‌ای را در خازن فرض می‌کنیم:

$$v(0) = V_0$$



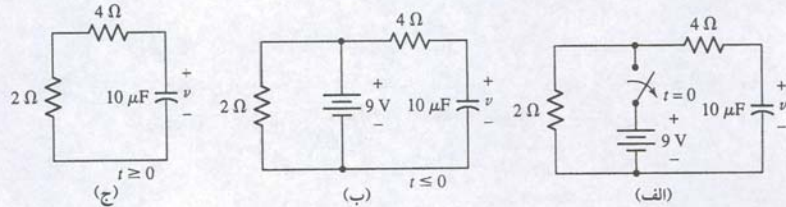
شکل ۸-۱۵ مدار RC موازی که  $v(t)$  باید با شرط اولیه  $V_0 = v(0)$  به دست آید.



مصرف می‌کند و بنابراین به زمان بیشتری برای مصرف و تبدیل انرژی ذخیره شده به گرما نیاز داریم، و باز هم می‌بینیم که برای از دست دادن انرژی اولیه زمان طولانی‌تری لازم است.

برای مدار شکل ۸-۱۷ (الف) ولتاژ  $v$  را در  $t = 200 \mu s$  بیابید.

شکل ۸-۱۷ (الف) مدار ساده RC که کلید در لحظه  $t = 0$  پرتاب شده است. (ب) مدار آنطوری که در  $t = 0$  وجود دارد. (ج) مدار پس از پرتاب سوئیچ و حذف منبع 9 V.



برای یافتن ولتاژ مورد تقاضا ما باید دو مدار را رسم کرده و تحلیل کنیم: یکی مربوط به قبل از پرتاب سوئیچ (شکل ۸-۱۷ (ب)) و دیگری پس از پرتاب آن (شکل ۸-۱۷ (ج)). هدف اصلی تحلیل مدار شکل ۸-۱۷ (ب) تهیه ولتاژ اولیه خازن است؛ ما فرض می‌کنیم هر دوران گذرای مدت‌ها قبل از بین رفته است، و لذا یک مدار dc محض باقی مانده است. بدون وجود جریان در خازن یا مقاومت 4 Ω داریم:

$$v(0) = 9 \text{ V} \quad (۸۷)$$

آن‌گاه توجه خود را به مدار شکل ۸-۱۷ (ج) معطوف می‌نماییم که داریم:

$$\tau = RC = (2 + 4)(10 \times 10^{-6}) = 60 \times 10^{-6} \text{ s}$$

بنابراین از معادله (۱۴) داریم:

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = v(0)e^{-t/60 \times 10^{-6}} \quad (۸۸)$$

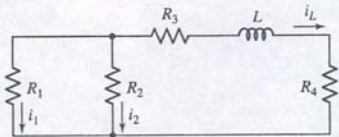
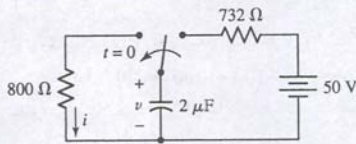
ولتاژ خازن باید در  $t = 0$  در هر دو مدار یکسان باشد. چنین قیدی در هیچ جای دیگر برای ولتاژ یا جریان وجود ندارد. از جایگزینی معادله (۱۷) در معادله (۱۸) داریم:

$$v(t) = 9e^{-t/60 \times 10^{-6}} \text{ V}$$

بنابراین  $v(200 \times 10^{-6}) = 321.1 \text{ mV}$  است (4% کمتر از حداکثر مقدار).

۸-۴ برای مدار شکل ۸-۱۸،  $v(0)$  و  $v(2ms)$  را بیابید. در حل این مسئله باید دو مدار متفاوت ترسیم گردد که یکی مربوط به قبل از باز شدن و دیگری مربوط به بعد از باز شدن کلید مربوطه است. ولتاژ خازن در  $t = 0$  باید در هر دو مدار یکسان باشد. جواب: 50V و 14.33V.

شکل ۸-۱۸



شکل ۸-۱۹ این مدار بدون منبع، یک القاگر و چند مقاومت دارد. برای تحلیل مدار ثابت زمانی را به صورت  $\tau = L/R_{eq}$  می‌یابیم.

جریان کل خارج شده از گره بالایی مدار باید صفر باشد، پس چنین می‌توان نوشت:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

با تقسیم بر  $C$  داریم:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \quad (۱۳)$$

معادله (۱۳) فرم آشنایی دارد، مقایسه با معادله (۱):

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad (۱)$$

نشان می‌دهد که از جایگزینی  $i$  با  $v$  و  $L/R$  با  $RC$ ، همان معادله قبلی به دست می‌آید. اکنون ما مدار RC یعنی مدار دوگان RL را که قبلاً ملاحظه کردیم، تحلیل می‌کنیم. به علت این دوگانگی  $v(t)$  از RC و  $i(t)$  از RL عبارات یکسانی دارند. به شرطی که مقاومت یکی با رسانایی مدار دیگر و  $L$  با  $C$  از لحاظ عددی برابر باشند. بنابراین پاسخ مدار RL چنین است:

$$i(t) = i(0)e^{-Rt/L} = I_0 e^{-Rt/L}$$

که می‌توانیم بلافاصله برای مدار RC چنین بنویسیم:

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC} \quad (۱۴)$$

در این جا تصور کنید که به عنوان مجهول جریان  $i$  را در مدار RC به جای  $v$  انتخاب کرده‌ایم. با اعمال قانون ولتاژ کیرشهف داریم:

$$\frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt' + v(t_0) + Ri = 0$$

که در این حالت برخلاف دیفرانسیل، یک معادله انتگرال به دست آورده‌ایم. در هر صورت با مشتق‌گیری از هر دو طرف معادله نسبت به زمان داریم:

$$\frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} = 0 \quad (۱۵)$$

از جایگزینی  $i$  با  $v/R$ ، مجدداً معادله (۷) را خواهیم داشت:

$$\frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} = 0$$

معادله (۱۵) می‌توانست به عنوان نقطه شروع تلقی شود، ولی در این حال دوگانگی چهره خود را نشان نمی‌داد.

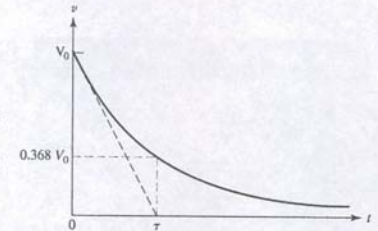
بیابید طبیعت فیزیکی پاسخ ولتاژ مدار RC را که با معادله (۱۴) بیان شده مورد بحث قرار دهیم. در  $t = 0$  مقدار اولیه صحیحی را خواهیم داشت و با میل  $t$  به سمت بی‌نهایت، ولتاژ به سمت صفر میل می‌کند. نتیجه اخیر با تفکر ما مبنی بر این که اگر ولتاژی روی خازن باشد به مقاومت انرژی می‌دهد و این انرژی به صورت گرما تلف می‌شود، صحیح است. پس باید ولتاژ نهایی صفر شود. ثابت زمانی RC را با اعمال دوگانگی روی RL می‌توان به دست آورد و یا ببینیم چه موقعی مقدار پاسخ به 36.8% مقدار اولیه آن می‌رسد:

$$\frac{\tau}{RC} = 1$$

و بنابراین:

$$\tau = RC \quad (۱۶)$$

به دلیل آشنایی با نمای منفی و اهمیت ثابت زمانی  $\tau$  می‌توانیم منحنی پاسخ را به راحتی بکشیم (شکل ۸-۱۶). مقادیر بزرگ  $R$  و یا  $C$  ثابت‌های زمانی بزرگتر و لذا اتلاف انرژی ذخیره شده طولانی‌تری را سبب می‌شوند. مقاومت بزرگ‌تر توان کمتری را با ولتاژ دو سرش



شکل ۸-۱۶ منحنی ولتاژ  $v(t)$  خازن در یک مدار RC موازی برحسب زمان. مقدار اولیه  $v(t)$ ،  $V_0$  است.



مقاومت معادل همراه القاگر چنین است:

$$R_{eq} = R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

و بنابراین ثابت زمانی برابر است با:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \quad (۱۹)$$

همچنین توجه داریم که اگر چندین القاگر در مداری وجود داشته باشد و قابل ترکیب سری یا موازی باشند، آنگاه معادله (۱۹) به صورت کلی تر زیر نوشته می شود:

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} \quad (۲۰)$$

که  $L_{eq}$ ، القاکنایی معادل را نشان می دهد.

### برش نازک: تفکیک میان $0^+$ و $0^-$

به شکل ۸-۱۹ باز می گردیم و فرض می کنیم که مقدار معینی از انرژی در  $t = 0$  در القاگر ذخیره شده باشد به نحوی که  $i_L(0) \neq 0$  باشد.

جریان القاگر عبارت است از:

$$i_L = i_L(0) e^{-t/\tau}$$

که به آن جواب اساسی مسئله می گوئیم. کاملاً محتمل است که مقداری از ولتاژها یا جریانها به جز  $i_L$ ، مانند  $i_2$  در  $R_2$  را لازم داشته باشیم. می توان قوانین کیرشهف و اهم را برای بخش مقاومت مدار بدون هر مشکلی به کاربرد، ولی تقسیم جریان پاسخ سریع تری را در این مدار فراهم می سازد:

$$i_2 = - \frac{R_1}{R_1 + R_2} [i_L(0) e^{-t/\tau}]$$

همچنین گاهی ممکن است مقدار اولیه جریانی به جز جریان القاگر را بدانیم. چون جریان در یک مقاومت آنرا تغییر می کند، ما هر تغییری که بلافاصله پس از لحظه تغییر  $t = 0$  رخ دهد را با  $0^+$  یا  $i(0^+)$  نشان می دهیم که حد  $i(t)$  در میل  $t$  به سمت صفر است. دقت کنید که این تنها یک قرارداد است. وقتی که در معادله ای با  $t = 0^+$  مواجه می شویم، به جای آن ها مقدار صفر را می گذاریم. این علامت اجازه می دهد تا لحظه قبل و بعد از باز یا بسته شدن کلید و یا قطع و وصل انرژی را از یکدیگر تفکیک کنیم. بنابراین اگر مقدار اولیه  $i_1$  به صورت  $i_1(0^+)$  داده شده باشد، آن گاه مقدار اولیه  $i_2$  برابر است با:

$$i_2(0^+) = i_1(0^+) \frac{R_1}{R_2}$$

با توجه به این مقادیر، مقدار اولیه  $i_L(0)$  لازم  $i_L(0^-)$  یا  $i_L(0^+)$  را به دست می آوریم:

$$i_L(0^+) = -[i_1(0^+) + i_2(0^+)] = - \frac{R_1 + R_2}{R_2} i_1(0^+)$$

و لذا عبارت  $i_2$  چنین خواهد شد:

$$i_2 = i_1(0^+) \frac{R_1}{R_2} e^{-t/\tau}$$

بگذارید ببینیم آیا می توان آخرین عبارت را مستقیم تر به دست آورد. چون جریان القاگر به صورت نمایی  $e^{-t/\tau}$  کاهش می یابد، هر جریان در مدار باید رفتاری یکسان داشته باشد. این مطلب با بررسی جریان القاگر به عنوان منبع که به شبکه مقاومتی اعمال می شود، آشکارتر می گردد. هر جریان یا ولتاژ در شبکه مقاومتی باید وابستگی زمانی یکسانی را دارا باشد. با به کارگیری این ایده جریان  $i_2$  به صورت زیر بیان می شود:

$$i_2 = A e^{-t/\tau}$$

ما می توانیم این رابطه را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\tau = \frac{L}{R_{TH}}$$

که  $R_{TH}$ ، مقاومت معادل تونن از دید القاگر  $L$  است.

که

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}}$$

است، مقدار  $A$  باید از مقدار اولیه  $i_2$  به دست آید. چون  $i_1(0^+)$  معلوم است ولتاژ دو سر  $R_1$  و  $R_2$  معلوم خواهد بود:

$$R_2 i_2(0^+) = R_1 i_1(0^+)$$

که به رابطه زیر منتهی می شود:

$$i_2(0^+) = i_1(0^+) \frac{R_1}{R_2}$$

بنابراین:

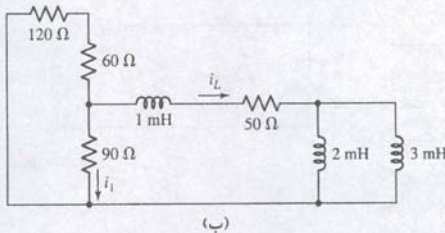
$$i_2 = i_1(0^+) \frac{R_1}{R_2} e^{-t/\tau}$$

با طی گام های مشابهی می توان حل سریعی را برای بسیاری از مسائل فراهم نمود. ما ابتدا وابستگی زمانی پاسخ را به صورت نمایی میرا شناسایی می کنیم، با ترکیب مقاومت ها ثابت زمانی را معین می نماییم، حل را با دامنه مجهول می نویسیم و سپس دامنه را از مقدار اولیه مفروض به دست می آوریم.

تکنیک مشابهی را می توان به هر مدار با یک القاگر و هر تعداد مقاومت و نیز دو و یا چند القاگر اعمال کرد و در آن ها القاگرها و مقاومت ها را به فرم ساده یک القاگر و یک مقاومت درآورد.

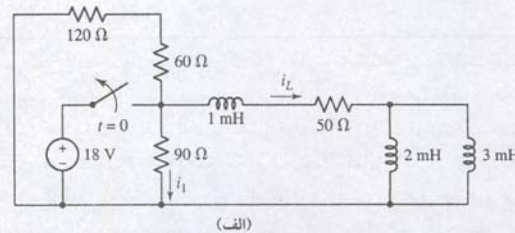
در مدار شکل ۸-۲۰ (الف)،  $i_L$  و  $i_1$  را معین کنید.

### مثال ۸-۴



(ب)

شکل ۸-۲۰ (الف) مداری با چند مقاومت و چند القاگر. (ب) پس از  $t = 0$  مدار به یک مقاومت  $L_{eq} = 2.2 \text{ mH}$  کاهش می یابد.



(الف)

پس از  $t = 0$ ، که در آن طبق شکل ۸-۲۰ (ب) منبع ولتاژ قطع می شود به سادگی القاگر معادل محاسبه می گردد.

$$L_{eq} = \frac{2 \times 3}{2 + 3} + 1 = 2.2 \text{ mH}$$

و مقاومت معادل برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{90(60 + 120)}{90 + 180} + 50 = 110 \Omega$$

و ثابت زمانی برابر است با:

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{2.2 \times 10^{-3}}{110} = 20 \mu\text{s}$$

بنابراین فرم پاسخ طبیعی  $K e^{-50,000t}$  می باشد و  $K$  مقداری ثابت است. با ملاحظه مدار قبل از باز شدن سوئیچ  $(t = 0^-)$ ،  $i_L = 18/50 \text{ A}$ ،  $i_1 = 18/50 \text{ A}$  می باشد. چون  $i_L(0^+) = i_L(0^-)$  است، می دانیم که  $i_L = 18/50 \text{ A}$  یا  $360 \text{ mA}$  در  $t = 0^+$  است و لذا:

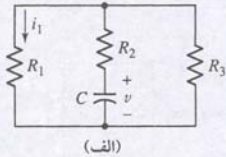


در حالت کلی می توان نوشت:

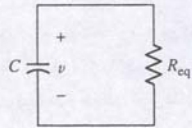
$$\tau = R_{eq} C_{eq}$$

با این وجود لازم به ذکر است که خازن های موازی جایگزین شده با معادل باید دارای مقادیر اولیه یکسان باشند.

### مثال ۸-۵



(الف)



(ب)

شکل ۸-۲۲ (الف) یک مدار شامل یک خازن و چند مقاومت. (ب) به جای مقاومت ها، مقاومت معادل را گذاشته ایم. اکنون به سادگی می توان ثابت زمانی را به دست آورد.

### تمرین

برای مدار شکل ۸-۲۲ (الف) اگر  $V_0 = v(0^-) = v(0^+)$  و  $i(0^+)$  را بیابید.

ابتدا مدار شکل ۸-۲۲ (الف) را به شکل ۸-۲۲ (ب) ساده می کنیم، پس می توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$v = V_0 e^{-t/R_{eq}C}$$

که

$$v(0^+) = v(0^-) = V_0 \quad \text{و} \quad R_{eq} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

هر جریان یا ولتاژی در بخش مقاومتی شبکه باید فرم  $Ae^{-t/R_{eq}C}$  را داشته باشد، که در آن A مقدار اولیه جریان یا ولتاژ است. مثلاً جریان در  $R_1$  را می توان چنین بیان کرد:

$$i_1 = i_1(0^+) e^{-t/\tau}$$

که

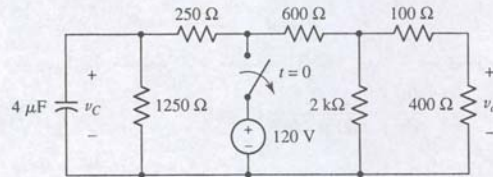
$$\tau = (R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}) C$$

و  $i_1(0^+)$  باقی می ماند تا از مقدار اولیه معین شود. هر جریانی که در  $t = 0^+$  جریان باید باشد از خازن سرچشمه بگیرد. بنابراین چون  $v$  نمی تواند ناگهان عوض شود،  $v(0^+) = v(0^-) = V_0$  و بنابراین:

$$i_1(0^+) = \frac{V_0}{R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3)} \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

۸-۶ مقادیر  $v_C$ ،  $v_0$  را در شکل ۸-۲۳ برای  $t = 0^-$ ،  $t = 0^+$ ،  $t = 1.3\text{ms}$  (ج) به دست آورید.

جواب:  $100\text{V}$ ،  $38.4\text{V}$ ،  $100\text{V}$ ،  $25.6\text{V}$ ،  $59.5\text{V}$  و  $15.22\text{V}$ .



شکل ۸-۲۳

روش ما می تواند به مدارهای حاوی یک عنصر ذخیره ساز انرژی و یک یا چند منبع وابسته هم اعمال گردد. در این موارد، ما می توانیم یک معادله KCL یا KVL همراه با هر تعداد معادله پشتیبان بنویسیم و آن را به یک معادله دیفرانسیل تقلیل داده و معادله مشخصه را برای یافتن ثابت زمانی استخراج نماییم. به طریقی دیگر ممکن است با یافتن مقاومت معادل تونن شبکه متصل به خازن یا القاگر شروع کرده و آن را در محاسبه ثابت زمانی  $RL$  یا  $RC$  به کار ببریم. مگر این که منبع وابسته به وسیله ولتاژ یا جریان یک عنصر ذخیره ساز انرژی کنترل گردد که در این حالت روش تونن قابل استفاده نیست. ما این مطلب را در مثال ۸-۶ می شکافیم.

$$i_L = \begin{cases} 360 \text{ mA} & (t < 0) \\ 360e^{-50,000t} \text{ mA} & (t \geq 0) \end{cases}$$

قیدی برای تغییر آنی  $i_L$  در  $t = 0$  وجود ندارد بنابراین مقدار آن در  $t = 0^-$  ( $18/90 \text{ A}$  یا  $200 \text{ mA}$ ) مناسب برای یافتن  $i_L$  در  $t > 0$  نیست، در عوض باید  $i_L(0^+)$  را بر اساس اطلاعاتمان از  $i_L(0^+)$  پیدا کنیم. با به کارگیری روش تقسیم جریان خواهیم داشت:

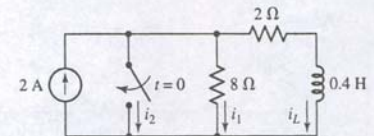
$$i_L(0^+) = -i_L(0^+) \frac{120 + 60}{120 + 60 + 90} = -240 \text{ mA}$$

از این رو:

$$i_1 = \begin{cases} 200 \text{ mA} & (t < 0) \\ -240e^{-50,000t} \text{ mA} & (t \geq 0) \end{cases}$$

ما می توانیم صحت تحلیل خود را با به کارگیری PSpice و مدل سوئیچ Sw\_tOpen تحقیق کنیم. هر چند که این بخش در واقع دو مقاومت دارد: یکی متعلق به قبل از باز شدن کلید در زمان معین شده (مقدار پیش فرض  $10 \Omega$  است) و یکی پس از باز شدن کلید (مقدار پیش فرض  $1 \text{ M}\Omega$  است). اگر مقاومت معادل باقیمانده مدار سازگار با هر کدام باشد مقادیر باید با دو بار کلیک روی سمبل سوئیچ در مدار شماتیک اصلاح شود. توجه کنید که مدل سوئیچی هم وجود دارد که در زمان خاص بسته می شود: یعنی Sw\_tClose.

۸-۵ در زمان  $t = 0.15$ ، در شکل ۸-۲۱، مقدار (الف)  $i_L$ ، (ب)  $i_1$  و (ج)  $i_2$  را به دست آورید. جواب:  $0.756 \text{ A}$  و  $1.244 \text{ A}$ .



شکل ۸-۲۱

تا این جا ما روش یافتن پاسخ طبیعی هر مداری که قابل نمایش با یک القاگر معادل سری با یک مقاومت معادل است را ملاحظه کردیم. در حالت کلی مدارهایی را که چند القاگر و چند مقاومت دارند نمی توان به صورت بالا ساده کرد. پاسخ این گونه مدارها را نمی توان با یک ثابت زمانی یا یک تابع نمایی منفی نشان داد، بلکه پاسخ، مجموع چند تابع نمایی با نمایی منفی است. در این مدارها تعداد القاگرهایی که بعد از ساده کردن القاگرها با ترکیب سری و موازی باقی می ماند تعداد جملات نمایی را معلوم می کند. ما این وضعیت را در فصل ۹ خواهیم دید.

### مدارهای RC کلی

بسیاری از مدارهای RC که می خواهیم پاسخ طبیعی آن ها را بیابیم بیش از یک مقاومت و یک خازن دارند. همان طور که برای مدارهای RL مشاهده شد، ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که در آن ها مدار ممکن است به مدار معادلی متشکل از فقط یک مقاومت و یک خازن، کاهش یابد. ابتدا تصور کنید با مداری که فقط یک خازن ولی چند مقاومت دارد مواجه هستیم. می توان شبکه مقاومتی دو پایانه دو سر خازن را با یک مقاومت معادل جایگزین کرد و سپس بلافاصله عبارتی برای ولتاژ خازن نوشت. در این گونه موارد مدار دارای یک ثابت زمانی موثر است که با رابطه زیر داده می شود:

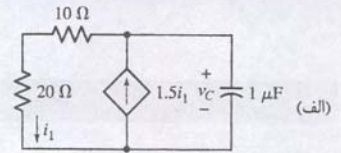
$$\tau = R_{eq}C$$

که  $R_{eq}$  مقاومت معادل شبکه است. دیدگاه دیگر این است که  $R_{eq}$  در واقع مقاومت معادل تونن از دید خازن است.

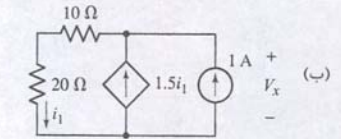
اگر مدار بیش از یک خازن داشته باشد، ولی قابل جایگزینی به وسیله ترکیب سری / موازی اش باشد،  $C_{eq}$ ، آن گاه مدار دارای ثابت زمانی موثر زیر است:

$$\tau = RC_{eq}$$





(الف)



(ب)

**شکل ۸-۲۴** (الف) یک مدار ساده RC حاوی یک منبع وابسته که با ولتاژ یا جریان خازن کنترل نشده است. (ب) مدار معادل تونن شبکه متصل به خازن.

برای مدار شکل ۸-۲۴ (الف) ولتاژ  $v_C$  را برای  $t > 0$  حساب کنید به شرطی که  $v_C(0^-) = 2$  V باشد.

منبع وابسته به وسیله جریان یا ولتاژ خازن کنترل نشده است، بنابراین می توانیم معادل تونن شبکه سمت چپ خازن را پیدا کنیم. با اتصال یک منبع مرجع 1 A به شکل ۸-۲۴ (ب) داریم:

$$V_x = (1 + 1.5i_1)(30)$$

که

$$i_1 = \left(\frac{1}{20}\right) \frac{20}{10 + 20} V_x = \frac{V_x}{30}$$

با اجرای کمی عملیات جبری داریم  $V_x = -60$  V، لذا شبکه دارای مقاومت معادل تونن 60  $\Omega$  است (غیرعادی است ولی هنگام بررسی منبع وابسته غیرممکن نیست). لذا مدار دارای ثابت زمانی منفی خواهد بود:

$$\tau = -60(1 \times 10^{-6}) = -60 \mu s$$

پس ولتاژ خازن برابر است با:

$$v_C(t) = Ae^{t/60 \times 10^{-6}} V$$

که  $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 2$  V است. بنابراین:

$$v_C(t) = 2e^{t/60 \times 10^{-6}} V \quad (21)$$

که به قدر کافی ناپایدار است: این ولتاژ با زمان به طور نمایی رشد می کند. این حالت نمی تواند تا ابد ادامه یابد؛ یعنی یک یا چند عنصر در مدار بالاخره خراب خواهد شد.

به طریقی دیگر، ما می توانیم یک معادله KCL برای گره بالایی در شکل ۸-۲۴ (الف) بنویسیم:

$$v_C = 30 \left( 1.5i_1 - 10^{-6} \frac{dv_C}{dt} \right) \quad (22)$$

که

$$i_1 = \frac{v_C}{30} \quad (23)$$

از جایگزینی معادله (۲۳) در معادله (۲۲) و کمی عملیات جبری داریم:

$$\frac{dv_C}{dt} - \frac{1}{60 \times 10^{-6}} v_C = 0$$

که معادله مشخصه زیر را دارد:

$$s - \frac{1}{60 \times 10^{-6}} = 0$$

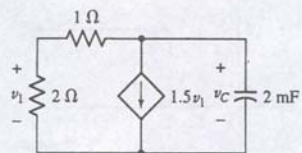
بنابراین:

$$s = \frac{1}{60 \times 10^{-6}}$$

و لذا:

$$v_C(t) = Ae^{t/60 \times 10^{-6}} V$$

که همان رابطه قبلی است. از جایگزینی  $A = v_C(0^+) = 2$ ، معادله (۲۱) به دست می آید که عبارت ولتاژ خازن برای  $t > 0$  است.



شکل ۸-۲۵ مدار تمرین ۸-۷

۸-۷ (الف) با توجه به مدار شکل ۸-۲۵، ولتاژ  $v_C(t)$  را برای  $t > 0$  با  $v_C(0^-) = 11$  V بیابید.

(ب) آیا مدار پایدار است.

جواب: (الف)  $v_C(t) = 11e^{-2 \times 10^3 t/3}$  V برای  $t > 0$  و (ب) بله زیرا میرا است و با زمان رشد نمی کند.

بعضی از مدارهایی که دارای تعداد زیادی مقاومت و خازن هستند قابل جایگزینی با مداری هستند که فقط یک مقاومت و یک خازن دارد. لازم است این کار این است که مدار قابل تفکیک به دو بخش، یکی فقط شامل مقاومت و دیگری حاوی فقط خازن ها باشد. به نحوی که این دو بخش با دو سیم رابط ایده آل به هم وصل شوند. البته همیشه این طور نیست. بنابراین ثابت های زمانی متعددی برای توصیف مدار چند مقاومتی، چند خازنی، لازم است.

به عنوان پیشنهادی در جداسازی، باید محتاط بود که فقط عناصر ایده آل به یکدیگر وصل شوند. مثلاً می توان تصور کرد که دو خازن ایده آل سری با ولتاژ نابرابری در  $t = 0$  به یکدیگر وصل گردند. معیذا این کار مشکلی را در مدل ریاضی خازن ایده آل به وجود می آورد، زیرا خازن های واقعی به همراه خود مقاومتی دارند که انرژی در آن ها تلف می شود.

## ۸-۵ تابع پله واحد

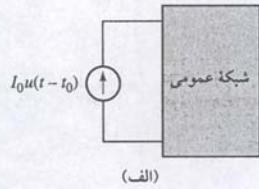
در مدارهای RL و RC مورد مطالعه ما هیچ منبع یا تابع تحریکی وجود نداشت. ما این پاسخ را پاسخ طبیعی نامیدیم، زیرا فرم آن فقط به طبیعت مدار وابسته است. به طور کلی دلیل آن وجود انرژی ذخیره شده در القاگر یا عناصر خازنی مدار است. در بعضی موارد با مدارهای متشکل از کلید و منابع مواجه هستیم و نیز دیدیم که برای حذف منابع از مدار باید اعمال سوئیچینگ صورت پذیرد و ضمن آن انرژی های ذخیره شده در این جا و آن جا باقی می ماندند. به بیان دیگر ما مسائلی را حل کردیم که در آن ها منابع انرژی ناگهان از مدار خارج می شوند. اکنون می خواهیم نوعی از پاسخ را که حاصل اعمال ناگهانی منابع به مدار است، ملاحظه نماییم.

در این بخش بر پاسخی توجه خواهیم داشت که از اعمال ناگهانی منابع dc حاصل می شود. چون هر وسیله الکتریکی حداقل یک بار تحریک می شود و نیز تقریباً همه وسایل در طول عمرشان به دفعات روشن و خاموش می شوند، مطالعه ما موارد عملی بسیاری را شامل می شود. گرچه ما در حال حاضر خود را به منابع dc محدود می کنیم ولی در موارد متعددی این مثال های ساده به عملکرد وسایل فیزیکی متعلقند. مثلاً اولین مثالی را که مطرح خواهیم کرد، مربوط به چگونگی ایجاد جریان هنگام روشن شدن یک موتور dc است. تولید و استفاده از پالس های ولتاژ مربعی برای نمایش یک عدد یا فرمان در یک کامپیوتر، مثال های دیگری را در الکترونیک و مدارهای ترانزیستوری دارد. مدارهای مشابهی در همگام کردن و مدارهای جاروب گیرنده های تلویزیون، سیستم های مخابراتی که مدولاسیون را به کار می گیرند و در سیستم های رادار، مثال های اندکی از کاربرد این پالس هاست.

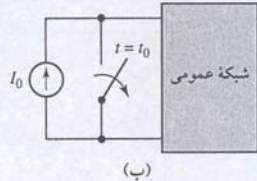
راجعه به "کاربرد ناگهانی" یک منبع انرژی صحبت می کردیم و منظور ما از این عبارت این است که کاربرد در زمان صفر صورت می گیرد. \* بنابراین عملکرد یک کلید سری با یک باتری معادل است با یک تابع تحریک که تا لحظه بسته شدن کلید صفر است و پس از آن با ولتاژ باتری برابر است. تابع تحریک در لحظه بسته شدن کلید شکست یا عدم پیوستگی دارد. توابع تحریک خاصی که شکست در تابع یا مشتقات خود دارند را توابع یگانه یا یکتا می نامند. دو تابع یکتای مهم عبارتند از تابع پله واحد و تابع ضربه واحد.

• البته در عمل چنین چیزی ممکن نیست. اگر زمان وقوع این واقعه در مقایسه با دیگر مقیاس های زمانی توصیف مدار کم باشد، این تقریب ریاضی بسیار مناسب است.



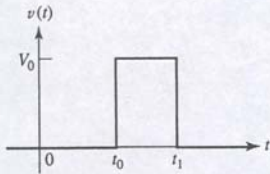


(الف)



(ب)

شکل ۸-۲۹ (الف) اعمال یک جریان پله‌ای به یک شبکه کلی. (ب) مداری که هرچند معادل دقیق (الف) نیست ولی می‌توان در بسیاری از حالات آن را به کار برد.



شکل ۸-۳۰ یک تابع تحریک مفید، پالس ولتاژ مربعی.

در شکل ۸-۲۹ (الف) یک منبع جریان پله‌ای دیده می‌شود که شبکه‌ای کلی را راه‌اندازی می‌کند. اگر سعی در جایگزینی این مدار با یک منبع dc موازی با یک سوئیچ کنیم (که در  $t = t_0$  باز می‌شود) باید توجه داشته باشیم که مدارها پس از  $t = t_0$  معادلند ولی پاسخ‌ها بشرطی یکسان خواهند بود که مقادیر اولیه یکسانی حکمفرما باشد. شکل ۸-۲۹ (ب) نشان می‌دهد که برای  $t < t_0$  هیچ ولتاژی در دو سر پایانه‌های منبع جریان وجود ندارد. برای شکل ۸-۲۹ (الف) چنین چیزی صحیح نیست. معیناً ما اغلب مدارهای شکل ۸-۲۹ (الف) و شکل ۸-۲۸ (ج) را با هم تعویض می‌کنیم. معادل دقیق شکل ۸-۲۹ (الف) دوگان مدار شکل ۸-۲۸ (ج) است. معادل دقیق مدار شکل ۸-۲۹ (ب) را نمی‌توان به تنهایی با توابع تحریک ولتاژ - جریان پله‌ای ساخت.

### تابع پالس مربعی

با دستکاری تابع تحریک پله واحد می‌توان بعضی از توابع تحریک مفید را تولید کرد. بیایید تا پالس ولتاژ مربعی را با شرایط زیر تعریف کنیم:

$$v(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V_0 & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

پالس مذکور در شکل ۸-۳۰ ترسیم شده است. آیا این پالس می‌تواند برحسب تابع تحریک پله واحد بیان شود؟ اجازه بدهید تا اختلاف دو پله واحد  $u(t - t_0) - u(t - t_1)$  را بررسی کنیم. دو تابع پله در شکل ۸-۳۱ (الف) نشان داده شده‌اند که اختلاف آن‌ها یک پالس مربعی است. منبع  $V_0 u(t - t_0) - V_0 u(t - t_1)$  که ولتاژ مطلوب ما را فراهم می‌کند نیز در شکل ۸-۳۱ (ب) نمایش داده شده است.

اگر یک ولتاژ سینوسی  $V_m \sin \omega t$  ناگهان در  $t = t_0$  به شبکه‌ای وصل شود، آن‌گاه نیروی محرکه، ولتاژ  $u(t) = V_m u(t - t_0) \sin \omega t$  خواهد بود. اگر بخواهیم یک انرژی ناگهانی از فرستنده یک اتومبیل کنترل‌شده را نشان دهیم که با  $47 \text{ MHz}$  ( $2\pi \times 47 \times 10^6 \text{ rad/s}$ ) کار می‌کند، باید  $\frac{1}{10} \mu\text{s}$  بعد با دومین تابع تحریک پله واحد، آن را خاموش کنیم. بنابراین پالس ولتاژ برابر است با:

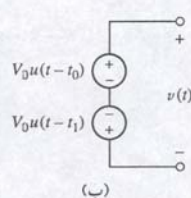
$$v(t) = V_m [u(t - t_0) - u(t - t_0 - 10^{-8})] \sin(2\pi \times 10^6 t)$$

این تابع تحریک در شکل ۸-۳۲ ترسیم شده است.

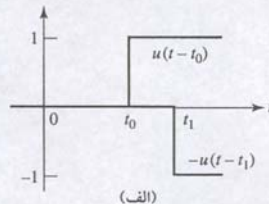
۸-۸ هر یک از توابع زیر را در  $t = 0.8$  ارزیابی کنید:

(الف)  $4u(t) - 2u(t - 0.3) + 0.8u(1 - t)$  (ب)  $3u(t) - 2u(t - 0.3) + 0.8u(1 - t)$  (ج)  $2u(t) \sin \pi t$

جواب: ۰.۳۸، ۱.۱۷۶.



(ب)



(الف)

### تمرین

شکل ۸-۳۱ (الف) تابع پله واحد  $u(t - t_0)$  و  $u(t - t_1)$ . (ب) منابعی که پالس مربعی شکل ۸-۳۰ را تولید می‌کنند.

ما تابع تحریک پله واحد را به صورت تابعی از زمان تعریف می‌کنیم که برای همه زمان‌های کمتر از آرگومان صفر بوده و در زمان‌های بزرگ‌تر مقدار آن مثبت است. اگر آرگومان  $(t - t_0)$  و تابع پله واحد  $u$  باشد، آن‌گاه  $u(t - t_0)$  برای همه مقادیر  $t$  کمتر از  $t_0$  برابر صفر و برای همه مقادیر  $t$  بزرگ‌تر از  $t_0$  برابر واحد است. در  $t = t_0$ ، تابع  $u(t - t_0)$  ناگهان از ۰ به ۱ تغییر پیدا می‌کند. مقدار آن در  $t = t_0$  تعریف نشده است ولی در همه زمان‌های اختیاری نزدیک به  $t = t_0$  مقدار آن معلوم است. ما اغلب مقدار آن را با  $u(t_0) = 1$  و  $u(t_0^+) = 0$  نشان می‌دهیم. تعریف ریاضی تابع واحد چنین است:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

این تابع به صورت گرافیکی در شکل ۸-۲۶ نشان داده شده است. توجه کنید که یک خط عمودی به طول واحد در  $t = t_0$  رسم شده است. گرچه این قسمت بخشی از تعریف پله واحد نیست، ولی معمولاً در شکل‌ها ترسیم می‌شود.

همچنین دقت کنید که تابع پله لزومی ندارد که تابعی از زمان باشد. مثلاً  $u(x - x_0)$  را می‌توان برای تابع پله واحد به کار برد و در آن  $x$  ممکن است فاصله به متر یا مثلاً فرکانس باشد. در بسیاری از موارد در تحلیل مدار در یک لحظه که آن را  $t = 0$  می‌نامیم، عمل سوئیچینگ یا کلیدزنی رخ می‌دهد. در این حال  $t_0 = 0$  و بنابراین تابع تحریک پله واحد با  $u(t - 0)$  یا ساده‌تر،  $u(t)$ ، نشان داده می‌شود. این تابع در شکل ۸-۲۷ نشان داده شده است. بنابراین:

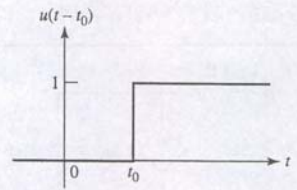
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

تابع پله واحد خود بدون بعد است. اگر بخواهیم آن را برای ولتاژ به کار ببریم باید  $u(t - t_0)$  را در ولتاژ ثابتی مثلاً  $5V$  ضرب کنیم. بنابراین  $u(t) = 5u(t - 0.2)V$  منبع ولتاژی است که قبل از  $t = 0.2$  صفر بوده و پس از  $t = 0.2s$ ، برابر ثابت  $5V$  شده است. این تابع به یک شبکه کلی در شکل ۸-۲۸ (الف) وصل شده است.

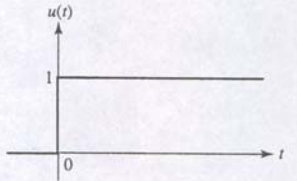
### منابع واقعی و تابع پله واحد

منطقی است بپرسیم که این تابع تحریک گسسته با چه منبع فیزیکی یا واقعی معادل است. منظورمان از معادل این است که مشخصه‌های دو شبکه یکسان باشند. برای منبع ولتاژ پله‌ای شکل ۸-۲۱ (الف) مشخصه ولتاژ - جریان کاملاً روشن است: ولتاژ قبل از  $t = 0.2s$ ، صفر است و پس از  $t = 0.2s$ ، برابر  $5V$  می‌باشد، ضمن این که جریان در تمامی لحظات هر مقداری می‌تواند باشد. ذهنیت اولیه ما ممکن است مدار معادل شکل ۸-۲۸ (الف) را مجسم کند که در آن یک منبع  $5V$  dc، با یک کلید در  $t = 0.2s$  به طور سری بسته شده است. با این وجود این شبکه برای  $t < 0$  معادل نیست زیرا ولتاژ دو سر باتری و کلید در این فاصله زمانی به کلی تعریف نشده است. منبع معادل یک مدار باز است و ولتاژ دو سر آن هر چیزی ممکن است باشد. پس از  $t = 0.2s$ ، شبکه‌ها معادلند و اگر این تنها فاصله زمانی مطلوب ما باشد و اگر جریان‌های اولیه جاری شده از دو شبکه در  $t = 0.2s$  یکسان باشند، آن‌گاه شکل ۸-۲۸ (ب) معادل مناسبی برای شکل ۸-۲۸ (الف) خواهد بود.

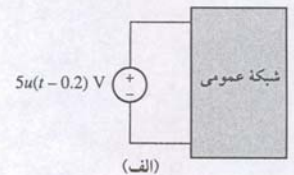
برای تهیه یک معادل دقیق تابع تحریک پله واحد ولتاژ، می‌توان از یک سوئیچ دو حالت تک‌قطب استفاده کرد. قبل از  $t = 0.2s$  سوئیچ ولتاژ صفر را در دو سر پایانه‌های ورودی ایجاد می‌کند. پس از  $t = 0.2s$ ، کلید برای ایجاد ولتاژ  $5V$  به حالت دیگر پرتاب می‌شود. در  $t = 0.2s$ ، ولتاژ نامشخص است و باتری برای یک لحظه اتصال کوتاه می‌شود (خوشبختانه ما راجع به مدل ریاضی صحبت می‌کنیم). این مدار معادل دقیق در شکل ۸-۲۸ (ج) ملاحظه می‌گردد.



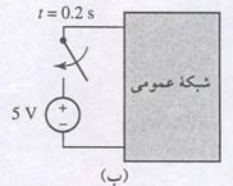
شکل ۸-۲۶ تابع تحریک پله واحد  $u(t - t_0)$ .



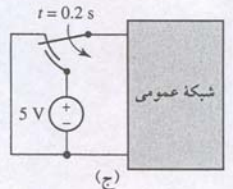
شکل ۸-۲۷ تابع تحریک پله واحد  $u(t)$  بر حسب زمان.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۸-۲۸ (الف) یک منبع تحریک که راه‌انداز یک شبکه کلی است. (ب) یک مدار ساده که گرچه کاملاً معادل منبع مدار (الف) نیست ولی در بسیاری از حالات به عنوان معادل آن به کار می‌رود. (ج) معادل دقیق (الف).



## ۸-۶ مدارهای RL واداشته

اکنون آماده‌ایم تا یک شبکه ساده را ناگهان با یک منبع dc وصل کنیم. مدار شامل یک باطری است که ولتاژ  $V_0$  آن با یک کلید، یک مقاومت  $R$  و یک القاگر سری  $L$  است. کلید طبق شکل ۸-۳۳ (الف) در  $t = 0$  بسته است. واضح است که قبل از  $t = 0$  جریان  $i(t)$  برابر صفر می‌باشد، بنابراین می‌توانیم باطری و کلید را با یک تابع تحریک پله ولتاژ  $v_0 u(t)$  جایگزین کنیم که این یکی هم قبل از  $t = 0$  پاسخ را فراهم نمی‌کند. پس از  $t = 0$ ، دو مدار دقیقاً یکسانند. از این رو جریان  $i(t)$  را در مدار شکل ۸-۳۳ (الف) و یا مدار معادل ۸-۳۳ (ب) می‌توانیم بیابیم. فعلاً جریان  $i(t)$  را با نوشتن معادله‌ای مناسب و حل آن با جداسازی متغیرها و انتگرال‌گیری حل می‌کنیم. پس از یافتن پاسخ و تحقیق دو بخش تشکیل یافته آن، خواهیم دید که برای هر یک از این بخش‌ها اهمیت فیزیکی وجود دارد. با آگاهی بیشتر از چگونگی تولید آن‌ها، خواهیم توانست حل سریع‌تر و مفهوم‌تری را برای هر مسئله‌ای که منبعی را ناگهان وارد مدار کند، بیابیم. بگذارید باروش اساسی‌تری حل را دنبال کنیم. با اعمال قانون ولتاژ کیرشهف به مدار شکل ۸-۳۳ (ب) داریم:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 u(t)$$

چون تابع تحریک پله واحد در  $t = 0$  ناپیوستگی دارد، ابتدا حل در  $t < 0$  را بررسی می‌کنیم، و سپس آن را در  $t > 0$  مطالعه خواهیم کرد. به کارگیری ولتاژ صفر در  $t = -\infty$  پاسخ صفری را تحمیل می‌کند، به نحوی که

$$i(t) = 0 \quad t < 0$$

در زمان مثبت،  $u(t)$  برابر واحد بوده و باید معادله زیر را حل کنیم:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_0 \quad t > 0$$

متغیرها را می‌توان طی چند گام جبری به صورت زیر جدا کرد:

$$\frac{L di}{V_0 - Ri} = dt$$

و هر سمت می‌تواند مستقلاً انتگرال‌گیری شود:

$$-\frac{L}{R} \ln(V_0 - Ri) = t + k$$

برای ارزیابی  $k$ ، یک مقدار اولیه باید تعریف شود. قبل از  $t = 0$ ،  $i(t) = 0$  است و بنابراین  $i(0^-) = 0$  می‌باشد. چون جریان در یک القاگر نمی‌تواند در زمان صفر به مقدار معینی بدون منبع ولتاژ بی‌نهایت تغییر کند، بنابراین  $i(0^+) = 0$  خواهد بود. با  $i = 0$  در  $t = 0$  داریم:

$$-\frac{L}{R} \ln V_0 = k$$

و بنابراین:

$$-\frac{L}{R} [\ln(V_0 - Ri) - \ln V_0] = t$$

خواهیم داشت:

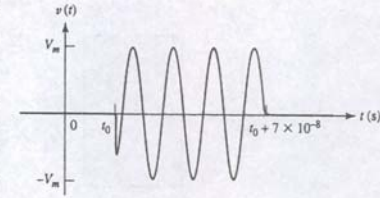
$$\frac{V_0 - Ri}{V_0} = e^{-Rt/L}$$

و یا

$$i = \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} e^{-Rt/L} \quad t > 0 \quad (۲۴)$$

بنابراین، عبارت پاسخ معتبر در همه زمان‌های  $t$  چنین خواهد بود.

$$i = \left( \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} e^{-Rt/L} \right) u(t) \quad (۲۵)$$



شکل ۸-۳۲ یک پالس فرکانس رادیویی، که به صورت حاصل‌ضرب یک تابع سینوسی و یک تابع پالسی تعریف شده است.

## روندی مستقیم‌تر

حل فوق حلی مطلوب است، ولی به روشی ساده به‌دست نیامد. برای پی‌ریزی روش ساده‌تر، بگذارید دو عبارت معادله (۲۵) را تفسیر کنیم. جمله‌نمایی فرم پاسخ طبیعی مدار RL را دارد. یعنی یک تابع نمایی منفی است که با گذشت زمان با ثابت زمانی  $\frac{L}{R}$  به سمت صفر میل می‌کند. پس شکل تابع این قسمت از پاسخ، مشابه پاسخ بدون منبع است. با این وجود دامنه این بخش نمایی به منبع ولتاژ  $V_0$  وابسته است. این مطلب را به این ترتیب تعمیم می‌دهیم که پاسخ مجموع دو جمله است، یک جمله شکل پاسخ مدار بدون منبع را دارا است که دامنه‌اش به تابع تحریک وابسته است و اما جمله دیگر چگونه است؟ معادله (۲۵) حاوی یک جمله ثابت  $V_0/R$  نیز هست. جواب ساده است: به دلیل اتلاف تدریجی انرژی در مقاومت، پاسخ طبیعی به صفر میل می‌نماید ولی انرژی کل به صفر نمی‌رود. در نهایت این مدار مثل یک مقاومت و یک القاگر سری با یک باطری عمل می‌کند. چون القاگر در dc مثل اتصال کوتاه عمل می‌نماید، تنها جریان جاری  $V_0/R$  است. این جریان بخشی از پاسخ است که مستقیماً به تابع تحریک وابسته می‌باشد و ما آن را پاسخ واداشته می‌نامیم. این پاسخ حتی مدت‌ها بعد از بسته‌شدن کلید وجود دارد.

پاسخ کامل از دو بخش پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته تشکیل شده است. پاسخ طبیعی نشان‌دهنده مشخصات مدار است و مستقل از منبع می‌باشد. شکل آن را از روی مدار بدون منبع و دامنه آن را از دامنه اولیه منبع و انرژی ذخیره‌شده اولیه می‌توان یافت. پاسخ واداشته ویژگی‌های تابع تحریک را دارا است، و می‌توان آن را با این فرض که همه کلیدها مدت‌ها قبل تغییر حالت داده‌اند به‌دست‌آورد. چون فعلاً با منابع dc و کلیدها سروکار داریم، پاسخ واداشته چیزی جز حل یک مدار ساده dc نیست.

برای مدار شکل ۸-۳۴،  $i(t)$  را برای  $t = \infty$  و  $3^-$  و  $3^+$  و  $100 \mu s$  پس از تغییر مقدار منبع به دست‌آورید.

مدت‌ها پس از میراشدن بخش گذرا ( $t \rightarrow \infty$ ) مدار، یک مدار ساده dc رانده‌شده با منبع ولتاژ 12 V است. القاگر به صورت اتصال کوتاه درمی‌آید، پس:

$$i(\infty) = \frac{12}{1000} = 12 \text{ mA}$$

منظور از  $i(3^-)$  چیست؟ این به معنی لحظه‌ای قبل از تغییر ولتاژ منبع است. برای  $t < 3$ ،  $u(t - 3) = 0$  است. پس  $i(3^-) = 0$  می‌باشد.

در  $t = 3^+$  تابع تحریک  $12u(t - 3) = 12 \text{ V}$  است. با این وجود، چون جریان القاگر در مدت زمان 0 تغییر می‌کند، پس  $i(3^+) = i(3^-) = 0$  است.

سراسرترین روش تحلیل مدار برای  $t > 3 \text{ s}$ ، نوشتن مجدد معادله (۲۵) به صورت زیر است:

$$i(t') = \left( \frac{V_0}{R} - \frac{V_0}{R} e^{-Rt'/L} \right) u(t')$$

و توجه کنید که این معادله به مدار ما هم قابل اعمال می‌باشد، به شرطی که محور زمان را طوری جابه‌جا کنیم که:

$$t' = t - 3$$

بنابراین با  $V_0/R = 12 \text{ mA}$  و  $R/L = 20,000 \text{ s}^{-1}$ :

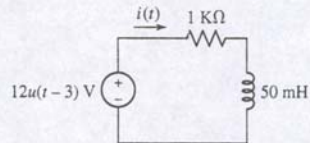
$$i(t - 3) = (12 - 12e^{-20,000(t-3)}) u(t - 3) \text{ mA} \quad (۲۶)$$

که می‌توان آن را ساده‌تر نوشت:

$$i(t) = (12 - 12e^{-20,000(t-3)}) u(t - 3) \text{ mA} \quad (۲۷)$$



## مثال ۷-۸



شکل ۸-۳۴ یک مدار ساده RL راه‌اندازی‌شده با تابع تحریک ولتاژ پله‌ای.



بلکه فقط آن‌ها را طوری جابه‌جا می‌کنیم که انتگرال‌گیری امکان‌پذیر باشد. برای این معادلات فاکتور انتگرال‌گیری  $e^{Pt}$  یا ساده‌تر  $e^{Pt}$  است زیرا P ثابت فرض شده است. ما هر طرف معادله را در این فاکتور انتگرال‌گیری ضرب می‌کنیم:

$$e^{Pt} di + iPe^{Pt} dt = Qe^{Pt} dt \quad (۲۹)$$

با توجه به این که سمت چپ رابطه فوق مشتق  $ie^{Pt}$  است می‌توان آن را ساده کرد:

$$d(ie^{Pt}) = e^{Pt} di + iPe^{Pt} dt$$

و بنابراین:

$$d(ie^{Pt}) = Qe^{Pt} dt$$

با انتگرال‌گیری از هر سمت:

$$ie^{Pt} = \int Qe^{Pt} dt + A$$

که A ثابت انتگرال‌گیری است. ضرب طرفین در  $e^{-Pt}$  حل  $i(t)$  را نتیجه می‌دهد:

$$i = e^{-Pt} \int Qe^{Pt} dt + Ae^{-Pt} \quad (۳۰)$$

اگر تابع تحریک  $Q(t)$  معلوم باشد، آن‌گاه می‌توانیم فرم  $i(t)$  را با ارزیابی انتگرال به‌دست آوریم. با این وجود حل چنین انتگرالی را برای هر مسئله تکرار نخواهیم کرد. بلکه علاقمندیم از آن چند نتیجه کلی بگیریم.

### پاسخ طبیعی

توجه دارید که برای یک مدار عاری از منبع باید Q برابر صفر باشد و حل هم پاسخ طبیعی زیر است:

$$i_n = Ae^{-Pt} \quad (۳۱)$$

می‌بینیم که ثابت P هرگز برای مداری شامل تنها مقاومت، القاگر و خازن منفی نمی‌شود. مقدار آن فقط به عناصر غیرفعال و اتصالات آن‌ها در مدار بستگی دارد.\* بنابراین پاسخ طبیعی با گذشت زمان به سمت صفر میل خواهد کرد. البته در یک مدار ساده RL باید هم این‌طور باشد، زیرا انرژی اولیه به تدریج در مقاومت مصرف می‌شود و به فرم گرما مدار را ترک می‌کند. مدارهای فیزیکی ایده‌آلی با P مساوی صفر هم موجودند. در این مدارها پاسخ طبیعی هرگز از بین نمی‌رود. پس در یافتیم که یکی از دو عبارت تشکیل‌دهنده پاسخ کامل، همان پاسخ طبیعی است که دامنه‌اش به مقدار اولیه پاسخ کامل بستگی دارد و بنابراین به مقدار اولیه تابع تحریک هم وابسته است.

### پاسخ واداشته

حال دقت کنید که جمله اول معادله (۳۰) به فرم  $Q(t)$ ، یعنی تابع تحریک بستگی دارد. هرگاه مداری با پاسخ طبیعی میرا داشته باشیم، این جمله پس از ناپدیدشدن کامل پاسخ طبیعی، کل پاسخ را تشکیل خواهد داد. این جمله را معمولاً **پاسخ واداشته** می‌نامند. به آن **پاسخ حالت ماندگار**، **حل ویژه** یا **مخصوص** یا **انتگرال ویژه** هم می‌گویند.

فعالاً فقط به مسائلی خواهیم پرداخت که منبع dc دفعتهً به مدار اعمال شود و پس از آن  $Q(t)$  مقداری ثابت است. در صورت تمایل می‌توان انتگرال معادله (۳۰) را محاسبه و پاسخ واداشته را به‌دست آورد:

$$i_f = \frac{Q}{P} \quad (۳۲)$$

زیرا تابع پله واحد یک 0 را برای  $t < 0$  اجبار می‌کند که با جایگزینی  $t = 3.0001$  در معادله (۲۶) یا (۲۷) درمی‌یابیم که  $i = 10.38 \text{ mA}$  در زمان  $t = 100 \mu\text{s}$  پس از تغییر مقدار منبع است.

## تمرین

۸-۹ منبع ولتاژ  $V = 40u(t) - 60$  با مقاومت  $10\Omega$  و القاگر  $50\text{mH}$  سری است. اندازه جریان و یا ولتاژ القاگر را در  $t$ ، (الف)  $0^-$ ، (ب)  $0^+$ ، (ج)  $\infty$  و (ه)  $3\text{ms}$  به‌دست‌آورید.  
جواب:  $6\text{A}$ ،  $0\text{V}$  و  $6\text{A}$ ،  $0\text{V}$  و  $2\text{A}$ ،  $40\text{V}$  و  $4.20\text{A}$ ،  $0\text{V}$  و  $22.0\text{V}$ .

## پایه‌ریزی درک شهودی

دلیل وجود دو پاسخ طبیعی و واداشته را از مباحث فیزیکی هم می‌توان دریافت. می‌دانیم که مدار ما نهایتاً پاسخ واداشته خواهد داشت. با این وجود، در لحظه پرتاب کلید به وضع دیگر، جریان‌های اولیه در القاگرها (یا در مدار RC، ولتاژ دو سر خازن‌ها) مقداری که به انرژی ذخیره‌شده در آن‌ها وابسته است، را خواهند داشت. نباید انتظار داشته باشیم که این جریان‌ها و ولتاژها در پاسخ واداشته یکسان باشند. از این رو باید دوره‌گذرای وجود داشته باشد که طی آن جریان‌ها و ولتاژها از مقدار اولیه مفروض به مقدار نهایی خود برسند. بخشی از پاسخ که گذر از مقادیر اولیه تا نهایی را فراهم می‌کند، **پاسخ طبیعی** می‌گوییم (اغلب به آن **پاسخ گذرا** می‌گویند). اگر بخواهیم پاسخ یک مدار RL بدون منبع را هم به همین نحو بررسی کنیم، باید بگوییم که پاسخ واداشته صفر است و پاسخ طبیعی، پاسخ اولیه ناشی از انرژی ذخیره‌شده در عنصر را به مقدار نهایی صفر می‌رساند.

این توصیف برای مدارهایی که در نهایت پاسخ طبیعی آن‌ها صفر می‌شود صادق است. پاسخ طبیعی مدارهای فیزیکی که عناصر آن‌ها همیشه با مقاومتی همراه است، میرا است ولی مدارهایی وجود دارند که در آن‌ها پاسخ طبیعی میرا نیست. مثال‌هایی که در آن‌ها جریان در یک حلقه متشکل از القاگرها و یا ولتاژ در یک رشته خازن سری حبس شده‌اند، نمونه‌هایی از اینگونه مدارها هستند.

## ۷-۸ پاسخ طبیعی و واداشته

برای ملاحظه پاسخ کامل به صورت دو بخش، واداشته و طبیعی پشتوانه ریاضی محکمی وجود دارد. دلیل مبتنی بر این واقعیت است که حل هر معادله دیفرانسیل خطی به صورت جمع دو بخش بیان می‌شود: با حل مکمل (پاسخ طبیعی و حل ویژه یا مخصوص) پاسخ واداشته. بدون درگیری با تئوری کلی معادلات دیفرانسیل، بگذارید با یک حل کلی از نوع آن‌چه در بخش قبل دیدیم شروع کنیم:

$$\frac{di}{dt} + Pi = Q$$

یا

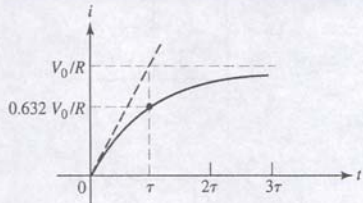
$$di + Pi dt = Q dt \quad (۲۸)$$

که Q را می‌توان تابع تحریک تصور کرده و آن را با  $Q(t)$  نشان می‌دهیم تا بر وابستگی آن به زمان تأکید گردد. بگذارید بحث را با فرض این‌که P مقدار ثابتی است ساده کنیم. بعداً هم فرض خواهیم کرد که Q ثابت باشد و به این ترتیب خود را به تابع تحریک dc محدود می‌کنیم. در هر کتاب معادلات دیفرانسیل مقدماتی، نشان داده شده است که با ضرب دو طرف معادله (۲۸) در یک عامل انتگرال‌گیری، دو طرف معادله مشتق کاملی می‌شود و با انتگرال‌گیری می‌توان حل معادله دیفرانسیل را به‌دست‌آورد. متغیرها را از هم جدا نمی‌کنیم،

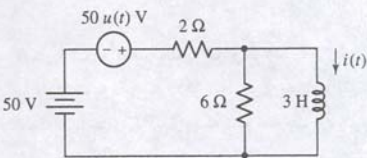


این پاسخ در شکل ۸-۳۶ ترسیم شده است و ما می‌توانیم چگونگی ایجاد جریان را از مقدار اولیه صفرش به مقدار نهایی  $\frac{V_0}{R}$  ملاحظه نماییم. گذر دقیقاً  $3\tau$  طول می‌کشد. اگر مدار سیم‌پیچ میدان یک موتور dc را نشان دهد، ممکن است  $L = 10H$  و  $R = 20\Omega$  باشد و لذا  $\tau = 0.5s$  به‌دست می‌آید. پس جریان میدان در کمتر از  $0.5s$  برقرار می‌شود. در یک ثابت زمانی، جریان حدود 63.2 درصد مقدار نهایی خود خواهد بود.

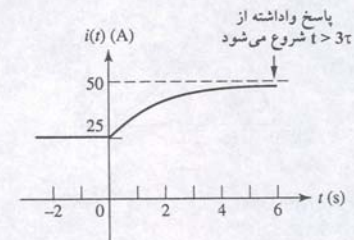
مثال ۸-۸



شکل ۸-۳۶ جریان القاگر مدار شکل ۸-۳۵ اگر شیب اولیه منحنی را ادامه دهیم پاسخ واداشته ثابت را در  $t = \tau$  قطع می‌کند.



شکل ۸-۳۷ مدار مثال ۸-۸



شکل ۸-۳۸ پاسخ  $i(t)$  مدار شکل ۸-۳۷ که برای زمان‌های کمتر و بیشتر از صفر ترسیم شده است.

## تمرین

۸-۱۰ منبع ولتاژ  $V = 20u(t)$  با مقاومت  $200\Omega$  و القاگر  $4H$  سری است. جریان القاگر را در زمان  $t$ ، (الف)  $0^-$ ، (ب)  $0^+$ ، (ج)  $8mA$  و (د)  $15ms$  به‌دست‌آورید. جواب:  $0, 0, 33.0mA$  و  $52.8mA$ .

و به این ترتیب:

$$i(t) = \frac{Q}{P} + Ae^{-Pt} \quad (۳۳)$$

برای مدار RL سری،  $\frac{Q}{P}$  همان جریان ثابت  $V_0/R$  و  $1/P$  ثابت زمانی  $\tau$  است. خواهیم دید که پاسخ واداشته را می‌توان بدون محاسبه انتگرال هم به‌دست‌آورد. چون این پاسخ با گذشت زمان تبدیل به پاسخ کامل می‌شود، مقدار آن برابر است با منبع ولتاژ تقسیم بر مقاومت سری. پس پاسخ واداشته را می‌توان بدون محاسبه به‌دست‌آورد.

## تعیین پاسخ کامل

بیا باید مدار سری RL ساده را در نظر گرفته و ببینیم چگونه پاسخ کامل را از جمع پاسخ طبیعی واداشته می‌توان به‌دست‌آورد. قبلاً مدار شکل ۸-۳۵ تحلیل شد، ولی روش طولانی بود. پاسخ موردنظر جریان  $i(t)$  است و ما ابتدا این جریان را به صورت مجموع جریان‌های طبیعی واداشته بیان می‌کنیم:

$$i = i_n + i_f$$

نمایش تابع پاسخ طبیعی باید مشابه پاسخ بدون منبع باشد. بنابراین منبع ولتاژ پله را با اتصال کوتاه جایگزین می‌کنیم و همان حلقه سری قبلی را به‌دست می‌آوریم. بنابراین:

$$i_n = Ae^{-Rt/L}$$

که هنوز دامنه A باید محاسبه شود. چون مقدار اولیه مربوط به پاسخ کامل است، ما نمی‌توانیم به سادگی  $A = i(0)$  را فرض کنیم.

حال به سراغ پاسخ واداشته می‌رویم. در این مسئله خاص، پاسخ واداشته باید ثابت باشد، زیرا منبع همواره مقدار ثابت  $V_0$  می‌باشد. پس از مردن پاسخ طبیعی ولتاژی در دو سر القاگر وجود نخواهد داشت و لذا ولتاژ  $V_0$  در دو سر مقاومت R ظاهر می‌گردد و بنابراین پاسخ واداشته چنین است:

$$i_f = \frac{V_0}{R}$$

توجه کنید که پاسخ واداشته به‌طور کامل معین شده است و دامنه مجهولی در آن وجود ندارد. اکنون با ترکیب دو پاسخ داریم:

$$i = Ae^{-Rt/L} + \frac{V_0}{R}$$

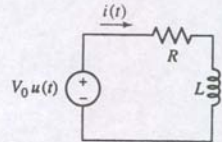
و برای ارزیابی A مقدار اولیه را اعمال می‌کنیم. قبل از  $t = 0$  جریان صفر است و نمی‌تواند مقدار آن ناگهان عوض شود زیرا جریان از القاگر می‌گذرد. بنابراین جریان بلافاصله پس از  $t = 0$  برابر صفر است و

$$0 = A + \frac{V_0}{R}$$

و بالاخره:

$$i = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (۳۴)$$

دقیقاً توجه کنید که A مقدار اولیه نیست، زیرا  $A = -\frac{V_0}{R}$  و  $i(0) = 0$  است. در بررسی مدارهای بدون منبع دیدیم که A مقدار اولیه پاسخ بود. وقتی که توابع تحریک وجود دارند، ما ابتدا باید مقدار اولیه پاسخ را به‌دست‌آوریم و سپس آن را در معادله پاسخ کامل برای یافتن A جایگزین کنیم.

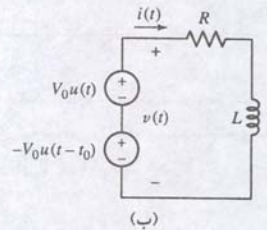
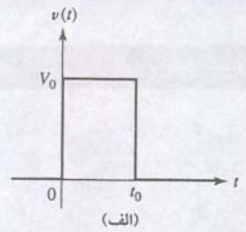


شکل ۸-۳۵ مدار RL سری که برای نشان دادن روش تعیین پاسخ به صورت مجموع پاسخ‌های طبیعی و واداشته به‌کار رفته است.

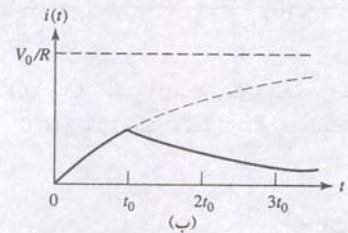
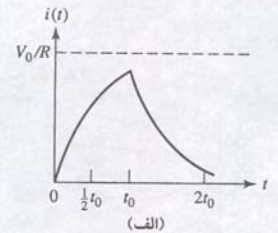




## مثال ۸-۹



**شکل ۸-۳۹ (الف)** یک پالس ولتاژ مربعی که به عنوان تابع تحریک مدار RL سری به کار رفته است. **(ب)** مدار RL سری که تابع تحریک آن به صورت ترکیب سری دو منبع ولتاژ مستقل است. می‌خواهیم  $i(t)$  را پیدا کنیم.



**شکل ۸-۴۰** دو منحنی پاسخ برای مدار **شکل ۸-۳۹ (ب)**. در **شکل (الف)**  $\tau$  برابر  $t_0/2$  است. **(ب)**  $\tau$  برابر  $2t_0$  می‌باشد.

به عنوان آخرین مثال از کاربرد این روش که به کمک آن می‌توان پاسخ کامل هر مدار را در معرض یک تغییر ناگهانی به طور ذهنی نوشت، دوباره یک مدار RL سری را ملاحظه می‌کنیم.

پاسخ جریان را در یک مدار RL سری ساده وقتی که تابع تحریک یک پالس ولتاژ مربعی با دامنه  $V_0$  و دوره  $t_0$  باشد را پیدا کنید.

ما تابع تحریک را به صورت مجموعی از دو منبع ولتاژ پله  $V_0 u(t)$  و  $-V_0 u(t - t_0)$  طبق **شکل ۸-۳۹ (الف)** و **(ب)** نشان می‌دهیم و برای به دست آوردن پاسخ از اصل تجمیع استفاده خواهیم کرد. فرض کنید که  $i_1(t)$  بخشی از جریان  $i(t)$  بدلیل فقط منبع بالایی  $V_0 u(t)$  و  $i_2(t)$  مربوط به بخش پایینی  $-V_0 u(t - t_0)$  به تنهایی باشد. آن‌گاه:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

اکنون هدف ما نوشتن هر یک از پاسخ‌های جزئی  $i_1$  و  $i_2$  به صورت مجموع پاسخ‌های طبیعی و واداشته است. پاسخ  $i_1(t)$  آشنا به نظر می‌رسد. این مسئله به صورت معادله (۱۵) حل شد:

$$i_1(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad t > 0$$

توجه کنید که این حل فقط برای  $t > 0$  معتبر است.

اکنون توجه خود را به منبع دیگر و پاسخ آن یعنی  $i_2(t)$  معطوف می‌کنیم. تنها پلاریته یا قطبیت منبع و زمان اعمال آن متفاوت است. بنابراین لزومی ندارد که فرم پاسخ طبیعی واداشته آن را معین کنیم. پس به کمک حل  $i_1(t)$  می‌توانیم این پاسخ را هم بنویسیم:

$$i_2(t) = -\frac{V_0}{R} [1 - e^{-R(t-t_0)/L}] \quad t > t_0$$

که محدوده مجاز  $t$ ،  $t > t_0$  باید مجدداً ذکر شود.

اکنون دو جواب را با هم جمع می‌کنیم ولی این کار باید با دقت انجام شود زیرا هر یک در فاصله زمانی متفاوتی معتبر است. بنابراین:

$$i(t) = 0 \quad t < 0 \quad (۳۵)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad 0 < t < t_0 \quad (۳۶)$$

و

$$i(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) - \frac{V_0}{R} (1 - e^{-R(t-t_0)/L}) \quad t > t_0$$

یا

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-Rt/L} (e^{-Rt_0/L} - 1) \quad t > t_0 \quad (۳۷)$$

گرچه معادلات (۳۵) تا (۳۷) به طور کامل پاسخ مدار را در **شکل ۸-۳۹ (ب)** به پالس **شکل ۸-۳۹ (الف)** توصیف می‌کند، خود جریان به هر دو ثابت زمانی  $\tau$  و دوره کاری  $t_0$  وابسته است. این دو منحنی در **شکل ۸-۴۰** نشان داده شده‌اند.

منحنی **(الف)** برای حالتی است که ثابت زمانی فقط نصف عرض پالس است. بخش صعودی آن که نمایی است قبل از نزول به  $V_0/R$  می‌رسد. حالت دیگر در نمودار **(ب)** نشان داده شده است و ثابت زمانی آن دو برابر  $t_0$  است و بنابراین پاسخ هرگز شانس رسیدن به دامنه‌های بیشتر را ندارد.

روند به کار رفته در یافتن پاسخ مدار RL به هنگام اعمال ناگهانی منبع dc که با قطع و وصل کلید انجام می‌شود در زیر خلاصه شده است. فرض می‌کنیم که مدار قابل کاهش به یک

مقاومت معادل سری  $R_{eq}$  با یک القاگر معادل  $L_{eq}$  است که در آن همه منابع مستقل صفر شده‌اند. پاسخی که به جست‌وجوی آن هستیم با  $f(t)$  نشان داده می‌شود.

۱. تمام منابع را بکشید، مدار را برای تعیین  $R_{eq}$  و  $L_{eq}$  ساده کنید. ثابت زمانی  $\tau = L_{eq}/R_{eq}$  را بیابید.

۲. با فرض اتصال کوتاه بودن  $L_{eq}$ ، روش‌های تحلیل dc را برای یافتن  $i_L(0^-)$ ، یعنی جریان القاگر قبل از قطع، به کار بگیرید.

۳. مجدداً با فرض اتصال کوتاه بودن  $L_{eq}$ ، روش‌های تحلیل dc را برای یافتن پاسخ واداشته به کار ببرید. این مقدار  $f(t)$  به ازای میل  $t$  به بینهایت است و ما آن را با  $f(\infty)$  نشان می‌دهیم.

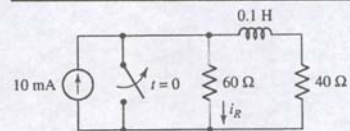
۴. پاسخ کل را به صورت جمع پاسخ‌های طبیعی و واداشته به دست آورید:

$$f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$$

۵.  $f(0^+)$  را با استفاده از شرط  $i_L(0^+) = i_L(0^-)$  بیابید. در صورت تمایل می‌توانید  $L_{eq}$  را با منبع جریان  $i_L(0^+)$  (اگر مدار باز باشد  $i_L(0^+) = 0$ ) در این محاسبات جایگزین کنید. به استثنای جریان القاگر (و ولتاژ خازن) دیگر جریان‌ها و ولتاژهای مدار می‌توانند ناگهان عوض شوند.

۶.  $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$  و  $f(0^+) = f(\infty) + A$  یا  $c^{-t/\tau}$  (مقدار نهایی - مقدار اولیه) + مقدار نهایی = پاسخ کامل

## تمرین



شکل ۸-۴۱

**۸-۱۱** مدار **شکل ۸-۴۱** مدت‌ها به همان شکل بوده است. کلید در  $t = 0$  باز می‌شود.  $i_R$  در زمان **(الف)**  $0^-$ ، **(ب)**  $0^+$ ، **(ج)**  $\infty$  و **(د)**  $1.5 \text{ ms}$  به دست آورید. **جواب:**  $0, 10 \text{ mA}, 4 \text{ mA}, 5.34 \text{ mA}$ .

## ۸-۸ مدارهای RC واداشته

پاسخ کامل هر مدار RC را نیز می‌توان از جمع پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته به دست آورد. چون رویه نهایتاً مشابه با چیزی است که قبلاً در مدارهای RL دیدیم بهترین روش در این مرحله توضیح مثالی به صورت کامل است که هدف تنها کمیت مرتبط با خازن نیست بلکه جریان در یک مقاومت هم هست.

ولتاژ خازن  $v_C(t)$  و جریان  $i(t)$  را در مقاومت  $200 \Omega$  **شکل ۸-۴۲** برای همه زمان‌ها بیابید. با حالت مدار در  $t < 0$  که متعلق به سوئیچ در حالت  $a$  است، طبق **شکل ۸-۴۲ (ب)** شروع می‌کنیم. ما فرض می‌کنیم که پاسخ گذرا ناپدید شده باشد، و تنها پاسخ واداشته حاصل از منبع  $120 \text{ V}$  را داشته باشیم که مربوط به یافتن  $v_C(0^-)$  است. سپس ولتاژ اولیه را با یک تقسیم ولتاژ ساده به دست می‌آوریم:

$$v_C(0) = \frac{50}{50 + 10} (120) = 100 \text{ V}$$

چون ولتاژ خازن آنرا تغییر نمی‌کند، این ولتاژ در  $t = 0^-$  و  $t = 0^+$  معتبر است.



برای محاسبه  $A$  باید  $i(0^+)$  را بدانیم. این مقدار با توجه به عنصر ذخیره کننده انرژی خازن حاصل می‌گردد. این حقیقت که  $v_C$  حین کلیدزنی متوالی باید در  $100V$  ثابت بماند شرط تعیین کننده دیگر جریان‌ها و ولتاژها در  $t = 0^+$  است. چون  $v_C(0^+) = 100V$  است و نیز خازن با مقاومت  $200\Omega$  موازی است، می‌بینیم که  $A = 0.4A$ ،  $i(0^+) = 0.5A$  و بنابراین:

$$i(t) = 0.1923 A \quad t < 0$$

$$i(t) = 0.1 + 0.4e^{-t/1.2} A \quad t > 0$$

یا

$$i(t) = 0.1923 + (-0.0923 + 0.4e^{-t/1.2}) u(t) A$$

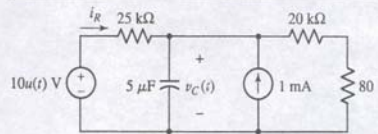
که آخرین عبارت برای همه زمان‌های  $t$  صحیح است.

پاسخ کامل فوق را با  $u(-t)$  که در  $t < 0$  برابر واحد و در  $t > 0$  برابر صفر است هم می‌توان نوشت. بنابراین:

$$i(t) = 0.1923u(-t) + (0.1 + 0.4e^{-t/1.2}) u(t) A$$

این پاسخ در شکل ۸۴۳ (ب) ترسیم شده است. توجه کنید که برای نوشتن فرم تابعی پاسخ این مدار با تک‌عنصر ذخیره ساز انرژی، تنها چهار عدد لازم است تا رسم شود: یکی مقدار ثابت قبل از کلیدزنی ( $0.1923 A$ )، مقدار لحظه‌ای پس از کلیدزنی ( $0.5A$ )، پاسخ واداشته ثابت ( $0.1A$ ) و ثابت زمانی ( $1.2s$ ). سپس تابع نمایی منفی به راحتی نوشته می‌شود.

## تمرین

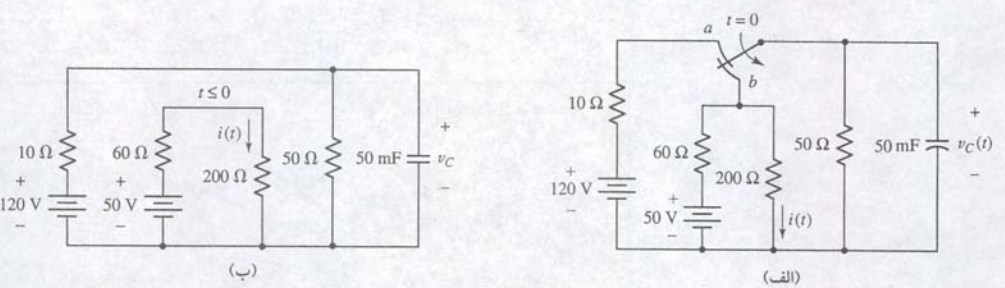


شکل ۸۴۴

۸-۱۲ برای مدار شکل ۸۴۴،  $v_C(t)$  را در  $t$  (الف)  $0^-$ ، (ب)  $0^+$ ، (ج)  $\infty$  و (د)  $0.08s$  بیابید. جواب:  $24.4V$  و  $28V$ ،  $20V$ ،  $20V$ .

با توجه به دوگان عبارات انتهایی بخش ۸۷ نتیجه‌گیری لازم را انجام می‌دهیم. روایی که برای یافتن پاسخ یک مدار RC پس از قطع یا وصل منابع dc در درون یا بیرون مدار در زمانی مثل  $t = 0$  به کار می‌رود، در زیر خلاصه شده است. ما فرض می‌کنیم که با صفر کردن همه منابع، مدار قابل کاهش به یک  $R_{eq}$  موازی با یک خازن  $C_{eq}$  باشد. پاسخی که در جست‌وجوی آن هستیم با  $f(t)$  نشان داده شده است.

۱. با کشتن همه منابع مستقل، مدار را ساده کنید تا  $R_{eq}$  و  $C_{eq}$  و ثابت زمانی  $\tau = R_{eq}C_{eq}$  به دست آید.
  ۲. با فرض  $C_{eq}$  به صورت مدار باز، روش‌های تحلیل dc را برای یافتن  $v_C(0^-)$  که ولتاژ خازن در دست قبل از قطع است به کار ببرید.
  ۳. دوباره  $C_{eq}$  را مدار باز فرض کنید، از تحلیل dc استفاده کرده پاسخ واداشته را به دست آورید. این مقداری از  $f(t)$  است که با  $\infty \rightarrow t$  به دست می‌آید. ما آن را  $f(\infty)$  می‌نامیم.
  ۴. پاسخ کل را به صورت جمع پاسخ‌های واداشته و طبیعی بنویسید:
- $$f(t) = f(\infty) + Ae^{-t/\tau}$$
۵. با استفاده از شرط  $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ ،  $f(0^+)$  را بیابید. اگر مایلید،  $C_{eq}$  در این جا ممکن است با منبع ولتاژ  $v_C(0^+)$  (اتصال کوتاه اگر  $v_C(0^+) = 0$  باشد) جایگزین شود. به استثنای ولتاژ خازن (و جریان القاگر)، دیگر ولتاژها و جریان‌های مدار ممکن است ناگهان تغییر کنند.
  ۶.  $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$  و  $f(0^+) = f(\infty) + A$  یا  $e^{-t/\tau}$  (مقدار نهایی - مقدار اولیه) + مقدار نهایی = پاسخ کامل



اکنون سوئیچ به حالت  $b$  پرتاب می‌گردد، پاسخ کامل چنین است:

$$v_C = v_{Cr} + v_{Cn}$$

مدار مربوطه در شکل ۸۴۲ (ج) برای سهولت کار ترسیم شده است. فرم پاسخ طبیعی با جایگزینی منبع توسط  $50V$  به وسیله مدار اتصال کوتاه و ارزیابی مقاومت معادل برای یافتن ثابت زمانی به دست می‌آید (به بیان دیگر مقاومت معادل تونن نظاره شده با خازن):

$$R_{eq} = \frac{1}{1/50 + 1/200 + 1/60} = 24\Omega$$

بنابراین:

$$v_{Cn} = Ae^{-t/R_{eq}C} = Ae^{-t/1.2}$$

برای یافتن پاسخ واداشته برای کلید در وضعیت  $b$ ، آنقدر صبر می‌کنیم تا ولتاژها و جریان‌ها دیگر تغییر نکنند، بنابراین خازن به صورت مدار باز خواهد بود. با روش تقسیم ولتاژ داریم:

$$v_{Cr} = 50 \left( \frac{200 \parallel 50}{50 + 200 \parallel 50} \right) = 50 \left( \frac{(50)(200)/250}{60 + (50)(200)/250} \right) = 20V$$

بنابراین:

$$v_C = 20 + Ae^{-t/1.2} V$$

و از مقدار اولیه حاصل قبلی:

$$100 = 20 + A$$

یا

$$v_C = 20 + 80e^{-t/1.2} V \quad t \geq 0$$

و

$$v_C = 100V \quad t < 0$$

این پاسخ در شکل ۸۴۳ (الف) کشیده شده است و دوباره پاسخ طبیعی فرم گذرایی را از مقدار اولیه به پاسخ نهایی دارا است.

اکنون به سراغ  $i(t)$  می‌رویم. لزومی ندارد که این پاسخ حین کلیدزنی ثابت باشد. هنگامی که اتصال در  $a$  باشد، واضح است که  $i = 50/260 = 192.3 \text{ mA}$ ، و وقتی که کلید به  $b$  می‌رود، پاسخ واداشته برابر است با:

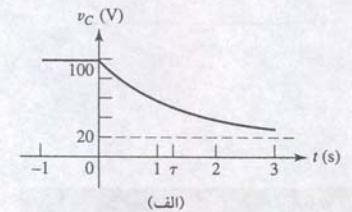
$$i_f = \frac{50}{60 + (50)(200)/(50 + 200)} \left( \frac{50}{50 + 200} \right) = 0.1 A$$

فرم پاسخ طبیعی همان فرم ولتاژ خازن است که قبلاً به دست آمد:

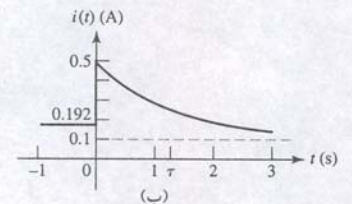
$$i_n = Ae^{-t/1.2}$$

از ترکیب پاسخ طبیعی و واداشته داریم:

$$i = 0.1 + Ae^{-t/1.2} A$$



(الف)

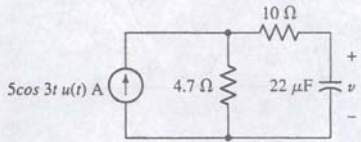


(ب)

شکل ۸۴۳ (الف) پاسخ  $v_C$  و (ب) پاسخ  $i$  مدار شکل ۸۴۲ برحسب زمان.



## تمرین



شکل ۸-۴۶ یک مدار RC راه اندازی شده به وسیله تابع تحریک سینوسی.

۸-۴۳ ولتاژ خازن  $v$  را در مدار شکل ۸-۴۶ برای  $t > 0$  تعیین کنید.  
جواب:  $23.5 \cos 3t + 22.8 \times 10^{-3} \sin 3t - 23.5e^{-3092t} \text{ V}$

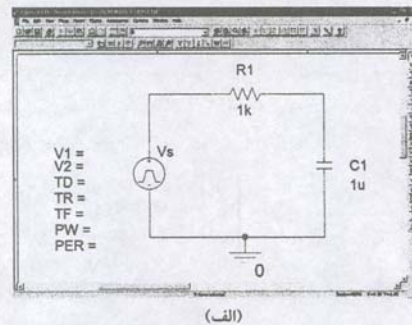
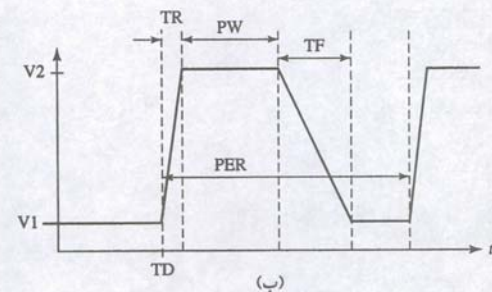
## ۸-۹ پیش بینی پاسخ مدارهای سوئیچ شده متوالی

در مثال ۸-۹ ما به طور خلاصه پاسخ یک مدار RL را به موج پالس بررسی کردیم که در آن یک منبع به طور موثر در خارج از مدار به صورت متوالی سوئیچ می گردد. این نوع در عمل خیلی رایج است، درحالی که به بعضی از مدارها فقط یک بار انرژی داده می شود (مثلاً مدارهای تریگر ایبرگ اتومبیل). در پیش بینی پاسخ یک مدار RL یا RC که به پالس ها و سری هایی از پالس متصل است - بعضی اوقات به آن مدارهای سوئیچ شده متوالی می گویند - کلید موضوع سبب نسبی ثابت زمانی مدار به زمان های متفاوتی است که رشته پالس تعریف می کند. اساس کار در پشت تحلیل این است که عنصر ذخیره ساز انرژی برای شارژ قبل از انتهای پالس دارد و آیا زمان دشارژ آن قبل از شروع پالس بعدی کافی است.

مدار شکل ۸-۴۷ (الف) را در نظر بگیرید، که به یک منبع ولتاژ پالس شده وصل است و به وسیله هفت پارامتر در شکل ۸-۴۷ (ب) توصیف شده است. موج بین دو مقدار  $V1$  و  $V2$  محدود است. زمان  $t$  لازم برای تغییر از  $V1$  به  $V2$  را  $t_r$  (TR) و زمان  $t$  لازم برای تغییر از  $V2$  به  $V1$  را  $t_f$  (TF) گویند. دوره کاری  $W_p$  پالس را پهنای پالس (PW)، و پریود  $T$  شکل موج (PER) زمانی است که موج برای تکرار لازم دارد. توجه کنید که SPICE زمان تأخیر (TD) را قبل از شروع رشته پالس اجازه می دهد که می تواند در میرایی پاسخ گذرا در بعضی آرایش ها مفید باشد.

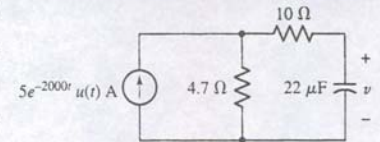
به خاطر بحث، ما زمان تأخیر را صفر،  $V1 = 0$  و  $V2 = 9 \text{ V}$  انتخاب می کنیم. ثابت زمانی مدار  $\tau = RC = 1 \text{ ms}$  است، لذا زمان صعود و نزول را در  $1 \text{ ns}$  تنظیم می نماییم. گرچه SPICE اجازه تغییر ولتاژ در زمان صفر را نمی دهد زیرا با استفاده از فواصل زمانی گسسته معادلات دیفرانسیل را حل می کند، ولی در مقایسه با ثابت زمانی مدار،  $1 \text{ ns}$  به طور موثر آنی است. ما چهار حالت اصلی را که در جدول ۸-۱ خلاصه شده است، ملاحظه خواهیم کرد. در دو حالت اول، پهنای پالس  $W_p$  خیلی طولانی تر از ثابت زمانی  $\tau$  است، بنابراین انتظار داریم که پاسخ های گذرا از شروع پالس قبل از اتمام پالس از بین برود. در دو حالت بعد عکس آن صحیح است: پهنای پالس آنقدر کوتاه است که خازن زمانی کافی برای شارژ کامل قبل از پایان پالس ندارد. موضوع مشابهی زمانی حادث می شود که ما پاسخ مدار را در هنگامی که زمان بین پالس ها ( $T - W_p$ ) در مقایسه با ثابت زمانی یا کوتاه (حالت II) یا طولانی (حالت III) باشد، به دست آوریم.

شکل ۸-۴۷ (الف) شمای یک مدار RC ساده متصل به موج ولتاژ پالس. (ب) نمودار تعریف پارامترهای VPULSE.



آنچنانکه هم اکنون دیدیم، گام های یکسانی که به تحلیل مدارهای RL اعمال شد، قابل اعمال به مدارهای RC هم می باشد. تاکنون خود را به تحلیل مدارها با توابع تحریک dc محدود کردیم، غافل از این که معادله (۳۰) برای توابع عمومی تری مثل  $Q(t) = 9 \cos(5t - 7^\circ)$  یا  $Q(t) = 2e^{-5t}$  هم صحیح است. قبل از نتیجه گیری این بخش ما یک چنین منبع غیر dc را مورد بررسی قرار می دهیم.

## مثال ۸-۱۱



شکل ۸-۴۵ یک مدار ساده RC که با یک تابع نمایی میرا راه اندازی شده است.

در شکل ۸-۴۵ عبارتی برای  $v(t)$  در  $t > 0$  تعیین کنید.

بر اساس تجربه، یک پاسخ کاملی به فرم زیر مورد انتظار است:

$$v(t) = v_f + v_n$$

که  $v_f$  تابع تحریک و  $v_n$  فرم  $Ae^{-t/\tau}$  را دارد.

اما ثابت زمانی مدار چقدر است؟ ما منبع خود را با یک بار جایگزین کرده و مقاومت معادل تونن را موازی با خازن می یابیم:

$$R_{eq} = 4.7 + 10 = 14.7 \Omega$$

بنابراین ثابت زمانی ما برابر است با:

$$\tau = R_{eq}C = 323.4 \mu\text{s}$$

یا

$$1/\tau = 3.092 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$$

برای پیش رفتن چندین راه وجود دارد و شاید سراسر ترین آن ها انجام تبدیل منبع است، و نتیجه اش  $v(t) = 23.5e^{-2000t} u(t) \text{ V}$  است که سری با مقاومت  $14.7 \Omega$  و  $22 \mu\text{F}$  می باشد (دقت کنید که ثابت زمانی تغییر نمی کند).

با نوشتن معادله KVL برای  $t > 0$  داریم:

$$23.5e^{-2000t} = (14.7)(22 \times 10^{-6}) \frac{dv}{dt} + v$$

با کمی دستکاری داریم:

$$\frac{dv}{dt} + 3.092 \times 10^3 v = 72.67 \times 10^3 e^{-2000t}$$

که در مقایسه با معادلات (۲۸) و (۳۰) اجازه می دهد تا پاسخ کامل را بنویسیم:

$$v(t) = e^{-Pt} \int Qe^{Pt} dt + Ae^{-Pt}$$

که در حالت ما  $P = 1/\tau = 3.092 \times 10^3$  و  $Q(t) = 72.67 \times 10^3 e^{-2000t}$  است. بنابراین:

$$v(t) = e^{-3092t} \int 72.67 \times 10^3 e^{-2000t} e^{3092t} dt + Ae^{-3092t} \text{ V}$$

با انتگرال گیری داریم:

$$v(t) = 66.55e^{-2000t} + Ae^{-3092t} \text{ V} \quad (38)$$

تنها منبع ما با تابع پله و مقدار صفر برای  $t < 0$  کنترل می شود، بنابراین  $v(0^-) = 0$ . چون ولتاژ یک خازن است،  $v(0^+) = v(0^-)$ ، و بنابراین مقدار اولیه  $v(0) = 0$  است. با جایگزینی در معادله (۳۸) داریم  $A = -66.55 \text{ V}$ ، لذا:

$$v(t) = 66.55(e^{-2000t} - e^{-3092t}) \text{ V}, \quad t > 0$$



### حالت II: زمان شارژ کامل وجود دارد ولی زمان دشارژ چنین نیست

اینک حالتی را بررسی می‌کنیم که ببینیم اگر خازن نتواند کاملاً دشارژ شود (حالت II) چه پیش می‌آید. معادله (۳۹) هنوز وضعیت بین  $0 < t < 10 \text{ ms}$  را توصیف می‌کند، و معادله (۴۰) ولتاژ خازن را در فاصله بین پالس‌ها توصیف می‌کند، که به  $10.1 \text{ ms} < t < 10$  تقبیل یافته است.

درست قبل از ایجاد پالس دوم در  $t = 10.1 \text{ ms}$ ، اکنون  $V_C$  برابر با  $8.144 \text{ V}$  است؛ خازن تنها  $0.1 \text{ ms}$  زمان برای دشارژ دارد، و بنابراین هنوز 82 درصد از حداکثر انرژی آن باقی است و پالس بعدی هم می‌رود که آغاز شود. بنابراین در فاصله بعدی:

$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1000(t-10.1 \times 10^{-3})} \text{ V}, \quad 10.1 < t < 20.1 \text{ ms}$$

$$\text{که } v_C(10.1 \text{ ms}) = 9 + C = 8.144 \text{ V} \text{، بنابراین } C = -0.856 \text{ V}$$

$$v_C(t) = 9 - 0.856e^{-1000(t-10.1 \times 10^{-3})} \text{ V}, \quad 10.1 < t < 20.1 \text{ ms}$$

که خیلی سریع‌تر از پالس قبلی در رسیدن به  $9 \text{ V}$  است.

### حالت III: زمان شارژ کافی نیست ولی دشارژ کامل انجام می‌شود

اما اگر روشن نباشد که دوران گذر قبل از پایان پالس ولتاژ تمام است یا خیر چه می‌شود؟ در واقع این وضعیت در حالت III رخ می‌دهد. درست همان‌طور که برای حالت I نوشتیم:

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1000t} \text{ V} \quad (۴۱)$$

رابطه فوق به این حالت می‌تواند اعمال شود، ولی این بار فقط در فاصله  $0 < t < 0.1 \text{ ms}$  خواهد بود. شرط اولیه ما عوض نشده است، لذا مثل قبل  $V = -9$  است. اکنون، قبل از اتمام اولین پالس در  $t = 0.1 \text{ ms}$ ، می‌بینیم که  $V_C = 0.8565 \text{ V}$  است. با این وجود اگر اجازه دهیم خازن کاملاً شارژ شود، با مقدار  $9 \text{ V}$  ممکن خیلی فاصله دارد که حاصل مستقیم از یک دهم ثابت زمانی است که طول می‌کشد.

اکنون خازن شروع به دشارژ می‌کند، بنابراین:

$$v_C(t) = Be^{-1000(t-1 \times 10^{-4})} \text{ V}, \quad 0.1 < t < 10.1 \text{ ms} \quad (۴۲)$$

ما قبلاً معین کردیم که  $v_C(0.1 \text{ ms}) = 0.8565 \text{ V}$ ، بنابراین  $v_C(0.1 \text{ ms}) = 0.8565 \text{ V}$  و جایگزینی در معادله (۴۲) داریم  $B = 0.8565 \text{ V}$ . درست در پالس دوم در  $t = 10.1 \text{ ms}$  ولتاژ خازن به  $0 \text{ V}$  افول کرده است؛ این خود مقدار اولیه‌ای در آغاز پالس دوم است و لذا می‌توان معادله (۴۱) را برای پاسخ مربوطه چنین نوشت:

$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1000(t-10.1 \times 10^{-3})} \text{ V}, \quad 10.1 < t < 10.2 \text{ ms} \quad (۴۳)$$

### حالت IV: زمان کافی برای شارژ و دشارژ موجود نیست

در آخرین حالت ما وضعیتی را بررسی می‌کنیم که در آن عرض پالس و پریود آنقدر کوتاه‌اند که خازن نمی‌تواند در یک پریود کاملاً شارژ یا کاملاً دشارژ گردد. بر اساس تجربیت قبلی می‌توان نوشت:

$$v_C(t) = 9 - 9e^{-1000t} \text{ V}, \quad 0 < t < 0.1 \text{ ms} \quad (۴۴)$$

$$v_C(t) = 0.8565e^{-1000(t-1 \times 10^{-4})} \text{ V}, \quad 0.1 < t < 0.2 \text{ ms} \quad (۴۵)$$

$$v_C(t) = 9 + Ce^{-1000(t-2 \times 10^{-4})} \text{ V}, \quad 0.2 < t < 0.3 \text{ ms} \quad (۴۶)$$

$$v_C(t) = De^{-1000(t-3 \times 10^{-4})} \text{ V}, \quad 0.3 < t < 0.4 \text{ ms} \quad (۴۷)$$

جدول ۸-۱ چهار حالت جداگانه پهنای باند و پریود نسبت به ثابت زمانی  $1 \text{ ms}$ .

| حالت | پهنای پالس $W_p$                 | پریود $T$                             |
|------|----------------------------------|---------------------------------------|
| I    | $10 \text{ ms } (\tau \ll W_p)$  | $20 \text{ ms } (\tau \ll T - W_p)$   |
| II   | $10 \text{ ms } (\tau \ll W_p)$  | $10.1 \text{ ms } (\tau \gg T - W_p)$ |
| III  | $0.1 \text{ ms } (\tau \gg W_p)$ | $10.1 \text{ ms } (\tau \ll T - W_p)$ |
| IV   | $0.1 \text{ ms } (\tau \gg W_p)$ | $0.2 \text{ ms } (\tau \gg T - W_p)$  |

ما به صورت کیفی پاسخ مدار را برای هر چهار حالت در شکل ۸-۴۸ کشیده‌ایم و به‌طور اختیاری ولتاژ خازن را به عنوان کمیت موردنظر برگزیده‌ایم، چون هر ولتاژ یا جریانی وابستگی زمانی یکسانی دارد. در حالت I، خازن زمان کافی برای شارژ کامل و دشارژ کامل دارد (شکل ۸-۴۸ الف)، درحالی‌که در حالت II (شکل ۸-۴۸ ب) که زمان بین پالس‌ها کاهش یافته، زمان لازم برای دشارژ کامل وجود ندارد. برعکس خازن در حالت III (شکل ۸-۴۸ ج)، یا حالت IV (شکل ۸-۴۸ د) وقت کافی برای شارژ کامل ندارد.

### حالت I: زمان کافی برای شارژ کامل و دشارژ کامل

ما می‌توانیم مقادیر دقیقی را برای پاسخ در هر حالت به دست آوریم که البته با یک سری پاسخ امکان‌پذیر است. ما ابتدا حالت I را بررسی می‌کنیم. چون خازن فرصت شارژ کامل را دارد، پاسخ وابسته متعلق به ولتاژ راه‌انداز  $9 \text{ V dc}$  است. پس پاسخ کامل به پالس اول عبارت‌است از:

$$v_C(t) = 9 + Ae^{-1000t} \text{ V}$$

با  $v_C(0) = 0$ ،  $A = -9$  است و بنابراین:

$$v_C(t) = 9(1 - e^{-1000t}) \text{ V} \quad (۳۹)$$

در فاصله زمانی  $0 < t < 10 \text{ ms}$  است. در  $t = 10 \text{ ms}$  منبع ناگهان به  $0 \text{ V}$  افت می‌کند، و خازن شروع به دشارژ در مقاومت می‌نماید. در این فاصله زمانی ما با یک مدار ساده RC بی‌منبع مواجه هستیم و می‌توانیم پاسخ را چنین بنویسیم:

$$v_C(t) = Be^{-1000(t-0.01)} \text{ V}, \quad 10 < t < 20 \text{ ms} \quad (۴۰)$$

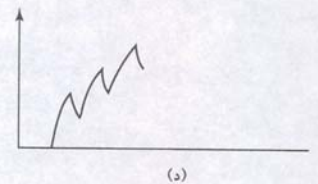
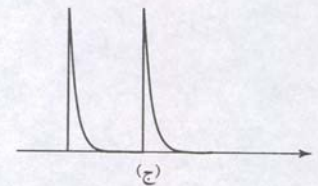
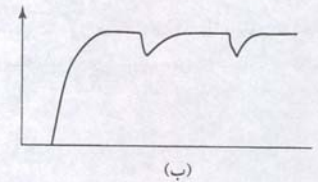
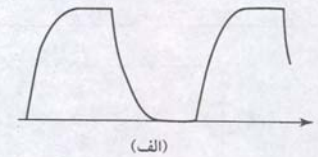
که  $B = 8.99959 \text{ V}$  است که از جایگزینی  $t = 10 \text{ ms}$  در معادله (۳۹) حاصل می‌شود. ما مقدار فوق را به  $9 \text{ V}$  گرد می‌کنیم، توجه داریم که مقدار محاسبه‌شده با فرض ما مبنی بر این‌که گذر اولیه قبل از پایان پالس تلفات دارد، توافق دارد.

در  $t = 20 \text{ ms}$ ، منبع ولتاژ بلافاصله به  $9 \text{ V}$  پرش می‌کند، درست قبل از این پدیده ولتاژ خازن از جایگزینی  $t = 20 \text{ ms}$  در معادله (۴۰) به دست می‌آید که  $v_C(20 \text{ ms}) = 408.6 \mu\text{V}$  است و در مقایسه با مقدار پیک  $9 \text{ V}$  در واقع صفر است.

اگر به‌خاطر سادگی چهار رقم باارزش‌تر را نگه داریم، ولتاژ خازن در آغاز پالس دوم صفر است که مثل نقطه شروع ماست. بنابراین معادلات (۳۹) و (۴۰) مبنای پاسخ را برای همه پالس‌های بعدی فراهم می‌کنند و می‌توانیم بنویسیم:

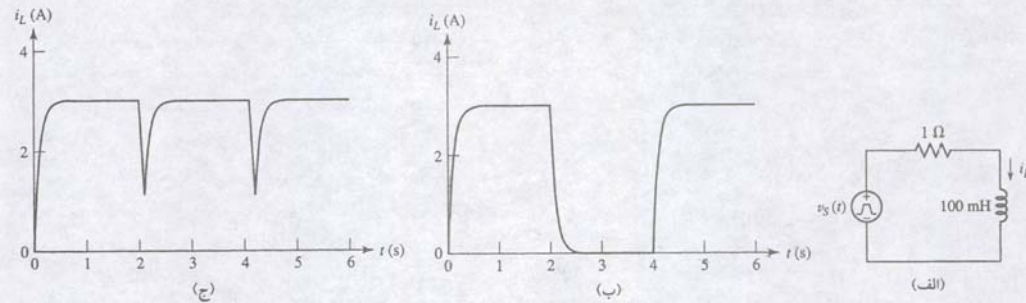
$$v_C(t) = \begin{cases} 9(1 - e^{-1000t}) \text{ V}, & 0 \leq t \leq 10 \text{ ms} \\ 9e^{-1000(t-0.01)} \text{ V}, & 10 < t \leq 20 \text{ ms} \\ 9(1 - e^{-1000(t-0.02)}) \text{ V}, & 20 < t \leq 30 \text{ ms} \\ 9e^{-1000(t-0.03)} \text{ V}, & 30 < t \leq 40 \text{ ms} \end{cases}$$

و به همین ترتیب.



شکل ۸-۴۸ ولتاژ خازن مدار RC با پهنای پالس و پریود در (الف) حالت I، (ب) حالت II، (ج) حالت III و (د) حالت IV.





تمرین

شکل ۸-۵۰ (الف) مدار مسئله ۸-۱۴ (ب) حل بخش (الف)، (ج) حل بخش (ب).

۸-۱۴  $i_L(t)$  را در محدوده  $0 < t < 6$  s برای

$$v_S(t) = 3u(t) - 3u(t - 2) + 3u(t - 4) - 3u(t - 6) + \dots$$

$$v_S(t) = 3u(t) - 3u(t - 2) + 3u(t - 2.1) - 3u(t - 4.1) + \dots$$

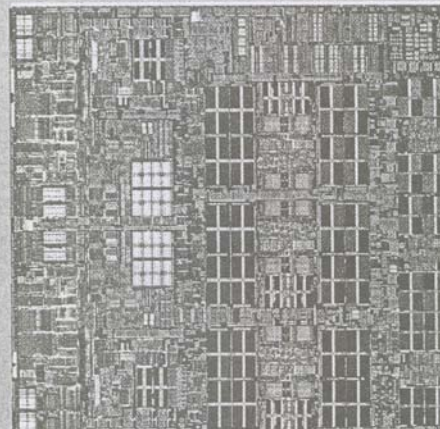
به دست آورید.

جواب: (الف) شکل ۸-۵۰ (ب) را ببینید، (ب) شکل ۸-۵۰ (ج) را ببینید.

## کاربرد عملی

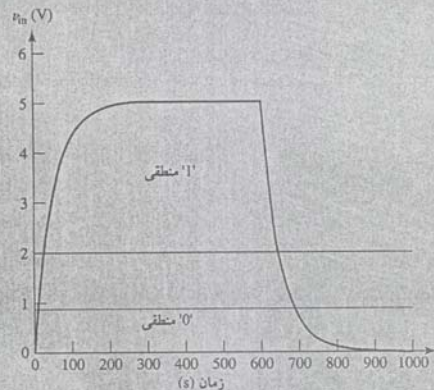
### محدودیت‌های فرکانسی در مدارهای مجتمع

مدارهای مجتمع دیجیتال مدرن، مانند آرایه‌های برنامه‌پذیر منطقی (PAL) و ریزپردازنده‌ها (شکل ۸-۵۱)، متشکل از مدارهای ترانزیستوری بهم وصل شده‌ای به نام گیت می‌باشد. سیگنال‌های دیجیتال به‌طور سمبلیک با صفرها و یک‌ها نشان داده می‌شوند و می‌توانند داده یا دستورالعمل (مانند "add" یا "subtract" باشد). به لحاظ الکتریکی، ما "1" منطقی را با ولتاژ

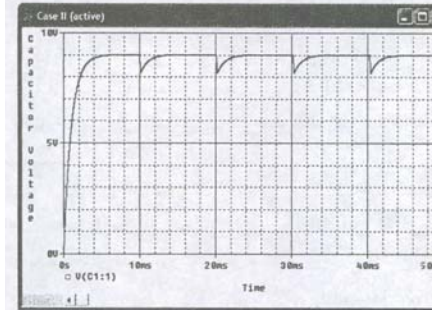


شکل ۸-۵۱ IBM Power Chip

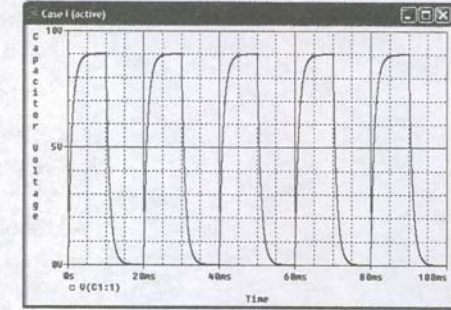
بالا و "0" منطقی را با ولتاژ پایین نشان می‌دهیم. در عمل به هر یک، محدوده ولتاژی اختصاص یافته است. مثلاً در مدارهای منطقی TTL سری 7400، هر ولتاژ بین 2 تا 5V به‌عنوان منطق 1 و هر ولتاژی بین 0 تا 0.8V به‌عنوان منطق 0 تفسیر می‌گردد. ولتاژهای بین 0.8 تا 2V به هیچ‌یک از حالات منطقی متعلق نیستند (شکل ۸-۵۲).



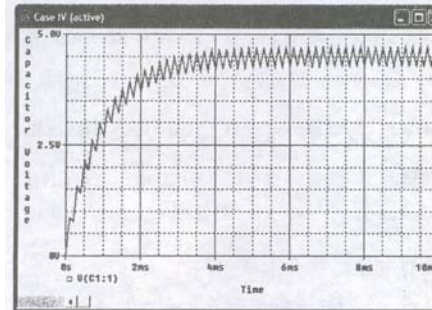
شکل ۸-۵۲ تعیین ظرفیت خازنی شارژ/دشارژ مسیر که به ترتیب محدوده ولتاژ TTL را برای "1" منطقی و "0" منطقی تعیین می‌نماید.



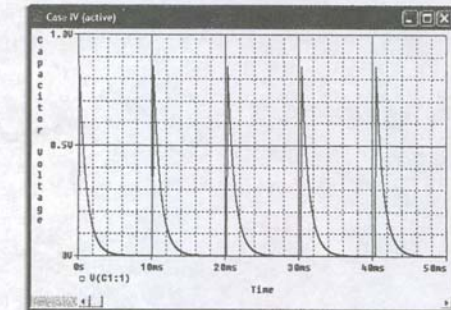
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

درست قبل از پالس دوم در  $t = 0.2$  ms، ولتاژ خازن به  $V_C = 0.7750$  V افت می‌کند؛ و زمان برای دشارژ آن موجود نیست. خازن بخش بزرگی از یک انرژی کم را که در آغاز وقت داشت، نگه داشته است. برای فاصله زمانی  $0.2 < t < 0.3$  ms جایگزینی  $V_C(0.2^+) = V_C(0.2^-) = 0.7750$  V در معادله (۴۶) منجر به  $V_C = -8.225$  V می‌گردد. در ادامه، ما معادله (۴۶) را در  $t = 0.3$  ms ارزیابی می‌کنیم و  $V_C = 1.558$  V را درست قبل از پایان پالس دوم محاسبه می‌نماییم. بنابراین  $D = 1.558$  V است و خازن ما به آهستگی ولتاژ خود را طی چندین پالس بالا می‌برد. در این مرحله شاید ترسیم پاسخ‌های مشروح مفید باشد لذا ما نتایج شبیه‌سازی حالت I تا IV را در شکل ۸-۴۹ ترسیم کرده‌ایم. دقت کنید که در شکل ۸-۴۹ (د)، پاسخ گذرای شارژ/دشارژ از نظر شکل مشابه با شکل‌های ۸-۴۹ (الف) و (ج) است که بر روی یک پاسخ شارژ مانند به فرم  $(1 - e^{-t/\tau})$  سوار شده است. بنابراین حدود 3 تا 5 ثابت زمانی برای خازن لازم است تا به مقدار حداکثر شارژ شود و تنها یک پریود جوابگوی شارژ یا دشارژ آن نیست.

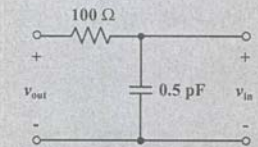
چیزی که تاکنون انجام نداده‌ایم، پیش‌بینی رفتار پاسخ برای  $t > 5\tau$  است، هرچند که به انجام آن تمایل داریم، خصوصاً اگر نخواهیم یک رشته طولانی از پالس‌ها را و هر بار یکی بررسی نماییم. توجه دارید که پاسخ شکل ۸-۴۹ (د) دارای متوسط مقدار 4.50 V از حدود 4 ms به بعد است. این دقیقاً نصف مقداری است که ما انتظار داریم اگر عرض پالس منبع ولتاژ به خازن اجازه شارژ کامل می‌داد. در واقع این متوسط طولانی با ضرب ولتاژ dc خازن در نسبت پهنای پالس به پریود به دست می‌آید.



شکل ۸-۴۹ نتایج شبیه‌سازی PSpice متناظر با: (الف) حالت I، (ب) حالت II، (ج) حالت III و (د) حالت IV.



یک پارامتر کلیدی در مدارهای دیجیتال سرعت آن‌ها است. در این جا منظور از سرعت توانایی واکنش یک گیت ز یک حالت منطقی به حالت منطقی دیگر (مثل 0 به 1 و بالعکس) و زمان تأخیر لازم برای حمل خروجی یک گیت به ورودی گیت دیگر است. گرچه ترانزیستورها دارای خاصیت خازنی درونی اند و لذا سرعت آن‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد، مسیرهای درونی آن‌ها هم سرعت مدارهای مجتمع سریع را تحت تأثیر قرار می‌دهد. ما می‌توانیم مسیر بین دو گیت منطقی را با استفاده از مدار ساده RC مدل‌سازی نماییم (با کاهش سایز در طرح‌های جدید، مدل‌های دقیق‌تری برای پیش‌بینی رفتار مدارها لازم است). مثلاً مسیری به طول  $2000\mu\text{m}$  و عرض  $2\mu\text{m}$  را در نظر بگیرید. می‌توانیم این مسیر را در یک نمونه مدار مجتمع سیلیکونی به صورت ظرفیت  $0.5\text{pF}$  و مقاومت  $100\Omega$  مدل‌سازی کنیم (شکل ۸.۵۳).



شکل ۸.۵۳ مدل مداری یک مسیر مداری.

بیباید تصور کنیم که  $v_{\text{out}}$  نمایش ولتاژ خروجی یک گیت باشد که از منطق "0" به حالت "1" تغییر می‌کند. ولتاژ  $v_{\text{in}}$  در ورودی گیت دیگر ظاهر می‌شود و ما مایلیم بدانیم چقدر طول می‌کشد تا  $v_{\text{in}}$  به  $v_{\text{out}}$  برسد. با فرض ظرفیت  $0.5\text{ pF}$  و خالی بودن مسیر اتصال (یعنی

## ۸-۱۰ خلاصه فصل و مرور

- پاسخ مداری که منابع ناگهان در داخل یا بیرون مدار حاوی خازن یا القاگر تغییر کند از دو بخش تشکیل شده است: یکی پاسخ طبیعی و دیگری پاسخ واداشته.
- فرم پاسخ طبیعی (که به آن پاسخ گذرا هم می‌گویند) فقط به مقدار قطعات و نحوه اتصال آن‌ها وابسته است.
- فرم پاسخ واداشته آینه‌ای از تابع تحریک است. بنابراین یک تابع dc همواره به پاسخ واداشته ثابت منجر می‌شود.
- مداری که به یک القاکنایی معادل  $L$  و یک مقاومت معادل  $R$  کاهش یابد، پاسخ طبیعی  $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$  را دارد، که در آن  $\tau = L/R$  ثابت زمانی مدار می‌باشد.
- مداری که به یک ظرفیت معادل  $C$  و یک مقاومت معادل  $R$  کاهش یابد، پاسخ طبیعی  $v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$  را دارد که در آن  $\tau = RC$  ثابت زمانی مدار می‌باشد.
- پاسخ پله واحد راهی مفید برای مدل‌سازی باز و بسته شدن یک کلید است، ضمن این‌که نیم‌نگاهی هم باید به مقادیر اولیه داشت.
- پاسخ کامل مدار  $RL$  یا  $RC$  که با یک منبع dc تحریک شود فرم  $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$  یا  $c^{-t/\tau}$  (مقدار نهایی - مقدار اولیه) + مقدار نهایی = پاسخ کامل، را دارد.

$v_{\text{in}}(0) = 0$  یا محاسبه ثابت زمانی RC برای مسیر به صورت  $\tau = RC = 50\text{ ps}$ ، تعریف  $t = 0$  به عنوان زمان تغییر  $v_{\text{out}}$ ، عبارت زیر را به دست می‌آوریم:

$$v_{\text{in}}(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{\text{out}}(0)$$

با تنظیم  $v_{\text{in}}(0) = 0$ ، می‌بینیم  $A = -v_{\text{out}}(0)$  است و بنابراین:

$$v_{\text{in}}(t) = v_{\text{out}}(0)[1 - e^{-t/\tau}]$$

خواهد شد. با بررسی این معادله، می‌بینیم که  $v_{\text{in}}$  پس از  $5\tau$  یا  $250\text{ ps}$  به  $v_{\text{out}}(0)$  می‌رسد. اگر ولتاژ  $v_{\text{out}}$  دوباره قبل از این زمان گذرا عوض شود، آن‌گاه خازن زمان کافی برای تغییر ندارد. در این صورت  $v_{\text{in}}$  کوچک‌تر از  $v_{\text{out}}$  خواهد شد، اگر مثلاً فرض شود  $v_{\text{out}}(0)$  حداقل مقدار خود را داشته باشد، آن‌گاه  $v_{\text{in}}$  منطق 1 را نخواهد داشت. اگر  $v_{\text{out}}$  ناگهان به 0 تغییر کند (منطق 0) خازن شروع به تخلیه خواهد کرد به طوری که  $v_{\text{in}}$  بیش از حد خالی می‌شود. بنابراین با سوئیچ کردن سریع حالات منطقی، قادر نخواهیم بود اطلاعاتی را به گیت دیگر انتقال دهیم، بنابراین سریع‌ترین سرعت تغییر حالات منطقی  $(5\tau)^{-1}$  است. این سرعت را می‌توان به وسیله فرکانس کاری مطابق زیر نشان داد:

$$f_{\text{max}} = \frac{1}{2(5\tau)} = 2\text{ GHz}$$

که ضریب 2 پی‌ریود شارژ - دشارژ را نشان می‌دهد. اگر بخواهیم مدار مجتمع ما در فرکانس‌های بالاتر کار کند تا به این ترتیب محاسبات سریع‌تر انجام شود، باید ظرفیت و مقاومت اتصالات درونی را کاهش دهیم.

- پاسخ کامل یک مدار  $RL$  یا  $RC$  را می‌توان با نوشتن یک معادله دیفرانسیل برای کمیت مورد نظر و حل آن میسر می‌شود.
- در مدارهایی که به‌طور متوالی سوئیچ می‌شوند یا به یک موج پالسی وصل هستند، موضوع مرتبط این است که عنصر ذخیره‌کننده زمان کافی برای شارژ یا دشارژ کامل در مقایسه با ثابت زمانی مدار دارد یا نه.

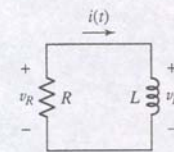
## ۸-۱۱ خواندنی‌های کمکی

A guide to solution techniques for differential equations can be found in: W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th ed. New York: Wiley, 2002.  
A detailed description of transients in electric circuits is given in: E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume I*. New York: Wiley, 1954. (Out of print, but in many university libraries.)

## مسائل

### ۸-۱ مدار $RL$ بدون منبع

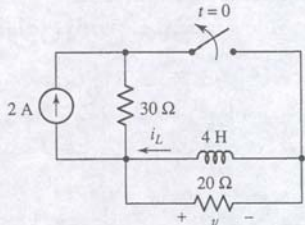
- مدار ساده  $RL$  در شکل ۸.۵۴ نشان داده شده است. اگر  $R = 4.7\text{ k}\Omega$ ،  $L = 1\text{ }\mu\text{H}$  و  $i(0) = 2\text{ mA}$  باشد، مطلوبست (الف)  $i$  در  $100\text{ ps}$ ، (ب)  $i$  در  $t = 212.8\text{ ps}$ ، (ج)  $v_R$  در  $75\text{ ps}$  و (د)  $v_L$  در  $75\text{ ps}$ .



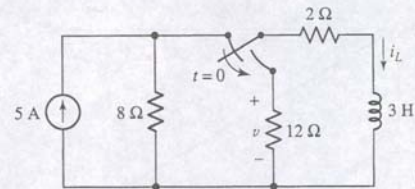
شکل ۸.۵۴

- مدار شکل ۸.۵۴ متشکل از مقاومت  $R = 1\text{ }\Omega$  و یک القاکنایی  $L = 2\text{ H}$  است. در  $t = 0$  القاگر  $100\text{ mJ}$  انرژی می‌گیرد. مطلوبست (الف)  $i$  در  $t = 1\text{ s}$ ؛ (ب)  $i$  در  $t = 5\text{ s}$ ؛ (ج)  $i$  در  $t = 10\text{ s}$  و (د) انرژی باقیمانده در القاگر در  $t = 2\text{ s}$ .
- برای مدار ساده  $RL$  در شکل ۸.۵۴،  $R$  برابر  $100\text{ }\Omega$  فرض می‌شود. اگر  $i(0) = 2\text{ mA}$  و  $i(50\text{ }\mu\text{s}) = 735.8\text{ }\mu\text{A}$  باشد، مطلوبست مقدار القاکنایی  $L$ .
- برای مدار ساده شکل ۸.۵۴،  $L = 3\text{ mH}$  فرض می‌شود. اگر  $i(0) = 1.5\text{ A}$  و  $i(2\text{ s}) = 551.8\text{ mA}$  باشد، مطلوبست مقدار مقاومت  $R$ .
- یک القاگر  $3\text{ mH}$  در مدار شکل ۸.۵۴،  $1\text{ J}$  انرژی را در  $t = 0$  و  $100\text{ mJ}$  انرژی را در  $t = 1\text{ ms}$  ذخیره کرده است،  $R$  را محاسبه کنید.
- کلید مدار شکل ۸.۵۵ مدت‌ها در حالت بسته بوده است. اگر در  $t = 0$  کلید باز شود، (الف)  $i_L$  را در یک لحظه پس از تغییر کلید بیابید. (ب)  $v$  را بلافاصله پس از تغییر وضع کلید به دست آورید.
- کلید شکل ۸.۵۶ تک‌پل دو حالتی است و نشان می‌دهد که قبل از باز شدن، یک مدار دیگر را می‌بندد. این نوع کلید را معمولاً "وصل قبل از

قطع" می‌خوانند. با فرض این‌که کلید از مدت‌ها قبل در وضعیت ترسیم‌شده واقع باشد، مقدار  $v$  و  $i_L$  را (الف) درست قبل از تغییر وضع کلید و (ب) درست بعد از تغییر وضع کلید، به دست آورید.

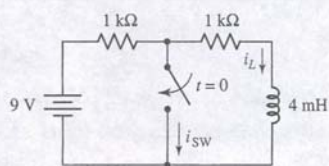


شکل ۸.۵۵



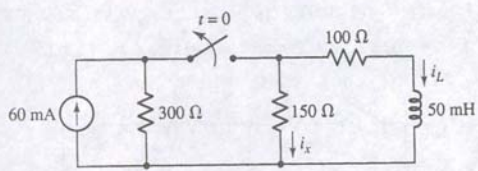
شکل ۸.۵۶

- پس از آرایش یک‌ساعته در شکل، کلید مدار شکل ۸.۵۷ در  $t = 0$  بسته می‌شود. در  $t = 5\text{ }\mu\text{s}$  مطلوبست: (الف)  $i_L$  و (ب)  $i_{\text{sw}}$ .



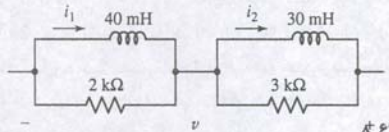
شکل ۸.۵۷





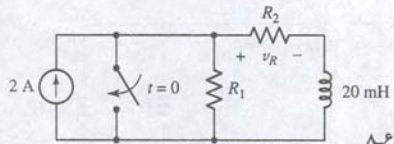
شکل ۸۶۶

۲۸. یک القاگر 20mH با یک مقاومت 1kΩ موازی است. بگذارید در  $t = 0$  جریان حلقه 40mA باشد. (الف) در چه زمانی جریان 10mA می‌گردد؟ (ب) چه مقاومت سری را باید به مدار در  $t = 10\mu s$  متصل کرد به طوری که جریان در  $t = 15\mu s$  به 10mA برسد. ۲۹. در شبکه شکل ۸۶۷، مقادیر اولیه عبارتند از  $i_1(0) = 20\text{mA}$  و  $i_2(0) = 15\text{mA}$ . (الف)  $v(0)$  را تعیین کنید. (ب)  $v(15\mu s)$  را بدست آورید. (ج) در چه زمانی  $v(t) = 0.1 v(0)$  می‌گردد؟



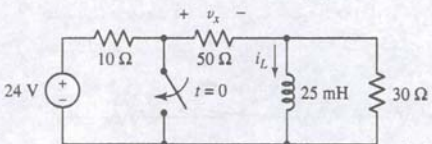
شکل ۸۶۷

۳۰. مقادیر  $R_1$  و  $R_2$  را در مدار شکل ۸۶۸ طوری انتخاب کنید که  $v_R(0^+) = 5\text{V}$  و  $v_R(1\text{ms}) = 10\text{V}$  باشد.



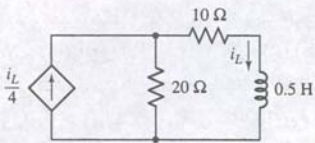
شکل ۸۶۸

۳۱. کلید در شکل ۸۶۹ از مدت‌ها قبل باز بوده است. اگر آن را در  $t = 0$  ببندید، (الف)  $i_L$  را در  $t > 0$  بیابید. (ب)  $v_x(t)$  را برای  $-4 < t < 4\text{ms}$  رسم کنید.



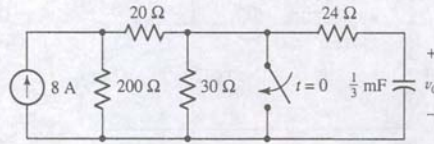
شکل ۸۶۹

۳۲. اگر در مدار شکل ۸۷۰،  $i_L(0) = 10\text{A}$  باشد برای  $t > 0$  مقدار  $i_L(t)$  را بیابید.



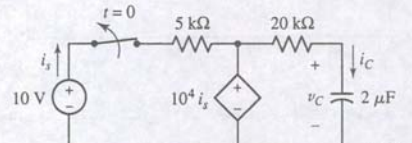
شکل ۸۷۰

خاموش می‌شود. به علت نبودن برنامه خوب در تلویزیون تصمیم می‌گیرید آزمایشی را با دوربین 35mm و سرعت متغیر شاتر با چند حلقه فیلم ارزان انجام دهید. با سرعت شاتر 2s، هیچ تصویری روی فیلم ظاهر نمی‌شود. در سرعت 1s یک تصویر ضعیف مشاهده می‌شود. با سرعت 150ms تصویر 14% شدت حاصل از سریع‌ترین سرعت دوربین است. مقاومت معادل تونن مدار متصل به منبع تغذیه گیرنده را تخمین بزنید. ۲۲. (الف)  $v_C(t)$  را برای همه زمان‌های شکل ۸۶۲ بیابید. (ب) در چه زمانی  $v_C = 0.1 v_C(0)$  است.



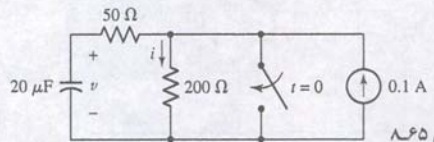
شکل ۸۶۲

۲۳. یک منبع جریان 4A، یک مقاومت 20Ω و یک خازن 5μF همگی با هم موازیند. دامنه منبع جریان ناگهان در  $t = 0$  به صفر افت می‌کند. در چه زمانی خازن به نصف مقدار اولیه‌اش می‌افتد. (ب) انرژی ذخیره‌شده در این حال در خازن چقدر است؟ ۲۴.  $v_C(t)$  و  $i_C(t)$  را برای مدار شکل ۸۶۴ بیابید و هر دو منحنی را روی یک محور زمانی با  $0.1 < t < 0.1\text{s}$  رسم کنید.



شکل ۸۶۴

۲۵. برای مدار شکل ۸۶۵ مقدار جریان  $i$  و ولتاژ  $v$  را در  $t = 0^+$ ،  $t = 1.5\text{ms}$  و  $t = 3.0\text{s}$  به دست آورید.



شکل ۸۶۵

## ۸-۴ تعمیم دیدگاه

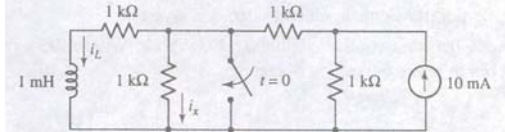
۲۶. سوئیچ در شکل ۸۶۶ پس از زمان طولانی بسته‌ماندن در  $t = 0$  باز شده است.  $i_L$  و  $i_x$  را در (الف)  $t = 0^+$ ، (ب)  $t = 0^-$ ، (ج)  $t = 300\mu s$  محاسبه کنید.

۲۷. یک القاگر 0.2H با یک مقاومت 100Ω موازی است. جریان القاگر در  $t = 0$  برابر 4A است. (الف)  $i_L(t)$  را در  $t = 0.8\text{s}$  به دست آورید. (ب) اگر یک مقاومت 100Ω دیگر موازی با القاگر در  $t = 1\text{ms}$  وصل شود،  $i_L$  را در  $t = 2\text{ms}$  محاسبه کنید.

۱۴. در مدار شکل ۸۶۱،  $R = 1\text{M}\Omega$  و  $L = 3.3\mu\text{H}$  می‌باشد. (الف) ثابت زمانی مدار را حساب کنید. (ب) اگر القاگر انرژی اولیه 43μJ را در  $t = 0$  داشته باشد،  $i_L$  را در  $t = 5\text{ps}$  به دست آورید. (ج) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید.

۱۵. یک سیگنال دیجیتال به داخل یک سیم‌پیچ القاکنایی 125.7 μH، ارسال شده است. حداکثر مقدار مجاز مقاومت معادل تونن گیرنده اگر انتقال کمتر از 100ns طول بکشد، چقدر است.

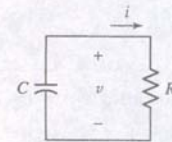
۱۶. کلید شکل ۸۶۱ قبل از بسته‌شدن در  $t = 0$ ، مدت‌ها در حالت باز بوده است. در فاصله زمانی  $-5 < t < 5\mu s$ ، (الف)  $i_L(t)$  و (ب)  $i_x(t)$  را ترسیم کنید.



شکل ۸۶۱

## ۸-۳ مدار RC بدون منبع

۱۷. در مدار RC موازی در شکل ۸۶۲،  $C = 1\mu\text{F}$  و  $R = 100\text{M}\Omega$  نشان‌دهنده تلفات در دی‌الکتریک خازن است. خازن 1 mJ انرژی را در  $t = 0$  دارد. (الف) ثابت زمانی مدار را تعیین کنید. (ب)  $i$  را در 20 محاسبه نمایید. (ج) صحت حل خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق نمایید.



شکل ۸۶۲

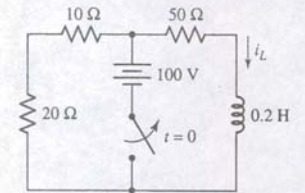
۱۸. برای مدار شکل ۸۶۲، فرض می‌شود که  $C = 2\text{F}$ ،  $R = 1\Omega$  و  $i(0) = 10\text{V}$  است.  $v$  را در شرایط (الف)  $t = 1\text{s}$ ، (ب)  $t = 2\text{s}$ ، (ج)  $t = 5\text{s}$  و (د)  $t = 10\text{s}$  محاسبه کنید.

۱۹. از  $v(0) = 5\text{V}$ ، (الف)  $v$  را در  $t = 1\text{ms}$  محاسبه کنید. (ب)  $i$  را در  $t = 2\text{ms}$  محاسبه کنید. (ج) انرژی باقیمانده در خازن را در  $t = 4\text{ms}$  تعیین کنید.

۲۰. برای مدار RC که در شکل ۸۶۲ نشان داده شده است،  $C = 100\text{pF}$ ،  $R = 10\text{k}\Omega$ ،  $v(0) = 1.5\text{V}$  و  $v(2\text{ns}) = 100\text{mV}$  محاسبه شده است. (الف) اگر  $R = 1\text{k}\Omega$ ،  $R = 10\text{k}\Omega$  و  $R = 100\text{k}\Omega$  باشد، مقدار مقاومت  $R$  را به دست آورید. (ب) صحت حل خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق نمایید.

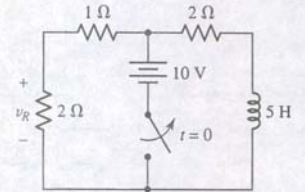
۲۱. منبع تغذیه یک گیرنده استریو دو خازن بزرگ موازی 50mF دارد. هنگام خاموش کردن منبع انرژی، مشاهده می‌کنید که یک LED که به علامت وجود برق است به آهستگی و پس از گذشت زمان چندثانیه‌ای

۹. کلید مدار شکل ۸۵۸ پس از مدت‌ها بسته‌بودن در  $t = 0$  باز می‌شود. (الف)  $i_L$  را برای  $t > 0$  پیدا کنید. (ب)  $i_L(10\text{ms})$  را حساب کنید. (ج) اگر  $i_L(t_1) = 0.5i_L(0)$  باشد،  $t_1$  را بیابید.



شکل ۸۵۸

۱۰. برای مدار شکل ۸۵۹، (الف) معادله دیفرانسیلی بنویسید که ولتاژ مقاومت  $v_R$  را برای  $t > 0$  توصیف کند. (ب) معادله مشخصه را حل کنید. (ج)  $v_R$  را درست قبل از باز شدن سوئیچ، و درست بعد از باز شدن سوئیچ و در  $t = 1\text{s}$  محاسبه کنید.

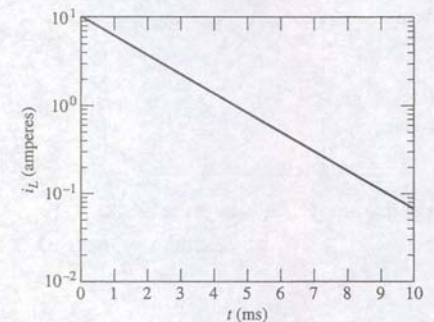


شکل ۸۵۹

## ۸-۲ خواص پاسخ نمایی

۱۱. شکل ۸۷ نمودار  $i/I_0$  را به عنوان تابعی از  $t$  نشان می‌دهد. (الف) مقادیری از  $t/T$  را تعیین کنید که در آن  $i/I_0$  برابر 0.01، 0.1 و 0.001 گردد. (ب) اگر خطی مماس در نقطه  $t/T = 1$  بر منحنی رسم شود، در کجا محور  $t/T$  را قطع می‌کند.

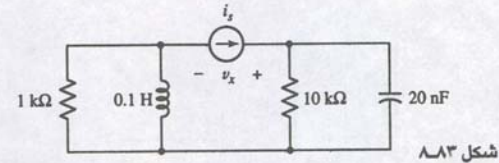
۱۲. با مراجعه به پاسخ شکل ۸۶۰، ثابت زمانی مدار و جریان اولیه داخل القاگر را به دست آورید.



شکل ۸۶۰

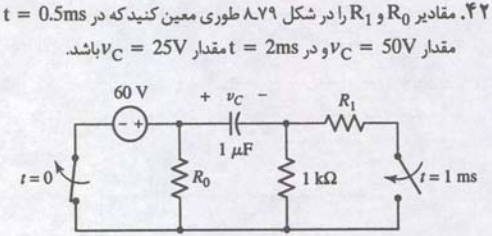
۱۳. ولتاژ مقاومت را در یک مدار RL ساده با مقدار انرژی اولیه 15mJ که در القاگر 10mH ذخیره شده برای  $R = 1\text{k}\Omega$ ،  $R = 10\text{k}\Omega$  و  $R = 100\text{k}\Omega$  رسم کنید. جواب خود را با PSpice تأیید نمایید.





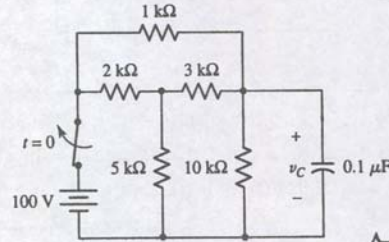
شکل ۸۸۳

۴۲. مقادیر  $R_0$  و  $R_1$  را در شکل ۸۷۹ طوری معین کنید که در  $t = 0.5 \text{ ms}$  مقدار  $v_C = 50 \text{ V}$  و در  $t = 2 \text{ ms}$  مقدار  $v_C = 25 \text{ V}$  باشد.



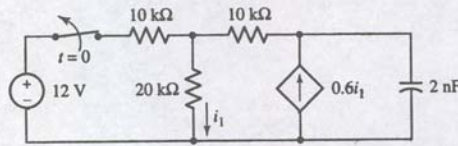
شکل ۸۷۹

۴۳. برای مدار شکل ۸۸۰،  $v_C(t)$  را برای (الف)  $t < 0$  و (ب)  $t > 0$  معین کنید.



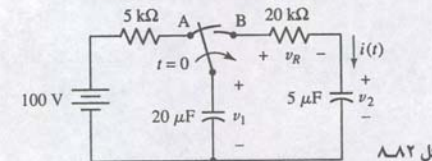
شکل ۸۸۰

۴۴.  $i_1(t)$  را برای  $t < 0$  و  $t > 0$  در مدار شکل ۸۸۱ به دست آورید.



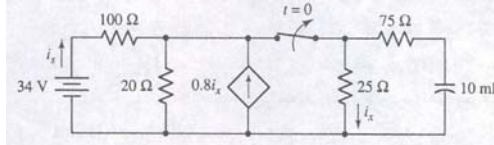
شکل ۸۸۱

۴۵. در شکل ۸۸۲ کلید در  $t = 0$  از A به B رفته است. این کار دو خازن را سری می‌کند و لذا اجازه می‌دهد تا ولتاژهای dc مخالف و برابری در خازن‌ها به تله بیفتد. (الف)  $v_1(0^-)$ ،  $v_2(0^-)$  و  $v_R(0^-)$  را بیابید. (ب)  $v_1(0^+)$ ،  $v_2(0^+)$  و  $v_R(0^+)$  را به دست آورید. (ج) ثابت زمانی  $\tau_R(t)$  را معین کنید. (د) در  $t > 0$  مقدار  $v_R(t)$  چیست. (ه)  $i(t)$  را پیدا کنید. (و)  $v_1$  و  $v_2$  را از  $i(t)$  و مقادیر اولیه پیدا کنید. (و) نشان دهید که انرژی ذخیره شده در  $t = \infty$  به علاوه انرژی تلف شده در مقاومت  $20 \text{ k}\Omega$  برابر با انرژی ذخیره شده در خازن در  $t = 0$  است.

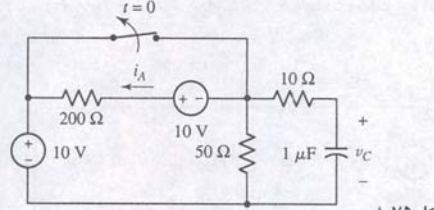


شکل ۸۸۲

۴۶. مقدار  $i_R$  در مدار شکل ۸۸۳ برابر  $1 \text{ mA}$  در  $t < 0$  و صفر در  $t > 0$  است. مقدار  $v_x(t)$  را برای (الف)  $t < 0$  و (ب)  $t > 0$  بیابید.

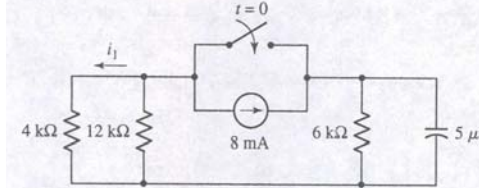


شکل ۸۷۴



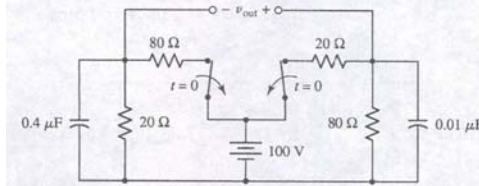
شکل ۸۷۵

۳۹. پس از مدتی از مونتاژ مدار شکل ۸۷۶ کلید در  $t = 0$  بسته شده است. (الف)  $i_1(t)$  را برای  $t < 0$  پیدا کنید. (ب)  $i_1(t)$  را برای  $t > 0$  به دست آورید.



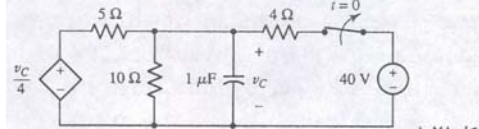
شکل ۸۷۶

۴۰. مدتی پس از مونتاژ شکل ۸۷۷ هر دو کلید در  $t = 0$  به طور همزمان باز شده‌اند. (الف) عبارتی برای  $v_{out}$  در  $t > 0$  به دست آورید. (ب) مقادیر  $v_{out}$  را در  $t = 0^+$  و در  $5 \mu\text{s}$  و  $1 \mu\text{s}$  به دست آورید.



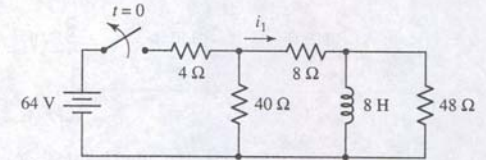
شکل ۸۷۷

۴۱. (الف) فرض کنید که مدار شکل ۸۷۸ از مدت‌ها قبل به همان شکل است.  $v_C(t)$  را برای همه زمان‌های  $t$  پس از باز شدن کلیدها به دست آورید. (ب)  $v_C(t)$  را در  $t = 3 \mu\text{s}$  محاسبه کنید. (ج) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید.



شکل ۸۷۸

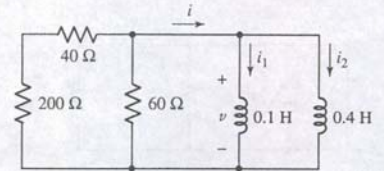
۳۳. به شکل ۸۷۱ مراجعه نمایید و در  $t = 0.03$ ،  $0.1 \text{ s}$  و  $-0.1$  مقدار  $i_1$  را بیابید و آن را بر حسب  $t$  ( $-0.1 < t < 0.1 \text{ s}$ ) رسم کنید.



شکل ۸۷۱

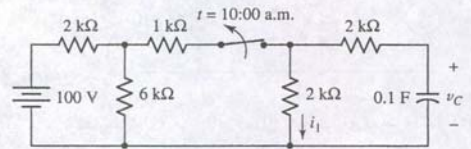
۳۴. مداری متشکل از القاگر  $0.5 \text{ H}$ ، مقاومت  $10 \Omega$  و یک مقاومت  $40 \Omega$  سری است. جریان القاگر در  $t = 0$  برابر  $4 \text{ A}$  است. (الف)  $i_L(15 \text{ ms})$  را حساب کنید. (ب) مقاومت  $40 \Omega$  در  $t = 15 \text{ ms}$  اتصال کوتاه شده است،  $i_L(30 \text{ ms})$  را محاسبه نمایید.

۳۵. مدار شکل ۸۷۲ حاوی دو القاگر موازی است. بنابراین، این فرصت پیش می‌آید تا جریان در حلقه القایی بچرخد. فرض کنید  $i_1(0^-) = 10 \text{ A}$  و  $i_2(0^-) = 20 \text{ A}$  باشد، (الف)  $i_1(0^+)$ ،  $i_2(0^+)$  و  $i(0^+)$  را به دست آورید. (ب) ثابت زمانی  $\tau$  را برای  $i(t)$  معین کنید. (ج)  $i(t)$  را در  $t > 0$  پیدا کنید. (د)  $v(t)$  را به دست آورید. (ه) مقدار  $i_1(t)$  و  $i_2(t)$  را از  $v(t)$  و مقدار اولیه به دست آورید. (و) نشان دهید که انرژی ذخیره شده در  $t = 0$  برابر مجموع انرژی‌های تلف شده در شبکه مقاومتی بین  $t = 0$  و  $t = \infty$ ، به علاوه انرژی ذخیره شده در القاگر در  $t = \infty$  می‌باشد.



شکل ۸۷۲

۳۶. مدار شکل ۸۷۳ از روز قبل به فرم نشان داده شده است. کلید در ساعت ۱۰ صبح باز شده است.  $i_1$  و  $v_C$  را در (الف) ساعت ۹:۵۹ صبح محاسبه کنید. (ب) در ساعت ۱۰:۰۵ محاسبه نمایید. (ج)  $i_1(t)$  را در  $t = 1.2 \text{ s}$  به دست آورید. (د) صحت حل خود را با PSpice نشان دهید.



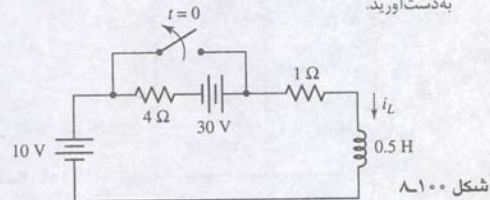
شکل ۸۷۳

۳۷. پس از مدتی، کلید در شکل ۸۷۴ در  $t = 0$  باز شده است. مقادیر (الف)  $i_s(0^-)$ ، (ب)  $i_x(0^-)$ ، (ج)  $i_x(0^+)$ ، (د)  $i_s(0^+)$  و (ه)  $i_s(0.4 \text{ s})$  را بیابید.

۳۸. پس از مدتی طولانی، در شکل ۸۷۵ کلید در  $t = 0$  باز شده است. (الف)  $v_C(t)$  را برای  $t > 0$  بیابید. (ب) مقادیر  $i_A(-100 \mu\text{s})$  و  $i_A(100 \mu\text{s})$  را پیدا کنید. (ج) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید.

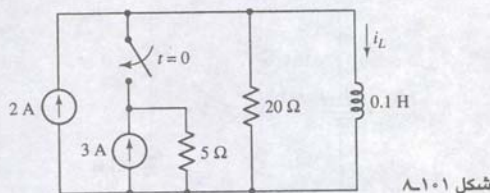


۶۸. کلید در شکل ۸۱۰۰ از مدت‌ها قبل بسته بوده است. (الف)  $i_L(t)$  را برای  $t < 0$  به دست آورید. (ب)  $i_L(t)$  را پس از باز شدن کلید در  $t = 0$  به دست آورید.



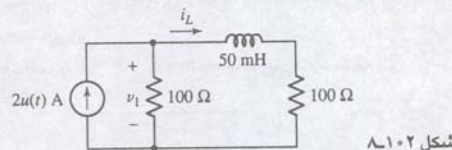
شکل ۸۱۰۰

۶۹. کلید در شکل ۸۱۰۱ از مدت‌ها قبل باز بوده است. (الف)  $i_L(t)$  را در  $t < 0$  به دست آورید. (ب)  $i_L(t)$  را برای همه زمان‌های  $t$  پس از بسته شدن کلید در  $t = 0$  پیدا کنید.



شکل ۸۱۰۱

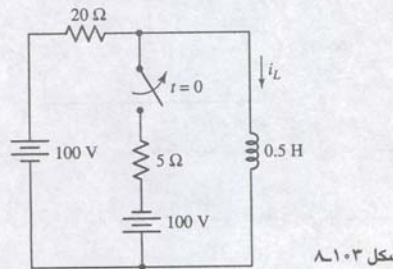
۷۰. برای مدار شکل ۸۱۰۲، مقادیر  $i_L$  و  $v_1$  را در زمان‌های  $t$  برابر با (الف)  $t = 0^-$ ، (ب)  $t = 0^+$ ، (ج)  $\infty$  و (د)  $0.2\text{ms}$  به دست آورید.



شکل ۸۱۰۲

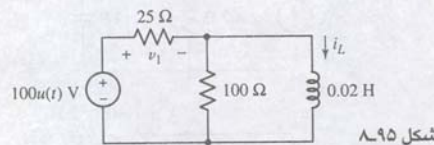
۷۱. معادله (۳۳) در بخش ۸۷ حل کلی مدار RL سری تحریک شده را نشان می‌دهد که در آن  $Q$  تابعی از زمان و  $A$  و  $P$  ثابتند. بگذارید  $R = 125\Omega$  و  $L = 5\text{H}$  باشد.  $i_L(t)$  را برای  $t > 0$  به دست آورید، به شرطی که تابع تحریک  $Q(t)$  در (الف)  $10\text{V}$ ، (ب)  $10u(t)\text{V}$ ، (ج)  $10 + 10u(t)\text{V}$  و (د)  $10u(t) \cos 50t\text{V}$  باشد.

۷۲. کلید در شکل ۸۱۰۳ از مدت‌ها قبل بسته بوده است (الف)  $i_L(t)$  را برای  $t < 0$  به دست آورید. (ب) درست پس از باز شدن کلید،  $i_L(0^+)$  را پیدا کنید. (ج)  $i_L(\infty)$  را پیدا کنید. (د) عبارتی برای  $i_L(t)$  در  $t > 0$  به دست آورید.



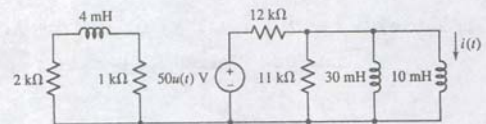
شکل ۸۱۰۳

۶۳. با مراجعه به شکل ۸۹۵، عبارت جبری را برای: (الف)  $i_L(t)$  و (ب)  $v_1(t)$  به دست آورده و آن را رسم نمایید.



شکل ۸۹۵

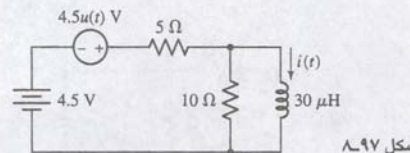
۶۴. با مراجعه به مدار شکل ۸۹۶، (الف) توان جذب شده به وسیله مقاومت  $2\text{k}\Omega$  را در  $t = 1\text{ms}$  محاسبه کنید. (ب) مقدار  $i(t)$  را در  $t = 3\mu\text{s}$  معین کنید. (ج) جریان اوج را در مقاومت  $12\text{k}\Omega$  به دست آورید. (د) پاسخ خود را با PSpice تحقیق کنید.



شکل ۸۹۶

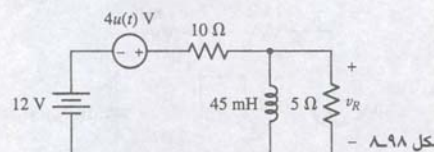
## ۸-۷ پاسخ طبیعی و واداشته

۶۵. برای مدار شکل ۸۹۷، (الف) عبارتی برای  $i(t)$  در همه زمان‌ها پیدا کنید. (ب)  $i(t)$  را در  $t = 1.5\mu\text{s}$  به دست آورید. (ج) نتیجه خود را با شبیه‌سازی به وسیله PSpice امتحان کنید.



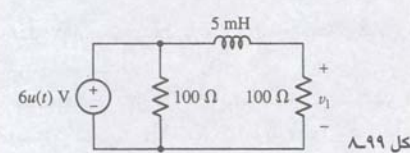
شکل ۸۹۷

۶۶. برای مدار شکل ۸۹۸، (الف) عبارتی برای  $v_R(t)$  معتبر در همه زمان‌ها به دست آورید. (ب)  $v_R(t)$  را در  $t = 2\text{ms}$  به دست آورید. (ج) نتیجه خود را با یک شبیه‌سازی PSpice امتحان کنید.



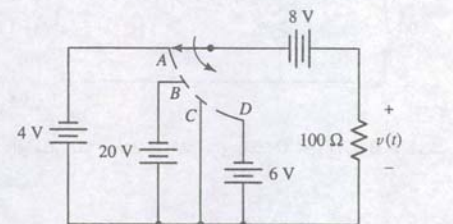
شکل ۸۹۸

۶۷. با مراجعه به شکل ۸۹۹،  $v_1(t)$  را در  $t = 27\mu\text{s}$  محاسبه نمایید.



شکل ۸۹۹

۵۸. کلید در شکل ۸۹۱ در  $t < 0$  در وضعیت A قرار گرفته است. در  $t = 0$  به B جابه‌جا می‌شود و سپس در  $t = 4\text{s}$  به C جابه‌جا می‌شود و بعد در  $t = 6\text{s}$  به D می‌رود و در آن جا می‌ماند.  $v(t)$  را به عنوان تابعی از زمان رسم کنید و آن را به صورت مجموع توابع تحریک پله بیان کنید.

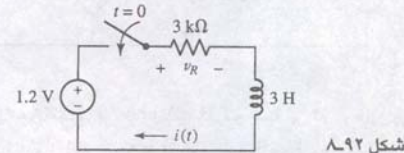


شکل ۸۹۱

۵۹. یک شکل موج در دو سر عنصر مجهول به صورت  $7u(t) - 0.2u(t-2) + 8u(t-2) + 3\text{V}$  ولتاژ را در  $t = 1\text{s}$  معین کنید. (ب) اگر جریان مربوطه در عنصر است و مقدار آن چیست؟

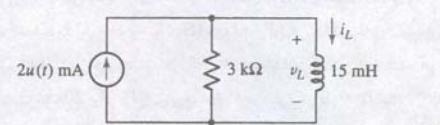
## ۸-۶ مدارهای RL واداشته

۶۰. برای مدار شکل ۸۹۲، (الف) عبارتی برای  $v_R(t)$  معتبر در همه زمان‌ها پیدا کنید. (ب)  $v_R(t)$  را در  $t = 2\text{ms}$  به دست آورید. (ج) حل خود را با بخش (ب) امتحان کنید.



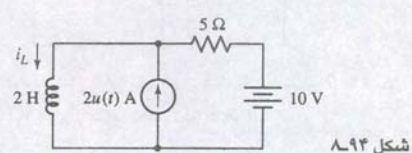
شکل ۸۹۲

۶۱. به شکل ۸۹۳ مراجعه کنید. (الف)  $i_L(t)$  را بیابید. (ب) از عبارت  $i_L(t)$  برای یافتن  $v_L(t)$  استفاده کنید.

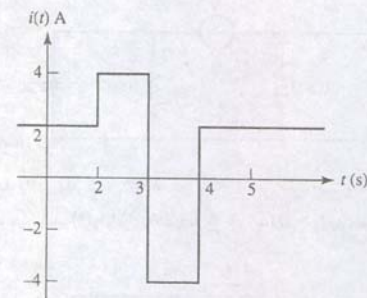


شکل ۸۹۳

۶۲.  $i_L(t)$  را در مدار شکل ۸۹۴ در زمان‌های داده شده به دست آورید. (الف)  $-0.5\text{s}$ ، (ب)  $0.5\text{s}$  و (ج)  $1.5\text{s}$ .

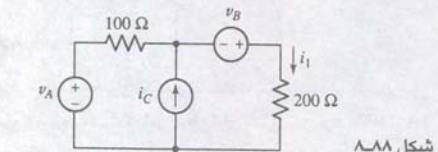


شکل ۸۹۴



شکل ۸۸۷

۵۳. مقادیر منبع در مدار شکل ۸۸۸ عبارتند از  $v_A = 300u(t-1)\text{V}$  و  $v_B = -120u(t+1)\text{V}$  و  $i_C = 3u(t)\text{A}$  را در  $0.5, 1.5, -0.5, -1.5$   $t$  پیدا کنید.

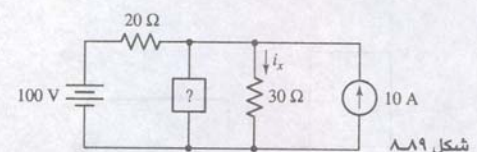


شکل ۸۸۸

۵۴. مقادیر منبع برای شکل ۸۸۸ عبارتند از  $v_A = 600u(t+1)\text{V}$  و  $v_B = 600(t+1)u(t)\text{V}$  و  $i_C = 6(t-1)u(t-1)\text{A}$  را برای  $t = 2, -2.5 < t < 2.5$  رسم کنید.

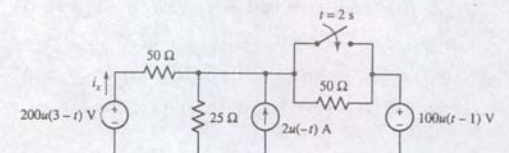
۵۵. در  $t = 2$  مقدار (الف)  $2u(1-t) - 3u(t-1) - 4u(t+1)$  و (ب)  $4e^{-u(3-t)}u(3-t)$  و (ج)  $[5 - u(t)][2 + u(3-t)][1 - u(1-t)]$  را پیدا کنید.

۵۶. در مدار شکل ۸۸۹ مقدار  $i_x(t)$  را برای  $t < 0$  و  $t > 0$  پیدا کنید به شرطی که: (الف) یک کلید معمول باز در  $t = 0$  بسته شود و موازی با باتری  $60\text{V}$  باشد، مرجع  $+$  در بالا است. (ب) یک منبع ولتاژ،  $60u(t)\text{V}$  مرجع  $+$  در بالا باشد.



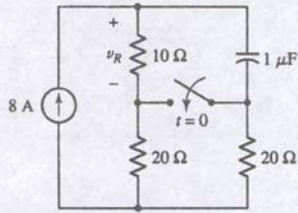
شکل ۸۸۹

۵۷.  $i_x(t)$  را در مدار شکل ۸۹۰ از  $t = -0.5\text{s}$  تا  $t = 3.5\text{s}$  با فواصل  $1\text{s}$  پیدا کنید.



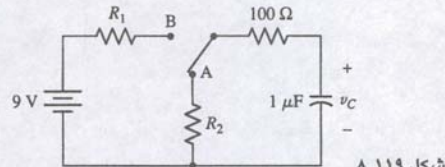
شکل ۸۹۰





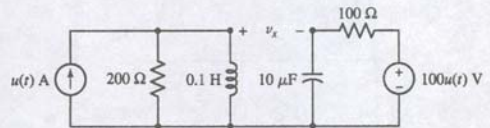
شکل ۸-۱۱۸

۹۰. کلید در شکل ۸-۱۱۹ از مدت‌ها قبل بسته بوده است. در  $t = 0$  به B برده می‌شود، و در  $t = 1\text{ms}$  به A بازگردانده می‌شود.  $R_1$  و  $R_2$  را طوری تعیین کنید که  $v_C(2\text{ms}) = 1\text{V}$  و  $v_C(1\text{ms}) = 8\text{V}$  باشد.



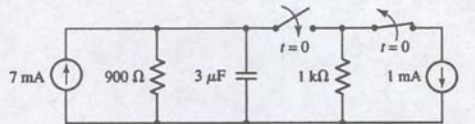
شکل ۸-۱۱۹

۹۱. برای شکل ۸-۱۲۰ اولین زمان پس از  $t = 0$  را که در آن برای اولین بار  $v_x = 0$  است، مشخص کنید.



شکل ۸-۱۲۰

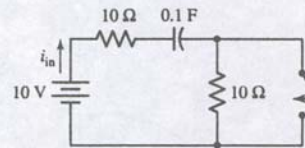
۹۲. در مدار شکل ۸-۱۲۱ یک کلید در  $t = 0$  باز و دیگری همزمان بسته می‌شود. توان جذب‌شده با مقاومت  $1\text{k}\Omega$  در فاصله  $-1\text{ms} < t \leq 7\text{ms}$  را به‌دست‌آورید. در  $t = 0$  منبع  $1\text{mA}$  نیز خاموش شده است.



شکل ۸-۱۲۱

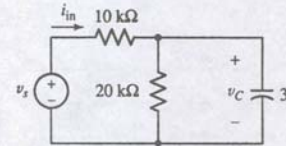
۹۳. اگر کلید در شکل ۸-۱۲۲ برای مدتی بسته بوده باشد، (الف)  $v$  را در  $t = 5.45\text{ms}$  معین کنید. (ب) توان تلف‌شده به وسیله مقاومت  $4.7\text{k}\Omega$  را در  $t = 1.7\text{ms}$  به‌دست‌آورید. (ج) انرژی کل تبدیل‌شده به حرارت را در مقاومت  $4.7\text{k}\Omega$  پس از بازشدن کلید محاسبه کنید.

۹۴. فرض کنید که op amp شکل ۸-۱۲۳ ایده‌آل باشد.  $v_x(t)$  را برای همه زمان‌های  $t$  پیدا کنید.



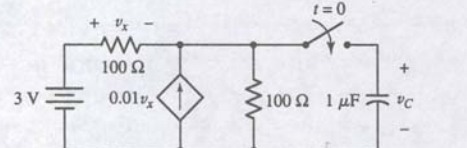
شکل ۸-۱۱۳

۸۵. اجازه بدهید در مدار شکل ۸-۱۱۴  $v_s = -12u(-t) + 24u(t)\text{V}$  باشد. در فاصله زمانی  $-5\text{ms} < t < 5\text{ms}$ ، برای کمیت (الف)  $v_C(t)$  و (ب)  $i_{in}(t)$  عبارتی جبری به‌دست‌آورید و آن‌ها را رسم کنید.



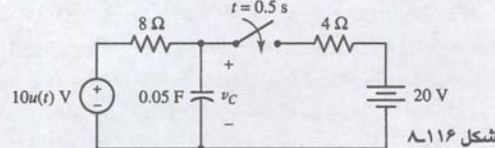
شکل ۸-۱۱۴

۸۶. در مدار شکل ۸-۱۱۵  $v_C$  را برای  $t > 0$  پیدا کنید.



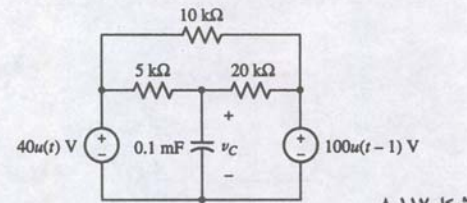
شکل ۸-۱۱۵

۸۷. مقدار  $v_C(t)$  را در  $t = 0.4$  و  $0.8\text{s}$  در شکل ۸-۱۱۶ به‌دست‌آورید.



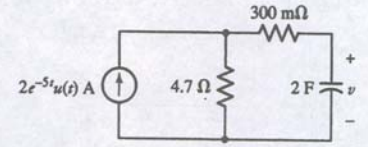
شکل ۸-۱۱۶

۸۸. در مدار شکل ۸-۱۱۷: (الف)  $v_C(t)$  را برای همه زمان‌ها پیدا کنید. (ب)  $v_C(t)$  را برای  $-1 < t < 2\text{s}$  رسم کنید. صحت حل خود را با PSpice تحقیق نمایید.

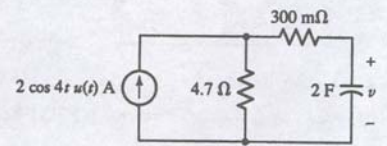


شکل ۸-۱۱۷

۸۹. در مدار شکل ۸-۱۱۸،  $v_R(t)$  را برای (الف)  $t < 0$  و (ب)  $t > 0$  پیدا کنید. اکنون فرض کنید که این کلید که برای مدت‌ها بسته بوده در  $t = 0$  باز شود.  $v_R(t)$  را برای (ج)  $t < 0$  و (د)  $t > 0$  به‌دست‌آورید.



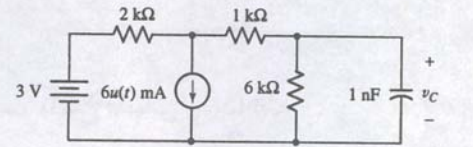
شکل ۸-۱۰۸



شکل ۸-۱۰۹

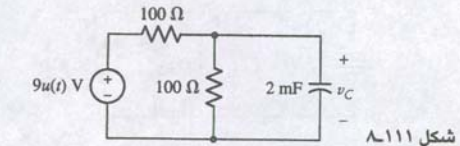
## ۸-۸ مدارهای RC واداشته

۸۰. (الف)  $v_C$  را در مدار شکل ۸-۱۱۰ در  $t = -2\mu\text{s}$  و  $t = 2\mu\text{s}$  پیدا کنید. (ب) صحت حل خود را با PSpice تحقیق نمایید.



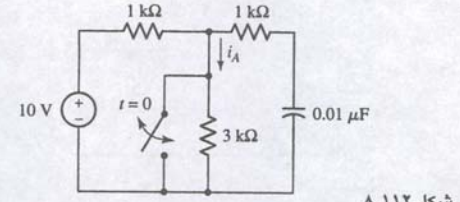
شکل ۸-۱۱۰

۸۱. با مراجعه به مدار RC در شکل ۸-۱۱۱ عبارتی برای  $v_C(t)$  معتبر در همه زمان‌ها بیابید.



شکل ۸-۱۱۱

۸۲. پس از مدت‌مندی بسته‌بودن، کلید شکل ۸-۱۱۲ در  $t = 0$  باز می‌شود.  $i_A$  را برای همه زمان‌ها به‌دست‌آورید.

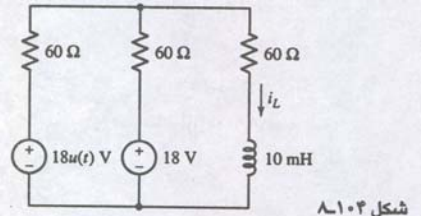


شکل ۸-۱۱۲

۸۳. سوئیچ شکل ۸-۱۱۳ پس از مدتی بازبودن در  $t = 0$  بسته می‌شود.  $i_A$  در تمام زمان‌ها به دست آورید.

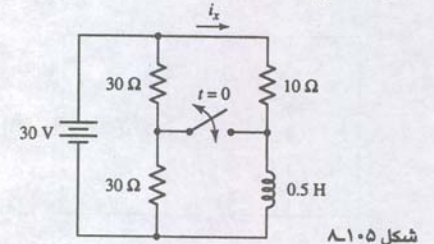
۸۴. کلید از مدت‌ها قبل در شکل ۸-۱۱۳ باز بوده است. این کلید ناگهان در  $t = 0$  بسته می‌شود.  $i_{in}$  را در  $t = -1.5\text{s}$  و (ب)  $1.5\text{s}$  به‌دست‌آورید.

۷۳.  $i_L$  را برای همه زمان‌های  $t$  در شکل ۸-۱۰۴ به‌دست‌آورید.



شکل ۸-۱۰۴

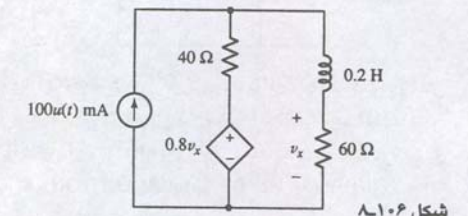
۷۴. فرض کنید کلید در شکل ۸-۱۰۵ از مدت‌ها قبل بسته بوده است و در  $t = 0$  باز شود.  $i_x$  را در  $t$  برابر با (الف)  $0^-$ ، (ب)  $0^+$  و (ج)  $40\text{ms}$  به‌دست‌آورید.



شکل ۸-۱۰۵

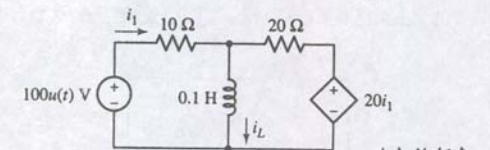
۷۵. فرض کنید کلید در شکل ۸-۱۰۵ از مدت‌ها قبل باز بوده و در  $t = 0$  بسته شود.  $i_x$  را در زمان‌های  $t$  برابر با (الف)  $0^-$ ، (ب)  $0^+$  و (ج)  $40\text{ms}$  به‌دست‌آورید.

۷۶. با مراجعه به شکل ۸-۱۰۶،  $v_x$  را برای تمام زمان‌ها به‌دست‌آورید.



شکل ۸-۱۰۶

۷۷. با مراجعه به شکل ۸-۱۰۷، (الف)  $i_L(t)$  را پیدا کنید. (ب)  $i_1(t)$  را به‌دست‌آورید.



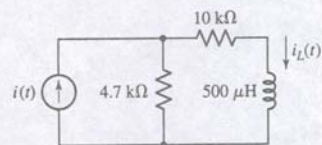
شکل ۸-۱۰۷

۷۸. عبارتی برای  $v(t)$  در مدار شکل ۸-۱۰۸ معتبر در همه زمان‌ها به دست آورید.

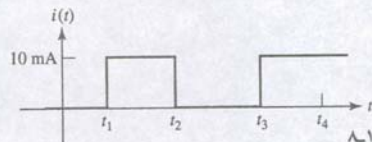
۷۹. عبارتی برای  $v(t)$  در مدار شکل ۸-۱۰۹ معتبر در همه زمان‌ها به دست آورید.



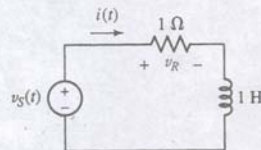
(الف)  $t_4 = 200 \text{ ns}$ ,  $t_3 = 164 \text{ ns}$ ,  $t_2 = 160 \text{ ns}$ ,  $t_1 = 4 \text{ ns}$   
 (ب)  $t_3 = 450 \text{ ns}$ ,  $t_2 = 300 \text{ ns}$ ,  $t_1 = 150 \text{ ns}$   
 (ج)  $t_4 = 500 \text{ ns}$ ,  $t_3 = 350 \text{ ns}$ ,  $t_2 = 200 \text{ ns}$ ,  $t_1 = 150 \text{ ns}$   
 $t_4 = 400 \text{ ns}$



شکل ۸-۱۳۰

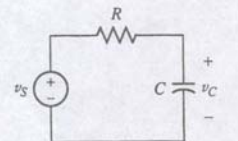


شکل ۸-۱۳۱



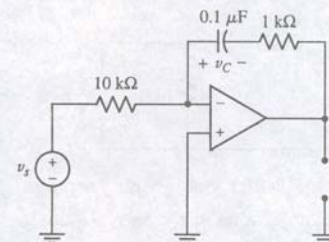
شکل ۸-۱۲۸

۱۰۳. منبع ولتاژ  $v_S$  شکل ۸-۱۲۹ یک منبع پالسی با حداقل مقدار ۲ V و حداکثر ۱۰ V می‌باشد. پهنای پالس RC ۴ است. نمودار ولتاژ خازن را اگر زمان بین پالس‌های  $v_S$  برابر با (الف) RC ۰.۱، (ب) RC و (ج) ۱۰ RC باشد را رسم نمایید.



شکل ۸-۱۲۹

۱۰۴. با مراجعه به مدار شکل ۸-۱۳۰،  $i_L(t)$  را در پریود  $0 \leq t \leq t_4$  رسم کنید به شرطی که  $i(t)$  مطابق شکل ۸-۱۳۱ باشد.



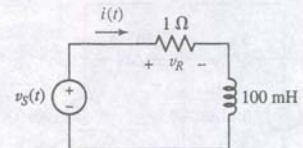
شکل ۸-۱۲۶

۹۹. یک آشکارساز حرکت که به عنوان بخشی از سیستم حفاظتی به کار رفته است نسبت به تغییرات منبع الکتریکی حساس به نظر می‌رسد. یک راه‌حل وارد کردن مدار تأخیر بین سنسور و مدار آلارم است تا اعلان خطاهای غلط حداقل شود. فرض کنید معادل تونن سنسور مقاومتی  $2.37 \text{ k}\Omega$  سری با منبع ۱.۵V باشد و مقاومت معادل تونن آلارم نیز  $1 \text{ M}\Omega$  است. مداری طراحی کنید که بتواند بین سنسور و مداری که حداقل تأخیر ۱ ثانیه تولید کند قرار گیرد. مدار سنسور/الارم به طریق زیر کار می‌کند: سنسور مرتباً جریانی کوچکی به آلارم می‌فرستد مگر این‌که حرکتی شناسایی شود. در این حال جریان متوقف می‌گردد.

## ۸-۹ پیش‌بینی پاسخ مدارهای سوئیچ‌شده متوالی

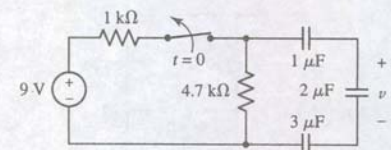
۱۰۰. (الف) یک موج پالسی PSpice برای مدل موج ولتاژ  $v_B$  مسئله ۵۳ بسازید و با Prob آن را رسم نمایید (راهنمایی: منبع را به یک مقاومت برای انجام یک شبیه‌سازی وصل کنید). (ب) یک شکل موج در PSpice برای مدل‌سازی موج  $i_C$  در مسئله ۵۳ ساخته و آن را با Probe رسم کنید.

۱۰۱. ولتاژ مقاومت  $v_R$  در مدار شکل ۸-۱۲۷ را در پاسخ به یک موج  $v_S(t)$  رسم کنید. حداقل مقدار  $v_S(t)$  برابر ۰ V است و حداکثر آن ۳ V می‌باشد. پهنای پالس ۲ s و پریود ۵ s است. شکل خود را بین  $0 \leq t \leq 20 \text{ s}$  ترسیم کنید. (ب) نمودار خود را با اجرای PSpice امتحان کنید.

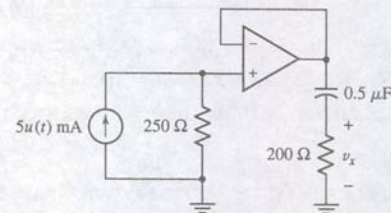


شکل ۸-۱۲۷

۱۰۲. جریان القاگر  $i$  در مدار شکل ۸-۱۲۸ از در پاسخ به موج پالسی  $v_S(t)$  رسم کنید. حداقل مقدار  $v_S(t)$  برابر ۰ V است و حداکثر آن ۵ V می‌باشد. پهنای پالس ۵ s و پریود ۵.۵ s است. ترسیم خود را بین  $0 \leq t \leq 20 \text{ s}$  ... کنید. (ب) نمودار خود را با اجرای PSpice امتحان کنید.

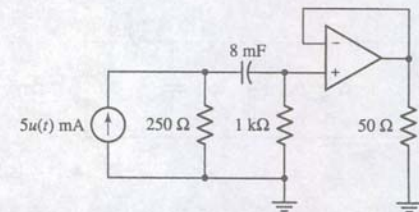


شکل ۸-۱۲۲



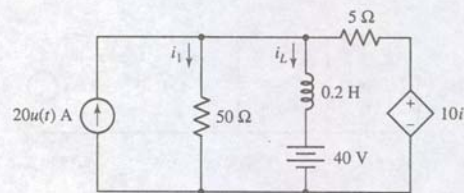
شکل ۸-۱۲۳

۹۵. فرض کنید که op amp در شکل ۸-۱۲۴، ایده‌آل باشد. (الف)  $v_O(t)$  را برای همه زمان‌های  $t$  بیابید. (ب) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید (راهنمایی: می‌توانید توابع را با probe رسم کنید و برای این کار با وارد کردن عبارت در جعبه Trace Expression انجام دهید).



شکل ۸-۱۲۴

۹۶. (الف) در مدار RL شکل ۸-۱۲۵،  $i_L(0)$  را بیابید. با PSpice مقدار اولیه بخش (الف)  $i_L$  را در  $t = 50 \text{ ms}$  به دست آورید.



شکل ۸-۱۲۵

۹۷. (الف) فرض کنید که op amp شکل ۸-۱۲۶ ایده‌آل و  $v_C(0) = 0$  باشد.  $v_O(t)$  را برای همه زمان‌ها به دست آورید. (ب) صحت حل خود را با PSpice تحقیق کنید (راهنمایی: می‌توانید توابع را با وارد کردن عبارت در جعبه Trace Expression انجام دهید).

۹۸. مداری طراحی کنید که پس از خاموش شدن کلید ۵S روشن باقی بماند. لامپ را ۴۰W و تغذیه را ac ۱۱۵V فرض کنید.



# فصل نهم

## مدار RLC

### مقدمه

بحث ما در فصل قبل خصوصاً روی مدارهای مقاومتی با خازن و یا با القاگر، و نه هر دو، متمرکز بود. وجود القاکنایی و ظرفیت در یک مدار حداقل یک سیستم مرتبه دو را تولید می‌کند که با یک معادله دیفرانسیل خطی با مشتق مرتبه دو یا با دو معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول همزمان نشان داده می‌شود. این افزایش مرتبه معادله موجب می‌شود تا دو ثابت اختیاری لازم باشد. به علاوه، باید مقادیر اولیه‌ای را برای مشتق‌ها معین کرد. خواهیم دید چنین مدارهایی که اغلب به نام مدارهای RLC معروفند، نه تنها در عمل به کرات دیده می‌شوند، بلکه برای مدل‌کردن دیگر سیستم‌ها هم مورد استفاده‌اند. مثلاً یک مدار RLC می‌تواند برای مدل‌سازی سیستم تعلیق یک اتومبیل، رفتار یک کنترل‌گر دما در رشد کریستال نیمه هادی و حتی پاسخ یک هواپیما به کنترل‌های بالابر و شهپر به کار گرفته شود.

### ۹-۱ مدار موازی بدون منبع

اولین کار تعیین پاسخ طبیعی است که دوباره به طریقی مناسب از بررسی مدار بدون منبع حاصل می‌شود. آن‌گاه می‌توانیم منابع dc، کلیدها یا منابع پله را در مدار لحاظ نماییم، تا دوباره پاسخ کل را به صورت جمع پاسخ طبیعی واداشته، به دست آوریم.

کار خود را با تعیین پاسخ طبیعی مدار ساده حاصل از اتصال موازی  $R$ ،  $L$  و  $C$  آغاز می‌کنیم. این ترکیب خاص عناصر ایده‌آل مدل خوبی برای بسیاری از قسمت‌های مختلف در شبکه‌های مخابراتی است. مثلاً این ترکیب بخش عمده‌ای از مدارهای تقویت‌کننده لکترونیک موجود در گیرنده‌های رادیویی می‌باشد و تقویت‌کننده‌ها را در تولید ولتاژ تقویت‌شده‌ای در باند باریکی از فرکانس‌ها و تقریباً صفر در خارج این باند توانمند می‌سازد. ناپایداری انتخاب فرکانس ما را قادر می‌سازد تا به مراسلات یک ایستگاه گوش فرا دهیم؛ ضمن این‌که دیگر ایستگاه‌ها حذف می‌شوند. از جمله دیگر کاربردها می‌توان از مدارهای RLC موازی در ساخت مولتی‌پلکسرها و فیلترهای حذف هارمونیک نام برد. در هر صورت حتی، بحث ساده‌ای از این گونه لازم می‌دارد تا با مفاهیمی چون تشدید (رزونانس) پاسخ فرکانس و میدانس آشنا شویم. بنابراین اجازه بدهید بگوییم درک رفتار طبیعی یک مدار RLC موازی اساس مطالعات آینده در شبکه‌های مخابرات و طراحی فیلترها و نیز کاربردهای دیگر است.

وقتی که یک خازن واقعی با یک القاگر موازی شود و ضمناً خازن دارای مقاومت معینی هم باشد، شبکه حاصل مدلی شبیه به شکل ۹-۱ را خواهد داشت. وجود این مقاومت می‌تواند مدل تلف انرژی در خازن را در مدت زمان موردنظر توجیه کند. می‌دانیم که همه خازن‌ها حتی اگر قطع هم باشند نهایتاً دشارژ می‌شوند. می‌توان اتلاف انرژی در القاگر را هم با جمع یک مقاومت ایده‌آل سری با آن به حساب آورد. با این وجود به خاطر سادگی مباحث خود را که در ن القاگر با خازن موازی نشنی دار موازی است، محدود می‌کنیم.

#### مفاهیم کلیدی

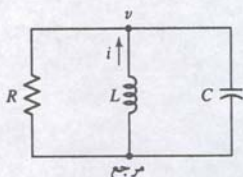
فرکانس تشدید و ضریب میرایی مدارهای RLC سری و موازی

پاسخ فوق میرا

پاسخ میرای بحرانی

پاسخ زیر میرا

پاسخ کامل مدارهای RLC (طبیعی + واداشته)



شکل ۹-۱ مدار RLC موازی بدون منبع.



## معادله دیفرانسیل برای مدار RLC موازی

در تحلیل زیر فرض بر این است که انرژی در آغاز در هر دو عنصر خازن و القاگر ذخیره شده باشد. به بیان دیگر مقادیر اولیه غیر صفری از جریان القاگر و ولتاژ خازن وجود دارد. با مراجعه به شکل ۹-۱ می توان معادله زیر را روی تنها گره نوشت:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v dt' - i(t_0) + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1)$$

توجه کنید که علامت منها از جهت فرضی  $i$  ناشی شده است. ما باید معادله (۱) را با توجه به مقادیر اولیه

$$i(0^+) = I_0 \quad (2)$$

$$v(0^+) = V_0 \quad (3)$$

حل کنیم. وقتی از هر دو طرف معادله (۱) نسبت به زمان یک بار مشتق بگیریم، حاصل معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم زیر است.

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0 \quad (4)$$

که حل  $v(t)$  پاسخ طبیعی مورد نظر است.

## حل معادله دیفرانسیل

برای حل معادله (۴) روش های جالب و متعددی وجود دارد. بسیاری از این روش ها را به درس معادلات دیفرانسیل واگذار می کنیم. در این جا تنها سریع ترین و ساده ترین روش را به کار می گیریم. ما بر اساس دانسته ها و تجربیات خود یکی از چند فرم را که مناسب تر است انتخاب می کنیم. تجربیات ما با معادلات مرتبه اول ممکن است چنین حکم کند که فرم نمایی پاسخ را یک بار دیگر آزمایش کنیم. بنابراین فرض می کنیم که:

$$v = Ae^{st} \quad (5)$$

باشد و به طور کلی اجازه می دهیم  $A$  و  $s$  به صورت مختلط (در صورت لزوم) باشند. از جایگزینی معادله (۵) در معادله (۴) داریم:

$$CA s^2 e^{st} + \frac{1}{R} A s e^{st} + \frac{1}{L} A e^{st} = 0$$

یا

$$Ae^{st} \left( Cs^2 + \frac{1}{R} s + \frac{1}{L} \right) = 0$$

برای این که معادله فوق در همه زمان ها صحیح باشد، حداقل یکی از سه فاکتور باید برابر صفر گردد. اگر یکی از دو فاکتور اول را صفر فرض کنیم، آن گاه  $v(t) = 0$  می شود. این حلی غلط از معادله دیفرانسیل است چون نمی تواند مقادیر اولیه ما را تأیید نماید. بنابراین فاکتور سوم را برابر صفر قرار می دهیم:

$$Cs^2 + \frac{1}{R} s + \frac{1}{L} = 0 \quad (6)$$

ریاضی دانان این معادله را معمولاً معادله کمکی یا معادله مشخصه می خوانند. اگر این رابطه برقرار باشد آن گاه حل فرض شده، صحیح خواهد بود. چون معادله (۶) یک معادله مرتبه دوم است، دو حل  $s_1$  و  $s_2$  برای آن وجود دارد:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (7)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8)$$

هر یک از این دو مقدار برای  $s$  می تواند حل مورد نظر باشد، آن گاه حل مذکور در معادله دیفرانسیل مربوط باید صدق کند. در این صورت حل معتبری از معادله دیفرانسیل را به دست آورده ایم. اکنون فرض کنید که  $s$  را در معادله (۵) با  $s_1$  جایگزین کنیم، در این صورت:

$$v_1 = A_1 e^{s_1 t}$$

و به طور مشابه:

$$v_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

اولین پاسخ را در معادله دیفرانسیل قرار می دهیم:

$$C \frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L} v_1 = 0$$

دومین پاسخ را نیز در معادله قرار می دهیم:

$$C \frac{d^2v_2}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L} v_2 = 0$$

از جمع این دو معادله دیفرانسیل و ترکیب جملات مشابه داریم:

$$C \frac{d^2(v_1 + v_2)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + \frac{1}{L} (v_1 + v_2) = 0$$

با توجه به خاصیت خطی، می بینیم که جمع دو حل نیز یک حل است. بنابراین پاسخ طبیعی به فرم زیر است:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9)$$

که در آن  $s_1$  و  $s_2$  با معادلات (۷) و (۸) داده شده اند،  $A_1$  و  $A_2$  دو ثابت اختیاری اند که باید طوری انتخاب شوند تا مقادیر اولیه تأیید گردند.

## تعریف جملات فرکانس

فرم پاسخ طبیعی معادله (۹) اطلاعات کمی را از طبیعت منحنی  $v(t)$  بر حسب تابعی از زمان به دست می دهد. مثلاً دامنه های  $A_1$  و  $A_2$  مطمئناً در شکل منحنی پاسخ نقش عمده ای دارند. به علاوه ثابت های  $s_1$  و  $s_2$  بسته به مقادیر  $R$ ،  $L$  و  $C$  در شبکه می توانند اعداد حقیقی یا مزدوج مختلط باشند. از هر دو نوع مذکور پاسخ هایی به دست می آید که تفاوت بنیادی دارند. بنابراین، برخی جایگزینی ها در معادله (۹) برای ساده سازی مفید خواهد بود.

چون نماهای  $s_1 t$  و  $s_2 t$  بدون بعد هستند،  $s_1$  و  $s_2$  باید کمیتی بدون بعد بر ثانیه باشد. بنابراین از معادلات (۷) و (۸) در می یابیم که واحد  $1/RC$  و  $1/LC$  هم باید  $s^{-1}$  (یعنی  $\frac{1}{\text{ثانیه}}$ ) باشد. این نوع واحد را فرکانس می نامیم.

اجازه بدهید تا عبارت  $1/\sqrt{LC}$  را با  $\omega_0$  نشان دهیم:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10)$$

که به آن فرکانس رزونانس یا تشدید گویند. از طرف دیگر  $1/2RC$  را فرکانس نبر، یا ضریب میرایی نمایی یا استهلاک گفته و آن را با  $\alpha$  (آلفا) نشان می دهند:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (11)$$

نام آخری که برای این پارامتر فوق در نظر گرفته شده است به این علت است که  $\alpha$  سرعت استهلاک پاسخ طبیعی به سمت حالت ماندگار یا مقدار نهایی را نشان می دهد (معمولاً صفر) بالاخره  $s_1$  و  $s_2$  که کمیت های مبنای برای کارهای بعدی ما هستند، فرکانس های مختلط خوانده می شوند.



## ۹-۲ مدار RLC موازی فوق میرا

مقایسه معادلات (۱۰) و (۱۱) نشان می‌دهد که اگر  $LC > 4R^2C^2$  باشد آن‌گاه  $\alpha$  بزرگ‌تر از  $\omega_0$  خواهد شد. در این حالت جذر موجود مقداری حقیقی خواهد بود، هر دو مقدار  $s_1$  و  $s_2$  حقیقی‌اند. علاوه بر آن نامعادلات زیر

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

$$(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < 0$$

می‌توانند به معادلات (۱۲) و (۱۳) اعمال شوند و مشاهده شود که  $s_1$  و  $s_2$  هر دو اعداد حقیقی منفی‌اند. بنابراین پاسخ  $v(t)$  به صورت جمع دو جمله نمایی کاهشی بیان می‌شود. در واقع چون مقدار مطلق  $s_2$  بزرگ‌تر از  $s_1$  است، جمله حاوی  $s_2$  سرعت کاهش بیشتری دارد و در زمان‌های طولانی می‌توانیم حد عبارت را بنویسیم:

$$v(t) \rightarrow A_1 e^{s_1 t} \rightarrow 0 \quad \text{با} \quad t \rightarrow \infty$$

گام بعدی تعیین ثابت‌های  $A_1$  و  $A_2$  در رابطه با مقادیر اولیه می‌باشد. به‌خاطر سادگی  $C = \frac{1}{42} \text{ F}$  و  $L = 7 \text{ H}$ ،  $R = 6 \Omega$  و  $s_1 = 0$ ،  $v(0) = 10 \text{ A}$  را انتخاب می‌کنیم. انرژی ذخیره‌شده اولیه با ولتاژ اولیه دو سر خازن  $i(0) = 10 \text{ A}$  مشخص می‌شوند که  $v$  و  $i$  در شکل ۹-۲ تعریف شده‌اند.

می‌توان به راحتی مقادیر چند پارامتر را معین کرد:

$$\alpha = 3.5 \quad \omega_0 = \sqrt{6} \quad (\text{واحد همه } s^{-1} \text{ است})$$

$$s_1 = -1 \quad s_2 = -6$$

اکنون می‌توانیم بلافاصله شکل کلی پاسخ طبیعی را بنویسیم:

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \quad (۱۴)$$

### تعیین مقادیر $A_1$ و $A_2$

تنها ارزیابی دو ثابت  $A_1$  و  $A_2$  باقی مانده است. اگر پاسخ  $v(t)$  را در دو لحظه از زمان می‌دانستیم، این دو مقدار قابل جایگزینی در معادله (۱۴) بوده و به این ترتیب  $A_1$  و  $A_2$  به‌دست می‌آید. با این وجود ما فقط یک مقدار  $v(t)$  را می‌دانیم:

$$v(0) = 0$$

و بنابراین:

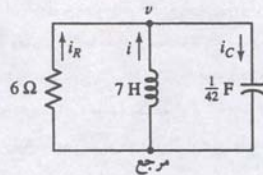
$$0 = A_1 + A_2 \quad (۱۵)$$

می‌توانیم دومین معادله را برای  $A_1$  و  $A_2$  از مشتق  $v(t)$  نسبت به زمان در معادله به‌دست آوریم و مقدار اولیه این مشتق را از شرط اولیه باقی‌مانده  $i(0) = 10$  معین کنیم و آن‌گاه نتایج را با هم برابر نماییم. پس از دو طرف معادله (۱۴) مشتق می‌گیریم،

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{-6t}$$

سپس مشتق را در  $t = 0$  محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -A_1 - 6A_2$$



مربع

شکل ۹-۲ مدار RLC موازی به‌عنوان مثال عددی. این مدار فوق میراست.

باید توجه داشت که  $s_1$ ،  $s_2$ ، و  $\omega_0$  فقط نمادها یا سمبل‌هایی هستند که بحث مدارهای RLC را ساده‌کنند و چیز تازه و اسرارآمیزی را نشان نمی‌دهند. مثلاً ساده‌تر است بگوییم "آلفا" تا این‌که بگوییم "عکس 2RC". اکنون بیا باید اطلاعات را سرجمع کنیم. پاسخ فرکانس مدار RLC برابر است با:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (۹)$$

که

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (۱۲)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (۱۳)$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (۱۱)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (۱۰)$$

که  $A_1$  و  $A_2$  باید با اعمال مقادیر اولیه مشخص شوند.

ملاحظه می‌کنید که بسته به اندازه‌های نسبی  $\alpha$  و  $\omega_0$  که به وسیله مقادیر  $R$ ،  $L$  و  $C$  دیده می‌شود دو سناریوی مینا وجود دارد. اگر  $\alpha > \omega_0$  باشد، هم  $s_1$  و هم  $s_2$  اعداد حقیقی خواهند بود، و منجر به وضعیتی به نام پاسخ فوق میرا می‌گردد. در مقابل آن، که  $\alpha < \omega_0$  است، هم  $s_1$  و هم  $s_2$  مولفه‌های موهومی غیر صفر خواهند داشت که این یکی هم پاسخ زیر میرا را در پی دارد. در بخش‌های زیر هر دو وضعیت جداگانه همراه با حالت خاص  $\alpha = \omega_0$  که پاسخ میرای بحرانی است، بررسی خواهند شد. همچنین باید توجه داشت که پاسخ کلی که به وسیله معادلات (۹) تا (۱۳) بیان شده‌اند، نه فقط ولتاژ، بلکه هر سه جریان انشعاب‌ها در مدار RLC موازی را به دست می‌دهند، البته  $A_1$  و  $A_2$  برای هر کدام متفاوت است.

### مثال ۹-۱

مدار موازی RLC دارای القاگر  $10 \text{ mH}$  و خازن  $100 \mu\text{F}$  است. مقادیر مقاومتی که به پاسخ‌های زیرمیرا و فوق میرا منجر می‌شود را معین کنید. ابتدا فرکانس تشدید مدار را به دست می‌آوریم:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3})(100 \times 10^{-6})}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

یک پاسخ فوق میرا به شرطی وجود دارد که  $\alpha > \omega_0$  باشد و پاسخ زیرمیرا هم در  $\alpha < \omega_0$  وجود دارد. پس:

$$\frac{1}{2RC} > 10^3$$

و لذا:

$$R < \frac{1}{(2000)(100 \times 10^{-6})}$$

یا

$$R < 5 \Omega$$

منجر به پاسخ فوق میرا می‌شود:  $R > 5 \Omega$  پاسخ زیرمیرا تولید می‌کند.

۹-۱ مدار RLC موازی حاوی مقاومت  $100 \Omega$  و مقادیر پارامتر  $\alpha = 1000 s^{-1}$  و  $\omega_0 = 800 \text{ rad/s}$  است. مطلوب است: (الف)  $C$ ، (ب)  $L$ ، (ج)  $s_1$  و  $s_2$ . جواب:  $5 \mu\text{F}$ ،  $312.5 \text{ mH}$ ،  $-400 s^{-1}$  و  $-1600 s^{-1}$ .

### تمرین



و

$$v_C(0^-) = 150 \frac{200}{200 + 300} = 60 \text{ V}$$

در شکل ۹-۴ (ب) ما مدار را در  $t = 0^+$  رسم کرده‌ایم، که در آن جریان القاگر و ولتاژ خازن با منابع ایده‌آل به خاطر سادگی نشان داده شده است. چون هیچ کدام در مدت زمان صفر تغییر نمی‌کنند، داریم  $v_C(0^+) = 60 \text{ V}$ .

آیا اطلاعات دیگری لازم است.

ما معادله‌ای برای ولتاژ خازن داریم:  $v_C(t) = A_1 e^{-50,000t} + A_2 e^{-200,000t}$  می‌دانیم که  $v_C(0) = 60 \text{ V}$  است، اما هنوز معادله سومی لازم است. از معادله ولتاژ خازن خود مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dv_C}{dt} = -50,000 A_1 e^{-50,000t} - 200,000 A_2 e^{-200,000t}$$

که می‌تواند به جریان خازن مرتبط شود،  $i_C = C(dv_C/dt)$  با بازگشت به شکل ۹-۴ (ب)، KCL منجر می‌شود به:

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0.3 - \{v_C(0^+)/200\} = 0$$

اقدام به حل.

إعمال اولین مقدار اولیه ما منتهی می‌شود به:

$$v_C(0) = A_1 + A_2 = 60$$

و إعمال مقدار اولیه دوم نتیجه می‌دهد:

$$i_C(0) = -20 \times 10^{-9} (50,000 A_1 + 200,000 A_2) = 0$$

با حل آن‌ها داریم:  $A_1 = 80 \text{ V}$  و  $A_2 = -20 \text{ V}$ ، بنابراین به ازای  $t > 0$  داریم:

$$v_C(t) = 80e^{-50,000t} - 20e^{-200,000t} \text{ V}$$

صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

حداقل حل خود را در  $t = 0$  چک می‌کنیم و نشان می‌دهیم که  $v_C(0) = 60 \text{ V}$  است. با مشتق‌گیری و ضرب در  $20 \times 10^{-9}$  می‌توان نشان داد که  $i_C(0) = 0$  است.

۹-۲ پس از مدتی طولانی از بازبودن، کلیدی را در شکل ۹-۵ در  $t = 0$  می‌بندیم. مطلوب است:

$$(الف) i_L(0^+), (ب) v_C(0^+), (ج) i_R(0^+), (د) i_C(0^+) \text{ و } (ه) v_C(0.2).$$

جواب:  $1 \text{ A}, 48 \text{ V}, 2 \text{ A}, 3 \text{ A}$  و  $-17.54 \text{ V}$ .

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، فرم پاسخ فوق میرا به هر کمیت جریان یا ولتاژ إعمال می‌گردد و ما آن را با مثال زیر می‌شکافیم.

مدار شکل ۹-۵ (الف) پس از  $t = 0$  به یک مدار ساده RLC کاهش می‌یابد. عبارتی برای جریان مقاومت  $R$  معتبر در همه زمان‌ها پیدا کنید.

گر مدار بعد از  $t > 0$  فوق میرا شود، ما انتظار داریم پاسخ به فرم زیر باشد:

$$i_R(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \quad t > 0 \quad (9A)$$

رای  $t > 0$  ما یک مدار موازی RLC با  $R = 30 \text{ k}\Omega$ ،  $L = 12 \text{ mH}$  و  $C = 2 \text{ pF}$  داریم. بنابراین  $\omega_0 = 6.455 \times 10^6 \text{ rad/s}$  و  $\alpha = 8.333 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$  یک پاسخ فوق میرا با  $s_1 = -3.063 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$  و  $s_2 = -13.60 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$  داشته باشیم.

و به این ترتیب دو مین معادله به‌دست می‌آید. گرچه ممکن است این رابطه مفید به‌نظر برسد ولی ما مقدار اولیه مشتق را نداریم و بنابراین هنوز برای دو مجهول، دو معادله نداریم، ... فکر می‌کنید داریم؟ عبارت  $\frac{dv}{dt}$  همچون جریان خازن است، زیرا:

$$i_C = C \frac{dv}{dt}$$

قانون جریان کیر شیف در هر لحظه از زمان صادق است و بر اصل بقا الکترون مبتنی است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$-i_C(0) + i(0) + i_R(0) = 0$$

با جایگزینی عبارت جریان خازن و تقسیم بر  $C$  داریم:

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i(0) + i_R(0)}{C} = \frac{i(0)}{C} = 420 \text{ V/s}$$

چون به علت ولتاژ صفر اولیه در دو سر مقاومت، جریان اولیه صفر است، بنابراین دومین معادله چنین خواهد بود:

$$420 = -A_1 - 6A_2 \quad (9B)$$

از حل همزمان معادلات (۱۵) و (۱۶) دو دامنه  $A_1 = 84$  و  $A_2 = -84$  به‌دست می‌آیند. به این ترتیب حل عددی نهایی پاسخ طبیعی مدار برابر است با:

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t}) \text{ V} \quad (9V)$$

عبارتی برای  $v_C(t)$  برای  $t > 0$  در مدار شکل ۹-۳ پیدا کنید.

هدف مسئله را شناسایی کنید.

از ما خواسته شده است تا ولتاژ خازن را پس از پرتاب سوئیچ پیدا کنیم. این عمل منجر به حذف منابع متصل به القاگر و خازن می‌گردد؛ بنابراین انتظار داریم  $v_C$  در طول زمان میرا شود.

اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

پس از پرتاب سوئیچ، خازن با مقاومت  $200 \Omega$  و القاگر  $5 \text{ mH}$  (شکل ۹-۳ (ب)) موازی می‌شود. بنابراین  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 100,000 \text{ rad/s}$ ،  $\alpha = 1/2RC = 125,000 \text{ s}^{-1}$ ،  $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -50,000 \text{ s}^{-1}$  و  $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -200,000 \text{ s}^{-1}$  خواهد شد.

ارائه طرح.

چون  $\alpha > \omega_0$  است، مدار فوق میرا است و لذا انتظار داریم ولتاژ خازن چنین باشد:

$$v_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

ما  $s_1$  و  $s_2$  را می‌دانیم. برای تعیین  $A_1$  و  $A_2$  لازم است دو مقدار اولیه داشته باشیم. برای این کار، ما مدار را در  $t = 0^-$  (شکل ۹-۴ (الف)) تحلیل می‌نماییم تا  $i_L(0^-)$  و  $v_C(0^-)$  را پیدا کنیم. آن‌گاه مدار را در  $t = 0^+$  تحلیل خواهیم کرد، با این فرض که هیچ مقداری عوض نشود.

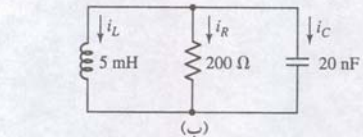
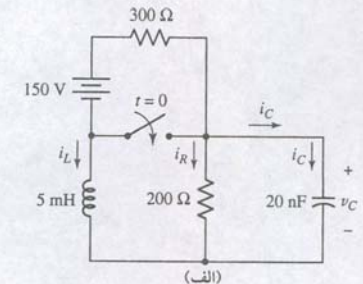
معادلات مناسب را بنویسید.

از شکل ۹-۴ (الف) که در آن القاگر با یک مدار اتصال کوتاه و خازن با یک مدار باز جایگزین شد، می‌بینیم که:

$$i_L(0^-) = -\frac{150}{200 + 300} = -300 \text{ mA}$$

برای تداوم بحث در مدارهای RLC برای یافتن یک جواب کامل به دو شرط اولیه نیاز داریم. یکی از این شرایط یعنی ولتاژ یا جریان معمولاً به سادگی در  $t = 0$  به‌دست می‌آید. تعیین شرط اولیه دوم کمی دردسر دارد. ولی همیشه یک مقدار اولیه ولتاژ و یک مقدار اولیه جریان داریم که یکی از آن‌ها را باید به‌طور غیرمستقیم به مشتق اعمال کنیم.

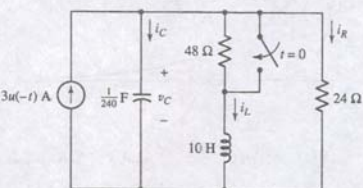
## مثال ۹-۲



شکل ۹-۳ (الف) مدار RLC تحلیل‌شده در  $t = 0$  مثال ۹-۲. (ب) مدار در  $t > 0$ ، منبع  $150 \text{ V}$  و مقاومت  $300 \Omega$  از مدار خارج شده‌اند.

## تمرین

## مثال ۹-۳



شکل ۹-۵



آن‌ها که همان پاسخ کامل  $v(t)$  است، نشان داده شده است. منحنی‌ها پیش‌بینی قبلی ما را تأیید می‌کنند که در آن رفتار  $v(t)$  در درازمدت به صورت  $84e^{-t}$  یعنی جمله نمایی با دامنه کوچک‌تر  $s_1$  و  $s_2$  می‌باشد.

سوال دیگری که غالباً مطرح می‌شود این است که بخش گذرا چقدر تداوم دارد. در عمل گاهی بهتر است زمان گذرا هرچه سریع‌تر به سمت صفر میل کند. البته از نظر تئوری  $t_d$  برابر بینهایت است، زیرا  $v(t)$  هرگز در زمان معین به صفر نشست نمی‌کند. با این وجود یک پاسخ ناچیز، پس از نشست  $v(t)$  به کمتر از 1% مقدار ماکزیمم مطلق  $|v_m|$ ، قابل چشم‌پوشی است. زمان رخداد این مقدار را زمان نشست می‌نامیم. چون در مثال فوق  $|v_m| = v_m = 48.9V$  است، زمان نشست برای پاسخ همان زمان رسیدن به  $0.489V$  است. از جایگزینی این مقدار در معادله (۱۷) و چشم‌پوشی از دومین جمله نمایی، زمان نشست برابر  $5.15s$  خواهد بود.

## مثال ۹-۴

برای  $t > 0$ ، جریان خازن یک مدار RLC موازی بی‌منبع با رابطه  $i_C(t) = 2e^{-2t} - 4e^{-t}$  A داده شده است.

ما ابتدا دو جمله را طبق شکل ۹-۹ ترسیم کرده و سپس برای یافتن  $i_C(t)$  آن‌ها را از هم کم می‌کنیم. بنابراین باید زمانی را یافت که در آن  $|i_C|$  به  $20$  mA تقلیل یافته است یا

$$2e^{-2t_s} - 4e^{-t_s} = -0.02 \quad (۲۱)$$

این معادله را می‌توان با روال تکرار روی یک ماشین حساب علمی حل کرد که در این صورت پاسخ  $s = 5.296$  را به دست می‌دهد. اما اگر چنین وسیله‌ای در اختیار نبود می‌توان معادله (۲۱) را برای  $t \geq t_s$  به صورت زیر تقریب کرد:

$$-4e^{-t_s} = -0.02 \quad (۲۲)$$

از حل آن‌ها داریم:

$$t_s = -\ln\left(\frac{0.02}{4}\right) = 5.298 \text{ s} \quad (۲۳)$$

که به خوبی به حل دقیق نزدیک است (با دقت 0.1%).

۹-۴ (الف)  $v_R(t) = 2e^{-t} - 4e^{-3t}$  V را در محدوده  $0 < t < 5$  رسم کنید. (ب) زمان نشست را محاسبه نمایید. (ج) حداکثر ماکزیمم و زمان رخداد آن را محاسبه نمایید. جواب: (الف) شکل ۹-۱۰، (ب)  $4.605$  s و (ج)  $544$  mV و  $896$  ms.

## ۹-۳ میرای بحرانی

حالت فوق میرا با روابط زیر شناسایی می‌شود:

$$\alpha > \omega_0$$

$$LC > 4R^2C^2$$

که منجر به دو مقدار حقیقی منفی  $s_1$  و  $s_2$  شده و پاسخ نیز جمع جبری دو مقدار نمایی منفی می‌باشد. اکنون اجازه بدهید تا مقادیر  $\alpha$  و  $\omega_0$  را طوری تنظیم کنیم که برابر شوند. این حالت بسیار خاصی، به نام میرای بحرانی است. اگر ما بخواهیم واقعاً مدار RLC را به صورت مدار بحرانی طراحی کنیم، تلاشی بیهوده انجام داده‌ایم زیرا برابری  $\alpha$  و  $\omega_0$  غیرممکن است. نتیجه چنین تلاشی این است که نهایتاً به یک مدار فوق میرا یا زیرمیرا که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت دست یابیم.

برای تعیین مقادیر عددی  $A_1$  و  $A_2$ ، ابتدا مدار را در  $t = 0^-$  تحلیل می‌کنیم (شکل ۹-۶ ب)). می‌بینیم که:  $i_L(0^-) = i_R(0^-) = 4/32 \times 10^3 = 125 \mu A$  و  $v_C(0^-) = 4 \times 30/32 = 3.75$  V.

در ترسیم مدار در  $t = 0^+$  ما فقط  $i_L(0^+) = 125 \mu A$  و  $v_C(0^+) = 3.75$  V را داریم (شکل ۹-۶ ج)). با این وجود، بنا به قانون اهم می‌توانیم اولین مقدار اولیه خود را محاسبه کنیم، بنابراین:  $i_R(0^+) = 3.75/30 \times 10^3 = 125 \mu A$ .

$$i_R(0) = A_1 + A_2 = 125 \times 10^{-6} \quad (۱۹)$$

و اما دومین مقدار اولیه را چگونه به دست آوریم؟ اگر ما معادله (۱۸) را در  $30 \times 10^3$  ضرب کنیم، عبارتی برای  $v_C(t)$  به دست می‌آید. با گرفتن مشتق و ضرب در  $2$  pF عبارت  $i_C(t)$  حاصل می‌گردد:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = (2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t})$$

به وسیله KCL،

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0$$

بنابراین:

$$-(2 \times 10^{-12})(30 \times 10^3)(3.063 \times 10^6 A_1 + 13.60 \times 10^6 A_2) = 0 \quad (۲۰)$$

با حل معادلات (۱۹) و (۲۰) داریم  $A_1 = 161.3 \mu A$  و  $A_2 = -36.34 \mu A$ . پس:

$$i_R = \begin{cases} 125 \mu A, & t < 0 \\ 161.3e^{-3.063 \times 10^6 t} - 36.34e^{-13.6 \times 10^6 t} \mu A, & t > 0 \end{cases}$$

۹-۳ جریان  $i_R$  در مقاومت شکل ۹-۷ را برای  $t > 0$  تعیین کنید، اگر  $i_L(0^-) = 6$  A و  $v_C(0^+) = 0$  V باشد. آرایش مدار قبل از  $t = 0$  نامشخص است.

$$i_R(t) = 6.008(e^{-8.328 \times 10^{10} t} - e^{-6.003 \times 10^7 t}) \text{ A}, t > 0$$

## نمایش گرافیکی پاسخ فوق میرا

بگذارید به معادله (۱۷) بازگردیم و ببینیم چه اطلاعات اضافی در مورد این مسئله می‌توان معین کرد. می‌توانیم معادله را چنین تفسیر کنیم که جمله اول آن دارای ثابت زمانی  $1$  s و جمله دوم  $\frac{1}{6}$  s است. هر کدام از آن‌ها با دامنه واحد شروع می‌شوند ولی دومی سریع‌افت می‌کند. پس  $v(t)$  هرگز منفی نمی‌شود. با گذشت زمان، هر یک از آن‌ها به سمت صفر میل می‌کنند و پاسخ همان‌طور که باید، می‌میرد. بنابراین پاسخ در  $t = 0$  و  $t = \infty$  برابر صفر است و هرگز منفی هم نمی‌شود و چون هیچ‌وقت در میان این دو فاصله صفر نمی‌شود باید از خود حداکثری به نمایش بگذارید که تعیین آن کار چندان مشکلی نیست. از پاسخ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dv}{dt} = 84(-e^{-t} + 6e^{-6t})$$

برای تعیین زمان  $t_m$  که در آن ولتاژ حداکثر می‌گردد، مشتق را برابر صفر می‌گیریم:

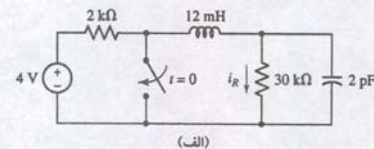
$$0 = -e^{-t_m} + 6e^{-6t_m}$$

$$e^{5t_m} = 6$$

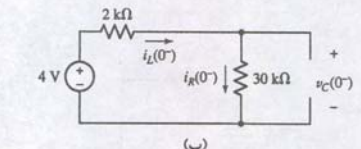
و در نتیجه:

$$t_m = 0.358 \text{ s} \quad \text{و} \quad v(t_m) = 48.9 \text{ V}$$

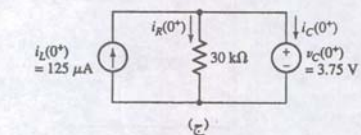
از دو نمودار نمایی  $84e^{-t}$  و  $84e^{-6t}$  و سپس تعیین تفاضل آن‌ها می‌توان منحنی پاسخ را به دست آورد. مزیت این تکنیک در شکل ۹-۸ نشان داده شده است. در این شکل هر دو نمودار و تفاضل



(الف)



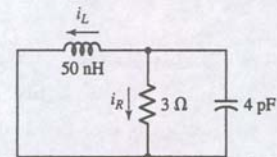
(ب)



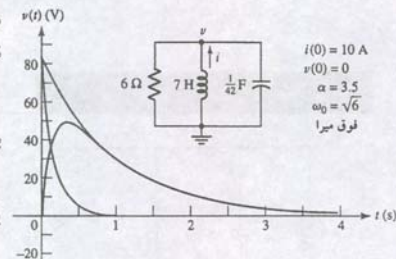
(ج)

شکل ۹-۶ (الف) مداری که  $i_R$  برای آن خواسته شده است. (ب) مدار معادل برای  $t = 0^-$ . (ج) مدار معادل برای  $t = 0^+$ .

## تمرین



شکل ۹-۷



شکل ۹-۸ پاسخ  $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$  در مدار شکل ۹-۲.



$$v = A_1 t e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

برای یافتن مقادیر  $A_1$  و  $A_2$  ابتدا مقدار اولیه را به  $v(t)$  اعمال می‌کنیم، یعنی  $v(0) = 0$ . پس  $A_2 = 0$  خواهد بود. این حالت ساده از صفر بودن مقدار اولیه پاسخ  $v(t)$  ناشی می‌شود. در حالت کلی چنین نیست و برای یافتن ضرایب باید دو معادله همزمان را حل کرد. دومین مقدار اولیه باید، همچون حالت فوق میرا به مشتق  $\frac{dv}{dt}$  اعمال گردد. بنابراین با به‌خاطر سپردن  $A_2$  از پاسخ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dv}{dt} = A_1 t (-\sqrt{6}) e^{-\sqrt{6}t} + A_1 e^{-\sqrt{6}t}$$

که در  $t = 0$  آن را حساب می‌کنیم:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = A_1$$

آنگاه مشتق را برحسب جریان اولیه خازن بیان می‌کنیم:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_R(0)}{C} + \frac{i(0)}{C}$$

که جهات مرجع برای  $i_C$ ،  $i_R$  و  $i$  در شکل ۹-۲ تعریف شده‌اند. بنابراین:

$$A_1 = 420V$$

و بنابراین پاسخ چنین خواهد بود:

$$v(t) = 420te^{-2.45t} \quad (25)$$

### نمایش گرافیکی پاسخ میرای بحرانی

قبل از ترسیم این پاسخ اجازه بدهید تا با استدلال‌های کیفی شکل آن را حدس بزنیم. مقدار اولیه صفر بود و پاسخ معادله (۲۵) به دست آمد. چون  $e^{-2.45t}$  فرم مبهمی دارد به راحتی می‌توان دریافت که در زمانی طولانی پاسخ به سمت صفر میل کند. ولی این مانع جزئی را می‌توان با اجرای قانون هوپیتال مرتفع کرد. پس:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 420 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{2.45t}} = 420 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2.45e^{2.45t}} = 0$$

مجدداً پاسخی داریم که از صفر شروع و به صفر ختم می‌گردد و در بقیه زمان مقدار مثبتی را دارا است. دوباره مقدار حداکثر  $v_m$  در  $t_m$  درخ می‌دهد. برای این مثال،

$$v_m = 63.1V \quad \text{و} \quad t_m = 0.408s$$

این حداکثر، بزرگتر از مقدار مشابه در حالت فوق میرا است و دلیل آن اتلاف کوچک‌تر در مقاومت R است. زمان پاسخ حداکثر کمی دیرتر از فوق میرا است. زمان نشست نیز از حل زیر به دست می‌آید:

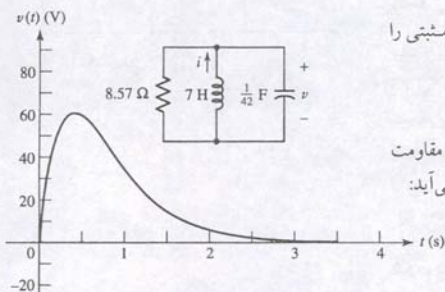
$$\frac{v_m}{100} = 420t_s e^{-2.45t_s}$$

که با روش سعی و خطا داریم:

$$t_s = 3.12s$$

که به مقدار قابل ملاحظه‌ای کوچک‌تر از  $t_s$  در حالت فوق میرا (5.15s) است. در واقع می‌توان نشان داد که برای مقادیر معین L و C و مقدار انتخابی R، زمان نشست حالت میرای بحرانی از زمان نشست حالت فوق میرا کمتر است. البته اگر مقاومت را بانی کم کردن زمان نشست، کمی بیشتر کنیم، پاسخ زیر میرا خواهیم داشت که فرو جهشی به زیر محور صفر داشته و در زمان کوتاه‌تری نشست می‌کند.

منحنی پاسخ میرای بحرانی در شکل ۹-۱۱ ملاحظه می‌شود. می‌توان آن را با حالت فوق میرا، طبق شکل ۹-۱۶ مقایسه نمود.



شکل ۹-۱۱ پاسخ  $v(t) = 420te^{-2.45t}$  مدار شکل ۹-۲ که در آن مقدار R تغییر کرده است تا پاسخ میرای بحرانی حاصل شود.



در هر صورت به منظور تکمیل بررسی، مدار میرای بحرانی را در این جا مطالعه می‌کنیم، زیرا گذر جالبی را بین فوق میرا و زیر میرا به نمایش می‌گذارد. میرای بحرانی تحت شرایط زیر اتفاق می‌افتد:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \omega_0 \\ LC &= 4R^2C^2 \\ L &= 4R^2C \end{aligned} \right\} \text{ میرای بحرانی}$$

می‌توان میرای بحرانی را با تغییر مقدار هر یک از سه عنصر در مثال عددی آغاز بخش ۹-۱ تولید نمود. ما R را انتخاب کرده و مقدار آن را تا رسیدن به حالت میرای بحرانی افزایش می‌دهیم. ضمن این‌که  $\omega_0$  را بدون تغییر رها می‌نماییم. مقدار R لازم برابر است با،  $7\sqrt{6}/2\Omega$ ، همان C و  $7H$  در  $F = \frac{1}{42}$  باقی می‌ماند. بنابراین داریم:

$$\alpha = \omega_0 = \sqrt{6} s^{-1}$$

$$s_1 = s_2 = -\sqrt{6} s^{-1}$$

به خاطر می‌آوریم که مقادیر اولیه  $v(0) = 0$  و  $i(0) = 10A$  می‌باشند.

### فرم پاسخ میرای بحرانی

در راستای یافتن پاسخی که از جمع دو جمله نمایی حاصل می‌شود به کار خود ادامه می‌دهیم:

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_1 e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_3 e^{-\sqrt{6}t}$$

در این جا فکر می‌کنیم که به بیراهه رفته‌ایم. زیرا پاسخی که تنها یک ثابت دلخواه دارد، ولی دو مقدار اولیه  $v(0) = 0$  و  $i(0) = 10A$  موجود است و هر دو آن‌ها باید توسط یک ثابت تأیید شوند. اگر  $A_3 = 0$  را انتخاب کنیم، آنگاه  $v(0) = 0$  است که با ولتاژ اولیه خازن یکی است. معهداً اگر چه هیچ انرژی در  $t = 0^+$  در خازن ذخیره نشده است ولی 350J انرژی ذخیره شده در القاگر داریم. این انرژی موجب تولید جریان گذرای به خارج از القاگر می‌شود که در این صورت ولتاژ غیر صفری را در دو سر هر سه قطعه ایجاد خواهد کرد.

به نظر می‌رسد که این وضع به کلی با حل پیشنهادی مادر تضاد است. قوانین ریاضی و الکتریکی بی‌اشکالند پس اگر در رسیدن به مشکل دچار اشتباه هم نشده باشیم، باید با فرضیات غلطی شروع کرده باشیم. اولین فرض این بود که حل معادله دیفرانسیل نمایی است و در این جا به نظر می‌رسد که چنین نیست. وقتی  $\alpha = \omega_0$  شود، معادله دیفرانسیل (۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv}{dt} + \alpha^2 v = 0$$

حل این معادله کار مشکلی نیست، ولی در این جا راجع به آن بحثی نمی‌کنیم، زیرا معادله از نوع استاندارد است و در هر کتاب معادله دیفرانسیل می‌توان آن را یافت. حل برابر است با:

$$v = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2) \quad (24)$$

باید توجه داشت که حل هنوز هم از دو جمله نمایی تشکیل شده است که اولی همان تابع نمایی آشنا و دیگری تابعی ضربدر t است. ضمناً توجه داریم که حل حاوی دو ثابت اختیاری است.

### یافتن مقادیر $A_1$ و $A_2$

اکنون اجازه بدهید تا مثال عددی خود را دنبال کنیم. بعد از جایگزینی مقدار معلوم  $\alpha$  در معادله (۲۴) داریم:



## مثال ۹-۵

مقداری را برای  $R_1$  چنان انتخاب کنید که مدار شکل ۹-۱۲ پاسخ میرای بحرانی را در  $t > 0$  داشته باشد، همچنین  $R_2$  را چنان برگزینید که  $v(0) = 2\text{ V}$  باشد.

توجه داریم که منبع جریان در  $t = 0^-$ ، وصل است و القاگر را می توان به عنوان مدار اتصال کوتاه تصور کرد. بنابراین  $v(0^-)$  که در دو سر  $R_2$  ظاهر می گردد از رابطه زیر به دست می آید:

$$v(0^-) = 5R_2$$

و برای  $v(0) = 2\text{ V}$  باید  $R_2$  را به اندازه  $400\text{ m}\Omega$  اختیار کنیم.

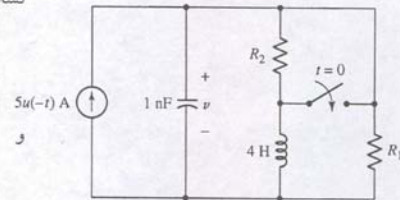
پس از پرتاب سویچ، منبع جریان قطع می شود (از لحظه  $t = 0$  به بعد) و مقاومت  $R_2$  هم اتصال کوتاه می گردد. اینک یک مدار RLC موازی داریم که از  $R_1$ ، القاگر  $4\text{ H}$  و خازن  $1\text{ nF}$  تشکیل شده است.

اکنون ممکن است برای  $t > 0$  محاسبات زیر را انجام دهید:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \times 10^{-9} R_1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-9}}} = 15,810\text{ rad/s}$$

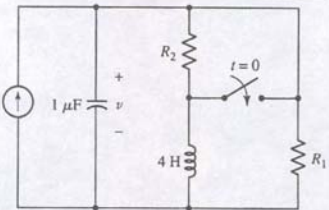
بنابراین برای ایجاد یک پاسخ میرای بحرانی در مدار برای  $t > 0$ ، لازم است  $R_1 = 31.63\text{ k}\Omega$  باشد (توجه: چون ما تا چهار رقم اعشار را گرد کرده ایم ممکن است این بحث پیش آید که این یک پاسخ میرای بحرانی نیست که در واقع وضعیتی سخت را ایجاد کرده است).



شکل ۹-۱۲ مداری که پس از پرتاب سوئیچ به یک RLC موازی تبدیل می گردد.

## تمرین

۹-۵ الف)  $R_1$  را در شکل ۹-۱۳ طوری انتخاب کنید که پاسخ پس از  $t = 0$  میرای بحرانی باشد. (ب) سپس  $R_2$  را طوری انتخاب نمایید که  $v(0) = 100\text{ V}$  باشد. (ج)  $v(t)$  را در  $t = 1\text{ ms}$  پیدا کنید. جواب:  $212\text{ V}$  و  $250\Omega$ ،  $1\text{ k}\Omega$ .



شکل ۹-۱۳

## ۹-۴ مدار RLC موازی زیرمیرا

بیا باید با افزایش  $R$  در بخش ۹-۳، روال را ادامه دهیم تا پاسخی به نام پاسخ زیرمیرا حاصل گردد. بنابراین ضریب میرایی  $\alpha$  کاهش می یابد و چون  $\omega_0$  ثابت است، لذا  $\alpha^2$  کوچک تر از  $\omega_0^2$  خواهد شد در نتیجه زیر رادیکال در عبارات مربوطه منفی خواهد شد. این شرایط موجب می شود تا پاسخ ویژگی کاملاً متفاوتی را داشته باشد ولی خوشبختانه لازم نیست که باز هم به سراغ معادله دیفرانسیل اولیه برویم. با استفاده از اعداد مختلط تابع نمایی را به تابع سینوسی میرا تبدیل می کنیم. این پاسخ کلاً از کمیات حقیقی تشکیل شده است و اعداد مختلط تنها در به دست آوردن آن ها نقش دارند.

## فرم پاسخ زیرمیرا

با فرم نمایی زیر بحث را آغاز می کنیم:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

که

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

و سپس:

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

که  $\sqrt{-1} = j$  است.

مهندسين برق برای نشان دادن  $\sqrt{-1}$  از  $j$  استفاده می کنند نه  $i$ ، تا با نماد جریان اشتباه نشود.

۴ مدارهای سری و موازی RLC بسته به مقدار نسبی  $R$ ،  $L$  و  $C$  به سه دسته تقسیم می شوند:

|              |                       |
|--------------|-----------------------|
| فوق میرا     | $(\alpha > \omega_0)$ |
| میرای بحرانی | $(\alpha = \omega_0)$ |
| زیرمیرا      | $(\alpha < \omega_0)$ |

۴ برای مدارهای RLC سری،  $\alpha = R/2L$  و  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  است.

۴ برای مدارهای موازی RLC،  $\alpha = 1/2RC$  و  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  است.

۴ فرم نمونه یک پاسخ فوق میرا مجموع دو تابع نمایی است که یکی از آن ها سریع تر از دیگری میرا می شود. مثل  $A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t}$ .

۴ فرم نمونه یک پاسخ میرای بحرانی تابعی نمایی، همچون  $e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$  است.

۴ فرم نمونه یک پاسخ زیرمیرا پاسخی سینوسی میرا است: یعنی  $e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$ .

۴ در حین پاسخ گذاری یک مدار RLC، انرژی بین عناصر ذخیره کننده انرژی به میزانی که مقاومت مدار اجازه بدهد، انتقال می یابد. این مقاومت انرژی ذخیره شده اولیه را تلف می کند.

۴ پاسخ کامل برابر است با مجموع پاسخ واداشته و پاسخ طبیعی. در این حالت قبل از یافتن ثابت ها باید حل کامل به دست آید.

## ۹-۹ خواندنی های کمکی

An excellent discussion of employing PSpice in the modeling of automotive suspension systems can be found in

R.W. Goody, *MicroSim PSpice for Windows*, vol. I, 2<sup>nd</sup> ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1998.

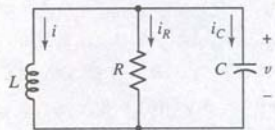
Many detailed descriptions of analogous networks can be found in Chap. 3 of

E. Weber, *Linear Transient Analysis Volume I*. New York: Wiley, 1954. (Out of print, but in many university libraries.)

## مسائل

## ۹-۱ مدار موازی بدون منبع

۱. مداری از چهار عنصر موازی ساخته شده است: یک مقاومت  $4\text{ }\Omega$ ، یک مقاومت  $10\text{ }\Omega$ ، یک خازن  $1\text{ }\mu\text{F}$  و یک القاگر  $2\text{ mH}$ . (الف)  $\alpha$  را محاسبه کنید. (ب)  $\omega_0$  را محاسبه نمایید. (ج) آیا مدار زیرمیرا، میرای بحرانی، یا فوق میرا است؟ توضیح دهید.
۲. یک مدار RLC موازی با القاکنایی  $2\text{ H}$  و ظرفیت  $1\text{ pF}$  موجود است. چه مقدار مقاومتی باید به طور موازی وصل شود تا موارد ذکر شده تضمین شود. (الف) پاسخ زیرمیرا؛ (ب) پاسخ میرای بحرانی.
۳. یک مدار RLC بدون منبع دارای  $R = 1\text{ }\Omega$ ،  $C = 1\text{ nF}$  و  $L = 1\text{ pH}$  است. (الف)  $\alpha$  و  $\omega_0$  را محاسبه نمایید. (ب)  $s_1$  و  $s_2$  را محاسبه کنید. (ج) فرم پاسخ جریان القاگر برای  $t > 0$  چگونه است؟
۴. یک خازن  $22\text{ aF}$  به طور موازی با یک القاگر  $1\text{ fH}$  وصل است. چه مقاومتی که با آن ها موازی شود منجر به یک (الف) پاسخ زیرمیرا می شود؛ (ب) پاسخ میرای بحرانی می گردد؛ (ج) پاسخ فوق میرا خواهد شد؟
۵. یک مدار بی منبع RLC موازی دارای القاگری است که برای آن  $\omega_0 L = 10\text{ }\Omega$  می باشد. اگر  $s_1 = -6s^{-1}$  و  $s_2 = -8s^{-1}$  باشد، مطلوب است  $R$  و  $C$ .
۶. جریان خازن در مدار شکل ۹-۳۸ برابر  $i_C(t) = 40e^{-100t} - 30e^{-200t}$  است. اگر  $C = 1\text{ mF}$  و  $v(0) = -0.5\text{ V}$  باشد، مطلوب است (الف)  $v(t)$ ، (ب)  $i_R(t)$  و (ج)  $i(t)$ .



شکل ۹-۳۸

۷. یک مدار RLC موازی دارای فرکانس پاسخ طبیعی  $\omega_0 = 70.71 \times 10^{12}\text{ rad/s}$  است. مقدار القاکنایی  $L = 2\text{ pH}$  فرض



و در  $t = 0$  داریم:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \sqrt{2} B_2 = \frac{i_C(0)}{C} = 420$$

که  $i_C$  در معادله ۹-۲ تعریف شد. بنابراین:

$$v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$

### نمایش گرافیکی پاسخ زیر میرا

همچون گذشته، دقت کنید که تابع پاسخ دارای یک مقدار اولیه صفر است زیرا ولتاژ اولیه را ما خود اعمال کرده‌ایم و نیز مقدار نهایی حاصل از جمله نمایی هم در زمان طولانی صفر می‌گردد. با افزایش  $t$  از صفر به مقدار مثبت کوچک،  $v(t)$  به صورت  $210\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$  تغییر می‌کند زیرا بخش نمایی حدود واحد است. مدتی بعد در زمان  $t_m$ ، جمله نمایی سریع‌تر از افزایش جمله  $\sin\sqrt{2}t$  شروع به کاهش می‌کند. بنابراین  $v(t)$  به حداکثر  $v_m$  رسیده و سپس شروع به کاهش می‌کند. دقت کنید که  $t_m$  زمان رسیدن جمله سینوسی  $\sin\sqrt{2}t$  به حداکثر نیست، بلکه کمی قبل از آن است.

در  $t = \pi/\sqrt{2}$ ،  $v(t) = 0$  است. بنابراین در فاصله  $\pi/\sqrt{2} < t < \sqrt{2}\pi$  پاسخ منفی می‌شود و دوباره در  $t = \sqrt{2}\pi$ ، صفر می‌گردد. بنابراین  $v(t)$  تابعی نوسانی نسبت به زمان بوده و محور زمان را بی‌نهایت دفعه در  $t = n\pi/\sqrt{2}$  قطع می‌کند، که  $n$  یک عدد صحیح مثبت است. در هر حال در مثال ما، پاسخ کمی زیر میرا است و جمله نمایی موجب می‌شود تا تابع خیلی سریع میرا شود و نقاط قطع صفر در نمودار مشاهده نمی‌شوند.

طبیعت نوسانی پاسخ، با کاهش  $\alpha$ ، جالب‌تر است. اگر  $\alpha$  صفر باشد، که متعلق به مقاومت بی‌نهایت بزرگی است،  $v(t)$  یک موج سینوسی نامیرا خواهد بود. زمانی وجود ندارد که  $v(t)$  که به زیر یک درصد مقدار حداکثرش افت کرده و در آن باقی بماند و بنابراین زمان نشست بی‌نهایت است. این حرکت را با حرکت دائمی اشتباه نگیرید. ما یک انرژی اولیه فرض کرده‌ایم بدون آن‌که در مدار مصرف شود. این انرژی از محل اولیه خود در القاگر به خازن منتقل شده و سپس دوباره به القاگر باز می‌گردد و این حرکت تا ابد ادامه دارد.

### نقش مقاومت محدود

مقاومت معین  $R$  در مدار RLC نقش یک دلال را دارد. هر زمان که انرژی از  $L$  به  $C$  یا از  $C$  به  $L$  انتقال پیدا کند، دلال کمیسیون خود را برمی‌دارد. در درازمدت دلال همه انرژی را تصاحب می‌کند و تاژول آخرش مصرف می‌نماید. دیگر ژولی برای  $L$  و  $C$  باقی نمی‌ماند و جریان و ولتاژ وجود نخواهد داشت. می‌توان مدارهای RLC موازی را طوری ساخت که مقدار  $R$  در آن‌ها بزرگ بوده و بنابراین پاسخ طبیعی سال‌ها باقی بماند، بدون آن‌که انرژی دیگری لازم باشد.

به مسئله عددی خاص خود باز می‌گردیم. از مشتق‌گیری اولین ماکزیمم را برای  $v(t)$  به‌دست می‌آوریم:

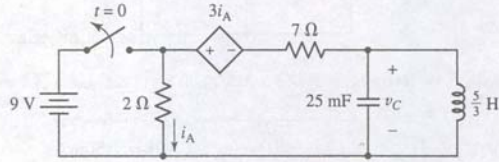
$$v_{m1} = 71.8 \text{ V}, \quad t_{m1} = 0.435 \text{ s}$$

حداقل بعدی در زمان زیر رخ می‌دهد:

$$v_{m2} = -0.845 \text{ V}, \quad t_{m2} = 2.66 \text{ s}$$

و به همین ترتیب منحنی پاسخ در شکل ۹-۱۴ ملاحظه می‌شود. منحنی‌های پاسخ دیگری برای مدارهایی که بیشتر زیر میرا هستند در شکل ۹-۱۵ ملاحظه می‌گردد.

۲۲. کلید در شکل ۹-۴۵ از مدت‌ها قبل بسته بوده است. (الف)  $i_A(0^-)$  را به‌دست‌آورید. (ب)  $i_A(0^+)$  را معین کنید. (ج)  $v_C(0^-)$  را تعیین نمایید. (د) مقاومت معادل موازی با  $L$  و  $C$  را در  $t > 0$  به‌دست‌آورید. (ه)  $i_A(t)$  را مشخص کنید.



شکل ۹-۴۵

۲۳. دو سکه با لایه‌ای از یخ به دمای  $80\text{K}$  به ضخامت  $1\text{mm}$  از یکدیگر جدا شده‌اند. یک القاگر آلبرسانا (بنابراین با مقاومت صفر) از اکسید مس با القاکنایی  $4\mu\text{H}$  در علت بی‌احتیاطی در کنار میز آزمایشگاه افتاده و طوری آویزان شده که از دو سر آن با سکه‌ها در تماس است. یخ حاوی یون‌های ناخالصی است و موجب هدایت آن می‌گردد. برای این ساختار چه مقاومتی لازم است تا مجموعه به صورت یک مدار RLC فوق میرا رفتار کند.

### ۹-۳ میرای بحرانی

۲۴. یک مدار RLC موازی با القاگر  $1\text{mH}$  و خازن  $12\mu\text{F}$  ساخته شده است. (الف)  $R$  را چنان انتخاب کنید که پاسخ میرای بحرانی باشد. (ب) اگر  $v(0^-) = 12\text{V}$  و  $i_L(0^-) = 0$  باشد، عبارتی معتبر برای  $v_C(t)$  در  $t > 0$  پیدا کنید.

۲۵. یک مدار RLC با استفاده از القاگر  $10\text{mH}$  و خازن  $1\text{mF}$  ساخته شده است. (الف) مقدار  $R$  را طوری انتخاب کنید که پاسخ مدار میرای بحرانی باشد. (ب) اگر  $v(0^-) = 0\text{V}$  و  $i_L(0^-) = 10\text{A}$  باشد عبارتی برای  $i_L(t)$  در  $t > 0$  پیدا کنید. (د) حل خود را رسم کرده و با شبیه‌سازی PSpice صحت آن را تحقیق کنید. آن را نام‌گذاری نمایید. آیا دو حل یکی هستند.

۲۶. بگویید چرا کمتر اتفاق می‌افتد که کسی در عمل با مدار میرای بحرانی مواجه شود.

۲۷. مقدار القاکنایی شکل ۹-۴۱ را تا زمانی که مدار به صورت میرای بحرانی است تغییر دهید. (الف) القاکنایی جدید چقدر است. (ب)  $i_L$  را در  $t = 5\text{ms}$  به‌دست‌آورید. (ج) زمان نشست را معین کنید.

۲۸. (الف) در شکل ۹-۴۰ چه مقاومتی باید به‌کار رود تا میرای بحرانی حاصل گردد؟ (ب) با این مقدار مقاومت،  $v_C(t)$  را برای  $t > 0$  معین کنید.

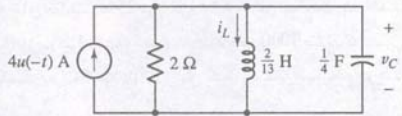
۲۹. در وضعیتی که برای مسئله ۲۳ مشاهده شد، مقاومت یخ چقدر باشد تا پاسخ مدار RLC، میرای بحرانی باشد.

۳۰. در مدار شکل ۹-۳۹، فرض کنید  $v(0) = -400\text{V}$  و  $i(0) = 0.1\text{A}$  است. اگر  $L = 5\text{mH}$  و  $C = 10\text{nF}$  و مدار میرای بحرانی باشد. (الف)  $R$  را پیدا کنید. (ب)  $|i|_{\max}$  و (ج)  $i_{\max}$  را به‌دست‌آورید.

۳۱. در یک مدار RLC موازی پاسخ از نوعی میرای بحرانی با  $\alpha = 1\text{ms}^{-1}$  و  $R = 1\text{m}\Omega$  است. فرض کنید که مقدار القاگر از عبارت  $L = \mu\text{N}^2\text{A/s}$  محاسبه شود که در آن  $\mu = 4\pi \times 10^{-7}\text{H/m}$  تعداد دور کامل سیم پیچ،  $A$  نیز سطح مقطع آن و  $s$  طول کل سیم پیچ است. سطح مقطع القاگر  $1\text{cm}^2$  است و در هر سانتیمتر 50 دور سیم وجود دارد. سیم پیچ از عنصر گلوئیم ساخته شده که تا  $100^\circ\text{F}$  آلبرسانا است. طول سیم پیچ چقدر است؟

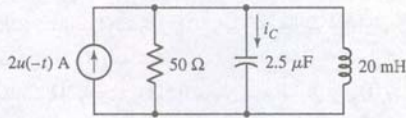
### ۹-۴ مدار RLC موازی زیر میرا

۳۲. برای مدار شکل ۹-۴۶، (الف)  $i_L(0^+)$ ، (ب)  $v_C(0^+)$ ، (ج)  $\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+}$ ، (د)  $\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+}$ ، (ه)  $v(t)$  را پیدا کنید. (و) منحنی  $v_C(t)$  در  $-1\text{s} < t < 2\text{s}$  رسم نمایید.



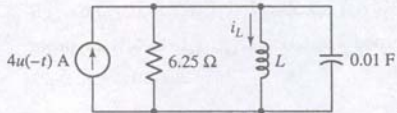
شکل ۹-۴۶

۳۳.  $i_C(t)$  را برای  $t > 0$  در شکل ۹-۴۷ پیدا کنید.



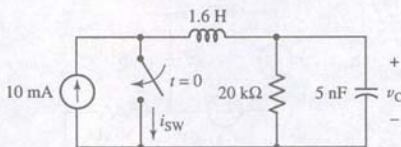
شکل ۹-۴۷

۳۴. فرض کنید در شکل ۹-۴۸ مقدار  $\omega_d = 6\text{rad/s}$  باشد. (الف)  $L$  را بیابید. (ب) عبارتی برای  $i_L(t)$  در همه زمان‌ها بیابید. (ج)  $i_L(t)$  را در  $-0.1 < t < 0.6\text{s}$  به‌دست‌آورید.



شکل ۹-۴۸

۳۵. کلید در شکل ۹-۴۹ از مدت‌ها قبل باز بوده است. در  $t = 0$  کلید را می‌بندیم. برای  $t > 0$ ، (الف)  $v_C(t)$  و (ب)  $i_{sw}(t)$  را به‌دست‌آورید.



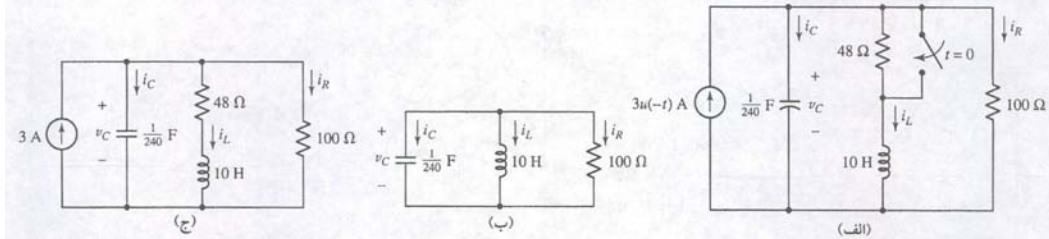
شکل ۹-۴۹

۳۶. (الف) در مدار شکل ۹-۵۰،  $v(t)$  را در  $t > 0$  بیابید. (ب) در فاصله  $0 < t < 0.1\text{s}$ ،  $v(t)$  را رسم نمایید.



## مثال ۹-۶

در مدار شکل ۹-۱۷ الف)  $i_L(t)$  را معین کرده و شکل موج را رسم کنید.



شکل ۹-۱۷ الف) مدار RLC موازی که در آن جریان  $i_L(t)$  مورد نظر است، ب) مدار در  $t \geq 0$  و ج) مدار برای تعیین مقادیر اولیه.

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad (28)$$

که  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 4.750 \text{ rad/s}$  است. تنها مرحله باقیمانده استفاده از مقادیر اولیه در تعیین ثابت‌های  $B_1$  و  $B_2$  است.

شکل ۹-۱۷ ج) مدار را در  $t = 0^+$  نشان می‌دهد. ما باید به جای القاگر یک مدار کوتاه و به جای خازن یک مدار باز قرار دهیم که نتیجه می‌دهد:  $i_L(0^+) = 2.027 \text{ A}$  و  $v_C(0^+) = 97.30 \text{ V}$ . چون هیچ کدام از این دو کمیت نمی‌توانند در زمان صفر تغییر کنند، بنابراین  $i_L(0^+) = 2.027 \text{ A}$  و  $v_C(0^+) = 97.30 \text{ V}$ .

از جایگزینی  $i_L(0) = 2.027$  در معادله (۲۸) داریم  $B_1 = 2.027 \text{ A}$ . برای تعیین ثابت دیگر باید از معادله (۲۸) مشتق بگیریم:

$$\frac{di_L}{dt} = e^{-\alpha t} (-B_1 \omega_d \sin \omega_d t + B_2 \omega_d \cos \omega_d t) - \alpha e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad (29)$$

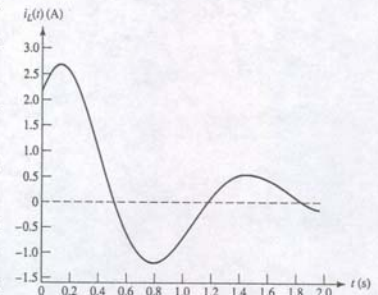
توجه دارید که  $v_L(t) = L(di_L/dt)$  است. با مراجعه به شکل ۹-۱۷ ب) می‌بینیم که  $v_L(0^+) = v_C(0^+) = 97.3 \text{ V}$ . بنابراین با ضرب معادله (۲۹) در  $L = 10 \text{ H}$  و  $t = 0$  حل نهایی برابر است با:

$$v_L(0) = 10(B_2 \omega_d) - 10\alpha B_1 = 97.3$$

با حل،  $B_2 = 2.651 \text{ A}$  خواهد شد، بنابراین:

$$i_L = e^{-1.2t} (2.027 \cos 4.75t + 2.561 \sin 4.75t) \text{ A}$$

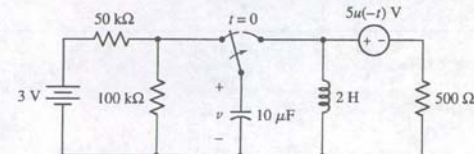
که در شکل ۹-۱۸ ترسیم شده است.



شکل ۹-۱۸ نمودار  $i_L(t)$  با علائم آشکاری از پاسخ زیرمیرا.

## تمرین

۹-۶ کلید در شکل ۹-۱۹ مدتی طولانی در وضعیت سمت چپ بوده است. در  $t = 0$  به راست برده می‌شود. مطلوب است الف)  $\frac{dv}{dt}$  در  $t = 0^+$ ، ب) مقدار  $v$  در  $t = 1 \text{ ms}$  و ج)  $t_0$ ، یعنی اولین مقدار  $t$  بزرگ‌تر از صفر که در آن  $v = 0$  باشد. جواب:  $1.609 \text{ ms}$  و  $0.695 \text{ V}$ ،  $-1400 \text{ V/s}$ .



شکل ۹-۱۹

اکنون رادیکال جدیدی داریم که مقداری است حقیقی و آن را  $\omega_d$  یا فرکانس تشدید طبیعی می‌خوانیم:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

حال پاسخ را چنین می‌توان نوشت:

$$v(t) = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \quad (26)$$

و به فرم طولی‌تر ولی معادل:

$$v(t) = e^{-\alpha t} \left\{ (A_1 + A_2) \left[ \frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2} \right] + j(A_1 - A_2) \left[ \frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j} \right] \right\}$$

با توجه به مطالب پیوست ۵ می‌بینیم که کروسه اول در معادله قبل برابر با  $\cos \omega_d t$  و دومی  $\sin \omega_d t$  است. بنابراین:

$$v(t) = e^{-\alpha t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2) \sin \omega_d t]$$

به ضرایب، سهیل جدیدی تخصیص می‌دهیم:

$$v(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad (27)$$

که معادله (۲۶) و (۲۷) معادلند.

در این جا موضوع کمی غیرعادی است زیرا عبارتی که در آغاز مولفه‌های مختلط داشت، اکنون کاملاً حقیقی است. با این وجود باید به خاطر آورید که ما در آغاز اجازه دادیم که  $A_1$  و  $A_2$  و نیز  $s_1$  و  $s_2$  مختلط باشند. در هر شرایطی، اگر با حالت زیرمیرا سروکار داشته باشیم دیگر با اعداد مختلط کاری نداریم. چون  $\alpha$ ،  $\omega_d$  و  $t$  کمیت‌های حقیقی‌اند، پس  $v(t)$  هم باید حقیقی باشد (و می‌توان آن را روی اسیلوسکوپ، ولتمتر یا یک ورق کاغذ مشاهده کرد). معادله (۲۷) فرم تابعی مطلوب را برای پاسخ زیرمیرا دارد و اعتبارش را با جایگزینی در معادله دیفرانسیل اصلی می‌توان محک زد. این تمرین را به عهده شکاکان می‌گذاریم. دو ثابت حقیقی  $B_1$  و  $B_2$  را دوباره برای تأیید شرایط اولیه انتخاب می‌کنیم.

ما به مثال ساده مدار RLC موازی شکل ۹-۲ می‌رویم که در آن  $R = 6 \Omega$ ،  $C = 1/42 \text{ F}$  و  $L = 2 \text{ H}$  است. ولی اکنون مقاومت را به  $10.5 \Omega$  افزایش می‌دهیم، بنابراین:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{6} \text{ s}^{-1} \quad \alpha = \frac{1}{2RC} = 2 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2} \text{ rad/s}$$

که جواب به صورت زیر است و تنها دو ثابت مجهول دارد:

$$v(t) = e^{-2t} (B_1 \cos \sqrt{2}t + B_2 \sin \sqrt{2}t)$$

یافتن مقادیر  $B_1$  و  $B_2$ 

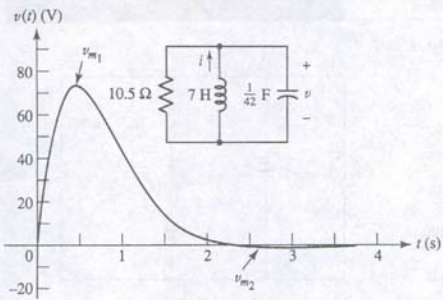
تعیین دو ثابت همانند قبل انجام می‌شود. اگر باز هم فرض کنیم  $v(0) = 0$  و  $i(0) = 10$  باشد آن‌گاه  $B_1$  باید صفر شود. بنابراین:

$$v(t) = B_2 e^{-2t} \sin \sqrt{2}t$$

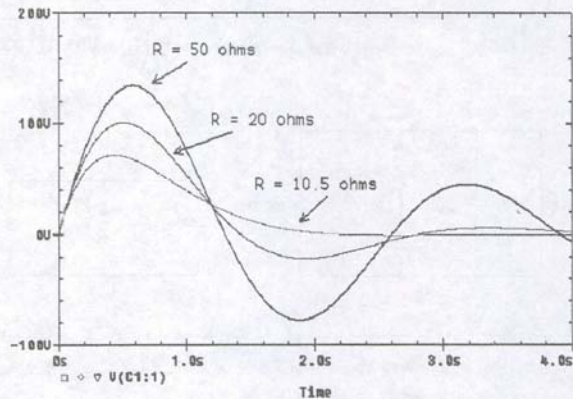
و مشتق آن برابر است با:

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{2} B_2 e^{-2t} \cos \sqrt{2}t - 2B_2 e^{-2t} \sin \sqrt{2}t$$





شکل ۹-۱۴ پاسخ  $v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$  مدار شکل ۹-۲، با افزایش R، حالت زیرمیرا حاصل می‌شود.

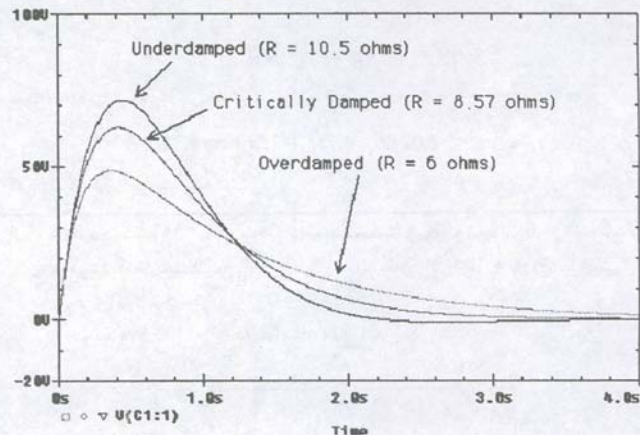


شکل ۹-۱۵ پاسخ زیرمیرای حاصل از شبیه‌سازی به‌ازای سه مقدار مقاومت متفاوت، هرچه R بزرگ‌تر باشد، رفتار نوسانی شدیدتر می‌شود.

زمان نشست باروش سعی و خطا حاصل می‌گردد که برابر 2.92s است که کمی بزرگ‌تر از میرای بحرانی است. توجه کنید که  $t_{m2}$  بزرگ‌تر از  $t_{m1}$  است زیرا  $v_{m2}$  بزرگ‌تر از یک درصد  $v_{m1}$  می‌باشد. این بررسی نشان می‌دهد که یک کاهش ناچیز در R، اندازه فروجهش را کم کرده و اجازه می‌دهد تا  $t_{m2}$  کمتر از  $t_{m1}$  گردد.

پاسخ‌های فوق میرا، میرای بحرانی و زیرمیرا برای این شبکه با PSpice شبیه‌سازی شده و در شکل ۹-۱۶ نشان داده شده‌اند. مقایسه این سه منحنی نتایج زیر را به‌دست می‌دهد.

- وقتی میزان میرایی را با افزایش اندازه R تغییر دهیم، هر چه میرایی کمتر شود، ماکزیمم پاسخ بزرگ‌تر می‌گردد.
- وقتی وضعیت زیرمیرا حاکم باشد، پاسخ نوسانی می‌شود و کمترین زمان نشست را مداری دارد که کمی زیرمیرا باشد.



شکل ۹-۱۶ پاسخ ولتاژ فوق میرا، میرای بحرانی، و زیر میرا برای مثال‌های بالا، که از تغییرات مقاومت موازی R به دست آمده است.

مدار RLC سری دوگان مدار RLC موازی است و همین کافی است تا تحلیل مدار کار ساده‌ای شود. شکل ۹-۲۱ (الف) یک مدار سری را نشان می‌دهد. معادله انتگرالی -دیفرانسیلی چنین است:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt' - v_C(t_0) = 0$$

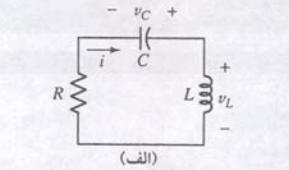
که قابل مقایسه با معادله مشابه در مدار RLC موازی است که مجدداً در شکل ۹-۲۱ (ب) ترسیم شده است:

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} v + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt' - i_L(t_0) = 0$$

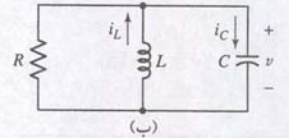
معادله دیفرانسیل درجه دوم حاصل از مشتق‌گیری زمانی دو معادله فوق هم دوگانه‌اند:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad (30)$$

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0 \quad (31)$$



(الف)



(ب)

شکل ۹-۲۱ (الف) مدار RLC سری که دوگان مدار RLC موازی (ب) است. مقادیر عناصر دو مدار یکسان نیستند.

تمام بحث‌های ما در مورد RLC موازی قابل اعمال به مدار RLC سری است، به بیان دیگر مقادیر اولیه ولتاژ خازن و جریان القاگر معادل با مقادیر اولیه جریان القاگر و ولتاژ خازن است. به این ترتیب پاسخ ولتاژ تبدیل به پاسخ جریان می‌گردد. بنابراین لازم است چهار بخش قبل را با استفاده از زبان دوگانگی بازخوانی کنید و توصیف کامل مدار RLC سری را به‌دست آورید. با این وجود این کار ممکن است پس از چند پاراگراف اول شما را کسل کند و در واقع ضروری به‌نظر نرسد.

### مروری خلاصه بر پاسخ مدار سری

مروری خلاصه بر پاسخ مدار سری را به آسانی می‌توان بیان کرد. برای مدار شکل ۹-۲۱ (الف) پاسخ فوق میرا عبارت است از:

$$i(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

که

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

و بنابراین

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

فرم پاسخ میرای بحرانی چنین است:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (A_1 t + A_2)$$

و پاسخ زیرمیرا به فرم زیر می‌باشد:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

که

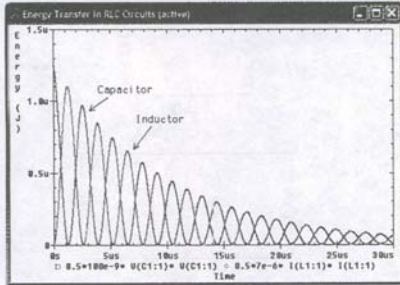
$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

واضح است که در صورت کار با پارامترهای  $\alpha$ ،  $\omega_0$  و  $\omega_d$ ، شکل ریاضی پاسخ‌ها برای وضعیت‌های دوگان یکسان خواهد بود. هر افزایشی در  $\alpha$  در هر یک از دو مدار سری یا موازی

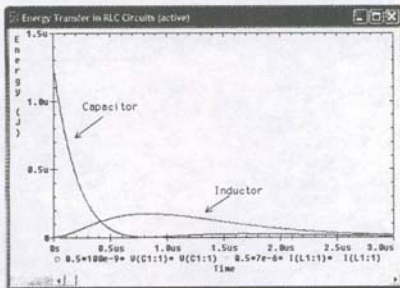




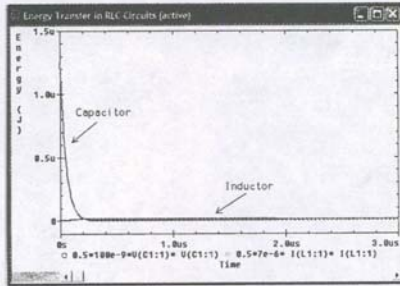
## تحلیل کامپیوتری



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۹-۲۰ انتقال انرژی در مدار RLC موازی با (الف)  $R = 100\Omega$ ، (ب)  $R = 4.1833\Omega$  و (ج)  $R = 1\Omega$ .

یک ویژگی جالب در probe امکان اجرای اعمال ریاضی روی ولتاژها و جریان‌های حاصل از شبیه‌سازی است. در این مثال، از این امکان استفاده می‌کنیم تا انتقال انرژی در یک خازن از مدار RLC، که مقدار معینی انرژی را ذخیره کرده‌است ( $1.25\mu\text{J}$ ) به یک القاگر بدون انرژی نشان دهیم.

ما القاگر را  $7\mu\text{H}$  و خازن را  $100\text{nF}$  انتخاب کرده‌ایم و به این ترتیب سلافاصله می‌توان دید که  $\omega_0 = 1.195 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$  است. برای بررسی حالات فوق میرا، میرای بحرانی و یا زیرمیرا، مقاومت موازی را طوری انتخاب کنیم که  $\alpha > \omega_0$  (فوق میرا)،  $\alpha = \omega_0$  (میرای بحرانی) و  $\alpha < \omega_0$  (زیرمیرا) باشد. از بحث قبلی می‌دانیم که برای یک مدار RLC، مقدار  $\alpha = (2RC)^{-1}$  است. به منظور نزدیکی هرچه بیشتر به حالت میرای بحرانی،  $R = 4.1823\Omega$  برمی‌گزینیم. دقیقاً نمی‌توان  $\alpha = \omega_0$  را ایجاد کرد. اگر مقاومت را اضافه کنیم، انرژی ذخیره‌شده در دو عنصر دیگر کندتر تلف می‌شود و لذا پاسخ زیرمیرا خواهد بود. ما یک بار  $R = 100\Omega$  را اختیار می‌کنیم تا حالت فوق رخ دهد و بار دیگر  $R = 1\Omega$  را در نظر می‌گیریم تا پاسخ فوق میرا گردد.

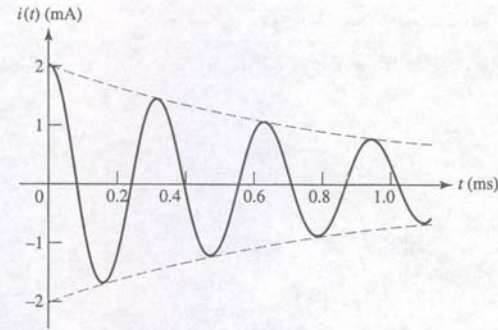
بنابراین سه نوع شبیه‌سازی جداگانه را باید برنامه‌ریزی کنیم، که بین آن‌ها فقط مقاومت  $R$  باید تغییر یابد. انرژی  $1.25\mu\text{J}$  ذخیره شده اولیه در خازن مربوط به ولتاژ ۵V است و به این ترتیب مقدار اولیه خازن را تنظیم می‌کنیم.

با اجرای probe، تحت منوی Add، Trace را انتخاب می‌کنیم. می‌خواهیم انرژی ذخیره‌شده در هر دو عنصر خازن و القاگر را به صورت تابعی از زمان ترسیم نماییم. برای خازن داریم  $w = \frac{1}{2} C v^2$ ، بنابراین روی پنجره Trace Expression کلیک کرده، سپس  $0.5 * 100E-9$  را تایپ کنید (بدون علامت نقل قول، روی V(C1:1) کلیک کنید، به پنجره Trace Expression بازگردید و "و" را وارد نمایید، دوباره روی V(C1:1) کلیک نمایید و سپس OK را کلیک کنید. روال را برای یافتن انرژی ذخیره‌شده در القاگر تکرار می‌کنیم ولی به جای  $100E-9$  از  $7E-6$  استفاده نموده و روی I(L1:1) در عوض V(C1:1) کلیک نمایید.

خروجی probe برای سه شبیه‌سازی جداگانه در شکل ۹-۲۰ دیده می‌شود. در شکل ۹-۲۰ (الف) می‌بینیم که انرژی مانده در مدار به‌طور پیوسته بین خازن و مقاومت پس و پیش می‌رود تا بالاخره کاملاً تلف شود. کاهش مقاومت به  $4.1833\Omega$  مدار میرای بحرانی را نتیجه می‌دهد و نمودار به شکل ۹-۲۰ (ب) خواهد بود. می‌بینیم که دیگر حالت نوسانی زیرمیرا وجود ندارد. در عوض انرژی انتقالی به القاگر دارای اوجی در  $0.8\mu\text{s}$  است و سپس به صفر افت می‌کند. پاسخ فوق میرا در شکل ۹-۲۰ (ج) دیده می‌شود. ملاحظه می‌کنید که انرژی در پاسخ فوق میرا خیلی سریع‌تر به صفر افت می‌نماید و انرژی کمی به القاگر انتقال می‌یابد زیرا بخش عمده آن در مقاومت تلف شده است.

## ۹-۵ مدار RLC سری بدون منبع

اکنون مایلیم پاسخ طبیعی مدل مداری متشکل از یک القاگر ایده‌آل، خازن ایده‌آل و مقاومت ایده‌آل سری را معین نماییم. مقاومت ایده‌آل ممکن است یک مقاومت فیزیکی باشد که با یک مدار LC یا RLC سری است. این مقاومت ممکن است افت اهمی و یا افت هسته فرومغناطیسی القاگر و یا همه آن‌ها و دیگر عناصر جذب‌کننده انرژی باشد.

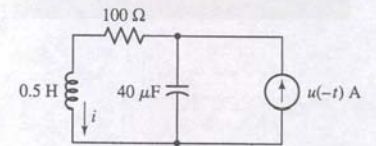


شکل ۹-۲۳ پاسخ جریان مدار RLC سری که در آن  $\omega_0 = 20000 \text{ s}^{-1}$ ،  $\alpha = 1000 \text{ s}^{-1}$ ،  $v_C(0) = 2 \text{ V}$  و  $i(0) = 2 \text{ mA}$  است. برای رسم منحنی بهتر است ابتدا پوش خطچین را ترسیم کنیم.

برای ترسیم یک پاسخ مناسب دوپوش نمایی  $2e^{-1000t}$  و  $-2e^{-1000t}$  را رسم می‌کنیم. این دوپوش در شکل ۹-۲۳ با خطچین نشان داده شده‌اند. سپس نقاط مربوط به ربع تناوب تابع سینوسی یعنی  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$  یا  $t = 0, 0.0785k \text{ ms}$  با  $k = 0, 1, 2, \dots$  را روی محور زمان علامت می‌زنیم و سپس منحنی نوسانی را به سرعت رسم می‌نماییم. زمان نشست به سادگی با استفاده از بخش فوقانی پوش معین می‌گردد. یعنی  $2e^{-1000t_s} = 0.01$  یا  $t_s = 461\mu\text{s}$  و  $e^{-1000t_s} = 0.01$  برابر با ۱٪ مقدار ماکزیمم که ۲mA است می‌گیریم. بنابراین  $t_s = 461\mu\text{s}$  خواهد شد که مقدار تقریبی است و معمولاً به عنوان زمان نشست به کار برده می‌شود.

## تمرین

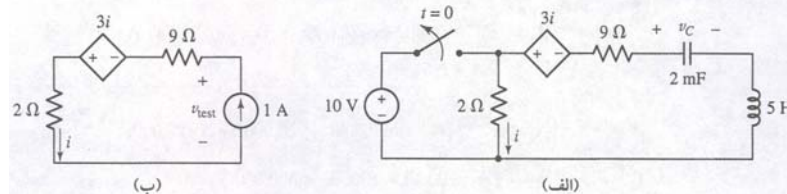
۹-۷ با مراجعه به مدار شکل ۹-۲۴  $\alpha$  را پیدا کنید. (ب)  $\omega_0$  را بیابید. (ج)  $i(0^+)$  را معین کنید. (د)  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+}$  را به دست آورید. (ه)  $i(12\text{ms})$  را معین نمایید. جواب:  $-0.1204 \text{ A}, 0, 1 \text{ A}, 224 \text{ rad/s}, 100 \text{ s}^{-1}$ .



شکل ۹-۲۴

به عنوان مثال آخر، وضعیت‌هایی را در نظر می‌گیریم که مدار شامل منبع وابسته است. اگر هیچ جریان یا ولتاژ کنترل‌کننده‌ای مربوط به این منبع وابسته، مورد نظر نباشد، ممکن است معادل تونن متصل به القاگر و خازن را پیدا کنیم. در غیر این صورت، احتمالاً مجبور به نوشتن معادله انتگرال و دیفرانسیل، مشتق نشان داده شده، و حل معادله مشتق خواهیم بود.

عبارتی برای  $v_C(t)$  در مدار شکل ۹-۲۵ (الف) معتبر برای  $t > 0$  به دست آورید.



(ب)

(الف)

شکل ۹-۲۵ (الف) یک مدار RLC حاوی منبع وابسته. (ب) مداری که  $R_{eq}$  از آن به دست می‌آید.

چون ما به  $v_C(t)$  علاقمندیم، یافتن مقاومت تونن متصل به القاگر و خازن در  $t = 0^+$  پذیرفتنی است. ما این کار را با اتصال منبع ۱ A طبق شکل ۹-۲۵ (ب) که از آن رابطه زیر به دست می‌آید، انجام می‌دهیم:

$$v_{\text{test}} = 11i - 3i = 8i = 8(1) = 8 \text{ V}$$

بنابراین  $R_{eq} = 8 \Omega$  است و لذا  $\alpha = R/2L = 0.8 \text{ s}^{-1}$  و  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10 \text{ rad/s}$ . به این معنی که ما انتظار داریم پاسخ زیرمیرایی با  $\omega_d = 9.968 \text{ rad/s}$  و  $\omega_d$  به فرم زیر به دست آید:

$$v_C(t) = e^{-0.8t} (B_1 \cos 9.968t + B_2 \sin 9.968t) \quad (۳۲)$$

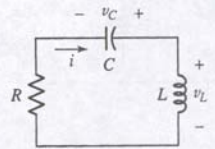


جدول ۹-۱ خلاصه معادلات مدارهای RLC بدون منبع.

| نوع   | شرایط        | تاجیه               | $\alpha$        | $\omega_0$            | نتیجه   |
|-------|--------------|---------------------|-----------------|-----------------------|---|
| سری   | فوق میرا     | $\alpha > \omega_0$ | $\frac{1}{2RC}$ | $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ | $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$<br>که $A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$                  |
| موازی | میرای بحرانی | $\alpha = \omega_0$ | $\frac{1}{2RC}$ | $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ | $e^{-\alpha t} (A_1 t + A_2)$   |
| سری   | زیرمیرا      | $\alpha < \omega_0$ | $\frac{1}{2RC}$ | $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ | $e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$<br>که $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ |
| موازی |              |                     | $\frac{1}{2RC}$ | $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ |   |

با  $\omega_0$  ثابت به پاسخ فوق میرایی منجر می شود. تنها باید در محاسبه  $\alpha$  مراقب باشیم که مقدار آن در مدار موازی  $\frac{1}{2RC}$  و در مدار سری  $\frac{R}{2L}$  است، بنابراین  $\alpha$  با افزایش مقاومت سری و کاهش مقاومت موازی، زیاد می شود. به طور خلاصه معادلات کلیدی RLC سری و موازی در جدول ۹-۱ آورده شده است.

### مثال ۹-۷



شکل ۹-۲۲ یک مدار RLC بدون منبع با ذخیره انرژی در هر دو عنصر خازن و القاگر در  $t = 0$ .

با فرض مدار RLC شکل ۹-۲۲ که در آن  $C = \frac{1}{401} \mu\text{F}$ ,  $R = 2\text{k}\Omega$ ,  $L = 1\text{H}$  که در آن  $i(0) = 2\text{mA}$  و  $v_C(0) = 2\text{V}$  را ترسیم کنید.

می بینیم که  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 20,025 \text{ rad/s}$  و  $\alpha = R/2L = 1000\text{s}^{-1}$  است. این مقادیر نشان می دهند که پاسخ زیرمیرا است. بنابراین  $\omega_d$  را محاسبه می کنیم که  $20000 \text{ rad/s}$  است. به جز ثابت های اختیاری پاسخ معلوم است:

$$i(t) = e^{-1000t} (B_1 \cos 20,000t + B_2 \sin 20,000t)$$

چون می دانیم که  $i(0) = 2\text{mA}$  است، آن را در معادله  $i(t)$  قرار می دهیم تا  $B_1 = 0.002 \text{ A}$  به دست آید و بنابراین:

$$i(t) = e^{-1000t} (0.002 \cos 20,000t + B_2 \sin 20,000t) \text{ A}$$

و تنها مقدار اولیه باقیمانده باید به مشتق اعمال شود. پس:

$$\frac{di}{dt} = e^{-1000t} (-40 \sin 20,000t + 20,000 B_2 \cos 20,000t - 2 \cos 20,000t - 1000 B_2 \sin 20,000t)$$

و

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 20,000 B_2 - 2 = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0) R i(0)}{L} = \frac{2 - 2000(0.002)}{1} = -2 \text{ A/s}$$

پس:

$$B_2 = 0$$

بنابراین پاسخ مطلوب چنین است:

$$i(t) = 2e^{-1000t} \cos 20,000t \text{ mA}$$

بسیاری از سردرگمی ها در تعیین و اعمال مقادیر اولیه به این علت است که مجموعه قوانین ثابتی برای دنبال کردن نداریم. در هر تحلیل به جایی می رسیم که هر مسئله طرز تفکر خاصی را می طلبد. این مطلب همواره منبع اصلی مشکلات است.

### بخش ساده

پاسخ ساده یک سیستم مرتبه دوم متشکل از یک پاسخ واداشته زیر

$$v_f(t) = V_f$$

که برای محرک های dc مقداری ثابت است و یک پاسخ طبیعی به فرم

$$v_n(t) = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$$

به دست می آید. پس

$$v(t) = V_f + A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$$

فرض می کنیم که  $s_1$  و  $s_2$  از روی مدار و توابع تحریک مفروض معین شده و فقط  $A$  و  $B$  باقی مانده است. آخرین معادله وابستگی درونی  $A$ ،  $B$ ، و  $t$  را نشان می دهد و جایگزینی مقادیر معلوم  $v$  در  $t = 0^+$  معادله دیگری بین  $A$  و  $B$  به دست می دهد. یعنی  $v(0^+) = V_f + A + B$ . این جای کار ساده است.

### بخش دیگر

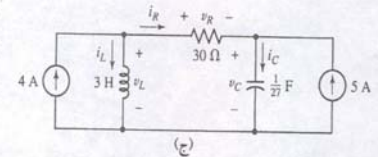
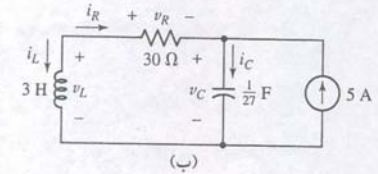
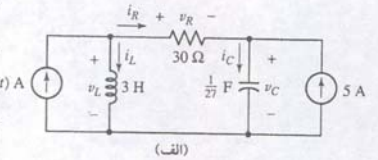
متأسفانه رابطه دیگری بین  $A$  و  $B$  لازم است که این معمولاً از مشتق به دست می آید:

$$\frac{dv}{dt} = 0 + s_1 A e^{s_1 t} + s_2 B e^{s_2 t}$$

که در آن مقدار  $\frac{dv}{dt}$  در  $t = 0^+$  معین می شود. بنابراین دو معادله موجود است که  $A$  و  $B$  را به هم ربط می دهند و برای محاسبه دو ثابت باید به طور همزمان حل شوند.

تنها مسئله باقیمانده تعیین  $v$  و  $\frac{dv}{dt}$  در  $t = 0^+$  است. بیایید فرض کنیم که  $v$  همان ولتاژ خازن  $v_C$  باشد. چون  $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$  است، باید رابطه ای بین مقدار اولیه  $\frac{dv}{dt}$  با یک مقدار اولیه جریان خازن وجود داشته باشد. اگر بتوانیم برای این جریان اولیه خازن مقداری را بیابیم، آن گاه به طور خودکار مقدار  $\frac{dv}{dt}$  معین خواهد شد. دانشجویان معمولاً به راحتی  $v(0^+)$  را می یابند ولی دریافتن مقدار اولیه  $\frac{dv}{dt}$  مشکل دارند. اگر پاسخ موردنظر جریان القاگر  $i_L$  باشد، باید  $\frac{di_L}{dt}$  را به مقدار اولیه ولتاژ القاگر ربط دهیم. برای متغیرهای دیگر، به جز ولتاژ خازن و جریان القاگر، باید مقدار اولیه و مشتق آن ها را برحسب مقادیر متناظر  $v_C$  و  $i_L$  بیان کنیم.

با تحلیل دقیق شکل ۹-۲۸ و یافتن مقادیر فوق روش را شرح خواهیم داد. برای سهولت تحلیل، دو مرتبه یک خازن بزرگ غیر واقعی را به کار می بریم.



شکل ۹-۲۸ (الف) یک مدار RLC سری که برای نشان دادن تعیین شرایط اولیه به کار رفته است. پاسخ مطلوب  $v_C(t)$  فرض شده است، (ب)  $t = 0^-$  و (ج)  $t > 0$ .



### مثال ۹-۹

در شکل ۹-۲۸ (الف) سه عنصر غیرفعال وجود دارند که برای هر کدام ولتاژ و جریانی تعریف شده است. مقدار این شش کمیت را در  $t = 0^-$  و  $t = 0^+$  بیابید.

هدف یافتن مقدار جریان و ولتاژ در  $t = 0^-$  و  $t = 0^+$  است. با این کمیت ها مقادیر اولیه مشتق ها به سادگی یافت می شود. ابتدا روش منطقی گام به گام را برمی گزینیم.

۱.  $t = 0^-$ . تنها جریان سمت راست منبع مطابق شکل ۹-۲۸ (ب) فعال است. فرض بر این است که مدار برای مدت ها در این حالت بوده است و همه ولتاژها و جریان ها ثابت باشند. بنابراین برای عبور یک جریان dc در القاگر ولتاژ در دو سر آن باید صفر باشد:

$$v_L(0^-) = 0$$

همچنین وجود ولتاژ dc در دو سر خازن  $(-v_R)$  مستلزم جریان صفر در خازن است:

$$i_C(0^-) = 0$$



در بررسی مدار در  $t = 0^-$ ، دقت کنید که به دلیل وجود خازن  $i_L(0^-) = 0$  است. بنابراین قانون اهم  $i(0^-) = 5$  A پس:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10 - 3i = 10 - 15 = -5 \text{ V}$$

از قراردادن این رابطه در معادله (۳۲) داریم  $B_1 = -5$  V. با مشتق‌گیری از معادله (۳۲) و ارزیابی در  $t = 0$  داریم:

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0} = -0.8B_1 + 9.968B_2 = 4 + 9.968B_2 \quad (۳۳)$$

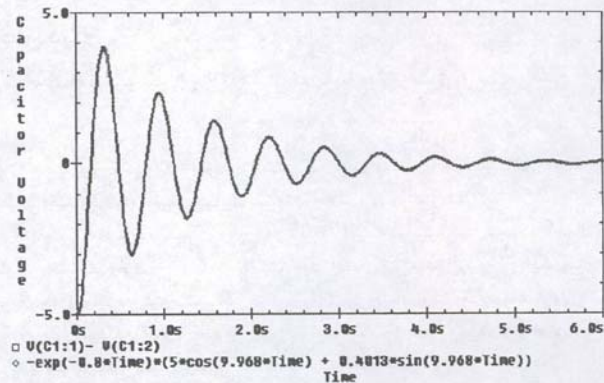
از شکل ۹-۲۵ (الف) داریم:

$$i = -C \frac{dv_C}{dt}$$

بنابراین با استفاده از  $i(0^+) = i_L(0^-) = 0$  در معادله (۳۳) داریم  $B_2 = -0.4013$  V و لذا می‌توانیم بنویسیم:

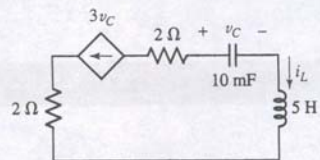
$$v_C(t) = -e^{-0.8t} (5 \cos 9.968t + 0.4013 \sin 9.968t) \text{ V}, \quad t > 0$$

حل PSpice این مدار در شکل ۹-۲۶ دیده می‌شود که تحلیل ما را تأیید می‌کند.



شکل ۹-۲۶ شبیه‌سازی PSpice مدار  
شکل ۹-۲۵ (الف). هر دو منحنی تحلیل و  
شبیه‌سازی بر هم منطبق شده‌اند.

## تمرین



شکل ۹-۲۷ مدار برای تمرین ۹-۸

۹-۸ عبارتی برای  $i_L(t)$  در مدار شکل ۹-۲۷ که در  $t > 0$  معتبر باشد با شرط  $v_C(0^-) = 10$  V و  $i_L(0^-) = 0$  پیدا کنید. توجه کنید که هر چند اعمال تکنیک‌های تونن در این مثال مفید نیست، عمل منبع وابسته  $v_C$  و  $i_L$  را چنان به هم مربوط می‌کنند که نتیجه یک معادله خطی دیفرانسیل است. جواب:  $i_L(t) = -30e^{-300t}$  A  $t > 0$ .

## ۹-۶ پاسخ کامل مدار RLC

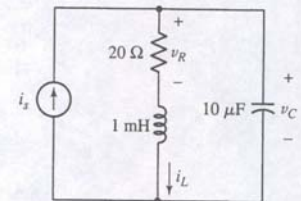
اکنون آن دسته از مدارهای RLC را ملاحظه می‌کنیم که به آن‌ها منابع dc وصل شده و پاسخ واداشته تولیدی لزوماً با گذشت زمان مستهلک نمی‌شود. روش کلی حل، همان روشی است که در مدارهای RL و RC دیدیم؛ یعنی پاسخ واداشته به‌طور کامل به‌دست آمد، پاسخ طبیعی به صورت مناسبی با تعدادی ثابت‌های اختیاری فراهم شد، و پاسخ کامل به شکل حاصل جمع پاسخ واداشته و طبیعی درآمد، و سپس مقادیر اولیه معین و به پاسخ کامل اعمال گشت تا مقادیر ثابت تعیین شوند. این آخرین مرحله‌ای است که اغلب برای دانشجویان مشکل‌ساز می‌باشد. در نتیجه، هر چند مقادیر اولیه اساساً فرقی برای منابع dc و مدارهای بی‌منبع ندارد ولی در مثال‌های زیر این مطلب را با تأکید بیشتر دنبال خواهیم کرد.

مسائلی از این قماش در فصل ۳ حل شدند و چیز جدیدی در این جا نداریم. ابتدا با پرداختن به جریان، از گره بالای سمت چپ آغاز می‌کنیم و می‌بینیم که  $i(0^+) = 4 - 5 = -1$  A است. با توجه به گره سمت راست بالا داریم  $i(0^+) = -1 + 5 = 4$  A و البته  $i_L(0^+) = 5$  A می‌باشد. حال به سراغ ولتاژها می‌رویم. با استفاده از قانون جریان اهم می‌بینیم که  $v_R(0^+) = 30(-1) = -30$  V است. در القاگر، از KVL داریم  $v_L(0^+) = -30 + 150 = 120$  V. بالاخره با  $v(0^+) = 150$  V در  $t = 0^+$  در اختیار داریم.

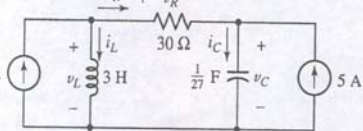
## تمرین

۹-۹ بگذارید در شکل ۹-۳۰  $i_s = 10u(t) - 20u(t) - 10u(t) - 20u(t)$  باشد. مطلوب است (الف)  $i_L(0^-)$ ، (ب)  $v_C(0^+)$ ، (ج)  $v_R(0^+)$ ، (د)  $i_L(\infty)$  و (ه)  $i_L(0.1 \text{ ms})$ . جواب:  $10 \text{ A}$ ،  $200 \text{ V}$ ،  $200 \text{ V}$ ،  $20 \text{ A}$  و  $2.07 \text{ A}$ .

## مثال ۹-۱۰



شکل ۹-۳۰



شکل ۹-۳۱ مدار شکل ۹-۲۸ برای مثال ۹-۱۰

در مدار شکل ۹-۲۸ که در شکل ۹-۳۱ تکرار شده در  $t = 0^+$  مقادیر اولیه را برای مشتق سه ولتاژ و سه جریان معین نمایید.

با دو عنصر ذخیره‌کننده انرژی آغاز می‌کنیم. برای القاگر

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

و به خصوص که:

$$v_L(0^+) = L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+}$$

بنابراین:

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{120}{3} = 40 \text{ A/s}$$

به‌طور مشابه:

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{4}{1/27} = 108 \text{ V/s}$$

چهار مشتق دیگر را با این فرض که KVL و KCL برای مشتق نیز صادقند معین می‌کنیم. مثلاً در گره سمت چپ در شکل ۹-۳۱ داریم:

$$4 - i_L - i_R = 0 \quad t > 0$$

و سپس:

$$0 - \frac{di_L}{dt} - \frac{di_R}{dt} = 0 \quad t > 0$$

بنابراین:

$$\left. \frac{di_R}{dt} \right|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

به همین ترتیب سه مشتق باقیمانده به صورت زیرند:

$$\left. \frac{dv_R}{dt} \right|_{t=0^+} = -1200 \text{ V/s}$$

$$\left. \frac{dv_L}{dt} \right|_{t=0^+} = -1092 \text{ V/s}$$

و

$$\left. \frac{di_C}{dt} \right|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

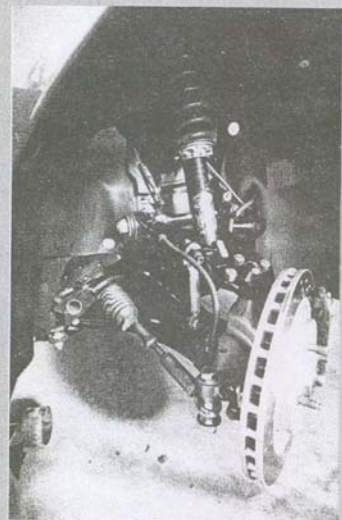
قبل از این که موضوع تعیین مقادیر اولیه را رها کنیم، باید متذکر شویم که حداقل یک روش قوی دیگر هم وجود دارد که از آن گذشته‌ایم: می‌توانستیم معادلات کلی گرهی یا حلقوی را برای مدار اصلی بنویسیم. سپس می‌توانستیم مقادیر معلوم ولتاژ القاگر و جریان خازن را در  $t = 0^-$  جایگزین کرده و چندین مقدار دیگر از پاسخ را در  $t = 0^-$  معین نماییم و به این ترتیب بقیه به راحتی به‌دست‌آمده‌اند. پس از آن تحلیلی مشابه در  $t = 0^+$  می‌باید انجام می‌شد. این روش خیلی مهم است و در مدارهای پیچیده‌ای که روش‌های ساده گام به گام امکان‌پذیر نیست،



## کاربرد عملی

## مدل‌سازی سیستم تعلیق خودکار

در مقدمه گفتیم که مفاهیم مورد بحث در این فصل فراتر از تحلیل یک مدار الکتریکی است. در واقع فرم کلی معادلات دیفرانسیلی که ما با آن‌ها سروکار داریم به زمینه متفاوتی مرتبط است. کافی است که بدانیم چگونه هر پارامتر جدید را ترجمه کنیم. مثلاً سیستم تعلیق (کمک‌فتر) اتومبیلی را که در شکل ۹-۳۲ دیده می‌شود در نظر بگیرید. پیستون به سیلندر وصل نشده است ولی به فنر و چرخ متصل می‌باشد. بنابراین قسمت‌های متحرک عبارتند از: فنر، پیستون و چرخ.



شکل ۹-۳۲ نمونه سیستم تعلیق خودکار.

ما ابتدا این سیستم فیزیکی را با در نظر گرفتن نیروهای درگیر مدل‌سازی می‌کنیم. با تعریف تابع پیستون  $p(t)$  که به ما می‌گوید پیستون در کجا قرار گرفته است، می‌توانیم نیروی وارده به فنر  $F_S$  را بنویسیم:

$$F_S = K p(t)$$

که در آن  $K$  به عنوان ثابت فنر شناخته می‌شود و واحد  $\text{lb/ft}$  را دارد. نیروی  $F_W$  وارده بر چرخ برابر با جرم چرخ در شتاب آن است. یا:

$$F_W = m \frac{d^2 p(t)}{dt^2}$$

که در آن  $m$  بر حسب  $\text{lb.s}^2/\text{ft}$  اندازه‌گیری می‌شود. آخرین و نه تنها نیروی اصطکاک  $F_f$  که روی پیستون عمل می‌کند عبارت است از  $F_f = \mu_f \frac{dp(t)}{dt}$  که  $\mu_f$  ضریب اصطکاک و واحد

آن  $\text{lb.s/ft}$  است. بر اساس فیزیک پایه می‌دانیم که جمع همه نیروهای وارده بر سیستم باید صفر باشد. بنابراین:

$$\frac{md^2 p(t)}{dt^2} + \mu_f \frac{dp(t)}{dt} + Kp(t) = 0 \quad (۳۴)$$

این معادله در طول فعالیت‌های آکادمیک باید یک بار ما را به زحمت بیاندازد ولی نه بیشتر.

با مقایسه معادله (۳۲) با معادلات (۳۰) و (۳۱) بلافاصله ملاحظه می‌شود که حداقل به فرم کلی‌اش یک همانندی وجود دارد. با انتخاب معادله (۳۰) که مدار RLC سری را توصیف می‌کند، ارتباطات زیر را مشاهده می‌کنیم:

|          |             |         |             |
|----------|-------------|---------|-------------|
| $L$      | القائی      | $m$     | جرم         |
| $R$      | مقاومت      | $\mu_f$ | ضریب اصطکاک |
| $C^{-1}$ | عکس ظرفیت   | $K$     | ثابت فنر    |
| $i(t)$   | متغیر جریان | $p(t)$  | متغیر مکان  |

در نتیجه اگر مایلیم به جای آمپر، از فوت صحبت کنیم. باید از  $\text{lb.s}^2/\text{ft}$  در عوض  $H$ ، از  $\text{ft/lb}$  به جای  $F$  و  $\text{lb.s/ft}$  به جای  $\Omega$  استفاده کنیم. آن‌گاه کار مدل‌سازی مدار RLC را به ارزیابی سیستم ضربه‌گیر خودکار تبدیل نموده‌ایم. به چرخ نمونه  $70 \text{ lb}$  نظر بیاندازید. جرم از تقسیم وزن بر شتاب جاذبه زمین ( $32.17 \text{ ft/s}^2$ ) به دست می‌آید. در نتیجه  $m = 2.176 \text{ lb.s}^2/\text{ft}$  خواهد شد. وزن کل اتومبیل،  $1985 \text{ lb}$  است و جابه‌جایی استاتیک فنر 4 اینچ می‌باشد (بدون مسافر). ثابت فنر از تقسیم وزن روی هر ضربه‌گیر بر جابه‌جایی آن حاصل می‌شود، بنابراین:

$$K = \left(\frac{1}{4}\right)(1985)(32 \text{ ft})^{-1} = 1489 \text{ lb/ft}$$

خواهد بود. فرض بر این است که ضریب اصطکاک مجموعه پیستون/سیلندر  $65 \text{ lb.s/ft}$  باشد. بنابراین می‌توانیم سیستم ضربه‌گیر را با یک مدار RLC با  $R = 65 \Omega$ ،  $L = 2.176 H$  و  $C = 671.6 \mu F$  مدل‌سازی نماییم. فرکانس تشدید ضربه‌گیر  $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 26.16 \text{ rad/s}$  و ضریب میرایی  $\alpha = \frac{R}{2L} = 14.94 \text{ s}^{-1}$  است. چون  $\alpha < \omega_0$  است، ضربه‌گیر ما سیستمی زیرمیرا است. این بدان معنی است که اگر از روی چاله‌ای عبور کنیم، سیستم یک یا دو نوسان خواهد کرد. در مواردی که ضربه‌گیر با در واقع کمک‌فتر سفت باشد (ضریب فنر بیشتر و یا در سیستم ما مقاومت بزرگ‌تر) برای پیمودن پیچ‌ها با سرعت زیاد مناسب‌تر است زیرا پاسخ فوق میرا به همراه دارد. در هر حال اگر بیشتر رانندگی روی مسیر ناهموار باشد، مختصر پاسخ زیر میرا ترجیح داده می‌شود.

در گام بعدی قانون جریان کیر شیف را به سمت راست گره اعمال می‌نماییم تا:

$$i_R(0^-) = -5 \text{ A}$$

که منجر می‌شود به:

$$v_R(0^-) = -150 \text{ V}$$

اکنون قانون ولتاژ کیر شیف را حول حلقه سمت چپ به کار می‌بریم تا رابطه زیر حاصل شود:

$$v_C(0^-) = 150 \text{ V}$$

ضمن این که قانون جریان کیر شیف در القاگر جریان آن را مشخص می‌نماید.

$$i_L(0^-) = 5 \text{ A}$$

گرچه مشتقات در  $t = 0^-$  برای ما اهمیتی ناچیز دارند ولی در هر صورت به علت نبود وضعیت گذرا همه آن‌ها صفرند.

۲.  $t = 0^+$ . در فاصله زمانی  $t = 0^-$  و  $t = 0^+$ ، منبع جریان سمت چپ فعال می‌شود و بسیاری از جریان‌ها و ولتاژها در  $t = 0^-$  ناگهان عوض می‌شوند. مدار مربوطه در شکل ۹-۲۸ (ج) نشان داده شده است. با این وجود، ما توجه خود را روی کمیت‌هایی متمرکز می‌کنیم که نتواند تغییر کند، از آن جمله می‌توان جریان القاگر و ولتاژ خازن را نام برد. هر دو کمیت فوق در فاصله زمانی کلیدزنی ثابت می‌مانند، پس:

$$i_L(0^+) = 5 \text{ A} \quad \text{و} \quad v_C(0^+) = 150 \text{ V}$$

چون اکنون دو جریان در گره سمت چپ داریم، آن‌گاه:

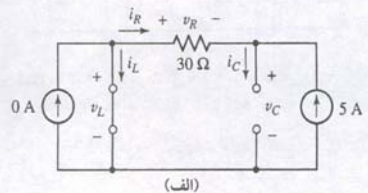
$$i_R(0^+) = -1 \text{ A} \quad \text{و} \quad v_R(0^+) = -30 \text{ A}$$

$$i_C(0^+) = 4 \text{ A} \quad \text{و} \quad v_L(0^+) = 120 \text{ V}$$

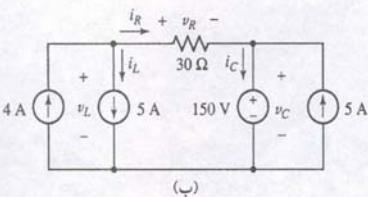
به این ترتیب شش مقدار در  $t = 0^-$  و شش مقدار در  $t = 0^+$  داریم. از میان این شش مقدار اخیر تنها ولتاژ دو سر خازن و جریان القاگر با مقادیر حاکم در  $t = 0^-$  تفاوت ندارند.

می‌توانستیم روشی مختصر و متفاوت برای ارزیابی این جریان‌ها و ولتاژها در  $t = 0^+$  را هم برگزینیم. قبل از عمل کلیدزنی تنها ولتاژها و جریان‌های ثابت در مدار برقرارند. بنابراین می‌توان القاگر را با اتصال کوتاه و ولتاژها و جریان‌های ثابت در مدار شکل ۹-۲۸ (الف) بر این اساس دوباره در شکل ۹-۲۹ (الف) ترسیم شده است. در سمت راست تنها منبع جریان فعال است که مقدار آن هم  $5 \text{ A}$  است و در مقاومت و القاگر جاری است. بنابراین  $i_C(0^+) = 0$ ،  $v_C(0^+) = 0$ ،  $i_L(0^+) = 5 \text{ A}$ ،  $v_R(0^+) = -150 \text{ V}$ ،  $i_R(0^+) = -5 \text{ A}$ ،  $v_L(0^+) = 120 \text{ V}$  خواهند بود.

اکنون به ترسیم مدار معادل مسئله می‌پردازیم که در تعیین چند ولتاژ و جریان در  $t = 0^+$  ما را یاری می‌نماید. هر ولتاژ خازن و جریان القاگر در زمان کلیدزنی باید ثابت بماند. برای تضمین این شرایط القاگر را با منبع جریان و خازن را با منبع ولتاژی جایگزین می‌کنیم. هر منبع در حین انفصال سعی در ثابت نگه‌داشتن پاسخ دارد. مدار معادل شکل ۹-۲۹ (ب) به این ترتیب به دست می‌آید. توجه کنید که مدار شکل ۹-۲۹ (ب) تنها بین فاصله  $0^-$  و  $0^+$  معتبر است. ولتاژها و جریان‌ها با تحلیل این مدار dc در  $t = 0^+$  تعیین می‌شوند. حل چندین مشکل نیست ولی تعداد نسبتاً زیاد منابع در شبکه، ظاهری نامأنوس به آن داده است. با این وجود



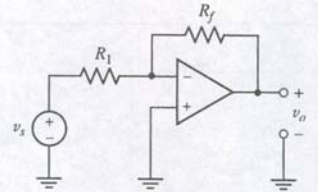
(الف)



(ب)

شکل ۹-۲۹ (الف) مدار ساده‌ای که در  $t = 0^-$  با مدار شکل ۹-۲۸ (الف) معادل است. (ب) مدار معادل دیگری برای مدار شکل ۹-۲۸ (الف) که در فاصله  $t = 0^-$  تا  $t = 0^+$  اعتبار دارد.





شکل ۹-۳۵ تقویت‌کننده عملیاتی معکوس‌گر با بهره  $v_o/v_s = -R_f/R_1$  op amp ایده‌آل است.

منفی اولین مشتق به‌عنوان ورودی به انتگرال‌گیر دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین خروجی آن  $v(t)$  و مقدار اولیه آن  $v(0) = 0$  است. برای یافتن مشتق دوم کافی است  $v$  را در ۹- ضرب کرده آن را در نقطه A تصور نماییم. این عمل تقویت به میزان ۹ برابر با تغییر علامت و به وسیله یک تقویت‌کننده معکوس‌گر انجام می‌شود.

شکل ۹-۳۵ چنین تقویت‌کننده‌ای را نشان می‌دهد. برای op amp ایده‌آل هر دو ولتاژ و جریان در ورودی صفر هستند. بنابراین جریان در یک جهت  $R_1$  برابر  $v_s/R_1$  و در  $R_f$  در جهت دیگر برابر  $v_o/R_f$  است. چون مجموع آن‌ها صفر است پس:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{-R_f}{R_1}$$

برای طراحی بهره ۹- کافی است مثلاً  $R_f = 90\text{ k}\Omega$  و  $R_1 = 10\text{ k}\Omega$  را در نظر بگیریم.

اگر در هر انتگرال R برابر با  $1\text{ M}\Omega$  و C برابر با  $1\mu\text{F}$  باشد، داریم:

$$v_o = - \int_0^t v_s dt' + v_o(0)$$

اکنون خروجی تقویت‌کننده معکوس‌گر، ورودی مفروض A است و آرایش شکل ۹-۳۶ را می‌دهد. اگر کلید سمت چپ در  $t = 0$  بسته باشد، ضمن آن‌که کلیدهای مقادیر اولیه در همان زمان، خروجی انتگرال‌گیر دوم موج سینوسی نامیرای  $v = 2 \sin 3t \text{ V}$  می‌باشد.

توجه کنید که هر دو مدار LC در شکل ۹-۳۴ و op amp در شکل ۹-۳۶ دارای خروجی یکسانند، ولی مدار op amp فاقد القاگر است. ولی طوری عمل می‌کند که گویی حاوی القاگری است تا یک ولتاژ سینوسی مناسبی بین پایانه خروجی و زمین به‌وجود آید. این کار می‌تواند نوعی مزیت عملی و اقتصادی در طراحی مدار باشد زیرا القاگرها معمولاً حجیم بوده و از خازن‌ها گران‌ترند و اتلاف بیشتری نیز در آن‌ها داریم (بنابراین نمی‌توان آن‌ها را به خوبی مدل‌سازی کرد).

## تمرین

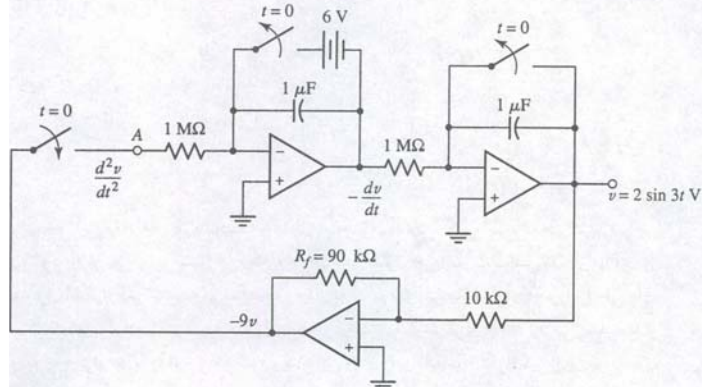
۹-۱۱ در شکل ۹-۳۶ مقدار  $R_f$  و مقادیر اولیه چه باشند تا ولتاژ خروجی شکل ۹-۳۶ نمایش‌دهنده

$v(t)$  در شکل ۹-۳۷ باشد.

جواب:  $250\text{ k}\Omega$ ،  $400 \text{ V}$  و  $10 \text{ V}$ .

## ۹-۸ خلاصه فصل و مرور

- هر مدار حاوی دو عنصر ذخیره‌کننده انرژی غیر قابل ترکیب سری/موازی با یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم نشان داده می‌شود.



شکل ۹-۳۶ دو انتگرال‌گیر و یک تقویت‌کننده معکوس‌گر که برای حل معادله دیفرانسیل  $v''/dt^2 = -9v$  به هم متصل شده‌اند.

باید از آن استفاده نمود. حال بگذارید تعیین پاسخ  $v_C(t)$  را برای مدار اصلی شکل ۹-۳۱ به‌تمام برسانیم. اگر هر دو منبع را بکشیم، مدار به صورت RLC سری در آمده و به راحتی  $s_1$  و  $s_2$  به ترتیب برابر ۱- و ۹- به‌دست خواهند آمد. پاسخ واداشته را با واریسی و یاد در صورت لزوم با رسم معادل dc می‌توان به دست آورد که مشابه شکل ۹-۲۹ (الف) ولی یک منبع جریان 4A در آن اضافی است. پاسخ واداشته 150V است. بنابراین:

$$v_C(t) = 150 + Ae^t + Be^{-9t} \quad \text{و} \quad v_C(0^+) = 150 = 150 + A + B$$

یا

$$A + B = 0$$

سپس

$$\frac{dv_C}{dt} = -Ae^t - 9Be^{-9t}$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = 108 = -A - 9B$$

بالاخره

$$A = 13.5 \quad B = -13.5 \quad \text{و} \quad v_C(t) = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t}) \text{ V}$$

## مروری سریع بر روند حل

به طور خلاصه اگر بخواهیم رفتار گذرای یک مدار RLC را معین کنیم، اول باید ببینیم که مدار سری است یا موازی تا بتوانیم رابطه  $\alpha$  صحیحی را برگزینیم. دو معادله عبارتناظر:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (\text{RLC موازی})$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (\text{RLC سری})$$

تصمیم دوم پس از مقایسه  $\alpha$  و  $\omega_0$  اتخاذ می‌شود که برای هر دو مدار داریم:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

اگر  $\omega_0 > \alpha$  باشد مدار فوق میرا است و

$$f_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

که

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

اگر  $\omega_0 = \alpha$  باشد مدار میرای بحرانی است و

$$f_n(t) = e^{-\alpha t} (A_1 t + A_2)$$

و بالاخره اگر  $\omega_0 < \alpha$  باشد پاسخ زیر میرا مواجهیم:

$$f_n(t) = e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

که در آن  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  است.

مرحله آخر در کار ما به منابع مستقل مربوط است. اگر پس از تغییر حالت کلید، منبعی در مدار نباشد، مدار بی‌منبع است و پاسخ طبیعی، کل پاسخ خواهد بود. در صورتی که پس از تغییر هنوز منابع مستقل در مدار موجود باشند، آن‌گاه مدار تحریک شده و باید پاسخ واداشته را به‌دست آوریم. بنابراین پاسخ کامل از جمع زیر حاصل می‌شود:

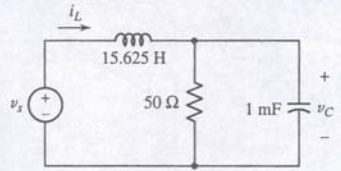
$$f(t) + f_f(t) + f_n(t)$$

این رابطه به هر دو کمیت جریان یا ولتاژ قابل اعمال است. گام نهایی تعیین ثابت‌ها با فرض مقادیر اولیه است.

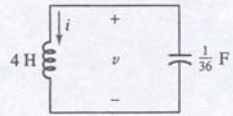


## تمرین

۹-۱۰ فرض کنید در شکل ۹-۳۳  $v_s = 10 + 20u(t)$  V باشد. مطلوبست (الف)  $i_L(0)$ ، (ب)  $v_C(0)$ ، (ج)  $i_L$  و (د)  $i_L(0.1s)$ .  
جواب:  $0.2A$ ،  $0.6V$ ،  $10V$ ،  $0.319V$ .



شکل ۹-۳۳



شکل ۹-۳۴ این مدار را بدون اتلاف است و پاسخ نامیرای  $v = 2 \sin 3t$  V را ایجاد می‌کند به شرطی که  $v(0) = 0$  و  $i(0) = -\frac{1}{6}$  A باشد.

اگر مقاومت مدار RLC موازی بی‌نهایت شود، و یا در مدار RLC مقدار آن صفر گردد، مدار ساده LC حلقوی حاصل می‌شود که در آن پاسخی نوسانی تا ابد باقی خواهند ماند. بگذارید نگاهی مختصر به چنین مداری بنماییم و سپس پاسخی مشابه را بدون نیاز به القاگر ملاحظه کنیم.

مدار بی‌منبع شکل ۹-۳۴ را در نظر بگیرید که در آن مقادیر بزرگ  $C = \frac{1}{36}$  F و  $L = 4$  H برای سادگی محاسبات انتخاب شده‌اند. فرض می‌کنیم  $i(0) = -\frac{1}{6}$  A و  $v(0) = 0$  باشد. در این صورت  $\alpha = 0$  و  $\omega_0^2 = 9s^{-1}$  و بنابراین  $\omega_d = 3$  rad/s خواهند بود. در غیاب میرایی، ولتاژ و ولتاژ با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$v = A \cos 3t + B \sin 3t$$

چون  $v(0) = 0$  است، پس  $A = 0$  می‌باشد. همچنین:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = 3B = -\frac{i(0)}{1/36}$$

از طرفی  $i(0) = \frac{1}{6}$  A بوده و بنابراین  $\frac{dv}{dt} = 6$  V/s در  $t = 0$  می‌باشد. در این صورت  $B = 2V$  است و بنابراین داریم:

$$v = 2 \sin 3t \text{ V}$$

که پاسخی سینوسی و نامیرا است. به بیان دیگر پاسخ ولتاژ میرا نیست. اکنون ببینیم چگونه می‌توان این مدار را بدون استفاده از یک LC به‌دست آورد. می‌خواهیم معادلات دیفرانسیلی بنویسیم که  $v$  در آن صدق کند و سپس آن را با op amp پیاده کنیم تا حل معادله را تولید کند. گرچه ما در این جا مثال خاصی را حل می‌کنیم ولی مثال کلی ست و می‌توان آن را برای هر معادله دیفرانسیل همگن خطی به کار برد.

برای مدار LC شکل ۹-۳۴،  $v$  را به‌عنوان متغیر تصور کرده و مجموع جریان‌های خازنی و القاگر را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{4} \int_{t_0}^t v dt' - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} \frac{dv}{dt} = 0$$

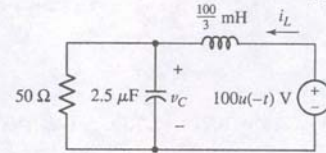
داریم:

$$\frac{1}{4} v + \frac{1}{36} \frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -9v$$

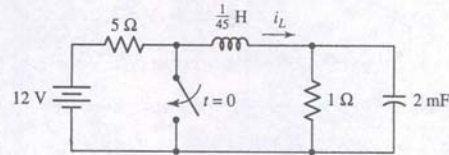
رای حل این معادله از تقویت‌کننده عملیاتی به‌عنوان انتگرال‌گیر استفاده می‌کنیم. فرض می‌شود بالاترین مرتبه مشتق در معادله  $\frac{d^2v}{dt^2}$  باشد. اکنون طبق بحث بخش ۷-۵ از op amp عنوان انتگرال‌گیر استفاده می‌نماییم. ورودی به آن در نقطه‌ای مانند A،  $\frac{dv}{dt}$  و خروجی  $\frac{dv}{dt}$  است، که تغییر علامت در آن به علت استفاده از آرایش معکوس‌گری op amp می‌باشد. مقدار ولتاژ برابر  $6$  V/s فرض می‌شود و بنابراین ولتاژ ۶- را باید در انتگرال‌گیر ایجاد کرد. حال

۱۶. عبارتی برای  $i(t)$  در مدار شکل ۹-۴۰ بیابید به نحوی که در همه زمان‌های  $t$  معتبر باشد.



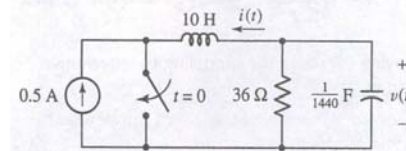
شکل ۹-۴۰

۱۷. در شکل ۹-۴۱  $i_L(t)$  را برای  $t > 0$  به‌دست آورید.



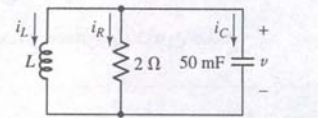
شکل ۹-۴۱

۱۸. مدار شکل ۹-۴۲ مدت‌ها در همین وضع قرار داشته است. پس از بسته‌شدن کلید در  $t = 0$  (الف) مطلوبست  $v(t)$  (ب)  $i(t)$  و (ج) زمان نشست برای  $v(t)$ .



شکل ۹-۴۲

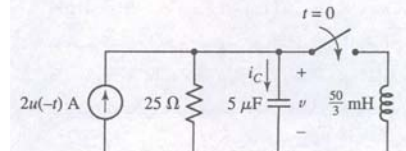
۱۹. برای مدار شکل ۹-۴۲، مقدار القاکنایی  $1250$  mH است. اگر بدانیم که خازن از ابتدا  $390$  J انرژی را ذخیره کرده است و القاگر هیچ انرژی اولیه نداشته است، مطلوبست  $v(t)$ .



شکل ۹-۴۳

۲۰. (الف) با مراجعه به شکل ۹-۴۳، چه مقداری از  $L$  پاسخ‌گذاری  $i_R(0^+) = 10A$  را تولید می‌کند. (ب) اگر  $i_R(0^+) = 15A$  باشد،  $i_C(0^+)$  و  $B$  را به‌دست آورید.

۲۱. کلید در مدار شکل ۹-۴۴ از مدت‌ها قبل باز است. (الف)  $v_C(0^+)$ ، (ب)  $i_C(0^+)$ ، (ج)  $v_C(t)$  را به‌دست آورید. (د)  $v_C(t)$  را رسم کنید. (ه)  $i$  را وقتی  $v_C(t) = 0$  است معین کنید.



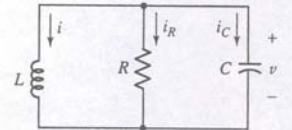
شکل ۹-۴۴

شده است. مطلوبست (الف) مقدار  $C$ ، (ب) مقدار  $R$  را برای داشتن یک ضریب میرایی نمایی  $5Gs^{-1}$ ، (ج) فرکانس نبری مدار، (د)  $s_1$  و  $s_2$  و (ه) ضریب میرایی مدار.

۸. نشان دهید که اگر  $L = 4R^2C$  باشد، معادله  $v(t) = e^{-\alpha t}(A_1t + A_2)$  حلی برای معادله (۴) است. اگر  $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = 4$  و  $v(0) = 16V$  باشد،  $A_1$  و  $A_2$  را به‌دست آورید. ۹. یک سیم مسی نمره 18 به‌طول 5m به‌عنوان مقاومت در تمرین ۹-۱ گرفته است. (الف) فرکانس تشدید مدار جدید را به‌دست آورید. (ب) فرکانس نبر مدار جدید چقدر است. (ج) درصد تغییرات در ضریب میرایی چیست؟

## ۹-۲ مدار RLC موازی فوق میرا

۱۰. در مدار شکل ۹-۲۹ فرض کنید  $C = 12.5$  mF،  $R = 8\Omega$ ،  $L = 5$  H و  $v(0^+) = 40V$  باشد. مطلوبست (الف)  $v(t)$  به‌شرطی که  $i(0^+) = 8A$  باشد. (ب) اگر  $i(0^+) = 8A$  باشد.



شکل ۹-۲۹

۱۱. در شکل ۹-۳۹ فرض کنید  $i(0) = 40A$  و  $v(0) = 40V$  باشد. اگر  $C = 0.2$  F و  $R = 0.1\Omega$ ،  $L = 12.5$  mH باشد. (الف)  $v(t)$  را به‌دست آورید و (ب)  $i$  را در فاصله زمانی  $0 < t < 0.3s$  رسم کنید.

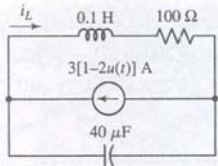
۱۲. مدار شکل ۹-۳۹ با استفاده از  $C = 50$  mF،  $R = 20$  mΩ و  $L = 2$  mH ساخته شده است. مطلوب است عبارتی برای  $i_R(t)$  معتبر در  $t > 0$  به شرطی که  $v(0^+) = 0$  و  $i(0^+) = 2$  mA باشد. (ب) حل خود را در محدوده  $0 < t < 500$  ms رسم کنید. (ج) مدار را با PSpice شبیه‌سازی نمایید. آن را به‌طور مناسبی در نقاط مختلف نام‌گذاری کنید. آیا نتیجه شبیه‌سازی با تحلیل یکی است؟

۱۳. در مدار شکل ۹-۳۹، فرض کنید  $i(0) = 40A$  و  $v(0) = 40V$  باشد. اگر  $C = 0.2$  F و  $R = 0.1\Omega$ ،  $L = 12.5$  mH باشد: (الف)  $v(t)$  را بیابید. (ب)  $i$  را برای  $0 < t < 0.3$  s رسم نمایید.

۱۴. مقادیر  $C = 50$  uF،  $R = 15$  uΩ و  $L = 2$  uH در مدار شکل ۹-۳۹ به کار رفته‌اند. (الف) عبارتی برای  $i_C(t)$  معتبر در  $t > 0$  بیابید به شرطی که  $v(0^+) = 0$  و  $i(0^+) = 0$  باشد. (ب) حل خود را در محدوده  $0 < t < 5$  ns رسم نمایید. (ج) مدار را با PSpice رسم نمایید، آن را نام‌گذاری کنید. آیا حل تحلیلی با شبیه‌سازی توافق دارد.

۱۵. برای مدار شکل ۹-۲۹،  $C = 4$  F،  $R = 1\Omega$  و  $L = 20$  H است. شرایط اولیه عبارتند از  $i(0) = 8A$  و  $v(0) = 0V$ . (الف) یک عبارت برای  $v(t)$  در  $t > 0$  پیدا کنید. (ب) مقدار پیک و زمان رخداد آن را معین نمایید. (ج) تحلیل خود را با نتیجه PSpice مقایسه نمایید. آن را نام‌گذاری کنید.



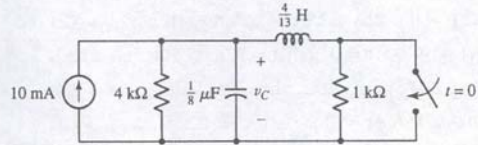


شکل ۹۶۰

۵۸. منبع مدار شکل ۹۵۵ را با  $0.5[1 - u(t)]A$  عوض کنید و  $i_L(t)$  را معین نمایید.

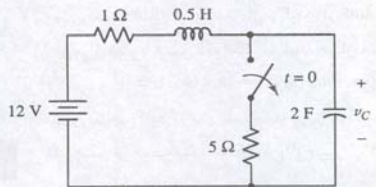
۵۹. منبع شکل ۹۴۷ را با  $2[1 + u(t)]A$  تعویض کنید و  $i_C(t)$  را در  $t > 0$  به دست آورید.

۶۰. الف)  $v_C(t)$  در مدار شکل ۹۶۱ برای  $t > 0$  معین کنید. ب)  $v_C(t)$  را در برابر  $t$  رسم کنید.  $-0.1 < t < 2ms$  می باشد.



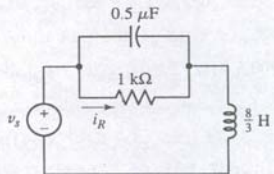
شکل ۹۶۱

۶۱. کلید در شکل ۹۶۲ از مدت ها قبل بسته بوده است. در  $t = 0$  باز می شود.  $v_C(t)$  را برای  $t > 0$  به دست آورید.



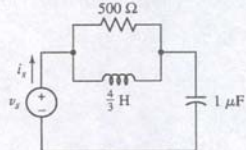
شکل ۹۶۲

۶۲. در شکل ۹۶۳،  $i_R(t)$  را برای  $t > 0$  به دست آورید به شرطی که  $v_g(t)$  برابر  $10u(t)V$  و ب)  $10u(t)V$  باشد.



شکل ۹۶۳

۶۳. در شکل ۹۶۴،  $i_g(t)$  را برای  $t > 0$  پیدا کنید به شرطی که  $v_g(t)$  برابر الف)  $10u(-t)V$  و ب)  $10u(t)V$  باشد.

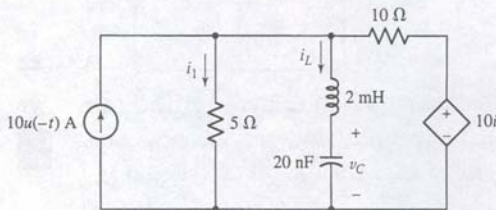


شکل ۹۶۴

۵۰. یک خازن یک بار به یک باتری 12V برای مدت معین وصل شده و سپس روی یک خودروی برقی قرار گرفته است. در حین یک زلزله خفیف یک تلفن قدیمی به زمین افتاده به نحوی که یک طرف آن با یک پایانه خازن اتصال پیدا کرده است. سیم تلفن  $14m\Omega$  مقاومت و  $5\mu H$  القایابی دارد و خازن در آغاز 144mJ انرژی را ذخیره کرده است. الف) ولتاژ خازن قبل از زلزله چیست؟ ب) ولتاژ خازن 1s بعد از اتصال سیم تلفن به خازن را معین کنید. ج) یک خرس قطبی خیس به دنبال غذا وارد شده و ناگهان پنجه خود را روی سمت وصل نشده تلفن و پای دیگرش را روی سمت باز خازن قرار می دهد. بدن خرس برای مدت 18μs به لرزش می افتد. مدتی که طول می کشد خرس خود را از این وضع رها کند 100ms است. مقاومت پوشش خیس خرس چقدر است؟

۵۱. مقاومتی را به جای 25Ω در شکل ۹۵۶ جایگزین کنید که مدار میرای بحرانی باشد. انرژی ذخیره شده در مدت  $t = 100ms$  در القاگر چقدر است؟

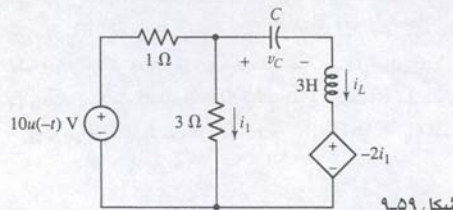
۵۲. عبارتی برای  $i_L$  مطابق شکل ۹۵۸ برای  $t > 0$  پیدا کنید.



شکل ۹۵۸

۵۳. عبارتی برای  $v_C$  مطابق شکل ۹۵۸ برای  $t > 0$  پیدا کنید.

۵۴. با مراجعه به شکل ۹۵۹ یک عبارت برای  $i_L$  معتبر برای همه زمان ها به دست آورید، اگر  $C = 1 F$  باشد.



شکل ۹۵۹

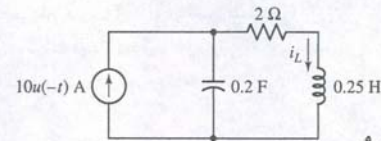
۵۵. با مراجعه به شکل ۹۵۹ یک عبارت برای  $v_C$  معتبر برای همه زمان ها به دست آورید، اگر  $C = 1 mF$  باشد.

## ۹-۶ پاسخ کامل مدار RLC

۵۶. الف)  $i_L(t)$  را برای همه زمان ها در شکل ۹۶۰ به دست آورید. ب) در چه لحظه ای پس از  $t = 0$ ،  $i_L(t) = 0$  است؟

۵۷. منبع مدار شکل ۹۵۳ به  $10u(t)A$  تغییر یافته است.  $i_L(t)$  را پیدا کنید.

۴۳.  $i_L(t)$  را برای  $t > 0$  در مدار شکل ۹۵۳ رسم کنید.

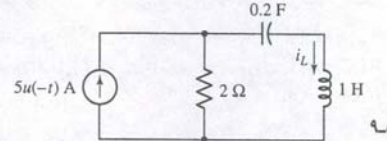


شکل ۹۵۳

۴۴. در مدار شکل ۹۲۱ الف)، بگذارید  $R = 300\Omega$  و  $C = 1\mu F$  و مدار در حالت میرای بحرانی باشد. اگر  $v_C(0) = -10V$  و  $i(0) = -150mA$  الف)  $v_C(t)$  را بیابید. ب)  $|v_C|_{max}$  و ج)  $v_{C,max}$  را بیابید.

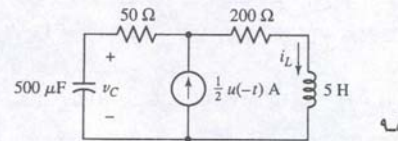
۴۵. دوگان مسئله ۱۶ را در مورد مدار شکل ۹۴۰ به دست آورید. آن را حل کنید.

۴۶. الف)  $i_L(t)$  را در شکل ۹۵۴ برای  $t > 0$  به دست آورید. ب)  $|i_L|_{max}$  و  $i_{L,max}$  را معین کنید.



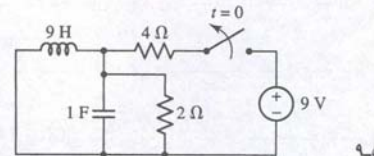
شکل ۹۵۴

۴۷. برای مدار شکل ۹۵۵ و در  $t > 0$ ، الف)  $i_L(t)$  و ب)  $v_C(t)$  را معین کنید.



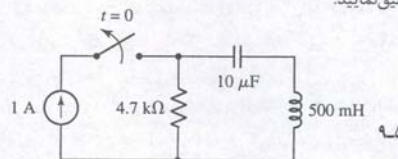
شکل ۹۵۵

۴۸. انرژی ذخیره شده در القاگر شکل ۹۵۶ را در  $t = 2s$  به دست آورید. صحت آن را با PSpice تحقیق کنید.

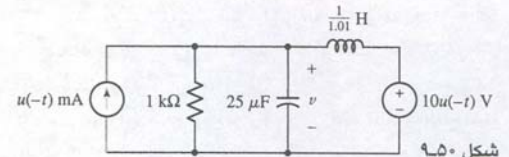


شکل ۹۵۶

۴۹. کلید در شکل ۹۵۷ از مدت ها قبل بسته بوده است. مقدار اوج ولتاژ دو سر القاگر 500 - mH را به دست آورید و صحت آن را با PSpice تحقیق نمایید.

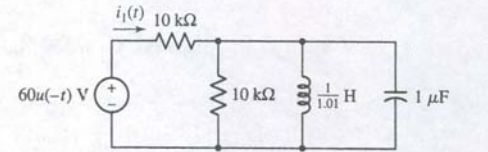


شکل ۹۵۷



شکل ۹۵۰

۳۷. در شکل ۹۵۱،  $i_L(t)$  را در  $t > 0$  به دست آورید.



شکل ۹۵۱

۳۸. به جای مقاومت 25Ω در شکل ۹۴۴ حداقل مقاومت چه باشد تا پاسخ  $v(t)$  زیرمیرا باشد. مقاومت خود را در 1000 ضرب کنید و پاسخ را بکشید. به کمک PSpice زمان نشت را معین نمایید و برچسب های مناسب را روی نمودار خود نصب کنید.

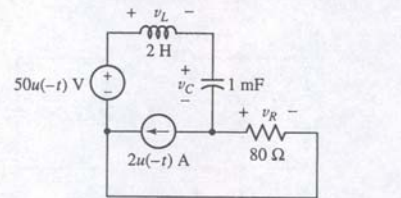
۳۹. مقدار R را برای مدار شکل ۹۱۴ معین کنید ( $L = 7H$ ،  $C = \frac{1}{42}F$ ،  $i(0) = 10A$  و  $v(0) = 0$  به نحوی که زمان نشت  $t_d$  در آن حداقل شود. مقدار  $t_d$  چقدر است؟

۴۰. الف) مقاومت 2Ω شکل ۹۴۶ را با یک مقاومت 5Ω تعویض کنید. عبارتی برای  $i_L(t)$  به دست آورید و آن را برای  $t = 2.5s$  حل کنید. ب) مقاومت 2Ω را این بار با 0.5Ω تعویض کنید. عبارتی برای  $i_L(t)$  بیابید و آن را برای  $t = 250ms$  حل کنید. ج) مدارهای بخش الف) و ب) را شبیه سازی کنید و جریان القاگر را در هر یک از آن ها روی همان نمودار رسم نمایید. برای هر کدام برچسب های لازم را فراهم کنید.

۴۱. الف) با PSpice مدار شکل ۹۴۶ را مدل سازی کنید. به جای منبع جریان  $4u(-t)$ ، مدار بی منبع مناسبی را با مقادیر اولیه برای القاگر و خازن به کار ببرید. برچسب ها را روی آن بچسبانید. ب) جریان  $i_L(t)$  را با probe رسم کنید و با حل دستی مقایسه نمایید. از probe برای تعیین زمان تست استفاده کنید.

## ۹-۵ مدار RLC سری بی منبع

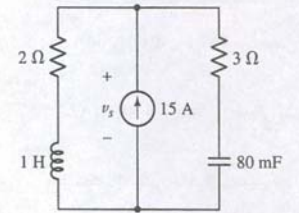
۴۲.  $v_C$ ،  $v_R$  و  $v_L$  را در شکل ۹۵۲ برای  $t = 40ms$  بیابید.



شکل ۹۵۲



۶۴. مقاومت  $2\Omega$  را در مدار شکل ۹۶۵ با یک القاگر  $3\Omega$  جایگزین نمایید. انرژی ذخیره شده در خازن را در  $t = 200\text{ms}$  معین کنید به شرطی که منبع جریان در  $t = 0$  از  $15\text{A}$  به  $22\text{A}$  تغییر کند. صحت جواب را با PSpice معین نمایید.



شکل ۹۶۵

۶۵. منبع جریان در شکل ۹۶۵ ناگهان از  $15\text{A}$  به  $22\text{A}$  در  $t = 0$  تغییر می‌نماید. ولتاژ  $v_s$  را در (الف)  $t = 0^-$ ، (ب)  $t = 0^+$ ، (ج)  $t = \infty$  و (د)  $t = 3.4\text{s}$  معین کنید. پاسخ خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید.

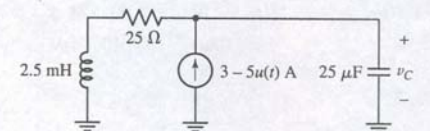
۶۶. منبع جریان در مدار شکل ۹۶۵ ناگهان در  $t = 0$  از  $15\text{A}$  به  $0\text{A}$  افت می‌کند، سپس در  $t = 1\text{s}$  به  $3\text{A}$  افزایش می‌یابد. ولتاژ  $v_C(t)$  را ترسیم کنید. حل خود را با شبیه‌سازی PSpice تست کنید.

۶۷. یک القاگر  $5\text{mH}$ ، یک خازن  $25\mu\text{F}$  و یک مقاومت  $20\Omega$  با یک منبع ولتاژ  $v_s(t)$  سری‌اند. قبل از  $t = 0$  منبع ولتاژ صفر است. در  $t = 0$  به  $75\text{V}$  می‌پرد. در  $t = 1\text{ms}$  به صفر باز می‌گردد. در  $t = 2\text{ms}$  دوباره به  $75\text{V}$  بازمی‌گردد و با همین الگو تکرار می‌شود. جریان منبع را در (الف)  $t = 0^-$ ، (ب)  $t = 0^+$ ، (ج)  $t = 1\text{ms}$  و (د)  $t = 2\text{ms}$  به دست آورید.

۶۸. مداری طراحی کنید که یک پالس سینوسی را با ولتاژ اوج  $5\text{V}$  تولید کند. ضمن این‌که سه پیک اضافه دیگر با اوج بیش از  $1\text{V}$  داشته باشد. صحت آن را با PSpice تحقیق کنید.

۶۹. یک باتری  $12\text{V}$  در جایی روی زمین قرار دارد. پایانه مثبت باتری به انتهای یک خازن  $314.2\text{pF}$  سری با القاگر  $869.1\mu\text{H}$  وصل است. یک زلزله مقداری آب نمک را روی یک انتهای القاگر/خازن (پارچه خیس) ریخته آن را به باتری وصل می‌کند تا یک مدار RLC سری تشکیل گردد. نوسان از گیرنده‌ای با فرکانس  $290.5\text{kHz}$  ( $1.825\text{Mrad/s}$ ) اخذ می‌شود. مقاومت پارچه خیس چقدر است؟

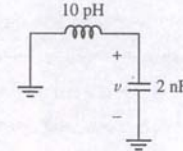
۷۰. ولتاژ  $v_C(t)$  در دو سر خازن شکل ۹۶۶ در  $t = 1\text{ms}$  چقدر است؟ صحت پاسخ خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید.



شکل ۹۶۶

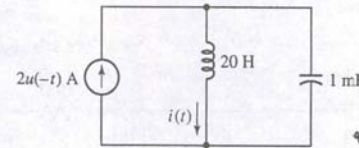
## ۹-۷ مدار LC بدون اتلاف

۷۱. یک مدار op amp برای مدل‌سازی پاسخ ولتاژ مدار LC شکل ۹۶۷ طراحی کنید. صحت کار خود را با شبیه‌سازی مدار شکل ۹۶۷ و استفاده از تقویت‌کننده LF 411 تحقیق کنید. فرض شود که  $v(0) = 0$  و  $i(0) = 1\text{mA}$  است.



شکل ۹۶۷

۷۲. با مراجعه به شکل ۹۶۸ یک مدار op amp طراحی کنید که خروجی‌اش در  $t > 0$  برابر  $i(t)$  باشد.



شکل ۹۶۸

۷۳. یک مدار RC بی‌منبع با یک مقاومت  $1\text{k}\Omega$  و خازن  $3.3\text{mF}$  ساخته شده است. ولتاژ اولیه دو سر خازن  $1.2\text{V}$  است. (الف) معادله مشتق را برای  $v$  یعنی ولتاژ دو سر خازن برای  $t > 0$  بنویسید. (ب) مداری با op amp با خروجی  $v(t)$  طراحی کنید.

۷۴. خازن را در مدار شکل ۹۶۷ با القاگر  $20\text{H}$  موازی با خازن  $5\mu\text{F}$  جایگزین کنید. مداری با op amp طراحی کنید که خروجی‌اش در  $t > 0$  برابر  $i(t)$  باشد. صحت طراحی خود را با شبیه‌سازی خازن - مقاومت و نیز با مدار op amp تحقیق کنید. از تقویت‌کننده عملیاتی LM111 در شبیه‌سازی PSpice استفاده کنید.

۷۵. یک مدار RL بی‌منبع حاوی مقاومت  $20\Omega$  و القاگر  $5\text{H}$  است. اگر مقدار اولیه جریان القاگر  $2\text{A}$  باشد. (الف) معادله دیفرانسیل  $i$  را برای  $t > 0$  بنویسید. (ب) یک op amp انتگرال‌گیر برای تهیه  $i(t)$  به عنوان خروجی طراحی کنید. فرض کنید  $R_1 = 1\text{M}\Omega$  و  $C_f = 1\mu\text{F}$  باشد.

## فصل دهم

# تحلیل حالت ماندگار سینوسی مدار

## مقدمه

پاسخ کامل یک مدار الکتریکی خطی از دو بخش تشکیل شده است، یکی پاسخ طبیعی و دیگری پاسخ واداشته. پاسخ طبیعی، پاسخی گذرا با عمری کوتاه از مداری است که در آن شرایط ناگهان تغییر کند. پاسخ واداشته پاسخی ماندگار، با عمری طولانی برای منابع مستقل موجود است. تا این جا، تنها پاسخ مربوط به منابع dc را مطالعه کردیم. تابع تحریک رایج دیگر، موج سینوسی است. این تابع ولتاژ موجود در پریز برق خانه‌ها و نیز ولتاژ خطوط انتقال نیرو متصل به یک منطقه مسکونی یا صنعتی را توصیف می‌نماید.

در این فصل، فرض می‌کنیم که پاسخ گذرا کم اهمیت است و تنها پاسخ حالت ماندگار مداری مثل تلویزیون، توستر نان یا شبکه توزیع برق مورد توجه باشد. ما این‌گونه مدارها را با تکنیکی قوی که معادلات انتگرالی - مشتقی را به معادلات جبری تبدیل می‌کند، تحلیل خواهیم کرد.

## ۱۰-۱ ویژگی‌های توابع سینوسی

ولتاژ متغیر سینوسی زیر

$$v(t) = V_m \sin \omega t$$

که در شکل ۱۰-۱ (الف) هم نشان داده شده را ملاحظه کنید. دامنه موج سینوسی  $V_m$  و آرگومان آن  $\omega t$  است. فرکانس زاویه‌ای،  $\omega$  می‌باشد. در شکل ۱۰-۱ (الف)،  $V_m \sin \omega t$  به صورت تابعی از آرگومان  $\omega t$  رسم شده است و از آن تبعیت پریودیک یا تکراری موج سینوسی را کاملاً می‌توان مشاهده کرد. تابع هر  $2\pi$  رادیان یک بار تکرار می‌گردد و پریود آن، بنابراین  $2\pi$  رادیان است. در شکل ۱۰-۱ (ب)،  $V_m \sin \omega t$  به صورت تابعی از  $t$  رسم شده است و لذا پریود آن اکنون  $T$  می‌باشد، یک موج سینوسی با پریود  $T$  باید در هر ثانیه  $\frac{1}{T}$  تناوب را طی می‌کند، بنابراین فرکانس  $f$  برحسب Hz برابر  $\frac{1}{T}$  است. پس  $f = \frac{1}{T}$ .

### مفاهیم کلیدی

- مشخصات توابع سینوسی
- نمایش فیزیکی سینوسی‌ها
- تبدیل بین حوزه‌های زمان و فرکانس
- امپدانس و ادمیتانس
- راکتانس و سوسپتانس
- ترکیبات سری و موازی در حوزه فرکانس
- تعیین پاسخ واداشته با استفاده از فیزورها
- کاربرد روش‌های تحلیل مدار در حوزه فرکانس







هنگام محاسبه عبارات فوق در زمان‌های معینی مثل  $t = 10^{-4}$  s، مقدار  $2\pi \cdot 1000t$  تبدیل به  $0.2\pi$  رادیان می‌گردد و لذا قبل از جمع با  $30^\circ$  باید آن را به صورت  $36^\circ$  نوشت. سعی کنید سبب خود را با پر تعال جمع نکنید.

اگر بخواهیم دو موج سینوسی را مقایسه کنیم، باید:

۱. هر دو به صورت سینوسی یا کسینوسی باشد.
۲. هر دو با دامنه مثبت نوشته شوند.
۳. فرکانس‌های برابری داشته باشند.

### تبدیل سینوس به کسینوس

اساساً سینوس و کسینوس یکی هستند، ولی اختلاف فازی  $90^\circ$  دارند. بنابراین  $\sin \omega t = \cos(\omega t - 90^\circ)$ . مضارب از  $360^\circ$  را می‌توان به آرگومان هر تابع سینوسی یا کسینوسی اضافه یا کم کرد، بدون آن که مقدارش تغییر یابد. بنابراین می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} v_1 &= V_{m1} \cos(5t + 10^\circ) \\ &= V_{m1} \sin(5t + 90^\circ + 10^\circ) \\ &= V_{m1} \sin(5t + 100^\circ) \end{aligned}$$

نسبت به

$$v_2 = V_{m2} \sin(5t - 30^\circ)$$

به اندازه  $130^\circ$  پیشفاز است. همچنین می‌توان گفت  $v_1$  از  $v_2$  به اندازه  $230^\circ$  پیشفاز می‌باشد. زیرا  $v_1$  را می‌توان چنین نوشت:

$$v_1 = V_{m1} \sin(5t - 260^\circ)$$

البته فرض بر این است که  $V_{m1}$  و  $V_{m2}$  هر دو کمیات مثبتی هستند. نمایش گرافیکی در شکل ۱۰-۳ مشاهده می‌شود. توجه کنید که فرکانس هر دو تابع سینوسی (در اینجا 5 rad/s) باید یکسان باشند. در غیر این صورت مقایسه مفهومی ندارد. معمولاً عمل مقایسه فاز بین دو موج سینوسی برحسب یک زاویه کوچکتر یا  $180^\circ$  بیان می‌شود.

مفهوم پسفاز یا پیشفاز بین دو موج سینوسی کاربرد گسترده‌ای دارد و به هر دو آن‌ها به روش ریاضی و گرافیکی قابل تشخیص‌اند.

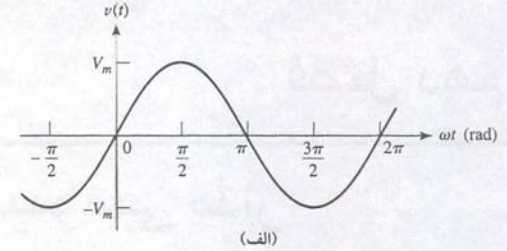
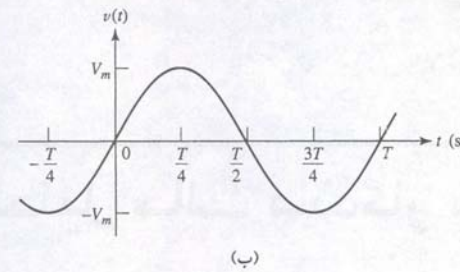
۱۰-۱ پاسفاز  $i_1$  را نسبت به  $i_2$  پیدا کنید. به شرطی که  $V = 120 \cos(120\pi t - 40^\circ)$  و  $i_1 = 1.4 \sin(120\pi t - 70^\circ)$  A (الف)،  $2.5 \cos(120\pi t + 20^\circ)$  A (ب) و  $-0.8 \cos(120\pi t - 110^\circ)$  A (ج).

۱۰-۲ A، B، C و  $\phi$  را بیابید:  $40 \cos(100t - 40^\circ) - 20 \sin(100t + 170^\circ)$   
 $= A \cos 100t + B \sin 100t = C \cos(100t + \phi)$

جواب ۱۰-۱:  $120^\circ$  و  $-110^\circ$  - جواب ۱۰-۲:  $52.9$ ،  $45.4$ ،  $27.2$  و  $-59.1^\circ$ .

### ۱۰-۲ پاسخ واداشته به توابع سینوسی

حالا که با مشخصات ریاضی توابع سینوسی آشنا شدیم، آماده‌ایم تا یک تابع تحریک سینوسی را به یک مدار ساده اعمال کرده، پاسخ واداشته را به دست آوریم. ابتدا معادله دیفرانسیلی که در مدار مفروض صادق باشد را می‌نویسیم. حل کامل این معادله از دو بخش مکمل (پاسخ



شکل ۱۰-۱ موج سینوسی  $v(t) = V_m \sin \omega t$ .  
 (الف) برحسب  $\omega t$  و (ب) برحسب  $t$ . و چون

$$\omega T = 2\pi$$

است، رابطه مرسوم بین فرکانس و فرکانس زاویه‌ای را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\omega = 2\pi f$$

### پسفاز و پیشفاز

فرم کلی توابع سینوسی بدین شکل است:

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (1)$$

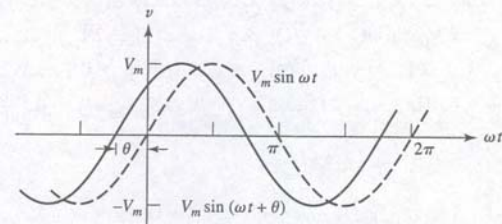
که در آن زاویه فاز  $\theta$  به آرگومان اضافه شده است. معادله ۱ به شکل ۱۰-۲ به صورت تابعی از  $\omega t$  ترسیم شده و زاویه فاز به صورت مقدار جابه‌جایی موج اصلی برحسب رادیان به چپ، یا به عبارتی زود هنگام ظاهر شده است. چون نقاط متناظر روی موج سینوسی  $V_m \sin(\omega t + \theta)$  به اندازه  $\theta$  رادیان یا  $\theta / \omega$  ثانیه زودتر رخ می‌دهند، گوئیم  $V_m \sin(\omega t + \theta)$  به اندازه  $\theta$  رادیان از  $V_m \sin \omega t$  پیشفاز است. به همین دلیل می‌توان گفت که  $\sin \omega t$  به اندازه  $\theta$  از  $\sin(\omega t + \theta)$  پس افتاده است و یا از  $\sin(\omega t + \theta)$  به اندازه  $\theta$  پیش یا از  $\sin(\omega t - \theta)$  به اندازه  $\theta$  پیش است. در هر یک از حالات، پسفاز یا پیشفاز، گوئیم که امواج سینوسی اختلاف فاز دارند. اگر زاویه فاز یکی باشند، گوئیم امواج سینوسی همفازند.

در مهندسی برق، زاویه فاز معمولاً به درجه داده می‌شود، نه برحسب رادیان. برای پرهیز از تداخل، همواره از سمبل درجه استفاده خواهیم کرد. ضمن این کار همیشه برای تبدیل رادیان به درجه ما فقط زاویه را در  $180/\pi$  ضرب می‌کنیم. بنابراین به جای نوشتن

$$v = 100 \sin(2\pi \cdot 1000t - \frac{\pi}{6})$$

خواهیم نوشت:

$$v = 100 \sin(2\pi \cdot 1000t - 30^\circ)$$



شکل ۱۰-۲ موج سینوسی  $V_m \sin(\omega t + \theta)$  نسبت به  $V_m \sin \omega t$ ،  $\theta$  رادیان پیشفاز است.



## فرم فشرده‌تر و کاربردی‌تر جواب

رابطه فوق کمی ثقیل است و تصویر واضح‌تری از آن را می‌توان با یک جمله سینوسی یا کسینوسی با زاویه فاز نشان داد. ما فرم کسینوسی را برای بیان پاسخ برمی‌گزینیم.

$$i(t) = A \cos(\omega t - \theta) \quad (۳)$$

برای یافتن مقادیر  $A$  و  $\theta$  دو روش وجود دارد. می‌توانیم معادله (۳) را مستقیماً در معادله دیفرانسیل بگذاریم یا این‌که دو حل (۲) و (۳) را با یکدیگر برابر کنیم. با انتخاب راه دوم و بسط تابع  $\cos(\omega t - \theta)$ :

$$\begin{aligned} A \cos \theta \cos \omega t + A \sin \theta \sin \omega t \\ = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t \end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب  $\cos \omega t$  و  $\sin \omega t$  داریم:

$$A \sin \theta = \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{و} \quad A \cos \theta = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

برای یافتن  $A$  و  $\theta$  دو رابطه فوق را بر هم تقسیم می‌نماییم.

$$\frac{A \sin \theta}{A \cos \theta} = \tan \theta = \frac{\omega L}{R}$$

همچنین دو رابطه را به توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم:

$$A^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta = A^2 = \frac{R^2 V_m^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{\omega^2 L^2 V_m^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = \frac{V_m^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

بنابراین

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

و

$$A = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

پس فرم دیگر پاسخ واداشته چنین است:

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left( \omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) \quad (۴)$$

می‌بینیم که دامنه پاسخ متناسب با دامنه تابع تحریک است، در غیر این صورت مفهوم خطی بودن صحیح نخواهد بود. دامنه پاسخ نیز با افزایش  $R$ ،  $L$  و  $\omega$  کاهش می‌یابد ولی این کاهش خطی نیست. به نظر می‌رسد جریان به اندازه  $\tan^{-1}(\omega L / R)$  که زاویه‌ای بین صفر و  $90^\circ$  است از ولتاژ اعمال شده عقب می‌افتد. وقتی  $\omega = 0$  یا  $L = 0$  باشد، جریان با ولتاژ هم‌فاز است. با شرط اول جریان از نوع dc و در شرط دوم مدار از نوع مقاومتی است و نتیجه با تجربه قبلی منطبق است. اگر  $R = 0$  باشد، جریان به اندازه  $90^\circ$  از ولتاژ عقب می‌افتد. بنابراین اگر در یک القاگر قرارداد عناصر غیر فعال معتبر باشد، جریان دقیقاً  $90^\circ$  از ولتاژ عقب است. به طریقی مشابه می‌توان نشان داد که جریان درون خازن به اندازه  $90^\circ$  از ولتاژ دو سرش پیش است.

اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ به نسبت  $\omega L$  به  $R$  وابسته است. ما  $\omega L$  را آکتانس القایی می‌خوانیم و برحسب اهم اندازه‌گیری می‌شود و معیار مقابله القاگر را در برابر جریان سینوسی نشان می‌دهد. اکنون اجازه بدهید تا ببینیم چگونه نتایج این تحلیل کلی را به مدار خاصی که فقط یک حلقه سری نیست، می‌توان اعمال کرد. دقت کنید که ما اکنون پاسخ گذرا را نادیده می‌گیریم. فرض بر این است که ما فقط بر پاسخ حالت ماندگار تکیه می‌کنیم به طوری که همه پاسخ‌های گذرا مدت‌ها قبل از بین رفته‌اند.

طبیعی) و انتگرال خاص (پاسخ واداشته) تشکیل شده است. روشی را که در این فصل پیشنهاد خواهیم کرد فاقد پاسخ گذرای کوتاه مدت یا طبیعی است و فقط به پاسخ طولانی‌مدت یا ماندگار توجه شده است.

## پاسخ ماندگار



جمله پاسخ ماندگار مترادف با پاسخ واداشته است و مدارهایی که ما آماده تحلیل آن هستیم را معمولاً حالت ماندگار سینوسی می‌نامند. متأسفانه ماندگار به معنی "بدون تغییر با زمان" در ذهن دانشجویان نقش بسته است. البته این تغییر برای توابع محرک dc صحیح است ولی پاسخ حالت ماندگار سینوسی قطعاً با زمان تغییر می‌کند. ماندگار درواقع به وضعیتی اشاره دارد که پس از پایان پاسخ گذرا یا طبیعی برقرار می‌گردد.

پاسخ واداشته فرم ریاضی تابع تحریک را به علاوه همه مشتقات و اولین انتگرال آن را دارد. با این آگاهی، یکی از روش‌های یافتن پاسخ واداشته این است که فرض کنیم حل مشکل از جمع این توابع است و در آن هر تابع دامنه مجهولی دارد که با جایگزینی مستقیم در معادله دیفرانسیل باید تعیین شوند. به زودی خواهیم دید که این کار طولانی است و لذا تصمیم داریم روش ساده‌تری را دنبال کنیم.

مدار شکل ۱۰-۴ را ملاحظه نمایید. منبع ولتاژ سینوسی  $v_s = V_m \cos \omega t$  مدت‌ها قبل به مدار متصل شده و پاسخ طبیعی کلاً از بین رفته است. ما در جستجوی پاسخ واداشته‌ای (یا ماندگار) هستیم که در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$$

که از اعمال KVL حول حلقه ساده مدار به دست آمده است. در هر لحظه که مشتق برابر صفر باشد، جریان باید فرم  $i \propto \cos \omega t$  را داشته باشد. به‌طور مشابه در هر لحظه که جریان صفر باشد، مشتق باید متناسب با  $\cos \omega t$  گردد. بنابراین جریان فرم  $\sin \omega t$  دارد. پس می‌توان انتظار داشت که پاسخ واداشته فرم زیر را داشته باشد.

$$i(t) = I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t$$

که  $I_1$  و  $I_2$  ثابت‌های حقیقی بوده و به  $V_m$ ،  $R$ ،  $L$  و  $\omega$  بستگی دارند. هیچ ثابت یا تابع نمایی نمی‌تواند به میان آید. با جایگزینی پاسخ مفروض در معادله دیفرانسیل برای حل داریم:

$$L(-I_1 \omega \sin \omega t + I_2 \omega \cos \omega t) + R(I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t) = V_m \cos \omega t$$

اگر از جملات کسینوس و سینوس فاکتور بگیریم، داریم:

$$(-LI_1 \omega + RI_2) \sin \omega t + (LI_2 \omega + RI_1 - V_m) \cos \omega t = 0$$

این معادله باید برای همه زمان‌های  $t$  صحیح باشد و این به شرطی است که ضرایب هر یک از جملات سینوس صفر باشد. بنابراین:

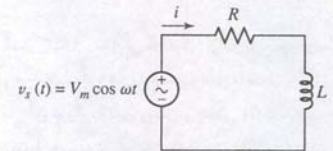
$$\omega L I_2 + RI_1 - V_m = 0 \quad \text{و} \quad -\omega L I_1 + RI_2 = 0$$

از حل همزمان  $I_1$  و  $I_2$  داریم:

$$I_1 = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad I_2 = \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

و بنابراین پاسخ واداشته به این ترتیب به دست می‌آید:

$$i(t) = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t \quad (۲)$$

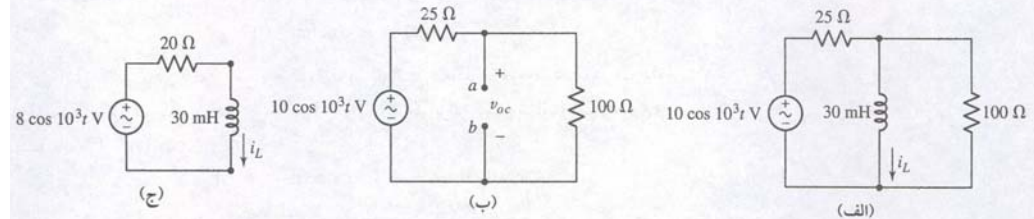


شکل ۱۰-۴ یک مدار RL سری که یافتن پاسخ واداشته‌اش موردنظر است.



## مثال ۱-۱

جریان  $i_L$  را در مدار شکل ۱-۵ الف بیابید.



شکل ۱-۵ الف) مدار مثال ۱-۱ که در آن جریان  $i_L$  خواسته شده است. (ب) می‌خواهیم معادل تونن دیده‌شده از پایانه‌های  $a$  و  $b$  را بیابیم. (ج) مدار ساده‌شده.

گرچه این مدار دارای منبع سینوسی همراه با یک القاگر است، ولی دو مقاومت دیگر هم داشته و یک حلقه تنها نیست.

برای اعمال نتایج قبل، لازم است معادل تونن را با نظاره از پایانه‌های  $a$  و  $b$  در شکل ۱-۵ ب) جستجو کنیم. ولتاژ مدار باز  $v_{oc}$  برابر است با:

$$v_{oc} = (10 \cos 10^3 t) \frac{100}{100 + 25} = 8 \cos 10^3 t \text{ V}$$

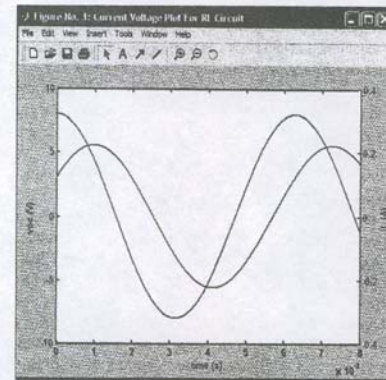
چون منبع وابسته‌ای موجود نیست،  $R_{th}$  را با کشتن منابع مستقل و محاسبه مقاومت شبکه غیرفعال به صورت  $R_{th} = (25 \parallel 100) = 20 \Omega$  به دست می‌آوریم.

حالا یک مدار RL سری با  $R_{th} = 20 \Omega$ ،  $L = 30 \text{ mH}$  و یک منبع ولتاژ  $8 \cos 10^3 t \text{ V}$  را در شکل ۱-۵ ب) داریم. بنابراین با اعمال معادله (۴):

$$i_L = \frac{8}{\sqrt{20^2 + (10^3 \times 30 \times 10^{-3})^2}} \cos \left( 10^3 t - \tan^{-1} \frac{30}{20} \right) = 222 \cos (10^3 t - 56.3^\circ) \text{ mA}$$

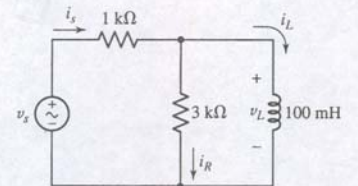
امواج ولتاژ و جریان در شکل ۱-۶ ترسیم شده‌اند.

دقت کنید که اختلاف  $90^\circ$  بین ولتاژ و جریان نمودار وجود ندارد به این دلیل که ما نمودار القاگر را رسم نکرده و آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.



شکل ۱-۶ موج‌های ولتاژ و جریان که با دستورات مطلب زیر ترسیم شده است.

```
EDU> t = linspace(0,8e-3,1000);
EDU> v = 8*cos(1000*t);
EDU> i = 0.222*cos(1000*t - 56.3*pi/180);
EDU> plotyy(t,v,i);
EDU> xlabel('time (s)');
```



شکل ۱-۷

سطح پیچیدگی معادلات جبری لازم را بنویسیم. ثابت‌ها و متغیرها در معادلات اعداد مختلط خواهند بود ولی تحلیل هر مدار در حالت ماندگار سینوسی مشابه تحلیل مدار مقاومتی است. اکنون آماده‌ایم تا یک تابع تحریک مختلط (یعنی تابعی که هر دو بخش حقیقی و موهومی دارد) را به یک شبکه الکتریکی اعمال کنیم. ممکن است این کار عجیب به نظر آید، ولی خواهیم دید که استفاده از کمیت‌های مختلط در تحلیل ماندگار سینوسی به روش‌هایی منتهی می‌گردد که بسیار ساده‌تر از کمیت‌های حقیقی است. انتظار داریم که یک تابع محرک مختلط، پاسخی مختلط تولید کند. بخش حقیقی تابع تحریک پاسخ حقیقی و بخش موهومی آن نیز پاسخ موهومی را تولید می‌نماید. انشاءالله که این صحبت منطقی به نظر می‌رسد. تصور این‌که در مداری منبع ولتاژ حقیقی، پاسخی موهومی تولید کند مشکل است و این نکته در مورد عکس آن هم صادق است.

در شکل ۱-۸ یک منبع سینوسی



شکل ۱-۸ تابع تحریک سینوسی  $V_m \cos(\omega t + \theta)$  پاسخ ماندگار سینوسی  $I_m \cos(\omega t + \phi)$  را تولید می‌کند.

به یک شبکه کلی منتقل شده است که در آن فقط عناصر غیرفعال موجود است (یعنی منابع مستقل در آن وجود ندارد) تا بدین ترتیب در به کارگیری اصل جمعیت از برخورد با مشکل خودداری شود. هدف یافتن پاسخ جریان در دیگر شاخه‌های شبکه است و پارامترهای موجود در معادله (۵) نیز همگی کمیت‌های حقیقی‌اند.

نشان دادیم که می‌توان پاسخ را با تابع کسینوسی زیر نشان داد:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) \quad (۵)$$

یک تابع تحریک سینوسی همیشه پاسخ واداشته سینوسی با همان فرکانس در مداری خطی، تولید می‌کند.

اکنون بگذارید زمان مرجع خود را با جابه‌جایی فاز تابع تحریک به اندازه  $90^\circ$  تغییر دهیم و یا زمان  $t = 0$  را عوض کنیم. بنابراین تابع تحریک زیر را داریم:

$$V_m \cos(\omega t + \theta - 90^\circ) = V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (۷)$$

وقتی این تابع را به همان شبکه اعمال کنیم، پاسخ چنین خواهد شد:

$$I_m \cos(\omega t + \phi - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \phi) \quad (۸)$$

پس از عالم واقعی خارج شده و یک تابع تحریک موهومی را که قابل تولید در آزمایشگاه نیست و فقط مفهوم ریاضی دارد، به مدار اعمال می‌کنیم.

### منبع موهومی، پاسخ موهومی تولید می‌کند

منبع موهومی را بسیار ساده می‌توان ساخت، فقط کافی است که معادله (۷) را در  $j$  که همان عملگر موهومی  $\sqrt{-1}$  است، ضرب کنیم. بنابراین داریم:

$$jV_m \sin(\omega t + \theta) \quad (۹)$$

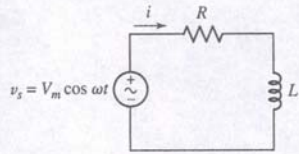
خوب، پاسخ چیست؟ اگر منبع را دوبرابر کنیم، بنا به اصل خطی بودن، انتظار داریم پاسخ هم دوبرابر شود. ضرب تابع تحریک با ثابت  $k$  ضرب پاسخ در همان ثابت را نتیجه می‌دهد. این که ثابت ما  $\sqrt{-1}$  است، نتیجه فوق را منفی نمی‌کند. بنابراین پاسخ منبع معادله (۹) برابر است با

$$jI_m \sin(\omega t + \theta) \quad (۱۰)$$

منبع موهومی و پاسخ آن در شکل ۱-۹ دیده می‌شود.

مهندسين برق برای نشان دادن  $\sqrt{-1}$  معمولاً به جای  $j$  از  $i$  استفاده می‌کنند تا با جریان اشتباه نشود.





شکل ۱۰-۱۱ یک مدار ساده در حالت ماندگار سینوسی که قرار است با اعمال تابع تحریک مختلط تحلیل شود.

در معادله فوق عبارات مختلط تابع  $v_s$  و پاسخ  $i$  را جایگزین می‌کنیم:

$$RI_m e^{j(\omega t + \phi)} + L \frac{d}{dt} (I_m e^{j(\omega t + \phi)}) = V_m e^{j\omega t}$$

با اجرای مشتق فوق داریم:

$$RI_m e^{j(\omega t + \phi)} + j\omega LI_m e^{j(\omega t + \phi)} = V_m e^{j\omega t}$$

و به این ترتیب معادله‌ای جبری حاصل می‌گردد. برای تعیین مقدار  $I_m$  و  $\phi$ ، طرفین را بر  $e^{j\omega t}$  تقسیم می‌کنیم:

$$RI_m e^{j\phi} + j\omega LI_m e^{j\phi} = V_m$$

در سمت چپ فاکتورگیری می‌کنیم:

$$I_m e^{j\phi} (R + j\omega L) = V_m$$

و یا

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

برای شناسایی  $I_m$  و  $\phi$ ، سمت راست را به صورت قطبی یا نمایی درمی‌آوریم.

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(-\tan^{-1}(\omega L/R))} \quad (15)$$

بنابراین

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

و

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

به فرم قطبی می‌توان چنین نوشت:

$$I_m \angle \phi$$

یا

$$V_m / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle -\tan^{-1} \omega L / R$$

پاسخ مختلط با معادله (۱۵) داده شد. چون  $I_m$  و  $\phi$  به راحتی قابل شناسایی است. می‌توان بلافاصله عبارتی برای  $i(t)$  نوشت. با این وجود اگر ترجیح دهیم راهی مناسب‌تر برگزینیم، می‌توان پاسخ  $i(t)$  را با اعمال فاکتور  $e^{j\omega t}$  در هر دو طرف معادله (۱۵) و انتخاب بخش حقیقی به دست آورد. از هر یک از دو راه داریم:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right)$$

که با معادله (۴) برای مدار موردنظر برابر است.

لنژ مختلط دو سر ترکیب مقاومت  $500 \Omega$  سری با القاگر  $95 \text{ mH}$  را بیابید، به شرطی که میان مختلط  $e^{j3000t}$  در دو عنصر سری جاری گردد.

## اعمال یک تابع تحریک مختلط

ما منبعی حقیقی را به مدار اعمال کردیم و پاسخ حقیقی به دست آمد؛ همچنین منبعی موهومی را اعمال نمودیم، پاسخی موهومی حاصل شد. چون با مداری خطی سروکار داریم، برای یافتن پاسخ مدار به تابع تحریک مختلط که مجموع توابع تحریک حقیقی و موهومی است، می‌توان قضیه تجمیع را به کار برد. بنابراین جمع توابع تحریک معادلات (۵) و (۹) برابر است با:

$$V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \quad (11)$$

و باید پاسخی تولید کند که از جمع معادلات ۶ و ۱۰ به دست می‌آید.

$$I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \quad (12)$$

می‌توان منبع و پاسخ مختلط را به فرم ساده‌تری که از رابطه اولر حاصل می‌شود، نشان داد. پس منبع معادله (۱۱) چنین می‌شود:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (13)$$

و پاسخ آن از معادله (۱۲) به دست می‌آید:

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} \quad (14)$$

منبع و پاسخ مختلط در شکل ۱۰-۱۰ نشان داده شده است.

یک منبع حقیقی، موهومی یا مختلط به ترتیب پاسخی حقیقی، موهومی یا مختلط را تولید می‌نماید. علاوه بر آن توسط رابطه اولر و قضیه تجمیع، یک تابع تحریک مختلط را می‌توان مجموع تابع تحریک حقیقی و تابع تحریک موهومی دانست. بخش حقیقی پاسخ از منبع حقیقی و پاسخ موهومی از بخش موهومی منبع مختلط حاصل می‌گردد.

هدف ما این است که به جای اعمال یک تابع تحریک حقیقی برای یافتن پاسخ حقیقی از تابع تحریک مختلطی استفاده کنیم که بخش حقیقی آن همان منبع حقیقی مفروض باشد و نیز انتظار داریم پاسخ مختلطی به دست آوریم که بخش حقیقی آن پاسخ حقیقی مطلوب ما باشد. مزیت این روال این است که معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی توصیف‌گر پاسخ حالت ماندگار یک مدار، تبدیل به معادلات ساده جبری می‌گردد.

## روش جبری دیگر برای معادلات دیفرانسیل

بگذارید این کار را روی مدار ساده RL سری در شکل ۱۰-۱۱ پیاده کنیم. منبع حقیقی  $V_m \cos \omega t$  اعمال می‌شود، پاسخ  $i(t)$  مطلوب است. چون:

$$\cos \omega t = \text{Re} \{e^{j\omega t}\}$$

منبع مختلط لازم چنین است:

$$V_m e^{j\omega t}$$

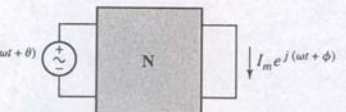
ما پاسخ مختلط را برحسب دامنه مجهول  $I_m$  و زاویه فاز نامعلوم  $\phi$  بیان می‌کنیم.

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

با نوشتن یک معادله دیفرانسیل برای این مدار خاص داریم:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = v_s$$

شکل ۱۰-۱۰ پاسخ مدار شکل ۸-۱۰ به ورودی مختلط  $V_m e^{j(\omega t + \theta)}$  برابر است با تابع مختلط  $I_m e^{j(\omega t + \phi)}$ .





نمایش آن به فرم مختلط عبارت بود از:

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

به محض تعیین  $I_m$  و  $\phi$  جریان دقیقاً تعریف می‌شود. در هر مداری که در حالت ماندگار با فرکانس ثابت  $\omega$  کار کند، هر جریان یا ولتاژ با دامنه و زاویه فاز مشخص می‌گردد. در واقع نمایش مختلط هر ولتاژ یا جریان حاوی فاکتور  $e^{j\omega t}$  است. چون این فاکتور در هر کمیتی یکسان است، بنابراین هیچ اطلاعات مفیدی را در بر ندارد. البته می‌توان فرکانس را با واریسی یکی از این فاکتورها مشخص کرد ولی راحت‌تر است که مقدار فرکانس را در کنار نمودار بنویسیم و از حمل اطلاعات بی‌مصرف در سراسر حل مسئله خودداری کنیم. بنابراین می‌توان منبع ولتاژ و پاسخ جریان مثال قبل را با نمایش آن‌ها به فرم زیر ساده کرد.

$$V_m e^{j0^\circ} \quad \text{یا} \quad V_m$$

و

$$I_m e^{j\phi}$$

این کمیات مختلف معمولاً به صورت قطبی در عوض نمایی نوشته می‌شوند تا صرفه‌جویی زمان و تلاش‌ها صورت پذیرد. بنابراین ولتاژ منبع

$$v(t) = V_m \cos \omega t$$

اکنون آن را به صورت مختلط می‌نویسیم:

$$V_m \angle 0^\circ$$

و جریان پاسخ نیز به صورت زیر درمی‌آید:

$$i(t) = I_m \cos (\omega t + \phi)$$

یا

$$I_m \angle \phi$$

این نمایش مختلط خلاصه را **فیزور** می‌گویند. بیایید مراحل تبدیل یک منبع ولتاژ یا جریان حقیقی را به فیزور قدم به قدم دنبال کنیم، آن‌گاه خواهیم توانست فیزور را بامعنی‌تر تعریف کرده و برای نمایش آن نماد معرفی نماییم.

یک جریان سینوسی حقیقی مثل

$$i(t) = I_m \cos (\omega t + \phi)$$

را می‌توان با استفاده از رابطه اولر به صورت بخش حقیقی یک کمیت مختلط نشان داد.

$$i(t) = \operatorname{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

سپس با حذف  $\operatorname{Re}\{\}$  جریان را به صورت کمیتی مختلط نشان می‌دهیم، یعنی یک قسمت موهومی به آن اضافه می‌نماییم، بدون این‌که قسمت حقیقی را تغییر دهیم. با حذف  $e^{j\omega t}$ ، نماد ساده به شکل

$$I = I_m \angle \phi$$

حاصل می‌گردد که با نوشتن آن به صورت قطبی خواهیم داشت:

$$I = I_m \angle \phi$$

ولتاژ مختلط مجهول دامنه  $V_m$  و فاز  $\phi$  را خواهد داشت، که هر دو آن‌ها باید معین شوند. با این وجود، ولتاژ باید همان فرکانس جریان (3000 rad/s) را داشته باشد. بنابراین، این ولتاژ را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$V_m e^{j(3000t + \phi)}$$

از برابری آن با جمع ولتاژهای مقاومت و القاگر داریم:

$$V_m e^{j(3000t + \phi)} = (500) 0.008 e^{j3000t} + (0.095) \frac{d(0.008 e^{j3000t})}{dt}$$

و با گرفتن مشتق درمی‌یابیم که

$$V_m e^{j(3000t + \phi)} = 4e^{j3000t} + j2.28e^{j3000t}$$

با حذف جمله  $e^{j3000t}$  خواهیم داشت:

$$V_m e^{j\phi} = 4 + j2.28$$

با تبدیل سمت راست به فرم قطبی، یعنی

$$4 + j2.28 = 4.60 e^{j29.7^\circ}$$

و از آن نتیجه می‌شود  $V_m = 4.60$  و  $\phi = 29.7^\circ$  و به این ترتیب ولتاژ مطلوب برابر است با

$$4.60 e^{j(3000t + 29.7^\circ)} \text{ V}$$

اگر پاسخ حقیقی موردنظر باشد، کافی است تنها بخش حقیقی پاسخ مختلط را انتخاب کنیم.

$$\operatorname{Re}\{4.60 e^{j(3000t + 29.7^\circ)}\} = 4.60 \cos (3000t + 29.7^\circ) \text{ V}$$

بنابراین می‌توان پاسخ واداشته یک مدار الکتریکی حاوی یک عنصر ذخیره‌ساز انرژی را بدون حل معادله دیفرانسیل به دست آورد.

## تمرین

اگر در حل این مسئله مشکل دارید، به پیوست ۵ مراجعه نمایید.

۱-۴ موارد زیر را به فرم مختصات مربعی درآورید:

(الف)  $;(1 + j2)[(2 \angle -110^\circ)(5 \angle 30^\circ)]$  و (ب)  $(4 \angle 20^\circ + 5 \angle -200^\circ)$ .

موارد زیر را به مختصات قطبی تبدیل کنید.

(ج)  $(3 - j) / (2 - j7)$  و (د)  $[(2 \angle 20^\circ) / (5 \angle 80^\circ)] + j4 - 8$ .

۱-۵ اگر استفاده از قرارداد علامت عناصر غیرفعال مجاز باشد، مطلوب است (الف) ولتاژ مختلطی که از اعمال جریان مختلط  $4e^{j800t}$  به مدار سری متشکل از خازن 1 mF و مقاومت 2  $\Omega$  حاصل می‌شود. (ب) جریان مختلطی که از اعمال ولتاژ مختلط  $100e^{j2000t}$  به مدار موازی متشکل از یک القاگر 10 mH و مقاومت 50  $\Omega$  حاصل می‌شود.

جواب ۱-۴:  $6.38 \angle -11.22^\circ$ ;  $2.30 \angle -55.6^\circ$ ;  $-0.940 + j3.08$ ;  $21.4 - j6.38$   
جواب ۱-۵:  $V = 9.43 \angle (800t - 32.0^\circ)$  A,  $5.39 \angle (2000t - 68.2^\circ)$

## ۱۰-۴ فیزور

یک ولتاژ یا جریان سینوسی با فرکانس مفروضی را می‌توان با دو پارامتر، یکی دامنه و دیگری زاویه فاز نمایش داد. نمایش مختلط ولتاژ و جریان نیز با این دو پارامتر تحقق می‌یابد. مثلاً با فرض فرم سینوسی پاسخ جریان:

$$I_m \cos (\omega t + \phi)$$



## مثال ۱۰-۳

این نمایش خلاصه مختلط، نمایش فیزیکی نام دارد. چون فیزورها کمیات مختلط هستند، با حروف بزرگ نمایش داده می‌شوند. علت استفاده از حروف بزرگ برای نشان دادن فیزیکی کمیات فیزیکی این است که فیزور تابعی از زمان نیست، بلکه تنها دامنه و فاز یک تابع متغیر با زمان را نشان می‌دهد. ما این تفاوت دیدگاه را به این صورت بیان می‌کنیم که  $i(t)$  نمایش در حوزه زمان یک جریان و  $I$  نمایش حوزه فرکانس آن است. توجه کنید که در بیان ولتاژ و جریان در حوزه فرکانس، خود فرکانس صراحتاً بیان نمی‌شود. با این وجود فرکانس آن قدر اهمیت دارد که با حذفش بر پدیدهی بودنش تأکید شده است.

ولتاژ حوزه زمان  $v(t) = 100 \cos(400t - 30^\circ)$  را به حوزه فرکانس تبدیل کنید.

عبارت حوزه زمان از قبل به فرم موج کسینوسی با زاویه فاز داده شده است. بنابراین با حذف  $\omega = 400 \text{ rad/s}$  داریم:

$$V = 100 \angle -30^\circ \text{ V}$$

دقت کنید که در نوشتن عبارت فوق چند گام را چشم‌پوشی کرده‌ایم. گاهی این کار موجب اشتباه دانشجویان می‌گردد و ممکن است فراموش کنند که نمایش فیزیکی با ولتاژ  $v(t)$  در حوزه زمان یکی نیست. در عوض این نمایش فرم ساده‌اش تابع مختلطی است که از جمع مؤلفه موهمی به تابع حقیقی  $v(t)$  حاصل شده است.

## تمرین

۱۰-۶ هر یک از توابع زمانی زیر را به فرم فیزیکی درآورید.

(الف)  $-5 \sin(580t - 110^\circ)$ ، (ب)  $3 \cos 600t - 5 \sin(600t + 110^\circ)$  و

(ج)  $8 \cos(4t - 30^\circ) + 4 \sin(4t - 100^\circ)$ . (راهنمایی: هر یک را به یک تابع کسینوسی

دامنه مثبت تبدیل کنید).

جواب:  $5 \angle -20^\circ$ ،  $2.41 \angle -134.8^\circ$  و  $4.46 \angle -47.9^\circ$ .

فرآیند بازگشت از حوزه فرکانس به حوزه زمان دقیقاً عکس روال قبل است. بنابراین با فرض ولتاژ فیزیکی

$$V = 115 \angle -45^\circ \text{ V}$$

و این که  $\omega = 500 \text{ rad/s}$  است، معادل حوزه زمان را مستقیماً می‌نویسیم:

$$v(t) = 115 \cos(500t - 45^\circ) \text{ V}$$

اگر تابع به صورت سینوسی موردنظر باشد، می‌توان  $v(t)$  را به صورت زیر نوشت:

$$v(t) = 115 \sin(500t + 45^\circ) \text{ V}$$

۱۰-۷ فرض کنید  $\omega = 2000 \text{ rad/s}$  و  $t = 1 \text{ ms}$  باشد. مقدار لحظه‌ای هر یک از جریان‌های

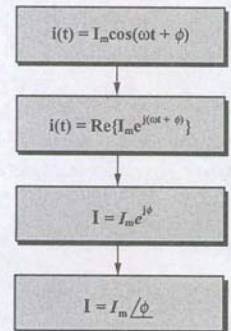
فیزیکی زیر را پیدا کنید:

(الف)  $j10 \text{ A}$ ، (ب)  $20 + j10 \text{ A}$  و (ج)  $20 \angle 20^\circ \text{ A}$  و  $20 + j10$ .

جواب:  $9.09 \text{ A}$ ،  $-17.42 \text{ A}$  و  $-15.44 \text{ A}$ .

## تمرین

تبدیل  $i(t)$  به  $I$ ، تبدیل فیزیکی از حوزه زمان به حوزه فرکانس نام دارد.



## مقاومت

مقاومت ساده‌ترین حالت است. در حوزه زمان طبق شکل ۱۰-۱۲ (الف) معادله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(t) = Ri(t)$$

حال اجازه دهید تا ولتاژ مختلط را اعمال کنیم:

$$v(t) = V_m e^{j(\omega t + \theta)} = V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \quad (۱۶)$$

و پاسخ جریان مختلط را هم مطابق زیر فرض نماییم:

$$i(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)} = I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \quad (۱۷)$$

بنابراین

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = RI_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

با تقسیم طرفین بر  $e^{j\omega t}$

$$V_m e^{j\theta} = RI_m e^{j\phi}$$

یا به فرم قطبی داریم:

$$V_m \angle \theta = RI_m \angle \phi$$

عبارات  $\angle \theta$  و  $\angle \phi$  چیزی جز فرم‌های فیزیکی  $V$  و  $I$  نیستند. بنابراین:

$$V = RI \quad (۱۸)$$

توجه دارید که قانون اهم در هر دو حوزه زمان و فرکانس معتبر است. به بیان دیگر ولتاژ دو سر یک مقاومت همواره از حاصل ضرب مقاومت در جریان جاری شده در آن به دست می‌آید. پس رابطه ولتاژ - جریان در فرم فیزیکی برای مقاومت همان فرم رابطه بین ولتاژ و جریان در حوزه زمان را دارا است. معادله فیزیکی تعریف شده در شکل ۱۰-۱۲ (ب) ملاحظه می‌شود. زوایای  $\theta$  و  $\phi$  با یکدیگر برابرند و بنابراین جریان و ولتاژ همیشه هم‌فازند.

به عنوان مثالی از استفاده هر دو رابطه حوزه زمان و حوزه فرکانس، بیایید فرض کنیم که در دو سر مقاومت  $4 \Omega$ ، ولتاژ  $8 \cos(100t - 50^\circ) \text{ V}$  برقرار باشد. با حل در حوزه زمان، جریان باید فرم زیر را داشته باشد:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = 2 \cos(100t - 50^\circ) \text{ A}$$

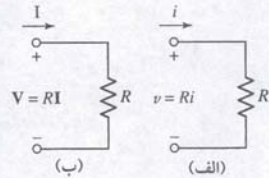
فرم فیزیکی ولتاژ  $V = 8 \angle -50^\circ$  است و بنابراین:

$$I = \frac{V}{R} = 2 \angle -50^\circ \text{ A}$$

اگر این پاسخ را به حوزه زمان بازگردانیم، مسلماً عبارت یکسانی برای جریانی به دست خواهد آمد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که وقتی یک مدار مقاومتی را تحلیل می‌کنیم، استفاده از حوزه زمانی موجب صرفه‌جویی در زمان یا تلاش نمی‌گردد.

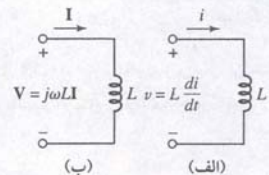
## الفاگر

اکنون بیایید الفاگر را بررسی کنیم. شبکه حوزه زمان در شکل ۱۰-۱۳ (الف) نشان داده شده است و تعریف عبارت حوزه زمان به صورت زیر است:



شکل ۱۰-۱۲ مقاومت و ولتاژ و جریان آن (الف) در حوزه زمان  $v = Ri$  و (ب) در حوزه فرکانس  $V = RI$ .

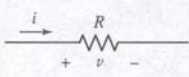
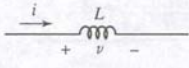
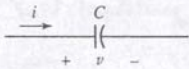
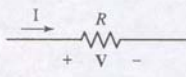
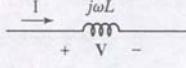
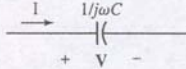
قانون اهم در هر دو حوزه زمان و فرکانس صحیح است. به بیان دیگر ولتاژ روی یک مقاومت همیشه حاصل ضرب مقدار مقاومت در جریان مقاومت است.



شکل ۱۰-۱۳ الفاگر و ولتاژ و جریان آن (الف) در حوزه زمان  $v = L di/dt$  و (ب) در حوزه فرکانس  $V = j\omega LI$ .



جدول ۱-۱ مقایسه روابط ولتاژ-جریان حوزه زمان و حوزه فرکانس.

| حوزه فرکانس  |                             | حوزه زمان   |
|--|-----------------------------|---|
| $V = RI$   | $v = Ri$                    |  |
| $V = j\omega LI$   | $v = L \frac{di}{dt}$       |  |
| $V = \frac{1}{j\omega C} I$  | $v = \frac{1}{C} \int i dt$ |  |
|  |                             |   |
|  |                             |   |
|  |                             |   |

همه عبارات فیزیکی جبری اند. هر یک خطی نیز هستند و معادلات مربوط به القاگر و خازن شباهت زیادی به قانون اهم دارند. درحقیقت ما آن‌ها را چون قانون اهم به کار خواهیم برد.

### قوانین کیرشهف برای فیزورها

قانون ولتاژ کیرشهف در حوزه زمان به صورت زیر است:

$$v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_N(t) = 0$$

اکنون به سراغ اتحاد اولر می‌رویم تا هر جمله ولتاژ  $v_i$  را با ولتاژ مختلطی که بخش حقیقی یکسانی دارد جایگزین و  $v_i$  را حذف کنیم تا رابطه زیر به دست آید:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_N = 0$$

به این ترتیب می‌بینیم قانون ولتاژ کیرشهف برای ولتاژهای فیزیکی درست مثل حوزه زمان معتبر است. می‌توان نشان داد که قانون جریان کیرشهف هم با بحثی مشابه، با فیزورها برقرار است. حال نگاهی مختصر به مدار  $RL$  سری، یعنی مواردی که چندین بار آن را مطالعه کردیم، می‌اندازیم. مدار در شکل ۱۰-۱۵ نشان داده شده و جریان فیزور و چند ولتاژ فیزیکی روی آن نشان داده شده است. در این جا پاسخ جریان حوزه زمان را با یافتن فیزور جریان پیدا می‌کنیم. از قانون کیرشهف داریم:

$$V_R + V_L = V_S$$

به کمک روابط  $V - I$  که اخیراً به دست آمد، داریم:

$$RI + j\omega LI = V_S$$

آن‌گاه جریان فیزور برحسب ولتاژ منبع  $V_S$  پیدا می‌شود:

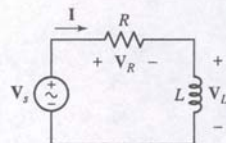
$$I = \frac{V_S}{R + j\omega L}$$

بگذارید منبع ولتاژی با دامنه  $V_m$  و زاویه فاز  $0^\circ$  برگزینیم. پس:

$$I = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R + j\omega L}$$

می‌توان با نوشتن فرم قطبی رابطه فوق، آن را به حوزه زمان انتقال داد:

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (-\tan^{-1}(\omega L/R))$$



شکل ۱۰-۱۵ مدار  $RL$  سری که ولتاژ فیزیکی به آن اعمال شده است.

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (۱۹)$$

پس از جایگزینی معادله ولتاژ مختلط (۱۶) و معادله جریان مختلط (۱۷) در معادله (۱۹) داریم.

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = L \frac{d}{dt} I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

با مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = j\omega L I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

و با تقسیم طرفین بر  $e^{j\omega t}$

$$V_m e^{j\theta} = j\omega L I_m e^{j\phi}$$

آن‌گاه فیزور مطلوب چنین است:

$$V = j\omega LI \quad (۲۰)$$

معادله دیفرانسیل حوزه زمان (۱۹) تبدیل به معادله جبری (۲۰) در حوزه فرکانس شده است. رابطه فیزیکی در شکل ۱۰-۱۳ (ب) ملاحظه می‌گردد. توجه کنید که زاویه جمله  $j\omega L$  دقیقاً  $90^\circ$  است و بنابراین در القاگر  $I$  باید نسبت به  $V$  به اندازه  $90^\circ$  عقب باشد.

### مثال ۴-۱۰

ولتاژ  $V = 50 \angle -8^\circ$  را در فرکانس  $\omega = 100$  rad/s به یک القاگر اعمال کرده و فیزور جریان و جریان در حوزه زمان را معین کنید.

از عبارتی که اخیراً برای القاگر به دست آوردیم، استفاده می‌کنیم.

$$I = \frac{V}{j\omega L} = \frac{8 \angle -50^\circ}{j100(4)} = -j0.02 \angle -50^\circ = (1 \angle -90^\circ)(0.02 \angle -50^\circ)$$

یا

$$I = 0.02 \angle -140^\circ \text{ A}$$

اگر جریان را در حوزه زمان نشان دهیم، داریم:

$$i(t) = 0.02 \cos(100t - 140^\circ) \text{ A} = 20 \cos(100t - 140^\circ) \text{ mA}$$

### خازن

قطعه نهایی مورد بررسی خازن است. رابطه جریان-ولتاژ در حوزه زمان چنین است.

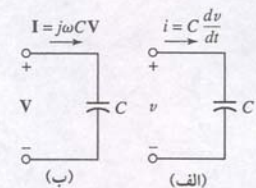
$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

عبارت معادل در حوزه فرکانس با انتخاب کمیت‌های مختلط از معادلات (۱۵) و (۱۶) و مشتق‌گیری، حذف  $e^{j\omega t}$  و شناسایی  $V$  و  $I$  به دست می‌آید. با اجرای مراحل فوق داریم:

$$I = j\omega CV \quad (۲۱)$$

بنابراین  $I$  در یک خازن به اندازه  $90^\circ$  از  $V$  پیش‌فاز است. البته این بدان معنی نیست که یک پاسخ جریان به اندازه یک چهارم پریود از ولتاژی که عامل تولید آن است، پیش است! ما پاسخ حالت ماندگار را مطالعه می‌کنیم و در آن ملاحظه می‌شود که مقدار ماکزیمم جریان که به وسیله افزایش ولتاژ ایجاد می‌شود،  $90^\circ$  زودتر از ماکزیمم ولتاژ اتفاق می‌افتد.

نمایش حوزه زمان و حوزه فرکانس در شکل ۱۰-۱۴ (الف) و (ب) مقایسه شده‌اند. تا این‌جا روابط  $V-I$  را برای هر سه عنصر غیرفعال به دست آوردیم. این نتایج در جدول ۱۰-۱ خلاصه شده و در ستون‌های مجاور روابط حوزه زمان  $V-I$  نیز نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰-۱۴ رابطه ولتاژ و جریان خازن در (الف) حوزه زمان و (ب) حوزه فرکانس.



## ترکیب موازی امپدانس‌ها

ترکیب موازی القاگر ۵ mH و خازن ۱۰۰ μF در  $\omega = 10000 \text{ rad/s}$  درست به همان طریق مقاومت‌های موازی صورت می‌گیرد:

$$Z_{eq} = \frac{(j50)(-j1)}{j50 - j1} = \frac{50}{j49} = -j1.020 \Omega$$

در  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$  معادل موازی برابر  $2.17 \Omega$  است.

عدد یا کمیت مختلط که امپدانس را نشان می‌دهد به فرم قطبی یا مختصات قائم قابل نمایش است. مثلاً امپدانس  $86.6 \Omega - j50$  گوئیم دارای مقاومت  $86.6 \Omega$  و راکتانس (واکنش)  $86.6 \Omega$  است. مؤلفه مقاومتی بخش حقیقی امپدانس و مؤلفه راکتیو بخش موهومی امپدانس است که اغلب با X نشان داده می‌شود. هر دو دارای واحد اهم هستند. در فرم مختصات قائم  $Z = R + jX$  و در فرم قطبی  $Z = |Z| \angle \theta$ . بنابراین مقاومت دارای راکتانس صفر است، درحالی‌که خازن‌ها و القاگرهای ایده‌آل مقاومت صفر دارند. این را مستقیماً می‌توان از فرم قطبی امپدانس نتیجه گرفت. دوباره  $Z = 50 - j86.6 \Omega$  را ملاحظه کنید که می‌توان آن را به صورت  $100 \angle -60^\circ \Omega$  هم نوشت. چون زاویه فاز صفر نیست، می‌دانیم که امپدانس یک مقاومت خالص در فرکانس  $\omega$  نیست. چون  $90^\circ$  هم نیست، القاوی خالص هم نیست و به همین ترتیب چون خاصیت خازنی خالص هم ندارد، زاویه فاز  $90^\circ$  نیست. آیا یک ترکیب سری یا موازی خازن و القاگر می‌تواند وجود داشته باشد و دارای راکتانس صفر باشد؟ قطعاً، یک مدار ساده را در نظر بگیرید که در آن  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ،  $L = 1 \text{ H}$  و  $C = 1 \text{ F}$  همه با  $R = 1 \Omega$  سری باشند. امپدانس معادل این شبکه برابر  $Z = 1 + j(1)(1) - j/(1)(1) = 1 \Omega$  می‌باشد و مثل این است که در مدار فقط یک مقاومت ۱ اهم وجود دارد.

امپدانس معادل شکل ۱۷-الف را با فرض فرکانس کاری  $5 \text{ rad/s}$  به دست آورید.

حل را با تبدیل مقاومت‌ها، خازن‌ها و القاگرها به امپدانس‌های متناظرشان طبق شکل ۱۷-ب آغاز می‌کنیم.

با بررسی شبکه حاصل، مشاهده می‌شود که امپدانس  $6 \Omega$  موازی با  $-j0.4 \Omega$  است. از ترکیب آن‌ها معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(6)(-j0.4)}{6-j0.4} = 0.02655 - j0.3982 \Omega$$

که با هر دو امپدانس  $10 \Omega$  سری است. به این ترتیب داریم:

$$0.02655 - j0.3982 - j + j10 = 0.02655 + j8.602 \Omega$$

این امپدانس جدید موازی با  $10 \Omega$  است و بنابراین امپدانس معادل شبکه چنین خواهد بود.

$$10 \parallel (0.02655 + j8.602) = \frac{10(0.02655 + j8.602)}{10 + 0.02655 + j8.602} = 4.255 + j4.929 \Omega$$

به همین ترتیب می‌توان امپدانس را در فرم قطبی به صورت  $6.511 \angle 49.20^\circ \Omega$  هم نشان داد.

۱۰-۹ با مراجعه به شکل ۱۰-۱۸، امپدانس ورودی  $Z_{in}$  بین پایه‌های (الف) و (ب) و (ج) و (ا) را حساب کنید.

جواب:  $2.81 + j4.49 \Omega$ ،  $1.124 - j1.798 \Omega$ ،  $3.82 - j0.1124 \Omega$ .

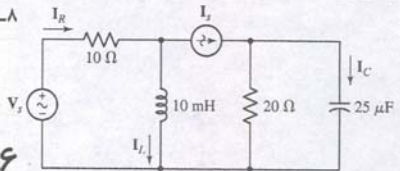
شکل ۱۰-۱۸

و سپس با انجام مراحل آشنای قبل با روشی ساده همان نتیجه‌ای را به دست می‌آوریم که قبلاً در این فصل دیدیم.

## تمرین

۱۰-۸ در مدار شکل ۱۰-۱۶، اگر  $\omega = 1200 \text{ rad/s}$ ،  $I_C = 1.2 \angle 28^\circ \text{ A}$  و  $I_L = 3 \angle 53^\circ \text{ A}$  باشد، (الف)  $I_s$ ، (ب)  $V_s$  و (ج)  $i_R(t)$  را پیدا کنید.

جواب:  $3.99 \cos(1200t + 17.42) \text{ A}$  و  $34.9 \angle 75.4^\circ \text{ V}$ ،  $2.33 \angle -31.0^\circ \text{ A}$ .



شکل ۱۰-۱۶

## ۱۰-۶ امپدانس

رابطه جریان - ولتاژ برای سه عنصر غیرفعال در حوزه فرکانس با رعایت قرارداد علامت عناصر غیرفعال عبارتند از:

$$V = RI \quad V = j\omega LI \quad V = \frac{I}{j\omega C}$$

اگر این روابط را به صورت کسرهی فیزیوری ولتاژ به جریان بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\frac{V}{I} = R \quad \frac{V}{I} = j\omega L \quad \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

می‌بینیم که این نسبت‌ها کمیت‌های ساده‌ای از مقدار هر عنصر و در حالت القاگر و خازن، تابعی از فرکانس هستند. با این نسبت‌ها همچون مقاومت برخورد می‌کنیم با این تفاوت که آن‌ها کمیات مختلط‌اند و در عملیات جبری باید مختلط بودن آن‌ها را در نظر گرفت.

بیا بید نسبت فیزور ولتاژ به فیزور جریان را **امپدانس** بنامیم و آن را با Z نشان دهیم. امپدانس کمیتی مختلط است که بُعد اهم دارد. امپدانس فیزور نیست و نمی‌توان آن را با ضرب در  $e^{j\omega t}$  فضای زمان منتقل کرد و بخش حقیقی آن را برداشت. در عوض، چنین تصور می‌کنیم که یک القاگر در حوزه زمان با القاکنایی L و در حوزه فرکانس با امپدانس  $j\omega L$  نشان داده می‌شود. یک خازن در حوزه زمان ظرفیت C و در حوزه فرکانس امپدانس  $1/j\omega C$  را دارا است. امپدانس مفهومی متعلق به حوزه فرکانس است نه به حوزه زمان.

## ترکیب سری امپدانس‌ها

اعتبار و صحت دو قانون کیرشهف در حوزه فرکانس دال بر این است که امپدانس‌ها نیز با قواعدی همچون مقاومت می‌توانند به صورت سری یا موازی ترکیب شوند. مثلاً در  $\omega = 10 \times 10^3 \text{ rad/s}$ ، یک القاگر ۵ mH سری با خازن ۱۰۰ μF با یک امپدانس که مجموع امپدانس‌های هر کدام از آن‌ها است می‌تواند جایگزین شود. امپدانس القاگر برابر است با:

$$Z_L = j\omega L = j50 \Omega$$

امپدانس خازن برابر است با

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = -j1 \Omega$$

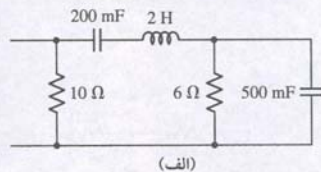
بنابراین امپدانس ترکیب سری برابر است با:

$$Z_{eq} = Z_L + Z_C = j50 - j1 = j49 \Omega$$

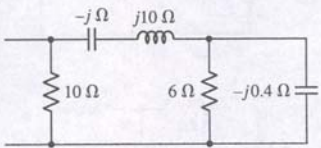
امپدانس القاگرها و خازن‌ها تابعی از فرکانس است و این امپدانس معادل فقط در فرکانس  $\omega = 10000 \text{ rad/s}$  معتبر است. اگر ما فرکانس را به مثلاً  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$  تغییر دهیم  $Z_{eq} = j23 \Omega$  خواهد شد.

توجه کنید که  $-\frac{1}{j} = j$ .

مثال ۱۰-۵



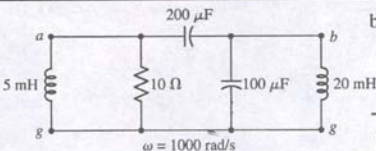
(الف)



(ب)

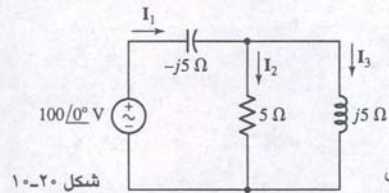
شکل ۱۰-۱۷ الف) شبکه‌ای که باید در آن امپدانس معادل گذاشت. ب) به جای عناصر امپدانس آن‌ها در  $\omega = 5 \text{ rad/s}$  گذاشته شده است.

## تمرین



$\omega = 1000 \text{ rad/s}$





شکل ۱۰-۲۰

## تمرین

با انتقال جریان به حوزه زمان، پاسخ مطلوب به دست می آید:

$$i(t) = 16 \cos(3000t - 126.9^\circ) \text{ mA}$$

صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

امپدانس مؤثر متصل به منبع دارای زاویه  $+36.87^\circ$  است. و به این معنی است که دارای خاصیت القایی می باشد و بنابراین جریان نسبت به ولتاژ تأخیر دارد. چون منبع ولتاژ دارای زاویه فاز  $-90^\circ$  است، پس پاسخ معتبر است.

۱۰-۱۰ در مدار حوزه فرکانس شکل ۱۰-۲۰،  $I_1$  (الف)،  $I_2$  (ب) و  $I_3$  (ج) را پیدا کنید.

جواب:  $I_1 = 20 \angle 0^\circ \text{ A}$ ،  $I_2 = 20 \angle 90^\circ \text{ A}$  و  $I_3 = 28.3 \angle 45^\circ \text{ A}$

قبل از شروع به نوشتن تعداد قابل توجهی معادله در حوزه زمان یا در حوزه فرکانس، باید از نوشتن معادلاتی که بخشی از آن در حوزه زمان و بخشی دیگر در حوزه فرکانس است، اجتناب کنیم. سر نخی که نشان دهد اشتباهی از این نوع صورت گرفته است، وجود هر دو نوع عدد مختلط و  $t$  در معادله است، مگر این که عامل  $e^{j\omega t}$  هم در آن باشد، چون عامل  $e^{j\omega t}$  در کاربرد اهمیت ندارد می توان گفت دانشجویانی که معادله ای حاوی  $t$  و  $\angle$  و  $t$  را می نویسند، هیولایی خلق می کنند که بدون آن اوضاع برای خودشان و دیگران بهتر خواهد بود. مثلاً در چند معادله قبل دیدیم:

$$I = \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.9^\circ} = 16 \angle -126.9^\circ \text{ mA}$$

لطفاً چیزی به شکل زیر خلق نکنید:

$$i(t) \quad \times \quad \frac{40 \sin 3000t}{2.5 \angle 36.9^\circ} \quad \text{یا} \quad i(t) \quad \times \quad \frac{40 \sin 3000t}{2 + j1.5}$$

## ۱۰-۷ ادیمیتانس

گاهی در می یابیم که عکس امپدانس کمیتی مناسب تر است. با این طرز تفکر، ادیمیتانس  $Y$  یک عنصر مدار به صورت نسبت فیزور جریان به فیزور ولتاژ تعریف می گردد.

$$Y = \frac{I}{V}$$

و بنابراین

$$Y = \frac{1}{Z}$$

بخش حقیقی ادیمیتانس، هدایت یا رسانایی  $G$  و بخش موهومی آن سوسپیتانس  $B$  نامیده می شود.

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} \quad (22)$$

معادله (۲۲) باید به دقت موشکافی شود. این رابطه نمی گوید که بخش حقیقی ادیمیتانس با عکس قسمت حقیقی امپدانس برابر است و یا این که بخش موهومی ادیمیتانس همان معکوس بخش موهومی امپدانس است!

ادیمیتانس، رسانایی (کانداکتانس)، سوسپیتانس همگی به زیرممناس اندازگی می شوند.

یک امپدانس

$$Z = 1 - j2 \Omega$$

که می توان آن را از یک مقاومت  $1 \Omega$  سری با خازن  $0.1 \mu\text{F}$  در فرکانس  $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$  تصور کرد، ادیمیتانسی برابر زیر دارد:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 - j2} = \frac{1}{1 - j2} \frac{1 + j2}{1 + j2} = 0.2 + j0.4 \text{ S}$$

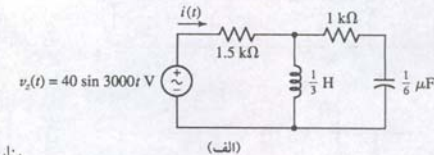
باید توجه داشت که مؤلفه مقاومتی امپدانس لزوماً برابر مقاومت موجود در شبکه نیست. مثلاً یک مقاومت  $10 \Omega$  سری با یک القاگر  $5 \text{ H}$  در  $\omega = 4 \text{ rad/s}$  دارای امپدانس معادل  $Z = 10 + j20 \Omega$  و یا در مختصات قطبی  $22.4 \angle 63.4^\circ \Omega$  است. اما در این حالت، مؤلفه مقاومتی امپدانس با مقاومت برابر است زیرا شبکه یک شبکه سری ساده می باشد. با این وجود اگر این دو عنصر موازی با هم قرار گیرند، امپدانس معادل  $(10 + j20) / (10 + j20)$  یا  $10(j20) / 8 + j4 \Omega$  است. مؤلفه مقاومتی امپدانس اکنون  $8 \Omega$  است.



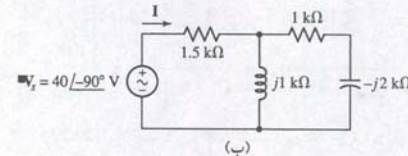
## مثال ۱۰-۶

جریان  $i(t)$  را در شکل ۱۰-۱۹ (الف) پیدا کنید.

- هدف مسئله را شناسایی کنید.
- می خواهیم جریان حالت ماندگار سینوسی جاری در مقاومت  $1.5 \text{ k}\Omega$  ناشی از منبع ولتاژ  $3000 \text{ rad/s}$  را به دست آوریم.
- اطلاعات معلوم را جمع آوری نمایید.
- کار را با ترسیم مدار در حوزه فرکانس آغاز می کنیم. منبع به حوزه فرکانس انتقال یافته و با  $40 \angle -90^\circ \text{ V}$  نشان داده شده است. پاسخ حوزه فرکانس با  $I$  نمایش داده شده و امپدانس های القاگر و خازن در  $3000 \text{ rad/s}$  محاسبه شده اند و به ترتیب برابرند با  $j2 \text{ k}\Omega$  و  $-j2 \text{ k}\Omega$ . مدار متناظر حوزه فرکانسی نیز در شکل ۱۰-۱۹ (ب) دیده می شود.
- ارائه طرح.
- ما شکل ۱۰-۱۹ (ب) را تحلیل خواهیم کرد تا  $I$  به دست آید؛ ترکیب امپدانس ها و استفاده از قانون اهم یک راه ممکن است. سپس این واقعیت را به کار می بریم که می دانیم  $\omega = 300 \text{ rad/s}$  است و لذا از آن برای تبدیل  $I$  به عبارتی در حوزه زمان استفاده خواهیم کرد.
- معادلات مناسب را بنویسید.



(الف)



(ب)

شکل ۱۰-۱۹ (الف) یک مدار RLC که پاسخ واداشته سینوسی آن مجهول است. (ب) معادل حوزه فرکانس همان مدار در  $\omega = 3000 \text{ rad/s}$ .

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= 1.5 + \frac{(j)(1-2j)}{j+1-2j} = 1.5 + \frac{2+j}{1-j} \\ &= 1.5 + \frac{2+j}{1-j} \frac{1+j}{1+j} = 1.5 + \frac{1+j3}{2} \\ &= 2 + j1.5 = 2.5 \angle 36.87^\circ \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

بنابراین جریان فیزیوری به صورت زیر است:

$$I = \frac{V_s}{Z_{eq}}$$

آیا اطلاعات دیگری لازم است.

با جایگزینی مقادیر معلوم، می بینیم که

$$I = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.87^\circ} \text{ mA}$$

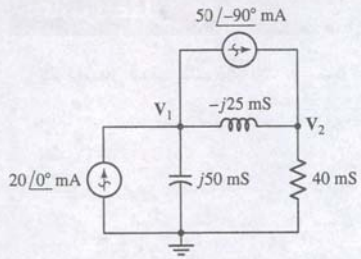
همراه با  $\omega = 3000 \text{ rad/s}$  برای یافتن حل  $i(t)$  کافی است.

اقدام به حل.

این مقدار مختلط به راحتی قابل تبدیل به یک عدد مختلط در فرم قطبی است:

$$I = \frac{40}{2.5} \angle -90^\circ - 36.87^\circ \text{ mA} = 16.00 \angle -126.9^\circ \text{ mA}$$





شکل ۱۰-۲۲

و برای گره سمت راست

$$\frac{V_2 - V_1}{-j5} + \frac{V_2 - V_1}{j10} + \frac{V_2}{j5} + \frac{V_2}{10} = -(0.5 \angle -90^\circ) = j0.5$$

با ترکیب جملات داریم:

$$(0.2 + j0.2)V_1 - j0.1V_2 = 1$$

و

$$-j0.1V_1 + (0.1 - j0.1)V_2 = j0.5$$

این معادلات به راحتی، حتی با یک ماشین حساب حل می شوند و از آن نتیجه می شود

$$V_2 = -2 + j4 \text{ V و } V_1 = 1 - j2 \text{ V}$$

حل حوزه زمان با نوشتن  $V_1$  و  $V_2$  در مختصات قطبی حاصل می شود.

$$V_1 = 2.24 \angle -63.4^\circ \quad V_2 = 4.47 \angle 116.6^\circ$$

و با انتقال به حوزه زمان داریم:

$$v_2(t) = 4.47 \cos(\omega t + 16.6^\circ) \text{ V و } v_1(t) = 2.24 \cos(\omega t - 63.4^\circ) \text{ V}$$

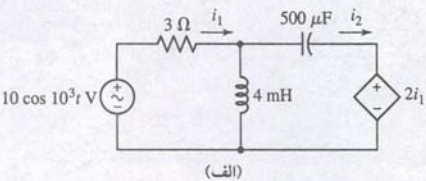
توجه کنید که در محاسبه مقادیر امپدانس روی نمودار مدار باید  $\omega$  معلوم باشد. همچنین هر دو منبع باید فرکانسی مساوی داشته باشند.

## تمرین

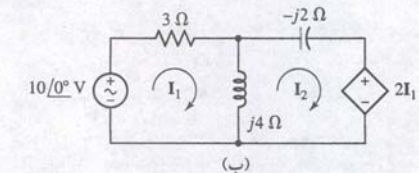
۱۰-۱۲ با کمک تحلیل گرهی روی مدار شکل ۱۰-۲۲،  $V_1$  و  $V_2$  را بیابید.جواب:  $V_1 = 1.593 \angle -50.0^\circ \text{ V}$  و  $V_2 = 1.062 \angle 23.3^\circ \text{ V}$ .

اکنون بیاید به مثالی از تحلیل حلقه پردازیم، ضمن این که به خاطر داریم که همه منابع در فرکانسی برابر کار می کنند. در غیر این صورت تعریف هر رآکتانسی در مدار ناممکن خواهد بود. در بخش بعد خواهیم دید تنها راه برخورد با این موارد استفاده از مدار تجمیع است.

## مثال ۱۰-۸



(الف)



(ب)

شکل ۱۰-۲۳ (الف) یک مدار حوزه زمان با یک منبع وابسته. (ب) مدار حوزه فرکانس متناظر با مدار شکل ۱۰-۲۲ (الف).

عباراتی برای جریان های حوزه زمان  $i_1$  و  $i_2$  در شکل ۱۰-۲۳ (الف) بیابید.در منبع سمت چپ داریم  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$  و بنابراین مدار حوزه فرکانس شکل ۱۰-۲۳ (الف) را ترسیم می کنیم. جریان مش ها را هم  $I_1$  و  $I_2$  نام می گذاریم. حول مش 1:

$$3I_1 + j4(I_1 - I_2) = 10 \angle 0^\circ$$

یا

$$(3 + j4)I_1 - j4I_2 = 10$$

در حلقه 2

$$j4(I_2 - I_1) - j2I_2 + 2I_1 = 0$$

یا

$$(2 - j4)I_1 + j2I_2 = 0$$

و با حل آن ها

$$I_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24 \angle 29.7^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77 \angle 56.3^\circ \text{ A}$$

بنابراین

$$i_1(t) = 1.24 \cos(10^3 t + 29.7^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2.77 \cos(10^3 t + 56.3^\circ) \text{ A}$$

ادمیتانس معادل شبکه ای متشکل از چند شاخه موازی برابر است با حاصل جمع ادمیتانس های هر شاخه. پس مقدار عدد ادمیتانس فوق را می توان از جمع رسانایی یا هدایت  $S$  که موازی با سوپتانس مثبت  $0.4 S$  است، به دست آورد. رسانایی می تواند یک مقاومت  $5 \Omega$  و سوپتانس یک خازن  $0.08 \mu F$  در فرکانس  $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$  باشد، زیرا ادمیتانس یک خازن  $j\omega C$  است. بگذارید برای امتحان تحلیل، امپدانس شبکه اخیر یعنی مقاومت  $5 \Omega$  موازی با خازن  $0.08 \mu F$  را در  $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$  بیابیم. امپدانس معادل برابر است با:

$$Z = \frac{5(1/j\omega C)}{5 + 1/j\omega C} = \frac{5(-j2.5)}{5 - j2.5} = 1 - j2 \Omega$$

که مثل قبل است. این دو شبکه تنها دو نمونه از بینهایت شبکه مختلفی هستند که در این فرکانس چنین امپدانس و ادمیتانسی دارند. با این وجود، این دو شبکه تنها شبکه دو عنصری دارای این خاصیت هستند و لذا می توان آن ها را ساده ترین شبکه های دانست که دارای امپدانس  $1 - j2 \Omega$  و ادمیتانس  $0.2 + j0.4 S$  در فرکانس  $\omega = 5 \times 10^6 \text{ rad/s}$  می باشند.

کلمه **ایمیتانس**، به ترکیبی از امپدانس و ادمیتانس گفته می شود. گاهی هم برای بیان نام کلی امپدانس یا ادمیتانس از آن استفاده می گردد. برای مثال اگر ولتاژ فیزیوری دو سر یک ایمیتانس معلوم باشد، می توان جریان عبوری از آن ایمیتانس را حساب کرد.

## تمرین

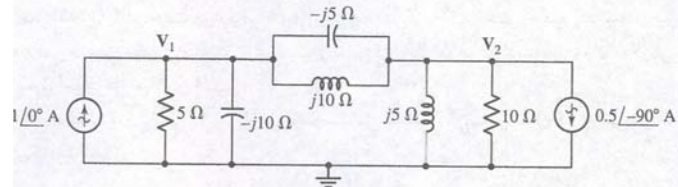
۱۰-۱۱ ادمیتانس (در مختصات قائم)، (الف) یک امپدانس  $Z = 1000 + j400 \Omega$  (ب) یک شبکه متشکل از ترکیب موازی یک مقاومت  $800 \Omega$ ، القاگر  $1 \text{ mH}$  و خازن  $2 \text{ nF}$  را به شرطی که  $\omega = 1 \text{ Mrad/s}$  باشد، (ج) شبکه ای متشکل از ترکیبات سری مقاومت  $800 \Omega$ ، یک القاگر  $1 \text{ mH}$  و یک خازن  $2 \text{ nF}$  را اگر  $\omega = 1 \text{ Mrad/s}$  باشد، به دست آورید.

جواب:  $j0.345 \text{ mS} - 1.25 + j1 \text{ mS} + 0.862 - j0.562 \text{ mS} - 0.899$ .

## ۱۰-۸ تحلیل گرهی و مش

قبلاً با تکنیک گرهی و مش به اهداف بسیاری نایل شدیم و منطقی است که بپرسیم آیا روان مشابهی برای جملات فیزیوری و امپدانس ها در حالت ماندگار سینوسی معتبر است. دیدیم که قوانین کیر شلف برای فیزورها معتبر بود، همچنین قانونی شبیه به اهم برای عناصر غیرفعال به صورت  $V = ZI$  داشتیم. به بیان دیگر قوانینی که تحلیل گرهی بر آن ها متکی است برای فیزورها معتبرند، اگر پیش تر برویم، می توان گفت برای حالت ماندگار سینوسی می توان از تکنیک گرهی استفاده کرد. با بحثی مشابه روش های تحلیل مش یا همان تک حلقه و گرهی هم معتبرند.

## مثال ۱۰-۷

ولتاژ گره  $V_1(t)$  و  $V_2(t)$  حوزه زمان را در شکل ۱۰-۲۱ بیابید.شکل ۱۰-۲۱ یک مدار در حوزه فرکانس با دو ولتاژ گره ای  $V_1$  و  $V_2$ .

دو منبع جریان به صورت فیزور داده شده و ولتاژهای فیزیوری گرهی  $V_1$  و  $V_2$  مشخص شده اند. در سمت چپ گره KCL را اعمال می کنیم.

$$\frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{-j10} + \frac{V_1 - V_2}{-j5} + \frac{V_1 - V_2}{j10} = 1 \angle 0^\circ = 1 + j0$$



## کاربرد عملی

## فرکانس قطع یک تقویت کننده ترانزیستوری

مدارهای تقویت کننده ترانزیستوری، بخش مهم وسایل الکترونیک مدرن را تشکیل می دهند. یکی از کاربردهای رایج، تلفن های همراه (شکل ۱۰-۲۵) است، که در آن سیگنال های صوتی روی امواج حامل فرکانس بالا سوار می شوند متأسفانه ترانزیستورها دارای خاصیت خازنی درونی هستند که موجب محدود شدن فرکانس کاری آنها می شود و هنگام انتخاب آنها برای کاربردهای خاص، باید مد نظر باشد.



شکل ۱۰-۲۵ آمپلی فایرهای ترانزیستور در دستگاه های زیادی به کار می روند، از جمله تلفن های همراه. مدل های خطی برای تحلیل کارایی آنها به عنوان تابعی از فرکانس به کار می روند.

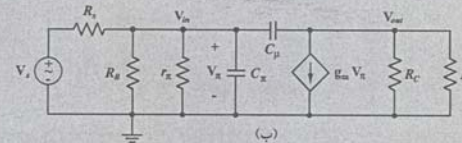
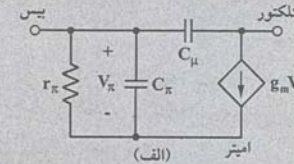
شکل ۱۰-۲۶ (الف) آن چه را که مدل هیبرید  $\pi$  فرکانس بالا نام دارد، برای یک ترانزیستور دوقطبی پیوندی نشان می دهد. در عمل هر چند ترانزیستورها قطعاً غیرخطی اند، ولی این مدار خطی ساده کار نسبتاً دقیقی از مدل سازی رفتار قطعه ارائه می کند. دو خازن  $C_{\pi}$  و  $C_{\mu}$  برای نمایش ظرفیت داخلی ترانزیستور مورد استفاده به کار رفته اند. در صورت نیاز می توان خازن ها و مقاومت های دیگری را برای دقیق تر شدن مدل به آن اضافه کرد. شکل ۱۰-۲۶ (ب) مدل ترانزیستوری را که در یک تقویت کننده با نام آمپتر مشترک وارد شده است نشان می دهد.

با فرض این که سیگنال حالت ماندگار سینوسی، با معادل تونن  $V_s$  و  $R_s$  نشان داده شده باشد، مایلیم نسبت  $V_{out}$  به  $V_{in}$  را بدانیم. وجود ظرفیت های درونی متعلق به ترانزیستور موجب کاهش تقویت در ازای افزایش فرکانس در  $V_s$  می گردد و نهایتاً عملکرد صحیح مدار را در فرکانس هایی محدود خواهد کرد. معادله گره را در خروجی می نویسیم.

$$g_m V_{\pi} = \frac{V_{out} - V_{in}}{(1/f\omega C_{\mu})} + \frac{V_{out}}{(R_C \parallel R_L)}$$

با حل  $V_{out}$  برحسب  $V_{in}$  و با توجه به  $V_{\pi} = V_{in}$  عبارتی برای بهره تقویت کننده به دست می آید.

$$\begin{aligned} \frac{V_{out}}{V_{in}} &= \frac{-g_m (R_C \parallel R_L) (1/f\omega C_{\mu}) + (R_C \parallel R_L)}{(R_C \parallel R_L) + (1/f\omega C_{\mu})} \\ &= \frac{-g_m (R_C \parallel R_L) + j\omega (R_C \parallel R_L) C_{\mu}}{1 + j\omega (R_C \parallel R_L) + C_{\mu}} \end{aligned}$$

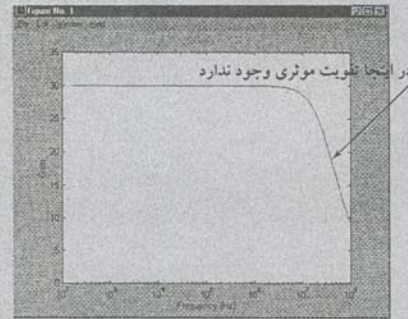


شکل ۱۰-۲۶ (الف) مدل هیبرید  $\pi$  فرکانس بالا برای ترانزیستور. (ب) مدار تقویت کننده آمپتر مشترک با مدل هیبرید  $\pi$ .

با فرض مقادیر نمونه ای چون  $g_m = 30 \text{ ms}$ ،  $R_C = R_L = 2 \text{ k}\Omega$ ،  $C_{\mu} = 5 \text{ pF}$  و خازن  $C_{\pi} = 5 \text{ pF}$  می توان اندازه بهره را به صورت تابعی از فرکانس  $(\omega = 2\pi f)$  رسم کرد. نمودار نیمه لگاریتمی در شکل ۱۰-۲۷ (الف) و برنامه متلب به کار رفته در تولید شکل، در شکل ۱۰-۲۷ (ب) ملاحظه می شود. جالب است ولی تعجب آور نیست که ببینیم بهره تقویت کننده به فرکانس وابسته است. درواقع می توان تصور کرد که استفاده از چنین مداری می تواند فرکانس هایی را که ما توجهی به آنها نداریم، حذف کند. با این وجود، حداقل می بینیم که بهره برای فرکانس های نسبتاً پایین از فرکانس منبع ورودی مستقل است. هنگامی که مشخصه تقویت کننده را بیان می کنیم مرسوم است تا به فرکانسی که در آن بهره به  $1/\sqrt{2}$  برابر حداکثرش کاهش می یابد، اشاره نماییم. در شکل ۱۰-۲۷ (الف) می بینیم که حداکثر میزان بهره برابر 30 است که در فرکانس 30 MHz به  $21 = 30/\sqrt{2}$  تقلیل یافته است. معمولاً به این فرکانس، فرکانس قطع یا گوشه تقویت کننده می گویند. اگر کار در فرکانس های بالاتر مورد نظر باشد، یا ظرفیت درونی باید کاهش یابد (ترانزیستورهای متفاوتی باید به کار رود) و یا مدار به طریقی دیگر باید طراحی شود. در این جا باید توجه کرد که تعریف بهره وابسته به  $V_{in}$ ، تصویر کاملی از رفتار وابستگی به فرکانس را برای تقویت کننده ارائه نمی کند. این مطالب با ملاحظه ظرفیت  $C_{\pi}$  کاملاً واضح است: با  $\omega \rightarrow \infty$ ،

```
EDU> frequency = logspace(3,9,100);
EDU> numerator = -30e-3*1000 + i*frequency*1000*5e-12;
EDU> denominator = 1 + i*frequency*1000*5e-12;
EDU> for k = 1:100
gain(k) = abs(numerator(k)/denominator(k));
end
EDU> semilogx(frequency/2/pi,gain);
EDU> xlabel('Frequency (Hz)');
EDU> ylabel('Gain');
EDU> axis([100 1e8 0 35]);
```

(ب)



(الف)

شکل ۱۰-۲۷ (الف) بهره تقویت کننده برحسب فرکانس، و (ب) برنامه متلب به کار رفته برای ایجاد نمودار.

$Z_{C_{\pi}} \rightarrow 0$  پس  $V_{in} \rightarrow 0$ . این اثر خودش را در معادله ای که به دست آوردیم نشان نمی دهد. روش دقیق تر یافتن معادله ای برای

## تمرین

۱۰-۱۳ با تحلیل مش روی مدار شکل ۱۰-۲۴،  $I_1$  و  $I_2$  را بیابید. جواب:  $4.87 \angle -164^\circ \text{ A}$  و  $7.17 \angle -144.9^\circ \text{ A}$

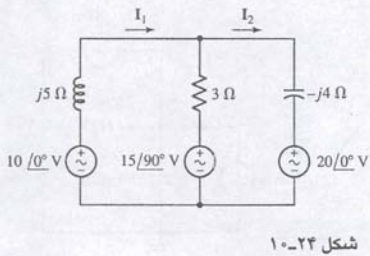
## ۱۰-۹ تجمیع، تبدیل منبع و قضیه تونن

پس از معرفی القاگرها و خازن ها در فصل ۷، دیدیم که مدارهای حاوی آنها همچنان خطی اند و مزایای این خطی بودن دوباره به کار گرفته شدند. از آن جمله اصل تجمیع، قضایای تونن و نورتن و تبدیل منابع بودند. می دانیم که این روش ها در مدارهایی که اکنون ملاحظه می کنیم به کار خواهند رفت. ما می خواهیم منابع سینوسی را به کار گرفته و روش های فوق را روی آنها پیاده کنیم و یافتن تنها پاسخ واداشته چندان اهمیتی ندارد. این که بخواهیم مدار را برحسب فیزورها تحلیل کنیم، نیز بی اهمیت است. همچنین به یاد خواهیم سپرد که خطی بودن و تجمیع هنگام ترکیب منابع حقیقی و موهومی برای تهیه یک منبع مختلط به کار خواهد رفت.

با تجمیع،  $V_1$  را برای مدار شکل ۱۰-۲۱ به دست آورید، به خاطر سادگی این شکل در شکل ۱۰-۲۸ (الف) تکرار شده است.

ابتدا مدار را به شکل ۱۰-۲۸ (ب) درمی آوریم که در آن هر جفت امپدانس موازی با یک امپدانس معادل جایگزین شده است. یعنی  $10 \parallel -j10 \Omega$  5 برابر با  $5 \parallel -j2 \Omega$ ؛  $4 \parallel j10 \Omega$  برابر  $10 \parallel j5 \Omega$ ؛  $10 \parallel j5 \Omega$  برابر است با  $2 + j4 \Omega$ . برای یافتن  $V_1$  ابتدا منبع سمت چپ را فعال نگه می داریم و پاسخ جزئی  $V_{1L}$  را در قبال آن به دست می آوریم. منبع  $1 \angle 0^\circ$  با امپدانس زیر موازی است:

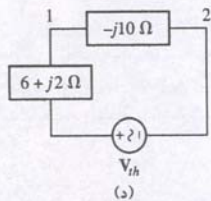
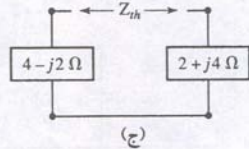
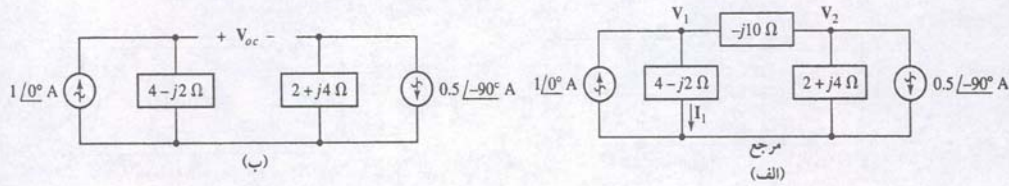
$$(4 - j2) \parallel (-j10 + 2 + j4)$$



شکل ۱۰-۲۴

مثال ۱۰-۹





بنابراین وقتی مدار را به صورت شکل ۱۰-۳۰(د) می‌بینیم، جریان از گره ۱ به گره ۲ از طریق بار  $10 \Omega -j$  برابر است با

$$I_{12} = \frac{6 - j3}{6 + j2 - j10} = 0.6 + j0.3 \text{ A}$$

اکنون جریان جاری شده در امپدانس  $10 \Omega -j$  در شکل ۱۰-۳۰(الف) را می‌دانیم. توجه کنید که نمی‌توانیم با مدار شکل ۱۰-۳۰(د)، مقدار  $V_1$  را محاسبه کنیم. زیرا گره مرجعی وجود ندارد. با بازگشت به مدار اصلی و تفریق جریان  $0.6 + j0.3$  از منبع جریان سمت چپ، جریان جاری شده از شاخه  $(4 - j2) \Omega$  برابر است با:

$$I_1 = 1 - 0.6 - j0.3 = 0.4 - j0.3 \text{ A}$$

و بنابراین

$$V_1 = (0.4 - j0.3)(4 - j2) = 1 - j2 \text{ V}$$

که مثل قبل است.

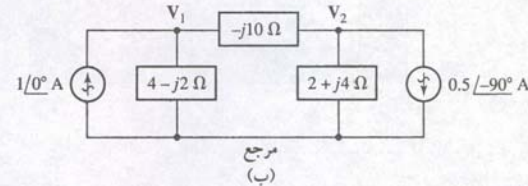
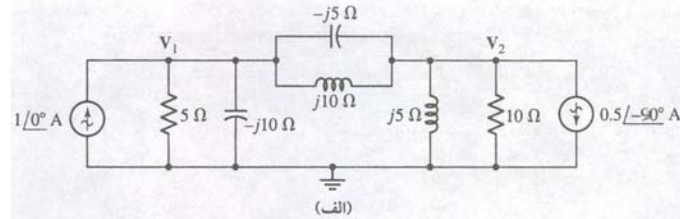
ممکن است از قضیه نورتن روی سه عنصر سمت راست شکل ۱۰-۳۰(الف) استفاده کنیم، با این فرض که به  $V_1$  علاقمندیم. می‌توان به دفعات تبدیل منبع را برای ساده‌سازی مدار به کار برد. بنابراین همه کارهای میان بروسگردهای فصل ۴ و ۵ در حوزه فرکانس به کار خواهند رفت. مختصر پیچیدگی اضافی موجود به دلیل استفاده از اعداد مختلط است و نه از ملاحظات تئوریک مربوط به آن.

**۱۰-۱۵** برای مدار شکل ۱۰-۳۱(الف)، ولتاژ مدار باز  $V_{ab}$ ، (ب) جریان روبه‌پایین از  $a$  به  $b$  در صورت اتصال کوتاه، (ج) امپدانس معادل تونن  $Z_{ab}$  موازی با منبع جریان را بیابید.  
جواب:  $V: -33.4^\circ \angle 16.77$ ،  $2.5 - j5 \Omega$ ،  $2.60 + j1.500 \text{ A}$

یک اظهار نظر دیگر باقی مانده است. تا این جا خودمان را به مدارهای تک منبع یا چند منبعی که فرکانس مشترکی دارند، محدود کردیم. این محدودیت به این علت لازم است که بتوانیم مقادیر امپدانس را برای عناصر القایی و خازنی محاسبه کنیم. با این وجود، مفهوم تحلیل نیزوری به راحتی قابل اعمال به مدارهای چندمنبعی با فرکانسهای مختلف است. در این موارد از تجمیع برای تعیین ولتاژها و جریانهای ناشی از هر منبع استفاده کرده و نتایج را در حوزه زمان با هم جمع می‌کنیم. اگر چندین منبع به طور همزمان کار کنند، اصل تجمیع اجازه می‌دهد تا منابع را در یک زمان بررسی کنیم و پاسخ نتیجه را با دیگر پاسخ‌ها در فرکانس مختلف جمع کنیم.

وان تلف شده به وسیله مقاومت  $10 \Omega$  را در مدار شکل ۱۰-۳۲(الف) معین کنید.

اگرچه به مدار، ترجیح می‌شویم که سریعاً دو معادله گرهی را بنویسیم و یا با دو تبدیل منبع بلافاصله به دنبال یافتن ولتاژ در دو سر مقاومت  $10 \Omega$  باشیم.



$$V_{1L} = 1 \angle 0^\circ \frac{(4 - j2)(-j10 + 2 + j4)}{4 - j2 - j10 + 2 + j4} = \frac{-4 - j28}{6 - j8} = 2 - j2 \text{ V}$$

اگر فقط منبع سمت راست فعال باشد، با تقسیم جریان و قانون اهم داریم:

$$V_{1R} = (-0.5 \angle -90^\circ) \left( \frac{2 + j4}{4 - j2 - j10 + 2 + j4} \right) (4 - j2) = -1 \text{ V}$$

از جمع آن‌ها داریم:

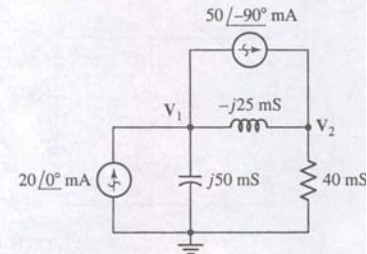
$$V_1 = V_{1L} + V_{1R} = 2 - j2 - 1 = 1 - j2 \text{ V}$$

که نتیجه قبلی مادر مثال ۱۰-۷ وفاق دارد.

بعداً خواهیم دید که تجمیع، هنگام برخورد با مدارهایی که با فرکانس یکسانی کار نمی‌کنند، به شدت مفید است.

**۱۰-۱۴** با فرض این‌که از تجمیع برای تحلیل مدار شکل ۱۰-۲۹ استفاده کرده باشیم، مطلوب است  $V_1$  اگر (الف) فقط با منبع  $20 \angle 0^\circ \text{ mA}$  کار کند، (ب) فقط با منبع  $50 \angle -90^\circ \text{ mA}$  کار کند.  
جواب:  $0.780 + j0.976 \text{ V}$ ،  $0.1951 - j0.556 \text{ V}$

شکل ۱۰-۲۸ (الف) مدار شکل ۱۰-۲۹ که در آن  $V_1$  خواسته شده است. (ب)  $V_1$  را می‌توان با استفاده از تجمیع پاسخهای فیزیکی مجزا به دست آورد.



شکل ۱۰-۲۹

## تمرین

### مثال ۱۰-۱

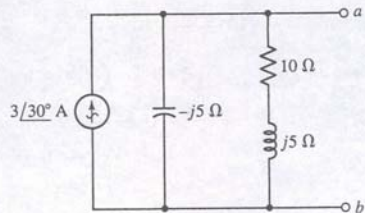
از دید امپدانس  $10 \Omega -j$  در شکل ۱۰-۳۰(الف) معادل تونن را معین کرده از آن برای محاسبه  $V_1$  استفاده کنید.

ولتاژ مدار باز تعریف شده در شکل ۱۰-۳۰(ب) چنین است.

$$V_{oc} = (1 \angle 0^\circ) (4 - j2) - (-0.5 \angle -90^\circ) (2 + j4) = 4 - j2 + 2 - j1 = 6 - j3 \text{ V}$$

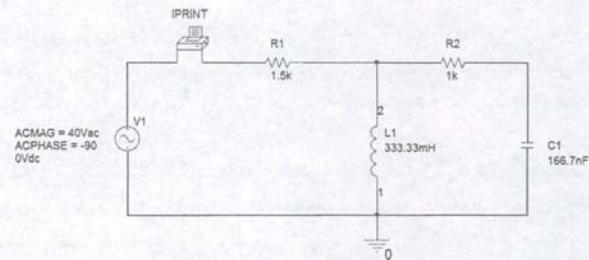
امپدانس مدار غیرفعال شکل ۱۰-۳۰(ج) از دید پایانه‌های بار درواقع مجموع دو امپدانس باقیمانده است، یعنی  $Z_{th} = 6 + j2 \Omega$ .

### مثال ۱۰-۱۱



شکل ۱۰-۳۱



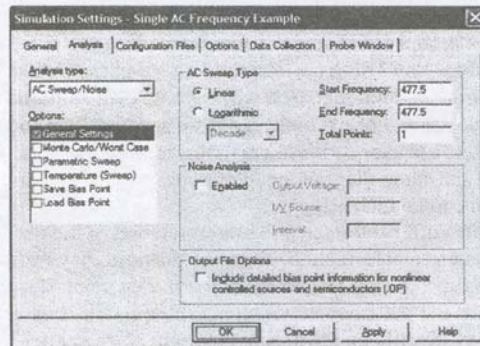


شکل ۱۰-۳۴ مدار ساده سینوسی که در  $\omega = 3000 \text{ rad/s}$  کار می‌کند و در آن جریان داخل مقاومت  $1.5 \text{ k}\Omega$  است.

فرکانس منبع از طریق Property Editor انتخاب نمی‌گردد، بلکه از طریق مد تحلیل ACSweep صورت می‌پذیرد.

فرکانس منبع با تنظیم Total Points با 1 و Start Freq و End Freq در مقادیر مناسب، انتخاب می‌گردد. چون منبع در  $3000 \text{ rad/s}$  کار می‌کند، هر دو پارامتر را با  $477.5 \text{ Hz} = \frac{3000}{2\pi}$  مقداردهی می‌کنیم.

توجه کنید که در مدار یک قطعه اضافی ظاهر شده است. این قطعه IPRINT نامگذاری شده است و اجازه می‌دهد تا انواع پارامترهای جریان چاپ شود. در این شبیه‌سازی ما به خصیصه‌های AC، MAG و PHASE علاقمندیم. برای این‌که PSpice این کمیت‌ها را چاپ کند، هر یک از خصیصه‌های موردنظر را در شکل ۱۰-۳۵ yes تنظیم کنید.



شکل ۱۰-۳۵ کادر محاوره برای انتخاب فرکانس.

نتایج شبیه‌سازی با انتخاب Examine Output زیر File در پنجره PSpice AD به دست می‌آید. در انتهای فایل اطلاعات زیر ظاهر می‌گردد.

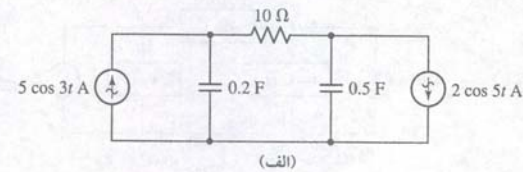
| FREQ        | IM(V_PRINT1) | IP(V_PRINT1) |
|-------------|--------------|--------------|
| 4.775E + 02 | 1.600E - 02  | -1.269E + 02 |

بنابراین اندازه جریان  $16 \text{ mA}$ ، زاویه فاز  $-126.9^\circ$  است و به این ترتیب جریان داخل مقاومت  $1.5 \text{ k}\Omega$  برابر زیر است.

$$i = 16 \cos(3000t - 126.9^\circ) \text{ mA} \\ = 16 \sin(3000t - 36.9^\circ) \text{ mA}$$

## ۱۰-۱۰ نمودارهای فیزیوری

نمودار فیزیوری نامی است که به یک ترسیم در صفحه مختلط اطلاق می‌گردد تا رابطه بین



متأسفانه این کار امکان‌پذیر نیست، زیرا دو منبع در فرکانس‌های مختلف کار می‌کنند. در این موارد راهی برای محاسبه امپدانس یک خازن یا القاگر در مدار وجود ندارد زیرا نمی‌دانیم کدام  $\omega$  را به کار ببریم؟

تنها راه خروج از این محسمه استفاده از تجميع و جمع‌آوری همه منابع هم فرکانس در یک زیرمدار طبق شکل ۱۰-۳۲(ب) و (ج) است. در زیر مدار شکل ۱۰-۳۲(ب) با روش تقسیم جریان، سریعاً جریان  $i'$  را به دست می‌آوریم.

$$I' = 2 \angle 0^\circ \left[ \frac{-j0.4}{10 - j - j0.4} \right] = 79.23 \angle -82.03^\circ \text{ mA}$$

به این ترتیب

$$i' = 79.23 \cos(5t - 82.03^\circ) \text{ mA}$$

به همین طریق

$$I'' = 5 \angle 0^\circ \left[ \frac{-j1.667}{10 - j0.6667 - j1.667} \right] = 811.7 \angle -76.86^\circ \text{ mA}$$

و به طور مشابه

$$i'' = 811.7 \cos(3t - 76.86^\circ) \text{ mA}$$

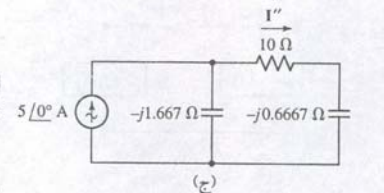
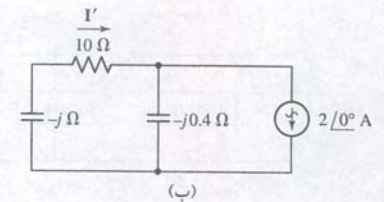
در این جا باید توجه داشت که سعی در جمع جریان‌های فیزیوری  $i'$  و  $i''$  در شکل ۱۰-۳۲(ب) و (ج) اهمیت ندارد. قدم بعدی جمع دو جریان در حوزه زمان، مربع کردن نتیجه و ضرب آن در ۱۰ است تا توان تلف شده در مقاومت  $10 \Omega$  شکل ۱۰-۳۲(الف) به دست آید.

$$P_{10} = (i' + i'')^2 \times 10 \\ = 10 [79.23 \cos(5t - 82.03^\circ) + 811.7 \cos(3t - 76.86^\circ)]^2 \text{ mW}$$

## تصرین

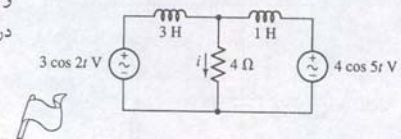
۱۰-۱۱ جریان  $i$  جاری شده در مقاومت  $4 \Omega$  شکل ۱۰-۳۳ را پیدا کنید.

جواب:  $i = 175.6 \cos(2t - 20.55^\circ) + 547.1 \cos(5t - 43.16^\circ) \text{ mA}$



شکل ۱۰-۳۲ (الف) مداری که منابع آن فرکانس‌های متفاوتی دارند. (ب) مدار با کشته‌شدن منبع چپ. (ج) مدار با کشته‌شدن منبع راست.

در مطالعات بعدی در مورد پردازش سیگنال با روش دانشمندی فرانسوی به‌نام فوریه آشنا می‌شویم که تکنیکی است برای تقریباً هر تابع متناوب و طی آن تابع یا ترکیبی از توابع سینوسی نشان داده می‌شود. هنگام کار با مدارهای خطی وقتی پاسخ مداری خاصی را به تابع تحریک سینوسی بدانیم، می‌توان به راحتی پاسخ مدار به هر موج اختیاری که به وسیله تابع سری فوریه نشان داده شود را با تجميع به‌دست آورد.



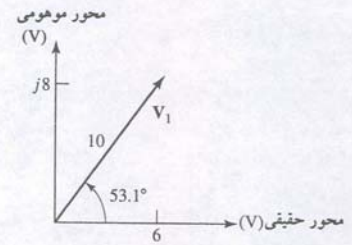
شکل ۱۰-۳۳

## تحلیل کامپیوتری

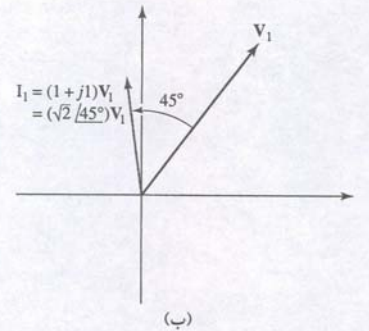
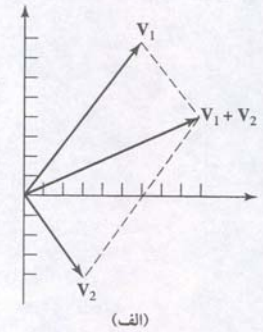
در PSpice چندین انتخاب برای تحلیل مدارها در حالت ماندگار سینوسی وجود دارد. شاید سرراست‌ترین روال، روش استفاده از ساخت دو منبع طراحی شده خاص، یعنی VAC و IAC باشد. اندازه و فاز هر منبع با دوبار کلیک روی آن انتخاب می‌گردد.

اجازه بدهید تا مدار شکل ۱۰-۱۹(الف)، که در شکل ۱۰-۳۴ رسم شده است را شبیه‌سازی کنیم.





شکل ۱۰-۳۶ یک نمودار ساده فیزیوری ولتاژ  $V_1 = 6 + j8 = 10 \angle 53.1^\circ$  V را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰-۳۷ (الف) نمودار فیزیوری که جمع  $V_1 = 6 + j8$  V و  $V_2 = 3 - j4$  V را نشان می‌دهد، یعنی:

$V_1 + V_2 = 9 + j4 = 9.85 \angle 24.0^\circ$  V  
(ب) نمودار فیزیوری،  $V_1$  و  $I_1$  را نشان می‌دهد که  $I_1 = YV_1$  و  $Y = 1 + js = \sqrt{2} \angle 45^\circ$  S است. مقیاس دامنه‌های جریان و ولتاژ متفاوت است.

ولتاژهای فیزیوری و جریان‌های فیزیوری یک مدار خاص را نشان دهد. این نمودار روشی گراییکی برای حل مسائل معینی است که ممکن است برای تست روش‌های تحلیلی به کار رفته باشد. در فصل بعد با نمودارهای مشابهی مواجه خواهیم شد که روابط توان مختلط در حالت ماندگار سینوسی را به نمایش می‌گذارند.

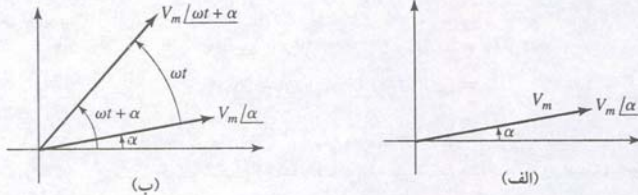
قبلاً با صفحه مختلط، هنگام مطالعه با اعداد مختلط و جمع و تفریق‌شان آشنا شدیم. چون ولتاژها و جریان‌های فیزیوری اعداد مختلط‌اند، می‌توان آن‌ها را به عنوان نقطه‌ای در صفحه مختلط در نظر گرفت. مثلاً فیزیور ولتاژ  $V_1 = 6 + j8 = 10 \angle 53.1^\circ$  V در صفحه مختلط شکل ۱۰-۳۶ نشان داده شده است. محور x محور ولتاژ حقیقی است و محور y، محور موهومی است. ولتاژ  $V_1$  با پیکانی که از مبدأ کشیده می‌شود، مستقر می‌گردد. چون اجزای نمایش روی صفحه مختلط برای جمع و تفریق به‌خصوص ساده است، فیزیورها به راحتی روی نمودار فیزیوری جمع و تفریق می‌شوند. ضرب و تقسیم از جمع و تفریق زوایا و تغییر دامنه به دست می‌آیند. شکل ۱۰-۳۷ (الف) جمع  $V_1$  و فیزیور دیگر  $V_2 = 3 - j4 = 5 \angle -53.1^\circ$  V و شکل ۱۰-۳۷ (ب) جریانی که حاصل ضرب  $V_1$  و ادمیتانس  $Y = 1 + j1$  S است را نشان می‌دهد.

آخرین نمودار فیزیوری هر دو فیزیور جریان و ولتاژ را روی یک صفحه مختلط نمایش می‌دهد. به نظر می‌رسد که هر کدام مقیاس خاص خود را دارند ولی مقیاس زاویه مشترک است. مثلاً فیزیور ولتاژ یک سانتیمتری ممکن است 100 V را نشان دهد، ولی فیزیور جریان با طول یک سانتیمتر برابر 3 mA جریانی است. با ترسیم هر دو فیزیور روی یک نمودار به راحتی می‌توان تشخیص داد که کدام فیزیور پیش‌فاز و یا پس‌فاز می‌باشد.

نمودار فیزیوری تفسیر جالبی از تبدیل حوزه زمان به حوزه فرکانس را می‌نماید، زیرا می‌توان نمودار را از دیدگاه حوزه زمان یا حوزه فرکانس تفسیر کرد. تا این جا ما از دید حوزه فرکانس به تفسیر پرداخته‌ایم، چون فیزیورها را مستقیماً روی نمودار فیزیوری نشان می‌دادیم. اکثرین بیابید با ترسیم شکل ۱۰-۳۸ (الف) از دید حوزه زمان به فیزیور  $V = V_m \angle \alpha$  نگاه می‌کنیم. برای انتقال  $V$  به حوزه زمان قدم بعدی ضرب  $e^{j\omega t}$  در فیزیور است. بنابراین اکنون ولتاژ مختلط  $V_m e^{j\alpha} e^{j\omega t} = V_m \angle \omega t + \alpha$  را داریم. این ولتاژ هم می‌تواند به عنوان فیزیور تلقی شود، با زاویه‌ای که به طور خطی با زمان زیاد می‌شود. در نتیجه نمودار فیزیوری این زاویه قطعه خط دوار را نشان خواهد داد که مکان لحظه‌ای آن با اندازه  $\omega t$  جلوتر از (عکس ساعت‌گرد)  $V_m \angle \alpha$  است. هر دو  $V_m \angle \omega t + \alpha$  و  $V_m \angle \alpha$  روی نمودار فیزیوری شکل ۱۰-۳۸ (ب) نشان داده شده‌اند.

با انتخاب  $V_m \angle \omega t + \alpha$ ، گذر به حوزه زمان تکمیل شده است. بخش حقیقی این کمیت مختلط تصویر  $V_m \angle \omega t + \alpha$  روی محور حقیقی است: یعنی  $V_m \cos(\omega t + \alpha)$ . فیزیور حوزه فرکانس به طور خلاصه روی نمودار فیزیوری نمایش داده شده است و انتقال به حوزه زمان با چرخش فیزیور در خلاف جهت ساعت‌گرد با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  rad/s و مشاهده تصویر روی محور حقیقی انجام می‌شود. می‌توان چنین تصور کرد که پیکان نمایشگر فیزیور  $V$  روی نمودار فیزیوری، تصویر کوتاه مدت در  $\omega t = 0$  از یک پیکان چرخان باشد که تصویرش روی محور حقیقی ولتاژ لحظه‌ای  $v(t)$  است.

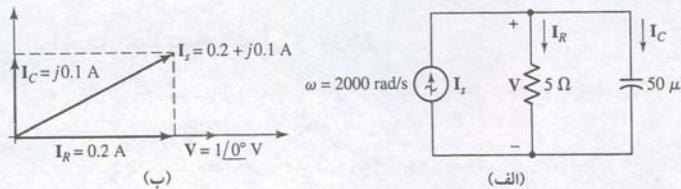
اکنون بیابید نمودارهای فیزیوری چند مدار ساده را بسازیم. مدار سری RLC در شکل ۱۰-۳۹ (الف) چندین ولتاژ و تنها یک جریان دارد. نمودار فیزیور با انتخاب جریان به عنوان فیزیور مرجع، راحت‌تر ساخته می‌شود. بگذارید به طور اختیاری  $I = I_m \angle 0^\circ$  را برگزینیم و آن را در طول محور حقیقی نمودار فیزیور، شکل ۱۰-۳۹ (ب) قرار دهیم. آن‌گاه می‌توان ولتاژهای مقاومت، خازن و القاگر را محاسبه و سپس روی نمودار مستقر کرد. رابطه



فاز  $90^\circ$  به خوبی روی نمودار دیده می‌شود. مجموع این سه ولتاژ برابر با ولتاژ منبع در این مدار است. ما در فصل بعد تحت شرایط تشدید خواهیم دید که اگر  $Z_C = -Z_L$  باشد، ولتاژ منبع و ولتاژ مقاومت با یکدیگر برابرند. ولتاژ کل در سر مقاومت و القاگر، یا مقاومت و خازن در نمودار از جمع فیزیورهای مناسب طبق شکل حاصل می‌گردد.

شکل ۱۰-۴۰ (الف) یک مدار ساده موازی است و منطقی است که ولتاژ بین دو گره را به عنوان فیزیور مرجع اختیار نماییم. فرض کنید  $V = 1 \angle 0^\circ$  V باشد. جریان مقاومت  $I_R = 0.2 \angle 0^\circ$  A هم‌فاز با این ولتاژ می‌باشد، ولی جریان خازن  $I_C = j0.1$  A از ولتاژ مرجع به اندازه  $90^\circ$  پیش است. پس از تبدیل این دو جریان به نمودار فیزیور، شکل ۱۰-۴۰ (ب)، می‌توان آن‌ها را با یکدیگر جمع کرد تا جریانی که به دست آید. نتیجه این کار  $I_s = 0.2 + j0.1$  A است. اگر منبع جریان به صورت مقدار اولیه  $1 \angle 0^\circ$  داده شده باشد و ولتاژ گره در آغاز معلوم نباشد، بهتر است باز هم نمودار فیزیوری را با فرض ولتاژ گره (مثلاً  $V = 1 \angle 0^\circ$  V) بسازیم و آن را به عنوان فیزیور ولتاژ به کار ببریم. نمودار را چون گذشته تکمیل می‌کنیم و منبع جریانی که به دلیل ولتاژ گره فرضی جاری می‌گردد،  $0.2 + j0.1$  A خواهد بود. با این وجود، جریانی که به واقع  $1 \angle 0^\circ$  A است و ولتاژ گره واقعی با ضرب ولتاژ گره مفروضی در  $(0.2 + j0.1)$  به  $1 \angle 0^\circ$  V دست می‌آید. بنابراین ولتاژ گره واقعی برابر  $V = \sqrt{20} \angle -26.8^\circ$  V است. ولتاژ مفروض نموداری می‌دهد که با نمودار واقعی مدار فرق می‌کند، باید مقیاس این نمودار در  $1/\sqrt{20}$  ضرب شود و نمودار حاصل به اندازه  $26.6^\circ$  در جهت عکس ساعت‌گرد بچرخد تا نمودار واقعی به دست آید.

نمودارهای فیزیوری معمولاً به سادگی ساخته می‌شوند و در بسیاری از تحلیل‌های حالت ماندگار سینوسی، اگر این نمودارها لحاظ شوند، مفهوم‌ترند. مثال‌های دیگری از کاربرد نمودارهای فیزیوری در ادامه مطالعاتمان ملاحظه خواهد شد.

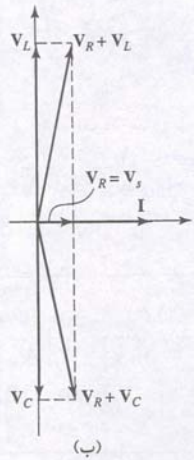
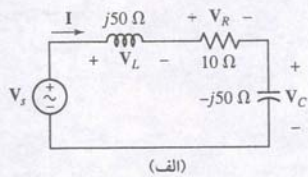


شکل ۱۰-۴۰ (الف) یک مدار RC موازی. (ب) نمودار فیزیوری برای این مدار. ولتاژ گره  $V$  به عنوان یک فیزیور مرجع.

برای مدار شکل ۱۰-۴۱، نمودار فیزیوری  $I_R$ ،  $I_L$  و  $I_C$  را ترسیم کنید. با ترکیب این جریان‌ها، زاویه پیش‌فاز  $I_s$  را نسبت به  $I_R$ ،  $I_L$  و  $I_C$  مشخص نمایید.

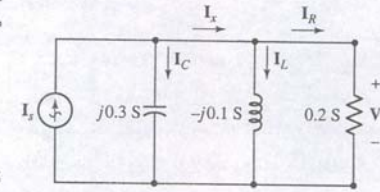
با انتخاب فیزیور مرجع آغاز می‌کنیم. با بررسی مدار و متغیرهای موردنظری که باید معین شوند، می‌بینیم که اگر  $V$  معلوم باشد،  $I_R$ ،  $I_L$  و  $I_C$  با به کارگیری قانون اهم محاسبه می‌شوند.

شکل ۱۰-۳۸ (الف) فیزیور ولتاژ  $V_m \angle \alpha$ .  
(ب) ولتاژ مختلط  $V_m \angle \omega t + \alpha$  به صورت فیزیور در لحظه معینی از زمان نشان داده شده است. این فیزیور از  $V_m \angle \alpha$  به اندازه  $\omega t$  رادیان جلو است.



شکل ۱۰-۳۹ (الف) یک مدار RLC سری. (ب) نمودار فیزیوری برای این مدار، جریانی به عنوان فیزیور مرجع به کار رفته است.





شکل ۱۰-۴۱ مدار ساده‌ای که در آن چند جریان مجهول است.

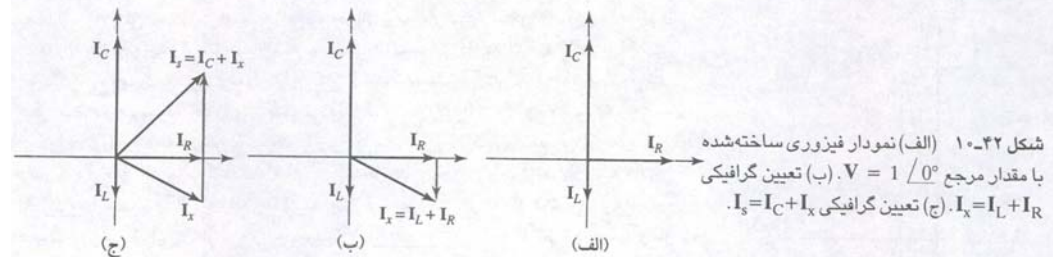
بنابراین  $V = 1 \angle 0^\circ$  را به خاطر سادگی برمی‌گزینیم و متعاقباً روابط زیر را محاسبه می‌نماییم.

$$\begin{aligned} I_R &= (0.2)1 \angle 0^\circ = 0.2 \angle 0^\circ \text{ A} \\ I_L &= (-j0.1)1 \angle 0^\circ = 0.1 \angle -90^\circ \text{ A} \\ I_C &= (j0.3)1 \angle 0^\circ = 0.3 \angle 90^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

نمودار فیزیوری مربوطه در شکل ۱۰-۴۲ (الف) دیده می‌شود. همچنین لازم است فیزور جریان‌های  $I_x$  و  $I_s$  را بیابیم. شکل ۱۰-۴۲ (ب) تعیین

$$I_x = I_L + I_R = 0.2 - j0.1 = 0.224 \angle -26.6^\circ \text{ A}$$

و شکل ۱۰-۴۲ (ج) تعیین  $I_s = I_C + I_x = 0.283 \angle 45^\circ \text{ A}$  را نشان می‌دهد. از شکل ۱۰-۴۲ (ج) می‌بینیم که  $I_s$  از  $I_R$  به اندازه  $45^\circ$  از  $I_C$  به اندازه  $-45^\circ$  و  $I_x$  به اندازه  $71.6^\circ = 45^\circ + 26.6^\circ$  پیش است. این زوایا فقط نسبی‌اند و مقدار عددی آن‌ها به  $I_s$  وابسته است. مقدار واقعی  $V$  نیز به آن وابسته می‌باشد.

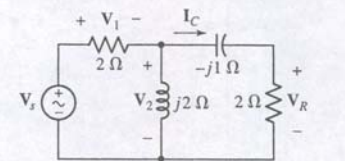


شکل ۱۰-۴۲ (الف) نمودار فیزیوری ساخته‌شده با مقدار مرجع  $V = 1 \angle 0^\circ$ . (ب) تعیین گرافیکی  $I_s = I_C + I_x$ . (ج) تعیین گرافیکی  $I_x = I_L + I_R$ .

## تمرین

۱۰-۱۷ مقدار مرجع مناسبی برای  $I_C$  در مدار شکل ۱۰-۴۳ انتخاب کنید. نمودار فیزیوری بکشید که  $V_s$ ،  $V_1$ ،  $V_2$  و  $V_R$  را نشان دهد و نسبت طول‌های (الف)  $V_s$  به  $V_1$  (ب)  $V_1$  به  $V_2$  (ج)  $V_s$  به  $V_R$  را به دست آورید.

جواب: 1.90، 1.00، 2.12



شکل ۱۰-۲۳

## ۱۰-۱۱ خلاصه فصل و مرور

- اگر دو موج سینوسی (یا کمپوزیسی) دارای اندازه مثبت و فرکانس یکسانی باشند، می‌توان موج پیشفاز یا پسفاز را با مقایسه زاویه آن‌ها مشخص کرد.
- پاسخ واداشته یک مدار خطی به یک منبع ولتاژ یا جریان سینوسی را می‌توان همواره به صورت یک تابع سینوسی نوشت که فرکانس آن همان فرکانس منبع سینوسی است.
- تبدیل فیزیوری را می‌توان روی هر تابع سینوسی پیاده کرد و برعکس:

$$V_m \cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow V_m / \phi$$

- یک فیزور دارای اندازه و زاویه فاز است، فرکانس آن همان فرکانس منبع تحریک در مدار می‌باشد.
- هنگام تبدیل یک مدار حوزه زمان به مدار متناظر حوزه فرکانس، مقاومت‌ها، خازن‌ها و القاگرها با امپدانس (یا گاهی ادمیتانس) جایگزین می‌شوند.
- امپدانس یک مقاومت، همان مقاومت است.
- امپدانس خازن  $\Omega / j\omega C$  1 می‌باشد.

- امپدانس یک القاگر  $\Omega j\omega L$  است.
- امپدانس‌ها در ترکیبات سری و موازی مثل مقاومت‌ها ترکیب می‌شوند.
- همه تکنیک‌های تحلیلی که قبلاً روی مدارهای مقاومتی به کار رفتند، روی خازن‌ها و القاگرهایی که به معادل حوزه فرکانس تبدیل شده‌اند، قابل اعمالند.
- تبدیل فیزیوری فقط روی مدارهای تک فرکانس اجرا می‌شود. در غیر این صورت، از جمع باید استفاده کرد و پاسخ‌های جزئی حوزه زمان را با هم جمع می‌کنیم تا پاسخ کامل به دست آید.
- توانمندی مربوط به نمودارهای فیزیوری وقتی که تابع وادارکننده مناسبی از آغاز به کار رود کاملاً آشکار است، و نیز باید نتیجه نهایی به طور مناسبی مقیاس‌بندی شده باشد.

## ۱۰-۱۲ خواندنی‌های کمکی

A good reference to phasor-based analysis techniques can be found in:

R.A. DeCarlo and P.M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

Frequency-dependent transistor models are discussed from a phasor perspective in Chap. 7 of

W.H. Hayt, Jr. and G.W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design*, 2nd ed. New York: Wiley, 1995.

## مسائل

### ۱۰-۱ ویژگی‌های توابع سینوسی

- یک موج سینوسی  $f(t)$  در  $t = 2.1 \text{ ms}$  صفر بوده و در  $t = 7.5 \text{ ms}$  حداکثر 8.5 می‌رسد. موج را به شکل (الف)  $C_1 \sin(\omega t + \phi)$  نشان دهید که در آن  $\phi$  مثبت و کوچکترین مقدار خود را به درجه داشته باشد، (ب)  $C_2 \cos(\omega t + \beta)$ . نشان دهید که  $\beta$  کوچکترین اندازه ممکن و بر حسب درجه باشد. (ج) بفرم  $C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t$  باشد.
- (الف) اگر  $10 \cos \omega t + 4 \sin \omega t = A \cos(\omega t + \phi)$  و  $A > 0$ ،  $180^\circ < \phi < 180^\circ$  باشد،  $A$  و  $\phi$  را پیدا کنید. (ب) اگر 200  $\cos(5t + 130^\circ) = F \cos 5t + G \sin 5t$  باشد،  $F$  و  $G$  را به دست آورید. (ج) سه مقدار  $t$  را برای  $0 \leq t \leq 1$  پیدا کنید که در آن‌ها  $i(t) = 5 \cos 10t - 3 \sin 10t = 0$  باشد. (د) در چه فاصله زمانی بین  $t = 0$  و  $t = 10 \text{ ms}$   $12 \sin 100\pi t \geq 10 \cos 100\pi t$  است؟
- با فرض دو تابع سینوسی  $f(t) = -50 \cos \omega t - 30 \sin \omega t$  و  $g(t) = 55 \cos \omega t - 15 \sin \omega t$  (ب) زاویه فازی که  $f(t)$  از  $g(t)$  پیش است.
- پاسخ جریان مفروض معادله (۳) با  $i(t) = A \cos(\omega t - \phi)$  را در معادله دیفرانسیل  $L(di/dt) + Ri = V_m \cos \omega t$  بگذارید و نشان دهید که  $A$  و  $\phi$  حاصل با معادله (۴) یکی است.
- یک منبع ولتاژ، موجی به صورت  $V_m \cos(\omega t + \phi)$  تولید می‌کند که فرکانس آن 13.56 MHz است. اگر مولد 300 W توان را به بار  $5 \Omega$  منتقل کند و ولتاژ به حداقل خود در  $t = 21.15 \text{ ms}$  برسد،  $V_m$  و  $\omega$  چقدر است؟

- امواج زیر را با هم مقایسه کنید و بگویید کدام پیشفاز است: (الف)  $33 \sin(8t - 9^\circ)$  و  $12 \cos(8t - 1^\circ)$  (ب)  $15 \cos(1000t + 66^\circ)$  و  $-2 \cos(1000t + 450^\circ)$  (ج)  $\sin(t - 13^\circ)$  و  $\cos(t - 90^\circ)$  (د)  $\sin t$  و  $\cos(t - 90^\circ)$ .
- بگویید در امواج زیر کدام پسفاز است: (الف)  $6 \cos(2\pi 60t - 9^\circ)$  و  $-6 \cos(2\pi 60t + 9^\circ)$  (ب)  $\cos(t - 100^\circ)$  و  $-\cos(t - 100^\circ)$  (ج)  $9 \cos(t - 3.14^\circ)$  و  $7000 \cos(t - \pi)$  (د)  $\sin t$  و  $-\sin t$ .
- نشان دهید که ولتاژ  $v(t) = V_1 \cos \omega t - V_2 \sin \omega t$  را می‌توان به صورت  $V_m \cos(\omega t + \gamma)$  نوشت.  $V_m$  و  $\phi$  را به دست آورید.
- تئوری فوریه ابزار رایجی در علوم و مهندسی است. این تئوری می‌گوید که امواج پریودیک مثل شکل ۱۰-۴۴ برابر با جمع بینهایت جمله مطابق زیر است.

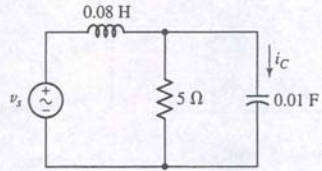
$$v(t) = \frac{8}{\pi^2} (\sin \pi t - \frac{1}{3^2} \sin 3\pi t + \frac{1}{5^2} \sin 5\pi t - \frac{1}{7^2} \sin 7\pi t + \dots)$$

- (الف) مقدار واقعی را در  $t = 0.4 \text{ s}$  حساب کنید. مقدار تقریبی  $v(t)$  را با سری فوریه فوق برای (ب) فقط جمله اول، (ج) فقط چهار جمله اول و (د) فقط پنج جمله اول محاسبه کنید.



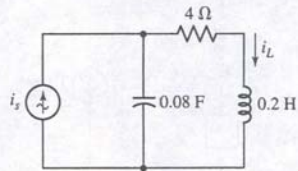
## تحلیل حالت ماندگار سینوسی مدار ۳۱۵

۲۸. در مدار شکل ۱۰-۵۳ فرض کنید  $i_C$  به صورت پاسخ مختلط،  $20e^{j(40t + 30^\circ)}$  A باشد،  $v_s$  را به صورت تابع تحریک مختلط درآورید.



شکل ۱۰-۵۳

۲۹. در مدار شکل ۱۰-۵۴ فرض کنید که جریان  $i$  به صورت مختلط  $20e^{j(10t + 25^\circ)}$  باشد،  $i_s(t)$  را به صورت تابع تحریک مختلط درآورید.

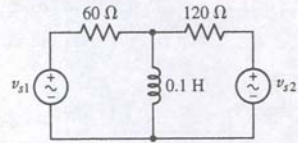


شکل ۱۰-۵۴

۳۰. در یک شبکه خطی مانند شکل ۱۰-۸، یک منبع ولتاژ سینوسی  $v_s = 80 \cos(500t - 20^\circ)$  V یک جریان خروجی  $i_{out} = 5 \cos(500t + 12^\circ)$  A تولید می‌کند. مطلوب است  $i_{out}$  به شرطی که  $v_s$  برابر (الف)  $40 \cos(500t + 10^\circ)$  V، (ب)  $40 \sin(500t + 10^\circ)$  V، (ج)  $40e^{j(500t + 10^\circ)}$  V و (د)  $50e^{j(500t + 10^\circ)}$  V باشد.

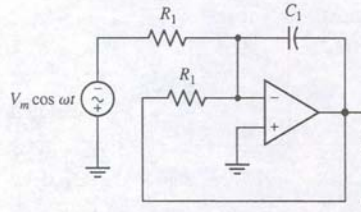
## ۱۰-۴ فیزور

۳۱. هر یک از جریان‌های زیر را به صورت فیزور بنویسید: (الف)  $12 \sin(400t + 110^\circ)$  A، (ب)  $-7 \sin 800t - 3 \cos 800t$  A، (ج)  $4 \cos(200t - 30^\circ) - 5 \cos(200t + 20^\circ)$  A. اگر  $\omega = 600$  rad/s باشد، مقدار لحظه‌ای هر یک از ولتاژها را در  $t = 5$  ms به دست آورید. (د)  $70 \angle 30^\circ$  V، (ه)  $-60 + j40$  V. ۳۲. بگذارید  $\omega = 4$  krad/s باشد و سپس مقدار لحظه  $i_x$  را در  $t = 1$  ms به دست آورید. به شرطی که  $I_x$  برابر باشد با (الف)  $5 \angle -80^\circ$  A، (ب)  $4 + j1.5$  A، (ج)  $50 \sin(250t - 40^\circ)$  V، (د)  $20 \cos 108t - 30 \sin 108t$  V، (ه)  $33 \cos(80t - 50^\circ) + 41 \cos(80t - 75^\circ)$  V. ۳۳. ولتاژ فیزیوری  $V_1 = 10 \angle 90^\circ$  mV در  $\omega = 500$  rad/s و  $V_2 = 8 \angle 90^\circ$  mV در  $\omega = 1200$  rad/s را با هم در یک op amp جمع شده‌اند. اگر op amp این ورودی را در ضریب ۵- ضرب کند، خروجی را در  $t = 0.5$  ms بیابید. ۳۴. اگر در شکل ۱۰-۵۵،  $\omega = 500$  rad/s،  $I_L = 2.5 \angle 40^\circ$  A باشد،  $v_s(t)$  را پیدا کنید.



شکل ۱۰-۵۱

۳۰. فرض کنید که op-amp در شکل ۱۰-۵۲ ایده‌آل است ( $R_i = \infty$ ،  $R_o = 0$  و  $A = \infty$ ) و نیز دو سیگنال به ورودی انتگرال‌گیر متصل است،  $-V_m \cos \omega t$  و  $v_{out}$ . اگر حاصل ضرب  $R_1 C_1$  برابر  $L/R$  در شکل ۱۰-۴ تنظیم شده باشد، نشان دهید که  $v_{out}$  برابر ولتاژ دوسر  $R$  (مرجع سمت چپ) در شکل ۱۰-۴ است.

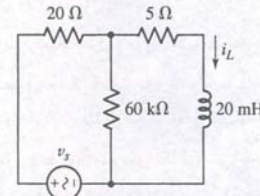


شکل ۱۰-۵۲

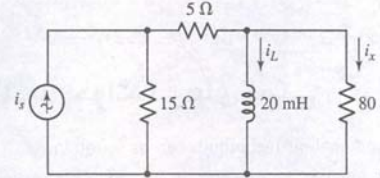
۲۱. یک منبع ولتاژ  $V_m \cos \omega t$  یک مقاومت  $R$  و یک خازن به طور سری بسته شده‌اند. (الف) یک معادله انتگرالی-دیفرانسیلی برحسب جریان حلقه  $i$  بنویسید و پس از آن مشتق بگیرید، تا معادله دیفرانسیل مدار به دست آید و (ب) یک فرم عمومی مناسب برای پاسخ واداشته  $i(t)$  فرض کنید و سپس آن را در معادله دیفرانسیل جایگزین نمایید و سپس فرم دقیق پاسخ واداشته را معین کنید.

## ۱۰-۳ تابع تحریک مختلط

۲۲. فرم‌های مقابل را به مختصات قائم ببرید. (الف)  $7 \angle -90^\circ$ ، (ب)  $17 \angle -17^\circ + 7 + j3$ ، (ج)  $14e^{j15^\circ}$ ، (د)  $0^\circ$ ، (ه) فرم‌های زیر را به فرم قطبی تبدیل نمایید. (ه)  $2(1 + j9)$  و (و) ۳. ۲۳. عملیات زیر را انجام دهید و پاسخ را به صورت یک عدد مختلط در مختصات قائم نشان دهید. (الف)  $15 \angle -23^\circ + 3$ ، (ب)  $12j(17 \angle 180^\circ)$  و (ج)  $16 \frac{(1 + j)(2 - j7)}{33 \angle -90^\circ}$ . ۲۴. عملیات لازم برای تبدیل عبارات زیر به یک عدد مختلط به فرم قطبی را انجام دهید. (الف)  $9 \angle -17^\circ - 5 \angle 9^\circ$ ، (ب)  $z(4 + j16)(8 - j15)$ ، (ج)  $5 \angle 30^\circ + \frac{(14 - j9)}{(2 - j8)} + j3$  و (د)  $6 \angle -33^\circ + 21 \angle -21^\circ$ . ۲۵. عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط به فرم قطبی نشان دهید. (الف)  $5 \angle 30^\circ + \frac{2e^{j14^\circ}}{2 - j2}$  و (ب)  $9 \angle 3^\circ - \frac{8 - j6}{j^2}$ . ۲۶. اعداد مختلط زیر را به فرم مختصات قائم درآورید. (الف)  $5 \angle -110^\circ$ ، (ب)  $6e^{j160^\circ}$ ، (ج)  $(3 + j6)(2 \angle 50^\circ)$ ، به فرم قطبی درآورید: (د)  $-100 - j40$  و (ه)  $3 \angle 50^\circ + 3 \angle -120^\circ$ . ۲۷. محاسبات زیر را انجام دهید و نتیجه را به فرم قطبی درآورید. (الف)  $45 \angle -50^\circ - 18 \angle 25^\circ + \frac{2 + j5}{1 + j2}$ ، (ب)  $3 + \frac{2}{j}$ ، به فرم قائم درآورید. (ج)  $(2.1 \angle 25^\circ)^3$  و (د)  $0.7e^{j0.3}$ .

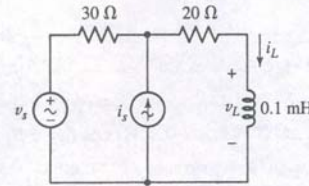


شکل ۱۰-۴۷



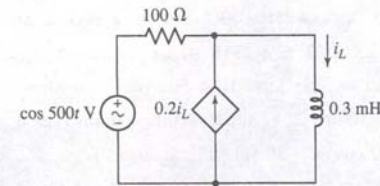
شکل ۱۰-۴۸

۱۵. یک منبع ولتاژ سینوسی  $v_s = 100 \cos 10^5 t$  V، یک مقاومت 500 ohm و یک القاگر 8 mH با یکدیگر سری‌اند. لحظاتی بین  $0 < t < \frac{1}{2} T$  را پیدا کنید که در آن توان صفر (الف) به مقاومت منتقل شده است، (ب) به القاگر رفته است و (ج) به وسیله منبع تولید شده است. ۱۶. در مدار شکل ۱۰-۴۹،  $v_s = 3 \cos 10^5 t$  V و  $i_s = 0.1 \cos 10^5 t$  A می‌باشد. پس از اجرای تجمیع و قضیه تونن مقادیر لحظه‌ای  $i_L$  و  $v_L$  را در  $t = 10 \mu s$  به دست آورید.



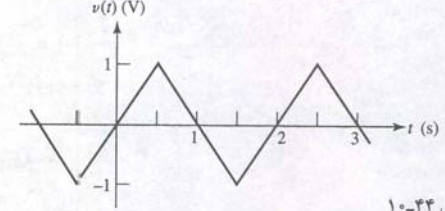
شکل ۱۰-۴۹

۱۷. در مدار شکل ۱۰-۵۰،  $i_L(t)$  را به دست آورید.



شکل ۱۰-۵۰

۱۸. هر دو منبع ولتاژ در شکل ۱۰-۵۱ به تابع  $120 \cos 120 \pi t$  V داده شده‌اند. (الف) عبارتی برای انرژی لحظه‌ای ذخیره شده در القاگر را بیابید. (ب) آن را برای یافتن مقدار متوسط انرژی ذخیره شده به کار ببرید. ۱۹. در مدار شکل ۱۰-۵۱، منابع ولتاژ عبارتند از  $v_{s1} = 120 \cos 200t$  V و  $v_{s2} = 180 \cos 200t$  V. جریان روبه‌باین در القاگر را به دست آورید.



شکل ۱۰-۴۳

۱۰. برق خانگی معمولاً  $110$  V،  $115$  V یا  $120$  V است. باین وجود این مقادیر ولتاژ دامنه را نشان نمی‌دهند. در واقع این مقادیر بیانگر جذر مربع ولتاژ می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t) dt}$$

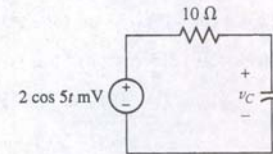
که T پریود موج،  $V_m$  دامنه ولتاژ و  $\omega$  فرکانس یا سرعت زاویه‌ای است. (الف) انتگرال فوق را اجرا نموده و نشان دهید که برای ولتاژ سینوسی داریم:

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

(ب) ولتاژهای دامنه مربوطه  $V_{rms}$  برای  $110$ ،  $115$  و  $120$  V چقدر است؟

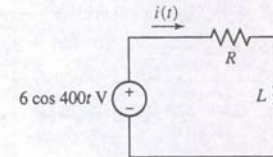
## ۱۰-۲ پاسخ واداشته به توابع سینوسی

۱۱. پاسخ حالت ساکن  $v_C(t)$  را در شکل ۱۰-۴۵ پیدا کنید.



شکل ۱۰-۴۵

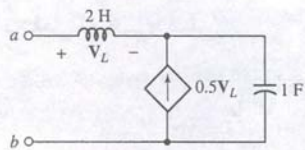
۱۲. ولتاژ القاگر  $v_C(t)$  را برای مدار شکل ۱۰-۴۶ با فرض  $R = 100 \Omega$  و  $L = 2$  H پیدا کنید. همه پاسخ‌های گذرا مدت‌ها قبل از این رفته‌اند.



شکل ۱۰-۴۶

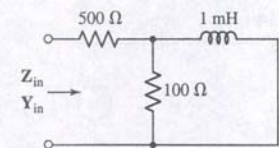
۱۳. در مدار شکل ۱۰-۴۷ فرض کنید  $v_s = 20 \cos 500t$  V است. پس از ساده‌سازی آن  $i_L(t)$  را بیابید. ۱۴. اگر در شکل ۱۰-۴۸،  $i_s = 0.4 \cos 500t$  A باشد، مدار را آن قدر ساده کنید تا به فرم شکل ۱۰-۴ درآید و سپس (الف)  $i_L(t)$  و (ب)  $i_x(t)$  را بیابید.





شکل ۱۰-۶۳

۵۶. یک مقاومت  $5 \Omega$ ، یک القاگر  $20 \text{ mH}$  و یک ظرفیت  $2 \text{ mF}$  یک شبکه سری با پایانه‌های  $a$  و  $b$  را تشکیل می‌دهند. ضمن کار با ادمیتانس ببینید چه خازنی بین  $a$  و  $b$  قرار گیرد تا در  $\omega = 500 \text{ rad/s}$  مقدار  $Z_{in,ab} = R_{in,ab} + j0$  شود. (ب)  $R_{in,ab}$  چقدر است؟ (ج) با خازن فوق در  $\omega = 100 \text{ rad/s}$   $Y_{ab}$  چقدر است؟  
۵۷. در شبکه شکل ۱۰-۶۴، فرکانسی را که در آن،  $550 \Omega$  (الف)  $B_{in} = -150 \mu\text{s}$  (د) و  $G_{in} = 1.8 \text{ ms}$  (ج)،  $X_{in} = 50 \Omega$  (ب) باشد، به دست آورید.



شکل ۱۰-۶۴

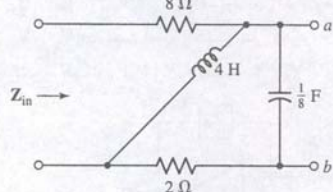
۵۸. دو ادمیتانس  $Y_1 = 3 + j4 \text{ ms}$  و  $Y_2 = 5 + j2 \text{ ms}$  با هم موازی‌اند و سومین ادمیتانس  $Y_3 = 2 - j4 \text{ ms}$  با ترکیب موازی سری است. اگر جریان  $I_1 = 0.1 \angle 30^\circ \text{ A}$  از  $Y_1$  عبور کند، اندازه ولتاژ دو سر، (الف)  $Y_1$ ، (ب)  $Y_2$ ، (ج)  $Y_3$  و (د) کل شبکه را پیدا کنید.  
۵۹. ادمیتانس ترکیب موازی مقاومت  $10 \Omega$  و خازن  $50 \mu\text{F}$  در فرکانس  $\omega = 1 \text{ krad/s}$  برابر با ادمیتانس  $R_1$  و  $C_1$  سری در همان فرکانس است. (الف)  $R_1$  و  $C_1$  را پیدا کنید. (ب) بند قبل را برای  $\omega = 2 \text{ krad/s}$  تکرار کنید.

۶۰. صفحه مختصات کارترین (قائم) دارای محور افقی با  $G_{in}$  برحسب زمین است، و محور عمودی  $B_{in}$  نیز بر حسب زمین می‌باشد. اگر  $Y_{in}$  ترکیب سری مقاومت  $1 \Omega$  و خازن  $0.1 \text{ F}$  باشد، (الف)  $Y_{in}$ ،  $G_{in}$  و  $B_{in}$  را بر حسب  $\omega$  به دست آورید. (ب) جفت محورها ( $G_{in}$  و  $B_{in}$ ) را روی صفحه در فرکانس‌های  $\omega = 0, 1, 2, 10, 20, 10^6 \text{ rad/s}$  مشخص کنید.

۶۱. ترکیبی از القاگرها، مقاومت‌ها و خازن‌ها طراحی کنید که دارای (الف) ادمیتانس  $j4 - 1$  در  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ، (ب) ادمیتانس  $200 \text{ ms}$  در  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  با حداقل یک القاگر، (ج) ادمیتانس  $7 \angle 80^\circ \mu\text{s}$  در  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  و (د) یک ادمیتانس  $200 \text{ m}\Omega$  در  $\omega = 3 \text{ THz}$  با حداقل قطعات ممکن باشد.

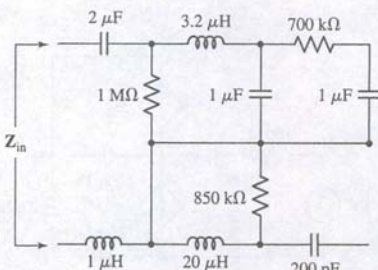
۶۲. مداری مرکب از القاگرها، مقاومت‌ها و خازن‌ها طراحی کنید که دارای (الف) یک ادمیتانس  $j4 - 1 \text{ pS}$  در  $\omega = 30 \text{ rad/s}$ ، (ب) ادمیتانس  $5 \mu\text{s}$  در  $\omega = 560 \text{ rad/s}$  باشد و در آن حداقل یک خازن باشد، (ج) یک ادمیتانس  $4 \angle -10^\circ \text{ ns}$  در  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  و (د) یک ادمیتانس  $60 \text{ ns}$  در  $\omega = 300 \text{ rad/s}$  با حداقل قطعات باشد.

۴۹. برای شبکه شکل ۱۰-۶۱،  $Z_{in}$  را در  $\omega = 4 \text{ rad/s}$  به دست آورید به شرطی که پایانه‌های  $a$  و  $b$  (الف) مدار باز است و (ب) اتصال کوتاه است.



شکل ۱۰-۶۱

۵۰. امپدانس معادل شبکه در شکل ۱۰-۶۲ را پیدا کنید. فرکانس  $f = 1 \text{ MHz}$  است.



شکل ۱۰-۶۲

۵۱. مداری مرکب از چند القاگر، خازن و مقاومت طراحی کنید که دارای (الف) امپدانس  $1 + j4 \Omega$  در  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  باشد، (ب) امپدانس  $5 \Omega$  در  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  باشد و حداقل یک القاگر دارد، (ج) امپدانس  $7 \angle 80^\circ \Omega$  در  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  باشد و (د) با حداقل قطعات دارای امپدانس  $5 \Omega$  در  $f = 3 \text{ THz}$  باشد.

۵۲. مداری مرکب از خازن‌ها، القاگرها و مقاومت‌ها طراحی کنید که دارای (الف) امپدانس  $1 + j4 \text{ k}\Omega$  در  $\omega = 230 \text{ rad/s}$  باشد، (ب) امپدانس  $5 \text{ M}\Omega$  در  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  ساخته شده که حداقل یک خازن دارد، (ج) دارای امپدانس  $8 \angle -22^\circ \Omega$  در  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  باشد و (د) با حداقل قطعات امپدانس  $300 \Omega$  در  $\omega = 3 \text{ krad/s}$  باشد.

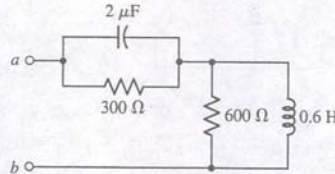
## ۱۰-۷ ادمیتانس

۵۳. ادمیتانس ترکیب موازی خازن‌های  $1 \text{ mF}$ ،  $2 \text{ mF}$  و  $4 \text{ mF}$  را اگر در فرکانس (الف)  $2 \text{ Hz}$ ، (ب)  $200 \text{ Hz}$ ، (ج)  $20 \text{ kHz}$  و (د)  $200 \text{ GHz}$  کار کند را محاسبه کنید.

۵۴. سوسپتانس ترکیب موازی (الف) دو مقاومت  $100 \Omega$ ، (ب) یک مقاومت  $1 \Omega$  موازی با خازن  $1 \text{ F}$  را اگر در فرکانس  $100 \text{ rad/s}$  کار کند، (ج) یک مقاومت  $1 \Omega$  سری با القاگر  $2 \text{ H}$  را اگر در فرکانس  $50 \text{ rad/s}$  کار کند را به دست آورید.

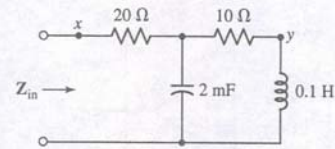
۵۵. ادمیتانس  $Y_{ab}$  شبکه شکل ۱۰-۶۳ را پیدا کرده و آن را به صورت ترکیبی از مقاومت  $R$  و القاگر  $L$  رسم نمایید. مقدار  $R$  و  $L$  را در  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  فرض کنید.

۴۱. در پایانه‌های  $a$  و  $b$  از شکل ۱۰-۵۸،  $Z_{in}$  را پیدا کنید، اگر  $\omega$  برابر باشد با (الف)  $800 \text{ rad/s}$  (ب)  $1600 \text{ rad/s}$ .



شکل ۱۰-۵۸

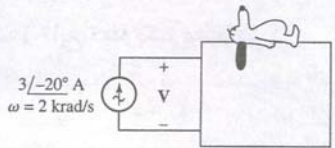
۴۲. بگذارید در شکل ۱۰-۵۹،  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  باشد، (الف)  $Z_{in}$  را پیدا کنید. (ب) اگر  $X$  به  $Y$  اتصال کوتاه شده باشد،  $Z_{in}$  را به دست آورید.



شکل ۱۰-۵۹

۴۳. اگر ولتاژ منبع  $V_s = 120 \cos 800t \text{ V}$  به دو سر پایانه‌های  $a$  و  $b$  در شکل ۱۰-۵۸ وصل باشد، (و مرجع + در بالا است) جریان جاری شده به راست در مقاومت  $300 \Omega$  چقدر است؟

۴۴. در شکل ۱۰-۶۰،  $V$  را اگر در جعبه (الف) مقاومت  $3 \Omega$  با القاگر  $2 \text{ mH}$  سری باشد، (ب)  $3 \Omega$  در  $125 \mu\text{F}$  سری باشد، (ج)  $3 \Omega$  و  $2 \text{ mH}$  و  $125 \mu\text{F}$  سری باشند و (د)  $3 \Omega$  و  $2 \text{ mH}$  و  $125 \mu\text{F}$  سری باشند، ولی  $\omega = 4 \text{ krad/s}$  باشد.



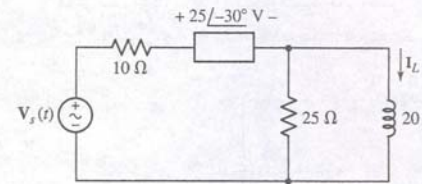
شکل ۱۰-۶۰

۴۵. یک القاگر  $H - 10$  یک مقاومت  $200 \Omega$  و یک خازن  $C$  با هم موازی‌اند. (الف) امپدانس ترکیب موازی را در  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  با  $\omega = 20 \mu\text{F}$   $C$  به دست آورید. (ب) اگر اندازه امپدانس در  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  برابر  $125 \Omega$  باشد،  $C$  را معین کنید. (ج) در چه مقداری از  $\omega$  با  $\omega = 20 \mu\text{F}$   $C$  اندازه امپدانس برابر  $100 \Omega$  می‌باشد.

۴۶. یک القاگر  $20 \text{ mH}$  و یک مقاومت  $30 \Omega$  با هم موازی‌اند. فرکانس  $\omega$ : (الف) در  $|Z_{in}| = 25 \Omega$  چقدر است؟ (ب) در زاویه  $\angle Z_{in} = 25^\circ$  چقدر؟ (ج) در  $\text{Re}(Z_{in}) = 25 \Omega$  چقدر؟ (د) در  $\text{Im}(Z_{in}) = 10 \Omega$  چقدر می‌باشد؟

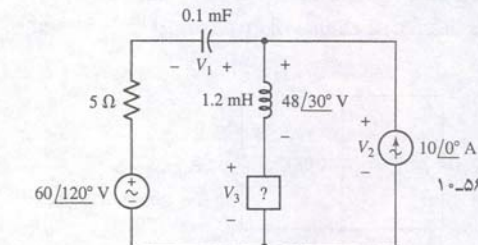
۴۷. در شکل ۱۰-۵۷ مقدار  $R_1$  و  $R_2$  را پیدا کنید.

۴۸. یک شبکه دو عنصری دارای امپدانس ورودی  $200 + j80 \Omega$  در فرکانس  $\omega = 1200 \text{ rad/s}$  است. چه خازنی را با شبکه موازی کنیم تا ورودی دارای (الف) راکتانس صفر باشد؟ (ب) امپدانس  $100 \Omega$  باشد؟



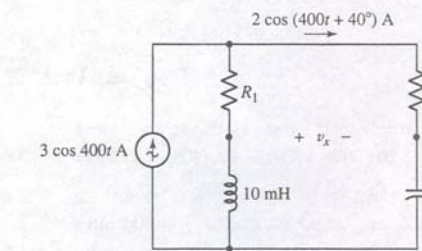
شکل ۱۰-۵۵

۳۵. اجازه دهید در شکل ۱۰-۵۶،  $\omega = 5 \text{ krad/s}$  باشد، (الف)  $V_1(t)$ ، (ب)  $V_2(t)$  (ج)  $V_3(t)$  را معین کنید.



شکل ۱۰-۵۶

۳۶. جریان فیزور  $1 \angle 0^\circ \text{ A}$  در ترکیب سری  $1 \Omega$ ،  $1 \text{ H}$  و  $1 \text{ F}$  جاری است. در چه فرکانسی دامنه ولتاژ دوسر شبکه دوبرابر دامنه ولتاژ دو سر مقاومت است؟  
۳۷. در شکل ۱۰-۵۷،  $V_x$  را در مدار به دست آورید.



شکل ۱۰-۵۷

۳۸. یک جعبه سیاه با دو سیم زرد حاوی دو منبع جریان  $I_{s1}$  و  $I_{s2}$  است. ولتاژ خروجی  $V_{out}$  است. اگر  $I_{s1} = 2 \angle 20^\circ \text{ A}$  و  $I_{s2} = 3 \angle -30^\circ \text{ A}$  باشد، آن‌گاه  $V_{out} = 80 \angle 10^\circ \text{ V}$  است. با این وجود اگر  $I_{s1} = I_{s2} = 4 \angle 40^\circ \text{ A}$  باشد، آن‌گاه  $V_{out} = 90 - j30 \text{ V}$  می‌باشد اگر  $I_{s1} = 2.5 \angle -60^\circ \text{ A}$  و  $I_{s2} = 2.5 \angle 60^\circ \text{ A}$  باشد،  $V_{out}$  چقدر است؟

## ۱۰-۸ امپدانس

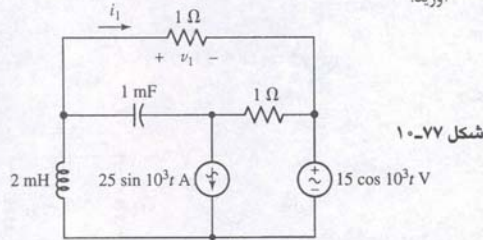
۳۹. امپدانس یک ترکیب سری متشکل از خازن‌های  $1 \text{ mF}$ ،  $2 \text{ mF}$  و  $3 \text{ mF}$  را در فرکانس‌های (الف)  $1 \text{ Hz}$ ، (ب)  $100 \text{ Hz}$ ، (ج)  $1 \text{ kHz}$  و (د)  $1 \text{ GHz}$  پیدا کنید.

۴۰. امپدانس یک مقاومت موازی با القاگر  $1 \text{ nH}$  و القاگر  $5 \text{ nH}$  را در فرکانس‌های (الف)  $1 \text{ Hz}$ ، (ب)  $1 \text{ kHz}$ ، (ج)  $1 \text{ MHz}$ ، (د)  $1 \text{ GHz}$  و (ه)  $1 \text{ THz}$  پیدا کنید.



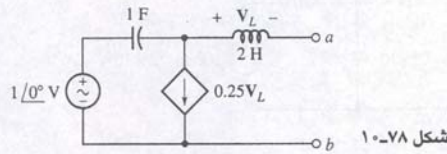
تحلیل حالت ماندگار سینوسی مدار

۷۸. با مراجعه به شکل ۱۰-۷۷، با روش تجمیع، بخشی از  $v_1(t)$  را که در آن، (الف) فقط منبع ولتاژ (ب) فقط منبع جریان عمل می‌کنند، به دست آورید.



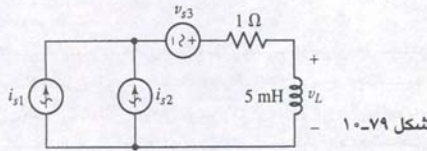
شکل ۱۰-۷۷

۷۹. با  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ، معادله نورتن شبکه ۱۰-۷۸ را پیدا کنید. معادل نورتن را به صورت  $I_N$  موازی با  $R_N$  و یکی از دو عنصر  $C_N$  و  $L_N$  بسازید.



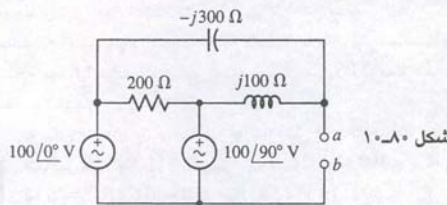
شکل ۱۰-۷۸

۸۰. در مدار شکل ۱۰-۷۹، فرض کنید  $i_{s1} = 2 \cos 200t \text{ A}$ ،  $i_{s2} = 1 \cos 100t \text{ A}$  و  $v_{s3} = 2 \sin 200t \text{ V}$  باشد،  $v_L(t)$  را بیابید.



شکل ۱۰-۷۹

۸۱. مدار معادل تونن را برای شکل ۱۰-۸۰ به دست آورید.



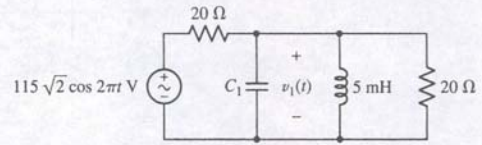
شکل ۱۰-۸۰

۸۲. جریان  $i(t)$  جاری شده از منبع ولتاژ شکل ۱۰-۸۱ چقدر است؟

۸۳. (الف) ولتاژ دو سر خازن 3F شکل ۱۰-۸۲ را به دست آورید. (ب) صحت پاسخ خود را با PSpice تحقیق نمایید.

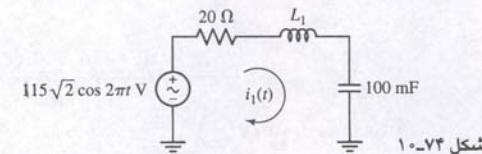
۸۴. (الف) معادل تونن از دید الفاکر 5 ohm در شکل ۱۰-۲۱ را به دست آورید. (ب) با فرض فرکانس 100 rad/s، صحت نتیجه خود را با PSpice تحقیق کنید.

۷۳. در مدار شکل ۱۰-۷۳ ولتاژ  $v_1(t) = 6.014 \cos(2\pi t + 85.76^\circ) \text{ V}$  است. ظرفیت  $C_1$  چقدر است؟



شکل ۱۰-۷۳

۷۴. در مدار شکل ۱۰-۷۴ جریان  $i_1(t) = 8.132 \cos 2\pi t \text{ A}$  است. مطلوب است القاکنایی  $L$ ؟

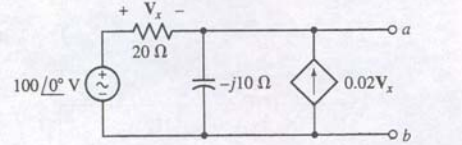


شکل ۱۰-۷۴

۷۵. با مراجعه به تقویت کننده شکل ۱۰-۲۶ (ب)؛ (الف) برای زاویه فاز خروجی معادله‌ای برحسب فرکانس به دست آورید. ورودی را  $V_s = 1 \angle 0^\circ \text{ V}$  فرض کنید. (ب) معادله خود را روی کاغذ نیمه لگاریتمی برای فرکانس‌های 100 Hz تا 10 GHz رسم کنید. از  $C_\pi = 5 \text{ pF}$ ،  $R_\pi = 2.2 \text{ k}\Omega$ ،  $R_B = 5 \text{ k}\Omega$ ،  $R_s = 300 \Omega$ ،  $R_L = 1.2 \text{ k}\Omega$ ،  $R_C = 4.7 \text{ k}\Omega$ ،  $g_m = 38 \text{ ms}$ ،  $C_\mu = 2 \text{ pF}$  استفاده کنید. (ج) در چه محدوده فرکانسی، خروجی دقیقاً  $180^\circ$  نسبت به ورودی اختلاف فاز دارد. حدوداً در چه فرکانسی این رابطه فازی شروع به تغییر می‌نماید.

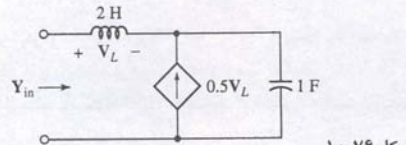
## ۱۰-۹. تجمیع، تبدیل منابع و قضیه تونن

۷۶. معادله تونن حوزه فرکانس شبکه شکل ۱۰-۷۵ را بیابید. نتیجه را به صورت  $V_{th}$  سری با  $Z_{th}$  نشان دهید.



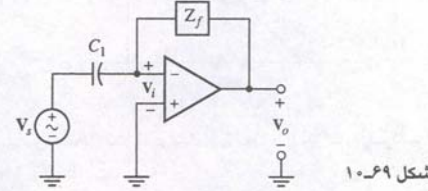
شکل ۱۰-۷۵

۷۷. امپدانس ورودی مدار شکل ۱۰-۷۶ را به دست آورید و آن را به صورت ترکیب موازی یک مقاومت و یک الفاکر  $L$  نشان دهید، در  $\omega = 1 \text{ rad}$  مقادیر  $R$  و  $L$  فرض شده‌اند.



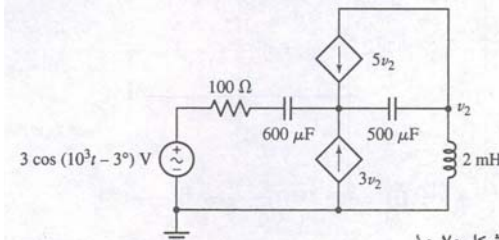
شکل ۱۰-۷۶

است، (الف) یک مشتق‌گیر ساده با  $Z_f = R_f$  بسازید.  $V_o / V_s$  را پیدا کنید و سپس نشان دهید که با  $A \rightarrow \infty$ ، نسبت  $-j\omega C_1 R_f \rightarrow V_o / V_s$  خواهد بود. (ب) اگر  $Z_f$  موازی  $R_f$  باشد،  $V_o / V_s$  را به دست آورید و سپس نشان دهید که اگر  $A \rightarrow \infty$  میل کند،  $-j\omega C_1 R_f / (1 + j\omega C_1 R_f) \rightarrow V_o / V_s$  میل خواهد کرد.



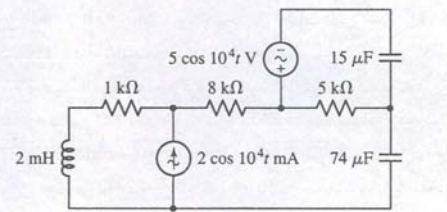
شکل ۱۰-۶۹

۷۰. برای مدار شکل ۱۰-۷۰، ولتاژ  $v_2$  را معین کنید.



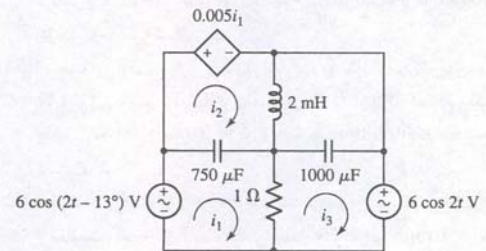
شکل ۱۰-۷۰

۷۱. توان تلف شده به وسیله مقاومت 1 kΩ در شکل ۱۰-۷۱ در زمان  $t = 1 \text{ ms}$  چقدر است؟



شکل ۱۰-۷۱

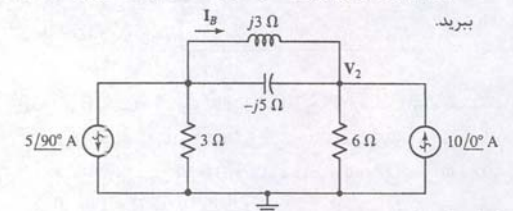
۷۲. تحلیل فیزیوری برای تعیین سه جریان مش  $i_1(t)$ ،  $i_2(t)$  و  $i_3(t)$  در مدار شکل ۱۰-۷۲ به کار ببرید.



شکل ۱۰-۷۲

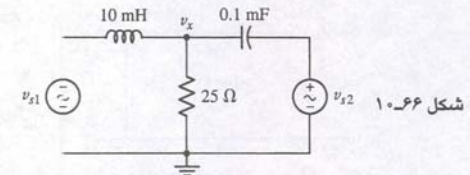
## ۱۰-۸. تحلیل گرهی و مش

۶۳. تحلیل فیزیوری گرهی را روی مدار شکل ۱۰-۶۵ برای یافتن  $V_2$  به کار ببرید.



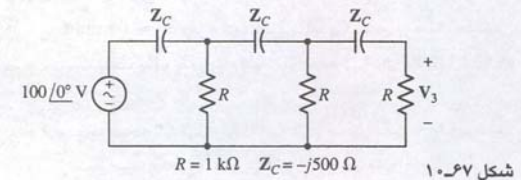
شکل ۱۰-۶۵

۶۴. تحلیل فیزیوری مش را روی مدار شکل ۱۰-۶۵ برای یافتن  $I_3$  به کار ببرید. ۶۵. در مدار شکل ۱۰-۶۶، اگر  $V_{s1} = 2 \cos 1000t \text{ V}$  و  $V_{s2} = 20 \sin 1000t \text{ V}$  باشند،  $v_x(t)$  را پیدا کنید.



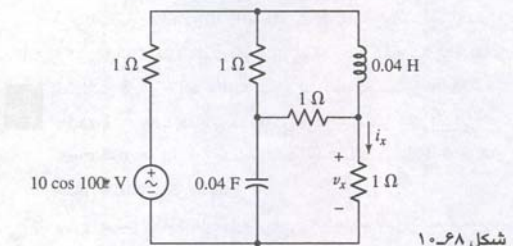
شکل ۱۰-۶۶

۶۶. (الف)  $V_3$  را در مدار شکل ۱۰-۶۷ بیابید. (ب) تا چه مقدار یکسانی، امپدانس خازن‌ها باید تغییر کند به نحوی که  $V_3$  به اندازه  $180^\circ$  با ولتاژ منبع اختلاف فاز داشته باشد؟



شکل ۱۰-۶۷

۶۷. برای یافتن  $i_x(t)$  در شکل ۱۰-۶۸ از تحلیل مش استفاده کنید.



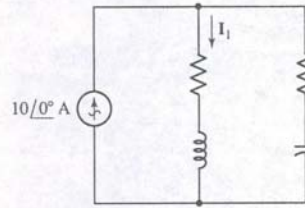
شکل ۱۰-۶۸

۶۸. به کمک فیزیورها و تحلیل گرهی،  $v_x(t)$  را در مدار شکل ۱۰-۶۸ به دست آورید.

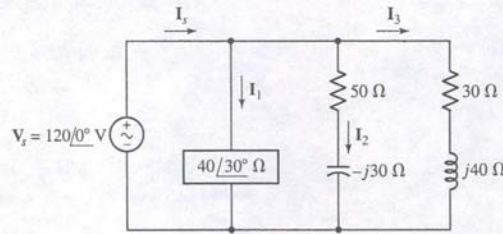
۶۹. شکل op amp ۱۰-۶۹ دارای امپدانس ورودی بینهایت، امپدانس خروجی صفر و بهره بزرگ ولی معین (مثبت، حقیقی)  $V_i$ ،  $V_o = -A$



۹۴. فرض کنید  $V_1 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ ،  $V_2 = 140 \text{ V}$  و  $|V_1 + V_2| = 120 \text{ V}$  باشد. با روش‌های گرافیکی دو مقدار ممکن برای زاویه  $V_2$  به دست آورید.

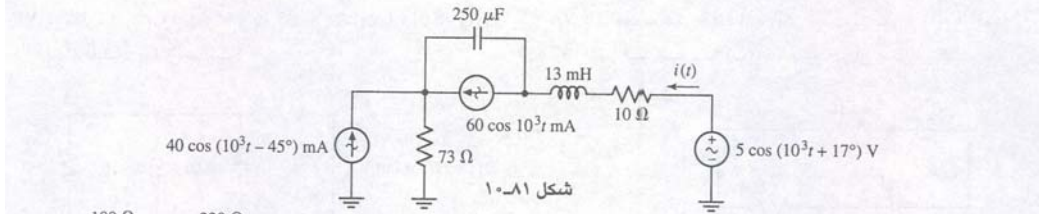


شکل ۱-۸۸

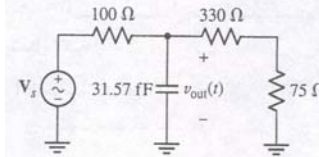


شکل ۱-۸۷

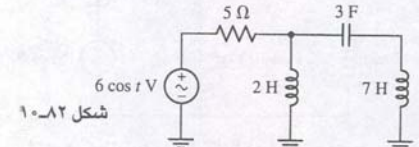
۹۳. در مدار شکل ۱-۸۸ می‌دانیم که  $I_1 = 5 \text{ A}$  و  $I_2 = 7 \text{ A}$  است.  $I_1$  و  $I_2$  را با پرگار، خط‌کش یا ابزاری از این قبیل پیدا کنید.



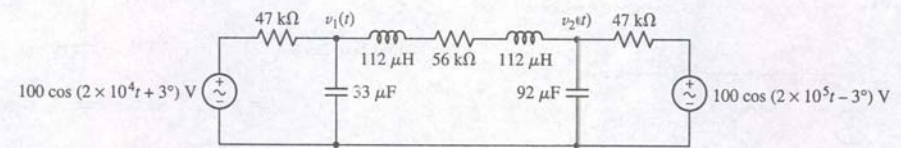
شکل ۱-۸۱



شکل ۱-۸۳



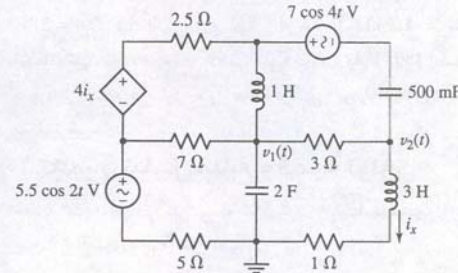
شکل ۱-۸۲



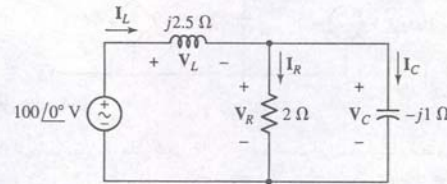
شکل ۱-۸۴

شکل ۱-۸۶ محاسبه کنید. (ب) با مقیاس هر 50 V در یک اینچ و 25 A در هر اینچ هر جفت کمیت را روی نمودار فیزیوری نشان دهید و روابط

(راهنمایی: ولتاژ خروجی دو سری یکی از دو عنصر غیرفعال را تعریف کنید و منبع سینوسی را ورودی بگیرید. منظور از حذف کاهش ولتاژ خروجی است).



شکل ۱-۸۵



شکل ۱-۸۶

۹۲. در مدار شکل ۱-۸۷، مقادیر (الف)  $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  را پیدا کنید. (ب)  $V_s$ ،  $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  را روی نمودار فیزیوری نشان دهید (مقیاس 50 V/in و 2 A/in مناسب است) (ج)  $I_s$  را به صورت گرافیکی به دست آورید و دامنه و زاویه فاز آن را مشخص کنید.

۸۵ با استفاده از یک مقاومت، یک خازن، یک منبع ولتاژ سینوسی و اصل تقسیم ولتاژ مداری طراحی کنید که فرکانس‌های بالا را حذف نماید. (راهنمایی: ولتاژ خروجی دو سری یکی از دو عنصر غیرفعال را تعریف کنید و منبع سینوسی را ورودی بگیرید. منظور از حذف کاهش ولتاژ خروجی است).

۸۶ با یک مقاومت، یک خازن و یک منبع ولتاژ سینوسی و اصل تقسیم ولتاژ مداری طراحی کنید که فرکانس‌های پایین را حذف کند. (راهنمایی: ولتاژ خروجی دو سری یکی از عناصر غیرفعال را تعریف کنید، و منبع سینوسی را ورودی بگیرید. منظور از حذف، کاهش ولتاژ خروجی است).

۸۷ (الف) مدار شکل ۱-۸۳ را به مدار ساده‌تر RC سری کاهش دهید. (ب) معادله‌ای برای اندازه نسبت ولتاژ  $V_{out} / V_s$  به صورت تئوری از فرکانس بیابید. (ج) معادله را در محدوده 100 Hz تا 1 MHz رسم کنید و نتیجه خود را با جواب شبیه‌سازی شده حاصل از PSpice در مدار اصلی، مقایسه نمایید.

۸۸ به شکل ۱-۲۶ (ب) مراجعه کنید. (الف) نشان دهید که حداکثر ولتاژ ماکزیمم  $R_C || R_L$  است. (ب) اگر  $R_s = 100 \Omega$ ،  $R_L = 8 \Omega$ ، مقدار حداکثر  $R_C$  برابر  $300 \Omega$  باشد و دیگر پارامترها بتوانند تغییر کنند، برای افزایش حداکثر بهره، مدار را چگونه اصلاح می‌نمایید. (ج) این اصلاح طراحی روی فرکانس قطع تقویت کننده چه تأثیری دارد؟

۸۹ از تجمیع برای یافتن ولتاژ  $V_1(t)$  و  $V_2(t)$  در شکل ۱-۸۴ استفاده کنید. ۹۰ از تجمیع برای یافتن ولتاژ  $V_1(t)$  و  $V_2(t)$  در شکل ۱-۸۵ استفاده نمایید.

## ۱-۱۰ نمودارهای فیزیوری

۹۱. (الف) مقادیر  $I_1$ ،  $I_2$ ،  $I_3$ ،  $V_L$ ،  $V_C$ ،  $V_R$  و  $V_s$  را برای مدار



## تحلیل منابع انرژی AC

### مقدمه

اغلب بخش عمده‌ای از تحلیل مدار، تعیین توان تولیدشده یا مصرف‌شده و یا هر دوی آن‌ها است. در رابطه با موضوع توان AC که ما روش ساده‌ای برگزیدیم تصویر مناسبی از این‌که یک سیستم خاص چگونه کار می‌کند را ارائه نکرده است، لذا ما در این فصل چندین کمیت مرتبط با توان را معرفی می‌کنیم.

با توان لحظه‌ای آغاز می‌کنیم، که حاصل ضرب ولتاژ حوزه زمان و جریان حوزه زمان در یک عنصر یا شبکه موردنظر است. توان لحظه‌ای به نوبه خود گاهی بسیار مفید است، زیرا حداکثر مقدار آن می‌باید محدود شود تا از محدوده مجاز برای یک وسیله فیزیکی خارج نگردد. مثلاً تقویت‌کننده‌های ترانزیستوری و لامپی هر دو در هنگام تجاوز توان اوج از حد معینی در خروجی تولید اعوجاج می‌نمایند و لذا بلندگوها صدای ناهنجاری را تولید می‌کنند. در هر صورت ما عمدتاً به توان لحظه‌ای به این دلیل علاقمندیم که می‌توان از آن توان متوسط را محاسبه کرد. مشابه با این مطلب مسافرت در بیرون شهر است که در آن حرکت با سرعت متوسط بهتر قابل تعریف است، ولی سرعت لحظه‌ای به ما پرهیز از سرعت‌های ماکزیممی که موجب خطر می‌شود را یادآوری می‌نماید.

در مسائل عملی توان متوسط را مورد توجه قرار می‌دهیم که حدود آن، کسری از یکوات در ارسال سیگنال راه دور از فضای بالای جو، تا چند وات توان تولیدی برای بلندگوها در سیستم‌های صوتی استریو، چند وات برای قهوه‌جوش، یا 10 میلیون وات تولیدی در یک نیروگاه می‌باشد. هنوز خواهیم دید که حتی مفهوم توان متوسط هم محدودیت خود را دارد، خصوصاً هنگامی که ما با مبادله انرژی بین بارهای رآکتیو و منابع انرژی مواجه می‌شویم. این موضوع به راحتی با معرفی مفاهیم توان رآکتیو، توان مختلط و ضریب توان - که همگی واژه‌هایی آشنا در صنعت انرژی هستند - قابل برخورد و مدیریت است.

### ۱۱-۱ توان لحظه‌ای

توان لحظه‌ای انتقالی به هر وسیله با حاصل ضرب ولتاژ لحظه‌ای دو سر وسیله در جریان لحظه‌ای درون آن تعریف می‌گردد. بنابراین:

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (1)$$

گر وسیله موردنظر یک مقاومت R باشد، آنگاه توان را برحسب فقط جریان یا فقط ولتاژ بیان می‌کنیم:

$$p(t) = v(t)i(t) = i^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R} \quad (2)$$

گر ولتاژ و جریان، مربوط به وسیله یا دستگاهی کاملاً القایی باشد، آنگاه:

$$p(t) = v(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} v(t) \int_{-\infty}^t v(t') dt' \quad (3)$$

#### مفاهیم کلیدی

توان لحظه‌ای

توان متوسط

مقادیر ولتاژ و جریان موثر

توان ظاهری و ضریب توان

توان مختلط

مقایسه واژه‌های توان





آخرین معادله چند ویژگی دارد که به طور کلی برای وضعیت حالت ماندگار مدارها معتبر است. اولین جمله تابعی از زمان نیست و دومی دارای فرکانسی دوبرابر فرکانس اعمال شده است. چون جمله اخیر موجی سینوسی است و چون امواج سینوسی و کسینوسی دارای متوسط صفراند (وقتی که متوسط در فاصله مضارب صحیح پریود باشد)، بنابراین توان متوسط برابر با  $\frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi$  است. به زودی خواهیم دید که واقعاً چنین است.

## مثال ۱۱-۱

یک منبع ولتاژ  $V = 60u(t) + 40$ ، یک خازن  $5\mu F$  و یک مقاومت  $200\Omega$  با یکدیگر به طور سری بسته شده‌اند. توان جذب شده به وسیله خازن و مقاومت را در  $t = 1.2\text{ms}$  پیدا کنید.

در  $t = 0^-$ ، جریانی وجود ندارد و لذا  $V = 40$  در دو سر خازن و مقاومت سری با آن به  $100\text{V}$  پرش می‌کند. چون  $V_C$  نمی‌تواند در زمان صفر تغییر یابد، ولتاژ مقاومت در  $t = 0^+$  برابر  $60\text{V}$  خواهد بود.

پس جریان در هر سه عنصر در  $t = 0^+$  برابر است با  $300\text{mA}$  و برای  $t > 0$  داریم:

$$i(t) = 300e^{-t/\tau} \text{ mA}$$

که در آن  $\tau = RC = 1\text{ms}$  است. بنابراین جریان در  $t = 1.2\text{ms}$  برابر  $90.36\text{mA}$  و توان جذب شده به وسیله مقاومت در این لحظه  $i^2(t)R = 1.633\text{W}$  می‌باشد.

توان لحظه‌ای جذب شده به وسیله خازن  $i(t)V_C(t)$  است و به چند روش می‌توان رابطه ولتاژ خازن را به دست آورد. با توجه به این که در  $t > 0$  مجموع ولتاژ کل در دو سر هر دو عنصر همیشه  $100\text{V}$  است و این که ولتاژ دو سر مقاومت  $60e^{-t/\tau}$  می‌باشد، داریم:

$$V_C(t) = 100 - 60e^{-t/\tau}$$

و بنابراین  $V_C(1.2\text{ms}) = 100 - 60e^{-1/2} = 81.93\text{V}$  و توان جذب شده به وسیله خازن در  $t = 1.2\text{ms}$  برابر است با  $7.403\text{W}$  ( $81.93\text{V})(90.36\text{mA})$ .

۱۱-۱ یک منبع جریان  $12 \cos 2000t \text{ A}$ ، یک مقاومت  $200\Omega$  و یک القاگر  $0.2\text{H}$  با هم موازیند. فرض کنید شرایط حالت ماندگار حاکم است. در  $t = 1\text{ms}$ ، توان جذب شده به وسیله (الف) مقاومت، (ب) القاگر و (ج) منبع سینوسی را به دست آورید.  
جواب:  $13.98\text{ kW}$ ،  $-5.63\text{ kW}$  و  $-8.35\text{ kW}$ .

## ۱۱-۲ توان متوسط

وقتی از مقدار متوسط برای توان لحظه‌ای صحبت می‌کنیم، فاصله زمانی که در آن فرآیند متوسط گیری انجام می‌شود، باید کاملاً مشخص باشد. بگذارید ابتدا فاصله زمانی کلی  $t_1$  تا  $t_2$  را در نظر بگیریم. آن‌گاه می‌توان با انتگرال گیری  $p(t)$  از  $t_1$  تا  $t_2$  و تقسیم نتیجه آن بر فاصله زمانی  $t_2 - t_1$ ، مقدار متوسط را به دست آورد:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (۵)$$

مقدار متوسط با حرف بزرگ  $P$  مشخص می‌گردد زیرا تابعی از زمان نیست و معمولاً بدون هر زیرنویسی که بیانگر متوسط باشد، نوشته می‌شود. هر چند  $P$  تابعی از زمان نیست ولی تابعی از  $t_1$  و  $t_2$  است که این دو نیز فاصله انتگرال گیری را تعریف می‌کنند. این وابستگی فاصله زمانی را می‌توان به صورت ساده‌تر بیان کرد مشروط بر این که تابع  $p(t)$  متناوب باشد. ما ابتدا این حالت مهم را بررسی می‌کنیم.

که در آن فرض خواهیم کرد که در  $t = -\infty$  ولتاژ صفر باشد. در حالت خازن:

$$p(t) = v(t)i(t) = C v(t) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \int_{-\infty}^t i(t') dt' \quad (۴)$$

که فرض مشابهی برای جریان صورت گرفته است. با این وجود معادلات توان برحسب فقط ولتاژ یا فقط جریان بزودی با مطالعه شبکه‌های کلی‌تر، بد و جبهه خواهد شد. نمایش فوق به دلیل دیگری هم الزامی نیست زیرا می‌توانیم در پایانه‌های شبکه هم ولتاژ و هم جریان را بیابیم. به عنوان مثال، مدار  $RL$  شکل ۱۱-۱ را که با یک منبع ولتاژ پله‌ای تحریک شده مورد بررسی قرار می‌دهیم، پاسخ جریان به صورت زیر است:

$$i(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) u(t)$$

و بنابراین توان کل انتقالی به وسیله منبع یا جذب شده به وسیله شبکه غیر فعال برابر است با:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R} (1 - e^{-Rt/L}) u(t)$$

که در آن مربع تابع پله واحد برابر با همان تابع پله واحد است.

توان انتقالی به مقاومت برابر است با:

$$p_R(t) = i^2(t)R = \frac{V_0^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})^2 u(t)$$

برای تعیین توان جذب شده به وسیله القاگر، ابتدا ولتاژ القاگر را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\ &= V_0 e^{-Rt/L} u(t) + \frac{LV_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \frac{du(t)}{dt} \\ &= V_0 e^{-Rt/L} u(t) \end{aligned}$$

زیرا  $\frac{du(t)}{dt} > 0$  مساوی صفر و  $0 = (1 - e^{-Rt/L})$  در  $t = 0$  صفر می‌باشد. بنابراین توان جذب شده به وسیله القاگر برابر زیر است:

$$p_L(t) = v_L(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-Rt/L} (1 - e^{-Rt/L}) u(t)$$

با چند دستکاری جبری خواهیم داشت:

$$p(t) = p_R(t) + p_L(t)$$

که محکی برای درستی کار است. نتایج در شکل ۱۱-۲ رسم شده است.

## توابع ناشی از تحریک سینوسی

بیابید منبع ولتاژ در شکل ۱۱-۱ را با منبع سینوسی  $V_m \cos \omega t$  عوض کنیم. پاسخ حالت ماندگار حوزه زمان به صورت زیر بود:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

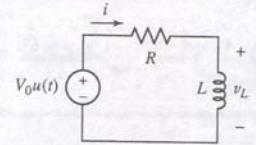
$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{و} \quad \phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

پس توان لحظه‌ای انتقالی به کل مدار در حالت ماندگار سینوسی چنین است:

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi) \cos \omega t$$

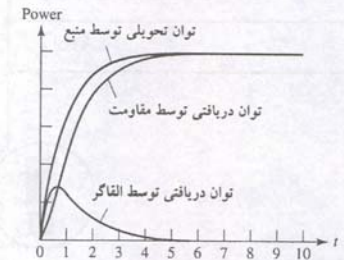
بهتر است رابطه فوق را با استفاده از روابط مثلثاتی دوباره بنویسیم:

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi] = \frac{V_m I_m}{2} \cos \phi + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \phi)$$



شکل ۱۱-۱ توان لحظه‌ای انتقالی به  $R$  عبارت است از:

$$p_R(t) = i^2(t)R = \frac{V_0^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})^2 u(t)$$

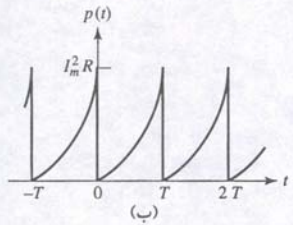
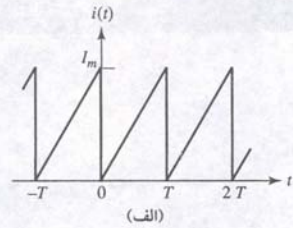


شکل ۱۱-۲ نمودارهای  $p(t)$ ،  $p_L(t)$  و  $p_R(t)$  با میراشدن حالت گذرا مدار به حالت ماندگار می‌رود. چون تنها منبع مدار  $dc$  است، القاگر در نهایت به صورت اتصال کوتاه عمل می‌نماید و توان جذب شده به وسیله آن صفر می‌شود.



در چند مورد خواهیم دید که بهتر است انتگرال‌گیری از توابع متناوب در بی‌نهایت پریود انجام شود. مثال‌هایی از کاربرد معادلات (۷)، (۸) و (۹) در ادامه آمده است.

بیاپید محاسبه توان متوسط یک موج پریودیک را با یافتن توان متوسط حمل‌شده به یک مقاومت  $R$  از یک موج جریان دندانه‌ای شکل ۱۱-۴ (الف) دنبال کنیم. داریم:



شکل ۱۱-۴ (الف) شکل موج دندانه‌ای. (ب) توان لحظه‌ای حاصل از عبور جریان از مقاومت  $R$ .

$$i(t) = \frac{I_m}{T} t \quad 0 < t \leq T$$

$$i(t) = \frac{I_m}{T} (t - T) \quad T < t \leq 2T$$

و به همین ترتیب. و نیز:

$$p(t) = \frac{1}{T^2} I_m^2 R t^2 \quad 0 < t \leq T$$

$$p(t) = \frac{1}{T^2} I_m^2 R (t - T)^2 \quad T < t \leq 2T$$

و به همین ترتیب که در شکل ۱۱-۴ (ب) نیز رسم شده است، با انتگرال‌گیری حول یک پریود، یعنی از  $t = 0$  تا  $t = T$  داریم:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2 R}{T^2} t^2 dt = \frac{1}{3} I_m^2 R$$

انتخاب یک پریود در محدوده‌ای دیگر، مانند از  $t = 0.1T$  تا  $t = 1.1T$ ، جواب یکسانی تولید می‌نماید. با انتگرال‌گیری از  $0$  تا  $2T$  و تقسیم بر  $2T$  یعنی کاربرد معادله (۸) با  $n = 2$  و  $t_x = 0$  نیز همان جواب فراهم می‌شود.

### توان متوسط در حالت ماندگار سینوسی

اکنون بیاپید جوابی کلی را برای حالت ماندگار سینوسی به‌دست آوریم. فرض می‌کنیم:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

و جریان

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

که از وسیله موردنظر عبور می‌کند. توان لحظه‌ای برابر است با:

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \phi)$$

دوباره با بیان ضرب دو جمله سینوسی به صورت نصف جمع کسینوس اختلاف زاویه‌ها و کسینوس جمع زاویه‌ها داریم:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi) \quad (10)$$

می‌توانیم با کمی بررسی در انتگرال‌گیری صرفه‌جویی کنیم. اولین جمله یک مقدار ثابت و مستقل از  $t$  است. جمله باقیمانده یک تابع کسینوسی است. بنابراین  $p(t)$  پریودیک است و پریود آن  $T$  می‌باشد. دقت کنید که پریود متعلق به جریان یا ولتاژ است و نه متعلق به توان. تابع توان پریود  $T$  دارد. در هر صورت می‌توانیم در صورت تمایل انتگرال را در فاصله  $T$  بگیریم تا مقدار متوسط توان به‌دست‌آید. با این وجود باید آن را به  $T$  تقسیم کنیم. می‌دانیم که مقدار متوسط امواج سینوسی و کسینوسی در یک پریود صفر است. بنابراین نیازی نیست که از معادله (۱۰) انتگرال بگیریم. متوسط جمله دوم در یک پریود  $T$  (یا  $\frac{1}{2}T$ ) برابر صفر و متوسط اولین جمله، یک ثابت است. بنابراین:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) \quad (11)$$

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) \quad \text{به‌خاطر داشته باشید که } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

### توان متوسط برای امواج پریودیک

اجازه بدهید فرض کنیم که تابع تحریک و پاسخ‌های مدار همگی پریودیک (دوره‌ای) اند و به حالت ماندگار رسیده‌ایم، هرچند که لزوماً سینوسی هم نباشد. می‌توان تابع پریودیک  $f(t)$  را به صورت ریاضی تعریف کرد:

$$f(t) = f(t + T) \quad (6)$$

که  $T$  پریود یا دوره تناوب است. اکنون نشان می‌دهیم که مقدار متوسط توان لحظه‌ای که با معادله (۵) بیان شده است، می‌تواند در فاصله یک پریود محاسبه شود و شروع آن نیز اختیاری است. موج پریودیک کلی در شکل ۱۱-۳ نمایش و با  $p(t)$  مشخص شده است. ما ابتدا توان متوسط را با انتگرال‌گیری از  $t_1$  تا زمان  $t_2$  که یک پریود فاصله دارد، یعنی  $t_2 = t_1 + T$ ، محاسبه می‌کنیم:

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p(t) dt$$

سپس با انتگرال‌گیری از  $t_x$  تا  $t_x + T$  خواهیم داشت:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_x}^{t_x+T} p(t) dt$$

برابری  $P_1$  و  $P_x$  از تفسیر انتگرال‌ها قابل تفسیر است. سطحی که برای نمایش انتگرال مورد استفاده در تعیین  $P_x$  وجود دارد به اندازه سطح  $t_1$  تا  $t_x$  از  $P_1$  کوچک‌تر و به اندازه سطح بین  $t_1 + T$  تا  $t_x + T$  از آن بزرگ‌تر است. طبیعت پریودیک منحنی لازم می‌دارد که این دو سطح برابر باشند. بنابراین **توان متوسط** با انتگرال توان لحظه‌ای در هر پریود دلخواه صورت گرفته و سپس به پریود تقسیم می‌گردد:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_x}^{t_x+T} p dt \quad (7)$$

لازم به تذکر است که می‌توان انتگرال را در طول هر تعداد پریود صحیح انجام داد، به شرطی که تقسیم نیز بر همان تعداد پریود گردد. بنابراین:

$$P = \frac{1}{nT} \int_{t_x}^{t_x+nT} p dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

اگر به این مطلب عمومیت ببخشیم و انتگرال را در تمام فاصله زمانی بگیریم، نتیجه مفید دیگری حاصل می‌گردد. ابتدا حدود انتگرال را متغیر اختیار می‌کنیم:

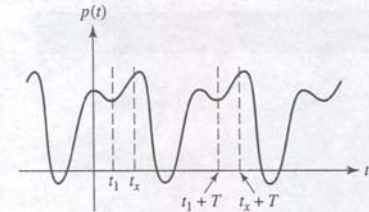
$$P = \frac{1}{nT} \int_{-nT/2}^{nT/2} p(t) dt$$

سپس با بی‌نهایت شدن  $n$ ، حدگیری می‌کنیم:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \int_{-nT/2}^{nT/2} p(t) dt$$

مادامی که  $P(t)$  تابعی با رفتاری منطقی باشد، مثل همه توابع تحریک فیزیکی و پاسخ‌ها، می‌توان عدد بزرگ  $n$  را با عدد کمی بزرگ‌تر که صحیح نیست جایگزین کرد، بدون این‌که  $P$  تغییر چندانی کند، به علاوه خطا با افزایش  $n$ ، کاهش می‌یابد. بدون بحثی بیشتر در این باره، مقدار گسسته  $nT$  را با متغیر پیوسته  $\tau$  جایگزین می‌کنیم:

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t) dt \quad (9)$$



شکل ۱۱-۳ مقدار متوسط توان  $P$  از تابع پریودیک  $p(t)$  که در هر دوره تناوبی یکسان است.



به یاد داشته باشید که ما متوسط توان انتقالی به یک مقاومت را که به وسیله یک منبع سینوسی حمل می‌گردد محاسبه می‌کنیم، ضمناً این کمیت را با توان لحظه‌ای که فرمی مشابه دارد اشتباه نگیرید.



$$P_R = \frac{V_m^2}{2R} \quad (۱۳)$$

با دو فرمول آخر می‌توانیم توان متوسط حمل‌شده به یک مقاومت خالص را با آگاهی از جریان یا ولتاژ معین کنیم، این دو معادله ساده و مهم‌اند. متأسفانه گاهی از آن‌ها سوء استفاده می‌شود. بزرگ‌ترین اشتباه در به‌کارگیری آن‌ها هنگامی است که  $V_m$ ، ولتاژ دو سر مقاومت نیست. اگر در به‌کارگیری جریان در مقاومت، معادله (۱۲)، و ولتاژ دو سر مقاومت، معادله (۱۳)، دقت کافی به عمل آید صحت عملکرد تضمین شده است. البته  $\frac{1}{2}$  یادتان نرود.

### توان متوسط جذب‌شده به وسیله عناصر رآکتیو خالص

توان متوسط تحویلی به هر وسیله رآکتیو خالص (بدون مقاومت) باید صفر باشد. این مطلب نتیجه وجود اختلاف فاز  $90^\circ$  بین جریان و ولتاژ است، زیرا  $\cos(\theta - \phi) = \cos \pm 90^\circ = 0$  و  $P_x = 0$ .



توان متوسط تحویل‌شده به هر شبکه متشکل از فقط القاگر و خازن نیز صفر است. توان لحظه‌ای فقط در لحظات مشخصی صفر است. بنابراین توان در بخشی از تناوب یا سیکل به شبکه داده شده و در قسمت دیگر از شبکه گرفته می‌شود، ولی هیچ توانی تلف نمی‌شود.

### مثال ۱۱-۳

توان متوسط انتقالی به امپدانس  $Z_L = 8 - j11 \Omega$  را از جریان  $I = 5 \angle 20^\circ \text{ A}$  به‌دست‌آورید. می‌توان با استفاده از معادله (۱۲) حل را به سرعت به‌دست‌آورد. در محاسبه توان متوسط، تنها مقاومت  $8\Omega$  نقش دارد زیرا مولفه  $j11\Omega$  هیچ توان متوسطی را جذب نمی‌کند. بنابراین:

$$P = \frac{1}{2} (5^2) 8 = 100 \text{ W}$$

۱۱-۳ توان متوسط داده‌شده به امپدانس  $6 \angle 25^\circ \Omega$  به وسیله جریان  $I = 2 + j5 \text{ A}$  چقدر است. جواب:  $78.85 \text{ W}$

توان جذب‌شده به وسیله هر سه عنصر غیرفعال شکل ۱۱-۶ و توان تولیدشده به وسیله هر منبع را مشخص کنید.

بدون هر تحلیلی می‌دانیم که توان متوسط جذب‌شده به وسیله دو عنصر رآکتیو برابر صفر است.

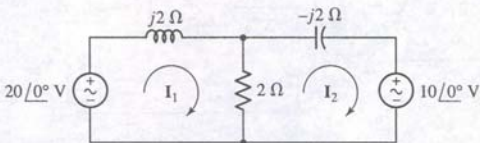
هر یک از مقادیر  $I_1$  و  $I_2$  با یکی از روش‌های آشنا، مثل روش حلقه، گره یا تجمیع قابل محاسبه است. این جریان‌ها عبارتند از:

$$I_1 = 5 - j10 = 11.18 \angle -63.43^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 5 - j5 = 7.071 \angle -45^\circ \text{ A}$$

جریان رو به پایین در مقاومت  $2\Omega$  برابر است با:

$$I_1 - I_2 = -j5 = 5 \angle -90^\circ \text{ A}$$



شکل ۱۱-۶ توان متوسط داده‌شده به هر عنصر رآکتیو در حالت ماندگار سینوسی صفر.



بنابراین، این نتیجه مهم که در بخش قبل برای یک مدار خاص معرفی شد، برای همه حالات ماندگار سینوسی حالت معتبری است. توان متوسط برابر با نصف حاصل ضرب حداکثر دامنه ولتاژ در حداکثر دامنه جریان در کسینوس اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ می‌باشد. علامت این زاویه در معادله نقشی ندارد.

### مثال ۱۱-۲

با ولتاژ حوزه زمان  $v = 4 \cos(\pi t/6) \text{ V}$ ، توان متوسط و عبارت توان لحظه‌ای حاصل از ولتاژ  $V = 4 \angle 0^\circ \text{ V}$  در دو سر امپدانس  $Z = 2 \angle 60^\circ \Omega$  را پیدا کنید.

فیזור جریان  $I = 2 \angle -60^\circ \text{ A}$  و متوسط توان برابر است با:

$$P = \frac{1}{2} (4)(2) \cos 60^\circ = 2 \text{ W}$$

ولتاژ حوزه زمان برابر است با:

$$v(t) = 4 \cos \frac{\pi t}{6} \text{ V}$$

جریان حوزه زمان برابر است با:

$$i(t) = 2 \cos \left( \frac{\pi t}{6} - 60^\circ \right) \text{ A}$$

و توان لحظه‌ای چنین است:

$$p(t) = 8 \cos \frac{\pi t}{6} \cos \left( \frac{\pi t}{6} - 60^\circ \right) = 2 + 4 \cos \left( \frac{\pi t}{3} - 60^\circ \right) \text{ W}$$

که همگی در شکل ۱۱-۵ ترسیم شده‌اند. مقدار متوسط توان  $2 \text{ W}$  و پرپود آن،  $6 \text{ s}$ ، یعنی نیم پرپود از جریان یا ولتاژ به وضوح دیده می‌شوند. در هر لحظه که جریان یا ولتاژ صفر باشد توان لحظه‌ای هم صفر است.

### تمرین

۱۱-۲ با فرض فیזור ولتاژ  $V = 115 \sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ V}$  در دو سر امپدانس  $Z = 16.26 \angle 19.3^\circ \Omega$ ، عبارتی برای توان لحظه‌ای بنویسید و اگر  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  باشد توان متوسط را حساب کنید. جواب:  $767.5 \text{ W}$  و  $813.2 \cos(100t + 70.7^\circ) \text{ W}$ .

بد نیست برای بررسی، دو حالت خاص را از هم جدا کنیم، یکی توان متوسط انتقالی به مقاومت ایده‌آل و دیگری به رآکتور (ترکیبی فقط از خازن‌ها و القاگرها) ایده‌آل.

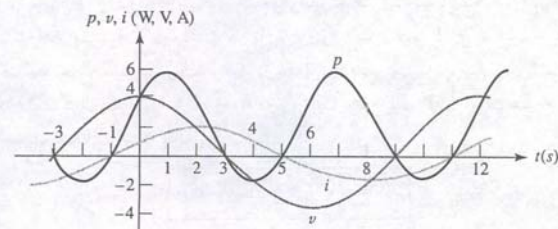
### توان متوسط جذب‌شده توسط یک مقاومت ایده‌آل

اختلاف فاز زاویه‌ای بین جریان عبوری و ولتاژ دو سر یک مقاومت خالص صفر است. بنابراین:

$$P_R = \frac{1}{2} V_m I_m \cos 0 = \frac{1}{2} V_m I_m$$

یا

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R \quad (۱۴)$$



شکل ۱۱-۵ منحنی‌های  $v(t)$ ،  $i(t)$  و  $p(t)$  به صورت تابعی از زمان برای مداری که در آن ولتاژ فیזור  $V = 40 \angle 0^\circ \text{ V}$  به امپدانس  $Z = 2 \angle 60^\circ \Omega$  در  $\omega = \frac{\pi}{6} \text{ rad/s}$  اعمال شده است.



اندازه  $I_L$  برابر است با:

$$\frac{|V_{th}|}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

و زاویه فاز برابر است با:

$$\angle V_{th} - \tan^{-1} \left( \frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L} \right)$$

به طور مشابه اندازه  $V_L$  برابر است با:

$$\frac{|V_{th}| \sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

و زاویه فاز آن برابر است با:

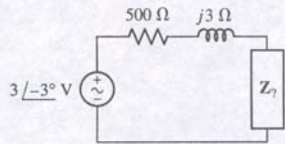
$$\angle V_{th} + \tan^{-1} \left( \frac{X_L}{R_L} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L} \right)$$

با توجه به معادله (۱۱) عبارتی برای توان متوسط حمل شده به بار امپدانس  $Z_L$  عبارت است از:

$$P = \frac{\frac{1}{2} |V_{th}|^2 \sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2} \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{X_L}{R_L} \right) \right) \quad (14)$$

برای این که ثابت کنیم شرط انتقال حداکثر توان متوسط به بار،  $Z_L = Z_{th}^*$  است، باید دو گام دیگر برداریم. ابتدا باید مشتق معادله (۱۴) را نسبت به  $R_L$  به دست آورده و برابر صفر کنیم. دوم این که مشتق معادله (۱۴) نسبت به  $X_L$  هم باید برابر صفر گردد. جزئیات بیشتر را برای خواننده باقی می گذاریم.

#### مثال ۱۱-۵



**شکل ۱۱-۹** نمایش فیزیوری یک مدار سری ساده متشکل از یک منبع ولتاژ سینوسی، یک مقاومت، یک القاگر و یک امپدانس مجهول.

مدار خاصی متشکل از ترکیب سری یک منبع ولتاژ سینوسی  $V = 3 \cos(100t - 3^\circ)$ ، یک مقاومت  $500 \Omega$ ، یک القاگر  $30 \text{ mH}$  و یک امپدانس مجهول تشکیل شده است. اگر مطمئن باشیم که منبع ولتاژ حداکثر توان متوسط را به امپدانس مجهول می دهد، مقدار آن چقدر است؟

نمایش فیزیوری مدار در شکل ۱۱-۹ ترسیم شده است. به خوبی دیده می شود که در مدار مذکور امپدانس مجهول  $Z_L$  با یک معادل توننی که متشکل از منبع  $V = 3 \angle -3^\circ$  و امپدانس  $500 + j3 \Omega$  می باشد، سری است. چون ظاهر مدار شکل ۱۱-۹ از قبل به فرمی است تا قضیه توان متوسط حداکثر به کار گرفته شود، می دانیم که توان متوسط حداکثر به امپدانس برابر با مزدوج مختلط  $Z_{th}$  منتقل می گردد، یا:

$$Z_L = Z_{th}^* = 500 - j3 \Omega$$

این امپدانس را به چند طریق می توان به دست آورد، که ساده ترین آن از سری کردن یک مقاومت  $500 \Omega$  با یک خازن  $3 \text{ } \Omega -j$  حاصل می گردد. چون فرکانس مدار  $100 \text{ rad/s}$  است این میزان امپدانس متعلق به خازنی با ظرفیت  $3.333 \text{ mF}$  است.

**۱۱-۵** اگر القاگر  $30 \text{ mH}$  مثال ۱۱-۵ با خازن  $10 \mu\text{F}$  تعویض شود، مقدار مولفه القاکنایی امپدانس  $Z_L$  چیست؟ یا این فرض که  $Z_L$  حداکثر توان متوسط را جذب کند. **جواب:**  $10 \text{ H}$ .

پس  $I_m = 5 \text{ A}$  و توان متوسط جذب شده به وسیله مقاومت به راحتی از معادله (۱۲) حاصل می گردد:

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} (5^2) 2 = 25 \text{ W}$$

این نتیجه می تواند با استفاده از معادله (۱۱) یا (۱۳) تست شود. توان متوسط جذب شده به وسیله هر عنصر را کتیو صفر است. اکنون به سراغ منبع سمت چپ می رویم. ولتاژ  $20 \angle 0^\circ \text{ V}$  و جریان مربوطه اش،  $I_1 = 11.18 \angle -63.43^\circ$  قرارداد علامت عنصر فعال را تأیید می کنند. به این ترتیب توان تولید شده به وسیله این منبع برابر است با:

$$P_{\text{چپ}} = \frac{1}{2} (20) (11.18) \cos[0^\circ - (-63.43^\circ)] = 50 \text{ W}$$

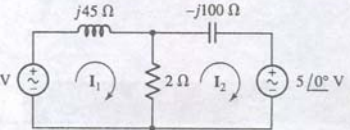
به ضریقی مشابه، توان جذب شده توسط منبع سمت راست با توجه به قرارداد علامت عناصر غیر فعال عبارت است از:

$$P_{\text{راست}} = \frac{1}{2} (10) (7.071) \cos(0^\circ + 40^\circ) = 25 \text{ W}$$

چون  $50 = 25 + 25$  است، بنابراین رابطه توان صحیح است.

#### تمرین

**۱۱-۴** برای مدار شکل ۱۱-۷ توان متوسط حمل شده به هر یک از عناصر غیر فعال را معین کنید. صحت پاسخ خود را با محاسبه توان تولیدی به وسیله هر یک از دو منبع تحقیق نمایید. **جواب:**  $37.6 \text{ mW}$ .



شکل ۱۱-۷

#### انتقال حداکثر توان

قبلاً قضیه انتقال حداکثر توان به بار مقاومتی و منابع دارای امپدانس مقاومتی را بیان کردیم. اگر منبع تونن  $V_{th}$  با امپدانس تونن  $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$  به بار  $Z_L = R_L + jX_L$  وصل شود، می توان به سادگی نشان داد که توان متوسط داده شده به بار هنگامی حداکثر می شود که داشته باشیم  $R_L = R_{th}$  و  $X_L = -X_{th}$ ، یعنی وقتی که  $Z_L = Z_{th}^*$  باشد. این نتیجه را معمولاً **قضیه انتقال حداکثر توان** برای حالت ماندگار سینوسی می نامند.

یک منبع مستقل ولتاژ سری با یک امپدانس  $Z_{th}$ ، یا یک منبع جریان موازی با یک امپدانس  $Z_{th}$  به شرطی **حداکثر توان متوسط** را به امپدانس  $Z_L$  انتقال می دهد که  $Z_L = Z_{th}^*$  باشد.

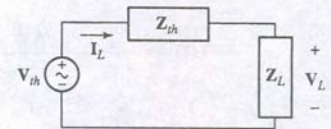
جزئیات اثبات مطلب فوق به تمرین ۱۱ محول شده است، ولی می توان با روشی ساده موضوع را در شکل ۱۱-۸ پیگیری و مشاهده کرد. امپدانس معادل تونن  $Z_{th}$  را می توان به صورت مجموع دو مولفه نوشت، یعنی  $R_{th} + jX_{th}$  و به همین ترتیب  $Z_L$  به صورت  $R_L + jX_L$  نوشته می شود. جریان در حلقه برابر است با:

$$I_L = \frac{V_{th}}{Z_{th} + Z_L} = \frac{V_{th}}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

و

$$\begin{aligned} V_L &= V_{th} \frac{Z_L}{Z_{th} + Z_L} = V_{th} \frac{R_L + jX_L}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} \\ &= V_{th} \frac{R_L + jX_L}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)} \end{aligned}$$

علامت  $Z^*$  مزدوج مختلط  $Z$  است، که از تبدیل  $z$  به  $z^*$  به دست می آید. برای توضیح بیشتر نیز به پیوست ۵ مراجعه کنید.



**شکل ۱۱-۸** یک مدار تک حلقه ای برای یافتن قضیه انتقال حداکثر توان در حالت ماندگار سینوسی.



## توان متوسط برای توابع نامتناوب

حال توجه خود را به توابع نامتناوب معطوف می‌داریم. مثال عملی از یک تابع توان نامتناوب (یا غیر پریودیک) که در آن مقدار توان متوسط موردنظر است، توان خروجی یک رادیو تلسکوپ است که به سمت یک ستاره می‌فرستد. مثال دیگر مجموع تعدادی توابع متناوب است، که هر یک پریود متفاوتی دارد، به نحوی که نمی‌توان در بین آن‌ها تابعی با پریود یا دوره متناوب مشترک پیدا کرد. مثلاً جریان:

$$i(t) = \sin t + \sin \pi t \quad (15)$$

نامتناوب است زیرا نسبت تناوب دو موج سینوسی عدد غیر گویا است. در  $t = 0$ ، هر دو تابع صفر و صعودی‌اند. ولی جمله اول تنها در  $t = 2\pi n$  صفر و صعودی است که در آن  $n$  عددی صحیح است و بنابراین تابع فوق هنگامی متناوب است که  $\pi t$  یا  $(2\pi n)$  برابر  $2\pi m$  باشد، که  $m$  نیز عددی صحیح است. هیچ حل یا  $n$  و  $m$  صحیحی نمی‌توان یافت که در رابطه فوق صدق کند. مقایسه تابع نامتناوب بیان‌شده در معادله (۱۵) و تابع متناوب زیر آموزنده است:

$$i(t) = \sin t + \sin 3.14t \quad (16)$$

که در آن  $3.14$  یک عدد اعشاری کامل است نه تقریبی از  $3.141592\dots$ . با کمی کوشش می‌توان نشان داد که تناوب موج جریان فوق  $100\pi$  ثانیه می‌باشد.\*  
مقدار متوسط توان انتقالی به یک مقاومت  $1\Omega$  با جریان متناوب معادله (۱۶) یا معادله متناوب (۱۵) را می‌توان با گرفتن انتگرال روی یک فاصله نامحدود به‌دست آورد. البته چون مقدار متوسط توابع ساده را غالباً می‌دانیم، می‌توان از انتگرال‌گیری‌های بسیاری اجتناب کرد. بنابراین توان متوسط ناشی از جریان معادله (۱۵) با اعمال معادله (۹) حاصل می‌گردد:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\sin^2 t + \sin^2 \pi t + 2 \sin t \sin \pi t) dt$$

در این جا  $P$  را به صورت مجموع سه مقدار متوسط نوشته‌ایم. مقدار متوسط  $\sin^2 t$  در بی‌نهایت دوره زمانی محدود را می‌توان با تبدیل آن به  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t)$  به‌دست آورد که برابر  $\frac{1}{2}$  می‌شود. به‌طور مشابه مقدار متوسط  $\sin^2 \pi t$  نیز  $\frac{1}{2}$  است و جمله آخر را می‌توان به صورت دو تابع سینوسی نوشت که هر یک مطمئناً مقدار متوسط صفر را دارند. بنابراین:

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ W}$$

برای جریان متناوب معادله (۱۶) نیز جواب مشابهی به‌دست می‌آید. این روش را می‌توان به هر تابع جریانی که مجموعی از چند تابع سینوسی با تناوب‌های مختلف است اعمال کرد، یعنی:

$$i(t) = I_{m1} \cos \omega_1 t + I_{m2} \cos \omega_2 t + \dots + I_{mN} \cos \omega_N t \quad (17)$$

توان متوسط انتقالی به  $R$  برابر است با:

$$P = \frac{1}{2} (I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \dots + I_{mN}^2) R \quad (18)$$

اگر هر مولفه جریان فوق فاز خاصی هم داشته باشد نتیجه تغییری نخواهد کرد. این نتیجه مهم به میزان قابل توجهی به هنگام به‌دست آوردن آن، ساده است. گام‌های لازم در این راستا عبارت‌انداز: مربع کردن تابع جریان، انتگرال‌گیری و حدگیری آن. نتیجه شگفت‌انگیز نیز هست، زیرا برای جریان‌هایی شبیه به معادله (۱۷) اصل تجمیع را می‌توان در مورد توان هم اعمال کرد. اگر جریان مجموع دو جریان  $dc$  یا دو جریان سینوسی هم فرکانس باشد، اصل تجمیع معتبر نخواهد بود.

ن

## مثال ۱۱-۶

توان متوسط داده‌شده به یک مقاومت  $4\Omega$  به وسیله جریان  $i_1(t) = 2 \cos 10t - 3 \cos 20t$  A چقدر است؟

چون دو جمله سینوسی فرکانس‌های متفاوتی دارند، دو توان متوسط به‌طور جداگانه محاسبه شده و سپس با هم جمع می‌شوند. بنابراین جریان توانی برابر  $26W = 8 + 18 = 4(3^2) + 4(2^2)$  را به مقاومت  $4\Omega$  حمل می‌کند.

## مثال ۱۱-۷

توان متوسط داده‌شده به مقاومت  $4\Omega$  به وسیله جریان  $i_2 = 2 \cos 10t - 3 \cos 10t$  A چقدر است؟

در این‌جا هر دو جزء جریان فرکانسی برابر دارند، و بنابراین باید در آن فرکانس به یک جمله سینوسی ادغام شوند. پس  $i_2 = 2 \cos 10t - 3 \cos 10t = -\cos 10t$  تنها  $2W = \frac{1}{2}(1^2)$  متوسط توان به مقاومت  $4\Omega$  حمل خواهد کرد.

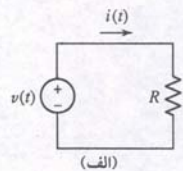
۱۱-۶ یک منبع ولتاژ  $v_s$  به دو سر مقاومت  $4\Omega$  وصل است. توان متوسط جذب‌شده به وسیله مقاومت را بـرای  $v_s$  (الف)  $8 \sin 200t$  V، (ب)  $8 \sin(200t - 45^\circ)$  V، (ج)  $8 \sin 200t - 6 \cos(200t - 45^\circ)$  V، (د)  $8 \sin 200t - 4 \sin 100t + 4V$ ، به‌دست‌آورید. جواب:  $11.14W$  و  $10.00W$ ،  $4.01W$ ،  $8.00W$ .

## ۱۱-۳ مقادیر ولتاژ و جریان موثر

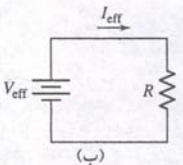
همه می‌دانیم که ولتاژ پریزهای برق منزلمان یک ولتاژ سینوسی  $220V$  با فرکانس  $50Hz$  است. ولی  $220V$  چه معنی می‌دهد؟ مطمئناً این یک ولتاژ لحظه‌ای نیست، چون ولتاژ لحظه‌ای ثابت نیست، این ولتاژ، دامنه هم نیست چرا که ما آن را با  $v_m$  نشان می‌دهیم، اگر آن را روی صفحه اسیلوسکوپ کالبره شده نمایش دهیم، خواهیم دید که دامنه این ولتاژ در هر یک از پریزهای منزل  $220\sqrt{2}$  یا  $311.12V$  است. مسلماً مقدار متوسط ولتاژ هم نمی‌باشد، زیرا مقدار متوسط ولتاژ سینوسی صفر است. می‌توانیم کمی به مفهوم آن، با تعریف اندازه متوسط در یک نیم سیکل مثبت یا منفی نزدیک‌تر شویم. اگر از یک ولتمتر نوع یکسوکننده برای این کار استفاده کنیم، مقدار  $198V$  را اندازه‌گیری خواهیم کرد.  $220V$ ، مقدار موثر این ولتاژ سینوسی است. این مقدار نقش یک منبع در تحویل توان به بار مقاومتی را نشان می‌دهد.

## مقدار موثر یک موج متناوب

بگذارید مقدار موثر را برحسب جریان تعریف کنیم، هرچند که می‌توان ولتاژ را هم برای این‌کار انتخاب کرد. مقدار موثر هر جریان متناوب برابر با مقدار جریان مستقیمی است که در یک مقاومت  $R$  جاری است و توان متوسط حمل‌شده به وسیله آن با توان جریان مستقیم برابر است. به بیان دیگر، اجازه می‌دهیم تا جریان متناوب مفروضی از مقاومتی بگذرد، توان لحظه‌ای  $i^2 R$  را معین می‌کنیم و سپس مقدار متوسط  $i^2 R$  را در طول یک دوره تناوب یا پریود به‌دست می‌آوریم، که این همان توان متوسط است. آن‌گاه یک جریان  $dc$  در مدار جاری می‌کنیم و مقدار جریان مستقیم را آنقدر تنظیم می‌کنیم تا توانی به همان اندازه تولید شود. مقدار جریان مستقیم حاصل برابر با مقدار موثر جریان متناوب است. این ایده در شکل ۱۱-۱۰ دیده می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۱۱-۱۰ اگر توانی که مقاومت در دو حالت (الف) و (ب) جذب می‌کند یکسان باشد، مقدار موثر  $i(t)$  برابر با  $I_{eff}$  و مقدار موثر  $v(t)$  برابر با  $V_{eff}$  است.



### استفاده از مقادیر موثر در محاسبه توان متوسط

استفاده از تعریف مقدار موثر rms، عبارات مربوط به توان متوسط را برای جریان و ولتاژ سینوسی با حذف فاکتور  $\frac{1}{2}$  کمی ساده می‌کند. مثلاً توان متوسط داده شده به مقاومت R به وسیله جریان سینوسی برابر است با:

$$P = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

چون  $I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  است مقدار توان را چنین می‌توان نوشت:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R \quad (۲۰)$$

عبارات آشنای دیگر توان نیز ممکن است به صورت تابعی از  $I_{\text{eff}}$  نوشته شوند:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi) \quad (۲۱)$$

$$P = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} \quad (۲۲)$$

گرچه موفق شدیم فاکتور  $\frac{1}{2}$  را حذف کنیم ولی اکنون باید ببینیم که یک کمیت سینوسی بر حسب دامنه‌اش مشخص شده است یا بر حسب مقدار موثرش. در زمینه‌های انتقال انرژی و توزیع آن و ماشین‌های دورانی غالباً مقدار موثر و در زمینه‌های الکترونیک و مخابرات غالباً دامنه و فاز به کار می‌رود. در این کتاب فرض بر این است که مقادیر بر حسب دامنه بیان شوند مگر در مواردی که عبارت rms صریحاً به کار رفته باشد.

در حالت ماندگار سینوسی فیزورهای ولتاژ و جریان ممکن است بر حسب مقادیر موثر یا دامنه‌ها باشند. دو نوع عبارت فقط در ضریب  $\sqrt{2}$  یا یکدیگر اختلاف دارند. ولتاژ  $50/\underline{30}^\circ \text{ V}$  بر حسب دامنه بیان شده است، ما می‌توانیم مقدار موثر آن را به صورت  $35.4/\underline{30}^\circ \text{ V}$  هم بیان کنیم.

### مقدار موثر در مدارهای چندفرکانسی

برای تعیین مقدار موثر یک موج متناوب یا نامتناوب که از مجموع تعدادی موج سینوسی با فرکانس‌های متفاوت تشکیل شده، می‌توان از رابطه توان متوسط در معادله (۱۸) استفاده کرد. ما آن را بر حسب مقادیر موثر به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P = (I_{1\text{eff}}^2 + I_{2\text{eff}}^2 + \dots + I_{N\text{eff}}^2) R \quad (۲۳)$$

در این رابطه دیده می‌شود که مقدار موثر یک جریان متشکل از هر تعداد جریان سینوسی با فرکانس‌های مختلف را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{I_{1\text{eff}}^2 + I_{2\text{eff}}^2 + \dots + I_{N\text{eff}}^2} \quad (۲۴)$$

نتایج نشان می‌دهد که اگر یک موج سینوسی rms 5A با فرکانس 60Hz از مقاومتی عبور کند، توان متوسط  $5^2(2) = 50\text{W}$  به وسیله مقاومت جذب می‌گردد. اگر جریان دیگری مثلاً rms 3A در 120Hz وجود داشته باشد، توان جذب شده  $3^2(2) + 50 = 68\text{W}$  خواهد بود. اما با به کارگیری معادله (۲۴) می‌بینیم که مقدار موثر مجموع جریان‌های 60 و 120Hz برابر 5.831A است. بنابراین  $P = 5.831^2(2) = 68\text{W}$  بوده که مثل قبل می‌باشد. با این وجود اگر جریان دوم هم در 60Hz باشد، مقدار موثر مجموع دو جریان 60Hz، بسته به فاز نسبی دو مولفه جریان چیزی بین 8 W و 128 W است.

این حقیقت که مقدار موثر بر حسب یک کمیت dc معادل تعریف می‌شود، موجب می‌شود که معادلات توان مدارهای مقاومتی شبیه معادلات توان به کار رفته در تحلیل dc گردد.

توجه کنید که مقدار موثر کمیت dc به نام K، برابر است با  $\frac{K}{2}$

اکنون می‌توان یک عبارت ریاضی کلی برای مقدار موثر  $i(t)$  به سادگی به دست آورد. توان متوسط حمل شده به مقاومت به وسیله جریان متناوب  $i(t)$  برابر است با:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt$$

که T زمان تناوب  $i(t)$  است. توان انتقالی به وسیله جریان مستقیم عبارت است از:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R$$

از برابری عبارات فوق و حل  $I_{\text{eff}}$  داریم:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (۱۹)$$

نتیجه از مقاومت R، مستقل است و در واقع باید هم باشد. عبارت مشابهی را می‌توان برای ولتاژ متناوب به دست آورد و این کار به ترتیب با تعویض  $i$ ،  $I_{\text{eff}}$  با  $v$  و  $v_{\text{eff}}$  صورت می‌گیرد. توجه کنید که مقدار موثر به این ترتیب حاصل می‌شود که ابتدا تابع زمانی را مربع می‌کنیم، سپس متوسط تابع مربع شده در یک دوره تناوب را به دست می‌آوریم و بالاخره جذر متوسط توابع مربع شده را می‌گیریم. به زبان خلاصه‌تر عملیات یافتن مقدار موثر را جذر متوسط مربع می‌گویند، و با rms نشان می‌دهند.

### مقدار موثر (rms) یک موج سینوسی

مهم‌ترین حالت خاص، موج سینوسی است. بیایید جریان سینوسی زیر را انتخاب کنیم:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

که دارای زمان تناوب زیر است:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

و برای یافتن مقدار موثر آن رادر معادله (۱۹) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt} \\ &= I_m \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2\phi) \right] dt} \\ &= I_m \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} [t]_0^{2\pi/\omega}} \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

بنابراین مقدار موثر جریان سینوسی کمیتی حقیقی و مستقل از زاویه فاز است و  $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$  برابر دامنه جریان می‌باشد. بنابراین جریانی مثل  $A \cos(\omega t + \phi)$  مقدار موثر 1A دارد و به همان میزان توان متوسط را به هر مقاومتی حمل خواهد کرد که جریان مستقیم 1A به آن حمل می‌نمود.

باید توجه کرد که فاکتور  $\sqrt{2}$  یعنی ضریب دامنه جریان متناوب به مقدار موثر برای امواج سینوسی معتبر است. مثلاً برای موج دندان اژه‌ای شکل ۱-۴، مقدار موثر برابر با مقدار حداکثر تقسیم بر  $\sqrt{3}$  می‌باشد. فاکتوری که باید مقدار حداکثر بر آن تقسیم شود تا مقدار موثر به دست آید، به فرم ریاضی تابع متناوب بستگی دارد و بسته به طبیعت تابع می‌تواند گنگ یا گویا باشد.



۱۱-۷ مقدار موثر هر یک از ولتاژهای متناوب زیر را محاسبه کنید:

(الف)  $6\cos 25t$ ، (ب)  $6\cos 25t + 4\sin(25t + 30^\circ)$ ، (ج)  $6\cos(25t) + 5\cos^2(25t)$

و (د)  $4V + 5\sin 30t + 6\cos 25t$ .

جواب:  $4.24V$ ،  $6.16V$ ،  $5.23V$  و  $6.82V$ .

برای محاسبه کمیت‌ها چند تکنیک مفید در PSpice وجود دارد. خصوصاً توابع موجود در probe امکان ترسیم توان لحظه و محاسبه توان متوسط را فراهم می‌سازد. مثلاً مدار ساده تقسیم ولتاژ شکل ۱۱-۱۱ را ملاحظه کنید که با یک موج سینوسی  $60\text{Hz}$  با دامنه  $115\sqrt{2}$  راه‌اندازی شده است. ما با اجرای شبیه‌سازی پاسخ گذرا در یک دوره تناوب موج ولتاژ، یعنی  $\frac{1}{60}\text{s}$ ، آغاز می‌کنیم.

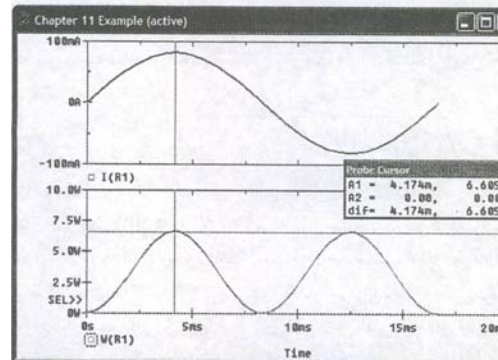
در شکل ۱۱-۱۲ جریان همراه با توان لحظه‌ای تلف‌شده در مقاومت  $R_1$  با به‌کارگیری فرمان Add plot to window تحت plot ترسیم شده است. توان لحظه‌ای متناوب است. مقدار متوسط آن غیر صفر و اوج  $6.61\text{W}$  می‌باشد. ساده‌ترین راه به‌کارگیری probe در تهیه توان متوسط  $3.305\text{W} = (81.3 \times 10^{-3}) \left( \frac{1}{1000 + 1000} (162.6) \right)$  استفاده از تابع "متوسط جاری" است. با ظاهر شدن جعبه محاوره Add Trace (Add و Trace)، عبارت زیر را در پنجره Trace Expression، تایپ کنید:

$$\text{AVG}(I(R1) * I(R1) * 1000)$$

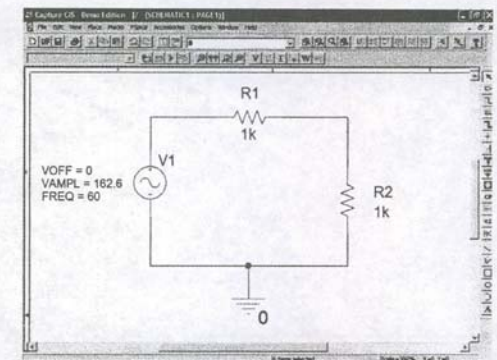
طبق شکل ۱۱-۱۳، توان متوسط در یک یا دو دوره تناوب  $3.305\text{W}$  است که با محاسبات دستی نیز همخوانی دارد. probe امکان محاسبه متوسط روی یک فاصله زمانی دلخواه را نیز با تابع داخلی AVGX فراهم می‌سازد. مثلاً برای استفاده از این تابع در محاسبه متوسط توان در یک دوره تناوب که در این جا  $8.33\text{msec} = \frac{1}{120}$  است، عبارت زیر را وارد کنید:

$$\text{AVGX}(I(R1) * I(R1) * 1000, 8.33\text{m})$$

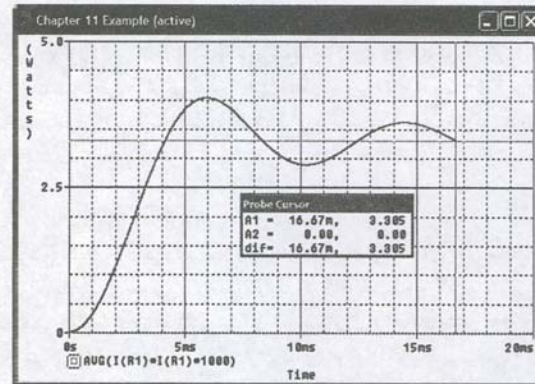
هر یک از دو روش در انتهای نمودار به مقدار  $3.305\text{W}$  ختم می‌شوند.



شکل ۱۱-۱۲ جریان و توان لحظه‌ای مربوط به مقاومت  $R_1$ .



شکل ۱۱-۱۱ یک مدار ساده تقسیم ولتاژ.



شکل ۱۱-۱۳ توان متوسط جاری مصرفی به وسیله مقاومت  $R_1$ .

## ۱۱-۴ توان ظاهری و ضریب توان

به لحاظ تاریخی، معرفی مفاهیم توان ظاهری و ضریب توان در صنعت تولید برق ریشه دارند، زیرا در آن‌جا مقدار متناهی انرژی از یک نقطه به نقطه دیگر انتقال می‌یابد، و راندمان این انتقال مستقیماً با هزینه تولید نسبت مستقیم دارد: هزینه‌ای که نهایتاً بر دوش مصرف‌کننده است. اگر مصرف‌کننده بار ناجوری داشته باشد که موجب کاهش بازده انتقال شود، باید به ازای هر کیلووات ساعت مصرف واقعی پول بیشتری بپردازد. به‌طور مشابه اگر مشتری از نیروگاه بخواهد در تجهیزات انتقال انرژی سرمایه‌گذاری بیشتری نماید باز هم باید پول بیشتری بپردازد. مگر این‌که شرکت دست‌ودل باز باشد و بخواهد ضرر کند. در آغاز اجازه بدهید **توان ظاهری و ضریب توان** را تعریف کرده و سپس به‌صورت خلاصه نشان دهیم که چگونه این جملات به وضعیت اقتصادی مرتبط می‌گردد. فرض می‌کنیم ولتاژ سینوسی زیر:

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

به شبکه‌ای اعمال شده باشد و جریان سینوسی حاصل برابر باشد با:

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

بنابراین زاویه فازی که ولتاژ از جریان پیش است برابر با  $(\theta - \phi)$  می‌باشد. توفان متوسط داده‌شده به شبکه با فرض قرارداد علامت عناصر غیرفعال در پایانه‌های ورودی را می‌توان برحسب مقادیر حداکثر چنین نوشت:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

یا برحسب مقادیر موثر چنین است:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi)$$

اگر ولتاژ اعمال شده و پاسخ جریان مربوطه کمیاتی dc باشند، توان متوسط حمل‌شده به شبکه به سادگی با ضرب ولتاژ در جریان به‌دست می‌آید. با اعمال این تکنیک dc به مسائل سینوسی، مقداری برای توان جذب‌شده به‌دست می‌آید که "ظاهر" باید از ضرب  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  حاصل گردد. در هر صورت این ضرب مقادیر موثر ولتاژ و جریان توان متوسط را نمی‌دهد و بنابراین ما آن را **توان ظاهری** می‌نامیم. به لحاظ ابعادی، توان ظاهری باید برحسب همان واحد توان





به این ترتیب  $I_{\text{eff}} = 12 \text{ A rms}$  و  $\angle I_s = -53.13^\circ$  ang خواهد بود.

#### ■ اقدام به حل

توان انتقال یافته به بار بالایی برابر است با:

$$P_{\text{upper}} = I_{\text{eff}}^2 R_{\text{top}} = (12)^2 (2) = 288 \text{ W}$$

توان انتقال یافته به بار سمت راست برابر است با:

$$P_{\text{lower}} = I_{\text{eff}}^2 R_{\text{right}} = (12)^2 (1) = 144 \text{ W}$$

خود منبع یک توان ظاهری  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = (60)(12) = 720 \text{ VA}$  را تحویل می‌دهد.

بالاخره ضریب توان ترکیب بارها با لحاظ ولتاژ و جریان مربوط به بارهای ترکیبی

حاصل می‌شود. البته این ضریب توان با ضریب توان منبع یکی است:

$$PF = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} = \frac{432}{60(12)} = 0.6 \text{ پسفاژ}$$

چون بار ترکیبی القایی است.

#### ■ صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

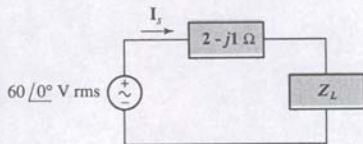
توان کل حمل شده به منبع  $288 + 144 = 432 \text{ W}$  است. توان تولید شده به وسیله منبع برابر است با:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\text{ang } V - \text{ang } I) = (60)(12) \cos(0 + 53.13^\circ) = 432 \text{ W}$$

می‌بینیم بالانس توان برقرار است.

می‌توانید ترکیب بار امپدانس را به صورت  $5 \angle 53.1^\circ \Omega$  بنویسید، ضریب PF را  $53.1^\circ$  به دست آورید، و بنابراین داریم  $PF = \cos 53.1^\circ = 0.6$ . ضمناً بار ترکیبی نیز القایی است و بنابراین PF به اندازه 0.6 پسفاژ است.

### تمرین



شکل ۱۱-۱۵

۱۱-۱۵ برای مدار شکل ۱۱-۱۵ ضریب توان بارهای ترکیبی را اگر  $Z_L = 10 \Omega$  باشد، به دست آورید. جواب: 0.9966 پسفاژ

### ۱۱-۱۲ توان مختلط

گر توان را کمیتی مختلط تصور کنیم، محاسبه مربوط به توان تا حدی ساده‌تر می‌شود. خواهیم دید که اندازه توان مختلط همان توان ظاهری و قسمت حقیقی آن توان متوسط را می‌دهد. نیت جدید یعنی بخش موهومی توان مختلط را **توان راکتیو** می‌خوانیم.

توان مختلط را بر حسب ولتاژ کلی سینوسی  $V_{\text{eff}} \angle \theta$  و  $I_{\text{eff}} \angle \phi$  در دو سر پایانه‌ها و جریان سینوسی کلی  $I_{\text{eff}} \angle \phi$  که در یکی از پایانه‌ها جاری است و قرارداد علامت عنصر پرفعال را تأیید می‌کند، تعریف می‌نماییم. توان متوسط جذب شده به وسیله این شبکه دو یانه برابر است با:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi)$$

شابه با روشی که در تعریف فیزورها داشتیم برای کمیت مختلط از فرمول اولر استفاده می‌کنیم. P به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \text{Re}\{e^{j(\theta - \phi)}\}$$

$$P = \text{Re}\{V_{\text{eff}} e^{j\theta} I_{\text{eff}}^* e^{-j\phi}\}$$

حقیقی اندازه گیری شود زیرا  $\cos(\theta - \phi)$  بُعدی ندارد، ولی به خاطر پرهیز از اشتباه، از عبارت ولت-آمپر یا VA برای توان ظاهری استفاده می‌شود. چون  $\cos(\theta - \phi)$  کوچک‌تر از 1 است، بنابراین اندازه توان حقیقی هرگز بزرگ‌تر از توان ظاهری نخواهد بود.

نسبت توان حقیقی (یا متوسط) به توان ظاهری را **ضریب توان** می‌گویند و به‌طور اختصار با PF نشان می‌دهند. به این ترتیب:

$$PF = \frac{\text{توان متوسط}}{\text{توان ظاهری}} = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}}$$

در حالت سینوسی، ضریب توان در واقع همان  $\cos(\theta - \phi)$  بوده و  $(\theta - \phi)$  زاویه‌ای است که ولتاژ به آن میزان از جریان پیش است. به همین دلیل معمولاً زاویه  $(\theta - \phi)$  اغلب زاویه PF خوانده می‌شود.

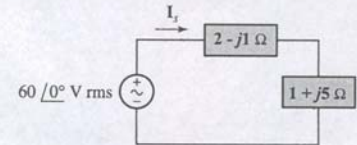
در مدارهایی که فقط از بار مقاومتی تشکیل شده‌اند، ولتاژ و جریان همفاز،  $(\theta - \phi)$  برابر صفر، و PF مساوی با 1 است. به بیان دیگر توان ظاهری و توان متوسط برابرند. با این وجود PF واحد برای مدارهای القایی و خازنی نیز امکان‌پذیر است و این در حالتی است که مقادیر عناصر مذکور و فرکانس کاری به دقت انتخاب شوند تا یک امپدانس ورودی با زاویه فاز صفر تولید گردد. بار خالص راکتیو، یعنی باری که هیچ مقاومتی ندارد، اختلاف فاز  $90^\circ \pm$  را بین ولتاژ و جریان به وجود می‌آورد و بنابراین PF برابر صفر خواهد بود.

شبکه‌ها کلاً بین دو حد قرار دارند یعنی PF آن‌ها می‌تواند بین صفر و یک باشد. یک PF برابر با مثلاً 0.5، باری را نشان می‌دهد که دارای زاویه فاز امپدانس ورودی  $60^\circ$  یا  $-60^\circ$  است که ازلی بیابانگر بار القایی است، زیرا ولتاژ به اندازه  $60^\circ$  از جریان پیش است، درحالی‌که دومی به بلر خازن متعلق است. رفع شبهه در تعیین دقیق نوع بار با مراجعه به پیش‌بودن PF یا پیرودن آن قابل حل است. جملات پیشفاژ و پسفاژ، فاز جریان نسبت به ولتاژ را بیان می‌کنند. بنابراین یک بار القایی دارای PF پسفاژ و یک بار خازنی هم PF پیشفاژ دارد.



### مثال ۱۱-۸

مقادیر توان متوسط داده شده به هر یک از دو بار در شکل ۱۱-۱۴ را محاسبه کنید. توان ظاهری تولید شده به وسیله منبع و ضریب توان بار کل را به دست آورید.



■ هدف مسئله را شناسایی کنید.  
توان متوسط به توانی گفته می‌شود که به وسیله اجزای مقاومتی بار کشیده می‌شود. توان ظاهری حاصل ضرب ولتاژ موثر در دو سر بار ترکیبی بار است.

■ اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.  
ولتاژ موثر 60 V rms است و در دو سر بار ترکیبی برابر است با  $2-j1 + 1+j5 = 3+j4 \Omega$ . ارائه طرح.

تحلیل ساده فیزیوری جریان را مشخص می‌کند. با دانستن جریان و ولتاژ ما خواهیم توانست توان را محاسبه کنیم. این دو کمیت برای یافتن ضریب توان می‌توانند استفاده شوند.

■ معادلات مناسب را بنویسید.  
توان متوسط با رابطه زیر داده می‌شود:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\text{ang } V - \text{ang } I)$$

توان ظاهری در واقع  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  است. ضریب توان از تقسیم این دو کمیت به دست می‌آید:

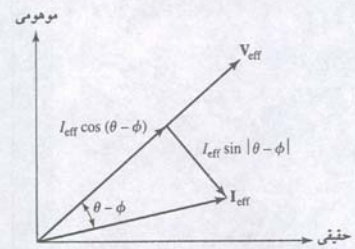
$$PF = \frac{\text{توان متوسط}}{\text{توان ظاهری}} = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}}$$

■ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

ما  $I_{\text{eff}}$  را لازم داریم:

$$I_s = \frac{60 \angle 0^\circ}{3 + j4} = 12 \angle -53.13^\circ \text{ Arms}$$





شکل ۱۱-۱۷ فیزور جریان  $I_{eff}$  به دو مولفه تفکیک شده است. یکی همفاز با فیزور ولتاژ  $V_{eff}$  و دیگری با اختلاف فاز  $90^\circ$  با فیزور ولتاژ. این مولفه را مولفه عمودی می‌گویند.

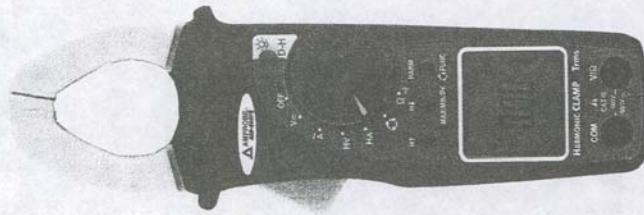
شکل ۱۱-۱۸ یک توان‌سنج دیجیتال چنکی ساخت Amprobe برای اندازه‌گیری جریان AC تا 400 و ولتاژ تا 600 V.

ضریب توان پس‌فاز است (مربوط به بار القایی خواهد بود) و اگر مثلث توان در ربع چهارم باشد ( $0 < \phi - \theta$ )، ضریب توان پیش‌فاز خواهد بود (مربوط به خازن). بنابراین مقدار قابل توجهی اطلاعات کیفی مربوط به بار با یک نظر در دسترس می‌باشد.

تفسیر دیگری از توان رآکتیو را با ساخت نمودار فیزیوری  $V_{eff}$  و  $I_{eff}$  مطابق شکل ۱۱-۱۷ می‌توان ارائه نمود. اگر فیزور جریان به دو مولفه تجزیه شود، که یکی همفاز با ولتاژ و اندازه  $I_{eff} \cos(\theta - \phi)$  و دیگری با اختلاف  $90^\circ$  نسبت به ولتاژ و اندازه  $I_{eff} \sin|\theta - \phi|$ ، آن‌گاه واضح است که توان حقیقی حاصل ضرب دامنه فیزور ولتاژ در مولفه جریان همفاز با ولتاژ است. حاصل ضرب دامنه ولتاژ در مولفه‌ای از جریان که با ولتاژ  $90^\circ$  اختلاف فاز دارد توان رآکتیو نامیده می‌شود. مولفه‌ای از یک فیزور که با فیزور دیگر  $90^\circ$  اختلاف فاز دارد را مولفه عمودی گویند. بنابراین  $Q$  در واقع حاصل ضرب  $V_{eff}$  و مولفه عمودی  $I_{eff}$  است.  $Q$  را **توان عمودی** یا **ریعی** هم می‌خوانند.

### اندازه‌گیری توان

یک وات‌متر توان حقیقی متوسط مصرفی بار  $P$  را می‌خواند، و وارمتر هم توان رآکتیو متوسط  $Q$  را که بار می‌کشد، نشان می‌دهد. می‌توان هر دو کمیت را به روشی مشابه پیدا کرد و می‌توان توان ظاهری و ضریب توان را هم اندازه‌گیری نمود (شکل ۱۱-۱۸).



### کاربرد عملی

#### اصلاح ضریب توان

0.62 برابر متوسط توان مورد تقاضا (دیماند) است:

$$S = P + jQ = P + j0.62P = P(1 + j0.62) \\ = P(1.177/31.8^\circ)$$

این عدد برای  $PF=0.85$  است و برابر است با  $\cos 31.8^\circ = 0.85$  که در آن  $Q$  مثبت می‌باشد (شکل ۱۱-۱۹). مشتریانی که زاویه  $PF$  آن‌ها بزرگ‌تر از این مقدار باشد مشمول جریمه‌اند.

تنظیم توان رآکتیو لازم معمولاً از طریق نصب تأسیسات خازنی جبران‌ساز در محل و موازی با بار (معمولاً در خارج امکانات مشتری) صورت می‌گیرد. می‌توان نشان داد که مقدار ظرفیت از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$C = \frac{P(\tan\theta_{old} - \tan\theta_{new})}{\omega V_{rms}^2} \quad (28)$$

که در آن  $\omega$  همان فرکانس،  $\theta_{old}$  همان زاویه  $PF$  فعلی،  $\theta_{new}$

وقتی صورت حساب برق به وسیله کمپانی مولد برق به مشترکین بزرگ صنعتی داده می‌شود، کمپانی معمولاً ضریب  $PF$  را در صورت حساب مشتری قید می‌کند. تحت این وارد در مواردی که ضریب کمتر از مقدار معین باشد، که معمولاً پس‌فاز 0.85 است، جریمه‌ای به مشترک تعلق می‌گیرد. به دلیل طبیعت بارهای صنعتی، توان صنعتی مصرفی به ندرت  $PF$  پیش‌فاز است. دلایل متعددی برای جریمه فوق توسط کمپانی‌های تولیدکننده وجود دارد. اول این‌که قابلیت حمل جریان بیشتر در داخل ژنراتورها باید تعبیه شود تا جریان بیشتری را که مشتریان در  $PF$ ‌های پایین با ولتاژ و توان ثابت نیاز دارند تهیه نمایند. دلیل دیگر اتلاف بیشتر توان در سیستم انتقال و توزیع برق است.

در تلاشی برای کاهش اتلاف و تشویق مشتریان در کار با  $PF$ ‌های بالاتر، معمولاً جریمه‌هایی در حد \$0.22/kVAR برای هر kVAR علاوه بر مقدار محاسبه‌شده در نظر گرفته می‌شود که

دو فاکتور اول در کرشه معادله فوق فیزور ولتاژ، ولی دو فاکتور دوم به دلیل وجود علامت منفی در زاویه به فیزور جریان تعلق ندارد. این علامت در فیزور جریان وجود ندارد. یعنی فیزور جریان عبارت‌است از:

$$I_{eff} = I_{eff} e^{j\phi}$$

بنابراین از مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$I_{eff} = I_{eff} e^{-j\phi}$$

به این ترتیب:

$$P = \text{Re}\{V_{eff} I_{eff}^*\}$$

اکنون توان مختلط  $S$  را تعریف می‌کنیم:

$$S = V_{eff} I_{eff} \quad (25)$$

اگر ابتدا فرم قطبی یا نمایی توان مختلط را بررسی کنیم:

$$S = V_{eff} I_{eff} e^{j(\theta - \phi)}$$

واضح است که اندازه  $S$ ، یعنی  $V_{eff} I_{eff}$  همان توان ظاهری و زاویه  $S$ ، یعنی  $(\theta - \phi)$  نیز زاویه  $PF$  است (زاویه‌ای که ولتاژ از جریان پیش است).

در فرم قائم یا دکارتی داریم:

$$S = P + jQ \quad (26)$$

که  $P$  مثل قبل توان متوسط است. بخش موهومی توان با  $Q$  نشان داده شده است و به آن توان رآکتیو می‌گویند. ابعاد  $Q$  مثل توان حقیقی  $P$ ، توان مختلط  $S$ ، و توان ظاهری  $|S|$  است. برای پرهیز از هر گونه اشتباه با دیگر کمیت‌ها واحد  $Q$  را به صورت ولت آمپر رآکتیو (VAR) تعریف می‌کنیم. از معادلات (۲۵) و (۲۶) دیده می‌شود که:

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin(\theta - \phi) \quad (27)$$

تفسیر فیزیکی توان رآکتیو، تغییر زمانی مبادله انرژی بین منبع (مثل شرکت برق) و عناصر بار رآکتیو است (یعنی خازن‌ها و القاگرها). این عناصر به تناوب شارژ و دشارژ می‌شوند و باعث می‌شود به ترتیب جریان از منبع و به منبع جاری شود.

کمیت‌های فوق در جدول ۱۱-۱ برای سهولت کار جمع‌آوری شده‌اند.

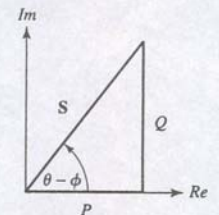
#### جدول ۱۱-۱ خلاصه کمیت‌های مرتبط با توان مختلط.

| کمیت        | نماد  | فرمول                                 | واحد                  |
|-------------|-------|---------------------------------------|-----------------------|
| توان متوسط  | $P$   | $V_{eff} I_{eff} \cos(\theta - \phi)$ | وات (W)               |
| توان رآکتیو | $Q$   | $V_{eff} I_{eff} \sin(\theta - \phi)$ | ولت-آمپر-رآکتیو (VAR) |
| توان مختلط  | $S$   | $P + jQ$                              | ولت-آمپر (VA)         |
|             |       | $V_{eff} I_{eff} / \theta - \phi$     |                       |
|             |       | $V_{eff} I_{eff}^*$                   |                       |
| توان ظاهری  | $ S $ | $V_{eff} I_{eff}$                     | ولت-آمپر (VA)         |

### مثلث توان

نمایش گرافیکی به کاررفته برای توان مختلط را مثلث توان می‌گویند و در شکل ۱۱-۱۶ دیده می‌شود. نمودار نشان می‌دهد که فقط دو توان از سه توان همیشه مورد نیاز است و سومی را می‌توان با روابط مثلثاتی معین کرد. اگر مثلث توان در نیمه اول محورها ( $0 < \theta - \phi$ ) باشد،

علامت توان رآکتیو طبیعت بار غیرفعال مربوط به  $V_{eff}$  و  $I_{eff}$  را نشان می‌دهد. اگر بار القایی باشد آن‌گاه  $(\theta - \phi)$  زاویه‌ای بین 0 و  $90^\circ$  است. سینوس این زاویه مثبت و توان رآکتیو نیز مثبت می‌باشد. توان رآکتیو بار خازن منفی است.



شکل ۱۱-۱۶ نمایش مثلث توان مختلط.



## مثال ۱۱-۹

یک مصرف‌کننده صنعتی یک موتور القایی 50kW (67.1hp) را با پسفاژ  $PF = 0.8$  به کار گرفته است. ولتاژ منبع 230 Vrms است. با هدف مصرف برق کمتر، مشتری مایل است  $PF$  خود را تا 0.95 پسفاژ بالا ببرد. بهترین راه حل را ارائه کنید.

گرچه با افزایش توان حقیقی و ثابت نگه داشتن توان راکتیو می‌توان  $PF$  را افزایش داد ولی این کار موجب کاهش صورت حساب نشده و مورد قبول مشتری نیست. باید بار راکتیو خالصی به سیستم اضافه نمود. البته واضح است که این افزایش نیز باید موازی باشد، زیرا ولتاژ تحویلی به موتور نباید تغییر کند. لذا مدار شکل ۱۱-۲۲ در این جا قابل استفاده است به شرطی که  $S_1$  را توان مختلط موتور القایی و  $S_2$  را توان مختلط وسیله اصلاحی بدانیم.

توان مختلط تولیدی به موتور القایی باید بخش حقیقی 50kW و زاویه  $\cos^{-1}(0.8)$  یا  $36.9^\circ$  را داشته باشد. پس:

$$S_1 = \frac{50 / \angle 36.9^\circ}{0.8} = 50 + j37.5 \text{ kVA}$$

برای دستیابی به  $PF = 0.95$ ، توان مختلط کل باید چنین باشد:

$$S = \frac{50}{0.95} / \cos^{-1}(0.95) = 50 + j16.43 \text{ kVA}$$

بنابراین توان مختلط مصرفی به وسیله بار اصلاحی برابر:

$$S_2 = -j21.07 \text{ kVA}$$

است. بار امپدانس  $Z_2$  را می‌توان طی چند گام ساده به دست آورد. ما زاویه  $0^\circ$  را برای منبع ولتاژ برمی‌گزینیم. بنابراین جریان کشیده شده به وسیله  $Z_2$  برابر است با:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{S}_2}{\mathbf{V}} = \frac{-j21,070}{230} = -j91.6 \text{ A}$$

یا

$$\mathbf{I}_2 = j91.6 \text{ A}$$

بنابراین:

$$Z_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = \frac{230}{j91.6} = -j2.51 \Omega$$

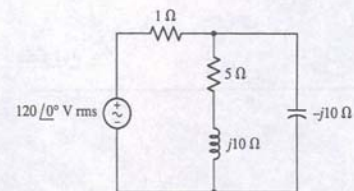
اگر فرکانس کاری 60Hz باشد، این بار به وسیله یک خازن  $1056 \mu\text{F}$  موازی با موتور قابل تهیه است. در هر صورت هزینه اولیه، نگهداری و استهلاک باید با کاهش صورت حساب الکتریسیته همخوانی داشته باشد.

۱۱-۹ برای مدار شکل ۱۱-۲۳ توان مختلط جذب شده به وسیله (الف) مقاومت  $1\Omega$ ، (ب) امپدانس  $j10\Omega$ ، (ج) امپدانس  $j10\Omega + 5$  و (د) منبع، را به دست آورید.  
جواب:  $532 + j1065 \text{ VA}$ ،  $0 - j1331 \text{ VA}$ ،  $26.6 + j0 \text{ VA}$  و  $-559 + j266 \text{ VA}$ .

## ۱۱-۶ مقایسه واژه‌های توان

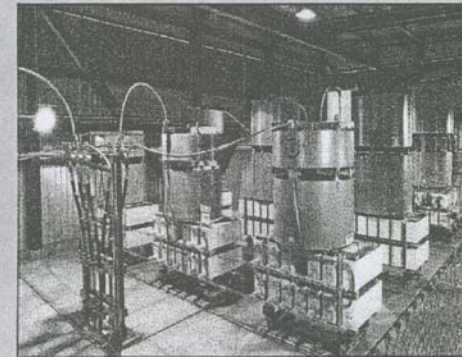
در این فصل با آرایه‌ای از واژه‌های توان آشنا شدیم، بررسی همه آن‌ها به صورت یک جا بد نخواهد بود. توصیف خلاصه‌ای برای هر یک در جدول ۱۱-۲ آورده شده است.

شکل ۱۱-۲۳

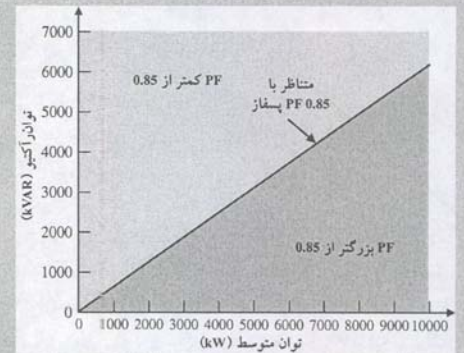


$2900 \text{ kVAR} = 3100 - 6000$  توان راکتیو بیشتری را نسبت به میزان مجاز معاف از جریمه کمپانی تولیدکننده، مصرف می‌نماید. این میزان معادل  $\$7656 = 12(2900)(0.22)$  بیش از هزینه برق سالیانه می‌باشد.

اگر مشترک بخواهد تأسیسات را 1000 kVAR افزایش دهد (به قیمت  $\$2390$ )، توان راکتیو اضافی به  $1900 \text{ kVAR} = 2900 - 1000$  کاهش می‌یابد. بنابراین جریمه سالانه کنون  $\$5016 = 12(1900)(0.22)$  خواهد شد پس هزینه سال جاری  $\$7406 = \$5016 + \$2390$  می‌گردد و در واقع  $\$250$  صرفه جویی صورت می‌گیرد. اگر مشتری 2000 kVAR تأسیسات اضافه کند (به قیمت  $\$3130$ )، توان راکتیو مصرفی اضافی  $900 \text{ kVAR} = 2900 - 2000$  می‌باشد بنابراین جریمه سالانه کنون  $\$2376 = 12(900)(0.22)$  خواهد شد. هزینه کل در سال اول  $\$556 = \$2376 + \$3130$  بوده و صرفه جویی آن  $\$2150$  خواهد شد. با این وجود اگر مشتری 3000 kVAR تأسیسات خازنی اضافه کند در سال اول  $\$14$  صرفه جویی بیشتری نسبت به 2000 kVAR خواهد داشت.



شکل ۱۱-۲۰ تأسیسات خازنی جبران ساز.



شکل ۱۱-۱۹ نموداری که نسبت توان راکتیو را به توان متوسط برای ضریب توان 0.85 پسفاژ نشان می‌دهد.

زاویه  $PF$  مورد نظر است. در هر صورت به منظور سهولت بانک خازن جبران ساز با تغییر افزایشی خاصی بر حسب واحدهای kVAR ساخته می‌شوند. مثالی از چنین تأسیسات در شکل ۱۱-۲۰ ملاحظه می‌گردد.

اکنون بپایید مثال خاصی را ملاحظه کنیم. یک مجموعه صنعتی دارای دیماند پیک ماهانه 5000 kW است و نیاز راکتور آن نیز 6000 kVAR می‌باشد. با توجه به موارد فوق، هزینه سالانه این مشترک با احتساب جرایم  $PF$  چقدر است؟ اگر جریان از طریق هزینه  $\$2390$  در هر 1000 kVAR افزایش و  $\$3130$  به ازای هر 2000 kVAR افزایش یابد، بهترین راه حل اقتصادی برای این مشتری چیست؟

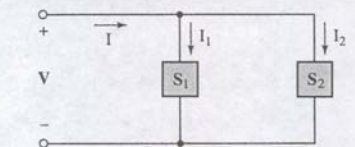
$PF$  تأسیسات، زاویه توان مختلط  $S$  است، که در این جا  $5000 + j6000 \text{ kVAR}$  می‌باشد. پس، زاویه برابر است با  $50.19^\circ = \tan^{-1} 6000/5000$  و  $PF$  برابر با  $0.6\phi$  پسفاژ است. معیار توان راکتیو محاسبه شده 0.62 ضریب حداکثر دیماند برابر است با  $3100 \text{ kVAR} = 0.62(5000)$ . بنابراین مجموعه صنعتی به میزان

به سادگی می‌توان نشان داد که توان مختلط حمل شده به چند بار متصل به هم برابر با مجموع توان‌های مختلط داده شده به تک تک بارها است و چگونه اتصال آن‌ها ارتباطی ندارد. مثلاً دوبار موازی در شکل ۱۱-۲۱ را ملاحظه نمایید. اگر مقادیر rms در نظر گرفته شوند، توان مختلط حاصل از بار ترکیبی برابر است با:

$$S = \mathbf{V} \mathbf{I}^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1^* + \mathbf{I}_2^*)$$

و بنابراین:

$$S = \mathbf{V} \mathbf{I}_1^* + \mathbf{V} \mathbf{I}_2^*$$



شکل ۱۱-۲۱ مدار به کار گرفته برای نشان دادن توان مختلط دریافتی به وسیله دو بار موازی که برابر با مجموع توان‌های مختلط آن‌ها است.



## ۱۱-۷ خلاصه فصل و مرور

- توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله یک عنصر با عبارت  $p(t) = v(t)i(t)$  داده می‌شود.
- توان متوسط داده‌شده به یک امپدانس از یک منبع سینوسی برابر  $\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$  است که  $\theta$  برابر زاویه فاز ولتاژ و  $\phi$  زاویه فاز جریان است.
- تنها بخشی مقاومتی یک بار توان متوسط غیرصفر را مصرف می‌کند. توان متوسط انتقالی به بخش راکتیو بار صفر است.
- حداکثر توان متوسط انتقالی تحت شرایط  $Z_L = Z_{in}^*$  اتفاق می‌افتد.
- مقدار موثر یا rms موج سینوسی از تقسیم دامنه بر  $\sqrt{2}$  به‌دست می‌آید.
- ضریب توان (PF) یک بار نسبت توان متوسط تلف‌شده به توان ظاهری است.
- یک بار مقاومتی خالص ضریب توان واحد دارد. یک بار راکتیو دارای ضریب توان صفر است.
- یک توان مختلط به صورت  $S = P + jQ$  یا  $S = V_{eff} I_{eff}^*$  تعریف می‌شود. واحد اندازه‌گیری آن ولت - آمپر (VA) است.
- توان راکتیو A بخش موهومی توان مختلط است و میزان انرژی جاری‌شده به و یا از بخش راکتیو بار است. واحد اندازه‌گیری آن ولت - آمپر - راکتیو (VAR) می‌باشد.
- خازن‌ها معمولاً برای اصلاح PF بارهای صنعتی به کار می‌روند تا توان راکتیو درخواستی از تولیدکننده کاهش یابد.

## ۱۱-۸ خواندنی‌های کمکی

A good overview of ac power concepts can be found in Chap. 2 of:

B.M. Weedy, *Electric Power Systems*, 3rd ed. Chichester, England: Wiley, 1984.

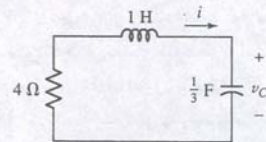
Contemporary issues pertaining to ac power systems can be found in:

*International Journal of Electrical Power & Energy Systems*.  
Guildford, England: IPC Science and Technology Press, 1979–.  
ISSN: 0142-0615.

## مسائل

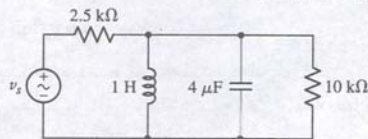
### ۱۱-۱ توان لحظه‌ای

- یک منبع جریان،  $i(t) = 2 \cos 500t$  A، یک مقاومت  $50 \Omega$  و یک خازن  $25 \mu F$  با هم موازی‌اند. توان تحویلی به وسیله منبع را مشخص نمایید. توان جذب‌شده به وسیله مقاومت، توان جذب‌شده به وسیله خازن را در  $t = \frac{\pi}{2}$  ms به‌دست‌آورید.
- جریان  $i = 2t^2 - 1$  A در  $1s \leq t \leq 3s$  در یک عنصر خاص جاری است. (الف) اگر عنصر یک القاگر  $4H$  باشد، در فاصله زمانی داده‌شده چه انرژی به آن منتقل می‌گردد؟ (ب) اگر عنصر یک خازن  $0.2F$  با  $v(t) = 2V$  باشد، توان داده‌شده به آن در  $t = 2s$  چقدر است؟
- در شکل ۱۱-۲۴،  $i(0) = 4A$  و  $v_C(0) = -2V$ ، اگر  $i(t)$  باشد، توان جذب‌شده به وسیله خازن در زمان  $t$ ، (الف)  $0^+$ ، (ب)  $0.2s$  و (ج)  $0.4s$  چقدر است؟



شکل ۱۱-۲۴

- توان جذب‌شده به وسیله هر عنصر غیرفعال در مدار شکل ۱۱-۲۵ را در  $t = 0$  پیدا کنید. به‌شرطی که  $v_s = 20 \cos(1000t + 30^\circ) V$  باشد. جواب را با PSpice چک کنید.



شکل ۱۱-۲۵

جدول ۱۱-۲ خلاصه‌ای از واژه‌های به‌کاررفته.

| عبارات به‌کاررفته | سمبل                   | واحد   | توصیف  |
|-------------------|------------------------|--------|--|
| توان لحظه‌ای      | $p(t)$                 | W      | $p(t) = v(t)i(t)$ . مقدار توان در لحظه خاصی از زمان است. این توان حاصل ضرب فیزیوری ولتاژ و جریان نیست.   |
| توان متوسط        | P                      | W      | در حالت ماندگار سینوسی، $P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$ ، که $\theta$ زاویه ولتاژ و $\phi$ زاویه جریان است. راکتانس در P نقشی ندارد. |
| مقدار موثر یا rms | $V_{rms}$ یا $I_{rms}$ | V یا A | مثلاً به صورت $I_{eff} = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$ تعریف می‌شود. اگر $i(t)$ سینوسی باشد، آن‌گاه $I_{eff} = I_m / \sqrt{2}$ خواهد بود.           |
| توان ظاهری        | $ S $                  | VA     | $ S  = V_{eff} I_{eff}$ بوده و حداکثر مقدار توان متوسط می‌تواند باشد. $P =  S $ فقط برای بارهای خالص مقاومتی است.                                  |
| ضریب توان         | PF                     | ندارد  | نسبت توان متوسط به ظاهری است. اگر بار از نوع مقاومتی خالص باشد $PF = 1$ است و برای بار راکتیو خالص مقدار آن $PF = 0$ می‌باشد.                      |
| توان راکتیو       | Q                      | VAR    | به معنی انرژی جاری‌شده به و از بار راکتیو است.   |
| توان مختلط        | S                      | VA     | کمیت مختلط مناسبی حاوی هر دو توان متوسط و توان راکتیو (القایی) است. $Q : S = P + jQ$ .   |

اهمیت عملی این عبارات جدید را با شرح وضعیت عملی زیر می‌توان نشان داد. ابتدا فرض کنید که یک ژنراتور سینوسی داریم که به وسیله ماشینی که خروجی‌اش گشتاور مکانیکی مانند توربین بخار، یک موتور الکتریکی یا یک موتور احتراقی است می‌چرخد. ژنراتور ولتاژ خروجی  $200 \text{ V}_{rms}$  را در فرکانس  $60 \text{ Hz}$  تولید می‌کند. به علاوه فرض کنید که مشخصه ژنراتور به صورت حداکثر توان خروجی  $1 \text{ kW}$  بیان شده باشد. بنابراین ژنراتور قادر خواهد بود جریان  $5 \text{ Arms}$  را به یک بار مقاومتی انتقال دهد. با این وجود اگر باری با توان پس‌ساز  $1 \text{ kW}$  و ضریب توان  $0.5$  به ژنراتور وصل شود، آن‌گاه جریان  $10 \text{ Arms}$  لازم خواهد بود. با کاهش PF، جریان‌های بیشتر و بیشتری نیاز است تا به بار منتقل شده و عملکرد در  $200 \text{ V}$  و  $1 \text{ kW}$  ثابت نگه داشته شود. اگر ژنراتور ما طراحی خوبی داشته باشد تا جریان  $5 \text{ A}$  را تأمین کند، آن‌گاه جریان‌های بالاتر اجازه عملکرد رضایت‌بخشی را نخواهند داد و از آن جمله موجب می‌گردند تا عایق‌های داخلی بیش از حد گرم شده و دود کنند. مشخصات ژنراتور معمولاً برحسب توان ظاهری به ولت-آمپر داده می‌شود. بنابراین،  $1000 \text{ VA}$  در  $200 \text{ V}$  به این معنی است که ژنراتور می‌تواند تا  $5 \text{ A}$  را در آن ولتاژ تأمین کند. توانی که ژنراتور انتقال می‌دهد به بار بستگی داشته و در نهایت می‌تواند صفر باشد. توان ظاهری با جریان مشخص شده هنگام کار در ولتاژ ثابت معادل است.

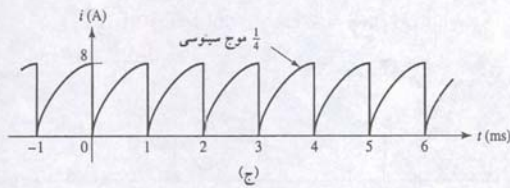
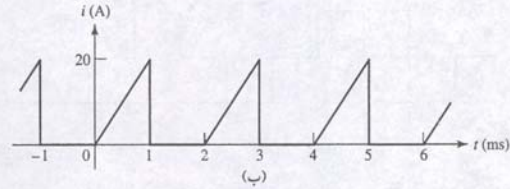
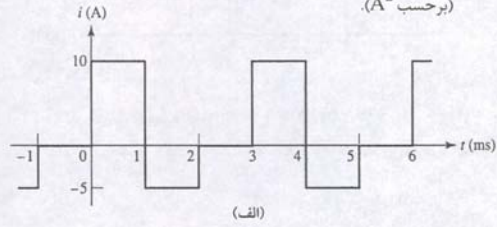
## تمرین

۱۱-۱۰ یک منبع  $440 \text{ V}_{rms}$  توانی را به بار  $Z_L = 10 + j2 \Omega$  از طریق یک خط انتقال با مقاومت  $1.5 \Omega$  می‌فرستد. (الف) توان متوسط و ظاهری تحویلی به بار چقدر است. (ب) توان متوسط و ظاهری تلف‌شده در خط انتقال را به‌دست‌آورید. (ج) توان متوسط و ظاهری تولیدی به وسیله منبع چقدر است. (د) ضریب توان کار منبع را تعیین کنید.

جواب:  $16.34 \text{ kW}$ ،  $2.131 \text{ kVA}$ ،  $2.131 \text{ kW}$ ،  $14.49 \text{ kVA}$ ،  $14.21 \text{ kW}$  و  $16.59 \text{ kVA}$  و  $0.985$  پس‌ساز.



۲۴. (الف) مقدار متوسط هر یک از امواج شکل ۱۱-۴۰ را به دست آورید. (ب) اگر هر یک از این امواج مربع شوند، متوسط هر موج متناوب را پیدا کنید (برحسب  $A^2$ ).



شکل ۱۱-۴۰

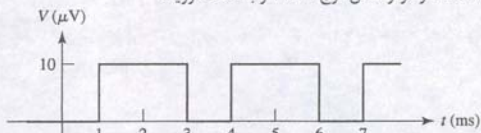
۲۵. توان متوسط حمل شده به هر عنصر مدار شکل ۱۱-۲۵ چقدر است، به شرطی که  $v_s = 400\sqrt{2} \cos(120\pi t - 9^\circ) \text{ V}$  و  $v_s = 400\sqrt{2} \cos(120\pi t - 9^\circ) \text{ V}$  صحت جواب را با PSpice آزمایش کنید.

### ۱۱-۳ مقادیر موثر ولتاژ و جریان

۲۶. مقدار موثر را برای موارد زیر به دست آورید: (الف)  $12 \cos(500t) \text{ V}$ ، (ب)  $12 \sin(1000t) \text{ V}$ ، (ج)  $12 \cos(500t) \text{ V}$  و (د)  $12 \cos(500t - 88^\circ) \text{ V}$ .

۲۷. مقادیر موثر را برای هر یک از موارد زیر به دست آورید: (الف)  $10 \cos(10t) \text{ A}$ ، (ب)  $10 \sin(10t) \text{ A}$ ، (ج)  $2 \cos(5t) \text{ A}$  و (د)  $2 \cos(5t - 32^\circ) \text{ A}$ .

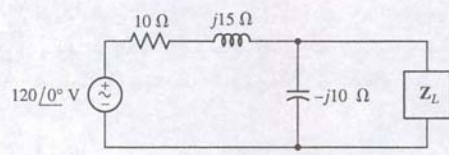
۲۸. مقدار موثر شکل موج ۱۱-۴۱ را به دست آورید.



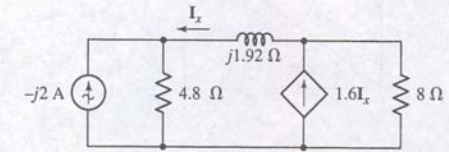
شکل ۱۱-۴۱

۲۹. مقدار موثر شکل موج ۱۱-۴۲ را به دست آورید.

۳۰. مقدار موثر (الف)  $1 \text{ V}$ ، (ب)  $1 + \cos 10t \text{ V}$  و (ج)  $1 + \cos(10t + 10^\circ) \text{ V}$  را به دست آورید.

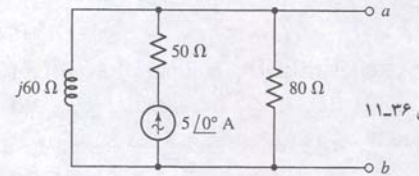


شکل ۱۱-۳۴



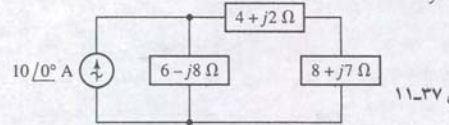
شکل ۱۱-۳۵

۳۰. برای شبکه شکل ۱۱-۳۶، (الف) امپدانس  $Z_L$  بین  $a$  و  $b$  چقدر باشد تا حداکثر توان متوسط به وسیله آن جذب شود؟ (ب) این توان متوسط حداکثر چقدر است؟



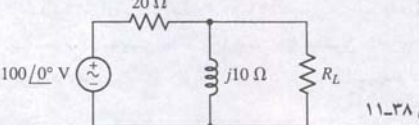
شکل ۱۱-۳۶

۳۱. توان متوسط حمل شده به هر جعبه در شبکه شکل ۱۱-۳۷ را پیدا کنید، به شرطی که منبع  $10\angle0^\circ \text{ A}$  و  $5\angle-30^\circ \text{ A}$  در فرکانس 50 Hz جایگزین شود.



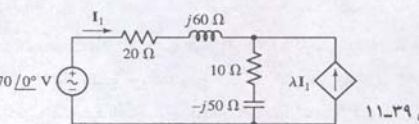
شکل ۱۱-۳۷

۳۲. مقدار  $R_L$  را در شکل ۱۱-۳۸ که توان حداکثر را جذب خواهد کرد، معین نمایید و مقدار توان را مشخص کنید.



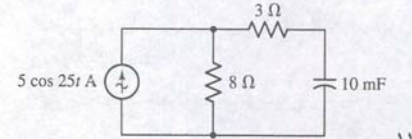
شکل ۱۱-۳۸

۳۳. توان متوسط حمل شده به هر مقاومت در شکل ۱۱-۳۹ را مشخص کنید به شرطی که (الف)  $\lambda = 0$ ، (ب)  $\lambda = 1$  باشد، و (ج) با فرض این که مدار در فرکانس 60 Hz کار کند، پاسخ را با PSpice تست کنید.



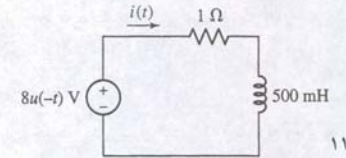
شکل ۱۱-۳۹

۵. مدار شکل ۱۱-۲۶ به حالت ماندگار رسیده است. توان جذب شده به وسیله هر چهار عنصر را در  $t = 0.1 \text{ s}$  به دست آورید.



شکل ۱۱-۲۶

۶. مدار RL در شکل ۱۱-۲۷ را ملاحظه نمایید. توان جذب شده لحظه‌ای را به وسیله مقاومت در  $t$  برابر با  $0^+$ ، (ب)  $1 \text{ s}$  و (ج)  $2 \text{ s}$  به دست آورید.



شکل ۱۱-۲۷

۷. مدار RC شکل ۱۱-۲۸ را در نظر بگیرید. توان لحظه‌ای جذب شده به وسیله مقاومت را در  $t$  برابر با (الف)  $0^+$ ، (ب)  $30 \text{ ms}$  و (ج)  $90 \text{ m}$  معین کنید.



شکل ۱۱-۲۸

۸. اگر سازه‌ای از ابر به زمین را با جریان 30 kA برای  $150 \mu\text{s}$  در نظر بگیریم، مطلوبست (الف) توان لحظه‌ای حمل شده به یک میله مسی با مقاومت  $1.2 \text{ m}\Omega$  در زمان ساقه و (ب) انرژی کل حمل شده به میله.

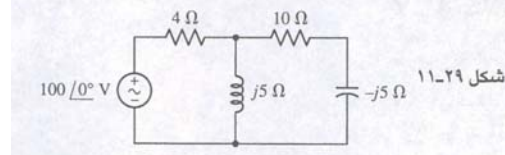
۹. یک خازن  $100 \text{ mF}$  مقدار  $100 \text{ mJ}$  انرژی را تا زمانی که یک هادی با مقاومت  $1.2 \Omega$  به دو سر پایانه‌های آن وصل نشده نگه می‌دارد. توان تلف شده لحظه‌ای در  $t = 120 \text{ ms}$  چقدر است؟ به شرطی که ظرفیت گرمایی ویژه هادی  $0.9 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$  و جرم آن  $1 \text{ gr}$  باشد، مطلوبست افزایش دمای هادی در ثانیه اول تخلیه خازن با فرض این که دمای همه عناصر در آغاز  $23^\circ\text{C}$  باشد.

۱۰. یک دیود نیمه هادی LED (نوری) با ولتاژ  $2.76 \text{ V}$  کار می‌کند و جریان  $130 \text{ mA}$  را می‌کشد. با چشم‌پوشی از ظرفیت داخلی، توان لحظه‌ای کشیده شده به وسیله LED،  $2$  ثانیه پس از روشن شدن چقدر است؟ اگر در عوض، آن را به یک منبع سینوسی با رابطه  $v(t) = 2.76 \cos(1000t) \text{ V}$  وصل کنیم، چه اطلاعات دیگری لازم است تا توان لحظه‌ای در  $t = 500 \text{ ms}$  محاسبه شود. وضعیت گذرا تا آن زمان از بین رفته فرض می‌شود.

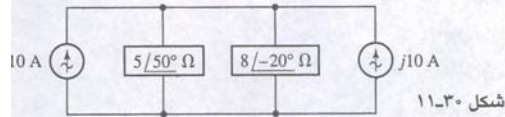
### ۱۱-۲ توان متوسط

۱۱. توان متوسط مصرف شده به وسیله هر یک از عناصر شکل ۱۱-۲۹ چقدر است.

۱۲. توان متوسط تولیدی به وسیله هر منبع و توان متوسط حمل شده به هر امپدانس در شکل ۱۱-۳۰ را پیدا کنید.

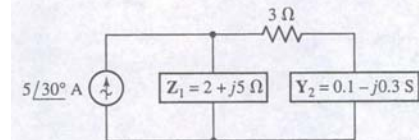


شکل ۱۱-۲۹



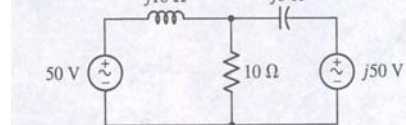
شکل ۱۱-۳۰

۱۳. در مدار شکل ۱۱-۳۱، توان متوسط، (الف) مصرفی در مقاومت  $3\Omega$  (ب) تولید شده به وسیله منبع را بیابید.



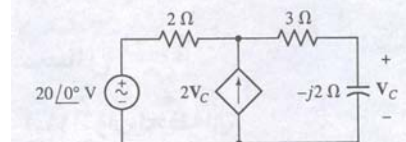
شکل ۱۱-۳۱

۱۴. توان متوسط جذب شده به وسیله هر پنج عنصر شکل ۱۱-۳۲ را به دست آورید.



شکل ۱۱-۳۲

۱۵. توان متوسط تولید شده به وسیله منبع وابسته در مدار شکل ۱۱-۳۳ را به دست آورید.



شکل ۱۱-۳۳

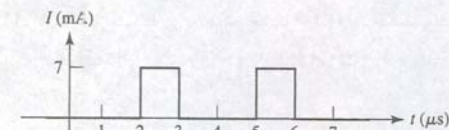
۱۶. یک مدر معادل توفن در حوزه فرکانس از یک منبع سینوسی  $V_{th}$  سری با امپدانس  $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$  تشکیل شده است. شرایطی را مشخص کنید که در آن یک بار  $Z_L = R_L + jX_L$  با شرط (الف)  $X_L = 0$ ، (ب)  $R_L$  و  $X_L$  مستقیماً انتخاب شوند، (ج)  $R_L$  ثابت (ولی نه مساوی  $R_{th}$ ) باشد، (د)  $X_L$  (مستقل از  $X_{th}$ ) و (ه)  $X_L = 0$ ، حداکثر توان متوسط را جذب کند.

۱۷. برای مدار شکل ۱۱-۳۴، (الف) چه مقداری از  $Z_L$  حداکثر توان متوسط را جذب می‌کند، (ب) مقدار این توان ماکزیم چقدر است؟

۱۸. برای مدار شکل ۱۱-۳۴ لازم است که بار  $R_L$  از نوع مقاومتی خالص باشد. چه مقدار از  $R_L$  حداکثر توان متوسط را جذب خواهد کرد و مقدار این توان چقدر است؟

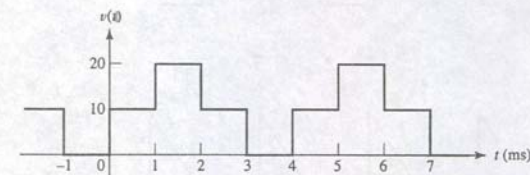
۱۹. توان متوسط تولید شده به وسیله منبع شکل ۱۱-۳۵ را پیدا کنید.





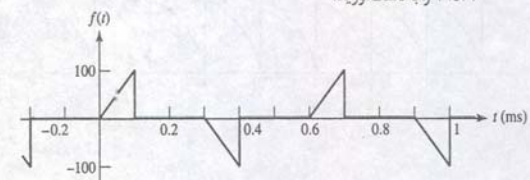
شکل ۱۱-۴۲

۳۱. مقدار موثر، (الف)  $v(t) = 10 + 9 \cos 100t + 6 \sin 100t$  و (ب) برای موج شکل ۱۱-۴۳ به دست آورید. (ج) مقدار متوسط این موج را بیابید.



شکل ۱۱-۴۳

۳۲. مقدار موثر (الف)  $g(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(100t - 120^\circ)$ ، (ب)  $h(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(101t - 120^\circ)$  و (ج) شکل موج ۱۱-۴۴ را به دست آورید.



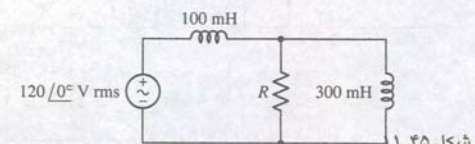
شکل ۱۱-۴۴

۳۳. با فرض موج  $f(t) = (2 - 3\cos 100t)^2$ ، مطلوبست مقدار متوسط آن و (ب) مقدار rms.

۳۴. مقدار موثر هر یک از سه موج شکل ۱۱-۴۵ را محاسبه کنید.

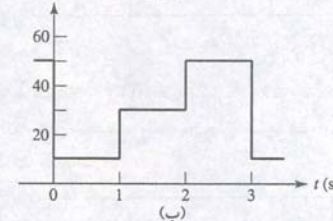
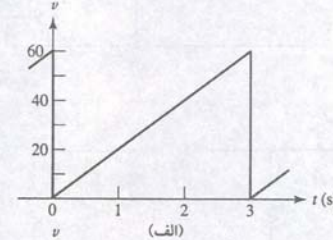
۳۵. چهار منبع ولتاژ ایده‌آل،  $A \cos 10t$ ،  $B \sin(10t + 45^\circ)$ ،  $C \cos 40t$  و  $D$ ، به‌طور سری به مقاومت  $4\Omega$  وصلند. اگر (الف)  $A = B = 10V$  و  $C = D = 0$ ، (ب)  $A = C = 10V$  و  $B = D = 0$ ، (ج)  $A = 10V$ ،  $B = -10V$  و  $C = D = 0$ ، (د)  $A = B = C = D = 10V$  و  $D = 0$ ، (ه)  $A = B = C = D = 10V$  باشد. توان متوسط تلف‌شده را به دست آورید.

۳۶. (الف) چه مقداری از  $R$  موجب می‌شود تا ولتاژهای rms دو سر القاگر در شکل ۱۱-۴۵ برابر شوند؟ (ب) مقدار ولتاژ rms چقدر است؟ (ج) جواب خود را با PSpice تست کنید.



شکل ۱۱-۴۵

۳۷. هر یک از امواج شکل ۱۱-۴۶ دوره تناوب 3s دارد. آن‌ها تا حدودی به هم شبیه هستند. (الف) مقدار متوسط هر کدام را محاسبه کنید. (ب) دو مقدار موثر را معین نمایید. (ج) جواب خود را برای موج دندان‌اره‌ای با PSpice تست کنید.



شکل ۱۱-۴۶

۳۸. القاگر 10mH شکل ۱۱-۴۵ را با خازن  $1\mu F$  و القاگر 300mH را با خازن  $3\mu F$  جایگزین نمایید. (الف) چه مقداری از  $R$  می‌تواند جریان‌های rms را در خازن‌ها برابر کند؟ (ب) مقدار جریان rms چقدر است؟ (ج) با PSpice آن را آزمایش کنید.

۳۹. شکل موجی دارای تناوب 5s بوده و در فاصله  $0 < t < 5s$  به صورت زیر بیان شده است:

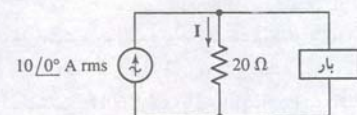
$$v(t) = 10t[u(t) - u(t - 2)] + 16e^{-0.5(t-3)}[u(t - 3) - u(t - 5)]$$

مقدار موثر جریان را به دست آورید.

۴۰. ترکیب سری مقاومت  $1k\Omega$  و القاگر 2H نباید توانی بیش از 250mW در هر لحظه تلف کند. اگر جریان سینوسی و  $\omega = 500\text{rad/s}$  باشد، بزرگ‌ترین جریان rms قابل تحمل چقدر است؟

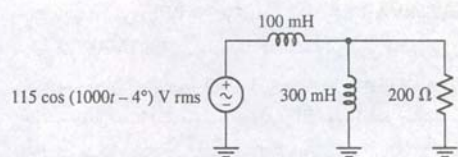
## ۱۱-۲ توان ظاهری و ضریب توان

۴۱. در شکل ۱۱-۴۷، اگر  $I = 4/35^\circ \text{ A}$  باشد، توان متوسط (الف) منبع (ب) مصرف در مقاومت  $20\Omega$ ، (ج) به بار را بیابید. توان ظاهری در (د) منبع، (ه) مقاومت  $20\Omega$ ، (و) به بار را پیدا کنید. (ز) PF بار چند است.

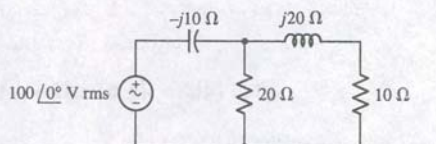


شکل ۱۱-۴۷

۴۲. (الف) ضریب توان منبعی که در شکل ۱۱-۴۸ کار می‌کند را بیابید. (ب) توان متوسط تولیدی به وسیله منبع را مشخص کنید. (ج) چه خازنی باید موازی با منبع نصب شود تا ضریب واحد گردد. (د) جواب را با PSpice آزمایش کنید.

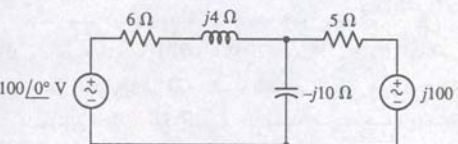


شکل ۱۱-۵۱



شکل ۱۱-۵۲

۴۹. هر دو منبع شکل ۱۱-۵۳ در فرکانس یکسانی کار می‌کنند. توان مختلط تولیدی به وسیله هر منبع را به دست آورید. توان مختلط مصرفی به وسیله هر عنصر غیرفعال مدار را به دست آورید.



شکل ۱۱-۵۳

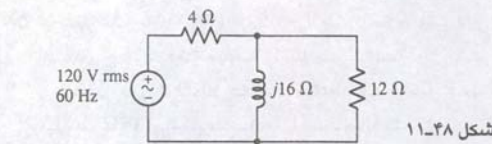
۵۰. توان مختلط حمل‌شده به یک بار، (الف) 500VA در  $PF = 0.75$  پیشفاز، (ب) 500W در  $PF = 0.75$  پیشفاز، (ج) 500VAR در  $PF = 0.75$  را محاسبه کنید.

۵۱. یک امپدانس خازنی  $Z_C = -j120\Omega$  موازی با یک بار  $Z_L$  وجود دارد. ترکیب موازی به وسیله یک منبع  $v_s(t) = 400\angle 0^\circ \text{ V rms}$  تغذیه می‌شود. این منبع توان  $1.6 + 0.5 \text{ kVA}$  را تولید می‌نماید. (الف) توان مختلط داده‌شده به  $Z_L$  چقدر است؟ (ب) PF مربوط به  $Z_L$  چقدر است. (ج) PF مربوط به منبع چیست؟

۵۲. یک منبع  $230 \text{ V rms}$  سه بار موازی را تغذیه می‌کند، در  $PF = 0.8$  پیشفاز،  $1.2 \text{ kVA}$ ، در  $PF = 0.9$  پیشفاز و  $1.6 \text{ kVA}$  و 900W در  $PF = 1$  است. مطلوبست (الف) دامنه جریان (ب) PF مربوط به حالت کار منبع. (ج) توان مختلط پوشش داده‌شده به وسیله منبع.

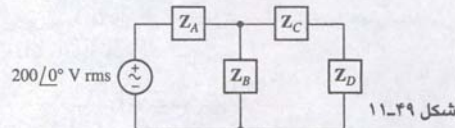
۵۳. یک سیستم  $250 \text{ V rms}$  سه بار موازی را تغذیه می‌کند. یکی از آن‌ها 20 kW را در ضریب توان واحد، دومی 25 kVA را در ضریب توان  $PF = 0.8$  پیشفاز، و سومی توان 30kW را در  $PF = 0.75$  پیشفاز مصرف می‌کند. (الف) کل توان تولیدی به وسیله منبع را به دست آورید. (ب) کل توان ظاهری تولیدی به وسیله منبع چقدر است؟ (ج) در چه PF منبع کار می‌کند.

۵۴. مصرف‌کننده‌ای دارای دیمانند حداکثر ماهانه 200 kW و نیاز راکتیوی 280 kVAR است. در تلاشی برای مقابله با اتلاف، تولیدکننده‌ای سعی



شکل ۱۱-۴۸

۴۳. در مدار شکل ۱۱-۴۹، اگر  $Z_A = 5 + j2\Omega$  و  $Z_B = 20 + j10\Omega$ ،  $Z_C = 10\angle 30^\circ \Omega$  و  $Z_D = 10\angle -62^\circ \Omega$  باشد. توان ظاهری حمل‌شده به هر بار و تولیدی توسط هر منبع را مشخص نمایید.



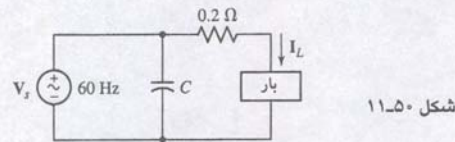
شکل ۱۱-۴۹

۴۴. شبکه‌ای را مجسم کنید که در  $f = 50 \text{ Hz}$  کار کرده و به‌طور سری به بارهایی وصل و جریان  $10\angle 0^\circ \text{ A rms}$  از آن‌ها می‌گذرد. چنین مداری دوگان بارهای موازی و ولتاژ مشترک است. در سیستم سری، اگر بار را اتصال کوتاه کنیم، بار خاموش می‌شود. این کار موجب آتش‌سوزی می‌گردد. در این سیستم خاص دو بار وجود دارد،  $Z_1 = 30\angle 15^\circ \Omega$  و  $Z_2 = 40\angle 40^\circ \Omega$ . منبع در چه PF کار می‌کند. (ج) چه خازنی باید با مدار سری شود تا ضریب توان پسفا 0.9 به دست آید.

## ۱۱-۵ توان مختلط

۴۵. یک بار مرکب متشکل از سه بار به‌طور موازی به هم وصل شده‌اند. یکی از آن‌ها 100W با ضریب  $PF = 0.92$  پیشفاز، دیگری 250W در  $PF = 0.8$  پیشفاز و سومی 150W در  $PF = 1$  می‌کشد. بارهای موازی با یک منبع سری  $10\text{ V rms}$  تغذیه می‌شوند. همه بارها باید در  $115 \text{ V rms}$  کار کنند. مطلوبست (الف) جریان rms در منبع (ب) PF بار ترکیبی.

۴۶. بار در شکل ۱۱-۵۰،  $10 \text{ kVA}$ ، در  $PF = 0.8$  پیشفاز مصرف می‌کند. اگر  $I_L = 40 \text{ A rms}$  باشد. مقدار C چقدر باشد تا سبب شود که منبع در  $PF = 0.9$  کار کند؟



شکل ۱۱-۵۰

۴۷. مدار شکل ۱۱-۵۱ را در نظر بگیرید. مقدار ظرفیت لازم برای افزایش PF به 0.92 پیشفاز را به دست آورید، به‌شرطی که ظرفیت به‌طور (الف) سری با القاگر 100 mH وصل شود. (ب) موازی با القاگر 100 mH وصل گردد. جواب بخش‌های (الف) و (ب) را با PSpice چک کنید.

۴۸. مدار شکل ۱۱-۵۲ را برای یافتن توان مختلط جذب‌شده به وسیله هر پنج عنصر مدار تحلیل کنید.



# فصل دوازدهم

## مدارهای چند فاز

### مقدمه

شرکت‌های تولید کننده برق به مشتریان خانگی و صنعتی، الکتریسیته را به فرم ولتاژها و جریان‌های سینوسی ارائه می‌کنند و به آن جریان (ac) می‌گویند. بسیاری از مناطق مسکونی در آمریکای شمالی موج سینوسی را در فرکانس 60 Hz و ولتاژ rms تقریباً 120 V دریافت می‌نمایند. در دیگر نقاط جهان الکتریسیته در 50 Hz و ولتاژ rms تقریباً 240 V اخذ می‌شود. در آغاز کمپانی‌های تولید کننده به وسیله توماس ادیسون<sup>۱</sup> به توزیع توان از طریق شبکه‌های dc توصیه شده بودند. ولی نیکلا تسلا<sup>۲</sup> و جورج وستینگهاوس<sup>۳</sup> دو دانشمند صاحب‌نظر دیگر در زمینه الکتریسیته، به شدت از به کارگیری ac حمایت نمودند. بالاخره نظر این دو نفر پذیرفته شد.

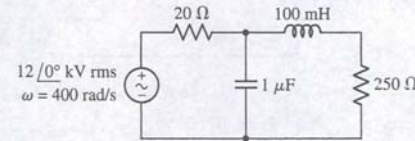
پاسخ‌گذاری سیستم‌های قدرت ac در تعیین دیماند یا تقاضای توان حداکثر مورد توجه‌اند، زیرا اغلب تجهیزات به هنگام شروع نسبت به حالت کار مداوم جریان بیشتری را لازم دارند. با این وجود در بسیاری از موارد عملکرد حالت ماندگار مورد توجه عمده می‌باشد. بنابراین تجربه ما بر تحلیل مبتنی بر فیزور، مفیدتر خواهد بود. در این جا با نوع جدیدی از منبع ولتاژ آشنا می‌شویم که منبع سه‌فاز نام دارد و می‌تواند با آرایش سه سیم Δ یا چهار سیم Y اتصال یابد. به طور مشابه خواهیم دید که بار نیز می‌تواند بسته به کاربرد به صورت هر یک از تصالات Δ یا Y در شبکه قرار گیرد.

### ۱۲-۱ سیستم‌های چند فاز

ماکنون هر وقت جمله "منبع سینوسی" را به کار بردیم، تصویری از یک منبع ولتاژ یا جریان سینوسی با دامنه، فرکانس و فاز خاص به نظر آمده است. در این فصل، منابع چند فاز را معرفی خواهیم کرد و به خصوص بر سیستم‌های سه‌فاز تکیه می‌کنیم. تولید توان سه‌فاز با ژنراتورهای دوار نسبت به تولید تک‌فاز مزایای بیشماری دارد و نیز در انتقال توان هم انتقال سه‌فاز از لحاظ اقتصادی ترجیح داده می‌شود. گرچه بسیاری از تجهیزات مورد استفاده تک‌فاز هستند ولی تجهیزات سه‌فاز خصوصاً در محیط‌های صنعتی ناآشنا نیستند. موتورهای به کار رفته در سیستم‌های برودتی و ماشین ابزار اغلب به صورت

۵۸. در مدار شکل ۱۱-۲۵،  $V_s = 5 \cos t$  است. (الف) حداکثر توان لحظه‌ای حمل‌شده به مقاومت  $10k\Omega$  چیست؟ (ب) توان راکتیو حمل‌شده به مقاومت  $10k\Omega$  چند است. (ج) توان ظاهری حمل‌شده به مقاومت  $10k\Omega$  چه می‌باشد. (د) توان مختلط اخذشده از منبع را به‌دست‌آورید.

۵۹. (الف) توان مختلط حداکثر به هر عنصر غیرفعال در مدار شکل ۱۱-۵۴ را به‌دست‌آورید. (ب) نشان دهید که مجموع این مقادیر برابر با مقدار توان مختلط حاصل از منبع است. (ج) آیا این نتیجه برای توان ظاهری هم صحیح است. (د) توان متوسط حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است. توان راکتیو حاصل از منبع چند است.



شکل ۱۱-۵۴

۶۰. باری در  $2300 \text{ V rms}$  مقدار  $28 \text{ A rms}$  با ضریب توان 0.812 پس‌فاز را می‌کشد. مطلوب است (الف) جریان حداکثر برحسب آمپر؟ (ب) توان لحظه‌ای در  $t = 2.5 \text{ ms}$  با فرض فرکانس 60 Hz؟ (ج) توان حقیقی دریافتی به وسیله بار؟ (د) توان مختلط؟ (ه) توان ظاهری (و) امیدانس بار و (ز) توان راکتیو.

دارد تا مشترانش در PF بالا کار کنند و لذا جریمه  $0.22/\text{kVAR}$  را برای هر  $\text{kVAR}$  اضافی به صورت 0.65 ضریب توان متوسط پیک (ماکزیمم مجاز) اعمال می‌کند. (الف) با توجه به مطلب فوق، هزینه سالانه جریمه چقدر است؟ (ب) سیاست جریمه PF تولیدکننده چقدر است؟ (ج) اگر بخواهیم جبران‌سازی بگذاریم و هزینه آن  $200 \$$  در هر  $\text{kVAR}$  100 باشد بهترین و اقتصادی‌ترین حل برای مشتری چیست؟ (د) مقدار واقعی ظرفیت برای اصلاح ضریب توان چیست؟

۵۵. معادله (۲۸) را به‌دست‌آورید.

### ۱۱-۶ مقایسه واژه‌های توان

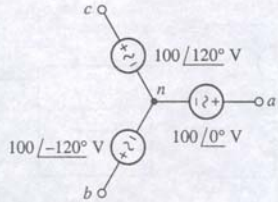
۵۶. یک منبع ولتاژ  $V = \cos(100\pi t - 66^\circ)$  339 به یک بار خالص مقاومتی  $1k\Omega$  وصل است. (الف) ولتاژ موثر منبع چیست؟ (ب) توان لحظه‌ای پیک جذب‌شده به وسیله بار چقدر است؟ (ج) حداقل توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله بار چه می‌باشد؟ (د) توان ظاهری حمل‌شده به وسیله منبع را به‌دست‌آورید. (ه) توان راکتیو حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است؟ (و) توان مختلط حمل‌شده به بار چیست؟

۵۷. یک منبع ولتاژ  $V = \cos(100\pi t - 66^\circ)$  339 به یک بار خالص القاوی  $150 \text{ mH}$  وصل است. (الف) جریان موثر در مدار چیست؟ (ب) توان لحظه‌ای پیک جذب‌شده به وسیله بار چند است (ج) حداقل توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله بار چه می‌باشد. (د) توان ظاهری حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است؟ (ه) توان راکتیو حمل‌شده از منبع چند است. (و) توان مختلط حمل‌شده به بار چیست؟

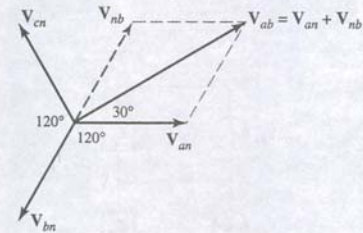


ولتاژ وسایل خانگی معمولاً  $120 \text{ V rms}$  است. ولی گاهی  $110 \text{ V}$  یا  $115 \text{ V rms}$  هم مشخص می‌شود.

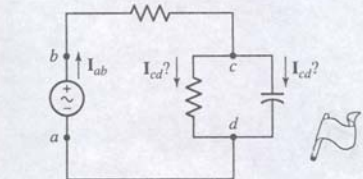




شکل ۱۲-۳ شبکه به کاررفته به عنوان مثالی از علامت ولتاژ دو زیرنویسی.

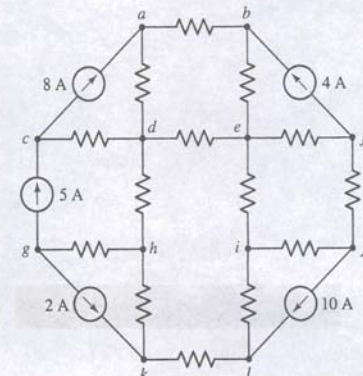


شکل ۱۲-۴ این نمودار فیزیوری کاربرد گرافیکی قرارداد ولتاژ دو زیرنویسی را برای یافتن  $V_{ab}$  در شکل ۱۲-۳ نشان می‌دهد.



شکل ۱۲-۵ موردی که استفاده از نماد دو زیرنویس مشکل پیش می‌آورد.

### تمرین



شکل ۱۲-۶

می‌گوید اختلاف ولتاژ بین دو نقطه به مسیر انتخابی بین نقاط بستگی ندارد. بنابراین:

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bd} = V_{ac} + V_{cd} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}$$

در این روش می‌توان KVL را بدون توجه به شکل نوشت، حتی اگر نقطه یا زیرنویسی روی شکل علامت زده نشده باشد، می‌توان معادله صحیحی داشت. مثلاً می‌توان نوشت  $V_{ad} = V_{ax} + V_{xd}$  که هر نقطه موردنظر انتخابی است.

شکل ۱۲-۳ یکی از فرم‌های نمایش سیستم سه‌فاز ولتاژ را نشان می‌دهد. بگذارید فرض کنیم ولتاژهای  $V_{cn}$ ،  $V_{bn}$ ،  $V_{an}$  مطلوبند:

$$\begin{aligned} V_{an} &= 100 \angle 0^\circ \text{ V} \\ V_{bn} &= 100 \angle -120^\circ \text{ V} \\ V_{cn} &= 100 \angle -240^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

بنابراین با نگاهی به زیرنویس، ولتاژ  $V_{ab}$  را می‌توان پیدا کرد.

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{an} + V_{nb} = V_{an} - V_{bn} \\ &= 100 \angle 0^\circ - 100 \angle -120^\circ \text{ V} \\ &= 100 - (-50 - j86.6) \text{ V} \\ &= 173.2 \angle 30^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

سه ولتاژ معلوم و راه به دست آوردن فیזור  $V_{ab}$  ساخته شده از آن‌ها در شکل ۱۲-۴ مشاهده می‌شود.

علامت دو زیرنویس (دواندیس) را می‌توان برای جریان هم به کار برد. جریان  $I_{ab}$  جریانی است که از  $a$  به  $b$  از مستقیم‌ترین مسیر ممکن جاری است. در هر مدار کاملی چنین می‌گوییم که باید حداقل دو مسیر ممکن بین نقاطی چون  $a$  و  $b$  وجود داشته باشد و قرار می‌گذاریم که از دو زیرنویس استفاده نکنیم، مگر این‌که به وضوح مسیر مستقیم‌تر یا کوتاه‌تری بین دو نقطه وجود داشته باشد. معمولاً این مسیر از یک عنصر ساده عبور می‌کند. بنابراین  $I_{ab}$  در شکل ۱۲-۵ درست نشان داده شده است. درواقع، برای نشان دادن این جریان به پیکان هم نیازی نیست، زیرنویس‌ها جهت را هم بیان می‌کنند. با این وجود در این شکل تعریف جریانی به نام  $I_{cd}$  مبهم است و موجب اشتباه خواهد شد.

۱۲-۱ اگر  $V_{ab} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ ،  $V_{bd} = 40 \angle 80^\circ \text{ V}$  و  $V_{ca} = 70 \angle 200^\circ \text{ V}$  باشد، مطلوب است:

$$V_{cd} \text{ (ج)}, V_{bc} \text{ (ب)}, V_{ad} \text{ (الف)}$$

۱۲-۲ به شکل ۱۲-۶ توجه کنید. اگر  $I_{ij} = 3 \text{ A}$ ،  $I_{de} = 2 \text{ A}$  و  $I_{hd} = -6 \text{ A}$  باشد، مطلوب است:

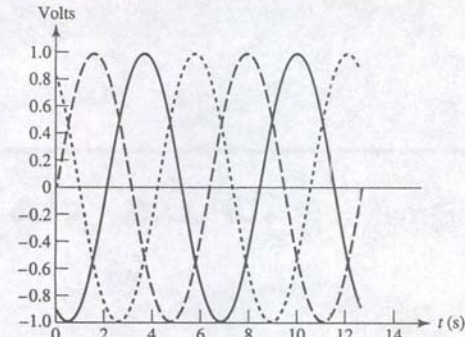
$$I_{ij} \text{ (ج)}, I_{ef} \text{ (ب)}, I_{cd} \text{ (الف)}$$

$$\text{جواب ۱۲-۱: } 114.0 \angle 20.2^\circ \text{ V}, 41.8 \angle 145.0^\circ \text{ V}, 44.0 \angle 20.6^\circ \text{ V}$$

$$\text{جواب ۱۲-۲: } -3 \text{ A}, 7 \text{ A}, 7 \text{ A}$$

## ۱۲-۲ سیستم‌های تک‌فاز سه سیم

منبع تک‌فاز سه سیم به صورت منبعی تعریف می‌شود که دارای سه پایانه خروجی مانند  $a$ ،  $n$  و  $b$  در شکل ۱۲-۷ (الف) است و در آن فیזור ولتاژ  $V_{an}$  و  $V_{bn}$  برابرند. بنابراین منبع را می‌توان به صورت ترکیبی از دو منبع ولتاژ یکسان نشان داد. در شکل ۱۲-۷ (ب)،



شکل ۱۲-۱ مثالی از مجموعه سه‌فاز، که هر یک 120° نسبت به دیگری اختلاف فاز دارد. خواهیم دید که در هر لحظه فقط یکی از ولتاژها ممکن است صفر باشد.

سه‌فاز سیم‌پیچی می‌شوند. در دیگر کاربردهای باقیمانده خواهیم دید که اگر با سیستم‌های چند فاز آشنا باشیم، برای تهیه توان تک‌فاز کافی است به یکی از پاهای سیستم چند فاز اتصالی ساده ایجاد شود.

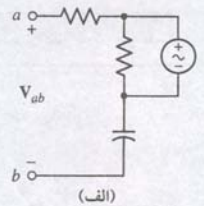
بیاید تا به یک سیستم چند فاز راجع، یعنی سیستم سه‌فاز متعادل یا بالانس نگاهی مختصر بیندازیم. منبع سه پایانه دارد (بدون احتساب اتصال زمین یا نول) اندازه‌گیری با ولت‌متر نشان می‌دهد که دامنه ولتاژ بین هر دو پایانه با یکدیگر برابر است. با این وجود این ولتاژها با یکدیگر همفاز نیستند و هر یک از سه ولتاژ، 120° اختلاف فاز با دیگری دارد. علامت فاز به جهت ولتاژها بستگی دارد. نمونه‌ای از این مجموعه در شکل ۱۲-۱ ملاحظه می‌گردد. هر بار متعادل توان یکسانی را از هر سه فاز می‌کشد، ولی وقتی یکی از ولتاژها برای یک لحظه صفر شود دو فاز دیگر باید نصف دامنه ماکزیم خود را داشته باشند. هیچ‌گاه توان لحظه‌ای دریافتی به وسیله بار کل به صفر نمی‌رسد، درواقع توان لحظه‌ای کل ثابت است. این، یکی از مزایا برای ماشین‌های دوار است زیرا گشتاور وارد بر روتور تقریباً ثابت خواهد بود و نسبت به حالتی که منبع تک‌فاز باشد وضعیت ثابت‌تری حاکم و لذا ارتعاش و لرزش ماشین کمتر می‌شود.

تعداد فاز بیشتر، مثل سیستم‌های 6 و 12 فاز، تقریباً در تهیه توان برای یکسوسازهای بزرگ کاربرد دارند. یکسوسازها جریان متناوب را به مستقیم تبدیل کرده و اجازه عبور جریان را از یک جهت به بار ممکن می‌سازند و لذا علامت ولتاژ دو سر بار همیشه ثابت باقی می‌ماند. خروجی یکسوساز یک جریان مستقیم به علاوه مؤلفه‌های متناوبی به نام ریبِل یا تموج است که با افزایش فاز کاهش می‌یابد.

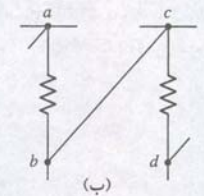
تقریباً بدون استثناء تمام سیستم‌های چند فاز در عمل حاوی منابعی هستند که به‌خوبی می‌توان آن‌ها را با منابع ولتاژ ایده‌آل و یا با منابع ولتاژ ایده‌آل سری با امپدانس داخلی کوچک جایگزین نمود، منابع جریانی سه‌فاز بسیار نادرند.

### علامت با دو زیرنویس

بهتر است ولتاژها و جریان‌های چند فاز را با دو زیرنویس نشان دهیم. با این نماد جریانی یا ولتاژ، مانند  $V_{ab}$  یا  $I_{ab}$  مفهوم‌تر از نمایش ساده‌ای چون  $V_a$  یا  $I_x$  می‌باشد. بنا به تعریف ولتاژ نقطه  $a$  نسبت به  $b$  برابر  $V_{ab}$  است. به همین دلیل در شکل ۱۲-۲ (الف) علامت مثبت در  $a$  قرار گرفته است. بنابراین زیرنویس دوتایی را می‌توان معادل با جفت علامت مثبت - منفی دانست. استفاده همزمان از هر دو عمل اضافی است. مثلاً با توجه به شکل ۱۲-۲ (ب) می‌بینیم که  $V_{ad} = V_{ab} + V_{cd}$  است. مزیت علامت دو زیرنویس بر قانون کیرشهف استوار است که



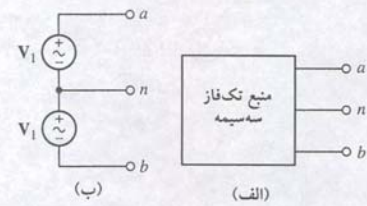
(الف)



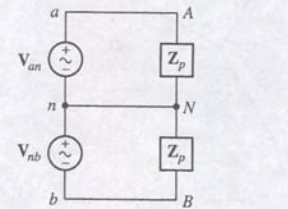
(ب)

شکل ۱۲-۲ (الف) تعریف ولتاژ  $V_{ab}$  (ب)  $V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = V_{ab} + V_{cd}$





شکل ۱۲-۷ (الف) یک منبع تکفاز سه سیمه. (ب) نمایش منبع تکفاز سه سیمه با دو منبع ولتاژ مشابه.



شکل ۱۲-۸ یک سیستم تکفاز سه سیمه. دو بار یکسانند و جریان سیم خنثی صفر است.

و بنابراین

$$I_{aA} = V_{an} / Z_p = I_{bB} = V_{nb} / Z_p$$

$$I_{nN} = I_{bB} + I_{aA} = I_{bB} - I_{aA} = 0$$

بنابراین جریانی در سیم خنثی وجود ندارد و می‌توان بدون هرگونه تغییر در جریان یا ولتاژ آن را حذف کرد.

### اثر امپدانس غیر صفر یک سیم

اکنون تأثیر یک امپدانس غیر صفر در هر سیم را بررسی می‌کنیم. اگر خطوط  $aA$  و  $bB$  امپدانس‌های برابری داشته باشند می‌توان آن را به  $Z_p$  اضافه کرد و دو مرتبه دوبار یکسان حاصل می‌گردد و باز هم جریان سیم خنثی صفر است. حال تصور کنید که سیم خنثی کمی امپدانس مثل  $Z_n$  داشته باشد. بدون انجام تحلیل دقیق، اصل تجمیع نشان می‌دهد که تقارن موجب می‌شود تا باز هم جریان خنثی صفر باشد. از این گذشته اگر امپدانس مستقیماً بین دو خط خارجی وصل شود باز هم مدار متقارن خواهد بود و از سیم خنثی جریان نمی‌گذرد. بنابراین صفر بودن جریان در سیم خنثی نتیجه بالانس بودن بار است و امپدانس غیر صفر در سیم خنثی تقارن را از بین نمی‌برد. به‌طور کلی اغلب سیستم‌های تک‌فاز سه سیمه متقارن نیستند. در این سیستم‌ها دوبار نامساوی بین دو سیم بیرونی و سیم خنثی، و یک امپدانس بین دو سیم بیرونی وصل می‌شود. امپدانس دو سیم بیرونی ممکن است مساوی تصور شوند ولی امپدانس سیم خنثی کمی بزرگتر از آن دو است. بگذارید مثالی از چنین سیستم را بررسی کنیم. خصوصاً به جریان موجود در سیم خنثی توجه بیشتری خواهیم نمود. همچنین راندمان انتقال نیرو به بار نامتعادل بررسی خواهد شد.

سیستم شکل ۱۲-۹ را تحلیل کنید و توان حمل شده به هر سه بار و توان تلف شده در سیم خنثی و هر دو خط را معین کنید.

هدف مسئله را شناسایی کنید.

سه بار در مدار عبارتند از: مقاومت  $50 \Omega$ ، مقاومت  $100 \Omega$  و یک امپدانس  $20 + j10 \Omega$  هر یک از دو خط مقاومت  $1 \Omega$  و سیم خنثی مقاومت  $3 \Omega$  دارد. برای تعیین توان لازم، جریان در هر یک از آن‌ها معین شود.

اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

ما یک سیستم تک‌فاز سه سیمه داریم. نمودار جریان آن کاملاً علامت‌گذاری شده است. جریان‌های محاسبه شده به واحد rms هستند.

ارائه طرح.

مدار را از راه مش حل می‌کنیم و در آن نیز سه حلقه قابل تعریف است. نتیجه تحلیل، تعدادی معادله برای جریان حلقه‌ها است که بعداً قابل استفاده در محاسبه توان است.

معادلات مناسب را بنویسید.

سه معادله حلقه عبارتند از:

$$-115 \angle 0^\circ + I_1 + 50(I_1 - I_2) + 3(I_1 - I_3) = 0$$

$$(20 + j10)I_2 + 100(I_2 - I_3) + 50(I_2 - I_1) = 0$$

$$-115 \angle 0^\circ + 3(I_3 - I_1) + 100(I_3 - I_2) + I_3 = 0$$

که با مرتب کردن آن‌ها سه معادله زیر به دست می‌آید:

$$54I_1 - 50I_2 - 3I_3 = 115 \angle 0^\circ$$

$$-50I_1 + (170 + j10)I_2 - 100I_3 = 0$$

$$-3I_1 - 100I_2 + 104I_3 = 115 \angle 0^\circ$$

آیا اطلاعات دیگری لازم است.

ما مجموعه‌ای از سه معادله و سه مجهول داریم. بنابراین می‌توان برای حل آن اقدام کرد.

اقدام به حل.

به کمک یک ماشین حساب  $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  را به دست می‌آوریم.

$$I_1 = 11.24 \angle -19.83^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 9.389 \angle -24.47^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = 10.37 \angle -21.80^\circ \text{ A}$$

جریان در خطوط بیرونی عبارتند از:

$$I_{aA} = I_1 = 11.24 \angle -19.83^\circ \text{ A}$$

و

$$I_{bB} = -I_3 = 10.37 \angle 158.20^\circ \text{ A}$$

و جریان کوچکتر در سیم خنثی عبارت است از:

$$I_{nN} = I_3 - I_1 = 0.9459 \angle -177.7^\circ \text{ A}$$

پس توان متوسط دریافتی به وسیله هر بار چنین تعیین می‌شود:

$$P_{50} = |I_1 - I_2|^2 (50) = 206 \text{ W}$$

$$P_{100} = |I_3 - I_2|^2 (100) = 117 \text{ W}$$

$$P_{20+j10} = |I_2|^2 (20) = 1763 \text{ W}$$

توجه کنید که ضریب  $\frac{1}{2}$  لازم نیست چون جریان‌های rms را به کار می‌بریم.



گرمای ناشی از دو لامپ 100W را در نظر بگیرید. در دو سیم بیرونی در همین حدود توان مصرف می‌شود. برای پایین نگه داشتن دما باید سطح بزرگی فراهم شود.

به این ترتیب توان بار کل برابر 2086 W است. تفاوت در هر خط برابر است با

$$P_{aA} = |I_1|^2 (1) = 126 \text{ W}$$

$$P_{bB} = |I_3|^2 (1) = 108 \text{ W}$$

$$P_{nN} = |I_{nN}|^2 (3) = 3 \text{ W}$$

که مجموعاً 237 W می‌باشد. پیدا است که این خطوط خیلی طولی‌اند و گرنه این توان نسبتاً زیاد دما را تا حد خطرناکی بالا می‌برد.

- صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟  
توان کل تولید شده برابر است با

$$206 + 117 + 1763 + 237 = 2323 \text{ W}$$

و می‌توان آن را با توجه به توان حمل‌شده به وسیله هر منبع ولتاژ چک کرد:

$$P_{an} = 115(11.24) \cos 19.83^\circ = 1216 \text{ W}$$

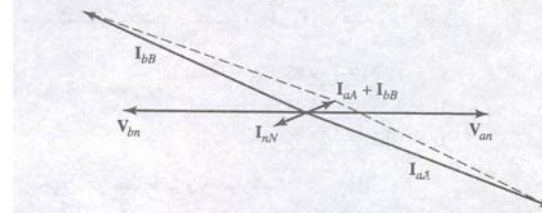
$$P_{bn} = 115(10.37) \cos 21.80^\circ = 1107 \text{ W}$$

که جمعاً همان 2323 W می‌باشد. بازده خط انتقال سیستم برابر است با:

$$\eta = \frac{\text{توان کل محل شده به بار}}{\text{کل توان مولد}} = \frac{2086}{2086 + 237} = 89.8\%$$

چنین بازدهی برای یک موتور بخار یا موتور احتراق داخلی عددی بالا است ولی برای یک سیستم توزیع خوب خیلی پایین است. اگر بخواهیم منبع و بار را به یکدیگر نزدیک کنیم، باید قطر سیم‌ها را افزایش دهیم.

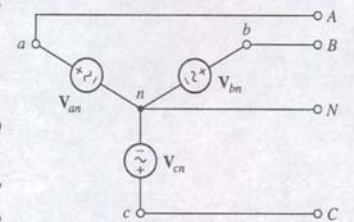
نمایش فیزیوری دو منبع ولتاژ، جریان در خطوط بیرونی و جریان سیم خنثی در شکل ۱۲-۱۰ نشان داده شده است. رابطه  $I_{aA} + I_{bB} + I_{nN} = 0$  در نمودار مشخص شده است.



شکل ۱۲-۱۰ ولتاژ منابع و سه جریان در مدار شکل ۱۲-۹ روی نمودار فیزیوری نشان داده شده‌اند. توجه کنید که

$$I_{aA} + I_{bB} + I_{nN} = 0$$

### تمرین



شکل ۱۲-۱۱ منبع چهارسیم با اتصال Y.

۱۲-۳ با جمع مقاومت  $1.5 \Omega$  به هر یک از دو سیم بیرونی و  $2.5 \Omega$  به سیم خنثی، شکل ۱۲-۹ را تصحیح کنید. توان متوسط تحویلی به هر سه بار را مشخص نمایید.  
جواب: 1374 W و 95.8 W، 153.1 W

### ۱۲-۳ اتصال سه فاز Y-Y

مزایع سه فاز سه پایانه دارند، که به آن‌ها پایانه‌های خط می‌گویند و ممکن است چهارمی داشته و یا نداشته باشند. این منابع می‌توانند پایانه چهارمی هم به نام اتصال خنثی داشته و یا نداشته باشند. بحث را با سیستم سه‌فازی که اتصال خنثی دارد، شروع می‌کنیم. این سیستم ممکن است از سه منبع ولتاژ ایده‌آل به صورت Y، شکل ۱۲-۱۱، به هم متصل شده باشد. هر چهار پایانه a، b، c و n در دسترس می‌باشند. ما تنها منابع سه‌فاز متعادل یا بالانس را مطالعه خواهیم کرد که به فرم زیر تعریف می‌شوند.

$$|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$$

ین سه ولتاژ که هر کدام بین یک خط و سیم خنثی برقرار است را ولتاژهای فاز می‌نامیم. به طور اختیاری  $V_{an}$  را به عنوان مرجع اختیار می‌کنیم، یعنی:

$$V_{an} = V_p \angle 0^\circ$$

با همواره از  $V_p$  برای نشان دادن دامنه rms هر یک از ولتاژهای فاز استفاده خواهیم کرد. پس منبع سه فاز چنین تعریف می‌شود:

$$V_{bn} = V_p \angle -120^\circ \quad \text{و} \quad V_{cn} = V_p \angle -240^\circ$$

$$V_{bn} = V_p \angle 120^\circ \quad \text{و} \quad V_{cn} = V_p \angle 240^\circ$$

ولی را ترتیب فاز مثبت یا ترتیب فاز abc می‌گویند و در شکل ۱۲-۱۲(الف) نشان داده شده است. روابط بعدی را ترتیب فاز منفی یا cba می‌خوانند و در شکل ۱۲-۱۲(ب) ملاحظه می‌گردد. ترتیب واقعی فاز یک منبع سه فاز فیزیکی به این انتخاب اختیاری پایانه‌های a، b و c بستگی دارد. این انتخاب را می‌توان همیشه طوری برگزید که ترتیب فاز مثبت باشد و فرض می‌کنیم از این پس همین انتخاب در سیستم‌های مورد بررسی برقرار باشد.

### ولتاژهای خط به خط

حال بیایید ولتاژهای خط‌به‌خط (یا به طور خلاصه "ولتاژهای خط") را به دست آوریم. این ولتاژها هنگامی که ولتاژهای خط همچون شکل ۱۲-۱۲(الف) باشند، برقرارند. ساده‌ترین راه یافتن ولتاژهای خط استفاده از نمودار فیزیوری است زیرا زاویه همگی مضارب صحیحی از  $30^\circ$  هستند. نمودار مزبور در شکل ۱۲-۱۳ ترسیم شده و نتایج عبارت‌اند از:

$$V_{ab} = \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ \quad (1)$$

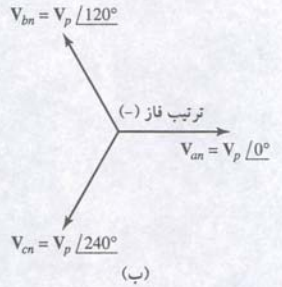
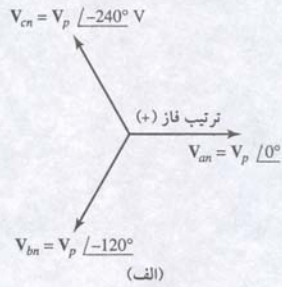
$$V_{bc} = \sqrt{3}V_p \angle -90^\circ \quad (2)$$

$$V_{ca} = \sqrt{3}V_p \angle -210^\circ \quad (3)$$

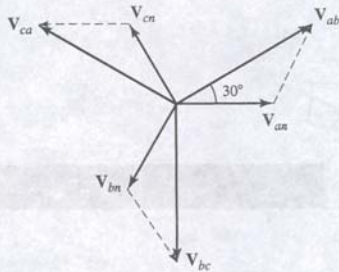
طبق قانون کیرشهف مجموع ولتاژهای فوق صفر است. بد نیست خواننده این مطلب را تحقیق کند. اگر دامنه rms هر یک از این ولتاژهای خط را با  $V_L$  نشان دهیم، آن‌گاه یکی از مهمترین مشخصه‌های منبع سه فاز با اتصال Y را چنین می‌توان بیان کرد.

$$V_L = \sqrt{3}V_p$$

توجه کنید که با ترتیب فاز مثبت،  $V_{an}$  از  $V_{bn}$  و  $V_{bn}$  از  $V_{cn}$  هر یک به اندازه  $120^\circ$  از دیگری پیش‌فاز است و نیز  $V_{ab}$  از  $V_{bc}$  و  $V_{bc}$  از  $V_{ca}$  دوباره هر کدام  $120^\circ$  از دیگری پیش‌فاز است. اگر به جای پیش‌فاز از پس‌فاز استفاده کنیم، مطالب فوق برای ترتیب فاز منفی صحت خواهد داشت.



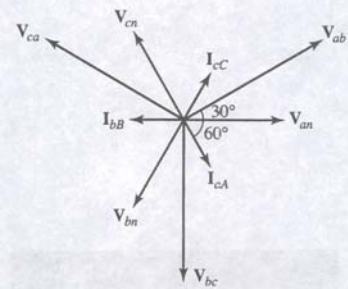
شکل ۱۲-۱۲ (الف) ترتیب فاز مثبت یا abc. (ب) ترتیب فاز منفی یا cba.



شکل ۱۲-۱۳ نمودار فیزیوری به کاررفته برای یافتن ولتاژهای خط برحسب ولتاژهای فاز.

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{an} - V_{bn} = \\ &= V_p \angle 0^\circ - V_p \angle -120^\circ = \\ &= V_p - V_p \cos(-120^\circ) - jV_p \sin(-120^\circ) = \\ &= V_p \left(1 + \frac{1}{2} + j\sqrt{3}/2\right) = \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ \end{aligned}$$





شکل ۱۲-۱۶ نمودار فیزیوری مدار شکل ۱۲-۱۵.

چون ولتاژ یکی از فازهای منبع داده شده و نیز ترتیب فاز مثبت است، سه ولتاژ فاز عبارتند از:

$$V_{an} = 200 \angle 0^\circ \text{ V} \quad V_{bn} = 200 \angle -120^\circ \text{ V} \quad V_{cn} = 200 \angle -240^\circ \text{ V}$$

ولتاژ خط  $V = 200\sqrt{3} = 346 \text{ V}$  است. زاویه فاز هر ولتاژ خط را می‌توان با ایجاد نمودار فیزیوری مثل شکل ۱۲-۱۳ معین کرد. در واقع، نمودار فیزیوری شکل ۱۲-۱۳ این‌جا هم قابل اعمال است. آن‌گاه با استفاده از یک ماشین حساب یا معادلات (۱) تا (۳) خواهیم داشت:

$$V_{ca} = 346 \angle -210^\circ \text{ V} \quad V_{bc} = 346 \angle -90^\circ \text{ V} \quad V_{ab} = 346 \angle 30^\circ \text{ V}$$

بیایید با فاز A کار کنیم. جریان خط برابر است با:

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_p} = \frac{200 \angle 0^\circ}{100 \angle 60^\circ} = 2 \angle -60^\circ \text{ A}$$

چون می‌دانیم سیستم سه‌فاز بالانس است، می‌توان بقیه جریان‌های خط را براساس  $I_{aA}$  نوشت:

$$I_{bB} = 2 \angle (-60^\circ - 120^\circ) = 2 \angle -180^\circ \text{ A}$$

$$I_{cC} = 2 \angle (-60^\circ - 240^\circ) = 2 \angle -300^\circ \text{ A}$$

توان جذب شده به وسیله فاز A برابر است با

$$P_{AN} = 200(2) \cos(0^\circ + 60^\circ) = 200 \text{ W}$$

بنابراین توان جذب شده به وسیله بار سه فاز 600 W خواهد شد.

نمودار فیزیوری این مدار در شکل ۱۲-۱۶ مشاهده می‌شود. به محض این‌که اندازه ولتاژ خط و یا جریان را بدانیم زوایای هر سه ولتاژ و هر سه جریان به سادگی با خواندن از روی نمودار تعیین خواهد شد.

## تمرین

۱۲-۴ یک سیستم سه فاز سه سیم به یاری با اتصال Y وصل شده است، هر فاز شامل سه بار موازی است:  $-j100 \Omega$ ،  $100 \Omega$  و  $50 + j50 \Omega$ . با فرض ترتیب فاز مثبت و  $V_{ab} = 400 \angle 0^\circ \text{ V}$  مطلوب است: (الف)  $V_{an}$ ، (ب)  $I_{aA}$  (ج) توان کل مصرفی در بار.  
جواب:  $V = 231 \angle -30^\circ \text{ V}$ ،  $I = 4.62 \angle -30^\circ \text{ A}$  و  $3200 \text{ W}$

قبل از ارائه مثالی دیگر، فرصت خوبی است تا عبارت بخش ۱۲-۱ را بشکافیم. عبارت چنین بود که اگر حتی ولتاژها و جریان‌های فاز در هر لحظه خاصی از زمان صفر باشند (در شمال امریکا هر  $1/12^\circ$  ثانیه) توان لحظه‌ای حمل شده به کل بار هرگز صفر نیست. یک بار دیگر مثال ۱۲-۲ را ملاحظه کنید که در آن ولتاژ و جریان فاز در حوزه زمان نوشته شده است.

$$v_{AN} = 200 \sqrt{2} \cos(120 \pi t + 0^\circ) \text{ V}$$

$$i_{AN} = 2 \sqrt{2} \cos(120 \pi t - 60^\circ) \text{ A}$$

بنابراین توان لحظه‌ای مصرفی در فاز A برابر است با:

$$\begin{aligned} P_A(t) &= v_{AN} i_{AN} = 800 \cos(120 \pi t) \cos(120 \pi t - 60^\circ) \\ &= 400 [\cos(-60^\circ) + \cos(240 \pi t - 60^\circ)] \\ &= 200 + 400 \cos(240 \pi t - 60^\circ) \text{ W} \end{aligned}$$

ضریب  $\sqrt{2}$  برای تبدیل از واحد rms به کار گرفته است.

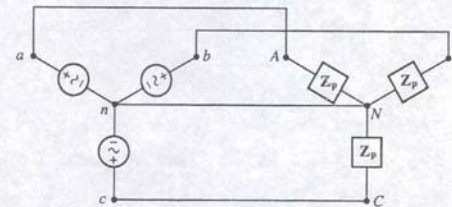
بگذارید یک بار متعادل سه فاز Y را به منبع وصل کنیم و برای این کار از سه خط و خط خنثی استفاده نماییم (شکل ۱۲-۱۴). بار بین هر خط و خط خنثی را با  $Z_p$  نشان می‌دهیم. جریان‌های این سه خط را به سادگی می‌توان به دست آورد، زیرا در حقیقت سه مدار تک‌فاز داریم که یک سیم آن‌ها مشترک است.

$$\begin{aligned} I_{aA} &= \frac{V_{an}}{Z_p} \\ I_{bB} &= \frac{V_{bn}}{Z_p} = \frac{V_{an} \angle -120^\circ}{Z_p} = I_{aA} \angle -120^\circ \\ I_{cC} &= I_{aA} \angle -240^\circ \end{aligned}$$

و بنابراین:

$$I_{Nn} = I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} = 0$$

بنابراین اگر منبع و بار متعادل باشند و اگر چهار سیم، امپدانس صفر داشته باشند، سیم خنثی جریانی را حمل نخواهد کرد. اگر در هر یک از سه خط، امپدانس  $Z_L$  را به صورت سری قرار دهیم و نیز امپدانس  $Z_n$  را در خط خنثی بگذاریم، آن‌گاه جریان سیم خنثی چه خواهد شد؟ واضح است که  $Z_L$ ها را می‌توان با امپدانس‌های بار ترکیب کرد. این بار حاصل همچنان متعادل می‌ماند و می‌توان سیم هادی خنثی را حذف نمود. بنابراین اگر با اتصال کوتاه یا بازکردن مدار بین n و N تغییری در سیستم به چشم نخورد، هر امپدانس را می‌توان در سیم خنثی وارد کرد و جریان سیم خنثی در هر حال صفر باقی می‌ماند.



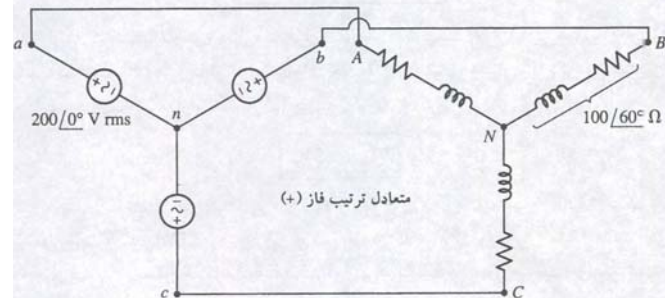
شکل ۱۲-۱۴ یک سیستم سه‌فاز بالانس با اتصال Y-Y و سیم خنثی.

پس اگر منبع و بارها متعادل باشند، سیم خنثی می‌تواند هر امپدانس مثل اتصال کوتاه یا مدار باز داشته باشد. به هر حال این امپدانس هر چه باشد تأثیری بر ولتاژها و جریان‌های سیستم ندارد. اغلب بهتر است بین دو نقطه خنثی را اتصال کوتاه تصور کرد، خواه واقعاً وجود داشته باشد یا نباشد. در این حال مسئله به سه مسئله تک‌فاز تبدیل می‌گردد و هر سه آن‌ها تنها در زاویه فاز با یکدیگر اختلاف دارند. در این حالت می‌گوییم مسئله را براساس "تک‌فاز" حل می‌کنیم.



## مثال ۱۲-۲

برای مدار شکل ۱۲-۱۵، جریان‌ها و ولتاژهای مدار را پیدا کنید و توان کل مصرفی دو بار را محاسبه نمایید.



شکل ۱۲-۱۵ یک سیستم سه‌فاز با اتصال سه‌سیم Y-Y.



$$I_1 = 1.155 \angle 0^\circ \text{ A} \quad I_2 = 2.89 \angle +36.9^\circ \text{ A}$$

و جریان خط برابر است با

$$I_L = I_1 + I_2 = 3.87 \angle +26.6^\circ \text{ A}$$

به علاوه، توان تولیدی در این فاز برابر است با

$$P_p = \frac{300}{\sqrt{3}} 3.87 \cos(+26.6^\circ) = 600 \text{ W}$$

که تهیه 200 W توان به وسیله هر خط با روشنایی جدید و نیز 400 W برای بار اصلی را تأیید می‌کند.

۱۲-۶ سه بار بالانس با اتصال Y روی یک سیستم سه فاز چهار سیمه نصب شده است. بار 1 کلاً 6 kW را در  $PF = 1$  می‌کشد، بار 2 به 10 kVA در  $PF = 0.69$  پسفاز نیاز دارد و بار 3 مقدار 7 kW را در  $PF = 0.85$  پسفاز لازم دارد. اگر ولتاژ فاز در بارها 135 V و هر خط  $0.1 \Omega$  مقاومت داشته باشد و نیز مقاومت خط خنثی  $1 \Omega$  باشد، مطلوب است: (الف) توان کل کشیده شده به وسیله بارها، (ب)  $PF$  کل بارها، (ج) توان کل از دست رفته در چهار خط، (د) ولتاژ فاز در منبع و (ه) ضریب توان کل منبع

جواب: 0.954، 22.6 kW، 1027 W، 140.6 V، 0.957 پسفاز

اگر بار Y نامتعادل به یک سیستم سه فاز که به لحاظ دیگر بالانس است وصل شود، باز هم می‌توان سیستم را براساس تک فاز تحلیل کرد، مشروط بر این که سیم خنثی وجود داشته باشد و امپدانس آن هم صفر باشد. اگر هر یک از این شرایط برقرار نباشد، باید از روش های دیگری چون روش تک حلقه یا تحلیل گره استفاده نمود. با این وجود مهندسانی که بیشتر وقت خود را با سیستم های سه فاز نامتعادل صرف کرده اند، می دانند که کاربرد **مؤلفه های متقارن** چقدر باعث صرفه جویی در وقت است، مادر این جا این روش را بحث نمی کنیم.

### ۱۲-۴ اتصال مثلث یا دلتا (Δ)

آرایشی دیگر در اتصال بارهای سه فاز اتصال Δ است، (شکل ۱۲-۱۸). این آرایش بسیار رایج بوده و نیازی به اتصال سیم خنثی ندارد.

اجازه دهید تا یک بار با اتصال Δ را که از سه امپدانس  $Z_p$  تشکیل شده بررسی کنیم. با مراجعه به شکل ۱۲-۱۸ ولتاژهای خطوط را چنین فرض می‌کنیم:

$$V_L = |V_{ab}| = |V_{bc}| = |V_{ca}|$$

با ولتاژهای فاز معلوم چنین هستند:

$$V_p = |V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ \quad \text{و} \quad V_L = \sqrt{3} V_p$$

و همان است که قبلاً دیدیم. چون ولتاژ دو سر هر شاخه از Δ معلوم است، جریان های فاز به راحتی به دست می آیند.

$$I_{AB} = \frac{V_{ab}}{Z_p}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{bc}}{Z_p}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{ca}}{Z_p}$$

و اختلاف آن ها جریان های خط را به دست می دهند، مثل:

$$I_{aA} = I_{AB} - I_{CA}$$

به طریق مشابه داریم:

$$P_B(t) = 200 + 400 \cos(240 \pi t - 300^\circ) \text{ W}$$

و

$$P_C(t) = 200 + 400 \cos(240 \pi t - 180^\circ) \text{ W}$$

توان لحظه ای جذب شده به وسیله کل بار برابر است با:

$$P(t) = P_A(t) + P_B(t) + P_C(t) = 600 \text{ W}$$

این توان مستقل از زمان بوده و مقدار آن همان توان متوسط در مثال ۱۲-۲ است.

### مثال ۱۲-۳

یک سیم سه فاز متعادل یا بالانس با ولتاژ خط 300 V، یک بار 1200 W با اتصال Y را در  $PF = 0.8$  تغذیه می‌کند. جریان خط و امپدانس بار هر خط را معین کنید.

ولتاژ فاز  $300 / \sqrt{3}$  و توان هر فاز  $1200 / 3 = 400 \text{ W}$  می‌باشد. بنابراین:

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}} (I_L) (0.8)$$

و بنابراین جریان هر فاز 2.89 A می‌باشد. امپدانس فاز با رابطه زیر داده می‌شود:

$$|Z_p| = \frac{V_p}{I_L} = \frac{300 / \sqrt{3}}{2.89} = 60 \Omega$$

چون  $PF = 0.8$  پیشفاز است، امپدانس زاویه  $-36.9^\circ$  را دارد، پس  $Z_p = 60 \angle -36.9^\circ \Omega$  خواهد شد. بارهای پیچیده تر را هم به سادگی می‌توان بررسی کرد، چون مسائل مذکور به مسائل ساده تر تک فاز تبدیل می‌شوند.

### تمرین

۱۲-۵ یک سیستم سه فاز سه سیمه ولتاژ خط 500 V را دارد. دوبار با اتصال متعادل Y نیز به آن وصل است. یکی از آن ها بار خازنی با  $2 \Omega - j7$  در هر فاز و دیگری القایی با  $2 \Omega + j4$  در هر فاز می‌باشد. (الف) ولتاژ فاز را به دست آورید، (ب) جریان خط چقدر است؟، (ج) توان کل جذب شده به وسیله بار را معین نمایید، (د) ضریب توان هر منبع را پیدا کنید.

جواب: 289 V، 97.5 A، 83.0 kW، 0.983 پسفاز

### مثال ۱۲-۴

یک بار روشنایی متعادل 600 W به سیستم مثال ۱۲-۳ اضافه شده است. جریان خط جدید را به دست آورید.

ابتدا مدار تک فاز مناسبی مثل شکل ۱۲-۱۷ می‌کشیم. فرض شده است که بار 600 W متعادل بوده و به طور مساوی بین سه فاز تقسیم شده باشد و بنابراین در هر فاز 200 W مصرف می‌شود. دامنه جریان روشنایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$200 = \frac{300}{\sqrt{3}} |I_1| \cos 0^\circ$$

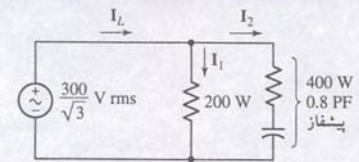
بنابراین:

$$|I_1| = 1.155 \text{ A}$$

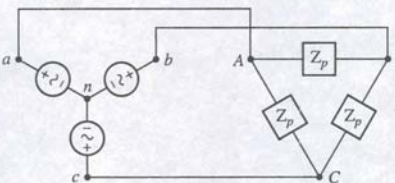
به همین ترتیب اندازه جریان بار خازنی با آن چه قبلاً دیدیم تفاوتی ندارد، زیرا ولتاژ دو سر آن ثابت باقی می‌ماند.

$$|I_2| = 2.89 \text{ A}$$

اگر نازی که با آن کار می‌کنیم زاویه  $0^\circ$  داشته باشد، آن گاه:

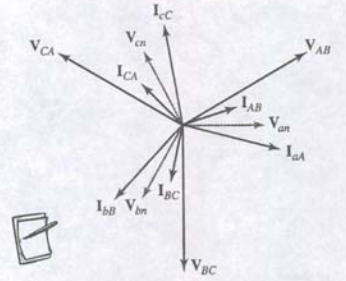


شکل ۱۲-۱۷ مدار تکفازی که برای تحلیل یک مثال سه فاز بالانس به کار رفته است.



شکل ۱۲-۱۸ یک بار Δ بالانس روی سیستم سه فاز سه سیم. منبع به شکل Y است.





شکل ۱۲-۱۹ نمودار فیزیکی که اگر  $Z_p$  یک امپدانس القایی باشد، قابل اعمال به مدار شکل ۱۸-۱۲ است.

## مثال ۱۲-۵

باز هم به خاطر داشته باشید که فرض بر این است تمام مقادیر ولتاژها و جریان‌ها rms می‌باشند.

چون با یک سیستم بالانس کار می‌کنیم. جریان‌های سه فاز دارای دامنه‌های برابری هستند.

$$I_p = |I_{AB}| = |I_{BC}| = |I_{CA}|$$

دامنه جریان‌های خط نیز برابرند. تقارن آن‌ها از روی نمودار فیزور شکل ۱۲-۱۹ آشکار است. پس داریم:

$$I_L = |I_{aA}| = |I_{bB}| = |I_{cC}|$$

و

$$I_L = \sqrt{3} I_p$$

بگذارید موقتاً منبع را کنار بگذاریم و فقط بار متعادل را بررسی کنیم. اگر بار با اتصال  $\Delta$  است، نمی‌توان ولتاژ فاز و ولتاژ خط را از هم تمیز داد، ولی جریان خط  $\sqrt{3}$  برابر جریان فاز است. با این وجود در اتصال Y هر دو جریان فاز و جریان خط یک مقدار دارند و ولتاژ خط  $\sqrt{3}$  برابر ولتاژ فاز است.

دامنه یک جریان خط در سیستم سه‌فازی با ولتاژ خط 300 V را معین کنید. این خط 1200 V را به بار  $\Delta$  در  $PF = 0.8$  پسمافز منتقل می‌کند.

بباید دوباره حالت تک‌فاز را بررسی کنیم. در این حالت بار، 400 W را در  $P = 0.8$  پسمافز از ولتاژ خط 300 V می‌کشد. بنابراین:

$$400 = 300(I_p)(0.8)$$

و

$$I_p = 1.667 \text{ A}$$

توجه داشته باشید که همه ولتاژها و جریان‌ها به rms فرض شده‌اند و رابطه بین جریان‌های فاز و جریان‌های خط برابر است با

$$I_L = \sqrt{3}(1.667) = 2.89 \text{ A}$$

به علاوه زاویه فاز بار برابر  $\cos^{-1}(0.8) = 36.9^\circ$  است و بنابراین امپدانس در هر فاز باید برای رابطه زیر باشد:

$$Z_p = \frac{300}{1.667} \angle 36.9^\circ = 180 \angle 36.9^\circ \Omega$$

## تمرین

۱۳-۷ هر فاز از یک بار  $\Delta$  متعادل از یک القاگر 0.2 H سری با ترکیبی از خازن  $5 \mu F$  و مقاومت  $200 \Omega$  تشکیل شده است. مقاومت خط را صفر و ولتاژ فاز را 200 V در  $\omega = 400 \text{ rad/s}$  فرض کنید. (الف) جریان فاز را پیدا کنید. (ب) جریان خط را پیدا کنید. (ج) کل توان جذب شده به وسیله بار را معین کنید. جواب: A: 1.158, 2.01 A, 693 W

## مثال ۱۲-۶

دامنه جریان خط را در یک سیستم سه فاز با ولتاژ خط 300 V که 1200 W توان را به یک بار Y در  $P = 0.8$  پسمافز منتقل می‌کند، به دست آورید. (این همان مدار مثال ۱۲-۵ است ولی بار به شکل Y منتقل شده است).

بر اساس تک‌فاز، اکنون ولتاژ فاز  $V / \sqrt{3}$  و توان 400 W و  $P = 0.8$  پسمافز را داریم. بنابراین:

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}} (I_p)(0.8)$$

و

$$I_p = 2.89$$

یا

$$I_L = 2.89 \text{ A rms}$$

زاویه فاز بار مجدداً همان  $36.9^\circ$  است. بنابراین امپدانس هر فاز Y چنین خواهد بود.

$$Z_p = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89} \angle 36.9^\circ = 60 \angle 36.9^\circ \Omega$$

ضریب  $\sqrt{3}$  نه تنها کمیت‌های خط و فاز را به هم مرتبط می‌سازد بلکه در توان کشیده شده به وسیله هر بار سه فاز هم ظاهر می‌شود. اگر یک بار Y با زاویه ضریب توان  $\theta$  را فرض کنیم توان دریافتی به وسیله هر فاز برابر است با:

$$P_p = V_p I_p \cos \theta = V_p I_L \cos \theta = \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta$$

و توان کل برابر است با:

$$P = 3P_p = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

به طریق مشابه توان انتقالی در هر فاز به بار  $\Delta$  برابر است با:

$$P_p = V_p I_p \cos \theta = V_L I_p \cos \theta = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta$$

و در نتیجه توان کل برابر است با:

$$P = 3P_p$$

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad (۴)$$

بنابراین معادله (۴) امکان محاسبه توان کل به بار متعادل را با آگاهی از اندازه ولتاژ خط، جریان خط و زاویه فاز امپدانس بار فراهم می‌سازد و اتصال Y با  $\Delta$  در آن نقشی ندارد. اکنون جریان خط در مثال ۱۲-۵ و ۱۲-۶ در دو گام ساده قابل محاسبه است:

$$1200 = \sqrt{3}(300)(I_L)(0.8)$$

بنابراین

$$I_L = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2.89 \text{ A}$$

مقایسه‌ای خلاصه از ولتاژهای فاز و خط و جریان‌های فاز و خط در جدول ۱۲-۱ هم برای بارهای Y و هم  $\Delta$  که به وسیله منبع سه فاز Y تغذیه شده‌اند، ارائه شده است.

جدول ۱۲-۱ مقایسه بارهای سه فاز اتصال ستاره (Y) و مثلث ( $\Delta$ ).  $V_p$  مقدار ولتاژ فاز و منبع اتصال ستاره (Y) است.

| توان در فاز | جریان خطی  | جریان فازی   | ولتاژ خطی   | ولتاژ فازی  | بار      |
|-------------|--|--|---|---|----------|
|             |  |  | $V_{AB} = V_{ab}$<br>$= (\sqrt{3}/30^\circ) V_{AN}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ$   | $V_{AB} = V_{ab}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ$   |          |
|             | $I_{aA} = I_{AN} = \frac{V_{AN}}{Z_p}$             | $I_{aA} = I_{AN} = \frac{V_{AN}}{Z_p}$             | $V_{BC} = V_{bc}$<br>$= (\sqrt{3}/30^\circ) V_{BN}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ$  | $V_{BC} = V_{bc}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ$  | Y        |
|             | $I_{bB} = I_{BN} = \frac{V_{BN}}{Z_p}$             | $I_{bB} = I_{BN} = \frac{V_{BN}}{Z_p}$             | $V_{CA} = V_{ca}$<br>$= (\sqrt{3}/30^\circ) V_{CN}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ$ | $V_{CA} = V_{ca}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ$ |          |
|             | $I_{cC} = I_{CN} = \frac{V_{CN}}{Z_p}$             | $I_{cC} = I_{CN} = \frac{V_{CN}}{Z_p}$             |   |   |          |
|             |  |  | $V_{AB} = V_{ab}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ$                                     | $V_{AB} = V_{ab}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ$   |          |
|             | $I_{aA} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{AB}}{Z_p}$ | $I_{aA} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{AB}}{Z_p}$ | $V_{BC} = V_{bc}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ$                                    | $V_{BC} = V_{bc}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ$  | $\Delta$ |
|             | $I_{bB} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{BC}}{Z_p}$ | $I_{bB} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{BC}}{Z_p}$ | $V_{CA} = V_{ca}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ$                                   | $V_{CA} = V_{ca}$<br>$= \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ$ |          |
|             | $I_{cC} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{CA}}{Z_p}$ | $I_{cC} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{CA}}{Z_p}$ |   |   |          |

۱۲-۸ یک سیستم سه فاز سه سیمه به دو بار موازی  $\Delta$  ختم شده است. بار 1، 40 kVA در  $PF = 0.8$  پسمافز می‌باشد. در حالی که بار 2، 24 kW در  $PF = 0.8$  پیشفاز جذب می‌نماید. اگر مقاومتی در خط نباشد و  $V_{ab} = 440 \angle 30^\circ \text{ V}$  باشد، (الف) توان کل دریافتی به وسیله بارها چقدر است؟ (ب) جریان فاز  $I_{AB1}$  برای بار پسمافز چیست؟ (ج)  $I_{AB2}$ . (د)  $I_{aA}$  جواب: 56.0 kW،  $30.3 \angle -6.87^\circ \text{ A}$ ،  $20.2 \angle 55.8^\circ \text{ A}$ ،  $75.3 \angle -12.46^\circ \text{ A}$

## تمرین

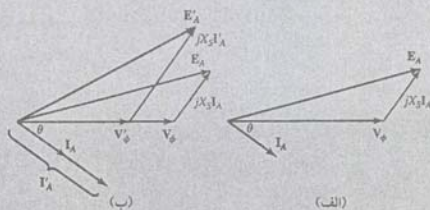


این نمودار ولتاژ - جریان خروجی یک ژنراتور تک فاز متصل به باری با ضریب توان  $\cos \theta$  را نشان می‌دهد. ولتاژ تولیدی داخلی  $E_A$  هم نشان داده شده است. اگر باری بدون تغییر ضریب توان اضافه گردد، شکل ۱۲-۲۲ (ب)، جریان  $I_A$  به  $I'_A$  افزایش می‌یابد. در این حالت اندازه ولتاژ تولیدی داخلی که از جمع فیזורی  $X_S I'_A$  و  $V_\phi$  به دست می‌آید باید بدون تغییر باقی بماند. بنابراین  $E'_A = E_A$  و ولتاژ خروجی ( $V_\phi$ ) ژنراتور کمی کاهش می‌یابد. شکل ۱۲-۲۲ (ب).

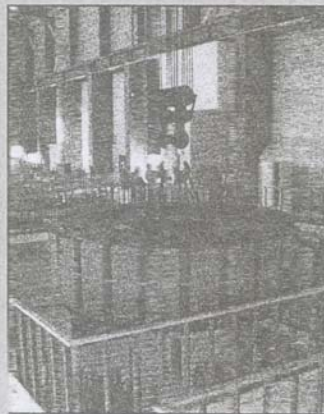
تثبیت ولتاژ یک ژنراتور با رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\% \text{ تثبیت} = \frac{V_{\text{بار کامل}} - V_{\text{بار}}}{V_{\text{بار کامل}}} \times 100$$

به‌طور ایده‌آل این مقدار واحد ممکن باید به صفر نزدیک باشد، ولی تنها در شرایطی امکان‌پذیر است که جریان dc به‌کار رفته برای کنترل شار  $\phi$  حول سیم‌پیچ میدان تغییر کند، تا هرگونه تغییر بار را جبران نماید. این کار چندان ساده نیست. به این دلیل، هنگام طراحی یک نیروگاه، ساخت چند ژنراتور کوچک یک یک ژنراتور بزرگ که قادر به تحمل بار بیک باشد، ترجیح داده می‌شود. هر ژنراتور می‌تواند در نزدیکی بار کامل کار کند تا ولتاژ خروجی اساساً ثابت بماند. می‌توان برحسب تقاضای مشتریان تک تک ژنراتورها را حذف و یا وارد مدار کرد.



شکل ۱۲-۲۲ نمودار فیזורی که تأثیر بار را روی یک ژنراتور همزمان نشان می‌دهد. (الف) ژنراتور به باری با ضریب توان پسفاز  $\cos \theta$  متصل است. (ب) باری بدون تغییر ضریب توان اضافه شده است. اندازه ولتاژ تولید درونی  $E_A$  ثابت است ولی جریان خروجی افزایش می‌یابد. بنابراین ولتاژ خروجی  $V_\phi$  کاهش خواهد یافت.



شکل ۱۲-۲۳ روتور ۲۴ قطبی.

دیمراند واقعی یک مولد، به شدت به نوع بار اضافه شده یا حذف شده مانند نهی مطبوع و روشنائی وابسته است. به‌طور ایده‌آل ولتاژ خروجی مولد یا ژنراتور باید مستقل از بار باشد ولی عملاً چنین نیست. ولتاژ  $E_A$  الیه شده در هر فاز استاتور که غالباً به آن ولتاژ تولیدی داخلی می‌گویند دارای اندازه زیر است:

$$E_A = \omega \phi$$

که  $K$  به ماحول ماشین وابسته است،  $\phi$  شار مغناطیسی تولید شده به وسیله سیم‌پیچ‌های روتور (بنابراین به بار وابسته نیست) و  $\omega$  سرعت دوران است و فقط به محرک اصلی وابسته است. به ژنراتور وابسته است. تغییر بار اندازه  $E_A$  را تغییر نمی‌دهد. ولتاژ تولید شده داخلی را می‌توان به ولتاژ فاز  $V_\phi$  و جریان فاز  $I_A$  با رابطه زیر مرتبط کرد:

$$E_A = V_\phi + jX_S I_A$$

که  $X_S$  راکتانس سنکرون ژنراتور است. اگر بار افزایش یابد، آنگاه جریان ژنراتور از ژنراتور کشیده می‌شود اگر ضریب توان تغییر نکند. مثلاً از ولتاژ بین  $V_\phi$  و  $I_A$  ثابت بماند،  $V_\phi$  کاهش می‌یابد زیرا  $E_A$  نمی‌تواند تغییر کند. مثلاً نمودار فیזורی شکل ۱۲-۲۳ (الف) را در نظر بگیرید.

## منابع با اتصال $\Delta$

منبع را هم می‌توان به فرم  $\Delta$  به هم متصل کرد. البته این روش مرسوم نیست زیرا هر وضعیت نامتعادل در فازهای منابع می‌تواند منجر به چرخش جریانی قابل توجه در حلقه  $\Delta$  گردد. مثلاً سه منبع تک فاز  $V_{ab}$ ،  $V_{bc}$  و  $V_{ca}$  را در نظر بگیرید. قبل از بستن  $\Delta$  که با اتصال  $d$  به  $a$  صورت می‌گیرد، وضعیت نامتعادل را به جمع  $V_{ab} + V_{bc} + V_{ca}$  معین می‌کنیم. فرض کنید دامنه نتیجه تنها ۱ درصد ولتاژ خط باشد، بنابراین جریان چرخشی تقریباً  $\frac{1}{3}$  درصد ولتاژ خط تقسیم بر امپدانس هر منبع است. این امپدانس چقدر می‌تواند باشد؟ این امپدانس به جریانی که منبع می‌تواند بدهد، بستگی دارد که البته مختصراً در ولتاژ پایانه خواهد داشت. اگر این حداکثر جریان ۱ درصد افت را در ولتاژ پایانه موجب شود، آنگاه جریان چرخشی یک سوم جریان ماکزیمم است! پس توانایی منبع در تأمین جریان کم تلفات داخلی آن زیاد خواهد شد. همچنین باید توجه کرد که منابع سه فاز متعادل را از  $Y$  به  $\Delta$  یا برعکس بدون تأثیر بر جریان‌ها یا ولتاژهای بار می‌توان تبدیل نمود. روابط لازم بین ولتاژهای خط و فاز برای حالتی که  $V_{an}$  دارای زاویه فاز مرجع  $0^\circ$  است، در شکل ۱۲-۱۳ دیده می‌شود. این تبدیل اجازه می‌دهد تا هر اتصال منبعی را که ترجیح می‌دهیم انتخاب کنیم. البته تا زمانی که اتصال را ندانیم، نمی‌توانیم جریان‌ها و ولتاژهای منبع را مشخص کنیم. بارهای متغیر را می‌توان با استفاده از رابطه زیر از  $\Delta$  به  $Y$  تبدیل نمود.

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$

که حفظ کردن آن ارزشمند است.



## کاربرد عملی

### سیستم‌های مولد توان الکتریکی

در تولید توان الکتریکی از تکنیک‌های متنوعی می‌توان استفاده کرد. مثلاً تبدیل مستقیم انرژی خورشید به الکتریسیته با سلول خورشیدی تولید توان dc می‌کند. با این وجود علیرغم وجود یک تکنولوژی ساده در این تکنیک تأسیسات مبتنی بر سلول خورشیدی فعلاً از دیگر روش‌های تولید الکتریسیته خیلی گران‌تر بوده و به مبدلهایی برای تبدیل از dc به ac نیاز دارند. دیگر تکنولوژی‌ها مانند ژنراتورهای مبتنی بر توربین‌های بادی، حرارت حاصل از گرمای زمین، هیدروپتانیک، هسته‌ای و سوخت فسیلی بسیار اقتصادی‌ترند. در این سیستم‌ها شفتی از طریق محرک صلی مثل پره‌های بادی یا توربین آبی یا بخاری روی تیغه‌های توربین می‌چرخد (شکل ۱۲-۲۰).



شکل ۱۲-۲۰ تأسیسات انرژی بادی در کالیفرنیا که از ۲۰۰۰ یستگاه تشکیل شده است.

## ۱۲-۵ اندازه‌گیری توان در سیستم‌های سه‌فاز

### کاربرد واتمتر

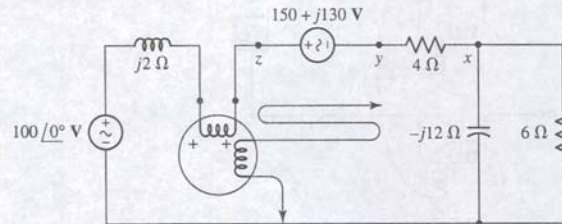
قبل از آغاز بحث سه مورد تکنیک‌های خاص به‌کار رفته برای اندازه‌گیری توان سیستم‌های سه‌فاز، بهتر است باید چگونگی کار و مترکه در مدار تک‌فاز به‌کار می‌رود را مطالعه کنیم. اندازه‌گیری توان با وات‌مترهایی که دو سیم‌پیچ جدا دارند، معمولاً در فرکانس‌هایی کمتر از چند صد Hz انجام می‌شود. یکی از آن‌ها از سیم‌های ضخیم با مقاومت خیلی کم، ساخته



## تمرین

۱۲-۹ قرائت وات متر در شکل ۱۲-۲۴ را معین کنید. بگویید برای قرائت مثبت باید سیم پیچ پتانسیل را معکوس کرد یا خیر. سپس وسیله یا وسایلی که این انرژی را جذب یا تولید می کند، مشخص نمایید. پایانه (+) وات متر متصل به (الف) X، (ب) Y و (ج) Z وصل است.

شکل ۱۲-۲۴

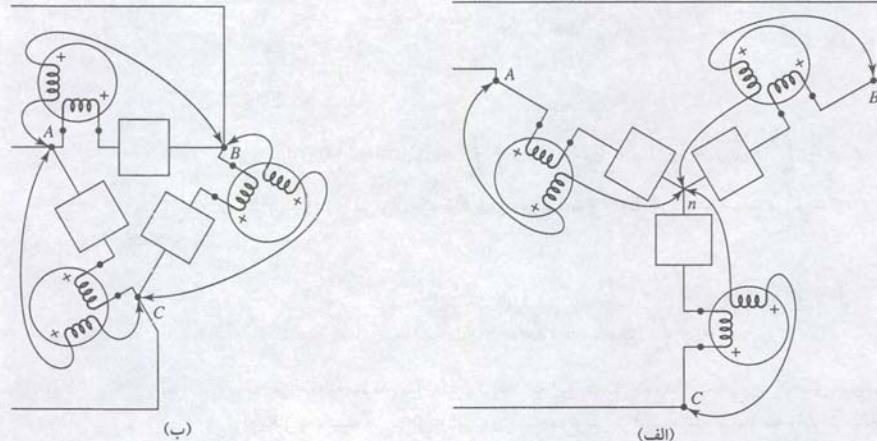


جواب: 1200 W همان طور که هست،  $P_{6\Omega}$  (مصرف)، 2200 W همان طور که هست  $P_{4\Omega} + P_{6\Omega}$  (مصرف)، 500 W عوض شود؛ مصرفی به وسیله 100 V (مصرف).

## وات متر در سیستم سه فاز

۱. نگاه اول، اندازه گیری توان مصرف شده به وسیله بار سه فاز ساده به نظر می رسد. کافی است در هر فاز تنها یک وات متر مستقر کنیم و نتایج را به هم بیفزاییم. مثلاً، یک اتصال صحیح برای اتصال Y بار در شکل ۱۲-۲۵ (الف) نشان داده شده است. هر وات متر سیم پیچ جریان خود را در یک فاز بار قرار داده و سیم پیچ پتانسیل خود را هم بین بار و سیم ختئی مستقر کرده است. به روشی مشابه، سه وات متر را می توان مثل شکل ۱۲-۲۵ (ب) بست تا توان کل دریافتی به وسیله بار  $\Delta$  اندازه گیری شود. روش ها از لحاظ تئوری صحیح اند، ولی در عمل قابل پیاده سازی نیستند، زیرا سیم ختئی در Y همیشه قابل دسترسی نیست و فازها هم در  $\Delta$  در دسترس نمی باشند. مثلاً یک ماشین چرخان سه فاز فقط سه پایانه قابل دسترسی دارد، که ما آن ها را A، B و C می خوانیم. واضح است که به روشی برای اندازه گیری توان کل جذبی به وسیله بار سه فاز با سه پایانه ابل دسترسی نیاز است. اندازه گیری ها ممکن است در سمت منبع صورت گیرد و نه در سمت بار.

شکل ۱۲-۲۵ سه وات متر طوری وصل شده اند که توانی جذبی به وسیله یکی از بارهای سه فاز را بخواند و جمع سه اندازه گیری توان کل است. (الف) یک بار Y، (ب) یک بار  $\Delta$ . هیچ یک از بارها یا منابع نیازی به بالانس بودن ندارند.



شده و سیم پیچ جریان نام دارد. دیگری از تعداد دورهای بیشتر و سیمی نازک تر با مقاومت نسبتاً زیاد ساخته شده و سیم پیچ پتانسیل یا ولتاژ خوانده می شود. می توان مقاومتی اضافه را هم در داخل یا خارج با سیم پیچ سری کرد. گشتاور اعمال شده بر سیستم متحرک و عقربه متناسب با حاصل ضرب لحظه ای جریان در دو سیم پیچ است. به هر حال ماندگاری مکانیکی سیستم متحرک موجب انحراف عقربه متناسب با مقدار متوسط این گشتاور می گردد. طریقه اتصال وات متر به شبکه طوری است که جریان عبوری از وات متر همان جریان شبکه و ولتاژ روی سیم پیچ با ولتاژ دوسر پایانه های شبکه برابر است. جریان در سیم پیچ پتانسیل از تقسیم ولتاژ ورودی بر مقاومت سیم پیچ حاصل می گردد.

واضح است که وات متر چهار پایانه دارد و اتصال به این پایانه ها باید به طور صحیحی صورت گیرد تا امکان خواندن فراهم گردد. دقیق تر بگوییم، فرض کنید که می خواهیم توان جذب شده به وسیله یک شبکه غیر فعال را اندازه بگیریم. سیم پیچ جریان با یکی از دو سیم متصل به بار سری می شود و سیم پیچ پتانسیل بین دو سیم معمولاً در سمت بار سیم پیچ جریان قرار می گیرد. پایانه های سیم پیچ پتانسیل اغلب طبق شکل ۱۲-۲۳ (الف) با پیکان نشان داده می شوند. هر سیم پیچ دو پایانه دارد و رابطه صحیحی بین حس جریان و ولتاژ باید مشاهده گردد. انتهای هر سیم پیچ معمولاً با (+) علامت زده می شود و خواندن صحیح هنگامی امکان پذیر است که جریان مثبت وارد پایانه (+) سیم پیچ جریان گردد، ضمن این که پایانه (+) سیم پیچ پتانسیل نسبت به پایانه بی علامت مثبت است. پس وات متر شکل ۱۲-۲۳ (الف) هنگام جذب توان به وسیله شبکه سمت راست، انحرافی صحیح و افزاینده خواهد داشت. اگر فقط یکی از سیم پیچ ها معکوس گردد، و نه هر دوی آن ها، موجب انحراف معکوس عقربه می شود. معکوس کردن هر دو سیم پیچ تأثیری بر خواندن ندارد. بیایید به عنوان مثالی از کاربرد چنین وات متری در اندازه گیری توان متوسط، مدار شکل ۱۲-۲۳ (ب) را بررسی کنیم. اتصال وات متر طوری است که توان جذب شده در سمت راست وات متر، یعنی منبع سمت راست در جهت افزایشی خوانده شود. توان جذب شده به وسیله این منبع با رابطه زیر داده می شود:

$$P = |V_2| |I| \cos(\text{ang } V_2 - \text{ang } I)$$

با روش تجمیع یا تحلیل تک حلقه، جریان را به دست می آوریم.

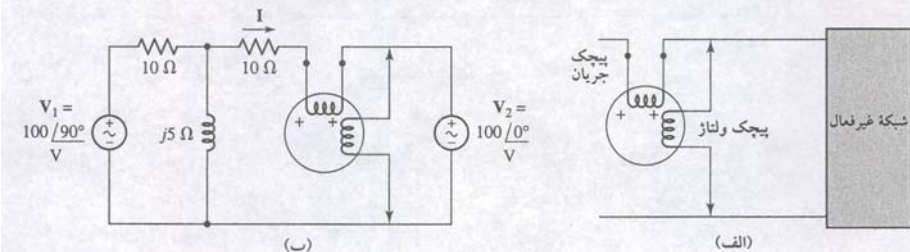
$$I = 11.18 \angle 153.4^\circ \text{ A}$$

و بنابراین توان جذب شده برابر است با:

$$P = (100)(11.18) \cos(0^\circ - 153.4^\circ) = -1000 \text{ W}$$

بنابراین عقربه اندازه گیری به سمت پایین منحرف می شود تا جایی که متوقف گردد. در عمل تعویض سیم پیچ پتانسیل راحت تر از سیم پیچ جریان صورت می گیرد. این عمل خواندن 1000 W را به همراه دارد.

شکل ۱۲-۲۳ (الف) اتصال وات متر که هنگام خواندن توان جذب شده شبکه عقربه آن در جهت افزاینده حرکت می کند. (ب) مثالی از نصب وات متر برای خواندن توان جذب شده به وسیله منبع سمت راست.





اجازه دهید این روال را قبل از این که بدانیم وات مترها در واقع بیش از نیازند، بررسی کنیم. فرض می‌کنیم منبع متعادل یا بالانس باشد:

$$V_{ab} = 100 \angle 0^\circ \quad V$$

$$V_{bc} = 100 \angle -120^\circ \quad V$$

$$V_{ca} = 100 \angle -240^\circ \quad V$$

$$V_{an} = \frac{100}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \quad V$$

$$V_{bn} = \frac{100}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ \quad V$$

$$V_{cn} = \frac{100}{\sqrt{3}} \angle -270^\circ \quad V$$

یا

برای بار نامتعادل داریم:

$$Z_A = -j 10 \Omega \quad Z_B = j 10 \Omega \quad Z_C = 10 \Omega$$

اکنون وات مترها را ایده‌آل تصور کنید که طبق شکل ۱۲-۲۶ وصل شده و نقطه x آن روی n قرار دارد. جریان‌های سه خط از تحلیل حلقه به دست می‌آید:

$$I_{aA} = 19.32 \angle 15^\circ \quad A$$

$$I_{bB} = 19.32 \angle 165^\circ \quad A$$

$$I_{cC} = 10 \angle -90^\circ \quad A$$

ولتاژ بین سیم‌های خنثی برابر است با

$$V_{nN} = V_{nb} + V_{BN} = V_{nb} + I_{bB}(j10) = 157.7 \angle -90^\circ$$

توان متوسطی که هر وات متر مشخص می‌کند را می‌توان محاسبه کرد:

$$P_A = V_P I_{aA} \cos(\text{ang } V_{an} - \text{ang } I_{aA})$$

$$P_A = \frac{100}{\sqrt{3}} 19.32 \cos(-30^\circ - 15^\circ) = 788.7 \text{ W}$$

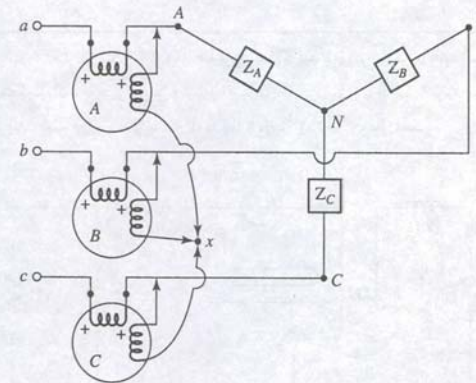
$$P_B = \frac{100}{\sqrt{3}} 19.32 \cos(-150^\circ - 165^\circ) = 788.7 \text{ W}$$

$$P_C = \frac{100}{\sqrt{3}} 10 \cos(-270^\circ + 90^\circ) = -577.4 \text{ W}$$

پس کل توان 1 kW است. چون یک جریان A rms از 10 از مقاومت بار می‌گذرد، توان کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = 10^2(10) = 1 \text{ kW}$$

و به این وسیله هر دو روش با یکدیگر همخوانی دارد.



شکل ۱۲-۲۶ روش اتصال وات مترها برای اندازه‌گیری کل توان مصرفی به وسیله بار سه فاز. تنها سه پایانه بار قابل دسترس اند.

چنین روشی وجود دارد و با آن می‌توان توان دریافتی به وسیله یک بار نامتعادل از یک منبع نامتعادل را اندازه گرفت. اکنون بیایید سه وات متر را طوری وصل کنیم که هر یک از سیم‌پیچ‌های جریان به یک سیم منبع و سیم‌پیچ ولتاژ بین آن خط و نقطه مشترک x، طبق شکل ۱۲-۲۶ باشد. گرچه یک سیستم با اتصال بار Y تشریح شده است، بحث ارائه شده برای بار Δ هم معتبر است. نقطه x ممکن است یک نقطه نامشخص در سیستم سه فاز باشد، یا صرفاً نقطه‌ای در فضا باشد که در آن هر سه سیم‌پیچ پتانسیل گره مشترکی دارند. توان متوسط اندازه‌گیری شده با وات متر A برابر است با:

$$P_A = \frac{1}{T} \int_0^T v_{Ax} i_{aA} dt$$

که در آن T تناوب همه ولتاژهای منابع است. اندازه‌گیری در وات متر دیگر با عبارتی مشابه داده می‌شود. بنابراین توان متوسط کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = P_A + P_B + P_C = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{Ax} i_{aA} + v_{Bx} i_{bB} + v_{Cx} i_{cC}) dt$$

هر یک از سه ولتاژ در عبارت فوق را می‌توان برحسب یک ولتاژ فاز و ولتاژ بین نقطه x و خط خنثی نوشت:

$$v_{Ax} = v_{AN} + v_{Nx}$$

$$v_{Bx} = v_{BN} + v_{Nx}$$

$$v_{Cx} = v_{CN} + v_{Nx}$$

و بنابراین

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_{Nx} (i_{aA} + i_{bB} + i_{cC}) dt$$

کل بار سه فاز را می‌توان یک ابرگره در نظر گرفت و قانون جریان کیرشهف می‌گوید که:

$$i_{aA} + i_{bB} + i_{cC} = 0$$

پس

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC}) dt$$

مراجعه به نمودار مدار نشان می‌دهد که این حاصل جمع‌ها، مجموع توان‌های متوسط دریافتی به وسیله هر فاز از بار است و لذا مجموع مقادیر قرائت شده توسط سه وات متر بیانگر توان متوسط کل دریافتی به وسیله بار کل است!



## روش دو وات متری

نشان دادیم که نقطه  $X$ ، یعنی اتصال مشترک سه سیم پیچ پتانسیل هر جایی که بخواهیم می تواند باشد، بدون این که جمع جبری مقادیر قرائت شده با وات مترها را تحت تأثیر قرار دهد. اکنون بگذارید اثر استقرار نقطه  $X$  را روی یکی از سه خط منبع بررسی کنیم. مثلاً اگر یکی از دو انتهای هر سیم پیچ پتانسیل به  $B$  بازگردانده شود، ولتاژی در دو سر سیم پیچ پتانسیل وات متر  $B$  وجود ندارد و این وات متر باید عدد صفر را بخواند. بنابراین می توان آن را حذف کرد ولی جمع جبری در وات متر دیگر هنوز توان کل دریافتی به وسیله بار است. وقتی محل  $X$  به این طریق انتخاب گردد، روش را روش دو وات متر می نامیم. مجموع دو اندازه گیری توان کل را مشخص می کند و این مستقل از (۱) بار نامتعادل (۲) منبع نامتعادل (۳) اختلاف در دو وات متر و (۴) شکل موج منبع متناوب است. تنها فرضی که نمودیم این بود که اصلاح وات متر به اندازه کافی کوچک است و می توان از آن چشم پوشید. مثلاً در شکل ۱۲-۲۶، از سیم پیچ جریان هر وات متر جریان منبع عبور کرده و به وسیله بار به علاوه سیم پیچ ولتاژ کشیده می شود. چون جریان آخری خیلی کوچک است، اثر آن را می توان با آگاهی از مقاومت سیم پیچ پتانسیل و ولتاژ دو سرش، مشخص کرد. با این دو کمیت می توان توان تلف شده در سیم پیچ ولتاژ را به خوبی تخمین زد.

در مثال عددی فوق، اکنون بیایید فرض کنیم که دو وات متر به کار رفته است، یکی با سیم پیچ جریان در خط  $a$  و سیم پیچ پتانسیل در بین خطوط  $A$  و  $B$  و دیگری با سیم پیچ جریان در خط  $c$  و سیم پیچ ولتاژ بین  $C$  و  $B$ . وات متر اول چنین می خواند:

$$\begin{aligned} P_1 &= V_{AB} I_{aA} \cos(\text{ang } V_{AB} - \text{ang } I_{aA}) \\ &= 100 (19.32) \cos(0^\circ - 15^\circ) \\ &= 1866 \text{ W} \end{aligned}$$

و دومی چنین قرائت می کند:

$$\begin{aligned} P_2 &= V_{CB} I_{cC} \cos(\text{ang } V_{CB} - \text{ang } I_{cC}) \\ &= 100 (10) \cos(60^\circ + 50^\circ) \\ &= -866 \text{ W} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$P = P_1 + P_2 = 1866 - 866 = 1000 \text{ W}$$

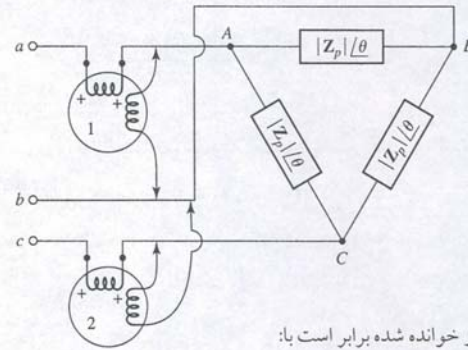
و این همان چیزی است که از مدار انتظار داریم.

در حالت بار متعادل، روش دو وات متر اجازه می دهد تا زاویه  $\text{PF}$  و نیز توان دریافتی به وسیله بار مشخص شود. بیایید باری امپدانس را با زاویه فاز  $\theta$  فرض کنیم. هر یک از دو اتصال  $Y$  یا  $\Delta$  می تواند به کار رود ولی ما اتصال  $\Delta$  را طبق شکل ۱۲-۲۷ برمی گزینیم، ساخت یک نمودار فیزیوری مثل شکل ۱۲-۱۹، تعیین زاویه فاز بین ولتاژها و جریان های خط را امکان پذیر می سازد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} P_1 &= |V_{AB}| |I_{aA}| \cos(\text{ang } V_{AB} - \text{ang } I_{aA}) \\ &= V_L I_L \cos(30^\circ + \theta) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} P_2 &= |V_{CB}| |I_{cC}| \cos(\text{ang } V_{CB} - \text{ang } I_{cC}) \\ &= V_L I_L \cos(30^\circ - \theta) \end{aligned}$$



نسبت دو مقدار خوانده شده برابر است با:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos(30^\circ + \theta)}{\cos(30^\circ - \theta)} \quad (5)$$

اگر جملات کسینوس را بسط دهیم، این معادله برای  $\tan \theta$  به راحتی حل می گردد.

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \quad (6)$$

گر قرائت دو وات متر مساوی باشند،  $\text{PF} = 1$  است، در خواندن مساوی با علامت مخالف، نوع بار راکتیو خالص است،  $P_2$  بزرگتر از  $P_1$  امپدانس القایی و  $P_2$  کوچکتر از  $P_1$  نیز بار خازنی را نشان می دهد. چگونه بدانیم که کدام وات متر  $P_1$  و کدام  $P_2$  است؟ می دانیم که  $P_1$  در خط  $A$  و  $P_2$  در خط  $C$  است و ترتیب فاز سیستم به نحوی است که  $V_{an}$  نسبت به  $V_{cn}$  پس فاز است. برای تفکیک این دو وات متر همین اطلاعات کافی است، ولی در عمل موجب اشتباه می شود. اگر حتی موفق به تفکیک آن دو نشویم، اندازه زاویه فاز را می دانیم ولی علامت آن را می دانیم. غالباً این اطلاعات کافی است، اگر بار یک موتور القایی باشد، زاویه باید مثبت باشد. دیگر دانستن این که کدام وات متر کدام است، لازم نیست. اگر اطلاعات قبلی راجع به بار داریم، آن گاه چند روش برای رفع شبهات وجود دارد. شاید که ساده ترین راه افزودن یک بار آکتیو امپدانس بالا مثلاً خازن سه فاز در دو سر بار مجهول باشد. در این حال بار خازنی تر می شود. بنابراین اگر اندازه  $\tan \theta$  (یا اندازه  $\theta$ ) کاهش یابد، آن گاه بار القایی است، در حالی که افزایش در اندازه  $\tan \theta$  بیانگر وجود بار خازنی است.

ار متعادل شکل ۱۲-۲۸ به وسیله یک سیستم سه فاز متعادل با  $V_{ab} = 230 \angle 0^\circ \text{ V rms}$  تغذیه و ترتیب فاز مثبت اختیار شده است. مقدار قرائت شده به وسیله هر وات متر و توان کل دریافتی به وسیله بار را مشخص نمایید.

سیم پیچ ولتاژ وات متر شماره ۱ برای اندازه گیری ولتاژ  $V_{ac}$  و سیم پیچ جریان آن برای اندازه گیری فاز جریان  $I_{aA}$  به کار رفته است. چون ترتیب فاز مثبت به کار رفته است، پس:

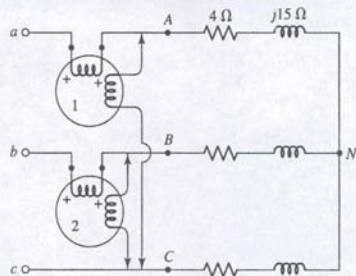
$$\begin{aligned} V_{ab} &= 230 \angle 0^\circ \text{ V} \\ V_{bc} &= 230 \angle -120^\circ \text{ V} \\ V_{ca} &= 230 \angle 120^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

وجه کنید که  $V_{ac} = -V_{ca} = 230 \angle -60^\circ \text{ V}$  است.

شکل ۱۲-۲۷ دو وات متر برای خواندن توان کل دریافتی به وسیله بار سه فاز متعادل، وصل شده اند.



مثال ۱۲-۷



شکل ۱۲-۲۸ یک سیستم بالانس سه فاز متصل به یک بار سه فاز بالانس که توان آن با تفکیک دو وات متر اندازه گیری می شود.



جریان فاز  $I_{aA}$  از ولتاژ فاز  $V_{an}$  تقسیم بر امپدانس فاز  $4 + j15 \Omega$  به دست می‌آید:

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{4 + j15} = \frac{(230/\sqrt{3}) \angle -30^\circ}{4 + j15} A$$

$$= 8.554 \angle -105.1^\circ A$$

بنابراین می‌توانیم توان قرائت شده به وسیله وات‌متر 1 را به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$P_1 = |V_{ac}| |I_{aA}| \cos(\text{ang } V_{ac} - \text{ang } I_{aA})$$

$$= (230)(8.554) \cos (-60^\circ + 105.1^\circ) W$$

$$= 1389 W$$

به همین ترتیب داریم:

$$P_2 = |V_{bc}| |I_{bB}| \cos(\text{ang } V_{bc} - \text{ang } I_{bB})$$

$$= (230)(8.554) \cos (-120^\circ - 134.9.1^\circ) W$$

$$= -512.5 W$$

بنابراین توان متوسط کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 = 876.5 W$$

## تمرین

۱۲-۱۰ برای مدار شکل ۱۲-۲۶، فرض کنید بارهای  $Z_B = 50 \angle 60^\circ \Omega$ ،  $Z_A = 25 \angle 60^\circ \Omega$  و  $Z_C = 50 \angle 60^\circ \Omega$  rms و  $V_{AB} = 600 \angle 0^\circ$  به‌علاوه ترتیب فاز مثبت و نقطه x در C باشد. (الف)  $P_A$ ، (ب)  $P_B$ ، (ج)  $P_C$ .

جواب: 0، 7200 W، 0

## ۱۲-۶ خلاصه فصل و مرور

- بخش عمده تولید الکتریسیته به فرم توان سه فاز است.
- برق منازل مسکونی به فرم جریان متناوب با فرکانس 60 Hz و ولتاژ 115 rms است.
- منابع سه فاز می‌توانند به صورت Y یا  $\Delta$  متصل شوند. هر دو نوع منبع سه پایانه دارند و هر یک متعلق به یک فاز است. منابع Y یک سیم اتصال خنثی نیز دارند.
- در یک سیستم متعادل سه‌فاز، تمام ولتاژها با هم برابرند، ولی هر یک با دو فاز دیگر  $120^\circ$  اختلاف فاز دارد.
- بار در یک سیستم سه فاز ممکن است به فرم Y یا  $\Delta$  باشد.
- در یک منبع متعادل با اتصال Y و ترتیب فاز مثبت  $(abc)$ ، ولتاژ خط برابر است با:

$$V_{ab} = \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ \quad V_{bc} = \sqrt{3}V_p \angle -90^\circ$$

$$V_{ca} = \sqrt{3}V_p \angle -210^\circ$$

و ولتاژ هر فاز برابر است با:

$$V_{an} = V_p \angle 0^\circ \quad V_{bn} = V_p \angle -120^\circ \quad V_{cn} = V_p \angle -240^\circ$$

- در یک سیستم با بار Y، جریان‌های منبع با جریان‌های فاز برابرند.
- در اتصال  $\Delta$  منبع، ولتاژهای خط با ولتاژهای فاز برابر است.
- در یک سیستم متعادل با ترتیب فاز مثبت و یک بار  $\Delta$  متعادل، جریان‌های خط عبارت‌اند از:

$$I_a = I_{AB} \sqrt{3} \angle -30^\circ \quad I_b = I_{BC} \sqrt{3} \angle -150^\circ \quad I_c = I_{CA} \sqrt{3} \angle +90^\circ$$

و جریان‌های فاز عبارت‌اند از:

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{\Delta}} = \frac{V_{ab}}{Z_{\Delta}} \quad I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_{\Delta}} = \frac{V_{bc}}{Z_{\Delta}} \quad I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_{\Delta}} = \frac{V_{ca}}{Z_{\Delta}}$$

- بیشتر محاسبات توان بر مبنای تک‌فاز انجام می‌شود و فرض بر این است که سیستم متعادل است. در غیر این صورت تحلیل گره‌ای / حلقه‌ای، روشی معتبر خواهد بود.
- توان در یک سیستم سه فاز (بالانس یا غیربالانس) تنها با دو وات‌متر اندازه‌گیری می‌شود.
- توان لحظه‌ای در هر سیستم سه فاز بالانس ثابت است.

## ۱۲-۷ خواندنی‌های کمکی

A good overview of ac power concepts can be found in Chap. 2 of:

B.M. Weedy, *Electric Power Systems*, 3<sup>rd</sup> ed. Chichester, England: Wiley, 1984.

A comprehensive book on generation of electrical power from wind is:

T. Burton, D. Sharpe, N. Jenkins, and E. Bossanyi, *Wind Energy Handbook*. Chichester, England: Wiley, 2001.

## مسائل

### ۱۲-۲ سیستم‌های چندفاز

۱. مداری که در آزمایشگاهی ساخته شده با ولت‌متر اندازه‌گیری و نتایج زیر حاصل شده است:

$$V_{ce} = 10 V \quad V_{bc} = 0.7 V$$

مطلوب است  $V_{cb}$ ،  $V_{eb}$ ،  $V_{bc}$ .

۲. یک تقویت‌کننده ترانزیستوری اثر میدان سورس مشترک با SPICE شبیه‌سازی شده است الف. اگر  $V_{gs} = -1 V$  و  $V_{ds} = 5 V$  باشد،  $V_{gd}$  را پیدا کنید. ب. اگر  $V_{ds} = 4 V$  و  $V_{gd} = 2.5 V$  باشد،  $V_{sg}$  را به دست آورید.

۳. یک سیستم قدرت (توان) شش فاز به صورت بخشی از منبع تغذیه dc جریان بالا ساخته شده است. ولتاژهای فاز را برای (الف) ترتیب فاز مثبت (ب) ترتیب فاز منفی بنویسید.

۴. اگر  $V_{xy} = 110 \angle 20^\circ V$  و  $V_{xz} = 160 \angle -50^\circ V$  و  $V_{ay} = 80 \angle 130^\circ V$  باشد، مطلوب است (الف)  $V_{yz}$ ، (ب)  $V_{az}$ ، (ج)  $V_{zx} / V_{xy}$ .

۵. برای مداری خاص، می‌دانیم که  $V_{12} = 100 \angle 0^\circ$  و  $V_{45} = 60 \angle 75^\circ$ ،  $V_{42} = 80 \angle 120^\circ$  و  $V_{35} = -j120$  است. مطلوب است (الف)  $V_{25}$ ، (ب)  $V_{13}$ .

۶. در یک سیستم ac خاص،  $V_{12} = 9 \angle 87^\circ V$  و  $V_{23} = 8 \angle 45^\circ V$  است. مطلوبست (الف)  $V_{21}$ ، (ب)  $V_{32}$  و (ج)  $V_{12} - V_{32}$ .

۷. یک سیستم قدرت دارای  $V_{an} = 400 \angle -45^\circ V$  و  $V_{bn} = 400 \angle 75^\circ V$  است. (الف) نمودار فیزیوری شامل  $V_{cn}$  را ترسیم نمایید. (ب) آیا رشته فاز سیستم مثبت است یا منفی؟ توضیح دهید.

۸. با فرض  $I_{12} = 33 \angle 12^\circ A$  و  $I_{23} = 40 \angle 12^\circ A$ ، جریان  $I_{31}$  چند است؟

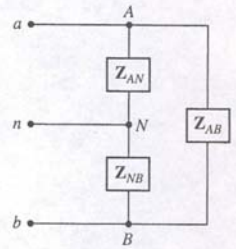
۹. اگر یک مدار ac دارای جریان‌های  $I_{12} = 5 \angle 55^\circ A$  و  $I_{23} = 4 \angle 33^\circ A$  باشد،  $I_{31}$  برای فرکانس 50 Hz چقدر است؟

### ۱۲-۲ سیستم‌های تک‌فاز سه سیم

۱۰. یک سیستم سه سیمه  $230/460 V$  rms، 60 Hz در شکل ۱۲-۲۹ دیده می‌شود که سه بار را تغذیه می‌کند: بار AN توان مختلط kVA  $40 \angle 40^\circ$  را می‌کشد، بار NB،  $8 \angle 10^\circ$  kVA مصرف می‌کند و بار AB،  $4 \angle -80^\circ$  را دریافت می‌نماید. دو جریان خط و جریان سیم خنثی را پیدا کنید.

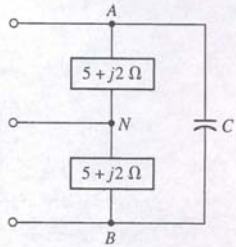
۱۱. یک سیستم یک فاز سه سیم بارهای  $Z_{AN} = Z_{NB} = 10 \Omega$  و بار  $Z_{AB} = 16 + j2/2 \Omega$  را دارد. فرض می‌شود که هر سه خط فاقد مقاومت باشد، فرض کنید  $V_{an} = V_{nb} = 120 \angle 0^\circ V$  باشد، مطلوب است (الف)  $I_{aA}$  و  $I_{nN}$ ، (ب) با اتصال یک مقاومت  $10 \Omega$  دیگر که موازی Z است، سیستم از حالت تعادل خارج می‌شود. مطلوب است  $I_{bB}$ ،  $I_{aA}$  و  $I_{nN}$ .





شکل ۱۲-۲۹

۱۲. یک سیستم کم بازده تک‌فاز سه سیم دارای ولتاژهای منبع  $V_{an} = V_{nb} = 720 \angle 0^\circ \text{ V}$  و مقاومت خط  $R_{nN} = 10 \Omega$  و بارهای  $Z_{AN} = 10 + j3 \Omega$  و  $R_{aA} = R_{bB} = 1 \Omega$ ،  $Z_{AB} = 18 + j0 \Omega$  و  $Z_{NB} = 8 + j2 \Omega$  است. مطلوب است (الف)  $I_{aA}$ ، (ب)  $I_{nN}$ ، (ج)  $P$  سه‌پا (د)  $P$  کل بارها. ۱۳. در یک سیستم تک‌فاز سه سیم متعادل شکل ۱۲.۲۰،  $V_{AN} = 220 \text{ V}$ ،  $60 \text{ Hz}$  است. (الف) سائز  $C$  چه باید باشد تا ضریب توان بار واحد گردد؟ (ب) چند  $\text{kVA}$  را  $k$  تحمل می‌کند.

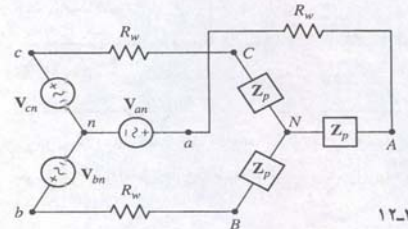


شکل ۱۲-۳۰

۱۴. سیستم تک‌فاز سه سیم متعادل شکل ۱۲.۲۹ دارای ولتاژهای منبع  $V_{an} = V_{nb} = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$  و مقاومت خط و خنثی صفر. بارهای  $Z_{AN} = 12 + j3 \Omega$ ،  $Z_{NB} = 12 + j3 \Omega$  است. مطلوب است  $Z_{AB}$  به نحوی که (الف)  $I_{aA} = 30 \text{ A rms}$  و  $X_{AB} = 0$  و  $R_{AB} = 0$  و زاویه  $I_{aA} = 0^\circ$  است.

### ۱۲-۳ اتصال سه فاز Y-Y

۱۵. شکل ۱۲.۳۱ یک سیستم سه‌فاز سه‌سیمه متعادل را با ترتیب فاز مثبت نشان می‌دهد. اجازه بدهید  $V_{BC} = 120 \angle 60^\circ \text{ V}$  و  $R_w = 0.6 \Omega$  باشد. اگر بار کل (شامل مقاومت سیم) مقدار  $\text{kVA}$  ۵ را در  $\text{PF} = 0.8$  پس‌فاز دریافت کند (الف) توان کلی در مقاومت خط را پیدا کنید و (ب)  $V_{an}$ .



شکل ۱۲-۳۱

۱۶. فرض کنید در سیستم متعادل شکل ۱۲.۳۱ مقدار  $V_{an} = 2300 \angle 0^\circ \text{ V}$  و  $R_w = 2 \Omega$  باشد. اگر برای منبعی که توان مختلط کل  $S = 100 + j30 \text{ kVA}$  را فراهم می‌کند، ترتیب مثبت فاز اختیار شود (الف)  $I_{aA}$  را به دست آورید، (ب)  $V_{AN}$ ، (ج)  $Z_p$ ، (د) بازده انتقال را مشخص نمایید.

۱۷. در سیستم سه‌فاز متعادل (شکل ۱۲.۳۱) فرض کنید  $Z_p = 12 + j5 \Omega$  و  $I_{bB} = 20 \angle 0^\circ \text{ A}$  و  $0.935$  کار کند. مطلوب است (الف)  $R_w$ ، (ب)  $V_{bn}$ ، (ج)  $V_{AB}$ ، (د) توان مختلط تولیدی به وسیله منبع.

۱۸. یک سیستم سه‌فاز سه‌سیمه به بار متعادل  $Y$  با مقاومت  $75 \Omega$ ، القاگر  $125 \text{ mH}$  و خازن  $55 \mu\text{F}$  به طور سری از هر خط به نقطه خنثی وصل است. با فرض ترتیب فاز مثبت و  $V_p = 125 \text{ V}$ ،  $60 \text{ Hz}$ ، جریان خط را به دست آورید. توان کل دریافتی به وسیله بار را مشخص نمایید و ضریب توان بار را معین کنید.

۱۹. یک سیم خنثی بدون اتلاف سیمی بین دو گره  $n$  و  $N$  در سیستم سه‌فاز شکل ۱۲.۳۱ دیده می‌شود. سیستم را متعادل با ترتیب فاز مثبت تصور کنید، ولی بارها نامتعادل می‌باشند.  $Z_{AN} = 8 + j6 \Omega$ ،  $Z_{BN} = 12 - j16 \Omega$  و  $Z_{CN} = 5 \Omega$  است. اگر  $V_{an} = 120 \angle 0^\circ \text{ V}$  و  $R_w = 0.5 \Omega$  باشد،  $I_{nN}$  را پیدا کنید.

۲۰. برای مدار بالانس شکل ۱۲.۳۱،  $V_{an} = 40 \angle 0^\circ \text{ V}$  است (با فاز مثبت) مطلوب است جریان خط و توان کل تحویلی به بار اگر امپدانس فاز  $Z_p = 5 + j10 \Omega$  و  $R_w$  برابر با (الف)  $0 \Omega$  (ب)  $3 \Omega$  باشد.

۲۱. امپدانس فاز  $Z_p$  در سیستم شکل ۱۲.۳۱ متشکل از یک امپدانس  $75 \angle 25^\circ \Omega$  موازی با خازن  $25 \mu\text{F}$  است.  $V_{an} = 240 \angle 0^\circ \text{ V}$  در فرکانس  $60 \text{ Hz}$  و  $R_w = 2 \Omega$  است. (الف)  $I_{aA}$  را پیدا کنید، (ب) سه‌پا  $P$ ، (ج)  $P$  بار، (د) ضریب توان منبع را پیدا کنید.

۲۲. هر بار در مدار شکل ۱۲.۳۱ متشکل از یک امپدانس القایی  $100 \angle 28^\circ \Omega$  موازی با یک خازن  $500 \text{ nF}$  است، مقاومت  $R_w = 1 \Omega$  است. با ترتیب فاز مثبت و  $V_{ab} = 240 \angle 0^\circ \text{ V}$ ،  $f = 50 \text{ Hz}$ ، جریان  $\text{rms}$  خط را به دست آورید. توان کل حمل شده به بار را مشخص کنید، توان تلف شده در سیم‌ها را بیابید. پاسخ خود را با شبیه‌سازی مناسبی روی PSpice تست نمایید.

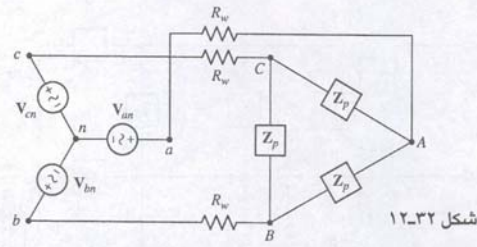
۲۳. سیستم سه‌فاز سه‌سیمه متعادل شکل ۱۲.۳۱ دارای  $R_w = 0$  و  $Z_p = 10 + j5 \Omega$  در هر فاز است. (الف) منبع در چه ضریب توانی کار می‌کند؟ (ب) با فرض  $f = 60 \text{ Hz}$  چه خازنی باید موازی با امپدانس هر فاز قرار داد تا ضریب به  $0.93$  پس‌فاز افزایش یابد؟ (ج) چقدر توان راکتیو به وسیله هر خازن کشیده می‌شود به شرطی که ولتاژ خط در بار  $440 \text{ V}$  باشد.

۲۴. هر بار در شکل ۱۲.۳۱ متشکل از یک القاگر  $1.5 \text{ H}$  موازی با یک خازن  $100 \mu\text{F}$  و یک مقاومت  $1 \text{ k}\Omega$  است. مقاومت  $R_w = 0 \Omega$  می‌باشد. با استفاده از فاز مثبت و  $V_{ab} = 115 \angle 0^\circ \text{ V}$  در  $f = 60 \text{ Hz}$ ، جریان

$\text{rms}$  خط و توان کل حمل شده به بار را معین کنید. پاسخ را با شبیه‌سازی PSpice تست کنید.

### ۱۲-۴ اتصال مثلث (دلتا) $\Delta$

۲۵. شکل ۱۲.۳۲ یک مدار سه‌فاز سه‌سیمه متعادل را نشان می‌دهد. فرض کنید  $V_{an} = 200 \angle 60^\circ \text{ V}$  و  $R_w = 0$  باشد، هر فاز از بار یک بار مختلط به اندازه  $S_p = 2 - j1 \text{ kVA}$  را جذب می‌کند. اگر ترتیب فاز (+) را اختیار کنیم. مطلوب است (الف)  $V_{bc}$ ، (ب)  $Z_p$ ، (ج)  $I_{aA}$ .

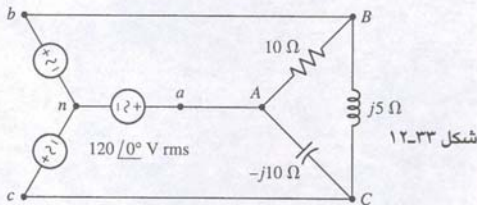


شکل ۱۲-۳۲

۲۶. یک بار متعادل  $\Delta$  از شکل ۱۲.۳۲ به توان  $15 \text{ kVA}$  در  $\text{PF} = 0.8$  پس‌فاز نیاز دارد. فرض کنید ترتیب فاز (+) و  $V_{BC} = 180 \angle 30^\circ \text{ V}$  باشد. اگر  $R_w = 0.75 \Omega$  باشد، مطلوب است (الف)  $V_{bc}$ ، (ب) توان مختلط کل تولید به وسیله منبع.

۲۷. بار در سیستم متعادل شکل ۱۲.۳۲ توان مختلط کل  $3 + j1.8 \text{ kVA}$  را می‌کشد، در حالی که منبع  $3.46 + j1.8 \text{ kVA}$  را تولید می‌نماید. اگر  $R_w = 5 \Omega$  باشد، مطلوب است (الف)  $I_{aA}$ ، (ب)  $I_{AB}$ ، (ج)  $V_{an}$ . ۲۸. بار  $\Delta$  در مدار شکل ۱۲.۳۲ توان  $1800 \text{ W}$  را با  $\text{PF} = \sqrt{2}/2$  پس‌فاز می‌کشد. توان تلف شده در مقاومت سیم  $240 \text{ W}$  و  $R_w = 2.3 \Omega$  است. ولتاژ فاز  $\text{rms}$  منبع و جریان بار را به دست آورید.

۲۹. منبع شکل ۱۲.۳۳ متعادل و دارای ترتیب فاز مثبت است (الف)  $I_{aA}$ ، (ب)  $I_{bB}$ ، (ج)  $I_{cC}$  و (د) کل توان مختلطی را که منبع تأمین می‌کند، به دست آورید.



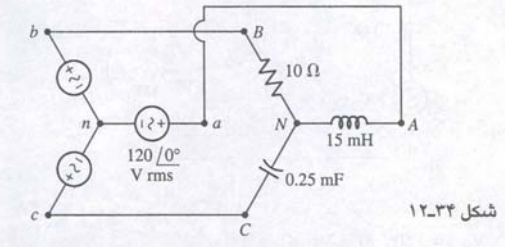
شکل ۱۲-۳۳

۳۰. برای مدار شکل ۱۲.۳۲،  $V_{AB} = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$  با ترتیب فاز (+)،  $R_w = 200 \text{ m}\Omega$  و امپدانس فاز  $Z_p$  متشکل از یک مقاومت موازی با یک راکتانس  $30 \Omega$  می‌باشد. توان کل تهیه شده به وسیله منبع، ضریب توان آن و بازده انتقال را پیدا کنید.

۳۱. منبع  $Y$  سه‌فاز بالانس در شکل ۱۲.۳۲ دارای  $V_{an} = 140 \angle 0^\circ \text{ V}$  با ترتیب فاز مثبت است. فرض کنید  $R_w = 0$  است. بار سه‌فاز متعادل

$15 \text{ kW}$  و  $9 \text{ kVAR}$  را می‌کشد. مطلوب است (الف)  $V_{AB}$ ، (ب)  $I_{aA}$ ، (ج)  $I_{AB}$ .

۳۲. برای سیستم سه‌فاز شکل ۱۲.۳۴، یک منبع متعادل با ترتیب فاز (+) را در نظر بگیرید. اگر فرکانس کاری  $60 \text{ Hz}$  باشد، اندازه (الف)  $V_{AN}$ ، (ب)  $V_{BN}$ ، (ج)  $V_{CN}$  را به دست آورید. پاسخ خود را با یک شبیه‌سازی مناسب در PSpice آزمایش کنید.



شکل ۱۲-۳۴

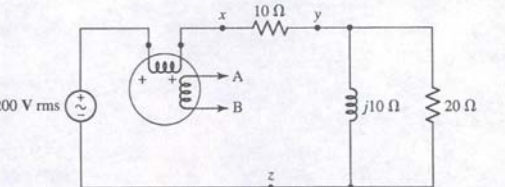
۳۳. (الف) در هر یک از خطوط شکل ۱۲.۳۳ یک مقاومت  $15 \Omega$  وارد کنید و دوباره تمرین ۲۹ را تکرار نمایید. (ب) حل خود را با PSpice تست کنید.

۳۴. یک سیستم سه‌فاز که دارای ولتاژ خط  $240 \text{ V rms}$  است حاوی یک بار  $\Delta$  از  $12 + j \text{ k}\Omega$  در هر فاز و نیز یک بار  $5 + j3 \text{ k}\Omega$  در هر فاز است. جریان خط، توان دریافتی به وسیله بار ترکیبی و ضریب توان بار را معین کنید.

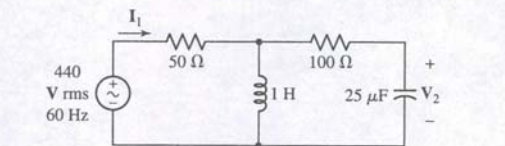
### ۱۲-۵ اندازه‌گیری توان در سیستم‌های سه‌فاز

۳۵. مقدار قرائت شده به وسیله وات‌متر در مدار شکل ۱۲.۳۵ را معین کنید. به شرطی که پایانه‌های  $A$  و  $B$  به ترتیب (الف)  $x$  و  $y$ ، (ب)  $x$  و  $z$ ، (ج)  $y$  و  $z$  وصل باشد.

۳۶. یک وات‌متر در مدار شکل ۱۲.۳۶ وصل است به نحوی که  $I_1$  وارد پایانه (+) سیم‌پیچ جریان می‌گردد، در حالی که  $V_2$  ولتاژ دو سر سیم‌پیچ پتانسیل است. وات‌متر چه چیزی را اندازه می‌گیرد. پاسخ خود را با شبیه‌سازی مناسب در PSpice آزمایش کنید.



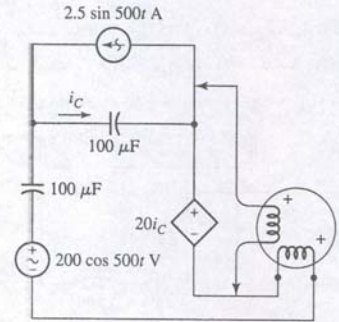
شکل ۱۲-۳۵



شکل ۱۲-۳۶



۳۷. وات‌متر متصل به مدار شکل ۱۲-۳۷ چقدر می‌خواند.



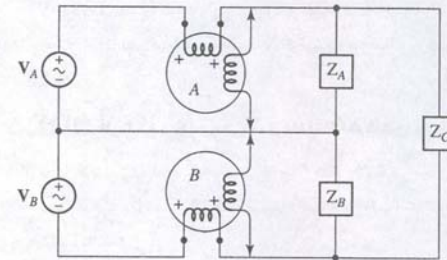
شکل ۱۲-۳۷

۳۸. (الف) دو وات‌متر در شکل ۱۲-۳۸ چه می‌خوانند. به شرطی که

$$V_B = 50 \angle 90^\circ \text{ Vrms} \text{ و } V_A = 100 \angle 0^\circ \text{ Vrms}$$

$$Z_C = 30 + j10 \Omega \text{ و } Z_B = 8 + j6 \Omega, Z_A = 10 - j10 \Omega$$

باشد، پاسخ خود را با PSpice آزمایش نمایید.



شکل ۱۲-۳۸

۳۹. مقدار مدار شکل ۱۲-۳۹ عبارتند از:  $V_{ab} = 200 \angle 0^\circ$

$$V_{ca} = 200 \angle 240^\circ \text{ Vrms و } V_{bc} = 200 \angle 120^\circ \text{ Vrms}$$

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 50 \angle -60^\circ \Omega, Z_4 = Z_5 = 25 \angle 30^\circ \Omega$$

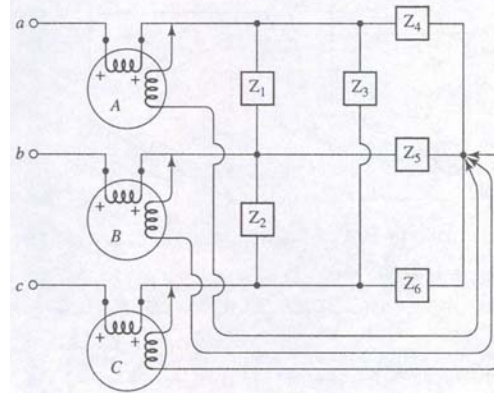
هر وات‌متر چه می‌خواند.

۴۰. برای مدار شکل ۱۲-۳۲ نشان دهید که توان جذب شده به وسیله بار

قابل اندازه‌گیری (الف) سه وات‌متر است (ب) دو وات‌متر است.

۴۱. برای مدار شکل ۱۲-۳۱ نشان دهید که توان جذب شده به وسیله بار

چگونه قابل اندازه‌گیری (الف) سه وات‌متر (ب) دو وات‌متر است.



شکل ۱۲-۳۹

## ۱-۱۳ القای متقابل

در فصل ۷ القاکتابی را با معرفی رابطه‌ای بین ولتاژ و جریان تعریف کردیم.

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

که در آن قرارداد علامت عنصر غیرفعال رعایت شد. مبنای فیزیکی این مشخصه جریان - ولتاژ بر دو مورد متکی است.

۱. تولید شار مغناطیسی به وسیله جریان، که در آن شار در القاگرهای خطی متناسب با جریان است.

۲. تولید ولتاژ با میدان مغناطیسی متغیر با زمان، که در آن ولتاژ متناسب با تغییر زمانی میدان مغناطیسی یا شار مغناطیسی است.

### ضریب القای متقابل

القای متقابل حاصل تعمیم بحث فوق است. جریانی که در یک سیم‌پیچ جاری می‌شود، حول آن سیم‌پیچ و سیم‌پیچ دیگری در آن حوالی، میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد. شار متغیر با زمان که سیم‌پیچ دوم را احاطه کرده است ولتاژی در دو سر آن تولید می‌نماید. این ولتاژ

## فصل سیزدهم

## مدار با کوپل مغناطیسی

### مقدمه

هر وقت که جریان ac یا dc در رسانایی جاری شود، یک میدان مغناطیسی حول آن تولید می‌گردد. در مدارها غالباً به شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه سیمی اشاره می‌شود و در واقع متوسط مؤلفه عمودی میدان مغناطیسی حاصل از حلقه ضربدر سطح حلقه است. وقتی یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان به وسیله یک حلقه تولید شود در حلقه دوم نفوذ می‌کند و ولتاژهای بین دو انتهای سیم دوم القا می‌گردد. برای این‌که این پدیده را از القا تمیز دهیم، اولی را خود القا می‌نامیم. دومین پدیده بنابراین، **القای متقابل** است.

وسیله‌ای به‌عنوان القاگر متقابل وجود ندارد، ولی اصول این پدیده مبنای وسیله مهمی به نام ترانسفورماتور یا ساده‌تر بگوییم ترانس است. یک ترانس از دو سیم‌پیچ که با فاصله‌ای کم از یکدیگر جدا شده‌اند، تشکیل شده است و معمولاً بسته به کاربرد برای تبدیل ولتاژهای ac به مقادیر بیشتر یا کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. هر وسیله الکتریکی که برای کار به جریان dc نیاز دارد، برای وصل به پریز از ترانس استفاده می‌نماید تا قبل از یکسوسازی سطح ولتاژ را تنظیم نماید. عمل یکسوسازی معمولاً با کمک دیودها صورت می‌گیرد و در هر کتاب الکترونیک پایه نیز توصیف شده است.

| مفاهیم کلیدی              |
|---------------------------|
| القای متقابل              |
| خودالقایی                 |
| قرارداد نقطه              |
| امپدانس منعکس             |
| شبکه‌های معادل T و $\pi$  |
| ترانس ایده‌آل             |
| نسبت دور یک ترانس ایده‌آل |
| تطبیق امپدانس             |
| تحلیل مدارهای ترانس‌دار   |

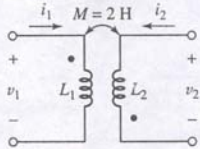




جریانی که وارد پایانه بدون نقطه سیم پیچ می شود، ولتاژی ایجاد می کند که علامت مثبت آن در پایانه بدون نقطه سیم پیچ دوم قرار دارد.

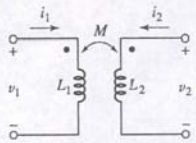
توجه کنید که در بحث های قبلی نقشی برای خود القایی در ولتاژ در نظر گرفته نشده است، که اگر  $i_2$  غیر صفر باشد، قطعاً انرژی را خواهد بود. ما این وضعیت مهم را به طور مشروح بحث می کنیم ولی ابتدا مثالی سریع مناسب تر است.

### مثال ۱۳-۱

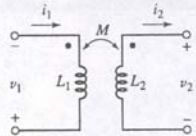


**شکل ۱۳-۳** قرارداد نقطه رابطه ای بین پایانه ای که جریان در آن وارد یک سیم پیچ می شود با ولتاژ مثبت در پایانه سیم پیچ دیگر را فراهم می سازد.

### تمرین



**شکل ۱۳-۴** چون جفت های  $v_1$  و  $i_1$  و  $v_2$  و  $i_2$  قرارداد علامت عناصر غیر فعال را تأیید می کنند هر دو ولتاژ خود القاء مثبت اند. چون  $i_1$  و  $i_2$  هر دو وارد پایانه های نقطه دار می شوند و چون  $v_1$  و  $v_2$  هر دو مثبت احساس می شوند ولتاژ القاء متقابل نیز مثبت است.



**شکل ۱۳-۵** چون  $v_1$  و  $i_1$  و  $v_2$  و  $i_2$  طبق قرارداد علامت عناصر غیر فعال نیستند ولتاژهای خود القاء هر دو منفی اند. چون  $i_1$  وارد پایانه نقطه دار می شود و ولتاژ  $v_2$  به طور مثبت در پایانه نقطه دار مثبت فرض می شوند، جمله متقابل  $v_2$  مثبت است و چون  $i_2$  وارد پایانه بی نقطه گشته و  $v_1$  در پایانه بی نقطه مثبت حس می شود، جمله متقابل  $v_1$  هم مثبت می باشد.

ساده ای از دو سیم پیچ  $L_1$  و  $L_2$  را نشان می دهد که به اندازه کافی به هم نزدیک می باشند، به نحوی که شار تولیدی به وسیله جریان  $i_1(t)$  در  $L_1$  یک ولتاژ مدار باز  $v_2(t)$  را در دو سر  $L_2$  ایجاد می نماید. در این جا بدون تأکید بر علامت صحیح جبری برای این ارتباط، ضریب القای متقابل یا ساده تر القای متقابل  $M_{21}$  را چنین تعریف می کنیم:

$$v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (۱)$$

ترتیب زیرنویس به این معنی است که پاسخ ولتاژ حاصل در  $L_2$  به وسیله منبع جریانی در  $L_1$  تولید شده است. اگر سیستم معکوس گردد، آنگاه طبق شکل ۱۳-۱(ب) داریم:

$$v_1(t) = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (۲)$$

در هر صورت دو ضریب القای متقابل لزومی ندارند. بعداً با به کارگیری روابط انرژی ثابت، خواهیم دید که  $M_{12} = M_{21} = M$  برابر هم می باشند. پس  $M_{12} = M_{21} = M$ . وجود کوپل یا تزویج متقابل بین دو سیم پیچ با یک پیکان دوسر نشان داده می شود (شکل ۱۳-۱(الف و ب)). القای متقابل بر حسب هنری اندازه گیری می شود و مانند مقاومت، القاکنایی و ظرفیت، کمیتی مثبت است. البته القای متقابل را به صراحت نمی توان مثبت فرض کرد. خصوصاً بهتر است وقتی که سه یا چند سیم پیچ در کنار هم هستند هر یک علامت خود را داشته باشد و با سیم پیچ های دیگر واکنش نماید. ما در ادامه، بحث خود را به دو سیم پیچ محدود می کنیم. در هر صورت ولتاژ  $M \frac{di}{dt}$  بسته به افزایش یا کاهش جریان در هر لحظه از زمان ممکن است مثبت یا منفی تصور شود.

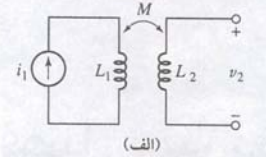
### قرارداد نقطه

القاکر عنصری دو پایانه است و به همین دلیل مجازیم از قرارداد علامت عنصر غیر فعال برای آن استفاده کنیم و علامت صحیحی برای ولتاژ  $L \frac{di}{dt}$  یا  $Li \frac{di}{dt}$  برگزینیم. اگر جریان وارد پایانه مثبت ولتاژ گردد، آنگاه قرارداد مثبت به کار رفته است. با این وجود القای متقابل را نمی توان به طریقی مشابه بررسی کرد، زیرا چهار پایانه دارد. گزینش علامت صحیح را به چند طریقی می توان انجام داد، از آن جمله "قرارداد نقطه" با بررسی روش خاصی که طی آن جهت سیم پیچ مشخص می شود. در این جا فقط قرارداد نقطه ای را انتخاب می کنیم و به شکل فیزیکی سیم پیچ ها هم نگاه مختصری می اندازیم. وقتی با دو سیم پیچ کوپل شده سروکار داریم، استفاده از دیگر نمادهای خاص لزومی ندارد.

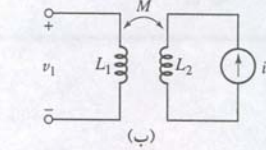
در قرارداد نقطه ای، در هر سمت سیم پیچ هایی که القاکنایی متقابل دارند، یک نقطه بزرگ گذاشته می شود. علامت ولتاژ حاصل از القای متقابل را چنین تعریف می کنیم.

جریانی که وارد پایانه نقطه دار یکی از سیم پیچ ها شود، ولتاژ مدار بازی را به وجود می آورد که مرجع مثبت آن در پایانه نقطه دار سیم پیچ دوم است.

به این ترتیب در شکل ۱۳-۲(الف)،  $i_1$  وارد پایانه نقطه دار  $L_1$  می شود و  $v_2$  به صورت مثبت در پایانه نقطه دار  $L_2$  حس می گردد، یعنی  $v_2 = M \frac{di_1}{dt}$  خواهد بود. قبلاً ملاحظه شد که همواره نمی توان جریان ها و ولتاژها را در سرتاسر مدار طوری انتخاب کرد که قرارداد علامت عناصر غیر فعال تأیید شود. مورد مشابهی برای کوپل متقابل هم وجود دارد. مثلاً در شکل ۱۳-۲(ب) بهتر است  $v_2$  را با مرجع مثبت واقع در پایانه بدون نقطه نشان داد. در این صورت  $v_2 = -M \frac{di_1}{dt}$  خواهد بود. ممکن است جریان ها هم همیشه وارد پایانه های نقطه دار نشوند، مثل شکل ۱۳-۲(ج و د). آنگاه می گوییم:

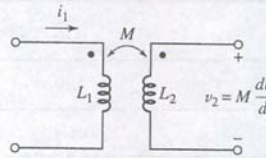


(الف)

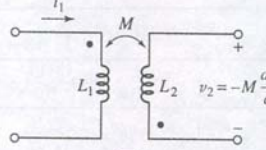


(ب)

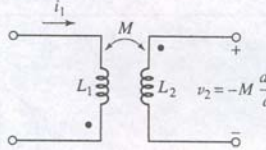
**شکل ۱۳-۱** (الف) جریان  $i_1$  در  $L_1$  ولتاژ مدار باز  $v_2$  را در  $L_2$  به وجود می آورد. (ب) جریان  $i_2$  در  $L_2$  ولتاژ مدار باز  $v_1$  را در  $L_1$  ایجاد می کند.



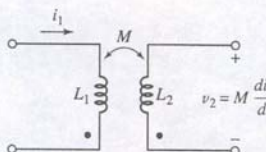
(الف)



(ب)



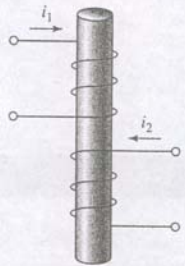
(ج)



(د)

**شکل ۱۳-۲** جریان وارده به پایانه نقطه دار یک سیم پیچ ولتاژی ایجاد می کند که علامت مثبت آن در سمت نقطه دار است. جریانی که وارد پایانه بی نقطه یک سیم می شود، مثبت ولتاژ در سیم پیچ ۲ در سمت بی نقطه است.





شکل ۱۳-۶ ساختار فیزیکی سیم‌پیچ با کوبل متقابل. با ملاحظه جهت فلوی مغناطیسی تولیدی به وسیله هر سیم‌پیچ، می‌توان نقطه‌ها را در پایانه‌های بالا و پایین سیم‌پیچ قرار داد.

متقابل با بررسی جهت  $i_1$  و  $V_2$  علامت می‌گیرد، چون  $i_1$  وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود و  $V_2$  در پایانه ۲ مثبت حس می‌گردد، علامت  $M \frac{di_1}{dt}$  مثبت است. بالاخره  $i_2$  وارد پایانه بی نقطه  $L_2$  می‌گردد و بخش متقابل  $V_1$  یعنی  $M \frac{di_2}{dt}$  نیز باید مثبت باشد. پس داریم:

$$v_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

برای منبع سینوسی در همه فرکانس‌های  $\omega$  نیز به انتخاب علامت مشابهی خواهیم رسید:

$$V_1 = -j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \quad V_2 = -j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1$$

### مبنای فیزیکی قرارداد نقطه

با نگاهی بر مبنای فیزیکی قرارداد نقطه می‌توان درک بهتری از آن به دست آورد. اکنون مفهوم نقطه‌ها را برحسب شار مغناطیسی تعبیر می‌کنیم. در شکل ۱۳-۶ دو سیم‌پیچ روی استوانه‌ای پیچیده شده و جهت هر سیم‌پیچ نیز مشخص است. فرض کنید که جریان  $i_1$  مثبت و با زمان افزایش یابد. جهت شار مغناطیسی ناشی از  $i_1$  را می‌توان به کمک قانون دست راست پیدا کرد. وقتی که دست راست حول سیم‌پیچ بسته شود، انگشت شست جهت شار داخل سیم‌پیچ را نشان می‌دهد. پس شار تولیدی به وسیله  $i_1$  به سمت پایین است. چون جریان  $i_1$  با زمان افزایش می‌یابد، شار که با  $i_1$  متناسب است نیز با زمان افزایش پیدا می‌کند. اکنون به سیم‌پیچ دوم توجه می‌کنیم. بگذارید  $i_2$  را هم جهت و افزایشده تصور کنیم. به کارگیری قاعده دست راست نشان می‌دهد که میدان حاصل از  $i_2$  نیز به سمت پایین و افزایشده است. به بیان دیگر جریان‌های  $i_1$  و  $i_2$  شارهای جمع شونده تولید می‌کنند.

ولتاژ دو سر پایانه‌های هر سیم‌پیچ از تغییر زمانی شار در داخل سیم‌پیچ ناشی می‌شود. پس ولتاژ دو سر پایانه‌های اولین سیم‌پیچ هنگامی که  $i_2$  وجود دارد، بزرگتر از زمانی است که  $i_2 = 0$  است. پس ولتاژی که  $i_2$  در سیم‌پیچ اول القا می‌کند، هم جهت با ولتاژ خودالقایابی در آن سیم‌پیچ است. علامت ولتاژ خودالقا از قرارداد علامت عناصر غیر فعال مشخص است، پس علامت ولتاژ القای متقابل هم به دست خواهد آمد.

قرارداد نقطه زحمت بررسی ساختمان فیزیکی سیم‌پیچ‌ها را با دو نقطه از دوش ما برمی‌دارد. به نحوی که مطمئن خواهیم بود در صورت ورود جریان به آن‌ها، شارهای هم جهت و جمع شونده تولید می‌گردد. واضح است که دو امکان برای نقطه‌ها وجود دارد، زیرا ممکن است نقاط را برداشت و در انتهای دیگر سیم‌پیچ‌ها قرار داد و باز هم شارهای جمع شونده به دست آورد.

مثال ۱۳-۲

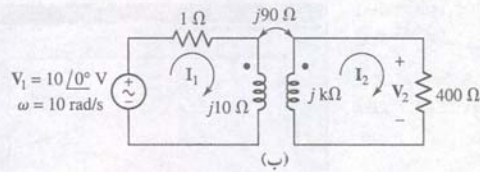
در مدار شکل ۱۳-۷ (الف)، نسبت ولتاژ خروجی دو سر مقاومت  $400\Omega$  را به ولتاژ منبع به دست آورید.

■ اهداف مسئله را شناسایی کنید.

ما عبارتی را برای  $V_2$  لازم داریم که حاوی مقادیر معلوم باشد. آن‌گاه آن را بر  $V \angle 0^\circ$  تقسیم خواهیم کرد.

■ اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

ما با جایگزینی  $1\text{ H}$  و  $100\text{ H}$  با امپدانس مربوط به آن‌ها یعنی  $j10\Omega$  و  $j\omega M = j90\Omega$  می‌کنیم (شکل ۱۳-۷ (ب)). همچنین القای متقابل  $9\text{ H}$  را هم با  $j90\Omega$  عوض می‌نماییم.



شکل ۱۳-۷ (الف) مداری حاوی القاء متقابل که در آن نسبت  $V_2/V_1$  موردنظر است. (ب) القاهای متقابل و خودالقاء با امپدانس‌های متناظر جایگزین شده‌اند.

■ ارائه طرح.

به نظر می‌رسد تکنیک مش روش خوبی باشد و ما نیز مداری با دو مش مشخص داریم.

■ معادلات مناسب را بنویسید.

در حلقه سمت چپ علامت جمله متقابل با اعمال قرارداد نقطه معین می‌شود. چون  $I_2$  وارد پایانه بی نقطه  $L_2$  می‌شود، ولتاژ متقابل در دوسر  $L_1$  باید علامت مثبت را در پایانه بی نقطه داشته باشد. پس:

$$(1 + j10) I_1 - j90 I_2 = 10 \angle 0^\circ$$

علامت جمله متقابل در حلقه دوم به طریقی مشابه حاصل می‌گردد. چون  $I_1$  وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود، جمله متقابل در حلقه سمت راست دارای مرجع مثبت خود در پایانه نقطه‌دار القاگر  $100\text{ H}$  خواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$(400 + j1000) I_2 - j90 I_1 = 0$$

■ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

ما دو معادله برای دو مجهول  $I_1$  و  $I_2$  داریم. به محض یافتن دو جریان، ولتاژ خروجی  $V_2$  از ضرب  $I_2$  در  $400\Omega$  به دست می‌آید.

■ اقدام به حل.

با حل دو معادله فوق به وسیله ماشین حساب می‌بینیم که

$$I_2 = 0.172 \angle -16.70^\circ \text{ A}$$

پس

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{400 (0.172 \angle -16.70^\circ)}{10 \angle 0^\circ} = 6.880 \angle -16.70^\circ$$

■ صحت حل را تأیید کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

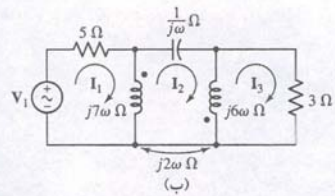
ملاحظه می‌شود که  $V_2$  از نظر اندازه بزرگتر از  $V_1$  است. آیا باید همیشه این انتظار را داشت؟ پاسخ منفی است. در بخش‌های بعد خواهیم دید که می‌توان ترانسفورماتورهای ساخت که ولتاژ را هم افزایش و هم کاهش دهند. با این وجود می‌توان گمانه‌ای سریع زد و حداقل محدوده بالا و پایین را برای پاسخ به دست آورد. اگر مقاومت  $400\Omega$  با یک مدار اتصال کوتاه جایگزین شود، آن‌گاه  $V_2 = 0$  خواهد شد. برعکس اگر مقاومت  $400\Omega$  را با مدار باز جایگزین کنیم، آن‌گاه  $I_2 = 0$  خواهد بود و در نتیجه:

$$V_1 = 1 + j\omega L_1 I_1$$

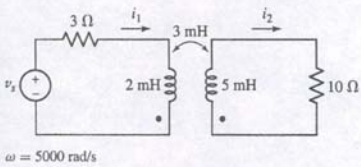
$$V_2 = j\omega M I_1$$

از دو رابطه فوق می‌توان انتظار داشت که بزرگترین مقدار برای  $V_2/V_1$  برابر  $5.711^\circ \angle 8.955$  است. بنابراین جواب حداقل منطقی است.

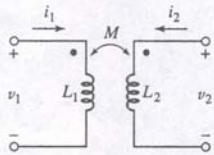




شکل ۱۳-۱۰ (ب) خازن 1F و القاها‌ی متقابل و خودالقاه با امپدانس متناظر جایگزین شده‌اند.



شکل ۱۳-۱۱



شکل ۱۳-۱۲ جفت سیم‌پیچ کوپل‌شده با یک القاکنایی متقابل  $M_{12} = M_{21} = M$ .

الاخره برای سومین حلقه

$$6j\omega(I_3 - I_2) + 2j\omega(I_1 - I_2) + 3I_3 = 0$$

$$2j\omega I_1 - 8j\omega I_2 + (3 + 6j\omega)I_3 = 0 \quad (۵)$$

معادلات (۳) تا (۵) با هر روش مناسبی قابل حل می‌باشند.

### تمرین

۱۳-۲ برای مدار شکل ۱۳-۱۱، معادله حلقه مناسبی را برحسب جریان‌های فیزیوری  $I_1$  و  $I_2$  برای (الف) حلقه چپ، (ب) حلقه راست بنویسید.

جواب:  $0 = -j15I_1 + (10 + j25)I_2$ ,  $V_s = (3 + j10)I_1 - j15I_2$ .

### ۱۳-۲ ملاحظات انرژی

حال بایباید تا انرژی ذخیره شده در القاگرهای کوپل متقابل را بررسی کنیم. نتایج این مطالعه به لایل متعددی مفید خواهد بود. ابتدا فرض  $M_{12} = M_{21}$  را اثبات می‌کنیم و آن‌گاه حداکثر مقدار القاکنایی متقابل بین دو القاگر را معین خواهیم کرد.

#### برابری $M_{12}$ و $M_{21}$

در هر دو سیم‌پیچ کوپل شده در شکل ۱۳-۱۲، جریان‌ها و ولتاژها و نقاط قطب مشخص شده‌اند. برای اثبات  $M_{12} = M_{21}$  با صفر کردن همه جریان‌ها و ولتاژها آغاز می‌کنیم و به این رتیب انرژی ذخیره شده اولیه در مدار صفر تصور خواهد شد.

سپس جفت پایانه‌های سمت راست را مدار باز کرده و جریان  $i_1$  را از صفر تا مقدار ثابت  $I_1$  (dc) افزایش می‌دهیم. توان ورودی به شبکه از سمت چپ در هر لحظه از مان برابر است با:

$$v_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1$$

توان ورودی از سمت راست برابر است با:

$$v_2 i_2 = 0$$

س انرژی ذخیره شده در شبکه هنگام  $i_1 = I_1$  برابر است با:

$$\int_0^{I_1} v_1 i_1 dt = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

کنون  $i_1$  را ثابت می‌گیریم، یعنی  $I_1 = i_1$  و  $i_2$  را از صفر در  $t = t_1$  به مقدار ثابت  $I_2$  در  $t = t_2$  می‌رسانیم، پس انرژی انتقالی از منبع سمت راست چنین است:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2 i_2 dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

در هر صورت، به رغم ثابت بودن  $i_1$ ، منبع سمت چپ در این فاصله زمانی مقداری انرژی به مدار تحویل خواهد داد:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1 i_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{12} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

رؤی کل ذخیره شده در شبکه وقتی هر دو جریان  $i_1$  و  $i_2$  به مقادیر ثابتی برسند، برابر زیر است:

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

ولتاژ خروجی مدار شکل ۱۳-۷ (الف) از لحاظ مقدار بزرگتر از ولتاژ ورودی است، به نحوی که افزایش ولتاژی را با این مدار می‌توان انتظار داشت. همچنین بررسی نسبت ولتاژ برحسب تابعی از  $\omega$  نیز جالب توجه است. برای یافتن  $I_2(j\omega)$  در این مدار خاص، جملات معادلات حلقه را برحسب فرکانس زاویه‌ای نامشخص  $\omega$  می‌نویسیم:

$$(1 + j\omega)I_1 - j\omega 9I_2 = 10 \angle 0^\circ$$

$$-j\omega 9I_1 + (400 + j\omega 100)I_2 = 0$$

از حل آن دو داریم:

$$I_2 = \frac{j90\omega}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

بنابراین نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی به صورت تابعی از فرکانس  $\omega$  چنین خواهد شد:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{400I_2}{10} = \frac{j\omega 3600}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

به این کسر گاهی **تابع تبدیل** مدار می‌گویند، در شکل ۱۳-۸ ترسیم و اندازه نقطه اوج تقریباً 7 در فرکانس 4.6 rad/s می‌باشد. با این وجود در فرکانس‌های خیلی کوچک و یا خیلی بزرگ، اندازه تابع تبدیل به کمتر از واحد می‌رسد.

مدار هنوز هم، به جز از برای منبع ولتاژ، غیرفعال است و تقویت (یا بهره) ولتاژ را نباید به اشتباه تقویت توان دانست. در  $\omega = 10$  rad/s بهره ولتاژ 6.88 است ولی منبع ولتاژ ایده‌آل با ولتاژ پایانه 10 V، کلاً 8.07 انرژی تولید می‌کند و از آن تنها 5.94 W مقاومت 400  $\Omega$  انتقال می‌یابد. نسبت توان خروجی به توان منبع که آن را **بهره** توان می‌گویند، 0.736 است.

۱۳-۲ برای مدار شکل ۱۳-۹ معادلات حلقه را برای حلقه‌های چپ و راست بنویسید به‌شرطی که  $V_s = 20e^{-1000t}$  V باشد.

جواب:  $20e^{-1000t} = 3i_1 + 0.002di_1/dt - 0.003di_2/dt$   
 $10i_2 + 0.005di_2/dt - 0.003di_1/dt = 0$

مجموعه معادلات مناسبی برای مدار شکل ۱۳-۱۰ (الف) بنویسید.

مدار حاوی سه مش یا حلقه بوده و سه جریان هم از قبل تخصیص یافته است. دوباره اولین گام ما جایگزینی هر دو القای متقابل و دو خودالقاه با امپدانس‌های متناظر طبق شکل ۱۳-۱۰ (ب) است. با اعمال قانون KVL به اولین حلقه و انتخاب  $(I_3 - I_2)$  به عنوان جریان در سیم‌پیچ دوم، علامت مثبتی برای جمله متقابل حاصل می‌گردد.

$$5I_1 + 7j\omega(I_1 - I_2) + 2j\omega(I_3 - I_2) = V_1$$

یا

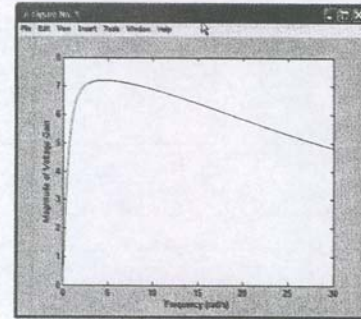
$$(5 + 7j\omega)I_1 - 9j\omega I_2 + 2j\omega I_3 = V_1 \quad (۳)$$

دومین حلقه دو جمله خودالقاه و دو جمله القای متقابل دارد و نمی‌توان معادله را سرسری نوشت. داریم:

$$7j\omega(I_2 - I_1) + 2j\omega(I_2 - I_3) + \frac{1}{j\omega} I_2 + 6j\omega(I_2 - I_3) + 2j\omega(I_2 - I_1) = 0$$

یا

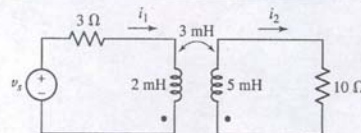
$$-9j\omega I_1 + (17j\omega + \frac{1}{j\omega}) I_2 - 8j\omega I_3 = 0 \quad (۴)$$



شکل ۱۳-۸ بهره ولتاژ  $|V_2/V_1|$  مدار شکل ۱۳-۷ (الف) به صورت تابعی از  $\omega$  و برنامه متلب زیر ترسیم شده است.

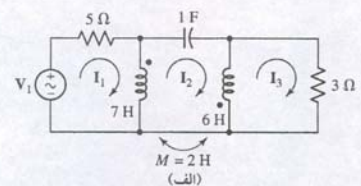
```
>> w = linspace(0,30,1000);
>> num = j*w*3600;
>> for ind = 1:1000
den = 400 + j*500*w(ind) - 19*w(ind)*w(ind);
gain(ind) = num(ind)/den;
end
>> plot(w, abs(gain));
>> xlabel('Frequency (rad/s)');
>> ylabel('Magnitude of Voltage Gain');
```

### تمرین



شکل ۱۳-۹

### مثال ۱۳-۳



شکل ۱۳-۱۰ (الف) یک مدار سه حلقه با کوپل متقابل.



بنابراین مقدار القاکنایی متقابل حد بالایی دارد. این القاکنایی متقابل نمی تواند از واسطه هندسی خود القاکنایی سیم پیچ ها بیشتر شود. گرچه این برابری از فرض هم علامت بودن  $i_1$  و  $i_2$  حاصل شد ولی اگر  $i_1$  و  $i_2$  هم علامت نباشند، باز می توان نتیجه مشابهی به دست آورد و کافی است در معادله (۸) علامت مثبت را اختیار کنیم.

صحت نامساوی (۹) را با بررسی فیزیکی کوپل مغناطیسی هم می توان نشان داد. اگر  $i_2$  را صفر بگیریم،  $i_1$  در هر دو  $L_1$  و  $L_2$  شاری را می گذراند. واضح است که شار درون  $L_2$  نمی تواند بزرگتر از  $L_1$  باشد. زیرا شار کل از  $L_1$  می گذرد. پس به طور کیفی، برای اندازه القاکنایی متقابل ممکن بین دو القاگر حد بالایی وجود دارد.

### ضریب کوپل

سرعت نزدیک شدن  $M$  به مقدار ماکزیمم را ضریب کوپل می خوانیم و با رابطه زیر نشان می دهیم:

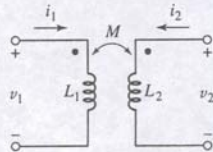
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (10)$$

چون  $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

$$0 \leq k \leq 1$$

هر چقدر سیم پیچ ها به هم نزدیک تر باشند، ضریب کوپل بزرگتر حاصل می شود و نیز هر چه پیچش و جهت آن ها به تولید شار مغناطیسی کمک کند، ضریب کوپل یا تزویج بزرگتر خواهد بود. بالاخره برای داشتن ضریب کوپل بزرگتر می توان یک مسیر متمرکز ایجاد نموده و شار مغناطیسی را شدت بخشید. سیم پیچ هایی که ضریب کوپل نزدیک به واحد دارند، را کوپل شدید می گویند.

### مثال ۴-۱۳



در شکل ۱۳-۱۳ فرض کنید  $L_2 = 2.5 \text{ H}$ ،  $L_1 = 0.4 \text{ H}$  و  $k = 0.6$  و  $i_1 = 4i_2 = 20\cos(500t - 20^\circ) \text{ mA}$  باشد. کمیت های زیر را در  $t = 0$  بیابید: (الف)  $i_2$  (ب)  $v_1$  (ج) انرژی کل ذخیره شده در سیستم.

(الف)  $i_2(t) = 5\cos(500t - 20^\circ) \text{ mA}$  پس  $i_2(0) = 5\cos(-20^\circ) = 4.698 \text{ mA}$   
(ب) برای تعیین مقدار  $v_1$ ، باید نقش خود القاایی سیم پیچ ۱ و القای متقابل سیم پیچ ۲ را لحاظ کنیم. بنابراین با توجه به قرارداد نقطه داریم:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

رای محاسبه این کمیت، به  $M$  نیاز است. مقدار آن از معادله (۱۰) به دست می آید.

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.6\sqrt{(0.4)(2.5)} = 0.6 \text{ H}$$

نابراین

$$v_1(0) = 0.4 [-10 \sin(-20^\circ)] + 0.6 [-2.5 \sin(-20^\circ)] = 1.881 \text{ V}$$

(ج) انرژی کل از جمع انرژی ذخیره شده در هر القاگر به دست می آید. این انرژی سه جمله دارد، زیرا فرض شده است که دو سیم پیچ به طور مغناطیسی به هم کوپل شده اند. چون هر دو جریان وارد پایانه نقطه می شوند:

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2} L_2 [i_2(t)]^2 + M [i_1(t)][i_2(t)]$$

ا توجه به بند (الف) که  $i_2(0) = 4.698 \text{ mA}$  و  $i_1(0) = 18.79 \text{ mA}$  بود می بینیم که انرژی کل ذخیره شده در سیم پیچ در زمان  $t = 0$  برابر  $151.2 \mu\text{J}$  است.

اکنون می توانیم جریان نهایی در این شبکه را با رساندن جریان ها به مقادیر نهایی شان ولی به ترتیب معکوس ایجاد کنیم، یعنی ابتدا  $i_2$  را از صفر به  $i_2$  برسانیم و سپس ضمن ثابت نگهداشتن آن،  $i_1$  را از صفر تا  $i_1$  افزایش دهیم، اگر باز هم انرژی ذخیره شده کل را برای آزمایش محاسبه کنیم، نتیجه می شود:

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

تنها اختلاف در دو رابطه انرژی کل تفاوت القاکنایی هایی متقابل  $M_{12}$  و  $M_{21}$  است. چون شرایط اولیه نهایی در شبکه یکسان است، بنابراین دو مقدار انرژی ذخیره شده باید برابر باشند. پس:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

و

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (6)$$

اگر یکی از جریان ها وارد پایانه نقطه دار شود، در حالی که دیگری پایانه نقطه دار را ترک می کند، علامت جمله انرژی متقابل معکوس می گردد:

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 \quad (7)$$

هر چند معادلات (۶) و (۷) با فرض مقادیر نهایی مثبت برای دو جریان به دست آمدند ولی واضح است که این مقادیر ثابت می توانند هر مقداری باشند. پس اگر به جای  $i_1$  و  $i_2$  مقادیر لحظه ای  $i_1$  و  $i_2$  را بگذاریم، باز هم این عبارت انرژی ذخیره شده در شبکه را به نحو صحیحی نشان می دهد. به عبارت دیگر می توانیم جریان های لحظه ای را هم در این معادله به کار ببریم.

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2} L_2 [i_2(t)]^2 \pm M [i_1(t)][i_2(t)] \quad (8)$$

تنها شرطی که معادله (۸) بر آن متکی است، این است که به ازای صفر بودن هر دو جریان، انرژی ذخیره شده در شبکه صفر است.

### ایجاد حد بالا برای M

اکنون به کمک معادله (۸) حد بالای  $M$  را پیدا می کنیم. چون  $w(t)$  انرژی ذخیره شده در شبکه غیر فعال را نشان می دهد، در ازای مقادیر  $i_1$  و  $i_2$ ،  $L_1$  و  $L_2$  یا  $M$  نمی تواند منفی باشد. بگذارید فرض کنیم که  $i_1$  و  $i_2$  هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند. بنابراین حاصل ضرب آن ها مثبت است. از معادله (۸) تنها حالتی که انرژی ممکن است منفی باشد، عبارت است از:

$$w = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$$

که می توان آن را چنین نوشت:

$$w = \frac{1}{2} (\sqrt{L_1} i_1 - \sqrt{L_2} i_2)^2 + \sqrt{L_1 L_2} i_1 i_2 - M i_1 i_2$$

چون در واقع انرژی منفی نیست، سمت راست معادله فوق نمی تواند منفی گردد. البته اولین جمله ممکن است نزدیک به صفر باشد و به این ترتیب محدودیت ما این خواهد بود که دو جمله آخر نمی تواند منفی شود. پس

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M$$

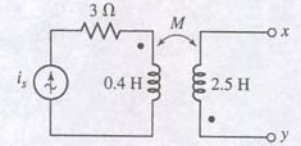
یا

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (9)$$



## تمرین

۱۳-۴ اگر در مدار شکل ۱۴-۱۳ جریان منبع  $i_s = 2 \cos 10t$  A باشد، انرژی کل ذخیره شده در شبکه غیرفعال را در  $t = 0$  معین کنید به شرطی که  $k = 0.6$  و پایانه‌های x و y (الف) باز رها شوند، (ب) اتصال کوتاه شوند.  
جواب: 0.512 J, 0.8 J.



شکل ۱۴-۱۳

## ۳-۱۳ ترانسفورماتورهای خطی

اکنون آماده‌ایم تا دانش خود از کوپل مغناطیسی را در توصیف دو وسیله خاصی که هر یک مدلی حاوی القای متقابل است، پیاده کنیم. این دو وسیله **ترانسفورماتور** هستند، جمله‌ای که می‌توان آن را برای شبکه‌ای متشکل از دو یا چند سیم‌پیچ که به نحوی حساب شده کوپل شده‌اند، به کار برد (شکل ۱۵-۱۳). در این بخش ترانسفورماتورهای خطی را ملاحظه خواهیم کرد که مدل خوبی از ترانس‌های عملی به کار رفته در فرکانس‌های رادیویی و فرکانس‌های بالاتر است. در بخش بعد ترانس ایده‌آل را در نظر می‌گیریم که مدل ایده‌آلی از ترانس‌های عملی با ضریب کوپل واحد است.

در شکل ۱۶-۱۳ ترانسی با دو مش جریان دیده می‌شود. اولین حلقه که معمولاً حاوی منبع است، **اولیه** خوانده می‌شود در حالی که حلقه دوم معمولاً به بار وصل شده و **ثانویه** نام دارد. القاگرهای  $L_1$  و  $L_2$  را هم به ترتیب اولیه و ثانویه ترانس گویند. فرض بر این است که ترانس خطی باشد. این بدان معنی است که هیچ ماده مغناطیسی به کار نرفته است (این گونه مواد، ممکن است رابطه شار-جریان را غیرخطی کنند). البته در غیاب چنین موادی به سختی می‌توان به ضریب کوپلی بزرگتر از چند دهم نائل آمد. دو مقاومت نشان داده شده عبارتند از مقاومت سیم‌هایی که  $L_1$  و  $L_2$  از آن‌ها ساخته شده‌اند و نیز دیگر تلفات موجود.

## امپدانس منعکسه

امپدانس ورودی را در پایانه‌های مدار اولیه ملاحظه کنید. معادلات دو تک حلقه عبارتند از:

$$\mathbf{V}_s = (\mathbf{R}_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \quad (11)$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (\mathbf{R}_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L)\mathbf{I}_2 \quad (12)$$

روابط فوق را با تعاریف زیر ساده می‌کنیم:

$$\mathbf{Z}_{11} = \mathbf{R}_1 + j\omega L_1$$

$$\mathbf{Z}_{22} = \mathbf{R}_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L$$

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \quad (13)$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \quad (14)$$

با حل معادله دوم برای یافتن  $\mathbf{I}_2$  و جایگزینی نتیجه در معادله اول می‌توان امپدانس ورودی به دست آورد:

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{Z}_{11} - \frac{(j\omega M)^2 \mathbf{Z}_{22}}{\mathbf{Z}_{22}} \quad (15)$$

قبل از دستکاری بیشتر این معادله می‌توان چند نتیجه جالب را از آن به دست آورد. اول این که این نتیجه مستقل از نقطه‌ها در روی هر یک از سیم‌پیچ‌ها است. اگر هر یک از نقطه‌های سیم‌پیچ

را جابه‌جا کنیم، تنها علامت  $M$  در معادلات (۱۱) الی (۱۴) تغییر می‌کند. پس می‌توان در عبارات فوق به جای  $M$ ،  $(-M)$  گذاشت و این تغییر علامت تأثیری بر معادله (۱۵) ندارد. همچنین توجه کنید که در معادله (۱۵) امپدانس ورودی به شرطی  $\mathbf{Z}_{11}$  است که جمله تزویج یا کوپل به صفر کاهش یابد. با افزایش کوپلاژ، امپدانس ورودی با  $\mathbf{Z}_{11}$  به اندازه  $\omega^2 M^2 / \mathbf{Z}_{22}$  تغییر می‌یابد. جمله اخیر، **امپدانس منعکسه** خوانده می‌شود. طبیعت و نقش این تغییر امپدانس با بسط عبارت آشکار تر می‌گردد:

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{R}_{22} + j\mathbf{X}_{22}}$$

امپدانس منعکسه را گویا می‌کنیم:

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2 \mathbf{R}_{22}}{\mathbf{R}_{22}^2 + \mathbf{X}_{22}^2} + \frac{-j\omega^2 M^2 \mathbf{X}_{22}}{\mathbf{R}_{22}^2 + \mathbf{X}_{22}^2}$$

چون  $\omega^2 M^2 \mathbf{R}_{22} / (\mathbf{R}_{22}^2 + \mathbf{X}_{22}^2)$  مثبت است، واضح است که وجود ثانویه، تلفات را در اولیه افزایش می‌دهد. به بیان دیگر، وجود ثانویه در اولیه با افزایش مقاومت  $\mathbf{R}_1$  خود را نشان می‌دهد و نیز رآکتانسی که ثانویه در مدار اولیه ایجاد می‌کند، دارای علامت مخالف با  $\mathbf{X}_{22}$ ، یعنی رآکتانس خالص حلقه دوم است. رآکتانس  $\mathbf{X}_{22}$  مجموع  $\omega L_2$  و  $\mathbf{X}_L$  می‌باشد. علامت  $\mathbf{X}_{22}$  برای بارهای القایی، مثبت و برای بارهای خازنی بسته به اندازه رآکتانس بار، مثبت یا منفی است.

۱۳-۵ مقادیر عناصر برای یک ترانس خطی عبارتند از:  $\mathbf{R}_1 = 3 \Omega$ ،  $\mathbf{R}_2 = 6 \Omega$ ،  $L_1 = 2$  mH،  $L_2 = 10$  mH و  $M = 4$  mH. اگر  $\omega = 5000$  rad/s باشد،  $\mathbf{Z}_{in}$  را در ازای  $\mathbf{Z}_L$  (الف) 10  $\Omega$ ، (ب) 10  $\Omega$ ، (ج) 10 + j20  $\Omega$  (د) 10 - j20  $\Omega$  به دست آورید.  
جواب:  $5.56 - j2.82 \Omega$ ؛  $4.24 + j4.57 \Omega$ ؛  $3.49 + j4.33 \Omega$ ؛  $5.32 + j2.74 \Omega$ .

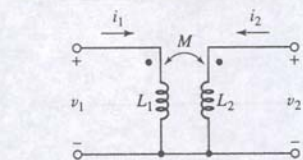
شبکه‌های معادل T و  $\Pi$ 

غالباً جایگزینی یک ترانس با یک شبکه معادل فرم T و یا  $\Pi$  مفید است. اگر مقارنت‌های اولیه و ثانویه را از ترانس جدا کنیم تنها القاگرهای متقابل باقی می‌مانند (شکل ۱۷-۱۳). دقت کنید که پایانه پایین ترانس به یکدیگر وصل می‌باشند تا یک شبکه سه پایانه به وجود آید. این کار را به این علت انجام می‌دهیم که هر دو شبکه معادل حاصل شبکه‌های سه پایانه‌اند. معادلات زیرانسیل توصیف‌کننده این مدار عبارتند از:

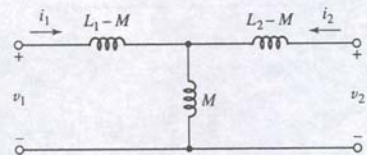
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (16)$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (17)$$

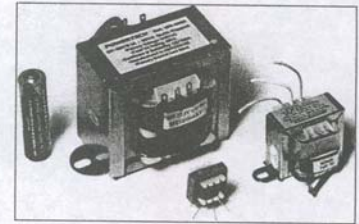
شکل این دو معادله آشنا به نظر می‌رسد و به آسانی می‌توان آن‌ها را با تحلیل مش تفسیر کرد. کنون  $i_1$  را در جهت عقربه‌های ساعت (ساعت‌گرد) و  $i_2$  را در خلاف آن در نظر می‌گیریم تا دقیقاً با جریان‌های شکل ۱۷-۱۳ یکی باشند. جمله  $M \frac{di_2}{dt}$  در معادله (۱۶) و  $M \frac{di_1}{dt}$  در معادله (۱۷) نشان می‌دهند که دو مش باید یک خود القای مشترک  $M$  داشته باشند. چون خودالقای کل حول مش سمت چپ  $L_1$  است، یک خودالقای  $M - L_1$  باید در مش اول در نظر گرفته شود ولی نه در مش دوم. به همین طریق خودالقای  $M - L_2$  در مش دوم لازم است ولی نه در مش اول. شبکه معادل حاصل در شکل ۱۸-۱۳ نشان داده شده است. یکسان بودن روابط ۱۷،  $i_1$ ، و  $i_2$  برای دو شبکه معادل بودن آن‌ها را تضمین می‌کند.



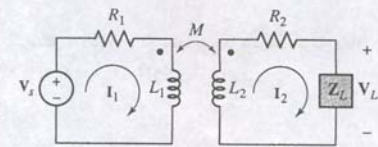
شکل ۱۷-۱۳ یک ترانس مفروض که با یک مدار T یا  $\Pi$  جایگزین می‌شود.



شکل ۱۸-۱۳ معادل T ترانس شکل ۱۷-۱۳.



شکل ۱۵-۱۳ گزینه‌ای از چند ترانس برای استفاده در الکترونیک باطری AA فقط به خاطر مقایسه آمده است.

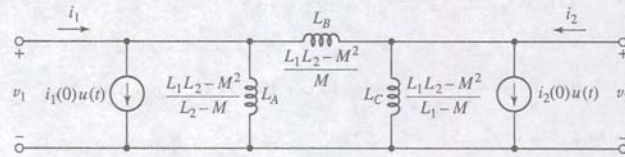


شکل ۱۶-۱۳ یک ترانس خطی حاوی یک منبع در اولیه و یک بار در ثانویه. در هر دو بخش اولیه و ثانویه مقاومت هم لحاظ شده است.

$\mathbf{Z}_{in}$  امپدانس است که از سیم‌پیچ اولیه ترانسفورماتور دیده می‌شود.



شکل ۱۳-۲۱ شبکه  $\Pi$  معادل ترانسفورماتور  
شکل ۱۳-۱۷



اکنون اگر از  $t=0$  انتگرال بگیریم، داریم:

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} \int_0^t v_1 dt - \frac{M}{L_1L_2 - M^2} \int_0^t v_2 dt \quad (۱۸)$$

به طریقی مشابه داریم:

$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1L_2 - M^2} \int_0^t v_1 dt + \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2} \int_0^t v_2 dt \quad (۱۹)$$

معادلات (۱۸) و (۱۹) را می‌توان به عنوان جفت معادلات گره تصور کرد، برای تهیه مقادیر اولیه مناسب باید یک منبع جریان پله را در هر گره نصب نمود. ضرایب هر انتگرال فرم کلی عکس القائاتی‌های معادل معینی را دارند. بنابراین ضریب دوم در معادله (۱۸)، یعنی  $M / (L_1L_2 - M^2)$  برابر  $1 / L_B$  یا عکس القائاتی بین گره‌های ۱ و ۲ در معادل  $\Pi$  طبق شکل ۱۳-۲۱ می‌باشد. پس:

$$L_B = \frac{L_1L_2 - M^2}{M}$$

اولین ضریب در معادله (۱۸) یعنی  $L_2 / (L_1L_2 - M^2)$  برابر  $1 / L_A + 1 / L_B$  است. پس:

$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}$$

یا

$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}$$

سرانجام:

$$L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}$$

در شبکه معادل  $\Pi$  هیچ کوپل مغناطیسی بین القاگرها وجود ندارد و جریان‌های اولیه در سه خود القاگر صفر می‌باشند.

برای جبران اثر جابه‌جاشدن هر یک از نقطه‌های ترانس، کافی است علامت  $M$  را در شبکه معادل منفی کنیم. در این جا هم همچون شبکه  $T$ ، ممکن است در شبکه  $\Pi$  مقدار خود القا منفی باشد.

شبکه معادل  $\Pi$  ترانس در شکل ۱۳-۱۹ (الف) را پیدا کنید.

جریان‌های اولیه صفر می‌شوند. چون جمله  $L_1L_2 - M^2$  بین  $L_A$ ،  $L_B$  و  $L_C$  مشترک است، اول آن را محاسبه می‌کنیم:

$$30 \times 10^{-3} \times 60 \times 10^{-3} - (40 \times 10^{-3})^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ H}^2$$

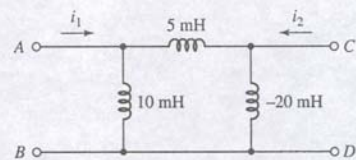
بنابراین

$$L_A = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_2 - M)} = \frac{2 \times 10^{-4}}{(20 \times 10^{-3})} = 10 \text{ mH}$$

$$L_C = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_1 - M)} = -20 \text{ mH}$$

و  $L_B = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{M} = 5 \text{ mH}$ . شبکه  $\Pi$  معادل در شکل ۱۳-۲۲ مشاهده می‌شود.

مثال ۱۳-۶



شکل ۱۳-۲۲ معادل  $\Pi$  ترانس خطی شکل  
۱۳-۱۹ (الف). فرض بر این است که  $i_1(0) = 0$  و  $i_2(0) = 0$  باشد.

اگر یکی از نقطه‌های ترانس داده شده در پایانه دیگر سیم‌پیچ قرار داشته باشد، علامت جمله‌های متقابل در معادلات (۱۶) و (۱۷) منفی می‌گردد. این به معنی تعویض  $M$  با  $(-M)$  است و انجام این عمل در شبکه معادل شکل ۱۳-۱۸، منجر به شبکه معادل صحیحی خواهد شد. مقدار سه القائاتی جدید،  $L_1 + M$ ،  $L_2 + M$  و  $-M$  هستند.

تمام القائاتی‌ها در معادل  $T$ ، همگی خود القا می‌باشند و در این شبکه القائاتی متقابل وجود ندارد. ممکن است القائاتی این مدار معادل منفی شود، ولی اگر هدف تحلیل ریاضی است، منفی بودن آن اصلاً مهم نیست. البته در صورت منفی بودن القائاتی ساخت چنین مدار معادلی در شبکه ممکن نخواهد بود. با این وجود مواردی وجود دارد که در سنتز شبکه‌ها به دست آوردن تابع تبدیل منجر به پیدایش شبکه  $T$  با القائاتی منفی می‌گردد. در این حالت، باید با یک ترانسفورماتور خطی مناسب چنین شبکه‌ای را ساخت.

مثال ۱۳-۵

معادل  $T$  در ترانس خطی شکل ۱۳-۱۹ (الف) را پیدا کنید.

می‌بینیم که  $L_1 = 30 \text{ mH}$ ،  $L_2 = 60 \text{ mH}$  و  $M = 40 \text{ mH}$  است. هر دو نقطه در پایانه‌های بالایی شکل ۱۳-۱۷ قرار دارند. پس در بازوی بالای چپ  $L_1 - M = -10 \text{ mH}$  در بالای سمت راست  $L_2 - M = 20 \text{ mH}$  و بخش وسط هم  $M = 40 \text{ mH}$  می‌باشد. معادل کامل  $T$  در شکل ۱۳-۱۹ (ب) ملاحظه می‌گردد.

برای نمایش هم‌ارزی این دو، بگذارید پایانه‌های  $C$  و  $D$  را مدار باز فرض کنیم و  $v_{AB} = 10 \cos 100t \text{ V}$  را به ورودی شکل ۱۳-۱۹ (الف) اعمال نماییم. پس:

$$i_1 = \frac{1}{30 \times 10^{-3}} \int 10 \cos(100t) dt = 3.33 \sin 100t \text{ A}$$

$$v_{CD} = M \frac{di_1}{dt} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

با اعمال همان ولتاژ در معادل  $T$  داریم:

$$i_1 = \frac{1}{(-10 + 40) 10^{-3}} \int 10 \cos(100t) dt = 3.33 \sin 100t \text{ A}$$

که همان مقدار قبلی است. همچنین ولتاژ در  $C$  و  $D$  برابر با ولتاژ دوسر القاگر  $40 \text{ mH}$  می‌گردد. پس:

$$v_{CD} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

و دو شبکه نتیجه یکسانی می‌دهند.

## تمرین

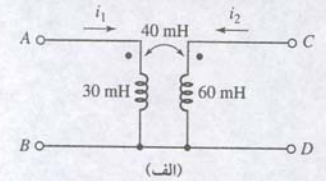
۱۳-۶ (الف) اگر دو شبکه شکل ۱۳-۲۰ معادل باشند، مقادیر  $L_x$ ،  $L_y$  و  $L_z$  را مشخص کنید. (ب) اگر نقطه در ثانویه شکل ۱۳-۲۰ (ب) در پایین سیم‌پیچ باشد، محاسبه را تکرار کنید. جواب:  $3.5 \text{ H}$ ،  $2.5 \text{ H}$ ،  $5.5 \text{ H}$  و  $-3.5 \text{ H}$ .

شبکه  $\Pi$  معادل به سادگی به دست نمی‌آید. این شبکه بسیار پیچیده‌تر است و آن‌قدر هم کاربر، ندارد. برای یافتن آن باید معادله (۱۷) را برای  $di_1/dt$  حل و نتیجه را در معادله (۱۶) قرار داد:

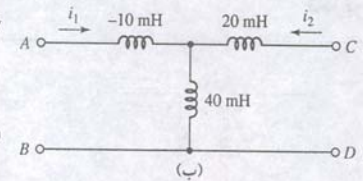
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

یا

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} v_1 - \frac{M}{L_1L_2 - M^2} v_2$$

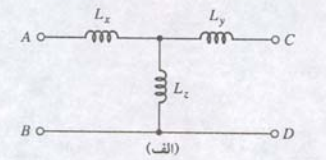


(الف)

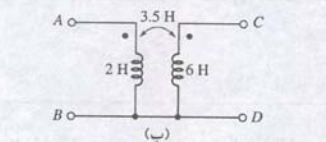


(ب)

شکل ۱۳-۱۹ (الف) مثالی از ترانس خطی.  
(ب) شبکه تونن ترانس.



(الف)



شکل ۱۳-۲۰



مدار به یک منبع ولتاژ سینوسی (15.92 Hz) 100 rad/s وصل است. همچنین لازم است تا دو مقاومت را به شماتیک بیفزاییم تا PSpice بدون تولید هر پیام خطایی کار کند. ابتدا یک مقاومت کوچک بین منبع ولتاژ و  $L_1$  قرار داده می‌شود. برای حداقل کردن اثر آن مقاومت  $1\text{ p}\Omega$  انتخاب شده است. دوم، یک مقاومت  $1000\text{ M}\Omega$  (در واقع بینهایت) به  $L_2$  وصل است. خروجی شبیه‌سازی، یک ولتاژ با اندازه  $13.33\text{ V}$  و زاویه فاز  $-3.819 \times 10^{-8}$  درجه (تقریباً صفر) است که با محاسبه دستی تجانس دارد.

PSpice دو مدل ترانس دیگر نیز دارد، یکی ترانس خطی XFRM\_LINEAR و دیگری ترانس ایده‌آل XFRM\_NONLINEAR که دارای ویژگی‌های زیر می‌باشند. در ترانس خطی مقادیر ضریب کوپل برای هر دو القاکنایی سیم‌پیچ باید معلوم باشد. ترانس ایده‌آل همان‌طور که خواهیم دید، نیاز به ضریب کوپل دارد ولی در ترانس ایده‌آل مقدار القاکنایی بینهایت یا نزدیک به بینهایت است. بنابراین پارامتر لازم برای بخش XFRM\_NONLINEAR تعداد دور هر سیم‌پیچ است.

## ۴-۱۳ ترانسفورماتور ایده‌آل

یک ترانس ایده‌آل تقریب خوبی از یک ترانس با کوپل یا تزویج بالا است و در آن ضریب کوپل تقریباً برابر یک، و رآکتانس القاگرهای اولیه و ثانویه در مقایسه با امپدانس‌های متصل به اولیه و ثانویه بسیار بزرگ است. برای دستیابی به این ویژگی در محدوده‌ای از فرکانس‌ها از هسته آهنی استفاده می‌شود. می‌توان ترانس هسته آهنی را به سادگی با جایگزینی ترانس با ترانس ایده‌آل تحلیل کرد. ترانس ایده‌آل مدل مرتبه اولی از ترانس هسته آهنی است.

### نسبت دور در یک ترانس ایده‌آل

در مورد ترانس ایده‌آل با مفهوم جدیدی به نام نسبت دور  $a$  سروکار خواهیم داشت. خودالقای یک سیم‌پیچ متناسب با مربع تعداد دور سیمی است که سیم‌پیچ را می‌سازد. این رابطه به شرطی معتبر است که شار ناشی از جریان در سیم‌پیچ از تمام دورها بگذرد. برای ایجاد رابطه‌ای کمی لازم است، مفاهیم الکترومغناطیسی را به کار ببریم. این کار در بحث تحلیل مدار ما گنجانده نشده است. با این وجود یک بحث کیفی هم می‌تواند کافی باشد. اگر جریان  $I$  در یک سیم‌پیچ  $N$  دور جاری شود، شار حاصل  $N$  برابر شار ناشی از یک دور سیم‌پیچ است. اگر  $N$  دور را همزمان تصور کنیم، آن‌گاه همه شار قطعاً همه دورها را در بر می‌گیرد. با تغییر زمانی جریان و شار، ولتاژی در سیم‌پیچ القا می‌شود مسلماً ولتاژ القایی در سیم‌پیچ  $N$  دوری باید  $N$  برابر ولتاژ یک دور باشد. به این دلیل، تناسب بین القاکنایی و مربع تعداد دورها از این جا ناشی می‌شود. پس:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = a^2 \quad (20)$$

یا

$$a = \frac{N_2}{N_1} \quad (21)$$

شکل ۲۵-۱۳ یک ترانس ایده‌آل را که بار به ثانویه آن وصل است، نشان می‌دهد. طبیعت ایده‌آل در ترانس به چند طریق نشان داده شده است: یکی این‌که بین دو سیم‌پیچ خطوط موازی

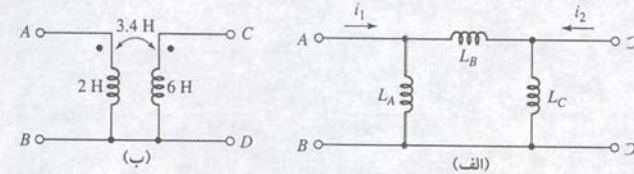
اگر دوباره نتیجه را با فرض  $V_{AB} = 10 \cos 100t\text{ V}$  تست کنیم و پایانه‌های C-D را باز بگذاریم، ولتاژ خروجی به راحتی از تقسیم ولتاژ به دست می‌آید:

$$V_{CD} = \frac{-20 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} - 20 \times 10^{-3}} 10 \cos 100t = 13.33 \cos 100t\text{ V}$$

که مثل قبل است. بنابراین شبکه شکل ۲۲-۱۳ به لحاظ الکتریکی معادل شبکه‌های شکل ۱۹-۱۳ (الف) و (ب) می‌باشد.

## تمرین

۷-۱۳ اگر شبکه‌های شکل ۲۳-۱۳ معادل باشند، مقادیر  $L_A$ ،  $L_B$  و  $L_C$  را مشخص کنید (به mH).



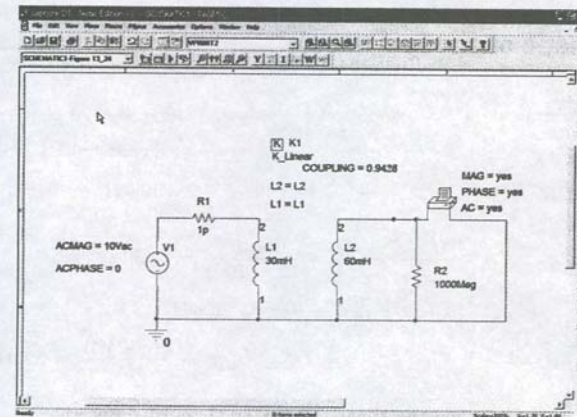
شکل ۲۳-۱۳

جواب:  $L_C = 314.3\text{ mH}$ ،  $L_B = 129.4\text{ mH}$ ،  $L_A = 169.2\text{ mH}$

## تحلیل کامپیوتری

توانمندی در شبیه‌سازی مدارهایی که حاوی القاکنایی کوپل مغناطیسی‌اند، خصوصاً با کاهش روزافزون ابعاد مدارهای مدرن، مهارتی مفید است. با نزدیک شدن حلقه‌ها و یا بخش‌هایی از رساناها به واسطه میدان‌های پراکنده یا یکدیگر کوپل می‌گردند و با هم واکنش نشان می‌دهند. PSpice اجازه می‌دهد تا با جعبه اجزای K\_Linear این اثر را بررسی کنیم. این مؤلفه جهت القاگرها را در شماتیک با ضریب  $k$  به هم مرتبط می‌سازد و  $0 \leq k \leq 1$  است.

مثلاً فرض کنید که مدار شکل ۱۹-۱۳ (الف) را که از دو سیم‌پیچ تشکیل و کوپل آن با القای متقابل  $M = 40\text{ mH}$  توصیف شده است، بخواهیم شبیه‌سازی کنیم. این کمیت متناظر با ضریب کوپل  $k = 0.9428$  است. مدار مبنای مربوطه در شکل ۲۴-۱۳ ملاحظه می‌شود. می‌بینید که هیچ نقطه‌ای در کنار سمبل القاگر وجود ندارد. وقتی که القاگر افقی روی شماتیک قرار گیرد، پایانه نقطه‌دار در سمت چپ است. این پایانه‌ای است که نماد حول آن می‌چرخد و دقت کنید که جعبه محاوره K\_Linear به طور دلخواه هر جایی می‌تواند باشد. دو القاگر کوپل شده  $L_1$  و  $L_2$  همراه با ضریب کوپل در کادر محاوره اجرا داده شده‌اند.



شکل ۲۴-۱۳ شماتیک مداری که باید شبیه‌سازی شود.





را به این نام می‌خوانند. در ترانس ایده‌آل امپدانس منعکسه واقعی بینهایت است وگرنه امپدانس بینهایت القاگر اولیه حذف نمی‌شد. این عمل حذف در صورت معادله (۲۴) رخ می‌دهد. امپدانس  $Z_L / a^2$  جمله کوچکی است که به دلیل عدم حذف کامل باقی می‌ماند. قسمت رآکتیو امپدانس منعکسه واقعی ترانس ایده‌آل هم تغییر علامت می‌دهد. با این وجود، اثر رآکتانس بینهایت سیم‌پیچ اولیه و رآکتانس منعکسه بینهایت ولی با علامت منفی ثانویه حذف می‌گردد.

بنابراین مهمترین مشخصه ترانس ایده‌آل قابلیت تغییر اندازه امپدانس یا بهتر بگوییم تغییر سطح امپدانس است. ترانس ایده‌آل اولیه‌ای که ۱۰۰ دور سیم‌پیچ اولیه و ۱۰۰۰۰ دور سیم‌پیچ ثانویه دارد، نسبت دور آن ۱۰۰۰۰/۱۰۰ یا ۱۰۰ خواهد بود. سپس هر امپدانی که به دو سر ثانویه نصب گردد، با ضریب ۱۰۰<sup>۲</sup> یا ۱۰۰۰۰ کاهش می‌یابد. درواقع یک مقاومت ۲۰۰۰۰Ω، تنها ۲Ω و هر القاگر ۲۰۰ mH همچون ۲۰ μH و هر خازن ۱۰۰ PF به مقدار ۱ μF به نظر خواهد رسید. اگر محل سیم‌پیچ اولیه و ثانویه تعویض شود، آن‌گاه  $a = 0.01$  بوده و امپدانس بار بزرگ می‌شود. در عمل، همیشه این تغییراندازه رخ نمی‌دهد، زیرا به یاد داریم که در قدم آخر محاسبه امپدانس ورودی و میل  $L_1$  در معادله (۲۵) به سمت بینهایت، لازم شد که  $Z_L$  را در مقایسه با  $j\omega L_1$  نادیده بگیریم. چون  $L_2$  هرگز بینهایت نمی‌شود، اگر امپدانس بار خیلی بزرگ باشد، مدل ترانس ایده‌آل هرگز معتبر نیست.

### استفاده از ترانس‌ها برای تطبیق امپدانس

مثالی عملی از کاربرد یک ترانس آهنی به عنوان تغییر دهنده سطح امپدانس، اتصال یک تقویت کننده صوتی لامپی متصل به بلندگو است. برای دستیابی به حداکثر توان انتقالی می‌دانیم که مقاومت بار باید برابر با مقاومت داخلی منبع باشد. معمولاً بلندگو مقاومتی در حد چند اهم (و اغلب از جنس اهمی) دارد، در حالی که تقویت کننده توان، مقاومتی چند هزار اهمی را از خود به نمایش می‌گذارد. پس ترانسی با  $N_1 < N_2$  لازم است. مثلاً اگر تقویت کننده (یا ژنراتور) امپدانس داخلی ۴۰۰۰Ω داشته ولی مقاومت بلندگو ۸Ω باشد، آن‌گاه:

$$Z_g = 4000 = \frac{Z}{a^2} = \frac{8}{a^2}$$

یا

$$a = \frac{1}{22.4}$$

خواهد بود. پس:

$$\frac{N_1}{N_2} = 22.4$$

بین جریان‌های اولیه و ثانویه  $I_1$  و  $I_2$  در ترانس ارتباط ساده‌ای وجود دارد. از معادله (۲۳) داریم:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega M}{Z_L + j\omega L_2}$$

اجازه می‌دهیم تا  $L_2$  بینهایت شود و بنابراین:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

یا

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{a}}$$

(۲۷)

بنابراین نسبت جریان‌های اولیه و ثانویه همان نسبت دورها است. اگر  $N_2 > N_1$  باشد، آن‌گاه  $a > 1$  است و آشکار است که جریان بیشتر در تعداد دور کمتر وجود خواهد داشت. به بیان دیگر:

$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$

عمدی رسم شده تا نمایشگر ورق‌های آهنی در هسته ترانس باشد. ضریب کوپل ۱ و نیز علامت  $a$ : نسبت دور  $N_1$  به  $N_2$  را نشان می‌دهد.

بگذارید این ترانس را در حالت ماندگار سینوسی تحلیل کنیم تا فرضیات خود را در ساده‌ترین فرم ببینیم. دو معادله حلقه وجود دارد:

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \quad (۲۲)$$

$$0 = j\omega M I_1 + (Z_L + j\omega L_2) I_2 \quad (۲۳)$$

ابتدا امپدانس ورودی را تعیین می‌کنیم. با حل معادله (۲۳) برای یافتن  $I_2$  و جایگزینی آن در معادله (۲۲) داریم:

$$V_1 = I_1 j\omega L_1 + I_1 \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2}$$

و

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2}$$

چون  $M^2 = L_1 L_2$ ،  $k = 1$  است، پس:

$$Z_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{Z_L + j\omega L_2}$$

در کنار ضریب کوپل واحد، دیگر مشخصه یک ترانس ایده‌آل وجود امپدانس خیلی بالا در اولیه و ثانویه سیم‌پیچ‌ها است که از فرکانس کار هم مستقل می‌باشد. این خصوصیت بیان می‌کند که حالت ایده‌آل برای  $L_1$  و  $L_2$  گرایش آن‌ها به سمت بینهایت است. با این وجود، نسبت آن‌ها باید معین باقی بماند که با نسبت دورها مشخص می‌شود. پس:

$$L_2 = a^2 L_1$$

و

$$Z_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 a^2 L_1^2}{Z_L + j\omega a^2 L_1}$$

اکنون اگر  $L_1$  بینهایت شود، هر دو جمله در سمت راست عبارت فوق بینهایت خواهد شد و حاصل نامعین است. پس لازم است ابتدا دو جمله را ترکیب کنیم.

$$Z_{in} = \frac{j\omega L_1 Z_L - \omega^2 a^2 L_1^2 + \omega^2 a^2 L_1^2}{Z_L + j\omega a^2 L_1} \quad (۲۴)$$

یا

$$Z_{in} = \frac{j\omega L_1 Z_L}{Z_L + j\omega a^2 L_1} = \frac{Z_L}{Z_L / j\omega L_1 + a^2} \quad (۲۵)$$

اکنون با  $L_1 \rightarrow \infty$  می‌بینیم که

$$Z_{in} = \frac{Z_L}{a^2} \quad (۲۶)$$

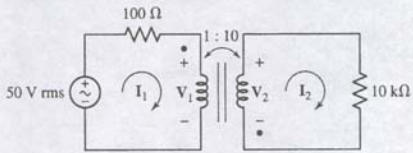
در نیال معین است.

این نتیجه چند نکته جالب در بردارد، که حداقل یکی از آن‌ها با مشخصات ترانس خطی متناقض است. امپدانس ورودی یک ترانس ایده‌آل متناسب با امپدانس بار است و ثابت تناسب هم عکس مربع نسبت دورها است. به بیان دیگر، اگر امپدانس بار از نوع امپدانس خازنی باشد، آن‌گاه امپدانس ورودی از نوع خازنی است. در ترانس خطی، با این وجود، امپدانس منعکسه تغییر علامت می‌داد و بار خازنی به صورت القایی در اولیه ظاهر می‌شد. علت را چنین می‌توان تفسیر کرد که اولاً  $Z_L / a^2$  امپدانس منعکسه نیست، گرچه به اشتباه آن



آن‌گاه  $V_2$  از  $I_2$  به اندازه  $\theta$  پیش‌فاز است. به علاوه امپدانس  $Z_L / a^2$  بوده و  $V_1$  نیز از  $I_1$  به اندازه  $\theta$ . اگر جریان و ولتاژ با مقدار rms نمایش داده شوند، آن‌گاه  $|I_2| \cos \theta$  باید برابر با  $|V_1| \cos \theta$  باشد و در این هنگام همه توان انتقالی به پایانه‌های اولیه به بار منتقل می‌گردد و هیچ انرژی انتقالی به یک ترانس ایده‌آل، جذب آن نمی‌شود. مشخصه ترانس ایده‌آلی را که به دست آوردیم با تحلیل فیزیکی هم قابل دستیابی‌اند. البته این مشخصه‌ها در پاسخ حالت ماندگار سینوسی صحیح‌اند ولی دلیلی بر صحت آن‌ها در پاسخ کامل وجود ندارد. درواقع این مشخصات در حالت کلی هم معتبرند. این مطلب را به راحتی می‌توان با استفاده از حوزه فرکانسی نشان داد. در هر حال تحلیل ما حاوی تقریب‌هایی است که باید در مدل‌های ترانس‌های واقعی اعمال شود تا ترانس ایده‌آل به دست آید. مثلاً دیدیم که راکتانس ثانویه باید از بزرگترین امپدانس که به آن متصل می‌گردد، خیلی بزرگتر باشد. بنابراین شرایطی را به دست آوردیم که تحت آن یک ترانس به جز آن، به صورت ایده‌آل عمل نمی‌کرد.

مثال ۷-۱۳



شکل ۲۷-۱۳ یک مدار ساده با ترانسی ایده‌آل.

برای مدار شکل ۲۷-۱۳ توان متوسط مصرفی را در مقاومت  $10 \text{ k}\Omega$  معین کنید.

توان متوسط مصرفی در مقاومت  $10 \text{ k}\Omega$  برابر است با

$$P = 10000 |I_2|^2$$

منبع  $50 \text{ V rms}$  امپدانس ورودی ترانس را  $Z_L / a^2$  یا  $100 \Omega$  حس می‌کند. بنابراین:

$$I_1 = \frac{50}{100 + 100} = 250 \text{ mA rms}$$

از معادله (۲۷) داریم  $I_2 = (1/a)I_1 = 25 \text{ mA rms}$ . بنابراین درمی‌یابیم که مقاومت  $10 \text{ k}\Omega$ ،  $6.25 \text{ W}$  توان مصرف می‌کند.

در این مثال از زوایای فاز صرف‌نظر شده است زیرا در محاسبه توان متوسط تلف شده در یک مقاومت بار خالص اهمی نقشی ندارند.

۸-۱۳ مثال ۷-۱۳ را با استفاده از ولتاژها برای یافتن توان تلف شده تکرار کنید.

جواب:  $6.25 \text{ W}$

### رابطه ولتاژ در حوزه زمان

اکنون ببینیم که کمیت‌های حوزه زمان  $v_1$  و  $v_2$  چگونه در یک ترانس ایده‌آل با هم مرتبط‌اند. با مراجعه به شکل ۱۷-۱۳ با ملاحظه دو معادله (۱۶) و (۱۷) که این ارتباط را بیان می‌کنند و حل  $di_2/dt$  در معادله دوم و جایگزینی در معادله اول داریم:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

با این وجود برای ضریب کوپل واحد،  $M^2 = L_1 L_2$  بوده و خواهیم داشت:

$$v_1 = \frac{M}{L_2} v_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} v_2 = \frac{1}{a} v_2$$

پس رابطه بین ولتاژ اولیه و ثانویه در پاسخ کامل حوزه زمان هم صدق می‌کند.

عبارتی برای ارتباط جریان اولیه و ثانویه در حوزه زمان از تقسیم طرفین معادله (۱۶) بر  $L_1$  خیلی سریع تر حاصل می‌گردد.

دو طرف معادله (۱۶) را بر  $L_1$  تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} + a \frac{di_2}{dt}$$

اگر هر یک از دو جریان معکوس شود و یا محل نقطه ترانس عوض گردد، نسبت جریان‌ها منفی نسبت دورها خواهد بود.

در مثالی که ارائه شد و در آن یک ترانس ایده‌آل برای تغییر سطح امپدانس و تطبیق بلندگوی تقویت‌کننده به کار رفت، جریان  $50 \text{ mA rms}$  با فرکانس  $1000 \text{ Hz}$  در اولیه موجب تولید جریان  $1.12 \text{ A}$  با فرکانس  $1000 \text{ Hz}$  در ثانویه شده توان انتقالی به بلندگو  $8^{2.8} (1.12)$  یا  $10 \text{ W}$  می‌گردد و توان انتقال یافته به تقویت‌کننده هم همان  $4000^{2.8} (0.05)$  یا  $10 \text{ W}$  است. پاسخ مورد تأیید است زیرا یک ترانس ایده‌آل نه حاوی بار فعال است تا تولید توان کند و نه مقاومتی دارد تا توان را جذب نماید.

### استفاده از ترانس در تنظیم سطح ولتاژ

چون توان حمل شده به ترانس ایده‌آل مثل توان انتقالی به یک بار است ولی جریان‌های اولیه و ثانویه با نسبت دور مناسب می‌باشند، منطقی است که ولتاژهای اولیه و ثانویه به نسبت دورها باشند. اگر ولتاژ ثانویه یا ولتاژ بار را با رابطه زیر تعریف کنیم:

$$V_2 = I_2 Z_L$$

و ولتاژ اولیه در دو سر  $L_1$  باشد، آن‌گاه:

$$V_1 = I_1 Z_{in} = I_1 \frac{Z_L}{a^2}$$

در این صورت نسبت دو ولتاژ چنین است:

$$\frac{V_2}{V_1} = a^2 \frac{I_2}{I_1}$$

یا

$$\frac{V_2}{V_1} = a = \frac{N_2}{N_1}$$

(۲۸)

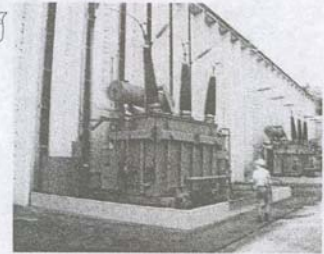
بنابراین نسبت ولتاژ ثانویه به ولتاژ اولیه برابر نسبت دورها است. باید توجه کرد که این معادله عکس معادله (۲۷) است و این خود منشأ اشتباه برای بسیاری از دانشجویان می‌باشد. این نسبت می‌تواند با معکوس کردن ولتاژ یا تغییر محل نقطه منفی گردد.

به این ترتیب با انتخاب هر نسبت دوری می‌توان هر ولتاژ  $ac$  را به هر ولتاژ  $ac$  دیگر تبدیل کرد. اگر  $a > 1$  باشد، ولتاژ ثانویه بیشتر از اولیه است و چیزی را که به آن امروزه ترانس افزایشده می‌گویند خواهیم داشت. اگر  $a < 1$  باشد، ولتاژ ثانویه کوچکتر از اولیه می‌باشد و به آن ترانس کاهشده می‌گویند. شرکت‌های تولید برق معمولاً ولتاژ را بین  $12 \text{ kV}$  تا  $25 \text{ kV}$  تولید می‌کنند. گرچه این سطح ولتاژ بالا است ولی تلفات انتقال در فواصل طولانی را با افزایش سطح ولتاژ به حدود چند صد هزار ولت توسط ترانس افزایشده می‌توان کاهش داد (شکل ۲۶-۱۳ الف)). سپس این ولتاژ به وسیله ترانس کاهشده به چند ده کیلووات در پست‌های محلی توزیع کاهش می‌یابد (شکل ۲۶-۱۳ ب)). ترانس‌های کاهشده بیشتر که در خارج ساختمان نصب می‌شوند می‌توانند ولتاژ را به سطح  $110 \text{ V}$  یا  $220 \text{ V}$  که مورد استفاده است برسانند (شکل ۲۶-۱۳ ج)). از ترکیب معادلات (۲۷) و (۲۸) داریم:

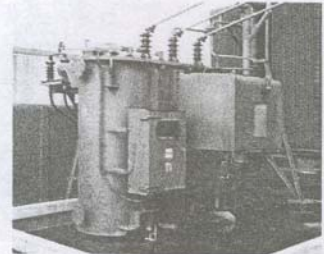
$$V_2 I_2 = V_1 I_1$$

ملاحظه می‌شود که ولت آمپرهای اولیه - ثانویه برابرند. اندازه این حاصل ضرب معمولاً به عنوان حداکثر مجاز ترانس‌های قدرت شناخته می‌شوند. اگر بار دارای زاویه فاز  $\theta$  باشد، یعنی:

$$Z_L = |Z_L| \angle \theta$$



(الف)



(ب)



(ج)

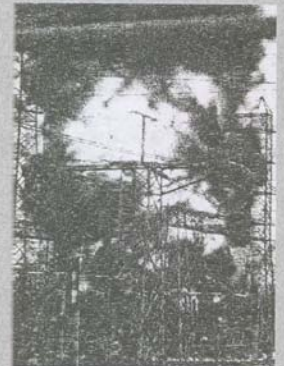
شکل ۲۶-۱۳ (الف) ترانس افزایشده که در افزایش ولتاژ خروجی برای ارسال به خط انتقال به‌کاررفته است. (ب) پست‌های ترانس به‌کاررفته برای کاهش ولتاژ از سطح  $250 \text{ kV}$  به چند ده کیلووات جهت توزیع محلی. (ج) ترانس‌های کاهشده برای کاهش سطح ولتاژ توزیع به  $240 \text{ V}$  جهت مصارف انرژی خانگی.



## کاربرد عملی

## ترانسفورماتورهای ابررسانا

در بسیاری از سولر، از انواع تلمانی که ممکن است در یک ترانس خاص صوت گیر، صرف نظر کردیم، با این وجود، هنگام بررسی ترانس های قدرت باید به این تغذیه توجه خاصی نمود حتی اگر بازده آن ها ۹۷٪ یا بالاتر باشد. گرچه چنین راندمانی ممکن است عده تقریباً ایده آلی به نظر برسد ولی در جریان های چند هزار آمپری، این بازده مقدار قابل توجهی تلفات انرژی دارد. مثلاً وقتی جریانی از سیم پیچی بگنجد، مقاومت مجر به تلفات  $i^2 R$  می گردد و به این معنی است که توان جذب شده به وسیله سیم ها با مربع جریان ارتباط دارد و به صورت گرماتلف می گردد. با افزایش دما، مقاومت هم بالا می رود و لذا توان تلف شده  $i^2 R$  نیز در سیم اضافه خواهد شد. همچنین دمای بالا سبب تخریب عایق سیم و بنابراین کوتاه شدن عمر ترانس می شود. در نتیجه بسیاری از ترانس های قدرت مدرن به نشت روغن عایق برای دفع گرمای تولیدی مجهزند. با این وجود این روش چند عیب دارد. زنگ زدگی ناشی از عمر طولانی و خوارضی از این قبیل اغلب سبب نشتی ترانس و لذا اثرات مخرب محیطی می گردد. استفاده از روغن های قابل اشتعال هم خطر آتش سوزی ناشی از مبارزه با آتش در پست های ولتاژ بالا کوری خطرناکی می باشد (شکل ۲۸-۱۳).

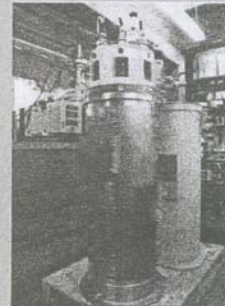


شکل ۲۸-۱۳

یک روش ممکن برای اصلاح رفتار چنین ترانس ها استفاده از سیم های ابررسانا (سوپرکنداکت) و جایگزینی آن با سیم پیچ های مقاومتی است. مواد ابررسانا در دمای بالا مقاومت دارند ولی در دمای بحرانی در برابر جریان بی مقاومت می شوند. برای بسیاری از مواد این دمای بحرانی تنها چند درجه از صفر مطلق بیشتر است. بنابراین نیاز به مایع هلیوم برای خنک شدن دارند. با این وجود با پدایش ابررساناهای سرمایک دمای بالا در

سال ۱۹۸۰ مواد در دماهای ۹۰ K ( $-180^\circ\text{C}$ ) و بالاتر ساخته شدند و جایگزینی تجهیزات مبتنی بر هلیوم یا سیستم های نیتروژنی امکان پذیر شد. این مواد به میزان قابل توجهی از لحاظ ساخت و کار ارزان تر تمام می شوند. شکل ۳-۳۰ یک ترانس ۶۳۰ - KVA ابررسانا را که به وسیله کمپانی ABB ساخته شده نشان می دهد که برای شبکه برق شهر ژنو سوئیس در مارس ۱۹۹۷ ساخته شده است. تغییر خط مشی طراحی و جایگزینی سیم های ابررسانا به جای سیم پیچ های مقاومتی مزایای متعددی دارد. اول این که اندازه ترانس با توان یکسان به یک سوم کاهش یافته است. دوم این که استفاده از خنک کننده نیتروژنی خطر آتش سوزی روغن را از بین برده است و نیز چون مایع نیتروژن به گاز نیتروژن تبدیل می گردد، از قبل محیط محصور شده و نشتی هم موجب آلودگی آب های زیرزمینی نمی گردد. سوم ولی شاید مهمتر از همه، حذف تلفات مقاومتی موجب بالا رفتن بازده ترانس می شود و به این ترتیب توان مورد تقاضا از ژنراتور کاهش یافته و صرفه جویی قابل توجهی به ثبات دارد.

در هر صورت هر طرحی معایبی دارد که باید در برابر مزایای آن ارزیابی گردد و ترانس های ابررسانا هم استثنای این نیستند. یکی از مهمترین موانع، هزینه بالای ساخت سیم های ابررسانای چند کیلو متری در مقایسه با سیم مسی است. این سیم ها معمولاً در داخل غلافی از نقره ساخته می شوند و در نتیجه هنگام گرم شدن مسیر جریانی ایجاد خواهد شد. مادمی که سیم دورنی ابررسانا باشد، جریانی از نقره عبور نمی کند زیرا در دمای نیتروژن مایع نایب مقاومت است) به کارگیری نقره بر قیمت سیم می افزاید. با این وجود استفاده از ماده ارزانتر مس انتخاب خوبی در این کاربرد نیست، زیرا این ماده مایل به واکنش با مواد ابررسانا است، خلاصه این که گرچه ترانس ابررسانا قادر است در هزینه تولید کننده در دراز مدت صرفه جویی کند (بسیاری از ترانس ها ممکن است تا ۳۰ سال سرویس بدهند) ولی هزینه اولیه آن خیلی بالاتر از ترانس های مقاومتی قدیمی است. در حال حاضر بسیاری از کمپانی ها و تولید کنندگان انرژی الکتریکی هزینه های کوتاه مدت را در نظر می گیرند و به سرمایه گذاری برای منافع دراز مدت مایل نیستند.



شکل ۲۹-۱۳ ترانس ابررسانای ۱۵ kVA

سپس یکی از مفروضات مربوط به ترانس ایده آل را به کار می گیریم.  $I_1$  بینهایت است، اگر فرض شود که  $V_1$  بینهایت نیست، باید داشته باشیم:

$$\frac{di_1}{dt} = -a \frac{di_2}{dt}$$

با گرفتن انتگرال از طرفین داریم:

$$i_1 = -ai_2 + A$$

که در آن A ثابتی از انتگرال گیری است که بر حسب زمان تغییر نمی کند. لذا اگر از جریان dc اولیه و ثانویه صرف نظر کنیم و توجه خود را فقط به بخشی از پاسخ معطوف داریم که بر حسب زمان تغییر می کند، خواهیم داشت:

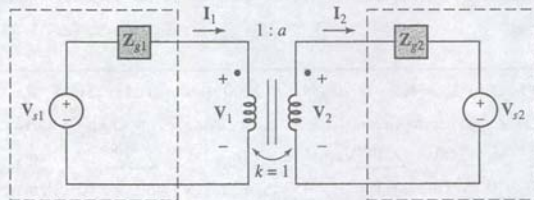
$$i_1 = -ai_2$$

علامت منفی ناشی از محل نقطه بر روی ترانس و انتخاب جهت جریان ها در شکل ۱۷-۱۳ است. بنابراین همان رابطه جریان - ولتاژی در حوزه زمان به دست آمد که قبلاً در حوزه فرکانس به دست آمده بود، با این شرط که مؤلفه های dc چشم پوشی شوند. نتایج حاصله در حوزه زمان عمومی ترند ولی روش به دست آوردنشان واضح نیست. به کمک مشخصات ترانس ایده آل می توان مدارهای ترانس را ساده کرد. برای نشان دادن این مطلب اجازه بدهید فرض کنیم که به جای تمام مدارهای سمت چپ اولیه، معادل تونن آن را گذاشته ایم و همین کار را در مورد شبکه سمت راست ثانویه هم انجام می دهیم. بنابراین مدار شکل ۳۰-۱۳ را خواهیم داشت. فرکانس منبع محرک  $\omega$  فرض شده است.

## مدارهای معادل

اکنون قضایای تونن و نورتن را برای دستیابی به مدار معادلی که حاوی ترانس است پیاده می کنیم. مثلاً بیایید ابتدا معادل تونن سمت چپ پایانه های ثانویه را معین کنیم. با باز کردن مدار ثانویه  $I_2 = 0$  و لذا  $I_1 = 0$  می گردد ( $L_1$  را بینهایت در نظر بگیرید). هیچ ولتاژی در سر  $Z_{g1}$  ظاهر نمی شود و بنابراین  $V_1 = V_{s1}$  و  $V_2 = 0$  خواهد بود. امپدانس تونن با کشتن  $V_{s1}$  و استفاده از مربع نسبت دور و واقع عکس این نسبت به دست می آید، چون ما از پایانه های ثانویه به اولیه نگاه می کنیم، بنابراین،  $Z_{th2} = Z_{g1} a^2$ . به منظور تست بگذارید جریان ثانویه مدار باز  $I_{2sc}$  را معین کنیم. با اتصال کوتاه ثانویه، مولد موجود در اولیه امپدانس  $Z_{g1}$  را در مقابل خود می بینید، پس است که باید هم باشد. معادل تونن ترانس و مدار اولیه در مدار شکل ۳۱-۱۳ مشاهده می شود.

بنابراین هر ولتاژ اولیه ای در نسبت دور ضرب می شود و هر جریان اولیه ای بر نسبت دور تقسیم می گردد، و هر امپدانس اولیه ای در مربع نسبت دور ضرب می شود. آن گاه این مقادیر جایگزین ولتاژ، جریان، امپدانس و نهایتاً ترانس می گردند. اگر هر یک از نقاط روی پایانه ها تغییر مکان دهند، می توان معادل را با تعویض علامت نسبت دور به دست آورد.



شکل ۳۰-۱۳ شبکه متصل به پایانه های اولیه و ثانویه ترانس ایده آل با معادل تونن نشان داده شده است.



## ۵-۱۳ خلاصه فصل و مرور

- القای متقابل، ولتاژ القایی را در دو سر یک سیم‌پیچ به علت میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم‌پیچ دوم توصیف می‌کند.
- قرارداد نقطه، علامت را به جمله القای متقابل تخصیص می‌دهد.
- برطبق قرارداد نقطه، جریان وارده به پایانه نقطه‌دار یک سیم‌پیچ، ولتاژ مدار بازی را با مرجع ولتاژ مثبت در پایانه نقطه‌دار سیم‌پیچ دوم تولید می‌کند.
- انرژی کل ذخیره شده در جهت سیم‌پیچ کوپل شده سه جمله دارد: انرژی ذخیره شده در هر خودالقا ( $\frac{1}{2} L i^2$ ) و انرژی ذخیره شده در القاکنایی متقابل ( $M i_1 i_2$ ).
- ضریب کوپلاژ با رابطه  $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$  داده می‌شود و محدود به مقاداری بین 0 و 1 است.
- یک ترانس خطی از دو سیم‌پیچ کوپل شده تشکیل شده است: یکی سیم‌پیچ اولیه و دیگری سیم‌پیچ ثانویه.
- یک ترانس ایده‌آل تقریب خوبی برای ترانس‌های هسته آهنی است. ضریب کوپل برابر واحد و القاکنایی بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود.
- نسبت دور  $N_2 / N_1 = a$  یک ترانس ایده‌آل ولتاژهای سیم‌پیچ اولیه را به ثانویه ارتباط می‌دهند:  $V_2 = a V_1$ .
- نسبت دور  $a$ ، جریان‌های اولیه و ثانویه را در سیم‌پیچ‌های اولیه و ثانویه مرتبط می‌کند:  $I_1 = a I_2$ .

## ۶-۱۳ خواندنی‌های کمکی

Almost everything you ever wanted to know about transformers can be found in

M. Heathcote, *J&P Transformer Book*, 12th ed. Oxford: Reed Educational and Professional Publishing Ltd., 1998.

Another comprehensive transformer title is

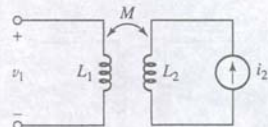
W.T. McLyman, *Transformer and Inductor Design Handbook*, 3rd ed. New York: Marcel Dekker, 2004.

A good transformer book with a strong economic focus is

B.K. Kennedy, *Energy Efficient Transformers*. New York: McGraw-Hill, 1998.

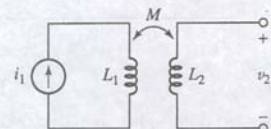
## مسائل

## ۱-۱۳ القای متقابل



شکل ۱۳-۳۶

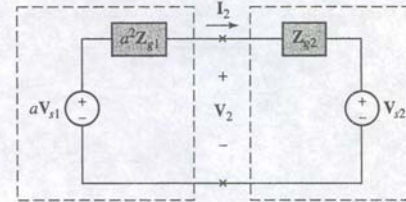
۱. مدار شکل ۱۳-۳۵ را ملاحظه کنید. اگر  $i_1(t) = 400 \cos 120\pi t$  A باشد و حداکثر مقدار  $i_2(t)$  برابر 100 V باشد، مقدار القای متقابل بین  $L_1$  و  $L_2$  چیست؟



شکل ۱۳-۳۵

۲. در مدار شکل ۱۳-۳۶، ولتاژ  $v_1$  برابر  $115\sqrt{2} \cos(120\pi t - 16^\circ)$  V و  $i_1 = 30 \sin 80t$  A و  $i_2 = 30 \cos 80t$  A باشد مطلوب است (الف) القاگر  $L_1$  و  $L_2$  چیست؟

۳. ساختار فیزیکی سه جفت سیم‌پیچ کوپل شده در شکل ۱۳-۳۷ دیده می‌شود. روی سیم‌پیچ هر یک از آن‌ها محل نقطه را مشخص کنید.
۴. دو القاگر کوپل شده شکل ۱۳-۳۸ را در مداری با ولتاژها و جریان‌های شکل به هم وصل‌اند.  $L_1 = 1$  H،  $L_2 = 3$  H و  $M = 0.5$  H. اگر  $i_1 = 30 \sin 80t$  A و  $i_2 = 30 \cos 80t$  A باشد مطلوب است (الف)  $v_1$  و (ب)  $v_2$ .

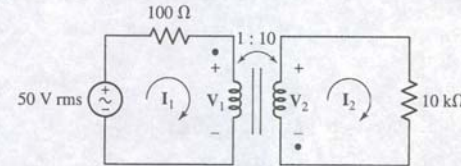


شکل ۱۳-۳۱ معادل تونن شبکه سمت چپ پایانه‌های ثانویه در شکل ۱۳-۳۰ که برای ساده‌کردن مدار به‌کاررفته است.

معادل‌های فوق‌الذکر طبق شکل ۱۳-۳۱ هنگامی امکان‌پذیرند که شبکه متصل به دو پایانه اولیه و متصل به دو پایانه ثانویه قابل جایگزینی با معادل‌های تونن باشند. یعنی هر یک باید یک شبکه دو پایانه باشند. مثلاً اگر ما دو سیم اولیه را از محل ترانس قطع کنیم، مدار باید به دو بخش تقسیم گردد و نباید عنصر یا شبکه‌ای بین اولیه و ثانویه ترانس پل بزنند. تحلیل مشابهی از ترانس و شبکه ثانویه نشان می‌دهد که هر چیزی در سمت راست پایه‌های اولیه با یک شبکه معادل بدون لحاظ ترانس قابل جایگزینی است و در آن هر ولتاژی بر  $a$  تقسیم، هر جریانی ضربدر  $a$  و هر امپدانسی بر  $a^2$  تقسیم می‌شود. تعویض هر سیم‌پیچ با دیگری ضرب نسبت دور  $a$  را به دست می‌دهد.

## مثال ۱۳-۸

برای مدار شکل ۱۳-۳۲ مدار معادل ترانس و ثانویه و نیز معادل ترانس و مدار اولیه را به‌دست آورید.



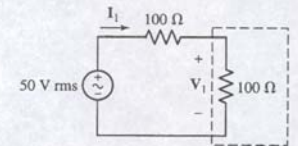
این همان مدار مثال ۱۳-۷ است. مثل قبل، امپدانس ورودی  $(10000)/(10)^2$  یا 100  $\Omega$  و بنابراین  $|I_1| = 25$  mA rms است. می‌توان ولتاژ دو سر سیم‌پیچ اولیه را هم حساب کرد.

$$|V_1| = |50 - 100I_1| = 25 \text{ V rms}$$

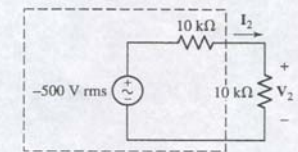
و بنابراین می‌توان دریافت که منبع توان  $12.5 \text{ W} = (50)(25 \times 10^{-3})$  را به‌مدار منتقل می‌کند که از آن  $6.25 \text{ W} = (100)(25 \times 10^{-3})^2$  در مقاومت داخلی منبع تلف شده و  $6.25 \text{ W} = (10000)(25 \times 10^{-3})^2$  نیز به بار منتقل می‌گردد.

اگر مدار ثانویه و ترانس ایده‌آل با معادل تونن جایگزین گردد، منبع 50 V و مقاومت 100  $\Omega$ ، امپدانس  $100 \Omega$  را نظاره خواهد کرد و به این ترتیب مدار ساده شده ۱۳-۳۳ (الف) به دست می‌آید و لذا جریان و ولتاژ اولیه مشخص است. اگر این بار، شبکه سمت چپ پایانه‌های ثانویه با معادل تونن جایگزین شود، خواهیم داشت:  $V_{th} = -500 \text{ V rms} = -10(50)$  و  $Z_{th} = 10 \text{ k}\Omega = (-10)^2(100)$ . مدار حاصل در شکل ۱۳-۳۳ (ب) ملاحظه می‌گردد.

شکل ۱۳-۳۲ مدار ساده‌ای که بار مقاومتی با امپدانس منبع با روش ترانس معادل تطابق دارد.



(الف)



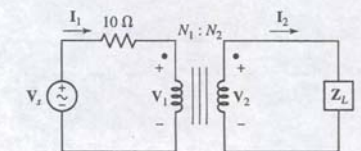
(ب)

شکل ۱۳-۳۳ (الف) مدار شکل ۱۳-۳۲ با جایگزینی (الف) ترانس و ثانویه با معادل تونن یا (ب) ترانس اولیه با معادل تونن، ساده شده است.

## تمرین

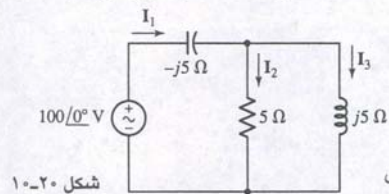
۹-۱۳ فرض کنید در یک ترانس ایده‌آل  $N_1 = 1000$  و  $N_2 = 5000$  باشد (شکل ۱۳-۳۴). اگر  $Z_L = 500 - j400 \Omega$  باشد، متوسط توان حمل شده به  $Z_L$  را برای (الف)  $V_s = 900 \angle 40^\circ \text{ V rms}$ ، (ب)  $I_2 = 1.4 \angle 20^\circ \text{ A rms}$ ، (ج)  $V_s = 200 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ ، (د)  $I_1 = 6 \angle 45^\circ \text{ Arms}$ ، (ه)  $V_1 = 80 \angle 110^\circ \text{ V rms}$  تعیین کنید.

جواب: 692 W و 720 W، 195.1 W، 988 W، 980 W.



شکل ۱۳-۳۴





شکل ۱۰-۲۰

## تمرین

با انتقال جریان به حوزه زمان، پاسخ مطلوب به دست می آید:

$$i(t) = 16 \cos(3000t - 126.9^\circ) \text{ mA}$$

صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

امپدانس مؤثر متصل به منبع دارای زاویه  $+36.87^\circ$  است. و به این معنی است که دارای خاصیت القایی می باشد و بنابراین جریان نسبت به ولتاژ تأخیر دارد. چون منبع ولتاژ دارای زاویه فاز  $-90^\circ$  است، پس پاسخ معتبر است.

۱۰-۱۰ در مدار حوزه فرکانس شکل ۱۰-۲۰،  $I_1$  (الف)،  $I_2$  (ب) و  $I_3$  (ج) را پیدا کنید.

جواب:  $I_1 = 20 \angle 0^\circ \text{ A}$ ،  $I_2 = 20 \angle 90^\circ \text{ A}$  و  $I_3 = 28.3 \angle 45^\circ \text{ A}$

قبل از شروع به نوشتن تعداد قابل توجهی معادله در حوزه زمان یا در حوزه فرکانس، باید از نوشتن معادلاتی که بخشی از آن در حوزه زمان و بخشی دیگر در حوزه فرکانس است، اجتناب کنیم. سر نخ که نشان دهد اشتباهی از این نوع صورت گرفته است، وجود هر دو نوع عدد مختلط و  $t$  در معادله است، مگر این که عامل  $e^{j\omega t}$  هم در آن باشد، چون عامل  $e^{j\omega t}$  در کاربرد اهمیت ندارد می توان گفت دانشجویانی که معادله ای حاوی  $t$  و  $\angle$  و  $t$  را می نویسند، هیولایی خلق می کنند که بدون آن اوضاع برای خودشان و دیگران بهتر خواهد بود. مثلاً در چند معادله قبل دیدیم:

$$I = \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.9^\circ} = 16 \angle -126.9^\circ \text{ mA}$$

لطفاً چیزی به شکل زیر خلق نکنید:

$$i(t) \quad \times \quad \frac{40 \sin 3000t}{2.5 \angle 36.9^\circ} \quad \text{یا} \quad i(t) \quad \times \quad \frac{40 \sin 3000t}{2 + j1.5}$$

## ۱۰-۷ ادیمیتانس

گاهی در می یابیم که عکس امپدانس کمیتی مناسب تر است. با این طرز تفکر، ادیمیتانس  $Y$  یک عنصر مدار به صورت نسبت فیزور جریان به فیزور ولتاژ تعریف می گردد.

$$Y = \frac{I}{V}$$

و بنابراین

$$Y = \frac{1}{Z}$$

بخش حقیقی ادیمیتانس، هدایت یا رسانایی  $G$  و بخش موهومی آن سوسپیتانس  $B$  نامیده می شود.

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} \quad (22)$$

معادله (۲۲) باید به دقت موشکافی شود. این رابطه نمی گوید که بخش حقیقی ادیمیتانس با عکس قسمت حقیقی امپدانس برابر است و یا این که بخش موهومی ادیمیتانس همان معکوس بخش موهومی امپدانس است!

ادیمیتانس، رسانایی (کانداکتانس)، سوسپیتانس همگی به زیرمجموعه اندازه گیری می شوند.

یک امپدانس

$$Z = 1 - j2 \Omega$$

که می توان آن را از یک مقاومت  $1 \Omega$  سری با خازن  $0.1 \mu\text{F}$  در فرکانس  $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$  تصور کرد، ادیمیتانسی برابر زیر دارد:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 - j2} = \frac{1}{1 - j2} \frac{1 + j2}{1 + j2} = 0.2 + j0.4 \text{ S}$$

باید توجه داشت که مؤلفه مقاومتی امپدانس لزوماً برابر مقاومت موجود در شبکه نیست. مثلاً یک مقاومت  $10 \Omega$  سری با یک القاگر  $5 \text{ H}$  در  $\omega = 4 \text{ rad/s}$  دارای امپدانس معادل  $Z = 10 + j20 \Omega$  و یا در مختصات قطبی  $22.4 \angle 63.4^\circ \Omega$  است. اما در این حالت، مؤلفه مقاومتی امپدانس با مقاومت برابر است زیرا شبکه یک شبکه سری ساده می باشد. با این وجود اگر این دو عنصر موازی با هم قرار گیرند، امپدانس معادل  $(10 + j20) / (10 + j20)$  یا  $10(j20) / (10 + j20) + j4 \Omega$  است. مؤلفه مقاومتی امپدانس اکنون  $8 \Omega$  است.



## مثال ۱۰-۶

جریان  $i(t)$  را در شکل ۱۰-۱۹ (الف) پیدا کنید.

- هدف مسئله را شناسایی کنید.
- می خواهیم جریان حالت ماندگار سینوسی جاری در مقاومت  $1.5 \text{ k}\Omega$  ناشی از منبع ولتاژ  $3000 \text{ rad/s}$  را به دست آوریم.
- اطلاعات معلوم را جمع آوری نمایید.
- کار را با ترسیم مدار در حوزه فرکانس آغاز می کنیم. منبع به حوزه فرکانس انتقال یافته و با  $40 \angle -90^\circ \text{ V}$  نشان داده شده است. پاسخ حوزه فرکانس با  $I$  نمایش داده شده و امپدانس های القاگر و خازن در  $3000 \text{ rad/s}$  محاسبه شده اند و به ترتیب برابرند با  $j\text{k}\Omega$  و  $-j2\text{k}\Omega$ . مدار متناظر حوزه فرکانسی نیز در شکل ۱۰-۱۹ (ب) دیده می شود.
- ارائه طرح.
- ما شکل ۱۰-۱۹ (ب) را تحلیل خواهیم کرد تا  $I$  به دست آید؛ ترکیب امپدانس ها و استفاده از قانون اهم یک راه ممکن است. سپس این واقعیت را به کار می بریم که می دانیم  $\omega = 300 \text{ rad/s}$  است و لذا از آن برای تبدیل  $I$  به عبارتی در حوزه زمان استفاده خواهیم کرد.

معادلات مناسب را بنویسید.

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= 1.5 + \frac{(j)(1-2j)}{j+1-2j} = 1.5 + \frac{2+j}{1-j} \\ &= 1.5 + \frac{2+j}{1-j} \frac{1+j}{1+j} = 1.5 + \frac{1+j3}{2} \\ &= 2 + j1.5 = 2.5 \angle 36.87^\circ \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

بنابراین جریان فیزیوری به صورت زیر است:

$$I = \frac{V_s}{Z_{eq}}$$

آیا اطلاعات دیگری لازم است.

با جایگزینی مقادیر معلوم، می بینیم که

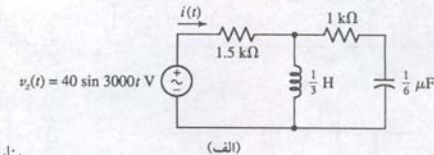
$$I = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.87^\circ} \text{ mA}$$

همراه با  $\omega = 3000 \text{ rad/s}$  برای یافتن حل  $i(t)$  کافی است.

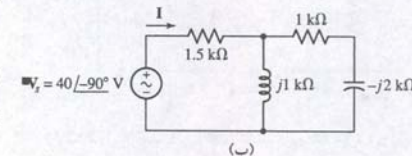
اقدام به حل.

این مقدار مختلط به راحتی قابل تبدیل به یک عدد مختلط در فرم قطبی است:

$$I = \frac{40}{2.5} \angle -90^\circ - 36.87^\circ \text{ mA} = 16.00 \angle -126.9^\circ \text{ mA}$$



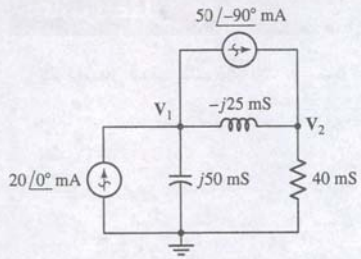
(الف)



(ب)

شکل ۱۰-۱۹ (الف) یک مدار RLC که پاسخ واداشته سینوسی آن مجهول است. (ب) معادل حوزه فرکانس همان مدار در  $\omega = 3000 \text{ rad/s}$ .





شکل ۱۰-۲۲

$$\frac{V_2 - V_1}{-j5} + \frac{V_2 - V_1}{j10} + \frac{V_2}{j5} + \frac{V_2}{10} = -(0.5 \angle -90^\circ) = j0.5$$

و برای گره سمت راست

$$(0.2 + j0.2)V_1 - j0.1V_2 = 1$$

با ترکیب جملات داریم:

$$-j0.1V_1 + (0.1 - j0.1)V_2 = j0.5$$

این معادلات به راحتی، حتی با یک ماشین حساب حل می شوند و از آن نتیجه می شود

$$V_2 = -2 + j4 \text{ V و } V_1 = 1 - j2 \text{ V}$$

حل حوزه زمان با نوشتن  $V_1$  و  $V_2$  در مختصات قطبی حاصل می شود.

$$V_1 = 2.24 \angle -63.4^\circ \quad V_2 = 4.47 \angle 116.6^\circ$$

و با انتقال به حوزه زمان داریم:

$$v_2(t) = 4.47 \cos(\omega t + 16.6^\circ) \text{ V و } v_1(t) = 2.24 \cos(\omega t - 63.4^\circ) \text{ V}$$

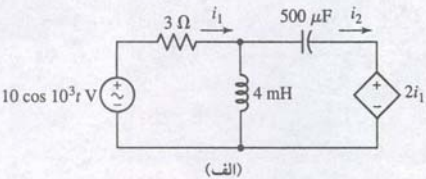
توجه کنید که در محاسبه مقادیر امپدانس روی نمودار مدار باید  $\omega$  معلوم باشد. همچنین هر دو منبع باید فرکانسی مساوی داشته باشند.

## تمرین

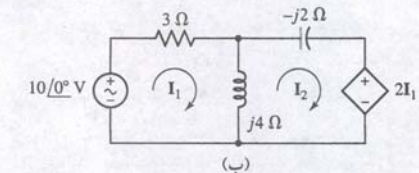
۱۰-۱۲ با کمک تحلیل گرهی روی مدار شکل ۱۰-۲۲،  $V_1$  و  $V_2$  را بیابید.جواب:  $V_1 = 1.593 \angle -50.0^\circ \text{ V}$  و  $V_2 = 1.062 \angle 23.3^\circ \text{ V}$ .

اکنون بیاید به مثالی از تحلیل حلقه پردازیم، ضمن این که به خاطر داریم که همه منابع در فرکانسی برابر کار می کنند. در غیر این صورت تعریف هر رآکتانسی در مدار ناممکن خواهد بود. در بخش بعد خواهیم دید تنها راه برخورد با این موارد استفاده از مدار تجمیع است.

## مثال ۱۰-۸



(الف)



(ب)

شکل ۱۰-۲۳ (الف) یک مدار حوزه زمان با یک منبع وابسته. (ب) مدار حوزه فرکانس متناظر با مدار شکل ۱۰-۲۲ (الف).

عباراتی برای جریان های حوزه زمان  $i_1$  و  $i_2$  در شکل ۱۰-۲۳ (الف) بیابید.در منبع سمت چپ داریم  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$  و بنابراین مدار حوزه فرکانس شکل ۱۰-۲۳ (الف) را ترسیم می کنیم. جریان مش ها را هم  $I_1$  و  $I_2$  نام می گذاریم. حول مش 1:

$$3I_1 + j4(I_1 - I_2) = 10 \angle 0^\circ$$

یا

$$(3 + j4)I_1 - j4I_2 = 10$$

در حلقه 2

$$j4(I_2 - I_1) - j2I_2 + 2I_1 = 0$$

یا

$$(2 - j4)I_1 + j2I_2 = 0$$

و با حل آن ها

$$I_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24 \angle 29.7^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77 \angle 56.3^\circ \text{ A}$$

بنابراین

$$i_1(t) = 1.24 \cos(10^3 t + 29.7^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2.77 \cos(10^3 t + 56.3^\circ) \text{ A}$$

ادمیتانس معادل شبکه ای متشکل از چند شاخه موازی برابر است با حاصل جمع ادمیتانس های هر شاخه. پس مقدار عدد ادمیتانس فوق را می توان از جمع رسانایی یا هدایت  $S$  که موازی با سوپتانس مثبت  $0.4 \text{ S}$  است، به دست آورد. رسانایی می تواند یک مقاومت  $5 \Omega$  و سوپتانس یک خازن  $0.08 \mu\text{F}$  در فرکانس  $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$  باشد، زیرا ادمیتانس یک خازن  $j\omega C$  است. بگذارید برای امتحان تحلیل، امپدانس شبکه اخیر یعنی مقاومت  $5 \Omega$  موازی با خازن  $0.08 \mu\text{F}$  را در  $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$  بیابیم. امپدانس معادل برابر است با:

$$Z = \frac{5(j\omega C)}{5 + 1/j\omega C} = \frac{5(-j2.5)}{5 - j2.5} = 1 - j2 \Omega$$

که مثل قبل است. این دو شبکه تنها دو نمونه از بینهایت شبکه مختلفی هستند که در این فرکانس چنین امپدانس و ادمیتانسی دارند. با این وجود، این دو شبکه تنها شبکه دو عنصری دارای این خاصیت هستند و لذا می توان آن ها را ساده ترین شبکه های دانست که دارای امپدانس  $1 - j2 \Omega$  و ادمیتانس  $0.2 + j0.4 \text{ S}$  در فرکانس  $\omega = 5 \times 10^6 \text{ rad/s}$  می باشند.

کلمه **ایمیتانس**، به ترکیبی از امپدانس و ادمیتانس گفته می شود. گاهی هم برای بیان نام کلی امپدانس یا ادمیتانس از آن استفاده می گردد. برای مثال اگر ولتاژ فیزیوری دو سر یک ایمیتانس معلوم باشد، می توان جریان عبوری از آن ایمیتانس را حساب کرد.

## تمرین

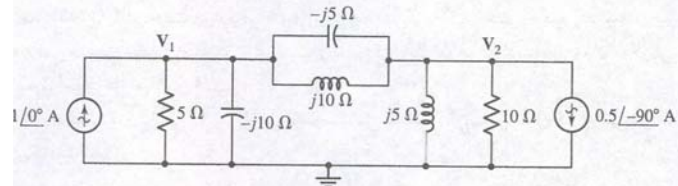
۱۰-۱۱ ادمیتانس (در مختصات قائم)، (الف) یک امپدانس  $Z = 1000 + j400 \Omega$  (ب) یک شبکه متشکل از ترکیب موازی یک مقاومت  $800 \Omega$ ، القاگر  $1 \text{ mH}$  و خازن  $2 \text{ nF}$  را به شرطی که  $\omega = 1 \text{ Mrad/s}$  باشد، (ج) شبکه ای متشکل از ترکیبات سری مقاومت  $800 \Omega$ ، یک القاگر  $1 \text{ mH}$  و یک خازن  $2 \text{ nF}$  را اگر  $\omega = 1 \text{ Mrad/s}$  باشد، به دست آورید.

جواب:  $j0.345 \text{ mS} - 1.25 + j1 \text{ mS} + 0.862 - j0.562 \text{ mS} - 0.899$ .

## ۱۰-۸ تحلیل گرهی و مش

قبلاً با تکنیک گرهی و مش به اهداف بسیاری نایل شدیم و منطقی است که بپرسیم آیا روان مشابهی برای جملات فیزیوری و امپدانس ها در حالت ماندگار سینوسی معتبر است. دیدیم که قوانین کیر شلف برای فیزورها معتبر بود، همچنین قانونی شبیه به اهم برای عناصر غیر فعال به صورت  $V = ZI$  داشتیم. به بیان دیگر قوانینی که تحلیل گرهی بر آن ها متکی است برای فیزورها معتبرند، اگر پیش تر برویم، می توان گفت برای حالت ماندگار سینوسی می توان از تکنیک گرهی استفاده کرد. با بحثی مشابه روش های تحلیل مش یا همان تک حلقه و گرهی هم معتبرند.

## مثال ۱۰-۷

ولتاژ گره  $V_1(t)$  و  $V_2(t)$  حوزه زمان را در شکل ۱۰-۲۱ بیابید.شکل ۱۰-۲۱ یک مدار در حوزه فرکانس با دو ولتاژ گره ای  $V_1$  و  $V_2$ .

دو منبع جریان به صورت فیزور داده شده و ولتاژهای فیزیوری گرهی  $V_1$  و  $V_2$  مشخص شده اند. در سمت چپ گره KCL را اعمال می کنیم.

$$\frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{-j10} + \frac{V_1 - V_2}{-j5} + \frac{V_1 - V_2}{j10} = 1 \angle 0^\circ = 1 + j0$$



## کاربرد عملی

## فرکانس قطع یک تقویت کننده ترانزیستوری

مدارهای تقویت کننده ترانزیستوری، بخش مهم وسایل الکترونیک مدرن را تشکیل می دهند. یکی از کاربردهای رایج، تلفن های همراه (شکل ۱۰-۲۵) است، که در آن سیگنال های صوتی روی امواج حامل فرکانس بالا سوار می شوند متأسفانه ترانزیستورها دارای خاصیت خازنی درونی هستند که موجب محدود شدن فرکانس کاری آن ها می شود و هنگام انتخاب آن ها برای کاربردهای خاص، باید مد نظر باشد.



شکل ۱۰-۲۵ آمپلی فایرهای ترانزیستور در دستگاه های زیادی به کار می روند، از جمله تلفن های همراه. مدل های خطی برای تحلیل کارایی آن ها به عنوان تابعی از فرکانس به کار می روند.

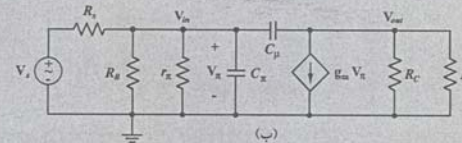
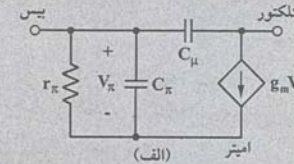
شکل ۱۰-۲۶ (الف) آن چه را که مدل هیبرید  $\pi$  فرکانس بالا نام دارد، برای یک ترانزیستور دوقطبی پیوندی نشان می دهد. در عمل هر چند ترانزیستورها قطعاً غیرخطی اند، ولی این مدار خطی ساده کار نسبتاً دقیقی از مدل سازی رفتار قطعه ارائه می کند. دو خازن  $C_{\pi}$  و  $C_{\mu}$  برای نمایش ظرفیت داخلی ترانزیستور مورد استفاده به کار رفته اند. در صورت نیاز می توان خازن ها و مقاومت های دیگری را برای دقیق تر شدن مدل به آن اضافه کرد. شکل ۱۰-۲۶ (ب) مدل ترانزیستوری را که در یک تقویت کننده با نام آمپتر مشترک وارد شده است نشان می دهد.

با فرض این که سیگنال حالت ماندگار سینوسی، با معادل تونن  $V_s$  و  $R_s$  نشان داده شده باشد، مایلیم نسبت  $V_{out}$  به  $V_{in}$  را بدانیم. وجود ظرفیت های درونی متعلق به ترانزیستور موجب کاهش تقویت در ازای افزایش فرکانس در  $V_s$  می گردد و نهایتاً عملکرد صحیح مدار را در فرکانس هایی محدود خواهد کرد. معادله گره را در خروجی می نویسیم.

$$g_m V_{\pi} = \frac{V_{out} - V_{in}}{(1/f\omega C_{\mu})} + \frac{V_{out}}{(R_C \parallel R_L)}$$

با حل  $V_{out}$  برحسب  $V_{in}$  و با توجه به  $V_{\pi} = V_{in}$  عبارتی برای بهره تقویت کننده به دست می آید.

$$\begin{aligned} \frac{V_{out}}{V_{in}} &= \frac{-g_m (R_C \parallel R_L) (1/f\omega C_{\mu}) + (R_C \parallel R_L)}{(R_C \parallel R_L) + (1/f\omega C_{\mu})} \\ &= \frac{-g_m (R_C \parallel R_L) + j\omega (R_C \parallel R_L) C_{\mu}}{1 + j\omega (R_C \parallel R_L) + C_{\mu}} \end{aligned}$$

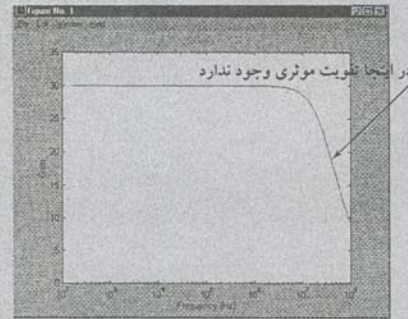


شکل ۱۰-۲۶ (الف) مدل هیبرید  $\pi$  فرکانس بالا برای ترانزیستور. (ب) مدار تقویت کننده آمپتر مشترک با مدل هیبرید  $\pi$ .

با فرض مقادیر نمونه ای چون  $g_m = 30 \text{ ms}$ ،  $R_C = R_L = 2 \text{ k}\Omega$ ،  $C_{\mu} = 5 \text{ pF}$  و خازن  $C_{\pi} = 5 \text{ pF}$  می توان اندازه بهره را به صورت تابعی از فرکانس  $(\omega = 2\pi f)$  رسم کرد. نمودار نیمه لگاریتمی در شکل ۱۰-۲۷ (الف) و برنامه متلب به کار رفته در تولید شکل، در شکل ۱۰-۲۷ (ب) ملاحظه می شود. جالب است ولی تعجب آور نیست که ببینیم بهره تقویت کننده به فرکانس وابسته است. درواقع می توان تصور کرد که استفاده از چنین مداری می تواند فرکانس هایی را که ما توجهی به آن ها نداریم، حذف کند. با این وجود، حداقل می بینیم که بهره برای فرکانس های نسبتاً پایین از فرکانس منبع ورودی مستقل است. هنگامی که مشخصه تقویت کننده را بیان می کنیم مرسوم است تا به فرکانسی که در آن بهره به  $1/\sqrt{2}$  برابر حداکثرش کاهش می یابد، اشاره نماییم. در شکل ۱۰-۲۷ (الف) می بینیم که حداکثر میزان بهره برابر 30 است که در فرکانس 30 MHz به  $21 = 30/\sqrt{2}$  تقلیل یافته است. معمولاً به این فرکانس، فرکانس قطع یا گوشه تقویت کننده می گویند. اگر کار در فرکانس های بالاتر مورد نظر باشد، یا ظرفیت درونی باید کاهش یابد (ترانزیستورهای متفاوتی باید به کار رود) و یا مدار به طریقی دیگر باید طراحی شود. در این جا باید توجه کرد که تعریف بهره وابسته به  $V_{in}$ ، تصویر کاملی از رفتار وابستگی به فرکانس را برای تقویت کننده ارائه نمی کند. این مطالب با ملاحظه ظرفیت  $C_{\pi}$  کاملاً واضح است: با  $\omega \rightarrow \infty$ ،

```
EDU> frequency = logspace(3,9,100);
EDU> numerator = -30e-3*1000 + i*frequency*1000*5e-12;
EDU> denominator = 1 + i*frequency*1000*5e-12;
EDU> for k = 1:100
gain(k) = abs(numerator(k)/denominator(k));
end
EDU> semilogx(frequency/2/pi,gain);
EDU> xlabel('Frequency (Hz)');
EDU> ylabel('Gain');
EDU> axis([100 1e8 0 35]);
```

(ب)



(الف)

شکل ۱۰-۲۷ (الف) بهره تقویت کننده برحسب فرکانس، و (ب) برنامه متلب به کار رفته برای ایجاد نمودار.

$Z_{C_{\pi}} \rightarrow 0$  پس  $V_{in} \rightarrow 0$ . این اثر خودش را در معادله ای که به دست آوردیم نشان نمی دهد. روش دقیق تر یافتن معادله ای برای

## تمرین

۱۰-۱۳ با تحلیل مش روی مدار شکل ۱۰-۲۴،  $I_1$  و  $I_2$  را بیابید. جواب:  $4.87 \angle -164^\circ \text{ A}$  و  $7.17 \angle -144.9^\circ \text{ A}$

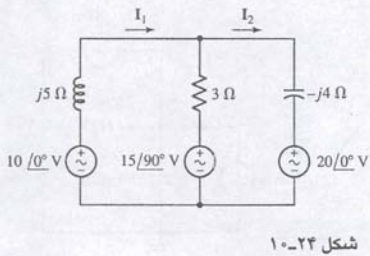
## ۱۰-۹ تجمیع، تبدیل منبع و قضیه تونن

پس از معرفی القاگرها و خازن ها در فصل ۷، دیدیم که مدارهای حاوی آن ها همچنان خطی اند و مزایای این خطی بودن دوباره به کار گرفته شدند. از آن جمله اصل تجمیع، قضایای تونن و نورتن و تبدیل منابع بودند. می دانیم که این روش ها در مدارهایی که اکنون ملاحظه می کنیم به کار خواهند رفت. ما می خواهیم منابع سینوسی را به کار گرفته و روش های فوق را روی آن ها پیاده کنیم و یافتن تنها پاسخ واداشته چندان اهمیتی ندارد. این که بخواهیم مدار را برحسب فیزورها تحلیل کنیم، نیز بی اهمیت است. همچنین به یاد خواهیم سپرد که خطی بودن و تجمیع هنگام ترکیب منابع حقیقی و موهومی برای تهیه یک منبع مختلط به کار خواهد رفت.

با تجمیع،  $V_1$  را برای مدار شکل ۱۰-۲۱ به دست آورید، به خاطر سادگی این شکل در شکل ۱۰-۲۸ (الف) تکرار شده است.

ابتدا مدار را به شکل ۱۰-۲۸ (ب) درمی آوریم که در آن هر جفت امپدانس موازی با یک امپدانس معادل جایگزین شده است. یعنی  $10 \parallel -j10 \Omega$  5 برابر با  $5 \parallel -j2 \Omega$ ،  $4 \parallel j10 \Omega$  برابر  $10 \parallel j5 \Omega$  و  $10 \parallel j5 \Omega$  برابر است با  $2 + j4 \Omega$ . برای یافتن  $V_1$  ابتدا منبع سمت چپ را فعال نگه می داریم و پاسخ جزئی  $V_{1L}$  را در قبال آن به دست می آوریم. منبع  $1 \angle 0^\circ$  با امپدانس زیر موازی است:

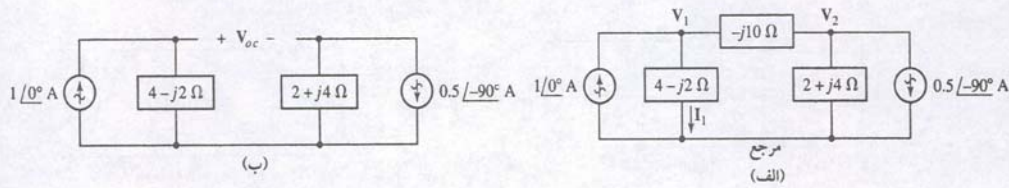
$$(4 - j2) \parallel (-j10 + 2 + j4)$$



شکل ۱۰-۲۴

مثال ۱۰-۹





بنابراین وقتی مدار را به صورت شکل ۱۰-۳۰(د) می‌بینیم، جریان از گره ۱ به گره ۲ از طریق بار  $10 \angle -90^\circ \Omega$  برابر است با

$$I_{12} = \frac{6 - j3}{6 + j2 - j10} = 0.6 + j0.3 \text{ A}$$

اکنون جریان جاری شده در امپدانس  $10 \angle -90^\circ \Omega$  در شکل ۱۰-۳۰(الف) را می‌دانیم. توجه کنید که نمی‌توانیم با مدار شکل ۱۰-۳۰(د)، مقدار  $V_1$  را محاسبه کنیم. زیرا گره مرجعی وجود ندارد. با بازگشت به مدار اصلی و تفریق جریان  $0.6 + j0.3$  از منبع جریان سمت چپ، جریان جاری شده از شاخه  $(4 - j2) \Omega$  برابر است با:

$$I_1 = 1 - 0.6 - j0.3 = 0.4 - j0.3 \text{ A}$$

و بنابراین

$$V_1 = (0.4 - j0.3)(4 - j2) = 1 - j2 \text{ V}$$

که مثل قبل است.

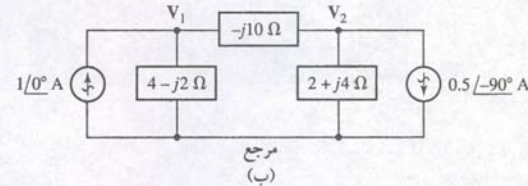
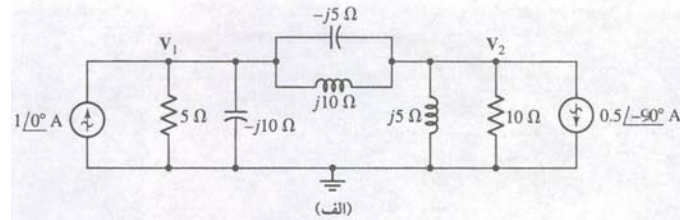
ممکن است از قضیه نورتن روی سه عنصر سمت راست شکل ۱۰-۳۰(الف) استفاده کنیم، با این فرض که به  $V_1$  علاقمندیم. می‌توان به دفعات تبدیل منبع را برای ساده‌سازی مدار به کار برد. بنابراین همه کارهای میان بروسگردهای فصل ۴ و ۵ در حوزه فرکانس به کار خواهند رفت. مختصر پیچیدگی اضافی موجود به دلیل استفاده از اعداد مختلط است و نه از ملاحظات تئوریک مربوط به آن.

**۱۰-۱۵** برای مدار شکل ۱۰-۳۱(الف)، ولتاژ مدار باز  $V_{ab}$ ، (ب) جریان روبه‌پایین از  $a$  به  $b$  در صورت اتصال کوتاه، (ج) امپدانس معادل تونن  $Z_{ab}$  موازی با منبع جریان را بیابید.  
جواب:  $V: -33.4^\circ \angle 16.77$ ،  $2.5 - j5 \Omega$ ،  $2.60 + j1.500 \text{ A}$

یک اظهار نظر دیگر باقی مانده است. تا این جا خودمان را به مدارهای تک منبع یا چند منبعی که فرکانس مشترکی دارند، محدود کردیم. این محدودیت به این علت لازم است که بتوانیم مقادیر امپدانس را برای عناصر القایی و خازنی محاسبه کنیم. با این وجود، مفهوم تحلیل نیزوری به راحتی قابل اعمال به مدارهای چندمنبعی با فرکانس‌های مختلف است. در این موارد از تجمیع برای تعیین ولتاژها و جریان‌های ناشی از هر منبع استفاده کرده و نتایج را در حوزه زمان با هم جمع می‌کنیم. اگر چندین منبع به طور همزمان کار کنند، اصل تجمیع اجازه می‌دهد تا منابع را در یک زمان بررسی کنیم و پاسخ نتیجه را با دیگر پاسخ‌ها در فرکانس مختلف جمع کنیم.

وان تلف شده به وسیله مقاومت  $10 \Omega$  را در مدار شکل ۱۰-۳۲(الف) معین کنید.

اگرچه به مدار، ترجیح می‌شویم که سریعاً دو معادله گرهی را بنویسیم و یا با دو تبدیل منبع بلافاصله به دنبال یافتن ولتاژ در دو سر مقاومت  $10 \Omega$  باشیم.



$$\begin{aligned} V_{1L} &= 1 \angle 0^\circ \frac{(4 - j2)(-j10 + 2 + j4)}{4 - j2 - j10 + 2 + j4} \\ &= \frac{-4 - j28}{6 - j8} = 2 - j2 \text{ V} \end{aligned}$$

اگر فقط منبع سمت راست فعال باشد، با تقسیم جریان و قانون اهم داریم:

$$V_{1R} = (-0.5 \angle -90^\circ) \left( \frac{2 + j4}{4 - j2 - j10 + 2 + j4} \right) (4 - j2) = -1 \text{ V}$$

از جمع آن‌ها داریم:

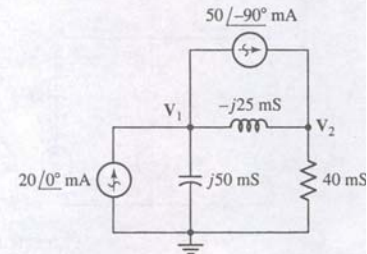
$$V_1 = V_{1L} + V_{1R} = 2 - j2 - 1 = 1 - j2 \text{ V}$$

که نتیجه قبلی مادر مثال ۱۰-۷ وفاق دارد.

بعداً خواهیم دید که تجمیع، هنگام برخورد با مدارهایی که با فرکانس یکسانی کار نمی‌کنند، به شدت مفید است.

**۱۰-۱۴** با فرض این‌که از تجمیع برای تحلیل مدار شکل ۱۰-۲۹ استفاده کرده باشیم، مطلوب است  $V_1$  اگر (الف) فقط با منبع  $20 \angle 0^\circ \text{ mA}$  کار کند، (ب) فقط با منبع  $50 \angle -90^\circ \text{ mA}$  کار کند.  
جواب:  $V: 0.1951 - j0.556$ ،  $0.780 + j0.976 \text{ V}$

شکل ۱۰-۲۸ (الف) مدار شکل ۱۰-۲۹ که در آن  $V_1$  خواسته شده است. (ب)  $V_1$  را می‌توان با استفاده از تجمیع پاسخ‌های فیزیوری مجزا به دست آورد.



شکل ۱۰-۲۹

## تمرین

### مثال ۱۰-۱

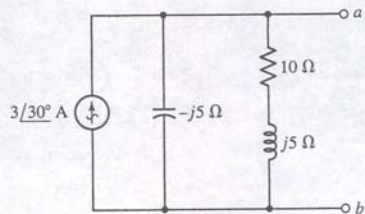
از دید امپدانس  $10 \angle -90^\circ \Omega$  در شکل ۱۰-۳۰(الف) معادل تونن را معین کرده از آن برای محاسبه  $V_1$  استفاده کنید.

ولتاژ مدار باز تعریف شده در شکل ۱۰-۳۰(ب) چنین است.

$$\begin{aligned} V_{oc} &= (1 \angle 0^\circ) (4 - j2) - (-0.5 \angle -90^\circ) (2 + j4) \\ &= 4 - j2 + 2 - j1 = 6 - j3 \text{ V} \end{aligned}$$

امپدانس مدار غیرفعال شکل ۱۰-۳۰(ج) از دید پایانه‌های بار درواقع مجموع دو امپدانس باقیمانده است، یعنی  $Z_{th} = 6 + j2 \Omega$ .

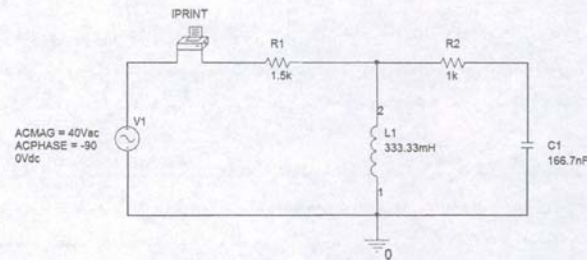
## تمرین



شکل ۱۰-۳۱

### مثال ۱۰-۱۱



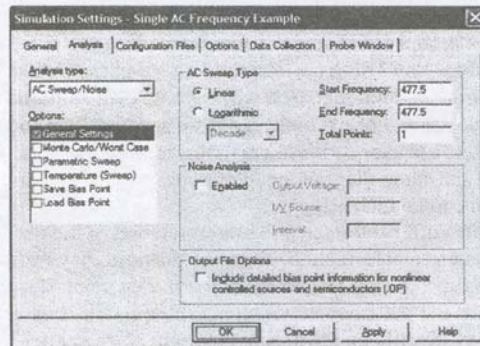


شکل ۱۰-۳۴ مدار ساده سینوسی که در  $\omega = 3000 \text{ rad/s}$  کار می‌کند و در آن جریان داخل مقاومت  $1.5 \text{ k}\Omega$  است.

فرکانس منبع از طریق Property Editor انتخاب نمی‌گردد، بلکه از طریق مد تحلیل ACSweep صورت می‌پذیرد.

فرکانس منبع با تنظیم Total Points با 1 و Start Freq و End Freq در مقادیر مناسب، انتخاب می‌گردد. چون منبع در  $3000 \text{ rad/s}$  کار می‌کند، هر دو پارامتر را با  $477.5 \text{ Hz} = \frac{3000}{2\pi}$  مقداردهی می‌کنیم.

توجه کنید که در مدار یک قطعه اضافی ظاهر شده است. این قطعه IPRINT نامگذاری شده است و اجازه می‌دهد تا انواع پارامترهای جریان چاپ شود. در این شبیه‌سازی ما به خصیصه‌های AC، MAG و PHASE علاقمندیم. برای این‌که PSpice این کمیت‌ها را چاپ کند، هر یک از خصیصه‌های موردنظر را در شکل ۱۰-۳۵ yes تنظیم کنید.



شکل ۱۰-۳۵ کادر محاوره برای انتخاب فرکانس.

نتایج شبیه‌سازی با انتخاب Examine Output زیر File در پنجره PSpice AD به دست می‌آید. در انتهای فایل اطلاعات زیر ظاهر می‌گردد.

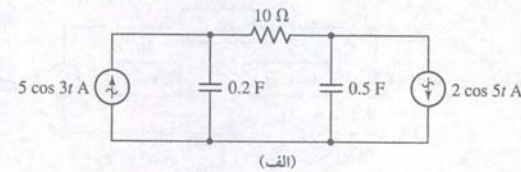
| FREQ        | IM(V_PRINT1) | IP(V_PRINT1) |
|-------------|--------------|--------------|
| 4.775E + 02 | 1.600E - 02  | -1.269E + 02 |

بنابراین اندازه جریان  $16 \text{ mA}$ ، زاویه فاز  $-126.9^\circ$  است و به این ترتیب جریان داخل مقاومت  $1.5 \text{ k}\Omega$  برابر زیر است.

$$i = 16 \cos(3000t - 126.9^\circ) \text{ mA} \\ = 16 \sin(3000t - 36.9^\circ) \text{ mA}$$

## ۱۰-۱۰ نمودارهای فیزیوری

نمودار فیزیوری نامی است که به یک ترسیم در صفحه مختلط اطلاق می‌گردد تا رابطه بین



متأسفانه این کار امکان‌پذیر نیست، زیرا دو منبع در فرکانس‌های مختلف کار می‌کنند. در این موارد راهی برای محاسبه امپدانس یک خازن یا القاگر در مدار وجود ندارد زیرا نمی‌دانیم کدام  $\omega$  را به کار ببریم؟

تنها راه خروج از این محسمه استفاده از جمع و جمع‌آوری همه منابع هم فرکانس در یک زیرمدار طبق شکل ۱۰-۳۲(ب) و (ج) است. در زیر مدار شکل ۱۰-۳۲(ب) با روش تقسیم جریان، سریعاً جریان  $i'$  را به دست می‌آوریم.

$$I' = 2 \angle 0^\circ \left[ \frac{-j0.4}{10 - j - j0.4} \right] = 79.23 \angle -82.03^\circ \text{ mA}$$

به این ترتیب

$$i' = 79.23 \cos(5t - 82.03^\circ) \text{ mA}$$

به همین طریق

$$I'' = 5 \angle 0^\circ \left[ \frac{-j1.667}{10 - j0.6667 - j1.667} \right] = 811.7 \angle -76.86^\circ \text{ mA}$$

و به طور مشابه

$$i'' = 811.7 \cos(3t - 76.86^\circ) \text{ mA}$$

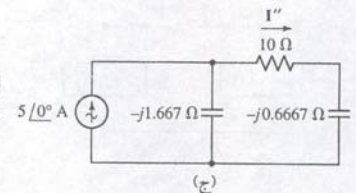
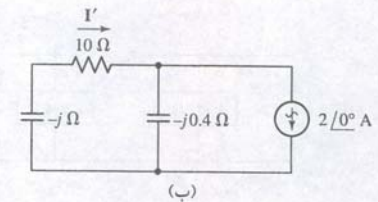
در این جا باید توجه داشت که سعی در جمع جریان‌های فیزیوری  $i'$  و  $i''$  در شکل ۱۰-۳۲(ب) و (ج) اهمیت ندارد. قدم بعدی جمع دو جریان در حوزه زمان، مربع کردن نتیجه و ضرب آن در ۱۰ است تا توان تلف شده در مقاومت  $10 \Omega$  شکل ۱۰-۳۲(الف) به دست آید.

$$P_{10} = (i' + i'')^2 \times 10 \\ = 10[79.23 \cos(5t - 82.03^\circ) + 811.7 \cos(3t - 76.86^\circ)]^2 \text{ mW}$$

## تصرین

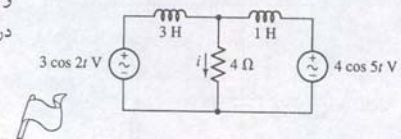
۱۰-۱۱ جریان  $i$  جاری شده در مقاومت  $4 \Omega$  شکل ۱۰-۳۳ را پیدا کنید.

جواب:  $i = 175.6 \cos(2t - 20.55^\circ) + 547.1 \cos(5t - 43.16^\circ) \text{ mA}$



شکل ۱۰-۳۲ (الف) مداری که منابع آن فرکانس‌های متفاوتی دارند. (ب) مدار با کشته‌شدن منبع چپ. (ج) مدار با کشته‌شدن منبع راست.

در مطالعات بعدی در مورد پردازش سیگنال با روش دانشمندی فرانسوی به‌نام فوریه آشنا می‌شویم که تکنیکی است برای تقریباً هر تابع متناوب و طی آن تابع یا ترکیبی از توابع سینوسی نشان داده می‌شود. هنگام کار با مدارهای خطی وقتی پاسخ مداری خاصی را به تابع تحریک سینوسی بدانیم، می‌توان به راحتی پاسخ مدار به هر موج اختیاری که به وسیله تابع سری فوریه نشان داده شود را با جمع به‌دست آورد.



شکل ۱۰-۳۳

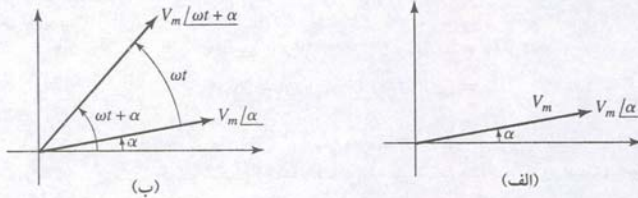
## تحلیل کامپیوتری

در PSpice چندین انتخاب برای تحلیل مدارها در حالت ماندگار سینوسی وجود دارد. شاید سرراست‌ترین روال، روش استفاده از ساخت دو منبع طراحی شده خاص، یعنی VAC و IAC باشد. اندازه و فاز هر منبع با دوبار کلیک روی آن انتخاب می‌گردد.

اجازه بدهید تا مدار شکل ۱۰-۱۹(الف)، که در شکل ۱۰-۳۴ رسم شده است را شبیه‌سازی کنیم.



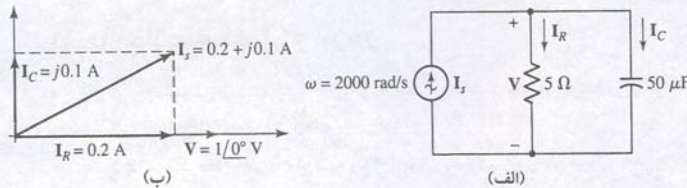
شکل ۱۰-۳۸ (الف) فیزور ولتاژ  $V_m \angle \alpha$ .  
 (ب) ولتاژ مختلط  $V_m \angle \omega t + \alpha$  به صورت فیزور در لحظه معینی از زمان نشان داده شده است. این فیزور از  $V_m \angle \alpha$  به اندازه  $\omega t$  رادیان جلو است.



فاز  $90^\circ$  به خوبی روی نمودار دیده می‌شود. مجموع این سه ولتاژ برابر با ولتاژ منبع در این مدار است. ما در فصل بعد تحت شرایط تشدید خواهیم دید که اگر  $Z_C = -Z_L$  باشد، ولتاژ منبع و ولتاژ مقاومت با یکدیگر برابرند. ولتاژ کل در سر مقاومت و القاگر، یا مقاومت و خازن در نمودار از جمع فیزورهای مناسب طبق شکل حاصل می‌گردد.

شکل ۱۰-۴۰ (الف) یک مدار ساده موازی است و منطقی است که ولتاژ بین دو گره را به عنوان فیزور مرجع اختیار نماییم. فرض کنید  $V = 1 \angle 0^\circ$  باشد. جریان مقاومت  $I_R = 0.2 \angle 0^\circ$  A هم‌فاز با این ولتاژ می‌باشد، ولی جریان خازن  $I_C = j0.1$  A از ولتاژ مرجع به اندازه  $90^\circ$  پیش است. پس از تبدیل این دو جریان به نمودار فیزور، شکل ۱۰-۴۰ (ب)، می‌توان آن‌ها را با یکدیگر جمع کرد تا جریان منبع به دست آید. نتیجه این کار  $I_S = 0.2 + j0.1$  است. اگر منبع جریان به صورت مقدار اولیه  $1 \angle 0^\circ$  داده شده باشد و ولتاژ گره در آغاز معلوم نباشد، بهتر است باز هم نمودار فیزیوری را با فرض ولتاژ گره (مثلاً  $V = 1 \angle 0^\circ$ ) بسازیم و آن را به عنوان فیزور ولتاژ به کار ببریم. نمودار را چون گذشته تکمیل می‌کنیم و منبع جریان که به دلیل ولتاژ گره فرضی جاری می‌گردد،  $0.2 + j0.1$  A خواهد بود. با این وجود، جریان منبع واقعی  $1 \angle 0^\circ$  است و ولتاژ گره واقعی با ضرب ولتاژ گره مفروضی در  $(0.2 + j0.1) / (1 \angle 0^\circ)$  به دست می‌آید. بنابراین ولتاژ گره واقعی برابر  $\sqrt{20} \angle -26.8^\circ$  V است. ولتاژ مفروض نموداری می‌دهد که با نمودار واقعی مدار فرق می‌کند، باید مقیاس این نمودار در  $1/\sqrt{20}$  ضرب شود و نمودار حاصل به اندازه  $26.6^\circ$  در جهت عکس ساعت‌گرد بچرخد تا نمودار واقعی به دست آید.

نمودارهای فیزیوری معمولاً به سادگی ساخته می‌شوند و در بسیاری از تحلیل‌های حالت ماندگار سینوسی، اگر این نمودارها لحاظ شوند، مفهوم‌ترند. مثال‌های دیگری از کاربرد نمودارهای فیزیوری در ادامه مطالعاتمان ملاحظه خواهد شد.



شکل ۱۰-۴۰ (الف) یک مدار RC موازی. (ب) نمودار فیزیوری برای این مدار. ولتاژ گره  $V$  به عنوان یک فیزور مرجع.

برای مدار شکل ۱۰-۴۱، نمودار فیزیوری  $I_R$ ،  $I_L$  و  $I_C$  را ترسیم کنید. با ترکیب این جریان‌ها، زاویه پیشفاز  $I_S$  را نسبت به  $I_R$ ،  $I_L$  و  $I_C$  مشخص نمایید.

با انتخاب فیزور مرجع آغاز می‌کنیم. با بررسی مدار و متغیرهای موردنظری که باید معین شوند، می‌بینیم که اگر  $V$  معلوم باشد،  $I_R$ ،  $I_L$  و  $I_C$  با به کارگیری قانون اهم محاسبه می‌شوند.

ولتاژهای فیزیوری و جریان‌های فیزیوری یک مدار خاص را نشان دهد. این نمودار روشی گرایکی برای حل مسائل معینی است که ممکن است برای تست روش‌های تحلیلی به کار رفته باشد. در فصل بعد با نمودارهای مشابهی مواجه خواهیم شد که روابط توان مختلط در حالت ماندگار سینوسی را به نمایش می‌گذارند.

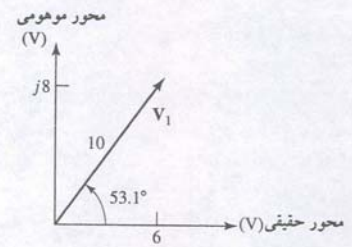
قبلاً با صفحه مختلط، هنگام مطالعه با اعداد مختلط و جمع و تفریق‌شان آشنا شدیم. چون ولتاژها و جریان‌های فیزیوری اعداد مختلط‌اند، می‌توان آن‌ها را به عنوان نقطه‌ای در صفحه مختلط در نظر گرفت. مثلاً فیزور ولتاژ  $V_1 = 6 + j8 = 10 \angle 53.1^\circ$  V در صفحه مختلط شکل ۱۰-۳۶ نشان داده شده است. محور x محور ولتاژ حقیقی است و محور y، محور موهومی است. ولتاژ  $V_1$  با پیکانی که از مبدأ کشیده می‌شود، مستقر می‌گردد. چون اجزای نمایش روی صفحه مختلط برای جمع و تفریق بخصوص ساده است، فیزورها به راحتی روی نمودار فیزیوری جمع و تفریق می‌شوند. ضرب و تقسیم از جمع و تفریق زوایا و تغییر دامنه به دست می‌آیند. شکل ۱۰-۳۷ (الف) جمع  $V_1$  و فیزور دیگر  $V_2 = 3 - j4 = 5 \angle -53.1^\circ$  V و شکل ۱۰-۳۷ (ب) جریان  $I_1$  که حاصل ضرب  $V_1$  و ادمیتانس  $Y = 1 + j1$  S است را نشان می‌دهد.

آخرین نمودار فیزیوری هر دو فیزور جریان و ولتاژ را روی یک صفحه مختلط نمایش می‌دهد. به نظر می‌رسد که هر کدام مقیاس خاص خود را دارند ولی مقیاس زاویه مشترک است. مثلاً فیزور ولتاژ یک سانتیمتری ممکن است 100 V را نشان دهد، ولی فیزور جریان با طول یک سانتیمتر برابر 3 mA جریان است. با ترسیم هر دو فیزور روی یک نمودار به راحتی می‌توان تشخیص داد که کدام فیزور پیشفاز و یا پس‌فاز می‌باشد.

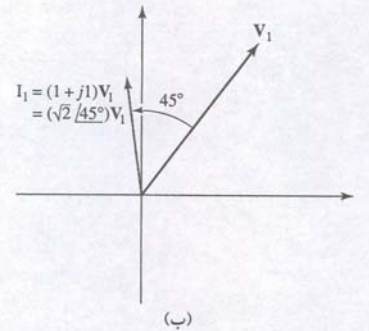
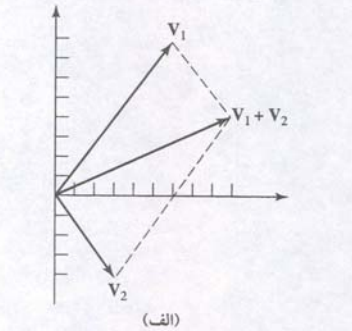
نمودار فیزیوری تفسیر جالبی از تبدیل حوزه زمان به حوزه فرکانس را می‌نماید، زیرا می‌توان نمودار را از دیدگاه حوزه زمان یا حوزه فرکانس تفسیر کرد. تا این جا ما از دید حوزه فرکانس به تفسیر پرداخته‌ایم، چون فیزورها را مستقیماً روی نمودار فیزیوری نشان می‌دادیم. اکثرین بیابید با ترسیم شکل ۱۰-۳۸ (الف) از دید حوزه زمان به فیزور  $V = V_m \angle \alpha$  نگاه می‌کنیم. برای انتقال  $V$  به حوزه زمان قدم بعدی ضرب  $e^{j\omega t}$  در فیزور است. بنابراین اکنون ولتاژ مختلط  $V_m e^{j\omega t} \angle \alpha = V_m \angle \omega t + \alpha$  داریم. این ولتاژ هم می‌تواند به عنوان فیزور تلقی شود، با زاویه‌ای که به طور خطی با زمان زیاد می‌شود. در نتیجه نمودار فیزیوری این زاویه قطعه خط دوار را نشان خواهد داد که مکان لحظه‌ای آن با اندازه  $\omega t$  جلوتر از (عکس ساعت‌گرد)  $V_m \angle \alpha$  است. هر دو  $V_m \angle \omega t + \alpha$  و  $V_m \angle \alpha$  روی نمودار فیزیوری شکل ۱۰-۳۸ (ب) نشان داده شده‌اند.

با انتخاب  $V_m \angle \omega t + \alpha$ ، گذر به حوزه زمان تکمیل شده است. بخش حقیقی این کمیت مختلط تصویر  $V_m \angle \omega t + \alpha$  روی محور حقیقی است: یعنی  $V_m \cos(\omega t + \alpha)$ . فیزور حوزه فرکانس به طور خلاصه روی نمودار فیزیوری نمایش داده شده است و انتقال به حوزه زمان با چرخش فیزور در خلاف جهت ساعت‌گرد با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  rad/s و مشاهده تصویر روی محور حقیقی انجام می‌شود. می‌توان چنین تصور کرد که پیکان نمایشگر فیزور  $V$  روی نمودار فیزیوری، تصویر کوتاه مدت در  $\omega t = 0$  از یک پیکان چرخان باشد که تصویرش روی محور حقیقی ولتاژ لحظه‌ای  $v(t)$  است.

اکنون بیابید نمودارهای فیزیوری چند مدار ساده را بسازیم. مدار سری RLC در شکل ۱۰-۳۹ (الف) چندین ولتاژ و تنها یک جریان دارد. نمودار فیزور با انتخاب جریان به عنوان فیزور مرجع، راحت‌تر ساخته می‌شود. بگذارید به طور اختیاری  $I = I_m \angle 0^\circ$  را برگزینیم و آن را در طول محور حقیقی نمودار فیزور، شکل ۱۰-۳۹ (ب) قرار دهیم. آن‌گاه می‌توان ولتاژهای مقاومت، خازن و القاگر را محاسبه و سپس روی نمودار مستقر کرد. رابطه



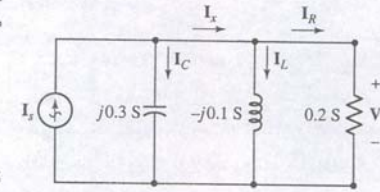
شکل ۱۰-۳۶ یک نمودار ساده فیزیوری ولتاژ  $V_1 = 6 + j8 = 10 \angle 53.1^\circ$  V را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰-۳۷ (الف) نمودار فیزیوری که جمع  $V_1 = 6 + j8$  V و  $V_2 = 3 - j4$  V را نشان می‌دهد، یعنی:

$V_1 + V_2 = 9 + j4$  V  $= 9.85 \angle 24.0^\circ$  V  
 (ب) نمودار فیزیوری،  $V_1$  و  $I_1$  را نشان می‌دهد که  $I_1 = YV_1$  و  $Y = 1 + js = \sqrt{2} \angle 45^\circ$  S است. مقیاس دامنه‌های جریان و ولتاژ متفاوت است.





شکل ۱۰-۴۱ مدار ساده‌ای که در آن چند جریان مجهول است.

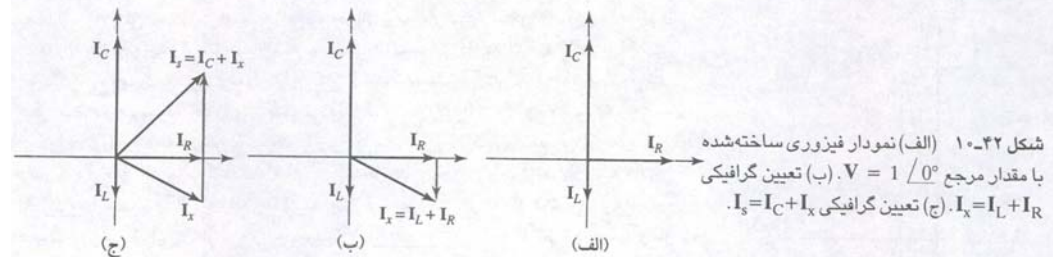
بنابراین  $V = 1 \angle 0^\circ$  را به خاطر سادگی برمی‌گزینیم و متعاقباً روابط زیر را محاسبه می‌نماییم.

$$\begin{aligned} I_R &= (0.2)1 \angle 0^\circ = 0.2 \angle 0^\circ \text{ A} \\ I_L &= (-j0.1)1 \angle 0^\circ = 0.1 \angle -90^\circ \text{ A} \\ I_C &= (j0.3)1 \angle 0^\circ = 0.3 \angle 90^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

نمودار فیزیوری مربوطه در شکل ۱۰-۴۲ (الف) دیده می‌شود. همچنین لازم است فیزور جریان‌های  $I_x$  و  $I_s$  را بیابیم. شکل ۱۰-۴۲ (ب) تعیین

$$I_x = I_L + I_R = 0.2 - j0.1 = 0.224 \angle -26.6^\circ \text{ A}$$

و شکل ۱۰-۴۲ (ج) تعیین  $I_s = I_C + I_x = 0.283 \angle 45^\circ \text{ A}$  را نشان می‌دهد. از شکل ۱۰-۴۲ (ج) می‌بینیم که  $I_s$  از  $I_R$  به اندازه  $45^\circ$  از  $I_C$  به اندازه  $-45^\circ$  و  $I_x$  به اندازه  $71.6^\circ = 45^\circ + 26.6^\circ$  پیش است. این زوایا فقط نسبی‌اند و مقدار عددی آن‌ها به  $I_s$  وابسته است. مقدار واقعی  $V$  نیز به آن وابسته می‌باشد.

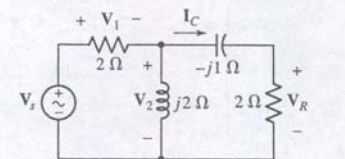


شکل ۱۰-۴۲ (الف) نمودار فیزیوری ساخته‌شده با مقدار مرجع  $V = 1 \angle 0^\circ$ . (ب) تعیین گرافیکی  $I_s = I_C + I_x$ . (ج) تعیین گرافیکی  $I_x = I_L + I_R$ .

## تمرین

۱۰-۱۷ مقدار مرجع مناسبی برای  $I_C$  در مدار شکل ۱۰-۴۳ انتخاب کنید. نمودار فیزیوری بکشید که  $V_s$ ،  $V_1$ ،  $V_2$  و  $V_R$  را نشان دهد و نسبت طول‌های (الف)  $V_s$  به  $V_1$  (ب)  $V_1$  به  $V_2$  (ج)  $V_s$  به  $V_R$  را به دست آورید.

جواب: 1.90، 1.00، 2.12



شکل ۱۰-۲۳

## ۱۰-۱۱ خلاصه فصل و مرور

- اگر دو موج سینوسی (یا کمپوزیسی) دارای اندازه مثبت و فرکانس یکسانی باشند، می‌توان موج پیشفاز یا پسفاز را با مقایسه زاویه آن‌ها مشخص کرد.
- پاسخ واداشته یک مدار خطی به یک منبع ولتاژ یا جریان سینوسی را می‌توان همواره به صورت یک تابع سینوسی نوشت که فرکانس آن همان فرکانس منبع سینوسی است.
- تبدیل فیزیوری را می‌توان روی هر تابع سینوسی پیاده کرد و برعکس:

$$V_m \cos(\omega t + \phi) \leftrightarrow V_m / \phi$$

- یک فیزور دارای اندازه و زاویه فاز است، فرکانس آن همان فرکانس منبع تحریک در مدار می‌باشد.
- هنگام تبدیل یک مدار حوزه زمان به مدار متناظر حوزه فرکانس، مقاومت‌ها، خازن‌ها و القاگرها با امپدانس (یا گاهی ادمیتانس) جایگزین می‌شوند.
- امپدانس یک مقاومت، همان مقاومت است.
- امپدانس خازن  $\Omega / j\omega C$  1 می‌باشد.

- امپدانس یک القاگر  $\Omega j\omega L$  است.

- امپدانس‌ها در ترکیبات سری و موازی مثل مقاومت‌ها ترکیب می‌شوند.
- همه تکنیک‌های تحلیلی که قبلاً روی مدارهای مقاومتی به کار رفتند، روی خازن‌ها و القاگرهایی که به معادل حوزه فرکانس تبدیل شده‌اند، قابل اعمالند.
- تبدیل فیزیوری فقط روی مدارهای تک فرکانس اجرا می‌شود. در غیر این صورت، از جمع باید استفاده کرد و پاسخ‌های جزئی حوزه زمان را با هم جمع می‌کنیم تا پاسخ کامل به دست آید.
- توانمندی مربوط به نمودارهای فیزیوری وقتی که تابع وادارکننده مناسبی از آغاز به کار رود کاملاً آشکار است، و نیز باید نتیجه نهایی به طور مناسبی مقیاس‌بندی شده باشد.

## ۱۰-۱۲ خواندنی‌های کمکی

A good reference to phasor-based analysis techniques can be found in:

R.A. DeCarlo and P.M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

Frequency-dependent transistor models are discussed from a phasor perspective in Chap. 7 of

W.H. Hayt, Jr. and G.W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design*, 2nd ed. New York: Wiley, 1995.

## مسائل

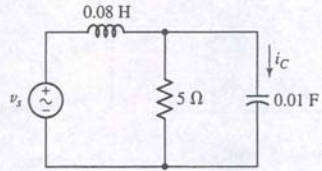
### ۱۰-۱ ویژگی‌های توابع سینوسی

- یک موج سینوسی  $f(t)$  در  $t = 2.1 \text{ ms}$  صفر بوده و در  $t = 7.5 \text{ ms}$  حداکثر 8.5 می‌رسد. موج را به شکل (الف)  $C_1 \sin(\omega t + \phi)$  نشان دهید که در آن  $\phi$  مثبت و کوچکترین مقدار خود را به درجه داشته باشد، (ب)  $C_2 \cos(\omega t + \beta)$ . نشان دهید که  $\beta$  کوچکترین اندازه ممکن و بر حسب درجه باشد. (ج) بفرم  $C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t$  باشد.
  - (الف) اگر  $A \cos(\omega t + \phi) = 10 \cos \omega t + 4 \sin \omega t$  و  $A > 0$ ،  $180^\circ < \phi < 180^\circ$  باشد،  $A$  و  $\phi$  را پیدا کنید. (ب) اگر 200  $\cos(5t + 130^\circ) = F \cos 5t + G \sin 5t$  باشد،  $F$  و  $G$  را به دست آورید. (ج) سه مقدار  $t$  را برای  $0 \leq t \leq 1$  پیدا کنید که در آن‌ها  $i(t) = 5 \cos 10t - 3 \sin 10t = 0$  باشد. (د) در چه فاصله زمانی بین  $t = 0$  و  $t = 10 \text{ ms}$   $12 \sin 100\pi t \geq 10 \cos 100\pi t$  است؟
  - با فرض دو تابع سینوسی  $f(t) = -50 \cos \omega t - 30 \sin \omega t$  و  $g(t) = 55 \cos \omega t - 15 \sin \omega t$  (ب) زاویه فازی که  $f(t)$  از  $g(t)$  پیش است.
  - پاسخ جریان مفروض معادله (۳) با  $i(t) = A \cos(\omega t - \phi)$  را در معادله دیفرانسیل  $L(di/dt) + Ri = V_m \cos \omega t$  بگذارید و نشان دهید که  $A$  و  $\phi$  حاصل با معادله (۴) یکی است.
  - یک منبع ولتاژ، موجی به صورت  $V_m \cos(\omega t + \phi)$  تولید می‌کند که فرکانس آن 13.56 MHz است. اگر مولد 300 W توان را به بار  $5 \Omega$  منتقل کند و ولتاژ به حداقل خود در  $t = 21.15 \text{ ms}$  برسد،  $V_m$  و  $\omega$  چقدر است؟
۶. امواج زیر را با هم مقایسه کنید و بگویید کدام پیشفاز است:
- (الف)  $33 \sin(8t - 9^\circ)$  و  $12 \cos(8t - 1^\circ)$
- (ب)  $15 \cos(1000t + 66^\circ)$  و  $-2 \cos(1000t + 450^\circ)$
- (ج)  $\sin(t - 13^\circ)$  و  $\cos(t - 90^\circ)$
- (د)  $\sin t$  و  $\cos(t - 90^\circ)$
۷. بگویید در امواج زیر کدام پسفاز است: (الف)  $6 \cos(2\pi 60t - 9^\circ)$  و  $-6 \cos(2\pi 60t + 9^\circ)$ ، (ب)  $\cos(t - 100^\circ)$  و  $-\cos(t - 100^\circ)$ ، (ج)  $\sin t$  و  $0.9 \cos(t - 3.14^\circ)$  و  $7000 \cos(t - \pi)$
۸. نشان دهید که ولتاژ  $v(t) = V_1 \cos \omega t - V_2 \sin \omega t$  را می‌توان به صورت  $V_m \cos(\omega t + \gamma)$  نوشت.  $V_m$  و  $\phi$  را به دست آورید.
۹. تئوری فوریه ابزار رایجی در علوم و مهندسی است. این تئوری می‌گوید که امواج پریودیک مثل شکل ۱۰-۴۴ برابر با جمع بینهایت جمله مطابق زیر است.
- (الف) مقدار واقعی را در  $t = 0.4 \text{ s}$  حساب کنید. مقدار تقریبی  $v(t)$  را با سری فوریه فوق برای، (ب) فقط جمله اول، (ج) فقط چهار جمله اول و (د) فقط پنج جمله اول محاسبه کنید.



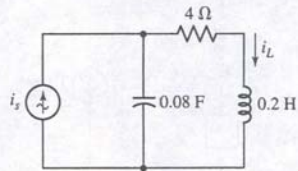
## تحلیل حالت ماندگار سینوسی مدار ۳۱۵

۲۸. در مدار شکل ۱۰-۵۳ فرض کنید  $i_C$  به صورت پاسخ مختلط،  $20e^{j(40t + 30^\circ)}$  A باشد،  $v_s$  را به صورت تابع تحریک مختلط درآورید.



شکل ۱۰-۵۳

۲۹. در مدار شکل ۱۰-۵۴ فرض کنید که جریان  $i$  به صورت مختلط  $20e^{j(10t + 25^\circ)}$  باشد،  $i_s(t)$  را به صورت تابع تحریک مختلط درآورید.

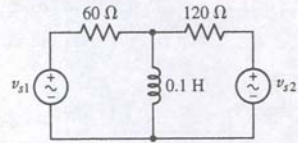


شکل ۱۰-۵۴

۳۰. در یک شبکه خطی مانند شکل ۱۰-۸، یک منبع ولتاژ سینوسی  $v_s = 80 \cos(500t - 20^\circ)$  V یک جریان خروجی  $i_{out} = 5 \cos(500t + 12^\circ)$  A تولید می‌کند. مطلوب است  $i_{out}$  به شرطی که  $v_s$  برابر (الف)  $40 \cos(500t + 10^\circ)$  V، (ب)  $40 \sin(500t + 10^\circ)$  V، (ج)  $40e^{j(500t + 10^\circ)}$  V و (د)  $50e^{j(500t + 10^\circ)}$  V باشد.

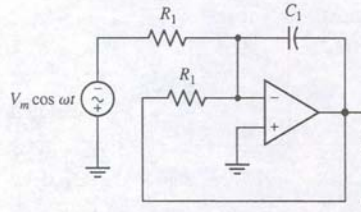
## ۱۰-۴ فیزور

۳۱. هر یک از جریان‌های زیر را به صورت فیزور بنویسید: (الف)  $12 \sin(400t + 110^\circ)$  A، (ب)  $-7 \sin 800t - 3 \cos 800t$  A، (ج)  $4 \cos(200t - 30^\circ) - 5 \cos(200t + 20^\circ)$  A. اگر  $\omega = 600$  rad/s باشد، مقدار لحظه‌ای هر یک از ولتاژها را در  $t = 5$  ms به دست آورید. (د)  $70 \angle 30^\circ$  V، (ه)  $-60 + j40$  V. ۳۲. بگذارید  $\omega = 4$  krad/s باشد و سپس مقدار لحظه  $i_x$  را در  $t = 1$  ms به دست آورید. به شرطی که  $I_x$  برابر باشد با (الف)  $5 \angle -80^\circ$  A، (ب)  $4 + j1.5$  A، (ج)  $50 \sin(250t - 40^\circ)$  V، (د)  $20 \cos 108t - 30 \sin 108t$  V، (ه)  $33 \cos(80t - 50^\circ) + 41 \cos(80t - 75^\circ)$  V. ۳۳. ولتاژ فیزیوری  $V_1 = 10 \angle 90^\circ$  mV در  $\omega = 500$  rad/s و  $V_2 = 8 \angle 90^\circ$  mV در  $\omega = 1200$  rad/s را با هم در یک op amp جمع شده‌اند. اگر op amp این ورودی را در ضریب ۵- ضرب کند، خروجی را در  $t = 0.5$  ms بیابید. ۳۴. اگر در شکل ۱۰-۵۵،  $\omega = 500$  rad/s،  $I_L = 2.5 \angle 40^\circ$  A باشد،  $v_s(t)$  را پیدا کنید.



شکل ۱۰-۵۱

۳۰. فرض کنید که op-amp در شکل ۱۰-۵۲ ایده‌آل است ( $R_i = \infty$ ،  $R_o = 0$  و  $A = \infty$ ) و نیز دو سیگنال به ورودی انتگرال‌گیر متصل است،  $-V_m \cos \omega t$  و  $v_{out}$ . اگر حاصل ضرب  $R_1 C_1$  برابر  $L/R$  در شکل ۱۰-۴ تنظیم شده باشد، نشان دهید که  $v_{out}$  برابر ولتاژ دوسر  $R$  (مرجع سمت چپ) در شکل ۱۰-۴ است.

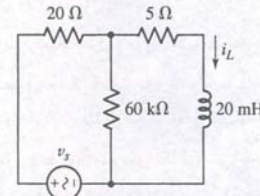


شکل ۱۰-۵۲

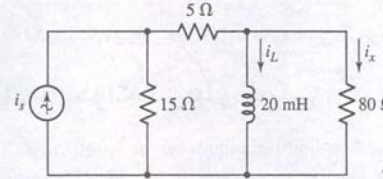
۲۱. یک منبع ولتاژ  $V_m \cos \omega t$  یک مقاومت  $R$  و یک خازن به طور سری بسته شده‌اند. (الف) یک معادله انتگرالی - دیفرانسیلی برحسب جریان حلقه  $i$  بنویسید و پس از آن مشتق بگیرید، تا معادله دیفرانسیل مدار به دست آید و (ب) یک فرم عمومی مناسب برای پاسخ واداشته  $i(t)$  فرض کنید و سپس آن را در معادله دیفرانسیل جایگزین نمایید و سپس فرم دقیق پاسخ واداشته را معین کنید.

## ۱۰-۳ تابع تحریک مختلط

۲۲. فرم‌های مقابل را به مختصات قائم ببرید. (الف)  $7 \angle -90^\circ$ ، (ب)  $17 \angle -17^\circ + 7 + j3$ ، (ج)  $14e^{j15^\circ}$ ، (د)  $0^\circ$ ، (ه)  $1$ . فرم‌های زیر را به فرم قطبی تبدیل نمایید. (ه)  $2(1 + j9)$  و (و)  $3$ . ۲۳. عملیات زیر را انجام دهید و پاسخ را به صورت یک عدد مختلط در مختصات قائم نشان دهید. (الف)  $15 \angle -23^\circ + 3$ ، (ب)  $12j(17 \angle 180^\circ)$  و (ج)  $16 \frac{(1 + j)(2 - j7)}{33 \angle -90^\circ}$ . ۲۴. عملیات لازم برای تبدیل عبارات زیر به یک عدد مختلط به فرم قطبی را انجام دهید. (الف)  $9 \angle -17^\circ - 5 \angle 9^\circ$ ، (ب)  $z(4 + j16)(8 - j15)$ ، (ج)  $5 \angle 30^\circ + \frac{(14 - j9)}{(2 - j8)} + j3$  و (د)  $6 \angle -33^\circ + 21 \angle -21^\circ$ . ۲۵. عبارات زیر را به صورت یک عدد مختلط به فرم قطبی نشان دهید. (الف)  $5 \angle 30^\circ + \frac{2e^{j14^\circ}}{2 - j2}$  و (ب)  $9 \angle 3^\circ - \frac{8 - j6}{j^2}$ . ۲۶. اعداد مختلط زیر را به فرم مختصات قائم درآورید. (الف)  $5 \angle -110^\circ$ ، (ب)  $6e^{j160^\circ}$ ، (ج)  $(3 + j6)(2 \angle 50^\circ)$ ، به فرم قطبی درآورید: (د)  $-100 - j40$  و (ه)  $3 \angle 50^\circ + 3 \angle -120^\circ$ . ۲۷. محاسبات زیر را انجام دهید و نتیجه را به فرم قطبی درآورید. (الف)  $45 \angle -50^\circ - 18 \angle 25^\circ + \frac{2 + j5}{1 + j2}$ ، (ب)  $3 + \frac{2}{j}$ ، به فرم قائم درآورید. (ج)  $(2.1 \angle 25^\circ)^3$  و (د)  $0.7e^{j0.3}$ .

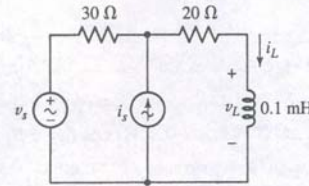


شکل ۱۰-۴۷



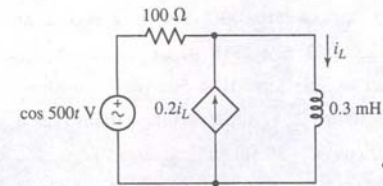
شکل ۱۰-۴۸

۱۵. یک منبع ولتاژ سینوسی  $v_s = 100 \cos 10^5 t$  V، یک مقاومت 500 ohm و یک القاگر 8 mH با یکدیگر سری‌اند. لحظاتی بین  $0 < t < \frac{1}{2} T$  را پیدا کنید که در آن توان صفر (الف) به مقاومت منتقل شده است، (ب) به القاگر رفته است و (ج) به وسیله منبع تولید شده است. ۱۶. در مدار شکل ۱۰-۴۹،  $v_s = 3 \cos 10^5 t$  V و  $i_s = 0.1 \cos 10^5 t$  A می‌باشد. پس از اجرای تجمیع و قضیه تونن مقادیر لحظه‌ای  $i_L$  و  $v_L$  را در  $t = 10 \mu s$  به دست آورید.



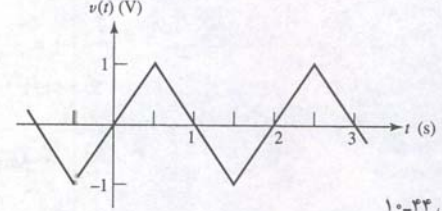
شکل ۱۰-۴۹

۱۷. در مدار شکل ۱۰-۵۰،  $i_L(t)$  را به دست آورید.



شکل ۱۰-۵۰

۱۸. هر دو منبع ولتاژ در شکل ۱۰-۵۱ به تابع  $120 \cos 120 \pi t$  V داده شده‌اند. (الف) عبارتی برای انرژی لحظه‌ای ذخیره شده در القاگر را بیابید. (ب) آن را برای یافتن مقدار متوسط انرژی ذخیره شده به کار ببرید. ۱۹. در مدار شکل ۱۰-۵۱، منابع ولتاژ عبارتند از  $v_{s1} = 120 \cos 200t$  V و  $v_{s2} = 180 \cos 200t$  V. جریان روبه‌باین در القاگر را به دست آورید.



شکل ۱۰-۴۳

۱۰. برق خانگی معمولاً  $110$  V،  $115$  V یا  $120$  V است. باین وجود این مقادیر ولتاژ دامنه را نشان نمی‌دهند. در واقع این مقادیر بیانگر جذر مربع ولتاژ می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t) dt}$$

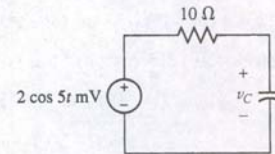
که T پریود موج،  $V_m$  دامنه ولتاژ و  $\omega$  فرکانس یا سرعت زاویه‌ای است. (الف) انتگرال فوق را اجرا نموده و نشان دهید که برای ولتاژ سینوسی داریم:

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

(ب) ولتاژهای دامنه مربوطه  $V_{rms}$  برای  $110$ ،  $115$  و  $120$  V چقدر است؟

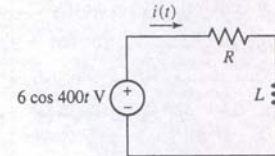
## ۱۰-۲ پاسخ واداشته به توابع سینوسی

۱۱. پاسخ حالت ساکن  $v_C(t)$  را در شکل ۱۰-۴۵ پیدا کنید.



شکل ۱۰-۴۵

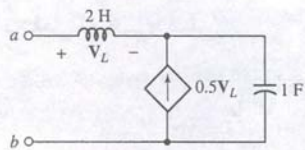
۱۲. ولتاژ القاگر  $v_C(t)$  را برای مدار شکل ۱۰-۴۶ با فرض  $R = 100 \Omega$  و  $L = 2$  H پیدا کنید. همه پاسخ‌های گذرا مدت‌ها قبل از این رفته‌اند.



شکل ۱۰-۴۶

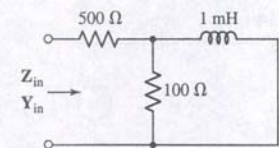
۱۳. در مدار شکل ۱۰-۴۷ فرض کنید  $v_s = 20 \cos 500t$  V است. پس از ساده‌سازی آن  $i_L(t)$  را بیابید. ۱۴. اگر در شکل ۱۰-۴۸،  $i_s = 0.4 \cos 500t$  A باشد، مدار را آن قدر ساده کنید تا به فرم شکل ۱۰-۴ درآید و سپس (الف)  $i_L(t)$  و (ب)  $i_x(t)$  را بیابید.





شکل ۱۰-۶۳

۵۶. یک مقاومت  $5 \Omega$ ، یک القاگر  $20 \text{ mH}$  و یک ظرفیت  $2 \text{ mF}$  یک شبکه سری با پایانه‌های  $a$  و  $b$  را تشکیل می‌دهند. ضمن کار با ادمیتانس ببینید چه خازنی بین  $a$  و  $b$  قرار گیرد تا در  $\omega = 500 \text{ rad/s}$  مقدار  $Z_{in,ab} = R_{in,ab} + j0$  شود. (ب)  $R_{in,ab}$  چقدر است؟ (ج) با خازن فوق در  $\omega = 100 \text{ rad/s}$   $Y_{ab}$  چقدر است؟  
۵۷. در شبکه شکل ۱۰-۶۴، فرکانسی را که در آن،  $550 \Omega$  (الف)  $B_{in} = -150 \mu\text{s}$  (د) و  $G_{in} = 1.8 \text{ ms}$  (ج)،  $X_{in} = 50 \Omega$  (ب) باشد، به دست آورید.



شکل ۱۰-۶۴

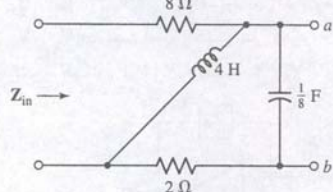
۵۸. دو ادمیتانس  $Y_1 = 3 + j4 \text{ ms}$  و  $Y_2 = 5 + j2 \text{ ms}$  با هم موازی‌اند و سومین ادمیتانس  $Y_3 = 2 - j4 \text{ ms}$  با ترکیب موازی سری است. اگر جریان  $I_1 = 0.1 \angle 30^\circ \text{ A}$  از  $Y_1$  عبور کند، اندازه ولتاژ دو سر، (الف)  $Y_1$ ، (ب)  $Y_2$ ، (ج)  $Y_3$  و (د) کل شبکه را پیدا کنید.  
۵۹. ادمیتانس ترکیب موازی مقاومت  $10 \Omega$  و خازن  $50 \mu\text{F}$  در فرکانس  $\omega = 1 \text{ krad/s}$  برابر با ادمیتانس  $R_1$  و  $C_1$  سری در همان فرکانس است. (الف)  $R_1$  و  $C_1$  را پیدا کنید. (ب) بند قبل را برای  $\omega = 2 \text{ krad/s}$  تکرار کنید.

۶۰. صفحه مختصات کارترین (قائم) دارای محور افقی با  $G_{in}$  برحسب زمین است، و محور عمودی  $B_{in}$  نیز بر حسب زمین می‌باشد. اگر  $Y_{in}$  ترکیب سری مقاومت  $1 \Omega$  و خازن  $0.1 \text{ F}$  باشد، (الف)  $Y_{in}$ ،  $G_{in}$  و  $B_{in}$  را بر حسب  $\omega$  به دست آورید. (ب) جفت محورها ( $G_{in}$  و  $B_{in}$ ) را روی صفحه در فرکانس‌های  $\omega = 0, 1, 2, 10, 20, 10^6 \text{ rad/s}$  مشخص کنید.

۶۱. ترکیبی از القاگرها، مقاومت‌ها و خازن‌ها طراحی کنید که دارای (الف) ادمیتانس  $j4 - 1$  در  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ، (ب) ادمیتانس  $200 \text{ ms}$  در  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  با حداقل یک القاگر، (ج) ادمیتانس  $7 \angle 80^\circ \mu\text{s}$  در  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  و (د) یک ادمیتانس  $200 \text{ m}\Omega$  در  $\omega = 3 \text{ THz}$  با حداقل قطعات ممکن باشد.

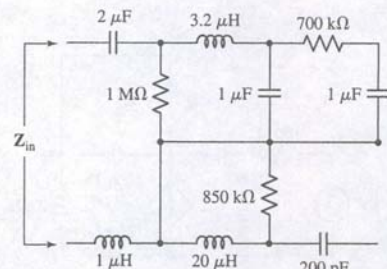
۶۲. مداری مرکب از القاگرها، مقاومت‌ها و خازن‌ها طراحی کنید که دارای (الف) یک ادمیتانس  $j4 - 1 \text{ pS}$  در  $\omega = 30 \text{ rad/s}$ ، (ب) ادمیتانس  $5 \mu\text{s}$  در  $\omega = 560 \text{ rad/s}$  باشد و در آن حداقل یک خازن باشد، (ج) یک ادمیتانس  $4 \angle -10^\circ \text{ ns}$  در  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  و (د) یک ادمیتانس  $60 \text{ ns}$  در  $\omega = 300 \text{ rad/s}$  با حداقل قطعات باشد.

۴۹. برای شبکه شکل ۱۰-۶۱،  $Z_{in}$  را در  $\omega = 4 \text{ rad/s}$  به دست آورید به شرطی که پایانه‌های  $a$  و  $b$  (الف) مدار باز است و (ب) اتصال کوتاه است.



شکل ۱۰-۶۱

۵۰. امپدانس معادل شبکه در شکل ۱۰-۶۲ را پیدا کنید. فرکانس  $f = 1 \text{ MHz}$  است.



شکل ۱۰-۶۲

۵۱. مداری مرکب از چند القاگر، خازن و مقاومت طراحی کنید که دارای (الف) امپدانس  $1 + j4 \Omega$  در  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  باشد، (ب) امپدانس  $5 \Omega$  در  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  باشد و حداقل یک القاگر دارد، (ج) امپدانس  $7 \angle 80^\circ \Omega$  در  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  باشد و (د) با حداقل قطعات دارای امپدانس  $5 \Omega$  در  $f = 3 \text{ THz}$  باشد.

۵۲. مداری مرکب از خازن‌ها، القاگرها و مقاومت‌ها طراحی کنید که دارای (الف) امپدانس  $1 + j4 \text{ k}\Omega$  در  $\omega = 230 \text{ rad/s}$  باشد، (ب) امپدانس  $5 \text{ M}\Omega$  در  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  ساخته شده که حداقل یک خازن دارد، (ج) دارای امپدانس  $8 \angle -22^\circ \Omega$  در  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  باشد و (د) با حداقل قطعات امپدانس  $300 \Omega$  در  $\omega = 3 \text{ krad/s}$  باشد.

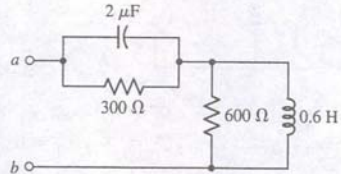
## ۱۰-۷ ادمیتانس

۵۳. ادمیتانس ترکیب موازی خازن‌های  $1 \text{ mF}$ ،  $2 \text{ mF}$  و  $4 \text{ mF}$  را اگر در فرکانس (الف)  $2 \text{ Hz}$ ، (ب)  $200 \text{ Hz}$ ، (ج)  $20 \text{ kHz}$  و (د)  $200 \text{ GHz}$  کار کند را محاسبه کنید.

۵۴. سوسپتانس ترکیب موازی (الف) دو مقاومت  $100 \Omega$ ، (ب) یک مقاومت  $1 \Omega$  موازی با خازن  $1 \text{ F}$  را اگر در فرکانس  $100 \text{ rad/s}$  کار کند، (ج) یک مقاومت  $1 \Omega$  سری با القاگر  $2 \text{ H}$  اگر در فرکانس  $50 \text{ rad/s}$  کار کند را به دست آورید.

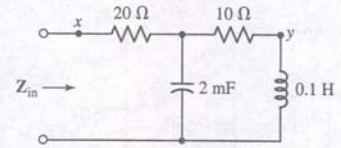
۵۵. ادمیتانس  $Y_{ab}$  شبکه شکل ۱۰-۶۳ را پیدا کرده و آن را به صورت ترکیبی از مقاومت  $R$  و القاگر  $L$  رسم نمایید. مقدار  $R$  و  $L$  را در  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  فرض کنید.

۴۱. در پایانه‌های  $a$  و  $b$  از شکل ۱۰-۵۸،  $Z_{in}$  را پیدا کنید، اگر  $\omega$  برابر باشد با (الف)  $800 \text{ rad/s}$  (ب)  $1600 \text{ rad/s}$ .



شکل ۱۰-۵۸

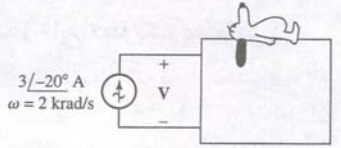
۴۲. بگذارید در شکل ۱۰-۵۹،  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  باشد، (الف)  $Z_{in}$  را پیدا کنید. (ب) اگر  $X$  به  $Y$  اتصال کوتاه شده باشد،  $Z_{in}$  را به دست آورید.



شکل ۱۰-۵۹

۴۳. اگر ولتاژ منبع  $V_s = 120 \cos 800t \text{ V}$  به دو سر پایانه‌های  $a$  و  $b$  در شکل ۱۰-۵۸ وصل باشد، (و مرجع + در بالا است) جریان جاری شده به راست در مقاومت  $300 \Omega$  چقدر است؟

۴۴. در شکل ۱۰-۶۰،  $V$  را اگر در جعبه (الف) مقاومت  $3 \Omega$  با القاگر  $2 \text{ mH}$  سری باشد، (ب)  $3 \Omega$  در  $3 \mu\text{F}$  سری باشد، (د)  $3 \Omega$  و  $2 \text{ mH}$  و  $125 \mu\text{F}$  سری باشند و (و)  $\omega = 4 \text{ krad/s}$  باشد.



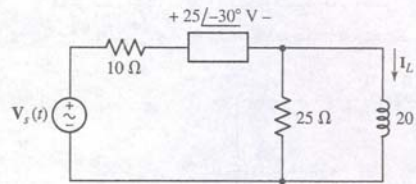
شکل ۱۰-۶۰

۴۵. یک القاگر  $10 \text{ H}$  یک مقاومت  $200 \Omega$  و یک خازن  $C$  با هم موازی‌اند. (الف) امپدانس ترکیب موازی را در  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  با  $\omega = 20 \mu\text{F}$   $C$  به دست آورید. (ب) اگر اندازه امپدانس در  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  برابر  $125 \Omega$  باشد،  $C$  را معین کنید. (ج) در چه مقداری از  $\omega$  با  $\omega = 20 \mu\text{F}$   $C$  اندازه امپدانس برابر  $100 \Omega$  می‌باشد.

۴۶. یک القاگر  $20 \text{ mH}$  و یک مقاومت  $30 \Omega$  با هم موازی‌اند. فرکانس  $\omega$ : (الف) در  $|Z_{in}| = 25 \Omega$  چقدر است؟ (ب) در زاویه  $\angle Z_{in} = 25^\circ$  چقدر؟ (ج) در  $\text{Re}(Z_{in}) = 25 \Omega$  چقدر؟ (د) در  $\text{Im}(Z_{in}) = 10 \Omega$  چقدر می‌باشد؟

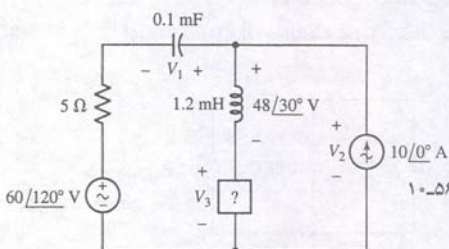
۴۷. در شکل ۱۰-۵۷ مقدار  $R_1$  و  $R_2$  را پیدا کنید.

۴۸. یک شبکه دو عنصری دارای امپدانس ورودی  $200 + j80 \Omega$  در فرکانس  $\omega = 1200 \text{ rad/s}$  است. چه خازنی را با شبکه موازی کنیم تا ورودی دارای (الف) راکتانس صفر باشد؟ (ب) امپدانس  $100 \Omega$  باشد؟



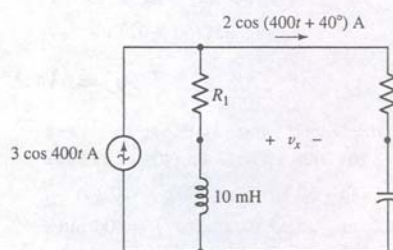
شکل ۱۰-۵۵

۳۵. اجازه دهید در شکل ۱۰-۵۶،  $\omega = 5 \text{ krad/s}$  باشد، (الف)  $V_1(t)$ ، (ب)  $V_2(t)$  (ج)  $V_3(t)$  را معین کنید.



شکل ۱۰-۵۶

۳۶. جریان فیزور  $1 \angle 0^\circ \text{ A}$  در ترکیب سری  $1 \Omega$ ،  $1 \text{ H}$  و  $1 \text{ F}$  جاری است. در چه فرکانسی دامنه ولتاژ دوسر شبکه دوبرابر دامنه ولتاژ دو سر مقاومت است؟  
۳۷. در شکل ۱۰-۵۷،  $V_x$  را در مدار به دست آورید.



شکل ۱۰-۵۷

۳۸. یک جعبه سیاه با دو سیم زرد حاوی دو منبع جریان  $I_{s1}$  و  $I_{s2}$  است. ولتاژ خروجی  $V_{out}$  است. اگر  $I_{s1} = 2 \angle 20^\circ \text{ A}$  و  $I_{s2} = 3 \angle -30^\circ \text{ A}$  باشد، آن‌گاه  $V_{out} = 80 \angle 10^\circ \text{ V}$  است. با این وجود اگر  $I_{s1} = I_{s2} = 4 \angle 40^\circ \text{ A}$  باشد، آن‌گاه  $V_{out} = 90 - j30 \text{ V}$  می‌باشد اگر  $I_{s1} = 2.5 \angle -60^\circ \text{ A}$  و  $I_{s2} = 2.5 \angle 60^\circ \text{ A}$  باشد،  $V_{out}$  چقدر است؟

## ۱۰-۶ امپدانس

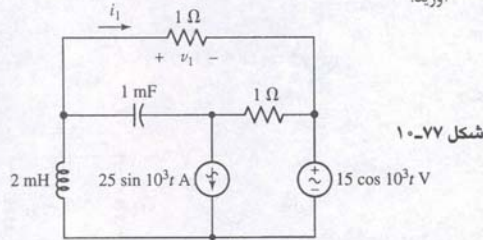
۳۹. امپدانس یک ترکیب سری متشکل از خازن‌های  $1 \text{ mF}$ ،  $2 \text{ mF}$  و  $3 \text{ mF}$  را در فرکانس‌های (الف)  $1 \text{ Hz}$ ، (ب)  $100 \text{ Hz}$ ، (ج)  $1 \text{ kHz}$  و (د)  $1 \text{ GHz}$  پیدا کنید.

۴۰. امپدانس یک مقاومت موازی با القاگر  $1 \text{ nH}$  و القاگر  $5 \text{ nH}$  را در فرکانس‌های (الف)  $1 \text{ Hz}$ ، (ب)  $1 \text{ kHz}$ ، (ج)  $1 \text{ MHz}$ ، (د)  $1 \text{ GHz}$  و (ه)  $1 \text{ THz}$  پیدا کنید



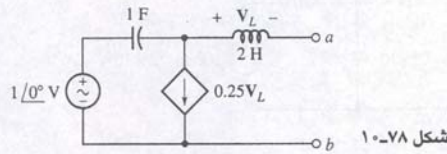
# تحلیل حالت ماندگار سینوسی مدار

۷۸. با مراجعه به شکل ۱۰-۷۷، با روش تجمیع، بخشی از  $v_1(t)$  را که در آن، (الف) فقط منبع ولتاژ (ب) فقط منبع جریان عمل می‌کنند، به دست آورید.



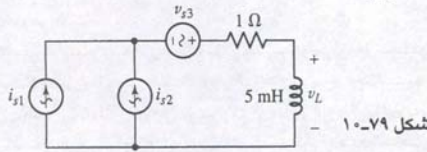
شکل ۱۰-۷۷

۷۹. با  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ، معادله نورتن شبکه ۱۰-۷۸ را پیدا کنید. معادل نورتن را به صورت  $I_N$  موازی با  $R_N$  و یکی از دو عنصر  $C_N$  و  $L_N$  بسازید.



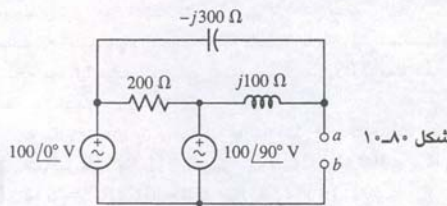
شکل ۱۰-۷۸

۸۰. در مدار شکل ۱۰-۷۹، فرض کنید  $i_{s1} = 2 \cos 200t \text{ A}$ ،  $i_{s2} = 1 \cos 100t \text{ A}$  و  $v_{s3} = 2 \sin 200t \text{ V}$  باشد،  $v_L(t)$  را بیابید.



شکل ۱۰-۷۹

۸۱. مدار معادل تونن را برای شکل ۱۰-۸۰ به دست آورید.



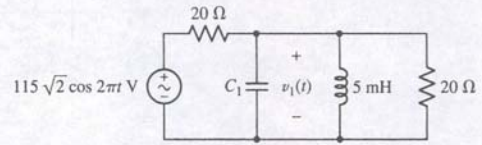
شکل ۱۰-۸۰

۸۲. جریان  $i(t)$  جاری شده از منبع ولتاژ شکل ۱۰-۸۱ چقدر است؟

۸۳. (الف) ولتاژ دو سر خازن 3F شکل ۱۰-۸۲ را به دست آورید. (ب) صحت پاسخ خود را با PSpice تحقیق نمایید.

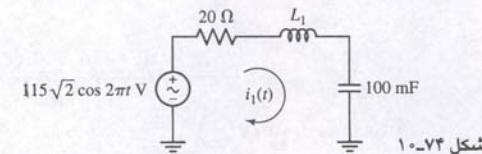
۸۴. (الف) معادل تونن از دید الفاکر 5 ohm در شکل ۱۰-۲۱ را به دست آورید. (ب) با فرض فرکانس 100 rad/s، صحت نتیجه خود را با PSpice تحقیق کنید.

۷۳. در مدار شکل ۱۰-۷۳ ولتاژ  $v_1(t) = 6.014 \cos(2\pi t + 85.76^\circ) \text{ V}$  است. ظرفیت  $C_1$  چقدر است؟



شکل ۱۰-۷۳

۷۴. در مدار شکل ۱۰-۷۴ جریان  $i_1(t) = 8.132 \cos 2\pi t \text{ A}$  است. مطلوب است القاکنایی  $L$ ؟

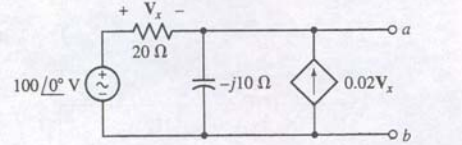


شکل ۱۰-۷۴

۷۵. با مراجعه به تقویت کننده شکل ۱۰-۲۶ (ب)؛ (الف) برای زاویه فاز خروجی معادله‌ای برحسب فرکانس به دست آورید. ورودی را  $V_s = 1 \angle 0^\circ \text{ V}$  فرض کنید. (ب) معادله خود را روی کاغذ نیمه لگاریتمی برای فرکانس‌های 100 Hz تا 10 GHz رسم کنید. از  $C_\pi = 5 \text{ pF}$ ،  $R_\pi = 2.2 \text{ k}\Omega$ ،  $R_B = 5 \text{ k}\Omega$ ،  $R_s = 300 \Omega$ ،  $R_L = 1.2 \text{ k}\Omega$ ،  $R_C = 4.7 \text{ k}\Omega$ ،  $g_m = 38 \text{ ms}$ ،  $C_\mu = 2 \text{ pF}$  استفاده کنید. (ج) در چه محدوده فرکانسی، خروجی دقیقاً  $180^\circ$  نسبت به ورودی اختلاف فاز دارد. حدوداً در چه فرکانسی این رابطه فازی شروع به تغییر می‌نماید.

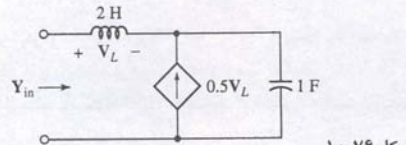
## ۱۰-۹. تجمیع، تبدیل منابع و قضیه تونن

۷۶. معادله تونن حوزه فرکانس شبکه شکل ۱۰-۷۵ را بیابید. نتیجه را به صورت  $V_{th}$  سری با  $Z_{th}$  نشان دهید.



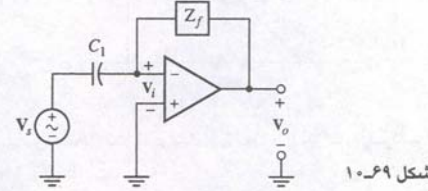
شکل ۱۰-۷۵

۷۷. امپدانس ورودی مدار شکل ۱۰-۷۶ را به دست آورید و آن را به صورت ترکیب موازی یک مقاومت و یک الفاکر  $L$  نشان دهید، در  $\omega = 1 \text{ rad}$  مقادیر  $R$  و  $L$  فرض شده‌اند.



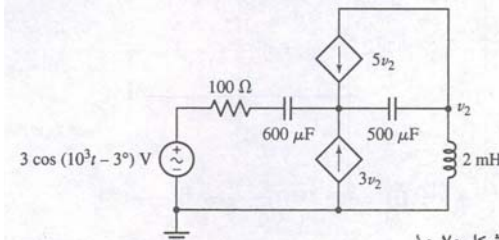
شکل ۱۰-۷۶

است، (الف) یک مشتق‌گیر ساده با  $Z_f = R_f$  بسازید.  $V_o / V_s$  را پیدا کنید و سپس نشان دهید که با  $A \rightarrow \infty$ ، نسبت  $-j\omega C_1 R_f \rightarrow V_o / V_s$  خواهد بود. (ب) اگر  $Z_f$  موازی  $R_f$  باشد،  $V_o / V_s$  را به دست آورید و سپس نشان دهید که اگر  $A \rightarrow \infty$  میل کند،  $-j\omega C_1 R_f / (1 + j\omega C_1 R_f) \rightarrow V_o / V_s$  میل خواهد کرد.



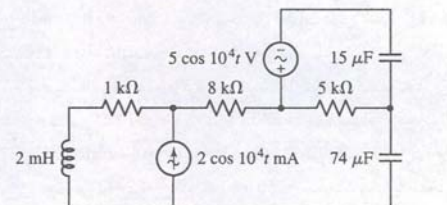
شکل ۱۰-۶۹

۷۰. برای مدار شکل ۱۰-۷۰، ولتاژ  $v_2$  را معین کنید.



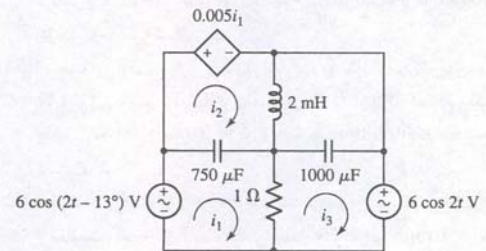
شکل ۱۰-۷۰

۷۱. توان تلف شده به وسیله مقاومت 1 k ohm در شکل ۱۰-۷۱ در زمان  $t = 1 \text{ ms}$  چقدر است؟



شکل ۱۰-۷۱

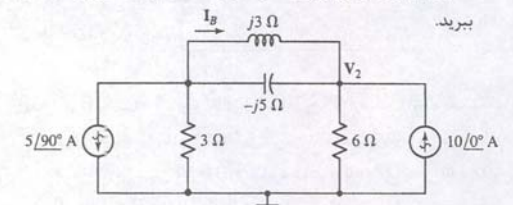
۷۲. تحلیل فیزیوری برای تعیین سه جریان مش  $i_1(t)$ ،  $i_2(t)$  و  $i_3(t)$  در مدار شکل ۱۰-۷۲ به کار ببرید.



شکل ۱۰-۷۲

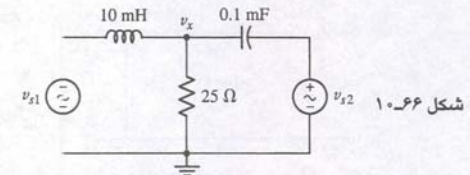
## ۱۰-۸. تحلیل گرهی و مش

۶۳. تحلیل فیزیوری گرهی را روی مدار شکل ۱۰-۶۵ برای یافتن  $V_2$  به کار ببرید.



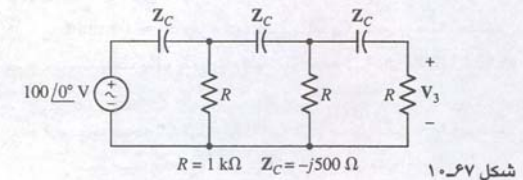
شکل ۱۰-۶۵

۶۴. تحلیل فیزیوری مش را روی مدار شکل ۱۰-۶۵ برای یافتن  $I_3$  به کار ببرید. ۶۵. در مدار شکل ۱۰-۶۶، اگر  $V_{s1} = 2 \cos 1000t \text{ V}$  و  $V_{s2} = 20 \sin 1000t \text{ V}$  باشند،  $v_x(t)$  را پیدا کنید.



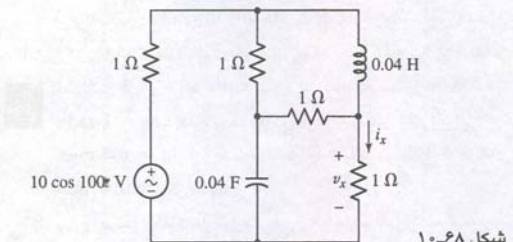
شکل ۱۰-۶۶

۶۶. (الف)  $V_3$  را در مدار شکل ۱۰-۶۷ بیابید. (ب) تا چه مقدار یکسانی، امپدانس خازن‌ها باید تغییر کند به نحوی که  $V_3$  به اندازه  $180^\circ$  با ولتاژ منبع اختلاف فاز داشته باشد؟



شکل ۱۰-۶۷

۶۷. برای یافتن  $i_x(t)$  در شکل ۱۰-۶۸ از تحلیل مش استفاده کنید.



شکل ۱۰-۶۸

۶۸. به کمک فیزیورها و تحلیل گرهی،  $v_x(t)$  را در مدار شکل ۱۰-۶۸ به دست آورید.

۶۹. شکل op amp ۱۰-۶۹ دارای امپدانس ورودی بینهایت، امپدانس خروجی صفر و بهره بزرگ ولی معین (مثبت، حقیقی)  $V_i$ ،  $V_o = -A$







## تحلیل منابع انرژی AC

### مقدمه

اغلب بخش عمده‌ای از تحلیل مدار، تعیین توان تولیدشده یا مصرف‌شده و یا هر دوی آن‌ها است. در رابطه با موضوع توان AC که ما روش ساده‌ای برگزیدیم تصویر مناسبی از این‌که یک سیستم خاص چگونه کار می‌کند را ارائه نکرده است، لذا ما در این فصل چندین کمیت مرتبط با توان را معرفی می‌کنیم.

با توان لحظه‌ای آغاز می‌کنیم، که حاصل ضرب ولتاژ حوزه زمان و جریان حوزه زمان در یک عنصر یا شبکه موردنظر است. توان لحظه‌ای به نوبه خود گاهی بسیار مفید است، زیرا حداکثر مقدار آن می‌باید محدود شود تا از محدوده مجاز برای یک وسیله فیزیکی خارج نگردد. مثلاً تقویت‌کننده‌های ترانزیستوری و لامپی هر دو در هنگام تجاوز توان اوج از حد معینی در خروجی تولید اعوجاج می‌نمایند و لذا بلندگوها صدای ناهنجاری را تولید می‌کنند. در هر صورت ما عمدتاً به توان لحظه‌ای به این دلیل علاقمندیم که می‌توان از آن توان متوسط را محاسبه کرد. مشابه با این مطلب مسافرت در بیرون شهر است که در آن حرکت با سرعت متوسط بهتر قابل تعریف است، ولی سرعت لحظه‌ای به ما پرهیز از سرعت‌های ماکزیممی که موجب خطر می‌شود را یادآوری می‌نماید.

در مسائل عملی توان متوسط را مورد توجه قرار می‌دهیم که حدود آن، کسری از یکوات در ارسال سیگنال راه دور از فضای بالای جو، تا چند وات توان تولیدی برای بلندگوها در سیستم‌های صوتی استریو، چند وات برای قهوه‌جوش، یا 10 میلیون وات تولیدی در یک نیروگاه می‌باشد. هنوز خواهیم دید که حتی مفهوم توان متوسط هم محدودیت خود را دارد، خصوصاً هنگامی که ما با مبادله انرژی بین بارهای رآکتیو و منابع انرژی مواجه می‌شویم. این موضوع به راحتی با معرفی مفاهیم توان رآکتیو، توان مختلط و ضریب توان - که همگی واژه‌هایی آشنا در صنعت انرژی هستند - قابل برخورد و مدیریت است.

### ۱۱-۱ توان لحظه‌ای

توان لحظه‌ای انتقالی به هر وسیله با حاصل ضرب ولتاژ لحظه‌ای دو سر وسیله در جریان لحظه‌ای درون آن تعریف می‌گردد. بنابراین:

$$p(t) = v(t)i(t) \quad (1)$$

گر وسیله موردنظر یک مقاومت R باشد، آنگاه توان را برحسب فقط جریان یا فقط ولتاژ بیان می‌کنیم:

$$p(t) = v(t)i(t) = i^2(t)R = \frac{v^2(t)}{R} \quad (2)$$

گر ولتاژ و جریان، مربوط به وسیله یا دستگاهی کاملاً القایی باشد، آنگاه:

$$p(t) = v(t)i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} v(t) \int_{-\infty}^t v(t') dt' \quad (3)$$

#### مفاهیم کلیدی

توان لحظه‌ای

توان متوسط

مقادیر ولتاژ و جریان موثر

توان ظاهری و ضریب توان

توان مختلط

مقایسه واژه‌های توان





آخرین معادله چند ویژگی دارد که به طور کلی برای وضعیت حالت ماندگار مدارها معتبر است. اولین جمله تابعی از زمان نیست و دومی دارای فرکانسی دوبرابر فرکانس اعمال شده است. چون جمله اخیر موجی سینوسی است و چون امواج سینوسی و کسینوسی دارای متوسط صفراند (وقتی که متوسط در فاصله مضارب صحیح پریود باشد)، بنابراین توان متوسط برابر با  $\frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi$  است. به زودی خواهیم دید که واقعاً چنین است.

## مثال ۱۱-۱

یک منبع ولتاژ  $V = 60u(t) + 40$ ، یک خازن  $5\mu F$  و یک مقاومت  $200\Omega$  با یکدیگر به طور سری بسته شده‌اند. توان جذب شده به وسیله خازن و مقاومت را در  $t = 1.2\text{ms}$  پیدا کنید.

در  $t = 0^-$ ، جریانی وجود ندارد و لذا  $V = 40$  در دو سر خازن و مقاومت سری با آن به  $100\text{V}$  پرش می‌کند. چون  $V_C$  نمی‌تواند در زمان صفر تغییر یابد، ولتاژ مقاومت در  $t = 0^+$  برابر  $60\text{V}$  خواهد بود.

پس جریان در هر سه عنصر در  $t = 0^+$  برابر است با  $300\text{mA}$  و برای  $t > 0$  داریم:

$$i(t) = 300e^{-t/\tau} \text{ mA}$$

که در آن  $\tau = RC = 1\text{ms}$  است. بنابراین جریان در  $t = 1.2\text{ms}$  برابر  $90.36\text{mA}$  و توان جذب شده به وسیله مقاومت در این لحظه  $i^2(t)R = 1.633\text{W}$  می‌باشد.

توان لحظه‌ای جذب شده به وسیله خازن  $i(t)V_C(t)$  است و به چند روش می‌توان رابطه ولتاژ خازن را به دست آورد. با توجه به این که در  $t > 0$  مجموع ولتاژ کل در دو سر هر دو عنصر همیشه  $100\text{V}$  است و این که ولتاژ دو سر مقاومت  $60e^{-t/\tau}$  می‌باشد، داریم:

$$V_C(t) = 100 - 60e^{-t/\tau}$$

و بنابراین  $V = 81.93\text{V}$  و  $V_C(1.2\text{ms}) = 100 - 60e^{-1/2} = 81.93\text{V}$  خواهد شد. توان جذب شده به وسیله خازن در  $t = 1.2\text{ms}$  برابر است با  $7.403\text{W}$  ( $(81.93\text{V})(90.36\text{mA})$ ).

۱۱-۱ یک منبع جریان  $12 \cos 2000t \text{ A}$ ، یک مقاومت  $200\Omega$  و یک القاگر  $0.2\text{H}$  با هم موازیند. فرض کنید شرایط حالت ماندگار حاکم است. در  $t = 1\text{ms}$ ، توان جذب شده به وسیله (الف) مقاومت، (ب) القاگر و (ج) منبع سینوسی را به دست آورید.  
جواب:  $13.98\text{ kW}$ ،  $-5.63\text{ kW}$  و  $-8.35\text{ kW}$ .

## ۱۱-۲ توان متوسط

وقتی از مقدار متوسط برای توان لحظه‌ای صحبت می‌کنیم، فاصله زمانی که در آن فرآیند متوسط گیری انجام می‌شود، باید کاملاً مشخص باشد. بگذارید ابتدا فاصله زمانی کلی  $t_1$  تا  $t_2$  را در نظر بگیریم. آن‌گاه می‌توان با انتگرال گیری  $p(t)$  از  $t_1$  تا  $t_2$  و تقسیم نتیجه آن بر فاصله زمانی  $t_2 - t_1$ ، مقدار متوسط را به دست آورد:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (۵)$$

مقدار متوسط با حرف بزرگ  $P$  مشخص می‌گردد زیرا تابعی از زمان نیست و معمولاً بدون هر زیرنویسی که بیانگر متوسط باشد، نوشته می‌شود. هر چند  $P$  تابعی از زمان نیست ولی تابعی از  $t_1$  و  $t_2$  است که این دو نیز فاصله انتگرال گیری را تعریف می‌کنند. این وابستگی فاصله زمانی را می‌توان به صورت ساده‌تر بیان کرد مشروط بر این که تابع  $p(t)$  متناوب باشد. ما ابتدا این حالت مهم را بررسی می‌کنیم.

که در آن فرض خواهیم کرد که در  $t = -\infty$  ولتاژ صفر باشد. در حالت خازن:

$$p(t) = v(t)i(t) = C v(t) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \int_{-\infty}^t i(t') dt' \quad (۴)$$

که فرض مشابهی برای جریان صورت گرفته است. با این وجود معادلات توان برحسب فقط ولتاژ یا فقط جریان بزودی با مطالعه شبکه‌های کلی‌تر، بد و جبهه خواهد شد. نمایش فوق به دلیل دیگری هم الزامی نیست زیرا می‌توانیم در پایانه‌های شبکه هم ولتاژ و هم جریان را بیابیم. به عنوان مثال، مدار  $RL$  شکل ۱۱-۱ را که با یک منبع ولتاژ پله‌ای تحریک شده مورد بررسی قرار می‌دهیم، پاسخ جریان به صورت زیر است:

$$i(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) u(t)$$

و بنابراین توان کل انتقالی به وسیله منبع یا جذب شده به وسیله شبکه غیر فعال برابر است با:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R} (1 - e^{-Rt/L}) u(t)$$

که در آن مربع تابع پله واحد برابر با همان تابع پله واحد است.

توان انتقالی به مقاومت برابر است با:

$$p_R(t) = i^2(t)R = \frac{V_0^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})^2 u(t)$$

برای تعیین توان جذب شده به وسیله القاگر، ابتدا ولتاژ القاگر را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\ &= V_0 e^{-Rt/L} u(t) + \frac{LV_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \frac{du(t)}{dt} \\ &= V_0 e^{-Rt/L} u(t) \end{aligned}$$

زیرا  $\frac{du(t)}{dt} = 0$  در  $t > 0$  مساوی صفر و  $(1 - e^{-Rt/L}) = 0$  در  $t = 0$  صفر می‌باشد. بنابراین توان جذب شده به وسیله القاگر برابر زیر است:

$$p_L(t) = v_L(t)i(t) = \frac{V_0^2}{R} e^{-Rt/L} (1 - e^{-Rt/L}) u(t)$$

با چند دستکاری جبری خواهیم داشت:

$$p(t) = p_R(t) + p_L(t)$$

که محکی برای درستی کار است. نتایج در شکل ۱۱-۲ رسم شده است.

## توابع ناشی از تحریک سینوسی

بیابید منبع ولتاژ در شکل ۱۱-۱ را با منبع سینوسی  $V_m \cos \omega t$  عوض کنیم. پاسخ حالت ماندگار حوزه زمان به صورت زیر بود:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

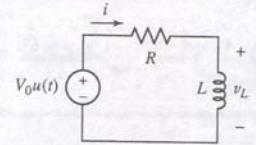
$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{و} \quad \phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

پس توان لحظه‌ای انتقالی به کل مدار در حالت ماندگار سینوسی چنین است:

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \phi) \cos \omega t$$

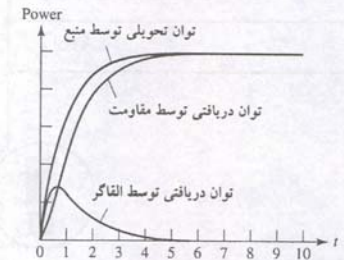
بهتر است رابطه فوق را با استفاده از روابط مثلثاتی دوباره بنویسیم:

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi] = \frac{V_m I_m}{2} \cos \phi + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \phi)$$



شکل ۱۱-۱ توان لحظه‌ای انتقالی به  $R$  عبارت است از:

$$p_R(t) = i^2(t)R = \frac{V_0^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})^2 u(t)$$

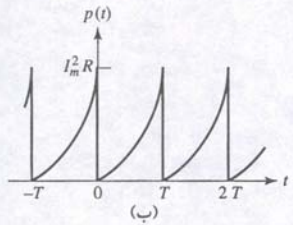
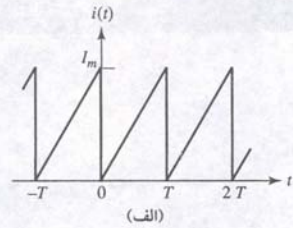


شکل ۱۱-۲ نمودارهای  $p(t)$ ،  $p_L(t)$  و  $p_R(t)$  با میراشدن حالت گذرا مدار به حالت ماندگار می‌رود. چون تنها منبع مدار  $dc$  است، القاگر در نهایت به صورت اتصال کوتاه عمل می‌نماید و توان جذب شده به وسیله آن صفر می‌شود.



در چند مورد خواهیم دید که بهتر است انتگرال‌گیری از توابع متناوب در بی‌نهایت پریود انجام شود. مثال‌هایی از کاربرد معادلات (۷)، (۸) و (۹) در ادامه آمده است.

بیاپید محاسبه توان متوسط یک موج پریودیک را با یافتن توان متوسط حمل‌شده به یک مقاومت  $R$  از یک موج جریان دندانه‌ای شکل ۱۱-۴ (الف) دنبال کنیم. داریم:



شکل ۱۱-۴ (الف) شکل موج دندانه‌ای. (ب) توان لحظه‌ای حاصل از عبور جریان از مقاومت  $R$ .

$$i(t) = \frac{I_m}{T} t \quad 0 < t \leq T$$

$$i(t) = \frac{I_m}{T} (t - T) \quad T < t \leq 2T$$

و به همین ترتیب. و نیز:

$$p(t) = \frac{1}{T^2} I_m^2 R t^2 \quad 0 < t \leq T$$

$$p(t) = \frac{1}{T^2} I_m^2 R (t - T)^2 \quad T < t \leq 2T$$

و به همین ترتیب که در شکل ۱۱-۴ (ب) نیز رسم شده است، با انتگرال‌گیری حول یک پریود، یعنی از  $t = 0$  تا  $t = T$  داریم:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2 R}{T^2} t^2 dt = \frac{1}{3} I_m^2 R$$

انتخاب یک پریود در محدوده‌ای دیگر، مانند از  $t = 0.1T$  تا  $t = 1.1T$ ، جواب یکسانی تولید می‌نماید. با انتگرال‌گیری از  $0$  تا  $2T$  و تقسیم بر  $2T$  یعنی کاربرد معادله (۸) با  $n = 2$  و  $t_x = 0$  نیز همان جواب فراهم می‌شود.

### توان متوسط در حالت ماندگار سینوسی

اکنون بیاپید جوابی کلی را برای حالت ماندگار سینوسی به‌دست آوریم. فرض می‌کنیم:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

و جریان

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

که از وسیله موردنظر عبور می‌کند. توان لحظه‌ای برابر است با:

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \phi)$$

دوباره با بیان ضرب دو جمله کسینوسی به صورت نصف جمع کسینوس اختلاف زاویه‌ها و کسینوس جمع زاویه‌ها داریم:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi) \quad (10)$$

می‌توانیم با کمی بررسی در انتگرال‌گیری صرفه‌جویی کنیم. اولین جمله یک مقدار ثابت و مستقل از  $t$  است. جمله باقیمانده یک تابع کسینوسی است. بنابراین  $p(t)$  پریودیک است و پریود آن  $T$  می‌باشد. دقت کنید که پریود متعلق به جریان یا ولتاژ است و نه متعلق به توان. تابع توان پریود  $T$  دارد. در هر صورت می‌توانیم در صورت تمایل انتگرال را در فاصله  $T$  بگیریم تا مقدار متوسط توان به‌دست‌آید. با این وجود باید آن را به  $T$  تقسیم کنیم. می‌دانیم که مقدار متوسط امواج سینوسی و کسینوسی در یک پریود صفر است. بنابراین نیازی نیست که از معادله (۱۰) انتگرال بگیریم. متوسط جمله دوم در یک پریود  $T$  (یا  $\frac{1}{2}T$ ) برابر صفر و متوسط اولین جمله، یک ثابت است. بنابراین:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) \quad (11)$$

به‌خاطر داشته باشید که  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

### توان متوسط برای امواج پریودیک

اجازه بدهید فرض کنیم که تابع تحریک و پاسخ‌های مدار همگی پریودیک (دوره‌ای) اند و به حالت ماندگار رسیده‌ایم، هرچند که لزوماً سینوسی هم نباشد. می‌توان تابع پریودیک  $f(t)$  را به صورت ریاضی تعریف کرد:

$$f(t) = f(t + T) \quad (6)$$

که  $T$  پریود یا دوره تناوب است. اکنون نشان می‌دهیم که مقدار متوسط توان لحظه‌ای که با معادله (۵) بیان شده است، می‌تواند در فاصله یک پریود محاسبه شود و شروع آن نیز اختیاری است. موج پریودیک کلی در شکل ۱۱-۳ نمایش و با  $p(t)$  مشخص شده است. ما ابتدا توان متوسط را با انتگرال‌گیری از  $t_1$  تا زمان  $t_2$  که یک پریود فاصله دارد، یعنی  $t_2 = t_1 + T$ ، محاسبه می‌کنیم:

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p(t) dt$$

سپس با انتگرال‌گیری از  $t_x$  تا  $t_x + T$  خواهیم داشت:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_x}^{t_x+T} p(t) dt$$

برابری  $P_1$  و  $P_x$  از تفسیر انتگرال‌ها قابل تفسیر است. سطحی که برای نمایش انتگرال مورد استفاده در تعیین  $P_x$  وجود دارد به اندازه سطح  $t_1$  تا  $t_x$  از  $P_1$  کوچک‌تر و به اندازه سطح بین  $t_1 + T$  تا  $t_x + T$  از آن بزرگ‌تر است. طبیعت پریودیک منحنی لازم می‌دارد که این دو سطح برابر باشند. بنابراین **توان متوسط** با انتگرال توان لحظه‌ای در هر پریود دلخواه صورت گرفته و سپس به پریود تقسیم می‌گردد:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_x}^{t_x+T} p dt \quad (7)$$

لازم به تذکر است که می‌توان انتگرال را در طول هر تعداد پریود صحیح انجام داد، به شرطی که تقسیم نیز بر همان تعداد پریود گردد. بنابراین:

$$P = \frac{1}{nT} \int_{t_x}^{t_x+nT} p dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

اگر به این مطلب عمومیت ببخشیم و انتگرال را در تمام فاصله زمانی بگیریم، نتیجه مفید دیگری حاصل می‌گردد. ابتدا حدود انتگرال را متقارن اختیار می‌کنیم:

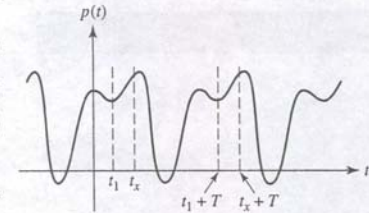
$$P = \frac{1}{nT} \int_{-nT/2}^{nT/2} p(t) dt$$

سپس با بی‌نهایت شدن  $n$ ، حدگیری می‌کنیم:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \int_{-nT/2}^{nT/2} p(t) dt$$

مادامی که  $P(t)$  تابعی با رفتاری منطقی باشد، مثل همه توابع تحریک فیزیکی و پاسخ‌ها، می‌توان عدد بزرگ  $n$  را با عدد کمی بزرگ‌تر که صحیح نیست جایگزین کرد، بدون این‌که  $P$  تغییر چندانی کند، به علاوه خطا با افزایش  $n$ ، کاهش می‌یابد. بدون بحثی بیشتر در این باره، مقدار گسسته  $nT$  را با متغیر پیوسته  $\tau$  جایگزین می‌کنیم:

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} p(t) dt \quad (9)$$



شکل ۱۱-۳ مقدار متوسط توان  $P$  از تابع پریودیک  $p(t)$  که در هر دوره تناوبی یکسان است.



به یاد داشته باشید که ما متوسط توان انتقالی به یک مقاومت را که به وسیله یک منبع سینوسی حمل می‌گردد محاسبه می‌کنیم، ضمناً این کمیت را با توان لحظه‌ای که فرمی مشابه دارد اشتباه نگیرید.



$$P_R = \frac{V_m^2}{2R} \quad (۱۳)$$

با دو فرمول آخر می‌توانیم توان متوسط حمل‌شده به یک مقاومت خالص را با آگاهی از جریان یا ولتاژ معین کنیم، این دو معادله ساده و مهم‌اند. متأسفانه گاهی از آن‌ها سوء استفاده می‌شود. بزرگ‌ترین اشتباه در به‌کارگیری آن‌ها هنگامی است که  $V_m$ ، ولتاژ دو سر مقاومت نیست. اگر در به‌کارگیری جریان در مقاومت، معادله (۱۲)، و ولتاژ دو سر مقاومت، معادله (۱۳)، دقت کافی به عمل آید صحت عملکرد تضمین شده است. البته  $\frac{1}{2}$  یادتان نرود.

### توان متوسط جذب‌شده به وسیله عناصر رآکتیو خالص

توان متوسط تحویلی به هر وسیله رآکتیو خالص (بدون مقاومت) باید صفر باشد. این مطلب نتیجه وجود اختلاف فاز  $90^\circ$  بین جریان و ولتاژ است، زیرا  $\cos(\theta - \phi) = \cos \pm 90^\circ = 0$  و  $P_x = 0$ .



توان متوسط تحویل‌شده به هر شبکه متشکل از فقط القاگر و خازن نیز صفر است. توان لحظه‌ای فقط در لحظات مشخصی صفر است. بنابراین توان در بخشی از تناوب یا سیکل به شبکه داده شده و در قسمت دیگر از شبکه گرفته می‌شود، ولی هیچ توانی تلف نمی‌شود.

### مثال ۱۱-۳

توان متوسط انتقالی به امپدانس  $Z_L = 8 - j11 \Omega$  را از جریان  $I = 5 \angle 20^\circ \text{ A}$  به‌دست‌آورید. می‌توان با استفاده از معادله (۱۲) حل را به سرعت به‌دست‌آورد. در محاسبه توان متوسط، تنها مقاومت  $8\Omega$  نقش دارد زیرا مولفه  $j11\Omega$  هیچ توان متوسطی را جذب نمی‌کند. بنابراین:

$$P = \frac{1}{2} (5^2) 8 = 100 \text{ W}$$

۱۱-۳ توان متوسط داده‌شده به امپدانس  $6 \angle 25^\circ \Omega$  به وسیله جریان  $I = 2 + j5 \text{ A}$  چقدر است. جواب:  $78.85 \text{ W}$

توان جذب‌شده به وسیله هر سه عنصر غیرفعال شکل ۱۱-۶ و توان تولیدشده به وسیله هر منبع را مشخص کنید.

بدون هر تحلیلی می‌دانیم که توان متوسط جذب‌شده به وسیله دو عنصر رآکتیو برابر صفر است.

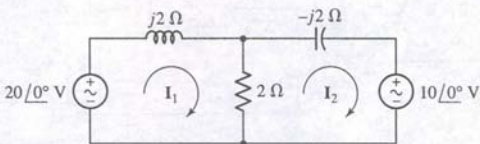
هر یک از مقادیر  $I_1$  و  $I_2$  با یکی از روش‌های آشنا، مثل روش حلقه، گره یا تجمیع قابل محاسبه است. این جریان‌ها عبارتند از:

$$I_1 = 5 - j10 = 11.18 \angle -63.43^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 5 - j5 = 7.071 \angle -45^\circ \text{ A}$$

جریان رو به پایین در مقاومت  $2\Omega$  برابر است با:

$$I_1 - I_2 = -j5 = 5 \angle -90^\circ \text{ A}$$



شکل ۱۱-۶ توان متوسط داده‌شده به هر عنصر رآکتیو در حالت ماندگار سینوسی صفر.



بنابراین، این نتیجه مهم که در بخش قبل برای یک مدار خاص معرفی شد، برای همه حالات ماندگار سینوسی حالت معتبری است. توان متوسط برابر با نصف حاصل ضرب حداکثر دامنه ولتاژ در حداکثر دامنه جریان در کسینوس اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ می‌باشد. علامت این زاویه در معادله نقشی ندارد.

### مثال ۱۱-۲

با ولتاژ حوزه زمان  $v = 4 \cos(\pi t/6) \text{ V}$ ، توان متوسط و عبارت توان لحظه‌ای حاصل از ولتاژ  $V = 4 \angle 0^\circ \text{ V}$  در دو سر امپدانس  $Z = 2 \angle 60^\circ \Omega$  را پیدا کنید.

فیזור جریان  $I = 2 \angle -60^\circ \text{ A}$  و متوسط توان برابر است با:

$$P = \frac{1}{2} (4)(2) \cos 60^\circ = 2 \text{ W}$$

ولتاژ حوزه زمان برابر است با:

$$v(t) = 4 \cos \frac{\pi t}{6} \text{ V}$$

جریان حوزه زمان برابر است با:

$$i(t) = 2 \cos \left( \frac{\pi t}{6} - 60^\circ \right) \text{ A}$$

و توان لحظه‌ای چنین است:

$$p(t) = 8 \cos \frac{\pi t}{6} \cos \left( \frac{\pi t}{6} - 60^\circ \right) = 2 + 4 \cos \left( \frac{\pi t}{3} - 60^\circ \right) \text{ W}$$

که همگی در شکل ۱۱-۵ ترسیم شده‌اند. مقدار متوسط توان  $2 \text{ W}$  و پررود آن،  $6 \text{ s}$ ، یعنی نیم پررود از جریان یا ولتاژ به وضوح دیده می‌شوند. در هر لحظه که جریان یا ولتاژ صفر باشد توان لحظه‌ای هم صفر است.

### تمرین

۱۱-۲ با فرض فیזור ولتاژ  $V = 115 \sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ V}$  در دو سر امپدانس  $Z = 16.26 \angle 19.3^\circ \Omega$ ، عبارتی برای توان لحظه‌ای بنویسید و اگر  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  باشد توان متوسط را حساب کنید. جواب:  $767.5 \text{ W}$  و  $813.2 \cos(100t + 70.7^\circ) \text{ W}$ .

بد نیست برای بررسی، دو حالت خاص را از هم جدا کنیم، یکی توان متوسط انتقالی به مقاومت ایده‌آل و دیگری به رآکتور (ترکیبی فقط از خازن‌ها و القاگرها) ایده‌آل.

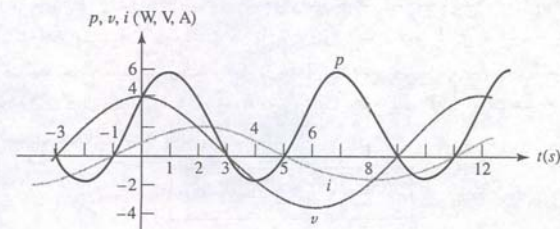
### توان متوسط جذب‌شده توسط یک مقاومت ایده‌آل

اختلاف فاز زاویه‌ای بین جریان عبوری و ولتاژ دو سر یک مقاومت خالص صفر است. بنابراین:

$$P_R = \frac{1}{2} V_m I_m \cos 0 = \frac{1}{2} V_m I_m$$

یا

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R \quad (۱۴)$$



شکل ۱۱-۵ منحنی‌های  $v(t)$ ،  $i(t)$  و  $p(t)$  به صورت تابعی از زمان برای مداری که در آن ولتاژ فیזור  $V = 40 \angle 0^\circ \text{ V}$  به امپدانس  $Z = 2 \angle 60^\circ \Omega$  در  $\omega = \frac{\pi}{6} \text{ rad/s}$  اعمال شده است.



اندازه  $I_L$  برابر است با:

$$\frac{|V_{th}|}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

و زاویه فاز برابر است با:

$$\angle V_{th} - \tan^{-1} \left( \frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L} \right)$$

به طور مشابه اندازه  $V_L$  برابر است با:

$$\frac{|V_{th}| \sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\sqrt{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

و زاویه فاز آن برابر است با:

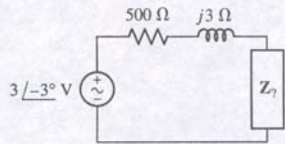
$$\angle V_{th} + \tan^{-1} \left( \frac{X_L}{R_L} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{X_{th} + X_L}{R_{th} + R_L} \right)$$

با توجه به معادله (۱۱) عبارتی برای توان متوسط حمل شده به بار امپدانس  $Z_L$  عبارت است از:

$$P = \frac{\frac{1}{2} |V_{th}|^2 \sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{(R_{th} + R_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2} \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{X_L}{R_L} \right) \right) \quad (14)$$

برای این که ثابت کنیم شرط انتقال حداکثر توان متوسط به بار،  $Z_L = Z_{th}^*$  است، باید دو گام دیگر برداریم. ابتدا باید مشتق معادله (۱۴) را نسبت به  $R_L$  به دست آورده و برابر صفر کنیم. دوم این که مشتق معادله (۱۴) نسبت به  $X_L$  هم باید برابر صفر گردد. جزئیات بیشتر را برای خواننده باقی می گذاریم.

#### مثال ۱۱-۵



**شکل ۱۱-۹** نمایش فیزیوری یک مدار سری ساده متشکل از یک منبع ولتاژ سینوسی، یک مقاومت، یک القاگر و یک امپدانس مجهول.

مدار خاصی متشکل از ترکیب سری یک منبع ولتاژ سینوسی  $V = 3 \cos(100t - 3^\circ)$ ، یک مقاومت  $500 \Omega$ ، یک القاگر  $30 \text{ mH}$  و یک امپدانس مجهول تشکیل شده است. اگر مطمئن باشیم که منبع ولتاژ حداکثر توان متوسط را به امپدانس مجهول می دهد، مقدار آن چقدر است؟

نمایش فیزیوری مدار در شکل ۱۱-۹ ترسیم شده است. به خوبی دیده می شود که در مدار مذکور امپدانس مجهول  $Z_L$  با یک معادل توننی که متشکل از منبع  $V = 3 \angle -3^\circ$  و امپدانس  $500 + j3 \Omega$  می باشد، سری است. چون ظاهر مدار شکل ۱۱-۹ از قبل به فرمی است تا قضیه توان متوسط حداکثر به کار گرفته شود، می دانیم که توان متوسط حداکثر به امپدانس برابر با مزدوج مختلط  $Z_{th}$  منتقل می گردد، یا:

$$Z_L = Z_{th}^* = 500 - j3 \Omega$$

این امپدانس را به چند طریق می توان به دست آورد، که ساده ترین آن از سری کردن یک مقاومت  $500 \Omega$  با یک خازن  $3 \text{ } \Omega$  حاصل می گردد. چون فرکانس مدار  $100 \text{ rad/s}$  است این میزان امپدانس متعلق به خازنی با ظرفیت  $3.333 \text{ mF}$  است.

**۱۱-۵** اگر القاگر  $30 \text{ mH}$  مثال ۱۱-۵ با خازن  $10 \mu\text{F}$  تعویض شود، مقدار مولفه القاکنایی امپدانس  $Z_L$  چیست؟ یا این فرض که  $Z_L$  حداکثر توان متوسط را جذب کند. **جواب:**  $10 \text{ H}$ .

پس  $I_m = 5 \text{ A}$  و توان متوسط جذب شده به وسیله مقاومت به راحتی از معادله (۱۲) حاصل می گردد:

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} (5^2) 2 = 25 \text{ W}$$

این نتیجه می تواند با استفاده از معادله (۱۱) یا (۱۳) تست شود. توان متوسط جذب شده به وسیله هر عنصر را کتیو صفر است. اکنون به سراغ منبع سمت چپ می رویم. ولتاژ  $20 \angle 0^\circ \text{ V}$  و جریان مربوطه اش،  $I_1 = 11.18 \angle -63.43^\circ$  قرارداد علامت عنصر فعال را تأیید می کنند. به این ترتیب توان تولید شده به وسیله این منبع برابر است با:

$$P_{\text{چپ}} = \frac{1}{2} (20) (11.18) \cos[0^\circ - (-63.43^\circ)] = 50 \text{ W}$$

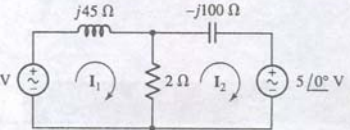
به ضریقی مشابه، توان جذب شده توسط منبع سمت راست با توجه به قرارداد علامت عناصر غیر فعال عبارت است از:

$$P_{\text{راست}} = \frac{1}{2} (10) (7.071) \cos(0^\circ + 40^\circ) = 25 \text{ W}$$

چون  $50 = 25 + 25$  است، بنابراین رابطه توان صحیح است.

#### تمرین

**۱۱-۴** برای مدار شکل ۱۱-۷ توان متوسط حمل شده به هر یک از عناصر غیر فعال را معین کنید. صحت پاسخ خود را با محاسبه توان تولیدی به وسیله هر یک از دو منبع تحقیق نمایید. **جواب:**  $37.6 \text{ mW}$ .



شکل ۱۱-۷

#### انتقال حداکثر توان

قبلاً قضیه انتقال حداکثر توان به بار مقاومتی و منابع دارای امپدانس مقاومتی را بیان کردیم. اگر منبع تونن  $V_{th}$  با امپدانس تونن  $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$  به بار  $Z_L = R_L + jX_L$  وصل شود، می توان به سادگی نشان داد که توان متوسط داده شده به بار هنگامی حداکثر می شود که داشته باشیم  $R_L = R_{th}$  و  $X_L = -X_{th}$ ، یعنی وقتی که  $Z_L = Z_{th}^*$  باشد. این نتیجه را معمولاً **قضیه انتقال حداکثر توان** برای حالت ماندگار سینوسی می نامند.

یک منبع مستقل ولتاژ سری با یک امپدانس  $Z_{th}$ ، یا یک منبع جریان موازی با یک امپدانس  $Z_{th}$  به شرطی **حداکثر توان متوسط** را به امپدانس  $Z_L$  انتقال می دهد که  $Z_L = Z_{th}^*$  باشد.

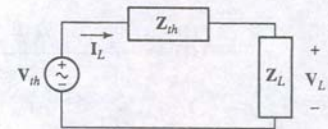
جزئیات اثبات مطلب فوق به تمرین ۱۱ محول شده است، ولی می توان با روشی ساده موضوع را در شکل ۱۱-۸ پیگیری و مشاهده کرد. امپدانس معادل تونن  $Z_{th}$  را می توان به صورت مجموع دو مولفه نوشت، یعنی  $R_{th} + jX_{th}$  و به همین ترتیب  $Z_L$  به صورت  $R_L + jX_L$  نوشته می شود. جریان در حلقه برابر است با:

$$I_L = \frac{V_{th}}{Z_{th} + Z_L} = \frac{V_{th}}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)}$$

و

$$\begin{aligned} V_L &= V_{th} \frac{Z_L}{Z_{th} + Z_L} = V_{th} \frac{R_L + jX_L}{R_{th} + jX_{th} + R_L + jX_L} \\ &= V_{th} \frac{R_L + jX_L}{R_{th} + R_L + j(X_{th} + X_L)} \end{aligned}$$

علامت  $Z^*$  مزدوج مختلط  $Z$  است، که از تبدیل  $z$  به  $z^*$  به دست می آید. برای توضیح بیشتر نیز به پیوست ۵ مراجعه کنید.



**شکل ۱۱-۸** یک مدار تک حلقه ای برای یافتن قضیه انتقال حداکثر توان در حالت ماندگار سینوسی.



## توان متوسط برای توابع نامتناوب

حال توجه خود را به توابع نامتناوب معطوف می‌داریم. مثال عملی از یک تابع توان نامتناوب (یا غیر پریودیک) که در آن مقدار توان متوسط موردنظر است، توان خروجی یک رادیو تلسکوپ است که به سمت یک ستاره می‌فرستد. مثال دیگر مجموع تعدادی توابع متناوب است، که هر یک پریود متناوبی دارد، به نحوی که نمی‌توان در بین آن‌ها تابعی با پریود یا دوره متناوب مشترک پیدا کرد. مثلاً جریان:

$$i(t) = \sin t + \sin \pi t \quad (15)$$

نامتناوب است زیرا نسبت تناوب دو موج سینوسی عدد غیر گویا است. در  $t = 0$ ، هر دو تابع صفر و صعودی‌اند. ولی جمله اول تنها در  $t = 2\pi n$  صفر و صعودی است که در آن  $n$  عددی صحیح است و بنابراین تابع فوق هنگامی متناوب است که  $\pi t$  یا  $(2\pi n)$  برابر  $2\pi m$  باشد، که  $m$  نیز عددی صحیح است. هیچ حل یا  $n$  و  $m$  صحیحی نمی‌توان یافت که در رابطه فوق صدق کند. مقایسه تابع نامتناوب بیان‌شده در معادله (۱۵) و تابع متناوب زیر آموزنده است:

$$i(t) = \sin t + \sin 3.14t \quad (16)$$

که در آن  $3.14$  یک عدد اعشاری کامل است نه تقریبی از  $3.141592\dots$ . با کمی کوشش می‌توان نشان داد که تناوب موج جریان فوق  $100\pi$  ثانیه می‌باشد.\*  
مقدار متوسط توان انتقالی به یک مقاومت  $1\Omega$  با جریان متناوب معادله (۱۶) یا معادله متناوب (۱۵) را می‌توان با گرفتن انتگرال روی یک فاصله نامحدود به‌دست آورد. البته چون مقدار متوسط توابع ساده را غالباً می‌دانیم، می‌توان از انتگرال‌گیری‌های بسیاری اجتناب کرد. بنابراین توان متوسط ناشی از جریان معادله (۱۵) با اعمال معادله (۹) حاصل می‌گردد:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\sin^2 t + \sin^2 \pi t + 2 \sin t \sin \pi t) dt$$

در این جا  $P$  را به صورت مجموع سه مقدار متوسط نوشته‌ایم. مقدار متوسط  $\sin^2 t$  در بی‌نهایت دوره زمانی محدود را می‌توان با تبدیل آن به  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t)$  به‌دست آورد که برابر  $\frac{1}{2}$  می‌شود. به‌طور مشابه مقدار متوسط  $\sin^2 \pi t$  نیز  $\frac{1}{2}$  است و جمله آخر را می‌توان به صورت دو تابع سینوسی نوشت که هر یک مطمئناً مقدار متوسط صفر را دارند. بنابراین:

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ W}$$

برای جریان متناوب معادله (۱۶) نیز جواب مشابهی به‌دست می‌آید. این روش را می‌توان به هر تابع جریانی که مجموعی از چند تابع سینوسی با تناوب‌های مختلف است اعمال کرد، یعنی:

$$i(t) = I_{m1} \cos \omega_1 t + I_{m2} \cos \omega_2 t + \dots + I_{mN} \cos \omega_N t \quad (17)$$

توان متوسط انتقالی به  $R$  برابر است با:

$$P = \frac{1}{2} (I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \dots + I_{mN}^2) R \quad (18)$$

اگر هر مولفه جریان فوق فاز خاصی هم داشته باشد نتیجه تغییری نخواهد کرد. این نتیجه مهم به میزان قابل توجهی به هنگام به‌دست آوردن آن، ساده است. گام‌های لازم در این راستا عبارت‌انداز: مربع کردن تابع جریان، انتگرال‌گیری و حدگیری آن. نتیجه شگفت‌انگیز نیز هست، زیرا برای جریان‌هایی شبیه به معادله (۱۷) اصل تجمیع را می‌توان در مورد توان هم اعمال کرد. اگر جریان مجموع دو جریان  $dc$  یا دو جریان سینوسی هم فرکانس باشد، اصل تجمیع معتبر نخواهد بود.

ن

## مثال ۱۱-۶

توان متوسط داده‌شده به یک مقاومت  $4\Omega$  به وسیله جریان  $i_1(t) = 2 \cos 10t - 3 \cos 20t$  A چقدر است؟

چون دو جمله سینوسی فرکانس‌های متفاوتی دارند، دو توان متوسط به‌طور جداگانه محاسبه شده و سپس با هم جمع می‌شوند. بنابراین جریان توانی برابر  $26W = 8 + 18 = 4(3^2) + 4(2^2)$  را به مقاومت  $4\Omega$  حمل می‌کند.

## مثال ۱۱-۷

توان متوسط داده‌شده به مقاومت  $4\Omega$  به وسیله جریان  $i_2 = 2 \cos 10t - 3 \cos 10t$  A چقدر است؟

در این‌جا هر دو جزء جریان فرکانسی برابر دارند، و بنابراین باید در آن فرکانس به یک جمله سینوسی ادغام شوند. پس  $i_2 = 2 \cos 10t - 3 \cos 10t = -\cos 10t$  تنها  $2W = \frac{1}{2}(1^2)$  متوسط توان به مقاومت  $4\Omega$  حمل خواهد کرد.

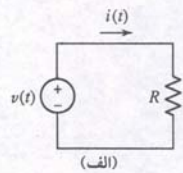
۱۱-۶ یک منبع ولتاژ  $v_s$  به دو سر مقاومت  $4\Omega$  وصل است. توان متوسط جذب‌شده به وسیله مقاومت را بـرای  $v_s$  (الف)  $8 \sin 200t$  V، (ب)  $8 \sin(200t - 45^\circ)$  V، (ج)  $8 \sin 200t - 6 \cos(200t - 45^\circ)$  V، (د)  $8 \sin 200t - 4 \sin 100t + 4V$ ، به‌دست‌آورید.  
جواب:  $11.14W$ ،  $10.00W$ ،  $4.01W$ ،  $8.00W$ .

## ۱۱-۳ مقادیر ولتاژ و جریان موثر

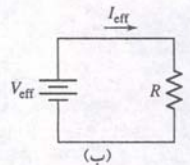
همه می‌دانیم که ولتاژ پریزهای برق منزلمان یک ولتاژ سینوسی  $220V$  با فرکانس  $50Hz$  است. ولی  $220V$  چه معنی می‌دهد؟ مطمئناً این یک ولتاژ لحظه‌ای نیست، چون ولتاژ لحظه‌ای ثابت نیست، این ولتاژ، دامنه هم نیست چرا که ما آن را با  $v_m$  نشان می‌دهیم، اگر آن را روی صفحه اسیلوسکوپ کالبره شده نمایش دهیم، خواهیم دید که دامنه این ولتاژ در هر یک از پریزهای منزل  $220\sqrt{2}$  یا  $311.12V$  است. مسلماً مقدار متوسط ولتاژ هم نمی‌باشد، زیرا مقدار متوسط ولتاژ سینوسی صفر است. می‌توانیم کمی به مفهوم آن، با تعریف اندازه متوسط در یک نیم سیکل مثبت یا منفی نزدیک‌تر شویم. اگر از یک ولت‌متر نوع یکسوکننده برای این کار استفاده کنیم، مقدار  $198V$  را اندازه‌گیری خواهیم کرد.  $220V$ ، مقدار موثر این ولتاژ سینوسی است. این مقدار نقش یک منبع در تحویل توان به بار مقاومتی را نشان می‌دهد.

## مقدار موثر یک موج متناوب

بگذارید مقدار موثر را برحسب جریان تعریف کنیم، هرچند که می‌توان ولتاژ را هم برای این‌کار انتخاب کرد. مقدار موثر هر جریان متناوب برابر با مقدار جریان مستقیمی است که در یک مقاومت  $R$  جاری است و توان متوسط حمل‌شده به وسیله آن با توان جریان مستقیم برابر است. به بیان دیگر، اجازه می‌دهیم تا جریان متناوب مفروضی از مقاومتی بگذرد، توان لحظه‌ای  $i^2 R$  را معین می‌کنیم و سپس مقدار متوسط  $i^2 R$  را در طول یک دوره تناوب یا پریود به‌دست می‌آوریم، که این همان توان متوسط است. آن‌گاه یک جریان  $dc$  در مدار جاری می‌کنیم و مقدار جریان مستقیم را آنقدر تنظیم می‌کنیم تا توانی به همان اندازه تولید شود. مقدار جریان مستقیم حاصل برابر با مقدار موثر جریان متناوب است. این ایده در شکل ۱۱-۱۰ دیده می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۱۱-۱۰ اگر توانی که مقاومت در دو حالت (الف) و (ب) جذب می‌کند یکسان باشد، مقدار موثر  $i(t)$  برابر با  $I_{eff}$  و مقدار موثر  $v(t)$  برابر با  $V_{eff}$  است.



### استفاده از مقادیر موثر در محاسبه توان متوسط

استفاده از تعریف مقدار موثر rms، عبارات مربوط به توان متوسط را برای جریان و ولتاژ سینوسی با حذف فاکتور  $\frac{1}{2}$  کمی ساده می‌کند. مثلاً توان متوسط داده شده به مقاومت R به وسیله جریان سینوسی برابر است با:

$$P = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

چون  $I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  است مقدار توان را چنین می‌توان نوشت:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R \quad (۲۰)$$

عبارات آشنای دیگر توان نیز ممکن است به صورت تابعی از  $I_{\text{eff}}$  نوشته شوند:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi) \quad (۲۱)$$

$$P = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} \quad (۲۲)$$

گرچه موفق شدیم فاکتور  $\frac{1}{2}$  را حذف کنیم ولی اکنون باید ببینیم که یک کمیت سینوسی بر حسب دامنه‌اش مشخص شده است یا بر حسب مقدار موثرش. در زمینه‌های انتقال انرژی و توزیع آن و ماشین‌های دورانی غالباً مقدار موثر و در زمینه‌های الکترونیک و مخابرات غالباً دامنه و فاز به کار می‌رود. در این کتاب فرض بر این است که مقادیر بر حسب دامنه بیان شوند مگر در مواردی که عبارت rms صریحاً به کار رفته باشد.

در حالت ماندگار سینوسی فیزورهای ولتاژ و جریان ممکن است بر حسب مقادیر موثر یا دامنه‌ها باشند. دو نوع عبارت فقط در ضریب  $\sqrt{2}$  یا یکدیگر اختلاف دارند. ولتاژ  $50/\underline{30^\circ}$  V بر حسب دامنه بیان شده است، ما می‌توانیم مقدار موثر آن را به صورت  $35.4/\underline{30^\circ}$  V هم بیان کنیم.

### مقدار موثر در مدارهای چندفرکانسی

برای تعیین مقدار موثر یک موج متناوب یا نامتناوب که از مجموع تعدادی موج سینوسی با فرکانس‌های متفاوت تشکیل شده، می‌توان از رابطه توان متوسط در معادله (۱۸) استفاده کرد. ما آن را بر حسب مقادیر موثر به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P = (I_{1\text{eff}}^2 + I_{2\text{eff}}^2 + \dots + I_{N\text{eff}}^2) R \quad (۲۳)$$

در این رابطه دیده می‌شود که مقدار موثر یک جریان متشکل از هر تعداد جریان سینوسی با فرکانس‌های مختلف را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{I_{1\text{eff}}^2 + I_{2\text{eff}}^2 + \dots + I_{N\text{eff}}^2} \quad (۲۴)$$

نتایج نشان می‌دهد که اگر یک موج سینوسی rms 5A با فرکانس 60Hz از مقاومتی عبور کند، توان متوسط  $5^2(2) = 50\text{W}$  به وسیله مقاومت جذب می‌گردد. اگر جریان دیگری مثلاً rms 3A در 120Hz وجود داشته باشد، توان جذب شده  $3^2(2) + 50 = 68\text{W}$  خواهد بود. اما با به کارگیری معادله (۲۴) می‌بینیم که مقدار موثر مجموع جریان‌های 60 و 120Hz برابر 5.831A است. بنابراین  $5.831^2(2) = 68\text{W}$  بوده که مثل قبل می‌باشد. با این وجود اگر جریان دوم هم در 60Hz باشد، مقدار موثر مجموع دو جریان 60Hz، بسته به فاز نسبی دو مولفه جریان چیزی بین 8 W و 128 W است.

این حقیقت که مقدار موثر بر حسب یک کمیت dc معادل تعریف می‌شود، موجب می‌شود که معادلات توان مدارهای مقاومتی شبیه معادلات توان به کار رفته در تحلیل dc گردد.

توجه کنید که مقدار موثر کمیت dc به نام K، برابر است با  $\frac{K}{2}$ ، نه  $\frac{K}{2}$ .

اکنون می‌توان یک عبارت ریاضی کلی برای مقدار موثر  $i(t)$  به سادگی به دست آورد. توان متوسط حمل شده به مقاومت به وسیله جریان متناوب  $i(t)$  برابر است با:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt$$

که T زمان تناوب  $i(t)$  است. توان انتقالی به وسیله جریان مستقیم عبارت است از:

$$P = I_{\text{eff}}^2 R$$

از برابری عبارات فوق و حل  $I_{\text{eff}}$  داریم:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (۱۹)$$

نتیجه از مقاومت R، مستقل است و در واقع باید هم باشد. عبارت مشابهی را می‌توان برای ولتاژ متناوب به دست آورد و این کار به ترتیب با تعویض  $i$ ،  $I_{\text{eff}}$  با  $v$  و  $v_{\text{eff}}$  صورت می‌گیرد. توجه کنید که مقدار موثر به این ترتیب حاصل می‌شود که ابتدا تابع زمانی را مربع می‌کنیم، سپس متوسط تابع مربع شده در یک دوره تناوب را به دست می‌آوریم و بالاخره جذر متوسط توابع مربع شده را می‌گیریم. به زبان خلاصه‌تر عملیات یافتن مقدار موثر را جذر متوسط مربع می‌گویند، و با rms نشان می‌دهند.

### مقدار موثر (rms) یک موج سینوسی

مهم‌ترین حالت خاص، موج سینوسی است. بیایید جریان سینوسی زیر را انتخاب کنیم:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

که دارای زمان تناوب زیر است:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

و برای یافتن مقدار موثر آن رادر معادله (۱۹) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt} \\ &= I_m \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2\phi) \right] dt} \\ &= I_m \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} [t]_0^{2\pi/\omega}} \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

بنابراین مقدار موثر جریان سینوسی کمیتی حقیقی و مستقل از زاویه فاز است و  $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$  برابر دامنه جریان می‌باشد. بنابراین جریانی مثل  $A \cos(\omega t + \phi)$  مقدار موثر 1A دارد و به همان میزان توان متوسط را به هر مقاومتی حمل خواهد کرد که جریان مستقیم 1A به آن حمل می‌نمود.

باید توجه کرد که فاکتور  $\sqrt{2}$  یعنی ضریب دامنه جریان متناوب به مقدار موثر برای امواج سینوسی معتبر است. مثلاً برای موج دندان اژه‌ای شکل ۱-۴، مقدار موثر برابر با مقدار حداکثر تقسیم بر  $\sqrt{3}$  می‌باشد. فاکتوری که باید مقدار حداکثر بر آن تقسیم شود تا مقدار موثر به دست آید، به فرم ریاضی تابع متناوب بستگی دارد و بسته به طبیعت تابع می‌تواند گنگ یا گویا باشد.



۱۱-۷ مقدار موثر هر یک از ولتاژهای متناوب زیر را محاسبه کنید:

(الف)  $6\cos 25t$ ، (ب)  $6\cos 25t + 4\sin(25t + 30^\circ)$ ، (ج)  $6\cos(25t) + 5\cos^2(25t)$  و (د)  $4V + 5\sin 30t + 6\cos 25t$ .

جواب:  $4.24V$ ،  $6.16V$ ،  $5.23V$  و  $6.82V$ .

برای محاسبه کمیت‌ها چند تکنیک مفید در PSpice وجود دارد. خصوصاً توابع موجود در probe امکان ترسیم توان لحظه و محاسبه توان متوسط را فراهم می‌سازد. مثلاً مدار ساده تقسیم ولتاژ شکل ۱۱-۱۱ را ملاحظه کنید که با یک موج سینوسی  $60\text{Hz}$  با دامنه  $115\sqrt{2}$  راه‌اندازی شده است. ما با اجرای شبیه‌سازی پاسخ گذرا در یک دوره تناوب موج ولتاژ، یعنی  $\frac{1}{60}\text{s}$ ، آغاز می‌کنیم.

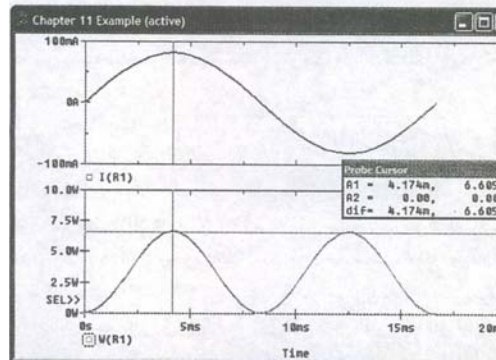
در شکل ۱۱-۱۲ جریان همراه با توان لحظه‌ای تلف‌شده در مقاومت  $R_1$  با به‌کارگیری فرمان Add plot to window تحت plot ترسیم شده است. توان لحظه‌ای متناوب است. مقدار متوسط آن غیر صفر و اوج  $6.61\text{W}$  می‌باشد. ساده‌ترین راه به‌کارگیری probe در تهیه توان متوسط  $3.305\text{W} = (81.3 \times 10^{-3}) \left( \frac{1}{1000 + 1000} (162.6) \right)$  استفاده از تابع "متوسط جاری" است. با ظاهر شدن جعبه محاوره Add Trace (Add و Trace)، عبارت زیر را در پنجره Trace Expression، تایپ کنید:

$$\text{AVG}(I(R1) * I(R1) * 1000)$$

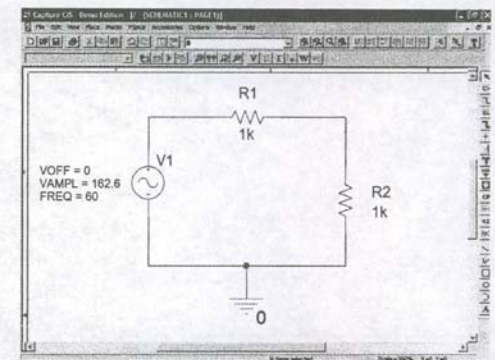
طبق شکل ۱۱-۱۳، توان متوسط در یک یا دو دوره تناوب  $3.305\text{W}$  است که با محاسبات دستی نیز همخوانی دارد. probe امکان محاسبه متوسط روی یک فاصله زمانی دلخواه را نیز با تابع داخلی AVGX فراهم می‌سازد. مثلاً برای استفاده از این تابع در محاسبه متوسط توان در یک دوره تناوب که در این جا  $8.33\text{msec} = \frac{1}{120}$  است، عبارت زیر را وارد کنید:

$$\text{AVGX}(I(R1) * I(R1) * 1000, 8.33\text{m})$$

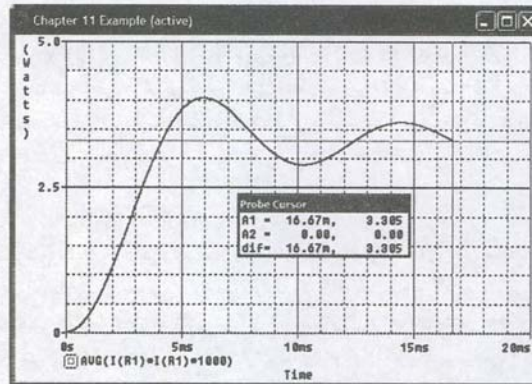
هر یک از دو روش در انتهای نمودار به مقدار  $3.305\text{W}$  ختم می‌شوند.



شکل ۱۱-۱۲ جریان و توان لحظه‌ای مربوط به مقاومت  $R_1$ .



شکل ۱۱-۱۱ یک مدار ساده تقسیم ولتاژ.



شکل ۱۱-۱۳ توان متوسط جاری مصرفی به وسیله مقاومت  $R_1$ .

## ۱۱-۴ توان ظاهری و ضریب توان

به لحاظ تاریخی، معرفی مفاهیم توان ظاهری و ضریب توان در صنعت تولید برق ریشه دارند، زیرا در آن‌جا مقدار متناهی انرژی از یک نقطه به نقطه دیگر انتقال می‌یابد، و راندمان این انتقال مستقیماً با هزینه تولید نسبت مستقیم دارد: هزینه‌ای که نهایتاً بر دوش مصرف‌کننده است. اگر مصرف‌کننده بار ناجوری داشته باشد که موجب کاهش بازده انتقال شود، باید به ازای هر کیلووات ساعت مصرف واقعی پول بیشتری بپردازد. به‌طور مشابه اگر مشتری از نیروگاه بخواهد در تجهیزات انتقال انرژی سرمایه‌گذاری بیشتری نماید باز هم باید پول بیشتری بپردازد. مگر این‌که شرکت دست‌ودل باز باشد و بخواهد ضرر کند.

در آغاز اجازه بدهید **توان ظاهری و ضریب توان** را تعریف کرده و سپس به‌صورت خلاصه نشان دهیم که چگونه این جملات به وضعیت اقتصادی مرتبط می‌گردد. فرض می‌کنیم ولتاژ سینوسی زیر:

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

به شبکه‌ای اعمال شده باشد و جریان سینوسی حاصل برابر باشد با:

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

بنابراین زاویه فازی که ولتاژ از جریان پیش است برابر با  $(\theta - \phi)$  می‌باشد. توفان متوسط داده‌شده به شبکه با فرض قرارداد علامت عناصر غیرفعال در پایانه‌های ورودی را می‌توان برحسب مقادیر حداکثر چنین نوشت:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

یا برحسب مقادیر موثر چنین است:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi)$$

اگر ولتاژ اعمال شده و پاسخ جریان مربوطه کمیاتی dc باشند، توان متوسط حمل‌شده به شبکه به سادگی با ضرب ولتاژ در جریان به‌دست می‌آید. با اعمال این تکنیک dc به مسائل سینوسی، مقداری برای توان جذب‌شده به‌دست می‌آید که "ظاهر" باید از ضرب  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  حاصل گردد. در هر صورت این ضرب مقادیر موثر ولتاژ و جریان توان متوسط را نمی‌دهد و بنابراین ما آن را **توان ظاهری** می‌نامیم. به لحاظ ابعادی، توان ظاهری باید برحسب همان واحد توان



به این ترتیب  $I_{\text{eff}} = 12 \text{ A rms}$  و  $\angle I_s = -53.13^\circ$  ang خواهد بود.

#### ■ اقدام به حل

توان انتقال یافته به بار بالایی برابر است با:

$$P_{\text{upper}} = I_{\text{eff}}^2 R_{\text{top}} = (12)^2 (2) = 288 \text{ W}$$

توان انتقال یافته به بار سمت راست برابر است با:

$$P_{\text{lower}} = I_{\text{eff}}^2 R_{\text{right}} = (12)^2 (1) = 144 \text{ W}$$

خود منبع یک توان ظاهری  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = (60)(12) = 720 \text{ VA}$  را تحویل می‌دهد.

بالاخره ضریب توان ترکیب بارها با لحاظ ولتاژ و جریان مربوط به بارهای ترکیبی

حاصل می‌شود. البته این ضریب توان با ضریب توان منبع یکی است:

$$PF = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} = \frac{432}{60(12)} = 0.6 \text{ پسفاژ}$$

چون بار ترکیبی القایی است.

#### ■ صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

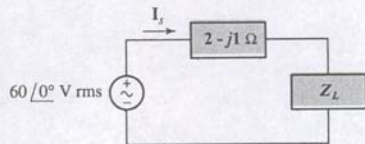
توان کل حمل شده به منبع  $288 + 144 = 432 \text{ W}$  است. توان تولید شده به وسیله منبع برابر است با:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\text{ang } V - \text{ang } I) = (60)(12) \cos(0 + 53.13^\circ) = 432 \text{ W}$$

می‌بینیم بالانس توان برقرار است.

می‌توانید ترکیب بار امپدانس را به صورت  $5 \angle 53.1^\circ \Omega$  بنویسید، ضریب PF را  $53.1^\circ$  به دست آورید، و بنابراین داریم  $PF = \cos 53.1^\circ = 0.6$ . ضمناً بار ترکیبی نیز القایی است و بنابراین PF به اندازه 0.6 پسفاژ است.

### تمرین



شکل ۱۱-۱۵

۱۱-۱۵ برای مدار شکل ۱۱-۱۵ ضریب توان بارهای ترکیبی را اگر  $Z_L = 10 \Omega$  باشد، به دست آورید. جواب: 0.9966 پسفاژ

### ۱۱-۱۶ توان مختلط

گر توان را کمیتی مختلط تصور کنیم، محاسبه مربوط به توان تا حدی ساده‌تر می‌شود. خواهیم دید که اندازه توان مختلط همان توان ظاهری و قسمت حقیقی آن توان متوسط را می‌دهد. نیت جدید یعنی بخش موهومی توان مختلط را **توان راکتیو** می‌خوانیم.

توان مختلط را بر حسب ولتاژ کلی سینوسی  $V_{\text{eff}} \angle \theta$  و  $I_{\text{eff}} \angle \phi$  در دو سر پایانه‌ها و جریان سینوسی کلی  $I_{\text{eff}} \angle \phi$  که در یکی از پایانه‌ها جاری است و قرارداد علامت عنصر پرفعال را تأیید می‌کند، تعریف می‌نماییم. توان متوسط جذب شده به وسیله این شبکه دو یانه برابر است با:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta - \phi)$$

شابه با روشی که در تعریف فیزورها داشتیم برای کمیت مختلط از فرمول اولر استفاده می‌کنیم. P به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \text{Re}\{e^{j(\theta - \phi)}\}$$

$$P = \text{Re}\{V_{\text{eff}} e^{j\theta} I_{\text{eff}}^* e^{-j\phi}\}$$

حقیقی اندازه‌گیری شود زیرا  $\cos(\theta - \phi)$  بُعدی ندارد، ولی به خاطر پرهیز از اشتباه، از عبارت ولت-آمپر یا VA برای توان ظاهری استفاده می‌شود. چون  $\cos(\theta - \phi)$  کوچک‌تر از 1 است، بنابراین اندازه توان حقیقی هرگز بزرگ‌تر از توان ظاهری نخواهد بود.

نسبت توان حقیقی (یا متوسط) به توان ظاهری را **ضریب توان** می‌گویند و به‌طور اختصار با PF نشان می‌دهند. به این ترتیب:

$$PF = \frac{\text{توان متوسط}}{\text{توان ظاهری}} = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}}$$

در حالت سینوسی، ضریب توان در واقع همان  $\cos(\theta - \phi)$  بوده و  $(\theta - \phi)$  زاویه‌ای است که ولتاژ به آن میزان از جریان پیش است. به همین دلیل معمولاً زاویه  $(\theta - \phi)$  اغلب زاویه PF خوانده می‌شود.

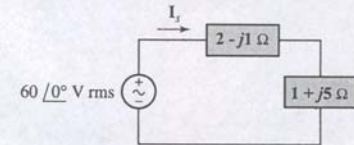
در مدارهایی که فقط از بار مقاومتی تشکیل شده‌اند، ولتاژ و جریان همفاز،  $(\theta - \phi)$  برابر صفر، و PF مساوی با 1 است. به بیان دیگر توان ظاهری و توان متوسط برابرند. با این وجود PF واحد برای مدارهای القایی و خازنی نیز امکان‌پذیر است و این در حالتی است که مقادیر عناصر مذکور و فرکانس کاری به دقت انتخاب شوند تا یک امپدانس ورودی با زاویه فاز صفر تولید گردد. بار خالص راکتیو، یعنی باری که هیچ مقاومتی ندارد، اختلاف فاز  $90^\circ \pm$  را بین ولتاژ و جریان به وجود می‌آورد و بنابراین PF برابر صفر خواهد بود.

شبکه‌ها کلاً بین دو حد قرار دارند یعنی PF آن‌ها می‌تواند بین صفر و یک باشد. یک PF برابر با مثلاً 0.5، باری را نشان می‌دهد که دارای زاویه فاز امپدانس ورودی  $60^\circ$  یا  $-60^\circ$  است که ازلی بیانگر بار القایی است، زیرا ولتاژ به اندازه  $60^\circ$  از جریان پیش است، درحالی‌که دومی به بار خازن متعلق است. رفع شبهه در تعیین دقیق نوع بار با مراجعه به پیش‌بودن PF یا پیرودن آن قابل حل است. جملات پیشفاژ و پسفاژ، فاز جریان نسبت به ولتاژ را بیان می‌کنند. بنابراین یک بار القایی دارای PF پسفاژ و یک بار خازنی هم PF پیشفاژ دارد.



### مثال ۱۱-۸

مقادیر توان متوسط داده شده به هر یک از دو بار در شکل ۱۱-۱۴ را محاسبه کنید. توان ظاهری تولید شده به وسیله منبع و ضریب توان بار کل را به دست آورید.



■ هدف مسئله را شناسایی کنید.  
توان متوسط به توانی گفته می‌شود که به وسیله اجزای مقاومتی بار کشیده می‌شود. توان ظاهری حاصل ضرب ولتاژ موثر در دو سر بار ترکیبی برابر است.

■ اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.  
ولتاژ موثر 60 V rms است و در دو سر بار ترکیبی برابر است با  $2-j1 + 1+j5 = 3+j4 \Omega$ . ارائه طرح.

تحلیل ساده فیزیوری جریان را مشخص می‌کند. با دانستن جریان و ولتاژ ما خواهیم توانست توان را محاسبه کنیم. این دو کمیت برای یافتن ضریب توان می‌توانند استفاده شوند.

■ معادلات مناسب را بنویسید.  
توان متوسط با رابطه زیر داده می‌شود:

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\text{ang } V - \text{ang } I)$$

توان ظاهری در واقع  $V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$  است. ضریب توان از تقسیم این دو کمیت به دست می‌آید:

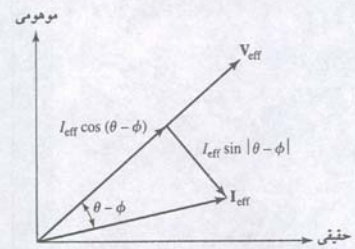
$$PF = \frac{\text{توان متوسط}}{\text{توان ظاهری}} = \frac{P}{V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}}$$

■ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

ما  $I_{\text{eff}}$  را لازم داریم:

$$I_s = \frac{60 \angle 0^\circ}{3 + j4} = 12 \angle -53.13^\circ \text{ Arms}$$





شکل ۱۱-۱۷ فیزور جریان  $I_{eff}$  به دو مولفه تفکیک شده است. یکی همفاز با فیزور ولتاژ  $V_{eff}$  و دیگری با اختلاف فاز  $90^\circ$  با فیزور ولتاژ. این مولفه را مولفه عمودی می‌گویند.

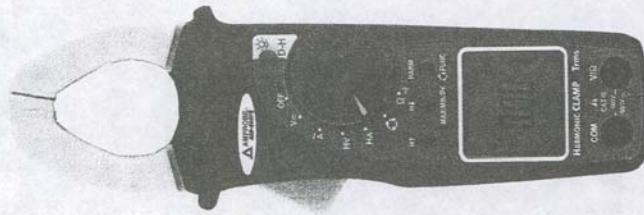
شکل ۱۱-۱۸ یک توان‌سنج دیجیتال چنکی ساخت Amprobe برای اندازه‌گیری جریان AC تا 400 و ولتاژ تا 600 V.

ضریب توان پس‌فاز است (مربوط به بار القایی خواهد بود) و اگر مثلث توان در ربع چهارم باشد ( $0 < \phi - \theta$ )، ضریب توان پیش‌فاز خواهد بود (مربوط به خازن). بنابراین مقدار قابل توجهی اطلاعات کیفی مربوط به بار با یک نظر در دسترس می‌باشد.

تفسیر دیگری از توان راکتیو را با ساخت نمودار فیزیوری  $V_{eff}$  و  $I_{eff}$  مطابق شکل ۱۱-۱۷ می‌توان ارائه نمود. اگر فیزور جریان به دو مولفه تجزیه شود، که یکی همفاز با ولتاژ و اندازه  $I_{eff} \cos(\theta - \phi)$  و دیگری با اختلاف  $90^\circ$  نسبت به ولتاژ و اندازه  $I_{eff} \sin|\theta - \phi|$ ، آن‌گاه واضح است که توان حقیقی حاصل ضرب دامنه فیزور ولتاژ در مولفه جریان همفاز با ولتاژ است. حاصل ضرب دامنه ولتاژ در مولفه‌ای از جریان که با ولتاژ  $90^\circ$  اختلاف فاز دارد توان راکتیو نامیده می‌شود. مولفه‌ای از یک فیزور که با فیزور دیگر  $90^\circ$  اختلاف فاز دارد را مولفه عمودی گویند. بنابراین  $Q$  در واقع حاصل ضرب  $V_{eff}$  و مولفه عمودی  $I_{eff}$  است.  $Q$  را **توان عمودی** یا **ریعی** هم می‌خوانند.

### اندازه‌گیری توان

یک وات‌متر توان حقیقی متوسط مصرفی بار  $P$  را می‌خواند، و وارمتر هم توان راکتیو متوسط  $Q$  را که بار می‌کشد، نشان می‌دهد. می‌توان هر دو کمیت را به روشی مشابه پیدا کرد و می‌توان توان ظاهری و ضریب توان را هم اندازه‌گیری نمود (شکل ۱۱-۱۸).



### کاربرد عملی

#### اصلاح ضریب توان

0.62 برابر متوسط توان مورد تقاضا (دیماند) است:

$$S = P + jQ = P + j0.62P = P(1 + j0.62) \\ = P(1.177/31.8^\circ)$$

این عدد برای  $PF=0.85$  است و برابر است با  $\cos 31.8^\circ = 0.85$  که در آن  $Q$  مثبت می‌باشد (شکل ۱۱-۱۹). مشتریانی که زاویه  $PF$  آن‌ها بزرگ‌تر از این مقدار باشد مشمول جریمه‌اند.

تنظیم توان راکتیو لازم معمولاً از طریق نصب تأسیسات خازنی جبران‌ساز در محل و موازی با بار (معمولاً در خارج امکانات مشتری) صورت می‌گیرد. می‌توان نشان داد که مقدار ظرفیت از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$C = \frac{P(\tan\theta_{old} - \tan\theta_{new})}{\omega V_{rms}^2} \quad (28)$$

که در آن  $\omega$  همان فرکانس،  $\theta_{old}$  همان زاویه  $PF$  فعلی،  $\theta_{new}$

وقتی صورت حساب برق به وسیله کمپانی مولد برق به مشترکین بزرگ صنعتی داده می‌شود، کمپانی معمولاً ضریب  $PF$  را در صورت حساب مشتری قید می‌کند. تحت این وارد در مواردی که ضریب کمتر از مقدار معین باشد، که معمولاً پس‌فاز 0.85 است، جریمه‌ای به مشترک تعلق می‌گیرد. به دلیل طبیعت بارهای صنعتی، توان صنعتی مصرفی به ندرت  $PF$  پیش‌فاز است. دلایل متعددی برای جریمه فوق توسط کمپانی‌های تولیدکننده وجود دارد. اول این‌که قابلیت حمل جریان بیشتر در داخل ژنراتورها باید تعبیه شود تا جریان بیشتری را که مشتریان در  $PF$ ‌های پایین با ولتاژ و توان ثابت نیاز دارند تهیه نمایند. دلیل دیگر اتلاف بیشتر توان در سیستم انتقال و توزیع برق است.

در تلاشی برای کاهش اتلاف و تشویق مشتریان در کار با  $PF$ ‌های بالاتر، معمولاً جریمه‌هایی در حد \$0.22/kVAR برای هر kVAR علاوه بر مقدار محاسبه‌شده در نظر گرفته می‌شود که

دو فاکتور اول در کرشه معادله فوق فیزور ولتاژ، ولی دو فاکتور دوم به دلیل وجود علامت منفی در زاویه به فیزور جریان تعلق ندارد. این علامت در فیزور جریان وجود ندارد. یعنی فیزور جریان عبارت‌است از:

$$I_{eff} = I_{eff} e^{j\phi}$$

بنابراین از مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$I_{eff} = I_{eff} e^{-j\phi}$$

به این ترتیب:

$$P = \text{Re}\{V_{eff} I_{eff}^*\}$$

اکنون توان مختلط  $S$  را تعریف می‌کنیم:

$$S = V_{eff} I_{eff} \quad (25)$$

اگر ابتدا فرم قطبی یا نمایی توان مختلط را بررسی کنیم:

$$S = V_{eff} I_{eff} e^{j(\theta - \phi)}$$

واضح است که اندازه  $S$ ، یعنی  $V_{eff} I_{eff}$  همان توان ظاهری و زاویه  $S$ ، یعنی  $(\theta - \phi)$  نیز زاویه  $PF$  است (زاویه‌ای که ولتاژ از جریان پیش است).

در فرم قائم یا دکارتی داریم:

$$S = P + jQ \quad (26)$$

که  $P$  مثل قبل توان متوسط است. بخش موهومی توان با  $Q$  نشان داده شده است و به آن توان راکتیو می‌گویند. ابعاد  $Q$  مثل توان حقیقی  $P$ ، توان مختلط  $S$ ، و توان ظاهری  $|S|$  است. برای پرهیز از هر گونه اشتباه با دیگر کمیت‌ها واحد  $Q$  را به صورت ولت آمپر راکتیو (VAR) تعریف می‌کنیم. از معادلات (۲۵) و (۲۶) دیده می‌شود که:

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin(\theta - \phi) \quad (27)$$

تفسیر فیزیکی توان راکتیو، تغییر زمانی مبادله انرژی بین منبع (مثل شرکت برق) و عناصر بار راکتیو است (یعنی خازن‌ها و القاگرها). این عناصر به تناوب شارژ و دشارژ می‌شوند و باعث می‌شود به ترتیب جریان از منبع و به منبع جاری شود.

کمیت‌های فوق در جدول ۱۱-۱ برای سهولت کار جمع‌آوری شده‌اند.

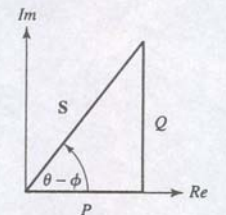
#### جدول ۱۱-۱ خلاصه کمیت‌های مرتبط با توان مختلط.

| کمیت        | نماد  | فرمول                                 | واحد                  |
|-------------|-------|---------------------------------------|-----------------------|
| توان متوسط  | $P$   | $V_{eff} I_{eff} \cos(\theta - \phi)$ | وات (W)               |
| توان راکتیو | $Q$   | $V_{eff} I_{eff} \sin(\theta - \phi)$ | ولت-آمپر-راکتیو (VAR) |
| توان مختلط  | $S$   | $P + jQ$                              | ولت-آمپر (VA)         |
|             |       | $V_{eff} I_{eff} / \theta - \phi$     |                       |
|             |       | $V_{eff} I_{eff}^*$                   |                       |
| توان ظاهری  | $ S $ | $V_{eff} I_{eff}$                     | ولت-آمپر (VA)         |

### مثلث توان

نمایش گرافیکی به کاررفته برای توان مختلط را مثلث توان می‌گویند و در شکل ۱۱-۱۶ دیده می‌شود. نمودار نشان می‌دهد که فقط دو توان از سه توان همیشه مورد نیاز است و سومی را می‌توان با روابط مثلثاتی معین کرد. اگر مثلث توان در نیمه اول محورها ( $0 < \theta - \phi$ ) باشد،

علامت توان راکتیو طبیعت بار غیرفعال مربوط به  $V_{eff}$  و  $I_{eff}$  را نشان می‌دهد. اگر بار القایی باشد آن‌گاه  $(\theta - \phi)$  زاویه‌ای بین 0 و  $90^\circ$  است. سینوس این زاویه مثبت و توان راکتیو نیز مثبت می‌باشد. توان راکتیو بار خازن منفی است.



شکل ۱۱-۱۶ نمایش مثلث توان مختلط.



## مثال ۱۱-۹

یک مصرف‌کننده صنعتی یک موتور القایی 50kW (67.1hp) را با پسفاژ  $PF = 0.8$  به کار گرفته است. ولتاژ منبع 230 Vrms است. با هدف مصرف برق کمتر، مشتری مایل است  $PF$  خود را تا 0.95 پسفاژ بالا ببرد. بهترین راه حل را ارائه کنید.

گرچه با افزایش توان حقیقی و ثابت نگه داشتن توان راکتیو می‌توان  $PF$  را افزایش داد ولی این کار موجب کاهش صورت حساب نشده و مورد قبول مشتری نیست. باید بار راکتیو خالصی به سیستم اضافه نمود. البته واضح است که این افزایش نیز باید موازی باشد، زیرا ولتاژ تحویلی به موتور نباید تغییر کند. لذا مدار شکل ۱۱-۲۲ در این جا قابل استفاده است به شرطی که  $S_1$  را توان مختلط موتور القایی و  $S_2$  را توان مختلط وسیله اصلاحی بدانیم.

توان مختلط تولیدی به موتور القایی باید بخش حقیقی 50kW و زاویه  $\cos^{-1}(0.8)$  یا  $36.9^\circ$  را داشته باشد. پس:

$$S_1 = \frac{50 / \angle 36.9^\circ}{0.8} = 50 + j37.5 \text{ kVA}$$

برای دستیابی به  $PF = 0.95$ ، توان مختلط کل باید چنین باشد:

$$S = \frac{50}{0.95} / \cos^{-1}(0.95) = 50 + j16.43 \text{ kVA}$$

بنابراین توان مختلط مصرفی به وسیله بار اصلاحی برابر:

$$S_2 = -j21.07 \text{ kVA}$$

است. بار امپدانس  $Z_2$  را می‌توان طی چند گام ساده به دست آورد. ما زاویه  $0^\circ$  را برای منبع ولتاژ برمی‌گزینیم. بنابراین جریان کشیده شده به وسیله  $Z_2$  برابر است با:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{S}_2}{\mathbf{V}} = \frac{-j21,070}{230} = -j91.6 \text{ A}$$

یا

$$\mathbf{I}_2 = j91.6 \text{ A}$$

بنابراین:

$$Z_2 = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = \frac{230}{j91.6} = -j2.51 \Omega$$

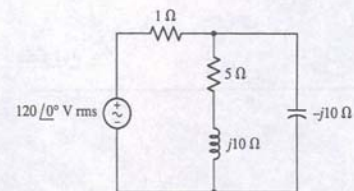
اگر فرکانس کاری 60Hz باشد، این بار به وسیله یک خازن  $1056 \mu\text{F}$  موازی با موتور قابل تهیه است. در هر صورت هزینه اولیه، نگهداری و استهلاک باید با کاهش صورت حساب الکتریسیته همخوانی داشته باشد.

۱۱-۹ برای مدار شکل ۱۱-۲۳ توان مختلط جذب شده به وسیله (الف) مقاومت  $1\Omega$ ، (ب) امپدانس  $j10\Omega$ ، (ج) امپدانس  $j10\Omega + 5$  و (د) منبع، را به دست آورید. جواب:  $532 + j1065 \text{ VA}$ ،  $0 - j1331 \text{ VA}$ ،  $26.6 + j0 \text{ VA}$  و  $-559 + j266 \text{ VA}$ .

## ۱۱-۶ مقایسه واژه‌های توان

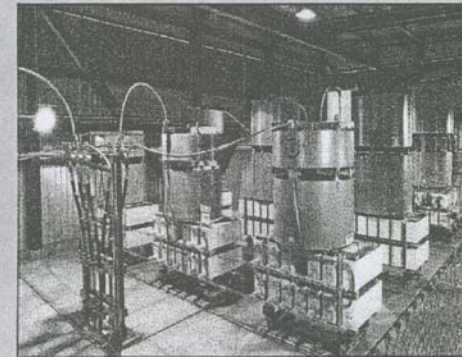
در این فصل با آرایه‌ای از واژه‌های توان آشنا شدیم، بررسی همه آن‌ها به صورت یک جا بد نخواهد بود. توصیف خلاصه‌ای برای هر یک در جدول ۱۱-۲ آورده شده است.

شکل ۱۱-۲۳

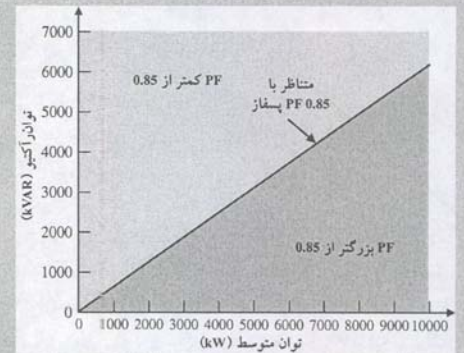


$2900 \text{ kVAR} = 3100 - 6000$  توان راکتیو بیشتری را نسبت به میزان مجاز معاف از جریمه کمپانی تولیدکننده، مصرف می‌نماید. این میزان معادل  $\$7656 = 12(2900)(0.22)$  بیش از هزینه برق سالیانه می‌باشد.

اگر مشترک بخواهد تأسیسات را 1000 kVAR افزایش دهد (به قیمت  $\$2390$ )، توان راکتیو اضافی به  $1900 \text{ kVAR} = 2900 - 1000$  کاهش می‌یابد. بنابراین جریمه سالانه کنون  $\$5016 = 12(1900)(0.22)$  خواهد شد پس هزینه سال جاری  $\$7406 = \$5016 + \$2390$  می‌گردد و در واقع  $\$250$  صرفه جویی صورت می‌گیرد. اگر مشتری 2000 kVAR تأسیسات اضافه کند (به قیمت  $\$3130$ )، توان راکتیو مصرفی اضافی  $900 \text{ kVAR} = 2900 - 2000$  می‌باشد بنابراین جریمه سالانه کنون  $\$2376 = 12(900)(0.22)$  خواهد شد. هزینه کل در سال اول  $\$556 = \$2376 + \$3130$  بوده و صرفه جویی آن  $\$2150$  خواهد شد. با این وجود اگر مشتری 3000 kVAR تأسیسات خازنی اضافه کند در سال اول  $\$14$  صرفه جویی بیشتری نسبت به 2000 kVAR خواهد داشت.



شکل ۱۱-۲۰ تأسیسات خازنی جبران ساز.



شکل ۱۱-۱۹ نموداری که نسبت توان راکتیو را به توان متوسط برای ضریب توان 0.85 پسفاژ نشان می‌دهد.

زاویه  $PF$  مورد نظر است. در هر صورت به منظور سهولت بانک خازن جبران ساز با تغییر افزایشی خاصی بر حسب واحدهای kVAR ساخته می‌شوند. مثالی از چنین تأسیسات در شکل ۱۱-۲۰ ملاحظه می‌گردد.

اکنون بپایید مثال خاصی را ملاحظه کنیم. یک مجموعه صنعتی دارای دیماند پیک ماهانه 5000 kW است و نیاز راکتور آن نیز 6000 kVAR می‌باشد. با توجه به موارد فوق، هزینه سالانه این مشترک با احتساب جرایم  $PF$  چقدر است؟ اگر جبران از طریق هزینه  $\$2390$  در هر 1000 kVAR افزایش و  $\$3130$  به ازای هر 2000 kVAR افزایش یابد، بهترین راه حل اقتصادی برای این مشتری چیست؟

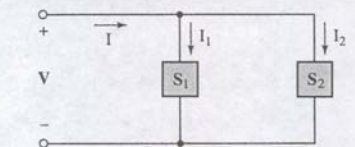
$PF$  تأسیسات، زاویه توان مختلط  $S$  است، که در این جا  $5000 + j6000 \text{ kVAR}$  می‌باشد. پس، زاویه برابر است با  $50.19^\circ = \tan^{-1} 6000/5000$  و  $PF$  برابر با  $0.6\phi$  پسفاژ است. معیار توان راکتیو محاسبه شده 0.62 ضریب حداکثر دیماند برابر است با  $3100 \text{ kVAR} = 0.62(5000)$ . بنابراین مجموعه صنعتی به میزان

به سادگی می‌توان نشان داد که توان مختلط حمل شده به چند بار متصل به هم برابر با مجموع توان‌های مختلط داده شده به تک تک بارها است و چگونه اتصال آن‌ها ارتباطی ندارد. مثلاً دوبار موازی در شکل ۱۱-۲۱ را ملاحظه نمایید. اگر مقادیر  $\text{rms}$  در نظر گرفته شوند، توان مختلط حاصل از بار ترکیبی برابر است با:

$$S = \mathbf{V} \mathbf{I}^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^* = \mathbf{V}(\mathbf{I}_1^* + \mathbf{I}_2^*)$$

و بنابراین:

$$S = \mathbf{V} \mathbf{I}_1^* + \mathbf{V} \mathbf{I}_2^*$$



شکل ۱۱-۲۱ مدار به کار گرفته برای نشان دادن توان مختلط دریافتی به وسیله دو بار موازی که برابر با مجموع توان‌های مختلط آن‌ها است.



## ۱۱-۷ خلاصه فصل و مرور

- توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله یک عنصر با عبارت  $p(t) = v(t)i(t)$  داده می‌شود.
- توان متوسط داده‌شده به یک امپدانس از یک منبع سینوسی برابر  $\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$  است که  $\theta$  برابر زاویه فاز ولتاژ و  $\phi$  زاویه فاز جریان است.
- تنها بخشی مقاومتی یک بار توان متوسط غیر صفر را مصرف می‌کند. توان متوسط انتقالی به بخش راکتیو بار صفر است.
- حداکثر توان متوسط انتقالی تحت شرایط  $Z_L = Z_{in}^*$  اتفاق می‌افتد.
- مقدار موثر یا rms موج سینوسی از تقسیم دامنه بر  $\sqrt{2}$  به دست می‌آید.
- ضریب توان (PF) یک بار نسبت توان متوسط تلف‌شده به توان ظاهری است.
- یک بار مقاومتی خالص ضریب توان واحد دارد. یک بار راکتیو دارای ضریب توان صفر است.
- یک توان مختلط به صورت  $S = P + jQ$  یا  $S = V_{eff} I_{eff}^*$  تعریف می‌شود. واحد اندازه‌گیری آن ولت - آمپر (VA) است.
- توان راکتیو A بخش موهومی توان مختلط است و میزان انرژی جاری‌شده به و یا از بخش راکتیو بار است. واحد اندازه‌گیری آن ولت - آمپر - راکتیو (VAR) می‌باشد.
- خازن‌ها معمولاً برای اصلاح PF بارهای صنعتی به کار می‌روند تا توان راکتیو درخواستی از تولیدکننده کاهش یابد.

## ۱۱-۸ خواندنی‌های کمکی

A good overview of ac power concepts can be found in Chap. 2 of:

B.M. Weedy, *Electric Power Systems*, 3rd ed. Chichester, England: Wiley, 1984.

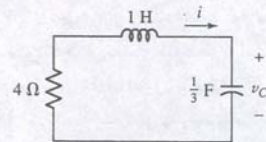
Contemporary issues pertaining to ac power systems can be found in:

*International Journal of Electrical Power & Energy Systems*.  
Guildford, England: IPC Science and Technology Press, 1979–.  
ISSN: 0142-0615.

## مسائل

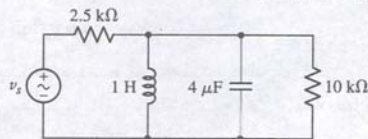
### ۱۱-۱ توان لحظه‌ای

- یک منبع جریان،  $i(t) = 2 \cos 500t$  A، یک مقاومت  $50 \Omega$  و یک خازن  $25 \mu F$  با هم موازی‌اند. توان تحویلی به وسیله منبع را مشخص نمایید. توان جذب‌شده به وسیله مقاومت، توان جذب‌شده به وسیله خازن را در  $t = \frac{\pi}{2}$  ms به دست آورید.
- جریان  $i = 2t^2 - 1$  A در  $1s \leq t \leq 3s$  در یک عنصر خاص جاری است. (الف) اگر عنصر یک القاگر  $4H$  باشد، در فاصله زمانی داده‌شده چه انرژی به آن منتقل می‌گردد؟ (ب) اگر عنصر یک خازن  $0.2F$  با  $v(t) = 2V$  باشد، توان داده‌شده به آن در  $t = 2s$  چقدر است؟
- در شکل ۱۱-۲۴،  $i(0) = 4A$  و  $v_C(0) = -2V$ ، اگر  $i(t)$  باشد، توان جذب‌شده به وسیله خازن در زمان  $t$ ، (الف)  $0^+$ ، (ب)  $0.2s$  و (ج)  $0.4s$  چقدر است؟



شکل ۱۱-۲۴

- توان جذب‌شده به وسیله هر عنصر غیرفعال در مدار شکل ۱۱-۲۵ را در  $t = 0$  پیدا کنید. به شرطی که  $v_s = 20 \cos(1000t + 30^\circ) V$  باشد. جواب را با PSpice چک کنید.



شکل ۱۱-۲۵

جدول ۱۱-۲ خلاصه‌ای از واژه‌های به‌کاررفته.

| عبارات به‌کاررفته | سمبل                   | واحد   | توصیف  |
|-------------------|------------------------|--------|--|
| توان لحظه‌ای      | $p(t)$                 | W      | $p(t) = v(t)i(t)$ . مقدار توان در لحظه خاصی از زمان است. این توان حاصل ضرب فیزیوری ولتاژ و جریان نیست.   |
| توان متوسط        | P                      | W      | در حالت ماندگار سینوسی، $P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$ ، که $\theta$ زاویه ولتاژ و $\phi$ زاویه جریان است. راکتانس در P نقشی ندارد. |
| مقدار موثر یا rms | $V_{rms}$ یا $I_{rms}$ | V یا A | مثلاً به صورت $I_{eff} = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt$ تعریف می‌شود. اگر $i(t)$ سینوسی باشد، آن‌گاه $I_{eff} = I_m / \sqrt{2}$ خواهد بود.           |
| توان ظاهری        | $ S $                  | VA     | $ S  = V_{eff} I_{eff}$ بوده و حداکثر مقدار توان متوسط می‌تواند باشد. $P =  S $ فقط برای بارهای خالص مقاومتی است.                                  |
| ضریب توان         | PF                     | ندارد  | نسبت توان متوسط به ظاهری است. اگر بار از نوع مقاومتی خالص باشد $PF = 1$ است و برای بار راکتیو خالص مقدار آن $PF = 0$ می‌باشد.                      |
| توان راکتیو       | Q                      | VAR    | به معنی انرژی جاری‌شده به و از بار راکتیو است.   |
| توان مختلط        | S                      | VA     | کمیت مختلط مناسبی حاوی هر دو توان متوسط و توان راکتیو (القایی) است. $Q : S = P + jQ$ .   |

اهمیت عملی این عبارات جدید را با شرح وضعیت عملی زیر می‌توان نشان داد. ابتدا فرض کنید که یک ژنراتور سینوسی داریم که به وسیله ماشینیه که خروجی‌اش گشتاور مکانیکی مانند توربین بخار، یک موتور الکتریکی یا یک موتور احتراقی است می‌چرخد. ژنراتور ولتاژ خروجی  $200 V_{rms}$  را در فرکانس  $60Hz$  تولید می‌کند. به علاوه فرض کنید که مشخصه ژنراتور به صورت حداکثر توان خروجی  $1kW$  بیان شده باشد. بنابراین ژنراتور قادر خواهد بود جریان  $5A_{rms}$  را به یک بار مقاومتی انتقال دهد. با این وجود اگر باری با توان پس‌ساز  $1kW$  و ضریب توان  $0.5$  به ژنراتور وصل شود، آن‌گاه جریان  $10A_{rms}$  لازم خواهد بود. با کاهش PF، جریان‌های بیشتر و بیشتری نیاز است تا به بار منتقل شده و عملکرد در  $200V$  و  $1kW$  ثابت نگه داشته شود. اگر ژنراتور ما طراحی خوبی داشته باشد تا جریان  $5A$  را تأمین کند، آن‌گاه جریان‌های بالاتر اجازه عملکرد رضایت‌بخشی را نخواهند داد و از آن جمله موجب می‌گردند تا عایق‌های داخلی بیش از حد گرم شده و دود کنند. مشخصات ژنراتور معمولاً برحسب توان ظاهری به ولت‌آمپر داده می‌شود. بنابراین،  $1000VA$  در  $200V$  به این معنی است که ژنراتور می‌تواند تا  $5A$  را در آن ولتاژ تأمین کند. توانی که ژنراتور انتقال می‌دهد به بار بستگی داشته و در نهایت می‌تواند صفر باشد. توان ظاهری با جریان مشخص شده هنگام کار در ولتاژ ثابت معادل است.

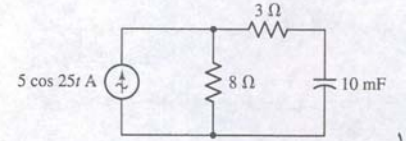
## تمرین

۱۱-۱۰ یک منبع  $440 V_{rms}$  توانی را به بار  $Z_L = 10 + j2 \Omega$  از طریق یک خط انتقال با مقاومت  $1.5 \Omega$  می‌فرستد. (الف) توان متوسط و ظاهری تحویلی به بار چقدر است. (ب) توان متوسط و ظاهری تلف‌شده در خط انتقال را به دست آورید. (ج) توان متوسط و ظاهری تولیدی به وسیله منبع چقدر است. (د) ضریب توان کار منبع را تعیین کنید.

جواب:  $16.34 kW$ ،  $2.131 kVA$ ،  $2.131 kW$ ،  $14.49 kVA$ ،  $14.21 kW$  و  $16.59 kVA$  و  $0.985$  پس‌ساز.

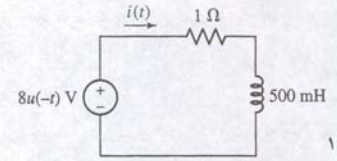


۵. مدار شکل ۱۱-۲۶ به حالت ماندگار رسیده است. توان جذب‌شده به وسیله هر چهار عنصر را در  $t = 0.1s$  به‌دست‌آورید.



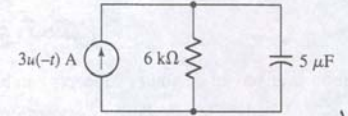
شکل ۱۱-۲۶

۶. مدار RL در شکل ۱۱-۲۷ را ملاحظه نمایید. توان جذب‌شده لحظه‌ای را به وسیله مقاومت در  $t$  (الف) برابر با  $0^+$ ، (ب) 1 s و (ج) 2 s به دست آورید.



شکل ۱۱-۲۷

۷. مدار RC شکل ۱۱-۲۸ را در نظر بگیرید. توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله مقاومت را در  $t$  برابر با (الف)  $0^+$ ، (ب) 30 ms و (ج) 90 m معین کنید.



شکل ۱۱-۲۸

۸. اگر سازه‌ای از ابر به زمین را با جریان 30 kA برای  $150 \mu s$  در نظر بگیریم، مطلوبست (الف) توان لحظه‌ای حمل‌شده به یک میله مسی با مقاومت  $1.2 m\Omega$  در زمان ساقه و (ب) انرژی کل حمل‌شده به میله.

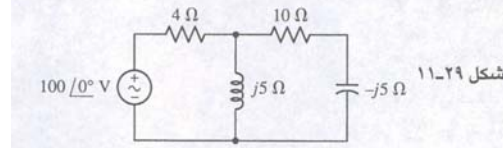
۹. یک خازن 100 mF مقدار 100 mJ انرژی را تا زمانی که یک هادی با مقاومت  $1.2 \Omega$  به دو سر پایانه‌های آن وصل نشده نگه می‌دارد. توان تلف‌شده لحظه‌ای در  $t = 120 ms$  چقدر است؟ به شرطی که ظرفیت گرمایی ویژه هادی  $0.9 kJ/kg \cdot K$  و جرم آن 1 gr باشد، مطلوبست افزایش دمای هادی در ثانیه اول تخلیه خازن با فرض این‌که دمای همه عناصر در آغاز  $23^\circ C$  باشد.

۱۰. یک دیود نیمه هادی LED (نوری) با ولتاژ  $2.76 V$  کار می‌کند و جریان 130 mA را می‌کشد. با چشم‌پوشی از ظرفیت داخلی، توان لحظه‌ای کشیده‌شده به وسیله LED، 2، ثانیه پس از روشن‌شدن چقدر است؟ اگر در عوض، آن را به یک منبع سینوسی با رابطه  $v(t) = 2.76 \cos(1000t) V$  وصل کنیم، چه اطلاعات دیگری لازم است تا توان لحظه‌ای در  $t = 500 ms$  محاسبه شود. وضعیت گذرا تا آن زمان از بین رفته فرض می‌شود.

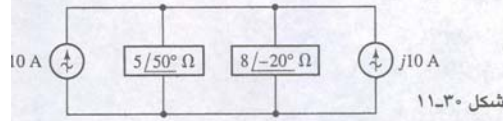
## ۱۱-۲ توان متوسط

۱۱. توان متوسط مصرف‌شده به وسیله هر یک از عناصر شکل ۱۱-۲۹ چقدر است.

۱۲. توان متوسط تولیدی به وسیله هر منبع و توان متوسط حمل‌شده به هر امپدانس در شکل ۱۱-۳۰ را پیدا کنید.

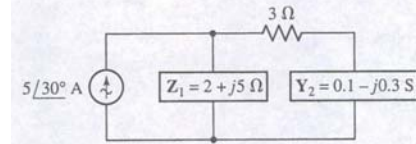


شکل ۱۱-۲۹



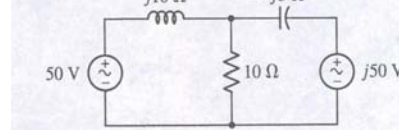
شکل ۱۱-۳۰

۱۳. در مدار شکل ۱۱-۳۱، توان متوسط، (الف) مصرفی در مقاومت 3Ω (ب) تولیدشده به وسیله منبع را بیابید.



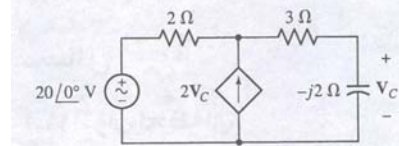
شکل ۱۱-۳۱

۱۴. توان متوسط جذب‌شده به وسیله هر پنج عنصر شکل ۱۱-۳۲ را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۱-۳۲

۱۵. توان متوسط تولیدشده به وسیله منبع وابسته در مدار شکل ۱۱-۳۳ را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۱-۳۳

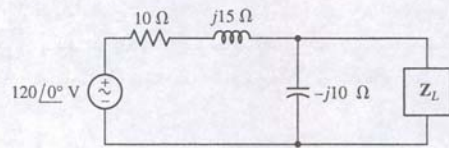
۱۶. یک مدر معادل توفن در حوزه فرکانس از یک منبع سینوسی  $V_{th}$  سری با امپدانس  $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$  تشکیل شده است. شرایطی را مشخص کنید که در آن یک بار  $Z_L = R_L + jX_L$  با شرط (الف)  $X_L = 0$ ، (ب)  $R_L$  و  $X_L$  مستقیماً انتخاب شوند، (ج)  $R_L$  ثابت (ولی نه مساوی  $R_{th}$ ) باشد، (د)  $X_L$  (مستقل از  $X_{th}$ ) و  $X_L = 0$  (ه) باشد، حداکثر توان متوسط را جذب کند.

۱۷. برای مدار شکل ۱۱-۳۴، چه مقداری از  $Z_L$  حداکثر توان متوسط را جذب می‌کند، (ب) مقدار این توان ماکزیمم چقدر است؟

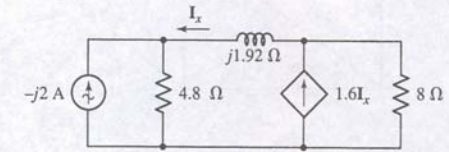
۱۸. برای مدار شکل ۱۱-۳۴ لازم است که بار  $R_L$  از نوع مقاومتی خالص باشد.

چه مقدار از  $R_L$  حداکثر توان متوسط را جذب خواهد کرد و مقدار این توان چقدر است؟

۱۹. توان متوسط تولیدشده به وسیله منبع در شکل ۱۱-۳۵ را پیدا کنید.

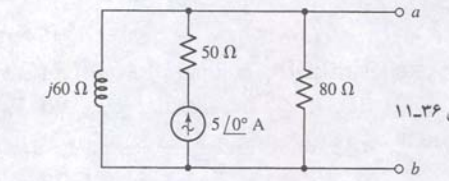


شکل ۱۱-۳۴



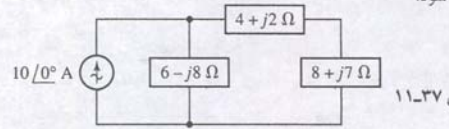
شکل ۱۱-۳۵

۲۰. برای شبکه شکل ۱۱-۳۶، (الف) امپدانس  $Z_L$  بین  $a$  و  $b$  چقدر باشد تا حداکثر توان متوسط به وسیله آن جذب شود؟ (ب) این توان متوسط حداکثر چقدر است؟



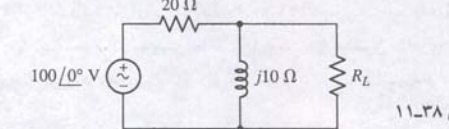
شکل ۱۱-۳۶

۲۱. توان متوسط حمل‌شده به هر جعبه در شبکه شکل ۱۱-۳۷ را پیدا کنید، به شرطی که منبع  $10 \angle 0^\circ A$  یا  $5 \angle -30^\circ A$  در فرکانس 50Hz جایگزین شود.



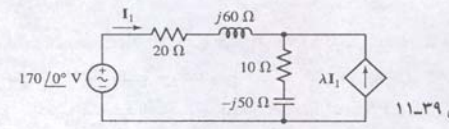
شکل ۱۱-۳۷

۲۲. مقدار  $R_L$  را در شکل ۱۱-۳۸ که توان حداکثر را جذب خواهد کرد، معین نمایید و مقدار توان را مشخص کنید.



شکل ۱۱-۳۸

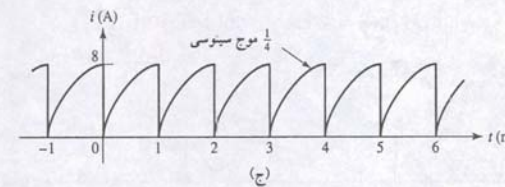
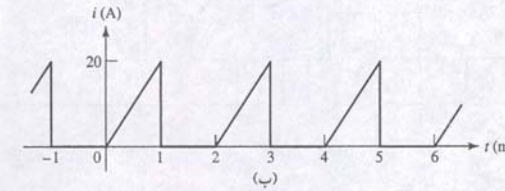
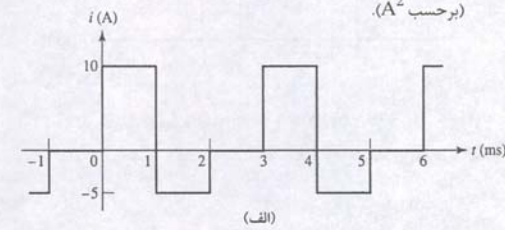
۲۳. توان متوسط حمل‌شده به هر مقاومت در شکل ۱۱-۳۹ را مشخص کنید به شرطی که (الف)  $\lambda = 0$ ، (ب)  $\lambda = 1$  باشد، و (ج) با فرض این‌که مدار در فرکانس 60Hz کار کند، پاسخ را با PSpice تست کنید.



شکل ۱۱-۳۹

## ۳۴۷ تحلیل منابع انرژی AC

۲۴. (الف) مقدار متوسط هر یک از امواج شکل ۱۱-۴۰ را به‌دست‌آورید. (ب) اگر هر یک از این امواج مربع شوند، متوسط هر موج متناوب را پیدا کنید (برحسب  $A^2$ ).



شکل ۱۱-۴۰

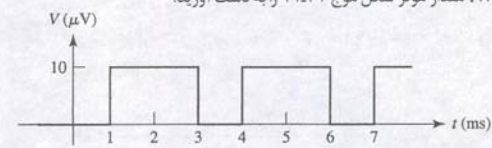
۲۵. توان متوسط حمل‌شده به هر عنصر مدار شکل ۱۱-۲۵ چقدر است، به شرطی که  $v_s = 400 \sqrt{2} \cos(120\pi t - 9^\circ) V$  صحت جواب را با PSpice آزمایش کنید.

## ۱۱-۳ مقادیر موثر ولتاژ و جریان

۲۶. مقدار موثر را برای موارد زیر به دست آورید: (الف)  $12 \cos(1000t) V$ ، (ب)  $12 \sin(1000t) V$ ، (ج)  $12 \cos(500t) V$  و (د)  $12 \cos(500t - 88^\circ) V$ .

۲۷. مقادیر موثر را برای هر یک از موارد زیر به دست آورید: (الف)  $10 \cos(10t) A$ ، (ب)  $10 \sin(10t) A$ ، (ج)  $2 \cos(5t) A$  و (د)  $2 \cos(5t - 32^\circ) A$ .

۲۸. مقدار موثر شکل موج ۱۱-۴۱ را به دست آورید.

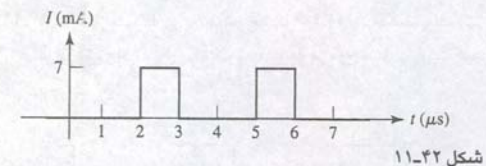


شکل ۱۱-۴۱

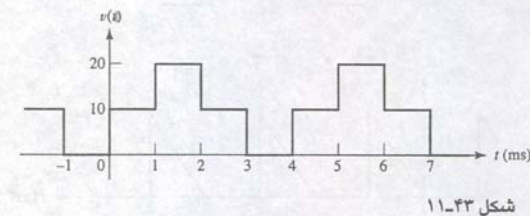
۲۹. مقدار موثر شکل موج ۱۱-۴۲ را به دست آورید.

۳۰. مقدار موثر (الف)  $1 V$ ، (ب)  $1 + \cos 10t V$  و (ج)  $1 + \cos(10t + 10^\circ) V$  را به دست آورید.

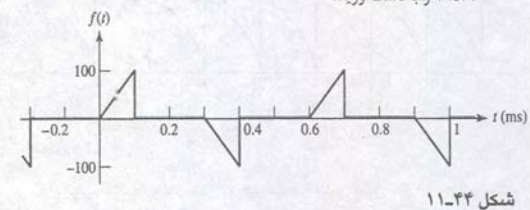




۳۱. مقدار موثر، (الف)  $v(t) = 10 + 9 \cos 100t + 6 \sin 100t$  و (ب) برای موج شکل ۱۱.۴۳ به دست آورید. (ج) مقدار متوسط این موج را بیابید.



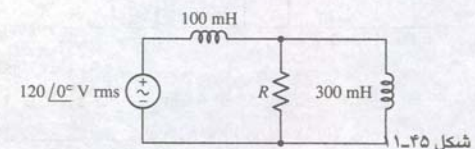
۳۲. مقدار موثر (الف)  $g(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(100t - 120^\circ)$ ، (ب)  $h(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(101t - 120^\circ)$  و (ج) شکل موج ۱۱.۴۴ را به دست آورید.



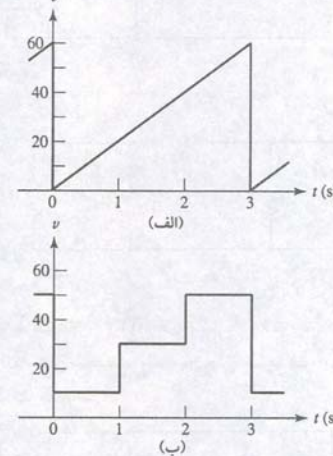
۳۳. با فرض موج  $f(t) = (2 - 3\cos 100t)^2$ ، مطلوبست مقدار متوسط آن و (ب) مقدار rms.

۳۴. مقدار موثر هر یک از سه موج شکل ۱۱.۴۵ را محاسبه کنید.  
۳۵. چهار منبع ولتاژ ایده‌آل،  $A \cos 10t$ ،  $B \sin(10t + 45^\circ)$ ،  $C \cos 40t$  و ثابت  $D$ ، به‌طور سری به مقاومت  $4\Omega$  وصلند. اگر (الف)  $A = B = 10V$  و  $C = D = 0$ ، (ب)  $A = C = 10V$  و  $B = D = 0$ ، (ج)  $A = 10V$ ،  $B = -10V$  و  $C = D = 0$ ، (د)  $A = B = C = D = 10V$  و  $D = 0$ ، (ه)  $A = B = C = D = 10V$  باشد. توان متوسط تلف‌شده را به دست آورید.

۳۶. (الف) چه مقداری از  $R$  موجب می‌شود تا ولتاژهای rms دو سر القاگر در شکل ۱۱.۴۵ برابر شوند؟ (ب) مقدار ولتاژ rms چقدر است؟ (ج) جواب خود را با PSpice تست کنید.



۳۷. هر یک از امواج شکل ۱۱.۴۶ دوره تناوب 3s دارد. آن‌ها تا حدودی به هم شبیه هستند. (الف) مقدار متوسط هر کدام را محاسبه کنید. (ب) دو مقدار موثر را معین نمایید. (ج) جواب خود را برای موج دندان‌اره‌ای با PSpice تست کنید.



۳۸. القاگر 10mH شکل ۱۱.۴۵ را با خازن  $1\mu F$  و القاگر 300mH را با خازن  $3\mu F$  جایگزین نمایید. (الف) چه مقداری از  $R$  می‌تواند جریان‌های rms را در خازن‌ها برابر کند؟ (ب) مقدار جریان rms چقدر است؟ (ج) با PSpice آن را آزمایش کنید.

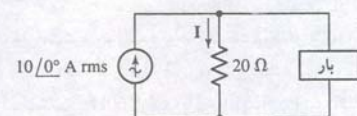
۳۹. شکل موجی دارای تناوب 5s بوده و در فاصله  $0 < t < 5s$  به صورت زیر بیان شده است:

$$v(t) = 10t[u(t) - u(t - 2)] + 16e^{-0.5(t-3)}[u(t - 3) - u(t - 5)]$$

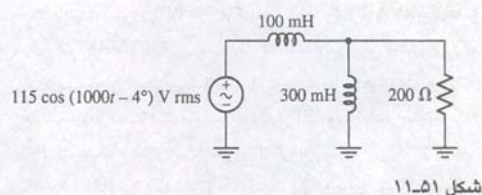
مقدار موثر جریان را به دست آورید.  
۴۰. ترکیب سری مقاومت  $1k\Omega$  و القاگر 2H نباید توانی بیش از 250mW در هر لحظه تلف کند. اگر جریان سینوسی و  $\omega = 500\text{rad/s}$  باشد، بزرگ‌ترین جریان rms قابل تحمل چقدر است؟

## ۱۱-۲ توان ظاهری و ضریب توان

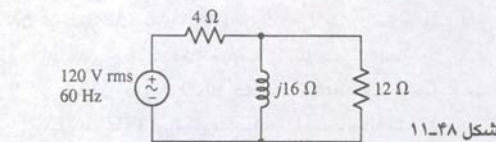
۴۱. در شکل ۱۱.۴۷، اگر  $I = 4/35^\circ \text{ A}$  باشد، توان متوسط (الف) منبع (ب) مصرف در مقاومت  $20\Omega$ ، (ج) به بار را بیابید. توان ظاهری در (د) منبع، (ه) مقاومت  $20\Omega$ ، (و) به بار را پیدا کنید. (ز) PF بار چند است.



۴۲. (الف) ضریب توان منبعی که در شکل ۱۱.۴۸ کار می‌کند را بیابید. (ب) توان متوسط تولیدی به وسیله منبع را مشخص کنید. (ج) چه خازنی باید موازی با منبع نصب شود تا ضریب واحد گردد. (د) جواب را با PSpice آزمایش کنید.

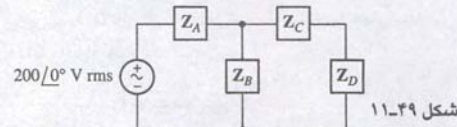


شکل ۱۱-۵۱



شکل ۱۱-۴۸

۴۳. در مدار شکل ۱۱.۴۹، اگر  $Z_A = 5 + j2\Omega$  و  $Z_B = 20 + j10\Omega$ ،  $Z_C = 10/30^\circ \Omega$  و  $Z_D = 10/-62^\circ \Omega$  باشد. توان ظاهری حمل‌شده به هر بار و تولیدی توسط هر منبع را مشخص نمایید.



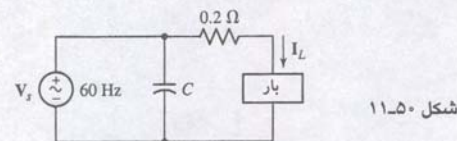
شکل ۱۱-۴۹

۴۴. شبکه‌ای را مجسم کنید که در  $f = 50 \text{ Hz}$  کار کرده و به‌طور سری به بارهایی وصل و جریان  $10/0^\circ \text{ A rms}$  از آن‌ها می‌گذرد. چنین مداری دوگان بارهای موازی و ولتاژ مشترک است. در سیستم سری، اگر بار را اتصال کوتاه کنیم، بار خاموش می‌شود. این کار موجب آتش‌سوزی می‌گردد. در این سیستم خاص دو بار وجود دارد،  $Z_1 = 30/15^\circ \Omega$  و  $Z_2 = 40/40^\circ \Omega$ . منبع در چه PF کار می‌کند. (ج) چه خازنی باید با مدار سری شود تا ضریب توان پسفا 0.9 به دست آید.

## ۱۱-۵ توان مختلط

۴۵. یک بار مرکب متشکل از سه بار به‌طور موازی به هم وصل شده‌اند. یکی از آن‌ها 100W با ضریب  $PF = 0.92$  پسفا، دیگری 250W در  $PF = 0.8$  پسفا و سومی 150W در  $PF = 1$  می‌کشد. بارهای موازی با یک منبع سری  $10\Omega$  دارد تغذیه می‌شوند. همه بارها باید در  $115 \text{ V rms}$  کار کنند. مطلوبست (الف) جریان rms در منبع (ب) PF بار ترکیبی.

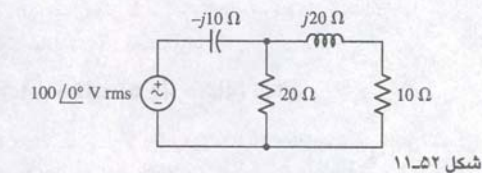
۴۶. بار در شکل ۱۱.۵۰،  $10 \text{ kVA}$  در  $PF = 0.8$  پسفا مصرف می‌کند. اگر  $I_L = 40 \text{ A rms}$  باشد. مقدار C چقدر باشد تا سبب شود که منبع در  $PF = 0.9$  کار کند؟



شکل ۱۱-۵۰

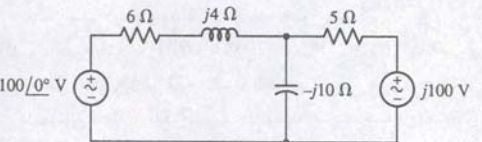
۴۷. مدار شکل ۱۱.۵۱ را در نظر بگیرید. مقدار ظرفیت لازم برای افزایش PF به 0.92 پسفا را به دست آورید، به‌شرطی که ظرفیت به‌طور (الف) سری با القاگر 100 mH وصل شود. (ب) موازی با القاگر 100 mH وصل گردد. جواب بخش‌های (الف) و (ب) را با PSpice چک کنید.

۴۸. مدار شکل ۱۱.۵۲ را برای یافتن توان مختلط جذب‌شده به وسیله هر پنج عنصر مدار تحلیل کنید.



شکل ۱۱-۵۲

۴۹. هر دو منبع شکل ۱۱.۵۳ در فرکانس یکسانی کار می‌کنند. توان مختلط تولیدی به وسیله هر منبع را به دست آورید. توان مختلط مصرفی به وسیله هر عنصر غیرفعال مدار را به دست آورید.



شکل ۱۱-۵۳

۵۰. توان مختلط حمل‌شده به یک بار، (الف) 500VA در  $PF = 0.75$  پیشفا، (ب) 500W در  $PF = 0.75$  پیشفا، (ج) 500VAR در  $PF = 0.75$  را محاسبه کنید.

۵۱. یک امپدانس خازنی  $Z_C = -j120\Omega$  موازی با یک بار  $Z_L$  وجود دارد. ترکیب موازی به وسیله یک منبع  $400/0^\circ \text{ V rms}$  تغذیه می‌شود. این منبع توان  $1.6 + 0.5 \text{ kVA}$  را تولید می‌نماید. (الف) توان مختلط داده‌شده به  $Z_L$  چقدر است؟ (ب) PF مربوط به  $Z_L$  چقدر است. (ج) PF مربوط به منبع چیست؟

۵۲. یک منبع  $230 \text{ V rms}$  سه بار موازی را تغذیه می‌کند، در  $PF = 0.8$  پسفا،  $1.2 \text{ kVA}$ ، در  $PF = 0.9$  پسفا و  $1.6 \text{ kVA}$  و 900W در  $PF = 1$  است. مطلوبست (الف) دامنه جریان (ب) PF مربوط به حالت کار منبع. (ج) توان مختلط پوشش داده‌شده به وسیله منبع.

۵۳. یک سیستم rms 250V سه بار موازی را تغذیه می‌کند. یکی از آن‌ها 20 kW را در ضریب توان واحد، دومی 25 kVA را در ضریب توان  $PF = 0.8$  پسفا، و سومی توان 30kW را در  $PF = 0.75$  پسفا مصرف می‌کند. (الف) کل توان تولیدی به وسیله منبع را به دست آورید. (ب) کل توان ظاهری تولیدی به وسیله منبع چقدر است؟ (ج) در چه PF منبع کار می‌کند.

۵۴. مصرف‌کننده‌ای دارای دیمانند حداکثر ماهانه 200 kW و نیاز راکتیوی 280 kVAR است. در تلاشی برای مقابله با اتلاف، تولیدکننده‌ای سعی



# فصل دوازدهم

## مدارهای چند فاز

### مقدمه

شرکت‌های تولید کننده برق به مشتریان خانگی و صنعتی، الکتریسیته را به فرم ولتاژها و جریان‌های سینوسی ارائه می‌کنند و به آن جریان (ac) می‌گویند. بسیاری از مناطق مسکونی در آمریکای شمالی موج سینوسی را در فرکانس 60 Hz و ولتاژ rms تقریباً 120 V دریافت می‌نمایند. در دیگر نقاط جهان الکتریسیته در 50 Hz و ولتاژ rms تقریباً 240 V اخذ می‌شود. در آغاز کمپانی‌های تولید کننده به وسیله توماس ادیسون<sup>۱</sup> به توزیع توان از طریق شبکه‌های dc توصیه شده بودند. ولی نیکلا تسلا<sup>۲</sup> و جورج وستینگهاوس<sup>۳</sup> دو دانشمند صاحب‌نظر دیگر در زمینه الکتریسیته، به شدت از به کارگیری ac حمایت نمودند. بالاخره نظر این دو نفر پذیرفته شد.

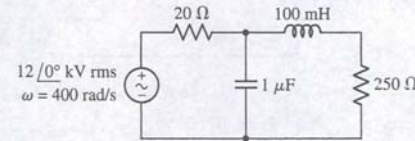
پاسخ‌گذاری سیستم‌های قدرت ac در تعیین دیماند یا تقاضای توان حداکثر مورد توجه‌اند، زیرا اغلب تجهیزات به‌هنگام شروع نسبت به حالت کار مداوم جریان بیشتری را لازم دارند. با این وجود در بسیاری از موارد عملکرد حالت ماندگار مورد توجه عمده می‌باشد. بنابراین تجربه ما بر تحلیل مبتنی بر فیزور، مفیدتر خواهد بود. در این جا با نوع جدیدی از منبع ولتاژ آشنا می‌شویم که منبع سه‌فاز نام دارد و می‌تواند با آرایش سه سیم Δ یا چهار سیم Y اتصال یابد. به‌طور مشابه خواهیم دید که بار نیز می‌تواند بسته به کاربرد به صورت هر یک از تصالات Δ یا Y در شبکه قرار گیرد.

### ۱۲-۱ سیستم‌های چند فاز

ماکنون هر وقت جمله "منبع سینوسی" را به کار بردیم، تصویری از یک منبع ولتاژ یا جریان سینوسی با دامنه، فرکانس و فاز خاص به نظر آمده است. در این فصل، منابع چند فاز را معرفی خواهیم کرد و به‌خصوص بر سیستم‌های سه‌فاز تکیه می‌کنیم. تولید توان سه‌فاز با ژنراتورهای دوار نسبت به تولید تک‌فاز مزایای بیشماری دارد و نیز در انتقال توان هم انتقال سه‌فاز از لحاظ اقتصادی ترجیح داده می‌شود. گرچه بسیاری از تجهیزات مورد استفاده تک‌فاز هستند ولی تجهیزات سه‌فاز خصوصاً در محیط‌های صنعتی ناآشنا نیستند. موتورهای به کار رفته در سیستم‌های برودتی و ماشین ابزار اغلب به صورت

۵۸. در مدار شکل ۱۱-۲۵،  $V_s = 5 \cos t$  است. (الف) حداکثر توان لحظه‌ای حمل‌شده به مقاومت  $10k\Omega$  چیست؟ (ب) توان راکتیو حمل‌شده به مقاومت  $10k\Omega$  چند است. (ج) توان ظاهری حمل‌شده به مقاومت  $10k\Omega$  چه می‌باشد. (د) توان مختلط اخذشده از منبع را به‌دست‌آورید.

۵۹. (الف) توان مختلط حداکثر به هر عنصر غیرفعال در مدار شکل ۱۱-۵۴ را به‌دست‌آورید. (ب) نشان دهید که مجموع این مقادیر برابر با مقدار توان مختلط حاصل از منبع است. (ج) آیا این نتیجه برای توان ظاهری هم صحیح است. (د) توان متوسط حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است. توان راکتیو حاصل از منبع چند است.



شکل ۱۱-۵۴

۶۰. باری در  $2300 \text{ V rms}$  مقدار  $28 \text{ A rms}$  با ضریب توان 0.812 پس‌فاز را می‌کشد. مطلوب است (الف) جریان حداکثر برحسب آمپر؟ (ب) توان لحظه‌ای در  $t = 2.5 \text{ ms}$  با فرض فرکانس 60 Hz؟ (ج) توان حقیقی دریافتی به وسیله بار؟ (د) توان مختلط؟ (ه) توان ظاهری (و) امیدانس بار و (ز) توان راکتیو.

دارد تا مشترانش در PF بالا کار کنند و لذا جریمه  $0.22/\text{kVAR}$  را برای هر kVAR اضافی به صورت 0.65 ضریب توان متوسط پیک (ماکزیمم مجاز) اعمال می‌کند. (الف) با توجه به مطلب فوق، هزینه سالانه جریمه چقدر است؟ (ب) سیاست جریمه PF تولیدکننده چقدر است؟ (ج) اگر بخواهیم جبران‌سازی بگذاریم و هزینه آن  $200 \$$  در هر kVAR 100 باشد بهترین و اقتصادی‌ترین حل برای مشتری چیست؟ (د) مقدار واقعی ظرفیت برای اصلاح ضریب توان چیست؟

۵۵. معادله (۲۸) را به‌دست‌آورید.

### ۱۱-۶ مقایسه واژه‌های توان

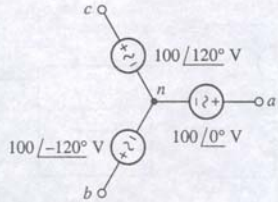
۵۶. یک منبع ولتاژ  $V = \cos(100\pi t - 66^\circ)$  339 به یک بار خالص مقاومتی  $1k\Omega$  وصل است. (الف) ولتاژ موثر منبع چیست؟ (ب) توان لحظه‌ای پیک جذب‌شده به وسیله بار چقدر است؟ (ج) حداقل توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله بار چه می‌باشد؟ (د) توان ظاهری حمل‌شده به وسیله منبع را به‌دست‌آورید. (ه) توان راکتیو حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است؟ (و) توان مختلط حمل‌شده به بار چیست؟

۵۷. یک منبع ولتاژ  $V = 339 \cos(100\pi t - 66^\circ)$  به یک بار خالص القاوی  $150 \text{ mH}$  وصل است. (الف) جریان موثر در مدار چیست؟ (ب) توان لحظه‌ای پیک جذب‌شده به وسیله بار چند است (ج) حداقل توان لحظه‌ای جذب‌شده به وسیله بار چه می‌باشد. (د) توان ظاهری حمل‌شده به وسیله منبع چقدر است؟ (ه) توان راکتیو حمل‌شده از منبع چند است. (و) توان مختلط حمل‌شده به بار چیست؟

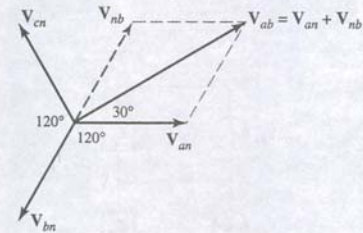


ولتاژ وسایل خانگی معمولاً  $120 \text{ V rms}$  است. ولی گاهی  $110 \text{ V}$  یا  $115 \text{ V rms}$  هم مشخص می‌شود.

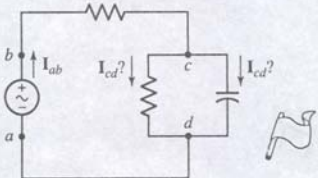




شکل ۱۲-۳ شبکه به کاررفته به عنوان مثالی از علامت ولتاژ دو زیرنویسی.

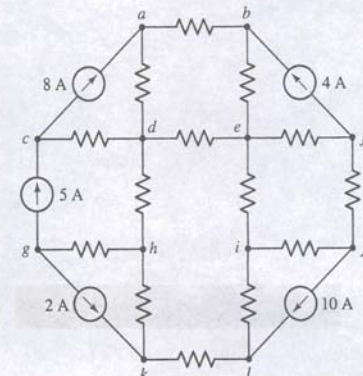


شکل ۱۲-۴ این نمودار فیزیوری کاربرد گرافیکی قرارداد ولتاژ دو زیرنویسی را برای یافتن  $V_{ab}$  در شکل ۱۲-۳ نشان می‌دهد.



شکل ۱۲-۵ موردی که استفاده از نماد دو زیرنویس مشکل پیش می‌آورد.

### تمرین



شکل ۱۲-۶

می‌گوید اختلاف ولتاژ بین دو نقطه به مسیر انتخابی بین نقاط بستگی ندارد. بنابراین:

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bd} = V_{ac} + V_{cd} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}$$

در این روش می‌توان KVL را بدون توجه به شکل نوشت، حتی اگر نقطه یا زیرنویسی روی شکل علامت زده نشده باشد، می‌توان معادله صحیحی داشت. مثلاً می‌توان نوشت  $V_{ad} = V_{ax} + V_{xd}$  که هر نقطه موردنظر انتخابی است.

شکل ۱۲-۳ یکی از فرم‌های نمایش سیستم سه‌فاز ولتاژ را نشان می‌دهد. بگذارید فرض کنیم ولتاژهای  $V_{cn}$ ،  $V_{bn}$ ،  $V_{an}$  مطلوبند:

$$\begin{aligned} V_{an} &= 100 \angle 0^\circ \text{ V} \\ V_{bn} &= 100 \angle -120^\circ \text{ V} \\ V_{cn} &= 100 \angle -240^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

بنابراین با نگاهی به زیرنویس، ولتاژ  $V_{ab}$  را می‌توان پیدا کرد.

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{an} + V_{nb} = V_{an} - V_{bn} \\ &= 100 \angle 0^\circ - 100 \angle -120^\circ \text{ V} \\ &= 100 - (-50 - j86.6) \text{ V} \\ &= 173.2 \angle 30^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

سه ولتاژ معلوم و راه به دست آوردن فیזור  $V_{ab}$  ساخته شده از آن‌ها در شکل ۱۲-۴ مشاهده می‌شود.

علامت دو زیرنویس (دواندیس) را می‌توان برای جریان هم به کار برد. جریان  $I_{ab}$  جریانی است که از  $a$  به  $b$  از مستقیم‌ترین مسیر ممکن جاری است. در هر مدار کاملی چنین می‌گوییم که باید حداقل دو مسیر ممکن بین نقاطی چون  $a$  و  $b$  وجود داشته باشد و قرار می‌گذاریم که از دو زیرنویس استفاده نکنیم، مگر این‌که به وضوح مسیر مستقیم‌تر یا کوتاه‌تری بین دو نقطه وجود داشته باشد. معمولاً این مسیر از یک عنصر ساده عبور می‌کند. بنابراین  $I_{ab}$  در شکل ۱۲-۵ درست نشان داده شده است. درواقع، برای نشان دادن این جریان به پیکان هم نیازی نیست، زیرنویس‌ها جهت را هم بیان می‌کنند. با این وجود در این شکل تعریف جریانی به نام  $I_{cd}$  مبهم است و موجب اشتباه خواهد شد.

۱۲-۱ اگر  $V_{ab} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ ،  $V_{bd} = 40 \angle 80^\circ \text{ V}$  و  $V_{ca} = 70 \angle 200^\circ \text{ V}$  باشد، مطلوب است:

$$V_{cd} \text{ (ج)}, V_{bc} \text{ (ب)}, V_{ad} \text{ (الف)}$$

۱۲-۲ به شکل ۱۲-۶ توجه کنید. اگر  $I_{ij} = 3 \text{ A}$ ،  $I_{de} = 2 \text{ A}$  و  $I_{hd} = -6 \text{ A}$  باشد، مطلوب است:

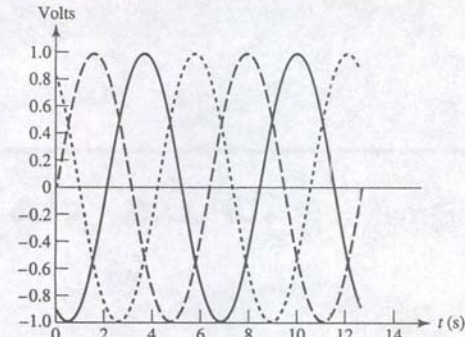
$$I_{ij} \text{ (ج)}, I_{ef} \text{ (ب)}, I_{cd} \text{ (الف)}$$

$$\text{جواب ۱۲-۱: } 114.0 \angle 20.2^\circ \text{ V}, 41.8 \angle 145.0^\circ \text{ V}, 44.0 \angle 20.6^\circ \text{ V}$$

$$\text{جواب ۱۲-۲: } -3 \text{ A}, 7 \text{ A}, 7 \text{ A}$$

## ۱۲-۲ سیستم‌های تک‌فاز سه سیم

منبع تک‌فاز سه سیم به صورت منبعی تعریف می‌شود که دارای سه پایانه خروجی مانند  $a$ ،  $n$  و  $b$  در شکل ۱۲-۷ (الف) است و در آن فیזור ولتاژ  $V_{an}$  و  $V_{bn}$  برابرند. بنابراین منبع را می‌توان به صورت ترکیبی از دو منبع ولتاژ یکسان نشان داد. در شکل ۱۲-۷ (ب)،



شکل ۱۲-۱ مثالی از مجموعه سه‌فاز، که هر یک 120° نسبت به دیگری اختلاف فاز دارد. خواهیم دید که در هر لحظه فقط یکی از ولتاژها ممکن است صفر باشد.

سه‌فاز سیم‌پیچی می‌شوند. در دیگر کاربردهای باقیمانده خواهیم دید که اگر با سیستم‌های چند فاز آشنا باشیم، برای تهیه توان تک‌فاز کافی است به یکی از پاهای سیستم چند فاز اتصالی ساده ایجاد شود.

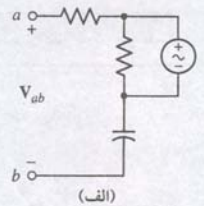
بیاید تا به یک سیستم چند فاز راجع، یعنی سیستم سه‌فاز متعادل یا بالانس نگاهی مختصر بیندازیم. منبع سه پایانه دارد (بدون احتساب اتصال زمین یا نول) اندازه‌گیری با ولت‌متر نشان می‌دهد که دامنه ولتاژ بین هر دو پایانه با یکدیگر برابر است. با این وجود این ولتاژها با یکدیگر هم‌فاز نیستند و هر یک از سه ولتاژ، 120° اختلاف فاز با دیگری دارد. علامت فاز به جهت ولتاژها بستگی دارد. نمونه‌ای از این مجموعه در شکل ۱۲-۱ ملاحظه می‌گردد. هر بار متعادل توان یکسانی را از هر سه فاز می‌کشد، ولی وقتی یکی از ولتاژها برای یک لحظه صفر شود دو فاز دیگر باید نصف دامنه ماکزیم خود را داشته باشند. هیچ‌گاه توان لحظه‌ای دریافتی به وسیله بار کل به صفر نمی‌رسد، درواقع توان لحظه‌ای کل ثابت است. این، یکی از مزایا برای ماشین‌های دوار است زیرا گشتاور وارد بر روتور تقریباً ثابت خواهد بود و نسبت به حالتی که منبع تک‌فاز باشد وضعیت ثابت‌تری حاکم و لذا ارتعاش و لرزش ماشین کمتر می‌شود.

تعداد فاز بیشتر، مثل سیستم‌های 6 و 12 فاز، تقریباً در تهیه توان برای یکسوسازهای بزرگ کاربرد دارند. یکسوسازها جریان متناوب را به مستقیم تبدیل کرده و اجازه عبور جریان را از یک جهت به بار ممکن می‌سازند و لذا علامت ولتاژ دو سر بار همیشه ثابت باقی می‌ماند. خروجی یکسوساز یک جریان مستقیم به علاوه مؤلفه‌های متناوبی به نام ریبِل یا تموج است که با افزایش فاز کاهش می‌یابد.

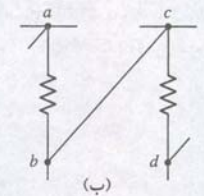
تقریباً بدون استثناء تمام سیستم‌های چند فاز در عمل حاوی منابعی هستند که به‌خوبی می‌توان آن‌ها را با منابع ولتاژ ایده‌آل و یا با منابع ولتاژ ایده‌آل سری با امپدانس داخلی کوچک جایگزین نمود، منابع جریانی سه‌فاز بسیار نادرند.

### علامت با دو زیرنویس

بهتر است ولتاژها و جریان‌های چند فاز را با دو زیرنویس نشان دهیم. با این نماد جریانی یا ولتاژ، مانند  $V_{ab}$  یا  $I_{aA}$  مفهوم‌تر از نمایش ساده‌ای چون  $V_a$  یا  $I_x$  می‌باشد. بنا به تعریف ولتاژ نقطه  $a$  نسبت به  $b$  برابر  $V_{ab}$  است. به همین دلیل در شکل ۱۲-۲ (الف) علامت مثبت در  $a$  قرار گرفته است. بنابراین زیرنویس دوتایی را می‌توان معادل با جفت علامت مثبت - منفی دانست. استفاده هم‌زمان از هر دو عمل اضافی است. مثلاً با توجه به شکل ۱۲-۲ (ب) می‌بینیم که  $V_{ad} = V_{ab} + V_{cd}$  است. مزیت علامت دو زیرنویس بر قانون کیرشهف استوار است که



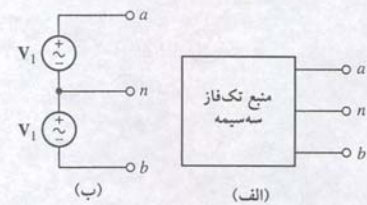
(الف)



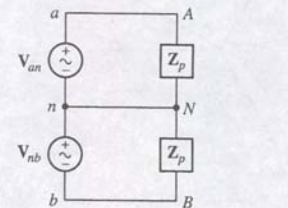
(ب)

شکل ۱۲-۲ (الف) تعریف ولتاژ  $V_{ab}$  (ب)  $V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = V_{ab} + V_{cd}$





شکل ۱۲-۷ (الف) یک منبع تکفاز سه سیمه. (ب) نمایش منبع تکفاز سه سیمه با دو منبع ولتاژ مشابه.



شکل ۱۲-۸ یک سیستم تکفاز سه سیمه. دو بار یکسانند و جریان سیم خنثی صفر است.

و بنابراین

$$I_{aA} = V_{an} / Z_p = I_{bB} = V_{nb} / Z_p$$

$$I_{nN} = I_{bB} + I_{aA} = I_{bB} - I_{aA} = 0$$

بنابراین جریانی در سیم خنثی وجود ندارد و می‌توان بدون هرگونه تغییر در جریان یا ولتاژ آن را حذف کرد.

### اثر امپدانس غیر صفر یک سیم

اکنون تأثیر یک امپدانس غیر صفر در هر سیم را بررسی می‌کنیم. اگر خطوط  $aA$  و  $bB$  امپدانس‌های برابری داشته باشند می‌توان آن را به  $Z_p$  اضافه کرد و دو مرتبه دوبار یکسان حاصل می‌گردد و باز هم جریان سیم خنثی صفر است. حال تصور کنید که سیم خنثی کمی امپدانس مثل  $Z_n$  داشته باشد. بدون انجام تحلیل دقیق، اصل تجمیع نشان می‌دهد که تقارن موجب می‌شود تا باز هم جریان خنثی صفر باشد. از این گذشته اگر امپدانس مستقیم بین دو خط خارجی وصل شود باز هم مدار متقارن خواهد بود و از سیم خنثی جریان نمی‌گذرد. بنابراین صفر بودن جریان در سیم خنثی نتیجه بالانس بودن بار است و امپدانس غیر صفر در سیم خنثی تقارن را از بین نمی‌برد. به‌طور کلی اغلب سیستم‌های تک‌فاز سه سیمه متقارن نیستند. در این سیستم‌ها دوبار نامساوی بین دو سیم بیرونی و سیم خنثی، و یک امپدانس بین دو سیم بیرونی وصل می‌شود. امپدانس دو سیم بیرونی ممکن است مساوی تصور شوند ولی امپدانس سیم خنثی کمی بزرگتر از آن دو است. بگذارید مثالی از چنین سیستم را بررسی کنیم. خصوصاً به جریان موجود در سیم خنثی توجه بیشتری خواهیم نمود. همچنین راندمان انتقال نیرو به بار نامتعادل بررسی خواهد شد.

سیستم شکل ۱۲-۹ را تحلیل کنید و توان حمل شده به هر سه بار و توان تلف شده در سیم خنثی و هر دو خط را معین کنید.

هدف مسئله را شناسایی کنید.

سه بار در مدار عبارتند از: مقاومت  $50 \Omega$ ، مقاومت  $100 \Omega$  و یک امپدانس  $20 + j10 \Omega$  هر یک از دو خط مقاومت  $1 \Omega$  و سیم خنثی مقاومت  $3 \Omega$  دارد. برای تعیین توان لازم، جریان در هر یک از آن‌ها معین شود.

اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

ما یک سیستم تک‌فاز سه سیمه داریم. نمودار جریان آن کاملاً علامت‌گذاری شده است. جریان‌های محاسبه شده به واحد rms هستند.

ارائه طرح.

مدار را از راه مش حل می‌کنیم و در آن نیز سه حلقه قابل تعریف است. نتیجه تحلیل، تعدادی معادله برای جریان حلقه‌ها است که بعداً قابل استفاده در محاسبه توان است.

معادلات مناسب را بنویسید.

سه معادله حلقه عبارتند از:

$$-115 \angle 0^\circ + I_1 + 50(I_1 - I_2) + 3(I_1 - I_3) = 0$$

$$(20 + j10)I_2 + 100(I_2 - I_3) + 50(I_2 - I_1) = 0$$

$$-115 \angle 0^\circ + 3(I_3 - I_1) + 100(I_3 - I_2) + I_3 = 0$$

که با مرتب کردن آن‌ها سه معادله زیر به دست می‌آید:

$$54I_1 - 50I_2 - 3I_3 = 115 \angle 0^\circ$$

$$-50I_1 + (170 + j10)I_2 - 100I_3 = 0$$

$$-3I_1 - 100I_2 + 104I_3 = 115 \angle 0^\circ$$

آیا اطلاعات دیگری لازم است.

ما مجموعه‌ای از سه معادله و سه مجهول داریم. بنابراین می‌توان برای حل آن اقدام کرد.

اقدام به حل.

به کمک یک ماشین حساب  $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  را به دست می‌آوریم.

$$I_1 = 11.24 \angle -19.83^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 9.389 \angle -24.47^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = 10.37 \angle -21.80^\circ \text{ A}$$

جریان در خطوط بیرونی عبارتند از:

$$I_{aA} = I_1 = 11.24 \angle -19.83^\circ \text{ A}$$

و

$$I_{bB} = -I_3 = 10.37 \angle 158.20^\circ \text{ A}$$

و جریان کوچکتر در سیم خنثی عبارت است از:

$$I_{nN} = I_3 - I_1 = 0.9459 \angle -177.7^\circ \text{ A}$$

پس توان متوسط دریافتی به وسیله هر بار چنین تعیین می‌شود:

$$P_{50} = |I_1 - I_2|^2 (50) = 206 \text{ W}$$

$$P_{100} = |I_3 - I_2|^2 (100) = 117 \text{ W}$$

$$P_{20+j10} = |I_2|^2 (20) = 1763 \text{ W}$$

توجه کنید که ضریب  $\frac{1}{2}$  لازم نیست چون جریان‌های rms را به کار می‌بریم.



گرما می‌ناشی از دو لامپ 100W را در نظر بگیرید. در دو سیم بیرونی در همین حدود توان مصرف می‌شود. برای پایین نگه داشتن دما باید سطح بزرگی فراهم شود.

به این ترتیب توان بار کل برابر 2086 W است. تفاوت در هر خط برابر است با

$$P_{aA} = |I_1|^2 (1) = 126 \text{ W}$$

$$P_{bB} = |I_3|^2 (1) = 108 \text{ W}$$

$$P_{nN} = |I_{nN}|^2 (3) = 3 \text{ W}$$

که مجموعاً 237 W می‌باشد. پیدا است که این خطوط خیلی طولی‌اند و گرنه این توان نسبتاً زیاد دما را تا حد خطرناکی بالا می‌برد.

- صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟  
توان کل تولید شده برابر است با

$$206 + 117 + 1763 + 237 = 2323 \text{ W}$$

و می‌توان آن را با توجه به توان حمل‌شده به وسیله هر منبع ولتاژ چک کرد:

$$P_{an} = 115(11.24) \cos 19.83^\circ = 1216 \text{ W}$$

$$P_{bn} = 115(10.37) \cos 21.80^\circ = 1107 \text{ W}$$

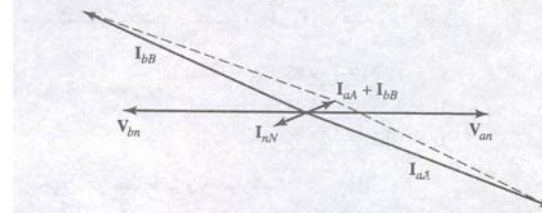
که جمعاً همان 2323 W می‌باشد. بازده خط انتقال سیستم برابر است با:

$$\eta = \frac{2086}{2086 + 237} = 89.8\%$$

توان کل حمل‌شده به بار  
کل توان مولد

چنین بازدهی برای یک موتور بخار یا موتور احتراق داخلی عددی بالا است ولی برای یک سیستم توزیع خوب خیلی پایین است. اگر بخواهیم منبع و بار را به یکدیگر نزدیک کنیم، باید قطر سیم‌ها را افزایش دهیم.

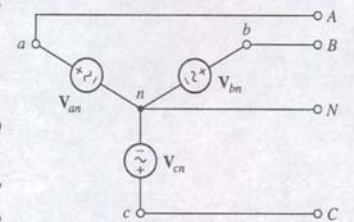
نمایش فیزیکی دو منبع ولتاژ، جریان در خطوط بیرونی و جریان سیم خنثی در شکل ۱۲-۱۰ نشان داده شده است. رابطه  $I_{aA} + I_{bB} + I_{nN} = 0$  در نمودار مشخص شده است.



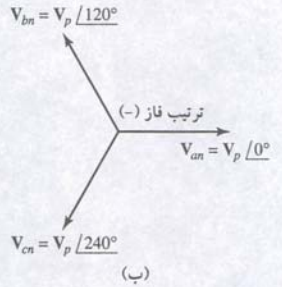
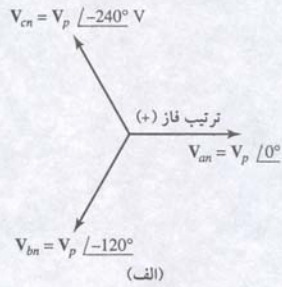
شکل ۱۲-۱۰ ولتاژ منابع و سه جریان در مدار شکل ۱۲-۹ روی نمودار فیزیکی نشان داده شده‌اند. توجه کنید که

$$I_{aA} + I_{bB} + I_{nN} = 0$$

### تمرین



شکل ۱۲-۱۱ منبع چهارسیم با اتصال Y.



شکل ۱۲-۱۲ (الف) ترتیب فاز مثبت یا abc. (ب) ترتیب فاز منفی یا cba.

$$|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$$

ین سه ولتاژ که هر کدام بین یک خط و سیم خنثی برقرار است را **ولتاژهای فاز** می‌نامیم. به طور اختیاری  $V_{an}$  را به عنوان مرجع اختیار می‌کنیم، یعنی:

$$V_{an} = V_p \angle 0^\circ$$

با همواره از  $V_p$  برای نشان دادن دامنه rms هر یک از ولتاژهای فاز استفاده خواهیم کرد. پس منبع سه فاز چنین تعریف می‌شود:

$$V_{bn} = V_p \angle -120^\circ \quad \text{و} \quad V_{cn} = V_p \angle -240^\circ$$

$$V_{bn} = V_p \angle 120^\circ \quad \text{و} \quad V_{cn} = V_p \angle 240^\circ$$

ولی را **ترتیب فاز مثبت** یا ترتیب فاز abc می‌گویند و در شکل ۱۲-۱۲(الف) نشان داده شده است. روابط بعدی را **ترتیب فاز منفی** یا cba می‌خوانند و در شکل ۱۲-۱۲(ب) ملاحظه می‌گردد. ترتیب واقعی فاز یک منبع سه فاز فیزیکی به این انتخاب اختیاری پایانه‌های a، b و c بستگی دارد. این انتخاب را می‌توان همیشه طوری برگزید که ترتیب فاز مثبت باشد و فرض می‌کنیم از این پس همین انتخاب در سیستم‌های مورد بررسی برقرار باشد.

### ولتاژهای خط به خط

حال بیایید ولتاژهای خط‌به‌خط (یا به طور خلاصه "ولتاژهای خط") را به دست آوریم. این ولتاژها هنگامی که ولتاژهای خط همچون شکل ۱۲-۱۲(الف) باشند، برقرارند. ساده‌ترین راه یافتن ولتاژهای خط استفاده از نمودار فیزیک است زیرا زاویه همگی مضارب صحیحی از  $30^\circ$  هستند. نمودار مزبور در شکل ۱۲-۱۳ ترسیم شده و نتایج عبارت‌اند از:

$$V_{ab} = \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ \quad (1)$$

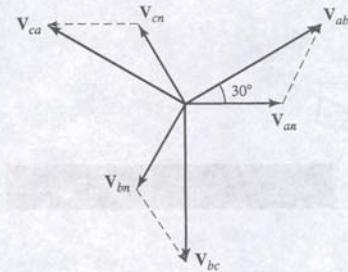
$$V_{bc} = \sqrt{3}V_p \angle -90^\circ \quad (2)$$

$$V_{ca} = \sqrt{3}V_p \angle -210^\circ \quad (3)$$

طبق قانون کیرشهف مجموع ولتاژهای فوق صفر است. بد نیست خواننده این مطلب را تحقیق کند. اگر دامنه rms هر یک از این ولتاژهای خط را با  $V_L$  نشان دهیم، آن‌گاه یکی از مهمترین مشخصه‌های منبع سه فاز با اتصال Y را چنین می‌توان بیان کرد.

$$V_L = \sqrt{3}V_p$$

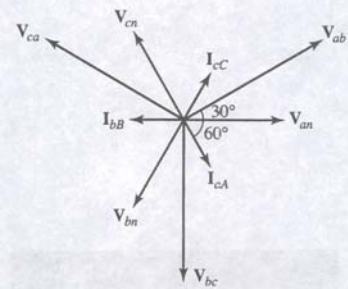
توجه کنید که با ترتیب فاز مثبت،  $V_{an}$  از  $V_{bn}$  و  $V_{bn}$  از  $V_{cn}$  هر یک به اندازه  $120^\circ$  از دیگری پیش‌فاز است و نیز  $V_{ab}$  از  $V_{bc}$  و  $V_{bc}$  از  $V_{ca}$  دوباره هر کدام  $120^\circ$  از دیگری پیش‌فاز است. اگر به جای پیش‌فاز از پس‌فاز استفاده کنیم، مطالب فوق برای ترتیب فاز منفی صحت خواهد داشت.



شکل ۱۲-۱۳ نمودار فیزیکی به کاررفته برای یافتن ولتاژهای خط برحسب ولتاژهای فاز.

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{an} - V_{bn} = \\ &= V_p \angle 0^\circ - V_p \angle -120^\circ = \\ &= V_p - V_p \cos(-120^\circ) - jV_p \sin(-120^\circ) = \\ &= V_p \left(1 + \frac{1}{2} + j\sqrt{3}/2\right) = \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ \end{aligned}$$





شکل ۱۶-۱۲ نمودار فیزیوری مدار شکل ۱۲-۱۵.

چون ولتاژ یکی از فازهای منبع داده شده و نیز ترتیب فاز مثبت است، سه ولتاژ فاز عبارتند از:

$$V_{an} = 200 \angle 0^\circ \text{ V} \quad V_{bn} = 200 \angle -120^\circ \text{ V} \quad V_{cn} = 200 \angle -240^\circ \text{ V}$$

ولتاژ خط  $V = 200\sqrt{3} = 346 \text{ V}$  است. زاویه فاز هر ولتاژ خط را می‌توان با ایجاد نمودار فیزیوری مثل شکل ۱۲-۱۳ معین کرد. در واقع، نمودار فیزیوری شکل ۱۲-۱۳ این‌جا هم قابل اعمال است. آن‌گاه با استفاده از یک ماشین حساب یا معادلات (۱) تا (۳) خواهیم داشت:

$$V_{ca} = 346 \angle -210^\circ \text{ V} \quad V_{bc} = 346 \angle -90^\circ \text{ V} \quad V_{ab} = 346 \angle 30^\circ \text{ V}$$

بیایید با فاز A کار کنیم. جریان خط برابر است با:

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_p} = \frac{200 \angle 0^\circ}{100 \angle 60^\circ} = 2 \angle -60^\circ \text{ A}$$

چون می‌دانیم سیستم سه‌فاز بالانس است، می‌توان بقیه جریان‌های خط را براساس  $I_{aA}$  نوشت:

$$I_{bB} = 2 \angle (-60^\circ - 120^\circ) = 2 \angle -180^\circ \text{ A}$$

$$I_{cC} = 2 \angle (-60^\circ - 240^\circ) = 2 \angle -300^\circ \text{ A}$$

توان جذب شده به وسیله فاز A برابر است با

$$P_{AN} = 200(2) \cos(0^\circ + 60^\circ) = 200 \text{ W}$$

بنابراین توان جذب شده به وسیله بار سه فاز 600 W خواهد شد.

نمودار فیزیوری این مدار در شکل ۱۲-۱۶ مشاهده می‌شود. به محض این‌که اندازه ولتاژ خط و یا جریان را بدانیم زوایای هر سه ولتاژ و هر سه جریان به سادگی با خواندن از روی نمودار تعیین خواهد شد.

## تمرین

۱۲-۴ یک سیستم سه فاز سه سیم به یاری با اتصال Y وصل شده است، هر فاز شامل سه بار موازی است:  $-j100 \Omega$ ،  $100 \Omega$  و  $50 + j50 \Omega$ . با فرض ترتیب فاز مثبت و  $V_{ab} = 400 \angle 0^\circ \text{ V}$  مطلوب است: (الف)  $V_{an}$ ، (ب)  $I_{aA}$  (ج) توان کل مصرفی در بار.  
جواب:  $V = 231 \angle -30^\circ \text{ V}$ ،  $I = 4.62 \angle -30^\circ \text{ A}$  و  $3200 \text{ W}$

قبل از ارائه مثالی دیگر، فرصت خوبی است تا عبارت بخش ۱۲-۱ را بشکافیم. عبارت چنین بود که اگر حتی ولتاژها و جریان‌های فاز در هر لحظه خاصی از زمان صفر باشند (در شمال امریکا هر  $1/12^\circ$  ثانیه) توان لحظه‌ای حمل شده به کل بار هرگز صفر نیست. یک بار دیگر مثال ۱۲-۲ را ملاحظه کنید که در آن ولتاژ و جریان فاز در حوزه زمان نوشته شده است.

$$v_{AN} = 200 \sqrt{2} \cos(120 \pi t + 0^\circ) \text{ V}$$

$$i_{AN} = 2 \sqrt{2} \cos(120 \pi t - 60^\circ) \text{ A}$$

بنابراین توان لحظه‌ای مصرفی در فاز A برابر است با:

$$\begin{aligned} P_A(t) &= v_{AN} i_{AN} = 800 \cos(120 \pi t) \cos(120 \pi t - 60^\circ) \\ &= 400 [\cos(-60^\circ) + \cos(240 \pi t - 60^\circ)] \\ &= 200 + 400 \cos(240 \pi t - 60^\circ) \text{ W} \end{aligned}$$

ضریب  $\sqrt{2}$  برای تبدیل از واحد rms به کار گرفته است.

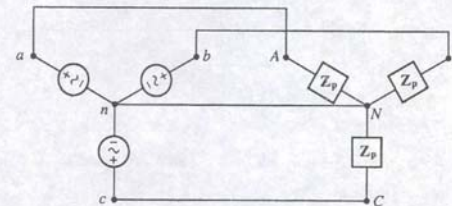
بگذارید یک بار متعادل سه فاز Y را به منبع وصل کنیم و برای این کار از سه خط و خط خنثی استفاده نماییم (شکل ۱۲-۱۴). بار بین هر خط و خط خنثی را با  $Z_p$  نشان می‌دهیم. جریان‌های این سه خط را به سادگی می‌توان به دست آورد، زیرا در حقیقت سه مدار تک‌فاز داریم که یک سیم آن‌ها مشترک است.

$$\begin{aligned} I_{aA} &= \frac{V_{an}}{Z_p} \\ I_{bB} &= \frac{V_{bn}}{Z_p} = \frac{V_{an} \angle -120^\circ}{Z_p} = I_{aA} \angle -120^\circ \\ I_{cC} &= I_{aA} \angle -240^\circ \end{aligned}$$

و بنابراین:

$$I_{Nn} = I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} = 0$$

بنابراین اگر منبع و بار متعادل باشند و اگر چهار سیم، امپدانس صفر داشته باشند، سیم خنثی جریانی را حمل نخواهد کرد. اگر در هر یک از سه خط، امپدانس  $Z_L$  را به صورت سری قرار دهیم و نیز امپدانس  $Z_n$  را در خط خنثی بگذاریم، آن‌گاه جریان سیم خنثی چه خواهد شد؟ واضح است که  $Z_L$ ها را می‌توان با امپدانس‌های بار ترکیب کرد. این بار حاصل همچنان متعادل می‌ماند و می‌توان سیم هادی خنثی را حذف نمود. بنابراین اگر با اتصال کوتاه یا بازکردن مدار بین n و N تغییری در سیستم به چشم نخورد، هر امپدانس را می‌توان در سیم خنثی وارد کرد و جریان سیم خنثی در هر حال صفر باقی می‌ماند.



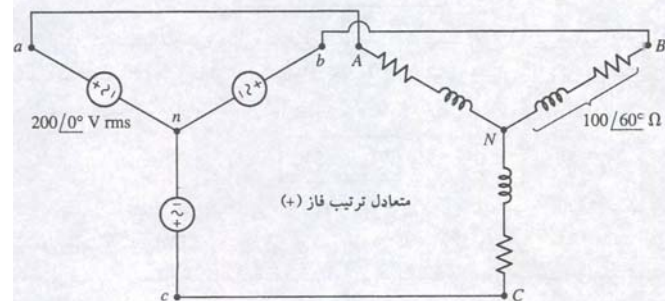
شکل ۱۴-۱۲ یک سیستم سه‌فاز بالانس با اتصال Y-Y و سیم خنثی.

پس اگر منبع و بارها متعادل باشند، سیم خنثی می‌تواند هر امپدانس مثل اتصال کوتاه یا مدار باز داشته باشد. به هر حال این امپدانس هر چه باشد تأثیری بر ولتاژها و جریان‌های سیستم ندارد. اغلب بهتر است بین دو نقطه خنثی را اتصال کوتاه تصور کرد، خواه واقعاً وجود داشته باشد یا نباشد. در این حال مسئله به سه مسئله تک‌فاز تبدیل می‌گردد و هر سه آن‌ها تنها در زاویه فاز با یکدیگر اختلاف دارند. در این حالت می‌گوییم مسئله را براساس "تک‌فاز" حل می‌کنیم.



## مثال ۱۲-۲

برای مدار شکل ۱۲-۱۵، جریان‌ها و ولتاژهای مدار را پیدا کنید و توان کل مصرفی دو بار را محاسبه نمایید.



شکل ۱۵-۱۲ یک سیستم سه‌فاز با اتصال سه‌سیم Y-Y.



$$I_1 = 1.155 \angle 0^\circ \text{ A} \quad I_2 = 2.89 \angle +36.9^\circ \text{ A}$$

و جریان خط برابر است با

$$I_L = I_1 + I_2 = 3.87 \angle +26.6^\circ \text{ A}$$

به علاوه، توان تولیدی در این فاز برابر است با

$$P_p = \frac{300}{\sqrt{3}} 3.87 \cos(+26.6^\circ) = 600 \text{ W}$$

که تهیه 200 W توان به وسیله هر خط با روشنایی جدید و نیز 400 W برای بار اصلی را تأیید می‌کند.

۱۲-۶ سه بار بالانس با اتصال Y روی یک سیستم سه فاز چهار سیمه نصب شده است. بار 1 کلاً 6 kW را در  $PF = 1$  می‌کشد، بار 2 به 10 kVA در  $PF = 0.69$  پسفاز نیاز دارد و بار 3 مقدار 7 kW را در  $PF = 0.85$  پسفاز لازم دارد. اگر ولتاژ فاز در بارها 135 V و هر خط  $0.1 \Omega$  مقاومت داشته باشد و نیز مقاومت خط خنثی  $1 \Omega$  باشد، مطلوب است: (الف) توان کل کشیده شده به وسیله بارها، (ب)  $PF$  کل بارها، (ج) توان کل از دست رفته در چهار خط، (د) ولتاژ فاز در منبع و (ه) ضریب توان کل منبع

جواب: 0.954، 22.6 kW، 1027 W، 140.6 V، 0.957 پسفاز

اگر بار Y نامتعادل به یک سیستم سه فاز که به لحاظ دیگر بالانس است وصل شود، باز هم می‌توان سیستم را براساس تک فاز تحلیل کرد، مشروط بر این که سیم خنثی وجود داشته باشد و امپدانس آن هم صفر باشد. اگر هر یک از این شرایط برقرار نباشد، باید از روش های دیگری چون روش تک حلقه یا تحلیل گره استفاده نمود. با این وجود مهندسانی که بیشتر وقت خود را با سیستم های سه فاز نامتعادل صرف کرده اند، می دانند که کاربرد **مؤلفه های متقارن** چقدر باعث صرفه جویی در وقت است، مادر این جا این روش را بحث نمی کنیم.

### ۱۲-۴ اتصال مثلث یا دلتا (Δ)

آرایشی دیگر در اتصال بارهای سه فاز اتصال Δ است، (شکل ۱۲-۱۸). این آرایش بسیار رایج بوده و نیازی به اتصال سیم خنثی ندارد.

اجازه دهید تا یک بار با اتصال Δ را که از سه امپدانس  $Z_p$  تشکیل شده بررسی کنیم. با مراجعه به شکل ۱۲-۱۸ ولتاژهای خطوط را چنین فرض می‌کنیم:

$$V_L = |V_{ab}| = |V_{bc}| = |V_{ca}|$$

با ولتاژهای فاز معلوم چنین هستند:

$$V_p = |V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

$$V_{ab} = \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ \quad V_L = \sqrt{3}V_p$$

و همان است که قبلاً دیدیم. چون ولتاژ دو سر هر شاخه از Δ معلوم است، جریان های فاز به راحتی به دست می آیند.

$$I_{AB} = \frac{V_{ab}}{Z_p}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{bc}}{Z_p}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{ca}}{Z_p}$$

و اختلاف آن ها جریان های خط را به دست می دهند، مثل:

$$I_{aA} = I_{AB} - I_{CA}$$

به طریق مشابه داریم:

$$P_B(t) = 200 + 400 \cos(240 \pi t - 300^\circ) \text{ W}$$

و

$$P_C(t) = 200 + 400 \cos(240 \pi t - 180^\circ) \text{ W}$$

توان لحظه ای جذب شده به وسیله کل بار برابر است با:

$$P(t) = P_A(t) + P_B(t) + P_C(t) = 600 \text{ W}$$

این توان مستقل از زمان بوده و مقدار آن همان توان متوسط در مثال ۱۲-۲ است.

### مثال ۱۲-۳

یک سیم سه فاز متعادل یا بالانس با ولتاژ خط 300 V، یک بار 1200 W با اتصال Y را در  $PF = 0.8$  تغذیه می‌کند. جریان خط و امپدانس بار هر خط را معین کنید.

ولتاژ فاز  $300 / \sqrt{3}$  و توان هر فاز  $1200 / 3 = 400 \text{ W}$  می‌باشد. بنابراین:

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}} (I_L) (0.8)$$

و بنابراین جریان هر فاز 2.89 A می‌باشد. امپدانس فاز با رابطه زیر داده می‌شود:

$$|Z_p| = \frac{V_p}{I_L} = \frac{300 / \sqrt{3}}{2.89} = 60 \Omega$$

چون  $PF = 0.8$  پیشفاز است، امپدانس زاویه  $-36.9^\circ$  را دارد، پس  $Z_p = 60 \angle -36.9^\circ \Omega$  خواهد شد. بارهای پیچیده تر را هم به سادگی می‌توان بررسی کرد، چون مسائل مذکور به مسائل ساده تر تک فاز تبدیل می‌شوند.

### تمرین

۱۲-۵ یک سیستم سه فاز سه سیمه ولتاژ خط 500 V را دارد. دوبار با اتصال متعادل Y نیز به آن وصل است. یکی از آن ها بار خازنی با  $2 \Omega - j7$  در هر فاز و دیگری القایی با  $2 \Omega + j4$  در هر فاز می‌باشد. (الف) ولتاژ فاز را به دست آورید، (ب) جریان خط چقدر است؟، (ج) توان کل جذب شده به وسیله بار را معین نمایید، (د) ضریب توان هر منبع را پیدا کنید.

جواب: 289 V، 97.5 A، 83.0 kW، 0.983 پسفاز

### مثال ۱۲-۴

یک بار روشنایی متعادل 600 W به سیستم مثال ۱۲-۳ اضافه شده است. جریان خط جدید را به دست آورید.

ابتدا مدار تک فاز مناسبی مثل شکل ۱۲-۱۷ می‌کشیم. فرض شده است که بار 600 W متعادل بوده و به طور مساوی بین سه فاز تقسیم شده باشد و بنابراین در هر فاز 200 W مصرف می‌شود. دامنه جریان روشنایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$200 = \frac{300}{\sqrt{3}} |I_1| \cos 0^\circ$$

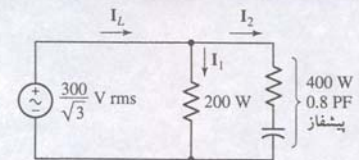
بنابراین:

$$|I_1| = 1.155 \text{ A}$$

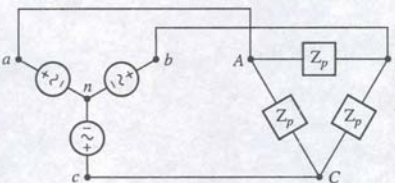
به همین ترتیب اندازه جریان بار خازنی با آن چه قبلاً دیدیم تفاوتی ندارد، زیرا ولتاژ دو سر آن ثابت باقی می‌ماند.

$$|I_2| = 2.89 \text{ A}$$

اگر نازی که با آن کار می‌کنیم زاویه  $0^\circ$  داشته باشد، آن گاه:

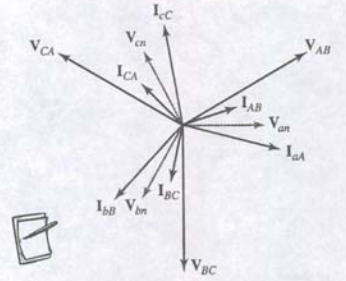


شکل ۱۲-۱۷ مدار تکفازی که برای تحلیل یک مثال سه فاز بالانس به کار رفته است.



شکل ۱۲-۱۸ یک بار Δ بالانس روی سیستم سه فاز سه سیم. منبع به شکل Y است.





شکل ۱۲-۱۹ نمودار فیزیکی که اگر  $Z_p$  یک امپدانس القایی باشد، قابل اعمال به مدار شکل ۱۸-۱۲ است.

## مثال ۱۲-۵

باز هم به خاطر داشته باشید که فرض بر این است تمام مقادیر ولتاژها و جریان‌ها rms می‌باشند.

چون با یک سیستم بالانس کار می‌کنیم. جریان‌های سه فاز دارای دامنه‌های برابری هستند.

$$I_p = |I_{AB}| = |I_{BC}| = |I_{CA}|$$

دامنه جریان‌های خط نیز برابرند. تقارن آن‌ها از روی نمودار فیزور شکل ۱۹-۱۲ آشکار است.

$$I_L = |I_{aA}| = |I_{bB}| = |I_{cC}|$$

و

$$I_L = \sqrt{3} I_p$$

بگذارید موقتاً منبع را کنار بگذاریم و فقط بار متعادل را بررسی کنیم. اگر بار با اتصال  $\Delta$  است، نمی‌توان ولتاژ فاز و ولتاژ خط را از هم تمیز داد، ولی جریان خط  $\sqrt{3}$  برابر جریان فاز است. با این وجود در اتصال Y هر دو جریان فاز و جریان خط یک مقدار دارند و ولتاژ خط  $\sqrt{3}$  برابر ولتاژ فاز است.

دامنه یک جریان خط در سیستم سه‌فازی با ولتاژ خط 300 V را معین کنید. این خط 1200 V را به بار  $\Delta$  در  $PF = 0.8$  پسمافز منتقل می‌کند.

بباید دوباره حالت تک‌فاز را بررسی کنیم. در این حالت بار، 400 W را در  $P = 0.8$  پسمافز از ولتاژ خط 300 V می‌کشد. بنابراین:

$$400 = 300(I_p)(0.8)$$

و

$$I_p = 1.667 \text{ A}$$

توجه داشته باشید که همه ولتاژها و جریان‌ها به rms فرض شده‌اند و رابطه بین جریان‌های فاز و جریان‌های خط برابر است با

$$I_L = \sqrt{3}(1.667) = 2.89 \text{ A}$$

به علاوه زاویه فاز بار برابر  $\cos^{-1}(0.8) = 36.9^\circ$  است و بنابراین امپدانس در هر فاز باید برای رابطه زیر باشد:

$$Z_p = \frac{300}{1.667} \angle 36.9^\circ = 180 \angle 36.9^\circ \Omega$$

## تمرین

۷-۱۳ هر فاز از یک بار  $\Delta$  متعادل از یک القاگر 0.2 H سری با ترکیبی از خازن  $5 \mu F$  و مقاومت  $200 \Omega$  تشکیل شده است. مقاومت خط را صفر و ولتاژ فاز را 200 V در  $\omega = 400 \text{ rad/s}$  فرض کنید. (الف) جریان فاز را پیدا کنید. (ب) جریان خط را پیدا کنید. (ج) کل توان جذب شده به وسیله بار را معین کنید.

جواب:  $A: 1.158, 2.01, 693 \text{ W}$

## مثال ۱۲-۶

دامنه جریان خط را در یک سیستم سه فاز با ولتاژ خط 300 V که 1200 W توان را به یک بار Y در  $P = 0.8$  پسمافز منتقل می‌کند، به دست آورید. (این همان مدار مثال ۵-۱۲ است ولی بار به شکل Y منتقل شده است).

بر اساس تک‌فاز، اکنون ولتاژ فاز  $V / \sqrt{3}$  و توان 400 W و  $P = 0.8$  پسمافز را داریم. بنابراین:

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}} (I_p)(0.8)$$

و

$$I_p = 2.89$$

یا

$$I_L = 2.89 \text{ A rms}$$

زاویه فاز بار مجدداً همان  $36.9^\circ$  است. بنابراین امپدانس هر فاز Y چنین خواهد بود.

$$Z_p = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89} \angle 36.9^\circ = 60 \angle 36.9^\circ \Omega$$

ضریب  $\sqrt{3}$  نه تنها کمیت‌های خط و فاز را به هم مرتبط می‌سازد بلکه در توان کشیده شده به وسیله هر بار سه فاز هم ظاهر می‌شود. اگر یک بار Y با زاویه ضریب توان  $\theta$  را فرض کنیم توان دریافتی به وسیله هر فاز برابر است با:

$$P_p = V_p I_p \cos \theta = V_p I_L \cos \theta = \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta$$

و توان کل برابر است با:

$$P = 3P_p = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

به طریق مشابه توان انتقالی در هر فاز به بار  $\Delta$  برابر است با:

$$P_p = V_p I_p \cos \theta = V_L I_p \cos \theta = V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta$$

و در نتیجه توان کل برابر است با:

$$P = 3P_p$$

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad (۴)$$

بنابراین معادله (۴) امکان محاسبه توان کل به بار متعادل را با آگاهی از اندازه ولتاژ خط، جریان خط و زاویه فاز امپدانس بار فراهم می‌سازد و اتصال Y با  $\Delta$  در آن نقشی ندارد. اکنون جریان خط در مثال ۵-۱۲ و ۶-۱۲ در دو گام ساده قابل محاسبه است:

$$1200 = \sqrt{3}(300)(I_L)(0.8)$$

بنابراین

$$I_L = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2.89 \text{ A}$$

مقایسه‌ای خلاصه از ولتاژهای فاز و خط و جریان‌های فاز و خط در جدول ۱-۱۲ هم برای بارهای Y و هم  $\Delta$  که به وسیله منبع سه فاز Y تغذیه شده‌اند، ارائه شده است.

جدول ۱-۱۲ مقایسه بارهای سه فاز اتصال ستاره (Y) و مثلث ( $\Delta$ ).  $V_p$  مقدار ولتاژ فاز و منبع اتصال ستاره (Y) است.

| توان در فاز | جریان خطی  | جریان فازی   | ولتاژ خطی  | ولتاژ فازی   | بار      |
|-------------|--|--|--|--|----------|
|             |  |  | $V_{AB} = V_{ab}$<br>$= (\sqrt{3}/30^\circ) V_{AN}$<br>$= \sqrt{3} V_p / 30^\circ$   | $V_{AB} = V_{ab}$<br>$= \sqrt{3} V_p / 30^\circ$   |          |
|             | $I_{aA} = I_{AN} = \frac{V_{AN}}{Z_p}$             | $I_{aA} = I_{AN} = \frac{V_{AN}}{Z_p}$             | $V_{BC} = V_{bc}$<br>$= (\sqrt{3}/30^\circ) V_{BN}$<br>$= \sqrt{3} V_p / -90^\circ$  | $V_{BC} = V_{bc}$<br>$= \sqrt{3} V_p / -90^\circ$  | Y        |
|             | $I_{bB} = I_{BN} = \frac{V_{BN}}{Z_p}$             | $I_{bB} = I_{BN} = \frac{V_{BN}}{Z_p}$             | $V_{CA} = V_{ca}$<br>$= (\sqrt{3}/30^\circ) V_{CN}$<br>$= \sqrt{3} V_p / -210^\circ$ | $V_{CA} = V_{ca}$<br>$= \sqrt{3} V_p / -210^\circ$ |          |
|             | $I_{cC} = I_{CN} = \frac{V_{CN}}{Z_p}$             | $I_{cC} = I_{CN} = \frac{V_{CN}}{Z_p}$             |  |  |          |
|             |  |  | $V_{AB} = V_{ab}$<br>$= \sqrt{3} V_p / 30^\circ$                                     | $V_{AB} = V_{ab}$<br>$= \sqrt{3} V_p / 30^\circ$   |          |
|             | $I_{aA} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{AB}}{Z_p}$ | $I_{aA} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{AB}}{Z_p}$ | $V_{BC} = V_{bc}$<br>$= \sqrt{3} V_p / -90^\circ$                                    | $V_{BC} = V_{bc}$<br>$= \sqrt{3} V_p / -90^\circ$  | $\Delta$ |
|             | $I_{bB} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{BC}}{Z_p}$ | $I_{bB} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{BC}}{Z_p}$ | $V_{CA} = V_{ca}$<br>$= \sqrt{3} V_p / -210^\circ$                                   | $V_{CA} = V_{ca}$<br>$= \sqrt{3} V_p / -210^\circ$ |          |
|             | $I_{cC} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{CA}}{Z_p}$ | $I_{cC} = (\sqrt{3}/-30^\circ) \frac{V_{CA}}{Z_p}$ |  |  |          |

۱۲-۸ یک سیستم سه فاز سه سیمه به دو بار موازی  $\Delta$  ختم شده است. بار 1، 40 kVA در  $PF = 0.8$  پسمافز می‌باشد. در حالی که بار 2، 24 kW را در  $PF = 0.8$  پیشفاز جذب می‌نماید. اگر مقاومتی در خط نباشد و  $V_{ab} = 440 \angle 30^\circ \text{ V}$  باشد، (الف) توان کل دریافتی به وسیله بارها چقدر است؟ (ب) جریان فاز  $I_{AB1}$  برای بار پسمافز چیست؟ (ج)  $I_{AB2}$ . (د)  $I_{aA}$

جواب: 56.0 kW،  $30.3 \angle -6.87^\circ \text{ A}$ ،  $20.2 \angle 55.8^\circ \text{ A}$ ،  $75.3 \angle -12.46^\circ \text{ A}$

## تمرین

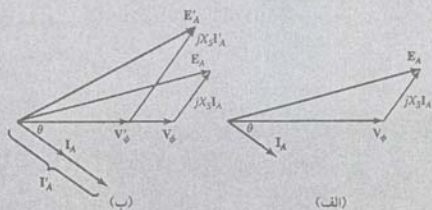


این نمودار ولتاژ - جریان خروجی یک ژنراتور تک فاز متصل به باری با ضریب توان  $\cos \theta$  را نشان می‌دهد. ولتاژ تولیدی داخلی  $E_A$  هم نشان داده شده است. اگر باری بدون تغییر ضریب توان اضافه گردد، شکل ۱۲-۲۲ (ب)، جریان  $I_A$  به  $I'_A$  افزایش می‌یابد. در این حالت اندازه ولتاژ تولیدی داخلی که از جمع فیזורی  $X_S I'_A$  و  $V_\phi$  به دست می‌آید باید بدون تغییر باقی بماند. بنابراین  $E'_A = E_A$  و ولتاژ خروجی  $(V_\phi)$  ژنراتور کمی کاهش می‌یابد. شکل ۱۲-۲۲ (ب).

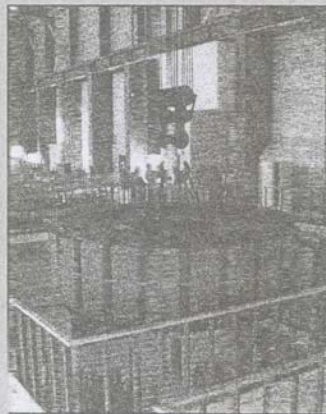
تثبیت ولتاژ یک ژنراتور با رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\% \text{ تثبیت} = \frac{V_{\text{کامل}} - V_{\text{بار}}}{V_{\text{کامل}}} \times 100$$

به‌طور ایده‌آل این مقدار واحد ممکن باید به صفر نزدیک باشد، ولی تنها در شرایطی امکان‌پذیر است که جریان  $dc$  به‌کار رفته برای کنترل شار  $\phi$  حول سیم‌پیچ میدان تغییر کند، تا هرگونه تغییر بار را جبران نماید. این کار چندان ساده نیست. به این دلیل، هنگام طراحی یک نیروگاه، ساخت چند ژنراتور کوچک بر یک ژنراتور بزرگ که قادر به تحمل بار بیک باشد، ترجیح داده می‌شود. هر ژنراتور می‌تواند در نزدیکی بار کامل کار کند تا ولتاژ خروجی اساساً ثابت بماند. می‌توان برحسب تقاضای مشتریان تک‌تک ژنراتورها را حذف و یا وارد مدار کرد.



شکل ۱۲-۲۲ نمودار فیזורی که تأثیر بار را روی یک ژنراتور همزمان نشان می‌دهد. (الف) ژنراتور به باری با ضریب توان پسفاز  $\cos \theta$  متصل است. (ب) باری بدون تغییر ضریب توان اضافه شده است. اندازه ولتاژ تولید درونی  $E_A$  ثابت است ولی جریان خروجی افزایش می‌یابد. بنابراین ولتاژ خروجی  $V_\phi$  کاهش خواهد یافت.



شکل ۱۲-۲۳ روتور ۲۴ قطبی.

دیمراند واقعی از یک مولد، به شدت به نوع بار اضافه شده یا حذف شده مانند نهی مطبوع و روشنائی وابسته است. به‌طور ایده‌آل ولتاژ خروجی مولد یا ژنراتور باید مستقل از بار باشد ولی عملاً چنین نیست. ولتاژ  $E_A$  الیه شده در هر فاز استاتور که غالباً به آن ولتاژ تولیدی داخلی می‌گویند دارای اندازه زیر است:

$$E_A = \omega \phi$$

که  $K$  به ماحول ماشین وابسته است،  $\phi$  شار مغناطیسی تولید شده به وسیله میدان سیم‌پیچ‌های روتور (بنابراین به بار وابسته نیست) و  $\omega$  سرعت دوران است و فقط به محرک اصلی وابسته است. به ژنراتور وابسته است. تغییر بار اندازه  $E_A$  را تغییر نمی‌دهد. ولتاژ تولید شده داخلی را می‌توان به ولتاژ فاز  $V_\phi$  و جریان فاز  $I_A$  با رابطه زیر مرتبط کرد:

$$E_A = V_\phi + jX_S I_A$$

که  $X_S$  راکتانس سنکرون ژنراتور است. اگر بار افزایش یابد، آنگاه جریان ژنراتور از ژنراتور کشیده می‌شود اگر ضریب توان تغییر نکند. مثلاً از ولتاژ بین  $V_\phi$  و  $I_A$  ثابت بماند،  $V_\phi$  کاهش می‌یابد زیرا  $E_A$  نمی‌تواند تغییر کند. مثلاً نمودار فیזורی شکل ۱۲-۲۳ (الف) را در نظر بگیرید.

## منابع با اتصال $\Delta$

منبع را هم می‌توان به فرم  $\Delta$  به هم متصل کرد. البته این روش مرسوم نیست زیرا هر وضعیت نامتعادل در فازهای منابع می‌تواند منجر به چرخش جریانی قابل توجه در حلقه  $\Delta$  گردد. مثلاً سه منبع تک فاز  $V_{ab}$ ،  $V_{bc}$  و  $V_{ca}$  را در نظر بگیرید. قبل از بستن  $\Delta$  که با اتصال  $d$  به  $a$  صورت می‌گیرد، وضعیت نامتعادل را به جمع  $V_{ab} + V_{bc} + V_{ca}$  معین می‌کنیم. فرض کنید دامنه نتیجه تنها ۱ درصد ولتاژ خط باشد، بنابراین جریان چرخشی تقریباً  $\frac{1}{3}$  درصد ولتاژ خط تقسیم بر امپدانس هر منبع است. این امپدانس چقدر می‌تواند باشد؟ این امپدانس به جریانی که منبع می‌تواند بدهد، بستگی دارد که البته مختصراً در ولتاژ پایانه خواهد داشت. اگر این حداکثر جریان ۱ درصد افت را در ولتاژ پایانه موجب شود، آنگاه جریان چرخشی یک سوم جریان ماکزیمم است! پس توانایی منبع در تأمین جریان کم - تلفات داخلی آن زیاد خواهد شد. همچنین باید توجه کرد که منابع سه فاز متعادل را از  $Y$  به  $\Delta$  یا برعکس بدون تأثیر بر جریان‌ها یا ولتاژهای بار می‌توان تبدیل نمود. روابط لازم بین ولتاژهای خط و فاز برای حالتی که  $V_{an}$  دارای زاویه فاز مرجع  $0^\circ$  است، در شکل ۱۲-۱۳ دیده می‌شود. این تبدیل اجازه می‌دهد تا هر اتصال منبعی را که ترجیح می‌دهیم انتخاب کنیم. البته تا زمانی که اتصال را ندانیم، نمی‌توانیم جریان‌ها و ولتاژهای منبع را مشخص کنیم. بارهای سه‌فاز را می‌توان با استفاده از رابطه زیر از  $\Delta$  به  $Y$  تبدیل نمود.

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$$



که حفظ کردن آن ارزشمند است.

## کاربرد عملی

### سیستم‌های مولد توان الکتریکی

در تولید توان الکتریکی از تکنیک‌های متنوعی می‌توان استفاده کرد. مثلاً تبدیل مستقیم انرژی خورشید به الکتریسیته با سلول خورشیدی تولید توان  $dc$  می‌کند. با این وجود علیرغم وجود یک تکنولوژی ساده در این تکنیک تأسیسات مبتنی بر سلول خورشیدی فعلاً از دیگر روش‌های تولید الکتریسیته خیلی گران‌تر بوده و به مبدلهایی برای تبدیل از  $dc$  به  $ac$  نیاز دارند. دیگر تکنولوژی‌ها مانند ژنراتورهای مبتنی بر توربین‌های بادی، حرارت حاصل از گرمای زمین، هیدروپتانیک، هسته‌ای و سوخت فسیلی بسیار اقتصادی‌ترند. در این سیستم‌ها شفتی از طریق محرک صلی مثل پره‌های بادی یا توربین آبی یا بخاری روی تیغه‌های توربین می‌چرخد (شکل ۱۲-۲۰).



شکل ۱۲-۲۰ تأسیسات انرژی بادی در کالیفرنیا که از ۲۰۰۰ یستگاه تشکیل شده است.

## ۱۲-۵ اندازه‌گیری توان در سیستم‌های سه‌فاز

### کاربرد واتمتر

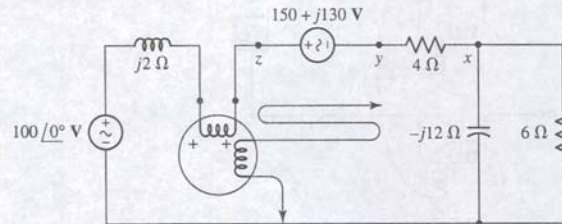
قبل از آغاز بحث در مورد تکنیک‌های خاص به کار رفته برای اندازه‌گیری توان سیستم‌های سه‌فاز، بهتر است باید چگونگی کار و مترکه در مدار تک‌فاز به کار می‌رود را مطالعه کنیم. اندازه‌گیری توان با وات‌مترهایی که دو سیم‌پیچ جدا دارند، معمولاً در فرکانس‌هایی کمتر از چند صد  $Hz$  انجام می‌شود. یکی از آن‌ها از سیم‌های ضخیم با مقاومت خیلی کم، ساخته



## تمرین

۱۲-۹ قرائت وات متر در شکل ۱۲-۲۴ را معین کنید. بگویید برای قرائت مثبت باید سیم پیچ پتانسیل را معکوس کرد یا خیر. سپس وسیله یا وسایلی که این انرژی را جذب یا تولید می کند، مشخص نمایید. پایانه (+) وات متر متصل به (الف) X، (ب) Y و (ج) Z وصل است.

شکل ۱۲-۲۴

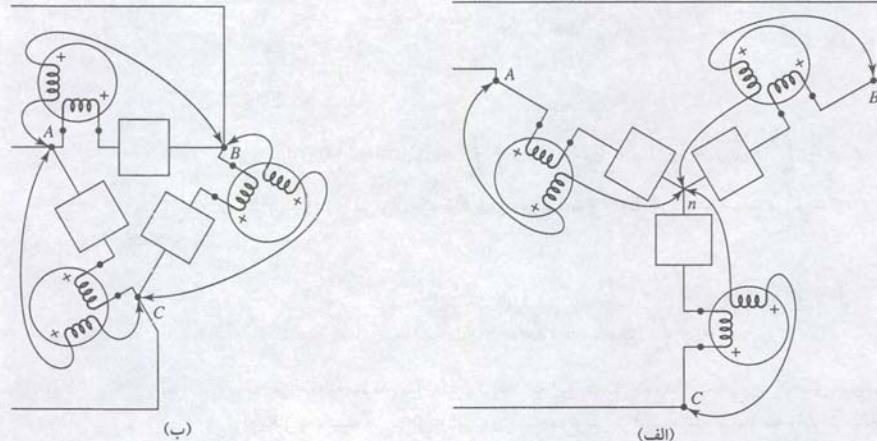


جواب: 1200 W همان طور که هست،  $P_{6\Omega}$  (مصرف)، 2200 W همان طور که هست  $P_{4\Omega} + P_{6\Omega}$  (مصرف)، 500 W عوض شود؛ مصرفی به وسیله 100 V (مصرف).

## وات متر در سیستم سه فاز

۱. نگاه اول، اندازه گیری توان مصرف شده به وسیله بار سه فاز ساده به نظر می رسد. کافی است در هر فاز تنها یک وات متر مستقر کنیم و نتایج را به هم بیفزاییم. مثلاً، یک اتصال صحیح برای اتصال Y بار در شکل ۱۲-۲۵ (الف) نشان داده شده است. هر وات متر سیم پیچ جریان خود را در یک فاز بار قرار داده و سیم پیچ پتانسیل خود را هم بین بار و سیم ختئی مستقر کرده است. به روشی مشابه، سه وات متر را می توان مثل شکل ۱۲-۲۵ (ب) بست تا توان کل دریافتی به وسیله بار  $\Delta$  اندازه گیری شود. روش ها از لحاظ تئوری صحیح اند، ولی در عمل قابل پیاده سازی نیستند، زیرا سیم ختئی در Y همیشه قابل دسترسی نیست و فازها هم در  $\Delta$  در دسترس نمی باشند. مثلاً یک ماشین چرخان سه فاز فقط سه پایانه قابل دسترسی دارد، که ما آن ها را A، B و C می خوانیم. واضح است که به روشی برای اندازه گیری توان کل جذبی به وسیله بار سه فاز با سه پایانه ابل دسترسی نیاز است. اندازه گیری ها ممکن است در سمت منبع صورت گیرد و نه در سمت بار.

شکل ۱۲-۲۵ سه وات متر طوری وصل شده اند که توانی جذبی به وسیله یکی از بارهای سه فاز را بخواند و جمع سه اندازه گیری توان کل است. (الف) یک بار Y، (ب) یک بار  $\Delta$ . هیچ یک از بارها یا منابع نیازی به بالانس بودن ندارند.



شده و سیم پیچ جریان نام دارد. دیگری از تعداد دورهای بیشتر و سیمی نازک تر با مقاومت نسبتاً زیاد ساخته شده و سیم پیچ پتانسیل یا ولتاژ خوانده می شود. می توان مقاومتی اضافه را هم در داخل یا خارج با سیم پیچ سری کرد. گشتاور اعمال شده بر سیستم متحرک و عقربه متناسب با حاصل ضرب لحظه ای جریان در دو سیم پیچ است. به هر حال ماندگاری مکانیکی سیستم متحرک موجب انحراف عقربه متناسب با مقدار متوسط این گشتاور می گردد. طریقه اتصال وات متر به شبکه طوری است که جریان عبوری از وات متر همان جریان شبکه و ولتاژ روی سیم پیچ با ولتاژ دوسر پایانه های شبکه برابر است. جریان در سیم پیچ پتانسیل از تقسیم ولتاژ ورودی بر مقاومت سیم پیچ حاصل می گردد.

واضح است که وات متر چهار پایانه دارد و اتصال به این پایانه ها باید به طور صحیحی صورت گیرد تا امکان خواندن فراهم گردد. دقیق تر بگوییم، فرض کنید که می خواهیم توان جذب شده به وسیله یک شبکه غیر فعال را اندازه بگیریم. سیم پیچ جریان با یکی از دو سیم متصل به بار سری می شود و سیم پیچ پتانسیل بین دو سیم معمولاً در سمت بار سیم پیچ جریان قرار می گیرد. پایانه های سیم پیچ پتانسیل اغلب طبق شکل ۱۲-۲۳ (الف) با پیکان نشان داده می شوند. هر سیم پیچ دو پایانه دارد و رابطه صحیحی بین حس جریان و ولتاژ باید مشاهده گردد. انتهای هر سیم پیچ معمولاً با (+) علامت زده می شود و خواندن صحیح هنگامی امکان پذیر است که جریان مثبت وارد پایانه (+) سیم پیچ جریان گردد، ضمن این که پایانه (+) سیم پیچ پتانسیل نسبت به پایانه بی علامت مثبت است. پس وات متر شکل ۱۲-۲۳ (الف) هنگام جذب توان به وسیله شبکه سمت راست، انحرافی صحیح و افزاینده خواهد داشت. اگر فقط یکی از سیم پیچ ها معکوس گردد، و نه هر دوی آن ها، موجب انحراف معکوس عقربه می شود. معکوس کردن هر دو سیم پیچ تأثیری بر خواندن ندارد. بیایید به عنوان مثالی از کاربرد چنین وات متری در اندازه گیری توان متوسط، مدار شکل ۱۲-۲۳ (ب) را بررسی کنیم. اتصال وات متر طوری است که توان جذب شده در سمت راست وات متر، یعنی منبع سمت راست در جهت افزایشی خوانده شود. توان جذب شده به وسیله این منبع با رابطه زیر داده می شود:

$$P = |V_2| |I| \cos(\text{ang } V_2 - \text{ang } I)$$

با روش تجمیع یا تحلیل تک حلقه، جریان را به دست می آوریم.

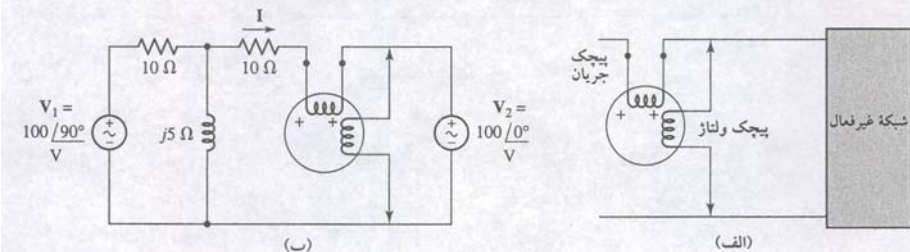
$$I = 11.18 \angle 153.4^\circ \text{ A}$$

و بنابراین توان جذب شده برابر است با:

$$P = (100)(11.18) \cos(0^\circ - 153.4^\circ) = -1000 \text{ W}$$

بنابراین عقربه اندازه گیری به سمت پایین منحرف می شود تا جایی که متوقف گردد. در عمل تعویض سیم پیچ پتانسیل راحت تر از سیم پیچ جریان صورت می گیرد. این عمل خواندن 1000 W را به همراه دارد.

شکل ۱۲-۲۳ (الف) اتصال وات متر که هنگام خواندن توان جذب شده شبکه عقربه آن در جهت افزاینده حرکت می کند. (ب) مثالی از نصب وات متر برای خواندن توان جذب شده به وسیله منبع سمت راست.





اجازه دهید این روال را قبل از این که بدانیم وات مترها در واقع بیش از نیازند، بررسی کنیم. فرض می‌کنیم منبع متعادل یا بالانس باشد:

$$V_{ab} = 100 \angle 0^\circ \quad V$$

$$V_{bc} = 100 \angle -120^\circ \quad V$$

$$V_{ca} = 100 \angle -240^\circ \quad V$$

$$V_{an} = \frac{100}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \quad V$$

$$V_{bn} = \frac{100}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ \quad V$$

$$V_{cn} = \frac{100}{\sqrt{3}} \angle -270^\circ \quad V$$

یا

برای بار نامتعادل داریم:

$$Z_A = -j 10 \Omega \quad Z_B = j 10 \Omega \quad Z_C = 10 \Omega$$

اکنون وات مترها را ایده‌آل تصور کنید که طبق شکل ۱۲-۲۶ وصل شده و نقطه x آن روی n قرار دارد. جریان‌های سه خط از تحلیل حلقه به دست می‌آید:

$$I_{aA} = 19.32 \angle 15^\circ \quad A$$

$$I_{bB} = 19.32 \angle 165^\circ \quad A$$

$$I_{cC} = 10 \angle -90^\circ \quad A$$

ولتاژ بین سیم‌های خنثی برابر است با

$$V_{nN} = V_{nb} + V_{BN} = V_{nb} + I_{bB}(j10) = 157.7 \angle -90^\circ$$

توان متوسطی که هر وات متر مشخص می‌کند را می‌توان محاسبه کرد:

$$P_A = V_P I_{aA} \cos(\text{ang } V_{an} - \text{ang } I_{aA})$$

$$P_A = \frac{100}{\sqrt{3}} 19.32 \cos(-30^\circ - 15^\circ) = 788.7 \text{ W}$$

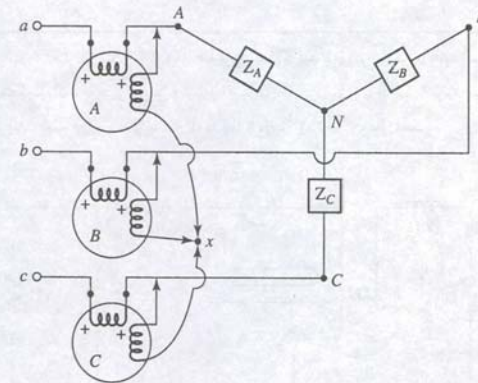
$$P_B = \frac{100}{\sqrt{3}} 19.32 \cos(-150^\circ - 165^\circ) = 788.7 \text{ W}$$

$$P_C = \frac{100}{\sqrt{3}} 10 \cos(-270^\circ + 90^\circ) = -577.4 \text{ W}$$

پس کل توان 1 kW است. چون یک جریان A rms از 10 از مقاومت بار می‌گذرد، توان کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = 10^2(10) = 1 \text{ kW}$$

و به این وسیله هر دو روش با یکدیگر همخوانی دارد.



شکل ۱۲-۲۶ روش اتصال وات مترها برای اندازه‌گیری کل توان مصرفی به وسیله بار سه فاز. تنها سه پایانه بار قابل دسترس اند.

چنین روشی وجود دارد و با آن می‌توان توان دریافتی به وسیله یک بار نامتعادل از یک منبع نامتعادل را اندازه گرفت. اکنون بیایید سه وات متر را طوری وصل کنیم که هر یک از سیم‌پیچ‌های جریان به یک سیم منبع و سیم‌پیچ ولتاژ بین آن خط و نقطه مشترک x، طبق شکل ۱۲-۲۶ باشد. گرچه یک سیستم با اتصال بار Y تشریح شده است، بحث ارائه شده برای بار Δ هم معتبر است. نقطه x ممکن است یک نقطه نامشخص در سیستم سه فاز باشد، یا صرفاً نقطه‌ای در فضا باشد که در آن هر سه سیم‌پیچ پتانسیل گره مشترکی دارند. توان متوسط اندازه‌گیری شده با وات متر A برابر است با:

$$P_A = \frac{1}{T} \int_0^T v_{Ax} i_{aA} dt$$

که در آن T تناوب همه ولتاژهای منابع است. اندازه‌گیری در وات متر دیگر با عبارتی مشابه داده می‌شود. بنابراین توان متوسط کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = P_A + P_B + P_C = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{Ax} i_{aA} + v_{Bx} i_{bB} + v_{Cx} i_{cC}) dt$$

هر یک از سه ولتاژ در عبارت فوق را می‌توان برحسب یک ولتاژ فاز و ولتاژ بین نقطه x و خط خنثی نوشت:

$$v_{Ax} = v_{AN} + v_{Nx}$$

$$v_{Bx} = v_{BN} + v_{Nx}$$

$$v_{Cx} = v_{CN} + v_{Nx}$$

و بنابراین

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_{Nx} (i_{aA} + i_{bB} + i_{cC}) dt$$

کل بار سه فاز را می‌توان یک ابرگره در نظر گرفت و قانون جریان کیرشهف می‌گوید که:

$$i_{aA} + i_{bB} + i_{cC} = 0$$

پس

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC}) dt$$

مراجعه به نمودار مدار نشان می‌دهد که این حاصل جمع‌ها، مجموع توان‌های متوسط دریافتی به وسیله هر فاز از بار است و لذا مجموع مقادیر قرائت شده توسط سه وات متر بیانگر توان متوسط کل دریافتی به وسیله بار کل است!



## روش دو وات متری

نشان دادیم که نقطه  $X$ ، یعنی اتصال مشترک سه سیم پیچ پتانسیل هر جایی که بخواهیم می تواند باشد، بدون این که جمع جبری مقادیر قرائت شده با وات مترها را تحت تأثیر قرار دهد. اکنون بگذارید اثر استقرار نقطه  $X$  را روی یکی از سه خط منبع بررسی کنیم. مثلاً اگر یکی از دو انتهای هر سیم پیچ پتانسیل به  $B$  بازگردانده شود، ولتاژی در دو سر سیم پیچ پتانسیل وات متر  $B$  وجود ندارد و این وات متر باید عدد صفر را بخواند. بنابراین می توان آن را حذف کرد ولی جمع جبری در وات متر دیگر هنوز توان کل دریافتی به وسیله بار است. وقتی محل  $X$  به این طریق انتخاب گردد، روش را روش دو وات متر می نامیم. مجموع دو اندازه گیری توان کل را مشخص می کند و این مستقل از (۱) بار نامتعادل (۲) منبع نامتعادل (۳) اختلاف در دو وات متر و (۴) شکل موج منبع متناوب است. تنها فرضی که نمودیم این بود که اصلاح وات متر به اندازه کافی کوچک است و می توان از آن چشم پوشید. مثلاً در شکل ۱۲-۲۶، از سیم پیچ جریان هر وات متر جریان منبع عبور کرده و به وسیله بار به علاوه سیم پیچ ولتاژ کشیده می شود. چون جریان آخری خیلی کوچک است، اثر آن را می توان با آگاهی از مقاومت سیم پیچ پتانسیل و ولتاژ دو سرش، مشخص کرد. با این دو کمیت می توان توان تلف شده در سیم پیچ ولتاژ را به خوبی تخمین زد.

در مثال عددی فوق، اکنون بیایید فرض کنیم که دو وات متر به کار رفته است، یکی با سیم پیچ جریان در خط  $a$  و سیم پیچ پتانسیل در بین خطوط  $A$  و  $B$  و دیگری با سیم پیچ جریان در خط  $c$  و سیم پیچ ولتاژ بین  $C$  و  $B$ . وات متر اول چنین می خواند:

$$\begin{aligned} P_1 &= V_{AB} I_{aA} \cos(\text{ang } V_{AB} - \text{ang } I_{aA}) \\ &= 100 (19.32) \cos(0^\circ - 15^\circ) \\ &= 1866 \text{ W} \end{aligned}$$

و دومی چنین قرائت می کند:

$$\begin{aligned} P_2 &= V_{CB} I_{cC} \cos(\text{ang } V_{CB} - \text{ang } I_{cC}) \\ &= 100 (10) \cos(60^\circ + 50^\circ) \\ &= -866 \text{ W} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$P = P_1 + P_2 = 1866 - 866 = 1000 \text{ W}$$

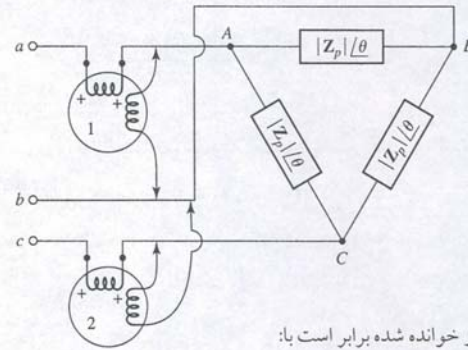
و این همان چیزی است که از مدار انتظار داریم.

در حالت بار متعادل، روش دو وات متر اجازه می دهد تا زاویه  $\text{PF}$  و نیز توان دریافتی به وسیله بار مشخص شود. بیایید باری امپدانس را با زاویه فاز  $\theta$  فرض کنیم. هر یک از دو اتصال  $Y$  یا  $\Delta$  می تواند به کار رود ولی ما اتصال  $\Delta$  را طبق شکل ۱۲-۲۷ برمی گزینیم، ساخت یک نمودار فیزیوری مثل شکل ۱۲-۱۹، تعیین زاویه فاز بین ولتاژها و جریان های خط را امکان پذیر می سازد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} P_1 &= |V_{AB}| |I_{aA}| \cos(\text{ang } V_{AB} - \text{ang } I_{aA}) \\ &= V_L L_L \cos(30^\circ + \theta) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} P_2 &= |V_{CB}| |I_{cC}| \cos(\text{ang } V_{CB} - \text{ang } I_{cC}) \\ &= V_L L_L \cos(30^\circ - \theta) \end{aligned}$$



نسبت دو مقدار خوانده شده برابر است با:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos(30^\circ + \theta)}{\cos(30^\circ - \theta)} \quad (5)$$

اگر جملات کسینوس را بسط دهیم، این معادله برای  $\tan \theta$  به راحتی حل می گردد.

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \quad (6)$$

گر قرائت دو وات متر مساوی باشند،  $\text{PF} = 1$  است، در خواندن مساوی با علامت مخالف، نوع بار راکتیو خالص است،  $P_2$  بزرگتر از  $P_1$  امپدانس القایی و  $P_2$  کوچکتر از  $P_1$  نیز بار خازنی را نشان می دهد. چگونه بدانیم که کدام وات متر  $P_1$  و کدام  $P_2$  است؟ می دانیم که  $P_1$  در خط  $A$  و  $P_2$  در خط  $C$  است و ترتیب فاز سیستم به نحوی است که  $V_{an}$  نسبت به  $V_{cn}$  پس فاز است. برای تفکیک این دو وات متر همین اطلاعات کافی است، ولی در عمل موجب اشتباه می شود. اگر حتی موفق به تفکیک آن دو نشویم، اندازه زاویه فاز را می دانیم ولی علامت آن را می دانیم. غالباً این اطلاعات کافی است، اگر بار یک موتور القایی باشد، زاویه باید مثبت باشد. دیگر دانستن این که کدام وات متر کدام است، لازم نیست. اگر اطلاعات قبلی راجع به بار داریم، آن گاه چند روش برای رفع شبهات وجود دارد. شاید که ساده ترین راه افزودن یک بار آکتیو امپدانس بالا مثلاً خازن سه فاز در دو سر بار مجهول باشد. در این حال بار خازنی تر می شود. بنابراین اگر اندازه  $\tan \theta$  (یا اندازه  $\theta$ ) کاهش یابد، آن گاه بار القایی است، در حالی که افزایش در اندازه  $\tan \theta$  بیانگر وجود بار خازنی است.

ار متعادل شکل ۱۲-۲۸ به وسیله یک سیستم سه فاز متعادل با  $V_{ab} = 230 \angle 0^\circ \text{ V rms}$  تغذیه و ترتیب فاز مثبت اختیار شده است. مقدار قرائت شده به وسیله هر وات متر و توان کل دریافتی به وسیله بار را مشخص نمایید.

سیم پیچ ولتاژ وات متر شماره ۱ برای اندازه گیری ولتاژ  $V_{ac}$  و سیم پیچ جریان آن برای اندازه گیری فاز جریان  $I_{aA}$  به کار رفته است. چون ترتیب فاز مثبت به کار رفته است، پس:

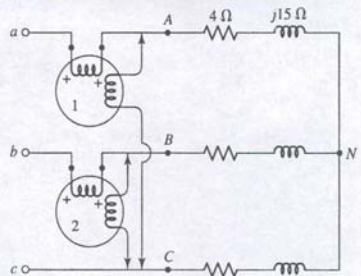
$$\begin{aligned} V_{ab} &= 230 \angle 0^\circ \text{ V} \\ V_{bc} &= 230 \angle -120^\circ \text{ V} \\ V_{ca} &= 230 \angle 120^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

وجه کنید که  $V_{ac} = -V_{ca} = 230 \angle -60^\circ \text{ V}$  است.

شکل ۱۲-۲۷ دو وات متر برای خواندن توان کل دریافتی به وسیله بار سه فاز متعادل، وصل شده اند.



مثال ۱۲-۷



شکل ۱۲-۲۸ یک سیستم بالانس سه فاز متصل به یک بار سه فاز بالانس که توان آن با تفکیک دو وات متر اندازه گیری می شود.



جریان فاز  $I_{aA}$  از ولتاژ فاز  $V_{an}$  تقسیم بر امپدانس فاز  $4 + j15 \Omega$  به دست می‌آید:

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{4 + j15} = \frac{(230/\sqrt{3}) \angle -30^\circ}{4 + j15} A$$

$$= 8.554 \angle -105.1^\circ A$$

بنابراین می‌توانیم توان قرائت شده به وسیله وات‌متر 1 را به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$P_1 = |V_{ac}| |I_{aA}| \cos(\text{ang } V_{ac} - \text{ang } I_{aA})$$

$$= (230)(8.554) \cos (-60^\circ + 105.1^\circ) W$$

$$= 1389 W$$

به همین ترتیب داریم:

$$P_2 = |V_{bc}| |I_{bB}| \cos(\text{ang } V_{bc} - \text{ang } I_{bB})$$

$$= (230)(8.554) \cos (-120^\circ - 134.9.1^\circ) W$$

$$= -512.5 W$$

بنابراین توان متوسط کل جذب شده به وسیله بار برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 = 876.5 W$$

## تمرین

۱۲-۱۰ برای مدار شکل ۱۲-۲۶، فرض کنید بارهای  $Z_B = 50 \angle 60^\circ \Omega$ ،  $Z_A = 25 \angle 60^\circ \Omega$  و  $Z_C = 50 \angle 60^\circ \Omega$  rms و  $V_{AB} = 600 \angle 0^\circ$  به‌علاوه ترتیب فاز مثبت و نقطه x در C باشد. (الف)  $P_A$ ، (ب)  $P_B$ ، (ج)  $P_C$ .

جواب: 0، 7200 W، 0

## ۱۲-۶ خلاصه فصل و مرور

- بخش عمده تولید الکتریسیته به فرم توان سه فاز است.
- برق منازل مسکونی به فرم جریان متناوب با فرکانس 60 Hz و ولتاژ 115 rms است.
- منابع سه فاز می‌توانند به صورت Y یا  $\Delta$  متصل شوند. هر دو نوع منبع سه پایانه دارند و هر یک متعلق به یک فاز است. منابع Y یک سیم اتصال خنثی نیز دارند.
- در یک سیستم متعادل سه‌فاز، تمام ولتاژها با هم برابرند، ولی هر یک با دو فاز دیگر  $120^\circ$  اختلاف فاز دارد.
- بار در یک سیستم سه فاز ممکن است به فرم Y یا  $\Delta$  باشد.
- در یک منبع متعادل با اتصال Y و ترتیب فاز مثبت  $(abc)$ ، ولتاژ خط برابر است با:

$$V_{ab} = \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ \quad V_{bc} = \sqrt{3}V_p \angle -90^\circ$$

$$V_{ca} = \sqrt{3}V_p \angle -210^\circ$$

و ولتاژ هر فاز برابر است با:

$$V_{an} = V_p \angle 0^\circ \quad V_{bn} = V_p \angle -120^\circ \quad V_{cn} = V_p \angle -240^\circ$$

- در یک سیستم با بار Y، جریان‌های منبع با جریان‌های فاز برابرند.
- در اتصال  $\Delta$  منبع، ولتاژهای خط با ولتاژهای فاز برابر است.
- در یک سیستم متعادل با ترتیب فاز مثبت و یک بار  $\Delta$  متعادل، جریان‌های خط عبارت‌اند از:

$$I_a = I_{AB} \sqrt{3} \angle -30^\circ \quad I_b = I_{BC} \sqrt{3} \angle -150^\circ \quad I_c = I_{CA} \sqrt{3} \angle +90^\circ$$

و جریان‌های فاز عبارت‌اند از:

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{\Delta}} = \frac{V_{ab}}{Z_{\Delta}} \quad I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_{\Delta}} = \frac{V_{bc}}{Z_{\Delta}} \quad I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_{\Delta}} = \frac{V_{ca}}{Z_{\Delta}}$$

- بیشتر محاسبات توان بر مبنای تک‌فاز انجام می‌شود و فرض بر این است که سیستم متعادل است. در غیر این صورت تحلیل گره‌ای / حلقه‌ای، روشی معتبر خواهد بود.
- توان در یک سیستم سه فاز (بالانس یا غیربالانس) تنها با دو وات‌متر اندازه‌گیری می‌شود.
- توان لحظه‌ای در هر سیستم سه فاز بالانس ثابت است.

## ۱۲-۷ خواندنی‌های کمکی

A good overview of ac power concepts can be found in Chap. 2 of:

B.M. Weedy, *Electric Power Systems*, 3<sup>rd</sup> ed. Chichester, England: Wiley, 1984.

A comprehensive book on generation of electrical power from wind is:

T. Burton, D. Sharpe, N. Jenkins, and E. Bossanyi, *Wind Energy Handbook*. Chichester, England: Wiley, 2001.

## مسائل

### ۱۲-۲ سیستم‌های چندفاز

۱. مداری که در آزمایشگاهی ساخته شده با ولت‌متر اندازه‌گیری و نتایج زیر حاصل شده است:

$$V_{ce} = 10 V \quad V_{bc} = 0.7 V$$

مطلوب است  $V_{cb}$ ،  $V_{eb}$ ،  $V_{bc}$ .

۲. یک تقویت‌کننده ترانزیستوری اثر میدان سورس مشترک با SPICE شبیه‌سازی شده است. الف. اگر  $V_{gs} = -1 V$  و  $V_{ds} = 5 V$  باشد،  $V_{gd}$  را پیدا کنید. ب. اگر  $V_{ds} = 4 V$  و  $V_{gd} = 2.5 V$  باشد،  $V_{sg}$  را به دست آورید.

۳. یک سیستم قدرت (توان) شش فاز به صورت بخشی از منبع تغذیه dc جریان بالا ساخته شده است. ولتاژهای فاز را برای (الف) ترتیب فاز مثبت (ب) ترتیب فاز منفی بنویسید.

۴. اگر  $V_{xy} = 110 \angle 20^\circ V$  و  $V_{xz} = 160 \angle -50^\circ V$  و  $V_{ay} = 80 \angle 130^\circ V$  باشد، مطلوب است (الف)  $V_{yz}$ ، (ب)  $V_{az}$ ، (ج)  $V_{zx} / V_{xy}$ .

۵. برای مداری خاص، می‌دانیم که  $V_{12} = 100 \angle 0^\circ$  و  $V_{45} = 60 \angle 75^\circ$ ،  $V_{42} = 80 \angle 120^\circ$  و  $V_{35} = -j120$  است. مطلوب است (الف)  $V_{25}$ ، (ب)  $V_{13}$ .

۶. در یک سیستم ac خاص،  $V_{12} = 9 \angle 87^\circ V$  و  $V_{23} = 8 \angle 45^\circ V$  است. مطلوبست (الف)  $V_{21}$ ، (ب)  $V_{32}$  و (ج)  $V_{12} - V_{32}$ .

۷. یک سیستم قدرت دارای  $V_{an} = 400 \angle -45^\circ V$  و  $V_{bn} = 400 \angle 75^\circ V$  است. (الف) نمودار فیزیوری شامل  $V_{cn}$  را ترسیم نمایید. (ب) آیا رشته فاز سیستم مثبت است یا منفی؟ توضیح دهید.

۸. با فرض  $I_{12} = 33 \angle 12^\circ A$  و  $I_{23} = 40 \angle 12^\circ A$ ، جریان  $I_{31}$  چند است؟

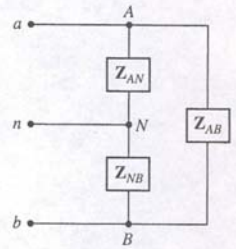
۹. اگر یک مدار ac دارای جریان‌های  $I_{12} = 5 \angle 55^\circ A$  و  $I_{23} = 4 \angle 33^\circ A$  باشد،  $I_{31}$  برای فرکانس 50 Hz چقدر است؟

### ۱۲-۲ سیستم‌های تک‌فاز سه سیم

۱۰. یک سیستم سه سیمه  $230/460 V$  rms، 60 Hz در شکل ۱۲-۲۹ دیده می‌شود که سه بار را تغذیه می‌کند: بار AN توان مختلط kVA  $40 \angle 40^\circ$  را می‌کشد، بار NB،  $8 \angle 10^\circ kVA$  مصرف می‌کند و بار AB،  $4 \angle -80^\circ$  را دریافت می‌نماید. دو جریان خط و جریان سیم خنثی را پیدا کنید.

۱۱. یک سیستم یک فاز سه سیم بارهای  $Z_{AN} = Z_{NB} = 10 \Omega$  و بار  $Z_{AB} = 16 + j2 \Omega$  را دارد. فرض می‌شود که هر سه خط فاقد مقاومت باشد، فرض کنید  $V_{an} = V_{nb} = 120 \angle 0^\circ V$  باشد، مطلوب است (الف)  $I_{aA}$  و  $I_{nN}$ ، (ب) با اتصال یک مقاومت  $10 \Omega$  دیگر که موازی Z است، سیستم از حالت تعادل خارج می‌شود. مطلوب است  $I_{bB}$ ،  $I_{aA}$  و  $I_{nN}$ .

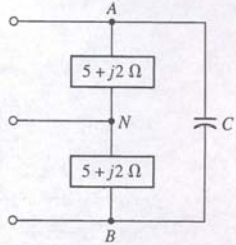




شکل ۱۲-۲۹

۱۲. یک سیستم کم بازده تک‌فاز سه سیم دارای ولتاژهای منبع  $V_{an} = V_{nb} = 720 \angle 0^\circ \text{ V}$  و مقاومت خط  $R_{nN} = 10 \Omega$  و بارهای  $R_{aA} = R_{bB} = 1 \Omega$ ،  $Z_{AN} = 10 + j3 \Omega$  و  $Z_{NB} = 8 + j2 \Omega$  و  $Z_{AB} = 18 + j0 \Omega$  است. مطلوب است (الف)  $I_{aA}$ ، (ب)  $I_{nN}$ ، (ج)  $P$  سیم‌ها، (د)  $P$  کل بارها.

۱۳. در یک سیستم تک‌فاز سه سیم متعادل شکل ۱۲.۲۰،  $V_{AN} = 220 \text{ V}$ ،  $60 \text{ Hz}$  است. (الف) سائز  $C$  چه باید باشد تا ضریب توان بار واحد گردد؟ (ب) چند  $k\text{ VA}$  را تحمل می‌کند.

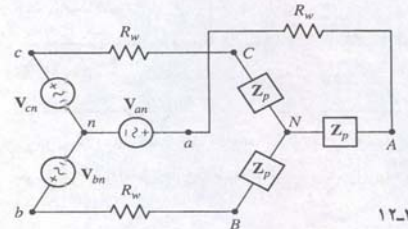


شکل ۱۲-۳۰

۱۴. سیستم تک‌فاز سه سیم متعادل شکل ۱۲.۲۹ دارای ولتاژهای منبع  $V_{an} = V_{nb} = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$  و مقاومت خط و خنثی صفر. بارهای  $Z_{AN} = 12 + j3 \Omega$ ،  $Z_{NB} = 12 + j3 \Omega$  است. مطلوب است  $Z_{AB}$  به نحوی که (الف)  $I_{aA} = 30 \text{ A rms}$  و  $X_{AB} = 0$  و  $R_{AB} = 0$  و زاویه  $\theta = 0^\circ$  است.

### ۱۲-۳ اتصال سه فاز Y-Y

۱۵. شکل ۱۲.۳۱ یک سیستم سه‌فاز سه‌سیمه متعادل را با ترتیب فاز مثبت نشان می‌دهد. اجازه بدهید  $V_{BC} = 120 \angle 60^\circ \text{ V}$  و  $R_w = 0.6 \Omega$  باشد. اگر بار کل (شامل مقاومت سیم) مقدار  $k\text{ VA}$  را در  $\text{PF} = 0.8$  پس‌فاز دریافت کند (الف) توان کلی در مقاومت خط را پیدا کنید و (ب)  $V_{an}$ .



شکل ۱۲-۳۱

۱۶. فرض کنید در سیستم متعادل شکل ۱۲.۳۱ مقدار  $V_{an} = 2300 \angle 0^\circ \text{ V}$  و  $R_w = 2 \Omega$  باشد. اگر برای منبعی که توان مختلط کل  $S = 100 + j30 \text{ k VA}$  را فراهم می‌کند، ترتیب مثبت فاز اختیار شود (الف)  $I_{aA}$  را به دست آورید، (ب)  $V_{AN}$ ، (ج)  $Z_p$ ، (د) بازده انتقال را مشخص نمایید.

۱۷. در سیستم سه‌فاز متعادل (شکل ۱۲.۳۱) فرض کنید  $Z_p = 12 + j5 \Omega$  و  $I_{bB} = 20 \angle 0^\circ \text{ A}$  و  $R_w = 0.935$  کار کند. مطلوب است (الف)  $R_w$ ، (ب)  $V_{bn}$ ، (ج)  $V_{AB}$ ، (د) توان مختلط تولیدی به وسیله منبع.

۱۸. یک سیستم سه‌فاز سه‌سیمه به بار متعادل  $Y$  با مقاومت  $75 \Omega$ ، القاگر  $125 \text{ mH}$  و خازن  $55 \mu\text{F}$  به طور سری از هر خط به نقطه خنثی وصل است. با فرض ترتیب فاز مثبت و  $V_p = 125 \text{ V}$ ،  $60 \text{ Hz}$ ، جریان خط را به دست آورید. توان کل دریافتی به وسیله بار را مشخص نمایید و ضریب توان بار را معین کنید.

۱۹. یک سیم خنثی بدون اتلاف سیمی بین دو گره  $n$  و  $N$  در سیستم سه‌فاز شکل ۱۲.۳۱ دیده می‌شود. سیستم را متعادل با ترتیب فاز مثبت تصور کنید، ولی بارها نامتعادل می‌باشند.  $Z_{AN} = 8 + j6 \Omega$ ،  $Z_{BN} = 12 - j16 \Omega$  و  $Z_{CN} = 5 \Omega$  است. اگر  $V_{an} = 120 \angle 0^\circ \text{ V}$  و  $R_w = 0.5 \Omega$  باشد،  $I_{nN}$  را پیدا کنید.

۲۰. برای مدار بالانس شکل ۱۲.۳۱،  $V_{an} = 40 \angle 0^\circ \text{ V}$  است (با فاز مثبت) مطلوب است جریان خط و توان کل تحویلی به بار اگر امپدانس فاز  $Z_p = 5 + j10 \Omega$  و  $R_w$  برابر با (الف)  $0 \Omega$  (ب)  $3 \Omega$  باشد.

۲۱. امپدانس فاز  $Z_p$  در سیستم شکل ۱۲.۳۱ متشکل از یک امپدانس  $75 \angle 25^\circ \Omega$  موازی با خازن  $25 \mu\text{F}$  است.  $V_{an} = 240 \angle 0^\circ \text{ V}$  در فرکانس  $60 \text{ Hz}$  و  $R_w = 2 \Omega$  است. (الف)  $I_{aA}$  را پیدا کنید، (ب) سیم‌ها  $P$ ، (ج)  $P$  بار، (د) ضریب توان منبع را پیدا کنید.

۲۲. هر بار در مدار شکل ۱۲.۳۱ متشکل از یک امپدانس القایی  $100 \angle 28^\circ \Omega$  موازی با یک خازن  $500 \text{ nF}$  است، مقاومت  $R_w = 1 \Omega$  است. با ترتیب فاز مثبت و  $V_{ab} = 240 \angle 0^\circ \text{ V}$ ،  $f = 50 \text{ Hz}$ ، جریان  $\text{rms}$  خط را به دست آورید. توان کل حمل شده به بار را مشخص کنید، توان تلف شده در سیم‌ها را بیابید. پاسخ خود را با شبیه‌سازی مناسبی روی PSpice تست نمایید.

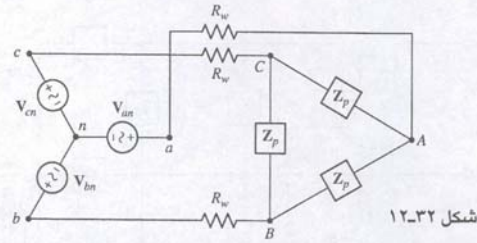
۲۳. سیستم سه‌فاز سه‌سیمه متعادل شکل ۱۲.۳۱ دارای  $R_w = 0$  و  $Z_p = 10 + j5 \Omega$  در هر فاز است. (الف) منبع در چه ضریب توانی کار می‌کند؟ (ب) با فرض  $f = 60 \text{ Hz}$  چه خازنی باید موازی با امپدانس هر فاز قرار داد تا ضریب به  $0.93$  پس‌فاز افزایش یابد؟ (ج) چقدر توان راکتیو به وسیله هر خازن کشیده می‌شود به شرطی که ولتاژ خط در بار  $440 \text{ V}$  باشد.

۲۴. هر بار در شکل ۱۲.۳۱ متشکل از یک القاگر  $1.5 \text{ H}$  موازی با یک خازن  $100 \mu\text{F}$  و یک مقاومت  $1 \text{ k}\Omega$  است. مقاومت  $R_w = 0 \Omega$  می‌باشد. با استفاده از فاز مثبت و  $V_{ab} = 115 \angle 0^\circ \text{ V}$  در  $f = 60 \text{ Hz}$ ، جریان

$\text{rms}$  خط و توان کل حمل شده به بار را معین کنید. پاسخ را با شبیه‌سازی PSpice تست کنید.

### ۱۲-۴ اتصال مثلث (دلتا) $\Delta$

۲۵. شکل ۱۲.۳۲ یک مدار سه‌فاز سه‌سیمه متعادل را نشان می‌دهد. فرض کنید  $R_w = 0$  و  $V_{an} = 200 \angle 60^\circ \text{ V}$  باشد، هر فاز از بار یک بار مختلط به اندازه  $S_p = 2 - j1 \text{ k VA}$  را جذب می‌کند. اگر ترتیب فاز (+) را اختیار کنیم. مطلوب است (الف)  $V_{bc}$ ، (ب)  $Z_p$ ، (ج)  $I_{aA}$ .



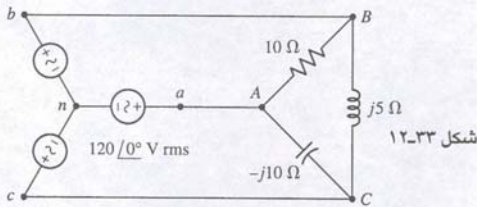
شکل ۱۲-۳۲

۲۶. یک بار متعادل  $\Delta$  از شکل ۱۲.۳۲ به توان  $15 \text{ kVA}$  در  $\text{PF} = 0.8$  پس‌فاز نیاز دارد. فرض کنید ترتیب فاز (+) و  $V_{BC} = 180 \angle 30^\circ \text{ V}$  باشد. اگر  $R_w = 0.75 \Omega$  باشد، مطلوب است (الف)  $V_{bc}$ ، (ب) توان مختلط کل تولید به وسیله منبع.

۲۷. بار در سیستم متعادل شکل ۱۲.۳۲ توان مختلط کل  $3 + j1.8 \text{ kVA}$  را می‌کشد، در حالی که منبع  $3.46 + j1.8 \text{ kVA}$  را تولید می‌نماید. اگر  $R_w = 5 \Omega$  باشد، مطلوب است (الف)  $I_{aA}$ ، (ب)  $I_{AB}$ ، (ج)  $V_{an}$ .

۲۸. بار  $\Delta$  در مدار شکل ۱۲.۳۲ توان  $1800 \text{ W}$  را با  $\text{PF} = \sqrt{2}/2$  پس‌فاز می‌کشد. توان تلف شده در مقاومت سیم  $240 \text{ W}$  و  $R_w = 2.3 \Omega$  است. ولتاژ فاز  $\text{rms}$  منبع و جریان بار را به دست آورید.

۲۹. منبع شکل ۱۲.۳۳ متعادل و دارای ترتیب فاز مثبت است (الف)  $I_{aA}$ ، (ب)  $I_{bB}$ ، (ج)  $I_{cC}$  و (د) کل توان مختلطی را که منبع تأمین می‌کند، به دست آورید.



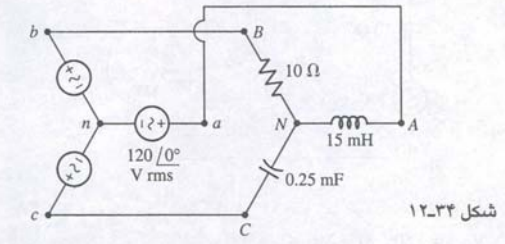
شکل ۱۲-۳۳

۳۰. برای مدار شکل ۱۲.۳۲،  $V_{AB} = 200 \angle 0^\circ \text{ V}$  با ترتیب فاز (+)،  $R_w = 200 \text{ m}\Omega$  و امپدانس فاز  $Z_p$  متشکل از یک مقاومت موازی با یک راکتانس  $30 \Omega$  می‌باشد. توان کل تهیه شده به وسیله منبع، ضریب توان آن و بازده انتقال را پیدا کنید.

۳۱. منبع  $Y$  سه‌فاز بالانس در شکل ۱۲.۳۲ دارای  $V_{an} = 140 \angle 0^\circ \text{ V}$  با ترتیب فاز مثبت است. فرض کنید  $R_w = 0$  است. بار سه‌فاز متعادل

$15 \text{ kW}$  و  $9 \text{ kVAR}$  را می‌کشد، مطلوب است (الف)  $V_{AB}$ ، (ب)  $I_{aA}$ ، (ج)  $I_{AB}$ .

۳۲. برای سیستم سه‌فاز شکل ۱۲.۳۴، یک منبع متعادل با ترتیب فاز (+) را در نظر بگیرید. اگر فرکانس کاری  $60 \text{ Hz}$  باشد، اندازه (الف)  $V_{AN}$ ، (ب)  $V_{BN}$ ، (ج)  $V_{CN}$  را به دست آورید. پاسخ خود را با یک شبیه‌سازی مناسب در PSpice آزمایش کنید.



شکل ۱۲-۳۴

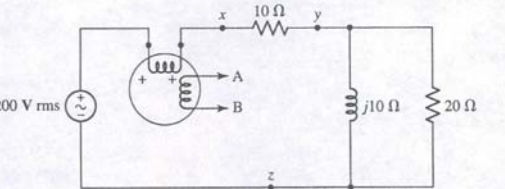
۳۳. (الف) در هر یک از خطوط شکل ۱۲.۳۳ یک مقاومت  $15 \Omega$  وارد کنید و دوباره تمرین ۲۹ را تکرار نمایید. (ب) حل خود را با PSpice تست کنید.

۳۴. یک سیستم سه‌فاز که دارای ولتاژ خط  $240 \text{ V rms}$  است حاوی یک بار  $\Delta$  از  $12 + j \text{ k}\Omega$  در هر فاز و نیز یک بار  $5 + j3 \text{ k}\Omega$  در هر فاز است. جریان خط، توان دریافتی به وسیله بار ترکیبی و ضریب توان بار را معین کنید.

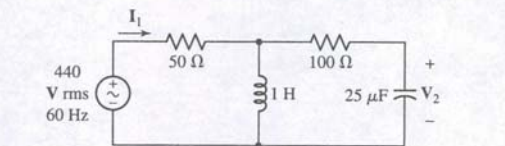
### ۱۲-۵ اندازه‌گیری توان در سیستم‌های سه‌فاز

۳۵. مقدار قرائت شده به وسیله وات‌متر در مدار شکل ۱۲.۳۵ را معین کنید. به شرطی که پایانه‌های  $A$  و  $B$  به ترتیب (الف)  $x$  و  $y$ ، (ب)  $x$  و  $z$ ، (ج)  $y$  و  $z$  وصل باشد.

۳۶. یک وات‌متر در مدار شکل ۱۲.۳۶ وصل است به نحوی که  $I_1$  وارد پایانه (+) سیم‌پیچ جریان می‌گردد، در حالی که  $V_2$  ولتاژ دو سر سیم‌پیچ پتانسیل است. وات‌متر چه چیزی را اندازه می‌گیرد. پاسخ خود را با شبیه‌سازی مناسب در PSpice آزمایش کنید.



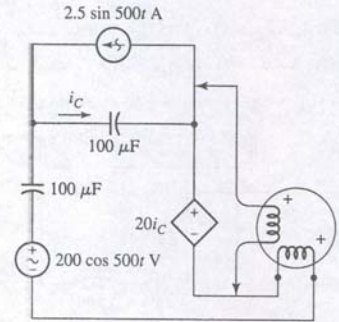
شکل ۱۲-۳۵



شکل ۱۲-۳۶



۳۷. وات‌متر متصل به مدار شکل ۱۲-۳۷ چقدر می‌خواند.



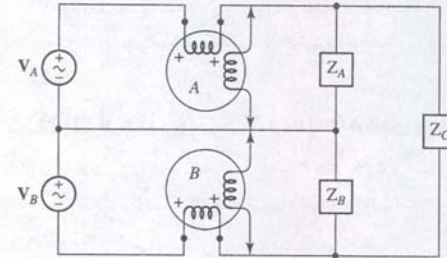
شکل ۱۲-۳۷

۳۸. (الف) دو وات‌متر در شکل ۱۲-۳۸ چه می‌خوانند. به شرطی که

$$V_B = 50 \angle 90^\circ \text{ Vrms} \text{ و } V_A = 100 \angle 0^\circ \text{ Vrms}$$

$$Z_C = 30 + j10 \Omega \text{ و } Z_B = 8 + j6 \Omega, Z_A = 10 - j10 \Omega$$

باشد، پاسخ خود را با PSpice آزمایش نمایید.



شکل ۱۲-۳۸

۳۹. مقدار مدار شکل ۱۲-۳۹ عبارتند از:  $V_{ab} = 200 \angle 0^\circ$

$$V_{ca} = 200 \angle 240^\circ \text{ Vrms و } V_{bc} = 200 \angle 120^\circ \text{ Vrms}$$

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 50 \angle -60^\circ \Omega, Z_4 = Z_5 = 25 \angle 30^\circ \Omega$$

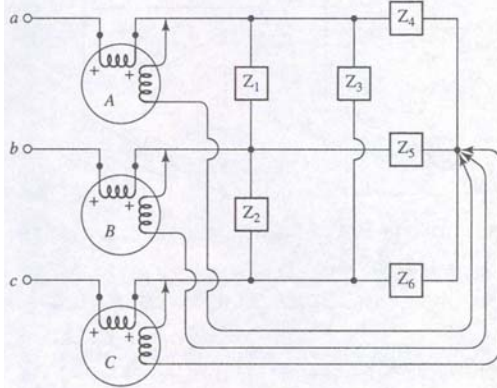
هر وات‌متر چه می‌خواند.

۴۰. برای مدار شکل ۱۲-۳۲ نشان دهید که توان جذب شده به وسیله بار

قابل اندازه‌گیری (الف) سه وات‌متر است (ب) دو وات‌متر است.

۴۱. برای مدار شکل ۱۲-۳۱ نشان دهید که توان جذب شده به وسیله بار

چگونه قابل اندازه‌گیری (الف) سه وات‌متر (ب) دو وات‌متر است.



شکل ۱۲-۳۹

## ۱-۱۳ القای متقابل

در فصل ۷ القاکتابی را با معرفی رابطه‌ای بین ولتاژ و جریان تعریف کردیم.

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

که در آن قرارداد علامت عنصر غیرفعال رعایت شد. مبنای فیزیکی این مشخصه جریان - ولتاژ بر دو مورد متکی است.

۱. تولید شار مغناطیسی به وسیله جریان، که در آن شار در القاگرهای خطی متناسب با جریان است.

۲. تولید ولتاژ با میدان مغناطیسی متغیر با زمان، که در آن ولتاژ متناسب با تغییر زمانی میدان مغناطیسی یا شار مغناطیسی است.

### ضریب القای متقابل

القای متقابل حاصل تعمیم بحث فوق است. جریانی که در یک سیم‌پیچ جاری می‌شود، حول آن سیم‌پیچ و سیم‌پیچ دیگری در آن حوالی، میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد. شار متغیر با زمان که سیم‌پیچ دوم را احاطه کرده است ولتاژی در دو سر آن تولید می‌نماید. این ولتاژ

## فصل سیزدهم

## مدار با کوپل مغناطیسی

### مقدمه

هر وقت که جریان ac یا dc در رسانایی جاری شود، یک میدان مغناطیسی حول آن تولید می‌گردد. در مدارها غالباً به شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه سیمی اشاره می‌شود و در واقع متوسط مؤلفه عمودی میدان مغناطیسی حاصل از حلقه ضربدر سطح حلقه است. وقتی یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان به وسیله یک حلقه تولید شود در حلقه دوم نفوذ می‌کند و ولتاژهای بین دو انتهای سیم دوم القا می‌گردد. برای این‌که این پدیده را از القا تمیز دهیم، اولی را خود القا می‌نامیم. دومین پدیده بنابراین، **القای متقابل** است.

وسیله‌ای به‌عنوان القاگر متقابل وجود ندارد، ولی اصول این پدیده مبنای وسیله مهمی به نام ترانسفورماتور یا ساده‌تر بگوییم ترانس است. یک ترانس از دو سیم‌پیچ که با فاصله‌ای کم از یکدیگر جدا شده‌اند، تشکیل شده است و معمولاً بسته به کاربرد برای تبدیل ولتاژهای ac به مقادیر بیشتر یا کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. هر وسیله الکتریکی که برای کار به جریان dc نیاز دارد، برای وصل به پریز از ترانس استفاده می‌نماید تا قبل از یکسوسازی سطح ولتاژ را تنظیم نماید. عمل یکسوسازی معمولاً با کمک دیودها صورت می‌گیرد و در هر کتاب الکترونیک پایه نیز توصیف شده است.

#### مفاهیم کلیدی

القای متقابل

خودالقایی

قرارداد نقطه

امپدانس منعکس

شبکه‌های معادل T و  $\pi$

ترانس ایده‌آل

نسبت دور یک ترانس ایده‌آل

تطبیق امپدانس

تحلیل مدارهای ترانس‌دار

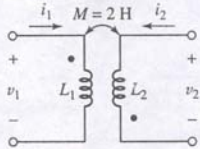




جریانی که وارد پایانه بدون نقطه سیم پیچ می شود، ولتاژی ایجاد می کند که علامت مثبت آن در پایانه بدون نقطه سیم پیچ دوم قرار دارد.

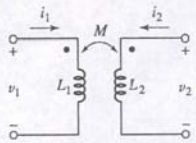
توجه کنید که در بحث های قبلی نقشی برای خود القایی در ولتاژ در نظر گرفته نشده است، که اگر  $i_2$  غیر صفر باشد، قطعاً انرژی را خواهد بود. ما این وضعیت مهم را به طور مشروح بحث می کنیم ولی ابتدا مثالی سریع مناسب تر است.

### مثال ۱۳-۱

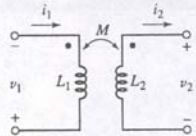


**شکل ۱۳-۳** قرارداد نقطه رابطه ای بین پایانه ای که جریان در آن وارد یک سیم پیچ می شود با ولتاژ مثبت در پایانه سیم پیچ دیگر را فراهم می سازد.

### تمرین



**شکل ۱۳-۴** چون جفت های  $v_1$  و  $i_1$  و  $v_2$  و  $i_2$  قرارداد علامت عناصر غیر فعال را تأیید می کنند هر دو ولتاژ خود القاء مثبت اند. چون  $i_1$  و  $i_2$  هر دو وارد پایانه های نقطه دار می شوند و چون  $v_1$  و  $v_2$  هر دو مثبت احساس می شوند ولتاژ القاء متقابل نیز مثبت است.



**شکل ۱۳-۵** چون  $v_1$  و  $i_1$  و  $v_2$  و  $i_2$  طبق قرارداد علامت عناصر غیر فعال نیستند ولتاژهای خود القاء هر دو منفی اند. چون  $i_1$  وارد پایانه نقطه دار می شود و ولتاژ  $v_2$  به طور مثبت در پایانه نقطه دار مثبت فرض می شوند، جمله متقابل  $v_2$  مثبت است و چون  $i_2$  وارد پایانه بی نقطه گشته و  $v_1$  در پایانه بی نقطه مثبت حس می شود، جمله متقابل  $v_1$  هم مثبت می باشد.

در مدار شکل ۱۳-۳، (الف) اگر  $i_1 = 0$  A و  $i_2 = 5 \sin 45t$  A باشد،  $v_1$  را تعیین کنید. (ب) اگر  $i_1 = -8e^{-t}$  A و  $i_2 = 0$  باشد،  $v_2$  را به دست آورید.

(الف) چون جریان  $i_2$  وارد پایانه بی نقطه سیم پیچ سمت راست می شود، مرجع مثبت برای ولتاژ القا شده در سیم پیچ چپ، پایانه بدون نقطه است. پس ولتاژ مدار باز چنین است:

$$v_1 = -(2)(45)(5 \cos 45t) = -450 \cos 45t \text{ V}$$

که به علت شار مغناطیسی متغیر با زمان حاصل از جریان  $i_2$  در پایانه سمت راست ولتاژ فوق در دو سر پایانه های سمت چپ ظاهر می گردد. چون هیچ جریانی از سیم پیچ سمت چپ عبور نمی کند، در  $v_1$  موضوع خود القاء هیچ نقشی ندارد. (ب) اکنون جریانی داریم که وارد پایانه نقطه دار می شود، ولی  $v_2$  در پایانه بدون نقطه مثبت است. پس:

$$v_2 = -(2)(-1)(-8e^{-t}) = -16e^{-t} \text{ V}$$

۱۳-۱ با فرض  $M = 10 \text{ H}$  و  $i_1 = -2e^{-5t} \text{ A}$  و ولتاژ  $v_2$  برای (الف) شکل ۱۳-۲ (ب) شکل ۱۳-۲ (ب) به دست آورید. جواب:  $v_1 = 100e^{-5t} \text{ V}$ ،  $v_2 = -100e^{-5t} \text{ V}$ .

### ترکیبی از ولتاژ القاء متقابل و خود القاء

تا این جا فقط ولتاژ متقابل موجود در دو سر یک سیم پیچ مدار باز را ملاحظه کردیم. به طور کلی جریان می تواند از هر دو سیم پیچ بگذرد و روی هر سیم پیچ یک ولتاژ ناشی از عبور جریان در سیم پیچ دیگر به وجود آید. این ولتاژ متقابل مستقل و علاوه بر هر ولتاژ خود القاء است. به بیان دیگر، ولتاژ دو سر پایانه های  $L_1$  متشکل از دو جمله است:  $L_1 di_1/dt$  و  $M di_2/dt$  که هر یک بسته به جهت جریان، جهت فرض شده برای ولتاژها و محل قرار گرفتن نقطه ها علامت می گیرند. در بخشی از مدار شکل ۱۳-۴، جریان های  $i_1$  و  $i_2$  نشان داده شده اند. فرض بر این است که هر کدام به پایانه نقطه دار وارد می شوند. بنابراین ولتاژ دوسر  $L_1$  از دو بخش تشکیل شده است.

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

و ولتاژ دوسر  $L_2$  چنین است:

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

در شکل ۱۳-۵ ولتاژها و جریان ها طوری انتخاب نشده اند تا همه جملات  $v_1$  و  $v_2$  مثبت باشند. با بررسی  $i_1$  و  $v_1$  می بینیم که قرارداد علامت عناصر غیر فعال رعایت نشده و بنابراین  $L_1 di_1/dt$  باید منفی باشد. برای جمله  $L_2 di_2/dt$  هم به نتیجه مشابهی می توان رسید. جمله

ساده ای از دو سیم پیچ  $L_1$  و  $L_2$  را نشان می دهد که به اندازه کافی به هم نزدیک می باشند، به نحوی که شار تولیدی به وسیله جریان  $i_1(t)$  در  $L_1$  یک ولتاژ مدار باز  $v_2(t)$  را در دو سر  $L_2$  ایجاد می نماید. در این جا بدون تأکید بر علامت صحیح جبری برای این ارتباط، ضریب القای متقابل یا ساده تر القای متقابل  $M_{21}$  را چنین تعریف می کنیم:

$$v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (۱)$$

ترتیب زیرنویس به این معنی است که پاسخ ولتاژ حاصل در  $L_2$  به وسیله منبع جریانی در  $L_1$  تولید شده است. اگر سیستم معکوس گردد، آنگاه طبق شکل ۱۳-۱ (ب) داریم:

$$v_1(t) = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (۲)$$

در هر صورت دو ضریب القای متقابل لزومی ندارند. بعداً با به کارگیری روابط انرژی ثابت، خواهیم دید که  $M_{12} = M_{21} = M$  برابر هم می باشند. پس  $M_{12} = M_{21} = M$ . وجود کوپل یا تزویج متقابل بین دو سیم پیچ با یک پیکان دوسر نشان داده می شود (شکل ۱۳-۱ (الف و ب)). القای متقابل بر حسب هنری اندازه گیری می شود و مانند مقاومت، القاکنایی و ظرفیت، کمیتی مثبت است. البته القای متقابل را به صراحت نمی توان مثبت فرض کرد. خصوصاً بهتر است وقتی که سه یا چند سیم پیچ در کنار هم هستند هر یک علامت خود را داشته باشد و با سیم پیچ های دیگر واکنش نماید. ما در ادامه، بحث خود را به دو سیم پیچ محدود می کنیم. در هر صورت ولتاژ  $M di/dt$  بسته به افزایش یا کاهش جریان در هر لحظه از زمان ممکن است مثبت یا منفی تصور شود.

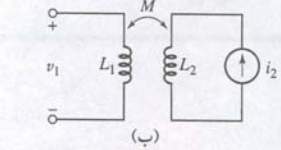
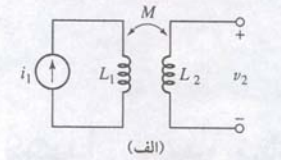
### قرارداد نقطه

القاکر عنصری دو پایانه است و به همین دلیل مجازیم از قرارداد علامت عنصر غیر فعال برای آن استفاده کنیم و علامت صحیحی برای ولتاژ  $L di/dt$  یا  $L di/dt$  بزرگترینیم. اگر جریان وارد پایانه مثبت ولتاژ گردد، آنگاه قرارداد مثبت به کار رفته است. با این وجود القای متقابل را نمی توان به طریقی مشابه بررسی کرد، زیرا چهار پایانه دارد. گزینش علامت صحیح را به چند طریقی می توان انجام داد، از آن جمله "قرارداد نقطه" با بررسی روش خاصی که طی آن جهت سیم پیچ مشخص می شود. در این جا فقط قرارداد نقطه ای را انتخاب می کنیم و به شکل فیزیکی سیم پیچ ها هم نگاه مختصری می اندازیم. وقتی با دو سیم پیچ کوپل شده سروکار داریم، استفاده از دیگر نمادهای خاص لزومی ندارد.

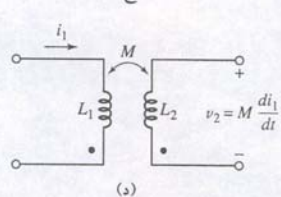
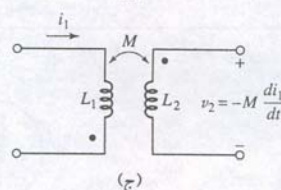
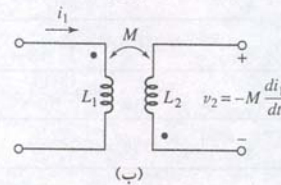
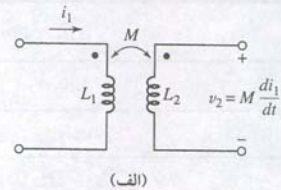
در قرارداد نقطه ای، در هر سمت سیم پیچ هایی که القاکنایی متقابل دارند، یک نقطه بزرگ گذاشته می شود. علامت ولتاژ حاصل از القای متقابل را چنین تعریف می کنیم.

جریانی که وارد پایانه نقطه دار یکی از سیم پیچ ها شود، ولتاژ مدار بازی را به وجود می آورد که مرجع مثبت آن در پایانه نقطه دار سیم پیچ دوم است.

به این ترتیب در شکل ۱۳-۲ (الف)،  $i_1$  وارد پایانه نقطه دار  $L_1$  می شود و  $v_2$  به صورت مثبت در پایانه نقطه دار  $L_2$  حس می گردد، یعنی  $v_2 = M di_1/dt$  خواهد بود. قبلاً ملاحظه شد که همواره نمی توان جریان ها و ولتاژها را در سرتاسر مدار طوری انتخاب کرد که قرارداد علامت عناصر غیر فعال تأیید شود. مورد مشابهی برای کوپل متقابل هم وجود دارد. مثلاً در شکل ۱۳-۲ (ب) بهتر است  $v_2$  را با مرجع مثبت واقع در پایانه بدون نقطه نشان داد. در این صورت  $v_2 = -M di_1/dt$  خواهد بود. ممکن است جریان ها هم همیشه وارد پایانه های نقطه دار نشوند، مثل شکل ۱۳-۲ (ج و د). آنگاه می گوییم:

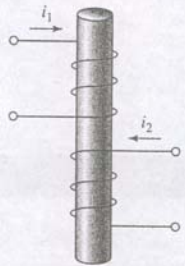


**شکل ۱۳-۱** (الف) جریان  $i_1$  در  $L_1$  ولتاژ مدار باز  $v_2$  را در  $L_2$  به وجود می آورد. (ب) جریان  $i_2$  در  $L_2$  ولتاژ مدار باز  $v_1$  را در  $L_1$  ایجاد می کند.



**شکل ۱۳-۲** جریان وارده به پایانه نقطه دار یک سیم پیچ ولتاژی ایجاد می کند که علامت مثبت آن در سمت نقطه دار است. جریانی که وارد پایانه بی نقطه یک سیم می شود، مثبت ولتاژ در سیم پیچ ۲ در سمت بی نقطه است.





شکل ۱۳-۶ ساختار فیزیکی سیم‌پیچ با کوبل متقابل. با ملاحظه جهت فلوی مغناطیسی تولیدی به وسیله هر سیم‌پیچ، می‌توان نقطه‌ها را در پایانه‌های بالا و پایین سیم‌پیچ قرار داد.

متقابل با بررسی جهت  $i_1$  و  $V_2$  علامت می‌گیرد، چون  $i_1$  وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود و  $V_2$  در پایانه ۲ مثبت حس می‌گردد، علامت  $M \frac{di_1}{dt}$  مثبت است. بالاخره  $i_2$  وارد پایانه بی نقطه  $L_2$  می‌گردد و بخش متقابل  $V_1$  یعنی  $M \frac{di_2}{dt}$  نیز باید مثبت باشد. پس داریم:

$$v_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

برای منبع سینوسی در همه فرکانس‌های  $\omega$  نیز به انتخاب علامت مشابهی خواهیم رسید:

$$V_1 = -j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \quad V_2 = -j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1$$

### مبنای فیزیکی قرارداد نقطه

با نگاهی بر مبنای فیزیکی قرارداد نقطه می‌توان درک بهتری از آن به دست آورد. اکنون مفهوم نقطه‌ها را برحسب شار مغناطیسی تعبیر می‌کنیم. در شکل ۱۳-۶ دو سیم‌پیچ روی استوانه‌ای پیچیده شده و جهت هر سیم‌پیچ نیز مشخص است. فرض کنید که جریان  $i_1$  مثبت و با زمان افزایش یابد. جهت شار مغناطیسی ناشی از  $i_1$  را می‌توان به کمک قانون دست راست پیدا کرد. وقتی که دست راست حول سیم‌پیچ بسته شود، انگشت شست جهت شار داخل سیم‌پیچ را نشان می‌دهد. پس شار تولیدی به وسیله  $i_1$  به سمت پایین است. چون جریان  $i_1$  با زمان افزایش می‌یابد، شار که با  $i_1$  متناسب است نیز با زمان افزایش پیدا می‌کند. اکنون به سیم‌پیچ دوم توجه می‌کنیم. بگذارید  $i_2$  را هم جهت و افزایشده تصور کنیم. به کارگیری قاعده دست راست نشان می‌دهد که میدان حاصل از  $i_2$  نیز به سمت پایین و افزایشده است. به بیان دیگر جریان‌های  $i_1$  و  $i_2$  شارهای جمع شونده تولید می‌کنند.

ولتاژ دو سر پایانه‌های هر سیم‌پیچ از تغییر زمانی شار در داخل سیم‌پیچ ناشی می‌شود. پس ولتاژ دو سر پایانه‌های اولین سیم‌پیچ هنگامی که  $i_2$  وجود دارد، بزرگتر از زمانی است که  $i_2 = 0$  است. پس ولتاژی که  $i_2$  در سیم‌پیچ اول القا می‌کند، هم جهت با ولتاژ خودالقایابی در آن سیم‌پیچ است. علامت ولتاژ خودالقا از قرارداد علامت عناصر غیر فعال مشخص است، پس علامت ولتاژ القای متقابل هم به دست خواهد آمد.

قرارداد نقطه زحمت بررسی ساختمان فیزیکی سیم‌پیچ‌ها را با دو نقطه از دوش ما برمی‌دارد. به نحوی که مطمئن خواهیم بود در صورت ورود جریان به آن‌ها، شارهای هم جهت و جمع شونده تولید می‌گردد. واضح است که دو امکان برای نقطه‌ها وجود دارد، زیرا ممکن است نقاط را برداشت و در انتهای دیگر سیم‌پیچ‌ها قرار داد و باز هم شارهای جمع شونده به دست آورد.

### مثال ۱۳-۲

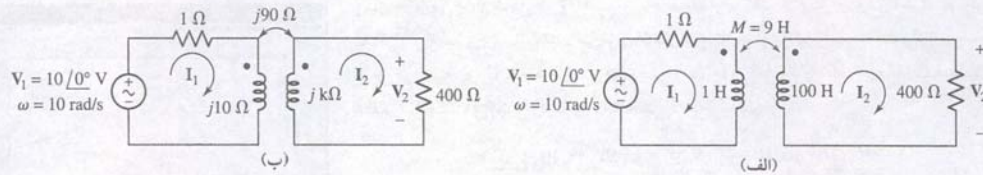
در مدار شکل ۱۳-۷ (الف)، نسبت ولتاژ خروجی دو سر مقاومت  $400\Omega$  را به ولتاژ منبع به دست آورید.

■ اهداف مسئله را شناسایی کنید.

ما عبارتی را برای  $V_2$  لازم داریم که حاوی مقادیر معلوم باشد. آن‌گاه آن را بر  $V \angle 0^\circ$  تقسیم خواهیم کرد.

■ اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

ما با جایگزینی  $1\text{ H}$  و  $100\text{ H}$  با امپدانس مربوط به آن‌ها یعنی  $j10\Omega$  و  $j\text{k}\Omega$  آغاز می‌کنیم (شکل ۱۳-۷ (ب)). همچنین القای متقابل  $9\text{ H}$  را هم با  $j90\Omega = j\omega M$  عوض می‌نماییم.



شکل ۱۳-۷ (الف) مداری حاوی القاء متقابل که در آن نسبت  $V_2/V_1$  موردنظر است. (ب) القاهای متقابل و خودالقاء با امپدانس‌های متناظر جایگزین شده‌اند.

■ ارائه طرح. به نظر می‌رسد تکنیک مش روش خوبی باشد و ما نیز مداری با دو مش مشخص داریم.

■ معادلات مناسب را بنویسید.

در حلقه سمت چپ علامت جمله متقابل با اعمال قرارداد نقطه معین می‌شود. چون  $I_2$  وارد پایانه بی نقطه  $L_2$  می‌شود، ولتاژ متقابل در دوسر  $L_1$  باید علامت مثبت را در پایانه بی نقطه داشته باشد. پس:

$$(1 + j10) I_1 - j90 I_2 = 10 \angle 0^\circ$$

علامت جمله متقابل در حلقه دوم به طریقی مشابه حاصل می‌گردد. چون  $I_1$  وارد پایانه نقطه‌دار می‌شود، جمله متقابل در حلقه سمت راست دارای مرجع مثبت خود در پایانه نقطه‌دار القاگر  $100\text{ H}$  خواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$(400 + j1000) I_2 - j90 I_1 = 0$$

■ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

ما دو معادله برای دو مجهول  $I_1$  و  $I_2$  داریم. به محض یافتن دو جریان، ولتاژ خروجی  $V_2$  از ضرب  $I_2$  در  $400\Omega$  به دست می‌آید.

■ اقدام به حل.

با حل دو معادله فوق به وسیله ماشین حساب می‌بینیم که

$$I_2 = 0.172 \angle -16.70^\circ \text{ A}$$

پس

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{400 (0.172 \angle -16.70^\circ)}{10 \angle 0^\circ} = 6.880 \angle -16.70^\circ$$

■ صحت حل را تأیید کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

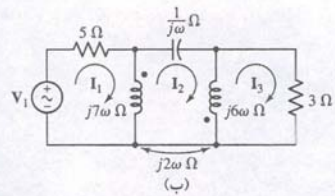
ملاحظه می‌شود که  $V_2$  از نظر اندازه بزرگتر از  $V_1$  است. آیا باید همیشه این انتظار را داشت؟ پاسخ منفی است. در بخش‌های بعد خواهیم دید که می‌توان ترانسفورماتورهای ساخت که ولتاژ را هم افزایش و هم کاهش دهند. با این وجود می‌توان گمانه‌ای سریع زد و حداقل محدوده بالا و پایین را برای پاسخ به دست آورد. اگر مقاومت  $400\Omega$  با یک مدار اتصال کوتاه جایگزین شود، آن‌گاه  $V_2 = 0$  خواهد شد. برعکس اگر مقاومت  $400\Omega$  را با مدار باز جایگزین کنیم، آن‌گاه  $I_2 = 0$  خواهد بود و در نتیجه:

$$V_1 = 1 + j\omega L_1 I_1$$

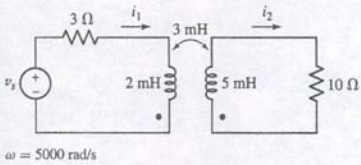
$$V_2 = j\omega M I_1$$

از دو رابطه فوق می‌توان انتظار داشت که بزرگترین مقدار برای  $V_2/V_1$  برابر  $5.711^\circ \angle 8.955$  است. بنابراین جواب حداقل منطقی است.

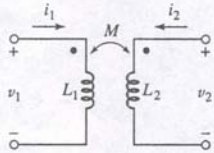




شکل ۱۳-۱۰ (ب) خازن 1F و القاها‌ی متقابل و خودالقاه با امپدانس متناظر جایگزین شده‌اند.



شکل ۱۳-۱۱



شکل ۱۳-۱۲ جفت سیم‌پیچ کوپل‌شده با یک القاکنایی متقابل  $M_{12} = M_{21} = M$ .

الاخره برای سومین حلقه

$$6j\omega(I_3 - I_2) + 2j\omega(I_1 - I_2) + 3I_3 = 0$$

$$2j\omega I_1 - 8j\omega I_2 + (3 + 6j\omega)I_3 = 0 \quad (۵)$$

معادلات (۳) تا (۵) با هر روش مناسبی قابل حل می‌باشند.

### تمرین

۱۳-۲ برای مدار شکل ۱۳-۱۱، معادله حلقه مناسبی را برحسب جریان‌های فیزیوری  $I_1$  و  $I_2$  برای (الف) حلقه چپ، (ب) حلقه راست بنویسید.

جواب:  $0 = -j15I_1 + (10 + j25)I_2$ ,  $V_s = (3 + j10)I_1 - j15I_2$ .

### ۱۳-۲ ملاحظات انرژی

حال بایباید تا انرژی ذخیره شده در القاگرهای کوپل متقابل را بررسی کنیم. نتایج این مطالعه به لایل متعددی مفید خواهد بود. ابتدا فرض  $M_{12} = M_{21}$  را اثبات می‌کنیم و آن‌گاه حداکثر مقدار القاکنایی متقابل بین دو القاگر را معین خواهیم کرد.

#### برابری $M_{12}$ و $M_{21}$

در هر دو سیم‌پیچ کوپل شده در شکل ۱۳-۱۲، جریان‌ها و ولتاژها و نقاط قطب مشخص شده‌اند. برای اثبات  $M_{12} = M_{21}$  با صفر کردن همه جریان‌ها و ولتاژها آغاز می‌کنیم و به این رتیب انرژی ذخیره شده اولیه در مدار صفر تصور خواهد شد.

سپس جفت پایانه‌های سمت راست را مدار باز کرده و جریان  $i_1$  را از صفر تا مقدار ثابت  $I_1$  (dc) افزایش می‌دهیم. توان ورودی به شبکه از سمت چپ در هر لحظه از مان برابر است با:

$$v_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1$$

توان ورودی از سمت راست برابر است با:

$$v_2 i_2 = 0$$

س انرژی ذخیره شده در شبکه هنگام  $i_1 = I_1$  برابر است با:

$$\int_0^{I_1} v_1 i_1 dt = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

کنون  $i_1$  را ثابت می‌گیریم، یعنی  $I_1 = i_1$  و  $i_2$  را از صفر در  $t = t_1$  به مقدار ثابت  $I_2$  در  $t = t_2$  می‌رسانیم، پس انرژی انتقالی از منبع سمت راست چنین است:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2 i_2 dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

در هر صورت، به رغم ثابت بودن  $i_1$ ، منبع سمت چپ در این فاصله زمانی مقداری انرژی به مدار تحویل خواهد داد:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1 i_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{12} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = M_{12} I_1 I_2$$

رؤی کل ذخیره شده در شبکه وقتی هر دو جریان  $i_1$  و  $i_2$  به مقادیر ثابتی برسند، برابر زیر است:

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

ولتاژ خروجی مدار شکل ۱۳-۷ (الف) از لحاظ مقدار بزرگتر از ولتاژ ورودی است، به نحوی که افزایش ولتاژی را با این مدار می‌توان انتظار داشت. همچنین بررسی نسبت ولتاژ برحسب تابعی از  $\omega$  نیز جالب توجه است. برای یافتن  $I_2(j\omega)$  در این مدار خاص، جملات معادلات حلقه را برحسب فرکانس زاویه‌ای نامشخص  $\omega$  می‌نویسیم:

$$(1 + j\omega)I_1 - j\omega 9I_2 = 10 \angle 0^\circ$$

و

$$-j\omega 9I_1 + (400 + j\omega 100)I_2 = 0$$

از حل آن دو داریم:

$$I_2 = \frac{j90\omega}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

بنابراین نسبت ولتاژ خروجی به ولتاژ ورودی به صورت تابعی از فرکانس  $\omega$  چنین خواهد شد:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{400I_2}{10} = \frac{j\omega 3600}{400 + j500\omega - 19\omega^2}$$

به این کسر گاهی **تابع تبدیل** مدار می‌گویند، در شکل ۱۳-۸ ترسیم و اندازه نقطه اوج تقریباً 7 در فرکانس 4.6 rad/s می‌باشد. با این وجود در فرکانس‌های خیلی کوچک و یا خیلی بزرگ، اندازه تابع تبدیل به کمتر از واحد می‌رسد.

مدار هنوز هم، به جز از برای منبع ولتاژ، غیرفعال است و تقویت (یا بهره) ولتاژ را نباید به اشتباه تقویت توان دانست. در  $\omega = 10$  rad/s بهره ولتاژ 6.88 است ولی منبع ولتاژ ایده‌آل با ولتاژ پایانه 10 V، کلاً 8.07 انرژی تولید می‌کند و از آن تنها 5.94 W به مقاومت 400  $\Omega$  انتقال می‌یابد. نسبت توان خروجی به توان منبع که آن را **بهره توان** می‌گویند، 0.736 است.

۱۳-۲ برای مدار شکل ۱۳-۹ معادلات حلقه را برای حلقه‌های چپ و راست بنویسید به‌شرطی که  $V_s = 20e^{-1000t}$  V باشد.

جواب:  $20e^{-1000t} = 3i_1 + 0.002di_1/dt - 0.003di_2/dt$   
 $10i_2 + 0.005di_2/dt - 0.003di_1/dt = 0$

مجموعه معادلات مناسبی برای مدار شکل ۱۳-۱۰ (الف) بنویسید.

مدار حاوی سه مش یا حلقه بوده و سه جریان هم از قبل تخصیص یافته است. دوباره اولین گام ما جایگزینی هر دو القای متقابل و دو خودالقاه با امپدانس‌های متناظر طبق شکل ۱۳-۱۰ (ب) است. با اعمال قانون KVL به اولین حلقه و انتخاب  $(I_3 - I_2)$  به عنوان جریان در سیم‌پیچ دوم، علامت مثبتی برای جمله متقابل حاصل می‌گردد.

$$5I_1 + 7j\omega(I_1 - I_2) + 2j\omega(I_3 - I_2) = V_1$$

یا

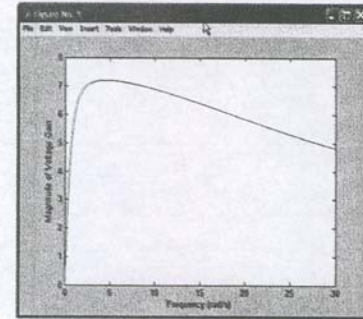
$$(5 + 7j\omega)I_1 - 9j\omega I_2 + 2j\omega I_3 = V_1 \quad (۳)$$

دومین حلقه دو جمله خودالقاه و دو جمله القای متقابل دارد و نمی‌توان معادله را سرسری نوشت. داریم:

$$7j\omega(I_2 - I_1) + 2j\omega(I_2 - I_3) + \frac{1}{j\omega} I_2 + 6j\omega(I_2 - I_3) + 2j\omega(I_2 - I_1) = 0$$

یا

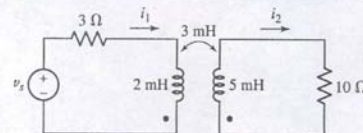
$$-9j\omega I_1 + (17j\omega + \frac{1}{j\omega}) I_2 - 8j\omega I_3 = 0 \quad (۴)$$



شکل ۱۳-۸ بهره ولتاژ  $|V_2/V_1|$  مدار شکل ۱۳-۷ (الف) به صورت تابعی از  $\omega$  و برنامه متلب زیر ترسیم شده است.

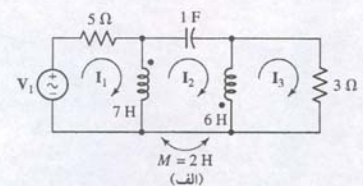
```
>> w = linspace(0,30,1000);
>> num = j*w*3600;
>> for ind = 1:1000
den = 400 + j*500*w(ind) - 19*w(ind)*w(ind);
gain(ind) = num(ind)/den;
end
>> plot(w, abs(gain));
>> xlabel('Frequency (rad/s)');
>> ylabel('Magnitude of Voltage Gain');
```

### تمرین



شکل ۱۳-۹

### مثال ۱۳-۳



شکل ۱۳-۱۰ (الف) یک مدار سه‌حلقه با کوپل متقابل.



بنابراین مقدار القاکنایی متقابل حد بالایی دارد. این القاکنایی متقابل نمی تواند از واسطه هندسی خود القاکنایی سیم پیچ ها بیشتر شود. گرچه این برابری از فرض هم علامت بودن  $i_1$  و  $i_2$  حاصل شد ولی اگر  $i_1$  و  $i_2$  هم علامت نباشند، باز می توان نتیجه مشابهی به دست آورد و کافی است در معادله (۸) علامت مثبت را اختیار کنیم.

صحت نامساوی (۹) را با بررسی فیزیکی کوپل مغناطیسی هم می توان نشان داد. اگر  $i_2$  را صفر بگیریم،  $i_1$  در هر دو  $L_1$  و  $L_2$  شاری را می گذراند. واضح است که شار درون  $L_2$  نمی تواند بزرگتر از  $L_1$  باشد. زیرا شار کل از  $L_1$  می گذرد. پس به طور کیفی، برای اندازه القاکنایی متقابل ممکن بین دو القاگر حد بالایی وجود دارد.

### ضریب کوپل

سرعت نزدیک شدن  $M$  به مقدار ماکزیمم را ضریب کوپل می خوانیم و با رابطه زیر نشان می دهیم:

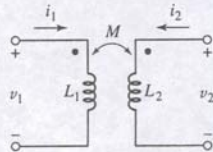
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (10)$$

چون  $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

$$0 \leq k \leq 1$$

هر چقدر سیم پیچ ها به هم نزدیک تر باشند، ضریب کوپل بزرگتر حاصل می شود و نیز هر چه پیچش و جهت آن ها به تولید شار مغناطیسی کمک کند، ضریب کوپل یا تزویج بزرگتر خواهد بود. بالاخره برای داشتن ضریب کوپل بزرگتر می توان یک مسیر متمرکز ایجاد نموده و شار مغناطیسی را شدت بخشید. سیم پیچ هایی که ضریب کوپل نزدیک به واحد دارند، را کوپل شدید می گویند.

### مثال ۴-۱۳



در شکل ۱۳-۱۳ فرض کنید  $L_2 = 2.5 \text{ H}$ ،  $L_1 = 0.4 \text{ H}$  و  $k = 0.6$  و  $i_1 = 4i_2 = 20\cos(500t - 20^\circ) \text{ mA}$  (الف)  $i_2(0) = 5\cos(-20^\circ) = 4.698 \text{ mA}$  پس  $i_2(t) = 5\cos(500t - 20^\circ) \text{ mA}$  (الف)  $i_2(0) = 5\cos(-20^\circ) = 4.698 \text{ mA}$  پس  $i_2(t) = 5\cos(500t - 20^\circ) \text{ mA}$  (الف)  $i_2(0) = 5\cos(-20^\circ) = 4.698 \text{ mA}$  پس  $i_2(t) = 5\cos(500t - 20^\circ) \text{ mA}$  (الف)

(ب) برای تعیین مقدار  $v_1$ ، باید نقش خود القاایی سیم پیچ ۱ و القای متقابل سیم پیچ ۲ را لحاظ کنیم. بنابراین با توجه به قرارداد نقطه داریم:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

رای محاسبه این کمیت، به  $M$  نیاز است. مقدار آن از معادله (۱۰) به دست می آید.

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.6\sqrt{(0.4)(2.5)} = 0.6 \text{ H}$$

نابراین

$$v_1(0) = 0.4 [-10 \sin(-20^\circ)] + 0.6 [-2.5 \sin(-20^\circ)] = 1.881 \text{ V}$$

(ج) انرژی کل از جمع انرژی ذخیره شده در هر القاگر به دست می آید. این انرژی سه جمله دارد، زیرا فرض شده است که دو سیم پیچ به طور مغناطیسی به هم کوپل شده اند. چون هر دو جریان وارد پایانه نقطه می شوند:

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2} L_2 [i_2(t)]^2 + M [i_1(t)][i_2(t)]$$

ا توجه به بند (الف) که  $i_2(0) = 4.698 \text{ mA}$  و  $i_1(0) = 18.79 \text{ mA}$  بود می بینیم که انرژی کل ذخیره شده در سیم پیچ در زمان  $t = 0$  برابر  $151.2 \mu\text{J}$  است.

اکنون می توانیم جریان نهایی در این شبکه را با رساندن جریان ها به مقادیر نهایی شان ولی به ترتیب معکوس ایجاد کنیم، یعنی ابتدا  $i_2$  را از صفر به  $i_2$  برسانیم و سپس ضمن ثابت نگهداشتن آن،  $L_1$  را از صفر تا  $i_1$  افزایش دهیم، اگر باز هم انرژی ذخیره شده کل را برای آزمایش محاسبه کنیم، نتیجه می شود:

$$W_{\text{total}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

تنها اختلاف در دو رابطه انرژی کل تفاوت القاکنایی هایی متقابل  $M_{12}$  و  $M_{21}$  است. چون شرایط اولیه نهایی در شبکه یکسان است، بنابراین دو مقدار انرژی ذخیره شده باید برابر باشند. پس:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

و

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (6)$$

اگر یکی از جریان ها وارد پایانه نقطه دار شود، در حالی که دیگری پایانه نقطه دار را ترک می کند، علامت جمله انرژی متقابل معکوس می گردد:

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 \quad (7)$$

هر چند معادلات (۶) و (۷) با فرض مقادیر نهایی مثبت برای دو جریان به دست آمدند ولی واضح است که این مقادیر ثابت می توانند هر مقداری باشند. پس اگر به جای  $i_1$  و  $i_2$  مقادیر لحظه ای  $i_1$  و  $i_2$  را بگذاریم، باز هم این عبارت انرژی ذخیره شده در شبکه را به نحو صحیحی نشان می دهد. به عبارت دیگر می توانیم جریان های لحظه ای را هم در این معادله به کار ببریم.

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 [i_1(t)]^2 + \frac{1}{2} L_2 [i_2(t)]^2 \pm M [i_1(t)][i_2(t)] \quad (8)$$

تنها شرطی که معادله (۸) بر آن متکی است، این است که به ازای صفر بودن هر دو جریان، انرژی ذخیره شده در شبکه صفر است.

### ایجاد حد بالا برای M

اکنون به کمک معادله (۸) حد بالای  $M$  را پیدا می کنیم. چون  $w(t)$  انرژی ذخیره شده در شبکه غیر فعال را نشان می دهد، در ازای مقادیر  $i_1$  و  $i_2$ ،  $L_1$  و  $L_2$  یا  $M$  نمی تواند منفی باشد. بگذارید فرض کنیم که  $i_1$  و  $i_2$  هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند. بنابراین حاصل ضرب آن ها مثبت است. از معادله (۸) تنها حالتی که انرژی ممکن است منفی باشد، عبارت است از:

$$w = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$$

که می توان آن را چنین نوشت:

$$w = \frac{1}{2} (\sqrt{L_1} i_1 - \sqrt{L_2} i_2)^2 + \sqrt{L_1 L_2} i_1 i_2 - M i_1 i_2$$

چون در واقع انرژی منفی نیست، سمت راست معادله فوق نمی تواند منفی گردد. البته اولین جمله ممکن است نزدیک به صفر باشد و به این ترتیب محدودیت ما این خواهد بود که دو جمله آخر نمی تواند منفی شود. پس

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M$$

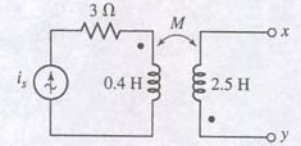
یا

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (9)$$



## تمرین

۱۳-۴ اگر در مدار شکل ۱۴-۱۳ جریان منبع  $i_s = 2 \cos 10t$  A باشد، انرژی کل ذخیره شده در شبکه غیرفعال را در  $t = 0$  معین کنید به شرطی که  $k = 0.6$  و پایانه‌های x و y (الف) باز رها شوند، (ب) اتصال کوتاه شوند.  
جواب:  $0.512 \text{ J}, 0.8 \text{ J}$ .



شکل ۱۴-۱۳

## ۳-۱۳ ترانسفورماتورهای خطی

اکنون آماده‌ایم تا دانش خود از کوپل مغناطیسی را در توصیف دو وسیله خاصی که هر یک مدلی حاوی القای متقابل است، پیاده کنیم. این دو وسیله **ترانسفورماتور** هستند، جمله‌ای که می‌توان آن را برای شبکه‌ای متشکل از دو یا چند سیم‌پیچ که به نحوی حساب شده کوپل شده‌اند، به کار برد (شکل ۱۵-۱۳). در این بخش ترانسفورماتورهای خطی را ملاحظه خواهیم کرد که مدل خوبی از ترانس‌های عملی به کار رفته در فرکانس‌های رادیویی و فرکانس‌های بالاتر است. در بخش بعد ترانس ایده‌آل را در نظر می‌گیریم که مدل ایده‌آلی از ترانس‌های عملی با ضریب کوپل واحد است.

در شکل ۱۶-۱۳ ترانسی با دو مش جریان دیده می‌شود. اولین حلقه که معمولاً حاوی منبع است، **اولیه** خوانده می‌شود در حالی که حلقه دوم معمولاً به بار وصل شده و **ثانویه** نام دارد. القاگرهای  $L_1$  و  $L_2$  را هم به ترتیب اولیه و ثانویه ترانس گویند. فرض بر این است که ترانس خطی باشد. این بدان معنی است که هیچ ماده مغناطیسی به کار نرفته است (این گونه مواد، ممکن است رابطه شار-جریان را غیرخطی کنند). البته در غیاب چنین موادی به سختی می‌توان به ضریب کوپلی بزرگتر از چند دهم نائل آمد. دو مقاومت نشان داده شده عبارتند از مقاومت سیم‌هایی که  $L_1$  و  $L_2$  از آن‌ها ساخته شده‌اند و نیز دیگر تلفات موجود.

## امپدانس منعکسه

امپدانس ورودی را در پایانه‌های مدار اولیه ملاحظه کنید. معادلات دو تک حلقه عبارتند از:

$$\mathbf{V}_s = (\mathbf{R}_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \quad (11)$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (\mathbf{R}_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L)\mathbf{I}_2 \quad (12)$$

روابط فوق را با تعاریف زیر ساده می‌کنیم:

$$\mathbf{Z}_{11} = \mathbf{R}_1 + j\omega L_1$$

$$\mathbf{Z}_{22} = \mathbf{R}_2 + j\omega L_2 + \mathbf{Z}_L$$

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{Z}_{11}\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2 \quad (13)$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{22}\mathbf{I}_2 \quad (14)$$

با حل معادله دوم برای یافتن  $\mathbf{I}_2$  و جایگزینی نتیجه در معادله اول می‌توان امپدانس ورودی به دست آورد:

$$\mathbf{Z}_{in} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{Z}_{11} - \frac{(j\omega M)^2}{\mathbf{Z}_{22}} \quad (15)$$

قبل از دستکاری بیشتر این معادله می‌توان چند نتیجه جالب را از آن به دست آورد. اول این که این نتیجه مستقل از نقطه‌ها در روی هر یک از سیم‌پیچ‌ها است. اگر هر یک از نقطه‌های سیم‌پیچ

را جابه‌جا کنیم، تنها علامت  $M$  در معادلات (۱۱) الی (۱۴) تغییر می‌کند. پس می‌توان در عبارات فوق به جای  $M$ ،  $(-M)$  گذاشت و این تغییر علامت تأثیری بر معادله (۱۵) ندارد. همچنین توجه کنید که در معادله (۱۵) امپدانس ورودی به شرطی  $\mathbf{Z}_{11}$  است که جمله تزویج یا کوپل به صفر کاهش یابد. با افزایش کوپلاژ، امپدانس ورودی با  $\mathbf{Z}_{11}$  به اندازه  $\omega^2 M^2 / \mathbf{Z}_{22}$  تغییر می‌یابد. جمله اخیر، **امپدانس منعکسه** خوانده می‌شود. طبیعت و نقش این تغییر امپدانس با بسط عبارت آشکار تر می‌گردد:

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{R}_{22} + j\mathbf{X}_{22}}$$

امپدانس منعکسه را گویا می‌کنیم:

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2 \mathbf{R}_{22}}{\mathbf{R}_{22}^2 + \mathbf{X}_{22}^2} + \frac{-j\omega^2 M^2 \mathbf{X}_{22}}{\mathbf{R}_{22}^2 + \mathbf{X}_{22}^2}$$

چون  $\omega^2 M^2 \mathbf{R}_{22} / (\mathbf{R}_{22}^2 + \mathbf{X}_{22}^2)$  مثبت است، واضح است که وجود ثانویه، تلفات را در اولیه افزایش می‌دهد. به بیان دیگر، وجود ثانویه در اولیه با افزایش مقاومت  $\mathbf{R}_1$  خود را نشان می‌دهد و نیز رآکتانسی که ثانویه در مدار اولیه ایجاد می‌کند، دارای علامت مخالف با  $\mathbf{X}_{22}$ ، یعنی رآکتانس خالص حلقه دوم است. رآکتانس  $\mathbf{X}_{22}$  مجموع  $\omega L_2$  و  $\mathbf{X}_L$  می‌باشد. علامت  $\mathbf{X}_{22}$  برای بارهای القایی، مثبت و برای بارهای خازنی بسته به اندازه رآکتانس بار، مثبت یا منفی است.

۱۳-۵ مقادیر عناصر برای یک ترانس خطی عبارتند از:  $\mathbf{R}_1 = 3 \Omega$ ،  $\mathbf{R}_2 = 6 \Omega$ ،  $L_1 = 2 \text{ mH}$ ،  $L_2 = 10 \text{ mH}$  و  $M = 4 \text{ mH}$  اگر  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$  باشد،  $\mathbf{Z}_{in}$  را در ازای  $\mathbf{Z}_L$  (الف)  $10 \Omega$  (ب)،  $j20 \Omega$  (ج)،  $10 + j20 \Omega$  (د)  $j20 \Omega$  - به دست آورید.  
جواب:  $5.56 - j2.82 \Omega$ ؛  $4.24 + j4.57 \Omega$ ؛  $3.49 + j4.33 \Omega$ ؛  $5.32 + j2.74 \Omega$ .

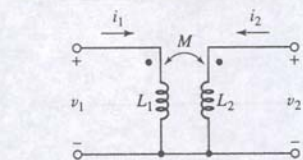
## شبکه‌های معادل T و Π

غالباً جایگزینی یک ترانس با یک شبکه معادل فرم T و یا Π مفید است. اگر مقارنت‌های اولیه و ثانویه را از ترانس جدا کنیم تنها القاگرهای متقابل باقی می‌مانند (شکل ۱۷-۱۳). دقت کنید که پایانه پایین ترانس به یکدیگر وصل می‌باشند تا یک شبکه سه پایانه به وجود آید. این کار را به این علت انجام می‌دهیم که هر دو شبکه معادل حاصل شبکه‌های سه پایانه‌اند. معادلات زیرانسیل توصیف‌کننده این مدار عبارتند از:

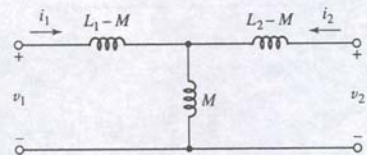
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (16)$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (17)$$

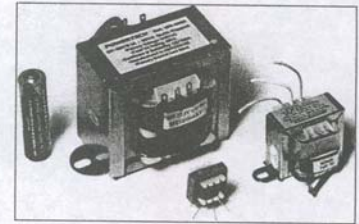
شکل این دو معادله آشنا به نظر می‌رسد و به آسانی می‌توان آن‌ها را با تحلیل مش تفسیر کرد. کنون  $i_1$  را در جهت عقربه‌های ساعت (ساعت‌گرد) و  $i_2$  را در خلاف آن در نظر می‌گیریم تا دقیقاً با جریان‌های شکل ۱۷-۱۳ یکی باشند. جمله  $M \frac{di_2}{dt}$  در معادله (۱۶) و  $M \frac{di_1}{dt}$  در معادله (۱۷) نشان می‌دهند که دو مش باید یک خود القای مشترک  $M$  داشته باشند. چون خودالقای کل حول مش سمت چپ  $L_1$  است، یک خودالقای  $M - L_1$  باید در مش اول در نظر گرفته شود ولی نه در مش دوم. به همین طریق خودالقای  $M - L_2$  در مش دوم لازم است ولی نه در مش اول. شبکه معادل حاصل در شکل ۱۸-۱۳ نشان داده شده است. یکسان بودن روابط  $v_1, i_1$  و  $v_2, i_2$  برای دو شبکه معادل بودن آن‌ها را تضمین می‌کند.



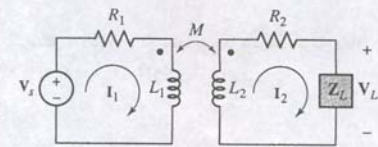
شکل ۱۷-۱۳ یک ترانس مفروض که با یک مدار T یا Π جایگزین می‌شود.



شکل ۱۸-۱۳ معادل T ترانس شکل ۱۷-۱۳.



شکل ۱۵-۱۳ گزینه‌ای از چند ترانس برای استفاده در الکترونیک باطری AA فقط به خاطر مقایسه آمده است.

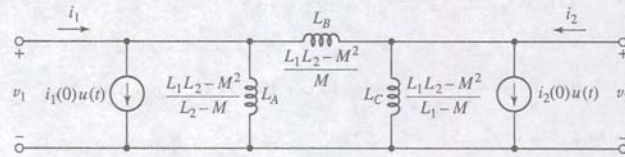


شکل ۱۶-۱۳ یک ترانس خطی حاوی یک منبع در اولیه و یک بار در ثانویه. در هر دو بخش اولیه و ثانویه مقاومت هم لحاظ شده است.

$\mathbf{Z}_{in}$  امپدانس است که از سیم‌پیچ اولیه ترانسفورماتور دیده می‌شود.



شکل ۱۳-۲۱ شبکه  $\Pi$  معادل ترانسفورماتور  
شکل ۱۳-۱۷



اکنون اگر از  $t=0$  انتگرال بگیریم، داریم:

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} \int_0^t v_1 dt - \frac{M}{L_1L_2 - M^2} \int_0^t v_2 dt \quad (۱۸)$$

به طریقی مشابه داریم:

$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1L_2 - M^2} \int_0^t v_1 dt + \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2} \int_0^t v_2 dt \quad (۱۹)$$

معادلات (۱۸) و (۱۹) را می‌توان به عنوان جفت معادلات گرہ تصور کرد، برای تهیه مقادیر اولیه مناسب باید یک منبع جریان پله را در هر گرہ نصب نمود. ضرایب هر انتگرال فرم کلی عکس القابندی‌های معادل معینی را دارند. بنابراین ضریب دوم در معادله (۱۸)، یعنی  $M / (L_1L_2 - M^2)$  برابر  $1 / L_B$  یا عکس القابندی بین گرہ‌های ۱ و ۲ در معادل  $\Pi$  طبق شکل ۱۳-۲۱ می‌باشد. پس:

$$L_B = \frac{L_1L_2 - M^2}{M}$$

اولین ضریب در معادله (۱۸) یعنی  $L_2 / (L_1L_2 - M^2)$  برابر  $1 / L_A + 1 / L_B$  است. پس:

$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}$$

یا

$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}$$

سرانجام:

$$L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}$$

در شبکه معادل  $\Pi$  هیچ کوبل مغناطیسی بین القاگرها وجود ندارد و جریان‌های اولیه در سه خود القاگر صفر می‌باشند.

برای جبران اثر جابه‌جاشدن هر یک از نقطه‌های ترانس، کافی است علامت  $M$  را در شبکه معادل منفی کنیم. در این جا هم همچون شبکه  $T$ ، ممکن است در شبکه  $\Pi$  مقدار خود القا منفی باشد.

شبکه معادل  $\Pi$  ترانس در شکل ۱۳-۱۹ (الف) را پیدا کنید.

جریان‌های اولیه صفر می‌شوند. چون جمله  $L_1L_2 - M^2$  بین  $L_A$ ،  $L_B$  و  $L_C$  مشترک است، اول آن را محاسبه می‌کنیم:

$$30 \times 10^{-3} \times 60 \times 10^{-3} - (40 \times 10^{-3})^2 = 2 \times 10^{-4} \text{ H}^2$$

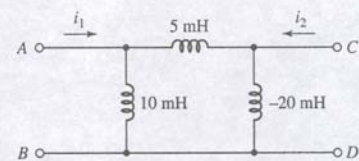
بنابراین

$$L_A = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_2 - M)} = \frac{2 \times 10^{-4}}{(20 \times 10^{-3})} = 10 \text{ mH}$$

$$L_C = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{(L_1 - M)} = -20 \text{ mH}$$

و  $L_B = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{M} = 5 \text{ mH}$ . شبکه  $\Pi$  معادل در شکل ۱۳-۲۲ مشاهده می‌شود.

مثال ۱۳-۶



شکل ۱۳-۲۲ معادل  $\Pi$  ترانس خطی شکل  
۱۳-۱۹ (الف). فرض بر این است که  $i_1(0) = 0$  و  $i_2(0) = 0$  باشد.

اگر یکی از نقطه‌های ترانس داده شده در پایانه دیگر سیم‌پیچ قرار داشته باشد، علامت جمله‌های متقابل در معادلات (۱۶) و (۱۷) منفی می‌گردد. این به معنی تعویض  $M$  با  $(-M)$  است و انجام این عمل در شبکه معادل شکل ۱۳-۱۸، منجر به شبکه معادل صحیحی خواهد شد. مقدار سه القابندی جدید،  $L_1 + M$ ،  $L_2 + M$  و  $-M$  هستند.

تمام القابندی‌ها در معادل  $T$ ، همگی خود القا می‌باشند و در این شبکه القابندی متقابل وجود ندارد. ممکن است القابندی این مدار معادل منفی شود، ولی اگر هدف تحلیل ریاضی است، منفی بودن آن اصلاً مهم نیست. البته در صورت منفی بودن القابندی ساخت چنین مدار معادلی در شبکه ممکن نخواهد بود. با این وجود مواردی وجود دارد که در سنتز شبکه‌ها به دست آوردن تابع تبدیل منجر به پیدایش شبکه  $T$  با القابندی منفی می‌گردد. در این حالت، باید با یک ترانسفورماتور خطی مناسب چنین شبکه‌ای را ساخت.

مثال ۱۳-۵

معادل  $T$  در ترانس خطی شکل ۱۳-۱۹ (الف) را پیدا کنید.

می‌بینیم که  $L_1 = 30 \text{ mH}$ ،  $L_2 = 60 \text{ mH}$  و  $M = 40 \text{ mH}$  است. هر دو نقطه در پایانه‌های بالایی شکل ۱۳-۱۷ قرار دارند. پس در بازوی بالای چپ  $L_1 - M = -10 \text{ mH}$  در بالای سمت راست  $L_2 - M = 20 \text{ mH}$  و بخش وسط هم  $M = 40 \text{ mH}$  می‌باشد. معادل کامل  $T$  در شکل ۱۳-۱۹ (ب) ملاحظه می‌گردد.

برای نمایش هم‌ارزی این دو، بگذارید پایانه‌های  $C$  و  $D$  را مدار باز فرض کنیم و  $v_{AB} = 10 \cos 100t \text{ V}$  را به ورودی شکل ۱۳-۱۹ (الف) اعمال نماییم. پس:

$$i_1 = \frac{1}{30 \times 10^{-3}} \int 10 \cos(100t) dt = 3.33 \sin 100t \text{ A}$$

$$v_{CD} = M \frac{di}{dt} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

با اعمال همان ولتاژ در معادل  $T$  داریم:

$$i_1 = \frac{1}{(-10 + 40) 10^{-3}} \int 10 \cos(100t) dt = 3.33 \sin 100t \text{ A}$$

که همان مقدار قبلی است. همچنین ولتاژ در  $C$  و  $D$  برابر با ولتاژ دوسر القاگر  $40 \text{ mH}$  می‌گردد. پس:

$$v_{CD} = 40 \times 10^{-3} \times 3.33 \times 100 \cos 100t = 13.33 \cos 100t \text{ V}$$

و دو شبکه نتیجه یکسانی می‌دهند.

## تمرین

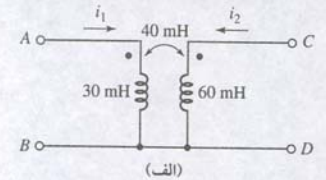
۱۳-۶ (الف) اگر دو شبکه شکل ۱۳-۲۰ معادل باشند، مقادیر  $L_x$ ،  $L_y$  و  $L_z$  را مشخص کنید. (ب) اگر نقطه در ثانویه شکل ۱۳-۲۰ (ب) در پایین سیم‌پیچ باشد، محاسبه را تکرار کنید. جواب:  $3.5 \text{ H}$  و  $2.5$ ،  $-1.5$  و  $9.5$ ،  $5.5$ ،  $3.5 \text{ H}$ .

شبکه  $\Pi$  معادل به سادگی به دست نمی‌آید. این شبکه بسیار پیچیده‌تر است و آن‌قدر هم کاربر، ندارد. برای یافتن آن باید معادله (۱۷) را برای  $di/dt$  حل و نتیجه را در معادله (۱۶) قرار داد:

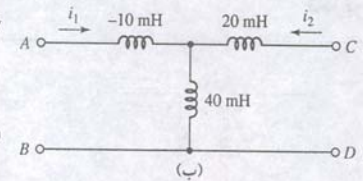
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

یا

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} v_1 - \frac{M}{L_1L_2 - M^2} v_2$$

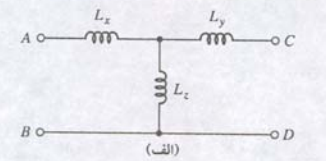


(الف)

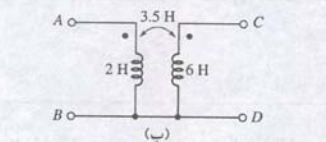


(ب)

شکل ۱۳-۱۹ (الف) مثالی از ترانس خطی.  
(ب) شبکه تونن ترانس.



(الف)



(ب)

شکل ۱۳-۲۰



مدار به یک منبع ولتاژ سینوسی (15.92 Hz) 100 rad/s وصل است. همچنین لازم است تا دو مقاومت را به شماتیک بیفزاییم تا PSpice بدون تولید هر پیام خطایی کار کند. ابتدا یک مقاومت کوچک بین منبع ولتاژ و  $L_1$  قرار داده می‌شود. برای حداقل کردن اثر آن مقاومت  $1\text{ p}\Omega$  انتخاب شده است. دوم، یک مقاومت  $1000\text{ M}\Omega$  (در واقع بینهایت) به  $L_2$  وصل است. خروجی شبیه‌سازی، یک ولتاژ با اندازه  $13.33\text{ V}$  و زاویه فاز  $-3.819 \times 10^{-8}$  درجه (تقریباً صفر) است که با محاسبه دستی تجانس دارد.

PSpice دو مدل ترانس دیگر نیز دارد، یکی ترانس خطی XFRM\_LINEAR و دیگری ترانس ایده‌آل XFRM\_NONLINEAR که دارای ویژگی‌های زیر می‌باشند. در ترانس خطی مقادیر ضریب کوپل برای هر دو القاکنایی سیم‌پیچ باید معلوم باشد. ترانس ایده‌آل همان‌طور که خواهیم دید، نیاز به ضریب کوپل دارد ولی در ترانس ایده‌آل مقدار القاکنایی بینهایت یا نزدیک به بینهایت است. بنابراین پارامتر لازم برای بخش XFRM\_NONLINEAR تعداد دور هر سیم‌پیچ است.

## ۴-۱۳ ترانسفورماتور ایده‌آل

یک ترانس ایده‌آل تقریب خوبی از یک ترانس با کوپل یا تزویج بالا است و در آن ضریب کوپل تقریباً برابر یک، و رآکتانس القاگرهای اولیه و ثانویه در مقایسه با امپدانس‌های متصل به اولیه و ثانویه بسیار بزرگ است. برای دستیابی به این ویژگی در محدوده‌ای از فرکانس‌ها از هسته آهنی استفاده می‌شود. می‌توان ترانس هسته آهنی را به سادگی با جایگزینی ترانس با ترانس ایده‌آل تحلیل کرد. ترانس ایده‌آل مدل مرتبه اولی از ترانس هسته آهنی است.

### نسبت دور در یک ترانس ایده‌آل

در مورد ترانس ایده‌آل با مفهوم جدیدی به نام نسبت دور  $a$  سروکار خواهیم داشت. خودالقای یک سیم‌پیچ متناسب با مربع تعداد دور سیمی است که سیم‌پیچ را می‌سازد. این رابطه به شرطی معتبر است که شار ناشی از جریان در سیم‌پیچ از تمام دورها بگذرد. برای ایجاد رابطه‌ای کمی لازم است، مفاهیم الکترومغناطیسی را به کار ببریم. این کار در بحث تحلیل مدار ما گنجانده نشده است. با این وجود یک بحث کیفی هم می‌تواند کافی باشد. اگر جریان  $I$  در یک سیم‌پیچ  $N$  دور جاری شود، شار حاصل  $N$  برابر شار ناشی از یک دور سیم‌پیچ است. اگر  $N$  دور را همزمان تصور کنیم، آن‌گاه همه شار قطعاً همه دورها را در برمی‌گیرد. با تغییر زمانی جریان و شار، ولتاژی در سیم‌پیچ القا می‌شود مسلماً ولتاژ القایی در سیم‌پیچ  $N$  دوری باید  $N$  برابر ولتاژ یک دور باشد. به این دلیل، تناسب بین القاکنایی و مربع تعداد دورها از این جا ناشی می‌شود. پس:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = a^2 \quad (20)$$

یا

$$a = \frac{N_2}{N_1} \quad (21)$$

شکل ۲۵-۱۳ یک ترانس ایده‌آل را که بار به ثانویه آن وصل است، نشان می‌دهد. طبیعت ایده‌آل در ترانس به چند طریق نشان داده شده است: یکی این‌که بین دو سیم‌پیچ خطوط موازی

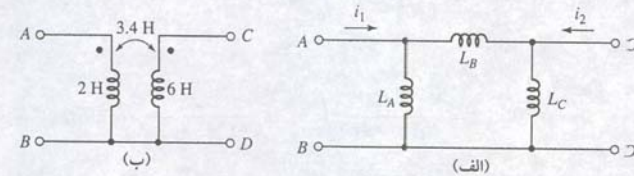
اگر دوباره نتیجه را با فرض  $V_{AB} = 10 \cos 100t\text{ V}$  تست کنیم و پایانه‌های C-D را باز بگذاریم، ولتاژ خروجی به راحتی از تقسیم ولتاژ به دست می‌آید:

$$V_{CD} = \frac{-20 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-3} - 20 \times 10^{-3}} 10 \cos 100t = 13.33 \cos 100t\text{ V}$$

که مثل قبل است. بنابراین شبکه شکل ۲۲-۱۳ به لحاظ الکتریکی معادل شبکه‌های شکل ۱۹-۱۳ (الف) و (ب) می‌باشد.

## تمرین

۷-۱۳ اگر شبکه‌های شکل ۲۳-۱۳ معادل باشند، مقادیر  $L_A$ ،  $L_B$  و  $L_C$  را مشخص کنید (به mH).



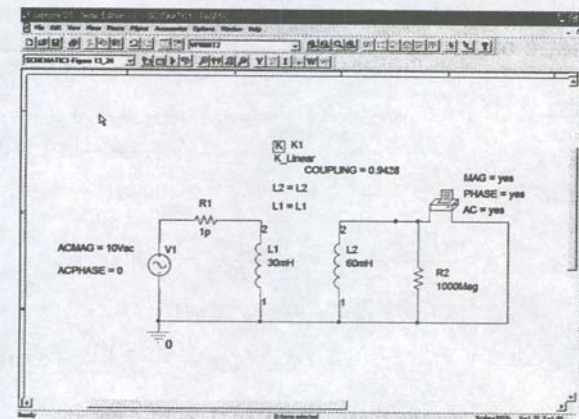
شکل ۲۳-۱۳

جواب:  $L_C = 314.3\text{ mH}$ ،  $L_B = 129.4\text{ mH}$ ،  $L_A = 169.2\text{ mH}$

## تحلیل کامپیوتری

توانمندی در شبیه‌سازی مدارهایی که حاوی القاکنایی کوپل مغناطیسی‌اند، خصوصاً با کاهش روزافزون ابعاد مدارهای مدرن، مهارتی مفید است. با نزدیک شدن حلقه‌ها و یا بخش‌هایی از رساناها به واسطه میدان‌های پراکنده یا یکدیگر کوپل می‌گردند و با هم واکنش نشان می‌دهند. PSpice اجازه می‌دهد تا با جعبه اجزای K\_Linear این اثر را بررسی کنیم. این مؤلفه جهت القاگرها را در شماتیک با ضریب  $k$  به هم مرتبط می‌سازد و  $0 \leq k \leq 1$  است.

مثلاً فرض کنید که مدار شکل ۱۹-۱۳ (الف) را که از دو سیم‌پیچ تشکیل و کوپل آن با القای متقابل  $M = 40\text{ mH}$  توصیف شده است، بخواهیم شبیه‌سازی کنیم. این کمیت متناظر با ضریب کوپل  $k = 0.9428$  است. مدار مبنای مربوطه در شکل ۲۴-۱۳ ملاحظه می‌شود. می‌بینید که هیچ نقطه‌ای در کنار سمبل القاگر وجود ندارد. وقتی که القاگر افقی روی شماتیک قرار گیرد، پایانه نقطه‌دار در سمت چپ است. این پایانه‌ای است که نماد حول آن می‌چرخد و دقت کنید که جعبه محاوره K\_Linear به طور دلخواه هر جایی می‌تواند باشد. دو القاگر کوپل شده  $L_1$  و  $L_2$  همراه با ضریب کوپل در کادر محاوره اجرا داده شده‌اند.



شکل ۲۴-۱۳ شماتیک مداری که باید شبیه‌سازی شود.





را به این نام می‌خوانند. در ترانس ایده‌آل امپدانس منعکسه واقعی بینهایت است وگرنه امپدانس بینهایت القاگر اولیه حذف نمی‌شد. این عمل حذف در صورت معادله (۲۴) رخ می‌دهد. امپدانس  $Z_L / a^2$  جمله کوچکی است که به دلیل عدم حذف کامل باقی می‌ماند. قسمت رآکتیو امپدانس منعکسه واقعی ترانس ایده‌آل هم تغییر علامت می‌دهد. با این وجود، اثر رآکتانس بینهایت سیم‌پیچ اولیه و رآکتانس منعکسه بینهایت ولی با علامت منفی ثانویه حذف می‌گردد.

بنابراین مهمترین مشخصه ترانس ایده‌آل قابلیت تغییر اندازه امپدانس یا بهتر بگوییم تغییر سطح امپدانس است. ترانس ایده‌آل اولیه‌ای که ۱۰۰ دور سیم‌پیچ اولیه و ۱۰۰۰۰ دور سیم‌پیچ ثانویه دارد، نسبت دور آن ۱۰۰۰۰/۱۰۰ یا ۱۰۰ خواهد بود. سپس هر امپدانی که به دو سر ثانویه نصب گردد، با ضریب ۱۰۰<sup>۲</sup> یا ۱۰۰۰۰ کاهش می‌یابد. درواقع یک مقاومت ۲۰۰۰۰Ω، تنها ۲Ω و هر القاگر ۲۰۰ mH همچون ۲۰ μH و هر خازن ۱۰۰ PF به مقدار ۱ μF به نظر خواهد رسید. اگر محل سیم‌پیچ اولیه و ثانویه تعویض شود، آن‌گاه  $a = 0.01$  بوده و امپدانس بار بزرگ می‌شود. در عمل، همیشه این تغییراندازه رخ نمی‌دهد، زیرا به یاد داریم که در قدم آخر محاسبه امپدانس ورودی و میل  $L_1$  در معادله (۲۵) به سمت بینهایت، لازم شد که  $Z_L$  را در مقایسه با  $j\omega L_1$  نادیده بگیریم. چون  $L_2$  هرگز بینهایت نمی‌شود، اگر امپدانس بار خیلی بزرگ باشد، مدل ترانس ایده‌آل هرگز معتبر نیست.

### استفاده از ترانس‌ها برای تطبیق امپدانس

مثالی عملی از کاربرد یک ترانس آهنی به عنوان تغییر دهنده سطح امپدانس، اتصال یک تقویت کننده صوتی لامپی متصل به بلندگو است. برای دستیابی به حداکثر توان انتقالی می‌دانیم که مقاومت بار باید برابر با مقاومت داخلی منبع باشد. معمولاً بلندگو مقاومتی در حد چند اهم (و اغلب از جنس اهمی) دارد، در حالی که تقویت کننده توان، مقاومتی چند هزار اهمی را از خود به نمایش می‌گذارد. پس ترانسی با  $N_1 < N_2$  لازم است. مثلاً اگر تقویت کننده (یا ژنراتور) امپدانس داخلی ۴۰۰۰Ω داشته ولی مقاومت بلندگو ۸Ω باشد، آن‌گاه:

$$Z_g = 4000 = \frac{Z}{a^2} = \frac{8}{a^2}$$

یا

$$a = \frac{1}{22.4}$$

خواهد بود. پس:

$$\frac{N_1}{N_2} = 22.4$$

بین جریان‌های اولیه و ثانویه  $I_1$  و  $I_2$  در ترانس ارتباط ساده‌ای وجود دارد. از معادله (۲۳) داریم:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega M}{Z_L + j\omega L_2}$$

اجازه می‌دهیم تا  $L_2$  بینهایت شود و بنابراین:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

یا

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{a}}$$

(۲۷)

بنابراین نسبت جریان‌های اولیه و ثانویه همان نسبت دورها است. اگر  $N_2 > N_1$  باشد، آن‌گاه  $a > 1$  است و آشکار است که جریان بیشتر در تعداد دور کمتر وجود خواهد داشت. به بیان دیگر:

$$N_1 I_1 = N_2 I_2$$

عمدی رسم شده تا نمایشگر ورق‌های آهنی در هسته ترانس باشد. ضریب کوپل ۱ و نیز علامت  $a$ : نسبت دور  $N_1$  به  $N_2$  را نشان می‌دهد.

بگذارید این ترانس را در حالت ماندگار سینوسی تحلیل کنیم تا فرضیات خود را در ساده‌ترین فرم ببینیم. دو معادله حلقه وجود دارد:

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \quad (۲۲)$$

$$0 = j\omega M I_1 + (Z_L + j\omega L_2) I_2 \quad (۲۳)$$

ابتدا امپدانس ورودی را تعیین می‌کنیم. با حل معادله (۲۳) برای یافتن  $I_2$  و جایگزینی آن در معادله (۲۲) داریم:

$$V_1 = I_1 j\omega L_1 + I_1 \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2}$$

و

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2}$$

چون  $M^2 = L_1 L_2$ ،  $k = 1$  است، پس:

$$Z_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{Z_L + j\omega L_2}$$

در کنار ضریب کوپل واحد، دیگر مشخصه یک ترانس ایده‌آل وجود امپدانس خیلی بالا در اولیه و ثانویه سیم‌پیچ‌ها است که از فرکانس کار هم مستقل می‌باشد. این خصوصیت بیان می‌کند که حالت ایده‌آل برای  $L_1$  و  $L_2$  گرایش آن‌ها به سمت بینهایت است. با این وجود، نسبت آن‌ها باید معین باقی بماند که با نسبت دورها مشخص می‌شود. پس:

$$L_2 = a^2 L_1$$

و

$$Z_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 a^2 L_1^2}{Z_L + j\omega a^2 L_1}$$

اکنون اگر  $L_1$  بینهایت شود، هر دو جمله در سمت راست عبارت فوق بینهایت خواهد شد و حاصل نامعین است. پس لازم است ابتدا دو جمله را ترکیب کنیم.

$$Z_{in} = \frac{j\omega L_1 Z_L - \omega^2 a^2 L_1^2 + \omega^2 a^2 L_1^2}{Z_L + j\omega a^2 L_1} \quad (۲۴)$$

یا

$$Z_{in} = \frac{j\omega L_1 Z_L}{Z_L + j\omega a^2 L_1} = \frac{Z_L}{Z_L / j\omega L_1 + a^2} \quad (۲۵)$$

اکنون با  $L_1 \rightarrow \infty$  می‌بینیم که

$$Z_{in} = \frac{Z_L}{a^2} \quad (۲۶)$$

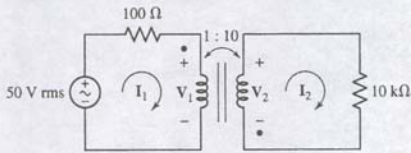
در نیال  $Z_L$  معین است.

این نتیجه چند نکته جالب در بردارد، که حداقل یکی از آن‌ها با مشخصات ترانس خطی متناقض است. امپدانس ورودی یک ترانس ایده‌آل متناسب با امپدانس بار است و ثابت تناسب هم عکس مربع نسبت دورها است. به بیان دیگر، اگر امپدانس بار از نوع امپدانس خازنی باشد، آن‌گاه امپدانس ورودی از نوع خازنی است. در ترانس خطی، با این وجود، امپدانس منعکسه تغییر علامت می‌داد و بار خازنی به صورت القایی در اولیه ظاهر می‌شد. علت را چنین می‌توان تفسیر کرد که اولاً  $Z_L / a^2$  امپدانس منعکسه نیست، گرچه به اشتباه آن



آن‌گاه  $V_2$  از  $I_2$  به اندازه  $\theta$  پیش‌فاز است. به علاوه امپدانس  $Z_L / a^2$  بوده و  $V_1$  نیز از  $I_1$  به اندازه  $\theta$ . اگر جریان و ولتاژ با مقدار rms نمایش داده شوند، آن‌گاه  $|I_2| \cos \theta$  باید برابر با  $|V_1| \cos \theta$  باشد و در این هنگام همه توان انتقالی به پایانه‌های اولیه به بار منتقل می‌گردد و هیچ انرژی انتقالی به یک ترانس ایده‌آل، جذب آن نمی‌شود. مشخصه ترانس ایده‌آلی را که به دست آوردیم با تحلیل فیزیکی هم قابل دستیابی‌اند. البته این مشخصه‌ها در پاسخ حالت ماندگار سینوسی صحیح‌اند ولی دلیلی بر صحت آن‌ها در پاسخ کامل وجود ندارد. درواقع این مشخصات در حالت کلی هم معتبرند. این مطلب را به راحتی می‌توان با استفاده از حوزه فرکانسی نشان داد. در هر حال تحلیل ما حاوی تقریب‌هایی است که باید در مدل‌های ترانس‌های واقعی اعمال شود تا ترانس ایده‌آل به دست آید. مثلاً دیدیم که راکتانس ثانویه باید از بزرگترین امپدانس که به آن متصل می‌گردد، خیلی بزرگتر باشد. بنابراین شرایطی را به دست آوردیم که تحت آن یک ترانس به جز آن، به صورت ایده‌آل عمل نمی‌کرد.

مثال ۷-۱۳



شکل ۲۷-۱۳ یک مدار ساده با ترانسی ایده‌آل.

برای مدار شکل ۲۷-۱۳ توان متوسط مصرفی را در مقاومت  $10 \text{ k}\Omega$  معین کنید.

توان متوسط مصرفی در مقاومت  $10 \text{ k}\Omega$  برابر است با

$$P = 10000 |I_2|^2$$

منبع  $50 \text{ V rms}$  امپدانس ورودی ترانس را  $Z_L / a^2$  یا  $100 \Omega$  حس می‌کند. بنابراین:

$$I_1 = \frac{50}{100 + 100} = 250 \text{ mA rms}$$

از معادله (۲۷) داریم  $I_2 = (1/a)I_1 = 25 \text{ mA rms}$ . بنابراین درمی‌یابیم که مقاومت  $10 \text{ k}\Omega$ ،  $6.25 \text{ W}$  توان مصرف می‌کند.

در این مثال از زوایای فاز صرف‌نظر شده است زیرا در محاسبه توان متوسط تلف شده در یک مقاومت بار خالص اهمی نقشی ندارند.

۸-۱۳ مثال ۷-۱۳ را با استفاده از ولتاژها برای یافتن توان تلف شده تکرار کنید.

جواب:  $6.25 \text{ W}$

### رابطه ولتاژ در حوزه زمان

اکنون ببینیم که کمیت‌های حوزه زمان  $v_1$  و  $v_2$  چگونه در یک ترانس ایده‌آل با هم مرتبط‌اند. با مراجعه به شکل ۱۷-۱۳ با ملاحظه دو معادله (۱۶) و (۱۷) که این ارتباط را بیان می‌کنند و حل  $di_2/dt$  در معادله دوم و جایگزینی در معادله اول داریم:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

با این وجود برای ضریب کوپل واحد،  $M^2 = L_1 L_2$  بوده و خواهیم داشت:

$$v_1 = \frac{M}{L_2} v_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} v_2 = \frac{1}{a} v_2$$

پس رابطه بین ولتاژ اولیه و ثانویه در پاسخ کامل حوزه زمان هم صدق می‌کند.

عبارتی برای ارتباط جریان اولیه و ثانویه در حوزه زمان از تقسیم طرفین معادله (۱۶) بر  $L_1$  خیلی سریع تر حاصل می‌گردد.

دو طرف معادله (۱۶) را بر  $L_1$  تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{v_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} + a \frac{di_2}{dt}$$

اگر هر یک از دو جریان معکوس شود و یا محل نقطه ترانس عوض گردد، نسبت جریان‌ها منفی نسبت دورها خواهد بود.

در مثالی که ارائه شد و در آن یک ترانس ایده‌آل برای تغییر سطح امپدانس و تطبیق بلندگوی تقویت‌کننده به کار رفت، جریان  $50 \text{ mA rms}$  با فرکانس  $1000 \text{ Hz}$  در اولیه موجب تولید جریان  $1.12 \text{ A}$  با فرکانس  $1000 \text{ Hz}$  در ثانویه شده توان انتقالی به بلندگو  $8^{2.8} (1.12)$  یا  $10 \text{ W}$  می‌گردد و توان انتقال یافته به تقویت‌کننده هم همان  $4000^{2.8} (0.05)$  یا  $10 \text{ W}$  است. پاسخ مورد تأیید است زیرا یک ترانس ایده‌آل نه حاوی بار فعال است تا تولید توان کند و نه مقاومتی دارد تا توان را جذب نماید.

### استفاده از ترانس در تنظیم سطح ولتاژ

چون توان حمل شده به ترانس ایده‌آل مثل توان انتقالی به یک بار است ولی جریان‌های اولیه و ثانویه با نسبت دور مناسب می‌باشند، منطقی است که ولتاژهای اولیه و ثانویه به نسبت دورها باشند. اگر ولتاژ ثانویه یا ولتاژ بار را با رابطه زیر تعریف کنیم:

$$V_2 = I_2 Z_L$$

و ولتاژ اولیه در دو سر  $L_1$  باشد، آن‌گاه:

$$V_1 = I_1 Z_{in} = I_1 \frac{Z_L}{a^2}$$

در این صورت نسبت دو ولتاژ چنین است:

$$\frac{V_2}{V_1} = a^2 \frac{I_2}{I_1}$$

یا

$$\frac{V_2}{V_1} = a = \frac{N_2}{N_1}$$

(۲۸)

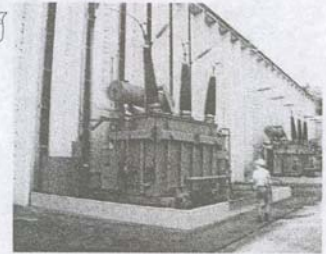
بنابراین نسبت ولتاژ ثانویه به ولتاژ اولیه برابر نسبت دورها است. باید توجه کرد که این معادله عکس معادله (۲۷) است و این خود منشأ اشتباه برای بسیاری از دانشجویان می‌باشد. این نسبت می‌تواند با معکوس کردن ولتاژ یا تغییر محل نقطه منفی گردد.

به این ترتیب با انتخاب هر نسبت دوری می‌توان هر ولتاژ  $ac$  را به هر ولتاژ  $ac$  دیگر تبدیل کرد. اگر  $a > 1$  باشد، ولتاژ ثانویه بیشتر از اولیه است و چیزی را که به آن امروزه ترانس افزایشده می‌گویند خواهیم داشت. اگر  $a < 1$  باشد، ولتاژ ثانویه کوچکتر از اولیه می‌باشد و به آن ترانس کاهشده می‌گویند. شرکت‌های تولید برق معمولاً ولتاژ را بین  $12 \text{ kV}$  تا  $25 \text{ kV}$  تولید می‌کنند. گرچه این سطح ولتاژ بالا است ولی تلفات انتقال در فواصل طولانی را با افزایش سطح ولتاژ به حدود چند صد هزار ولت توسط ترانس افزایشده می‌توان کاهش داد (شکل ۲۶-۱۳ الف)). سپس این ولتاژ به وسیله ترانس کاهشده به چند ده کیلووات در پست‌های محلی توزیع کاهش می‌یابد (شکل ۲۶-۱۳ ب)). ترانس‌های کاهشده بیشتر که در خارج ساختمان نصب می‌شوند می‌توانند ولتاژ را به سطح  $110 \text{ V}$  یا  $220 \text{ V}$  که مورد استفاده است برسانند (شکل ۲۶-۱۳ ج)). از ترکیب معادلات (۲۷) و (۲۸) داریم:

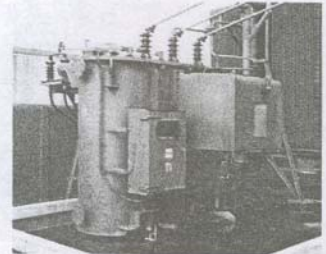
$$V_2 I_2 = V_1 I_1$$

ملاحظه می‌شود که ولت آمپرهای اولیه - ثانویه برابرند. اندازه این حاصل ضرب معمولاً به عنوان حداکثر مجاز ترانس‌های قدرت شناخته می‌شوند. اگر بار دارای زاویه فاز  $\theta$  باشد، یعنی:

$$Z_L = |Z_L| \angle \theta$$



(الف)



(ب)



(ج)

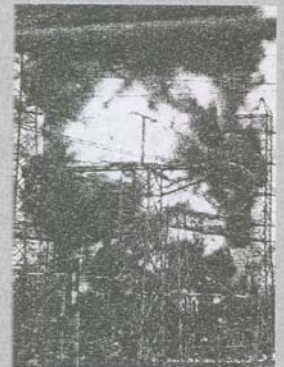
شکل ۲۶-۱۳ (الف) ترانس افزایشده که در افزایش ولتاژ خروجی برای ارسال به خط انتقال به‌کاررفته است. (ب) پست‌های ترانس به‌کاررفته برای کاهش ولتاژ از سطح  $250 \text{ kV}$  به چند ده کیلووات جهت توزیع محلی. (ج) ترانس‌های کاهشده برای کاهش سطح ولتاژ توزیع به  $240 \text{ V}$  جهت مصارف انرژی خانگی.



## کاربرد عملی

## ترانسفورماتورهای ابررسانا

در بسیاری از سولر، از انواع تلمانی که ممکن است در یک ترانس خاص صوت گیر، صرف نظر کردیم، با این وجود، هنگام بررسی ترانس های قدرت باید به این تغذیه توجه خاصی نمود حتی اگر بازده آن ها ۹۷٪ یا بالاتر باشد. گرچه چنین راندمانی ممکن است عده تقریباً ایده آلی به نظر برسد ولی در جریان های چند هزار آمپری، این بازده مقدار قابل توجهی تلفات انرژی دارد. مثلاً وقتی جریانی از سیم پیچی بگنجد، مقاومت مجر به تلفات  $i^2 R$  می گردد و به این معنی است که توان جذب شده به وسیله سیم ها با مربع جریان ارتباط دارد و به صورت گرماتلف می گردد. با افزایش دما، مقاومت هم بالا می رود و لذا توان تلف شده  $i^2 R$  نیز در سیم اضافه خواهد شد. همچنین دمای بالا سبب تخریب عایق سیم و بنابراین کوتاه شدن عمر ترانس می شود. در نتیجه بسیاری از ترانس های قدرت مدرن به نشت روغن عایق برای دفع گرمای تولیدی مجهزند. با این وجود این روش چند عیب دارد. زنگ زدگی ناشی از عمر طولانی و خوارضی از این قبیل اغلب سبب نشتی ترانس و لذا اثرات مخرب محیطی می گردد. استفاده از روغن های قابل اشتعال هم خطر آتش سوزی ناشی از مبارزه با آتش در پست های ولتاژ بالا کوری خطرناکی می باشد (شکل ۲۸-۱۳).



شکل ۲۸-۱۳

یک روش ممکن برای اصلاح رفتار چنین ترانس ها استفاده از سیم های ابررسانا (سوپرکنداکت) و جایگزینی آن با سیم پیچ های مقاومتی است. مواد ابررسانا در دمای بالا مقاومت دارند ولی در دمای بحرانی در برابر جریان بی مقاومت می شوند. برای بسیاری از مواد این دمای بحرانی تنها چند درجه از صفر مطلق بیشتر است. بنابراین نیاز به مایع هلیوم برای خنک شدن دارند. با این وجود با پدایش ابررساناهای سرمایک دمای بالا در

سال ۱۹۸۰ مواد در دماهای ۹۰ K ( $-180^{\circ}\text{C}$ ) و بالاتر ساخته شدند و جایگزینی تجهیزات مبتنی بر هلیوم یا سیستم های نیتروژنی امکان پذیر شد. این مواد به میزان قابل توجهی از لحاظ ساخت و کار ارزان تر تمام می شوند. شکل ۳-۳۰ یک ترانس ۶۳۰ - KVA ابررسانا را که به وسیله کمپانی ABB ساخته شده نشان می دهد که برای شبکه برق شهر ژنو سوئیس در مارس ۱۹۹۷ ساخته شده است. تغییر خط مشی طراحی و جایگزینی سیم های ابررسانا به جای سیم پیچ های مقاومتی مزایای متعددی دارد. اول این که اندازه ترانس با توان یکسان به یک سوم کاهش یافته است. دوم این که استفاده از خنک کننده نیتروژنی خطر آتش سوزی روغن را از بین برده است و نیز چون مایع نیتروژن به گاز نیتروژن تبدیل می گردد، از قبل محیط محصور شده و نشتی هم موجب آلرژیک آب غای زیرزمینی نمی گردد. سوم ولی شاید مهمتر از همه، حذف تلفات مقاومتی موجب بالا رفتن بازده ترانس می شود و به این ترتیب توان مورد تقاضا از ژنراتور کاهش یافته و صرفه جویی قابل توجهی به دنبال دارد.

در هر صورت هر طرحی معایبی دارد که باید در برابر مزایای آن ارزیابی گردد و ترانس های ابررسانا هم استثنای این نیستند. یکی از مهمترین موانع، هزینه بالای ساخت سیم های ابررسانای چند کیلو متری در مقایسه با سیم مسی است. این سیم ها معمولاً در داخل غلافی از نقره ساخته می شوند و در نتیجه هنگام گرم شدن مسیر جریانی ایجاد خواهد شد. مادمی که سیم دورنی ابررسانا باشد، جریانی از نقره عبور نمی کند زیرا در دمای نیتروژن مایع نایب مقاومت است) به کارگیری نقره بر قیمت سیم می افزاید. با این وجود استفاده از ماده ارزانتر مس انتخاب خوبی در این کاربرد نیست، زیرا این ماده مایل به واکنش با مواد ابررسانا است، خلاصه این که گرچه ترانس ابررسانا قادر است در هزینه تولید کننده در دراز مدت صرفه جویی کند (بسیاری از ترانس ها ممکن است تا ۳۰ سال سرویس بدهند) ولی هزینه اولیه آن خیلی بالاتر از ترانس های مقاومتی قدیمی است. در حال حاضر بسیاری از کمپانی ها و تولید کنندگان انرژی الکتریکی هزینه های کوتاه مدت را در نظر می گیرند و به سرمایه گذاری برای منافع دراز مدت مایل نیستند.



شکل ۲۹-۱۳ ترانس ابررسانای ۱۵ kVA

سپس یکی از مفروضات مربوط به ترانس ایده آل را به کار می گیریم.  $I_1$  بینهایت است، اگر فرض شود که  $V_1$  بینهایت نیست، باید داشته باشیم:

$$\frac{di_1}{dt} = -a \frac{di_2}{dt}$$

با گرفتن انتگرال از طرفین داریم:

$$i_1 = -ai_2 + A$$

که در آن A ثابتی از انتگرال گیری است که بر حسب زمان تغییر نمی کند. لذا اگر از جریان dc اولیه و ثانویه صرف نظر کنیم و توجه خود را فقط به بخشی از پاسخ معطوف داریم که بر حسب زمان تغییر می کند، خواهیم داشت:

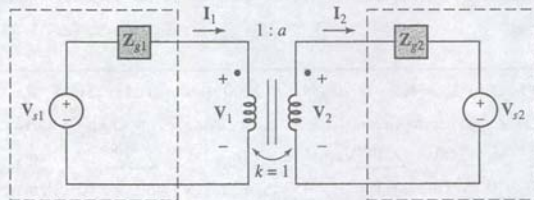
$$i_1 = -ai_2$$

علامت منفی ناشی از محل نقطه بر روی ترانس و انتخاب جهت جریان ها در شکل ۱۷-۱۳ است. بنابراین همان رابطه جریان - ولتاژی در حوزه زمان به دست آمد که قبلاً در حوزه فرکانس به دست آمده بود، با این شرط که مؤلفه های dc چشم پوشی شوند. نتایج حاصله در حوزه زمان عمومی ترند ولی روش به دست آوردنشان واضح نیست. به کمک مشخصات ترانس ایده آل می توان مدارهای ترانس را ساده کرد. برای نشان دادن این مطلب اجازه بدهید فرض کنیم که به جای تمام مدارهای سمت چپ اولیه، معادل تونن آن را گذاشته ایم و همین کار را در مورد شبکه سمت راست ثانویه هم انجام می دهیم. بنابراین مدار شکل ۳۰-۱۳ را خواهیم داشت. فرکانس منبع محرک  $\omega$  فرض شده است.

## مدارهای معادل

اکنون قضایای تونن و نورتن را برای دستیابی به مدار معادلی که حاوی ترانس است پیاده می کنیم. مثلاً بیایید ابتدا معادل تونن سمت چپ پایانه های ثانویه را معین کنیم. با باز کردن مدار ثانویه  $I_2 = 0$  و لذا  $I_1 = 0$  می گردد ( $L_1$  را بینهایت در نظر بگیرید). هیچ ولتاژی در سر  $Z_{g1}$  ظاهر نمی شود و بنابراین  $V_1 = V_{s1}$  و  $V_2 = 0$  خواهد بود. امپدانس تونن با کشتن  $V_{s1}$  و استفاده از مربع نسبت دور و واقع عکس این نسبت به دست می آید، چون ما از پایانه های ثانویه به اولیه نگاه می کنیم، بنابراین،  $Z_{th2} = Z_{g1} a^2$ . به منظور تست بگذارید جریان ثانویه مدار باز  $I_{2sc}$  را معین کنیم. با اتصال کوتاه ثانویه، مولد موجود در اولیه امپدانس  $Z_{g1}$  را در مقابل خود می بینید، پس است که باید هم باشد. معادل تونن ترانس و مدار اولیه در مدار شکل ۳۱-۱۳ مشاهده می شود.

بنابراین هر ولتاژ اولیه ای در نسبت دور ضرب می شود و هر جریان اولیه ای بر نسبت دور تقسیم می گردد، و هر امپدانس اولیه ای در مربع نسبت دور ضرب می شود. آن گاه این مقادیر جایگزین ولتاژ، جریان، امپدانس و نهایتاً ترانس می گردند. اگر هر یک از نقاط روی پایانه ها تغییر مکان دهند، می توان معادل را با تعویض علامت نسبت دور به دست آورد.



شکل ۳۰-۱۳ شبکه متصل به پایانه های اولیه و ثانویه ترانس ایده آل با معادل تونن نشان داده شده است.



## ۵-۱۳ خلاصه فصل و مرور

- القای متقابل، ولتاژ القایی را در دو سر یک سیم‌پیچ به علت میدان مغناطیسی حاصل از یک سیم‌پیچ دوم توصیف می‌کند.
- قرارداد نقطه، علامت را به جمله القای متقابل تخصیص می‌دهد.
- بر طبق قرارداد نقطه، جریان وارده به پایانه نقطه‌دار یک سیم‌پیچ، ولتاژ مدار بازی را با مرجع ولتاژ مثبت در پایانه نقطه‌دار سیم‌پیچ دوم تولید می‌کند.
- انرژی کل ذخیره شده در جهت سیم‌پیچ کوپل شده سه جمله دارد: انرژی ذخیره شده در هر خودالقا ( $\frac{1}{2} L i^2$ ) و انرژی ذخیره شده در القاکنایی متقابل ( $M i_1 i_2$ ).
- ضریب کوپلاژ با رابطه  $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$  داده می‌شود و محدود به مقاداری بین 0 و 1 است.
- یک ترانس خطی از دو سیم‌پیچ کوپل شده تشکیل شده است: یکی سیم‌پیچ اولیه و دیگری سیم‌پیچ ثانویه.
- یک ترانس ایده‌آل تقریب خوبی برای ترانس‌های هسته آهنی است. ضریب کوپل برابر واحد و القاکنایی بی‌نهایت در نظر گرفته می‌شود.
- نسبت دور  $N_2 / N_1 = a$  یک ترانس ایده‌آل ولتاژهای سیم‌پیچ اولیه را به ثانویه ارتباط می‌دهند:  $V_2 = a V_1$ .
- نسبت دور  $a$ ، جریان‌های اولیه و ثانویه را در سیم‌پیچ‌های اولیه و ثانویه مرتبط می‌کند:  $I_1 = a I_2$ .

## ۶-۱۳ خواندنی‌های کمکی

Almost everything you ever wanted to know about transformers can be found in

M. Heathcote, *J&P Transformer Book*, 12th ed. Oxford: Reed Educational and Professional Publishing Ltd., 1998.

Another comprehensive transformer title is

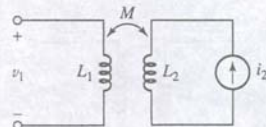
W.T. McLyman, *Transformer and Inductor Design Handbook*, 3rd ed. New York: Marcel Dekker, 2004.

A good transformer book with a strong economic focus is

B.K. Kennedy, *Energy Efficient Transformers*. New York: McGraw-Hill, 1998.

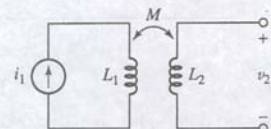
## مسائل

## ۱-۱۳ القای متقابل



شکل ۱۳-۳۶

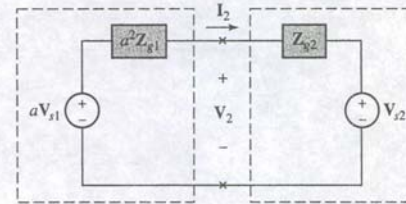
۱. مدار شکل ۱۳-۳۵ را ملاحظه کنید. اگر  $i_1(t) = 400 \cos 120\pi t$  A باشد و حداکثر مقدار  $i_2(t)$  برابر 100 V باشد، مقدار القای متقابل بین  $L_1$  و  $L_2$  چیست؟



شکل ۱۳-۳۵

۲. در مدار شکل ۱۳-۳۶، ولتاژ  $v_1$  برابر  $115\sqrt{2} \cos(120\pi t - 16^\circ)$  V و  $i_1 = 30 \sin 80t$  A و  $i_2 = 30 \cos 80t$  A باشد مطلوب است (الف) القاگر  $L_1$  و  $L_2$  چیست؟

۳. ساختار فیزیکی سه جفت سیم‌پیچ کوپل شده در شکل ۱۳-۳۷ دیده می‌شود. روی سیم‌پیچ هر یک از آن‌ها محل نقطه را مشخص کنید.
۴. دو القاگر کوپل شده شکل ۱۳-۳۸ را مداری با ولتاژها و جریان‌های شکل به هم وصل‌اند.  $L_1 = 1$  H،  $L_2 = 3$  H و  $M = 0.5$  H. اگر  $i_1 = 30 \sin 80t$  A و  $i_2 = 30 \cos 80t$  A باشد مطلوب است (الف)  $v_1$  و (ب)  $v_2$ .

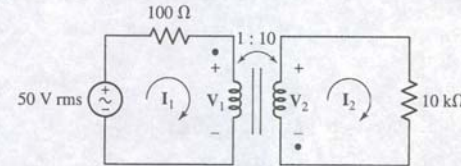


شکل ۱۳-۳۱ معادل تونن شبکه سمت چپ پایانه‌های ثانویه در شکل ۱۳-۳۰ که برای ساده‌کردن مدار به‌کاررفته است.

معادل‌های فوق‌الذکر طبق شکل ۱۳-۳۱ هنگامی امکان‌پذیرند که شبکه متصل به دو پایانه اولیه و متصل به دو پایانه ثانویه قابل جایگزینی با معادل‌های تونن باشند. یعنی هر یک باید یک شبکه دو پایانه باشند. مثلاً اگر ما دو سیم اولیه را از محل ترانس قطع کنیم، مدار باید به دو بخش تقسیم گردد و نباید عنصر یا شبکه‌ای بین اولیه و ثانویه ترانس پل بزنند. تحلیل مشابهی از ترانس و شبکه ثانویه نشان می‌دهد که هر چیزی در سمت راست پایه‌های اولیه با یک شبکه معادل بدون لحاظ ترانس قابل جایگزینی است و در آن هر ولتاژی بر  $a$  تقسیم، هر جریانی ضربدر  $a$  و هر امپدانسی بر  $a^2$  تقسیم می‌شود. تعویض هر سیم‌پیچ با دیگری ضرب نسبت دور  $a$  را به دست می‌دهد.

## مثال ۱۳-۸

برای مدار شکل ۱۳-۳۲ مدار معادل ترانس و ثانویه و نیز معادل ترانس و مدار اولیه را به‌دست آورید.



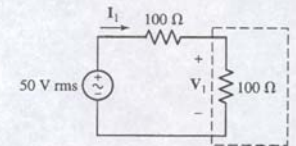
این همان مدار مثال ۱۳-۷ است. مثل قبل، امپدانس ورودی  $(10000)/(10)^2$  یا 100  $\Omega$  و بنابراین  $|I_1| = 25$  mA rms است. می‌توان ولتاژ دو سر سیم‌پیچ اولیه را هم حساب کرد.

$$|V_1| = |50 - 100I_1| = 25 \text{ V rms}$$

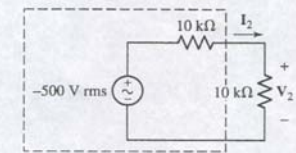
و بنابراین می‌توان دریافت که منبع توان  $12.5 \text{ W} = (50)(25 \times 10^{-3})$  را به‌مدار منتقل می‌کند که از آن  $6.25 \text{ W} = (100)(25 \times 10^{-3})^2$  در مقاومت داخلی منبع تلف شده و  $6.25 \text{ W} = (10000)(25 \times 10^{-3})^2$  نیز به بار منتقل می‌گردد.

اگر مدار ثانویه و ترانس ایده‌آل با معادل تونن جایگزین گردد، منبع 50 V و مقاومت 100  $\Omega$ ، امپدانس  $100 \Omega$  را نظاره خواهد کرد و به این ترتیب مدار ساده شده ۱۳-۳۳ (الف) به دست می‌آید و لذا جریان و ولتاژ اولیه مشخص است. اگر این بار، شبکه سمت چپ پایانه‌های ثانویه با معادل تونن جایگزین شود، خواهیم داشت:  $V_{th} = -500 \text{ V rms} = -10(50)$  و  $Z_{th} = 10 \text{ k}\Omega = (-10)^2(100)$ . مدار حاصل در شکل ۱۳-۳۳ (ب) ملاحظه می‌گردد.

شکل ۱۳-۳۲ مدار ساده‌ای که بار مقاومتی با امپدانس منبع با روش ترانس معادل تطابق دارد.



(الف)



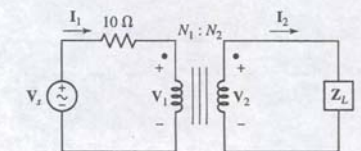
(ب)

شکل ۱۳-۳۳ (الف) مدار شکل ۱۳-۳۲ با جایگزینی (الف) ترانس و ثانویه با معادل تونن یا (ب) ترانس اولیه با معادل تونن، ساده شده است.

## تمرین

۹-۱۳ فرض کنید در یک ترانس ایده‌آل  $N_1 = 1000$  و  $N_2 = 5000$  باشد (شکل ۱۳-۳۴). اگر  $Z_L = 500 - j400 \Omega$  باشد، متوسط توان حمل شده به  $Z_L$  را برای (الف)  $V_s = 900 \angle 40^\circ \text{ V rms}$ ، (ب)  $I_2 = 1.4 \angle 20^\circ \text{ A rms}$ ، (ج)  $V_s = 200 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ ، (د)  $I_1 = 6 \angle 45^\circ \text{ Arms}$ ، (ه)  $V_1 = 80 \angle 110^\circ \text{ V rms}$  تعیین کنید.

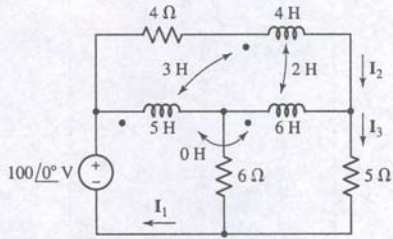
جواب: 692 W و 720 W، 195.1 W، 988 W، 980 W.



شکل ۱۳-۳۴

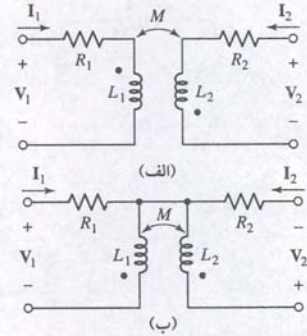


۱۵. توجه کنید که در شکل ۱۳-۴۸ بین القاگرهای ۵ H و ۶ H القای متقابل وجود ندارد. (الف) دسته‌ای از معادلات را برحسب  $I_1(j\omega)$ ،  $I_2(j\omega)$  و  $I_3(j\omega)$  بنویسید، (ب) اگر  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  باشد،  $I_3(j\omega)$  را پیدا کنید.



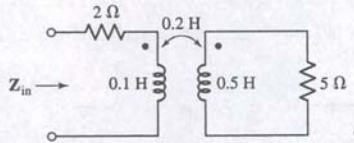
شکل ۱۳-۴۸

۱۶. برای هر مدار در شکل ۱۳-۴۹ مقدار  $V_1(j\omega)$  و  $V_2(j\omega)$  را برحسب  $I_1(j\omega)$  و  $I_2(j\omega)$  به دست آورید.



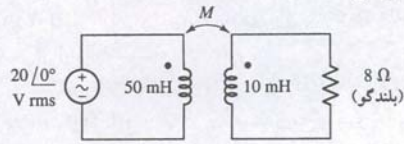
شکل ۱۳-۴۹

۱۷. (الف) برای شبکه شکل ۱۳-۵۰ مقدار  $Z_{in}(j\omega)$  را بیابید، (ب)  $Z_{in}$  را در فاصله فرکانس  $0 \leq \omega \leq 1000 \text{ rad/s}$  رسم کنید، (ج) برای  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  مقدار  $Z_{in}$  چقدر است؟

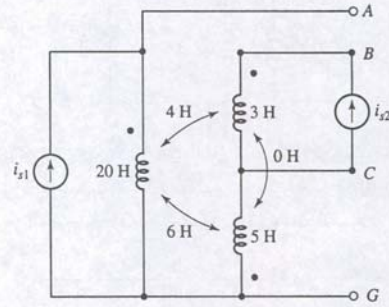


شکل ۱۳-۵۰

۱۸. با توجه به شکل ۱۳-۵۱، بگویید چه مقدار از  $M$  دقیقاً ۳.۲ W توان متوسط را به مقاومت  $8 \Omega$  یک بلندگو در فرکانس صوتی ۱۶۰ Hz انتقال می‌دهد.

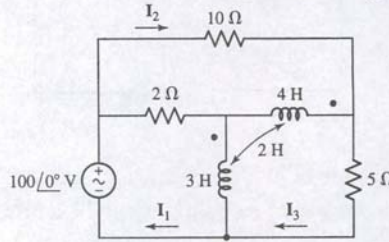


شکل ۱۳-۵۱



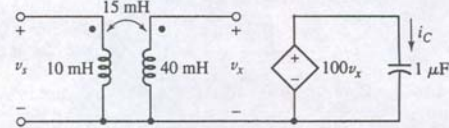
شکل ۱۳-۴۴

۱۲. برای مدار شکل ۱۳-۴۵، جریان‌های  $i_1(t)$ ،  $i_2(t)$  و  $i_3(t)$  را بیابید به شرطی که  $f = 50 \text{ Hz}$  باشد.



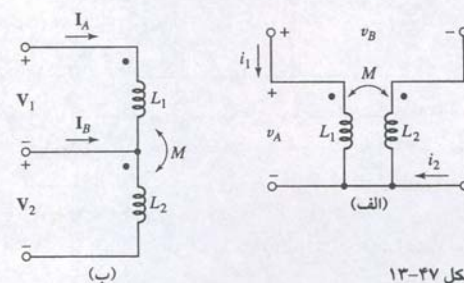
شکل ۱۳-۴۵

۱۳. عبارتی برای  $i_C(t)$  در  $t > 0$  در مدار شکل ۱۳-۴۶ بنویسید، به شرطی که  $v_s(t) = 10t^2 u(t) / (t^2 + 0.01) \text{ V}$  باشد.



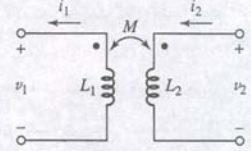
شکل ۱۳-۴۶

۱۴. (الف) برای شبکه ۱۳-۴۷ دو معادله برای  $v_A(t)$  و  $v_B(t)$  برحسب  $i_1(t)$  و  $i_2(t)$  بنویسید، (ب) دو معادله برای  $v_1(j\omega)$  و  $v_2(j\omega)$  به صورت تابعی از  $I_A(j\omega)$  و  $I_B(j\omega)$  برای شبکه ۱۳-۴۷ (ب) بنویسید.



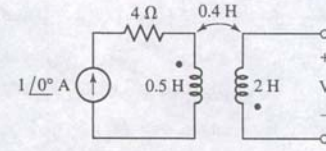
شکل ۱۳-۴۷

۱۵. با ارجاع به شکل ۱۳-۴۱، فرض کنید  $v_1 = 2e^{-t} \text{ V}$  و  $v_2 = 4e^{-3t} \text{ V}$  باشد. اگر  $L_1 = L_2 = 2 \text{ mH}$  و  $M = 1.5 \text{ H}$  باشد، مطلوب است (الف)  $di_1/dt$ ، (ب)  $di_2/dt$  و (ج)  $i_1(t)$  اگر در  $t = 0$  انرژی ذخیره نشده باشد.

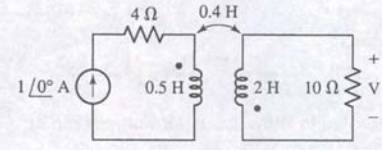


شکل ۱۳-۴۱

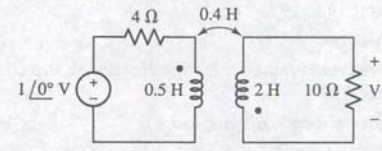
۱۶. برای هر شبکه در شکل ۱۳-۴۲،  $V(t)$  را به دست آورید به شرطی که  $f = 50 \text{ Hz}$  باشد.



(الف)



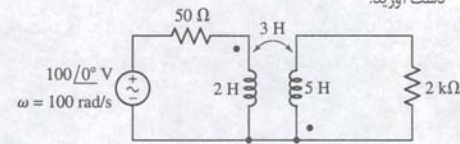
(ب)



(ج)

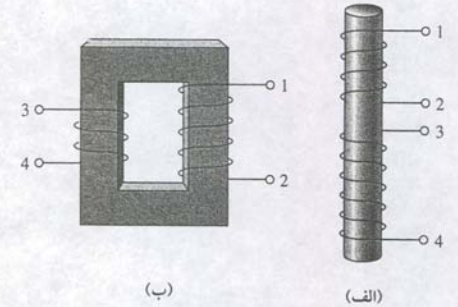
شکل ۱۳-۴۲

۹. در مدار شکل ۱۳-۴۳، توان متوسط جذب شده با (الف) منبع، (ب) هر یک از دو مقاومت، (ج) هر یک از دو القاگر، (د) اندوکتانس متقابل را به دست آورید.



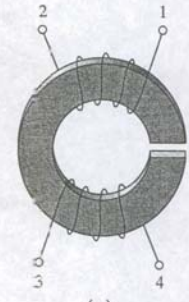
شکل ۱۱-۴۳

۱۰. در مدار شکل ۱۳-۴۴ فرض کنید  $i_{s1}(t) = 4t \text{ A}$  و  $i_{s2}(t) = 10t \text{ A}$  باشد، مطلوب است (الف)  $v_{AG}$ ، (ب)  $v_{CG}$  و (ج)  $v_{BG}$ .  
۱۱. (الف) مطلوب است شبکه معادل تونن نظاره شده با مقاومت  $2 \text{ k}\Omega$  در مدار مسئله ۹. (ب) حداکثر توان متوسطی که از شبکه توسط مقدار بهینه  $Z_L$  کشیده می‌شود (به جای مقاومت  $2 \text{ k}\Omega$ ) چقدر است؟



(الف)

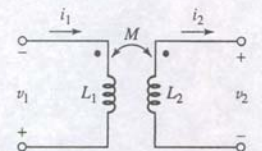
(ب)



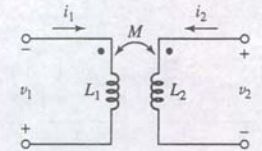
(ج)

شکل ۱۳-۳۷

۵. دو القاگر کوپل شده شکل ۱۳-۳۹ در مداری با ولتاژها و جریان‌های شکل به هم وصل‌اند. اگر  $M = 5 \mu\text{H}$  و  $L_2 = 15 \mu\text{H}$ ،  $L_1 = 22 \mu\text{H}$  باشد، مطلوب است (الف)  $v_1$  و (ب)  $v_2$ .

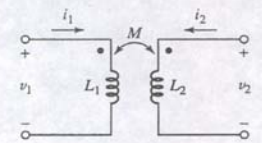


شکل ۱۳-۳۸



شکل ۱۳-۳۹

۶. با ارجاع به شکل ۱۳-۴۰، فرض کنید  $v_1 = 5e^{-t} \text{ V}$  و  $v_2 = 3e^{-2t} \text{ V}$  باشد. اگر  $L_1 = L_2 = 8 \text{ H}$  و  $M = 0.4 \text{ H}$  باشد، مطلوب است (الف)  $di_1/dt$ ، (ب)  $di_2/dt$  و (ج)  $i_1(t)$  اگر در  $t = 0$  انرژی ذخیره نشده باشد.



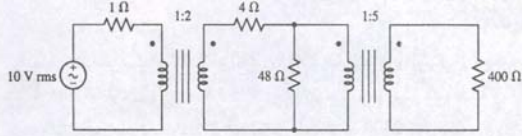
شکل ۱۳-۴۰





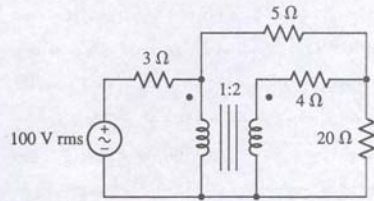


۵۲. توان تلف شده را در هر مقاومت از مدار شکل ۱۳-۸۰ پیدا کنید.



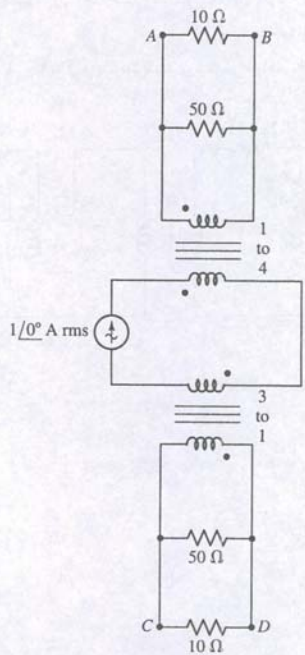
شکل ۱۳-۸۰

۵۳.  $I_x$  را در شکل ۱۳-۸۱ بیابید.



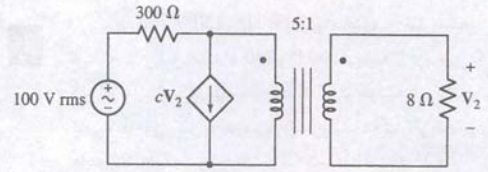
شکل ۱۳-۸۱

۵۴. (الف) متوسط توان تحویلی به هر مقاومت در مدار شکل ۱۳-۸۲ را به دست آورید، (ب) پس از اتصال A به C و B به D، حل را تکرار کنید.



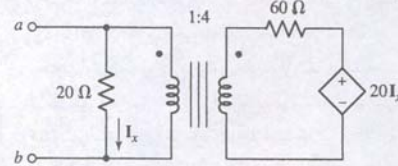
شکل ۱۳-۸۲

۵۵. بگویید چگونه می‌توان از دو ترانس ایده‌آل برای تطبیق یک ژنراتور با امپدانس خروجی  $4 + j0 \text{ K } \Omega$  به باری متشکل از یک بلندگوی



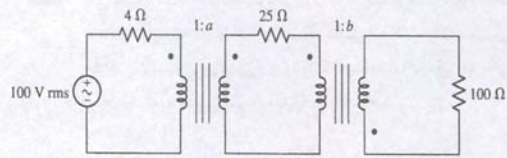
شکل ۱۳-۷۵

۴۸. معادل تونن را در پایانه‌های a و b برای شبکه شکل ۱۳-۷۶ به دست آورید.



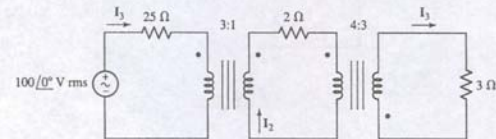
شکل ۱۳-۷۶

۴۹. مقادیر a و b را در شکل ۱۳-۷۷ طوری برگزینید که منبع ایده‌آل توان 1000 W تولید کند، و نصف آن هم به بار 100 Ω منتقل گردد.



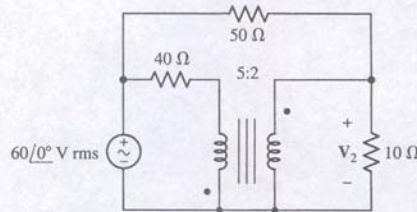
شکل ۱۳-۷۷

۵۰. برای شکل ۱۳-۷۸،  $I_1$  (الف)،  $I_2$  (ب)،  $I_3$  (ج)،  $P_2$  (د)،  $P_3$  (ه) و  $P_3$  را به دست آورید.



شکل ۱۳-۷۸

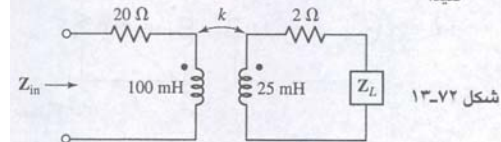
۵۱.  $V_2$  را در شکل ۱۳-۷۹ به دست آورید.



شکل ۱۳-۷۹

به شرطی که  $Z_L$  برابر باشد (الف)  $100 \Omega$ ، (ب)  $0.1 \text{ H}$ ، (ج)  $10 \mu\text{F}$ .  
۴۲. یک ترانس خطی دارای  $L_1 = 6 \text{ H}$ ،  $L_2 = 12 \text{ H}$  و  $M = 5 \text{ H}$  است. هشت مقدار مختلف  $I_{in}$  را برای هشت روش مختلف تعیین شبکه دو پایانه به دست آورید. (تک الفاکتایی، ترکیب سری و موازی ترانس‌های اتصال کوتاه، ترکیبات مختلف نقطه‌ها). برای هر شبکه مقدار  $I_{in}$  را معین کنید.

۴۳. در مدار شکل ۱۳-۷۲، فرض کنید بار  $Z_L$ ، خازنی با ظرفیت  $100 \mu\text{F}$  و امپدانس  $-j31.83 \Omega$  باشد.  $Z_{in}$  را در شرایط زیر به دست آورید. k برابر است ب (الف) 0، (ب) 0.5، (ج) 0.9، (د) 1. با PSpice صحت را تحقیق کنید.

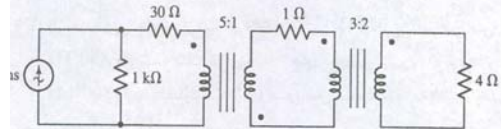


شکل ۱۳-۷۲

۴۴. مسئله ۴۱ را اگر  $L_1$  به  $125 \text{ H}$ ،  $L_2$  به  $20 \text{ H}$  افزایش یابد و M طوری اضافه شود که  $k = 1$  باشد، تکرار نمایید. با PSpice کار خود را تست کنید.

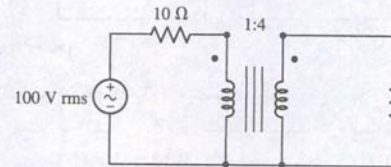
## ۱۳-۴ ترانسفورماتور ایده‌آل

۴۵. توان متوسط تحویلی به هر یک از چهار مقاومت در شکل ۱۳-۷۳ را به دست آورید. کار خود را با شبیه‌سازی PSpice تست کنید.



شکل ۱۳-۷۳

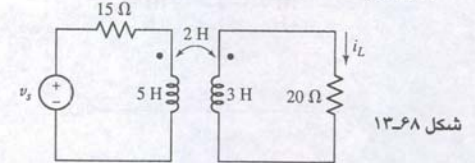
۴۶. (الف) حداکثر توان متوسطی که در مدار شکل ۱۳-۷۴ به  $R_L$  منتقل می‌شود، چقدر است. (ب) اگر  $R_L = 100 \Omega$  باشد و مقاومت  $40 \Omega$ ، بین دو پایانه بالایی اولیه و ثانویه وصل کنیم،  $P_L$  را معین کنید.



شکل ۱۳-۷۴

۴۷. توان متوسط حمل شده به مقاومت بار  $8 \Omega$  را در مدار شکل ۱۳-۷۵ به دست آورید. به شرطی که C برابر باشد ب (الف) 0، (ب)  $0.04 \text{ S}$ ، (ج)  $-0.04 \text{ S}$ .

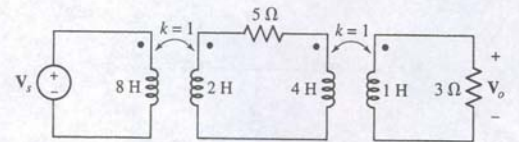
می‌توانید دو معادله دیفرانسیل برای کمک به یافتن  $di_L/dt$  در  $t = 0^+$  بنویسید.



شکل ۱۳-۶۸

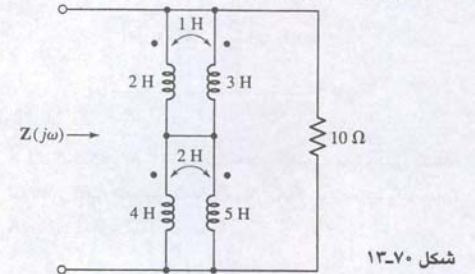
۳۷. معادل T را برای هر دو محل نقطه در یک ترانس خطی بی تلفات بنویسید که در آن  $L_1 = 4 \text{ mH}$ ،  $L_2 = 18 \text{ mH}$  و  $M = 8 \text{ mH}$  است. از T برای یافتن سه امپدانس ورودی معادل استفاده کنید که در آن ثانویه (الف) مدار باز است، (ب) اتصال کوتاه است، (ج) به اولیه به طور موازی وصل است.

۳۸. برای مدار شکل ۱۳-۶۹،  $H(j\omega) = V_0 / V_s$  را به دست آورید.



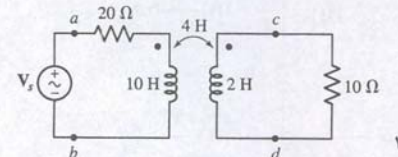
شکل ۱۳-۶۹

۳۹. معادل T را در کمک به یافتن امپدانس ورودی  $Z(j\omega)$  برای شبکه شکل ۱۳-۷۰ به کار ببرید.



شکل ۱۳-۷۰

۴۰. در شکل ۱۳-۷۱،  $V_s = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$  و  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  است. معادل تونن شبکه (الف) سمت راست پایانه‌های a و b (ب) سمت چپ پایانه‌های c و d را به دست آورید.



شکل ۱۳-۷۱

۴۱.  $Z_L$  به دوسر ثانویه یک ترانس خطی با الفاکتایی  $L_1 = 1 \text{ H}$  و  $L_2 = 4 \text{ H}$  و ضریب کوپل واحد وصل است. اگر  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$  باشد، شبکه سری معادل (C, L, R) که از پایانه‌های ورودی نظاره شود را پیدا کنید.



## فصل چهاردهم

## فرکانس مختلط و تبدیل لاپلاس

## مقدمه

اکنون آماده‌ایم که چهارمین قسمت اصلی تحلیل مدار یعنی مبحث فرکانس مختلط را مطالعه کنیم. خواهیم دید که فرکانس مختلط خاصیت یکپارچه‌سازی را دارد و همه تکنیک‌های تحلیلی را که قبلاً آموختیم به هم گره می‌زند. تحلیل مدارهای مقاومتی، تحلیل سینوسی حالت ماندگار، تحلیل گذرا، پاسخ و داشته، پاسخ کامل و تحلیل مدارهای تحریک شده با توابع تحریک نمایی و سینوسی میرای نمایی، همگی حالات خاصی از تکنیک کلی تحلیل با استفاده از مفهوم فرکانس مختلط هستند.

روشی رایج برای این عنوان مراجعه‌ای سریع به انتگرال تبدیل لاپلاس است. ولی این کار به درک واقعی کمکی نمی‌کند. بنابراین ما ابتدا مفهوم پایه فرکانس مختلط و ارتباط با تحلیل مدار را بررسی می‌کنیم. سپس تبدیل لاپلاس را به عنوان راهکاری برای برخورد با مدارهایی که منابع معرفی می‌کنیم و چگونگی به دست آوردن عکس تبدیل لاپلاس برای یافتن پاسخ‌های حوزه زمان خواهیم آموخت، تا خصوصیات کلیدی توابع در حوزه فرکانس به دست آید. این تکنیک‌ها در فصل ۱۵ گسترش خواهند یافت تا محدوده وسیعی از موارد تحلیل را پوشش دهد.

## ۱۴-۱ فرکانس مختلط

با معرفی "فرکانس مختلط" را با بررسی تابع سینوسی میرای نمایی مانند ولتاژ زیر آغاز می‌کنیم:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \quad (1)$$

نه در آن  $\sigma$  (سیگما) کمیتی حقیقی و معمولاً منفی است. هر چند ما این تابع را میرای می‌خوانیم ولی در صورت مثبت بودن  $\sigma$ ، تابع سینوسی افزایش می‌یابد. در عمل غالباً با حالت میرا سروکار داریم. همچنین تجربه بررسی پاسخ طبیعی مدار RLC هم نشان می‌دهد که  $\sigma$  منفی سرب میرایی نمایی است.

می‌توان با صفر کردن  $\sigma$  و  $\omega$  در معادله (۱) یک ولتاژ ثابت به دست آورد:

$$v(t) = V_m \cos \theta = V_0 \quad (2)$$

گر فقط  $\sigma = 0$  باشد، آن‌گاه ولتاژ سینوسی خواهیم داشت:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (3)$$

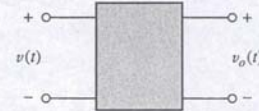
اگر  $\omega = 0$  باشد، ولتاژ نمایی را داریم:

$$v(t) = V_m \cos \theta e^{\sigma t} = V_0 e^{\sigma t} \quad (4)$$

آن برق در 120 V rms و 60 Hz تولید می‌شود به آلمان مسافرت کنید که در آن برق 240 V rms و 50 Hz می‌باشد تا در برپایی یک کارخانه تولید قطعات نیمه هادی کمک کنید. خوشبختانه کامپیوتر کیفی شما قابل وصل به هر دو پریز می‌باشد، به شرطی که دارای آداپتور باشید. با این وجود رایتر CD شما فقط در 120 V ac کار می‌کند. مداری طراحی کنید که به وسیله آن CD شما در آلمان هم کار کند، به شرطی که فرکانس 50 Hz باشد. ترانس‌هایی که در 60 Hz کار می‌کنند، نسبت به 50 Hz دارای وزن کمتری هستند، در نتیجه احتمال دارد در 50 Hz داغ کنند. با این وجود بسیاری از آن‌ها با 50/60 علامت خورده‌اند.

به عنوان اولین مأموریت در شغل جدید، از شما خواسته شده تا یک کمپرسور طراحی شده در آمریکا را در استرالیا به کار اندازید. کمپرسور متشکل از یک موتور سه فاز است که در هر فاز از ولتاژ خط 208 V جریان 10 A rms را می‌کشد. تنها انرژی سه فاز موجود در استرالیا، 400 V rms است. مدار لازم را طراحی کنید.

شبکه شکل ۸۴-۱۳ دارای خاصیتی است. به این ترتیب که ولتاژ مثبت  $v(t)$  اجازه خروج دارند. مقادیر منفی خروجی  $v_0(t) = 0$  را می‌دهند. (الف) اگر ولتاژ خروجی  $v_0(t)$  با پیک 5 V مورد تقاضا باشد، با منبع 115 V rms و شبکه شکل ۸۴-۱۳ مدار مناسبی طرحی کنید. خروجی طرح خود را بکشید. (ب) اگر یک خروجی صاف بخواهیم (بدون موج) مدار خود را اصلاح کنید.



شکل ۸۴-۱۳

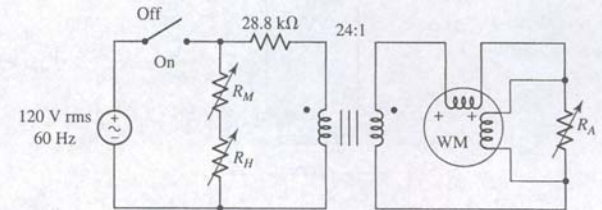


8  $\Omega$  و یک 10  $\Omega$  استفاده کرد. به طوری که بلندگوی 8  $\Omega$  دوبرابر توان متوسط 10  $\Omega$  جذب کند. مدار مربوط را بکشید و نسبت دورها را معین کنید.

۵۶. یک ترانس با 25 kVA و 230 / 2300 با ولتاژهای اولیه و ثانویه 2300 V rms و 230 V rms در حال کار است و می‌تواند 25 kVA را در ثانویه خود تولید کند. اگر این ترانس با 2300 V rms تغذیه شود و به بار ثانویه‌ای با مشخصات 8 kW PF با 15 kVA به ضریب توان 0.8 PF پس‌فاز وصل شود، (الف) جریان اولیه چیست؟ (ب) چند کیلووات دیگر ترانس می‌تواند به باری در 0.95 PF پس‌فاز تحویل دهد، (ج) پاسخ خود را با PSpice تست نمایید.

۵۷. اواخر شب، یک آگهی روی TV وسیله‌ای را به \$19.95 تبلیغ می‌کرد تا IQ شما را اندازه بگیرد. در طول هفته سفارشی می‌دهید و 4 الی 6 هفته بعد آن را دریافت می‌کنید. به شما گفته می‌شود برای اندازه‌گیری قد خود پیچ  $R_H$  را بچرخانید (cm) وزن خود را با چرخاندن  $R_M$  (kg) و سومین پیچ  $R_A$  (years) برای سن شماست. با انزجار از عدد روی صفحه‌نمایش آن را روی زمین پرت می‌کنید در جعبه باز می‌شود و مدار شکل ۸۳-۱۳ را می‌بینید. می‌فهمید که kg، cm و سن همگی با اهم اندازه‌گیری می‌شوند و توان اندازه‌گیری شده به وسیله وات‌متر برحسب mw به عنوان IQ نمایش داده می‌شود. (الف) برای هم اطاقی شما، IQ چقدر است؟ (ب) چه کسی بیشترین IQ را دارد؟ (ج) چقدر ضرر کردید؟

۵۸. کمپانی که برای آن کار می‌کنید از شما می‌خواهد تا از کالیفرنیا که در



شکل ۸۳-۱۳



پس معادله میرای (۱) شامل حالات خاص dc در معادله (۲) است. از مقایسه تابع نمایی (۴) با نمایش مختلط یک تابع سینوسی که زاویه فاز صفر درجه دارد، یعنی:

$$v(t) = V_0 e^{j\omega t} \quad (۵)$$

می‌توانیم دید دقیق‌تری نسبت به  $\sigma$  پیدا کنیم. واضح است که دو تابع (۴) و (۵) اشتراک‌های فراوانی دارند. تنها تفاوت این‌است که نماد در معادله (۴) حقیقی و در معادله (۵) موهومی است. بر تشابه بین دو تابع هنگامی تأکید بیشتری می‌شود که  $\sigma$  را فرکانس بنامیم. این انتخاب به طور مشروح در بخش‌های بعدی مورد بحث قرار خواهد گرفت، ولی فعلاً فقط می‌گوییم که  $\sigma$  قسمت حقیقی فرکانس مختلط است. البته نباید آن را فرکانس حقیقی بخوانیم، زیرا این نام برای  $f$  مناسب‌تر است (یا برای  $\omega$ ). به  $\sigma$  فرکانس نثر هم می‌گویند. این نام براساس بی‌عبد بودن نمای  $e$  انتخاب شده است. بنابراین در  $e^{7t}$ ، بعد  $7t$ ، نثر (NP) می‌باشد و 7 فرکانس نثری و واحد آن نیز نثر بر ثانیه می‌باشد.

### فرم عمومی

پاسخ و داشته یک شبکه به یک تابع تحریک کلی به فرم معادله (۱) به سادگی با استفاده از روشی شبیه به فیزور به دست می‌آید. به محض یافتن پاسخ واداشته به این سینوس میرا باید بدانیم که پاسخ به ولتاژ dc، ولتاژ نمایی و ولتاژ سینوسی را هم یافته‌ایم. اکنون بیایید ببینیم چگونه  $\sigma$  و  $\omega$  را به عنوان بخش‌های حقیقی و موهومی یک فرکانس مختلط می‌شناسیم. بگذارید با مفهوم ریاضی فرکانس مختلط آغاز کنیم و به تدریج با پیشروی فصل آن را تفسیر فیزیکی نماییم. هر تابعی که بتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = K e^{st} \quad (۶)$$

که در آن  $K$  و  $s$  دو ثابت مختلط‌اند (مستقل از زمان) و این یکی با فرکانس مختلط  $s$  مشخص می‌گردد. بنابراین فرکانس مختلط چیزی جز ضریب  $t$  در این تابع نمایی مختلط نیست. تا زمانی که فرکانس مختلط یک تابع را به دست آوریم، لازم است تابع را به فرم معادله (۶) بنویسیم.

### حالت DC

ابتدا این تعریف را در مورد توابع تحریک آشنا اعمال می‌کنیم. مثلاً یک ولتاژ ثابت

$$v(t) = V_0$$

را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$v(t) = V_0 e^{(0)t}$$

پس فرکانس مختلط یک ولتاژ یا جریان dc صفر است (یعنی  $s = 0$ ).

### حالت نمایی

حالت ساده دیگر تابع نمایی است.

$$v(t) = V_0 e^{\sigma t}$$

که خود شکل موردنظر را دارا است. فرکانس مختلط این ولتاژ  $\sigma$  است (یعنی  $s = \sigma + j0$ ).

### حالت سینوسی

اکنون بیایید یک ولتاژ سینوسی را در نظر بگیریم، تابعی که کمی تعجب‌آور است. با فرض

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

می‌خواهیم عبارتی معادل برحسب نمای مختلط به دست آوریم، بنابراین با توجه به تجربه قبلی از اتحاد اولر استفاده می‌کنیم:

$$\cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{2}[e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}]$$

و

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2} V_m [e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}] \\ &= \left(\frac{1}{2} V_m e^{j\theta}\right) e^{j\omega t} + \left(\frac{1}{2} V_m e^{-j\theta}\right) e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

یا

$$v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

اکنون مجموع دو تابع نمایی مختلط و دو فرکانس داریم که هر کدام به یک جمله متعلق است. فرکانس مختلط اولین جمله  $s = s_1 = j\omega$  است و دومی نیز  $s = s_2 = -j\omega$  می‌باشد. این دو مقدار را مزدوج یکدیگر گویند و با  $s_1^* = s_2^*$  نشان می‌دهند. دو مقدار  $K_1$  نیز مزدوج‌اند: یعنی  $K_1 = \frac{1}{2} V_m e^{j\theta}$  و  $K_2 = K_1^* = \frac{1}{2} V_m e^{-j\theta}$ . بنابراین کل جمله اول مزدوج کل جمله دوم است. البته چنین انتظاری را داشتیم زیرا مجموع دو جمله یعنی  $v(t)$  می‌باید حقیقی باشد.

### حالت سینوسی میرای نمایی

بالاخره بیایید فرکانس یا فرکانس‌های مختلط مربوط به تابع سینوسی میرای نمایی، معادله (۱) را معین کنیم. دوباره از اتحاد اولر استفاده می‌کنیم تا نمایشی نمایی و مختلط حاصل شود.

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \\ &= \frac{1}{2} V_m e^{\sigma t} [e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}] \end{aligned}$$

و بنابراین

$$v(t) = \frac{1}{2} V_m e^{j\theta} e^{j(\sigma + j\omega)t} + \frac{1}{2} V_m e^{-j\theta} e^{j(\sigma - j\omega)t}$$

می‌بینیم که برای توصیف یک تابع سینوسی میرای نمایی به دو فرکانس مختلط همچون  $s_1 = \sigma + j\omega$  و  $s_2 = \sigma - j\omega$  نیاز داریم. به‌طورکلی نه  $\sigma$  صفر است و نه  $\omega$ . حالت موج سینوسی با ضریب نمایی مختلط حالت کلی است و حالات ثابت، سینوس و نمایی حالات خاص می‌باشند.

### رابطه $s$ و حقیقی بودن

یک مقدار مثبت حقیقی از  $s$ ، مثل  $s = 5 + j0$  یک تابع نمایی فزاینده چون  $K e^{+5t}$  را مشخص می‌کند و اگر تابع فیزیکی باشد، باید  $K$  هم حقیقی باشد. یک مقدار حقیقی منفی برای  $s$  مانند  $s = -5 + j0$  یک تابع نمایی کاهشی را تداعی می‌نماید.

اگر  $s$  کاملاً موهومی باشد، مثل  $j10$ ، هرگز با یک کمیت حقیقی سروکار نداریم. فرم تابعی آن  $K e^{j10t}$  است که می‌توان آن را به شکل  $K(\cos 10t + j \sin 10t)$  نیز نوشت، که هر دو بخش حقیقی و موهومی سینوسی را دارد. برای ایجاد یک تابع حقیقی، لازم است مزدوج مقدار  $s$ ، یعنی  $s_{1,2} = \pm j10$  را ملاحظه کنیم.  $K$  مربوط به این دو فرکانس هم باید مزدوج باشد. با این وجود تا حدی می‌توان برای هر یک از فرکانس‌های مختلط  $s_{1,2} = \pm j10$  یا  $s_{1,2} = -j10$ ، یک ولتاژ سینوسی را با فرکانس 10 rad/s در نظر گرفت و در این صورت وجود فرکانس مختلط مزدوج را درک خواهیم کرد. دامنه و زاویه فاز ولتاژ سینوسی به  $K$  مربوط و به هر دو فرکانس بستگی دارد. پس با انتخاب  $s_1 = j10$  و  $s_2 = -j10$  و در نظر گرفتن

$$v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad , \quad s_2 = s_1^* \quad \text{و} \quad K_2 = K_1^*$$

تابع سینوسی واقعی  $20 \cos(10t - 53.1^\circ)$  را به دست آوریم.

مزدوج مختلط هر عدد با جایگزینی همه  $a$  به  $-a$  به دست می‌آید. مفهوم از انتخاب دلخواه  $-1 + j\sqrt{3}$  حاصل می‌شود. با این وجود ریشه منفی به این ترتیب معتبر است و ما را به تعریف مزدوج مختلط هدایت می‌کند.

توجه کنید که  $|6 - j8| = 10$ ، بنابراین  $V_m = 2|K| = 20$ . در نتیجه زاویه  $-53.13^\circ = -(8 - j6)$ .



که با استفاده از اتحاد اولر می‌توان آن را به شکل زیر در آورد.

U

میں نے

$$s = \sigma + ja$$

ناریم

فیل

$$\text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\}$$

$$\text{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\}$$

1

L

۴۰

1

اکنون به خاطر می‌آوریم که قسمت حقیقی تابع تحریک، قسمت حقیقی پاسخ و قسمت موهومی آن، قسمت موهومی پاسخ را به وجود می‌آورد. پس در این جا هم دوباره به سمت اعمال تابع مختلط به مدار سوق داده می‌شویم. در این صورت پاسخ مختلطی خواهیم یافت که قسمت حقیقی آن پاسخ حقیقی مطلوب است. درواقع ما بخش  $\{ \text{Re} \}$  را حذف می‌کنیم ولی ادامی می‌ماند که می‌توانیم زمانی آن را دوباره وارد کنیم و در آخر که می‌خواهیم پاسخ را در حوزه زمان به دست آوریم دوباره  $\{ \text{Re} \}$  را اضافه خواهیم کرد. پس به جای تابع تحریک

ابع مختلط تحریک  $V_m e^{j\theta} e^{st}$  را اعمال می‌کنیم و پاسخ واداشته  $I_m e^{j\phi} e^{st}$  را که مختلط



پس هرچه قسمت حقیقی یا قسمت موهومی یا دامنه  $S$  بزرگتر باشد، تغییر تابع سریعتر است.



## تمرین

$$(2 - e^{-10t}) \cos(4t + \phi) \text{ (ب)}, (2e^{-100t} + e^{-200t}) \sin 2000t \text{ (الف)}$$

جواب (۲-۱۴):

۱۴-۲ تابع تحریک سینوسی میرا

شکل کلی یک تابع سینوس نمایی که در حال حاضر آن را ولتاژ در نظر می‌گیریم، به صورت کلی زیر است:



است و قسمت حقیقی آن پاسخ مطلوب می‌باشد را به دست آوریم:

$$i(t) = \operatorname{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{st}\}$$

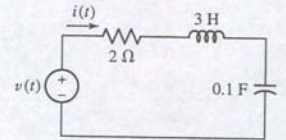
برای حل مسئله باید دامنه پاسخ  $I_m$  و زاویه فاز  $\phi$  را به دست آوریم.

قبل از طرح جزئیات تحلیل مسئله و ملاحظه شباهت‌های این روش و روش تحلیل سینوسی بهتر است مراحل اصلی آن را بررسی کنیم.

- ابتدا مدار را با مجموعه‌ای از معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی حلقه‌ای یا گرهی مشخص می‌کنیم.
- توابع تحریک منفردی به شکل **مختلط** و پاسخ‌های واداشته باز هم به فرم مختلط را در آن می‌گذاریم و مشتق‌ها و انتگرال‌ها را می‌گیریم.
- همه جملات در هر معادله حاوی ضریب  $e^{st}$  اند. بنابراین طرفین هر معادله را بر  $e^{st}$  تقسیم می‌نماییم. ضمناً به خاطر می‌سپاریم که اگر توصیف حوزه زمان موردنظر باشد دوباره آن را باز خواهیم گرداند.

با حذف  $\{ \operatorname{Re} \}$  و  $e^{st}$  ما همه ولتاژها و جریان‌ها را از حوزه زمان به حوزه فرکانس انتقال داده‌ایم. معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی به معادلات جبری تبدیل شده‌اند و حل آن‌ها هم به همان راحتی حل حالت ماندگار سینوسی است. اکنون برای تشریح اساس روش به مثالی عددی می‌پردازیم.

مثال ۱۴-۱



شکل ۱۴-۱ یک مدار RLC سری که در آن تابع تبدیل سینوسی میرا به کارگرفته شده است. حل حوزه فرکانس  $i(t)$  مورد تقاضا است.

یا

که

$$v(t) = \operatorname{Re}\{V e^{st}\}$$

$$V = 60 \angle 10^\circ \quad \text{و} \quad s = -2 + j4$$

پس از حذف  $\{ \operatorname{Re} \}$  تابع تحریک مختلط زیر باقی می‌ماند.

$$60 \angle 10^\circ e^{st}$$

به همین ترتیب، یک تابع مجهول را با کمیت مختلط  $I e^{st}$  نشان می‌دهیم که در آن  $I = I_m \angle \phi$  است گام بعدی نوشتن معادله انتگرالی - دیفرانسیلی برای مدار است. از قانون ولتاژ کیرشهف داریم:

$$v(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 2i + 3 \frac{di}{dt} + 10 \int i dt$$

که در این جا تابع تحریک مختلط و پاسخ مفروض را در آن جایگزین کرده و به دست می‌آوریم:

$$60 \angle 10^\circ e^{st} = 2I e^{st} + 3sI e^{st} + \frac{10}{s} I e^{st}$$

در گام بعدی ضریب مشترک  $e^{st}$  را حذف می‌کنیم:

$$60 \angle 10^\circ = 2I + 3sI + \frac{10}{s} I$$

و بنابراین

$$I = \frac{60 \angle 10^\circ}{2 + 3s + 10/s}$$

اکنون قرار می‌دهیم  $s = -2 + j4$  و جریان مختلط  $I$  را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{60 \angle 10^\circ}{2 + 3(-2 + j4) + 10/(-2 + j4)}$$

پس از کمی دستکاری با اعداد مختلط داریم:

$$I = 5.37 \angle -106.6^\circ$$

پس  $I_m$  برابر با 5.37 A و  $\phi$  برابر با  $-106.6^\circ$  به دست می‌آید و لذا پاسخ واداشته به صورت زیر است:

$$i(t) = 5.37 e^{-2t} \cos(4t - 106.6^\circ) \text{ A}$$

به این ترتیب مسئله را با کاهش عبارات انتگرالی - دیفرانسیلی به عبارات جبری حل کردیم. این تنها ذکر کوچکی از توان فوق‌العاده تکنیکی است که در آغاز مطالعه آن هستیم.

## تمرین

۱۴-۳ فیزور جریان هم‌راز با جریان‌های حوزه زمان زیر را به دست آورید:

(الف)  $24 \sin(90t + 60^\circ) \text{ A}$ ، (ب)  $24 e^{-10t} \cos(90t + 60^\circ) \text{ A}$

(ج)  $24 e^{-10t} \cos 60^\circ \times \cos 90t \text{ A}$ ، اگر  $V = 12 \angle 35^\circ$  باشد،  $v(t)$  را برای  $s$  برابر با

(د) 0، (ه)  $-20 \text{ s}^{-1}$ ، (و)  $-20 + j5 \text{ s}^{-1}$

جواب:  $24 \angle -30^\circ \text{ A}$ ،  $24 \angle 60^\circ \text{ A}$ ،  $12 \angle 0^\circ \text{ A}$ ،  $9.83 e^{-20t} \text{ V}$ ،  $9.83 \text{ V}$

$12 e^{-20t} \cos(5t + 35^\circ) \text{ V}$

## ۱۴-۳ تعریف تبدیل لاپلاس

تاکنون هدف مداوم ما یکی از تحلیل‌های زیر بوده است: فرض یک تابع تحریک در یک نقطه از مدار خطی، تعیین پاسخ در نقطه‌ای دیگر. در چند فصل اول، ما تنها با توابع تحریک dc و پاسخ‌هایی به شکل  $V_0 e^0$  بازی کردیم. با این وجود، پس از معرفی القاگر و خازن، تحریک dc ناگهانی در یک مدار RL یا RC ساده، پاسخ‌های نمایی متغیر با زمان یعنی  $V_0 e^{st}$  به وجود آورد. در بررسی مدار RLC، پاسخ‌ها فرم نمایی سینوسی  $V_0 e^{st} \cos(\omega t + \theta)$  را به خود گرفتند. همه این کارها در حوزه زمان بود و dc تنها تابع تحریکی بود که ملاحظه شد.

هنگام استفاده از تابع تحریک سینوسی، پیچیدگی حل معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی موجب شد تا به دنبال راه‌حل‌های ساده‌تری بگردیم. حاصل آن تبدیل فیزور بود و باید به خاطر بیاوریم که وارد بحث توابع تحریک مختلط به فرم  $V_0 e^{j\theta} e^{st}$  شدیم. پس از درک عدم نیاز به ضرایب  $t$  آن را کنار گذاشتیم و فیزور  $V_0 e^{j\theta}$  برایمان ماند و در واقع وارد **حوزه فرکانس** گشتیم.

اکنون کمی کشش فکری ما را به کاربرد یک تابع تحریک به فرم  $V_0 e^{(\sigma + j\omega)t}$  سوق داده است که منجر به یافتن فرکانس مختلط  $s$  گردید و همه حالات خاص یعنی dc ( $s = 0$ )، نمایی ( $s = \sigma$ )، سینوسی ( $s = j\omega$ ) و سینوسی نمایی ( $s = \sigma + j\omega$ ) را در بر می‌گرفت. به‌طور مشابه، از تجربه قبلی ما در فیزورها، می‌بینیم که در این حالات ممکن است فاکتورهای  $t$  را ندیده بگیریم و یک بار دیگر حل را در حوزه فرکانس به دست آوریم.



می‌شوند. بنابراین برای توابع زمانی که در  $t < 0$  وجود ندارند و یا آن‌هایی که رفتارشان در  $t < 0$  مورد توجه نیست، توصیف حوزه زمانی را می‌توان به شکل  $u(t)f(t)$  تصور کرد. انتگرال تبدیل با حد پایین  $t = 0$  تعریف می‌شود تا اثر هر گسستگی در  $t = 0$ ، مانند ضربه یا یکتای مرتبه بالاتر لحاظ شود. پس تبدیل لاپلاس چنین است.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) u(t) dt = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

این رابطه یک تبدیل لاپلاس یک سو را برای  $f(t)$  تعریف می‌کند. عکس تبدیل بی‌تغییر می‌ماند ولی هنگام ارزیابی فقط در  $t > 0$  معتبر است. پس زوج تبدیل لاپلاسی را که از این پس در نظر می‌گیریم به قرار زیر است:

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (14)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} e^{st} F(s) ds \\ f(t) &\Leftrightarrow F(s) \end{aligned} \quad (15)$$

نماد  $\mathcal{L}$  را هم می‌توان برای ذکر تبدیل لاپلاس و عکس آن به کار برد:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{و} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

تبدیل لاپلاس تابع  $f(t) + 2u(t-3)$  را پیدا کنید.

برای یافتن تبدیل لاپلاس یک‌سویه  $f(t) = 2u(t-3)$ ، باید انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} 2u(t-3) dt = 2 \int_3^{\infty} e^{-st} dt$$

پس از ساده کردن داریم:

$$F(s) = \frac{-2}{s} e^{-st} \Big|_3^{\infty} = \frac{-2}{s} (0 - e^{-3s}) = \frac{2}{s} e^{-3s}$$

۴-۱۴ فرض کنید  $f(t) = -6e^{-2t}[u(t+3) - u(t-2)]$  باشد، (الف) مطلوب است  $F(s)$  دوسویه (ب)  $F(s)$  یک‌سویه.

$$\text{جواب: } \left[ \frac{6}{2+s} [e^{-4-2s} - 1] \right], \left[ \frac{6}{2+s} [e^{-4-2s} - e^{6+3s}] \right]$$

## ۴-۱۴ تبدیل لاپلاس توابع زمانی ساده

در این بخش لیستی از تبدیل لاپلاس را برای توابع زمانی که مکرراً با آن‌ها در تحلیل مدارها مواجه‌ایم، معرفی خواهیم کرد. اکنون فرض می‌کنیم تابع مورد توجه یک ولتاژ باشد. هر چند که این انتخاب کاملاً اختیاری است. این لیست را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

$$V(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} v(t) dt = \mathcal{L}\{v(t)\}$$

این رابطه همراه با عکس تبدیل، یعنی

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} e^{st} V(s) ds = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$$

## تبدیل لاپلاس دوسویه

می‌دانیم که توابع تحریک سینوسی، پاسخ‌های سینوسی و نیز توابع تحریک نمایی هم پاسخ نمایی تولید می‌کند. با این وجود، ضمن بررسی با امواج بسیاری برمی‌خوریم که نه سینوسی‌اند و نه نمایی. از آن جمله می‌توان از امواج مربعی، دندان اره‌ای و پالس‌هایی نام برد که در یک لحظه دلخواهی از زمان شروع می‌شوند. وقتی که چنین توابعی به یک مدار خطی اعمال می‌شوند، می‌بینیم که پاسخ‌ها به فرم محرک و یا نمایی نیستند. در نتیجه، قادر نیستیم جملات حاوی  $t$  را حذف و فرم پاسخ در حوزه فرکانسی را به دست آوریم. خوب البته این چندان خوشایند نیست زیرا کار در حوزه فرکانس می‌باید بیش از این‌ها راهگشا باشد.

با این وجود، راه‌حلی وجود دارد تا با استفاده از تکنیکی، هر تابعی به مجموعه‌ای از امواج نمایی تبدیل شود و هر یک فرکانس مختلط خاص خود را داشته باشد. چون ما مدارهای خطی را بررسی می‌کنیم، می‌دانیم که پاسخ کل مدار با جمع پاسخ‌های جزئی به موج نمایی حاصل می‌گردد و ضمن بررسی هر موج نمایی ممکن است از جملات شامل  $t$  چشم‌پوشیم و در عوض در فضای فرکانس کار کنیم. متأسفانه برای دستیابی به فرم دقیق‌تر تابع زمانی کلی، تعداد جملات نمایی بینهایت می‌شود و لذا انتخاب روشی غیرمعقول و اعمال اصل تجمیع برای سری‌های نمایی تا حدی جنون‌آمیز است. در عوض این جملات را با انتگرال‌گیری جمع کرده و به تابعی در حوزه فرکانس تبدیل می‌کنیم.

ما این روش را با استفاده از آن‌چه که آن را **تبدیل لاپلاس** برای یک تابع فرم کلی  $f(t)$  مطابق تعریف زیر است، فرموله می‌کنیم:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (12)$$

حل این عمل انتگرال به طریقی ریاضی لازم می‌دارد تا سری فوری و تبدیل فوری را که در فصل‌های بعد ملاحظه خواهد شد بدانیم. با این وجود مفهوم اصلی تبدیل لاپلاس بر بحث پاسخ فرکانس و تجربه قبلی ما در فیزورها و تبدیل‌های متوالی بین حوزه زمان و حوزه فرکانس مبتنی است. درواقع این دقیقاً همان چیزی است که تبدیل لاپلاس انجام می‌دهد. این روش تابع حوزه زمان کلی  $f(t)$  را به نمایش حوزه فرکانس خود، یعنی  $F(s)$  تبدیل می‌نماید.

## عکس تبدیل لاپلاس دوسویه

معادله (۱۲) یک تبدیل لاپلاس دوسویه یا دو‌جهته‌ای را برای  $f(t)$  تعریف می‌کند. جمله دوسویه به منظور تأکید بر این واقعیت به کار رفته است که هر دو مقدار مثبت و منفی  $t$  در محدوده انتگرال‌گیری قرار گرفته است. عمل عکس را که غالباً عکس تبدیل لاپلاس می‌گویند، به صورت عبارت انتگرالی زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} e^{st} F(s) ds \quad (13)$$

که در آن عدد ثابت حقیقی  $\sigma_0$  در حد بالا و پایین انتگرال لحاظ شده تا این انتگرال همگرا شود. دو معادله (۱۲) و (۱۳) جفت تبدیل لاپلاس دوسویه را تشکیل می‌دهند. خبر خوش این که در همین تحلیل مدار ما هرگز نیازی به استفاده از معادله (۱۳) نداریم؛ روشی سریع در پیش رو است.

## تبدیل لاپلاس یک‌سویه

در بسیاری از مسائلی که تحلیل می‌کنیم، توابع تحریک و پاسخ از لحاظ زمانی از دیرباز وجود نداشته‌اند، بلکه از یک لحظه مشخصی از زمان که معمولاً آن را  $t = 0$  می‌نامیم، شروع



ویژگی خاص دیگر تابع ضربه واقع، خاصیت غربالی آن است. انتگرال تابع ضربه را که در تابع اختیاری  $f(t)$  ضبط شده است، در نظر بگیرید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt$$

چون تابع  $\delta(t - t_0)$  در هر جایی به جز  $t = t_0$  برابر صفر است، مقدار این انتگرال برابر  $f(t_0)$  خواهد بود. این ویژگی در ساده کردن عبارات انتگرالی شامل تابع ضربه واحد بسیار مفید می باشد.

### تابع نمایی $e^{-\alpha t}$

با بازگشت به علاقه قبلی به تابع نمایی، تبدیل آن را بررسی می کنیم.

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = -\frac{1}{s+\alpha} e^{-(s+\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$

و بنابراین

$$e^{-\alpha t} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+\alpha} \quad (۹)$$

واضح است که  $\text{Re}\{s\} > -\alpha$  است.

### تابع شیب $t u(t)$

به عنوان آخرین مثال، بگذارید تابع شیب  $t u(t)$  را ملاحظه نماییم. داریم:

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

$$t u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad (۱۰)$$

می توان رابطه فوق را با انتگرال جزء به جزء یا جدول انتگرال به دست آورد.

اما تابع  $te^{-\alpha t} u(t)$  چگونه است؟ ما آن را به عهده خواننده می گذاریم تا رابطه زیر را نشان دهد:

$$te^{-\alpha t} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^2} \quad (۱۱)$$

البته چند تابع زمانی وجود دارند که ارزش بررسی را دارا می باشند، ولی بهتر است که فعلاً ز آنها بگذریم تا عکس فرآیند، یعنی عکس تبدیل لاپلاس را ملاحظه نماییم، تا این که به یست کارهای خود بپردازیم.

۱۴-۴ اگر  $v(t)$  برابر با (الف)  $4\delta(t) - 3tu(t)$ ، (ب)  $4\delta(t-2) - 3tu(t)$ ، (ج)  $[u(t)][u(t-2)]$  باشد،  $V(s)$  را معین کنید.  
جواب:  $(4s-3)/s$ ،  $(4e^{-2s} - (3/s^2))$ ،  $e^{-2s}/s$ .

۱۴-۵ اگر  $V(s)$  برابر با (الف)  $10$ ، (ب)  $10/s$ ، (ج)  $10/s^2$ ، (د)  $10/[s(s+10)]$ ، (ه)  $10s/(s+10)$  باشد،  $v(t)$  را به دست آورید.  
جواب:  $(\delta(t) + 10u(t))$ ،  $10u(t)$ ،  $10\delta(t) - 100e^{-10t}u(t)$ ،  $u(t) - e^{-10t}u(t)$ ،  $10tu(t)$ .

## ۱۴-۵ تکنیک های عکس تبدیل لاپلاس

### نضیه خطی بودن

تذکر شدیم که عبارت انتگرالی معادله (۱۳) قابل استفاده در اعمال به حوزه  $s$  برای بازگشت ن به حوزه زمان است. همچنین گفتیم که چنین روشی می تواند با توجه به منحصر به فرد بودن

یک ارتباط یک به یک را بین  $v(t)$  و  $V(s)$  برپا می دارد. یعنی در قبال هر  $v(t)$  یک  $V(s)$  منحصر بفرد وجود دارد. در این جا ممکن است رابطه عکس تبدیل کمی شما را بترساند. نترسید! بزودی خواهیم دید که مطالعه تبدیل لاپلاس در حد مقدماتی نیازی به ارزیابی این انتگرال ندارد. با انتقال از حوزه زمان به حوزه فرکانس و استفاده از خاصیت انحصار فوق، قادر خواهیم بود با لیست جفت تبدیل های هر تبدیل لاپلاس، عکس را از آن پیدا کنیم.

قبل از ادامه بحث بهتر است ببینیم آیا احتمال دارد که برای بعضی توابع  $v(t)$  مورد علاقه ما، تبدیل لاپلاس وجود نداشته باشد. مجموعه شرایط کافی برای اطمینان از همگرایی مطلق انتگرال لاپلاس برای  $\sigma_0 > \text{Re}\{s\}$  عبارت است از:

۱. تابع  $v(t)$  در هر فاصله معین مثل  $t_1 < t < t_2$  قابل انتگرال گیری است و در آن  $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ .

۲. برای هر مقدار از  $\sigma_0$  عبارت  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma_0 t} |v(t)|$  وجود دارد.

توابع زمانی که این دو شرط را ارضا نکنند، به ندرت در تحلیل مدار دیده می شوند.

مثال هایی از این توابع  $e^{t^2}$  و  $e^{et}$  می باشند و نه  $t^n$  یا  $n^t$ . برای بحث بیشتر به دیگر مراجع مراجعه شود.

### تابع پله واحد $u(t)$

حال، سراغ تبدیل چند تابع می رویم. ابتدا تبدیل لاپلاس تابع پله واحد  $u(t)$  را ملاحظه می کنیم. با توجه به تعریف داریم:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

به ازای  $\text{Re}\{s\} > 0$  برای ارضای شرط ۲. پس داریم:

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (۱۶)$$

و به این ترتیب اولین جفت تبدیل لاپلاس برای ما به راحتی پیدا شد.

### تابع ضربه واحد $\delta(t - t_0)$

تابع دیگری از این نوع که تبدیلیش مورد علاقه ما است، تابع واحد  $\delta(t - t_0)$  است. این تابع در شکل ۱۴-۲ ترسیم شده است. در ابتدا عجیب ولی فعلاً تابع بسیار مفیدی است. تابع ضربه واحد طوری تعریف می شود که د رای سطح واحد است. به طوری که:

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad t \neq t_0$$

$$\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t - t_0) dt = 1$$

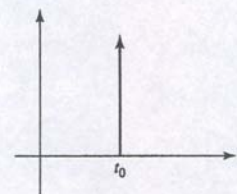
که در آن  $\epsilon$  یک ثابت کوچک است. بنابراین تابع مذکور مقدار غیر صفر را فقط در نقطه  $t_0$  دارا است. برای  $t_0 > 0$  تبدیل لاپلاس را چنین می یابیم.

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0} \quad (۱۷)$$

در حالت خاص  $t_0 = 0$  داریم:

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \quad (۱۸)$$

علامت  $\Leftrightarrow$  برای نشان دادن زوج تبدیل لاپلاس به کار می رود.



شکل ۱۴-۲ تابع ضربه واحد  $\delta(t - t_0)$ . این تابع اغلب برای تقریب یک پالس که زمانش در مقایسه با ثابت زمانی مدار خیلی کوتاه است به کار می رود.

### تمرین



## تمرین

$$۱۴-۱ \quad \text{با فرض تابع } \mathbf{H(s) = \frac{7}{s^2} + \frac{31}{(s+17)^2}} \text{، مطلوبست } \mathbf{h(t)}.$$

$$\text{جواب: } h(t) = [7 + 31e^{-17t}]tu(t)$$

## کنیک‌های عکس تبدیل برای توابع گویا

ضیه خطی بودن در تحلیل مدارهایی که چند عنصر ذخیره انرژی دارند، اغلب با عباراتی از توزه  $s$  مواجه می‌شویم که از نسبت دو چندجمله‌ای  $s$  تشکیل شده‌اند. بنابراین انتظار داریم رتبا با عباراتی مثل

$$\mathbf{V(s) = \frac{N(s)}{D(s)}}$$



واجه می‌شویم. که در آن  $\mathbf{N(s)}$  و  $\mathbf{D(s)}$  چند جمله‌ای‌هایی از  $s$  هستند. مقادیری از  $s$  که موجب  $\mathbf{N(s) = 0}$  می‌شوند را صفرهای  $\mathbf{V(s)}$  می‌خوانیم و مقادیری از  $s$  که منجر به  $\mathbf{D(s) = 0}$  گردد قطب‌های  $\mathbf{V(s)}$  می‌نامیم.

به جای این‌که هر بار آستین‌ها را بالا بزنیم و معادله (۱۳) را فراخوانی کنیم و تبدیل عکس به دست آوریم، اغلب این عبارات را با روش باقیمانده در جملات ساده‌تری که عکس تبدیل لاپلاس آن‌ها معلوم است، می‌توان به دست آورد. معیار برای انجام این کار این است که  $\mathbf{V(s)}$  بعضی گویا باشد که در آن درجه صورت  $\mathbf{N(s)}$  باید کمتر از مخرج  $\mathbf{D(s)}$  باشد. اگر چنین نباشد، باید ابتدا یک گام تقسیم را مطابق مثال زیر انجام دهیم. نتیجه تابعی به فرم تابع ضربه‌ای خواهد بود (فرض کنید درجه صورت و مخرج یکی است) و یا تابعی گویا می‌باشد. تبدیل مکوس اولی ساده است، برای تابع گویا، اگر تابع تبدیل معکوس وجود ندارد، روش رراست باقیمانده قابل اعمال به تابع گویا می‌باشد.

در عمل، به ندرت لازم است معادله (۱۳) برای توابع موجود در تحلیل مدار فراخوانی شود، به شرطی که در استفاده از تکنیک‌های ارائه‌شده در این فصل، هوشیاری به خرج دهیم.

مثال ۱۴-۴

بدیل عکس را برای تابع  $\mathbf{F(s) = 2 \frac{s+2}{s}}$  پیدا کنید.

$\mathbf{F(s)}$  یک تابع گویا نیست، لذا با روش تقسیم ادامه می‌دهیم:

$$\mathbf{F(s) = s \overline{2s+4} \frac{2s}{4}}$$

براین  $\mathbf{F(s) = 2 + (4/s)}$ ، با توجه به قضیه خطی بودن

$$\mathbf{L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{2\} + L^{-1}\left\{\frac{4}{s}\right\} = 2\delta(t) + 4u(t)}$$

اید توجه داشت که این تابع خاص را بدون تقسیم می‌توان ساده کرد. این روش برای تهیه الی از فرآیند استفاده شده است).

$$۱۴-۲ \quad \text{با فرض } \mathbf{Q(s) = \frac{3s^2-4}{s^2}} \text{، } \mathbf{q(t)}$$
 را محاسبه کنید.

$$\text{جواب: } q(t) = 3\delta(t) - 4u(t)$$

در به کارگیری روش باقیمانده، خصوصاً انجام بسط به کسرهای جزئی  $\mathbf{V(s)}$ ، ما توجه و د را به ریشه‌هایی از مخرج معکوس می‌کنیم. بنابراین ابتدا لازم است چندجمله‌ای‌های  $s$   $\mathbf{D(s)}$  را به جملات حاصلضربی تبدیل کنیم. ریشه‌های  $\mathbf{D(s)}$  می‌تواند جدا از هم (ساده) یا نراری و ممکن است حقیقی یا مختلط باشد. با این وجود ذکر این نکته ارزش دارد که بگوییم



جفت تبدیل لاپلاس، پرهیز شود. برای اشراف کامل بر این واقعیت، یکی از چند قضیه لاپلاس را معرفی می‌کنیم که همان قضیه خطی بودن است. این قضیه بیان می‌کند که تبدیل لاپلاس مجموع دو یا چند تابع زمانی برابر با مجموع تبدیلات تک‌تک توابع زمانی است. برای دو تابع زمانی داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}[f_1(t) + f_2(t)]dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}f_1(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}f_2(t)dt \\ &= F_1(s) + F_2(s) \end{aligned}$$

به رابطه فوق خاصیت 'جمع پذیری' گویند.

به عنوان مثالی از کاربرد این قضیه، فرض کنید که تبدیل لاپلاس  $\mathbf{V(s)}$  را داریم. می‌خواهیم تابع زمانی متناظر آن،  $\mathbf{v(t)}$  را بدانیم، غالباً می‌توان  $\mathbf{V(s)}$  را با مجموع دو یا چند تابع مثل  $\mathbf{V_1(s)}$  و  $\mathbf{V_2(s)}$  نشان داد که عکس تبدیل آن‌ها  $\mathbf{v_1(t)}$  و  $\mathbf{v_2(t)}$  می‌باشد و قبلاً در جدول ذکر شده است. در این صورت اعمال قضیه خطی بودن کار ساده‌ای می‌شود.

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{V_1(s) + V_2(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{V_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{V_2(s)\} = v_1(t) + v_2(t) \end{aligned}$$

نتیجه مهم دیگر حاصل از قضیه خطی بودن با مطالعه تعریف تبدیل لاپلاس میسر است. چون ما درواقع با انتگرال سروکار داریم. تبدیل لاپلاس یک ثابت ضربدر تابع برابر است با ثابت ضربدر تبدیل لاپلاس تابع. به بیان دیگر:

$$\mathcal{L}\{kv(t)\} = k\mathcal{L}\{v(t)\}$$

یا

$$kv(t) \Leftrightarrow kV(s) \quad (۲۲)$$

این رابطه به نام خاصیت 'همگنی' خوانده می‌شود.

$k$  ثابت تناسب است. نتیجه در بسیاری از موارد در تحلیل سهل الوصول است.

مثال ۱۴-۳

با فرض تابع  $\mathbf{g(t), G(s) = 7/s - 31/(s+17)}$  را پیدا کنید.

این تابع حوزه  $s$  متشکل از مجموع دو جمله  $7/s$  و  $-31/(s+17)$  است. با توجه به قضیه خطی بودن می‌دانیم که  $\mathbf{g(t)}$  هم متشکل از دو جمله است که هر کد معکوس لاپلاس یکی از دو جمله در حوزه  $s$  است:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{s+17}\right\}$$

اجازه بدهید با جمله اول شروع کنیم. خاصیت همگنی تبدیل لاپلاس اجازه می‌دهد چنین بنویسیم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s}\right\} = 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 7u(t)$$

بنابراین ما از زوج تبدیل شناخته‌شده  $1/s \Leftrightarrow u(t)$  و خاصیت همگنی برای یافتن اولین مولفه  $\mathbf{g(t)}$  استفاده کرده‌ایم. به طریقی مشابه:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{s+17}\right\} = 31e^{-17t}u(t)$$

با ادغام این دو جمله داریم:

$$g(t) = [7 - 31e^{-17t}]u(t)$$



ریشه‌های مختلط همیشه به صورت مزدوج مختلط رخ می‌دهند به شرطی که ضرایب  $D(s)$  حقیقی باشند.

### قطب‌های منفک و روش باقیمانده‌ها

به عنوان مثالی خاص اجازه بدهید تا عکس تبدیل لاپلاس زیر را به دست آوریم:

$$V(s) = \frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$$

مخرج دو جمله با ریشه‌های مجزای  $\alpha$  و  $\beta$  به صورت حاصل ضرب درآمده است. هر چند که می‌توان این عبارت را در معادله عکس تبدیل لاپلاس گذاشت، ولی استفاده از قضیه خطی بودن ساده‌ترین راه است. با بسط به کسرهای جزئی می‌توان تابع مفروض را به مجموع دو جمله ساده‌تر تفکیک کرد:

$$V(s) = \frac{A}{(s + \alpha)} + \frac{B}{(s + \beta)}$$

که در آن  $A$  و  $B$  را می‌توان از چند روش پیدا کرد. شاید سریع‌ترین راه به طریق زیر باشد:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ (s + \alpha) V(s) - \frac{(s + \alpha)}{(s + \beta)} B \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ \frac{1}{(s + \beta)} - 0 \right] = \frac{1}{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

با توجه به این‌که جمله دوم همیشه صفر است در عمل می‌توان به راحتی چنین نوشت:

$$A = (s + \alpha) V(s) \Big|_{s=-\alpha}$$

به‌طور مشابه:

$$B = (s + \beta) V(s) \Big|_{s=-\beta} = \frac{1}{\alpha - \beta}$$

و بنابراین

$$V(s) = \frac{1/(\beta - \alpha)}{(s + \alpha)} + \frac{1/(\alpha - \beta)}{(s + \beta)}$$

ما قبلاً عکس تبدیل لاپلاس به شکل فوق را به دست آورده‌ایم. پس:

$$v(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} e^{\alpha t} u(t) + \frac{1}{\alpha - \beta} e^{\beta t} u(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t)$$

در صورت تمایل می‌توان رابطه فوق را به عنوان واردهای جدید در لیست جفت لاپلاس‌ها لحاظ کرد:

$$\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$$

این روش، به سادگی، به توابعی که مخرج آن‌ها از مرتبه بالاترند، علی‌رغم خسته‌کنندگی، قابل‌گسترش است. باید توجه کرد که ما درباره حقیقی بودن  $A$  و  $B$  صحبتی نکردیم. با این وجود، در مواردی که  $\alpha$  و  $\beta$  مختلط‌اند، درمی‌یابیم که مزدوج نیز می‌باشند. در این موارد خواهیم دید که  $A = B^*$  است، به بیان دیگر ضرایب نیز مزدوج خواهند بود.

تبدیل عکس تابع زیر را به دست آورید:

$$P(s) = \frac{7s + 5}{s^2 + s}$$

می‌بینیم که  $P(s)$  یک تابع گویا است (درجه صورت از مخرج کمتر است، یعنی درجه صورت 1 و درجه مخرج 2 است)، لذا با فاکتورگیری از مخرج جلو می‌رویم:

$$P(s) = \frac{7s + 5}{s(s + 1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s + 1}$$

گام بعدی تعیین مقادیر  $a$  و  $b$  است. با اِعمال روش باقیمانده داریم:

$$a = \frac{7s + 5}{s + 1} \Big|_{s=0} = 5, \quad b = \frac{7s + 5}{s} \Big|_{s=-1} = 2$$

سپس می‌توان  $P(s)$  را چنین نوشت:

$$P(s) = \frac{5}{s} + \frac{2}{s + 1}$$

تبدیل معکوس چنین است:

$$p(t) = [5 + 2e^{-t}]u(t)$$

$$14-9 \quad \text{با فرض تابع } Q(s) = \frac{11s + 30}{s^2 + 3s}, \text{ تابع } q(t) \text{ را حساب کنید.}$$

$$\text{جواب: } q(t) = [10 + e^{-3t}]u(t)$$

### قطب‌های تکراری

حالت باقیمانده، قطب‌های تکراری است. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$V(s) = \frac{N(s)}{(s - p)^n}$$

که قابل توسعه به شکل زیر است:

$$V(s) = \frac{a_n}{(s - p)^n} + \frac{a_{n-1}}{(s - p)^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{(s - p)}$$

برای تعیین هر ثابت، ابتدا فرم گسترش یافته  $V(s)$  را در  $(s - p)^n$  ضرب می‌کنیم. ضریب  $a_n$  را می‌توان با محاسبه عبارت در  $p$  به دست آورد. بقیه ثابت‌ها با مشتق‌گیری از عبارت  $(s - p)^n V(s)$  به دفعات لازم در  $p$  معین می‌شوند. روند مشتق‌گیری ثابت‌هایی را که قبلاً به دست آمده‌اند حذف می‌کند و محاسبه در  $p$  بقیه ثابت‌ها را حذف می‌نماید. مثلاً  $a_{n-2}$  با ارزیابی زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s - p)^n V(s)] \Big|_{s=p}$$

و جمله  $a_{n-k}$  چنین محاسبه می‌گردد:

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [(s - p)^n V(s)] \Big|_{s=p}$$

برای تشریح اساس روش بیا باید عکس تبدیل لاپلاس تابعی را که ترکیبی از هر دو حالت، یعنی یک قطب در  $s = 0$  و دو قطب در  $s = -6$  دارد، بررسی کنیم.

عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را به دست آورید.

$$V(s) = \frac{2}{s^3 + 12s^2 + 36s}$$

توجه دارید که مخرج به سادگی به صورت حاصل ضرب درمی‌آید:

$$V(s) = \frac{2}{s(s + 6)(s + 6)} = \frac{2}{s(s + 6)^2}$$

### تمرین



همان‌طور که قول دادیم، ملاحظه می‌کنید که هنوز هم سه قطب وجود دارد یکی در  $s = 0$  و دو قطب در  $s = -6$ . اکنون تابع را به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$V(s) = \frac{a_1}{(s+6)^2} + \frac{a_2}{(s+6)} + \frac{a_3}{s}$$

و سپس روال جدیدی را برای تهیه ثابت‌های  $a_1$  و  $a_2$  اعمال می‌کنیم. برای یافتن  $a_3$  از روال قبل استفاده می‌کنیم. پس:

$$a_1 = \left[ (s+6)^2 \frac{2}{s(s+6)^2} \right]_{s=-6} = \frac{2}{s} \Big|_{s=-6} = \frac{-1}{3}$$

و

$$a_2 = \frac{d}{ds} \left[ (s+6)^2 \frac{2}{s(s+6)^2} \right]_{s=-6} = \frac{d}{ds} \left( \frac{2}{s} \right) \Big|_{s=-6} = \frac{-2}{s^2} \Big|_{s=-6} = \frac{-1}{18}$$

ثابت باقیمانده  $a_3$  با استفاده از روال قطب‌های منفک حاصل می‌شود.

$$a_3 = s \frac{2}{s(s+6)^2} \Big|_{s=0} = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

بنابراین  $V(s)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V(s) = \frac{-\frac{1}{3}}{(s+6)^2} + \frac{-\frac{1}{18}}{(s+6)} + \frac{\frac{1}{18}}{s}$$

با به کارگیری قضیه خطی بودن، عکس تبدیل  $V(s)$  با تعیین عکس هر یک از سه جمله حاصل می‌گردد. اولین جمله در سمت راست چنین است:

$$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

با معادله (۲۱) عکس تبدیل برابر است با  $-\frac{1}{3} te^{-6t} u(t)$ . به طریقی مشابه می‌بینیم که عکس تبدیل برای جمله دوم  $-\frac{1}{18} e^{-6t} u(t)$  است و جمله سوم هم  $\frac{1}{18} u(t)$  می‌باشد. بنابراین:

$$v(t) = -\frac{1}{3} te^{-6t} u(t) - \frac{1}{18} e^{-6t} u(t) + \frac{1}{18} u(t)$$

و به صورت جمع و جورتر داریم:

$$v(t) = \frac{1}{18} [1 - (1 + 6t)e^{-6t}] u(t)$$

۱۴-۱۰ اگر  $2s / (s^2 + 4)^2$  باشد،  $V(s)$  را به دست آورید.

$$\text{جواب: } \frac{1}{2} t \sin 2tu(t)$$

### تحلیل کامپیوتری

از متلب (MATLAB) که یک بسته نرم‌افزاری تحلیل ریاضی پر قدرت است، برای حل معادلات حاصل از تحلیل مدارهایی که منبع تحریک متغیر با زمان دارند، به چند طریق می‌توان استفاده کرد. سرراست‌ترین تکنیک از روال‌های حل معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) استفاده می‌کند که توابع ode23() و ode45() می‌باشند. این دو روال به روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل مبتنی است. ضمن این‌که ode45() دقت بالاتری دارد. با این وجود، حل فقط در نقاط جدا از هم انجام می‌شود و بنابراین در تمام زمان‌ها مقدار آن معلوم نیست. در بسیاری از کاربردها این یک عیب است مگر این‌که تعداد نقاط زیادی به کار رود.

تکنیک تبدیل لاپلاس عبارت دقیقی را برای حل معادلات دیفرانسیل فراهم می‌نماید و بنابراین نسبت به استفاده از ODE مزایای متعددی دارد. مزایای دیگری از تبدیل لاپلاس در فصل بعدی خصوصاً وقتی اهمیت عبارات حوزه‌ها را مطالعه می‌کنیم، ارائه خواهد شد.

همان‌طور که قبلاً دیدیم، جدول نظاره هنگام کار با تبدیل‌های لاپلاس علی‌رغم خسته‌کنندگی روش باقیمانده‌ها در چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا، به شدت سهل‌الوصول است. در این موارد متلب نیز می‌تواند کمک مؤثری بنماید. چون حاوی چندین تابع مفید برای دستکاری عبارات چندجمله‌ای است.

در متلب چندجمله‌ای

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

به صورت بردار  $[a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ a_0]$  ذخیره شده است.

بنابراین برای تعریف چندجمله‌ای  $N(s) = 2s^3 + 12s^2 + 36s$  و فقط  $D(s) = s^3$  می‌نویسیم:

```
EDU >> N = [2];
```

```
EDU >> D = [1 12 36 0];
```

ریشه‌های هر چندجمله‌ای را با فراخوانی تابع roots(p) می‌توان به دست آورد که در آن p بردارهای ضرایب چندجمله‌ای است. مثلاً

```
EDU >> q = [1 8 16];
```

```
EDU >> roots(q)
```

که منجر می‌شود به

```
ans =  
-4  
-4
```

متلب همچنین امکان تعیین باقیمانده‌های تابع گویای  $N(s) / D(s)$  را با به کارگیری تابع residue() فراهم می‌کند. مثلاً

```
EDU >> [r p y] = residue(N, D);
```

سه عدد r، p و y را باز می‌گرداند به نحوی که

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{r_1}{x-p_1} + \frac{r_2}{x-p_2} + \dots + \frac{r_n}{x-p_n} + y(s)$$

در حالت نبود حالت چندقطبی و در حالت n قطبی

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{r_1}{(x-p)} + \frac{r_2}{(x-p)^2} + \dots + \frac{r_n}{(x-p)^n} + y(s)$$

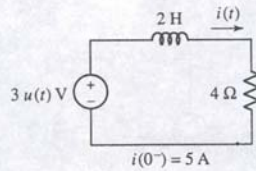
توجه کنید مادامی که درجه چندجمله‌ای صورت کمتر از چندجمله‌ای مخرج باشد، بردار y(s) همیشه خالی است.

اجرای فرمان بدون نقطه ویرگول، خروجی زیر را می‌دهد.

| r =     | p = | y = |
|---------|-----|-----|
| -0.0556 | -6  | [ ] |
| -0.3333 | -6  |     |
| 0.0556  | 0   |     |

که با پاسخ مثال ۱۴-۶ وفاق دارد.





شکل ۱۴-۳ مدار که برای تبدیل معادله دیفرانسیل  $2 \frac{di}{dt} + 4i = 3u(t)$  به رابطه  $2[sI(s) - i(0^-)] + 4I(s) = 3/s$

#### ارائه طرح.

اگر KVL را به این مدار اعمال نماییم، معادله دیفرانسیلی به دست خواهیم آورد که در آن  $i(t)$  مجهول است. با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف این معادله آن را به حوزه  $s$  می‌برد. با حل معادله جبری برای  $I(s)$ ، تنها کار باقیمانده گرفتن عکس تبدیل لاپلاس برای یافتن  $i(t)$  است.

#### معادلات مناسب را بنویسید.

با KVL حول تک حلقه در فضای زمان داریم:

$$2 \frac{di}{dt} + 4i = 3u(t)$$

اکنون تبدیل لاپلاس هر جمله را به دست می‌آوریم:

$$2[sI(s) - i(0^-)] + 4I(s) = \frac{3}{s}$$

#### آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

ما معادله‌ای داریم که ممکن است برای نمایش حوزه فرکانس  $I(s)$  برای هدفمان،  $i(t)$  حل شود.

#### اقدام به حل.

اکنون  $I(s)$  را حل می‌نماییم،  $i(0^-) = 5$  می‌گیریم:

$$(2s + 4) I(s) = \frac{3}{s} + 10$$

و

$$I(s) = \frac{1.5}{s(s+2)} + \frac{5}{s+2}$$

با استفاده از روش باقیمانده‌ها از جمله اول داریم:

$$\left. \frac{1.5}{s+2} \right|_{s=0} = 0.75$$

و

$$\left. \frac{1.5}{s} \right|_{s=-2} = -0.75$$

و بنابراین

$$I(s) = \frac{0.75}{s} + \frac{4.25}{s+2}$$

آن‌گاه برای تبدیل از جفت تبدیل معلوم استفاده می‌کنیم:

$$i(t) = 0.75 u(t) + 4.25 e^{-2t} u(t)$$

$$= (0.75 + 4.25 e^{-2t}) u(t) \quad A$$

#### صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

بر اساس تجربه قبلی خود با این‌گونه مدارها انتظار یک پاسخ واداشته dc به‌علاوه یک پاسخ طبیعی میرایی را داریم. در  $t = 0$  داریم  $i(0) = 5 A$  که باید هم این‌طور باشد و  $\infty \rightarrow t \rightarrow \frac{3}{4} A$  می‌کند که انتظار آن را داریم.

بنابراین حل  $i(t)$  کامل است. هر دو پاسخ واداشته  $0.75u(t)$  و پاسخ طبیعی  $4.25e^{-2t}u(t)$  وجود دارند و مقدار اولیه به‌طور خودکار لحاظ شده است. روشی که ارائه شده است راه‌حلی است که برای بسیاری از معادلات دیفرانسیل بی‌زحمت به‌نظر می‌رسد.

## ۱۴-۶ قضایای اصلی در تبدیل لاپلاس

اکنون می‌توانیم دو قضیه دیگر را بیان کنیم که شاید علت وجود تبدیل لاپلاس در تحلیل مدار باشد. این دو قضیه عبارتند از قضایای مشتق و انتگرال زمانی. آن‌ها در تبدیل مشتقات و انتگرال‌های موجود در معادلات مدار در حوزه زمان به ما کمک می‌کنند.

### قضیه مشتق زمانی

بگذارید ابتدا با بررسی تابع زمانی  $v(t)$  که تابع تبدیل لاپلاس آن،  $V(s)$  معلوم است، به مشتق زمانی نگاه کنیم. ما تبدیل مشتق اول  $v(t)$  را می‌خواهیم:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{dv}{dt} dt$$

از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$U = e^{-st} \quad dV = \frac{dv}{dt} dt$$

با این نتیجه:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} = v(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} v(t) dt$$

اولین جمله در سمت راست با افزایش بدون محدودیت زمان، باید به سمت صفر میل کند، در غیر این صورت  $V(s)$  وجود نخواهد داشت. از این رو

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} = 0 - v(0^-) + sV(s)$$

و

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow sV(s) - v(0^-) \quad (23)$$

رابطه مشابهی را می‌توان برای مشتقات مرتبه بالاتر به دست آورد:

$$\frac{d^2v}{dt^2} \Leftrightarrow s^2V(s) - sv(0^-) - v'(0^-) \quad (24)$$

$$\frac{d^3v}{dt^3} \Leftrightarrow s^3V(s) - s^2v(0^-) - sv'(0^-) - v''(0^-) \quad (25)$$

که  $v'(0^-)$  مقدار اولین مشتق  $v(t)$  در  $t = 0^-$  و  $v''(0^-)$  مقدار اولیه مشتق دوم  $v(t)$  و الی آخر است. وقتی همه مقادیر اولیه صفر است می‌بینیم که هر بار مشتق‌گیری نسبت به  $t$  در حوزه زمان برابر است با ضرب  $s$  در حوزه فرکانس، دوبار مشتق‌گیری در حوزه زمان مربوط به ضرب در  $s^2$  در حوزه فرکانس و به همین ترتیب است. بنابراین مشتق‌گیری در حوزه زمان معادل ضرب در حوزه فرکانس می‌باشد. این ساده‌سازی بسیار اساسی است! همچنین می‌توان دید که حتی اگر مقادیر اولیه صفر نباشد، اثر آن‌ها محسوس است. مثال ساده زیر این مطلب را نشان می‌دهد.



### مثال ۱۴-۷

با فرض مدار RL سری در شکل ۱۴-۳ جریان داخل مقاومت  $4 \Omega$  را به دست آورید.

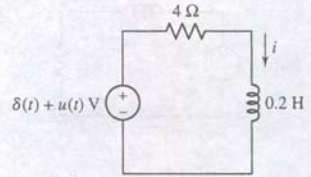
#### هدف مسئله را شناسایی کنید.

باید عبارتی برای جریان  $i(t)$  پیدا کنیم.

#### اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

مدار با یک ولتاژ پله راه‌اندازی شده است و مقدار اولیه جریان را در  $t = 0^-$  برابر  $5 A$  داریم.





شکل ۱۴-۴

۱۴-۱۱ برای یافتن  $i(t)$  در شکل ۱۴-۴ از تبدیل لاپلاس استفاده کنید.  
جواب:  $i(t) = (0.25 + 4.75 e^{-20t})u(t)$  A.

## قضیه انتگرال زمانی

ساده سازی مشابهی را به هنگام انتگرال گیری نسبت به زمان در معادلات مدار می توان انجام داد. بیا تبدیل لاپلاس تابع زمانی  $\int_{0^-}^t v(x) dx$  را تعیین کنیم.

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^t v(x) dx\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \left[\int_{0^-}^t v(x) dx\right] dt$$

با انتگرال گیری جزء به جزء

$$u = \int_{0^-}^t v(x) dx \quad dv = e^{-st} dt$$

$$du = v(t) dt \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

پس

$$\begin{aligned} \left\{\int_{0^-}^t v(x) dx\right\} &= \left\{\left[\int_{0^-}^t v(x) dx\right] \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]\right\}_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} v(t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \int_{0^-}^t v(x) dx\right]_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s} V(s) \end{aligned}$$

اما چون با  $t \rightarrow \infty$  داریم  $e^{-st} \rightarrow 0$ ، اولین جمله سمت راست با  $t \rightarrow 0^-$  در حد بالا از بین می رود و فقط  $V(s)/s$  باقی می ماند.

$$\int_{0^-}^t v(x) dx \Leftrightarrow \frac{V(s)}{s} \quad (26)$$

و بنابراین انتگرال گیری در حوزه زمان معادل با تقسیم  $s$  در حوزه فرکانس است. باز هم یک عمل نسبتاً مشکل ریاضی در حوزه زمان تبدیل به یک عمل ساده تر در حوزه فرکانس شد است.



مثال ۱۴-۵

در شکل ۱۴-۵، برای مدار RC سری جریان  $i(t)$  را در  $t > 0$  معین کنید.

ابتدا معادله حلقه را می نویسیم:

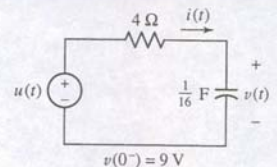
$$u(t) = 4i(t) + 16 \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

به منظور اعمال قضیه انتگرال زمانی باید حد پایین انتگرال را به  $0^-$  تبدیل کنیم. پس

$$\begin{aligned} 16 \int_{-\infty}^t i(t) dt &= 16 \int_{-\infty}^{0^-} i(t) dt + 16 \int_{0^-}^t i(t) dt \\ &= v(0^-) + 16 \int_{0^-}^t i(t) dt \end{aligned}$$

$$u(t) = 4i(t) + v(0^-) + 16 \int_{0^-}^t i(t) dt$$

بنابراین



شکل ۱۴-۵ مداری که استفاده از تبدیل لاپلاس را برای جفت  $\frac{1}{s} I(s) \Leftrightarrow \int_{0^-}^t i(t) dt$  تشریح می کند.

آن گاه تبدیل لاپلاس را در دو طرف این معادله به دست می آوریم. چون می خواهیم تبدیل لاپلاس یک سویه بگیریم. درواقع  $\mathcal{L}\{v(0^-)u(t)\}$  همان  $\mathcal{L}\{v(0^-)\}$  است و بنابراین:

$$\frac{1}{s} = 4I(s) + \frac{9}{s} + \frac{16}{s} I(s)$$

و با حل برای  $I(s)$  خواهیم داشت:

$$I(s) = \frac{-2}{s+4}$$

و به این ترتیب نتیجه مطلوب فوراً حاصل می گردد:

$$i(t) = -2e^{-4t} u(t) \quad A$$

برای همان مدار شکل قبلی که برای سادگی تکرار شده است،  $v(t)$  را پیدا کنید.

این بار معادله گرهی را می نویسیم:

$$\frac{v(t) - u(t)}{4} + \frac{1}{16} \frac{dv}{dt} = 0$$

با تبدیل لاپلاس داریم:

$$\frac{V(s)}{4} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{16} sV(s) - \frac{v(0^-)}{16} = 0$$

یا

$$V(s) \left(1 + \frac{s}{4}\right) = \frac{1}{s} + \frac{9}{4}$$

پس

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{4}{s(s+4)} + \frac{9}{s+4} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} + \frac{9}{s+4} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{8}{s+4} \end{aligned}$$

با عکس تبدیل

$$v(t) = (1 + 8e^{-4t}) u(t)$$

به این ترتیب، به سرعت ولتاژ خازن موردنظر را بدون استفاده از حل معمول معادله دیفرانسیل به دست آوردیم.

برای آزمایش این جواب می توانیم نشان دهیم که  $d/dt (1/16)dv$  همان جریان خازن  $i(t)$  است. برای  $t > 0$  داریم:

$$\frac{1}{16} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{16} (-32)e^{-4t} = -2e^{-4t}$$

که با نتیجه حاصل از مثال ۱۴-۸ وفاق دارد.

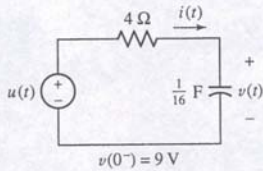
۱۴-۱۲  $v(t)$  را در  $t = 800$  ms برای مدار شکل ۱۴-۷ به دست آورید.  
جواب: 802 mV

## تبدیل لاپلاس توابع سینوسی

به خاطر استفاده از هر دو قضیه خطی بودن و مشتق گیری زمانی و افزودن مهمترین زوج تبدیل لاپلاس به جدول زوج ها تبدیل لاپلاس  $u(t) \sin \omega t$  را در نظر می گیریم. ما می توانیم تعریف انتگرالی تبدیل لاپلاس را به کار ببریم و انتگرال جزء به جزء بگیریم ولی این کار مشکل و غیرضروری است. در عوض از رابطه زیر استفاده می کنیم.

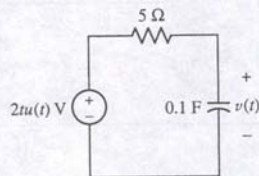
$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

مثال ۱۴-۹



شکل ۱۴-۹ مدار شکل ۱۴-۵ تکرار شده است و در آن ولتاژ  $v(t)$  موردنظر است.

## تمرین



شکل ۱۴-۷



در حوزه زمان به نتایجی در حوزه  $s$  رسیدیم. این نتایج در جدول ۱۴-۱ و ۱۴-۲ جمع‌وری و چند نمونه دیگر هم در پیوست ۷ لحاظ شده‌اند.

جدول ۱۴-۱ زوج‌های تبدیل لاپلاس. جدول ۱۴-۲ خواص تبدیل لاپلاس.

| $F(s)$   | $f(t)$                              | عملیات                      | $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$                          | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$                                |
|--|-------------------------------------|-----------------------------|--|---|
| $F_1(s) \pm F_2(s)$  | $f_1(t) \pm f_2(t)$                 | جمع                         | $\delta(t)$  | 1   |
| $kF(s)$  | $kf(t)$                             | ضرب اسکالر                  | $u(t)$   | $\frac{1}{s}$   |
| $sF(s) - f(0^-)$   | $\frac{df}{dt}$                     | مشتق‌گیری در حوزه زمان      | $tu(t)$  | $\frac{1}{s^2}$   |
| $s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$  | $\frac{d^2f}{dt^2}$                 |                             | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t), n = 1, 2, \dots$              | $\frac{1}{s^n}$   |
| $s^3F(s) - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$                              | $\frac{d^3f}{dt^3}$                 |                             | $e^{-at}u(t)$  | $\frac{1}{s + a}$   |
| $\frac{1}{s}F(s)$  | $\int_{0^-}^t f(t) dt$              | انتگرال زمان                | $te^{-at}u(t)$   | $\frac{1}{(s + a)^2}$                                       |
| $\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(t) dt$             | $\int_{-\infty}^t f(t) dt$          |                             | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), n = 1, 2, \dots$       | $\frac{1}{(s + a)^n}$                                       |
| $F_1(s)F_2(s)$   | $f_1(t) * f_2(t)$                   | کانولوشن                    | $\frac{1}{\beta - \alpha}(e^{\alpha t} - e^{\beta t})u(t)$ | $\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$                         |
| $e^{-as}F(s)$  | $f(t - a)u(t - a), a \geq 0$        | جابجایی زمانی               | $\sin \omega t u(t)$                                       | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$                             |
| $F(s + a)$   | $f(t)e^{-at}$                       | جابجایی فرکانسی             | $\cos \omega t u(t)$                                       | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$                                  |
| $\frac{dF(s)}{ds}$   | $-tf(t)$                            | مشتق‌گیری در حوزه فرکانس    | $\sin(\omega t + \theta)u(t)$                              | $\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\int_s^\infty F(s) ds$  | $\frac{f(t)}{t}$                    | انتگرال‌گیری در حوزه فرکانس | $\cos(\omega t + \theta)u(t)$                              | $\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$                                   | $f(at), a \geq 0$                   | تغییر مقیاس                 | $e^{-at} \sin \omega t u(t)$                               | $\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$                       |
| $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$                                      | $f(0^+)$                            | مقدار اولیه                 | $e^{-at} \cos \omega t u(t)$                               | $\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$                        |
| $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ , all poles of $sF(s)$ in LHP             | $f(\infty)$                         | مقدار نهایی                 | $e^{-at}$  |   |
| $\frac{1}{1 - e^{-Ts}}F_1(s)$ , where $F_1(s) = \int_0^T f(t)e^{-st} dt$ | $f(t) = f(t + nT), n = 1, 2, \dots$ | تناوب زمانی                 |  |   |

تبدیل مجموع این دو جمله برابر با مجموع تبدیل‌ها است. هر یک از جملات تابعی نمایشی است و قبلاً تبدیل آن‌ها را دیدیم. پس بلافاصله چنین می‌نویسیم:

$$\mathcal{L}[\sin \omega t u(t)] = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (27)$$

$$\sin \omega t u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

اکنون از قضیه مشتق‌گیری زمانی برای تبدیل  $\cos \omega t u(t)$  که برابر مشتق  $\sin \omega t$  است، استفاده می‌کنیم. یعنی:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t u(t)] = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}[\sin \omega t u(t)]\right\} = \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (28)$$

$$\cos \omega t u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

### قضیه جابه‌جایی زمان

همان‌طور که در چندین مسئله ملاحظه شد، همه توابع تحریک در  $t = 0$  شروع نمی‌شوند. برای تابعی که به مقدار معینی از زمان جابه‌جا شود، چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌خصوص اگر تبدیل  $f(t)u(t)$  تابع معلوم  $F(s)$  باشد، آن‌گاه تبدیل  $f(t - a)u(t - a)$  که به معنی تأخیر تابع اصلی به مقدار  $a$  ثانیه است، چیست؟ با کار مستقیم روی تعریف تبدیل لاپلاس برای  $t \geq a$  داریم:

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t - a)u(t - a) dt = \int_{a^-}^{\infty} e^{-st} f(t - a) dt$$

با انتخاب متغیر جدید انتگرال‌گیری  $\tau = t - a$  خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-s(\tau + a)} f(\tau) d\tau = e^{-as} F(s)$$

بنابراین

$$f(t - a)u(t - a) \Leftrightarrow e^{-as} F(s) \quad (a \geq 0) \quad (29)$$

این نتیجه به نام قضیه جابه‌جایی زمان شناخته می‌شود و بیان می‌دارد که اگر یک تابع زمانی در حوزه زمان به اندازه  $a$  تأخیر پیدا کند، نتیجه در حوزه فرکانسی در  $e^{-as}$  ضرب می‌شود.

مثال ۱۴-۱۰

تابع تبدیل پالس مربعی  $u(t - 2) - u(t - 5)$  را پیدا کنید.

این پالس که در شکل ۱۴-۸ ترسیم شده است دارای مقدار واحد در فاصله زمانی  $2 < t < 5$  است، و در غیر این صورت صفر است. می‌دانیم که تبدیل  $u(t)$ ، فقط  $\frac{1}{s}$  و چون  $u(t - 2)$  همان  $u(t)$  با تأخیر ۲ ثانیه است، تبدیل این تابع  $e^{-2s}/s$  می‌باشد. به‌طور مشابه تبدیل  $u(t - 5)$  برابر  $e^{-5s}/s$  است. پس در نتیجه تبدیل موردنظر برابر است با:

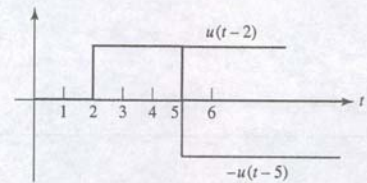
$$V(s) = \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s} = \frac{e^{-2s} - e^{-5s}}{s}$$

ملاحظه می‌شود که در تبدیل برای  $V(s)$  لازم نیست که از تعریف تبدیل لاپلاس استفاده کنیم.

۱۴-۱۳ تبدیل لاپلاس تابع زمانی در شکل ۱۴-۹ را پیدا کنید.

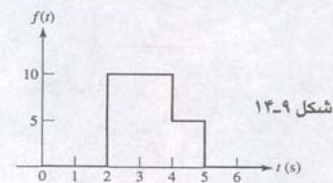
جواب:  $(5/s)(2e^{-2s} - e^{-4s} - e^{-5s})$ .

تا این‌جا تعدادی وارده برای لیست جفت‌های تبدیل لاپلاس که قبلاً در تهیه‌اش توافق کردیم، فراهم شد. از آن جمله تابع ضرب، تابع پله، تابع نمایی، تابع شیب و توابع سینوس و کسینوس و مجموع دو تابع نمایی بودند. به‌علاوه در اعمال جمع، ضرب در یک ثابت، مشتق و انتگرال



شکل ۱۴-۸ نمودار  $u(t - 2) - u(t - 5)$ .

تمرین



شکل ۱۴-۹

## کاربرد عملی

### پایداری یک سیستم

یافت و موجب بهت راننده گردید که در نتیجه به ناچار سیستم را خاموش کرد.



سال‌ها قبل، یکی از نویسندگان در جاده‌های کشور خود در حال رانندگی بود و سعی داشت از کنترل سرعت الکترونیک (کنترل کروز) اتومبیل استفاده کند. پس از روشن‌کردن سیستم و تنظیم سرعت در دقیقاً بالاتر از حد مجاز، دکمه تنظیم فشرده شد و پدال شتاب آزاد گردید؛ در این لحظه انتظار می‌رفت سیستم سرعت تنظیمی را با سرعت سوخت نگه دارد.

متأسفانه، چیز دیگری رخ داد. سرعت خودرو به میزان 10% افت کرد و کنترل کروز الکترونیک با افزایش سوخت واکنش نشان داد. دو واقعه کاملاً منطبق نبودند، لذا چند لحظه بعد سرعت خودرو از حد خود فرجاهش نمود - در نتیجه سوخت افت ناگهانی کرد - این منجر به کاهش سرعت اتومبیل شد. سیکل ادامه



$$-f(0^-) + \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{0^+} df = \lim_{s \rightarrow \infty} [f(0^+) - f(0^-)] \\ = f(0^+) - f(0^-)$$

بالاتر.

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] \quad (30)$$

رابطه فوق بیان ریاضی قضیه مقدار اولیه است. این رابطه بیان می‌دارد که مقدار اولیه تابع زمانی  $f(t)$  را می‌توان از تبدیل لاپلاس  $F(s)$  با ضرب تبدیل در  $s$  و سپس میل به سمت نهایت به دست آورد. توجه کنید که مقدار اولیه به دست آمده حد راست  $f(t)$  است.

به کمک قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی که به زودی آن را بررسی خواهیم کرد، می‌توان تابع تبدیل و عکس تبدیل را امتحان کرد. مثلاً تبدیل لاپلاس  $\cos(\omega_0 t) u(t)$  را برابر  $s/(s^2 + \omega_0^2)$  محاسبه کردیم. با توجه به این که  $f(0^+) = 1$  است، می‌توان صحت تبدیل لاپلاس فوق را با اعمال قضیه مقدار اولیه امتحان کرد:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left( s \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right) = 1 \quad \text{نه صحیح است.}$$

### قضیه مقدار نهایی

قضیه مقدار نهایی به اندازه مقدار اولیه مفید نیست و به این دلیل برای رده خاصی از تبدیل‌ها به کار می‌رود. برای این که ببینیم آیا تبدیلی در این رده قرار می‌گیرد یا نه، مخرج  $F(s)$  را برای همه مقادیری از  $s$  که آن را صفر می‌کند، به دست آورید. تنها آن دسته از توابع  $F(s)$  که قطب‌هایشان در سمت چپ صفر  $s$  (یعنی  $\sigma < 0$ ) قرار دارد، به جز قطب  $s = 0$  ای استفاده در قضیه مقدار نهایی مناسب‌اند. دوباره تبدیل لاپلاس  $df/dt$  را بررسی می‌کنیم:

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt = sF(s) - f(0^-)$$

ن بار با میل  $s$  به سمت صفر داریم:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^-)] = \int_0^\infty \frac{df}{dt} dt$$

رض می‌کنیم که  $f(t)$  و مشتق آن قابل تبدیل باشند، جمله آخر عبارت فوق را می‌توان به صورت یک حد نشان داد:

$$\int_0^\infty \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0^-)]$$

توجه به این که  $f(0^-)$  ثابت است، از مقایسه دو عبارت فوق نتیجه می‌شود که:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] \quad (31)$$

همان قضیه مقدار نهایی است. در استفاده از این قضیه لازم است که  $f(\infty)$  یعنی حد  $f(t)$  از  $t \rightarrow \infty$  وجود داشته باشد و همه قطب‌های  $F(s)$  به جز قطب ساده در مبدأ در نیمه سمت چپ صفحه  $s$  واقع باشند. بنابراین قطب‌های حاصل ضرب  $sF(s)$  در داخل نیمه سمت چپ واقع خواهد شد.

$$\begin{array}{cccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \end{array}$$

آن‌گاه سطر سوم را با ضرب متقابل دو سطر چنین به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

و نیز سطر چهارم را با ضرب متقابل سطرهای دوم و سوم به دست می‌آوریم. این فرآیند ادامه می‌یابد تا سطرهای  $n+1$  از مقادیر عددی به دست آید. آنچه باقی می‌ماند پیمایش ستون سمت چپ برای یافتن تغییر در علامت است. تعداد تغییر علامت مشخص‌کننده تعداد قطب‌های موجود با قطب‌های حقیقی است. مثلاً، اجازه بدهید تا سیستم کنترل کروز اتومبیل مطرح‌شده نویسنده دارای تابع تبدیل با مخرج زیر باشد:

$$D(s) = 7s^4 + 4s^3 + s^2 + 13s + 2$$

همه ضرایب این چندجمله‌ای  $s$  مرتبه چهارم مثبت و غیرصفرند. بنابراین جدول راث را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{ccc} 7 & 1 & 2 \\ 4 & 13 & 0 \\ -21.75 & 2 & \\ 13.37 & & \\ 2 & & \end{array}$$

از این جدول می‌بینیم که تغییر علامت در سمت چپ‌ترین ستون وجود دارد. بنابراین در واقع سیستم ناپایدار است (که توضیح آن عدم امکان انجام و اجرای کار است)، زیرا دو قطب دارای مولفه حقیقی مثبت‌اند.

واضح است که پاسخ سیستم بهینه نبوده است. در واقع طراحی سیستم ناپایدار بوده است. پایداری و ثبات سیستم از موضوعات مهم در مهندسی در گستره وسیعی از مسائل است (مثل کنترل کروز، رگولاتورهای دما و سیستم‌های ردیاب، نمونه‌هایی از آن هستند)، و تکنیک ارائه‌شده در این فصل در بررسی یک سیستم خاص از این نظر گرانیه است که اجازه می‌دهد تا پایداری یک سیستم مورد ارزیابی قرار گیرد.

یکی از جنبه‌های قدرتمند کار در فضای  $s$  که به وسیله تبدیل لاپلاس امکان‌پذیر شد این است که در عوض توصیف پاسخ یک سیستم خاص از طریق یک معادله دیفرانسیل -انتگرالی، ما می‌توانیم یک تابع تبدیل سیستمی به دست آوریم که به وسیله نسبت دو چندجمله‌ای از  $s$  نشان داده شده است. سپس موضوع پایداری به راحتی با مطالعه مخرج تابع تبدیل بررسی می‌گردد: نباید قطبی دارای مولفه حقیقی مثبت باشد.

در واقع فقط چند تکنیک وجود دارد که قابل اعمال به مسئله برای تعیین پایداری خاص می‌باشد و یک روش ساده به نام تست راث معروف است. تابع سیستمی را در حوزه  $s$  در نظر بگیرید (موضوع در فصل ۱۵ بیشتر توضیح داده شده است):

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

چندجمله‌ای که به وسیله  $D(s)$  نشان داده شده است را می‌توان به صورت  $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$  نوشت. بدون این که چندجمله‌ای را به صورت ضرب درآوریم نمی‌توان راجع به قطب‌ها اظهار نظر کرد. اگر همه ضرایب  $a_0, a_1, \dots, a_n$  مثبت و غیرصفر باشد، رویه راث به ما چیدن آن‌ها را مطابق زیر پیشنهاد می‌نماید:

## ۱۴-۷ قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی

دو قضیه اساسی آخر که مورد بحث ما است، به نام قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی خوانده می‌شوند. آن‌ها می‌توانند  $f(0^+)$  و  $f(\infty)$  را با توجه به مقادیر حد  $sF(s)$  به ما بدهند. چنین توانمندی ارزشمند است. اگر فقط مقادیر اولیه و نهایی مورد نیاز باشد، نیازی به صرف وقت و انجام عمل تبدیل معکوس نیست.

### قضیه مقدار اولیه

برای به دست آوردن قضیه مقدار اولیه، یک بار دیگر تبدیل لاپلاس را برای مشتق ملاحظه می‌کنیم.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df}{dt} \right\} = sF(s) - f(0^-) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt$$

اکنون اجازه می‌دهیم تا  $s$  به سمت بینهایت برود. با شکستن انتگرال به دو بخش داریم:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \int_0^{0^+} e^{-st} \frac{df}{dt} dt + \int_{0^+}^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt \right)$$

می‌بینیم که در حد انتگرال دوم به صفر می‌رسد، چون خود مقدار زیر انتگرال صفر می‌شود، همچنین  $f(0^-)$  تابعی از  $s$  نیست و می‌تواند از حد سمت چپ خارج گردد:



به کمک قضیه مقدار نهایی  $f(\infty)$  را برای تابع  $u(t) = (1 - e^{-at})$  به دست آورید که در آن  $a > 0$  است.

حتی بدون استفاده از قضیه مدار نهایی می توان بلافاصله دید که  $f(\infty) = 1$  است. تابع تبدیل  $f(t)$  برابر است با:

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$$

قطب های  $F(s)$  عبارتند از:  $s = 0$  و  $s = -a$ . بنابراین قطب غیر صفر با فرض  $a > 0$  در سمت چپ صفحه  $s$  واقع است. ملاحظه می شود که می توان قضیه مقدار نهایی را به این تابع هم اعمال کرد. با ضرب در  $s$  و میل  $s$  به سمت صفر داریم:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a}{s+a} = 1$$

که با  $f(\infty)$  برابر است.

با این وجود اگر  $f(t)$  سینوسی باشد و لذا  $F(s)$  روی محور  $j\omega$  دارای قطب هایی باشد، آن گاه کاربرد چشم کورکورانه قضیه مقدار نهایی، ما را به سمت صفر شدن مقدار نهایی سوق می دهد. با این وجود می دانیم که مقدار نهایی  $\cos \omega_0 t$  با  $\sin \omega_0 t$  نامعین است. پس مواظب قطب های روی محور  $j\omega$  باشید.



## تمرین

۱۴-۱۴ بدون این که ابتدا  $f(t)$  را بیابید، مقدار  $f(0^+)$  و  $f(\infty)$  را برای تبدیل های زیر به دست آورید:

(الف)  $s / (s^2 + 50s + 4e^{-2s})$ ، (ب)  $(s^2 + 7) / (s^2 + 6)$ ،

(ج)  $[2s(s^2 + 32 + 5) + 10] / (2.5^2)$ .

جواب: 0، 200،  $\infty$ ، نامعین (قطب ها روی  $j\omega$  هستند)، 1، 2.5.

## ۱۴-۸ خلاصه فصل و مرور

- مفهوم فرکانس مختلط اجازه می دهد تا بررسی مؤلفه های نمایی میرا و نوسانی یک تابع به طور همزمان صورت گیرد.
- فرکانس مختلط  $s = \sigma + j\omega$  حالت کلی است،  $s = 0$  dc، نمایی ( $\omega = 0$ ) و سینوسی ( $\sigma = 0$ ) حالات خاصی اند.
- تحلیل مدارها در حوزه  $s$  از تبدیل معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی در حوزه زمان به معادلات جبری در حوزه فرکانس امکان پذیر است.
- در مسایل تحلیل مدار، ما توابع حوزه زمان را با تبدیل لاپلاس یکسویه به حوزه فرکانس تبدیل می نماییم.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

- عکس تبدیل لاپلاس عبارات حوزه فرکانس را به حوزه زمان تبدیل می کند. با این وجود به دلیل در اختیار بودن جدول لیست جفت های تبدیل لاپلاس، کمتر از آن استفاده می شود.
- تابع ضربه واحد تقریب خوبی برای پالس های باریک در مقایسه با ثابت های زمانی مدار است. این تابع فقط در یک نقطه غیر صفر است و سطح واحدی دارد.
- خاصیت جمع پذیری  $\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$
- (خاصیت همگنی)  $k\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{kf(t)\}$  مقدار ثابت

- قضایای مشتق گیری و انتگرال گیری اجازه می دهند تا معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی را در حوزه زمان به معادلات جبری در حوزه فرکانس تبدیل نماییم.
- عکس تبدیل ها معمولاً با تکنیک بسط به کسره های جزئی و اعمال مختلف به دست می آیند (جدول ۱۴-۲) تا کمیت های حوزه  $s$  را به عباراتی که در جدول تبدیل یافت می شوند، مبدل سازند (مثل جدول ۱۴-۱).
- قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی فقط برای  $f(t = 0^+)$  و  $f(t = \infty)$  مفیدند.

## ۱۴-۹ خواندنی های کمی

An easily readable development of the Laplace transform and some of its key properties can be found in Chap. 4 of

A. Pinkus and S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms*, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1997.

A much more detailed treatment of integral transforms and their application to science and engineering problems can be found in

B. Davies, *Integral Transforms and Their Applications*, 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

Stability and the Routh test are discussed in Chap. 5 of

K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4th ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2002.

## مسائل

### ۱۴-۱ فرکانس مختلط

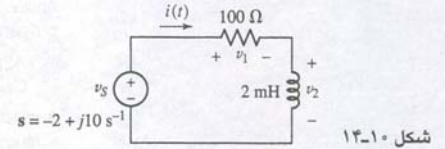
- برای هر مورد فرکانس مختلط را مشخص نمایید.
    - (الف)  $v(t) = 5V$ ، (ب)  $i(t) = 3 \cos 9t \mu A$
    - (ج)  $i(t) = 2.5e^{-8t} mA$ ، (د)  $v(t) = 65e^{-1000t} \cos 1000t V$
    - (ه)  $v(t) = 8 + 2 \cos t mV$
  - برای هر یک از موارد زیر فرکانس مختلط را بیان کنید: (الف)
    - (ج)  $v(t) = 33.3 V$ ، (ب)  $i(t) = 3 \cos 77t A$ ، (د)  $q(t) = 7e^{-5t} C$
    - (و)  $q(t) = 7e^{-5t} - 19e^{-5t} \sin(8t - 42^\circ) C$
  - مزدوج مختلط هر جمله زیر را به دست آورید و پاسخ خود را به فرم قطبی بیان کنید: (الف)  $8e^{-t}$ ، (ب)  $19 - j7$ ، (د)  $e^{j\omega t}$ ، (ه)  $\cos 4t$ ، (و)  $\sin 4t$ ، (ز)  $-90^\circ / 88$ .
  - مزدوج مختلط مربوطه را به دست آورید. (الف)  $-j6$ ، (ب)  $9 - j30$ ، (د)  $5e^{-6j}$ ، (ه)  $\angle -45^\circ / 24$ ، (و)  $\frac{4 - j18}{3.33 + j}$ ، (ز)  $\frac{5 \angle 0.1^\circ}{4 - j7}$ ، (ح)  $\angle 92.5^\circ / 4 - 22$ .
  - بار از یک میدان تشعشع خاصی به صورت  $Q = 9 \angle 43^\circ \mu C$  در فرکانس مختلط  $s = j20\pi s^{-1}$  نشان داده شده است. (الف) در  $s = 1$  چند بار تشعشع یافته است؟ (ب) حداکثر مقدار بار منتشره در یک زمان بقدر است؟ (ج) آیا منبع اثری از نابودی را نشان می دهد. بر اساس فرکانس  $Q$  چه نشانه ای وجود دارد؟
۶. آسیستان جدید شما سیگنالی که از یک دستگاه تست می آید، اندازه گیری می نماید و می نویسد:  $v_x(t) = V_x e^{(-2 + j60)t}$ ، که  $V_x = 8 - j100 V$
- (الف) یک جمله گم شده وجود دارد. آن چیست و چگونه گم شدن آن را می توانید بیان کنید؟ (ب) فرکانس مختلط سیگنال چیست؟ (ج) اهمیت  $\{Re\{V_x\} > Re\{V_x\}\}$  چیست؟ (د) اهمیت  $\{Im\{s\} < |Re\{s\}|\}$  چیست؟
۷. فرض کنید بخش حقیقی جریان مختلط متغیر با زمان  $I(t)$  برابر  $i(t)$  باشد. (الف) اگر  $i_x(t) = (4 - j7)e^{(-3 + j15)t}$  باشد  $i_x(t)$  را به دست آورید، (ب) اگر  $i_y(t) = (4 + j7)e^{-3t} (\cos 15t - j \sin 15t)$  باشد  $i_y(t)$  را پیدا کنید، (ج) اگر  $I_A(t) = K_A e^{s_A t}$  باشد که در آن  $s_A = -1.5 + j12$  و  $K_A = 5 - j8$ ،  $i_A(0.4)$  را بیابید. (د) اگر  $I_B(t) = K_B e^{s_B t}$  باشد که در آن  $K_B$  مزدوج  $K_A$  و  $s_B$  مزدوج  $s_A$  است،  $i_B(0.4)$  را به دست آورید.
۸. یک سیگنال متناوب جریان  $i(t) = 2.33 \cos(279 \times 10^6 t) fA$  به وسیله یک رادیو تلسکوپ از کهکشان نیپولا دریافت شده است (الف) فرکانس سیگنال چند هرتز است؟ (ب) اگر ولتاژ از عبور جریان به داخل یک مقاومت  $1 T\Omega$  به دست آید، سیگنال ولتاژ را به صورت جمع دو نمای مختلط بنویسید.



۹. اگر یک ولتاژ مختلط متغیر با زمان به صورت  $v_s = (20-j30)e^{(-2+j50)t}$  مفروض باشد، (الف)  $v_s(0.1)$  را به فرم قطبی درآورید. (ب)  $\text{Re}\{v_s(t)\}$  را بیابید. (ج)  $\text{Re}\{v_s(0.1)\}$  چقدر است؟ (د)  $s$  را مشخص کنید (ه)  $s^*$  را معین نمایید.

## ۱۴-۲ تابع تحریک سینوسی میرا

۱۰. مدار شکل ۱۴-۱۰ به وسیله یک منبع  $10\text{ V}$ ، زاویه فاز  $3^\circ$  و فرکانس مختلط  $-2 + j10\text{ s}^{-1}$  راه اندازی شده است. (الف)  $i(t)$  را معین کنید. (ب)  $v_1(t)$  و  $v_2(t)$  را تعیین نمایید.

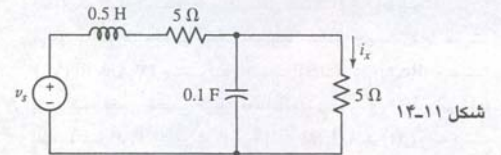


شکل ۱۴-۱۰

۱۱. (الف) مفهوم فیزور در فصل ۱۰ برای به دست آوردن عبارات امپدانس القاگرها، خازن‌ها و مقاومت‌ها که با فرکانس  $s$  راه اندازی می‌شوند، گسترش دهید. (ب) امپدانس مقاومت و القاگر شکل ۱۴-۱۰ چقدر است؟ (ج) وقتی  $\text{Re}\{s\} = 0$  باشد، عبارت خود را به آنچه در فصل ۱۰ دیدیم کاهش دهید.

۱۲. یک مدار  $RL$  سری به پریزی در آمریکای شمالی به ولتاژ  $v(t) = 179 \cos(120\pi t)\text{ V}$  وصل است. اگر  $R = 100\ \Omega$  و  $L = 500\ \mu\text{H}$  باشد، (الف) فرکانس مختلط متناظر حوزه فرکانس ولتاژ  $V(s)$  را معین کنید. (ب) جریان  $I(s)$  را در حوزه فرکانس برای مدار به دست آورید. (ج)  $i(t)$  را بیابید.

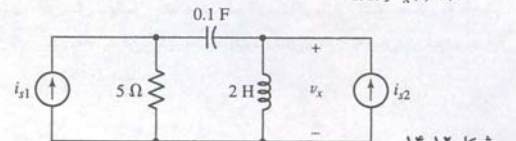
۱۳. (الف) اگر در مدار شکل ۱۴-۱۱، ولتاژ  $v_s = 10e^{-2t} \cos(10t + 30^\circ)\text{ V}$  باشد، در حوزه فرکانس  $I_x$  را پیدا کنید. (ب)  $I_x(t)$  را معین کنید.



شکل ۱۴-۱۱

۱۴. یک مدار ساده  $RC$  به پریزی  $v(t) = 339 \cos(100\pi t)\text{ V}$  وصل است. اگر  $R = 2\text{ k}\ \Omega$  و  $C = 100\ \mu\text{F}$  باشد، (الف) فرکانس مختلط ولتاژ  $V(s)$  را در حوزه فرکانس به دست آورید. (ب)  $I(s)$  را در حوزه فرکانس معین نمایید. (ج)  $i(t)$  را بیابید.

۱۵. اگر در مدار شکل ۱۴-۱۲، جریان  $i_{s1} = 20e^{-3t} \cos 4t\text{ A}$  و  $i_{s2} = 30e^{-3t} \sin 4t\text{ A}$  باشد، (الف) در حوزه فرکانس  $V_x$  را پیدا کنید. (ب)  $v_x(t)$  را بیابید.



شکل ۱۴-۱۲

۱۶. مقاومت معادل یک وسیله الکترونیکی صنعتی از دید پایانه‌های منبع تغذیه  $3\text{ m}\ \Omega$  است. اگر بتوانیم منبع تغذیه را به صورت منبع ولتاژ نمایی  $v(t) = 240\sqrt{2} e^{-2t} \cos(120\pi t)$  درآوریم (از لحظه‌ای که دوشاخ از پریز بیرون می‌آید، برق قطع است) (الف) جریان داخل مقاومت را در حوزه فرکانس به دست آورید. (ب) پاکار در حوزه زمان کار را با بخش (الف) مقایسه کنید. (ج) اگر یک خازن  $1000\text{ mF}$  به دو سر پایانه‌های خروجی منبع تغذیه وصل کنیم، بخش (الف) را تکرار نمایید (یعنی موازی با  $R_{TH}$ ).

## ۱۴-۳ تعریف تبدیل لاپلاس

۱۷. تبدیل لاپلاس یکسورا برای  $u(t)$  K بیابید که K یک ثابت حقیقی مجهول است.

۱۸. از معادله (۱۴) استفاده کرده و تبدیل لاپلاس هر مورد را به دست آورید: (الف)  $3u(t)$ ، (ب)  $3u(t-3)$ ، (ج)  $3u(t-3)$ ، (د)  $3u(3-t)$ .

۱۹. از معادله (۱۴) برای یافتن تبدیل لاپلاس موارد زیر استفاده کنید: (الف)  $2 + 3u(t)$ ، (ب)  $3e^{-8t}u(t)$ ، (ج)  $u(-t)$ ، (د) K که K یک ثابت مجهول است.

۲۰. یک منبع جریان، جریان  $u(t)\text{ mA}$  با  $4e^{-t}$  در یک مقاومت  $1\ \Omega$  فراهم می‌کند. (الف) نمایش حوزه فرکانس ولتاژ دو سر مقاومت را به دست آورید. (ب) با یادآوری  $s = \sigma + j\omega$ ، اندازه جریان در حوزه زمان را به صورت تابعی از  $\sigma$  با  $\omega = 0$  ترسیم کنید.

۲۱. یک منبع ولتاژ  $v(t) = 5u(t) - 5u(t-2)\text{ V}$  به دو سر یک مقاومت  $1\ \Omega$  وصل است. (الف) نمایش حوزه فرکانس ولتاژ را به دست آورید. (ب) نمایش حوزه فرکانس جریان در مقاومت را بیابید.

## ۱۴-۴ تبدیل لاپلاس توابع زمانی ساده

۲۲. برای توابع  $f(t)$  زیر، محدوده‌ای از  $\sigma$  را که تبدیل لاپلاس تابع وجود دارد، مشخص کنید. (الف)  $t + 1$ ، (ب)  $u(t + 1)$ ، (ج)  $e^{50t}u(t)$ ، (د)  $e^{-50t}u(t - 5)$ ، (ه)  $e^{50t}u(t - 5)$ .

۲۳. برای هر یک از توابع زیر تبدیل لاپلاس یکسویه را به دست آورید: (الف)  $8e^{2t}[u(t+3) - u(t-3)]$ ، (ب)  $8e^{-2t}[u(t+3) - u(t-3)]$ ، (ج)  $8e^{-2|t|}[u(t+3) - u(t-3)]$ .

۲۴. تبدیل لاپلاس یکسویه را برای هر یک از توابع زیر به دست آورید: (الف)  $\{s^{-1}\}$ ، (ب)  $[u(t)]^2$ ، (ج)  $1 + u(t)$ ، (د)  $u(t) - 3$ ، (ه)  $1 - \delta(t) + \delta(t-1) - \delta(t-2)$ .

۲۵. بدون استفاده از معادله (۱۵)، عکس تبدیل موارد زیر را مشخص کنید: (الف)  $\frac{1}{s+3}$ ، (ب)  $1$ ، (ج)  $s^{-2}$ ، (د)  $\frac{275}{s^3}$ ، (ه)  $\frac{275}{s^3}$ .

۲۶. نشان دهید مادامی که تبدیل لاپلاس توابع  $f_1(t)$  و  $f_2(t)$  وجود دارد،  $\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$ ،  $\mathcal{L}\{2u(t-2)\} = 2\delta(t-2)$ ، (ج)  $e^{-t}u(t-2)$ ، مقدار  $F(1 + j2)$  را پیدا کنید.

۲۸. موارد زیر را حساب کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 8 \sin 5t \delta(t-1) dt \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-5)^2 \delta(t-2) dt \quad (\text{ب})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-3000t} \delta(t - 3.333 \times 10^{-4}) dt \quad (\text{ج})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K \delta(t-2) dt \quad (\text{د}) \quad \text{که در آن K یک ثابت حقیقی است.}$$

۲۹. با تعریف تبدیل لاپلاس یکسویه  $F(s)$  را برای  $f(t)$ ‌های زیر به دست آورید. (الف)  $u(t)$ ، (ب)  $u(t-2)$ ، (ج)  $[u(t-2)]u(t-2)$ ، (د)  $4u(t-2)$ ، (ه)  $4\delta(t-2)$ ، (و)  $4e^{-3t}u(t-2)$ ، (ز)  $5\delta(t) \sin(10t + 0.2\pi t)$ .

۳۰. موارد زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^5 \delta(t-2) dt \quad (\text{ب})، \int_{-\infty}^{\infty} \cos 500t \delta(t) dt \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} -K^2 \delta(t-c) dt \quad (\text{د})، \int_{-\infty}^{\infty} 2.5e^{-0.001t} \delta(t-1000) dt \quad (\text{ج})$$

که K و c ثابت‌های حقیقی‌اند.

۳۱. با تبدیل لاپلاس یکسویه، اگر  $f(t)$  مطابق زیر باشد،  $F(s)$  را به دست آورید. (الف)  $[u(3-t)u(t^2)]$ ، (ب)  $[2u(t-1)]u(3-t)$ ، (ج)  $2u(t-4)$ ، (د)  $4\delta(t-1)[\cos \pi t - \sin \pi t]$ ، (ه)  $3\delta(t-5)$ ، (و)  $3e^{-2t}u(t-4)$ .

## ۱۴-۵ تکنیک‌های عکس تبدیل لاپلاس

۳۲.  $f(t)$  را به دست آورید، اگر  $F(s)$  برابر باشد با (الف)  $1/s + 3$ ، (ب)  $s^2 + 1/3$ ، (ج)  $1/(s+3)(s+4)$ ، (د)  $1/(s+3)(s+4)(s+5)$ .

۳۳.  $g(t)$  را به دست آورید، اگر  $G(s)$  برابر باشد با (الف)  $4.5/s - 90$ ، (ب)  $11 + 2s/s^2$ ، (ج)  $1/(s+1)(s+1)$ ، (د)  $1/(s+1)(s+2)(s+3)$ .

۳۴. عکس تبدیل هر یک را بدون اجرای هر انتگرال‌گیری و بدون استفاده از مطلب پیدا کنید: (الف)  $(s+4.4)^{-1} + (s+16)^{-1} - 5s^{-1}$ ، (ب)  $s^{-2} + s^{-1} - 1$ ، (ج)  $17/(s+6)(s+1) + 88s^{-1} + 5(s+7)^{-1}$ .

۳۵. ولتاژ حوزه فرکانس دو سر مقاومت  $2\text{ k}\ \Omega$  با رابطه زیر  $V(s) = 5s^{-1}\text{ V}$  داده شده است. جریان مقاومت در  $t = 1\text{ ms}$  چقدر است؟

۳۶. جریان حوزه فرکانس در مقاومت  $100\text{ M}\ \Omega$  برابر  $5(s+10)^{-1}\text{ pA}$  است. (الف) ولتاژ  $v(t)$  در دو سر مقاومت را به عنوان تابعی از زمان بکشید، (ب) توان جذب شده به وسیله مقاومت در  $t = 100\text{ ms}$  چقدر است؟، (ج) در چه زمانی ولتاژ دو سر مقاومت 1% از حداکثر مقدارش افت می‌کند؟

۳۷.  $f(t)$  را معین کنید. به شرطی که  $F(s)$  برابر باشد با: (الف)  $[s/(s+1)] + [2/(s+1)]$ ، (ب)  $[(s+1)/s] + [2/(s+1)]$ ، (ج)  $2e^{-(s+1)}$ ، (د)  $2e^{-3s} \cosh 2s$ .

۳۸. اگر  $N(s) = 5s$  باشد،  $\mathcal{L}^{-1}\{N(s)/D(s)\}$  را برای  $D(s) = s^2 - 9$ ،  $D(s) = (s+3)(s^2 + 19s + 90)$ ، (ج)  $(4s+12)(8s^2 + 6s + 1)$ ، (د) پاسخ (الف) تا (د) را با متلب امتحان کنید.

۳۹. با فرض عبارات زیر برای  $F(s)$ ،  $f(t)$  را به دست آورید: (الف)  $5/(s+1)$ ، (ب)  $18/[(s+1)(s+4)]$ ، (ج)  $5/(s+1) - 2/(s+4)$ ، (د)  $18s^2/[(s+1)(s+4)]$ ، (ه)  $18s/[(s+1)(s+4)]$ .

۴۰. اگر  $N(s) = 2s^2$  باشد، مطلوب است:

۴۱. (الف)  $\mathcal{L}^{-1}\{N(s)/D(s)\}$  برای  $D(s) = s^2 - 1$ ، (ب)  $(18s+12)(16s^2+125+2)$ ، (ج)  $(s+3)(s^2+19s+90)$ ، (د) جریان‌های (الف) تا (ج) را با متلب امتحان کنید.

۴۲. اگر  $F(s)$  برابر با موارد زیر باشد،  $f(t)$  را به دست آورید.

$$\left(\frac{2}{s} - \frac{3}{s+1}\right) \quad (\text{ب})، \left(\frac{2s+10}{s+3}\right) \quad (\text{ج})، 3e^{-0.8s} \quad (\text{د})$$

$$\frac{12}{(s+2)^2(s+2)} \quad (\text{د})$$

$$\frac{\pi}{(s^3+4s^2+5s+2)} \quad (\text{الف})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (\text{ب})$$

$$F(s) = 2 - s^{-1} + \frac{\pi}{(s^3+4s^2+5s+2)}$$

۴۳. بسط به کسره‌های جزئی را برای هر یک از توابع گویای زیر به دست آورده و سپس توابع زمانی متناظر آن‌ها را پیدا کنید.

$$F(s) = [(s+1)(s+2)] / [(s+3)(s+4)] \quad (\text{الف})$$

$$F(s) = (s+2) / [s^2(s^2+4)] \quad (\text{ب})$$

۴۴. اگر  $G(s)$  برابر باشد با:

$$\frac{12s^3}{(s+1)(s+2)} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{12s^3}{(s^2+2s+1)(s+2)} \quad (\text{ب})$$

$$3s - \frac{12s^3}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (\text{ج})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

۴۵. اگر  $H(s)$  برابر باشد با:

$$\frac{(s+1)^2}{(s+1)(s+2)} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \quad (\text{ب})$$

$$3s - \frac{s^4}{(s^2+2s+1)(s+3)} + 1 \quad (\text{ج})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

## ۱۴-۶ قضایای اصلی در تبدیل لاپلاس

۴۶. تبدیل لاپلاس معادلات زیر را به دست آورید:

$$5 \frac{di}{dt} - 7 \frac{d^2i}{dt^2} + 9i = 4 \quad (\text{الف})$$

$$m \frac{d^2p}{dt^2} + \mu_f \frac{dp}{dt} + kp(t) = 0 \quad (\text{ب})$$

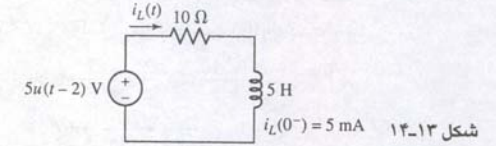
این معادله پاسخ یک سیستم ضربه گیر بدون نیرو را توصیف می‌نماید. (ج)  $\frac{d\Delta n_p}{dt} = -\frac{d\Delta n_p}{dt} + G_L$  که سرعت ترکیب مجدد الکترون‌های دریافتی  $(\Delta n_p)$  را در سیلیکون نوع P تحت تشعشع نور نشان می‌دهد

( $G_L$  ثابت متناسب با شدت نور است).

۴۷. اگر  $f(0^-) = -3$ ،  $f(0^+) = 8f(t) + 6f'(t) - 4\delta(t) - 15u(t)$  باشد، با تبدیل لاپلاس از معادله دیفرانسیل برای حل  $F(s)$ ، و عکس تبدیل  $f(t)$ ، را به دست آورید.

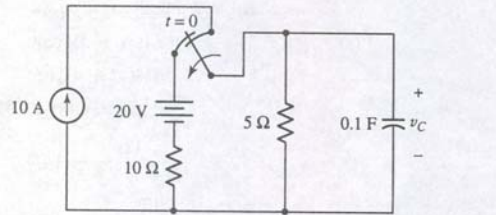


۴۸. با مراجعه به مدار RL شکل ۱۴-۱۳، (الف) معادله دیفرانسیلی برای جریان القاگر  $i_L(t)$  بنویسید. (ب)  $I_L(s)$  را بیابید. (ج) با عکس تبدیل لاپلاس  $i_L(t)$ ،  $I_L(s)$  را به دست آورید.



شکل ۱۴-۱۳

۴۹. (الف) برای مدار شکل ۱۴-۱۴،  $v_C(0^+)$  و  $v_C(0^-)$  را پیدا کنید. (ب) معادله‌ای را که در  $t > 0$  معتبر باشد، برای تبدیل  $v_C(t)$  بیابید. (ج) با استفاده از تبدیل لاپلاس  $V_C(s)$  و سپس  $v_C(t)$  را بیابید.



شکل ۱۴-۱۴

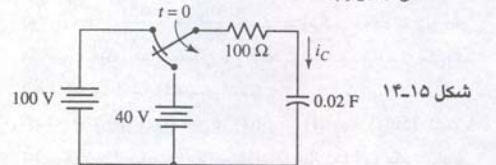
۵۰. در شکل ۱۴-۱۳، یک منبع ولتاژ  $V = -5 u(t)$  با منبع  $V = 5(t-2)$  سری کنید و مسئله ۴۸ را تکرار نمایید. (ب) جریان القاگر را رسم و با شبیه‌سازی PSpice، آن را مقایسه نمایید.

۵۱. با فرض معادله دیفرانسیل  $f_2(t) = 20f_2'(t) + 3f_2(t) = 12 u(t)$  که  $f_2(0^-) = 2$  است. تبدیل لاپلاس  $F_2(s)$  را به دست آورید و سپس  $f_2(t)$  را پیدا کنید.

۵۲. عکس تبدیل لاپلاس هر یک از موارد زیر را به دست آورید (الف)  $2/s-4$ ، (ب)  $s/(s^2+99)$ ، (ج)  $5/(s^2+5s+6)$ ، (د)  $s$  و (ه)  $s^2$ .  
۵۳. با فرض دو معادله دیفرانسیل  $x'(t) + y(t) = 8$  و  $y'(t) - 2x(t) + 3y(t) = 8$  که  $x(0^-) = 5$  و  $y(0^-) = 8$  است.  $x(t)$  و  $y(t)$  را به دست آورید.

۵۴. اگر  $F(s)$  با روابط زیر داده شده باشد،  $f(t)$  را پیدا کنید. (الف)  $f(0^-) = 0$ ،  $f(0^+) = 8s^{-1} + 8s + 2$  و (ب)  $f(0^-) = 0$ ،  $f(0^+) = s^2/(s+2) - s + 2$ .

۵۵. (الف) برای مدار شکل ۱۴-۱۵، مقدار  $i_C(0^-)$  و  $i_C(0^+)$  را بیابید. (ب) معادله‌ای برای  $i_C(t)$  در حوزه زمان بنویسید که در  $t > 0$  معتبر باشد. (ج) از روش‌های تبدیل لاپلاس برای حل  $I_C(s)$  استفاده کنید و سپس عکس تبدیل را پیدا کنید.



شکل ۱۴-۱۵

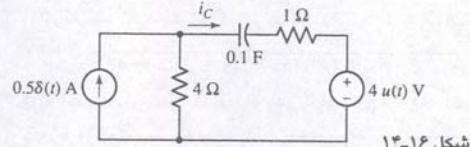
۵۶.  $V(s)$  را برای (الف)  $v(t) = 4 \cos(100t)$ ، (ب)  $v(t) = 2 \sin(10^3 t) - 3 \cos(100t)$ ، (ج)  $v(t) = 14 \cos(8t) - 2 \sin(8^\circ)$ ، (د)  $v(t) = \delta(t) + \sin(6t) u(6t)$ ، (ه)  $v(t) = \cos(5t) \sin(3t)$  پیدا کنید.

۵۷. یک مقاومت  $R$ ، خازن  $C$ ، القاگر  $L$  و یک منبع جریان ایده‌آل  $i_s(t) = 100e^{-5t} u(t)$  همگی با هم موازی شوند. بگذارید  $V$  ولتاژ در دو سر منبع یا مرجع مثبت در پایانه‌ای باشد که جریان  $i_s(t)$  از آن خارج می‌شود. آن‌گاه  $i = v' + 4v + 3 \int_0^t v dt$  (الف)  $i = v' + 4v + 3 \int_0^t v dt$  (ب) از تکنیک‌های تبدیل لاپلاس برای یافتن  $v(t)$  استفاده نمایید.

۵۸.  $\mathcal{L}$  را برای  $v(t)$  برابر (الف)  $v(t) = u(t-2)$ ، (ب)  $v(t) = e^{-t} + 2u(t-2)$ ، (ج)  $v(t) = u(t-1) + \delta(t-1)$ ، (د)  $v(t) = u(t-1) + \delta(t-1)$  بیابید.

۵۹. یک معادله انتگرالی - مشتقی برحسب  $i_C$  برای مدار شکل ۱۴-۱۶ بیابید. تبدیل لاپلاس را بگیرید. برای  $I_C(s)$  آن را حل کنید و سپس با عکس تبدیل  $i_C(t)$  را به دست آورید.

۶۰. با فرض  $24(t-2)u(t-2) = \int_0^t v(z) dz + 6v + v'$ ،  $v(0^-)$  را به دست آورید.  $v(0^-) = 0$  است.



شکل ۱۴-۱۶

۶۱. تست راث را به توابع زیر اعمال کنید و بگویید آیا پایدار است یا ناپایدار؟

$$H(s) = \frac{s-500}{s^3+13s^2+47s+35} \quad (\text{الف})$$

$$H(s) = \frac{s-500}{s^3+13s^2+s+35} \quad (\text{ب})$$

۶۲. تست راث را به توابع زیر اعمال کرده بگویید پایدارند یا خیر. سپس هر مخرج را به صورت ضرب درآورده و قطب‌های  $H(s)$  را شناسایی کنید. صحت تست راث را برای آن‌ها تحقیق نمایید.

$$H(s) = \frac{4s}{s^2+3s+8} \quad (\text{الف})$$

$$H(s) = \frac{s-9}{s^2+2s+1} \quad (\text{ب})$$

۶۳. تست راث را به توابع زیر اعمال کرده و بگویید پایدارند یا خیر:

$$H(s) = \frac{s^2}{s^4+3s^3+3s^2+3s+1} \quad (\text{الف})$$

$$H(s) = \frac{2}{s+3} \quad (\text{ب})$$

## ۱۴-۷ قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی

۶۴. با فرض تابع  $v(t) = 7u(t) + 8e^{-3t}u(t)$ ، (الف) تئوری مقدار اولیه را به  $V(s)$  اعمال کنید. صحت پاسخ خود را با  $v(t)$  در  $t = 0$  ارزیابی کنید.

به دست آورید.

$$5(s^2+1)/(s+1)^3 \quad (\text{الف})$$

$$5(s^2+1)/[s(s+1)^3] \quad (\text{ب})$$

$$(1 - e^{-3s})/s^2 \quad (\text{ج})$$

۶۹. فرض کنید  $f(t) = (1/t)(e^{-at} - e^{-bt}) u(t)$  باشد، (الف)  $F(s)$  را به دست آورید. (ب) هر دو سمت معادله  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$  را عمل کنید.

۷۰. هر دو مقدار اولیه و ثانویه را برای توابع زیر پیدا کنید یا نشان دهید که وجود ندارند.

$$\frac{8s-2}{s^2+6s+10} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{8s-2}{s^2-6s+10} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{8s-2}{s^2-6s+10} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{8s-2}{s^2-6s+10} \quad (\text{د})$$



## تحلیل مدار در حوزه S

### مقدمه

در فصل ۱۴ مفهوم فرکانس مختلط را به دست آوردیم و در تحلیل مدار، استفاده از تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل را معرفی کردیم. پس از کمی ممارست در رفتن به حوزه زمان و بازگشت به حوزه فرکانس و بالعکس چیره دست شدیم. اکنون آماده ایم تا این تکنیک ها را با روشی ساخت یافته در تحلیل مدارها به کارگیریم. مجموعه مهارت های حاصل ما را قادر می سازد تا هر مدار خطی را موثرتر تحلیل کنیم تا مستثنی از طبیعت منبع، پاسخ کامل تری (یعنی پاسخ گذرا به علاوه حالت ماندگار) به دست آید.

### ۱۵-۱ $Y(s)$ و $Z(s)$

مز موفقیت فیزورها در تحلیل حالت ماندگار مدارهای سینوسی تبدیل مقاومت ها، خازن ها و القاگرها به امپدانس است. آنگاه تحلیل مدار با استفاده از تکنیک های گرهی یا حلقه ای، جمع، تبدیل منبع و نیز معادل های تونن و نورتن به پیش می رود. همان طور که قبلاً ممکن است حس کرده باشیم این مفهوم قابل گسترش به حوزه S است چون حالت ماندگار سینوسی فقط یک حالت خاصی از آن است (که  $\sigma = 0$  می باشد).

### مقاومت ها در حوزه فرکانس

جازه بدهید با ساده ترین حالت آغاز کنیم که در آن یک مقاومت به منبع ولتاژ  $v(t)$  متصل است. قانون اهم بیان می دارد که:

$$v(t) = Ri(t)$$

اگر فتن تبدیل لاپلاس از دو طرف:

$$V(s) = RI(s)$$

می بینیم که نسبت ولتاژ در حوزه فرکانس به جریان در حوزه فرکانس همان مقاومت R است. بنابراین:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R \quad (1)$$

نون در حوزه فرکانس کار می کنیم، به این کمیت امپدانس می گوئیم، ولی همچنان واحد اهم  $(\Omega)$  را برای آن به کار خواهیم برد. درست مثل آن چه که در کار با فیزورها در حالت ماندگار سینوسی دریافتیم، امپدانس مقاومت به فرکانس وابسته نیست. ادmittانس  $Y(s)$  یک مقاومت به سورت نسبت  $I(s)$  به  $V(s)$  تعریف می شود و در واقع همان  $\frac{1}{R}$  است. واحد این کمیت یعنیس (S) می باشد.

### مفاهیم کلیدی

گسترش مفهوم امپدانس به حوزه S

مدل سازی شرایط اولیه با منابع ایده آل

اعمال گره، مش، جمع، و تبدیل منبع در حوزه S

قضایای تونن و نورتن در مدارهای حوزه S

دستکاری حوزه S عبارات جبری با متلب

شناسایی قطب ها و صفرها در توابع تبدیل مدار

پاسخ ضربه یک مدار

استفاده از کاتولوشن برای تعیین پاسخ سیستم

پاسخ به عنوان تابعی از  $\sigma$  و  $\omega$

استفاده از نمودار قطب - صفر برای

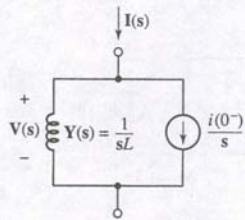
پیش بینی پاسخ طبیعی مدارها

سنتر توابع تبدیل ولتاژ خاص با استفاده از

op amp



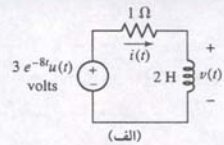




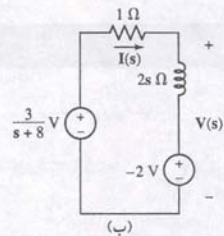
**شکل ۱۵-۲** مدل حوزه فرکانس دیگری برای القاگر، متشکل از ادیمیتانس  $1/sL$  و منبع جریان  $i(0^-)/s$ .



## مثال ۱۵-۱

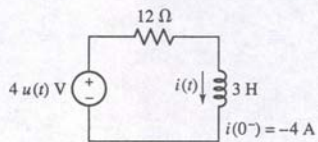


(الف)



(ب)

**شکل ۱۵-۳** (الف) یک مدار ساده مقاومت - القاگر که در آن ولتاژ  $v(t)$  مورد نظر است. (ب) مدار معادل در حوزه فرکانس، شامل جریان اولیه در القاگر با استفاده از یک منبع ولتاژ سری  $-Li(0^-)$ .



شکل ۱۵-۴

## تمرین

یکی از آن‌ها ادیمیتانس  $\frac{1}{sL}$  است که با منبع جریان  $\frac{i(0^-)}{s}$  یعنی دومی، موازی است. مدل حاصل در شکل ۱۵-۲ ملاحظه می‌گردد. انتخاب یکی از دو مدل در شکل ۱۵-۱ (ب) و یا ۱۵-۲ به این بستگی دارد که در تحلیل یک مدار کامل حاوی القاگر کدام یک معادلات ساده‌تری را عرضه کنند. ضمناً توجه کنید که هرچند در شکل ۱۵-۲، سمبل القاگر با یک ادیمیتانس  $Y(s) = \frac{1}{sL}$  برچسب خورده است ولی می‌توان به آن به چشم یک امپدانس  $Z(s) = sL$  هم نگاه کرد. مجدداً انتخاب آن‌ها به سلیقه و راحتی تحلیل‌گر وابسته است.

اکنون نوبت توضیح واحدها است. وقتی تبدیل لاپلاس از جریانی مثل  $i(t)$  را به دست می‌آوریم، از آن در یک فاصله زمانی انتگرال می‌گیریم. پس واحد  $I(s)$  به لحاظ تکنیکی آمپر - ثانیه است. به همین طریق، واحد  $V(s)$  ولت - ثانیه می‌باشد. با این وجود قرار این است که کلمه ثانیه را حذف کنیم و به  $I(s)$  واحد آمپر، به  $V(s)$  ولت تخصیص دهیم. این قرارداد هیچ مشکلی به وجود نمی‌آورد مگر این‌که بخواهیم معادله‌ای چون معادله (۵) را موشکافی کنیم و جمله‌ای چون  $i(0^-)/s$  در آن بیابیم که واحدش با واحد  $I(s)$  تضاد باشد. در هر صورت ما به اندازه‌گیری این کمیت‌های فیزیکی به آمپر و ولت به هنگام بررسی واحدهای یک معادله ادامه می‌دهیم ولی همیشه ثانیه را به خاطر داریم.

ولتاژ  $v(t)$  را در شکل ۱۵-۳ (الف) محاسبه کنید. مقدار اولیه جریان  $i(0^-) = 1A$  است. با تبدیل مدار شکل ۱۵-۳ (الف) به معادل حوزه فرکانس شکل ۱۵-۳ (ب) آغاز می‌کنیم. ولتاژ نمایی به حوزه فرکانس تبدیل شده است،  $V = 3/(s+8)$  و القاگر با مدل دو عنصری یعنی یک امپدانس  $sL = 2s \Omega$  و یک منبع ولتاژ مستقل  $-2V = -2(1) = -Li(0^-)$  جایگزین شده است. ما به دنبال  $V(s)$  هستیم زیرا عکس آن  $v(t)$  را به دست می‌دهد. توجه کنید که  $V(s)$  در دو سر کل مدار القاگر ظاهر می‌شود و نه فقط در دو سر منبع مستقل.

با انتخاب روشی سرراست داریم:

$$I(s) = \frac{\left[ \frac{3}{s+8} + 2 \right]}{1+2s} = \frac{s+9.5}{(s+8)(s+0.5)}$$

$$V(s) = 2sI(s) - 2$$

به نحوی که

$$V(s) = \frac{2s(s+9.5)}{(s+8)(s+0.5)} - 2$$

$$V(s) = \frac{2s-8}{(s+8)(s+0.5)}$$

با به کارگیری تجزیه به کسرهای جزئی یا استفاده از متلب داریم:

$$V(s) = \frac{3.2}{s+8} - \frac{1.2}{s+0.5}$$

با مراجعه به جدول ۱۴-۱، عکس تبدیل مطابق زیر است:

$$v(t) = [3.2e^{-8t} - 1.2e^{-0.5t}]u(t) \text{ volts}$$

**۱۵-۱** جریان  $i(t)$  را در شکل ۱۵-۴ به دست آورید.

$$\text{جواب: } i(t) = \frac{1}{3} [1 - 13e^{-4t}]u(t) \text{ A}$$

## القاگرها در حوزه فرکانس

حال یک القاگر را که به یک منبع ولتاژ متغیر با زمان  $v(t)$  وصل است ملاحظه می‌نماییم (شکل ۱۵-۱ (الف)). می‌دانیم که:

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

با نوشتن تبدیل لاپلاس دو طرف داریم:

$$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)] \quad (۲)$$

اکنون دو جمله داریم: یکی  $sLI(s)$  و دیگری  $Li(0^-)$ . در مواردی که انرژی اولیه ذخیره شده در القاگر صفر باشد یعنی  $i(0^-) = 0$  داریم:

$$V(s) = sLI(s)$$

و بنابراین:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL \quad (۳)$$

اگر فقط علاقمند به پاسخ ماندگار سینوسی باشیم معادله (۳) ساده‌تر می‌شود. می‌توان از مقادیر اولیه که فقط طبیعت پاسخ گذرا را تحت تأثیر قرار می‌دهند، صرف‌نظر کرد بنابراین  $s = j\omega$  را جایگزین کرده و خواهیم داشت:

$$Z(j\omega) = j\omega L$$

که در فصل ۱۰ هم همان را ملاحظه کردیم.

## مدل‌سازی القاگرها در حوزه s

گرچه به کمیت موجود در معادله (۳) امپدانس القاگر می‌گوییم، ولی باید به یاد بیاوریم که این کمیت با فرض صفر بودن جریان اولیه به دست آمد. در حالت کلی‌تر که انرژی در  $t = 0^-$  در عنصر ذخیره شده است، این کمیت برای نمایش القاگر در حوزه فرکانس کافی نیست. خوشبختانه می‌توان مقدار اولیه را با مدل‌سازی یک القاگر به صورت ترکیبی از امپدانس و یک منبع ولتاژ یا جریان درآورد. برای انجام آن معادله (۲) را دوباره مرتب می‌کنیم:

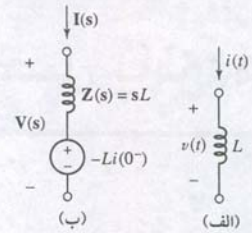
$$V(s) = sLI(s) - Li(0^-) \quad (۴)$$

دومین جمله در سمت راست کمیتی ثابت است و از ضرب القاکنایی  $L$  در مقدار اولیه جریان  $i(0^-)$  به دست می‌آید. حاصل آن جمله ولتاژ ثابتی است که از جمله وابسته به فرکانس  $sLI(s)$  کسر شده است. در این جاکمی تعمق ما را به این سمت سوق می‌دهد که می‌توان یک القاگر  $L$  را به صورت دو عنصر در حوزه فرکانس همچون شکل ۱۵-۱ (ب) نشان داد.

مدل القاگر در حوزه فرکانس در شکل ۱۵-۱ (ب) از امپدانس  $sL$  و یک منبع ولتاژ  $Li(0^-)$  تشکیل شده است. ولتاژ دو سر امپدانس  $sL$  طبق قانون اهم به صورت  $sL I(s)$  داده می‌شود. چون ترکیب دو عنصری شکل ۱۵-۱ (ب) خطی است، هر تکنیک تحلیل مداری که قبلاً دیدیم در فضای  $s$  هم قابل پیاده‌شدن است. مثلاً ممکن است یک تبدیل منبع روی مدل اجرا کنیم تا امپدانس  $sL$  را موازی با منبع جریان به دست آوریم  $-i(0^-)/s = -Li(0^-)/sL$ . این را می‌توان با انتخاب معادله (۴) و حل برای  $I(s)$  به دست آورد:

$$I(s) = \frac{V(s) + Li(0^-)}{sL} = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s} \quad (۵)$$

دوباره با دو جمله طرف هستیم. اولین جمله در سمت راست علی‌رغم این‌که واحد آمپر - ثانیه دارد یک جریان است. بنابراین می‌توان این معادله را با دو مولفه جدا از هم مدل‌سازی کرد:



**شکل ۱۵-۱** (الف) القاگر در حوزه زمان. (ب) مدار کاملی از القاگر در حوزه فرکانس متشکل از یک امپدانس  $sL$  و یک منبع ولتاژ  $Li(0^-)$  که در ایجاد شرایط اولیه غیرصفر روی عنصر مشارکت دارند.



## مدل‌سازی خازن‌ها در حوزه S

مفهوم مشابهی را در حوزه S به خازن‌ها می‌توان اعمال کرد. با دنبال کردن قرارداد عناصر غیرفعال طبق شکل ۱۵.۵ (الف) معادله حاکم بر خازن عبارت است از:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف داریم:

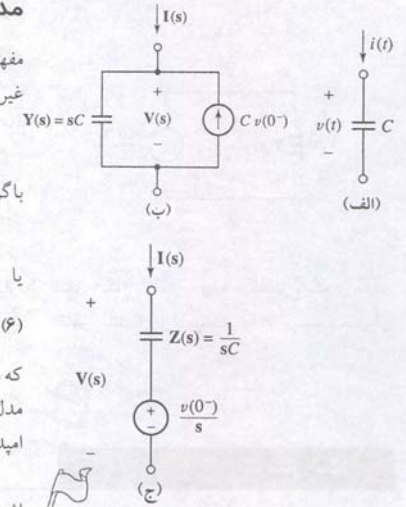
$$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)]$$

یا

$$I(s) = sCV(s) - Cv(0^-)$$

که می‌توان آن را با یک امپدانس  $sC$  موازی با یک منبع جریان  $Cv(0^-)$  طبق شکل ۱۵.۵ (ب) مدل‌سازی کرد. با اجرای تبدیل منبع در این مدار، مدل معادلی برای خازن متشکل از یک امپدانس  $\frac{1}{sC}$  سری با منبع ولتاژ  $v(0^-)/s$  به دست می‌آید (شکل ۱۵.۵ ج).

هنگام کار با مدل‌های حوزه S باید دقت کنیم منابع مستقل به کاررفته به جای مقادیر اولیه اشتباه نشوند. مقدار اولیه در یک القاگر با  $i(0^-)$  داده می‌شود. این جمله ممکن است به صورت منبع ولتاژ یا جریان، بسته به مدل انتخابی ظاهر گردد. مقدار اولیه برای خازن به صورت  $v(0^-)$  داده می‌شود. این جمله هم ممکن است به صورت منبع ولتاژ یا منبع جریان درآید. اشتباه رایجی در میان دانشجویانی که برای اولین بار در حوزه S کار می‌کنند این است که همیشه  $v(0^-)$  را به عنوان منبع ولتاژ مدل در نظر می‌گیرند، این اشتباه حتی در هنگام کار با القاگر هم دیده می‌شود.



شکل ۱۵.۵ (الف) خازنی در حوزه زمان، با برچسب‌های  $v(t)$  و  $i(t)$ . (ب) مدل حوزه فرکانس خازن یا ولتاژ اولیه  $v(0^-)$ . (ج) مدل معادلی حاصل از تبدیل منبع.

## مثال ۱۵-۲

در مدار شکل ۱۵.۶ (الف) با فرض  $-2V$ ،  $v_C(0^-)$  و  $v_C(t)$  را به دست آورید.

■ اهداف مسئله را شناسایی کنید.

■ به دنبال عبارتی برای ولتاژ خازن،  $v_C(t)$  هستیم.

■ اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

■ مسئله یک ولتاژ اولیه خازن  $-2V$  را مشخص کرده است،  $v_C(0^-)$ .

■ ارائه طرح.

دوباره اولین گام رسم مدار حوزه فرکانس معادل است. در انجام آن باید تصمیم بگیریم که کدام مدل برای خازن به کار رود، زیرا دارای ولتاژ اولیه غیرصفر هستیم. برای چنین مسئله ساده‌ای، مزیت آشکار برای انتخاب مدل وجود ندارد، لذا مدل مبتنی بر منبع جریان را برمی‌گزینیم (شکل ۱۵.۶ ب).

■ معادلات مناسب را بنویسید.

تحلیل را با نوشتن معادله یک گره به پیش می‌بریم:

$$-1 = \frac{V_C}{2/s} + \frac{V_C - 9/s}{3}$$

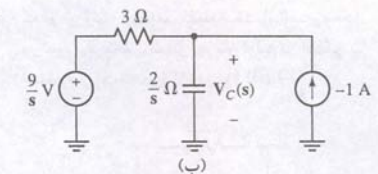
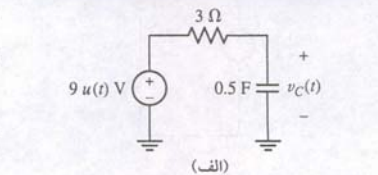
■ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

ما یک معادله و یک مجهول داریم که در حوزه فرکانس برای ولتاژ خازن نوشته شده است.

■ اقدام به حل.

با حل برای  $V_C$  داریم:

$$V_C = \frac{18/s - 6}{3s + 2} = -2 \frac{(s - 3)}{s(s + 2/3)}$$



شکل ۱۵.۶ مداری که در آن  $v_C(t)$  خواسته شده است. (ب) معادل حوزه فرکانس مدار با مدل مبتنی بر منبع جریان برای احتساب خازن.

با تجزیه کسره‌های جزئی داریم:

$$V_C = \frac{9}{s} - \frac{11}{s + 2/3}$$

$v_C(t)$  را با عکس تبدیل لاپلاس این عبارت به دست می‌آوریم:

$$v_C(t) = 9u(t) - 11e^{-2t/3}u(t) \text{ V}$$

یا به صورت جمع‌تر:

$$v_C(t) = [19 - 11e^{-2t/3}]u(t) \text{ V}$$

■ صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

امتحان سریعی در قبال  $t = 0$  منجر به  $-2 \text{ V}$  می‌گردد که همان مقدار اولیه است.

همچنین با  $t \rightarrow \infty$ ،  $t \rightarrow 9$ ،  $v_C(t)$  می‌رود و این چیزی است که در شکل ۱۵.۶ (الف) پس

از دوران گذرا انتظار آن را داریم.

## تمرین

۱۵-۲ مثال ۱۵.۲ را با مدل خازن مبتنی بر منبع ولتاژ تکرار کنید.

جواب:  $V = [9 - 11e^{-2t/3}]u(t)$ .

نتایج این بخش در جدول ۱۵.۱ خلاصه شده است. توجه کنید که از قرارداد علامت عناصر غیرفعال استفاده شده است.

جدول ۱۵.۱ خلاصه‌ای از نمایش‌های حوزه زمان و فرکانس.

| حوزه زمان                              | حوزه فرکانس  |
|--|--|
| مقاومت<br>$v(t) = Ri(t)$<br>           | $V(s) = RI(s)$<br><br>$I(s) = \frac{1}{R}V(s)$<br>                               |
| القاگر<br>$v(t) = L \frac{di}{dt}$<br> | $V(s) = sLI(s) - Li(0^-)$<br><br>$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$<br> |
| خازن<br>$i(t) = C \frac{dv}{dt}$<br>   | $V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0^-)}{s}$<br><br>$I(s) = sCV(s) - Cv(0^-)$<br> |



## ۱۵-۲ تحلیل گرهی و تک حلقه‌ای در حوزه s

در فصل ۱۰ آموختیم که چگونه مدارهای تحریک‌شده با منبع سینوسی در حوزه زمان را به معادله حوزه فرکانس تبدیل کنیم. مزایای این انتقال کاملاً آشکار بوده و دیگر لازم نبود معادلات انتگرالی -دیفرانسیلی را حل کنیم. تحلیل گرهی و تک حلقه‌ای این گونه مدارها به صورت عبارات جبری برحسب  $j\omega$  درآمدند که در آن فرکانس منبع بود.

اکنون مفهوم امپدانس می‌تواند عمومیت بیشتری نسبت به فرکانس مختلط ( $s = \sigma + j\omega$ ) داشته باشد. با تبدیل مدارها از حوزه زمان به حوزه فرکانس و اجرای تحلیل گرهی یا حلقه‌ای دوباره روابط جبری خالصی حاصل می‌گردد ولی این بار برحسب فرکانس مختلط  $s$  است. حل معادلات با جایگزینی متغیر، دستور کرامر یا نرم‌افزاری که بتواند دستکاری جبری انجام دهد (مثل متلب) صورت می‌گیرد. در این بخش دو مثال با پیچیدگی منطقی ارائه می‌شود تا این موضوع را بیشتر بحث کنیم. با این وجود ابتدا با کمی تأمل، ببینیم چگونه از متلب می‌توان در این موارد کمک گرفت.

### تحلیل کامپیوتری

در فصل ۱۴ دیدیم که می‌توان برای تعیین باقیمانده توابع گویا در فضای  $s$ ، متلب را به کاربرد و به این ترتیب فرآیند عکس تبدیل لاپلاس را ساده‌تر کرد. با این وجود، این بسته نرم‌افزاری خیلی قوی‌تر از این بوده و حاوی زیرروال‌هایی برای دستکاری‌های جبری است. در واقع، همان‌طور که در این مثال خواهیم دید متلب حتی قادر به اجرای مستقیم عکس تبدیل لاپلاس از توابع گویایی است که ما در حین تحلیل مدار به دست می‌آوریم. بیایید ببینیم متلب چگونه با عبارات جبری کار می‌کند. این عبارات به صورت رشته‌ای از کاراکترها با سمبل نقل قول ('') برای تعریف عبارت ذخیره شده‌اند. مثلاً ما قبلاً چند جمله  $p(s) = s^3 - 12s + 6$  را به صورت بردار زیر نشان دادیم:

$$\text{EDU} \gg p = [1 \ 0 \ -12 \ 6];$$

و نیز می‌توان آن را به صورت نمادین هم نشان داد:

$$\text{EDU} \gg p = 's^3 - 12*s + 6';$$

این دو نمایش در متلب یکی نیستند و دارای دو مفهوم جدا می‌باشند. هرگاه بخواهیم یک عبارت جبری را به صورت نمادین یا سمبلیک دستکاری کنیم، دومین نمایش لازم است. این توانمندی خصوصاً هنگام کار با معادلات همزمان، که در چند مثال اخیر دیدیم، مفید است.

مجموعه معادلات زیر را ملاحظه نمایید:

$$\begin{aligned} (3s + 10)I_1 - 10I_2 &= \frac{4}{s+2} \\ -10I_1 + (4s + 10)I_2 &= \frac{-2}{s+1} \end{aligned}$$

با استفاده از نمایش نمادین متلب دو رشته متغیر را تعریف می‌کنیم:

$$\text{EDU} \gg \text{eqn1} = '(3*s+10)*I1 - 10*I2 = 4/(s+2)';$$

$$\text{EDU} \gg \text{eqn2} = '10*I1 + (4*s+10)*I2 = -2/(s+1)';$$

توجه کنید که در هر رشته کل معادله نوشته می‌شود. هدف ما حل این دو معادله برای یافتن متغیرهای  $I_1$  و  $I_2$  می‌باشد. متلب دارای روال خاصی به نام `solve()` است که می‌تواند معادلات را برای ما حل کند. این زیرروال پالیست‌کردن معادلات جدا از هم (که به آن‌ها `string` می‌گوییم) و به دنبال آن لیستی از مجهولات (به آن‌ها هم `string` می‌گوییم) احضار می‌شود:

$$\text{EDU} \gg \text{solution} = \text{solve}(\text{eqn1}, \text{eqn2}, 'I1', 'I2');$$

پاسخ در متغیر `solution` و گاهی هم به فرم غیرمنتظره‌ای ذخیره می‌گردد. متلب پاسخ را به فرمی به نام `structure` که برای برنامه‌نویسان C آشنا است بازمی‌گرداند. با این وجود در این مرحله آنچه ما می‌خواهیم بدانیم این است که چگونه جواب را استخراج کنیم. اگر این جمله را تایپ کنیم:

$$\text{EDU} \gg I1 = \text{solution.I1}$$

پاسخ زیر را دریافت می‌کنیم:

$$I1 = 2*(4*s+9)/(s+1)/(6*s^2+47*s+70)$$

و به این معنی است که عبارت چندجمله‌ای  $s$  به متغیر `I1` تخصیص یافته است. عمل مشابهی را می‌توان برای متغیر `I2` انجام داد.

اکنون می‌توان مستقیماً برای تعیین عکس تبدیل لاپلاس به کمک تابع (`ilaplace()`) پیش‌رفت:

$$\text{EDU} \gg i1 = \text{ilaplace}(I1)$$

$$i1 = 10/29*\exp(-t)-172/667*\exp(-35/6*t)-2/23*\exp(-2*t)$$

در این روال، می‌توان حل معادلات همزمان حاصل از تحلیل گرهی یا حلقه‌ای را به دست آورد. فرمان (`ezplot(i1)`) به ما این اجازه را می‌دهد که ببینیم حل به چه شباهت دارد. باید متذکر شد که گاهی عبارات پیچیده متلب را به اشتباه می‌اندازند. در این موارد (`ilaplace()`) ممکن است پاسخ مفیدی را بازنگرداند.

در این جا ذکر چند تابع مرتبط با موضوع سودمند است به خصوص که می‌توان از آن‌ها برای تست نتایج دستی سریعاً استفاده کرد. تابع (`numden()`) یک تابع گویا را به دو متغیر مبدل می‌سازد: یکی حاوی صورت و دیگری حاوی مخرج است. مثلاً

$$\text{EDU} \gg [N, D] = \text{numden}(I1)$$

دو عبارت جبری ذخیره شده در `N` و `D` را بازمی‌گرداند:

$$N = 8*s + 18$$

$$D = (s+1)*(6*s^2+47*s+70)$$

برای اعمال تجربیات قبلی خود به تابع (`residue()`) لازم است هر عبارت سمبلیک (رشته) را به صورت برداری حاوی ضرایب چند جمله درآوریم. برای دستیابی به آن باید از فرمان (`sym2poly()`) استفاده کرد:

$$\text{EDU} \gg n = \text{sym2poly}(N);$$

و

$$\text{EDU} \gg d = \text{sym2poly}(D)$$

$$d = 6 \quad 53 \quad 117 \quad 70$$

سپس ما می‌توانیم مقاومت را محاسبه کنیم:

$$\text{EDU} \gg [r \ p \ y] = \text{residue}(n, d)$$

| r=      | p=      | y= |
|---------|---------|----|
| -0.2579 | -5.8333 | [] |
| -0.0870 | -2.0000 |    |
| 0.3448  | -1.0000 |    |

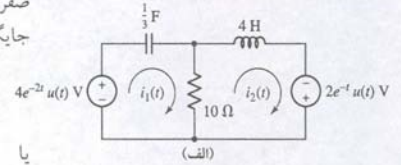
که با آن چه که از (`ilaplace()`) به دست آمد برابر است.

با استفاده از این مهارت‌های جدید متلب، آماده تحلیل چند مدار هستیم.

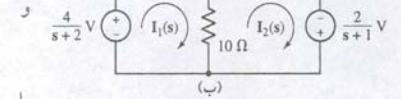


## مثال ۱۵-۳

شکل ۱۵-۷ (الف) یک مدار دو حلقه که در آن جریان هر حلقه مورد تقاضا است. (ب) مدار معادل حوزه فرکانس.



یا



یا

دو جریان حلقه  $i_1$  و  $i_2$  را در مدار شکل ۱۵-۷ (الف) معین کنید. در آغاز هیچ انرژی در مدار وجود ندارد.

همیشه اولین گام، ترسیم مدار معادل حوزه فرکانس است. چون در  $t = 0^-$  انرژی ذخیره شده صفر است، خازن  $\frac{1}{3} F$  را با امپدانس  $3/s \Omega$  و القاگر  $4 H$  را با امپدانس  $4s \Omega$  طبق شکل ۱۵-۷ (ب) جایگزین می‌کنیم.

سپس مثل قبل دو معادله تک حلقه را می‌نویسیم:

$$-\frac{4}{s+2} + \frac{3}{s} I_1 + 10I_1 - 10I_2 = 0$$

$$\left(\frac{3}{s} + 10\right)I_1 - 10I_2 = \frac{4}{s+2} \quad (\text{حلقه 1})$$

$$-\frac{2}{s+1} + 10I_2 - 10I_1 + 4sI_2 = 0$$

$$-10I_1 + (4s + 10)I_2 = \frac{2}{s+1} \quad (\text{حلقه 2})$$

با حل معادلات فوق برای  $I_1$  و  $I_2$  داریم:

$$I_1 = \frac{2s(4s^2 + 19s + 20)}{(20s^4 + 66s^3 + 73s^2 + 57s + 30)} A$$

و

$$I_2 = \frac{30s^2 + 43s + 6}{(s+2)(20s^3 + 26s^2 + 21s + 15)} A$$

تنها چیزی که باقی می‌ماند گرفتن عکس تبدیل لاپلاس برای هر تابع است که خواهیم داشت:

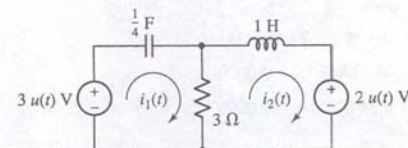
$$i_1(t) = -96.39e^{-2t} - 344.8e^{-t} + 841.2e^{-0.15t} \cos 0.8529t + 197.7e^{-0.15t} \sin 0.8529t \text{ mA}$$

غیرمستقیم گفتیم که هیچ جریانی در  $t = 0^-$  از القاگر عبور نمی‌کند، بنابراین  $i_2(0^-) = 0$  و در نتیجه  $i_2(0^+)$  هم باید صفر باشد. آیا در پاسخ ما این نکته صحت دارد؟

$$i_2(t) = -481.9e^{-2t} - 241.4e^{-t} + 723.3e^{-0.15t} \cos 0.8529t + 472.8e^{-0.15t} \sin 0.8529t \text{ mA}$$

## تمرین

۱۵-۳ جریان‌های حلقه  $i_1$  و  $i_2$  را در مدار شکل ۱۵-۸ پیدا کنید. می‌توانید فرض کنید که در  $t = 0^-$  هیچ انرژی در مدار ذخیره نشده است.



شکل ۱۵-۸

$$\text{جواب: } i_1 = e^{-2t/3} \cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + (\sqrt{2}/8)e^{-2t/3} \sin\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$$

$$i_2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-2t/3} \cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + (13\sqrt{2}/24)e^{-2t/3} \sin\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$$

## تحلیل مدار در حوزه s ۴۴۷

## مثال ۱۵-۴

ولتاژ  $v_x$  در مدار شکل ۱۵-۹ را با تکنیک تحلیل گره محاسبه کنید.

اولین گام ترسیم مدار در حوزه s است. می‌بینیم که خازن  $\frac{1}{2} F$  دارای ولتاژ اولیه  $2 V$  در  $t = 0^-$  است، پس لازم است یکی از دو مدل شکل ۱۵-۵ را برگزینیم. چون می‌خواهیم تحلیل گره‌ی انجام دهیم، شکل ۱۵-۵ (ب) مناسب‌تر است. مدار حاصل در شکل ۱۵-۱۰ دیده می‌شود. با مشخص بودن دو ولتاژ گره از سه ولتاژ، تنها یک معادله گره برای نوشتن داریم:

$$-1 = \frac{V_x - \frac{7}{s}}{\frac{2}{s}} + V_x + \frac{V_x - \frac{4}{s}}{4s}$$

به این ترتیب داریم:

$$V_x = \frac{10s^2 + 4}{s(2s^2 + 4s + 1)} = \frac{5s^2 + 2}{s\left(s + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(s + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

ولتاژ گره  $v_x$  از تبدیل لاپلاس معکوس به دست می‌آید:

$$v_x = [4 + 6.864e^{-1.707t} - 5.864e^{-0.2929t}]u(t)$$

یا

$$v_x = \left[4 - e^{-t} \left(9\sqrt{2} \sinh \frac{\sqrt{2}}{2}t - \cosh \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right]u(t)$$

آیا پاسخ شما صحیح است؟ یک راه آزمایش آن ارزیابی ولتاژ خازن در  $t = 0$  است، زیرا می‌دانیم که مقدار آن  $2 V$  است. بنابراین:

$$V_C = \frac{7}{s} - V_x = \frac{4s^2 + 28s + 3}{s(2s^2 + 4s + 1)}$$

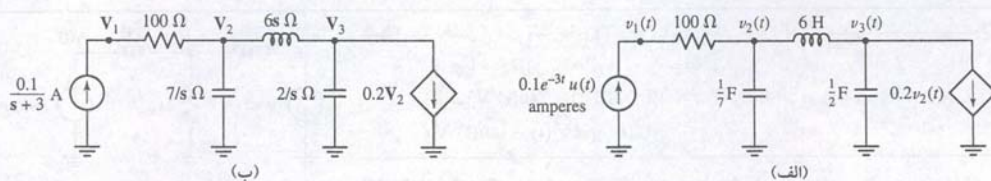
با ضرب  $V_C$  در  $s$  و استفاده از حد  $s \rightarrow \infty$  داریم:

$$v_C(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{4s^2 + 28s + 3}{2s^2 + 4s + 1} \right] = 2 V$$

۱۵-۴ از تحلیل گره برای محاسبه  $v_x(t)$  برای مدار شکل ۱۵-۱۱ استفاده کنید.

$$\text{جواب: } [5 + 5.657(e^{-1.707t} - e^{-0.2929t})]u(t)$$

ز تحلیل گره‌ی برای تعیین ولتاژهای  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  در مدار شکل ۱۵-۱۲ (الف) استفاده کنید. در  $t = 0^-$  هیچ انرژی ذخیره نشده است.



(ب)

(الف)

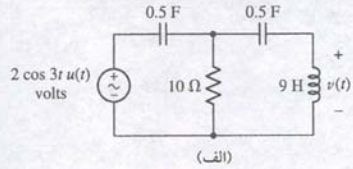
شکل ۱۵-۱۲ (الف) مدار چهارگره‌ی حاوی دو خازن و یک القاگر، هیچ‌یک از آن‌ها در  $t = 0^-$  انرژی ذخیره نکرده‌اند. (ب) مدار معادل در حوزه فرکانس.

مدار متشکل از سه عنصر ذخیره‌ساز انرژی جداگانه است که هیچ‌یک از آن‌ها در  $t = 0^-$  چیزی را ذخیره نکرده‌اند. پس هر یک را می‌توان با امپدانس متناظرش، چون شکل ۱۵-۱۲ (ب) جایگزین کرد. به حضور منبع وابسته‌ای که با ولتاژ گره‌ی  $v_2(t)$  می‌شود نیز توجه کنید.

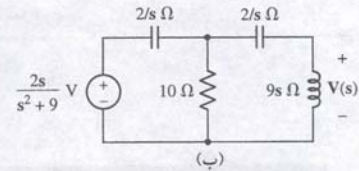


وجود بار رفتاری که با خازن‌ها و القاگرها داشتیم و آن‌ها را به صورت امپدانس در نظر گرفتیم، آزادیم تا هر یک از روش‌های تحلیل مدار در فصل‌های ۳، ۴ و ۵ را به معادلشان در حوزه s به کارگیریم. بنابراین تجمیع، تبدیل منبع، قضیه تونن و نورتن همگی در حوزه s قابل اعمالند.

## مثال ۱۵-۶



(الف)



(ب)

شکل ۱۵-۱۴ (الف) مداری که باید با تبدیل منبع ساده شود. (ب) نمایش حوزه فرکانس.

مدار شکل ۱۵-۱۴ (الف) را با روش تبدیل منبع ساده کنید و برای  $v(t)$  عبارتی به دست آورید. با توجه به این که هیچ جریان یا ولتاژ اولیه‌ای مشخص نشده و  $u(t)$  در منبع ولتاژ ضرب شده است، نتیجه می‌گیریم که هیچ انرژی اولیه‌ای در مدار ذخیره نشده است بنابراین مدار حوزه فرکانس را مطابق شکل ۱۵-۱۴ (ب) می‌کشیم.

استراژی ما این است که چندین تبدیل منبع متوالی انجام دهیم تا دو امپدانس  $2/s \Omega$  و مقاومت  $10 \Omega$  را با هم ترکیب کنیم. ما باید امپدانس  $9s \Omega$  را رها کنیم زیرا ولتاژ مورد نظر  $V(s)$  در دو سر آن ظاهر می‌گردد. اکنون ممکن است منبع ولتاژ و امپدانس سمت چپ  $2/s \Omega$  را به یک منبع موازی با امپدانس  $2/s \Omega$  تبدیل کنیم. یعنی:

$$I(s) = \left( \frac{2s}{s^2 + 9} \right) \left( \frac{s}{2} \right) = \frac{s^2}{s^2 + 9} A$$

مطابق با شکل ۱۵-۱۵ (الف) پس از این تبدیل، امپدانس زیر را در برابر منبع جریان خواهیم داشت:

$$Z_1 \equiv (2/s) \parallel 10 = 20/(10s + 2) \Omega$$

با اجرای یک تبدیل منبع دیگر منبع ولتاژ  $V_2(s)$  را چنین داریم:

$$V_2(s) = \left( \frac{s^2}{s^2 + 9} \right) \left( \frac{20}{10s + 2} \right)$$

این منبع ولتاژ با  $Z_1$  و امپدانس باقیمانده  $2/s$  سری است. با ترکیب  $Z_1$  و  $2/s$  امپدانس جدید  $Z_2$  چنین است:

$$Z_2 = \frac{20}{10s + 2} + \frac{2}{s} = \frac{40s + 4}{s(10s + 2)} \Omega$$

مدار حاصل در شکل ۱۵-۱۵ (ب) دیده می‌شود. در این مقطع، آماده‌ایم تا عبارتی را با یک تقسیم ولتاژ ساده برای ولتاژ  $V(s)$  به دست آوریم:

$$V(s) = \left( \frac{s^2}{s^2 + 9} \right) \left( \frac{20}{10s + 2} \right) \frac{9s}{9s + \left[ \frac{40s + 4}{s(10s + 2)} \right]}$$

$$= \frac{180s^4}{(s^2 + 9)(90s^3 + 18s^2 + 40s + 4)}$$

بر مخرج کسر هر دو جمله ریشه مختلط دارند. به کمک متلب و بسط مخرج برای تعیین اقیمانده‌ها داریم:

```
EDU» d1 = 's^2 + 9';
EDU» d2 = '90*s^3 + 18*s^2 + 40*s + 4';
EDU» d = symmul(d1, d2);
EDU» denominator = expand(d);
EDU» den = sym2poly(denominator);
EDU» num = [180 0 0 0 0];
EDU» [r p y] = residue(num,den);
```

می‌بینیم که:

$$V(s) = \frac{1.047 + j0.0716}{s - j3} + \frac{1.047 - j0.0716}{s + j3} - \frac{0.0471 - j0.0191}{s + 0.04885 - j0.6573} - \frac{0.0471 + j0.0191}{s + 0.04885 + j0.6573} + \frac{5.590 \times 10^{-5}}{s + 0.1023}$$

توجه کنید که هر جمله با یک قطب مختلط دارای مختلط مزدوجی نیز هست. در سیستم‌های فیزیکی همواره قطب‌ها به صورت جفت هستند.

با شروع از گره ۱ می‌توان معادلات زیر را نوشت:

$$\frac{0.1}{s + 3} = \frac{V_1 - V_2}{100}$$

یا

$$\frac{10}{s + 3} = V_1 - V_2 \quad (\text{گره ۱})$$

و در گره ۲ داریم:

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{100} + \frac{V_2}{7/s} + \frac{V_2 - V_3}{6s}$$

یا

$$-42sV_1 + (600s^2 + 42s + 700)V_2 - 700V_3 = 0 \quad (\text{در گره ۲})$$

و بالاخره در گره ۳ داریم:

$$-0.2V_2 = \frac{V_3 - V_2}{6s} + \frac{V_3}{2/s}$$

یا

$$(1.2s - 1)V_2 + (3s^2 + 1)V_3 = 0$$

با حل این دسته معادلات برای ولتاژ گره‌ها داریم:

$$V_1 = 3 \frac{100s^3 + 7s^2 + 150s + 49}{(s + 3)(30s^3 + 45s - 14)}$$

$$V_2 = 7 \frac{3s^2 + 1}{(s + 3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

$$V_3 = -1.4 \frac{6s - 5}{(s + 3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

تنها گام باقیمانده گرفتن عکس تبدیل لاپلاس هر ولتاژ است به نحوی که برای  $t > 0$ :

$$v_1(t) = 9.789e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t} + 0.1488e^{0.1471t} \cos(1.251t) + 0.05172e^{0.1471t} \sin(1.251t) V$$

$$v_2(t) = -0.2105e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t} + 0.1488e^{0.1471t} \cos(1.251t) + 0.05172e^{0.1471t} \sin(1.251t) V$$

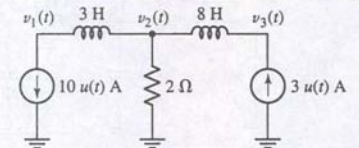
$$v_3(t) = -0.03459e^{-3t} + 0.06631e^{-0.2941t} - 0.03172e^{0.1471t} \cos(1.251t) - 0.06362e^{0.1471t} \sin(1.251t) V$$

توجه دارید که پاسخ به صورت نمایی افزایش می‌یابد و دلیل آن وجود منبع جریان وابسته است در واقع مدار در حال از کنترل خارج شدن است و بالاخره در زمانی قطعه‌ای خواهد سوخت، یا خواهد ترکیب و یا به نوعی از کار خواهد افتاد. هرچند تحلیل چنین مداری مسلماً کار زیادی می‌برد. مزایای تکنیک‌های حوزه s به محض اجرای تحلیل در حوزه زمان بسیار واضح خواهند بود.

## تمرین

۱۵-۵ با تحلیل گرهی، ولتاژهای  $v_1$ ،  $v_2$  و  $v_3$  را در مدار شکل ۱۵-۱۳ معین کنید. فرض شود در  $t = 0$  هیچ انرژی در القاگرها ذخیره نشده است.

$$\text{جواب: } v_2(t) = -14u(t) V, v_1(t) = -30\delta(t) - 14u(t) V, v_3(t) = 24\delta(t) - 14u(t) V$$

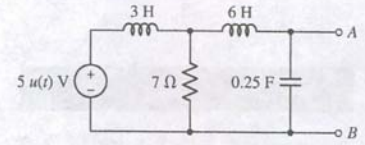


شکل ۱۵-۱۳

## ۱۵-۳ تکنیک‌های دیگر در تحلیل مدار

بسته به هدف مشخص شده در تحلیل یک مدار خاص، اغلب می‌بینیم که با انتخاب مناسب تکنیک می‌توان تحلیل را ساده کرد. مثلاً به ندرت مایل به اعمال اصل تجمیع به مداری هستید که در آن ۲۱۵ منبع مستقل وجود داشته باشد زیرا باید ۲۱۵ مدار جداگانه را تحلیل نمود! با ایر





شکل ۱۵-۱۶

با گرفتن عکس تبدیل هر جمله و نوشتن  $j0.0716 + 1.047$  به صورت  $j^{3.912} 1.049$  و  $j0.0191 + 0.0471$  به صورت  $j^{157.9} 0.05083$  داریم:

$$v(t) = 1.049e^{j^{3.912} 3t} u(t) + 1.049e^{-j^{3.912} 3t} u(t) + 0.05083e^{-j^{157.9} t} e^{-0.04885t} e^{-j0.6573t} u(t) + 0.05083e^{+j^{157.9} t} e^{-0.04885t} e^{+j0.6573t} u(t) + 5.590 \times 10^{-5} e^{-0.1023t} u(t)$$

با تبدیل نماهای مختلط به سینوس، عبارتی ساده‌تر برای ولتاژ حاصل می‌شود:

$$v(t) = [5.590 \times 10^{-5} e^{-0.1023t} + 2.098 \cos(3t + 3.912^\circ) + 0.1017 e^{-0.04885t} \cos(0.6573t + 157.9^\circ)] u(t) \text{ V}$$

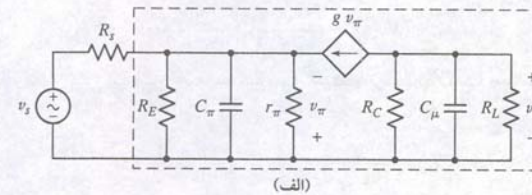
## تمرین

۱۵-۶ باروش تبدیل منبع، مدار شکل ۱۵-۱۶ را به منبع جریانی در حوزه s و موازی با یک امپدانس تبدیل کنید.

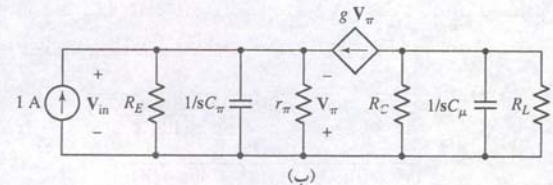
جواب:  $Z_s = \frac{72s^2 + 252s}{18s^3 + 21s^2 + 54s + 28} \Omega$  و  $I_s = \frac{35}{s^2(18s + 163)} + A$

## مثال ۱۵-۷

معادل تونن حوزه فرکانس را برای یخس مشخص شده در شکل ۱۵-۱۷ (الف) به دست آورید.



(الف)



(ب)

مایلم معادل تونن مدار متصل به وسیله را پیدا کنیم. این کمیت را اغلب **امپدانس ورودی** مدار تقویت‌کننده می‌خوانند. پس از تبدیل مدار به معادل حوزه فرکانس، وسیله ورودی  $V_s$  و  $R_s$  را با یک منبع تست 1A طبق شکل ۱۵-۱۷ (ب) جایگزین می‌کنیم. پس امپدانس ورودی  $Z_{in}$  برابر است با:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{1}$$

می‌باشد که در واقع همان  $V_{in}$  است. برای این ولتاژ باید عبارتی برحسب منبع 1A، مقاومت‌ها و خازن‌ها و یا پارامترهای منبع وابسته  $g_m$  بیابیم. با نوشتن یک معادله گره در ورودی داریم:

$$1 + g_m V_{\pi} = \frac{V_{in}}{Z_{eq}}$$

که

$$Z_{eq} = R_E \parallel \frac{1}{sC_{\pi}} \parallel r_{\pi} = \frac{R_{E\pi}}{r_{\pi} + R_E + sR_{E\pi}C_{\pi}}$$

چون  $V_{\pi} = -V_{in}$  است داریم:

$$Z_{in} = V_{in} = \frac{R_{E\pi}}{r_{\pi} + R_E + sR_{E\pi}C_{\pi} + g_m R_{E\pi}} \Omega$$

## تمرین

۱۵-۷ در حوزه s، معادل نورتن متصل به مقاومت  $1\Omega$  در شکل ۱۵-۱۸ را به دست آورید.

جواب:  $Z_{th} = 4/(s + 1) \Omega$  و  $I_{sc} = 3(s + 1)/4s A$

## ۱۵-۸ قطب‌ها، صفرها و توابع تبدیل

در این بخش ما ابتدا واژه‌های به کاررفته در فصل ۱۴ را که قطب‌ها، صفرها و توابع تبدیل بودند، بررسی می‌کنیم.

مدار ساده شکل ۱۵-۱۹ (الف) را در نظر بگیرید. معادل حوزه s در شکل ۱۵-۱۹ (ب) ملاحظه می‌شود. تحلیل گرهی منجر به رابطه زیر می‌گردد:

$$0 = \frac{V_{out}}{1/sC} + \frac{V_{out} - V_{in}}{R}$$

با مرتب کردن و حل برای  $V_{out}$  داریم:

$$V_{out} = \frac{V_{in}}{1 + sRC}$$

یا

$$H(s) \equiv \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (۷)$$

که  $H(s)$  تابع تبدیل است و به صورت نسبت خروجی به ورودی تعریف می‌شود. به راحتی می‌توانیم یک جریان را به عنوان ورودی یا خروجی تعریف کنیم و برای این مدار تابع دیگری به دست آوریم. شکل مدارها معمولاً از چپ به راست خوانده می‌شوند و بنابراین طراحان حتی الامکان غلب ورودی را در سمت چپ شکل و پایانه‌های خروجی را در سمت راست قرار می‌دهند.

مفهوم تابع تبدیل از هر دو دید تحلیل و دیگر زمینه‌های مهندسی، بسیار مهم است. دو دلیل برای این اهمیت وجود دارد. اول این‌که به محض دانستن تابع تبدیل یک مدار، بلافاصله می‌توان خروجی مربوط به هر سیگنال ورودی را دانست. تنها کافی است ورودی را در  $H(s)$  ضرب کنیم و عکس تبدیل لاپلاس را به دست آوریم. دوم این‌که ساختار تابع تبدیل اطلاعات زیادی درباره رفتاری که می‌توان از یک مدار خاص انتظار داشت، را دارد.

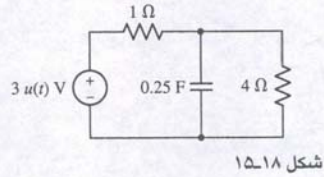
در فصل ۱۴ دیدیم که برای ارزیابی ثبات یک سیستم لازم است تا قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل  $H(s)$  را بدانیم. می‌توان معادله (۷) را به صورت زیر نوشت:

$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \quad (۸)$$

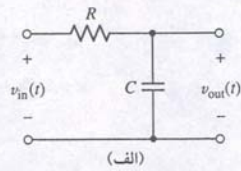
اندازه این تابع به سمت صفر میل می‌کند. پس گوئیم  $H(s)$  دارای صفر در  $s = \infty$  است. در  $s = -\frac{1}{RC}$  تابع به سمت بی‌نهایت می‌رود و بنابراین گوئیم تابع  $H(s)$  دارای قطبی در  $s = -\frac{1}{RC}$  می‌باشد. این فرکانس‌ها را **فرکانس‌های بحرانی** گوئید و آشنایی زود هنگام با آن‌ها ساخت منحنی‌های پاسخ مطرح در بخش ۱۵-۷ را ساده می‌کند.

## ۱۵-۹ کانولوشن

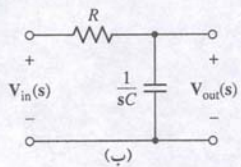
کنیک‌های حوزه s ارائه شده تاکنون در تعیین پاسخ جریان ولتاژ یک مدار خاص مفید بودند. این وجود، در عمل اغلب با مدارهایی مواجه هستیم که می‌توان منابع اختیاری به آن متصل کرد و هر بار لازم است خروجی جدید را محاسبه کنیم. برای نیل به این هدف از تابع تبدیلی به **م تابع سیستم** مدار استفاده می‌کنیم. به زودی خواهیم دید که این تابع سیستم تبدیل لاپلاس اسخ ضربه واحد مدار است.



شکل ۱۵-۱۸



(الف)



(ب)

شکل ۱۵-۱۹ (الف) یک مدار ساده خازن - مقاومت با نکر ولتاژ ورودی و خروجی. (ب) مدار معادل حوزه s.

منگام محاسبه مقدار تابع، معمولاً نقاط  $\infty +$  و  $\infty -$  نقاط روی هم تصور می‌شوند. با این وجود لزومی شاری زاویه فاز مقادیر خیلی بزرگ و خیلی کوچک با هم برابر باشند.

شکل ۱۵-۱۷ (الف) مدار معادلی برای تقویت‌کننده ترانزیستوری بیس مشترک. (ب) مدار معادل حوزه فرکانس با یک منبع تست 1A که جایگزین منبع ورودی  $V_s$  و  $R_s$  شده است.

این مدار خاص به مدل "هیبرید  $\pi$ " یک مدار ترانزیستوری به نام تقویت‌کننده بیس مشترک معروف است. دو خازن  $C_{\pi}$  و  $C_{\mu}$  ظرفیت داخلی ترانزیستور را نشان می‌دهند و معمولاً در حدود چند PF هستند. مقاومت  $R_L$  معادل تونن وسیله بیرونی است که ممکن است یک بلندگو یا حتی یک لیزر نیمه هادی باشد. منبع ولتاژ  $V_s$  به همراه  $R_s$  معادل تونن وسیله ورودی‌اند که ممکن است یک میکروفن، یک مقاومت حساس به نور و حتی یک آنتن رادیو باشد.



اکنون سؤالی که مایل به پاسخ آن هستیم این است که اگر فرم  $x(t)$  را بدانیم، آنگاه  $y(t)$  را چگونه می‌توان دانست؟ برای پاسخ به این سوال، لازم است اطلاعاتی راجع به  $N$  داشته باشیم. بنابراین، تصور کنید اطلاعات ما از  $N$  شامل پاسخ مربوط به منبع تحریک ضربه واحد  $\delta(t)$  باشد، یعنی فرض می‌شود  $h(t)$  یعنی پاسخ حاصل از ورودی ضربه به عنوان تابع تحریک را در  $t = 0$  می‌دانیم، شکل ۱۵-۲۰ (ب). تابع  $h(t)$  را معمولاً تابع پاسخ ضربه واحد یا به‌طور خلاصه **پاسخ ضربه** می‌خوانند. پاسخ ضربه یک مدار مشخصه بسیار مهمی از آن به شمار می‌آید.

بر اساس دانسته‌های خود از تبدیل لاپلاس می‌توانیم این مطلب را از زاویه متفاوتی بگیریم. با تبدیل  $x(t)$  به  $X(s)$  و  $y(t)$  به  $Y(s)$  تابع تبدیل سیستم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

اگر  $x(t) = \delta(t)$  باشد طبق جدول (۱۴-۱) داریم  $X(s) = 1$ . بنابراین  $H(s) = Y(s)$  بوده و در این جا  $y(t) = h(t)$  است.

به جای اعمال پالس ضربه واحد در  $t = 0$  بگذارید تصور کنیم که در  $t = \lambda$  به مدار اعمال شده است. خواهیم دید که فقط خروجی با تأخیری ظاهر خواهد شد. بنابراین وقتی ورودی  $\delta(t - \lambda)$  است، شکل ۱۵-۲۰ (ج)، خروجی  $h(t - \lambda)$  خواهد شد. پس از آن فرض کنید که تابع ضربه مقداری به جز واحد داشته باشد. در حالت خاص بگذارید این مقدار در  $t = \lambda$  برابر  $x(t)$  باشد. مقدار  $x(\lambda)$  عددی ثابت است. می‌دانیم که ضرب یک تابع تحریک یک مدار خطی در یک عدد ثابت، تنها سبب می‌شود که پاسخ مدار هم به همان نسبت تغییر کند. پس اگر ورودی در  $\delta(t - \lambda)$  تغییر کند، آنگاه پاسخ  $x(\lambda)h(t - \lambda)$  خواهد شد (شکل ۱۵-۲۰ (د)). اکنون ورودی اخیر را روی همه لمعای ممکن جمع بسته و حاصل جمع را به عنوان تابع تحریک روی شبکه اعمال می‌کنیم. خاصیت خطی بودن بیان می‌دارد که خروجی هم باید جمع خروجی‌های ناشی از ورودی‌های فوق باشد. با تأمل می‌توان گفت که انتگرال ورودی، انتگرال خروجی را طبق شکل ۱۵-۲۰ (ه) تولید می‌نماید. ولی این ورودی اخیر چیست؟ با توجه به خاصیت غربالی تابع ضربه<sup>\*</sup>، می‌توان نشان داد که این ورودی همان  $x(t)$  یعنی ورودی اصلی مدار است. شکل ۱۵-۲۰ (ه) را می‌توان به شکل ۱۵-۲۰ (و) نشان داد.

### انتگرال کانولوشن

اگر ورودی به سیستم  $N$ ، تابع تحریک  $x(t)$  باشد، می‌دانیم که خروجی باید تابع  $y(t)$  در شکل ۱۵-۲۰ (الف) باشد. بنابراین از رابطه شکل ۱۵-۲۰ (و) نتیجه می‌گیریم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda \quad (۹)$$

که  $h(t)$  پاسخ ضربه  $N$  است. این رابطه مهم در همه جا به نام **انتگرال کانولوشن** شناخته می‌شود. بیان معادله مذکور چنین است که خروجی مدار برابر با کانولوشن ورودی و **پاسخ ضربه** است. این انتگرال اغلب به صورت ساده زیر نوشته می‌شود:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

معادله (۹) گاهی متفاوت ولی به فرم معادله ظاهر می‌شود. اگر  $z = t - \lambda$  فرض شود آن‌گاه  $dz = -d\lambda$  شده و عبارت  $y(t)$  چنین است:

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} -x(t - z)h(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - z)h(z)dz$$

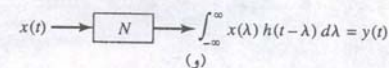
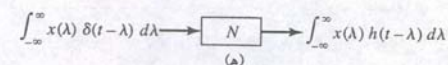
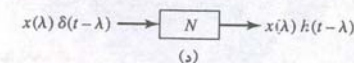
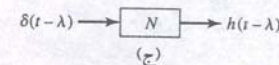
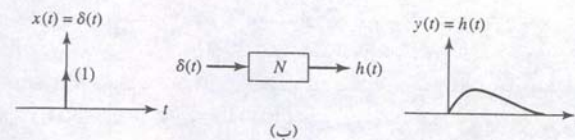
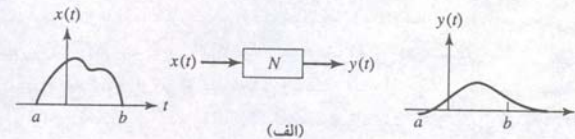
تحلیل می‌تواند در حوزه زمان یا حوزه فرکانس باشد، گرچه کار در حوزه فرکانس بهتر به نظر می‌رسد. در این صورت راه حل چهار مرحله خواهد داشت:

۱. تعیین تابع سیستم مدار (اگر از قبل معین نیست).
۲. تهیه تبدیل لاپلاس تابع تحریک مورد استفاده.
۳. ضرب این تبدیل و تابع سیستم.
۴. اجرای عمل عکس تبدیل روی حاصل ضرب برای یافتن خروجی.

به این ترتیب بعضی از عبارات انتگرالی پیچیده به توابع ساده‌ای از  $S$  بدل می‌شوند و عملیات انتگرالی و مشتقی با اعمال ساده ضرب و تقسیم جایگزین می‌شود. با در نظر گرفتن این نکات، بگذارید به سراغ پاسخ ضربه واحد یک مدار برویم و رابطه آن را با تابع سیستم مشخص کنیم. پس از آن چند مسئله خاص را تحلیل خواهیم کرد.

### پاسخ ضربه

شبکه الکتریکی خطی  $N$  را در نظر بگیرید که در آن هیچ انرژی اولیه‌ای ذخیره نشده و یک تابع تحریک  $x(t)$  به آن متصل شده است. در نقطه‌ای از این مدار، پاسخ تابع  $y(t)$  وجود دارد. این مجموعه را به صورت نمودار بلوکی همراه با توابع زمانی تولیدی در شکل ۱۵-۲۰ (الف) نشان داده‌ایم. تابع تحریک فقط در فواصل  $a < t < b$  وجود دارد. پس  $y(t)$  هم در  $t > a$  وجود خواهد داشت.



شکل ۱۵-۲۰ تکامل تفهیمی انتگرال کانولوشن.

\* خاصیت غربالی که در بخش ۱۴-۵ تعریف شد

می‌گوید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$

به علامت \* در رابطه مقابل توجه کنید و آن را با

ضرب اشتباه نگیرید.



بافتن  $v_o(t)$  به قدر کافی ساده است ولی وجود توابع پله‌ای متعدد محاسبه آن را مشکل می‌کند. برای تشخیص قسمت‌هایی از فاصله انتگرال‌گیری که عبارت زیر انتگرال در آن صفر است، وقت زیادی لازم است.

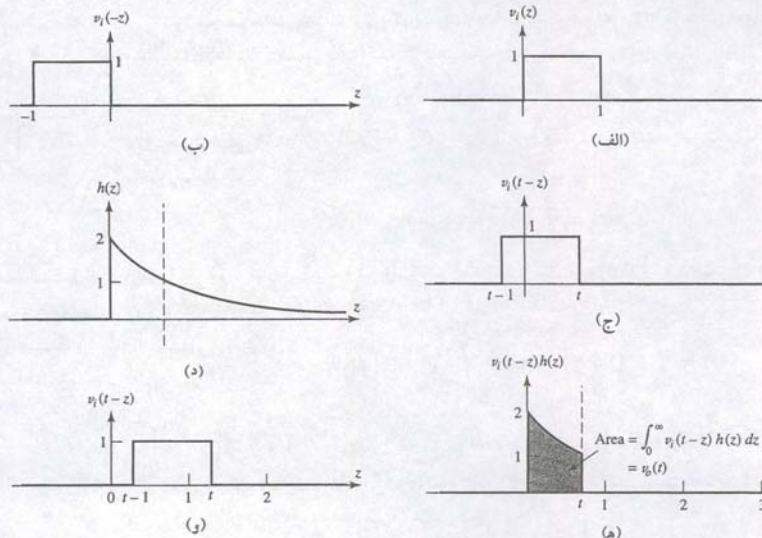
اکنون اجازه بدهید تا برای درک انتگرال کانولوشن از امکانات گرافیکی کمک بگیریم. کار را با رسم چند محور  $z$  در کنار هم طبق شکل ۱۵.۲۱ شروع می‌کنیم. شکل  $v_i(t)$  را می‌دانیم، پس شکل  $v_i(z)$  را نیز می‌دانیم (شکل ۱۵.۲۱ الف).  $v_i(-z)$  چیزی نیست جز  $v_i(z)$  که نسبت به محور عمودی معکوس شده است (شکل ۱۵.۲۱ ب). اکنون  $v_i(t-z)$  را نشان می‌دهیم. این تابع همان  $v_i(-z)$  است که به اندازه  $z = t$  به طرف راست جابه‌جا شده است (شکل ۱۵.۲۱ ج). به این ترتیب پاسخ ضربه  $h(z) = 2e^{-z}u(z)$  ترسیم می‌شود (شکل ۱۵.۲۱ د).

در گام بعد دو تابع  $v_i(t-z)$  و  $h(z)$  را در هم ضرب می‌کنیم (شکل ۱۵.۲۱ ه). ما به دنبال قدراری برای خروجی  $v_o(t)$  هستیم، که با سطح زیر منحنی حاصل ضرب داده شده است ناحیه هاشور زده شده در شکل.

اجازه بدهید ابتدا  $t < 0$  را در نظر بگیریم. در این حالت همپوشی بین  $v_i(t-z)$  و  $h(z)$  وجود ندارد، پس  $v_o = 0$ . با افزایش  $t$  ما پالس را در شکل ۱۵.۲۱ ج به راست می‌لغزانیم تا با  $h(z)$  در  $t > 0$  همپوش شود. ناحیه زیر منحنی مربوط به شکل ۱۵.۲۱ و) با افزایش  $t$  شروع به زیاد شدن می‌کند تا به  $t = 1$  برسیم. با افزایش  $t$  به بیش از این مقدار، یک شکاف بین  $z = 0$  لبه جلویی پالس طبق شکل ۱۵.۲۱ ه) به وجود می‌آید. در نتیجه همپوشی با  $h(z)$  کاهش می‌یابد. به بیان دیگر برای مقادیری از  $t$  که بین 0 و 1 است باید از  $z = 0$  تا  $z = t$  انتگرال بگیریم. برای مقادیری از  $t$  که از واحد تجاوز کند، محدوده انتگرال‌گیری  $t-1 < z < t$  است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t 2e^{-z} dz = 2(1 - e^{-t}) & 0 \leq t \leq 1 \\ \int_{t-1}^t 2e^{-z} dz = 2(e - 1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

بن تابع در شکل ۱۵.۲۲ در برابر  $t$  ترسیم شده و به این ترتیب حل ماکامل شده است.



شکل ۱۵.۲۱ گام‌های ترسیمی محاسبه انتگرال کانولوشن.

و چون سمبل به کار رفته برای انتگرال تفاوتی نمی‌کند می‌توان معادله (۹) را به صورت اصلاح شده زیر نوشت:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z)h(t-z) dz \quad (10)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z) dz$$

### کانولوشن و سیستم‌های قابل ساخت

نتیجه‌ای که در معادله (۱۰) حاصل شد بسیار کلی است و به هر سیستم خطی قابل اعمال است. با این وجود ما به سیستم‌های فیزیکی قابل ساخت یا تشخیص‌پذیر علاقه‌مندیم، یعنی آن‌هایی که وجود دارند یا می‌توانند وجود داشته باشند. این سیستم‌ها خاصیت اصلاح مختصر انتگرال کانولوشن را دارند. یعنی پاسخ سیستم نمی‌تواند قبل از اعمال تابع تحریک، آغاز شود. به عبارت دیگر  $h(t)$  که پاسخ سیستم به تابع ضربه در  $t = 0$  است نمی‌تواند در  $t < 0$  وجود داشته باشد. نتیجه می‌گیریم که عبارت زیر انتگرال در  $z < t$  برابر صفر است. در اولین انتگرال عبارت زیر انتگرال به ازای مقدار منفی  $(t-z)$ ، یعنی  $t > z$  صفر است. بنابراین برای سیستم‌های قابل ساخت، حدود انتگرال‌های کانولوشن چنین است:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t x(z)h(t-z) dz \quad (11)$$

$$= \int_0^{\infty} x(t-z)h(z) dz$$

معادلات (۱۰) و (۱۱) هر دو معتبرند ولی دومی حالت خاصی از اولی است و برای سیستم‌های خطی قابل ساخت مناسب‌تر است.

### روش گرافیکی کانولوشن

قبل از این که صحبت از پاسخ ضربه بکنیم بگذارید مثالی بیاوریم و ببینیم چگونه انتگرال کانولوشن محاسبه می‌شود. گرچه عبارت خود به اندازه کافی ساده است ولی محاسبه آن گاهی اوقات با دردسر همراه می‌باشد، خصوصاً تعیین مقادیر حدود انتگرال‌گیری مشمول این مشکل است.

تصور کنید که ورودی یک پالس ولتاژ مربعی با شروع در  $t = 0$  باشد که با دامنه 1V برای دوره 1 ثانیه‌ای ادامه دارد:

$$x(t) = v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

همچنین فرض کنید که این پالس به مداری که پاسخ ضربه‌اش فرم نمایی زیر را دارد اعمال شده باشد:

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

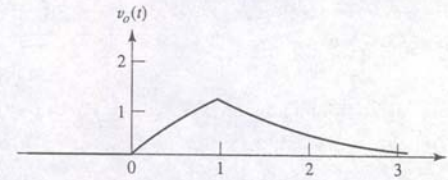
می‌خواهیم ولتاژ خروجی  $v_o(t)$  را پیدا کنیم. پاسخ را می‌توان بلافاصله به صورت انتگرالی نوشت:

$$y(t) = v_o(t) = v_i(t) * h(t) = \int_0^{\infty} v_i(t-z)h(z) dz$$

$$= \int_0^{\infty} [u(t-z) - u(t-z-1)][2e^{-z}u(z)] dz$$

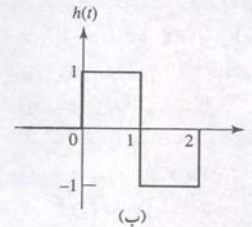


شکل ۱۵-۲۲ تابع خروجی  $V_0$  حاصل از کانولوشن گرافیکی.



مثال ۱۵-۸

تابع پله واحد  $x(t) = u(t)$  را به ورودی سیستمی که پاسخ ضربه‌اش  $y(t) = x(t) * h(t)$  می‌باشد اعمال کنید و خروجی متناظر  $h(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$  را به دست آورید.



شکل ۱۵-۲۳ شکل‌های (الف) سیگنال ورودی  $x(t) = u(t)$  و (ب) پاسخ ضربه واحد  $h(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$  برای یک سیستم خطی.

اولین قدم رسم  $x(t)$  و  $h(t)$  است (شکل ۱۵-۲۳). به طور دلخواه ابتدا انتگرال معادله (۱۱) را محاسبه می‌نماییم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(z)h(t-z) dz$$

برای انتخاب صحیح حدود انتگرال‌گیری شکل‌های ۱۵-۲۴ را بررسی می‌کنیم. این شکل‌ها عبارتند از ورودی  $x(z)$  بر حسب  $z$ ، پاسخ ضربه  $h(z)$ ، منحنی  $h(-z)$  که همان قرینه  $i(z)$  نسبت به محور عمودی است و  $h(t-z)$  که از جابه‌جایی  $h(-z)$  به اندازه  $t$  به سمت راست حاصل شده است. برای این شکل‌ها  $t$  را در محدوده  $0 < t < 1$  اختیار می‌نماییم.

اکنون تجسم حاصل ضرب اولین گراف،  $x(z)$  و آخرین گراف  $h(t-z)$  در محدوده‌های مختلف  $t$  کار ساده‌ای است. وقتی کمتر از صفر است، همپوشانی وجود ندارد و

$$y(t) = 0 \quad t < 0$$

برای حالت شکل ۱۵-۲۴ (د)، منحنی‌ها از  $z = 0$  تا  $z = t$  همپوشانی داشته و هر یک مقدار واحد را دارند. پس:

$$y(t) = \int_0^t (1 \times 1) dz = t \quad 0 < t < 1$$

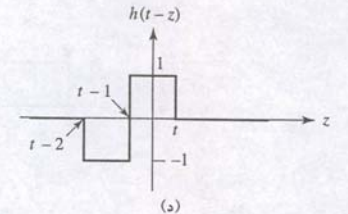
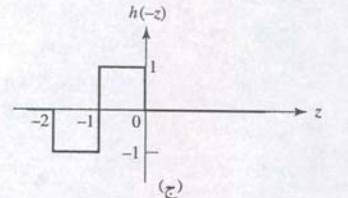
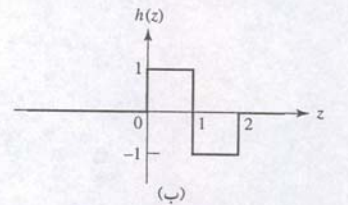
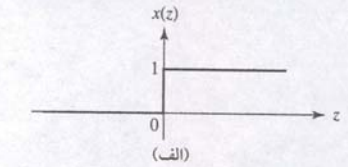
وقتی  $t$  بین ۱ و ۲ قرار می‌گیرد،  $h(t-z)$  آنقدر به سمت راست می‌رود که قسمت منفی آن‌ها روی  $x(z)$  می‌افتد. قسمت منفی از  $z = 0$  تا  $z = t-1$  امتداد دارد. پس

$$y(t) = \int_0^{t-1} [1 \times (-1)] dz + \int_{t-1}^t (1 \times 1) dz = -z \Big|_{z=0}^{z=t-1} + z \Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

بنابراین:

$$y(t) = -(t-1) + t - (t-1) = 2-t, \quad 1 < t < 2$$

بالاخره وقتی  $t$  بزرگ‌تر از ۲ می‌شود، تمام تابع  $h(t-z)$  در سمت راست  $z = 0$  قرار می‌گیرد. تمام آن در تابع پله واحد ضرب می‌شود و



شکل ۱۵-۲۴ (الف) سیگنال ورودی و (ب) پاسخ ضربه بر حسب  $z$  رسم شده است. (ج)  $h(-z)$  از قرینه  $h(z)$  نسبت به محور عمودی به دست آمده است و (د)  $h(t-z)$  از جابه‌جایی  $h(-z)$  به اندازه  $t$  واحد به راست حاصل شده است.

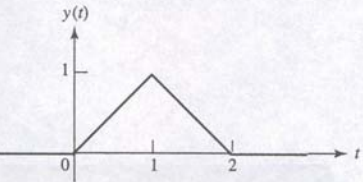
$$y(t) = \int_{t-2}^{t-1} [1 \times (-1)] dz + \int_{t-1}^t (1 \times 1) dz = -z \Big|_{z=t-2}^{z=t-1} + z \Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

یا

$$y(t) = -(t-1) + t - (t-1) = 0, \quad t > 2$$

چهار بخش فوق برای  $y(t)$  به صورت یک منحنی پیوسته در شکل ۱۵-۲۵ جمع‌آوری شده است.

## تمرین



شکل ۱۵-۲۵ نتیجه کانولوشن  $x(t)$  و  $h(t)$  در شکل ۱۵-۲۳.

۱۵-۸ مثال ۱۵-۸ را با انتگرال دوم معادله (۱۱) تکرار کنید.

۱۵-۹ پاسخ ضربه یک شبکه با  $h(t) = 5u(t-1)$  داده شده است. اگر سیگنال ورودی  $x(t) = 2[u(t) - u(t-3)]$  به مدار اعمال شده باشد، خروجی  $y(t)$  را در زمان‌های  $t$  برابر با (الف) ۰.۵، (ب) ۰.۵، (ج) ۲.۵ و (د) ۳.۵ به دست آورید.

جواب ۱۵-۹: ۰، ۰، ۱۵، ۲۵.

## کانولوشن و تبدیل لاپلاس

کانولوشن کاربردهایی برای تحلیل مدارهای خطی دارد، که از آن جمله پردازش تصویر، مخابرات و تئوری نیمه هادی‌ها است. اغلب بهتر است ذهنیتی گرافیکی از فرآیند اصلی داشته باشیم، حتی اگر عبارات انتگرالی معادلات (۱۰) و (۱۱) همیشه بهترین مسیر حل نباشند. یک روش قوی دیگر از خواص تبدیل لاپلاس استفاده می‌کند و لذا در مقدمه‌ای بر کانولوشن در این فصل آمده است.

بگذارید  $F_1(s)$  و  $F_2(s)$  به ترتیب تبدیل‌های لاپلاس  $f_1(t)$  و  $f_2(t)$  باشند. اینک می‌خواهیم تبدیل لاپلاس  $f_1(t) * f_2(t)$  را بیابیم:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) d\lambda\right\}$$

یکی از این توابع زمانی قاعداً تابع تحریک اعمال شده به پایانه‌های ورودی یک مدار خطی و دیگری پاسخ ضربه آن مدار است.

چون اکنون با توابع زمانی که قبل از  $t = 0$  وجود ندارند سروکار داریم (تعریف تبدیل لاپلاس ما را به این فرض و ما می‌دارد) حد پایین می‌تواند به ۰ تبدیل شود، آن‌گاه با به کارگیری تبدیل لاپلاس داریم:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[ \int_0^{\infty} f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) d\lambda \right] dt$$

چون  $e^{-st}$  وابسته نیست می‌توانیم این فاکتور را به داخل انتگرال دوم ببریم. اگر این کار را انجام دهیم و انتگرال دیگر را به همان شکل حفظ کنیم داریم:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} e^{-s\lambda} f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) dt \right] d\lambda$$

با ادامه شگردهای مشابه، می‌بینیم که  $f_1(\lambda)$  به  $t$  وابسته نیست و لذا می‌توان آن را به خارج انتگرال برد:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{\infty} f_1(\lambda) \left[ \int_0^{\infty} e^{-s\lambda} f_2(t-\lambda) dt \right] d\lambda$$

آن‌گاه جایگزینی  $\lambda = t - x$  را در انتگرال داخل گروه انجام می‌دهیم (که در آن  $\lambda$  یک ثابت است):



## نوضیحاتی در مورد توابع تبدیل

نمان طور که قبلاً چندین بار متذکر شدیم، خروجی  $v_o(t)$  نقطه‌ای در یک مدار خطی را می‌توان با کانولوشن ورودی  $v_i(t)$  پاسخ ضربه واحد  $h(t)$  به دست آورد. با این وجود باید به خاطر بسپاریم که پاسخ ضربه از کاربرد یک ضربه واحد در  $t = 0$  و صفر کردن همه مقادیر ولیه به دست می‌آید. تحت این شرایط تبدیل لاپلاس  $v_o(t)$  برابر است با:

$$\mathcal{L}\{v_o(t)\} = V_o(s) = \mathcal{L}\{v_i(t) * h(t)\} = V_i(s)[\mathcal{L}\{h(t)\}]$$

تأیراین،  $V_o(s)/V_i(s)$  برابر است با تبدیل پاسخ ضربه، که با  $\mathbf{H}(s)$  نشان داده می‌شود:

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \mathbf{H}(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad (۱۳)$$

معادله (۱۳) می‌بینیم که پاسخ ضربه و تابع تبدیل یک جفت تبدیل لاپلاس را موجود می‌آورند:

$$h(t) \Leftrightarrow \mathbf{H}(s)$$

رابطه فوق واقعیت مهمی را بیان می‌کند و ما بعداً در تحلیل رفتار سیستم‌هایی که قبلاً ما را چار مشکل می‌کردند از آن استفاده خواهیم کرد.

اسخ ضربه مدار شکل ۱۵-۲۶ (الف) را معین کرده و آن را برای محاسبه پاسخ واداشته  $v_o(t)$  به کار ببرید. اگر  $V_{in}(t) = 6e^{-t}u(t)$  V.

ابتدا یک ولتاژ ضربه  $\delta(t)$  را به مدار، طبق شکل ۱۵-۲۶ (ب) وصل می‌کنیم. گرچه می‌توانیم در هر حوزه زمان  $h(t)$  یا حوزه  $\mathbf{H}(s)$  کار کنیم، ولی دومی را انتخاب می‌کنیم، پس دوباره مایش شکل ۱۵-۲۶ (ب) را در شکل ۱۵-۲۷ می‌کشیم.

پاسخ ضربه  $\mathbf{H}(s)$  با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{V_o}{1}$$

با این هدف فعلی ما  $V_o$  است، کاری که به راحتی با تقسیم ولتاژ به دست می‌آید:

$$V_o \Big|_{v_{in}=\delta(t)} = \frac{2}{\frac{2}{s} + 2} = \frac{s}{s+1} = \mathbf{H}(s)$$

اکنون ممکن است با کانولوشن و تابع ورودی  $v_{in} = 6e^{-t}u(t)$  را به صورت زیر بنویسیم:

$$v_{in} = \mathcal{L}^{-1}\{V_{in}(s) \cdot \mathbf{H}(s)\}$$

نون  $V_{in}(s) = 6/(s+1)$  است:

$$V_o = \frac{6s}{(s+1)^2} = \frac{6}{s+1} - \frac{6}{(s+1)^2}$$

گرفتن عکس تبدیل لاپلاس داریم:

$$v_o(t) = 6e^{-t}(1-t)u(t) \text{ V}$$

## تمرین

۱۵-۲۷ با مراجعه به شکل ۱۵-۲۶ (الف) از کانولوشن برای یافتن  $v_o(t)$  استفاده کنید، اگر  $v_{in} = tu(t)$  V.

جواب:  $v_o(t) = (1 - e^{-t})u(t)$  V

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) \left[ \int_{-\lambda}^{\infty} e^{-s(x+\lambda)} f_2(x) dx \right] d\lambda \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) e^{-s\lambda} \left[ \int_{-\lambda}^{\infty} e^{-sx} f_2(x) dx \right] d\lambda \\ &= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) e^{-s\lambda} [\mathbf{F}_2(s)] d\lambda \\ &= \mathbf{F}_2(s) \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

چون بقیه انتگرال در واقع  $\mathbf{F}_1(s)$  است پس:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathbf{F}_1(s) \cdot \mathbf{F}_2(s) \quad (۱۲)$$

با کمی تفاوت می‌بینیم که عکس تبدیل حاصل ضرب دو تابع، کانولوشن عکس تبدیل لاپلاس تک تک آن‌ها است. نتیجه‌ای که گاهی در تهیه عکس تبدیل لاپلاس مفید واقع می‌شود.

اگر  $V(s) = 1/(s + \alpha)(s + \beta)$  باشد  $v(t)$  را با اعمال قضیه کانولوشن به دست آورید.

ما عکس تبدیل این تابع خاص را در بخش ۱۴-۵ با بسط به کسرهای جزئی به دست آوردیم. اکنون  $V(s)$  را به صورت حاصل ضرب دو تابع در نظر می‌گیریم.

$$V_1(s) = \frac{1}{(s + \alpha)}$$

و

$$V_2(s) = \frac{1}{(s + \beta)}$$

که

$$v_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

و

$$v_2(t) = e^{-\beta t}u(t)$$

و بنابراین  $v(t)$  مطلوب بلافاصله حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{V_1(s)V_2(s)\} = v_1(t) * v_2(t) = \int_{0^-}^{\infty} v_1(\lambda)v_2(t-\lambda) d\lambda \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-\alpha\lambda}u(\lambda)e^{-\beta(t-\lambda)}u(t-\lambda) d\lambda = \int_{0^-}^t e^{-\alpha\lambda}e^{-\beta t}e^{\beta\lambda} d\lambda \\ &= e^{-\beta t} \int_{0^-}^t e^{(\beta-\alpha)\lambda} d\lambda = e^{-\beta t} \frac{e^{(\beta-\alpha)t} - 1}{\beta - \alpha} u(t) \end{aligned}$$

یا به صورت منسجم‌تر

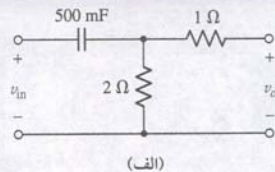
$$v(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$$

این همان پاسخی است که با روش بسط به کسرهای جزئی به دست آوردیم. توجه کنید که لحاظ پله  $u(t)$  در نتیجه الزامی است زیرا همه توابع لاپلاس فقط برای زمان غیر منفی معتبرند (یکسویه‌اند).

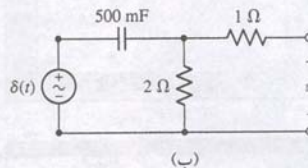
## تمرین

۱۵-۱۰ مثال ۱۵-۸ را با روش کانولوشن در حوزه s تکرار کنید.

## مثال ۱۵-۱۰

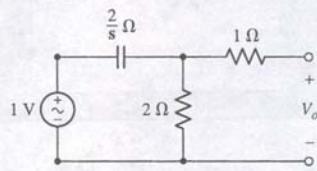


(الف)



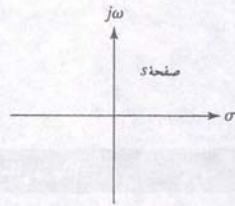
(ب)

شکل ۱۵-۲۶ (الف) یک مدار ساده که به آن یک ورودی نمایی در  $t = 0$  اعمال شده است. (ب) مدار به کاررفته برای تعیین  $h(t)$ .



شکل ۱۵-۲۷ مدار استفاده‌شده برای یافتن  $\mathbf{H}(s)$ .





شکل ۱۵-۳ صفحه فرکانس مختلط با صفحه s.

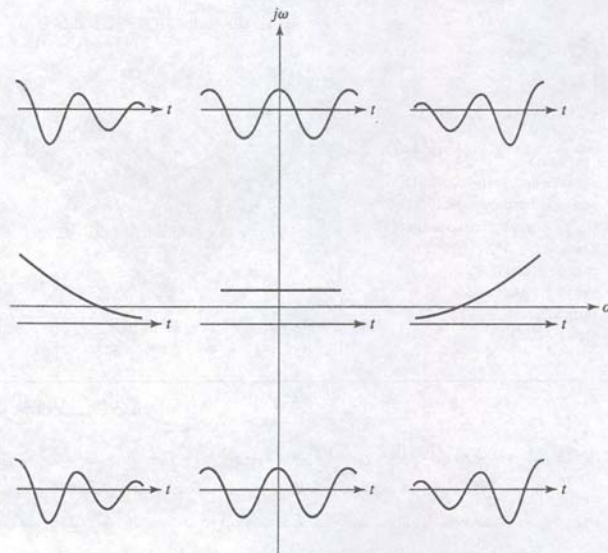
البته معمولاً مقدار  $Z(s)$  را رسم می‌کنیم تا مقایسه آن با  $Z(j\omega)$  ساده باشد. زاویه فاز  $Z(s)$  (فقط  $0^\circ$  و  $\pm 180^\circ$ ) چشم‌پوشی شده است. نکته مهم این است که تنها یک متغیر مستقل،  $\sigma$  در تابع نمایی و  $\omega$  در سینوسی، وجود دارد. اکنون بگذارید ببینیم اگر بخواهیم پاسخی را بر حسب s رسم کنیم چه امکانات دیگری را در اختیار داریم.

### ترسیم در صفحه فرکانس مختلط

برای شناخت کامل s به دو پارامتر  $\sigma$  و  $\omega$  نیاز داریم. پاسخ نیز تابع مختلطی است و بنابراین باید زاویه فاز آن بر حسب s رسم شود. هر یک از این کمیت‌ها، مثلاً اندازه، تابعی از دو پارامتر  $\sigma$  و  $\omega$  است و می‌توان آن را در دو بعد و به صورت مجموعه‌ای از منحنی‌ها رسم نمود، مثل اندازه در برابر  $\omega$  با  $\sigma$  به عنوان پارامتر.

روش بهتر در نمایش مقدار بعضی پاسخ‌های مختلط گرافیکی به کارگیری مدل سه بعدی است. هرچند ترسیم این‌گونه گراف‌ها روی کاغذ دوبعدی مشکل است ولی تجسم مدل، آن‌قدر مشکل نیست و بسیاری از آن‌ها را می‌توان در ذهن ساخت، اصلاح کرد و به سرعت پاک نمود. بیایید دو محور  $\sigma$  و  $j\omega$ ، که بر یکدیگر عمودند را در یک سطح افقی تصور کنیم. اکنون این سطح افقی یک سطح مختلط یا سطح s را تشکیل می‌دهد (شکل ۱۵-۳). به هر نقطه از این صفحه دقیقاً یک مقدار s تعلق می‌گیرد و به هر مقدار s هم یک نقطه در صفحه مختلط تخصیص می‌یابد.

چون ما از قبل بانوع تابع حوزه زمان مرتبط با مقدار خاصی از فرکانس مختلط s آشنایییم، می‌توانیم به تابع تحریک یا پاسخ واداشته در هر ناحیه از صفحه s تابع خاصی را نسبت دهیم. مثلاً مبدأ یک کمیت dc نشان می‌دهد. نقاط واقع بر محور  $\sigma$  توابع نمایی را نمایش می‌دهند که در  $\sigma < 0$  نمایی میرا می‌شوند و برای  $\sigma > 0$  نمایی افزایش‌دهنده است. توابع سینوسی خالص مربوط به نقاط مثبت و منفی محور  $j\omega$  می‌باشند. سمت راست صفحه s با RHP نقاطی هستند که بخش حقیقی مثبت فرکانس را توصیف می‌کنند. پس متعلق به کمیت‌هایی از حوزه زمانند که به جز نقاط روی محور  $\sigma$ ، توابع سینوسی نمایی افزایش‌دهنده را شامل می‌شوند. به همین ترتیب سمت چپ صفحه s (LHP) توابع سینوسی نمایی میرا را بیان می‌کند و مجدداً محور  $\sigma$  مستثنی است. شکل ۱۵-۳۱ مطالب فوق را به‌طور خلاصه نشان می‌دهد.



شکل ۱۵-۳۱ یک تابع حوزه زمان در ناحیه‌ای از صفحه فرکانس مختلط که به آن متعلق است کشیده شده است.

## ۱۵-۶ صفحه فرکانس مختلط

اکنون روش گرافیکی کلی تری را با ترسیم کمیت‌ها بر حسب تابعی از s برنامهریزی می‌کنیم. یعنی می‌خواهیم پاسخ را به‌طور همزمان به صورت تابعی از  $\sigma$  و  $\omega$  نشان دهیم. چنین نمودار گرافیکی از پاسخ واداشته به صورت تابعی از فرکانس مختلط s، تکنیکی مفید و روشنگر در تحلیل و طراحی مدارها است. پس از تفهیم صفحه فرکانس‌های مختلط یا صفحه s، خواهیم دید که چقدر سریع رفتار یک مدار را از فرکانس‌های خاص در این صفحه به صورت تقریب می‌توان بیان کرد.

روش عکس هم خیلی مفید است: اگر منحنی پاسخ مطلوبی را داشته باشیم (مثلاً پاسخ فرکانس یک فیلتر)، امکان دارد که بر حسب قطب‌ها و صفرها در صفحه s تصمیم‌گیری کرده و سپس فیلتر را بسازیم. همچنین صفحه s ابزاری اساسی است که به وسیله آن وجود نوسان‌های نامطلوب ممکن در تقویت‌کننده‌های پسخوردی و سیستم‌های کنترل مورد تحقیق و تفحص قرار می‌گیرد.

### پاسخ بر حسب sigma

اجازه بدهید برای یافتن تابعی بر حسب s، ابتدا پاسخی بر حسب  $\sigma$  یا  $\omega$  را در نظر بگیریم. مثلاً امپدانس ورودی یک شبکه متشکل از یک مقاومت  $3\Omega$  را که با یک القاگر 4H سری است در نظر می‌گیریم. این امپدانس برابر است با:

$$Z(s) = 3 + 4s\Omega$$

اگر تفسیر گرافیکی تغییر امپدانس را با رسم  $\sigma$  بخواهیم، یعنی  $s = \sigma + j0$  آن‌گاه

$$Z(\sigma) = 3 + 4\sigma\Omega$$

که صفری در  $\sigma = -\frac{3}{4}$  و قطبی در بی‌نهایت است. این فرکانس‌های بحرانی و مهم را روی محور  $\sigma$  علامت می‌زنیم. پس از شناسایی مقدار  $Z(\sigma)$  در چند فرکانس غیر بحرانی (مثلاً در  $Z(0) = 3$ ) ترسیم  $|Z(\sigma)|$  در برابر  $\sigma$  طبق شکل ۱۵-۲۸ ساده خواهد بود. این نمودار اطلاعاتی را برای ما هنگام اتصال امپدانس به یک تابع تحریک ساده  $e^{st}$  در اختیار می‌گذارد. توجه کنید که در حالت خاص، حالت dc ( $\sigma = \omega = 0$ ) همان‌طور که انتظار می‌رود امپدانس  $3\Omega$  را خواهیم داشت.

### پاسخ بر حسب jomega

برای ترسیم پاسخ به صورت تابعی از فرکانس زاویه  $\omega$ ، بگذارید  $s = 0 + j\omega$  باشد:

$$Z(j\omega) = 3 + j4\omega$$

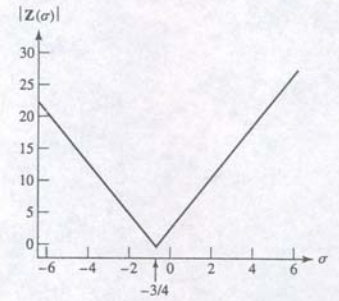
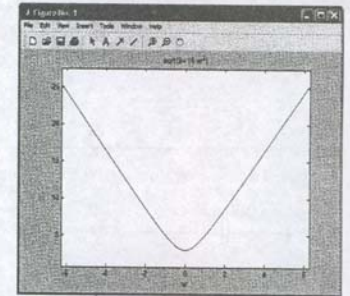
سپس اندازه (مقدار) فاز را به صورت تابعی از  $\omega$  به دست آورید:

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{9 + 16\omega^2} \quad (14)$$

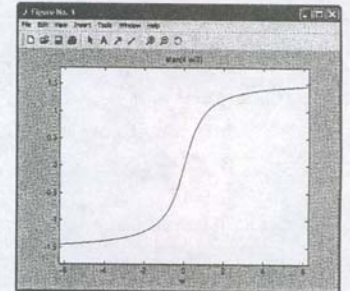
$$\text{ang}Z(j\omega) = \tan^{-1} \frac{4\omega}{3} \quad (15)$$

تابع دامنه یک قطب در بی‌نهایت و یک مینیمم در  $\omega = 0$  دارد. به راحتی می‌توان آن را به صورت منحنی  $|Z(j\omega)|$  بر حسب  $\omega$  رسم کرد. با افزایش فرکانس مقدار امپدانس هم زیاد می‌شود و این دقیقاً رفتاری است که از یک القاگر انتظار داریم. زاویه فاز معکوس تابع تانژانت است که در  $\omega = 0$  برابر صفر و در  $\omega = \pm\infty$  برابر  $\pm 90^\circ$  می‌شود. این رابطه به راحتی به صورت نمودار زاویه  $Z(j\omega)$  در برابر  $\omega$  قابل ترسیم است. معادلات (۱۴) و (۱۵) در شکل ۱۵-۲۹ رسم شده‌اند.

در ترسیم  $Z(j\omega)$  بر حسب  $\omega$ ، دو نمودار دو بعدی لازم است. هر دو کمیت دامنه و زاویه فاز بر حسب  $\omega$  هستند. برای تحریک نمایی می‌توانیم همه اطلاعات را روی یک گراف دوبعدی رسم کنیم به شرطی که هر دو مقدار مثبت و منفی  $Z(\sigma)$  بر حسب  $\sigma$  در نظر گرفته شوند

شکل ۱۵-۲۸ رسم تابع  $|Z(s)|$  بر حسب فرکانس  $\sigma$ .

(الف)

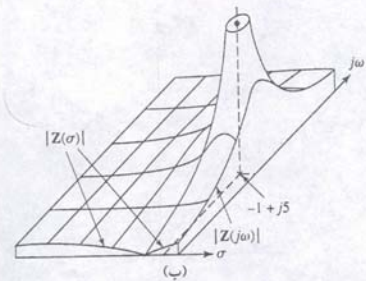
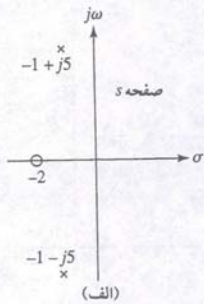


(ب)

شکل ۱۵-۲۹ (الف) نمودار  $|Z(j\omega)|$  بر حسب فرکانس. نمودار به کمک فرمان مطلب زیر رسم شده است:

EDU» ezplot('sqrt(9 + 16 \* w ^ 2)')  
(ب) رسم زاویه  $Z(j\omega)$  بر حسب فرکانس.





شکل ۱۵-۳۴ (الف) برج قطب - صفر امپدانس  $Z(s)$ . (ب) بخشی از مدل صفحه الاستیک مقدار  $Z(s)$ .

## تمرین

بجسبانییم. در ازای هر مقدار  $s$  متعلق به هر قطب، ممکن است یک میله عمودی نازک برای آن متصور شویم اگر صفر در بی نهایت باشد باید صفحه الاستیکی را با یک حلقه بزرگ به صفحه  $s$  بجسبانییم. اگر قطب در بی نهایت باشد باید صفحه را با یک حصار بلند نگه داریم. اگر صفحه الاستیکی به حد کافی بزرگ، بی وزن و کاملاً کشسان باشد، پونزها بسیار ریز و میله‌ها بسیار نازک خواهند بود و ارتفاع صفحه الاستیکی از صفحه  $s$  دقیقاً با دامنه پاسخ، متناسب خواهد بود.

این توضیحات را می توان با پیکره ای از صفرها و قطب ها که به آن برج یا منظومه قطب - صفر می گویند تشریح کرد. این آرایش تمام فرکانس های بحرانی در حوزه فرکانس، مثل امپدانس  $Z(s)$  را نشان می دهد. در شکل ۱۵-۳۴ (الف) برج یک امپدانس را می بینید. اگر یک مدل الاستیکی را تجسم کنیم که در  $s = -2 + j0$  به کف چسبیده و در  $s = -1 + j5$  و  $s = -1 - j5$  آویز شده باشد، سطحی یا یک دره و دو قله خواهیم داشت. بخش متعلق به LHP در شکل ۱۵-۳۴ (ب) دیده می شود.

اکنون بیایید عبارتی را برای  $Z(s)$  به وجود آوریم که به این برج قطب و صفر منتهی شود. صفر، عامل  $(s + 2)$  را در صورت و دو قطب عوامل  $(s + 1 - j5)$  و  $(s + 1 + j5)$  را در مخرج دارند. به جز  $k$ ، اکنون فرم  $Z(s)$  را می دانیم. یعنی:

$$Z(s) = k \frac{s + 2}{(s + 1 - j5)(s + 1 + j5)}$$

یا

$$Z(s) = k \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 26} \quad (۱۶)$$

برای تعیین  $k$ ، ما باید مقداری برای  $Z(s)$  در قبال  $s$ ، که فرکانس بحرانی نباشد، داشته باشیم. حال اجازه بدهید تا بر اساس واقعیتی مثل  $Z(0) = 1$ ،  $k$  را انتخاب کنیم. از جایگزینی مستقیم در معادله (۱۶)،  $k$  برابر ۱۳ به دست می آید. پس:

$$Z(s) = 13 \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 26} \quad (۱۷)$$

می توان نمودارهای  $|Z(\sigma)|$  بر حسب  $\sigma$  و  $|Z(j\omega)|$  بر حسب  $\omega$  را دقیقاً از معادله (۱۷) به دست آورد ولی فرم عمومی و کلی تابع از برج قطب و صفر و صفحه الاستیک کاملاً مشخص است. بخش هایی از این دو منحنی در جواب مدل در شکل ۱۵-۳۴ (ب) ملاحظه می شود.

۱۵-۱۳ ترکیب موازی  $0.25\text{mH}$  و  $5\Omega$  با ترکیب موازی  $40\mu\text{F}$  و  $5\Omega$  سری است. (الف)  $Z_{in}(s)$  یعنی امپدانس ورودی ترکیب سری را مشخص کنید. (ب) تمام صفرهای  $Z_{in}(s)$  را معین نمایید. (ج) تمام قطب های  $Z_{in}(s)$  را تعیین کنید. آرایش قطب - صفر را رسم نمایید.  
جواب:  $5 - j8.66 \text{ krad/s}$ ,  $5(s^2 + 10000s + 10^8)/(s^2 + 25000s + 10^8)$  و  $-20 \text{ krad/s}$ .

## وابستگی فرکانس اندازه و زاویه فاز

ناکون با استفاده از صفحه  $s$  و مدل ورق الاستیک، اطلاعات کیفی را درباره تغییرات فرکانسی ندازه (دامنه) پاسخ در حوزه زمان یافتیم. با این وجود با کمک برج قطب و صفر می توان اطلاعات کمی را برای دامنه و فاز به دست آورد. این روش ابزار قدرتمند دیگری را در اختیار ما می گذارد.

حال بیایید به دنبال روش مناسبی برای نمایش گرافیکی پاسخ به عنوان تابعی از فرکانس مختلط  $s$  بگردیم. مقدار یا اندازه پاسخ را می توان با ساخت مدلی به مانند یک تپه ساخت که ارتفاع هر نقطه آن از کف متناسب با مقدار پاسخ در ازای آن  $s$  است. به بیان دیگر ما محور سومی را به مجموعه اضافه کرده ایم که عمود بر هر دو محور  $\sigma$  و  $j\omega$  است و از مبدأ می گذرد. این محور را با  $|Y|$ ،  $|Z|$  یا هر نماد مناسب دیگری نامگذاری می کنیم. مقدار پاسخ در ازای هر مقدار  $s$  حاصل شده و نمودار منتهی سطحی در بالای صفحه  $s$  است.

ادمیتانس ترکیب سری یک القاگر  $1\text{H}$  و مقاومت  $3\Omega$  را به فرم تابعی از  $\omega$  و  $\sigma$  رسم کنید.

ادمیتانس دو عنصر سری با رابطه زیر داده می شود:

$$Y(s) = \frac{1}{s + 3}$$

با جایگزینی  $s = \sigma + j\omega$  مقدار تابع چنین به دست می آید:

$$|Y(s)| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma + 3)^2 + \omega^2}}$$

هنگامی که  $s = -3 + j0$  باشد مقدار پاسخ بی نهایت است و وقتی  $s$  بی نهایت باشد، مقدار  $Y(s)$  صفر است. بنابراین مدل روی نقطه  $(-3 + j0)$  باید دارای ارتفاع بی نهایت باشد و در نقاطی که از مرکز خیلی دوراند باید ارتفاع صفر را داشته باشد. برش از چنین مدلی در شکل ۱۵-۳۲ (الف) ملاحظه می شود.

پس از برپایی مدل، مشاهده  $|Y|$  به صورت تابعی از  $\omega$  (با  $\sigma = 0$ ) ساده است به این ترتیب که مدل را با سطحی عمود حاوی محور  $\omega$  برش دهیم. در شکل ۱۵-۳۲ (الف) این برش و نیز  $|Y|$  بر حسب  $\omega$  دیده می شود. این برش به صورت منحنی در شکل ۱۵-۳۲ (ب) هم مشاهده می شود. به روشی مشابه یک صفحه عمود حاوی محور  $\sigma$  را قادر می سازد تا  $|Y|$  را بر حسب  $\sigma$  (با  $\omega = 0$ ) طبق شکل ۱۵-۳۲ (ج) معین کنیم.

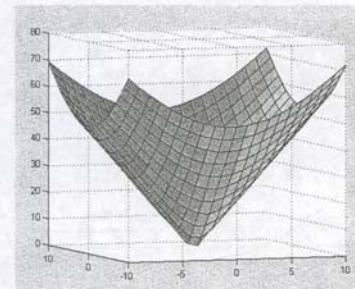
## تمرین

۱۵-۱۲ مقدار امپدانس  $Z(s) = 2 + 5s$  را به صورت تابعی از  $\sigma$  و  $\omega$  رسم نمایید.

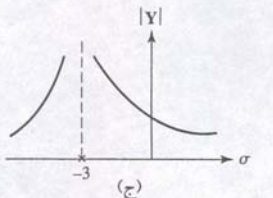
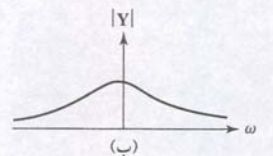
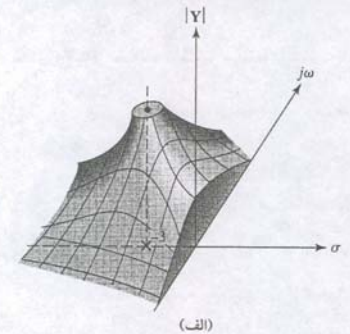
جواب: شکل ۱۵-۳۳ را ملاحظه نمایید.

شکل ۱۵-۳۳ کدهای زیر: حل مسئله ۱۵-۱۲

```
DU>> sigma = linspace(-10,10,21);
DU>> omega = linspace(-10,10,21);
DU>> [X, Y] = meshgrid(sigma,omega);
DU>> Z = abs(2 + 5*X + j*5*Y);
DU>> colormap(gray);
DU>> s = [-5 3 8];
DU>> surf(X,Y,Z,s);
DU>> view(-20,5)
```



## مثال ۱۵-۱۱

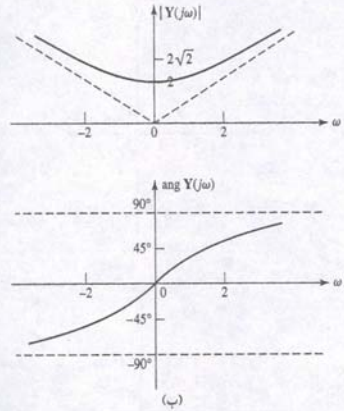


شکل ۱۵-۳۲ (الف) برشی از مدل تپه ای که در آن سطح فوقانی،  $|Y(s)|$  را برای ترکیب سری القاگر  $1\text{H}$  و مقاومت  $3\Omega$  نشان می دهد. (ب)  $|Y(s)|$  به صورت تابعی از  $\omega$ . (ج)  $|Y(s)|$  بر حسب  $\sigma$ .

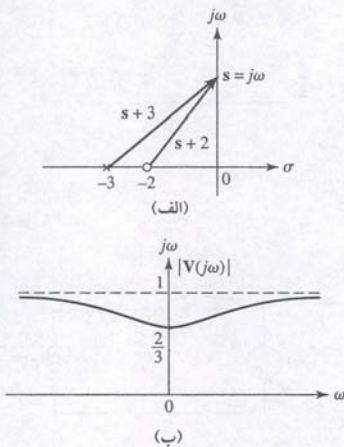
## برج قطب - صفر

این روش برای توابع نسبتاً ساده خوب کار می کند ولی به طور کلی روش عملی تری مورد نیاز است. بیایید یک بار دیگر صفحه  $s$  را روی کف مجسم نموده و ورق الاستیکی بزرگی را روی آن تصور کنیم. حال توجه خود را به همه صفرها و قطب های پاسخ معطوف می کنیم. در هر صفری پاسخ صفر است و ارتفاع ورق باید صفر باشد و بنابراین ورق را باید با پونز به کف





**شکل ۱۵-۳۶** (ب) منحنی  $|Y(j\omega)|$  و  $\text{ang } Y(j\omega)$  که با توجه به رفتار بردار  $s + 2$  و به ازای سه‌ای مختلف روی محور  $j\omega$  به‌دست آمده است.



**شکل ۱۵-۳۷** (الف) بردارهای ترسیمی از دو فرکانس بحرانی در پاسخ ولتاژ  $V(s) = (s + 2)/(s + 3)$ . (ب و ج) منحنی‌های اندازه و فاز  $V(j\omega)$  که از خارج قسمت دو بردار بخش (الف) به‌دست آمده‌اند.

در طراحی مدارها برای تولید پاسخی مطلوب، رفتار بردارهای ترسیمی از فرکانس‌های بحرانی مربوط به یک نقطه عمومی روی محور  $j\omega$ ، کمک عمده‌ای می‌کند. مثلاً اگر بخواهیم برجستگی پاسخ فاز در شکل ۱۵-۳۷ (ج) بزرگ‌تر شود، باید تفاوت زاویه‌های دو بردار را بیشتر نماییم. برای این کار یا باید در شکل ۱۵-۳۷ (الف)، صفر را به مبدأ نزدیک‌تر و یا قطب را از مبدأ دور کنیم و یا هر دو کار را انجام دهیم.

ایده طلب کمک از گرافیک در تعیین تغییر اندازه و زاویه با فرکانس برای یک تابع در حوزه فرکانس در فصل ۱۶ کاربرد دارد. در آن رفتار فرکانسی فیلترهای گزیننده فرکانسی یا مدارهای تشدید را بررسی خواهیم کرد. این مفاهیم در درک سریع و روشن رفتار شبکه‌های الکتریکی و دیگر سیستم‌های مهندسی نقشی اساسی دارد. روال در زیر خلاصه شده است.

۱. برج قطب و صفر تابع در حوزه فرکانس موردنظر و روی صفحه  $s$  رسم کنید و یک نقطه تست که قرار است تابع در آن محاسبه شود را هم مشخص نمایید.
۲. از همه قطب‌ها و صفرها، برداری به نقطه فوق رسم کنید.
۳. طول این بردارها و زاویه‌ای که با محور حقیقی می‌سازند را به‌دست آورید.
۴. دامنه تابع حوزه فرکانس از تقسیم حاصلضرب طول بردارهای مربوط به صفرها، بر حاصلضرب طول بردارهای مربوط به قطب‌ها به‌دست می‌آید. ممکن است ضریبی هم در نظر گرفته شود زیرا برج‌های  $F(s)$  و  $kF(s)$  یکسانند.
۵. تفاضل مجموع زوایای بردارهای مربوط به صفرها و مجموع زوایای بردارهای مربوط به قطب‌ها را به‌دست آورید. این تفاضل زاویه تابع حوزه فرکانس را در نقطه مورد بررسی نشان می‌دهد. این زاویه به ضریب حقیقی تابع  $k$  بستگی ندارد.

## تمرین

- ۱۵-۱۴** سه برج قطب - صفر در شکل ۱۵-۳۸ نشان داده شده‌اند. هر یک از آن‌ها به یک بهره ولتاژ  $G$  مربوط است. برای هر کدام از آرایش‌ها، بهره را به صورت نسبت دو چندجمله‌ای بر حسب  $s$  بیان کنید.
- ۱۵-۱۵** آرایش قطب - صفر برای ادمیتانس  $Y(s)$  دارای یک قطب در  $s = -10 + j0.5s^{-1}$  و یک صفر در  $s = z_1 + j0$  است که  $z_1 < 0$  می‌باشد. فرض کنید  $Y(0) = 0.1s$  باشد.  $z_1$  را طوری معین کنید که  $\text{ang } Y(j5) = 20^\circ$  و  $|Y(j5)| = 0.2s$  باشد.
- جواب ۱۵-۱۴:**  $(s^2 + 6s + 8) / (15s^2 + 45s)$
- جواب ۱۵-۱۵:**  $(4s + 8) / (s^2 + 2s) + (2s^3 + 22s^2 + 88s + 120) / (3s^2 + 27)$
- جواب ۱۵-۱۵:**  $-4.73 \text{ Np/s}$ ،  $-2.50 \text{ Np/s}$

## ۱۵-۷ پاسخ طبیعی و صفحه s

در آغاز این فصل، نشان دادیم که چگونه می‌توان در حوزه فرکانس از طریق تبدیل لاپلاس، گستره وسیعی از مدارهای متغیر با زمان را با حذف معادلات مشتق - انتگرالی بررسی نموده و به جای آن معادلات جبری را به کار برد. اطلاعات زیادی در نمودار قطب و صفر یک پاسخ واداشته در صفحه  $s$  نهفته است. در این بخش خواهیم دید که چگونه یک پاسخ جریان کامل، پاسخ طبیعی و واداشته که به وسیله یک تابع تحریک دلخواه تولید می‌شود را می‌توان به سرعت از آرایش قطب - صفر پاسخ جریان واداشته و مقادیر اولیه نوشت. روش به‌طور مشابه در یافتن پاسخ ولتاژ کامل تولید شده با یک منبع دلخواه نیز معتبر است.

بگذارید روش را با ملاحظه ساده‌ترین مثال، یعنی مدار RL سری شکل ۱۵-۳۹ معرفی کنیم. منبع ولتاژ کلی  $v_s(t)$  پس از بسته شدن کلیدی در  $t = 0$ ، جریان  $i(t)$  را تولید می‌کند. پاسخ کامل  $i(t)$  از ترکیب پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته در  $t > 0$  به‌دست می‌آید که  $i(t) = i_n(t) + i_f(t)$  می‌باشد.

شکل قطبی یک عدد مختلط را به صورت پیکانی که از مبدأ صفحه  $s$  به فرکانس مختلط موردنظری رسم می‌شود در نظر بگیرید. طول پیکان همان اندازه فرکانس مختلط و زاویه‌ای که پیکان با جهت مثبت محور  $\sigma$  می‌سازد هم زاویه فرکانس مختلط می‌باشد. فرکانس  $s_1 = -3 + j4 = 5 \angle 126.9^\circ$  در شکل ۱۵-۳۵ (الف) دیده می‌شود.

تفاوت دو مقدار  $s$  را هم باید با پیکان یا برداری در صفحه مختلط نشان داد. اجازه بدهید مقداری مثل  $s = j7$  که متناظر با موجی سینوسی است برگزینیم و آن را طبق شکل ۱۵-۳۵ (ب) با بردار  $s_1 - s_1$  نشان دهیم. تفاضل  $s - s_1$  که برداری است از نقطه  $s_1$  به نقطه  $s$  نیز در شکل ۱۵-۳۵ (ج) ترسیم شده است. دقت کنید که  $s - s_1 = j7 - (-3 + j4) = 3 + j3 = 4.24 \angle 45^\circ$  از لحاظ عددی بیایید ببینیم چگونه تعبیر گرافیکی تفاضل  $(s - s_1)$  ما را در تعیین پاسخ فرکانس یاری می‌نماید. به ادمیتانس زیر توجه کنید:

$$V(s) = s + 2$$

این عبارت دارای صفری در  $s_2 = -2 + j0$  است. عامل  $s + 2$  را هم می‌توان به صورت  $s - s_2$  نوشت و با برداری از محل صفر،  $s_2$  به فرکانس  $s$  نشان داد. اگر پاسخ سینوسی موردنظر باشد،  $s$  باید روی محور  $j\omega$  قرار گیرد (شکل ۱۵-۳۶ (الف)). اکنون می‌توانیم اندازه  $s + 2$  را بر حسب تغییرات  $\omega$  از صفر تا بی‌نهایت تصور کنیم. وقتی  $s$  صفر است، بردار، اندازه 2 و زاویه  $0^\circ$  را دارد. بنابراین  $Y(0) = 2$ . با افزایش  $\omega$ ، مقدار آن به آهستگی ابتدا شروع به افزایش می‌کند و زاویه فاز هم در ابتدا به طور خطی افزایش یافته و سپس با میل  $\omega$  به بی‌نهایت مقدار آن به  $90^\circ$  می‌رسد. اندازه و زاویه  $Y(s)$  در شکل ۱۵-۳۶ (ب) ملاحظه می‌شود.

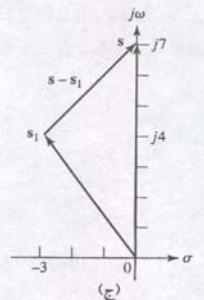
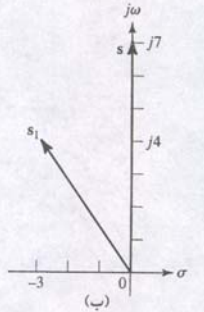
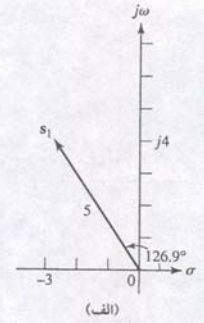
اکنون بیایید مثال واقعی تری را با ملاحظه تابع حوزه فرکانس که به صورت نسبت دو جمله بیان شده است دنبال کنیم:

$$V(s) = \frac{s + 2}{s + 3}$$

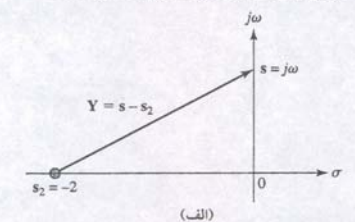
باز هم  $s$  را با یک تابع تحریک سینوسی متناظر می‌گیریم و بردارهای  $s + 2$  و  $s + 3$  را رسم می‌کنیم، یکی را از صفر به فرکانس موردنظر روی محور  $j\omega$  و دیگری از قطب به آن نقطه وصل می‌کنیم. دو بردار در شکل ۱۵-۳۷ (الف) رسم شده‌اند. نسبت این دو بردار، اندازه‌ای برابر نسبت اندازه‌های دو بردار و زاویه‌ای برابر با تفاضل زوایای فاز بردار صورت و بردار مخرج دارد. با حرکت دادن  $s$  بر روی محور  $j\omega$  و لحاظ نسبت فاصله هر صفر و هر قطب از  $s = j\omega$ ، می‌توان تغییر مقدار  $V(s)$  را بر حسب  $\omega$  پیدا کرد. این نسبت در  $\omega = 0$  برابر  $\frac{2}{3}$  بوده و با میل  $\omega$  به بی‌نهایت به سمت 1 میل می‌نماید (شکل ۱۵-۳۷ (ب)).

بررسی تفاضل دو زاویه فاز نشان می‌دهد که در  $\omega = 0$  زاویه  $V(j\omega)$  برابر  $0^\circ$  می‌باشد. این زاویه ابتدا با افزایش  $\omega$  بالا می‌رود، چون زاویه بردار  $s + 2$  بزرگ‌تر از زاویه  $s + 3$  است. سپس با افزایش بیشتر  $\omega$  کم می‌شود. نهایتاً در فرکانس بی‌نهایت به  $0^\circ$  می‌رسد و در این حالت هر دو بردار دارای زوایای  $90^\circ$  می‌باشند. این نتایج در شکل ۱۵-۳۷ (ج) کشیده شده است. هرچند هیچ علامت‌گذاری کمی روی این منحنی‌ها به چشم نمی‌خورد ولی مقادیر کمی را به راحتی می‌توان به‌دست آورد. مثلاً پاسخ مختلط  $s = j4$  از نسبت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} V(j4) &= \frac{\sqrt{4+16} \angle \tan^{-1}(\frac{4}{3})}{\sqrt{9+16} \angle \tan^{-1}(\frac{4}{3})} \\ &= \sqrt{\frac{20}{25}} \angle (\tan^{-1} 2 - \tan^{-1}(\frac{4}{3})) \\ &= 0.894 \angle 10.3^\circ \end{aligned}$$

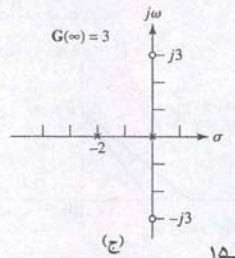
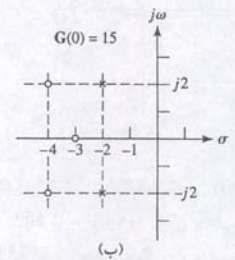
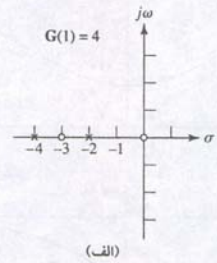


**شکل ۱۵-۳۵** (الف) فرکانس مختلط  $s_1 = -3 + j4$  با ترسیم یک پیکان از مبدأ به  $s$  مشخص می‌شود. (ب) فرکانس  $s = j7$  هم با بردار نشان داده شده است. (ج) اختلاف  $s_1 - s$  یا برداری که از  $s_1$  به کشیده شود نشان داده می‌شود.

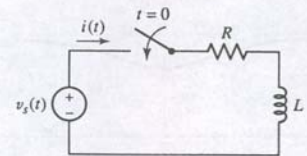


**شکل ۱۵-۳۶** (الف) برداری که ادمیتانس  $Y(s) = s + 2$  را برای  $s = j\omega$  نشان می‌دهد.





شکل ۱۵-۳۸



شکل ۱۵-۳۹ مثالی برای به دست آوردن پاسخ کامل به کمک فرکانس‌های بحرانی و شرایط اولیه.

راستی کار در یک فرکانس مختلط چه معنی می‌دهد؟ چگونه می‌توان فرکانس مختلطی را در آزمایشگاه ایجاد کرد. در اینجا بهتر است ببینیم چگونه آن را ابداع کردیم؟ در واقع این تعریف مربوط است به توصیف یک تابع سینوسی که در یک تابع نمایی ضرب شده است. این سیگنال‌ها به راحتی با تجهیزات آزمایشگاهی تولید می‌شوند. بنابراین کافی است که مقدار  $\sigma$  و  $\omega$  را تنظیم کنیم تا در  $\sigma + j\omega$  کار کنیم.

پاسخ واداشته را با کار در حوزه زمان پیدا می‌کنیم و البته فرض می‌شود که  $v_s(t)$  فرمی اساسی داشته و قابل انتقال به حوزه فرکانس باشد. در غیر این صورت مثلاً اگر  $v_s(t) = 1/(1+t^2)$  باشد، بهتر است به سراغ معادلات دیفرانسیل برویم. برای مدار شکل ۱۵-۳۹ داریم:

$$I_f(s) = \frac{V_s}{R + sL}$$

$$I_f(s) = \frac{1}{L} \frac{V_s}{s + R/L} \quad (1A)$$

اکنون بیایید پاسخ طبیعی را در نظر بگیریم. با توجه به تجربه قبلی می‌دانیم که پاسخ به فرم نمایی میرا با ثابت زمانی  $L/R$  است ولی وانمود می‌کنیم اولین باری است که با آن مواجه می‌شویم. بنا به تعریف پاسخ طبیعی مستقل از تابع تحریک است. تابع تحریک فقط در اندازه پاسخ طبیعی نقش دارد. برای این که فرم صحیح را بیابیم، همه منابع مستقل را می‌کشیم. در این جا  $v_s(t)$  را با اتصال کوتاه می‌کنیم. سپس سعی خواهیم کرد پاسخ طبیعی را به عنوان حالت حدی از پاسخ واداشته بنگاریم. به سراغ عبارت حوزه فرکانس معادله (۱۸) می‌رویم و  $V_s = 0$  را در آن قرار می‌دهیم. در بدو امر چنین به نظر می‌رسد که  $I(s)$  هم باید صفر شود ولی اگر در یک فرکانس مختلطی کار می‌کنیم که قطب ساده  $I(s)$  است، لزوماً چنین نیست. یعنی صورت و مخرج هر دو ممکن است صفر باشند به نحوی که ضرورتاً  $I(s)$  صفر نباشد.

بیایید این ایده جدید را از زاویه دیگری بنگریم. ما توجه خود را به نسبت پاسخ واداشته مورد نظر به نیروی محرکه معطوف می‌کنیم. این نسبت را با  $H(s)$  نشان می‌دهیم و آن را تابع تبدیل یا تابع انتقال می‌نامیم. داریم:

$$\frac{I_f(s)}{V_s} = H(s) = \frac{1}{L(s + R/L)}$$

در این مثال تابع تبدیل، امپدانس است که در مقابل  $V_s$  قرار دارد. ما با تنظیم  $V_s = 0$  به دنبال پاسخ طبیعی (بی منبع) هستیم. با این وجود چون  $I_f(s) = V_s H(s)$  است، اگر  $V_s = 0$  باشد، مقدار جریان غیر صفر به شرطی حاصل می‌شود که در قطب  $H(s)$  کار کنیم. بنابراین تابع تبدیل از اهمیت خاصی برخوردار است.

به مدار  $RL$  سری خود بازمی‌گردیم. می‌بینیم که قطب تابع تبدیل در  $s = -\frac{R}{L} + j0$  واقع است (شکل ۱۵-۴۰). اگر ماکار را در این فرکانس مختلط انجام دهیم، تنها جریان محدودی که می‌تواند حاصل شود باید ثابتی در حوزه  $s$  باشد. پس پاسخ طبیعی چنین خواهد بود.

$$I(s) = \frac{R}{L} + j0 = A$$

که  $A$  ثابت نامشخصی است. اکنون مایلیم این پاسخ را به حوزه زمان بازگردانیم. برای این کار عکس تبدیل لاپلاس را به کار می‌بریم. معضله قبلاً مقداری را برای  $s$  مشخص کرده‌ایم، و چنین کاری درست نیست. در عوض به بخش حقیقی تابع کلی  $e^{st}$  نگاه می‌کنیم، به طوری که

$$i_n(t) = \text{Re}\{Ae^{st}\} = \text{Re}\{Ae^{-Rt/L}\}$$

در این حالت داریم:

$$i_n(t) = Ae^{-Rt/L}$$

آن‌گاه پاسخ کل برابر است با:

$$i(t) = Ae^{-Rt/L} + i_f(t)$$

به محض مشخص شدن مقادیر اولیه برای این مدار،  $A$  معین می‌گردد. پاسخ واداشته  $i_f(t)$  با یافتن تبدیل لاپلاس معکوس  $I_f(s)$  به دست می‌آید.

## نویس کلی تر

مکمل‌های ۱۵-۴۱ (الف) و (ب) اتصال یک منبع به شبکه بدون منبع مستقل را نشان می‌دهد. اسخ مورد نظر که ممکن است جریانی مثل  $I_1(s)$  یا ولتاژی چون  $V_2(s)$  باشد، با تابع تبدیلی بان می‌شود که همه فرکانس‌های بحرانی را نمایش دهد. دقیق‌تر بگوییم ما پاسخ  $V_2(s)$  را در مکمل ۱۵-۴۱ (الف) برمی‌گزینیم:

$$\frac{V_2(s)}{V_s} = H(s) = k \frac{(s - s_1)(s - s_3) \dots}{(s - s_2)(s - s_4) \dots} \quad (19)$$

طب‌های  $H(s)$  در  $s_2, s_4, \dots$  هستند و بنابراین ولتاژ معین  $V_2(s)$  در هر یک از این رکانس‌ها باید فرم عملیاتی ممکن برای پاسخ طبیعی باشد. بنابراین منبع ولتاژ صفر ولتی را، پایانه‌های ورودی اعمال می‌کنیم (که همان اتصال کوتاه باشد) بنابراین پاسخ طبیعی به هنگام اتصال کوتاه شده پایانه‌های ورودی باید فرم زیر را داشته باشد:

$$v_{2n}(t) = A_2 e^{s_2 t} + A_4 e^{s_4 t} + \dots$$

نه هر  $A$  باید بر حسب مقادیر اولیه محاسبه شود (شامل هر منبع ولتاژ اعمال شده به پایانه‌های ورودی).

برای یافتن فرم پاسخ طبیعی  $i_{1n}(t)$  در شکل ۱۵-۴۱ (الف)، باید قطب‌های تابع تبدیل  $H(s) = I_1(s)/V_s$  را به دست آوریم. توابع تبدیل اعمال شده به آن چه در شکل ۱۵-۴۱ (ب) دیده می‌شود  $I_1(s)/I_s$  و  $V_2(s)/I_s$  می‌باشند و آن‌گاه قطب‌های آن‌ها پاسخ‌های طبیعی  $i_{1n}(t)$  و  $v_{2n}(t)$  را به ترتیب معین می‌کنند.

اگر پاسخ طبیعی برای شبکه بی منبع مستقل مورد نظر باشد، آن‌گاه منبع  $I_s$  یا  $V_s$  در هر نقطه ناسبی می‌تواند وارد شود، تنها محدودیت این کار این است که با کشتن آن منبع، شبکه اصلی به دست‌آید. سپس تابع تبدیل و قطب‌های آن را به دست می‌آوریم و فرکانس‌های طبیعی را مشخص می‌کنیم. دقت کنید که منبع در هر جا که باشد باید فرکانس‌های یکسانی به دست‌آید. لئ شبکه منبع داشته باشد می‌توان آن را کشت و در جای مناسب تری از مدار منبعی قرار داد.

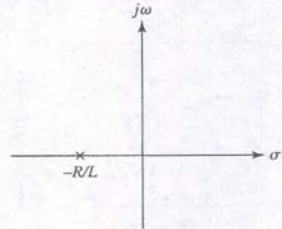
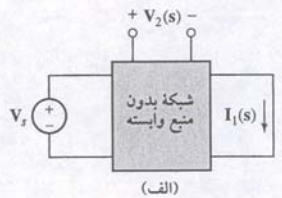
## نات خاص

ل از پرداختن به چند مثال، لازم است با حالت خاصی که ممکن است پیش آید آشنا شویم. ن حالت زمانی رخ می‌دهد که شبکه شکل ۱۵-۴۱ (الف) یا (ب) حاوی دو یا چند بخش جدا هم باشد. مثلاً ممکن است ترکیب موازی سه شبکه را داشته باشیم:  $R_1$  سری با  $C$ ،  $R_2$  سری با  $L$  و یک اتصال کوتاه. واضح است که منبع ولتاژ سری با  $R_1$  و  $C$  نمی‌تواند جریانی را در  $R_2$  تولید نماید. یعنی تابع تبدیل صفر است. مثلاً برای یافتن فرم پاسخ طبیعی ولتاژ القاگر، به ولتاژ باید در شبکه  $R_2$  نصب شود. این حالت خاص را می‌توان با بررسی شبکه و قبل از وارد شدن در آن تشخیص داد. اگر این کار را نکنیم تابع تبدیل صفر خواهد شد. اگر  $H(s) = 0$  شد، هیچ اطلاعاتی درباره فرکانس‌های پاسخ طبیعی به دست نمی‌آید و باید محل مناسب تری ای منبع به دست‌آورده.

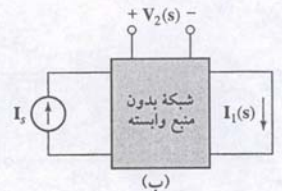
رای مدار شکل ۱۵-۴۲، عبارتی برای  $i_1$  و  $i_2$  در  $t > 0$  تعیین کنید. مقادیر اولیه  $i_1(0) = i_2(0) = 11$  می‌باشند.

نازه بدهید تا منبع ولتاژ  $V_s$  را بین  $x$  و  $x'$  قرار دهیم و تابع تبدیل  $H(s) = I_1(s)/V_s$  را دست‌آوریم. این تابع تبدیل ادمیتانس دیده شده به وسیله منبع ولتاژ نیز هست. داریم:

$$I_1(s) = \frac{V_s}{2s + 1 + 6s/(3s + 2)} = \frac{(3s + 2)V_s}{6s^2 + 13s + 2}$$

شکل ۱۵-۴۰ حذف صفر و قطب تابع تبدیل  $H(s)$  در قطب  $s = -\frac{R}{L}$ .

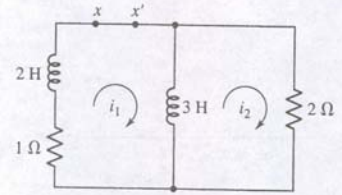
(الف)



(ب)

شکل ۱۵-۴۱ قطب‌های پاسخ  $I_1(s)$  یا  $V_2(s)$  ناشی از یک (الف) منبع ولتاژ  $V_s$  و (ب) منبع جریان  $I_s$ . قطب‌ها تعیین‌کننده پاسخ طبیعی  $i_{1n}(t)$  یا  $v_{2n}(t)$  می‌باشند و هنگامی رخ می‌دهد که  $V_s$  یا یک اتصال کوتاه، یا  $I_s$  با مدار باز و یا انرژی اولیه موجود جایگزین گردد.





شکل ۱۵.۴۲ مداری که در آن پاسخ طبیعی  $i_1$  و  $i_2$  مورد تقاضا هستند.

یا

$$H(s) = \frac{I_1(s)}{V_s} = \frac{\frac{1}{2}(s + \frac{2}{3})}{(s+2)(s+\frac{1}{6})}$$

با تجربه اخیر می توان پیش بینی کرد که  $i_1$  باید فرم زیر را داشته باشد:

$$i_1(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t/6}$$

حل یا استفاده از مقادیر اولیه برای محاسبه A و B کامل می گردد. چون به  $i_1(0) = 11$  آمپر داده شده پس

$$11 = A + B$$

معادله اضافی لازم با نوشتن معادله KVL حول مدار حاصل می گردد:

$$1i_1 + 2 \frac{di_1}{dt} + 2i_2 = 0$$

و با حل مشتق داریم:

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{2} [2i_2(0) + 1i_1(0)] = -\frac{22}{2} \frac{11}{2} = -2A - \frac{1}{6} B$$

بنابراین  $A = 8$  و  $B = 3$  بوده و پاسخ طبیعی موردنظر چنین است:

$$i_1(t) = 8e^{-2t} + 3e^{-t/6} \text{ A}$$

فرکانس های طبیعی که  $i_2$  را تشکیل می دهند متعلق به  $i_1$  هم هستند. برای محاسبه ثابت های اختیاری روش مشابهی به کار می رود و داریم:

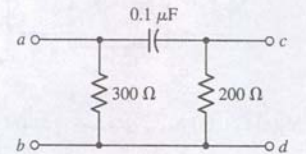
$$i_2(t) = 12e^{-2t} - e^{-t/6} \text{ A}$$

## تمرین

۱۵.۱۶ اگر منبع جریان  $i_1(t) = u(t)$  A را به دسر  $b$  و  $a$  در شکل ۱۵.۴۳ وصل کنیم و جهت جریان

به سمت  $a$  باشد،  $H(s) = V_{cd}/I_1$  را پیدا کنید و پاسخ طبیعی موجود در  $v_{cd}(t)$  به دست آورید.

جواب:  $120s/(s + 20,000)\Omega$  و  $-20,000s^{-1}$ .



شکل ۱۵.۴۳

## کاربرد عملی

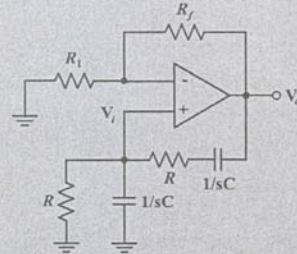
### طراحی مدارهای نوسان ساز

در چند نقطه از این کتاب ما رفتار انواع مدارها را در واکنش به محرک های سینوسی بررسی کردیم. با این وجود تولید موج سینوسی خود عنوانی جالب است. مثلاً ایجاد امواج سینوسی بزرگ به کمک آهنربا و سیم پیچ ها کاری سراسر است ولی چنین روشی برای امواج کوچک تر چندان ساده نیست. برای کاربردهای جریان پایین در چند آمپر یا کمتر، روشی بهتر استفاده از اسیلاتور است که به آن **پسخور** مثبت مدار تقویت کننده هم می گویند. مدارهای اسیلاتور بخش عمده ای از تولیدات مصرفی مانند گیرنده ماهواره ای استقرار در فضا (GPS) شکل ۱۵.۴۴ است.



شکل ۱۵.۴۴

یک مدار سراسر است ولی مفید اسیلاتور پل - وین در شکل ۱۵.۴۵ است.



شکل ۱۵.۴۵ مدار نوسان ساز پل وین.

مدار همان تقویت کننده غیر معکوس گر است که در آن  $R_1$  بین ورودی و خروجی و زمین وصل شده است. همچنین مقاومت  $R_f$  بین خروجی، پایه وارونگر قرار گرفته است. بنابراین  $R_f$  آنچه را که مسیر **پسخور** منفی نامیده می شود ایجاد می نماید، زیرا خروجی تقویت کننده را به ورودی وارونگر متصل می سازد. پس هر افزایش  $\Delta V_o$  در خروجی منجر به کاهش ورودی خواهد شد و این به نوبه خود خروجی کوچک تری را سبب می شود. این فرآیند پایدار و ولتاژ خروجی  $V_o$  را افزایش می دهد. بهره تقویت کننده که به صورت نسبت  $V_o$  به  $V_i$  تعریف می شود با نسبت اندازه های  $R_1$  و  $R_f$  تعیین می گردد.

حلقه **پسخور** مثبت که متشکل از ترکیب دو عنصر مقاومت - خازن است، به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z_p = R \parallel (1/sC) \text{ و } Z_s = R + \frac{1}{sC}$$

انتخاب  $R$  و  $C$  به ما اجازه طراحی نوسان سازی با فرکانس خاصی را می دهد (خازن های درونی تقویت کننده خود حداکثر فرکانس را محدود می کنند). برای این که رابط های بین  $R$  و  $C$  و فرکانس نوسان بیابیم، به جستجوی عبارتی برای بهره تقویت کننده، یعنی  $V_o/V_i$  می گردیم.

دو قاعده تقویت کننده در فصل ۶ را به خاطر می آورید. با بررسی مدار شکل ۱۵.۴۵ ملاحظه می کنید که  $Z_p$  و  $Z_s$  تقسیم کننده ولتاژی را به صورت زیر تعریف می کنند:

$$V_i = V_o \frac{Z_p}{Z_p + Z_s} \quad (۲۰)$$

با ساده سازی و جایگزینی  $(1/sC) = R/(1 + sRC)$  و  $Z_p = R \parallel (1/sC)$  داریم:

$$\frac{V_i}{V_o} = \frac{R}{1 + sRC} = \frac{sRC}{1 + 3sRC + s^2R^2C^2} \quad (۲۱)$$

چون مایل به دانستن کار حالت ماندگار تقویت کننده هستیم،  $s$  را با  $j\omega$  جایگزین می کنیم:

$$\frac{V_i}{V_o} = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2} = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + 3j\omega RC} \quad (۲۲)$$

عبارت فوق برای بهره فقط وقتی  $\omega = 1/RC$  باشد حقیقی است. پس با انتخاب  $R$  و  $C$  می توان تقویت کننده ای با فرکانس خاص  $f = \omega/2\pi = 1/2\pi RC$  طراحی کرد.

به عنوان مثال بیابید یک نوسان ساز پل وین برای تولید یک موج سینوسی با فرکانس 20 Hz را بسازیم که در محدوده فرکانس های پایین صوتی کار می کند. می خواهیم فرکانس  $\omega = 2\pi f = (6.28)(20) = 125.6 \text{ rad/s}$  را داشته باشیم. با تعیین مقدار  $R$ ، مقدار  $C$  مشخص می گردد و برعکس. با فرض داشتن خازن  $1\mu F$  مقاومت لازم  $R = 7962\Omega$  خواهد بود. چون مقدار مقاومت فوق استاندارد نیست، باید چند مقاومت را با هم سری کنیم تا آن را به دست آوریم. با این وجود با مراجعه به شکل ۱۵.۴۵ و آماده کردن مدار شبیه سازی با PSpice ملاحظه می شود که  $R_f$  و  $R_1$  هم معلوم نیستند.

هرچند معادله (۲۰) رابطه صحیح بین  $V_o$  و  $V_i$  را معلوم می کند، معادله دیگری برای ارتباط این دو می نویسیم:

$$0 = \frac{V_i}{R_1} + \frac{V_i - V_o}{R_f}$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

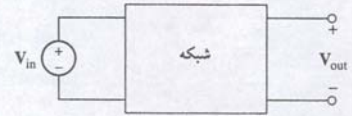
$$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_f}{R_1} \quad (۲۳)$$

با جایگزینی  $\omega = 1/RC$  در معادله (۲۲) داریم:

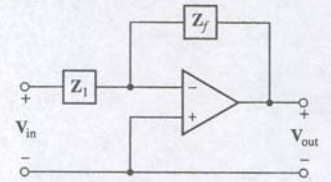
$$\frac{V_i}{V_o} = \frac{1}{3}$$

بنابراین کافی است که  $R_f$  و  $R_1$  را طوری انتخاب کنیم که  $R_f/R_1 = 2$  باشد. متأسفانه اگر پاسخ گذرا را از تحلیل PSpice ملاحظه کنیم، انتخاب  $R_f = 2k\Omega$  و  $R_1 = 1k\Omega$  خروجی مناسبی نمی دهد. برای این که مطمئن شویم سیستم ناپایدار است (شرط لازم برای آغاز به نوسان) لازم است نسبت  $R_f/R_1$  را کمی بیش از 2 انتخاب نماییم. خروجی شبیه سازی شده طرح نهایی شکل ۱۵.۴۶ ملاحظه می گردد. توجه کنید که دامنه موج سینوسی روی نمودار رو به افزایش است: در عمل عناصر غیرخطی برای تثبیت اندازه و ولتاژ مدار لازمند.

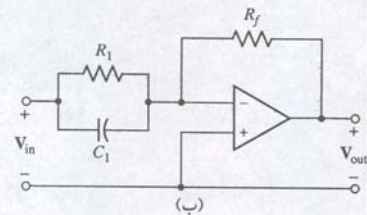
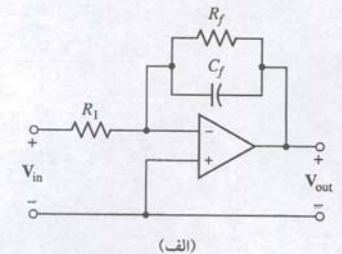




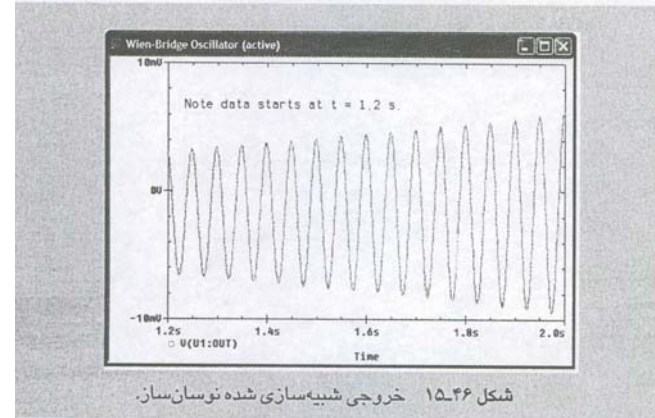
شکل ۱۵-۴۷ با فرض  $H(s) = V_{out}/V_{in}$  به دنبال شبکه‌ای با  $H(s)$  مشخص شده هستیم.



شکل ۱۵-۴۸ برای یک op amp ایده‌آل  $H(s) = V_{out}/V_{in} = -Z_f/Z_1$



شکل ۱۵-۴۹ (الف) تابع تبدیل  $H(s) = V_{out}/V_{in}$  در  $s = -1/R_1C_1$  قطبی دارد. (ب) در این‌جا صفری در  $s = -1/f_1C_1$  داریم.



شکل ۱۵-۴۶ خروجی شبیه‌سازی شده نوسان‌ساز.

## ۱۵-۸ تکنیک سنتز نسبت ولتاژها $H(s) = V_{out}/V_{in}$

بسیاری از مباحث این فصل به قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل مربوط می‌شود. ما آن‌ها را در صفحه فرکانس مختلط مستقر کردیم، آن‌ها را برای بیان توابع تبدیل به صورت مضاربی از چندجمله‌ای‌های  $s$  بیان کردیم، پاسخ‌های واداشته را از آن‌ها محاسبه نمودیم، و در بخش قبل هم قطب‌ها را برای تشکیل پاسخ طبیعی به کار بردیم.

اکنون بیایید ببینیم چگونه می‌توان شبکه‌ای ساخت که تابع تبدیل دلخواهی داشته باشد. در واقع ما بخش کوچکی از یک مسئله بزرگ را بررسی کرده و با تابع تبدیل  $H(s) = V_{out}(s)/V_{in}(s)$  طبق شکل ۱۵-۴۷ کار خواهیم کرد. به خاطر سادگی  $H(s)$  را ب فرکانس‌های بحرانی روی محور منفی  $\sigma$  محدود خواهیم کرد (از جمله مبدأ). بنابراین توابع تبدیلی مانند موارد زیر را ملاحظه می‌کنیم:

$$H_1(s) = \frac{10(s+2)}{s+5}$$

$$H_2(s) = \frac{-5s}{(s+8)^2}$$

$$H_3(s) = 0.1s(s+2)$$

بگذارید با تعریف بهره ولتاژ شبکه شکل ۱۵-۴۸ که حاوی یک op amp ایده‌آل است آغاز کنیم. ولتاژ بین دو پایانه ورودی op amp اصولاً صفر است و امپدانس ورودی آن بی‌نهایت می‌باشد. بنابراین می‌توان مجموع جریان‌های وارده به ورودی وارونگر را صفر تصور کرد:

$$\frac{V_{in}}{Z_1} + \frac{V_{out}}{Z_f} = 0$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_f}{Z_1}$$

اگر  $Z_f$  و  $Z_1$  هر دو مقاومت باشند، مدار به صورت یک تقویت‌کننده معکوس‌گر یا احتمالاً تضعیف‌کننده عمل می‌کند (اگر نسبت کمتر از واحد باشد). معیناً توجه ما به حالانی است که در آن یکی از امپدانس‌ها مقاومت و دیگری یک شبکه RC باشد.

در شکل ۱۵-۴۹ (الف)، اجازه بدهید  $R_1 = Z_1$  و  $Z_f$  ترکیب موازی  $R_f$  و  $C_f$  باشد بنابراین:

$$Z_f = \frac{R_f/sC_f}{R_f + (1/sC_f)} = \frac{R_f}{1 + sC_fR_f} = \frac{1/C_f}{s + (1/R_fC_f)}$$

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_f}{Z_1} = -\frac{1/R_1C_f}{s + (1/R_fC_f)}$$

تابع تبدیل فوق یک فرکانس معین بحرانی، یعنی قطبی در  $s = -1/R_fC_f$  دارد.

به شکل ۱۵-۴۹ (ب) می‌رویم. در این‌جا اجازه بدهید  $Z_f$  یک مقاومت و  $Z_1$  ترکیب موازی RC باشد:

$$Z_1 = \frac{1/C_1}{s + (1/R_1C_1)}$$

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_f}{Z_1} = -R_fC_1 \left( s + \frac{1}{R_1C_1} \right)$$

تنها فرکانس بحرانی، صفری واقع در  $s = -1/R_1C_1$  است.

برای تقویت‌کننده ایده‌آل، خروجی یا امپدانس تونن برابر صفر است و بنابراین  $V_{out}/V_{in}$  توابعی از هیچ باری چون  $Z_L$ ، در دو سر پایانه‌های خروجی نیستند. این مطلب در مورد ورودی تقویت‌کننده دیگری هم که به آن وصل شود صحت دارد و بنابراین ممکن است مدارهایی را که قطب‌ها و صفرهایی مشخص دارند به‌طور متوالی به هم وصل کنیم و در آن خروجی هر op amp به ورودی دیگر مستقیماً متصل گردد و به این ترتیب تابع تبدیل دلخواهی را تولید نماییم.

مداری طراحی کنید که تابع تبدیل آن  $H(s) = V_{out}/V_{in} = 10(s+2)/(s+5)$  باشد. قطب واقع در  $s = -5$  را می‌توان از شبکه‌ای به صورت شکل ۱۵-۴۹ (الف) به‌دست آورد. اگر این شبکه را A بنامیم داریم،  $1/R_{fA}C_{fA} = 5$ . به طور دلخواه  $R_{fA} = 100k\Omega$  را برمی‌گزینیم. بنابراین  $C_{fA} = 2\mu F$  می‌شود. برای این بخش از مدار:

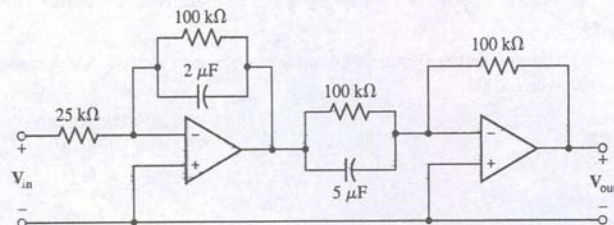
$$H_A(s) = -\frac{1/R_{fA}C_{fA}}{s + (1/R_{fA}C_{fA})} = -\frac{5 \times 10^5/R_{fA}}{s + 5}$$

سپس صفری را در  $s = -2$  در نظر می‌گیریم. از شکل ۱۵-۴۹ (ب)،  $1/R_{1B}C_{1B} = 2$  و با  $R_{1B} = 100k\Omega$  داریم  $C_{1B} = 5\mu F$  پس

$$H_B(s) = -R_{fB}C_{1B} \left( s + \frac{1}{R_{1B}C_{1B}} \right) = -5 \times 10^{-6}R_{fB}(s + 2)$$

$$H(s) = H_A(s)H_B(s) = 2.5 \frac{R_{fB}}{R_{fA}} \frac{s + 2}{s + 5}$$

ما طراحی را با انتخاب  $R_{fB} = 100k\Omega$  و  $R_{fA} = 25k\Omega$  کامل می‌کنیم. نتیجه در شکل ۱۵-۵۰ دیده می‌شود. خازن‌ها در این شکل نسبتاً بزرگ‌تر ولی دلیل آن فرکانس‌های پایین انتخابی برای قطب و صفر  $H(s)$  است. اگر  $H(s)$  به  $\frac{10(s+2000)}{(s+5000)}$  کاهش یابد، می‌توانیم مقادیر 2 و 5nF را به کار ببریم.



شکل ۱۵-۵۰ این شبکه حاوی دو op amp ایده‌آل است و تابع تبدیل ولتاژ

$$H(s) = V_{out}/V_{in} = 10(s+2)/(s+5)$$



۱۵-۱۷ مقادیر مناسبی برای  $Z_1$  و  $Z_2$  در هر سه طبقه متوالی تقویت‌کننده معین کنید تا تابع تبدیل  $H(s) = -20s^2/(s + 1000)$  ایجاد شود.

جواب:  $\infty, 1\text{ M}\Omega, 1\mu\text{F} \parallel \infty, 1\text{ M}\Omega, 1\mu\text{F} \parallel 10\text{ nF}, 1\text{ M}\Omega, 100\text{ k}\Omega, 5\text{ M}\Omega$

## ۱۵-۹ خلاصه فصل و مرور

- مقاومت‌ها در حوزه فرکانس با امپدانس به همان مقدار نشان داده می‌شوند.
- القاگرها در حوزه فرکانس با امپدانس  $sL$  نشان داده می‌شوند. اگر جریان اولیه غیر صفر باشد، آن‌گاه امپدانس باید با منبع ولتاژ  $sL(0^-)/s$  به‌طور سری و یا با منبع جریان  $i(0^-)/s$  به‌طور موازی وصل گردد.
- خازن‌ها در حوزه فرکانس با امپدانس  $1/sC$  نمایش داده می‌شوند. اگر ولتاژ اولیه غیر صفر باشد، آن‌گاه امپدانس باید با منبع ولتاژ  $v(0^-)/s$  سری و یا با منبع جریان  $Cv(0^-)$  موازی باشد.
- تحلیل گرهی و تک‌حلقه‌ای در حوزه  $s$  منجر به معادلات همزمانی برحسب چندجمله‌ای‌های  $s$  می‌گردد. خصوصاً متلب ابزار خوبی برای حل چنین سیستم‌هایی از معادلات است.
- جمع و تبدیل منبع و قضایای تونن و نورتن همگی در حوزه  $s$  هم اعمال می‌شوند.
- تابع تبدیل مدار  $H(s)$  به صورت نسبت خروجی حوزه زمان به ورودی حوزه زمان است. هر یک از کمیت‌ها می‌توانند ولتاژ یا جریان باشند.
- صفرهای  $H(s)$  مقادیری هستند که به ازای آن‌ها  $H(s)$  صفر می‌شود. قطب‌های  $H(s)$  مقادیری هستند که به ازای آن‌ها  $H(s)$  بی‌نهایت می‌شود.
- کانونیون مفاهیم ریاضی و گرافیکی تعیین خروجی یک مدار را از پاسخ ضربه  $h(t)$  فراهم می‌کند.
- روش‌های گرافیکی متعددی برای نمایش عبارات حوزه  $s$  برحسب قطب‌ها و صفرها وجود دارد. چنین نمودارهایی برای طراحی یک مدار با پاسخ مطلوب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

## ۱۵-۱۰ خواندنی‌های کمکی

More details regarding  $s$ -domain analysis of systems, use of Laplace transforms, and properties of transfer functions can be found in:

K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4th ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2002.

A good discussion of various types of oscillator circuits can be found in:

R. Mancini, *Op Amps for Everyone*, 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

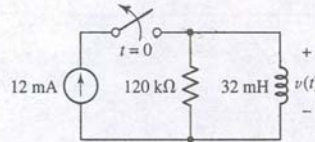
and

G. Clayton and S. Winder, *Operational Amplifiers*, 5th ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

## مسائل

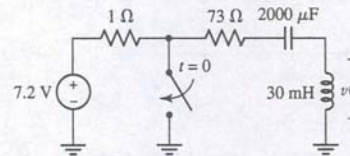
### ۱۵-۱ $Z(s)$ و $Y(s)$

۱. همه معادل‌های حوزه  $s$  ممکن در مدار شکل ۱۵-۵۱ را رسم کنید.



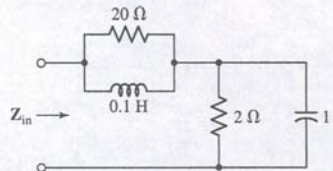
شکل ۱۵-۵۱

۲. همه معادل‌های حوزه  $s$  ممکن مدار شکل ۱۵-۵۲ را رسم نمایید.



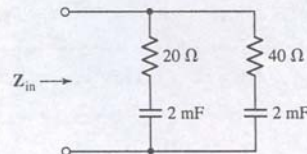
شکل ۱۵-۵۲

۳. به شکل ۱۵-۵۳ مراجعه کنید و (الف)  $Z_{in}(s)$  را به صورت نسبت دو چندجمله‌ای از  $s$  پیدا کنید. (ب)  $Z_{in}(-80)$  را به دست آورید، (ج)  $Z_{in}(j80)$ ، (د) ادمیتانس شاخه  $RL$  موازی،  $Y_{RL}(s)$  را به صورت نسبت چندجمله‌ای‌های  $s$  مشخص کنید. (ه) کار را برای  $Y_{RC}(s)$  تکرار نمایید. (و) نشان دهید که  $Z_{in} = (Y_{RL} + Y_{RC})/Y_{RL}Y_{RC}$ .



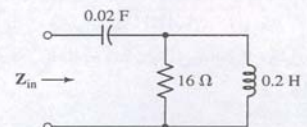
شکل ۱۵-۵۳

۴. امپدانس معادل تونن نظاره‌شده از پایانه مدار شکل ۱۵-۵۴ را بیابید.



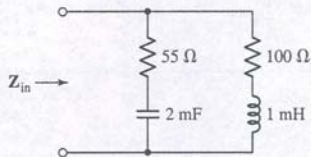
شکل ۱۵-۵۴

۵. برای شکل ۱۵-۵۵، (الف)  $Z_{in}(s)$  را به صورت نسبت دو چندجمله‌ای از  $s$  پیدا کنید. (ب)  $Z_{in}(j8)$  را به فرم دکارتی درآورید. (ج)  $Z_{in}(-2 + j6)$  را به فرم قطبی درآورید. (د) برای این‌که در  $s = -5 + j0$ ، امپدانس  $Z_{in} = 0$  باشد، مقاومت  $16\Omega$  را تا چه مقداری باید تغییر داد. (ه) برای  $Z_{in} = \infty$  در  $s = -5 + j0$ ، مقاومت فوق را چقدر باید تغییر داد.



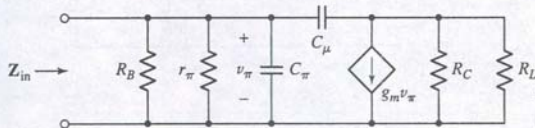
شکل ۱۵-۵۵

۶. (الف) امپدانس معادل تونن از دید پایانه‌های مدار شکل ۱۵-۵۶ را به دست آورید. (ب) مقدار امپدانس را به عنوان تابعی از فرکانس  $\omega$  برای  $\sigma = 0$  رسم نمایید.



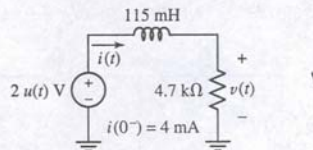
شکل ۱۵-۵۶

۷. امپدانس ورودی  $Z_{in}$  مدار شکل ۱۵-۵۷ را معین کنید. این مدار مدلی خطی از یک تقویت‌کننده ترانزیستوری پیوندی دوقطبی است و برای فرکانس‌هایی تا چند MHz معتبر است. جواب را به صورت دو چند جملهای بیان کنید.



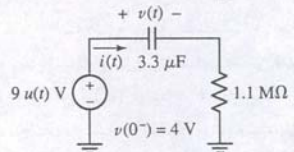
شکل ۱۵-۵۷

۸. در مدار شکل ۱۵-۵۸ با شروع کار از حوزه  $s$ ،  $v(t)$  را پیدا کنید.



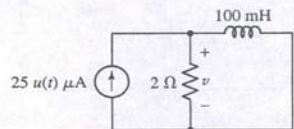
شکل ۱۵-۵۸

۹. از تکنیک‌ها تحلیل حوزه  $s$  برای تعیین جریان خازن،  $i(t)$ ، در شکل ۱۵-۵۹ استفاده نمایید.



شکل ۱۵-۵۹

۱۰. (الف) مدار شکل ۱۵-۶۰ را به حوزه  $s$  ببرید. (ب) عبارتی برای توان جذب‌شده پیدا کنید.



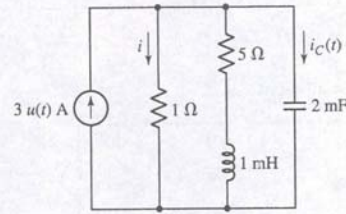
شکل ۱۵-۶۰

## ۱۵-۲ تحلیل گرهی و تک‌حلقه‌ای در حوزه s

۱۱. مدار شکل ۱۵-۶۱ را ملاحظه کنید. با تکنیک حوزه  $s$ ، ولتاژ‌گره‌های  $v_1(t)$  و  $v_2(t)$  را اگر  $v_1(0^-) = -2\text{ V}$  باشد، پیدا کنید.

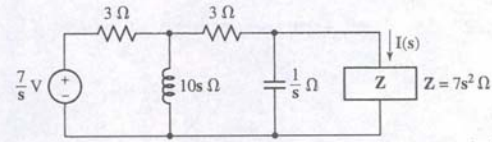


تحلیل مدار در حوزه s



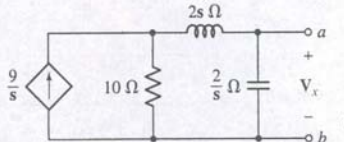
شکل ۱۵.۷۲

۲۷. برای مدار حوزه s شکل ۱۵.۷۲، معادل تونن را از دید امپدانس  $7s^2\Omega$  معین کنید و از آن برای تعیین  $\mathbf{I(s)}$  استفاده کنید.



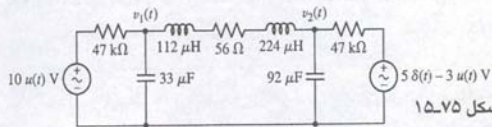
شکل ۱۵.۷۳

۲۸. برای مدار حوزه s شکل ۱۵.۷۴، معادل تونن را در دو سر پایانه‌های a و b به دست آورید.



شکل ۱۵.۷۴

۲۹. (الف) از روش تجمیع در حوزه s برای یافتن  $v_1(t)$  و  $v_2(t)$  در مدار شکل ۱۵.۷۵ استفاده کنید. (ب)  $v_1(t)$  و  $v_2(t)$  را بیابید.

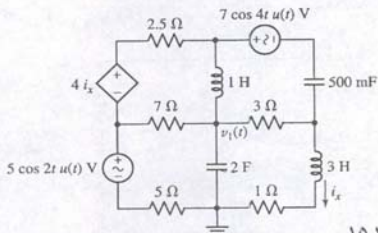


شکل ۱۵.۷۵

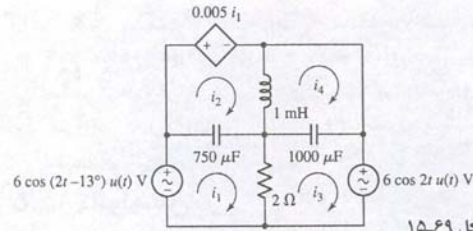
۳۰. توان جذب‌شده p(t) به وسیله مقاومت 56 ohm در شکل ۱۵.۷۵ با تقریب اول تبدیل منبع در حوزه s معین کنید.

۳۱. (الف) معادل نورتن حوزه s از دید منبع 10u(t) V شکل ۱۵.۷۵ را بیابید. (ب) جریان خارج‌شده از منبع 10u(t) V در  $t = 1.5\text{ms}$  معین کنید.

۳۲. (الف) از روش تجمیع برای یافتن عبارت  $V_1(s)$  در شکل ۱۵.۷۶ در حوزه s استفاده کنید. (ب)  $v_1(t)$  را به دست آورید.

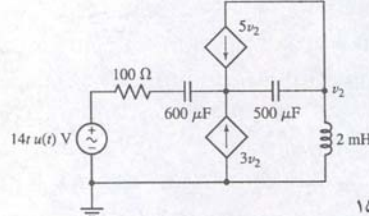


شکل ۱۵.۷۶



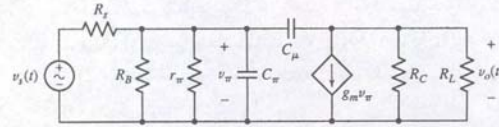
شکل ۱۵.۶۹

۲۲. با فرض نبود انرژی ذخیره‌شده در شکل ۱۵.۷۰ مقدار  $v_2$  در t برابر با (الف) 1 ms، (ب) 100 ms و (ج) 10 s حساب کنید.



شکل ۱۵.۷۰

۲۳. اگر منبع ولتاژ وابسته در شکل ۱۵.۷۱ با شوک توان در حین رعد و برق آسیب دیده باشد به نحوی که دیگر کار نکند (یعنی اکنون یک مدار باز است) عبارتی برای توان جذب‌شده به وسیله مقاومت 2 ohm به دست آورید. فرض کنید که فقط انرژی اولیه القاگر در مدار است به نحوی که جریان در القاگر 1 mA در  $t = 0^-$  فقط 1 mA است.



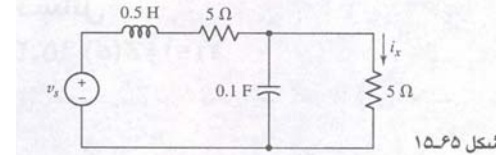
شکل ۱۵.۷۱

۲۴. (الف) برای مدار شکل ۱۵.۷۱ یک مدل خطی مدار تقویت‌کننده ترانزیستوری پیوندی دوقطبی امیتر مشترک است، عبارتی برای بهره ولتاژ  $V_o/V_s$  به دست آورید. می‌توانید انرژی اولیه خازن را صفر فرض کنید. پاسخ خود را به صورت نسبت چندجمله‌ای‌های s مرتب‌شده بیان کنید. (ب) در این تابع تبدیل چند قطب وجود دارد.

### ۱۵.۳ تکنیک‌های دیگر در تحلیل مدار

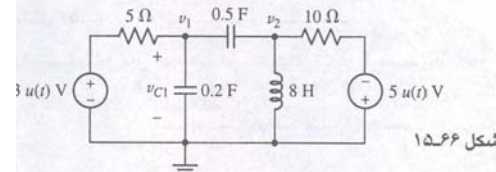
۲۵. (الف) مدار شکل ۱۵.۷۲ را به حوزه s ببرید. (ب) معادل تونن از دید مقاومت 1 ohm را پیدا کنید. (ج) مدار ساده‌شده را برای یافتن عبارت برای  $i(t)$  که جریان لحظه‌ای در مقاومت 1 ohm است تحلیل کنید.

۲۶. منبع جریان در شکل ۱۵.۷۲ را با منبع ولتاژ 20u(t) V جایگزین کنید، مرجع مثبت در بالا باشد. (الف) مدار را به حوزه s ببرید. (ب) معادل نورتن از دید مقاومت 1 ohm چیست. (ج) مدار ساده‌شده را برای تهیه  $i_C(t)$  تحلیل کنید.



شکل ۱۵.۶۵

۱۶. ولتاژ گرگی  $v_1(t)$  در مدار شکل ۱۵.۶۶ را بیابید. انرژی اولیه صفر فرض می‌شود.

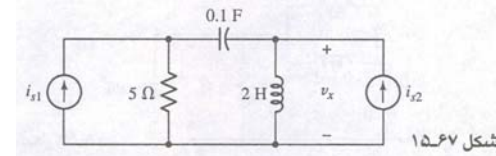


شکل ۱۵.۶۶

۱۷. عبارت حوزه زمان را برای جریان حلقه وسط مدار شکل ۱۵.۶۶ به دست آورید. انرژی اولیه صفر است.

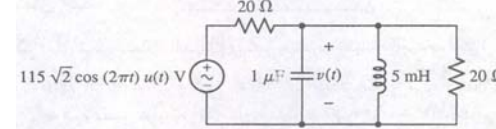
۱۸. ولتاژ گرگی  $v_1(t)$  را در مدار شکل ۱۵.۶۶ پیدا کنید. ولتاژ اولیه خازن  $v_C(0^-) = 9\text{V}$  است.

۱۹. اگر در مدار شکل ۱۵.۶۷ جریان  $i_{s1} = 20e^{-3t}\cos 4t \text{ u(t) A}$  و  $i_{s2} = 30e^{-3t}\sin 4t \text{ u(t) A}$  باشد، (الف) در حوزه فرکانس  $V_x$  به دست آورید. (ب)  $v_x(t)$  را بیابید.



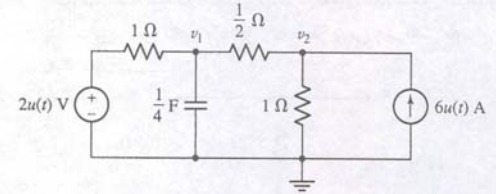
شکل ۱۵.۶۷

۲۰. (الف) عبارتی در حوزه زمان برای  $v(t)$  در شکل ۱۵.۶۸ معین کنید به‌شرطی که  $v(0^-) = 75\text{V}$  بوده و هیچ انرژی در القاگر ذخیره نشود، باشد (ب) پاسخ خود را به بخش (الف) برای تعیین جریان حالت ماندگاری که از منبع 115V جاری است به کار ببرید. (ج) با تحلیل فیزوری پاسخ بند (ب) را تأیید کنید.



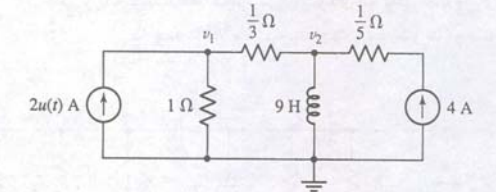
شکل ۱۵.۶۸

۲۱. جریان‌های حلقه  $i_1(t)$  و  $i_2(t)$  در شکل ۱۵.۶۹ را معین کنید به‌شرطی که جریان القاگر 1 mH، برابر 1 A در  $t = 0^-$  باشد نشان دهید که پاسخ شما با پاسخ حاصل از تحلیل فیزوری در حالت ماندگار برابر است.



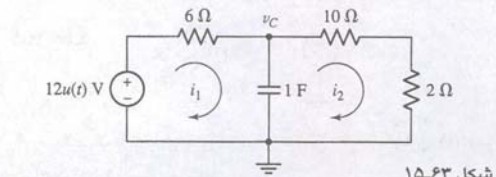
شکل ۱۵.۶۱

۱۲. مدار شکل ۱۵.۶۲ را ملاحظه کنید. (الف) با تکنیک حوزه s، ولتاژ گرگی‌های  $v_1(t)$  و  $v_2(t)$  را پیدا کنید. (ب)  $v_1(t)$  را رسم نمایید.



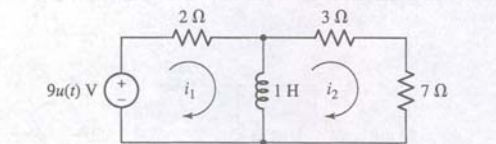
شکل ۱۵.۶۲

۱۳. مدار ساده مش شکل ۱۵.۶۳ حاوی دو مش است: (الف)  $i_1(t)$  و  $i_2(t)$  را با تحلیل مش در حوزه s معین کنید به‌شرطی که  $v_C(0^-) = 9\text{V}$  باشد. (ب) با PSpice صحت پاسخ خود را تحقیق کنید. برجسب‌های مناسب گذاشته و با شبیه‌سازی خود نتیجه را با نتیجه بخشی (الف) مقایسه کنید.



شکل ۱۵.۶۳

۱۴. مدار شکل ۱۵.۶۴ دارای دو مش است: (الف) هر دو جریان  $i_1(t)$  و  $i_2(t)$  را با روش تحلیل مش در فضای s معین کنید به‌شرطی که  $i_1(0^-) - i_2(0^-) = 8\text{ A}$  باشد. (ب) صحت نتیجه را با PSpice تحقیق کنید. برجسب‌های مناسب گذاشته و نتیجه شبیه‌سازی را با حل بخشی (الف) مقایسه کنید.

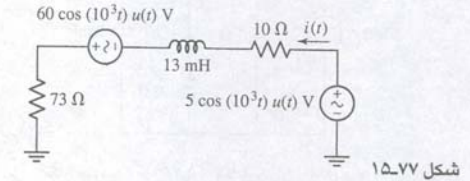


شکل ۱۵.۶۴

۱۵. (الف) در شکل ۱۵.۶۵ با فرض  $v_s = 10e^{-2t}\cos(10t + 30^\circ)\text{u(t)}$  در حوزه فرکانس  $\mathbf{I_x}$  را به دست آورید. (ب)  $i_x(t)$  را بیابید.



۳۳. (الف) با تبدیل منبع در حوزه  $s$ ،  $I(s)$  را در مدار شکل ۱۵.۷۷ بیابید. (ب)  $i(t)$  را به دست آورید. (ج) مقدار حالت ماندگار  $i(t)$  را به دست آورید.



شکل ۱۵.۷۷

## ۱۵.۴ قطب‌ها، صفرها و توابع تبدیل

۳۴. برای توابع تبدیل زیر، قطب‌ها و صفرها را معین کنید:

$$(الف) \frac{7s}{s(3s^2 - 9s + 4)}$$

$$(ب) \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 2s + 4)(s^2 + 1)}$$

۳۵. همه قطب‌ها و صفرهای هر تابع حوزه  $s$  زیر را پیدا کنید:

$$(الف) \frac{3s^2}{s(s^2 + 4)(s - 1)}$$

$$(ب) \frac{s^2 + 2s - 1}{s^2(4s^2 + 2s + 1)(s^2 - 1)}$$

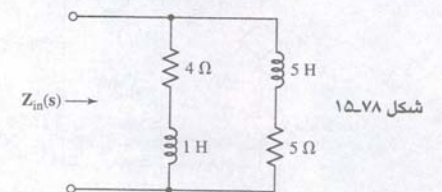
۳۶. ترکیب سری یک مقاومت  $5\Omega$  و یک خازن  $0.2F$  با ترکیب سری مقاومت

$2\Omega$  و القاگر  $5H$  موازی است. (الف) ادمیتانس ورودی  $Y_1(s)$  را برای ترکیب موازی به صورت نسبت دو چندجمله‌ای برحسب  $s$  به دست آورید. (ب) همه قطب‌ها و صفرهای  $Y_1(s)$  را معین کنید. (ج) اگر مقاومت  $12\Omega$  با  $Y_1(s)$  موازی بسته شود، همه قطب‌های ادمیتانس ورودی را مشخص کنید. (د) همه صفرهای ورودی را اگر مقاومت  $10\Omega$  با  $Y_1(s)$  سری باشد، مشخص نمایید.

۳۷. همه قطب‌ها و صفرهای (الف) ادمیتانس ورودی تعریف شده در شکل ۱۵.۵۴ را معین کنید. (ب) ادمیتانس ورودی تعریف شده در شکل ۱۵.۵۶ را تعیین نمایید.

۳۸. ادمیتانس  $Y(s)$  دارای صفرهایی در  $s = 0$  و  $s = -10$  و قطب‌هایی در  $s = -5$  و  $s = -1$  و  $s = -20$  است. اگر با  $s \rightarrow \infty$  داشته باشیم  $Y(s) \rightarrow 12s$ ، مطلوبست  $Y(10)$ ، (ب)  $Y(-j10)$ ، (ج)  $Y(-15)$ ، و (د) قطب‌ها و صفرها  $Y(s) + 5$ .

۳۹. (الف)  $Z_{in}(s)$  را در شبکه شکل ۱۵.۷۸ به دست آورید. (ب) همه فرکانس‌های بحرانی  $Z_{in}(s)$  را بیابید.



شکل ۱۵.۷۸

۴۰. یک مدار مفروض، تابع تبدیل  $H(s) = (s + 3)/[(s + 5)(s^2 + 6s + 25)]$  را دارد. پاسخ خروجی در حوزه  $s$  را برای ورودی‌های زیر به دست آورید. (الف)  $\delta(t)$ ، (ب)  $e^{-4t}u(t)$ ، (ج)  $[2\cos 15t]u(t)$ ، (د)  $t e^{-t}u(t)$  و (ه) قطب‌ها و صفرهای هر پاسخ خروجی را بیابید.

## ۱۵.۵ کانولوشن

۴۱. پاسخ ضربه یک سیستم خطی برابر است با  $h(t) = 5\sin 2\pi t[u(t) - u(t - 1)]$ . یک سیگنال ورودی  $x(t) = 2[u(t) - u(t - 2)]$  اعمال می‌شود. برای ترسیم خروجی  $y(t)$  از کانولوشن استفاده کنید.

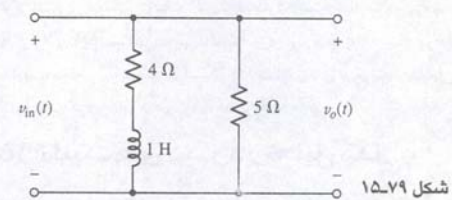
۴۲. فرض کنید  $f_1(t) = e^{-5t}u(t)$  و  $f_2(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$  باشد. با روش‌های زیر عبارت  $f_1(t) * f_2(t) = Y(t)$  را پیدا کنید. (الف) کانولوشن در حوزه زمان (ب)  $\{F_1(s)F_2(s)\} \mathcal{L}^{-1}$ .

۴۳. وقتی که یک ضربه  $\delta(t)$  به یک شبکه دو ورودی اعمال شود، ولتاژ خروجی  $V_o(t) = 4u(t) - 4u(t - 2)$  باشد. ولتاژ ورودی  $V_o(t)$  را اگر ولتاژ ورودی  $2u(t - 1)V$  باشد، پیدا کرده رسم کنید.

۴۴. فرض کنید  $h(t) = 2e^{-3t}u(t)$  و  $x(t) = u(t) - \delta(t)$  باشد. مطلوبست  $y(t) = h(t) * x(t)$  (الف) با روش کانولوشن در حوزه زمان (ب)  $\{H(s)X(s)\} \mathcal{L}^{-1}$  را بیابید.

۴۵. پاسخ ولتاژ ضربه یک مدار خاص به صورت  $h(t) = 5u(t) - 5u(t - 2)$  داده شده است. پاسخ‌های حوزه  $s$  و حوزه  $t$  را به دست آورید. اگر ولتاژ تحریک  $V_{in}(t)$  برابر باشد با (الف)  $3\delta(t)$ ، (ب)  $3u(t)$ ، (ج)  $3u(t) - 3u(t - 2)$ ، (د)  $3\cos 3t$ ، (ه) پاسخ‌های ولتاژ (الف) تا (د) را در حوزه زمان بکشید.

۴۶. (الف) پاسخ ضربه  $h(t)$  شبکه شکل ۱۵.۷۹ را معین کنید. (ب) از کانولوشن برای تعیین  $V_o(t)$  استفاده کنید، به شرطی که  $V_{in}(t) = 8u(t)$  باشد.

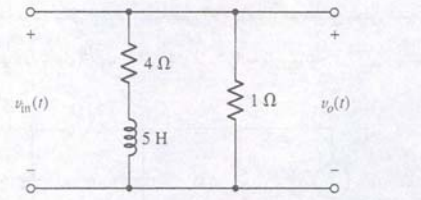


شکل ۱۵.۷۹

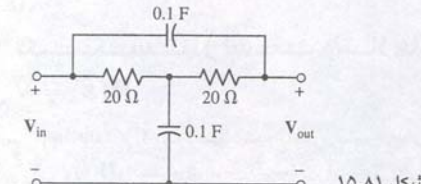
۴۷. (الف) پاسخ ضربه  $h(t)$  شبکه شکل ۱۵.۸۰ را به دست آورید. (ب) از کانولوشن برای تعیین  $V_o(t)$  استفاده کنید، به شرطی که  $V_{in}(t) = 8e^{-t}u(t)$  باشد.

## ۱۵.۶ صفحه فرکانس مختلط

۴۸. برای شبکه شکل ۱۵.۸۱، نسبت  $H(s) = V_{out}/V_{in}$  را پیدا کنید و همه فرکانس‌های بحرانی را بیابید.

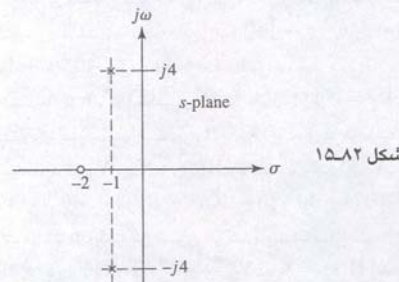


شکل ۱۵.۸۰



شکل ۱۵.۸۱

۴۹. آرایش قطب - صفر  $H(s) = V_2(s)/V_1(s)$  را در شکل ۱۵.۸۲ به دست آورید.  $H(0) = 1$  فرض شود.  $|H(s)|$  را برای موارد زیر رسم کنید: (الف)  $\delta$ ، اگر  $\omega = 0$  باشد. (ب)  $\omega$  اگر  $\delta = 0$  باشد. (ج)  $|H(j\omega)|_{max}$  را به دست آورید.



شکل ۱۵.۸۲

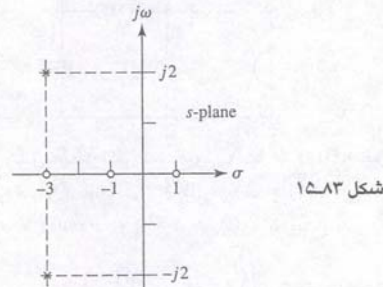
۵۰. یک قطعه ماشین الکتریکی دارای مشخصه امدانسی با دو صفر در  $s = -1$ ، یک قطب  $z = -0.5 + j\sqrt{3}/2$  است و در  $s = 0$  برابر  $1\Omega$  می‌باشد (الف) برج قطب - صفر را برای این امدانسی به دست آورید. (ب) مدل و ورق الاستیک اندازه امدانسی را رسم کنید. (ج) ترکیبی از مقاومت‌ها، القاگرها و خازن‌هایی را که امدانسی برابر دارند، پیدا کنید (راهنمایی: از عبارت حوزه  $s$  به عقب کار کنید).

۵۱. با فرض بهره ولتاژ  $H(s) = (10s^2 + 55s + 75)/(s^2 + 16)$ ، مطلوبست فرکانس‌های بحرانی در صفحه  $s$ ، (ب)  $H(0)$  و  $H(\infty)$  را مشخص نمایید. (ج) اگر یک مدلی از  $|H(s)|$  دارای ارتفاع 3 سانتی‌متری در مبدأ باشد، در  $j\omega$  چه ارتفاعی دارد؟ (د) به‌طور تقریبی  $|H(j\omega)|$  را در برابر  $\sigma$  و  $|H(j\omega)|$  در برابر  $\omega$  رسم کنید.

۵۲. در یک آزمایشگاه سری دولتی، یک جعبه فلزی بد شکل به وسیله محقق که نهارش به وسیله رفقا آسیب دیده بود پیدا شد درحالی‌که اثری از غذا نبود، محقق تصمیم گرفت ادمیتانس جعبه را اندازه بگیرد و چنین درمی‌یابد که ادمیتانس را می‌توان به صورت

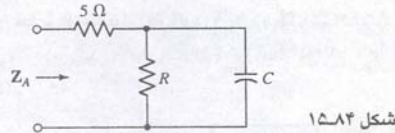
$Y(s) = (5s^2 + 5s + 2)/(5s^2 + 15s + 2)$  مدل‌سازی کرد. (الف) برج قطب و صفر آن را رسم کنید. (ب) مدل ورق الاستیک مقدار ادمیتانس را رسم کنید. (ج) محل غذای گم‌شده را پیدا کنید به‌شرطی‌که ضرایب چندجمله‌ای مخرج مربوط به عرض جغرافیایی (درجه، دقیقه و ثانیه) و ضرایب چندجمله‌ای صورت مربوط به طول جغرافیایی (درجه، دقیقه و ثانیه) محل غذا باشد.

۵۳. برج قطب و صفر در شکل ۱۵.۸۳ مربوط به بهره جریان  $H(s) = I_{out}/I_{in}$  است. فرض کنید  $H(-2) = 6$  است. (الف)  $H(s)$  را به صورت نسبت چندجمله‌ای‌هایی از  $s$  نشان دهید. (ب)  $H(0)$  و  $H(\infty)$  را به دست آورید. (ج) مقدار هر پیکان از فرکانس بحرانی به  $j\omega$  را معین کنید.



شکل ۱۵.۸۳

۵۴. شبکه سه عنصری شکل ۱۵.۸۴ دارای امدانسی ورودی  $Z_A(s)$  است که صفری در  $j\omega = -10$  دارد. اگر مقاومت  $20\Omega$  به‌طور سری با شبکه قرار گیرد، صفر امدانسی جدید به  $j\omega = -3.6$  و  $s = 0$  جابه‌جا می‌شود.  $R$  و  $C$  را به دست آورید.

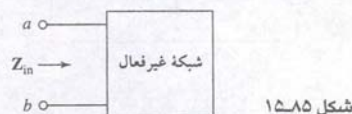


شکل ۱۵.۸۴

۵۵. فرض کنید  $H(s) = \frac{100(s + 2)}{(s^2 + 2s + 5)}$  باشد، (الف) نمودار قطب و صفر را برای  $H(s)$  نشان دهید. (ب)  $H(j\omega)$  را به دست آورید. (ج)  $|H(j\omega)|$  را پیدا کنید. (د)  $|H(j\omega)|$  را در برابر  $\omega$  ترسیم کنید. (ه)  $\omega_{max}$  را به دست آورید. در این فرکانس  $|H(j\omega)|$  ماکزیمم است.

## ۱۵.۷ پاسخ طبیعی و صفحه $s$

۵۶. برای شکل ۱۵.۸۵ فرض کنید  $Z_{in}(s) = (5s + 20)/(s + 2)$ ، ولتاژ  $V_{ab}(t)$  بین پایانه‌های مدار باز، اگر  $V_{ab}(t) = 25V$  باشد. (ب) جریان  $i_{ab}(t)$  حالت اتصال کوتاه پایانه‌های  $a$  و  $b$ ، اگر  $i_{ab}(0) = 3A$  باشد.

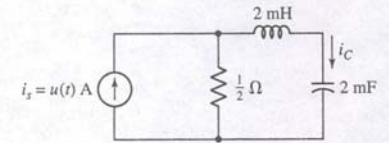


شکل ۱۵.۸۵



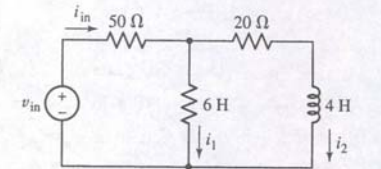
۵۷. فرض کنید در شبکه غیرفعال شکل ۱۵۸۵ وارد به پایانه  $a$  یعنی  $i_a(t)$  را پیدا کنید، با این فرض که  $v_{ab}(t)$  برابر باشد با (الف)  $160e^{-6t}u(t)$  V، (ب)  $160e^{-6t}u(t)$  V، (ج)  $i_a(0) = 0$  و (د)  $\frac{di_a}{dt} = 32$  A/s در  $t = 0$ .

۵۸. (الف) برای مدار شکل ۱۵۸۶،  $H(s) = I_C/I_s$  را معین کنید. (ب) قطب‌های  $H(s)$  را به دست آورید. (ج) برای مدار RLC مقدار  $\alpha$ ،  $\omega_0$  و  $\omega_d$  را پیدا کنید. (د) پاسخ واداشته  $i_{C_f}(t)$  به طور کامل. (ه) فرم پاسخ طبیعی  $i_{C_n}(t)$  را بیابید. (و) مقادیر  $i_C(0^+)$  و  $di_C/dt$  در  $t = 0^+$  را معین کنید. (ز) پاسخ کامل  $i_C(t)$  را بنویسید.



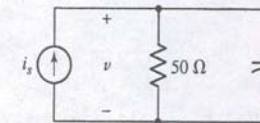
شکل ۱۵۸۶

۵۹. برای مدار شکل ۱۵۸۷: (الف) قطب‌های  $H(s) = I_{in}/V_{in}$  را پیدا کنید. (ب) فرض کنید  $i_1(0^+) = 5A$  و  $i_2(0^+) = 2A$  باشد. همچنین اگر  $V_{in}(t) = 500u(t)$  V باشد  $i_n(t)$  را به دست آورید.



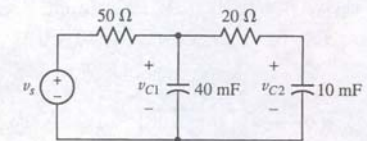
شکل ۱۵۸۷

۶۰. (الف) برای مدار شکل ۱۵۸۸،  $H(s) = V(s)/I_s(s)$  را پیدا کنید. اگر  $i_s(t)$  برابر موارد زیر باشد  $v(t)$  را بیابید. (ب)  $2u(t)$  A، (ج)  $4e^{-10t}$  A و (د)  $4e^{-10t}u(t)$  A.



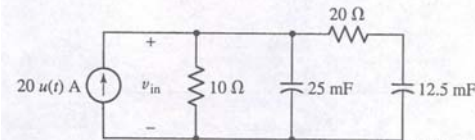
شکل ۱۵۸۸

۶۱. برای مدار شکل ۱۵۸۹: (الف)  $H(s) = V_{C2}/V_s$  را پیدا کنید. (ب) فرض کنید  $v_{C1}(0^+) = 0$  و  $v_{C2}(0^+) = 0$  باشد آن‌گاه اگر  $V(t) = u(t)$  باشد  $v_{C2}(t)$  را بیابید.



شکل ۱۵۸۹

۶۲. با مراجعه به شکل ۱۵۹۰، امپدانس  $Z_{in}(s)$  را از دید منبع معین کنید. این عبارت را برای تعیین  $v_{in}(t)$  در  $t > 0$  به کار ببرید.



شکل ۱۵۹۰

۱۵-۸ تکنیک سنتز نسبت ولتاژها  
 $H(s) = V_{out}/V_{in}$

۶۳. برای مدار op amp شکل ۱۵۴۸، نسبت چندجمله‌ای برحسب  $s$  را برای  $H(s) = V_{out}/V_{in}$  به دست آورید. فرض کنید مقادیر امپدانس برابر است با (به  $\Omega$ ): (الف)  $Z_1(s) = 10^3 + (10^8/s)$ ،  $Z_f(s) = 5000$ ، (ب)  $Z_1(s) = 10^3 + (10^8/s)$ ،  $Z_f(s) = 5000$ ، (ج)  $Z_1(s) = 10^3 + (10^8/s)$ ،  $Z_f(s) = 10^3 + (10^8/s)$ .

۶۴. در مدار شکل ۱۵۴۹ (ب) بگذارید  $R_f = 20k\Omega$  باشد، آن‌گاه  $C_1$  و  $R_1$  را طوری مشخص کنید که  $H(s) = V_{out}/V_{in}$  در دو طبقه برابر باشد با (الف)  $-50$ ، (ب)  $-10^{-3}(s + 10^4)$ ، (ج)  $10^3(s + 10^4)$  و (د)  $10^{-4}(s + 10^5)$ .

۶۵. در مدار op amp شکل ۱۵۴۹ (الف)،  $R_f = 20k\Omega$  در نظر بگیرید و سپس مقادیر  $R_1$  و  $C_1$  را طوری در دو طبقه به دست آورید که  $H(s) = V_{out}/V_{in}$  برابر باشد با (الف)  $-50$ ، (ب)  $-10^{-3}/(s + 10^4)$ ، (ج)  $-10^{-4}/(s + 10^3)$  و (د)  $100/(s + 10^5)$ .

۶۶. چند مدار op amp را به طور سری به کار ببرید تا تابع تبدیل ایجاد شود. فقط مقاومت‌های  $10k\Omega$  را به کار ببرید. از اتصال کوتاه و مدار باز استفاده کنید ولی همه مقادیر ظرفیت را مشخص نمایید.

۶۷. یک نوسان‌ساز یا اسلاتور پل‌وین طراحی کنید. فقط از مقاومت‌های استاندارد استفاده کنید. طراحی را با شبیه‌سازی PSpice تأیید کنید.

۶۸. یک اسلاتور پل‌وین با فرکانس 60 Hz طراحی نمایید. طرح خود را با شبیه‌سازی PSpice تأیید کنید.

۶۹. یک مدار اسلاتور طراحی کنید تا یک سیگنال سینوسی 440 Hz تولید شود. فقط از مقاومت‌های استاندارد استفاده نمایید. با مدار شما چه نتی از موسیقی معادل است؟

۷۰. مداری طراحی کنید که ولتاژ خروجی‌اش یک موج سینوسی 220 Hz یک موج 440Hz سینوسی باشد. پاسخ خود را با PSpice تست کنید. آیا دو موج سینوسی با هم هم‌فازند.

## فصل شانزدهم

## پاسخ فرکانس

### مقدمه

اسخ فرکانس را قبلاً در چند فصل دیدیم، ولی خواننده ممکن است بپرسد پس چه لزومی دارد که اکنون عنوان کلی فصل را به آن اختصاص دهیم. مفهوم پاسخ فرکانس که به شدت در همه زمینه علوم مهندسی اهمیت دارد، مبنای درک فاکتورهای ثبات و پایداری در سیستم‌ها، حساب می‌آید. این سیستم‌ها می‌توانند الکتریکی، مکانیکی، شیمیایی یا بیولوژیکی شوند. همچنین خواهیم دید که مفاهیم پاسخ فرکانس در بسیاری از کاربردهای مهندسی به کار گرفته شده و به ورای موضوع پایداری گسترش یافته است. مثلاً در کار با سیستم‌های مخابراتی اغلب با تکنیک فرکانس مواجه می‌شویم (مثلاً ایستگاه رادیویی ناص). این کار هنگامی امکان‌پذیر است که درک کاملی از پاسخ فرکانس مدارهای فیلتر یا مافی را داشته باشیم. به طور خلاصه می‌توان چندین صفحه در توجیه پاسخ فرکانس داشت. با این وجود، ترجیح می‌دهیم با چرخش به جنبه الکتریکی به اصل موضوع پرداخته با طراحی مدارهای فیلتر ساده در کاربردهای روزانه مانند تقویت‌کننده‌های صوتی به اوج برسیم.

### ۱۶- تشدید موازی

اما این قدر بر توابع تحریک سینوسی اصرار می‌ورزیم در حالی که در عمل به ندرت با آنها مواجهیم؟ البته صنعت تولید برق را می‌توانیم مستثنی بدانیم. هر چند که کاملاً موجهی سینوسی است و در تمام این بحث با تحریک سینوسی سروکار داریم، ولی در آن‌جا هم اهمی لازم می‌شود که فرکانس‌های دیگر ناشی از غیرخطی بودن بعضی از عناصر را لحاظ کنیم. از طرفی در اکثر سیستم‌های الکتریکی توابع تحریک سینوسی نیستند. در سیستم‌های انتقال اطلاعات یک موج سینوسی به خودی خود بی‌ارزش است و حاوی اطلاعات محدودی می‌باشد زیرا مقادیر آینده آن از گذشته قابل پیش‌بینی است. علاوه بر این، پس از یک پروید هر موج غیرسینوسی پررودیک هم حاوی هیچ اطلاعات اضافی نیست.

اکنون فرض کنید تابع تحریک خاصی متشکل از مؤلفه‌های سینوسی بوده و محدوده کانسی آن 10 تا 100 Hz باشد. تصور کنید این موج به شبکه‌ای اعمال شود که خاصیت زیر دارد. هر موج سینوسی که فرکانس آن صفر تا 200 Hz باشد و در پایانه‌های ورودی شبکه اهر شود، دامنه خروجی بدون اعوجاج دو برابر دامنه ورودی، و اختلاف فاز ورودی - خروجی صفر خواهد داشت. بنابراین تابع خروجی این شبکه دو برابر ورودی و بدون

### مفاهیم کلیدی

فرکانس تشدید مدارهای القاگر و خازنی

ضریب کیفیت

پهنای باند

مقیاس‌بندی فرکانس و اندازه

تکنیک‌های نمودار بُود

فیلترهای پایین و بالاگذر

طراحی فیلتر میان‌گذر

فیلترهای فعال







همان‌طور که گفتیم تشدید هنگامی رخ می‌دهد که ولتاژ و جریان در پایانه‌های ورودی هم‌فاز باشند. شرط برقراری چنین حالتی برابر است با

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} = 0$$

به تشدید با تنظیم  $L$ ،  $C$  و یا  $\omega$  می‌توان رسید. ما توجه خود را به حالتی که در آن  $\omega$  تغییر کند، معطوف می‌نماییم. به این ترتیب فرکانس تشدید  $\omega_0$  برابر است با:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{rad/s} \quad (۲)$$

یا

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{Hz} \quad (۳)$$

این فرکانس تشدید  $\omega_0$  همان فرکانس تشدید تعریف شده در معادله (۱۰) از فصل ۹ می‌باشد. در این‌جا آرایش قطب - صفر تابع ادمیتانس با مزایای قابل توجهی قابل استفاده است. با فرض

$$Y(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC$$

با

$$Y(s) = C \frac{s^2 + sRC + 1/LC}{s} \quad (۴)$$

می‌توان با تجزیه به عوامل، صفرهای  $Y(s)$  را مشخص کرد.

$$Y(s) = C \frac{(s + \alpha - j\omega_d)(s + \alpha + j\omega_d)}{s}$$

که در آن  $\alpha$  و  $\omega_d$  همان کمیت‌هایی هستند که مادر پاسخ طبیعی مدار RLC موازی بخش ۵-۹ در مورد آن‌ها صحبت کردیم. یعنی  $\alpha$  ضریب میرایی نهایی است.

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

فرکانس تشدید طبیعی است (با فرکانس تشدید  $\omega_0$  اشتباه نشود).

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

آرایش قطب و صفر در شکل ۱۶-۲ (الف) مستقیماً از فرم حاصل ضرب به دست آمده است.

با ملاحظه رابطه بین  $\alpha$ ،  $\omega_d$  و  $\omega_0$  واضح است که فاصله مبدأ در صفحه  $s$  تا یکی از صفرهای ادمیتانس، عددی برابر  $\omega_0$  می‌باشد. پس با فرض داشتن آرایش قطب - صفر، فرکانس تشدید را می‌توان به طور گرافیکی هم به دست آورد. ما با استفاده از مبدأ در صفحه  $s$  نقطه یک قوس را طی می‌کنیم و از یک صفر عبور می‌نماییم. تقاطع این قوس و محور  $j\omega$  محل  $s = j\omega_d$  را به دست می‌دهد. واضح است که  $\omega_0$  کمی بزرگتر از فرکانس تشدید طبیعی  $\omega_d$  است، ولی با افزایش نسبت  $\omega_d$  به  $\alpha$ ، نسبت آن‌ها به سمت واحد یا یک میل می‌کند.

### تشدید و پاسخ ولتاژ

کنون بیایید اندازه پاسخ یعنی ولتاژ  $V(s)$  در شکل ۱۶-۱ را به‌عنوان تابعی از فرکانس متغیر منبع تحریک بررسی کنیم. اگر منبع را یک منبع جریان سینوسی با دامنه ثابت فرض کنیم، پاسخ ولتاژ متناسب با ادمیتانس ورودی است. این پاسخ از نمودار قطب - صفر ادمیتانس به دست می‌آید:

$$Z(s) = \frac{s/C}{(s + \alpha - j\omega_d)(s + \alpha + j\omega_d)}$$

اعوجاج است. با این وجود، اگر شبکه دارای پاسخ فرکانسی بود که مقادیر ورودی سینوسی بین ۱۰ الی ۵۰ Hz با ضریب متفاوتی نسبت به فرکانس ۵۰ الی ۱۰۰ Hz ضرب می‌شد، آن‌گاه خروجی اعوجاج می‌داشت. در این حالت دیگر خروجی تقویت شده شبیه ورودی نخواهد بود. البته این موج اعوجاج‌دار ممکن است گاهی مطلوب باشد و گاهی هم نامطلوب. یعنی پاسخ فرکانس ممکن است عمده‌اوری انتخاب شود که بعضی از مؤلفه‌های فرکانس یک تابع تحریک را حذف و یا بعضی را تقویت نماید.

چنین رفتاری، خاص مدارهای تیون شده یا مدارهای تشدید (رزنانس) است که آن‌ها را در این فصل خواهیم دید. در بحث تشدید همه روش‌های مورد بحث در نمایش پاسخ فرکانس را اعمال خواهیم کرد.

### تشدید

در این بخش پدیده مهمی را که ممکن است در مدارهای حاوی القاگر و خازن رخ دهد، مطالعه می‌کنیم. این پدیده تشدید یا رزنانس نامیده می‌شود و با احتیاط می‌توان آن را وضعیتی دانست که پاسخ یک سیستم فیزیکی به یک تابع تحریک با دامنه ثابت، به حداکثر خود می‌رسد. با این وجود، ما اغلب برای توابع غیر سینوسی هم صحبت از تشدید می‌کنیم. سیستم تشدید می‌تواند الکتریکی، مکانیکی، هیدرولیکی، صوتی یا نوع دیگری باشد. ولی ما توجه خود را عمدتاً به سیستم‌های الکتریکی معطوف می‌داریم.

تشدید پدیده آشنایی است. مثلاً بالا و پایین پریدن در تکان‌های یک اتومبیل، در صورت داشتن فرکانس مناسب (این مقدار حدود یک پرش در هر ثانیه است) و ضربه گیرهای نامناسب می‌تواند خودرو را به حالت نوسان درآورد. در هر حال اگر فرکانس جهش اضافه ی کم شود، پاسخ لرزشی خودرو به میزان قابل توجهی کم می‌شود. تشریح بیشتر این موضوع می‌تواند خواننده ابرایی باشد که می‌تواند جام کریستال را با نت تنظیم شده در فرکانس مناسبی بشکند. در هر یک از این مثال‌ها او فرکانسی صحبت می‌کنیم که تا رخداد تشدید تنظیم می‌گردد. می‌توان حتی سائز، شکل و ماده سیستم مکانیکی لرزنده را تنظیم کرد. ولی این کار با لحاظ فیزیکی چندان ساده نیست.

شرایط تشدید در سیستم فیزیکی بسته به هدف ممکن است مطلوب باشد و یا نباشد. در مثال خودرو و لرزش با دامنه زیاد ممکن است در سرعت‌های کم دلچسب باشد ولی قطعاً در سرعتی چون ۱۰۵ km/h چندان مطلوب نیست.

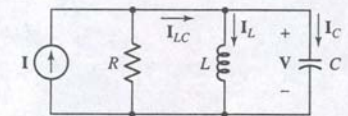
اکنون بیایید تشدید را دقیق‌تر تعریف کنیم. در یک شبکه الکتریکی دو پایانه حاوی حداقل یک القاگر و یک خازن، تشدید را حالتی تعریف می‌کنیم که در آن امپدانس ورودی شبکه مقاومتی خالص باشد. بنابراین:

مداری در حالت تشدید است که ولتاژ و جریان در پایانه ورودی‌اش هم‌فاز باشند.

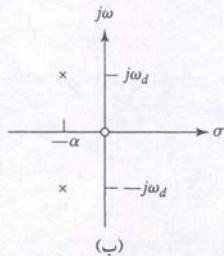
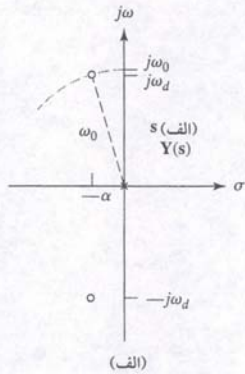
همچنین خواهیم دید که پاسخی با دامنه حداکثر هنگامی در شبکه تولید می‌شود که مدار در حالت تشدید باشد.

ابتدا تعریف تشدید را به یک شبکه RLC که با منبع سینوسی تحریک شکل ۱۶-۱ موازی است، اعمال می‌کنیم. در بسیاری از وضعیت‌های عملی، این مدار با تقریب جزئی قابل ساخت در آزمایشگاه است و در آن یک القاگر فیزیکی به یک خازن فیزیکی متصل شده و ترکیب موازی به وسیله یک منبع انرژی که امپدانس خروجی بالایی دارد، تحریک می‌گردد. ادمیتانس حالت ماندگار از دید منبع جریان ایده‌آل برابر است با:

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (۱)$$



شکل ۱۶-۱ ترکیب موازی RLC که مدار تشدید موازی نام دارد.



شکل ۱۶-۲ (الف) آرایش قطب - صفر ادمیتانس ورودی یک مدار تشدید موازی در صفحه  $s$  ملاحظه می‌شود.  $\omega_0^2 = \alpha^2 + \omega_d^2$ . (ب) آرایش قطب - صفر امپدانس ورودی. در این نمودار قطب‌ها و صفرهای واقع در بی‌نهایت لحاظ نشده‌اند.



خواهیم دید که تیزی منحنی هر مدار تشدید با حداکثر انرژی ذخیره شده در مدار در مقایسه با انرژی از دست رفته در حین یک پریود پاسخ تعیین می شود. ما  $Q$  را چنین تعریف می کنیم.

$$(۶) \quad \text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده} = 2\pi \frac{Q}{\text{انرژی تلف شده در هر پریود}} = \text{ضریب کیفیت} = Q$$

ثابت تناسب  $2\pi$  به این علت در تعریف گنجانده شد تا عبارت حاصل برای  $Q$  ساده تر شود. چون انرژی فقط در القاگر و خازن ذخیره می شود و فقط در مقاومت تلف می گردد، پس باید  $Q$  را برحسب انرژی لحظه ای ذخیره شده در این دو عنصر و انرژی متوسط تلف شده در مقاومت بیان نماییم.

$$Q = 2\pi \frac{[w_L(t) + w_C(t)]_{\max}}{P_R T}$$

که  $T$  تناوب یا پریود فرکانس موج سینوسی است که  $Q$  در آن محاسبه می شود.

اکنون بگذارید این تقریب را به مدار موازی RLC شکل ۱-۱۶ اعمال کنیم و مقدار  $Q$  را در فرکانس تشدید محاسبه نماییم. این مقدار از  $Q$  را  $Q_0$  می خوانند. تابع جریان تحریک زیر را انتخاب می کنیم:

$$i(t) = I_m \cos \omega_0 t$$

پاسخ ولتاژ و تناظر آن در حالت تشدید برابر است با:

$$v(t) = Ri(t) = RI_m \cos \omega_0 t$$

پس انرژی ذخیره شده در خازن چنین است:

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} \cos^2 \omega_0 t$$

نرژری لحظه ای ذخیره شده در القاگر با رابطه زیر داده می شود:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \left( \frac{1}{L} \int v dt \right)^2 = \frac{1}{2L} \left[ \frac{RI_m}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right]^2$$

بنابراین

$$w_L(t) = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} \sin^2 \omega_0 t$$

پس انرژی لحظه ای کل ثابت است.

$$w(t) = w_L(t) + w_C(t) = \frac{I_m^2 R^2 C}{2}$$

لذا این مقدار ثابت باید حداکثر هم باشد. برای یافتن انرژی از دست رفته در یک دوره تناوب در مقاومت، توان متوسط جذب شده را به دست می آوریم (بخش ۲-۱۱).

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

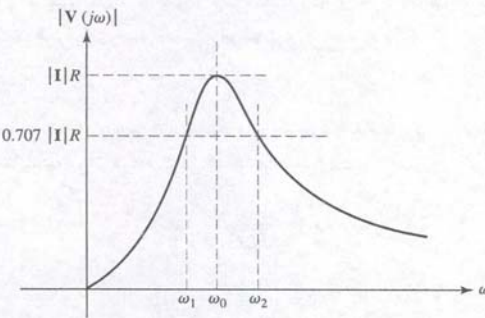
گر رابطه فوق را در یک پریود ضرب کنیم، داریم:

$$P_R T = \frac{1}{2 f_0} I_m^2 R$$

به این ترتیب ضریب کیفیت در تشدید به دست می آید:

$$Q_0 = 2\pi \frac{I_m^2 R^2 C / 2}{I_m^2 R / 2 f_0}$$

$$Q_0 = 2\pi f_0 RC = \omega_0 RC \quad (۷)$$



شکل ۱۶-۳ اندازه پاسخ یک مدار تشدید موازی برحسب فرکانس.

که در شکل ۲-۱۶ (ب) دیده می شود. البته پاسخ از صفر شروع شده و در مقدار ماکزیممی در حوالی فرکانس تشدید طبیعی به اوج می رسد و سپس دوباره در  $\omega = \infty$  به صفر باز می گردد. پاسخ فرکانس در شکل ۳-۱۶ ملاحظه می شود. حداکثر مقدار پاسخ به صورت  $R$  ضریب دامنه منبع جریان ترسیم شده است و به این معنی است که  $R$  مقدار ماکزیمم امپدانس ورودی مدار است. به علاوه پاسخ حداکثر دقیقاً در فرکانس  $\omega_0$  اتفاق می افتد. دو فرکانس دیگر که بعداً به کار خواهند رفت،  $\omega_1$  و  $\omega_2$  می باشند که معیاری از عرض یا پهنای باند پاسخ فرکانس را به دست می دهد. ابتدا نشان می دهیم که مقدار ماکزیمم  $R$  است و این ماکزیمم در فرکانس  $\omega_0$  به دست می آید.

ادمیتانس، طبق معادله (۱) دارای یک رسانایی (کنداکتانس) ثابت و یک سوسپتانس است که در تشدید حداقل مقدار خود (صفر) را دارد. بنابراین اندازه حداقل ادمیتانس در تشدید رخ می دهد و برابر  $1/R$  است. پس اندازه امپدانس ماکزیمم در حالت تشدید برابر  $R$  خواهد بود. به این ترتیب در فرکانس تشدید، ولتاژ دو سر مدار تشدید مدار شکل ۱-۱۶ در واقع  $IR$  می باشد، یعنی کل جریان منبع  $I$  از مقاومت عبور خواهد کرد. البته جریان در  $L$  و  $C$  نیز وجود دارد. در القاگر جریان برابر است با  $I_{L,0} = V_{L,0} / j\omega_0 L = IR / j\omega_0 L$  و در خازن در حالت تشدید برابر است با  $I_{C,0} = (j\omega_0 C) V_{C,0} = j\omega_0 C RI$  چون در تشدید  $1 / \omega_0 C = \omega_0 L$  است در می یابیم که

$$I_{C,0} = -I_{L,0} = j\omega_0 C RI \quad (۵)$$

و

$$I_{C,0} + I_{L,0} = I_{LC} = 0$$

پس جریان خالص در ترکیب LC صفر است. حداکثر مقدار پاسخ و فرکانسی که در آن این حداکثر رخ می دهد، همیشه به سادگی به دست نمی آیند. در مدارهای تشدید که شکل استاندارد ندارند، دامنه پاسخ به صورت تحلیلی بیان می شود و این فرم معمولاً به صورت مجذور مجموع مربعات قسمت های حقیقی و موهومی پاسخ می باشد. سپس باید از عبارات حاصل مشتق بگیریم، مشتق را برابر صفر قرار دهیم و فرکانس ماکزیمم پاسخ را به دست آوریم. با گذاشتن این فرکانس در رابطه پاسخ، مقدار ماکزیمم پاسخ به دست می آید. می توانید روش فوق الذکر را در مورد همین مثال به عنوان تمرین اعمال نمایید، ولی این کار چندان هم لازم نیست.

### ضریب کیفیت

باید تأیید کرد که هر چند ارتفاع منحنی پاسخ فقط به  $R$  وابسته است ولی پهنای یا شیب دامنه های پاسخ هم به  $R$  و هم به مقادیر  $L$  و  $C$  بستگی دارد. به زودی عرض پاسخ را با کمیت تعریف شده دقیق تری به نام عرض باند بیان خواهیم کرد ولی بهتر است که ابتدا آن را با پارامتر مهمتری به نام ضریب کیفیت  $Q$  مرتبط سازیم.



این رابطه و معادله ۸ فقط برای مدار ساده RLC شکل ۱-۱۶ معتبر است. عبارت معادل و مفید دیگری برای Q با یک جایگزینی ساده به دست می آید.

$$Q_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{|X_{C,0}|} = \frac{R}{|X_{L,0}|} \quad (۸)$$

بنابراین برای این مدار خاص، کاهش مقاومت،  $Q_0$  را کاهش می دهد. هر چقدر مقاومت کمتر شود، انرژی بیشتری در عنصر تلف می گردد. افزایش ظرفیت خازنی،  $Q_0$  را افزایش می دهد، ولی افزایش القاکنایی،  $Q_0$  را کاهش خواهد داد. البته این عبارات این مطالب برای مداری که در فرکانس رزنانس کار کند صحت دارد.

### تعابیر دیگری از Q

در مدار تشدید موازی، ثابت بدون بعد  $Q_0$  تابعی از هر سه عنصر مدار است. با این وجود مفهوم Q محدود به یک مدار است و یا حتی سیستم های الکتریکی نیست. این ضریب در هر پدیده تشدید می مفید است. مثلاً یک توپ گلف را در نظر بگیرید. اگر وزن توپ را W فرض کنیم و آن را از ارتفاع  $h_1$  در بالای یک سطح افقی صاف رها کنیم، توپ پس از برخورد تا ارتفاع  $h_2$  که کمتر از  $h_1$  است بالا خواهد آمد. انرژی اولیه توپ  $Wh_1$  و انرژی تلف شده در یک پریود  $W(h_1 - h_2)$  می باشد پس ضریب  $Q_0$  برابر است با:

$$Q_0 = 2\pi \frac{h_1 W}{(h_1 - h_2)W} = \frac{2\pi h_1}{h_1 - h_2}$$

یک توپ گلف با کیفیت عالی به ارتفاع اولیه خود باز می گردد و دارای  $Q_0$  بینهایت است. برای توپ های معمولی این مقدار حدود 35 می باشد. باید توجه کرد که Q در این مثال مکانیکی از پاسخ طبیعی محاسبه شده است و نه از پاسخ واداشته. Q در یک مدار الکتریکی هم ممکن است از اطلاعات پاسخ طبیعی حاصل گردد و آن را می توان در معادلات (۱۰) و (۱۱) که در زیر آمده مشاهده کرد.

تفسیر مفید دیگر Q هنگامی حاصل می شود که جریان های القاگر و خازن در معادله (۵) را مورد بررسی قرار دهیم:

$$I_{C,0} = -I_{L,0} = j\omega_0 C R I = jQ_0 I \quad (۹)$$

توجه کنید که جریان خازن یا القاگر برابر است با  $Q_0$  ضریبدر منبع جریان که با یکدیگر  $180^\circ$  اختلاف فاز دارند. بنابراین اگر در فرکانس تشدید به مدار موازی با  $Q_0 = 50$  جریان  $2 \text{ mA}$  را اعمال کنیم، در مقاومت  $2 \text{ mA}$  و در خازن و القاگر  $100 \text{ mA}$  جریان خواهیم داشت. بنابراین یک مدار تشدید موازی مانند یک تقویت کننده جریان وابسته به عنوان تقویت کننده توان عمل نمی کند، زیرا شبکه یک شبکه غیر فعال است.

اکنون مایلیم پارامترهای مختلف مربوط به مدار تشدید موازی را با یکدیگر مرتبط سازیم. سه پارامتر  $a$ ،  $\omega_d$  و  $Q_0$  را قبلاً در بحث پاسخ طبیعی معرفی کردیم. بنا به تعریف، تشدید اساساً مربوط به پاسخ واداشته است، زیرا برحسب امپدانس ورودی (مقاومت خالص) بیان می شود و امپدانس ورودی هم فقط در حالت ماندگار سینوسی مفهوم دارد. دو پارامتر مهم در یک مدار تشدید شاید فرکانس تشدید  $\omega_0$  و ضریب کیفیت  $Q_0$  باشد. می توان ضریب نمایی میرایی و فرکانس تشدید طبیعی را برحسب  $\omega_0$  و  $Q_0$  بیان کرد:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(Q_0 / \omega_0 C)C}$$

یا

$$(۱۰)$$

و

یا

$$(۱۱)$$

### ضریب میرایی

به منظور مراجعات بعدی بهتر است یک رابطه دیگر برحسب  $\omega_0$  و  $Q_0$  بنویسیم. جمله درجه دوم در مخرج معادله (۴)،

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}$$

را می توان به صورت زیر نوشت:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$$

در مبحث نظریه سیستم ها و تئوری کنترل خودکار، عبارت فوق را با استفاده از پارامتر بدون بعدی به نام ضریب میرایی  $\zeta$  (زتا) می نویسند.

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

مقایسه این عبارات اجازه می دهد تا  $\zeta$  با دیگر پارامترها ارتباط یابد.

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q_0} \quad (۱۲)$$

مقادیر عددی  $\omega_0$ ،  $\alpha$ ،  $\omega_d$  و R را برای یک مدار تشدید با  $L = 2.5 \text{ mH}$ ،  $C = 5 \text{ nF}$  و  $Q_0 = 50$  بنویسید.

از معادله (۲) داریم  $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC} = 200 \text{ krad/s}$  و  $\omega_d = 31.8 \text{ kHz}$  و  $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ . با استفاده از معادله (۱۰) به سرعت می توان  $\alpha$  را به دست آورد.

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} = \frac{2 \times 10^5}{(2 \times 5)} = 2 \times 10^4 \text{ Np/s}$$

اکنون به سراغ رابطه قدیمی خود در فصل ۹ می رویم.

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

به این ترتیب در می یابیم که:

$$\omega_d = \sqrt{(2 \times 10^5)^2 - (2 \times 10^4)^2} = 199.0 \text{ krad/s}$$

بالاخره مقدار مقاومت موازی را نیاز داریم که معادله (۷) را به ما خواهد داد:

$$Q_0 = \omega_0 RC$$

بنابراین

$$R = \frac{Q_0}{\omega_0 C} = \frac{5}{(2 \times 10^5 \times 10^{-8})} = 2.50 \text{ k}\Omega$$

۱۶-۱ یک مدار تشدید موازی متشکل از  $L = 50 \text{ mH}$ ،  $R = 8 \text{ k}\Omega$  و  $C = 80 \text{ nF}$  می باشد. مطلوب است (الف)  $\omega_0$ ، (ب)  $Q_0$ ، (ج)  $\omega_d$ ، (د)  $\alpha$  و (ه)  $\zeta$ .

۱۶-۲ در مدار تشدید موازی که  $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$ ،  $\omega_d = 998 \text{ rad/s}$  و  $Y_{in} = 1 \text{ mS}$  در حالت تشدید می باشد، مقادیر  $L$ ،  $R$  و  $C$  را در آن به دست آورید.

مثال ۱-۱۶

### تمرین

جواب ۱-۱۶:  $10.12$ ،  $15.811 \text{ krad/s}$ ،  $0.0494$  و  $781 \text{ Np/s}$ ،  $15.792 \text{ krad/s}$   
جواب ۲-۱۶:  $126.4 \text{ mH}$ ،  $1000 \text{ }\Omega$  و  $7.91 \text{ }\mu\text{F}$



برحسب  $Q_0$  داریم:

$$Y = \frac{1}{R} + j \frac{1}{R} \left( \frac{\omega \omega_0 CR}{\omega_0} - \frac{\omega_0 R}{\omega \omega_0 L} \right)$$

یا

$$Y = \frac{1}{R} \left[ 1 + jQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (14)$$

دوباره می‌بینیم که اندازه ادمیتانس در نقطه تشدید برابر  $\frac{1}{R}$  است و اندازه ادمیتانس  $\sqrt{2}/R$  در فرکانسی وجود دارد که کمیت موهومی داخل کره به برابر 1 باشد. پس:

$$Q \left( \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right) = 1 \quad \text{و} \quad Q \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = -1$$

پس از حل داریم و

$$\omega_1 = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q_0} \right)^2} - \frac{1}{2Q_0} \right] \quad (15)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q_0} \right)^2} + \frac{1}{2Q_0} \right] \quad (16)$$

گرچه عبارات فوق چندان ساده نیستند، ولی تفاضل آن‌ها فرمول خیلی ساده‌ای را برای عرض باند فراهم می‌سازد:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

با ضرب معادله (15) در معادله (16) می‌توان نشان داد که  $\omega_0$  دقیقاً میانگین هندسی فرکانس‌های نصف توان است. یعنی:

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$$

یا

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

مدارهایی که  $Q_0$  بالاتری دارند عرض باندشان باریک است، یعنی منحنی پاسخ آن‌ها تیزتر است. این مدارها قابلیت گزینش فرکانسی بیشتری و یا ضربه کیفی بزرگتری را دارا هستند.

### تقریب برای مدارهای ب Q

بسیاری از مدارهای تشدید عملاً طوری ساخته می‌شوند تا  $Q_0$  بزرگتری داشته باشند تا از مزیت عرض باند باریک و قابلیت گزینش فرکانسی بیشتری استفاده شود. وقتی  $Q_0$  بزرگتر از 5 باشد، ممکن است تقریب‌های خوبی برای فرکانس‌های نصف توان بالا و پایین و پاسخ در حوالی فرکانس تشدید داشت. بگذارید مدار با Q بزرگتر مثلاً مساوی یا بیش از 5 انتخاب شود. آرایش قطب و صفر  $Y(s)$  برای مدار RLC با  $Q_0$  بزرگتر از 5 در شکل ۱۶-۶ دیده می‌شود. چون:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} B$$

و محل در صفر  $s_1$  و  $s_2$  می‌توانند چنین تقریب شوند:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \approx -\frac{1}{2} B \pm j\omega_d$$

به طریقی مشابه محل دو فرکانس نصف توان روی محور  $\omega$  را می‌توان چنین به دست آورد:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right] \approx \omega_0 \left( 1 \mp \frac{1}{2Q_0} \right)$$

اکنون اجازه دهید تا  $Q_0$  را برحسب مکان قطب‌ها و صفرهای ادمیتانس  $Y(s)$  یک مدار RLC موازی بیان کنیم.  $\omega_0$  را ثابت نگه می‌داریم. این کار را مثلاً با تغییر R و ثابت نگهداشتن L و C می‌توان انجام داد. با افزایش  $Q_0$  روابط مربوط به  $\alpha$  و  $Q_0$  نشان می‌دهد که صفرها به محور  $j\omega$  نزدیک‌تر می‌شوند. همچنین ملاحظه می‌شود که صفرها هم از محور حقیقی دور می‌شوند. طبیعت دقیق حرکت وقتی روشن تر می‌شود که به خاطر آوریم برای تعیین محل  $s = j\omega_0$  روی محور  $j\omega$  باید یک دایره به مرکز مبدأ رسم کنیم تا از یک صفر بگذرد و به محور مثبت  $j\omega$  برسد. چون  $\omega_0$  ثابت نگه‌داشته می‌شود، شعاع باید ثابت باشد و بنابراین صفرها باید با افزایش  $Q_0$  به سمت محور مثبت  $j\omega$  سوق یابند.

دو صفر در شکل ۱۶-۴ مشخص شده‌اند و پیکان‌ها مسیری که با افزایش R اختیار می‌شود را نشان می‌دهند. وقتی R بینهایت است،  $Q_0$  هم بینهایت می‌باشد و دو صفر در  $s = \pm j\omega_0$  روی محور  $j\omega$  خواهد بود. با کاهش R، صفرها به سمت محور  $\sigma$  در روی قوس حرکت می‌کنند و در روی آن به هم پیوسته و جفت صفر را در  $s = -\omega_0$  به وجود می‌آورند و در این نقطه  $R = \frac{1}{2} \sqrt{L/C}$  یا  $Q_0 = \frac{1}{2}$  می‌باشد. این وضعیت متناظر با حالت میرای بحرانی است که در آن  $\omega_d = 0$  و  $\alpha = \omega_0$  بود. مقادیر کمتر R و نیز  $Q_0$  کمتر موجب می‌شوند تا صفرها جدا شوند و روی محور منفی  $\sigma$  در دو جهت حرکت کنند ولی این مقادیر کم  $Q_0$  متعلق به مدارهای تشدید نیستند و لزومی ندارد آن‌ها را بیش از این ردیابی کنیم. بعداً معیار  $Q_0 > 5$  را برای توصیف یک مدار با Q بالا به کار خواهیم برد. وقتی  $Q_0 = 5$  باشد، صفرها در  $s = -0.1 \omega_0 \pm j 0.995 \omega_0$  بوده و بنابراین  $\omega_0$  و  $\omega_d$  با هم فقط نیم درصد اختلاف دارند.

## ۲-۱۶ عرض باند و مدارهای Q بالا

بحث خود را در مورد تشدید موازی با تعریف فرکانس و عرض باند نصف توان ادامه می‌دهیم و سپس بهره‌برداری خوبی از این مفاهیم در تهیه اطلاعاتی راجع به پاسخ تقریبی مدارهایی با  $Q$  بالا به دست می‌آوریم. اکنون "پهنای" منحنی پاسخ مانند آنچه در شکل ۱۶-۳ ملاحظه شد را بهتر می‌توان تعریف کرد و به  $Q_0$  ارتباط داد. ابتدا دو فرکانس نصف توان  $\omega_1$  و  $\omega_2$  را به این ترتیب تعریف می‌کنیم که در ازای آن‌ها دامنه ادمیتانس ورودی مدار تشدید موازی  $\sqrt{2}$  برابر ادمیتانس در حالت تشدید است. چون منحنی پاسخ شکل ۱۶-۳ ولتاژ تولید شده در دو سر مدار موازی به وسیله منبع جریان سینوسی تابعی از فرکانس است، فرکانس‌های نصف توان نقاطی را نشان می‌دهند که در آن‌ها این ولتاژ  $1/\sqrt{2}$  یا 0.707 برابر ولتاژ در حالت تشدید است. برای امیدانس ورودی هم رابط مشابهی وجود دارد. ما  $\omega_1$  را فرکانس نصف توان پایین و  $\omega_2$  را فرکانس نصف توان بالا می‌نامیم.

### عرض باند

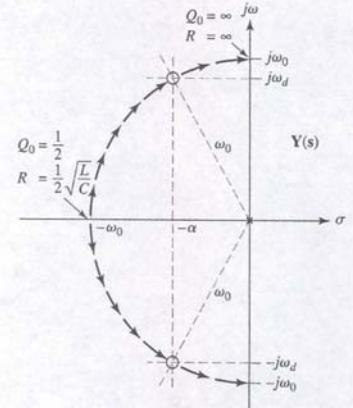
پهنای عرض باند (نصف توان) یک مدار تشدید، تفاوت دو فرکانس نصف توان است.

$$B \equiv \omega_2 - \omega_1 \quad (13)$$

سعی می‌کنیم عرض باند را پهنای منحنی پاسخ تصور کنیم حتی اگر منحنی از  $\omega = 0$  تا  $\omega = \infty$  وسعت داشته باشد. دقیق‌تر بگوییم پهنای باند نصف توان در حقیقت قسمتی از منحنی است که دامنه پاسخ در آن از 70.7% ماکزیمیم پاسخ بزرگتر یا مساوی آن است (شکل ۱۶.۵).

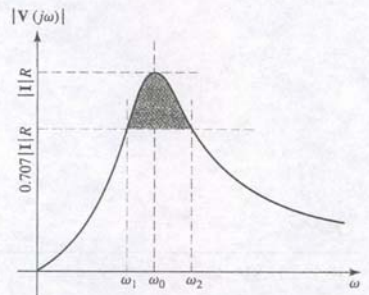
اکنون بیایید پهنای باند را برحسب  $Q_0$  و فرکانس تشدید بیان کنیم. برای انجام آن ابتدا ادمیتانس مدار RLC موازی را می‌نویسیم.

$$Y = \frac{1}{R} + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

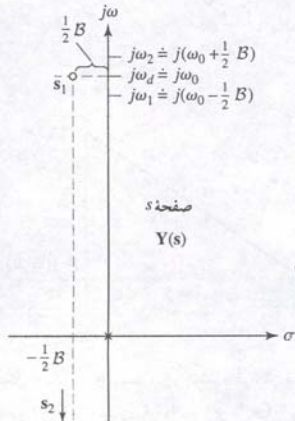


شکل ۱۶-۴ دو صفر ادمیتانس  $Y(s)$  در  $s = -\alpha \pm j\omega_d$  قرار دارند و با افزایش R از  $\frac{1}{2} \sqrt{L/C}$  تا  $\infty$  در مسیر نشان داده‌شده جابه‌جا می‌شوند.

دلیل این نامگذاری این است که اگر ولتاژ 0.707 برابر ولتاژ تشدید باشد، مجذور آن نصف مجذور ولتاژ تشدید است. پس توانی که در این فرکانس به مقاومت داده می‌شود، نصف توانی است که در فرکانس تشدید داده می‌شود.



شکل ۱۶-۵ پهنای باند پاسخ مدار هاشور خورده است. این قسمت متعلق به ناحیه‌ای از پاسخ است که 70.7% از حداکثر مقدار ماکزیمیم را دارد.



شکل ۱۶-۶ آرایش قطب - صفر  $Y(s)$  برای یک مدار موازی RLC. دو صفر که دقیقاً در  $\frac{1}{2} B$  Np/s (یا rad/s) و در سمت چپ محور  $j\omega$  واقع است. این فاصله از محور  $\sigma$  برابر  $\omega_0$  rad/s فاصله دارد. فاصله دو فرکانس نصف توان دقیقاً  $B$  rad/s و هر یک تا فرکانس تشدید حدوداً  $\frac{1}{2} B$  فاصله دارند.



## مثال ۱۶-۲

مقدار تقریبی ادیمیتانس شبکه RLC موازی را که در آن  $L = 1H$ ،  $R = 40\text{ k}\Omega$  و  $C = \frac{1}{64}\mu F$  است، معین کنید به شرطی که فرکانس کار  $\omega = 8.2\text{ krad/s}$  باشد.

- اهداف مسئله را شناسایی کنید.
- از ما خواسته شده است تا مقدار تقریبی ادیمیتانس  $Y(s)$  را در  $\omega = 8.2\text{ krad/s}$  برای یک شبکه ساده RLC حساب کنیم. این بدان معنی است که  $Q_0$  حداقل برابر با 5 است و فرکانس کار چندان از فرکانس تشدید دور نیست.
- اطلاعات معلوم را جمع آوری نمایید.
- مقادیر  $R$ ،  $L$  و  $C$  و نیز فرکانسی که در آن  $Y(s)$  محاسبه شده است، داده شده‌اند. این مقادیر برای محاسبه دقیق یا تقریبی ادیمیتانس کافی است.
- ارائه طرح.
- در به کارگیری عبارت تقریبی برای ادیمیتانس، ابتدا باید ضریب کیفیت  $Q_0$  و عرض باند را معین کنیم، در فرکانس تشدید  $\omega_0$  از معادله به صورت  $1/\sqrt{LC} = 8\text{ krad/s}$  به دست می‌آید. بنابراین  $Q_0 = \omega_0 RC = 5$  و عرض باند  $Q_0 / \omega_0 = 1.6\text{ krad/s}$  خواهد شد. مقدار  $Q_0$  برای این مدار کفایت استفاده از تقریب  $Q$  بالا را می‌نماید.
- معادلات مناسب را به دست آورید.
- معادله (۱۹) بیان می‌دارد که

$$Y(s) \approx \frac{1}{R} (1 + jN)$$

بنابراین

$$|Y(j\omega)| \approx \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2} \quad \text{و} \quad \text{ang } Y(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$

- آیا اطلاعات دیگری لازم است.
- ما هنوز به  $N$  نیاز داریم. این مقدار به ما می‌گوید چند نصف عرض باند  $\omega$  از فرکانس تشدید  $\omega_0$  فاصله داریم:
$$N = (8.2 - 8) / 0.8 = 0.25$$
- اقدام به حل.
- اکنون آماده‌ایم روابط تقریبی خود را برای اندازه و زاویه ادیمیتانس شبکه به کار ببریم.

$$\text{ang } Y \approx \tan^{-1} 0.25 = 14.04^\circ$$

و

$$|Y| \approx 25\sqrt{1 + (0.25)^2} = 25.77\mu S$$

- صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟
- محاسبه دقیقی از ادیمیتانس معادله (۱) نشان می‌دهد که
$$Y(j8200) = 25.75 \angle 13.87^\circ \mu S$$
- بنابراین روش تقریبی منجر به مقادیری از اندازه و زاویه ادیمیتانس منتهی می‌شود که نسبتاً در این فرکانس دقیق‌اند (بهتر از 2%).

۱۶-۳ یک مدار تشدید موازی با  $Q$  نسبتاً بالا دارای  $f_0 = 440\text{ Hz}$  یا  $Q_0 = 6$  است. معادلات (۱۵) و (۱۶) را برای تهیه مقادیر (الف)  $f_1$  و (ب)  $f_2$  به کار ببرید. اکنون معادله (۱۷) را برای محاسبه تقریبی مقادیر (ج)  $f_1$  و (د)  $f_2$  به کار ببرید.

جواب:  $404.9\text{ Hz}$ ،  $478.2\text{ Hz}$ ،  $403.3\text{ Hz}$  و  $476.7\text{ Hz}$ .

یا

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}B \quad (17)$$

بنابراین در یک مدار با  $Q$  بزرگ فرکانس‌های نصف توان تقریباً به فاصله مساوی از فرکانس تشدید بوده و این فاصله نصف عرض باند است. این مطلب در شکل ۱۶-۶ ملاحظه می‌شود. رابطه تقریبی برای  $\omega_1$  و  $\omega_2$  در معادله (۱۷) را می‌توان با هم جمع کرد تا رابطه واسط حسابی  $\omega_0$  با  $\omega_1$  و  $\omega_2$  در مدارهای  $Q$  بزرگ ملاحظه شود.

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

اکنون بر روی محور  $j\omega$  نقطه‌ای را تصور می‌کنیم که کمی از  $j\omega_0$  بالاتر باشد. برای تعیین ادیمیتانس ناشی از شبکه RLC موازی در این فرکانس، سه بردار از فرکانس‌های بحرانی به نقطه تست رسم می‌نماییم. اگر نقطه تست به  $j\omega_0$  نزدیک باشد، فاصله قطب تا آن تقریباً  $j\omega_0$  و فاصله صفر پایین تا آن تقریباً  $j2\omega_0$  خواهد بود. بنابراین ادیمیتانس تقریباً برابر است با

$$Y(s) \approx C \frac{(j2\omega_0)(s - s_1)}{j\omega_0} \approx 2C(s - s_1) \quad (18)$$

که  $C$  مطابق معادله (۴)، ظرفیت خازن است. برای این‌که بتوانیم تقریب خوبی از  $(s - s_1)$  به دست آوریم، نواحی حول صفر  $s_1$  را در شکل ۱۶-۷ بزرگ می‌کنیم. در مختصات کارتزین داریم:

$$s - s_1 \approx \frac{1}{2}B + j(\omega - \omega_0)$$

اگر  $\omega_0$  را با  $\omega_d$  جایگزین نماییم، این عبارت دقیق است. اکنون این معادله را در مقدار تقریبی  $Y(s)$ ، معادله (۱۸) می‌گذاریم و از  $\frac{1}{2}B$  فاکتور می‌گیریم.

$$Y(s) \approx 2C \left( \frac{1}{2}B \right) \left( 1 + j \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B} \right)$$

یا

$$Y(s) \approx \frac{1}{R} \left( 1 + j \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B} \right)$$

کسر  $(\omega - \omega_0) / (\frac{1}{2}B)$  را "تعداد نیم عرض باندها از فرکانس تشدید" تفسیر کرده و با  $N$  نشان می‌دهیم. پس:

$$Y(s) \approx \frac{1}{R} (1 + jN) \quad (19)$$

که

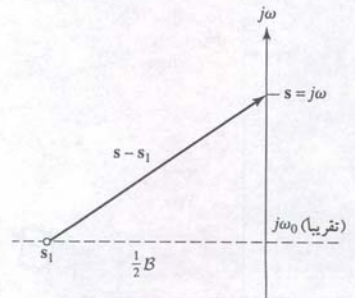
$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B} \quad (20)$$

است. در فرکانس نصف توان بالا،  $\omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2}B$ ،  $N \approx +1$  است و ما نصف عرض باند بالای فرکانس تشدید قرار داریم. در فرکانس نصف توان پایین  $\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2}B$ ،  $N \approx -1$  است که ما در نصف عرض باند پایین‌تر از فرکانس تشدید واقعیم. معادله (۱۹) برای استفاده خیلی ساده‌تر از روابط دقیق قبلی است. این رابطه اندازه ادیمیتانس را چنین به دست می‌دهد:

$$|Y(j\omega)| \approx \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2}$$

ضمن این‌که زاویه  $Y(j\omega)$  با عکس تانژانت  $N$  داده می‌شود:

$$\text{ang } Y(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$



شکل ۱۶-۷ قسمت بزرگ‌شدهٔ آرایش قطب - صفر  $Y(s)$  یک مدار RLC موازی با  $Q_0$  بزرگ.

## تمرین



این پاراکراف مشابه پاراکراف آخر بخش ۲-۱۶ است ولی مطالب RLC موازی با زبان دوگانگی به RLC سری تبدیل شده است.

جمع‌بندی خود را در مورد مدار تشدید سری با خلاصه کردن مطالب و یافته‌های مهم انجام می‌دهیم:

- فرکانس تشدید  $\omega_{0s}$  فرکانسی است که در آن امپدانس ورودی یا زاویه امپدانس صفر می‌شود. پس  $\omega_{0s} = 1/\sqrt{L_s C_s}$ .
- ضریب کیفیت مدار  $Q_{0s}$  به صورت  $2\pi$  ضربدر نسبت انرژی ماکزیمم حداکثر به انرژی تلف شده در هر پریود در مدار است. با این تعریف می‌بینیم که  $Q_{0s} = \omega_{0s} L_s / R_s$ .
- دو فرکانس نصف توان  $\omega_{1s}, \omega_{2s}$  به عنوان فرکانسی تعریف می‌شوند که در آن‌ها مقدار امپدانس  $\sqrt{2}$  برابر اندازه امپدانس مینیمم است. همچنین در این فرکانس‌ها پاسخ جریان 70.7 درصد پاسخ حداکثر می‌باشد.

• عبارات دقیق برای  $\omega_1$  و  $\omega_2$  برابر است با:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$$

• رابطه تقریبی برای  $\omega_1$  و  $\omega_2$  (با  $Q_0$ ) عبارت‌اند از:

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}B$$

•  $B$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

• ادmittانس ورودی هم می‌تواند برای  $Q_{0s}$  بالا به صورت تقریبی زیر بیان شود:

$$Y \approx \frac{1}{R} (1 + jN) = \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2} / \tan^{-1} N$$

که

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B}$$

این تخمین برای  $0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0$  معتبر است.

ز این‌جا به بعد دیگر مقادیر مدار سری را با زیرنویس s مشخص نمی‌کنیم مگر این‌که ضرورتی وجود داشته باشد.

بناز  $v_s = 100 \cos \omega t$  mV به یک مدار تشدید سری متشکل از یک مقاومت  $10 \Omega$ ، یک خازن  $200$  nF و یک القاگر  $2$  mH وصل شده است. هر دو روش دقیق و تقریبی را برای محاسبه دامنه جریان به کار ببرید به شرطی که  $\omega = 48$  krad/s باشد.

رکانس تشدید مدار با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2 \times 10^{-3})(200 \times 10^{-9})}} = 50 \text{ krad/s}$$

چون در فرکانس  $\omega = 48$  krad/s کار می‌کنیم که در فاصله 10% از فرکانس تشدید است، منطقی است تا روابط تقریبی خود را برای تخمین امپدانس شبکه به کار ببریم، به شرطی که  $Q$  بالا کار کنیم.

$$Z_{eq} \approx R \sqrt{1 + N^2} / \tan^{-1} N$$

هدف استفاده از این تقریب‌ها برای مدارهای  $Q$  بزرگ نزدیک تشدید معتبر است. قبلاً توافق کردیم که معیار بالا بودن  $Q$ ،  $Q_0 \geq 5$  باشد، ولی نگفتیم منظور از نزدیک بودن به فرکانس تشدید چیست؟ می‌توان نشان داد که برای خطای کمتر از 5% باید  $Q_0 \geq 5$  و  $0.9 \omega_0 \leq \omega \leq 1.1 \omega_0$  در نظر گرفته شود. گرچه این عرض باند باریک ممکن است کوچک به نظر برسد، ولی در مقایسه با فرکانس‌های مورد علاقه ما می‌تواند زیاد هم باشد. مثلاً رادیوهای AM معمولاً در فرکانس تشدید 455 kHz تنظیم شده و عرض باند آن 10 kHz است. پس  $Q_0$  آن 45.5 است. یعنی فرکانس‌های نصف توان حدود 450، 460 kHz می‌باشد. با این وجود تقریب مابین 409.5 تا 500.5 kHz معتبر است (با خطایی کمتر از 5%) یعنی تقریباً بخش عمده منحنی را شامل می‌شود. تنها انتهای منحنی پاسخ خارج این ناحیه واقع است و به کار بردن تقریب فوق در آن محدوده خطای بزرگی تولید می‌کند.

بحث درباره مدار تشدید موازی را با مروری بر نتایج به دست آمده خاتمه می‌دهیم:

- فرکانس تشدید  $\omega_0$  فرکانسی است که در آن بخش موهومی ادmittانس ورودی و یا زاویه ادmittانس صفر می‌شود. آن‌گاه  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  خواهد بود.
- $Q_0$  کیفیت مدار را تعیین می‌کند و  $2\pi$  برابر نسبت انرژی ذخیره شده در مدار به انرژی تلف شده در هر پریود یا تناوب است. از این تعریف نتیجه می‌شود که  $Q_0 = \omega_0 RC$ .
- دو فرکانس نصف توان  $\omega_1$  و  $\omega_2$  فرکانس‌هایی هستند که در آن‌ها دامنه ادmittانس  $\sqrt{2}$  برابر حداقل مقدار ادmittانس است. در این فرکانس‌ها پاسخ ولتاژ 70.7 درصد ماکزیمم پاسخ ولتاژ می‌باشد.
- مقدار دقیق فرکانس‌های  $\omega_1$  و  $\omega_2$  عبارت‌اند از:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$$

• عبارات تقریبی برای  $\omega_1$  و  $\omega_2$  (با  $Q_0$ ) عبارت‌اند از:

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}B$$

• پهنای باند نصف توان  $B$  برابر است با:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

• ادmittانس ورودی هم ممکن است برای  $Q$  بالا به صورت تقریب بیان گردد:

$$Y \approx \frac{1}{R} (1 + jN) = \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2} / \tan^{-1} N$$

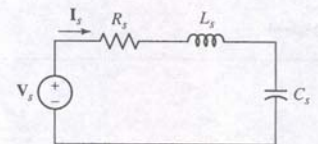
که

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B}$$

این تخمین برای  $0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0$  معتبر است.

### ۳-۱۶ تشدید سری

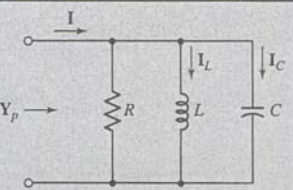
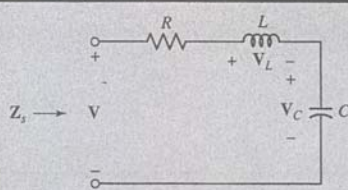
گرچه ممکن است کاربرد مدار RLC سری کمتر از مدار RLC موازی باشد، ولی هنوز ارزش بررسی دارد. ما مدار شکل ۸-۱۶ را ملاحظه خواهیم کرد. باید متذکر شد که برای تمام عناصر زیرنویس s در نظر گرفته شده است تا هنگام مقایسه با عناصر مدار موازی اشتباهی رخ ندهد. بحث ما در مورد مدار تشدید موازی دو بخش نسبتاً طولانی را به خود اختصاص داد. می‌توانیم مدار سری را هم به همین ترتیب بررسی کنیم، ولی بهتر است از مفهوم دوگانگی یا همزادی استفاده کرده و از تکرارهایی بی‌مورد خودداری نماییم. برای سهولت، بگذارید بر روی نتایج آخرین پاراگراف تکیه کرده و آن را با زبان دوگانگی در مورد مدار RLC سری هم بیان کنیم، چرا که نتایج مهمی در آن‌جا به دست آمد.



شکل ۸-۱۶ مدار تشدید سری.



جدول ۱۶-۱ خلاصه‌ای از مدارهای تشدید.

|   |   |
|---|---|
|  $Q_0 = \omega_0 RC \quad \alpha = \frac{1}{2RC}$ $ I_L(j\omega_0)  =  I_C(j\omega_0)  = Q_0  I(j\omega_0) $ $Y_p = \frac{1}{R} \left[ 1 + jQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$  |  $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \alpha = \frac{R}{2L}$ $ V_L(j\omega_0)  =  V_C(j\omega_0)  = Q_0  V(j\omega_0) $ $Z_s = R \left[ 1 + jQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$ |
| <p>عبارات دقیق</p> $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left( \frac{1}{2Q_0} \right)^2}$ $\omega_{1,2} = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$ $N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B} \quad B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2\alpha$ |   |
| <p>عبارات تقریبی</p> $(Q_0 \geq 5 \quad 0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0)$ $\omega_d \approx \omega_0 \quad \omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}B$ $\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ $Y_p \approx \frac{\sqrt{1+N^2}}{R} \angle \tan^{-1} N \quad Z_s \approx R\sqrt{1+N^2} \angle \tan^{-1} N$  |   |

قبل از این که چگونگی پی‌ریزی چنین مدار معادلی را بیاموزیم، بگذارید ابتدا مدار شکل ۱۶-۹ (الف) را ملاحظه کنیم. فرکانس زاویه‌ای تشدید برای این شبکه برابر  $1/\sqrt{LC}$  است. ولی اگر  $R_1$  به قدر کافی کوچک باشد، آن‌گاه فرکانس تشدید به مقدار فوق نزدیک خواهد شد. تعریف تشدید تفاوتی نمی‌کند و می‌توان فرکانس تشدید را با صفر کردن مقدار بوهومی ادمیتانس ورودی به دست آورد:

$$\text{Im}\{Y(j\omega)\} = \text{Im}\left\{ \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L} \right\} = 0$$

$$\text{Im}\left\{ \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L} \frac{R_1 - j\omega L}{R_1 - j\omega L} \right\}$$

$$= \text{Im}\left\{ \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \right\} = 0$$

در نتیجه، شرط تشدید چنین است:

$$C = \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}$$

بنابراین

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left( \frac{R_1}{L} \right)^2} \quad (21)$$

که N پس از تعیین  $Q_0$  محاسبه می‌شود. چون مدار سری است. پس:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(50 \times 10^3)(2 \times 10^{-3})}{10} = 10$$

که به معنی Q بالا است. پس:

$$B = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{50 \times 10^3}{10} = 5 \text{ krad/s}$$

تعداد نصف عرض باند بالاتر از تشدید (N) عبارت است از:

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{B/2} = \frac{48-50}{2.5} = -0.8$$

بنابراین:

$$Z_{eq} \approx R\sqrt{1+N^2} \angle \tan^{-1} N = 12.81 \angle -38.66^\circ \Omega$$

اندازه تقریبی جریان عبارت است از:

$$\frac{|V_L|}{|Z_{eq}|} = \frac{100}{12.81} = 7.806 \text{ mA}$$

با استفاده از عبارت دقیق داریم  $I = 7.746 \angle 39.24^\circ \text{ mA}$  پس:

$$|I| = 7.746 \text{ mA}$$

## تمرین

۱۶-۴ یک مدار تشدید سری دارای عرض باند 100 Hz و حاوی یک القاگر 20 mH و خازن  $2 \mu\text{F}$ است. مطلوب است (الف)  $f_0$ ، (ب)  $Q_0$ ، (ج)  $Z_{in}$  در تشدید و (د)  $f_2$ .جواب: 796.796 Hz،  $12.57 + j0 \Omega$ ، 846 Hz.

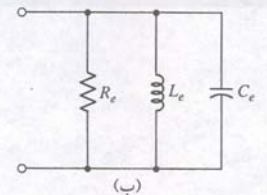
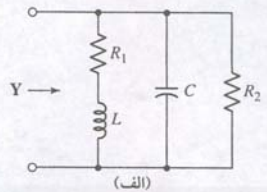
شاخصه مدار تشدید سری، امپدانس حداقل آن در حالت تشدید است، در حالی که مدار تشدید موازی، امپدانس حداکثر را در تشدید دارا است. در مدار موازی جریان‌های القاگر و خازنی،  $Q_0$  برابر جریان منبع است. در مدارهای سری ولتاژ القاگر و خازن،  $Q_0$  برابر ولتاژ منبع می‌باشد. بنابراین مدار سری تقویت ولتاژی در تشدید ایجاد می‌کند.

در جدول ۱۶-۱، مقایسه‌ای از نتایج تشدید سری و موازی و نیز عبارات دقیق و تقریبی ارائه شده است.

## ۱۶-۴ دیگر فرم‌های تشدید

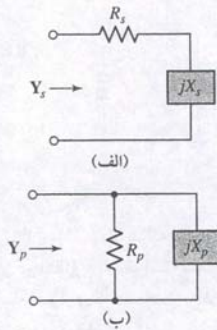
مدارهای RLC موازی و سری در بخش قبل، از نوع ایده‌آل بودند. این نوع مدارها چیزی جز تقریبی از یک مدار فیزیکی متشکل از یک سیم‌پیچ، یک مقاومت کربنی و یک خازن تانتالیم سری یا موازی نیستند. دقت این مدل ایده‌آل به گستره فرکانس کار، Q مدار، مواد به کار رفته در عناصر فیزیکی، سائز عناصر و فاکتورهای دیگر بستگی دارد. ما در این جا تکنیک‌های تعیین بهترین مدل را برای یک سیستم فیزیکی مطالعه نمی‌کنیم زیرا در این صورت دانستن نظریه میدان‌های الکترومغناطیس و خواص مواد مورد نیاز است. با این وجود می‌خواهیم مسائل پیچیده را به یکی از دو مدل ساده سری و موازی بدل سازیم.

شبکه شکل ۱۶-۹ (الف) نسبتاً مدل دقیقی برای ترکیب موازی القاگر، خازن و مقاومت است. مقاومت  $R_1$  یک مقاومت فرضی است که تلفات اهمی، تلفات هسته‌ای و تلفات تشعشعی القاگر فیزیکی را نشان می‌دهد. تلفات دی‌الکتریک خازن و مقاومت فیزیکی مدار RLC با مقاومت  $R_2$  نشان داده شده است. در این مدل نمی‌توان عناصر را با هم ترکیب کرده و مدل ساده‌تری که در تمام فرکانس‌ها معادل مدار اصلی باشد، به دست آورد. با این وجود، نشان خواهیم داد که معادل ساده‌تری می‌توان ساخت تا در یک باندی از فرکانس که معمولاً به قدر کافی عریض است، معتبر باشد و هما فرکانس مورد نظر را پوشش دهد. این مدار معادل چیزی شبیه به شکل ۱۶-۹ (ب) خواهد بود.



شکل ۱۶-۹ (الف) مدل مفیدی از یک شبکه فیزیکی که از عناصر فیزیکی موازی القاگر، خازن و مقاومت ساخته شده است. (ب) مداری که می‌تواند در یک باند فرکانس باریک معادل مدار بخش (الف) باشد.





شکل ۱۶-۱۱ (الف) یک شبکه سری که از یک مقاومت  $R_s$  و یک القاگر با خازن با راکتانس  $X_s$  تشکیل شده و ممکن است به (ب) یک شبکه موازی تبدیل شود که در یک فرکانس خاص،  $Y_s = Y_p$  باشد. عکس مطلب هم صحیح است.

تابعی از فرکانس  $\omega$  است ولی آن را در فرکانس تشدید شبکه‌ای که مدار سری قسمتی از آن است، محاسبه می‌کنیم، با این وجود این فرکانس تا دستیابی به مدار کامل معلوم فرض نمی‌شود. به خواننده توصیه می‌شود تا نشان دهد که  $Q$  در این مدار سری برابر  $|X_s| / R_s$  است در حالی که  $Q$  شبکه موازی در شکل ۱۱-۱۶ (ب) برابر  $R_p / |X_p|$  می‌باشد. بگذارید ببینیم مقادیر  $R_p$ ،  $X_p$  چه باید باشد تا شبکه موازی شکل ۱۱-۱۶ (ب) و شبکه سری شکل ۱۱-۱۶ (الف) در فرکانس خاصی معادل شود.  $Y_p$  و  $Y_s$  را مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$Y_s = \frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2} \\ = Y_p = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{X_p}$$

و بنابراین

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \quad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

با تقسیم این دو رابطه هم داریم:

$$\frac{R_p}{X_p} = \frac{X_s}{R_s}$$

نتیجه می‌شود که  $Q$ های شبکه‌های سری و موازی باید برابر باشند.

$$Q_p = Q_s = Q$$

پس معادلات تبدیل به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$R_p = R_s(1 + Q^2) \quad (22)$$

$$X_p = X_s(1 + \frac{1}{Q^2}) \quad (23)$$

گر  $R_p$  و  $X_p$  مقادیر مفروض باشند، می‌توان  $R_s$  و  $X_s$  را هم به دست آورد. اگر  $Q \geq 5$  باشد، با استفاده از روابط تقریبی مختصر خطایی وجود خواهد داشت.

$$R_p \approx Q^2 R_s \quad (24)$$

$$X_p \approx X_s \quad (C_p \approx C_s \quad \text{یا} \quad L_p \approx L_s) \quad (25)$$

معادل موازی ترکیب سری یک القاگر 100 mH و مقاومت 5  $\Omega$  را در فرکانس 1000 rad/s به دست آورید. جزئیات این شبکه مشخص نیست.

در  $\omega = 1000$  rad/s و  $X_s = 1000 (100 \times 10^{-3}) = 100 \Omega$ ، این ترکیب سری برابر است با

$$Q = \frac{X_s}{R_s} = \frac{100}{5} = 20$$

چون  $Q$  به قدر کافی بالا است (20 خیلی بزرگتر از 5 است)، معادلات (۲۴) و (۲۵) را به کار می‌بریم.

$$R_p \approx Q^2 R_s = 2000 \quad \text{و} \quad L_p \approx L_s = 100 \text{ mH}$$

در این جا می‌بینیم که القاگر 100 mH سری با مقاومت 5  $\Omega$  همان امپدانس ورودی را تولید می‌کند که یک القاگر 100 mH با مقاومت 2000  $\Omega$  در فرکانس 1000 rad/s تولید می‌نماید.

توجه کنید که  $\omega_0$  کمتر از  $1/\sqrt{LC}$  است، ولی در صورت کوچک بودن  $R_1 / L$ ،  $\omega_0$  به  $1/\sqrt{LC}$  خیلی نزدیک خواهد شد.

حداکثر مقدار امپدانس ورودی هم شایان توجه است. مقدار آن  $R_2$  نیست و در  $\omega_0$  (یا در  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ) هم رخ نمی‌دهد. اثبات این عبارات را نشان نمی‌دهیم زیرا به سرعت به عبارات جبری پیچیده تبدیل می‌شوند. با این وجود موضوع سرراست است. بگذارید موضوع را با یک مثال روشن کنیم.



#### مثال ۱۶-۴

با به کارگیری  $R_1 = 2 \Omega$ ،  $L = 1 \text{ H}$ ،  $C = 125 \text{ MF}$ ،  $R_2 = 3 \Omega$  در شکل ۹-۱۶ (الف) فرکانس تشدید و امپدانس در حالت تشدید را معین کنید.

با جایگزینی مقادیر فوق در معادله (۲۱) داریم:

$$\omega_0 = \sqrt{8 - 2^2} = 2 \text{ rad/s}$$

و به این ترتیب قادر خواهیم بود امپدانس ورودی را محاسبه کنیم.

$$Y = \frac{1}{3} + j2\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2 + j2(1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 0.5835$$

و سپس امپدانس ورودی در حالت تشدید برابر است با

$$Z(j2) = \frac{1}{0.583} = 1.714 \Omega$$

اگر  $R_1 = 0$  می‌بود، فرکانس تشدید چنین می‌شد.

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.83 \text{ rad/s}$$

و امپدانس ورودی خواهد شد:

$$Z(j2.83) = 1.947 \angle -13.26^\circ \Omega$$

با این وجود از شکل ۱۰-۱۶ ملاحظه می‌شود فرکانسی که در آن مقدار امپدانس حداکثر رخ می‌دهد برابر با  $\omega_m = 3.26 \text{ rad/s}$  می‌باشد و این مقدار حداکثر نیز چنین است:

$$Z(j3.26) = 1.980 \angle -21.4^\circ \Omega$$

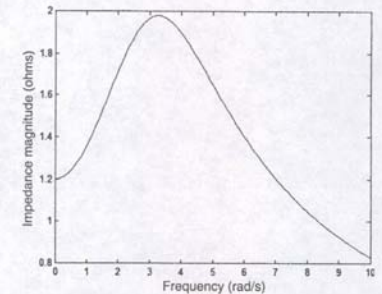
مقدار امپدانس در حالت تشدید با حداقل مقدار آن حدود 16% تفاوت دارد. هر چند که چنین خطایی را می‌توان در بسیاری از موارد عملی نادیده گرفت ولی در جلسه امتحان آخر ترم نمی‌توان از آن به سادگی گذشت. در آخرین بخش نشان خواهیم داد که  $Q$  مربوط به القاگر در فرکانس 2 rad/s برابر واحد است. این خطا در واقع به دلیل وجود 16% خطا است.

۱۶-۵ اگر در شکل ۹-۱۶ (الف)،  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  و  $C = 2.533 \text{ PF}$  باشد، القاگر مناسبی برای انتخاب فرکانس تشدید 1 MHz اختیار کنید (راهنمایی:  $\omega = 2\pi f$  است).

جواب: 10 mH

#### ترکیبات معادل سری و موازی

برای تبدیل مدار مفروضی چون شکل ۹-۱۶ (الف) به مدار معادل دیگری مانند شکل ۹-۱۶ (ب) مراجعه می‌کنیم. ابتدا باید  $Q$  ترکیب سری یا موازی یک مقاومت و یک راکتانس (خازنی یا القایی) را مورد بحث قرار دهیم. مدار سری شکل ۱۱-۱۶ (الف) را در نظر می‌گیریم.  $Q$  مربوط به این شبکه مجدداً به صورت  $2\pi$  برابر نسبت انرژی ذخیره شده به انرژی تلف شده در هر پریود تعریف می‌شود و می‌توان آن را در هر فرکانس انتخابی محاسبه کرد. به بیان دیگر،  $Q$



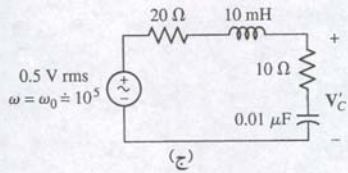
شکل ۱۰-۱۶ نمودار  $|Z|$  در برابر  $\omega$  که با برنامه متلب زیر تولید شده است.

```
EDU> omega = linspace(0,10,100);
EDU> for i = 1:100
Y(i) = 1/3 + j*omega(i)/8 + 1/(2 + j*omega(i));
Z(i) = 1/Y(i);
end
EDU> plot(omega,abs(Z));
EDU> xlabel('frequency (rad/s)');
EDU> ylabel('impedance magnitude (ohms)');
```

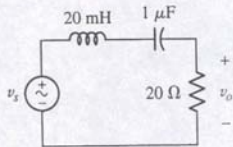
#### تمرین

#### مثال ۱۶-۵

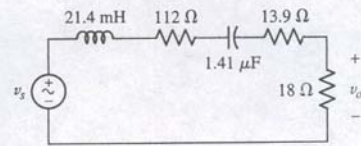




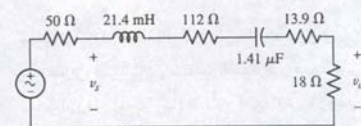
شکل ۱۶-۱۳ (ج) مدار تشدید سری هنگامی به دست می آید که شبکه RC موازی در بخش (ب) با یک شبکه RC سری که در  $10^5 \text{ rad/s}$  معادل است جایگزین شود.



شکل ۱۶-۱۴ اولین مدل برای یک القاگر، خازن و مقاومت سری با یک منبع.



شکل ۱۶-۱۵ مدل اصلاح شده‌ای که در آن مقادیر دقیق‌ترند و تلفات در القاگر لحاظ شده است.



شکل ۱۶-۱۶ مدل نهایی شامل مقاومت خروجی منبع ولتاژ.

تشکیل می‌شود. به این ترتیب مدار معادل شکل ۱۶-۱۳(ج) به دست آمده است. Q تشدید در این مدار اکنون 33.3 است و بنابراین ولتاژ دو سر خازن در مدار شکل ۱۶-۱۳(ج) برابر  $16 \frac{2}{3}$  خواهد بود. ولی ما فقط لازم است تا  $|V_C|$  که ولتاژ دوسر ترکیب RC است را به دست آوریم:

$$|V_C| = \frac{0.5}{30} |10 - j1000| = 16.67 \text{ V}$$

ولتاژ دوسر خازن و  $|V_C|$  اساساً برابرند. چون افت ولتاژ دوسر مقاومت  $10 \Omega$  بسیار کوچک است.

نتیجه نهایی این که یک ولتمتر خوب هم می‌تواند تأثیر زیادی روی پاسخ مدارهای با Q بالا داشته باشد. تأثیر مشابهی را می‌توان در استفاده از یک آمپر متر ایده‌آل در مدار انتظار داشت. این بخش را با یک داستان به پایان می‌بریم.

یکی بود یکی نبود، دانشجویی بود به نام پت که استادی به نام دکتر ایبل داشت. یک روز بعد از ظهر دکتر ایبل سه قطعه مداری، شامل یک مقاومت، یک القاگر، یک خازن با مقادیر نامی  $20 \text{ mH}$ ،  $20 \text{ mH}$  و  $1 \mu\text{F}$  را به پت داد. از او خواسته شد تا یک منبع ولتاژ با فرکانس متغیر را به ترکیب سری این سه عنصر ببندد و ولتاژ دو سر مقاومت را به صورت تابعی از فرکانس اندازه بگیرد و سپس مقادیر عددی فرکانس تشدید، Q تشدید و عرض نصف توان را محاسبه نماید. همچنین از او خواسته شد تا نتایج آزمایش را قبل از اندازه‌گیری تخمین بزند. پت که کارش در کلاس چندان جالب نبود، مدار را در ذهنش به صورت شکل ۱۶-۱۴ تصور کرد و سپس محاسبه زیر را انجام داد:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = 1125 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = 7.07$$

$$B = \frac{f_0}{Q_0} = 159 \text{ Hz}$$

پس به آزمایشی که دکتر ایبل از او خواسته بود پرداخت، آن‌ها را با نتایج خود مقایسه کرد. حاصل آن چیزی جز تغییر رشته از برق به اقتصاد نبود! این نتایج چنین بود:

$$f_0 = 1000 \text{ Hz} \quad Q_0 = 0.625 \quad B = 1600 \text{ Hz}$$

ت می‌دانست که تفاوت بین مقادیر نظری و آزمایشی در حد تقریب‌های مهندسی و یا ناشی خطای دستگاه‌های اندازه‌گیری توجیهی ندارد. متأسفانه نتایج به پرفسور تحویل شد. دکتر ایبل که از این خطاها زیاد دیده بود و حتی خودش عملاً بعضی را موجب شده بود خند می‌زد و توجه پت را به Q سنجی (با پل امپدانس) که در اغلب آزمایشگاه‌ها یافت می‌شود، جلب نمود و به او گفت بهتر است ببینی عناصری که در دست داری در فرکانس‌های نزدیک به شدید، مثلاً  $1000 \text{ Hz}$  چه هستند.

پت آن کار را انجام داد و فهمید که مقدار مقاومت  $18 \Omega$ ، القاکنایی را  $21.4 \text{ mH}$  و ضریب کیفیت 1.2، ظرفیت  $1.41 \mu\text{F}$  و ضریب تلفات (عکس ضریب کیفیت) 0.123 می‌باشد. به این ترتیب پت امیدوار شد و مدلی با ترکیب سری  $21.4 \text{ mH}$  و مقاومت  $\omega L/Q = 112 \Omega$  و مدل مناسب‌تری برای خازن با ترکیب سری ظرفیت  $1.41 \mu\text{F}$  و مقاومت  $1/\omega CQ = 13.9 \Omega$  به دست آورد. با این داده‌ها، پت مدل اصلاح شده‌ای را طبق شکل ۱۶-۱۵ ارائه داد و مقادیر جدید پیش‌بینی شده را محاسبه کرد:

برای کنترل دقت اکووالانس، امپدانس ورودی را برای هر شبکه در  $1000 \text{ rad/s}$  ارزیابی می‌کنیم. درمی‌یابیم که:

$$Z_s(j1000) = 5 + j100 = 100.1 \angle 87.1^\circ \Omega$$

$$Z_p(j1000) = \frac{2000(j100)}{2000 + j100} = 99.9 \angle 87.1^\circ \Omega$$

و نتیجه می‌گیریم که این تقریب در فرکانس خاصی که تبدیل در آن صورت می‌گیرد، بسیار دقیق است. دقت در فرکانس  $900 \text{ rad/s}$  هم رضایت‌بخش است. زیرا:

$$Z_s(j900) = 90.1 \angle 86.8^\circ \Omega$$

$$Z_p(j900) = 89.9 \angle 87.4^\circ \Omega$$

## تمرین

۱۶-۶ در  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$  شبکه موازی معادل ترکیب سری شکل ۱۶-۱۲(الف) را به دست آورید.

۱۶-۷ معادل سری را برای شبکه موازی شکل ۱۶-۱۲(ب) به دست آورید. فرض کنید  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ .

$$\text{جواب ۱۶-۶: } 8 \text{ H و } 640 \text{ k } \Omega$$

$$\text{جواب ۱۶-۷: } 5 \text{ H و } 250 \Omega$$

به عنوان مثالی دیگر در جایگزینی یک مدار تشدید پیچیده‌تر با معادل RLC سری یا موازی، اجازه بدهید مسئله‌ای را در وسایل اندازه‌گیری الکترونیک بررسی کنیم. شبکه ساده RLC را در شکل ۱۶-۱۳(الف) ملاحظه نمایید که با یک منبع ولتاژ سینوسی در فرکانس تشدید تحریک شده است. مقدار مؤثر (rms) ولتاژ منبع  $0.5 \text{ V}$  است و ما می‌خواهیم مقدار مؤثر ولتاژ را در دو سر خازن با یک ولتمتر الکترونیک اندازه بگیریم. مقاومت داخلی ولتمتر  $100000 \Omega$  است. یعنی یک ولتمتر را می‌توان با یک ولتمتر ایده‌آل موازی با یک مقاومت  $100 \text{ k}\Omega$  نشان داد.

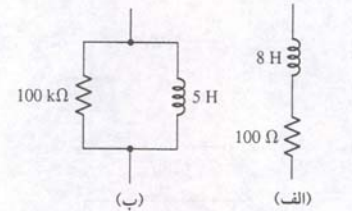
قبل از این که ولتمتر وصل شود، فرکانس تشدید  $10^5 \text{ rad/s}$ ،  $Q_0 = 50$ ، جریان  $25 \text{ mA}$  و ولتاژ rms در دو سر خازن  $2.5 \text{ V}$  محاسبه شده است. همان‌طور که در انتهای بخش ۱۶-۳ دیدیم این ولتاژ  $Q_0$  برابر ولتاژ اعمال شده است. بنابراین اگر ولتمتر ایده‌آل باشد، حتی اگر به دو سر خازن وصل شود، باید  $25 \text{ V}$  را بخواند.

با اتصال ولتمتر واقعی، شکل ۱۶-۱۳(ب) حاصل می‌گردد. برای این که یک مدار RLC سری به دست آید، لازم است تا شبکه RC موازی با یک RC سری جایگزین شود. بگذارید Q در این شبکه خیلی بالا باشد به نحوی که خازن سری معادل برابر با خازن موازی گردد. ما این کار را بدین علت انجام می‌دهیم تا فرکانس تشدید را برای مدار RLC سری نهایی تقریب کنیم. بنابراین اگر مدار سری هم حاوی خازن  $0.01 \mu\text{F}$  باشد، فرکانس تشدید در  $10^5 \text{ rad/s}$  باقی می‌ماند. ما این فرکانس تشدید تخمینی را برای محاسبه Q در شبکه RC موازی لازم داریم که برابر است با:

$$Q = \frac{R_p}{|X_p|} = \omega R_p C_p = 10^5 (10^5) (10^{-8}) = 100$$

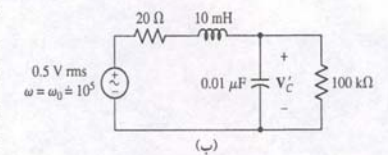
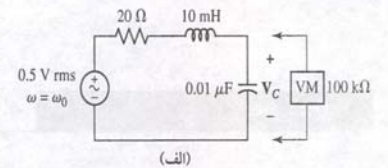
چون این مقدار بزرگتر از 5 است، فرضیات فوق صادق بوده و شبکه RC سری معادل از یک خازن  $C_s = 0.01 \mu\text{F}$  و یک مقاومت

$$R_s \approx \frac{R_p}{Q^2} = 10 \Omega$$



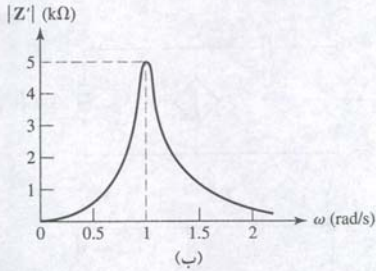
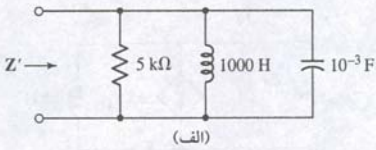
شکل ۱۶-۱۲ (الف) یک شبکه سری که معادل موازی آن در  $\omega = 1000$  خواسته شده است. (ب) یک شبکه موازی که معادل سری آن در  $\omega = 1000$  مورد تقاضا است.

یک وسیله اندازه‌گیری ایده‌آل قادر است کمیت خاص مورد نظری را بدون ایجاد مزاحمت برای مدار تحت تست اندازه بگیرد. هر چند این بعید است ولی وسایل مدرن به حالت ایده‌آل خیلی نزدیک شده‌اند.

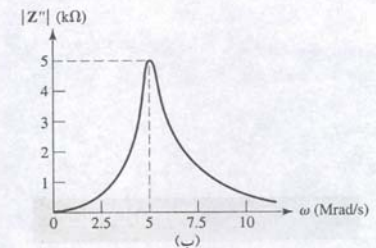
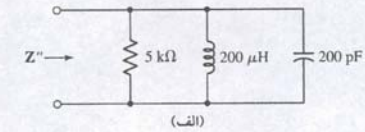


شکل ۱۶-۱۳ (الف) یک مدار تشدید مغروض که در آن ولتاژ خازن باید با یک ولتمتر الکترونیک غیرایده‌آل اندازه‌گیری شود. (ب) تأثیر ولتمتر در مدار لحاظ شده است و مقدار  $V_C$  را می‌خواند.





شکل ۱۶-۱۸ (الف) شبکه ۱۶-۱۷ (الف) پس از تغییر مقیاس در اندازه با ضریب  $K_m = 2000$ . (ب) منحنی پاسخ مربوطه.



شکل ۱۶-۱۹ (الف) شبکه شکل ۱۶-۱۸ (الف) پس از تغییر مقیاس در فرکانس با ضریب  $K_f = 5 \times 10^6$ . (ب) منحنی پاسخ مربوطه.

تغییر مقیاس اندازه فرآیندی است که طی آن امپدانس شبکه دو پایانه در  $K_m$  ضرب می‌شود در حالی که فرکانس ثابت می‌ماند. ضریب  $K_m$  حقیقی و مثبت است و می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر از یک باشد. به طریقی مشابه منظور از تغییر مقیاس مدار با ضریب ۲ این است که در هر فرکانسی امپدانس مدار جدید ۲ برابر امپدانس مدار قبل است. اکنون باید ببینیم که مقدار هر عنصر غیر فعال چگونه باید تغییر کند. برای افزایش امپدانس ورودی یک شبکه با ضریب  $K_m$ ، کافی است که امپدانس هر عنصر را با همان ضریب افزایش دهیم. پس هر مقاومت  $R$  باید با  $K_m R$  جایگزین شود. هر اندوکتانس هم باید در هر فرکانسی، امپدانس  $K_m$  برابر داشته باشد. برای افزایش یک امپدانس  $sL$  به اندازه  $K_m$  برابر  $s$  ثابت، القاکنایی  $L$  باید  $K_m L$  تعویض شود. به همین ترتیب هر ظرفیت  $C/K_m$  جایگزین می‌شود. به طور خلاصه این تغییرات شبکه‌ای را تولید می‌کند که تغییر مقیاس اندازه‌اش در  $K_m$  ضرب شده است:

$$\left. \begin{array}{l} R \rightarrow K_m R \\ L \rightarrow K_m L \\ C \rightarrow \frac{C}{K_m} \end{array} \right\} \text{تغییر مقیاس اندازه}$$

ی‌تی که هر عنصر در شکل ۱۶-۱۷ (الف) با ضریب ۲۰۰۰ تغییر مقیاس اندازه پیدا کند، شبکه ۱۶-۱۸ (الف) حاصل می‌شود. منحنی پاسخ شکل ۱۶-۱۸ (ب) نشان می‌دهد که هیچ تغییری در منحنی پاسخ قبلی صورت نگرفته به جز این‌که محور عمودی تغییر مقیاس داده است. اکنون ببینید این شبکه جدید را به لحاظ فرکانس تغییر مقیاس دهیم. ما تغییر فرکانس را به صورت فرآیندی تعریف می‌کنیم که در آن فرکانس در هر امپدانس با ضریب  $K_f$  تغییر کند. دوباره از جمله کو تاهتری استفاده می‌کنیم و می‌گوییم اگر شبکه به لحاظ فرکانس با ضریب ۲ تغییر مقیاس دهد، همان امپدانس در فرکانسی دو برابر به دست می‌آید. تغییر مقیاس فرکانس کلی با تغییر در مقیاس فرکانس هر عنصر غیر فعال به وجود می‌آید. واضح است که مقاومت تحت تأثیر این تغییر واقع نمی‌شود. امپدانس هر القاگر  $sL$  است و اگر قرار باشد، در فرکانس  $K$  برابر همان امپدانس به دست آید آن‌گاه القاکنایی  $L$  باید با القاکنایی  $L / K_f$  جایگزین شود. به طور مشابه ظرفیت  $C/K_f$  جایگزین می‌گردد. بنابراین اگر قرار باشد، شبکه‌ای با ضریب  $K_f$  تغییر مقیاس دهد آن‌گاه تغییرات لازم در عناصر غیر فعال چنین است.

$$\left. \begin{array}{l} R \rightarrow R \\ L \rightarrow \frac{L}{K_f} \\ C \rightarrow \frac{C}{K_f} \end{array} \right\} \text{تغییر مقیاس فرکانس}$$

گر هر عنصر از شبکه تغییر مقیاس یافته در اندازه شکل ۱۶-۱۸ (الف)، به لحاظ فرکانس با ضریب  $5 \times 10^6$  تغییر مقیاس دهد، شکل ۱۶-۱۹ (الف) به دست می‌آید. منحنی پاسخ مربوطه در شکل ۱۶-۱۹ (ب) ملاحظه می‌گردد. عناصر مدار در این آخرین شبکه مقادیری دارند که به راحتی در مدارهای فیزیکی قابل دستیابی‌اند. شبکه در واقع قابل ساخت و آزمایش است. پس اگر مدار شکل ۱۶-۱۷ (الف) افعاً معادل الکتریکی یک سیستم مکانیکی باشد، می‌توان با تغییر مقیاس مداری به دست آورد. در آزمایشگاه آن را ساخته و آزمایش کرد. به این ترتیب آزمایش‌هایی که روی یک سیستم مکانیکی گران و غیر عادی است، روی یک سیستم الکتریکی تغییر مقیاس یافته ساخته شده و به منظور تکمیل تحلیل نتایج به مقیاس اولیه بازگردانده می‌شوند.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{21.4 \times 10^{-3} \times 1.41 \times 10^{-6}}} = 916 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi \times 916 \times 21.4 \times 10^{-3}}{143.9} = 0.856$$

$$B = 916/0.856 = 1070 \text{ Hz}$$

چون این مقادیر به مقادیر اندازه گیری شده نزدیک‌تر بود، پت خوشحال‌تر شد. با این وجود دکتر ایبل با خشونت گفت آیا امپدانس خروجی منبع تغذیه را در نظر گرفته‌ای؟ پت گفت خیر و بلافاصله به سمت میز آزمایشگاه بازگشت.

معلوم شد که امپدانس خروجی موردنظر  $50 \Omega$  است. پت این مقدار را به نمودار مدار مطابق شکل ۱۶-۱۶ اضافه نمود. با به کارگیری مقدار مقاومت جدید  $193.9 \Omega$  مقادیر اصلاح شده  $Q_0$  و  $B$  چنین به دست آمدند.

$$Q_0 = 0.635 \quad B = 1442 \text{ Hz}$$

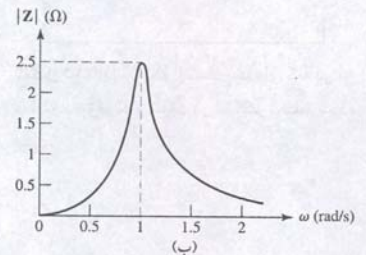
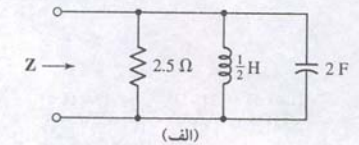
چون اکنون همه مقادیر تجربی و تئوری در محدوده ۱۰٪ است، شوق ادامه رشته برق موجب شد تا تکالیف خود را زودتر از شروع کلاس انجام دهد. دکتر ایبل با رضایت سری تکان داد و زیر لب زمزمه کرد:

هنگامی که وسایل واقعی را به کار می‌بری به مدلی که انتخاب می‌کنی نگاه کن قبل از هر محاسبه‌ای فکر کن

## تمرین

۱۶-۸ ترکیب سری مقاومت  $10 \Omega$  و خازن  $10 \text{ nF}$  را که موازی با ترکیب سری مقاومت  $20 \Omega$  و القاگر  $10 \text{ mH}$  است، در نظر بگیرید. (الف) فرکانس تشدید شبکه موازی را پیدا کنید. (ب)  $Q$  را برای شاخه  $RC$  به دست آورید. (ج)  $Q$  شاخه  $RL$  را معین کنید. (د) معادل سه عنصری شبکه اصلی را بیابید.

جواب:  $10 \text{ nF} \parallel 10 \text{ mH} \parallel 33.3 \text{ k}\Omega$  و  $50, 100, 10^5 \text{ rad/s}$ .



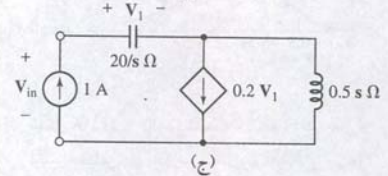
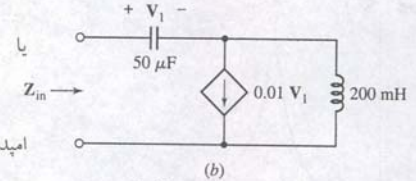
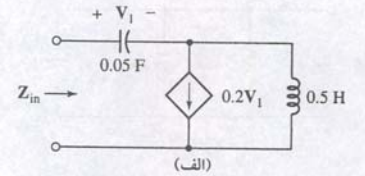
شکل ۱۶-۱۷ (الف) یک مدار تشدید موازی که به عنوان مثالی در تغییر اندازه و فرکانس به کار رفته است. (ب) اندازه امپدانس ورودی برحسب تابعی از فرکانس نشان داده شده است.

## ۱۶-۵ تغییر مقیاس

بعضی از مثال‌ها و مسائلی که تاکنون حل کردیم، مدارهای حاوی عناصر غیر فعال در حد چند اهم چند هنری و چند فاراد و فرکانس‌های هم حدود چند رادیان بر ثانیه بودند. این مقادیر عددی خاص نه به دلیل رایج بودنشان در عمل، بلکه به دلیل ساده‌شدن عملیات ریاضی و پرهیز از توان‌های ۱۰ در طول محاسبات انتخاب شدند. روال‌های تغییر مقیاسی که در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرند، امکان تحلیل شبکه‌های متشکل از عناصر عملی را فراهم می‌سازند و محاسبات عددی ساده‌تری را اجازه می‌دهند. در این‌جا تغییر مقیاس اندازه و نیز فرکانس را بررسی می‌کنیم. ببینید شکل ۱۶-۱۷ (الف) را به عنوان مثالی از مدار تشدید موازی برگزینیم. مقادیر غیر عملی عناصر منجر به پاسخ غیر عادی شکل ۱۶-۱۷ (ب) شده است. حداکثر امپدانس  $5 \Omega$ ، فرکانس تشدید  $1 \text{ rad/s}$ ،  $Q$  برابر ۵ و عرض باند  $0.2 \text{ rad/s}$  است. این مقادیر بیشتر به مشخصات یک سیستم مکانیکی شبیه‌اند تا به یک سیستم الکتریکی. مقادیر موجود بیشتر برای محاسبه مناسبند ولی برای ساخت مدار غیر عملی‌اند.

فرض کنید هدف تغییر مقیاس این شبکه به نحوی باشد که یک حداکثر امپدانس  $1000 \Omega$  را در فرکانس  $5 \times 10^6 \text{ rad/s}$  یا  $796 \text{ kHz}$  داشته باشیم. به بیان دیگر بخواهیم مقادیر محو عمودی در ۲۰۰۰ و محور افقی در  $5 \times 10^6$  ضرب شوند. پس دو کار در پیش داریم: (۱) تغییر مقیاس در اندازه به مقدار ۲۰۰۰ و (۲) تغییر مقیاس فرکانس با ضریب  $5 \times 10^6$ .





شکل ۱۶-۲۰ (الف) شبکه‌ای با اندازه تغییر مقیاس یافته با ضریب 20 و ضریب تغییر مقیاس فرکانس 50. (ب) شبکه تغییر مقیاس یافته (ج) یک منبع تست 1 A به پایانه‌های ورودی اعمال شده تا امپدانس شبکه تغییر مقیاس نیافته در بخش (الف) به دست آید.

کس

مثال ۱۶-۶

امپدانس که برحسب  $s$  داده شده باشد را هم می‌توان به لحاظ اندازه و فرکانس تغییر مقیاس داد و این کار بدون هرگونه آگاهی از نوع عناصر تشکیل دهنده مدار صورت می‌گیرد. برای تغییر مقیاس  $Z(s)$  از لحاظ اندازه، تعریف تغییر مقیاس اندازه نشان می‌دهد که فقط کافی است  $Z(s)$  را در  $K_m$  ضرب کنیم تا اندازه تغییر مقیاس یافته امپدانس حاصل گردد. بنابراین امپدانس مدار تشدید موازی شکل ۱۷-۱۶ (الف) چنین است.

$$Z(s) = \frac{s}{2s^2 + 0.4s + 2}$$

$$Z(s) = \frac{0.5s}{(s + 0.1 + j0.995)(s + 0.1 - j0.995)}$$

امپدانس  $Z'(s)$  شبکه اندازه تغییر مقیاس یافته برابر است

$$Z'(s) = K_m Z(s)$$

اگر دوباره  $K_m = 2000$  بگیریم، داریم:

$$Z'(s) = (1000) \frac{s}{(s + 0.1 + j0.995)(s + 0.1 - j0.995)}$$

حال اگر  $Z'(s)$  را از لحاظ فرکانس با ضریب  $5 \times 10^6$  تغییر مقیاس دهیم، آنگاه باید  $Z''(s)$  در یک فرکانس  $s$  با مقدار  $Z'(s)$  در فرکانس  $s(5 \times 10^6)$  برابر باشد تا  $Z'(s)$  و  $Z''(s)$  امپدانس یکسانی از خود به نمایش بگذارند. پس از کمی تعقل و حساب سرانگشتی درمی‌یابیم که این کار کلاً توسط رابطه زیر انجام می‌شود.

$$Z''(s) = Z' \left( \frac{s}{K_f} \right)$$

توجه کنید که  $Z''(s)$  با جایگزینی هر  $s$  در  $Z'(s)$  با  $s/K_f$ ، به دست می‌آید. پس عبارت تحلیلی امپدانس شبکه شکل ۱۹-۱۶ (الف) باید به صورت زیر باشد:

$$Z''(s) = (1000) \frac{s / (5 \times 10^6)}{[s / (5 \times 10^6) + 0.1 + j0.995][s / (5 \times 10^6) + 0.1 - j0.995]}$$

یا

$$Z''(s) = (1000) \frac{(5 \times 10^6)s}{[s + 0.5 \times 10^6 + j4.975 \times 10^6][s + 0.5 \times 10^6 - j4.975 \times 10^6]}$$

گرچه تغییر مقیاس معمولاً به عناصر غیر فعال اعمال می‌شود، منابع وابسته نیز می‌توانند از لحاظ اندازه و فرکانس تغییر مقیاس یابند. فرض می‌کنیم که خروجی هر منبع به صورت  $V_x$  یا  $K_y V_x$  باشد، که  $K_y$  بعد ادمیتانس را برای منبع جریان وابسته دارد و برای یک منبع ولتاژ وابسته بدون بُعد است. در حالی که  $K_y$  برای منبع ولتاژ وابسته بُعد اهم و برای منبع جریان وابسته بی‌بُعد است. اگر شبکه حاوی منبع وابسته، از لحاظ اندازه یا  $K_m$  تغییر مقیاس یابد، آنگاه لازم است که  $K_x$  یا  $K_y$  طوری رفتار کنیم که گویی عناصر متناظر با بُعدشان هستند. یعنی اگر بعد امپدانس داشتند، باید آن‌ها را در  $K_m$  ضرب کرد اگر ادمیتانس باشند، باید  $K_m$  تقسیم نمود و اگر بدون بُعد بود آن‌ها را تغییر نداد. تغییر مقیاس فرکانس بر منابع وابسته تأثیری ندارد.

شبکه شکل ۲۰-۱۶ را با ضریب  $K_m = 20$  و  $K_f = 50$  تغییر مقیاس دهید و سپس  $Z_{in}(s)$  برای شبکه جدید پیدا کنید.

تغییر مقیاس خازن از تقسیم 0.05 F بر ضریب  $K_m = 20$  و تغییر مقیاس فرکانس از تقسیم  $K_f = 50$  به دست می‌آید. با اجرای همزمان دو عمل داریم:

$$C = \frac{0.05}{(20)(50)} = 50 \mu F$$

لذا اگر نیز چنین تغییر مقیاس می‌یابد:

$$L = \frac{(20)(0.5)}{50} = 200 \text{ mH}$$

در تغییر مقیاس منبع وابسته، تنها تغییر مقیاس اندازه می‌باید لحاظ شود، زیرا تغییر مقیاس در فرکانس تأثیری بر منابع وابسته ندارد. چون این منبع جریان با ولتاژ کنترل شده است، ضریب ثابت 0.2 دارای واحد A/V یا S است. نظر به این که ضریب، واحد ادمیتانس دارد، آن را بر  $K_m$  تقسیم می‌کنیم، پس جمله جدید  $0.01 V_1$  خواهد شد. شبکه جدید در شکل ۲۰-۱۶ (ب) ملاحظه می‌شود. برای یافتن امپدانس شبکه جدید، لازم است منبع تست 1 A را به پایانه‌های ورودی اعمال کنیم. در هر صورت می‌توان با هر یک از مدارها کار کرد. اجازه بدهید ابتدا با شکل ۲۰-۱۶ (الف) که تغییر مقیاس نیافته کار کنیم و سپس نتیجه را تغییر مقیاس دهیم. با توجه به شکل ۲۰-۱۶ (ج):

$$V_{in} = V_1 + 0.5s(1 - 0.2 V_1)$$

و نیز:

$$V_1 = \frac{20}{s} \quad (1)$$

با اجرای جایگزینی‌های اشاره شده و به دنبال آن کمی دستکاری جبری داریم:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{1} = \frac{s^2 - 4s + 40}{2s}$$

رای تغییر مقیاس این کمیت در مدار شکل ۲۰-۱۶ (ب) آن را در  $K_m = 20$  ضرب و سپس  $s$  را با  $s/50$  یا  $K_f/s$  جایگزین می‌کنیم. پس:

$$Z_{in} = \frac{0.2 s^2 - 40s + 20000}{s} \Omega$$

۹-۱۶ یک مدار تشدید موازی با  $C = 0.01 \text{ F}$ ،  $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$  و  $B = 2.5 \text{ rad/s}$ ،  $\omega_0$  تعریف شده است. مطلوب است مقادیر  $R$  و  $L$  اگر شبکه با موارد زیر تغییر مقیاس یافته باشد. (الف) اندازه با ضریب 800. (ب) فرکانس با ضریب  $10^4$  و (ج) اندازه با 800 و فرکانس با  $10^4$ .

## ۱۶-۶ نمودار بُود

بر این بخش روشی سریع را برای ترسیم تصویر تقریبی تغییر اندازه و فاز یک تابع تبدیل برحسب  $\omega$  خواهیم دید. البته می‌توان منحنی‌های دقیق‌تری را با ماشین حساب برنام‌پذیر یا کامپیوتر ترسیم نمود. می‌توان آن‌ها را روی صفحه کامپیوتر مستقیماً دید. با این وجود، هدف ما تهیه تصویری از اسخ نسبت به نمودار قطب-صفر است، البته بدون آن که محاسباتی طولانی لازم باشد.

### مقیاس دسی بل (dB)

سم این منحنی تقریبی پاسخ که مقصد ساخت آن را داریم، منحنی مجانبی یا نمودار بُود یا منحنی بُود کلمه بود را به ضم "ب" تلفظ نمایید (نام دارد و به نام ابداع کننده‌اش اچ. دبلیو. بُود (H.W. Bode) که بهندسی در رشته برق و ریاضی‌دانی در آزمایشگاه تلفن بل بود، خوانده شده است. محور نقی محور فرکانس و با مقیاس لگاریتمی است. دامنه هم برحسب یک واحد لگاریتمی دیگر ه نام دسی بل (dB) نشان داده می‌شود. اندازه  $|H(j\omega)|$  برحسب dB چنین تعریف می‌شود:

$$H_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

نه در آن از لگاریتم معمولی مبنای 10 استفاده شده است. (گاهی هم از ضریب 10 به جای 20 رای تابع تبدیل توان استفاده می‌شود ولی ما با آن در این جا کاری نداریم). عمل عکس چنین است:

$$|H(j\omega)| = 10^{(H_{dB} / 20)}$$



دفعه فاصله‌ای است که در آن فرکانس 10 برابر می‌شود، مثلاً 3Hz تا 30Hz یا 12.5 MHz تا 125 mHz. اکتاو فاصله‌ای است که در آن فرکانسی دو برابر می‌شود مثلاً 7 GHz تا 14 GHz.

بنابراین مجانب دارای شیب 20 dB/dec است. چون  $H_{dB}$  با دو برابر شدن  $\omega$ ، به اندازه 6 dB بالا می‌رود، پس می‌توان گفت که شیب 6 dB/oct است. مجانب فرکانس بالا هم در شکل ۲۱-۱۶ با خط پری برای  $a > \omega$  در  $a < \omega$  به صورت خط شکسته درآمده است. دقت کنید که دو مجانب در  $\omega = a$  که دو فرکانس نقطه صفر است، یکدیگر را قطع می‌کنند. این فرکانس را فرکانس گوشه شکست، 3 dB یا فرکانس نصف توان هم می‌گویند.

### اصلاح متحنی‌های بود

اکنون باید ببینیم چقدر خطا در پاسخ مجانبی نهفته است. در فرکانس گوشه  $(\omega = a)$  خطا نسبت به مقدار مجانب dB برابر است با:

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}} = 3 \text{ dB}$$

در  $\omega = 0.5 a$  داریم:

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1.25} \approx 1 \text{ dB}$$

بنابراین پاسخ واقعی یک منحنی بدون گوشه است که به فاصله 3 dB در بالای پاسخ‌های مجانبی در  $\omega = a$  واقع است و نیز در  $\omega = 0.5 a$  حدود 1 dB خطا وجود دارد. (همچنین در  $\omega = 2a$ ). این اطلاعات در مواقع لزوم برای اصلاح گوشه‌ها به کار می‌روند.

### چند جمله‌ای‌ها

بسیاری از توابع تبدیل، بیش از یک صفر ساده (یا قطب ساده) دارند. با این وجود به سادگی به وسیله روش بود قابل بررسی هستند، زیرا ما در واقع با لگاریتم کار می‌کنیم. مثلاً تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$H(s) = K \left(1 + \frac{s}{s_1}\right) \left(1 + \frac{s}{s_2}\right)$$

که  $K$  مقداری ثابت، و  $-s_1$  و  $-s_2$  دو صفر تابع  $H(s)$  را تشکیل می‌دهند. برای این تابع به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$H_{dB} = 20 \log \left| K \left(1 + \frac{j\omega}{s_1}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{s_2}\right) \right| = 20 \log \left[ K \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2} \right]$$

یا

$$H_{dB} = 20 \log K + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2} + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{s_2}\right)^2}$$

که در واقع مجموع جمله ثابت (مستقل از فرکانس)  $20 \log K$ ، و دو جمله صفر ساده به فرم ملاحظه‌شده قبلی است. به بیان دیگر، ما می‌توانیم نموداری از برای  $H_{dB}$  به روش گرافیکی و با جمع نمودارهای مربوط به جملات جدا از هم ترسیم کنیم. این مطلب را در مثال زیر می‌شکافیم.

نمودار بود امپدانس ورودی شبکه شکل ۲۲-۱۶ را ترسیم کنید.

امپدانس ورودی را به این ترتیب داریم:

$$Z_{in}(s) = H(s) = 20 + 0.2s$$

با نوشتن آن به صورت استاندارد داریم:

$$H(s) = 20 \left(1 + \frac{s}{100}\right)$$

دو فاکتوری که  $H(s)$  را تشکیل می‌دهند، عبارتند از صفری در  $s = -100$  که منتهی به فرکانس شکستگی در  $\omega = 100 \text{ rad/s}$  می‌گردد و ثابتی که معادل با  $20 \log 20 = 26 \text{ dB}$  می‌شود. هر یک از این دو، به صورت خط‌چین در شکل ۲۳-۱۶ (الف) دیده می‌شوند. چون ما با لگاریتم

قبل از شروع بحثی مفصل در مورد تکنیک به کار رفته برای ترسیم نمودارهای بود بهتر است با واحد دسی‌بل آشنا شویم، چند مقدار مهم آن را بشناسیم و بعضی از خصوصیات لگاریتمی را مرور کنیم. چون  $\log 1 = 0$ ،  $\log 2 = 0.30103$ ،  $\log 10 = 1$  است، روابط زیر را داریم:

$$|H(j\omega)| = 1 \Leftrightarrow H_{dB} = 0$$

$$|H(j\omega)| = 2 \Leftrightarrow H_{dB} = 6 \text{ dB}$$

$$|H(j\omega)| = 10 \Leftrightarrow H_{dB} = 20 \text{ dB}$$

هر افزایش  $|H(j\omega)|$  با ضریب 10 برابر معادل افزایش  $H_{dB}$  به میزان 20 dB است. به علاوه  $\log 10^n = n$  است، پس  $20n \text{ dB} = 10^n$ . بنابراین 1000 متناظر با 60 dB است. در حالی که 0.01 متناظر با 40- dB است. با استفاده از مقادیر قبلی می‌توان نشان داد:

$$20 \log 5 = 20 \log \frac{10}{2} = 20 \log 10 - 20 \log 2 = 20 - 6 = 14 \text{ dB}$$

پس  $14 \text{ dB} \Leftrightarrow 5$  است. همچنین  $\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$  و لذا  $-3 \text{ dB} \Leftrightarrow \sqrt{2}$  است. تابع تبدیل خود را بر حسب  $s$  می‌نویسیم و هر وقت بخواهیم اندازه یا فاز را پیدا کنیم،  $s = j\omega$  قرار می‌دهیم. در صورت تمایل اندازه در آن نقطه بر حسب dB نوشته می‌شود.



### تمرین

۱۰-۱۶  $H_{dB}$  را در  $\omega = 146 \text{ rad/s}$  به دست آورید به شرطی که  $H(s)$  برابر باشد با (الف)  $20 / (s + 100)$ ، (ب)  $20(s + 100)$ ، (ج)  $20s$ ،  $|H(j\omega)|$  را حساب کنید اگر  $H_{dB}$  برابر باشد، (د) 29.2 dB، (ه) 15.6 dB- و (و) 0.318 dB-.

جواب: dB: -18.94، dB: 71.0، dB: 69.3، dB: 28.8، dB: 0.1660 و dB: 0.964.

### تعیین مجانب‌ها

گام بعدی تجزیه  $H(s)$  به عوامل اول و به دست آوردن قطب‌ها و صفرها است. ابتدا صفری را در  $s = -a$  در نظر می‌گیریم و آن را به صورت استاندارد زیر می‌نویسیم.

$$H(s) = 1 + \frac{s}{a} \quad (26)$$

نمودار بود برای این تابع از دو مجانب تشکیل شده که به ازای  $\omega$ های خیلی بزرگ و خیلی کوچک به  $H_{dB}$  میل می‌کند. پس با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

$$|H(j\omega)| = \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

و بنابراین

$$H_{dB} = 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| = 20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{a^2}}$$

وقتی که  $a \ll \omega$  باشد،

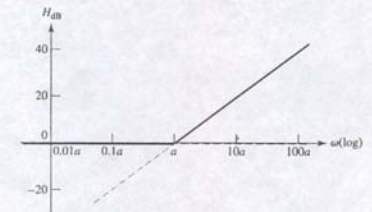
$$H_{dB} \approx 20 \log 1 = 0 \quad (\omega \ll a)$$

این مجانب ساده در شکل ۲۱-۱۶ مشاهده می‌شود، که به صورت خط پررنگ برای  $\omega < a$  و خط شکسته برای  $\omega > a$  ترسیم شده است.

وقتی  $a \gg \omega$  باشد،

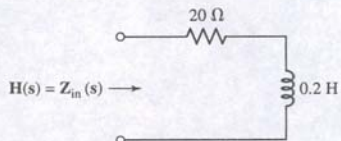
$$H_{dB} \approx 20 \log \frac{\omega}{a} \quad (\omega \gg a)$$

در  $\omega = 0$ ،  $H_{dB} = 0$ ؛ در  $\omega = 100$ ،  $H_{dB} = 20 \text{ dB}$ ؛ در  $\omega = 100 a$ ،  $H_{dB} = 40 \text{ dB}$  است. پس مقدار  $H_{dB}$  به ازای هر 10 برابر افزایش در فرکانس به اندازه 20 dB زیاد می‌شود.



شکل ۲۱-۱۶ نمودار اندازه بود برای  $H(s) = 1 + \frac{s}{a}$  متشکل از مجانب‌های فرکانس بالا و پایین به صورت خط پر. محل برخورد دو خط مجانب را گوشه می‌گویند. منحنی بود پاسخ را بر حسب دو مجانب به دست می‌دهد. هر دو خط راست به سادگی کشیده می‌شود.

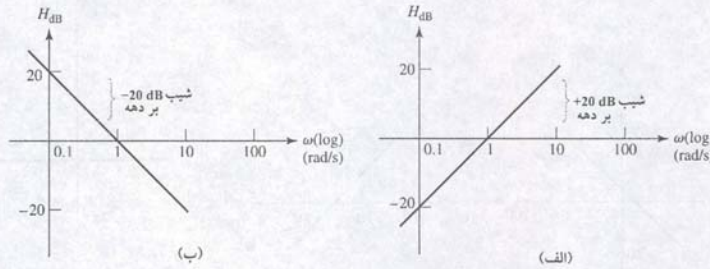
### مثال ۷-۱۶



شکل ۲۲-۱۶ اگر  $H(s)$  به صورت  $Z_{in}(s)$  در این شبکه اختیار شود، آن‌گاه نمودار بود برای  $H_{dB}$  مطابق شکل ۲۳-۱۶ (ب) است.



شکل ۱۶-۲۵ نمودارهای مجانبی برای (الف)  $H(s) = s$  و (ب)  $H(s) = \frac{1}{s}$ ، هر دو نمودار خطوط طولی هستند که در  $\omega = 1$  از 0 dB می‌گذرند و شیب  $\pm 20$  dB/dec دارند.



## تمرین

۱۶-۱۲ منحنی فاز بود را برای تابع تبدیل مثال ۱۶-۷ رسم کنید.  
 جواب:  $0^\circ$  در  $\omega < 10^\circ$ ،  $90^\circ$  در  $\omega \geq 1000$ ،  $45^\circ$  در  $\omega = 100$ ،  $45^\circ/\text{dec}$  در  $10 < \omega < 1000$  (rad/s).

## مطالبی چند در ترسیم منحنی‌های بُود

اکنون قطب ساده زیر را بررسی می‌کنیم:

$$H(s) = \frac{1}{1 + s/a} \quad (27)$$

چون این تابع، معکوس صفر است، منحنی بُود تابع فوق منفی آن‌چه که قبلاً دیدیم می‌باشد. نامنه در  $\omega = a$  برابر 0 dB و سپس شیب  $-20$  dB/dec در  $\omega > a$  می‌باشد. در  $\omega < 0.1a$  زاویه  $0^\circ$  را داریم.  $-90^\circ$  را در  $\omega > 10a$  و  $-45^\circ$  را در  $\omega = a$  و شیب  $-45^\circ/\text{dec}$  در  $0.1a < \omega < 10a$  برقرار است. به خواننده توصیه می‌شود، نمودار بود را با کار مستقیم روی معادله (۲۷) ترسیم نماید.

جمله ساده دیگری که می‌تواند در  $H(s)$  ظاهر شود وجود  $s$  در صورت یا مخرج است. اگر  $s = H(s)$  باشد، آن‌گاه:

$$H_{dB} = 20 \log |\omega|$$

بنابراین خط مستقیم نامحدودی داریم که در  $\omega = 1$  از 0 dB می‌گذرد و دارای شیب  $20$  dB/dec است. این خط در شکل ۱۶-۲۵ (الف) ملاحظه می‌شود. اگر  $s$  در مخرج باشد، خط مستقیم نامحدود با شیب  $-20$  dB/dec داریم که در  $\omega = 1$  از 0 dB می‌گذرد (شکل ۱۶-۲۵ (ب)).

جمله ساده دیگر در  $H(s)$ ، ثابت  $K$  می‌باشد. این جمله خط مستقیمی است افقی که به اندازه  $20 \log K$  بالای محور افقی قرار دارد. اگر  $|K| < 1$  باشد، این خط زیر محور افقی خواهد بود.

منحنی بُود را برای بهره مدار شکل ۱۶-۲۶ بیابید.

ما از سمت چپ مدار به سمت راست کار می‌کنیم و عبارت بهره ولتاژ را می‌نویسیم.

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{4000}{5000 + 10^6/20s} \left( -\frac{1}{200} \right) \frac{5000(10^8/s)}{5000 + 10^8/s}$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$H(s) = \frac{-2s}{(1 + s/10)(1 + s/20,000)} \quad (28)$$

$|H(j\omega)|$  کار می‌کنیم آن‌گاه هر دو نمودار مربوط به هر جمله را با هم جمع می‌کنیم. نمودار اندازه مطابق شکل ۱۶-۲۳ (ب) است. هیچ تلاشی برای صاف کردن منحنی با اصلاح  $+3$  dB در  $\omega = 100$  rad/s صورت نگرفته است و به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌گردد.

## تمرین

۱۶-۱۱ منحنی اندازه بُود را برای  $H(s) = 50 + s$ .  
 جواب:  $34$  dB در  $\omega < 50$  rad/s؛ شیب برابر  $20$  dB/dec در  $\omega > 50$  rad/s است.

## پاسخ فاز

با بازگشت به تابع تبدیل معادله (۲۶) می‌خواهیم پاسخ فاز یک صفر ساده را به دست آوریم.

$$\text{ang } H(j\omega) = \text{ang} \left( 1 + \frac{j\omega}{a} \right) = \tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

این عبارت را نیز می‌توان با مجانب‌ها نشان داد ولی این بار سه خط لازم است. برای  $\omega < a$  داریم  $\text{ang } H(j\omega) \approx 0^\circ$  و ما آن را به عنوان مجانب هنگام  $a < \omega$  به کار خواهیم برد.

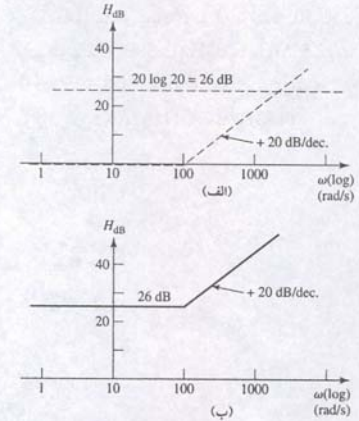
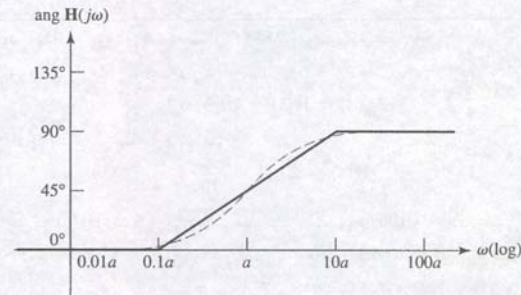
$$\text{ang } H(j\omega) = 0^\circ \quad (\omega < 0.1a)$$

در  $a > \omega$  داریم،  $\text{ang } H(j\omega) \approx 90^\circ$  و آن را در بیش از  $\omega = 10a$  به کار می‌بریم.

$$\text{ang } H(j\omega) = 90^\circ \quad (\omega > 10a)$$

چون در  $\omega = a$  زاویه فاز  $45^\circ$  است، اکنون خطوط مستقیم مجانب را از  $0^\circ$  در  $\omega = 0.1a$  از طریق  $45^\circ$  در  $\omega = a$  به  $90^\circ$  در  $\omega = 10a$  رسم می‌کنیم. این خط مستقیم شیب  $45^\circ/\text{dec}$  را دارد که در شکل ۱۶-۲۴ با خطی شکسته نشان داده شده است. حداکثر اختلاف بین مجانب و پاسخ واقعی  $\pm 5.71^\circ$  در  $\omega = 0.1a$  و  $\omega = 10a$  است. خطاهای  $\pm 5.29^\circ$  در  $\omega = 0.394a$  و  $\omega = 2.54a$  رخ می‌دهند. در  $\omega = 0.159a$  خط صفر است. همچنین خطای صفر در  $a$  و  $6.31a$  نیز اتفاق می‌افتد. منحنی زاویه فاز به صورت تقریب خط راست باقی گذاشته می‌شود. ولی می‌توان منحنی اصلاح شده را هم مانند آن‌چه در شکل ۱۶-۲۴ دیده می‌شود، رسم کرد.

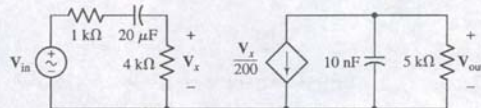
بد نیست در این جا برای بررسی منحنی فاز مکتبی بکنیم. برای یک صفر ساده در  $s = a$ ، می‌بینیم که در فرکانس‌های خیلی کمتر از فرکانس گوشه، فاز تابع پاسخ برابر  $0^\circ$  است. اما در فرکانس‌های بالا ( $\omega > a$ )، فاز  $90^\circ$  می‌باشد. در نزدیکی فرکانس گوشه، فاز تابع تبدیل تا حدی سریعاً تغییر می‌نماید. بنابراین زاویه فاز برای پاسخ را می‌توان در سرتاسر طراحی با انتخاب  $a$  مشخص کرد.



شکل ۱۶-۲۳ (الف) منحنی‌های بُود برای جملات  $H(s) = 20(1 + s/100)$  جداگانه رسم شده‌اند. (ب) ترکیب منحنی‌های بُود به صورت مجموع منحنی‌های بخش (الف).

## مثال ۱۶-۸

شکل ۱۶-۲۶ منحنی بُود را برای بهره مدار شکل ۱۶-۲۶ بیابید.  
 تقویت‌کننده منحنی اندازه بُود شکل ۱۶-۲۷ (ب) را دارد و زاویه فاز آن نیز در شکل ۱۶-۲۸ است.



شکل ۱۶-۲۴ پاسخ زاویه مجانبی برای  $H(s) = 1 + \frac{s}{a}$  به صورت سه خط راست نشان داده شده است. دو انتهای خط شیب در  $0.1a$  دارای فاز  $0^\circ$  و در  $10a$  دارای  $90^\circ$  فاز است.



چون در محل تقاطع،  $H_{dB} = 0$  است، پس  $\omega = 1 = 400,000$  و بنابراین فرکانس محل برخورد  $\omega = 400,000 \text{ rad/s}$  می‌باشد.

در بسیاری از موارد رسم دقیق منحنی بُود روی کاغذ نیمه لگاریتمی لازم نیست. در عوض روی کاغذ خط‌دار معمولی یک محور لگاریتمی رسم می‌کنیم. برای انجام این کار باید فاصله‌ای، مثل  $L$  را به عنوان یک دهه (decode) انتخاب کنیم، پس  $L$  فاصله بین  $\omega_1$  تا  $\omega_2 = 10\omega_1$  است ( $\omega_1$  معمولاً مضربی از 10 است) در سمت راست  $\omega_1$  فرض می‌شود و فاصله آن را تا  $\omega_1$  برابر  $x$  تصور می‌کنیم، یعنی  $x/L = \log(\omega/\omega_1)$ . اطلاع از مقادیر زیر در این راستا مفید است. به ازای  $\omega = 2\omega_1$  داریم  $x = 0.3L$ ؛ با  $\omega = 4\omega_1$  داریم  $x = 0.6L$ ؛ به ازای  $\omega = 5\omega_1$  داریم  $x = 0.7L$ .

مثال ۹-۱۶

منحنی فاز  $H(s) = -2s/[(1 + s/10)(1 + s/20,000)]$  را رسم کنید.

با بررسی  $H(j\omega)$  شروع می‌کنیم:

$$H(j\omega) = \frac{-j2\omega}{(1 + j\omega/10)(1 + j\omega/20,000)} \quad (29)$$

زاویه به صورت مقدار ثابت  $-90^\circ$  است.

بقیه عامل‌ها به صورت جمع زوایای قطب‌های  $\omega = 10$  و  $\omega = 20,000$  در نمودار تأثیر می‌گذارند. در شکل ۲۸-۱۶ سه جمله فوق به صورت مجانب‌های خط‌چین رسم شده‌اند و حاصل جمع به صورت منحنی توپر نشان داده شده است. اگر منحنی را به اندازه  $360^\circ$  به بالا ببریم، یک نمودار هم‌ارز به دست می‌آید.

پاسخ فاز را هم می‌توان با مقادیر دقیق به دست آورد. مثلاً در  $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ ، هر زاویه در شکل ۲۸-۱۶ از صورت و مخرج معادله (۲۹) به دست می‌آید. زاویه صورت  $-90^\circ$  است. زاویه قطب در  $\omega = 10$  هم برابر  $-90^\circ$  است. زیرا  $\omega$  از 10 برابر فرکانس گوشه بزرگتر است. بین 0.1 تا 10 برابر فرکانس گوشه، برای یک قطب تنها، شیب  $-45^\circ$  در هر دهه است. در نقطه شکست  $20,000 \text{ rad/s}$  زاویه چنین محاسبه می‌شود:  $-45^\circ \log(0.1 a) = -45^\circ \log[10,000 / (0.1 \cdot 20,000)] = -31.5^\circ$ .

جمع جبری این سه فاز برابر است با  $a = -211.5^\circ = -90^\circ - 90^\circ - 31.5^\circ$ . این مقدار به منحنی مجانبی شکل ۲۸-۱۶ خیلی نزدیک است.

۱۶-۱۴ منحنی فاز بُود برای  $H(s)$ . (الف)  $50/(s + 100)$ ، (ب)  $(s + 10)/(s + 100)$  و (ج)  $s/(s + 10)$  را رسم کنید.

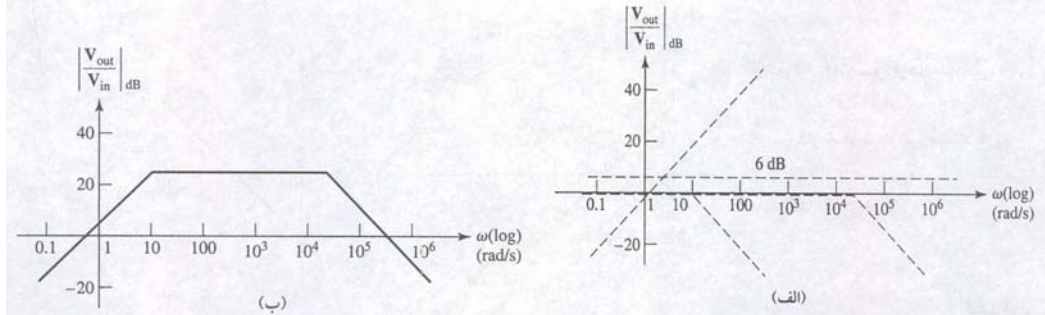
جواب (الف): در  $\omega < 10$  برابر  $0^\circ$ ، در  $10 < \omega < 1000$  برابر  $-45^\circ/\text{dec}$  و در  $\omega > 1000$  برابر  $-90^\circ$ .

(ب): در  $\omega < 1$  برابر  $0^\circ$ ، در  $1 < \omega < 100$  برابر  $+45^\circ/\text{dec}$ ، در  $100 < \omega < 1000$  برابر  $-45^\circ/\text{dec}$ ، در  $\omega > 1000$  برابر  $0^\circ$ .

(ج): در  $\omega < 1$  برابر  $-90^\circ$ ، در  $1 < \omega < 100$  برابر  $+45^\circ/\text{dec}$  و در  $\omega > 100$  برابر  $0^\circ$ .

### جملات مرتبه بالاتر

صفرها و قطب‌هایی که بررسی کردیم همگی از جملات مرتبه اول مثل  $s^{\pm 1}$ ،  $s^{\pm 1}(1 + 0.25s)$  و غیره تشکیل شده بودند. می‌توان تحلیل را به قطب‌ها و صفرهای مرتبه بالاتر هم به راحتی گسترش داد. جمله  $s^{\pm n}$  اندازه پاسخی را مشخص می‌کند که از  $\omega = 1$  با شیب  $\pm 20n \text{ dB/dec}$  عبور می‌کند. پاسخ فاز، یک زاویه ثابت  $\pm 90n^\circ$  می‌باشد. همچنین صفرهای چندگانه  $(1 + s/a)^n$ ، باید از جمع  $n$  منحنی اندازه پاسخ یا  $n$  منحنی پاسخ فاز یک صفر



آن چه می‌بینیم یک ثابت  $20 \log |-2| = 6 \text{ dB}$ ، نقاط شکست در  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  و  $\omega = 20,000 \text{ rad/s}$  به آن اضافه شده تا منحنی اندازه بُود شکل ۲۷-۱۶ (ب) به دست آید.

### تمرین

۱۶-۱۳ منحنی اندازه بُود را برای  $H(s)$  برابر با (الف)  $50/(s + 100)$ ، (ب)  $(s + 10)/(s + 100)$  و (ج)  $s/(s + 10)$  بیاورید.

جواب: (الف) در  $\omega < 100$ ،  $-6 \text{ dB}$ ، در  $\omega > 100$ ،  $-20 \text{ dB/dec}$ ، (ب) در  $10 < \omega < 100$ ،  $+20 \text{ dB/dec}$ ، در  $\omega > 100$ ،  $0 \text{ dB}$ ، و (ج) در  $\omega > 10$ ،  $0 \text{ dB}$ ، در  $\omega < 10$ ،  $-20 \text{ dB/dec}$ .

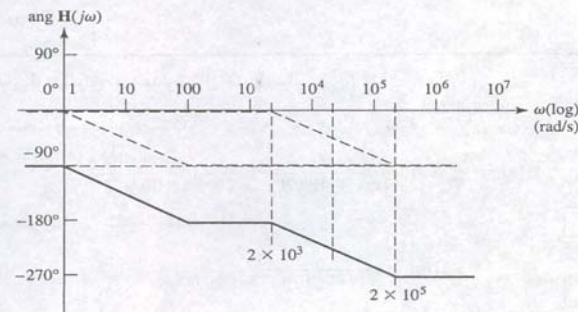
قبل از ساخت منحنی فاز برای تقویت کننده شکل ۲۶-۱۶، بیاورید چند لحظه‌ای را صرف بررسی جزئیات رسم نمودار بُود اندازه کنیم.

اول این که بر جمع ترسیمی نمودارهای اندازه زیاد تکیه نکنیم. مقدار دقیق اندازه کل را در بعضی نقاط با در نظر گرفتن مقادیر مجانب در آن نقاط به سادگی می‌توان یافت. مثلاً در بخش هموار بین  $\omega = 10$  و  $\omega = 20,000$  در شکل ۲۷-۱۶ (الف) زیر فرکانس گوشه  $\omega = 2000$  قرار داریم و می‌توانیم  $(1 + s/20,000)$  را مساوی 1 بگیریم. همچنین اگر بالای  $\omega = 10$  باشیم، می‌توانیم  $(s + 10)$  را با  $\omega/10$  نشان دهیم. پس

$$H_{dB} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega/10)(1)} \right| = 20 \log 20 = 26 \text{ dB} \quad (10 < \omega < 20,000)$$

همچنین ممکن است به محل تقاطع مجانب با محور افقی در انتهای بالایی علاقمند باشیم. دو عامل مخرج در این فرکانس‌ها با  $\omega/10$  و  $\omega/20,000$  تقریب شده‌اند. پس:

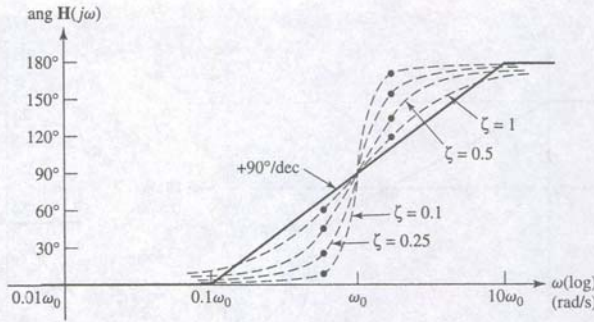
$$H_{dB} = 20 \log \left| \frac{-2\omega}{(\omega/10)(\omega/20,000)} \right| = 20 \log \left| \frac{400,000}{\omega} \right|$$



شکل ۲۸-۱۶ منحنی خط پر پاسخ فاز مجانبی تقویت کننده شکل ۲۶-۱۶ را نشان می‌دهد.



شکل ۱۶-۳۰ تقریب خط مستقیم مشخصه فاز برای  $H(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$  به صورت منحنی خط پر نشان داده شده است. پاسخ فاز واقعی برای  $\zeta = 1, 0.5, 0.25, 0.1$  به صورت خطچین نشان داده شده‌اند.



نقاط اوج منفی مقدار حداقل را دقیقاً نشان نمی‌دهند. این مطلب را برای  $\zeta = 0.5$  می‌توان دید. نقطه منبسط همیشه در فرکانسی کمتر قرار دارد.

اگر  $\zeta = 0$  باشد، آنگاه  $H(j\omega_0) = 0$  و  $H_{dB} = -\infty$  است. منحنی‌های یود معمولاً برای این وضعیت ترسیم نمی‌شوند.

آخرین کار ترسیم پاسخ فاز مجانبی برای  $H(j\omega) = 1 + j2\zeta(\omega/\omega_0) - (\omega/\omega_0)^2$  است. در کمترین از  $\omega = 0.1\omega_0$  زاویه را  $\text{ang } H(j\omega) = 0^\circ$  می‌گیریم. در بیش از  $\omega = 10\omega_0$  داریم

$$\text{ang } H(j\omega) = \text{ang } [-(\omega/\omega_0)^2] = 180^\circ$$

در فرکانس گوشه  $\text{ang } H(j\omega) = \text{ang } (j2\zeta) = 90^\circ$  است. در فاصله  $\omega_0 < \omega < 10\omega_0$ ، با خط راستی چون منحنی توپر در شکل ۱۶-۳۰ آغاز می‌کنیم. این خط از  $(0.1\omega_0, 0^\circ)$  شروع شده از  $(\omega_0, 90^\circ)$  می‌گذرد و در  $(10\omega_0, 180^\circ)$  پایان می‌یابد. شیب هم  $90^\circ / \text{dec}$  است.

حال مقدار تصحیح را روی این منحنی اولیه برای مقادیر مختلف  $\zeta$  انجام می‌دهیم. از معادله (۳۰) داریم:

$$\text{ang } H(j\omega) = \tan^{-1} \frac{2\zeta(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2}$$

برای به دست آوردن شکل تقریبی یک نقطه بالا و یک نقطه پایین  $\omega = \omega_0$  کفایت می‌کند. اگر  $\omega = 0.5\omega_0$  را انتخاب کنیم، داریم  $\text{ang } H(j0.5\omega_0) = \tan^{-1}(4\zeta/3)$ . در حالی که زاویه در  $\omega = 2\omega_0$  برابر  $\tan^{-1}(4\zeta/3) - 180^\circ$  است. منحنی‌های فاز به صورت خطوط شکسته در شکل ۱۶-۳۰ به ازای  $\zeta = 1, 0.5, 0.25, 0.1$  و  $\zeta = 1$  نشان داده شده‌اند. نقاط توپر متعلق به  $\omega = 0.5\omega_0$  و  $\omega = 2\omega_0$  است.

اگر جملات مربع در مخرج ظاهر شوند، هر دو منحنی‌های اندازه و فاز منفی آن‌هایی هستند که در بالا بحث شد. موضوع را با مثالی خاتمه می‌دهیم.

منحنی یود را برای تابع تبدیل  $H(s) = 100,000s / [(s+1)(10,000+20s+s^2)]$  رسم کنید.

بگذارید ابتدا جمله درجه دو را بررسی کنیم و آن را طوری مرتب نماییم که در آن مقدار  $\zeta$  دیده شود. کار را با تقسیم جمله مرتبه 2 بر عدد ثابتش، 10000 شروع می‌کنیم.

$$H(s) = \frac{10s}{(1+s)(1+0.002s+0.0001s^2)}$$

ساده به دست آید. بنابراین منحنی مجانبی اندازه در  $\omega < a$  برابر 0 dB است و شیب برابر  $\omega > a$  می‌باشد. خط در  $\omega = a$  برابر -3n dB و در  $\omega = 2a$  برابر -n dB است. منحنی فاز برای  $\omega < 0.1a$  برابر  $0^\circ$  است،  $90^\circ$  برای  $\omega > 10a$  و  $45^\circ$  در  $\omega = a$  می‌باشد. این منحنی خط راستی است با شیب  $45^\circ / \text{dec}$  برای  $0.1a < \omega < 10a$  و خط‌هایش در دو فرکانس  $\pm 5.71n^\circ$  می‌باشد.

به این ترتیب منحنی‌های اندازه و فاز مربوط به عباراتی چون  $(1+s/20)^{-3}$  را می‌توان به سرعت ترسیم کرد ولی باید به خاطر داشت که با توان‌های بالاتر خط‌های بزرگتری را داریم.



### جفت‌های مزدوج مختلط

آخرین عاملی که در نظر می‌گیریم یک جفت صفر یا یک جفت قطب مزدوج است. شکل استاندارد این عامل را به صورت زیر می‌توان تصور کرد:

$$H(s) = 1 + 2\zeta\left(-\frac{s}{\omega_0}\right) + \left(-\frac{s}{\omega_0}\right)^2$$

کمیت  $\zeta$  همان ضریب میرایی بخش ۱-۱۶ است و بزودی خواهیم دید که  $\omega_0$  هم فرکانس گوشه پاسخ مجانبی است.

اگر  $\zeta = 1$  باشد، آنگاه  $H(s) = 1 + 2(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2 = (1+s/\omega_0)^2$  خواهد بود که صفری مرتبه دو و مانند آن چه در بالا دیدیم می‌باشد. اگر  $\zeta > 1$  باشد، آنگاه  $H(s)$  از دو صفر ساده تشکیل شده است. اگر  $\zeta = 1.25$  باشد، در این صورت  $H(s) = 1 + 2.5(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2 = (1+s/2\omega_0)(1+s/0.5\omega_0)$  وضعیت آشنایی است.

وقتی  $0 \leq \zeta \leq 1$  باشد وضع جدیدی پیش می‌آید. لزومی ندارد جفت ریشه‌های مزدوج مختلط را پیدا کنیم. در عوض مقادیر فرکانس‌های بالا و پایین مجانبی را برای اندازه هر فاز به دست می‌آوریم و بسته به مقدار  $\zeta$  اصلاحی را روی مقدار  $\zeta$  انجام می‌دهیم.

برای پاسخ اندازه داریم:

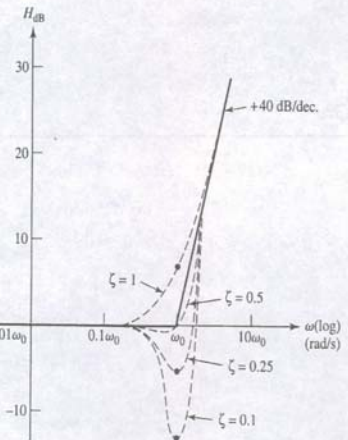
$$H_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \left| 1 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right| \quad (31)$$

وقتی  $\omega \ll \omega_0$  باشد،  $H_{dB} = 20 \log |1| = 0 \text{ dB}$  است، این مجانب فرکانس پایین است. پس اگر  $\omega \gg \omega_0$  باشد، تنها جمله مرتبه دوم اهمیت دارد و در این حالت  $H_{dB} = 20 \log \left| -(\omega/\omega_0)^2 \right| = 40 \log(\omega/\omega_0)$  خواهد بود. شیب هم  $+40 \text{ dB/dec}$  می‌باشد. این مجانب فرکانس بالاست و دو مجانب در  $\omega = \omega_0$  و  $0 \text{ dB}$  بهم برخورد می‌کنند. منحنی خط پر در شکل ۱۶-۲۹ این نمایش پاسخ اندازه مجانبی را نشان می‌دهد. با این وجود، باید اصلاحی بر فرکانس گوشه اعمال گردد. اجازه دهید تا در معادله (۳۰)  $\omega = \omega_0$  باشد. این صورت:

$$H_{dB} = 20 \log |j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)| = 20 \log (2\zeta) \quad (31)$$

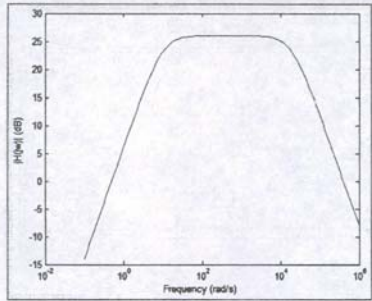
اگر  $\zeta = 1$  باشد که یک حالت حد است، اصلاح 0 dB است. برای  $\zeta = 0.5$ ، اصلاحی لازم نیست و اگر  $\zeta = 0.1$  باشد، اصلاح -14 dB خواهد بود. با دانستن یکی از این اصلاحات، کافی است تا پاسخ اندازه مجانبی ترسیم گردد. شکل ۱۶-۲۹ منحنی‌های دقیقتری را از معادله (۳۰) در ازای  $\zeta = 1, 0.5, 0.25, 0.1$  و  $\zeta = 1$  نشان می‌دهد. مثلاً اگر  $\zeta = 0.25$  باشد، آنگاه مقدار دقیق  $H_{dB}$  در  $\omega = 0.5\omega_0$  برابر است با

$$H_{dB} = 20 \log |1 + j0.25 - 0.25| = 20 \log \sqrt{0.75^2 + 0.25^2} = -2.0 \text{ dB}$$



شکل ۱۶-۲۹ منحنی یود اندازه برای  $H(s) = 1 + 2\zeta(s/\omega_0) + (s/\omega_0)^2$  به ازای چند مقدار از ضریب میرایی مشاهده می‌شود.



شکل ۱۶-۳۳ نمودار  $H_{dB}$ .

$$H(s) = \frac{-2s}{(1 + s/10)(1 + s/20,000)}$$

ما یلیم نمودار دقیقی را برای این تابع در فاصله فرکانس 100 mrad/s، 1 Mrad/s رسم کنیم. چون منحنی نهایی در مقیاس لگاریتمی ترسیم می‌شود، نیازی به ایجاد فواصل مساوی برای فرکانس‌ها نیست. در عوض از تابع `logspace()` در متلب برای تولید یک بردار فرکانس استفاده می‌شود که به ترتیب دو آرگومان برای نمایش فرکانس‌های آغاز و پایان به صورت توان 10 (در این مثال 1 و 6)، و سومین آرگومان تعداد نقاط موردنظر را مشخص می‌کند. بنابراین برنامه متلب به صورت زیر است:

```
EDU >> W = logspace(-1, 6, 100);
EDU >> denom = (1 + j * W / 10). * (1 + j * W / 20000);
EDU >> H = - 2 * j * W. / denom;
EDU >> Hdb = 20 * log 10(abs(H));
EDU >> semilogx(w, H db)
EDU >> xlabel('frequency (rad/s)')
EDU >> ylabel('|H(jw)| (dB)')
```

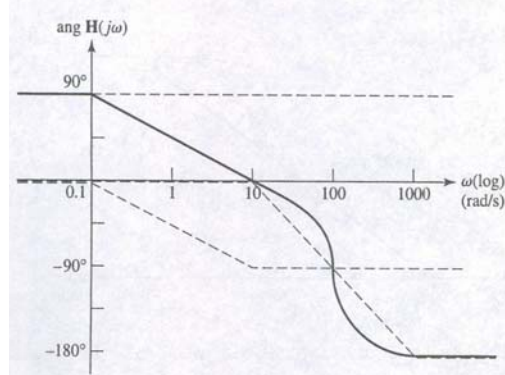
که منحنی شکل ۱۶-۳۳ را به دست می‌دهد.

چند توضیح درباره برنامه متلب توجیه دارد. اول این‌که ما  $s = j\omega$  را در عبارت  $H(s)$  جایگزین کرده‌ایم. همچنین متلب،  $\omega$  را یک بردار یا یک ماتریس بی‌بعد می‌داند.

هنگامی که متلب سعی در اعمال جبر ماتریسی به مخرج هر عبارت جبری بنماید، این متغیر مشکلاتی را به وجود می‌آورد. بنابراین مخرج در خط جداگانه محاسبه شده است و از عملگر `./` برای ضرب به جای `*` استفاده شده است. این عملگر جدید معادل با برنامه متلب زیر است.

```
EDU >> for k = 1:100
denom = (1 + j * W (k) / 10) * (1 + j * W(k) / 20000);
end
```

به همین ترتیب عملگر جدید `./` در خط بعدی برنامه به کار رفته است. چون نتایج به dB موردنظر است، لذا تابع `log 10()` احضار شده است. `log()` لگاریتم طبیعی را در متلب نشان می‌دهد. بالاخره فرمان جدید ترسیم `semilogx()` برای رسم نمودار و انتخاب واحد نیمه‌لگاریتمی برای محور X به کار می‌رود. در این جا به خواننده توصیه می‌شود که به مثال قبل بازگردد و با استفاده از این تکنیک منحنی‌های دقیقی را برای مقایسه منحنی‌های تولید کند. PSpice هم برای تولید منحنی‌های پاسخ فرکانسی ابزار مناسبی است. شکل ۱۶-۳۴ (الف) مدار شکل ۱۶-۲۶ را نشان می‌دهد که با ابزار ورودی شماتیک دوباره ترسیم شده است. از شبه دستور bubble برای تولید برجسب‌های ولتاژ  $V_x$  و  $V_{out}$  استفاده شده است به طوری که در برنامه probe بهتر قابل شناسایی باشند. منبع VAC با یک دامنه ac، 1 V به خاطر سادگی به کار رفته است، گرچه هر مقدار دیگری هم می‌توان به کار برد. شبیه‌سازی یک موج جاروب ac نیز موردنیاز است تا پاسخ فرکانسی معین گردد. شکل ۱۶-۳۴ (ب) با 10 نقطه در هر دهه تولید شده است (نوع جاروب AC، Decade انتخاب شده است) که از 100 mHz تا 1 MHz را می‌پوشاند. توجه کنید که این شبیه‌سازی به Hz انجام شده است و نه به rad/s.



شکل ۱۶-۳۲ منحنی فاز بود تابع تبدیل

$$H(s) = \frac{100000s}{(s + 1)(10000 + 20s + s^2)}$$

بررسی جمله  $s^2$  نشان می‌دهد که  $\omega_0 = \sqrt{1/0.0001} = 100$  است. جمله خطی آن را طوری می‌نویسیم تا ضریب 2، ضریب  $s/\omega_0$  و بالاخره ضریب  $s^2$  را نمایش دهد.

$$H(s) = \frac{10s}{(1 + s)[(1 + 2)(0.1)(s/100) + (s/100)^2]}$$

و می‌بینیم  $0.1 = \xi$  است.

مجاانب‌های منحنی پاسخ اندازه به طور خط‌چین در شکل ۱۶-۳۱ کشیده شده‌اند: 20 dB برای ضریب 10، یک خط مستقیم بینهایت از  $\omega = 1$  با شیب 20 dB/dec برای جمله  $s$ ، گوشه‌ای در  $\omega = 1$  برای قطب ساده و یک گوشه در  $\omega = 100$  با شیب 40 dB/dec برای عبارت مرتبه دو در مخرج است. با جمع این چهار منحنی و اعمال اصلاح 14 dB برای جمله مرتبه دو منحنی خط پر شکل ۱۶-۳۱ را نتیجه می‌دهد.

پاسخ فاز شامل مؤلفه‌های زیر است.  $90^\circ$  برای عامل  $s$ ،  $0^\circ$  برای  $\omega < 0.1$ ،  $-90^\circ$  برای  $\omega > 10$ ،  $-45^\circ/\text{dec}$  برای قطب ساده و  $0^\circ$  برای  $\omega < 10$ ،  $-180^\circ$  برای  $\omega > 1000$  و  $-90^\circ$  در هر دهه برای جمله توان دوم. جمع این چهار مجانب به علاوه کمی اصلاحات برای  $0.1 = \xi$  به صورت منحنی توپر در شکل ۱۶-۳۲ ملاحظه می‌شود.

## تمرین

۱۵-۱۶ اگر  $H(s) = 1000s^2 / (s^2 + 5s + 100)$  باشد، منحنی اندازه بود را رسم کنید و برای مقادیر زیر آن را محاسبه نمایید. (الف)  $\omega$  وقتی  $H_{dB} = 0$  است، (ب)  $H_{dB}$  در  $\omega = 1$  و (ج)  $H_{dB}$  وقتی  $\omega = \infty$ .

جواب: 0.316 rad/s، 20 dB و 60 dB.

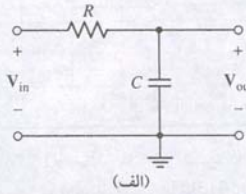
## تحلیل کامپیوتری

رسم منحنی‌های بود روش بالارزشی است. در بسیاری از موارد یک نمودار تقریبی سریع لازم است (مانند آزمایش‌ها یا وقتی یک توپولوژی مدار خاصی برای کاربردی خاص موردنیاز است). و فقط دانستن شکل پاسخ کفایت می‌کند. علاوه بر آن تعیین ضرایب و فاکتورها در منحنی‌های بود به هنگام طراحی فیلترها بسیار ارزشمند است.

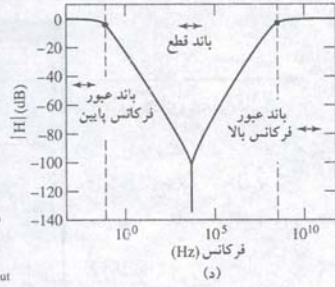
در شبیه‌سازی‌هایی که منحنی‌های پاسخ دقیق لازمند (مانند هنگامی که طراحی نهایی مدار صورت می‌گیرد)، از چند برنامه کامپیوتری می‌توان استفاده کرد. اولین برنامه استفاده از متلب



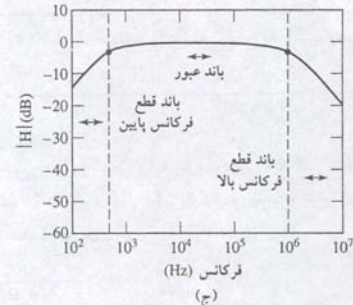
شکل ۱۶-۳۵ منحنی پاسخ فرکانس برای (ج) فیلتر میان‌گذر و (د) فیلتر میان‌گذر.



(الف)



(د)



(ج)

### فیلترهای غیرفعال

می‌توان یک فیلتر را با استفاده از یک خازن و یک مقاومت ساخت، شکل ۱۶-۳۶ (الف). تابع تبدیل برای این مدار فیلتر پایین‌گذر عبارت است از:

$$H(s) \equiv \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + RCs} \quad (32)$$

$H(s)$  دارای یک فرکانس گوشه است که در  $\omega = 1/RC$  رخ می‌دهد و یک صفر که در بینهایت واقع و موجب رفتاری پایین‌گذر می‌شود. در فرکانس‌های پایین ( $s \rightarrow 0$ )،  $|H(s)| \rightarrow 0$  در نزدیکی حداکثر مقدارش یعنی واحد یا 0 dB خواهد بود و فرکانس‌های بالا ( $s \rightarrow \infty$ )، افزایش فرکانس سیگنال ac خازن رفتاری شبیه به اتصال کوتاه پیدا می‌کند، که منجر به کاهش ولتاژ خروجی می‌شود. یک منحنی پاسخ نمونه برای این فیلتر با  $R = 500 \Omega$  و  $C = 2nF$  در شکل ۱۶-۳۶ (ب) دیده می‌شود. فرکانس گوشه 159 kHz ( $1 \text{ Mrad/s}$ ) را با جابه‌جایی مکان‌نما به محل 3 dB - می‌توان مشاهده کرد. تیزی منحنی پاسخ در حوالی فرکانس قطع را با افزودن عناصر راکتیوی مثل خازن و مقاومت می‌توان اصلاح نمود.

با تعویض خازن و مقاومت در شکل ۱۶-۳۶ (الف) می‌توان یک فیلتر بالاگذر ساخت. این فیلتر در مثال زیر ملاحظه می‌شود.

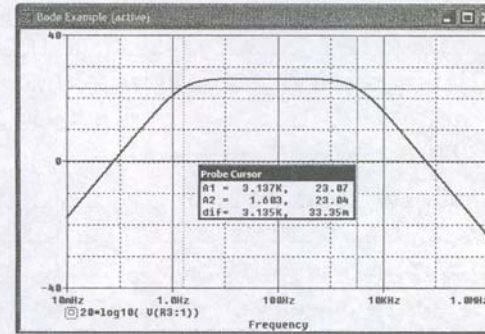
یک فیلتر بالاگذر با فرکانس گوشه 3 kHz طراحی کنید.

حل را با انتخاب توپولوژی مدار آغاز می‌کنیم. چون هیچ اشاره‌ای به تیزی پاسخ داده نشده است، لذا مدار ساده شکل ۱۶-۳۷ را برمی‌گزینیم. تابع تبدیل این مدار به سادگی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H(s) \equiv \frac{V_{out}}{V_x} = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

که دارای صفری در  $s = 0$  و قطبی در  $s = -1/RC$  می‌باشد و بنابراین رفتار آن به شکل فیلتر بالاگذر است.

فرکانس گوشه یا قطع مدار فیلتر  $\omega_L = 1/RC$  است و مایلیم که این فرکانس برابر  $\omega_L = 2\pi f_L = 2\pi(3000) = 18.85 \text{ krad/s}$  باشد. مجدداً باید مقادیری برای مقاومت  $R$  و خازن  $C$  انتخاب کنیم ولی چون اطلاعات زیادی در این جا داده نشده است در انتخاب آزادیم. بنابراین مقاومت استاندارد 4.7 k $\Omega$  را برای  $R$  انتخاب می‌کنیم و به این ترتیب  $C = 11.29 \text{ nF}$  خواهد شد. تنها گام باقی مانده تأیید طرح با کمک شبیه‌سازی PSpice است. منحنی پاسخ فرکانس در شکل ۱۶-۳۸ ملاحظه می‌گردد.



(ب)

شکل ۱۶-۳۴ (ب) پاسخ فرکانس مدار شکل ۱۶-۲۶ به مقیاس dB.

مجدداً به خواننده توصیه می‌شود مدارهای به کار رفته در مثال‌ها را شبیه‌سازی کند و نتایج را با منحنی‌های یُود مقایسه نماید.

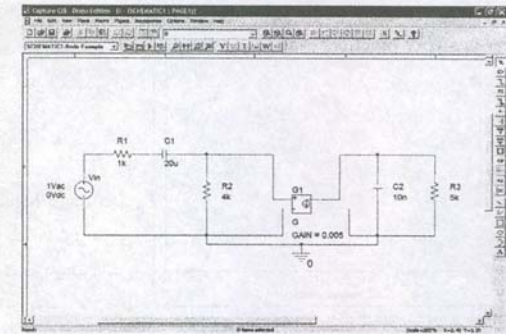
### ۱۶-۷ فیلترها

طراحی فیلتر یا صافی موضوعی کاربردی و جالب است و می‌توان به طور جداگانه برای آن کتابی نوشت. در این بخش بعضی از مفاهیم فیلتر کردن را معرفی می‌کنیم و هر دو نوع مدار فیلتر غیرفعال و فعال را توضیح خواهیم داد. این مدارها ممکن است خیلی ساده و متشکل از یک خازن یا القاگر باشند ولی اضافه شدن آن به یک شبکه مفروض موجب اصلاح رفتار آن می‌شود. این مدارها می‌توانند با ترکیبی از مقاومت‌ها، خازن‌ها، القاگرها و opamp برای تولید منحنی پاسخ دقیقی از یک کاربرد مفروض، بسیار پیشرفته باشند. فیلترها در الکترونیک مدرن برای ایجاد ولتاژ dc به وسیله منابع تغذیه، حذف پارازیت‌ها در کانال‌های مخابراتی، تفکیک کانال‌های رادیو و تلویزیون از سیگنال مخلوط شده که به وسیله آنتن‌ها تولید می‌گردد و تقویت سیگنال صوتی بم در سیگنال استریو اتومبیل به کار می‌روند.

مفهوم اصلی یک فیلتر این است که فرکانس‌های مجاز به عبور از یک مدار را انتخاب می‌نماید. بسته به کاربرد، انواع متعددی از فیلترها موجودند. یک فیلتر پایین‌گذر (باند پایین) که پاسخ آن در شکل ۱۶-۳۵ (الف) مشاهده می‌شود، فرکانس‌های زیر فرکانس قطع را از خود عبور می‌دهد، ضمن این که فرکانس‌های بالاتر در آن به شدت میرا می‌گردند. از طرف دیگر یک فیلتر بالاگذر عکس این کار را انجام می‌دهد و پاسخی مثل شکل ۱۶-۳۵ (ب) دارد. معیار اصلی کیفیت فیلتر تیزی در نقطه قطع یا شیب منحنی در حوالی فرکانس گوشه است. به طور کلی منحنی‌های پاسخ با شیب بیشتر به مدارهای مختلط پیچیده‌تری نیاز دارد.

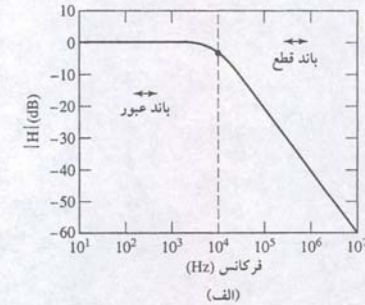
از ترکیب فیلتر بالاگذر و پایین‌گذر مداری به نام فیلتر میان‌گذر ساخته می‌شود، شکل ۱۶-۳۵ (ج). در این نوع فیلتر ناحیه بین دو فرکانس گوشه باند عبور خوانده می‌شود. ناحیه خارج باند فوق فیلتر، باند قطع نام دارد. این نام به فیلترهای بالا یا پایین‌گذر هم اطلاق می‌شود، شکل ۱۶-۳۵ (الف) و (ب). با تعویض فرکانس قطع می‌توان فیلتر میان‌گذر ساخت که فرکانس‌های بالاتر یا پایین‌تر را عبور داده ولی فرکانس‌های بین این دو را حذف می‌کند (شکل ۱۶-۳۵ (د)).

فیلتر حذف نوع خاصی از فیلتر میان‌گذر است که دارای پاسخ باریکی است و یک مؤلفه فرکانس از یک سیگنال را حذف می‌کند. فیلترهای چند باندهی نیز قابل ساختند. این مدارها حاوی چند فیلتر میان‌گذر و میان‌گذر می‌باشند. طراحی این فیلترها ساده است ولی از محدوده بحث در این کتاب خارج می‌باشد.

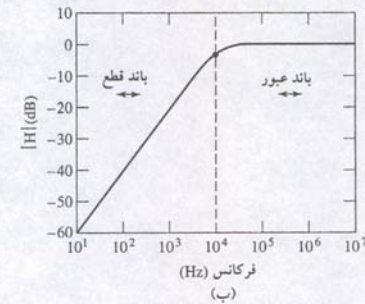


(الف)

شکل ۱۶-۳۴ (الف) مدار شکل ۱۶-۲۶ با ترسیم تصویر PSpice رسم شده است.



(الف)

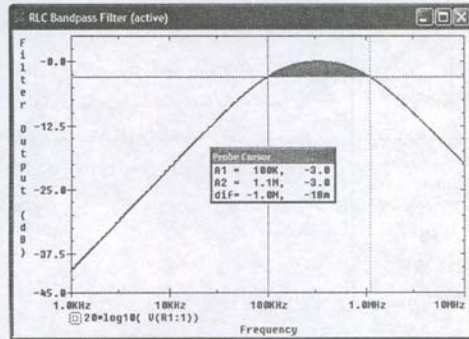


(ب)

شکل ۱۶-۳۵ منحنی پاسخ فرکانس برای (الف) فیلتر پایین‌گذر، (ب) فیلتر بالاگذر.



## مثال ۱۶-۱۲



شکل ۱۶-۴۰ پاسخ شبیه‌سازی‌شده طراحی فیلتر میان‌گذر 1 MHz و فرکانس بالای قطع 1.1 MHz طبق تمایل. ناحیه فرکانس میان‌گذر سایه خورده است.

## تمرین

یک فیلتر میان‌گذر با عرض باند 1 MHz و فرکانس قطع بالا در 1.1 MHz طراحی کنید.

نوپولوی مدار شکل ۳۷-۱۶ را انتخاب می‌کنیم و فرکانس گوشه را به دست می‌آوریم. عرض باند با رابطه  $f_H - f_L$  داده می‌شود، پس:

$$f_L = 1.1 \times 10^6 - 1 \times 10^6 = 100 \text{ kHz}$$

$$\omega_L = 2\pi f_L = 628.3 \text{ krad/s}$$

پس فرکانس قطع بالا ( $\omega_H$ ) در 6.912 Mrad/s خواهد بود.

برای پیشروی در طراحی مدار با این مشخصات، لازم است عبارتی برای هر فرکانس برحسب R، L و C به دست آوریم.

از برابری معادله (۳۷) با  $2\pi(1.1 \times 10^6)$  و این که  $6.283 \times 10^6 = 2\pi(f_H - f_L) = B$  حل  $1/LC$  به دست می‌آید.

$$\frac{1}{2}B + \left[ \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{LC} \right]^{1/2} = 2\pi(1.1 \times 10^6)$$

یعنی  $1/LC = 4.343 \times 10^{12}$ . با انتخاب دلخواه  $L = 1 \text{ H}$  (البته عملاً کمی بزرگ است)، خواهیم داشت  $C = 230.3 \text{ fF}$  و  $R = 6.283 \text{ M}\Omega$ . باید متذکر شد که برای این مسئله حل منحصر بفردی وجود ندارد، زیرا هر یک از سه کمیت R، L و C می‌توانند نقطه شروع باشند. تصدیق صحت PSpice ما در شکل ۱۶-۴۰ نشان داده شده است.

۱۶-۱۷ یک فیلتر میان‌گذر با فرکانس قطع پایین 100 rad/s و فرکانس قطع بالای 10 krad/s طراحی کنید.

جواب: یکی از جواب‌های ممکن عبارت‌است از:  $C = 10 \mu\text{F}$ ،  $R = 990 \Omega$ ،  $L = 100 \text{ mH}$ .

فیلتری را که بررسی کردیم، فیلتر غیرفعال می‌خوانند زیرا در ساخت آن‌ها از عناصر غیرفعال استفاده شده است. (در آن ترانزیستور، op-amp و نظایر آن به کار نرفته است). هر چند فیلترهای غیرفعال خیلی متداولند ولی مناسب هر کاربردی نمی‌باشند. تنظیم بهره یک فیلتر غیرفعال که به صورت نسبت خروجی به ورودی تعریف می‌شود، خیلی مشکل است. سمن این‌که تقویت در مدارهای فیلتر نیز مورد توجه می‌باشد.

## فیلترهای فعال

استفاده از یک عنصر فعال مثل op-amp در طراحی فیلتر می‌تواند بسیاری از کمبودهای فیلتر غیرفعال را جبران کند. همان‌طور که در فصل ۶ دیدیم، مدارهای op-amp به سادگی برای تهیه بهره می‌توانند طراحی شوند. این مدارها می‌توانند رفتاری شبیه به القاگر را در مجاورت تازن‌ها از خود به نمایش بگذارند.

مدار داخل یک op-amp حاوی خازن خیلی کوچکی است (در حدود 100 PF) و این موجب می‌شود تا حداکثر فرکانس کاری op-amp محدود گردد. بنابراین هر مدار op-amp همچون مدار پایین‌گذر عمل کرده و فرکانس قطع آن برای قطعات مدرن 20 MHz می‌باشد.

۱۶-۱۶ یک فیلتر بالاگذر با فرکانس قطع 13.56 kHz که فرکانس یک منبع تغذیه ۲۵ است، بسازید. با PSpice صحت آن را تأیید کنید.

## فیلترهای میان‌گذر

قبلاً چند مدار را در این فصل مشاهده کردیم که هر یک می‌توانست یک فیلتر میان‌گذر باشد (مثل شکل‌های ۱-۱۶ و ۸-۱۶). مدار ساده ۳۹-۱۶ را در نظر بگیرید که در آن خروجی از دو سر مقاومت اخذ می‌شود. تابع تبدیل این مدار برابر است با:

$$A_V = \frac{sRC}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (۳۳)$$

اندازه این تابع برابر زیر است:

$$|A_V| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (۳۴)$$

که در حد  $\omega \rightarrow 0$  تبدیل به رابطه زیر می‌شود:

$$|A_V| \approx \omega RC \rightarrow 0$$

و در حد  $\omega \rightarrow \infty$  برابر است با:

$$|A_V| \approx \frac{R}{\omega L} \rightarrow 0$$

ما با توجه به تجربه خود از نمودار بود می‌دانیم که معادله (۳۳) سه فرکانس بحرانی را به نمایش گذاشته است: یکی از آن‌ها صفر تابع و دو تابع دیگر قطب هستند. برای داشتن یک پاسخ فیلتر میان‌گذر که مقدار پیک آن واحد باشد (0 dB)، هر دو فرکانس قطب‌ها باید بزرگتر از 1 rad/s باشد، که فرکانس crossover جمله صفر است. این دو فرکانس بحرانی با تبدیل معادله (۳۳) به فرم حاصل ضرب به تعیین مقادیر  $\omega$  که در آن معادله (۳۴) برابر  $1/\sqrt{2}$  شود به دست می‌آید، آن‌گاه فرکانس مرکزی این فیلتر در  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  خواهد بود. بنابراین با کمی دستکاری جبری، پس از برابر کردن معادله (۳۴) با  $1/\sqrt{2}$  داریم:

$$(1 - LC\omega_c^2)^2 = \omega_c^2 R^2 C^2 \quad (۳۵)$$

با گرفتن جذر از دو طرف داریم:

$$LC\omega_c^2 + RC\omega_c - 1 = 0$$

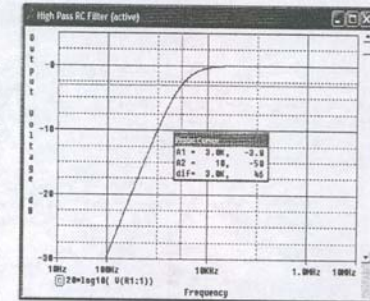
و از آنجا خواهیم داشت:

$$\omega_c = -\frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} \quad (۳۶)$$

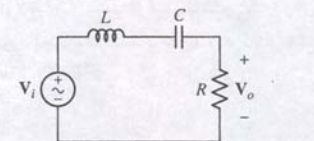
در این حل، فرکانس منفی حل غیر فیزیکی معادله است و لذا مجبوریم فقط از ریشه مثبت معادله (۳۶) استفاده کنیم. به این ترتیب به نظر می‌رسد که مدار تنها یک فرکانس بحرانی دارد با این وجود کمی زود قضاوت کردیم و در واقع ریشه منفی معادله (۳۵) هم معتبر است زیرا از طرفین جذر گرفته‌ایم، یعنی:

$$\omega_c = \frac{R}{L} \pm \frac{\sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} \quad (۳۷)$$

که از آن می‌توان نشان داد که فقط ریشه‌های مثبت از نظر فیزیکی معنی دارند. بنابراین ما  $\omega_L$  از معادله (۳۶) و  $\omega_H$  را از معادله (۳۷) انتخاب می‌کنیم. چون  $\omega_H - \omega_L = B$ ، کمی جبر نشان می‌دهد که  $B = R/L$  می‌باشد.



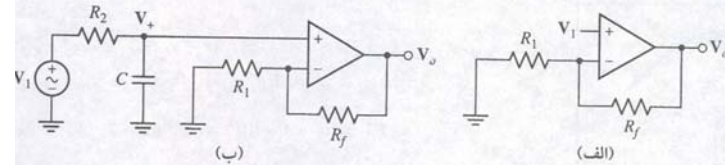
شکل ۱۶-۳۸ پاسخ فرکانس شبیه‌سازی‌شده طرح نهایی با فرکانس قطع 3kHz (3dB) مورد انتظار.



شکل ۱۶-۳۹ یک فیلتر ساده میان‌گذر با مدار RLC.



یک فیلتر پایین‌گذر فعال با فرکانس قطع 10 kHz و بهره ولتاژ 40 dB طراحی کنید.



شکل ۱۶-۴۱ الف) یک مدار op amp معکوس‌نکننده ساده. ب) یک فیلتر پایین‌گذر متشکل از یک مقاومت  $R_2$  و یک خازن  $C$  که به ورودی اضافه شده است.

برای فرکانس‌های خیلی کمتر از 10 kHz لازم است مدار تقویت‌کننده بتواند بهره 40 dB یا 100 V/V را فراهم نماید. این کار به راحتی با یک تقویت‌کننده غیر معکوس‌گر مثل شکل ۱۶-۴۱ الف) امکان‌پذیر است.

$$\frac{R_f}{R_1} + 1 = 100$$

برای داشتن فرکانس -بالای گوشه در 10 kHz به یک فیلتر پایین‌گذر نیاز داریم (مثل شکل ۱۶-۴۱ ب)). برای به‌دست‌آوردن تابع تبدیل، از ورودی معکوس‌نکننده شروع می‌کنیم:

$$V_+ = V_i \frac{1/sC}{R_2 + 1/sC} = V_i \frac{1}{1 + sR_2C}$$

در ورودی وارون‌گر داریم:

$$\frac{V_o - V_+}{R_f} = \frac{V_+}{R_1}$$

از ترکیب این معادله و حل آن برای  $V_o$  درمی‌یابیم که

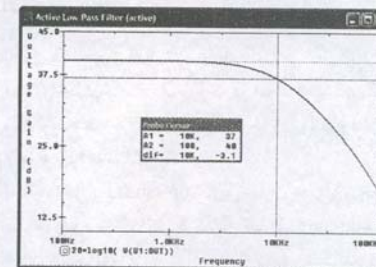
$$V_o = V_i \left( \frac{1}{1 + sR_2C} \right) \left( 1 + \frac{R_f}{R_1} \right)$$

حداکثر مقدار بهره  $A_v = V_o / V_i$  برابر است با  $1 + R_f / R_1$ . پس این کمیت را با 100 مساوی قرار می‌دهیم، چون هیچ یک از مقاومت‌ها در فرکانس گوشه  $(R_2C)^{-1}$  وجود ندارد، هر یک از آن‌ها را می‌توان ابتدا انتخاب کرد. ما  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  انتخاب می‌کنیم و لذا  $R_f = 99 \text{ k}\Omega$  خواهد شد.

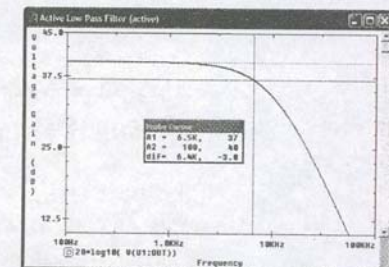
با تنظیم دلخواه  $C = 1 \mu\text{F}$  می‌بینیم که

$$R_2 = \frac{1}{2\pi(10 \times 10^3)C} = 15.9 \Omega$$

در این جا طراحی ما کامل است. آیا چنین است؟ پاسخ فرکانس شبیه‌سازی شده این مدار در شکل ۱۶-۴۲ الف) نشان داده شده است.



ب)



الف)

واضح است که طرح ما فرکانس قطع 10 kHz را شامل نمی‌شود. چه اشتباهی کرده‌ایم؟ بررسی دقیق محاسبات جبری خطایی را نشان نمی‌دهد، پس فرض غلطی در جایی مورد استفاده قرار گرفته است. شبیه‌سازی با op-amp  $\mu\text{A}741$  انجام شده است و این خلاف فرضیات دریافتن مدار موردنظر است. به نظر می‌رسد که این انتخاب عامل خطا است. همان مدار با LF111 op-amp که به جای  $\mu\text{A}741$  به کار رفته است، فرکانس قطع 10 kHz را مطابق میل به دست می‌دهد. نتیجه شبیه‌سازی شده در شکل ۱۶-۴۲ ب) آمده است. متأسفانه op-amp  $\mu\text{A}741$  با بهره 40 dB دارای فرکانس گوشه‌ای نزدیک به 10 kHz است که در این جا قابل چشم‌پوشی نیست. با این وجود LF111 تا فرکانسی حدود 75 kHz به فرکانس گوشه نمی‌رسد. این نقطه به قدر کافی از 10 kHz دور است و طراحی را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد.

## تمرین

۱۶-۱۸ یک مدار فیلتر پایین‌گذر با بهره 30 dB و فرکانس قطع 1 kHz طراحی کنید.

جواب: یک جواب ممکن با مقادیر زیر حاصل می‌شود:

$$C = 2 \mu\text{F}, R_2 = 79.58 \Omega, R_f = 3.062 \text{ M}\Omega, R_1 = 100 \text{ k}\Omega$$

## کاربرد عملی

### تنظیم‌های صدای بم، زیر و میانی

توانایی تنظیم جداگانه صداهای زیر، بم و میانی در یک سیستم صوتی حتی در تجهیزات ارزان قیمت بسیار مورد توجه است. محدوده فرکانس صوتی (حدداً برای گوش انسان) در حد 20 Hz تا 20 kHz پذیرفته شده است که در آن ناحیه کوچکتر از 500 Hz مربوط به اصوات بم و بیشتر از 5 kHz مربوط به صدای زیر می‌باشد.

طراحی یک اکولایزر (متعادل‌ساز) گرافیکی به کوشش چندانی نیاز ندارد گرچه داشتن سیستمی مانند شکل ۱۶-۴۳ تلاش بیشتری می‌خواهد. سیگنال اصلی که ممکن است توسط یک گیرنده رادیویی یا شاید پخش CD تولید شود، متشکل از طیف وسیعی از فرکانس‌ها است که عرض باندی حدود 20 kHz دارد.



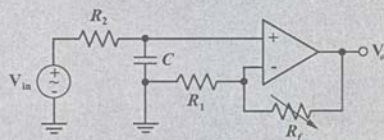
شکل ۱۶-۴۳ نمونه‌ای از اکولایزر گرافیکی.

این سیگنال باید به سه مدار op-amp مختلف ارسال شود که هر یک فیلتری متفاوت در ورودی خود دارد. مدار تنظیم صوت بم به یک فیلتر پایین‌گذر نیازمند است و مدار تنظیم فرکانس‌های زیر فیلتر بالاگذر نیاز دارد و بالاخره در مدار تنظیم فرکانس میانی یک فیلتر میان‌گذر نصب می‌شود. آن‌گاه خروجی هر مدار op-amp به یک مدار تقویت‌کننده مجموع اعمال می‌شود. نمودار بلوکی مدار کامل در شکل ۱۶-۴۴ ملاحظه می‌شود.



شکل ۱۶-۴۴ نمودار بلوکی یک مدار برابر‌ساز گرافیکی ساده.

مدار ابتدایی بلوکی فوق در شکل ۱۶-۴۵ دیده می‌شود. این مدار از یک تقویت‌کننده معمولی یا غیر معکوس‌گر با بهره  $1 + R_f / R_1$  تشکیل شده و در آن یک فیلتر متشکل از یک مقاومت  $R_2$  و خازن  $C$  کار گذاشته شده است. مقاومت پسخورد  $R_f$  یک مقاومت متغیر می‌باشد که به آن پتانسیومتر هم می‌گویند و تغییر بهره را از طریق یک پیچ ولوم در روی آن اجازه می‌دهد. کاربرد به این پیچ، ولوم کنترل می‌گردد. شبکه فیلتر پایین‌گذر، فرکانس‌های وارده به op-amp را محدود می‌نماید. فرکانس گوشه درواقع  $(R_2C)^{-1}$  است. اگر طراح مدار بخواهد به کاربرد



شکل ۱۶-۴۵ بخش تنظیم یک مدار تقویت‌کننده.



- مقادیر غیر عملی قطعات اغلب کار طراحی را ساده می‌کند. تابع تبدیل یک شبکه را می‌توان از لحاظ اندازه و فاز تغییر مقیاس داد و قطعات را بدینوسیله با مقادیر مناسب جایگزین نمود.
- نمودارهای پود موجب می‌شود که یک تابع تبدیل به سرعت ترسیم گردد.
- چهار نوع فیلتر اصلی عبارتند از: فیلتر پایین‌گذر، فیلتر بالاگذر، فیلتر میان‌گذر، فیلتر میان‌نگذر.
- فیلترهای غیرفعال فقط از مقاومت‌ها، خازن‌ها و القاگرها استفاده می‌کنند. فیلترهای فعال بر op-amp یا دیگر عناصر فعال مبتنی می‌باشند.

## ۱۶-۹ خواندنی‌های کمکی

A good discussion of a large variety of filters can be found in:

J.T. Taylor and Q. Huang, eds., *CRC Handbook of Electrical Filters*. Boca Raton, Fla: CRC Press, 1997.

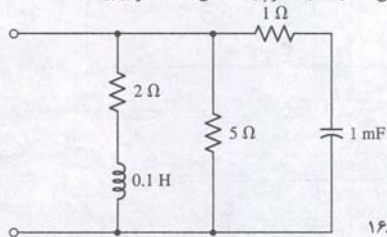
A comprehensive compilation of various active filter circuits and design procedures is given in:

D. Lancaster, *Lancaster's Active Filter Cookbook*, 2nd ed. Burlington, Mass.: Newnes, 1996.

## مسائل

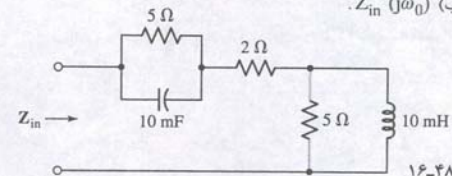
### ۱۶-۱ تشدید موازی

۵. یک مدار تشدید موازی دارای پارامترهای  $\alpha = 80$  Np/s و  $\omega_d = 1200$  rad/s است. اگر امپدانس در  $s = -2\alpha + j\omega_d$  برابر  $400\Omega$  باشد، مقادیر  $C$  و  $R$ ،  $Q_0$  را محاسبه نمایید.
۶. فرکانس تشدید شبکه دو پایانه شکل ۱۶-۴۷ را بیابید.



شکل ۱۶-۴۷

۷. اگر  $C = 1 \mu F$ ،  $L = 1$  H،  $R = 1$  M $\Omega$  و  $I = 10 \angle 0^\circ \mu A$  مقادیر اجزاء در شکل ۱۶-۱ باشد،  $\omega_0$  و  $Q_0$  را به دست آورید.
- (ب) منحنی  $|V|$  را به عنوان تابعی از  $\omega$  با  $995 < \omega < 1005$  rad/s رسم نمایید.
۸. برای شبکه شکل ۱۶-۴۸، مطلوب است (الف) فرکانس تشدید  $\omega_0$  و (ب)  $Z_{in}(j\omega_0)$ .



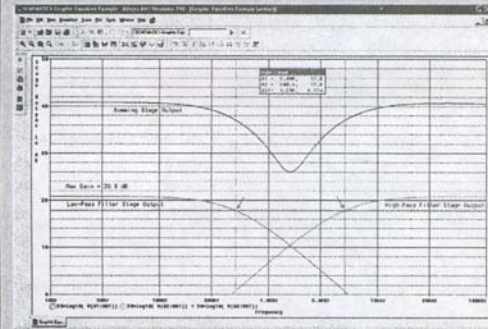
شکل ۱۶-۴۸

۱. یک مدار RLC موازی دارای  $C = 47 \mu F$ ،  $R = 1$  k $\Omega$  و  $L = 11$  mH می‌باشد. (الف)  $Q_0$  را محاسبه کنید. (ب) فرکانس تشدید را به Hz تعیین نمایید. (ج) پاسخ ولتاژ را به صورت تابعی از فرکانس رسم نمایید. در صورتی که مدار به وسیله یک منبع جریان سینوسی 1 mA تحریک شده باشد.
۲. یک مدار RLC موازی دارای  $Q_0 = 200$  است. عنصر سوم را مشخص کنید. به شرطی که (الف)  $R = 1 \Omega$  و  $C = 1 \mu F$  باشد. (ب)  $L = 12$  fH و  $C = 2.4$  nF باشد. (ج)  $R = 121.7$  k $\Omega$  و  $L = 100$  pH باشد.
۳. یک ورکتور (خازن متغیر) وسیله‌ای نیمه‌هادی است که راکتانس آن با ولتاژ اعمال شده بر آن تغییر می‌کند. ضریب کیفیت به صورت زیر بیان می‌شود.

$$Q \approx \frac{\omega C_f R_p}{1 + \omega^2 C_f^2 R_p R_s}$$

- که  $C_f$  ظرفیت پیوندی است که به ولتاژ اعمال شده به آن وابسته می‌باشد.  $R_s$  مقاومت سری قطعه و  $R_p$  مقاومت موازی معادل آن است. (الف) اگر  $C_f = 3.77$  pF و  $V = 1.5$  باشد و  $R_p = 1.5$  M $\Omega$  و  $R_s = 2.8 \Omega$  باشد، ضریب کیفیت را برحسب فرکانس رسم کنید. (ب) با مشتق‌گیری از  $Q$  مقادیر  $Q_{max}$  و  $\omega_0$  را بیابید.
۴.  $Q$  را (الف) برای یک توپ پینگ پونگ، (ب) یک سکه، (ج) این کتاب بدست آورید. دقت کنید جزئیات دقیقی از شرایط اندازه‌گیری و آن چه ملاحظه می‌کنید ارائه نمایید. از آن جمله متوسط‌گیری و دیگر تحلیل‌های آماری لحاظ شود.

حال که طراحی طبقات فیلتر پایان یافته است، آماده‌ایم تا طبقه مجموع را طراحی نماییم. به منظور سادگی این طبقه را هم مشابه طبقات دیگر تغذیه می‌کنیم که این خود موجب محدودیت حداکثر ولتاژ خروجی به کمتر از 9V می‌گردد. در این‌جا با تقویت‌کننده معکوس‌گر آغاز می‌کنیم و خروجی هر فیلتر op-amp مستقیماً به مقاومت 1 k $\Omega$  خودش وصل می‌شود. دیگر پایانه 1 k $\Omega$ ، آن‌گاه به ورودی طبقه تقویت‌کننده مجموع وصل می‌گردد. پتانسیومتر مناسبی برای تقویت‌کننده مجموع انتخاب می‌شود تا از اشباع جلوگیری شود. بنابراین باید از محدوده ولتاژ ورودی و توان بلندگو آگاه باشیم. شکل ۱۶-۴۶ پاسخ فرکانس پیش‌بینی شده و مدار کامل و ولتاژ خروجی فیلترهای بم و زیر را با همه مقاومت‌های پسخوردی 9 k $\Omega$  نشان می‌دهد.



شکل ۱۶-۴۶ پاسخ فرکانس شبیه‌سازی شده یک ترکیب فیلتر پایین‌گذر و بالاگذر.

اجازه انتخاب فرکانس شکست را بدهد،  $R_2$  با پتانسیومتر تعویض می‌شود و یا  $C$  می‌تواند با یک خازن متغیر جایگزین گردد. بقیه طبقات به طریق مشابه ساخته می‌شوند ولی فیلترهای ورودی با هم متفاوتند.

برای تکنیک مقاومت‌ها، خازن‌ها و op-amp‌ها به هر طبقه زیرنویسی منطبق بر طبقه‌اش (b, m, t) تخصیص یافته است. با شروع از طبقه زیر، قبلاً در استفاده از  $\mu A741$  در محدوده 10-20 kHz و بهره بالا با مشکل مواجه شدیم. پس شاید در این‌جا هم LF111 انتخاب مناسبی باشد. با انتخاب فرکانس گوشه در ناحیه صوت زیر 5 kHz باید داشته باشیم.

$$\frac{1}{R_{21}C_1} = 2\pi(5 \times 10^3) = 3.142 \times 10^4$$

با انتخاب  $C_1 = 1 \mu F$  مقدار  $R_{21} = 31.83 \Omega$  را داریم. با انتخاب  $C_6 = 1 \mu F$  هم در ناحیه بم،  $R_{26} = 318.3 \Omega$ ، با فرکانس قطع 500 Hz خواهد بود. ما طراحی فیلتر میان‌گذر را به خواننده واگذار می‌کنیم.

بخش دیگر طراحی انتخاب مقادیر مناسب  $R_{11}$  و  $R_{16}$  و مقاومت‌های ساده‌ترین راه انتخاب طبقات یکسان باشد. بنابراین هر دو مقاومت  $R_{11}$  و  $R_{16}$  برابر 1 k $\Omega$  و  $R_{16}$  با پتانسیومترهای 10 k $\Omega$  انتخاب می‌شوند (بنابراین از 0 تا 10 k $\Omega$  در اختیار است). این انتخاب اجازه می‌دهد تا بلندی یک سیگنال تا 11 برابر دیگری باشد. در مواردی که بخواهیم طراحی قابل جابه‌جایی (پرنابل) باشد ولتاژهای تغذیه را  $\pm 9$  V انتخاب می‌کنیم که در این صورت هنگام لزوم به سادگی تعویض می‌شود.

## ۱۶-۸ خلاصه فصل و مرور

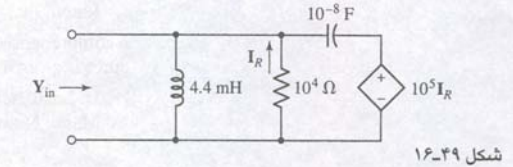
- تشدید وضعیتی است که در آن یک تابع تحریک سینوسی با دامنه ثابت، پاسخی با حداکثر دامنه تولید می‌کند.
- یک شبکه الکتریکی هنگامی در حالت تشدید است که ولتاژ و جریان در پایانه‌های ورودی شبکه هم‌فاز باشند.
- ضریب کیفیت متناسب با حداکثر انرژی در شبکه، تقسیم بر انرژی کل تلف شده در هر پریود است.
- یک فرکانس نصف توان به صورت فرکانسی که در آن اندازه تابع پاسخ مدار  $1/\sqrt{2}$  برابر مقدار حداکثرش باشد، تعریف می‌شود.
- پهنا یا عرض باند یک مدار تشدید به صورت تفاضل بین فرکانس‌های بالا و پایین نصف توان تعریف می‌شود.
- یک مدار با  $Q$  بالا، مدار تشدید است که در آن، ضریب کیفیت بزرگتر از 5 است.
- در یک مدار  $Q$  بالا هر فرکانس نصف توان تقریباً در نصف عرض باند از فرکانس تشدید واقع است.
- یک مدار تشدید سری با امپدانس پایین در حالت تشدید مشخص می‌گردد، در صورتی که مدار تشدید موازی در تشدید، امپدانس بالا دارد.
- مدار تشدید سری هنگامی با یک مدار تشدید موازی معادل است که  $R_p = R_s(1 + Q^2)$  و  $X_p = X_s(1 + Q^2)$  باشد.



۹. یک مدار تشدید موازی دارای قطب‌های امیدانی  $s = -50 \pm j 1000$  و صفری در مبدأ است. اگر  $C = 1 \mu F$  باشد، (الف)  $L$  و  $R$  را بیابید. (ب)  $Z$  را در  $1000 \text{ rad/s}$  محاسبه کنید.

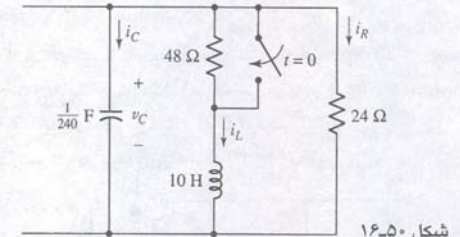
۱۰. یک مدار تشدید موازی برای یک رادیو AM طوری بسازید که یک القاگر متغیر بتواند فرکانس تشدید را در باند AM از 535 تا 1605 کیلوهرتز تنظیم کند. در یک انتهای باند  $Q_0 = 45$  و در سرتاسر باند نیز  $Q_0 \leq 45$  است؛  $R = 20 \text{ k}\Omega$ ، مقادیر  $C$ ،  $L_{\min}$  و  $L_{\max}$  را به دست آورید.

۱۱. (الف) برای شبکه شکل ۱۶-۴۹،  $Y_{in}$  را بیابید. (ب)  $\omega_0$  و (ج)  $Z_{in}(j\omega_0)$  را در شبکه پیدا کنید.



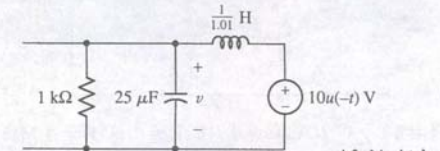
شکل ۱۶-۴۹

۱۲. فرکانس تشدید شبکه شکل ۱۶-۵۰ را در  $t > 0$  معین کنید.



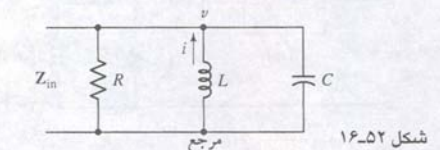
شکل ۱۶-۵۰

۱۳. فرکانس تشدید شبکه شکل ۱۶-۵۱ را در  $t > 0$  معین کنید.



شکل ۱۶-۵۱

۱۴. (الف) برای مدار شکل ۱۶-۵۲،  $L = 1 \text{ mH}$  و  $C = 1 \text{ mF}$  است.  $R$  را چنان تنظیم کنید که  $\alpha = 100s^{-1}$  باشد. فرکانس تشدید و امپدانس  $Z_{in}$  را در فرکانس تشدید پیدا کنید. (ب) پاسخ خود را با شبیه‌سازی PSpice تحقیق کنید (توجه: منبع VAC و یک مقاومت کوچک سری برای ممانعت از اتصال کوتاه به‌هنگام تغذیه خودکار DC اضافه کنید).



شکل ۱۶-۵۲

۱۵. (الف) برای مدار شکل ۱۶-۵۳،  $L = 1 \text{ mH}$  است،  $R$  را چنان انتخاب کنید که  $\alpha = 50s^{-1}$  باشد و  $C$  طوری باشد که  $\omega_d = 5000 \text{ rad/s}$  گردد. فرکانس تشدید و امپدانس  $Z_{in}$  را در آن به دست آورید. (ب) صحت پاسخ را با PSpice تحقیق نمایید (راهنمایی: از منبع VAC استفاده کنید، و یک مقاومت کوچک سری با القاگر برای جلوگیری از اتصال کوتاه در حین تعیین تغذیه DC به آن اضافه کنید).

## ۲-۱۶ عرض باند و مدارهای Q بالا

۱۶. یک مدار تشدید موازی دارای  $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$  و  $Q_0 = 80$  و  $C = 0.2 \mu F$  است. (الف)  $R$  و  $L$  را به دست آورید. (ب) روش‌های تقریبی رسم  $|Z|$  را برحسب  $\omega$  به کار ببرید.

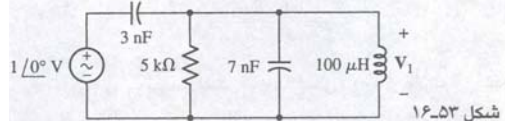
۱۷. از روابط دقیق برای یافتن  $R$ ،  $C$  و  $L$  در یک مدار تشدید موازی استفاده کنید. در این مدار  $\omega_1 = 103 \text{ rad/s}$ ،  $\omega_2 = 118 \text{ rad/s}$  و  $|Z(j105)| = 10 \Omega$  است.

۱۸. اگر در یک مدار تشدید موازی  $\omega_0 = 30 \text{ krad/s}$ ،  $Q_0 = 10$  و  $R = 600 \Omega$  باشد. (الف) عرض باند را به دست آورید. (ب)  $N$  را در  $\omega = 28 \text{ krad/s}$  به دست آورید. (ج) از روش تقریبی در تعیین  $Z_{in}(j28000)$  استفاده کنید. (د) مقدار واقعی  $Z_{in}(j28000)$  را به دست آورید. (ه) در صد خطای ناشی از به کارگیری روابط تقریبی را در محاسبه  $|Z_{in}|$  و  $\text{ang } Z_{in}$  با  $\omega = 28 \text{ krad/s}$  را مشخص کنید.

۱۹. یک مدار تشدید موازی در  $400 \text{ Hz}$  با  $Q_0 = 8$  و  $R = 500 \Omega$  موجود است. اگر جریان  $2 \text{ mA}$  به مدار اعمال شود، با روش‌های تقریبی فرکانس جریان را در شرایط زیر به دست آورید. (الف) ولتاژ دو سر مدار اندازه  $0.5 \text{ V}$  دارد. (ب) جریان در مقاومت دارای اندازه  $0.5 \text{ mA}$  است.

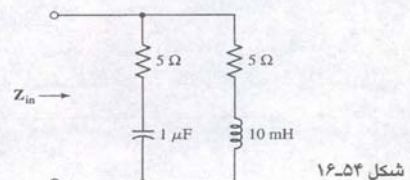
۲۰. مدار تشدید موازی دارای  $\omega_0 = 1 \text{ Mrad/s}$  و  $Q_0 = 10$  است. اگر  $R = 5 \text{ k}\Omega$  باشد، مطلوب است (الف)  $L$ ، (ب) فرکانس بالای  $\omega_0$  که در آن  $|Z_{in}| = 2 \text{ k}\Omega$  باشد. (ج) فرکانسی که در آن  $\text{ang } Z_{in} = -30^\circ$  باشد.

۲۱. از تقریب در یافتن کمیت‌ها در شکل ۱۶-۵۳ استفاده کنید. (الف)  $\omega_0$ ، (ب)  $V_1$  را در فرکانس تشدید به دست آورید. (ج) محاسبه  $V_1$  در فرکانسی به اندازه  $15 \text{ krad/s}$  بالاتر از تشدید.



شکل ۱۶-۵۳

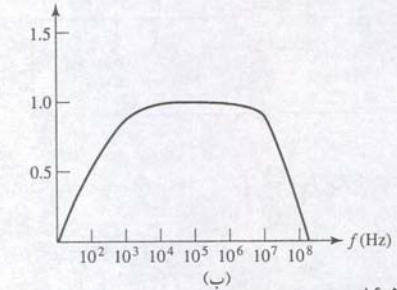
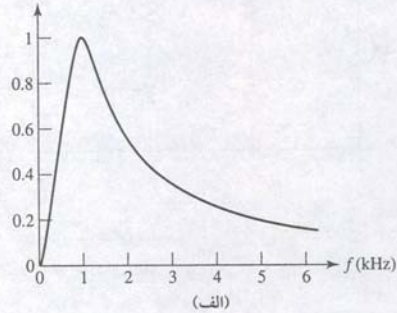
۲۲. (الف) از تعریف تشدید برای یافتن  $\omega_0$  در شبکه شکل ۱۶-۵۴ استفاده کنید. (ب)  $Z_{in}(j\omega_0)$  را به دست آورید.



شکل ۱۶-۵۴

۲۳. یک مدار تشدید موازی با  $f_0 = 1000 \text{ Hz}$ ،  $Q_0 = 40$  و  $|Z_{in}(j\omega_0)|$  مشخص شده است. با روابط تقریبی مقادیر زیر را بیابید. (الف)  $Z_{in}$  در  $1010 \text{ Hz}$  و (ب) محدوده‌ای از فرکانس که در آن تقریب‌ها منطقی‌اند را به دست آورید.

۲۴. عرض باند هر منحنی پاسخ در شکل ۱۶-۵۵ را بیابید.



شکل ۱۶-۵۵

۲۵. یک مدار تشدید موازی دارای پهنای باند  $1 \text{ MHz}$  است، فرکانس نصف توان پایین آن  $f_1 = 5.5 \text{ kHz}$  می‌باشد. (الف) فرکانس نصف توان بالا چند است؟ (ب) فرکانس تشدید  $f_0$  آن چند است. (ج) ضریب کیفیت مدار وقتی در فرکانس تشدید کار کند چند است؟

۲۶. یک مدار تشدید موازی دارای پهنای باند  $1 \text{ GHz}$  است، و فرکانس نصف توان پایین آن  $f_1 = 75.3 \text{ MHz}$  می‌باشد. (الف) فرکانس نصف توان بالای آن چند است؟ (ب) فرکانس تشدید  $f_0$  آن چند است. (ج) ضریب کیفیت مدار وقتی در فرکانس تشدید کار کند چند است؟

۲۷. (الف) منحنی پاسخ ولتاژ را برای یک مدار با فرکانس نصف توان  $1000 \text{ rad/s}$ ، فرکانس نصف توان بالای  $4000 \text{ rad/s}$  و حداکثر ولتاژ  $10 \text{ V}$  رسم کنید. (ب) فرکانس تشدید مدار چیست؟ (ج) پهنای باند مدار چیست؟ (د) ضریب کیفیت مدار وقتی در فرکانس تشدید باشد چقدر است؟

۲۸. (الف) اگر خازن  $1 \mu F$  شکل ۱۶-۵۴ با خازن  $330 \text{ pF}$  جایگزین شود، مطلوبیت فرکانس تشدید مدار جدید. (ب) پاسخ خود را با PSpice تحقیق کنید (توجه: از منبع VAC استفاده نمایید و در طول چند دهه شبیه‌سازی کنید).

۲۹. یک مدار RLC با پهنای باند  $5.5 \text{ kHz}$  طراحی نمایید. فرکانس نصف توان پایین  $500 \text{ Hz}$  است. با شبیه‌سازی نتیجه خود را چک کنید.

## ۳-۱۶ تشدید سری

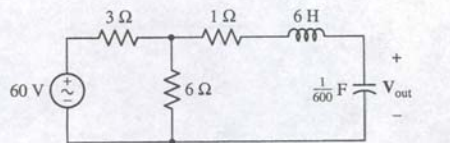
۳۰. یک مدار سری از دو مقاومت  $5 \Omega$ ، چهار القاگر  $100 \mu H$  و یک خازن  $3.3 \mu F$  ساخته شده است. (الف) فرکانس تشدید مدار را حساب کنید. (ب) ضریب کیفیت مدار وقتی در فرکانس تشدید کار می‌کند، چقدر است؟ (ج) امپدانس ورودی در فرکانس تشدید چقدر است،  $0.1$  فرکانس تشدید یا  $10$  برابر فرکانس تشدید.

۳۱. اگر یک مدار سری دارای پهنای باند  $3 \text{ MHz}$  و فرکانس نصف توان  $f_1 = 17 \text{ kHz}$  باشد، مطلوبیت (الف) فرکانس نصف توان بالا، (ب) فرکانس تشدید  $f_0$  مدار، (ج) ضریب کیفیت مدار وقتی که در فرکانس تشدید کار کند.

۳۲. (الف) امپدانس مدار RLC  $(C = 2 \text{ mF}$  و  $L = 1 \text{ mH}$ ،  $R = 1 \Omega)$  را وقتی در فرکانس تشدید کار کند به دست آورید. حل خود را با شبیه‌سازی تأیید کنید (توجه: یک مقاومت خیلی بزرگ موازی با خازن مانع از ایجاد خطای اتصال به زمین می‌گردد).

۳۳. (الف) امپدانس مدار RLC  $(C = 2 \mu F$  و  $L = 1 \mu H$ ،  $R = 1 \text{ k}\Omega)$  را وقتی که در فرکانس تشدید کار کند، به دست آورید. (ب) حل خود را با PSpice شبیه‌سازی کنید (توجه: یک مقاومت خیلی بزرگ موازی با خازن مانع از ایجاد خطای اتصال به زمین می‌گردد).

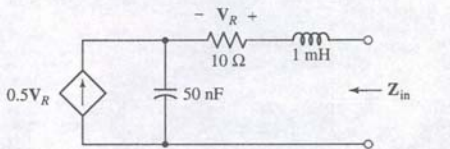
۳۴. (الف) با روش‌های تقریبی،  $|V_{out}|$  را برحسب  $\omega$  برای شکل ۱۶-۵۶ رسم کنید. (ب) مقدار دقیق  $V_{out}$  را در  $\omega = 9 \text{ rad/s}$  بیابید.



شکل ۱۶-۵۶

۳۵. یک شبکه تشدید سری متشکل از مقاومت  $50 \Omega$ ، یک القاگر  $4 \text{ mH}$  و یک خازن  $0.1 \mu F$  موجود است. مطلوب است (الف)  $\omega_0$ ، (ب)  $f_0$ ، (ج)  $Q_0$ ، (د)  $B$ ، (ه)  $\omega_1$ ، (و)  $\omega_2$ ، (ز)  $Z_{in}$  در  $45 \text{ rad/s}$  و (ح) نسبت اندازه‌های امپدانس خازن به امپدانس مقاومت در  $45 \text{ rad/s}$ .

۳۶. پس از یافتن  $Z_{in}(s)$  در شکل ۱۶-۵۷  $\omega_0$  (الف) و  $Q_0$  (ب) را بیابید.

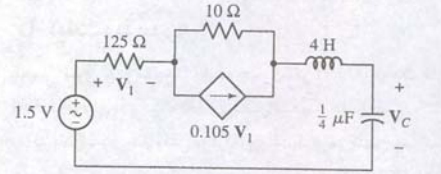


شکل ۱۶-۵۷

۳۷. مدار شکل ۱۶-۵۸ به اندازه ولتاژ منبع توجه کنید. بعد بگویید آیا مایلید دست‌های خود را در دو سر خازن بگذارید. منحنی  $|V_C|$  را برحسب  $\omega$



رسم کنید تا پاسخ خود را ارزیابی نمایید.



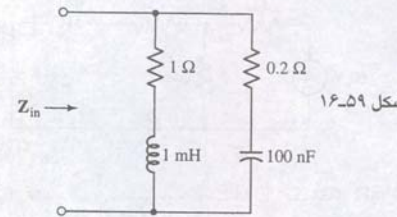
شکل ۱۶-۵۸

۳۸. یک مدار تشدید سری دارای  $f_0 = 500 \text{ Hz}$ ،  $Q_0 = 10$  و  $X_L = 500 \Omega$  در حالت تشدید است. (الف)  $R$ ،  $L$  و  $C$  را بیابید. (ب) اگر یک منبع  $V_s = 1 \angle 0^\circ \text{ V}$  به طور سری به مدار وصل شود، مقادیر دقیق  $|V_C|$  را در فرکانس‌های  $f = 450$  و  $550 \text{ Hz}$  به دست آورید.

۳۹. یک شبکه سه عنصری دارای یک امپدانس ورودی  $Z(s)$  است که قطب‌هایی را در  $s = 0$  و بینهایت دارا است و نیز یک جفت صفر در  $s = -20000 \pm j80000 \text{ s}^{-1}$  می‌باشد. اگر  $Z_{in}(-10000) = -20 + j0 \Omega$  باشد، مقادیر سه عنصر را به دست آورید.

## ۱۶-۴ دیگر فرم‌های تشدید

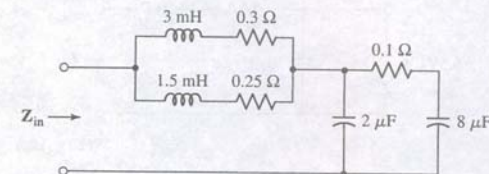
۴۰. در شبکه ۱۶-۵۹ چند تقریب به کار ببرید و مقادیر  $\omega_0$ ،  $Q_0$ ،  $B$ ،  $Z_{in}(j\omega_0)$  و  $Z_{in}(j99000)$  را به دست آورید.



شکل ۱۶-۵۹

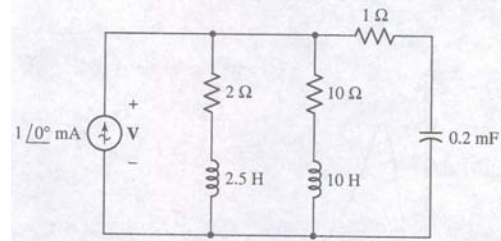
۴۱. چه مقاومتی باید به دو سر ورودی شبکه شکل ۱۶-۵۹ وصل شود تا  $Q_0$  برابر ۵۰ گردد؟

۴۲. به شبکه شکل ۱۶-۶۰ مراجعه نمایید و از تکنیک‌های تقریبی در تعیین حداقل اندازه  $Z_{in}$  و فرکانس متناظر آن استفاده نمایید.



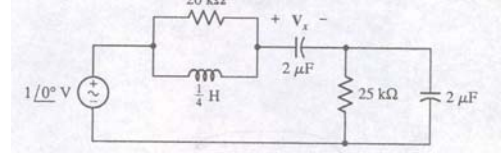
شکل ۱۶-۶۰

۴۳. برای مدار شکل ۱۶-۶۱، (الف) منحنی پاسخ تقریبی را برای  $|V|$  در برابر  $\omega$  به دست آورید. (ب) مقدار دقیق  $V$  را در  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  بیابید.



شکل ۱۶-۶۱

۴۴. (الف) با روش‌های تقریبی،  $|V_x|$  را در  $\omega = 2000 \text{ rad/s}$  برای شکل ۱۶-۶۲ به دست آورید. (ب) مقدار دقیق  $V_x(j2000)$  را بیابید.



شکل ۱۶-۶۲

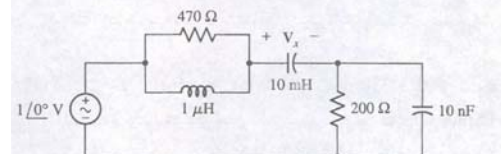
۴۵. ترکیب موازی مقاومت از یک مقاومت  $5 \text{ k}\Omega$  و خازن  $1 \mu\text{F}$  ساخته شد. تعیین کنید یک معادل سری اگر فرکانس  $\omega$  (الف)  $10^3 \text{ rad/s}$  (ب)  $10^4 \text{ rad/s}$  و (ج)  $10^5 \text{ rad/s}$  باشد.

۴۶. ترکیب سری مقاومت  $5 \text{ k}\Omega$  و خازن  $1 \mu\text{F}$  ساخته شده است. مطلوبست معادل موازی در فرکانس‌های (الف)  $10^3 \text{ rad/s}$ ، (ب)  $10^4 \text{ rad/s}$  و (ج)  $10^5 \text{ rad/s}$  باشد.

۴۷. یک ترکیب سری از مقاومت  $470 \Omega$  و القاگر  $3.3 \mu\text{H}$  ساخته شده است. مطلوبست معادل سری اگر فرکانس کار برابر باشد با (الف)  $10^3 \text{ rad/s}$  (ب)  $10^4 \text{ rad/s}$  و (ج)  $10^5 \text{ rad/s}$  باشد.

۴۸. ترکیب موازی مقاومت  $470 \Omega$  و القاگر  $3.3 \mu\text{H}$  ساخته شده است. مطلوبست معادل موازی اگر فرکانس برابر باشد با (الف)  $10^3 \text{ rad/s}$ ، (ب)  $10^4 \text{ rad/s}$  و (ج)  $10^5 \text{ rad/s}$  باشد.

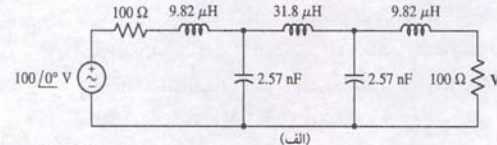
۴۹. (الف) برای مدار شکل ۱۶-۶۳ روش‌های تقریبی برای محاسبه  $|V_x|$  در  $f = 1.6 \text{ MHz}$  به کار ببرید. (ب) مقدار دقیق  $|V_x(j10 \times 10^6)|$  محاسبه کنید. (ج) نتیجه را با PSpice تأیید کنید.



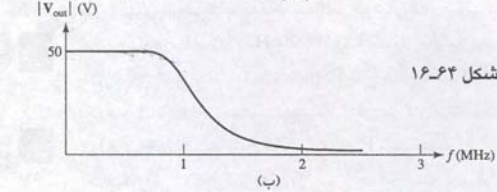
شکل ۱۶-۶۳

## ۵-۱۶ تغییر مقیاس

۵۰. فیلتر شکل ۱۶-۶۴ (الف) دارای منحنی پاسخ شکل ۱۶-۶۴ (ب) است. (الف) فیلتر را طوری تغییر مقیاس دهید که بین یک منبع  $50 \Omega$  و یک بار  $50 \text{ k}\Omega$  کار کند و فرکانس قطع آن هم  $20 \text{ kHz}$  باشد. (ب) منحنی پاسخ جدید را ترسیم کنید.

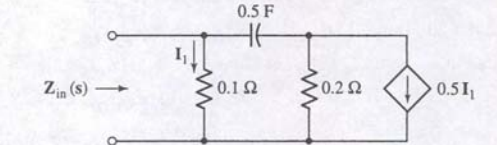


(الف)



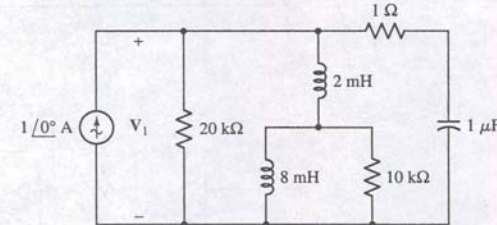
شکل ۱۶-۶۴

۵۱. (الف) برای شبکه شکل ۱۶-۶۵،  $Z_{in}(s)$  را بیابید. (ب) عبارتی برای  $Z_{in}(s)$  پس از تغییر مقیاس با  $K_m = 2$  و  $K_f = 5$  به دست آورید. (ج) عناصر مدار را با  $K_m = 2$  و  $K_f = 5$  تغییر مقیاس داده و شبکه جدید را رسم نمایید.



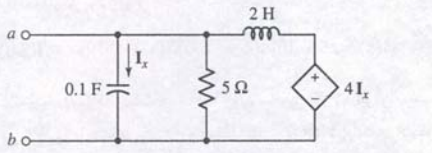
شکل ۱۶-۶۵

۵۲. (الف) از تقریب‌های مناسب برای یافتن  $\omega_0$  و  $Q_0$  در شکل ۱۶-۶۶ استفاده نمایید. (ب) شبکه سمت راست منبع را طوری تغییر مقیاس دهید که تشدید در  $1 \text{ Mrad/s}$  رخ دهد. (ج) برای مدار جدید  $\omega_0$  و  $B$  را مشخص نمایید.



شکل ۱۶-۶۶

۵۳. (الف) آرایش جدید شکل ۱۶-۶۷ را پس از تغییر مقیاس با  $K_m = 250$  و  $K_f = 400$  رسم کنید. (ب) معادل تونن شبکه جدید را در  $\omega = 1 \text{ krad/s}$  به دست آورید.



شکل ۱۶-۶۷

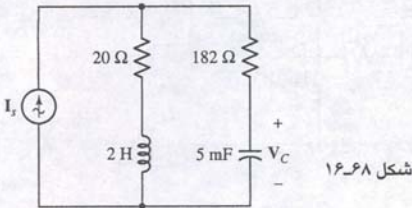
۵۴. شبکه‌ای متشکل از  $R$ ،  $L$  و  $C$ ‌ها ایده‌آل و یک جفت پایانه ورودی است که به آن‌ها منبع جریان سینوسی  $I_s$  وصل، و نیز یک جفت پایانه خروجی  $V_{out}$  در آن تعریف شده است. اگر  $I_s = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$  و  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  باشد، آن‌گاه  $V_{out} = 30 \angle 25^\circ \text{ V}$  است. تحت شرایط زیر  $V_{out}$  را مشخص نمایید. اگر تعیین مقدار  $V_{out}$  ناممکن است، تقریب آن را بیان کنید. (الف)  $I_s = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$  در  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  (ب)  $I_s = 2 \angle 40^\circ \text{ A}$  در  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  (ج)  $I_s = 2 \angle 40^\circ \text{ A}$  در  $\omega = 200 \text{ rad/s}$  (د) شبکه با  $K_m = 30$  و  $K_f = 2 \angle 40^\circ \text{ A}$  در  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  تغییر مقیاس یافته است. (ه)  $K_m = 30$ ،  $K_f = 4$ ،  $I_s = 2 \angle 40^\circ \text{ A}$  در  $\omega = 200 \text{ rad/s}$ .

## ۶-۱۶ نمودارهای بود

۵۵.  $H_{dB}$  را به دست آورید اگر  $H(s)$  برابر باشد با (الف)  $0.2$ ، (ب)  $50$ ، (ج)  $H(s) = \frac{12}{s+2} + \frac{26}{s+20}$ ،  $s = j10$ ،  $|H(s)|$  را اگر  $H_{dB}$  برابر باشد با، (د)  $37.6 \text{ dB}$ ، (ه)  $-8 \text{ dB}$  و (و)  $0.01 \text{ dB}$ .

۵۶. منحنی اندازه بود را برای موارد زیر ترسیم کنید (الف)  $\frac{20(s+1)}{(s+100)^2}$ ، (ب)  $\frac{20(s+1)}{(s+100)^2}$ ، (ج)  $\frac{2000s(s+1)}{(s+100)^2}$ ، (د)  $\frac{200}{s+45}$  و (ه) نمودارهای خود را با متلب مقایسه کنید.

۵۷. برای شکل ۱۶-۶۸ منحنی‌های اندازه و فاز بود را برای تابع تبدیل  $H(s) = \frac{V_c}{I_s}$  به دست آورید.



شکل ۱۶-۶۸

۵۸. (الف) با به کارگیری مبدأ در  $\omega = 1$ ،  $H_{dB} = 0$ ، منحنی دامنه بود را برای تابع زیر به دست آورید:

$$H(s) = 5 \times 10^8 \frac{s(s+100)}{(s+20)(s+1000)^3}$$

(ب) مختصات همه گوشه‌ها و نقاط تقاطع را روی نمودار بود مشخص کنید. (ج) مقادیر دقیق  $|H(j\omega)|$  در  $20 \log$  برای هر فرکانس گوشه در بخش (ب) مشخص نمایید.



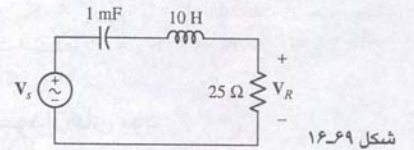
۵۹. (الف) نمودار فاز بود را برای

$$H(s) = 5 \times 10^8 s(s + 100) / [(s + 20)(s + 1000)]$$

رسم نمایید. (ب) مختصات همه نقاط روی منحنی فاز که در آن شیب عوض می‌شود را مشخص کنید. (ج) مقدار دقیق  $\angle H(j\omega)$  را برای هر فرکانس در بخش (ب) به دست آورید.

۶۰. (الف) منحنی اندازه بود را برای تابع تبدیل  $H(s) = 1 + 20/s + 400/s^2$  (ب) منحنی بود را با مقادیر دقیق در  $\omega = 5, 100 \text{ rad/s}$  مقایسه نمایید. (ج) با متلب صحت منحنی بود را تحقیق کنید.

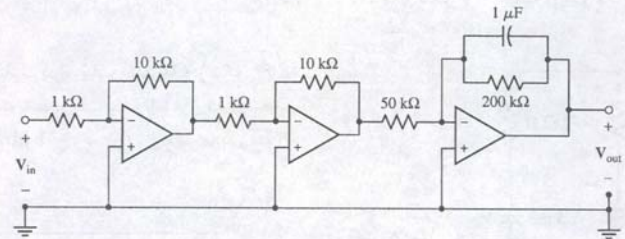
۶۱. (الف)  $H(s) = V_R / V_S$  را برای مدار شکل ۶۹-۱۶ پیدا کنید. (ب) منحنی اندازه و فاز را برای  $H(s)$  رسم نمایید. (ج) مقادیر دقیق  $H_{dB}$  و  $\angle H(j\omega)$  را در  $\omega = 20 \text{ rad/s}$  به دست آورید.



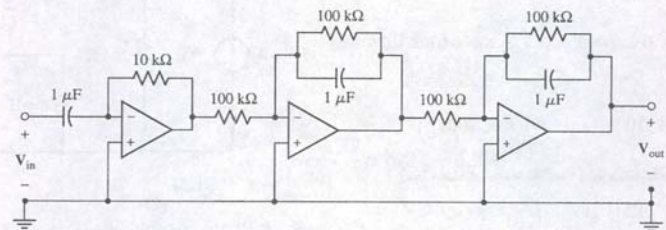
شکل ۶۹-۱۶

۶۲. منحنی اندازه بود را برای تابع تبدیل  $H(s) = V_{out} / V_{in}$  در شبکه شکل ۷۰-۱۶ رسم کنید.

۶۳. برای شبکه شکل ۷۱-۱۶، (الف)  $H(s) = V_{out}/V_{in}$  را بیابید. (ب) منحنی اندازه بود را برای  $H_{dB}$  رسم کنید. (ج) منحنی فاز بود  $\angle H(j\omega)$  را ترسیم نمایید.



شکل ۷۰-۱۶



شکل ۷۱-۱۶

## ۷-۱۶ فیلتر

۶۴. فرکانس صوتی یک دلفین از حدود 250 Hz تا 150 kHz می‌باشد. در ارتباطات اجتماعی آن‌ها فرکانس‌های 250 Hz تا 50 kHz به کار می‌برند و تقه‌های با فرکانس‌های بالای 40 kHz در شناخت موقعیت براساس برگشت صدا به کار می‌رود. مدار تقویت کننده‌ای طراحی کنید که مکالمه جمعی از دلفین‌ها را تقویت کند. می‌توان یک میکروفون را با یک منبع ولتاژ سینوسی با حداکثر دامنه کمتر از 15 mV که با مقاومت 1 ohm سری است مدل‌سازی کرد، ولتاژ انتقالی به گوشی باید در حدود 1 V حداکثر باشد.

۶۵. مدار فیلتری طراحی کنید که محدوده کامل فرکانس‌های صوتی به گوش انسان را حذف کند (20 Hz تا 20 kHz)، ولی سیگنال‌دهی بالاتر و پایین‌تر از آن عبور کند. با PSpice طرح خود را تست کنید. یک مدار فیلتر طراحی نمایید تا هر سیگنالی بزرگتر یا برابر با 1 kHz را حذف نماید. طرح خود را با PSpice تست کنید.

۶۶. یک میکروفون که به فرکانس‌های بالا خیلی حساس است، برای انواع خرابی‌های موتور جت به کار رفته است ولی متأسفانه بعضی از پارازیت‌های فرکانس پایین‌تر از سیستم‌های هیدرولیک پره‌ها و شهر نیز دریافت می‌نماید و در نتیجه اعلام خطرهای غلط را موجب می‌شود. مدار فیلتری برای حذف سیگنال‌های پارازیت طراحی کنید ضمن این‌که فرکانس‌های بالا را با ضریب 100 تقویت می‌کند سیگنال فرکانس پایین، حداکثر انرژی را در حدود 20 Hz دارا است و در 1 kHz به کمتر از 1% افت می‌کند. سیگنال‌های خرابی موتور در حدود 25 kHz است.

۶۸.



طراحی موردبحث را در بخش کاربردهای عملی کامل کنید. (الف) با طراحی یک طبقه میانی طرح را کامل نمایید. (ب) پاسخ فرکانس مدار خود را با تغییر مقاومت پخشورد بین مقادیر حداکثر و حداقل شبیه‌سازی نمایید.

۶۹.



علی‌رغم این‌که پاسخ صوتی انسان در حدود 20 Hz تا 20 kHz پذیرفته شده است، ولی عرض باند بسیاری از سیستم‌های تلفنی به 3 kHz محدود است. مدار فیلتری طراحی کنید که عرض باند مکالمه 20 kHz را به 3 kHz یعنی عرض باند مکالمه تلفنی تبدیل کند. ورودی میکروفونی است با حداکثر ولتاژ 150 mV و اساساً مقاومت سری صفر است. خروجی نیز یک بلندگوی 8 ohm می‌باشد. مکالمه باید حداقل با ضریب 10 تقویت شود. طرح را با شبیه‌سازی PSpice تست نمایید.

۷۰. مداری طراحی کنید تا مؤلفه‌های 50 nHz را از یک سیگنال آنتن حذف نماید که در آن n عددی صحیح بین 1 و 4 است. توپولوژی یک



## ۵۲۵ پاسخ فرکانس

فیلتر خوب حذفی، یعنی فیلتری که فرکانس خاصی را حذف می‌کند. در مدار شکل ۳۹-۱۶ داده شده است. ولی این بار فرکانس به جای دو سر مقاومت از دو سر القاگر - خازن گرفته می‌شود. سیگنال آنتن را به صورت یک منبع سینوسی 1V و مقاومت سری صفر می‌توان مدل‌سازی کرد.

۷۱.



یک قطعه حساس دستگاه ردیابی به وسیله یک پارازیت القایی دریافتی از سیگنال وارده تحت تأثیر قرار گرفته است. طبیعت سیگنال‌ها مانع از به کارگیری هرگونه فیلتر پایین‌گذر، میان‌گذر یا بالاگذر می‌گردد. یک فیلتر حذفی که هر سیگنال 60 Hz را از ورودی دستگاه حذف کند، طراحی نمایید. ممکن است فرض کنیم که در اصل دارای مقاومت معادل تونن بینهایت است. توپولوژی یک فیلتر حذف یا تله خوب در شکل ۳۹-۱۶ داده شده است، ولی خروجی این بار از ترکیب دو سر القاگر - خازن به جای مقاومت گرفته شده است.



## شبکه‌های دو درگاهی

### مقدمه

مداری با دو زوج پایانه مثلاً یک جفت پایانه ورودی و یک جفت پایانه خروجی، بلوک ساختاری مهمی در سیستم‌های الکترونیکی، مخابراتی، کنترل خودکار، سیستم‌های انتقال و توزیع است. در این سیستم‌ها یک سیگنال یا انرژی الکتریکی وارد پایانه‌های ورودی می‌شود، شبکه بر روی آن کاری انجام می‌دهد و از پایانه‌های خروجی خارج می‌گردد. جفت پایانه خروجی به خوبی می‌تواند به جفت پایانه ورودی شبکه دیگر وصل شود. وقتی که مفهوم شبکه‌های معادل تونین و نورتن را در فصل ۵ مطالعه کردیم، گفته شد، همیشه لازم نیست که رای کار با مدار جزئیات همه بخش‌های آن را بدانیم. در این جا این مفهوم را تعمیم داده می‌گوییم که حتی دانستن کار درونی مدار لزومی ندارد. با تنها آگاهی از خطی بودن مدار و انابایی در اندازه‌گیری ولتاژها و جریان، به زودی خواهیم دید که می‌توان چنین شبکه‌ای را با مجموعه‌ای از پارامترها مشخص کرد و این مشخصات اجازه می‌دهند واکنش شبکه به دیگر شبکه‌ها پیش‌بینی گردد.

### ۱۷-۱ شبکه‌های یک‌درگاهی

یک جفت پایانه که از آن سیگنال ممکن است وارد شبکه و یا از آن خارج شود را **درگاه** می‌نامند و شبکه‌ای که تنها یک جفت پایانه از این نوع دارد را **شبکه یک‌درگاهی** می‌خوانند. به بیج یک از گره‌های داخلی یک‌درگاهی نمی‌توان چیزی وصل کرد. پس واضح است که در شبکه یک‌درگاه،  $i_a$  و  $i_b$  در شکل ۱۷-۱ (الف) با یکدیگر برابرند. وقتی تعداد پایانه‌های یک جفت بیشتر باشد، آن را **شبکه چنددرگاه** می‌گویند. شبکه دودرگاهی که این فصل به آن اختصاص یافته در شکل ۱۷-۱ (ب) ملاحظه می‌گردد. جریان‌های دو پایانه تشکیل دهنده هر رگاه با یکدیگر برابرند پس  $i_a = i_b$  و  $i_c = i_d$  خواهد بود که در شکل ۱۷-۱ (ب) نشان داده شده است. به شرطی می‌توان روش‌های این فصل را به کاربرد که منابع و بارها مستقیماً به دو سر هر پایانه وصل شوند. به عبارت دیگر هر درگاه می‌تواند به یک شبکه یک درگاه و یا به یک رگاه از شبکه چنددرگاه وصل شود. مثلاً هیچ وسیله‌ای را نمی‌توان به پایانه‌های  $a$  و  $c$  از شبکه دودرگاه در شکل ۱۷-۱ (ب) وصل کرد. اگر چنین کاری انجام دهیم باید برای تحلیل معادلاتش یا گرهی را بنویسیم.

#### مفاهیم کلیدی

تفکیک شبکه‌های یک‌درگاهی و دو درگاهی

پارامترهای ادمیتانس ( $y$ )

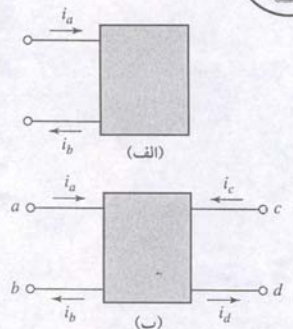
پارامترهای امپدانس ( $z$ )

پارامترهای هیبرید ( $h$ )

پارامترهای انتقال ( $t$ )

روش‌های تبدیل پارامترهای  $t$ ،  $h$ ،  $z$ ،  $y$

روش‌های تحلیل مدار با استفاده از شبکه‌ها



شکل ۱۷-۱ (الف) یک شبکه یک‌درگاه. (ب) شبکه دو درگاه.



$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V \Delta Z}{\Delta I_1} \quad (3)$$

ابتدا چهار جریان مش را تخصیص داده و معادله متناظر مش ها را می نویسیم:

$$\begin{aligned} V_1 &= 10I_1 - 10I_2 \\ 0 &= -10I_1 + 17I_2 - 2I_3 - 5I_4 \\ 0 &= -2I_2 + 7I_3 - I_4 \\ 0 &= -5I_2 - I_3 + 26I_4 \end{aligned}$$
$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 26 \end{vmatrix}$$
$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ -5 & -1 & 26 \end{vmatrix} = 2778 \Omega^3$$
$$Z_{in} = \frac{9680}{2778} = 3.485\Omega$$

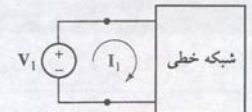
امپدانس ورودی شبکه شکل ۵-۱۷ را بیابید.

$$\begin{array}{rcll} 10\mathbf{I}_1 & - & 10\mathbf{I}_2 & = \mathbf{V}_1 \\ -10\mathbf{I}_1 & + & 17\mathbf{I}_2 & - 2\mathbf{I}_3 & - 5\mathbf{I}_4 & = 0 \\ & & -2\mathbf{I}_2 & + 7\mathbf{I}_3 & - \mathbf{I}_4 & = 0 \end{array}$$

$$-0.5\mathbf{I}_3 + 1.5\mathbf{I}_4 = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 590 \Omega^3$$
$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 159 \Omega^2$$
$$\begin{aligned} Z_{11}\mathbf{I}_1 + Z_{12}\mathbf{I}_2 + Z_{13}\mathbf{I}_3 + \cdots + Z_{1N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_1 \\ Z_{21}\mathbf{I}_1 + Z_{22}\mathbf{I}_2 + Z_{23}\mathbf{I}_3 + \cdots + Z_{2N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_2 \\ Z_{31}\mathbf{I}_1 + Z_{32}\mathbf{I}_2 + Z_{33}\mathbf{I}_3 + \cdots + Z_{3N}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_3 \\ &\vdots \\ Z_{N1}\mathbf{I}_1 + Z_{N2}\mathbf{I}_2 + Z_{N3}\mathbf{I}_3 + \cdots + Z_{NN}\mathbf{I}_N &= \mathbf{V}_N \end{aligned} \quad (1)$$
$$\Delta z = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & \cdots & Z_{NN} \end{vmatrix} \quad (7)$$

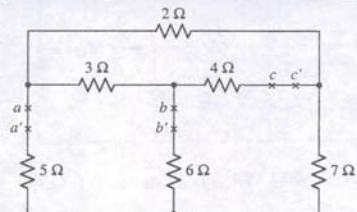
با استفاده از نماد معرفی شده (در پیوست ۲) می‌توان امیدانس نقطه ورودی یا تحریک را در پایانه‌های شبکه تک‌ورودی به صورت جمع و جوری نوشت. اگر یکی از درگاه‌های شبکه دو درگاهی به یک امیدانس ختم شود، باز هم این روش قابل استفاده است. امیدانس می‌تواند مدار اتصال کوتاه یا مدار باز باشد.

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{Z}_{12} & \mathbf{Z}_{13} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ 0 & \mathbf{Z}_{22} & \mathbf{Z}_{23} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ 0 & \mathbf{Z}_{32} & \mathbf{Z}_{33} & \cdots & \mathbf{Z}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \mathbf{Z}_{N2} & \mathbf{Z}_{N3} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{bmatrix}$$
$$I_1 = \frac{V_1 \Delta_{11}}{\Delta_7}$$


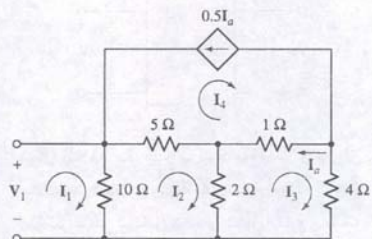
شکل ۱۷-۲ یک منبع ولتاژ ایده‌آل  $V_1$  به یک درگاه شبکه یک‌درگاهی که منابع مستقل ندارد وصل است؛  $Z_{in} = \Delta_z / \Delta_{11}$

تمرین

مثال ۲-۱۷



شكل ١٧-٤



شکل ۵-۱۷ مثالی از یک شبکه یک درگاهی با منبع وابسته.

2



و یا

$$Z_{in} = \frac{590}{159} = 3.711 \Omega$$

می‌توان روش مشابهی را با استفاده از معادلات گرهی به کار گرفت و در نتیجه ادمیتانس ورودی را به دست آورد:

$$Y_{in} = \frac{1}{Z_{in}} = \frac{\Delta Y}{\Delta_{11}} \quad (۴)$$

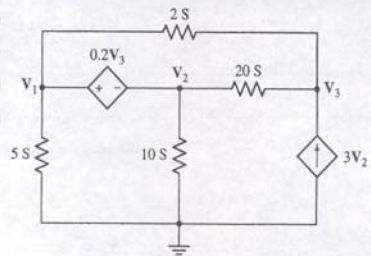
که اکنون  $\Delta_{11}$  کهاد  $\Delta Y$  است.

## تمرین

۱۷-۲ مجموعه معادلات گرهی را برای شکل ۱۷-۶ بنویسید و  $\Delta Y$  را محاسبه کنید و سپس ادمیتانس بین گره‌های زیر را پیدا کنید: (الف) گره ۱ و گره مرجع و (ب) گره ۲ و مرجع.

جواب: 10.68 S و 13.16 S.

مثال ۱۷-۳



شکل ۱۷-۶

به نحوی که

$$Y_{in} = \frac{0.3473}{1.21} = 0.2870 \text{ S}$$

که مرتبط است به

$$Z_{in} = \frac{1}{0.287} = 3.484 \Omega$$

که با پاسخ قبلی در محدوده خطای مجاز تطابق دارد (ما در سرتاسر محاسبات چهار رقم را در نظر گرفته‌ایم).

مسائل ۸ و ۹ در انتهای فصل تک‌درگاه‌هایی را نشان می‌دهند که به کمک تقویت‌کننده‌های عملیاتی ساخته شده‌اند. این مسائل نشان می‌دهند که می‌توان شبکه‌هایی داشت که تنها عناصر مدار غیرفعال در آن‌ها مقاومت منفی باشد و القاگرها با خازن و مقاومت شبیه‌سازی می‌شوند.

## ۱۷-۲ پارامترهای ادمیتانس

اکنون توجه خود را به شبکه‌های دو درگاه معطوف می‌کنیم. در هر آن چه که به دنبال می‌آید فرض بر این است که شبکه از عناصر خطی تشکیل شده و فاقد منابع مستقل است. با این وجود منابع وابسته مجازند. در موارد خاص شرایط اضافی دیگری هم ممکن است بر مدار تحمیل شوند.

ما شبکه دو درگاه را مطابق شکل ۱۷-۸ در نظر می‌گیریم. ولتاژ و جریان در پایانه‌های ورودی  $V_1$  و  $I_1$  بوده و  $V_2$  و  $I_2$  نیز در درگاه خروجی‌اند. جهت جریان‌های  $I_1$  و  $I_2$  حسب عادت از سیم‌های فوقانی در جهت رو به شبکه در نظر گرفته شده‌اند (و در سیم‌های پایینی به

سمت بیرون شبکه‌اند). چون شبکه خطی و فاقد منابع مستقل است،  $I_1$  را می‌توان مجموع دو مولفه دانست، یکی حاصل از  $V_1$  و دیگری  $V_2$ . وقتی بحث مشابهی را برای  $I_2$  به کار ببریم، مجموعه معادلات چنین خواهد بود:

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad (۵)$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \quad (۶)$$

که  $y$ ها چیزی جز ثابت‌های تناسب یا ضرایب مجهولات نیستند. با این وجود باید متذکر شد که ابعاد آن‌ها  $A/V$  یا  $S$  است. بنابراین به آن‌ها پارامترهای  $y$  می‌گوییم و با معادلات (۵) و (۶) تعریف می‌شوند. پارامترهای  $y$  و دیگر پارامترها که بعداً در این فصل تعریف می‌شوند، به صورت جمع و جورتر ماتریسی نمایش داده می‌شوند. حال ماتریس ستونی  $(2 \times 1)$  را برای  $I$  تعریف می‌کنیم:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (۷)$$

ماتریس پارامترهای  $y$  یک ماتریس  $(2 \times 2)$  است:

$$y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

و ماتریس ستونی  $(2 \times 1)$  هم چنین می‌باشد:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (۹)$$

بنابراین می‌توان معادله ماتریسی  $I = yV$  را نوشت، یا:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

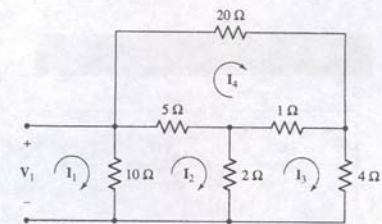
ز ضرب ماتریسی سمت راست برابری زیر را داریم:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{bmatrix}$$

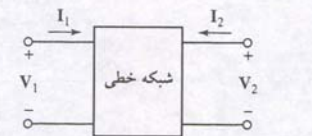
ماتریس‌های  $(2 \times 1)$  باید عنصر به عنصر برابر باشند و بنابراین ما به سمت تعریف معادلات (۵) و (۶) سوق داده می‌شویم.

مفیدترین روش یافتن یک تعبیر فیزیکی برای پارامترهای  $y$ ، بررسی معادلات (۵) و (۶) است. مثلاً در معادله (۵) اگر  $V_2$  برابر صفر باشد، آنگاه  $y_{11}$  از نسبت  $I_1$  به  $V_1$  به دست می‌آید. بنابراین  $y_{11}$  را به عنوان ادمیتانس در پایانه‌های ورودی ضمن اتصال کوتاه پایانه خروجی ( $V_2 = 0$ ) اندازه می‌گیریم. چون شکی نیست کدام پایانه‌ها اتصال کوتاه شده‌اند،  $y_{11}$  را ادمیتانس ورودی اتصال کوتاه می‌نامیم. به همین ترتیب می‌توان  $y_{11}$  را عکس امپدانس ورودی با اتصال کوتاه پایانه‌های خروجی نامید ولی توصیف تحت نام ادمیتانس سراسرتر است. البته اسم ابرامتر مهم نیست، بلکه شرایطی که باید برای محاسبه پارامتر به معادلات (۵) و (۶) و برای اندازه‌گیری پارامتر به مدار اعمال شود اهمیت دارد و به این علت می‌توان با اعمال آن‌ها پارامتر را از تحلیل مستقیم مدار به دست آورد. هر یک از پارامترهای  $y$  را می‌توان به صورت یک سبب جریان به ولتاژ بیان کرد به شرطی که  $V_1 = 0$  (پایانه‌های ورودی اتصال کوتاه است) و یا  $V_2 = 0$  (پایانه‌های خروجی اتصال باشد):

علامت به کاررفته برای نمایش ماتریس در این کتاب، استاندارد است و به راحتی قابل اشتباه با علامت قبلی برای فیزوری یا کمیت‌های پیچیده می‌باشد. ماهیت هر سمبلی از این قبیل باید از محتوای کاربردی آن مشخص شود.



شکل ۱۷-۷ مداری از مثال ۱۷-۱ که در این‌جا تکرار شده است.



شکل ۱۷-۸ یک مدار دو درگاه با ولتاژ و جریان مشخص شده در پایانه‌ها. مدار دو درگاه از عناصر خطی تشکیل شده و شامل منابع وابسته است ولی منابع مستقل را دارا نیست.



بین معادلات با معادلات (۱۴) و (۱۵) یکی بوده و می‌توان چهار پارامتر  $y$  را از آن‌ها مستقیماً خواند.

۱۷-۲ با اعمال مناسب منابع 1V و مدارهای اتصال کوتاه به مدار شکل ۱۷-۱۰ مطلوبست (الف)  $y_{11}$ ، (ب)  $y_{21}$ ، (ج)  $y_{22}$  و (د)  $y_{12}$ .  
جواب:  $0.1192\text{ S}$ ،  $-0.1115\text{ S}$ ،  $0.1269\text{ S}$  و  $-0.1115\text{ S}$ .

به‌طور کلی وقتی که فقط یک پارامتر مورد نظر باشد، استفاده از معادلات (۱۰)، (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) ساده‌تر است. ولی اگر همه آن‌ها را خواسته باشیم، بهتر است  $V_1$  و  $V_2$  را به‌گره‌های ورودی و خروجی نسبت دهیم تا دیگر ولتاژهای گره - مرجع در هر گره داخلی تعریف شود. سپس به یافتن آن‌ها ادامه دهیم.

برای این‌که ببینیم با این سیستم معادلات چه می‌توان کرد، بیایید هر درگاه را به یک شبکه یک درگاهی ببندیم. مثال ۱۷-۴ در شکل ۱۷-۱۱ یک منبع جریان عملی متصل به درگاه ورودی یک بار مقاومتی را به درگاه خروجی نشان می‌دهد. اکنون باید رابطه‌ای بین  $V_1$  و  $I_1$  و مستقل از شبکه دو درگاه وجود داشته باشد. این رابطه باید بتواند به تنهایی از این مدار بیرونی تعیین شود. اگر در ورودی KCL را اعمال کنیم داریم:

$$I_1 = 15 - 0.1V_1$$

نانون اهم در خروجی را می‌نویسیم:

$$I_2 = -0.25V_2$$

ز جایگزینی این عبارات برای  $I_1$  و  $I_2$  در معادلات (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$15 = 0.4V_1 - 0.1V_2$$

$$0 = -0.1V_1 + 0.4V_2$$

از آن‌ها نتیجه می‌شود:

$$V_1 = 40\text{ V} \quad V_2 = 10\text{ V}$$

جریان‌های ورودی و خروجی هم به آسانی به‌دست می‌آیند:

$$I_1 = 11\text{ A} \quad I_2 = -2.5\text{ A}$$

به این ترتیب مشخصات کامل پایانه‌ها در این مدار دو درگاهی مقاومتی معلوم شد.

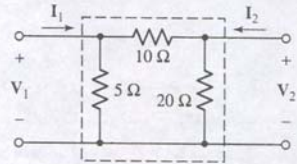
مزایای تحلیل دو درگاه در این مثال ساده به‌خوبی نمایان نیست، ولی اگر پارامترهای  $y$  رای شبکه دو درگاه پیچیده‌تری اعمال شود، رفتار دو درگاه برای شرایط متفاوت به راحتی شخص می‌گردد. برای این کار کافی است که رابطه  $V_1$  و  $I_1$  در ورودی و رابطه  $V_2$  و  $I_2$  را در خروجی مشخص کنیم.

در مثال فوق دیدیم که  $y_{12}$  و  $y_{21}$  هر دو  $0.1\text{ S}$  بودند. می‌توان نشان داد که در شبکه  $17\Omega$  به‌دانس‌های  $Z_A$ ،  $Z_B$  و  $Z_C$  را قرار دهیم باز هم این برابری برقرار است. برای این‌که تحت شرایط خاصی  $y_{12} = y_{21}$  شود تا حدی مشکل است ولی استفاده از نمادهای دترمینان کار را کمی ساده می‌کند. بگذارید ببینیم آیا روابط مربوط به معادلات (۱۰) تا (۱۳) را می‌توان برحسب دترمینان امپدانس و کهاد آن‌ها نشان داد.

$$\begin{aligned} y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} & (10) \\ y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} & (11) \\ y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} & (12) \\ y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} & (13) \end{aligned}$$

چون هر پارامتر ادمیتانس است که از اتصال کوتاه‌شدن مدار درگاه ورودی یا خروجی به‌دست می‌آید، پارامترهای  $y$  را پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه می‌خوانند. نام اختصاصی  $y_{11}$ ، ادمیتانس ورودی اتصال کوتاه،  $y_{22}$  ادمیتانس خروجی اتصال کوتاه و  $y_{12}$  و  $y_{21}$  را ادمیتانس‌های انتقالی اتصال کوتاه گویند.

#### مثال ۱۷-۴



شکل ۱۷-۹ شبکه دودرگاه مقاومتی.

چهار پارامتر ادمیتانس اتصال کوتاه را برای مدار دو درگاه مقاومتی شکل ۱۷-۹ پیدا کنید.

مقادیر پارامترها به سادگی با اعمال معادلات (۱۰) تا (۱۳) به دست می‌آیند که ما مستقیماً با تعریف معادلات (۵) و (۶) به دست آوردیم. برای تعیین  $y_{11}$ ، خروجی را اتصال کوتاه و نسبت  $I_1$  به  $V_1$  را به‌دست می‌آوریم. این کار با  $V_1 = 1\text{ V}$  و سپس  $I_1 = y_{11}$  هم به‌دست می‌آید. با بررسی شکل ۱۷-۶ (الف) واضح است که اعمال 1V به ورودی و اتصال کوتاه خروجی موجب تولید جریان  $(\frac{1}{5} + \frac{1}{10})$  یا  $0.3\text{ A}$  می‌گردد. به این ترتیب

$$y_{11} = 0.3\text{ S}$$

برای یافتن  $y_{12}$ ، این بار پایانه‌های ورودی را اتصال کوتاه می‌کنیم و به پایانه‌های خروجی 1V اعمال می‌نماییم. جریان ورودی در مدار اتصال کوتاه جاری می‌شود و برابر  $I_1 = -\frac{1}{10}\text{ A}$  می‌باشد. پس:

$$y_{12} = -0.1\text{ S}$$

با روشی مشابه:

$$y_{12} = -0.1\text{ S} \quad y_{22} = 0.15\text{ S}$$

پس معادلات توصیف مدار در درگاه برحسب پارامترهای ادمیتانس چنین است:

$$I_1 = 0.3V_1 - 0.1V_2 \quad (14)$$

$$I_2 = -0.1V_1 + 0.15V_2 \quad (15)$$

و

$$y = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.15 \end{bmatrix} \quad (\text{همه برحسب S})$$

البته لازم نیست این پارامترها را یک‌به‌یک با معادلات (۱۰) تا (۱۳) به‌دست آوریم. می‌توان آن‌ها را همزمان به‌دست آورد.

#### مثال ۱۷-۵

ولتاژهای گرهی  $V_1$  و  $V_2$  را در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۹ تخصیص داده و عباراتی برای  $I_1$  و  $I_2$  برحسب آن‌ها بنویسید.

داریم:

$$I_1 = \frac{V_1}{5} + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0.3V_1 - 0.1V_2$$

و

$$I_2 = \frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{20} = -0.1V_1 + 0.15V_2$$



برای نشان دادن تساوی این دو کهاد، ابتدا سطرها و ستون‌های یکی از آن‌ها مثلاً  $\Delta_{21}$  را عوض می‌کنیم. صحت این عمل در تمام کتب جبر دانشگاهی اثبات شده است. سپس هر ادمیتانس متقابل  $Z_{ij}$  را با  $Z_{ji}$  عوض می‌کنیم. پس قرار می‌دهیم  $Z_{32} = Z_{23}$ ،  $Z_{21} = Z_{12}$  و غیره.

برای سه عنصر غیرفعال مقاومت، خازن و القاگر و نیز القا متقابل، برابری  $Z_{ij}$  و  $Z_{ji}$  کاملاً واضح است. این مطلب برای هر آن‌چه که بتواند در شبکه دو درگاه قرار گیرد صحت ندارد. خصوصاً برای منبع وابسته و نیز ژیراتور که مدل مفیدی برای عناصر اثر هال است و برای قطعات هدایت‌گری که در آن‌ها فریت وجود دارد، این صحت درست نیست. ژیراتور در یک محدوده باریکی از فرکانس، برای سیگنالی که از خروجی به ورودی می‌رود نسبت به حالتی که از ورودی به خروجی برود،  $180^\circ$  اختلاف فاز بیشتر تولید می‌نماید و بنابراین  $y_{12} = -y_{21}$ . نوع متداول عنصر غیرفعال که به نابرابری  $Z_{ij}$  و  $Z_{ji}$  منجر می‌گردد، یک عنصر غیرخطی را می‌توان نام برد. هر وسیله‌ای که در آن  $Z_{ij} = Z_{ji}$  باشد، عنصر دوطرفه یا دوسویه خوانده می‌شود و مداري که تنها از این عناصر تشکیل شود مدار دوطرفه نام دارد. بنابراین نشان دادیم که از خصوصیات مهم مدار دو درگاه دو طرفه این است که:

$$y_{12} = y_{21}$$

برای قدرشناسی از این خاصیت آن را با عنوان **قضیه تقابل** زیر بیان می‌کنیم:

در هر شبکه دوطرفه خطی غیرفعال، اگر یک منبع ولتاژ  $V_x$  در شاخه  $x$ ، پاسخ جریان  $I_y$  را در شاخه  $y$  ایجاد کند آنگاه حذف منبع ولتاژ از شاخه  $x$  و نصب آن در شاخه  $y$  جریان  $I_y$  را در شاخه  $x$  به‌وجودمی‌آورد.

اگر با دترمینان ادمیتانس مدار کار می‌کنیم و ثابت می‌نماییم که  $\Delta_{21}$  و  $\Delta_{12}$  از دترمینان ادمیتانس  $\Delta_y$  با هم برابرند، آنگاه **دوگان قضیه تقابل** به صورت زیر بیان می‌گردد:

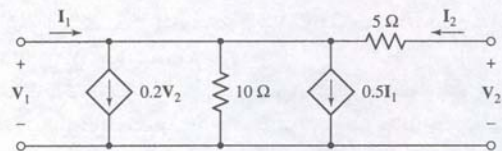
در هر شبکه دوطرفه خطی غیرفعال، اگر یک منبع جریان  $I_x$  بین دو گره  $x$  و  $x'$ ، پاسخ ولتاژ  $V_y$  را بین دو گره  $y$  و  $y'$  تولید کند، آنگاه حذف منبع جریان از گره‌های  $x$  و  $x'$  و نصب آن بین گره‌های  $y$  و  $y'$  پاسخ ولتاژ  $V_x$  را بین گره‌های  $x$  و  $x'$  به‌وجودمی‌آورد.

در بخش بعد بر مدارهای دودرگاه حاوی منابع وابسته تأکید خواهد شد.

۴-۱۷ در مدار شکل ۱۷-۱۰،  $I_1$  و  $I_2$  منابع جریان ایده‌آل هستند. ولتاژهای گره  $V_1$  را در ورودی،  $V_2$  را در خروجی و  $V_x$  را از گره وسط به گره مرجع نسبت دهید. سه معادله گرهی بنویسید،  $V_x$  را حذف نمایید تا دو معادله باقی بماند و سپس این معادلات را به شکل معادلات (۵) و (۶) مرتب کنید تا هر چهار پارامتر  $y$  از روی معادلات قابل قرائت باشند.

۵-۱۷ برای مدار دو درگاهی شکل ۱۷-۱۲،  $y$  را بیابید.

جواب ۴-۱۷: (همگی به S)  $\begin{bmatrix} 0.1192 & -0.1115 \\ -0.1115 & 0.1269 \end{bmatrix}$ ، جواب ۵-۱۷: (همگی به S)  $\begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$



شکل ۱۷-۱۲

چون با خود مدار دو درگاه و نه با شبکه‌های متصل به آن‌ها کار داریم،  $V_1$  و  $V_2$  را دو منبع ولتاژ ایده‌آل در نظر می‌گیریم. معادله (۱۰) را با  $V_2 = 0$  (اتصال کوتاه کردن خروجی) و یافتن ادمیتانس ورودی اعمال می‌کنیم. در این صورت شبکه به یک شبکه تک‌درگاهی بدل شده است و ادمیتانس ورودی آن هم در بخش ۱۷-۱ پیدا شد. حلقه ۱ را انتخاب می‌کنیم به نحوی که پایانه‌های ورودی را دربرگیرد و  $I_1$  را جریان آن حلقه می‌نامیم.  $I_2$  را هم جریان حلقه ۲ در نظر می‌گیریم و بقیه جریان‌های حلقه‌ای را هم به هر نحو مناسبی انتخاب می‌کنیم. پس

$$Z_{in} |_{V_2=0} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}}$$

و بنابراین:

$$y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z}$$

به‌طور مشابه

$$y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z}$$

برای یافتن  $y_{12}$ ، بگذارید  $V_1 = 0$  باشد و سپس  $I_1$  را به صورت تابعی از  $V_2$  بیابید. خواهیم دید که  $I_1$  با نسبت زیر داده می‌شود:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ -V_2 & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ 0 & Z_{32} & \cdots & Z_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{32} & \cdots & Z_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{vmatrix}}$$

پس:

$$I_1 = - \frac{(-V_2)\Delta_{21}}{\Delta_Z}$$

و

$$y_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}$$

به طریقی مشابه می‌توان نشان داد که:

$$y_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z}$$

بنابراین برابری  $y_{12}$  و  $y_{21}$  منوط به برابری دو کهاد  $\Delta_Z$  یعنی  $\Delta_{12}$  و  $\Delta_{21}$  است. این دو کهاد

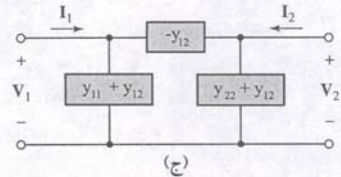
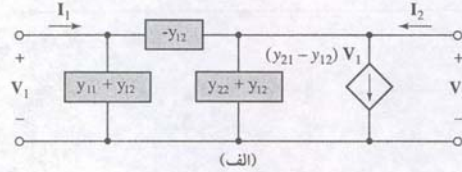
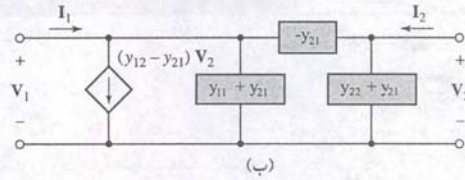
برابرند با:

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & \cdots & Z_{3N} \\ Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & \cdots & Z_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N2} & Z_{N3} & Z_{N4} & \cdots & Z_{NN} \end{vmatrix}$$

و

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} & Z_{24} & \cdots & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{33} & Z_{34} & \cdots & Z_{3N} \\ Z_{41} & Z_{43} & Z_{44} & \cdots & Z_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N1} & Z_{N3} & Z_{N4} & \cdots & Z_{NN} \end{vmatrix}$$





موارد متعددی از کاربرد این معادله‌ها وجود دارد. اولاً نشان دادیم که برای هر شبکه دو درگاه یا هر سطح پیچیدگی، شبکه معادلی وجود دارد. مهم نیست که در داخل شبکه چه مقدار گره یا حلقه داریم، در هر صورت مدار معادل پیچیده‌تر از شکل ۱۷-۱۳ نخواهد شد. اگر تنها به رفتار پایانه‌های شبکه توجه داریم، یکی از آن‌ها ساده‌تر از مدار اصلی است.

شبکه سه پایانه شکل ۱۷-۱۴ (الف) را **شبکه مثلثی** (یا  $\Delta$ ) و شبکه شکل ۱۷-۱۴ (ب) را **شبکه ستاره** (یا  $Y$ ) می‌خوانند. چنانچه ارتباطی بین امپدانس‌ها برقرار باشد می‌توان یکی را جایگزین دیگری کرد. این ارتباطات را با استفاده از پارامترهای  $Y$  به‌دست می‌آوریم. می‌بینیم که:

$$y_{11} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_1 + Z_2 Z_3 / (Z_2 Z_3)} +$$

$$y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{Z_B} = \frac{-Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 Z_1} +$$

$$y_{22} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_2 + Z_1 Z_3 / (Z_1 Z_3)} +$$

این معادلات برای  $Z_A$ ،  $Z_B$  و  $Z_C$  بر حسب  $Z_1$ ،  $Z_2$  و  $Z_3$  قابل حل‌اند:

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \quad (۲۰)$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \quad (۲۱)$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \quad (۲۲)$$

و یا روابط معکوس عبارتند از:

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (۲۳)$$

$$Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (۲۴)$$

$$Z_3 = \frac{Z_C Z_A}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (۲۵)$$

این معادلات تبدیل بین شبکه‌های  $Y$  و  $\Delta$  (یا  $T - \pi$ ) را به راحتی می‌سازند. در تبدیل از  $Y$  به  $\Delta$  یعنی معادلات (۲۰) تا (۲۲)، ابتدا صورت مشترک آن‌ها، که حاصل ضرب دو به دو امپدانس‌ها در  $Y$  است را به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه هر امپدانس از تقسیم صورت بر عنصری از ستاره که با این امپدانس مثلث‌گه مشترک ندارند به‌دست می‌آید. بر عکس برای تبدیل  $\Delta$  به  $Y$  ابتدا سه امپدانس حول مثلث را باهم جمع می‌کنیم. سپس حاصل ضرب دو امپدانس که با عنصر موردنظر شبکه ستاره گره مشترک ندارند را بر این جمع تقسیم می‌نماییم. این تبدیلات غالباً در ساده کردن شبکه‌های غیر فعال به خصوص مقاومتی بسیار کاربرد دارد. به این ترتیب تحلیل گره‌ی یا مش لزومی نخواهد داشت.

### ۱۷-۳ چند شبکه معادل

هنگام تحلیل مدارهای الکترونیک، معمولاً باید وسیله فعال (و احتمالاً بعضی مدارهای غیر فعال همراه آن) را با یک مدار دو درگاه حاوی سه یا چهار امپدانس تعویض نمود. اعتبار مدار معادل ممکن است به سیگنال‌های کوچک، فرکانس خاص یا یک گستره خاص فرکانس محدود باشد. مدار معادل می‌تواند تقریب خطی یک مدار غیرخطی باشد. با این وجود اگر با مداری مواجه شویم که حاوی تعدادی مقاومت، خازن، القاگر و مثلاً یک ترانزیستور 2N3823 باشد دیگر نمی‌توانیم مدار را با هر یک از تکنیک‌هایی که تا به حال دیده‌ایم، تحلیل کنیم. ابتدا باید ترانزیستور را درست مثل آن‌چه برای op amp در فصل ۶ دیدیم با یک مدل خطی جایگزین نماییم. پارامترهای  $Y$  یک چنین مدلی را برای مدار دو درگاه که در فرکانس‌های بالا به‌کار می‌رود، ارائه می‌نماید. مدل دیگری برای ترانزیستور در بخش ۱۷-۵ آمده است. دو معادله‌ای که پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه را معین می‌کنند، یعنی:

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad (۱۶)$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \quad (۱۷)$$

که به یک جفت معادله گره‌ی برای مداری که حاوی دو گره غیر مرجعند شبیه است. اگر  $y_{12}$  و  $y_{21}$  به‌طور کلی نابرابر باشند تعیین مدار معادلی که منجر به معادلات (۱۶) و (۱۷) شوند کاری بس مشکل است. بهتر است به حقه کوچکی متوسل شویم و کاری کنیم که دو معادله دارای ضرایب متقابل مساوی باشند. بگذارید تا جمله  $y_{12}V_1$  (یعنی جمله‌ای که دوست داریم آن را در سمت راست ببینیم) را به معادله (۱۷) اضافه و از آن کم کنیم:

$$I_2 = y_{12}V_1 + y_{22}V_2 + (y_{21} - y_{12})V_1 \quad (۱۸)$$

$$I_2 - (y_{21} - y_{12})V_1 = y_{12}V_1 + y_{22}V_2 \quad (۱۹)$$

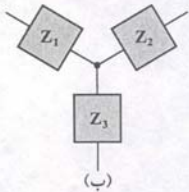
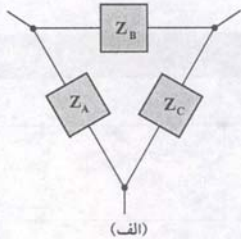
اکنون سمت راست معادلات (۱۶) و (۱۹) تقارن مناسب مدارهای دوسویه را دارد. سمت چپ معادله (۱۹) را ممکن است به صورت جمع جبری دو منبع جریان تفسیر کرد که یکی منبع مستقل  $I_2$  است که به گره ۲ وارد می‌شود و دیگری منبع وابسته  $(y_{21} - y_{12})V_1$  است که گره ۲ را ترک می‌کند.

حال بایاید شبکه معادل را از معادلات (۱۶) و (۱۹) بسازیم. ابتدا گره مرجعی تعریف می‌کنیم و سپس دو گره  $V_1$  و  $V_2$  را برمی‌گزینیم. از معادله (۱۶)، جریان  $I_1$  را به گره ۱ جاری می‌کنیم. بین گره ۱ و ۲ ادمیتانس متقابل  $(-y_{12})$  وجود دارد پس ادمیتانس  $(y_{11} + y_{12})$  بین گره ۱ و مرجع است با  $V_2 = 0$  نسبت  $I_1$  به  $V_1$  برابر  $y_{11}$  است که باید هم چنین باشد. حال معادله (۱۹) را در نظر بگیرید. کاری می‌کنیم که جریان  $I_2$  به گره دوم جاری شود و نیز جریان  $(y_{21} - y_{12})V_1$  از گره خارج گردد. ملاحظه می‌شود که یک ادمیتانس  $(-y_{12})$  بین گره‌ها وجود دارد. پس با گذاشتن  $(y_{22} + y_{12})$  بین گره ۲ و مرجع مدار را تکمیل می‌کنیم. مدار کامل در شکل ۱۷-۱۳ (الف) مشاهده می‌شود.

فرم دیگری از شبکه معادل با جمع و تفریق  $y_{21}V_2$  از معادله (۱۶) به‌دست می‌آید. این مدار معادل در شکل ۱۷-۱۳ (ب) مشاهده می‌شود.

اگر مدار دو درگاه دوسویه باشد، آن‌گاه  $y_{12} = y_{21}$  بوده و هر یک از معادل‌ها به مدار ساده غیر فعال  $\pi$  تبدیل می‌شوند. منبع وابسته حذف می‌شود، این مدار معادل جدید در شکل ۱۷-۱۳ (ج) مشاهده می‌شود.

شکل ۱۷-۱۳ (الف) و (ب) دو درگاهی که با یک دودرگاهی خطی کلی معادلند. منبع وابسته در بخش (الف) به  $V_1$  وابسته است و در بخش (ب) به  $V_2$  بستگی دارد. (ج) مدار معادل برای شبکه دوسویه.

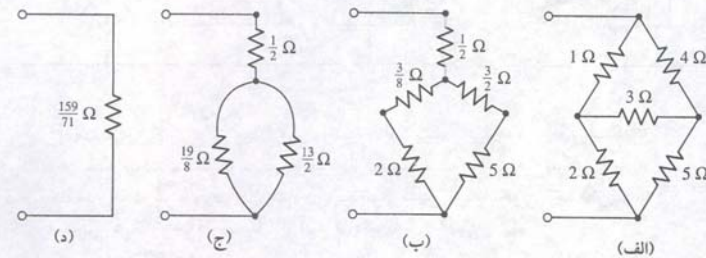


شکل ۱۷-۱۴ شبکه سه پایانه  $\Delta$  (الف) و سه پایانه  $Y$  (ب) معادلند به شرطی که شش امپدانس شرایط تبدیل  $Y-\Delta$  یا  $(T - \pi)$  معادلات (۲۰) الی (۲۵) را برآورده سازند.

خواننده ممکن است این روابط را از فصل ۵ به‌خاطر بیابارد که در آنجا بدون توضیح ارائه گردید.



مقاومت ورودی مدار شکل ۱۷-۱۵ (الف) را بیابید.



شکل ۱۷-۱۵ (الف) شبکه مقاومتی که مقاومت ورودی اش خواسته شده. این مثال از فصل ۵ آورده شده است. (ب)  $\Delta$  بالایی با یک معادل  $Y$  جایگزین شده است. (ج و د) ترکیبات سری و موازی مقاومت ورودی معادل  $\frac{159}{71}\Omega$  را به دست می دهد.

ابتدا در  $\Delta$  بالایی شکل ۱۷-۱۵ (الف) تبدیل  $\Delta$  به  $Y$  را انجام می دهیم. مجموع سه مقاومت تشکیل دهنده  $\Delta$  برابر است با  $8\Omega = 1 + 4 + 3$ . حاصل ضرب دو مقاومت متصل به گره بالایی  $4\Omega^2 = 1 \times 4$  است. بنابراین مقاومت فوقانی  $Y$  برابر  $\frac{4}{8}\Omega$  یا  $\frac{1}{2}\Omega$  است. با تکرار این روند برای دو مقاومت دیگر، شبکه شکل ۱۷-۱۵ (ب) حاصل می شود.

آن گاه در گام بعدی ترکیبات سری - موازی را انجام می دهیم تا به ترتیب شکل های ۱۷-۱۵ (ج) و (د) به دست آیند. بنابراین مقاومت ورودی مدار در شکل ۱۷-۱۵ (الف) برابر  $\frac{159}{71}$  یا  $2.24\Omega$  حاصل می شود.

حال بگذارید مسئله را همچون شکل ۱۷-۱۶ کمی مشکل تر کنیم. توجه دارید که مدار شامل یک منبع وابسته است و تبدیل  $Y$ - $\Delta$  امکان پذیر نیست.

مدار شکل ۱۷-۱۶ را می توان یک معادل خطی تقریبی از یک تقویت کننده ترانزیستوری دانست که در آن پایانه آمپتر گره پایینی، پایانه بیس گره ورودی بالایی و پایانه کلکتور نیز گره خروجی بالایی می باشد. یک مقاومت  $2000\Omega$  بین کلکتور و بیس به منظور کاربردی خاص بسته شده و این خود بر پیچیدگی تحلیل می افزاید. پارامترهای  $Y$  را برای این مدار به دست آورید.

■ هدف مسئله را شناسایی کنید.

ملاحظه می شود که ما با یک شبکه دو درگاه طرفیم و پارامترهای  $Y$  خواسته شده اند.

■ اطلاعات معلوم را جمع آوری نمایید.

شکل ۱۷-۱۶ یک شبکه دو درگاه است که در روی آن  $V_1$ ،  $I_1$ ،  $V_2$  و  $I_2$  مشخص شده است و مقدار هر قطعه نیز داده شده است.

■ ارائه طرح.

در مورد این مدار چندین روش وجود دارد. اگر آن را به صورت مدار معادل شکل ۱۷-۱۳ (الف) تصور کنیم، بلافاصله ممکن است به فکر تهیه پارامترهای  $Y$  بیفتیم. اگر فوراً معادل فوق به ذهن نیامد آن گاه پارامترهای  $Y$  برای مدار دوگانه با اعمال روابط (۱۰) تا (۱۳) به دست می آیند. حتی ممکن است روش دو درگاه را فراموش کرده و مدار را مستقیماً تحلیل کنیم.

■ معادلات مناسب را بنویسید.

با کمی بررسی خواهیم دید که  $-Y_{21}$  متناظر با ادمیتانس  $2k\Omega$  است،  $Y_{11} + Y_{12}$  متناظر با ادمیتانس مقاومت  $500\Omega$  می باشد، بهره منبع جریان وابسته، متناظر با  $Y_{12} - Y_{21}$  و بالاخره

$Y_{22} + Y_{12}$  متناظر با ادمیتانس مقاومت  $10k\Omega$  است. به این ترتیب می توان نوشت:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{1}{500} - Y_{12} \\ Y_{22} &= \frac{1}{10,000} - Y_{12} \\ Y_{21} &= 0.0395 + Y_{12} \end{aligned}$$

■ آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

با معادلاتی که نوشته شده اند می بینیم که پس از محاسبه  $Y_{12}$ ، دیگر پارامترها هم ممکن است به دست آیند.

■ اقدام به حل.

با اعمال مقادیر به یک ماشین حساب، داریم:

$$\begin{aligned} Y_{12} &= -\frac{1}{2000} = -0.5 \text{ mS} \\ Y_{11} &= \frac{1}{500} - (-\frac{1}{2000}) = 2.5 \text{ mS} \\ Y_{22} &= \frac{1}{10,000} - (-\frac{1}{2000}) = 0.6 \text{ mS} \\ Y_{21} &= 0.0395 + (-\frac{1}{2000}) = 39 \text{ mS} \end{aligned}$$

و

آن گاه معادلات زیر به دست می آیند:

$$I_1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \quad (26)$$

$$I_2 = 39V_1 + 0.6V_2 \quad (27)$$

که در آن ها واحدهای  $V$ ،  $\text{mA}$  و  $\text{mS}$  یا  $k\Omega$  به کار رفته است.

■ صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

با نوشتن مستقیم دو معادله گرهی از مدار داریم:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{V_1}{0.5} \quad \text{یا} \quad I_1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \\ I_2 &= 39V_1 + 0.6V_2 \quad \text{یا} \quad -39.5V_1 + I_2 = \frac{V_2 - V_1}{2} + \frac{V_2}{10} \end{aligned}$$

و

که با معادلات (۲۶) و (۲۷) حاصل از پارامترهای  $Y$  یکی است.

اکنون اجازه بدهید تا معادلات (۲۶) و (۲۷) را تحت شرایط کاری مختلف شکل ۱۷-۱۶ با تحلیل رفتار این مدار دو درگاه به کارگیریم. ابتدا یک منبع جریان  $1 \angle 0^\circ \text{ mA}$  را در ورودی نراهم کرده و یک مقاومت با  $0.5k\Omega$  (2mS) را به خروجی وصل می کنیم. بنابراین شبکه های متصل به هر دو درگاه، تک درگاهی اند و اطلاعات خاصی از ارتباط  $V_1$  به  $I_2$  و  $V_2$  را فراهم می نمایند.

$$I_2 = -2V_2 \quad \text{(به ازای هر } V_1 \text{)}$$

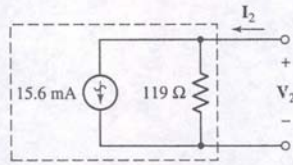
کنون چهار معادله و چهار مجهول  $V_1$ ،  $V_2$ ،  $I_1$  و  $I_2$  داریم. با جایگزینی روابط دو درگاه در معادلات (۲۶) و (۲۷) دو معادله ای که  $V_1$  را به  $V_2$  مربوط می سازند به دست می آیند:

$$1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \quad 0 = 39V_1 + 2.6V_2$$

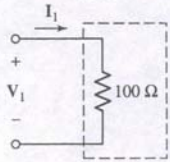
با حل آن ها خواهیم داشت:

$$V_1 = 0.1V \quad V_2 = -1.5V \quad I_1 = 1 \text{ mA} \quad I_2 = 3 \text{ mA}$$



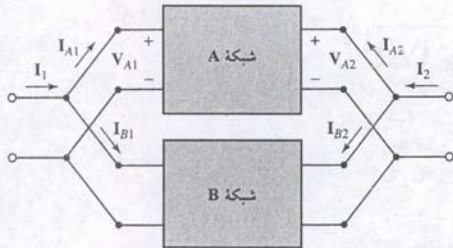


(الف)



(ب)

شکل ۱۷-۱۷ (الف) معادل نورتن شبکه شکل ۱۷-۱۶ در سمت چپ پایانه‌های خروجی،  $I_1 = 1/0^\circ \text{ mA}$  (ب) معادل تونن آن بخش از شبکه که در سمت راست پایانه‌های ورودی قرار دارد به شرطی که  $I_2 = -2V_2$  باشد.



شکل ۱۷-۱۸ اتصال موازی دو شبکه دو درگاه. اگر هر دو ورودی و خروجی گره مرجعی داشته باشند، آن‌گاه ماتریس ادمیتانس برابر است با:

$$Y = Y_A + Y_B$$

خروجی چنین تعریف می‌شود:

$$Z_{out} = V_2 |_{I_2=1} \quad R_L \text{ حذف}$$

بنابراین مقاومت بار را حذف می‌نماییم، در پایانه‌های خروجی  $1/0^\circ \text{ mA}$  را اعمال می‌کنیم (چون با  $V$ ،  $\text{mA}$  و  $\text{k}\Omega$  کار می‌کنیم) و  $V_2$  را به دست می‌آوریم. با قراردادن این شرایط در معادلات (۲۶) و (۲۷) داریم:

$$0 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \quad 1 = 39V_1 + 0.6V_2$$

و از حل آن:

$$V_2 = 0.1190 \text{ V}$$

و به این ترتیب:

$$Z_{out} = 0.1190 \text{ k}\Omega$$

راه دیگر این است که ولتاژ مدار باز خروجی و جریان اتصال کوتاه خروجی را بیابیم. یعنی اِمپدانس تونن همان خروجی است:

$$Z_{out} = Z_{th} = -\frac{V_{2oc}}{I_{2sc}}$$

برای اجرای این روش ابتدا منبع مستقل را زنده می‌کنیم به نحوی که  $I_1 = 1 \text{ mA}$  باشد و سپس بار را قطع می‌نماییم تا  $I_2 = 0$  گردد. داریم:

$$1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \quad 0 = 39V_1 + 0.6V_2$$

و بنابراین:

$$V_{2oc} = -1.857 \text{ V}$$

سپس در خروجی با اتصال کوتاه  $V_2 = 0$  را ایجاد می‌کنیم، تا  $I_1 = 1 \text{ mA}$  گردد. آن‌گاه داریم:

$$I_1 = 1 = 2.5V_1 - 0 \quad I_2 = 39V_1 + 0$$

ولذا

$$I_{2sc} = 15.6 \text{ mA}$$

با توجه به جهت  $V_2$  و  $I_2$  اِمپدانس خروجی تونن را به دست می‌آوریم:

$$Z_{out} = -\frac{V_{2oc}}{I_{2sc}} = -\frac{-1.857}{15.6} = 0.1190 \text{ k}\Omega$$

که همان نتیجه قبل است.

اکنون اطلاعات لازم، برای رسم معادل تونن یا نورتن در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۱۶ را هنگامی که یک منبع جریان تحریک  $1/0^\circ \text{ mA}$  و بار  $500\Omega$  به آن وصل است، در اختیار داریم. بنابراین معادل نورتن تحویلی به بار باید حاوی منبع جریانی برابر با جریان اتصال کوتاه  $I_{2sc}$  و موازی با اِمپدانس خروجی باشد. این مدار معادل در شکل ۱۷-۱۷ (الف) مشاهده می‌شود. همچنین معادل توننی که منبع ورودی  $1/0^\circ \text{ mA}$  می‌بیند همان اِمپدانس ورودی است که در شکل ۱۷-۱۷ (ب) ملاحظه می‌گردد.

قبل از اتمام بحث پارامترهای  $Y$ ، باید سودمندی آن‌ها در توصیف اتصال موازی مدارهای دو درگاه، طبق شکل ۱۷-۱۸ را توضیح دهیم. هنگامی که برای اولین بار درگاه را در بخش ۱۷-۱ معرفی کردیم، گفتیم که جریان وارده به یک پایانه درگاه باید با جریان خارج شده از پایانه دیگر آن برابر باشد و نباید بین درگاه‌ها اتصال بیرونی وجود داشته باشد. آشکار است که اتصال

این چهار مقدار به مدار دو درگاهی متعلق‌اند که ورودی‌اش از قبل تعیین شده ( $I_1 = 1 \text{ mA}$ ) و خروجی‌اش نیز به بار خاصی وصل می‌باشد ( $R_L = 0.5 \text{ k}\Omega$ ). رفتار یک تقویت‌کننده معمولاً با مقادیر خاصی توصیف می‌شود. بگذارید چهار تا از این مقادیر را برای این شبکه دو درگاه و شبکه‌های متصل به آن به دست آوریم. ما مقادیر بهره ولتاژ، بهره جریان، بهره توان و اِمپدانس ورودی را حساب خواهیم کرد. بهره ولتاژ  $G_V$  برابر است با:

$$G_V = \frac{V_2}{V_1}$$

با جایگزینی مقادیر عددی خواهیم داشت:

$$G_V = -15$$

بهره جریان  $G_I$  به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$G_I = \frac{I_2}{I_1}$$

پس  $G_I = 3$ .

اکنون بایاید بهره  $G_P$  توان را با فرض منبع سینوسی تعریف و محاسبه کنیم. داریم:

$$G_P = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{\text{Re}[-\frac{1}{2}V_2I_2^*]}{\text{Re}[\frac{1}{2}V_1I_1^*]} = 45$$

این شبکه را می‌توان تقویت‌کننده جریان، ولتاژ یا توان نامید که در همه آن‌ها بهره بزرگ‌تر از واحد است. اگر مقاومت  $2 \text{ k}\Omega$  حذف شود، بهره توان به 354 افزایش می‌یابد. برای این که انتقال توان داده شده به درگاه ورودی و دریافتی از درگاه خروجی را به حداکثر برسانیم باید اِمپدانس ورودی و خروجی تقویت‌کننده را بدانیم. اِمپدانس ورودی  $Z_{in}$  را به صورت نسبت  $V_1$  به  $I_1$  تعریف می‌کنیم، یعنی:

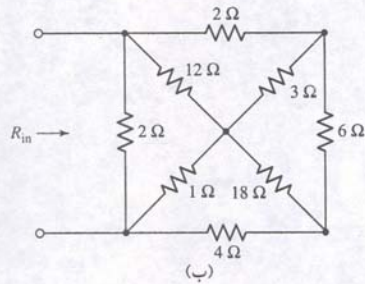
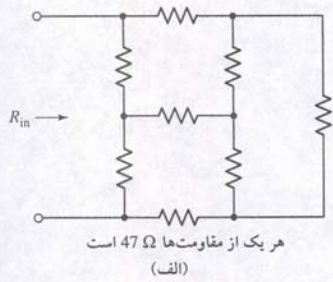
$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = 0.1 \text{ k}\Omega$$

این اِمپدانس است که در برابر منبع قرار داشته و بار اعمال شده متصل به خروجی هم  $500\Omega$  است (اگر خروجی اتصال کوتاه گردد، اِمپدانس ورودی لزوماً باید در  $\frac{1}{Y_{11}}$  یا  $400\Omega$  باشد). باید توجه داشت که نمی‌توان اِمپدانس ورودی را با کشتن هر منبع و مقاومت داخلی‌اش تعیین کرد و سپس مقاومت‌ها و یا هدایت‌ها را با هم ترکیب نمود. در مدار مورد بحث چنین کاری منتهی به مقدار  $416\Omega$  می‌گردد. البته خطا را این‌جا ناشی می‌شود که با آن مثل منبع مستقل، رفتار شده است. اگر تصور کنیم که اِمپدانس ورودی از لحاظ عددی به علت اعمال یک جریان ورودی  $1 \text{ A}$  با ولتاژ ورودی برابر است، با اعمال این جریان یک ولتاژ ورودی  $V_1$  حاصل می‌شود و مقدار منبع ولتاژ وابسته ( $0.0395 V_1$ ) نمی‌تواند صفر باشد. به یاد می‌آوریم که هنگام به دست آوردن اِمپدانس معادل تونن مداری که حاوی یک منبع وابسته همراه یک یا چند منبع مستقل است، باید منابع مستقل را با اتصال باز یا اتصال کوتاه عوض می‌کردیم ولی منابع وابسته را نمی‌کشتیم. البته اگر جریان یا ولتاژ وابسته صفر باشد آن‌گاه خود منبع غیر فعال است. اگر با چنین وضعیتی روبه‌رو شدیم، می‌توانیم آن را هم صفر کنیم.

علاوه بر  $G_V$ ،  $G_I$ ،  $G_P$  و  $Z_{in}$ ، یک پارامتر رفتار دیگری وجود دارد که کاملاً مفید است. این پارامتر اِمپدانس خروجی  $Z_{out}$  است که برای یک آرایش مداری متفاوت تعیین خواهد شد.

اِمپدانس خروجی نام دیگری برای اِمپدانس تونن مدار معادل تونن از دید بار متصل به شبکه است. در این مدار که فرض کرده‌ایم با منبع جریان  $1/0^\circ \text{ A}$  تحریک شده است، به جای این منبع مستقل یک اتصال باز هم قرار می‌دهیم، منبع وابسته را هم می‌کنیم و اِمپدانس ورودی دیده شده به سمت چپ خروجی را پس از حذف بار به دست می‌آوریم. بنابراین اِمپدانس





شکل ۱۷-۲۰

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (۳۰)$$

یا

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = zI = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (۳۱)$$

البته در استفاده از این معادلات لزومی ندارد که  $I_1$  و  $I_2$  منابع جریان و یا  $V_1$  و  $V_2$  منابع ولتاژ باشند. به‌طورکلی می‌توان هر شبکه‌ای را به ورودی و خروجی این شبکه دو درگاه وصل کرد. پس از نوشتن معادلات معمولاً چنین تصور می‌شود که  $V_1$  و  $V_2$  کمیت مفروض یا متغیرهای مستقل و  $I_1$  و  $I_2$  مجهولات یا متغیرهای وابسته‌اند.

این چهار کمیت را به شش طریق می‌توان به هم ربط داد که هر کدام یک دسته پارامتر را مشخص می‌کنند. ما چهار روش از این شش سیستم پارامتر را مطالعه می‌کنیم. آموزنده‌ترین توصیف پارامترهای  $z$  که به وسیله معادلات (۲۹) و (۳۰) تعریف شده‌اند، با صفر کردن هر یک از جریان‌ها به‌دست می‌آید. پس:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} & (۳۲) \\ z_{12} &= \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} & (۳۳) \\ z_{21} &= \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} & (۳۴) \\ z_{22} &= \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} & (۳۵) \end{aligned}$$

چون صفرشدن جریان از قطع پایانه حاصل می‌گردد، پارامترهای  $z$  را به نام پارامترهای امپدانس مدار باز می‌شناسند. با حل معادلات (۲۹) و (۳۰) برای  $I_1$  و  $I_2$  می‌توان این پارامترها را با پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه مرتبط کرد:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & z_{12} \\ V_2 & z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}}$$

یا

$$I_1 = \left( \frac{z_{22}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \right) V_1 - \left( \frac{z_{12}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \right) V_2$$

با استفاده از نماد دترمینان و توجه به این‌که زیرنویس  $z$  کوچک باشد، فرض می‌کنیم  $\Delta_z \neq 0$  و روابط زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} = \frac{z_{22}}{\Delta_z} \quad y_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} = -\frac{z_{12}}{\Delta_z}$$

و از حل برای  $I_2$  داریم:

$$y_{21} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_z} = \frac{z_{21}}{\Delta_z} \quad y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_z} = \frac{z_{11}}{\Delta_z}$$

به روشی مشابه، پارامترهای  $z$  را می‌توان برحسب پارامترهای ادمیتانس  $y$  نوشت. تبدیل‌هایی از این نوع بین سیستم پارامترهای مختلف امکان‌پذیر است و فرمول‌های مفیدی هم در این راستا حاصل می‌گردد. تبدیلات بین پارامترهای  $y$  و  $z$  (و  $h$  و  $t$  که در بخش‌های بعد آمده) در جدول ۱۷-۱ به عنوان مرجع ارائه شده است. اگر شبکه دو درگاه، دوسویه هم باشد، قضیه تقابل معتبر است و به آسانی می‌توان نشان داد که  $z_{12} = z_{21}$ .

دوباره مدارهای معادل را از معادلات (۲۹) و (۳۰) می‌توان به‌دست آورد. ایجاد آن‌ها با جمع و تفریق  $z_{12}I_1$  در معادله (۳۰) یا  $z_{21}I_2$  در معادله (۲۹) امکان‌پذیر است. هر یک از این مدارهای معادل دارای یک منبع ولتاژ وابسته است.

موازی شکل ۱۷-۱۸ این قانون را نقض می‌نماید. با این وجود اگر در هر یک از مدارهای دو درگاه گره مرجع بین درگاه ورودی و خروجی مشترک باشد و اگر دو درگاهی‌ها موازی باشند به نحوی که گره مشترکی هم داشته باشند، پس از اتصال هم درگاه باقی می‌مانند. پس در شبکه داریم:

$$I_A = y_A V_A$$

که

$$I_A = \begin{bmatrix} I_{A1} \\ I_{A2} \end{bmatrix} \quad V_A = \begin{bmatrix} V_{A1} \\ V_{A2} \end{bmatrix}$$

و برای شبکه B داریم:

$$I_B = y_B V_B$$

اما

$$V_A = V_B = V \quad I = I_A + I_B$$

پس

$$I = (y_A + y_B) V$$

می‌بینیم که هر پارامتر  $y$  از شبکه موازی به صورت جمع پارامترهای تک‌تک شبکه‌ها خواهد بود:

$$y = y_A + y_B \quad (۲۸)$$

واضح است که نتیجه فوق قابل تعمیم به هر تعداد شبکه دو درگاه موازی است.

## تمرین

۱۷-۶ برای مدار دودرگاهی شکل ۱۷-۱۹،  $Y$  و  $Z_{out}$  را به‌دست‌آورید.

۱۷-۷ با استفاده از تبدیل  $\Delta$ -Y و  $\Delta$ -Y را برای شبکه (الف) شکل ۱۷-۲۰ (الف) و (ب) شکل ۱۷-۲۰ به‌دست‌آورید.

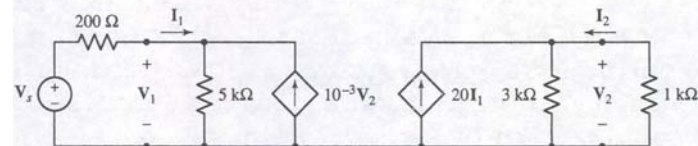
$$\text{جواب ۱۷-۶: } (S) \begin{bmatrix} 2 \times 10^{-4} & -10^{-3} \\ -4 \times 10^{-3} & 20.3 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, 17.7 \Omega, 53.71 \Omega, 1.311 \Omega$$

## ۱۷-۴ پارامترهای امپدانس

مفهوم پارامترهای دو درگاه برحسب پارامترهای ادمیتانس اتصال کوتاه معرفی شد. مجموعه پارامترهای دیگری هم وجود دارد و هر یک از این مجموعه‌ها مربوط به کلاس خاصی از شبکه‌ها است و تحلیل آن‌ها را ساده‌تر می‌کند. ما در این جا سه دسته پارامتر دیگر با عناوین پارامترهای امپدانس مدار باز، که موضوع بحث این بخش است و پارامترهای هیبرید و انتقالی را در بخش‌های بعدی ملاحظه خواهیم کرد.

دوباره یک مدار کلی دو درگاه فاقد منابع مستقل را در نظر می‌گیریم. ولتاژها و جریان‌ها مثل قبل تخصیص یافته‌اند (شکل ۱۷-۱۸). اکنون بیا باید فرض کنیم که ولتاژ  $V_1$  و  $V_2$  به عنوان پاسخ به وسیله دو منبع جریان  $I_1$  و  $I_2$  تولید شوند. بنابراین برای  $V_1$  داریم:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (۲۹)$$



شکل ۱۷-۱۹



جدول ۱۷-۱ تبدیل بین پارامترهای  $y, z, h$  و  $t$ .

|   | y                          | z                          | h                          | t                          |
|---|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| y | $y_{11}$                   | $y_{12}$                   | $\frac{z_{22}}{\Delta_z}$  | $\frac{-z_{12}}{\Delta_z}$ |
|   | $y_{21}$                   | $y_{22}$                   | $\frac{-z_{21}}{\Delta_z}$ | $\frac{z_{11}}{\Delta_z}$  |
| z | $\frac{y_{22}}{\Delta_y}$  | $\frac{-y_{12}}{\Delta_y}$ | $\frac{\Delta_h}{h_{22}}$  | $\frac{h_{12}}{h_{22}}$    |
|   | $\frac{-y_{21}}{\Delta_y}$ | $\frac{y_{11}}{\Delta_y}$  | $\frac{-h_{21}}{h_{22}}$   | $\frac{1}{h_{22}}$         |
| h | $\frac{1}{y_{11}}$         | $\frac{-y_{12}}{y_{11}}$   | $\frac{\Delta_z}{z_{22}}$  | $\frac{z_{12}}{z_{22}}$    |
|   | $\frac{y_{21}}{y_{11}}$    | $\frac{\Delta_y}{y_{11}}$  | $\frac{-z_{21}}{z_{22}}$   | $\frac{1}{z_{22}}$         |
| t | $\frac{-y_{22}}{y_{21}}$   | $\frac{-1}{y_{21}}$        | $\frac{z_{11}}{z_{21}}$    | $\frac{\Delta_z}{z_{21}}$  |
|   | $\frac{-\Delta_y}{y_{21}}$ | $\frac{-y_{11}}{y_{21}}$   | $\frac{1}{z_{21}}$         | $\frac{z_{22}}{z_{21}}$    |

برای هر مجموعه پارامتر  $\Delta_p = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}$ .

بگذارید یافتن چنین معادلی را به وقت مناسب‌تری موکول کنیم و فعلاً به مثال کلی‌تری بپردازیم. آیا می‌توان مدار معادل تونن از دید خروجی یک دو درگاه را در حالت کلی به‌دست آورد؟ ابتدا باید یک آرایش مدار ورودی خاص را فرض کنیم و لذا یک منبع ولتاژ مستقل  $V_s$  (مثبت در بالا) را که با امپدانس  $Z_g$  سری است انتخاب می‌نماییم. پس

$$V_s = V_1 + I_1 Z_g$$

از ترکیب این رابطه با معادلات (۲۹) و (۳۰)،  $V_1$  و  $I_1$  را حذف می‌کنیم تا رابطه زیر به‌دست آید:

$$V_2 = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z_g} V_s + (z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}) I_2$$

مدار معادل تونن را مستقیماً از این رابطه می‌توان ترسیم کرد. این مدار در شکل ۱۷-۲۱ نشان داده شده است. امپدانس خروجی که برحسب پارامترهای  $z$  بیان شده چنین است:

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}$$

اگر امپدانس مولد صفر باشد، عبارت ساده‌تر می‌شود:

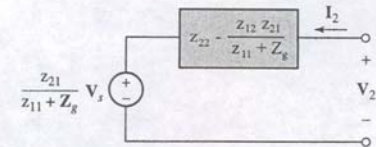
$$Z_{out} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}{z_{11}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_{22}} = \frac{1}{y_{22}} (Z_g = 0)$$

برای این حالت خاص، امپدانس خروجی همان  $y_{22}$  خواهد بود. معادله (۱۳) نیز همین رابطه می‌باشد

با فرض مجموعه پارامترهای امپدانس زیر:

$$z = \begin{bmatrix} 10^3 & 10^4 \\ -10^6 & 10^4 \end{bmatrix} \quad (\text{همگی به } \Omega)$$

که بیان‌گر کار ترانزیستوری در آرایش آمپتور مشترک است، بهره‌های ولتاژ، جریان و توان امپدانس‌های ورودی و خروجی را معین کنید. فرض شود مدار دودرگاه به وسیله یک منبع ولتاژ ایده‌آل  $V_s$  سری با مقاومت  $500\Omega$  تحریک شده و به یک مقاومت بار  $10k\Omega$  وصل است.



شکل ۱۷-۲۱ معادل تونن یک دودرگاهی در حالت کلی، از پایانه‌های خروجی. این مدار برحسب پارامترهای امپدانس مدار باز بیان شده است.

مثال ۱۷-۸

معادلات توصیف‌گر دو درگاه عبارتند از:

$$V_1 = 10^3 I_1 + 10 I_2 \quad (۳۶)$$

$$V_2 = -10^6 I_1 + 10^4 I_2 \quad (۳۷)$$

معادلاتی که شبکه‌های ورودی و خروجی را مشخص می‌کنند عبارتند از:

$$V_s = 500 I_1 + V_1 \quad (۳۸)$$

$$V_2 = -10^4 I_2 \quad (۳۹)$$

از این چهار معادله اخیر، به سادگی عبارات مربوط به  $V_1$ ،  $I_1$ ،  $V_2$  و  $I_2$  برحسب  $V_s$  به‌دست می‌آیند:

$$V_1 = 0.75 V_s \quad I_1 = \frac{V_s}{2000}$$

$$V_2 = -250 V_s \quad I_2 = \frac{V_s}{40}$$

با این اطلاعات بهره ولتاژ به‌دست می‌آید:

$$G_V = \frac{V_2}{V_1} = -333$$

و بهره جریان

$$G_I = \frac{I_2}{I_1} = 50$$

و بهره توان

$$G_P = \frac{\operatorname{Re}[-\frac{1}{2} V_2 I_2^*]}{\operatorname{Re}[\frac{1}{2} V_1 I_1^*]} = 16,670$$

و امپدانس ورودی برابر است با:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = 1500 \Omega$$

مراجعه به شکل ۱۷-۲۱ می‌توان امپدانس خروجی را به‌دست آورد:

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g} = 16.67 k\Omega$$

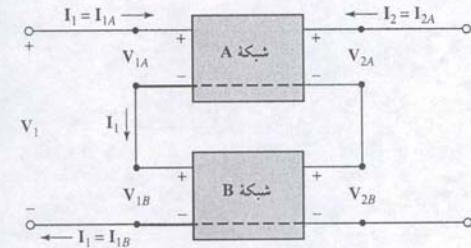
طبق پیش‌بینی‌های مربوط به قضیه انتقال توان ماکزیمم، بهره توان هنگامی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که  $Z_L = Z_{out}^* = 16.67 k\Omega$  برسد و مقدار آن 17045 است.

ارامترهای  $y$  هنگام اتصال موازی دو درگاهی‌ها مفیدند و با توجه به اصل دوگانگی، ارامترهای  $z$  مسئله اتصال سری شبکه را طبق شکل ۱۷-۲۲ حل می‌کنند. توجه داشته باشید که اتصال سری با اتصال پی‌درپی یا متوالی که بعداً و در هنگام ملاحظه پارامترهای انتقال راجع به آن‌ها بحث خواهیم کرد، تفاوت دارد. اگر هر شبکه دو درگاه یک‌گانه مشترک برای ورودی و خروجی داشته باشند و اگر طبق شکل ۱۷-۲۲ مراجع به هم وصل شوند، آن‌گاه  $I_1$  از درگاه‌های ورودی دو شبکه سری می‌گردد. عبارت مشابهی برای  $I_2$  صحیح است. سپس درگاه‌ها سس از این اتصال درونی درگاه باقی خواهند ماند و از آن نتیجه می‌شود  $I = I_A = I_B$  و

$$V = V_A + V_B = z_A I_A + z_B I_B = (z_A + z_B) I = z I$$

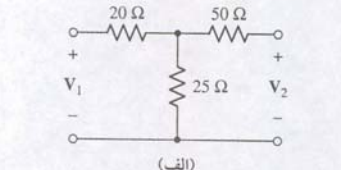
نه

$$z = z_A + z_B$$

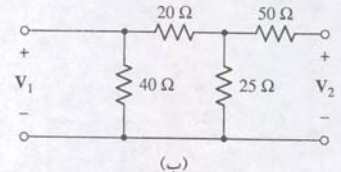
س  $z_{11} = z_{11A} + z_{11B}$  و به همین ترتیب.

شکل ۱۷-۲۲ اتصال سری دو شبکه دودرگاه که از اتصال چهار گره مرجع مشترک به یکدیگر به‌دست آمده است در این صورت ماتریس  $z = z_A + z_B$ .

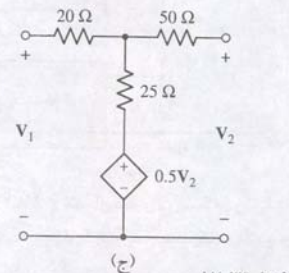




(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۷-۲۳

۱۷-۸ Z را برای مدار دودرگاه (الف) شکل ۱۷-۲۳ (الف) و (ب) شکل ۱۷-۲۳ (ب) به دست آورید.

۱۷-۹ Z را برای شبکه دودرگاه شکل ۱۷-۲۳ (ج) بیابید.

جواب: ۱۷-۸:  $\begin{bmatrix} 45 & 25 \\ 25 & 75 \end{bmatrix} (\Omega)$  ۱۷-۹:  $\begin{bmatrix} 21.2 & 11.76 \\ 11.76 & 67.6 \end{bmatrix} (\Omega)$

## ۱۷-۵ پارامترهای هیبرید

مشکل اندازه گیری کمیاتی چون پارامترهای مدار باز هنگامی ظاهر می شود که پارامتری مثل  $Z_{21}$  باید اندازه گیری شود. یک منبع سینوسی را به سادگی می توان به پایانه های ورودی اعمال کرد ولی به علت امپدانس بسیار بزرگ خروجی در مدار ترانزیستوری، بازگذاشتن پایانه های خروجی و در عین حال اعمال ولتاژ تغذیه مشکل است. اندازه گیری جریان مدار اتصال کوتاه در پایانه های خروجی خیلی ساده صورت می گیرد. پارامترهای هیبرید با یک جفت معادله که  $V_1$ ،  $I_1$ ،  $V_2$  و  $I_2$  را مرتبط می سازند تعریف می شوند و در این میان  $V_1$  و  $I_2$  متغیرهای مستقلند:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \quad (۴۰)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \quad (۴۱)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (۴۲)$$

ماهیت پارامترها را می توان با تنظیم  $V_2 = 0$  مشخص کرد. پس

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = \text{امپدانس ورودی اتصال کوتاه}$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = \text{بهره جریان مستقیم اتصال کوتاه}$$

با  $I_1 = 0$  هم داریم:

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} = \text{بهره ولتاژ معکوس مدار باز}$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} = \text{ادمیتانس خروجی مدار باز}$$

چون این پارامترها بیانگر امپدانس، ادمیتانس، بهره ولتاژ و بهره جریانند، به آن ها پارامترهای هیبرید می گوئیم. هنگامی که این پارامترها برای ترانزیستور به کاربروند، زیرنویس ها ساد می شوند. پس  $h_{11}$ ،  $h_{12}$ ،  $h_{21}$  و  $h_{22}$  به ترتیب تبدیل به  $h_i$ ،  $h_r$ ،  $h_f$  و  $h_o$  می گردند که در آن ه زیرنویس ها به معنی ورودی، معکوس، مستقیم و خروجی می باشند.

## کاربرد عملی

### مشخصه های ترانزیستور

مقادیر پارامترهای ترانزیستورهای پیوندی دوقطبی برحسب پارامترهای  $h$  بیان می شوند. ترانزیستور به وسیله محققین آزمایشگاه بل در اواخر دهه ۱۹۴۰ اختراع شد (شکل ۱۷-۲۴) که یک وسیله نیمه هادی غیرخطی است که مبتنی بسیاری از مدارهای تقویت کننده و دیجیتال منطقی را می سازد. سه پایانه یک ترانزیستور طبق شکل ۱۷-۲۵، بیس (b) کلکتور (c) و امیتر (e) نام گذاری و این

نام ها با توجه به نقش آن ها در حمل بار در این وسیله انتخاب شده اند. پارامترهای  $h$  یک ترانزیستور پیوندی دوقطبی معمولاً با صفر کردن امیتر که به آن آرایش امیتر مشترک می گویند، اندازه گیری می شود. آن گاه بیس به عنوان ورودی و کلکتور خروجی است. همان طور که قبلاً ذکر شد، در هر صورت ترانزیستور یک وسیله غیرخطی است و بنابراین پارامترهای  $h$  را نمی توان برای همه ولتاژها و جریان ها تعریف کرد.

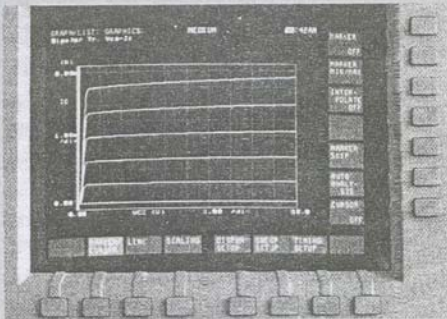
دقت کنید که علائم به کار رفته برای پارامترهای فوق توسط مهندسین به شکل  $h_{ie}$ ،  $h_{re}$  و غیره است. اندازه گیری ها در  $f = 1.0 \text{ kHz}$  و  $V_{CE} = 10 \text{ Vdc}$ ،  $I_C = 1.0 \text{ mA}$  انجام شده است. به عنوان سرگرمی یکی از ناشرین تصمیم گرفت این پارامترها را خود اندازه بگیرد. لذا یکی از آن ها را برداشت و با وسیله شکل ۱۷-۲۶ مقدر زیر را به دست آورد:

$$h_{oe} = 3.3 \mu\text{mhos} \quad h_{ie} = 1.9$$

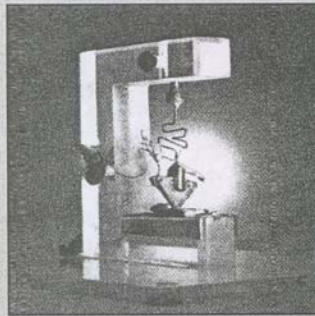
$$h_{ic} = 3.02 \text{ k}\Omega \quad h_{re} = 4 \times 10^{-3}$$

سه مقدار اول به خوبی در گستره مقادیر داده شده به وسیله سازنده بوده و کمی نیز به مقادیر حداقل نزدیک تر است. با این وجود مقدار  $h_{re}$  بزرگتر از آن چه که در پرگه اطلاعات آمده می باشد. این نتیجه موجب شرمندگی است و پرا فکر می کردیم که تا به این جا خوب کار کرده ایم.

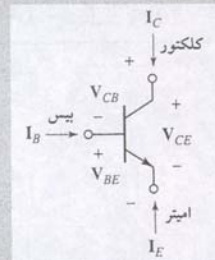
مادامی که سرگرم ترسیم منحنی ها در بالا و پایین  $I_C = 1 \text{ mA}$  هستیم، قطعه گرم می شود. متأسفانه به دلیل وابستگی شدید به حرارت، مشخصات ترانزیستور تغییر می یابد. مقادیر داده شده به وسیله سازنده در  $25^\circ \text{C}$  است. با کاهش دمای قطعه می توان مقدار  $h_{re}$  را تا  $2.0 \times 10^{-4}$  تقلیل داد. مدارهای خطی برای کار ساده اند ولی مدارهای غیر خطی حین کار جالبند.



شکل ۱۷-۲۶ نمایش نمودرهای حاصل از تحلیل پارامتر نیمه هادی HP 4155A برای اندازه گیری  $h$  ترانزیستور 2N3904 دوقطبی.



شکل ۱۷-۲۴ عکسی از اولین ترانزیستور دوقطبی (bjt).



شکل ۱۷-۲۵ شماتیک bjt که جریان ها و ولتاژها را برحسب قرارداد IEEE نشان می دهد.

بنابراین عملاً باید پارامتر  $h$  را برای مقادیر خاصی از جریان کلکتور  $I_C$  و ولتاژ کلکتور-امیتر بیان نمود. نتیجه حاصل دیگر از خاصیت غیر خطی ترانزیستور این است که مقدار  $h$  با  $I_C$  و  $V_{CE}$  از لحاظ مقدار کاملاً با یکدیگر متفاوتند.

وسایل اندازه گیری متعددی برای به دست آوردن پارامترهای یک ترانزیستور حاص در دسترس است. مثالی از این وسایل تحلیل گر پارامتر نیمه هادی، طبق شکل ۱۷-۲۶ است. این وسیله جریان را (محور عمودی) در برابر ولتاژ خاصی (محور افقی) رسم می نماید. دسته ای از منحنی ها با تغییر جریان در گام های گسسته ترسیم شده اند.

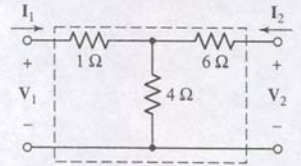
به عنوان مثال سازنده یک ترانزیستور سیلیکان 2N3904 NPN پارامترهای  $h$  را طبق جدول ۱۷-۲ بیان می کند.

جدول ۱۷-۲ خلاصه ای از پارامترهای 2N3904 ac.

| پارامتر          | نام                    | مشخصات                   | واحد             |
|------------------|------------------------|--------------------------|------------------|
| $h_{ie}(h_{11})$ | امپدانس ورودی          | 1.0-10                   | $\text{k}\Omega$ |
| $h_{re}(h_{12})$ | نسبت پسگرد ولتاژ       | $0.5-8.0 \times 10^{-4}$ | -                |
| $h_{fe}(h_{21})$ | بهره جریان سیگنال کوچک | 100-400                  | -                |
| $h_{oe}(h_{22})$ | ادمیتانس خروجی         | 1.0-40                   | $\mu\text{mhos}$ |

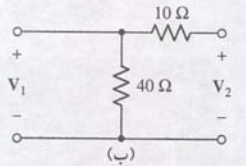
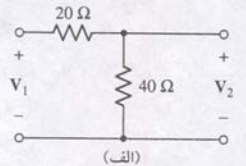


## مثال ۱۷-۹



شکل ۱۷-۲۷ شبکه دوسویه‌ای که پارامترهای آن به‌دست آمده است:  $h_{12} = -h_{21}$ .

## تمرین



شکل ۱۷-۲۸

برای مدار مقاومتی دوطرفه شکل ۱۷-۲۷،  $h$  را پیدا کنید.

با اتصال کوتاه خروجی ( $V_2 = 0$ )، و اعمال یک منبع  $1A$  در ورودی ( $I_1 = 1A$ ) یک ولتاژ ورودی  $3.4V$  ( $V_1 = 3.4V$ ) تولید می‌کند. پس  $h_{11} = 3.4\Omega$  خواهد بود. تحت همین شرایط جریان خروجی به سادگی با تقسیم جریان به‌دست می‌آید،  $I_2 = -0.4A$ ، پس  $h_{21} = -0.4$ . دو پارامتر باقیمانده مدار باز را به‌دست می‌آوریم ( $I_1 = 0$ )، بگذارید ولتاژ  $1V$  را به پایانه‌های خروجی اعمال کنیم ( $V_2 = 1V$ ). پاسخ در پایانه‌های ورودی  $0.4V$  است ( $V_1 = 0.4$ ) و بنابراین  $h_{12} = 0.4$  خواهد شد. جریان حمل شده به وسیله این منبع در پایانه‌های خروجی ( $I_2 = 0.1A$ ) و لذا  $h_{22} = 0.1S$  است. پس خواهیم داشت:

$$h = \begin{bmatrix} 3.4\Omega & 0.4 \\ -0.4 & 0.1S \end{bmatrix}$$

این نتیجه قضیه تقابل است که در یک شبکه دوسویه  $h_{12} = -h_{21}$  است.

۱۷-۱۰  $h$  را برای مدار دو درگاه، (الف) شکل ۱۷-۲۸، (ب) شکل ۱۷-۲۸ (ب) پیدا کنید.

۱۷-۱۱ اگر  $h$  با رابطه زیر داده شود، مطلوبست (الف)  $Y$  و (ب)  $Z$ .

$$h = \begin{bmatrix} 5\Omega & 2 \\ -0.5 & 0.1S \end{bmatrix}$$

$$\text{جواب ۱۷-۱۰: } \begin{bmatrix} 8\Omega & 0.8 \\ -0.8 & 20mS \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20\Omega & 1 \\ -1 & 25mS \end{bmatrix}$$

$$\text{جواب ۱۷-۱۱: } (S) \cdot \begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} (\Omega) \cdot \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

مدار شکل ۱۷-۲۹ نتیجه تبدیل مستقیم دو معادله (۴۰) و (۴۱) است. اولی KVL را حول حلقه ورودی نشان می‌دهد، درحالی‌که دومی از KCL در گره خروجی بالا نتیجه شده است. این مدار، مدار معادل ترانزیستور نیز هست. بگذارید چند مقدار را برای آرایش امیتر مشترک در نظر بگیریم:  $h_{11} = 1200\Omega$ ،  $h_{12} = 2 \times 10^{-4}$ ،  $h_{21} = 50$ ،  $h_{22} = 50 \times 10^{-6}S$  و یک منبع ولتاژ  $1 \angle 0^\circ$  که با یک مقاومت  $800\Omega$  سری بوده و به بار  $5k\Omega$  وصل است. در ورودی

$$10^{-3} = (1200 + 800)I_1 + 2 \times 10^{-4}V_2$$

و در خروجی

$$I_2 = -2 \times 10^{-4}V_2 = 50I_1 + 50 \times 10^{-6}V_2$$

و از حل آن‌ها داریم:

$$I_1 = 0.510\mu A \quad V_1 = 0.592mV$$

$$I_2 = 20.4\mu A \quad V_2 = -102mV$$

در ترانزیستور مورد نظر بهره جریان  $40$ ، بهره ولتاژ  $172$ - و بهره توان  $6880$  را داریم. امپدانس ورودی ترانزیستور  $1160\Omega$  و با چند محاسبه مختصر امپدانس خروجی  $22.2k\Omega$  به‌دست می‌آید وقتی که دو مدار دو درگاه بطور سری در ورودی و موازی در خروجی به هم وصل شوند پارامترهای هیبرید با هم جمع می‌گردند. این نوع ارتباط را اتصال سری-موازی می‌نامند و خیلی استفاده نمی‌شود.

## ۱۷-۶ پارامترهای انتقال

آخرین پارامتر مربوط به مدار دو درگاهی که بررسی خواهیم کرد پارامترهای  $t$ ، پارامترهای ABCD یا ساده‌تر بگوییم پارامترهای انتقال است. این پارامترها چنین تعریف می‌شوند:

$$V_1 = t_{11}V_2 - t_{12}I_2 \quad (43)$$

$$I_1 = t_{21}V_2 - t_{22}I_2 \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

که  $V_1, I_1, V_2, I_2$  طبق معمول تعریف می‌شوند (شکل ۱۷-۸). علامت‌های منفی در معادلات (۴۳) و (۴۴) مربوط به جریان خروجی است. چون داریم ( $-I_2$ )، بنابراین هر دو جریان  $I_1$  و  $-I_2$  به سمت راست جهت یافته‌اند، که همان جهت انرژی یا انتقال است.

فرم دیگر نمایش این مجموعه پارامترها برابر زیر است:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (46)$$

نوجه کنید که هیچ علامت منفی در ماتریس  $t$  یا ABCD وجود ندارد.

با نگاه مجدد به معادلات (۴۳) تا (۴۵) می‌بینیم، کمیت‌های سمت چپ که اغلب مفروض با متغیرهای مستقل هستند، ولتاژ و جریان  $V_1$  و  $I_1$  می‌باشند. کمیت‌های وابسته،  $V_2$  و  $I_2$  معمولاً کمیت‌های خروجی‌اند. بنابراین پارامترهای انتقال رابطه مستقیمی بین ورودی و خروجی را فراهم می‌سازند. کاربرد عمده آن‌ها در تحلیل خط انتقال و در شبکه‌های متوالی ست. بیایید اکنون پارامترهای  $t$  را برای مدار مقاومتی دو طرفه دو درگاهی شکل ۱۷-۳۰ (الف) به‌دست آوریم. برای بررسی یک روش ممکن دریافتی یک پارامتر چنین عمل می‌کنیم:

$$t_{12} = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}$$

بنابراین خروجی را اتصال کوتاه می‌کنیم ( $V_2 = 0$ ) و  $V_1 = 1V$  قرار می‌دهیم (شکل ۱۷-۳۰ (ب)). نوجه کنید که نمی‌توان مخرج را با استقرار منبع  $1A$  در خروجی، برابر واحد کرد. ماقبالاً منبع را اتصال کوتاه کرده‌ایم. مقاومت معادلی که منبع  $1V$  می‌بیند،  $R_{eq} = 2 + (4 \parallel 10)\Omega$  است و سپس با تقسیم جریان داریم:

$$-I_2 = \frac{1}{2 + (4 \parallel 10)} \times \frac{10}{10 + 4} = \frac{5}{34} A$$

بدین ترتیب

$$t_{12} = \frac{1}{-I_2} = \frac{34}{5} = 6.8\Omega$$

گر بخواهیم هر چهار پارامتر را پیدا کنیم، می‌توانیم یک جفت معادله مناسب برحسب کمیات مربوط به پایانه‌ها، یعنی  $V_1, V_2, I_1, I_2$  بنویسیم. از شکل ۱۷-۳۰ (الف) دو معادله حلقه‌ای داریم:

$$V_1 = 12I_1 + 10I_2 \quad (47)$$

$$V_2 = 10I_1 + 14I_2 \quad (48)$$

الحل معادله (۴۸) برای  $I_1$  داریم:

$$I_1 = 0.1V_2 - 1.4I_2$$

س  $t_{21} = 0.1S$  و  $t_{22} = 1.4$  می‌باشد. با جایگزینی  $I_1$  در معادله (۴۷) داریم:

$$V_1 = 12(0.1V_2 - 1.4I_2) + 10I_2 = 1.2V_2 - 6.8I_2$$

دوباره  $t_{11} = 1.2$  و  $t_{12} = 6.8\Omega$  به‌دست می‌آید.

برای شبکه‌های دوسویه، دترمینان ماتریس  $t$  برابر واحد است:

$$\Delta_t = t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1$$

ر. مثال مقاومتی شکل ۱۷-۳۰، داریم:

$$\Delta_t = 1.2 \times 1.4 - 6.8 \times 0.1 = 1$$

شکل ۱۷-۳۰ (الف) یک شبکه مقاومتی دو درگاه که پارامترهای  $t$  برای آن باید به‌دست آیند. (ب) برای یافتن  $t_{12}$ ،  $V_1 = 1V$  و  $V_2 = 0$  را ایجاد کنید. سپس  $t_{12} = 1/(-I_2) = 6.8\Omega$ .



## تحلیل کامپیوتری

وصف شبکه‌های دو درگاه با پارامترهای  $t$  فرضی را برای تحلیل ساده مدارهای دو درگاه فراهم می‌سازد. مثلاً همان‌طور که در این بخش ملاحظه شد:

$$t_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \Omega \\ 0.1 \text{ S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

$$t_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \Omega \\ 0.05 \text{ S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

دیدیم که پارامترهای  $t$  توصیف‌گر شبکه متوالی را می‌توان با ضرب  $t_A$  و  $t_B$  به‌دست آورد:

$$t = t_A t_B$$

چنین اعمال ماتریسی را با یک ماشین حساب یا یک بسته نرم‌افزاری مثل متلب می‌توان به راحتی انجام داد. مثلاً برنامه متلب چنین است:

```
EDU» tA = [1.2 6.8; 0.1 1.4];
EDU» tB = [1.2 13.6; 0.05 1.4];
EDU» t = tA*tB
```

t =

```
1.7800    25.8400
0.1900    3.3200
```

که در مثال ۱۷-۱۰ هم مشاهده کردیم.

هنگام کار با ماتریس‌ها در متلب، هر نام متغیر حساس به نوع حروف می‌باشد (در این جا  $t_A$ ،  $t_B$  و  $t$ ) عناصر ماتریس‌ها به صورت سطری و با شروع سطر بالا آغاز می‌شوند. سطرها با علامت نقل قول از یکدیگر جدا می‌شوند. خواننده هنگام اجرای جبری ماتریسی باید متوجه باشد که همیشه ترتیب عملیات مهم است. مثلاً  $t_A * t_B$  ماتریسی کاملاً متفاوت با آنچه دیدیم تولید می‌کند:

$$t_B \cdot t_A = \begin{bmatrix} 2.8 & 27.2 \\ 0.2 & 2.3 \end{bmatrix}$$

برای ماتریس‌های ساده‌ای که در این مثال دیدیم یک ماشین حساب عملی کفایت می‌نماید. با این وجود شبکه‌های متوالی بزرگ‌تر با کامپیوتر بهتر بررسی می‌شوند و نیز می‌توان همه آرایه‌ها را به‌طور همزمان روی صفحه نمایش ملاحظه کرد.

## ۱۷-۷ خلاصه فصل و مرور

- برای به‌کارگیری روش‌های تحلیل توصیف‌شده در این فصل، لازم است به‌خاطر سپاریم که هر درگاه فقط می‌تواند به یک شبکه یک پورت یا به یک درگاه از شبکه چنددرگاهی وصل شود.
- معادلات معرفی‌شده برای تحلیل یک شبکه دودرگاه برحسب پارامترهای ادمیتانس  $y$  عبارتند از:

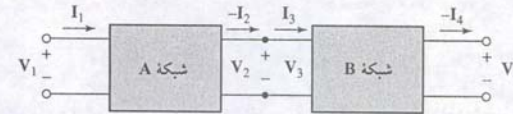
$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad \text{و} \quad I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2$$

که

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

و

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$



بحث خود را در مورد مدارهای دو درگاه، با اتصال متوالی دو مدار دو درگاهی طبق شکل ۱۷-۳۱ پایان می‌دهیم. ولتاژ و جریان پایانه‌ها برای هر یک با دیگری یکسان تصور شده است. پارامترهای  $t$  متناظر برای شبکه A عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = t_A \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = t_A \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

و برای شبکه B برابر است با:

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = t_B \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix}$$

با ترکیب این نتایج داریم:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = t_A t_B \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix}$$

بنابراین پارامترهای  $t$  برای شبکه‌های موازی از ضرب ماتریسی زیر به‌دست می‌آیند:

$$t = t_A t_B$$

این حاصل ضرب از ضرب کردن عناصر دو ماتریس حاصل نمی‌شود. در صورت لزوم به پیوست ۲ مراجعه کنید.



## مثال ۱۷-۱۰

پارامترهای  $t$  را برای شبکه‌های شکل ۱۷-۳۲ پیدا کنید.

شبکه A همان شبکه دو درگاه شکل ۱۷-۳۲ است و بنابراین:

$$t_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \Omega \\ 0.1 \text{ S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

درحالی‌که شبکه B دارای مقادیر مقاومت دو برابر است:

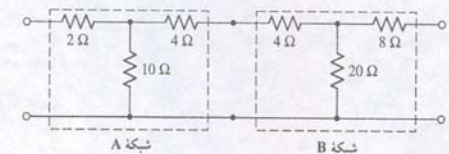
$$t_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \Omega \\ 0.05 \text{ S} & 1.4 \end{bmatrix}$$

برای شبکه ترکیب‌شده داریم:

$$\begin{aligned} t &= t_A t_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \\ 0.1 & 1.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \\ 0.05 & 1.4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.2 \times 1.2 + 6.8 \times 0.05 & 1.2 \times 13.6 + 6.8 \times 1.4 \\ 0.1 \times 1.2 + 1.4 \times 0.05 & 0.1 \times 13.6 + 1.4 \times 1.4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$t = \begin{bmatrix} 1.78 & 25.84 \Omega \\ 0.19 \text{ S} & 3.32 \end{bmatrix}$$

## شکل ۱۷-۳۲



و

## تمرین

۱۷-۱۲ با فرض رابطه زیر،  $z$  (الف) را بیابید.  $t$  (ب) را برای دو شبکه یکسان متوالی به‌دست‌آورید.

$$t = \begin{bmatrix} 3.2 & 8 \Omega \\ 0.2 \text{ S} & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{جواب: } \begin{bmatrix} 8.22 & 87.1 \\ 0.694 & 12.22 \end{bmatrix} (\Omega) \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 11.84 & 57.6 \Omega \\ 1.44 \text{ S} & 17.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 56 \\ 5 & 20 \end{bmatrix} (\Omega)$$



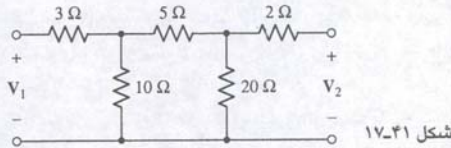
## ۱۷-۲ پارامترهای ادمیتانس

۱۰. برای شبکه خطی شکل ۱۷.۳۸، مطلوب است:

(الف)  $I_2$  اگر  $V = \begin{bmatrix} 9 \\ -3.5 \end{bmatrix}$  (V) و  $y = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.3 \\ 0.3 & -0.02 \end{bmatrix}$

(ب)  $V_1$  اگر  $I = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.02 \end{bmatrix}$  (A) و  $y = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.15 \\ 0.15 & 0.8 \end{bmatrix}$

۱۱. برای شبکه دو درگاه شکل ۱۷.۴۱،  $y_{11}$ ،  $y_{12}$  و  $y_{22}$  را بیابید.

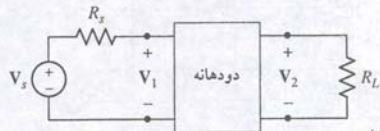


شکل ۱۷-۴۱

۱۲. اگر مدار دو درگاه در شکل ۱۷.۴۲ دارای مقادیر پارامتر  $y_{11} = 10$

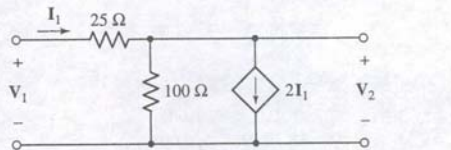
اگر  $V_2$  و  $V_1$  مطلوب است  $y_{22} = 20$  و  $y_{21} = 50$ ،  $y_{12} = -5$

باشد.  $R_L = 100\Omega$  و  $R_s = 25\Omega$  و  $V_s = 100V$  باشد.



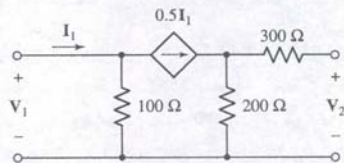
شکل ۱۷-۴۲

۱۳. چهار پارامتر شبکه شکل ۱۷.۴۳ را به دست آورید.



شکل ۱۷-۴۳

۱۴. در مدار دو درگاه شکل ۱۷.۴۴،  $|y|$  را به دست آورید.



شکل ۱۷-۴۴

۱۵. در مدار دو درگاه شکل ۱۷.۴۵، فرض کنید

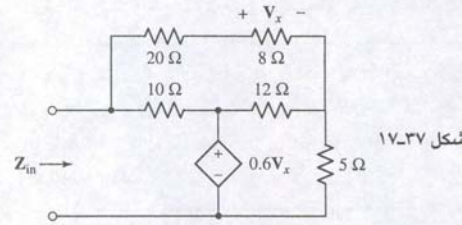
$$[y] = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.0025 \\ -8 & 0.05 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

باشد. (الف) مقادیر نسبت‌های  $V_1/I_1$  و  $I_2/I_1$  و  $V_2/V_1$  را به دست آورید.

(ب) مقاومت  $5S\Omega$  را حذف کنید. منبع  $1V$  را برابر صفر نمایید و  $V_2/I_2$  را

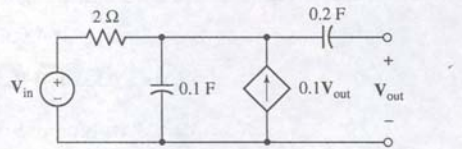
بیابید.

۶. برای مدار تک‌درگاه شکل ۱۷.۳۷، ادمیتانس  $Z_{in}$  را با (الف) یافتن  $\Delta_Z$  (ب) یافتن  $\Delta_Y$  و  $Y_{in}$  بیابید.



شکل ۱۷-۳۷

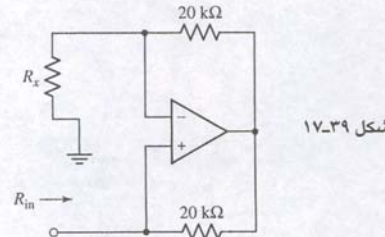
۷. ادمیتانس خروجی را برای شبکه شکل ۱۷.۳۸ به صورت تابعی از  $S$  پیدا کنید.



شکل ۱۷-۳۸

۸. اگر op amp شکل ۱۷.۳۹ ایده‌آل فرض شود ( $R_o = 0$ ،  $R_i = \infty$ ) و

$R_{in}$  را پیدا کنید. ( $A = \infty$ )



شکل ۱۷-۳۹

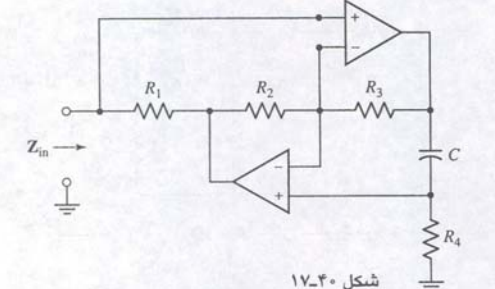
۹. (الف) اگر هر دو op amp در مدار شکل ۱۷.۴۰ ایده‌آل باشند

(ب)  $R_o = 0$ ،  $R_i = \infty$  و  $A = \infty$ ،  $Z_{in}$  را پیدا کنید. (ب)

$R_4 = 1k\Omega$ ،  $R_3 = 10k\Omega$ ،  $R_2 = 10k\Omega$ ،  $R_1 = 4k\Omega$  و

$C = 200pF$ ،  $L_{in} = 0.8mH$  که  $Z_{in} = j\omega L_{in}$ ،  $C = 200pF$ ،  $L_{in} = 0.8mH$ ،  $C = 200pF$

است.



شکل ۱۷-۴۰

■ معادلات تعریف‌شده برای تحلیل یک شبکه دو درگاه برحسب پارامترهای ادمیتانس  $Z$  عبارت‌اند از:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad \text{و} \quad V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

■ معادلات تعریف‌شده برای تحلیل یک شبکه دو درگاه برحسب پارامترهای  $h$  عبارت‌اند از:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \quad \text{و} \quad I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

■ معادلات تعریف‌شده برای تحلیل یک شبکه دو درگاه برحسب پارامترهای  $t$  عبارت‌اند از:

$$V_1 = t_{11}V_2 - t_{12}I_2 \quad \text{و} \quad I_1 = t_{21}V_2 - t_{22}I_2$$

■ تبدیل پارامترهای  $h$ ،  $t$ ،  $z$  و  $y$  به یکدیگر بسیار ساده است و به نیازهای تحلیل مدار وابسته می‌باشد. تبدیلات در جدول ۱۷-۱ آورده شده است.

## ۱۷-۸ خواندنی‌های کمکی

Further details of matrix methods for circuit analysis can be found in:

R. A. DeCarlo and P. M. Lin, *Linear Circuit Analysis*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2001.

Analysis of transistor circuits using network parameters is described in:

W. H. Hayt, Jr. and G. W. Neudeck, *Electronic Circuit Analysis and Design*, 2nd ed. New York: Wiley, 1995.

## مسائل

### ۱۷-۱ شبکه یک‌درگاهی

۱. مجموعه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$4I_1 - 8I_2 + 9I_3 = 12$$

$$5I_1 - 7I_3 = 4$$

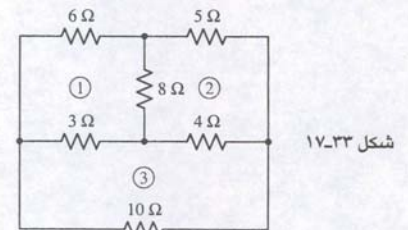
$$7I_1 + 3I_2 + I_3 = 0$$

(الف) فرم ماتریسی این مجموعه معادلات را بنویسید. (ب)  $Z_{in}$  را محاسبه کنید. (ج)  $\Delta_{11}$  را محاسبه کنید. (د)  $I_1$  را محاسبه کنید. (و)  $I_3$  را محاسبه کنید.

۲.  $\Delta_Z$  را برای شبکه شکل ۱۷.۳۳ به دست آورید و سپس از آن در یافتن توان

تولیدی به وسیله یک منبع  $100V_{dc}$  که در شاخه‌ای خارج از حلقه (الف)

۱، (ب) ۲ و (ج) ۳ واقع است استفاده کنید.

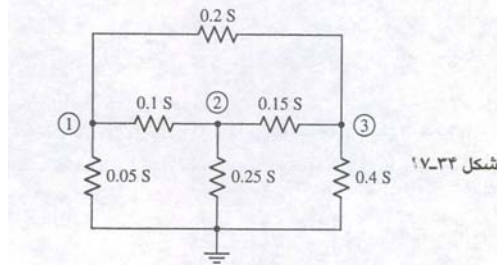


شکل ۱۷-۳۳

۳. برای شبکه شکل ۱۷.۳۴،  $\Delta_Y$  را پیدا کنید و سپس از آن در یافتن توان

تولیدی به وسیله منبع  $10A_{dc}$  بین گره مرجع و گره (الف) ۱، (ب) ۲ و

(ج) ۳ را به دست آورید.



شکل ۱۷-۳۴

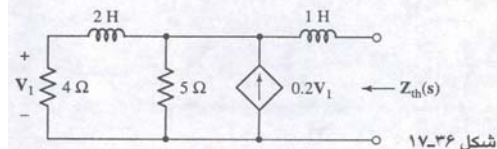
۴. ماتریس مقاومت یک شبکه تک‌درگاه در شکل ۱۷.۳۵ داده شده است.

$$[R] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ (}\Omega\text{)}$$

شکل ۱۷-۳۵

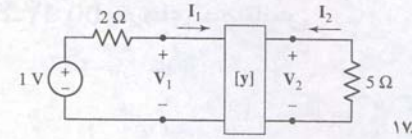
۵. ادمیتانس معادل تونن  $Z_{in}$  را برای مدار تک‌درگاه شکل ۱۷.۳۶

به دست آورید.



شکل ۱۷-۳۶





شکل ۱۷-۴۵

۱۶. پارامترهای ادمیتانس یک مدار دودرگاه مفروض برابر است با:

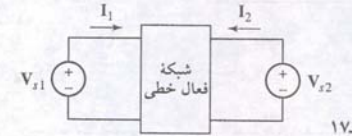
$$[y] = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -20 & 2 \end{bmatrix} \text{ (mS)}$$

مطلوبست  $[y]$  جدید اگر مقاومت  $100\Omega$  به طریق زیر به مدار وصل شود.

(الف) سری با یکی از سیم‌های ورودی و (ب) سری با یکی از سیم‌های خروجی.

۱۷. جدول موجود در شکل ۱۷-۴۶ را کامل کنید و برای پارامترهای  $y$  مقدار دهید.

|          | $V_1$<br>(V) | $V_2$<br>(V) | $I_1$<br>(A) | $I_2$<br>(A) |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Exp't #1 | 100          | 50           | 5            | -32.5        |
| Exp't #2 | 50           | 100          | -20          | -5           |
| Exp't #3 | 20           | 0            |              |              |
| Exp't #4 |              |              | 5            | 0            |
| Exp't #5 |              |              | 5            | 15           |



شکل ۱۷-۴۶

۱۸. برای شبکه خطی شکل ۱۷-۸، مطلوبست:

(الف)  $I_2$  اگر  $y = \begin{bmatrix} 10^{-3} & j0.01 \\ j0.01 & -j0.005 \end{bmatrix} \text{ (S)}$  و

$V = \begin{bmatrix} 12/43^\circ \\ 2/0^\circ \end{bmatrix} \text{ (V)}$

(ب)  $I_2$  اگر  $I = \begin{bmatrix} 120/30^\circ \\ 88/45^\circ \end{bmatrix} \text{ (A)}$  و  $y = \begin{bmatrix} -j5 & 10 \\ 4 & j10 \end{bmatrix} \text{ (S)}$

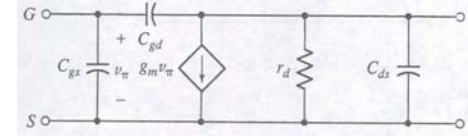
۱۹. ترانزیستور نیمه هادی - اکسید فلز (MOSFET)، که یک عنصر سه پایانه است و در بسیاری از کاربردهای الکترونیک مورد استفاده است، اغلب برحسب پارامترهای هیبرید مشخص می‌شود. این پارامترهای ac اغلب به شرایط اندازه‌گیری وابسته است و با  $y_{os}, y_{fs}, y_{rs}, y_{is}$  مطابق زیر نام‌گذاری می‌شوند:

(۴۹)  $I_g = y_{is} V_{gs} + y_{rs} V_{ds}$

(۵۰)  $I_d = y_{fs} V_{gs} + y_{os} V_{ds}$

که  $I_g$  جریان گیت ترانزیستور،  $I_d$  جریان درین و سورس در حین اندازه‌گیری بین خروجی و ورودی مشترک است. بنابراین  $V_{gs}$  ولتاژ بین گیت و سورس و  $V_{ds}$  ولتاژ بین درین و سورس است. مدل فرکانس بالای

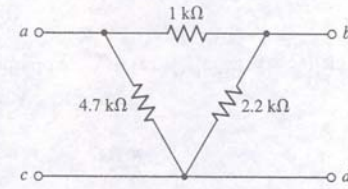
به‌کاررفته در شکل ۱۷-۴۷ برای نمایش رفتار MOSFET آمده است. (الف) برای شکل مذکور کدام پایه به عنوان ورودی به کار رفته است و کدام یک خروجی است؟ (ب) عبارتی برای پارامترهای  $y_{os}, y_{fs}, y_{rs}, y_{is}$  تعریف‌شده در معادلات (۴۹) و (۵۰) به دست آورید که برحسب پارامترهای مدل  $C_{ds}, r_d, g_m, C_{gd}, C_{gs}$  باشد. (ج)  $y_{os}, y_{fs}, y_{rs}, y_{is}$  را محاسبه کنید اگر  $g_m = 4.7 \text{ mS}$ ،  $C_{ds} = 0.4 \text{ pF}$ ،  $C_{gd} = 1.4 \text{ pF}$ ،  $C_{gs} = 3.4 \text{ pF}$  و  $r_d = 10 \text{ k}\Omega$  باشد.



شکل ۱۷-۴۷

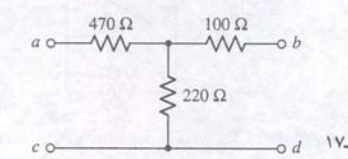
### ۱۷-۳ شبکه معادل

۲۰. شبکه  $\Delta$  شکل ۱۷-۴۸ را به  $Y$  تبدیل کنید.



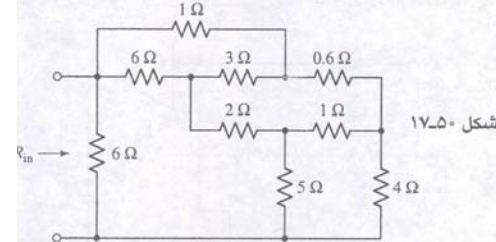
شکل ۱۷-۴۸

۲۱. شبکه  $Y$  شکل ۱۷-۴۹ را به  $\Delta$  تبدیل کنید.



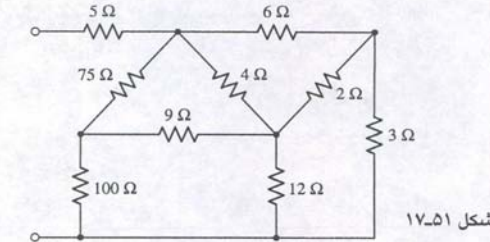
شکل ۱۷-۴۹

۲۲.  $R_{in}$  را در مدار تک‌درگاه شکل ۱۷-۵۰ با تبدیلات مناسبی از  $Y-\Delta$  به  $\Delta-Y$  به دست آورید.



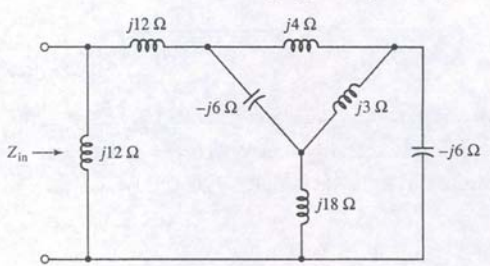
شکل ۱۷-۵۰

۲۳. تبدیلات  $Y-\Delta$  و  $\Delta-Y$  را برای یافتن مقاومت ورودی مدار تک‌درگاه شکل ۱۷-۵۱ به کار ببرید.



شکل ۱۷-۵۱

۲۴. در شبکه شکل ۱۷-۵۲،  $Z_{in}$  را بیابید.

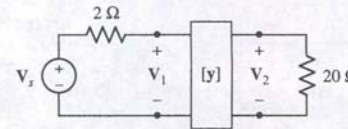


شکل ۱۷-۵۲

۲۵. اجازه بدهید در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۳

$$[y] = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.002 \\ -5 & 0.04 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

باشد مطلوبست (الف)  $G_V$ ، (ب)  $G_I$ ، (ج)  $G_P$ ، (د)  $Z_{in}$ ، (ه)  $Z_{out}$ .

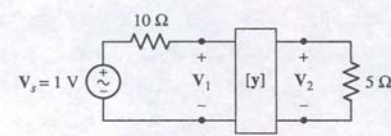


شکل ۱۷-۵۳

۲۶. اجازه بدهید در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۴

$$[y] = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

باشد. مطلوبست (الف)  $G_V$ ، (ب)  $G_I$ ، (ج)  $G_P$ ، (د)  $Z_{in}$ ، (ه)  $Z_{out}$ . (و) اگر بهره ولتاژ معکوس  $G_{V,rev}$  به صورت  $V_1/V_2$  با  $V_s = 0$  و حذف  $R_L$  تعریف شود  $G_{V,rev}$  را محاسبه کنید. (ز) اگر بهره توان تزریقی  $G_{ins}$  به صورت نسبت  $P_{5\Omega}$  در هنگام وجود دو درگاه به  $P_{5\Omega}$  هنگام نبودن دو درگاه و اتصال مستقیم پایانه‌های خروجی به پایانه‌های ورودی تعریف شود  $G_{ins}$  را بیابید.



شکل ۱۷-۵۴

۲۷. یک مدار معادل شبیه مدار شکل ۱۷-۱۳ (ب) رسم کنید که برای آن

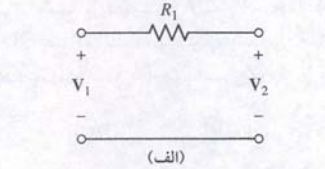
$$[y] = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ (mS)}$$

باشد. (ب) اگر دو عدد از این مدارهای دو درگاه به‌طور موازی وصل شوند،

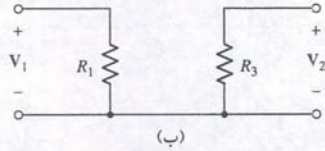
مدار معادل جدید را رسم کرده و نشان دهید که:  $[y]_{new} = 2[y]$ .

۲۸. (الف)  $[y]_a$  را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۵ (الف) پیدا کنید. (ب)  $[y]_b$

را برای شکل ۱۷-۵۵ (ب) بیابید. (ج) شبکه را رسم کنید که از اتصال موازی این مدارهای دو درگاه حاصل شده است و نشان دهید که  $[y]$  برای این شبکه برابر  $[y]_a + [y]_b$  است.



(الف)



(ب)

شکل ۱۷-۵۵

### ۱۷-۴ پارامترهای امپدانس

۲۹. برای شبکه خطی شکل ۱۷-۸، مطلوبست:

(الف)  $V_1$  اگر  $z = \begin{bmatrix} 4.7 & 2.2 \\ 2.2 & 3.3 \end{bmatrix} \text{ (k}\Omega\text{)}$  و  $I = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -2.5 \end{bmatrix} \text{ (mA)}$

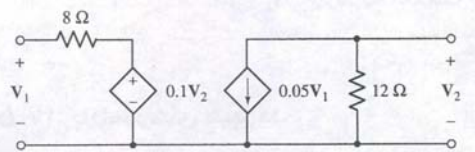
(ب)  $I_2$  اگر  $z = \begin{bmatrix} -10 & 15 \\ 15 & 6 \end{bmatrix} \text{ (k}\Omega\text{)}$  و  $V = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ (V)}$

۳۰. برای شبکه خطی شکل ۱۷-۸، مطلوبست:

(الف)  $V_2$  اگر  $z = \begin{bmatrix} 5 & j \\ j & -j2 \end{bmatrix} \text{ (}\Omega\text{)}$  و  $I = \begin{bmatrix} 2/20^\circ \\ 2/0^\circ \end{bmatrix} \text{ (A)}$

(ب)  $I_1$  اگر  $z = \begin{bmatrix} -j & 2 \\ 4 & j4 \end{bmatrix} \text{ (}\Omega\text{)}$  و  $V = \begin{bmatrix} 137/30^\circ \\ 105/45^\circ \end{bmatrix} \text{ (V)}$

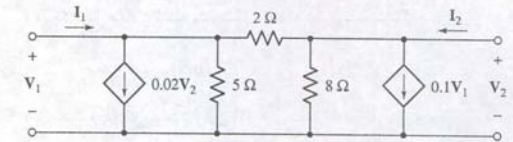
۳۱.  $[z]$  را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۶ به دست آورید.



شکل ۱۷-۵۶

۳۲. (الف) برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۷،  $[z]$  را بیابید. (ب) اگر  $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$  باشد، بهره ولتاژ  $G_V$  را به دست آورید.





شکل ۱۷-۵۷

۳۳. یک مدار دو درگاه خاص با

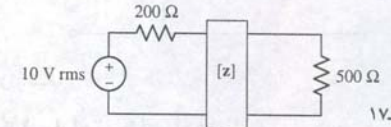
$$[z] = \begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} (\Omega)$$

توصیف شده است. ورودی متشکل از یک  $V_s$  سری با  $5\Omega$  است، ضمن این‌که  $R_L = 2\Omega$  می‌باشد. مطلوبست متوسط توان حمل‌شده به (الف)  $Z_{out}$ ، (ب)  $G_V$ ، (ج)  $G_P$ ، (د)  $Z_{in}$  و (ه)  $Z_{out}$ .

۳۴. فرض کنید

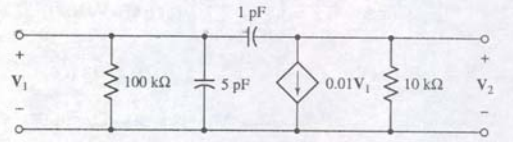
$$[z] = \begin{bmatrix} 1000 & 100 \\ -2000 & 400 \end{bmatrix} (\Omega)$$

را در مدار دو درگاه شکل ۱۷-۵۸ داشته باشیم. توان متوسط حمل‌شده به (الف) مقاومت  $200\Omega$  و، (ب) مقاومت  $500\Omega$  و (ج) دو درگاه را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۷-۵۸

۳۵. پارامترهای  $z$  را در  $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$  برای مدار معادل ترانزیستوری فرکانس بالا در شکل ۱۷-۵۹ به‌دست‌آورید.



شکل ۱۷-۵۹

۳۶. یک مدار دو درگاه که در آن

$$[z] = \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 40 & 10 \end{bmatrix}$$

است به وسیله منبع  $V_s = 100\angle 0^\circ \text{ V}$  سری با مقاومت  $5\Omega$  و متصل به یک مقاومت  $25\Omega$ ، راه‌اندازی شده است. مدار معادل تونن از دید مقاومت  $25\Omega$  چقدر است؟

## ۱۷-۵ پارامترهای هیبرید

۳۷. پارامترهای  $h$  یک مدار دودرگاهی عبارتنداز:

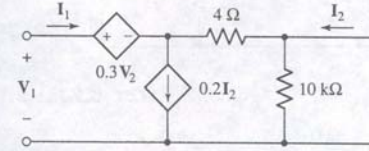
$$[h] = \begin{bmatrix} 9\Omega & -2 \\ 20 & 0.2S \end{bmatrix}$$

اگر یک مقاومت  $1\Omega$  با (الف) ورودی، (ب) خروجی سری شود پارامترهای جدید  $h$  را پیدا کنید.

۳۸.  $Z_{out}$  و  $Z_{in}$  را برای مدار دو درگاهی که به منبعی با  $R_s = 100\Omega$  و مصرفی با  $R_L = 500\Omega$  وصل است، به‌دست‌آورید. به‌شرطی‌که

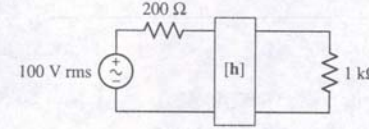
$$[h] = \begin{bmatrix} 100\Omega & 0.01 \\ 20 & 1 \text{ ms} \end{bmatrix}$$

۳۹. با مراجعه به مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۰، مطلوبست (الف)  $h_{12}$ ، (ب)  $z_{12}$  و (ج)  $y_{12}$ .



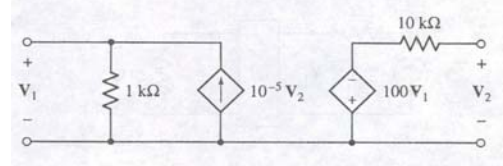
شکل ۱۷-۶۰

۴۰. برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۱ فرض کنید،  $h_{11} = 1k\Omega$ ،  $h_{12} = -1$ ،  $h_{21} = 4$  و  $h_{22} = 500\mu S$  باشد. متوسط توان حمل‌شده به (الف)  $R_s = 200\Omega$ ، (ب)  $R_L = 1k\Omega$  و (ج) تمام مدار دو درگاه را به‌دست‌آورید.



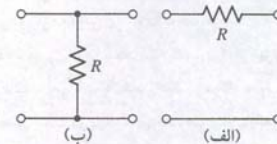
شکل ۱۷-۶۱

۴۱. (الف) مطلوبست  $[h]$  برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۲ (ب)  $Z_{out}$  را بیابید به‌شرطی‌که ورودی شامل  $V_s$  سری با  $R_s = 200\Omega$  باشد.



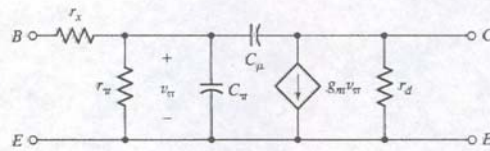
شکل ۱۷-۶۲

۴۲. برای هر دو مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۳،  $[y]$ ،  $[z]$  و  $[h]$  را بیابید. اگر پارامتری بی‌نهایت است از مجموعه آن پارامتر بگذرید.



شکل ۱۷-۶۳

۴۳. شکل ۱۷-۶۴ یک مدل ترانزیستور دو قطبی (bjt) را نشان می‌دهد که برای سیگنال‌های کوچک معتبر است. اگر پایانه آمیتر (E) برای ورودی و خروجی مشترک باشد و بیس (B) به عنوان ورودی فرض شود عبارتی برحسب  $r_x$ ،  $r_\pi$ ،  $C_\mu$ ،  $C_\pi$ ،  $g_m$ ،  $r_d$  برای (الف)  $h_{oe}$ ، (ب)  $h_{fe}$ ، (ج)  $h_{ie}$  و (د)  $h_{re}$ .



شکل ۱۷-۶۴

## ۱۷-۶ پارامترهای انتقال

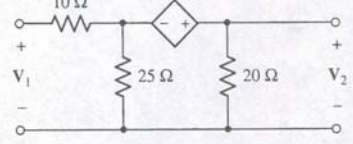
۴۴. با فرض

$$[y] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad [b] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad [d] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

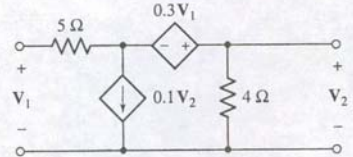
مطلوبست (الف)  $[y][b]$ ، (ب)  $[b][y]$ ، (ج)  $[b][c]$ ، (د)  $[c][d]$  و (ه)  $[y][b][c][d]$ .

۴۵. (الف)  $t$  را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۵ به‌دست‌آورید. (ب)  $Z_{out}$  را برای این مدار محاسبه کنید به‌شرط این‌که مقاومت منبع  $R_s = 15\Omega$  باشد.



شکل ۱۷-۶۵

۴۶.  $t$  را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۶۶ به‌دست‌آورید.



شکل ۱۷-۶۶

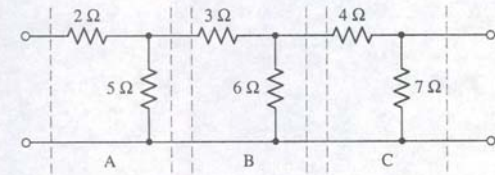
۴۷. (الف)  $[t]_B$ ،  $[t]_A$  و  $[t]_C$  را برای مدار دو درگاه متوالی شکل ۱۷-۶۷ پیدا کنید. (ب)  $[t]$  را برای مدار دودرگاه شش مقاومتی بیابید.

۴۸. (الف)  $[t]_A$  را برای مقاومت  $2\Omega$  شکل ۱۷-۶۸ به‌دست‌آورید. (ب) نشان دهید که  $[t]$  برای یک مقاومت  $10\Omega$  با رابطه زیر به‌دست‌می‌آید  $5([t]_A)$ .

۴۹. (الف) مطلوبست  $[t]_a$ ،  $[t]_b$  و  $[t]_c$  برای شبکه شکل ۱۷-۶۹ (الف)، (ب) و (ج). (ب) با استفاده از قوانین اتصال درونی متوالی مدارهای دو درگاه،  $[t]$  را برای شبکه شکل ۱۷-۶۹ (د) به‌دست‌آورید.

۵۰. (الف)  $[t]$  را برای مدار دو درگاه شکل ۱۷-۷۰ پیدا کنید. از تکنیک‌های

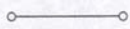
اتصال متوالی مدارهای دو درگاه استفاده کرده و  $[t]_{new}$  را بیابید به‌شرطی‌که مقاومت  $20\Omega$  در دو سر ورودی وصل باشد.



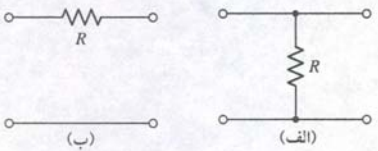
شکل ۱۷-۶۷



$[t]_A$

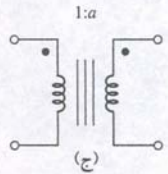


شکل ۱۷-۶۸

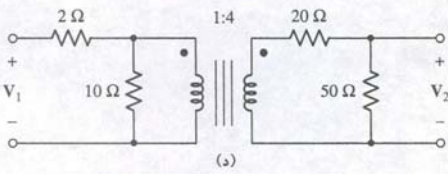


(الف)

(ب)

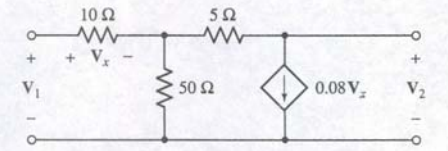


(ج)



(د)

شکل ۱۷-۶۹



شکل ۱۷-۷۰



## تحلیل فوریه مدار

### مقدمه

در این فصل به معرفی تحلیل مدار با مطالعه توابع تناوبی یا پریودیک در هر دو حوزه زمان و فرکانس می‌پردازیم. خصوصاً توابع تحریک متناوبی که ماهیت عملیاتی دارند و شرایط ریاضی خاصی را برآورده می‌سازند و ما می‌توانیم آن‌ها را در آزمایشگاه تولید کنیم، مورد بحث قرار خواهند گرفت. چنین توابعی می‌توانند از جمع بینهایت تابع سینوسی و کسینوسی که با هم هماهنگی دارند، تشکیل شوند. بنابراین چون پاسخ واداشته به هر مؤلفه سینوسی به سادگی از تحلیل حالت ماندگار تعیین می‌شود، پاسخ شبکه خطی به تابع تحریک تناوبی کلی می‌تواند از تجميع پاسخ‌های جزئی به دست آید.

عنوان سری فوریه در زمینه‌های متعددی از جمله مخابرات اهمیت خاص دارد. استفاده از تکنیک‌های مبتنی بر سری فوریه در کمک به تحلیل مدار سال‌ها بود که از رده خارج شده بود، ولی اکنون با تجهیزاتی مواجه هستیم که در آن‌ها از منابع تغذیه مدوله شده پالسی استفاده می‌شود (مثل کامپیوتر). موضوع هارمونیک‌ها در سیستم‌های قدرت و الکترونیک قدرت و حتی نیروگاه‌های بزرگ به سرعت تبدیل به یک مسئله حاد شده است. این مشکلات و حل آن‌ها تنها به کمک تحلیل مبتنی بر سری فوریه امکان‌پذیر است.

### ۱-۱۸ فرم مثلثاتی سری فوریه

می‌دانیم که پاسخ کامل یک مدار خطی به یک تابع تحریک اختیاری متشکل از مجموع پاسخ واداشته و پاسخ طبیعی است. پاسخ طبیعی قبلاً در فصل‌های ۷ تا ۹ ملاحظه شد، ولی با چند استثناء فقط مدارهای ساده سری یا موازی RC، RL، و RLC بررسی شدند. پس از آن در فصل‌های ۱۴ و ۱۵ مفهوم فرکانس مختلط روشی کلی را در یافتن پاسخ طبیعی پیش رو گذاشت. دیدیم که پس از استقرار قطب‌های یک تابع تبدیل شبکه، می‌توان فرم پاسخ طبیعی را نوشت و به این ترتیب روشی قوی و کلی را برای تعیین پاسخ طبیعی ملاحظه کردیم.

### هارمونیک‌ها

عبارت نمایش تابع پریودیک حاصل از مجموع بینهایت تابع سینوسی یا کسینوسی را با مثالی ساده می‌توان حس کرد. اجازه دهید ابتدا یک تابع کسینوسی با فرکانس زاویه‌ای  $\omega_0$  را ملاحظه کنیم:

$$v_1(t) = 2 \cos \omega_0 t$$

نه در آن

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

پریود T برابر است با:

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

#### مفاهیم کلیدی

نمایش توابع پریودیک به صورت مجموع

سینوس‌ها و کسینوس‌ها

فرکانس‌های هارمونیک

تقارن زوج و فرد

تقارن نیم‌موج

فرم مختلط سری فوریه

طیف خطوط مقطع

تبدیل فوریه

استفاده از سری فوریه و تبدیل فوریه در

تحلیل مدار

پاسخ سیستم و کانولوشن در حوزه فرکانس





$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \quad (1)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

که فرکانس اصلی با رابطه زیر به  $T$  مرتبط است:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

که  $a_0, a_n, b_n$  ثابت‌های وابسته به  $n$  و  $f(t)$  می‌باشند. معادله (۱) فرم مثلثاتی سری فوریه  $f(t)$  است و روند تعیین مقادیر ثابت  $a_0, a_n, b_n$  را **تحلیل فوریه** می‌نامند. هدف ما اثبات این قضیه نیست بلکه ایجاد روش‌های تحلیل فوریه و ایجاد قضیه‌ای معقول است.

### چند انتگرال مثلثاتی مفید

قبل از محاسبه ثابت‌های سری فوریه اجازه دهید چند انتگرال مفید را سرجمع کنیم. بگذارید  $n$  و  $k$  هر عنصر از مجموعه اعداد صحیح باشند. در انتگرال‌های زیر، حدود انتگرال 0 و  $T$  فرض شده‌اند و فواصل  $T$  پر شود همواره یکسان است. متوسط یک موج سینوسی در یک  $T$  پر شود صفر است.

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t \, dt = 0 \quad (2)$$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t \, dt = 0 \quad (3)$$

همچنین به سادگی می‌توان نشان داد که انتگرال‌های زیر صفرند.

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt = 0 \quad (4)$$

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t \sin n\omega_0 t \, dt = 0 \quad (k \neq n) \quad (5)$$

$$\int_0^T \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt = 0 \quad (k \neq n) \quad (6)$$

حالاتی که از معادلات (۵) و (۶) انتظار داریم، هم به سادگی محاسبه می‌شوند، داریم:

$$\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} \quad (7)$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t \, dt = \frac{T}{2} \quad (8)$$

### محاسبه ضرایب سری فوریه

کنون محاسبه ثابت‌های مجهول در سری فوریه به سادگی انجام می‌شود. ابتدا  $a_0$  را به دست می‌آوریم. اگر از هر دو طرف معادله (۱) در یک دوره تناوب انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int_0^T f(t) \, dt = \int_0^T a_0 \, dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \, dt$$

لی هر جمله در جمع فوق به صورت معادلات (۲) و (۳) است. پس:

$$\int_0^T f(t) \, dt = a_0 T$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt \quad (9)$$

گرچه  $T$  معمولاً زیرنویس صفر ندارد، ولی پررود فرکانس اصلی است. هارمونیک‌های این تابع سینوسی فرکانس‌های  $n\omega_0$  دارند که در آن  $\omega_0$  فرکانس اصلی و  $n = 1, 2, 3, \dots$  است. فرکانس اولین هارمونیک، همان فرکانس اصلی می‌باشد. اکنون بیایید ولتاژ هارمونیک سوم را بیابیم:

$$v_{3a}(t) = \cos 3\omega_0 t$$

تابع اصلی  $v_1(t)$  و سومین هارمونیک  $v_{3a}(t)$  و مجموع این دو موج به صورت توابع زمانی در شکل ۱۸-۱ (الف) نشان داده شده است. باید توجه داشت که حاصل جمع نیز تناوبی است و پررود آن  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  می‌باشد.

با تغییر دامنه و فاز هارمونیک سوم، تابع پررودیک حاصل تغییر می‌نماید. بنابراین شکل ۱۸-۱ (ب) اثر ترکیب  $v_1(t)$  را با هارمونیک سومی که در آن دامنه حاصل کمی بزرگتر است، نشان می‌دهد:

$$v_{3b}(t) = 1.5 \cos 3\omega_0 t$$

با جابه‌جایی فاز هارمونیک سوم به صورت زیر:

$$v_{3c}(t) = \sin 3\omega_0 t$$

مجموع که در شکل ۱۸-۱ (ج) دیده می‌شود، شکل متفاوتی دارد. در همه حالات، تناوب یا پررود موج برابر با پررود موج اصلی است. ماهیت موج به دامنه و فاز هارمونیک وابسته است و خواهیم دید که می‌توان امواجی را تولید کرد که مشخصه کاملاً غیر سینوسی را با ترکیب توابع سینوسی دارا هستند.

پس از آشنایی با کاربرد مجموع بینهایت تابع سینوسی و کسینوسی در نمایش پررودیک امواج، اکنون به نمایش حوزه فرکانس یک موج نامتناوب کلی به روشی مشابه تبدیل لاپلاس می‌پردازیم.

### تمرین

۱۸-۱ اجازه دهید هارمونیک سوم ولتاژی به هارمونیک اصلی به صورت  $v = 2 \cos \omega_0 t + V_{m3} \sin 3\omega_0 t$  اضافه شود. موج حاصل در شکل ۱۸-۱ (ج) به ازای  $V_{m3} = 1$  نشان داده شده است. (الف) مقدار  $V_{m3}$  را طوری به دست آورید که  $v(t)$  در  $\omega_0 t = 2\pi/3$  دارای شیب صفر باشد. (ب)  $v(t)$  را در  $\omega_0 t = 2\pi/3$  به دست آورید. جواب: 0.577 و -1.000.

### سری فوریه

ابتدا تابع پررودیک  $f(t)$  را که در بخش ۲-۱۱ ملاحظه کردیم با رابطه زیر در نظر می‌گیریم.

$$f(t) = f(t + T)$$

که در آن  $T$  دوره تناوب یا پررود است. به علاوه فرض می‌کنیم که  $f(t)$  شرایط زیر را برآورده می‌سازد.

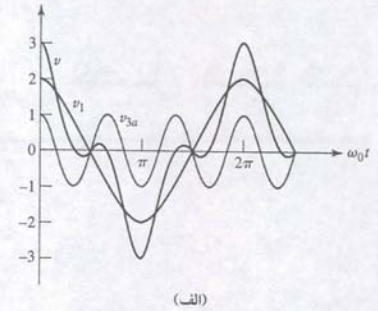
۱.  $f(t)$  در هر جایی تک‌مقداری است، یعنی تعریف ریاضی یک تابع را برآورده می‌کند.

۲. انتگرال  $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| \, dt$  در ازای هر  $t_0$  وجود دارد (یعنی بینهایت نیست).

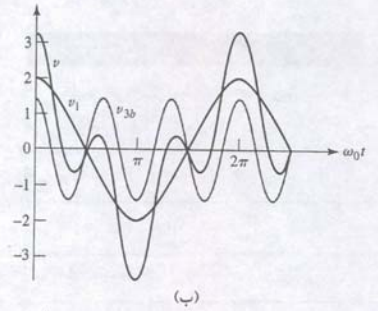
۳. تعداد گسستگی‌های  $f(t)$  در یک دوره تناوب معین است.

۴.  $f(t)$  دارای تعداد معینی ماکزیمم و مینیمم در یک پررود است.

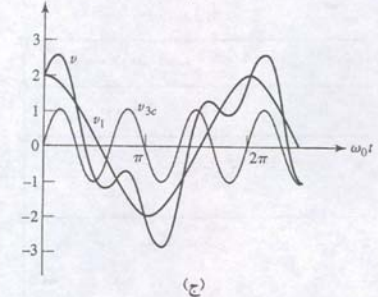
با فرض داشتن تابع پررود یک  $f(t)$ ، قضیه فوریه بیان می‌کند که می‌توان  $f(t)$  را با یک سری نامحدود نشان داد:



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۸-۱ چند شکل موج مختلف از بی‌نهایت موج موجود که می‌توان از ترکیب یک موج اصلی و هارمونیک سوم به دست آورد. موج اصلی  $v_1 = 2 \cos \omega_0 t$  است و هارمونیک سوم برابر است با (الف)  $v_{3a} = \cos 3\omega_0 t$ ، (ب)  $v_{3b} = 1.5 \cos 3\omega_0 t$  و (ج)  $v_{3c} = \sin 3\omega_0 t$ .

$f(t)$  را یک جریان یا ولتاژ فرض می‌کنیم، هر ولتاژ یا جریانی که عملاً تولید شود، این شرایط را تصدیق می‌کند. البته می‌توان توابعی ریاضی نوشت که شرایط را تأیید نکنند، ولی فرض بر این است که این چهار شرط همیشه برقرار باشد.



### هدف مسئله را شناسایی کنید.

ما با تابع پریود یکی مواجهیم که بخشی از آن یک موج سینوسی است و از ما خواسته شده است تا سری فوریه آن را پیدا کنیم. اگر همه ولتاژهای منفی حذف نشده بود، مسئله بسیار پیش پا افتاده می شد و تنها یک موج سینوسی لازم بود.

### اطلاعات معلوم را جمع آوری نمایید.

برای این که این تابع را به صورت سری فوریه درآوریم، ابتدا باید تناوب را معین کنیم و سپس ولتاژ گرافیکی را به صورت یک تابع تحلیلی از زمان بیان نماییم، از روی گراف، پریود برابر است با:

$$T = 0.4 \text{ s}$$

و بنابراین

$$f_0 = 2.5 \text{ Hz}$$

و

$$\omega_0 = 5\pi \text{ rad/s}$$

### ارائه طرح.

سراسرترین روش استفاده از معادلات ۹ تا ۱۱ برای محاسبه مجموعه ضرایب  $a_n, a_0$  و  $b_n$  می باشد. برای انجام آن، تابعی برای  $v(t)$  لازم داریم، که سراسرترین آن در فاصله  $t = 0$  تا  $t = 0.4$  تعریف می شود:

$$V(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & 0 \leq t \leq 0.1 \\ 0 & 0.1 \leq t \leq 0.3 \\ V_m \cos 5\pi t & 0.3 \leq t \leq 0.4 \end{cases}$$

با این وجود، انتخاب پریود از  $t = -0.1$  تا  $t = 0.3$  معادلات کمتر و در نتیجه انتگرال کمتری نیاز دارد:

$$V(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & -0.1 \leq t \leq 0.1 \\ 0 & 0.1 \leq t \leq 0.3 \end{cases} \quad (12)$$

گرچه هر یک از دو فرم نمایش، پاسخ صحیحی را به دست می دهد ولی نمایش اخیر تابع ترجیح داده می شود.

### معادلات مناسب را بنویسید.

مؤلفه فرکانس صفر به سادگی به دست می آید.

$$a_0 = \frac{1}{0.4} \int_{-0.1}^{0.3} v(t) dt = \frac{1}{0.4} \left[ \int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t dt + \int_{0.1}^{0.3} (0) dt \right]$$

دامنه موج کسینوس کلی برابر است:

$$a_n = \frac{2}{0.4} \int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \cos 5\pi n t dt$$

و دامنه موج سینوسی کلی برابر است با:

$$b_n = \frac{2}{0.4} \int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \sin 5\pi n t dt$$

که در واقع همیشه صفر است و از اینرو در اینجا بیشتر مورد بحث قرار نمی گیرد.

### آیا اطلاعات دیگری لازم است.

وقتی که  $n$  برابر واحد باشد، فرم تابعی که پس از انتگرال گیری به دست می آید، با بقیه مقادیر انتخابی  $n$  تفاوت دارد. اگر  $n = 1$  باشد:

این ثابت  $a_0$  در واقع مقدار متوسط  $f(t)$  در یک دوره تناوب است و بنابراین ما آن را به عنوان مؤلفه dc تابع  $f(t)$  می شناسیم.

برای محاسبه ضرایب کسینوسی، مثل  $a_k$  یعنی ضریب  $\cos k\omega t$ ، ابتدا هر سمت معادله (۱) را در  $\cos k\omega t$  ضرب و سپس از طرفین معادله در یک پریود کامل انتگرال می گیریم.

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t dt &= \int_0^T a_0 \cos k\omega_0 t dt \\ &+ \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt \\ &+ \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos k\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt \end{aligned}$$

از معادلات (۳)، (۴) و (۶) دیده می شود که هر جمله در سمت راست این معادله به جز جمله  $a_n$  که در آن  $n = k$  است، صفر می باشد. ما این جمله را با استفاده از معادله (۸) محاسبه می کنیم و پس از انجام آن در می یابیم که  $a_k$  یا  $a_n$  برابر است با:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (10)$$

این نتیجه دو برابر مقدار متوسط حاصل ضرب  $f(t) \cos \omega_0 t$  در یک پریود است.

به روشی مشابه، ما  $b_k$  را با ضرب در  $\sin k\omega_0 t$  و گرفتن انتگرال حول یک پریود و این که همه جملات به جز یکی صفرند و اجرای تک انتگرال به وسیله معادله (۷) به دست می آوریم. نتیجه چنین است:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (11)$$

که دو برابر مقدار متوسط  $f(t) \sin n\omega_0 t$  در یک دوره تناوب می باشد.

اکنون به کمک معادلات (۹) تا (۱۱) می توان مقادیر  $a_0$  و همه  $a_n$  و  $b_n$  را در سری فوریه معادله (۱) به دست آوریم.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0 \quad (9)$$

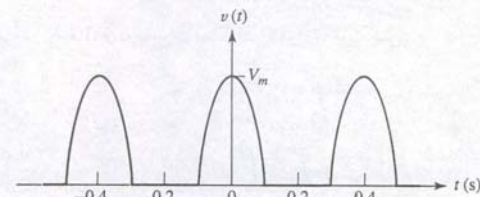
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (10)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (11)$$

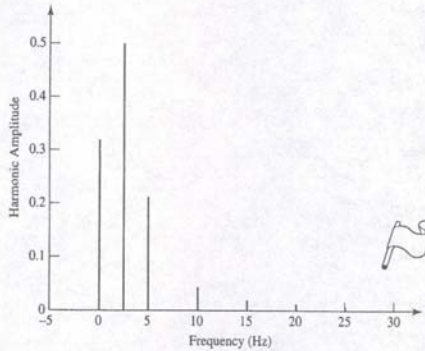
مثال ۱۸-۱

شکل موج نیم سینوسی شکل ۲-۱۸ یک پاسخ ولتاژ حاصل از یک مدار یکسوساز نیم موج غیرخطی است که هدف از آن تبدیل ولتاژ ورودی سینوسی به یک ولتاژ خروجی dc است. سری فوریه مربوط به این موج را نشان دهید.



شکل ۱۸-۲ خروجی یک یکسوساز نیم موج که به ورودی آن موج سینوسی اعمال شده است.





شکل ۱۸-۵



چنین نموداری که گاهی طیف گسسته خوانده می‌شود، با یک نگاه سریع اطلاعات زیادی را در اختیار می‌گذارد. خصوصاً می‌توان دید که چند جمله از سری برای داشتن تقریبی منطقی از موج اصلی لازم است. در طیف خطی شکل ۱۸-۵ هارمونیک‌های هشتم و دهم تنها اصلاح کوچکی را فراهم می‌کنند (به ترتیب فرکانس‌های ۲۰ و ۲۵ هرتز). با حذف هارمونیک‌های بعد از ششم تقریبی مناسب دارد. خواننده می‌تواند با مشاهده شکل ۱۸-۳ در این امر قضاوت کند.

به یک نکته باید توجه کرد. در مثالی که ملاحظه کردیم، جملات سینوسی وجود نداشته و لذا دامنه هارمونیک  $n$  برابر  $|a_n|$  بود. اگر  $b_n$  برابر صفر نباشد، آن‌گاه دامنه مؤلفه در فرکانس  $n\omega_0$  باید  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  باشد. این یک کمیت کلی است که باید در طیف خطی آن را نشان دهیم. هنگامی که راجع به فرم مختلط سری فوری صحبت می‌کنیم، خواهیم دید که این دامنه خیلی سراسر است تر به دست می‌آید.

علاوه بر طیف دامنه، طیف فاز گسسته را نیز ایجاد می‌نماییم. در هر فرکانس  $n\omega_0$ ، جملات سینوس و کسینوس را با یکدیگر ترکیب می‌کنیم تا زاویه فاز  $\phi_n$  به دست آید.

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos \left( n\omega_0 t + \tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n} \right) \\ = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

یا

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{-b_n}{a_n}$$

در معادله (۱۶) در ازای هر  $n$ ،  $\phi = 0$  یا  $180^\circ$  است.

سری فوری حاصل برای این مثال، جملات سینوسی هارمونیک‌های فرد را در میان جملات کسینوسی به جز هارمونیک اصلی نداشت. غیاب بعضی جملات را می‌توان در سری فوری انتظار داشت. این موضوع با بررسی تقارن تابع زمانی موجود قبل از انتگرال‌گیری قابل پیش‌بینی است. ما استفاده از تقارن را در بخش زیر دنبال می‌کنیم.

## ۱۸-۲ استفاده از تقارن

### تقارن زوج و فرد

دو نوع تقارن که ما به راحتی می‌توانیم آن‌ها را تشخیص دهیم، تقارن تابع زوج و تقارن تابع فرد و یا ساده‌تر بگوییم، تقارن زوج و تقارن فرد است. گوییم تابع  $f(t)$  دارای خاصیت تقارن زوج است اگر

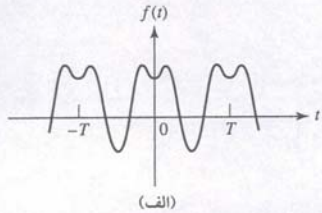
$$f(t) = f(-t) \quad (17)$$

توابعی چون  $t^2$ ،  $\cos 3t$ ،  $\cos t$ ،  $\ln(\cos t)$  و ثابت  $C$  همگی خاصیت تقارن زوج دارند. جایگزینی  $t$  با  $(-t)$  مقدار هیچ یک از این توابع را عوض نمی‌کند. این تقارن را می‌توان به صورت گرافیکی نیز تشخیص داد. اگر  $f(t) = f(-t)$  باشد، آن‌گاه تقارن تصویری حول محور  $f(t)$  وجود دارد. تابع شکل ۱۸-۶ (الف) تقارن زوج دارد. اگر شکل حول محور  $f(t)$  تا شود، آن‌گاه بخش‌های مثبت و منفی تابع دقیقاً روی هم منطبق می‌شوند.

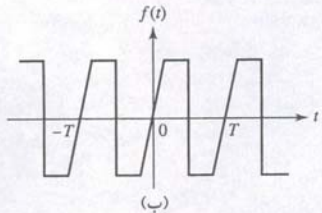
تابع فرد را چنین تعریف می‌کنیم که اگر در تابع،  $f(t)$  تقارن فرد وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$f(t) = -f(-t) \quad (18)$$

به بیان دیگر اگر  $t$  با  $(-t)$  جایگزین شود، آن‌گاه منفی تابع حاصل می‌گردد. مثلاً  $\sin t$ ،  $t \cos 70t$  و  $t \sqrt{1+t^2}$  تابع ترسیم شده در شکل ۱۸-۶ (ب) همگی تقارن فرد دارند.



(الف)



(ب)

شکل ۱۸-۶ (الف) موجی با تقارن زوج. (ب) موجی با تقارن فرد.

$$a_1 = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos^2 5\pi t \, dt = \frac{V_m}{2} \quad (13)$$

در صورتی که اگر  $n$  برابر واحد نباشد، داریم:

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos 5\pi t \cos 5\pi n t \, dt$$

■ اقدام به حل.

پس از حل داریم:

$$a_0 = \frac{V_m}{\pi} \quad (14)$$

$$a_n = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \frac{1}{2} [\cos 5\pi(1+n)t + \cos 5\pi(1-n)t] \, dt$$

یا

$$a_n = \frac{2V_m}{\pi} \frac{\cos(\pi n/2)}{1-n^2} \quad (n \neq 1) \quad (15)$$

انتگرال‌گیری مشابهی نشان می‌دهد که برای هر مقدار  $n$ ،  $b_n = 0$  است و به این ترتیب سری فوری فاقد جملات سینوسی می‌باشد. پس سری فوری حاصل از معادلات (۱)، (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) برابر است با:

$$v(t) = \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2} \cos 5\pi t + \frac{2V_m}{3\pi} \cos 10\pi t \\ - \frac{2V_m}{15\pi} \cos 20\pi t + \frac{2V_m}{35\pi} \cos 30\pi t - \dots \quad (16)$$

■ صحت حل را تصدیق کنید. آیا منطقی است؟

حل را می‌توان با اعمال مقدار در معادله (۱۶) و تکرار آن به دفعات، چک کرد. با این وجود روش دیگر ترسیم آن برای  $n = 1, 2, 4$  طبق شکل ۱۸-۳ است. می‌توان دید هر چقدر جملات در تابع بیشتر باشد، منحنی به شکل ۱۸-۲ نزدیک‌تر است.

## تمرین

۱۸-۲ موج تناوب  $f(t)$  به صورت زیر تعریف شده است:  $f(t) = -4$  در  $0 < t < 0.3$ ،  $f(t) = 6$  در  $0.3 < t < 0.4$ ،  $f(t) = 0$  در  $0.4 < t < 0.5$  و  $T = 0.5$ . مطلوب است (الف)  $a_0$ ، (ب)  $a_3$ ، (ج)  $b_1$ .

۱۸-۳ سری فوری را برای سه موج ولتاژ شکل ۱۸-۴ بنویسید.

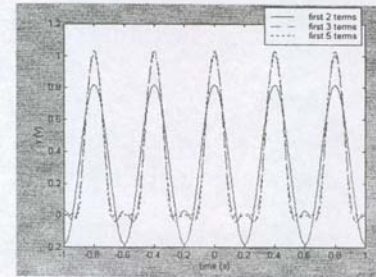
جواب ۱۸-۲:  $-1.200$ ،  $1.383$  و  $-4.44$ .

$$\text{جواب ۱۸-۳: } V: (4/\pi)(\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t + \dots) \\ V: (4/\pi)(\cos \pi t - \frac{1}{3} \cos 3\pi t + \frac{1}{5} \cos 5\pi t - \dots) \\ V: (8/\pi^2)(\sin \pi t - \frac{1}{9} \sin 3\pi t + \frac{1}{25} \sin 5\pi t - \dots)$$

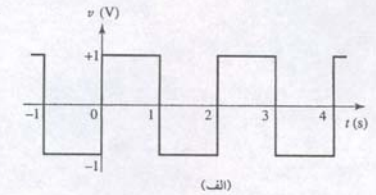
## طیف خطی و فاز

در شکل ۱۸-۲،  $v(t)$  از مثال ۱۸-۱ را به صورت گرافیکی و به فرم تابعی از زمان نشان داده شد. در معادله (۱۲)،  $v(t)$  به شکل تابعی تحلیلی از زمان بیان گشت که هر یک از نمایش‌ها را می‌توان در حوزه زمان تصور کرد. معادله (۱۶) یعنی نمایش سری فوری  $v(t)$ ، نیز در حوزه زمان بیان شده است، ولی به راحتی می‌تواند در حوزه فرکانس هم نمایش داده شود. مثلاً شکل ۱۸-۵ دامنه هر مؤلفه  $v(t)$  را که به آن طیف خطی می‌گویند، نشان می‌دهد. در این‌جا اندازه هر مؤلفه فرکانس (یعنی  $|a_0|$ ،  $|a_1|$  و غیره) با طول خطی عمودی در فرکانس مربوطه ( $\omega_0$ ،  $\omega_1$  و غیره) مشخص می‌شود. به خاطر سادگی  $V_m = 1$  فرض می‌شود. اگر مقداری متفاوت برای  $V_m$  موجود باشد، تنها تغییر محور لایا مقدار جدید لازم است.

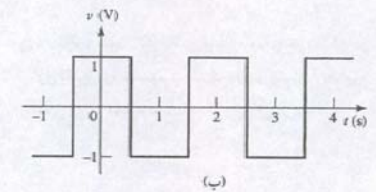
باید یادآوری کنیم که در این‌جا تصادفاً عبارت  $a_n$  به ازای  $n \neq 1$ ، در حد  $n \rightarrow 1$  جمله درست  $a_1$  را به دست می‌آورد.



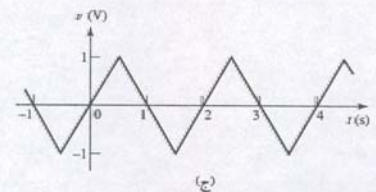
شکل ۱۸-۳ معادله (۱۶) با در نظر گرفتن  $n = 1$ ،  $n = 2$  و  $n = 6$  جمله اول. برای سادگی فرض کرده‌ایم  $V_m = 1$ .



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۸-۴



اکنون در اولین انتگرال  $-t$  قرار دهیم:

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 f(-\tau) \cos(-n\omega_0 \tau) (-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[ \int_0^{T/2} f(-\tau) \cos n\omega_0 \tau d\tau + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right]$$

ولی  $f(-t) = -f(t)$  است و لذا

$$a_n = 0 \quad (\text{تقارن فرد}) \quad (21)$$

استدلای مشابه ولی ساده تر نشان می دهد که

$$a_0 = 0 \quad (\text{تقارن فرد})$$

بنابراین با تقارن فرد  $a_n = 0$  و  $a_0 = 0$  است. برعکس اگر  $a_n = 0$  و  $a_0 = 0$  باشد، تابع تقارن فرد دارد.

می توان  $b_n$  را دوباره با انتگرال گیری در نصف محدوده به دست آورد.

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (22)$$

مثال هایی از تقارن فرد و زوج در تمرین ۳-۱۸، قبل از این بخش ارائه شد. در بخش های (الف) و (ب) دو موج مربعی با دامنه ها و پریود مساوی توابع مفروض بودند. با این وجود با انتخاب مبدأ زمان، تقارن فرد در بخش (الف) و تقارن زوج در بخش (ب) ایجاد شده است و سری های حاصل به ترتیب شامل جملات فقط سینوسی و فقط کسینوسی اند. لازم به تذکر است که فقط  $0 = t$  را می توان طوری اختیار کرد که هیچ تقارن زوج یا فرد به وجود نیاید. در این صورت تعیین ضرایب جملات در سری فوریه حداقل دو برابر طولانی تر خواهد شد.

### تقارن نیم موج

سری فوریه هر دو موج مربعی فوق یک مشخصه جالب دیگر نیز دارد: هیچ یک از آن ها هارمونیک های\* زوج ندارند. یعنی فقط مؤلفه هایی از فرکانس در سری وجود دارند که فرکانس های آن ها مضارب فردی از فرکانس اصلی است. برای مقادیر زوج  $n$ ،  $a_n$  و  $b_n$  صفرند. این نتیجه حاصل نوع دیگری از تقارن به نام **تقارن نیم موج** است. در این حالت گوییم  $f(t)$  خاصیت تقارن نیم موج دارد. اگر

$$f(t) = -f(t - \frac{1}{2} T)$$

به عبارتی دیگر

$$f(t) = -f(t + \frac{1}{2} T)$$

به جز در تغییر علامت، هر نیم سیکل مثل نیم سیکل دیگر است. تقارن نیم موج، برخلاف تقارن زوج و فرد تابعی از انتخاب نقطه  $t = 0$  نیست. بنابراین می توان گفت که موج مربعی (شکل ۱۸-۴ (الف) یا (ب)) تقارن نیم موج دارد. هیچ یک از امواج شکل ۶-۱۸ دارای تقارن نیم موج نیستند ولی شکل موج های شکل ۷-۱۸ که تا حدی تقارن دارند.

می توان نشان داد که سری فوریه هر تابعی که تقارن نیم موج دارد، شامل هارمونیک های فرد است. اجازه دهید ضرایب  $a_n$  را بررسی کنیم. داریم:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right]$$

مشخصات گرافیکی تابع فرد آشکار است. اگر بخشی از  $f(t)$  را برای  $T > 0$  حول محور مثبت  $t$  بچرخانیم و شکل حاصل حول محور  $f(t)$  بچرخد، دو نمودار بر هم منطبق خواهد شد و در واقع یکی بر روی دیگری قرار می گیرد. به بیان دیگر تقارن را نسبت به مبدأ داریم و نه همچون تابع زوج حول محور  $f(t)$ .

با تعریف تقارن زوج و فرد، باید توجه کرد که ضرب دو تابع با تقارن زوج یا دو تابع با تقارن فرد، به یک تابع زوج منجر می گردد. به علاوه، ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد، یک تقارن فرد را به دنبال دارد.

### تقارن و جملات سری فوریه

اکنون بایباید تأثیر تقارن را در یک سری فوریه تحقیق کنیم. اگر عبارتی را در نظر بگیریم که یک تابع زوج  $f(t)$  و مجموع بینهایت جمله سینوسی و کسینوسی را برابر قرار دهد، آنگاه واضح است که مجموع نیز باید تابع زوجی باشد. در هر صورت سینوس یک تابع فرد است و هیچ جمعی از سینوس ها نمی تواند یک تابع زوجی به جز صفر تولید نماید (صفر هم زوج و هم فرد است). بنابراین چنین باید انتظار داشت که سری فوریه هر تابع فقط از یک ثابت و توابع کسینوسی تشکیل می گردد. بایباید اکنون به دقت نشان دهیم که  $b_n = 0$  است. داریم:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 f(t) \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right]$$

حال بگذارید متغیر  $t$  را در اولین انتگرال به  $-t$  یا  $t = -t$  تبدیل کنیم و از  $f(t) = f(-t)$  استفاده نماییم:

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 f(-\tau) \sin(-n\omega_0 \tau) (-d\tau) + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[ - \int_0^{T/2} f(\tau) \sin n\omega_0 \tau d\tau + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right]$$

اما تغییر نماد برای شناسایی متغیر انتگرال نمی تواند مقدار انتگرال را تغییر دهد.

$$\int_0^{T/2} f(\tau) \sin n\omega_0 \tau d\tau = \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

و

$$b_n = 0 \quad (\text{تقارن زوج}) \quad (19)$$

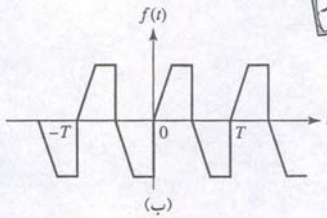
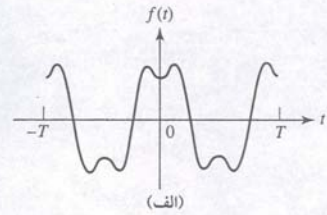
و دیده می شود که هیچ جمله سینوسی وجود ندارد. بنابراین اگر  $f(t)$  تقارن زوجی را به نمایش بگذارد، آنگاه  $b_n = 0$  است. برعکس، اگر  $b_n = 0$  باشد، آنگاه  $f(t)$  باید تقارن زوج داشته باشد. بررسی مشابهی روی عبارت  $a_n$  منجر به انتگرال در نیم پریود  $t = 0$  تا  $t = \frac{1}{2} T$  می گردد:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (20)$$

می بینیم که  $a_n$  را برای یک تابع زوج می توان با دو برابر کردن انتگرال در نیمی از محدوده آن به دست آورد. یک تابع فرد فاقد جمله ثابت یا جملات کسینوسی در بسط فوریه اش می باشد. بگذارید بخش دوم عبارت فوق را ثابت کنیم:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right]$$



شکل ۱۸-۷ (الف) موجی که تا حدودی شبیه شکل ۱۸-۶ (الف) است، ولی تقارن نیم موج دارد. (ب) موجی که شبیه شکل ۱۸-۶ (ب) است ولی تقارن نیم موج دارد.

دقت کنید تا هارمونیک زوج را با تابع زوج و هارمونیک فرد را با تابع فرد اشتباه نکنیم. مثلاً  $b_{10}$  ضریب یک هارمونیک زوج است. ولی اگر  $f(t)$  یک تابع زوج باشد، مقدار آن صفر است.



$$v = -10, 7 < t < 9 \text{ و به همین ترتیب (ج) } -1 < t < 3, v = 8t, 1 < t < 3, v = 0$$

و به همین ترتیب

۱۸-۵ سری فوریه را برای تمرین ۴-۱۸ (الف) و (ب) معین نمایید.

جواب ۴-۱۸: خیر، بله، ۸؛ خیر، خیر، خیر، ۸؛ خیر، بله، خیر، ۴؛

جواب ۵-۱۸:

$$\sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{10}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi t}{4} + \sin \frac{n\pi t}{4} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\pi} \left[ \left( \sin \frac{3n\pi}{4} - 3 \sin \frac{n\pi}{4} \right) \cos \frac{n\pi t}{4} + \left( \cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4} \right) \sin \frac{n\pi t}{4} \right]$$

جدول ۱۸-۱ خلاصه‌ای از ساده‌سازی‌های مبتنی بر سری فوریه.

| نوع متقارن    | مشخصه  | ساده‌سازی  |
|---------------|--|--|
| زوج           | $f(t) = -f(t)$   | $b_n = 0$  |
| فرد           | $f(t) = -f(-t)$  | $a_n = 0$  |
| نیم موج       | $f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$<br>یا<br>$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$   | $a_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$<br>$b_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$ |
| نیم موج و زوج | $f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ و<br>$f(t) = -f(t)$<br>یا<br>$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ و<br>$f(t) = -f(t)$   | $a_n = \begin{cases} \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$<br>$b_n = 0$<br>برای تمام $n$ ها  |
| نیم موج و فرد | $f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$ و<br>$f(t) = -f(-t)$<br>یا<br>$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ و<br>$f(t) = -f(-t)$ | $a_n = 0$<br>$b_n = \begin{cases} \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$  |

## ۳-۱۸ پاسخ کامل به توابع تحریک متناوب

کنون با استفاده از سری فوریه می‌توان یک تابع تحریک متناوب دلخواه را با مجموع بینهایت تابع تحریک سینوسی نشان داد. پاسخ واداشته به هر یک از این توابع را می‌توان با تحلیل حالت ماندگار معین می‌کرد و پاسخ طبیعی هم از قطب‌های یک تابع تبدیل مناسب شبکه به دست می‌آید. مقادیر اولیه موجود در تمام شبکه از جمله مقدار اولیه پاسخ واداشته، اجازه می‌دهد تا دامنه پاسخ طبیعی انتخاب گردد. آن‌گاه پاسخ‌های واداشته و طبیعی حاصل می‌شود.

پاسخ متناوب موج مربعی شکل ۸-۱۸ (الف)، همراه با مؤلفه dc آن، وقتی که به مدار RL سری شکل ۸-۱۸ (ب) اعمال شود را بیابید. تابع تحریک در  $t = 0$  اعمال می‌شود و جریان پاسخ موردنظر است. مقدار اولیه آن صفر می‌باشد.

تابع تبدیل، یک فرکانس اصلی  $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$  دارد و سری فوریه آن با مقایسه سری فوریه موج شکل ۴-۱۸ (الف) در تمرین ۳-۱۸ نوشته می‌شود:

$$v_s(t) = 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{\sin 2nt}{n}$$

که می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$a_n = \frac{2}{T} (I_1 + I_2)$$

اکنون تغییر متغیر  $\tau = t + \frac{1}{2}T$  را در انتگرال  $I_1$  می‌دهیم:

$$I_1 = \int_0^{T/2} f\left(\tau - \frac{1}{2}T\right) \cos n\omega_0 \left(\tau - \frac{1}{2}T\right) d\tau$$

$$= \int_0^{T/2} -f(\tau) \left( \cos n\omega_0 \tau \cos \frac{n\omega_0 T}{2} + \sin n\omega_0 \tau \sin \frac{n\omega_0 T}{2} \right) d\tau$$

از طرفی  $\omega_0 T$  برابر  $2\pi$  است و بنابراین

$$\sin \frac{n\omega_0 T}{2} = \sin n\pi = 0$$

پس

$$I_1 = -\cos n\pi \int_0^{T/2} f(\tau) \cos n\omega_0 \tau d\tau$$

پس از توجه به فرم  $I_2$  می‌توان نوشت:

$$a_n = \frac{2}{T} (1 - \cos n\pi) \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

ضریب  $(1 - \cos n\pi)$  چنین مشخص می‌کند که اگر  $n$  زوج باشد،  $a_n = 0$  است. پس:

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases} \quad (23)$$

تحقیقی مشابه نشان می‌دهد که در ازای همه  $n$  های زوج  $b_n = 0$  است و بنابراین:

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases} \quad (24)$$

متذکر می‌شویم که تقارن نیم موج ممکن است در امواجی با تقارن زوج یا تقارن فرد ظاهر گردد. مثلاً موج ترسیم شده در شکل ۷-۱۸ (الف) هر دو تقارن زوج و نیم‌موج را دارا است. هنگامی که موجی تقارن نیم موج و یکی از دو تقارن زوج و فرد را دارد، می‌توان آن را در فاصله یک چهارم پریود، باز ساخت.  $a_n$  و  $b_n$  را هم با انتگرال‌گیری در هر یک از یک چهارم پریود، می‌توان به دست آورد. پس:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ a_n &= 0 & n \text{ زوج} \\ b_n &= 0 & n \text{ زوج و فرد} \end{aligned} \right\} \text{ (تقارن نیم موج و زوج)} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0 & n \text{ زوج و فرد} \\ b_n &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_0 t dt & n \text{ فرد} \\ b_n &= 0 & n \text{ زوج} \end{aligned} \right\} \text{ (تقارن نیم موج و فرد)} \quad (26)$$

جدول ۱۸-۱ خلاصه‌ای از ساده‌سازی‌ها را ارائه کرده است.

## تمرین

۴-۱۸ هر یک از توابع توصیف شده را رسم کنید. بگویید تقارن آن‌ها زوج است یا فرد، آیا تقارن نیم‌موج وجود دارد؟ پریود آن را مشخص نمایید:

(الف)  $v = 0, -2 < t < 0$  و  $v = 5, 0 < t < 2, 2 < t < 4$  و  $v = -5, 4 < t < 6$ (ب)  $v = 0, 3 < t < 7, v = 10, 1 < t < 3$



پاسخ واداشته را برای  $n$  امین هارمونیک می توان با کار در حوزه فرکانس به دست آورد. پس:

$$v_{sn}(t) = \frac{20}{n\pi} \sin 2n\pi t$$

و

$$v_{sn} = \frac{20}{n\pi} (-j)$$

امپدانس ایجاد شده به وسیله مدار RL در این فرکانس چنین است:

$$Z_n = 4 + j(2n)2 = 4 + j4n$$

و لذا مؤلفه پاسخ واداشته در این فرکانس برابر است با:

$$I_{fn} = \frac{V_{sn}}{Z_n} = \frac{-j5}{n\pi(1 + jn)}$$

با تبدیل به حوزه زمان داریم:

$$i_{fn} = \frac{5}{n\pi} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \cos(2nt - 90^\circ - \tan^{-1} n) \\ = \frac{5}{\pi(1+n^2)} \left( \frac{\sin 2nt}{n} - \cos 2nt \right)$$

چون پاسخ به مؤلفه dc و واقع  $5/4 \Omega = 1.25 \text{ A}$  است، می توان پاسخ واداشته را به صورت جمع زیر نشان داد:

$$i_f(t) = 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \left[ \frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2} \right]$$

پاسخ طبیعی آشنای این مدار ساده یک جمله نمایی است (این جمله قطبی به فرم  $I_f/V_s = 1/(4+2s)$  دارد).

$$i_n(t) = A e^{-2t}$$

پس پاسخ کامل برابر است با

$$i(t) = i_f(t) + i_n(t)$$

و چون  $i(0) = 0$  است باید  $A$  به صورت زیر انتخاب گردد:

$$A = -i_f(0)$$

با  $t = 0$ ، و فرض  $i_f(0)$  داریم:

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

هرچند صحیح، ولی بهتر است از مقدار عددی این مجموع استفاده شود. مجموع پنج جمله اول  $\sum 1/(1+n^2) = 0.671$  است، مجموع ده جمله اول 0.695 می باشد و مجموع بیست جمله اول 0.720 می گردد. پس:

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi} (0.720) = -0.104$$

و

$$i(t) = -0.104 e^{-2t} + 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{n=1(\text{odd})}^{\infty} \left[ \frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2} \right]$$

در به دست آوردن این حل، مجبور شدیم، چندین مفهوم اصلی معرفی شده در این فصل و ۱۷ فصل قبل را به کار ببریم. بعضی از مفاهیم را هم نتوانستیم استفاده کنیم زیرا ماهیت این مثال خاص بسیار ساده بود ولی نقش آن ها در تحلیل کلی مشخص شد. در واقع، ما به حل این مسئله به عنوان یافته مهمی در تحلیل مدار ساده نگاه خواهیم کرد. با این وجود، علی رغم این احساس بالنده باید ذکر کرد که پاسخ کامل، مثل آن چه در مثال ۲-۱۸ به فرم تحلیلی دیدیم، آن قدر که

ظواهرش نشان می دهد، ارزشمند نیست. این تابع تصویر روشنی از طبیعت پاسخ ارائه نمی دهد. آن چه که ما لازم داریم ترسیمی از  $i(t)$  بر حسب زمان است. این منحنی با محاسبات خسته کننده ای در لحظات متعددی از زمان رسم می گردد، یک کامپیوتر و یا یک ماشین حساب برنامه پذیر هم می تواند کمک مؤثری در این کار بنماید. منحنی را می توان به صورت تقریب با جمع گرافیکی پاسخ طبیعی، جمله dc و چند هارمونیک اول به دست آورد. این کار هم عملی بی ارزش است.

وقتی که همه کارها گفته و انجام شد، آموزنده ترین حل برای این مسئله شاید با تکرار تحلیل گذرا باشد. یعنی فرم پاسخ مطمئناً در فاصله  $t = 0$  و  $t = \pi/2 \text{ s}$  قابل محاسبه است. این یک تابع نمایی است که به سمت  $2.5 \text{ A}$  رو به افزایش است. پس از تعیین اول دوره، مقدار اولیه ای برای دوره دوم بعدی  $\pi/2 > t > \pi$  است. این کار تا حصول به حالتی پریودیک تکرار می گردد. روش خصوصاً برای این مثال که تغییر ناچیزی در موج جریان در پریودهای متوالی  $\frac{3\pi}{2} < t < \frac{5\pi}{2}$  وجود دارد، مناسب است. پاسخ جریان کامل در شکل ۹-۱۸ ترسیم شده است.

## تمرین

۹-۱۸ روش های فصل ۸ را برای تعیین مقدار جریان شکل ۹-۱۸ در t های زیر به کار ببرید: (الف)  $\frac{\pi}{2}$ ، (ب)  $\pi$  و (ج)  $\frac{3\pi}{2}$ .  
جواب: 2.392 A، 0.1034 A و 2.396 A.

## ۴-۱۸ فرم مختلط سری فوریه

متنگام یافتن طیف فرکانس، دیدیم که دامنه هر مؤلفه فرکانس به هر دو مقدار  $a_n$  و  $b_n$  وابسته است. یعنی هر دو جمله سینوسی و کسینوسی در دامنه نقش دارند. عبارت دقیق برای این دامنه،  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  بود. همچنین می توان دامنه را مستقیماً با استفاده از فرم سری فوریه که هر جمله آن یک تابع کسینوسی با زاویه فاز است، به دست آورد. دامنه و زاویه فاز تابعی از  $f(t)$  و  $n$  هستند. حتی راحت تر از سری فوریه این است که جملات سینوسی و کسینوسی به صورت توابعی با ثابت های مختلط بیان شوند.

بندا بگذارید فرم مثلثاتی سری فوریه را در نظر بگیریم:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

سپس جملات سینوسی و کسینوسی را با نمایی جایگزین نماییم. در این صورت داریم:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{jn\omega_0 t} \frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\omega_0 t} \frac{a_n + jb_n}{2} \right)$$

کنون یک ثابت مختلط  $c_n$  تعریف می کنیم.

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

تقادیر  $a_n$ ،  $b_n$  و  $c_n$  همگی به  $n$  و  $f(t)$  وابسته اند. اکنون فرض کنید  $n$  را با  $(-n)$  جایگزین کنیم. تقادیر ثابت چگونه تغییر می کنند؟ ضرایب  $a_n$  و  $b_n$  با معادلات (۱۰) و (۱۱) تعریف شدند و واضح است که

$$a_{-n} = a_n$$

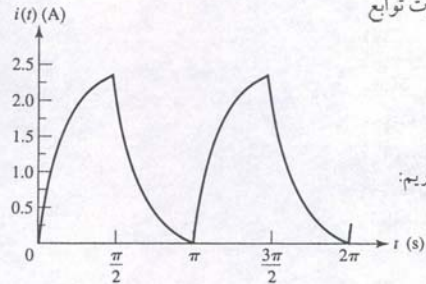
$$b_{-n} = -b_n$$

س از معادله (۲۷) داریم:

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (28)$$

نابراین

$$c_n = c_{-n}^*$$



شکل ۹-۱۸ بخش اولیه پاسخ کامل مدار

شکل ۱۸۸ (ب) به تابع تحریک شکل ۱۸۸ (الف).



تقارن‌ها در  $f(t)$  قرار می‌گیرد. بنابراین عبارات مناسب برای  $c_n$  برابرند:

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad (\text{زوج متقارن}) \quad (31)$$

$$c_n = \frac{-j2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt \quad (\text{فرد متقارن}) \quad (32)$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt & (\text{نیم موج متقارن، } n \text{ فرد}) \\ 0 & (\text{نیم موج متقارن، } n \text{ زوج}) \end{cases} \quad (33 \text{ الف}, 33 \text{ ب})$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt & (\text{نیم موج و زوج متقارن، } n \text{ فرد}) \\ 0 & (\text{نیم موج و زوج متقارن، } n \text{ زوج}) \end{cases} \quad (34 \text{ الف}, 34 \text{ ب})$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{-j4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt & (\text{نیم موج و فرد متقارن، } n \text{ فرد}) \\ 0 & (\text{نیم موج و فرد متقارن، } n \text{ زوج}) \end{cases} \quad (35 \text{ الف}, 35 \text{ ب})$$

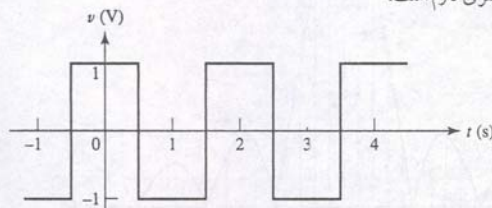
$c_n$  را برای موج مربعی شکل ۱۸-۱۰ معین کنید.

این موج مربعی هر دو نوع تقارن زوج و نیم موج را دارد. اگر از این تقارن چشم‌پوشیم و معادله کلی (۳۰) را به کار ببریم، با  $T = 2$ ،  $\omega_0 = \pi$  داریم:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^{-0.5} -e^{-jn\pi t} \, dt + \int_{-0.5}^{0.5} e^{-jn\pi t} \, dt - \int_{0.5}^1 e^{-jn\pi t} \, dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-1}{-jn\pi} (e^{-jn\pi t})_{-1}^{-0.5} + \frac{1}{-jn\pi} (e^{-jn\pi t})_{-0.5}^{0.5} + \frac{-1}{-jn\pi} (e^{-jn\pi t})_{0.5}^1 \right] \\ &= \frac{1}{j2n\pi} (e^{jn\pi/2} - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi/2} + e^{-jn\pi} + e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi/2}) \\ &= \frac{1}{j2n\pi} (2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2}) = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که  $c_0 = 0$ ،  $c_1 = \frac{2}{\pi}$ ،  $c_2 = 0$ ،  $c_3 = \frac{2}{3\pi}$ ،  $c_4 = 0$ ،  $c_5 = \frac{2}{5\pi}$  و ...  
الی آخر. این مقادیر با سری فوریه مثلثاتی حاصل در تمرین ۱۸-۳ برای موج شکل ۱۸-۴ (ب) تطابق دارد. به یاد داشته باشید که هرگاه  $b_n = 0$  آن‌گاه  $a_n = 2c_n$  است.

با استفاده از تقارن موج (زوج و نیم موج) با اعمال معادلات ۳۴ (الف) و (ب) کار کمتری لازم است.



شکل ۱۸-۱۰ موج مربعی حاوی هر دو تقارن زوج و نیم‌موج.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{4}{2} \int_0^{0.5} \cos n\pi t \, dt = \frac{2}{n\pi} (\sin n\pi t) \Big|_0^{0.5} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} & (\text{فرد } n) \\ 0 & (\text{زوج } n) \end{cases} \end{aligned}$$

نتایج همان‌هایی هستند که در آن تقارن امواج لحاظ گردید.

و نیز اجازه دهید تا  $a_0 = c_0$  باشد. بنابراین  $f(t)$  به صورت زیر بیان می‌شود.

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \quad \text{یا}$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

بالاخره به جای جمع سری دوم روی مقادیر مثبت صحیح از ۱ تا  $\infty$ ، روی مقادیر صحیح منفی از ۱- تا  $-\infty$  عمل جمع را انجام می‌دهیم:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (29)$$

بنا به توافق، مجموع از  $-\infty$  تا  $\infty$  شامل جمله  $n = 0$  نیز می‌گردد.

معادله (۲۹) فرم مختلط سری فوریه برای  $f(t)$  است. جمع و جوری آن یکی از دلایل مهم کاربرد آن است. برای تهیه عبارتی که به وسیله آن یک ضریب مختلط  $c_n$  قابل محاسبه باشد، معادلات (۱۰) و (۱۱) را در معادله (۲۷) قرار می‌دهیم.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt$$

و سپس معادله نمایی سینوس و کسینوس را به کار برده و ساده می‌کنیم.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt \quad (30)$$

بنابراین یک معادله خلاصه شده جای دو معادله مثلثاتی سری فوریه را می‌گیرد. به جای محاسبه دو انتگرال برای یافتن ضرایب سری فوریه فقط یک انتگرال‌گیری لازم است. علاوه بر آن معمولاً این انتگرال ساده‌تر هم هست. باید دقت کرد که معادله (۳۰) حاوی ضریب  $\frac{1}{T}$  است، در صورتی که انتگرال‌های  $a_n$  و  $b_n$  هر دو ضریب  $2/T$  دارند. با جمع و جور کردن دو رابطه اصلی برای فرم نمایی سری فوریه داریم:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (29)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt \quad (30)$$

که طبق معمول  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  است.

دامنه مؤلفه سری فوریه نمایی در  $\omega = n\omega_0$  که  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  برابر  $|c_n|$  می‌باشد. می‌توانیم منحنی طیف فرکانس گسسته  $|c_n|$  را در برابر  $n\omega_0$  یا  $n\pi$  رسم کنیم که محور افقی هر دو مقدار مثبت و منفی را نشان دهد و پس از انجام آن، گراف حول مبدأ، تقارن خواهد داشت. زیرا معادلات (۲۷) و (۲۸) نشان می‌دهند که  $|c_n| = |c_{-n}|$  است.

از معادلات (۲۹) و (۳۰) ملاحظه می‌شود که دامنه مؤلفه سینوسی در  $\omega = n\omega_0$ ،  $(n = 1, 2, 3, \dots)$  برابر  $|c_n| + |c_{-n}| = |c_n| + |c_n| = 2|c_n| = 2\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  است. برای مؤلفه dc،  $a_0 = c_0$  می‌باشد. ضرایب فوریه نمایی، در معادله (۳۰) تحت تأثیر برخی



اکنون اجازه بدهید مثالی مشکل تر و جالب تری را ملاحظه کنیم.

یک تابع  $f(t)$  معین رشته‌ای از پالس‌های مربعی با دامنه  $V_0$  و دوره تناوب  $T$  است که هر  $T$  ثانیه یک بار رخ می‌دهند، شکل ۱۱-۱۸. فرم نمایی سری فوریه را برای  $f(t)$  به دست آورید.

فرکانس اصلی  $f_0 = \frac{1}{T}$  است. تقارنی هم وجود ندارد و مقدار ضریب مختلط کلی هم از معادله (۳۰) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{V_0}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{V_0}{-jn\omega_0 T} (e^{-jn\omega_0(t_0+T)} - e^{-jn\omega_0 t_0}) \\ &= \frac{2V_0}{n\omega_0 T} e^{-jn\omega_0(t_0+T/2)} \sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0 T\right) \\ &= \frac{V_0 T \sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0 T\right)}{T \frac{1}{2}n\omega_0 T} e^{-jn\omega_0(t_0+T/2)} \end{aligned}$$

بنابراین مقدار  $c_n$  برابر است با

$$|c_n| = \frac{V_0 T}{T} \left| \frac{\sin\left(\frac{1}{2}n\omega_0 T\right)}{\frac{1}{2}n\omega_0 T} \right| \quad (36)$$

و زاویه  $c_n$  برابر است با

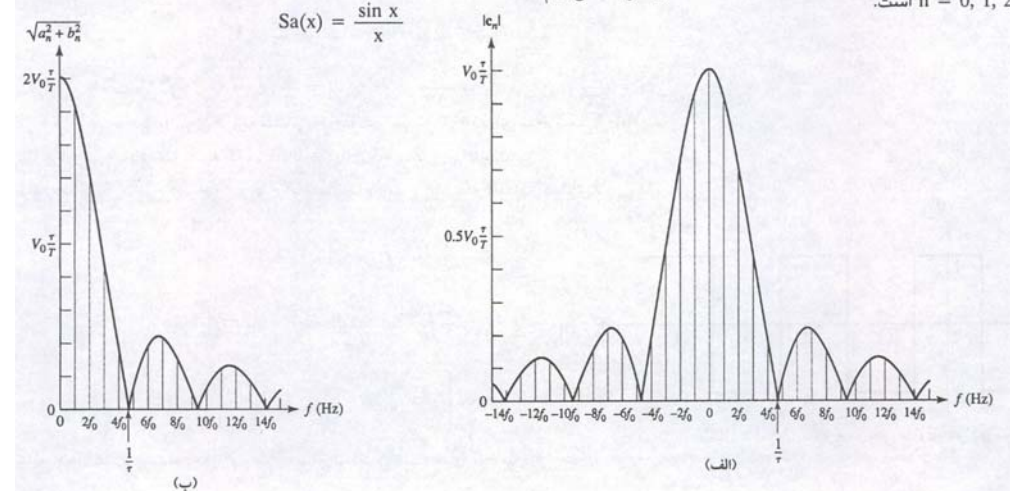
$$\text{ang } c_n = -n\omega_0 \left(t_0 + \frac{T}{2}\right) \quad (180^\circ \text{ احتمالاً به علاوه}) \quad (37)$$

معادلات (۳۶) و (۳۷) حل را برای سری فوریه نمایی نمایش می‌دهند.

### تابع نمونه‌برداری

عبارت مثلثاتی معادله (۳۶) کراراً در تئوری جدید مخابرات دیده می‌شود، و با آن تابع نمونه‌برداری می‌گویند. کلمه "نمونه‌برداری" به تابعی زمانی (شکل ۱۱-۱۸) اطلاق می‌شود که عمل نمونه‌برداری از آن حاصل می‌گردد. تولید این رشته از پالس‌ها و هر تابع  $f(t)$  دیگر بیانگر نمونه‌های  $f(t)$  در هر  $T$  ثانیه است. به شرط این که  $T$  کوچک و  $V_0 = 1$  باشد، رابطه زیر را تعریف می‌کنیم:

شکل ۱۲-۱۸ (الف) طیف خطی متناظر برای  $|c_n|$  برحسب  $f = n f_0$  که  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  و (ب)  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  در برابر  $f$  که  $n = 0, 1, 2, \dots$  است.



به دلیل روش موجود در تعیین دامنه مؤلفه‌های فرکانس مختلف در تابع  $f(t)$ ، درک اهمیت مشخصه‌های این تابع ارزشمند است. در ابتدا توجه کنید که هر وقت  $x$  ضریب صحنی از  $T$  باشد،  $Sa(n\pi T)$  برابر صفر است. یعنی

$$Sa(n\pi T) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

وقتی که  $x$  صفر باشد. تابع نامعین است، ولی به سادگی می‌توان نشان داد که مقدار آن برابر واحد می‌باشد یعنی:  $Sa(0) = 1$ . پس دامنه  $Sa(x)$  در  $x = 0$  از واحد شروع، و در  $x = \pi$  به صفر کاهش می‌یابد. با افزایش  $x$  به سمت  $2\pi$ ،  $|Sa(x)|$  از صفر به حداکثری کمتر از واحد افزایش می‌یابد و دوباره به صفر بازمی‌گردد. با ادامه افزایش  $x$ ، حداکثرهای متوالی کوچک‌تر می‌شوند زیرا صورت  $Sa(x)$  هرگز از واحد بیشتر نمی‌شود ولی منجر مرتباً بالا می‌رود. تابع  $Sa(x)$  تقارن زوجی را هم به نمایش می‌گذارد.

اکنون بیا باید طیف خطی را رسم کنیم. ابتدا  $|c_n|$  را ملاحظه نمایید، معادله (۳۶) را برحسب فرکانس دوره‌ای اصلی  $f_0$  می‌نویسیم:

$$|c_n| = \frac{V_0 T}{T} \left| \frac{\sin(n\pi f_0 T)}{n\pi f_0 T} \right| \quad (38)$$

دامنه هر  $c_n$  با معلوم بودن مقادیر  $T$  و  $f_0$  و انتخاب معلوم  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  از معادله (۳۸) به دست می‌آید. به جای ارزیابی معادله (۳۸) در این فرکانس‌های گسسته بگذارید پوش  $|c_n|$  را با فرض پیوسته بودن فرکانس، ترسیم کنیم. یعنی  $f$  که همان  $n f_0$  است می‌تواند فقط مقادیر گسسته فرکانس‌های هارمونیک  $0, \pm f, \pm 2f, \pm 3f, \dots$  و الی آخر را داشته باشد، ولی در حال حاضر به عنوان یک متغیر پیوسته تصور می‌گردد. وقتی  $f = 0$  است،  $|c_n| = \frac{V_0 T}{T}$  است و وقتی  $f$  به  $1/T$  افزایش یابد،  $|c_n|$  صفر می‌شود. پوش حاصل در شکل ۱۲-۱۸ (الف) رسم شده است. آن‌گاه طیف خطی با ترسیم خطوط عمودی در هر فرکانس هارمونیک طبق شکل رسم می‌گردد. دامنه‌های موجود مربوط به  $c_n$  است. آن‌چه رسم شده مربوط به حالت  $0.212 = 1/(1.5\pi T) = T/T$  می‌باشد. در این مثال، ملاحظه می‌شود که فقط در نقطه‌ای که دامنه پوش صفر می‌شود، دقیقاً فرکانس هارمونیک وجود ندارد. انتخاب دیگری از  $T$  یا  $T$  می‌تواند چنین حالتی را تولید نماید.

در شکل ۱۲-۱۸ (ب) دامنه مؤلفه سینوسی به صورت تابعی از فرکانس رسم شده است. دوباره توجه کنید که  $a_0 = c_0$  و  $|c_n| + |c_{-n}| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  است. طبعی شکل ۱۲-۱۸ (ب) چند نکته قابل ملاحظه و چند نتیجه حاصل از طیف خطی پالس‌های مربعی متناوب قابل ذکر است. در پوش طیف گسسته، واضح است که عرض پوش به  $T$  وابسته است و نه به  $T$ . در واقع شکل پوش تابع  $T$  نیست. این بدان معنی است که فیلتری که برای عبور پالس‌های متناوب طراحی می‌شود تابعی از عرض پالس  $T$  می‌باشد و نه پریود پالس  $T$ . بررسی شکل ۱۲-۱۸ (ب) نشان می‌دهد که عرض باند  $1/T$  Hz است. اگر پریود پالس  $T$  اضافه شود (که نتیجه فرکانس  $f_0$  کم می‌شود)، عرض باند  $1/T$  تغییر نمی‌کند، ولی تعداد خطوط خطی بین فرکانس صفر و  $1/T$  Hz، هر چند به طور گسسته، اضافه می‌شود. دامنه هر خط به طور معکوس متناسب با  $T$  است. بالاخره یک جابه‌جایی در مبدأ زمان طیف خطی را تغییر نمی‌دهد. یعنی  $|c_n|$  تابعی از  $t_0$  نیست. فاز نسبی مؤلفه‌های فرکانس با انتخاب  $t_0$  تغییر می‌نماید.

۱۸-۷ برای شکل‌های (الف) ۱۸-۴ (ب) ۱۸-۴ (ج)، ضریب کلی  $c_n$  را برای سری فوریه مختلط معین کنید.

### ۱۸-۵ تعریف تبدیل فوریه

اکنون که با مفاهیم نمایش سری فوریه توابع پریودیک آشنا شدید، اجازه دهید تبدیل فوریه را با بررسی طیف پالس‌های مربعی بخش قبل تعریف کنیم. این همان طیف گسسته‌ای است که

### تمرین

جواب: برای  $n$  فرد  $2/(n\pi)$ ، برای  $n$  زوج  $0$ ، به ازای همه  $n$  ها  $\sin n\pi/2$  [4/(n<sup>2</sup>π<sup>2</sup>)] -.



سمت راست این عبارت تابعی از  $\omega$  است (و نه  $t$ ) و ما آن را با  $F(j\omega)$  تکرار می‌نماییم:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (۴۴)$$

اکنون بگذارید حد را به معادله (۳۹) اعمال کنیم. کار را با ضرب و تقسیم مجموع با  $T$  آغاز خواهیم کرد.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T}$$

به جای  $c_n T$  کمیت جدید  $F(j\omega)$  را می‌گذاریم و سپس از عبارات (۴۲) و (۴۳) کمک می‌گیریم. در حد، مجموع تبدیل به انتگرال می‌گردد و

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (۴۵)$$

معادلات (۴۴) و (۴۵) را مجموعاً جفت تبدیل فوریه گویند.  $F(j\omega)$  تبدیل فوریه  $f(t)$  و  $f(t)$  عکس تبدیل فوریه  $F(j\omega)$  است.

این جفت رابطه تبدیل، بسیار مهم‌اند. باید آن‌ها را به خاطر داشته باشیم و همیشه در ضمیر خود نگهداریم. برای تأکید بر اهمیت دو رابطه، آن‌ها را در داخل مستطیلی قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt & (۴۶\text{ الف}) \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega & (۴۶\text{ ب}) \end{aligned}$$

جملات نمایی در این دو معادله دارای علامات مخالف در نما هستند. برای حفظ آن‌ها چنین تجسم‌کنید که نمای مثبت متعلق به  $f(t)$  است و این درست مثل سری فوریه مختلط در معادله (۳۹) است.

در این‌جا خوب است سئوالی را مطرح کنیم. آیا می‌توان برای تبدیل فوریه معادلات (۴۶)، تبدیل فوریه هر  $f(t)$  دلخواه را به دست آورد؟ به نظر می‌رسد که برای تقریباً هر ولتاژ و جریان قابل تولید، جواب آری باشد. شرط کافی برای وجود  $F(j\omega)$  این است که

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

به هر حال این شرط لازم نیست، زیرا بعضی از توابع که این شرط را ندارند، دارای تبدیل فوریه هستند. تابع پله، نمونه‌ای از این گونه توابع است. بعداً خواهیم دید که  $f(t)$  برای داشتن تبدیل فوریه حتی لازم نیست نامتناوب باشد. نمایش سری فوریه برای یک تابع زمانی تناوبی در واقع حالت خاصی از نمایش تبدیل فوریه است.

همان‌طور که قبلاً گوشه زد شد، رابطه جفت تبدیل فوریه یک به یک است. در ازای هر  $f(t)$  یک  $F(j\omega)$  و برای هر  $F(j\omega)$  یک  $f(t)$  خاص موجود می‌باشد.

وای به دست آوردن طیف پیوسته یک تک پالس مربعی شکل ۱۸-۱۳ الف) از تبدیل فوریه استفاده کنید.

الس با رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$f(t) = \begin{cases} V_0 & t_0 < t < t_0 + \tau \\ 0 & t < t_0 \text{ and } t > t_0 + \tau \end{cases}$$

بدیل فوریه  $f(t)$  از معادله (۴۶ الف) به دست می‌آید:

$$F(j\omega) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} V_0 e^{-j\omega t} dt$$

همیشه باید برای توابع زمانی پریودیک آن را به دست آوریم. طیف بدین لحاظ گسسته است که فرم آن تابعی صاف و پیوسته از فرکانس نمی‌باشد. در عوض فقط دارای مقادیر غیرصفر در فرکانس‌های خاصی است.

با این وجود توابع تحریک مهم متعددی وجود دارند که توابع پریودیک از زمان نیستند، مثل یک تک پالس مربعی، تابع پله، تابع شیب و یک پالس عجیب دیگر به نام تابع ضربه‌ای که در فصل ۱۴ دیدیم. می‌توان طیف فرکانس را برای چنین توابع نامتناوب به دست آورد ولی به لحاظ این‌که علی‌رغم کوچکی، در هر فاصله فرکانس غیرصفری مقداری انرژی وجود دارد، می‌توان طیف پوسه را برای آن‌ها تصور کرد.

این مفهوم را با انتخاب یک تابع متناوب و افزایش پریود آن به بینهایت گسترش می‌دهیم. تجربه ما با پالس‌های مربعی نشان می‌دهد که دامنه پوش بدون تغییر شکل کاهش می‌یابد و مؤلفه‌های فرکانس بیشتری در هر فاصله فرکانس یافت می‌شود. مثلاً تعداد مؤلفه‌های فرکانس بین 0 و 100 Hz بینهایت می‌شود ولی دامنه هر یک به سمت صفر میل می‌نماید. در بدو امر وجود طیفی با دامنه صفر مفهومی گیج‌کننده دارد. می‌دانیم که طیف خطی هر تابع تحریک متناوب، دامنه هر مؤلفه فرکانس را نشان می‌دهد. اما طیف پیوسته با دامنه صفر تابع تحریک غیرپریودیک چه چیزی را بیان می‌کند؟ این سئوال در بخش زیر پاسخ داده شده است. در این‌جا در عبارات فوق حدگیری را دنبال می‌نماییم.

با فرم نمایی سری فوریه آغاز می‌کنیم.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (۳۹)$$

که

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (۴۰)$$

و

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (۴۱)$$

اجازه دهید

$$T \rightarrow \infty$$

و بنابراین از معادله (۴۱)،  $\omega_0$  باید به سمت صفر میل کند. این مقدار کوچک را در حد با یک دیفرانسیل نشان می‌دهیم.

$$\omega_0 \rightarrow d\omega$$

پس

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi} \quad (۴۲)$$

سرانجام فرکانس هر هارمونیک  $n\omega_0$  به متغیر فرکانس پیوسته‌ای که طیف برحسب آن بیان می‌شود، تبدیل می‌گردد. به بیان دیگر، با میل  $\omega_0$  به صفر،  $n$  باید بینهایت گردد، به نحوی که حاصل ضرب مقدار معینی باقی بماند.

$$n\omega_0 \rightarrow \omega \quad (۴۳)$$

با گذاشتن این چهار حد در معادله (۴۰) درمی‌یابیم که  $c_n$ ، همان‌طور که قبلاً پیش‌بینی شد، به سمت صفر میل خواهد کرد. اگر هر سمت معادله (۴۰) را در پریود  $T$  ضرب کنیم و حد بگیریم به نتیجه‌ای قابل توجه می‌رسیم.

$$c_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$



$$|F(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (۵۱)$$

و

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \quad (۵۲)$$

جایگزینی  $\omega$  با  $-\omega$  نشان می‌دهد که  $A(\omega)$  و  $|F(j\omega)|$  هر دو توابعی زوج از  $\omega$  می‌باشند. در حالی که  $B(\omega)$ ،  $\phi(\omega)$  هر دو تابع فردی از  $\omega$  هستند.

اکنون اگر  $f(t)$  تابع زوجی از  $t$  باشد، پس عبارت زیر انتگرال معادله (۵۰) تابعی فرد از  $t$  است و به دلیل وجود حدود متقارن،  $B(\omega)$  به صفر واداشته می‌شود. بنابراین  $f(t)$  اگر زوج باشد، تبدیل فوری  $F(j\omega)$  مربوط به آن هم تابعی حقیقی، زوج نسبت به  $\omega$  و برای همه  $\omega$ ها، و تابع فاز  $\phi(\omega)$  صفر یا  $\pi$  است. با این وجود، اگر  $f(t)$  تابعی فرد از  $t$  باشد، آن‌گاه  $A(\omega) = 0$  و  $F(j\omega)$  هم فرد و هم تابعی موهومی از  $\omega$  است.  $\phi(\omega)$  هم  $\pm \frac{\pi}{2}$  می‌باشد. با این وجود به طور کلی  $F(j\omega)$  تابعی مختلط از  $\omega$  است.

بالاخره دقت کنید که جایگزینی  $\omega$  با  $-\omega$  در معادله (۴۷) فرم مزدوج  $F(j\omega)$  را تولید می‌نماید. پس

$$F(-j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = F^*(j\omega)$$

داریم:

$$F(j\omega) F(-j\omega) = F(j\omega) F^*(j\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) = |F(j\omega)|^2$$

### اهمیت فیزیکی تبدیل فوری

این خواص اساسی ریاضی تبدیل فوری در ذهن، اکنون آماده‌ایم اهمیت فیزیکی آن را ملاحظه نماییم. بگذارید فرض کنیم که  $f(t)$  یا ولتاژ دو سر مقاومت  $1 \Omega$  یا جریان درون آن باشد. به این ترتیب  $i^2(t)$  توان لحظه‌ای تلف شده در مقاومت  $1 \Omega$  به وسیله  $f(t)$  خواهد بود. با نتگرال این توان در تمام زمان‌ها انرژی کل تحویلی  $f(t)$  به مقاومت  $1 \Omega$  به دست خواهد آمد.

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (۵۳)$$

کنون به حقیقت روی می‌آوریم. عبارت زیر انتگرال در معادله (۵۳) برابر حاصل ضرب  $f(t)$  در خودش است. ما به جای یکی از آن‌ها معادله (۴۶) را می‌گذاریم:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega \right] dt$$

نون  $f(t)$  تابعی از متغیر انتگرال‌گیری  $\omega$  نیست، آن را به داخل گروه برده و ترتیب نتگرال‌گیری را تعویض می‌کنیم.

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} f(t) dt \right] d\omega$$

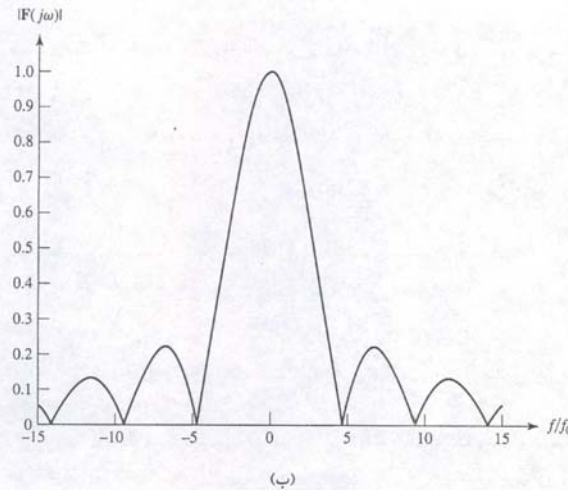
پس  $F(j\omega)$  را از داخل انتگرال بیرون می‌کشیم و در این صورت این انتگرال با  $F(-j\omega)$  برابر می‌شود:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) F(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

جمع‌بندی این نتایج داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (۵۴)$$

معادله (۵۴) عبارت مفیدی است و قضیه پارسوال نامیده می‌شود. این معادله به همراه نادره (۵۳) چنین می‌گوید که انرژی مربوط به  $f(t)$  را می‌توان با انتگرال‌گیری حول تمام زمان



که می‌توان آن را به راحتی انتگرال‌گیری کرده و ساده نمود.

$$F(j\omega) = V_0 \tau \frac{\sin \frac{1}{2} \omega \tau}{\frac{1}{2} \omega \tau} e^{-j\omega(t_0 + \tau/2)}$$

اندازه  $F(j\omega)$  طیف پیوسته فرکانسی را به دست می‌دهد که در واقع مشابه تابع نمونه‌برداری است. مقدار  $F(0)$  برابر  $V_0 \tau$  است. شکل طیف مشابه با پوش در شکل ۱۸-۱۲ (ب) است. منحنی  $|F(j\omega)|$  به عنوان تابعی از اندازه ولتاژ در هر فرکانس را نشان نمی‌دهد. پس چه چیز را نشان می‌دهد؟ بررسی معادله (۴۵) نشان می‌دهد که اگر  $f(t)$  یک موج ولتاژ است، بُعد  $F(j\omega)$  نیز "ولت بر واحد فرکانس" است. مفهومی که در بخش ۱-۱۵ معرفی گردید.

۱۸-۸ اگر  $f(t) = 0$  و  $0.1 < t < 0.2$  s یا  $f(t) = 10$  V،  $-0.2 < t < -0.1$  s یا  $f(t) = -10$  V،  $0 < t < 0.1$  s یا  $f(t) = 0$  و  $0.1 < t < 0.2$  s،  $10\pi$  rad/s (ب) و  $10\pi$  rad/s (ج) با همه  $t$ های دیگر باشد،  $F(j\omega)$  را برای  $\omega$ های (الف) 0، (ب)  $10\pi$  rad/s، (ج)  $10\pi$  rad/s، (د)  $15\pi$  rad/s و (ه)  $20\pi$  rad/s به دست آورید.

۱۸-۹ اگر  $F(j\omega) = -10$  V/(rad/s) در  $-2$  rad/s  $< \omega < 4$  rad/s،  $10$  V/(rad/s) در  $4 < \omega < 2$  و 0 برای دیگر  $\omega$ ها باشد، مقدار عددی  $f(t)$  را در زمان‌های (الف)  $10^{-4}$  s، (ب)  $10^{-2}$  s، (ج)  $\frac{\pi}{4}$  s و (د)  $\frac{\pi}{2}$  s به دست آورید.

### ۱۸-۶ بعضی از خواص تبدیل فوری

هدف ما در این بخش، پی‌ریزی چند خاصیت ریاضی تبدیل فوری و حتی مهم‌تر از آن، درک اهمیت فیزیکی آن است. کار را با اتحاد اولر و جایگزینی  $e^{j\omega t}$  در معادله (۴۶) (الف) آغاز می‌کنیم:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (۴۷)$$

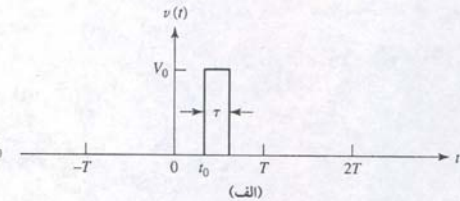
چون  $f(t)$ ،  $\cos \omega t$ ،  $\sin \omega t$  همگی توابعی حقیقی از زمان هستند، هر دو انتگرال در معادله (۴۷) توابعی واقعی از  $\omega$  می‌باشند. بنابراین با فرض

$$F(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |F(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (۴۸)$$

داریم:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (۴۹)$$

$$B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (۵۰)$$



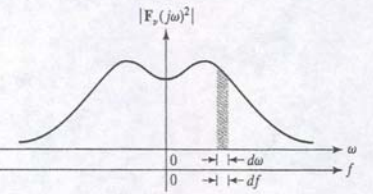
شکل ۱۸-۱۳ (الف) یک پالس مربعی مشابه با شکل ۱۸-۱۱ (ب) نمودار  $|F(j\omega)|$  متعلق به پالس، با  $1 = V_0$ ،  $1 = \tau$  و  $0 = t_0$ . محور فرکانس به مقدار  $f_0 = 1/1.5\pi$  نرمالیزه شده است که متعلق به شکل ۱۸-۱۲ (الف) است تا بتوان مقایسه‌ای کرد. دقت کنید که  $f_0$  مفهوم خاصی ندارد.

### تمرین

جواب ۸-۸: 0،  $j1.273$  V/(rad/s)،  $-j1.273$  V/(rad/s) و  $-j0.424$  V/(rad/s).  
جواب ۹-۱۸:  $1.9099 \times 10^{-3}$  V،  $j0.1910$  V،  $4.05$  V و  $-4.05$  V.



مارک آنتوان پارسوال، ریاضی‌دان گمنام فرانسوی این قضیه را هفده سال قبل از این‌که فوریه مطلب خود را بیان کند، در سال ۱۸۰۵ منتشر کرد.



شکل ۱۸-۱۴ مساحت برش  $|F_v(j\omega)|$ ، انرژی  $1\Omega$  متناظر با  $v(t)$  که در پهنای باند  $df$  است را نشان می‌دهد.

### مثال ۱۸-۶

در حوزه زمان و یا از ضرب  $1/(2\pi)$  در انتگرال در تمام فرکانس‌ها در حوزه فرکانس به دست آورد.

قضیه پارسوال ما را به درک بیشتر و تعبیر بهتر تبدیل فوریه رهنمون می‌کند. ولتاژ  $v(t)$  با تبدیل فوریه  $F_v(j\omega)$  را در نظر بگیرید که انرژی در مقاومت  $1\Omega$  آن برابر  $W_{1\Omega}$  است:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_v(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F_v(j\omega)|^2 d\omega$$

که در آن تساوی سمت راست به این معنی است که  $|F_v(j\omega)|^2$  یک تابع زوج از  $\omega$  است. چون  $2\pi f = \omega$  است می‌توان نوشت:

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |F_v(j\omega)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |F_v(j\omega)|^2 df \quad (55)$$

شکل ۱۸-۱۴ یک منحنی نمونه از  $|F_v(j\omega)|^2$  را به صورت تابعی از  $\omega$  و  $f$  نشان می‌دهد. اگر مقیاس فرکانس را به فواصل کوچکی مانند  $df$  تقسیم کنیم، معادله (۵۵) نشان می‌دهد که سطح برش دیفرانسیل به عرض  $df$  زیر منحنی  $|F_v(j\omega)|^2$  برابر  $|F_v(j\omega)|^2 df$  است. این سطح در روی شکل سایه زده شده است. از مجموع مساحت همه این برش‌ها و با تغییر  $f$  از  $-\infty$  تا  $\infty$  کل انرژی  $1\Omega$  ولتاژ  $v(t)$  به دست می‌آید. پس  $|F_v(j\omega)|^2$  چگالی انرژی ( $1\Omega$ ) یا انرژی بر واحد پهنای باند ( $\text{J/Hz}$ ) ولتاژ  $v(t)$  است. این چگالی انرژی همیشه تابعی حقیقی، زوج و غیرمنفی از  $\omega$  است. با انتگرال‌گیری از  $|F_v(j\omega)|^2$  در یک فاصله فرکانسی می‌توانیم انرژی کل واقع در آن فاصله را به دست آوریم. توجه کنید که چگالی انرژی مستقل از فاز  $F_v(j\omega)$  است. پس تعداد توابع زمانی و تبدیلات فوریه‌ای که توابع چگالی انرژی یکسانی دارند، نامحدود است.

پالس‌نمایی یک طرفه [یعنی  $v(t) = 0$  در  $t < 0$ ] زیر را به ورودی یک فیلتر میان‌گذر اعمال می‌کنیم.

$$v(t) = 4e^{-3t} u(t)$$

اگر فیلتر میان‌گذر با  $2H < |f| < 2$  تعریف شود، مطلوب است محاسبه انرژی خروجی کل. ولتاژ خروجی فیلتر را  $v_o(t)$  می‌نامیم. پس انرژی  $v_o(t)$  برابر با انرژی مؤلفه‌های فرکانسی واقع در  $2 < f < 1$ ،  $-1 < f < -2$  است. تبدیل فوریه  $v(t)$  را به دست می‌آوریم.

$$F_v(j\omega) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-3t} u(t) dt = 4 \int_0^{\infty} e^{-(3+j\omega)t} dt = \frac{4}{3+j\omega}$$

آن‌گاه می‌توان انرژی  $1\Omega$  کل را در سیگنال ورودی با هر یک از دو رابطه زیر محاسبه کرد:

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_v(j\omega)|^2 d\omega = \frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{9 + \omega^2} = \frac{16}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{9 + \omega^2} = \frac{8}{3} \text{ J}$$

یا

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt = 16 \int_0^{\infty} e^{-6t} dt = \frac{8}{3} \text{ J}$$

اما انرژی کل ( $v_o(t)$ ) کمتر از این است:

$$\begin{aligned} W_{o1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-4\pi}^{-2\pi} \frac{16 d\omega}{9 + \omega^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{16 d\omega}{9 + \omega^2} \\ &= \frac{16}{\pi} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{d\omega}{9 + \omega^2} = \frac{16}{3\pi} \left( \tan^{-1} \frac{4\pi}{3} - \tan^{-1} \frac{2\pi}{3} \right) = 0.358 \text{ J} \end{aligned}$$

به طور کلی می‌بینیم که فیلتر میان‌گذر ایده‌آل اجازه می‌دهد تا انرژی واقع در فاصله فرکانسی از پیش تعیین شده‌ای حذف شود و انرژی واقع در بقیه فاصله را نگه می‌دارد. تبدیل فوریه به توصیف عملی کمی فیلتر بدون محاسبه واقعی  $v_o(t)$  کمک می‌نماید. هر چند بعداً خواهیم دید که با کمک تبدیل فوریه هم می‌توان در صورت تمایل،  $v_o(t)$  را به دست آورد.

۱۸-۱۰ اگر  $A[u(t + 0.1) - u(t - 0.1)] = 10e^{20t}$  باشد، مطلوب است (الف)  $F_i(j0)$ ، (ب)  $F_i(j10)$ ، (ج)  $A_i(10)$ ، (د)  $B_i(10)$  و (ه)  $\phi_i(10)$ .

۱۸-۱۱ انرژی  $1\Omega$  مربوط به جریان  $A[u(t) = 20e^{-10t}]$  در فاصله‌های زیر را به دست آورید. (الف)  $0.1 < t < 0.1$ ، (ب)  $-10 < \omega < 10 \text{ rad/s}$ ، (ج)  $10 < \omega < \infty \text{ rad/s}$ .

جواب ۱۰-۱۸:  $3.63 \text{ A/(rad/s)}$ ،  $3.33 \text{ A/(rad/s)}$ ،  $3.33 \text{ A/(rad/s)}$ ،  $3.33 \text{ A/(rad/s)}$ ،  $3.33 \text{ A/(rad/s)}$ ،  $3.33 \text{ A/(rad/s)}$ ،  $3.33 \text{ A/(rad/s)}$ ،  $3.33 \text{ A/(rad/s)}$ ،  $3.33 \text{ A/(rad/s)}$ ،  $3.33 \text{ A/(rad/s)}$ .

جواب ۱۱-۱۸:  $17.29 \text{ J}$ ،  $10 \text{ J}$  و  $5 \text{ J}$ .

## ۱۸-۷ جفت تبدیل فوریه برای بعضی توابع زمانی ساده

### تابع ضربه واحد

کنون به جستجوی تبدیل فوریه تابع ضربه واحد  $\delta(t - t_0)$  تابعی که در بخش ۴-۱۴ ملاحظه شد می‌رویم. یعنی علاقمندیم تا خواص یا توصیف حوزه فرکانس این تابع یکتا را بدانیم. اگر علامت  $\mathcal{F}\{\}$  برای نمادین کردن جمله "تبدیل فوریه" استفاده کنیم، آن‌گاه:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t - t_0) dt$$

ز بحث قبلی خود در مورد این‌گونه انتگرال‌ها داریم:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0$$

بن تابع مختلط از  $\omega$  به چگالی انرژی  $1\Omega$  زیر را می‌دهد.

$$|\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}|^2 = \cos^2 \omega t_0 + \sin^2 \omega t_0 = 1$$

بن نتیجه چنین بیان می‌دارد که انرژی ( $1\Omega$ ) بر واحد عرض یا پهنای باند برای همه رکانس‌ها برابر واحد است و انرژی کل ذخیره شده در تابع ضربه واحد بسیار بزرگ است. نای تعجب نخواهد بود که نتیجه بگیریم تابع ضربه واحد یک تابع غیرعملی است زیرا قابل رلید در آزمایشگاه نمی‌باشد. حتی اگر می‌توانست در دسترس قرار بگیرد، پس از این‌که در عرض پهنای باند محدود هر وسیله آزمایشگاهی عملی قرار گیرد، باید دارای اعوجاج شود. چون بین تابع زمانی و تبدیل فوریه ارتباط منحصر یک به یک وجود دارد، می‌توان گفت به عکس تبدیل فوریه  $e^{j\omega t_0}$  برابر  $\delta(t - t_0)$  است. با به کارگیری نماد  $\mathcal{F}^{-1}\{\}$  برای عکس تبدیل، داریم:

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega t_0}\} = \delta(t - t_0)$$

براین اکنون می‌دانیم که

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} e^{-j\omega t_0} d\omega = \delta(t - t_0)$$

نتی اگر در تلاش خود برای ارزیابی مستقیم این انتگرال موفق باشیم، به طور سمبلیک می‌توان چنین نوشت:

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{j\omega t_0} \quad (56)$$

### تمرین



و از آن نتیجه می شود:

$$K \Leftrightarrow 2\pi K \delta(\omega) \quad (۶۲)$$

و به این ترتیب مسئله حل شده است. طیف فرکانس تابع زمانی ثابت فقط از یک مؤلفه در  $\omega = 0$  تشکیل شده است، این را از قبل هم می دانستیم.

### تابع علامت

به عنوان مثالی دیگر بگذارید تبدیل فوریه یک تابع یگانه به نام **تابع علامت**،  $\text{sgn}(t)$  را که در زیر تعریف شده، بررسی کنیم.

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (۶۳)$$

یا

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$



مجدداً باید سعی کنیم این تابع را در معادله تبدیل فوریه قرار دهیم، که پس از گذاشتن حدود انتگرال با یک عبارت مبهم روبرو می شویم. هر بار بخواهیم تبدیل فوریه تابعی زمانی را به دست آوریم که برای  $|t|$  در بینهایت تابع به صفر میل نکند، باز همین مشکل را خواهیم داشت. خوشبختانه می توان از این وضعیت با استفاده از تبدیل لاپلاس اجتناب کرد، زیرا این روش یک جمله همگراکننده درونی دارد که بسیاری از مشکلات موجود در محاسبه تبدیل فوریه بعضی از توابع را رفع می نماید.

تابع تبدیل را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]$$

توجه کنید عبارت داخل کرشه با بزرگ شدن  $|t|$  به سمت صفر میل می کند. با به کارگیری تبدیل فوریه داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-at} dt - \int_{-\infty}^0 e^{-j\omega t} e^{at} dt \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

مؤلفه حقیقی صفر است زیرا  $\text{sgn}(t)$  یک تابع فرد از  $t$  است. بنابراین:

$$\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad (۶۴)$$

### تابع پله واحد

به عنوان آخرین مثال در این بخش، بگذارید به تابع آشنای پله واحد  $u(t)$  نگاه کنیم.

با توجه به تعریف تابع علامت در بخش قبل، تابع پله واحد را چنین نمایش می دهیم.

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

جفت تبدیل فوریه چنین است:

$$u(t) \Leftrightarrow [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] \quad (۶۵)$$

جدول ۲-۱۸ خلاصه ای از مثال های مورد بحث در این بخش و چند جفت تبدیل فوریه دیگر که جزئیات آن ها بیان نشده را نشان می دهد.

که علامت  $\Leftrightarrow$  به معنی این است که دو تابع، جفت تبدیل فوریه را تشکیل می دهند. در ادامه ملاحظات خود در مورد تابع ضربه واحد بیابید تبدیل فوریه را به فرم زیر بررسی نماییم:

$$F(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

که تابع ضربه واحد در **حوزه فرکانس** بوده و در  $\omega = \omega_0$  واقع است. آنگاه تابع  $f(t)$  باید چنین باشد:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \delta(\omega - \omega_0) d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

که در آن از **خاصیت غربالی** تابع ضربه واحد استفاده شده است. بنابراین اکنون می توان نوشت:

$$\frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$$

یا

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (۵۷)$$

همچنین با یک متغیر علامت ساده داریم:

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \quad (۵۸)$$

واضح است که تابع زمانی در هر دو عبارت (۵۷) و (۵۸) مختلط اند و آن ها را نمی توان در آزمایشگاه تولید نمود. توابعی مانند  $\cos \omega_0 t$  را می توان با تجهیزات آزمایشگاهی تولید کرد ولی  $e^{j\omega_0 t}$  را نمی توان. با این وجود می دانیم که

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

و با تعریف تبدیل فوریه به سادگی دیده می شود که

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} + \mathcal{F}\{f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) + f_2(t)\} \quad (۵۹)$$

بنابراین

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} e^{j\omega_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}\right\} = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

که نشان می دهد توصیف حوزه فرکانس  $\cos \omega_0 t$  یک جفت تابع ضرب واقع در  $\omega = \pm \omega_0$  است. نباید تعجب کرد، زیرا در اولین بحث از فرکانس مختلط در فصل ۱۴، گفتیم که یک تابع سینوسی زمانی همیشه با یک جفت فرکانس موهومی واقع در  $\omega = \pm j\omega_0$  نمایش داده می شود. بنابراین داریم:

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad (۶۰)$$

### تابع تحریک ثابت

اولین تابع تحریکی که چند فصل قبل ملاحظه کردیم ولتاژ یا جریان dc بود. برای یافتن تابع تبدیل فوریه تابع ثابتی در زمان مثل  $f(t) = K$ ، اولین تلاش ما جایگزینی این ثابت در معادله تبدیل فوریه و محاسبه انتگرال حاصل است. پس از آن عبارتی مبهم را در دستان خود خواهیم یافت. با این وجود خوشبختانه قبلاً این مسئله را در معادله (۵۸) حل کرده ایم.

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

می بینیم اگر  $\omega = 0$  اختیار کنیم، آنگاه جفت تبدیل فوریه مطابق زیر خواهد بود:

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (۶۱)$$



## تمرین

۱۸-۱۲ برای توابع زمانی زیر تبدیل فوریه را در  $\omega = 12$  محاسبه کنید. (الف)  $4u(t) - 10\delta(t)$ ، (ب)  $5e^{-8t}u(t)$ ، (ج)  $4 \cos 8t u(t)$  و (د)  $4 \operatorname{sgn}(t)$ .

۱۸-۱۳  $f(t)$  را در  $t = 2$  به دست آورید. به شرطی که  $F(j\omega)$  برابر باشد با (الف)  $j(4/\omega) - 5e^{-j3\omega}$ ، (ب)  $8[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$  و (ج)  $(8/\omega) \sin 5\omega$ .

جواب ۱۸-۱۲:  $\angle -178.1^\circ$ ،  $10.01$ ،  $\angle -56.3^\circ$ ،  $0.347$  و  $j0.667$ .  
جواب ۱۸-۱۳:  $2.45$ ،  $2.00$  و  $0.800$ .

## ۱۸-۸ تبدیل فوریه یک تابع زمانی متناوب کلی

در بخش ۵-۱۸ گفتیم، می توان نشان داد که توابع متناوب هم مثل توابع نامتناوب تبدیل فوریه دارند. حال بگذارید تا این مطلب را بر مبنایی محکم بنا کنیم. یک تابع متناوب  $f(t)$  با پریود  $T$  و بسط سری فوریه را طبق آن چه در معادلات (۳۹)، (۴۰) و (۴۱) دیدیم، در نظر بگیرید.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (39)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (40)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (41)$$

به یاد دارید که تبدیل فوریه یک مجموع برابر مجموع تبدیل تک تک جملات در آن است و چون  $c_n$  تابع زمان نیست، می توان نوشت:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

پس از یافتن تبدیل  $e^{jn\omega_0 t}$  از عبارت (۵۷) داریم:

$$f(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (46)$$

این رابطه نشان می دهد که  $f(t)$  دارای طیف گسسته ای متشکل از توابع ضربه ای واقع در نقاطی روی محور  $\omega$  در  $\omega = n\omega_0$  است که  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, \dots$  می باشد. قوت هر ضربه  $2\pi$  برابر مقدار متناظر ضریب فوریه در فرم مختلط بسط سری فوریه برای  $f(t)$  است.

برای آزمایش این کار، بگذارید ببینیم عکس تبدیل فوریه سمت راست عبارت (۴۶) باز هم  $f(t)$  می شود یا خیر. این تبدیل معکوس می تواند چنین نوشته شود:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[ 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \right] d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

چون جمله نمایی زیرنویس  $n$  ندارد، می توانیم جای انتگرال و جمع را عوض کنیم.

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega t} \delta(\omega - n\omega_0) d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

$c_n$  تابع  $\omega$  نیست، بنابراین نمی توان با آن مثل یک ثابت رفتار کرد. خاصیت غربالی تابع ضربه واحد نشان می دهد که

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \stackrel{?}{=} f(t)$$

جدول ۱۸-۲ خلاصه ای از چند جفت تبدیل فوریه.

| $f(t)$ | $f(t)$                                      | $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$                            | $ F(j\omega) $ |
|--------|---|---|----------------|
|        | $\delta(t - t_0)$                           | $e^{-j\omega t_0}$  |                |
|        | $e^{j\omega_0 t}$                           | $2\pi \delta(\omega - \omega_0)$                              |                |
|        | $\cos \omega_0 t$                           | $\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ |                |
|        | 1   | $2\pi \delta(\omega)$   |                |
|        | $\operatorname{sgn}(t)$                     | $\frac{2}{j\omega}$   |                |
|        | $u(t)$                                      | $\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$                      |                |
|        | $e^{-\alpha t} u(t)$                        | $\frac{1}{\alpha + j\omega}$                                  |                |
|        | $[e^{-\alpha t} \cos \omega_d t] u(t)$      | $\frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}$  |                |
|        | $u(t + \frac{1}{2}T) - u(t - \frac{1}{2}T)$ | $T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$        |                |

از جدول ۱۸-۲ برای یافتن تبدیل فوریه تابع زمانی  $u(t) \cos 4t$  استفاده کنید.

با توجه به یک سطر مانده به آخر جدول داریم:

$$e^{-\alpha t} \cos \omega_d t u(t) \Leftrightarrow \frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}$$

بنابراین چون  $\alpha = 1$  و  $\omega_d = 4$  است داریم:

$$F(j\omega) = (3) \frac{1 + j\omega}{(1 + j\omega)^2 + 16}$$

مثال ۱۸-۷



$$\begin{aligned} F_0(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(x+z)} v_i(x) dx \right] dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} h(z) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} v_i(x) dx \right] dz \end{aligned}$$

به نظر می‌رسد کار پیشرفت کرده است و انتگرال داخلی فقط تبدیل فوریه  $v_i(t)$  است. به علاوه این بخش جمله  $z$  ندارد و می‌توان در هر انتگرال‌گیری روی  $z$ ، آن را ثابت فرض کرد. پس می‌توان این تبدیل،  $F_i(j\omega)$ ، را کلاً به بیرون همه علامت‌های انتگرال‌گیری منتقل نمود.

$$F_0(j\omega) = F_i(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} h(z) dz$$

بالاخره بقیه انتگرال دوست قدیمی ما یعنی یک تبدیل فوریه دیگر را نشان می‌دهد! این یکی تبدیل فوریه پاسخ ضربه است که ما آن را با  $H(j\omega)$  نشان می‌دهیم، بنابراین همه تلاش ما به نتیجه ساده زیر منتهی می‌شود:

$$F_0(j\omega) = F_i(j\omega) H(j\omega) = F_i(j\omega) F\{h(t)\}$$

این نیز نتیجه مهم دیگری است: این رابطه تابع سیستم  $H(j\omega)$  را به صورت نسبت تبدیل فوریه تابع پاسخ نه تبدیل فوریه تابع تحریک نشان می‌دهد. همچنین تابع سیستم و پاسخ ضربه جفت تبدیل فوریه را ایجاد می‌نماید.

$$h(t) \Leftrightarrow H(j\omega) \quad (۶۷)$$

آنچه در پاراگراف فوق ملاحظه شد، بیانگر یک عبارت کلی است که تبدیل فوریه کانولوشن دو تابع زمانی، حاصل ضرب تبدیل‌های فوریه آن‌ها است:

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = F_f(j\omega) F_g(j\omega) \quad (۶۸)$$

عبارت فوق ممکن است یک بار دیگر ما را نگران کند که چرا اصولاً ما حوزه زمان را برای کار انتخاب می‌کنیم ولی باید به یاد داشت که ما چیزی را برای هیچ نمی‌دهیم. شاعری گفته بهترین خنده همراه با درد است. درد ما این‌جا مشکلات مقطعی، دریافتن عکس تبدیل یک تابع پاسخ ست و دلیل آن هم پیچیدگی ریاضی آن می‌باشد. از طرف دیگر یک کامپیوتر ساده رومیزی به راحتی می‌تواند کانولوشن دو تابع زمانی را با سرعتی عالی فراهم کند. به این منظور می‌تواند بک FFT (تبدیل فوریه سریع) را به سرعت به دست آورد و ما آن را در مثال متلب زیر به دست خواهیم آورد. پس مزیت قاطعی برای کار در حوزه زمان و حوزه فرکانس وجود ندارد. برای هر مسئله جدید باید جداگانه تصمیم‌گیری کرد. تصمیم باید بر اطلاعات موجود و امکانات کامپیوتری مبتنی باشد.

تابع تحریکی به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$v_i(t) = u(t) - u(t - 1)$$

پاسخ ضربه واحد با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$h(t) = 2e^{-t} u(t)$$

ابتدا تبدیل فوریه متناظر را به دست می‌آوریم. تابع تحریک تفاضل بین دو تابع پله واحد ست. این دو تابع یکی هستند، به جز این‌که یکی 1 ثانیه بعد از دیگری شروع می‌شود. ما پاسخ  $u(t)$  ازای محاسبه می‌کنیم. پاسخ در ازای  $u(t - 1)$  هم با 1s تأخیر با آن برابر است. تفاضل بین این دو پاسخ جزئی، پاسخ کلی برای  $v_i(t)$  است.

که دقیقاً همان معادله (۳۹)، یعنی بسط سری فوریه مختلط برای  $f(t)$  است. حال می‌توانیم علامت سنوالی که روی معادلات قبلی ملاحظه کردیم را برداریم و به این ترتیب وجود تبدیل فوریه برای تابع زمانی متناوب تحقق می‌یابد. در هر صورت تعجبی هم ندارد. در آخرین بخش ما تبدیل فوریه تابع کسینوسی را محاسبه کردیم که تابعی کاملاً متناوب بود و ما نیز اشاره مستقیمی به تناوبی بودن آن نکردیم. با این وجود، در به دست آوردن تبدیل فوریه آن روش مستقیمی به کار نبردیم. اما اکنون ابزاری ریاضی در دست داریم که به وسیله آن تبدیل خیلی سراسرتر حاصل می‌شود. برای نمایش این روش  $f(t) = \cos \omega_0 t$  را یک بار دیگر در نظر بگیرید. ابتدا ضرایب فوریه  $c_n$  را محاسبه می‌کنیم.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

بنابراین

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

این عبارت فقط در  $n = \pm 1$  دارای مقادیر غیر صفر است و بنابراین تمام طیف به صورت زیر خلاصه می‌گردد.

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

که دقیقاً همان رابطه‌ای است که قبلاً به دست آمد. راحت شدیم!

## تمرین

۱۴-۱۸ مطلوب است (الف)  $F(\sin^2 3t)$ ، (ب)  $F(A \sin \omega_0 t)$  و (ج)  $F\{6 \cos(8t + 0.1\pi)\}$ .  
جواب:  $j\pi A[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ ،  $2.5\pi[2\delta(\omega) - \delta(\omega + 6) - \delta(\omega - 6)]$  و  $[18.85 \angle -18^\circ] \delta(\omega + 8) + [18.85 \angle 18^\circ] \delta(\omega - 8)$ .

## ۹-۱۸ تابع سیستم و پاسخ در حوزه فرکانس

در بخش ۵-۱۵، موضوع تعیین خروجی یک سیستم فیزیکی برحسب ورودی و پاسخ ضربه با استفاده از انتگرال کانولوشن و کار اولیه‌ای در حوزه زمان حل شد. ورودی، خروجی و پاسخ ضربه همگی توابع زمانی‌اند. به دنبال آن دریافتیم که بهتر است در حوزه فرکانس کار کنیم، زیرا تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع در واقع حاصل ضرب هر تابع در حوزه فرکانس است. در همین امتداد، این مطلب در تبدیل فوریه هم صحیح است.

برای انجام این کار، تبدیل فوریه خروجی سیستم را بررسی می‌کنیم. با فرض این‌که ورودی و خروجی ولتاژ باشند، تعریف اولیه تبدیل فوریه را اعمال کرده و خروجی را با انتگرال کانولوشن بیان می‌نماییم:

$$\mathcal{F}\{v_0(t)\} = F_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v_i(t-z) h(z) dz \right] dt$$

دوباره فرض می‌کنیم هیچ انرژی اولیه‌ای ذخیره نشده باشد. در ابتدا ممکن است این عبارت پیچیده به نظر برسد، ولی می‌توان تا حد شگفت‌انگیزی آن را ساده کرد. چون جمله نمایی فاقد متغیر انتگرال‌گیری است می‌توان آن را به داخل انتگرال منتقل کرد. سپس ترتیب انتگرال‌گیری را عوض می‌کنیم و به دست می‌آوریم.

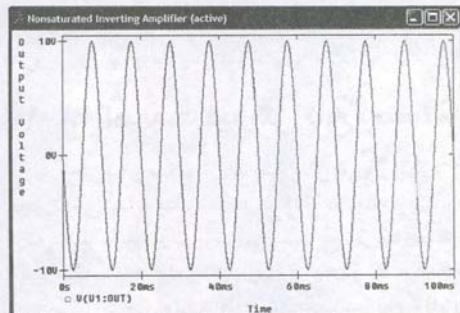
$$F_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v_i(t-z) h(z) dt \right] dz$$

چون  $h(z)$  تابع  $t$  نیست آن را از داخل انتگرال خارج کرده و با تغییر  $x = t - z$  آن را ساده می‌کنیم:

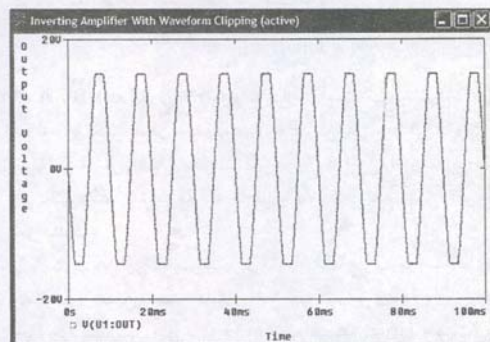


## تحلیل کامپیوتری

می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رفت طیف خطی ولتاژ خروجی این مدار تقویت‌کننده متشکل از یک ویژگی در فرکانس 100 Hz است. با افزایش ولتاژ اوج ورودی، به ولتاژ اشباعی می‌رسیم که به وسیله منابع ولتاژ dc (در این مثال  $\pm 15$  V) برای راه‌اندازی op-amp به کار رفته‌اند. مثلاً یک ورودی با دامنه 1.8 V شکل موج ولتاژ خروجی بریده شده‌ای مانند شکل ۱۸-۱۸ را به دست می‌دهد. چون موج ولتاژ، دیگر یک سینوسی کامل نیست، انتظار می‌رود تا فرکانس‌های هارمونیک در طیف فرکانس تابع مطابق شکل ۱۸-۱۹ ظاهر گردند. تأثیر رسیدن به اشباع ایجاد اعوجاج در سیگنال است و اگر به یک بلندگو وصل شود، دیگر یک موج صاف 100 Hz نخواهد بود. در عوض می‌توان آن را از تجمع امواجی با فرکانس‌های 300 و 500 Hz علاوه بر 100 Hz دانست. اعوجاج بیشتر موج سبب افزایش انرژی در فرکانس‌های هارمونیک می‌شود، به طوری که در این حالت



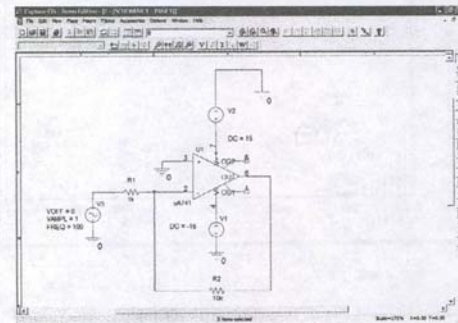
شکل ۱۸-۱۶ خروجی شبیه‌سازی شده شکل ۱۸-۱۵.



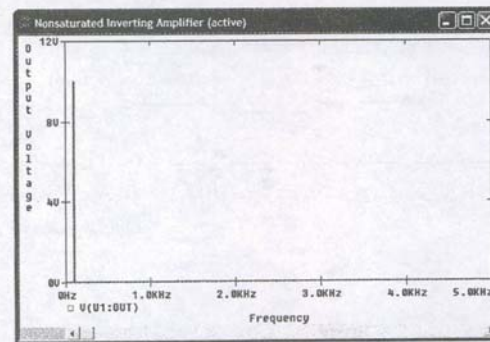
شکل ۱۸-۱۸ تحلیل گذرای حاصل برای یک ورودی سینوسی 1.8V که تأثیر اشباع را نشان می‌دهد.

واردی که در این فصل ارائه شد، پایه بسیاری از زمینه‌های پیشرفته در مطالعات از جمله پردازش سیگنال، مخابرات و کنترل است. ما فقط قادریم بعضی از مفاهیم اصلی را در قالب مدارهای ساده ارائه کنیم ولی حتی در این سطح تنها قسمتی از توانمندی‌های تحلیل مبتنی بر فوریه بیان شد. به عنوان اولین مثال، مدار op-amp شکل ۱۸-۱۵ را در نظر بگیرید، که با تقویت‌کننده عملیاتی  $\mu A741$  در PSpice ساخته شده است. مدار دارای بهره ولتاژ 10 است بنابراین انتظار داریم دامنه خروجی سینوسی، 10 V باشد. این نتیجه را در شکل ۱۸-۱۶ هم می‌توان ملاحظه کرد.

PSpice اجازه می‌دهد تا طیف فرکانس ولتاژ خروجی با آنچه که تبدیل سری فوریه سریع (FFT) خوانده می‌شود، فراهم شود، که تقریب گسسته زمانی از تبدیل فوریه دقیق است. از probe، ما در زیر Fourier، Trace را انتخاب می‌کنیم. نتیجه حاصل در شکل ۱۸-۱۷ دیده



شکل ۱۸-۱۵ یک مدار تقویت‌کننده وارونگر با ورودی سینوسی 100Hz.



شکل ۱۸-۱۷ تقریب گسسته تبدیل فوریه شکل ۱۸-۱۶.

عرض محدود به دلیل محدودیت در تعداد پریود شبیه‌سازی شده است.

تبدیل فوریه  $u(t)$  را در بخش ۷-۸ مشاهده کردیم:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

تابع سیستم از تبدیل لاپلاس  $h(t)$  در جدول ۲-۱۸ به دست می‌آید.

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(j\omega) = \mathcal{F}\{2e^{-t}u(t)\} = \frac{2}{1+j\omega}$$

عکس تبدیل حاصل ضرب این دو تابع، مؤلفه  $v_o(t)$  ناشی از  $u(t)$  را نتیجه می‌دهد.

$$v_{o1}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi\delta(\omega)}{1+j\omega} + \frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\}$$

با استفاده از خاصیت غربالی تابع ضربه، عکس تبدیل اولین جمله مقدار ثابت واحد است. بنابراین:

$$v_{o1}(t) = 1 + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\}$$

دومین جمله دارای ضرب جملات در مخرج و به فرم  $(\alpha + j\omega)$  است و عکس تبدیل به سادگی با روش بسط به کسرهای جزئی می‌تواند به دست آید که ما در بخش ۱۴-۵ دیدیم. بیایید یک بسط به کسرهای جزئی را که مزیت زیادی دارد، برگزینیم گرچه روش‌های سریع‌تری در بسیاری از موارد وجود دارند. در صورت هر کسر کمیت مجهولی را تخصیص می‌دهیم:

$$\frac{2}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{1+j\omega}$$

سپس مقادیری را برای  $j\omega$  جایگزین کنید. در این جا  $1+j\omega = 0$  را در نظر می‌گیریم:

$$1 = A + \frac{B}{2}$$

آن‌گاه  $-2 = A - B$

$$1 = -\frac{A}{2} - B$$

در نتیجه  $A = 2$  و  $B = -2$  است. پس

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega} - \frac{2}{1+j\omega}\right\} = \text{sgn}(t) - 2e^{-t}u(t)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} v_{o1}(t) &= 1 + \text{sgn}(t) - 2e^{-t}u(t) \\ &= 2u(t) - 2e^{-t}u(t) \\ &= 2(1 - e^{-t})u(t) \end{aligned}$$

به همین ترتیب مؤلفه دوم  $v_o(t)$  یعنی  $v_{o2}(t)$  که به وسیله  $u(t-1)$  تولید می‌شود برابر است با

$$v_{o2}(t) = 2(1 - e^{-(t-1)})u(t-1)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_{o1}(t) + v_{o2}(t) \\ &= 2(1 - e^{-t})u(t) - 2(1 - e^{-(t-1)})u(t-1) \end{aligned}$$

گسستگی در  $t = 0$  و  $t = 1$  تابع را به سه بخش زمانی تقسیم می‌نماید.

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2(1 - e^{-t}) & 0 < t < 1 \\ 2(e-1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

۱۵-۱۸ پاسخ ضربه یک شبکه خطی  $h(t) = 6e^{-20t}u(t)$  است. سیگنال ورودی  $3e^{-6t}u(t)$  می‌باشد. مطلوب است (الف)  $H(j\omega)$ ، (ب)  $V_o(j\omega)$ ، (ج)  $V_o(0.1)$ ، (د)  $V_o(0.3)$ ، (ه)  $V_{o,max}$  و  $V_o(0.3)$ .

جواب:  $0.5372$  و  $0.209V$ ،  $0.532V$ ،  $18/[ (20+j\omega)(6+j\omega) ]$ ،  $3/(6+j\omega)$ ،  $6/(20+j\omega)$ .



هرچند تبدیل  $\cos \omega_x t$  را می‌دانیم. تبدیلی که ما می‌خواهیم به قرار زیر است:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t + \beta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \cos(\omega_x t + \beta) dt$$

اگر جایگزینی  $\omega_x t + \beta = \omega_x \tau$  را انجام دهیم، آن‌گاه

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_x t + \beta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega \tau + j\omega \beta / \omega_x} \cos \omega_x \tau d\tau$$

$$= e^{j\omega \beta / \omega_x} \mathcal{F}\{\cos \omega_x \tau\}$$

$$= \pi e^{j\omega \beta / \omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]$$

که جفت تبدیل فوریه جدید است.

$$\cos(\omega_x t + \beta) \Leftrightarrow \pi e^{j\omega \beta / \omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)] \quad (۶۹)$$

که اکنون می‌تواند برای یک تابع سیستم مطلوب به کار رود.

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{\mathcal{F}\{B \cos(\omega_x t + \phi)\}}{\mathcal{F}\{A \cos(\omega_x t + \theta)\}} \\ &= \frac{\pi B e^{j\omega \phi / \omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]}{\pi A e^{j\omega \theta / \omega_x} [\delta(\omega - \omega_x) + \delta(\omega + \omega_x)]} = \frac{B}{A} e^{j\omega(\phi - \theta) / \omega_x} \end{aligned}$$

عبارت  $G(\omega_0)$  برابر بود با:

$$G(\omega_x) = \frac{B}{A} e^{j(\phi - \theta)}$$

که  $B$  و  $\phi$  در  $\omega_x$  محاسبه شده‌اند. اگر  $H(j\omega)$  را هم در  $\omega_x$  حساب کنیم، خواهیم داشت:

$$H(\omega_x) = G(\omega_x) = \frac{B}{A} e^{j(\phi - \theta)}$$

چون زیرنویس  $x$  چیز خاصی را نشان نمی‌دهد، پس آن را حذف می‌کنیم و نیز نتیجه می‌گیریم که تابع تبدیل و تابع سیستم یکی هستند:

$$H(j\omega) = G(\omega) \quad (۷۰)$$

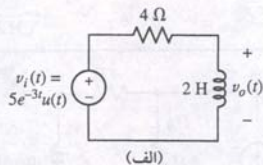
این که یکی از آرگومان‌ها  $\omega$  و دیگری  $\omega$  است، اهمیتی ندارد. زُصرفاً مقایسه مستقیم‌تری را بین تبدیل‌های فوریه و لاپلاس ممکن می‌سازد.

معادله (۷۰) ارتباط مستقیمی بین تکنیک‌های تبدیل فوریه و تحلیل حالت ماندگار سینوسی را نمایش می‌دهد. کار قبلی ما روی تحلیل سینوسی حالت ماندگار به کمک فیزورها، حالت خاصی از حالت کلی‌تر تحلیل تبدیل فوریه است. خاص به این معنی که ورودی‌ها و خروجی‌ها سینوسی فرض شدند، در صورتی که تبدیل‌های فوریه و توابع سیستم امکان دستکاری توابع و پاسخ‌های غیر سینوسی را هم ممکن می‌سازند.

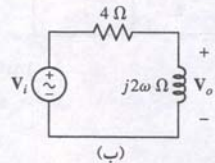
بنابراین برای یافتن تابع سیستم  $H(j\omega)$  برای یک شبکه کافی است که تابع تبدیل سینوسی متناظر برحسب  $\omega$  یا  $(j\omega)$  را به دست آوریم.

لنژاد دو سر القاگر مدار شکل ۲۲-۱۸ (الف) را بیابید.

لنژاد ورودی یک پالس میرای ساده است. ما تابع سیستم را لازم داریم، ولی لازم نیست که یک تابع ضربه اعمال کنیم، پاسخ ضربه را به دست آوریم و سپس عکس تبدیل را یافتم. در عوض ما معادله (۷۰) را برای یافتن تابع سیستم  $H(j\omega)$  به کار می‌بریم، با این فرض که لنژادهای ورودی و خروجی سینوسی بوده و با فیزورهای متناظر نمایش داده شوند، در



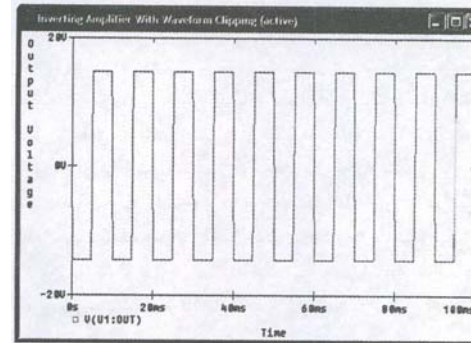
(الف)



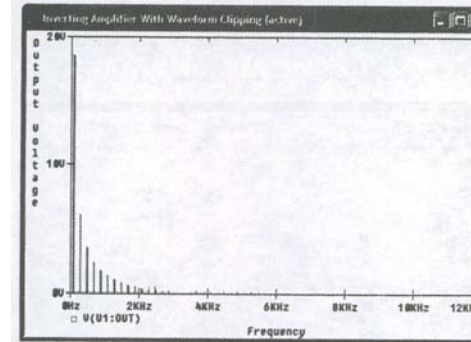
(ب)

شکل ۲۲-۱۸ (الف) پاسخ  $v_o(t)$  که به وسیله  $v_i(t)$  تولید شده است. (ب) تابع سیستم  $H(j\omega)$  را می‌توان با تحلیل حالت ماندگار سینوسی به صورت  $V_o/V_i = H(j\omega)$  معین کرد.

#### مثال ۱۸-۸

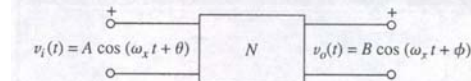


(الف)

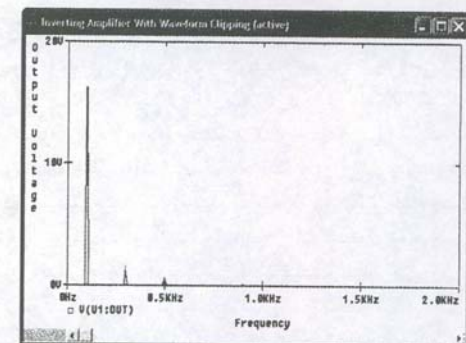


(ب)

شکل ۲۰-۱۸ (الف) اثر فاحش تقویت اشباع شبیه‌سازی شده ورودی 15 V سینوسی. (ب) FFT موج که افزایش قابل توجهی در بخشی از انرژی موجود در هارمونیک را برخلاف فرکانس 100Hz اصلی نشان می‌دهد.



شکل ۲۱-۱۸ تحلیل سینوسی برای تعیین تابع تبدیل  $H(j\omega_x) = (B/A)e^{j(\phi - \theta)}$  می‌تواند به کار رود که در آن  $B$  و  $\phi$  تابعی از  $\omega_x$  اند.



شکل ۱۹-۱۸ طیف فرکانس موج ترسیم شده شکل ۱۸-۱۸ که وجود چند هارمونیک را علاوه بر فرکانس اصلی نشان می‌دهد. پهنای محدود ناشی از تفکیک‌سازی عددی است.

سهم انرژی هارمونیک‌های بالاتر با اهمیت‌تر می‌شود. این نکته به راحتی از شبیه‌سازی‌های حاصل از شکل‌های ۱۸۲۰ (الف) و (ب) و لنژاد خروجی در حوزه زمان و فرکانس مشهود است.

## ۱۸-۱۰ اهمیت فیزیکی تابع سیستم

در این بخش سعی می‌کنیم تا چند جنبه تبدیل فوریه را با کاری که در چند فصل تکمیل شد، به هم مرتبط سازیم. شبکه دو دهانه  $N$  را بدون انرژی اولیه در نظر بگیرید و نیز فرض می‌کنیم توابع تحریک و پاسخ سینوسی مطابق شکل ۲۱-۱۸ و لنژاد باشند. و لنژاد ورودی را  $A \cos(\omega_x t + \theta)$  و خروجی را  $v_o(t) = B \cos(\omega_x t + \phi)$  می‌نامیم که دامنه  $B$  و زاویه فاز  $\phi$  تابعی از  $\omega_x$  هستند. می‌توانیم توابع تحریک پاسخ را به صورت فیزیوری  $V_i = A e^{j\theta}$  و  $V_o = B e^{j\phi}$  بنویسیم. نسبت پاسخ فیزیوری به فیزیوری تابع تحریک، عددی مختلف است که تابعی از  $\omega_x$  می‌باشد:

$$\frac{V_o}{V_i} = G(\omega_x) = \frac{B}{A} e^{j(\phi - \theta)}$$

که  $B/A$  دامنه  $G$ ،  $(\phi - \theta)$  زاویه فاز آن است. تابع تبدیل  $G(\omega_x)$  می‌توان با تغییر  $\omega_x$  در محدوده‌ای از مقادیر تولید کرد و  $B/A$  و  $\phi - \theta$  را برای هر مقدار  $\omega_x$  اندازه گرفت. اگر هر یک از این پارامترها را برحسب فرکانس رسم کنیم، دو معادله حاصل به طور کامل تابع تبدیل را توصیف خواهند کرد.

اکنون باید این تفسیرها را در یادمان نگه داریم و جنبه تا حدی متفاوت، از همین مسئله تحلیلی را ملاحظه کنیم. برای مداری با ورودی و خروجی سینوسی، مثل مدار ۲۱-۱۸ تابع سیستم  $H(j\omega)$  چیست؟ برای پاسخ به این سؤال، با تعریف  $H(j\omega)$  به عنوان نسبت تبدیلات فوریه خروجی و ورودی آغاز می‌کنیم. هر دو تابع زمانی دارای فرم تابعی  $\cos(\omega_x t + \beta)$  هستند که تبدیل فوریه آن‌ها تاکنون محاسبه نشده است،



شکل ۲۲-۱۸ (ب) با به کارگیری تقسیم ولتاژ داریم:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j2\omega}{4 + j2\omega}$$

تبدیل فوری تابع ورودی عبارت است از:

$$\mathcal{F}\{v_i(t)\} = \frac{5}{3 + j\omega}$$

تبدیل  $V_o(t)$  چنین است:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{v_o(t)\} &= H(j\omega) \mathcal{F}\{v_i(t)\} \\ &= \frac{j2\omega}{4 + j2\omega} \frac{5}{3 + j\omega} \\ &= \frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega}\end{aligned}$$

که کسرهای جزئی در آخرین گام برای تعیین عکس تبدیل فوری به کار می‌روند:

$$\begin{aligned}v_o(t) &= F^{-1} \left\{ \frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega} \right\} \\ &= 15e^{-3t} u(t) - 10e^{-2t} u(t) \\ &= 5(3e^{-3t} - 2e^{-2t}) u(t)\end{aligned}$$

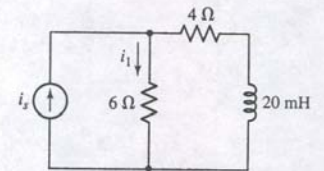
مسئله ما بدون در دسرهای کاتولوشن و یا معادلات دیفرانسیل حل شد.

## تمرین

۱۶-۱۸ با استفاده از روی تبدیل فوری در شکل ۲۳-۱۸،  $i_1(t)$  را در  $t = 1.5 \text{ ms}$  به دست آورید.

برابر است با (الف)  $\delta(t)$  A، (ب)  $u(t)$  A و (ج)  $500t$  A.

جواب:  $-141.7 \text{ A}$ ،  $0.683 \text{ A}$  و  $0.308 \text{ A}$ .



شکل ۲۳-۱۸

## جمع بندی

به معادله  $(V_o)$ ، یعنی رابطه بین تابع سیستم  $H(j\omega)$  و تابع تبدیل حالت ماندگار سینوسی  $G(\omega)$  باز می‌گردیم. اکنون تابع سیستم را به صورت نسبت فیزور خروجی به فیزور ورودی در نظر می‌گیریم. فرض کنید دامنه فیزور ورودی واحد و زاویه فاز آن صفر باشد. آنگاه فیزور خروجی  $H(j\omega)$  است. تحت این شرایط، اگر دامنه خروجی فاز را برحسب تمام مقادیر  $\omega$  ثبت کنیم، تابع سیستم را برحسب تمام مقادیر  $\omega$  ثبت کرده‌ایم. در این صورت پاسخ سیستمی را بررسی کرده‌ایم که متوالیاً به ورودی‌اش، بینهایت سیگنال سینوسی، همه با دامنه واحد و فاز صفر اعمال شده است. اکنون فرض کنید ورودی یک تابع ضربه واحد باشد، سپس به پاسخ ضربه  $h(t)$  توجه نمایید. آیا اطلاعات حاصل با آن‌چه که قبلاً به دست آمده متفاوت است؟ تبدیل فوری تابع ضربه واحد مقدار ثابت واحد است و نشان می‌دهد که همه مؤلفه‌های فرکانس وجود دارند، همگی دارای دامنه برابر و فاز صفر می‌باشند. پاسخ سیستم ما مجموع پاسخ‌ها به همه این مؤلفه‌ها است. می‌توان نتیجه را روی یک اسیلوسکوپ هم مشاهده کرد. واضح است که تابع سیستم و پاسخ ضربه از لحاظ پاسخ سیستم حاوی اطلاعات یکسانی هستند.

پس برای توصیف پاسخ یک سیستم به یک تابع تحریک کلی دو روش مختلف داریم. یکی توصیف در حوزه زمان است و دیگری توصیف در حوزه فرکانس می‌باشد. با کار در حوزه زمان کاتولوشن را روی تابع تحریک و پاسخ ضربه سیستم اجرا می‌کنیم تا پاسخ به دست آید. در ابتدای مبحث کاتولوشن گفتیم که این روش را می‌توان به این صورت تعبیر کرد که ورودی مجموع پیوسته‌ای از توابع ضربه‌ای است که با قدرت متفاوت و در زمان‌های متفاوت اعمال می‌شوند. خروجی هم مجموع پیوسته‌ای از پاسخ‌های ضربه‌ها است.

با این وجود در حوزه فرکانس، پاسخ را با ضرب تبدیل فوری تابع تحریک در تابع سیستم به دست می‌آوریم. در این حالت، تابع تحریک را یک طیف پیوسته یا مجموعه پیوسته‌ای از

سینوس‌ها فرض می‌کنیم. با ضرب این تبدیل در تابع سیستم، تبدیل تابع پاسخ را به دست می‌آوریم که باز مجموعه پیوسته‌ای از سینوس‌ها است.

چه خروجی را مجموعه پیوسته‌ای از پاسخ ضربه‌ها بدانیم و یا آن را مجموعه پیوسته‌ای از پاسخ‌های سینوسی تصور کنیم، خطی بودن و اصل جمع کمک می‌کنند تا خروجی کل را به عنوان تابعی از زمان و مجموع تمام فرکانس‌ها (عکس تبدیل فوری) و یا به عنوان تابعی از فرکانس با جمع در تمام زمان‌ها (تبدیل فوری) تعیین کنیم.

متأسفانه هر دو تکنیک مشکلات و محدودیت‌هایی دارند. در مورد کاتولوشن، محاسبه انتگرال مشکل است، زیرا تابع تحریک یا پاسخ ضربه پیچیده است. علاوه بر آن به لحاظ تجربی هم اندازه‌گیری پاسخ ضربه سیستم امری غیرممکن است، زیرا در عمل نمی‌توان تابع تحریک ضربه را تولید کرد. حتی اگر بخواهیم ضربه را با یک پالس باریک و بلند به طور تقریب تولید کنیم، سیستم اشباع می‌شود و از حیطه عملکرد خطی خود خارج می‌گردد.

در مورد حوزه فرکانس، یک محدودیت بزرگ داریم و آن این که به سادگی می‌توان توابع تحریکی را در نظر گرفت که تبدیل فوری نداشته باشد. علاوه بر آن اگر بخواهیم توصیف حوزه زمان تابع پاسخ را به دست آوریم، باید عکس تبدیل فوری را حساب کنیم و این کار در بعضی مواقع بسیار مشکل است.

بالاخره هیچ یک از این روش‌ها نمی‌توانند مقادیر اولیه‌ای را وارد محاسبات نمایند. از این لحاظ تبدیل لاپلاس ارجحیت دارد.

بزرگترین مزیت ناشی از کاربرد تبدیل فوری اطلاعات مفید فراوانی است که راجع به خواص طیفی سیگنال در اختیار می‌گذارد. خصوصاً می‌توان از اطلاعات مربوط به انرژی یا توان بر واحد پهنای باند را نام برد. بعضی از این اطلاعات هم به سادگی به وسیله تبدیل لاپلاس حاصل می‌گردد. ما بحث بیشتری را در این مورد ادامه نمی‌دهیم و آن را به مطالعات پیشرفته‌تر وامی‌گذاریم.

خوب، سوال این است که پس چرا تا این جا چیزی گفته نشد؟ بهترین پاسخ شاید این باشد که تکنیک‌های قوی حل مسائل ساده را پیچیده‌تر می‌کند و تفسیر فیزیکی رفتار شبکه‌های ساده‌تر را می‌پیچاند. مثلاً اگر ما فقط علاقمند به پاسخ واداشته هستیم، دلیلی ندارد که با استفاده از تبدیل لاپلاس و با محاسبه یک تبدیل معکوس مشکل، هم پاسخ واداشته و هم پاسخ طبیعی را به دست آوریم. البته می‌توان به پیش رفت ولی همه چیزهای خوب به پایان می‌رسد. با آرزوی موفقیت در مطالعات بعدی شما.

## کاربرد عملی

### پردازش تصویر



شکل ۲۴-۱۸ چهره‌ای که یک بیولوژیست خیلی به آن علاقمند است.

هر چند در راستای درک کامل کار یک ماهیچه پیشرفت‌های بسیاری صورت گرفته است، هنوز سوالات زیادی مطرح است. تحقیقات زیادی هم با استفاده پای قورباغه انجام شده است (شکل ۲۴-۱۸).

یکی از این روش‌ها که بسیاری از دانشمندان تحلیل‌گر آن را به کار می‌برند، استفاده از میکروسکپ الکترونی است. شکل ۲۵-۱۸ یک میکروگراف الکترونی از لایه‌ای از ماهیچه قورباغه را نشان می‌دهد که نشان‌دهنده تقویم در آرایش myosin است که نوعی پروتئین contractile می‌باشد. برای بیولوژیست‌ها نکته جالب پروتئینی بودن و عدم اطاعت آن در



## ۱۸-۱۱ خلاصه فصل و مرور

- فرکانس‌های هارمونیک یک تابع سینوسی که فرکانس اصلی  $\omega_0$  را دارد، برابر  $n\omega_0$  است.
- قضیه فوریه بیان می‌کند که اگر یک تابع  $f(t)$  خواص بخصوصی را دارا باشد، قابل نمایش با سری نامحدود بینهایت  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$  می‌باشد که در آن  $a_n = (1/T) \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt$  و  $b_n = (2/T) \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt$  می‌باشد.
- تابعی تقارن زوج دارد که در آن  $f(t) = f(-t)$  باشد.
- تابعی تقارن فرد دارد که در آن  $f(t) = -f(-t)$  باشد.
- تابعی تقارن نیم موج دارد که در آن  $f(t) = -f(t - \frac{1}{2}T)$  باشد.
- سری فوریه یک تابع زوج فقط از یک ثابت و توابع کسینوسی تشکیل شده است.
- سری فوریه یک تابع فرد فقط از یک ثابت و توابع سینوسی درست شده است.
- سری فوریه هر تابع با تقارن نیم موج فقط شامل هارمونیک‌های فرد است.
- سری فوریه هر تابع را می‌توان به صورت مختلط با نمایشی بیان کرد که در آن  $c_n = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$  که در آن  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$  است.
- تبدیل فوریه به ما اجازه می‌دهد تا توابع وابسته به زمان را مثل تبدیل لاپلاس در حوزه فرکانس نمایش دهیم. معادلات تبدیل عبارتند از:

$$f(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt$$

## ۱۸-۱۱ خواندنی‌های کمکی

A very readable treatment of Fourier analysis can be found in

A. Pinkus and S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms*.  
Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Finally, for those interested in learning more about muscle research, including electron microscopy of tissue, an excellent treatment can be found in

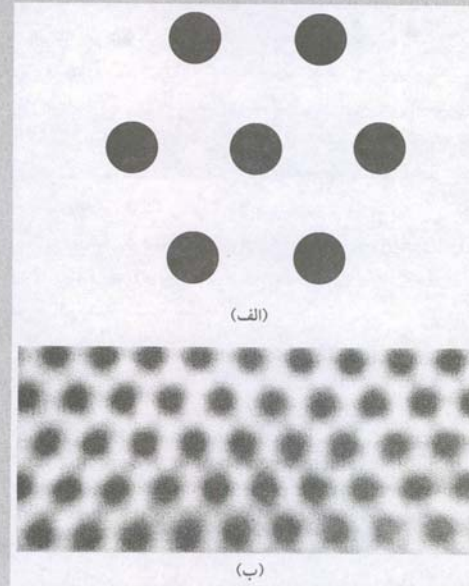
J. Squire, *The Structural Basis of Muscular Contraction*. New York:  
Plenum Press, 1981.

## مسائل

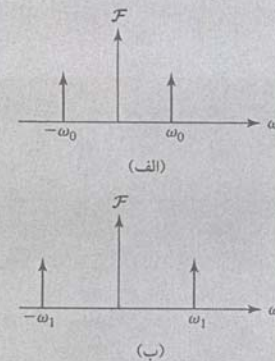
### ۱۸-۱ فرم مثلثاتی سری فوریه

- الف) موج ولتاژ  $v(t) = 2 \cos \pi t + 1.8 \sin 4\pi t$  را در فاصله  $0 < t < T$  رسم کنید. (ب) مقدار حداکثر  $v(t)$  را در این فاصله به دست آورید. (ج) اندازه منفی‌ترین مقدار  $v(t)$  را در این فاصله تعیین کنید.
- الف) برای توابع زیر به دست آورید:  
(الف)  $5 \cos 100t$   
(ب)  $5 \sin 100t$   
(ج)  $5 + \cos 100t$   
(د)  $5 + \sin 100t$
- الف) برای توابع زیر به دست آورید:  
(الف)  $100 \cos(5t - 18^\circ)$   
(ب)  $100 \sin(5t - 18^\circ)$
- پنج فرکانس هارمونیک اول ( $n = 1$  تا  $5$ ) امواج زیر را به دست آورید:  
(الف)  $v_1(t) = 77 \cos(5t) \text{ V}$   
(ب)  $i(t) = 32 \sin(5t) \text{ nA}$   
(ج)  $q(t) = 4 \cos(90t - 85^\circ) \text{ C}$
- پریود و فرکانس اصلی هر یک از موارد زیر را به دست آورید:  
(الف)  $q(t) = 8.5 \cos(2\pi t) \text{ nC}$   
(ب)  $v(t) = 9 \sin(5.95t) \text{ MV}$   
(ج)  $i(t) = 1.113 \cos(t - 45^\circ) \text{ pA}$
- بگذارید  $v(t) = 3 - 3 \cos(100\pi t - 40^\circ) + 4 \sin(200\pi t - 10^\circ) + 2.5 \cos 300\pi t \text{ V}$ ،  $V_{av}$ ،  $V_{eff}$  و  $T$  (ج) و  $v(18 \text{ ms})$  (ب) را به دست آورید.

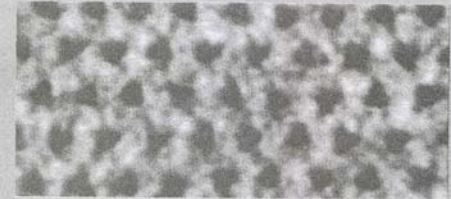
$h(x) = \cos \omega_1 t$  کانولون کنیم، تبدیل فوریه‌ای به دست می‌آید که در شکل ۱۸-۲۷ (ب) هم دیده می‌شود که اگر  $\omega_1 \neq \omega_0$  باشد مقدار صفر حاصل خواهد شد. اگر در عوض ما تابع فیلتری با همان فرکانس  $f(x)$  انتخاب کنیم مقداری غیر صفر به دست می‌آوریم، یعنی:  $\omega = \pm \omega_0$ .



شکل ۱۸-۲۶ (الف) یک فیلتر فضایی با تقارن شش وجهی. (ب) تصویر پس از کانولوشن و عکس تبدیل فوریه گسسته که کاهش را در پارازیت زمینه می‌دهد.



شکل ۱۸-۲۷ (الف) تبدیل فوریه  $f(x) = \cos \omega_0 t$ . (ب) تبدیل فوریه  $h(x) = \cos \omega_1 t$ .



شکل ۱۸-۲۵ گراف الکترونیکی ناحیه‌ای از ماهیچه.

یک لایه ماهیچه وسیع است. برای ایجاد مدلی از برای این مشخصات، یک روش عددی را می‌توان به کار برد، تا تحلیل چنین تصاویری امکان‌پذیر باشد. با این وجود همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، تصویر تولیدشده به وسیله میکروسکپ الکترونی ممکن است با پارازیت‌های زمینه، تخریب شود و شناخت فیلامان‌های برون ماهیچه را دچار خطا نماید.

با معرفی روش‌های کمکی تحلیل مدارهای خطی متغیر با زمان، روش‌های مبتنی بر فوریه این فصل در واقع روش‌هایی قوی‌اند که کاربردهایی در دیگر زمینه‌ها هم فراهم ساخته است. از میان آن‌ها، زمینه پردازش تصویر به دفعات از تبدیل فوریه (FFT) و روش‌های عددی مربوطه بهره می‌برد. تصویر شکل ۱۸-۲۵ قابل توصیف با تابع فضایی  $f(x, y) = 0$  است که  $f(x, y)$  متعلق به سفید،  $f(x, y) = 1$  متعلق به خاکستری و  $f(x, y)$  مشخص‌کننده یک پیکسل در تصویر است. با تعریف یک تابع فیلتر  $h(x, y)$  که در شکل ۱۸-۲۶ (الف) قابل مشاهده است عمل کانولوشن

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

تصویر شکل ۱۸-۲۶ (ب) را نتیجه می‌دهد که در آن فیلامان یا لایه myosin قابل تشخیص‌تر است.

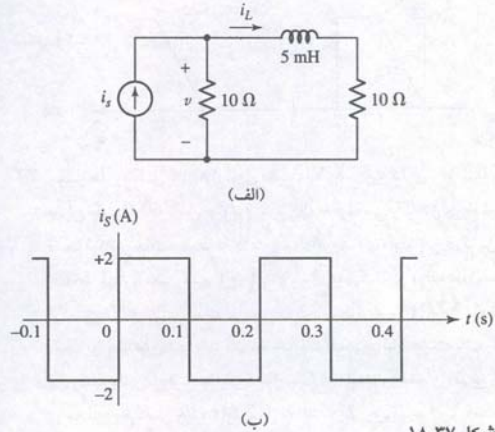
در عمل این پردازش تصویر در حوزه فرکانس انجام می‌شود، که در آن FFT هر دو تابع  $f$  و  $h$  محاسبه شده و ماتریس‌های حاصل در هم ضرب می‌شوند. عمل عکس تبدیل لاپلاس تصویر فیلترشده ۱۸-۲۶ (ب) را به دست می‌دهد. راستی چرا این کانولوشن با یک عمل فیلتر کردن برابر گرفته شده است؟ آرایش فیلامان myosin یک تقارن شش وجهی را دارا است، که این خاصیت تابع  $h(x, y)$  نیز هست. در واقع هم آرایش فیلامان myosin و تابع فیلتر فرکانس‌های فضایی یکسانی دارند. کانولوشن  $f$  و  $h$  نتیجه‌اش تجلی الکوی شش وجهی در تصویر اصلی و حذف پیکسل پارازیت است که دارای تقارن شش وجهی نیستند. این نکته بهتر قابل درک است اگر ما سطر افقی شکل ۱۸-۲۵ را به صورت تابع سینوسی  $f(x) = \cos \omega_0 t$  که تبدیل فوریه شکل ۱۸-۲۷ (الف) دارد نشان دهیم که جفت توابعی است که با  $2\omega_0$  از هم جدا شده‌اند. اگر ما این تابع را با تابع فیلتر



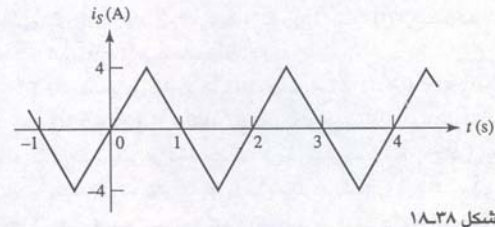


۲۷. یک منبع ولتاژ ایده‌آل  $v_s$ ، یک کلید باز، یک مقاومت  $2\ \Omega$  و یک خازن  $2\text{ F}$  به طور سری به هم وصل می‌باشند. ولتاژ منبع در شکل ۱۸-۳۶ دیده می‌شود. کلید در  $t = 0$  بسته شده و ولتاژ خازن پاسخ موردنظر است. (الف) در حوزه فرکانس، هارمونیک  $n$ ام کار کند تا پاسخ واداشته به صورت سری فوریه مثلثاتی به دست آید. (ب) فرم تابعی پاسخ طبیعی را به دست آورید. (ج) پاسخ کامل را به دست آورید.

۲۸. مدار شکل ۱۸-۳۷ (الف) به یک موج مانند شکل ۱۸-۳۷ (ب) متصل است. ولتاژ حالت ماندگار  $v(t)$  را به دست آورید.

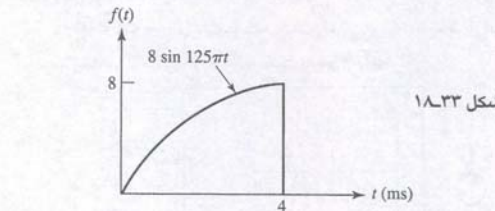


۲۹. مدار شکل ۱۸-۳۷ (الف) به یک موج مانند شکل ۱۸-۳۸ وصل است. مطلوبست جریان  $i_L(t)$  ماندگار.

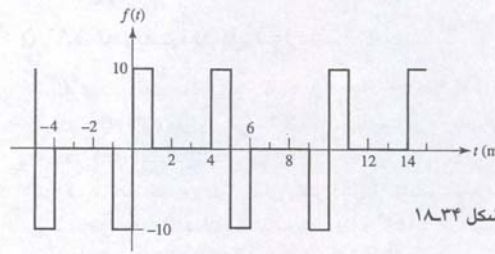


## ۱۸-۴ فرم مختلط سری فوریه

۳۰. فرض کنید در موج متناوب شکل ۱۸-۲۹  $T = 6\text{ ms}$  باشد.  $c_3$ ،  $c_2$ ،  $c_1$  و  $|c_3|$ ،  $|c_2|$ ،  $|c_1|$  و  $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$  را بیابید.

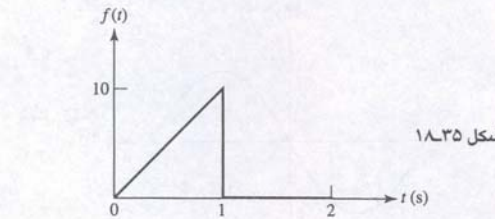


۲۲. از تقارن‌های موجود در شکل ۱۸-۳۴ حداکثر استفاده را کرده مقادیر عددی  $a_0$ ،  $a_n$  و  $b_n$  را برای  $(1 \leq n \leq 10)$  بیابید.



۲۲. تابع  $f(t)$  دارای دو تقارن فرد و نیم موج است. پریود 8 ms می‌باشد. همچنین می‌دانیم که  $f(t) = 10^3 t$  در  $0 < t < 1\text{ ms}$  است و  $f(t) = 0$  در  $1 < t < 2\text{ ms}$  می‌باشد. مقادیر  $b_n$  را برای  $1 \leq n \leq 5$  به دست آورید.

۲۲. بخشی از  $f(t)$  در شکل ۱۸-۳۵ دیده می‌شود.  $f(t)$  را در فاصله  $0 < t < 8\text{ s}$  نشان دهید، به شرطی که  $f(t)$  دارای (الف) تقارن فرد و  $T = 4\text{ s}$  باشد، (ب) تقارن زوج و  $T = 4\text{ s}$  باشد، (ج) تقارن فرد و نیم موج و  $T = 8\text{ s}$  باشد، (د) تقارن زوج و نیم موج و  $T = 8\text{ s}$  باشد.



## ۱۸-۲ پاسخ کامل به توابع تحریک متناوب

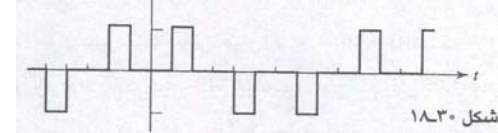
۲۱. موج شکل ۱۸-۸ (الف) را با شکل ۱۸-۳۶ تعویض کنید و تحلیل مثال ۱۸-۲ را تکرار کنید تا یک عبارت برای (الف)  $i_f(t)$ ، (ب)  $i(t)$  به دست آورید.

۲۶. موج  $v(t)$  در شکل ۱۸-۳۶ به مدار شکل ۱۸-۸ (ب) اعمال شده است. از روش‌های استاندارد برای محاسبه تحلیل گذرا  $i(t)$  در  $t$  برابر (الف)  $0.2\ \mu\text{s}$ ، (ب)  $0.4\ \mu\text{s}$ ، (ج)  $0.6\ \mu\text{s}$  استفاده کنید.

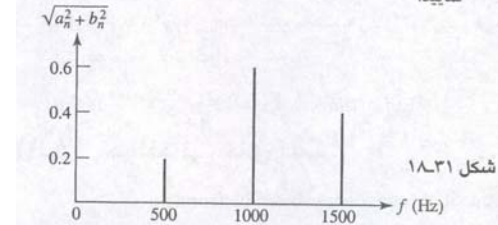
۱۷. موج مثال ۱۸-۱ (در شکل ۱۸-۲) خروجی یکسوساز نیم‌موج است اگر فاصله  $-0.3 < t < -0.1$ ،  $-0.1 < t < 0.1$ ،  $0.1 < t < 0.3$ ، یک نیم‌موج اشغال کند، آن‌گاه خروجی برابر با یکسوساز تمام موج است سری فوریه مثلثاتی برای این حالت چیست؟

## ۱۸-۲ استفاده از تقارن

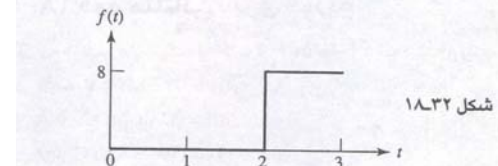
۱۸. (الف) نوع تقارن را در شکل ۱۸-۳۰ مشخص کنید. (ب) کدام یک از ضرایب  $a_n$  یا  $b_n$  صفر است؟ (ج)  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $b_1$ ،  $b_2$ ،  $a_3$ ،  $b_3$ ، محاسبه نمایید.



۱۹. تابع متناوب  $y(t)$  دارای تقارن فرد و طیف دامنه شکل ۱۸-۳۱ است. اگر همه  $a_n$ ،  $b_n$ ها غیرمنفی باشند، (الف) سری فوریه را برای  $y(t)$  معین کنید، (ب) مقدار مؤثر  $y(t)$  را به دست آورید، مقدار  $y(0.2\text{ ms})$  را تعبیر نمایید.

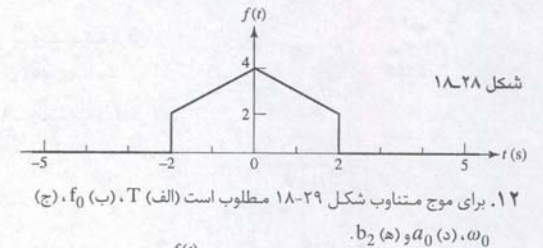


۲۰. برای موج  $f(t)$  در فاصله  $0 < t < 3$  در شکل ۱۸-۳۲ تابع جدید  $g(t)$  که برابر  $f(t)$  در فاصله  $0 < t < 3$  است، رسم کنید ولی (الف)  $T = 6$  دارای تقارن زوج باشد، (ب)  $T = 6$  و تقارن فرد و نیم موج دارد، (ج)  $T = 12$  و تقارن فرد و نیم موج دارد، (د)  $T = 12$  و دارای تقارن فرد نیم موج باشد، (ه) در هر مورد  $a_5$  و  $b_5$  را بیابید.



۲۱. موج شکل ۱۸-۳۳ هر 4 ms یک بار تکرار می‌شود. (الف) مؤلفه dc بعد  $a_0$  را پیدا کنید، (ب) مقادیر  $a_1$  و  $b_1$  را معین نمایید. (ج) تابعی مث  $i_x(t)$  با دوره 4 ms با  $f(t)$  برابر است ولی پریود آن 8 ms بوده و تقارن زوج دارد. آن را مشخص کنید. (د)  $a_1$  و  $b_1$  را برای  $i_x(t)$  به دسه آورید.

(ج)  $100 + 100 \cos(5t - 18^\circ)$   
(د)  $100 + 100 \sin(5t - 18^\circ)$   
۷.  $a_0$ ،  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $b_1$ ،  $b_2$  را برای  $f(t)$  با مقادیر (الف) 3، (ب)  $3 \cos 3t$ ، (ج)  $3 \sin 3t$  و (د)  $3 \cos(3t - 10^\circ)$  به دست آورید.  
۸.  $a_0$ ،  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $b_1$ ،  $b_2$  را برای تابع زیر به دست آورید:  
 $f(t) = 5u(t-1) - 5u(t-2) + 5u(t-3) - 5u(t-4) + \dots$   
۹.  $a_0$ ،  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $b_1$ ،  $b_2$  را برای تابع زیر به دست آورید:  
 $g(t) = 2u(t) - 2u(t-2) + 2u(t-3) - 2u(t-5) + \dots$   
۱۰. مقادیر عددی  $a_0$ ،  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $b_1$ ،  $b_2$  و  $b_3$  را برای تابع  $h(t) = -3 + 8 \sin 2t + f(t)$  که می‌باشد، به دست آورید.  
۱۱. موج شکل ۱۸-۲۸ یک موج متناوب با پریود  $T = 10\text{ s}$  است. مطلوب است (الف) مقدار متوسط، (ب) مقدار مؤثر، (ج) مقدار  $a_3$ .



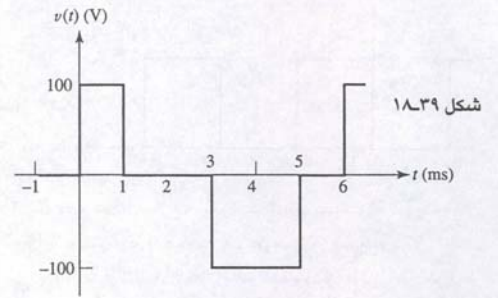
۱۲. برای موج متناوب شکل ۱۸-۲۹ مطلوب است (الف)  $T$ ، (ب)  $f_0$ ، (ج)  $\omega_0$ ، (د)  $a_0$  و (ه)  $b_2$ .

۱۳. مطلوب است  $a_3$ ،  $b_3$ ،  $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$  برای موج شکل ۱۸-۲۹.  
۱۴. فرم مثلثاتی سری فوریه، مقدار  $T$  و مقدار متوسط هر تابع زمانی متناوب زیر را معین کنید. (الف)  $3.8 \cos^2 80 \pi t$ ، (ب)  $3.8 \cos^3 80 \pi t$  و (ج)  $3.8 \sin 80 \pi t - 3.8 \cos 79 \pi t$ .

۱۵. یک تابع زمانی متناوب با  $T = 2\text{ s}$  دارای مقادیر زیر است:  $f(t) = 0$  در  $t_1 < t < 1$ ،  $f(t) = 1$  در  $0 < t < t_1$  و  $-1 < t < 0$ . (الف) چه مقداری از  $t_1$  مقدار  $b_4$  را حداکثر می‌سازد؟ (ب)  $b_{4,\max}$  را پیدا کنید.

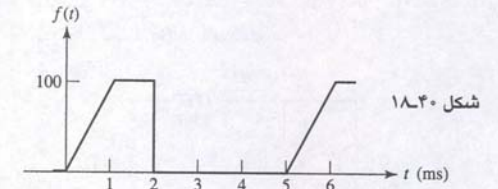
۱۶. فرض کنید یک سیگنال الکتریکی با رابطه زیر تعریف شود:  
 $g(t) = -5 + 8 \cos 10t - 5 \cos 15t + 3 \cos 20t - 8 \sin 10t - 4 \sin 15t + 2 \sin 20t$   
مطلوب است (الف) پریود  $g(t)$ ، (ب) عرض باند سیگنال به Hz، (ج) مقدار متوسط  $g(t)$ ، (د) مقدار مؤثر  $g(t)$  و (ه) طیف گسسته دامنه و فاز سیگنال.





شکل ۱۸-۳۹

۳۹. (الف) سری فوری مختلط را برای موج متناوب در شکل ۱۸-۴۰ پیدا کنید. (ب) به  $c_n$  مقادیر عددی را بدهید،  $n = 0, \pm 1, \pm 2$ .



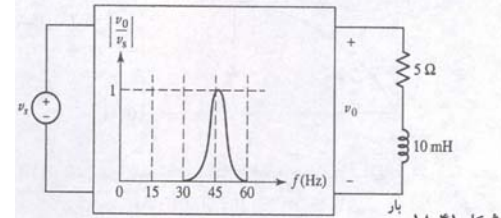
شکل ۱۸-۴۰

۳۲. پالس‌های شکل ۱۸-۱۱ دارای دامنه ۸ V، دوره کاری  $0.2 \mu s$  و میزان تکرار 6000 پالس در ثانیه است. (الف) فرکانسی را که در آن پوش طیف فرکانس دامنه صفر دارد، به دست آورید. (ب) جدایی فرکانس خطوط طیف را معین کنید. (ج)  $|c_n|$  را برای نزدیک‌ترین مؤلفه طیف به فرکانس 20 kHz به دست آورید. (د) نزدیک‌ترین به 2 MHz را به دست آورید. (ه) پهنای باند نامی یک تقویت‌کننده چه باید داشته باشد تا این رشته پالس با دقت منظمی انتقال یابد. (و) تعداد مؤلفه‌های طیفی را در محدوده فرکانس  $2.2 \text{ Mrad/s} < \omega < 2$  بیان کنید. (ی) دامنه  $c_{227}$  را حساب کنید و فرکانس آن را بیان نمایید.

۳۳. شکل موج ولتاژی دارای پریود  $T = 5 \text{ ms}$  و مقادیر ضرایب مختلط است:  $c_0 = 1$ ،  $c_1 = 0.2 - j0.2$ ،  $c_2 = 0.5 + j0.25$ ،  $c_3 = -1 - j2$ . (الف)  $v(t)$  را پیدا کنید. (ب)  $v(1 \text{ ms})$  را محاسبه نمایید.

۳۴. یک رشته پالس دارای پریود  $5 \mu s$ ، دامنه واحد  $-0.4 < t < 0.6$  و  $0.4 < t < 0.6 \mu s$  و در بقیه زمان‌های دوره دارای دامنه صفر است. این سری پالس می‌تواند عدد ددهی 3 را نشان دهد که به فرم دودویی به وسیله یک کامپیوتر دیجیتال ارسال می‌گردد. (الف)  $c_n$  را پیدا کنید. (ب)  $c_4$  را محاسبه کنید. (ج)  $c_0$  را ارزیابی نمایید. (د)  $|c_n|_{\max}$  را به دست آورید. (ه)  $N$  را طوری معین کنید که  $|c_n| \leq 0.1$  در  $|n| \leq N$  همه مقادیر  $n > N$  (و) چه پهنای باندی برای انتقال این پخش از طیف لازم است؟

۳۵. ولتاژ پریودیک  $v_s(t) = 40 \text{ V}$  برای  $0 < t < \frac{1}{96}$  و  $0 \text{ V}$  برای  $\frac{1}{96} < t < \frac{1}{16} \text{ s}$  می‌باشد. مطلوب است (الف)  $c_3$  و (ب) توان تحویلی به مقاومت بار در شکل ۱۸-۴۱ را به دست آورید.



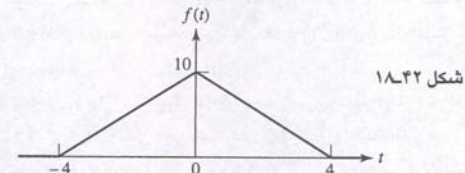
شکل ۱۸-۴۱

## ۱۸-۵ تعریف تبدیل فوریه

۳۶. با فرض تابع زمانی  $f(t) = 5[u(t+3) + u(t+2) - u(t-2) - u(t-3)]$  (الف)  $f(t)$  را رسم کنید. (ب) از تعریف تبدیل فوریه برای یافتن  $F(j\omega)$  استفاده کنید.

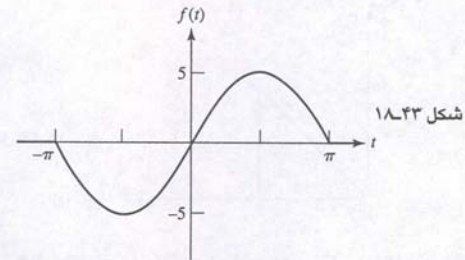
۳۷. از تعریف معادلات تبدیل فوریه برای یافتن  $F(j\omega)$  استفاده نمایید به شرطی که  $f(t)$  برابر باشد با (الف)  $u(t)e^{-at}$ ،  $a > 0$  (ب)  $u(t-t_0)e^{-a(t-t_0)}$ ،  $a > 0$ ،  $t_0 > 0$  (ج)  $u(t)$ ،  $a > 0$ .

۳۸. تبدیل فوریه را برای پالس مثلثی شکل ۱۸-۴۲ به کار ببرید.



شکل ۱۸-۴۲

۳۹. تبدیل فوریه را برای پالس سینوسی شکل ۱۸-۴۳ به کار ببرید.



شکل ۱۸-۴۳

۴۰. فرض کنید  $f(t) = (8 \cos t)[u(t+0.5\pi) - u(t-0.5\pi)]$  باشد  $F(j\omega)$  را برای (الف)  $\omega = 0$ ، (ب)  $\omega = 0.8$  و (ج)  $\omega = 3.1$  محاسبه نمایید.

۴۱. از معادلات تعریف عکس تبدیل فوریه برای یافتن  $f(t)$  استفاده کنید آن‌گاه آن را در  $t = 0.8$  برای  $F(j\omega)$  (الف)  $4[u(\omega+2) - u(\omega-2)]$  (ب)  $4e^{-2j\omega} [\cos \pi\omega][u(\omega+0.5) - u(\omega-0.5)]$  (ج)  $4e^{-2j\omega}$  محاسبه نمایید.

## ۱۸-۶ بعضی از خواص تبدیل فوریه

۴۲. با فرض  $v(t) = 20e^{1.5t} u(t-2) \text{ V}$ ، مطلوب است (الف)  $F_v(j\omega)$ ، (ب)  $A_v(2)$ ، (ج)  $B_v(2)$ ، (د)  $|F(j2)|$  و (ه)  $\phi(2)$ .

۴۳. فرض کنید  $i(t)$  جریان متغیر با زمان در مقاومت  $4 \Omega$  باشد. اگر اندازه تبدیل فوریه  $i(t)$  برابر  $I(j\omega) = (3 \cos 10\omega) [u(\omega + 0.05\pi) - u(\omega - 0.05\pi)] \text{ A/(rad/s)}$  باشد. مطلوب است (الف) انرژی کل موجود در سیگنال (ب) فرکانس  $\omega_x$ ، به نحوی که نصف کل انرژی در محدوده  $\omega_x < |\omega|$  باشد.

۴۴. فرض کنید  $f(t) = 10e^{-4t} u(t)$  باشد، مطلوب است (الف) انرژی  $1 \Omega$  ارائه شده به وسیله سیگنال. (ب)  $|F(j\omega)|$  (ج) چگالی انرژی در  $\omega = 4 \text{ rad/s}$  و  $\omega = 0$ .

۴۵. اگر  $v(t) = 8e^{-2|t|} \text{ V}$  باشد، مطلوب است (الف) انرژی  $1 \Omega$  مربوط به این سیگنال. (ب)  $|F_v(j\omega)|$  (ج) محدوده فرکانس  $\omega_1 < |\omega|$  که در آن 90 درصد انرژی  $1 \Omega$  قرار دارد.

## ۱۸-۷ جفت تبدیل فوریه برای بعضی توابع زمانی ساده

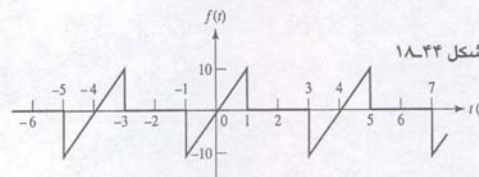
۴۶. از تعریف تبدیل فوریه برای اثبات نتایج زیر استفاده کنید، که در آن  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$  (الف)  $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}\{f(t)\}$  (ب)  $\mathcal{F}\{kf(kt)\} = (1/|k|) F(j\omega/k)$  (ج)  $\mathcal{F}\{df(t)/dt\} = j\omega \mathcal{F}\{f(t)\}$  (د)  $\mathcal{F}\{tf(t)\} = j d[F(j\omega)]/d\omega$  (ه)  $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-j\omega)$  (و)  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$  به شرطی که  $f(t)$  با روابط زیر داده شده باشد. (الف)  $\delta(t-1)$ ، (ب)  $4[\text{sgn}(t)]$ ، (ج)  $4[\sin(10t-30^\circ)]$ .

۴۸. مطلوب است  $F(j\omega)$  به شرطی که  $f(t)$  برابر باشد با (الف)  $\text{Acos}(\omega_0 t + \phi)$ ، (ب)  $u(t-1) - 2\delta(t) - 3\text{sgn}(t-2)$  و (ج)  $u(t) \sinh(kt)$ .

۴۹.  $f(t)$  را در  $t = 5$  به دست آورید به شرطی که  $F(j\omega)$  برابر باشد با (الف)  $3u(\omega+3) - 3u(\omega-1)$ ، (ب)  $3u(\omega-1) + 3u(\omega-3)$  و (ج)  $3u(\omega-1) - 2\delta(\omega) + 3u(\omega-3)$ . (د)  $f(t)$  را به دست آورید به شرطی که  $F(j\omega)$  برابر باشد با: (الف)  $3/(1+j\omega) + 3/j\omega + 3 + 3\delta(\omega-1)$  و (ب)  $(5\sin 4\omega)/\omega$  (ج)  $6(3+j\omega)/[(3+j\omega)^2 + 4]$ .

## ۱۸-۸ تبدیل فوریه یک تابع زمانی متناوب کلی

۵۱. تبدیل فوریه تابع زمانی متناوب شکل ۱۸-۴۴ را پیدا کنید.



شکل ۱۸-۴۴

۵۲. تابع متناوب  $f(t)$  در پریود  $4 \text{ ms} < t < 0$  با تابع  $f(t) = 10u(t) - 6u(t-0.001) - 4u(t-0.003)$  تعریف شده است.  $F(j\omega)$  را بیابید.

۵۳. اگر  $F(j\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} [1/(|n|! + 1)] \delta(\omega - 20n)$  باشد، مقدار  $f(0.05)$  را به دست آورید.

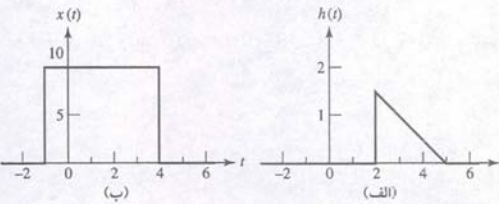
۵۴. اگر ورودی  $x(t) = 5[u(t) - u(t-1)]$  باشد با کانولوشن خروجی  $y(t)$  را پیدا کنید: به شرطی که  $h(t)$  برابر باشد با (الف)  $2u(t)$ ، (ب)  $2u(t-1)$  و (ج)  $2u(t-2)$ .

۵۵. فرض کنید  $x(t) = 5[u(t) - u(t-2)]$  و  $h(t) = 2[u(t-1) - u(t-2)]$  باشد،  $y(t)$  را در زمان‌های  $t = -0.4$ ،  $0.4$ ،  $2.4$ ،  $3.4$ ،  $4.4$  با کمک کانولوشن به دست آورید.

## ۱۸-۹ تابع سیستم و پاسخ در حوزه فرکانس

۵۶. پاسخ ضربه یک سیستم خطی برابر است با  $h(t) = 3(e^{-t} - e^{-2t})$ . اگر ورودی  $x(t) = u(t)$  باشد، خروجی را برای  $t > 0$  به دست آورید.

۵۷. پاسخ ضربه واحد ورودی به یک سیستم خطی در شکل ۱۸-۴۵ نشان داده شده است. (الف) یک عبارت انتگرالی برای خروجی به دست آورید که در فاصله  $6 < t < 4$  معتبر بوده و هیچ تابع یگانهای به کار نرفته باشد. (ب) خروجی را در  $t = 5$  محاسبه نمایید.



شکل ۱۸-۴۵

۵۸. با فرض سیگنال ورودی  $u(t-2)5e^{-(t-2)^2}$  و  $x(t)$  پاسخ ضربه  $h(t) = (4t-16)[u(t-4) - u(t-7)]$ ، مقدار سیگنال خروجی را در (الف)  $t = 5$ ، (ب)  $t = 8$  و (ج)  $t = 10$  به دست آورید.

۵۹. وقتی یک  $\delta(t)$  به یک سیستم خطی اعمال می‌شود، خروجی در  $0 < t < \pi$  برابر  $\sin t$  و در بقیه زمان‌ها صفر است. اکنون اگر ورودی  $u(t)e^{-t}$  اعمال شود، مقدار عددی خروجی را در زمان‌های داده شده مشخص کنید. (الف) ۱، (ب) 2.5 و (ج) 4.

۶۰. فرض کنید  $x(t) = 0.8(t-1)[u(t-1) - u(t-3)]$  و  $h(t) = 0.2(t-2)[u(t-2) - u(t-3)]$  باشد.  $y(t)$  را برای (الف)  $t = 3.8$  و (ب)  $t = 4.8$  به دست آورید.

۶۱. یک سیگنال  $u(t)10e^{-2t}$  با  $x(t)$  به یک سیستم خطی که پاسخ ضرباش  $h(t) = 10e^{-2t} u(t)$  می‌باشد، اعمال شده است. خروجی  $y(t)$  را پیدا کنید.

۶۲. یک تابع ضربه به یک سیستم خطی اعمال شده و خروجی  $h(t) = 5e^{-4t} u(t) \text{ V}$  به دست آمده است. چند درصد از انرژی  $1 \Omega$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

1.      (a)  $12\ \mu\text{s}$       (d) 3.5 Gbits      (g) 39 pA  
         (b) 750 mJ      (e) 6.5 nm      (h)  $49\ \text{k}\Omega$   
         (c)  $1.13\ \text{k}\Omega$       (f) 13.56 MHz      (i) 11.73 pA



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

2.      (a) 1 MW      (e) 33  $\mu$ J      (i) 32 mm  
         (b) 12.35 mm      (f) 5.33 nW  
         (c) 47. kW      (g) 1 ns  
         (d) 5.46 mA      (h) 5.555 MW



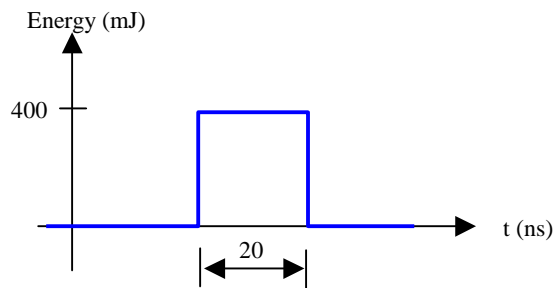
## CHAPTER TWO SOLUTIONS

3. Motor power = 175 Hp
- (a) With 100% efficient mechanical to electrical power conversion,  
 $(175 \text{ Hp})[1 \text{ W} / (1/745.7 \text{ Hp})] = 130.5 \text{ kW}$
- (b) Running for 3 hours,  
 $\text{Energy} = (130.5 \times 10^3 \text{ W})(3 \text{ hr})(60 \text{ min/hr})(60 \text{ s/min}) = 1.409 \text{ GJ}$
- (c) A single battery has 430 kW-hr capacity. We require  
 $(130.5 \text{ kW})(3 \text{ hr}) = 391.5 \text{ kW-hr}$  therefore one battery is sufficient.



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

4. The 400-mJ pulse lasts 20 ns.  
(a) To compute the peak power, we assume the pulse shape is square:



Then  $P = 400 \times 10^{-3} / 20 \times 10^{-9} = 20 \text{ MW.}$

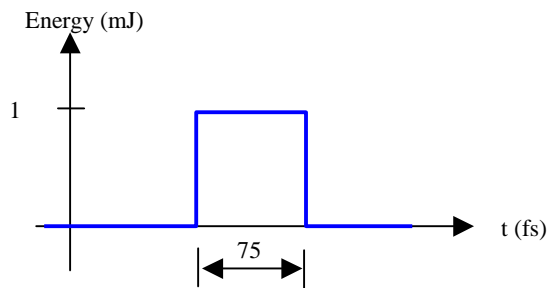
- (b) At 20 pulses per second, the average power is

$$P_{\text{avg}} = (20 \text{ pulses})(400 \text{ mJ/pulse})/(1 \text{ s}) = 8 \text{ W.}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

5. The 1-mJ pulse lasts 75 fs.  
(c) To compute the peak power, we assume the pulse shape is square:



Then  $P = 1 \times 10^{-3} / 75 \times 10^{-15} = 13.33 \text{ GW.}$

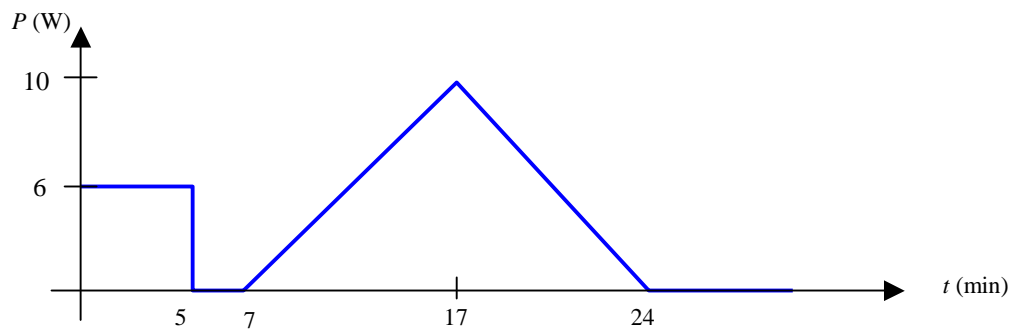
- (d) At 100 pulses per second, the average power is

$$P_{\text{avg}} = (100 \text{ pulses})(1 \text{ mJ/pulse}) / (1 \text{ s}) = 100 \text{ mW.}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

6. The power drawn from the battery is (not quite drawn to scale):



- (a) Total energy (in J) expended is

$$[6(5) + 0(2) + 0.5(10)(10) + 0.5(10)(7)]60 = 6.9 \text{ kJ.}$$

- (b) The average power in Btu/hr is

$$(6900 \text{ J}/24 \text{ min})(60 \text{ min}/1 \text{ hr})(1 \text{ Btu}/1055 \text{ J}) = 16.35 \text{ Btu/hr.}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

7. Total charge  $q = 18t^2 - 2t^4$  C.

(a)  $q(2 \text{ s}) = 40 \text{ C.}$

(b) To find the maximum charge within  $0 \leq t \leq 3 \text{ s}$ , we need to take the first and second derivatives:

$$\begin{aligned} dq/dt &= 36t - 8t^3 = 0, \text{ leading to roots at } 0, \pm 2.121 \text{ s} \\ d^2q/dt^2 &= 36 - 24t^2 \end{aligned}$$

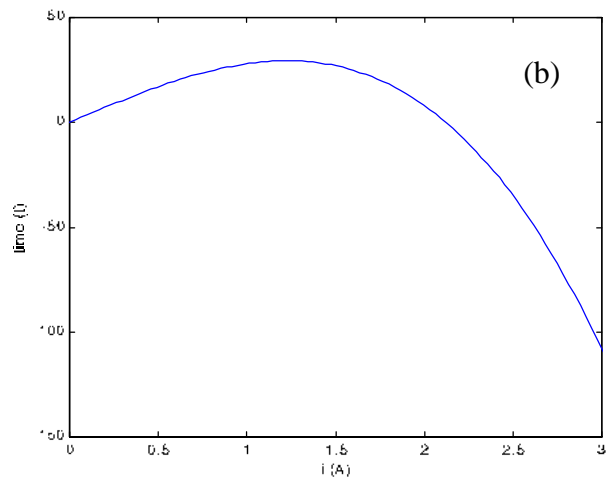
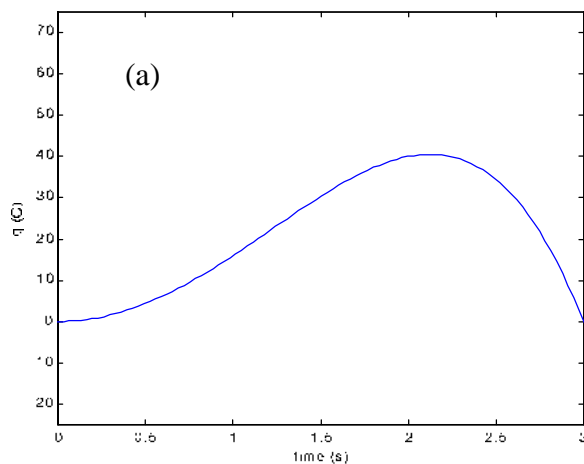
substituting  $t = 2.121 \text{ s}$  into the expression for  $d^2q/dt^2$ , we obtain a value of  $-14.9$ , so that this root represents a maximum.

Thus, we find a maximum charge  $q = 40.5 \text{ C}$  at  $t = 2.121 \text{ s}$ .

(c) The rate of charge accumulation at  $t = 0.8 \text{ s}$  is

$$dq/dt|_{t=0.8} = 36(0.8) - 8(0.8)^3 = 24.7 \text{ C/s.}$$

(d) See Fig. (a) and (b).





## CHAPTER TWO SOLUTIONS

8. Referring to Fig. 2.6c,

$$i_1(t) = \begin{cases} -2 + 3e^{-5t} \text{ A}, & t < 0 \\ -2 + 3e^{3t} \text{ A}, & t > 0 \end{cases}$$

Thus,

(a)  $i_1(-0.2) = 6.155 \text{ A}$

(b)  $i_1(0.2) = 3.466 \text{ A}$

(c) To determine the instants at which  $i_1 = 0$ , we must consider  $t < 0$  and  $t > 0$  separately:

for  $t < 0$ ,  $-2 + 3e^{-5t} = 0$  leads to  $t = -0.2 \ln(2/3) = +2.027 \text{ s}$  (impossible)

for  $t > 0$ ,  $-2 + 3e^{3t} = 0$  leads to  $t = (1/3) \ln(2/3) = -0.135 \text{ s}$  (impossible)

Therefore, the current is *never* negative.

(d) The total charge passed left to right in the interval  $0.08 < t < 0.1 \text{ s}$  is

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{-0.08}^{0.1} i_1(t) dt \\ &= \int_{-0.08}^0 [-2 + 3e^{-5t}] dt + \int_0^{0.1} [-2 + 3e^{3t}] dt \\ &= -2 + 3e^{-5t} \Big|_{-0.08}^0 + -2 + 3e^{3t} \Big|_0^{0.1} \\ &= 0.1351 + 0.1499 \\ &= 285 \text{ mC} \end{aligned}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

9. Referring to Fig. 2.28,

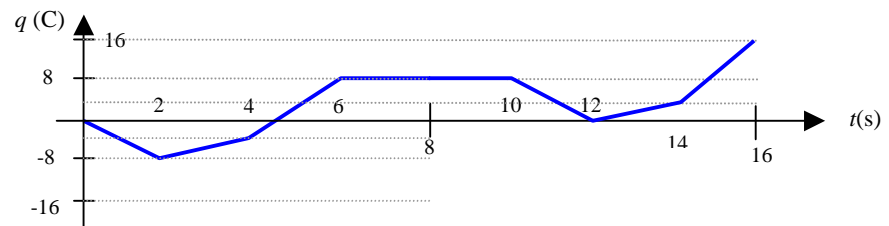
(a) The average current over one period (10 s) is

$$i_{\text{avg}} = [-4(2) + 2(2) + 6(2) + 0(4)]/10 = \boxed{800 \text{ mA}}$$

(b) The total charge transferred over the interval  $1 < t < 12$  s is

$$q_{\text{total}} = \int_1^{12} i(t) dt = -4(2) + 2(2) + 6(2) + 0(4) - 4(2) = \boxed{0 \text{ C}}$$

(d) See Fig. below





## CHAPTER TWO SOLUTIONS

10. (a)  $P_{\text{abs}} = (+3.2 \text{ V})(-2 \text{ mA}) = -6.4 \text{ mW}$  (or  $+6.4 \text{ mW}$  *supplied*)

(b)  $P_{\text{abs}} = (+6 \text{ V})(-20 \text{ A}) = -120 \text{ W}$  (or  $+120 \text{ W}$  *supplied*)

(d)  $P_{\text{abs}} = (+6 \text{ V})(2 i_x) = (+6 \text{ V})[(2)(5 \text{ A})] = +60 \text{ W}$

(e)  $P_{\text{abs}} = (4 \sin 1000t \text{ V})(-8 \cos 1000t \text{ mA}) \Big|_{t=2 \text{ ms}} = +12.11 \text{ W}$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

11.  $i = 3te^{-100t}$  mA and  $v = [6 - 600t] e^{-100t}$  mV

(a) The power absorbed at  $t = 5$  ms is

$$P_{\text{abs}} = [(6 - 600t)e^{-100t} \cdot 3te^{-100t}]_{t=5\text{ms}} \mu\text{W}$$
$$= 0.01655 \mu\text{W} = \boxed{16.55 \text{ nW}}$$

(b) The energy delivered over the interval  $0 < t < \infty$  is

$$\int_0^{\infty} P_{\text{abs}} dt = \int_0^{\infty} 3t(6 - 600t)e^{-200t} dt \quad \mu\text{J}$$

Making use of the relationship

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{where } n \text{ is a positive integer and } a > 0,$$

we find the energy delivered to be

$$= 18/(200)^2 - 1800/(200)^3$$

$$\boxed{= 0}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

$$12. \quad (a) \quad P_{\text{abs}} = (40i)(3e^{-100t}) \Big|_{t=8 \text{ ms}} = 360 \left[ e^{-100t} \right]_{t=8 \text{ ms}} = 72.68 \text{ W}$$

$$(b) \quad P_{\text{abs}} = \left( 0.2 \frac{di}{dt} \right) i \Big|_{t=8 \text{ ms}} = -180 \left[ e^{-100t} \right]_{t=8 \text{ ms}} = -36.34 \text{ W}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad P_{\text{abs}} &= \left( 30 \int_0^t i dt + 20 \right) (3e^{-100t}) \Big|_{t=8 \text{ ms}} \\ &= \left( 90e^{-100t} \int_0^t 3e^{-100t'} dt' + 60e^{-100t} \right) \Big|_{t=8 \text{ ms}} = 27.63 \text{ W} \end{aligned}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

13. (a) The short-circuit current is the value of the current at  $V = 0$ .

Reading from the graph, this corresponds to approximately 3.0 A.

- (b) The open-circuit voltage is the value of the voltage at  $I = 0$ .

Reading from the graph, this corresponds to roughly 0.4875 V, estimating the curve as hitting the x-axis 1 mm behind the 0.5 V mark.

- (c) We see that the maximum current corresponds to zero voltage, and likewise, the maximum voltage occurs at zero current. The maximum power point, therefore, occurs somewhere between these two points. By trial and error,

$P_{\max}$  is roughly  $(375 \text{ mV})(2.5 \text{ A}) = 938 \text{ mW}$ , or just under 1 W.



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

14. Note that in the table below, only the  $-4\text{-A}$  source and the  $-3\text{-A}$  source are actually “absorbing” power; the remaining sources are supplying power to the circuit.

| Source      | Absorbed Power                  | Absorbed Power |
|-------------|---------------------------------|----------------|
| 2-V source  | $(2\text{ V})(-2\text{ A})$     | - 4 W          |
| 8-V source  | $(8\text{ V})(-2\text{ A})$     | - 16 W         |
| -4-A source | $(10\text{ V})[-(-4\text{ A})]$ | 40 W           |
| 10-V source | $(10\text{ V})(-5\text{ A})$    | - 50 W         |
| -3-A source | $(10\text{ V})[-(-3\text{ A})]$ | 30 W           |

The 5 power quantities sum to  $-4 - 16 + 40 - 50 + 30 = 0$ , as demanded from conservation of energy.



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

15. We are told that  $V_x = 1\text{ V}$ , and from Fig. 2.33 we see that the current flowing through the dependent source (and hence through each element of the circuit) is  $5V_x = 5\text{ A}$ . We will compute *absorbed* power by using the current flowing *into* the positive reference terminal of the appropriate voltage (passive sign convention), and we will compute *supplied* power by using the current flowing *out of* the positive reference terminal of the appropriate voltage.

(a) The power absorbed by element “A” =  $(9\text{ V})(5\text{ A}) = 45\text{ W}$

(b) The power supplied by the 1-V source =  $(1\text{ V})(5\text{ A}) = 5\text{ W}$ , and  
the power supplied by the dependent source =  $(8\text{ V})(5\text{ A}) = 40\text{ W}$

(c) The sum of the supplied power =  $5 + 40 = 45\text{ W}$   
The sum of the absorbed power is  $45\text{ W}$ , so

yes, the sum of the power supplied = the sum of the power absorbed, as we expect from the principle of conservation of energy.



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

16. We are asked to determine the voltage  $v_s$ , which is identical to the voltage labeled  $v_1$ . The only remaining reference to  $v_1$  is in the expression for the current flowing through the dependent source,  $5v_1$ .

This current is equal to  $-i_2$ .

Thus,

$$5 v_1 = -i_2 = -5 \text{ mA}$$

Therefore  $v_1 = -1 \text{ mV}$

and so

$$v_s = v_1 = -1 \text{ mV}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

17. The battery delivers an energy of 460.8 W-hr over a period of 8 hrs.

(a) The power delivered to the headlight is therefore  $(460.8 \text{ W-hr})/(8 \text{ hr}) = 57.6 \text{ W}$

(b) The current through the headlight is equal to the power it absorbs from the battery divided by the voltage at which the power is supplied, or

$$I = (57.6 \text{ W})/(12 \text{ V}) = 4.8 \text{ A}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

18. The supply voltage is 110 V, and the maximum dissipated power is 500 W. The fuses are specified in terms of current, so we need to determine the maximum current that can flow through the fuse.

$$P = VI \quad \text{therefore } I_{\max} = P_{\max}/V = (500 \text{ W})/(110 \text{ V}) = 4.545 \text{ A}$$

If we choose the 5-A fuse, it will allow up to  $(110 \text{ V})(5 \text{ A}) = 550 \text{ W}$  of power to be delivered to the application (we must assume here that the fuse absorbs zero power, a reasonable assumption in practice). This exceeds the specified maximum power.

If we choose the 4.5-A fuse instead, we will have a maximum current of 4.5 A. This leads to a maximum power of  $(110)(4.5) = 495 \text{ W}$  delivered to the application.

Although 495 W is less than the maximum power allowed, this fuse will provide adequate protection for the application circuitry. If a fault occurs and the application circuitry attempts to draw too much power, 1000 W for example, the fuse will blow, no current will flow, and the application circuitry will be protected. However, if the application circuitry tries to draw its maximum rated power (500 W), the fuse will also blow. In practice, most equipment will not draw its maximum rated power continuously- although to be safe, we typically assume that it will.



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

$$\begin{aligned} 19. \quad (a) \ P_{\text{abs}} &= i^2 R = [20e^{-12t}]^2 (1200) \mu\text{W} \\ &= [20e^{-1.2}]^2 (1200) \mu\text{W} \\ &= 43.54 \text{ mW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \ P_{\text{abs}} &= v^2/R = [40 \cos 20t]^2 / 1200 \text{ W} \\ &= [40 \cos 2]^2 / 1200 \text{ W} \\ &= 230.9 \text{ mW} \end{aligned}$$

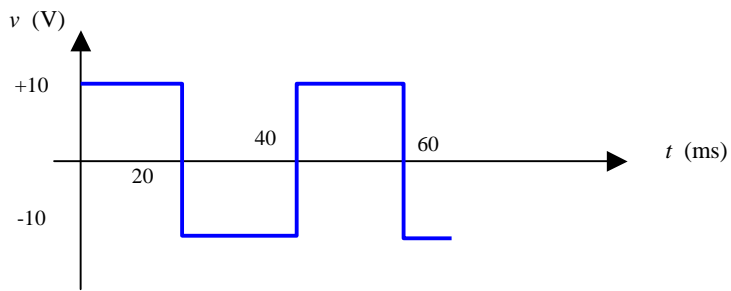
*keep in mind we  
are using radians*

$$\begin{aligned} (c) \ P_{\text{abs}} &= v i = 8t^{1.5} \text{ W} \\ &= 253.0 \text{ mW} \end{aligned}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

20. It's probably best to begin this problem by sketching the voltage waveform:



(a)  $v_{\max} = +10 \text{ V}$

(b)  $v_{\text{avg}} = [(+10)(20 \times 10^{-3}) + (-10)(20 \times 10^{-3})] / (40 \times 10^{-3}) = 0$

(c)  $i_{\text{avg}} = v_{\text{avg}} / R = 0$

(d)  $p_{\text{abs}}|_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{R} = (10)^2 / 50 = 2 \text{ W}$

(e)  $p_{\text{abs}}|_{\text{avg}} = \frac{1}{40} \left[ \frac{(+10)^2}{R} \cdot 20 + \frac{(-10)^2}{R} \cdot 20 \right] = 2 \text{ W}$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

21. We are given that the conductivity  $\sigma$  of copper is  $5.8 \times 10^7$  S/m.

(a) 50 ft of #18 (18 AWG) copper wire, which has a diameter of 1.024 mm, will have a resistance of  $l/(\sigma A)$  ohms, where  $A$  = the cross-sectional area and  $l = 50$  ft.

Converting the dimensional quantities to meters,

$$l = (50 \text{ ft})(12 \text{ in/ft})(2.54 \text{ cm/in})(1 \text{ m/100 cm}) = 15.24 \text{ m}$$

and

$$r = 0.5(1.024 \text{ mm})(1 \text{ m/1000 mm}) = 5.12 \times 10^{-4} \text{ m}$$

so that

$$A = \pi r^2 = \pi (5.12 \times 10^{-4} \text{ m})^2 = 8.236 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

$$\text{Thus, } R = (15.24 \text{ m}) / [(5.8 \times 10^7)(8.236 \times 10^{-7})] = \boxed{319.0 \text{ m}\Omega}$$

(b) We assume that the conductivity value specified also holds true at  $50^\circ\text{C}$ .

The cross-sectional area of the foil is

$$A = (33 \text{ }\mu\text{m})(500 \text{ }\mu\text{m})(1 \text{ m}/10^6 \text{ }\mu\text{m})(1 \text{ m}/10^6 \text{ }\mu\text{m}) = 1.65 \times 10^{-8} \text{ m}^2$$

So that

$$R = (15 \text{ cm})(1 \text{ m}/100 \text{ cm}) / [(5.8 \times 10^7)(1.65 \times 10^{-8})] = \boxed{156.7 \text{ m}\Omega}$$

A 3-A current flowing through this copper in the direction specified would lead to the dissipation of

$$I^2 R = (3)^2 (156.7 \text{ mW}) = \boxed{1.410 \text{ W}}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

22. Since we are informed that the same current must flow through each component, we begin by defining a current  $I$  flowing out of the positive reference terminal of the voltage source.

The power supplied by the voltage source is  $V_s I$ .

The power absorbed by resistor  $R_1$  is  $I^2 R_1$ .

The power absorbed by resistor  $R_2$  is  $I^2 R_2$ .

Since we know that the total power supplied is equal to the total power absorbed, we may write:

$$V_s I = I^2 R_1 + I^2 R_2$$

or

$$V_s = I R_1 + I R_2$$

$$V_s = I (R_1 + R_2)$$

By Ohm's law,

$$I = V_{R_2} / R_2$$

so that

$$V_s = \frac{V_{R_2}}{R_2} (R_1 + R_2)$$

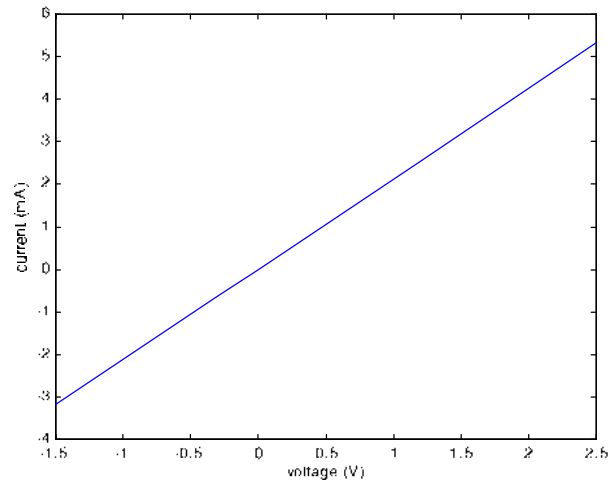
Solving for  $V_{R_2}$  we find

$$V_{R_2} = V_s \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \quad \text{Q.E.D.}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

23. (a)

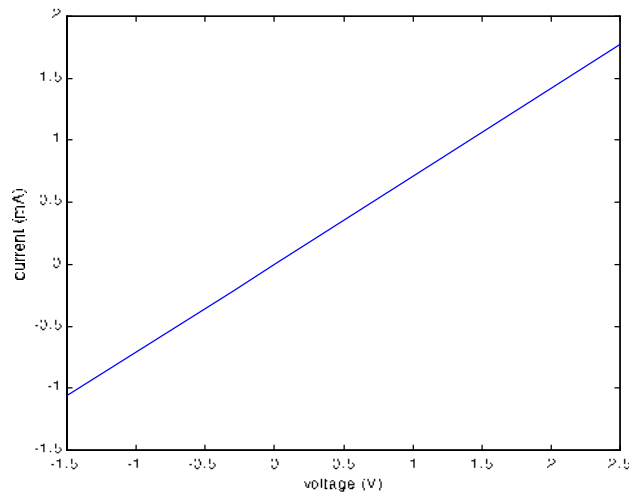


(b) We see from our answer to part (a) that this device has a reasonably linear characteristic (a not unreasonable degree of experimental error is evident in the data). Thus, we choose to estimate the resistance using the two extreme points:

$$R_{\text{eff}} = [(2.5 - (-1.5))/[5.23 - (-3.19)]] \text{ k}\Omega = 475 \Omega$$

Using the last two points instead, we find  $R_{\text{eff}} = 469 \Omega$ , so that we can state with some certainty at least that a reasonable estimate of the resistance is approximately 470  $\Omega$ .

(c)





## CHAPTER TWO SOLUTIONS

24. Top Left Circuit:  $I = (5/10) \text{ mA} = 0.5 \text{ mA}$ , and  $P_{10k} = V^2/10 \text{ mW} = 2.5 \text{ mW}$
- Top Right Circuit:  $I = -(5/10) \text{ mA} = -0.5 \text{ mA}$ , and  $P_{10k} = V^2/10 \text{ mW} = 2.5 \text{ mW}$
- Bottom Left Circuit:  $I = (-5/10) \text{ mA} = -0.5 \text{ mA}$ , and  $P_{10k} = V^2/10 \text{ mW} = 2.5 \text{ mW}$
- Bottom Right Circuit:  $I = -(-5/10) \text{ mA} = 0.5 \text{ mA}$ , and  $P_{10k} = V^2/10 \text{ mW} = 2.5 \text{ mW}$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

25. The voltage  $v_{\text{out}}$  is given by

$$\begin{aligned}v_{\text{out}} &= -10^{-3} v_{\pi} (1000) \\&= -v_{\pi}\end{aligned}$$

Since  $v_{\pi} = v_s = 0.01 \cos 1000t$  V, we find that

$$v_{\text{out}} = -v_{\pi} = \boxed{-0.001 \cos 1000t \text{ V}}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

26. 18 AWG wire has a resistance of  $6.39 \, \Omega / 1000 \text{ ft}$ .

Thus, we require  $1000 (53) / 6.39 = 8294 \text{ ft of wire}$ .  
(Or 1.57 miles. Or, 2.53 km).



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

27. We need to create a 470- $\Omega$  resistor from 28 AWG wire, knowing that the ambient temperature is 108°F, or 42.22°C.

Referring to Table 2.3, 28 AWG wire is 65.3 m $\Omega$ /ft at 20°C, and using the equation provided we compute

$$R_2/R_1 = (234.5 + T_2)/(234.5 + T_1) = (234.5 + 42.22)/(234.5 + 20) = 1.087$$

We thus find that 28 AWG wire is  $(1.087)(65.3) = 71.0$  m $\Omega$ /ft.

Thus, to repair the transmitter we will need

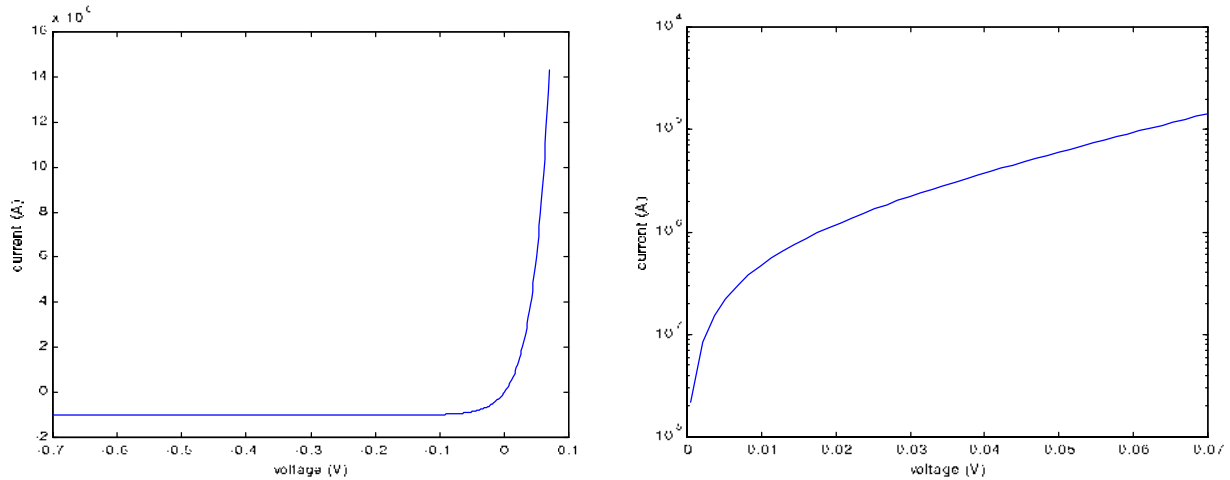
$$(470 \Omega)/(71.0 \times 10^{-3} \Omega/\text{ft}) = \boxed{6620 \text{ ft}} (1.25 \text{ miles, or } 2.02 \text{ km}).$$

Note: This seems like a lot of wire to be washing up on shore. We may find we don't have enough. In that case, perhaps we should take our cue from Eq. [6], and try to squash a piece of the wire flat so that it has a very small cross-sectional area.....



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

28. (a) We need to plot the negative and positive voltage ranges separately, as the positive voltage range is, after all, exponential!



- (b) To determine the resistance of the device at  $V = 550$  mV, we compute the corresponding current:

$$I = 10^{-6} [e^{39(0.55)} - 1] = 2.068 \text{ A}$$

Thus,  $R(0.55 \text{ V}) = 0.55/2.068 = \boxed{266 \text{ m}\Omega}$

- (c)  $R = 1 \text{ }\Omega$  corresponds to  $V = I$ . Thus, we need to solve the transcendental equation

$$I = 10^{-6} [e^{39I} - 1]$$

Using a scientific calculator or the tried-and-true trial and error approach, we find that

$$\boxed{I = 325.5 \text{ mA}}$$



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

29. We require a  $10\text{-}\Omega$  resistor, and are told it is for a portable application, implying that size, weight or both would be important to consider when selecting a wire gauge. We have 10,000 ft of each of the gauges listed in Table 2.3 with which to work. Quick inspection of the values listed eliminates 2, 4 and 6 AWG wire as their respective resistances are too low for only 10,000 ft of wire.

Using 12-AWG wire would require  $(10\text{ }\Omega) / (1.59\text{ m}\Omega/\text{ft}) = 6290\text{ ft}$ .

Using 28-AWG wire, the narrowest available, would require

$$(10\text{ }\Omega) / (65.3\text{ m}\Omega/\text{ft}) = 153\text{ ft.}$$

Would the 28-AWG wire weight less? Again referring to Table 2.3, we see that the cross-sectional area of 28-AWG wire is  $0.0804\text{ mm}^2$ , and that of 12-AWG wire is  $3.31\text{ mm}^2$ . The volume of 12-AWG wire required is therefore  $6345900\text{ mm}^3$ , and that of 28-AWG wire required is only  $3750\text{ mm}^3$ .

The best (but not the only) choice for a portable application is clear: 28-AWG wire!



## CHAPTER TWO SOLUTIONS

30. Our target is a 100- $\Omega$  resistor. We see from the plot that at  $N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\mu_n \sim 2 \times 10^3 \text{ cm}^2/\text{V-s}$ , yielding a resistivity of 3.121  $\Omega\text{-cm}$ .

At  $N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\mu_n \sim 230 \text{ cm}^2/\text{V-s}$ , yielding a resistivity of 0.02714  $\Omega\text{-cm}$ .

Thus, we see that the lower doping level clearly provides material with higher resistivity, requiring less of the available area on the silicon wafer.

Since  $R = \rho L/A$ , where we know  $R = 10 \text{ } \Omega$  and  $\rho = 3.121 \text{ } \Omega\text{-cm}$ , we need only define the resistor geometry to complete the design.

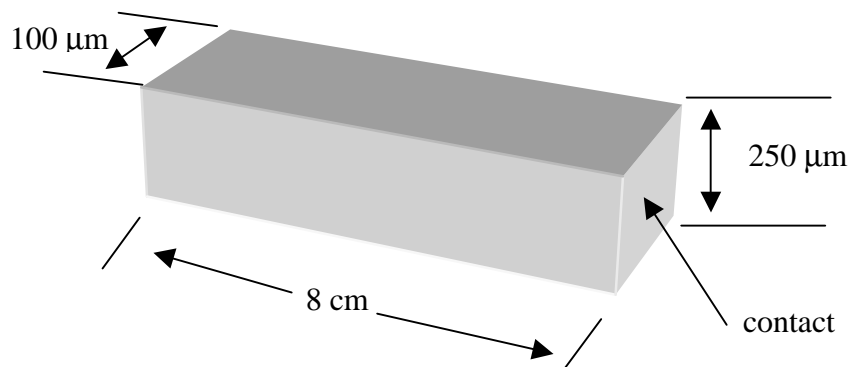
We typically form contacts primarily on the surface of a silicon wafer, so that the wafer thickness would be part of the factor  $A$ ;  $L$  represents the distance between the contacts. Thus, we may write

$$R = 3.121 L / (250 \times 10^{-4} Y)$$

where  $L$  and  $Y$  are dimensions on the surface of the wafer.

If we make  $Y$  small (*i.e.* a narrow width as viewed from the top of the wafer), then  $L$  can also be small. Seeking a value of 0.080103 then for  $L/Y$ , and choosing  $Y = 100 \text{ } \mu\text{m}$  (a large dimension for silicon devices), we find a contact-to-contact length of  $L = 8 \text{ cm}$ ! While this easily fits onto a 6" diameter wafer, we could probably do a little better. We are also assuming that the resistor is to be cut from the wafer, and the ends made the contacts, as shown below in the figure.

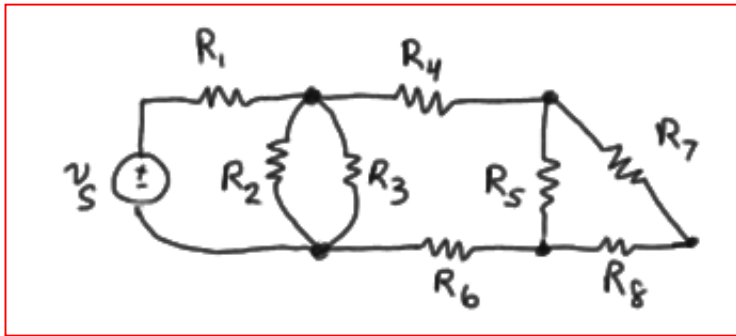
Design summary (one possibility):  $N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$   
 $L = 8 \text{ cm}$   
 $Y = 100 \text{ } \mu\text{m}$





## CHAPTER THREE SOLUTIONS

1.





## CHAPTER THREE SOLUTIONS

2. (a) six nodes; (b) nine branches.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

3. (a) Four nodes; (b) five branches; (c) path, yes – loop, no.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

4. (a) Five nodes; (b) seven branches; (c) path, yes – loop, no.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

5. (a) 3 A; (b)  $-3$  A; (c) 0.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

6. By KCL, we may write:

$$5 + i_y + i_z = 3 + i_x$$

---

$$(a) i_x = 2 + i_y + i_z = 2 + 2 + 0 = 4 \text{ A}$$

$$(b) i_y = 3 + i_x - 5 - i_z$$

$$i_y = -2 + 2 - 2 i_y$$

Thus, we find that  $i_y = 0$ .

(c) *This situation is impossible*, since  $i_x$  and  $i_z$  are in opposite directions. The only possible value (zero), is also disallowed, as KCL will not be satisfied ( $5 \neq 3$ ).



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

7. Focusing our attention on the bottom left node, we see that  $i_x = 1 \text{ A}$ .

Focusing our attention next on the top right node, we see that  $i_y = 5 \text{ A}$ .



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

8. (a)  $v_y = 1(3v_x + i_z)$

$v_x = 5$  V and given that  $i_z = -3$  A, we find that

$$v_y = 3(5) - 3 = 12 \text{ V}$$

(b)  $v_y = 1(3v_x + i_z) = -6 = 3v_x + 0.5$

Solving, we find that  $v_x = (-6 - 0.5)/3 = -2.167$  V.



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

9. (a)  $i_x = v_1/10 + v_1/10 = 5$

$$2v_1 = 50$$

so  $v_1 = 25 \text{ V.}$

By Ohm's law, we see that  $i_y = v_2/10$

also, using Ohm's law in combination with KCL, we may write

$$i_x = v_2/10 + v_2/10 = i_y + i_y = 5 \text{ A}$$

Thus,  $i_y = 2.5 \text{ A.}$

(b) From part (a),  $i_x = 2 v_1/10$ . Substituting the new value for  $v_1$ , we find that

$$i_x = 6/10 = 600 \text{ mA.}$$

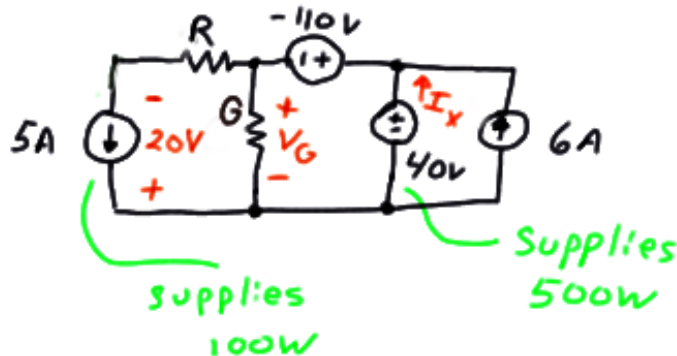
Since we have found that  $i_y = 0.5 i_x$ ,  $i_y = 300 \text{ mA.}$

(c) no value – this is impossible.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

10. We begin by making use of the information given regarding the power generated by the 5-A and the 40-V sources. The 5-A source supplies 100 W, so it must therefore have a terminal voltage of 20 V. The 40-V source supplies 500 W, so it must therefore provide a current of 12.5 A. These quantities are marked on our schematic below:



(1) By KVL,  $-40 - 110 + R(5) = 0$

Thus,  $R = 30 \Omega$ .

(2) By KVL,  $-V_G - (-110) + 40 = 0$

So  $V_G = 150 \text{ V}$

Now that we know the voltage across the unknown conductance  $G$ , we need only to find the current flowing through it to find its value by making use of Ohm's law.

KCL provides us with the means to find this current: The current flowing into the "+" terminal of the  $-110\text{-V}$  source is  $12.5 + 6 = 18.5 \text{ A}$ .

Then,  $I_x = 18.5 - 5 = 13.5 \text{ A}$

By Ohm's law,  $I_x = G \cdot V_G$

So  $G = 13.5/150$  or  $G = 90 \text{ mS}$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

11. (a)  $-1 + 2 + 10i - 3.5 + 10i = 0$

Solving,  $i = 125 \text{ mA}$

(b)  $+10 + 1i - 2 + 2i + 2 - 6 + i = 0$

Solving, we find that  $4i = -4$  or  $i = -1 \text{ A}$ .



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

12. (a) By KVL,  $-2 + v_x + 8 = 0$

so that  $v_x = -6 \text{ V.}$

(b) By KCL at the top right node,

$$I_S + 4 v_x = 4 - v_x/4$$

So  $I_S = 29.5 \text{ A.}$

(c) By KCL at the top left node,

$$i_{in} = 1 + I_S + v_x/4 - 6$$

or  $i_{in} = 23 \text{ A}$

(d) The power provided by the dependent source is  $8(4v_x) = -192 \text{ W.}$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

13. (a) Working from left to right,

$$v_1 = 60 \text{ V}$$

$$v_2 = 60 \text{ V}$$

$$i_2 = 60/20 = 3 \text{ A}$$

$$i_4 = v_1/4 = 60/4 = 15 \text{ A}$$

$$v_3 = 5i_2 = 15 \text{ V}$$

By KVL,  $-60 + v_3 + v_5 = 0$

$$v_5 = 60 - 15 = 45 \text{ V}$$

$$v_4 = v_5 = 45$$

$$i_5 = v_5/5 = 45/5 = 9 \text{ A}$$

$$i_3 = i_4 + i_5 = 15 + 9 = 24 \text{ A}$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = 3 + 24 = 27$$

|                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| $v_1 = 60 \text{ V}$ | $i_1 = 27 \text{ A}$ |
| $v_2 = 60 \text{ V}$ | $i_2 = 3 \text{ A}$  |
| $v_3 = 15 \text{ V}$ | $i_3 = 24 \text{ A}$ |
| $v_4 = 45 \text{ V}$ | $i_4 = 15 \text{ A}$ |
| $v_5 = 45 \text{ V}$ | $i_5 = 9 \text{ A}$  |

- (b) It is now a simple matter to compute the power absorbed by each element:

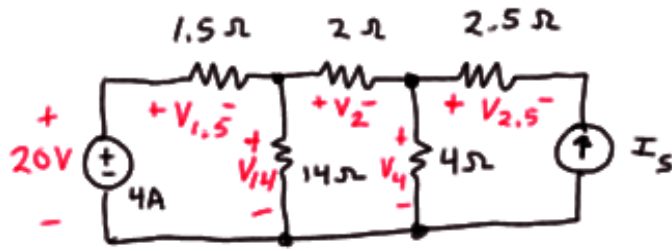
|       |              |               |                      |
|-------|--------------|---------------|----------------------|
| $p_1$ | $= -v_1 i_1$ | $= -(60)(27)$ | $= -1.62 \text{ kW}$ |
| $p_2$ | $= v_2 i_2$  | $= (60)(3)$   | $= 180 \text{ W}$    |
| $p_3$ | $= v_3 i_3$  | $= (15)(24)$  | $= 360 \text{ W}$    |
| $p_4$ | $= v_4 i_4$  | $= (45)(15)$  | $= 675 \text{ W}$    |
| $p_5$ | $= v_5 i_5$  | $= (45)(9)$   | $= 405 \text{ W}$    |

and it is a simple matter to check that these values indeed sum to zero as they should.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

14. Refer to the labeled diagram below.



Beginning from the left, we find

$$p_{20V} = -(20)(4) = -80 \text{ W}$$

$$v_{1.5} = 4(1.5) = 6 \text{ V} \quad \text{therefore} \quad p_{1.5} = (v_{1.5})^2 / 1.5 = 24 \text{ W.}$$

$$v_{14} = 20 - v_{1.5} = 20 - 6 = 14 \text{ V} \quad \text{therefore} \quad p_{14} = 14^2 / 14 = 14 \text{ W.}$$

$$i_2 = v_2 / 2 = v_{1.5} / 1.5 - v_{14} / 14 = 6 / 1.5 - 14 / 14 = 3 \text{ A}$$

$$\text{Therefore } v_2 = 2(3) = 6 \text{ V and } p_2 = 6^2 / 2 = 18 \text{ W.}$$

$$v_4 = v_{14} - v_2 = 14 - 6 = 8 \text{ V} \quad \text{therefore} \quad p_4 = 8^2 / 4 = 16 \text{ W}$$

$$i_{2.5} = v_{2.5} / 2.5 = v_2 / 2 - v_4 / 4 = 3 - 2 = 1 \text{ A}$$

$$\text{Therefore } v_{2.5} = (2.5)(1) = 2.5 \text{ V and so } p_{2.5} = (2.5)^2 / 2.5 = 2.5 \text{ W.}$$

$$I_{2.5} = -I_S, \text{ therefore } I_S = -1 \text{ A.}$$

$$\text{KVL allows us to write } -v_4 + v_{2.5} + v_{I_S} = 0$$

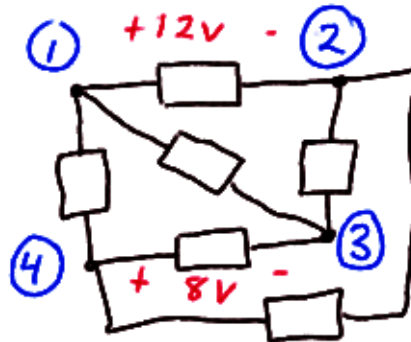
$$\text{so } V_{I_S} = v_4 - v_{2.5} = 8 - 2.5 = 5.5 \text{ V and } p_{I_S} = -V_{I_S} I_S = 5.5 \text{ W.}$$

*A quick check assures us that these power quantities sum to zero.*



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

15. Sketching the circuit as described,



(a)  $v_{14} = 0$ .

|                                       |                   |
|---------------------------------------|-------------------|
| $v_{13} = v_{43}$                     | $= 8 \text{ V}$   |
| $v_{23} = -v_{12} - v_{34} = -12 + 8$ | $= -4 \text{ V}$  |
| $v_{24} = v_{23} + v_{34} = -4 - 8$   | $= -12 \text{ V}$ |

(b)  $v_{14} = 6 \text{ V}$ .

|                                      |                  |
|--------------------------------------|------------------|
| $v_{13} = v_{14} + v_{43} = 6 + 8$   | $= 14 \text{ V}$ |
| $v_{23} = v_{13} - v_{12} = 14 - 12$ | $= 2 \text{ V}$  |
| $v_{24} = v_{23} + v_{34} = 2 - 8$   | $= -6 \text{ V}$ |

(c)  $v_{14} = -6 \text{ V}$ .

|                                      |                   |
|--------------------------------------|-------------------|
| $v_{13} = v_{14} + v_{43} = -6 + 8$  | $= 2 \text{ V}$   |
| $v_{23} = v_{13} - v_{12} = 2 - 12$  | $= -10 \text{ V}$ |
| $v_{24} = v_{23} + v_{34} = -10 - 8$ | $= -18 \text{ V}$ |



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

16. (a) By KVL,  $-12 + 5000I_D + V_{DS} + 2000I_D = 0$

Therefore,  $V_{DS} = 12 - 7(1.5) = 1.5 \text{ V.}$

(b) By KVL,  $-V_G + V_{GS} + 2000I_D = 0$

Therefore,  $V_{GS} = V_G - 2(2) = -1 \text{ V.}$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

17. Applying KVL around this series circuit,

$$-120 + 30i_x + 40i_x + 20i_x + v_x + 20 + 10i_x = 0$$

where  $v_x$  is defined across the unknown element X, with the “+” reference on top. Simplifying, we find that  $100i_x + v_x = 100$

To solve further we require specific information about the element X and its properties.

---

- (a) if X is a 100- $\Omega$  resistor,

$$v_x = 100i_x \text{ so we find that } 100i_x + 100i_x = 100.$$

Thus

$$i_x = 500 \text{ mA and } p_x = v_x i_x = 25 \text{ W.}$$

- (b) If X is a 40-V independent voltage source such that  $v_x = 40 \text{ V}$ , we find that

$$i_x = (100 - 40) / 100 = 600 \text{ mA and } p_x = v_x i_x = 24 \text{ W}$$

- (c) If X is a dependent voltage source such that  $v_x = 25i_x$ ,

$$i_x = 100/125 = 800 \text{ mA and } p_x = v_x i_x = 16 \text{ W.}$$

- (d) If X is a dependent voltage source so that  $v_x = 0.8v_1$ , where  $v_1 = 40i_x$ , we have

$$100i_x + 0.8(40i_x) = 100$$

$$\text{or } i_x = 100/132 = 757.6 \text{ mA and } p_x = v_x i_x = 0.8(40)(0.7576)^2 = 18.37 \text{ W.}$$

- (e) If X is a 2-A independent current source, arrow up,

$$100(-2) + v_x = 100$$

$$\text{so that } v_x = 100 + 200 = 300 \text{ V and } p_x = v_x i_x = -600 \text{ W}$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

18. (a) We first apply KVL:

$$-20 + 10i_1 + 90 + 40i_1 + 2v_2 = 0$$

where  $v_2 = 10i_1$ . Substituting,

$$70 + 70 i_1 = 0$$

or  $i_1 = -1 \text{ A.}$

(b) Applying KVL,

$$-20 + 10i_1 + 90 + 40i_1 + 1.5v_3 = 0 \quad [1]$$

where

$$v_3 = -90 - 10i_1 + 20 = -70 - 10 i_1$$

alternatively, we could write

$$v_3 = 40i_1 + 1.5v_3 = -80i_1$$

Using either expression in Eq. [1], we find  $i_1 = 1 \text{ A.}$

(c) Applying KVL,

$$-20 + 10i_1 + 90 + 40i_1 - 15 i_1 = 0$$

Solving,  $i_1 = -2 \text{ A.}$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

19. Applying KVL, we find that

$$-20 + 10i_1 + 90 + 40i_1 + 1.8v_3 = 0 \quad [1]$$

Also, KVL allows us to write

$$v_3 = 40i_1 + 1.8v_3$$

$$v_3 = -50i_1$$

So that we may write Eq. [1] as

$$50i_1 - 1.8(50)i_1 = -70$$

or  $i_1 = -70/-40 = 1.75$  A.

Since  $v_3 = -50i_1 = -87.5$  V, no further information is required to determine its value.

The 90-V source is absorbing  $(90)(i_1) = 157.5$  W of power and the dependent source is absorbing  $(1.8v_3)(i_1) = -275.6$  W of power.

Therefore, *none of the conditions specified in (a) to (d) can be met by this circuit.*



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

20. (a) Define the charging current  $i$  as flowing clockwise in the circuit provided. By application of KVL,

$$-13 + 0.02i + Ri + 0.035i + 10.5 = 0$$

We know that we need a current  $i = 4$  A, so we may calculate the necessary resistance

$$R = [13 - 10.5 - 0.055(4)] / 4 = 570 \text{ m}\Omega$$

(b) The total power delivered to the battery consists of the power absorbed by the  $0.035\text{-}\Omega$  resistance ( $0.035i^2$ ), and the power absorbed by the  $10.5\text{-V}$  ideal battery ( $10.5i$ ). Thus, we need to solve the quadratic equation

$$0.035i^2 + 10.5i = 25$$

which has the solutions  $i = -302.4$  A and  $i = 2.362$  A.

In order to determine which of these two values should be used, we must recall that the idea is to charge the battery, implying that it is absorbing power, or that  $i$  as defined is positive. Thus, we choose  $i = 2.362$  A, and, making use of the expression developed in part (a), we find that

$$R = [13 - 10.5 - 0.055(2.362)] / 2.362 = 1.003 \text{ }\Omega$$

(c) To obtain a voltage of  $11$  V across the battery, we apply KVL:

$$0.035i + 10.5 = 11 \quad \text{so that } i = 14.29 \text{ A}$$

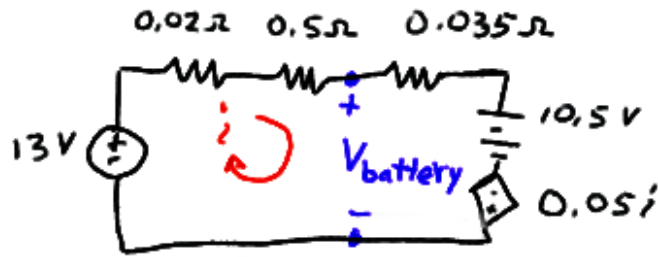
From part (a), this means we need

$$R = [13 - 10.5 - 0.055(14.29)] / 14.29 = 119.9 \text{ m}\Omega$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

21. Drawing the circuit described, we also define a clockwise current  $i$ .



By KVL, we find that

$$-13 + (0.02 + 0.5 + 0.035)i + 10.5 - 0.05i = 0$$

or that  $i = (13 - 10.5)/0.505 = 4.950 \text{ A}$

and  $V_{\text{battery}} = 13 - (0.02 + 0.5)i = 10.43 \text{ V.}$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

22. Applying KVL about this simple loop circuit (the dependent sources are still linear elements, by the way, as they depend only upon a sum of voltages)

$$-40 + (5 + 25 + 20)i - (2v_3 + v_2) + (4v_1 - v_2) = 0 \quad [1]$$

where we have defined  $i$  to be flowing in the clockwise direction, and  $v_1 = 5i$ ,  $v_2 = 25i$ , and  $v_3 = 20i$ .

Performing the necessary substitution, Eq. [1] becomes

$$50i - (40i + 25i) + (20i - 25i) = 40$$

so that  $i = 40/-20 = -2$  A

Computing the absorbed power is now a straightforward matter:

|                      |                                    |            |
|----------------------|------------------------------------|------------|
| $p_{40V}$            | $= (40)(-i)$                       | $= 80$ W   |
| $p_{5W}$             | $= 5i^2$                           | $= 20$ W   |
| $p_{25W}$            | $= 25i^2$                          | $= 100$ W  |
| $p_{20W}$            | $= 20i^2$                          | $= 80$ W   |
| $p_{\text{depsrc1}}$ | $= (2v_3 + v_2)(-i) = (40i + 25i)$ | $= -260$ W |
| $p_{\text{depsrc2}}$ | $= (4v_1 - v_2)(-i) = (20i - 25i)$ | $= -20$ W  |

and we can easily verify that these quantities indeed sum to zero as expected.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

23. We begin by defining a clockwise current  $i$ .

(a)  $i = 12/(40 + R)$  mA, with  $R$  expressed in  $k\Omega$ .

We want  $i^2 \cdot 25 = 2$

or 
$$\left( \frac{12}{40 + R} \right)^2 \cdot 25 = 2$$

Rearranging, we find a quadratic expression involving  $R$ :

$$R^2 + 80R - 200 = 0$$

which has the solutions  $R = -82.43 \text{ k}\Omega$  and  $R = 2.426 \text{ k}\Omega$ . Only the latter is a physical solution, so

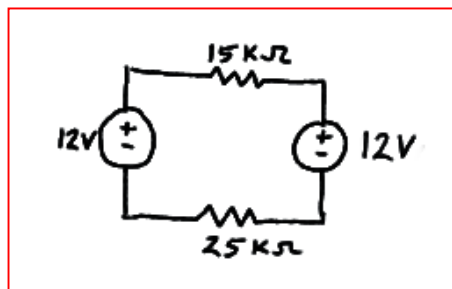
$$R = 2.426 \text{ k}\Omega.$$

(b) We require  $i \cdot 12 = 3.6$  or  $i = 0.3 \text{ mA}$

From the circuit, we also see that  $i = 12/(15 + R + 25) \text{ mA}$ .

Substituting the desired value for  $i$ , we find that the required value of  $R$  is  $R = 0$ .

(c)





## CHAPTER THREE SOLUTIONS

24. By KVL,

$$-12 + (1 + 2.3 + R_{\text{wire segment}}) i = 0$$

The wire segment is a 3000-ft section of 28-AWG solid copper wire. Using Table 2.3, we compute its resistance as

$$(16.2 \text{ m}\Omega/\text{ft})(3000 \text{ ft}) = 48.6 \Omega$$

which is certainly *not* negligible compared to the other resistances in the circuit!

Thus,

$$i = 12/(1 + 2.3 + 48.6) = 231.2 \text{ mA}$$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

25. We can apply Ohm's law to find an expression for  $v_o$ :

$$v_o = 1000(-g_m v_\pi)$$

We do not have a value for  $v_\pi$ , but KVL will allow us to express that in terms of  $v_o$ , which we *do* know:

$$-10 \times 10^{-3} \cos 5t + (300 + 50 \times 10^3) i = 0$$

where  $i$  is defined as flowing clockwise.

$$\begin{aligned} \text{Thus, } v_\pi = 50 \times 10^3 i &= 50 \times 10^3 (10 \times 10^{-3} \cos 5t) / (300 + 50 \times 10^3) \\ &= 9.940 \times 10^{-3} \cos 5t \text{ V} \end{aligned}$$

and we by substitution we find that

$$\begin{aligned} v_o &= 1000(-25 \times 10^{-3})(9.940 \times 10^{-3} \cos 5t) \\ &= \boxed{-248.5 \cos 5t \text{ mV}} \end{aligned}$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

26. By KVL, we find that

$$-3 + 100 I_D + V_D = 0$$

Substituting  $I_D = 3 \times 10^{-6} (e^{V_D / 27 \times 10^{-3}} - 1)$ , we find that

$$-3 + 300 \times 10^{-6} (e^{V_D / 27 \times 10^{-3}} - 1) + V_D = 0$$

This is a transcendental equation. Using a scientific calculator or a numerical software package such as MATLAB<sup>®</sup>, we find

$$V_D = \boxed{246.4 \text{ mV}}$$

Let's assume digital assistance is unavailable. In that case, we need to "guess" a value for  $V_D$ , substitute it into the right hand side of our equation, and see how close the result is to the left hand side (in this case, zero).

| GUESS        | RESULT                 |
|--------------|------------------------|
| <b>0</b>     | -3                     |
| <b>1</b>     | $3.648 \times 10^{12}$ |
| <b>0.5</b>   | $3.308 \times 10^4$    |
| <b>0.25</b>  | 0.4001                 |
| <b>0.245</b> | -0.1375                |
| <b>0.248</b> | 0.1732                 |
| <b>0.246</b> | -0.0377                |

oops

better

At this point, the error is getting much smaller, and our confidence is increasing as to the value of  $V_D$ .



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

27. Define a voltage  $v_x$ , “+” reference on the right, across the dependent current source. Note that in fact  $v_x$  appears across each of the four elements. We first convert the 10 mS conductance into a 100- $\Omega$  resistor, and the 40-mS conductance into a 25- $\Omega$  resistor.

(a) Applying KCL, we sum the currents flowing into the right-hand node:

$$5 - v_x / 100 - v_x / 25 + 0.8 i_x = 0 \quad [1]$$

This represents one equation in two unknowns. A second equation to introduce at this point is

$i_x = v_x / 25$  so that Eq. [1] becomes

$$5 - v_x / 100 - v_x / 25 + 0.8 (v_x / 25) = 0$$

Solving for  $v_x$ , we find  $v_x = 277.8$  V. It is a simple matter now to compute the power absorbed by each element:

|                  |                                       |                       |
|------------------|---------------------------------------|-----------------------|
| $P_{5A}$         | $= -5 v_x$                            | $= -1.389 \text{ kW}$ |
| $P_{100\Omega}$  | $= (v_x)^2 / 100$                     | $= 771.7 \text{ W}$   |
| $P_{25\Omega}$   | $= (v_x)^2 / 25$                      | $= 3.087 \text{ kW}$  |
| $P_{\text{dep}}$ | $= -v_x(0.8 i_x) = -0.8 (v_x)^2 / 25$ | $= -2.470 \text{ kW}$ |

A quick check assures us that the calculated values sum to zero, as they should.

(b) Again summing the currents into the right-hand node,

$$5 - v_x / 100 - v_x / 25 + 0.8 i_y = 0 \quad [2]$$

where  $i_y = 5 - v_x / 100$

Thus, Eq. [2] becomes

$$5 - v_x / 100 - v_x / 25 + 0.8(5) - 0.8 (i_y) / 100 = 0$$

Solving, we find that  $v_x = 155.2$  V and  $i_y = 3.448$  A

So that

|                  |                   |                      |
|------------------|-------------------|----------------------|
| $P_{5A}$         | $= -5 v_x$        | $= -776.0 \text{ W}$ |
| $P_{100\Omega}$  | $= (v_x)^2 / 100$ | $= 240.9 \text{ W}$  |
| $P_{25\Omega}$   | $= (v_x)^2 / 25$  | $= 963.5 \text{ W}$  |
| $P_{\text{dep}}$ | $= -v_x(0.8 i_y)$ | $= -428.1 \text{ W}$ |

A quick check assures us that the calculated values sum to 0.3, which is reasonably close to zero (small roundoff errors accumulate here).



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

28. Define a voltage  $v$  with the “+” reference at the top node. Applying KCL and summing the currents flowing out of the top node,

$$v/5,000 + 4 \times 10^{-3} + 3i_1 + v/20,000 = 0 \quad [1]$$

This, unfortunately, is one equation in two unknowns, necessitating the search for a second suitable equation. Returning to the circuit diagram, we observe that

$$i_1 = 3i_1 + v/2,000$$

or 
$$i_1 = -v/40,000 \quad [2]$$

Upon substituting Eq. [2] into Eq. [1], Eq. [1] becomes,

$$v/5,000 + 4 \times 10^{-3} - 3v/40,000 + v/20,000 = 0$$

Solving, we find that

$$v = -22.86 \text{ V}$$

and

$$i_1 = 571.4 \text{ } \mu\text{A}$$

Since  $i_x = i_1$ , we find that  $i_x = 571.4 \text{ } \mu\text{A}$ .



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

29. Define a voltage  $v_x$  with its “+” reference at the center node. Applying KCL and summing the currents into the center node,

$$8 - v_x/6 + 7 - v_x/12 - v_x/4 = 0$$

Solving,  $v_x = 30$  V.

It is now a straightforward matter to compute the power absorbed by each element:

|                |                  |            |
|----------------|------------------|------------|
| $P_{8A}$       | $= -8 v_x$       | $= -240$ W |
| $P_{6\Omega}$  | $= (v_x)^2 / 6$  | $= 150$ W  |
| $P_{8A}$       | $= -7 v_x$       | $= -210$ W |
| $P_{12\Omega}$ | $= (v_x)^2 / 12$ | $= 75$ W   |
| $P_{4\Omega}$  | $= (v_x)^2 / 4$  | $= 225$ W  |

and a quick check verifies that the computed quantities sum to zero, as expected.



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

30. (a) Define a voltage  $v$  across the  $1\text{-k}\Omega$  resistor with the “+” reference at the top node. Applying KCL at this top node, we find that

$$80 \times 10^{-3} - 30 \times 10^{-3} = v/1000 + v/4000$$

Solving,

$$v = (50 \times 10^{-3})(4 \times 10^3 / 5 \times 10^3) = 40 \text{ V}$$

and

$$P_{4\text{k}\Omega} = v^2/4000 = \boxed{400 \text{ mW}}$$

- (b) Once again, we first define a voltage  $v$  across the  $1\text{-k}\Omega$  resistor with the “+” reference at the top node. Applying KCL at this top node, we find that

$$80 \times 10^{-3} - 30 \times 10^{-3} - 20 \times 10^{-3} = v/1000$$

Solving,

$$v = 30 \text{ V}$$

and

$$P_{20\text{mA}} = v \cdot 20 \times 10^{-3} = \boxed{600 \text{ mW}}$$

- (c) Once again, we first define a voltage  $v$  across the  $1\text{-k}\Omega$  resistor with the “+” reference at the top node. Applying KCL at this top node, we find that

$$80 \times 10^{-3} - 30 \times 10^{-3} - 2i_x = v/1000$$

where

$$i_x = v/1000$$

so that

$$80 \times 10^{-3} - 30 \times 10^{-3} = 2v/1000 + v/1000$$

and

$$v = 50 \times 10^{-3} (1000)/3 = 16.67 \text{ V}$$

Thus,

$$P_{\text{dep}} = v \cdot 2i_x = \boxed{555.8 \text{ mW}}$$

- (d) We note that  $i_x = 60/1000 = 60 \text{ mA}$ . KCL stipulates that (viewing currents into and out of the top node)

$$80 - 30 + i_s = i_x = 60$$

Thus,  $i_s = 10 \text{ mA}$

$$\text{and } P_{60\text{V}} = 60(-10) \text{ mW} = \boxed{-600 \text{ mW}}$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

31. (a) To cancel out the effects of both the 80-mA and 30-mA sources,  $i_S$  must be set to

$$i_S = -50 \text{ mA.}$$

(b) Define a current is flowing out of the “+” reference terminal of the independent voltage source. Interpret “no power” to mean “zero power.”

Summing the currents flowing into the top node and invoking KCL, we find that

$$80 \times 10^{-3} - 30 \times 10^{-3} - v_S / 1 \times 10^3 + i_S = 0$$

Simplifying slightly, this becomes

$$50 - v_S + 10^3 i_S = 0 \quad [1]$$

We are seeking a value for  $v_S$  such that  $v_S \cdot i_S = 0$ . Clearly, setting  $v_S = 0$  will achieve this. From Eq. [1], we also see that setting  $v_S = 50 \text{ V}$  will work as well.



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

32. Define a voltage  $v_9$  across the  $9\text{-}\Omega$  resistor, with the “+” reference at the top node.

(a) Summing the currents into the right-hand node and applying KCL,

$$5 + 7 = v_9 / 3 + v_9 / 9$$

Solving, we find that  $v_9 = 27\text{ V}$ . Since  $i_x = v_9 / 9$ ,  $i_x = 3\text{ A}$ .

(b) Again, we apply KCL, this time to the top left node:

$$2 - v_8 / 8 + 2i_x - 5 = 0$$

Since we know from part (a) that  $i_x = 3\text{ A}$ , we may calculate  $v_8 = 24\text{ V}$ .

(c)  $p_{5A} = (v_9 - v_8) \cdot 5 = 15\text{ W}$ .



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

33. Define a voltage  $v_x$  across the 5-A source, with the “+” reference on top.

Applying KCL at the top node then yields

$$5 + 5v_1 - v_x / (1 + 2) - v_x / 5 = 0 \quad [1]$$

where  $v_1 = 2[v_x / (1 + 2)] = 2 v_x / 3$ .

Thus, Eq. [1] becomes

$$5 + 5(2 v_x / 3) - v_x / 3 - v_x / 5 = 0$$

or  $75 + 50 v_x - 5 v_x - 3 v_x = 0$ , which, upon solving, yields  $v_x = -1.786$  V.

The power absorbed by the 5- $\Omega$  resistor is then simply  $(v_x)^2/5 = 638.0$  mW.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

34. Despite the way it may appear at first glance, this is actually a simple node-pair circuit. Define a voltage  $v$  across the elements, with the “+” reference at the top node.

Summing the currents leaving the top node and applying KCL, we find that

$$2 + 6 + 3 + v/5 + v/5 + v/5 = 0$$

or  $v = -55/3 = -18.33$  V. The power supplied by each source is then computed as:

$$\begin{aligned} p_{2A} &= -v(2) = 36.67 \text{ W} \\ p_{6A} &= -v(6) = 110 \text{ W} \\ p_{3A} &= -v(3) = 55 \text{ W} \end{aligned}$$

We can check our results by first determining the power absorbed by each resistor, which is simply  $v^2/5 = 67.22$  W for a total of 201.67 W, which is the total power supplied by all sources.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

35. Defining a voltage  $V_x$  across the 10-A source with the “+” reference at the top node, KCL tells us that  $10 = 5 + I_{1\Omega}$ , where  $I_{1\Omega}$  is defined flowing downward through the 1- $\Omega$  resistor.

Solving, we find that  $I_{1\Omega} = 5$  A, so that  $V_x = (1)(5) = 5$  V.

So, we need to solve

$$V_x = 5 = 5(0.5 + R_{\text{segment}})$$

with  $R_{\text{segment}} = 500$  m $\Omega$ .

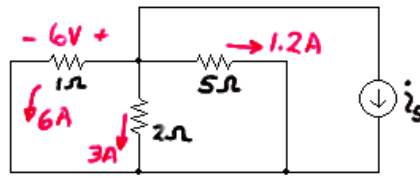
From Table 2.3, we see that 28-AWG solid copper wire has a resistance of 65.3 m $\Omega$ /ft. Thus, the total number of miles needed of the wire is

$$\frac{500 \text{ m}\Omega}{(65.3 \text{ m}\Omega/\text{ft})(5280 \text{ ft/mi})} = 1.450 \times 10^{-3} \text{ miles}$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

36. Since  $v = 6$  V, we know the current through the  $1\text{-}\Omega$  resistor is 6 A, the current through the  $2\text{-}\Omega$  resistor is 3 A, and the current through the  $5\text{-}\Omega$  resistor is  $6/5 = 1.2$  A, as shown below:



By KCL,  $6 + 3 + 1.2 + i_s = 0$  or  $i_s = -10.2\text{ A}.$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

37. (a) Applying KCL,  $1 - i - 3 + 3 = 0$  so  $i = 1$  A.

(b) The rightmost source should be labeled 3.5 A to satisfy KCL.

Then, looking at the left part of the circuit, we see  $1 + 3 = 4$  A flowing into the unknown current source, which, by virtue of KCL, must therefore be a 4-A current source. Thus, KCL at the node labeled with the “+” reference of the voltage  $v$  gives

$$4 - 2 + 7 - i = 0 \quad \text{or} \quad i = 9 \text{ A}$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

38. (a) We may redraw the circuit as



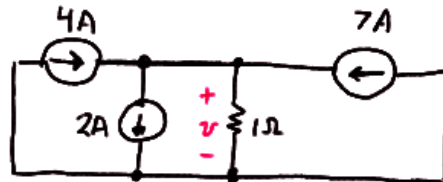
Then, we see that  $v = (1)(1) = 1 \text{ V}$ .

- (b) The current source at the far right should be labeled 3.5 A, or KCL is violated.

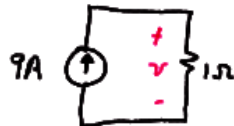
In that case, we may combine all sources to the right of the  $1\text{-}\Omega$  resistor into a single 7-A current source. On the left, the two 1-A sources in series reduce to a single 1-A source.

The new 1-A source and the 3-A source combine to yield a 4-A source in series with the unknown current source which, by KCL, must be a 4-A current source.

At this point we have reduced the circuit to



Further simplification is possible, resulting in



From which we see clearly that  $v = (9)(1) = 9 \text{ V}$ .



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

39. (a) Combine the 12-V and 2-V series connected sources to obtain a new  $12 - 2 = 10$  V source, with the “+” reference terminal at the top. The result is two 10-V sources in parallel, which is permitted by KVL. Therefore,

$$i = 10/1000 = 10 \text{ mA.}$$

(b) No current flows through the 6-V source, so we may neglect it for this calculation. The 12-V, 10-V and 3-V sources are connected in series as a result, so we replace them with a  $12 + 10 - 3 = 19$  V source as shown



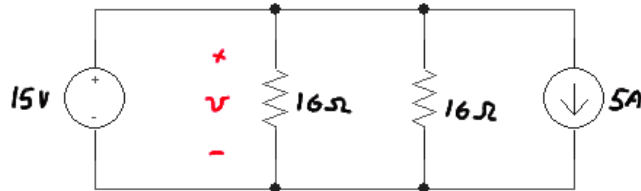
Thus,  $i = 19/5 = 3.8 \text{ A.}$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

40. We first combine the 10-V and 5-V sources into a single 15-V source, with the “+” reference on top. The 2-A and 7-A current sources combine into a  $7 - 2 = 5$  A current source (arrow pointing down); although these two current sources may not appear to be in parallel at first glance, they actually are.

Redrawing our circuit,



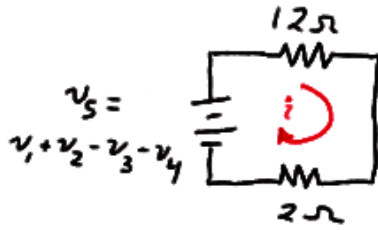
we see that  $v = 15$  V (note that we can completely ignore the 5-A source here, since we have a voltage source directly across the resistor). Thus,

$$p_{16\Omega} = v^2/16 = \boxed{14.06 \text{ W.}}$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

41. We can combine the voltage sources such that



$$i = v_s / 14$$

(a)  $v_s = 10 + 10 - 6 - 6 = 20 - 12 = 8$

Therefore

$$i = 8/14 = \boxed{571.4 \text{ mA.}}$$

(b)  $v_s = 3 + 2.5 - 3 - 2.5 = 0$

Therefore  $i = \boxed{0.}$

(c)  $v_s = -3 + 1.5 - (-0.5) - 0 = -1 \text{ V}$

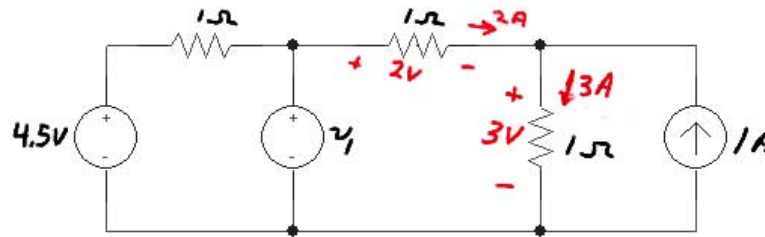
Therefore

$$i = -1/14 = \boxed{-71.43 \text{ mA.}}$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

42. We first simplify as shown, making use of the fact that we are told  $i_x = 2\text{ A}$  to find the voltage across the middle and right-most  $1\text{-}\Omega$  resistors as labeled.



By KVL, then, we find that  $v_1 = 2 + 3 = 5\text{ V}$ .



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

43. We see that to determine the voltage  $v$  we will need  $v_x$  due to the presence of the dependent current source. So, let's begin with the right-hand side, where we find that

$$v_x = 1000(1 - 3) \times 10^{-3} = -2 \text{ V}.$$

Returning to the left-hand side of the circuit, and summing currents into the top node, we find that

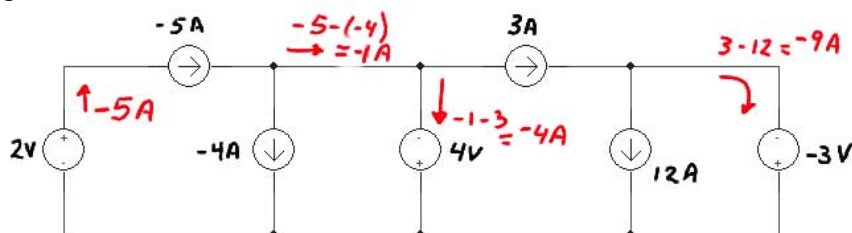
$$(12 - 3.5) \times 10^{-3} + 0.03 v_x = v/10 \times 10^3$$

or  $v = -515 \text{ V}.$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

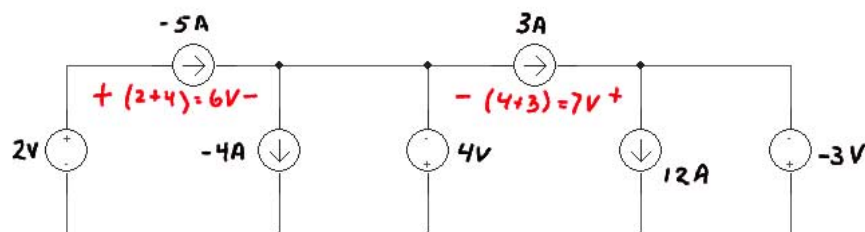
44. (a) We first label the circuit with a focus on determining the current flowing through each voltage source:



Then the power absorbed by each voltage source is

|           |               |                  |
|-----------|---------------|------------------|
| $P_{2V}$  | $= -2(-5)$    | $= 10 \text{ W}$ |
| $P_{4V}$  | $= -(-4)(4)$  | $= 16 \text{ W}$ |
| $P_{-3V}$ | $= -(-9)(-3)$ | $= 27 \text{ W}$ |

For the current sources,



So that the absorbed power is

|           |               |                   |
|-----------|---------------|-------------------|
| $P_{-5A}$ | $= +(-5)(6)$  | $= -30 \text{ W}$ |
| $P_{-4A}$ | $= -(-4)(4)$  | $= 16 \text{ W}$  |
| $P_{3A}$  | $= -(3)(7)$   | $= -21 \text{ W}$ |
| $P_{12A}$ | $= -(12)(-3)$ | $= 36 \text{ W}$  |

A quick check assures us that these absorbed powers sum to zero as they should.

- (b) We need to change the 4-V source such that the voltage across the  $-5\text{-A}$  source drops to zero. Define  $V_x$  across the  $-5\text{-A}$  source such that the “+” reference terminal is on the left. Then,

$$-2 + V_x - V_{\text{needed}} = 0$$

or  $V_{\text{needed}} = -2 \text{ V}.$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

45. We begin by noting several things:
- (1) The bottom resistor has been shorted out;
  - (2) the far-right resistor is only connected by one terminal and therefore does not affect the equivalent resistance *as seen from the indicated terminals*;
  - (3) All resistors to the right of the top left resistor have been shorted.

Thus, from the indicated terminals, we only see the single 1-k $\Omega$  resistor, so that

$$R_{eq} = 1 \text{ k}\Omega.$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

46. (a) We see  $1\Omega \parallel (1\Omega + 1\Omega) \parallel (1\Omega + 1\Omega + 1\Omega)$   
 $= 1\Omega \parallel 2\Omega \parallel 3\Omega$   
 $= 545.5 \text{ m}\Omega$

(b)  $1/R_{\text{eq}} = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots 1/N$

Thus,  $R_{\text{eq}} = [1 + 1/2 + 1/3 + \dots 1/N]^{-1}$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

47. (a)  $5 \text{ k}\Omega = 10 \text{ k}\Omega \parallel 10 \text{ k}\Omega$

(b)  $57\,333 \text{ }\Omega = 47 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega \parallel 1 \text{ k}\Omega \parallel 1 \text{ k}\Omega$

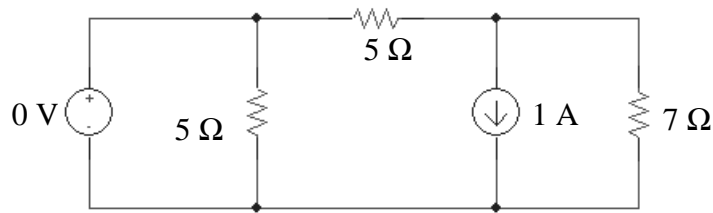
(c)  $29.5 \text{ k}\Omega = 47 \text{ k}\Omega \parallel 47 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega \parallel 10 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega$



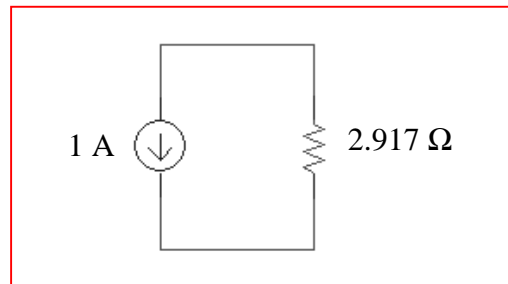
### CHAPTER THREE SOLUTIONS

48. (a) no simplification is possible using only source and/or resistor combination techniques.

(b) We first simplify the circuit to



and then notice that the 0-V source is shorting out one of the 5-Ω resistors, so a further simplification is possible, noting that  $5\ \Omega \parallel 7\ \Omega = 2.917\ \Omega$ :





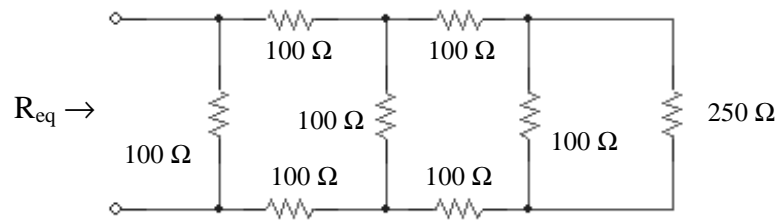
## CHAPTER THREE SOLUTIONS

$$\begin{aligned} 49. \quad R_{eq} &= 1 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega \parallel 2 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega \parallel 3 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega \parallel 4 \text{ k}\Omega \\ &= 1 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega + 1.5 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega \\ &= 5.5 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

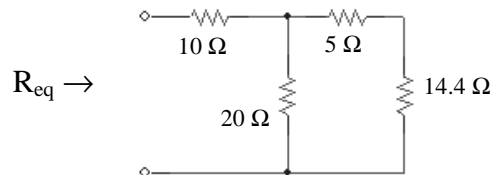
50. (a) Working from right to left, we first see that we may combine several resistors as  $100\ \Omega + 100\ \Omega \parallel 100\ \Omega + 100\ \Omega = 250\ \Omega$ , yielding the following circuit:



Next, we see  $100\ \Omega + 100\ \Omega \parallel 250\ \Omega + 100\ \Omega = 271.4\ \Omega$ ,  
and subsequently  $100\ \Omega + 100\ \Omega \parallel 271.4\ \Omega + 100\ \Omega = 273.1\ \Omega$ ,  
and, finally,

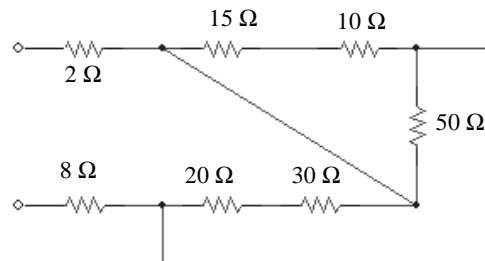
$$R_{eq} = 100\ \Omega \parallel 273.1\ \Omega = 73.20\ \Omega.$$

- (b) First, we combine  $24\ \Omega \parallel (50\ \Omega + 40\ \Omega) \parallel 60\ \Omega = 14.4\ \Omega$ , which leaves us with

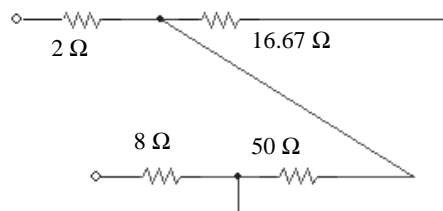


Thus,  $R_{eq} = 10\ \Omega + 20\ \Omega \parallel (5 + 14.4\ \Omega) = 19.85\ \Omega.$

- (c) First combine the 10- $\Omega$  and 40- $\Omega$  resistors and redraw the circuit:



We now see we have  $(10\ \Omega + 15\ \Omega) \parallel 50\ \Omega = 16.67\ \Omega$ . Redrawing once again,



where the equivalent resistance is seen to be  $2\ \Omega + 50\ \Omega \parallel 16.67\ \Omega + 8\ \Omega = 22.5\ \Omega.$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

51. (a)  $R_{eq} = [(40\ \Omega + 20\ \Omega) \parallel 30\ \Omega + 80\ \Omega] \parallel 100\ \Omega + 10\ \Omega = 60\ \Omega.$

(b)  $R_{eq} = 80\ \Omega = [(40\ \Omega + 20\ \Omega) \parallel 30\ \Omega + R] \parallel 100\ \Omega + 10\ \Omega$   
 $70\ \Omega = [(60\ \Omega \parallel 30\ \Omega) + R] \parallel 100\ \Omega$   
 $1/70 = 1/(20 + R) + 0.01$   
 $20 + R = 233.3\ \Omega$  therefore  $R = 213.3\ \Omega.$

(c)  $R = [(40\ \Omega + 20\ \Omega) \parallel 30\ \Omega + R] \parallel 100\ \Omega + 10\ \Omega$   
 $R - 10\ \Omega = [20 + R] \parallel 100$   
 $1/(R - 10) = 1/(R + 20) + 1/100$   
 $3000 = R^2 + 10R - 200$

Solving, we find  $R = -61.79\ \Omega$  or  $R = 51.79\ \Omega$ .

Clearly, the first is not a physical solution, so

$$R = 51.79\ \Omega.$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

52. (a)  $25\ \Omega = 100\ \Omega \parallel 100\ \Omega \parallel 100\ \Omega$

(b)  $60\ \Omega = [(100\ \Omega \parallel 100\ \Omega) + 100\ \Omega] \parallel 100\ \Omega$

(c)  $40\ \Omega = (100\ \Omega + 100\ \Omega) \parallel 100\ \Omega \parallel 100\ \Omega$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

53.  $R_{eq} = [(5\ \Omega \parallel 20\ \Omega) + 6\ \Omega] \parallel 30\ \Omega + 2.5\ \Omega = 10\ \Omega$   
The source therefore provides a total of 1000 W and a current of  $100/10 = 10\text{ A}$ .

$$P_{2.5\Omega} = (10)^2 \cdot 2.5 = \boxed{250\text{ W}}$$

$$V_{30\Omega} = 100 - 2.5(10) = 75\text{ V}$$

$$P_{30\Omega} = 75^2/30 = \boxed{187.5\text{ W}}$$

$$I_{6\Omega} = 10 - V_{30\Omega}/30 = 10 - 75/30 = 7.5\text{ A}$$

$$P_{6\Omega} = (7.5)^2 \cdot 6 = \boxed{337.5\text{ W}}$$

$$V_{5\Omega} = 75 - 6(7.5) = 30\text{ V}$$

$$P_{5\Omega} = 30^2/5 = \boxed{180\text{ W}}$$

$$V_{20\Omega} = V_{5\Omega} = 30\text{ V}$$

$$P_{20\Omega} = 30^2/20 = \boxed{45\text{ W}}$$

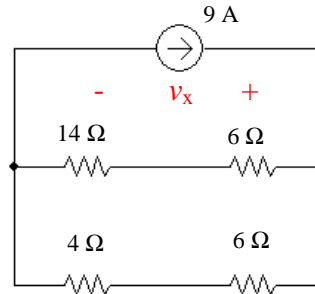
We check our results by verifying that the absorbed powers in fact add to 1000 W.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

54. To begin with, the 10- $\Omega$  and 15- $\Omega$  resistors are in parallel ( $= 6\ \Omega$ ), and so are the 20- $\Omega$  and 5- $\Omega$  resistors ( $= 4\ \Omega$ ).

Also, the 4-A, 1-A and 6-A current sources are in parallel, so they can be combined into a single  $4 + 6 - 1 = 9\text{ A}$  current source as shown:



Next, we note that  $(14\ \Omega + 6\ \Omega) \parallel (4\ \Omega + 6\ \Omega) = 6.667\ \Omega$  so that

$$v_x = 9(6.667) = 60\text{ V}$$

and

$$i_x = -60/10 = -6\text{ A}.$$

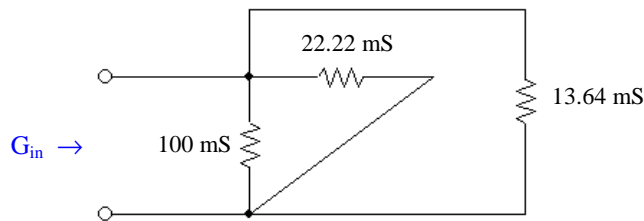


## CHAPTER THREE SOLUTIONS

55. (a) Working from right to left, and borrowing  $x \parallel y$  notation from resistance calculations to indicate the operation  $xy/(x + y)$ ,

$$\begin{aligned} G_{in} &= \{[(6 \parallel 2 \parallel 3) + 0.5] \parallel 1.5 \parallel 2.5 + 0.8\} \parallel 4 \parallel 5 \text{ mS} \\ &= \{[(1) + 0.5] \parallel 1.5 \parallel 2.5 + 0.8\} \parallel 4 \parallel 5 \text{ mS} \\ &= \{1.377\} \parallel 4 \parallel 5 \\ &= 0.8502 \text{ mS} = \boxed{850.2 \text{ mS}} \end{aligned}$$

- (b) The 50-mS and 40-mS conductances are in series, equivalent to  $(50(40)/90) = 22.22 \text{ mS}$ . The 30-mS and 25-mS conductances are also in series, equivalent to  $13.64 \text{ mS}$ . Redrawing for clarity,



we see that  $G_{in} = 10 + 22.22 + 13.64 = \boxed{135.9 \text{ mS}}$ .



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

56. The bottom four resistors between the 2- $\Omega$  resistor and the 30-V source are shorted out. The 10- $\Omega$  and 40- $\Omega$  resistors are in parallel ( $= 8\ \Omega$ ), as are the 15- $\Omega$  and 60- $\Omega$  ( $=12\ \Omega$ ) resistors. These combinations are in series.

Define a clockwise current  $I$  through the 1- $\Omega$  resistor:

$$I = (150 - 30)/(2 + 8 + 12 + 3 + 1 + 2) = 4.286\text{ A}$$

$$P_{1\Omega} = I^2 \cdot 1 = 18.37\text{ W}$$

To compute  $P_{10\Omega}$ , consider that since the 10- $\Omega$  and 40- $\Omega$  resistors are in parallel, the same voltage  $V_x$  (“+” reference on the left) appears across both resistors. The current  $I = 4.286\text{ A}$  flows into this combination. Thus,  $V_x = (8)(4.286) = 34.29\text{ V}$  and

$$P_{10\Omega} = (V_x)^2 / 10 = 117.6\text{ W}.$$

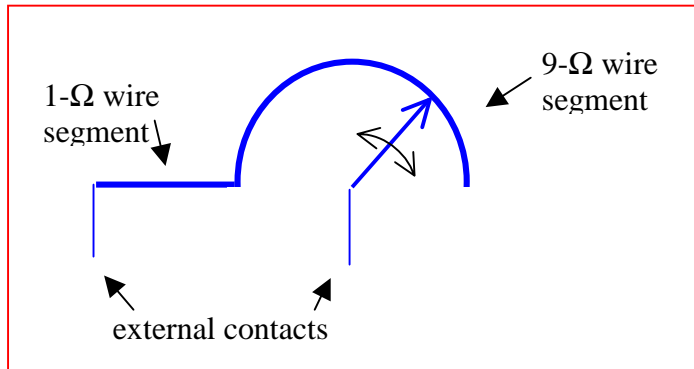
$P_{13\Omega} = 0$  since no current flows through that resistor.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

57. One possible solution of many:

The basic concept is as shown



If we use 28-AWG soft copper wire, we see from Table 2.3 that 9-Ω would require 138 feet, which is somewhat impractical. Referring to p. 4-48 of the *Standard Handbook for Electrical Engineers* (this should be available in most engineering/science libraries), we see that 44-AWG soft copper wire has a resistance of 2590 Ω per 1000 ft, or 0.08497 Ω/cm.

Thus, 1-Ω requires 11.8 cm of 44-AWG wire, and 9-Ω requires 105.9 cm. We decide to make the wiper arm and leads out of 28-AWG wire, which will add a slight resistance to the total value, but a negligible amount.

The radius of the wiper arm should be  $(105.9 \text{ cm})/\pi = 33.7 \text{ cm}$ .



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

58. One possible solution of many:

$$\begin{aligned}v_S &= 2(5.5) = 11 \text{ V} \\R_1 &= R_2 = 1 \text{ k}\Omega.\end{aligned}$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

59. One possible solution of many:

$$\begin{aligned}i_S &= 11 \text{ mA} \\ R_1 &= R_2 = 1 \text{ k}\Omega.\end{aligned}$$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

60.  $p_{15\Omega} = (v_{15})^2 / 15 \times 10^3 \text{ A}$

$$v_{15} = 15 \times 10^3 (-0.3 v_1)$$

where  $v_1 = [4 (5) / (5 + 2)] \cdot 2 = 5.714 \text{ V}$

Therefore  $v_{15} = -25714 \text{ V}$  and  $p_{15} = 44.08 \text{ kW}$ .



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

61. Replace the top  $10\text{ k}\Omega$ ,  $4\text{ k}\Omega$  and  $47\text{ k}\Omega$  resistors with  $10\text{ k}\Omega + 4\text{ k}\Omega \parallel 47\text{ k}\Omega = 13.69\text{ k}\Omega$ .

Define  $v_x$  across the  $10\text{ k}\Omega$  resistor with its “+” reference at the top node: then

$$v_x = 5 \cdot (10\text{ k}\Omega \parallel 13.69\text{ k}\Omega) / (15\text{ k}\Omega + 10 \parallel 13.69\text{ k}\Omega) = 1.391\text{ V}$$

$$i_x = v_x / 10\text{ mA} = 139.1\text{ }\mu\text{A}$$

$$v_{15} = 5 - 1.391 = 3.609\text{ V} \text{ and } p_{15} = (v_{15})^2 / 15 \times 10^3 = 868.3\text{ }\mu\text{W}.$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

62. We may combine the 12-A and 5-A current sources into a single 7-A current source with its arrow oriented upwards. The left three resistors may be replaced by a  $3 + 6 \parallel 13 = 7.105 \, \Omega$  resistor, and the right three resistors may be replaced by a  $7 + 20 \parallel 4 = 10.33 \, \Omega$  resistor.

By current division,  $i_y = 7 (7.105)/(7.105 + 10.33) = 2.853 \, \text{A}$

We must now return to the original circuit. The current into the  $6 \, \Omega$ ,  $13 \, \Omega$  parallel combination is  $7 - i_y = 4.147 \, \text{A}$ . By current division,

$$i_x = 4.147 \cdot 13 / (13 + 6) = 2.837 \, \text{A}$$

$$\text{and } p_x = (4.147)^2 \cdot 3 = 51.59 \, \text{W}$$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

63. The controlling voltage  $v_1$ , needed to obtain the power into the 47-k $\Omega$  resistor, can be found separately as that network does not depend on the left-hand network. The right-most 2 k $\Omega$  resistor can be neglected.

By current division, then, in combination with Ohm's law,

$$v_1 = 3000[5 \times 10^{-3} (2000) / (2000 + 3000 + 7000)] = 2.5 \text{ V}$$

Voltage division gives the voltage across the 47-k $\Omega$  resistor:

$$0.5v_1 \frac{47}{47 + 100 \parallel 20} = \frac{0.5(2.5)(47)}{47 + 16.67} = 0.9228 \text{ V}$$

$$\text{So that } p_{47\text{k}\Omega} = (0.9228)^2 / 47 \times 10^3 = 18.12 \text{ }\mu\text{W}$$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

64. The temptation to write an equation such as

$$v_1 = 10 \frac{20}{20 + 20}$$

must be fought!

Voltage division only applies to resistors connected in series, meaning that the *same* current must flow through *each* resistor. In this circuit,  $i_1 \neq 0$ , so we do not have the same current flowing through both 20 k $\Omega$  resistors.



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

$$\begin{aligned}
 65. \quad (a) \quad v_2 &= V_s \frac{R_2 \parallel (R_3 + R_4)}{R_1 + [R_2 \parallel (R_3 + R_4)]} \\
 &= V_s \frac{R_2 (R_3 + R_4) / (R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 (R_3 + R_4) / (R_2 + R_3 + R_4)} \\
 &= V_s \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad v_1 &= V_s \frac{R_1}{R_1 + [R_2 \parallel (R_3 + R_4)]} \\
 &= V_s \frac{R_1}{R_1 + R_2 (R_3 + R_4) / (R_2 + R_3 + R_4)} \\
 &= V_s \frac{R_1 (R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad i_4 &= \left( \frac{v_1}{R_1} \right) \left( \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} \right) \\
 &= V_s \frac{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) R_2}{R_1 [R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4) (R_2 + R_3 + R_4)]} \\
 &= V_s \frac{R_2}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)}
 \end{aligned}$$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

66. (a) With the current source open-circuited, we find that

$$v_1 = -40 \frac{500}{500 + 3000 \parallel 6000} = \boxed{-8 \text{ V}}$$

- (b) With the voltage source short-circuited, we find that

$$i_2 = (3 \times 10^{-3}) \frac{1/3000}{1/500 + 1/3000 + 1/6000} = \boxed{400 \text{ mA}}$$

$$i_3 = (3 \times 10^{-3}) \frac{500}{500 + 3000 \parallel 6000} = \boxed{600 \text{ mA}}$$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

67. (a) The current through the 5- $\Omega$  resistor is  $10/5 = 2$  A. Define R as  $3 \parallel (4 + 5) = 2.25 \Omega$ . The current through the 2- $\Omega$  resistor then is given by

$$I_s \frac{1}{1 + (2 + R)} = \frac{I_s}{5.25}$$

The current through the 5- $\Omega$  resistor is

$$\frac{I_s}{5.25} \left( \frac{3}{3 + 9} \right) = 2 \text{ A}$$

so that  $I_s = 42 \text{ A}$ .

- (b) Given that  $I_s$  is now 50 A, the current through the 5- $\Omega$  resistor becomes

$$\frac{I_s}{5.25} \left( \frac{3}{3 + 9} \right) = 2.381 \text{ A}$$

Thus,  $v_x = 5(2.381) = 11.90 \text{ V}$

$$(c) \frac{v_x}{I_s} = \frac{\left[ \frac{5I_s}{5.25} \left( \frac{3}{3 + 9} \right) \right]}{I_s} = 0.2381$$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

68. First combine the 1 k $\Omega$  and 3 k $\Omega$  resistors to obtain 750  $\Omega$ .  
By current division, the current through resistor  $R_x$  is

$$I_{R_x} = 10 \times 10^{-3} \frac{2000}{2000 + R_x + 750}$$

and we know that  $R_x \cdot I_{R_x} = 9$

$$\text{so } 9 = \frac{20 R_x}{2750 + R_x}$$

$$9 R_x + 24750 = 20 R_x \quad \text{or } R_x = 2250 \text{ W. Thus,}$$

$$P_{R_x} = 9^2 / R_x = 36 \text{ mW.}$$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

69. Define  $R = R_3 \parallel (R_4 + R_5)$

$$\begin{aligned}\text{Then } v_R &= V_s \left( \frac{R}{R + R_2} \right) \\ &= V_s \left( \frac{R_3 (R_4 + R_5) / (R_3 + R_4 + R_5)}{R_3 (R_4 + R_5) / (R_3 + R_4 + R_5) + R_2} \right) \\ &= V_s \left( \frac{R_3 (R_4 + R_5)}{R_2 (R_3 + R_4 + R_5) + R_3 (R_4 + R_5)} \right)\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}v_5 &= v_R \left( \frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) \\ &= V_s \left( \frac{R_3 R_5}{R_2 (R_3 + R_4 + R_5) + R_3 (R_4 + R_5)} \right)\end{aligned}$$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

70. Define  $R_1 = 10 + 15 \parallel 30 = 20 \, \Omega$  and  $R_2 = 5 + 25 = 30 \, \Omega$ .

---

$$(a) I_x = I_1 \cdot 15 / (15 + 30) = 4 \text{ mA}$$

$$(b) I_1 = I_x \cdot 45 / 15 = 36 \text{ mA}$$

$$(c) I_2 = I_S R_1 / (R_1 + R_2) \text{ and } I_1 = I_S R_2 / (R_1 + R_2)$$

So  $I_1/I_2 = R_2/R_1$

Therefore

$$I_1 = R_2 I_2 / R_1 = 30(15)/20 = 22.5 \text{ mA}$$

$$\text{Thus, } I_x = I_1 \cdot 15 / 45 = 7.5 \text{ mA}$$

$$(d) I_1 = I_S R_2 / (R_1 + R_2) = 60(30) / 50 = 36 \text{ A}$$

$$\text{Thus, } I_x = I_1 \cdot 15 / 45 = 12 \text{ A.}$$



### CHAPTER THREE SOLUTIONS

71.  $v_{\text{out}} = -g_m v_\pi (100 \text{ k}\Omega \parallel 100 \text{ k}\Omega) = -4.762 \times 10^3 g_m v_\pi$

where  $v_\pi = (3 \sin 10t) \cdot 15/(15 + 0.3) = 2.941 \sin 10t$

Thus,  $v_{\text{out}} = -56.02 \sin 10t \text{ V}$



## CHAPTER THREE SOLUTIONS

72.  $v_{\text{out}} = -1000g_m v_\pi$

where  $v_\pi = 3 \sin 10t \frac{15 \parallel 3}{(15 \parallel 3) + 0.3} = 2.679 \sin 10t \text{ V}$

therefore

$$v_{\text{out}} = -(2.679)(1000)(38 \times 10^{-3}) \sin 10t = \boxed{-101.8 \sin 10t \text{ V.}}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

$$1. \quad (a) \quad \begin{bmatrix} 0.1 & -0.3 & -0.4 \\ -0.5 & 0.1 & 0 \\ -0.2 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Solving this matrix equation using a scientific calculator,  $v_2 = -8.387 \text{ V}$

(b) Using a scientific calculator, the determinant is equal to  $32$ .



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

$$2. \quad (a) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -16 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Solving this matrix equation using a scientific calculator,

$$\begin{aligned} v_A &= 19.57 \\ v_B &= 18.71 \\ v_C &= -11.29 \end{aligned}$$

(b) Using a scientific calculator,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

3. The bottom node has the largest number of branch connections, so we choose that as our reference node. This also makes  $v_P$  easier to find, as it will be a nodal voltage. Working from left to right, we name our nodes 1, P, 2, and 3.

$$\text{NODE 1:} \quad 10 = v_1/20 + (v_1 - v_P)/40 \quad [1]$$

$$\text{NODE P:} \quad 0 = (v_P - v_1)/40 + v_P/100 + (v_P - v_2)/50 \quad [2]$$

$$\text{NODE 2:} \quad -2.5 + 2 = (v_2 - v_P)/50 + (v_2 - v_3)/10 \quad [3]$$

$$\text{NODE 3:} \quad 5 - 2 = v_3/200 + (v_3 - v_2)/10 \quad [4]$$

Simplifying,

$$60v_1 - 20v_P = 8000 \quad [1]$$

$$-50v_1 + 110v_P - 40v_2 = 0 \quad [2]$$

$$-v_P + 6v_2 - 5v_3 = -25 \quad [3]$$

$$-200v_2 + 210v_3 = 6000 \quad [4]$$

Solving,

$$v_P = 171.6 \text{ V}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

4. The logical choice for a reference node is the bottom node, as then  $v_x$  will automatically become a nodal voltage.

$$\text{NODE 1:} \quad 4 = v_1/100 + (v_1 - v_2)/20 + (v_1 - v_x)/50 \quad [1]$$

$$\text{NODE } x: \quad 10 - 4 - (-2) = (v_x - v_1)/50 + (v_x - v_2)/40 \quad [2]$$

$$\text{NODE 2:} \quad -2 = v_2/25 + (v_2 - v_x)/40 + (v_2 - v_1)/20 \quad [3]$$

Simplifying,

$$4 = 0.0800v_1 - 0.0500v_2 - 0.0200v_x \quad [1]$$

$$8 = -0.0200v_1 - 0.0250v_2 + 0.0450v_x \quad [2]$$

$$-2 = -0.0500v_1 + 0.1150v_2 - 0.0250v_x \quad [3]$$

Solving,

$$v_x = 397.4 \text{ V.}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

5. Designate the node between the 3- $\Omega$  and 6- $\Omega$  resistors as node X, and the right-hand node of the 6- $\Omega$  resistor as node Y. The bottom node is chosen as the reference node.
- 

(a) Writing the two nodal equations, then

$$\text{NODE X:} \quad -10 = (v_X - 240)/3 + (v_X - v_Y)/6 \quad [1]$$

$$\text{NODE Y:} \quad 0 = (v_Y - v_X)/6 + v_Y/30 + (v_Y - 60)/12 \quad [2]$$

$$\text{Simplifying,} \quad -180 + 1440 = 9 v_X - 3 v_Y \quad [1]$$

$$10800 = -360 v_X + 612 v_Y \quad [2]$$

$$\text{Solving,} \quad v_X = 181.5 \text{ V} \quad \text{and} \quad v_Y = 124.4 \text{ V}$$

$$\text{Thus,} \quad v_1 = 240 - v_X = \boxed{58.50 \text{ V}} \quad \text{and} \quad v_2 = v_Y - 60 = \boxed{64.40 \text{ V}}$$

(b) The power absorbed by the 6- $\Omega$  resistor is

$$(v_X - v_Y)^2 / 6 = \boxed{543.4 \text{ W}}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

6. Only one nodal equation is required: At the node where three resistors join,

$$0.02v_1 = (v_x - 5 i_2) / 45 + (v_x - 100) / 30 + (v_x - 0.2 v_3) / 50 \quad [1]$$

This, however, is one equation in four unknowns, the other three resulting from the presence of the dependent sources. Thus, we require three additional equations:

$$i_2 = (0.2 v_3 - v_x) / 50 \quad [2]$$

$$v_1 = 0.2 v_3 - 100 \quad [3]$$

$$v_3 = 50i_2 \quad [4]$$

Simplifying,

$$v_1 - 0.2v_3 = -100 \quad [3]$$

$$-v_3 + 50 i_2 = 0 \quad [4]$$

$$-v_x + 0.2v_3 - 50 i_2 = 0 \quad [2]$$

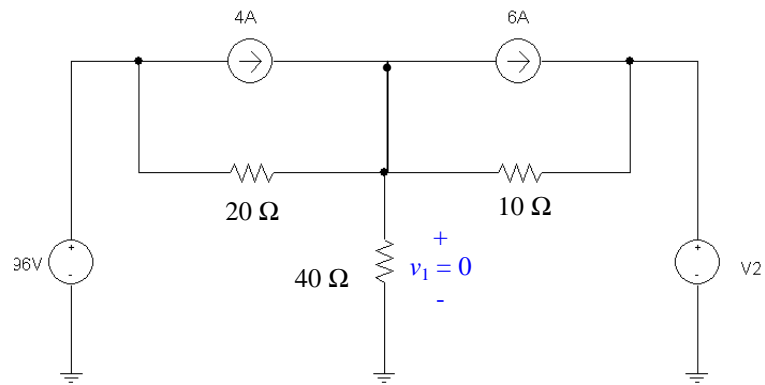
$$0.07556v_x - 0.02v_1 - 0.004v_3 - 0.111i_2 = 33.33 \quad [1]$$

Solving, we find that  $v_1 = -103.8 \text{ V}$  and  $i_2 = -377.4 \text{ mA}$ .



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

7. If  $v_1 = 0$ , the dependent source is a short circuit and we may redraw the circuit as:



At NODE 1:  $4 - 6 = v_1/40 + (v_1 - 96)/20 + (v_1 - V_2)/10$

Since  $v_1 = 0$ , this simplifies to

$$-2 = -96/20 - V_2/10$$

so that  $V_2 = -28 \text{ V.}$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

8. We choose the bottom node as ground to make calculation of  $i_5$  easier. The left-most node is named “1”, the top node is named “2”, the central node is named “3” and the node between the 4- $\Omega$  and 6- $\Omega$  resistors is named “4.”

$$\text{NODE 1:} \quad -3 = v_1/2 + (v_1 - v_2)/1 \quad [1]$$

$$\text{NODE 2:} \quad 2 = (v_2 - v_1)/1 + (v_2 - v_3)/3 + (v_2 - v_4)/4 \quad [2]$$

$$\text{NODE 3:} \quad 3 = v_3/5 + (v_3 - v_4)/7 + (v_3 - v_2)/3 \quad [3]$$

$$\text{NODE 4:} \quad 0 = v_4/6 + (v_4 - v_3)/7 + (v_4 - v_2)/4 \quad [4]$$

Rearranging and grouping terms,

$$3v_1 - 2v_2 = -6 \quad [1]$$

$$-12v_1 + 19v_2 - 4v_3 - 3v_4 = 24 \quad [2]$$

$$-35v_2 + 71v_3 - 15v_4 = 315 \quad [3]$$

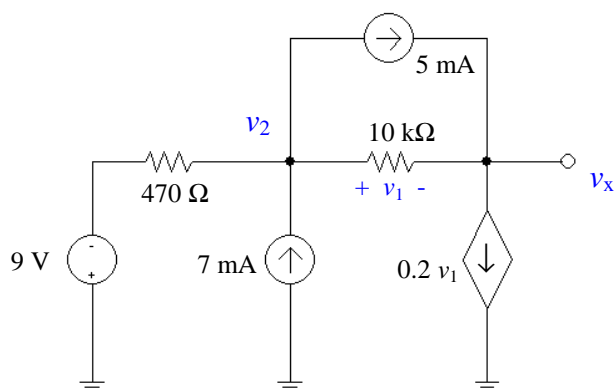
$$-42v_2 - 24v_3 + 94v_4 = 0 \quad [4]$$

Solving, we find that  $v_3 = 6.760$  V and so  $i_5 = v_3/5 = 1.352$  A.



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

9. We can redraw this circuit and eliminate the 2.2-k $\Omega$  resistor as no current flows through it:



$$\text{At NODE 2: } 7 \times 10^{-3} - 5 \times 10^{-3} = (v_2 + 9)/470 + (v_2 - v_x)/10 \times 10^{-3} \quad [1]$$

$$\text{At NODE } x: 5 \times 10^{-3} - 0.2v_1 = (v_x - v_2)/10 \times 10^{-3} \quad [2]$$

The additional equation required by the presence of the dependent source and the fact that its controlling variable is not one of the nodal voltages:

$$v_1 = v_2 - v_x \quad [3]$$

Eliminating the variable  $v_1$  and grouping terms, we obtain:

$$10,470 v_2 - 470 v_x = -89,518$$

and

$$1999 v_2 - 1999 v_x = 50$$

Solving, we find  $v_x = -8.086 \text{ V.}$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

10. We need concern ourselves with the bottom part of this circuit only. Writing a single nodal equation,

$$-4 + 2 = v/50$$

We find that

$$v = -100 \text{ V.}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

11. We choose the center node for our common terminal, since it connects to the largest number of branches. We name the left node “A”, the top node “B”, the right node “C”, and the bottom node “D”. We next form a supernode between nodes A and B.

$$\text{At the supernode:} \quad 5 = (V_A - V_B)/10 + V_A/20 + (V_B - V_C)/12.5 \quad [1]$$

$$\text{At node C:} \quad V_C = 150 \quad [2]$$

$$\text{At node D:} \quad -10 = V_D/25 + (V_D - V_A)/10 \quad [3]$$

$$\text{Our supernode-related equation is } V_B - V_A = 100 \quad [4]$$

Simplifying and grouping terms,

$$0.15 V_A + 0.08 V_B - 0.08 V_C - 0.1 V_D = 5 \quad [1]$$

$$V_C = 150 \quad [2]$$

$$-25 V_A + 35 V_D = -2500 \quad [3]$$

$$-V_A + V_B = 100 \quad [4]$$

Solving, we find that  $V_D = -63.06 \text{ V}$ . Since  $v_4 = -V_D$ ,

$$v_4 = 63.06 \text{ V.}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

12. Choosing the bottom node as the reference terminal and naming the left node “1”, the center node “2” and the right node “3”, we next form a supernode about nodes 1 and 2, encompassing the dependent voltage source.

$$\text{At the supernode,} \quad 5 - 8 = (v_1 - v_2)/2 + v_3/2.5 \quad [1]$$

$$\text{At node 2,} \quad 8 = v_2/5 + (v_2 - v_1)/2 \quad [2]$$

$$\text{Our supernode equation is } v_1 - v_3 = 0.8 v_A \quad [3]$$

$$\text{Since } v_A = v_2, \text{ we can rewrite [3] as } v_1 - v_3 = 0.8 v_2$$

Simplifying and collecting terms,

$$0.5 v_1 - 0.5 v_2 + 0.4 v_3 = -3 \quad [1]$$

$$-0.5 v_1 + 0.7 v_2 = 8 \quad [2]$$

$$v_1 - 0.8 v_2 - v_3 = 0 \quad [3]$$

---

(a) Solving for  $v_2 = v_A$ , we find that  $v_A = 25.91 \text{ V}$

(b) The power absorbed by the  $2.5\text{-}\Omega$  resistor is  $(v_3)^2/2.5 = (-0.4546)^2/2.5 = 82.66 \text{ mW}.$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

13. Selecting the bottom node as the reference terminal, we name the left node “1”, the middle node “2” and the right node “3.”

$$\text{NODE 1:} \quad 5 = (v_1 - v_2)/20 + (v_1 - v_3)/50 \quad [1]$$

$$\text{NODE 2:} \quad v_2 = 0.4 v_1 \quad [2]$$

$$\text{NODE 3:} \quad 0.01 v_1 = (v_3 - v_2)/30 + (v_3 - v_1)/50 \quad [3]$$

Simplifying and collecting terms, we obtain

$$0.07 v_1 - 0.05 v_2 - 0.02 v_3 = 5 \quad [1]$$

$$0.4 v_1 - v_2 = 0 \quad [2]$$

$$-0.03 v_1 - 0.03333 v_2 + 0.05333 v_3 = 0 \quad [3]$$

Since our choice of reference terminal makes the controlling variable of both dependent sources a nodal voltage, we have no need for an additional equation as we might have expected.

Solving, we find that  $v_1 = 148.2 \text{ V}$ ,  $v_2 = 59.26 \text{ V}$ , and  $v_3 = 120.4 \text{ V}$ .

The power supplied by the dependent current source is therefore

$$(0.01 v_1) \cdot v_3 = 177.4 \text{ W.}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

14. At node x:  $v_x/4 + (v_x - v_y)/2 + (v_x - 6)/1 = 0$  [1]  
At node y:  $(v_y - kv_x)/3 + (v_y - v_x)/2 = 2$  [2]

Our additional constraint is that  $v_y = 0$ , so we may simplify Eqs. [1] and [2]:

$$14 v_x = 48 \quad [1]$$

$$-2k v_x - 3 v_x = 12 \quad [2]$$

Since Eq. [1] yields  $v_x = 48/14 = 3.429 \text{ V}$ , we find that

$$k = (12 + 3 v_x)/(-2 v_x) = \boxed{-3.250}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

15. Choosing the bottom node joining the 4- $\Omega$  resistor, the 2-A current source and the 4-V voltage source as our reference node, we next name the other node of the 4- $\Omega$  resistor node “1”, and the node joining the 2- $\Omega$  resistor and the 2-A current source node “2.” Finally, we create a supernode with nodes “1” and “2.”

At the supernode:  $-2 = v_1/4 + (v_2 - 4)/2$  [1]

Our remaining equations:  $v_1 - v_2 = -3 - 0.5i_1$  [2]

and  $i_1 = (v_2 - 4)/2$  [3]

Equation [1] simplifies to  $v_1 + 2v_2 = 0$  [1]

Combining Eqs. [2] and [3],  $4v_1 - 3v_2 = -8$  [4]

Solving these last two equations, we find that  $v_2 = 727.3$  mV. Making use of Eq. [3], we therefore find that

$$i_1 = -1.636 \text{ A.}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

16. We first number the nodes as 1, 2, 3, 4, and 5 moving left to right. We next select node 5 as the reference terminal. To simplify the analysis, we form a supernode from nodes 1, 2, and 3.

*At the supernode,*

$$-4 - 8 + 6 = v_1/40 + (v_1 - v_3)/10 + (v_3 - v_1)/10 + v_2/50 + (v_3 - v_4)/20 \quad [1]$$

Note that since both ends of the 10- $\Omega$  resistor are connected to the supernode, the related terms cancel each other out, and so could have been ignored.

*At node 4:*  $v_4 = 200$  [2]

*Supernode KVL equation:*  $v_1 - v_3 = 400 + 4v_{20}$  [3]

Where the controlling voltage  $v_{20} = v_3 - v_4 = v_3 - 200$  [4]

Thus, Eq. [1] becomes  $-6 = v_1/40 + v_2/50 + (v_3 - 200)/20$  or, more simply,

$$4 = v_1/40 + v_2/50 + v_3/20 \quad [1']$$

and Eq. [3] becomes  $v_1 - 5v_3 = -400$  [3']

Eqs. [1'], [3'], and [5] are not sufficient, however, as we have four unknowns. At this point we need to seek an additional equation, possibly in terms of  $v_2$ . Referring to the circuit,

$$v_1 - v_2 = 400 \quad [5]$$

Rewriting as a matrix equation,

$$\begin{bmatrix} 1/40 & 1/50 & 1/20 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Solving, we find that

$v_1 = 145.5$  V,  $v_2 = -254.5$  V, and  $v_3 = 109.1$  V. Since  $v_{20} = v_3 - 200$ , we find that

$v_{20} = -90.9$  V.



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

17. We begin by naming the top left node “1”, the top right node “2”, the bottom node of the 6-V source “3” and the top node of the 2- $\Omega$  resistor “4.” The reference node has already been selected, and designated using a ground symbol.

By inspection,  $v_2 = 5 \text{ V}$ .

Forming a supernode with nodes 1 & 3, we find

$$\text{At the supernode:} \quad -2 = v_3/1 + (v_1 - 5)/10 \quad [1]$$

$$\text{At node 4:} \quad 2 = v_4/2 + (v_4 - 5)/4 \quad [2]$$

$$\text{Our supernode KVL equation:} \quad v_1 - v_3 = 6 \quad [3]$$

Rearranging, simplifying and collecting terms,

$$v_1 + 10 v_3 = -20 + 5 = -15 \quad [1]$$

and

$$v_1 - v_3 = 6 \quad [2]$$

Eq. [3] may be directly solved to obtain  $v_4 = 4.333 \text{ V}$ .

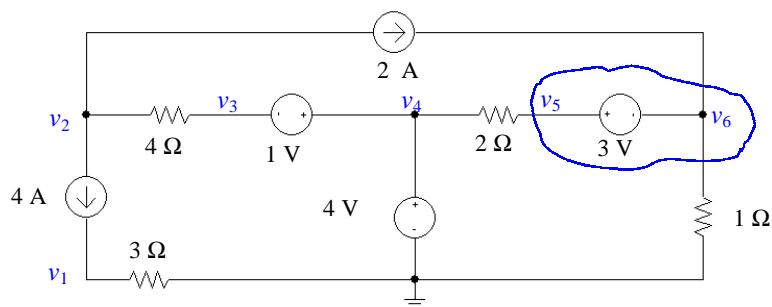
Solving Eqs. [1] and [2], we find that

$$v_1 = 4.091 \text{ V} \quad \text{and} \quad v_3 = -1.909 \text{ V}.$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

18. We begin by selecting the bottom node as the reference, naming the nodes as shown below, and forming a supernode with nodes 5 & 6.



By inspection,  $v_4 = 4 \text{ V}$ .

By KVL,  $v_3 - v_4 = 1$  so  $v_3 = -1 + v_4 = -1 + 4$  or  $v_3 = 3 \text{ V}$ .

At the supernode,  $2 = v_6/1 + (v_5 - 4)/2$  [1]

At node 1,  $4 = v_1/3$  therefore,  $v_1 = 12 \text{ V}$ .

At node 2,  $-4 - 2 = (v_2 - 3)/4$

Solving, we find that  $v_2 = -21 \text{ V}$

Our supernode KVL equation is  $v_5 - v_6 = 3$  [2]

Solving Eqs. [1] and [2], we find that

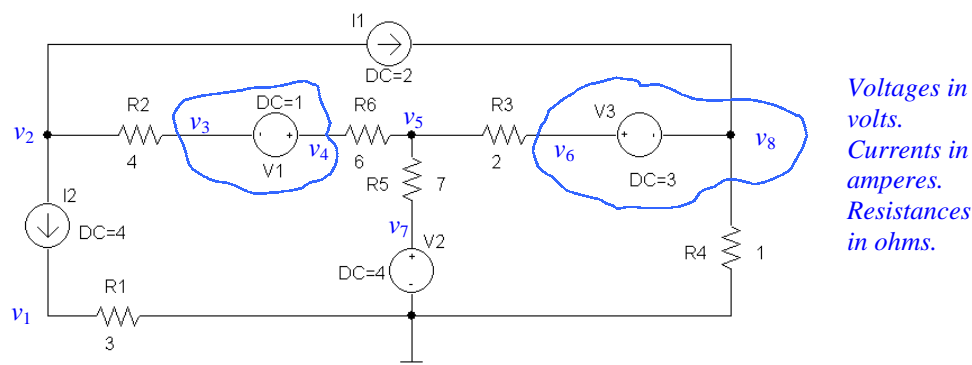
$$v_5 = 4.667 \text{ V} \quad \text{and} \quad v_6 = 1.667 \text{ V}.$$

The power supplied by the 2-A source therefore is  $(v_6 - v_2)(2) = 45.33 \text{ W}$ .



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

19. We begin by selecting the bottom node as the reference, naming each node as shown below, and forming two different supernodes as indicated.



By inspection,  $v_7 = 4 \text{ V}$  and  $v_1 = (3)(4) = 12 \text{ V}$ .

At node 2:  $-4 - 2 = (v_2 - v_3)/4$  or  $v_2 - v_3 = -24$  [1]

At the 3-4 supernode:  
 $0 = (v_3 - v_2)/4 + (v_4 - v_5)/6$  or  $-6v_2 + 6v_3 + 4v_4 - 4v_5 = 0$  [2]

At node 5:  
 $0 = (v_5 - v_4)/6 + (v_5 - 4)/7 + (v_5 - v_6)/2$  or  $-14v_4 + 68v_5 - 42v_6 = 48$  [3]

At the 6-8 supernode:  $2 = (v_6 - v_5)/2 + v_8/1$  or  $-v_5 + v_6 + 2v_8 = 4$  [4]

3-4 supernode KVL equation:  $v_3 - v_4 = -1$  [5]

6-8 supernode KVL equation:  $v_6 - v_8 = 3$  [6]

Rewriting Eqs. [1] to [6] in matrix form,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 68 & -42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 0 \\ 48 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solving, we find that

$$v_2 = -68.9 \text{ V}, v_3 = -44.9 \text{ V}, v_4 = -43.9 \text{ V}, v_5 = -7.9 \text{ V}, v_6 = 700 \text{ mV}, v_8 = -2.3 \text{ V}.$$

The power generated by the 2-A source is therefore  $(v_8 - v_6)(2) = 133.2 \text{ W}$ .



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

20. With the reference terminal already specified, we name the bottom terminal of the 3-mA source node “1,” the right terminal of the bottom 2.2-k $\Omega$  resistor node “2,” the top terminal of the 3-mA source node “3,” the “+” reference terminal of the 9-V source node “4,” and the “-” terminal of the 9-V source node “5.”

Since we know that 1 mA flows through the top 2.2-k $\Omega$  resistor,  $v_5 = -2.2$  V.

Also, we see that  $v_4 - v_5 = 9$ , so that  $v_4 = 9 - 2.2 = 6.8$  V.

Proceeding with nodal analysis,

$$\text{At node 1: } -3 \times 10^{-3} = v_1 / 10 \times 10^3 + (v_1 - v_2) / 2.2 \times 10^3 \quad [1]$$

$$\text{At node 2: } 0 = (v_2 - v_1) / 2.2 \times 10^3 + (v_2 - v_3) / 4.7 \times 10^3 \quad [2]$$

$$\text{At node 3: } 1 \times 10^3 + 3 \times 10^3 = (v_3 - v_2) / 4.7 \times 10^3 + v_3 / 3.3 \times 10^3 \quad [3]$$

Solving,  $v_1 = -8.614$  V,  $v_2 = -3.909$  V and  $v_3 = 6.143$  V.

Note that we could also have made use of the supernode approach here.



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

21. Moving from left to right, we name the bottom three meshes, mesh “1”, mesh “2,” and mesh “3.” In each of these three meshes we define a clockwise current. The remaining mesh current is clearly 8 A. We may then write:

$$\text{MESH 1:} \quad 12 i_1 - 4 i_2 = 100$$

$$\text{MESH 2:} \quad -4 i_1 + 9 i_2 - 3 i_3 = 0$$

$$\text{MESH 3:} \quad -3 i_2 + 18 i_3 = -80$$

Solving this system of three (independent) equations in three unknowns, we find that

$$i_2 = i_x = 2.791 \text{ A.}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

22. We define four clockwise mesh currents. The top mesh current is labeled  $i_4$ . The bottom left mesh current is labeled  $i_1$ , the bottom right mesh current is labeled  $i_3$ , and the remaining mesh current is labeled  $i_2$ . Define a voltage " $v_{4A}$ " across the 4-A current source with the "+" reference terminal on the left.

By inspection,  $i_3 = 5 \text{ A}$  and  $i_a = i_4$ .

$$\text{MESH 1: } -60 + 2i_1 - 2i_4 + 6i_4 = 0 \quad \text{or} \quad 2i_1 + 4i_4 = 60 \quad [1]$$

$$\text{MESH 2: } -6i_4 + v_{4A} + 4i_2 - 4(5) = 0 \quad \text{or} \quad 4i_2 - 6i_4 + v_{4A} = 30 \quad [2]$$

$$\text{MESH 4: } 2i_4 - 2i_1 + 5i_4 + 3i_4 - 3(5) - v_{4A} = 0 \quad \text{or} \quad -2i_1 + 10i_4 - v_{4A} = 15 \quad [3]$$

At this point, we are short an equation. Returning to the circuit diagram, we note that

$$i_2 - i_4 = 4 \quad [4]$$

Collecting these equations and writing in matrix form, we have

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 \\ -2 & 0 & 10 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_4 \\ v_{4A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Solving,  $i_1 = 16.83 \text{ A}$ ,  $i_2 = 10.58 \text{ A}$ ,  $i_4 = 6.583 \text{ A}$  and  $v_{4A} = 17.17 \text{ V}$ .

Thus, the power dissipated by the  $2\text{-}\Omega$  resistor is

$$(i_1 - i_4)^2 \cdot (2) = 210.0 \text{ W}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

23. We begin our analysis by defining three clockwise mesh currents. We will call the top mesh current  $i_3$ , the bottom left mesh current  $i_1$ , and the bottom right mesh current  $i_2$ .

By inspection,  $i_1 = 5 \text{ A}$  [1] and  $i_2 = -0.01 v_1$  [2]

MESH 3:  $50 i_3 + 30 i_3 - 30 i_2 + 20 i_3 - 20 i_1 = 0$   
or  $-20 i_1 - 30 i_2 + 100 i_3 = 0$  [3]

These three equations are insufficient, however, to solve for the unknowns. It would be nice to be able to express the dependent source controlling variable  $v_1$  in terms of the mesh currents. Returning to the diagram, it can be seen that KVL around mesh 1 will yield

$-v_1 + 20 i_1 - 20 i_3 + 0.4 v_1 = 0$   
or  $v_1 = 20 i_1 / 0.6 - 20 i_3 / 0.6$  or  $v_1 = (20(5) / 0.6 - 20 i_3 / 0.6)$  [4]

Substituting Eq. [4] into Eq. [2] and then the modified Eq. [2] into Eq. [3], we find

$$-20(5) - 30(-0.01)(20(5)/0.6 - 20 i_3 / 0.6) + 100 i_3 = 0$$

Solving, we find that  $i_3 = (100 - 50) / 90 = 555.6 \text{ mA}$

Thus,  $v_1 = 148.1 \text{ V}$ ,  $i_2 = -1.481 \text{ A}$ , and the power generated by the dependent voltage source is

$$0.4 v_1 (i_2 - i_1) = -383.9 \text{ W.}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

24. We begin by defining four clockwise mesh currents  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  and  $i_4$ , in the meshes of our circuit, starting at the left-most mesh. We also define a voltage  $v_{\text{dep}}$  across the dependent current source, with the “+” on the top.

By inspection,  $i_1 = 2\text{ A}$  and  $i_4 = -5\text{ A}$ .

$$\text{At Mesh 2: } 10 i_2 - 10(2) + 20 i_2 + v_{\text{dep}} = 0 \quad [1]$$

$$\text{At Mesh 3: } -v_{\text{dep}} + 25 i_3 + 5 i_3 - 5(-5) = 0 \quad [2]$$

Collecting terms, we rewrite Eqs. [1] and [2] as

$$30 i_2 + v_{\text{dep}} = 20 \quad [1]$$

$$30 i_3 - v_{\text{dep}} = -25 \quad [2]$$

This is only two equations but three unknowns, however, so we require an additional equation. Returning to the circuit diagram, we note that it is possible to express the current of the dependent source in terms of mesh currents. (We might also choose to obtain an expression for  $v_{\text{dep}}$  in terms of mesh currents using KVL around mesh 2 or 3.)

$$\text{Thus, } 1.5i_x = i_3 - i_2 \text{ where } i_x = i_1 - i_2 \text{ so } -0.5 i_2 - i_3 = -3 \quad [3]$$

In matrix form,

$$\begin{bmatrix} 30 & 0 & 1 \\ 0 & 30 & -1 \\ -0.5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \\ v_{\text{dep}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -25 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Solving, we find that  $i_2 = -6.333\text{ A}$  so that  $i_x = i_1 - i_2 = 8.333\text{ A}$ .



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

25. We define a clockwise mesh current  $i_1$  in the bottom left mesh, a clockwise mesh current  $i_2$  in the top left mesh, a clockwise mesh current  $i_3$  in the top right mesh, and a clockwise mesh current  $i_4$  in the bottom right mesh.

$$\text{MESH 1:} \quad -0.1 v_a + 4700 i_1 - 4700 i_2 + 4700 i_1 - 4700 i_4 = 0 \quad [1]$$

$$\text{MESH 2:} \quad 9400 i_2 - 4700 i_1 - 9 = 0 \quad [2]$$

$$\text{MESH 3:} \quad 9 + 9400 i_3 - 4700 i_4 = 0 \quad [3]$$

$$\text{MESH 4:} \quad 9400 i_4 - 4700 i_1 - 4700 i_3 + 0.1 i_x = 0 \quad [4]$$

The presence of the two dependent sources has led to the introduction of two additional unknowns ( $i_x$  and  $v_a$ ) besides our four mesh currents. In a perfect world, it would simplify the solution if we could express these two quantities in terms of the mesh currents.

Referring to the circuit diagram, we see that  $i_x = i_2$  (easy enough) and that  $v_a = 4700 i_3$  (also straightforward). Thus, substituting these expressions into our four mesh equations and creating a matrix equation, we arrive at:

$$\begin{bmatrix} 9400 & -4700 & -470 & -4700 \\ -4700 & 9400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9400 & -4700 \\ -4700 & 0.1 & -4700 & 9400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solving,

$$i_1 = 239.3 \mu\text{A}, i_2 = 1.077 \text{ mA}, i_3 = -1.197 \text{ mA and } i_4 = -478.8 \mu\text{A}.$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

26. We define a clockwise mesh current  $i_3$  in the upper right mesh, a clockwise mesh current  $i_1$  in the lower left mesh, and a clockwise mesh current  $i_2$  in the lower right mesh.

$$\text{MESH 1:} \quad -6 + 6 i_1 - 2 = 0 \quad [1]$$

$$\text{MESH 2:} \quad 2 + 15 i_2 - 12 i_3 - 1.5 = 0 \quad [2]$$

$$\text{MESH 3:} \quad i_3 = 0.1 v_x \quad [3]$$

Eq. [1] may be solved directly to obtain  $i_1 = 1.333 \text{ A}$ .

It would help in the solution of Eqs. [2] and [3] if we could express the dependent source controlling variable  $v_x$  in terms of mesh currents. Referring to the circuit diagram, we see that  $v_x = (1)(i_1) = i_1$ , so Eq. [3] reduces to

$$i_3 = 0.1 v_x = 0.1 i_1 = 133.3 \text{ mA}.$$

As a result, Eq. [1] reduces to  $i_2 = [-0.5 + 12(0.1333)]/15 = 73.31 \text{ mA}$ .



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

27. (a) Define a mesh current  $i_2$  in the second mesh. Then KVL allows us to write:

$$\text{MESH 1: } -9 + R i_1 + 47000 i_1 - 47000 i_2 = 0 \quad [1]$$

$$\text{MESH 2: } 67000 i_2 - 47000 i_1 - 5 = 0 \quad [2]$$

Given that  $i_1 = 1.5 \text{ mA}$ , we may solve Eq. [2] to find that

$$i_2 = \frac{5 + 47(1.5)}{67} \text{ mA} = 1.127 \text{ mA}$$

and so

$$R = \frac{9 - 47(1.5) + 47(1.127)}{1.5 \times 10^{-3}} = -5687 \, \Omega.$$

- (b) This value of  $R$  is unique; no other value will satisfy **both** Eqs. [1] **and** [2].



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

28. Define three clockwise mesh currents  $i_1$ ,  $i_2$  and  $i_3$ . The bottom 1-k $\Omega$  resistor can be ignored, as no current flows through it.

$$\text{MESH 1:} \quad -4 + (2700 + 1000 + 5000) i_1 - 1000 i_2 = 0 \quad [1]$$

$$\text{MESH 2:} \quad (1000 + 1000 + 4400 + 3000) i_2 - 1000 i_1 - 4400 i_3 + 2.2 - 3 = 0 \quad [2]$$

$$\text{MESH 3:} \quad (4400 + 4000 + 3000) i_3 - 4400 i_2 - 1.5 = 0 \quad [3]$$

Combining terms,

$$8700 i_1 - 1000 i_2 = 4 \quad [1]$$

$$-1000 i_1 + 9400 i_2 - 4400 i_3 = 0.8 \quad [2]$$

$$-4400 i_2 + 11400 i_3 = 1.5 \quad [3]$$

Solving,

$$i_1 = 487.6 \text{ mA}, i_2 = 242.4 \text{ mA and } i_3 = 225.1 \text{ mA}.$$

The power absorbed by each resistor may now be calculated:

|                       |     |                      |     |                             |
|-----------------------|-----|----------------------|-----|-----------------------------|
| $P_{5k}$              | $=$ | $5000 (i_1)^2$       | $=$ | $1.189 \text{ mW}$          |
| $P_{2.7k}$            | $=$ | $2700 (i_1)^2$       | $=$ | $641.9 \text{ }\mu\text{W}$ |
| $P_{1k\text{top}}$    | $=$ | $1000 (i_1 - i_2)^2$ | $=$ | $60.12 \text{ }\mu\text{W}$ |
| $P_{1k\text{middle}}$ | $=$ | $1000 (i_2)^2$       | $=$ | $58.76 \text{ }\mu\text{W}$ |
| $P_{1k\text{bottom}}$ | $=$ | $0$                  | $=$ | $0$                         |
| $P_{4.4k}$            | $=$ | $4400 (i_2 - i_3)^2$ | $=$ | $1.317 \text{ }\mu\text{W}$ |
| $P_{3k\text{top}}$    | $=$ | $3000 (i_3)^2$       | $=$ | $152.0 \text{ }\mu\text{W}$ |
| $P_{4k}$              | $=$ | $4000 (i_3)^2$       | $=$ | $202.7 \text{ }\mu\text{W}$ |
| $P_{3k\text{bottom}}$ | $=$ | $3000 (i_2)^2$       | $=$ | $176.3 \text{ }\mu\text{W}$ |

Check: The sources supply a total of

$$4(487.6) + (3 - 2.2)(242.4) + 1.5(225.1) = 2482 \text{ }\mu\text{W}.$$

The absorbed powers add to 2482  $\mu\text{W}$ .



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

29. (a) We begin by naming four mesh currents as depicted below:



Proceeding with mesh analysis, then, keeping in mind that  $I_x = -i_4$ ,

$$\text{MESH 1:} \quad (4700 + 300) i_1 - 4700 i_2 = 0 \quad [1]$$

$$\text{MESH 2:} \quad (4700 + 1700) i_2 - 4700 i_1 - 1700 i_3 = 0 \quad [2]$$

Since we have a current source on the perimeter of mesh 3, we do not require a KVL equation for that mesh. Instead, we may simply write

$$i_3 = -0.03 v_\pi \quad [3a] \quad \text{where} \quad v_\pi = 4700(i_1 - i_2) \quad [3b]$$

$$\text{MESH 4:} \quad 3000 i_4 - 3000 i_3 + 1 = 0 \quad [4]$$

Simplifying and combining Eqs. 3a and 3b,

$$\begin{aligned} 5000 i_1 - 4700 i_2 &= 0 \\ -4700 i_1 + 6400 i_2 - 1700 i_3 &= 0 \\ -141 i_1 + 141 i_2 - i_3 &= 0 \\ -3000 i_3 + 3000 i_4 &= -1 \end{aligned}$$

Solving, we find that  $i_4 = -333.3 \text{ mA}$ , so  $I_x = 333.3 \text{ } \mu\text{A}$ .

(b) At node “ $\pi$ ”:  $0.03 v_\pi = v_\pi / 300 + v_\pi / 4700 + v_\pi / 1700$

Solving, we find that  $v_\pi = 0$ , therefore no current flows through the dependent source.

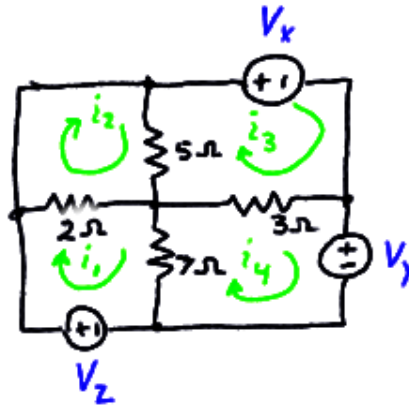
Hence,  $I_x = 333.3 \text{ } \mu\text{A}$  as found in part (a).

(c)  $V_s / I_x$  has units of resistance. It can be thought of as the resistance “seen” by the voltage source  $V_s$ .... more on this in Chap. 5....



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

30. We begin by naming each mesh and the three undefined voltage sources as shown below:



$$\text{MESH 1:} \quad -V_z + 9i_1 - 2i_2 \quad -7i_4 = 0$$

$$\text{MESH 2:} \quad -2i_1 + 7i_2 - 5i_3 = 0$$

$$\text{MESH 3:} \quad V_x - 5i_2 + 8i_3 - 3i_4 = 0$$

$$\text{MESH 4:} \quad V_y - 7i_1 - 3i_3 + 10i_4 = 0$$

Rearranging and setting  $i_1 - i_2 = 0$ ,  $i_2 - i_3 = 0$ ,  $i_1 - i_4 = 0$  and  $i_4 - i_3 = 0$ ,

$$\begin{aligned} 9i_1 - 2i_2 - 7i_4 &= V_z \\ -2i_1 + 7i_2 - 5i_3 &= 0 \\ -5i_2 + 8i_3 - 3i_4 &= -V_x \\ -7i_1 - 3i_3 + 10i_4 &= -V_y \end{aligned}$$

Since  $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$ , these equations produce:

$$\begin{aligned} V_z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -V_x &= 0 \\ -V_y &= 0 \end{aligned}$$

This is a unique solution. Therefore, the request that nonzero values be found cannot be satisfied.

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

31. The “supermesh” concept is not required (or helpful) in solving this problem, as there are no current sources shared between meshes. Starting with the left-most mesh and moving right, we define four clockwise mesh currents  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  and  $i_4$ . By inspection, we see that  $i_1 = 2$  mA.

$$\text{MESH 2:} \quad -10 + 5000i_2 + 4 + 1000i_3 = 0 \quad [1]$$

$$\text{MESH 3:} \quad -1000i_3 + 6 + 10,000 - 10,000i_4 = 0 \quad [2]$$

$$\text{MESH 4:} \quad i_4 = -0.5i_2 \quad [3]$$

Reorganising, we find

$$5000 i_2 + 1000 i_3 = 6 \quad [1]$$

$$9000 i_3 - 10,000 i_4 = -6 \quad [2]$$

$$0.5 i_2 + i_4 = 0 \quad [3]$$

We could either substitute Eq. [3] into Eq. [2] to reduce the number of equations, or simply go ahead and solve the system of Eqs. [1-3]. Either way, we find that

$$i_1 = 2 \text{ mA}, i_2 = 1.5 \text{ mA}, i_3 = -1.5 \text{ mA and } i_4 = -0.75 \text{ mA}.$$

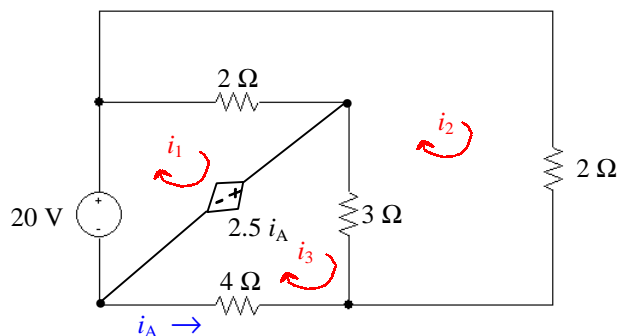
The power generated by each source is:

|                   |                                |                       |
|-------------------|--------------------------------|-----------------------|
| $P_{2\text{mA}}$  | $= 5000(i_1 - i_2)(i_1)$       | $= 5 \text{ mW}$      |
| $P_{4\text{V}}$   | $= 4 (-i_2)$                   | $= -6 \text{ mW}$     |
| $P_{6\text{V}}$   | $= 6 (-i_3)$                   | $= 9 \text{ mW}$      |
| $P_{\text{depV}}$ | $= 1000 i_3 (i_3 - i_2)$       | $= 4.5 \text{ mW}$    |
| $P_{\text{depI}}$ | $= 10,000(i_3 - i_4)(0.5 i_2)$ | $= -5.625 \text{ mW}$ |



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

32. This circuit does not require the supermesh technique, as it does not contain any current sources. Redrawing the circuit so its planar nature and mesh structure are clear,



$$\text{MESH 1:} \quad -20 + 2 i_1 - 2 i_2 + 2.5 i_A = 0 \quad [1]$$

$$\text{MESH 2:} \quad 2 i_2 + 3 i_2 - 3 i_3 + 2 i_2 - 2 i_1 = 0 \quad [2]$$

$$\text{MESH 3:} \quad -2.5 i_A + 7 i_3 - 3 i_2 = 0 \quad [3]$$

Combining terms and making use of the fact that  $i_A = -i_3$ ,

$$2 i_1 - 2 i_2 - 2.5 i_3 = 20 \quad [1]$$

$$-2 i_1 + 7 i_2 - 3 i_3 = 0 \quad [2]$$

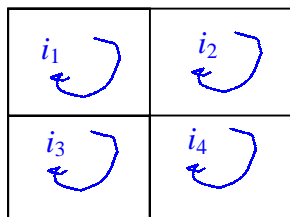
$$-3 i_2 + 9.5 i_3 = 0 \quad [3]$$

Solving,  $i_1 = 18.55 \text{ A}$ ,  $i_2 = 6.129 \text{ A}$ , and  $i_3 = 1.935 \text{ A}$ . Since  $i_A = -i_3$ ,

$i_A = -1.935 \text{ A.}$

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

33. Define four mesh currents



By inspection,  $i_1 = -4.5$  A.

We form a supermesh with meshes 3 and 4 as defined above.

$$\text{MESH 2:} \quad 2.2 + 3 i_2 + 4 i_2 + 5 - 4 i_3 = 0 \quad [1]$$

$$\text{SUPERMESH:} \quad 3 i_4 + 9 i_4 - 9 i_1 + 4 i_3 - 4 i_2 + 6 i_3 + i_3 - 3 = 0 \quad [2]$$

$$\text{Supermesh KCL equation:} \quad i_4 - i_3 = 2 \quad [3]$$

Simplifying and combining terms, we may rewrite these three equations as:

$$7 i_2 - 4 i_3 = -7.2 \quad [1]$$

$$-4 i_2 + 11 i_3 + 12 i_4 = -37.5 \quad [2]$$

$$- i_3 + i_4 = 2 \quad [3]$$

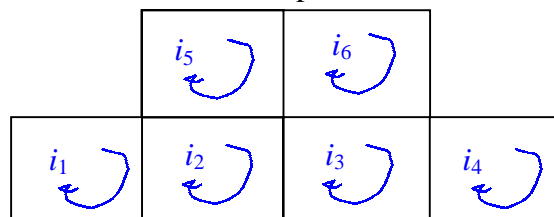
Solving, we find that  $i_2 = -2.839$  A,  $i_3 = -3.168$  A, and  $i_4 = -1.168$  A.

The power supplied by the 2.2-V source is then  $2.2 (i_1 - i_2) = -3.654$  W.



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

34. We begin by defining six mesh currents as depicted below:



- We form a supermesh with meshes 1 and 2 since they share a current source.
- We form a *second* supermesh with meshes 3 and 4 since they also share a current source.

1, 2 Supermesh:

$$(4700 + 1000 + 10,000) i_1 - 2200 i_5 + (2200 + 1000 + 4700) i_2 - 1000 i_3 = 0 \quad [1]$$

3, 4 Supermesh:

$$(4700 + 1000 + 2200) i_3 - 1000 i_2 - 2200 i_6 + (4700 + 10,000 + 1000) i_4 = 0 \quad [2]$$

$$\text{MESH 5:} \quad (2200 + 4700) i_5 - 2200 i_2 + 3.2 - 1.5 = 0 \quad [3]$$

$$\text{MESH 6:} \quad 1.5 + (4700 + 4700 + 2200) i_6 - 2200 i_3 = 0 \quad [4]$$

$$\text{1, 2 Supermesh KCL equation:} \quad i_1 - i_2 = 3 \times 10^{-3} \quad [5]$$

$$\text{3, 4 Supermesh KCL equation:} \quad i_4 - i_3 = 2 \times 10^{-3} \quad [6]$$

We can simplify these equations prior to solution in several ways. Choosing to retain six equations,

$$15,700 i_1 + 7900 i_2 - 1000 i_3 - 2200 i_5 = 0 \quad [1]$$

$$- 1000 i_2 + 7900 i_3 + 15,700 i_4 - 2200 i_6 = 0 \quad [2]$$

$$- 2200 i_2 + 6900 i_5 = -1.7 \quad [3]$$

$$- 2200 i_3 + 11,600 i_6 = -1.5 \quad [4]$$

$$i_1 - i_2 = 3 \times 10^{-3} \quad [5]$$

$$- i_3 + i_4 = 2 \times 10^{-3} \quad [6]$$

Solving, we find that  $i_4 = 540.8 \text{ mA}$ . Thus, the voltage across the 2-mA source is

$$(4700 + 10,000 + 1000) (540.8 \times 10^{-6}) = \boxed{8.491 \text{ V}}$$

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

35. We define a mesh current  $i_a$  in the left-hand mesh, a mesh current  $i_1$  in the top right mesh, and a mesh current  $i_2$  in the bottom right mesh.

The left-most mesh can be analysed separately to determine the controlling voltage  $v_a$ , as KCL assures us that no current flows through either the  $1\text{-}\Omega$  or  $6\text{-}\Omega$  resistor.

Thus,  $-1.8 + 3 i_a - 1.5 + 2 i_a = 0$ , which may be solved to find  $i_a = 0.66\text{ A}$ . Hence,  $v_a = 3 i_a = 1.98\text{ V}$ .

Forming one supermesh from the remaining two meshes, we may write:

$$-3 + 2.5 i_1 + 3 i_2 + 4 i_2 = 0$$

and the supermesh KCL equation:  $i_2 - i_1 = 0.05 v_a = 0.05(1.98) = 99 \times 10^{-3}$

Thus, we have two equations to solve:

$$\begin{aligned} 2.5 i_1 + 7 i_2 &= 3 \\ -i_1 + i_2 &= 99 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Solving, we find that  $i_1 = 242.8\text{ mA}$  and the voltage across the  $2.5\text{-}\Omega$  resistor (arbitrarily assuming the left terminal is the “+” reference) is  $2.5 i_1 = 607\text{ mV}$ .



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

36. UNDEFINED RESISTOR VALUE IN FIGURE. Set to 10 mΩ.

There are only three meshes in this circuit, as the bottom 22-mΩ resistor is not connected at its left terminal. Thus, we define three mesh currents,  $i_1$ ,  $i_2$ , and  $i_3$ , beginning with the left-most mesh.

We next create a supermesh from meshes 1 and 2 (note that mesh 3 is independent, and can be analysed separately).

Thus,  $-11.8 + 10 \times 10^{-3} i_1 + 22 \times 10^{-3} i_2 + 10 \times 10^{-3} i_2 + 17 \times 10^{-3} i_1 = 0$

and applying KCL to obtain an equation containing the current source,

$$i_1 - i_2 = 100$$

Combining terms and simplifying, we obtain

$$\begin{array}{rcl} 27 \times 10^{-3} i_1 + 32 \times 10^{-3} i_2 & = & 11.8 \\ i_1 - i_2 & = & 100 \end{array}$$

Solving, we find that  $i_1 = 254.2 \text{ A}$  and  $i_2 = 154.2 \text{ A}$ .

The final mesh current is easily found:  $i_3 = 13 \times 10^3 / (14 + 11.6 + 15) = 320.2 \text{ A}$ .

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

37. MESH 1:  $-7 + i_1 - i_2 = 0$  [1]  
MESH 2:  $i_2 - i_1 + 2i_2 + 3i_2 - 3i_3 = 0$  [2]  
MESH 3:  $3i_3 - 3i_2 + xi_3 + 2i_3 - 7 = 0$  [3]

Grouping terms, we find that

$$\begin{array}{rclcl} i_1 - i_2 & = & 7 & [1] \\ -i_1 + 6i_2 - 3i_3 & = & 0 & [2] \\ -3i_2 + (5 + x)i_3 & = & 7 & [3] \end{array}$$

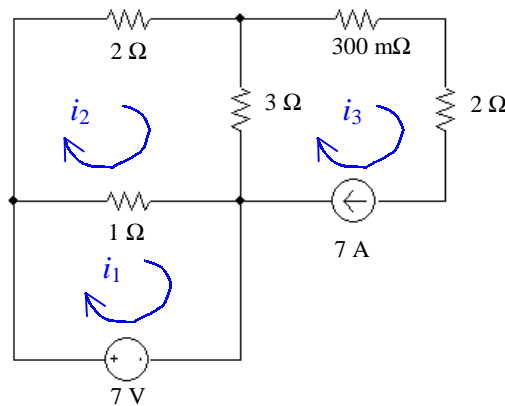
This, unfortunately, is four unknowns but only three equations. However, we have not yet made use of the fact that we are trying to obtain  $i_2 = 2.273$  A. Solving these “four” equations, we find that

$$x = (7 + 3 i_2 - 5 i_3) / i_3 = 4.498 \Omega.$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

38. We begin by redrawing the circuit as instructed, and define three mesh currents:



By inspection,  $i_3 = 7 \text{ A}$ .

$$\text{MESH 1: } -7 + i_1 - i_2 = 0 \quad \text{or} \quad i_1 - i_2 = 7 \quad [1]$$

$$\text{MESH 2: } (1 + 2 + 3) i_2 - i_1 - 3(7) = 0 \quad \text{or} \quad -i_1 + 6i_2 = 21 \quad [2]$$

There is no need for supermesh techniques for this situation, as the only current source lies on the outside perimeter of a mesh- it is not shared between meshes.

Solving, we find that  $i_1 = 12.6 \text{ A}$ ,  $i_2 = 5.6 \text{ A}$  and  $i_3 = 7 \text{ A}$ .

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

39. (a) We are asked for a voltage, and have one current source and one voltage source. Nodal analysis is probably best then- the nodes can be named so that the desired voltage is a nodal voltage, or, at worst, we have one supernode equation to solve.

Name the top left node “1” and the top right node “x”; designate the bottom node as the reference terminal. Next, form a supernode with nodes “1” and “x.”

$$\text{At the supernode:} \quad 11 = v_1/2 + v_x/9 \quad [1]$$

$$\text{and the KVL Eqn:} \quad v_1 - v_x = 22 \quad [2]$$

$$\text{Rearranging,} \quad 11(18) = 9 v_1 + 2 v_x \quad [1]$$

$$22 = v_1 - v_x \quad [2]$$

$$\text{Solving,} \quad v_x = 0$$

(b) We are asked for a voltage, and so may suspect that nodal analysis is preferable; with two current sources and only one voltage source (easily dealt with using the supernode technique), nodal analysis does seem to have an edge over mesh analysis here.

Name the top left node “x,” the top right node “y” and designate the bottom node as the reference node. Forming a supernode from nodes “x” and “y,”

$$\text{At the supernode:} \quad 6 + 9 = v_x/10 + v_y/20 \quad [1]$$

$$\text{and the KVL Eqn:} \quad v_y - v_x = 12 \quad [2]$$

$$\text{Rearranging,} \quad 15(20) = 2 v_x + v_y \quad [1]$$

$$\text{and} \quad 12 = -v_x + v_y \quad [2]$$

$$\text{Solving, we find that} \quad v_x = 96 \text{ V.}$$

(c) We are asked for a voltage, but would have to subtract two nodal voltages (not much harder than invoking Ohm’s law). On the other hand, the dependent current source depends on the desired unknown, which would lead to the need for another equation if invoking mesh analysis. Trying nodal analysis,

$$0.1 v_x = (v_1 - 50)/2 + v_x/4 \quad [1]$$

referring to the circuit we see that  $v_x = v_1 - 100$ . Rearranging so that we may eliminate  $v_1$  in Eq. [1], we obtain  $v_1 = v_x + 100$ . Thus, Eq. [1] becomes

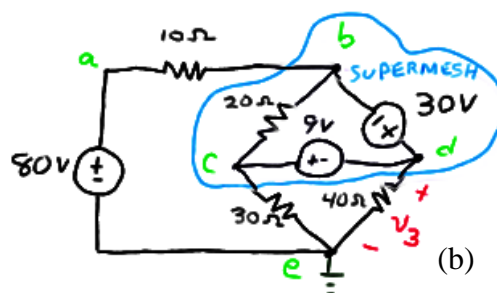
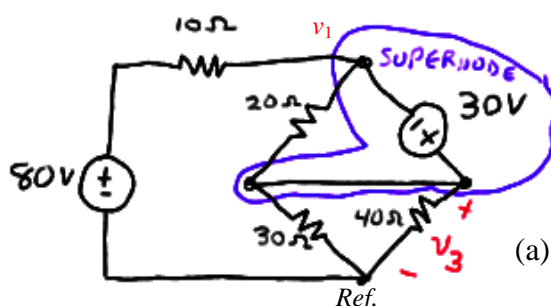
$$0.1 v_x = (v_x + 100 - 50)/2 + v_x/4$$

$$\text{and a little algebra yields} \quad v_x = -38.46 \text{ V.}$$



# CHAPTER FOUR SOLUTIONS

40.



(a) We begin by noting that it is a voltage that is required; no current values are requested. This is a three-mesh circuit, or a four-node circuit, depending on your perspective. Either approach requires three equations.... Except that applying the supernode technique reduces the number of needed equations by one.

At the 1, 3 supernode:

$$0 = (v_1 - 80)/10 + (v_1 - v_3)/20 + (v_3 - v_1)/20 + v_3/40 + v_3/30$$

and

$$v_3 - v_1 = 30$$

We simplify these two equations and collect terms, yielding

$$0.1 v_1 + 0.05833 v_3 = 8$$

$$-v_1 + v_3 = 30$$

Solving, we find that  $v_3 = 69.48 \text{ V}$

Both ends of the resistor are connected to the supernode, so we could actually just ignore it...

(b) Mesh analysis would be straightforward, requiring 3 equations and a (trivial) application of Ohm's law to obtain the final answer. Nodal analysis, on the other hand, would require only two equations, and the desired voltage will be a nodal voltage.

At the b, c, d supernode:  $0 = (v_b - 80)/10 + v_d/40 + v_c/30$

and:  $v_d - v_b = 30$

$$v_c - v_d = 9$$

Simplify and collect terms:  $0.1 v_b + 0.03333 v_c + 0.025 v_d = 80$

$$-v_b + v_d = 30$$

$$v_c - v_d = 9$$

Solving,  $v_d (= v_3) = 67.58 \text{ V}$

(c) We are now faced with a dependent current source whose value depends on a mesh current. Mesh analysis in this situation requires 1 supermesh, 1 KCL equation and Ohm's law. Nodal analysis requires 1 supernode, 1 KVL equation, 1 other nodal equation, and one equation to express  $i_1$  in terms of nodal voltages. Thus, mesh analysis has an edge here. Define the left mesh as "1," the top mesh as "2", and the bottom mesh as "3."

$$\text{Mesh 1: } -80 + 10 i_1 + 20 i_1 - 20 i_2 + 30 i_1 - 30 i_3 = 0$$

$$\text{2, 3 supermesh: } 20 i_2 - 20 i_1 - 30 + 40 i_3 + 30 i_3 - 30 i_1 = 0$$

$$\text{and: } i_2 - i_3 = 5 i_1$$

$$\text{Rewriting, } 60 i_1 - 20 i_2 - 30 i_3 = 80$$

$$-50 i_1 + 20 i_2 + 70 i_3 = 30$$

$$5 i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

Solving,  $i_3 = 4.727 \text{ A}$

so

$$v_3 = 40 i_3 = 189 \text{ V.}$$

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

41. This circuit consists of 3 meshes, and no dependent sources. Therefore 3 simultaneous equations and 1 subtraction operation would be required to solve for the two desired currents. On the other hand, if we use nodal analysis, forming a supernode about the 30-V source would lead to  $5 - 1 - 1 = 3$  simultaneous equations as well, plus several subtraction and division operations to find the currents. Thus, mesh analysis has a slight edge here.

Define three clockwise mesh currents:  $i_a$  in the left-most mesh,  $i_b$  in the top right mesh, and  $i_c$  in the bottom right mesh. Then our mesh equations will be:

$$\text{Mesh } a: \quad -80 + (10 + 20 + 30) i_a - 20 i_b - 30 i_c = 0 \quad [1]$$

$$\text{Mesh } b: \quad -30 + (12 + 20) i_b - 12 i_c - 20 i_a = 0 \quad [2]$$

$$\text{Mesh } c: \quad (12 + 40 + 30) i_c - 12 i_b - 30 i_a = 0 \quad [3]$$

Simplifying and collecting terms,

$$60 i_a - 20 i_b - 30 i_c = 80 \quad [1]$$

$$-20 i_a + 32 i_b - 12 i_c = 30 \quad [2]$$

$$-30 i_a - 12 i_b + 82 i_c = 0 \quad [3]$$

Solving, we find that  $i_a = 3.549$  A,  $i_b = 3.854$  A, and  $i_c = 1.863$  A. Thus,

$$i_1 = i_a = \boxed{3.549 \text{ A}} \quad \text{and} \quad i_2 = i_a - i_c = \boxed{1.686 \text{ A.}}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

42. Approaching this problem using nodal analysis would require 3 separate nodal equations, plus one equation to deal with the dependent source, plus subtraction and division steps to actually find the current  $i_{10}$ . Mesh analysis, on the other hand, will require 2 mesh/supermesh equations, 1 KCL equation, and one subtraction step to find  $i_{10}$ . Thus, mesh analysis has a clear edge. Define three clockwise mesh currents:  $i_1$  in the bottom left mesh,  $i_2$  in the top mesh, and  $i_3$  in the bottom right mesh.

$$\text{MESH 1:} \quad i_1 = 5 \text{ mA by inspection} \quad [1]$$

$$\begin{aligned} \text{SUPERMESH:} \quad i_1 - i_2 &= 0.4 i_{10} \\ i_1 - i_2 &= 0.4(i_3 - i_2) \\ i_1 - 0.6 i_2 - 0.4 i_3 &= 0 \end{aligned} \quad [2]$$

$$\text{MESH 3:} \quad -5000 i_1 - 10000 i_2 + 35000 i_3 = 0 \quad [3]$$

$$\begin{aligned} \text{Simplify:} \quad 0.6 i_2 + 0.4 i_3 &= 5 \times 10^{-3} \quad [2] \\ -10000 i_2 + 35000 i_3 &= 25 \quad [3] \end{aligned}$$

Solving, we find  $i_2 = 6.6 \text{ mA}$  and  $i_3 = 2.6 \text{ mA}$ . Since  $i_{10} = i_3 - i_2$ , we find that

$$i_{10} = -4 \text{ mA.}$$

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

43. For this circuit problem, nodal analysis will require 3 simultaneous nodal equations, then subtraction/ division steps to obtain the desired currents. Mesh analysis requires 1 mesh equation, 1 supermesh equation, 2 simple KCL equations and one subtraction step to determine the currents. If either technique has an edge in this situation, it's probably mesh analysis. Thus, define four clockwise mesh equations:  $i_a$  in the bottom left mesh,  $i_b$  in the top left mesh,  $i_c$  in the top right mesh, and  $i_d$  in the bottom right mesh.

At the  $a, b, c$  supermesh:  $-100 + 6 i_a + 20 i_b + 4 i_c + 10 i_c - 10 i_d = 0$  [1]

Mesh d:  $100 + 10 i_d - 10 i_c + 24 i_d = 0$  [2]

KCL:  $-i_a + i_b = 2$  [3]

and  $-i_b + i_c = 3 i_3 = 3 i_a$  [4]

Collecting terms & simplifying,

$$6 i_a + 20 i_b + 14 i_c - 10 i_d = 100 \quad [1]$$

$$-10 i_c + 34 i_d = -100 \quad [2]$$

$$-i_a + i_b = 2 \quad [3]$$

$$-3 i_a - i_b + i_c = 0 \quad [4]$$

Solving,

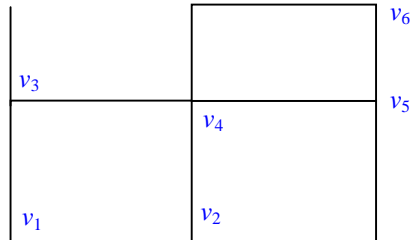
$i_a = 0.1206$  A,  $i_b = 2.121$  A,  $i_c = 2.482$  A, and  $i_d = -2.211$  A. Thus,

$$i_3 = i_a = \boxed{120.6 \text{ mA}} \quad \text{and} \quad i_{10} = i_c - i_d = \boxed{4.693 \text{ A.}}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

44. With 7 nodes in this circuit, nodal analysis will require the solution of three simultaneous nodal equations (assuming we make use of the supernode technique) and one KVL equation. Mesh analysis will require the solution of three simultaneous mesh equations (one mesh current can be found by inspection), plus several subtraction and multiplication operations to finally determine the voltage at the central node. Either will probably require a comparable amount of algebraic manoeuvres, so we go with nodal analysis, as the desired unknown is a direct result of solving the simultaneous equations. Define the nodes as:



NODE 1:  $-2 \times 10^{-3} = (v_1 - 1.3) / 1.8 \times 10^3 \rightarrow v_1 = -2.84 \text{ V.}$

2, 4 Supernode:

$$2.3 \times 10^{-3} = (v_2 - v_5) / 1 \times 10^3 + (v_4 - 1.3) / 7.3 \times 10^3 + (v_4 - v_5) / 1.3 \times 10^3 + v_4 / 1.5 \times 10^3$$

KVL equation:  $-v_2 + v_4 = 5.2$

Node 5:  $0 = (v_5 - v_2) / 1 \times 10^3 + (v_5 - v_4) / 1.3 \times 10^3 + (v_5 - 2.6) / 6.3 \times 10^3$

Simplifying and collecting terms,

$$14.235 v_2 + 22.39 v_4 - 25.185 v_5 = 35.275 \quad [1]$$

$$-v_2 + v_4 = 5.2 \quad [2]$$

$$-8.19 v_2 - 6.3 v_4 + 15.79 v_5 = 3.38 \quad [3]$$

Solving, we find the voltage at the central node is  $v_4 = 3.460 \text{ V.}$

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

45. Mesh analysis yields current values directly, so use that approach. We therefore define four clockwise mesh currents, starting with  $i_1$  in the left-most mesh, then  $i_2$ ,  $i_3$  and  $i_4$  moving towards the right.

Mesh 1:  $-0.8i_x + (2 + 5) i_1 - 5 i_2 = 0$  [1]

Mesh 2:  $i_2 = 1$  A by inspection [2]

Mesh 3:  $(3 + 4) i_3 - 3(1) - 4(i_4) = 0$  [3]

Mesh 4:  $(4 + 3) i_4 - 4 i_3 - 5 = 0$  [4]

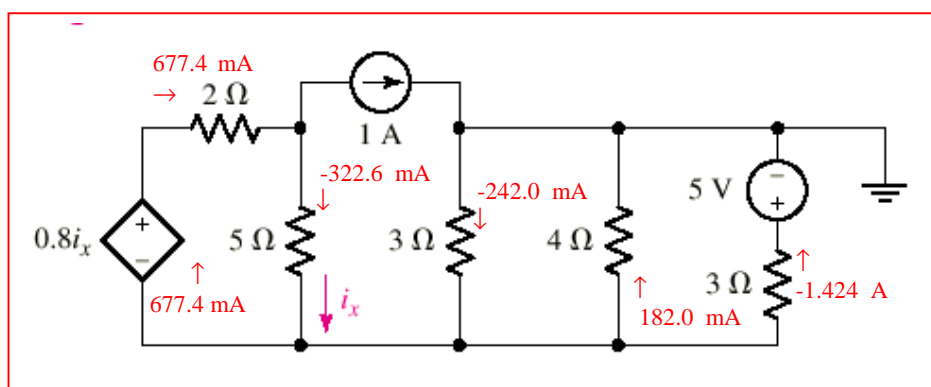
Simplify and collect terms, noting that  $i_x = i_1 - i_2 = i_1 - 1$

$-0.8(i_1 - 1) + 7 i_1 - 5(1) = 0$  yields  $i_1 = 677.4$  mA

Thus, [3] and [4] become:  $7 i_3 - 4 i_4 = 3$  [3]

$-4 i_3 + 7 i_4 = 5$  [4]

Solving, we find that  $i_3 = 1.242$  A and  $i_4 = 1.424$  A. A map of individual branch currents can now be drawn:





## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

46. If we choose to perform mesh analysis, we require 2 simultaneous equations (there are four meshes, but one mesh current is known, and we can employ the supermesh technique around the left two meshes). In order to find the voltage across the 2-mA source we will need to write a KVL equation, however. Using nodal analysis is less desirable in this case, as there will be a large number of nodal equations needed. Thus, we define four clockwise mesh currents  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  and  $i_4$  starting with the left-most mesh and moving towards the right of the circuit.

$$\begin{array}{ll} \text{At the 1,2 supermesh:} & 2000 i_1 + 6000 i_2 - 3 + 5000 i_2 = 0 \quad [1] \\ \text{and} & i_1 - i_2 = 2 \times 10^{-3} \quad [2] \end{array}$$

by inspection,  $i_4 = -1$  mA. However, this as well as any equation for mesh four are unnecessary: we already have two equations in two unknowns and  $i_1$  and  $i_2$  are sufficient to enable us to find the voltage across the current source.

$$\begin{array}{ll} \text{Simplifying, we obtain} & 2000 i_1 + 11000 i_2 = 3 \quad [1] \\ & 1000 i_1 - 1000 i_2 = 2 \quad [2] \end{array}$$

Solving,  $i_1 = 1.923$  mA and  $i_2 = -76.92$   $\mu$ A.

Thus, the voltage across the 2-mA source (“+” reference at the top of the source) is

$$v = -2000 i_1 - 6000 (i_1 - i_2) = \boxed{-15.85 \text{ V.}}$$

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

47. Nodal analysis will require 2 nodal equations (one being a “supernode” equation), 1 KVL equation, and subtraction/division operations to obtain the desired current. Mesh analysis simply requires 2 “supermesh” equations and 2 KCL equations, with the desired current being a mesh current. Thus, we define four clockwise mesh currents  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$ ,  $i_d$  starting with the left-most mesh and proceeding to the right of the circuit.

At the  $a, b$  supermesh:  $-5 + 2 i_a + 2 i_b + 3 i_b - 3 i_c = 0$  [1]

At the  $c, d$  supermesh:  $3 i_c - 3 i_b + 1 + 4 i_d = 0$  [2]

and  $i_a - i_b = 3$  [3]

$i_c - i_d = 2$  [4]

Simplifying and collecting terms, we obtain

$$2 i_a + 5 i_b - 3 i_c = 5 \quad [1]$$

$$-3 i_b + 3 i_c + 4 i_d = -1 \quad [2]$$

$$i_a - i_b = 3 \quad [3]$$

$$i_c - i_d = 2 \quad [4]$$

Solving, we find  $i_a = 3.35$  A,  $i_b = 350$  mA,  $i_c = 1.15$  A, and  $i_d = -850$  mA. As  $i_1 = i_b$ ,

$i_1 = 350$  mA.



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

48. Define a voltage  $v_x$  at the top node of the current source  $I_2$ , and a clockwise mesh current  $i_b$  in the right-most mesh.

We want 6 W dissipated in the  $6\text{-}\Omega$  resistor, which leads to the requirement  $i_b = 1\text{ A}$ . Applying nodal analysis to the circuit,

$$I_1 + I_2 = (v_x - v_1)/6 = 1$$

so our requirement is  $I_1 + I_2 = 1$ . There is no constraint on the value of  $v_1$  other than we are told to select a nonzero value.

Thus, we choose  $I_1 = I_2 = 500\text{ mA}$  and  $v_1 = 3.1415\text{ V}$ .

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

49. Inserting the new 2-V source with “+” reference at the bottom, and the new 7-mA source with the arrow pointing down, we define four clockwise mesh currents  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$  starting with the left-most mesh and proceeding towards the right of the circuit.

Mesh 1:  $(2000 + 1000 + 5000) i_1 - 6000 i_2 - 2 = 0$  [1]

2, 3 Supermesh:

$$2 + (5000 + 5000 + 1000 + 6000) i_2 - 6000 i_1 + (3000 + 4000 + 5000) i_3 - 5000 i_4 = 0 \quad [2]$$

and  $i_2 - i_3 = 7 \times 10^{-3}$  [3]

Mesh 4:  $i_4 = -1 \text{ mA}$  by inspection [4]

Simplifying and combining terms,

$$8000 i_1 - 6000 i_2 = 2 \quad [1]$$

$$1000 i_2 - 1000 i_3 = 7 \quad [4]$$

$$-6000 i_1 + 17000 i_2 + 12000 i_3 = -7 \quad [2]$$

Solving, we find that

$$i_1 = 2.653 \text{ A}, i_2 = 3.204 \text{ A}, i_3 = -3.796 \text{ A}, i_4 = -1 \text{ mA}$$



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

50. Define node 1 as the top left node, and node 2 as the node joining the three  $2\text{-}\Omega$  resistors. Place the “+” reference terminal of the  $2\text{-V}$  source at the right. The right-most  $2\text{-}\Omega$  resistor has therefore been shorted out. Applying nodal analysis then,

$$\text{Node 1:} \quad -5 i_1 = (v_1 - v_2)/2 \quad [1]$$

$$\text{Node 2:} \quad 0 = (v_2 - v_1)/2 + v_2/2 + (v_2 - 2)/2 \quad [2]$$

$$\text{and,} \quad i_1 = (v_2 - 2)/2 \quad [3]$$

Simplifying and collecting terms,

$$v_1 + v_2 = 10 \quad [1]$$

$$-v_1 + 3 v_2 = 2 \quad [2]$$

Solving, we find that  $v_1 = 3.143 \text{ V}$  and  $v_2 = 1.714 \text{ V}$ .

Defining clockwise mesh currents  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$ ,  $i_d$  starting with the left-most mesh and proceeding right, we may easily determine that

$$i_a = -5 i_1 = 714.3 \text{ mA}$$

$$i_b = -142.9 \text{ mA}$$

$$i_c = i_1 - 2 = -2.143 \text{ A}$$

$$i_d = 3 + i_c = 857.1 \text{ mA}$$

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

### 51. Hand analysis:

Define three clockwise mesh currents:  $i_1$  in the bottom left mesh,  $i_2$  in the top mesh, and  $i_3$  in the bottom right mesh.

$$\text{MESH 1: } i_1 = 5 \text{ mA by inspection} \quad [1]$$

$$\begin{aligned} \text{SUPERMESH: } i_1 - i_2 &= 0.4 i_{10} \\ i_1 - i_2 &= 0.4(i_3 - i_2) \\ i_1 - 0.6 i_2 - 0.4 i_3 &= 0 \end{aligned} \quad [2]$$

$$\text{MESH 3: } -5000 i_1 - 10000 i_2 + 35000 i_3 = 0 \quad [3]$$

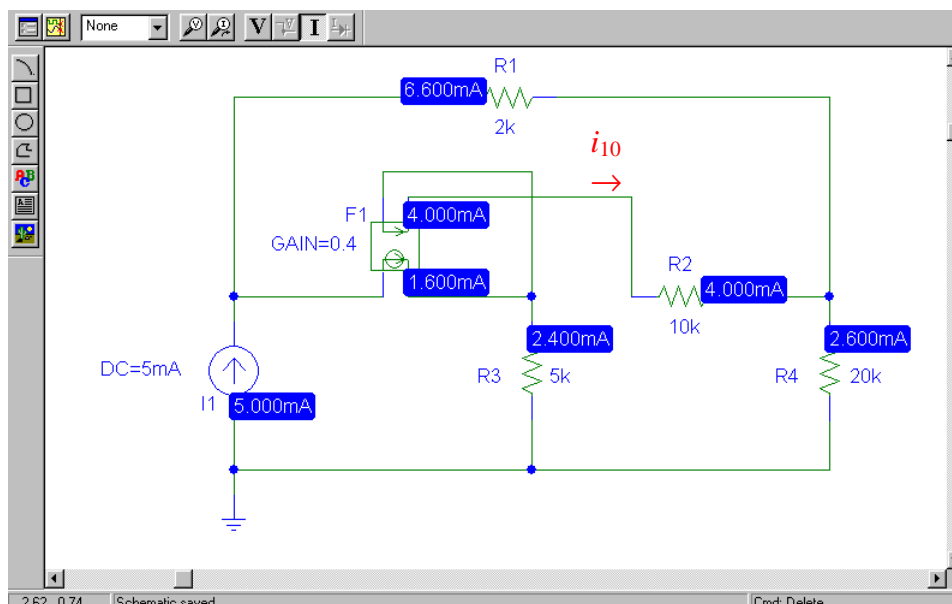
$$\text{Simplify: } 0.6 i_2 + 0.4 i_3 = 5 \times 10^{-3} \quad [2]$$

$$-10000 i_2 + 35000 i_3 = 25 \quad [3]$$

Solving, we find  $i_2 = 6.6 \text{ mA}$  and  $i_3 = 2.6 \text{ mA}$ . Since  $i_{10} = i_3 - i_2$ , we find that

$$i_{10} = -4 \text{ mA.}$$

### PSpice simulation results:

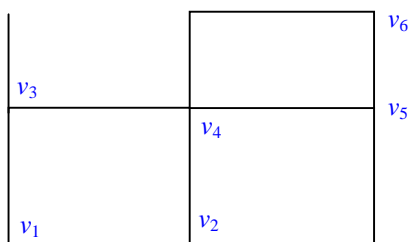


**Summary:** The current entering the right-hand node of the 10-k $\Omega$  resistor R2 is equal to 4.000 mA. Since this current is  $-i_{10}$ ,  $i_{10} = -4.000 \text{ mA}$  as found by hand.



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

52. **Hand analysis:**  
Define the nodes as:



NODE 1:  $-2 \times 10^{-3} = (v_1 - 1.3) / 1.8 \times 10^3 \rightarrow v_1 = -2.84 \text{ V}.$

2, 4 Supernode:

$$2.3 \times 10^{-3} = (v_2 - v_5) / 1 \times 10^3 + (v_4 - 1.3) / 7.3 \times 10^3 + (v_4 - v_5) / 1.3 \times 10^3 + v_4 / 1.5 \times 10^3$$

KVL equation:  $-v_2 + v_4 = 5.2$

Node 5:  $0 = (v_5 - v_2) / 1 \times 10^3 + (v_5 - v_4) / 1.3 \times 10^3 + (v_5 - 2.6) / 6.3 \times 10^3$

Simplifying and collecting terms,

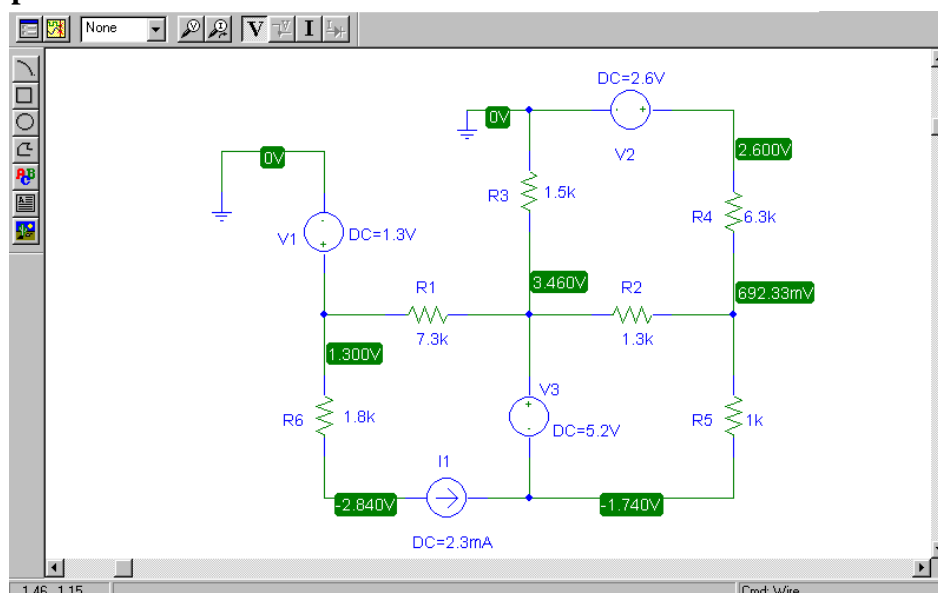
$$14.235 v_2 + 22.39 v_4 - 25.185 v_5 = 35.275 \quad [1]$$

$$-v_2 + v_4 = 5.2 \quad [2]$$

$$-8.19 v_2 - 6.3 v_4 + 15.79 v_5 = 3.38 \quad [3]$$

Solving, we find the voltage at the central node is  $v_4 = 3.460 \text{ V}.$

**PSpice simulation results:**



**Summary:** The voltage at the center node is found to be 3.460 V, which is in agreement with our hand calculation.

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

**53. Hand analysis:**

At the 1,2 supermesh:  $2000 i_1 + 6000 i_2 - 3 + 5000 i_2 = 0$  [1]

and  $i_1 - i_2 = 2 \times 10^{-3}$  [2]

by inspection,  $i_4 = -1$  mA. However, this as well as any equation for mesh four are unnecessary: we already have two equations in two unknowns and  $i_1$  and  $i_2$  are sufficient to enable us to find the voltage across the current source.

Simplifying, we obtain  $2000 i_1 + 11000 i_2 = 3$  [1]

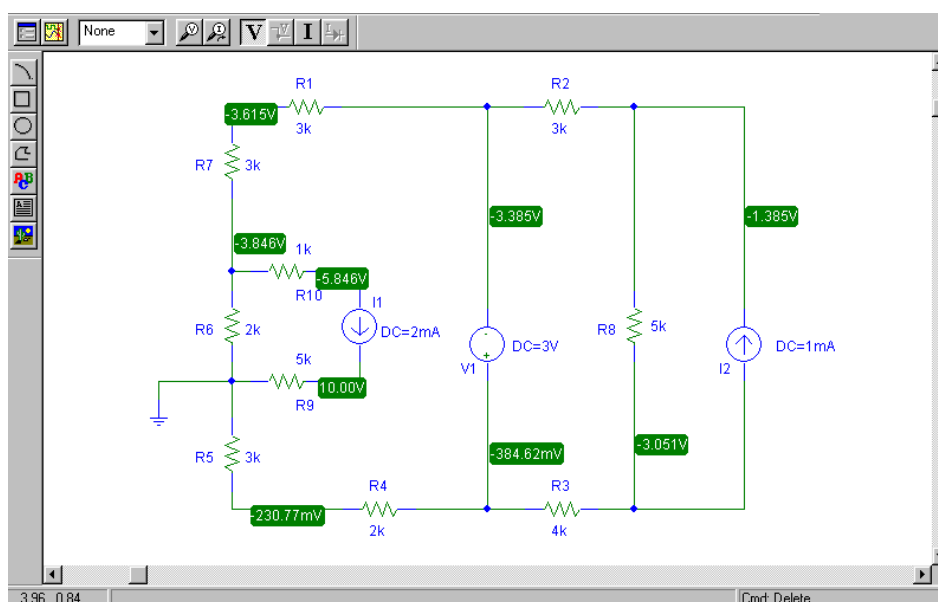
$1000 i_1 - 1000 i_2 = 2$  [2]

Solving,  $i_1 = 1.923$  mA and  $i_2 = -76.92$   $\mu$ A.

Thus, the voltage across the 2-mA source (“+” reference at the top of the source) is

$$v = -2000 i_1 - 6000 (i_1 - i_2) = \boxed{-15.85 \text{ V.}}$$

**PSpice simulation results:**



**Summary:** Again arbitrarily selecting the “+” reference as the top node of the 2-mA current source, we find the voltage across it is  $-5.846 - 10 = -15.846$  V, in agreement with our hand calculation.



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

54. **Hand analysis:**

Define a voltage  $v_x$  at the top node of the current source  $I_2$ , and a clockwise mesh current  $i_b$  in the right-most mesh.

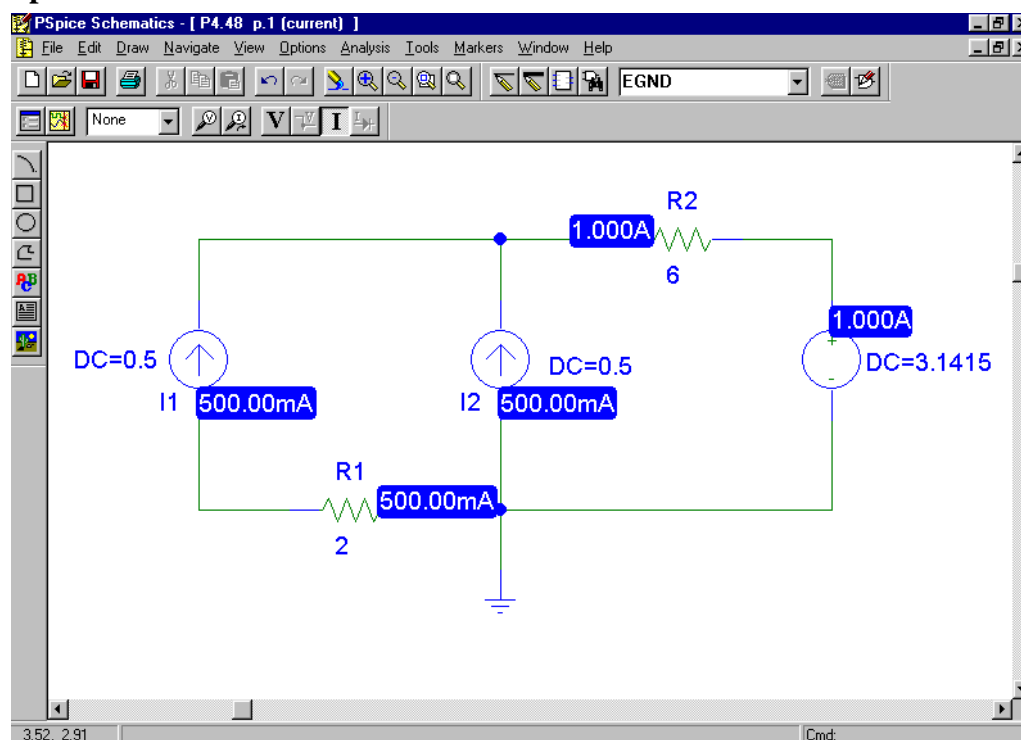
We want 6 W dissipated in the 6- $\Omega$  resistor, which leads to the requirement  $i_b = 1$  A. Applying nodal analysis to the circuit,

$$I_1 + I_2 = (v_x - v_1)/6 = 1$$

so our requirement is  $I_1 + I_2 = 1$ . There is no constraint on the value of  $v_1$  other than we are told to select a nonzero value.

Thus, we choose  $I_1 = I_2 = 500$  mA and  $v_1 = 3.1415$  V.

**PSpice simulation results:**



**Summary:** We see from the labeled schematic above that our choice for  $I_1$ ,  $I_2$  and  $V_1$  lead to 1 A through the 6- $\Omega$  resistor, or 6 W dissipated in that resistor, as desired.

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

### 55. Hand analysis:

Define node 1 as the top left node, and node 2 as the node joining the three  $2\text{-}\Omega$  resistors. Place the “+” reference terminal of the  $2\text{-V}$  source at the right. The right-most  $2\text{-}\Omega$  resistor has therefore been shorted out. Applying nodal analysis then,

$$\text{Node 1:} \quad -5 i_1 = (v_1 - v_2)/2 \quad [1]$$

$$\text{Node 2:} \quad 0 = (v_2 - v_1)/2 + v_2/2 + (v_2 - 2)/2 \quad [2]$$

$$\text{and,} \quad i_1 = (v_2 - 2)/2 \quad [3]$$

Simplifying and collecting terms,

$$v_1 + v_2 = 10 \quad [1]$$

$$-v_1 + 3 v_2 = 2 \quad [2]$$

Solving, we find that  $v_1 = 3.143 \text{ V}$  and  $v_2 = 1.714 \text{ V}$ .

Defining clockwise mesh currents  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$ ,  $i_d$  starting with the left-most mesh and proceeding right, we may easily determine that

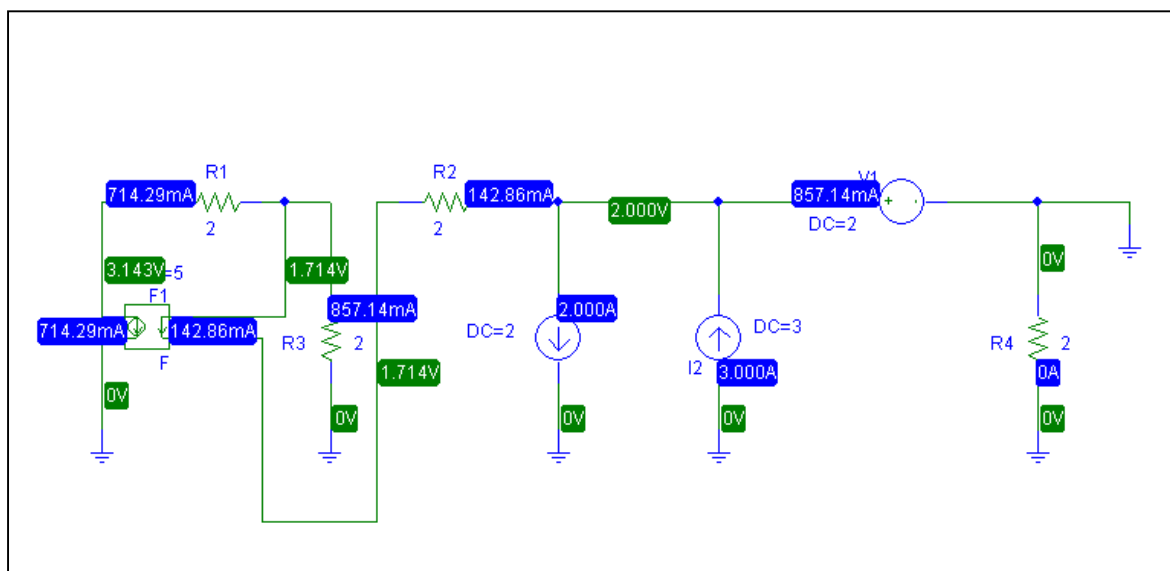
$$i_a = -5 i_1 = 714.3 \text{ mA}$$

$$i_b = -142.9 \text{ mA}$$

$$i_c = i_1 - 2 = -2.143 \text{ A}$$

$$i_d = 3 + i_c = 857.1 \text{ mA}$$

### PSpice simulation results:

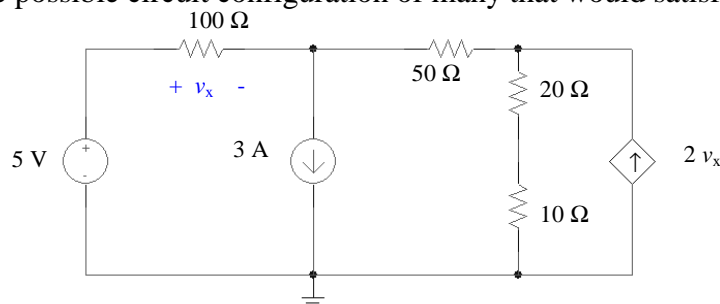


**Summary:** The simulation results agree with the hand calculations.



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

56. (a) One possible circuit configuration of many that would satisfy the requirements:



At node 1:  $-3 = (v_1 - 5)/100 + (v_1 - v_2)/50$  [1]

At node 2:  $2v_x = (v_2 - v_1)/50 + v_2/30$  [2]

and,  $v_x = 5 - v_1$  [3]

Simplifying and collecting terms,

$150v_1 - 100v_2 = -14750$  [1]

$2970v_1 + 80v_2 = 15000$  [2]

Solving, we find that  $v_1 = 1.036\text{ V}$  and  $v_2 = 149.1\text{ V}$ .

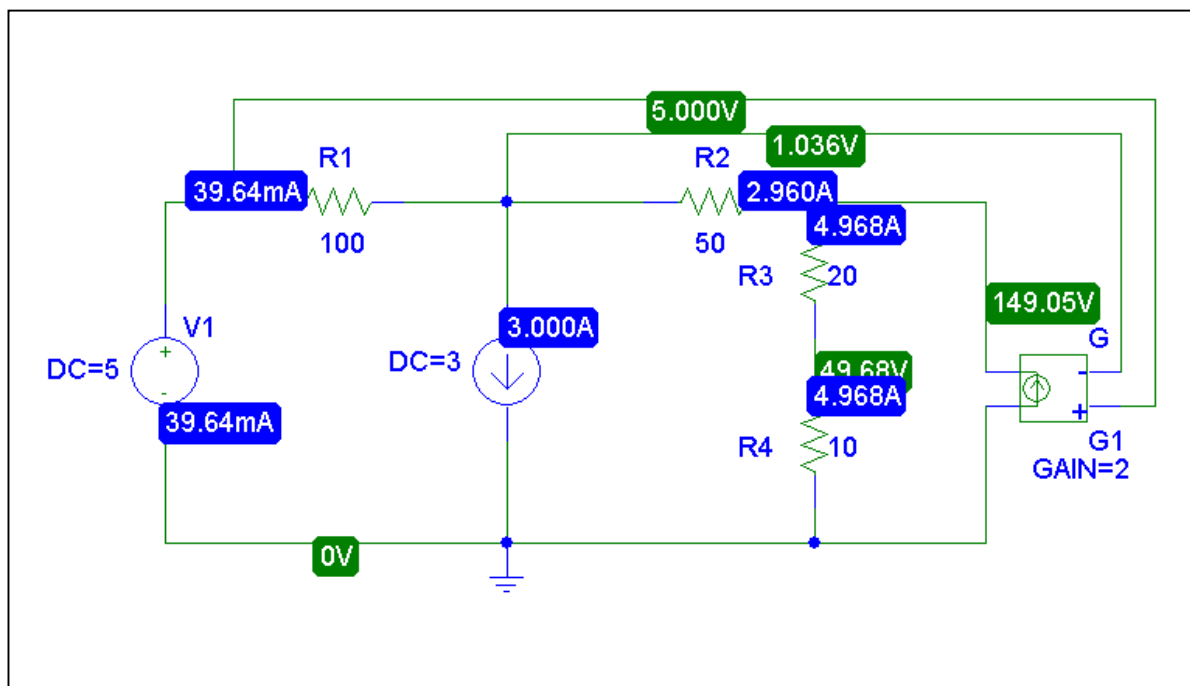
The current through the  $100\text{-}\Omega$  resistor is simply  $(5 - v_1)/100 = 39.64\text{ mA}$

The current through the  $50\text{-}\Omega$  resistor is  $(v_1 - v_2)/50 = -2.961\text{ A}$ ,

and the current through the  $20\text{-}\Omega$  and  $10\text{-}\Omega$  series combination is  $v_2/30 = 4.97\text{ A}$ .

Finally, the dependent source generates a current of  $2v_x = 7.928\text{ A}$ .

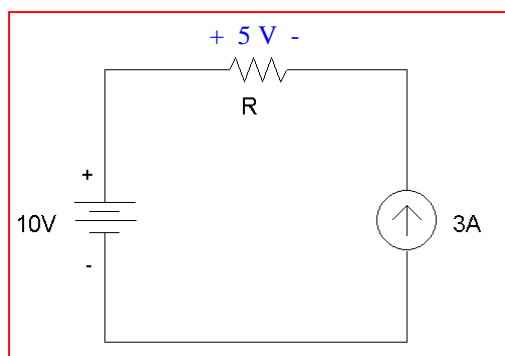
- (b) PSpice simulation results



**Summary:** The simulated results agree with the hand calculations.

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

57. One possible solution of many:



Choose  $R$  so that  $3R = 5$ ; then the voltage across the current source will be 5 V, and so will the voltage across the resistor  $R$ .

$R = 5/3 \Omega$ . To construct this from  $1\text{-}\Omega$  resistors, note that

$$5/3 \Omega = 1 \Omega + 2/3 \Omega = 1 \Omega + 1 \Omega \parallel 1\Omega \parallel 1\Omega + 1\Omega \parallel 1\Omega \parallel 1\Omega$$

\* Solution to Problem 4.57

.OP

V1 1 0 DC 10

I1 0 4 DC 3

R1 1 2 1

R2 2 3 1

R3 2 3 1

R4 2 3 1

R5 3 4 1

R6 3 4 1

R7 3 4 1

.END

```

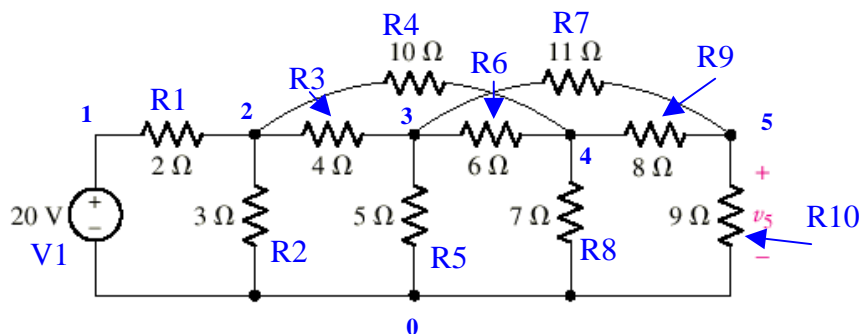
****  SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION    TEMPERATURE =  27.000 DEG C
*****
NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE  NODE  VOLTAGE
(  1) 10.0000 (  2)  7.0000 (  3)  6.0000 (  4)  5.0000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME      CURRENT
V1        -3.000E+00
    
```



## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

58. We first name each node, resistor and voltage source:



We next write an appropriate input deck for SPICE:

```
* Solution to Problem 4.58
```

```
.OP
```

```
V1 1 0 DC 20
```

```
R1 1 2 2
```

```
R2 2 0 3
```

```
R3 2 3 4
```

```
R4 2 4 10
```

```
R5 3 0 5
```

```
R6 3 4 6
```

```
R7 3 5 11
```

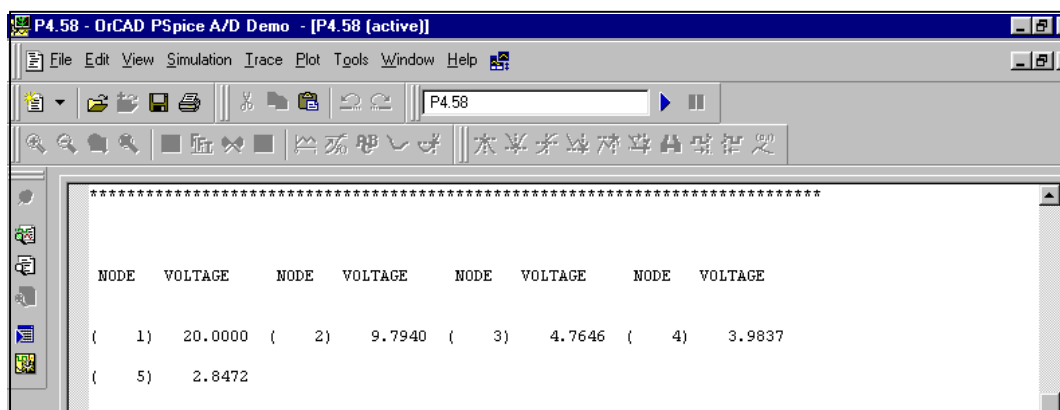
```
R8 4 0 7
```

```
R9 4 5 8
```

```
R10 5 0 9
```

```
.END
```

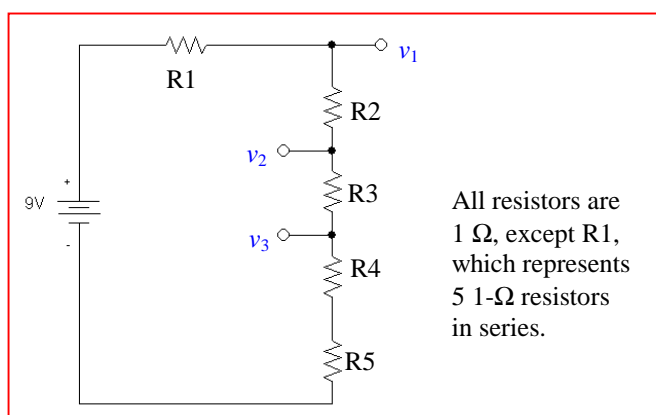
And obtain the following output:



We see from this simulation result that the voltage  $v_5 = 2.847$  V.

## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

59. One possible solution of many:



Verify:

$$v_1 = 9(4/9) = 4 \text{ V}$$

$$v_2 = 9(3/9) = 3 \text{ V}$$

$$v_3 = 9(2/9) = 2 \text{ V}$$

SPICE INPUT DECK:

\* Solution to Problem 4.59

.OP

V1 1 0 DC 9

R1 1 2 5

R2 2 3 1

R3 3 4 1

R4 4 5 1

R5 5 0 1

.END

\*\*\* 07/29/01 21:36:26 \*\*\*\*\* Evaluation PSpice (Nov 1999) \*\*\*\*\*

\* Solution to Problem 4.59

\*\*\*\* SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION TEMPERATURE = 27.000 DEG C

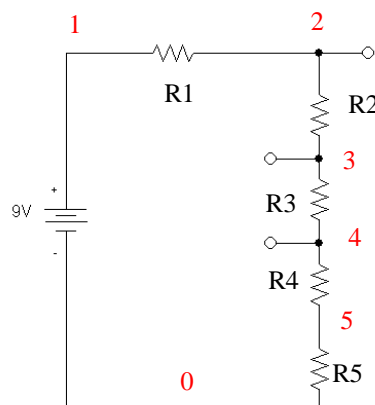
\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

| NODE  | VOLTAGE | NODE  | VOLTAGE | NODE  | VOLTAGE | NODE  | VOLTAGE |
|-------|---------|-------|---------|-------|---------|-------|---------|
| ( 1 ) | 9.0000  | ( 2 ) | 4.0000  | ( 3 ) | 3.0000  | ( 4 ) | 2.0000  |
| ( 5 ) | 1.0000  |       |         |       |         |       |         |

( 1 ) 9.0000 ( 2 ) 4.0000 ( 3 ) 3.0000 ( 4 ) 2.0000

( 5 ) 1.0000





## CHAPTER FOUR SOLUTIONS

60. (a) If only two bulbs are not lit (and thinking of each bulb as a resistor), the bulbs must be in parallel otherwise, the burned out bulbs, acting as short circuits, would prevent current from flowing to the “good” bulbs.

(b) In a parallel connected circuit, each bulb “sees” 115 VAC. Therefore, the individual bulb current is  $1 \text{ W} / 115 \text{ V} = 8.696 \text{ mA}$ . The resistance of each “good” bulb is  $V/I = 13.22 \text{ k}\Omega$ . A simplified, electrically-equivalent model for this circuit would be a 115 VAC source connected in parallel to a resistor  $R_{eq}$  such that

$$1/R_{eq} = 1/13.22 \times 10^3 + 1/13.22 \times 10^3 + \dots + 1/13.22 \times 10^3 \quad (400 - 2 = 398 \text{ terms})$$

or  $R_{eq} = 33.22 \text{ }\Omega$ . We expect the source to provide 398 W.

\* Solution to Problem 4.60

.OP

V1 1 0 AC 115 60  
R1 1 0 33.22

.AC LIN 1 60 60  
.PRINT AC VM(1)IM(V1)

.END

\*\*\*\* 07/29/01 21:09:32 \*\*\*\*\* Evaluation PSpice (Nov 1999) \*\*\*\*\*

\* Solution to Problem 4.60

\*\*\*\* SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION TEMPERATURE = 27.000 DEG C

\*\*\*\*\*

NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE  
( 1) 0.0000

VOLTAGE SOURCE CURRENTS  
NAME CURRENT

V1 0.000E+00

TOTAL POWER DISSIPATION 0.00E+00 WATTS

This calculated power is not the value sought. It is an artifact of the use of an ac source, which requires that we perform an ac analysis. The supplied power is then separately computed as  $(1.15 \times 10^2)(3.462) = 398.1 \text{ W}$ .

\*\*\*\* 07/29/01 21:09:32 \*\*\*\*\* Evaluation PSpice (Nov 1999)

\* Solution to Problem 4.60

\*\*\*\* AC ANALYSIS TEMPERATURE = 27.000 DEG C

\*\*\*\*\*

FREQ VM(1) IM(V1)  
6.000E+01 1.150E+02 3.462E+00

- (c) The inherent series resistance of the wire connections leads to a voltage drop which increases the further one is from the voltage source. Thus, the furthest bulbs actually have less than 115 VAC across them, so they draw slightly less current and glow more dimly.

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

1. Define percent error as  $100 [e^x - (1 + x)] / e^x$

| $x$   | $1 + x$ | $e^x$ | % error            |
|-------|---------|-------|--------------------|
| 0.001 | 1.001   | 1.001 | $5 \times 10^{-5}$ |
| 0.005 | 1.005   | 1.005 | $1 \times 10^{-3}$ |
| 0.01  | 1.01    | 1.010 | $5 \times 10^{-3}$ |
| 0.05  | 1.05    | 1.051 | 0.1                |
| 0.10  | 1.10    | 1.105 | 0.5                |
| 0.50  | 1.50    | 1.649 | 9                  |
| 1.00  | 2.00    | 2.718 | 26                 |
| 5.00  | 6.00    | 148.4 | 96                 |

Of course, “reasonable” is a very subjective term. However, if we choose  $x < 0.1$ , we ensure that the error is less than 1%.



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

2.  $i_A, v_B$  “on”,  $v_C = 0$ :  $i_x = 20$  A  
 $i_A, v_C$  “on”,  $v_B = 0$ :  $i_x = -5$  A  
 $i_A, v_B, v_C$  “on” :  $i_x = 12$  A

so, we can write

$$\begin{aligned} i_x' + i_x'' + i_x''' &= 12 \\ i_x' + i_x'' &= 20 \\ i_x' &+ i_x''' = -5 \end{aligned}$$

In matrix form,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_x' \\ i_x'' \\ i_x''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 20 \\ -5 \end{bmatrix}$$

- (a) with  $i_A$  on only, the response  $i_x = i_x' = 3$  A.  
 (b) with  $v_B$  on only, the response  $i_x = i_x'' = 17$  A.  
 (c) with  $v_C$  on only, the response  $i_x = i_x''' = -8$  A.  
 (d)  $i_A$  and  $v_C$  doubled,  $v_B$  reversed:  $2(3) + 2(-8) + (-1)(17) = -27$  A.

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

3. One source at a time:

The contribution from the 24-V source may be found by shorting the 45-V source and open-circuiting the 2-A source. Applying voltage division,

$$v_x' = 24 \frac{20}{10 + 20 + 45 \parallel 30} = 24 \frac{20}{10 + 20 + 18} = 10 \text{ V}$$

We find the contribution of the 2-A source by shorting both voltage sources and applying current division:

$$v_x'' = 20 \left[ 2 \frac{10}{10 + 20 + 18} \right] = 8.333 \text{ V}$$

Finally, the contribution from the 45-V source is found by open-circuiting the 2-A source and shorting the 24-V source. Defining  $v_{30}$  across the  $30\text{-}\Omega$  resistor with the “+” reference on top:

$$0 = v_{30}/20 + v_{30}/(10 + 20) + (v_{30} - 45)/45$$

solving,  $v_{30} = 11.25 \text{ V}$  and hence  $v_x''' = -11.25(20)/(10 + 20) = -7.5 \text{ V}$

Adding the individual contributions, we find that  $v_x = v_x' + v_x'' + v_x''' = 10.83 \text{ V}$ .



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

4. The contribution of the 8-A source is found by shorting out the two voltage sources and employing simple current division:

$$i_3' = -8 \frac{50}{50 + 30} = -5 \text{ A}$$

The contribution of the voltage sources may be found collectively or individually. The contribution of the 100-V source is found by open-circuiting the 8-A source and shorting the 60-V source. Then,

$$i_3'' = \frac{100}{(50 + 30) \parallel 60 \parallel 30} = 6.25 \text{ A}$$

The contribution of the 60-V source is found in a similar way as  $i_3''' = -60/30 = -2 \text{ A}$ .

The total response is  $i_3 = i_3' + i_3'' + i_3''' = -750 \text{ mA}$ .

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

5. (a) By current division, the contribution of the 1-A source  $i_2'$  is  $i_2' = 1 (200) / 250 = 800 \text{ mA}$ .

The contribution of the 100-V source is  $i_2'' = 100 / 250 = 400 \text{ mA}$ .

The contribution of the 0.5-A source is found by current division once the 1-A source is open-circuited and the voltage source is shorted. Thus,

$$i_2''' = 0.5 (50) / 250 = 100 \text{ mA}$$

Thus,  $i_2 = i_2' + i_2'' + i_2''' = 1.3 \text{ A}$

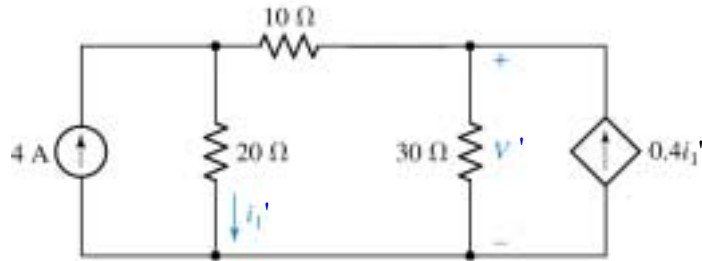
(b)  $P_{1A} = (1) [(200)(1 - 1.3)] = 60 \text{ W}$   
 $P_{200} = (1 - 1.3)^2 (200) = 18 \text{ W}$   
 $P_{100V} = -(1.3)(100) = -130 \text{ W}$   
 $P_{50} = (1.3 - 0.5)^2 (50) = 32 \text{ W}$   
 $P_{0.5A} = (0.5) [(50)(1.3 - 0.5)] = 20 \text{ W}$

Check:  $60 + 18 + 32 + 20 = +130$ .



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

6. We find the contribution of the 4-A source by shorting out the 100-V source and analysing the resulting circuit:



$$4 = V_1' / 20 + (V_1' - V') / 10 \quad [1]$$

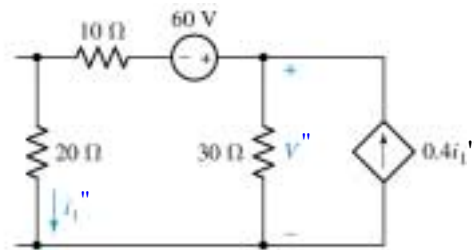
$$0.4 i_1' = V_1' / 30 + (V' - V_1') / 10 \quad [2]$$

where  $i_1' = V_1' / 20$

Simplifying & collecting terms, we obtain  $30 V_1' - 20 V' = 800 \quad [1]$

$$-7.2 V_1' + 8 V' = 0 \quad [2]$$

Solving, we find that  $V' = 60$  V. Proceeding to the contribution of the 60-V source, we analyse the following circuit after defining a clockwise mesh current  $i_a$  flowing in the left mesh and a clockwise mesh current  $i_b$  flowing in the right mesh.



$$30 i_a - 60 + 30 i_a - 30 i_b = 0 \quad [1]$$

$$i_b = -0.4 i_1'' = +0.4 i_a \quad [2]$$

Solving, we find that  $i_a = 1.25$  A and so  $V'' = 30(i_a - i_b) = 22.5$  V.

Thus,  $V = V' + V'' = 82.5$  V.

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

7. (a) Linearity allows us to consider this by viewing each source as being scaled by 25/ 10. This means that the response ( $v_3$ ) will be scaled by the same factor:

$$25 i_A' / 10 + 25 i_B' / 10 = 25 v_3' / 10$$
$$\therefore v_3 = 25 v_3' / 10 = 25(80) / 10 = \boxed{200 \text{ V}}$$

$$\begin{array}{lll} \text{(b)} & i_A' = 10 \text{ A}, i_B' = 25 \text{ A} & \rightarrow v_4' = 100 \text{ V} \\ & i_A'' = 10 \text{ A}, i_B'' = 25 \text{ A} & \rightarrow v_4'' = -50 \text{ V} \\ & i_A = 20 \text{ A}, i_B = -10 \text{ A} & \rightarrow v_4 = ? \end{array}$$

We can view this in a somewhat abstract form: the currents  $i_A$  and  $i_B$  multiply the same circuit parameters regardless of their value; the result is  $v_4$ .

Writing in matrix form,  $\begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 25 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -50 \end{bmatrix}$ , we can solve to find

$a = -4.286$  and  $b = 5.714$ , so that  $20a - 10b$  leads to  $v_4 = \boxed{-142.9 \text{ V}}$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

8. With the current source open-circuited and the 7-V source shorted, we are left with  $100\text{k} \parallel (22\text{k} + 4.7\text{k}) = 21.07\text{ k}\Omega$ .

$$\text{Thus, } V_{3\text{V}} = 3 (21.07) / (21.07 + 47) = 0.9286\text{ V.}$$

In a similar fashion, we find that the contribution of the 7-V source is:

$$V_{7\text{V}} = 7 (31.97) / (31.97 + 26.7) = 3.814\text{ V}$$

Finally, the contribution of the current source to the voltage V across it is:

$$V_{5\text{mA}} = (5 \times 10^{-3}) (47\text{k} \parallel 100\text{k} \parallel 26.7\text{k}) = 72.75\text{ V.}$$

$$\text{Adding, we find that } V = 0.9286 + 3.814 + 72.75 = 77.49\text{ V.}$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

9. We must find the current through the 500-k $\Omega$  resistor using superposition, and then calculate the dissipated power.

The contribution from the current source may be calculated by first noting that  $1\text{M} \parallel 2.7\text{M} \parallel 5\text{M} = 636.8\text{ k}\Omega$ . Then,

$$i_{60\mu\text{A}} = 60 \times 10^{-6} \left( \frac{3}{0.5 + 3 + 0.6368} \right) = 43.51\text{ }\mu\text{A}$$

The contribution from the voltage source is found by first noting that  $2.7\text{M} \parallel 5\text{M} = 1.753\text{ M}\Omega$ . The total current flowing from the voltage source (with the current source open-circuited) is  $-1.5 / (3.5 \parallel 1.753 + 1)\text{ }\mu\text{A} = -0.6919\text{ }\mu\text{A}$ . The current flowing through the 500-k $\Omega$  resistor due to the voltage source acting alone is then

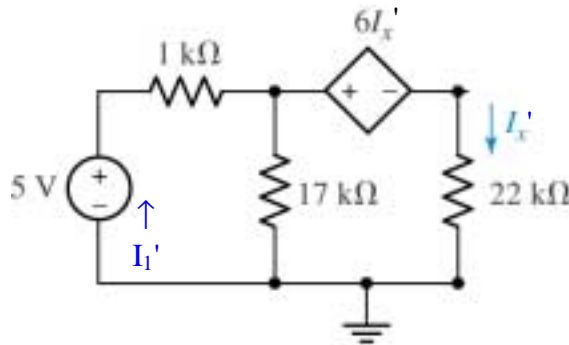
$$i_{1.5\text{V}} = 0.6919 (1.753) / (1.753 + 3.5)\text{ mA} = 230.9\text{ nA}.$$

The total current through the 500-k $\Omega$  resistor is then  $i_{60\mu\text{A}} + i_{1.5\text{V}} = 43.74\text{ }\mu\text{A}$  and the dissipated power is  $(43.74 \times 10^{-9})^2 (500 \times 10^3) = 956.6\text{ }\mu\text{W}$ .



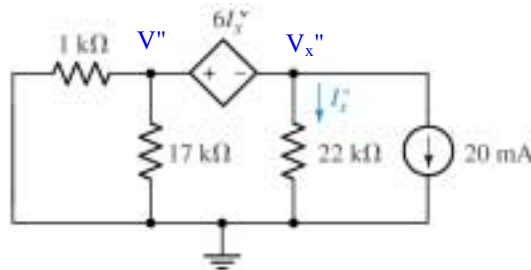
## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

10. We first determine the contribution of the voltage source:



Via mesh analysis, we write:  $5 = 18000 I_1' - 17000 I_x'$   
 $-6 I_x' = -17000 I_x' + 39000 I_x'$

Solving, we find  $I_1' = 472.1 \text{ mA}$  and  $I_x' = 205.8 \text{ mA}$ , so  $V' = 17 \times 10^3 (I_1' - I_x') = 4.527 \text{ V}$ . We proceed to find the contribution of the current source:



Via supernode:  $-20 \times 10^{-3} = V_x'' / 22 \times 10^3 + V'' / 0.9444 \times 10^3$  [1]  
 and  $V'' - V_x'' = 6 I_x''$  or  $V'' - V_x'' = 6 V_x'' / 22 \times 10^3$  [2]

Solving, we find that  $V'' = -18.11 \text{ V}$ . Thus,  $V = V' + V'' = -13.58 \text{ V}$ .

The maximum power is  $V^2 / 17 \times 10^3 = V^2 / 17 \text{ mW} = 250 \text{ mW}$ , so

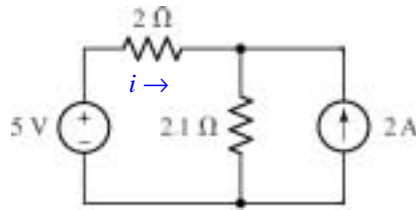
$V = \sqrt{(17)(250)} = 65.19 = V' - 13.58$ . Solving, we find  $V'_{\max} = 78.77 \text{ V}$ .

The 5-V source may then be increased by a factor of  $78.77 / 4.527$ , so that its maximum positive value is **87 V**; past this value, and the resistor will overheat.

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

11. It is impossible to identify the individual contribution of each source to the power dissipated in the resistor; superposition cannot be used for such a purpose.

Simplifying the circuit, we may at least determine the total power dissipated in the resistor:



Via superposition in one step, we may write

$$i = \frac{5}{2 + 2.1} - 2 \frac{2.1}{2 + 2.1} = 195.1 \text{ mA}$$

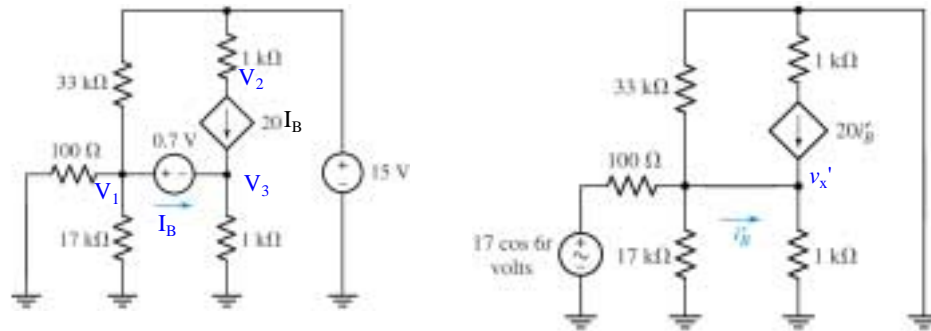
Thus,

$$P_{2\Omega} = i^2 \cdot 2 = 76.15 \text{ mW}$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

12. We will analyse this circuit by first considering the combined effect of both dc sources (left), and then finding the effect of the single ac source acting alone (right).



$$1, 3 \text{ supernode: } V_1/100 + V_1/17 \times 10^3 + (V_1 - 15)/33 \times 10^3 + V_3/10^3 = 20 I_B \quad [1]$$

$$\text{and: } V_1 - V_3 = 0.7 \quad [2]$$

$$\text{Node 2: } -20 I_B = (V_2 - 15)/1000 \quad [3]$$

We require one additional equation if we wish to have  $I_B$  as an unknown:

$$20 I_B + I_B = V_3/1000 \quad [4]$$

Simplifying and collecting terms,

$$10.08912 V_1 + V_3 - 20 \times 10^3 I_B = 0.4545 \quad [1]$$

$$V_1 - V_3 = 0.7 \quad [2]$$

$$V_2 + 20 \times 10^3 I_B = 15 \quad [3]$$

$$-V_3 + 21 \times 10^3 I_B = 0 \quad [4]$$

Solving, we find that  $I_B = -31.04 \mu\text{A}$ .

To analyse the right-hand circuit, we first find the Thévenin equivalent to the left of the wire marked  $i_B'$ , noting that the 33-k $\Omega$  and 17-k $\Omega$  resistors are now in parallel. We find that  $V_{TH} = 16.85 \cos 6t \text{ V}$  by voltage division, and  $R_{TH} = 100 \parallel 17k \parallel 33k = 99.12 \Omega$ . We may now proceed:

$$20 i_B' = v_x' / 1000 + (v_x' - 16.85 \cos 6t) / 99.12 \quad [1]$$

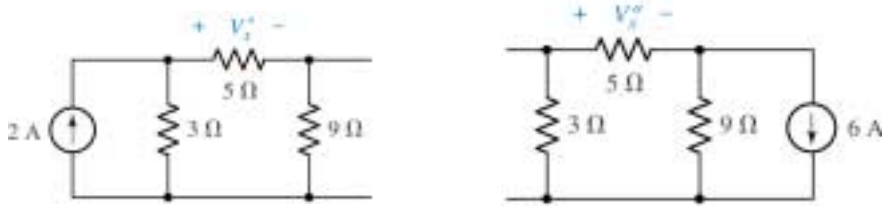
$$20 i_B' + i_B'' = v_x' / 1000 \quad [2]$$

Solving, we find that  $i_B' = 798.6 \cos 6t \text{ mA}$ . Thus, adding our two results, we find the complete current is

$$i_B = i_B' + I_B = -31.04 + 798.6 \cos 6t \mu\text{A}.$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

13.



We first consider the effect of the 2-A source separately, using the left circuit:

$$V_{x'} = 5 \left[ 2 \frac{3}{3+14} \right] = 1.765 \text{ V}$$

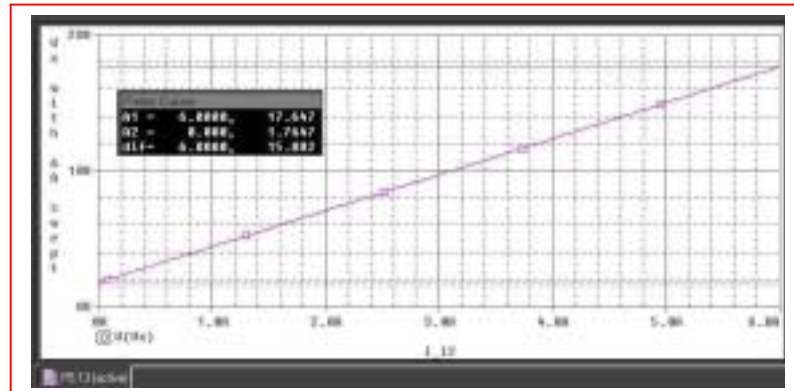
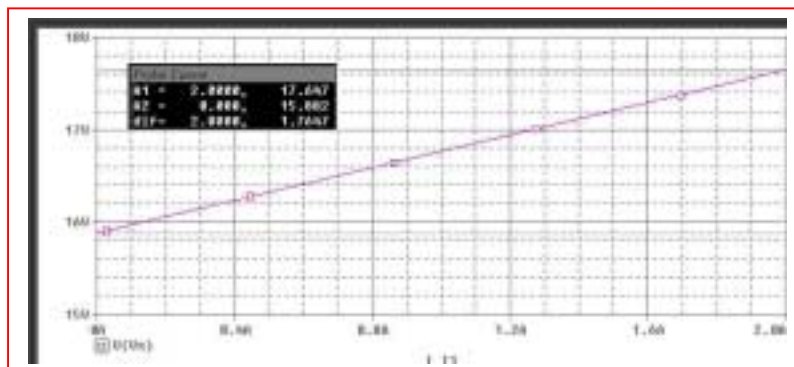
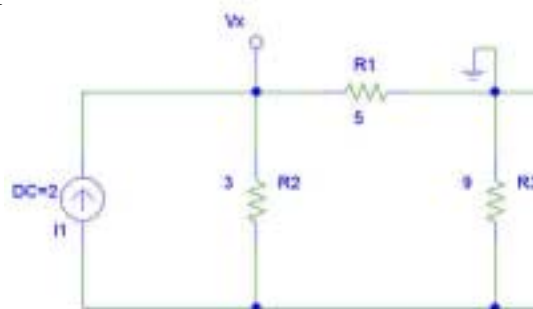
Next we consider the effect of the 6-A source on its own using the right circuit:

$$V_{x''} = 5 \left[ 6 \frac{9}{9+8} \right] = 15.88 \text{ V}$$

Thus,  $V_x = V_{x'} + V_{x''} = 17.65 \text{ V}$ .

(b) PSpice verification (DC Sweep)

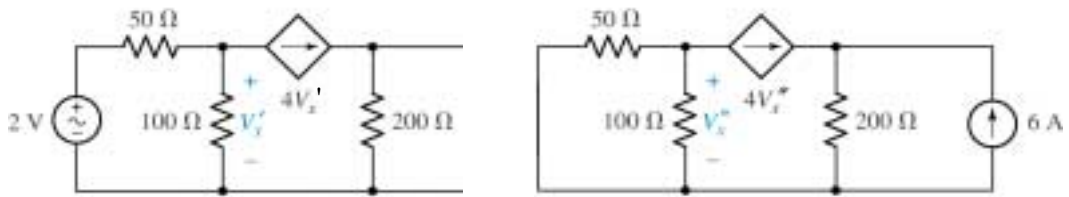
The DC sweep results below confirm that  $V_{x'} = 1.765 \text{ V}$





## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

14.



(a) Beginning with the circuit on the left, we find the contribution of the 2-V source to  $V_x$ :

$$-4V'_x = \frac{V'_x}{100} + \frac{V'_x - 2}{50}$$

which leads to  $V'_x = 9.926 \text{ mV}$ .

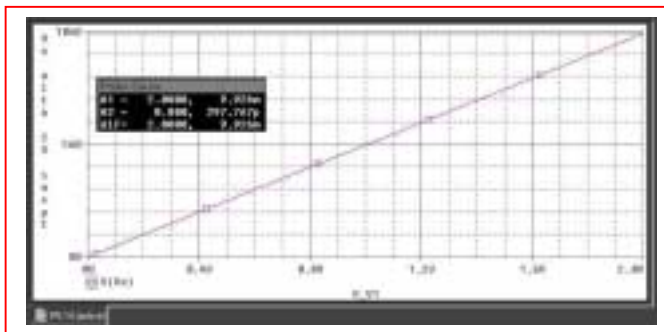
The circuit on the right yields the contribution of the 6-A source to  $V_x$ :

$$-4V''_x = \frac{V''_x}{100} + \frac{V''_x}{50}$$

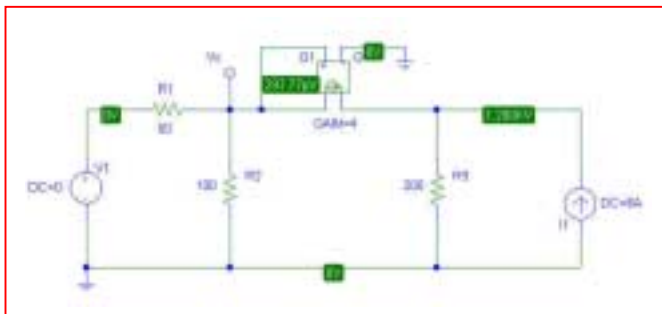
which leads to  $V''_x = 0$ .

Thus,  $V_x = V'_x + V''_x = 9.926 \text{ mV}$ .

(b) PSpice verification.

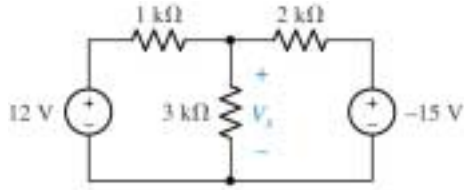


As can be seen from the two separate PSpice simulations, our hand calculations are correct; the pV-scale voltage in the second simulation is a result of numerical inaccuracy.



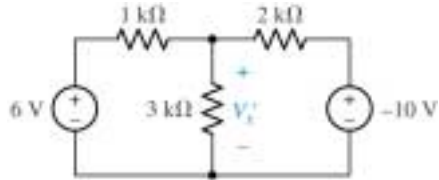
## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

15.



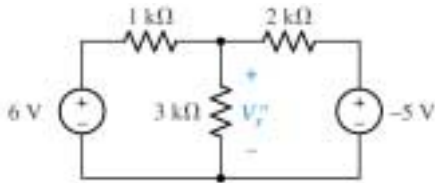
$$\frac{V_x - 12}{1} + \frac{V_x}{3} + \frac{V_x + 15}{2} = 0$$

so  $V_x = 2.455 \text{ V}$



$$\frac{V'_x - 6}{1} + \frac{V'_x}{3} + \frac{V'_x + 10}{2} = 0$$

so  $V'_x = 0.5455 \text{ V}$



$$\frac{V''_x - 6}{1} + \frac{V''_x}{3} + \frac{V''_x + 5}{2} = 0$$

so  $V''_x = 1.909 \text{ V}$

Adding, we find that  $V'_x + V''_x = 2.455 \text{ V} = V_x$  as promised.

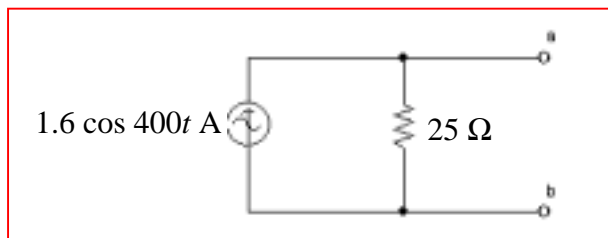


## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

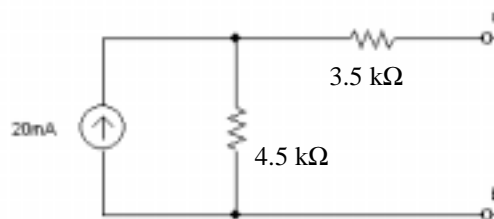
16. (a)  $[120 \cos 400t] / 60 = 2 \cos 400t \text{ A}$ .  $60 \parallel 120 = 40 \Omega$ .

$[2 \cos 400t] (40) = 80 \cos 400t \text{ V}$ .  $40 + 10 = 50 \Omega$ .

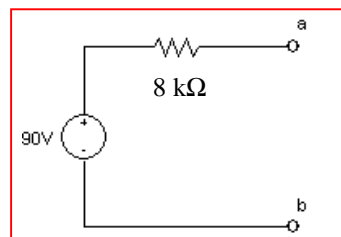
$[80 \cos 400t] / 50 = 1.6 \cos 400t \text{ A}$ .  $50 \parallel 50 = 25 \Omega$ .



(b)  $2k \parallel 3k + 6k = 7.2 \text{ k}\Omega$ .  $7.2k \parallel 12k = 4.5 \text{ k}\Omega$



$(20)(4.5) = 90 \text{ V}$ .



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

17. We can ignore the 1-k $\Omega$  resistor, at least when performing a source transformation on this circuit, as the 1-mA source will pump 1 mA through *whatever* value resistor we place there. So, we need only combine the 1 and 2 mA sources (which are in parallel once we replace the 1-k $\Omega$  resistor with a 0- $\Omega$  resistor). The current through the 5.8-k $\Omega$  resistor is then simply given by voltage division:

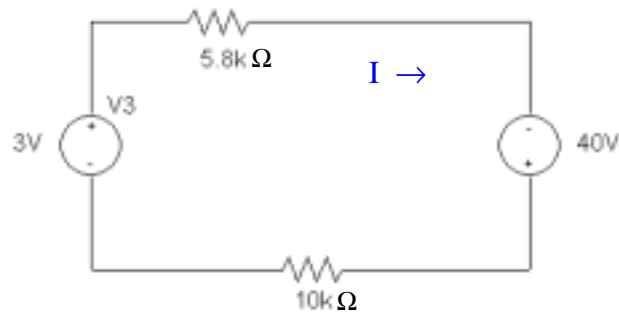
$$i = 3 \times 10^{-3} \frac{4.7}{4.7 + 5.8} = 1.343 \text{ mA}$$

The power dissipated by the 5.8-k $\Omega$  resistor is then  $i^2 \cdot 5.8 \times 10^3 = 10.46 \text{ mW}$ .



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

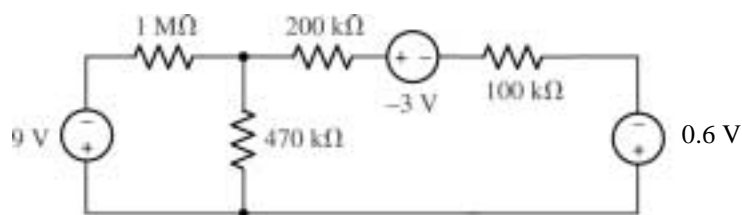
18. We may ignore the  $10\text{-k}\Omega$  and  $9.7\text{-k}\Omega$  resistors, as  $3\text{-V}$  will appear across them regardless of their value. Performing a quick source transformation on the  $10\text{-k}\Omega$  resistor/  $4\text{-mA}$  current source combination, we replace them with a  $40\text{-V}$  source in series with a  $10\text{-k}\Omega$  resistor:



$I = 43 / 15.8 \text{ mA} = 2.722 \text{ mA}$ . Therefore,  $P_{5.8\Omega} = I^2 \cdot 5.8 \times 10^3 = 42.97 \text{ mW}$ .

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

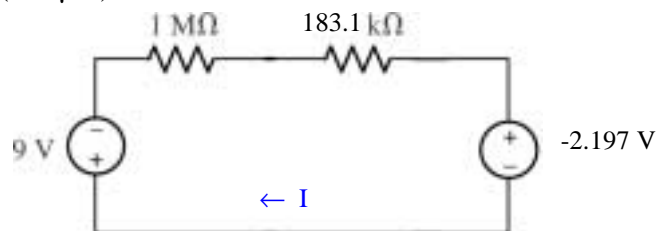
19.  $(100 \text{ k}\Omega)(6 \text{ mA}) = 0.6 \text{ V}$



$$470 \text{ k} \parallel 300 \text{ k} = 183.1 \text{ k}\Omega$$

$$(-3 - 0.6) / 300 \times 10^3 = -12 \text{ }\mu\text{A}$$

$$(183.1 \text{ k}\Omega)(-12 \text{ }\mu\text{A}) = -2.197 \text{ V}$$



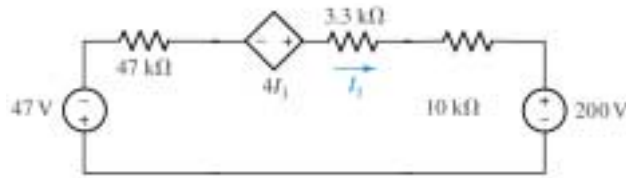
Solving,  $9 + 1183.1 \times 10^3 I - 2.197 = 0$ , so  $I = -5.750 \text{ }\mu\text{A}$ . Thus,

$$P_{1\text{M}\Omega} = I^2 \cdot 10^6 = \boxed{33.06 \text{ }\mu\text{W}}.$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

20. (1)(47) = 47 V. (20)(10) = 200 V. Each voltage source “+” corresponds to its corresponding current source’s arrow head.



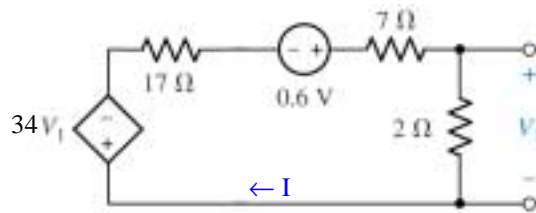
Using KVL on the simplified circuit above,

$$47 + 47 \times 10^3 I_1 - 4 I_1 + 13.3 \times 10^3 I_1 + 200 = 0$$

Solving, we find that  $I_1 = -247 / (60.3 \times 10^3 - 4) = -4.096 \text{ mA}$ .

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

21.  $(2 V_1)(17) = 34 V_1$



Analysing the simplified circuit above,

$$34 V_1 - 0.6 + 7 I + 2 I + 17 I = 0 \quad [1] \quad \text{and} \quad V_1 = 2 I \quad [2]$$

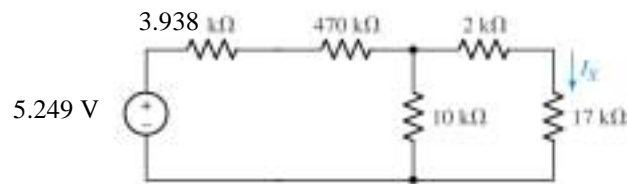
Substituting, we find that  $I = 0.6 / (68 + 7 + 2 + 17) = 6.383 \text{ mA}$ . Thus,

$$V_1 = 2 I = \boxed{12.77 \text{ mV}}$$

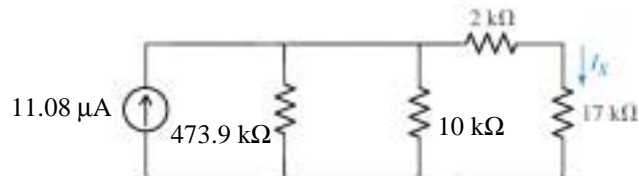


## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

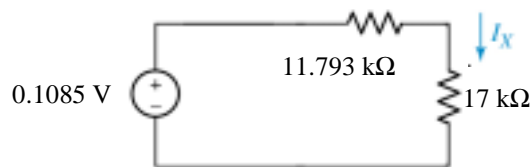
22.  $12/9000 = 1.333 \text{ mA}$ .  $9\text{k} \parallel 7\text{k} = 3.938 \text{ k}\Omega$ .  $\rightarrow (1.333 \text{ mA})(3.938 \text{ k}\Omega) = 5.249 \text{ V}$ .



$$5.249 / 473.938 \times 10^3 = 11.08 \text{ }\mu\text{A}$$



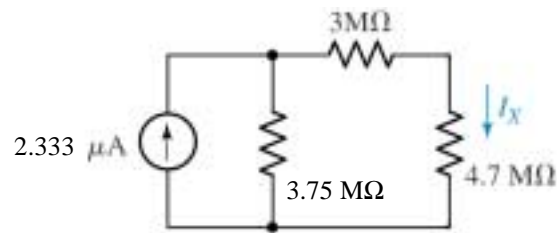
$$473.9 \text{ k} \parallel 10 \text{ k} = 9.793 \text{ k}\Omega. (11.08 \text{ mA})(9.793 \text{ k}\Omega) = 0.1085 \text{ V}$$



$$I_x = 0.1085 / 28.793 \times 10^3 = \boxed{3.768 \text{ }\mu\text{A}}.$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

23. First,  $(-7 \mu\text{A})(2 \text{ M}\Omega) = -14 \text{ V}$ , “+” reference down.  $2 \text{ M}\Omega + 4 \text{ M}\Omega = 6 \text{ M}\Omega$ .  
 $+14 \text{ V} / 6 \text{ M}\Omega = 2.333 \mu\text{A}$ , arrow pointing up;  $6 \text{ M} \parallel 10 \text{ M} = 3.75 \text{ M}\Omega$ .

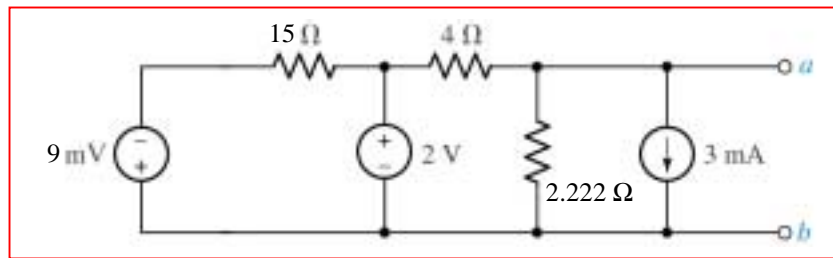


$$(2.333)(3.75) = 8.749 \text{ V. } R_{\text{eq}} = 6.75 \text{ M}\Omega$$
$$\therefore I_x = 8.749 / (6.75 + 4.7) \mu\text{A} = \boxed{764.1 \text{ nA.}}$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

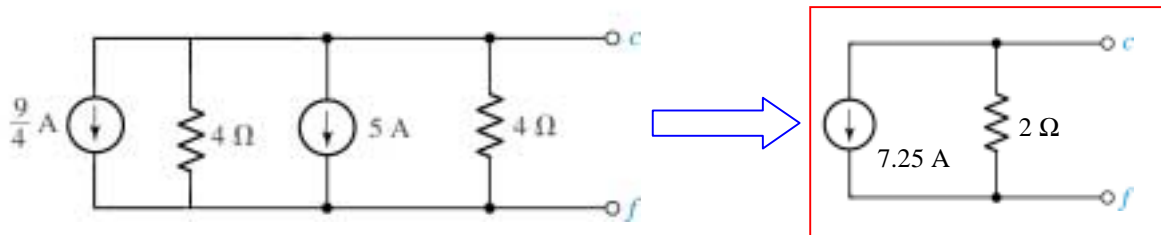
24. To begin, note that  $(1 \text{ mA})(9 \Omega) = 9 \text{ mV}$ , and  $5 \parallel 4 = 2.222 \Omega$ .



The above circuit may not be further simplified using only source transformation techniques.

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

25. Label the “-” terminal of the 9-V source node **x** and the other terminal node **x'**. The 9-V source will force the voltage across these two terminals to be  $-9$  V regardless of the value of the current source and resistor to its left. These two components may therefore be neglected from the perspective of terminals **a** & **b**. Thus, we may draw:





## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

26. Beware of the temptation to employ superposition to compute the dissipated power- *it won't work!*

Instead, define a current  $I$  flowing into the bottom terminal of the  $1\text{-M}\Omega$  resistor. Using superposition to compute this current,

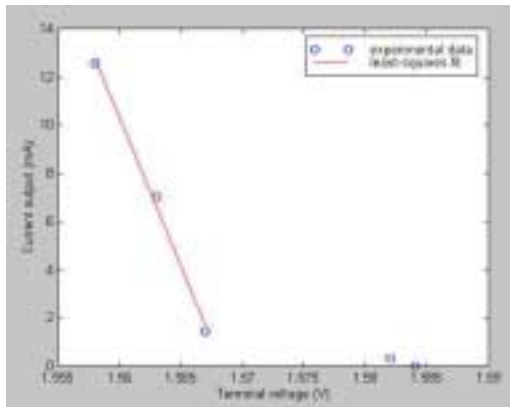
$$I = 1.8 / 1.840 + 0 + 0 \text{ } \mu\text{A} = 978.3 \text{ nA.}$$

Thus,

$$P_{1\text{M}\Omega} = (978.3 \times 10^{-9})^2 (10^6) = 957.1 \text{ nW.}$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

27. Let's begin by plotting the experimental results, along with a least-squares fit to part of the data:



**Least-squares fit results:**

| <b>Voltage (V)</b> | <b>Current (mA)</b> |
|--------------------|---------------------|
| 1.567              | 1.6681              |
| 1.563              | 6.599               |
| 1.558              | 12.763              |

We see from the figure that we cannot draw a very good line through all data points representing currents from 1 mA to 20 mA. We have therefore chosen to perform a linear fit for the three lower voltages only, as shown. Our model will not be as accurate at 1 mA; there is no way to know if our model will be accurate at 20 mA, since that is beyond the range of the experimental data.

Modeling this system as an ideal voltage source in series with a resistance (representing the internal resistance of the battery) and a varying load resistance, we may write the following two equations based on the linear fit to the data:

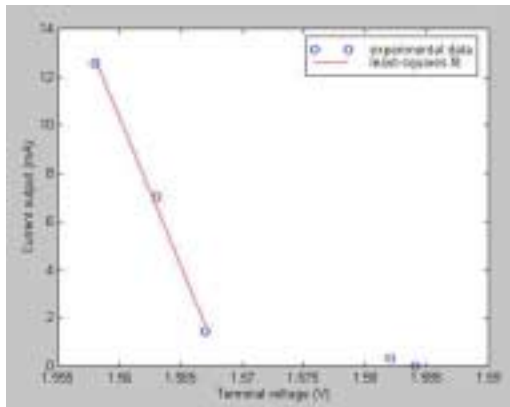
$$\begin{aligned}1.567 &= V_{\text{src}} - R_s (1.6681 \times 10^{-3}) \\1.558 &= V_{\text{src}} - R_s (12.763 \times 10^{-3})\end{aligned}$$

Solving,  $V_{\text{src}} = 1.568 \text{ V}$  and  $R_s = 811.2 \text{ m}\Omega$ . It should be noted that depending on the line fit to the experimental data, these values can change somewhat, particularly the series resistance value.



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

28. Let's begin by plotting the experimental results, along with a least-squares fit to part of the data:



**Least-squares fit results:**

| Voltage (V) | Current (mA) |
|-------------|--------------|
| 1.567       | 1.6681       |
| 1.563       | 6.599        |
| 1.558       | 12.763       |

We see from the figure that we cannot draw a very good line through all data points representing currents from 1 mA to 20 mA. We have therefore chosen to perform a linear fit for the three lower voltages only, as shown. Our model will not be as accurate at 1 mA; there is no way to know if our model will be accurate at 20 mA, since that is beyond the range of the experimental data.

Modeling this system as an ideal current source in parallel with a resistance  $R_p$  (representing the internal resistance of the battery) and a varying load resistance, we may write the following two equations based on the linear fit to the data:

$$1.6681 \times 10^{-3} = I_{src} - 1.567 / R_p$$

$$12.763 \times 10^{-3} = I_{src} - 1.558 / R_p$$

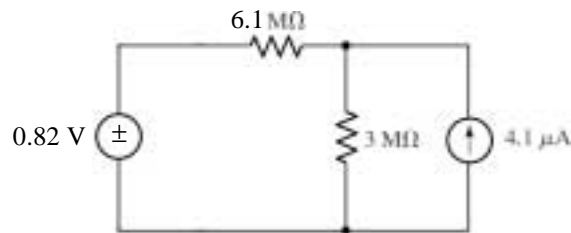
Solving,  $I_{src} = 1.933 \text{ A}$  and  $R_s = 811.2 \text{ m}\Omega$ . It should be noted that depending on the line fit to the experimental data, these values can change somewhat, particularly the series resistance value.

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

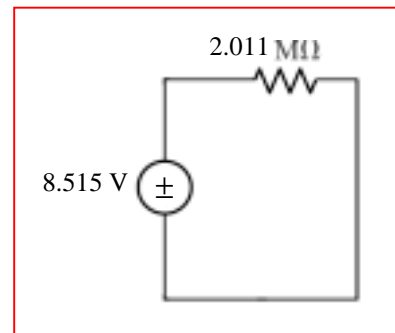
29. Reference terminals are required to avoid ambiguity: *depending on the sources with which we begin the transformation process, we will obtain entirely different answers.* Working from left to right in this case,

$$2\ \mu\text{A} - 1.8\ \mu\text{A} = 200\ \text{nA, arrow up.}$$
$$1.4\ \text{M}\Omega + 2.7\ \text{M}\Omega = 4.1\ \text{M}\Omega$$

An additional transformation back to a voltage source yields  $(200\ \text{nA})(4.1\ \text{M}\Omega) = 0.82\ \text{V}$  in series with  $4.1\ \text{M}\Omega + 2\ \text{M}\Omega = 6.1\ \text{M}\Omega$ , as shown below:



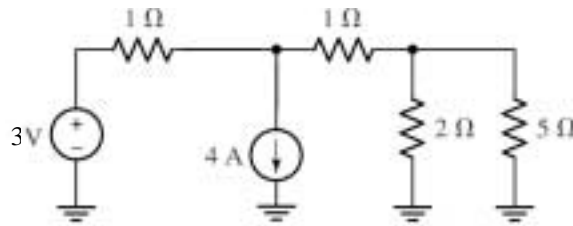
Then,  $0.82\ \text{V} / 6.1\ \text{M}\Omega = 134.4\ \text{nA}$ , arrow up.  
 $6.1\ \text{M}\Omega \parallel 3\ \text{M}\Omega = 2.011\ \text{M}\Omega$   
 $4.1\ \mu\text{A} + 134.4\ \text{nA} = 4.234\ \text{mA}$ , arrow up.  
 $(4.234\ \mu\text{A})(2.011\ \text{M}\Omega) = 8.515\ \text{V}.$



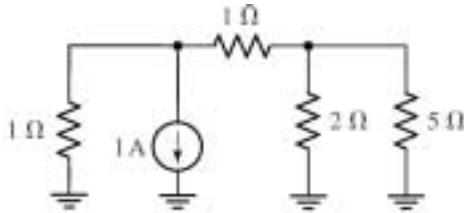


## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

30. To begin, we note that the 5-V and 2-V sources are in series:



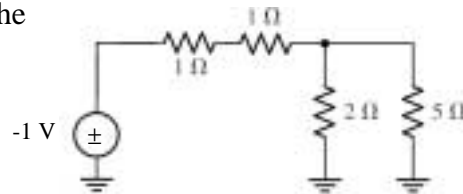
Next, noting that  $3\text{ V} / 1\ \Omega = 3\text{ A}$ , and  $4\text{ A} - 3\text{ A} = +1\text{ A}$  (arrow down), we obtain:



The left-hand resistor and the current source are easily transformed into a 1-V source in series with a 1-Ω resistor:

By voltage division, the voltage across the 5-Ω resistor in the circuit to the right is:

$$(-1) \frac{2 \parallel 5}{2 \parallel 5 + 2} = -0.4167\text{ V.}$$



Thus, the power dissipated by the 5-Ω resistor is  $(-0.4167)^2 / 5 = 34.73\text{ mW}$ .

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

31. (a)  $R_{TH} = 25 \parallel (10 + 15) = 25 \parallel 25 = 12.5 \Omega.$

$$V_{TH} = V_{ab} = 50 \left( \frac{25}{10 + 15 + 25} \right) + 100 \left( \frac{15 + 10}{15 + 10 + 25} \right) = 75 \text{ V.}$$

(b) If  $R_{ab} = 50 \Omega$ ,

$$P_{50\Omega} = \left[ 75 \left( \frac{50}{50 + 12.5} \right) \right]^2 \left( \frac{1}{50} \right) = 72 \text{ W}$$

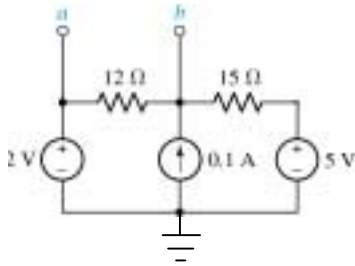
(c) If  $R_{ab} = 12.5 \Omega$ ,

$$P_{12.5\Omega} = \left[ 75 \left( \frac{12.5}{12.5 + 12.5} \right) \right]^2 \left( \frac{1}{12.5} \right) = 112.5 \text{ W}$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

32. (a) Removing terminal **c**, we need write only one nodal equation:



$$0.1 = \frac{V_b - 2}{12} + \frac{V_b - 5}{15}, \text{ which may be solved to}$$

yield  $V_b = 4 \text{ V}$ . Therefore,  $V_{ab} = V_{TH} = 2 - 4 = -2 \text{ V}$ .

$R_{TH} = 12 \parallel 15 = 6.667 \Omega$ . We may then calculate  $I_N$  as  $I_N = V_{TH} / R_{TH}$

$$= -300 \text{ mA (arrow pointing upwards).}$$

- (b) Removing terminal **a**, we again find  $R_{TH} = 6.667 \Omega$ , and only need write a single nodal equation; in fact, it is identical to that written for the circuit above, and we once again find that  $V_b = 4 \text{ V}$ . In this case,  $V_{TH} = V_{bc} = 4 - 5 = -1 \text{ V}$ , so  $I_N = -1 / 6.667 = -150 \text{ mA (arrow pointing upwards)}$ .

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

33. (a) Shorting out the 88-V source and open-circuiting the 1-A source, we see looking into the terminals x and x' a 50-Ω resistor in parallel with 10 Ω in parallel with (20 Ω + 40 Ω), so

$$R_{TH} = 50 \parallel 10 \parallel (20 + 40) = 7.317 \Omega$$

Using superposition to determine the voltage  $V_{xx'}$  across the 50-Ω resistor, we find

$$\begin{aligned} V_{xx'} = V_{TH} &= \left[ 88 \frac{50 \parallel (20 + 40)}{10 + [50 \parallel (20 + 40)]} \right] + (1)(50 \parallel 10) \left[ \frac{40}{40 + 20 + (50 \parallel 10)} \right] \\ &= \left[ 88 \frac{27.27}{37.27} \right] + (1)(8.333) \left[ \frac{40}{40 + 20 + 8.333} \right] = 69.27 \text{ V} \end{aligned}$$

- (b) Shorting out the 88-V source and open-circuiting the 1-A source, we see looking into the terminals y and y' a 40-Ω resistor in parallel with [20 Ω + (10 Ω || 50 Ω)]:

$$R_{TH} = 40 \parallel [20 + (10 \parallel 50)] = 16.59 \Omega$$

Using superposition to determine the voltage  $V_{yy'}$  across the 1-A source, we find

$$\begin{aligned} V_{yy'} = V_{TH} &= (1)(R_{TH}) + \left[ 88 \frac{27.27}{10 + 27.27} \right] \left( \frac{40}{20 + 40} \right) \\ &= 59.52 \text{ V} \end{aligned}$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

34. (a) Select terminal **b** as the reference terminal, and define a nodal voltage  $V_1$  at the top of the 200- $\Omega$  resistor. Then,

$$0 = \frac{V_1 - 20}{40} + \frac{V_1 - V_{TH}}{100} + \frac{V_1}{200} \quad [1]$$

$$1.5 i_1 = (V_{TH} - V_1)/100 \quad [2]$$

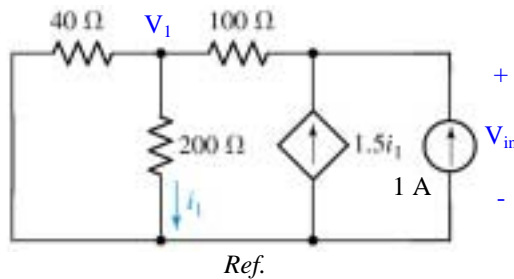
where  $i_1 = V_1/200$ , so Eq. [2] becomes  $150 V_1/200 + V_1 - V_{TH} = 0$  [2]

Simplifying and collecting terms, these equations may be re-written as:

$$(0.25 + 0.1 + 0.005) V_1 - 0.1 V_{TH} = 5 \quad [1]$$

$$(1 + 15/20) V_1 - V_{TH} = 0 \quad [2]$$

Solving, we find that  $V_{TH} = 38.89 \text{ V}$ . To find  $R_{TH}$ , we short the voltage source and inject 1 A into the port:



$$0 = \frac{V_1 - V_{in}}{100} + \frac{V_1}{40} + \frac{V_1}{200} \quad [1]$$

$$1.5 i_1 + 1 = \frac{V_{in} - V_1}{100} \quad [2]$$

$$i_1 = V_1/200 \quad [3]$$

Combining Eqs. [2] and [3] yields  $1.75 V_1 - V_{in} = -100$  [4]

Solving Eqs. [1] & [4] then results in  $V_{in} = 177.8 \text{ V}$ , so that  $R_{TH} = V_{in}/1 \text{ A} = 177.8 \Omega$ .

(b) Adding a 100- $\Omega$  load to the original circuit or our Thévenin equivalent, the voltage across the load is

$$V_{100\Omega} = V_{TH} \left( \frac{100}{100 + 177.8} \right) = 14.00 \text{ V}, \text{ and so } P_{100\Omega} = (V_{100\Omega})^2 / 100 = 1.96 \text{ W}.$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

35. We inject a current of 1 A into the port (arrow pointing up), select the bottom terminal as our reference terminal, and define the nodal voltage  $V_x$  across the 200- $\Omega$  resistor.

Then,  $1 = V_1/100 + (V_1 - V_x)/50$  [1]

$$-0.1 V_1 = V_x/200 + (V_x - V_1)/50 \quad [2]$$

which may be simplified to

$$3 V_1 - 2 V_x = 100 \quad [1]$$

$$16 V_1 + 5 V_x = 0 \quad [2]$$

Solving, we find that  $V_1 = 10.64$  V, so  $R_{TH} = V_1/(1 \text{ A}) = 10.64 \Omega$ .

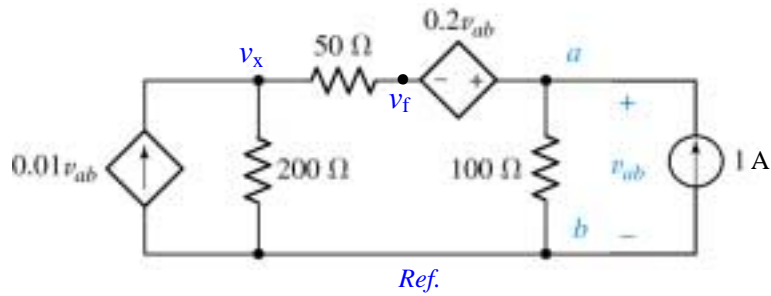
Since there are no independent sources present in the original network,  $I_N = 0$ .



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

36. With no independent sources present,  $V_{TH} = 0$ .

We decide to inject a 1-A current into the port:



Node 'x':  $0.01 v_{ab} = v_x / 200 + (v_x - v_f) / 50$  [1]

Supernode:  $1 = v_{ab} / 100 + (v_f - v_x)$  [2]

and:  $v_{ab} - v_f = 0.2 v_{ab}$  [3]

Rearranging and collecting terms,

$$-2 v_{ab} + 5 v_x - 4 v_f = 0 \quad [1]$$

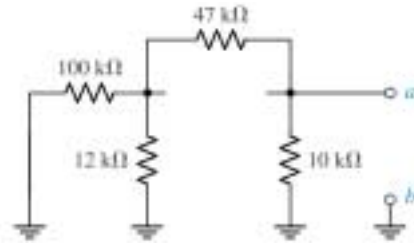
$$v_{ab} - 2 v_x + 2 v_f = 100 \quad [2]$$

$$0.8 v_{ab} - v_f = 0 \quad [3]$$

Solving, we find that  $v_{ab} = 192.3 \text{ V}$ , so  $R_{TH} = v_{ab} / (1 \text{ A}) = 192.3 \Omega$ .

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

37. We first find  $R_{TH}$  by shorting out the voltage source and open-circuiting the current source.



Looking into the terminals **a** & **b**, we see  
 $R_{TH} = 10 \parallel [47 + (100 \parallel 12)]$   
 $= 8.523 \, \Omega.$

Returning to the original circuit, we decide to perform nodal analysis to obtain  $V_{TH}$ :

$$-12 \times 10^3 = (V_1 - 12) / 100 \times 10^3 + V_1 / 12 \times 10^3 + (V_1 - V_{TH}) / 47 \times 10^3 \quad [1]$$

$$12 \times 10^3 = V_{TH} / 10 \times 10^3 + (V_{TH} - V_1) / 47 \times 10^3 \quad [2]$$

Rearranging and collecting terms,

$$0.1146 V_1 - 0.02128 V_{TH} = -11.88 \quad [1]$$

$$-0.02128 V_1 + 0.02128 V_{TH} = 12 \quad [2]$$

Solving, we find that  $V_{TH} = 83.48 \, V.$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

38. (a)  $R_{TH} = 4 + 2 \parallel 2 + 10 = 15 \Omega.$   
(b) same as above:  $15 \Omega.$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

39. For Fig. 5.78a,  $I_N = 12 / \sim 0 \rightarrow \infty \text{ A in parallel with } \sim 0 \Omega.$

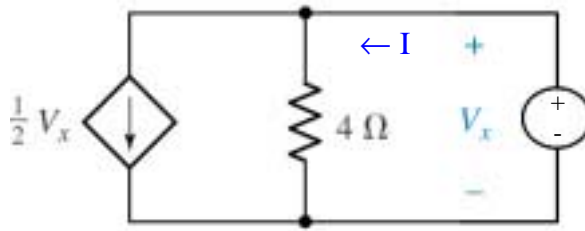
For Fig. 5.78b,  $V_{TH} = (2)(\sim \infty) \rightarrow \infty \text{ V in series with } \sim \infty \Omega.$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

40. With no independent sources present,  $V_{TH} = 0$ .

Connecting a 1-V source to the port and measuring the current that flows as a result,



$$I = 0.5 V_x + 0.25 V_x = 0.5 + 0.25 = 0.75 \text{ A.}$$

$$R_{TH} = 1/I = 1.333 \Omega.$$

The Norton equivalent is 0 A in parallel with 1.333  $\Omega$ .

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

41. Performing nodal analysis to determine  $V_{TH}$ ,

$$100 \times 10^{-3} = V_x / 250 + V_{oc} / 7.5 \times 10^3 \quad [1]$$

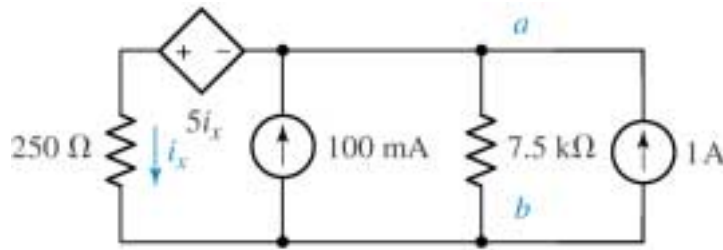
$$\text{and } V_x - V_{oc} = 5 i_x$$

where  $i_x = V_x / 250$ . Thus, we may write the second equation as

$$0.98 V_x - V_{oc} = 0 \quad [2]$$

Solving, we find that  $V_{oc} = V_{TH} = 23.72 \text{ V}$ .

In order to determine  $R_{TH}$ , we inject 1 A into the port:



$$V_{ab} / 7.5 \times 10^3 + V_x / 250 = 1 \quad [1]$$

$$\text{and } V_x - V_{ab} = 5 i_x = 5 V_x / 250 \quad \text{or}$$

$$-V_{ab} + (1 - 5 / 250) V_x = 0 \quad [2]$$

Solving, we find that  $V_{ab} = 237.2 \text{ V}$ . Since  $R_{TH} = V_{ab} / (1 \text{ A})$ ,  $R_{TH} = 237.2 \Omega$ .

Finally,  $I_N = V_{TH} / R_{TH} = 100 \text{ mA}$ .



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

42. We first note that  $V_{TH} = V_x$ , so performing nodal analysis,

$$-5 V_x = V_x / 19 \quad \text{which has the solution } V_x = 0 \text{ V.}$$

Thus,  $V_{TH}$  (and hence  $I_N$ ) = 0. (Assuming  $R_{TH} \neq 0$ )

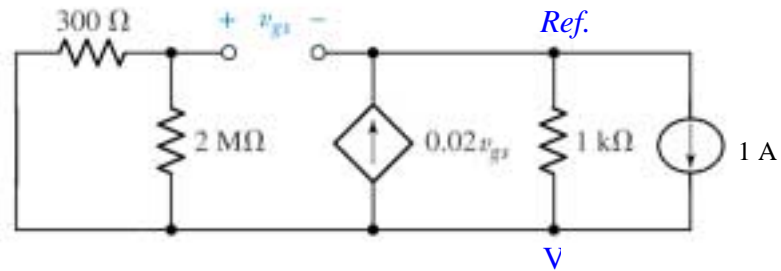
To find  $R_{TH}$ , we inject 1 A into the port, noting that  $R_{TH} = V_x / 1 \text{ A}$ :

$$-5 V_x + 1 = V_x / 19$$

Solving, we find that  $V_x = 197.9 \text{ mV}$ , so that  $R_{TH} = R_N = 197.9 \text{ mV}$ .

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

43. Shorting out the voltage source, we redraw the circuit with a 1-A source in place of the 2-k $\Omega$  resistor:



Noting that  $300\ \Omega \parallel 2\ \text{M}\Omega \approx 300\ \Omega$ ,

$$0 = (v_{gs} - V) / 300 \quad [1]$$

$$1 - 0.02 v_{gs} = V / 1000 + (V - v_{gs}) / 300 \quad [2]$$

Simplifying & collecting terms,

$$v_{gs} - V = 0 \quad [1]$$

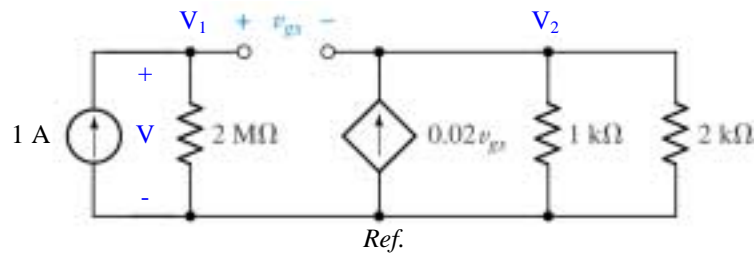
$$0.01667 v_{gs} + 0.00433 V = 1 \quad [2]$$

Solving, we find that  $v_{gs} = V = 47.62\ \text{V}$ . Hence,  $R_{TH} = V / 1\ \text{A} = 47.62\ \Omega$ .



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

44. We replace the source  $v_s$  and the  $300\text{-}\Omega$  resistor with a  $1\text{-A}$  source and seek its voltage:

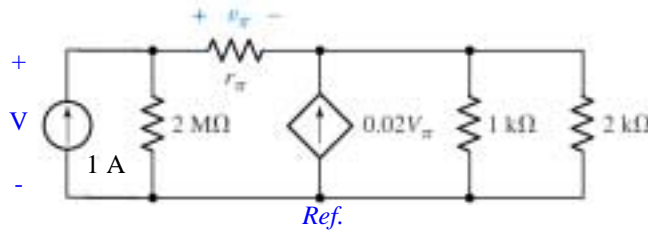


By nodal analysis,  $1 = V_1 / 2 \times 10^6$  so  $V_1 = 2 \times 10^6\text{ V}$ .

Since  $V = V_1$ , we have  $R_{in} = V / 1\text{ A} = 2\text{ M}\Omega$ .

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

45. Removing the voltage source and the 300- $\Omega$  resistor, we replace them with a 1-A source and seek the voltage that develops across its terminals:



We select the bottom node as our reference terminal, and define nodal voltages  $V_1$  and  $V_2$ . Then,

$$1 = V_1 / 2 \times 10^6 + (V_1 - V_2) / r_\pi \quad [1]$$

$$0.02 v_\pi = (V_2 - V_1) / r_\pi + V_2 / 1000 + V_2 / 2000 \quad [2]$$

where  $v_\pi = V_1 - V_2$

Simplifying & collecting terms,

$$(2 \times 10^6 + r_\pi) V_1 - 2 \times 10^6 V_2 = 2 \times 10^6 r_\pi \quad [1]$$

$$-(2000 + 40 r_\pi) V_1 + (2000 + 43 r_\pi) V_2 = 0 \quad [2]$$

Solving, we find that  $V_1 = V = 2 \times 10^6 \left( \frac{666.7 + 14.33 r_\pi}{2 \times 10^6 + 666.7 + 14.33 r_\pi} \right)$ .

Thus,

$$R_{TH} = 2 \times 10^6 \parallel (666.7 + 14.33 r_\pi) \, \Omega.$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

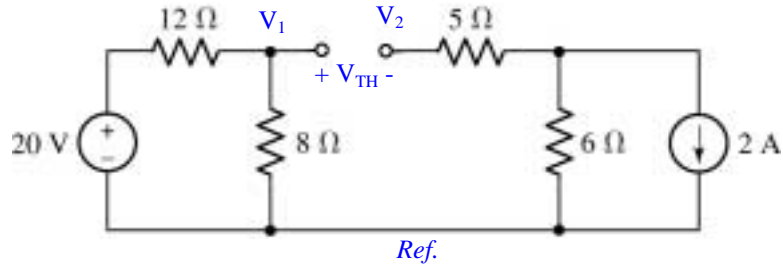
46. Such a scheme probably would lead to maximum or at least near-maximum power transfer to our home. Since we pay the utility company based on the power we use, however, this might not be such a hot idea...

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

47. We need to find the Thévenin equivalent resistance of the circuit connected to  $R_L$ , so we short the 20-V source and open-circuit the 2-A source; by inspection, then

$$R_{TH} = 12 \parallel 8 + 5 + 6 = 15.8 \, \Omega$$

Analyzing the original circuit to obtain  $V_1$  and  $V_2$  with  $R_L$  removed:



$$V_1 = 20 \cdot 8 / 20 = 8 \text{ V}; \quad V_2 = -2(6) = -12 \text{ V}.$$

We define  $V_{TH} = V_1 - V_2 = 8 + 12 = 20 \text{ V}$ . Then,

$$P_{R_L}|_{\max} = \frac{V_{TH}^2}{4 R_L} = \frac{400}{4(15.8)} = 6.329 \text{ W}$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

48. (a)  $R_{TH} = 25 \parallel (10 + 15) = 12.5 \, \Omega$

Using superposition,  $V_{ab} = V_{TH} = 50 \frac{25}{15 + 10 + 25} + 100 \frac{15 + 10}{50} = 75 \, \text{V}.$

(b) Connecting a 50- $\Omega$  resistor,

$$P_{\text{load}} = \frac{V_{TH}^2}{R_{TH} + R_{\text{load}}} = \frac{75^2}{12.5 + 50} = 90 \, \text{W}$$

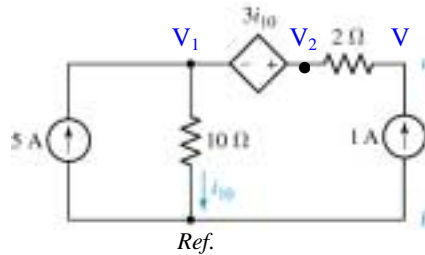
(c) Connecting a 12.5- $\Omega$  resistor,

$$P_{\text{load}} = \frac{V_{TH}^2}{4 R_{TH}} = \frac{75^2}{4(12.5)} = 112.5 \, \text{W}$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

49. (a) By inspection, we see that  $i_{10} = 5$  A, so  
 $V_{TH} = V_{ab} = 2(0) + 3 i_{10} + 10 i_{10} = 13 i_{10} = 13(5) = 65$  V.

To find  $R_{TH}$ , we connect a 1-A source between terminals **a** & **b**:



$$5 = V_1 / 10 + (V_2 - V) / 2 \quad [1] \quad \rightarrow \quad V_1 + 5 V_2 - 5 V = 50 \quad [1]$$

$$1 = (V - V_2) / 2 \quad [2] \quad \rightarrow \quad -V_2 + V = 2 \quad [2]$$

$$\text{and } V_2 - V_1 = 3 i_{10} \quad [3]$$

where  $i_{10} = V_1 / 10 \quad \rightarrow \quad -13 V_1 + 10 V_2 = 0 \quad [3]$

Solving, we find that  $V = 80$  V, so that  $R_{TH} = V / 1 \text{ A} = 80 \Omega$ .

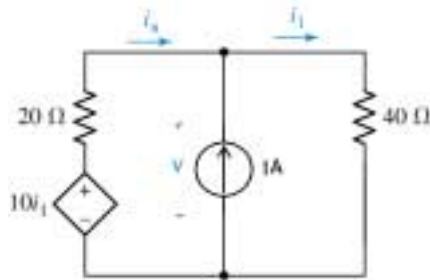
$$(b) P_{\max} = \frac{V_{TH}^2}{4 R_{TH}} = \frac{65^2}{4(80)} = 13.20 \text{ W}$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

50.

- (a) Replacing the resistor  $R_L$  with a 1-A source, we seek the voltage that develops across its terminals with the independent voltage source shorted:



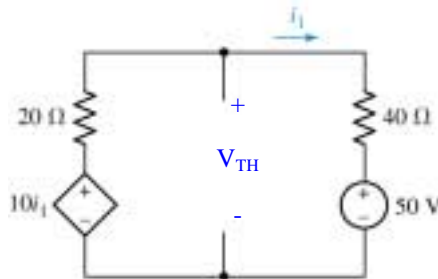
$$-10i_1 + 20i_x + 40i_1 = 0 \quad [1] \Rightarrow 30i_1 + 20i_x = 0 \quad [1]$$

$$\text{and } i_1 - i_x = 1 \quad [2] \Rightarrow i_1 - i_x = 1 \quad [2]$$

Solving,  $i_1 = 400 \text{ mA}$

$$\text{So } V = 40i_1 = 16 \text{ V and } R_{TH} = \frac{V}{1 \text{ A}} = 16 \Omega$$

- (b) Removing the resistor  $R_L$  from the original circuit, we seek the resulting open-circuit voltage:



$$0 = \frac{V_{TH} - 10i_1}{20} + \frac{V_{TH} - 50}{40} \quad [1]$$

$$\text{where } i_1 = \frac{V_{TH} - 50}{40}$$

$$\text{so [1] becomes } 0 = \frac{V_{TH}}{20} - \frac{1}{2} \left( \frac{V_{TH} - 50}{40} \right) + \left( \frac{V_{TH} - 50}{40} \right)$$

$$0 = \frac{V_{TH}}{20} + \frac{V_{TH} - 50}{80}$$

$$0 = 4V_{TH} + V_{TH} - 50$$

$$5V_{TH} = 50$$

$$\text{or } V_{TH} = 10 \text{ V}$$

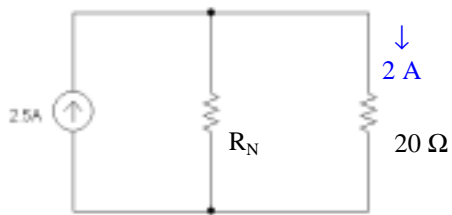
Thus, if  $R_L = R_{TH} = 16 \Omega$ ,

$$V_{R_L} = V_{TH} \frac{R_L}{R_L + R_{TH}} = \frac{V_{TH}}{2} = 5 \text{ V}$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

51.

(a)  $I_N = 2.5 \text{ A}$



$$20i^2 = 80$$

$$i = 2 \text{ A}$$

By current division,

$$2 = 2.5 \frac{R_N}{R_N + 20}$$

Solving,  $R_N = R_{TH} = 80 \Omega$

Thus,  $V_{TH} = V_{OC} = 2.5 \times 80 = 200 \text{ V}$

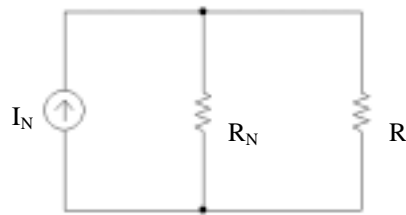
(b)  $P_{\max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = \frac{200^2}{4 \times 80} = 125 \text{ W}$

(c)  $R_L = R_{TH} = 80 \Omega$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

52.



10 W to  $250\Omega$  corresp to 200 mA.

20 W to  $80\Omega$  corresp to 500 mA.

By Voltage  $\div$ ,  $I_R = I_N \frac{R_N}{R + R_N}$

So  $0.2 = I_N \frac{R_N}{250 + R_N}$  [1]

$0.5 = I_N \frac{R_N}{80 + R_N}$  [2]

Solving,  $I_N = 1.7 \text{ A}$  and  $R_N = 33.33\Omega$

(a) If  $v_L i_L$  is a maximum,

$R_L = R_N = 33.33\Omega$

$i_L = 1.7 \times \frac{33.33}{33.33 + 33.33} = 850 \text{ mA}$

$v_L = 33.33 i_L = 28.33 \text{ V}$

(b) If  $v_L$  is a maximum

$V_L = I_N (R_N \parallel R_L)$

So  $v_L$  is a maximum when  $R_N \parallel R_L$  is a maximum, which occurs at  $R_L = \infty$ .

Then  $i_L = 0$  and  $v_L = 1.7 \times R_N = 56.66 \text{ V}$

(c) If  $i_L$  is a maximum

$i_L = I_N \frac{R_N}{R_N + R_L}$ ; max when  $R_L = 0\Omega$

So  $i_L = 1.7 \text{ A}$

$v_L = 0 \text{ V}$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

53. There is no conflict with our derivation concerning maximum power. While a dead short across the battery terminals will indeed result in maximum current draw from the battery, and power is indeed proportional to  $i^2$ , the power delivered to the load is  $i^2 R_{LOAD} = i^2(0) = 0$  watts. This is the *minimum*, not the maximum, power that the battery can deliver to a load.

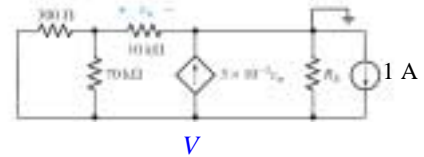


## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

54. Remove  $R_E$ :  $R_{TH} = R_E \parallel R_{in}$

bottom node:  $1 - 3 \times 10^{-3} v_\pi = \frac{V - v_\pi}{300} + \frac{V - v_\pi}{70 \times 10^3}$  [1]

at other node:  $0 = \frac{v_\pi}{10 \times 10^3} + \frac{v_\pi - V}{300} + \frac{v_\pi - V}{70 \times 10^3}$  [2]



Simplifying and collecting terms,

$$210 \times 10^5 = 70 \times 10^3 V + 300V + 63000 v_\pi - 70 \times 10^3 v_\pi - 300 v_\pi$$

$$\text{or } 70.3 \times 10^3 V - 7300 v_\pi = 210 \times 10^5 \quad [1]$$

$$0 = 2100 v_\pi + 70 \times 10^3 v_\pi - 70 \times 10^3 V + 300 v_\pi - 300V$$

$$\text{or } -69.7 \times 10^3 V + 72.4 \times 10^3 v_\pi = 0 \quad [2]$$

$$\text{solving, } V = 331.9V \quad \text{So } R_{TH} = R_E \parallel 331.9\Omega$$

Next, we determine  $v_{TH}$  using mesh analysis:

$$-v_s + 70.3 \times 10^3 i_1 - 70 \times 10^3 i_2 = 0 \quad [1]$$

$$80 \times 10^3 i_2 - 70 \times 10^3 i_1 + R_E i_3 = 0 \quad [2]$$

$$\text{and: } i_3 - i_2 = 3 \times 10^{-3} v_\pi \quad [3]$$

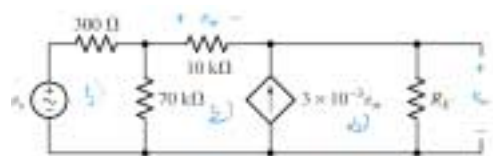
$$\text{or } i_3 - i_2 = 3 \times 10^{-3} (10 \times 10^3) i_2$$

$$\text{or } i_3 - i_2 = 30 i_2$$

or

$$-31 i_2 + i_3 = 0 \quad [3]$$

$$\text{Solving: } \begin{bmatrix} 70.3 \times 10^3 & -70 \times 10^3 & 0 \\ -70 \times 10^3 & 80 \times 10^3 & R_E \\ 0 & -31 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



We seek  $i_3$ :

$$i_3 = \frac{-21.7 \times 10^3 v_s}{7.24 \times 10^6 + 21.79 \times 10^3 R_E}$$

$$\text{So } V_{OC} = V_{TH} = R_E i_3 = \frac{-21.7 \times 10^3 R_E}{7.24 \times 10^6 + 21.79 \times 10^3 R_E} v_s$$

$$P_{8\Omega} = 8 \left[ \frac{V_{TH}}{R_{TH} + 8} \right]^2 = \left[ \frac{-21.7 \times 10^3 R_E}{7.24 \times 10^6 + 21.79 \times 10^3 R_E} \right]^2 \frac{8 v_s^2}{\left[ \frac{331.9 R_E}{331.9 + R_E} \right]^2}$$

$$= \frac{11.35 \times 10^6 (331.9 + R_E)^2}{(7.24 \times 10^6 + 21.79 \times 10^3 R_E)^2} v_s^2$$

This is maximized by setting  $R_E = \infty$ .

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

55. Thévenize the left-hand network, assigning the nodal voltage  $V_x$  at the free end of right-most 1-k $\Omega$  resistor.

A single nodal equation:  $40 \times 10^{-3} = \frac{V_x|_{oc}}{7 \times 10^3}$

So  $V_{TH} = V_x|_{oc} = 280 \text{ V}$

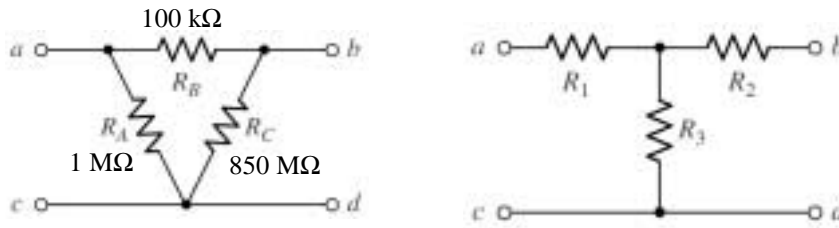
$R_{TH} = 1 \text{ k} + 7 \text{ k} = 8 \text{ k}\Omega$

Select  $R_1 = R_{TH} = 8 \text{ k}\Omega$ .



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

56.



$$D = R_A + R_B + R_C = 1 + 850 + 0.1 = 851.1 \times 10^6$$

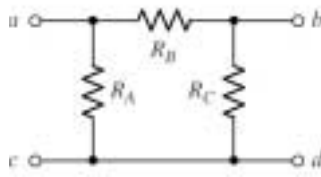
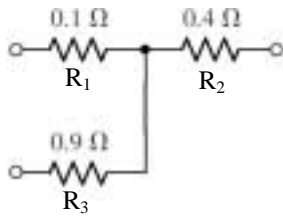
$$R_1 = \frac{R_A R_B}{D} = \frac{10^6 \times 10^5}{851.1 \times 10^6} = 117.5 \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_B R_C}{D} = \frac{10^5 \times 850 \times 10^6}{851.1 \times 10^6} = 99.87 k\Omega$$

$$R_3 = \frac{R_C R_A}{D} = \frac{850 \times 10^6 \times 10^6}{851.1 \times 10^6} = 998.7 k\Omega$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

57.



$$\begin{aligned} N &= R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 \\ &= 0.1 \times 0.4 + 0.4 \times 0.9 + 0.9 \times 0.1 \\ &= 0.49\ \Omega \end{aligned}$$

$$R_A = \frac{N}{R_2} = 1.225\ \Omega$$

$$R_B = \frac{N}{R_3} = 544.4\ \text{m}\Omega$$

$$R_C = \frac{N}{R_1} = 4.9\ \Omega$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

58.

$$\Delta_1 : 1 + 6 + 3 = 10 \Omega$$

$$\frac{6 \times 1}{10} = 0.6, \frac{6 \times 3}{10} = 1.8, \frac{3 \times 1}{10} = 0.3$$

$$\Delta_2 : 5 + 1 + 4 = 10 \Omega$$

$$\frac{5 \times 1}{10} = 0.5, \frac{1 \times 4}{10} = 0.4, \frac{5 \times 4}{10} = 2$$

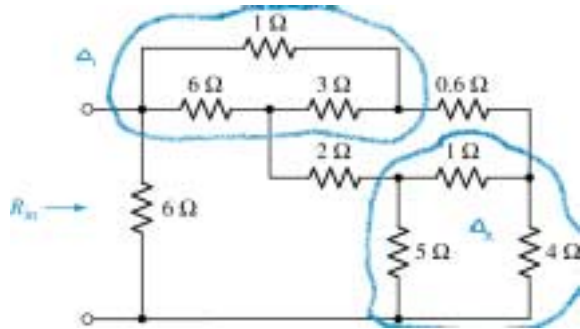
$$1.8 + 2 + 0.5 = 4.3 \Omega$$

$$0.3 + 0.6 + 0.4 = 1.3 \Omega$$

$$1.3 \parallel 4.3 = 0.9982 \Omega$$

$$0.9982 + 0.6 + 2 = 3.598 \Omega$$

$$3.598 \parallel 6 = \boxed{2.249 \Omega}$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

59.

$$6 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 6 = 36 \Omega^2$$

$$\frac{36}{6} = 6 \Omega, \quad \frac{36}{2} = 18 \Omega, \quad \frac{36}{3} = 12 \Omega$$

$$12 \parallel 4 = 3 \Omega, \quad 6 \parallel 12 \Omega = 4 \Omega$$

$$4 + 3 + 18 = 25 \Omega$$

$$3 \times \frac{18}{25} = 2.16 \Omega$$

$$4 \times \frac{18}{25} = 2.88 \Omega$$

$$4 \times \frac{3}{25} = 0.48 \Omega$$

$$9.48 \times 2.16 + 9.48 \times 2.88 + 2.88 \times 2.16 = 54 \Omega^2$$

$$\frac{54}{2.88} = 18.75 \Omega, \quad \frac{54}{9.48} = 5.696 \Omega$$

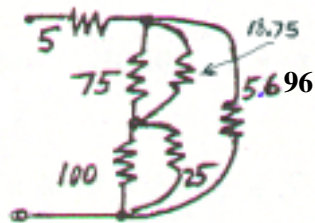
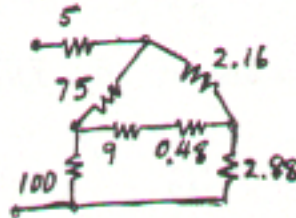
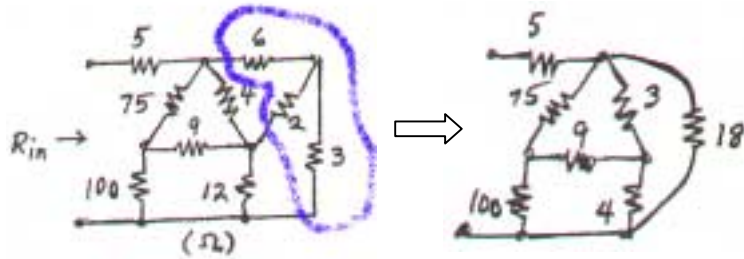
$$\frac{54}{2.16} = 25 \Omega$$

$$75 \parallel 18.75 = 15 \Omega$$

$$100 \parallel 25 = 20 \Omega$$

$$(15 + 20) \parallel 5.696 = 4.899 \Omega$$

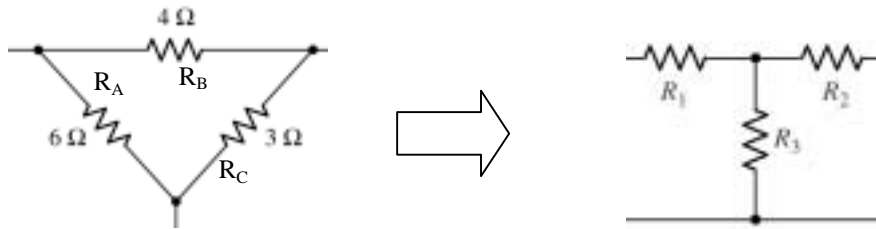
$$\therefore R_{in} = 5 + 4.899 = \boxed{9.899 \Omega}$$





## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

60. We begin by converting the  $\Delta$ -connected network consisting of the 4-, 6-, and 3- $\Omega$  resistors to an equivalent Y-connected network:



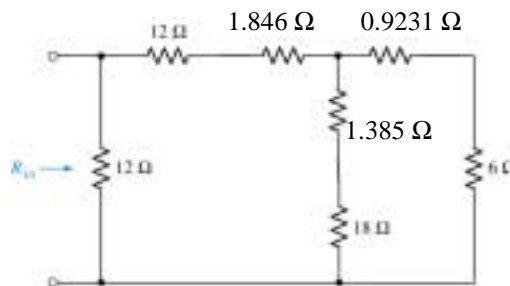
$$D = 6 + 4 + 3 = 13 \Omega$$

$$R_1 = \frac{R_A R_B}{D} = \frac{6 \times 4}{13} = 1.846 \Omega$$

$$R_2 = \frac{R_B R_C}{D} = \frac{4 \times 3}{13} = 923.1 \text{ m}\Omega$$

$$R_3 = \frac{R_C R_A}{D} = \frac{3 \times 6}{13} = 1.385 \Omega$$

Then network becomes:



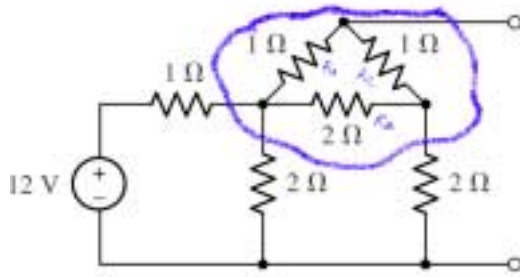
Then we may write

$$R_{in} = 12 \parallel [1.846 + (1.385 \parallel 6.9231)]$$

$$= \boxed{7.347 \Omega}$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

61.

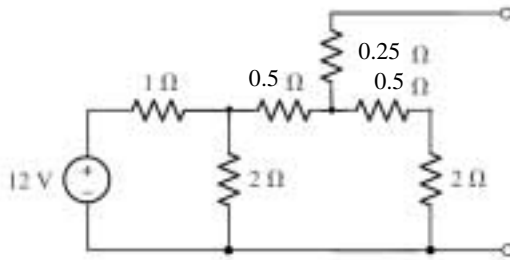


$$1 + 1 + 2 = 4\Omega$$

$$R_1 = \frac{1 \times 2}{4} = \frac{1}{2}\Omega$$

$$R_2 = \frac{2 \times 1}{4} = \frac{1}{2}\Omega$$

$$R_3 = \frac{1 \times 1}{4} = 0.25\Omega$$



Next, we convert the Y-connected network on the left to a  $\Delta$ -connected network:

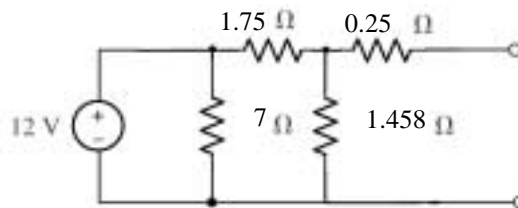
$$1 \times 0.5 + 0.5 \times 2 + 2 \times 1 = 3.5\Omega^2$$

$$R_A = \frac{3.5}{0.5} = 7\Omega$$

$$R_B = \frac{3.5}{2} = 1.75\Omega$$

$$R_C = \frac{3.5}{1} = 3.5\Omega$$

After this procedure, we have a 3.5- $\Omega$  resistor in parallel with the 2.5- $\Omega$  resistor. Replacing them with a 1.458- $\Omega$  resistor, we may redraw the circuit:



This circuit may be easily analysed to find:

$$V_{oc} = \frac{12 \times 1.458}{1.75 + 1.458} = 5.454\text{ V}$$

$$R_{TH} = 0.25 + 1.458 \parallel 1.75 = 1.045\Omega$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

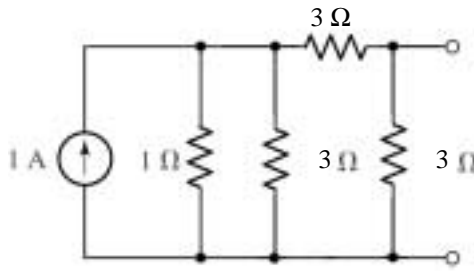
62. We begin by converting the Y-network to a  $\Delta$ -connected network:

$$N = 1.1 + 1.1 + 1.1 = 3\Omega^2$$

$$R_A = \frac{3}{1} = 3\Omega$$

$$R_B = \frac{3}{1} = 3\Omega$$

$$R_C = \frac{3}{1} = 3\Omega$$



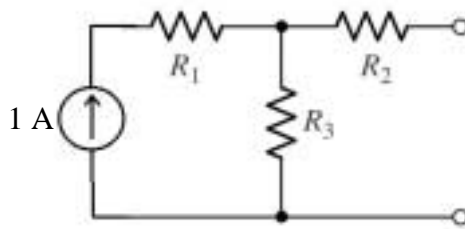
Next, we note that  $1\parallel 3 = 0.75\Omega$ , and hence have a simple  $\Delta$ -network. This is easily converted to a Y-connected network:

$$0.75 + 3 + 3 = 6.75\Omega$$

$$R_1 = \frac{0.75 \times 3}{6.75} = 0.3333\Omega$$

$$R_2 = \frac{3 \times 3}{6.75} = 1.333\Omega$$

$$R_3 = \frac{3 \times 0.75}{6.75} = 0.3333\Omega$$



Analysing this final circuit,

$$R_N = 1.333 + 0.3333$$

$$= 1.667\Omega$$

$$I_N = I_{SC} = 1 \times \frac{1/3}{1/3 + 1 + 1/3}$$

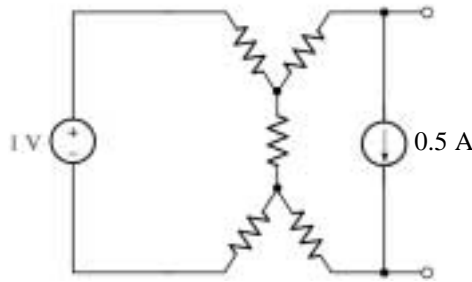
$$= \frac{1}{1 + 3 + 1} = \frac{1}{5}$$

$$= 0.2\text{ A}$$

$$= 200\text{ mA}$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

63. Since 1 V appears across the resistor associated with  $I_1$ , we know that  $I_1 = 1 \text{ V} / 10 \Omega = 100 \text{ mA}$ . From the perspective of the open terminals, the  $10\text{-}\Omega$  resistor in parallel with the voltage source has no influence if we replace the “dependent” source with a fixed 0.5-A source:



Then, we may write:

$$-1 + (10 + 10 + 10) i_a - 10 (0.5) = 0$$

so that  $i_a = 200 \text{ mA}$ .

We next find that  $V_{TH} = V_{ab} = 10(-0.5) + 10(i_a - 0.5) + 10(-0.5) = -13 \text{ V}$ .

To determine  $R_{TH}$ , we first recognise that with the 1-V source shorted,  $I_1 = 0$  and hence the dependent current source is dead. Thus, we may write  $R_{TH}$  from inspection:

$$R_{TH} = 10 + 10 + 10 \parallel 20 = 26.67 \Omega.$$



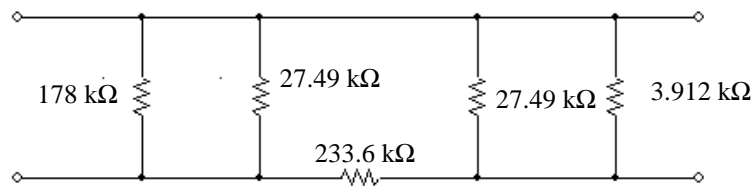
## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

64. (a) We begin by splitting the 1-k $\Omega$  resistor into two 500- $\Omega$  resistors in series. We then have two related Y-connected networks, each with a 500- $\Omega$  resistor as a leg. Converting those networks into  $\Delta$ -connected networks,

$$\Sigma = (17)(10) + (1)(4) + (4)(17) = 89 \times 106 \Omega^2$$

$$89/0.5 = 178 \text{ k}\Omega; \quad 89/17 = 5.236 \text{ k}\Omega; \quad 89/4 = 22.25 \text{ k}\Omega$$

Following this conversion, we find that we have two 5.235 k $\Omega$  resistors in parallel, and a 178-k $\Omega$  resistor in parallel with the 4-k $\Omega$  resistor. Noting that  $5.235 \text{ k} \parallel 5.235 \text{ k} = 2.618 \text{ k}\Omega$  and  $178 \text{ k} \parallel 4 \text{ k} = 3.912 \text{ k}\Omega$ , we may draw the circuit as:



We next attack the Y-connected network in the center:

$$\Sigma = (22.25)(22.25) + (22.25)(2.618) + (2.618)(22.25) = 611.6 \times 106 \Omega^2$$

$$611.6/22.25 = 27.49 \text{ k}\Omega; \quad 611.6/2.618 = 233.6 \text{ k}\Omega$$

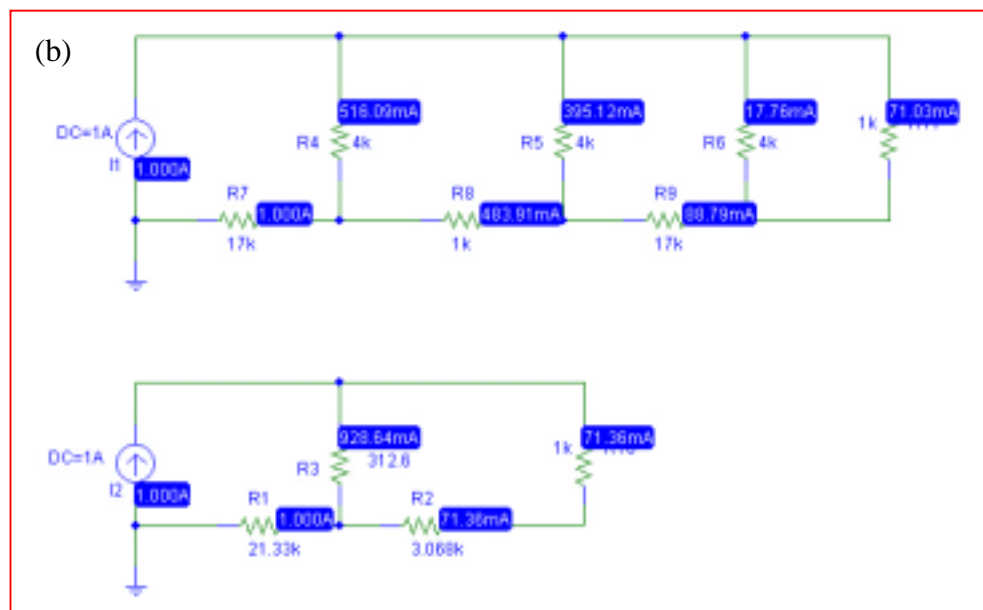
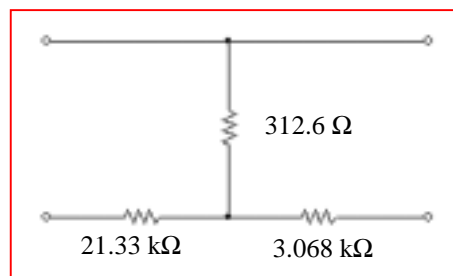
Noting that  $178 \text{ k} \parallel 27.49 \text{ k} = 23.81 \text{ k}\Omega$  and  $27.49 \parallel 3.912 = 3.425 \text{ k}\Omega$ , we are left with a simple  $\Delta$ -connected network. To convert this to the requested Y-network,

$$\Sigma = 23.81 + 233.6 + 3.425 = 260.8 \text{ k}\Omega$$

$$(23.81)(233.6)/260.8 = 21.33 \text{ k}\Omega$$

$$(233.6)(3.425)/260.8 = 3.068 \text{ k}\Omega$$

$$(3.425)(23.81)/260.8 = 312.6 \Omega$$



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

65. (a) Although this network may be simplified, it is not possible to replace it with a three-resistor equivalent.
- (b) See (a).



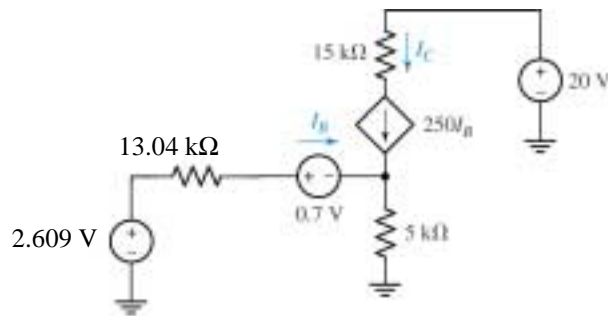
## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

66. First, replace network to left of the 0.7-V source with its Thévenin equivalent:

$$V_{TH} = 20 \times \frac{15}{100 + 15} = 2.609 \text{ V}$$

$$R_{TH} = 100k \parallel 15k = 13.04k\Omega$$

Redraw:



Analysing the new circuit to find  $I_B$ , we note that  $I_C = 250 I_B$ :

$$-2.609 + 13.04 \times 10^3 I_B + 0.7 + 5000(I_B + 250I_B) = 0$$

$$I_B = \frac{2.609 - 0.7}{13.04 \times 10^3 + 251 \times 5000} = 1.505 \mu\text{A}$$

$$I_C = 250I_B = 3.764 \times 10^{-4} \text{ A}$$

$$= \boxed{376.4 \mu\text{A}}$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

67. (a) Define a nodal voltage  $V_1$  at the top of the current source  $I_S$ , and a nodal voltage  $V_2$  at the top of the load resistor  $R_L$ . Since the load resistor can safely dissipate 1 W, and we know that

$$P_{R_L} = \frac{V_2^2}{1000}$$

then  $V_2|_{\max} = 31.62 \text{ V}$ . This corresponds to a load resistor (and hence lamp) current of 32.62 mA, so we may treat the lamp as a  $10.6\text{-}\Omega$  resistor.

Proceeding with nodal analysis, we may write:

$$I_S = V_1/200 + (V_1 - 5 V_x)/200 \quad [1]$$

$$0 = V_2/1000 + (V_2 - 5 V_x)/10.6 \quad [2]$$

$$V_x = V_1 - 5 V_x \quad \text{or} \quad V_x = V_1/6 \quad [3]$$

Substituting Eq. [3] into Eqs. [1] and [2], we find that

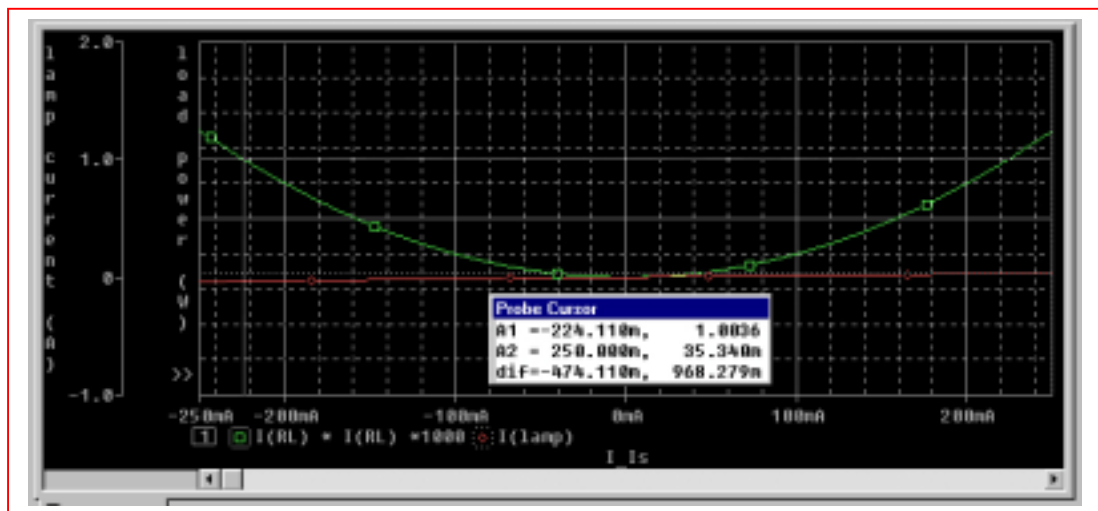
$$7 V_1 = 1200 I_S \quad [1]$$

$$-5000 V_1 + 6063.6 V_2 = 0 \quad [2]$$

Substituting  $V_2|_{\max} = 31.62 \text{ V}$  into Eq. [2] then yields  $V_1 = 38.35 \text{ V}$ , so that

$$I_S|_{\max} = (7)(38.35)/1200 = 223.7 \text{ mA}.$$

- (b) PSpice verification.



The lamp current does not exceed 36 mA in the range of operation allowed (*i.e.* a load power of  $< 1 \text{ W}$ .) The simulation result shows that the load will dissipate slightly more than 1 W for a source current magnitude of 224 mA, as predicted by hand analysis.



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

68. Short out all but the source operating at  $10^4$  rad/s, and define three clockwise mesh currents  $i_1$ ,  $i_2$ , and  $i_3$  starting with the left-most mesh. Then

$$608 i_1 - 300 i_2 = 3.5 \cos 10^4 t \quad [1]$$

$$-300 i_1 + 316 i_2 - 8 i_3 = 0 \quad [2]$$

$$-8 i_2 + 322 i_3 = 0 \quad [3]$$

Solving, we find that  $i_1(t) = 10.84 \cos 10^4 t$  mA

$$i_2(t) = 10.29 \cos 10^4 t \text{ mA}$$

$$i_3(t) = 255.7 \cos 10^4 t \mu\text{A}$$

Next, short out all but the  $7 \sin 200t$  V source, and define three clockwise mesh currents  $i_a$ ,  $i_b$ , and  $i_c$  starting with the left-most mesh. Then

$$608 i_a - 300 i_b = -7 \sin 200t \quad [1]$$

$$-300 i_a + 316 i_b - 8 i_c = 7 \sin 200t \quad [2]$$

$$-8 i_b + 322 i_c = 0 \quad [3]$$

Solving, we find that  $i_a(t) = -1.084 \sin 200t$  mA

$$i_b(t) = 21.14 \sin 200t \text{ mA}$$

$$i_c(t) = 525.1 \sin 200t \mu\text{A}$$

Next, short out all but the source operating at  $10^3$  rad/s, and define three clockwise mesh currents  $i_A$ ,  $i_B$ , and  $i_C$  starting with the left-most mesh. Then

$$608 i_A - 300 i_B = 0 \quad [1]$$

$$-300 i_A + 316 i_B - 8 i_C = 0 \quad [2]$$

$$-8 i_B + 322 i_C = -8 \cos 10^4 t \quad [3]$$

Solving, we find that  $i_A(t) = -584.5 \cos 10^3 t$   $\mu\text{A}$

$$i_B(t) = -1.185 \cos 10^3 t \text{ mA}$$

$$i_C(t) = -24.87 \cos 10^3 t \text{ mA}$$

We may now compute the power delivered to each of the three  $8\text{-}\Omega$  speakers:

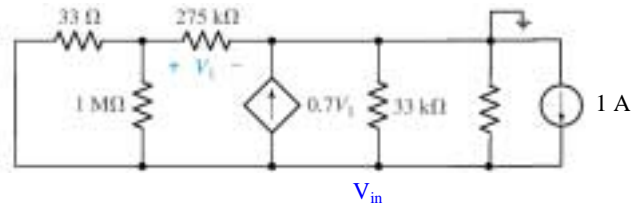
$$p_1 = 8[i_1 + i_a + i_A]^2 = 8[10.84 \times 10^{-3} \cos 10^4 t - 1.084 \times 10^{-3} \sin 200t - 584.5 \times 10^{-6} \cos 10^3 t]^2$$

$$p_2 = 8[i_2 + i_b + i_B]^2 = 8[10.29 \times 10^{-3} \cos 10^4 t + 21.14 \times 10^{-3} \sin 200t - 1.185 \times 10^{-3} \cos 10^3 t]^2$$

$$p_3 = 8[i_3 + i_c + i_C]^2 = 8[255.7 \times 10^{-6} \cos 10^4 t + 525.1 \times 10^{-6} \sin 200t - 24.87 \times 10^{-3} \cos 10^3 t]^2$$

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

69. Replacing the DMM with a possible Norton equivalent (a 1-M $\Omega$  resistor in parallel with a 1-A source):



We begin by noting that  $33\ \Omega \parallel 1\ \text{M}\Omega \approx 33\ \Omega$ . Then,

$$0 = (V_1 - V_{in})/33 + V_1/275 \times 10^3 \quad [1]$$

and

$$1 - 0.7 V_1 = V_{in}/10^6 + V_{in}/33 \times 10^3 + (V_{in} - V_1)/33 \quad [2]$$

Simplifying and collecting terms,

$$(275 \times 10^3 + 33) V_1 - 275 \times 10^3 V_{in} = 0 \quad [1]$$

$$22.1 V_1 + 1.001 V_{in} = 33 \quad [2]$$

Solving, we find that  $V_{in} = 1.429\ \text{V}$ ; in other words, the DMM sees 1.429 V across its terminals in response to the known current of 1 A it's supplying. It therefore thinks that it is connected to a resistance of 1.429  $\Omega$ .



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

70. We know that the resistor R is absorbing maximum power. We might be tempted to say that the resistance of the cylinder is therefore  $10\ \Omega$ , but this is wrong: The larger we make the cylinder resistance, the smaller the power delivery to R:

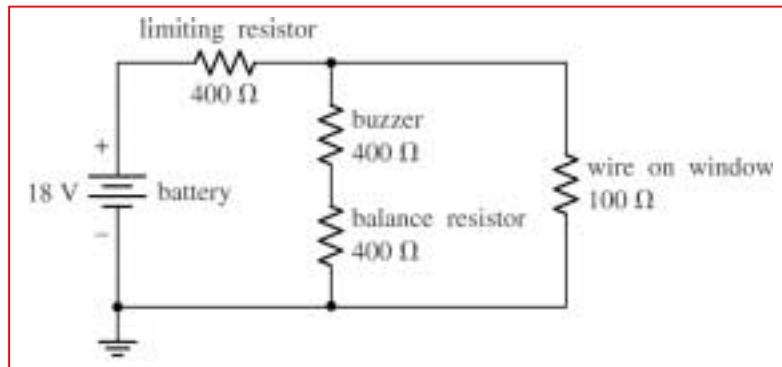
$$P_R = 10 i^2 = 10 \left[ \frac{120}{R_{cylinder} + 10} \right]^2$$

Thus, if we are in fact delivering the maximum possible power to the resistor from the 120-V source, the resistance of the cylinder must be zero.

This corresponds to a temperature of absolute zero using the equation given.

## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

71. We note that the buzzer draws 15 mA at 6 V, so that it may be modeled as a 400- $\Omega$  resistor. One possible solution of many, then, is:

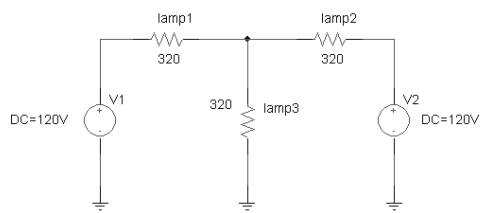


Note: construct the 18-V source from 12 1.5-V batteries in series, and the two 400- $\Omega$  resistors can be fabricated by soldering 400 1- $\Omega$  resistors in series, although there's probably a much better alternative...

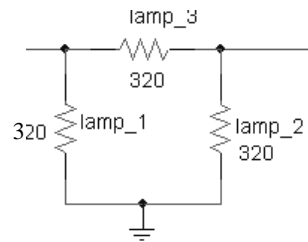


## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

72. To solve this problem, we need to assume that “45 W” is a designation that applies when 120 Vac is applied directly to a particular lamp. This corresponds to a current draw of 375 mA, or a light bulb resistance of  $120 / 0.375 = 320 \, \Omega$ .



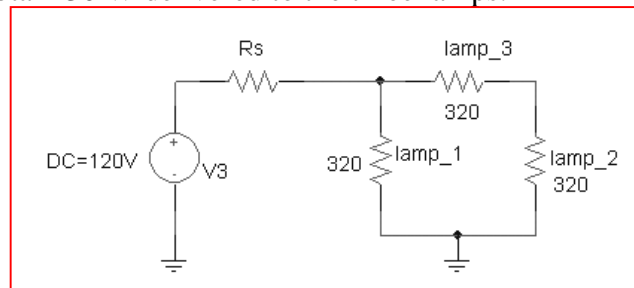
*Original wiring scheme*



*New wiring scheme*

In the original wiring scheme, Lamps 1 & 2 draw  $(40)^2 / 320 = 5 \, \text{W}$  of power each, and Lamp 3 draws  $(80)^2 / 320 = 20 \, \text{W}$  of power. Therefore, none of the lamps is running at its maximum rating of 45 W. We require a circuit which will deliver the same intensity after the lamps are reconnected in a  $\Delta$  configuration. Thus, we need a total of 30 W from the new network of lamps.

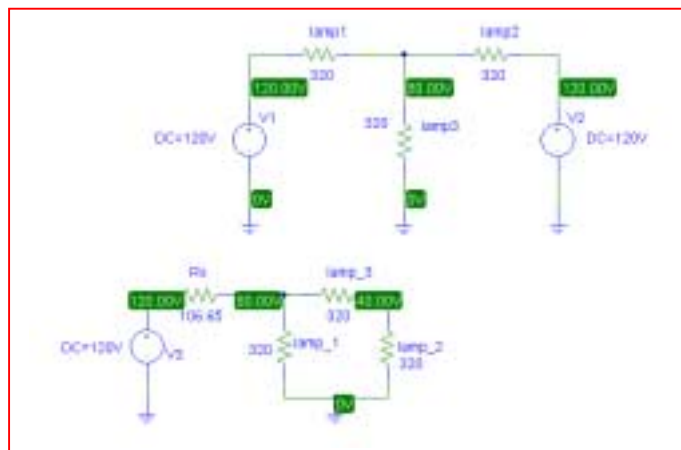
There are several ways to accomplish this, but the simplest may be to just use one 120-Vac source connected to the left port in series with a resistor whose value is chosen to obtain 30 W delivered to the three lamps.



In other words,

$$\frac{\left[120 \frac{213.3}{R_s + 213.3}\right]^2}{320} + 2 \frac{\left[60 \frac{213.3}{R_s + 213.3}\right]^2}{320} = 30$$

Solving, we find that we require  $R_s = 106.65 \, \Omega$  as confirmed by the PSpice simulation below, which shows that both wiring configurations lead to one lamp with 80-V across it, and two lamps with 40 V across each.



## CHAPTER FIVE SOLUTIONS

73.

- Maximum current rating for the LED is 35 mA.
- Its resistance can vary between 47 and 117  $\Omega$ .
- A 9-V battery must be used as a power source.
- Only standard resistance values may be used.

One possible current-limiting scheme is to connect a 9-V battery in series with a resistor  $R_{\text{limiting}}$  and in series with the LED.

From KVL,

$$I_{\text{LED}} = \frac{9}{R_{\text{limiting}} + R_{\text{LED}}}$$

The maximum value of this current will occur at the minimum LED resistance, 47  $\Omega$ .

Thus, we solve

$$35 \times 10^{-3} = \frac{9}{R_{\text{limiting}} + 47}$$

to obtain  $R_{\text{limiting}} \geq 210.1 \Omega$  to ensure an LED current of less than 35 mA. This is not a standard resistor value, however, so we select

$$R_{\text{limiting}} = 220 \Omega.$$



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

1. The first step is to perform a simple source transformation, so that a 0.15-V source in series with a 150- $\Omega$  resistor is connected to the inverting pin of the ideal op amp.

$$\text{Then, } v_{\text{out}} = - \frac{2200}{150}(0.15) = \boxed{-2.2 \text{ V}}$$

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

2. In order to deliver 150 mW to the 10-k $\Omega$  resistor, we need  $v_{out} = \sqrt{(0.15)(10 \times 10^3)} = 38.73$  V. Writing a nodal equation at the inverting input, we find

$$0 = \frac{5}{R} + \frac{5 - v_{out}}{1000}$$

Using  $v_{out} = 38.73$ , we find that  $R = 148.2 \Omega$ .



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

3. Since the  $670\text{-}\Omega$  switch requires  $100\text{ mA}$  to activate, the voltage delivered to it by our op amp circuit must be  $(670)(0.1) = 67\text{ V}$ . The microphone acts as the input to the circuit, and provides  $0.5\text{ V}$ . Thus, an amplifier circuit having a gain  $= 67/0.5 = 134$  is required.

One possible solution of many: a non-inverting op amp circuit with the microphone connected to the non-inverting input terminal, the switch connected between the op amp output pin and ground, a feedback resistor  $R_f = 133\text{ }\Omega$ , and a resistor  $R_1 = 1\text{ }\Omega$ .

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

4. We begin by labeling the nodal voltages  $v_-$  and  $v_+$  at the inverting and non-inverting input terminals, respectively. Since no current can flow into the non-inverting input, no current flows through the  $40\text{-k}\Omega$  resistor; hence,  $v_+ = 0$ . Therefore, we know that  $v_- = 0$  as well.

Writing a single nodal equation at the non-inverting input then leads to

$$0 = \frac{(v_- - v_S)}{100} + \frac{(v_- - v_{\text{out}})}{22000}$$

or

$$0 = \frac{-v_S}{100} + \frac{-v_{\text{out}}}{22000}$$

Solving,

$$v_{\text{out}} = -220 v_S$$



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

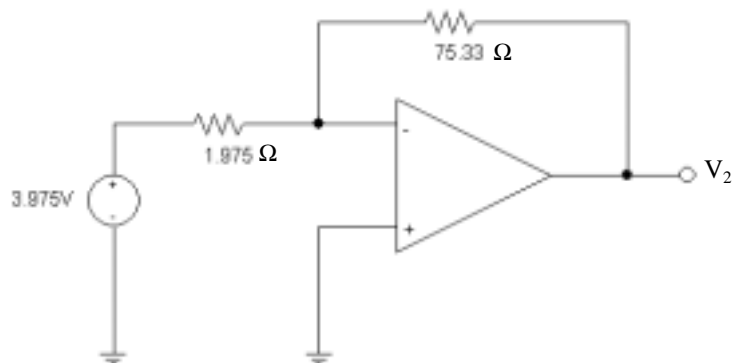
5. We first label the nodal voltage at the output pin  $V_o$ . Then, writing a single nodal equation at the inverting input terminal of the op amp,

$$0 = \frac{4 - 3}{1000} + \frac{4 - V_o}{17000}$$

Solving, we find that  $V_o = 21$  V. Since no current can flow through the  $300\text{-k}\Omega$  resistor,  $V_1 = 21$  as well.

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

6. A source transformation and some series combinations are well worthwhile prior to launching into the analysis. With  $5\text{ k}\Omega \parallel 3\text{ k}\Omega = 1.875\text{ k}\Omega$  and  $(1\text{ mA})(1.875\text{ k}\Omega) = 1.875\text{ V}$ , we may redraw the circuit as



This is now a simple inverting amplifier with gain  $-R_f/R_1 = -75.33/1.875 = -38.14$ .

Thus,  $V_2 = -38.14(3.975) = -151.6\text{ V}$ .



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

7. This is a simple inverting amplifier, so we may write

$$v_{\text{out}} = \frac{-2000}{1000}(2 + 2 \sin 3t) = -4(1 + \sin 3t) \text{ V}$$

$$v_{\text{out}}(t = 3 \text{ s}) = -5.648 \text{ V.}$$

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

8. We first combine the  $2\text{ M}\Omega$  and  $700\text{ k}\Omega$  resistors into a  $518.5\text{ k}\Omega$  resistor.

We are left with a simple non-inverting amplifier having a gain of  $1 + 518.5/250 = 3.074$ . Thus,

$$v_{\text{out}} = (3.074) v_{\text{in}} = 18 \text{ so } v_{\text{in}} = 5.856 \text{ V.}$$



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

9. This is a simple non-inverting amplifier circuit, and so it has a gain of  $1 + R_f/R_1$ . We want  $v_{\text{out}} = 23.7 \cos 500t$  V when the input is  $0.1 \cos 500t$  V, so a gain of  $23.7/0.1 = 237$  is required.
- One possible solution of many:  $R_f = 236 \text{ k}\Omega$  and  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ .

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

10. Define a nodal voltage  $V_-$  at the inverting input, and a nodal voltage  $V_+$  at the non-inverting input. Then,

$$\text{At the non-inverting input: } -3 \times 10^{-6} = \frac{V_+}{1.5 \times 10^6} \quad [1]$$

Thus,  $V_+ = -4.5 \text{ V}$ , and we therefore also know that  $V_- = -4.5 \text{ V}$ .

$$\text{At the inverting input: } 0 = \frac{V_-}{R_6} + \frac{V_- - V_{\text{out}}}{R_7} \quad [2]$$

Solving and making use of the fact that  $V_- = -4.5 \text{ V}$ ,

$$v_{\text{out}} = -\frac{R_7}{R_6}(4.5) - 4.5 = -4.5 \left( \frac{R_7}{R_6} + 1 \right) \text{ V}$$



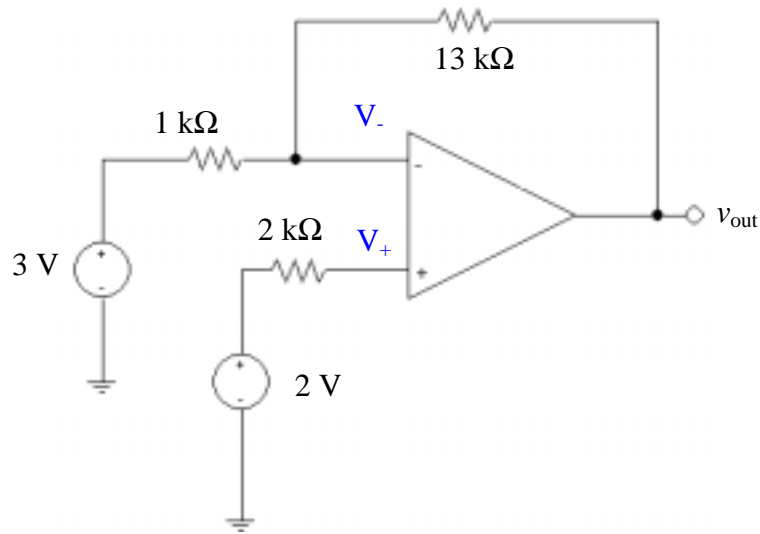
## CHAPTER SIX SOLUTIONS

11. (a) **B** must be the non-inverting input: that yields a gain of  $1 + 70/10 = 8$  and an output of 8 V for a 1-V input.
- (b)  $R_1 = \infty$ ,  $R_A = 0$ . We need a gain of  $20/10 = 2$ , so choose  $R_2 = R_B = 1\ \Omega$ .
- (c) **A** is the inverting input since it has the feedback connection to the output pin.

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

12. It is probably best to first perform a simple source transformation:

$$(1 \text{ mA})(2 \text{ k}\Omega) = 2 \text{ V}.$$



Since no current can flow into the non-inverting input pin, we know that  $V_+ = 2 \text{ V}$ , and therefore also that  $V_- = 2 \text{ V}$ . A single nodal equation at the inverting input yields:

$$0 = \frac{2 - 3}{1000} + \frac{2 - v_{out}}{13000}$$

which yields  $v_{out} = -11 \text{ V}$ .

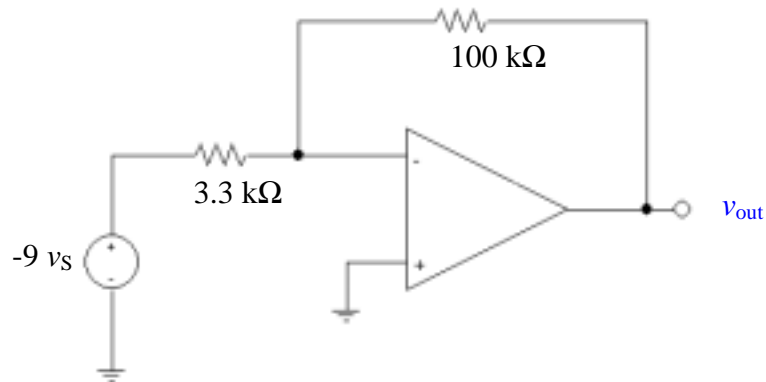


## CHAPTER SIX SOLUTIONS

13. We begin by find the Thévenin equivalent to the left of the op amp:

$$V_{th} = -3.3(3) v_{\pi} = -9.9 v_{\pi} = -9.9 \frac{1000 v_s}{1100} = -9 v_s$$

$R_{th} = 3.3 \text{ k}\Omega$ , so we can redraw the circuit as:



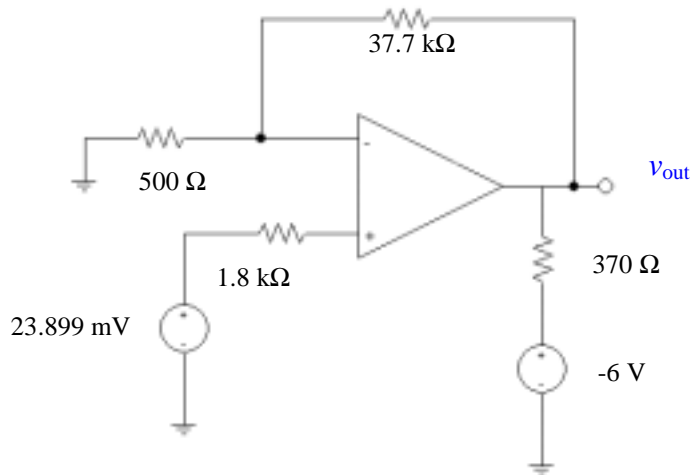
which is simply a classic inverting op amp circuit with gain of  $-100/3.3 = -30.3$ .

Thus,  $v_{out} = (-30.3)(-9 v_s) = 272.7 v_s$

For  $v_s = 5 \sin 3t \text{ mV}$ ,  $v_{out} = 1.364 \sin 3t \text{ V}$ , and  $v_{out}(0.25 \text{ s}) = 0.9298 \text{ V}$ .

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

14. We first combine the  $4.7\text{ M}\Omega$  and  $1.3\text{ k}\Omega$  resistors:  $4.7\text{ M}\Omega \parallel 1.3\text{ k}\Omega = 1.30\text{ k}\Omega$ . Next, a source transformation yields  $(3 \times 10^{-6})(1300) = 3.899\text{ mV}$  which appears in series with the  $20\text{ mV}$  source and the  $500\text{-}\Omega$  resistor. Thus, we may redraw the circuit as



Since no current flows through the  $1.8\text{ k}\Omega$  resistor,  $V_+ = 23.899\text{ mV}$  and hence  $V_- = 23.899\text{ mV}$  as well. A single nodal equation at the inverting input terminal yields

$$0 = \frac{23.899 \times 10^{-3}}{500} + \frac{23.899 \times 10^{-3} - v_{\text{out}}}{37.7 \times 10^3}$$

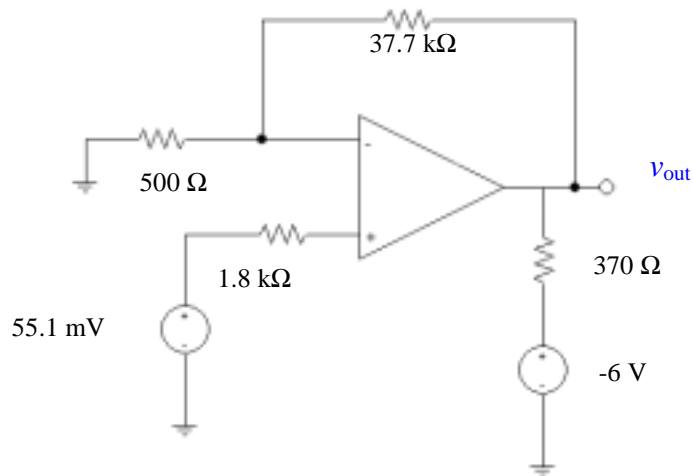
Solving,

$$v_{\text{out}} = 1.826\text{ V}$$



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

15. We first combine the  $4.7\text{ M}\Omega$  and  $1.3\text{ k}\Omega$  resistors:  $4.7\text{ M}\Omega \parallel 1.3\text{ k}\Omega = 1.30\text{ k}\Omega$ . Next, a source transformation yields  $(27 \times 10^{-6})(1300) = 35.1\text{ mV}$  which appears in series with the  $20\text{ mV}$  source and the  $500\text{-}\Omega$  resistor. Thus, we may redraw the circuit as



Since no current flows through the  $1.8\text{ k}\Omega$  resistor,  $V_+ = 55.1\text{ mV}$  and hence  $V_- = 55.1\text{ mV}$  as well. A single nodal equation at the inverting input terminal yields

$$0 = \frac{55.1 \times 10^{-3}}{500} + \frac{55.1 \times 10^{-3} - v_{\text{out}}}{37.7 \times 10^3}$$

Solving,

$$v_{\text{out}} = 4.21\text{ V}$$

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

16. The 3 mA source, 1 k $\Omega$  resistor and 20 k $\Omega$  resistor may be replaced with a -3 V source (“+” reference up) in series with a 21 k $\Omega$  resistor. No current flows through either 1 M $\Omega$  resistor, so that the voltage at each of the four input terminals is identically zero. Considering each op amp circuit separately,

$$v_{\text{out}}|_{\text{LEFTOPAMP}} = -(-3) \frac{100}{21} = 14.29 \text{ V}$$

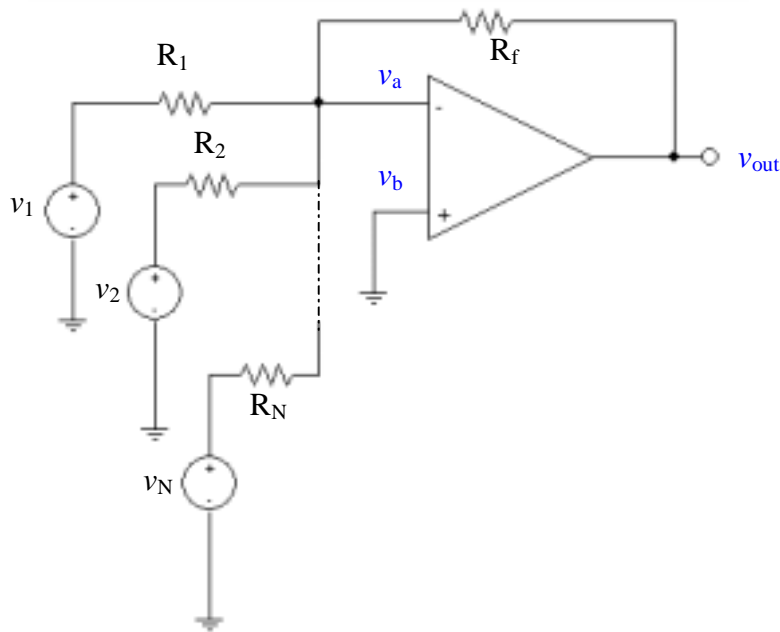
$$v_{\text{out}}|_{\text{RIGHTOPAMP}} = -(5) \frac{100}{10} = -50 \text{ V}$$

$$v_x = v_{\text{out}}|_{\text{LEFTOPAMP}} - v_{\text{out}}|_{\text{RIGHTOPAMP}} = 14.29 + 50 = \boxed{64.29 \text{ V.}}$$



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

17. A general summing amplifier with N input sources:



1.  $v_a = v_b = 0$
2. A single nodal equation at the inverting input leads to:

$$0 = \frac{v_a - v_{out}}{R_f} + \frac{v_a - v_1}{R_1} + \frac{v_a - v_2}{R_2} + \dots + \frac{v_a - v_N}{R_N}$$

Simplifying and making use of the fact that  $v_a = 0$ , we may write this as

$$\left[ -\frac{1}{R_f} \prod_{i=1}^N R_i \right] v_{out} = \frac{v_1}{R_1} \prod_{i=1}^N R_i + \frac{v_2}{R_2} \prod_{i=1}^N R_i + \dots + \frac{v_N}{R_N} \prod_{i=1}^N R_i$$

or simply

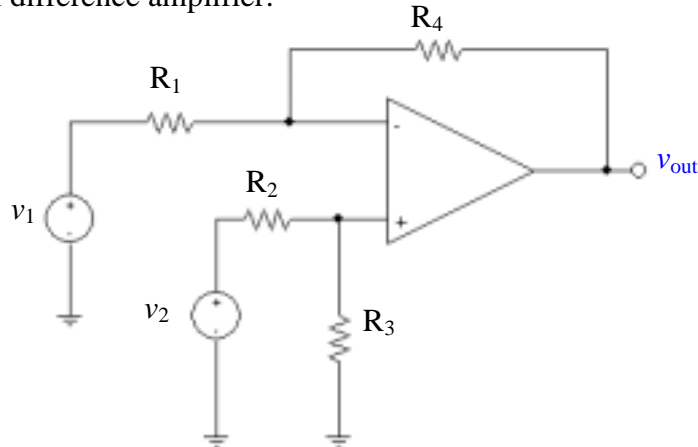
$$-\frac{v_{out}}{R_f} = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \dots + \frac{v_N}{R_N}$$

Thus,

$$v_{out} = -R_f \sum_{i=1}^N \frac{v_i}{R_i}$$

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

18. A general difference amplifier:



Writing a nodal equation at the inverting input,

$$0 = \frac{v_a - v_1}{R_1} + \frac{v_a - v_{out}}{R_f}$$

Writing a nodal equation at the non-inverting input,

$$0 = \frac{v_b}{R_3} + \frac{v_b - v_2}{R_2}$$

Simplifying and collecting terms, we may write

$$(R_f + R_1) v_a - R_1 v_{out} = R_f v_1 \quad [1]$$

$$(R_2 + R_3) v_b = R_3 v_2 \quad [2]$$

From Eqn. [2], we have  $v_b = \frac{R_3}{R_2 + R_3} v_2$

Since  $v_a = v_b$ , we can now rewrite Eqn. [1] as

$$-R_1 v_{out} = R_f v_1 - \frac{(R_f + R_1) R_3}{R_2 + R_3} v_2$$

and hence

$$v_{out} = -\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_3}{R_1} \left( \frac{R_f + R_1}{R_2 + R_3} \right) v_2$$



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

19. In total darkness, the CdS cell has a resistance of  $100\text{ k}\Omega$ , and at a light intensity  $L$  of 6 candela it has a resistance of  $6\text{ k}\Omega$ . Thus, we may compute the light-dependent resistance (assuming a linear response in the range between 0 and 6 candela) as  $R_{\text{CdS}} = -15L + 100\text{ }\Omega$ .

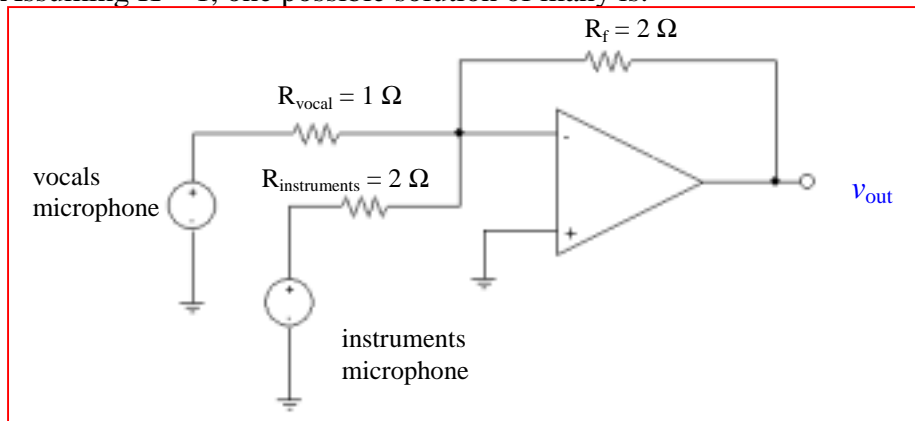
Our design requirement (using the standard inverting op amp circuit shown) is that the voltage across the load is  $1.5\text{ V}$  at 2 candela, and less than  $1.5\text{ V}$  for intensities greater than 2 candela.

$$\text{Thus, } v_{\text{out}}(2\text{ candela}) = -R_{\text{CdS}} v_s / R_1 = -70\text{ V}_s / R_1 = 1.5 \quad (R_1 \text{ in k}\Omega).$$

Pick  $R_1 = 10\text{ k}\Omega$ . Then  $v_s = -0.2143\text{ V}$ .

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

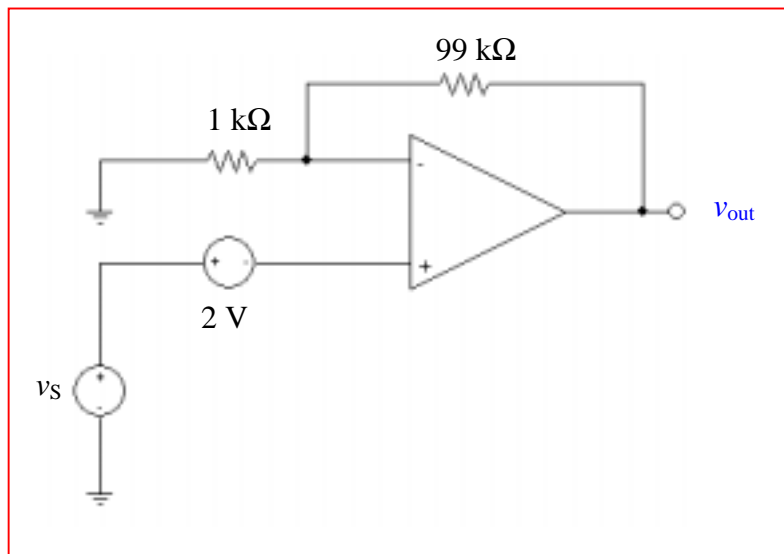
20. We want  $R_f / R_{\text{instrument}} = 2K$ , and  $R_f / R_{\text{vocal}} = 1K$ , where  $K$  is a constant not specified. Assuming  $K = 1$ , one possible solution of many is:





## CHAPTER SIX SOLUTIONS

21. One possible solution of many:



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

22.  $v_{\text{out}}$  of stage 1 is  $(1)(-20/2) = -10 \text{ V}$ .

$v_{\text{out}}$  of stage 2 is  $(-10)(-1000/10) = 1000 \text{ V}$

Note: in reality, the output voltage will be limited to a value less than that used to power the op amps.



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

23. We have a difference amplifier as the first amplifier stage, and a simple voltage follower as the second stage. We therefore need only to find the output voltage of the first stage:  $v_{out}$  will track this voltage. Using voltage division, then, we find that the voltage at the non-inverting input pin of the first op amp is

$$V_2 \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)$$

and this is the voltage at the inverting input terminal also. Thus, we may write a single nodal equation at the inverting input of the first op amp:

$$0 = \frac{1}{R_1} \left[ V_2 \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) - V_1 \right] + \frac{1}{R_f} \left[ V_2 \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) - V_{out|Stage1} \right]$$

which may be solved to obtain:

$$V_{out} = V_{out|Stage1} = \left( \frac{R_f}{R_1} + 1 \right) \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_2 - \frac{R_f}{R_1} V_1$$

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

24. The output of the first op amp stage may be found by realising that the voltage at the non-inverting input (and hence the voltage at the *inverting* input) is 0, and writing a single nodal equation at the inverting input:

$$0 = \frac{0 - V_{\text{out}}|_{\text{stage 1}}}{47} + \frac{0 - 2}{1} + \frac{0 - 3}{7} \text{ which leads to } V_{\text{out}}|_{\text{stage 1}} = -114.1 \text{ V}$$

This voltage appears at the input of the second op amp stage, which has a gain of  $-3/0.3 = 10$ . Thus, the output of the second op amp stage is  $-10(-114.1) = 1141 \text{ V}$ . This voltage appears at the input of the final op amp stage, which has a gain of  $-47/0.3 = -156.7$ .

Thus, the output of the circuit is  $-156.7(1141) = -178.8 \text{ kV}$ , which is completely and utterly ridiculous.



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

25. The output of the top left stage is  $-1(10/2) = -5$  V.  
The output of the middle left stage is  $-2(10/2) = -10$  V.  
The output of the bottom right stage is  $-3(10/2) = -15$  V.

These three voltages are the input to a summing amplifier such that

$$V_{\text{out}} = -\frac{R}{100}(-5-10-15) = 10$$

Solving, we find that  $R = 33.33 \Omega$ .

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

26. Stage 1 is configured as a voltage follower: the output voltage will be equal to the input voltage. Using voltage division, the voltage at the non-inverting input (and hence at the inverting input, as well), is

$$5 \frac{50}{100 + 50} = 1.667 \text{ V}$$

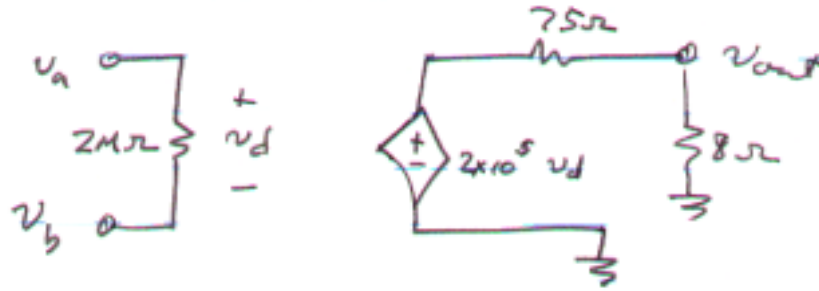
The second stage is wired as a voltage follower also, so

$$v_{\text{out}} = 1.667 \text{ V.}$$



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

27.



(a)  $v_a = v_b = 1 \text{ nV} \therefore v_d = 0$  and  $v_{\text{out}} = 0$ . Thus,  $P_{8\Omega} = 0 \text{ W}$ .

(b)  $v_a = 0, v_b = 1 \text{ nV} \therefore v_d = -1 \text{ nV}$

$$v_{\text{out}} = (2 \times 10^5)(-1 \times 10^{-9}) \frac{8}{75 + 8} = -19.28 \mu\text{V}. \text{ Thus, } P_{8\Omega} = \frac{v_{\text{out}}^2}{8} = 46.46 \text{ pW}.$$

(c)  $v_a = 2 \text{ pV}, v_b = 1 \text{ fV} \therefore v_d = 1.999 \text{ pV}$

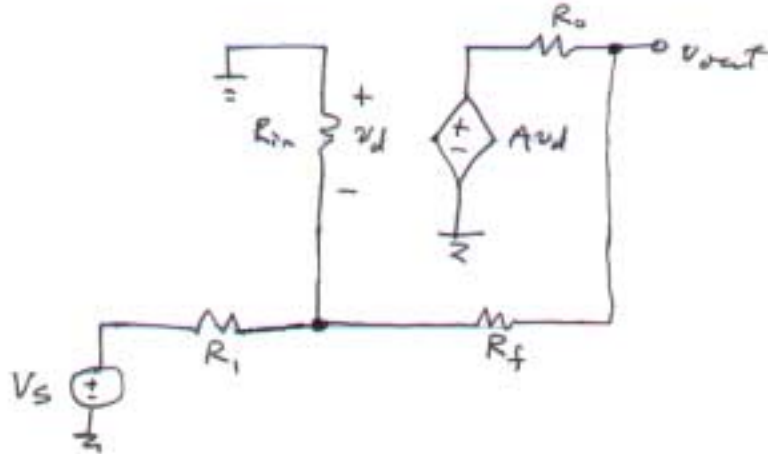
$$v_{\text{out}} = (2 \times 10^5)(1.999 \times 10^{-12}) \frac{8}{75 + 8} = 38.53 \text{ nV}. \text{ Thus, } P_{8\Omega} = \frac{v_{\text{out}}^2}{8} = 185.6 \text{ aW}.$$

(c)  $v_a = 50 \mu\text{V}, v_b = -4 \mu\text{V} \therefore v_d = 54 \mu\text{V}$

$$v_{\text{out}} = (2 \times 10^5)(54 \times 10^{-6}) \frac{8}{75 + 8} = 1.041 \text{ V}. \text{ Thus, } P_{8\Omega} = \frac{v_{\text{out}}^2}{8} = 135.5 \text{ mW}.$$

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

28.



Writing a nodal equation at the “ $-v_d$ ” node,

$$0 = \frac{-v_d}{R_{in}} + \frac{-v_d - V_S}{R_1} + \frac{-v_d - v_{out}}{R_f} \quad [1]$$

or  $(R_1 R_f + R_{in} R_f + R_{in} R_1) v_d + R_{in} R_1 v_{out} = -R_{in} R_f V_S \quad [1]$

Writing a nodal equation at the “ $v_{out}$ ” node,

$$0 = \frac{-v_{out} - A v_d}{R_o} + \frac{v_{out} - (-v_d)}{R_f} \quad [2]$$

Eqn. [2] can be rewritten as:

$$v_d = \frac{-(R_f + R_o)}{R_o - A R_f} v_{out} \quad [2]$$

so that Eqn. [1] becomes:

$$v_{out} = - \frac{R_{in} (A R_f - R_o) V_S}{A R_{in} R_1 + R_f R_1 + R_{in} R_f + R_{in} R_1 + R_o R_1 + R_o R_{in}}$$

where for this circuit,  $A = 10^6$ ,  $R_{in} = 10 \text{ T}\Omega$ ,  $R_o = 15 \Omega$ ,  $R_f = 1000 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = 270 \text{ k}\Omega$ .

(a)  $-3.704 \text{ mV}$ ;      (b)  $27.78 \text{ mV}$ ;      (c)  $-3.704 \text{ V}$ .



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

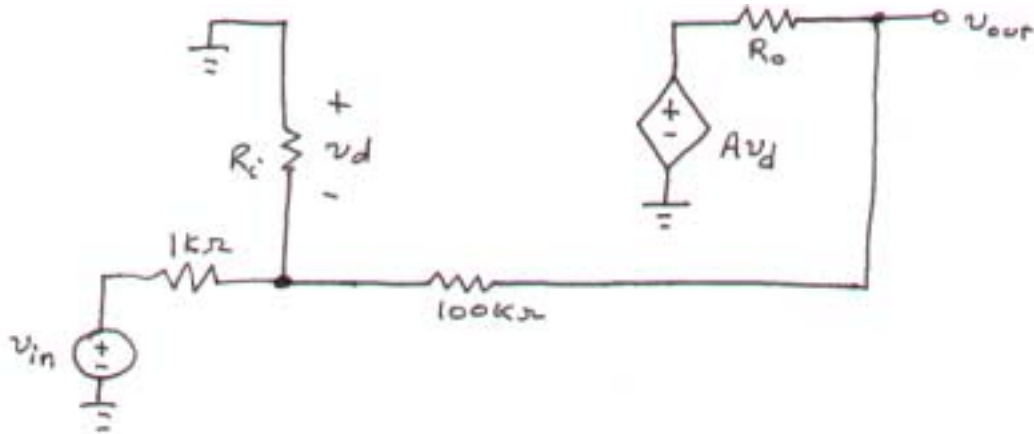
29.  $v_{\text{out}} = A v_d = A \frac{R_i}{16 + R_i} (80 \times 10^{15}) \sin 2t \text{ V}$

(a)  $A = 10^5$ ,  $R_i = 100 \text{ M}\Omega$ ,  $R_o$  value irrelevant.  $v_{\text{out}} = 8 \sin 2t \text{ nV}$

(b)  $A = 10^6$ ,  $R_i = 1 \text{ T}\Omega$ ,  $R_o$  value irrelevant.  $v_{\text{out}} = 80 \sin 2t \text{ nV}$

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

30.



(a) Find  $v_{out}/v_{in}$  if  $R_i = \infty$ ,  $R_o = 0$ , and  $A$  is finite.

The nodal equation at the inverting input is

$$0 = \frac{-v_d - v_{in}}{1} + \frac{-v_d - v_{out}}{100} \quad [1]$$

At the output, with  $R_o = 0$  we may write  $v_{out} = Av_d$  so  $v_d = v_{out}/A$ . Thus, Eqn. [1] becomes

$$0 = \frac{v_{out}}{A} + v_{in} + \frac{v_{out}}{100A} + \frac{v_{out}}{100}$$

from which we find

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{-100A}{101 + A} \quad [2]$$

(b) We want the value of  $A$  such that  $v_{out}/v_{in} = -99$  (the “ideal” value would be  $-100$  if  $A$  were infinite). Substituting into Eqn. [2], we find

$$A = 9999$$



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

31. (a)  $\delta = 0 \text{ V} \therefore v_d = 0$ , and  $P_{8\Omega} = 0 \text{ W}$ .

(b)  $\delta = 1 \text{ nV}$ , so  $v_d = 5 - (5 + 10^{-9}) = -10^{-9} \text{ V}$

Thus,

$$v_{\text{out}} = (2 \times 10^5) v_d \frac{8}{8 + 75} = -19.28 \text{ } \mu\text{V} \text{ and } P_{8\Omega} = (v_{\text{out}})^2 / 8 = 46.46 \text{ pW}.$$

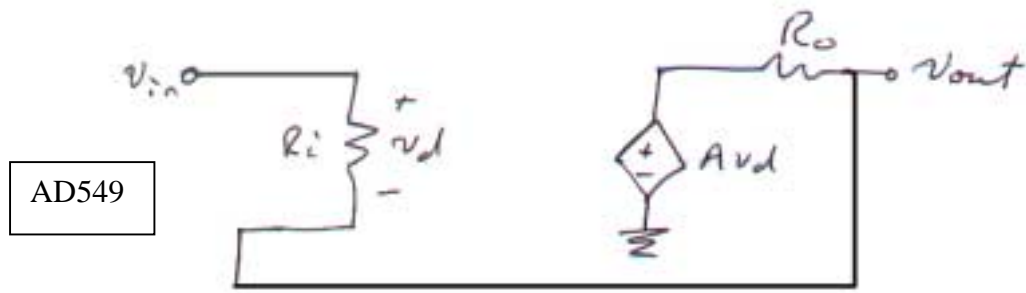
(c)  $\delta = 2.5 \text{ } \mu\text{V}$ , so  $v_d = 5 - (5 + 2.5 \times 10^{-6}) = -2.5 \times 10^{-6} \text{ V}$

Thus,

$$v_{\text{out}} = (2 \times 10^5) v_d \frac{8}{8 + 75} = -48.19 \text{ mV} \text{ and } P_{8\Omega} = (v_{\text{out}})^2 / 8 = 290.3 \text{ } \mu\text{W}.$$

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

32.



Writing a single nodal equation at the output, we find that

$$0 = \frac{v_{\text{out}} - v_{\text{in}}}{R_i} + \frac{v_{\text{out}} - A v_d}{R_o} \quad [1]$$

Also,  $v_{\text{in}} - v_{\text{out}} = v_d$ , so Eqn. [1] becomes

$$0 = (v_{\text{out}} - v_{\text{in}}) R_o + (v_{\text{out}} - A v_{\text{in}} + A v_{\text{out}}) R_i$$

and

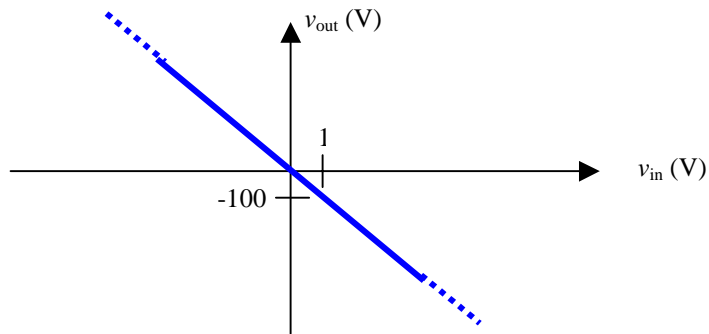
$$v_{\text{out}} = \frac{(R_o + A R_i)}{R_o + (A + 1) R_i} v_{\text{in}}$$

To within 4 significant figures (and more, actually), when  $v_{\text{in}} = -16 \text{ mV}$ ,  $v_{\text{out}} = -16 \text{ mV}$  (this is, after all, a voltage follower circuit).

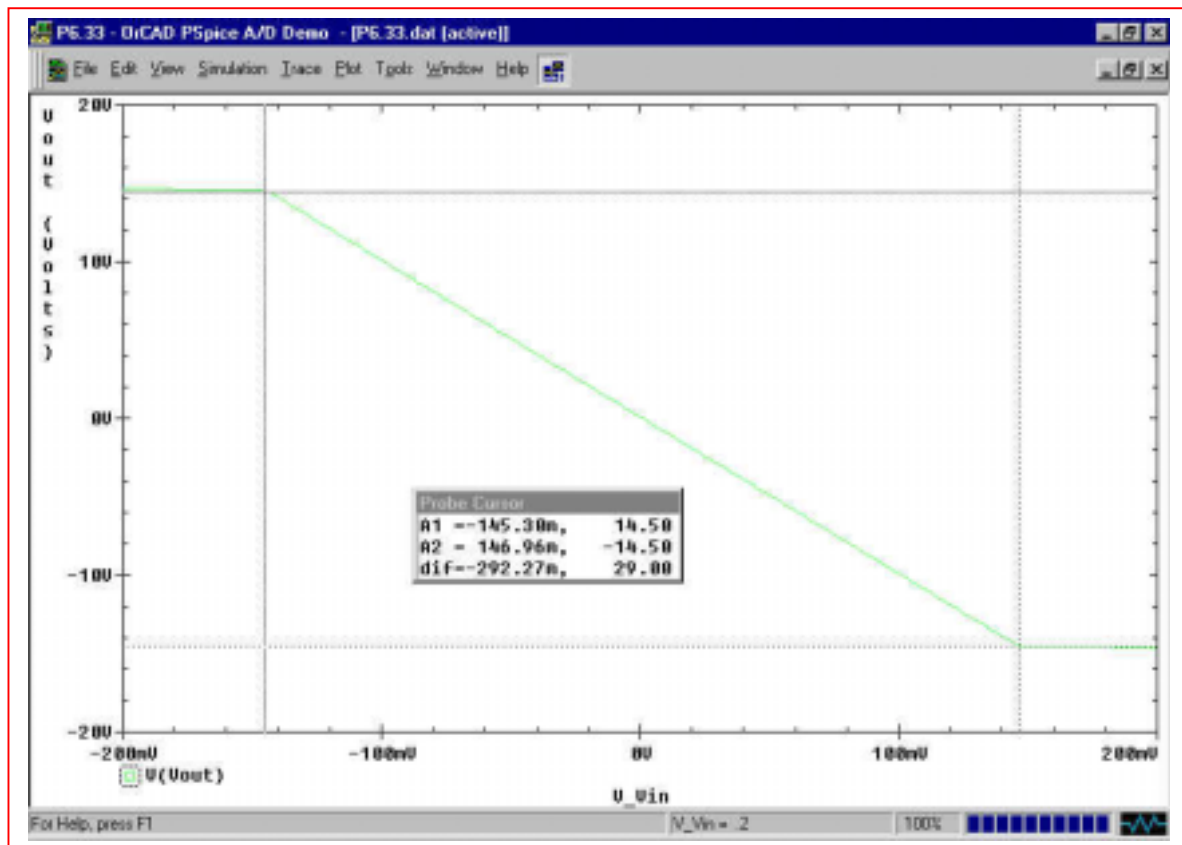


## CHAPTER SIX SOLUTIONS

33. The ideal op amp model predicts a gain  $v_{out}/v_{in} = -1000/10 = -100$ , regardless of the value of  $v_{in}$ . In other words, it predicts an input-output characteristic such as:



From the PSpice simulation result shown below, we see that the ideal op amp model is reasonably accurate for  $|v_{in}| \times 100 < 15$  V (the supply voltage, assuming both have the same magnitude), but the onset of saturation is at  $\pm 14.5$  V, or  $|v_{in}| \sim 145$  mV. Increasing  $|v_{in}|$  past this value does not lead to an increase in  $|v_{out}|$ .



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

34. Positive voltage supply, negative voltage supply, inverting input, ground, output pin.

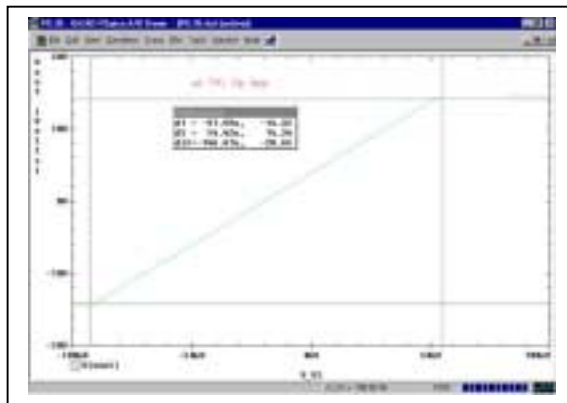


## CHAPTER SIX SOLUTIONS

35. This op amp circuit is an open-loop circuit; there is no external feedback path from the output terminal to either input. Thus, the output should be the open-loop gain times the differential input voltage, minus any resistive losses.

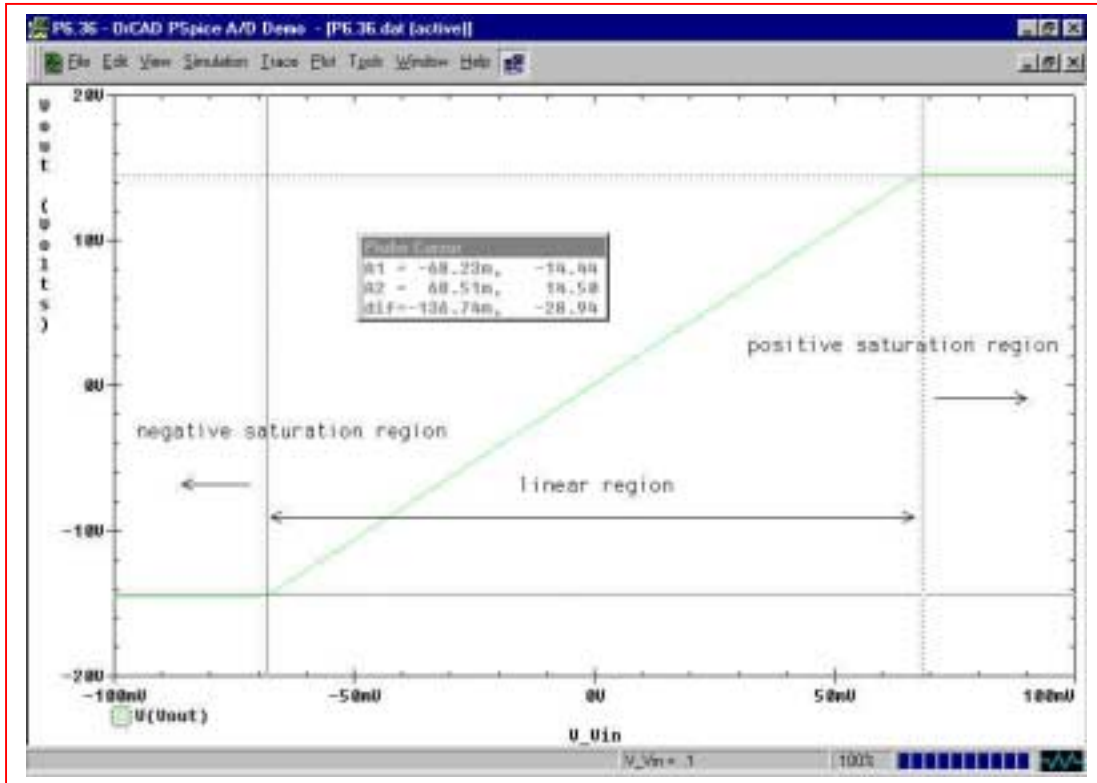
From the simulation results below, we see that all three op amps saturate at a voltage magnitude of approximately 14 V, corresponding to a differential input voltage of 50 to 100  $\mu\text{V}$ , except in the interest case of the LM 324, which may be showing some unexpected input offset behavior.

| op amp            | onset of negative saturation | negative saturation voltage | onset of positive saturation | positive saturation voltage |
|-------------------|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| $\mu\text{A} 741$ | -92 $\mu\text{V}$            | -14.32 V                    | 54.4 mV                      | 14.34 V                     |
| LM 324            | 41.3 $\mu\text{V}$           | -14.71 V                    | 337.2 mV                     | 13.87 V                     |
| LF 411            | -31.77 $\mu\text{V}$         | -13.81 V                    | 39.78 mV                     | 13.86 V                     |



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

36. This is a non-inverting op amp circuit, so we expect a gain of  $1 + 1000/4.7 = 213.8$ . With  $\pm 15$  V DC supplies, we need to sweep the input just above and just below this value divided by the gain to ensure that we see the saturation regions. Performing the indicated simulation and a DC sweep from  $-0.1$  V to  $+0.1$  V with  $0.001$  V steps, we obtain the following input-output characteristic:



Using the cursor tool, we see that the linear region is in the range of  $-68.2 \text{ mV} < V_{in} < 68.5 \text{ mV}$ .

The simulation predicts a gain of  $7.103 \text{ V} / 32.87 \text{ mV} = 216.1$ , which is reasonably close to the value predicted using the ideal op amp model.



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

37. Referring to the detailed model of an op amp, shorting the input terminals together shorts the dependent source to ground. Therefore, any 1-V source connected to the output through a 1- $\Omega$  resistor should “see”  $1\ \Omega + R_o$ . For the  $\mu A$  741, we expect  $1 + 75 = 76\ \Omega$ . For the LF 411, we expect  $\sim 1 + 1\ \Omega$  or  $\sim 2\ \Omega$ .

Simulating the  $\mu A$ 741 circuit, we find:

| Supply voltages   | Current into output | Total resistance | Output resistance |
|-------------------|---------------------|------------------|-------------------|
| $\pm 15\text{ V}$ | -42.5 mA            | -23.53 $\Omega$  | -22.53 $\Omega$   |
| $\pm 5\text{ V}$  | -40.55 mA           | -24.66 $\Omega$  | -24.66 $\Omega$   |
| $\pm 2\text{ V}$  | -40.55 mA           | -24.66 $\Omega$  | -24.66 $\Omega$   |
| 0 V               | 579.2 mA            | 1.727 $\Omega$   | 727 m $\Omega$    |

Conclusion: as we might expect from previous experience in determining Thévenin equivalent resistances, we must short out the voltage supplies to the op amp when performing such an experiment (hence the negative resistance values obtained above). However, we obtained 0.727  $\Omega$  instead of the expected 75  $\Omega$ , which leads to two possible conclusions: (1) The PSpice model is not designed to represent the op amp behavior accurately in such a circuit configuration or (2) such an experimental connection is not adequate for measuring the output resistance.

Simulating the LF411 circuit, we find:

| Supply voltages   | Current into output | Total resistance | Output resistance |
|-------------------|---------------------|------------------|-------------------|
| $\pm 15\text{ V}$ | 25.46 mA            | 39.28 $\Omega$   | 38.28 $\Omega$    |
| $\pm 5\text{ V}$  | 25.43 mA            | 39.32 $\Omega$   | 38.32 $\Omega$    |
| $\pm 2\text{ V}$  | 25.48 mA            | 39.24 $\Omega$   | 28.24 $\Omega$    |
| 0 V               | 1000 mA             | 1 $\Omega$       | 0 $\Omega$        |

Conclusion: as we might expect from previous experience in determining Thévenin equivalent resistances, we must short out the voltage supplies to the op amp when performing such an experiment. However, we obtained  $\sim 0\ \Omega$  instead of the expected 1  $\Omega$ , which leads to two possible conclusions: (1) The PSpice model is not designed to represent the op amp behavior accurately in such a circuit configuration or (2) such an experimental connection is not adequate for measuring the output resistance. However, it is interesting that PSpice did predict a much lower output resistance for the LF 411 than the  $\mu A$  741, as we would expect.

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

38. Based on the detailed model of **the LF 411 op amp**, we can write the following nodal equation at the inverting input:

$$0 = \frac{-v_d}{R_{in}} + \frac{v_x - v_d}{10^4} + \frac{Av_d - v_d}{10^6 + R_o}$$

Substituting values for the LF 411 and simplifying, we make appropriate approximations and then solve for  $v_d$  in terms of  $v_x$ , finding that

$$v_d = \frac{-10^6}{199.9 \times 10^6} v_x = -\frac{v_x}{199.9}$$

With a gain of  $-1000/10 = -100$  and supply voltage magnitudes of 15 V, we are effectively limited to values of  $|v_x| < 150$  mV.

For  $v_x = -10$  mV, PSpice predicts  $v_d = 6$   $\mu$ V, where the hand calculations based on the detailed model predict 50  $\mu$ V, which is about one order of magnitude larger. For the same input voltage, PSpice predicts an input current of -1  $\mu$ A, whereas the hand calculations predict 99.5  $v_x$  mA = -995 nA (which is reasonably close).



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

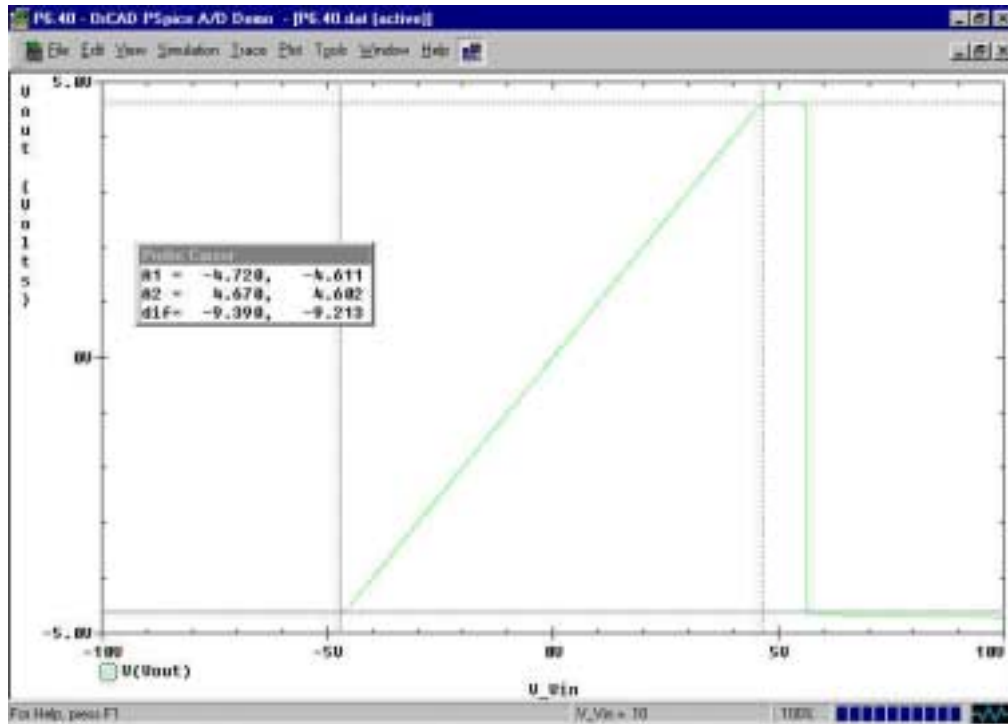
(a) The gain of the inverting amplifier is  $-1000$ . At a sensor voltage of  $-30$  mV, the predicted output voltage (assuming an ideal op amp) is  $+30$  V. At a sensor voltage of  $+75$  mV, the predicted output voltage (again assuming an ideal op amp) is  $-75$  V. Since the op amp is being powered by dc sources with voltage magnitude equal to  $15$  V, the output voltage range will realistically be limited to the range

$$-15 < V_{\text{out}} < 15 \text{ V.}$$

(b) The peak input voltage is  $75$  mV. Therefore,  $15 / 75 \times 10^{-3} = 200$ , and we should set the resistance ratio  $R_f / R_1 < 199$  to ensure the op amp does not saturate.

## CHAPTER SIX SOLUTIONS

39. (a)



We see from the simulation result that negative saturation begins at  $V_{in} = -4.72$  V, and positive saturation begins at  $V_{in} = +4.67$  V.

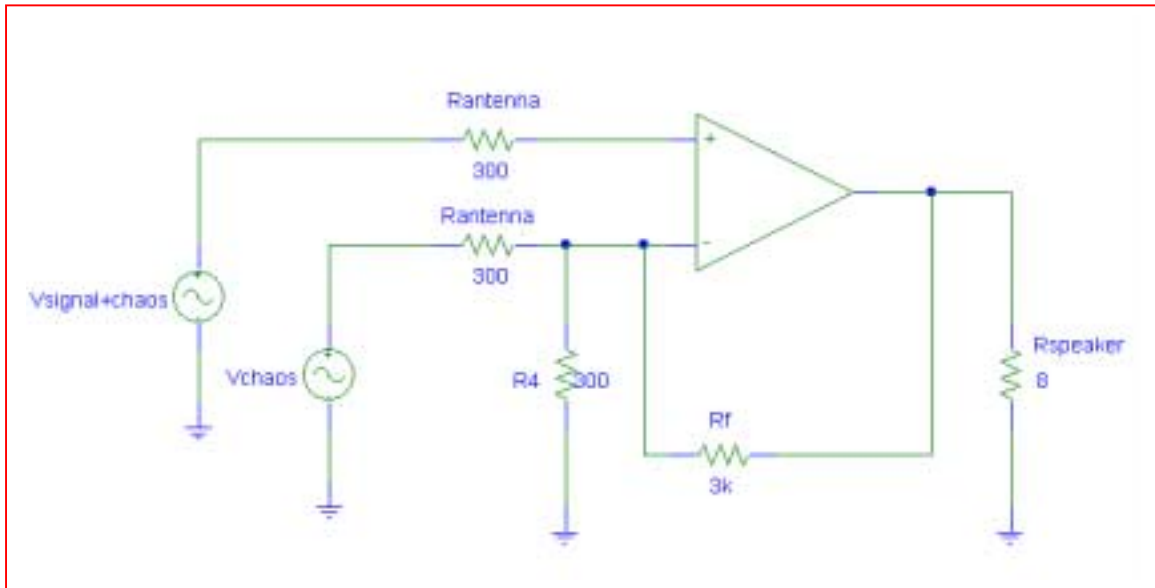
(b) Using a  $1\text{ p}\Omega$  resistor between the output pin and ground, we obtain an output current of  $40.61\text{ mA}$ , slightly larger than the expected  $35\text{ mA}$ , but not too far off.



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

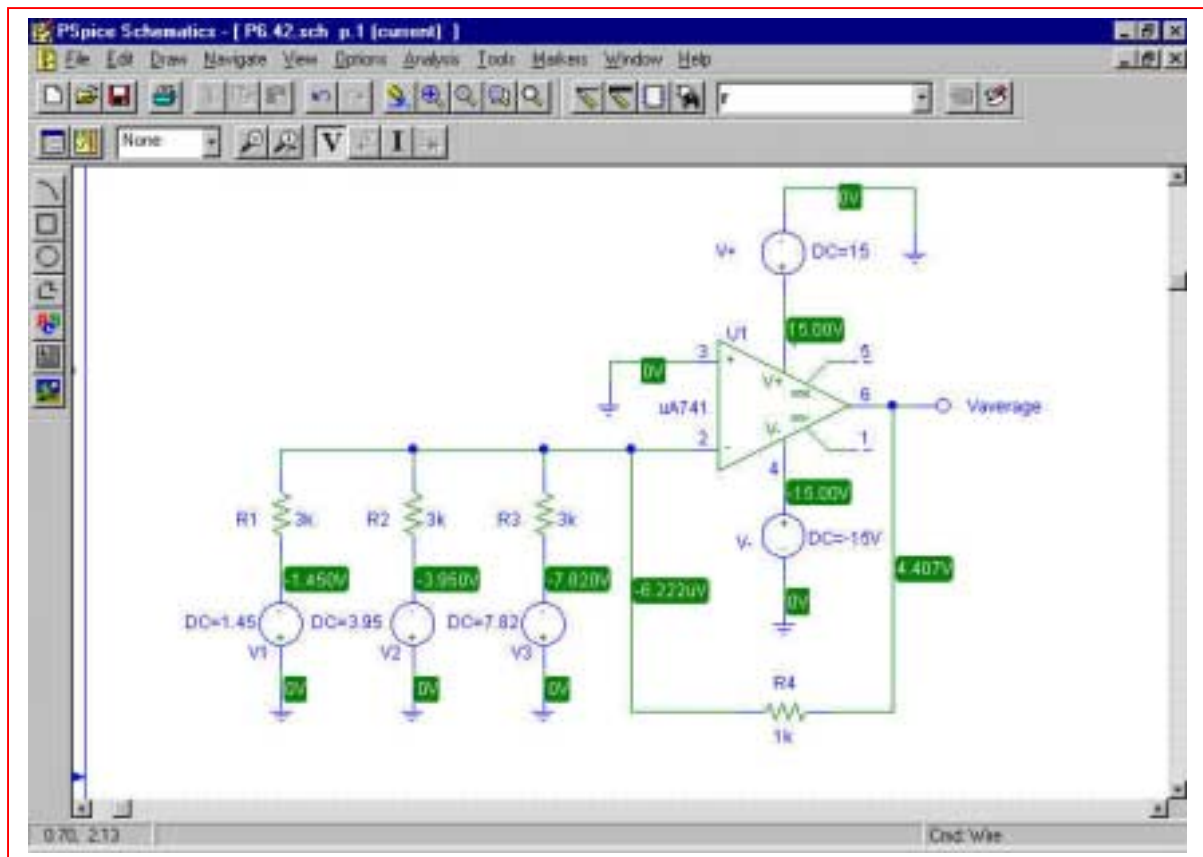
41. We assume that the strength of the separately-broadcast chaotic “noise” signal is received at the appropriate intensity such that it may precisely cancel out the chaotic component of the total received signal; otherwise, a variable-gain stage would need to be added so that this could be adjusted by the user. We also assume that the signal frequency is separate from the “carrier” or broadcast frequency, and has already been separated out by an appropriate circuit (in a similar fashion, a radio station transmitting at 92 MHz is sending an audio signal of between 20 and 20 kHz, which must be separated from the 92 MHz frequency.)

One possible solution of many (all resistances in ohms):



## CHAPTER SIX SOLUTIONS

41. One possible solution of many:



This circuit produces an output equal to the average of  $V_1$ ,  $V_2$ , and  $V_3$ , as shown in the simulation result:  $V_{average} = (1.45 + 3.95 + 7.82) / 3 = 4.407 V$ .



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

1. (a)  $C = \frac{\epsilon A}{d} = \frac{8.854 \times 10^{-12} (78.54 \times 10^{-6})}{100 \times 10^{-6}} = 6.954 \text{ pF}$

(b) *Energy*,  $E = \frac{1}{2} CV^2 \therefore V = \sqrt{\frac{2E}{C}} = \sqrt{\frac{2(1 \times 10^{-3})}{6.954 \times 10^{-12}}} = 16.959 \text{ kV}$

(c)  $E = \frac{1}{2} CV^2 \therefore C = \frac{2E}{V^2} = \frac{2(2.5 \times 10^{-6})}{(100^2)} = 500 \text{ pF}$

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \therefore \epsilon = \frac{Cd}{A} = \frac{(500 \times 10^{-12})(100 \times 10^{-6})}{(78.54 \times 10^{-6})} = 636.62 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\therefore \text{Relative\_permittivity}, \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{636.62 \times 10^{-12}}{8.854 \times 10^{-12}} = 71.9$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

2. (a) For  $V_A = -1\text{V}$ ,  $W = \sqrt{\frac{2K_s\epsilon_0}{qN}(V_{bi} - V_A)} = \sqrt{\frac{2(11.8)(8.854 \times 10^{-12})}{(1.6 \times 10^{-19})(1 \times 10^{24})}(0.57 + 1)}$   
 $= 45.281 \times 10^{-9} \text{ m}$

$$C_j = \frac{11.8(8.854 \times 10^{-12})(1 \times 10^{-12})}{45.281 \times 10^{-9}} = \boxed{2.307 \text{ fF}}$$

(b) For  $V_A = -5\text{V}$ ,  $W = \sqrt{\frac{2K_s\epsilon_0}{qN}(V_{bi} - V_A)} = \sqrt{\frac{2(11.8)(8.854 \times 10^{-12})}{(1.6 \times 10^{-19})(1 \times 10^{24})}(0.57 + 5)}$   
 $= 85.289 \times 10^{-9} \text{ m}$

$$C_j = \frac{11.8(8.854 \times 10^{-12})(1 \times 10^{-12})}{85.289 \times 10^{-9}} = \boxed{1.225 \text{ fF}}$$

(c) For  $V_A = -10\text{V}$ ,

$$W = \sqrt{\frac{2K_s\epsilon_0}{qN}(V_{bi} - V_A)} = \sqrt{\frac{2(11.8)(8.854 \times 10^{-12})}{(1.6 \times 10^{-19})(1 \times 10^{24})}(0.57 + 10)}$$

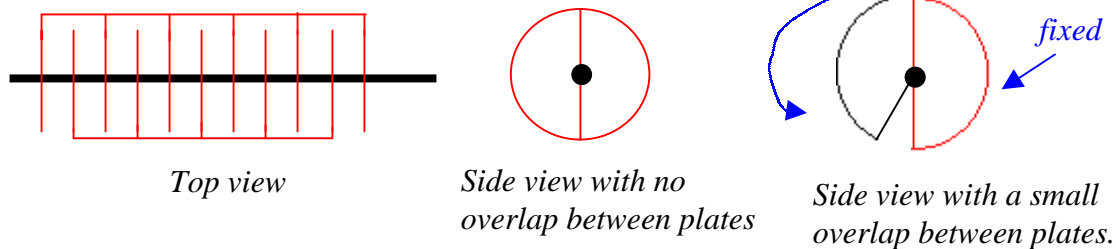
$$= 117.491 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$C_j = \frac{11.8(8.854 \times 10^{-12})(1 \times 10^{-12})}{117.491 \times 10^{-9}} = \boxed{889.239 \text{ aF}}$$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

3. We require a capacitor that may be manually varied between 100 and 1000 pF by rotation of a knob. Let's choose an air dielectric for simplicity of construction, and a series of 11 half-plates:



Constructed as shown, the half-plates are in parallel, so that each of the 10 pairs must have a capacitance of  $1000/10 = 100$  pF when rotated such that they overlap completely. If we arbitrarily select an area of  $1 \text{ cm}^2$  for each half-plate, then the gap spacing between each plate is  $d = \epsilon A/C = (8.854 \times 10^{-14} \text{ F/cm})(1 \text{ cm}^2)/(100 \times 10^{-12} \text{ F}) = 0.8854 \text{ mm}$ . This is tight, but not impossible to achieve. The final step is to determine the amount of overlap which corresponds to 100 pF for the total capacitor structure. A capacitance of 100 pF is equal to 10% of the capacitance when all of the plate areas are aligned, so we need a pie-shaped wedge having an area of  $0.1 \text{ cm}^2$ . If the middle figure above corresponds to an angle of  $0^\circ$  and the case of perfect alignment (maximum capacitance) corresponds to an angle of  $180^\circ$ , we need to set out minimum angle to be  $18^\circ$ .

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

4. (a) Energy stored  $= \int_{t_0}^t v.C \frac{dv}{dt} = C \int_0^{2 \times 10^{-3}} 3e^{-\frac{t}{5}} \left( -\frac{3}{5} e^{-\frac{t}{5}} \right) dt = -1.080 \mu J$

(b)  $V_{\max} = 3V$

Max. energy at  $t=0$ ,  $= \frac{1}{2} CV^2 = 1.35 mJ \therefore 37\% E_{\max} = 499.5 \mu J$

$V$  at  $37\% E_{\max} = 1.825V$

$v(t) = 1.825 = 3e^{-\frac{t}{5}} \therefore t = 2.486s \Rightarrow \approx 2s$

(c)  $i = C \frac{dv}{dt} = 300 \times 10^{-6} \left( -\frac{3}{5} e^{-\frac{1.2}{5}} \right) = -141.593 \mu A$

(d)  $P = vi = 2.011(-120.658 \times 10^{-6}) = -242.6 \mu W$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

$$5. \quad (a) \quad v = \frac{1}{C} \cdot \frac{\pi}{2} (1 \times 10^{-3})^2 = \frac{1}{47 \times 10^{-6}} \cdot \frac{(3.14159)}{2} (1 \times 10^{-3})^2 = \boxed{33.421mV}$$

$$(b) \quad v = \frac{1}{C} \cdot \left( \frac{\pi}{2} (1 \times 10^{-3})^2 + 0 \right) = \frac{1}{47 \times 10^{-6}} \cdot \frac{(3.14159)}{2} (1 \times 10^{-3})^2 = \boxed{33.421mV}$$

$$(c) \quad v = \frac{1}{C} \cdot \left( \frac{\pi}{2} (1 \times 10^{-3})^2 + \frac{\pi}{4} (1 \times 10^{-3})^2 \right) = \frac{1}{47 \times 10^{-6}} \cdot \left( \frac{3\pi}{4} (1 \times 10^{-3})^2 \right) = \boxed{50.132mV}$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

6. 
$$V = \frac{1}{C} \int_0^{200ms} i dt = \frac{1}{C} \left[ \left( -\frac{7 \times 10^{-3}}{\pi} \cos \pi t \right) \right]_0^{200ms} = \frac{0.426}{C}$$

$$E = \frac{1}{2} CV^2 = 3 \times 10^{-6} = \frac{181.086 \times 10^{-9}}{2C} \therefore C = \frac{181.086 \times 10^{-9}}{2(3 \times 10^{-6})} = 30181 \mu F$$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

7.

$$(a) \quad c = 0.2 \mu\text{F}, v_c = 5 + 3 \cos^2 200t \text{V}; \therefore i_c = 0.2 \times 10^{-6} (3) (-2) 200 \sin 200t \cos 200t$$

$$\therefore i_c = -0.12 \sin 400t \text{mA}$$

$$(b) \quad w_c = \frac{1}{2} c v_c^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-7} (5 + 3 \cos^2 200t)^2 \therefore w_{c \max} = 10^{-7} \times 64 = 6.4 \mu\text{J}$$

$$(c) \quad v_c = \frac{1}{0.2} \times 10^6 \int_0^t 8e^{-100t} \times 10^{-3} dt = 10^3 \times 40(-0.01)(e^{-100t} - 1) = 400(1 - e^{100t}) \text{V}$$

$$(d) \quad v_c = 500 - 400e^{-100t} \text{ V}$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

8.  $v_c(0) = 250\text{V}$ ,  $c = 2\text{mF}$  (a)  $v_c(0.1) = 250 + 500 \int_0^{0.1} 5 dt$   
 $\therefore v_c(0.1) = 500\text{V}; v_c(0.2) = 500 \int_{0.1}^{0.2} 10 dt = 1000\text{V}$   
 $\therefore v_c(0.6) = 1750\text{V}, v_c(0.9) = 2000\text{V}$   
 $\therefore 0.9 < t < 1: v_c = 2000 + 500 \int_{0.9}^t 10 dt = 2000 + 5000(t - 0.9)$   
 $\therefore v_c = 2100 = 2000 + 5000(t_2 - 0.9) \therefore t_2 = 0.92 \therefore 0.9 < t < 0.92\text{s}$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

9.

$$(a) \quad w_c = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-6} v^2 = 2 \times 10^{-2} e^{-1000t} \therefore v = \pm 200 e^{-500t} \text{ V}$$

$$i = C v' = 10^{-6} (\pm 200) (-500) e^{-500t} = \mp 0.1 e^{-500t}$$

$$\therefore R = \frac{-v}{i} = \frac{200}{0.1} = \boxed{2k\Omega}$$

$$(b) \quad P_R = i^2 R = 0.01 \times 2000 e^{-1000t} = 20 e^{-1000t} \text{ W}$$

$$\therefore W_R = \int_0^\infty 20 e^{-1000t} dt = -0.02 e^{-1000t} \Big|_0^\infty = \boxed{0.02 \text{ J}}$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

10. (a) Left circuit:

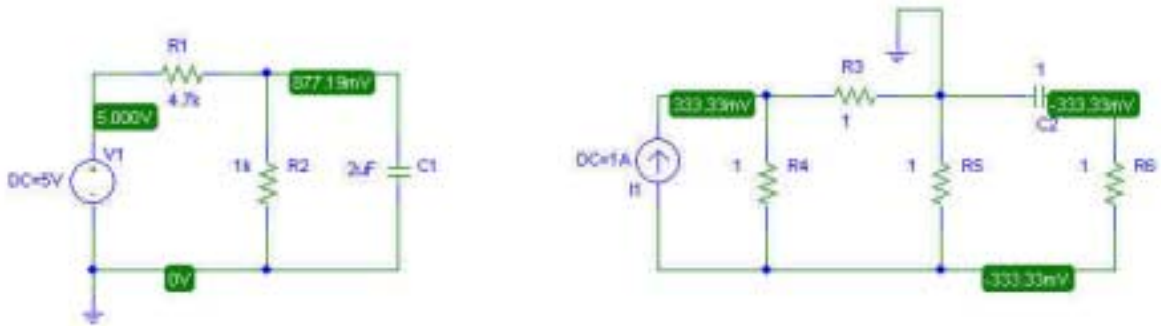
By Voltage division,  $V_C = \frac{1k}{4.7k + 1k}(5) = 0.877V$

Right circuit:

$$V_1 = 1(1 // 2) = \frac{2}{3}V$$

By Voltage Division,  $V_2 = \frac{1}{3}V \therefore V_C = -\frac{1}{3}V$

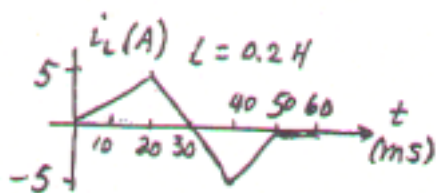
(b)



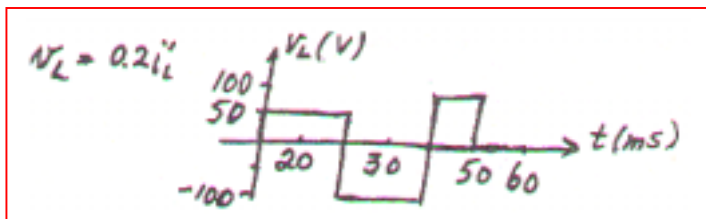


## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

11.



(a)



(b)  $P_L = v_L i_L \therefore P_{L_{\max}} = (-100)(-5) = 500 \text{ W}$  at  $t = 40^- \text{ ms}$

(c)  $P_{L_{\min}} = 100(-5) = -500 \text{ W}$  at  $t = 20^+$  and  $40^+$  ms

(d)  $W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 \therefore W_L(40 \text{ ms}) = \frac{1}{2} \times 0.2 (-5)^2 = 2.5 \text{ J}$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

12.

$$L = 50 \times 10^{-3}, t < 0: i = 0; t > 0 \quad i = 80te^{-100t} \text{ mA} = 0.08te^{-100t} \text{ A}$$

$$\therefore i' = 0.08e^{-100t} - 8te^{-100t} \therefore 0.08 = 8t, t_m = 0.01s, |i|_{\max} = 0.08 \times 0.01e^{-1}$$

$$\therefore |i|_{\max} = 0.2943 \text{ mA}; v = 0.05i' = e^{-100t} (0.004 - 0.4t)$$

$$\therefore v' = e^{-100t} (-0.4) - 100e^{-100t} (0.004 - 0.4t) \therefore -0.4 = 0.4 - 40t, t = \frac{0.8}{40} = 0.02s$$

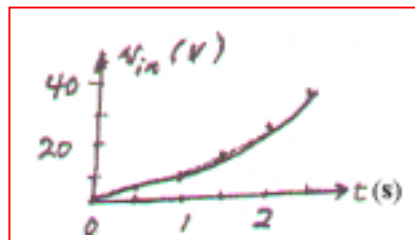
$$v = e^{-2} (0.004 - 0.008) = -0.5413 \text{ mV} \text{ this is minimum} \therefore |v|_{\max} = 0.004 \text{ V at } t=0$$



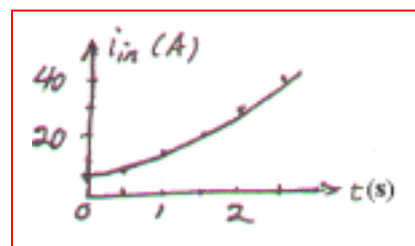
## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

13.

(a)  $t > 0: i_s = 0.4t^2 \text{ A} \therefore v_{in} = 10i_s + 5i_s' = 4t^2 + 4t \text{ V}$



(b)  $i_{in'} = 0.1v_s + \frac{1}{5} \int_0^t 40t dt + 5 = 4t + 4t^2 + 5 \text{ A}$

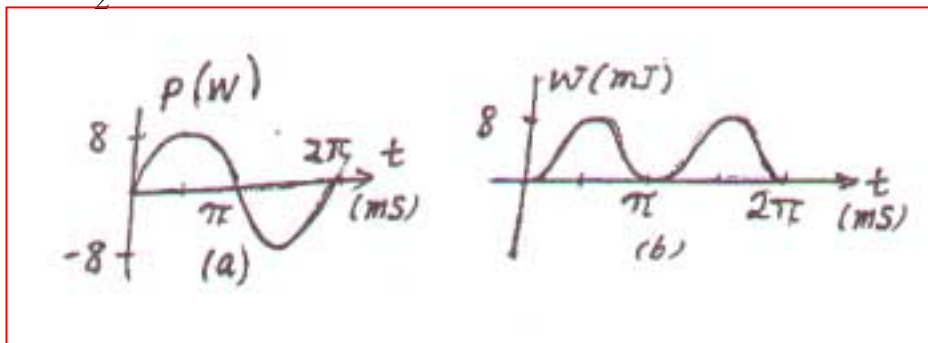


## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

14.  $v_L = 20 \cos 1000t \text{ V}$ ,  $L = 25 \text{ mH}$ ,  $i_L(0) = 0$

(a)  $i_L = 40 \int_0^t 20 \cos 1000t dt = 0.8 \sin 1000t \text{ A} \therefore p = 8 \sin 2000t \text{ W}$

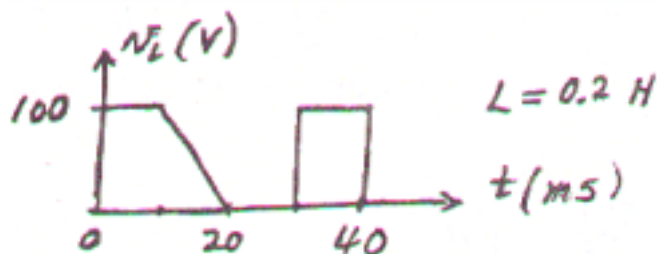
(b)  $w = \frac{1}{2} \times 25 \times 10^{-3} \times 0.64 \sin^2 1000t = 8 \sin^2 1000t \text{ mJ}$





## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

15.



(a)  $0 < t < 10 \text{ ms}: i_L = -2 + 5 \int_0^t 100 dt = -2 + 500t \therefore i_L(10\text{ms}) = 3\text{A}, i_L(8\text{ms}) = \boxed{2\text{A}}$

(b)  $i_L(0) = 0 \therefore i_L(10\text{ms}) = 500 \times 0.01 = 5\text{A} \therefore i_L(20\text{ms}) = 5 + 5 \int_{0.01}^{0.02} 10^4 (0.02 - t) dt$   
 $\therefore i_L(20\text{ms}) = 5 + 5 \times 10^4 (0.02t - 0.5t^2)_{0.01}^{0.02} = 5 + 5 \times 10^4 (0.0002 - 0.00015) = 7.5\text{A}$   
 $\therefore w_L = \frac{1}{2} \times 0.2 \times 7.5^2 = \boxed{5.625\text{J}}$

(c) If the circuit has been connected for a long time, L appears like short circuit.

$$V_{8\Omega} = \frac{8}{2+8}(100\text{V}) = 80\text{V}$$

$$I_{2\Omega} = \frac{20\text{V}}{2\Omega} = 10\text{A}$$

$$\therefore i_x = \frac{80\text{V}}{80\Omega} = 1\text{A}$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

16.  $L = 5\text{H}, V_L = 10(e^{-t} - e^{-2t})\text{V}, i_L(0) = 0.08\text{A}$

(a)  $v_L(1) = 10(e^{-1} - e^{-2}) = 2.325\text{ V}$

(b)  $i_L = 0.08 + 0.2 \int_0^t 10(e^{-t} - e^{-2t}) dt = 0.08 + 2(-e^{-t} + 0.5e^{-2t})_0^t$   
 $i_L = 0.08 + 2(-e^{-t} + 0.5e^{-2t} + 1 - 0.5) = 1.08 + e^{-2t} - 2e^{-t} \therefore i_L(1) = 0.4796\text{A}$

(c)  $i_L(\infty) = 1.08\text{A}$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

17.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad v_x &= 120 \times \frac{40}{12 + 20 + 40} + 40 \times 5 \times \frac{12}{12 + 20 + 40} \\ &= \frac{200}{3} + \frac{100}{3} = \boxed{100\text{V}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad v_x &= \frac{120}{12 + 15 \parallel 60} \times \frac{15}{15 + 60} \times 40 + 40 \times 5 \times \frac{15 \parallel 12}{15 \parallel 12 + 60} \\ &= \frac{120}{12 + 12} \times \frac{1}{5} \times 40 + 200 \times \frac{6.667}{66.667} \\ &= 40 + 20 = \boxed{60\text{V}} \end{aligned}$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

18.

(a)  $w_L = \frac{1}{2} \times 5 \times 1.6^2 = 6.4\text{J}$

(b)  $w_c = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-6} \times 100^2 = 0.1\text{J}$

(c) Left to right (magnitudes): 100, 0, 100, 116, 16, 16, 0 (V)

(d) Left to right (magnitudes): 0, 0, 2, 2, 0.4, 1.6, 0 (A)



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

19.

(a)  $v_s = 400t^2 \text{ V}, t > 0; i_L(0) = 0.5 \text{ A}; t = 0.4 \text{ s}$

$$v_c = 400 \times 0.16 = 64 \text{ V}, w_c = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \times 64^2 = 20.48 \text{ mJ}$$

(b)  $i_L = 0.5 + 0.1 \int_0^{0.4} 400t^2 dt = 0.5 + 40 \times \frac{1}{3} \times 0.4^3 = 1.3533 \text{ A}$

$$\therefore w_L = \frac{1}{2} \times 10 \times 1.3533^2 = 9.1581 \text{ J}$$

(c)  $i_R = 4t^2, P_R = 100 \times 16t^4 \therefore w_R = \int_0^{0.4} 1600t^4 dt = 320 \times 0.4^5 = 3.277 \text{ J}$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

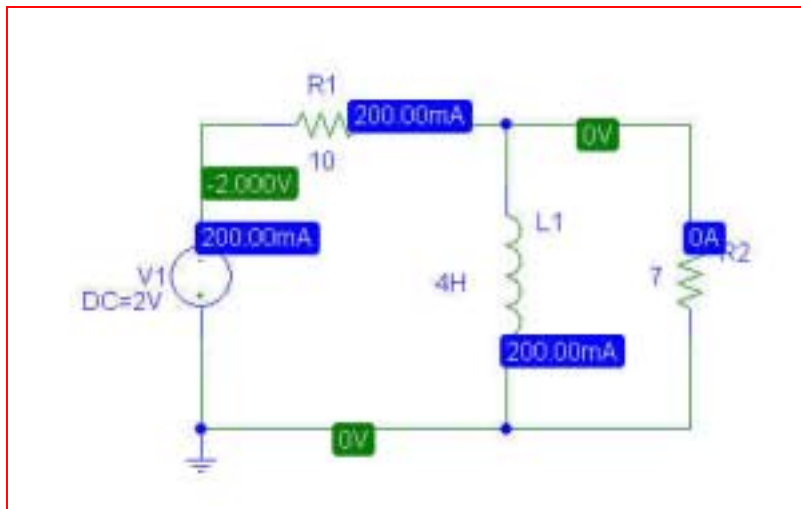
20. (a)  $P_{7\Omega} = 0W$ ;  $P_{10\Omega} = \frac{V^2}{R} = \frac{(2)^2}{10} = 0.4W$

(b) PSpice verification

We see from the PSpice simulation that the voltage across the 10- $\Omega$  resistor is  $-2$  V, so that it is dissipating  $4/10 = 400$  mW.

The 7- $\Omega$  resistor has zero volts across its terminals, and hence dissipates zero power.

Both results agree with the hand calculations.





## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

21.

$$C_{equiv} \equiv 10\mu + \left( \frac{1}{\frac{1}{10\mu} + \frac{1}{10\mu}} \right) \text{ in series with } 10\mu \text{ in series with } 10\mu + \left( \frac{1}{\frac{1}{10\mu} + \frac{1}{10\mu}} \right) \\ \equiv 4.286\mu F$$

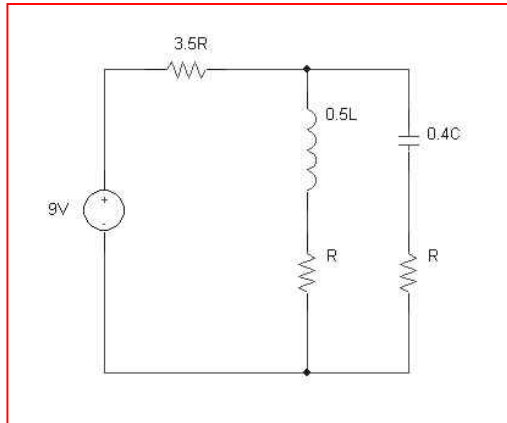
## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

22.  $L_{equiv} \equiv (77\text{ p} // (77\text{ p} + 77\text{ p})) + 77\text{ p} + (77\text{ p} // (77\text{ p} + 77\text{ p})) = 179.6\text{ pH}$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

23. (a) Assuming all resistors have value  $R$ , all inductors have value  $L$ , and all capacitors have value  $C$ ,

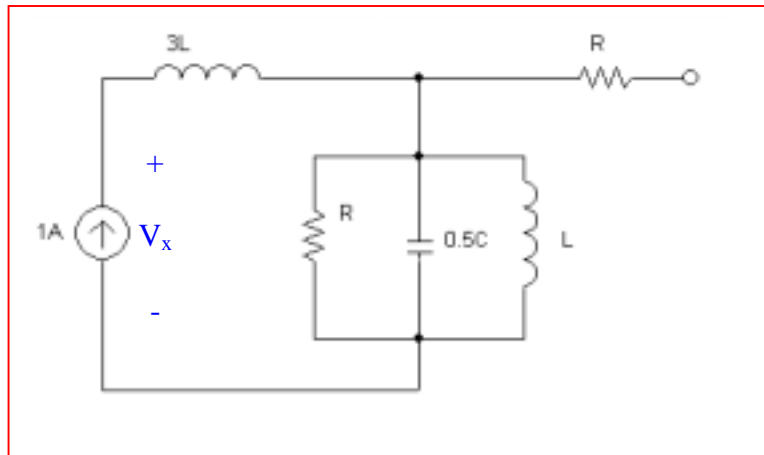


- (b) At dc,  $20\mu\text{F}$  is open circuit;  $500\mu\text{H}$  is short circuit.

Using voltage division,  $V_x = \frac{10k}{10k + 15k}(9) = 3.6V$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

24. (a) Assuming all resistors have value  $R$ , all inductors value  $L$ , and all capacitors value  $C$ ,



- (b)  $V_x = 0V$  as  $L$  is short circuit at dc.



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

25.  $C_{equiv} = \{ [(100 \text{ n} + 40 \text{ n}) \parallel 12 \text{ n}] + 75 \text{ n} \} \parallel \{ 7 \text{ } \mu + (2 \text{ } \mu \parallel 12 \text{ } \mu) \}$

$$C_{equiv} \equiv 85.211 \text{ nF}$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

26.  $L_{\text{equiv}} = \{[(17 \text{ p} \parallel 4 \text{ n}) + 77 \text{ p}] \parallel 12 \text{ n}\} + \{1 \text{ n} \parallel (72 \text{ p} + 14 \text{ p})\}$

$$L_{\text{equiv}} \equiv 172.388 \mu\text{H}$$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

$$27. \quad C_T - C_x = (7 + 47 + 1 + 16 + 100) = 171 \mu F$$

$$E_{C_T - C_x} = \frac{1}{2} (C_T - C_x) V^2 = \frac{1}{2} (171 \mu)(2.5)^2 = 534.375 \mu J$$

$$E_{C_x} = E_{C_T} - E_{C_T - C_x} = (534.8 - 534.375) \mu J = 425 nJ$$

$$\therefore E_{C_x} = 425 n = \frac{1}{2} C_x V^2 \Rightarrow C_x = \frac{425 n (2)}{(2.5)^2} = 136 nF$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

28.

(a) For all  $L = 1.5H$ ,  $L_{equiv} = 1.5 + \left( \frac{1}{\frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.5}} \right) + \left( \frac{1}{\frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.5}} \right) = 2.75H$

(b) For a general network of this type, having  $N$  stages (and all  $L$  values equiv),

$$L_{equiv} = \sum_{N=1}^n \frac{L^N}{NL^{N-1}}$$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

29.

$$(a) \quad L_{equiv} = 1 + \left( \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right) + \left( \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \right) = 3H$$

(b) For a network of this type having 3 stages,

$$L_{equiv} = 1 + \frac{1}{\frac{2+2}{(2)^2}} + \frac{1}{\frac{3+3}{(3)^2} + \frac{1}{3}} = 1 + \frac{(2)^2}{2(2)} + \frac{(3)^3}{3(3)^2}$$

Extending for the general case of N stages,

$$\begin{aligned} L_{equiv} &= 1 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + K + \frac{1}{\frac{1}{N} + K \frac{1}{N}} \\ &= 1 + \frac{1}{2(1/2)} + \frac{1}{3(1/3)} + K + \frac{1}{N(1/N)} = N \end{aligned}$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

$$30. \quad C_{equiv} = \frac{(3p)(0.25p)}{3p + 0.25p} = 0.231pF$$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

$$31. \quad L_{equiv} = \frac{(2.5n)(0.5n)}{2.5n} = 0.2916nH$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

32. (a) Use 2 x 1 $\mu$ H in series with 4 x 1 $\mu$ H in parallel.
- (b) Use 2 x 1 $\mu$ H in parallel, in series with 4 x 1 $\mu$ H in parallel.
- (c) Use 5 x 1 $\mu$ H in parallel, in series with 4 x 1 $\mu$ H in parallel.



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

33.

$$(a) \quad R = 10\Omega : 10\parallel 10\parallel 10 = \frac{10}{3}, \frac{10}{3} + 10 + 10\parallel 10 = \frac{55}{3}$$

$$\therefore R_{eq} = \frac{55}{3}\parallel 30 = 11.379\Omega$$

$$(b) \quad L = 10H \therefore L_{eq} = 11.379H$$

$$(c) \quad C = 10F : \frac{1}{1/30 + 1/10 + 1/20} = 5.4545$$

$$\therefore C_{eq} = 5.4545 + \frac{10}{3} = 8.788F$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

34.

(a)  $oc : L_{eq} = 6 \parallel 1 + 3 = 3.857H$

$sc : L_{eq} = (3 \parallel 2 + 1) \parallel 4 = 2.2 \parallel 4 = 1.4194H$

(b)  $oc : 1 + \frac{1}{1/4 + 1/2} = \frac{7}{3}, C_{eq} = \frac{1}{3/7 + 1/2} = 1.3125F$

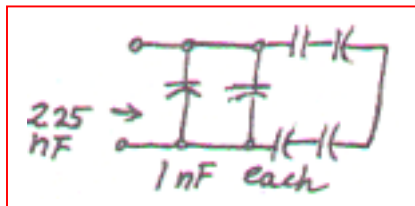
$sc : \frac{1}{1/5 + 1} = \frac{5}{6}, C_{eq} = 4 + \frac{5}{6} = 4.833F$



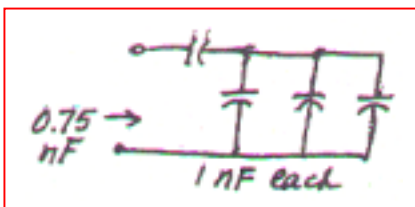
## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

35.

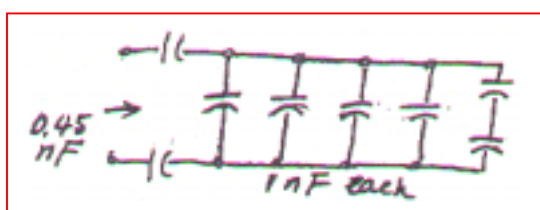
(a)



(b)



(c)



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

36.  $i_s = 60e^{-200t} \text{ mA}, i_1(0) = 20 \text{ mA}$

(a)  $6 \parallel 4 = 2.4 \text{ H} \therefore v = L_{eq} i_s' = 2.4 \times 0.06(-200)e^{-200t}$   
or  $v = -28.8e^{-200t} \text{ V}$

(b)  $i_1 = \frac{1}{6} \int_0^t -28.8e^{-200t} dt + 0.02 = \frac{4.8}{200}(e^{-200t} - 1) + 0.02$   
 $= 24e^{-200t} - 4 \text{ mA} (t > 0)$

(c)  $i_2 = i_s - i_1 = 60e^{-200t} - 24e^{-200t} + 4 = 36e^{-200t} + 4 \text{ mA} (t > 0)$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

$$37. \quad v_s = 100e^{-80t} \text{ V}, v_1(0) = 20 \text{ V}$$

$$(a) \quad i = C_{eq} v_s' = 0.8 \times 10^{-6} (-80) 100 e^{-80t} = \boxed{-6.4 \times 10^{-3} e^{-80t} \text{ A}}$$

$$(b) \quad v_1 = 10^6 (-6.4 \times 10^{-3}) \int_0^t e^{-80t} dt + 20 = \frac{6400}{80} (e^{-80t} - 1) + 20$$
$$\therefore v_1 = \boxed{80e^{-80t} - 60 \text{ V}}$$

$$(c) \quad v_2 \frac{10^6}{4} (-6.4 \times 10^{-3}) \int_0^t e^{-80t} dt + 80 = \frac{1600}{80} (e^{-80t} - 1) + 80$$
$$= \boxed{20e^{-80t} + 60 \text{ V}}$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

38.

(a)

$$\frac{v_c - v_s}{20} + 5 \times 10^{-6} v_c' + \frac{v_c - v_L}{10} = 0$$
$$\frac{v_L - v_c}{10} + \frac{1}{8 \times 10^{-3}} \int_0^t v_L dt + 2 = 0$$

(b)

$$20i_{20} + \frac{1}{5 \times 10^{-6}} \int_0^t (i_{20} - i_L) dt + 12 = v_s$$
$$\frac{1}{5 \times 10^{-6}} \int_0^t (i_L - i_{20}) dt - 12 + 10i_L + 8 \times 10^{-3} i_L' = 0$$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

39.

$$v_c(t): 30\text{mA}: 0.03 \times 20 = 0.6\text{V}, v_c = 0.6\text{V}$$

$$9\text{V}: v_c = 9\text{V}, 20\text{mA}: v_c = -0.02 \times 20 = 0.4\text{V}$$

$$0.04 \cos 10^3 t: v_c = 0$$

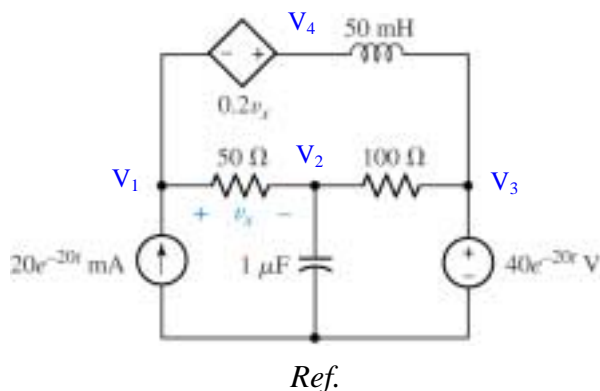
$$\therefore v_c(t) = 9.2\text{V}$$

$$v_L(t): 30\text{mA}, 20\text{mA},$$

$$9\text{V}: v_L = 0; 0.04 \cos 10^3 t: v_L = -0.06 \times 0.04(-1000) \sin 10^3 t = 2.4 \sin 10^3 t \text{V}$$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

40. We begin by selecting the bottom node as the reference and assigning four nodal voltages:



1, 4 Supernode: 
$$20 \times 10^{-3} e^{-20t} = \frac{V_1 - V_2}{50} + 0.02 \times 10^3 \int_0^t (V_4 - 40e^{-20t'}) dt' \quad [1]$$

and: 
$$V_1 - V_4 = 0.2 V_x \quad \text{or} \quad 0.8V_1 + 0.2 V_2 - V_4 = 0 \quad [2]$$

Node 2: 
$$0 = \frac{V_2 - V_1}{50} + \frac{V_2 - 40e^{-20t}}{100} + 10^{-6} \frac{dV_2}{dt} \quad [3]$$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

41. (a)  $R_i = \infty, R_o = 0, A = \infty \therefore v_i = 0 \therefore i = C v_s'$

also  $0 + Ri + v_o = 0 \therefore v_o = -RC v_s'$

$-v_i + Ri - A v_i = 0, v_s = \frac{1}{C} \int i dt + v_i$

(b)  $v_o = -A v_i \therefore v_i = \frac{-1}{A} v_o \therefore i = \frac{1+A}{R} v_i$

$\therefore v_s = \frac{1}{C} \int i dt - \frac{1}{A} v_o = -\frac{1}{A} v_o + \frac{1+A}{RC} \int -\frac{v_o}{A} dt$

$\therefore A v_s' = -v_o' - \frac{1+A}{RC} v_o$  or  $v_o' + \frac{1+A}{RC} v_o + A v_s' = 0$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

42. Place a current source in parallel with a 1-M $\Omega$  resistor on the positive input of a buffer with output voltage,  $v$ . This feeds into an integrator stage with input resistor,  $R_2$ , of 1-M $\Omega$  and feedback capacitor,  $C_f$ , of 1  $\mu$ F.

$$i = C_f \frac{dv_{c_f}}{dt} = 1.602 \times 10^{-19} \times \frac{\text{ions}}{\text{sec}}$$

$$0 = \frac{V_a - V}{1 \times 10^6} + C_f \frac{dv_{c_f}}{dt} = \frac{V_a - V}{1 \times 10^6} + 1.602 \times 10^{-19} \frac{\text{ions}}{\text{sec}}$$

$$0 = \frac{-V}{R_2} + C_f \frac{dv_{c_f}}{dt} = \frac{-V}{1 \times 10^6} + 1.602 \times 10^{-19} \frac{\text{ions}}{\text{sec}}$$

Integrating current with respect to  $t$ ,  $\frac{1}{R_2} \int_0^t v dt' = C_f (V_{c_f} - V_{c_f}(0))$

$$\frac{1.602 \times 10^{-19} \times \text{ions}}{R_2} = C_f V_{c_f}$$

$$V_{c_f} = V_a - V_{out} \Rightarrow V_{out} = \frac{-R_1}{R_2 C_f} \times 1.602 \times 10^{-19} \times \text{ions} \Rightarrow V_{out} = \frac{-1}{C_f} \times 1.602 \times 10^{-19} \times \text{ions}$$

$$R_1 = 1 \text{ M}\Omega, C_f = 1 \mu\text{F}$$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

43.  $R = 0.5\text{M}\Omega$ ,  $C = 2\mu\text{F}$ ,  $R_i = \infty$ ,  $R_o = 0$ ,  $v_o = \cos 10t - 1\text{V}$

(a) Eq. (16) is:  $\left(1 + \frac{1}{A}\right)v_o = -\frac{1}{RC} \int_o^t \left(v_s + \frac{v_o}{A}\right) dt - v_c(0)$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{A}\right)v_o' = -\frac{1}{RC} \left(v_s + \frac{v_o}{A}\right) \therefore \left(1 + \frac{1}{A}\right)(-10\sin 10t) = -1 \left(v_s + \frac{1}{A}\cos 10t - \frac{1}{A}\right)$$

$$\therefore v_s = \left(1 + \frac{1}{A}\right)10\sin 10t + \frac{1}{A} - \frac{1}{A}\cos 10t \text{ Let } A = 2000$$

$$\therefore v_s = 10.005\sin 10t + 0.0005 - 0.0005\cos 10t$$

(b) Let  $A = \infty \therefore v_s = 10\sin 10t\text{V}$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

44. Create a op-amp based differentiator using an ideal op amp with input capacitor  $C_1$  and feedback resistor  $R_f$  followed by inverter stage with unity gain.

$$V_{out} = + \frac{R}{R} R_f C_1 \frac{dvs}{dt} = 60 \times \frac{1mV}{rpm} / \min$$

$R_f C_1 = 60$  so choose  $R_f = 6 \text{ M}\Omega$  and  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ .



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

45. (a)  $0 = \frac{1}{L} \int v dt + \frac{V_a - V_{out}}{R_f}$

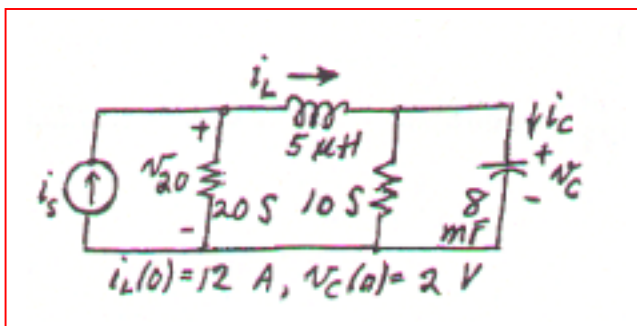
$$V_a = V = 0, \therefore \frac{1}{L} \int v_L dt = \frac{V_{out}}{R_f} \Rightarrow V_{out} = \frac{-R_f}{L} \int_0^t v_s dt'$$

(b) In practice, capacitors are usually used as capacitor values are more readily available than inductor values.

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

46.

(a)



(b)

$$20v_{20} + \frac{1}{5 \times 10^{-6}} \int_0^t (v_{20} - v_c) dt + 12 = i_s$$

$$\frac{1}{5 \times 10^{-6}} \int_0^t (v_c - v_{20}) dt - 12 + 10v_c + 8 \times 10^{-3} v_c' = 0$$

(c)

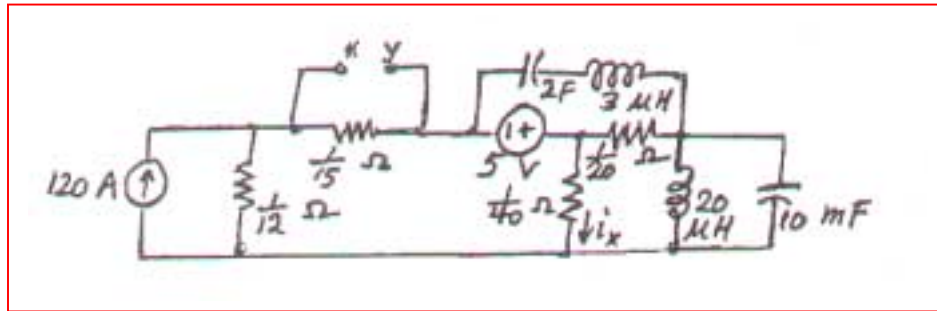
$$\frac{i_L - i_s}{20} + 5 \times 10^{-6} i_L' + \frac{i_L - i_c}{10} = 0$$

$$\frac{i_c - i_L}{10} + \frac{1}{8 \times 10^{-3}} \int_0^t i_c dt + 2 = 0$$



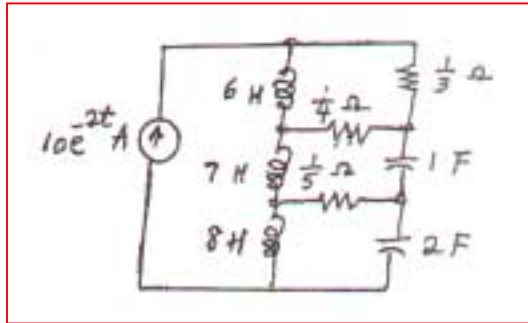
## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

47.



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

48.

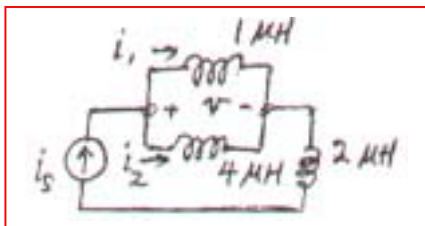




## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

49.

(a)



(b) “Let  $i_s = 100e^{-80t}$  A and  $i_1(0) = 20$  A in the circuit of (new) Fig. 7.62.

(a) Determine  $v(t)$  for all  $t$ .

(b) Find  $i_1(t)$  for  $t \geq 0$ .

(c) Find  $v_2(t)$  for  $t \geq 0$ .”

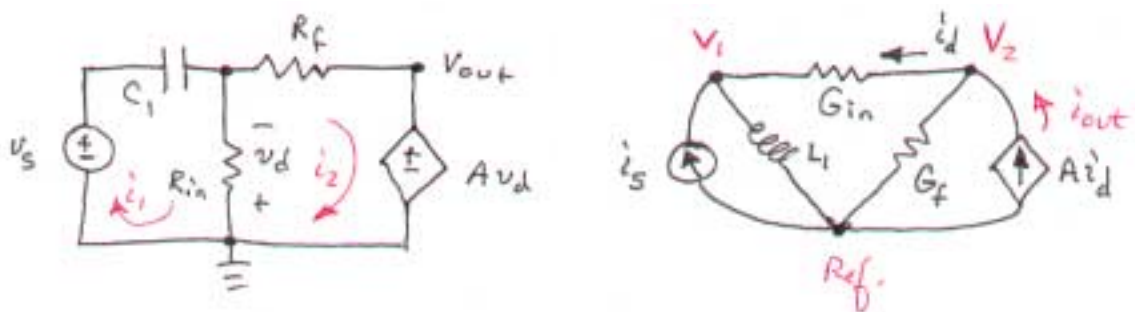
(c) (a)  $L_{eq} = 1 \parallel 4 = 0.8 \mu\text{H} \therefore v(t) = L_{eq} i_s' = 0.8 \times 10^{-6} \times 100(-80)e^{-80t} \text{ V}$   
 $\therefore v(t) = -6.43e^{-80t} \text{ mV}$

(b)  $i_1(t) = 10^6 \int_0^t -6.4 \times 10^{-3} e^{-80t} dt + 20 \therefore i_1(t) = \frac{6400}{80}(e^{-80t} - 1) = 80e^{-80t} - 60 \text{ A}$

(c)  $i_2(t) = i_s - i_1(t) \therefore i_2(t) = 20e^{-80t} + 60 \text{ A}$

## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

50.



In creating the dual of the original circuit, we have lost both  $v_s$  and  $v_{out}$ . However, we may write the dual of the original transfer function:  $i_{out}/i_s$ . Performing nodal analysis,

$$i_s = \frac{1}{L_1} \int_0^t V_1 dt' + G_{in} (V_1 - V_2) \quad [1]$$

$$i_{out} = A i_d = G_f V_2 + G_{in} (V_2 - V_1) \quad [2]$$

Dividing, we find that

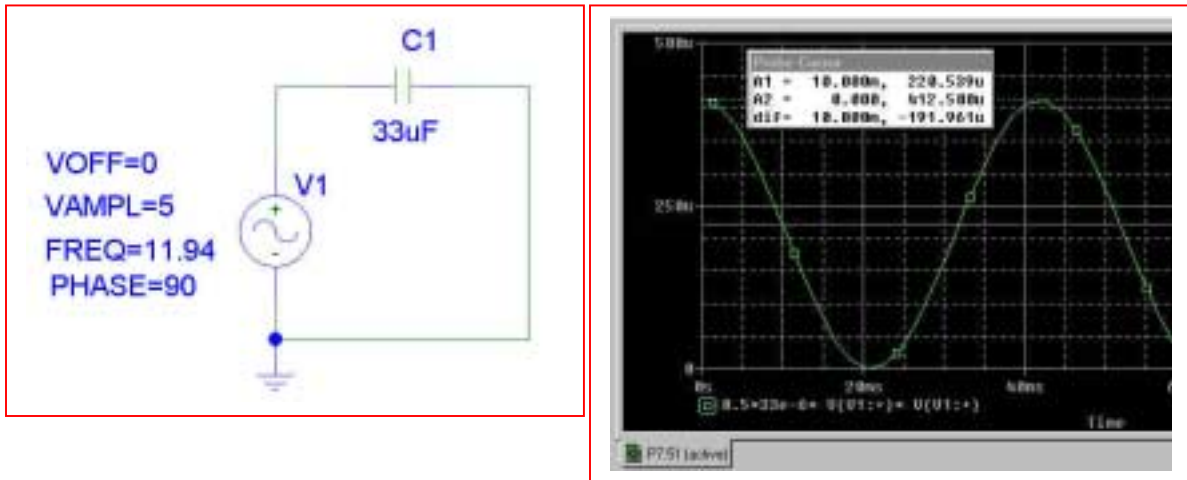
$$\frac{i_{out}}{i_s} = \frac{G_{in} (V_2 - V_1) + G_f V_2}{\frac{1}{L_1} \int_0^t V_1 dt' + G_{in} (V_1 - V_2)}$$



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

### 51. PSpice verification

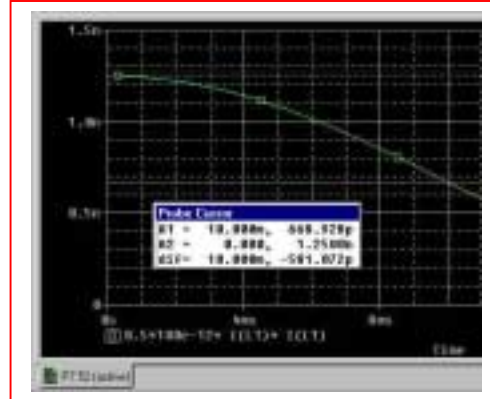
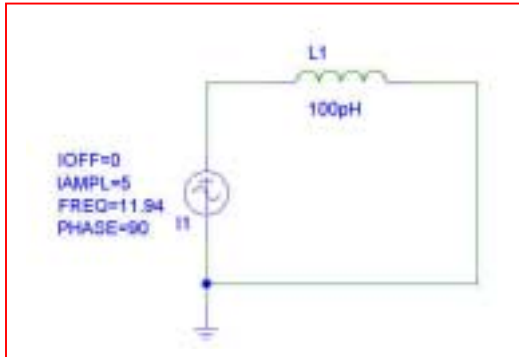
$w = \frac{1}{2} C v^2 = 0.5 (33 \times 10^{-6}) [5 \cos (75 \times 10^{-2})]^2 = 220.8 \mu\text{J}$ . This is in agreement with the PSpice simulation results shown below.



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

### 52. PSpice verification

$w = \frac{1}{2} Li^2 = 0.5 (100 \times 10^{-12}) [5 \cos(75 \times 10^{-2})]^2 = 669.2 \text{ pJ}$ . This is in agreement with the PSpice simulation results shown below.





## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

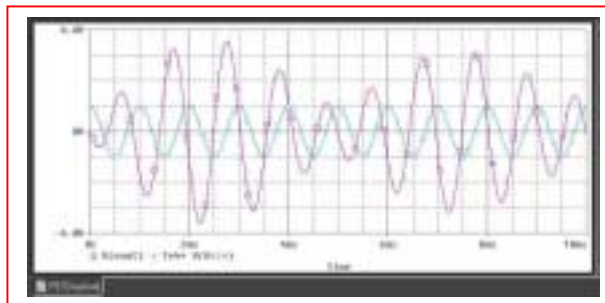
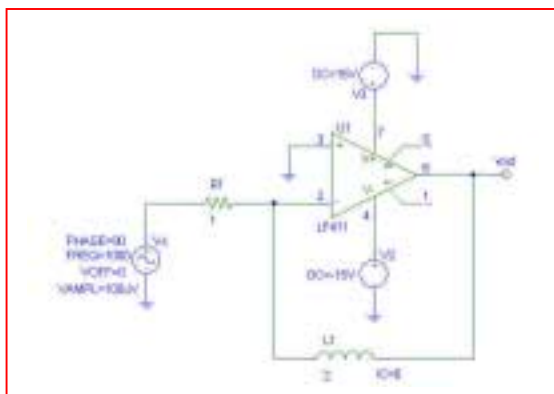
$$53. \quad 0 = \frac{V_a - V_s}{R_1} + \frac{1}{L} \int v_{L_f} dt$$

$$V_a = V_b = 0, \quad 0 = \frac{-V_s}{R_1} + \frac{1}{L} \int v_{L_f} dt$$

$$v_{L_f} = V_a - V_{out} = 0 - V_{out} = -\frac{L}{R_1} \frac{dV_s}{dt}$$

$$V_{out} = -\frac{L_f}{R_1} \frac{dV_s}{dt} = -\frac{L_f}{R_1} \frac{d}{dt} (A \cos 2\pi 10^3 t) \Rightarrow L_f = 2R_1; \text{ Let } R = 1 \Omega \text{ and } L = 1 \text{ H.}$$

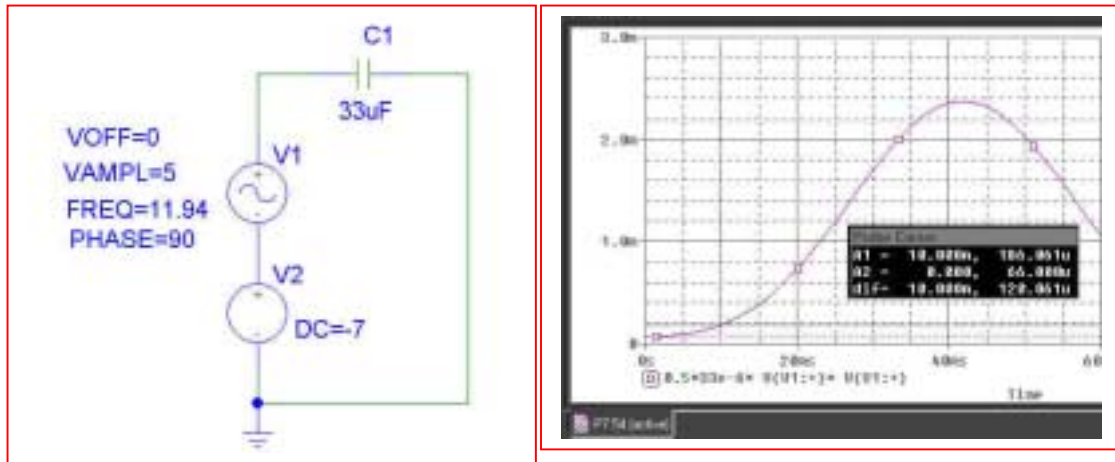
PSpice Verification: clearly, something rather odd is occurring in the simulation of this particular circuit, since the output is not a pure sinusoid, but a combination of several sinusoids.



## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

### 54. PSpice verification

$w = \frac{1}{2} C v^2 = 0.5 (33 \times 10^{-6}) [5 \cos (75 \times 10^{-2}) - 7]^2 = 184.2 \mu\text{J}$ . This is in reasonable agreement with the PSpice simulation results shown below.

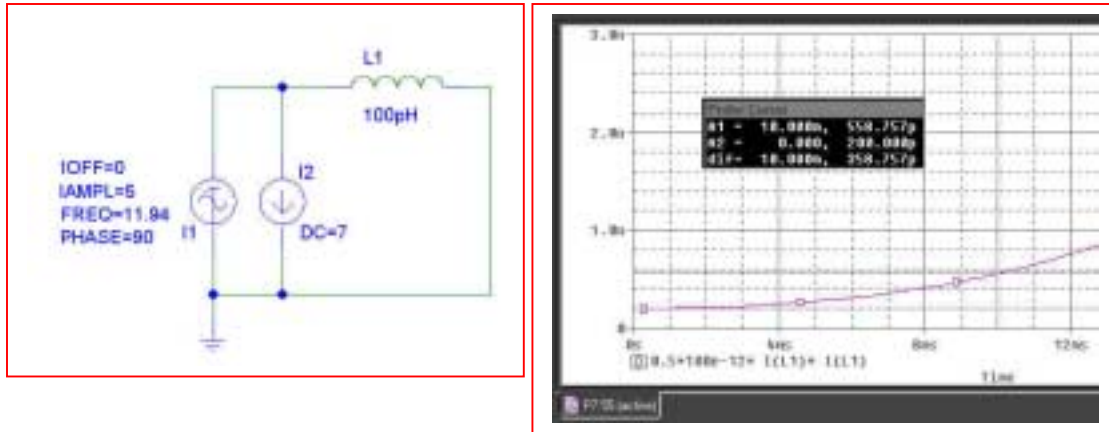




## CHAPTER SEVEN SOLUTIONS

### 55. PSpice verification

$w = \frac{1}{2} Li^2 = 0.5 (100 \times 10^{-12}) [5 \cos(75 \times 10^{-2}) - 7]^2 = 558.3 \text{ pJ}$ . This is in agreement with the PSpice simulation results shown below.



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

1.

$$\begin{aligned} i_L(0) &= \frac{100}{50} = 2\text{A} \therefore i_L(t) = 2e^{-80t/0.2} \\ \text{(a)} \quad &= 2e^{-400t} \text{A}, t > 0 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad i_L(0.01) = 2e^{-4} = 36.63\text{mA}$$

$$\text{(c)} \quad 2e^{-400t_1} = 1, e^{400t_1} = 2, t_1 = 1.7329\text{ms}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

2.

$$(a) \quad i_L(0^-) = \frac{1}{2} \times 60 = 30\text{mA}, \quad i_x(0^-) = \frac{2}{3} \times 30 = 20\text{mA}$$

$$(b) \quad i_L(0^+) = 30\text{mA}, \quad i_x(0^+) = -30\text{mA}$$

$$(c) \quad i_L(t) = 30e^{-250t/0.05} = 30e^{-5000t} \text{mA}, \quad i_L(0.3\text{ms}) \\ = 30e^{-1.5} = 6.694\text{mA} = -i_x$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

3.

$$(a) \quad i_L(0) = 4.5 \text{ mA}, R/L = \frac{10^3}{4 \times 10^{-3}} = \frac{10^6}{4}$$
$$\therefore i_L = 4.5e^{-10^6 t/4} \text{ mA} \therefore i_L(5 \mu s) = 4.5e^{-1.25}$$

$$= 1.289 \text{ mA.}$$

$$(b) \quad i_{\text{sw}}(5 \mu s) = 9 - 1.289 = 7.711 \text{ mA.}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

4.

- (a) Since the inductor current can't change instantaneously, we simply need to find  $i_L$  while the switch is closed. The inductor is shorting out both of the resistors, so  $i_L(0^+) = 2 \text{ A}$ .
- (b) The instant after the switch is thrown, we know that 2 A flows through the inductor. By KCL, the simple circuit must have 2 A flowing through the  $20\text{-}\Omega$  resistor as well. Thus,

$$v = 4(20) = 80 \text{ V}.$$

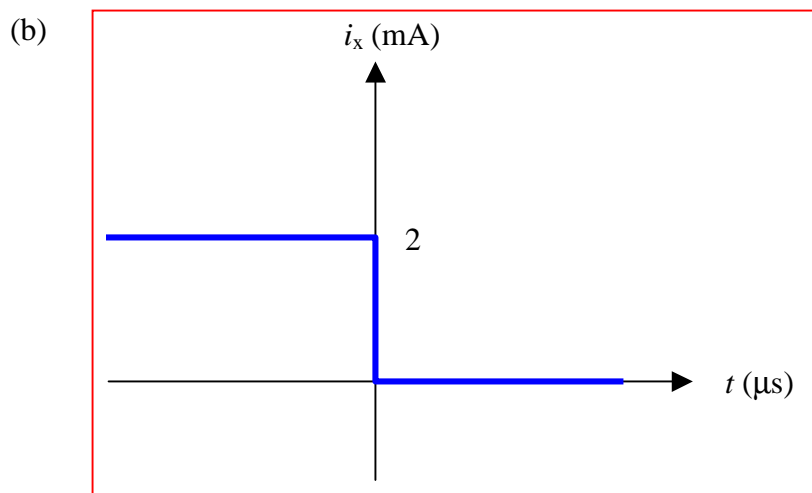
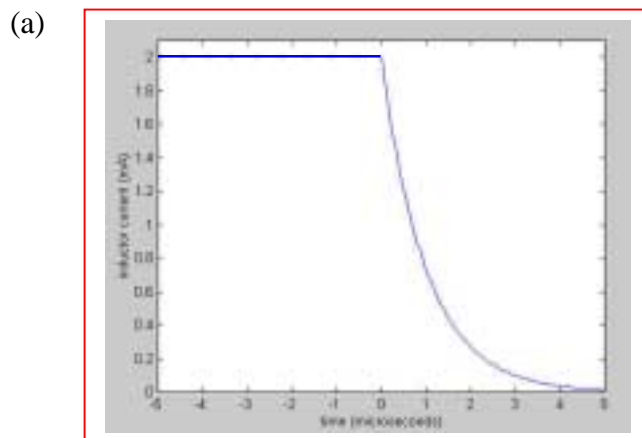
## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

5. (a) Prior to the switch being thrown, the  $12\text{-}\Omega$  resistor is isolated and we have a simple two-resistor current divider (the inductor is acting like a short circuit in the DC circuit, since it has been connected in this fashion long enough for any transients to have decayed). Thus, the current  $i_L$  through the inductor is simply  $5(8)/(8 + 2) = 4\text{ A}$ . The voltage  $v$  must be  $0\text{ V}$ .
- (b) The instant just after the switch is thrown, the inductor current must remain the same, so  $i_L = 4\text{ A}$ . KCL requires that the same current must now be flowing through the  $12\text{-}\Omega$  resistor, so  $v = 12(-4) = -48\text{ V}$ .



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

6. For  $t < 0$ , we have a current divider with  $i_L(0^-) = i_x(0^-) = 0.5 [10 (1 / (1 + 1.5))] \text{ mA} = 2 \text{ mA}$ . For  $t > 0$ , the resistor through which  $i_x$  flows is shorted, so that  $i_x(t > 0) = 0$ . The remaining  $1\text{-k}\Omega$  resistor and  $1\text{-mH}$  inductor network exhibits a decaying current such that  $i_L(t) = 2e^{-t/\tau} \text{ mA}$  where  $\tau = L/R = 1 \text{ }\mu\text{s}$ .



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

7.

$$(a) \quad \frac{i}{I_o} = e^{-t/\tau}, \frac{t}{\tau} = \ln \frac{I_o}{i}, \frac{I_o}{i} = 10 \therefore \frac{t}{\tau} = \ln 10 = 2.303;$$

$$\frac{I_o}{i} = 100, \frac{t}{\tau} = 4.605; \frac{I_o}{i} = 1000, \frac{t}{\tau} = \boxed{6.908}$$

$$(b) \quad \frac{i}{I_o} = e^{-t/\tau}, \frac{d(i/I_o)}{d(t/\tau)} = -e^{-t/\tau}; \text{ at } t/\tau = 1, \frac{d(i/I_o)}{d(t/\tau)} = -e^{-1}$$

$$\text{Now, } y = m(x-1) + b = -e^{-1}(x-1) + e^{-1} \left( \frac{t}{\tau} = x, \frac{i}{I_o} = y \right)$$

$$\text{At } y = 0, e^{-1}(x-1) = e^{-1} \therefore x = 2 \therefore t/\tau = \boxed{2}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

8. Reading from the graph current is at 0.37 at 2 ms

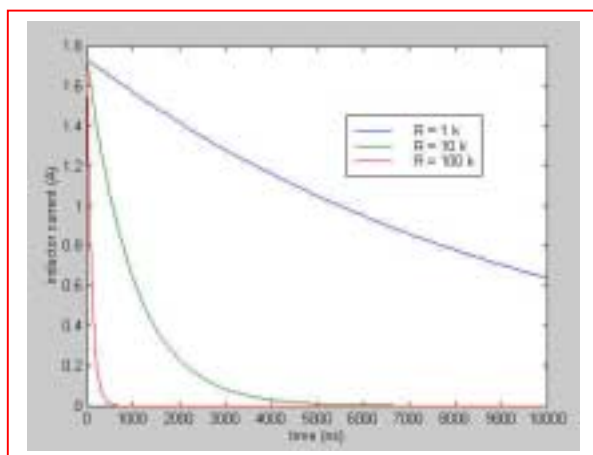
$$\therefore \tau = 2 \text{ ms}$$

$$I_0 = 10 \text{ A}$$

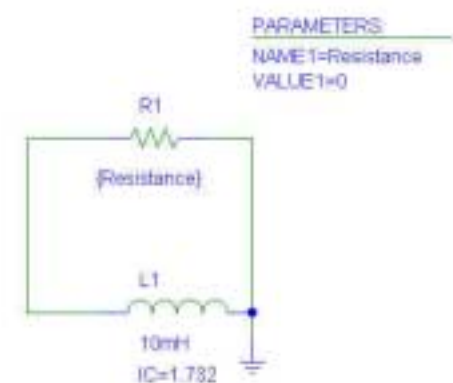
## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

9.  $w = \frac{1}{2} Li^2$ , so an initial energy of 15 mJ in a 10-mH inductor corresponds to an initial inductor current of 1.732 A. For  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $\tau = L/R = 10 \mu\text{s}$ , so  $i_L(t) = 1.732 e^{-0.1t} \text{ A}$ . For  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $\tau = 1 \mu\text{s}$  so  $i_L(t) = 1.732 e^{-t} \text{ A}$ . For  $R = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $\tau = 100 \text{ ns}$  or  $0.1 \mu\text{s}$  so  $i_L(t) = 1.732 e^{-10t} \text{ A}$ . For each current expression above, it is assumed that time is expressed in microseconds.

To create a sketch, we first realise that the maximum current for any of the three cases will be 1.732 A, and after one time constant (10, 1, or 0.1  $\mu\text{s}$ ), the current will drop to 36.79% of this value (637.2 mA); after approximately 5 time constants, the current will be close to zero.

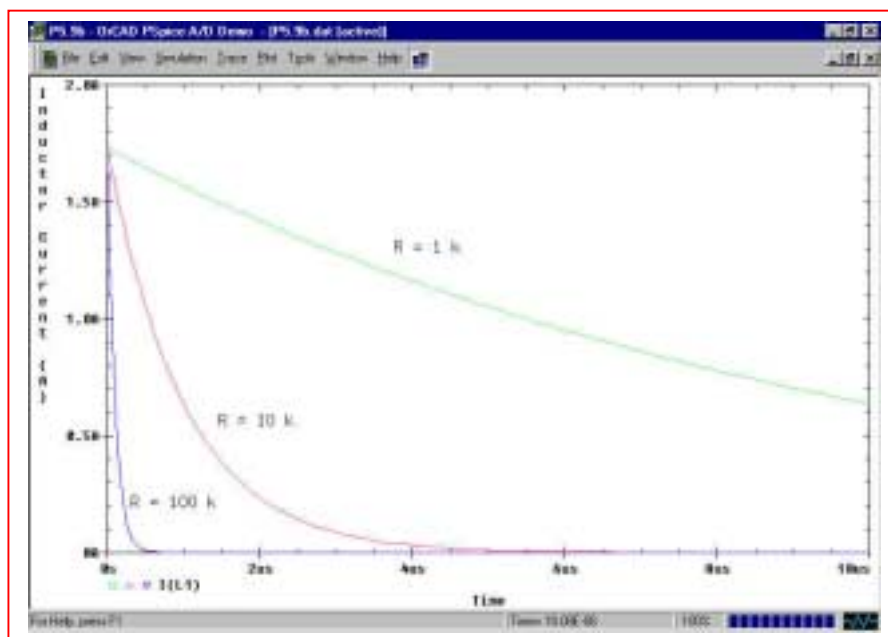


**Sketch based on hand analysis**



**Circuit used for PSpice verification**

As can be seen by comparing the two plots, which probably should have the same x-axis scale labels for easier comparison, the PSpice simulation results obtained using a parametric sweep do in fact agree with our hand calculations.





## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

10.

$$(a) \quad \tau = \frac{3.3 \times 10^{-6}}{1 \times 10^6} = 3.3 \times 10^{-12}$$

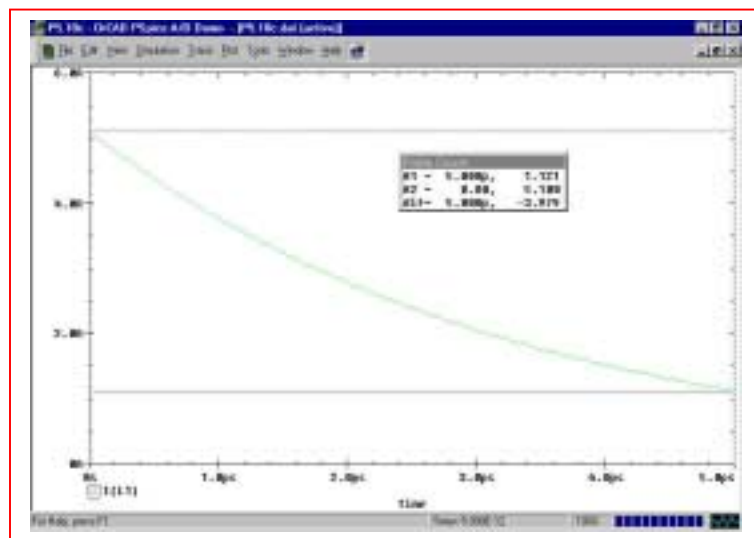
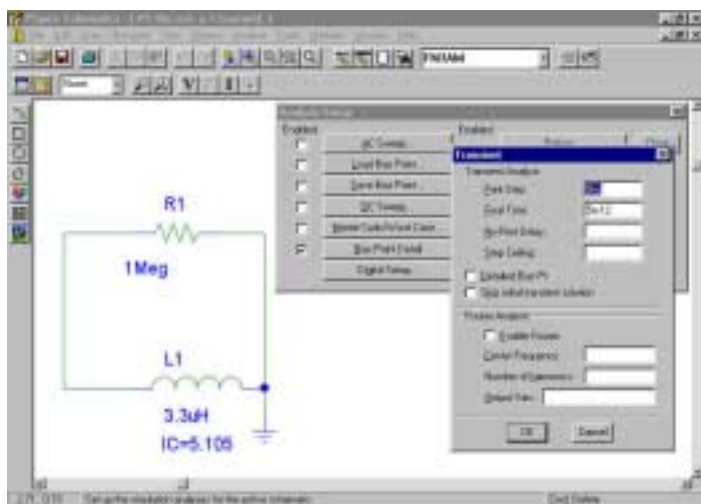
(b)

$$\omega = \frac{1}{2} . L . I_0^2$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \times 43 \times 10^{-6}}{3.3 \times 10^{-6}}} = 5.1 \text{ A}$$

$$i(5 \text{ ps}) = 5.1 e^{-1 \times 10^6 \times 5 \times 10^{-12} / 3.3 \times 10^{-6}} = 1.12 \text{ A}$$

(c)



From the PSpice simulation, we see that the inductor current is 1.121 A at  $t = 5 \text{ ps}$ , in agreement with the hand calculation.

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

11. Assume the source Thévenin resistance is zero, and assume the transient is measured to  $5\tau$ . Then,

$$\tau = \frac{L}{R} \quad \therefore 5\tau = \frac{5L}{R} = 100 \times 10^{-9} \text{ secs}$$

$$\therefore R > \frac{(5)(125.7)10^{-6}}{10^{-7}} \quad \text{so R must be greater than } 6.285 \text{ k}\Omega.$$

$$(\text{If } 1\tau \text{ assumed then } R > \frac{6.285}{5} = 125.7\Omega)$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

The film acts as an intensity integrator. Assuming that we may model the intensity as a simple decaying exponential,

$$\phi(t) = \phi_o e^{-t/\tau}$$

where the time constant  $\tau$  represents the effect of the Thévenin equivalent resistance of the equipment as it drains the energy stored in the two capacitors, then the intensity of the image on the film  $\Phi$  is actually proportional to the integrated exposure:

$$\Phi = K \int_0^{\text{exposure time}} \phi_o e^{-t/\tau} dt$$

where  $K$  is some constant. Solving the integral, we find that

$$\Phi = -K \phi_o \tau \left[ e^{-(\text{exposure time})/\tau} - 1 \right]$$

The maximum value of this intensity function is  $-K\phi_o\tau$ .

With 150 ms yielding an image intensity of approximately 14% of the maximum observed and the knowledge that at 2 s no further increase is seen leads us to estimate that  $1 - e^{-150 \times 10^{-3}/\tau} = 0.14$ , assuming that we are observing single-exponential decay behavior and that the response speed of the film is not affecting the measurement. Thus, we may extract an estimate of the circuit time constant as  $\tau = 994.5$  ms.

This estimate is consistent with the additional observation that at  $t = 2$  s, the image appears to be saturated.

With two 50-mF capacitors connected in parallel for a total capacitance of 100 mF, we may estimate the Thévenin equivalent resistance from  $\tau = RC$  as  $R_{th} = \tau / C$

$$= 9.945 \, \Omega.$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

13.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad v_c(0) &= 8(50 \parallel 200) \times \frac{30}{50} = 192 \text{ V} \\ v_c(t) &= 192e^{-3000t/24} = 192e^{-125t} \text{ V} \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad 0.1 = e^{-125t} \therefore t = 18.421 \text{ ms}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

14.

$$(a) \quad v_c = 80e^{-10^6 t / 100} = 80e^{-10^4 t} \text{ V}, t > 0; 0.5 = e^{-10^4 t} \therefore t = 69.31 \mu s$$

$$(b) \quad w_c = \frac{1}{2} C 80^2 e^{-20,000 t} = \frac{1}{4} C 80^2 \therefore t = 34.66 \mu s$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

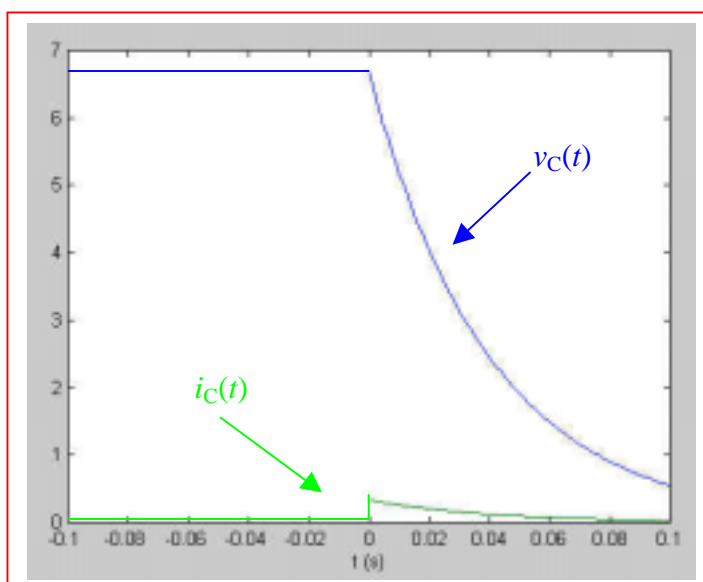
15.

$$t < 0: i_c(t) = 0, 10 = 5000i_s + 10^4 i_s \therefore i_s = \frac{2}{3} \text{ mA}$$

$$\therefore v_c(t) = \frac{20}{3} = 6.667 \text{ V}$$

$$t > 0: i_s = 0 \therefore v_c(t) = 6.667 e^{-t / 2 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-6}}$$

$$\therefore v_c(t) = 6.667 e^{-25t} \text{ V} \therefore i_c(t) = \frac{-6.667}{20 \times 10^3} e^{-25t} = 0.3333 e^{-25t} \text{ mA}$$





## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

16.

$$v(0^+) = 20V$$

$$i(0^+) = 0.1A$$

$$v(1.5ms) = 20e^{-1.5 \times 10^{-3} / 50 \times 20 \times 10^{-6}} = 4.5V$$

$$i(1.5ms) = 0A$$

$$v(3ms) = 20e^{-3 \times 10^{-3} / 50 \times 20 \times 10^{-6}} = 1V$$

$$i(3ms) = 0A$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

17.

(a)  $i_L(0) = 4\text{ A} \therefore i_L(t) = 4e^{-500t} \text{ A} \quad (0 \leq t \leq 1\text{ ms})$

$$i_L(0.8\text{ ms}) = 4e^{-0.4} = \boxed{2.681\text{ A}}$$

(b)  $i_L(1\text{ ms}) = 4e^{-0.5} = 2.426\text{ A}$

$$\therefore i_L(t) = 2.426e^{-250(t-0.001)}$$

$$\therefore i_L(2\text{ ms}) = 2.426e^{-0.25} = \boxed{1.8895\text{ A}}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

18.

$$(a) \quad i_L = 40e^{-50,000t} \text{ mA} \therefore 10 = 40e^{-50,000t}, \therefore t_1 = \boxed{27.73 \mu s}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad i_L(10 \mu s) &= 40e^{-0.5} = 24.26 \text{ mA} \therefore i_L \\ &= 24.26e^{-(1000+R)50t} \quad (t > 10 \mu s) \\ \therefore 10 &= 24.26e^{-(1000+R)5 \times 10^{-6}} \therefore \ln 2.426 = 0.8863 \\ &= 0.25(1000+R)10^{-3}, 1000+R = 0.8863 \times 4 \times 10^3 \therefore R = \boxed{2545^+ \Omega} \end{aligned}$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

19.

(a)  $i_1(0) = 20\text{mA}$ ,  $i_2(0) = 15\text{mA}$

$$\therefore v(t) = 40e^{-50000t} + 45e^{-100000t} \text{ V} \therefore v(0) = 85\text{V}$$

(b)  $v(15\mu s) = 40e^{-0.75} + 45e^{-1.5} = 28.94\text{V}$

(c)  $\frac{85}{10} = 40e^{-50000t} + 45e^{-100000t}$ . Let  $e^{-50000t} = x$

$$\therefore 45x^2 + 40x - 8.5 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 + 1530}}{90} = 0.17718, < 0$$

$$\therefore e^{-50000t} = 0.17718, t = 34.61\mu s$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

20.

$$t < 0: v_R = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \downarrow i_L(0) = \frac{2R_1}{R_1 + R_2}$$

$$t > 0: i_L(t) = \frac{2R_1}{R_1 + R_2} e^{-50R_2 t} \therefore v_R = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} e^{-50R_2 t}$$

$$\therefore v_R(0^+) = 10 = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} \therefore R_1 \parallel R_2 = 5\Omega. \text{ Also, } v_R(1\text{ms})$$

$$= 5 = 10e^{-50R_2/1000} \therefore 0.05R_2 = 0.6931 \therefore R_2 = 13.863\Omega$$

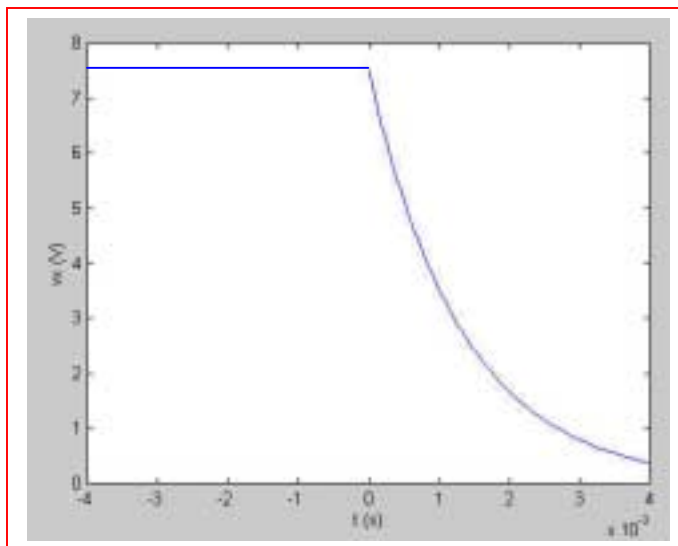
$$\therefore \frac{1}{13.863} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{5} \therefore R_1 = 7.821\Omega$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

21.

(a)  $i_L(0) = \frac{24}{60} = 0.4\text{A} \therefore i_L(t) = 0.4e^{-750t}\text{A}, t > 0$

(b)  $v_x = \frac{5}{6} \times 24 = 20\text{V}, t < 0$   
 $v_x(0^+) = 50 \times 0.4 \times \frac{3}{8} = 7.5\text{V}$   
 $\therefore v_x(t) = 7.5e^{-750t}\text{V}, t > 0$





## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

22.

$$v_{in} = \frac{3i_L}{4} \times 20 + 10i_L = 25i_L$$

$$v_{in} \therefore \frac{v_{in}}{i_L} = 25\Omega \therefore i_L = 10e^{-25t/0.5} = 10e^{-50t} \text{ A}, t > 0$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

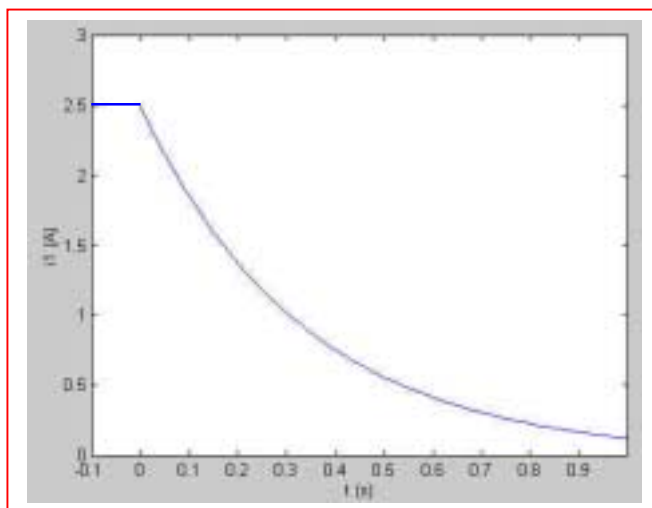
23.

$$i_L(0) = \frac{64}{4 + 40 \parallel 8} \times \frac{40}{48} = 5 \text{ A}$$

$$\therefore i_L = 5e^{-24t/8} = 5e^{-3t} \text{ A}$$

$$\therefore i_1(t) = 2.5e^{-3t} \text{ A}, t > 0; \quad i_1(-0.1) = 2.5 \text{ A}$$

$$i_1(0.03) = 2.285 \text{ A}, i_1(0.1) = 1.852 \text{ A}$$





## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

24.

(a)  $i_L(0) = 4\text{ A} \therefore i_L = 4e^{-100t}\text{ A}, 0 < t < 15\text{ ms}$   
 $\therefore i_L(15\text{ ms}) = 4e^{-1.5} = 0.8925^+\text{ A}$

(b)  $t > 15\text{ ms}: i_L = 0.8925^+ e^{-20(t-0.015)}\text{ A}$   
 $\therefore i_L(30\text{ ms}) = 0.8925^+ e^{-0.3} = 0.6612\text{ A}$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

25.

$$(a) \quad i_1(0^+) = i_1(0^-) = 10\text{A}, i_2(0^+) = i_2(0^-) = 20\text{A} \therefore i(0^+) = \boxed{30\text{A}}$$

$$(b) \quad \tau = L_{eq} / R_{eq} = \frac{0.08}{48} = \frac{5}{3} \text{ms} = \boxed{1.6667\text{ms}}$$

$$(c) \quad i_1(0^-) = 10\text{A}, i_2(0^-) = 20\text{A}; \quad \boxed{i(t) = 30e^{-600t} \text{A}}$$

$$(d) \quad v = -48i = \boxed{-1440e^{-600t} \text{V}}$$

$$(e) \quad i_1 = 10(-440) \int_0^t e^{-600t} dt + 10 = 24e^{-600t} \Big|_0^t + 10 = 24e^{-600t} - 14\text{A}$$

$$i_2 = 2.5(-1440) \int_0^t e^{-600t} dt + 20$$

$$= 6e^{-600t} \Big|_0^t + 20 = \boxed{6e^{-600t} + 14\text{A}}$$

$$(f) \quad W_L(0) = \frac{1}{2} \times 0.1 \times 10^2 + \frac{1}{2} \times 0.4 \times 20^2 = 5 + 80 = 85\text{J}$$

$$W_L(\infty) = \frac{1}{2} \times 0.1 \times 14^2 + \frac{1}{2} \times 0.4 \times 14^2 = 9.8 + 39.2 = 49\text{J}$$

$$W_R = \int_0^\infty i^2 48 dt = \int_0^\infty 900 \times 48 e^{-1200t} dt = \frac{900 \times 48}{-1200} (-1) = 36\text{J}$$

$$\therefore 49 + 36 = 85 \text{ checks}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

26.

(a)  $v_c(0) = 100 \times \frac{2}{2+2} \times \frac{2}{3} = 33.33\text{V}; i_1(0^-) = \frac{100}{2+2} \times \frac{2}{3} = 16.667\text{mA}$

$\therefore v_c(9:59) = 33.33\text{V}, i_1(9:59) = 16.667\text{mA}$

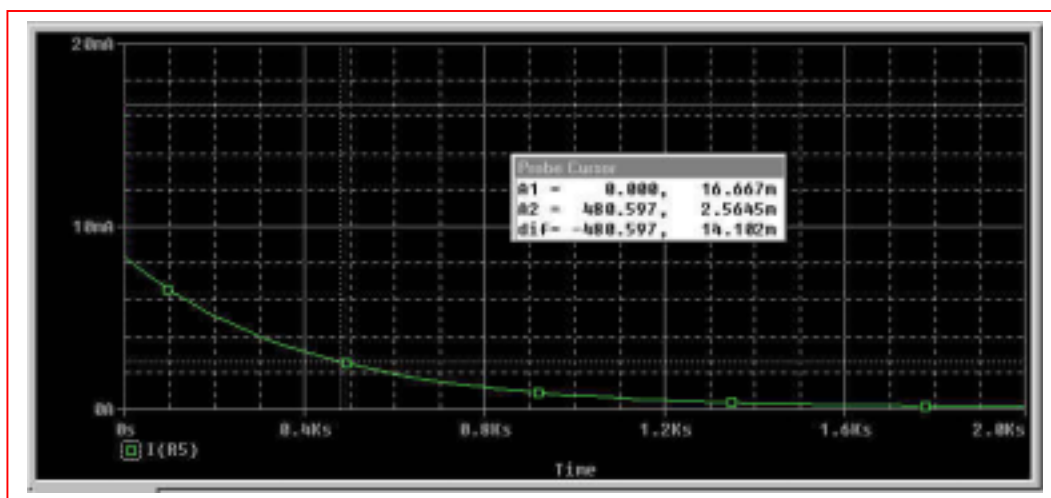
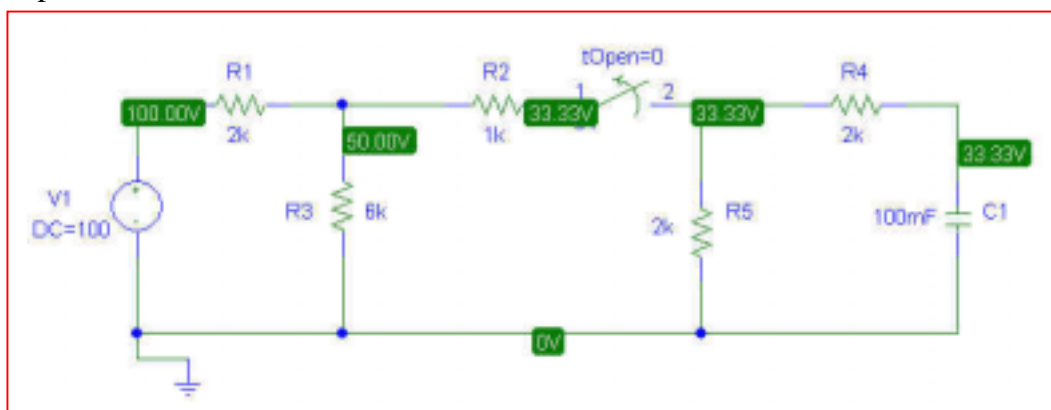
(b)  $v_c(t) = 33.33e^{-t/400}, t > 10:00 \therefore v_c(10:05) = 33.33e^{-300/400}$

$= 15.745\text{V}, i_1(10:05) = \frac{15.745}{4000} = 3.936\text{mA}$

(c)  $\tau = 400\text{ s}$ , so  $1.2\tau = 480\text{ s}$ .  $v_c(1.2\tau) = 33.33e^{-1.2} = 10.04\text{ V}$ .

Using Ohm's law, we find that  $i_1(1.2\tau) = v_c(1.2\tau)/4000 = 2.51\text{ mA}$ .

(d) PSpice Verification:



We see from the DC analysis of the circuit that our initial value is correct; the Probe output confirms our hand calculations, especially for part (c).

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

27.

$$t > 0: \frac{25i_x}{20} = 1.25i_x \therefore 34 = 100(1.25i_x - 0.8i_x + i_x) + 25i_x \therefore i_x = 0.2\text{A}$$

$$(a) \quad i_s(0^-) = (1.25 - 0.8 + 1)0.2 = \boxed{0.290\text{A}}$$

$$(b) \quad i_x(0^-) = \boxed{0.2\text{A}}$$

$$(c) \quad v_c(t) = 25 \times 0.2e^{-t} = 5e^{-t}\text{V} \therefore i_x(0^+) = \frac{5}{100} = \boxed{0.05\text{A}}$$

$$(d) \quad 0.8i_x(0^+) = 0.04\text{A} \therefore i_s(0^+) = \frac{34}{120} - 0.04 \times \frac{20}{120} = \frac{33.2}{120} = \boxed{0.2767\text{A}}$$

$$(e) \quad i_x(0.4) = \frac{1}{100} \times 5e^{-0.4} = \boxed{0.03352\text{A}}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

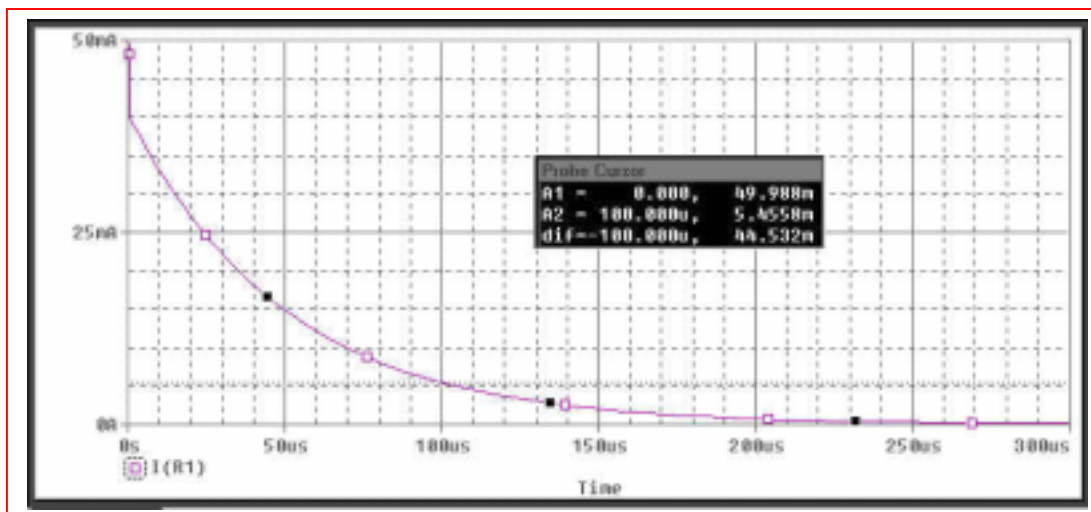
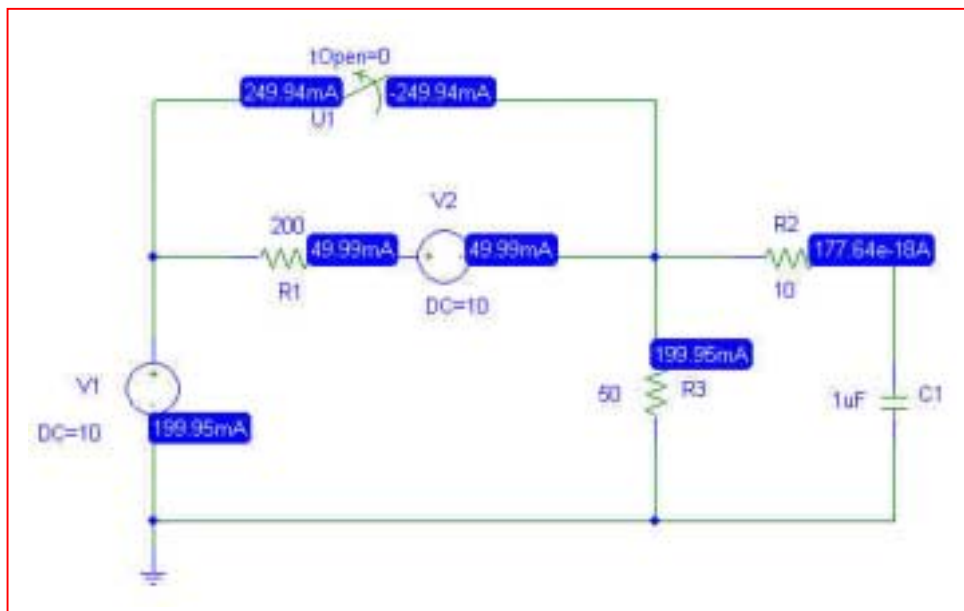
28.

(a)  $v_c(0) = 10\text{V} \therefore v_c(t) = 10e^{-10^6 t / (10+50 \parallel 200)} = 10e^{-20000t}\text{V}$

(b)  $i_A(-100\mu s) = i_A(0^-) = \frac{10}{200} = 50\text{mA}$

$i_A(100\mu s) = 10e^{-2} \left( \frac{1}{10+40} \right) \frac{50}{250} = 5.413\text{mA}$

(c) PSpice Verification.



From the DC simulation, we see that PSpice verifies our hand calculation of  $i_A = 50\text{ mA}$ . The transient response plotted using Probe indicates that at  $100\mu s$ , the current is approximately  $5.46\text{ mA}$ , which is within acceptable round-off error compared to the hand calculated value.

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

29.

$$(a) \quad i_1(t) = 8(-1) \frac{12}{12+4} = \boxed{-6\text{mA} \ (t < 0)}$$

$$(b) \quad 4 \parallel 12 \parallel 6 = 2k\Omega, \ v_c(0) = 48\text{V}$$

$$\therefore v_c(t) = 48e^{-10^6 t / 5 \times 2 \times 10^3} = 48e^{-100t} \text{V}, \ t > 0$$

$$\therefore i(t) = \boxed{12e^{-100t} \text{mA}, \ t > 0}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

30.

(a)  $v_{CLeft}(0) = 20\text{V}$ ,  $v_{CRIGHT}(0) = 80\text{V}$

$$\therefore v_{CL} = 20e^{-10^6 t/8}, v_{CR} = 80e^{-10^6 t/0.8}$$

$$\therefore v_{out} = v_{CR} - v_{CL} = 80e^{-1,250,000t} - 20e^{-125,000t} \text{ V}, t > 0$$

(b)  $v_{out}(0^+) = 60\text{V}$ ;  $v_{out}(1\mu s) = 80e^{-1.25} - 20e^{-0.125} = 5.270\text{V}$

$$v_{out}(5\mu s) = 80e^{-6.25} - 20e^{-0.625} = -10.551\text{V}$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

31. (a)  $t < 0$ :  $\frac{v_c - 0.25v_c}{5} + \frac{v_c}{10} + \frac{v_c - 40}{4} = 0 \therefore v_c = 20\text{V} (t < 0)$

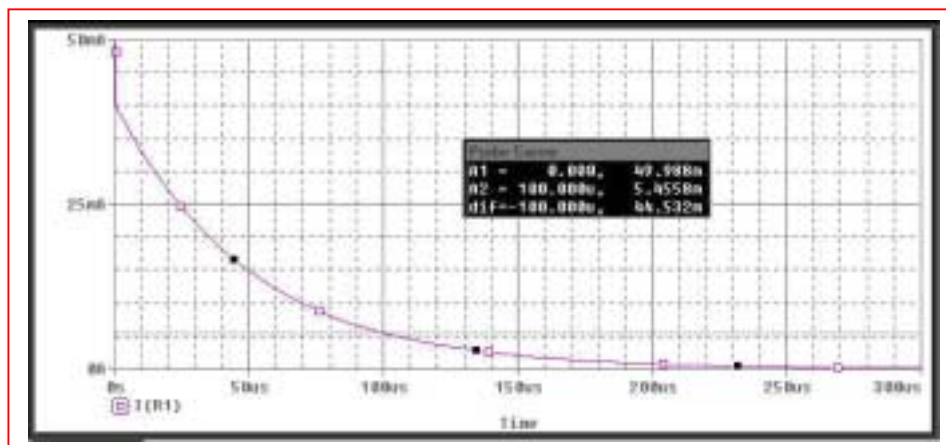
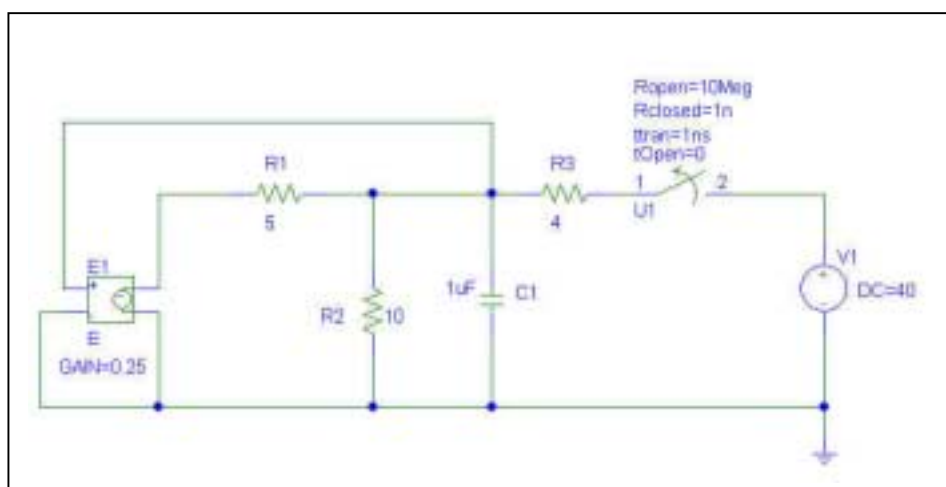
$t > 0$ : Apply  $v_c = 1\text{V} \therefore \frac{1 - 0.25}{5} + 0.1 - i_{in} = 0.25\text{A}$

$$\therefore R_{eq} = \frac{1}{0.25} = 4\Omega$$

$$\therefore v_c(t) = 20e^{-10^6 t/4} = 20e^{-250,000t} \text{V} (t > 0)$$

(b)  $v_c(3 \mu\text{s}) = 9.447 \text{ V}$

- (c) PSpice verification. Note that the switch parameters had to be changed in order to perform this simulation.



As can be seen from the simulation results, our hand calculations are accurate.



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

32.  $t < 0: v_c(0) = 60\text{V}$

$$0 < t < 1\text{ms}: v_c = 60e^{-10^6 t / (R_o + 1000)} \therefore \frac{50}{60} e^{-500 / (R_o + 1000)}$$

$$\therefore \frac{500}{R_o + 1000} = \ln 1.2 = 0.18232 \therefore \frac{R_o}{500} + 2 = 5.4848, R_o = \boxed{1742.4\Omega}$$

$$\therefore v_c(1\text{ms}) = 60e^{-1000 / 2742.4} = 41.67\text{V}$$

$$t > 1\text{ms}: v_c = 41.67e^{-10^6 (t - 10^{-3}) / (1742.4 + R_1 \parallel 1000)}$$

$$\therefore 25 = 41.67e^{-1000(\cdot)} \therefore 0.5108 = \frac{.1000}{1742.4 + R_1 \parallel 1000}, 1742.4 + R_1 \parallel 1000$$

$$= 1957.6, R_1 \parallel 1000 = 215.2 \frac{1}{R_1} + 10^{-3} = \frac{1}{215.2} \therefore R_1 = \boxed{274.2\Omega}$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

33.

- (a) With the switch closed, define a nodal voltage  $V_1$  at the top of the 5-k $\Omega$  resistor. Then,

$$0 = (V_1 - 100)/2 + (V_1 - V_C)/3 + V_1/5 \quad [1]$$

$$0 = V_C/10 + (V_C - V_1)/3 + (V_C - 100) \quad [2]$$

Solving, we find that  $V_C = v_C(0^-) = 99.76 \text{ V}$ .

- (b)  $t > 0$ :  $R_{eq} = 10 \parallel 6.5 = 3.939 \text{ k}\Omega \therefore v_c = 87.59e^{-10^7 t / 3939} = 87.59e^{-2539t} \text{ V } (t > 0)$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

34.  $t < 0$ :

$$12 = 4i_1 + 20i_1 \therefore i_1 = 0.5\text{mA} \therefore v_c(0) = 6i_1 + 20i_1 = 26i_1$$

$$v_c(0) = 13\text{V}$$

$$t > 0: \text{ Apply } \leftarrow 1\text{mA} \therefore 1 + 0.6i_1 = i_1 \therefore i_1 = 2.5\text{mA}; \pm v_{in} = 30i_1 = 75\text{V} \therefore R_{eq} = 75k\Omega$$

$$\therefore v_c(t) = 13e^{-t/75 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-9}} = 13e^{-10^6 t/150} = 13e^{-6667t}$$

$$\therefore i_1(t) = \frac{v_o}{3 \times 10^4} = \boxed{0.4333e^{-6667t} \text{mA } (t > 0)}$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

35.

$$(a) \quad v_1(0^-) = 100\text{V}, \quad v_2(0^-) = 0, \quad v_R(0^-) = 0$$

$$(b) \quad v_1(0^-) = 100\text{V}, \quad v_2(0^+) = 0, \quad v_R(0^+) = 100\text{V}$$

$$(c) \quad \tau = \frac{20 \times 5}{20 + 5} \times 10^{-6} \times 2 \times 10^4 = 8 \times 10^{-2} \text{ s}$$

$$(d) \quad v_R(t) = 100e^{-12.5t} \text{ V}, \quad t > 0$$

$$(e) \quad i(t) = \frac{v_R(t)}{2 \times 10^4} = 5e^{-12.5t} \text{ mA}$$

$$(f) \quad v_1(t) = \frac{10^6}{20} \int_0^t -5 \times 10^{-3} e^{-12.5t} dt + 100 = \frac{10^3}{50} e^{-12.5t} \Big|_0^t + 100 = -20e^{-12.5t} + 80\text{V}$$

$$v_2(t) = \frac{1000}{5} \int_0^t 5e^{-12.5t} dt + 0 = -80e^{-12.5t} \Big|_0^t + 0 = -80e^{-12.5t} + 80\text{V}$$

$$(g) \quad w_{c1}(\infty) = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-6} \times 80^2 = 64\text{mJ}, \quad w_{c2}(\infty) = \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-6} \times 80^2 = 16\text{mJ}$$

$$w_{c1}(0) = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-6} \times 100^2 = 100\text{mJ}, \quad w_{c2}(0) = 0$$

$$w_R = \int_0^\infty 25 \times 10^{-6} e^{-25t} \times 2 \times 10^4 dt = \frac{25}{-25} \times 2 \times 10^4 (-1) 10^{-6} = 20\text{mJ}$$

$$64 + 16 + 20 = 100 \text{ checks}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

36.

$$(a) \quad t < 0: i_s = 1\text{mA} \therefore v_c(0) = 10\text{V}, \downarrow i_L(0) = -1\text{mA} \therefore v_x(0) = 10\text{V}, t < 0$$

$$(b) \quad t > 0: v_c(t) = 10e^{-t/10^4 \times 20 \times 10^{-9}} = 10e^{-5000t} \text{V}$$

$$i_L(t) = -10^{-3}e - 10^{3t/0.1} = -10^{-3}e^{-10000t} \text{A} \therefore v_L(t) = e^{-10000t} \text{V}, t > 0$$

$$\therefore v_x = v_c - v_L(t) = 10e^{-5000t} - e^{-10000t} \text{V}, t > 0$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

37.

(a)  $t < 0$ :  $v_s = 20\text{V} \therefore v_c = 20\text{V}$ ,  $i_L = 20\text{mA} \therefore i_x(t) = 20\text{mA}$ ,  $t < 0$

(b)  $t > 0$ :  $v_s = 0 \therefore i_L(t) = 0.02e^{-10000t}\text{A}$ ;  $v_c(t) = 20e^{-t/2 \times 10^{-8} 10^4} = 20e^{-5000t}\text{V}$

$$\downarrow i_c(t) = 2 \times 10^{-8} \times 20(-5000)e^{-5000t} = -2e^{-5000t}\text{mA}$$

$$i_x(t) = i_L(t) + i_c(t) = 0.02e^{-10000t} - 0.002e^{-5000t}\text{A} = 20e^{-10000t} - 2e^{-5000t}\text{mA}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

38.

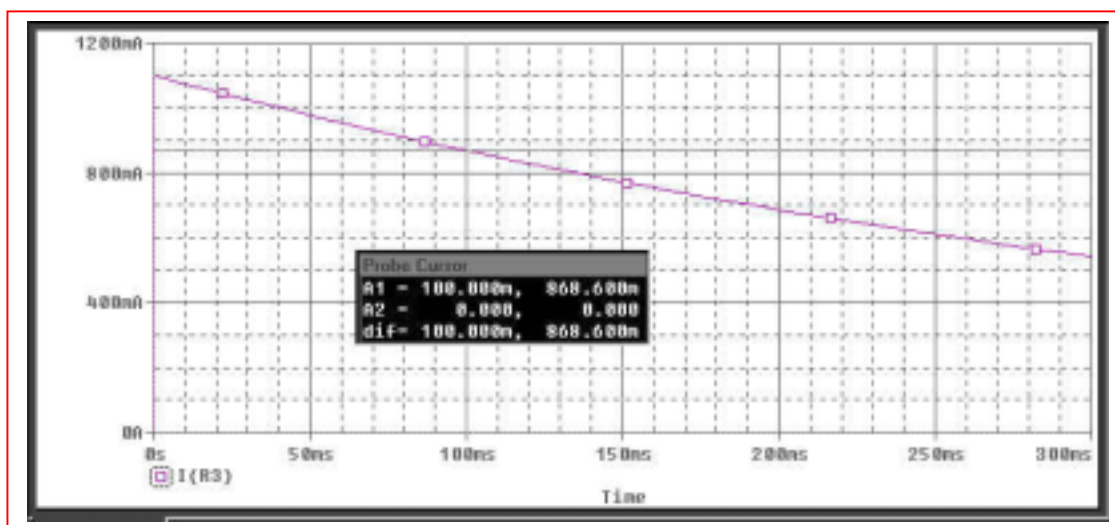
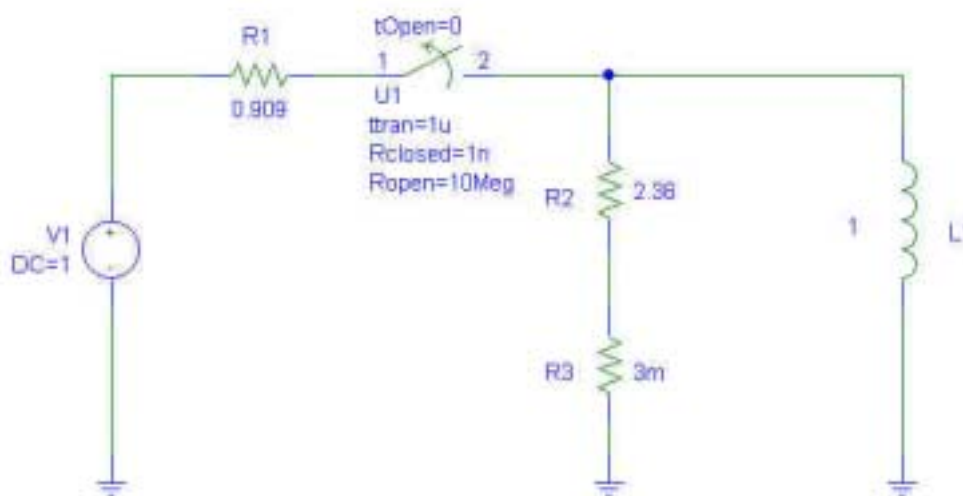
$$i_L(0^-) = \frac{V}{R} = \frac{1}{0.909} = 1.1 \text{ A}$$

$$t > 0: i_L(t) = e^{-2.363t} \text{ A}$$

$$i_L(0.1s) = 1.1e^{-2.363 \times 0.1} = 0.8685 \text{ A}$$

$\therefore$  since the current has dropped to less than 1 A prior to  $t = 100 \text{ ms}$ , the fuse does not blow.

PSpice verification: Note that the switch properties were changed.



We see from the simulation result that the current through the fuse (R3) is 869 mA, in agreement with our hand calculation.

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

39. (a)  $v_A = 300u(t-1) \text{ V}$ ,  $v_B = -120u(t+1) \text{ V}$ ;  $i_c = 3u(-t) \text{ A}$

$$t = -1.5: i_1(-1.5) = 3 \times \frac{100}{300} = \boxed{1\text{A}}$$

$$t = 0.5: i_1(-0.5) = \frac{-120}{300} + 1 = \boxed{0.6\text{A}};$$

$$t = 0.5: i_1 = -\frac{120}{300} = -0.4\text{A}; t = 1.5: i_1 = \frac{300}{300} - \frac{120}{300} = \boxed{0.6\text{A}}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

40.

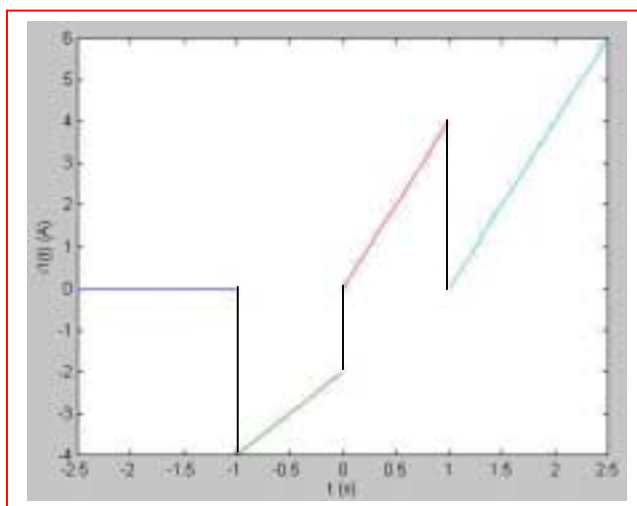
$$v_A = 600tu(t+1)\text{ V}, v_B = 600(t+1)u(t)\text{ V}, i_c = 6(t-1)u(t-1)\text{ A}$$

(a)  $t = -1.5: i_1 = 0; t = -0.5: i_1 = 600(-0.5)/300 = -1\text{ A}$

$$t = 0.5: i_1 = \frac{600(0.5)}{300} + \frac{600(1.5)}{300} = 4\text{ A}$$

$$t = 1.5: i_1 = \frac{600(1.5)}{300} + \frac{600(2.5)}{300} + \frac{1}{3} \times 6 \times 0.5 = 3 + 5 + 1 = 9\text{ A}$$

(b)



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

41.

$$(a) \quad 2u(-1) - 3u(1) + 4u(3) = -3 + 4 = 1$$

$$(b) \quad [5 - u(2)] [2 + u(1)] [1 - u(-1)] \\ = 4 \times 3 \times 1 = 12$$

$$(c) \quad 4e^{-u(1)}u(1) = 4e^{-1} = 1.4715^+$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

42.

(a)  $t < 0: i_x = \frac{100}{50} + 0 + 10 \times \frac{20}{50} = 6\text{A}$

$t > 0: i_x = 0 + \frac{60}{30} + 0 = 2\text{A}$

(b)  $t < 0$ : The voltage source is shorting out the  $30\text{-}\Omega$  resistor, so  $i_x = 0$ .

$t > 0: i_x = 60/30 = 2\text{ A}.$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

$$43. \quad t = -0.5: \quad 50 \parallel 25 = 16.667, \quad i_x = \frac{200}{66.67} - 2 \frac{1/50}{1/50 + 1/25 + 1/50} = 3 - \frac{1}{2} = 2.5\text{A}$$

$$t = 0.5: \quad i_x = \frac{200}{66.67} = 3\text{A}$$

$$t = 1.5: \quad i_x = 3 - \frac{100}{66.67} \times \frac{1}{3} = 2.5\text{A}$$

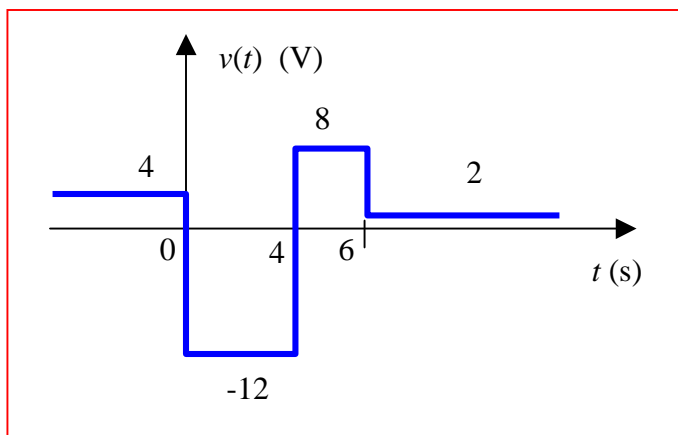
$$t = 2.5: \quad i_x = \frac{200 - 100}{50} = 2\text{A}$$

$$t = 3.5: \quad i_x = -\frac{100}{50} = -2\text{A}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

44.  $v(t) = 4 - 16u(t) + 20u(t - 4) - 6u(t - 6) \text{ V}$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

45. (a)  $7 u(t) - 0.2 u(t) + 8(t - 2) + 3$

$v(1) = 9.8 \text{ volts}$

(b) Resistor of value  $2\Omega$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

46.

(a)  $i_L(t) = (2 - 2e^{-200000t})u(t) \text{ mA}$

(b)  $v_L(t) = Li_L' = 15 \times 10^{-3} \times 10^{-3} (-2)$   
 $(-200000e^{-200000t})u(t) = 6e^{-200000t}u(t) \text{ V}$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

47.

$$(a) \quad i_L(t) = 2 + 2(1 - e^{-2.5t})u(t) \text{ A} \therefore i_L(-0.5) = \boxed{2\text{A}}$$

$$(b) \quad i_L(0.5) = 2 + 2(1 - e^{-1.25}) = \boxed{3.427\text{A}}$$

$$(c) \quad i_L(1.5) = 2 + 2(1 - e^{-3.75}) = \boxed{3.953\text{A}}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

48.

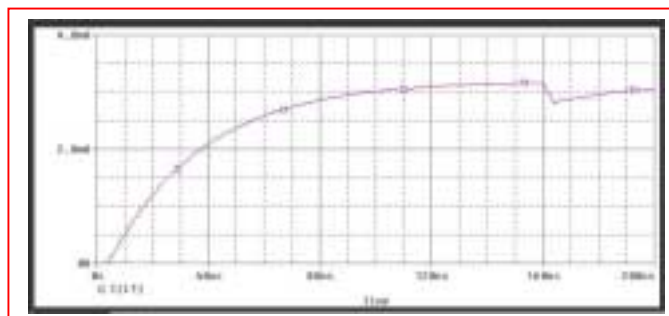
$$R_{th} = \frac{10 \times 10^3 \times 4.7 \times 10^3}{10 \times 10^3 + 4.7 \times 10^3} = 3.2 \times 10^3 \Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{500 \times 10^{-6}}{3.2 \times 10^3} = 156 ns$$

$$i_1 \cdot 4.7 \times 10^3 = i_L \cdot 10 \times 10^3 \quad (a)$$

$$i_1 + i_L = 10 \times 10^{-3} A$$

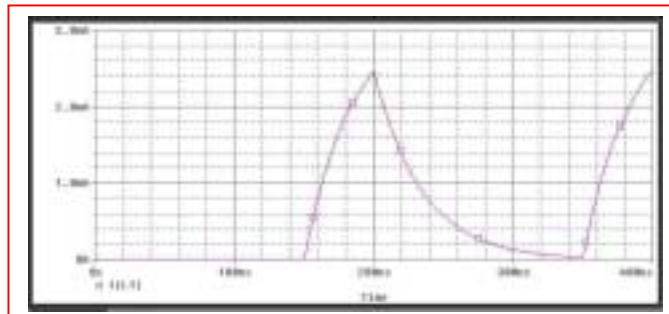
$$\therefore i_L = 3.2 \times 10^{-3} A$$



(b)



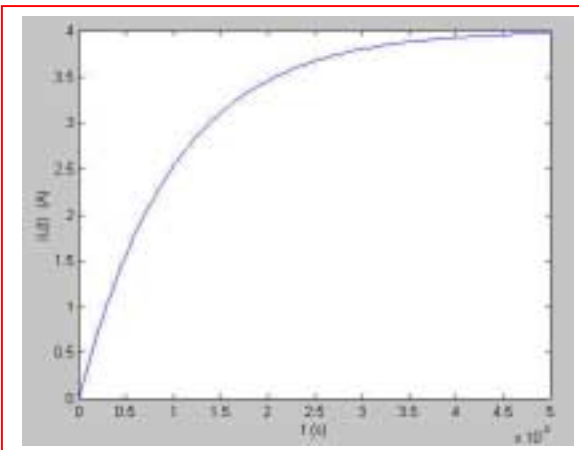
(c)



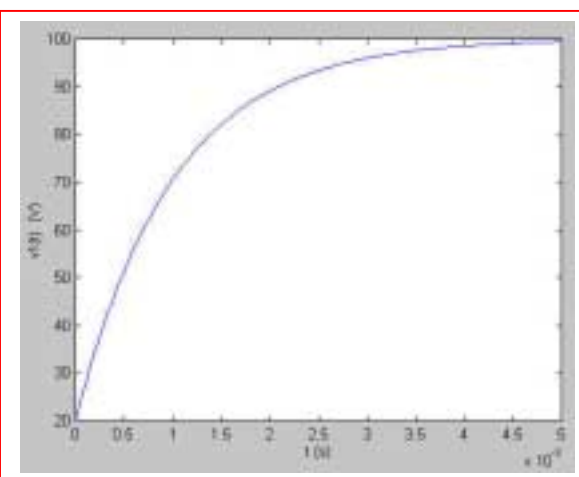
## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

49.

(a)  $i_L(t) = (4 - 4e^{-20t/0.02})u(t)$   
 $\therefore i_L(t) = 4(1 - e^{-1000t})u(t)\text{A}$



(b)  $v_1(t) = (100 - 80e^{-1000t})u(t)\text{V}$





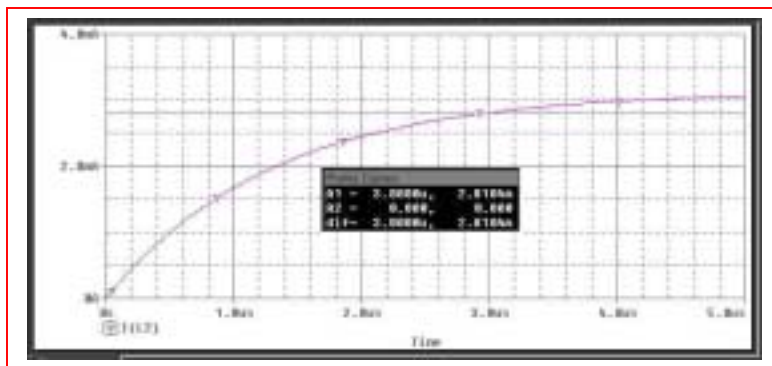
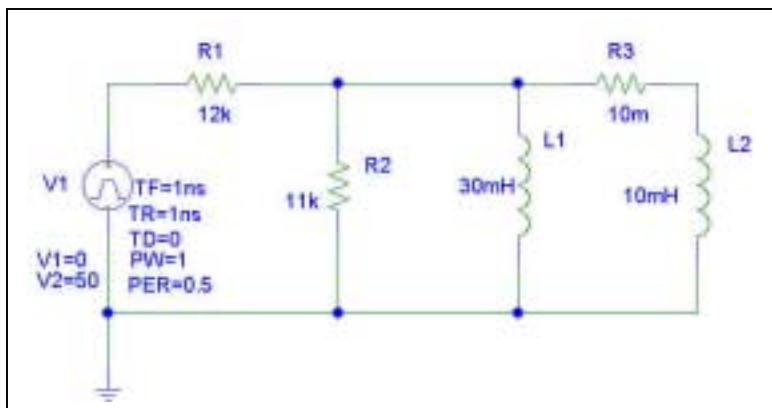
## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

50. (a) 0 W

(b) The total inductance is  $30 \parallel 10 = 7.5$  mH. The Thévenin equivalent resistance is  $12 \parallel 11 = 5.739$  k $\Omega$ . Thus, the circuit time constant is  $L/R = 1.307$   $\mu$ s. The final value of the total current flowing into the parallel inductor combination is  $50/12$  mA = 4.167 mA. This will be divided between the two inductors, so that  $i(\infty) = (4.167)(30)/(30 + 10) = 3.125$  mA.

We may therefore write  $i(t) = 3.125[1 - e^{-10^6 t / 1.307}]$  A. Solving at  $t = 3$   $\mu$ s, we find 2.810 A.

(c) PSpice verification



We see from the Probe output that our hand calculations are correct by verifying using the cursor tool at  $t = 3$   $\mu$ s.

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

51.

(a)  $i_L(t) = 10A, t < 0$

(b)  $i_L(t) = 8 + 2e^{-5t/0.5}$

$\therefore i_L(t) = 8 + 2e^{-10t} A, t > 0$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

52.

(a)  $i_L(t) = 2\text{A}, t > 0$

(b)  $i_L(t) = 5 - e^{-4t/0.1}$

$\therefore i_L(t) = 5 - 3e^{-40t} \text{ A}, t > 0$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

53.  $\frac{di}{dt} + Pi = Q$ ,  $i = e^{-Pt} \int Qe^{Pt} dt + Ae^{-Pt}$ ,  $R = 125\Omega$ ,  $L = 5H$   
 $\therefore L \frac{di}{dt} + Ri = Q \therefore LP = R = 125 \therefore P = 25$

(a)  $Q(t) = \frac{10}{L} = 2 \therefore i = e^{-25t} \int_0^t 2e^{25t} dt + Ae^{-25t} = e^{-25t} \times \frac{2}{25} e^{25t} \Big|_0^t + Ae^{-25t}$   
 $\therefore i = \frac{2}{25} + Ae^{-25t}$ ,  $i(0) = \frac{10}{125} = \frac{2}{25} \therefore A = 0 \therefore i = \frac{2}{25} = 0.08A$

(b)  $Q(t) = \frac{10u(t)}{5} = 2u(t) \therefore i = e^{-25t} \int_0^t 2e^{25t} dt + Ae^{-25t} = \frac{2}{25} + Ae^{-25t}$   
 $i(0) = 0 \therefore A = -\frac{2}{25} \therefore i(t) = 0.08(1 - e^{-25t})A, t > 0$

(c)  $Q(t) = \frac{10 + 10u(t)}{5} = 2 + 2u(t) \therefore i = 0.16 - 0.08e^{-25t}A, t > 0$

(d)  $Q(t) = \frac{10u(t) \cos 50t}{5} = 2u(t) \cos 50t \therefore i = e^{-25t} \int_0^t 2 \cos 50t \times e^{25t} dt + Ae^{-25t}$   
 $\therefore i = 2e^{-25t} \left[ \frac{e^{25t}}{50^2 + 25^2} (25 \cos 50t + 50 \sin 50t) \right]_0^t + Ae^{-25t}$   
 $= 2e^{-25t} \left[ \frac{e^{25t}}{3125} (25 \cos 50t + 50 \sin 50t) - \frac{1}{3125} \times 25 \right] + Ae^{-25t}$   
 $= \frac{2}{125} \cos 50t + \frac{4}{125} \sin 50t - \frac{2}{125} e^{-25t} + Ae^{-25t}$   
 $i(0) = 0 \therefore 0 = \frac{2}{125} - \frac{2}{125} + A \therefore A = 0$   
 $\therefore i(t) = 0.016 \cos 50t + 0.032 \sin 50t - 0.016e^{-25t}A, t > 0$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

54.

(a)  $0, 0$

(b)  $0, 200\text{V}$

(c)  $1\text{A}, 100\text{V}$

(d)  $\tau = \frac{50 \times 10^{-3}}{200} = \frac{1}{4} \text{ms} \therefore i_L = 1(1 - e^{-4000t})u(t)\text{A}, i_L(0.2\text{ms}) = 0.5507\text{A}$

$$v_1(t) = (100 + 100e^{-4000t})u(t)\text{V}, v_1(0.2\text{ms}) = 144.93\text{V}$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

55.

$$(a) \quad i_L(t) = \frac{100}{20} - \frac{100}{5} = -15\text{A}, t < 0$$

$$(b) \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = -15\text{A}$$

$$(c) \quad i_L(\infty) = \frac{100}{20} = 5\text{A}$$

$$(d) \quad i_L(t) = 5 - 20e^{-40t} \text{ A}, t > 0$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

$$56. \quad i_L(0^-) = \frac{18}{60+30} \times \frac{1}{2} = 0.1\text{A} \therefore i_L(0^+) = 0.1\text{A}$$

$$i_L(\infty) = 0.1 + 0.1 = 0.2\text{A}$$

$$\therefore i_L(t) = 0.2 - 0.1e^{-9000t} \text{ A}, t > 0$$

$$\therefore i_L(t) = 0.1u(-t) + (0.2 - 0.1e^{-9000t})u(t)\text{A}$$

$$\text{or, } i_L(t) = 0.1 + (0.1 - 0.1e^{-9000t})u(t)\text{A}$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

57.

$$(a) \quad i_x(0^-) = \frac{30}{7.5} \times \frac{3}{4} = 3\text{A}, \quad i_L(0^-) = 4\text{A}$$

$$(b) \quad i_x(0^+) = i_L(0^+) = 4\text{A}$$

$$(c) \quad i_x(\infty) = i_L(\infty) = 3\text{A} \\ \therefore i_x(t) = 3 + 1e^{-10t/0.5} = 3 + e^{-20t} \text{ A} \therefore i_x(0.04) \\ = 3 + e^{-0.8} = 3.449\text{A}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

58.

$$(a) \quad i_x(0^-) = i_L(0^-) = \frac{30}{10} = 3\text{A}$$

$$(b) \quad i_x(0^+) = \frac{30}{30+7.5} \times \frac{30}{40} + 3 \times \frac{15}{10+15} = 2.4\text{A}$$

$$(c) \quad i_x(\infty) = \frac{30}{7.5} \times \frac{30}{40} = 3\text{A} \therefore i_x(t) = 3 - 0.6e^{-6t/0.5}$$
$$= 3 - 0.6e^{-12t} \therefore i_x(0.04) = 3 - 0.6e^{-0.48} = 2.629\text{A}$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

59. OC :  $v_x = 0$ ,  $v_{oc} = 4u(t)$  V

$$\text{SC : } 0.1u(t) = \frac{v_x - 0.2v_x}{40} + \frac{v_x}{60}, 12u(t) = 0.6v_x + 2v_x$$

$$\therefore v_x = \frac{12u(t)}{2.6} \therefore i_{ab} = \frac{v_x}{60} = \frac{12u(t)}{2.6 \times 60} = \frac{u(t)}{13}$$

$$\therefore R_{th} = 4 \times 13 = 52 \Omega \therefore i_L = \frac{4u(t)}{52} (1 - e^{-52t/0.2}) u(t) = \frac{u(t)}{13} (1 - e^{-260t}) u(t)$$

$$\therefore v_x = 60i_L = \boxed{4.615^+ (1 - e^{-260t}) u(t)} \text{ V}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

60.

(a) OC:  $-100 + 30i_1 + 20i_1 = 0$ ,  $i_1 = 2\text{A}$

$$\therefore v_{oc} = 80u(t)\text{V}$$

SC:  $i_1 = 10\text{A}$ ,  $\downarrow i_{sc} = 10 + \frac{20 \times 10}{20} = 20\text{A}$

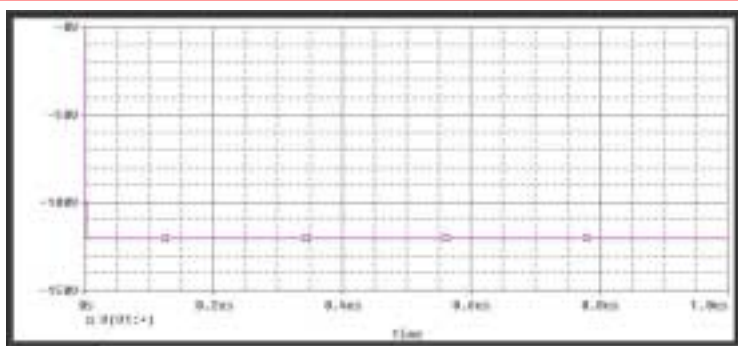
$$\therefore R_{th} = 4\Omega \therefore i_L(t) = \boxed{20(1 - e^{-40t})u(t)\text{A}}$$

(b)  $v_L = 0.1 \times 20 \times 40e^{-40t}u(t) = 80e^{-40t}u(t)$

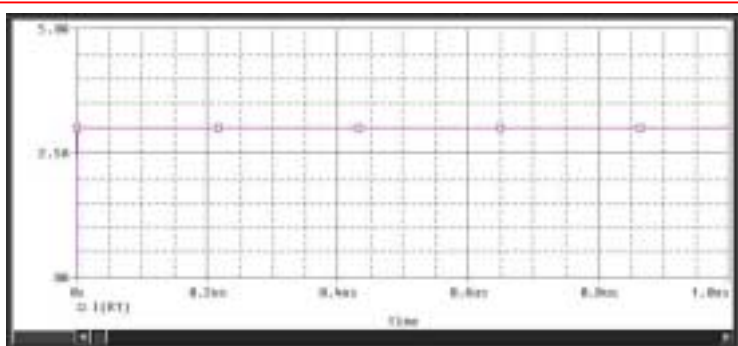
$$\therefore i_1(t) = \frac{100u(t) - 80e^{-40t}u(t)}{10} = \boxed{10 - 8e^{-40t}u(t)\text{A}}$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

61. Unfortunately, PSpice will not allow us to use negative time values. Thus, we must perform the simulation starting from  $t = 0$ , and manually shift the results if needed to account for sources that change value prior to  $t = 0$ .



Voltage source  
 $v_B(t)$  from  
Exercise 39.



Current source  
 $i_C(t)$  from  
Exercise 39.



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

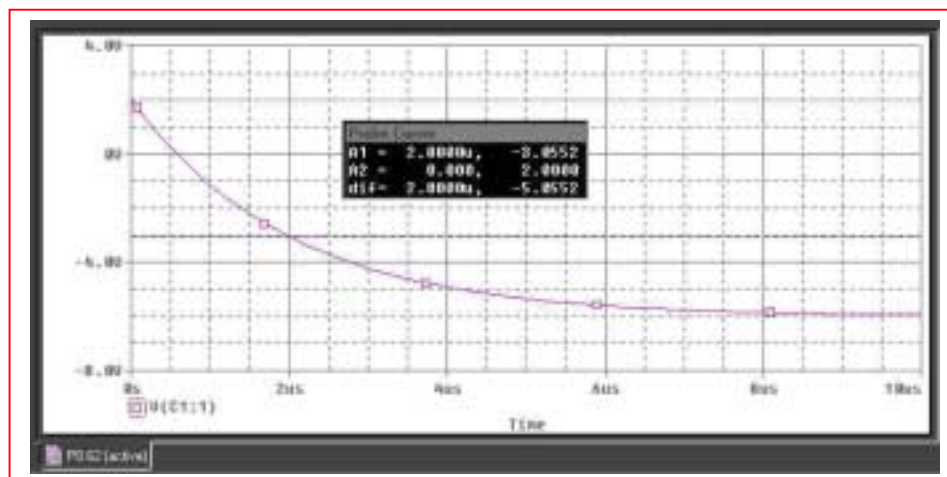
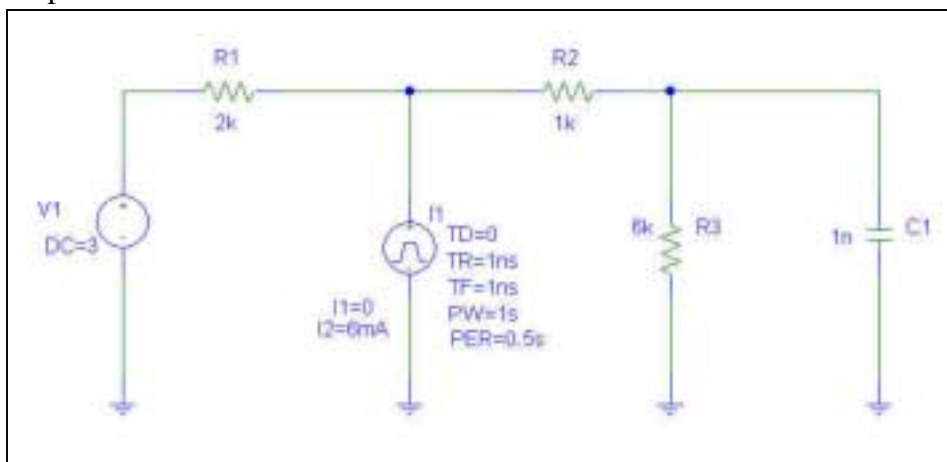
62. (a)  $v_c(0^-) = \frac{6}{9} \times 3 = 2\text{V} = v_c(0^+)$

$$v_c(\infty) = 2 - 6(2 \parallel 7) \frac{6}{7} = -6\text{V}$$

$$\therefore v_c(t) = -6 + 8e^{-10^9 t / 2 \times 10^3} = -6 + 8e^{-500000t} \text{V}, t > 0$$

$$v_c(-2\mu\text{s}) = v_c(0^-) = 2\text{V}, v_c(2\mu\text{s}) = -6 + 8e^{-1} = \boxed{-3.057\text{V}}$$

(b) PSpice verification.



As can be seen from the plot above, the PSpice simulation results confirm our hand calculations of  $v_c(t < 0) = 2\text{V}$  and  $v_c(t = 2\mu\text{s}) = -3.06\text{V}$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

$$63. \quad i_A(0^-) = \frac{10}{4} = 2.5\text{mA}, \quad i_A(\infty) = 10\text{mA}$$

$$v_c(0) = 7.5\text{V} \therefore i_A(0^+) = \frac{10}{1} + \frac{7.5}{1} = 17.5\text{mA}$$

$$i_A = 10 + 7.5e^{-10^8 t / 10^3} = 10 + 7.5e^{-10^5 t} \text{mA}, \quad t > 0, \quad i_A = 2.5\text{mA} \quad t < 0$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

64.  $i_A(0^-) = \frac{10}{1} = 10\text{mA}$ ,  $i_A(\infty) = 2.5\text{mA}$ ,  $v_c(0) = 0$

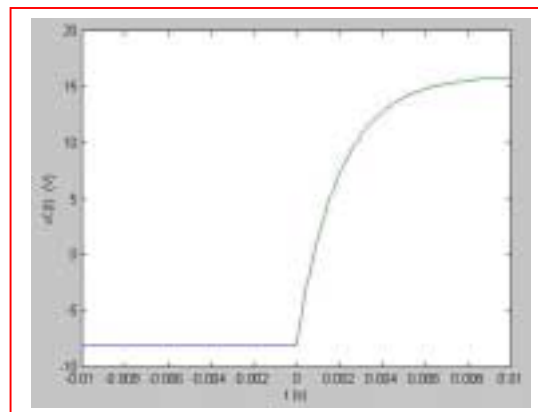
$$i_A(0^+) = \frac{10}{1.75} \times \frac{1}{4} = 1.4286\text{mA} \therefore i_A = 10\text{mA}, t < 0$$

$$i_A = 2.5 + (1.4286 - 2.5)e^{-10^8 t / 1.75 \times 10^3} = 2.5 - 1.0714e^{-57140t} \text{mA}, t > 0$$

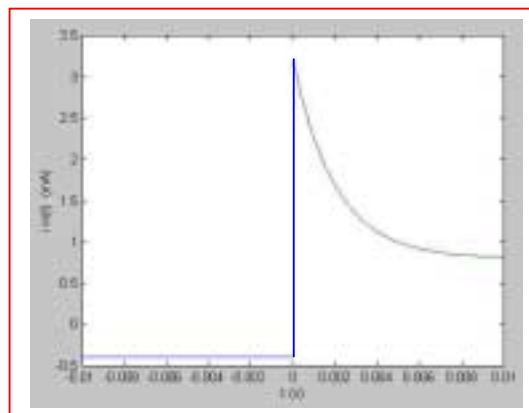
## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

65.

(a)  $v_s = -12u(-t) + 24u(t)$  V  
 $t < 0$ :  $v_c(0^-) = -8$  V  $\therefore v_c(0^+) = -8$  V  
 $t > 0$ :  $v_c(\infty) = \frac{2}{3} \times 24 = 16$  V  
 $RC = \frac{200}{30} \times 10^3 \times 3 \times 10^{-7} = 2 \times 10^{-3}$   
 $\therefore v_c(t) = 16 - 24e^{-500t}$  V,  $t > 0$   
 $\therefore v_c(t) = -8u(-t) + (16 - 24e^{-500t})u(t)$



(b)  $i_{in}(0^-) = \frac{-12}{30} = -0.4$  mA,  $i_{in}(0^+) = \frac{24+8}{10} = 3.2$  mA  
 $i_{in}(\infty) = \frac{24}{30} = 0.8$  mA  
 $i_{in}(t) = -0.4u(t) + (0.8 + 2.4e^{-500t})u(t)$  mA





## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

66.  $v_c(0^-) = 10\text{V} = v_c(0^+)$ ,  $i_{in}(0^-) = 0$   
 $i_{in}(0^+) = 0 \therefore i_{in}(t) = 0$  for all  $t$

(a)  $i_{in}(-1.5) = 0$

(b)  $i_{in}(1.5) = 0$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

67.  $0 < t < 0.5\text{ s} : v_c = 10(1 - e^{-2.5t})\text{ V}$

$v_c(0.4) = 6.321\text{ V}, v_c(0.5) = 7.135\text{ V}$

$t > 0.5 : \frac{20 - 10}{12} = \frac{5}{6}\text{ A} \therefore v_c(\infty) = 10 + 8 + \frac{5}{6} = \frac{50}{3}\text{ V}, 4 \parallel 8 = \frac{8}{3}\Omega$

$v_c(t) = \frac{50}{3} + \left(7.135 - \frac{50}{3}\right)e^{-0.375 \times 20(t-0.5)} = 16.667 - 9.532e^{-7.5(t-0.5)}\text{ V}$

$\therefore v_c(0.8) = 16.667 - 9.532e^{-7.5(0.3)} = 15.662\text{ V}$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

68. OC:  $\frac{-v_x}{100} - \frac{v_x}{100} + \frac{3-v_x}{100} = 0 \therefore v_x = 1, v_{oc} = 3 - 1 = 2\text{V}$

SC:  $v_x = 3\text{V} \therefore i_{sc} = \frac{v_x}{100} + \frac{v_x}{100} = 0.06\text{A}$

$\therefore R_{th} = v_{oc} / i_{sc} = 2 / 0.06 = 33.33\Omega$

$\therefore v_c = v_{oc} (1 - e^{-t/R_{th}C}) = 2(1 - e^{-10^6 t / 33.33})$

$= 2(1 - e^{-30,000t}) \text{V}, t > 0$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

69.

(a)  $t < 0$ :  $8(10 + 20) = 240\text{V} = v_R(t) = 80\text{V}, t < 0$

(b)  $t < 0$ :  $v_c(t) = 8 \times 30 = 240\text{V} \therefore v_c(0^+) = 240\text{V}$

$$t = (\infty): v_c(\infty) = \frac{1}{2} \times 8(10 + 10) = 80\text{V}$$

$$\therefore v_c(t) = 80 + 160e^{-t/10 \times 10^{-6}} = 80 + 160e^{-100000t}\text{V}$$

$$\therefore v_R(t) = 80 + 160e^{-100000t}\text{V}, t > 0$$

(c)  $t < 0$ :  $v_R(t) = 80\text{V}$

(d)  $v_c(0^-) = 80\text{V}, v_c(\infty) = 240\text{V} \therefore v_c(t) = 240 - 160e^{-t/50 \times 10^{-6}} = 240 - 160e^{-20000t}\text{V}$

$$v_R(0^-) = 80\text{V}, v_R(0^+) = 8 \frac{20}{30 + 20} \times 10 + \frac{80}{50} \times 10 = 32 + 16 = 48\text{V}$$

$$v_R(\infty) = 80\text{V} \therefore v_R(t) = 80 - 32e^{-20000t}\text{V}, t > 0$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

70.

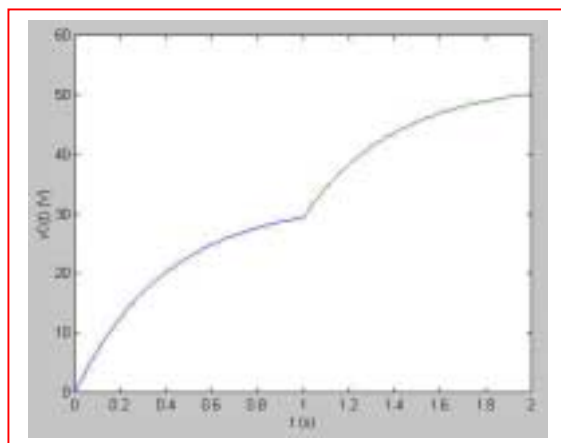
- (a) For  $t < 0$ , there are no active sources, and so  $v_C = 0$ .

For  $0 < t < 1$ , only the 40-V source is active.  $R_{th} = 5k \parallel 20k = 4k\Omega$  and hence  $\tau = R_{th}C = 0.4$  s. The “final” value (assuming no other source is ever added) is found by voltage division to be  $v_C(\infty) = 40(20)/(20 + 5) = 32$  V. Thus, we may write  $v_C(t) = 32 + [0 - 32]e^{-t/0.4}$  V =  $32(1 - e^{-2.5t})$  V.

For  $t > 1$ , we now have two sources operating, although the circuit time constant remains unchanged. We define a new time axis temporarily:  $t' = t - 1$ . Then  $v_C(t' = 0^+) = v_C(t = 1) = 29.37$  V. This is the voltage across the capacitor when the second source kicks on. The new final voltage is found to be  $v_C(\infty) = 40(20)/(20 + 5) + 100(5)/(20 + 5) = 52$  V.

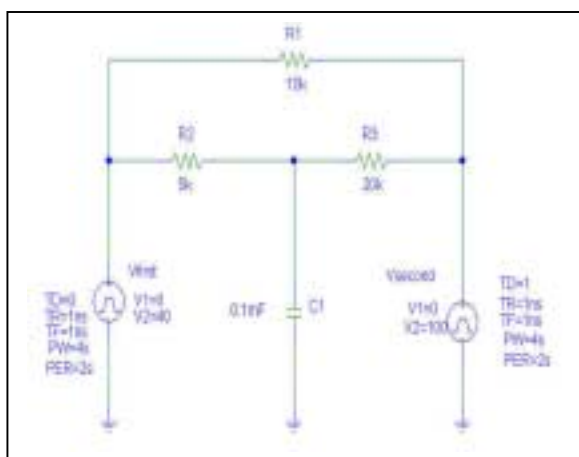
Thus,  $v_C(t') = 52 + [29.37 - 52]e^{-2.5t'} = 52 - 22.63e^{-2.5(t-1)}$  V.

(b)



For  $t < 0$ ,  
 $v_C = 0$ .

(c)



We see from the simulation results that our hand calculations and sketch are indeed correct.

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

71.  $v_{x,L} = 200e^{-2000t} \text{ V}$   
 $v_{x,c} = 100(1 - e^{-1000t}) \text{ V}$   
 $v_x = v_{x,L} - v_{x,c} = 0$   
 $\therefore 200e^{-2000t} = 100 - 100e^{-1000t}$   
 $\therefore 100e^{-1000t} + 200(e^{-1000t})^2 - 100 = 0,$   
$$e^{-1000t} = \frac{-100 \pm \sqrt{10,000 + 80,000}}{400} = -0.25 \pm 0.75$$
  
 $\therefore e^{-1000t} = 0.5, t = 0.6931 \text{ ms}$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

72.  $t < 0: v_c = 0$

$$0 < t < 1\text{ms}: v_c = 9(1 - e^{-10^6 t / (R_1 + 100)})$$

$$\therefore 8 = 9(1 - e^{-1000 / (R_1 + 100)}), \frac{1}{9} = e^{-1000 / (R_1 + 100)}$$

$$\therefore \frac{1000}{R_1 + 100} = 2.197, R_1 = \boxed{355.1\Omega}$$

$$t > 1\text{ms}: v_c = 8e^{-10^6 t' / (R_2 + 100)}, t' = t - 10^{-3} \therefore 1 - 8e^{-1000} (R_2 + 100)$$

$$\therefore \frac{1000}{R_2 + 100} = 2.079, R_2 = 480.9 - 100 = \boxed{380.9\Omega}$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

73. For  $t < 0$ , the voltage across all three capacitors is simply  $9(4.7)/5.7 = 7.421$  V. The circuit time constant is  $\tau = RC = 4700(0.5455 \times 10^{-6}) = 2.564$  ms.

When the circuit was first constructed, we assume no energy was stored in any of the capacitors, and hence the voltage across each was zero. When the switch was closed, the capacitors began to charge according to  $\frac{1}{2} C v^2$ . The capacitors charge with the same current flowing through each, so that by KCL we may write

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = C_2 \frac{dv_2}{dt} = C_3 \frac{dv_3}{dt}$$

With no initial energy stored, integration yields the relationship  $C_1 v_1 = C_2 v_2 = C_3 v_3$  throughout the charging (*i.e.* until the switch is eventually opened). Thus, just prior to the switch being thrown at what we now call  $t = 0$ , the total voltage across the capacitor string is 7.421 V, and the individual voltages may be found by solving:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= 7.421 \\ 10^{-6} v_1 - 2 \times 10^{-6} v_2 &= 0 \\ 2 \times 10^{-6} v_2 - 3 \times 10^{-6} v_3 &= 0 \end{aligned}$$

so that  $v_2 = 2.024$  V.

With the initial voltage across the 2- $\mu$ F capacitor now known, we may write

$$v(t) = 2.024 e^{-t/2.564 \times 10^{-3}} \text{ V}$$

- (a)  $v(t = 5.45 \text{ ms}) = 241.6 \text{ mV}$ .
- (b) The voltage across the entire capacitor string can be written as  $7.421 e^{-t/2.564 \times 10^{-3}} \text{ V}$ . Thus, the voltage across the 4.7-k $\Omega$  resistor at  $t = 1.7 \text{ ms} = 3.824 \text{ V}$  and the dissipated power is therefore  $3.111 \text{ mW}$ .
- (c) Energy stored at  $t = 0$  is  $\frac{1}{2} C v^2 = 0.5(0.5455 \times 10^{-6})(7.421)^2 = 15.02 \text{ } \mu\text{J}$ .



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

74.

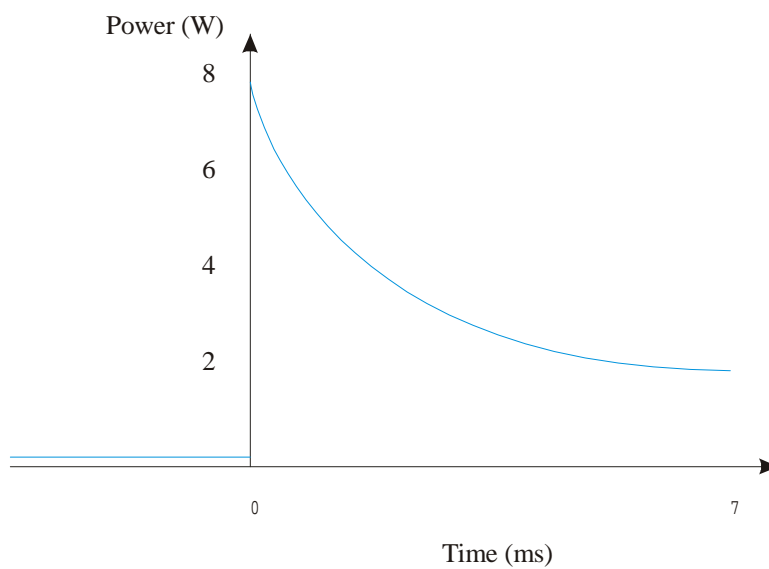
$$P(t < 0) = I^2 R = 0.001^2 \times 10^3 = 0.001 \text{ W}$$

$$V_{init} = I.R = 7 \times 10^{-3} \times 900 = 6.3 \text{ V}$$

$$P_{init} = \frac{V^2}{R} = 0.08 \text{ W}$$

$$V_{final} = 7 \times 10^{-3} \times 900\Omega // 1000\Omega = 3.3 \text{ V}$$

$$P_{final} = \frac{V^2}{R} = 0.02 \text{ W}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

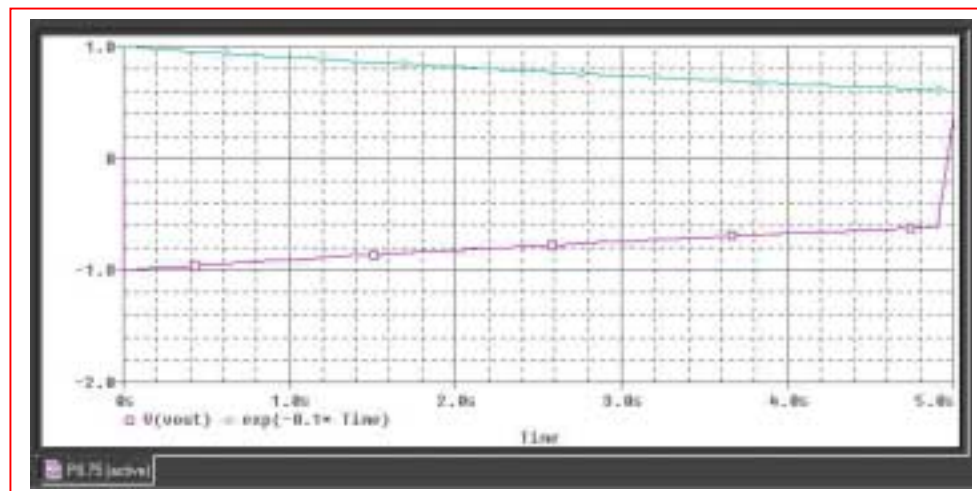
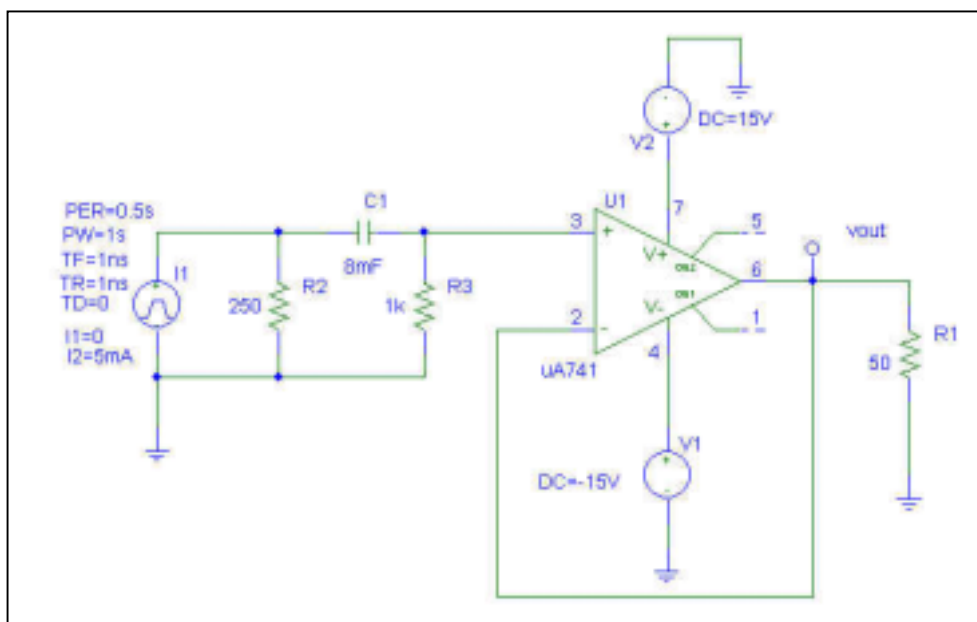
75. voltage follower  $\therefore v_o(t) = v_2(t)$

$$v_2(0^+) = 5(0.25 \parallel 1) = 1u(t) \text{ V}$$

$$v_2(\infty) = 0, \tau = 1.25 \times 8 = 10s$$

$$\therefore v_o(t) = e^{-0.1t} u(t) \text{ V}$$

PSpice verification:



From the simulation results, we see that modeling the operation of this circuit using an ideal op amp model does not provide an accurate accounting for the operation of the actual circuit.



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

76. voltage follower  $\therefore v_o(t) = v_2(t)$

$$v_2(t) = 1.25u(t)\text{V} = v_o(t)$$

$$v_x(t) = 1.25e^{-10^6/0.5 \times 200}u(t)$$

$$= 1.25e^{-10,000t}u(t)\text{V}$$

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

77. (a)  $v_1 = 0$  (virtual gnd)  $\therefore i = \frac{4}{10^4} e^{-20,000t} u(t) \text{ A}$

$$\therefore v_c = 10^7 \int_0^t \frac{4}{10^4} e^{-20,000t} dt = -0.2 e^{-20,000t} \Big|_0^t$$

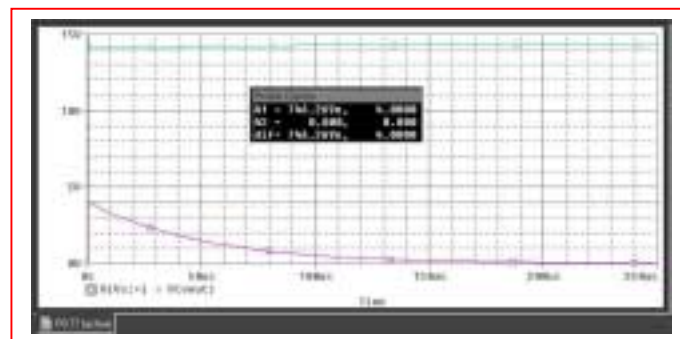
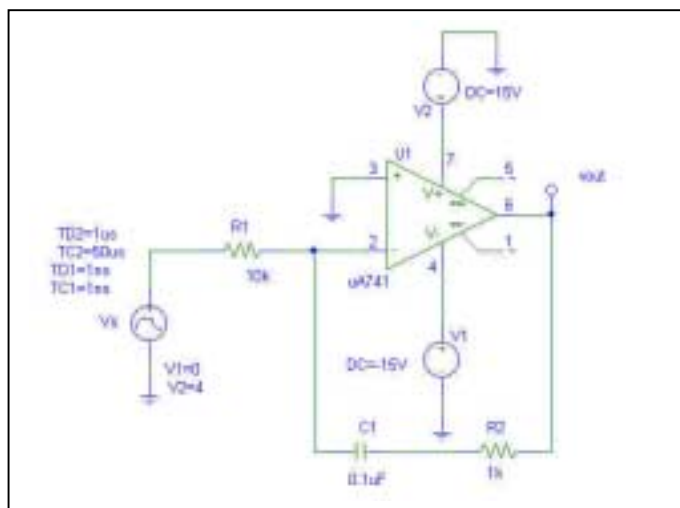
$$\therefore v_c(t) = 0.2(1 - e^{-20,000t}) u(t)$$

$$\therefore v_R(t) = 10^3 i(t) = 0.4 e^{-20,000t} u(t) \text{ V}$$

$$\therefore v_o(t) = -v_c(t) - v_R(t) = (-0.2 + 0.2 e^{-20,000t} - 0.4 e^{-20,000t}) u(t)$$

And we may write  $v_o(t) = -0.2[1 + e^{-20 \times 10^3 t}] u(t) \text{ V.}$

(b) PSpice verification:



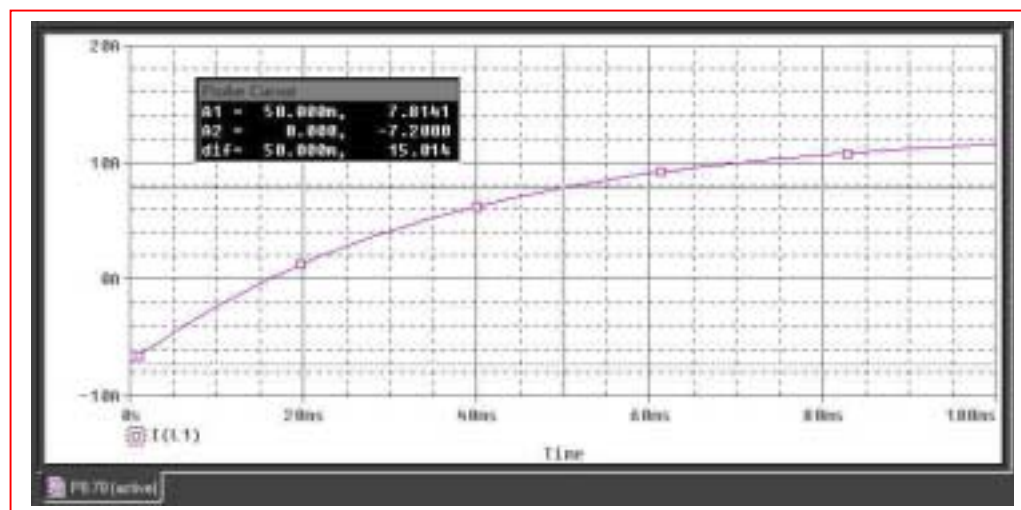
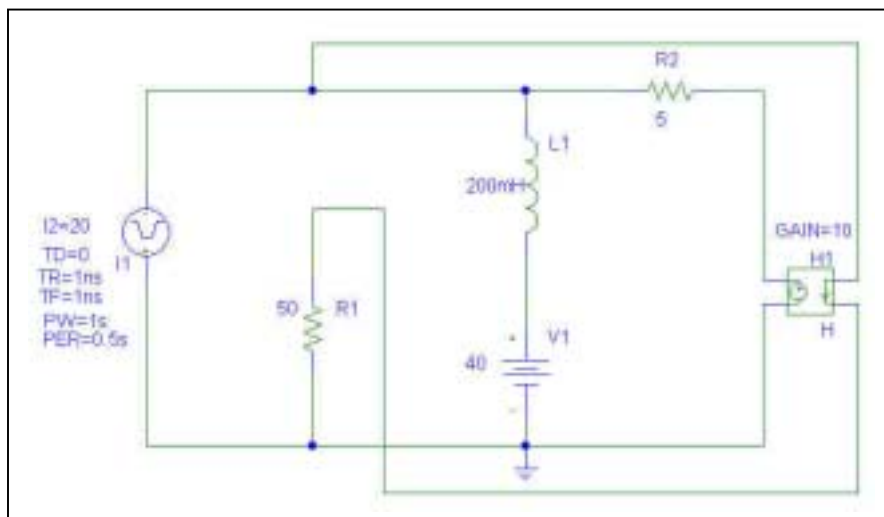
We can see from the simulation result that our ideal op amp approximation is not providing a great deal of accuracy in modeling the transient response of an op amp in this particular circuit; the output was predicted to be negative for  $t > 0$ .



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

78. For  $t < 0$ , the current source is an open circuit and so  $i_1 = 40/50 = 0.8$  A. The current through the  $5\text{-}\Omega$  resistor is  $[40 - 10(0.8)]/5 = 7.2$  A, so the inductor current is equal to  $-7.2$  A

PSpice Simulation



From the PSpice simulation, we see that our  $t < 0$  calculation is indeed correct, and find that the inductor current at  $t = 50$  ms is  $7.82$  A.

## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

79. Assume at least 1  $\mu\text{A}$  required otherwise alarm triggers.

Add capacitor C.

$$v_c(1) = 1 \text{ volt}$$

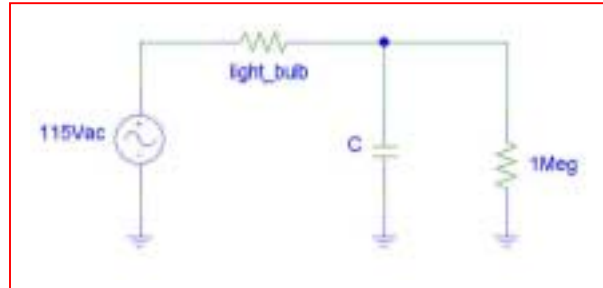
$$v_c(0) = \frac{1000}{1002.37} \cdot 1.5 = 1.496 \text{ volts}$$

$$\therefore \text{ We have } 1 = 1.496e^{-\frac{1}{10^6 C}} \text{ or } C = \frac{1}{10^6 \ln(1.496)} = 2.48\mu\text{F}$$



## CHAPTER EIGHT SOLUTIONS

80. One possible solution of many: implement a capacitor to retain charge; assuming the light is left on long enough to fully charge the capacitor, the stored charge will run the lightbulb after the wall switch is turned off. Taking a 40-W light bulb connected to 115 V, we estimate the resistance of the light bulb (which changes with its temperature) as  $330.6\ \Omega$ . We define “on” for the light bulb somewhat arbitrarily as 50% intensity, taking intensity as proportional to the dissipated power. Thus, we need at least 20 W (246 mA or 81.33 V) to the light bulb for 5 seconds after the light switch is turned off.



The circuit above contains a 1-M $\Omega$  resistor in parallel with the capacitor to allow current to flow through the light bulb when the light switch is on. In order to determine the required capacitor size, we first recognise that it will see a Thevenin equivalent resistance of  $1\ \text{M}\Omega \parallel 330.6\ \Omega = 330.5\ \Omega$ . We want  $v_C(t = 5\text{s}) = 81.33 = 115e^{-5/\tau}$ , so we need a circuit time constant of  $t = 14.43\ \text{s}$  and a capacitor value of  $\tau/R_{\text{th}} = 43.67\ \text{mF}$ .

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

1.  $\omega_o L = 10\Omega, s_1 = -6s^{-1}, s_2 = -8s^{-1}$   
 $\therefore -6 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}, -8 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$  adding,  
 $-14 = -2\alpha \therefore \alpha = 7s^{-1}$   
 $\therefore -6 = -7 + \sqrt{49 - \omega_o^2} \therefore \omega_o^2 = 48 \frac{1}{LC}, \omega_o = 6.928$   
rad/s  $\therefore 6.928L = 10, L = 1.4434H,$   
 $C = \frac{1}{48L} = 14.434mF, \frac{1}{2RC} = 7 \therefore R = 4.949\Omega$



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

2.  $i_c = 40e^{-100t} - 30e^{-200t} \text{ mA}, C = 1\text{mF}, v(0) = -0.25\text{V}$

(a)  $v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c dt - 0.25 = \int_0^t (40e^{-100t} - 30e^{-200t}) dt - 0.25$

$$\therefore v(t) = -0.4(e^{-100t} - 1) + 0.15(e^{-200t} - 1) - 0.25$$

$$\therefore v(t) = -0.4e^{-100t} + 0.15e^{-200t} \text{ V}$$

(b)  $s_1 = -100 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}, s_2 = -200 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$

$$\therefore -300 = -2\alpha, \alpha = 150 \text{ s}^{-1}$$

$$\therefore 150 + \frac{1}{2R \cdot 10^{-3}}, R = \frac{500}{150} = 3.333\Omega \text{ Also,}$$

$$-200 = -150 - \sqrt{22500 - \omega_o^2} \therefore \omega_o^2 = 20000$$

$$\therefore 20000 = \frac{1}{LC} = \frac{100}{L}, L = 0.5\text{H}$$

$$\therefore i_R(t) = \frac{v}{R} = 0.12e^{-100t} + 0.045e^{-200t} \text{ A}$$

(c)  $i(t) = -i_R(t) - i_c(t) = (0.12 - 0.04)e^{-100t} + (-0.045 + 0.03)e^{-200t}$

$$\therefore i(t) = 80e^{-100t} - 15e^{-200t} \text{ mA}, t > 0$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

3. Parallel RLC with  $\omega_o = 70.71 \times 10^{12}$  rad/s.  $L = 2$  pH.

$$(a) \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = (70.71 \times 10^{12})^2$$

$$\text{So } C = \frac{1}{(70.71 \times 10^{12})^2 (2 \times 10^{-12})} = 100.0 \text{ aF}$$

$$(b) \quad \alpha = \frac{1}{2RC} = 5 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{So } R = \frac{1}{(10^{10})(100 \times 10^{-18})} = 1 \text{ M}\Omega$$

$$(c) \quad \alpha \text{ is the neper frequency: } 5 \text{ Gs}^{-1}$$

$$(d) \quad S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = -5 \times 10^9 + j70.71 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = -5 \times 10^9 - j70.71 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$$

$$(e) \quad \zeta = \frac{\alpha}{\omega_o} = \frac{5 \times 10^9}{70.71 \times 10^{12}} = 7.071 \times 10^{-5}$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

4. Given:  $L = 4R^2C$ ,  $\alpha = \frac{1}{2RC}$

Show that  $v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$  is a solution to

$$C \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0 \quad [1]$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= e^{-\alpha t}(A_1) - \alpha e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2) \\ &= (A_1 - \alpha A_1 t - \alpha A_2) e^{-\alpha t} \end{aligned} \quad [2]$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dt^2} &= (A_1 - \alpha A_1 t - \alpha A_2)(-\alpha e^{-\alpha t}) - \alpha A_1 e^{-\alpha t} \\ &= -\alpha(A_1 - \alpha A_2 + A_1 - \alpha A_1 t) e^{-\alpha t} \\ &= -\alpha(2A_1 - \alpha A_2 - \alpha A_1 t) e^{-\alpha t} \end{aligned} \quad [3]$$

Substituting Eqs. [2] and [3] into Eq. [1], and using the information initially provided,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2RC}(2A_1) e^{-\alpha t} + \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 (A_1 t + A_2) e^{-\alpha t} + \frac{1}{RC}(A_1) e^{-\alpha t} \\ & -\frac{1}{2RC}(A_1 t + A_2) e^{-\alpha t} + \frac{1}{4R^2 C^2}(A_1 t + A_2) e^{-\alpha t} \\ & = 0 \end{aligned}$$

Thus,  $v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$  is in fact a solution to the differential equation.

Next, with  $v(0) = A_2 = 16$

$$\text{and } \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = (A_1 - \alpha A_2) = (A_1 - 16\alpha) = 4$$

we find that  $A_1 = 4 + 16\alpha$



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

5. Parallel RLC with  $\omega_o = 800 \text{ rad/s}$ , and  $\alpha = 1000 \text{ s}^{-1}$  when  $R = 100 \Omega$ .

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \text{so} \quad C = 5 \mu\text{F}$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{so} \quad L = 312.5 \text{ mH}$$

Replace the resistor with 5 meters of 18 AWG copper wire. From Table 2.3, 18 AWG soft solid copper wire has a resistance of  $6.39 \Omega/1000\text{ft}$ . Thus, the wire has a resistance of

$$\begin{aligned} & (5 \text{ m}) \left( \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} \right) \left( \frac{1 \text{ in}}{2.54 \text{ cm}} \right) \left( \frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}} \right) \left( \frac{6.39 \Omega}{1000 \text{ ft}} \right) \\ &= 0.1048 \Omega \quad \text{or} \quad 104.8 \text{ m}\Omega \end{aligned}$$

- (a) The resonant frequency is unchanged, so  $\omega_o = 800 \text{ rad/s}$

(b)  $\alpha = \frac{1}{2RC} = 954.0 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$

(c)  $\zeta_{old} = \frac{\alpha_{old}}{\omega_o}$

$$\zeta_{new} = \frac{\alpha_{new}}{\omega_o}$$

Define the percent change as  $\frac{\zeta_{new} - \zeta_{old}}{\zeta_{old}} \times 100$

$$= \frac{\alpha_{new} - \alpha_{old}}{\alpha_{old}} \times 100$$

$$= 95300\%$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

6.  $L = 5\text{H}$ ,  $R = 8\Omega$ ,  $C = 12.5\text{mF}$ ,  $v(0^+) = 40\text{V}$

(a)  $i(0^+) = 8\text{A}$ :  $\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1000}{2 \times 8 \times 12.5} = 5$ ,  $\omega_o^2 = \frac{1}{LC} = 16$ ,  
 $\omega_o = 4$   $s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 16} = -2, -8 \therefore v(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-8t}$   
 $\therefore 40 = A_1 + A_2$   $v'(0^+) = \frac{1000}{12.5} \left( -i_L(0^+) - \frac{40}{8} \right) = 80(-8 - 5) = -1040$   
 $v/s = -2A_1 - 8A_2 \therefore -520 = -A_1 - 4A_2 \therefore -3A_2 = -480$ ,  $A_2 = 160$ ,  $A_1 = -120$   
 $\therefore v(t) = \boxed{-120e^{-2t} + 160e^{-8t}\text{V}, t > 0}$

(b)  $i_c(0^+) = 8\text{A}$  Let  $i(t) = A_3 e^{-2t} + A_4 e^{-8t}$ ;  $i_R(0^+) = \frac{v(0^+)}{R} = \frac{40}{8} = 5\text{A}$   
 $\therefore i(0^+) = A_3 + A_4 = -i_R(0^+) - i_c(0^+) = -8 - 5 = -13\text{A}$ ;  
 $i(0^+) = -2A_3 - 8A_4 = \frac{40}{5} = 8 \text{ A/s} \therefore 4 = -A_3 - 4A_4$   
 $\therefore -3A_4 = -13 + 4$ ,  $A_4 = 3$ ,  $A_3 = -16 \therefore i(t) = \boxed{-16e^{-2t} + 3e^{-8t}\text{A}, t > 0}$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

7.  $i(0) = 40\text{A}$ ,  $v(0) = 40\text{V}$ ,  $L = \frac{1}{80}\text{H}$ ,  $R = 0.1\Omega$ ,  $C = 0.2\text{F}$

(a)  $\alpha = \frac{1}{2 \times 0.1 \times 0.2} = 25$ ,  $\omega_o^2 = \frac{80}{0.2} = 400$ ,

$\omega_o = 20$ ,  $s_{1,2} = -25 \pm \sqrt{625 - 400} = 10, -40$

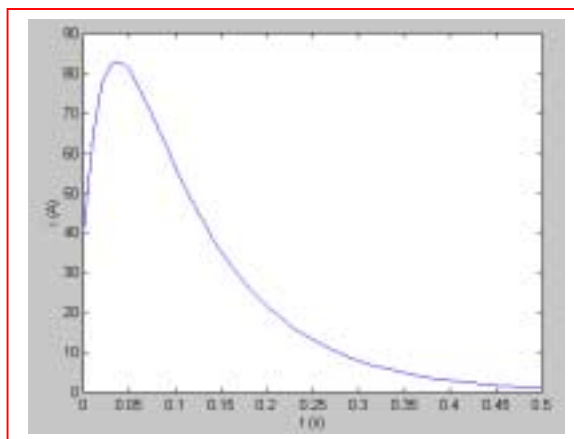
$\therefore v(t) = A_1 e^{-10t} + A_2 e^{-40t} \therefore 40 = A_1 + A_2$ ;

$v'(0^+) = -10A_1 - 40A_2$   $v'(0^+) = \frac{1}{C} \left( i(0) - \frac{v(0)}{R} \right) = -2200$

$\therefore -A_1 - 4A_2 = -220 \therefore -3A_2 = -180 \therefore A_2 = 60$ ,  $A_1 = -20$

$\therefore v(t) = -20e^{-10t} + 60e^{-40t} \text{V}, t > 0$

(b)  $i(t) = -v/R - C \frac{dv}{dt} = 200e^{-10t} - 600e^{-40t} - 0.2(-20)(-10)e^{-10t} - (0.2)(60)(-40)e^{-40t}$   
 $= 160e^{-10t} - 120e^{-40t} \text{ A}$





## CHAPTER NINE SOLUTIONS

8.  $i_L(0) = \frac{100}{50} = 2\text{A}, v_c(0) = 100\text{V}$

$$\alpha = \frac{10^6}{2 \times 50 \times 2.5} = 4000, \omega_o^2 = \frac{3 \times 10^{6+3}}{100 \times 2.5} = 12 \times 10^6$$

$$\sqrt{16 - 12} \times 10^3 = 200, s_{1,2} = -4000 \pm 2000$$

$$\therefore i_L(t) = A_1 e^{-2000t} + A_2 e^{-6000t}, t > 0 \therefore A_1 + A_2 = 2$$

$$i_L'(0^+) = \frac{-10^3 \times 3}{100} \times 100 = -3000 = -2000A_1 - 6000A_2 \therefore -1.5 = -A_1 - 3A_2 \therefore 0.5 = -2A_2$$

$$\therefore A_2 = -0.25, A_1 = 2.25 \therefore i_L(t) = 2.25e^{-2000t} - 0.25e^{-6000t} \text{ A}, t > 0$$

$$t > 0: i_L(t) = 2\text{A} \therefore i_L(t) = \boxed{2u(-t) + (2.25e^{-2000t} - 0.25e^{-6000t})u(t)\text{A}}$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

9.

$$i_L(0) = \frac{12}{5+1} = 2\text{A}, v_c(0) = 2\text{V}$$
$$\alpha = \frac{1000}{2 \times 1 \times 2} = 250, \omega_o^2 = \frac{1000 \times 45}{2} = 22500$$
$$s_{1,2} = -250 \pm \sqrt{250^2 - 22500} = -50, -450 \text{ s}^{-1}$$
$$\therefore i_L = A_1 e^{-50t} + A_2 e^{-450t} \therefore A_1 + A_2 = 2; i_L'(0^+) = 45(-2) = -50A_1 - 450A_2$$
$$\therefore A_1 + 9A_2 = 1.8 \therefore -8A_2 = 0.2 \therefore A_2 = -0.025, A_1 = 2.025(\text{A})$$
$$\therefore i_L(t) = \boxed{2.025e^{-50t} - 0.025e^{-450t} \text{ A}, t > 0}$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

10.

$$(a) \quad \alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1440}{72} = 20, \quad \omega_o^2 = \frac{1440}{10} = 144$$

$$s_{1,2} = -20 \pm \sqrt{400 - 144} = -4, -36: v = A_1 e^{-4t} + A_2 e^{-36t}$$

$$v(0) = 18 = A_1 + A_2, \quad v'(0) = 1440 \left( \frac{1}{2} - \frac{18}{36} \right) = 0$$

$$\therefore 0 = -4A_1 - 36A_2 = -A_1 - 9A_2 = \therefore 18 = -8A_2, \quad A_2 = -2.25, \quad A_1 = 20.25$$

$$\therefore v(t) = \boxed{20.25e^{-4t} - 2.25e^{-36t} \text{ V}, t > 0}$$

$$(b) \quad i(t) = \frac{v}{36} + \frac{1}{1440} v' = 0.5625e^{-4t} - 0.0625e^{-36t} - 0.05625e^{-4t} + 0.05625e^{-36t}$$

$$\therefore i(t) = \boxed{0.50625e^{-4t} - 0.00625e^{-36t} \text{ A}, t > 0}$$

$$(c) \quad v_{\max} \text{ at } t = 0 \therefore v_{\max} = 18 \text{ V} \therefore 0.18 = 20.25e^{-4t_s} - 2.25e^{-36t_s}$$

Solving using a scientific calculator, we find that  $t_s = 1.181 \text{ s}$ .



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

11.  $L = 1250 \text{ mH}$

so  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 4 \text{ rad/s}$  Since  $\alpha > \omega_o$ , this circuit is over damped.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 5 \text{ s}^{-1}$$

The capacitor stores 390 J at  $t = 0^-$ :

$$W_c = \frac{1}{2} C v_c^2$$

$$\text{So } v_c(0^+) = \sqrt{\frac{2W_c}{C}} = 125 \text{ V} = v_c(0^+)$$

The inductor initially stores zero energy,

so  $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$

$$S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = -5 \pm 3 = -8, -2$$

Thus,  $v(t) = Ae^{-8t} + Be^{-2t}$

Using the initial conditions,  $v(0) = 125 = A + B$  [1]

$$i_L(0^+) + i_R(0^+) + i_c(0^+) = 0 + \frac{v(0^+)}{2} + i_c(0^+) = 0$$

$$\text{So } i_c(0^+) = -\frac{v(0^+)}{2} = -\frac{125}{2} = -62.5 \text{ V}$$

$$i_c = C \frac{dv}{dt} = 50 \times 10^{-3} [-8Ae^{-8t} - 2Be^{-2t}]$$

$$i_c(0^+) = -62.5 = -50 \times 10^{-3} (8A + 2B) \quad [2]$$

Solving Eqs. [1] and [2],  $A = 150 \text{ V}$   
 $B = -25 \text{ V}$

Thus,  $v(t) = 166.7e^{-8t} - 41.67e^{-2t}, t > 0$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

12. (a) We want a response  $v = Ae^{-4t} + Be^{-6t}$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 5 \text{ s}^{-1}$$

$$S_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = -4 = -5 + \sqrt{25 - \omega_o^2}$$

$$S_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = -6 = -5 - \sqrt{25 - \omega_o^2}$$

Solving either equation, we obtain  $\omega_o = 4.899 \text{ rad/s}$

Since  $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = \boxed{833.3 \text{ mH}}$

- (b) If  $i_R(0^+) = 10 \text{ A}$  and  $i_c(0^+) = 15 \text{ A}$ , find A and B.

with  $i_R(0^+) = 10 \text{ A}$ ,  $v_R(0^+) = v(0^+) = v_c(0^+) = 20 \text{ V}$

$$v(0) = A + B = 20 \quad [1]$$

$$i_c = C \frac{dv}{dt} = 50 \times 10^{-3} (-4Ae^{-4t} - 6Be^{-6t})$$

$$i_c(0^+) = 50 \times 10^{-3} (-4A - 6B) = 15 \quad [2]$$

Solving,  $\boxed{A = 210 \text{ V}, B = -190 \text{ V}}$

Thus,  $v = 210e^{-4t} - 190e^{-6t}$ ,  $t > 0$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

13. Initial conditions:  $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$   $i_R(0^+) = \frac{50}{25} = 2 \text{ A}$

(a)  $v_c(0^+) = v_c(0^-) = 2(25) = 50 \text{ V}$

(b)  $i_c(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) = 0 - 2 = -2 \text{ A}$

(c)  $t > 0$ : parallel (source-free) RLC circuit

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 4000 \text{ s}^{-1} \quad s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3464 \text{ rad/s} \quad = -2000, -6000$$

Since  $\alpha > \omega_o$ , this system is overdamped. Thus,

$$v_c(t) = Ae^{-2000t} + Be^{-6000t}$$

$$i_c = C \frac{dv}{dt} = (5 \times 10^{-6})(-2000 Ae^{-2000t} - 6000 Be^{-6000t})$$

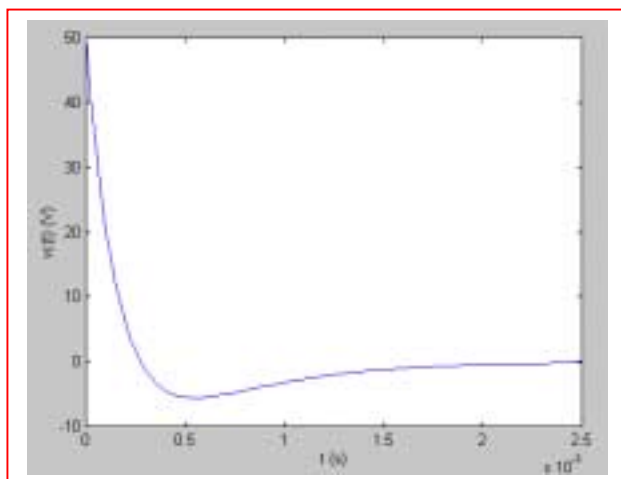
$$i_c(0^+) = -0.01A - 0.03B = -2 \quad [1]$$

$$\text{and } v_c(0^+) = A + B = 50 \quad [2]$$

Solving, we find  $A = -25$  and  $B = 75$

so that  $v_c(t) = -25e^{-2000t} + 75e^{-6000t}$ ,  $t > 0$

(d)



(e)  $-25e^{-2000t} + 75e^{-6000t} = 0 \Rightarrow t = 274.7 \mu\text{s}$   
using a scientific calculator

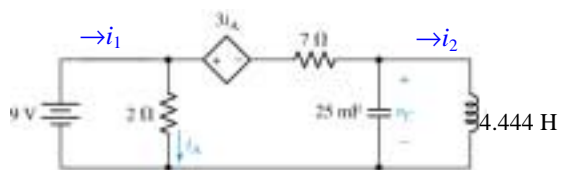
(f)  $|v_c|_{\max} = -25 + 75 = 50 \text{ V}$

So, solving  $|-25e^{-2000t_s} + 75e^{-6000t_s}| = 0.5$  in view of the graph in part (d), we find  $t_s = 1.955 \text{ ms}$  using a scientific calculator's equation solver routine.



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

14. Due to the presence of the inductor,  $v_c(0^-) = 0$ . Performing mesh analysis,



$$-9 + 2i_1 - 2i_2 = 0 \quad [1]$$

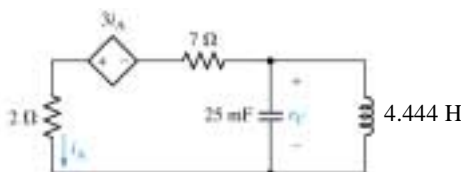
$$2i_2 - 2i_1 + 3i_A + 7i_2 = 0 \quad [2]$$

$$\text{and } i_1 - i_2 = i_A$$

Rearranging, we obtain  $2i_1 - 2i_2 = 0$  and  $-4i_1 + 6i_2 = 0$ . Solving,  $i_1 = 13.5$  A and  $i_2 = 9$  A.

(a)  $i_A(0^-) = i_1 - i_2 = 4.5$  A and  $i_L(0^-) = i_2 = 9$  A

(b)  $t > 0$ :



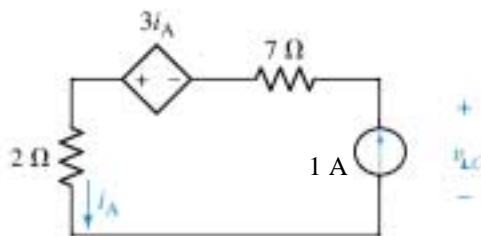
around left mesh:

$$-v_c(0^+) + 7i_A(0^+) - 3i_A(0^+) + 2i_A(0^+) = 0$$

$$\text{so, } i_A(0^+) = 0$$

(c)  $v_c(0^-) = 0$  due to the presence of the inductor.

(d)



$$-v_{LC} + 7 - 3(1) + 2 = 0$$

$$v_{LC} = 6 \text{ V} \therefore R_{TH} = \frac{6}{1} = 6 \Omega$$

(e)  $\alpha = \frac{1}{2RC} = 3.333 \text{ s}^{-1}$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3 \text{ rad/s}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = -1.881, -4.785$$

Thus,

$$i_A(t) = Ae^{-1.881t} + Be^{-4.785t}$$

$$i_A(0^+) = 0 = A + B \quad [1]$$

To find the second equation required to determine the coefficients, we write:

$$i_L = -i_c - i_R$$

$$= -C \frac{dv_c}{dt} - i_A = -25 \times 10^{-3} \left[ -1.881(6A)e^{-1.881t} - 4.785(6B)e^{-4.785t} \right] - Ae^{-1.881t} - Be^{-4.785t}$$

$$i_L(0^+) = 9 = -25 \times 10^{-3} [-1.881(6A) - 4.785(6B)] - A - B$$

$$\text{or } 9 = -0.7178A - 0.2822B \quad [2]$$

Solving Eqs. [1] and [2],  $A = -20.66$  and  $B = +20.66$

$$\text{So that } i_A(t) = 20.66[e^{-4.785t} - e^{-1.881t}]$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

15. Diameter of a dime: approximately 8 mm. Area =  $\pi r^2 = 0.5027\text{cm}^2$

$$\begin{aligned}\text{Capacitance} &= \frac{\epsilon_r \epsilon_o A}{d} = \frac{(88)(8.854 \times 10^{-14} \text{F/cm})(0.5027 \text{cm}^2)}{0.1 \text{cm}} \\ &= 39.17 \text{pF}\end{aligned}$$

$$L = 4\mu\text{H}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 79.89 \text{Mrad/s}$$

For an over damped response, we require  $\alpha > \omega_o$ .

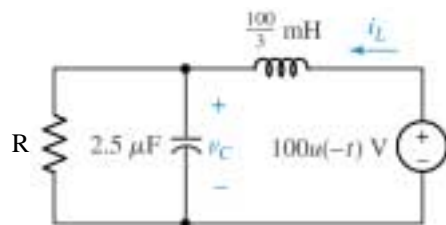
$$\begin{aligned}\text{Thus, } \frac{1}{2RC} &> 79.89 \times 10^6 \\ R &< \frac{1}{2(39.17 \times 10^{-12})(79.89 \times 10^6)}\end{aligned}$$

$$\text{or } R < 159.8 \Omega$$

\*Note: The final answer depends quite strongly on the choice of  $\epsilon_r$ .

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

16.



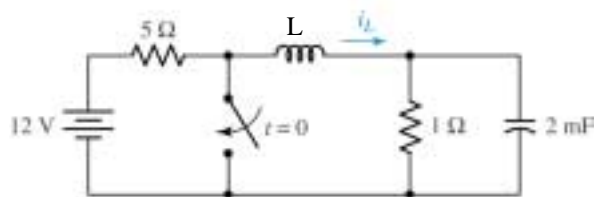
crit. damp. (a)  $L = 4R^2C = \frac{100}{3} \times 10^{-3} = 4R^2 \times 10^{-6} \therefore R = 57.74\Omega$

(b)  $\omega_o = \alpha = 10^3 / \sqrt{\frac{1}{30} \times 2.5} = 3464 s^{-1}$   
 $\therefore v_c(t) = e^{-3464t} (A_1 t + A_2) \quad v_c(0) = 100V$   
 $i_L(0) = \frac{100}{57.74} = 1.7321A \therefore 100 = A_2$   
 $v_c'(0^+) = \frac{10^6}{2.5} \left( 1.7321 - \frac{100}{57.74} \right) = 0 = A_1 - 3464A_2 \therefore A_1 = 3.464 \times 10^5$   
 $\therefore v_c(t) = e^{-3464t} (3.464 \times 10^5 t + 100) V, t > 0$



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

17.



crit. damp. (a)  $L = 4R^2C = 4 \times 1 \times 2 \times 10^{-3} = 8\text{mH}$

(b)  $\alpha = \omega_o \frac{1}{2RC} = \frac{1000}{2 \times 1 \times 2} = 250 \therefore i_L = e^{-250t} (A_1 t + A_2)$

$i_L(0) = 2\text{A}, v_c(0) = 2\text{V} \therefore i_L = e^{-250t} (A_1 t + 2)$

Then  $8 \times 10^{-3} i_L'(0^+) = -2 = 8 \times 10^{-3} (A_1 - 500), = e^{-1.25} (1.25 + 2) = 0.9311\text{A}$

(c)  $i_{L\max} : (250t_m + 2) = 0, 1 = 250t_m + 2, t_m < 0 \text{ No!}$

$\therefore t_m = 0, i_{L\max} = 2\text{A} \therefore 0.02 = e^{-250t_s} (250t_s + 2); \text{SOLVE: } t_s = 23.96\text{ms}$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

18.  $L = 5\text{mH}$ ,  $C = 10^{-8}\text{ F}$ , crit. damp.  $v(0) = -400\text{V}$ ,  $i(0) = 0.1\text{A}$

(a)  $L = 4R^2C = 5 \times 10^{-3} = 4R^2 10^{-8} \therefore R = \boxed{353.6\Omega}$

(b)  $\alpha = \frac{10^8}{2 \times 353.6} = 141,420 \therefore i = e^{-141,420t} (A_1 t + A_2)$   
 $\therefore A_2 = 0.1 \therefore = e^{-141,421t} (A_1 t + 0.1), 5 \times 10^{-3}$   
 $(A_1 - 141,420 \times 0.1) = -400 \therefore A_1 = -65,860$   
 $\therefore i = e^{-141,421t} (-65,860t + 0.1). i' = 0$   
 $\therefore e^{-\alpha t} (+65860) + 141,420 e^{-\alpha t} (-65,860t_m + 0.1) = 0$   
 $\therefore t_m = 8.590 \mu\text{s} \therefore i(t_m) = e^{-141,420 \times 8.590 \times 10^{-6}}$   
 $(-65,860 \times 8.590 \times 10^{-6} + 0.1) = -0.13821\text{A}$   
 $\therefore |i|_{\max} = |i(t_m)| = \boxed{0.13821\text{A}}$

(c)  $\therefore i_{\max} = i(0) = \boxed{0.1\text{A}}$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

19. Diameter of a dime is approximately 8 mm. The area, therefore, is  $\pi r^2 = 0.5027 \text{ cm}^2$ .

$$\begin{aligned}\text{The capacitance is } \frac{\epsilon_r \epsilon_o A}{d} &= \frac{(88)(8.854 \times 10^{-14})(0.5027)}{0.1} \\ &= 39.17 \text{ pF}\end{aligned}$$

$$\text{with } L = 4\mu\text{H}, \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 79.89 \text{ Mrad/s}$$

$$\text{For critical damping, we require } \frac{1}{2RC} = \omega_o$$

$$\text{or } R = \frac{1}{2\omega_o C} = 159.8\Omega$$



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

20. Critically damped parallel RLC with  $\alpha = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 1 \text{ M}\Omega$ .

We know  $\frac{1}{2RC} = 10^{-3}$ , so  $C = \frac{10^3}{2 \times 10^6} = 500 \mu\text{F}$

Since  $\alpha = \omega_o$ ,  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^{-3}$

$$\text{or } \frac{1}{LC} = 10^{-6}$$

so  $L = 2 \text{ GH (!)}$

$$L = \frac{\mu N^2 A}{S} = 2 \times 10^9$$

$$\text{If } S_o \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}) \left[ \left( \frac{50 \text{ turns}}{\text{cm}} \right) s \right]^2 (0.5 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} \right)}{s}$$

$$= 2 \times 10^9$$

$$(4\pi^2 \times 10^{-9}) (50)^2 (0.5)^2 s = 2 \times 10^9$$

$$\text{So } s = 8.106 \times 10^{13} \text{ cm}$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

21.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{100 \times 2.5} = 4000, \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{10^{6+3}}{50} = 2 \times 10^7$$

$$\omega_d = \sqrt{20 \times 10^6 - 16 \times 10^6} = 2000$$

$$\therefore i_c = e^{-4000t} (B_1 \cos 2000t + B_2 \sin 2000t)$$

$$i_L(0) = 2A, v_c(0) = 0 \therefore i_c(0^+) = -2A; i_c'(0^+) = -i_L'(0^+) - i_R'(0^+)$$

$$\therefore i_c'(0^+) = -\frac{1}{L}v_c(0) - \frac{1}{R}v_c'(0^+) = 0 - \frac{1}{RC}i_c(0^+) = \frac{2 \times 10^6}{125}$$

$$\therefore B_1 = -2A, \frac{2 \times 10^6}{125} = 16,000 = 2000B_2 + (-2)(-4000) \therefore B_2 = 4$$

$$\therefore i_c(t) = e^{-4000t} (-2 \cos 2000t + 4 \sin 2000t)A, t > 0$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

22.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{4}{2 \times 2} = 1, \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{4 \times 13}{2} = 26, \omega_d = \sqrt{26-1} = 5$$

$$\therefore v_c(t) = e^{-t}(B_1 \cos 5t + B_2 \sin 5t)$$

(a)  $i_L(0^+) = i_L(0) = 4\text{A}$

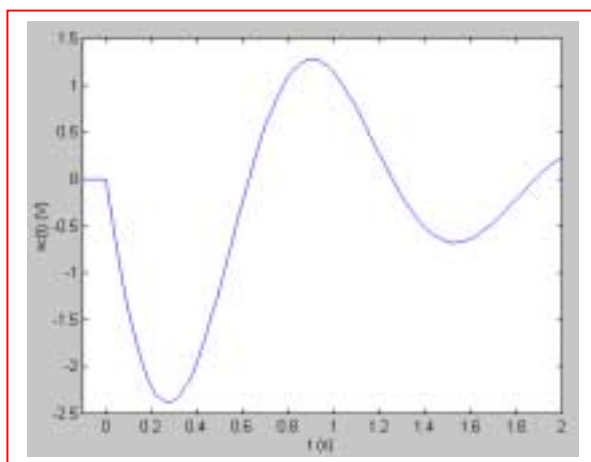
(b)  $v_c(0^+) = v_c(0) = 0$

(c)  $i_L'(0^+) = \frac{1}{L}v_c(0^+) = 0$

(d)  $v_c'(0^+) = \frac{1}{C}[-i_L(0^+) - i_R(0^+)] = 4\left[-4 - \frac{v_c(0^+)}{2}\right] = 4(-4+0) = -16 \text{ V/s}$

(e)  $\therefore (e)0 = 1(B_1) \therefore B_1 = 0, v_c(t) = B_2 e^{-t} \sin 5t, v_c'(0^+) = B_2(5) = -16$   
 $\therefore B_2 = -3.2, v_c(t) = -3.2e^{-t} \sin 5t \text{ V}, t > 0$

(f)





## CHAPTER NINE SOLUTIONS

23.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \alpha \frac{1}{2RC} &= \frac{10^{9-3}}{2 \times 20 \times 5} = 5000, \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{10^9}{1.6 \times 5} = 1.25 \times 10^8 \\
 \omega_d &= \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = \sqrt{125 \times 10^6 - 25 \times 10^6} = 10,000 \\
 \therefore v_c(t) &= e^{-5000t} (B_1 \cos 10^4 t + B_2 \sin 10^4 t) \\
 v_c(0) &= 200 \text{ V}, \quad i_L(0) = 10 \text{ mA} \therefore v_c(t) = e^{-5000t} (200 \cos 10^4 t + B_2 \sin 10^4 t) \\
 v_c'(0^+) &= \frac{1}{C} i_c(0^+) = \frac{10^9}{5} \left[ i_L(0) - \frac{v_c(0)}{20,000} \right] \\
 &= \frac{10^9}{5} \left( 10^{-2} - \frac{200}{20,000} \right) = 0 = 10^4 B_2 - 200(5000) \\
 \therefore B_2 &= 100 \text{ V} \therefore v_c(t) = e^{-5000t} (200 \cos 10^4 t + 100 \sin 10^4 t) \text{ V}, t > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad i_{sw} &= 10^{-2} - i_L, \quad i_L = \frac{1}{R} v_c + C v_c' \\
 v_c' &= e^{-5000t} [10^4 (-200 \sin + 100 \cos) - 5000 (200 \cos + 100 \sin)] \\
 &= e^{-5000t} [10^6 (-2 \sin - 0.5 \cos)] = -2.5 \times 10^6 e^{-5000t} \sin 10^4 t \text{ V/s} \\
 \therefore i_L &= e^{-5000t} \left[ \frac{1}{20,000} (200 \cos + 100 \sin) - 5 \times 10^{-9} \times 2.5 \times 10^6 e^{-5000t} \sin 10^4 t \right] \\
 &= e^{-5000t} (0.01 \cos 10^4 t - 0.0075 \sin 10^4 t) \text{ A} \\
 \therefore i_{sw} &= 10 - e^{-5000t} (10 \cos 10^4 t - 7.5 \sin 10^4 t) \text{ mA}, t > 0
 \end{aligned}$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

24.

$$(a) \quad \alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{100}{12.5} = 8, \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{100}{L}, \quad \omega_d^2 = 36 = \omega_o^2 - 64$$

$$\therefore \omega_o^2 = 100 = \frac{100}{L} \therefore L = 1\text{H}$$

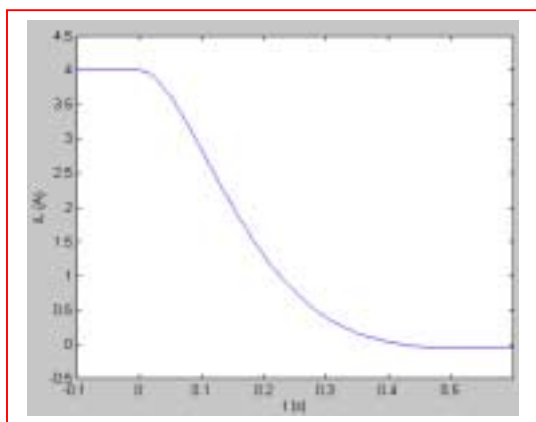
$$(b) \quad t < 0: i_L(t) = 4\text{A}; \quad t > 0: i_L(t) = e^{-8t} (B_1 \cos 6t + B_2 \sin 6t)$$

$$i_L(0) = 4\text{A} \therefore B_1 = 4\text{A}, \quad i_L = e^{-8t} (4 \cos 6t + B_2 \sin 6t) \quad v_c(0) = 0$$

$$i_L'(0^+) = -v_c(0^+) = 0 \therefore 6B_2 - 8(4) = 0, \quad B_2 = 16/3$$

$$\therefore i_L(t) = 4u(-t) + e^{-8t} (4 \cos 6t + 5.333 \sin 6t) u(t) \text{ A}$$

(c)



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

25.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^{6-3}}{2 \times 5} = 100s^{-1}, \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = 1.01 \times 10^6$$

$$\therefore \omega_d = \sqrt{101 \times 10^4 - 10^4} = 100; \quad i_L(0) = \frac{60}{10} = 6\text{mA}$$

$$v_c(0) = 0 \therefore v_c(t) = e^{-100t} (A_1 \cos 1000t + A_2 \sin 1000t), \quad t > 0$$

$$\therefore A_1 = 0, \quad v_c(t) = A_2 e^{-100t} \sin 1000t$$

$$v_c'(0^+) = \frac{1}{C} i_c(0^+) = 10^6 [-i_1(0^+) - \frac{1}{5000} v_c(0^+)] = 10^6$$

$$(-6 \times 10^{-3}) = -6000 = 1000 A_2 \therefore A_2 = -6$$

$$\therefore v_c(t) = -6e^{-100t} \sin 1000t \text{V}, \quad t > 0 \therefore i_1(t) = -\frac{1}{10^4}$$

$$v_c(t) = -10^{-4}(-6)e^{-100t} \sin 1000t \text{A}$$

$$\therefore i_1(t) = 0.6e^{-100t} \sin 1000t \text{mA}, \quad t > 0$$



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

26.

$$(a) \quad \alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{2000 \times 25} = 20, \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1.01 \times 10^6}{25} = 40,400$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = \sqrt{40,400 - 400} = 200$$

$$\therefore v = e^{-20t} (A_1 \cos 200t + A_2 \sin 200t)$$

$$v(0) = 10V, \quad i_L(0) = 9mA \therefore A_1 = 10V$$

$$\therefore v = e^{-20t} (10 \cos 200t + A_2 \sin 200t) \text{ V}, \quad t > 0$$

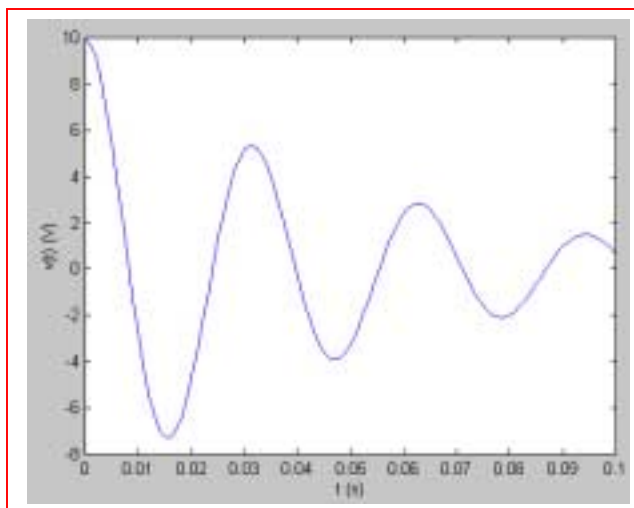
$$v'(0^+) = 200A_2 - 20 \times 10 = 200(A_2 - 1) = \frac{1}{C} i_o(0^+)$$

$$= \frac{10^6}{25} (-10^{-3}) = -40 \therefore A_2 = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$\therefore v(t) = e^{-20t} (10 \cos 200t + 0.8 \sin 200t) \text{ V}, \quad t > 0$$

$$(b) \quad v = 10.032e^{-20t} \cos (200t - 4.574^\circ) \text{ V}$$

$$T = \frac{2\pi}{200} = 3.42 \text{ ms}$$



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

27.

$$v(0) = 0; i(0) = 10\text{A}$$

$$v = e^{\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \therefore A = 0,$$

$$v = B e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

$$v' = e^{-\alpha t} [-\alpha B \sin \omega_d t + \omega_d B \cos \omega_d t] = 0$$

$$\therefore \tan \omega_d t = \frac{\omega_d}{\alpha}, t_{m1} = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\alpha}$$

$$t_{m2} = t_{m1} + \frac{1}{2} T_d = t_{m1} + \frac{\pi}{\omega_d};$$

$$v_{m1} = B e^{-\alpha t_{m1}} \sin \omega_d t_{m1} \quad v_{m2} = -B e^{-\alpha t_{m1} - \alpha \pi / \omega_d}$$

$$\sin \omega_d t_{m1} \therefore \frac{v_{m2}}{v_{m1}} = -e^{-\alpha \pi / \omega_d}; \text{ let } \left| \frac{v_{m2}}{v_{m1}} \right| = \frac{1}{100}$$

$$\therefore e^{\alpha \pi / \omega_d} = 100, \alpha = \frac{\omega_d}{\pi} \ln 100; \alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{21}{R},$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 6 \therefore \omega_d = \sqrt{6 - 441/R^2} \therefore \frac{21}{R} \frac{\ln 100}{\pi R} \sqrt{6R^2 - 441}$$

$$\therefore R = \sqrt{1/6 \left[ 441 + \left( \frac{21\pi}{100} \right)^2 \right]} = 10.3781 \Omega \text{ To keep}$$

$$\left| \frac{v_{m2}}{v_{m1}} \right| < 0.01, \text{ chose } R = 10.3780 \Omega \quad v'(0^+) = \omega_d$$

$$B = B \sqrt{6 - \left( \frac{21}{10.378} \right)^2} = 4R \left( 10 + \frac{0}{10.3780} \right) \therefore B = 1.380363$$

$$\alpha = \frac{21}{10.378} = 2.02351; \omega_d = \sqrt{6 - \left( \frac{21}{10.378} \right)^2} = 1.380363$$

$$\therefore v = 304.268 e^{-2.02351t} \sin 1.380363t \quad v_{t_{m1}} = 0.434s,$$

$$v_{m1} = 71.2926v \text{ Computed values show}$$

$$t_s = 2.145 \text{ sec}; v_{m2} = 0.7126 < 0.01 v_{m1}$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

28. We replace the  $25\text{-}\Omega$  resistor to obtain an underdamped response:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \text{and} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \text{ we require } \alpha < \omega_0.$$

$$\text{Thus, } \frac{1}{10 \times 10^{-6} R} < 3464 \quad \text{or} \quad R > 34.64 \text{ m}\Omega.$$

For  $R = 34.64 \text{ }\Omega$  ( $1000\times$  the minimum required value), the response is:

$$v(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \text{ where } \alpha = 2887 \text{ s}^{-1} \text{ and } \omega_d = 1914 \text{ rad/s.}$$

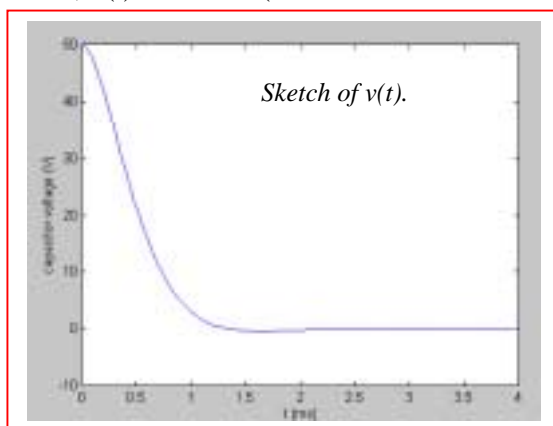
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ and } v_C(0^+) = v_C(0^-) = (2)(25) = 50 \text{ V} = A.$$

$$i_L(t) = L \frac{dv_L}{dt} = L \frac{dv_C}{dt}$$

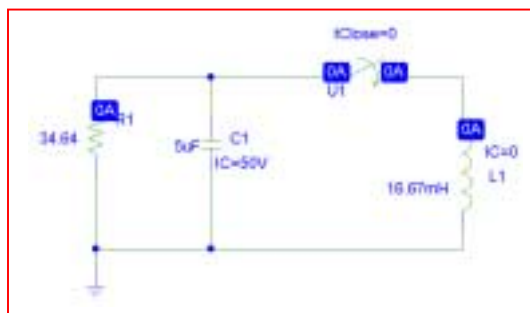
$$= L \left[ e^{-\alpha t} (-A \omega_d \sin \omega_d t + B \omega_d \cos \omega_d t) - \alpha e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) \right]$$

$$i_L(0^+) = 0 = \frac{50 \times 10^{-3}}{3} [B \omega_d - \alpha A], \text{ so that } B = 75.42 \text{ V.}$$

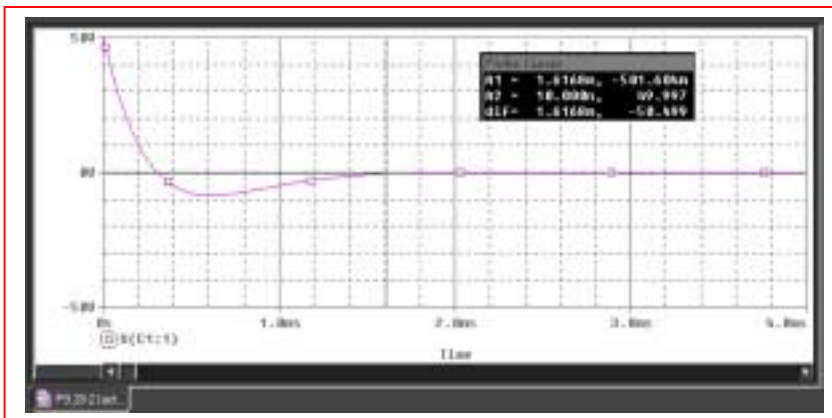
$$\text{Thus, } v(t) = e^{-2887t} (50 \cos 1914t + 75.42 \sin 1914t) \text{ V.}$$



**PSpice schematic for  $t > 0$  circuit.**



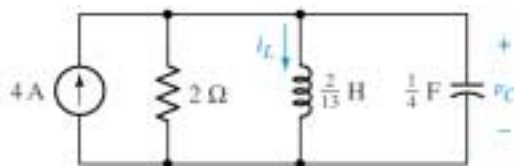
From PSpice the settling time using  $R = 34.64 \text{ }\Omega$  is approximately 1.6 ms.





## CHAPTER NINE SOLUTIONS

29. (a,b) For  $t < 0$  s, we see from the circuit below that the capacitor and the resistor are shorted by the presence of the inductor. Hence,  $i_L(0^-) = 4$  A and  $v_C(0^-) = 0$  V.



When the 4-A source turns off at  $t = 0$  s, we are left with a parallel RLC circuit such that  $\alpha = 1/2RC = 1 \text{ s}^{-1}$  and  $\omega_0 = 5.099 \text{ rad/s}$ . Since  $\alpha < \omega_0$ , the response will be underdamped with  $\omega_d = 5 \text{ rad/s}$ . Assume the form  $i_L(t) = e^{-\alpha t} (C \cos \omega_d t + D \sin \omega_d t)$  for the response.

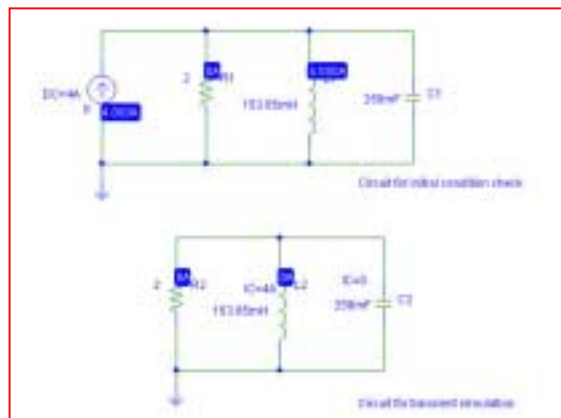
With  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 4$  A, we find  $C = 4$  A. To find  $D$ , we first note that

$$v_C(t) = v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

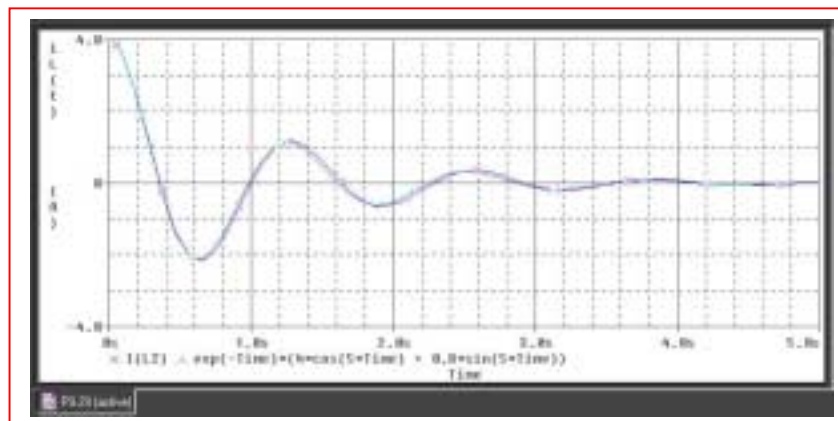
and so  $v_C(t) = (2/13) [e^{-\alpha t} (-C\omega_d \sin \omega_d t + D\omega_d \cos \omega_d t) - \alpha e^{-\alpha t} (C \cos \omega_d t + D \sin \omega_d t)]$

With  $v_C(0^+) = 0 = (2/13) (5D - 4)$ , we obtain  $D = 0.8$  A.

Thus,  $i_L(t) = e^{-t} (4 \cos 5t + 0.8 \sin 5t)$  A



We see that the simulation result confirms our hand analysis; there is only a slight difference due to numerical error between the simulation result and our exact expression.



- (c) Using the cursor tool, the settling time is approximately 4.65 s.

| Probe Cursor |          |          |  |
|--------------|----------|----------|--|
| A1 =         | 4.6493,  | -40.658m |  |
| A2 =         | 1.0000m, | 3.9999   |  |
| diff =       | 4.6483,  | -4.0406  |  |

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

30. (a) For  $t < 0$  s, we see from the circuit that the capacitor and the resistor are shorted by the presence of the inductor. Hence,  $i_L(0^-) = 4$  A and  $v_C(0^-) = 0$  V.

When the 4-A source turns off at  $t = 0$  s, we are left with a parallel RLC circuit such that  $\alpha = 1/2RC = 0.4 \text{ s}^{-1}$  and  $\omega_0 = 5.099 \text{ rad/s}$ . Since  $\alpha < \omega_0$ , the response will be underdamped with  $\omega_d = 5.083 \text{ rad/s}$ . Assume the form  $i_L(t) = e^{-\alpha t} (C \cos \omega_d t + D \sin \omega_d t)$  for the response.

With  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 4$  A, we find  $C = 4$  A. To find  $D$ , we first note that

$$v_C(t) = v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$$

and so  $v_C(t) = (2/13) [e^{-\alpha t} (-C\omega_d \sin \omega_d t + D\omega_d \cos \omega_d t) - \alpha e^{-\alpha t} (C \cos \omega_d t + D \sin \omega_d t)]$

With  $v_C(0^+) = 0 = (2/13) (5.083D - 0.4C)$ , we obtain  $D = 0.3148$  A.

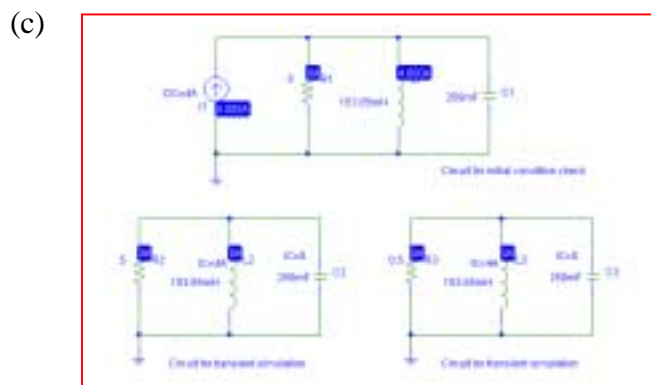
Thus,  $i_L(t) = e^{-0.4t} (4 \cos 5.083t + 0.3148 \sin 5.083t)$  A and  $i_L(2.5) = 1.473$  A.

(b)  $\alpha = 1/2RC = 4 \text{ s}^{-1}$  and  $\omega_0 = 5.099 \text{ rad/s}$ . Since  $\alpha < \omega_0$ , the new response will still be underdamped, but with  $\omega_d = 3.162 \text{ rad/s}$ . We still may write

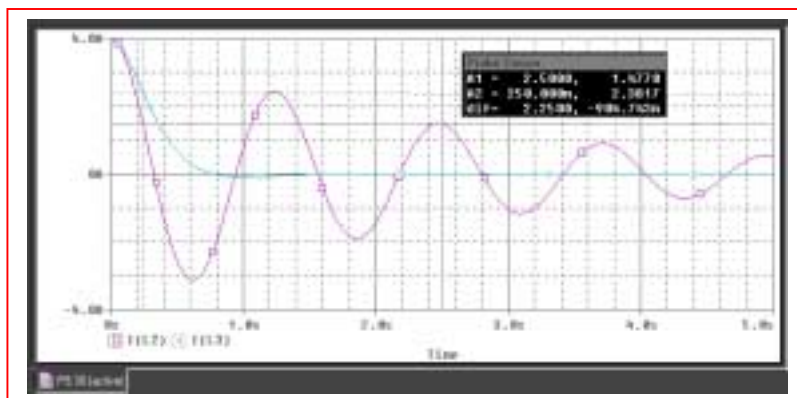
$$v_C(t) = (2/13) [e^{-\alpha t} (-C\omega_d \sin \omega_d t + D\omega_d \cos \omega_d t) - \alpha e^{-\alpha t} (C \cos \omega_d t + D \sin \omega_d t)]$$

and so with  $v_C(0^+) = 0 = (2/13) (3.162D - 4C)$ , we obtain  $D = 5.06$  A.

Thus,  $i_L(t) = e^{-4t} (4 \cos 3.162t + 5.06 \sin 3.162t)$  A and  $i_L(.25) = 2.358$  A.



We see from the simulation result below that our hand calculations are correct; the slight disagreement is due to numerical inaccuracy. Changing the step ceiling from the 10-ms value employed to a smaller value will improve the accuracy.



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

31. Series:  $\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{2}{1/2} = 4$ ,  $\omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{4}{0.2} = 20$ ,  $\omega_d = \sqrt{20-16} = 2$

$$\therefore i_L = e^{-4t} (A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t); i_L(0) = 10\text{A}, v_c(0) = 20\text{V}$$
$$\therefore A_1 = 10; i_L'(0^+) = \frac{1}{L} v_L(0^+) = 4(20 - 20) = 0$$
$$\therefore i_L'(0^+) = 2A_2 - 4 \times 10 \therefore A_2 = 20$$
$$\therefore i_L(t) = e^{-4t} (10 \cos 2t + 20 \sin 2t)\text{A}, t > 0$$



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

32.

$$v_c(0) = 50 + 80 \times 2 = 210 \text{ V}, i_L(0) = 0, \alpha = \frac{R}{2L} = \frac{80}{4} = 20$$

$$\omega_o^2 = \frac{100}{2} = 500: \omega_d = \sqrt{500 - 20^2} = 10$$

$$\therefore v_c(t) = e^{-20t} (A_1 \cos 10t + A_2 \sin 10t) \therefore A_1 = 210 \text{ V}$$

$$\therefore v_c(t) = e^{-20t} (210 \cos 10t + A_2 \sin 10t); v_c'(0^+) = \frac{1}{C} i_c(0^+) = 0$$

$$\therefore 0 = 10A_2 - 20(210), A_2 = 420 \therefore v_c(t) = e^{-20t} (210 \cos 10t + 420 \sin 10t)$$

$$\therefore v_c(40\text{ms}) = e^{-0.8} (210 \cos 0.4 + 420 \sin 0.4) = \boxed{160.40 \text{ V}}$$

$$\text{Also, } i_L = e^{-20t} (B_1 \cos 10t + B_2 \sin 10t),$$

$$i_L(0^+) = \frac{1}{L} v_L(0^+) = \frac{1}{2} [0 - v_c(0^+)] = \frac{1}{2} \times 210$$

$$\therefore i_L'(0^+) = -105 = 10B_2 \therefore B_2 = 10.5$$

$$\therefore i_L(t) = -10.5e^{-20t} \sin 10t \text{ A}, t > 0$$

$$\therefore v_R(t) = 80i_L = 840e^{-20t} \sin 10t \text{ V}$$

$$\therefore v_R(40\text{ms}) = -840e^{-0.8} \sin 0.4 = \boxed{-146.98 \text{ V}}$$

$$v_L(t) = -v_c(t) - v_c(t) - v_R(t) \therefore v_L$$

$$(40\text{ms}) = -160.40 + 146.98 = \boxed{-13.420 \text{ V}}$$

$$[\text{check: } v_L = e^{-20t} (-210 \cos - 420 \sin + 840 \sin)]$$

$$= e^{-20t} (-210 \cos 10t + 420 \sin 10t) \text{ V}, t > 0$$

$$\therefore v_L(40\text{ms}) = e^{-0.8} (-210 \cos - 420 \sin + 840 \sin) = e^{-20t}$$

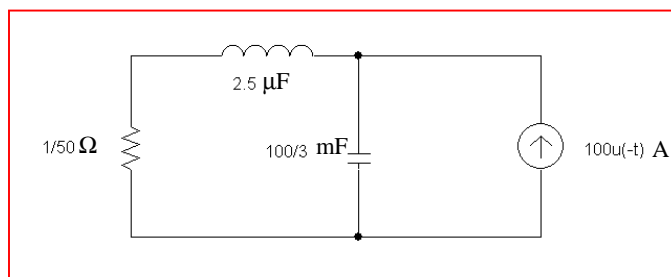
$$(-210 \cos 10t + 420 \sin 10t) \text{ V}, t > 0$$

$$\therefore V_L(40\text{ms}) = e^{-0.8}$$

$$(420 \sin 0.4 - 210 \cos 0.4) = -13.420 \text{ V Checks}]$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

33. “Obtain an expression for  $v_c(t)$  in the circuit of Fig. 9.8 (dual) that is valid for all  $t$ ”.



$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{0.02 \times 10^6}{2 \times 2.5} = 4000, \quad \omega_o^2 = \frac{10^6 \times 3}{2.5 \times 10} = 1.2 \times 10^7$$

$$\therefore s_{1,2} = -4000 \pm \sqrt{16 \times 10^6 - 12 \times 10^6} = -2000, -6000$$

$$\therefore v_c(t) = A_1 e^{-2000t} + A_2 e^{-6000t}; \quad v_c(0) = \frac{1}{50} \times 100 = 2V$$

$$i_L(0) = 100A \therefore 2 = A_1 + A_2, \quad v'_c(0^+) = \frac{1}{C}$$

$$(-i_L(0)) = -\frac{3}{100} \times 10^3 \times 100 = -3000v/s$$

$$\therefore -3000 = -200A_1 - 600A_2, \quad -1.5 = -A_1 - 3A_2$$

$$\therefore 0.5 = -2A_2, \quad = -0.25, \quad A_1 = 2.25$$

$$\therefore v_c(t) = (2.25e^{-200t} - 0.25e^{-6000t}) u(t) + 2u(-t) V \text{ (checks)}$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

34. (a) crit. damp;  $\alpha^2 = \frac{R^2}{4L^2} = \omega_o^2 = \frac{1}{LC} \therefore L = \frac{1}{4}R^2C$   
 $\therefore L = \frac{1}{4} \times 4 \times 10^{-6} = 0.01\text{H}, \alpha = \frac{200}{0.02} = 10^4 = \omega_o$   
 $\therefore v_c(t) = e^{-10000t}(A_1t + A_2); v_c(0) = -10\text{V}, i_L(0) = -0.15\text{A}$   
 $\therefore A_2 = -10, v_c(t) = e^{-10000t}(A_1t - 10); v'_c(0^+) = -\frac{1}{C}$   
 $i_L(0) = -10^6(-0.15) = 150,000$   
 Now,  $v'_c(0^+) = A_1 + 10^5 = 150,000 \therefore A_1 = 50,000$   
 $\therefore v_c(t) = e^{-10,000t}(50,000t - 10) \text{ V}, t > 0$
- (b)  $v'_c(t) = e^{-10,000t}[50,000 - 10,000(50,000t - 10)] = \therefore$   
 $5 = 50,000t_m - 10 \therefore t_m = \frac{15}{50,000} = 0.3\text{ms}$   
 $\therefore v_c(t_m) = e^{-3}(15 - 10) = 5e^{-3} = 0.2489\text{V}$   
 $v_c(0) = -10\text{V} \therefore |v_c|_{\max} = 10\text{V}$
- (c)  $v_{c,\max} = 0.2489\text{V}$



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

35. (a)  $\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{250}{10} = 25, \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{10^6}{2500} = 400$   
 $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} = -25 \pm 15 = -10, -40$   
 $\therefore i_L = A_1 e^{-10t} + A_2 e^{-40t}, i_L(0) = 0.5 \text{ A}, v_c(0) = 100 \text{ V}$   
 $\therefore 0.5 = A_1 + A_2, i_L'(0^+) = \frac{1}{5} v_L(0^+) = \frac{1}{5}$   
 $(100 - 25 - 100) = -5 \text{ A/s} = -10A_1 - 40A_2$   
 $\therefore 5 = 10A_1 + 40(0.5 - A_1) = 10A_1 - 40$   
 $A_1 + 20 \therefore -30A_1 = -15, A_1 = 0.5, A_2 = 0$   
 $\therefore i_L(t) = 0.5e^{-10t} \text{ A}, t > 0$

(b)  $v_c = A_3 e^{-10t} + A_4 e^{-40t} \therefore 100 = A_3 + A_4;$   
 $v_c' = \frac{1}{C} i_c'(0^+) \frac{10^6}{500} (-0.5) = -1000$   
 $\therefore -10A_3 - 40A_4 = -1000 \therefore -3A_4 = 0, A_4 = 0, A_3 = 100$   
 $\therefore v_c(t) = 100e^{-10t} \text{ V } t > 0$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

$$36. \quad (a) \quad \alpha = \frac{R}{2L} = \frac{2}{2} = 1, \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = 5, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = 2$$

$$\therefore i_L = e^{-t} (B_1 \cos 2t + B_2 \sin 2t), \quad i_L(0) = 0, \quad v_c(0) = 10V$$

$$\therefore B_1 = 0, \quad i_L = B_2 e^{-t} \sin 2t$$

$$i_1(0) = \frac{1}{1} v_L(0^+) = v_R(0^+) - V_c(0^+) = 0 - 10 = 2B_2$$

$$\therefore B_2 = 5 \therefore i_L = -5e^{-t} \sin 2t A, \quad t > 0$$

$$(b) \quad i_L' = -5[e^{-t}(2 \cos 2t - \sin 2t)] = 0$$

$$\therefore 2 \cos 2t = \sin 2t, \quad \tan 2t = 2$$

$$\therefore t_1 = 0.5536s, \quad i_L(t_1) = -2.571A$$

$$2t_2 = 2 \times 0.5536 + \pi, \quad t_2 = 2.124,$$

$$i_L(t_2) = 0.5345 \therefore |i_L|_{\max} = 2.571A$$

$$\text{and } i_{L\max} = 0.5345A$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

37. We are presented with a series RLC circuit having  $\alpha = R/2L = 4700 \text{ s}^{-1}$  and  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 447.2 \text{ rad/s}$ ; therefore we expect an overdamped response with  $s_1 = -21.32 \text{ s}^{-1}$  and  $s_2 = -9379 \text{ s}^{-1}$ .

From the circuit as it exists for  $t < 0$ , it is evident that  $i_L(0^-) = 0$  and  $v_C(0^-) = 4.7 \text{ kV}$

$$\text{Thus, } v_L(t) = A e^{-21.32t} + B e^{-9379t} \quad [1]$$

With  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$  and  $i_R(0^+) = 0$  we conclude that  $v_R(0^+) = 0$ ; this leads to  $v_L(0^+) = -v_C(0^-) = -4.7 \text{ kV}$  and hence  $A + B = -4700$  [2]

Since  $v_L = L \frac{di}{dt}$ , we may integrate Eq. [1] to find an expression for the inductor current:

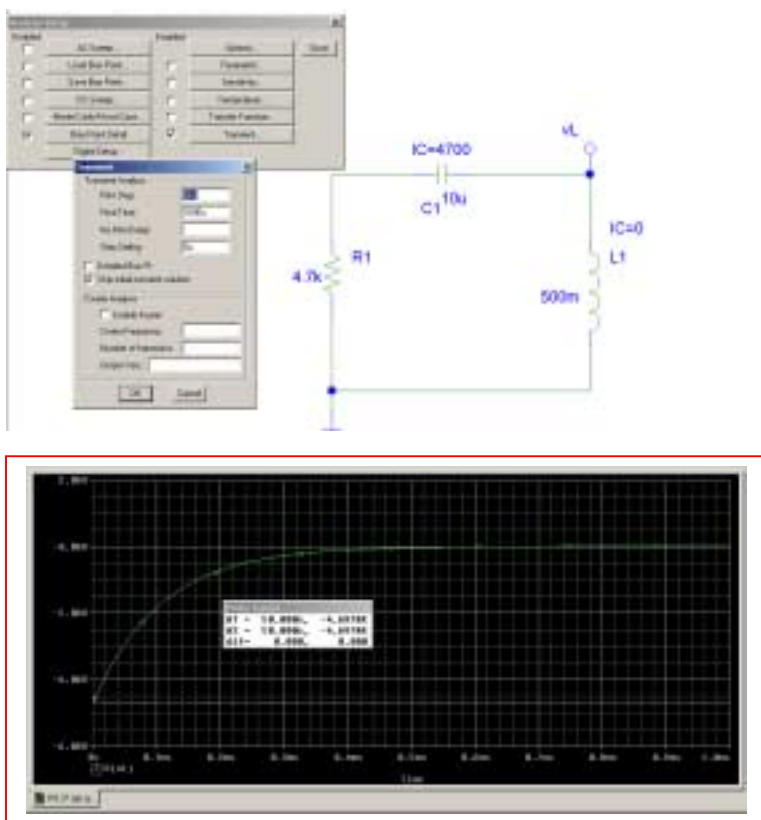
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \left[ -\frac{A}{21.32} e^{-21.32t} - \frac{B}{9379} e^{-9379t} \right]$$

$$\text{At } t = 0^+, i_L = 0 \text{ so we have } \frac{1}{500 \times 10^{-3}} \left[ -\frac{A}{21.32} - \frac{B}{9379} \right] = 0 \quad [3]$$

Simultaneous solution of Eqs. [2] and [3] yields  $A = 10.71$  and  $B = -4711$ . Thus,

$$v_L(t) = 10.71 e^{-21.32t} - 4711 e^{-9379t} \text{ V, } t > 0$$

and the peak inductor voltage magnitude is 4700 V.





## CHAPTER NINE SOLUTIONS

38. Considering the circuit as it exists for  $t < 0$ , we conclude that  $v_C(0^-) = 0$  and  $i_L(0^-) = 9/4 = 2.25$  A. For  $t > 0$ , we are left with a parallel RLC circuit having  $\alpha = 1/2RC = 0.25$  s<sup>-1</sup> and  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 0.3333$  rad/s. Thus, we expect an underdamped response with  $\omega_d = 0.2205$  rad/s:

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2.25 = A$$

$$\text{so } i_L(t) = e^{-0.25t} (2.25 \cos 0.2205t + B \sin 0.2205t)$$

In order to determine B, we must invoke the remaining boundary condition. Noting that

$$\begin{aligned} v_C(t) = v_L(t) &= L \frac{di_L}{dt} \\ &= (9)(-0.25)e^{-0.25t} (2.25 \cos 0.2205t + B \sin 0.2205t) \\ &\quad + (9)e^{-0.25t} [-2.25(0.2205) \sin 0.2205t + 0.2205B \cos 0.2205t] \end{aligned}$$

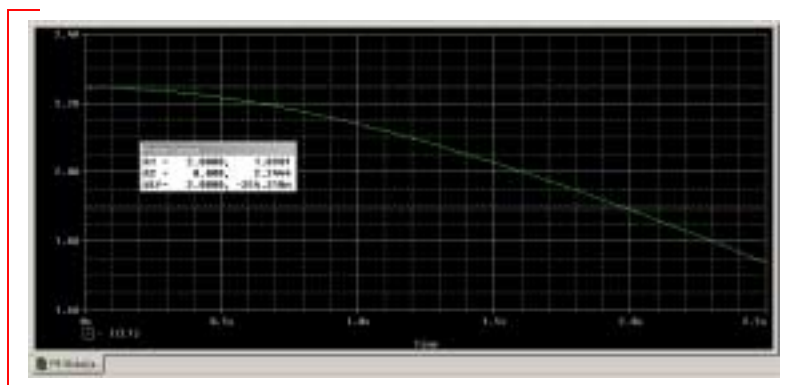
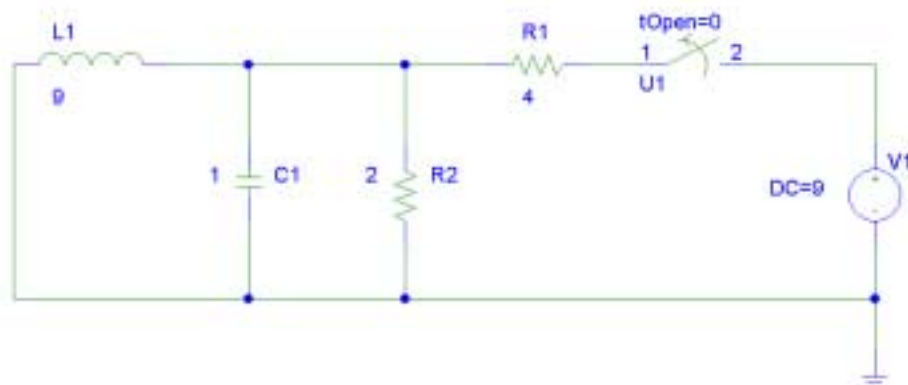
$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 = (9)(-0.25)(2.25) + (9)(0.2205B)$$

so  $B = 2.551$  and

$$i_L(t) = e^{-0.25t} [2.25 \cos 0.2205t + 2.551 \sin 0.2205t] \text{ A}$$

Thus,  $i_L(2) = 1.895$  A

This answer is borne out by PSpice simulation:



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

39. Considering the circuit at  $t < 0$ , we note that  $i_L(0^-) = 9/4 = 2.25$  A and  $v_C(0^-) = 0$ . For a critically damped circuit, we require  $\alpha = \omega_0$ , or  $\frac{1}{2RC} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , which, with  $L = 9$  H and  $C = 1$  F, leads to the requirement that  $R = 1.5 \Omega$  (so  $\alpha = 0.3333$  s<sup>-1</sup>).

The inductor energy is given by  $w_L = \frac{1}{2} L [i_L(t)]^2$ , so we seek an expression for  $i_L(t)$ :

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} (At + B)$$

Noting that  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2.25$ , we see that  $B = 2.25$  and hence

$$i_L(t) = e^{-0.3333t} (At + 2.25)$$

Invoking the remaining initial condition requires consideration of the voltage across the capacitor, which is equal in this case to the inductor voltage, given by:

$$v_C(t) = v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 9(-0.3333) e^{-0.3333t} (At + 2.25) + 9A e^{-0.3333t}$$

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 = 9(-0.333)(2.25) + 9A \quad \text{so } A = 0.7499 \text{ amperes and}$$

$$i_L(t) = e^{-0.3333t} (0.7499t + 2.25) \text{ A}$$

$$\text{Thus, } i_L(100 \text{ ms}) = 2.249 \text{ A and so } w_L(100 \text{ ms}) = 22.76 \text{ J}$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

40. With the 144 mJ originally stored via a 12-V battery, we know that the capacitor has a value of 2 mF. The initial inductor current is zero, and the initial capacitor voltage is 12 V. We begin by seeking a (painful) current response of the form

$$i_{\text{bear}} = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

Using our first initial condition,  $i_{\text{bear}}(0^+) = i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 = A + B$

$$di/dt = As_1 e^{s_1 t} + Bs_2 e^{s_2 t}$$

$$v_L = L di/dt = ALs_1 e^{s_1 t} + BLs_2 e^{s_2 t}$$

$$v_L(0^+) = ALs_1 + BLs_2 = v_C(0^+) = v_C(0^-) = 12$$

What else is known? We know that the bear stops reacting at  $t = 18 \mu\text{s}$ , meaning that the current flowing through its fur coat has dropped just below 100 mA by then (not a long shock).

$$\text{Thus, } A \exp[(18 \times 10^{-6})s_1] + B \exp[(18 \times 10^{-6})s_2] = 100 \times 10^{-3}$$

$$\text{Iterating, we find that } R_{\text{bear}} = 119.9775 \Omega.$$

This corresponds to  $A = 100 \text{ mA}$ ,  $B = -100 \text{ mA}$ ,  $s_1 = -4.167 \text{ s}^{-1}$  and  $s_2 = -24 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

41.

$$v_c(0) = 0, i_L(0) = 0, \alpha = \frac{R}{2L} = \frac{2}{0.5} = 4, \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = 4 \times 5 = 20$$

$$\therefore \omega_d = \sqrt{20 - 16} = 2 \therefore i_L(t) = e^{-4t} (A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t) + i_{L,f}$$

$$i_{L,f} = 10A \therefore i_L(t) = 10 + e^{-4t} (A_1 \cos 2t + A_2 \sin 2t)$$

$$\therefore 0 = 10 + A_1, A_1 = -10, i_L(t) = 10 + e^{-4t} (A_2 \sin 2t - 10 \cos 2t)$$

$$i_L(0^+) = \frac{1}{L} v_L(0^+) = 4 \times 0 = 0 \therefore i_L(0^+) = 0 = 2A_2 + 40, A_2 = -20$$

$$i_L(t) = 10 - e^{-4t} (20 \sin 2t + 10 \cos 2t) A, t > 0$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

42. (a) Series, driven:  $\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{100}{0.2} = 500$ ,

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{10 \times 10^6}{40} = 250,000$$

$\therefore$  Crit. damp  $i_L(f) = 3(1-2) = -3$ ,

$i_L(0) = 3$ ,  $v_c(0) = 300\text{V}$

$\therefore i_L = -3 + e^{-500t} (A_1 t + A_2) \therefore 3 = -3 + A_2$ ,  $A_2 = 6\text{A}$

$i_L(0^+) = A_1 - 300 = \frac{1}{L}[v_c(0) - v_R(0^+)] = 0$

$\therefore A_1 = 3000 e^{-500t} \therefore i_L(t) = -3 + e^{-500t}$   
 $(3000t + 6)$ ,  $t > 0$

$\therefore i_L(t) = 3u(-t) + [-3 + e^{-500t}(3000t + 6)]u(t)\text{A}$

(b)  $e^{-500t_o}(3000t_o + 6) = 3$ ; by SOLVE,  $t_o = 3.357\text{ms}$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

43.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{100 \times 2.5} = 4000, \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{10^{6+3}}{50} = 20 \times 10^6$$

$$\therefore \omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = 2000, \quad i_L(0) = 2A, \quad v_c(0) = 0$$

$$i_{c,f} = 0, \quad (v_{c,f} = 0) \therefore i_c = e^{-4000t} (A_1 \cos 2000t + A_2 \sin 2000t)$$

$$\text{work with } v_c: v_c(t) = e^{-4000t} (B_1 \cos 2000t + B_2 \sin 2000t) \therefore B_1 = 0$$

$$\therefore v_c = B_2 e^{-4000t} \sin 2000t, \quad v'_c(0^+) = \frac{1}{C} i_c(0^+) = \frac{10^6}{2.5} (2 \times 1) = 8 \times 10^5$$

$$\therefore 8 \times 10^5 = 2000 B_2, \quad B_2 = 400, \quad v_c = 400 e^{-4000t} \sin 2000t$$

$$\therefore i_c(t) = C v'_c = 2.5 \times 10^{-6} \times 400 e^{-4000t} (-4000 \sin 2000t + 2000 \cos 2000t)$$

$$= 10^{-6+3+3} e^{-4000t} (-4 \sin 2000t + 2 \cos 2000t)$$

$$= e^{-4000t} (2 \cos 2000t - 4 \sin 2000t) A, \quad t > 0$$



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

44.

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{250}{10} = 25, \quad \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{10^6}{2500} = 400$$

$$s_{1,2} = -25 \pm \sqrt{625 - 400} = -10, -40$$

$$i_L(0) = 0.5\text{A}, \quad v_c(0) = 100\text{V}, \quad i_{L,f} = -0.5\text{A}$$

$$\therefore i_L(t) = -0.5 + A_1 e^{-10t} + A_2 e^{-40t} \text{ A}$$

$$t = 0^+ : v_L(0^+) = 100 - 50 \times 1 - 200 \times 0.5 = -50\text{V} \therefore -50 = 5i_L'(0^+)$$

$$\therefore i_L'(0^+) = -10 \therefore -10 = -10A_1 - 40A_2, \quad 0.5 = -0.5 + A_1 + A_2$$

$$\therefore A_1 + A_2 = 1 \therefore -10 = -10A_2 - 40(-1 + A_1) = -50A_1 + 40, \quad A_1 = 1, A_2 = 0$$

$$\therefore i_L(t) = \boxed{-0.5 + 1e^{-10t} \text{ A}}, \quad t > 0; \quad i_L(t) = \boxed{0.5\text{A}}, \quad t > 0$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

45.

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{1} = 1, \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = 1 \therefore \text{crit. damp}$$

$$v_c(0) = \frac{5}{6} \times 12 = 10\text{V}, i_L(0) = 2\text{A}, v_{c,f} = 12\text{V}$$

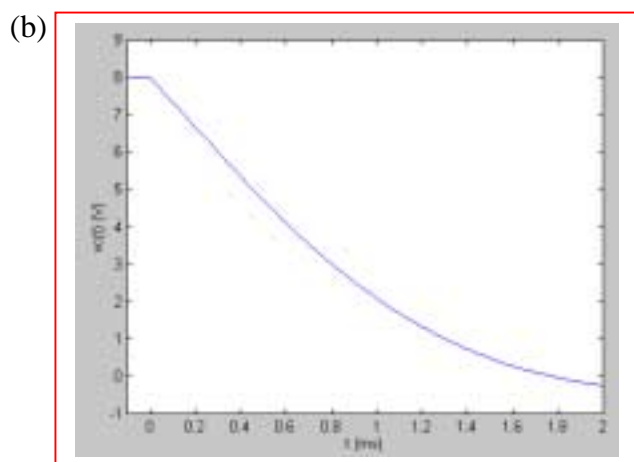
$$\therefore v_c(t) = 12 + e^{-t}(A_1 t - 2); v'_c(0^+) = \frac{1}{C} i_c(0^+) = \frac{1}{2} \times i_L(0^+) = 1$$

$$\therefore 1 = A_1 + 2; A_1 = -1 \therefore v_c(t) = 12 - e^{-t}(t + 2)\text{V}, t > 0$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

46. (a)  $\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{8 \times 10^6}{2 \times 4 \times 10^3} = 1000, \omega_o^2 = \frac{8 \times 10^6 \times 13}{4} = 26 \times 10^6$   
 $\therefore \omega_d = \sqrt{26 - 1} \times 10^3 = 5000, v_c(0) = 8V$   
 $i_L(0) = 8mA, v_{c,f} = 0$   
 $\therefore v_c = e^{-1000t} (A_1 \cos 1000t + A_2 \sin 5000t)$   
 $\therefore A_1 = 8; v'_c(0^+) = \frac{1}{C} i_c(0^+) = 8 \times 10^6 (0.01 - \frac{8}{4000} - 0.008) = 0$   
 $\therefore 5000A_2 - 1000 \times 8 = 0, A_2 = 1.6$

So  $v_c(t) = e^{-1000t} (8 \cos 1000t + 1.6 \sin 1000t) V, t > 0$





## CHAPTER NINE SOLUTIONS

47. (a)

$$v_s(t) = 10u(-t) \text{ V}; \alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{1000} = 1000$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{10^6 \times 3}{4} \therefore s_{1,2} = -1000 \pm \sqrt{10^6 - \frac{3}{4} \times 10^6} = -500, -1500$$

$$v_{c,f} = 0 \therefore v_c = A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t}, v_c(0) = 10 \text{ V}, i_L(0) = 0$$

$$\therefore 10 = A_1 + A_2, v'_c = 10^6 i_c(0^+) = 10^6 \left[ 0 - \frac{10}{500} \right] = -2 \times 10^4$$

$$\therefore -2 \times 10^4 = -500A_1 - 1500A_2 \therefore 40 = A_1 + 3A_2 \therefore 30 = 2A_2, A_2 = 15, A_1 = -5$$

$$\therefore v_c = -5e^{-500t} + 15e^{-1500t} \text{ V}, t > 0 \therefore i_s = i_c = C v'_c$$

$$\therefore i_s = 10^{-6} (2500e^{-500t} - 22,500e^{-1500t})$$

$$= \boxed{2.5e^{-500t} - 22.5e^{-1500t} \text{ mA}, t > 0}$$

(b)  $v_s(t) = 10u(t) \text{ V} \therefore v_{c,f} = 10 \text{ V}, v_c(0) = 0, i_L(0) = 0$

$$\therefore v_c = 10 + A_3 e^{-500t} + A_4 e^{-1500t} \therefore A_3 + A_4 = -10$$

$$v'_c(0^+) = 10^6 i_c(0^+) = 10^6 \left( 0 + \frac{10}{500} \right) = 2 \times 10^4 = -500A_3 - 1500A_4$$

$$\therefore -A_3 - 3A_4 = 40, \text{ add: } -2A_4 = 30, A_4 = -15, A_3 = 5,$$

$$v_c = 10 + 5e^{-500t} - 15e^{-1500t} \text{ V}, i_s = i_c =$$

$$10^{-6} (-2500e^{-500t} + 22,500e^{-1500t}) = \boxed{25e^{-500t} + 22.5e^{-1500t} \text{ mA}, t > 0}$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

48. (a)  $v_s = 10u(-t) \text{ V} : \alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{2000 \times 0.5} = 1000$
- $$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{2 \times 10^6 \times 3}{8} = 0.75 \times 10^6 \therefore s_{1,2} = -500, -1500$$
- $$\therefore v_c = A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t}, v_o(0) = 10\text{V}, i_L(0) = 10\text{mA}$$
- $$\therefore A_1 + A_2 = 10, v'_c(0^+) = 2 \times 10^6 [i_L(0) - i_R(0^+)] = 2 \times 10^6$$
- $$\left( 0.01 - \frac{10}{1000} \right) = 0 \therefore -500A_1 - 1500A_2 = 0,$$
- $$-A_1 - 3A_2 = 0; \text{ add: } -2A_2 = 10, A_2 = -5, A_1 = 15$$
- $$\therefore v_c(t) = 15e^{-500t} - 5e^{-1500t} \text{ V } t > 0$$
- $$\therefore i_R(t) = \boxed{15e^{-500t} - 5e^{-1500t} \text{ mA}, t > 0}$$
- (b)  $v_s = 10u(t) \text{ V}, v_{c,f} = 10, v_c = 10 + A_3 e^{-500t} + A_4 e^{-1500t},$
- $$v_c(0) = 0, i_L(0) = 0 \therefore A_3 + A_4 = -10\text{V}, v'_c(0^+) = 2 \times 10^6$$
- $$[i_L(0) - i_R(0^+)] = 2 \times 10^6 (0 - 0) = 0 = -500A_3 - 1500A_4$$
- $$\therefore -A_3 - 3A_4 = 0, \text{ add: } -2A_4 = -10, A_4 = 5 \therefore A_3 = -15$$
- $$\therefore v_c(t) = 10 - 15e^{-500t} + 5e^{-1500t} \text{ V}, t > 0$$
- $$\therefore i_R(t) = \boxed{10 - 15e^{-500t} + 5e^{-1500t} \text{ mA}, t > 0}$$

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

49. (a)  $v_S(0^-) = v_C(0^-) = 2(15) = 30 \text{ V}$

(b)  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 15 \text{ A}$

Thus,  $i_C(0^+) = 22 - 15 = 7 \text{ A}$  and  $v_S(0^+) = 3(7) + v_C(0^+) = 51 \text{ V}$

(c) As  $t \rightarrow \infty$ , the current through the inductor approaches  $22 \text{ A}$ , so  $v_S(t \rightarrow \infty) = 44 \text{ A}$ .

(d) We are presented with a series RLC circuit having  $\alpha = 5/2 = 2.5 \text{ s}^{-1}$  and  $\omega_0 = 3.536 \text{ rad/s}$ . The natural response will therefore be underdamped with  $\omega_d = 2.501 \text{ rad/s}$ .

$$i_L(t) = 22 + e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 15 = 22 + A \quad \text{so } A = -7 \text{ amperes}$$

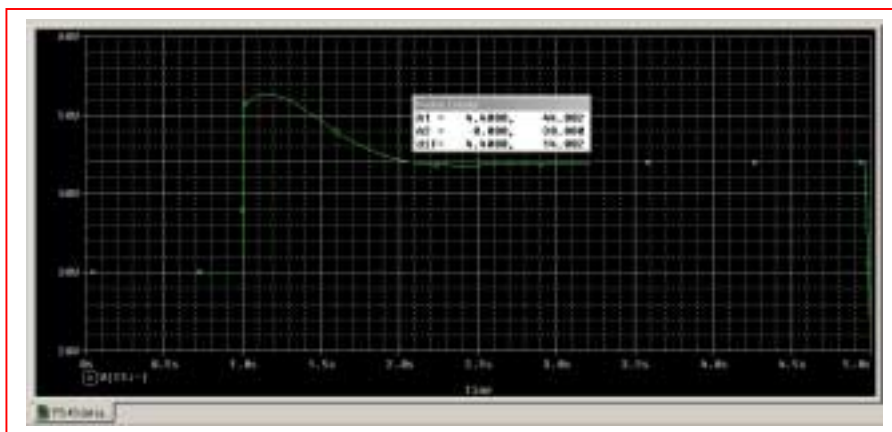
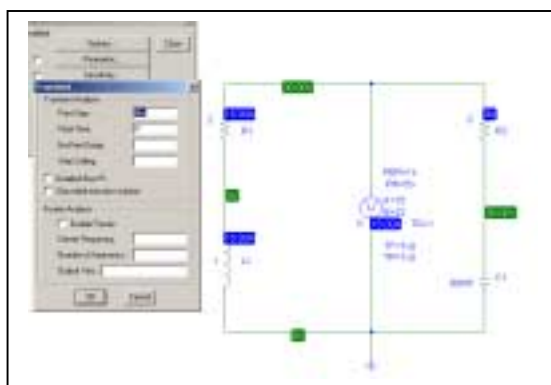
$$\text{Thus, } i_L(t) = 22 + e^{-2.5t} (-7 \cos 2.501t + B \sin 2.501t)$$

$$v_S(t) = 2 i_L(t) + L \frac{di_L}{dt} = 2i_L + \frac{di_L}{dt} = 44 + 2e^{-2.5t} (-7 \cos 2.501t + B \sin 2.501t) \\ - 2.5e^{-2.5t} (-7 \cos 2.501t + B \sin 2.501t) + e^{-2.5t} [7(2.501) \sin 2.501t + 2.501B \cos 2.501t]$$

$$v_S(t) = 51 = 44 + 2(-7) - 2.5(-7) + 2.501B \quad \text{so } B = 1.399 \text{ amperes and hence}$$

$$v_S(t) = 44 + 2e^{-2.5t} (-7 \cos 2.501t + 1.399 \sin 2.501t) \\ - 2.5e^{-2.5t} (-7 \cos 2.501t + 1.399 \sin 2.501t) + e^{-2.5t} [17.51 \sin 2.501t + 3.499 \cos 2.501t]$$

and  $v_S(t)$  at  $t = 3.4 \text{ s} = 44.002 \text{ V}$ . This is borne out by PSpice simulation:





## CHAPTER NINE SOLUTIONS

50. Considering the circuit at  $t < 0$ , we see that  $i_L(0^-) = 15$  A and  $v_C(0^-) = 0$ . The circuit is a series RLC with  $\alpha = R/2L = 0.375$  s<sup>-1</sup> and  $\omega_0 = 1.768$  rad/s. We therefore expect an underdamped response with  $\omega_d = 1.728$  rad/s. The general form of the response will be

$$v_C(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + 0 \quad (v_C(\infty) = 0)$$

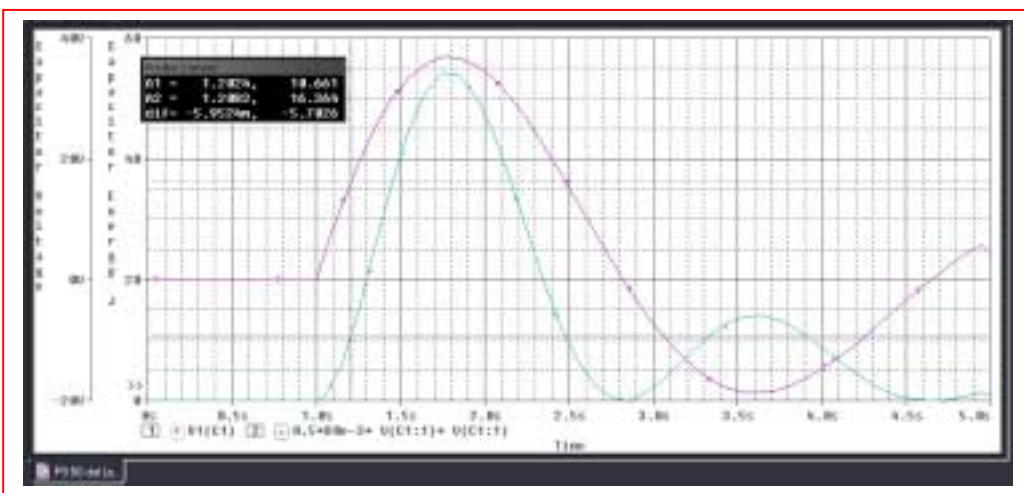
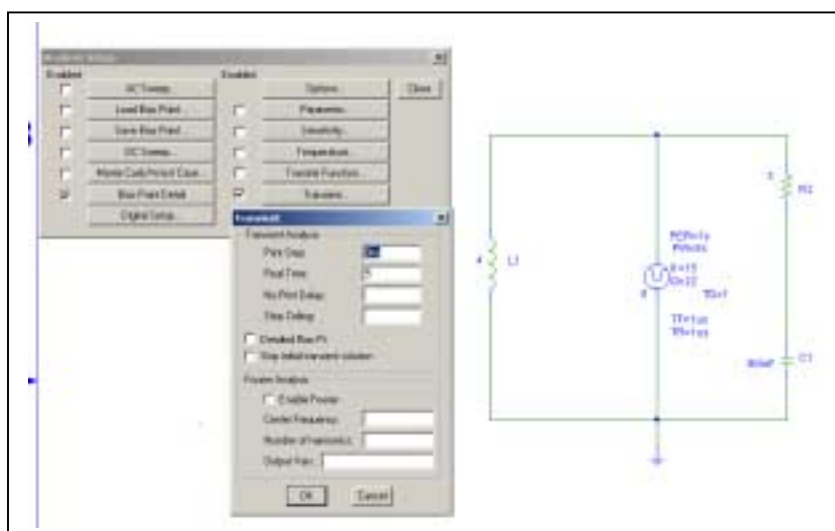
$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 = A$  and we may therefore write  $v_C(t) = B e^{-0.375t} \sin(1.728t)$  V

$$i_C(t) = -i_L(t) = C \frac{dv_C}{dt} = (80 \times 10^{-3})(-0.375B e^{-0.375t} \sin 1.728t + 1.728B e^{-0.375t} \cos 1.728t)$$

At  $t = 0^+$ ,  $i_C = 15 + 7 - i_L(0^+) = 7 = (80 \times 10^{-3})(1.728B)$  so that  $B = 50.64$  V.

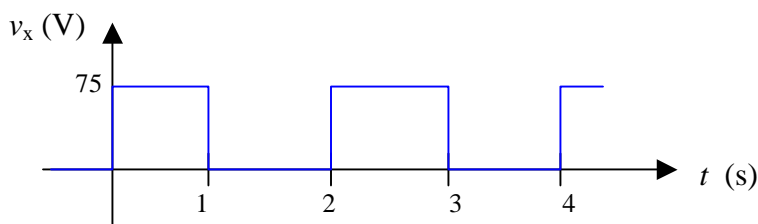
Thus,  $v_C(t) = 50.64 e^{-0.375t} \sin 1.807t$  V and  $v_C(t = 200 \text{ ms}) = 16.61$  V.

The energy stored in the capacitor at that instant is  $\frac{1}{2} C v_C^2 = \boxed{11.04 \text{ J}}$



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

51. It's probably easiest to begin by sketching the waveform  $v_x$ :



(a) The source current ( $= i_L(t)$ ) = 0 at  $t = 0^-$ .

(b)  $i_L(t) =$ 0 $at  $t = 0^+$$

(c) We are faced with a series RLC circuit having  $\alpha = R/2L = 2000$  rad/s and  $\omega_0 = 2828$  rad/s. Thus, an underdamped response is expected with  $\omega_d = 1999$  rad/s.

The general form of the expected response is  $i_L(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 = A \text{ so } A = 0. \text{ This leaves } i_L(t) = B e^{-2000t} \sin 1999t$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = B[(5 \times 10^{-3})(-2000 e^{-2000t} \sin 1999t + 1999 e^{-2000t} \cos 1999t)]$$

$$v_L(0^+) = v_x(0^+) - v_C(0^+) - 20 i_L(0^+) = B (5 \times 10^{-3})(1999) \text{ so } B = 7.504 \text{ A.}$$

Thus,  $i_L(t) = 7.504 e^{-2000t} \sin 1999t$  and  $i_L(1 \text{ ms}) =$ 0.9239 A.

(d) Define  $t' = t - 1 \text{ ms}$  for notational convenience. With no source present, we expect a new response but with the same general form:

$$i_L(t') = e^{-2000t'} (A' \cos 1999t' + B' \sin 1999t')$$

$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$ , and this enables us to calculate that  $v_L(t = 1 \text{ ms}) = -13.54 \text{ V}$ . Prior to the pulse returning to zero volts,  $-75 + v_L + v_C + 20 i_L = 0$  so  $v_C(t' = 0) = 69.97 \text{ V}$ .

$$i_L(t' = 0) = A' = 0.9239 \text{ and } -v_x + v_L + v_C + 20 i_L = 0 \text{ so that } B' = -7.925.$$

Thus,  $i_L(t') = e^{-2000t'} (0.9239 \cos 1999t' - 7.925 \sin 1999t')$  and hence  $i_L(t = 2 \text{ ms}) = i_L(t' = 1 \text{ ms}) =$ -1.028 A.

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

52. For  $t < 0$ , we have 15 A dc flowing, so that  $i_L = 15$  A,  $v_C = 30$  V,  $v_{3\Omega} = 0$  and  $v_S = 30$  V. This is a series RLC circuit with  $\alpha = R/2L = 2.5 \text{ s}^{-1}$  and  $\omega_0 = 3.536 \text{ rad/s}$ . We therefore expect an underdamped response with  $\omega_d = 2.501 \text{ rad/s}$ .

$$0 < t < 1$$

$$v_C(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 30 = A \text{ so we may write } v_C(t) = e^{-2.5t} (30 \cos 2.501t + B \sin 2.501t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= -2.5e^{-2.5t}(30 \cos 2.501t + B \sin 2.501t) \\ &\quad + e^{-2.5t} [-30(2.501)\sin 2.501t + 2.501B \cos 2.501t] \end{aligned}$$

$$i_C(0^+) = C \left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = 80 \times 10^{-3} [-2.5(30) + 2.501B] = -i_L(0^+) = -i_L(0^-) = -15 \text{ so } B = -44.98 \text{ V}$$

$$\text{Thus, } v_C(t) = e^{-2.5t} (30 \cos 2.501t - 44.98 \sin 2.501t) \text{ and}$$

$$i_C(t) = e^{-2.5t} (-15 \cos 2.501t + 2.994 \sin 2.501t).$$

$$\text{Hence, } v_S(t) = 3 i_C(t) + v_C(t) = e^{-2.5t} (-15 \cos 2.501t - 36 \sin 2.501t)$$

Prior to switching,  $v_C(t=1) = -4.181$  V and  $i_L(t=1) = -i_C(t=1) = -1.134$  A.

$t > 2$ : Define  $t' = t - 1$  for notational simplicity. Then, with the fact that  $v_C(\infty) = 6$  V, our response will now be  $v_C(t') = e^{-\alpha t'} (A' \cos \omega_d t' + B' \sin \omega_d t') + 6$ .

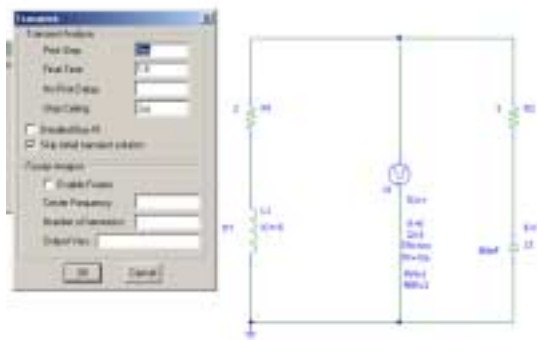
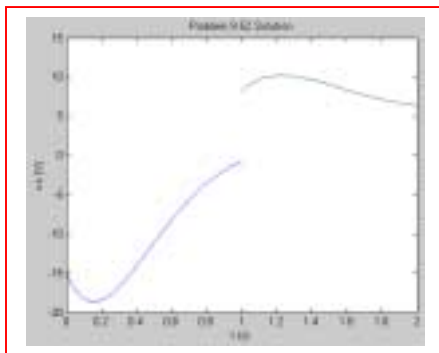
With  $v_C(0^+) = A' + 6 = -4.181$ , we find that  $A' = -10.18$  V.

$$i_C(0^+) = C \left. \frac{dv_C}{dt'} \right|_{t'=0^+} = (80 \times 10^{-3}) [(-2.5)(-10.18) + 2.501B'] = 3 - i_L(0^+) \text{ so } B' = 10.48 \text{ V}$$

$$\text{Thus, } v_C(t') = e^{-2.5t'} (-10.18 \cos 2.501t' + 10.48 \sin 2.501t') \text{ and}$$

$$i_C(t') = e^{-2.5t'} (4.133 \cos 2.501t' - 0.05919 \sin 2.501t').$$

$$\text{Hence, } v_S(t') = 3 i_C(t') + v_C(t') = e^{-2.5t'} (2.219 \cos 2.501t' + 10.36 \sin 2.501t')$$



We see that our hand calculations are supported by the PSpice simulation.



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

53. The circuit described is a series RLC circuit, and the fact that oscillations are detected tells us that it is an underdamped response that we are modeling. Thus,

$i_L(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$  where we were given that  $\omega_d = 1.825 \times 10^6$  rad/s.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1.914 \times 10^6 \text{ rad/s, and so } \omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \text{ leads to } \alpha^2 = 332.8 \times 10^9$$

Thus,  $\alpha = R/2L = 576863 \text{ s}^{-1}$ , and hence  $R = 1003 \text{ } \Omega$ .

Theoretically, this value must include the “radiation resistance” that accounts for the power lost from the circuit and received by the radio; there is no way to separate this effect from the resistance of the rag with the information provided.

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

54. The key will be to coordinate the decay dictated by  $\alpha$ , and the oscillation period determined by  $\omega_d$  (and hence partially by  $\alpha$ ). **One possible solution of many:**

Arbitrarily set  $\omega_d = 2\pi$  rad/s.

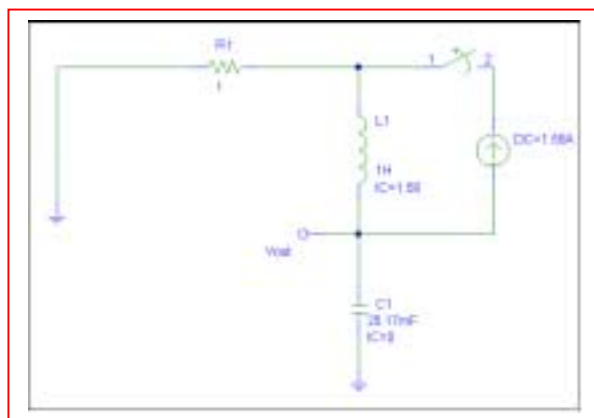
We want a capacitor voltage  $v_C(t) = e^{-\alpha t} (A \cos 2\pi t + B \sin 2\pi t)$ . If we go ahead and decide to set  $v_C(0^-) = 0$ , then we can force  $A = 0$  and simplify some of our algebra.

Thus,  $v_C(t) = B e^{-\alpha t} \sin 2\pi t$ . This function has max/min at  $t = 0.25$  s,  $0.75$  s,  $1.25$  s, *etc.* Designing so that there is no strong damping for several seconds, we pick  $\alpha = 0.5$  s<sup>-1</sup>. Choosing a series RLC circuit, this now establishes the following:

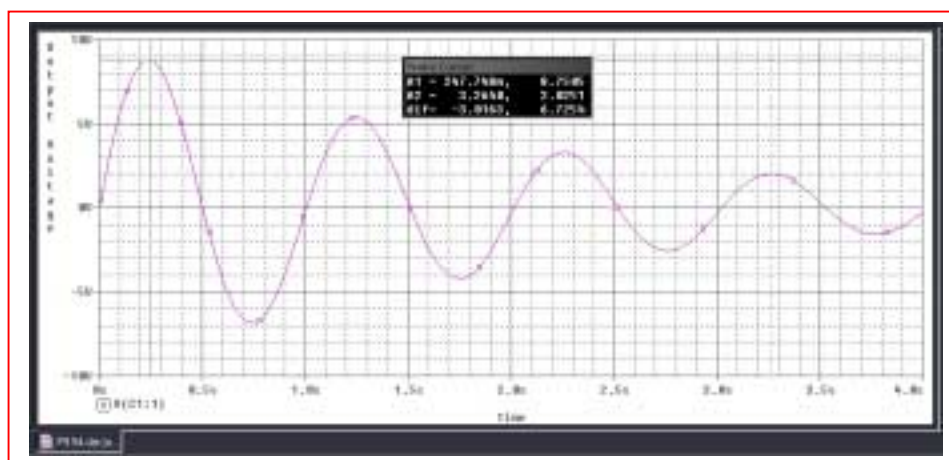
$$R/2L = 0.5 \text{ so } R = L \text{ and}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 39.73 \text{ rad/s} = \frac{1}{LC}$$

Arbitrarily selecting  $R = 1 \Omega$ , we find that  $L = 1$  H and  $C = 25.17$  mF. We need the first peak to be at least 5 V. Designing for  $B = 10$  V, we  $\therefore$  need  $i_L(0^+) = 2\pi(25.17 \times 10^{-3})(10) = 1.58$  A. Our final circuit, then is:



And the operation is verified by a simple PSpice simulation:



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

55. For  $t < 0$ ,  $i_L(0^-) = 3 \text{ A}$  and  $v_C(0^-) = 25(3) = 75 \text{ V}$ . This is a series RLC circuit with  $\alpha = R/2L = 5000 \text{ s}^{-1}$  and  $\omega_0 = 4000 \text{ rad/s}$ . We therefore expect an overdamped response with  $s_1 = -2000 \text{ s}^{-1}$  and  $s_2 = -8000 \text{ s}^{-1}$ . The final value of  $v_C = -50 \text{ V}$ .

$$\text{For } t > 0, \quad v_C(t) = A e^{-2000t} + B e^{-8000t} - 50$$

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 75 = A + B - 50$$

$$\text{so} \quad A + B = 125 \quad [1]$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -2000 A e^{-2000t} - 8000 B e^{-8000t}$$

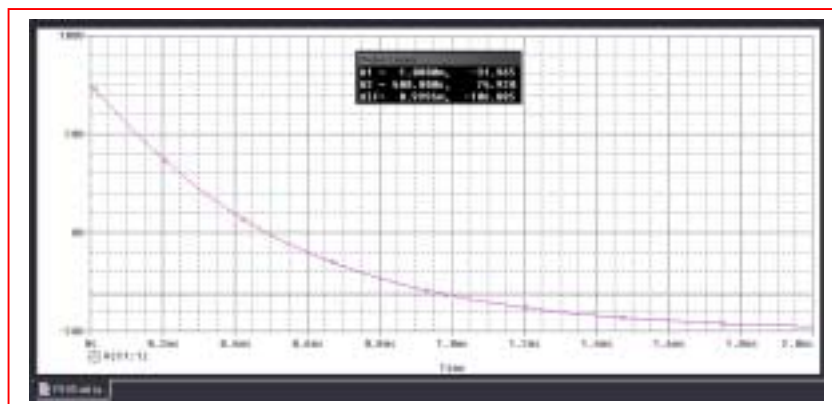
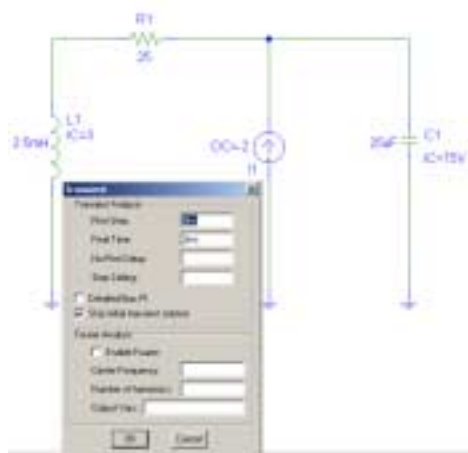
$$i_C(0^+) = C \left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = 3 - 5 - i_L(0^-) = -5 = -25 \times 10^{-6} (2000A + 8000B)$$

$$\text{Thus, } 2000A + 8000B = 5/25 \times 10^{-6} \quad [2]$$

Solving Eqs. [1] and [2], we find that  $A = 133.3 \text{ V}$  and  $B = -8.333 \text{ V}$ . Thus,

$$v_C(t) = 133.3 e^{-2000t} - 8.333 e^{-8000t} - 50$$

and  $v_C(1 \text{ ms}) = -31.96 \text{ V}$ . This is confirmed by the PSpice simulation shown below.





## CHAPTER NINE SOLUTIONS

56.  $\alpha = 0$  (this is a series RLC with  $R = 0$ , or a parallel RLC with  $R = \infty$ )  
 $\omega_o^2 = 0.05$  therefore  $\omega_d = 0.223$  rad/s. We anticipate a response of the form:  
 $v(t) = A \cos 0.2236t + B \sin 0.2236t$

$$v(0^+) = v(0^-) = 0 = A \text{ therefore } v(t) = B \sin 0.2236t$$

$$dv/dt = 0.2236B \cos 0.2236t; \quad i_C(t) = Cdv/dt = 0.4472B \cos 0.2236t$$

$$i_C(0^+) = 0.4472B = -i_L(0^+) = -i_L(0^-) = -1 \times 10^{-3} \text{ so } B = -2.236 \times 10^{-3} \text{ and thus}$$

$$v(t) = -2.236 \sin 0.2236t \text{ mV}$$

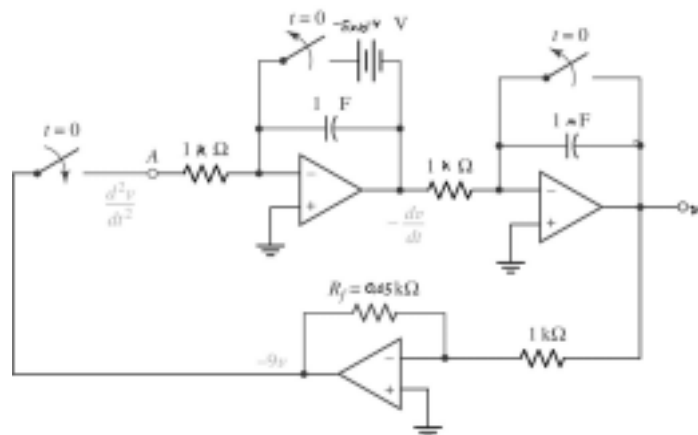
In designing the op amp stage, we first write the differential equation:

$$\frac{1}{10} \int_0^t v dt' + 10^{-3} + 2 \frac{dv}{dt} = 0 \quad (i_C + i_L = 0)$$

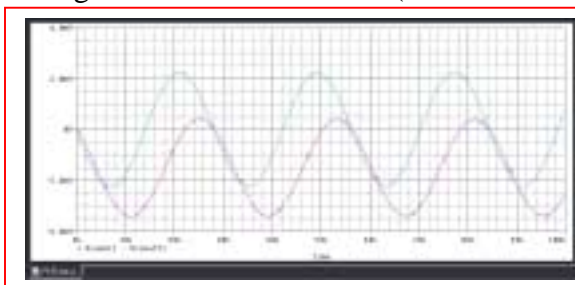
and then take the derivative of both sides:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{1}{20}v$$

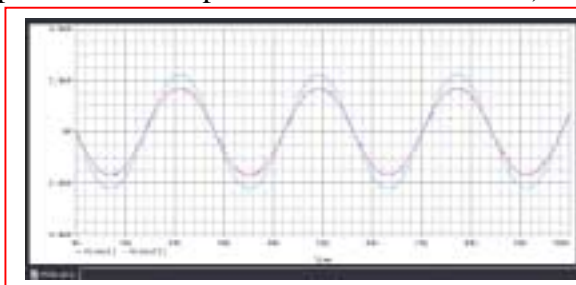
With  $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0^+} = (0.2236)(-2.236 \times 10^{-3}) = -5 \times 10^{-4}$ , one possible solution is:



PSpice simulations are very sensitive to parameter values; better results were obtained using LF411 instead of 741s (both were compared to the simple LC circuit simulation.)



Simulation using 741 op amps



Simulation using LF411 op amps

## CHAPTER NINE SOLUTIONS

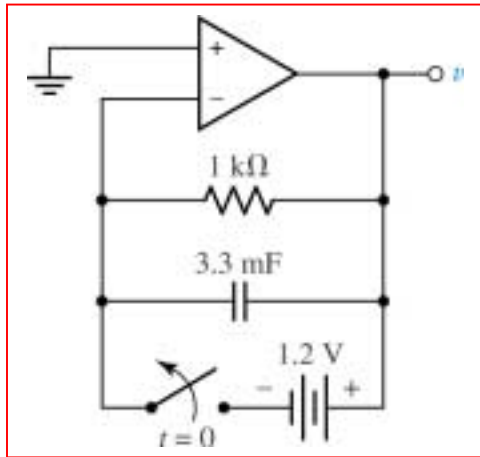
57.

$$\frac{v}{1000} + 3.3 \times 10^{-3} \frac{dv}{dt} = 0$$

(a) or

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{3.3}v$$

(b) One possible solution:



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

58.  $\alpha = 0$  (this is a series RLC with  $R = 0$ , or a parallel RLC with  $R = \infty$ )  
 $\omega_o^2 = 50$  therefore  $\omega_d = 7.071$  rad/s. We anticipate a response of the form:  
 $v(t) = A \cos 7.071t + B \sin 7.071t$ , knowing that  $i_L(0^-) = 2$  A and  $v(0^-) = 0$ .

$$v(0^+) = v(0^-) = 0 = A \text{ therefore } v(t) = B \sin 7.071t$$

$$dv/dt = 7.071B \cos 7.071t; \quad i_C(t) = Cdv/dt = 0.007071B \cos 7.071t$$

$$i_C(0^+) = 0.007071B = -i_L(0^+) = -i_L(0^-) = -2 \text{ so } B = -282.8 \text{ and thus}$$

$$v(t) = -282.8 \sin 7.071t \text{ V}$$

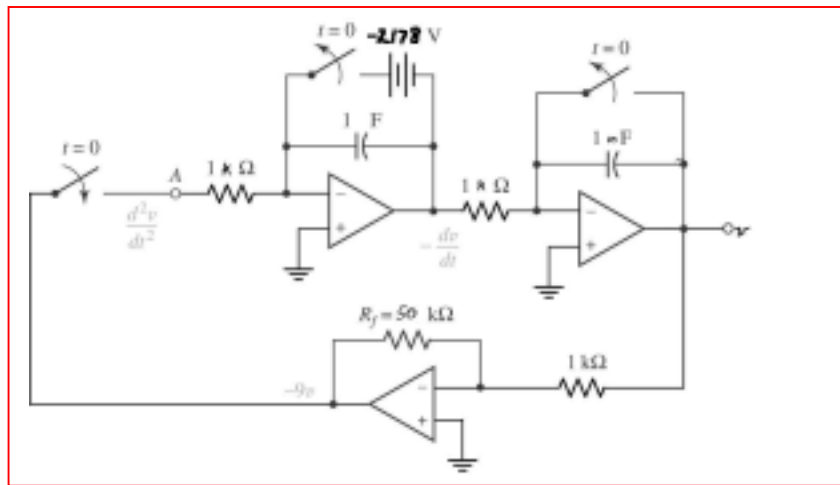
In designing the op amp stage, we first write the differential equation:

$$\frac{1}{20} \int_0^t v dt' + 2 \times 10^{-3} \frac{dv}{dt} = 0 \quad (i_C + i_L = 0)$$

and then take the derivative of both sides:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -50v$$

With  $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0^+} = (7.071)(-282.8) = -2178$ , one possible solution is:





## CHAPTER NINE SOLUTIONS

59. (a)  $v_R = v_L$

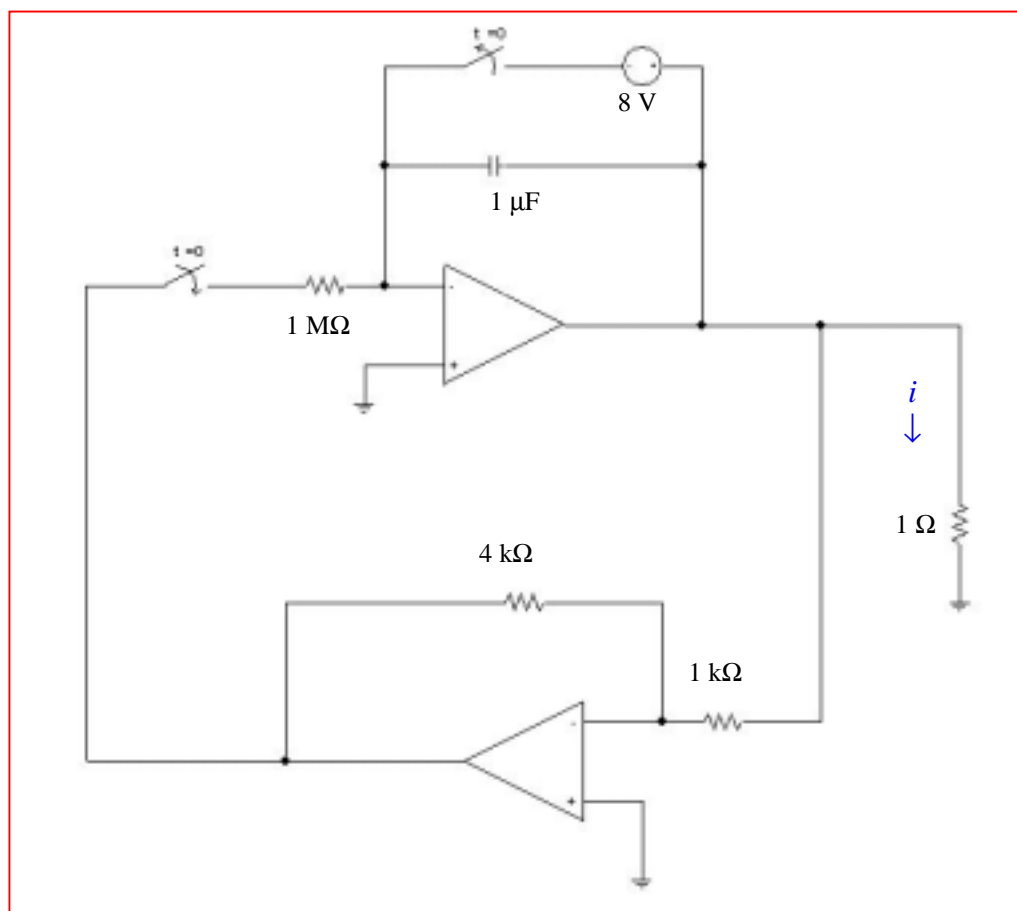
$$20(-i_L) = 5 \frac{di_L}{dt} \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{di_L}{dt} = -4i_L}$$

(b) We expect a response of the form  $i_L(t) = A e^{-t/\tau}$  where  $\tau = L/R = 0.25$ .

We know that  $i_L(0^-) = 2$  amperes, so  $A = 2$  and  $i_L(t) = 2 e^{-4t}$

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} = -4(2) = -8 \text{ A/s.}$$

One possible solution, then, is



## CHAPTER NINE SOLUTIONS

60. We see either a series RLC with  $R = 0$  or a parallel RLC with  $R = \infty$ ; either way,  $\alpha = 0$ .  
 $\omega_0^2 = 0.3$  so  $\omega_d = 0.5477$  rad/s (combining the two inductors in parallel for the calculation). We expect a response of the form  $i(t) = A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t$ .

$$i(0^+) = i(0^-) = A = 1 \times 10^{-3}$$

$$di/dt = -A\omega_d \sin \omega_d t + B\omega_d \cos \omega_d t$$

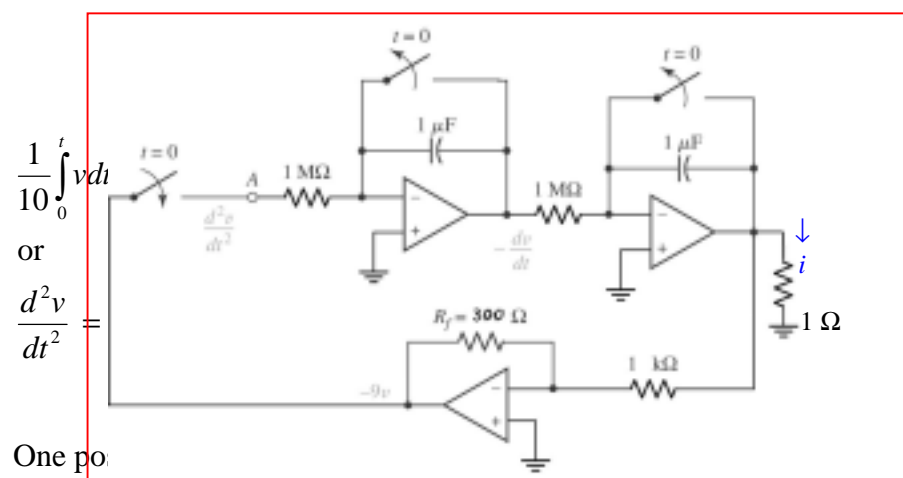
$$v_L = 10 di/dt = -10A\omega_d \sin \omega_d t + 10B\omega_d \cos \omega_d t$$

$$v_L(0^+) = v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 = 10B(0.5477) \text{ so that } B = 0$$

$$\text{and hence } i(t) = 10^{-3} \cos 0.5477t \text{ A}$$

The differential equation for this circuit is

$$\text{and } \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = 0$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

1.

$$(a) \quad T = 4(7.5 - 2.1)10^{-3} = 21.6 \times 10^{-3}, \quad \omega = \frac{2\pi 10^3}{21.6} = 290.9 \text{ rad/s}$$

$$\therefore f(t) = 8.5 \sin(290.9t + \Phi) \therefore 0 = 8.5 \sin(290.9 \times 2.1 \times 10^{-3} + \Phi)$$

$$\therefore \Phi = -0.6109^{\text{rad}} + 2\pi = 5.672^{\text{rad}} \text{ or } 325.0^\circ$$

$$\therefore f(t) = 8.5 \sin(290.9t + 325.0^\circ)$$

$$(b) \quad 8.5 \sin(290.9t + 325.0^\circ) = 8.5$$

$$\cos(290.9t + 235^\circ) = 8.5 \cos(290.9t - 125^\circ)$$

$$(c) \quad 8.5 \cos(-125^\circ) \cos \omega t + 8.5 \sin 125^\circ$$

$$\sin \omega t = -4.875^+ \cos 290.9t + 6.963 \sin 290.9t$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

2.

- (a)  $-10 \cos \omega t + 4 \sin \omega t + A \cos(\omega t + \Phi)$ ,  $A > 0$ ,  $-180^\circ < \Phi \leq 180^\circ$   
 $A = \sqrt{116} = 10.770$ ,  $A \cos \Phi = -10$ ,  $A \sin \Phi = -4 \therefore \tan \Phi = 0.4$ , 3<sup>rd</sup> quad  
 $\therefore \Phi = 21.80^\circ = 201.8^\circ$ , too large  $\therefore \Phi = 201.8^\circ - 360^\circ = -158.20^\circ$
- (b)  $200 \cos(5t + 130^\circ) = F \cos 5t + G \sin 5t \therefore F = 200 \cos 130^\circ = -128.56$   
 $G = -200 \sin 130^\circ = -153.21^\circ$
- (c)  $i(t) = 5 \cos 10t - 3 \sin 10t = 0$ ,  $0 \leq t \leq 1s \therefore \frac{\sin 10t}{\cos 10t} = \frac{5}{3}$ ,  $10t = 1.0304$ ,  
 $t = 0.10304s$ ; also,  $10t = 1.0304 + \pi$ ,  $t = 0.4172s$ ;  $2\pi$ :  $0.7314s$
- (d)  $0 < t < 10ms$ ,  $10 \cos 100\pi t \geq 12 \sin 100\pi t$ ; let  $10 \cos 100\pi t = 12 \sin 100\pi t$   
 $\therefore \tan 100\pi t = \frac{10}{12}$ ,  $100\pi t = 0.6947 \therefore t = 2.211ms$ ;  $0 < t < 2.211ms$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

3.

(a)  $f(t) = -50 \cos \omega t - 30 \sin \omega t = 58.31 \cos (\omega t + 149.04^\circ)$

$$g(t) = 55 \cos \omega t - 15 \sin \omega t = 57.01 \cos (\omega t + 15.255^\circ)$$

$$\therefore \text{ampl. of } f(t) = 58.31, \text{ ampl. of } g(t) = 57.01$$

(b)  $f(t)$  leads  $g(t)$  by  $149.04^\circ - 15.255^\circ = 133.78^\circ$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

4.

$$i(t) = A \cos(\omega t - \theta), \quad L(di/dt) + Ri = V_m \cos \omega t$$

$$\therefore L[-\omega A \sin(\omega t - \theta)] + RA \cos(\omega t - \theta) = V_m \cos \omega t$$

$$\therefore -\omega LA \sin \omega t \cos \theta + \omega LA \cos \omega t \sin \theta$$

$$+ RA \cos \omega t \cos \theta + RA \sin \omega t \sin \theta =$$

$$V_m \cos \omega t \therefore \omega LA \cos \theta = RA \sin \theta \text{ and } \omega LA \sin \theta + RA \cos \theta = V_m$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\omega L}{R} \therefore \omega LA \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + RA \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = V_m$$

$$\therefore \left( \frac{\omega^2 L^2}{\sqrt{\quad}} + \frac{R^2}{\sqrt{\quad}} \right) A = V_m \therefore \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} A = V_m \therefore A = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

5.  $f = 13.56 \text{ MHz}$  so  $\omega = 2\pi f = 85.20 \text{ Mrad/s}$ .

Delivering 300 W (peak) to a  $5\text{-}\Omega$  load implies that  $\frac{V_m^2}{5} = 300$  so  $V_m = 38.73 \text{ V}$ .

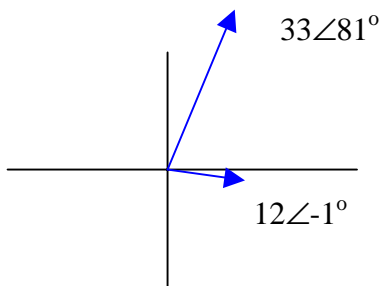
Finally,  $(85.2 \times 10^6)(21.15 \times 10^{-3}) + \phi = n\pi$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$

Since  $(85.2 \times 10^6)(21.15 \times 10^{-3}) = 1801980$ , which is  $573588^+\pi$ , we find that

$F = 573587\pi - (85.2 \times 10^6)(21.15 \times 10^{-3}) = -3.295 \text{ rad} = -188.8^\circ$ .

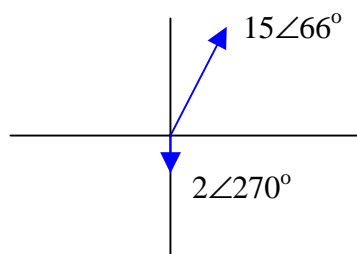
## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

6. (a)  $-33 \sin(8t - 9^\circ) \rightarrow -33 \angle (-9-90)^\circ = 33 \angle 81^\circ$   
 $12 \cos(8t - 1^\circ) \rightarrow 12 \angle -1^\circ$



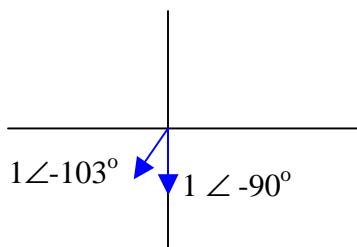
$-33 \sin(8t - 9^\circ)$  leads  $12 \cos(8t - 1^\circ)$  by  $81 - (-1) = 82^\circ$ .

- (b)  $15 \cos(1000t + 66^\circ) \rightarrow 15 \angle 66^\circ$   
 $-2 \cos(1000t + 450^\circ) \rightarrow -2 \angle 450^\circ = -2 \angle 90^\circ = 2 \angle 270^\circ$



$15 \cos(1000t + 66^\circ)$  leads  $-2 \cos(1000t + 450^\circ)$  by  $66 - -90 = 156^\circ$ .

- (c)  $\sin(t - 13^\circ) \rightarrow 1 \angle -103^\circ$   
 $\cos(t - 90^\circ) \rightarrow 1 \angle -90^\circ$



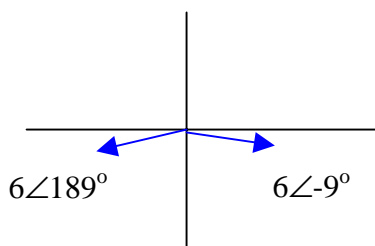
$\cos(t - 90^\circ)$  leads  $\sin(t - 13^\circ)$  by  $66 - -90 = 156^\circ$ .

- (d)  $\sin t \rightarrow 1 \angle -90^\circ$   
 $\cos(t - 90^\circ) \rightarrow 1 \angle -90^\circ$

These two waveforms are *in phase*. Neither leads the other.

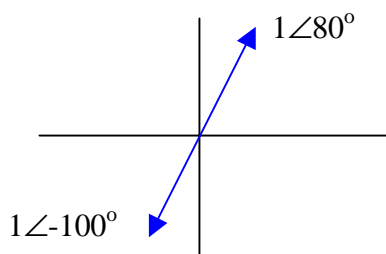
## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

7. (a)  $6 \cos(2\pi 60t - 9^\circ) \rightarrow 6 \angle -9^\circ$   
 $-6 \cos(2\pi 60t + 9^\circ) \rightarrow 6 \angle 189^\circ$



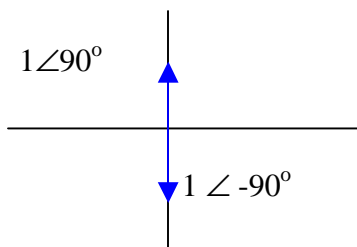
$-6 \cos(2\pi 60t + 9^\circ)$  lags  $6 \cos(2\pi 60t - 9^\circ)$  by  $360 - 9 - 189 = 162^\circ$ .

(b)  $\cos(t - 100^\circ) \rightarrow 1 \angle -100^\circ$   
 $-\cos(t - 100^\circ) \rightarrow -1 \angle -100^\circ = 1 \angle 80^\circ$



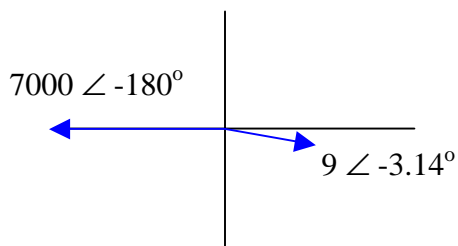
$-\cos(t - 100^\circ)$  lags  $\cos(t - 100^\circ)$  by  $180^\circ$ .

(c)  $-\sin t \rightarrow -1 \angle -90^\circ = 1 \angle 90^\circ$   
 $\sin t \rightarrow 1 \angle -90^\circ$



$-\sin t$  lags  $\sin t$  by  $180^\circ$ .

(d)  $7000 \cos(t - \pi) \rightarrow 7000 \angle -\pi = 7000 \angle -180^\circ$   
 $9 \cos(t - 3.14^\circ) \rightarrow 9 \angle -3.14^\circ$



$7000 \cos(t - \pi)$  lags  $9 \cos(t - 3.14^\circ)$  by  $180 - 3.14 = 176.9^\circ$ .



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

8.  $v(t) = V_1 \cos \omega t - V_2 \sin \omega t$  [1]

We assume this can be written as a single cosine such that

$$v(t) = V_m \cos (\omega t + \phi) = V_m \cos \omega t \cos \phi - V_m \sin \omega t \sin \phi \quad [2]$$

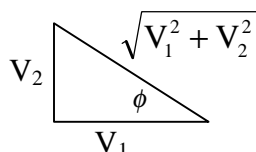
Equating terms on the right hand sides of Eqs. [1] and [2],

$$V_1 \cos \omega t - V_2 \sin \omega t = (V_m \cos \phi) \cos \omega t - (V_m \sin \phi) \sin \omega t$$

yields

$$V_1 = V_m \cos \phi \text{ and } V_2 = V_m \sin \phi$$

Dividing, we find that  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_m \sin \phi}{V_m \cos \phi} = \tan \phi$  and  $\phi = \tan^{-1}(V_2/V_1)$



Next, we see from the above sketch that we may write  $V_m = V_1 / \cos \phi$  or

$$V_m = \frac{V_1}{V_1 / \sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$$

Thus, we can write  $v(t) = V_m \cos (\omega t + \phi) = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \cos [\omega t + \tan^{-1}(V_2/V_1)]$ .

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

9. (a) In the range  $0 \leq t \leq 0.5$ ,  $v(t) = t/0.5$  V.  
Thus,  $v(0.4) = 0.4/0.5 = 0.8$  V.
- (b) Remembering to set the calculator to radians, 0.7709 V.
- (c) 0.8141 V.
- (d) 0.8046 V.

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

$$\begin{aligned}
 10. \quad (a) \quad V_{\text{rms}} &= \left[ \frac{V_m^2}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt \right]^{1/2} \\
 &= \left[ \frac{V_m^2}{T} \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi t}{T} \, dt \right]^{1/2} \\
 &= \left[ \frac{V_m^2}{2T} \int_0^T \left( 1 + \cos \frac{4\pi t}{T} \right) dt \right]^{1/2} \\
 &= \left[ \frac{V_m^2}{2T} \int_0^T dt + \frac{V_m^2}{2T} \int_0^T \cos \frac{4\pi t}{T} dt \right]^{1/2} \\
 &= \left[ \frac{V_m^2}{2T} T + \frac{V_m^2}{8\pi} \cos u \Big|_0^{4\pi} \right]^{1/2} \\
 &= \frac{V_m}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad V_m = 110\sqrt{2} = 155.6 \text{ V}, 115\sqrt{2} = 162.6 \text{ V}, 120\sqrt{2} = 169.7 \text{ V}$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

11.

$$\text{At } x-x: v_{oc} = \frac{3}{4}v_s = 15 \cos 500t \text{ V}$$

$$R_{th} = 5 + 20 \parallel 60 = 20 \Omega$$

$$\therefore V_m = 15 \text{ V}, R = 20 \Omega, \omega L = 10 \Omega$$

$$\therefore i_L = \frac{15}{\sqrt{20^2 + 10^2}} \cos \left( 500t - \tan^{-1} \frac{10}{20} \right) = 0.6708 \cos (500t - 26.57) \text{ A}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

12.

$$\text{At } x-x: R_{th} = 80 \parallel 20 = 16\Omega$$

$$v_{oc} = -0.4(15 \parallel 85) \frac{80}{85} \cos 500t$$

$$\therefore v_{oc} = 4.8 \cos 500t \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad i_L &= \frac{4.8}{\sqrt{16^2 + 10^2}} \cos \left( 500t - \tan^{-1} \frac{10}{15} \right) \\ &= 0.2544 \cos (500t - 32.01^\circ) \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad v_L &= L i_L' = 0.02 \times 0.02544 (-500) \\ &\quad \sin (500t - 32.01^\circ) = -2.544 \sin (500t - 32.01^\circ) \text{ V} \\ \therefore v_L &= 2.544 \cos (500t + 57.99^\circ) \text{ V}, i_x \\ &= 31.80 \cos (500t + 57.99^\circ) \text{ mA} \end{aligned}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

13.

$$(a) \quad i = \frac{100}{\sqrt{500^2 + 800^2}} \cos\left(10^5 t - \frac{800}{500}\right) = 0.10600 \cos(10^5 t - 57.99^\circ) \text{ A}$$

$$p_R = 0 \text{ when } i = 0 \therefore 10^5 t - \frac{57.99^\circ}{180} \pi = \frac{\pi}{2}, t = \boxed{25.83 \mu\text{s}}$$

$$(b) \quad \pm v_L = Li' = 8 \times 10^{-3} \times 0.10600 (-10^5) \sin(10^5 t - 57.99^\circ)$$

$$\therefore v_L = -84.80 \sin(10^5 t - 57.99^\circ)$$

$$\therefore p_L = v_L i = -8.989 \sin(10^5 t - 57.99^\circ)$$

$$\cos(10^5 t - 57.99^\circ) = -4.494 \sin(2 \times 10^5 t - 115.989^\circ)$$

$$\therefore p_L = 0 \text{ when } 2 \times 10^5 t - 115.989^\circ = 0^\circ, 180^\circ,$$

$$\therefore t = \boxed{10.121 \text{ or } 25.83 \mu\text{s}}$$

$$(c) \quad p_s = v_s i_L = 10.600 \cos 10^5 t \cos(10^5 t - 57.99^\circ)$$

$$\therefore p_s = 0 \text{ when } 10^5 t = \frac{\pi}{2}, t = \boxed{15.708 \mu\text{s}} \text{ and also } t = \boxed{25.83 \mu\text{s}}$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

14.  $v_s = 3 \cos 10^5 t$  V,  $i_s = 0.1 \cos 10^5 t$  A

$v_s$  in series with  $30\Omega \rightarrow 0.1 \cos 10^5 t$  A  $\parallel 30\Omega$

Add, getting  $0.2 \cos 10^5 t$  A  $\parallel 30\Omega$

change to  $6 \cos 10^5 t$  V in series with  $30\Omega$ ;  $30\Omega + 20\Omega = 50\Omega$

$$\therefore i_L = \frac{6}{\sqrt{50^2 + 10^2}} \cos \left( 10^5 t - \tan^{-1} \frac{10}{50} \right) = 0.11767 \cos (10^5 t - 11.310^\circ) \text{ A}$$

At  $t = 10\mu\text{s}$ ,  $10^5 t = 1 \therefore i_L = 0.1167 \cos (1^{\text{rad}} - 11.310^\circ) = 81.76\text{mA}$

$\therefore v_L = 0.11767 \times 10 \cos (1^{\text{rad}} - 11.30^\circ + 90^\circ) = -0.8462\text{V}$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

15.  $\therefore v_{oc} = \cos 500t \text{ V}$   
 $\therefore \cos 500t = 100(0.8i_{sc})$   
 $\therefore i_{sc} = \frac{1}{80} \cos 500t \text{ A} \therefore R_{th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = 80\Omega$   
 $\therefore i_L = \frac{1}{\sqrt{80^2 + 150^2}} \cos \left( 500t - \tan^{-1} \frac{150}{80} \right)$   
 $i_L = 5.882 \cos(500t - 61.93^\circ) \text{ mA}$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

$$\begin{aligned}
 16. \quad v_{s1} &= V_{s2} = 120 \cos 120\pi t \text{ V} \\
 \frac{120}{60} &= 2\text{A}, \quad \frac{120}{12} = 1\text{A}, \quad 2 + 1 = 3\text{A}, \quad 60 \parallel 120 = 40\Omega \\
 3 \times 40 &= 120 \text{ V}, \quad \omega L = 12\pi = 37.70\Omega \\
 \therefore i_L &= \frac{120}{\sqrt{40^2 + 37.70^2}} \cos \left( 120\pi t - \tan^{-1} \frac{37.70}{40} \right) \\
 &= 2.183 \cos (120\pi t - 43.30^\circ) \text{ A}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \therefore \omega_L &= \frac{1}{2} \times 0.1 \times 2.183^2 \cos^2 (120\pi t - 43.30^\circ) \\
 &= 0.2383 \cos^2 (120\pi t - 43.30^\circ) \text{ J}
 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \omega_{L,av} = \frac{1}{2} \times 0.2383 = 0.11916 \text{ J}$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

17.  $\uparrow v_{s1} = 120 \cos 400t \text{ V}, v_{s2} = 180 \cos 200t \text{ V}$

$$\frac{120}{60} = 2\text{A}, \frac{180}{120} = 1.5\text{A}, 60 \parallel 120 = 40\Omega$$

$$2 \times 40 = 80\text{V}, 1.5 \times 40 = 60\text{V}$$

$$i_L = \frac{80}{\sqrt{40^2 + 40^2}} \cos(400t - 45^\circ) + \frac{60}{\sqrt{40^2 + 20^2}} \cos(200t - 26.57^\circ) \text{ A}$$

$$\text{or } i_L = 1.4142 \cos(400t - 45^\circ) + 1.3416 \cos(200t - 26.57^\circ) \text{ A}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

18.

$$R_i = \infty, R_o = 0, A = \infty, \text{ ideal, } R_1 C_1 = \frac{L}{R}$$

$$i_{upper} = -\frac{V_m \cos \omega t}{R}, i_{lower} = \frac{v_{out}}{R_1}$$

$$\therefore i_{c1} = i_{upper} + i_{lower} = \frac{i}{R_1} (v_{out} - V_m \cos \omega t) = -C_1 v'_{out}$$

$$\therefore V_m \cos \omega t = v_{out} + R_1 C_1 v'_{out} = v_{out} + \frac{L}{R} v'_{out}$$

$$\text{For RL circuit, } V_m \cos \omega t = v_r + L \frac{d}{dt} \left( \frac{v_R}{R} \right)$$

$$\therefore V_m \cos \omega t = v_R + \frac{L}{R} v'_R$$

By comparison,  $v_R = v_{out}$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

19.

(a)  $V_m \cos \omega t = Ri + \frac{1}{C} \int i dt$  (ignore I.C)

$$\therefore -\omega V_m \sin \omega t = Ri' + \frac{1}{C} i$$

(b) Assume  $i = A \cos (\omega t + \Phi)$

$$\therefore -\omega V_m \sin \omega t = -R\omega A \sin (\omega t + \Phi) + \frac{A}{C} \cos (\omega t + \Phi)$$

$$\therefore -\omega V_m \sin \omega t = -R\omega A \cos \Phi \sin \omega t - R\omega A \sin \Phi \cos \omega t + \frac{A}{C} \cos \omega t \cos \Phi - \frac{A}{C} \sin \omega t \sin \Phi$$

Equating terms on the left and right side,

[1]  $R\omega A \sin \Phi = \frac{A}{C} \cos \Phi \therefore \tan \Phi = \frac{1}{\omega CR}$  so  $\Phi = \tan^{-1} (1/\omega CR)$ , and

[2]  $-\omega V_m = -R\omega A \frac{\omega CR}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}} - \frac{A}{C} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}}$

$$\therefore \omega V_m = \frac{A}{C} \left[ \frac{R^2 \omega^2 C^2 + 1}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}} \right] = \frac{A}{C} \sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2} \therefore A = \frac{\omega C V_m}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}}$$

$$\therefore i = \frac{\omega C V_m}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}} \cos \left( \omega t + \tan^{-1} \frac{1}{\omega CR} \right)$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

20. (a)  $7 \angle -90^\circ = -j 7$
- (b)  $3 + j + 7 \angle -17^\circ = 3 + j + 6.694 - j 2.047 = 9.694 - j 1.047$
- (c)  $14e^{j15^\circ} = 14 \angle 15^\circ = 14 \cos 15^\circ + j 14 \sin 15^\circ = 13.52 + j 3.263$
- (d)  $1 \angle 0^\circ = 1$
- (e)  $-2(1 + j 9) = -2 - j 18 = 18.11 \angle -96.34^\circ$
- (f)  $3 = 3 \angle 0^\circ$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

21. (a)  $3 + 15 \angle -23^\circ = 3 + 13.81 - j 5.861 = 16.81 - j 5.861$
- (b)  $(j 12)(17 \angle 180^\circ) = (12 \angle 90^\circ)(17 \angle 180^\circ) = 204 \angle 270^\circ = -j 204$
- (c)  $5 - 16(9 - j 5) / (33 \angle -9^\circ) = 5 - (164 \angle -29.05^\circ) / (33 \angle -9^\circ)$   
 $= 5 - 4.992 \angle -20.05^\circ = 5 - 4.689 - j 1.712 = 0.3109 + j 1.712$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

$$22. \quad (a) \quad 5 \angle 9^\circ - 9 \angle -17^\circ = 4.938 + j 0.7822 - 8.607 + j 2.631 = -3.669 - j 1.849 \\ = 4.108 \angle -153.3^\circ$$

$$(b) \quad (8 - j 15)(4 + j 16) - j = 272 + j 68 - j = 272 + j 67 = 280.1 \angle 13.84^\circ$$

$$(c) \quad (14 - j 9) / (2 - j 8) + 5 \angle -30^\circ = (16.64 \angle -32.74^\circ) / (8.246 \angle -75.96^\circ) + 4.330 - j 2.5 \\ = 1.471 + j 1.382 + 4.330 - j 2.5 = 5.801 - j 1.118 = 5.908 \angle -10.91^\circ$$

$$(d) \quad 17 \angle -33^\circ + 6 \angle -21^\circ + j 3 = 14.26 - j 9.259 + 5.601 - j 2.150 + j 3 \\ = 19.86 - j 8.409 = 21.57 \angle -22.95^\circ$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

23. (a)  $e^{j14^\circ} + 9 \angle 3^\circ - (8 - j6)/j^2 = 1 \angle 14^\circ + 9 \angle 3^\circ - (8 - j6)/(-1)$   
 $= 0.9703 + j0.2419 + 8.988 + j0.4710 + 8 - j6 = 17.96 - j5.287 = 18.72 \angle -16.40^\circ$

(b)  $(5 \angle 30^\circ)/(2 \angle -15^\circ) + 2e^{j5^\circ}/(2 - j2)$   
 $= 2.5 \angle 45^\circ + (2 \angle 5^\circ)/(2.828 \angle -45^\circ) = 1.768 + j1.768 + 0.7072 \angle 50^\circ$   
 $= 1.768 + j1.768 + 0.4546 + j0.5418$   
 $= 2.224 + j2.310 = 3.207 \angle 46.09^\circ$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

24.

(a)  $5\angle -110^\circ = -1.7101 - j4.698$

(b)  $6e^{j160^\circ} = -5.638 + j2.052$

(c)  $(3 + j6)(2\angle 50^\circ) = -5.336 + j12.310$

(d)  $-100 - j40 = 107.70\angle -158.20^\circ$

(e)  $2\angle 50^\circ + 3\angle -120^\circ = 1.0873\angle -101.37^\circ$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

25.

$$(a) \quad 40\angle -50^\circ - 18\angle 25^\circ = 39.39\angle -76.20^\circ$$

$$(b) \quad 3 + \frac{2}{j} + \frac{2 - j5}{1 + j2} = 4.050\angle -69.78^\circ$$

$$(c) \quad (2.1\angle 25^\circ)^3 = 9.261\angle 75^\circ = 2.397 + j8.945^+$$

$$(d) \quad 0.7e^{j0.3} = 0.7\angle 0.3^{\text{rad}} = 0.6687 + j0.2069$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

26.

$$i_c = 20e^{j(40t+30^\circ)} \text{ A} \therefore v_c = 100 \int 20e^{j(40t+30^\circ)} dt$$

$$v_c = -j50e^{j(40t+30^\circ)}, i_R = -j10e^{j(40t+30^\circ)} \text{ A}$$

$$\therefore i_L = (20 - j10)e^{j(40t+30^\circ)}, v_L = j40 \times 0.08(20 - j10)e^{j(40t+30^\circ)}$$

$$\therefore v_L = (32 + j64)e^{j(40t+30^\circ)} \text{ V} \therefore v_s = (32 + j64 - j50)e^{j(40t+30^\circ)}$$

$$\therefore v_s = 34.93e^{j(40t-53.63^\circ)} \text{ V}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

27.

$$i_L = 20e^{j(10t+25^\circ)} \text{ A}$$

$$v_L = 0.2 \frac{d}{dt} [20e^{j(10t+25^\circ)}] = j40e^{j(10t+25^\circ)}$$

$$v_R = 80e^{j(10t+25^\circ)}$$

$$v_s = (80 + j40)e^{j(10t+25^\circ)}, i_c = 0.08(80 + j40)j10e^{j(10t+25^\circ)}$$

$$\therefore i_c = (-32 + j64)e^{j(10t+25^\circ)} \therefore i_s = (-12 + j64)e^{j(10t+25^\circ)}$$

$$\therefore i_s = 65.12e^{j(10t+125.62^\circ)} \text{ A}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

28.  $80 \cos(500t - 20^\circ) \text{ V} \rightarrow 5 \cos(500t + 12^\circ) \text{ A}$

(a)  $v_s = 40 \cos(500t + 10^\circ) \therefore i_{out} = 2.5 \cos(500t + 42^\circ) \text{ A}$

(b)  $v_s = 40 \sin(500t + 10^\circ) = 40 \cos(500t - 80^\circ)$   
 $\therefore i_{out} = 2.5 \cos(500t - 48^\circ) \text{ A}$

(c)  $v_s = 40e^{j(500t+10^\circ)} = 40 \cos(500t + 10^\circ)$   
 $+ j40 \sin(500t + 10^\circ) \therefore i_{out} = 2.5e^{j(500t+42^\circ)} \text{ A}$

(d)  $v_s = (50 + j20)e^{j500t} = 53.85^+ e^{j21.80^\circ + j500t}$   
 $\therefore i_{out} = 3.366e^{j(500t+53.80^\circ)} \text{ A}$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

29.

(a)  $12 \sin(400t + 110^\circ) \text{ A} \rightarrow 12 \angle 20^\circ \text{ A}$

(b)  $-7 \sin 800t - 3 \cos 800t \rightarrow j7 - 3$   
 $= -3 + j7 = 7.616 \angle 113.20^\circ \text{ A}$

(c)  $4 \cos(200t - 30^\circ) - 5 \cos(200t + 20^\circ)$   
 $\rightarrow 4 \angle -30^\circ - 5 \angle 20^\circ = 3.910 \angle -108.40^\circ \text{ A}$

(d)  $\omega = 600, t = 5 \text{ ms} : 70 \angle 30^\circ \text{ V}$   
 $\rightarrow 70 \cos(600 \times 5 \times 10^{-3} \text{ rad} + 30^\circ) = -64.95^+ \text{ V}$

(e)  $\omega = 600, t = 5 \text{ ms} : 60 + j40 \text{ V} = 72.11 \angle 146.3^\circ$   
 $\rightarrow 72.11 \cos(3^{\text{rad}} + 146.31^\circ) = 53.75^+ \text{ V}$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

30.  $\omega = 4000$ ,  $t = 1\text{ms}$

(a)  $I_x = 5\angle -80^\circ \text{ A}$

$$\therefore i_x = 4 \cos(4^{\text{rad}} - 80^\circ) = -4.294 \text{ A}$$

(b)  $I_x = -4 + j1.5 = 4.272\angle 159.44^\circ \text{ A}$

$$\therefore i_x = 4.272 \cos(4^{\text{rad}} + 159.44^\circ) = 3.750^- \text{ A}$$

(c)  $v_x(t) = 50 \sin(250t - 40^\circ)$

$$= 50 \cos(250t - 130^\circ) \rightarrow V_x = 50\angle -103^\circ \text{ V}$$

(d)  $v_x = 20 \cos 108t - 30 \sin 108t$

$$\rightarrow 20 + j30 = 36.06\angle 56.31^\circ \text{ V}$$

(e)  $v_x = 33 \cos(80t - 50^\circ) + 41 \cos(80t - 75^\circ)!$

$$\rightarrow 33\angle -50^\circ + 41\angle -75^\circ = 72.27\angle -63.87^\circ \text{ V}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

31.  $V_1 = 10\angle 90^\circ \text{ mV}$ ,  $\omega = 500$ ;  $V_2 = 8\angle 90^\circ \text{ mV}$ ,  
 $\omega = 1200$ , M by  $-5$ ,  $t = 0.5 \text{ ms}$

$$\begin{aligned} v_{out} &= (-5) [10 \cos(500 \times 0.5 \times 10^{-3} \text{ rad} + 90^\circ) \\ &\quad + 8 \cos(1.2 \times 0.5 + 90^\circ)] \\ &= 50 \sin 0.25^{\text{rad}} + 40 \sin 0.6^{\text{rad}} = \boxed{34.96 \text{ mV}} \end{aligned}$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

32. Begin with the inductor:  
 $(2.5 \angle 40^\circ)(j500)(20 \times 10^{-3}) = 25 \angle 130^\circ$  V across the inductor and the  $25\text{-}\Omega$  resistor.  
The current through the  $25\text{-}\Omega$  resistor is then  $(25 \angle 130^\circ) / 25 = 1 \angle 130^\circ$  A.

The current through the unknown element is therefore  $25 \angle 130^\circ + 1 \angle 130^\circ = 26 \angle 130^\circ$ ; this is the same current through the  $10\text{-}\Omega$  resistor as well. Thus, KVL provides that

$$\mathbf{V}_s = 10(26 \angle 130^\circ) + (25 \angle -30^\circ) + (25 \angle 130^\circ) = 261.6 \angle 128.1^\circ$$

and so  $v_s(t) = 261.6 \cos(500t + 128.1^\circ)$  V.

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

33.  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ .

- (a) The inductor voltage  $= 48 \angle 30^\circ = j\omega L \mathbf{I}_L = j(5000)(1.2 \times 10^{-3}) \mathbf{I}_L$   
So  $\mathbf{I}_L = 8 \angle -60^\circ$  and the total current flowing through the capacitor is  
 $10 \angle 0^\circ - \mathbf{I}_L = 9.165 \angle 49.11^\circ \text{ A}$  and the voltage  $\mathbf{V}_1$  across the capacitor is

$$\mathbf{V}_1 = (1/j\omega C)(9.165 \angle 49.11^\circ) = -j2 (9.165 \angle 49.11^\circ) = 18.33 \angle -40.89^\circ \text{ V}.$$

Thus,  $v_1(t) = 18.33 \cos(5000t - 40.89^\circ) \text{ V}$ .

(b)  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + 5(9.165 \angle 49.11^\circ) + 60 \angle 120^\circ = 75.88 \angle 79.48^\circ \text{ V}$

$\therefore v_2(t) = 75.88 \cos(5000t + 79.48^\circ) \text{ V}$

(c)  $\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_2 - 48 \angle 30^\circ = 75.88 \angle 79.48^\circ - 48 \angle 30^\circ = 57.70 \angle 118.7^\circ \text{ V}$

$\therefore v_3(t) = 57.70 \cos(5000t + 118.70^\circ) \text{ V}$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

34.  $\mathbf{V}_R = 1\angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $\mathbf{V}_{\text{series}} = (1 + j\omega - j/\omega)(1\angle 0^\circ)$

$$V_R = 1 \quad \text{and} \quad V_{\text{series}} = \sqrt{1 + (\omega - 1/\omega)^2}$$

We desire the frequency  $\omega$  at which  $V_{\text{series}} = 2V_R$  or  $V_{\text{series}} = 2$

Thus, we need to solve the equation  $1 + (\omega - 1/\omega)^2 = 4$

$$\text{or } \omega^2 - \sqrt{3}\omega - 1 = 0$$

Solving, we find that  $\omega = 2.189 \text{ rad/s}$ .



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

35. With an operating frequency of  $\omega = 400$  rad/s, the impedance of the 10-mH inductor is  $j\omega L = j4\ \Omega$ , and the impedance of the 1-mF capacitor is  $-j/\omega C = -j2.5\ \Omega$ .
- $$\therefore V_c = 2\angle 40^\circ (-j2.5) = 5\angle -50^\circ\text{ V}$$
- $$\therefore I_L = 3 - 2\angle 40^\circ = 1.9513\angle -41.211^\circ\text{ A}$$
- $$\therefore V_L = 4 \times 1.9513\angle 90^\circ - 4.211^\circ = 7.805^+\angle 48.79^\circ\text{ V}$$
- $$\therefore V_x = V_L - V_c = 7.805^+\angle 48.79^\circ - 5\angle -50^\circ$$
- $$\therefore V_x = 9.892\angle 78.76^\circ\text{ V}, \quad v_x = 9.892 \cos(400t + 78.76^\circ)\text{ V}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

36.

$$\text{If } I_{s1} = 2\angle 20^\circ \text{ A, } I_{s2} = 3\angle -30^\circ \text{ A} \rightarrow V_{out} = 80\angle 10^\circ \text{ V}$$

$$I_{s1} = I_{s2} = 4\angle 40^\circ \text{ A} \rightarrow V_{out} = 90 - j30 \text{ V}$$

$$\text{Now let } I_{s1} = 2.5\angle -60^\circ \text{ A and } I_{s2} = 2.5\angle 60^\circ \text{ A}$$

$$\text{Let } V_{out} = AI_{s1} + BI_{s2} \therefore 80\angle 10^\circ = A(2\angle 20^\circ) + B(3\angle -30^\circ)$$

$$\text{and } 90 - j30 = (A + B)(4\angle 40^\circ) \therefore A + B = \frac{90 - j30}{4\angle 40^\circ} = 12.45^+ - j20.21$$

$$\therefore \frac{80\angle 10^\circ}{2\angle 20^\circ} = A + B \frac{3\angle -30^\circ}{2\angle 20^\circ} \therefore A = 40\angle -10^\circ - B(1.5\angle -50^\circ)$$

$$\therefore 12.415^+ - j20.21 - B = 40\angle -10^\circ - B(1.5\angle -50^\circ)$$

$$\therefore 12.415^+ - j20.21 - 40\angle -10^\circ = B(1 - 1.5\angle -50^\circ)$$

$$= B(1.1496\angle -88.21^\circ)$$

$$\therefore B = \frac{30.06\angle -153.82^\circ}{1.1496\angle -88.21^\circ} = 10.800 - j23.81$$

$$= 26.15\angle -65.61^\circ$$

$$\therefore A = 12.415^+ - j20.21 - 10.800 + j23.81$$

$$= 3.952^+ \angle 65.87^\circ$$

$$\therefore V_{out} = (3.952\angle 65.87^\circ)(2.5\angle -60^\circ)$$

$$+ (26.15\angle -65.61^\circ)(2.5\angle 60^\circ) = \boxed{75.08\angle -4.106^\circ \text{ V}}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

37.

(a)  $\omega = 800: 2\mu\text{F} \rightarrow -j625, 0.6\text{H} \rightarrow j480$

$$\begin{aligned}\therefore Z_{in} &= \frac{300(-j625)}{300 - j625} + \frac{600(j480)}{600 + j480} \\ &= 478.0 + j175.65\Omega\end{aligned}$$

(b)  $\omega = 1600: Z_{in} = \frac{300(-j312.5)}{300 - j312.5}$

$$+ \frac{600(j960)}{600 + j960} = 587.6 + j119.79\Omega$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

38.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad (10 + j10) \parallel (-j5) &= \frac{50 - j50}{10 + j5} = \frac{10 - j10}{2 + j1} \frac{2 - j1}{2 - j1} \\ &= 2 - j6 \Omega \therefore Z_{in} = 22 - j6 \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \text{SC}_{a,b}: 20 \parallel 10 &= 6.667, (6.667 - j5) \parallel j10 \\ &= \frac{50 + j66.67}{6.667 + j5} = \frac{150 + j200}{20 + j15} = \frac{30 + j40}{4 + j3} \times \frac{4 - j3}{4 - j3} \\ &= Z_{in} \therefore Z_{in} (1.2 + j1.6) (4 - j3) = 9.6 + j2.8 \Omega \end{aligned}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

39.

$$\omega = 800: 2\mu\text{F} \rightarrow -j625, 0.6\text{H} \rightarrow j480$$

$$\therefore Z_{in} = \frac{300(-j625)}{300 - j625} + \frac{600(j480)}{600 + j480}$$

$$= 478.0 + j175.65\Omega$$

$$\therefore I = \frac{120}{478.0 + j175.65} \times \frac{-j625}{300 - j625}$$

$$\text{or } I = 0.2124 \angle -45.82^\circ \text{ A}$$

Thus,  $i(t) = 212.4 \cos(800t - 45.82^\circ) \text{ mA}$ .

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

40.

(a)  $3\Omega 2\text{mH}: V = (3\angle -20^\circ) (3 + j4) = 15,000\angle 33.13^\circ \text{ V}$

(b)  $3\Omega 125\mu\text{F}: V = (3\angle -20^\circ) (3 - j4) = 15,000\angle -73.3^\circ \text{ V}$

(c)  $3\Omega 2\text{mH } 125\mu\text{F}: V = (3\angle -20^\circ) 3 = 9,000\angle -20^\circ \text{ V}$

(d) same:  $\omega = 4000 \therefore V = (3\angle -20^\circ) (3 + j8 - j2)$   
 $\therefore V = (3\angle -20^\circ) (3 + j6) = 20.12\angle 43.43^\circ \text{ V}$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

41.

(a)  $C = 20\mu\text{F}$ ,  $\omega = 100$

$$Z_{in} = \frac{1}{\frac{1}{200} + \frac{1}{j1000} + j1000 \times 20 \times 10^{-6}} = \frac{1}{0.005 - j0.01 + j0.002}$$

$$\therefore Z_{in} = \frac{1}{0.005 + j0.001} = \boxed{196.12 \angle -11.31^\circ \Omega}$$

(b)  $\omega = 100 \therefore Z_{in} = \frac{1}{0.005 - j0.001 + j1000C} = 125 \angle = \frac{1}{0.008 \angle}$

$$\therefore 0.005^2 + (100C - 0.001)^2 = 0.008^2 \therefore 100C - 0.001 = \pm 6.245 \times 10^{-3}, C = \boxed{72.45 \mu\text{F}}$$

(c)  $C = 20\mu\text{F} \therefore Z_{in} = \frac{1}{0.0005 - j0.1/\omega + j2 \times 10^{-5}\omega} = 100 \angle = \frac{1}{0.01 \angle}$

$$\therefore 0.005^2 + \left(2 \times 10^{-5}\omega - \frac{0.1}{\omega}\right)^2 = 0.0001, \left(2 \times 10^{-5} - \frac{0.1}{\omega}\right)^2 = 7.5 \times 10^{-5}$$

$$\therefore 2 \times 10^{-5} - \frac{0.01}{\omega} \mp 866.0 \times 10^{-5} = 0 \therefore 2 \times 10^{-5}\omega^2 \mp 866.0 \times 10^{-5}\omega - 0.1 = 0$$

$$\text{use } - \text{ sign: } \omega = \frac{866.0 \times 10^{-5} \pm \sqrt{7.5 \times 10^{-5} + 8 \times 10^{-6}}}{4 \times 10^{-5}} = 444.3 \text{ and } < 0$$

$$\text{use } + \text{ sign: } \omega = \frac{-866.0 \times 10^{-5} \pm \sqrt{7.5 \times 10^{-5} + 8 \times 10^{-6}}}{4 \times 10^{-5}} = 11.254 \text{ and } < 0$$

$$\therefore \omega = \boxed{11.254} \text{ and } \boxed{444.3 \text{ rad/s}}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

42.

$$(a) \quad \left| \frac{1}{\frac{1}{jx} + \frac{1}{30}} \right| = 25 = \frac{1}{0.04} \therefore \frac{1}{900} + \frac{1}{x^2} = 0.0016$$

$$\therefore X = 45.23 \Omega = 0.002W, \omega = 2261 \text{ rad/s}$$

$$(b) \quad \angle Y_{in} = -25^\circ = \angle \text{ of } \left( \frac{1}{30} - j \frac{1}{x} \right) = \tan^{-1} \frac{-30}{x}$$

$$\therefore x = 64.34 = 0.02\omega, \omega = 3217 \text{ rad/s}$$

$$(c) \quad Z_{in} = \frac{30(j0.02\omega)}{30 + j0.02\omega} \times \frac{30 - j0.092\omega}{30 - j0.02\omega} = \frac{0.012\omega^2 + j18\omega}{900 + 0.0004\omega^2}$$

$$\therefore 0.012\omega^2 = 25 (900 + 0.0004\omega^2)$$

$$\therefore 0.012\omega^2 = 0.01\omega^2 + 22,500, \omega = 3354 \text{ rad/s}$$

$$(d) \quad 18\omega = 10(900 + 0.0004\omega^2), 0.004\omega^2 - 18\omega + 9000 = 0,$$

$$\omega^2 - 4500\omega + 2.25 \times 10^6 = 0$$

$$\omega = \frac{4500 \pm \sqrt{20.25 \times 10^6 - 9 \times 10^6}}{2} = \frac{4500 \pm 3354}{2} = 572.9, 3927 \text{ rad/s}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

43. With an operating frequency of  $\omega = 400$  rad/s, the impedance of the 10-mH inductor is  $j\omega L = j4 \Omega$ , and the impedance of the 1-mF capacitor is  $-j/\omega C = -j2.5 \Omega$ .

$$\therefore V_c = 2\angle 40^\circ (-j2.5) = 5\angle -50^\circ \text{ A}$$

$$\therefore I_L = 3 - 2\angle 40^\circ = 1.9513\angle -41.211^\circ \text{ A}$$

$$I_L = \frac{2\angle 40^\circ (R_2 - j2.5)}{R_1 + j4}$$

$$\therefore R_1 + j4 = \frac{2\angle 40^\circ (R_2 - j2.5)}{1.9513\angle -41.21^\circ}$$

$$= 1.0250\angle 81.21^\circ (R_2 - j2.5)$$

$$= R_2 (1.0250\angle 81.21^\circ) + 2.562\angle -8.789^\circ$$

$$= 0.15662R_2 + j1.0130R_2 + 2.532 - j0.3915$$

$$\therefore R_1 = 2.532 + 0.15662R_2, \quad 4 = 1.0130R_2 - 0.395$$

$$\therefore R_2 = 4.335^+ \Omega, \quad R_1 = 3.211\Omega$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

44.  $\omega = 1200 \text{ rad/s.}$

$$(a) \quad Z_{in} = \frac{-j \times (200 + j80)}{200 + j(80 - x)} = \frac{(80x - j200x)[200 + j(x - 80)]}{40,000 + 6400 - 160x + x^2}$$

$$X_{in} = 0 \therefore -40,000x + 80x^2 - 6400x = 0$$

$$\therefore 46,400 = 80x, \quad x = 580 \Omega = \frac{1}{1200C} \therefore C = 14.368 \mu\text{F}$$

$$(b) \quad Z_{in} = \frac{80X - j200X}{200 + j(80 - X)} |Z_{in}| = 100$$

$$\therefore \frac{6400X^2 + 40,000X^2}{40,000 + 6400 - 160X + X^2} = 10,000$$

$$\therefore 0.64X^2 + 4X^2 = X^2 - 160X + 46,400$$

$$\therefore 3.64X^2 + 160X - 46,400 = 0,$$

$$X = \frac{-160 \pm \sqrt{25,600 + 675,600}}{7.28} = \frac{-160 \pm 837.4}{7.28}$$

$$\therefore X = 93.05^- (> 0) = \frac{1}{1200C} \therefore C = 8.956 \mu\text{F}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

45. At  $\omega = 4$  rad/s, the  $1/8$ -F capacitor has an impedance of  $-j/\omega C = -j2 \Omega$ , and the 4-H inductor has an impedance of  $j\omega L = j16 \Omega$ .

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \text{abOC: } Z_{in} &= \frac{(8 + j16)(2 - j2)}{10 + j14} = \frac{16(3 + j1)}{10 + j14} \\ &= \boxed{2.378 - j1.7297 \Omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \text{abSC: } Z_{in} &= (8 \parallel -j2) + (2 \parallel j16) = \frac{-j16}{8 - j2} + \frac{j32}{2 + j16} \\ \therefore Z_{in} &= \boxed{2.440 - j1.6362 \Omega} \end{aligned}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

46.  $f = 1 \text{ MHz}$ ,  $\omega = 2\pi f = 6.283 \text{ Mrad/s}$
- |                   |                                |                  |
|-------------------|--------------------------------|------------------|
| $2 \mu\text{F}$   | $\rightarrow -j0.07958 \Omega$ | $= \mathbf{Z}_1$ |
| $3.2 \mu\text{H}$ | $\rightarrow j20.11 \Omega$    | $= \mathbf{Z}_2$ |
| $1 \mu\text{F}$   | $\rightarrow -j0.1592 \Omega$  | $= \mathbf{Z}_3$ |
| $1 \mu\text{H}$   | $\rightarrow j6.283 \Omega$    | $= \mathbf{Z}_4$ |
| $20 \mu\text{H}$  | $\rightarrow j125.7 \Omega$    | $= \mathbf{Z}_5$ |
| $200 \text{ pF}$  | $\rightarrow -j795.8 \Omega$   | $= \mathbf{Z}_6$ |

The three impedances at the upper right,  $\mathbf{Z}_3$ ,  $700 \text{ k}\Omega$ , and  $\mathbf{Z}_6$  reduce to  $-j0.01592 \Omega$

Then we form  $\mathbf{Z}_2$  in series with  $\mathbf{Z}_{\text{eq}}$ :  $\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_{\text{eq}} = j20.09 \Omega$ .

Next we see  $10^6 \parallel (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_{\text{eq}}) = j20.09 \Omega$ .

Finally,  $\mathbf{Z}_{\text{in}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_4 + j20.09 = j26.29 \Omega$ .



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

47.

$2\text{H} \rightarrow j2, 1\text{F} \rightarrow -j1$  Let  $I_{\epsilon} = 1\angle 0^{\circ}\text{A}$

$$\therefore V_L = j2\text{V} \therefore I_c = I_{in} + 0.5V_L = 1 + j1$$

$$\therefore V_{in} = j2 + (1 + j1)(-j1) = 1 + j1$$

$$\therefore V_{in} = \frac{1\angle 0^{\circ}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j1} \frac{1 - j1}{1 - j1} = 0.5 - j0.55$$

$$\text{Now } 0.5\text{S} \rightarrow \boxed{2\Omega_s} - j0.5\text{S} = \frac{1}{j2} \rightarrow \boxed{2\text{H}}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

48.

(a)  $\omega = 500, Z_{inRLC} = 5 + j10 - j1 = 5 + j9$

$$\therefore Y_{inRLC} = \frac{1}{5 + j9} = \frac{5 - j9}{106} \therefore Y_c = \frac{9}{106} = 500C$$

$$\therefore C = \frac{9}{53,000} = 169.81 \mu\text{F}$$

(b)  $R_{in,ab} = \frac{106}{5} = 21.2 \Omega$

(c)  $\omega = 1000 \therefore Y_{in,ab} = j\frac{9}{53} + \frac{1}{5 + j20 - j0.5}$   
 $= 0.012338 + j0.12169S$  or  $0.12232 \angle 84.21^\circ S$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

49.

$$(a) \quad R_{in} = 550 \Omega : Z_{in} = 500 + \frac{j0.1\omega}{100 + j0.001\omega}$$

$$\therefore Z_{in} = \frac{50,000 + j0.6\omega}{100 + j0.001\omega} \times \frac{100 - j0.001\omega}{100 - j0.001\omega}$$

$$\therefore Z_{in} = \frac{5 \times 10^6 + 0.0006\omega^2 + j(60\omega - 50\omega)}{10^4 + 10^{-6}\omega^2}$$

$$\therefore R_{in} = \frac{5 \times 10^6 + 0.006\omega^2}{10^4 + 10^{-6}\omega^2} = 550 \therefore 5.5 \times 10^6$$

$$+ 5.5 \times 10^{-4} \omega^2 = 5 \times 10^6 \times 10^{-4} \omega^2$$

$$\therefore 0.5 \times 10^{-4} \omega^2 = 0.5 \times 10^6, \omega^2 = 10^{10}, \omega = 10^5 \text{ rad/s}$$

$$(b) \quad X_{in} = 50 \Omega = \frac{10\omega}{10^4 + 10^{-6}\omega^2} = 0.5 \times 10^6 + 0.5 \times 10^{-4} \omega^2 - 10\omega$$

$$= 0, \omega^2 - 2 \times 10^5 \omega + 10^{10} = 0$$

$$\therefore \omega = \frac{2 \times 10^5 \pm \sqrt{4 \times 10^{10} - 4 \times 10^{10}}}{2} = 10^5 \therefore \omega = 10^5 \text{ rad/s}$$

$$(c) \quad G_{in} = 1.8 \times 10^{-3} : Y_{in} = \frac{100 + j0.001\omega}{50,000 + j0.6\omega} \times \frac{50,000 - j0.6\omega}{50,000 - j0.6\omega}$$

$$= \frac{5 \times 10^6 + 6 \times 10^{-4} \omega^2 + j(50\omega - 6\omega)}{25 \times 10^8 + 0.36\omega^2}$$

$$\therefore 1.8 \times 10^3 = \frac{5 \times 10^6 + 6 \times 10^{-4} \omega^2}{25 \times 10^8 + 0.36\omega^2}$$

$$\therefore 5 \times 10^6 + 6 \times 10^{-4} \omega^2 = 4.5 \times 10^6 + 648 \times 10^{-6} \omega^2$$

$$\therefore 0.5 \times 10^6 = 48 \times 10^{-6} \omega^2 \therefore \omega = 102.06 \text{ Krad/s}$$

$$(d) \quad B_{in} = 1.5 \times 10^{-4} = \frac{-10\omega}{25 \times 10^8 + 0.36\omega^2}$$

$$\therefore 10\omega = 37.5 \times 10^4 + 54 \times 10^{-6} \omega^2$$

$$\therefore 54 \times 10^{-6} \omega^2 - 10\omega + 37.5 \times 10^4 = 0,$$

$$\omega = 10 \pm \frac{\sqrt{100 - 81}}{108 \times 10^{-6}} = 52.23 \text{ and } 133.95 \text{ krad/s}$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

50.

$$(a) \quad V_1 = \frac{I_1}{Y_1} = \frac{0.1 \angle 30^\circ}{(3 + j4)10^{-3}} = 20 \angle -23.13^\circ \therefore |V_1| = \boxed{20 \text{ V}}$$

$$(b) \quad V_2 = V_1 \therefore |V_2| = \boxed{20 \text{ V}}$$

$$(c) \quad I_2 = Y_2 V_2 = (5 + j2)10^{-3} \times 20 \angle -23.13^\circ = 0.10770 \angle -1.3286^\circ \text{ A} \\ \therefore I_3 = I_1 + I_2 = 0.1 \angle 30^\circ + 0.10770 \angle -1.3286^\circ = 0.2 \angle 13.740^\circ \text{ A} \\ \therefore V_3 = \frac{I_3}{Y_3} = \frac{0.2 \angle 13.740^\circ}{(2 - j4)10^{-3}} = 44.72 \angle 77.18^\circ \text{ V} \therefore |V_3| = \boxed{44.72 \text{ V}}$$

$$(d) \quad V_{in} = V_1 + V_3 = 20 \angle -23.13^\circ + 44.72 \angle 77.18^\circ = 45.60 \angle 51.62^\circ \\ \therefore |V_{in}| = \boxed{45.60 \text{ V}}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

51.

(a)  $50\mu\text{F} \rightarrow -j20\Omega \therefore Y_{in} = 0.1 + j0.05$

$$Y_{in} = \frac{1}{R_1 - j\frac{1000}{C}} \therefore R_1 - j\frac{1000}{C} = \frac{1}{0.1 + j0.05} = 8 - j4$$

$$\therefore R_1 = 8\Omega \text{ and } C_1 = \frac{1}{4\omega} = \boxed{250\mu\text{F}}$$

(b)  $\omega = 2000 : 50\mu\text{F} \rightarrow -j10\Omega \therefore Y_{in} = 0.1 + j0.1 = \frac{1}{R_1 - j\frac{500}{C_1}}$

$$\therefore R_1 - j\frac{500}{C_1} = 5 - j5 \therefore R_1 = 5\Omega, C_1 = \boxed{100\mu\text{F}}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

52.

$$(a) \quad Z_{in} = 1 + \frac{10}{j\omega} = \frac{10 + j\omega}{j\omega}$$

$$\therefore Y_{in} = \frac{j\omega}{10 + j\omega} \times \frac{10 - j\omega}{10 - j\omega}$$

$$\therefore Y_{in} = \frac{\omega^2 + j10\omega}{\omega^2 + 100}$$

$$G_{in} = \frac{\omega^2}{\omega^2 + 100}, \quad B_{in} = \frac{10\omega}{\omega^2 + 100}$$

| $\omega$ | $G_{in}$ | $B_{in}$ |
|----------|----------|----------|
| 0        | 0        | 0        |
| 1        | 0.0099   | 0.0099   |
| 2        | 0.0385   | 0.1923   |
| 5        | 0.2      | 0.4      |
| 10       | 0.5      | 0.5      |
| 20       | 0.8      | 0.4      |
| $\infty$ | 1        | 0        |



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

53.

$$-j5 = \frac{v_1}{3} + \frac{V_1 - V_2}{-j5} + \frac{v_1 - V_2}{j3}, \quad -j75 = 5V_1 + j3V_1 - j3V_2 - j5V_1 + j5V_2$$

$$\therefore (5 - j2)V_1 + j2V_2 = -j75 \quad (1)$$

$$\frac{v_2 - V_1}{j3} + \frac{V_2 - V_1}{-j5} + \frac{V_2}{6} = 10$$

$$-j10V_2 + j10V_1 + j6V_2 - j6V_1 + 5V_2 = 300 \therefore j4V_1 + (5 - j4)V_2 = 300 \quad (2)$$

$$\therefore V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 - j2 & -j75 \\ j4 & 300 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 - j2 & j2 \\ j4 & 5 - j4 \end{vmatrix}} = \frac{1500 - j600 - 300}{17 - j30 + 8} = \frac{1200 - j600}{25 - j30} = 34.36 \angle 23.63^\circ \text{ V}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

54.

$$j3I_B - j5(I_B - I_D) = 0 \therefore -2I_B + j5I_D = 0$$

$$3(I_D + j5) - j5(I_D - I_B) + 6(I_D + 10) = 0$$

$$\therefore j5I_B + (9 - j5)I_D = -60 - j15$$

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} 0 & j5 \\ -60 - j15 & 9 - j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -j2 & j5 \\ j5 & 9 - j5 \end{vmatrix}} = \frac{-75 + j300}{15 - j18}$$

$$= 13.198 \angle 154.23^\circ \text{ A}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

55.

$$v_{s1} = 20 \cos 1000t \text{ V}, v_{s2} = 20 \sin 1000t \text{ V}$$

$$\therefore V_{s1} = 20 \angle 0^\circ \text{ V}, V_{s2} = -j20 \text{ V}$$

$$0.01 \text{ H} \rightarrow j10 \Omega, 0.1 \text{ mF} \rightarrow -j10 \Omega$$

$$\therefore \frac{v_x - 20}{j10} + \frac{v_x}{25} + \frac{v_x + j20}{-j10} = 0, 0.04v_x + j2 - 2 = 0,$$

$$V_x = 25(2 - j2) = 70.71 \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\therefore v_x(t) = 70.71 \cos(1000t - 45^\circ) \text{ V}$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

56.

(a) Assume  $V_3 = 1V \therefore V_2 = 1 - j0.5V$ ,  $I_2 = 1 - j0.5mA$   
 $\therefore V_1 = 1 - j0.5 + (2 - j0.5)(-j0.5) = 0.75 - j1.5V$   
 $\therefore I_1 = 0.75 - j1.5mA$ ,  $\therefore I_{in} = 0.75 - j1.5 + 2 - j0.5 = 2.75 - j2mA$   
 $\therefore V_{in} = 0.75 - j1.5 - j1.5 + (2.75 - j2)(-j0.5)$   
 $= -0.25 - j2.875V \therefore V_3 = \frac{100}{-j0.25 - j2.875} = 34.65^\circ \angle 94.97^\circ V$

(b)  $-j0.5 \rightarrow -jX$  Assume  $V_3 = 1V \therefore I_3 = 1A$ ,  
 $V_2 = 1 - jX$ ,  $I_2 = 1 - jX$ ,  $\rightarrow I_{12} = 2 - jX$   
 $\therefore V_1 = 1 - jX + (2 - jX)(-jX) = 1 - X^2 - j3X$ ,  $I_1 = 1 - X^2 - j3X$ ,  $I_{in} = 3 - X^2 - j4X$   
 $\therefore V_{in} = 1 - X^2 - j3X - 4X^2 + jX^3 - j3X = 1 - 5X^2 + j(X^3 - 6X) \therefore X^3 - 6X = 0$   
 $\therefore X^2 = 6$ ,  $X = \sqrt{6}$ ,  $Z_c = -j2.449K\Omega$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

57. Define three clockwise mesh currents  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  with  $i_1$  in the left mesh,  $i_2$  in the top right mesh, and  $i_3$  in the bottom right mesh.

$$\text{Mesh 1: } 10\angle 0^\circ + (1 + 1 - j0.25)\mathbf{I}_1 - (-j0.25)\mathbf{I}_2 = 0$$

$$\text{Mesh 2: } -\mathbf{I}_1 + (1 + 1 + j4)\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 = 0$$

$$\text{Mesh 3: } (-j0.25 + 1 + 1)\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2 - (-j0.25\mathbf{I}_1) = 0$$

$$\mathbf{I}_x = \frac{\begin{vmatrix} 2 - j0.25 & -1 & 10 \\ -1 & 2 + j4 & 0 \\ j0.25 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 - j0.25 & -1 & j0.25 \\ -1 & 2 + j4 & -1 \\ j0.25 & -1 & 2 - j0.25 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \mathbf{I}_x = \frac{10(1 + 1 - j0.5)}{j0.25(2 - j0.5) + (-2 + j0.25 + j0.25) + (2 - j0.25)(4 + 1 - j0.5 + j8 - 1)}$$

$$= \frac{20 - j5}{8 + j15} \therefore \mathbf{I}_x = 1.217\angle -75.96^\circ \text{ A}, \quad i_x(t) = 1.2127 \cos(100t - 75.96^\circ) \text{ A}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

58.

$$V_1 - 10 - j0.25V_1 + j0.25V_x + V_1 - V_2 = 0$$

$$\therefore (2 - j0.25)V_1 - V_2 + j0.25V_x = 10$$

$$V_2 - V_1 + V_2 - V_x + j4V_2 = 0$$

$$-V_1 + (2 + j4)V_2 - V_x = 0$$

$$-j0.25V_x + j0.25V_1 + V_x + V_x - V_2$$

$$\therefore j0.25V_1 - V_2 + (2 - j0.25)V_x = 0$$

$$V_x = \frac{\begin{vmatrix} 2 - j0.25 & -1 & 10 \\ -1 & 2 + j4 & 0 \\ j0.25 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -j0.25 & -1 & j0.25 \\ -1 & 2 + j4 & -1 \\ j0.25 & -1 & 2 - j0.25 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{10(1 + 1 - j0.5)}{j0.25(2 - j0.5) + (-2 + j0.25 + j0.25) + (2 - j0.25)(4 + 1 - j0.5 + j8 - 1)}$$

$$= \frac{20 - j5}{8 + j15} = 1.2127 \angle -75.96^\circ \text{ V}$$

$$\therefore v_x = 1.2127 \cos(100t - 75.96^\circ) \text{ V}$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

59.

(a)  $R_1 = \infty, R_o = 0, A = -V_o / V_i \gg 0$

$$I = \frac{V_1 + AV_i}{R_f} = j\omega C_1 (V_s - V_i)$$

$$\therefore V_i(1 + A + j\omega C_1 R_f) = j\omega C_1 R_f V_s$$

$$V_o = -AV_i \therefore -\frac{V_o}{A}(1 + A + j\omega C_1 R_f) = j\omega C_1 R_f V_s$$

$$\therefore \frac{V_o}{V_s} = -\frac{j\omega C_1 R_f A}{1 + A + j\omega C_1 R_f} \text{ As } A \rightarrow \infty, \frac{V_o}{V_s} \rightarrow -j\omega C_1 R_f$$

(b)  $R_f \parallel C_f = \frac{1}{j\omega C_f + \frac{1}{R_f}} = \frac{R_f}{1 + j\omega C_f R_f}$

$$I = \frac{(V_1 + AV_i)}{R_f}(1 + j\omega C_f R_f) = (V_s - V_i) j\omega C_1, V_o = -AV_i$$

$$\therefore V_i(1 + A)(1 + j\omega C_f R_f) = V_s j\omega C_1 R_f - j\omega C_1 R_f V_i,$$

$$V_i [(1 + A)(1 + j\omega C_f R_f) + j\omega C_1 R_f] = j\omega C_1 R_f V_s$$

$$\therefore -\frac{V_o}{A} [(1 + A)(1 + j\omega C_f R_f) + j\omega C_1 R_f] = j\omega C_1 R_f V_s$$

$$\therefore \frac{V_o}{V_s} = \frac{-j\omega C_1 R_f A}{(1 + A)(1 + j\omega C_f R_f) + j\omega C_1 R_f} \text{ As } A \rightarrow \infty, \frac{V_o}{V_s} \rightarrow \frac{-j\omega C_1 R_f}{1 + j\omega C_f R_f}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

60. Define the nodal voltage  $v_1(t)$  at the junction between the two dependent sources. The voltage source may be replaced by a  $3\angle -3^\circ$  V source, the  $600\text{-}\mu\text{F}$  capacitor by a  $-j/0.6\ \Omega$  impedance, the  $500\text{-}\mu\text{F}$  capacitor by a  $-j2\ \Omega$  impedance, and the inductor by a  $j2\ \Omega$  impedance.

$$5\mathbf{V}_2 + 3\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_1 - 3\angle -3^\circ}{100 - j/0.6} + \frac{(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)}{-j2} \quad [1]$$

$$-5\mathbf{V}_2 = \frac{(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)}{-j2} + \frac{\mathbf{V}_2}{j2} \quad [2]$$

Simplifying and collecting terms,

$$j2\ \mathbf{V}_1 + (960.1\angle -90.95^\circ)\ \mathbf{V}_2 = 6\angle 87^\circ \quad [1]$$

$$-j2\ \mathbf{V}_1 + 20\ \mathbf{V}_2 = 0 \quad [2]$$

Solving, we find that  $\mathbf{V}_1 = 62.5\angle 86.76^\circ$  mV and  $\mathbf{V}_2 = 6.25\angle 176.8^\circ$  mV. Converting back to the time domain,

$$v_2(t) = 6.25 \cos(10^3 t + 176.8^\circ) \text{ mV}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

61. Define three clockwise mesh currents:  $i_1(t)$  in the left-most mesh,  $i_2(t)$  in the bottom right mesh, and  $i_3(t)$  in the top right mesh. The  $15\text{-}\mu\text{F}$  capacitor is replaced with a  $-j/0.15\ \Omega$  impedance, the inductor is replaced by a  $j20\ \Omega$  impedance, the  $74\ \mu\text{F}$  capacitor is replaced by a  $-j1.351\ \Omega$  impedance, the current source is replaced by a  $2\angle 0^\circ\text{ mA}$  source, and the voltage source is replaced with a  $5\angle 0^\circ\text{ V}$  source.

Around the 1, 2 supermesh:  $(100 + j20)\mathbf{I}_1 + (13000 - j1.351)\mathbf{I}_2 - 5000\mathbf{I}_3 = 0$   
and

$$-\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 2 \times 10^{-3}$$

Mesh 3:  $5\angle 0^\circ + (5000 - j6.667)\mathbf{I}_2 - 5000\mathbf{I}_3 = 0$

Solving, we find that  $\mathbf{I}_1 = 1.22\angle 179.9^\circ\text{ mA}$ . Converting to the time domain,

$$i_1(t) = 1.22 \cos(10^4 t + 179.9^\circ)\text{ mA}$$

$$\begin{aligned}\text{Thus, } P_{1000} &= [i_1(1\text{ ms})]^2 \cdot 1000 \\ &= (1.025 \times 10^{-6})(1000)\text{ W} = \boxed{1.025\text{ W}}.\end{aligned}$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

62. We define an additional clockwise mesh current  $i_4(t)$  flowing in the upper right-hand mesh. The inductor is replaced by a  $j0.004 \, \Omega$  impedance, the  $750 \, \mu\text{F}$  capacitor is replaced by a  $-j/0.0015 \, \Omega$  impedance, and the  $1000 \, \mu\text{F}$  capacitor is replaced by a  $-j/2 \, \Omega$  impedance. We replace the left voltage source with a  $6 \angle -13^\circ \text{ V}$  source, and the right voltage source with a  $6 \angle 0^\circ \text{ V}$  source.

$$(1 - j/0.0015) \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3 = 6 \angle -13^\circ \quad [1]$$

$$(0.005 + j/0.0015) \mathbf{I}_1 + j0.004 \mathbf{I}_2 - j0.004 \mathbf{I}_4 = 0 \quad [2]$$

$$-\mathbf{I}_1 + (1 - j/2) \mathbf{I}_3 + j0.5 \mathbf{I}_4 = -6 \angle 0^\circ \quad [3]$$

$$-j0.004 \mathbf{I}_2 + j0.5 \mathbf{I}_3 + (j0.004 - j0.5) \mathbf{I}_4 = 0 \quad [4]$$

Solving, we find that

$$\mathbf{I}_1 = 0.00144 \angle -51.5^\circ \text{ A}, \mathbf{I}_2 = 233.6 \angle 39.65^\circ \text{ A}, \text{ and } \mathbf{I}_3 = 6.64 \angle 173.5^\circ \text{ A}.$$

Converting to the time domain,

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 1.44 \cos(2t - 51.5^\circ) \text{ mA} \\ i_2(t) &= 233.6 \cos(2t + 39.65^\circ) \text{ A} \\ i_3(t) &= 6.64 \cos(2t + 173.5^\circ) \text{ A} \end{aligned}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

63. We replace the voltage source with a  $115\sqrt{2} \angle 0^\circ$  V source, the capacitor with a  $-j/2\pi C_1 \Omega$  impedance, and the inductor with a  $j0.03142 \Omega$  impedance.

Define  $\mathbf{Z}$  such that  $\mathbf{Z}^{-1} = 2\pi C_1 - j/0.03142 + 1/20$

By voltage division, we can write that  $6.014 \angle 85.76^\circ = 115\sqrt{2} \frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z} + 20}$

Thus,  $\mathbf{Z} = 0.7411 \angle 87.88^\circ \Omega$ . This allows us to solve for  $C_1$ :

$2\pi C_1 - 1/0.03142 = -1.348$  so that  $C_1 = 4.85 \text{ F}$ .

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

64. Defining a clockwise mesh current  $i_1(t)$ , we replace the voltage source with a  $115\sqrt{2} \angle 0^\circ$  V source, the inductor with a  $j2\pi L \Omega$  impedance, and the capacitor with a  $-j1.592 \Omega$  impedance.

$$\text{Ohm's law then yields } \mathbf{I}_1 = \frac{115\sqrt{2}}{20 + j(2\pi L - 1.592)} = 8.132 \angle 0^\circ$$

Thus,  $20 = \sqrt{20^2 + (2\pi L - 1.592)^2}$  and we find that  $L = 253.4 \text{ mH}$ .



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

65. (a) By nodal analysis:

$$0 = (\mathbf{V}_\pi - 1)/R_s + \mathbf{V}_\pi/R_B + \mathbf{V}_\pi/r_\pi + j\omega C_\pi \mathbf{V}_\pi + (\mathbf{V}_\pi - \mathbf{V}_{out})j\omega C_\mu \quad [1]$$

$$-g_m \mathbf{V}_\pi = (\mathbf{V}_{out} - \mathbf{V}_\pi)j\omega C_\mu + \mathbf{V}_{out}/R_C + \mathbf{V}_{out}/R_L \quad [2]$$

Simplify and collect terms:

$$\left[ \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{r_\pi} \right) + j\omega(C_\pi + C_\mu) \right] \mathbf{V}_\pi - j\omega C_\mu \mathbf{V}_{out} = \frac{1}{R_s} \quad [1]$$

$$(-g_m + j\omega C_\mu) \mathbf{V}_\pi - (j\omega C_\mu + 1/R_C + 1/R_L) \mathbf{V}_{out} = 0 \quad [2]$$

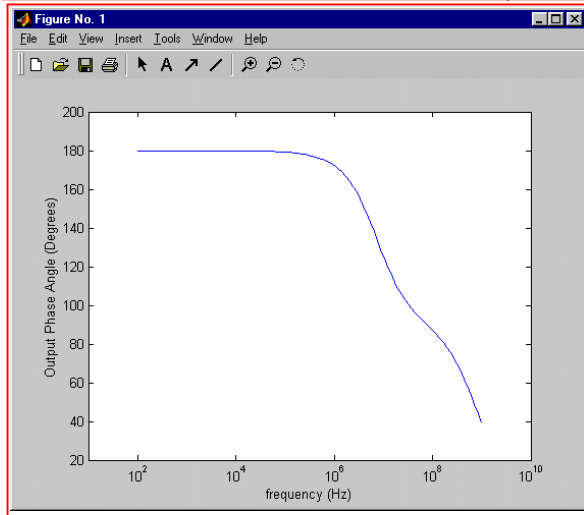
Define  $\frac{1}{R_s'} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{r_\pi}$  and  $R_L' = R_C \parallel R_L$

Then  $\Delta = \frac{-1}{R_s' R_L'} + \omega^2(2C_\mu^2 + C_\mu C_\pi) - j\omega \left( g_m C_\mu + \frac{C_\mu + C_\pi}{R_L'} + \frac{C_\mu}{R_s'} \right)$

And  $\mathbf{V}_{out} = \frac{g_m R_s - j\omega C_\mu / R_s}{\frac{-1}{R_s' R_L'} + \omega^2(2C_\mu^2 + C_\mu C_\pi) - j\omega \left( g_m C_\mu + \frac{C_\mu + C_\pi}{R_L'} + \frac{C_\mu}{R_s'} \right)}$

Therefore,  $\text{ang}(\mathbf{V}_{out}) = \tan^{-1} \left( \frac{-j\omega C_\mu}{g_m R_s^2} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{-\omega \left( g_m C_\mu + \frac{C_\mu + C_\pi}{R_L'} + \frac{C_\mu}{R_s'} \right)}{\frac{-1}{R_s' R_L'} + \omega^2(2C_\mu^2 + C_\mu C_\pi)} \right)$

(b)



(c) The output is  $\sim 180^\circ$  out of phase with the input for  $f < 10^5$  Hz; only for  $f = 0$  is it exactly  $180^\circ$  out of phase with the input.

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

66.

$$\text{OC: } -\frac{V_x}{20} + \frac{100 - V_x}{-j10} - 0.02V_x = 0$$

$$j10 = (0.05 + j0.1 + 0.02) V_x, V_x = \frac{j10}{0.07 + j0.1}$$

$$\therefore V_x = 67.11 + j46.98$$

$$\therefore V_{ab,oc} = 100 - V_x = 32.89 - j46.98 = 57.35 \angle -55.01^\circ \text{ V}$$

$$\text{SC: } V_x = 100 \therefore \downarrow I_{SC} = 0.02 \times 100 + \frac{100}{20} = 7 \text{ A}$$

$$\therefore Z_{th} = \frac{57.35 \angle -55.01^\circ}{7} = 4.698 - j6.711 \Omega$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

67.

$$V_L = j210 \therefore 0.5V_L = j\omega$$

$$\therefore V_{in} = (1 + j\omega) \frac{1}{j\omega} + j2\omega$$

$$= 1 + \frac{1}{j\omega} + j2\omega$$

$$\therefore Z_{in} = \frac{V_{in}}{1} = 1 + \frac{1}{j\omega} + j2\omega \quad \text{so } \mathbf{Y_{in} = \frac{\omega}{\omega + j(2\omega^2 - 1)}}$$

$$\text{At } \omega = 1, Z_{in} = 1 - j1 + j2 = 1 + j$$

$$\therefore Y_{in} = \frac{1}{1 + j1} = 0.5 + j0.5$$

$$\mathbf{R = 500 \text{ m}\Omega, L = 500 \text{ mH.}}$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

68.

$$(a) \quad V_s : \frac{(1-j1)1}{2-j1} \times \frac{2+j1}{2+j1} = \frac{3-j1}{5} \therefore V_1 = \frac{-15}{j2+0.6-j0.2} \times 0.6-j0.2$$

$$\therefore V_1 = 5 \angle 90^\circ \therefore v_1(t) = 5 \cos(1000t + 90^\circ) \text{ V}$$

(b)  $I_s$ :

$$j2 \parallel 1 = \frac{j2}{1+j2} \frac{1-j2}{1-j2} = 0.8 + j0.4 \therefore V_1$$

$$= j25 \frac{0.8 + j0.4}{1-j1+0.8+j0.4} = \frac{-10 + j20}{1.8-j0.6} = 11.785^\circ \angle 135^\circ \text{ V}$$

$$\text{so } v_1(t) = 11.79 \cos(1000t + 135^\circ) \text{ V.}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

69.

$$\text{OC: } V_L = 0 \therefore V_{ab,oc} = 1\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\text{SC: } \downarrow I_N \therefore V_L = j2I_N \therefore 1\angle 0^\circ = -j1[0.25(j2I_N) + I_N] + j2I_N$$

$$\therefore 1 = (0.5 - j + j2)I_N = (0.5 + j1)I_N$$

$$\therefore I_N = \frac{1}{0.5 + j1} = 0.4 - j0.8 \therefore Y_N = \frac{I_N}{1\angle 0^\circ} = 0.4 - j0.8$$

$$\therefore R_N = \frac{1}{0.4} = 2.5\Omega, \frac{1}{j\omega L_N} = \frac{1}{jL_N} = -j0.8, L_N = \frac{1}{0.8} = 1.25\text{H}$$

$$I_N = 0.4 - j0.8 = 0.8944\angle -63.43^\circ \text{ A}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

70.

$$V_L = 2(j1) + (-j2) \frac{j1}{1+j1} = j2 + \frac{2}{1+j1} = \frac{1-j1}{1-j1} = 1+j1$$

$$\therefore V_{L,200} = 1.4142 \cos(200t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$\omega = 100: V_L = j\frac{1}{2}, v_{L,100} = 0.5 \cos(100t + 90^\circ) \text{ V}$$

so  $v_L(t) = 1.414 \cos(200t + 45^\circ) + 0.5 \cos(100t + 90^\circ) \text{ V}$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

71.

Use superposition. Left:  $V_{ab} = 100 \frac{j100}{j100 - j300}$

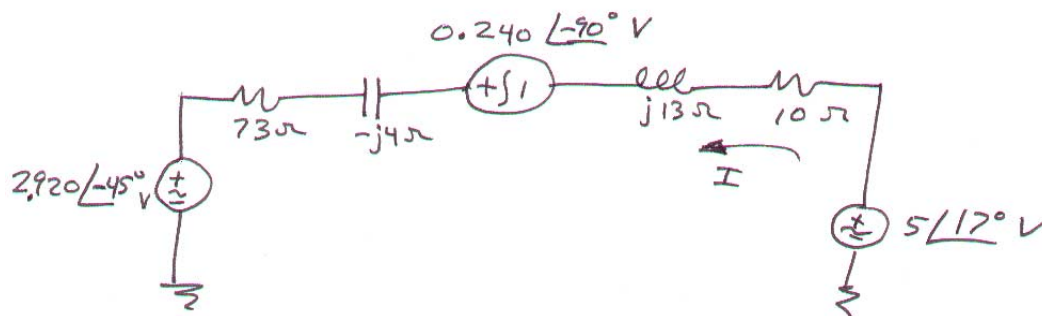
$$= -50 \angle 0^\circ \text{ V Right: } V_{ab} = j100 \frac{-j300}{-j300 + j100} = j150 \text{ V}$$

$$\therefore V_{th} = -50 + j150 = 158.11 \angle 108.43^\circ \text{ V}$$

$$Z_{th} = j100 \parallel -j300 = \frac{30,000}{-j200} = j150 \Omega$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

72. This problem is easily solved if we first perform two source transformations to yield a circuit containing only voltage sources and impedances:



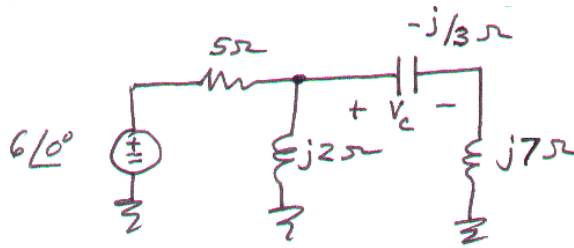
$$\begin{aligned}\text{Then } \mathbf{I} &= \frac{5\angle 17^\circ + 0.240\angle -90^\circ + 2.920\angle -45^\circ}{73 + 10 + j13 - j4} \\ &= (6.898\angle -7.019^\circ) / (83.49\angle 6.189^\circ) = 82.62\angle -13.21^\circ \text{ mA}\end{aligned}$$

Converting back to the time domain, we find that

$$i(t) = 82.62 \cos(10^3 t - 13.21^\circ) \text{ mA}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

73.



(a) There are a number of possible approaches: Thévenizing everything to the left of the capacitor is one of them.

$$\mathbf{V}_{\text{TH}} = 6(j2)/(5 + j2) = 2.228 \angle 68.2^\circ \text{ V}$$

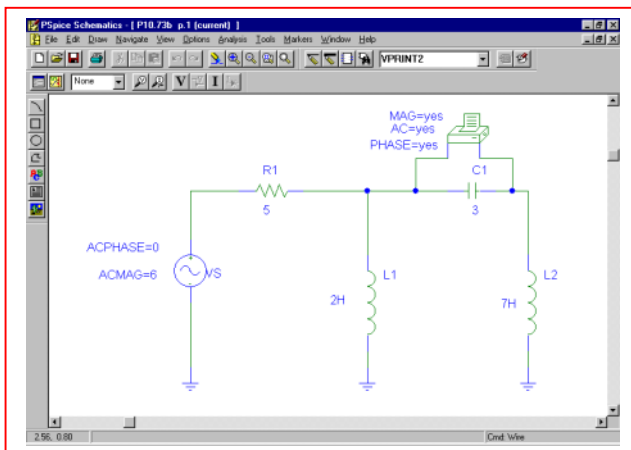
$$\mathbf{Z}_{\text{TH}} = 5 \parallel j2 = j10/(5 + j2) = 1.857 \angle 68.2^\circ \Omega$$

Then, by simple voltage division, we find that

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_C &= (2.228 \angle 68.2^\circ) \frac{-j/3}{1.857 \angle 68.2^\circ - j/3 + j7} \\ &= 88.21 \angle -107.1^\circ \text{ mV} \end{aligned}$$

Converting back to the time domain,  $v_C(t) = 88.21 \cos(t - 107.1^\circ) \text{ mV}$ .

(b) **PSpice verification.**



Running an ac sweep at the frequency  $f = 1/2\pi = 0.1592 \text{ Hz}$ , we obtain a phasor magnitude of 88.23 mV, and a phasor angle of  $-107.1^\circ$ , in agreement with our calculated result (the slight disagreement is a combination of round-off error in the hand calculations and the rounding due to expressing 1 rad/s in Hz).

```
* C:\My Documents\HKD-6th Edition\SOLUTIONS MANUAL\Chapter 10\P10.73b.sch

**** AC ANALYSIS TEMPERATURE = 27.000 DEG C

*****

FREQ      VM($N_0002,$N_0003)VP($N_0002,$N_0003)

1.592E-01  8.823E-02 -1.071E+02

JOB CONCLUDED

TOTAL JOB TIME .06
```



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

74. (a) Performing nodal analysis on the circuit,

$$\text{Node 1:} \quad 1 = \mathbf{V}_1/5 + \mathbf{V}_1/(-j10) + (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)/(-j5) + (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2)/j10 \quad [1]$$

$$\text{Node 2:} \quad j0.5 = \mathbf{V}_2/10 + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/(-j5) + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)/j10 \quad [2]$$

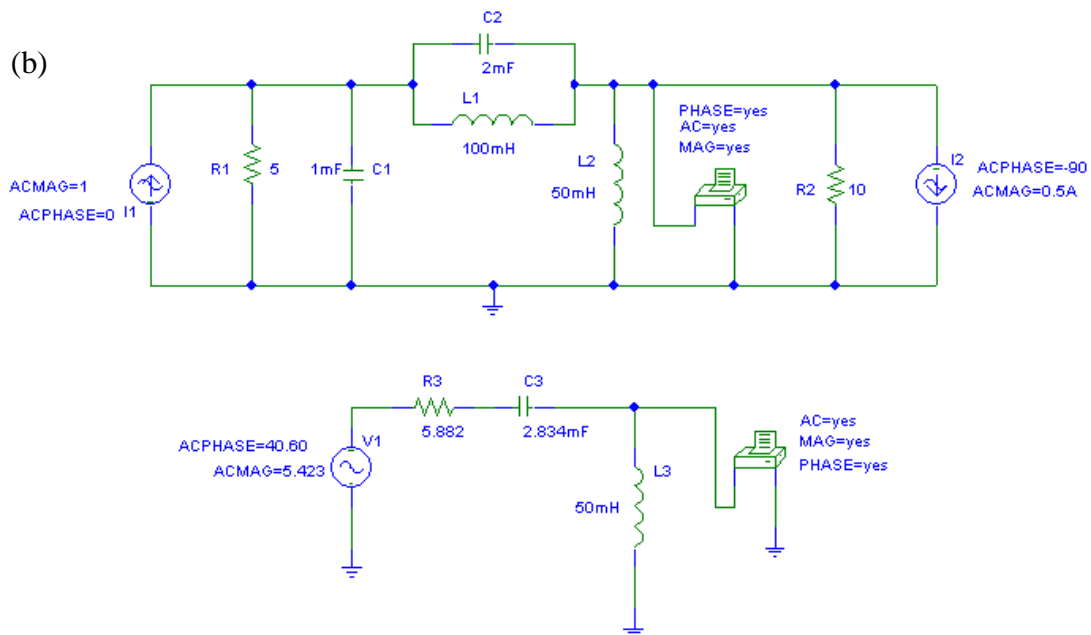
Simplifying and collecting terms,

$$(0.2 + j0.2) \mathbf{V}_1 - j0.1 \mathbf{V}_2 = 1 \quad [1]$$

$$-j \mathbf{V}_1 + (1 + j) \mathbf{V}_2 = j5 \quad [2]$$

Solving, we find that  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{TH} = 5.423 \angle 40.60^\circ \text{ V}$

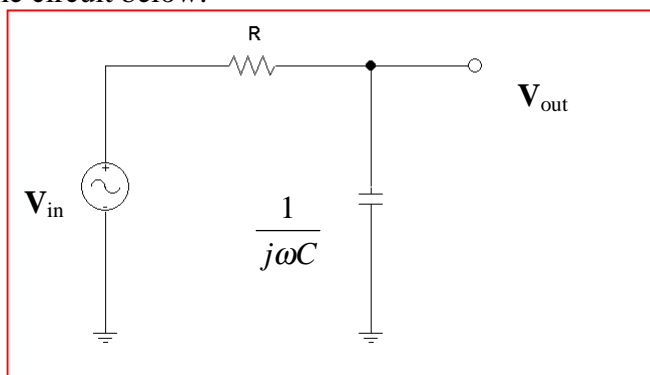
$$\mathbf{Z}_{TH} = 10 \parallel [(j10 \parallel -j5) + (5 \parallel -j10)] = 10 \parallel (-j10 + 4 - j2) = 5.882 - j3.529 \Omega.$$



|           |                |                |
|-----------|----------------|----------------|
| FREQ      | VM(\$N_0002,0) | VP(\$N_0002,0) |
| 1.592E+01 | 4.474E+00      | 1.165E+02      |
| FREQ      | VM(\$N_0005,0) | VP(\$N_0005,0) |
| 1.592E+01 | 4.473E+00      | 1.165E+02      |

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

75. Consider the circuit below:



Using voltage division, we may write:

$$V_{out} = V_{in} \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}, \text{ or } \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

The magnitude of this ratio (consider, for example, an input with unity magnitude and zero phase) is

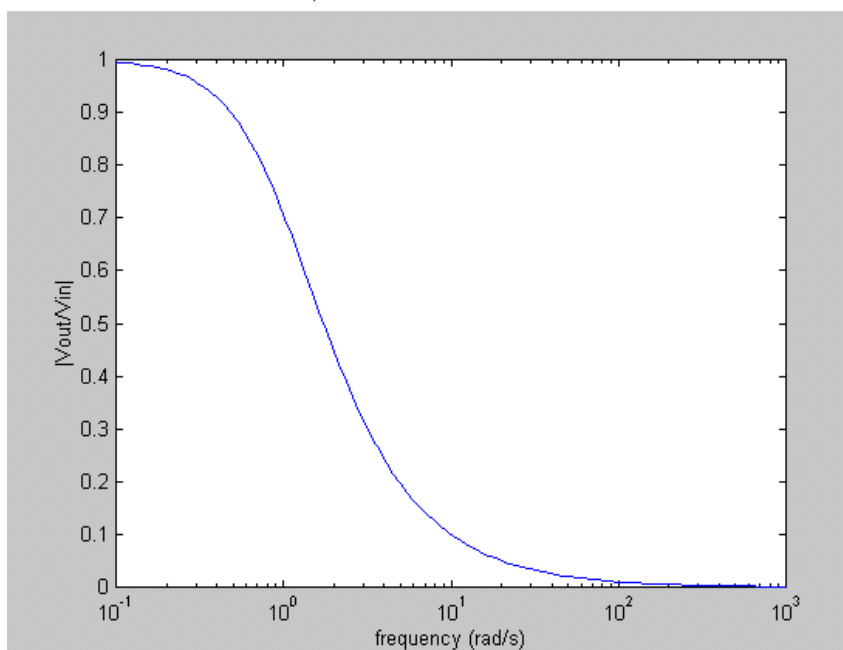
$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

As  $\omega \rightarrow 0$ , this magnitude  $\rightarrow 1$ , its maximum value.

As  $\omega \rightarrow \infty$ , this magnitude  $\rightarrow 0$ ; the capacitor is acting as a short circuit to the ac signal.

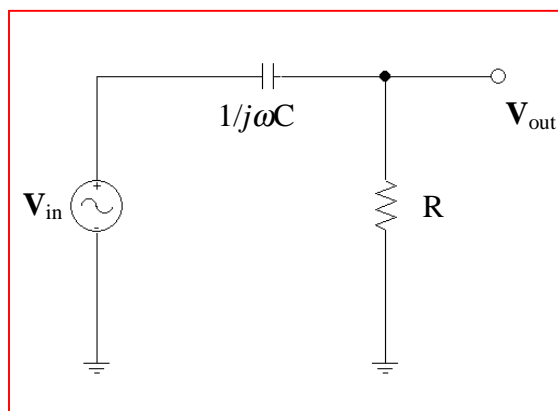
Thus, low frequency signals are transferred from the input to the output relatively unaffected by this circuit, but high frequency signals are attenuated, or “filtered out.”

This is readily apparent if we plot the magnitude as a function of frequency (assuming  $R = 1 \, \Omega$  and  $C = 1 \, F$  for convenience):



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

76. Consider the circuit below:



Using voltage division, we may write:

$$\mathbf{V}_{\text{out}} = \mathbf{V}_{\text{in}} \frac{R}{R + 1/j\omega C}, \text{ or } \frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_{\text{in}}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

The magnitude of this ratio (consider, for example, an input with unity magnitude and zero phase) is

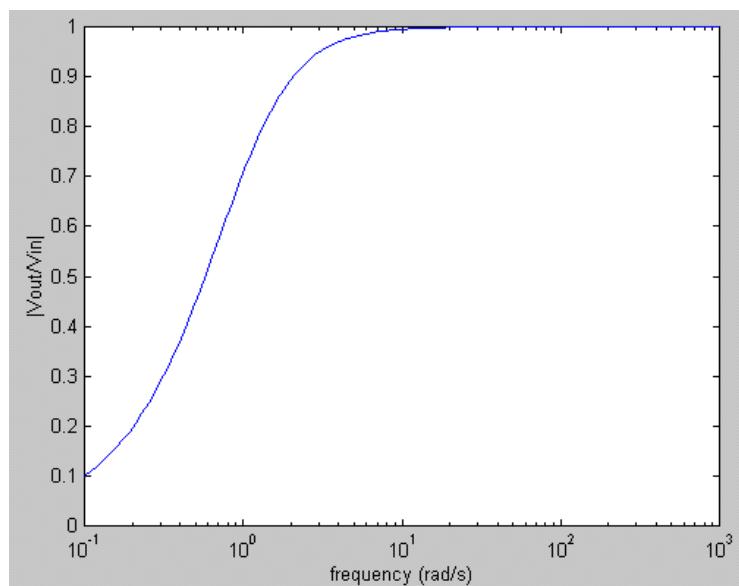
$$\left| \frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_{\text{in}}} \right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

As  $\omega \rightarrow \infty$ , this magnitude  $\rightarrow 1$ , its maximum value.

As  $\omega \rightarrow 0$ , this magnitude  $\rightarrow 0$ ; the capacitor is acting as an open circuit to the ac signal.

Thus, high frequency signals are transferred from the input to the output relatively unaffected by this circuit, but low frequency signals are attenuated, or “filtered out.”

This is readily apparent if we plot the magnitude as a function of frequency (assuming  $R = 1 \, \Omega$  and  $C = 1 \, \text{F}$  for convenience):

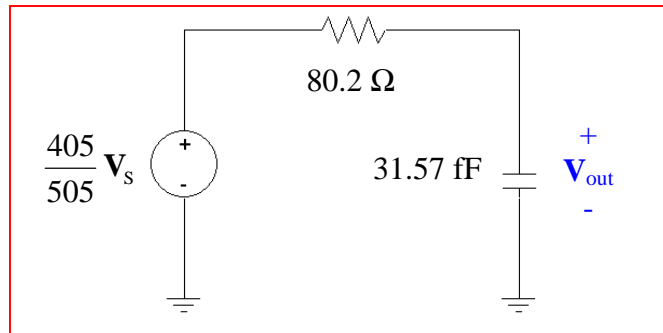




## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

77. (a) Removing the capacitor temporarily, we easily find the Thevenin equivalent:

$$\mathbf{V}_{th} = (405/505) \mathbf{V}_S \text{ and } R_{th} = 100 \parallel (330 + 75) = 80.2 \, \Omega$$

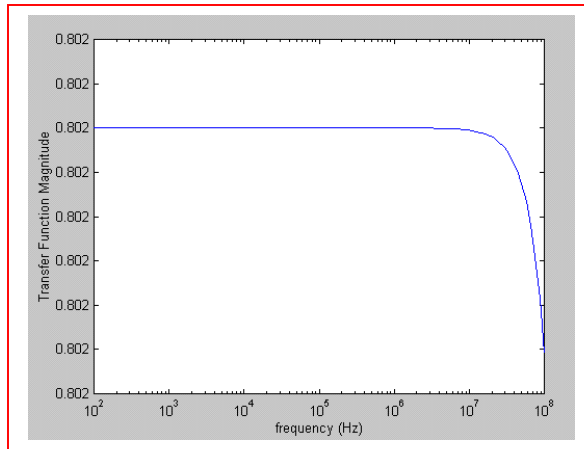


$$(b) \mathbf{V}_{out} = \frac{405}{505} \mathbf{V}_S \frac{1/j\omega C}{80.2 + 1/j\omega C} \text{ so } \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_S} = \left( \frac{405}{505} \right) \frac{1}{1 + j2.532 \times 10^{-12} \omega}$$

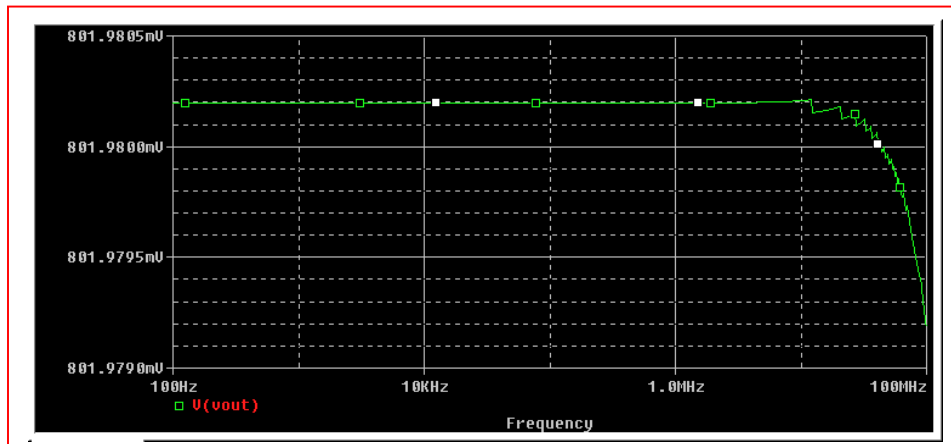
and hence

$$\left| \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_S} \right| = \frac{0.802}{\sqrt{1 + 6.411 \times 10^{-24} \omega^2}}$$

(c)



Both the MATLAB plot of the frequency response and the PSpice simulation show essentially the same behavior; at a frequency of approximately 20 MHz, there is a sharp roll-off in the transfer function magnitude.



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

78. From the derivation, we see that

$$\frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_{\text{in}}} = \frac{-g_m(R_C \parallel R_L) + j\omega(R_C \parallel R_L)C_\mu}{1 + j\omega(R_C \parallel R_L)C_\mu}$$

so that

$$\left| \frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_{\text{in}}} \right| = \left[ \frac{g_m^2 \left( \frac{R_C R_L}{R_C + R_L} \right)^2 + \omega^2 \left( \frac{R_C R_L}{R_C + R_L} \right)^2 C_\mu^2}{1 + \omega^2 \left( \frac{R_C R_L}{R_C + R_L} \right)^2 C_\mu^2} \right]^{1/2}$$

This function has a maximum value of  $g_m(R_C \parallel R_L)$  at  $\omega = 0$ . Thus, the capacitors reduce the gain at high frequencies; this is the frequency regime at which they begin to act as short circuits. Therefore, the maximum gain is obtained at frequencies at which the capacitors may be treated as open circuits. If we do this, we may analyze the circuit of Fig. 10.25b without the capacitors, which leads to

$$\left. \frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_S} \right|_{\text{low frequency}} = -g_m \left( \frac{R_C R_L}{R_C + R_L} \right) \frac{(r_\pi \parallel R_B)}{R_S + r_\pi \parallel R_B} = -g_m \left( \frac{R_C R_L}{R_C + R_L} \right) \frac{r_\pi R_B}{R_S(r_\pi + R_B) + r_\pi R_B}$$

The resistor network comprised of  $r_\pi$ ,  $R_S$ , and  $R_B$  acts as a voltage divider, leading to a reduction in the gain of the amplifier. In the situation where  $r_\pi \parallel R_B \gg R_S$ , then it has minimal effect and the gain will equal its “maximum” value of  $-g_m(R_C \parallel R_L)$ .

(b) If we set  $R_S = 100 \, \Omega$ ,  $R_L = 8 \, \Omega$ ,  $R_C \mid_{\text{max}} = 10 \, \text{k}\Omega$  and  $r_\pi g_m = 300$ , then we find that

$$\frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_S} = -g_m (7.994) \frac{r_\pi \parallel R_B}{100 + r_\pi \parallel R_B}$$

We seek to maximize this term within the stated constraints. This requires a large value of  $g_m$ , but also a large value of  $r_\pi \parallel R_B$ . This parallel combination will be less than the smaller of the two terms, so even if we allow  $R_B \rightarrow \infty$ , we are left with

$$\frac{\mathbf{V}_{\text{out}}}{\mathbf{V}_S} \approx -(7.994) \frac{g_m r_\pi}{100 + r_\pi} = \frac{-2398}{100 + r_\pi}$$

Considering this simpler expression, it is clear that if we select  $r_\pi$  to be small, (*i.e.*  $r_\pi \ll 100$ ), then  $g_m$  will be large and the gain will have a maximum value of approximately  $-23.98$ .

(c) Referring to our original expression in which the gain  $\mathbf{V}_{\text{out}}/\mathbf{V}_{\text{in}}$  was computed, we see that the critical frequency  $\omega_C = [(R_C \parallel R_L) C_\mu]^{-1}$ . Our selection of maximum  $R_C$ ,  $R_B \rightarrow \infty$ , and  $r_\pi \ll 100$  has not affected this frequency.

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

79. Considering the  $\omega = 2 \times 10^4$  rad/s source first, we make the following replacements:

$$\begin{aligned} 100 \cos(2 \times 10^4 t + 3^\circ) \text{ V} &\rightarrow 100 \angle 3^\circ \text{ V} \\ 33 \mu\text{F} &\rightarrow -j1.515 \Omega & 112 \mu\text{H} &\rightarrow j2.24 \Omega & 92 \mu\text{F} &\rightarrow -j0.5435 \Omega \end{aligned}$$

Then

$$(\mathbf{V}_1' - 100 \angle 3^\circ) / 47 \times 10^3 + \mathbf{V}_1' / (-j1.515) + (\mathbf{V}_1' - \mathbf{V}_2') / (56 \times 10^3 + j4.48) = 0 \quad [1]$$

$$(\mathbf{V}_2' - \mathbf{V}_1') / (56 \times 10^3 + j4.48) + \mathbf{V}_2' / (-j0.5435) = 0 \quad [2]$$

Solving, we find that

$$\mathbf{V}_1' = 3.223 \angle -87^\circ \text{ mV} \quad \text{and} \quad \mathbf{V}_2' = 31.28 \angle -177^\circ \text{ nV}$$

Thus,  $v_1'(t) = 3.223 \cos(2 \times 10^4 t - 87^\circ) \text{ mV}$  and  $v_2'(t) = 31.28 \cos(2 \times 10^4 t - 177^\circ) \text{ nV}$

Considering the effects of the  $\omega = 2 \times 10^5$  rad/s source next,

$$\begin{aligned} 100 \cos(2 \times 10^5 t - 3^\circ) \text{ V} &\rightarrow 100 \angle -3^\circ \text{ V} \\ 33 \mu\text{F} &\rightarrow -j0.1515 \Omega & 112 \mu\text{H} &\rightarrow j22.4 \Omega & 92 \mu\text{F} &\rightarrow -j0.05435 \Omega \end{aligned}$$

Then

$$\mathbf{V}_1'' / -j0.1515 + (\mathbf{V}_1'' - \mathbf{V}_2'') / (56 \times 10^3 + j44.8) = 0 \quad [3]$$

$$(\mathbf{V}_2'' - \mathbf{V}_1'') / (56 \times 10^3 + j44.8) + (\mathbf{V}_2'' - 100 \angle 3^\circ) / 47 \times 10^3 + \mathbf{V}_2'' / (-j0.05435) = 0 \quad [4]$$

Solving, we find that

$$\mathbf{V}_1'' = 312.8 \angle 177^\circ \text{ pV} \quad \text{and} \quad \mathbf{V}_2'' = 115.7 \angle -93^\circ \mu\text{V}$$

Thus,

$$v_1''(t) = 312.8 \cos(2 \times 10^5 t + 177^\circ) \text{ pV} \quad \text{and} \quad v_2''(t) = 115.7 \cos(2 \times 10^5 t - 93^\circ) \mu\text{V}$$

Adding, we find

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 3.223 \times 10^{-3} \cos(2 \times 10^4 t - 87^\circ) + 312.8 \times 10^{-12} \cos(2 \times 10^5 t + 177^\circ) \text{ V} \quad \text{and} \\ v_2(t) &= 31.28 \times 10^{-9} \cos(2 \times 10^4 t - 177^\circ) + 115.7 \times 10^{-12} \cos(2 \times 10^5 t - 93^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

80. For the source operating at  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ ,

$7 \cos 4t \rightarrow 7 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $1 \text{ H} \rightarrow j4 \Omega$ ,  $500 \text{ mF} \rightarrow -j0.5 \Omega$ ,  $3 \text{ H} \rightarrow j12 \Omega$ , and  $2 \text{ F} \rightarrow -j/8 \Omega$ .

Then by mesh analysis, (define 4 clockwise mesh currents  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_4$  in the top left, top right, bottom left and bottom right meshes, respectively):

$$(9.5 + j4) \mathbf{I}_1 - j4 \mathbf{I}_2 - 7 \mathbf{I}_3 - 4 \mathbf{I}_4 = 0 \quad [1]$$

$$-j4 \mathbf{I}_1 + (3 + j3.5) \mathbf{I}_2 - 3 \mathbf{I}_4 = -7 \quad [2]$$

$$-7 \mathbf{I}_1 + (12 - j/8) \mathbf{I}_3 + j/8 \mathbf{I}_4 = 0 \quad [3]$$

$$-3 \mathbf{I}_2 + j/8 \mathbf{I}_3 + (4 + j11.875) \mathbf{I}_4 = 0 \quad [4]$$

Solving, we find that  $\mathbf{I}_3 = 365.3 \angle -166.1^\circ \text{ mA}$  and  $\mathbf{I}_4 = 330.97 \angle 72.66^\circ \text{ mA}$ .

For the source operating at  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ ,

$5.5 \cos 2t \rightarrow 5.5 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $1 \text{ H} \rightarrow j2 \Omega$ ,  $500 \text{ mF} \rightarrow -j \Omega$ ,  $3 \text{ H} \rightarrow j6 \Omega$ , and  $2 \text{ F} \rightarrow -j/4 \Omega$ .

Then by mesh analysis, (define 4 clockwise mesh currents  $\mathbf{I}_A, \mathbf{I}_B, \mathbf{I}_C, \mathbf{I}_D$  in the top left, top right, bottom left and bottom right meshes, respectively):

$$(9.5 + j2) \mathbf{I}_A - j2 \mathbf{I}_B - 7 \mathbf{I}_C - 4 \mathbf{I}_D = 0 \quad [1]$$

$$-j2 \mathbf{I}_A + (3 + j) \mathbf{I}_B - 3 \mathbf{I}_D = -7 \quad [2]$$

$$-7 \mathbf{I}_A + (12 - j/4) \mathbf{I}_C + j/4 \mathbf{I}_D = 0 \quad [3]$$

$$-3 \mathbf{I}_2 + j/4 \mathbf{I}_C + (4 + j5.75) \mathbf{I}_D = 0 \quad [4]$$

Solving, we find that  $\mathbf{I}_C = 783.8 \angle -4.427^\circ \text{ mA}$  and  $\mathbf{I}_D = 134 \angle -25.93^\circ \text{ mA}$ .

$\mathbf{V}_1' = -j0.25 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_4) = 0.1517 \angle 131.7^\circ \text{ V}$  and  $\mathbf{V}_1'' = -j0.25 (\mathbf{I}_C - \mathbf{I}_D) = 0.1652 \angle -90.17^\circ \text{ V}$

$\mathbf{V}_2' = (1 + j6) \mathbf{I}_4 = 2.013 \angle 155.2^\circ \text{ V}$  and  $\mathbf{V}_2'' = (1 + j6) \mathbf{I}_D = 0.8151 \angle 54.61^\circ \text{ V}$

Converting back to the time domain,

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 0.1517 \cos(4t + 131.7^\circ) + 0.1652 \cos(2t - 90.17^\circ) \text{ V} \\ v_2(t) &= 2.013 \cos(4t + 155.2^\circ) + 0.8151 \cos(2t + 54.61^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

81.

$$(a) \quad I_L = \frac{100}{j2.5 + \frac{-2}{2-j1}} = \frac{100(2-j1)}{2.5+j3} = 57.26\angle -76.76^\circ (2.29in)$$

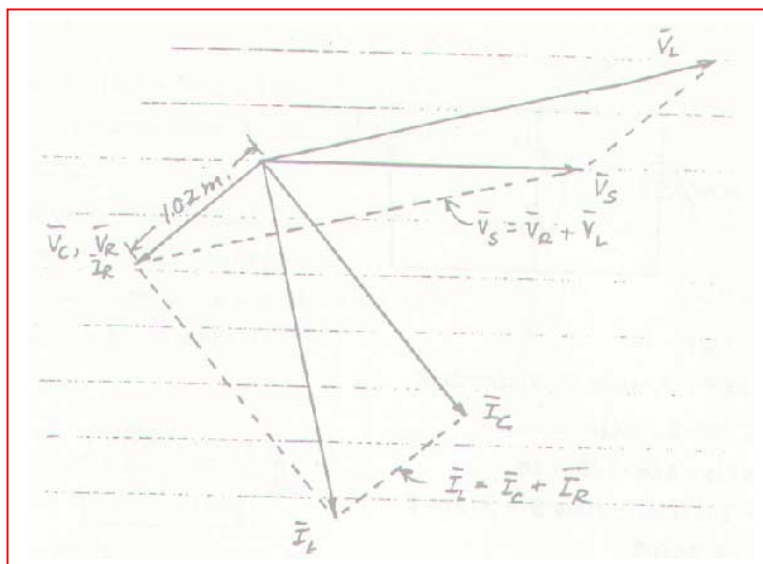
$$I_R = (57.26\angle -76.76^\circ) \frac{-j1}{2-j1} = 25.61\angle -140.19^\circ (1.02in)$$

$$I_C = (57.26\angle -76.76^\circ) \frac{2}{2-j1} = 51.21\angle -50.19^\circ (2.05in)$$

$$V_L = 2.5 \times 57.26\angle 90^\circ - 76.76^\circ = 143.15\angle 13.24^\circ (2.86in)$$

$$V_R = 2 \times 25.61\angle -140.19^\circ = 51.22\angle -140.19^\circ (1.02in)$$

$$V_C = 51.21\angle -140.19^\circ (1.02in)$$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

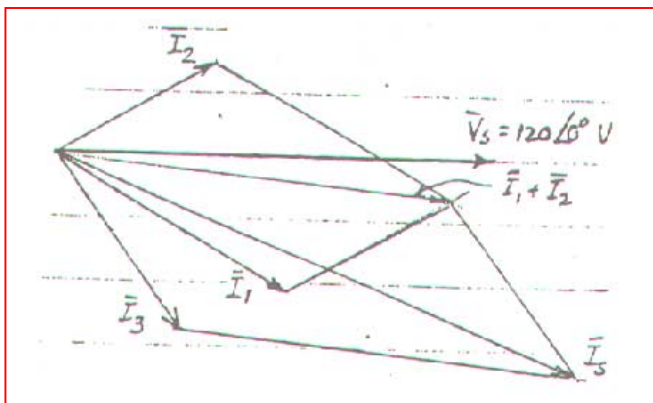
82.

(a)  $I_1 = \frac{120}{40 \angle 30^\circ} = 3 \angle -30^\circ \text{ A}$

$I_2 = \frac{120}{50 - j30} = 2.058 \angle 30.96^\circ \text{ A}$

$I_3 = \frac{120}{30 + j40} = 2.4 \angle -53.13^\circ \text{ A}$

(b)



(c)  $I_s = I_1 + I_2 + I_3$   
 $= 6.265 \angle -22.14^\circ \text{ A}$



## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

83.

$$|I_1| = 5\text{A}, |I_2| = 7\text{A}$$

$$I_1 + I_2 = 10\angle 0^\circ, I_1 \text{ lags } V, I_2 \text{ leads } V$$

$$I_1 \text{ lags } I_2. \text{ Use } 2.5\text{A} / \text{in}$$

$$[\text{Analytically: } 5\angle\alpha + 7\angle\beta = 10]$$

$$= 5\cos\alpha + j5\sin\alpha + 7\cos\beta + j7\sin\beta$$

$$\therefore \sin\alpha = -1.4\sin\beta$$

$$\therefore 5\sqrt{1-1.4^2\sin^2\beta} + 7\sqrt{1-\sin^2\beta} = 10$$

$$\text{By SOLVE, } \boxed{\alpha = -40.54^\circ \beta = 27.66^\circ}$$

## CHAPTER TEN (Phasor Analysis) SOLUTIONS

84.  $\mathbf{V}_1 = 100\angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $|\mathbf{V}_2| = 140 \text{ V}$ ,  $|\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2| = 120 \text{ V}$ .

Let  $50 \text{ V} = 1 \text{ inch}$ . From the sketch, for  $\angle \mathbf{V}_2$  positive,

$\mathbf{V}_2 = 140\angle 122.5^\circ$ . We may also have  $\mathbf{V}_2 = 140\angle -122.5^\circ \text{ V}$

[Analytically:  $|100 + 140\angle \alpha| = 120$

so  $|100 + 140 \cos \alpha + j140 \sin \alpha| = 120$

Using the “Solve” routine of a scientific calculator,

$\alpha = \pm 122.88^\circ$ .]

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

1.

$$\mathbf{Z}_c = \frac{10^6}{j500 \times 25} = -j80 \Omega, \frac{50(-j80)}{50 - j80} = 42.40 \angle -32.01^\circ \Omega$$

$$\therefore \mathbf{V} = 84.80 \angle -32.01^\circ \text{ V}, \mathbf{I}_R = 1.696 \angle -32.01^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_c = 1.0600 \angle 57.99^\circ \text{ A}$$

$$p_s (\pi / 2 \text{ ms}) = 84.80 \cos(45^\circ - 32.01^\circ) 2 \cos 45^\circ = 116.85 \text{ W}$$

$$p_R = 50 \times 1.696^2 \cos^2(45^\circ - 32.01^\circ) = 136.55 \text{ W}$$

$$p_c = 84.80 \cos(45^\circ - 32.01^\circ) = 1.060 \cos(45^\circ + 57.99^\circ) = -19.69 \text{ W}$$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

2.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 4H: i &= 2t^2 - 1 \therefore v = Li' = 4(4t) = 16t, w_L = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \times 4(4t^4 - 4t^2 + 1) \\ \therefore w_L &= 8t^4 - 8t^2 + 2 \therefore w_L(3) - w_L(1) = 8 \times 3^4 - 8 \times 3^2 + 2 - 8 \times 1 + 8 \times 1 - 2 = \boxed{576 \text{ J}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad 0.2F: v_c &= \frac{1}{0.2} \int_1^t (2t^2 - 1) dt + 2 = 5 \left( \frac{2}{3} t^3 - t \right) + 2 = 5 \left( \frac{2}{3} t^3 - t \right) - 5 \left( \frac{2}{3} - 1 \right) + 2 \\ \therefore v_c(2) &= \frac{10}{3} \times 8 - 10 - \frac{10}{3} + 5 + 2 = \frac{61}{3} \text{ V} \therefore P_c(2) = \frac{61}{3} \times 7 = \boxed{142.33 \text{ W}} \end{aligned}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

$$3. \quad v_c(0) = -2\text{V}, i(0) = 4\text{A}, \alpha = \frac{R}{2L} = 2, \omega_o^2 = \frac{1}{LC} = 3, s_{1,2} = -2 \pm 1 = -1, -3$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad i &= Ae^{-t} + Be^{-3t} \therefore A + B = 4; i(0^+) = \frac{1}{1} v_L(0^+) = (-4 \times 4 \times +2) = -14 \\ \therefore -A - 3B &= -14 \therefore B = 5, A = -1, i = -e^{-t} + 5e^{-3t} \text{ A} \\ \therefore v_c &= 3 \int_0^t (-e^{-t} + 5e^{-3t}) dt - 2 = 3(e^{-t} - 5e^{-3t}) \Big|_0^t - 2 = e^{-t} - 3 - 5e^{-3t} + 5 - 2 \\ \therefore v_c &= 3e^{-t} - 5e^{-3t} \therefore P_c(0^+) = (3 - 5)(-1 + 5) = \boxed{-8 \text{ W}} \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad P_c(0.2) = (3e^{-0.2} - 5e^{-0.6})(-e^{0.2} + 5e^{-0.6}) = \boxed{-0.5542 \text{ W}}$$

$$\text{(c)} \quad P_c(0.4) = (3e^{-0.4} - 5e^{-1.2})(5e^{-1.2} - e^{-0.4}) = \boxed{0.4220 \text{ W}}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

4. We assume the circuit has already reached sinusoidal steady state by  $t = 0$ .

$$2.5 \text{ k}\Omega \rightarrow 2.5 \text{ k}\Omega, 1 \text{ H} \rightarrow j1000 \Omega, 4 \mu\text{F} \rightarrow -j250 \Omega, 10 \text{ k}\Omega \rightarrow 10 \text{ k}\Omega$$

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = j1000 \parallel -j250 \parallel 10000 = 11.10 - j333.0 \Omega$$

$$\mathbf{V}_{\text{eq}} = \frac{(20 \angle 30^\circ)(11.10 - j333.0)}{2500 + 11.10 - j333.0} = 2.631 \angle 50.54^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{I}_{10\text{k}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{eq}}}{10000} = 0.2631 \angle -50.54^\circ \text{ mA} \quad \mathbf{I}_{1\text{H}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{eq}}}{j1000} = 2.631 \angle -140.5^\circ \text{ mA}$$

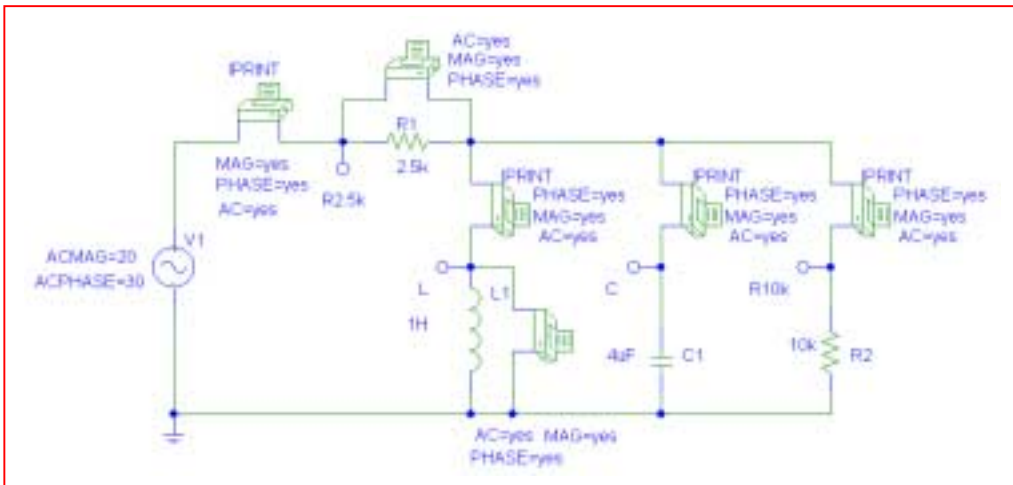
$$\mathbf{I}_{4\mu\text{F}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{eq}}}{-j250} = 10.52 \angle 39.46^\circ \text{ mA} \quad \mathbf{V}_{2.5\text{k}} = \frac{(20 \angle 30^\circ)(2500)}{2500 + 11.10 - j333.0} = 19.74 \angle 37.55^\circ \text{ V}$$

$$\text{Thus, } P_{2.5\text{k}} = \frac{[19.74 \cos 37.55^\circ]^2}{2500} = \boxed{97.97 \text{ mW}}$$

$$P_{1\text{H}} = [2.631 \cos(-50.54^\circ)] [2.631 \times 10^{-3} \cos(-140.5^\circ)] = \boxed{-3.395 \text{ mW}}$$

$$P_{4\mu\text{F}} = [2.631 \cos(-50.54^\circ)] [10.52 \times 10^{-3} \cos(39.46^\circ)] = \boxed{13.58 \text{ mW}}$$

$$P_{2.5\text{k}} = \frac{[2.631 \cos(-50.54^\circ)]^2}{10000} = \boxed{279.6 \mu\text{W}}$$



| FREQ      | IM(V_PRINT1) | IP(V_PRINT1) |
|-----------|--------------|--------------|
| 1.592E+02 | 7.896E-03    | 3.755E+01    |

| FREQ      | VM(L,0)   | VP(L,0)    |
|-----------|-----------|------------|
| 1.592E+02 | 2.629E+00 | -5.054E+01 |

| FREQ      | VM(R2_5k,\$N_0002) | VP(R2_5k,\$N_0002) |
|-----------|--------------------|--------------------|
| 1.592E+02 | 1.974E+01          | 3.755E+01          |

| FREQ      | IM(V_PRINT11) | IP(V_PRINT11) |
|-----------|---------------|---------------|
| 1.592E+02 | 1.052E-02     | 3.946E+01     |

| FREQ      | IM(V_PRINT2) | IP(V_PRINT2) |
|-----------|--------------|--------------|
| 1.592E+02 | 2.628E-03    | -1.405E+02   |

| FREQ      | IM(V_PRINT12) | IP(V_PRINT12) |
|-----------|---------------|---------------|
| 1.592E+02 | 2.629E-04     | -5.054E+01    |



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

5.

$$i_s \rightarrow 5\angle 0^\circ \text{ A}, C \rightarrow -j4\Omega, \mathbf{Z}_{in} = 8\|(3-j4) = \frac{40\angle -53.13^\circ}{11-j4}$$

$$= 3.417\angle -33.15^\circ \therefore \mathbf{V}_s = 17.087\angle -33.15^\circ,$$

$$v_s = 17.087 \cos(25t - 33.15^\circ) \text{ V} \therefore$$

$$\mathbf{P}_{s,abs}(0.1) = -17.087 \cos(2.5^{\text{rad}} - 33.147^\circ) \times 5 \cos 2.5^{\text{rad}} = \boxed{-23.51 \text{ W}}$$

$$i_8 = \frac{17.087}{8} \cos(25t - 33.15^\circ) \therefore$$

$$i_8(0.1) = 2.136 \cos(2.5^{\text{rad}} - 33.15^\circ) = -0.7338 \text{ A}$$

$$\therefore \mathbf{P}_{8,abs} = 0.7338^2 \times 8 = \boxed{4.307 \text{ W}};$$

$$\mathbf{I}_3 = \frac{17.087\angle -33.15^\circ}{3-j4} = 3.417\angle 19.98^\circ \text{ A}$$

$$\therefore i_3(0.1) = 3.417 \cos(2.5^{\text{rad}} + 19.98^\circ) = -3.272 \text{ A} \therefore$$

$$\mathbf{P}_{3,abc} = 3.272^2 \times 3 = \boxed{32.12 \text{ W}}$$

$$\mathbf{V}_c = -j4(3.417\angle 19.983^\circ) = 13.67\angle -70.02^\circ,$$

$$v_c(0.1) = 13.670 \cos(2.5^{\text{rad}} - 70.02^\circ) = 3.946 \text{ V}$$

$$\therefore \mathbf{P}_{c,abc} = 3.946(-3.272) = \boxed{-12.911 \text{ W}} \quad (\Sigma = 0)$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

6.

$$\mathbf{Z}_{in} = 4 + \frac{j5(10 - j5)}{10} = 4 + 2.5 + j5 = 6.5 + j5 \ \Omega$$

$$\therefore \mathbf{I}_s = \frac{100}{6.5 + j5} = 12.194 \angle -37.57^\circ \text{ A}$$

$$\therefore P_{s,abs} = -\frac{1}{2} \times 100 \times 12.194 \cos 37.57^\circ = -483.3 \text{ W}$$

$$P_{4,abs} = \frac{1}{2} (12.194)^2 4 = \boxed{297.4 \text{ W}},$$

$$P_{cabs} = \boxed{0}$$

$$\mathbf{I}_{10} = \frac{100}{6.5 + j5} \frac{j5}{10} = 6.097 \angle 52.43^\circ \text{ so}$$

$$P_{10,abs} = \frac{1}{2} (6.097)^2 \times 10 = \boxed{185.87 \text{ W}}$$

$$P_L = \boxed{0} \quad (\Sigma = 0)$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

7.

$$\mathbf{V} = (10 + j10) \frac{40 \angle 30^\circ}{5 \angle 50^\circ + 8 \angle -20^\circ} = 52.44 \angle 69.18^\circ \text{ V}$$

$$P_{10, \text{gen}} = \frac{1}{2} \times 10 \times 52.44 \cos 69.18^\circ = \boxed{93.20 \text{ W}}$$

$$P_{j10, \text{gen}} = \frac{1}{2} \times 10 \times 52.44 \cos (90^\circ - 69.18^\circ) = \boxed{245.08 \text{ W}}$$

$$P_{8 \angle -20^\circ \text{abs}} = \frac{1}{2} \left( \frac{52.44}{8} \right)^2 8 \cos (-20^\circ) = \boxed{161.51 \text{ W}} \quad (\Sigma_{\text{gen}} = \Sigma_{\text{abs}})$$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

8.

$$\mathbf{Z}_R = 3 + \frac{1}{0.1 - j0.3} = 3 + 1 + j3 = 4 + j3 \Omega$$

$$\text{Ignore } 30^\circ \text{ on } \mathbf{V}_s, \mathbf{I}_R = 5 \frac{2 + j5}{6 + j8}, |\mathbf{I}_R| = \frac{5\sqrt{29}}{10}$$

$$(a) \quad P_{3\Omega} = \frac{1}{2} \left( \frac{5\sqrt{29}}{10} \right)^2 \times 3 = \boxed{10.875 \text{ W}}$$

$$(b) \quad \mathbf{V}_s = 5 \angle 0^\circ \frac{(2 + j5)(4 + j3)}{6 + j8} = 13.463 \angle 51.94^\circ \text{ V}$$

$$\therefore P_{s,gen} = \frac{1}{2} \times 13.463 \times 5 \cos 51.94^\circ = \boxed{20.75 \text{ W}}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

9.

$$P_{j10} = P_{-j5} = 0,$$

$$\frac{V_{10} - 50}{j10} + \frac{V_{10}}{10} + \frac{V_{10} - j50}{-j5} = 0$$

$$\therefore V_{10}(-j0.1 + 0.1 + j0.2) + j5 + 10 = 0$$

$$\therefore V_{10} = 79.06 \angle 16.57^\circ \text{ V}$$

$$P_{10\Omega} = \frac{1}{2} \frac{79.06^2}{10} = 312.5 \text{ W};$$

$$I_{50} = \frac{79.06 \angle 161.57^\circ - 50}{j10} = 12.75 \angle 78.69^\circ \text{ A}$$

$$\therefore P_{50V} = \frac{1}{2} \times 50 \times 12.748 \cos 78.69^\circ = 62.50 \text{ W}$$

$$I_{j50} = \frac{79.06 \angle 161.57^\circ - j50}{-j5} = 15.811 \angle -7.57^\circ :$$

$$P_{j50} = \frac{1}{2} \times 50 \times 15.811 \cos (90^\circ + 71.57^\circ) = -375.0 \text{ W}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

10.

$$\frac{\mathbf{V}_x - 20}{2} + \frac{\mathbf{V}_x - \mathbf{V}_c}{3} = 2\mathbf{V}_c,$$

$$3\mathbf{V}_x - 60 + 2\mathbf{V}_x - 2\mathbf{V}_c = 12\mathbf{V}_c$$

$$\therefore 5\mathbf{V}_x - 14\mathbf{V}_c = 60, \frac{\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_x}{3} + \frac{\mathbf{V}_c}{-j2} = 0$$

$$\therefore 2\mathbf{V}_c - 2\mathbf{V}_x + j3\mathbf{V}_c = 0, -2\mathbf{V}_x + (2 + j3)\mathbf{V}_c = 0$$

$$\mathbf{V}_x = \frac{\begin{vmatrix} 60 & -14 \\ 0 & 2 + j3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -14 \\ -2 & 2 + j3 \end{vmatrix}} = \frac{120 + j180}{10 + j15 - 28} = 9.233 \angle -83.88^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_c = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 60 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{-18 + j15} = 5.122 \angle -140.9^\circ \text{ V} \therefore$$

$$P_{gen} = \frac{1}{2} \times 9.233 \times 2 \times 5.122 \cos(-83.88^\circ + 140.19^\circ) = \boxed{26.23 \text{ W}}$$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

11.

(a)  $X_{in} = 0 \therefore \mathbf{Z}_L = \boxed{\mathbf{R}_{th} + j0}$

(b)  $R_L, X_L$  independent  $\therefore \boxed{\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_{th}^* = \mathbf{R}_{th} - jX_{th}}$

(c)  $R_L$  fixed  $\therefore P_L = \frac{1}{2} \frac{|V_{th}|^2}{(\mathbf{R}_{th} + \mathbf{R}_L)^2 + (X_{th} + X_L)^2} \times \mathbf{R}_L \therefore \boxed{\mathbf{Z}_L = \mathbf{R}_L - jX_{th}}$

(d)  $X_L$  fixed, Let  $X_L + X_{th} = a \therefore f = \frac{2P_L}{|\mathbf{V}_{th}|^2} = \frac{\mathbf{R}L}{(\mathbf{R}_{th} + \mathbf{R}_L)^2 + a^2}$

$$\frac{df}{dR_L} = \frac{\mathbf{R}_{th} + \mathbf{R}_L^2 + a^2 - 2\mathbf{R}_L(\mathbf{R}_{th} + \mathbf{R}_L)}{[(\mathbf{R}_{th} + \mathbf{R}_L)^2 + a^2]^2} = 0$$

$$\mathbf{R}_{th}^2 + 2\mathbf{R}_{th}\mathbf{R}_L + \mathbf{R}_L^2 + a^2 - 2\mathbf{R}_{th}\mathbf{R}_L = 2\mathbf{R}_L^2 = 0$$

$$\therefore \mathbf{R}_L = \sqrt{\mathbf{R}_{th}^2 + a^2} = \boxed{\sqrt{\mathbf{R}_{th}^2 + (X_{th} + X_L)^2}}$$

(e)  $X_L = 0 \therefore \mathbf{R}_L = \boxed{\sqrt{\mathbf{R}_{th}^2 + X_{th}^2}} = |\mathbf{Z}_{th}|$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

12.

$$\mathbf{V}_{th} = 120 \frac{-10}{10 + j5} = 107.33 \angle -116.57^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{Z}_{th} = \frac{-j10(10 + j15)}{10 + j5} = 8 - j14 \Omega$$

(a)  $\therefore \mathbf{Z}_L = 8 + j15 \Omega$

(b)  $\mathbf{I}_L = \frac{107.33 \angle -116.57^\circ}{16} \therefore$

$$P_{L,\max} = \frac{1}{2} \left( \frac{107.33}{16} \right)^2 \times 8 = 180 \text{ W}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

13.

$$R_L = |\mathbf{Z}_{th}| \therefore R_L = \sqrt{8^2 + 14^2} = 16.125 \Omega$$

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{107.33^2}{(8 + 16.125)^2 + 14^2} \times 16.125 = 119.38 \text{ W}$$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

14.

$$-j9.6 = -4.8I_x - j1.92 I_x - +4.8I_x$$

$$\therefore I_x = \frac{9.6}{1.92} = 5$$

$$\therefore V = (0.6 \times 5)8 = 24 \text{ V}$$

$$\therefore P_o = \frac{1}{2} \times 24 \times 1.6 \times 5 = 96 \text{ W (gen)}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

15.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbf{Z}_{th} &= 80 \parallel j60 = \frac{j480}{80 + j60} \frac{80 - j60}{80 - j60} \\ &= 28.8 + j38.4 \, \Omega \therefore \mathbf{Z}_{L_{\max}} = \boxed{28.8 - j38.4 \, \Omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \mathbf{V}_{th} &= 5(28.8 + j38.4) = 144 + j192 \, \text{V}, \\ \therefore \mathbf{I}_L &= \frac{144 + j192}{2 \times 28.8} \\ \text{and } P_{L_{\max}} &= \frac{1}{2} \frac{144^2 + 192^2}{4 \times 28.8^2} \times 28.8 = \boxed{250 \, \text{W}} \end{aligned}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

16.  $\mathbf{Z}_{\text{eq}} = (6 - j8) \parallel (12 + j9) = 8.321 \angle -19.44^\circ \text{ W}$

$$\mathbf{V}_{\text{eq}} = (5 \angle -30^\circ) (8.321 \angle -19.44^\circ) = 41.61 \angle -49.44^\circ \text{ V}$$

$$P_{\text{total}} = \frac{1}{2} (41.61)(5) \cos (-19.44^\circ) = 98.09 \text{ W}$$

$$\mathbf{I}_{6-j8} = \mathbf{V}_{\text{eq}} / (6 - j8) = 4.161 \angle 3.69^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{4+j2} = \mathbf{I}_{8+j7} = \mathbf{V}_{\text{eq}} / 12 + j9 = 2.774 \angle -86.31^\circ \text{ A}$$

$$P_{6-j8} = \frac{1}{2} (41.61)(4.161) \cos (-49.44^\circ - 3.69^\circ) = 51.94 \text{ W}$$

$$P_{4+j2} = \frac{1}{2} (2.774)^2 (4) = 15.39 \text{ W}$$

$$P_{8+j7} = \frac{1}{2} (2.774)^2 (8) = 30.78 \text{ W}$$

Check:  $\Sigma = 98.11 \text{ W}$  (okay)



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

17.

$$\mathbf{V}_{th} = 100 \frac{j10}{20 + j10} = 20 + j40, \mathbf{Z}_{th} = \frac{j10(20)}{20 + j10} = 4 + j8 \Omega$$

$$\therefore R_L = |\mathbf{Z}_{th}| \therefore R_L = 8.944 \Omega$$

$$\therefore P_{L,\max} = \frac{1}{2} \frac{20^2 + 40^2}{(4 + 8.944)^2 + 64} \times 8.944 = 38.63 \text{ W}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

18. We may write a single mesh equation:  $170 \angle 0^\circ = (30 + j10) \mathbf{I}_1 - (10 - j50)(-\lambda \mathbf{I}_1)$   
Solving,

$$\mathbf{I}_1 = \frac{170 \angle 0^\circ}{30 + j10 + 10\lambda - j50\lambda}$$

- (a)  $\lambda = 0$ , so  $\mathbf{I}_1 = \frac{170 \angle 0^\circ}{30 + j10} = 5.376 \angle -18.43^\circ \text{ A}$  and, with the same current flowing

through both resistors in this case,

$$P_{20} = \frac{1}{2} (5.376)^2 (20) = 289.0 \text{ W}$$

$$P_{10} = \frac{1}{2} (5.376)^2 (10) = 144.5 \text{ W}$$

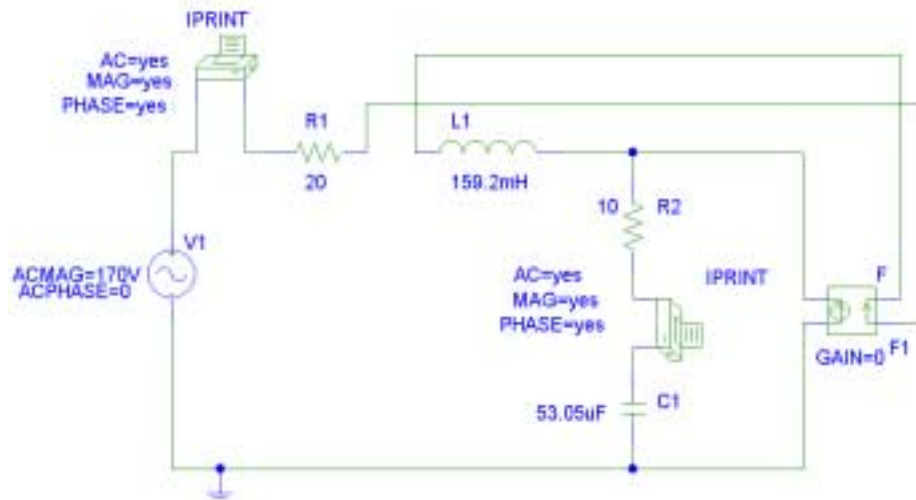
- (b)  $\lambda = 1$ , so  $\mathbf{I}_1 = \frac{170 \angle 0^\circ}{40 - j40} = 3.005 \angle 45^\circ \text{ A}$

$$P_{20} = \frac{1}{2} (3.005)^2 (20) = 90.30 \text{ W}$$

The current through the  $10\text{-}\Omega$  resistor is  $\mathbf{I}_1 + \lambda \mathbf{I}_1 = 2 \mathbf{I}_1 = 6.01 \angle 45^\circ$  so

$$P_{10} = \frac{1}{2} (6.01)^2 (10) = 180.6 \text{ W}$$

(c)



|           |              |              |
|-----------|--------------|--------------|
| (a)       |              |              |
| FREQ      | IM(V_PRINT3) | IP(V_PRINT3) |
| 6.000E+01 | 5.375E+00    | -1.846E+01   |
| FREQ      | IM(V_PRINT4) | IP(V_PRINT4) |
| 6.000E+01 | 5.375E+00    | -1.846E+01   |
| (b)       |              |              |
| FREQ      | IM(V_PRINT3) | IP(V_PRINT3) |
| 6.000E+01 | 6.011E+00    | 4.499E+01    |
| FREQ      | IM(V_PRINT4) | IP(V_PRINT4) |
| 6.000E+01 | 3.006E+00    | 4.499E+01    |

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

19. (a) Waveform (a):  $I_{\text{avg}} = \frac{(10)(1) + (-5)(1) + 0(1)}{3} = 1.667 \text{ A}$

Waveform (b):  $I_{\text{avg}} = \frac{\frac{1}{2}(20)(1) + 0(1)}{2} = 5 \text{ A}$

Waveform (c):

$$I_{\text{avg}} = \frac{1}{1 \times 10^{-3}} \int_0^{10^{-3}} 8 \sin \frac{2\pi t}{4 \times 10^{-3}} dt = - (8 \times 10^3) \left( \frac{4 \times 10^{-3}}{2\pi} \right) \cos \left( \frac{\pi t}{2 \times 10^{-3}} \right) \Big|_0^{10^{-3}}$$

$$= - \frac{16}{\pi} (0 - 1) = \frac{16}{\pi} \text{ A}$$

(b) Waveform (a):  $I_{\text{avg}}^2 = \frac{(100)(1) + (25)(1) + (0)(1)}{3} = 41.67 \text{ A}^2$

Waveform (b):  $i(t) = -20 \times 10^3 t + 20$   
 $i^2(t) = 4 \times 10^8 t^2 - 8 \times 10^5 t + 400$

$$I_{\text{avg}}^2 = \frac{1}{2 \times 10^{-3}} \int_0^{10^{-3}} (4 \times 10^8 t^2 - 8 \times 10^5 t + 400) dt$$

$$= \frac{1}{2 \times 10^{-3}} \left[ \frac{4 \times 10^8}{3} (10^{-3})^3 - \frac{8 \times 10^5}{2} (10^{-3})^2 + 400 (10^{-3}) \right] = \frac{0.1333}{2 \times 10^{-3}} = 66.67 \text{ A}^2$$

Waveform (c):

$$I_{\text{avg}}^2 = \frac{1}{1 \times 10^{-3}} \int_0^{10^{-3}} 64 \sin^2 \frac{2\pi t}{4 \times 10^{-3}} dt = (64 \times 10^3) \left[ \frac{t}{2} - \frac{\sin \pi \times 10^3 t}{2\pi \times 10^3} \right] \Big|_0^{10^{-3}}$$

$$= (64 \times 10^3) \left[ \frac{10^{-3}}{2} - \frac{\sin \pi}{2\pi \times 10^3} \right] = 32 \text{ A}^2$$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

20. At  $\omega = 120\pi$ ,  $1\text{ H} \rightarrow j377\ \Omega$ , and  $4\ \mu\text{F} \rightarrow -j663.1\ \Omega$   
 Define  $\mathbf{Z}_{\text{eff}} = j377 \parallel -j663.1 \parallel 10\ 000 = 870.5 \angle 85.01^\circ\ \Omega$

$$\mathbf{V}_{2.5k} = \frac{(400\sqrt{2} \angle -9^\circ) 2500}{2500 + 870.5 \angle 85.01^\circ} = 520.4 \angle -27.61^\circ\ \text{V}$$

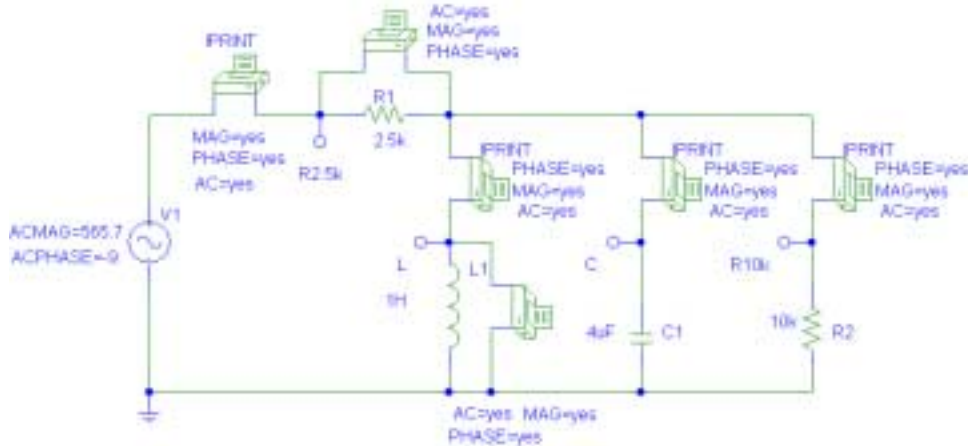
$$\mathbf{V}_{10k} = \frac{(400\sqrt{2} \angle -9^\circ)(870.5 \angle 85.01^\circ)}{2500 + 870.5 \angle 85.01^\circ} = 181.2 \angle 57.40^\circ\ \text{V}$$

|   |           |                                      |
|---|-----------|--------------------------------------|
| Thus, $P_{2.5k} = \frac{1}{2} (520.4)^2 / 2\ 500$ | = 54.16 W |                                      |
| $P_{10k} = \frac{1}{2} (181.2)^2 / 10\ 000$       | = 1.642 W |                                      |
| $P_{1H}$  | = 0       |                                      |
| $P_{4\mu\text{F}}$                                | = 0       | (A total absorbed power of 55.80 W.) |

To check, the average power delivered by the source:

$$\mathbf{I}_{\text{source}} = \frac{400\sqrt{2} \angle -9^\circ}{2500 + 870.5 \angle 85.01^\circ} = 0.2081 \angle -27.61^\circ\ \text{A}$$

and  $P_{\text{source}} = \frac{1}{2} (400\sqrt{2})(0.2081) \cos(-9^\circ + 27.61^\circ) = 55.78\ \text{W}$  (checks out).



|           |                    |                    |           |               |               |
|-----------|--------------------|--------------------|-----------|---------------|---------------|
| FREQ      | IM(V_PRINT1)       | IP(V_PRINT1)       | FREQ      | VM(L,0)       | VP(L,0)       |
| 6.000E+01 | 2.081E-01          | -2.760E+01         | 6.000E+01 | 1.812E+02     | 5.740E+01     |
| FREQ      | VM(R2_5k,\$N_0002) | VP(R2_5k,\$N_0002) | FREQ      | IM(V_PRINT11) | IP(V_PRINT11) |
| 6.000E+01 | 5.204E+02          | -2.760E+01         | 6.000E+01 | 2.732E-01     | 1.474E+02     |
| FREQ      | IM(V_PRINT2)       | IP(V_PRINT2)       | FREQ      | IM(V_PRINT12) | IP(V_PRINT12) |
| 6.000E+01 | 4.805E-01          | -3.260E+01         | 6.000E+01 | 1.812E-02     | 5.740E+01     |

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

21.

(a)  $v = 10 + 9 \cos 100t + 6 \sin 100t$

$$\therefore V_{eff} = \sqrt{100 + \frac{1}{2} \times 81 + \frac{1}{2} \times 36} = \sqrt{158.5} = \boxed{12.590 \text{ V}}$$

(b)  $F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{4}(10^2 + 20^2 + 10^2)} = \sqrt{150} = \boxed{12.247}$

(c)  $F_{avg} = \frac{(10)(1) + (20)(1) + (10)(1)}{4} = \frac{40}{4} = \boxed{10}$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

22.

(a)  $g(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(100t - 120^\circ)$

$$3 \angle 0^\circ + 4 \angle -120^\circ = 3.606 \angle -73.90^\circ \text{ so } G_{\text{eff}} = \sqrt{4 + \frac{3.606^2}{2}} = \boxed{3.240}$$

(b)  $h(t) = 2 + 3\cos 100t + 4\cos(101t - 120^\circ)$

$$\therefore H_{\text{eff}} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}3^2 + \frac{1}{2}4^2} = \sqrt{16.5} = \boxed{4.062}$$

(c)  $f(t) = 100t, 0 < t < 0.1 \therefore F_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{0.3} \int_0^{0.1} 10^6 t^2 dt}$

$$= \sqrt{\frac{10}{3} \times 10^6 \times \frac{1}{3} \times 10^{-3}} = \boxed{33.33}$$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

23.  $f(t) = (2 - 3\cos 100t)^2$

(a)  $f(t) = 4 - 12\cos 100t + 9\cos^2 100t$

$\therefore f(t) = 4 - 12\cos 100t + 4.5 + 4.5\cos 200t \therefore F_{av} = 4 + 4.5 = 8.5$

(b)  $F_{eff} = \sqrt{8.5^2 + \frac{1}{2} \times 12^2 + \frac{1}{2} \times 4.5^2} = 12.43$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

$$24. \quad (a) \quad i_{\text{eff}} = \left[ \frac{1}{3} (10^2 + (-5)^2) + 0 \right]^{\frac{1}{2}} = \boxed{6.455 \text{ A}}$$

$$(b) \quad i_{\text{eff}} = \left[ \frac{1}{2} \left( \int_0^1 [-20t + 20] dt \right) + 0 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = \boxed{2.236 \text{ A}}$$

$$(c) \quad i_{\text{eff}} = \left[ \frac{1}{1} \left( \int_0^1 8 \sin \left( \frac{2\pi}{4} t \right) dt \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left[ -8 \left( \frac{2}{\pi} \right) \cos \left( \frac{\pi t}{2} \right) \right]_0^1} = \boxed{2.257 \text{ A}}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

25.

(a)  $A = B = 10\text{V}$ ,  $C = D = 0 \therefore 10\angle 0^\circ + 10\angle -45^\circ = 18.48\angle -22.50^\circ$

$$\therefore P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 18.48^2 = 42.68 \text{ W}$$

(b)  $A = C = 10\text{V}$ ,  $B = D = 0$ ,  $v_s = 10\cos 10t + 10\cos 40t$ ,

$$P = \frac{1}{2} \frac{10^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{10^2}{4} = 25 \text{ W}$$

(c)  $v_s = 10\cos 10t - 10\sin (10t + 45^\circ) \rightarrow 10 - 10\angle -45^\circ = 7.654\angle 67.50^\circ$

$$\therefore P = \frac{1}{2} \frac{7.654^2}{4} = 7.322 \text{ W}$$

(d)  $v = 10\cos 10t + 10\sin (10t + 45^\circ) + 10\cos 40t$ ;

$$10\angle 0^\circ + 10\angle -45^\circ = 18.48\angle -22.50^\circ$$

$$\therefore P = \frac{1}{2} \times 18.48^2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{1}{4} = 55.18 \text{ W}$$

(e)  $// + 10dc \therefore P_{av} = 55.18 + \frac{10^2}{4} = 80.18 \text{ W}$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

26.  $\mathbf{Z}_{eq} = R \parallel j0.3\omega = \frac{j0.3R\omega}{R + j0.3R\omega}$ . By voltage division, then, we write:

$$\mathbf{V}_{100\text{mH}} = 120\angle 0 \frac{j0.1\omega}{j0.1\omega + \frac{j0.3R\omega}{R + j0.3\omega}} = 120\angle 0 \frac{-0.03\omega^2 + j0.1\omega R}{-0.03\omega^2 + j0.4R\omega}$$

$$\mathbf{V}_{300\text{mH}} = 120\angle 0 \frac{\frac{j0.3R\omega}{R + j0.3\omega}}{j0.1\omega + \frac{j0.3R\omega}{R + j0.3\omega}} = 120\angle 0 \frac{j36R\omega}{-0.03\omega^2 + j0.4R\omega}$$

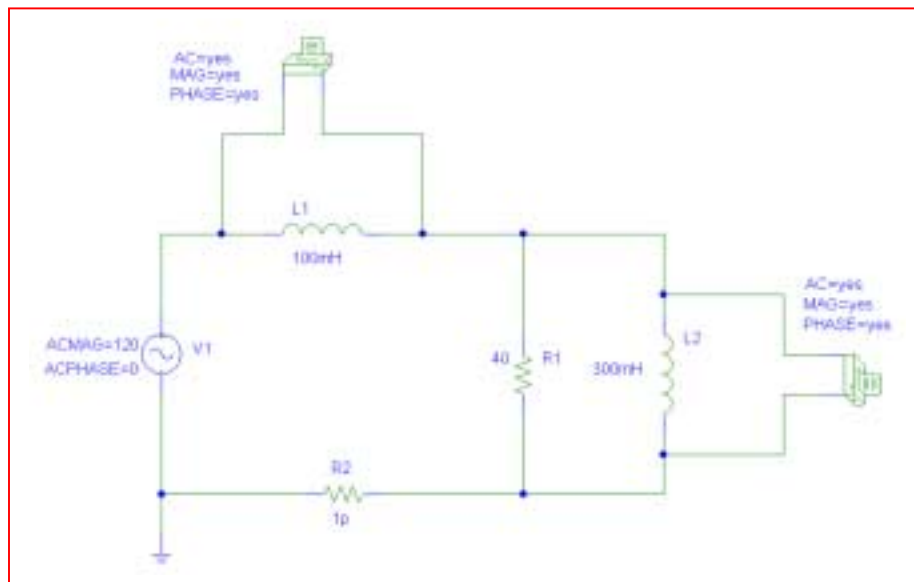
(a) We're interested in the value of R that would lead to equal voltage magnitudes, or

$$|j36R\omega| = |(120)(-0.03\omega^2 + j0.1\omega R)|$$

Thus,  $36R\omega = \sqrt{12.96\omega^4 + 144\omega^2 R^2}$  or  $R = 0.1061 \omega$

(b) Substituting into the expression for  $\mathbf{V}_{100\text{mH}}$ , we find that  $\mathbf{V}_{100\text{mH}} = 73.47 \text{ V}$ , independent of frequency.

To verify with PSpice, simulate the circuit at 60 Hz, or  $\omega = 120\pi \text{ rad/s}$ , so  $R = 40 \Omega$ . We also include a miniscule ( $1 \text{ p}\Omega$ ) resistor to avoid inductor loop warnings. We see from the simulation results that the two voltage magnitudes are indeed the same.



```
FREQ      VM($N_0002,$N_0003)VP($N_0002,$N_0003)
6.000E+01  7.349E+01  -3.525E+01

FREQ      VM($N_0001,$N_0002)VP($N_0001,$N_0002)
6.000E+01  7.347E+01  3.527E+01
```

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

27.

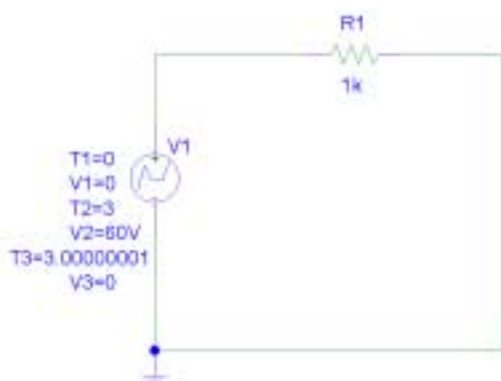
(a)  $V_{av,1} = 30V$

$$V_{av,2} = \frac{1}{3}(10 + 30 + 50) = 30V$$

(b)  $V_{eff,1} = \sqrt{\frac{1}{3} \int_0^3 (20t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 400 \times \frac{1}{3} \times 27} = \sqrt{1200} = 34.64V$

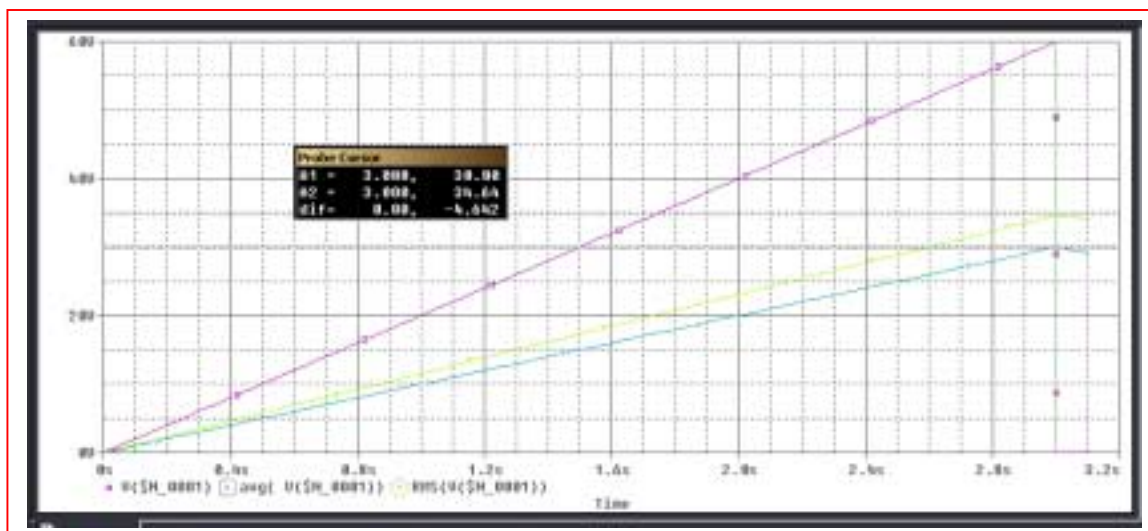
$$V_{eff,2} = \sqrt{\frac{1}{3}(10^2 + 30^2 + 50^2)} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 3500} = 34.16V$$

(c) PSpice verification for Sawtooth waveform of Fig. 11.40a:



### Probe Cursor

|      |        |        |
|------|--------|--------|
| A1 = | 3.000, | 30.00  |
| A2 = | 3.000, | 34.64  |
| dif= | 0.00,  | -4.642 |



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

$$28. \quad \mathbf{Z}_{\text{eff}} = R \parallel \left( \frac{-j10^6}{3\omega} \right) = \frac{-jR10^6}{3\omega R - j10^6}$$

$$\mathbf{I}_{\text{SRC}} = \frac{120\angle 0}{-j\frac{10^6}{\omega} - j\frac{R10^6}{3\omega R - j10^6}} = \frac{120\omega(3\omega R - j10^6)}{-j10^6(3\omega R - j10^6) - j\omega R10^6}$$

$$\mathbf{I}_{3\mu\text{F}} = \mathbf{I}_{\text{SRC}} \frac{R}{R - j\frac{10^6}{3\omega}}$$

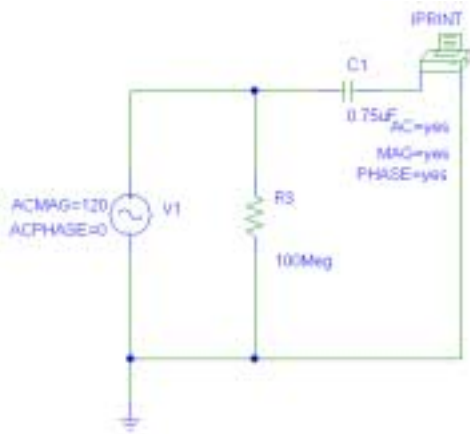
(a) For the two current magnitudes to be equal, we must have  $\left| \frac{R}{R - j\frac{10^6}{3\omega}} \right| = 1$ . This is

only true when  $R = \infty$ ; otherwise, current is shunted through the resistor and the two capacitor currents will be unequal.

(b) In this case, the capacitor current is

$$120\angle 0 \frac{1}{-j\frac{10^6}{\omega} - j\frac{10^6}{3\omega}} = j90\omega \mu\text{A}, \text{ or } 90\omega \cos(\omega t + 90^\circ) \mu\text{A}$$

(c) PSpice verification: set  $f = 60$  Hz, simulate a single  $0.75\text{-}\mu\text{F}$  capacitor, and include a  $100\text{-M}\Omega$  resistor in parallel with the capacitor to prevent a floating node. This should result in a rms current amplitude of  $33.93$  mA, which it does.



| FREQ      | IM(V_PRINT3) | IP(V_PRINT3) |
|-----------|--------------|--------------|
| 6.000E+01 | 3.393E-02    | 9.000E+01    |



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

29.

$$v(t) = 10t[u(t) - u(t-2)] + 16e^{-0.5(t-3)} [u(t-3) - u(t-5)] \text{ V}$$

Find eff. value separately

$$V_{1,eff} = \sqrt{\frac{1}{5} \int_0^2 100t^2 dt} = \sqrt{\frac{20}{3}} \times 8 = 7.303$$

$$V_{2,eff} = \sqrt{\frac{1}{5} \int_3^5 256e^{-(t-3)} dt} = \sqrt{\frac{256}{5} e^3 (-e^{-t})_3^5} = 6.654$$

$$\therefore V_{eff} = \sqrt{7.303^2 + 6.654^2} = 9.879$$

$$\begin{aligned} V_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{5} \left[ \int_0^2 100t^2 dt + \int_3^5 256e^3 e^{-t} dt \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} \left[ \frac{100}{3} \times 8 + 256e^3 (e^{-3} - e^{-5}) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} \left[ \frac{800}{3} + 256(1 - e^{-2}) \right]} = 9.879 \text{ V OK} \end{aligned}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

30. The peak instantaneous power is 250 mW. The combination of elements yields

$$\mathbf{Z} = 1000 + j1000 \, \Omega = 1414 \angle 45^\circ \, \Omega.$$

Arbitrarily designate  $\mathbf{V} = V_m \angle 0$ , so that  $\mathbf{I} = \frac{V_m \angle 0}{\mathbf{Z}} = \frac{V_m \angle -45^\circ}{1414} \text{ A}.$

We may write  $p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi + \frac{1}{2} V_m I_m \cos (2\omega t + \phi)$  where  $\phi$  = the angle of the current ( $-45^\circ$ ). This function has a maximum value of  $\frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi + \frac{1}{2} V_m I_m$ .

Thus,  $0.250 = \frac{1}{2} V_m I_m (1 + \cos \phi) = \frac{1}{2} (1414) I_m^2 (1.707)$   
and  $I_m = 14.39 \text{ mA}.$

In terms of rms current, the largest rms current permitted is  $14.39 / \sqrt{2} = 10.18 \text{ mA rms}.$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

31.  $\mathbf{I} = 4\angle 35^\circ \text{ A rms}$

(a)  $\mathbf{V} = 20\mathbf{I} + 80\angle 35^\circ \text{ V rms}, P_{s,gen} = 80 \times 10 \cos 35^\circ = \boxed{655.3 \text{ W}}$

(b)  $P_R = |\mathbf{I}|^2 R = 16 \times 20 = \boxed{320 \text{ W}}$

(c)  $P_{Load} = 655.3 - 320 = \boxed{335.3 \text{ W}}$

(d)  $AP_{s,gen} = 80 \times 10 = \boxed{800 \text{ VA}}$

(e)  $AP_R = P_R = \boxed{320 \text{ VA}}$

(f)  $\mathbf{I}_L = 10\angle 0^\circ - 4\angle 35^\circ = 7.104\angle -18.84^\circ \text{ A rms}$   
 $\therefore AP_L = 80 \times 7.104 = \boxed{568.3 \text{ VA}}$

(g)  $PF_L = \cos \theta_L = \frac{P_L}{AP_L} = \frac{335.3}{568.3} = \boxed{0.599}$

since  $\mathbf{I}_L$  lags  $\mathbf{V}$ ,  $PF_L$  is lagging



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

32.

$$(a) \quad I_s = \frac{120}{4 + \frac{j192}{12 + j16}} = 9.214 \angle -26.25^\circ \text{ A rms}$$

$$\therefore \text{PF}_s = \cos 26.25 = 0.8969 \text{ lag}$$

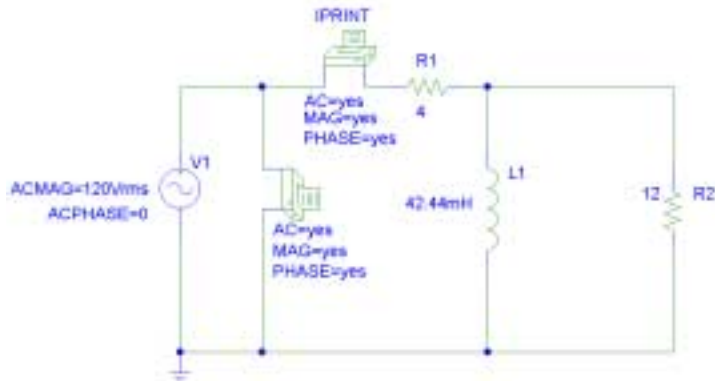
$$(b) \quad P_s = 120 \times 9.214 \times 0.8969 = 991.7 \text{ W}$$

$$(c) \quad Z_L = 4 + \frac{j48}{3 + j4} = 4 + \frac{1}{25} (192 + j144)$$

$$\therefore Z_L = 11.68 + j5.76 \Omega, Y_L = \frac{11.68 - j5.76}{11.68^2 + 5.76^2}$$

$$\therefore j120\pi C = \frac{j5.76}{11.68^2 + 5.76^2}, C = 90.09 \mu\text{F}$$

(d) PSpice verification



```
FREQ      VM($N_0003,0)  VP($N_0003,0)
6.000E+01  1.200E+02      0.000E+00
```

```
FREQ      IM(V_PRINT1)  IP(V_PRINT1)
6.000E+01  9.215E+00    -2.625E+01
```

; (a) and (b) are correct

*Next, add a 90.09- $\mu\text{F}$  capacitor in parallel with the source:*

```
FREQ      IM(V_PRINT1)  IP(V_PRINT1)
6.000E+01  8.264E+00    -9.774E-05
```

; (c) is correct ( $-9.8 \times 10^{-5}$  degrees is essentially zero, for unity PF).

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

33.

$$\mathbf{Z}_A = 5 + j2\Omega, \mathbf{Z}_B = 20 - j10\Omega, \mathbf{Z}_C = 10\angle 30^\circ \Omega = 8.660 + j5\Omega$$

$$\mathbf{Z}_D = 10\angle -60^\circ = 5 - j8.660\Omega$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 200 & -20 + j10 \\ 0 & 33.66 - j13.660 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 25 - j8 & -20 + j10 \\ -20 + j10 & 33.66 - j13.660 \end{vmatrix}} = \frac{7265\angle 22.09^\circ}{480.9\angle -26.00^\circ} = 15.11\angle 3.908^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 25 - j8 & 200 \\ -20 + j10 & 0 \end{vmatrix}}{480.9\angle -26.00^\circ} = \frac{200(20 - j10)}{480.9\angle 20.00^\circ} = 9.300\angle -0.5681^\circ \text{ A rms}$$

$$\text{AP}_A = |\mathbf{I}_1|^2 |\mathbf{Z}_A| = 15.108^2 \sqrt{29} = \boxed{1229 \text{ VA}}$$

$$\text{AP}_B = |\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2|^2 |\mathbf{Z}_B| = 5.881^2 \times 10\sqrt{5} = \boxed{773.5 \text{ VA}}$$

$$\text{AP}_C = |\mathbf{I}_2| 2 |\mathbf{Z}_C| = 9.3^2 \times 10 = \boxed{86.49 \text{ VA}}$$

$$\text{AP}_D = |\mathbf{I}_2|^2 |\mathbf{Z}_D| = 9.3^2 \times 10 = \boxed{864.9 \text{ VA}}$$

$$\text{AP}_S = 200|\mathbf{I}_1| = 200 \times 15.108 = \boxed{3022 \text{ VA}}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

34. Perhaps the easiest approach is to consider the load and the compensation capacitor separately. The load draws a complex power  $\mathbf{S}_{\text{load}} = P + jQ$ . The capacitor draws a purely reactive complex power  $\mathbf{S}_C = -jQ_C$ .

$$\theta_{\text{load}} = \tan^{-1}(Q/P), \text{ or } Q = P \tan \theta_{\text{load}}$$

$$Q_C = S_C = V_{\text{rms}} \left| \frac{\mathbf{V}_{\text{rms}}}{(-j / \omega C)} \right| = \left| \omega C V_{\text{rms}}^2 \right| = \omega C V_{\text{rms}}^2$$

$$\mathbf{S}_{\text{total}} = \mathbf{S}_{\text{load}} + \mathbf{S}_C = P + j(Q - Q_C)$$

$$\theta_{\text{new}} = \text{ang}(\mathbf{S}_{\text{total}}) = \tan^{-1} \left( \frac{Q - Q_C}{P} \right), \text{ so that } Q - Q_C = P \tan \theta_{\text{new}}$$

Substituting, we find that  $Q_C = P \tan \theta_{\text{load}} - P \tan \theta_{\text{new}}$   
or

$$\omega C V_{\text{rms}}^2 = P (\tan \theta_{\text{load}} - \tan \theta_{\text{new}})$$

Thus, noting that  $\theta_{\text{old}} = \theta_{\text{load}}$ ,

$$C = \frac{P (\tan \theta_{\text{old}} - \tan \theta_{\text{new}})}{\omega V_{\text{rms}}^2}$$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

35.  $\mathbf{Z}_1 = 30\angle 15^\circ \Omega$ ,  $\mathbf{Z}_2 = 40\angle 40^\circ \Omega$

(a)  $\mathbf{Z}_{tot} = 30\angle 15^\circ + 40\angle 40^\circ = 68.37\angle 29.31^\circ \Omega$   
 $\therefore \text{PF} = \cos 29.3^\circ = 0.8719 \text{ lag}$

(b)  $\mathbf{Z}_{tot} = 68.37\angle 29.31^\circ = 59.62 + j33.48$   
 $\text{PF}_{new} = 0.9 \text{ lag}$   
 $\therefore \theta_{new} = \cos^{-1} 0.9 = 25.84^\circ$   
 $\tan 25.84^\circ = 0.4843 = \frac{X_{new}}{59.62} \therefore X_{new} = 28.88 \Omega$   
 $\therefore 33.48 - \frac{1}{100\pi C} = 28.88,$

$$C = 691.8 \mu\text{F}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

36.  $\theta_1 = \cos^{-1}(0.92) = 23.07^\circ$ ,  $\theta_2 = \cos^{-1}(0.8) = 36.87^\circ$ ,  $\theta_3 = 0$

$$\mathbf{S}_1 = \frac{100 \angle 23.07^\circ}{0.92} = 100 + j42.59 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_2 = \frac{250 \angle 36.87^\circ}{0.8} = 250 + j187.5 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_3 = \frac{500 \angle 0^\circ}{1} = 500 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_{\text{total}} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 = 500 + j230.1 \text{ VA} = 550.4 \angle 24.71^\circ \text{ VA}$$

$$(a) \mathbf{I}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{S}_{\text{total}}}{V_{\text{eff}}} = \frac{550.4}{115} = 4.786 \text{ A rms}$$

$$(b) \text{ PF of composite load} = \cos(24.71^\circ) = 0.9084 \text{ lagging}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

37.

$$AP_L = 10,000 \text{ VA}, \text{PF}_L = 0.8 \text{ lag}, |\mathbf{I}_L| = 40 \text{ A rms}$$

$$\text{Let } \mathbf{I}_L = 40 \angle 0^\circ \text{ A rms}; P_L = 10,000 \times 0.8 = 8000 \text{ W}$$

$$\text{Let } \mathbf{Z}_L = R_L + jX_L \therefore R_L = \frac{8000}{40^2} = 5 \Omega$$

$$\cos \theta_L = 0.8 \text{ lag} \therefore \theta_L = \cos^{-1} 0.8 = 36.87^\circ$$

$$\therefore X_L = 5 \tan 36.87^\circ = 3.75 \Omega, \mathbf{Z}_L = 5 + j3.75, \mathbf{Z}_{tot} = 5.2 + j3.75 \Omega$$

$$\therefore \mathbf{V}_s = 40(5.2 + j3.75) = 256.4 \angle 35.80^\circ \text{ V}; \mathbf{Y}_{tot} = \frac{1}{5.2 + j3.75}$$

$$= 0.12651 - j0.09124 \text{ S}, \mathbf{Y}_{new} = 0.12651 + j(120\pi C - 0.09124),$$

$$\text{PF}_{new} = 0.9 \text{ lag}, \theta_{new} = 25.84^\circ \therefore \tan 25.84^\circ = 0.4843$$

$$= \frac{0.09124 - 120\pi C}{0.12651} \therefore$$

$$C = \boxed{79.48 \mu\text{F}}$$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

38.  $\mathbf{Z}_{\text{eff}} = j100 + j300 \parallel 200 = 237 \angle 54.25^\circ$ . PF =  $\cos 54.25^\circ = 0.5843$  *lagging*.

(a) Raise PF to 0.92 *lagging* with series capacitance

$$\mathbf{Z}_{\text{new}} = j100 + jX_C + j300 \parallel 200 = 138.5 + j(192.3 + X_C) \Omega$$

$$\tan^{-1} \left( \frac{192.3 + X_C}{138.5} \right) = \cos^{-1} 0.92 = 23.07^\circ$$

Solving, we find that  $X_C = -133.3 \Omega = -1/\omega C$ , so that  $C = 7.501 \mu\text{F}$

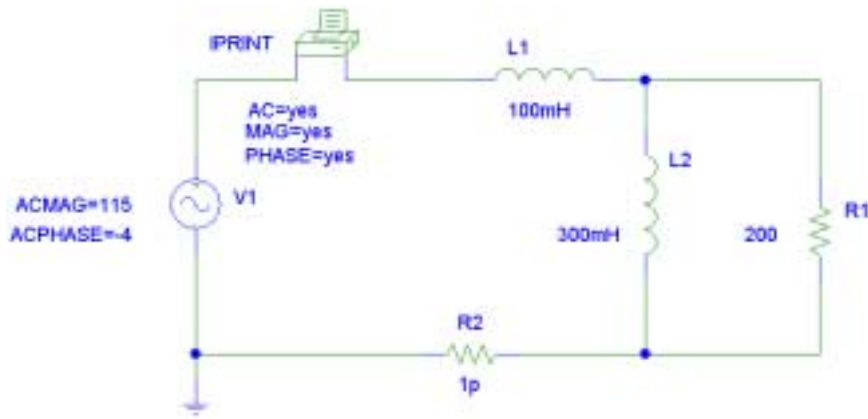
(b) Raise PF to 0.92 *lagging* with parallel capacitance

$$\mathbf{Z}_{\text{new}} = j100 \parallel jX_C + j300 \parallel 200 = \frac{-100 X_C}{j(100 + X_C)} + 138.5 + j92.31 \Omega$$

$$= 138.5 + j \left( 92.31 + \frac{100 X_C}{100 + X_C} \right) \Omega$$

$$\tan^{-1} \left( \frac{92.31 + \frac{100 X_C}{100 + X_C}}{138.5} \right) = \cos^{-1} 0.92 = 23.07^\circ$$

Solving, we find that  $X_C = -25 \Omega = -1/\omega C$ , so that  $C = 40 \mu\text{F}$



General circuit for simulations. Results agree with hand calculations

|                             | FREQ      | IM(V_PRINT1) | IP(V_PRINT1) | $\theta$ | PF         |
|-----------------------------|-----------|--------------|--------------|----------|------------|
| With no compensation:       | 1.592E+02 | 4.853E-01    | -5.825E+01   | 54.25°   | 0.5843 lag |
| With series compensation:   | 1.592E+02 | 7.641E-01    | -2.707E+01   | 23.07°   | 0.9200 lag |
| With parallel compensation: | 1.592E+02 | 7.641E-01    | -2.707E+01   | 23.07°   | 0.9200 lag |

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

39.

$$(a) \quad P_{s, tot} = 20 + 25 \times 0.8 + 30 \times 0.75 = \boxed{70 \text{ kW}}$$

$$(b) \quad \mathbf{I}_1 = \frac{20,000}{250} = 80 \angle 0^\circ \text{ A rms}$$

$$|\mathbf{I}_2| = 25,000 / 250 = 100 \text{ A rms}$$

$$\angle \mathbf{I}_2 = -\cos^{-1} 0.8 = -36.87^\circ \therefore \mathbf{I}_2 = 100 \angle -36.87^\circ \text{ A rms}$$

$$AP_3 = \frac{30,000}{0.75} = 40,000 \text{ VA}, \quad |\mathbf{I}_3| = \frac{40,000}{250} = 160 \text{ A rms}$$

$$\angle \mathbf{I}_3 = -\cos^{-1} 0.75 = -41.41^\circ \therefore \mathbf{I}_3 = 160 \angle -41.41^\circ \text{ A rms}$$

$$\therefore \mathbf{I}_s = 80 \angle 0^\circ + 100 \angle -36.87^\circ + 160 \angle -41.41^\circ = 325.4 \angle -30.64^\circ \text{ A rms}$$

$$\therefore AP_s = 250 \times 325.4 = \boxed{81,360 \text{ VA}}$$

$$(c) \quad PF_3 = \frac{70,000}{81,360} = \boxed{0.8604 \text{ lag}}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

40. 200 kW average power and 280 kVAR reactive result in a power factor of  $PF = \cos(\tan^{-1}(280/200)) = 0.5813$  *lagging*, which is pretty low.

(a)  $0.65 \text{ peak} = 0.65(200) = 130 \text{ kVAR}$

Excess =  $280 - 130 = 150 \text{ kVAR}$ , for a cost of  $(12)(0.22)(150) = \$396 / \text{year}$ .

(b) Target =  $\mathbf{S} = P + j0.65 P$

$\theta = \tan^{-1}(0.65P/P) = 33.02^\circ$ , so target  $PF = \cos \theta = 0.8385$

- (c) A single 100-kVAR increment costs \$200 to install. The excess kVAR would then be  $280 - 100 - 130 = 50 \text{ kVAR}$ , for an annual penalty of \$332. This would result in a first-year savings of \$64.

A single 200-kVAR increment costs \$395 to install, and would remove the entire excess kVAR. The savings would be \$1 (wow) in the first year, but \$396 each year thereafter.

The single 200-kVAR increment is the most economical choice.



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

41.

$$\mathbf{Z}_{in} = -j10 + \frac{20(1+j2)}{3+j2} = 10.769 - j3.846 = 11.435 \angle -19.65^\circ \Omega$$

$$\therefore \mathbf{I}_s = \frac{100}{11.435 \angle -19.65^\circ} = 8.745 \angle 19.65^\circ$$

$$\therefore \mathbf{S}_s = -\mathbf{V}_s \mathbf{I}_s^* = -100 \times 8.745 \angle -19.65^\circ = -823.5 + j294.1 \text{ VA}$$

$$\mathbf{I}_{20} = 8.745 \angle 19.65^\circ \times \frac{10+j20}{30+j20} = 5.423 \angle 49.40^\circ$$

$$\therefore \mathbf{S}_{20} = 20 \times 5.423^2 = 588.2 + j0 \text{ VA}$$

$$\mathbf{I}_{10} = \frac{20 \times 5.423 \angle 49.40^\circ}{10+j20} = 4.851 \angle -14.04^\circ$$

$$\mathbf{S}_{10} = 10 \times 4.851^2 = 235.3 + j0 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_{j20} = j20 \times 4.851^2 = j470.6 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_{-j10} = -j10 \times 8.745^2 = -j764.7 \text{ VA}, \quad \Sigma = 0$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

42.

$$\frac{\mathbf{V}_x - 100}{6 + j4} + \frac{\mathbf{V}_x}{-j10} + \frac{\mathbf{V}_x - j100}{5} = 0$$

$$\therefore \mathbf{V}_x \left( \frac{1}{6 + j4} + j0.1 + 0.2 \right) = \frac{100}{6 + j4} + j20$$

$$\therefore \mathbf{V}_x = 53.35 \angle 42.66^\circ \text{ V}$$

$$\therefore \mathbf{I}_1 = \frac{100 - 53.35 \angle 42.66^\circ}{6 + j4} = 9.806 \angle -64.44^\circ \text{ A}$$

$$\therefore \mathbf{S}_{1,gen} = \frac{1}{2} \times 100 \times 9.806 \angle 64.44^\circ = 211.5 + j442.3 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_{6,abs} = \frac{1}{2} \times 6 \times 9.806^2 = 288.5 + j0 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_{j4,abs} = \frac{1}{2} (j4) 9.806^2 = 0 + j192.3 \text{ VA}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j100 - 53.35 \angle 42.66^\circ}{5} = 14.99 \angle 121.6^\circ,$$

$$\mathbf{S}_{5abs} = \frac{1}{2} \times 5 \times 14.99^2 = 561.5 + j0 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_{2,gen} = \frac{1}{2} (j100) 14.99 \angle -121.57^\circ = 638.4 - j392.3 \text{ VA}$$

$$\mathbf{S}_{-j10,abs} = \frac{1}{2} \left( \frac{53.35}{10} \right) (-j10) = 0 - j142.3 \text{ VA} = 142.3 \angle 0^\circ \text{ VA} \quad \Sigma = 0$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

43.

(a) 500 VA, PF = 0.75 lead  $\therefore$

$$\mathbf{S} = 500 \angle -\cos^{-1} 0.75 = 375 - j330.7 \text{ VA}$$

(b) 500W, PF = 0.75 lead  $\therefore$

$$\mathbf{S} = 500 - \frac{500}{j.075} \sin(\cos^{-1} 0.75) = 500 - j441.0 \text{ VA}$$

(c) -500 VAR, PF = 0.75 (lead)  $\therefore \theta = -\cos^{-1} 0.75 = -41.41^\circ$

$$\therefore P = 500 / \tan 41.41^\circ = 566.9 \text{ W},$$

$$\mathbf{S} = 566.9 - j500 \text{ VA}$$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

44.  $\mathbf{S}_s = 1600 + j500 \text{ VA (gen)}$

(a)  $\mathbf{I}_s^* = \frac{1600 + j500}{400} = 4 + j1.25 \therefore \mathbf{I}_s = 4 - j1.25$

$$\mathbf{I}_c = \frac{400}{-j120} = j3.333 \text{ A rms} \therefore \mathbf{I}_L = \mathbf{I}_s - \mathbf{I}_c = 4 - j1.25 - j3.333$$

$$\therefore \mathbf{I}_L = 4 - j4.583 \text{ A rms} \therefore$$

$$\mathbf{S}_L = 400(4 + j4.583) = \boxed{1600 + j1833 \text{ VA}}$$

(b)  $\text{PF}_L = \cos\left(\tan^{-1} \frac{1833.3}{1600}\right) = \boxed{0.6575^+ \text{ lag}}$

(c)  $\mathbf{S}_s = 1600 + j500 = 1676 \angle 17.35^\circ \text{ VA} \therefore \text{PF}_s = \cos 17.35^\circ = \boxed{0.9545 \text{ lag}}$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

45.  $(\cos^{-1} 0.8 = 36.87^\circ, \cos^{-1} 0.9 = 25.84^\circ)$

(a)  $\mathbf{S}_{tot} = 1200\angle 36.87^\circ + 1600\angle 25.84^\circ + 900$   
 $= 960 + j720 + 1440 + j697.4 + 900$   
 $= 3300 + j1417.4 = 3592\angle 23.25^\circ \text{ VA}$

$$\therefore \mathbf{I}_s = \frac{3591.5}{230} = 15.62 \text{ A rms}$$

(b)  $\text{PF}_s = \cos 23.245^\circ = 0.9188$

(c)  $\mathbf{S} = 3300 + j1417 \text{ VA}$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

46.  $\mathbf{V} = 339 \angle -66^\circ \text{ V}$ ,  $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$ , connected to  $\mathbf{Z} = 1000 \Omega$ .

(a)  $V_{\text{eff}} = \frac{339}{\sqrt{2}} = 239.7 \text{ V rms}$

(b)  $p_{\text{max}} = 339^2 / 1000 = 114.9 \text{ W}$

(c)  $p_{\text{min}} = 0 \text{ W}$

(d) Apparent power  $= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \left( \frac{339}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{339/\sqrt{2}}{1000} \right) = \frac{V_{\text{eff}}^2}{1000} = 57.46 \text{ VA}$

(e) Since the load is purely resistive, it draws zero reactive power.

(f)  $S = 57.46 \text{ VA}$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

47.  $\mathbf{V} = 339 \angle -66^\circ \text{ V}$ ,  $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$  to a purely inductive load of  $150 \text{ mH}$  ( $j47.12 \Omega$ )

$$(a) \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{339 \angle -66^\circ}{j47.12} = 7.194 \angle -156^\circ \text{ A}$$

$$\text{so } \mathbf{I}_{\text{eff}} = \frac{7.194}{\sqrt{2}} = 5.087 \text{ A rms}$$

$$(b) p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi)$$

where  $\phi = \text{angle of current} - \text{angle of voltage}$

$$p_{\text{max}} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi + \frac{1}{2} V_m I_m = (1 + \cos(-90^\circ)) (339)(7.194) / 2 = 1219 \text{ W}$$

$$(c) p_{\text{min}} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi - \frac{1}{2} V_m I_m = -1219 \text{ W}$$

$$(d) \text{ apparent power} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{339}{\sqrt{2}} (5.087) = 1219 \text{ VA}$$

$$(e) \text{ reactive power} = Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\theta - \phi) = 1219 \text{ VA}$$

$$(f) \text{ complex power} = j1219 \text{ VA}$$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

48.  $1 \text{ H} \rightarrow j \Omega, 4 \mu\text{F} \rightarrow -j250 \text{ k}\Omega$

$$\mathbf{Z}_{\text{eff}} = j \parallel -j250 \times 10^3 \parallel 10^3 \Omega = 1 \angle 89.99^\circ \Omega$$

$$\mathbf{V}_{10\text{k}} = \frac{(5 \angle 0)(1 \angle 89.99^\circ)}{2500 + (1 \angle 89.99^\circ)} = 0.002 \angle 89.97^\circ \text{ V}$$

(a)  $p_{\text{max}} = (0.002)^2 / 10 \times 10^3 = 400 \text{ pW}$

(b)  $0 \text{ W}$  (purely resistive elements draw no reactive power)

(c) apparent power  $= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{1}{2} V_{\text{m}} I_{\text{m}} = \frac{1}{2} (0.002)^2 / 10000 = 200 \text{ pW}$

(d)  $\mathbf{I}_{\text{source}} = \frac{5 \angle 0}{2500 + 1 \angle 89.99^\circ} = 0.002 \angle -0.02292^\circ \text{ A}$

$\mathbf{S} = \frac{1}{2} V_{\text{m}} I_{\text{m}} \angle (89.99^\circ + 0.02292^\circ) = 0.005 \angle 90.01^\circ \text{ VA}$

## CHAPTER 11 SOLUTIONS

49. (a) At  $\omega = 400$  rad/s,  $1 \mu\text{F} \rightarrow -j2500 \Omega$ ,  $100 \text{ mH} \rightarrow j40 \Omega$   
 Define  $\mathbf{Z}_{\text{eff}} = -j2500 \parallel (250 + j40) = 256 \angle 3.287^\circ \Omega$

$$\mathbf{I}_S = \frac{12000 \angle 0}{20 + 256 \angle 3.287^\circ} = 43.48 \angle -3.049^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{S}_{\text{source}} = (12000)(43.48) \angle 3.049^\circ = 521.8 \angle 3.049^\circ \text{ kVA}$$

$$\mathbf{S}_{20\Omega} = (43.48)^2 (20) \angle 0 = 37.81 \angle 0 \text{ kVA}$$

$$\mathbf{V}_{\text{eff}} = \frac{(12000 \angle 0)(256 \angle 3.287^\circ)}{20 + 256 \angle 3.287^\circ} = 11130 \angle 0.2381^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{I}_{1\mu\text{F}} = \frac{\mathbf{V}_{\text{eff}}}{-j2500} = 4.452 \angle 90.24^\circ \text{ A rms}$$

$$\text{so } \mathbf{S}_{1\mu\text{F}} = (11130)(4.452) \angle -90^\circ = 49.55 \angle -90^\circ \text{ kVA}$$

$$\mathbf{V}_{100\text{mH}} = \frac{(11130 \angle 0.2381^\circ)(j40)}{250 + j40} = 1758 \angle 81.15^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{I}_{100\text{mH}} = \frac{\mathbf{V}_{100\text{mH}}}{j40} = 43.96 \angle -8.852^\circ \text{ A rms}$$

$$\text{so } \mathbf{S}_{100\mu\text{H}} = (1758)(4.43.96) \angle 90^\circ = 77.28 \angle 90^\circ \text{ kVA}$$

$$\mathbf{V}_{250\Omega} = \frac{(11130 \angle 0.2381^\circ)(250)}{250 + j40} = 10990 \angle -8.852^\circ \text{ V rms}$$

$$\text{so } \mathbf{S}_{250\Omega} = (10990)^2 / 250 = 483.1 \angle 0^\circ \text{ kVA}$$

- (b)  $37.81 \angle 0 + 49.55 \angle -90^\circ + 77.28 \angle 90^\circ + 483.1 \angle 0^\circ = 521.6 \angle 3.014^\circ \text{ kVA}$ ,  
 which is within rounding error of the complex power delivered by the source.

- (c) The apparent power of the source is 521.8 kVA. The apparent powers of the passive elements sum to  $37.81 + 49.55 + 77.28 + 483.1 = 647.7 \text{ kVA}$ , so **NO!** Phase angle is important!

$$(d) P = \mathbf{V}_{\text{eff}} \mathbf{I}_{\text{eff}} \cos (\text{ang } \mathbf{V}_S - \text{ang } \mathbf{I}_S) = (12000)(43.48) \cos (3.049^\circ) = 521 \text{ kW}$$

$$(e) Q = \mathbf{V}_{\text{eff}} \mathbf{I}_{\text{eff}} \sin (\text{ang } \mathbf{V}_S - \text{ang } \mathbf{I}_S) = (12000)(43.48) \sin (3.049^\circ) = 27.75 \text{ kVAR}$$



## CHAPTER 11 SOLUTIONS

50. (a) Peak current  $= 28\sqrt{2} = 39.6 \text{ A}$

(b)  $\theta_{\text{load}} = \cos^{-1}(0.812) = +35.71^\circ$  (since lagging PF). Assume  $\text{ang}(\mathbf{V}) = 0^\circ$ .

$$p(t) = (2300\sqrt{2})(39.60\sqrt{2})\cos(120\pi t) \cos(120\pi t - 35.71^\circ)$$

at  $t = 2.5 \text{ ms}$ , then,  $p(t) = 147.9 \text{ kW}$

(c)  $P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \theta = (2300)(28) \cos(35.71^\circ) = 52.29 \text{ kW}$

(d)  $\mathbf{S} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \angle \theta = 64.4 \angle 35.71^\circ \text{ kVA}$

(e) apparent power  $= |\mathbf{S}| = 64.4 \text{ kVA}$

(f)  $|\mathbf{Z}_{\text{load}}| = |\mathbf{V}/\mathbf{I}| = 2300/28 = 82.14 \Omega$ . Thus,  $\mathbf{Z}_{\text{load}} = 82.14 \angle 35.71^\circ \Omega$

(g)  $Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \theta = 37.59 \text{ kVAR}$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

$$1. \quad V_{bc} = V_{be} + V_{ec} = 0.7 - 10 = -9.3 \text{ V}$$

$$V_{eb} = -V_{be} = -0.7 \text{ V}$$

$$V_{cb} = V_{ce} + V_{eb} = 10 - 0.7 = 9.3 \text{ V}$$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

2. (a)  $V_{gd} = V_{gs} + V_{sd} = -1 - 5 = -6 \text{ V}$

(b)  $V_{sg} = V_{sd} + V_{dg} = -4 - 2.5 = -6.5 \text{ V}$



## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

3. (a) positive phase sequence

|  |  |
|--|--|
| $\mathbf{V}_{an} =  \mathbf{V}_p  \angle 0^\circ$    | $\mathbf{V}_{dn} =  \mathbf{V}_p  \angle -180^\circ$ |
| $\mathbf{V}_{bn} =  \mathbf{V}_p  \angle -60^\circ$  | $\mathbf{V}_{en} =  \mathbf{V}_p  \angle -240^\circ$ |
| $\mathbf{V}_{cn} =  \mathbf{V}_p  \angle -120^\circ$ | $\mathbf{V}_{fn} =  \mathbf{V}_p  \angle -300^\circ$ |

- (b) negative phase sequence

|   |   |
|---|---|
| $\mathbf{V}_{an} =  \mathbf{V}_p  \angle 0^\circ$   | $\mathbf{V}_{dn} =  \mathbf{V}_p  \angle 180^\circ$ |
| $\mathbf{V}_{bn} =  \mathbf{V}_p  \angle 60^\circ$  | $\mathbf{V}_{en} =  \mathbf{V}_p  \angle 240^\circ$ |
| $\mathbf{V}_{cn} =  \mathbf{V}_p  \angle 120^\circ$ | $\mathbf{V}_{fn} =  \mathbf{V}_p  \angle 300^\circ$ |

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

$$\begin{aligned} 4. \quad (a) \mathbf{V}_{yz} &= \mathbf{V}_{yx} + \mathbf{V}_{xz} = -110 \angle 20^\circ + 160 \angle -50^\circ \\ &= -103.4 - j37.62 + 102.8 - j122.6 = -0.6 - j160.2 \\ &= \boxed{160.2 \angle -90.21^\circ \text{ V}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \mathbf{V}_{az} &= \mathbf{V}_{ay} + \mathbf{V}_{yz} = 80 \angle 130^\circ + 160.2 \angle -90.21^\circ \\ &= -51.42 + j61.28 - 0.6 - j160.2 = -52.02 - j98.92 \\ &= \boxed{111.8 \angle -117.7^\circ \text{ V}} \end{aligned}$$

$$(c) \frac{\mathbf{V}_{zx}}{\mathbf{V}_{xy}} = \frac{-160 \angle -50^\circ}{110 \angle 20^\circ} = \frac{160 \angle 130^\circ}{110 \angle 20^\circ} = \boxed{1.455 \angle 110^\circ}$$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

$$\begin{aligned} 5. \quad (a) \quad \mathbf{V}_{25} &= \mathbf{V}_{24} + \mathbf{V}_{45} &&= -80 \angle 120^\circ + 60 \angle 75^\circ \\ &&&= 40 - j69.28 + 15.53 + j57.96 = 55.53 - j11.32 \\ &&&= 56.67 \angle -11.52^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \mathbf{V}_{13} &= \mathbf{V}_{12} + \mathbf{V}_{25} + \mathbf{V}_{53} &&= 100 + 55.53 - j11.32 + j120 \\ &&&= 155.53 + j108.7 \\ &&&= 189.8 \angle 34.95^\circ \text{ V} \end{aligned}$$



## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

6.

$230/460 \text{ V rms } \bar{Z}_{AN}: \bar{S} = 10\angle 40^\circ \text{ kVA}; \bar{Z}_{NB}: 8\angle 10^\circ \text{ kVA};$

$$\bar{Z}_{AB}: 4\angle -80^\circ \text{ kVA} \quad \text{Let } \bar{V}_{AN} = 230\angle 0^\circ \text{ V} \quad \therefore \bar{S}_{AN} = \bar{V}_{AN} \bar{I}_{AN}^*, \bar{I}_{AN}^* = \frac{10,000\angle 40^\circ}{230} = 43.48\angle 40^\circ \text{ A}$$

$$\therefore \bar{I}_{AN} = 43.48\angle -40^\circ \text{ A}, \bar{S}_{AB} = \bar{V}_{AB} \bar{I}_{AB}^* \therefore \bar{I}_{AB}^* = \frac{4000\angle -80^\circ}{460} = 8.696\angle -80^\circ, \bar{I}_{AB} = 8.696\angle 80^\circ \therefore \bar{I}_{aA} = \bar{I}_{AN} + \bar{I}_{AB}$$

$$\therefore \bar{I}_{aA} = 43.48\angle 40^\circ + 8.696\angle 80^\circ = 39.85\angle -29.107^\circ \therefore I_{aA} = \boxed{39.85 \text{ A}}$$

$$\bar{I}_{NB}^* = \frac{8000\angle 10^\circ}{230} = 34.78\angle 10^\circ, \bar{I}_{NB} = 34.78\angle -10^\circ \text{ A}$$

$$\therefore \bar{I}_{bB} = -34.78\angle -10^\circ - 8.696\angle 80^\circ = 35.85\angle -175.96^\circ, \therefore I_{bB} = \boxed{35.85 \text{ A}}$$

$$\bar{I}_{nN} = -43.48\angle -40^\circ + 34.78\angle -10^\circ = 21.93\angle 87.52^\circ, I_{nN} = \boxed{21.93 \text{ A}}$$

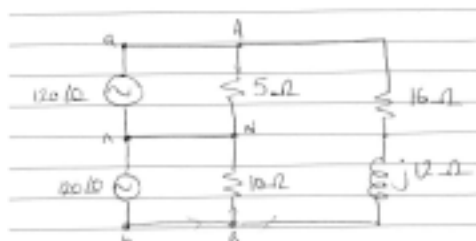
## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

7. (a)  $\mathbf{I}_{nN} = 0$  since the circuit is balanced.

$$\mathbf{I}_{AN} = 12 \angle 0^\circ \quad \mathbf{I}_{AB} = \frac{240 \angle 0^\circ}{16 + j12} = 12 \angle -36.9^\circ$$

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} + \mathbf{I}_{AB} = 12 + 9.596 - j7.205 = \boxed{22.77 \angle -18.45^\circ \text{ A}}$$

- (b)



$$\mathbf{I}_{AN} = 24 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{BN} = -12 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{nN} = -12 \angle 0^\circ \text{ A}$$

The voltage across the  $16\text{-}\Omega$  resistor and  $j12\text{-}\Omega$  impedance has not changed, so  $\mathbf{I}_{AB}$  has not changed from above.

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} + \mathbf{I}_{AB} = 24 \angle 0^\circ + 12 \angle -36.9^\circ = \boxed{34.36 \angle -12.10^\circ \text{ A}}$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \mathbf{I}_{BN} - \mathbf{I}_{AB} = -12 \angle 0^\circ - 12 \angle -36.9^\circ = \boxed{7.595 \angle -108.5^\circ \text{ A}}$$

$$\mathbf{I}_{nN} = \mathbf{I}_{BN} - \mathbf{I}_{AN} = -12 - 24 = \boxed{36 \angle 180^\circ \text{ A}}$$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

8.

$$(a) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 21+j3 & -10 & -10-j3 \\ -10 & 19+j2 & -8-j2 \\ -10-j3 & -8-j2 & 36+j5 \end{vmatrix} = (21+j3)(674+j167-60-j32)$$

$$+10(-360-j50-74-j44)-(10+j3)(80+j20+184+j77)$$

$$\therefore \Delta = 5800 + j1995 = 6127 \angle 18.805^\circ$$

$$\begin{vmatrix} 720 & -10 & -10-j3 \\ 720 & 19+j2 & -8-j2 \\ 0 & -8-j2 & 36+j5 \end{vmatrix} = 720(614 + j135 + 434 + j94) = 720 \times 1072.7 \angle 12.326^\circ$$

$$\therefore \bar{I}_{aA} = \frac{720 \times 1072.7 \angle 12.326^\circ}{6127 \angle 18.805^\circ} = 126.06 \angle -6.479^\circ \text{ A}$$

$$(b) \quad \begin{vmatrix} 21+j3 & 720 & -10-j3 \\ -10 & 720 & -8-j2 \\ -10-j3 & 0 & 36+j5 \end{vmatrix} = 720(1084 + j247) \therefore \bar{I}_{bb} = \frac{720(1084 + j247)}{6127 \angle 18.805^\circ} = 130.65 \angle -5.968^\circ \text{ A}$$

$$\therefore I_{nN} = 130.65 \angle -5.968^\circ - 126.06 \angle -6.479^\circ = 4.730 \angle 7.760^\circ \text{ A}$$

$$(c) \quad P_{\omega, tot} = 126.06^2 \times 1 + 130.65^2 \times 1 + 4.730^2 \times 10 = 15.891 + 17.069 + 0.224 = 33.18 \text{ kW}$$

$$(d) \quad P_{gen, tot} = 720 \times 126.06 \cos 6.479^\circ + 720 \times 130.65 \cos 5.968^\circ = 90.18 + 93.56 = 183.74 \text{ kW}$$



## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

9.  $\bar{V}_{AN} = 220 \text{ Vrms}, 60 \text{ Hz}$

(a)  $\text{PF} = 1 \therefore \bar{I}_{AN} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5 + j2} = 40.85 \angle -21.80^\circ \text{ A}; \bar{I}_{AB} = j377C \times 440$

$$\therefore \bar{I}_{aA} = 40.85 \cos 21.80^\circ + j(377C440 - 40.85 \sin 21.80^\circ)$$

$$\therefore C = \frac{40.85 \sin 21.80^\circ}{377 \times 440} = 91.47 \mu\text{F}$$

(b)  $\bar{I}_{AB} = 377 \times 91.47 \times 10^{-6} \times 440 = 15.172 \text{ A} \therefore \text{VA} = 440 \times 15.172 = 6.676 \text{ kVA}$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

10. (a)  $\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} + \mathbf{I}_{AB} = \frac{200\angle 0}{12 + j3} + \frac{400\angle 0}{R_{AB}} = 15.69 - j3.922 + \frac{400}{R_{AB}}$

Since we know that  $|\mathbf{I}_{aA}| = 30 \text{ A rms} = 42.43 \text{ A}$ ,

$$42.43 = \sqrt{\left(15.69 + \frac{400}{R_{AB}}\right)^2 + 3.922^2}$$

or  $R_{AB} = \boxed{15.06 \, \Omega}$

(b)  $\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AN} + \mathbf{I}_{AB} = \frac{200\angle 0}{12 + j3} + \frac{400\angle 0}{-jX_{AB}} = 15.69 - j3.922 + \frac{j400}{X_{AB}}$

In order for the angle of  $\mathbf{I}_{aA}$  to be zero,  $\frac{400}{X_{AB}} = 3.922$ , so that  $X_{AB} = \boxed{102 \, \Omega \text{ capacitive.}}$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

11. + seq.  $\bar{V}_{BC} = 120\angle 60^\circ$  V rms,  $R_w = 0.6\Omega$   $P_{load} = 5\text{ kVA}$ , 0.6 lag

(a)  $\bar{V}_{AN} = \frac{120}{\sqrt{3}}\angle 150^\circ \text{ V} \therefore \bar{S}_{AN} = \frac{5000}{3} \times 0.8 + j \frac{5000}{3} \times 0.6$

$$\therefore \bar{S}_{AN} = \frac{120}{\sqrt{3}}\angle 150^\circ \bar{I}_{aA}^* \therefore \bar{I}_{aA}^* = 24.06\angle -113.13^\circ \text{ A}$$

$$\therefore \bar{I}_{aA} = 24.06\angle 113.13^\circ \therefore P_{wire} = 3 \times 24.06^2 \times 0.6 = \boxed{1041.7 \text{ W}}$$

(b)  $\bar{V}_{aA} = 0.6 \times 24.06\angle 113.13^\circ = 14.434\angle 113.13^\circ \text{ V}$

$$\therefore \bar{V}_{an} = \bar{V}_{aA} + \bar{V}_{AN} = 14.434\angle 113.13^\circ + \frac{120}{\sqrt{3}}\angle 158^\circ = \boxed{81.29\angle 143.88^\circ \text{ V}}$$



## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

12.  $\uparrow \bar{V}_{an} = 2300\angle 0^\circ \text{ V}_{\text{rms}}, R_w = 2 \Omega, +seq., \bar{S}_{tot} = 100 + j30 \text{ kVA}$

(a)  $\frac{1}{3}(100,000 + j30,000) = 2300 I_{aA}^* \therefore \bar{I}_{aA} = 15.131\angle -16.699^\circ \text{ A}$

(b)  $\bar{V}_{AN} = 2300 - 2 \times 15.131\angle -16.699^\circ = 2271\angle 0.2194^\circ \text{ V}$

(c)  $\bar{Z}_p = \bar{V}_{AN} / \bar{I}_{aA} = \frac{2271\angle 0.2194^\circ}{15.131\angle -16.699^\circ} = 143.60 + j43.67 \Omega$

(d)  $\text{trans. eff.} = \frac{143.60}{145.60} = 0.9863, \text{ or } 98.63\%$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

13.  $\uparrow \bar{Z}_p = 12 + j5\Omega$ ,  $\bar{I}_{bB} = 20\angle 0^\circ$  A rms, +seq., PF = 0.935

(a)  $\theta = \cos^{-1} 0.935 = 20.77^\circ \therefore \frac{5}{12 + R_w} = \tan 20.77^\circ$ ,  $R_w = 1.1821\Omega$

(b)  $\bar{V}_{BN} = \bar{I}_{bB} \bar{Z}_p = 20(12 + j5) = 240 + j100$  V  $\therefore \bar{V}_{bn} = 20(13.1821 + j5) = 281.97\angle 20.77^\circ$  V

(c)  $\bar{V}_{AB} = \sqrt{3} |\bar{V}_{BN}| \angle \angle V_{BN} + 150^\circ = 450.3\angle 172.62^\circ$  V

(d)  $\bar{S}_{source} = 3 \bar{V}_{Bn} \bar{I}_{bB}^* = 3 \times 281.97 \angle -20.77^\circ (20)$   
 $= 15.819 - j6.000$  kVA

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

14.  $125 \text{ mH} \rightarrow j(2\pi)(60)(0.125) = j47.12 \, \Omega$   $75 \, \Omega \rightarrow 75 \, \Omega$   
 $55 \, \mu\text{F} \rightarrow -j/(2\pi)(60)(55 \times 10^{-6}) = -j48.23 \, \Omega$

The per-phase current magnitude  $|\mathbf{I}|$  is then  $\mathbf{I} = \frac{125}{\sqrt{75^2 + (47.12 - 48.23)^2}} = 1.667 \text{ A.}$

The power in each phase  $= (1.667)^2 (75) = 208.4 \text{ W}$ , so that the total power taken by the load is  $3(208.4) = 625.2 \text{ W.}$

The power factor of the load is  $\cos\left(\frac{47.12 - 48.23}{75}\right) = 1.000$

*This isn't surprising, as the impedance of the inductor and the impedance of the capacitor essentially cancel each other out as they have approximately the same magnitude but opposite sign and are connected in series.*



## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

15.

↑ Bal., + seq.  $Z_{AN} = 8 + j6 \Omega$ ,  $\bar{Z}_{BN} = 12 - j16 \Omega$ ,  $\bar{Z}_{CN} = 5 + j0$ ,  $\bar{V}_{AN} = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$

$$R_w = 0.5 \Omega \text{ (a)} - \bar{I}_{nN} = \frac{120 \angle 0^\circ}{8.5 + j6} + \frac{120 \angle -120^\circ}{12.5 - j16} + \frac{120 \angle 120^\circ}{5.5} = 6.803 \angle 83.86^\circ \text{ A}$$

$$\therefore \bar{I}_{nN} = \boxed{6.803 \angle -96.14^\circ \text{ A rms}}$$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

16. Working on a per-phase basis, the line current magnitude is simply

$$|\mathbf{I}| = \frac{40}{\sqrt{(R_w + 5)^2 + 10^2}}$$

(a)  $R_w = 0$

Then  $|\mathbf{I}| = \frac{40}{\sqrt{25 + 10^2}} = 3.578 \text{ A}$ , and the power delivered to each phase of the load is  $(3.578)^2(5) = 64.01 \text{ W}$ . The total power of the load is therefore  $3(64.01) = 192.0 \text{ W}$ .

(b)  $R_w = 3 \Omega$

Then  $|\mathbf{I}| = \frac{40}{\sqrt{64 + 10^2}} = 3.123 \text{ A}$ , and the power delivered to each phase of the load is  $(3.123)^2(5) = 48.77 \text{ W}$ . The total power of the load is therefore  $3(48.77) = 146.3 \text{ W}$ .

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

17.  $\uparrow \bar{Z}_p = 75\angle 25^\circ \Omega \parallel 25\mu\text{F}, \bar{V}_{an} = 240\angle 0^\circ \text{ V rms}, 60\text{ Hz}, R_w = 2\Omega$

(a)  $\bar{Z}_{cap} = -j \frac{10^6}{377 \times 25} = -j 106.10\Omega \therefore \bar{Z}_p = \frac{75\angle 25^\circ (-j106.10)}{75\angle 25^\circ - j106.10} = 75.34 - j23.63\Omega$

$\therefore \bar{Z}_{p+w} = 77.34 - j23.63 \therefore \bar{I}_{aA} = \frac{240}{77.34 - j23.63} = 2.968\angle 16.989^\circ \text{ A}$

(b)  $P_w = 3(2.968)^2 \times 2 = 52.84 \text{ W}$

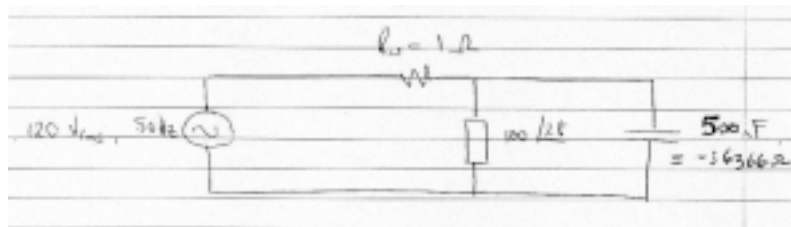
(c)  $P_{load} = 3(2.968)^2 75.34 = 1990.6 \text{ W}$

(d)  $\text{PF}_{source} = \cos 16.989^\circ = 0.9564 \text{ lead}$



## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

18. Working on a per-phase basis and noting that the capacitor corresponds to a  $-j6366\text{-}\Omega$  impedance,

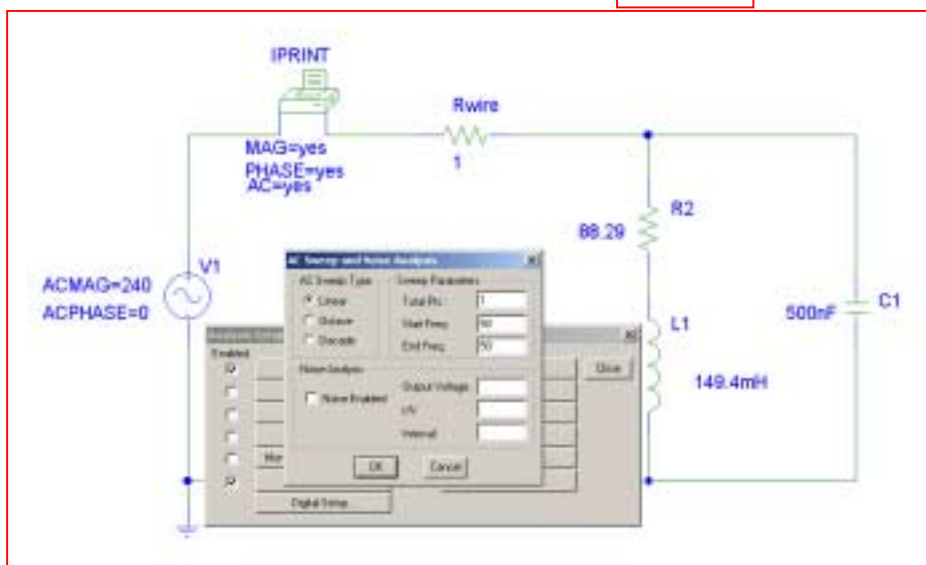


$-j6366 \parallel 100 \angle 28^\circ = 89.59 + j46.04 \text{ }\Omega$  so that the current flowing through the combined load is

$$|I| = \frac{240}{\sqrt{90.59^2 + 46.04^2}} = 2.362 \text{ A rms}$$

The power in each phase is  $(2.362)^2 (90.59) = 505.4 \text{ W}$ , so that the power delivered to the total load is  $3(505.4) = 1.516 \text{ kW}$ .

The power lost in the wiring is  $(3)(2.362)^2 (1) = 16.74 \text{ W}$ .



Simulation Result:

| FREQ      | IM(V_PRINT1) | IP(V_PRINT1) |
|-----------|--------------|--------------|
| 5.000E+01 | 1.181E+00    | -2.694E+01   |

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

19.  $\uparrow$  Bal.,  $R_w = 0$ ,  $\bar{Z}_p = 10 + j5 \Omega$ ,  $f = 60 \text{ Hz}$

(a)  $10 + j5 = 11.180 \angle 26.57^\circ \therefore \text{PF} = \cos 26.57^\circ = 0.8944$

(b)  $\text{PF} = 0.93 \text{ lag}$ ,  $\theta = 21.57^\circ$ ,  $\bar{Y}_p = \frac{1}{11.180 \angle 26.57^\circ} = 0.08 - j0.04 \text{ S}$   
 $\bar{Y}_{p'} = 0.08 + j(377C - 0.04) \therefore \frac{377C - 0.04}{0.08} = -\tan 21.57^\circ = -0.3952$   
 $\therefore 377C = 0.04 - 0.08 \times 0.3952 = 0.00838 \therefore C = 22.23 \mu\text{F}$

(c)  $V_{L,\text{load}} = 440 \text{ V rms}$ ,  $\bar{Z}_c = \frac{-j10^6}{120\pi 22.23} = -j119.30 \Omega$ ,  $I_c = \frac{440/\sqrt{3}}{119.30} = 2.129 \text{ A}$   
 $\therefore \text{VAR} = 2.129 \times \frac{440}{\sqrt{3}} = 540.9 \text{ VAR (cap.)}$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

20. Working from the single-phase equivalent,

$$\mathbf{V}_{\text{an rms}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{115 \angle 0^\circ}{\sqrt{2}} \right) = 46.9 \angle 0^\circ \text{ V rms}$$

$1.5 \text{ H} \rightarrow j565 \Omega$ ,  $100 \mu\text{F} \rightarrow -j26.5 \Omega$  and  $1 \text{ k}\Omega \rightarrow 1 \text{ k}\Omega$ .

These three impedances appear in parallel, with a combined value of  $27.8 \angle -88.4^\circ \Omega$ .

Thus,  $|\mathbf{I}_{\text{rms}}| = 46.9 / 27.8 = 1.69 \text{ A rms}$

$\mathbf{Z}_{\text{load}} = 27.8 \angle 88.4^\circ = 0.776 - j 27.8 \Omega$ , so  $P_{\text{load}} = (3)(1.69)^2 (0.776) = 2.22 \text{ W}$ .



## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

21.

$$R_w = 0, \bar{V}_{an} = 200\angle 60^\circ \text{ V rms. } S_p = 2 - j1 \text{ kVA + seq.}$$

$$(a) \quad \bar{V}_{bc} = 220\sqrt{3}\angle -30^\circ = 346.4\angle -30^\circ \text{ V}$$

$$(b) \quad \bar{S}_{BC} = 2000 - j1000 = \bar{V}_{BC} \bar{I}_{BC}^* = 346.4\angle -30^\circ \bar{I}_{BC}^* \\ \therefore \bar{I}_{BC}^* = 6.455\angle 3.435^\circ, \bar{I}_{BC} = 6.455\angle -3.435^\circ$$

$$\therefore \bar{Z}_p = \frac{200\sqrt{3}\angle -30^\circ}{6.455\angle -3.435^\circ} = 53.67\angle -26.57^\circ = 48 - j24 \, \Omega$$

$$(c) \quad \bar{I}_{aA} = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA} = 6.455\angle 120^\circ - 3.43^\circ - 6.455\angle -120^\circ - 3.43^\circ = 11.180\angle 86.57^\circ \text{ A rms}$$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

22.  $\uparrow 15\text{kVA}$ ,  $0.8\text{lag}$ ,  $+\text{seq.}$ ,  $\bar{V}_{BC} = 180\angle 30^\circ \text{ V rms}$ ,  $R_w = 0.75\Omega$

(a)  $\bar{V}_{BC} = 180\angle 30^\circ \therefore \bar{V}_{AB} = 180\angle 150^\circ \text{ V}$ ,  $\bar{S}_p = 5000\angle \cos^{-1} 0.8 = 5000\angle 36.87^\circ = 180\angle 30^\circ \bar{I}_{BC}^*$   
 $\therefore \bar{I}_{BC} = 27.78\angle -6.87^\circ$  and  $\bar{I}_{AB} = 27.78\angle 113.13^\circ \text{ A} \therefore \bar{I}_{bB} = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB}$   
 $\therefore \bar{I}_{bB} = 27.78(1\angle -6.87^\circ - 1\angle 113.13^\circ) = 48.11\angle -36.87^\circ \text{ A} \therefore \bar{V}_{bC} = 0.75(\bar{I}_{bB} - \bar{I}_{cC})$   
 $\therefore \bar{V}_{bC} = 0.75 \times 48.11(1\angle -36.87^\circ - 1\angle -156.87^\circ) + 180\angle 30^\circ = \boxed{233.0\angle 20.74^\circ \text{ V}}$

(b)  $P_{\text{wire}} = 3 \times 48.11^2 \times 0.75 = 5208 \text{ W}$   
 $\bar{S}_{\text{gen}} = 5208 + 15,000\angle 36.87^\circ = \boxed{17.208 + j9.000 \text{ kVA}}$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

23.  $\uparrow$  Bal.,  $\bar{S}_L = 3 + j1.8 \text{ kVA}$ ,  $\bar{S}_{gen} = 3.45 + j1.8 \text{ kVA}$ ,  $R_w = 5 \Omega$

(a)  $P_w = 450 \text{ W} \therefore \frac{1}{3} \times 450 = I_{aA}^2 \times 5 \therefore I_{aA} = \boxed{5.477 \text{ A rms}}$

(b)  $I_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 5.477 = \boxed{3.162 \text{ A rms}}$

(c) Assume  $\bar{I}_{AB} = 3.162 \angle 0^\circ$  and +seq.  $\therefore \frac{1}{3}(3000 + j1800) = \bar{V}_{AB} \bar{I}_{AB}^* = \bar{V}_{AB} (3.162 \angle 0^\circ)$

$$\therefore \bar{V}_{AB} = 368.8 \angle 30.96^\circ \text{ V} \therefore \bar{V}_{an} = \bar{V}_{aA} + \bar{V}_{AB} - \bar{V}_{bB} + \bar{V}_{bn}$$

$$\bar{V}_{aA} = 5 \bar{I}_{aA} = 5 \times 5.477 \angle -30^\circ = 27.39 \angle -30^\circ, \bar{V}_{bB} = 27.39 \angle -150^\circ$$

$$\therefore \bar{V}_{an} = 27.39 \angle -30^\circ - 27.39 \angle -150^\circ + 368.8 \angle 30.96^\circ + V_{an} (1 \angle -120^\circ)$$

$$\therefore \bar{V}_{an} = \frac{27.39 \angle -30^\circ - 27.39 \angle -150^\circ + 368.8 \angle 30.96^\circ}{1 - 1 \angle -120^\circ} = 236.8 \angle -2.447^\circ \therefore V_{an} = \boxed{236.8 \text{ V rms}}$$



## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

24. If a total of 240 W is lost in the three wires marked  $R_w$ , then 80 W is lost in each 2.3- $\Omega$  segment. Thus, the line current is  $\sqrt{\frac{80}{2.3}} = 5.898$  A rms. Since this is a D-connected load, the phase current is  $1/\sqrt{3}$  times the line current, or 3.405 A rms.

In order to determine the phase voltage of the source, we note that

$$P_{\text{total}} = \sqrt{3} |\mathbf{V}_{\text{line}}| \cdot |\mathbf{I}_{\text{line}}| \cdot \text{PF} = \sqrt{3} |\mathbf{V}_{\text{line}}| (5.898) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1800$$

$$\text{where } |\mathbf{V}_{\text{line}}| = \frac{(1800)(2)}{\sqrt{2} \sqrt{3} (5.898)} = 249.2 \text{ V}$$

This is the voltage at the load, so we need to add the voltage lost across the wire, which

$$\text{(taking the load voltage as the reference phase) is } \left[ 5.898 \angle -\cos^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] (R_w)$$

$= 13.57 \angle -45^\circ$  V. Thus, the line voltage magnitude of the source is

$$|249.2 \angle 0^\circ + 13.57 \angle -45^\circ| = 259.0 \text{ V rms.}$$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

25. Bal., +seq.

$$(a) \quad \bar{V}_{an} = 120 \angle 0^\circ \therefore \bar{V}_{ab} = 120\sqrt{3} \angle 30^\circ, \text{ etc.}, \bar{I}_{AB} = \frac{120\sqrt{3} \angle 30^\circ}{10} = 20.78 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_{BC} = \frac{120\sqrt{3} \angle -90^\circ}{j5} = -41.57 \text{ A}; \bar{I}_{CA} = \frac{120\sqrt{3} \angle 150^\circ}{-j10} = 20.78 \angle -120^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_{aA} = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA} = 20.78(1 \angle 30^\circ - 1 \angle -120^\circ) = 40.15 \angle 45^\circ \text{ A rms}$$

$$(b) \quad \bar{I}_{bB} = -41.57 - 20.78 \angle 30^\circ = 60.47 \angle -170.10^\circ \text{ A rms}$$

$$(c) \quad \bar{I}_{cC} = 20.78 \angle -120^\circ + 41.57 = 36.00 \angle -30^\circ \text{ A rms}$$

$$(d) \quad \bar{S}_{tot} = \bar{V}_{AB} \bar{I}_{AB}^* + \bar{V}_{BC} \bar{I}_{BC}^* + \bar{V}_{CA} \bar{I}_{CA}^* = 120\sqrt{3} \angle 30^\circ \times 20.78 \angle -30^\circ + 120\sqrt{3} \angle -90^\circ (-41.57) + 120\sqrt{3} \angle 150^\circ \times 20.78 \angle 120^\circ = 4320 + j0 + 0 + j8640 + 0 - j4320 = 4320 + j4320 \text{ VA}$$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

$$26. \quad \mathbf{I}_{AB} = \frac{200\angle 0}{10 \parallel j30} = \frac{200\angle 0}{9.49\angle 18.4^\circ} = 21.1\angle -18.4^\circ \text{ A}$$

$$|\mathbf{I}_A| = \sqrt{3} \mathbf{I}_{AB} = 36.5 \text{ A}$$

$$\text{The power supplied by the source} = (3) |\mathbf{I}_A|^2 (0.2) + (3) (200)^2 / 10 = 12.8 \text{ kW}$$

Define transmission efficiency as  $\eta = 100 \times P_{\text{load}} / P_{\text{source}}$ . Then  $\eta = 93.8\%$ .

$\mathbf{I}_A$  leads  $\mathbf{I}_{AB}$  by  $30^\circ$ , so that  $\mathbf{I}_A = 36.5 \angle 11.6^\circ$ .

$$\mathbf{V}_{R_w} = (0.2)(36.5 \angle 11.6^\circ) = 7.3 \angle 11.6^\circ \text{ V}$$

With  $\mathbf{V}_{AN} = \frac{200}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ$ , and noting that  $\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{AN} + \mathbf{V}_{R_w} = 122 \angle 28.9^\circ$ , we may now

compute the power factor of the source as

$$\text{PF} = \cos (\text{ang}(\mathbf{V}_{an}) - \text{ang}(\mathbf{I}_A)) = \cos (28.9^\circ - 11.6^\circ) = 0.955.$$



## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

27.  $\uparrow$  Bal.,  $\bar{V}_{an} = 140\angle 0^\circ$  V<sub>rms</sub>, +seq.,  $R_w = 0$ ,  $\bar{S}_L = 15 + j9$  kVA

(a)  $\bar{V}_{ab} = \bar{V}_{AB} = \sqrt{3} \ 140\angle 30^\circ = 242.5\angle 30^\circ$  V

(b)  $\bar{V}_{AB} \bar{I}_{AB}^* = 5000 + j3000 = 242.5\angle 30^\circ \bar{I}_{AB}^* \therefore \bar{I}_{AB} = 24.05\angle -0.9638^\circ$  A rms

(c)  $\bar{I}_{aA} = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA} = 24.05\angle -0.9638^\circ - 24.05\angle 119.03^\circ = 41.65\angle -30.96^\circ$  A rms

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

28.  $15 \text{ mH} \rightarrow j5.65 \, \Omega$ ,  $0.25 \text{ mF} \rightarrow -j10.6 \, \Omega$

$$\mathbf{V}_{AB} = 120\sqrt{3} \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_{BC} = 120\sqrt{3} \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_{CA} = 120\sqrt{3} \angle -210^\circ \text{ V}$$

Defining three clockwise mesh currents  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$  and  $\mathbf{I}_3$  corresponding to sources  $\mathbf{V}_{AB}$ ,  $\mathbf{V}_{BC}$  and  $\mathbf{V}_{CA}$ , respectively, we may write:

$$\mathbf{V}_{AB} = (10 + j5.65) \mathbf{I}_1 - 10 \mathbf{I}_2 + j5.65 \mathbf{I}_3 \quad [1]$$

$$\mathbf{V}_{BC} = -10 \mathbf{I}_1 + (10 - j10.6) \mathbf{I}_2 + j10.6 \mathbf{I}_3 \quad [2]$$

$$\mathbf{V}_{CA} = -j5.65 \mathbf{I}_1 + j10.6 \mathbf{I}_2 + (j5.65 - j10.6) \mathbf{I}_3 \quad [3]$$

Solving using MATLAB or a scientific calculator, we find that

$$\mathbf{I}_1 = 53.23 \angle -5.873^\circ \text{ A}, \mathbf{I}_2 = 40.55 \angle 20.31^\circ \text{ A}, \text{ and } \mathbf{I}_3 = 0$$

(a)  $\mathbf{V}_{AN} = j5.65(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) = 300.7 \angle 84.13^\circ \text{ V},$

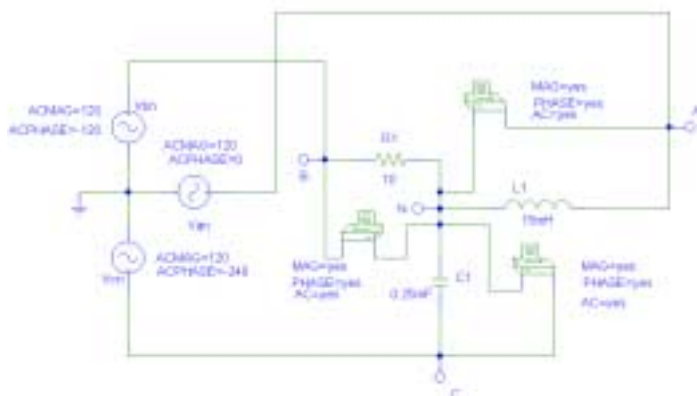
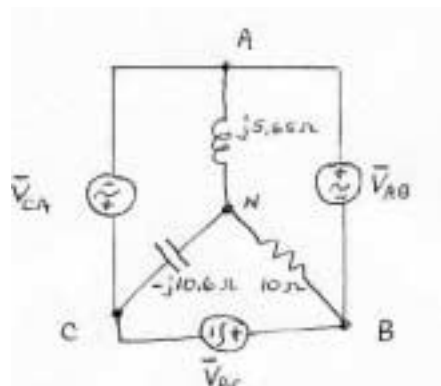
so  $V_{AN} = 300.7 \text{ V}$

(b)  $\mathbf{V}_{BN} = 10(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) = 245.7 \angle 127.4^\circ \text{ V},$

so  $V_{BN} = 245.7 \text{ V}$

(c)  $\mathbf{V}_{CN} = -j10.6(-\mathbf{I}_2) = 429.8 \angle 110.3^\circ \text{ V},$

so  $V_{CN} = 429.8 \text{ V}$



### PSpice Simulation Results (agree with hand calculations)

| FREQ      | VM(A,N)   | VP(A,N)   |
|-----------|-----------|-----------|
| 6.000E+01 | 3.007E+02 | 8.410E+01 |

| FREQ      | VM(B,N)   | VP(B,N)   |
|-----------|-----------|-----------|
| 6.000E+01 | 2.456E+02 | 1.274E+02 |

| FREQ      | VM(C,N)   | VP(C,N)   |
|-----------|-----------|-----------|
| 6.000E+01 | 4.297E+02 | 1.103E+02 |

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

29.  $\uparrow R_{line} = 1\Omega$

(a)

$$120\sqrt{3} = 207.8 \bar{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 207.8\angle 30^\circ & -1 & -j10 \\ 207.8\angle -90^\circ & 2+j5 & -j5 \\ 0 & -j5 & 10-j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -1 & -j10 \\ -1 & 2+j5 & -j5 \\ -10 & -j5 & 10-j5 \end{vmatrix}} = \frac{207.8 \begin{vmatrix} 1\angle 30^\circ & -1 & -10 \\ -j1 & 2+j5 & -j5 \\ 0 & -j5 & 10-j5 \end{vmatrix}}{12(70+j40) + (-10-j45) - 10(20+j55)}$$

$$\therefore \bar{I}_1 = \frac{207.8[1\angle 30^\circ(70+j40) + j1(-10-j45)]}{630-j115} = \frac{21.690\angle 34.86^\circ}{630-j115} = \boxed{33.87\angle 45.20^\circ = \bar{I}_{aA}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{I}_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1\angle 30^\circ & -10 \\ -1 & -j1 & -j5 \\ -10 & 0 & 10-j5 \end{vmatrix} 207.8}{630-j115} = \frac{207.8[-1\angle 30^\circ(-10-j45) - j1(20-j60)]}{630-j115} \\ &= \frac{16,136\angle 162.01^\circ}{630-j115} = 25.20\angle 172.36^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

(b)  $\therefore \bar{I}_{cC} = \boxed{25.20\angle -7.641^\circ \text{ A}}$

(c)  $\therefore \bar{I}_{bB} = -\bar{I}_{aA} - \bar{I}_{cC} = -33.87\angle 45.20^\circ - 25.20\angle -7.641^\circ = \boxed{53.03\angle -157.05^\circ \text{ A rms}}$

(d)  $\begin{aligned} \bar{S} &= 120\sqrt{3} \angle 30^\circ (33.87\angle -45.20^\circ) + 120\sqrt{3} \angle 90^\circ (25.20\angle 7.641^\circ) \\ &= 6793 - j1846.1 - 696.3 + j5190.4 = \boxed{6096 + j3344 \text{ VA}} \end{aligned}$

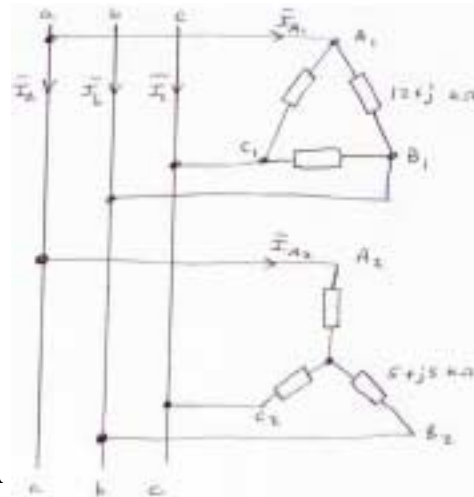


## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

30.  $|\mathbf{V}_{\text{line}}| = 240 \text{ V}$ . Set  $\mathbf{V}_{ab} = 240\angle 0^\circ \text{ V}$ . Then  $\mathbf{V}_{an} = \frac{240}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ$ .

$$\mathbf{I}_{A2} = \frac{\frac{240}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ}{5 + j3} = 23.8\angle -61.0^\circ \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{A1B1} = \frac{\frac{240}{\sqrt{3}}\angle 0^\circ}{(12 + j)\times 10^3} = 20.0\angle -4.76^\circ \text{ mA}$$



$\mathbf{I}_{\text{phase}}$  leads  $\mathbf{I}_{\text{line}}$  by  $30^\circ$ , so

$$\mathbf{I}_{A1} = 20\sqrt{3}\angle -34.8^\circ \text{ mA} = 34.6\angle -34.8^\circ \text{ mA}$$

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{A1} + \mathbf{I}_{A2} = 11.5 - j20.8 + 28.4 - j19.7 \text{ mA} = 56.9\angle -45.4^\circ \text{ mA}$$

$$\text{The power factor at the source} = \cos(45.4^\circ - 30^\circ) = 0.964 \text{ lagging.}$$

$$\text{The power taken by the load} = (3)(20\times 10^{-3})^2 (12\times 10^3) + (3)(23.8\times 10^{-3})^2 (5000) = 22.9 \text{ W.}$$

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

31. Define  $\mathbf{I}$  flowing from the '+' terminal of the source. Then,

$$\mathbf{I} = \frac{200 \angle 0}{10 + (j10 \parallel 20)} = \frac{200 \angle 0}{16.12 \angle 29.74^\circ} = 12.41 \angle -29.74^\circ$$

(a)  $\mathbf{V}_{xy} = 10 \mathbf{I} = 124.1 \angle -29.74^\circ \text{ V}$ . Thus,  $P_{xy} = (12.41)(124.1) = 1.54 \text{ kW}$

(b)  $P_{xz} = (200)(12.41) \cos (29.74^\circ) = 2.155 \text{ kW}$

(c)  $\mathbf{V}_{yz} = 200 \angle 0 - 124.1 \angle -29.74^\circ = 110.9 \angle 33.72^\circ \text{ V}$   
Thus,  $P_{yz} = (110.9)(12.41) \cos (33.72^\circ + 29.74^\circ) = 614.9 \text{ W}$

No reversal of meter leads is required for any of the above measurements.

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

32.  $1\text{ H} \rightarrow j377\ \Omega$ ,  $25\ \mu\text{F} \rightarrow -j106\ \Omega$

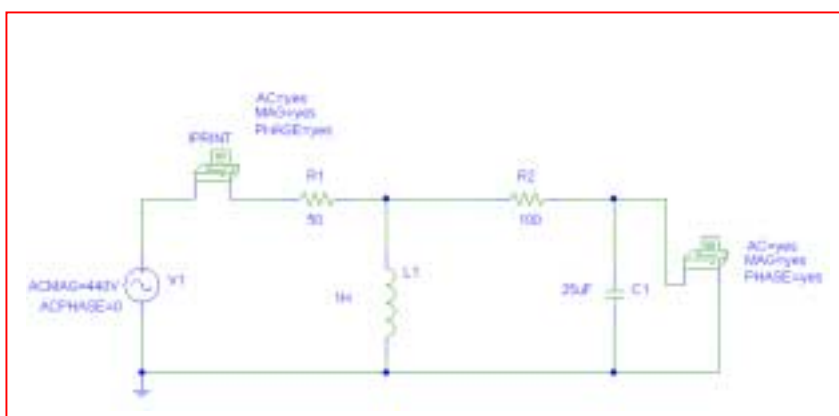
$$\mathbf{I}_1 = \frac{440\angle 0}{50 + [j377/(100-j106)]} = 1.86\angle 21^\circ\text{ A}$$

$$\mathbf{I}_C = \mathbf{I} \frac{j377}{j377 + 100 - j106} = 2.43\angle 41.3^\circ\text{ A}$$

$$\mathbf{V}_2 = (106\angle -90^\circ)(2.43\angle -41.3^\circ) = 257\angle -48.7^\circ\text{ V}$$

$$P_{\text{measured}} = (257)(1.86) \cos(21^\circ + 48.7^\circ) = 166\text{ W.}$$

No reversal of meter leads is needed. PSpice verification:



|           |                |                |
|-----------|----------------|----------------|
| FREQ      | VM(\$N_0002,0) | VP(\$N_0002,0) |
| 6.000E+01 | 2.581E+02      | -4.871E+01     |
| FREQ      | IM(V_PRINT1)   | IP(V_PRINT1)   |
| 6.000E+01 | 1.863E+00      | 2.103E+01      |



## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

33. 2.5 A peak = 1.77 A rms. 200 V peak = 141 V rms.  $100\text{ }\mu\text{F} \rightarrow -j20\text{ }\Omega$ .

Define the clockwise mesh current  $\mathbf{I}_1$  in the bottom mesh, and the clockwise mesh current  $\mathbf{I}_2$  in the top mesh.  $\mathbf{I}_C = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$ .

Since  $\mathbf{I}_2 = -177\angle -90^\circ$ , we need write only one mesh equation:

$$141\angle 0^\circ = (20 - j40)\mathbf{I}_1 + (-20 + j20)\mathbf{I}_2$$

$$\text{so that } \mathbf{I}_1 = \frac{141\angle 0 + (-20 + j20)(1.77\angle -90^\circ)}{20 - j40} = 4.023\angle 74.78^\circ \text{ A}$$

$$\text{and } \mathbf{I}_C = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 = 2.361\angle 63.43^\circ \text{ A. } \mathbf{I}_{\text{meter}} = -\mathbf{I}_1 = 4.023\angle -105.2^\circ$$
$$\mathbf{V}_{\text{meter}} = 20\mathbf{I}_C = 47.23\angle 63.43^\circ \text{ V}$$

$$\text{Thus, } P_{\text{meter}} = (47.23)(4.023)\cos(63.43^\circ + 105.2^\circ) = -186.3 \text{ W.}$$

Since this would result in pegging the meter, we would need to swap the potential leads.

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

34. (a) Define three clockwise mesh currents  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$  and  $\mathbf{I}_3$  in the top left, bottom left and right-hand meshes, respectively. Then we may write:

$$\begin{array}{rrcr} 100 \angle 0^\circ & = & (10 - j10) \mathbf{I}_1 & - (10 - j10) \mathbf{I}_3 \\ 50 \angle 90^\circ & = & (8 + j6) \mathbf{I}_2 & - (8 + j6) \mathbf{I}_3 \\ 0 & = & -(10 - j10) \mathbf{I}_1 & - (8 + j6) \mathbf{I}_2 + (48 + j6) \mathbf{I}_3 \end{array}$$

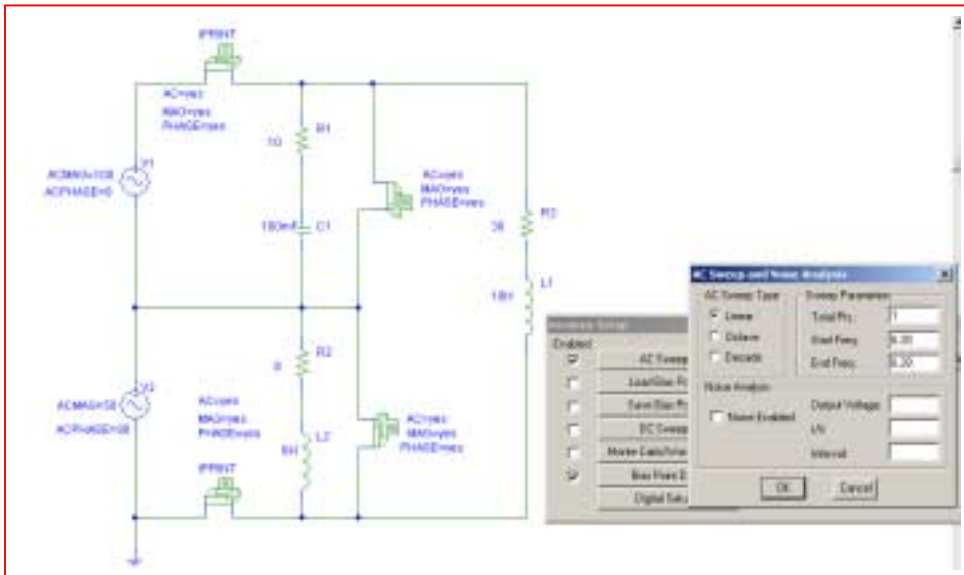
Solving, we find that  $\mathbf{I}_1 = 10.12 \angle 32.91^\circ$  A,  $\mathbf{I}_2 = 7.906 \angle 34.7^\circ$  and  $\mathbf{I}_3 = 3.536 \angle 8.13^\circ$  A.

Thus,  $P_A = (100)(10.12) \cos(-32.91^\circ) = 849.6$  W

and  $P_B = (5)(7.906) \cos(90^\circ - 34.7^\circ) = 225.0$  W

(b) Yes, the total power absorbed by the combined load (1.075 kW) is the sum of the wattmeter readings.

PSpice verification:



|           |                       |                       |
|-----------|-----------------------|-----------------------|
| FREQ      | IM(V_PRINT1)          | IP(V_PRINT1)          |
| 6.280E+00 | 1.014E+01             | 6.144E-02             |
| FREQ      | IM(V_PRINT2)          | IP(V_PRINT2)          |
| 6.280E+00 | 4.268E-01             | 1.465E+02             |
| FREQ      | VM(\$N_0002,\$N_0006) | VP(\$N_0002,\$N_0006) |
| 6.280E+00 | 1.000E+02             | 0.000E+00             |
| FREQ      | VM(\$N_0004,\$N_0006) | VP(\$N_0004,\$N_0006) |
| 6.280E+00 | 5.000E+01 -           | 9.000E+01             |

## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

35. This circuit is equivalent to a Y-connected load in parallel with a  $\Delta$ -connected load.

$$\text{For the Y-connected load, } \mathbf{I}_{\text{line}} = \frac{\frac{200}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ}{25 \angle 30^\circ} = 4.62 \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$P_Y = (3) \left( \frac{200}{\sqrt{3}} \right) (4.62) \cos 30^\circ = 1.386 \text{ kW}$$

$$\text{For the } \Delta\text{-connected load, } \mathbf{I}_{\text{line}} = \frac{200 \angle 0^\circ}{50 \angle -60^\circ} = 4 \angle 60^\circ \text{ A}$$

$$P_\Delta = (3)(200)(4 \cos 60^\circ) = 1.2 \text{ kW}$$

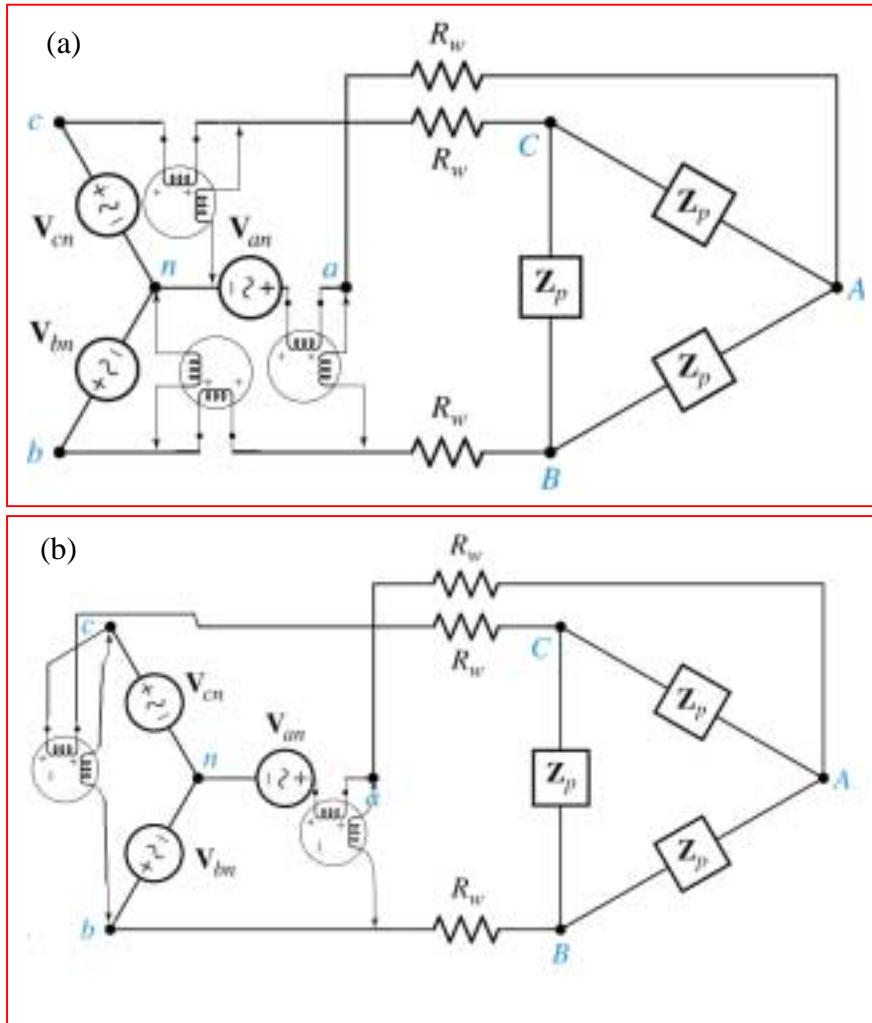
$$P_{\text{total}} = P_Y + P_\Delta = 2.586 \text{ kW}$$

$$P_{\text{wattmeter}} = P_{\text{total}} / 3 = \boxed{862 \text{ W}}$$



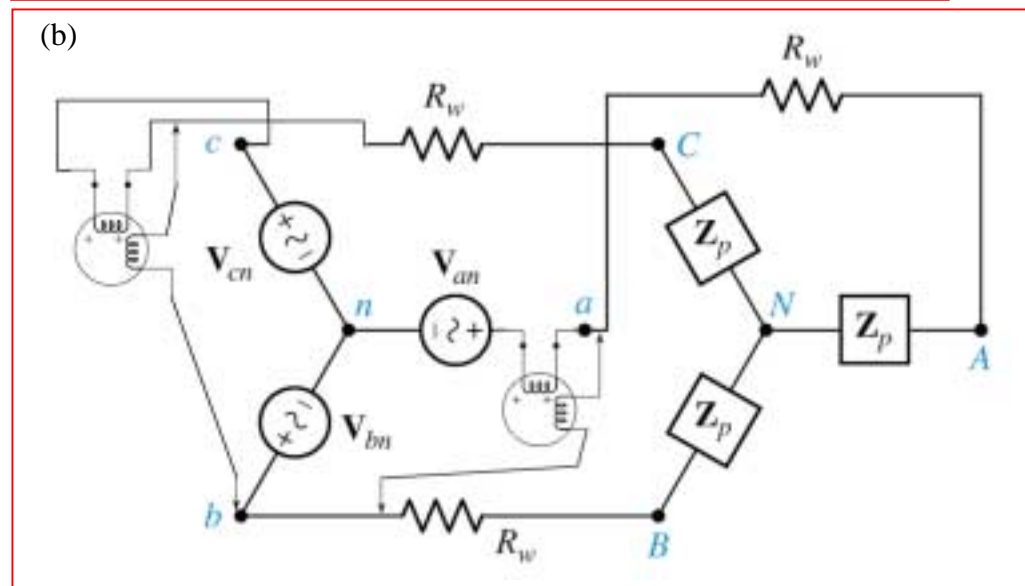
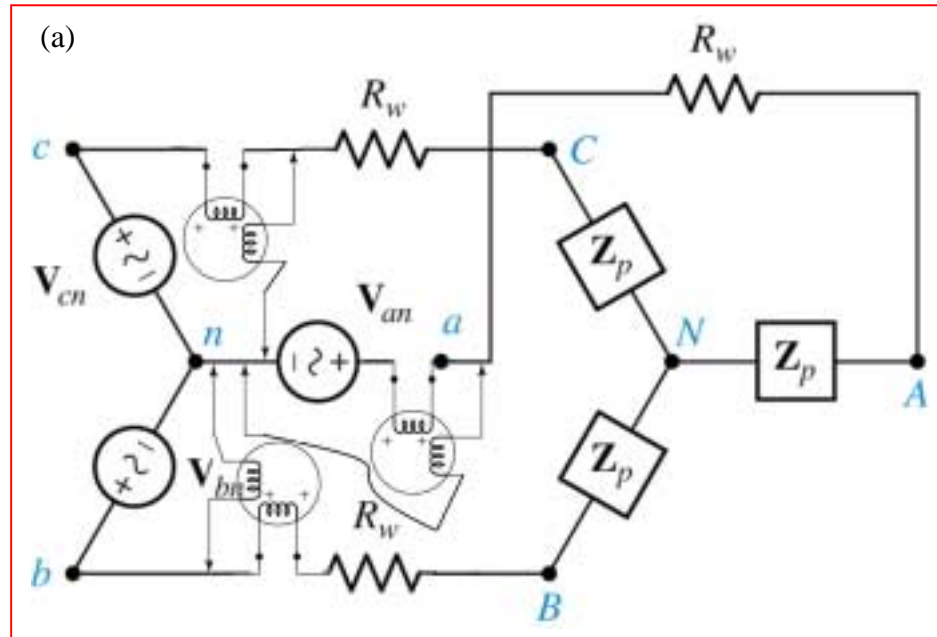
## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

36. We assume that the wire resistance cannot be separated from the load, so we measure from the source connection:



## CHAPTER TWELVE SOLUTIONS

37. We assume that the wire resistance cannot be separated from the load, so we measure from the source connection:



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

1. 1 and 3, 2 and 4

1 and 4, 2 and 3

3 and 1, 2 and 4



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

2.  $i_{s1} = 4t$  A,  $i_{s2} = 10t$  A

(a)  $v_{AG} = 20 \times 4 + 4 \times 10 = 120$  V

(b)  $v_{CG} = -4 \times 6 = -24$  V

(c)  $v_{BG} = 3 \times 10 + 4 \times 4 - 6 \times 4 = 30 + 16 - 24 = 22$  V

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

3.

$$(a) \quad 100 = (50 + j200)\bar{I}_1 + j300\bar{I}_2, (2000 + j500)\bar{I}_2 + j300\bar{I}_1 = 0$$

$$\therefore \bar{I}_2 = \frac{-j3}{20 + j5}, 100 = \left( 50 + j200 + \frac{900}{20 + j5} \right) \bar{I}_1$$

$$\therefore 100 = \frac{900 + j4250}{20 + j5} \bar{I}_1 \therefore \bar{I}_1 = 0.4745 \angle -64.01^\circ \text{ A}$$

$$\therefore P_{S,abs} = -\frac{1}{2} \times 100 \times 0.4745 \cos 64.01^\circ = \boxed{-10.399 \text{ W}}$$

$$(b) \quad P_{50} = \frac{1}{2} \times 50 \times 0.4745^2 = 5.630 \text{ W}, P_{2000} = \frac{1}{2} \times 2000 \times 0.4745^2 \times \left| \frac{-j3}{20 + j5} \right|^2 = \boxed{4.769 \text{ W}}$$

$$(c) \quad \boxed{0 \text{ each}}$$

$$(d) \quad \boxed{0}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

4.

$$\text{KVL Loop 1} \quad 100 \angle 0 = 2(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + j\omega 3 (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) + j\omega 2 (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)$$

$$\text{KVL Loop 2} \quad 2(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + 10\mathbf{I}_2 + j\omega 4 (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) + j\omega 2 (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) = 0$$

$$\text{KVL Loop 3} \quad 5\mathbf{I}_3 + j\omega 3 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1) + j\omega 2 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + j\omega 4 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + j\omega 2 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1) = 0$$

∴ LINEAR EQUATIONS

$$\begin{bmatrix} 2 + j\omega 3 & -2 + j\omega 2 & -j\omega 5 \\ -2 + j\omega 2 & 12 + j\omega 4 & -j\omega 6 \\ -j\omega 5 & j\omega 2 & 5 + j11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \angle 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Since  $\omega = 2\pi f = 2\pi(50) = 314.2$  rad/s, the matrix becomes

$$\begin{bmatrix} 2 + j942.6 & -2 + j628.4 & -j1571 \\ -2 + j628.4 & 12 + j1257 & -j1885 \\ -j1571 & j628.4 & 5 + j3456 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \angle 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solving using a scientific calculator or MATLAB, we find that

$$\mathbf{I}_1 = 278.5 \angle -89.65^\circ \text{ mA}, \mathbf{I}_2 = 39.78 \angle -89.43^\circ \text{ mA}, \mathbf{I}_3 = 119.4 \angle -89.58^\circ \text{ mA}.$$

Returning to the time domain, we thus find that

$$i_1(t) = 278.5 \cos(100\pi t - 89.65^\circ) \text{ mA}, i_2(t) = 39.78 \cos(100\pi t - 89.43^\circ) \text{ mA}, \text{ and } i_3(t) = 119.4 \cos(100\pi t - 89.58^\circ) \text{ mA}.$$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

5.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \bar{V}_{ab,oc} &= \frac{100}{50 + j200}(-j300) = 145.52 \angle -165.96^\circ \text{ V} \\
 100 &= (50 + j200) \bar{I}_1 + j300 \bar{I}_{2SC}, j500 \bar{I}_{2SC} + j300 \bar{I}_1 = 0 \\
 \therefore \bar{I}_1 &= -\frac{5}{3} \bar{I}_{2SC}, 100 = \left[ (50 + j200) \left( -\frac{5}{3} \right) + j300 \right] \bar{I}_{2SC} \therefore \bar{I}_{2SC} = 1.1142 \angle 158.199^\circ \text{ A} \\
 \therefore \bar{Z}_{th} &= \bar{V}_{ab,oc} / \bar{I}_{2SC} = \frac{145.52 \angle -165.96^\circ}{1.1142 \angle 158.199^\circ} = 130.60 \angle 35.84^\circ = \boxed{105.88 + j76.47 \Omega}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \bar{Z}_L &= 105.88 - j76.47 \Omega \therefore |\bar{I}_L| = \frac{145.52}{2 \times 105.88} = 0.6872 \text{ A} \\
 \therefore P_{Lmax} &= \frac{1}{2} \times 0.6872^2 \times 105.88 = \boxed{25.00 \text{ W}}
 \end{aligned}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

6.

(a)  $v_A(t) = L_1 i_1' - M i_2', v_B(t) = L_1 i_1' - M i_2' + L_2 i_2' - M i_1'$

(b)  $\mathbf{V}_1(j\omega) = j\omega L_1 \mathbf{I}_A + j\omega M(\mathbf{I}_B + \mathbf{I}_A)$

$$\mathbf{V}_2(j\omega) = j\omega L_2 (\mathbf{I}_B + \mathbf{I}_A) + j\omega M \mathbf{I}_A$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

7.

$$v_s = \frac{10t^2 u(t)}{t^2 + 0.01} = 0.01 i'_s \therefore i'_s = \frac{1000t^2}{t^2 + 0.01} u(t)$$

$$v_x = 0.015 i'_s = \frac{15t^2}{t^2 + 0.01} u(t), \quad 100v_x = \frac{1500t^2}{t^2 + 0.01} u(t)$$

$$\therefore i_c = 100 \times 10^{-6} v'_x = 10^{-4} \frac{d}{dt} \left( \frac{15t^2}{t^2 + 0.01} u(t) \right) = 15 \times 10^{-4} \frac{(t^2 + 0.01)2t - t^2 \times 2t}{(t^2 + 0.01)^2} u(t)$$

$$\therefore i_c = 15 \times 10^{-4} \frac{0.02t}{(t^2 + 0.01)^2} \therefore i_c(t) = \frac{30t}{(t^2 + 0.01)^2} \mu\text{A}, \quad t > 0$$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

8.

(a)  $-V_2 = j\omega 0.4 \angle 0$

$$V_2 = -j100\pi \times 0.4 \times 1 \angle 0 = 126 \angle 90^\circ \text{ V}$$

Thus,  $v(t) = 126 \cos(100\pi t + 90^\circ) \text{ V}$

(b) Define  $V_2$  across the 2-H inductor with + reference at the dot, and a clockwise currents  $I_1$  and  $I_2$ , respectively, in each mesh. Then,

$V = -V_2$  and we may also write

$$V_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \quad \text{or} \quad -V = j\omega L_2 \frac{V}{10} + j\omega M$$

Solving for  $V$ ,

$$V = \frac{-(j100\pi)(0.4)}{1 + (j100\pi)(2)} = \frac{125.7 \angle -90^\circ}{1 + j62.83} = \frac{125.7 \angle -90^\circ}{62.84 \angle 89.09^\circ} = 2.000 \angle -179.1^\circ$$

Thus,

$$v(t) = 2 \cos(100\pi t - 179.1^\circ) \text{ V.}$$

(c) Define  $V_1$  across the left inductor, and  $V_2$  across the right inductor, with the “+” reference at the respective dot; also define two clockwise mesh currents  $I_1$  and  $I_2$ . Then,

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$$

$$V_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1$$

Now  $I_1 = \frac{1 \angle 0 - V_1}{4}$  and  $V_{out} = -V_2$

$$\text{and } I_2 = \frac{V_{out}}{10}$$

$$\Rightarrow V_1 = j\omega L_1 \left[ \frac{1 \angle 0 - V_1}{4} \right] + j\omega M \frac{V_{out}}{10} \quad \text{EQN 1}$$

$$-V_{out} = j\omega L_2 \frac{V_{out}}{10} + j\omega M \left[ \frac{1 \angle 0 - V_1}{4} \right] \quad \text{EQN 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{j\omega L_1}{4} & \frac{-j\omega M}{10} \\ \frac{j\omega M}{4} & -1 + \frac{j\omega L_2}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{j\omega L_1}{4} \frac{1 \angle 0}{4} \\ \frac{j\omega M}{4} \frac{1 \angle 0}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - j39 & -j12.6 \\ j31.4 & -1 + j62.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39.3j \\ 31.4j \end{bmatrix}$$

Solving, we find that  $V_{out} (= V) = 1.20 \angle -2.108^\circ \text{ V}$  and hence

$$v(t) = 1.2 \cos(100\pi t - 2.108^\circ) \text{ V.}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

9.

$$(a) \quad 100 = j5\omega (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + j3\omega \mathbf{I}_2 + 6(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3) \quad [1]$$

$$(4 + j4\omega)\mathbf{I}_2 + j3\omega (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) + j2\omega (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + j6\omega (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3) - j2\omega \mathbf{I}_2 + j5\omega (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) - j3\omega \mathbf{I}_2 = 0 \quad [2]$$

$$6 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1) + j6\omega (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2) + j2\omega \mathbf{I}_2 + 5 \mathbf{I}_3 = 0 \quad [3]$$

Collecting terms,

$$(6 + j5\omega) \mathbf{I}_1 - j2\omega \mathbf{I}_2 - 6 \mathbf{I}_3 = 100 \quad [1]$$

$$-j2\omega \mathbf{I}_1 + (4 + j5\omega) \mathbf{I}_2 - j4\omega \mathbf{I}_3 = 0 \quad [2]$$

$$-6 \mathbf{I}_1 - j4\omega \mathbf{I}_2 + (11 + j6\omega) \mathbf{I}_3 = 0 \quad [3]$$

(b) For  $\omega = 2$  rad/s, we find

$$(6 + j10) \mathbf{I}_1 - j4 \mathbf{I}_2 - 6 \mathbf{I}_3 = 100$$

$$-j4 \mathbf{I}_1 + (4 + j10) \mathbf{I}_2 - j8 \mathbf{I}_3 = 0$$

$$-6 \mathbf{I}_1 - j8 \mathbf{I}_2 + (11 + j12) \mathbf{I}_3 = 0$$

Solving,  $\mathbf{I}_3 = 4.32 \angle -54.30^\circ \text{ A}$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

10.

(a)

$$\begin{aligned} V_a &= j\omega L_1 I_a + j\omega M I_b & I_a &= I_1 \\ V_b &= j\omega L_2 I_b + j\omega M I_a & I_b &= -I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 R_1 + V_a \\ &= I_1 R_1 + j\omega L_1 I_a + j\omega M I_b \\ &= I_1 R_1 + j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= I_2 R_2 - V_b \\ &= I_2 R_2 - j\omega L_2 I_b - j\omega M I_a \\ &= I_2 R_2 + j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 \end{aligned}$$

(b) Assuming that the systems connecting the transformer are fully isolated.

$$\begin{aligned} V_a &= j\omega L_1 I_a + j\omega M I_b & I_a &= -I_1 \\ V_b &= j\omega L_2 I_b + j\omega M I_a & I_b &= -I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 R - V_a \\ &= I_1 R - j\omega L_1 I_a - j\omega M I_b \\ &= I_1 R + j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= V_b + I_b R_2 \\ &= -I_2 R_2 + j\omega L_2 I_b + j\omega M I_a \\ &= -I_2 R_2 - j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 \end{aligned}$$



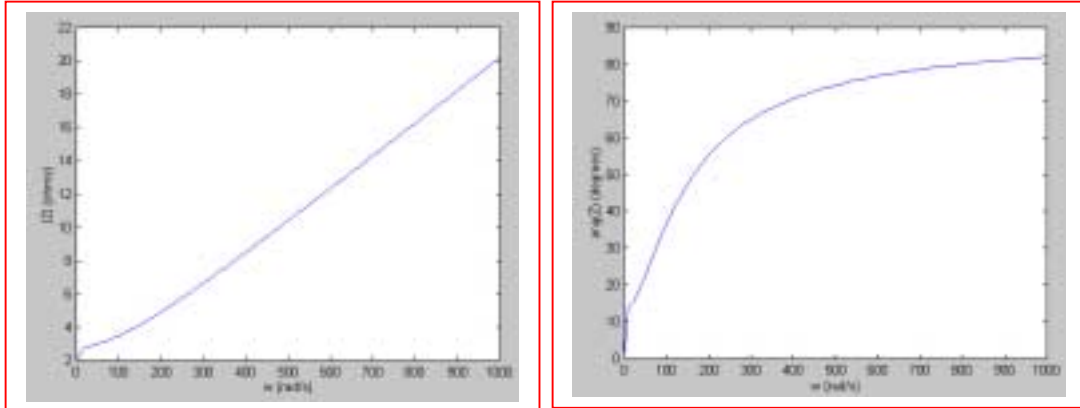
## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

11.

(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{Z} &= 2 + j\omega 0.1 + \frac{\omega^2 (0.2)^2}{5 + j\omega 0.5} \\ &= 2 + j\omega 0.1 + \frac{5\omega^2 (0.2)^2}{5^2 + (\omega 0.5)^2} - \frac{j\omega 0.5 \omega^2 (0.2)^2}{5^2 + (\omega 0.5)^2} \\ &= 2 + \frac{0.2\omega^2}{25 + 0.25\omega^2} + j\omega \left[ 0.1 - \frac{0.02\omega^2}{25 + 0.25\omega^2} \right]\end{aligned}$$

(b)



(c)  $\mathbf{Z}_{in}(j\omega)$  at  $\omega = 50$  is equal to  $2 + 0.769 + j(50)(0.023) = 2.77 + j1.15 \Omega$ .

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

12.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_{in} &= \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{\mathbf{Z}_{22}} \\
 &= j\omega 50 \times 10^{-3} + \frac{\omega^2 M^2}{8 + j\omega 10 \times 10^{-3}} \\
 \Rightarrow \mathbf{Z}_{in} &= j\omega 50 \times 10^{-3} + \frac{\omega^2 M^2 8}{8^2 + (\omega 10 \times 10^{-3})^2} - \frac{j\omega 10 \times 10^{-3} \omega^2 M^2}{8^2 + (\omega 10 \times 10^{-3})^2} \\
 &= \frac{\omega^2 M^2 8}{8^2 + (\omega 10 \times 10^{-3})^2} + j\omega \left[ 50 \times 10^{-3} - \frac{10 \times 10^{-3} \omega^2 M^2}{8^2 + (\omega 10 \times 10^{-3})^2} \right]
 \end{aligned}$$

In this circuit the real power delivered by the source is all consumed at the speaker, so

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{V_{rms}^2}{R} \Rightarrow 3.2 = \left( \frac{20}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \frac{1}{8^2 + (\omega 10 \times 10^{-3})^2} \\
 \Rightarrow \frac{\omega^2 M^2 8}{8^2 + (\omega 10 \times 10^{-3})^2} &= \frac{20^2}{2 \times 3.2} \quad \boxed{= 62.5 \text{ W}}
 \end{aligned}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

13.  $i_{s1} = 2 \cos 10t$  A,  $i_{s2} = 1.2 \cos 10t$  A

(a)  $v_1 = 0.6(-20 \sin 10t) - 0.2(-12 \sin 10t) + 0.5(-32 \sin 10t) + 9.6 \cos 10t$   
 $\therefore v_1 = 9.6 \cos 10t - 25.6 \sin 10t = 27.34 \cos (10t + 69.44^\circ)$  V

(b)  $v_2 = 0.8(-12 \sin 10t) - 0.2(-20 \sin 10t) - 16 \sin 10t + 9.6 \cos 10t$   
 $\therefore v_2 = 9.6 \cos 10t - 21.6 \sin 10t = 23.64 \cos (10t + 66.04^\circ)$  V

(c)  $P_{s1} = \frac{1}{2} \times 27.34 \times 2 \cos 69.44^\circ = 9.601$  W,  $P_{s2} = \frac{1}{2} \times 23.64 \times 1.2 \cos 66.04^\circ = 5.760$  W



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

14.

$$V_a = j\omega 8I_a + j\omega 4I_b$$

$$* \quad V_b = j\omega 10I_b + j\omega 4I_a = j\omega 10I_b + j\omega 5I_c$$

$$V_c = j\omega 6I_c + j\omega 5I_b$$

$$\text{Also } I = -I_a = -I_b = I_c$$

Now examine equation \*.

$$-j\omega 10I - j\omega 4I = -j\omega 10I + j\omega 5I_c$$

$\therefore$  the only solution to this circuit is  $I = 0$  and hence

$$v(t) = 120 \cos \omega t \text{ V.}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

15.

$$100 = j10\bar{I}_1 - j15\bar{I}_2$$

$$0 = j200\bar{I}_2 - j15\bar{I}_1 - j15\bar{I}_L$$

$$0 = (5 + j10)\bar{I}_L - j15\bar{I}_2$$

$$\therefore \bar{I}_2 = \frac{5 + j10}{j15} \bar{I}_L = \frac{1 + j2}{j3} \bar{I}_L \quad \therefore 0 = j200 \left( \frac{1 + j2}{j3} - j15 \right) \bar{I}_L - j15\bar{I}_1$$

$$\therefore 0 = \left( j\frac{400}{3} - j15 + \frac{200}{3} \right) \bar{I}_L - j15\bar{I}_1 \quad \therefore \bar{I}_1 = \frac{j118.33 + 66.67}{j15} \bar{I}_L$$

$$\therefore 100 = \left[ \frac{2}{3} (66.67 + j118.33) - 5 - j10 \right] \bar{I}_L = (39.44 + j68.89) \bar{I}_L$$

$$\therefore \bar{I}_L = \boxed{1.2597 \angle -60.21^\circ \text{ A}}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

16.  $i_s = 2 \cos 10t$  A,  $t = 0$

(a)  $a-b$  O.C.  $\therefore w(0) = \frac{1}{2} \times 5 \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 4 \times 2^2 = 10 + 8 = 18$  J

(b)  $a-b$  S.C.  $\omega = 10$ ,  $\bar{I}_s = 2 \angle 0^\circ$  A,  $M = \frac{1}{2} \sqrt{12} = \sqrt{3}$  H

$$(j30 + 5) \bar{I}_2 - j10\sqrt{3} \times 2, \therefore \bar{I}_2 = \frac{j20\sqrt{3}}{5 + j30} = 1.1390 \angle 9.462^\circ \text{ A} \therefore i_2 = 1.1390 \cos(10t + 9.462^\circ) \text{ A}$$

$$\therefore i_2(0) = 1.1235^- \therefore w(0) = 10 + 8 - \sqrt{3} \times 2 \times 1.1235 + \frac{1}{2} \times 3 \times 1.1235^2 = 16.001 \text{ J}$$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

17.

$$\bar{V}_s = 12\angle 0^\circ \text{ V rms}, \omega = 100 \text{ rad/s}$$

$$12 = (6 + j20) \bar{I}_1 + j100(0.4K) \bar{I}_2, (24 + j80) \bar{I}_2 + j40K\bar{I}_1 = 0$$

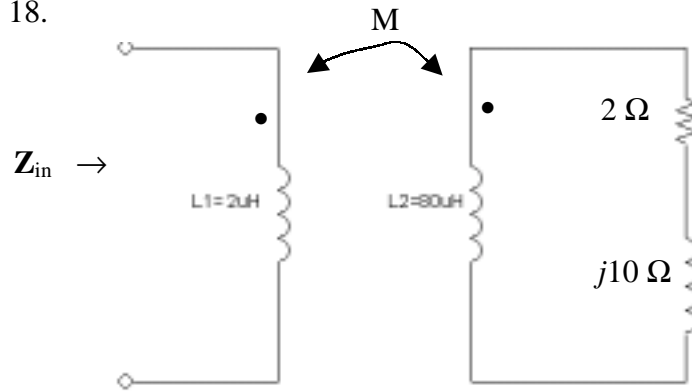
$$\therefore \bar{I}_1 = \frac{3 + j10}{-j5K} \bar{I}_2 \quad \therefore 12 = \left[ (6 + j20) \frac{3 + j10}{-j5K} + j40K \right] \bar{I}_2$$

$$\therefore 12 = \frac{18 - 200 + j60 + j60 + 200K^2}{-j5K} \bar{I}_2 \quad \therefore \bar{I}_2 = \frac{-j60K}{-182 + 200K^2 + j120}$$

$$\therefore P_{24} = \frac{60^2 K^2 24}{(200K^2 - 182)^2 + 120^2} = \frac{86,400 K^2}{40,000K^4 - 72,800K^2 + 47,524} = \boxed{\frac{2.16K^2}{K^4 - 1.82K^2 + 1.1881} \text{ W}}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

18.



$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$\omega = 250k \text{ rad / s}$$

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{2 \times 80} \times 10^{-6} \\ = 12.6 \mu\text{H}$$

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + \frac{-j\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

$$\mathbf{Z}_{11} = j \times 250 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6} \\ = j0.5$$

$$R_{22} = 2 \Omega$$

$$X_{22} = (250 \times 10^3)(80 \times 10^{-6}) \\ = 20$$

Thus,  $\mathbf{Z}_{in} = j0.5 + 19.8/404 - j198/404$

$$= \boxed{0.049 + j0.010 \Omega}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

19.  $\omega = 100 \text{ rad/s}$

(a)  $K_1 \rightarrow j50\Omega$ ,  $K_2 \rightarrow j20\Omega$ ,  $1H \rightarrow j100\Omega$

$$100 = j200 \bar{I}_1 - j50\bar{I}_2 - j20\bar{I}_3$$

$$0 = (10 + j100)\bar{I}_2 - j50\bar{I}_1$$

$$0 = (20 + j100)\bar{I}_3 - j20\bar{I}_1$$

$$\therefore \bar{I}_3 = \frac{j2}{2 + j10} \bar{I}_1, \bar{I}_2 = \frac{j5}{1 + j10} \bar{I}_1 \therefore 10 = \left[ j20 - j5 \frac{j5}{1 + j10} - j2 \frac{j2}{2 + j10} \right] \bar{I}_1$$

$$\therefore 10 = \left( j20 + \frac{25}{1 + j10} + \frac{4}{2 + j10} \right) \bar{I}_1 \therefore \bar{I}_1 = 0.5833 \angle -88.92^\circ \text{ A}, \bar{I}_2 = 0.2902 \angle -83.20^\circ \text{ A},$$

$$\bar{I}_3 = 0.11440 \angle -77.61^\circ \text{ A} \therefore P_{10\Omega} = 0.2902^2 \times 10 = \boxed{0.8422 \text{ W}}$$

(b)  $P_{20} = 0.1144^2 \times 20 = \boxed{0.2617 \text{ W}}$

(c)  $P_{gen} = 100 \times 0.5833 \cos 88.92^\circ = \boxed{1.1039 \text{ W}}$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

20.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad k &= \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \\ \Rightarrow M &= 0.4\sqrt{5 \times 1.8} \\ &= \boxed{1.2\text{H}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad I_1 + I_2 &= I_3 \\ \Rightarrow I_2 &= I_3 - I_1 \\ &= \boxed{5 \times 10^{-5} - 4 \times 10^{-10}} \end{aligned}$$

(c) The total energy stored at  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= 4\text{A} & I_2 &= 1\text{A} \\ W_{\text{total}} &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 16 + \frac{1}{2} \times 1.8 \times 1 - 1.2 \times 4 \times 1 \\ &= 40 + 0.9 - 4.8 \\ &= \boxed{36.1\text{J}} \end{aligned}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

21.

$$K \rightarrow j1000K\sqrt{L_1L_2}, L_1 \rightarrow j1000L_1, L_2 \rightarrow j1000L_2$$

$$\therefore \bar{V}_s = (2 + j1000L_1) \bar{I}_1 - j1000K\sqrt{L_1L_2} \bar{I}_2$$

$$0 = -j1000K\sqrt{L_1L_2} \bar{I}_1 + (40 + j1000L_2) \bar{I}_2$$

$$\omega = 1000 \text{ rad/s} \quad \therefore \bar{I}_1 = \frac{40 + j1000L_2}{j1000K\sqrt{L_1L_2}} \bar{I}_2$$

$$\therefore \bar{V}_s = \frac{(2 + j1000L_1)(40 + j1000L_2) + 10^6 K^2 L_1 L_2}{j1000K\sqrt{L_1L_2}} \bar{I}_2$$

$$\therefore \bar{I}_2 = \frac{j1000K\sqrt{L_1L_2}}{80 + j40,000L_1 + j2000L_2 - 10^6 L_1 L_2 (1 - K^2)}$$

$$\therefore \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_s} = \frac{j40,000K\sqrt{L_1L_2}}{80 - 10^6 L_1 L_2 (1 - K^2) + j(40,000L_1 + 2000L_2)}$$

$$(a) \quad L_1 = 10^{-3}, L_2 = 25 \times 10^{-3}, K = 1 \quad \therefore \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_s} = \frac{j40 \times 5}{80 - 0 + j(40 + 50)} = \frac{j200}{80 + j90} = \boxed{1.6609 \angle 41.63^\circ}$$

$$(b) \quad L_1 = 1, L_2 = 25, K = 0.99 \quad \therefore \frac{V_2}{V_s} = \frac{j40,000 \times 0.99 \times 5}{80 - 25 \times 10^6 (1 - 0.99^2) + j(40,000 + 50,000)}$$

$$\therefore \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_s} = \frac{j198,000}{80 - 497,500 + j90,000} = \boxed{0.3917 \angle -79.74^\circ}$$

$$(c) \quad L_1 = 1, L_2 = 25, K = 1 \quad \therefore \frac{V_2}{V_s} = \frac{j40,000 \times 5}{80 - 0 + j90,000} = \frac{j200,000}{80 + j90,000} = \boxed{2.222 \angle 0.05093^\circ}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

22.

(a)  $L_{AB,CDOC} = 10 \text{ mH}$ ,  $L_{CD,ABOC} = 5 \text{ mH}$

$$L_{AB,CDSC} = 8 \text{ mH}$$

$$\therefore L_1 = 10 \text{ mH}, L_2 = 5 \text{ mH}, 8 = 10 - M + M \parallel (5 - M) \text{ (mH)}$$

$$\therefore 8 = 10 - M + \frac{M(5 - M)}{5}, \therefore 5M = (10 - 8)5 + 5M - M^2 \therefore M = 3.162 \text{ mH} (= \sqrt{10})$$

$$\therefore K = \frac{3.162}{\sqrt{50}} \therefore K = 0.4472$$

(b) Dots at A and D,  $i_1 = 5 \text{ A}$ ,  $w_{tot} = 100 \text{ mJ}$

$$\therefore 100 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-3} \times 25 + \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-3} i_2^2 - \sqrt{10} \times 5 i_2 \times 10^{-3}$$

$$100 = 125 + 2.5 i_2^2 - 5 \sqrt{10} i_2 \therefore i_2^2 - 2 \sqrt{10} i_2 + 10 = 0, i_2 = \frac{2 \sqrt{10} \pm \sqrt{40 - 40}}{2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore i_2 = 3.162 \text{ A}$$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

23. Define coil voltages  $v_1$  and  $v_2$  with the “+” reference at the respective dot. Also define two clockwise mesh currents  $i_1$  and  $i_2$ . We may then write:

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{d\mathbf{I}_1}{dt} + M \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} \\ v_2 &= L_2 \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} + M \frac{d\mathbf{I}_1}{dt} \quad \omega = 2\pi 60 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

or, using phasor notation,

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M \mathbf{I}_1$$

$$100\angle 0 = 50\mathbf{I}_1 + j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$$

$$-25\mathbf{I}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M \mathbf{I}_1$$

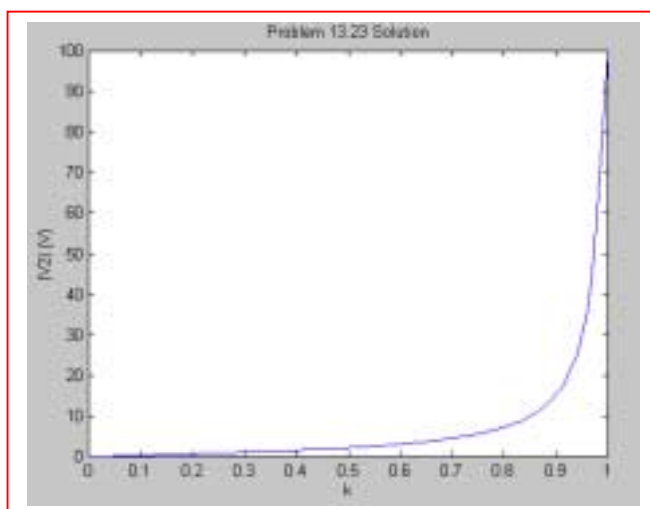
$$\text{Rearrange:} \quad [50 + j\omega L_1] \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2 = 100\angle 0$$

$$j\omega M \mathbf{I}_1 + [-25 + j\omega L_2] \mathbf{I}_2 = 0$$

$$\text{or} \quad \begin{bmatrix} 50 + j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & -25 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\angle 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

We can solve for  $\mathbf{I}_2$  and  $\mathbf{V}_2 = -25\mathbf{I}_2$ :

$$\mathbf{V}_2 = -\frac{j1.658}{k\sqrt{L_1 L_2} + 1}$$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

24.

$$i_1 = 2 \cos 500t \text{ A} \quad W_{\max} \text{ at } t = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore w_{\max} &= \frac{1}{2} \times 4 \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 6 \times 2^2 + \frac{1}{2} \times 5 \times 2^2 + 3 \times 2^2 \\ &= 8 + 12 + 10 + 12 = 42 \text{ J} \end{aligned}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

25.

(a) All DC:  $L_{1-2} = 2 - 1 = 1 \text{ H}$

(b) AB SC:  $L_{1-2} = -1 + 2 \parallel 8 = 0.6 \text{ H}$

(c) BC SC:  $L_{1-2} = 2 + (-1) \parallel 9 = 2 - 9/8 = 0.875 \text{ H}$

(d) AC SC:  $L_{1-2} = (2 - 1) \parallel (1 + 2) = 1 \parallel 3 = 0.750 \text{ H}$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

26.

$$(a) \quad \frac{\mathbf{I}_L}{\mathbf{V}_s} = \frac{1}{15 + j3\omega + \frac{j2\omega(20 + j\omega)}{20 + j3\omega}} \left( \frac{j2\omega}{20 + j3\omega} \right)$$

$$= \frac{j2\omega}{300 - 11\omega^2 + j145\omega}$$

$$(b) \quad v_s(t) = 100u(t), i_s(0) = 0, i_L(0) = 0, s_{1,2} = \frac{-145 \pm \sqrt{145^2 - 13,200}}{22} = -2.570, -10.612$$

$$i_L = i_{Lf} + i_{Ln}, i_{Lf} = 0, \therefore i_L = Ae^{-2.57t} + Be^{-10.61t}, \therefore 0 = A + B$$

$$100 = 15i_s + 5i'_s - 2i'_L, 0 = 20i_L + 3i'_L - 2i'_s \text{ At } t = 0^+: 100 = 0 + 5i'_s(0^+) - 2i'_L(0^+) \text{ and}$$

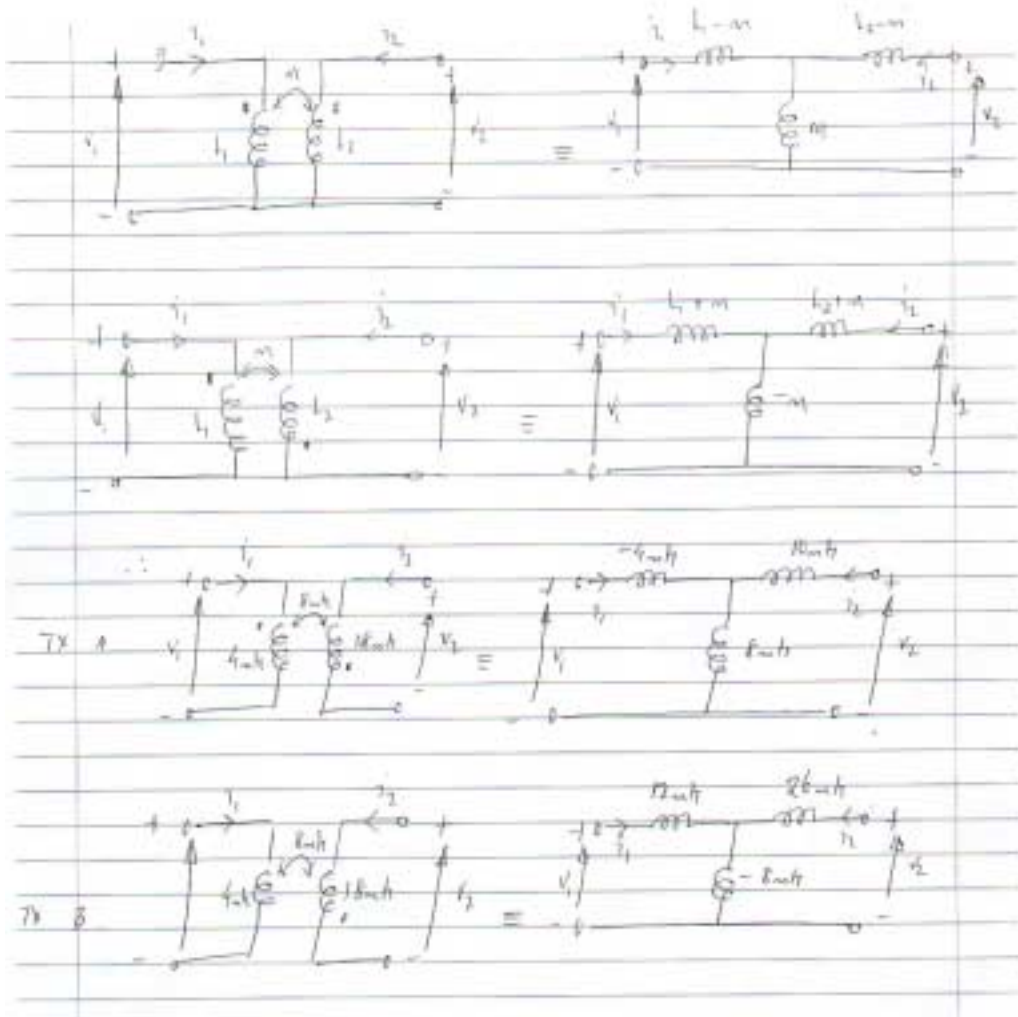
$$0 = 0 + 3i'_L(0^+) - 2i'_s(0^+) \therefore i'_s(0^+) = 1.5i'_L(0^+) \therefore 100 = 7.5i'_L(0^+) - 2i'_L(0^+) = 5.5i'_L(0^+)$$

$$\therefore i'_L(0^+) = 18.182 \text{ A/s} \therefore 18.182 = -2.57A - 10.61B = -2.57A + 10.61A = 8.042A$$

$$\therefore A = 2.261, B = -2.261, i_L(t) = 2.261(e^{-2.57t} - e^{-10.612t}) \text{ A}, t > 0$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

27.



(a) Open-Circuit

$$\mathbf{Z}_{oc}^{T \times A} = j\omega 4 \text{ M}\Omega$$

$$\mathbf{Z}_{oc}^{T \times B} = j\omega 4 \text{ M}\Omega$$

(b) Short-Circuit

$$\mathbf{Z}_{ss}^{T \times A} = \mathbf{Z}_{ss}^{T \times B} = -j\omega 4 \text{ M}\Omega + j\omega 8 \parallel j\omega 10 \text{ M}\Omega$$

(c) If the secondary is connected in parallel with the primary

$$\mathbf{Z}_{in}^{T \times A} = -j\omega 4 \parallel -j\omega 10 + j\omega 8 \text{ M}\Omega$$

$$\mathbf{Z}_{in}^{T \times B} = j\omega 26 \parallel j\omega 12 - j\omega 8 \text{ M}\Omega$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

28. Define three clockwise mesh currents  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$ , and  $\mathbf{I}_3$  beginning with the left-most mesh.

$$\mathbf{V}_s = j8\omega \mathbf{I}_1 - j4\omega \mathbf{I}_2$$

$$0 = -4j\omega \mathbf{I}_1 + (5 + j6\omega) \mathbf{I}_2 - j2\omega \mathbf{I}_3$$

$$0 = -j2\omega \mathbf{I}_2 + (3 + j\omega) \mathbf{I}_3$$

Solving,  $\mathbf{I}_3 = j\omega / (15 + j17\omega)$ . Since  $\mathbf{V}_o = 3 \mathbf{I}_3$ ,

$$\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = \frac{j3\omega}{15 + j17\omega}$$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

$$29. \quad L_{\text{eq}} = 2/3 + 1 + 2 + 6/5 = 4.867 \text{ H}$$

$$Z(j\omega) = 10j\omega(4.867)/(10 + j\omega 4.867)$$

$$= j4.867\omega/(1 + j0.4867\omega) \Omega.$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

30.

$$\omega = 100 \text{ rad/s}$$

$$\bar{V}_s = 100\angle 0^\circ \text{ V rms}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad Z_{in a-b} &= 20 + j600 + \frac{j400(10 - j200)}{10 + j200} = 20 + j600 + \frac{80,000 + j4,000}{10 + j200} \\ &= 210.7\angle 73.48^\circ \text{ V and } \mathbf{V_{oc} = 0.} \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \bar{V}_{OC,cd} = \frac{100(j400)}{20 + j1000} = 39.99\angle 1.146^\circ \text{ V rms}$$

$$\bar{Z}_{in cd}, \bar{V}_s = 0 = -j200 + \frac{j400(20 + j600)}{20 + j1000} = -j200 + \frac{-240,000 + j8,000}{20 + j1,000} = 40.19\angle 85.44^\circ \Omega$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

31.  $L_1 = 1 \text{ H}$ ,  $L_2 = 4 \text{ H}$ ,  $K = 1$ ,  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$

(a)  $\bar{Z}_L = 1000 \Omega \quad \therefore \bar{Z}_{in} = j1000 + \frac{10^6 \times 1 \times 4}{j4000 + 100} = 24.98 + j0.6246 \Omega$

(b)  $\bar{Z}_L = j1000 \times 0.1 \quad \therefore \bar{Z}_{in} = j1000 + \frac{4 \times 10^6}{j4000 + j100} = j24.39 \Omega$

(c)  $\bar{Z}_L = -j100 \quad \therefore \bar{Z}_{in} = j1000 + \frac{4 \times 10^6}{j4000 - j100} = -j25.46 \Omega$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

32.

$$L_1 = 6 \text{ H}, L_2 = 12 \text{ H}, M = 5 \text{ H}$$

$$\#1, L_{inAB,CDOC} = 6 \text{ H}$$

$$\#2, L_{inCD,ABOC} = 12 \text{ H}$$

$$\#3, L_{inAB,CDSC} = 1 + 7 \parallel 5 = 3.917 \text{ H}$$

$$\#4, L_{inCD,ABSC} = 7 + 5 \parallel 1 = 7.833 \text{ H}$$

$$\#5, L_{inAC,BDSC} = 7 + 1 = 8 \text{ H}$$

$$\#6, L_{inAB,ACSC,BDSC} = 7 \parallel 1 + 5 = 5.875 \text{ H}$$

$$\#7, L_{inAD,BCSC} = 11 + 17 = 28 \text{ H}$$

$$\#8, L_{inAB,ADSC} = -5 + 11/17 = 1.6786 \text{ H}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

33.

$$\mathbf{Z}_{in} = \mathbf{Z}_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}}$$

$$\frac{1}{\omega C} = 31.83 \Rightarrow \omega = \frac{1}{31.83 \times C} = 314 \text{ rad/s}$$

ie. a 50Hz system

$$\mathbf{Z}_{in} = 20 + j\omega 100 \times 10^{-3} + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2}{2 - j31.83}$$

$$\mathbf{Z}_{in} = 20 + j\omega 100 \times 10^{-3} + \frac{\omega^2 k^2 L_1 L_2 2}{2^2 + 31.83^2} - \frac{j\omega^2 k^2 L_1 L_2 31.83}{2^2 + 31.83^2}$$

$$= 20 + j31.4 + \left[ \frac{493}{1020} - j\frac{7840}{1020} \right] k^2$$

$$= 20 + j31.4 + [0.483 - j7.69] k^2$$

(a)  $\mathbf{Z}_{in}(k=0) = \boxed{20 + j31.4 \quad \Omega}$

(b)  $\mathbf{Z}_{in}(k=0.5) = \boxed{20.2 + j27.6 \quad \Omega}$

(c)  $\mathbf{Z}_{in}(k=0.9) = \boxed{20.4 + j24.5 \quad \Omega}$

(d)  $\mathbf{Z}_{in}(k=1.0) = \boxed{20.5 + j23.7 \quad \Omega}$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

34.  $\uparrow L_1 \rightarrow 125 \text{ H}, L_2 \rightarrow 20 \text{ H}, K = 1, \therefore M = \sqrt{2500} = 50 \text{ H}, j\omega M = j5000 \Omega$

(a) 
$$\bar{Z}_{in-a-b} = 20 + j7500 + \frac{j5000(10 - j3000)}{10 + j2000}$$

$$= 20 + j7500 + \frac{15 \times 10^6 + j50,000}{10 + j2000} = 82.499 \angle 0.2170^\circ \Omega$$

$$= 82.498 + j0.3125 \Omega \quad V_{oc} = 0$$

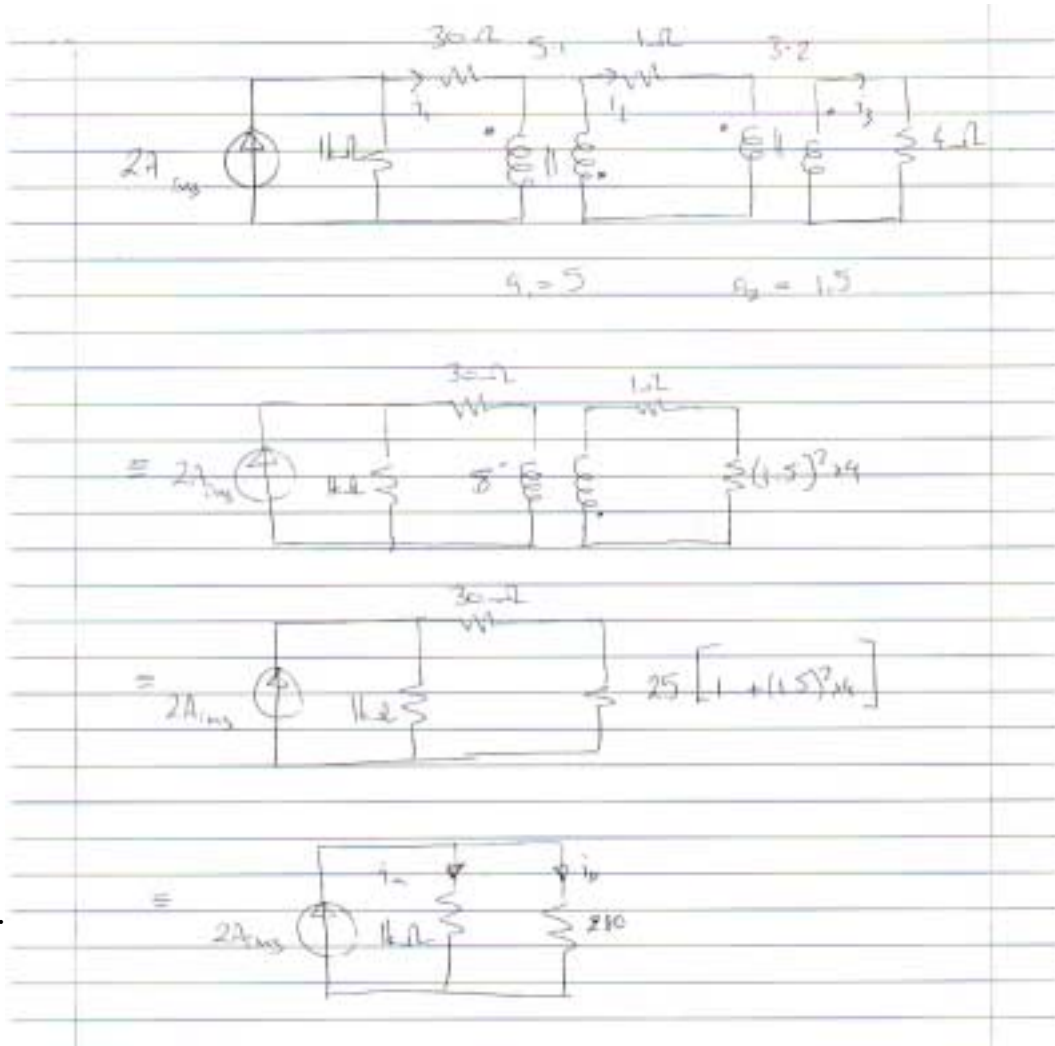
(b) 
$$\bar{V}_{oc,cd} = \frac{100(j5000)}{20 + j12,500} = 39.99995 \angle 0.09167^\circ \text{ V rms}$$

$$\bar{Z}_{in-cd}, V_s = 0 = -j3000 + \frac{j5000(20 + j7500)}{20 + j12,500} = 3.19999 + j0.00512 \Omega$$



# CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

35.



$$\therefore I_1 = 1.56A$$

$$\Rightarrow I_2 = 5 \times 1.56 = 7.8A$$

$$\Rightarrow I_3 = 1.5 \times 7.8A = 11.7A$$

$$\Rightarrow P(1k) = I_a^2 R$$

$$= 0.438^2 \times 1 \times 10^3$$

$$= 192W$$

$$\Rightarrow P(30\Omega) = I_1^2 R = (1.56)^2 \times 30$$

$$= 73W$$

$$\Rightarrow P(1\Omega) = I_2^2 R = 7.8^2 \times 1$$

$$= 60.8W$$

$$\Rightarrow P(4\Omega) = I_3^2 R = 11.7^2 \times 4$$

$$= 548W$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

36.

(a)  $R_L$  sees  $10 \times 4^2 = 160 \Omega$   $\therefore$  use  $R_L = 160 \Omega$

$$P_{L_{\max}} = \left( \frac{100}{20} \right)^2 \times 10 = 250 \text{ W}$$

(b)  $R_L = 100 \Omega$

$$I_2 = I_1 / 4, \quad V_2 = 4 V_1 \quad \therefore I_x = \frac{V_2 - V_1}{40} = \frac{3V_1}{40}$$

$$\therefore 100 = 10 \left( I_1 \frac{3V_1}{40} \right) + V_1, \quad \frac{I_1}{4} = \frac{3V_1}{40} + \frac{4V_1}{100}$$

$$\therefore I_1 = 0.46V_1 \quad \therefore 100 = 10(0.46V_1 - 0.075V_1) + V_1 = 4.85 V_1 \quad \therefore V_1 = \frac{100}{4.85}$$

$$\therefore V_2 = 4V_1 = \frac{400}{4.85} = 82.47 \text{ V} \quad \therefore P_L = \frac{82.47^2}{100} = 68.02 \text{ W}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

37.

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2}{8} \quad \therefore \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_2}{40}, \quad \bar{V}_1 = 5\bar{V}_2$$

$$\therefore 100 = 300(C + 0.025)\bar{V}_2 + 5\bar{V}_2$$

$$\therefore \bar{V}_2 = \frac{100}{12.5 + 300C}$$

$$(a) \quad C = 0 \quad \therefore \bar{V}_2 = 8 \text{ V} \quad \therefore P_L = \frac{8^2}{8} = \boxed{8 \text{ W}}$$

$$(b) \quad C = 0.04 \quad \therefore \bar{V}_2 = \frac{100}{24.5} \quad \therefore P_L = \left( \frac{100}{24.5} \right)^2 \frac{1}{8} = \boxed{2.082 \text{ W (neg. fdbk)}}$$

$$(c) \quad C = -0.04 \quad \therefore \bar{V}_2 = \frac{100}{0.5} = 200 \text{ V} \quad \therefore P_L = \frac{200^2}{8} = \boxed{5000 \text{ W (pos. fdbk)}}$$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

38.

Apply  $\bar{V}_{ab} = 1 \text{ V}$   $\therefore \bar{I}_x = 0.05 \text{ A}$ ,  $\bar{V}_2 = 4 \text{ V}$

$$\therefore 4 = 60 \bar{I}_2 + 20 \times 0.05 \quad \therefore \bar{I}_2 = \frac{4-1}{60} = 0.05 \text{ A}$$

$$\therefore \bar{I}_1 = 0.2 \text{ A} \quad \therefore \bar{I}_m = 0.25 \text{ A} \quad \therefore \boxed{\bar{R}_{th} = 4 \, \Omega, \quad \bar{V}_{th} = 0}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

39.

$$P_{gen} = 1000 \text{ W}, P_{100} = 500 \text{ W}$$

$$\therefore I_L = \sqrt{\frac{500}{100}} = \sqrt{5} \text{ A}, V_L = 100\sqrt{5} \text{ V}$$

$$I_S = \frac{1000}{100} = 10 \text{ A} \quad \therefore V_1 = 100 - 40 = 60 \text{ V}$$

$$\text{Now, } P_{25} = 1000 - 500 - 10^2 \times 4 = 100 \text{ W} \quad \therefore I_x = \sqrt{\frac{100}{25}} = 2 \text{ A; also}$$

$$I_x = b\sqrt{5} = 2, b = \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{0.8944}$$

$$\text{Around center mesh: } 60a = 2 \times 25 + 100\sqrt{5} \frac{1}{0.8944} \quad \therefore a = \frac{300}{60} = \boxed{5}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

40.

$$(a) \quad 3 \times \left( \frac{4}{3} \right)^2 = \frac{16}{3} \, \Omega, \quad \frac{16}{3} + 2 = \frac{22}{3} \, \Omega, \quad \frac{22}{3} (3)^2 = 66 \, \Omega$$
$$66 + 25 = 91 \, \Omega \quad \frac{100}{91} = 1.0989 \angle 0^\circ \, \text{A} = \bar{I}_1$$

$$(b) \quad \bar{I}_2 = 3\bar{I}_1 = 3.297 \angle 0^\circ \, \text{A}$$

$$(c) \quad \bar{I}_3 = -\frac{4}{3} \times 3.297 = 4.396 \angle 180^\circ \, \text{A}$$

$$(d) \quad P_{25} = 25 \times 1.0989^2 = 30.19 \, \text{W}$$

$$(e) \quad P_2 = 3.297^2 \times 2 = 21.74 \, \text{W}$$

$$(f) \quad P_3 = 4.396^2 \times 3 = 57.96 \, \text{W}$$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

41.

$$\bar{V}_1 = 2.5 \bar{V}_2, \bar{I}_1 = 0.4 \bar{I}_2, \bar{I}_{50} = \bar{I}_2 + 0.1 \bar{V}_2$$

$$\therefore 60 = 40(0.4 \bar{I}_2) - 2.5 \bar{V}_2 \quad \therefore \bar{I}_2 = \frac{60 + 2.5 \bar{V}_2}{16}$$

$$\text{Also, } 60 = 50(\bar{I}_2 + 0.1 \bar{V}_2) + \bar{V}_2 = 50 \bar{I}_2 + 6 \bar{V}_2$$

$$\therefore 60 = 50 \left( \frac{60 + 2.5 \bar{V}_2}{16} \right) + 6 \bar{V}_2 = 187.5 + (7.8125 + 6) \bar{V}_2$$

$$\therefore \bar{V}_2 = \frac{60 - 187.5}{13.8125} = \boxed{-9.231 \text{ V}}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

42.

$$\frac{400}{5^2} = 16 \, \Omega, 16 \parallel 48 = 12 \Omega, 12 + 4 = 16 \Omega$$

$$\frac{16}{2^2} = 4 \, \Omega \quad \therefore I_s = \frac{10}{4+1} = 2 \, \text{A} \quad \therefore P_1 = 4 \, \text{W}$$

$$\frac{2}{2} = 1 \, \text{A} \quad \therefore P_4 = 4 \, \text{W}, 10 - 2 \times 1 = 8 \, \text{V}$$

$$8 \times 2 = 16 \, \text{V}, 16 - 4 \times 1 = 12 \, \text{V}, 12^2 / 48 = 3 \, \text{W} = P_{48}, 12 \times 5 = 60 \, \text{V}$$

$$P_{400} = \frac{60^2}{400} = 9 \, \text{W}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

43.

$$I_1 = 2I_2, 2I_2 = I_s + I_x \quad \therefore I_x + I_s - 2I_2 = 0$$

$$100 = 3I_s + \frac{1}{2}(4I_2 + 20I_2 - 20I_x)$$

$$\therefore 10I_x - 3I_s - 12I_2 = -100$$

$$100 = 3I_s - 5I_x + 20I_2 - 20I_x$$

$$\therefore 25I_x - 3I_s - 20I_2 = -100$$

$$\therefore I_x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -100 & -3 & -12 \\ -100 & -3 & -20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 10 & -3 & -12 \\ 25 & -3 & -20 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 100(-26) - 100(-18)}{1(60 - 36) - 10(-20 - 6) + 25(-12 - 6)} = \frac{-800}{-166} = 4.819 \text{ A}$$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

44.

$$(a) \quad 50 \parallel 10 = \frac{25}{3} \, \Omega \quad \therefore V_{AB} = 1 \times 4 \times \frac{25}{3} = \frac{100}{3} \, \text{V}$$

$$\therefore P_{10AB} = \left( \frac{100}{3} \right)^2 \frac{1}{10} = \frac{1000}{9} = \boxed{111.11 \, \text{W}}$$

$$V_{CD} = 1 \times 3 \times \frac{25}{3} = 25 \, \text{V}, \quad P_{10CD} = \frac{25^2}{10} = \boxed{62.5 \, \text{W}}$$

(b) Specify 3 A and 4 A in secondaries

$$I_{AB} = I_f + 4$$

$$I_{CD} = -I_b - 3 \quad \therefore \frac{25}{3}(I_f + 4) = \frac{25}{3}(-I_f - 3)$$

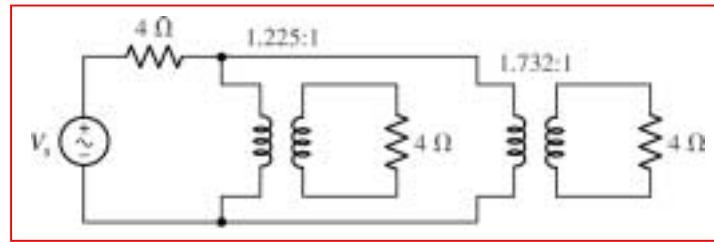
$$\therefore 2I_f = -7, \quad I_f = -3.5 \, \text{A}$$

$$\therefore V_{AB} = V_{CD} = \frac{25}{3}(-3.5 + 4) = \frac{25}{6} \, \text{V}$$

$$\therefore P_{10AB} = P_{10CD} = \left( \frac{25}{6} \right)^2 \frac{1}{10} = \boxed{1.7361 \, \text{W}}$$

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

45. **Corrections required to the problem text:** both speakers that comprise the load are  $4\text{-}\Omega$  devices. We desire a circuit that will connect the signal generator (whose Thévenin resistance is  $4\text{ }\Omega$ ) to the individual speakers such that one speaker receives twice the power delivered to the other. One possible solution of many:



We can see from analysing the above circuit that the voltage across the right-most speaker will be  $\frac{1.732}{1.225}$  or  $\sqrt{2}$  times that across the left speaker. Since power is proportional to voltage *squared*, twice as much power is delivered to the right speaker.

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

46. (a) We assume  $\mathbf{V}_{\text{secondary}} = 230\angle 0^\circ \text{ V}$  as a phasor reference. Then,

$$\mathbf{I}_{\text{unity PF load}} = \frac{8000}{230} \angle 0^\circ = 34.8 \angle 0^\circ \text{ A} \quad \text{and}$$

$$\mathbf{I}_{0.8 \text{ PF load}} = \frac{15000}{230} \angle (-\cos^{-1} 0.8) = 65.2 \angle -36.9^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \text{Thus, } \mathbf{I}_{\text{primary}} &= \frac{230}{2300} (34.8 \angle 0^\circ + 65.2 \angle -36.9^\circ) \\ &= 0.1 (86.9 - j39.1) = \boxed{9.5 \angle -24.3^\circ \text{ A}} \end{aligned}$$

- (b) The magnitude of the secondary current is limited to  $25 \times 10^3 / 230 = 109 \text{ A}$ .  
If we include a new load operating at 0.95 PF lagging, whose current is

$$\mathbf{I}_{0.95 \text{ PF load}} = |\mathbf{I}_{0.95 \text{ PF load}}| \angle (-\cos^{-1} 0.95) = |\mathbf{I}_{0.95 \text{ PF load}}| \angle -18.2^\circ \text{ A},$$

then the new total secondary current is

$$86.9 - j39.1 + |\mathbf{I}_{0.95 \text{ PF load}}| \cos 18.2^\circ - j |\mathbf{I}_{0.95 \text{ PF load}}| \sin 18.2^\circ \text{ A}.$$

Thus, we may equate this to the maximum rated current of the secondary:

$$109 = \sqrt{(86.9 + |\mathbf{I}_{0.95 \text{ PF load}}| \cos 18.2^\circ)^2 + (39.1 + |\mathbf{I}_{0.95 \text{ PF load}}| \sin 18.2^\circ)^2}$$

Solving, we find

$$|\mathbf{I}_{0.95 \text{ PF load}}|^2 = \frac{-189 \pm \sqrt{189^2 + (4)(2800)}}{2}$$

So,  $|\mathbf{I}_{0.95 \text{ PF load}}| = 13.8 \text{ A}$  (or  $-203 \text{ A}$ , which is nonsense).

This transformer, then, can deliver to the additional load a power of

$$13.8 \times 0.95 \times 230 = \boxed{3 \text{ kW}}.$$



## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

47. After careful examination of the circuit diagram, we (fortunately or unfortunately) determine that the meter determines individual IQ based on age alone. A simplified version of the circuit then, is simply a 120 V ac source, a  $28.8\text{-k}\Omega$  resistor and a  $(24^2)R_A$  resistor all connected in series. The IQ result is equal to the power (W) dissipated in resistor  $R_A$  divided by 1000.

$$P = \left( \frac{120}{28.8 \times 10^3 + 576R_A} \right)^2 \times 576R_A$$

$$\text{Thus, IQ} = \frac{1}{1000} \left( \frac{120}{28.8 \times 10^3 + 576 \times \text{Age}} \right)^2 \times 576 \times \text{Age}$$

- (a) Implementation of the above equation with a given age will yield the “measured” IQ.
- (b) The maximum IQ is achieved when maximum power is delivered to resistor  $R_A$ , which will occur when  $576R_A = 28.8 \times 10^3$ , or the person’s age is **50 years**.
- (c) Well, now, this arguably depends on your answer to part (a), and your own sense of ethics. Hopefully you’ll do the right thing, and simply write to the Better Business Bureau. And watch less television.

## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

48. We require a transformer that converts 240 V ac to 120 V ac, so that a turns ratio of 2:1 is needed. We attach a male european plug to the primary coil, and a female US plug to the secondary coil. Unfortunately, we are not given the current requirements of the CD writer, so that we will have to over-rate the transformer to ensure that it doesn't overheat. Checking specifications on the web for an example CD writer, we find that the power supply provides a dual DC output: 1.2 A at 5 V, and 0.8 A at 12 V. This corresponds to a total DC power delivery of 15.6 W. Assuming a moderately efficient ac to DC converter is being used (*e.g.* 80% efficient), the unit will draw approximately  $15.6/0.8$  or 20 W from the wall socket. Thus, the secondary coil should be rated for at least that (let's go for 40 W, corresponding to a peak current draw of about 333 mA). Thus, we include a 300-mA fuse in series with the secondary coil and the US plug for safety.

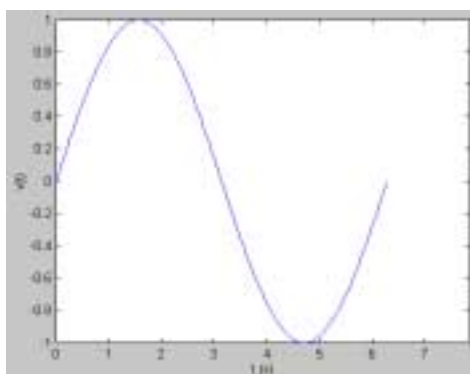
## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

49. You need to purchase (and wire in) a three-phase transformer rated at  $(\sqrt{3})(208)(10) = 3.6 \text{ kVA}$ . The turns ratio for each phase needs to be 400:208 or 1.923.

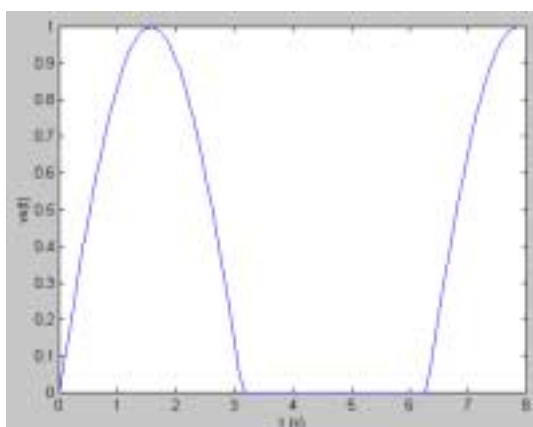


## CHAPTER THIRTEEN SOLUTIONS

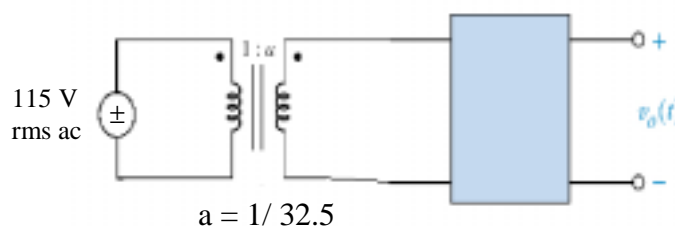
50. (a) The input to the left of the unit will have the shape:



and the output voltage will be:



We need to reduce the magnitude from 115-V (rms) to a peak voltage of 5 V. The corresponding peak voltage at the input will be  $115\sqrt{2} = 162.6$  V, so we require a transformer with a turns ratio of 162.6:5 or about 32.5:1, connected as shown:



(b) If we wish to reduce the “ripple” in the output voltage, we can connect a capacitor in parallel with the output terminals. The necessary size will depend on the maximum allowable ripple voltage and the minimum anticipated load resistance. When the input voltage swings negative and the output voltage tries to reduce to follow, current will flow out of the capacitor to reduce the amount of voltage drop that would otherwise occur.

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

1. (a)  $s = 0$ ;
- (b)  $s = \pm j9 \text{ s}^{-1}$ ;
- (c)  $s = -8 \text{ s}^{-1}$ ;
- (d)  $s = -1000 \pm j1000 \text{ s}^{-1}$ ;
- (e)  $v(t) = 8 + 2 \cos 2t \text{ mV}$  cannot be attributed a single complex frequency. In a circuit analysis problem, superposition will need to be invoked, where the original function  $v(t)$  is expressed as  $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ , with  $v_1(t) = 8 \text{ mV}$  and  $v_2(t) = 2 \cos 2t \text{ mV}$ . The complex frequency of  $v_1(t)$  is  $s = 0$ , and the complex frequency of  $v_2(t)$  is  $s = \pm j2 \text{ s}^{-1}$ .

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

2. (a)  $(6 - j)^* = 6 + j$
- (b)  $(9)^* = 9$
- (c)  $(-j30)^* = +j30$
- (d)  $(5 e^{-j6})^* = 5 e^{+j6}$
- (e)  $(24 \angle -45^\circ)^* = 24 \angle 45^\circ$
- (f)  $\left( \frac{4 - j18}{3.33 + j} \right)^* = \left( \frac{4 + j18}{3.33 - j} \right) = \frac{18.44 \angle 77.47^\circ}{3.477 \angle -16.72^\circ} = 5.303 \angle 94.19^\circ$
- (g)  $\left( \frac{5 \angle 0.1^\circ}{4 - j7} \right)^* = \left( \frac{5 \angle 0.1^\circ}{8.062 \angle -60.26^\circ} \right)^* = (0.6202 \angle 60.36^\circ)^* = 0.6202 \angle -60.36^\circ$
- (h)  $(4 - 22 \angle 92.5^\circ)^* = (4 + 0.9596 - j21.98)^* = (4.9596 - j21.98)^* = 4.9596 + j21.98$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

3.  $\text{Re } \bar{i}(t) = i(t)$ . No units provided.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \bar{i}_x(t) &= (4 - j7)e^{(-3+j15)t} = (8.062 \angle -60.26^\circ)e^{-3t}e^{j15t} = 8.062e^{-3t}e^{j(15t-60.26^\circ)} \\ \therefore i_x(t) &= \text{Re } \bar{i}_x(t) = 8.062e^{-3t} \cos(15t - 60.26^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \bar{i}_y(t) &= (4 + j7)e^{-3t}(\cos 15t - j \sin 15t) = 8.062e^{-3t}e^{-j15t+j60.26^\circ} \\ \therefore i_y(t) &= 8.062e^{-3t} \cos(15t - 60.26^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \bar{i}_A(t) &= (5 - j8)e^{(-1.5t+j12)t} = 9.434e^{-j57.99^\circ}e^{-1.5t}e^{j12t} = 9.434e^{-1.5t}e^{j(12t-57.99^\circ)} \\ \therefore \text{Re } \bar{i}_A(0.4) &= 9.434e^{-0.6} \cos(4.8^{\text{rad}} - 57.99^\circ) = -4.134 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \bar{i}_B(t) &= (5 + j8)e^{(-1.5t+j12)t} = 9.434e^{j57.99^\circ}e^{-1.5t}e^{-j12t} = 9.434e^{-1.5t}e^{-j(12t-57.99^\circ)} \\ \therefore \text{Re } \bar{i}_B(0.4) &= -4.134 \end{aligned}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

4. (a)  $\omega = 279 \text{ Mrad/s}$ , and  $\omega = 2 \pi f$ . Thus,  $f = \omega/2\pi = 44.4 \text{ MHz}$

(b) If the current  $i(t) = 2.33 \cos(279 \times 10^6 t) \text{ fA}$  flows through a precision  $1\text{-T}\Omega$  resistor, the voltage across the resistor will be  $10^{12} i(t) = 2.33 \cos(279 \times 10^6 t) \text{ mV}$ . We may write this as  $0.5(2.33) \cos(279 \times 10^6 t) + j(0.5)2.33 \sin(279 \times 10^6 t) + 0.5(2.33) \cos(279 \times 10^6 t) - j(0.5)2.33 \sin(279 \times 10^6 t) \text{ mV}$

$$= 1.165 e^{j279 \times 10^6 t} + 1.165 e^{-j279 \times 10^6 t} \text{ mV}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

5. (a)  $\mathbf{v}_s(0.1) = (20 - j30) e^{(-2 + j50)(0.1)} = (36.06 \angle -56.31^\circ) e^{(-0.2 + j5)}$   
 $= 36.06 e^{-0.2} \angle [-56.31^\circ + j5(180)/\pi] = 29.52 \angle 230.2^\circ \text{ V}$  (or  $29.52 \angle -129.8^\circ \text{ V}$ ).
- (b)  $\text{Re}\{ \mathbf{v}_s \} = 36.06 e^{-2t} \cos(50t - 56.31^\circ) \text{ V}.$
- (c)  $\text{Re}\{ \mathbf{v}_s(0.1) \} = 29.52 \cos(230.2^\circ) = -18.89 \text{ V}.$
- (d) The complex frequency of this waveform is  $\mathbf{s} = -2 + j50 \text{ s}^{-1}$
- (e)  $\mathbf{s}^* = (-2 + j50)^* = -2 - j50 \text{ s}^{-1}$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

6. (a)  $s = 0 + j120\pi = +j120\pi$

(b) We first construct an s-domain voltage  $\mathbf{V}(s) = 179 \angle 0^\circ$  with  $s$  given above. The equation for the circuit is

$$v(t) = 100 i(t) + L \frac{di}{dt} = 100 i(t) + 500 \times 10^{-6} \frac{di}{dt}$$

and we assume a response of the form  $\mathbf{I}e^{st}$ .

Substituting, we write  $(179 \angle 0^\circ) e^{st} = 100 \mathbf{I}e^{st} + sL \mathbf{I}e^{st}$

Suppressing the exponential factor, we may write

$$\mathbf{I} = \frac{179 \angle 0^\circ}{100 + s500 \times 10^{-6}} = \frac{179 \angle 0^\circ}{100 + j120\pi(500 \times 10^{-6})} = \frac{179 \angle 0^\circ}{100 \angle 0.108^\circ} = 1.79 \angle -0.108^\circ \text{ A}$$

Converting back to the time domain, we find that

$$i(t) = 1.79 \cos(120\pi t - 0.108^\circ) \text{ A.}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

7.

(a)  $v_s = 10e^{-2t} \cos(10t + 30^\circ) \text{ V} \therefore s = -2 + j10, \bar{V}_s = 10\angle 30^\circ \text{ V}$

$$\bar{Z}_c = \frac{10}{-2 + j10} = \frac{5}{-1 + j5} \frac{-1 - j5}{26} = \frac{-5 - j25}{26}, \bar{Z}_c \parallel 5 = \frac{(-25 - j125)/26}{(-5 - j25 + 130)/26}$$

$$\therefore \bar{Z}_c \parallel 5 = \frac{-25 - j125}{125 - j25} = \frac{-1 - j5}{5 - j1} = -j1 \therefore \bar{Z}_{in} = 5 + 0.5(-2 + j10) - j1 = 4 + j4 \Omega$$

$$\therefore \bar{I}_x = \frac{10\angle 30^\circ}{4 + j4} \times \frac{(-5 - j25)/26}{5 + (-5 - j25)/26} = \frac{10\angle 30^\circ}{4 + j4} \frac{-5 - j25}{130 - 5 - j25} = \frac{5\angle 30^\circ}{2 + j2} \frac{-5 - j25}{125 - j25} = \frac{1\angle 30^\circ}{2 + j2} \frac{-1 - j5}{5 - j1}$$

$$\therefore \bar{I}_x = \frac{1\angle 30^\circ}{2\sqrt{2}\angle 45^\circ} (-j1) = \boxed{0.3536\angle -105^\circ \text{ A}}$$

(b)  $i_x(t) = \boxed{0.3536e^{-2t} \cos(10t - 105^\circ) \text{ A}}$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

8. (a)  $s = 0 + j100\pi = +j100\pi$

(b) We first construct an s-domain voltage  $\mathbf{V}(s) = 339 \angle 0^\circ$  with  $s$  given above. The equation for the circuit is

$$v(t) = 2000 i(t) + v_C(t) = 2000 C \frac{dv_C}{dt} + v_C(t) = 0.2 \frac{dv_C}{dt} + v_C(t)$$

and we assume a response of the form  $\mathbf{V}_C e^{st}$ .

Substituting, we write  $(339 \angle 0^\circ) e^{st} = 0.2s \mathbf{V}_C e^{st} + \mathbf{V}_C e^{st}$

Suppressing the exponential factor, we may write

$$\mathbf{V}_C = \frac{339 \angle 0^\circ}{1 + 0.2s} = \frac{339 \angle 0^\circ}{1 + j100\pi(0.2)} = \frac{339 \angle 0^\circ}{62.84 \angle 89.09^\circ} = 5.395 \angle -89.09^\circ \text{ A}$$

Converting back to the time domain, we find that

$$v_C(t) = 5.395 \cos(100\pi t - 89.09^\circ) \text{ V.}$$

and so the current is  $i(t) = C \frac{dv_C}{dt} = -0.1695 \sin(100\pi t) \text{ A} = 169.5 \sin(100\pi t) \text{ mA.}$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

9.  $i_{s1} = 20e^{-3t} \cos 4t \text{ A}, i_{s2} = 30e^{-3t} \sin 4t \text{ A}$

(a)  $\bar{I}_{s1} = 20\angle 0^\circ, \bar{I}_{s2} = -j30, \bar{s} = -3 + j4$   
 $\therefore \bar{Z}_c = \frac{10}{-3 + j4} \frac{-3 - j4}{-3 - j4} = 0.4(-3 - j4) = -1.2 - j1.6, \bar{Z}_L = -6 + j8$   
 $\therefore \bar{V}_x = 20 \frac{5(7.2 + j6.4)}{-2.2 + j6.4} \times \frac{-6 + j8}{-7.2 + j6.4} - j30 \frac{(-6 + j8)(3.8 - j1.6)}{-2.2 + j6.4}$   
 $= \frac{-600 + j800 - j30(-22.8 + 12.8 + j30.4 + j9.6)}{-2.2 + j6.4} = \frac{-600 + j800 - j30(-10 + j40)}{-2.2 + j6.4}$   
 $= \frac{-600 + 1200 + j1000}{-2.2 + j6.4} = \frac{600 + j1000}{-2.2 + j6.4} = 185.15 \angle -47.58^\circ \text{ V}$

(b)  $v_x(t) = 185.15 e^{-3t} \cos(4t - 47.58^\circ) \text{ V}$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

10. (a) If  $v(t) = 240\sqrt{2}e^{-2t}\cos 120\pi t$  V, then  $\mathbf{V} = 240\sqrt{2}\angle 0^\circ$  V where  $\mathbf{s} = -2 + j120\pi$ .

Since  $R = 3\text{ m}\Omega$ , the current is simply  $\mathbf{I} = \frac{240\sqrt{2}\angle 0^\circ}{3\times 10^{-3}} = 113.1\angle 0^\circ$  kA. Thus,

$$i(t) = 113.1e^{-2t}\cos 120\pi t \text{ kA}$$

- (b) Working in the time domain, we may directly compute

$$i(t) = v(t) / 3\times 10^{-3} = (240\sqrt{2}e^{-2t}\cos 120\pi t) / 3\times 10^{-3} = 113.1e^{-2t}\cos 120\pi t \text{ kA}$$

- (c) A 1000-mF capacitor added to this circuit corresponds to an impedance

$$\frac{1}{\mathbf{s}C} = \frac{1}{(-2 + j120\pi)(1000\times 10^{-3})} = \frac{1}{-2 + j120\pi} \Omega \text{ in parallel with the } 3\text{-m}\Omega$$

resistor. However, since the capacitor has been added in parallel (it would have been more interesting if the connection were in series), the same voltage still appears across its terminals, and so

$$i(t) = 113.1e^{-2t}\cos 120\pi t \text{ kA} \text{ as before.}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

$$\begin{aligned}
 11. \quad \mathbb{L}\{K u(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} K e^{-st} u(t) dt = K \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} u(t) dt = K \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{-K}{s} e^{-st} \right|_0^{\infty} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{-K}{s} e^{-st} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{K}{s} e^{-st} \right)
 \end{aligned}$$

If the integral is going to converge, then  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-st}) = 0$  (i.e.  $s$  must be finite). This leads to the first term dropping out (l'Hospital's rule assures us of this), and so

$$\mathbb{L}\{K u(t)\} = \boxed{\frac{K}{s}}$$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

$$\begin{aligned}
 12. \quad (a) \quad \mathcal{L}\{3u(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} 3e^{-st}u(t)dt = 3\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}u(t)dt = 3\int_0^{\infty} e^{-st}dt = \left. \frac{-3}{s}e^{-st} \right|_0^{\infty} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{-3}{s}e^{-st} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{3}{s}e^{-st} \right)
 \end{aligned}$$

If the integral is going to converge, then  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-st}) = 0$  (i.e.  $s$  must be finite). This leads to the first term dropping out (l'Hospital's rule assures us of this), and so

$$\mathcal{L}\{3u(t)\} = \boxed{\frac{3}{s}}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \mathcal{L}\{3u(t-3)\} &= \int_{0^-}^{\infty} 3e^{-st}u(t-3)dt = 3\int_3^{\infty} e^{-st}dt = \left. \frac{-3}{s}e^{-st} \right|_3^{\infty} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{-3}{s}e^{-st} \right) + \left( \frac{3}{s}e^{-3s} \right)
 \end{aligned}$$

If the integral is going to converge, then  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-st}) = 0$  (i.e.  $s$  must be finite). This leads to the first term dropping out (l'Hospital's rule assures us of this), and so

$$\mathcal{L}\{3u(t-3)\} = \boxed{\frac{3}{s}e^{-3s}}$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad \mathcal{L}\{3u(t-3)-3\} &= \int_{0^-}^{\infty} [3u(t-3)-3]e^{-st}dt = 3\int_3^{\infty} e^{-st}dt - 3\int_0^{\infty} e^{-st}dt \\
 &= \left. \frac{-3}{s}e^{-st} \right|_3^{\infty} - \left. \frac{-3}{s}e^{-st} \right|_0^{\infty}
 \end{aligned}$$

Based on our answers to parts (a) and (b), we may write

$$\mathcal{L}\{3u(t-3)-3\} = \frac{3}{s}e^{-3s} - \frac{3}{s} = \boxed{\frac{3}{s}(e^{-3s} - 1)}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \quad \mathcal{L}\{3u(3-t)\} &= 3\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}u(3-t)dt = 3\int_0^3 e^{-st}dt = \left. \frac{-3}{s}e^{-st} \right|_0^3 \\
 &= \left. \frac{-3}{s}(e^{-3s} - 1) \right| = \boxed{\frac{3}{s}(1 - e^{-3s})}
 \end{aligned}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

$$\begin{aligned}
 13. \quad (a) \quad \mathcal{L}\{2 + 3u(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} [2 + 3u(t)] dt = \int_0^{\infty} 5e^{-st} dt = \left. \frac{-5}{s} e^{-st} \right|_0^{\infty} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{-5}{s} e^{-st} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{5}{s} e^{-st} \right)
 \end{aligned}$$

If the integral is going to converge, then  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-st}) = 0$  (i.e.  $s$  must be finite). This leads to the first term dropping out (l'Hospital's rule assures us of this), and so

$$\mathcal{L}\{2 + 3u(t)\} = \boxed{\frac{5}{s}}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \mathcal{L}\{3e^{-8t}\} &= \int_{0^-}^{\infty} 3e^{-8t} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} 3e^{-(8+s)t} dt = \left. \frac{-3}{s+8} e^{-(8+s)t} \right|_{0^-}^{\infty} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{-3}{s+8} e^{-(s+8)t} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{3}{s+8} e^{-(s+8)t} \right) = 0 + \frac{3}{s+8} = \boxed{\frac{3}{s+8}}
 \end{aligned}$$

$$(c) \quad \mathcal{L}\{u(-t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} u(-t) dt = \int_{0^-}^0 e^{-st} u(-t) dt = \int_{0^-}^0 (0) e^{-st} dt = \boxed{0}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \quad \mathcal{L}\{K\} &= \int_{0^-}^{\infty} K e^{-st} dt = K \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt = K \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{-K}{s} e^{-st} \right|_0^{\infty} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{-K}{s} e^{-st} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{K}{s} e^{-st} \right)
 \end{aligned}$$

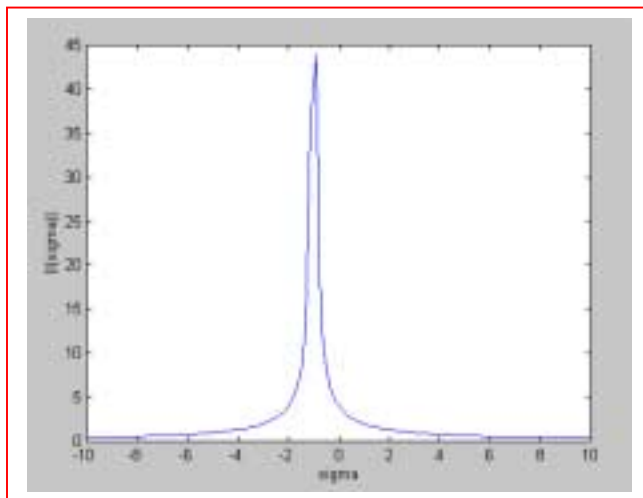
If the integral is going to converge, then  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-st}) = 0$  (i.e.  $s$  must be finite). This leads to the first term dropping out (l'Hospital's rule assures us of this), and so

$$\mathcal{L}\{K\} = \boxed{\frac{K}{s}}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

14. (a) The frequency-domain representation of the voltage across the resistor is  $(1)\mathbf{I}(s)$  where  $\mathbf{I}(s) = \mathcal{L}\{4e^{-t} u(t)\} = \frac{4}{s+1}$  A. Thus, the voltage is  $\frac{4}{s+1}$  V.

(b)





## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

15. (a)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{5u(t) - 5u(t-2)\} &= \int_0^\infty [5u(t) - 5u(t-2)]e^{-st} dt \\ &= 5 \int_0^\infty e^{-st} dt - 5 \int_2^\infty e^{-st} dt = \left. \frac{-5}{s} e^{-st} \right|_0^\infty + \left. \frac{5}{s} e^{-st} \right|_2^\infty \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{-5}{s} e^{-st} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{5}{s} e^{-st} \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{-5}{s} e^{-st} \right) + \left( \frac{5}{s} e^{-2s} \right)\end{aligned}$$

If the integral is going to converge, then  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-st}) = 0$  (i.e.  $s$  must be finite). This leads to the first and third terms dropping out (l'Hospital's rule assures us of this), and so

$$\mathcal{L}\{5u(t) - 5u(t-2)\} = \boxed{\frac{5}{s}(1 + e^{-2s})}$$

(b) The frequency domain current is simply one ohm times the frequency domain voltage, or

$$\boxed{\frac{5}{s}(1 + e^{-2s})}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

16.

(a)  $f(t) = t + 1 \therefore F(s) = \int_{0^-}^{\infty} (t + 1) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \therefore \sigma > 0$

(b)  $f(t) = (t + 1) u(t) \therefore F(s) = \int_{0^-}^{\infty} (t + 1) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \therefore \sigma > 0$

(c)  $f(t) = e^{50t} u(t) \therefore F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{50t} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \therefore \sigma > 50$

(d)  $f(t) = e^{50t} u(t - 5) \therefore F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{50t} u(t - 5) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \therefore \sigma > 50$

(e)  $f(t) = e^{-50t} u(t - 5) \therefore F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-50t} u(t - 5) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \therefore \sigma > 0$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

17.

(a)  $f(t) = 8e^{-2t} [u(t+3) - u(t-3)] \therefore F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt$

$$\therefore F(j\omega) = \int_{-3}^3 8e^{(2+j\omega)t} dt = \frac{8}{2+j\omega} [e^{6+j3\omega} - e^{-6-j3\omega}]$$

$$F_{(2)}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{-3}^3 8e^{-(2+s)t} dt = \frac{8}{2+s} [e^{6+3s} - e^{-6-3s}]$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} 8e^{-(2+s)t} dt = \boxed{\frac{8}{2+s} [1 - e^{-6-3s}]}$$

(b)  $f(t) = 8e^{2t} [u(t+3) - u(t-3)] \quad F(j\omega) = \int_{-3}^3 8e^{(2-j\omega)t} dt$

$$= \frac{8}{2-j\omega} [e^{6-j3\omega} - e^{-6+j3\omega}] \quad F_{(2)}(s) = \int_{-3}^3 8e^{(2-s)t} dt$$

$$= \frac{8}{s-2} [e^{-6+3s} - e^{6-3s}], \quad F(s) = \int_{0^-}^{\infty} 8e^{(2-s)t} dt$$

$$= \frac{8}{2-s} [e^{6-3s} - 1] = \boxed{\frac{8}{s-2} [1 - e^{6-3s}]}$$

(c)  $f(t) = 8e^{-2|t|} [u(t-3) - u(t-3)] \therefore F(j\omega) = \int_{-3}^3 8e^{-2|t|} e^{-j\omega t} dt$

$$\therefore F(j\omega) = \int_{-3}^0 8e^{(2-j\omega)t} dt + \int_0^3 8e^{(-2-j\omega)t} dt = \frac{8}{2-j\omega} [1 - e^{6+j3\omega}] + \frac{8}{2+j\omega} [1 - e^{-6-j3\omega}]$$

$$F_{(2)}(s) = \int_{-3}^3 8e^{-2|t|-st} dt = \int_{-3}^0 8e^{(2-s)t} dt$$

$$+ \int_0^3 8e^{(-2-s)t} dt \therefore F_{(2)}^{(s)} = \frac{8}{2-s} [-e^{-6+3s}] + \frac{8}{2+s} [1 - e^{-6-3s}]$$

$$F(s) = \int_{0^-}^3 8e^{(-2-s)t} dt = \boxed{\frac{8}{s+2} [1 - e^{-6-3s}]}$$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

$$18. \quad (a) \quad \mathcal{L}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right\} = \boxed{\frac{1}{s}}$$

$$(b) \quad \mathcal{L}\{1 + u(t) + [u(t)]^2\} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \boxed{\frac{3}{s}}$$

$$(c) \quad \mathcal{L}\{t u(t) - 3\} = \boxed{\frac{1}{s^2} - \frac{3}{s}}$$

$$(d) \quad \mathcal{L}\{1 - \delta(t) + \delta(t-1) - \delta(t-2)\} = \boxed{\frac{1}{s} - 1 + e^{-s} - e^{-2s}}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

19. (a)  $f(t) = e^{-3t} u(t)$

(b)  $f(t) = \delta(t)$

(c)  $f(t) = t u(t)$

(d)  $f(t) = 275 u(t)$

(e)  $f(t) = u(t)$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

20.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} &= \int_{0^-}^{\infty} [f_1(t) + f_2(t)]e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt + \int_{0^-}^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}\end{aligned}$$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

21.

$$(a) \quad f(t) = 2u(t-2) \quad \therefore F(s) = 2 \int_2^{\infty} e^{-st} dt + \frac{-2}{s} e^{st} \bigg|_2^{\infty} = \frac{2}{s} e^{-2s}; \quad s = 1 + j2$$

$$\therefore F(1 + j2) = \frac{2}{1 + j2} e^{-2} e^{-j4} = \boxed{0.04655 + j0.11174}$$

$$(b) \quad f(t) = 2\delta(t-2) \quad \therefore F(s) = 2e^{-2s}, \quad F(1 + j2) = 2e^{-2} e^{-j4} = \boxed{-0.17692 + j0.2048}$$

$$(c) \quad f(t) = e^{-t} u(t-2) \quad \therefore F(s) = \int_2^{\infty} e^{-(s+1)t} dt = \frac{1}{-s+1} e^{-(s+1)t} \bigg|_2^{\infty} = \frac{1}{s+1} e^{-2s-2}$$

$$\therefore F(1 + j2) = \frac{1}{2 + j2} e^{-2} e^{-2} e^{-j4} = \boxed{(0.4724 + j6.458)10^{-3}}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

$$22. \quad (a) \int_{-\infty}^{\infty} 8 \sin 5t \delta(t-1) dt = 8 \sin 5 \times 1 = -7.671$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} (t-5)^2 \delta(t-2) dt = (2-5)^2 = 9$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-3000t} \delta(t-3.333 \times 10^{-4}) dt = 5e^{-3000(3.333 \times 10^{-4})} = 1.840$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} K \delta(t-2) dt = K$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

23.

$$(a) \quad f(t) = [u(5-t)][u(t-2)]u(t), \therefore F(s) = \int_{0^-}^{\infty} [u(5-t)][u(t-2)]u(t)e^{-st} dt$$

$$\therefore F(s) = \int_2^5 e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_2^5 = \frac{1}{s} (e^{-2s} - e^{-5s})$$

$$(b) \quad f(t) = 4u(t-2) \therefore F(s) = 4 \int_2^{\infty} e^{-st} dt = \frac{4}{s} e^{-2s}$$

$$(c) \quad f(t) = 4e^{-3t}u(t-2) \therefore F(s) = 4 \int_2^{\infty} e^{-(s+3)t} dt = \frac{-4}{s+3} e^{-(s+3)t} \Big|_2^{\infty}$$

$$\therefore F(s) = \frac{4}{s+3} e^{-2s-6}$$

$$(d) \quad f(t) = 4\delta(t-2) \therefore F(s) = 4 \int_{0^-}^{\infty} \delta(t-2) e^{-st} dt = 4 \int_2^{2^+} e^{-2s} \delta(t-2) dt = 4e^{-2s}$$

$$(e) \quad f(t) = 5\delta(t) \sin(10t + 0.2\pi) \therefore F(s) = 5 \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) [\sin 0.2\pi] \times 1 dt = 5 \sin 36^\circ$$

$$\therefore F(s) = 2.939$$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

$$24. \quad (a) \int_{-\infty}^{\infty} \cos 500t \delta(t) dt = \cos 500 \times 0 = 1$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} (t)^5 \delta(t-2) dt = (2)^5 = 32$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} 2.5e^{-0.001t} \delta(t-1000) dt = 2.5e^{-0.001(1000)} = 0.9197$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} -K^2 \delta(t-c) dt = -K^2$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

25.

$$(a) \quad f(t) = 2 u(t-1) u(3-t) u(t^3)$$

$$\mathbf{F(s)} = \int_1^3 e^{-st} dt = -\frac{2}{s} e^{-st} \Big|_1^3 = \boxed{\frac{2}{s} (e^{-s} - e^{-3s})}$$

$$(b) \quad f(t) = 2u(t-4) \therefore F(s) = 2 \int_4^{\infty} e^{-st} dt = \frac{-2}{s} (0 - e^{-4s}) = \boxed{\frac{2}{s} e^{-4s}}$$

$$(c) \quad f(t) = 3e^{-2t} u(t-4) \therefore F(s) = 3 \int_4^{\infty} e^{-(s+2)t} dt = \boxed{\frac{3}{s+2} e^{-4s-8}}$$

$$(d) \quad f(t) = 3\delta(t-5) \therefore F(s) = 3 \int_0^{\infty} \delta(t-5) e^{-st} dt = \boxed{3e^{-5s}}$$

$$(e) \quad f(t) = 4\delta(t-1) [\cos \pi t - \sin \pi t]$$

$$\therefore F(s) = 4 \int_0^{\infty} \delta(t-1) [\cos \pi t - \sin \pi t] e^{-st} dt \therefore F(s) = \boxed{-4e^{-s}}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

26. (a)  $f(t) = 5 u(t) - 16 \delta(t) + e^{-4.4t} u(t)$

(b)  $f(t) = \delta(t) + u(t) + t u(t)$

(c)  $\mathbf{F}(s) = \frac{5}{s+7} + \frac{88}{s} + \frac{a}{s+6} + \frac{b}{s+1}$

where  $a = \left. \frac{17}{s+1} \right|_{s=-6} = -3.4$  and  $b = \left. \frac{17}{s+6} \right|_{s=-1} = 3.4$ .

Thus,

$$f(t) = 5 e^{-7t} u(t) + 88 u(t) - 3.4 e^{-6t} u(t) + 3.4 e^{-t} u(t)$$

Check with MATLAB:

EDU» T1 = '5/(s+7)';

EDU» T2 = '88/s';

EDU» T3 = '17/(s^2 + 7\*s + 6)';

EDU» T = symadd(T1,T2);

EDU» P = symadd(T,T3);

EDU» p = ilaplace(P)

p =

5\*exp(-7\*t)+88-17/5\*exp(-6\*t)+17/5\*exp(-t)

EDU» pretty(p)

5 exp(-7 t) + 88 - 17/5 exp(-6 t) + 17/5 exp(-t)



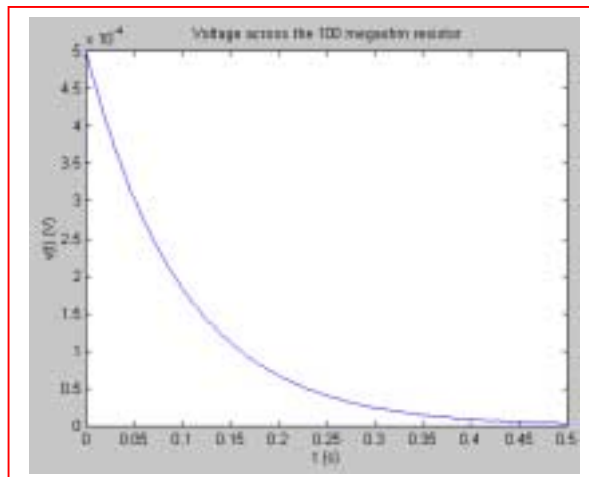
## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

27. If  $\mathbf{V}(s) = \frac{5}{s}$ , then  $v(t) = 5 u(t)$  V. The voltage at  $t = 1$  ms is then simply 5 V, and the current through the 2-k $\Omega$  resistor at that instant in time is 2.5 mA.

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

28.  $\mathbf{I(s)} = \frac{5}{s+10}$  pA, so  $i(t) = 5 e^{-10t} u(t)$  pA. The voltage across the 100-M $\Omega$  resistor is therefore  $500 e^{-10t} u(t)$   $\mu$ V.

(a) The voltage as specified has zero value for  $t < 0$ , and a peak value of 500  $\mu$ V.



(b)  $i(0.1 \text{ s}) = 1.839$  pA, so the power absorbed by the resistor at that instant  $= i^2 R$   
 $= 338.2$  aW. (A pretty small number).

(c)  $500 e^{-10t_{1\%}} = 5$

Taking the natural log of both sides, we find  $t_{1\%} = 460.5$  ms

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

29.

$$(a) \quad F(s) = \frac{s+1}{s} + \frac{2}{s+1} = 1 + \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} \leftrightarrow \boxed{\delta(t) + u(t) + 2e^{-t}u(t)}$$

$$(b) \quad F(s) = (e^{-s} + 1)^2 = e^{-2s} + 2e^{-s} + 1 \leftrightarrow \boxed{\delta(t-2) + 2\delta(t-1) + \delta(t)}$$

$$(c) \quad F(s) = 2e^{-(s+1)} = \boxed{2e^{-1}e^{-2s} + 2e^{-1}\delta(t-1)}$$

$$(d) \quad \mathbf{F(s)} = 2e^{-3s} \cosh 2s = e^{-3s} (e^{2s} + e^{-2s}) = e^{-s} + e^{-5s} \leftrightarrow \boxed{\delta(t-1) + \delta(t-5)}$$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

30.  $N(s) = 5s$ .

(a)  $D(s) = s^2 - 9$  so  $\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{5s}{s^2 - 9} = \frac{5s}{(s+3)(s-3)} = \frac{a}{(s+3)} + \frac{b}{(s-3)}$

where  $a = \left. \frac{5s}{(s-3)} \right|_{s=-3} = \frac{-15}{-6} = 2.5$  and  $b = \left. \frac{5s}{(s+3)} \right|_{s=3} = \frac{15}{6} = 2.5$ . Thus,

$$f(t) = [2.5 e^{-3t} + 2.5 e^{3t}] u(t)$$

(b)  $D(s) = (s+3)(s^2 + 19s + 90) = (s+3)(s+10)(s+9)$  so

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{5s}{(s+3)(s+10)(s+9)} = \frac{a}{(s+3)} + \frac{b}{(s+10)} + \frac{c}{(s+9)}$$

$a = \left. \frac{5s}{(s+10)(s+9)} \right|_{s=-3} = \frac{-15}{(7)(6)} = -0.3571$ ,  $b = \left. \frac{5s}{(s+3)(s+9)} \right|_{s=-10} = \frac{-50}{(-7)(-1)} = -7.143$

$c = \left. \frac{5s}{(s+3)(s+10)} \right|_{s=-9} = \frac{-45}{(-6)(1)} = 7.5$ .  $\therefore f(t) = [-0.3571 e^{-3t} - 7.143 e^{-10t} + 7.5 e^{-9t}] u(t)$

(c)  $D(s) = (4s+12)(8s^2+6s+1) = 32(s+3)(s+0.5)(s+0.25)$  so

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \left( \frac{5}{32} \right) \frac{s}{(s+3)(s+0.5)(s+0.25)} = \frac{a}{(s+3)} + \frac{b}{(s+0.5)} + \frac{c}{(s+0.25)}$$

$a = \left( \frac{5}{32} \right) \left. \frac{s}{(s+0.5)(s+0.25)} \right|_{s=-3} = -0.06818$ ,  $b = \left( \frac{5}{32} \right) \left. \frac{s}{(s+3)(s+0.25)} \right|_{s=-0.5} = 0.125$

$c = \left( \frac{5}{32} \right) \left. \frac{s}{(s+3)(s+0.5)} \right|_{s=-0.25} = -0.05682$

$$\therefore f(t) = [-0.06818 e^{-3t} + 0.125 e^{-0.5t} - 0.05682 e^{-0.25t}] u(t)$$

(d) Part (a):

```
EDU» N = [5 0];
EDU» D = [1 0 -9];
EDU» [r p y] = residue(N,D)
```

```
r =
    2.5000
    2.5000
```

```
p =
     3
    -3
```

```
y =
[]
```

Part (b):

```
EDU» N = [5 0];
EDU» D = [1 22 147 270];
EDU» [r p y] = residue(N,D)
```

```
r =
   -7.1429
    7.5000
   -0.3571
```

```
p =
  -10.0000
   -9.0000
   -3.0000
```

```
y =
[]
```

Part (c):

```
EDU» N = [5 0];
EDU» D = [32 120 76 12];
EDU» [r p y] = residue(N,D)
```

```
r =
   -0.0682
    0.1250
   -0.0568
```

```
p =
   -3.0000
   -0.5000
   -0.2500
```

```
y =
[]
```

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

31.

$$(a) \quad F(s) = \frac{5}{s+1} \leftrightarrow 5e^{-t}u(t)$$

$$(b) \quad F(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s+4} \leftrightarrow (5e^{-t} - 2e^{-4t})u(t)$$

$$(c) \quad F(s) = \frac{18}{(s+1)(s+4)} = \frac{6}{s+1} - \frac{6}{s+4} \leftrightarrow 6(e^{-t} - e^{-4t})u(t)$$

$$(d) \quad F(s) = \frac{18s}{(s+1)(s+4)} = \frac{-6}{s+1} + \frac{24}{s+4} \leftrightarrow 6(4e^{-4t} - e^{-t})u(t)$$

$$(e) \quad F(s) = \frac{18s^2}{(s+1)(s+4)} = 18 + \frac{6}{s+1} - \frac{96}{s+4} \leftrightarrow 18\delta(t) + 6(e^{-t} - 16e^{-4t})u(t)$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

32.  $N(s) = 2s^2$ .

(a)  $D(s) = s^2 - 1$  so  $\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2s^2}{s^2 - 1} = \frac{2s^2}{(s+1)(s-1)} = \frac{a}{(s+1)} + \frac{b}{(s-1)} + 2$

where  $a = \left. \frac{2s^2}{(s-1)} \right|_{s=-1} = \frac{2}{-2} = -1$  and  $b = \left. \frac{2s^2}{(s+1)} \right|_{s=1} = \frac{2}{2} = 1$ . Thus,

$$f(t) = [2\delta(t) + e^{-t} + e^t] u(t)$$

(b)  $D(s) = (s+3)(s^2 + 19s + 90) = (s+3)(s+10)(s+9)$  so

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2s^2}{(s+3)(s+10)(s+9)} = \frac{a}{(s+3)} + \frac{b}{(s+10)} + \frac{c}{(s+9)}$$

$$a = \left. \frac{2s^2}{(s+10)(s+9)} \right|_{s=-3} = \frac{18}{(7)(6)} = 0.4286, \quad b = \left. \frac{2s^2}{(s+3)(s+9)} \right|_{s=-10} = \frac{200}{(-7)(-1)} = 28.57$$

$$c = \left. \frac{2s^2}{(s+3)(s+10)} \right|_{s=-9} = \frac{162}{(-6)(1)} = -27. \quad \therefore f(t) = [0.4286 e^{-3t} + 28.57 e^{-10t} - 27 e^{-9t}] u(t)$$

(c)  $D(s) = (8s+12)(16s^2 + 12s + 2) = 128(s+1.5)(s+0.5)(s+0.25)$  so

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \left( \frac{2}{128} \right) \frac{s^2}{(s+1.5)(s+0.5)(s+0.25)} = \frac{a}{(s+1.5)} + \frac{b}{(s+0.5)} + \frac{c}{(s+0.25)}$$

$$a = \left( \frac{2}{128} \right) \left. \frac{s^2}{(s+0.5)(s+0.25)} \right|_{s=-1.5} = 0.02813, \quad b = \left( \frac{2}{128} \right) \left. \frac{s^2}{(s+1.5)(s+0.25)} \right|_{s=-0.5} = -0.01563$$

$$c = \left( \frac{2}{128} \right) \left. \frac{s^2}{(s+1.5)(s+0.5)} \right|_{s=-0.25} = 0.003125$$

$$\therefore f(t) = 0.02813 e^{-1.5t} - 0.01563 e^{-0.5t} + 0.003125 e^{-0.25t} u(t)$$

(d) Part (a):

```
EDU> N = [2 0 0];
EDU> D = [1 0 -1];
EDU> [r p y] = residue(N,D)
```

```
r =
-1.0000
1.0000
```

```
p =
-1.0000
1.0000
```

```
y =
2
```

Part (b):

```
EDU> N = [2 0 0];
EDU> D = [1 22 147 270];
EDU> [r p y] = residue(N,D)
```

```
r =
28.5714
-27.0000
0.4286
```

```
p =
-10.0000
-9.0000
-3.0000
```

```
y =
[]
```

Part (c):

```
EDU> N = [2 0 0];
EDU> D = [128 288 160 24];
EDU> [r p y] = residue(N,D)
```

```
r =
0.0281
-0.0156
0.0031
```

```
p =
-1.5000
-0.5000
-0.2500
```

```
y =
[]
```



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

33.

$$(a) \quad F(s) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} \quad \text{so } f(t) = \boxed{2u(t) - 3e^{-t}u(t)}$$

$$(b) \quad F(s) = \frac{2s+10}{s+3} = 2 + \frac{4}{s+3} \leftrightarrow \boxed{2\delta(t) + 4e^{-3t}u(t)}$$

$$(c) \quad F(s) = 3e^{-0.8s} \leftrightarrow \boxed{3\delta(t-0.8)}$$

$$(d) \quad F(s) = \frac{12}{(s+2)(s+6)} = \frac{3}{s+2} - \frac{3}{s+6} \leftrightarrow \boxed{3(e^{-2t} - e^{-6t})u(t)}$$

$$(e) \quad F(s) = \frac{12}{(s+2)^2(s+6)} = \frac{3}{(s+2)^2} + \frac{A}{s+2} + \frac{0.75}{s+6}$$

$$\text{Let } s = 0 \therefore \frac{12}{4 \times 6} = \frac{3}{4} + \frac{A}{2} + \frac{0.75}{6} \therefore A = -0.75$$

$$\therefore F(s) = \frac{3}{(s+2)^2} - \frac{0.75}{s+2} + \frac{0.75}{s+6} \leftrightarrow \boxed{(3te^{-2t} - 0.75e^{-2t} + 0.75e^{-6t})u(t)}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

$$\begin{aligned}
 34. \quad \mathbf{F(s)} &= 2 - \frac{1}{s} + \frac{\pi}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} \\
 &= 2 - \frac{1}{s} + \frac{\pi}{(s+2)(s+1-j7.954)(s+1+j7.954)} \\
 &= 2 - \frac{1}{s} + \frac{a}{(s+2)} + \frac{b}{(s+1-j7.954)} + \frac{b^*}{(s+1+j7.954)} \\
 \text{where } a &= \left. \frac{\pi}{(s+1-j7.954)(s+1+j7.954)} \right|_{s=-2} = 0.04888 \\
 b &= \left. \frac{\pi}{(s+2)(s+1+j7.954)} \right|_{s=-1+j7.954} = -0.02444 + j0.003073
 \end{aligned}$$

and hence  $b^* = -0.02444 - j0.003073$

Thus, we may write

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 2 \delta(t) - u(t) + 0.04888 e^{-2t} u(t) + [(-0.02444 + j0.003073) e^{(-1+j7.954)t} \\
 &\quad + (-0.02444 - j0.003073) e^{(-1-j7.954)t}] u(t)
 \end{aligned}$$

This may be further simplified by expressing  $(-0.02444 + j0.003073) e^{(-1+j7.954)t}$  as  $0.02463 e^{j172.83^\circ} e^{(-1+j7.954)t}$ . This term, plus its complex conjugate above, add to the purely real expression  $0.02463 e^{-t} \cos(7.954t + 172.8^\circ)$ .

$$\text{Thus, } f(t) = \boxed{2 \delta(t) - u(t) + 0.04888 e^{-2t} u(t) + 0.02463 e^{-t} \cos(7.954t + 172.8^\circ)}.$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

$$35. \quad (a) \quad \mathbf{F(s)} = \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+3)}$$

$$a = \left. \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)} \right|_{s=0} = \frac{2}{3} \quad \text{and} \quad b = \left. \frac{(s+1)(s+2)}{s} \right|_{s=-3} = \frac{(-2)(-1)}{-3} = -\frac{2}{3}$$

so

$$f(t) = \frac{2}{3}u(t) - \frac{2}{3}e^{-3t}u(t) = \boxed{\frac{2}{3}(1 - e^{-3t})u(t)}$$

$$(b) \quad \mathbf{F(s)} = \frac{(s+2)}{s^2(s^2+4)} = \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{(s+j2)} + \frac{c^*}{(s-j2)}$$

$$a = \left. \frac{(s+2)}{(s^2+4)} \right|_{s=0} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$b = \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s+2)}{(s^2+4)} \right]_{s=0} = \left[ \frac{(s^2+4) - 2s(s+2)}{(s^2+4)^2} \right]_{s=0} = \frac{4}{4^2} = 0.25$$

$$c = \left. \frac{(s+2)}{s^2(s-j2)} \right|_{s=-j2} = \frac{2-j2}{4(-j4)} = 0.125 + j0.125 = 0.1768\angle 45^\circ \quad (c^* = 0.1768\angle -45^\circ)$$

so

$$f(t) = 0.5 t u(t) + 0.25 u(t) + 0.1768 e^{j45^\circ} e^{-j2t} u(t) + 0.1768 e^{-j45^\circ} e^{j2t} u(t)$$

The last two terms may be combined so that

$$\boxed{f(t) = 0.5 t u(t) + 0.25 u(t) + 0.3536 \cos(2t - 45^\circ)}$$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

36.

$$(a) \quad 5[s\mathbf{I}(\mathbf{s}) - i(0^-)] - 7[s\mathbf{I}(\mathbf{s}) - si(0^-) - i'(0^-)] + 9\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{4}{\mathbf{s}}$$

$$(b) \quad m[s\mathbf{P}(\mathbf{s}) - sp(0^-) - p'(0^-)] + \mu_f [s\mathbf{P}(\mathbf{s}) - p(0^-)] + k\mathbf{P}(\mathbf{s}) = 0$$

$$(c) \quad [s \Delta \mathbf{N}_p(\mathbf{s}) - \Delta n_p(0^-)] = -\frac{\Delta \mathbf{N}_p(\mathbf{s})}{\tau} + \frac{G_L}{\mathbf{s}}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

37.

$$15u(t) - 4\delta(t) = 8f(t) + 6f'(t), \quad f(0) = -3$$

$$\therefore \frac{15}{s} - 4 = 8F(s) + 6sF(s) + 18 = \frac{15 - 4s}{s} \quad \therefore F(s) (6s + 8) = 18 + \frac{15 - 4s}{s}$$

$$\therefore F(s) = \frac{-22s + 15}{6s(s + 4/30)} = \frac{15/8}{s + 4/3} \quad \therefore f(t) = (1.875 - 5.542e^{-4t/3})u(t)$$

# CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

38.

$$(a) \quad -5 u(t-2) + 10 i_L(t) + 5 \frac{di_L}{dt} = 0$$

$$(b) \quad \frac{-5}{s} e^{-2s} + 10 \mathbf{I}_L(s) + 5[s\mathbf{I}_L(s) - i_L(0^-)] = 0$$

$$\mathbf{I}_L(s) = \frac{\frac{5}{s} e^{-2s} + 5 i_L(0^-)}{5s+10} = \frac{e^{-2s} + 5 \times 10^{-3} s}{s(s+2)}$$

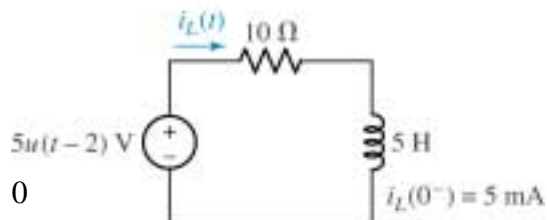
$$(c) \quad \mathbf{I}_L(s) = e^{-2s} \left[ \frac{a}{s} + \frac{b}{s+2} \right] + \frac{5 \times 10^{-3}}{s+2}$$

where  $a = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$ , and  $b = \frac{1}{s} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$ , so that we may write

$$\mathbf{I}_L(s) = \frac{1}{2} e^{-2s} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right] + \frac{5 \times 10^{-3}}{s+2}$$

$$\text{Thus,} \quad i_L(t) = \frac{1}{2} [u(t-2) - e^{-2(t-2)} u(t-2)] + 5 \times 10^{-3} e^{-2t} u(t)$$

$$= \frac{1}{2} [1 - e^{-2(t-2)}] u(t-2) + 5 \times 10^{-3} e^{-2t} u(t)$$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

39.

(a)  $v_c(0^-) = 50 \text{ V}$ ,  $v_c(0^+) = 50 \text{ V}$

(b)  $0.1v'_c + 0.2v_c + 0.1(v_c - 20) = 0$

(c)  $\therefore 0.1v'_c + 0.3v_c = 2$ ,  $0.1sV_c - 5 + 0.3V_c = \frac{2}{s}$

$$\therefore V_c(0.1s + 0.3) = 5 + \frac{2}{s} = \frac{5s + 2}{s}$$

$$\therefore V_c(s) = \frac{5s + 2}{s(0.1s + 0.3)} = \frac{20/3}{s} + \frac{130/3}{s + 3} \therefore v_c(t) = \left( \frac{20}{3} + \frac{130}{3}e^{-3t} \right) u(t) \text{ V}$$



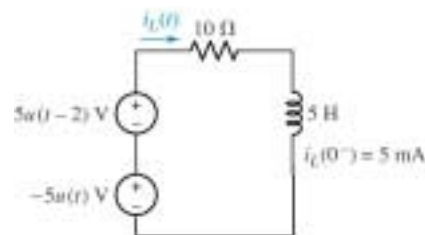
# CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

40.

$$(a) \quad 5u(t) - 5u(t-2) + 10i_L(t) + 5 \frac{di_L}{dt} = 0$$

$$(b) \quad \frac{5}{s} - \frac{5}{s}e^{-2s} + 10\mathbf{I}_L(s) + 5[s\mathbf{I}_L(s) - i_L(0^-)] = 0$$

$$\mathbf{I}_L(s) = \frac{\frac{5}{s}e^{-2s} - \frac{5}{s} + 5i_L(0^-)}{5s+10} = \frac{e^{-2s} - 5 + 5 \times 10^{-3}s}{s(s+2)}$$



$$(c) \quad \mathbf{I}_L(s) = e^{-2s} \left[ \frac{a}{s} + \frac{b}{s+2} \right] + \frac{c}{s} + \frac{d}{s+2} \text{ where}$$

$$a = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{s} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{2}, c = \frac{5 \times 10^{-3}s - 5}{s+2} \Big|_{s=0} = -\frac{5}{2} = -2.5, \text{ and}$$

$$d = \frac{5 \times 10^{-3}s - 5}{s} \Big|_{s=-2} = \frac{-10 \times 10^{-3} - 5}{-2} = 2.505,$$

so that we may write

$$\mathbf{I}_L(s) = \frac{1}{2}e^{-2s} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right] - \frac{2.5}{s} + \frac{2.505}{s+2}$$

$$\text{Thus, } i_L(t) = \frac{1}{2} [u(t-2) - e^{-2(t-2)} u(t-2)] - 2.5e^{-2t} u(t) + 2.505 u(t)$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

41.

$$12u(t) = 20f_2'(t) + 3f_2(0^-) = 2 \quad \therefore \frac{12}{s} = 20sF_2 - 20(2) + 3F_2$$

$$\therefore \frac{12}{s} + 40 = (20s + 3) F_2 = \frac{12 + 40s}{s} \quad \therefore F_2(s) = \frac{2s + 0.6}{s(s + 0.15)}$$

$$\therefore F_2(s) = \frac{4}{s} - \frac{2}{s + 0.15} \leftrightarrow \boxed{(4 - 2e^{-0.15t})u(t)}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

42. (a)  $f(t) = 2u(t) - 4\delta(t)$

(b)  $f(t) = \cos(\sqrt{99}t)$

(c)  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} - 5 = \frac{a}{s-3} + \frac{b}{s-2} - 5$

where  $a = \left. \frac{1}{s-2} \right|_{s=3} = 1$  and  $b = \left. \frac{1}{s-3} \right|_{s=2} = -1$

Thus,

$$f(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-2t}u(t) - 5\delta(t)$$

(d)  $f(t) = \delta'(t)$  (a “doublet”)

(e)  $f(t) = \delta''(t)$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

43.

$$x' + y = 2u(t), \quad y' - 2x + 3y = 8u(t), \quad x(0^-) = 5, \quad y(0^-) = 8$$

$$sX - 5 + Y = \frac{2}{s}, \quad sY - 8 - 2X + 3Y = \frac{8}{s} \quad \therefore X = \frac{1}{s} \left( \frac{2}{s} + 5 - Y \right) = \frac{2}{s^2} + \frac{5}{s} - \frac{Y}{s}$$

$$\therefore sY + 3Y - \frac{4}{s^2} - \frac{10}{s} + \frac{2Y}{s} = 8 + \frac{8}{s} \quad \therefore Y \left( s + 3 + \frac{2}{s} \right) = \frac{4}{s^2} + \frac{18}{s} + 8$$

$$Y \left( \frac{s^2 + 3s + 2}{s} \right) = \frac{4 + 18s + 8s^2}{s^2}, \quad Y(s) + \frac{8s^2 + 18s + 4}{s(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s} + \frac{6}{s+1} + \frac{0}{s+2}$$

$$\therefore \boxed{y(t) = (2 + 6e^{-t}) u(t)}; \quad x(t) = \frac{1}{2} [y' + 3y - 8u(t)] = \frac{1}{2} y' + 1.5y - 4u(t)$$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2} [-6e^{-t}u(t)] + 1.5 [2 + 6e^{-t}] u(t) - 4u(t)$$

$$\therefore x(t) = 6e^{-t}u(t) - u(t) = \boxed{(6e^{-t} - 1)u(t)}$$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

44. (a)  $\mathbf{F(s)} = 8s + 8 + \frac{8}{s}$ , with  $f(0^-) = 0$ . Thus, we may write:

$$f(t) = 8 \delta(t) + 8 u(t) + 8 \delta'(t)$$

$$(b) \mathbf{F(s)} = \frac{s^2}{(s+2)} - s + 2.$$

$$f(t) = \delta'(t) - 2\delta(t) + 4e^{-2t} u(t) - \delta'(t) + 2\delta(t) = 4e^{-2t} u(t)$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

45.

$$(a) \quad i_c(0^-) = 0, \quad v_c(0) = 100 \text{ V}, \quad \therefore i_c(0^+) = \frac{40 - 100}{100} = -0.6 \text{ A}$$

$$(b) \quad 40 = 100 i_c + 50 \int_{0^-}^{\infty} i_c dt + 100$$

$$(c) \quad -\frac{60}{s} = 100 I_c(s) + \frac{50}{s} I_c(s)$$

$$\therefore \frac{6}{s} = I_c \frac{10s + 5}{s}, \quad I_c(s) = \frac{-6}{10s + 5} = \frac{0.6}{s + 0.5} \leftrightarrow i_c(t) = 0.6e^{-0.5t}u(t)$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

46. (a)  $4 \cos 100t \leftrightarrow \frac{4s}{s^2 + 100^2}$

(b)  $2 \sin 10^3 t - 3 \cos 100t \leftrightarrow \frac{2 \times 10^3}{s^2 + 10^6} - \frac{3}{s^2 + 100^2}$

(c)  $14 \cos 8t - 2 \sin 8^\circ \leftrightarrow \frac{14s}{s^2 + 64} - \frac{2 \sin 8^\circ}{s}$

(d)  $\delta(t) + [\sin 6t]u(t) \leftrightarrow 1 + \frac{6}{s^2 + 36}$

(e)  $\cos 5t \sin 3t = \frac{1}{2} \sin 8t + \frac{1}{2} \sin (-2t) = \frac{1}{2} (\sin 8t - \sin 2t) \leftrightarrow \frac{4}{s^2 + 64} - \frac{1}{s^2 + 4}$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

$$47. \quad i_s = 100e^{-5t}u(t) \text{ A}; \quad i_s = v' + 4v + 3 \int_{0^-}^t v dt$$

$$(a) \quad i_s = \frac{v}{R} + Cv' + \frac{1}{L} \int_{0^-}^t v dt; \quad R = \frac{1}{4} \Omega, \quad C = 1\text{F}, \quad L = \frac{1}{3} \text{ H}$$

$$(b) \quad \frac{100}{s+5} = sV(s) + 4V(s) + \frac{3}{s} V(s)$$

$$V(s) \left( s + 4 + \frac{3}{s} \right) = V(s) \frac{s^2 + 4s + 3}{s} = \frac{100}{s+5}, \quad V(s) = \frac{100s}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

$$\therefore V(s) = \frac{-12.5}{s+1} + \frac{75}{s+3} - \frac{62.5}{s+5}, \quad v(t) = (75e^{-3t} - 12.5e^{-t} - 62.5e^{-5t})u(t) \text{ V}$$



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

48.

$$(a) \mathbf{V(s)} = \frac{7}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} \mathbf{V}$$

$$(b) \mathbf{V(s)} = \frac{e^{-2s}}{s+1} \mathbf{V}$$

$$(c) \mathbf{V(s)} = 48e^{-s} \mathbf{V}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

49.

$$4u(t) + i_c + 10 \int_{0^-}^{\infty} i_c dt + 4 [i_c - 0.5\delta(t)] = 0$$

$$\therefore \frac{4}{s} + I_c + \frac{10}{s} I_c + 4I_c = 2, I_c \left( 5 + \frac{10}{s} \right) = 2 - \frac{4}{s} + \frac{2s-4}{s}$$

$$\therefore I_c = \frac{2s-4}{5s+10} = 0.4 - \frac{1.6}{s+2}$$

$$\therefore i_c(t) + 0.4\delta(t) - 1.6e^{-2t}u(t) \text{ A}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

50.

$$v' + 6v + 9 \int_0^t v(z) dz = 24(t-2) u(t-2), \quad v'(0) = 0$$

$$\therefore sV(s) - 0 + 6V(s) + \frac{9}{s} V(s) = 24e^{-2s} \frac{1}{s^2} = V(s) \frac{s^2 + 6s + 9}{s} = V(s) \frac{(s+3)^2}{s}$$

$$\therefore V(s) = 24e^{-2s} \frac{1}{s^2} \frac{s}{(s+3)^2} = 24e^{-2s} \left[ \frac{1/9}{s} - \frac{1/9}{s+3} - \frac{1/3}{(s+3)^2} \right]$$

$$\therefore V(s) = e^{-2s} \left[ \frac{8/3}{s} - \frac{8}{s+3} - \frac{8}{(s+3)^2} \right] \leftrightarrow \frac{8}{3} [u(t-2) - e^{-3(t-2)} u(t-2)]$$

$$-8(t-2)e^{-3(t-2)} u(t-2) \quad \therefore v(t) = \left[ \frac{8}{3} - \frac{8}{3} e^{-3(t-2)} - 8(t-2)e^{-3(t-2)} \right] u(t-2)$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

51.

$$(a) \quad F(s) = \frac{5(s^2 + 1)}{(s^3 + 1)} \therefore f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{5s(s^2 + 1)}{s^3 + 1} = \boxed{5}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s(s^2 + 1)}{s^3 + 1}, \text{ but 1 pole in RHP } \therefore \text{ indeterminate}$$

$$(b) \quad F(s) = \frac{5(s^2 + 1)}{s^3 + 16} \therefore f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{5s(s^2 + 1)}{s^4 + 16} = \boxed{0}$$

$f(\infty)$  is indeterminate since poles on  $j\omega$  axis

$$(c) \quad F(s) = \frac{(s+1)(1+e^{-4s})}{s^2 + 2} \therefore f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s+1)(1+e^{-4s})}{s^2 + 2} = \boxed{1}$$

$f(\infty)$  is indeterminate since poles on  $j\omega$  axis



## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

$$52. \quad (a) \quad f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \mathbf{F}(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{2s^2 + 6}{s^2 + 5s + 2} \right) = \boxed{2}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \mathbf{F}(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{2s^2 + 6}{s^2 + 5s + 2} \right) = \frac{6}{2} = \boxed{3}$$

$$(b) \quad f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \mathbf{F}(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{2se^{-s}}{s + 3} \right) = \boxed{0}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \mathbf{F}(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{2se^{-s}}{s + 3} \right) = \boxed{0}$$

$$(c) \quad f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \mathbf{F}(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{s(s^2 + 1)}{s^2 + 5} \right] = \boxed{\infty}$$

$f(\infty)$  : This function has poles on the  $j\omega$  axis, so we may not apply the final value theorem to determine  $f(\infty)$ .

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

53.

$$(a) \quad F(s) = \frac{5(s^2 + 1)}{(s + 1)^3} \therefore f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{5s(s^2 + 1)}{(s + 1)^3} = \boxed{5}$$

$$(b) \quad F(s) = \frac{5(s^2 + 1)}{s(s + 1)^3} \therefore f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{5(s^2 + 1)}{(s + 1)^3} = \boxed{0}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5(s^2 + 1)}{(s + 1)^3} = 5 \text{ (pole OK)}$$

$$(c) \quad F(s) = \frac{(1 - e^{-3s})}{s^2} \therefore f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-3s}}{s} = \boxed{0}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-3s}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( 1 - 1 + 3s - \frac{1}{2} \times 9s^2 + \dots \right) = \boxed{3} \text{ (no poles)}$$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

54.

$$f(t) = \frac{1}{t}(e^{at} - e^{-bt})u(t)$$

(a) Now,  $\frac{1}{t}f(t) \leftrightarrow \int_s^\infty F(s)ds \therefore e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, -e^{-bt}u(t) \leftrightarrow -\frac{1}{s+b}$

$$\therefore \frac{1}{t}(e^{-at} - e^{-bt})u(t) \leftrightarrow \int_s^\infty \left( \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right) ds = \ln \frac{s+a}{s+b} \Big|_s^\infty = \ln \frac{s+a}{s+b} \Big|_s^\infty = \ln \frac{s+b}{s+a}$$

(b)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(e^{-at} - e^{-bt})u(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - at + \dots - 1 + bt}{t} = b - a$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \ln \frac{s+b}{s+a} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln(s+b) - \ln(s+a)}{1/s}$$

Use l' Hopital.  $\therefore \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \frac{1/(s+b) - 1/(s+a)}{-1/s^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ -s^2 \frac{(a-b)}{(s+b)(s+a)} \right] = b - a$

## CHAPTER FOURTEEN SOLUTIONS

55.

$$(a) \quad F(s) = \frac{8s-2}{s^2+6s+10} \therefore f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(8s-2)}{s^2+6s+10} = \boxed{8}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(8s-2)}{s^2+6s+10} = 0 \left( \text{poles: } s = \frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2}, \text{ LHP, } \therefore \text{OK} \right)$$

$$(b) \quad F(s) = \frac{2s^3 - s^2 - 3s - 5}{s^3 + 6s^2 + 10s} \therefore f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^3 - s^2 - 3s - 5}{s^2 + 6s + 10} = \boxed{\infty}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^3 - s^2 - 3s - 5}{s^2 + 6s + 10} = -0.5 \text{ (poles OK)}$$

$$(c) \quad F(s) = \frac{8s-2}{s^2-6s+10} \therefore f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(8s-2)}{s^2-6s+10} = \boxed{8}$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(8s-2)}{s^2-6s+10}, s = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} \text{ RHP } \therefore \text{indeterminate}$$

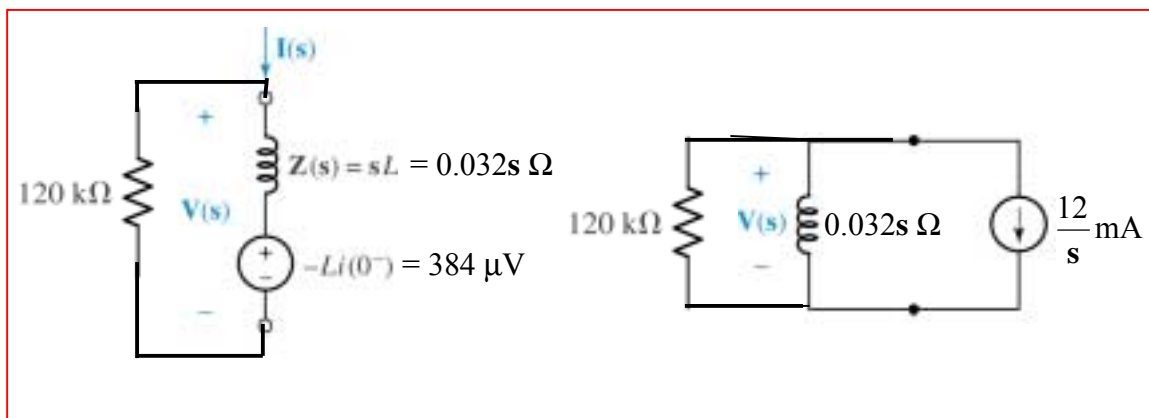
$$(d) \quad F(s) = \frac{8s^2-2}{(s+2)^2(s+1)(s^2+6s+10)} \therefore f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \boxed{0}$$

$$f^\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(8s^2-2)}{(s+2)^2(s+1)(s^2+6s+10)} = \boxed{10} \text{ (pole OK)}$$



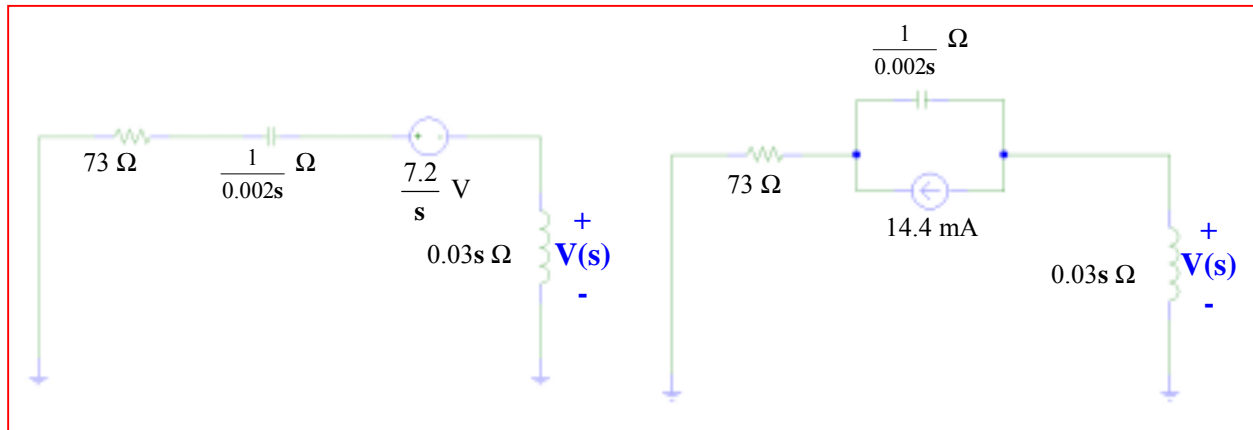
## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

1. Note that  $i_L(0^+) = 12 \text{ mA}$ . We have two choices for inductor model:



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

2.  $i_L(0^-) = 0$ ,  $v_C(0^+) = 7.2 \text{ V}$  ('+' reference on left). There are two possible circuits, since the inductor is modeled simply as an impedance:



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

3.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbf{Z}_m(s) &= \frac{2s}{20 + 0.1s} + \frac{2000/s}{2 + 1000/s} = \frac{20s}{s + 200} + \frac{1000}{s + 500} \\ &= \frac{20s^2 + 10,000s + 1000s + 200,000}{s^2 + 700s + 100,000} = \boxed{\frac{20s^2 + 11,000s + 200,000}{s^2 + 700s + 100,000}} \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \mathbf{Z}_{in}(-80) = \boxed{-10.95 \, \Omega}$$

$$\text{(c)} \quad \mathbf{Z}_{in}(j80) = \frac{-128,000 + j880,000 + 200,000}{-6400 + j56,000 + 100,000} = \boxed{8.095 \angle 54.43^\circ \, \Omega}$$

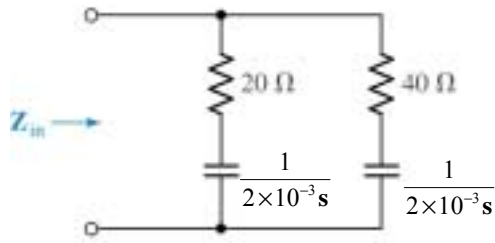
$$\text{(d)} \quad \mathbf{Y}_{RL} = \frac{1}{20} + \frac{10}{s} = \boxed{\frac{s + 200}{20s}}$$

$$\text{(e)} \quad \mathbf{Y}_{RC} = \frac{1}{2} + 0.001s = \boxed{\frac{s + 500}{1000}}$$

$$\begin{aligned} \text{(f)} \quad \frac{\mathbf{Y}_{RL} + \mathbf{Y}_{RC}}{\mathbf{Y}_{RL} \mathbf{Y}_{RC}} &= \frac{\frac{s + 200}{20s} + 0.5 + 0.001s}{\frac{(s + 200)}{20s}(0.001s + 0.5)} = \frac{s + 200 + 10s + 0.02s^2}{0.001s^2 + 0.7s + 100} \\ &= \frac{20s^2 + 11,000s + 200,000}{s^2 + 700s + 100,000} = \mathbf{Z(s)} \end{aligned}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

4.



$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = \left( 20 + \frac{1}{2 \times 10^{-3} \mathbf{s}} \right) \parallel \left( 40 + \frac{1}{2 \times 10^{-3} \mathbf{s}} \right) = (20 + 500\mathbf{s}^{-1}) \parallel (40 + 500\mathbf{s}^{-1})$$

$$= \frac{80\mathbf{s}^2 + 3000\mathbf{s} + 25000}{6\mathbf{s}^2 + 100\mathbf{s}}$$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

$$5. \quad (a) \quad \mathbf{Z}_{in} = \frac{50}{s} + \frac{16(0.2s)}{16 + 0.2s} = \frac{50}{s} + \frac{16s}{s + 80} = \boxed{\frac{16s^2 + 50s + 4000}{s^2 + 80s}}$$

$$(b) \quad \mathbf{Z}_{in}(j8) = \frac{-1024 + 4000 + j400}{-64 + j640} = \boxed{0.15842 - j4.666 \, \Omega}$$

$$(c) \quad \mathbf{Z}_{in}(-2 + j6) = \frac{16(4 - 36 - j24) - 100 + j300 + 4000}{-32 - j24 - 160 + j480} = \boxed{6.850 \angle -114.3^\circ \, \Omega}$$

$$(d) \quad \mathbf{Z}_{in} = \frac{50}{s} + \frac{0.2sR}{R + 0.2s} = \frac{0.2Rs^2 + 10s + 50R}{0.2s^2 + Rs},$$

$$\mathbf{Z}_{in}(-5) = \frac{5R - 50 + 50R}{5 - 5R} \therefore 55R = 50, \quad R = \boxed{0.9091 \, \Omega}$$

$$(e) \quad R = \boxed{1 \, \Omega}$$

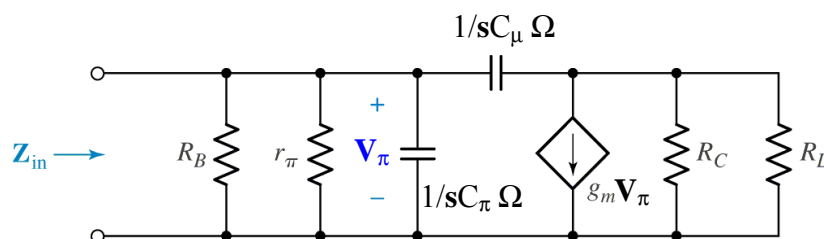
## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

6.  $2 \text{ mF} \rightarrow \frac{1}{2 \times 10^{-3} \text{ s}} \Omega, 1 \text{ mH} \rightarrow 0.001 \text{ s } \Omega,$

$$\mathbf{Z}_{\text{in}} = (55 + 500/\text{s}) \parallel (100 + \text{s}/1000) = \frac{\left(55 + \frac{500}{\text{s}}\right) \left(100 + \frac{\text{s}}{1000}\right)}{155 + \frac{500}{\text{s}} + \frac{\text{s}}{1000}} = \boxed{\frac{55\text{s}^2 + 5.5005 \times 10^6 \text{s} + 5 \times 10^7}{\text{s}^2 + 5 \times 10^5 \text{s} + 1.55 \times 10^5}}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

7. We convert the circuit to the s-domain:



Defining  $\mathbf{Z}_\pi = R_B \parallel r_\pi \parallel (1/sC_\pi) = \frac{r_\pi R_B}{r_\pi + R_B + r_\pi R_B C_\pi s}$  and

$\mathbf{Z}_L = R_C \parallel R_L = R_C R_L / (R_C + R_L)$ , we next connect a 1-A source to the input and write two nodal equations:

$$1 = \mathbf{V}_\pi / \mathbf{Z}_\pi + (\mathbf{V}_\pi - \mathbf{V}_L) C_\mu s \quad [1]$$

$$-g_m \mathbf{V}_\pi = \mathbf{V}_L / \mathbf{Z}_L + (\mathbf{V}_L - \mathbf{V}_\pi) C_\mu s \quad [2]$$

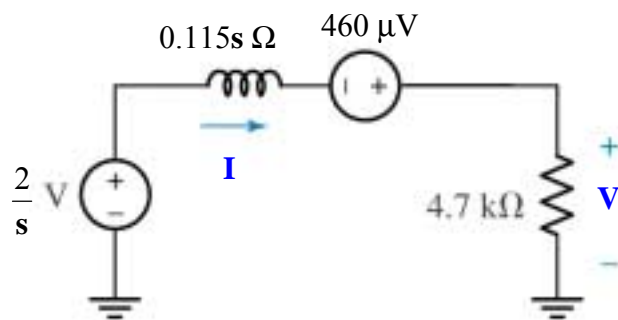
Solving,

$$\mathbf{V}_\pi = \frac{r_\pi R_B (1 + \mathbf{Z}_L C_\mu s)}{\mathbf{Z}_L r_\pi R_B C_\pi C_\mu s^2 + (g_m \mathbf{Z}_L r_\pi R_B C_\mu + r_\pi R_B C_\pi + r_\pi R_B C_\mu + \mathbf{Z}_L r_\pi C_\mu + \mathbf{Z}_L R_B C_\mu) s + r_\pi + R_B}$$

Since we used a 1-A ‘test’ source, this is the input impedance. Setting both capacitors to zero results in  $r_\pi \parallel R_B$  as expected.

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

8.



$$\mathbf{V(s)} = 4700 \frac{\frac{2}{s} + 460 \times 10^{-6}}{4700 + 0.115s} = \frac{2.162}{0.115s + 4700} + \frac{9400}{s(0.115s + 4700)}$$

$$= \frac{18.8}{s + 40870} + \frac{81740}{s(s + 40870)} = \frac{18.8}{s + 40870} + \frac{a}{s} + \frac{b}{s + 40870}$$

$$\text{where } a = \left. \frac{81740}{s + 40870} \right|_{s=0} = 2 \text{ and } b = \left. \frac{81740}{s} \right|_{s=-40870} = -2$$

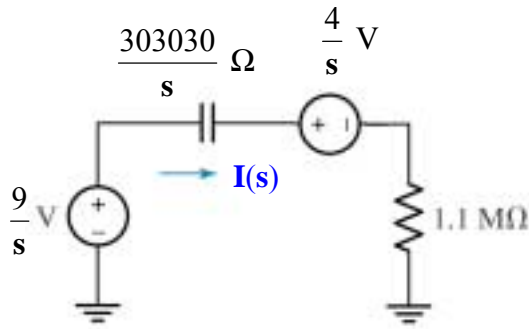
Thus,  $\mathbf{V(s)} = \frac{18.8}{s + 40870} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s + 40870}$ . Taking the inverse transform of each term,

$$v(t) = [16.8 e^{-40870t} + 2] u(t) \text{ V}$$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

9.  $v(0^-) = 4 \text{ V}$



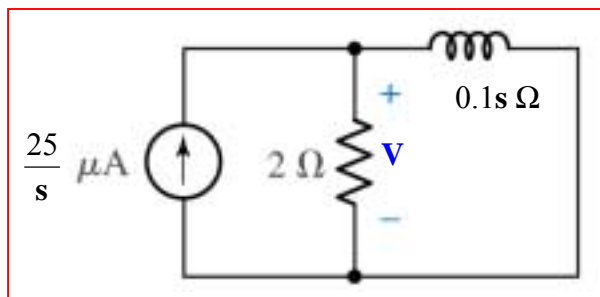
$$\mathbf{I(s)} = \frac{\frac{9}{s} - \frac{4}{s}}{\frac{303030}{s} + 1.1 \times 10^6} = \frac{5}{1.1 \times 10^6 + 303030} = \frac{4.545 \times 10^{-6}}{s + 0.2755}$$

Taking the inverse transform, we find that  $i(t) = 4.545 e^{-0.2755t} u(t) \mu\text{A}$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

10. From the information provided, we assume no initial energy stored in the inductor.

(a) Replace the 100 mH inductor with a  $0.1\text{s}\text{-}\Omega$  impedance, and the current source with a  $\frac{25 \times 10^{-6}}{s}$  A source.



$$(b) \mathbf{V(s)} = \frac{25 \times 10^{-6}}{s} \left[ \frac{2(0.1\text{s})}{2 + 0.1\text{s}} \right] = \frac{5 \times 10^{-6}}{0.1\text{s} + 2} = \frac{5 \times 10^{-5}}{s + 20} \text{ V}$$

Taking the inverse transform,

$$v(t) = 50 e^{-20t} \text{ mV}$$

The power absorbed in the resistor R is then  $p(t) = 0.5 v^2(t) = 1.25 e^{-40t} \text{ nW}$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

11.  $v(t) = 10e^{-2t} \cos(10t + 30^\circ) \text{ V}$

$$\cos(10t + 30^\circ) \Leftrightarrow \frac{s \cos 30^\circ - 10 \sin 30^\circ}{s^2 + 100} = \frac{0.866s - 5}{s^2 + 100}$$

$\mathcal{L}\{f(t)e^{-at}\} \Leftrightarrow F(s+a)$ , so

$$\mathbf{V}(s) = 10 \frac{0.866(s+2) - 5}{(s+2)^2 + 100} = \frac{8.66s - 16.34}{s^2 + 100}$$

The voltage across the  $5\text{-}\Omega$  resistor may be found by simple voltage division. We first note that  $\mathbf{Z}_{\text{eff}} = (10/s) \parallel 5 = \frac{50}{5s+10} \Omega$ . Thus,

$$\mathbf{V}_{5\Omega} = \frac{\left(\frac{50}{5s+10}\right) \mathbf{V}_s}{0.5s + 5 + \left(\frac{50}{5s+10}\right)} = \frac{50 \mathbf{V}_s}{(0.5s + 5)(5s + 10) + 50} = \frac{50 \mathbf{V}_s}{2.5s^2 + 30s + 100}$$

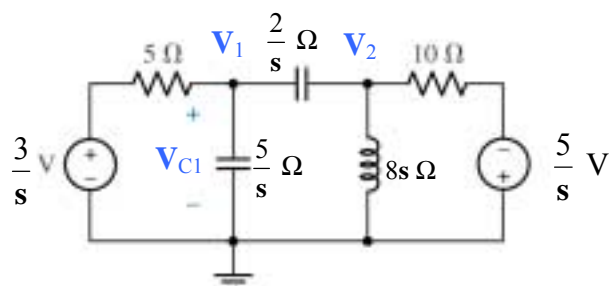
$$(a) \mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{V}_{\text{eff}}}{5} = 40 \frac{0.866s - 3.268}{[(s+2)^2 + 100][s^2 + 12s + 40]} = \frac{34.64s - 130.7}{[(s+2)^2 + 100][(s+6)^2 + 100]}$$

(b) Taking the inverse transform using MATLAB, we find that

$$i_x(t) = e^{-6t} [0.0915 \cos 2t - 1.5245 \sin 2t] - e^{-2t} [0.0915 \cos 10t - 0.3415 \sin 10t] \text{ A}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

12.



Node 1:  $0 = 0.2 (V_1 - 3/s) + 0.2 V_1 s + 0.5 (V_1 - V_2) s$

Node 2:  $0 = 0.5 (V_2 - V_1) s + 0.125 V_2 s + 0.1 (V_2 + 5/s)$

Rewriting,  $(3.5 s^2 + s) V_1 + 2.5 s^2 V_2 = 3$  [1]  
 $-4 s^2 V_1 + (4 s^2 + 0.8 s + 1) V_2 = -4$  [2]

Solving using MATLAB or substitution, we find that

$$V_1(s) = \frac{-20s^2 + 16s + 20}{40s^4 + 68s^3 + 43s^2 + 10s}$$

$$= \left( \frac{1}{40} \right) \frac{-20s^2 + 16s + 20}{s(s + 0.5457 - j0.3361)(s + 0.5457 + j0.3361)(s + 0.6086)}$$

which can be expanded:

$$V_1(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s + 0.5457 - j0.3361} + \frac{b^*}{s + 0.5457 + j0.3361} + \frac{c}{s + 0.6086}$$

Using the method of residues, we find that

$$a = 2, b = 2.511 \angle 101.5^\circ, b^* = 2.511 \angle -101.5^\circ \text{ and } c = -1.003.$$

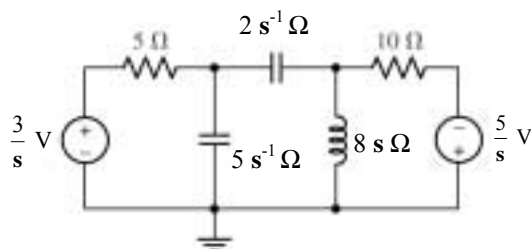
Thus, taking the inverse transform,

$$v_1(t) = [2 - 1.003 e^{-0.6086t} + 5.022 e^{-0.5457t} \cos(0.3361t - 101.5^\circ)] u(t) \text{ V}$$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

13. With zero initial energy, we may draw the following circuit:



Define three clockwise mesh currents  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$ , and  $\mathbf{I}_3$  in the left, centre and right meshes, respectively.

$$\text{Mesh 1: } -3/s + 5\mathbf{I}_1 + (5/s)\mathbf{I}_1 - (5/s)\mathbf{I}_2 = 0$$

$$\text{Mesh 2: } -(5/s)\mathbf{I}_1 + (8s + 7/s)\mathbf{I}_2 - 8s\mathbf{I}_3 = 0$$

$$\text{Mesh 3: } -8s\mathbf{I}_2 + (8s + 10)\mathbf{I}_3 - 5/s = 0$$

Rewriting,

$$\begin{array}{rclcl} (5s + 5)\mathbf{I}_1 - 5\mathbf{I}_2 & & = 3 & [1] \\ -5\mathbf{I}_1 + (8s^2 + 7)\mathbf{I}_2 - 8s^2\mathbf{I}_3 & & = 0 & [2] \\ -8s^2\mathbf{I}_2 + (8s^2 + 10s)\mathbf{I}_3 & & = 5 & [3] \end{array}$$

Solving, we find that

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2(s) &= \frac{20s^2 + 32s + 15}{40s^3 + 68s^2 + 43s + 10} = \left(\frac{1}{40}\right) \frac{20s^2 + 32s + 15}{(s + 0.6086)(s + 0.5457 - j0.3361)(s + 0.5457 + j0.3361)} \\ &= \frac{a}{(s + 0.6086)} + \frac{b}{(s + 0.5457 - j0.3361)} + \frac{b^*}{(s + 0.5457 + j0.3361)} \end{aligned}$$

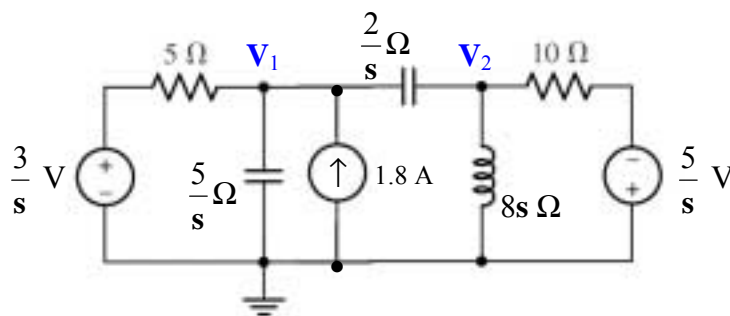
where  $a = 0.6269$ ,  $b = 0.3953\angle -99.25^\circ$ , and  $b^* = 0.3955\angle +99.25^\circ$

Taking the inverse transform, we find that

$$\begin{aligned} i_2(t) &= [0.6271e^{-0.6086t} + 0.3953e^{-j99.25^\circ} e^{(-0.5457 + j0.3361)t} + 0.3953e^{j99.25^\circ} e^{(-0.5457 - j0.3361)t}] u(t) \\ &= [0.6271e^{-0.6086t} + 0.7906 e^{-0.5457t} \cos(0.3361t + 99.25^\circ)] u(t) \end{aligned}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

14. We choose to represent the initial energy stored in the capacitor with a current source:



$$\text{Node 1:} \quad 1.8 = \frac{V_1 - \frac{3}{s}}{5} + \frac{s}{5} V_1 + \frac{s}{2} (V_1 - V_2)$$

$$\text{Node 2:} \quad 0 = \frac{s}{2} (V_2 - V_1) + \frac{1}{8s} V_2 + \frac{V_2 + \frac{5}{s}}{10}$$

$$\text{Rewriting,} \quad \begin{aligned} (5s^2 + 4s) V_1 - 5s^2 V_2 &= 18s + 6 & [1] \\ -4s^2 V_1 + (4s^2 + 0.8s + 1) V_2 &= -4 & [2] \end{aligned}$$

$$\text{Solving, we find that } V_1(s) = \frac{360s^3 + 92s^2 + 114s + 30}{s(40s^3 + 68s^2 + 43s + 10)}$$

$$= \frac{a}{s} + \frac{b}{s + 0.6086} + \frac{c}{s + 0.5457 - j0.3361} + \frac{c^*}{s + 0.5457 + j0.3361}$$

where  $a = 3$ ,  $b = 30.37$ ,  $c = 16.84 \angle 136.3^\circ$  and  $c^* = 16.84 \angle -136.3^\circ$

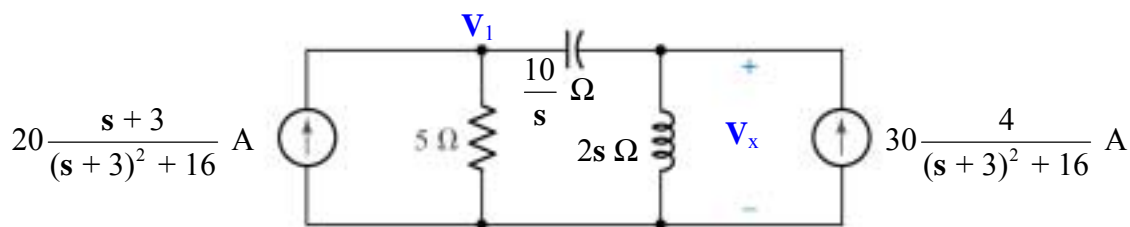
Taking the inverse transform, we find that

$$v_1(t) = [3 + 30.37e^{-0.6086t} + 16.84 e^{j136.3^\circ} e^{-0.5457t} e^{j0.3361t} + 16.84 e^{-j136.3^\circ} e^{-0.5457t} e^{-j0.3361t}] u(t) \text{ V}$$

$$= [3 + 30.37e^{-0.6086t} + 33.68e^{-0.5457t} \cos(0.3361t + 136.3^\circ)] u(t) \text{ V}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

15. We begin by assuming no initial energy in the circuit and transforming to the s-domain:



(a) via nodal analysis, we write:

$$\frac{20s + 60}{(s + 3)^2 + 16} = \frac{s}{10}(V_1 - V_x) + \frac{V_1}{5} \quad [1] \quad \text{and}$$

$$\frac{120}{(s + 3)^2 + 16} = \frac{V_x}{2s} + \frac{s}{10}(V_x - V_1) \quad [2]$$

Collecting terms and solving for  $V_x(s)$ , we find that

$$\begin{aligned} V_x(s) &= \frac{200s(s^2 + 9s + 12)}{2s^4 + 17s^3 + 90s^2 + 185s + 250} \\ &= \frac{200s(s^2 + 9s + 12)}{(s + 3 - j4)(s + 3 + j4)(s + 1.25 - j1.854)(s + 1.25 + j1.854)} \end{aligned}$$

(b) Using the method of residues, this function may be rewritten as

$$\frac{a}{(s + 3 - j4)} + \frac{a^*}{(s + 3 + j4)} + \frac{b}{(s + 1.25 - j1.854)} + \frac{b^*}{(s + 1.25 + j1.854)}$$

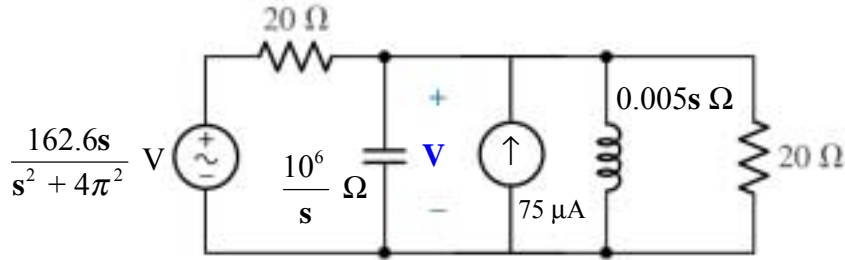
with  $a = 92.57 \angle -47.58^\circ$ ,  $a^* = 92.57 \angle 47.58^\circ$ ,  $b = 43.14 \angle 106.8^\circ$ ,  $b^* = 43.14 \angle -106.8^\circ$

Taking the inverse transform, then, yields

$$\begin{aligned} v_x(t) &= [92.57 e^{-j47.58^\circ} e^{-3t} e^{j4t} + 92.57 e^{j47.58^\circ} e^{-3t} e^{-j4t} \\ &\quad + 43.14 e^{j106.8^\circ} e^{-1.25t} e^{j1.854t} + 43.14 e^{-j106.8^\circ} e^{-1.25t} e^{-j1.854t}] u(t) \\ &= [185.1 e^{-3t} \cos(4t - 47.58^\circ) + 86.28 e^{-1.25t} \cos(1.854t + 106.8^\circ)] u(t) \end{aligned}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

16. We model the initial energy in the capacitor as a 75- $\mu$ A independent current source:



First, define  $\mathbf{Z}_{\text{eff}} = 10^6/s \parallel 0.005s \parallel 20 = \frac{s}{10^{-6}s^2 + 0.005s + 200} \Omega$

Then, writing a single KCL equation,  $75 \times 10^{-6} = \frac{\mathbf{V}(s)}{\mathbf{Z}_{\text{eff}}} + \frac{1}{20} \left( \mathbf{V}(s) - \frac{162.6s}{s^2 + 4\pi^2} \right)$

which may be solved for  $\mathbf{V}(s)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(s) &= \frac{75s(s^2 + 1.084 \times 10^5 s + 39.48)}{s^4 + 5.5 \times 10^4 s^3 + 2 \times 10^8 s^2 + 2.171 \times 10^6 s + 7.896 \times 10^9} \\ &= \frac{75s(s^2 + 1.084 \times 10^5 s + 12.57)}{(s + 51085)(s + 3915)(s - j6.283)(s + j6.283)} \end{aligned}$$

(NOTE: factored with higher-precision denominator coefficients using MATLAB to obtain accurate complex poles: otherwise, numerical error led to an exponentially growing pole i.e. real part of the pole was positive)

$$= \frac{a}{(s + 51085)} + \frac{b}{(s + 3915)} + \frac{c}{(s - j2\pi)} + \frac{c^*}{(s + j2\pi)}$$

where  $a = -91.13$ ,  $b = 166.1$ ,  $c = 0.1277 \angle 89.91^\circ$  and  $c^* = 0.1277 \angle -89.91^\circ$ .

Thus, consolidating the complex exponential terms (the imaginary components cancel),

$$v(t) = [-91.13e^{-51085t} + 166.1e^{-3915t} + 0.2554 \cos(2\pi t + 89.91^\circ)] u(t) \text{ V}$$

- (b) The steady-state voltage across the capacitor is  $\mathbf{V} = [255.4 \cos(2\pi t + 89.91^\circ)] \text{ mV}$

This can be written in phasor notation as  $0.2554 \angle 89.91^\circ \text{ V}$ . The impedance across which this appears is  $\mathbf{Z}_{\text{eff}} = [j\omega C + 1/j\omega L + 1/20]^{-1} = 0.03142 \angle 89.91^\circ \Omega$ , so

$$\mathbf{I}_{\text{source}} = \mathbf{V} / \mathbf{Z}_{\text{eff}} = 8.129 \angle -89.91^\circ \text{ A.}$$

$$\text{Thus, } i_{\text{source}} = 8.129 \cos 2\pi t \text{ A.}$$

- (c) By phasor analysis, we can use simple voltage division to find the voltage division to find the capacitor voltage:

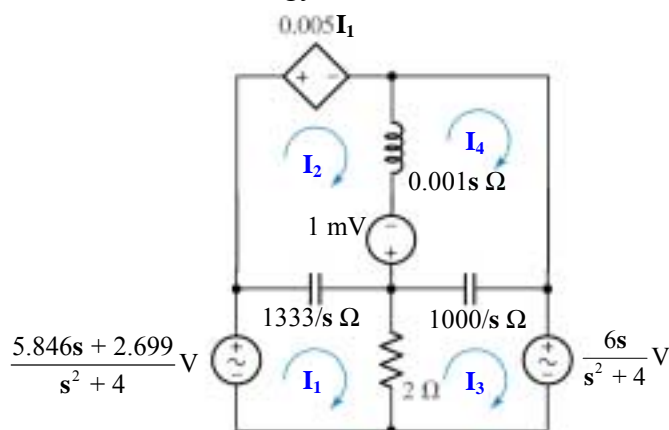
$$\mathbf{V}_C(j\omega) = \frac{(162.6 \angle 0^\circ)(0.03142 \angle 89.91^\circ)}{20 + 0.03142 \angle 89.91^\circ} = 0.2554 \angle 89.92^\circ \text{ V} \quad \text{which agrees with}$$

our answer to (a), assuming steady state. Dividing by  $0.03142 \angle 89.91^\circ \Omega$ , we find  $i_{\text{source}} = 8.129 \cos 2\pi t \text{ A.}$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

17. Only the inductor appears to have initial energy, so we model that with a voltage source:



$$\text{Mesh 1:} \quad \frac{5.846s + 2.699}{s^2 + 4} = \left(2 + \frac{1333}{s}\right) \mathbf{I}_1 - \frac{1333}{s} \mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3$$

$$\text{Mesh 2:} \quad 0 = 0.005\mathbf{I}_1 - 0.001 + (0.001s + 1333/s) \mathbf{I}_2 - (1333/s)\mathbf{I}_1 - 0.001s\mathbf{I}_4$$

$$\text{Mesh 3:} \quad 0 = (2 + 1000/s)\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{I}_1 - (1000/s)\mathbf{I}_4 + \frac{6s}{s^2 + 4}$$

$$\text{Mesh 4:} \quad 0 = (0.001s + 1000/s) \mathbf{I}_4 - 0.001s\mathbf{I}_2 - (1000/s)\mathbf{I}_3 + 0.001$$

Solving, we find that  $\mathbf{I}_1 = -0.2 \frac{154s - 2699}{s^2 + 4}$  and

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= 0.001 \frac{154s^4 - 7.378 \times 10^7 s^3 - 1.912 \times 10^{10} s^2 - 4.07 \times 10^{13} s + 7.196 \times 10^{14}}{2333s^4 + 6.665 \times 10^5 s^3 + 1.333 \times 10^9 s^2 + 5.332 \times 10^9} \\ &= \frac{0.4328 \angle -166.6^\circ}{s + 142.8 + j742} + \frac{0.4328 \angle +166.6^\circ}{s + 142.8 - j742} \\ &\quad + \frac{135.9 \angle -96.51^\circ}{s - j2} + \frac{135.9 \angle +96.51^\circ}{s + j2} + 6.6 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Taking the inverse transform of each,

$$i_1(t) = 271.7 \cos(2t - 96.51^\circ) \text{ A and}$$

$$i_2(t) = 0.8656 e^{-142.8t} \cos(742.3t + 166.6^\circ) + 271.8 \cos(2t - 96.51^\circ) + 6.6 \times 10^{-5} \delta(t) \text{ A}$$

Verifying via phasor analysis, we again write four mesh equations:

$$6 \angle -13^\circ = (2 - j666.7)\mathbf{I}_1 + j667\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_3$$

$$0 = (0.005 + j666.7)\mathbf{I}_1 + (j2 \times 10^{-3} - j666.7)\mathbf{I}_2 - j2 \times 10^{-3}\mathbf{I}_4$$

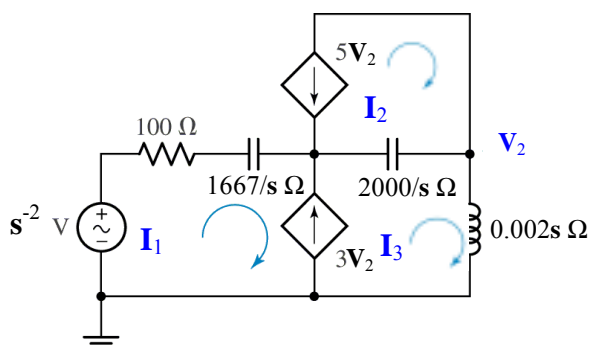
$$-6 \angle 0 = -2\mathbf{I}_1 + (2 - j500)\mathbf{I}_3 + j500\mathbf{I}_4$$

$$0 = -j2 \times 10^{-3}\mathbf{I}_2 + j500\mathbf{I}_3 + (j2 \times 10^{-3} - j500)\mathbf{I}_4$$

Solving, we find  $\mathbf{I}_1 = 271.7 \angle -96.5^\circ \text{ A}$  and  $\mathbf{I}_2 = 272 \angle -96.5^\circ \text{ A}$ . From the Laplace analysis, we see that this agrees with our expression for  $i_1(t)$ , and as  $t \rightarrow \infty$ , our expression for  $i_2(t) \rightarrow 272 \cos(2t - 96.5^\circ)$  in agreement with the phasor analysis.

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

18. With no initial energy storage, we simply convert the circuit to the s-domain:



Writing a supermesh equation,

$$\frac{1}{s^2} = 100\mathbf{I}_1 + \frac{1}{6 \times 10^{-4}s}\mathbf{I}_1 + \frac{2000}{s}\mathbf{I}_3 + 0.002s\mathbf{I}_3 - \frac{2000}{s}\mathbf{I}_2$$

we next note that  $\mathbf{I}_2 = -5\mathbf{V}_2 = -5(0.002s)\mathbf{I}_3 = -0.01s\mathbf{I}_3$   
and  $\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1 = 3\mathbf{V}_2 = 0.006s\mathbf{I}_3$ , or  $\mathbf{I}_1 = (1 - 0.006s)\mathbf{I}_3$ , we may write

$$\mathbf{I}_3 = \frac{1}{-0.598s^3 + 110s^2 + 3666s}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2(s) = \mathbf{I}_3 / 0.002s &= \frac{1}{-0.0012s^4 + 0.22s^3 + 7.332s^2} \\ &= -\frac{7.645 \times 10^{-5}}{s - 212.8} + \frac{4.167 \times 10^{-3}}{s + 28.82} - \frac{4.091 \times 10^{-3}}{s} + \frac{0.1364}{s^2} \end{aligned}$$

Taking the inverse transform,

$$v_2(t) = -7.645 \times 10^{-5} e^{212.8t} + 4.167 \times 10^{-3} e^{-28.82t} - 4.091 \times 10^{-3} + 0.1364 t] u(t) \text{ V}$$

(a)  $v_2(1 \text{ ms}) =$

(b)  $v_2(100 \text{ ms}) =$

(c)  $v_2(10 \text{ s}) =$

$$-5.58 \times 10^{-7} \text{ V}$$

$$-1.334 \times 10^5 \text{ V}$$

$$-1.154 \times 10^{920} \text{ V.}$$

This is pretty big- best to start running.

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

19. We need to write three mesh equations:

$$\text{Mesh 1:} \quad \frac{5.846s + 2.699}{s^2 + 4} = \left(2 + \frac{1333}{s}\right) \mathbf{I}_1 - 2\mathbf{I}_3$$

$$\text{Mesh 3:} \quad 0 = (2 + 1000/s)\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{I}_1 - (1000/s)\mathbf{I}_4 + \frac{6s}{s^2 + 4}$$

$$\text{Mesh 4:} \quad 0 = (0.001s + 1000/s)\mathbf{I}_4 - (1000/s)\mathbf{I}_3 + 10^{-6}$$

Solving,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= -0.001s \frac{(154s^3 - 2.925 \times 10^6 s^2 + 1.527 \times 10^8 s - 2.699 \times 10^9)}{2333s^4 + 6.665 \times 10^5 s^3 + 1.333 \times 10^9 s^2 + 2.666 \times 10^6 s + 5.332 \times 10^9} \\ &= \frac{0.6507 \angle 12.54^\circ}{s + 142.8 - j742.3} + \frac{0.6507 \angle -12.54^\circ}{s + 142.8 + j742.3} \\ &\quad + \frac{0.00101 \angle -6.538^\circ}{s - j2} + \frac{0.00101 \angle 6.538^\circ}{s + j2} - 6.601 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

which corresponds to

$$i_1(t) = 1.301 e^{-142.8t} \cos(742.3t + 12.54^\circ) + 0.00202 \cos(2t - 6.538^\circ) - 6.601 \times 10^{-5} \delta(t) \text{ A}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_3 &= -0.001 \frac{(154s^4 + 3.997 \times 10^6 s^3 + 1.547 \times 10^8 s^2 + 3.996 \times 10^{12} s - 2.667 \times 10^6)}{(s^2 + 4)(2333s^2 + 6.665 \times 10^5 s + 1.333 \times 10^9)} \\ &= \frac{0.7821 \angle -33.56^\circ}{s + 142.8 - j742.3} + \frac{0.7821 \angle 33.56^\circ}{s + 142.8 + j742.3} \\ &\quad + \frac{1.499 \angle 179.9^\circ}{s - j2} + \frac{1.499 \angle -179.9^\circ}{s + j2} \end{aligned}$$

which corresponds to

$$i_3(t) = 1.564 e^{-142.8t} \cos(742.3t - 33.56^\circ) + 2.998 \cos(2t + 179.9^\circ) \text{ A}$$

The power absorbed by the 2- $\Omega$  resistor, then, is  $2[i_1(t) - i_3(t)]^2$  or

$$p(t) = 2[1.301 e^{-142.8t} \cos(742.3t + 12.54^\circ) + 0.00202 \cos(2t - 6.538^\circ) - 6.601 \times 10^{-5} \delta(t) - 1.564 e^{-142.8t} \cos(742.3t - 33.56^\circ) - 2.998 \cos(2t + 179.9^\circ)]^2 \text{ W}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

20. (a) We first define  $\mathbf{Z}_{\text{eff}} = R_B \parallel r_\pi \parallel (1/sC_\pi) = \frac{r_\pi R_B}{r_\pi + R_B + r_\pi R_B C_\pi s}$ . Writing two nodal equations, then, we obtain:

$$0 = (\mathbf{V}_\pi - \mathbf{V}_S)/R_S + \mathbf{V}_\pi (r_\pi + R_B + r_\pi R_B C_\pi s)/r_\pi R_B + (\mathbf{V}_\pi - \mathbf{V}_o)C_\mu s$$

and

$$-g_m \mathbf{V}_\pi = \mathbf{V}_o(R_C + R_L)/R_C R_L + (\mathbf{V}_o - \mathbf{V}_p) C_\mu s$$

Solving using MATLAB, we find that

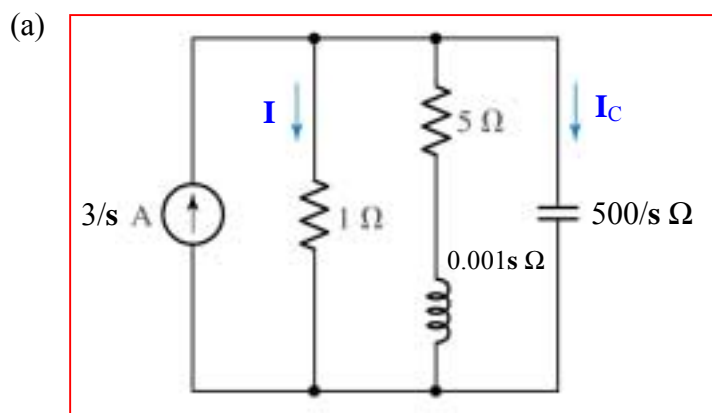
$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_S} = & r_\pi R_B R_C R_L (-g_m + C_\mu s) [R_s r_\pi R_B R_C R_L C_\pi C_\mu s^2 + (R_s r_\pi R_B R_C C_\pi + R_s r_\pi R_B R_C C_\mu \\ & + R_s r_\pi R_B R_L C_\pi + R_s r_\pi R_B R_L C_\mu + r_\pi R_B R_C R_L C_\mu + R_s r_\pi R_C R_L C_\mu \\ & + R_s R_B R_C R_L C_\mu + g_m R_s r_\pi R_B R_C R_L C_\mu) s \\ & + r_\pi R_B R_C + R_s r_\pi R_C + R_s R_B R_C + r_\pi R_B R_L + R_s r_\pi R_L + R_s R_B R_L]^{-1} \end{aligned}$$

- (b) Since we have only two energy storage elements in the circuit, the maximum number of poles would be two. The capacitors cannot be combined (either series or in parallel), so we expect a second-order denominator polynomial, which is what we found in part (a).



# CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

21.



(b)  $Z_{TH} = (5 + 0.001s) \parallel (500/s) = \frac{2500s + 0.5}{0.001s^2 + 5s + 500} \Omega$

$V_{TH} = (3/s)Z_{TH} = \frac{7.5 \times 10^6 s + 1500}{s(s^2 + 5000s + 5 \times 10^5)} V$

(c) 
$$V_{1\Omega} = V_{TH} \frac{1}{1 + Z_{TH}} = \frac{7.5 \times 10^6 s + 1500}{s(s^2 + 505000) \left( 1 + \frac{2500s + 0.5}{0.001s^2 + 5s + 500} \right)}$$

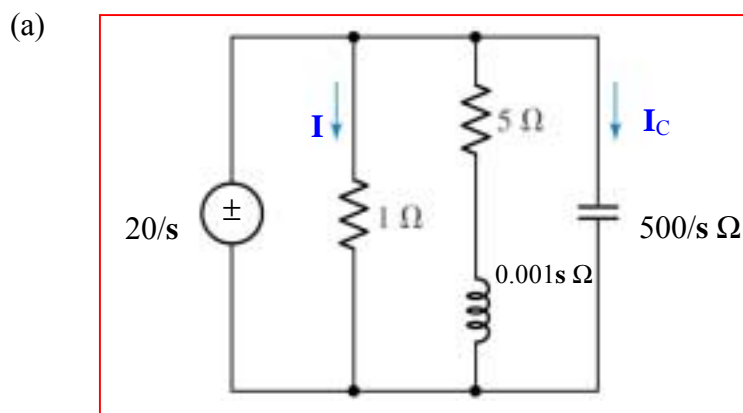
$$= -\frac{2.988}{s + 2.505 \times 10^6} + \frac{10.53 \angle -89.92^\circ}{s + j710.6} + \frac{10.53 \angle +89.92^\circ}{s - j710.6}$$

$$+ \frac{2.956}{s + 0.1998} + \frac{2.967 \times 10^{-3}}{s}$$

Thus,  $i_{1\Omega} = v_{1\Omega}(t) = [-2.988 e^{-2.505 \times 10^6 t} + 2.956 e^{-0.1998 t} + 2.967 \times 10^{-3} + 21.06 \cos(710.6t + 89.92^\circ)] u(t)$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

22.



(b)  $\boxed{Z_{TH} = 0}$ ,  $V_{TH} = 20/s \text{ V}$  so  $\boxed{I_N = \infty}$

(c)  $I_C = \frac{\left(\frac{20}{s}\right)}{\left(\frac{500}{s}\right)} = 0.04 \text{ A}$ . Taking the inverse transform, we obtain a delta function:

$\boxed{i_C(t) = 40\delta(t) \text{ mA.}}$

This “unphysical” solution arises from the circuit above attempting to force the voltage across the capacitor to change in zero time.

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

23. Beginning with the source on the left (10/s V) we write two nodal equations:

$$\left( \mathbf{V}'_1 - \frac{10}{s} \right) \frac{1}{47000} + \frac{s}{30303} \mathbf{V}'_1 + \frac{\mathbf{V}'_1 - \mathbf{V}'_2}{56 + 336 \times 10^{-6}s} = 0$$

$$\frac{\mathbf{V}'_2}{47000} + \frac{s}{10870} \mathbf{V}'_2 + \frac{\mathbf{V}'_2 - \mathbf{V}'_1}{56 + 336 \times 10^{-6}s} = 0$$

Solving,

$$\mathbf{V}'_1 = \frac{303030(0.3197 \times 10^{13} + 0.1645 \times 10^{11}s + 98700s^2)}{s(0.4639 \times 10^{10}s^3 + 0.7732 \times 10^{15}s^2 + 0.5691 \times 10^{18}s + 0.1936 \times 10^{18})}$$

$$\mathbf{V}'_2 = \frac{0.9676 \times 10^{18}}{s(0.4639 \times 10^{10}s^3 + 0.7732 \times 10^{15}s^2 + 0.5691 \times 10^{18}s + 0.1936 \times 10^{18})}$$

Shorting out the left source and activating the right-hand source (5 – 3/s) V:

$$\frac{1}{47000} \mathbf{V}''_1 + \frac{s}{30303} \mathbf{V}''_1 + \frac{\mathbf{V}''_1 - \mathbf{V}''_2}{56 + 336 \times 10^{-6}s} = 0$$

$$\frac{\mathbf{V}''_2 - 5 + \frac{3}{s}}{47000} + \frac{s}{10870} \mathbf{V}''_2 + \frac{\mathbf{V}''_2 - \mathbf{V}''_1}{56 + 336 \times 10^{-6}s} = 0$$

Solving,

$$\mathbf{V}''_1 = \frac{0.9676 \times 10^{17}(5s - 3)}{s(0.4639 \times 10^{10}s^3 + 0.7732 \times 10^{15}s^2 + 0.5691 \times 10^{18}s + 0.1936 \times 10^{18})}$$

$$\mathbf{V}''_2 = \frac{7609(705000s^3 + 0.1175 \times 10^{12}s^2 + 0.6359 \times 10^{14}s - 0.3819 \times 10^{14})}{s(0.4639 \times 10^{10}s^3 + 0.7732 \times 10^{15}s^2 + 0.5691 \times 10^{18}s + 0.1936 \times 10^{18})}$$

Adding, we find that

$$\mathbf{V}_1 = \frac{30303(0.2239 \times 10^{13} + 0.1613 \times 10^{13}s + 98700s^2)}{s(0.4639 \times 10^{10}s^3 + 0.7732 \times 10^{15}s^2 + 0.5691 \times 10^{18}s + 0.1936 \times 10^{18})}$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{7609(705000s^3 + 0.1175 \times 10^{12}s^2 + 0.6359 \times 10^{14}s + 0.8897 \times 10^{14})}{s(0.4639 \times 10^{10}s^3 + 0.7732 \times 10^{15}s^2 + 0.5691 \times 10^{18}s + 0.1936 \times 10^{18})}$$

(b) Using the *ilaplace()* routine in MATLAB, we take the inverse transform of each:

$$v_1(t) = [3.504 + 0.3805 \times 10^{-2} e^{-165928t} - 0.8618 e^{-739t} - 2.646 e^{-0.3404t}] u(t) \text{ V}$$

$$v_2(t) = [3.496 - 0.1365 \times 10^{-2} e^{-165928t} + 0.309 e^{-739t} - 2.647 e^{-0.3404t}] u(t) \text{ V}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

$$24. \quad (10/s)(1/47000) = 2.128 \times 10^{-4}/s \text{ A}$$

$$(5 - 3/s)/47000 = (1.064 - 0.6383/s) \times 10^{-4} \text{ A}$$

$$\mathbf{Z}_L = 47000 \parallel (30303/s) = \frac{1.424 \times 10^9}{47000s + 30303} \Omega$$

$$\mathbf{Z}_R = 47000 \parallel (10870/s) = \frac{5.109 \times 10^8}{47000s + 10870} \Omega$$

Convert these back to voltage sources, one on the left ( $\mathbf{V}_L$ ) and one on the right ( $\mathbf{V}_R$ ):

$$\mathbf{V}_L = (2.128 \times 10^{-4}/s) \left( \frac{1.424 \times 10^9}{47000s + 30303} \right) = \frac{3.0303 \times 10^5}{s(47000s + 30303)} \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_R = (1.064 - 0.6383/s) \times 10^{-4} \left( \frac{5.109 \times 10^8}{47000s + 10870} \right)$$

$$= \frac{54360}{47000s + 10870} - \frac{32611}{s(47000s + 10870)}$$

$$\text{Then, } \mathbf{I}_{56\Omega} = \frac{\mathbf{V}_L - \mathbf{V}_R}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_R + 336 \times 10^{-6}s + 56}$$

$$= -6250 \frac{2.555 \times 10^9 s^2 - 1.413 \times 10^{10} s - 4.282 \times 10^9}{s(4.639 \times 10^9 s^3 + 7.732 \times 10^{14} s^2 + 5.691 \times 10^{17} s + 1.936 \times 10^{17})}$$

$$= \frac{0.208}{s + 1.659 \times 10^5} - \frac{0.0210}{s + 739} - \frac{1.533 \times 10^{-18}}{s + 0.6447}$$

$$+ \frac{2.658 \times 10^{-5}}{s + 0.3404} + \frac{2.755 \times 10^{-18}}{s + 0.2313} + \frac{1.382 \times 10^{-4}}{s}$$

Thus,

$$i_{56\Omega}(t) = [0.208 \exp(-1.659 \times 10^5 t) - 0.0210 \exp(-739t) - 1.533 \times 10^{-18} \exp(-0.6447t) + 2.658 \times 10^{-5} \exp(-0.3404t) + 2.755 \times 10^{-18} \exp(-0.2313t) + 1.382 \times 10^{-4}] u(t) \text{ A.}$$

The power absorbed in the 56- $\Omega$  resistor is simply  $56 [i_{56\Omega}(t)]^2$  or

$$56 [0.208 \exp(-1.659 \times 10^5 t) - 0.0210 \exp(-739t) - 1.533 \times 10^{-18} \exp(-0.6447t) + 2.658 \times 10^{-5} \exp(-0.3404t) + 2.755 \times 10^{-18} \exp(-0.2313t) + 1.382 \times 10^{-4}]^2 \text{ W}$$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

25. (a) Begin by finding  $\mathbf{Z}_{TH} = \mathbf{Z}_N$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{TH} &= 47000 + (30303/s) \parallel [336 \times 10^{-6} s + 56 + (10870/s) \parallel 47000] \\ &= \frac{4.639 \times 109 s^3 + 7.732 \times 10^{14} s^2 + 5.691 \times 10^{17} s + 1.936 \times 10^{17}}{98700 s^3 + 1.645 \times 10^{10} s^2 + 1.21 \times 10^{13} s + 2.059 \times 10^{12}} \Omega\end{aligned}$$

To find the Norton source value, define three clockwise mesh currents  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$  and  $\mathbf{I}_3$  in the left, centre and right hand meshes, such that  $\mathbf{I}_N(s) = -\mathbf{I}_1(s)$  and the  $10/s$  source is replaced by a short circuit.

$$\begin{aligned}(47000 + 30303/s) \mathbf{I}_1 - (30303/s) \mathbf{I}_2 &= 0 \\ (10870/s + 56 + 336 \times 10^{-6} s + 30303/s) \mathbf{I}_2 - (30303/s) \mathbf{I}_1 - (10870/s) \mathbf{I}_3 &= 0 \\ (47000 + 10870/s) \mathbf{I}_3 - (10870/s) \mathbf{I}_2 &= -5 + 3/s\end{aligned}$$

Solving,

$$\mathbf{I}_N = -\mathbf{I}_1 = \frac{2.059 \times 10^{12} (5s - 3)}{s(4.639 \times 10^9 s^3 + 7.732 \times 10^{14} s^2 + 5.691 \times 10^{17} s + 1.936 \times 10^{17})}$$

$$(b) \mathbf{I}_{source} = (10/s) (1/\mathbf{Z}_{TH}) - \mathbf{I}_N(s)$$

$$\begin{aligned}&= 0.001(0.4579 \times 10^{13} s^6 + 0.1526 \times 10^{19} s^5 + 0.1283 \times 10^{24} s^4 + 0.1792 \times 10^{27} s^3 \\ &\quad + 0.6306 \times 10^{29} s^2 + 0.3667 \times 10^{29} s + 0.5183 \times 10^{28}) [s(4639 s^3 + 0.7732 \times 10^9 s^2 \\ &\quad + 0.5691 \times 10^{12} s + 0.1936 \times 10^{12}) (0.4639 \times 10^{10} s^3 + 0.7732 \times 10^{15} s^2 + 0.5691 \times 10^{18} s \\ &\quad + 0.1936 \times 10^{18})]^{-1}\end{aligned}$$

Taking the inverse transform using the MATLAB *ilaplace()* routine, we find that

$$\begin{aligned}i_{source}(t) &= 0.1382 \times 10^{-3} + 0.8607 \times 10^{-8} \exp(-165930t) + 0.8723 \times 10^{-7} \exp(-739t) \\ &\quad + 0.1063 \times 10^{-3} \exp(-0.3403t) - 0.8096 \times 10^{-7} \exp(-165930t) \\ &\quad + 0.1820 \times 10^{-4} \exp(-739t) - 0.5 \times 10^{-4} \exp(-0.3404t)\end{aligned}$$

$$i_{source}(1.5 \text{ ms}) = 2.0055 \times 10^{-4} \text{ A} = 200.6 \mu\text{A}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

26. We begin by shorting the  $7 \cos 4t$  source, and replacing the  $5 \cos 2t$  source with  $\frac{5s}{s^2 + 4}$ .

(a) Define four clockwise mesh currents  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$ ,  $\mathbf{I}_3$  and  $\mathbf{I}_x$  in the top left, top right, bottom left and bottom right meshes, respectively. Then,

$$\frac{5s}{s^2 + 4} = (12 + 1/2s) \mathbf{I}_3 - 7 \mathbf{I}_1 - (1/2s) \mathbf{I}_x \quad [1]$$

$$0 = -4 \mathbf{I}_x + (9.5 + s) \mathbf{I}_1 - s \mathbf{I}_2 - 7 \mathbf{I}_3 \quad [2]$$

$$0 = (3 + s + 2/s) \mathbf{I}_2 - s \mathbf{I}_1 - 3 \mathbf{I}_x \quad [3]$$

$$0 = (4 + 3s + 1/2s) \mathbf{I}_x - 3 \mathbf{I}_2 - (1/2s) \mathbf{I}_3 \quad [4]$$

$$\mathbf{V}'_1 = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_x) (2s) \quad [5]$$

Solving all five equations simultaneously using MATLAB, we find that

$$\mathbf{V}'_1 = \frac{20s^3(75s^3 + 199s^2 + 187s + 152)}{1212s^6 + 3311s^5 + 7875s^4 + 15780s^3 + 12408s^2 + 10148s + 1200}$$

Next we short the  $5 \cos 2t$  source, and replace the  $7 \cos 4t$  source with  $\frac{7s}{s^2 + 16}$ .

Define four clockwise mesh currents  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$ ,  $\mathbf{I}_3$  and  $\mathbf{I}_x$  in the bottom left, top left, top right and bottom right meshes, respectively (*note order changed from above*). Then,

$$0 = (12 + 1/2s) \mathbf{I}_1 - 7 \mathbf{I}_2 - (1/2s) \mathbf{I}_x \quad [1]$$

$$0 = -4 \mathbf{I}_x + (9.5 + s) \mathbf{I}_2 - s \mathbf{I}_3 - 7 \mathbf{I}_1 \quad [2]$$

$$-\frac{7s}{s^2 + 16} = (3 + s + 2/s) \mathbf{I}_3 - s \mathbf{I}_2 - 3 \mathbf{I}_x \quad [3]$$

$$0 = (4 + 3s + 1/2s) \mathbf{I}_x - 3 \mathbf{I}_3 - (1/2s) \mathbf{I}_1 \quad [4]$$

$$\mathbf{V}''_1 = (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_x) (2s) \quad [5]$$

Solving all five equations simultaneously using MATLAB, we find that

$$\mathbf{V}''_1 = \frac{-56s^4(21s^2 - 8s - 111)}{(1212s^6 + 3311s^5 + 22420s^4 + 55513s^3 + 48730s^2 + 40590s + 4800)}$$

The next step is to form the sum  $\mathbf{V}_1(s) = \mathbf{V}'_1 + \mathbf{V}''_1$ , which is accomplished in MATLAB using the function `symadd()`: `V1 = symadd(V1prime, V1doubleprime);`

$$\mathbf{V}_1(s) = \frac{4s^3(81s^5 + 1107s^4 + 7313s^3 + 17130s^2 + 21180s + 12160)}{(s^2 + 4)(1212s^6 + 3311s^5 + 22420s^4 + 55513s^3 + 48730s^2 + 40590s + 4800)}$$

(b) Using the `ilaplace()` routine from MATLAB, we find that

$$v_1(t) = [0.2673 \delta(t) + 6.903 \times 10^{-3} \cos 2t - 2.403 \sin 2t - 0.1167 e^{-1.971t} - 0.1948 e^{-0.3315t} \cos 0.903t + 0.1611 e^{-0.3115t} \sin 0.903t - 0.823 \times 10^{-3} e^{-0.1376t} + 3.229 \cos 4t + 3.626 \sin 4t] u(t) \text{ V}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

27. (a) We can combine the two sinusoidal sources in the time domain as they have the same frequency. Thus, there is really no need to invoke source transformation as such to find the current.

$$65 \cos 10^3 t \Leftrightarrow \frac{65s}{s^2 + 10^6}, \text{ and } 13 \text{ mH} \rightarrow 0.013s \Omega$$

We may therefore write

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(s) &= \left( \frac{65s}{s^2 + 10^6} \right) \left( \frac{1}{83 + 0.013s} \right) = \frac{5000s}{(s^2 + 10^6)(s + 6385)} \\ &= -\frac{0.7643}{(s + 6385)} + \frac{0.3869 \angle -8.907^\circ}{(s - j10^3)} + \frac{0.3869 \angle 8.907^\circ}{(s + j10^3)} \end{aligned}$$

- (b) Taking the inverse transform,

$$i(t) = [-0.7643 e^{-6385t} + 0.7738 \cos(10^3 t - 8.907^\circ)] u(t) \text{ A}$$

- (c) The steady-state value of  $i(t)$  is simply  $0.7738 \cos(10^3 t - 8.907^\circ) \text{ A}$ .

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

28.

$$(a) \quad \mathbf{Z}_{in} = \frac{\left(5 + \frac{5}{s}\right)(2 + 5s)}{5s + 7 + 5/s} = \frac{(5s + 5)(2 + 5s)}{5s^2 + 7s + 5} = \frac{25s^2 + 35s + 10}{5s^2 + 7s + 5}$$

$$\therefore \mathbf{Y}_{in}(s) = \frac{5s^2 + 7s + 5}{25s^2 + 35s + 10}$$

$$(b) \quad \text{Poles: } s^2 + 1.4s + 0.2 = 0, s = \frac{-1.4 \pm \sqrt{1.96 - 0.8}}{2} = -0.1615, -1.239s^{-1}$$

$$\text{Zeros: } s^2 + 1.4s + 1 = 0, s = \frac{-1.4 \pm \sqrt{1.96 - 4}}{2} = -0.7 \pm j0.7141s^{-1}$$

$$(c) \quad \text{Poles: same; } s = -0.1615, -1.239 s^{-1}$$

$$(d) \quad \text{Zeros: same; } s = -0.7 \pm j0.7141 s^{-1}$$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

29. (a) Regarding the circuit of Fig. 15.45, we replace each 2-mF capacitor with a  $500/s \, \Omega$  impedance. Then,

$$\mathbf{Z}_{\text{in}}(s) = \frac{\left(20 + \frac{500}{s}\right)\left(40 + \frac{500}{s}\right)}{60 + \frac{100}{s}} = 13.33 \frac{(s + 25)(s + 12.5)}{s(s + 1.667)}$$

Reading from the transfer function, we have

zeros at  $s = -25$  and  $-12.5 \, \text{s}^{-1}$ , and  
poles at  $s = 0$  and  $s = -1.667 \, \text{s}^{-1}$ .

- (b) Regarding the circuit of Fig. 15.47, we replace the 2-mF capacitor with a  $500/s \, \Omega$  impedance and the 1-mH inductor with a  $0.001s \, \Omega$  impedance. Then,

$$\mathbf{Z}_{\text{in}}(s) = \frac{\left(55 + \frac{500}{s}\right)(100 + 0.001s)}{155 + \frac{500}{s} + 0.001s} = 55 \frac{\left(s + \frac{500}{55}\right)(s + 10^5)}{(s + 1.55 \times 10^5)(s + 3.226)}$$

Reading from the transfer function, we have

zeros at  $s = -9.091$  and  $-10^5 \, \text{s}^{-1}$ , and  
poles at  $s = -1.55 \times 10^5$  and  $s = -3.226 \, \text{s}^{-1}$ .

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

30.  $\mathbf{Y(s)}$  : zeros at  $\mathbf{s = 0; -10}$ ; poles at  $\mathbf{s = -5, -20 \text{ s}^{-1}}$ ;  $\mathbf{Y(s) \rightarrow 12 \text{ S}}$  as  $\mathbf{s \rightarrow \infty}$

(a)  $\mathbf{Y(s) = \frac{Ks(s+10)}{(s+5)(s+20)}}$ ,  $\mathbf{K = 12 \therefore}$

$$\mathbf{Y(s) = \frac{12s(s+10)}{(s+5)(s+20)} = \frac{12s^2 + 120s}{s^2 + 25s + 100}}$$

$$\therefore \mathbf{Y(j10) = \frac{-1200 + j1200}{-100 + j250 + 100} = 4.800 + j4.800 = 6.788 \angle 45^\circ \text{ S}}$$

(b)  $\mathbf{Y(-j10) = 6.788 \angle -45^\circ \text{ S}}$

(c)  $\mathbf{Y(-15) = \frac{12(-15)(-5)}{(-10)5} = -18 \text{ S}}$

(d)  $\mathbf{5 + Y(s) = 5 + \frac{12s^2 + 120s}{s^2 + 25s + 100} = \frac{17s^2 + 245s + 500}{(s+5)(s+20)}}$ ,  $\mathbf{s = \frac{-245 \pm \sqrt{245^2 - 68(500)}}{34}}$

Zeros:  $\mathbf{s = -2.461 \text{ and } -11.951 \text{ s}^{-1}}$ ; Poles:  $\mathbf{s = -5, -20 \text{ s}^{-1}}$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

31.

$$(a) \quad \mathbf{Y}_{in} = \frac{1}{4+s} + \frac{1}{5+5s} = \frac{0.2(6s+9)}{(4+s)(1+s)} \therefore \mathbf{Z}_{in} = \frac{5(s+1)(s+4)}{6(s+1.5)}$$

$$(b) \quad \text{Poles: } s = -1.5, \infty \quad \text{Zeros: } s = -1, -4 \text{ s}^{-1}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

32.  $\mathbf{H(s)} = \frac{s + 2}{(s + 5)(s^2 + 6s + 25)}$

(a)  $d(t) \Leftrightarrow 1$ , so the output is  $\frac{s + 2}{(s + 5)(s^2 + 6s + 25)}$

(b)  $e^{-4t} u(t) \Leftrightarrow 1 / (s + 4)$ , so the output is  $\frac{s + 2}{(s + 4)(s + 5)(s^2 + 6s + 25)}$

(c)  $2 \cos 15t u(t) \Leftrightarrow \frac{2s}{s^2 + 225}$ , so the output is  $\frac{2s(s + 2)}{(s^2 + 225)(s + 5)(s^2 + 6s + 25)}$

(d)  $t e^{-t} u(t) \Leftrightarrow 1 / (s + 1)$ , so the output is  $\frac{s + 2}{(s + 1)(s + 5)(s^2 + 6s + 25)}$

(e) poles and zeros of each:

- (a): zero at  $s = -2$ , poles at  $s = -5, -3 \pm j4$
- (b): zero at  $s = -2$ , poles at  $s = -4, -5, -3 \pm j4$
- (c): zeros at  $s = 0, -2$ , poles at  $s = \pm j15, -5, -3 \pm j4$
- (d): zero at  $s = -2$ , poles at  $s = -1, -5, -3 \pm j4$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

33.  $h(t) = 5 [u(t) - u(t - 1)] \sin \pi t$        $x(t) = 2[u(t) - u(t - 2)]$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda) d\lambda$$

$$t < 0: y(t) = 0$$

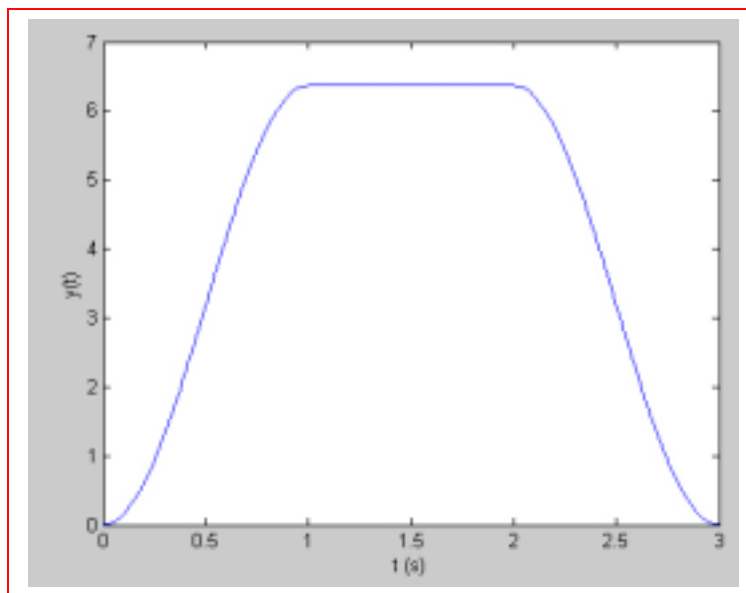
$$0 < t < 1: y(t) = \int_0^t 10 \sin \pi \lambda d\lambda = -\frac{10}{\lambda} \cos \pi \lambda \Big|_0^t = \frac{10}{\pi} (1 - \cos \pi t)$$

$$1 < t < 2: y(t) = \int_0^1 10 \sin \pi \lambda d\lambda = \frac{20}{\pi}$$

$$2 < t < 3: y(t) = \int_{t-2}^1 10 \sin \pi \lambda d\lambda = -\frac{10}{\pi} \cos \pi \lambda \Big|_{t-2}^1 = -\frac{10}{\pi} [-1 - \cos(\pi t - 2\pi)]$$

$$= (10/\pi) (1 + \cos \pi t)$$

$$t > 3: y(t) = 0$$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

34.  $f_1(t) = e^{-5t} u(t), f_2(t) = (1 - e^{-2t}) u(t)$

(a)  $f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t - \lambda) d\lambda$

$t < 0: f_1 * f_2 = 0$

$$\begin{aligned} t > 0: f_1 * f_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5\lambda} (1 - e^{-2(t-\lambda)}) u(t-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t (e^{-5\lambda} - e^{-2t} e^{-3\lambda}) d\lambda \\ &= -\frac{1}{5} e^{-5\lambda} \Big|_0^t + \frac{1}{3} e^{-2t} e^{-3\lambda} \Big|_0^t = \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{15} e^{-5t} - \frac{1}{3} e^{-2t} \right) u(t) \end{aligned}$$

(b)  $F_1(s) = 1/(s + 5), F_2(s) = 1/s - 1/(s + 2)$

$$F_1(s) F_2(s) = \frac{1}{s(s + 5)} - \frac{1}{(s + 5)(s + 2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s + 2} + \frac{c}{s + 5}$$

Where  $a = 0.2$ ,  $b = -1/3$ , and  $c = -1/5 + 1/3 = 2/15$ .

Taking the inverse transform, we find that  $f_1 * f_2 = \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{15} e^{-5t} - \frac{1}{3} e^{-2t} \right) u(t)$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

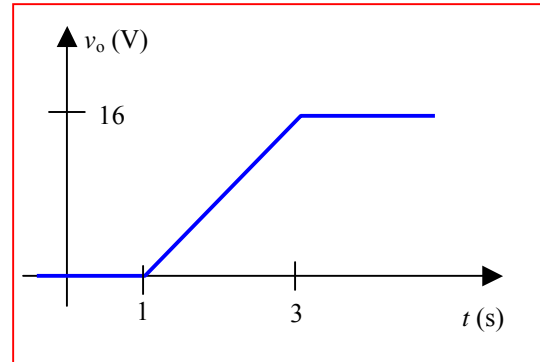
35. The impulse response is  $v_o(t) = 4u(t) - 4u(t - 2)$  V,  
so we know that  $h(t) = 4u(t) - 4u(t - 2)$ .  $v_i(t) = 2u(t - 1)$ , and  $v_o(t) = h(t) * v_i(t)$ .

$$\text{Thus, } v_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) v_i(t - \lambda) d\lambda$$

$$t < 0: v_o = 0$$

$$1 < t < 3: v_o = \int_{0^-}^{t-1} 8 d\lambda = 8t - 8$$

$$t > 3: v_o = \int_{0^-}^2 8 d\lambda = 16$$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

36.  $h(t) = 2e^{-3t} u(t), x(t) = u(t) - \delta(t)$

(a)  $y(t) = \int_{0^-}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$

$t < 0 : y(t) = 0$

$$t > 0 : y(t) = 2 \int_{0^-}^t e^{-3\lambda} [1 - \delta(t-\lambda)] d\lambda = 2 \left[ -\frac{1}{3} e^{-3\lambda} u(t) \Big|_0^t - e^{-3t} u(t) \right]$$

$$= \frac{2}{3} (1 - e^{-3t}) u(t) - 2e^{-3t} u(t) = \left( \frac{2}{3} - \frac{8}{3} e^{-3t} \right) u(t)$$

(b)  $\mathbf{H(s)} = \frac{2}{s+3} \quad \mathbf{X(s)} = \frac{1}{s} - 1$

thus,  $\mathbf{Y(s)} = \frac{2(1-s)}{s(s+3)} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{s} \right) - \frac{8}{3} \left( \frac{1}{s+3} \right)$

Taking the inverse transform, we find that  $y(t) = \frac{2}{3} u(t) - \frac{8}{3} e^{-3t} u(t)$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

37.  $h(t) = 5 u(t) - 5 u(t-2)$ , so  $\mathbf{H}(s) = \frac{5}{s} - 5e^{-2s}$

(a)  $v_{in}(t) = 3\delta(t)$ , so  $\mathbf{V}_{in}(s) = 3$

$$\mathbf{V}_{out}(s) = \mathbf{V}_{in}(s) \mathbf{H}(s) = \frac{15}{s} - 15e^{-2s} \cdot v_{out}(t) = \Lambda^{-1}\{\mathbf{V}_{out}(s)\} = 15 u(t) - 15 u(t-2)$$

(b)  $v_{in}(t) = 3u(t)$ , so  $\mathbf{V}_{in}(s) = \frac{3}{s}$

$$\mathbf{V}_{out}(s) = \mathbf{V}_{in}(s) \mathbf{H}(s) = \left(\frac{3}{s}\right)\left(\frac{5}{s} - 5e^{-2s}\right) = \frac{15}{s^2} - \frac{15}{s}e^{-2s}$$

$$v_{out}(t) = \Lambda^{-1}\{\mathbf{V}_{out}(s)\} = 15 t u(t) - 15 u^2(t-2) = 15 t u(t) - 15 u(t-2)$$

(c)  $v_{in}(t) = 3u(t) - 3u(t-2)$ , so  $\mathbf{V}_{in}(s) = \frac{3}{s} - 3e^{-2s}$

$$\mathbf{V}_{out}(s) = \mathbf{V}_{in}(s) \mathbf{H}(s) = \left(\frac{3}{s} - 3e^{-2s}\right)\left(\frac{5}{s} - 5e^{-2s}\right) = \frac{15}{s^2} - \frac{30}{s}e^{-2s} + 15e^{-4s}$$

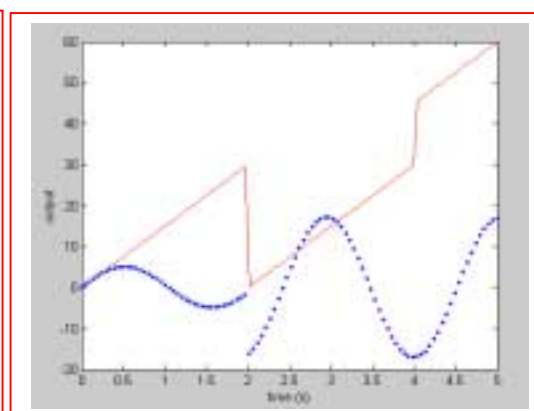
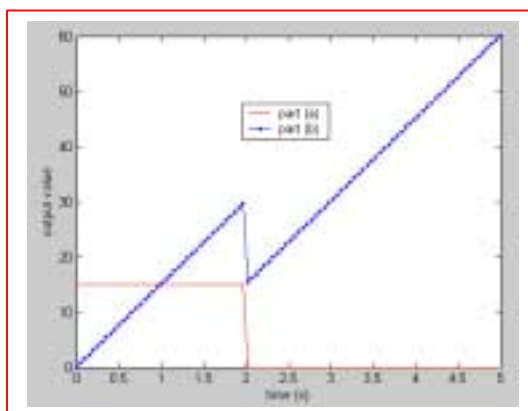
$$v_{out}(t) = \Lambda^{-1}\{\mathbf{V}_{out}(s)\} = 15 t u(t) - 30 u^2(t-2) + 15 u^2(t-4)$$

$$= 15 t u(t) - 30 u(t-2) + 15 u(t)$$

(d)  $v_{in}(t) = 3 \cos 3t$ , so  $\mathbf{V}_{in}(s) = \frac{3s}{s^2 + 9}$

$$\mathbf{V}_{out}(s) = \mathbf{V}_{in}(s) \mathbf{H}(s) = \frac{15}{s^2 + 9} - \frac{15s}{s^2 + 9}e^{-2s}$$

$$v_{out}(t) = \Lambda^{-1}\{\mathbf{V}_{out}(s)\} = 5 \sin 3t u(t) - 15 \cos [3(t-2)] u(t-2)$$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

38.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{in} &= \frac{\mathbf{V}_{in}}{\frac{10}{s} + 20 \parallel 20 \left( 20 + \frac{10}{s} \right)} = \frac{\mathbf{V}_{in}}{\frac{10}{s} + \frac{20(20 + 10/s)}{40 + 10/s}} \\
 &= \frac{\mathbf{V}_{in}}{\frac{10}{s} + \frac{40s + 20}{4s + 1}} = \frac{\mathbf{V}_{in}}{\frac{40s^2 + 60s + 10}{4s^2 + s}} = \mathbf{V}_{in} \frac{40s^2 + s}{40s^2 + 60s + 10} \\
 \therefore \mathbf{I}_{top} &= \mathbf{I}_{in} \frac{20}{40 + \frac{10}{s}} = \mathbf{I}_{in} \frac{2s}{4s + 1} = \mathbf{V}_{in} \frac{2s^2}{40s^2 + 60s + 10}; \\
 \mathbf{V}_{out} &= \frac{10}{s} \mathbf{I}_{in} + 20\mathbf{I}_{top} = \mathbf{V}_{in} \left[ \frac{4s + 1}{4s^2 + 6s + 1} + \frac{4s^2}{4s^2 + 6s + 1} \right] \therefore \\
 \mathbf{H}(s) &= \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{4s^2 + 4s + 1}{4s^2 + 6s + 1} = \frac{s^2 + s + 0.25}{s^2 + 1.5s + 0.25} = \frac{(s + 0.5)^2}{(s + 0.19098)(s + 1.3090)} \therefore
 \end{aligned}$$

zeros:  $s = -0.5, s = -0.5$ ; poles:  $s = -1.3090, -0.19098$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

39.

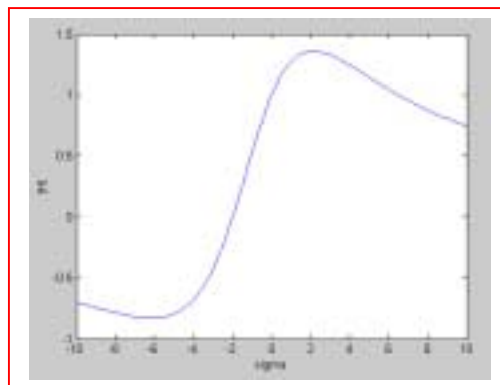
(a)  $\mathbf{H}(s) = \mathbf{V}_2(s) / \mathbf{V}_1(s)$ ,  $\mathbf{H}(0) = 1$

$$\therefore \mathbf{H}(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1+j4)(s+1-j4)} = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 17}$$

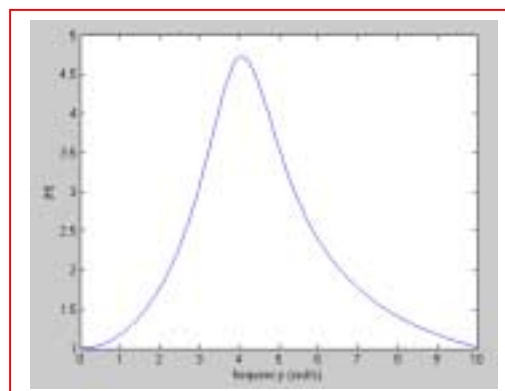
$$1 = 2 \frac{K}{17}, \text{ so } K = 8.5$$

$$\text{Thus, } \mathbf{H}(s) = \frac{8.5(s+2)}{s^2 + 2s + 17}$$

$$\text{Let } \omega = 0 \quad \therefore \mathbf{H}(\sigma) = \frac{8.5(\sigma+2)}{\sigma^2 + 2\sigma + 17}$$



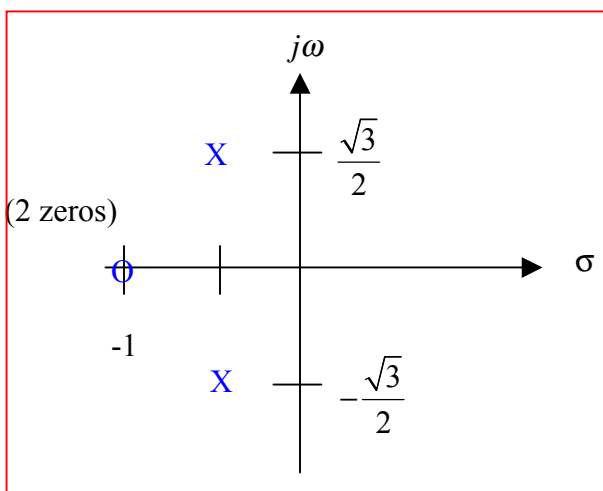
(b)  $|H(j\omega)| = 8.5 \sqrt{\frac{\omega^2 + 4}{(17 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$



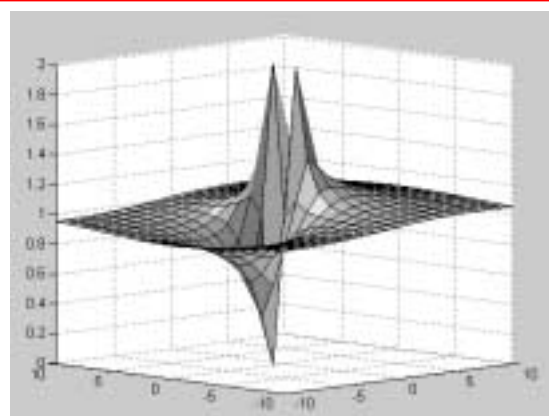
(c) By trial & error:  $|\mathbf{H}(j\omega)|_{\max} = 4.729$  at  $\omega = 4.07$  rad/s

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

40. (a) pole-zero constellation



(b) elastic-sheet model

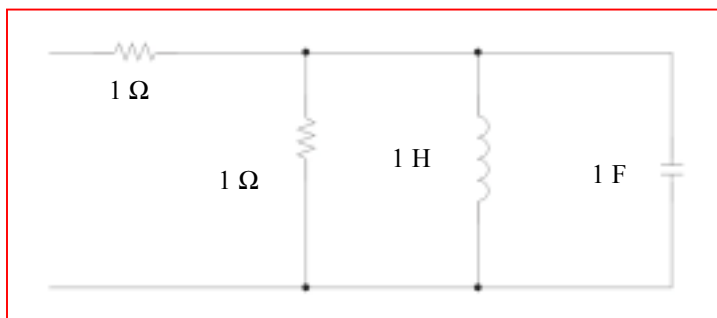


$$\begin{aligned} \text{(c) } \mathbf{H}(s) &= \frac{(s+1)^2}{\left(s+0.5+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+0.5-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{(s+1)^2}{s^2+s+1} \\ &= \frac{s^2+2s+1}{s^2+s+1} = 1 + \frac{s}{s^2+s+1} \end{aligned}$$

We can implement this with a  $1\text{-}\Omega$  resistor in series with a network having the impedance given by the second term. There are two energy storage elements in that network (the denominator is order 2). That network impedance can be rewritten as

$$\frac{s}{s^2+s+1} = \frac{1}{s+1+\frac{1}{s}}, \text{ which can be seen to be equal to the parallel combination of a } 1\text{-}\Omega$$

resistor, a  $1\text{-H}$  inductor, and a  $1\text{-F}$  capacitor.

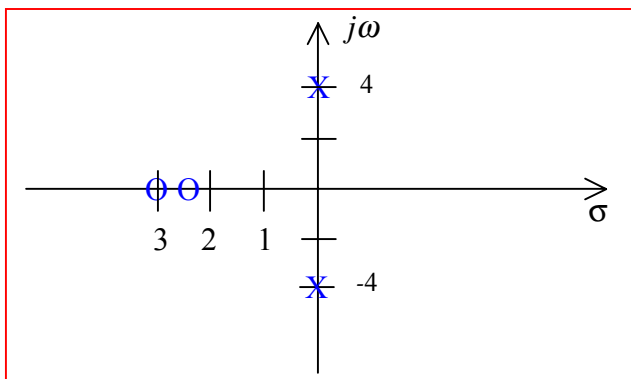




## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

41.  $\mathbf{H(s)} = (10s^2 + 55s + 75)/(s^2 + 16)$

(a)  $\mathbf{H(s)} = 10 \frac{(s + 3)(s + 2.5)}{(s + j4)(s - j4)}$ . Critical frequencies: zeros at  $-3, -2.5$ ; poles at  $\pm j4$ .

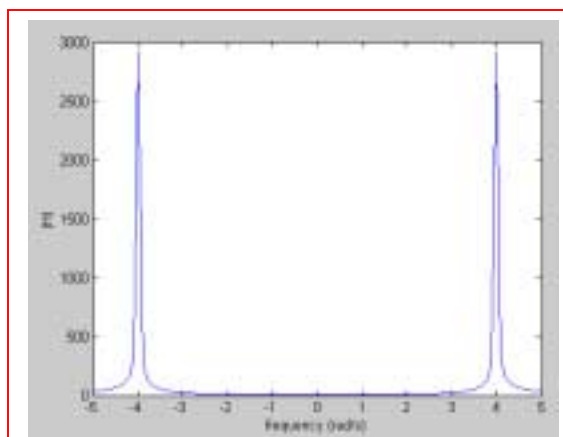
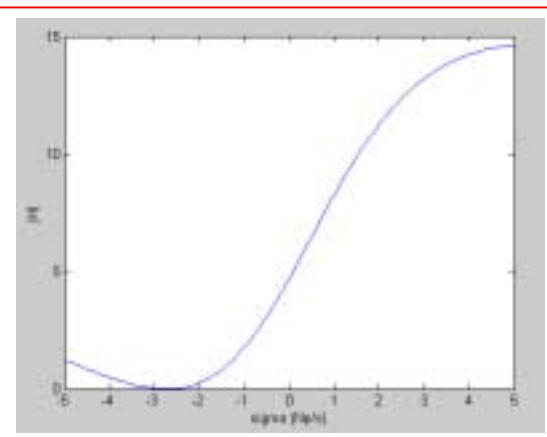


(b)  $\mathbf{H(0)} = \frac{75}{16} = 4.688, \mathbf{H(\infty)} = 10$

(c)  $\mathbf{H(0)} = 4.679$   $\mathbf{K} = 3$ , so  $\mathbf{K} = 0.64$

$\therefore \mathbf{H(j3)} = 0.64 \left| \frac{-90 + 75 + j165}{7} \right| = \frac{0.64}{7} |-15 + j165| = 15.15 \text{ cm}$

(d)

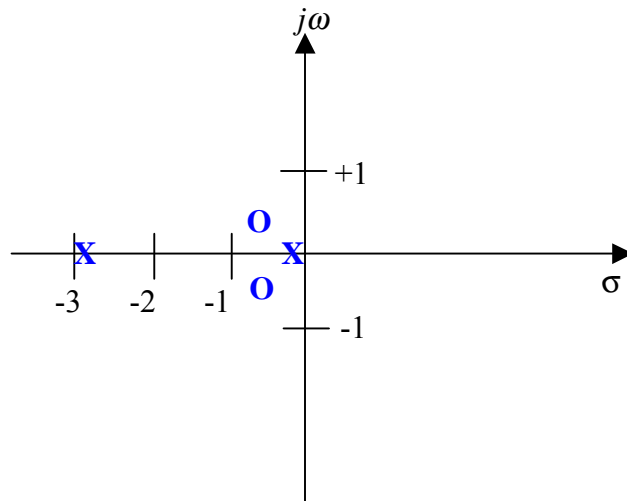


## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

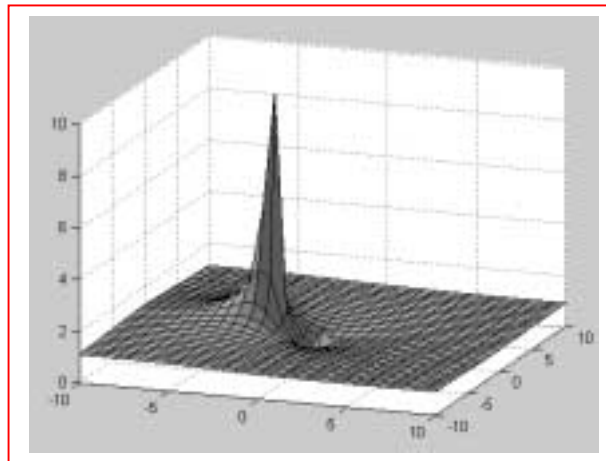
42. (a)  $Y(s) = \frac{5s^2 + 5s + 2}{5s^2 + 15s + 2} = \frac{(s + 0.5 + j0.3873)(s + 0.5 - j0.3873)}{(s + 2.86)(s + 0.1399)}$

Zeros:  $s = -0.5 \pm j0.3873$

Poles:  $s = -2.86, s = -0.1399$



(b) elastic sheet model



(c) latitude  $5^{\circ}5'2''$ , longitude  $5^{\circ}15'2''$  puts it a little off the coast of Timbuktu.

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

43.  $\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{I_0}}{\mathbf{I_M}}; \mathbf{H(-2)} = 6$

(a)  $\mathbf{H(s)} = \mathbf{K} \frac{(\mathbf{s-1})(\mathbf{s+1})(\mathbf{s+3})}{(\mathbf{s+3+j2})(\mathbf{s+3-j2})}$

$$\mathbf{H(-2)} = 6 = \frac{(-3)(-1)\mathbf{K}}{(1+j2)(1-j2)} = \frac{3\mathbf{K}}{5} \therefore \mathbf{K} = 10,$$

$$\text{Thus, } \mathbf{H(s)} = 10 \frac{(\mathbf{s^2-1})(\mathbf{s+3})}{\mathbf{s^2+6s+13}} = \frac{10\mathbf{s^3+30s^2-10s-30}}{\mathbf{s^2+6s+13}}$$

(b)  $\mathbf{H(0)} = -\frac{30}{13} = -2.308, \mathbf{H(\infty)} = \infty$

(c)  $1 : (\mathbf{s-1}) = (\mathbf{j2-1}) = 2.236 \angle 116.57^\circ$

$$-1 : (\mathbf{s+1}) = (\mathbf{j2+1}) = 2.236 \angle 63.43^\circ$$

$$-3 : (\mathbf{s+3}) = \mathbf{j2+3} = 3.606 \angle 33.69^\circ$$

$$-3-j2 : \mathbf{j2+3+j2} = 5.000 \angle 53.13^\circ$$

$$-3+j2 : \mathbf{j2+3-j2} = 3 \angle 0^\circ$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

44.

$\mathbf{Z}_A$ : zero at  $\mathbf{s} = -10 + j0$ ;  $\mathbf{Z}_A + 20$ : zero at  $\mathbf{s} = -3.6 + j0$

$$\therefore \mathbf{Z}_A = 5 + \frac{R/sC}{R + 1/SC} = 5 + \frac{R}{sCR + 1} = 5 + \frac{1/C}{s + 1/RC} = \frac{5s + 5/RC + 1/C}{s + 1/RC}$$

$$\therefore \mathbf{Z}_A = \frac{5(s + 1/RC + 1/5C)}{s + 1/RC}$$

Thus, using the fact that  $\mathbf{Z}_A = 0$  at  $\mathbf{s} = -10$ , we may write  $\frac{1}{RC} + \frac{1}{5C} = 10$

$$\text{Also, } \mathbf{Z}_B = 25 + \frac{1/C}{s + 1/RC} = \frac{25s + \frac{25}{RC} + \frac{1}{C}}{s + 1/RC} = \frac{25\left(s + \frac{1}{RC} + \frac{1}{25C}\right)}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\therefore \frac{1}{RC} + \frac{1}{25C} = 3.6 \quad \text{or} \quad \frac{4}{25C} = 6.4,$$

$$C = \frac{1}{40} = \boxed{25 \text{ mF}},$$

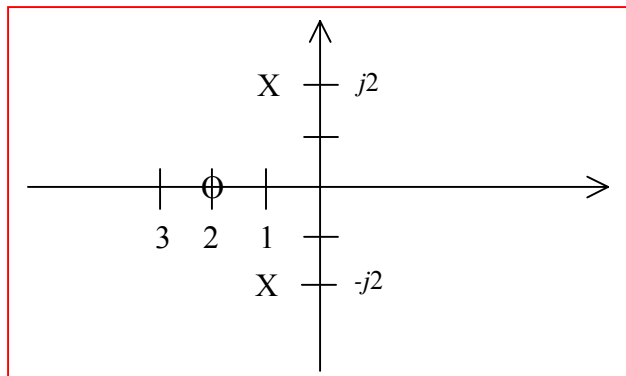
$$\frac{40}{R} + \frac{40}{5} = 10, \quad \frac{40}{R} = 2, \quad \text{so } R = \boxed{20 \text{ } \Omega}$$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

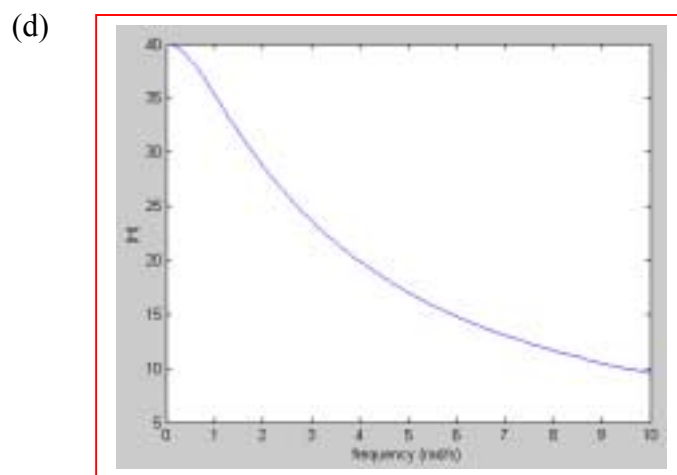
45.  $\mathbf{H}(s) = 100(s + 2)/(s^2 + 2s + 5)$

(a) zero at  $s = -2$ , poles at  $s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm j2$



(b)  $\mathbf{H}(j\omega) = \frac{100(2 + j\omega)}{(5 - \omega^2) + j2\omega}$

(c)  $|\mathbf{H}(j\omega)| = 100 \sqrt{\frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 - 6\omega^2 + 25}}$



(e)  $\frac{|\mathbf{H}(j\omega)|^2}{10\,000} = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 - 6\omega^2 + 25}, \quad \frac{d|\mathbf{H}(j\omega)|^2}{d\omega} = \frac{(\omega^4 - 6\omega^2 + 25)2\omega - (\omega^2 + 4)(4\omega^3 - 12\omega)}{etc}$   
 $\therefore \omega^4 - 6\omega^2 + 25 = (\omega^2 + 4)(2\omega^2 - 6), \quad \omega^4 - 6\omega^2 + 25 = 2\omega^4 + 2\omega^2 - 24, \quad \omega^4 + 8\omega^2 - 49 = 0$   
 $\therefore \omega^2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 196}}{2} = 4.062 \quad \therefore \omega_{mar} = 2.016 \text{ rad/s}, \quad |\mathbf{H}(j2.016)| = 68.61$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

$$46. \quad \mathbf{Z}_{in}(s) = \frac{5s + 20}{s + 2} \quad \Omega$$

$$(a) \quad v_{ab}(0) = 25 \text{ V}; \quad \mathbf{Z}_{in}(s) = \frac{5(s + 4)}{s + 2}, \quad \mathbf{V}_{ab} = \mathbf{Z}_{in} \mathbf{I}_{in}$$

$$\therefore \mathbf{H}(s) = \frac{5(s + 4)}{s + 2}, \quad \text{single pole at } s = -2 \quad \therefore v_{ab}(t) = \boxed{25e^{-2t} \text{ V}, t > 0}$$

$$(b) \quad i_{ab}(0) = 3 \text{ A} \quad \therefore \mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{in}} \quad \therefore \mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{I}_{ab}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{in}} = \frac{s + 2}{5(s + 4)} \quad \text{single pole at } s = -4$$

$$\therefore i_{ab}(t) = \boxed{3e^{-4t} \text{ A}, t > 0}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

47.  $\mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s}) = 5(\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 20)/(\mathbf{s} + 1)$

(a)  $v_{ab} = 160e^{-6t} \text{ V} \therefore \mathbf{V}_{ab} = 160 \text{ V}, \mathbf{s} = -6$

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{Z}_{in}} = \frac{160(\mathbf{s} + 1)}{5(\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 20)} = \frac{32(-5)}{3b - 24 + 20} = -5 \text{ A} \therefore i_a(t) = \boxed{-5e^{-6t} \text{ A (all } t)}$$

(b)  $v_{ab} = 160e^{-6t}u(t), i_a(0) = 0, i'_a(0) = 32 \text{ A/s} \therefore \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{I}_a}{\mathbf{V}_s} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{in}} = \frac{\mathbf{s} + 1}{5(\mathbf{s}^2 + 4\mathbf{s} + 20)}$

$$\mathbf{s} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 80}}{2} = -2 \pm j4 \therefore i_a(t) = -5e^{-6t} + e^{-2t}(A \cos 4t + B \sin 4t) \therefore 0 = -5 + A, A = 5$$

$$i'_a(0) = 32 = 30 - 10 + 4B \therefore B = 3 \therefore i_a(t) = \boxed{[-5e^{-6t} + e^{-2t}(5 \cos 4t + 3 \sin 4t)]u(t) \text{ A}}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

48.

$$(a) \quad \mathbf{H}(s) = \mathbf{I}_c / \mathbf{I}_s = \frac{0.5}{0.5 + 0.002s + 500/s} = \frac{250s}{s^2 + 250s + 25\,000}$$

$$(b) \quad s = \frac{1}{2}(-250 \pm \sqrt{62\,500 - 10^6}) = -125 \pm j484.1 \text{ s}^{-1}$$

$$(c) \quad \alpha = \frac{R}{2L} = \frac{0.5}{0.004} = 125 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_o = \sqrt{10^6/4} = 500 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_d = \sqrt{25 \times 10^4 - 15,625} = 484.1 \text{ s}^{-1}$$

$$(d) \quad \mathbf{I}_s = 1, s = 0 \quad \therefore \mathbf{I}_c = 0 \quad \therefore i_{cf} = 0$$

$$(e) \quad i_{c,n} = e^{-125t} (A \cos 484t + B \sin 484t)$$

$$(f) \quad i_L(0) = 0 \quad \therefore i_c(0^+) = 0, \quad v_c(0) = 0 \quad \therefore 1 \times \frac{1}{2} = 2 \times 10^{-3} i(0^+) + 0 \quad \therefore i(0^+) = 250 \text{ A/s}$$

$$(g) \quad \therefore A = 0, \quad 484B = 250, \quad B = 0.5164 \quad \therefore i_c(t) = (0.5164 e^{-125t} \sin 484.1t) u(t) \text{ A}$$



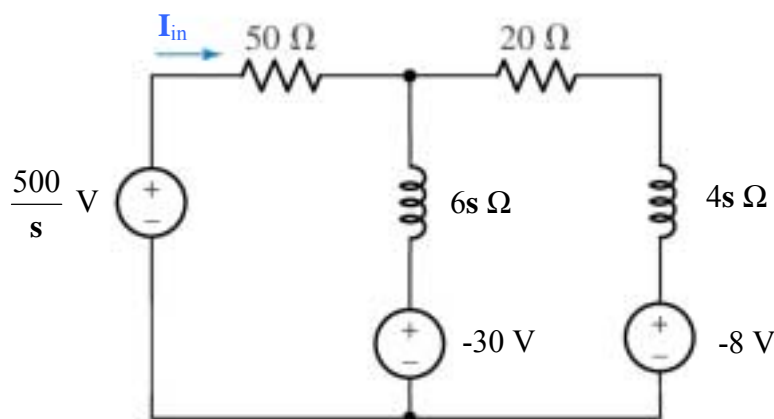
## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

49.

$$(a) \quad \mathbf{H}(s) = \mathbf{I}_{in} / \mathbf{V}_{in} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{in}} = \frac{1}{50 + \frac{6s(4s+20)}{10s+20}} = \frac{10s+20}{24s^2 + 620s + 1000}$$

$$\therefore s = \frac{1}{48}(-620 \pm \sqrt{620^2 - 96,000}) = -1.729 \text{ and } -24.10 \text{ s}^{-1}$$

- (b) Note that the element labeled 6 H should be an inductor, as is suggested by the context of the text (i.e. initial condition provided). Convert to s-domain and define a clockwise mesh current  $\mathbf{I}_2$  in the right-hand mesh.



$$\text{Mesh 1: } 0 = -500/s + (50 + 6s) \mathbf{I}_{in} - 30 - 6s \mathbf{I}_2 \quad [1]$$

$$\text{Mesh 2: } 0 = 30 + (20 + 10s) \mathbf{I}_2 - 6s \mathbf{I}_{in} - 8 \quad [2]$$

$$\begin{aligned} \text{Solving, we find that } \mathbf{I}_{in} &= \frac{42s^2 + 1400s + 2500}{s(6s^2 + 155s + 250)} = \frac{7s^2 + 233.3s + 416.7}{s(s + 24.10)(s + 1.729)} \\ &= \frac{a}{s} + \frac{b}{(s + 24.10)} + \frac{c}{(s + 1.729)} \end{aligned}$$

where  $a = 10$ ,  $b = -2.115$  and  $c = -0.8855$ . Thus, we may write

$$i_{in}(t) = [10 - 2.115 e^{-24.10t} - 0.885 e^{-1.729t}] u(t) \text{ A}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

50.

$$(a) \quad \mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_s} = \frac{50(1000/s)}{50 + (1000/s)} = \frac{1000}{s+20}$$

(b)

$$\mathbf{I}_s = \frac{2}{s} \quad \text{so} \quad \mathbf{V}(s) = \left( \frac{2}{s} \right) \left( \frac{1000}{s+20} \right) = \frac{2000}{s(s+20)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+20}$$

$$a = \left. \frac{2000}{(s+20)} \right|_{s=0} = 100; \quad b = \left. \frac{2000}{(s)} \right|_{s=-20} = -100$$

$$\text{Thus, } \mathbf{V}(s) = \frac{100}{s} - \frac{100}{s+20} \quad \text{and} \quad v(t) = 100 [1 - e^{-20t}] u(t) \text{ V}$$

(c) This function as written is technically valid for all time (although that can't be possible physically). Therefore, we can't use the one-sided Laplace technique we've been studying. We can, however, use simple s-domain/ complex frequency analysis:

$$i_s = 4e^{-10t} \text{ A} \quad \therefore \mathbf{I}_s = 4 \text{ A}, \quad s = 10 \quad \therefore \mathbf{V} = 4\mathbf{H}(-10) = 4 \times \frac{1000}{10} = 400 \text{ V} \quad \therefore$$

$$v(t) = 400e^{-10t} \text{ V (all } t)$$

$$(d) \quad 4e^{-10t} u(t) \Leftrightarrow \frac{4}{s+10}, \quad \text{so } \mathbf{V}(s) = \left( \frac{4}{s+10} \right) \left( \frac{1000}{s+20} \right) = \frac{a}{s+10} + \frac{b}{s+20}$$

$$a = 400 \text{ and } b = -400, \quad \text{so } v(t) = 400 [e^{-10t} - e^{-20t}] u(t) \text{ V}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

51.

(a)

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{V_{c2}}}{\mathbf{V_s}} = \frac{\frac{100}{s}}{20 + \frac{100}{s}} \times \frac{\left(20 + \frac{100}{s}\right) \frac{25}{s}}{20 + \frac{125}{s}} \div \left[50 + \frac{(20s+100)25}{s(20s+125)}\right]$$

$$\therefore \mathbf{H(s)} = \frac{2500}{s(20s+125)} \frac{s(20s+125)}{1000s^2 + 6250s + 500s + 2500}$$

$$\therefore \mathbf{H(s)} = \frac{2.5}{s^2 + 6.75s + 2.5}$$

(b) No initial energy stored in either capacitor. With  $v_s = u(t)$ ,  $\mathbf{V_s(s)} = \frac{1}{s}$ , so

$$\mathbf{V_{C2}} = \frac{2.5}{s(s + 6.357)(s + 0.3933)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s + 6.357} + \frac{c}{s + 0.3933}$$

Where  $a = 1$ ,  $b = 0.06594$  and  $c = -1.066$ . Thus,

$$v_{C2}(t) = [1 + 0.06594 e^{-6.357t} - 1.066 e^{-0.3933t}] u(t) \text{ V}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

52.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{in}(\mathbf{s}) &= \frac{1}{0.1 + 0.025\mathbf{s} + \frac{1}{20 + (80/\mathbf{s})}} = \frac{1}{0.1 + 0.025\mathbf{s} + \frac{0.05\mathbf{s}}{\mathbf{s} + 4}} \\ &= \frac{\mathbf{s} + 4}{0.025\mathbf{s}^2 + 0.25\mathbf{s} + 0.4} = \frac{40(\mathbf{s} + 4)}{\mathbf{s}^2 + 10\mathbf{s} + 16} = \frac{40(\mathbf{s} + 4)}{(\mathbf{s} + 2)(\mathbf{s} + 8)} \Omega \end{aligned}$$

$$20u(t) \Leftrightarrow \frac{20}{\mathbf{s}}, \text{ so } \mathbf{V}_{in}(\mathbf{s}) = \left( \frac{20}{\mathbf{s}} \right) \left[ \frac{40(\mathbf{s} + 4)}{(\mathbf{s} + 2)(\mathbf{s} + 8)} \right] = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{s} + 2} + \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{s} + 8}$$

$\mathbf{a} = 200$ ,  $\mathbf{b} = -133.3$  and  $\mathbf{c} = -66.67$ , so  $v_{in}(t) = [200 - 133.3 e^{-2t} - 66.67 e^{-8t}] u(t) \text{ V}$



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

53.

$$\mathbf{H(s)} = -\frac{\mathbf{Z_f}}{\mathbf{Z_1}}$$

$$(a) \quad \mathbf{Z_1} = 10^3 + \frac{10^8}{s}, \mathbf{Z_f} = 5000 \therefore \mathbf{H(s)} = -\frac{5000}{1000 + (10^8 / s)} = -\frac{5000s}{1000s + 10^8}$$

$$\therefore \mathbf{H(s)} = \frac{-5s}{s + 10^5}$$

$$(b) \quad \mathbf{Z_1} = 5000, \mathbf{Z_f} = 10^3 + 10^8 / s \therefore \mathbf{H(s)} = -\frac{10^3 + 10^8 / s}{5000} = -\frac{1000s + 10^8}{5000s} = -\frac{R + 10^5}{5s}$$

$$(c) \quad \mathbf{Z_1} = 10^3 + 10^8 / s, \mathbf{Z_f} = 10^4 + 10^8 / s \therefore \mathbf{H(s)} = -\frac{10^4 + 10^8 / s}{1000 + 10^8 / s} = -\frac{10^4 s + 10^8}{1000s + 10^8} = -\frac{10s + 10^5}{s + 10^5}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

54.

$$R_f = 20 \text{ k}\Omega, \mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = -R_f C_1 \left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)$$

$$\therefore \mathbf{H}(s) = -2 \times 10^4 C_1 \left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)$$

$$(a) \quad \mathbf{H}(s) = -50 \therefore \boxed{C_1 = 0}, \quad \frac{2 \times 10^4}{R_1} = 50, \quad R_1 = \boxed{400 \Omega}$$

$$(b) \quad \mathbf{H}(s) = -10^{-3}(s + 10^4) = -2 \times 10^4 C_1 \left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \therefore 2 \times 10^4 C_1 = 10^{-3}$$

$$\therefore \boxed{C_1 = 50 \text{ nF}}, \quad \frac{1}{50 \times 10^{-9} R_1} = 10^4, \text{ so } \boxed{R_1 = 2 \text{ k}\Omega}$$

$$(c) \quad \mathbf{H}(s) = -10^{-4}(s + 1000) = -2 \times 10^4 C_1 \left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \therefore 2 \times 10^4 C_1 = 10^{-4}, C_1 = 5 \text{ nF}$$

$$\therefore v_{in}(t) = 200 + Ae^{-2t} + Be^{-8t}, v_{in}(0) = 0 \therefore 0 = 200 + A + B$$

$$i_{25}(0^+) = 20 = 0.025v'_{in}(0^+) = 0.025(-2A - 8B) \therefore -A - 4B = 400 \therefore -3B = 200$$

$$B = -\frac{200}{3}, \therefore A = -\frac{400}{3} \therefore v_{in}(t) = \left( 200 - \frac{400}{3}e^{-2t} - \frac{200}{3}e^{-8t} \right) u(t) \text{ V}$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

55.

(a)  $\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = -50,$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{-1/R_1 C_f}{s + 1/R_f C_f}, R_f = 20 \text{ k}\Omega$$

set  $C_f = 0 \therefore -50 = -\frac{R_f}{R_1} \therefore R_1 = \frac{20 \times 10^3}{50} = 400 \text{ }\Omega$

(b)  $\mathbf{H}(s) = -\frac{1000}{s + 10\,000} = \frac{1/R_1 C_f}{s + 1/20\,000 C_f} \therefore 10\,000 = \frac{1}{20\,000 C_f}$

$$C_f = \frac{1}{2 \times 10^8} = 5 \text{ nF} \text{ We may then find } R_1: 1000 = \frac{1}{5 \times 10^{-9} R_1} \therefore R_1 = 200 \text{ k}\Omega$$

(c)  $\mathbf{H}(s) = -\frac{10\,000}{s + 1000} = \frac{1/R_1 C_f}{s + 1/20\,000 C_f} \therefore 1000 = \frac{1}{20\,000 C_f} C_f = 50 \text{ nF}$

$$\frac{1}{5 \times 10^{-9} R_1} = 1000, R_1 = 200 \text{ k}\Omega$$

(d)  $\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} = \frac{100}{s + 10^5}$

$$= \left[ -\frac{1/R_{1A} C_{fA}}{s + 1/R_{fA} C_{fA}} \right] \left[ -\frac{1/R_{1B} C_{fB}}{s + 1/R_{fB} C_{fB}} \right] = \left[ -\frac{1/R_{1A} C_{fA}}{s + 1/R_{fA} C_{fA}} \right] \left[ -\frac{R_{fB}}{R_{1B}} \right]$$

We may therefore set  $\frac{R_{fB}}{R_{1B} R_{1A} C_{fA}} = 100$

and  $1/R_{fA} C_{fA} = 10^5$ . Arbitrarily choosing  $R_{fA} = 1 \text{ k}\Omega$ , we find that  $C_{fA} = 10 \text{ nF}$ .

Arbitrarily selecting  $R_{fB} = 100 \text{ }\Omega$ , we may complete the design by choosing

$$R_{1B} = R_{1A} = 10 \text{ k}\Omega$$

## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

56.

$$\mathbf{H}(s) = \frac{-10^{-4}s(s+100)}{s+1000} = \frac{[-K_A s][ -K_B (s+100)]}{\left( -\frac{K_C}{s+1000} \right)}$$

Let  $\mathbf{H}_A(s) = -K_A s$ . Choose inverting op amp with parallel RC network at inverting input.

$$0 = \frac{-V_i}{R_{1A}} (1 + sC_{1A}) - \frac{V_o}{R_{fA}}$$

$$\therefore \mathbf{H}_A(s) = -\frac{R_{fA}}{R_{1A}} (1 + sR_{1A}C_{1A}) = -\frac{R_{fA}}{R_{1A}} - sR_{fA}C_{1A} = -K_A s. \text{ Set } R_{1A} = \infty. \text{ Then}$$

$$-R_{fA}C_{1A}s = -10^4 C_{1A}s$$

$$\text{Same configuration for } \mathbf{H}_B(s) \therefore \mathbf{H}_B(s) = -K_B (s+100) = -\frac{R_{fB}}{R_{1B}} (1 + sR_{1B}C_{1B})$$

For the last stage, choose an inverting op amp circuit with a parallel RC circuit in the feedback loop.

$$\text{Let } \mathbf{H}_C(s) = -K_C \frac{1}{s+1000} = -\frac{R_{fC}}{R_{1C}} \frac{1}{(1 + sR_{fC}C_{fC})}$$

Cascading these three transfer functions, we find that

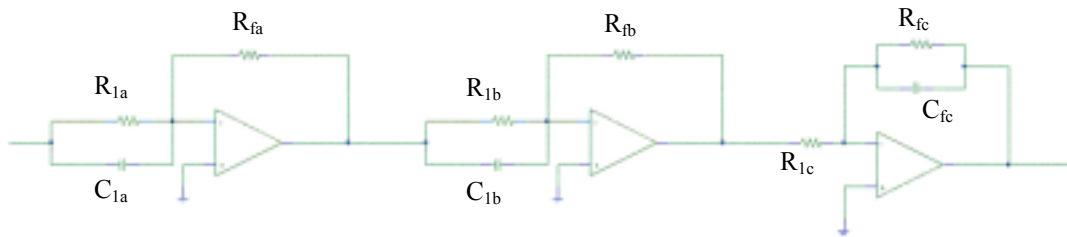
$$\mathbf{H}_A \mathbf{H}_B \mathbf{H}_C = \left[ -sR_{fA}C_{1A} \right] \left[ -\left( R_{fB}C_{1B}s + \frac{R_{fB}}{R_{1B}} \right) \right] \left[ -\left( \frac{R_{fC}}{R_{1C}} \right) \frac{1}{R_{fC}C_{fC}s + 1} \right]$$

Choosing all remaining resistors to be 10 k $\Omega$ , we compare this to our desired transfer function.

$$(R_{fC}C_{fC})^{-1} = 1000 \text{ so } C_{fC} = 100 \text{ nF}$$

$$\text{Next, } \frac{R_{fB}}{R_{1B}R_{fB}C_{1B}} = 100 \text{ so } C_{1B} = 1 \mu\text{F.}$$

$$\text{Finally, } R_{fA}C_{1A}R_{fB}C_{1B}R_{fC}(R_{1C}R_{fC}C_{fC}) = 10^{-4}, \text{ so } C_{1A} = 1 \text{ nF}$$





## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

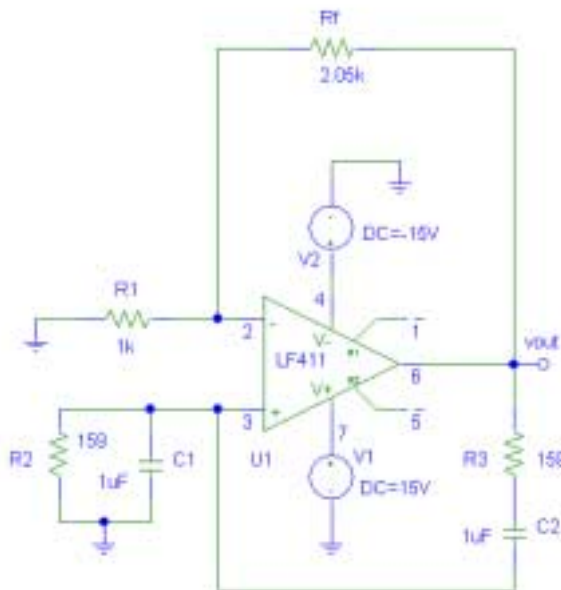
57. Design a Wien-bridge oscillator for operation at 1 kHz, using only standard resistor values. One possible solution:

$$\omega = 2\pi f = 1/RC, \text{ so set } (2\pi RC)^{-1} = 1000$$

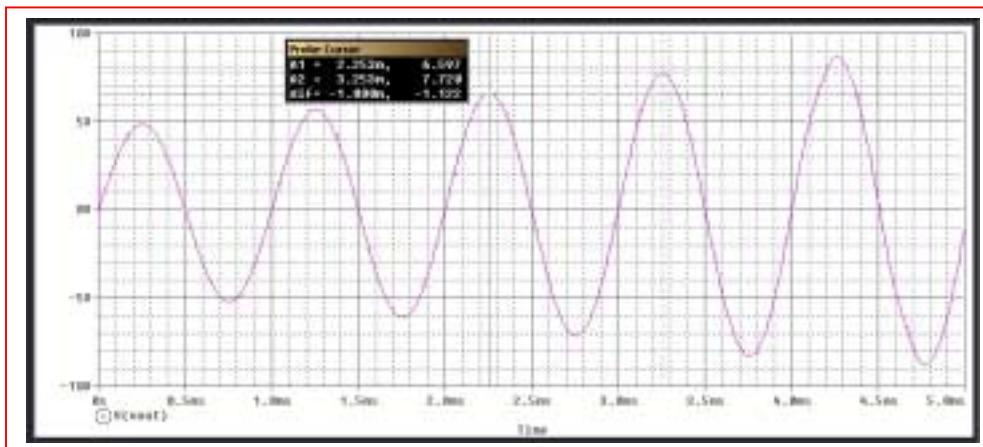
If we use a 1- $\mu$ F capacitor, then  $R = 159 \Omega$ . To construct this using standard resistor values, connect a 100- $\Omega$ , 56- $\Omega$  and 3- $\Omega$  in series.

To complete the design, select  $R_f = 2 \text{ k}\Omega$  and  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ .

PSpice verification:



The feedback resistor was set to 2.05 k $\Omega$  to initiate oscillations in the simulation. The output waveform shown below exhibits a frequency of 1 kHz as desired.



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

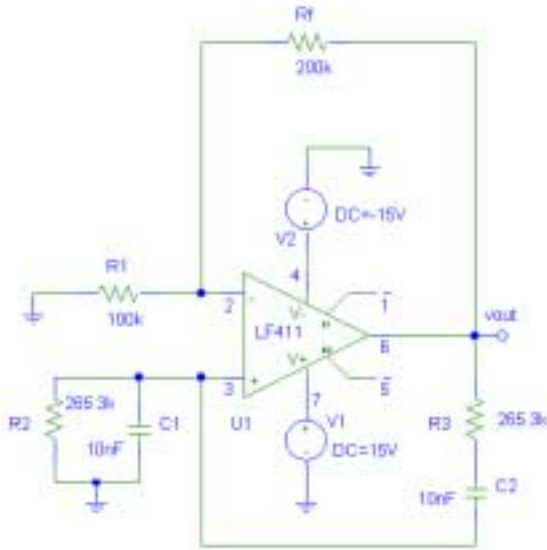
58. Design a Wien-bridge oscillator for operation at 60 Hz. One possible solution:

$$\omega = 2\pi f = 1/RC, \text{ so set } (2\pi RC)^{-1} = 60$$

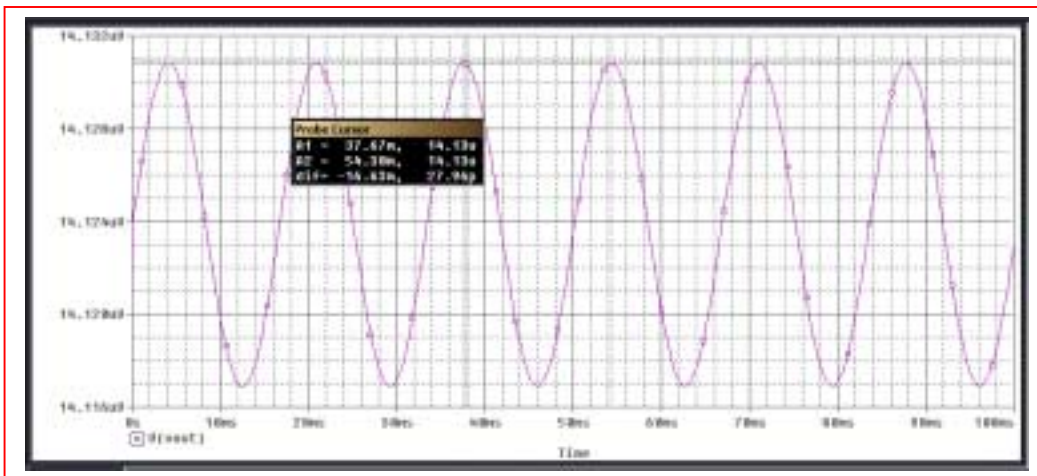
If we use 10-nF capacitors, then  $R = 265.3 \text{ k}\Omega$ .

To complete the design, select  $R_f = 200 \text{ k}\Omega$  and  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ .

PSpice verification:



The simulated output of the circuit shows a sinusoidal waveform having period  $54.3 \text{ ms} - 37.67 \text{ ms} = 0.0163 \text{ ms}$ , which corresponds to a frequency of 60.13 Hz, as desired.



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

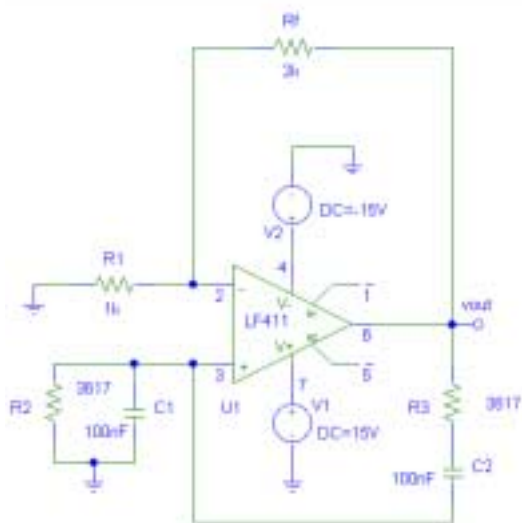
59. Design a Wien-bridge oscillator for operation at 440 Hz, using only standard resistor values. One possible solution:

$$\omega = 2\pi f = 1/RC, \text{ so set } (2\pi RC)^{-1} = 440$$

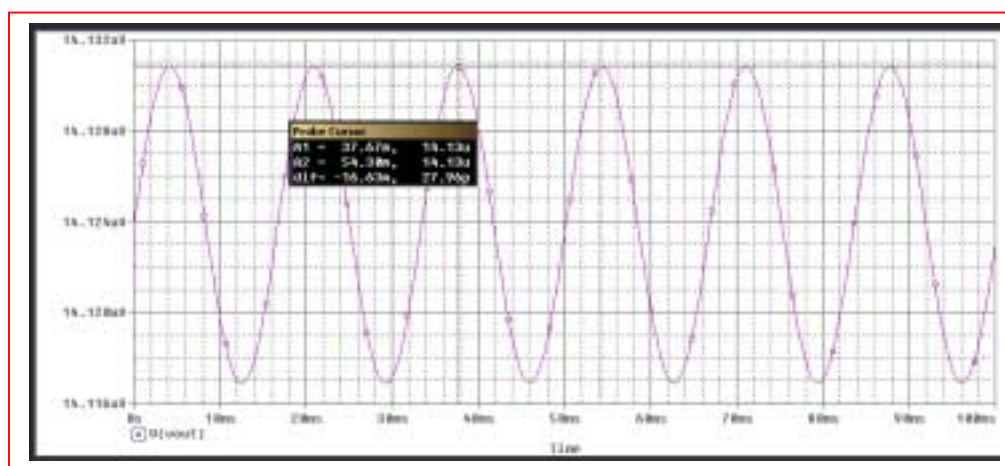
If we use 100-nF capacitors, then  $R = 3.167 \text{ k}\Omega$ . To construct this using standard resistor values, connect a 3.6-k $\Omega$ , 16- $\Omega$  and 1- $\Omega$  in series. (May not need the 1- $\Omega$ , as we're using 5% tolerance resistors!). This circuit will produce the musical note, 'A.'

To complete the design, select  $R_f = 2 \text{ k}\Omega$  and  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ .

PSpice verification:



Simulation results show a sinusoidal output having a period of approximately  $5.128 - 2.864 = 2.264 \text{ ms}$ , or a frequency of approximately 442 Hz. The error is likely to uncertainty in cursor placement; a higher-resolution time simulation would enable greater precision.



## CHAPTER FIFTEEN SOLUTIONS

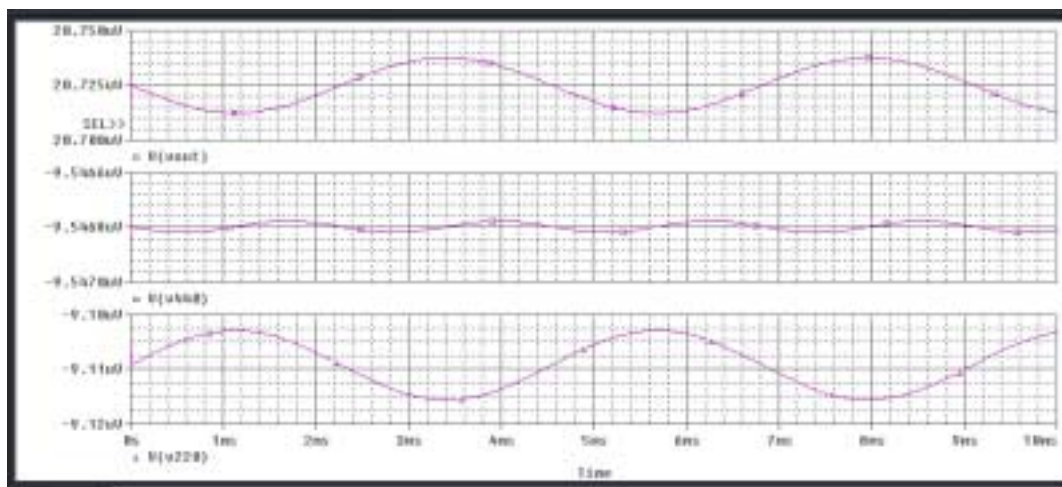
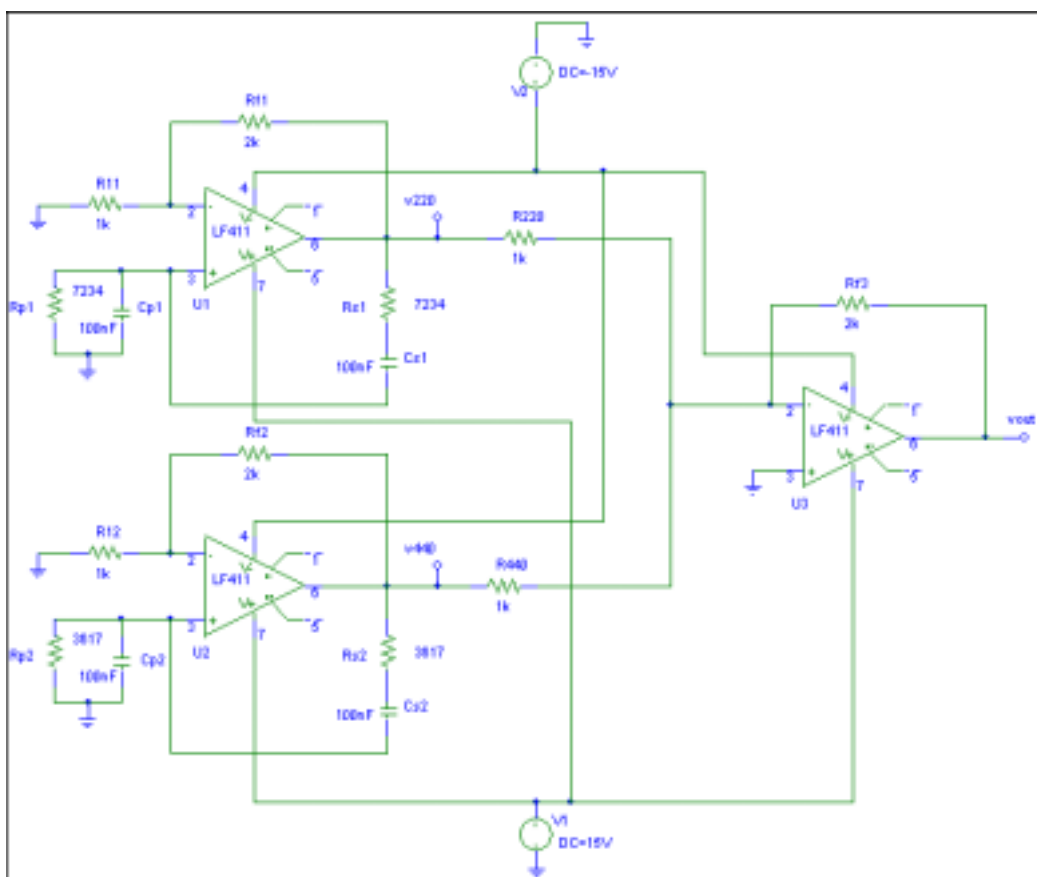
60. Design a Wien-bridge oscillator for 440 Hz:  $\omega = 2\pi f = 1/RC$ , so set  $(2\pi RC)^{-1} = 440$

If we use 100-nF capacitors, then  $R = 3.167 \text{ k}\Omega$ .

Design a Wien-bridge oscillator for 220 Hz:  $\omega = 2\pi f = 1/RC$ , so set  $(2\pi RC)^{-1} = 220$

If we use 100-nF capacitors, then  $R = 7.234 \text{ k}\Omega$ .

Using a summing stage to add the two waveforms together:





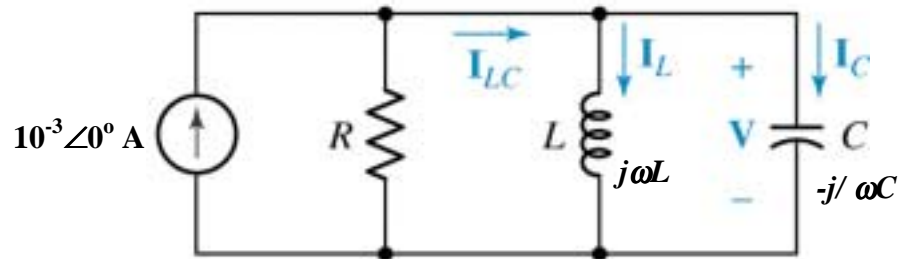
## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

1. We have a parallel RLC with  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 47 \text{ }\mu\text{F}$  and  $L = 11 \text{ mH}$ .

(a)  $Q_o = R(C/L)^{1/2} = 65.37$

(b)  $f_o = \omega_o / 2\pi = (LC)^{-1/2} / 2\pi = 221.3 \text{ Hz}$

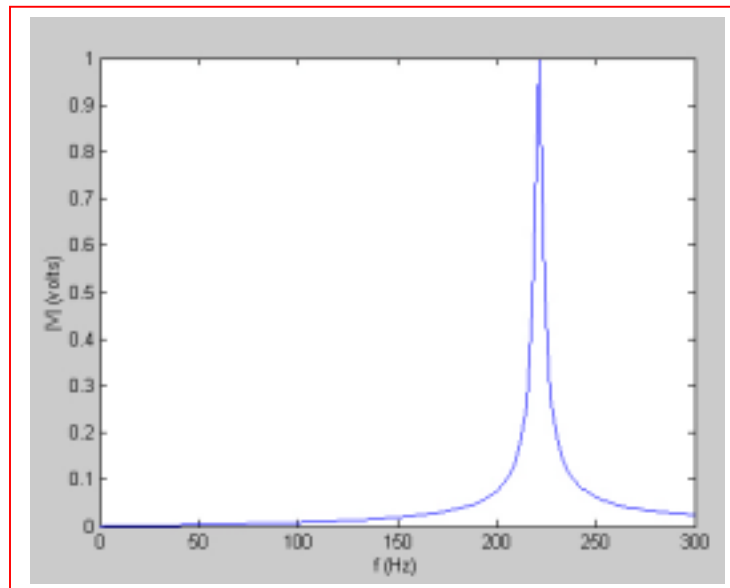
(c) The circuit is excited by a steady-state 1-mA sinusoidal source:



The admittance  $\mathbf{Y}(s)$  facing the source is  $\mathbf{Y}(s) = 1/R + 1/sL + sC$

$= C(s^2 + s/RC + 1/LC)/s$  so  $\mathbf{Z}(s) = (s/C) / (s^2 + s/RC + 1/LC)$  and  $\mathbf{Z}(j\omega) = (1/C)(j\omega) / (1/LC - \omega^2 + j\omega/RC)$ .

Since  $\mathbf{V} = 10^{-3} \mathbf{Z}$ , we note that  $|\mathbf{V}| > 0$  as  $\omega \rightarrow 0$  and also as  $\omega \rightarrow \infty$ .



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

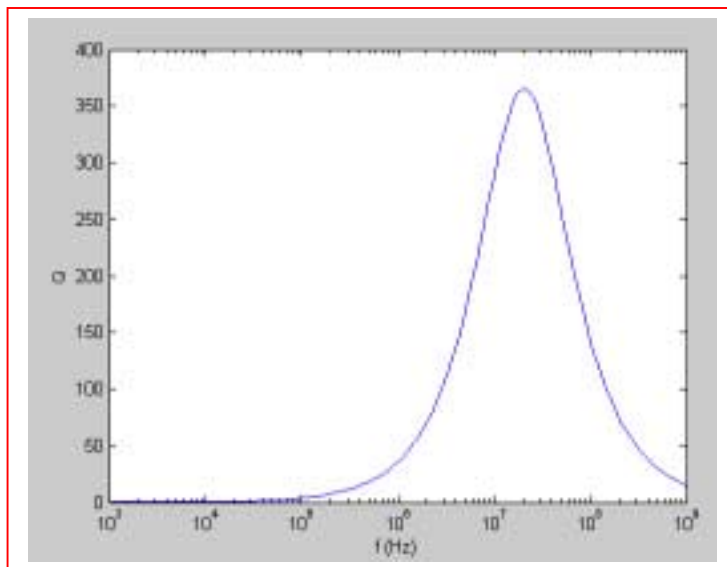
2. (a)  $R = 1000 \, \Omega$  and  $C = 1 \, \mu\text{F}$ .  
 $Q_o = R(C/L)^{1/2} = 200$  so  $L = C(R/Q_o)^2 = 25 \, \mu\text{H}$
- (b)  $L = 12 \, \text{fH}$  and  $C = 2.4 \, \text{nF}$   
 $R = Q_o (L/C)^{1/2} = 447.2 \, \text{m}\Omega$
- (c)  $R = 121.7 \, \text{k}\Omega$  and  $L = 100 \, \text{pH}$   
 $C = (Q_o/R)^2 L = 270 \, \text{aF}$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

3. We take the approximate expression for  $Q$  of a varactor to be

$$Q \approx \omega C_j R_p / (1 + \omega^2 C_j^2 R_p R_s)$$

(a)  $C_j = 3.77 \text{ pF}$ ,  $R_p = 1.5 \text{ M}\Omega$ ,  $R_s = 2.8 \Omega$



(b)  $dQ/d\omega = [(1 + \omega^2 C_j^2 R_p R_s)(C_j R_p) - \omega C_j R_p (2\omega C_j^2 R_p R_s)] / (1 + \omega^2 C_j^2 R_p R_s)^2$

Setting this equal to zero, we may subsequently write

$$C_j R_p (1 + \omega^2 C_j^2 R_p R_s) - \omega C_j R_p (2\omega C_j^2 R_p R_s) = 0$$

Or  $1 - \omega^2 C_j^2 R_p R_s = 0$ . Thus,  $\omega_0 = (C_j^2 R_p R_s)^{-1/2} = 129.4 \text{ Mrad/s} = 21.00 \text{ MHz}$

$Q_0 = Q(\omega = \omega_0) = 366.0$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

4. Determine  $Q$  for (*dropping onto a smooth concrete floor*):

(a) A ping pong ball: Dropped twice from 121.1 cm (arbitrarily chosen). Both times, it bounced to a height of 61.65 cm.

$$Q = 2\pi h_1 / (h_1 - h_2) = 12.82$$

(b) A quarter (25 ¢). Dropped three times from 121.1 cm.

Trial 1: bounced to 13.18 cm

Trial 2: bounced to 32.70 cm

Trial 3: bounced to 16.03 cm. *Quite a bit of variation, depending on how it struck.*

Average bounce height = 20.64 cm, so

$$Q_{\text{avg}} = 2\pi h_1 / (h_1 - h_2) = 7.574$$

(c) Textbook. Dropped once from 121.1 cm. Didn't bounce much at all- only 2.223 cm. Since the book bounced differently depending on angle of incidence, only one trial was performed.

$$Q = 2\pi h_1 / (h_1 - h_2) = 6.4$$

All three items were dropped from the same height for comparison purposes. An interesting experiment would be to repeat the above, but from several different heights, preferably ranging several orders of magnitude (*e.g.* 1 cm, 10 cm, 100 cm, 1000 cm).



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

5.

$$\alpha = 80 \text{ Np/s}, \omega_d = 1200 \text{ rad/s}, |\bar{Z}(-2\alpha + j\omega_d)| = 400 \Omega$$

$$\omega_o = \sqrt{1200^2 + 80^2} = 1202.66 \text{ rad/s} \quad \therefore Q_o = \frac{\omega_o}{2\alpha} = 7.517$$

$$\text{Now, } \bar{Y}(s) = C \frac{(s + \alpha - j\omega_d)(s + \alpha + j\omega_d)}{s} \quad \therefore \bar{Y}(-2\alpha + j\omega_d) = C \frac{(-\alpha)(-\alpha + j2\omega_d)}{-2\alpha + j\omega_d}$$

$$\therefore \bar{Y}(-160 + j1200) = C \frac{-80(-80 + j2400)}{-160 + j1200} \quad \therefore |\bar{Y}(-160 + j1200)| = \frac{1}{400} = 80C \left| \frac{-1 + j30}{-2 + j15} \right|$$

$$\therefore C = \frac{1}{32,000} \sqrt{\frac{229}{901}} = 15.775 \mu\text{F}; L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = 43.88 \text{ mH}; R = \frac{1}{2\alpha C} = 396.7 \Omega$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

6.

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{in} &= \frac{1}{2 + j0.1\omega} + 0.2 + \frac{1}{1 + 1000/j\omega} = \frac{2 - j0.1\omega}{4 + 0.01\omega^2} + 0.2 + \frac{j\omega}{1000 + j10} \\ &= \frac{2 - j0.1\omega}{4 + 0.01\omega^2} + 0.2 + \frac{\omega^2 + j1000\omega}{10^6 + \omega^2} \therefore \frac{-0.1\omega}{4 + 0.01\omega^2} + \frac{1000\omega}{\omega^2 + 10^6} = 0 \\ \therefore 0.1\omega^3 + 10^5\omega &= 4000\omega + 10\omega^3 \therefore 9.9\omega^2 = 96,000 \therefore \omega = \boxed{98.47 \text{ rad/s}}\end{aligned}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

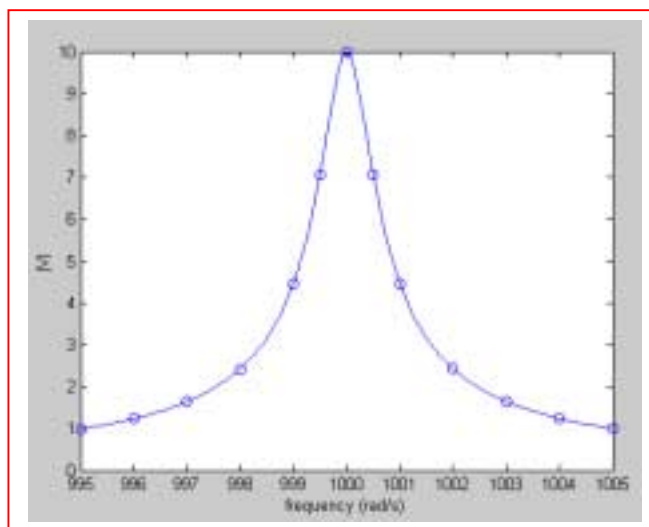
7. Parallel:  $R = 10^6$ ,  $L = 1$ ,  $C = 10^{-6}$ ,  $\bar{I}_s = 10 \angle 0^\circ \mu A$

(a)  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000 \text{ rad/s}$ ;  $Q_o = \omega_o RC = 10^{3+6-6} = 1000$

(b)  $\bar{Y} = 10^{-6} + j\left(10^{-6} - \frac{1}{\omega}\right)$ ,  $\bar{V} = \frac{\bar{I}}{\bar{Y}} = 10^{-5} / 10^{-3} \left[10^{-3} + j\left(\frac{\omega}{1000} - \frac{1000}{\omega}\right)\right]$

$$\therefore \bar{V} = \frac{10^{-2}}{0.001 + j\left(\frac{\omega}{1000} - \frac{1000}{\omega}\right)}, |\bar{V}| = \frac{10^{-2}}{\sqrt{10^{-6} + \left(\frac{\omega}{1000} - \frac{1000}{\omega}\right)^2}}$$

| $\omega$ | $ \bar{V} $ |
|----------|-------------|
| 995      | 0.993       |
| 996      | 1.238       |
| 997      | 1.642       |
| 998      | 2.423       |
| 999      | 4.47        |
| 1000     | 10.0        |
| 1001     | 4.47        |
| 1002     | 2.428       |
| 1003     | 1.646       |
| 1004     | 1.243       |
| 1005     | 0.997       |
| 999.5    | 7.070       |
| 1000.5   | 7.072       |



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

8.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \bar{Z}_{in} &= \frac{5(100/j\omega)}{5 + (100/j\omega)} + 2 + \frac{j0.1\omega}{10 + j0.01\omega} \\
 &= \frac{500}{100 + j5\omega} + 2 + \frac{j10\omega}{1000 + j\omega} = \frac{100}{20 + j\omega} + 2 + \frac{j10\omega}{1000 + j\omega} = \frac{100(20 - j\omega)}{\omega^2 + 400} + 2 + \frac{j10\omega(1000 - j)}{\omega^2 + 10^6} \\
 \therefore \frac{-100\omega}{\omega^2 + 400} + \frac{10^4\omega}{\omega^2 + 10^6} &= 0 \quad \therefore \omega^2 + 10^6 = 100\omega^2 + 40,000, \quad 99\omega^2 = 960,000 \\
 \therefore \omega_o &= \sqrt{960,000/99} = \boxed{98.47 \text{ rad/s}}
 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \bar{Z}_{in}(\omega_o) = \frac{2000}{\omega_o^2 + 400} + 2 + \frac{10\omega_o^2}{\omega_o^2 + 10^6} = \boxed{2.294 \Omega}$$



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

9.

$$(a) \quad \alpha = 50 s^{-1}, \omega_d = 1000 s^{-1} \therefore \omega_o^2 = \alpha^2 + \omega_d^2 = 1,002,500 \therefore \omega_o = 1001.249$$

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = \frac{10^6}{1,002,500} = 0.9975^+ \text{ H}; \quad R = \frac{1}{2\alpha C} = \frac{10^6}{100} = 10 \text{ k}\Omega$$

$$(b) \quad \bar{Y} = 10^{-4} + j \left( 10^{-6} \omega - \frac{1}{0.9975 \omega} \right), \omega = 1000 \therefore \bar{Z} = \frac{1}{Y} = 9997 \angle 1.4321^\circ \Omega$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

10.

$f_{\min} = 535 \text{ kHz}$ ,  $f_{\max} = 1605 \text{ kHz}$ ,  $Q_o = 45$  at one end and

$Q_o \leq 45$  for  $535 \leq f \leq 1605 \text{ kHz}$

$$f_o = 1/2\pi\sqrt{LC} \quad \therefore 535 \times 10^3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{\max}C}}, 1605 \times 10^3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{\min}C}}$$

$$\therefore \sqrt{L_{\max}/L_{\min}} = 3; L_{\max}C = \left( \frac{1}{2\pi \times 535 \times 10^3} \right)^2 = 8.8498 \times 10^{-14}$$

$$\omega_o RC \leq 45, 535 \times 10^3 \leq \frac{\omega_o}{2\pi} \leq 1605 \times 10^3. \text{ Use } \omega_{o\max}$$

$$\therefore 2\pi \times 1605 \times 10^3 \times 20 \times 10^3 C = 45 \quad \therefore C = 223.1 \text{ pF}$$

$$\therefore L_{\max} = \frac{8.8498 \times 10^{-14}}{223.1 \times 10^{-12}} = 397.6 \text{ } \mu\text{H}, L_{\min} = \frac{L_{\max}}{9} = 44.08 \text{ } \mu\text{H}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

11.

(a) Apply  $\pm 1\text{ V}$ .  $\therefore \bar{I}_R = -10^{-4}\text{ A}$

$$\therefore \bar{Y}_{in} = \bar{I}_{in} = \frac{1}{4.4 \times 10^{-3}\text{ s}} + 10^{-4} + (1 - [10^5(-10^{-4})])10^{-8}\text{ s}$$

$$\therefore \bar{Y}_{in} = \frac{1000}{4.4\text{ s}} + 10^{-4} + 11 \times 10^{-8}\text{ s} = \frac{48.4 \times 10^{-8}\text{ s}^2 + 4.4 \times 10^{-4}\text{ s} + 1000}{4.4\text{ s}}$$

$$\therefore \bar{Y}_{in}(j\omega) = \frac{1000 - 48.4 \times 10^{-8}\omega^2 + j4.4 \times 10^{-4}\omega}{j4.4\omega}$$

(b) At  $\omega = \omega_o$ ,  $1000 = 48.4 \times 10^{-8}\omega_o^2$ ,  $\omega_o = 45.45\text{ krad/s}$

$$\bar{Z}_{in}(j\omega_o) = \left( \frac{j4.4 \times 10^{-4}\omega_o}{j4.4\omega_o} \right)^{-1} = 10\text{ k}\Omega$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

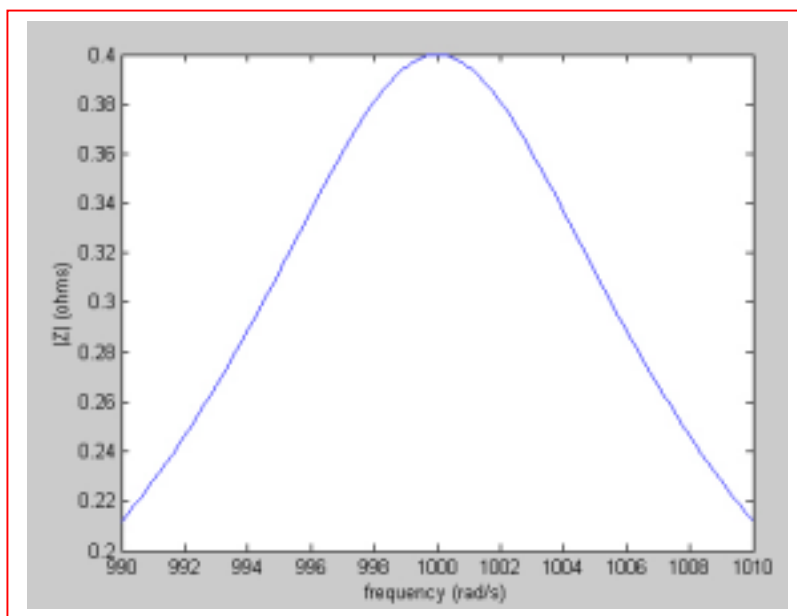
12.  $\omega_o = 1000 \text{ rad/s}$ ,  $Q_o = 80$ ,  $C = 0.2 \mu\text{F}$

(a)  $L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = \frac{10^6}{0.2 \times 10^6} = 5 \text{ H}$ ,  $Q_o = \omega_o RC \therefore R = \frac{80}{10^3 \times 0.2 \times 10^{-6}} = 400 \text{ k}\Omega$

(b)  $B = \omega_o / Q_o = 1000 / 80 = 12.5$

$\therefore \frac{1}{2}B = 6.25 \text{ rad/s}$

$\therefore |\bar{Z}| = R / \left| 1 + j \frac{\omega - \omega_o}{B/2} \right| = 400 \times 10^3 / \sqrt{1 + \left( \frac{\omega - \omega_o}{6.25} \right)^2}$





## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

13.

$$\omega_1 = 103 \text{ rad/s}, \omega_2 = 118,$$

$$|\bar{Z}(j105)| = 10 \Omega$$

$$\omega_o^2 = \omega_1 \omega_2 = 103 \times 118$$

$$\therefore \omega_o = 110.245^+, B = 118 - 103 = 15 \text{ rad/s}, Q_o = \frac{\omega_o}{B} = \frac{110.245^+}{15} = 7.350$$

$$\therefore 7.350 = \omega_o RC \quad \therefore RC = \frac{7.350}{110.245_1^+} = 66.67 \times 10^{-3}, LC = \frac{1}{\omega_o^2} = \frac{1}{12,154}$$

$$|\bar{Y}(j105)| = 0.1 = \left| \frac{1}{R} + j \left( 105C - \frac{1}{105L} \right) \right| = \left| 15C + j \left( 105C - \frac{12,154}{105} C \right) \right| = 18.456 C$$

$$\therefore C = \frac{0.1}{18.456} = 5.418 \text{ mF}, R = \frac{1}{15} C = 12.304 \Omega, L = \frac{1}{12,154 C} = 15.185 \text{ mH}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

14.  $\omega_o = 30 \text{ krad/s}$ ,  $Q_o = 10$ ,  $R = 600 \Omega$ ,

(a)  $B = \frac{\omega_o}{Q_o} = \boxed{3 \text{ krad/s}}$

(b)  $N = \frac{\omega - \omega_o}{B/2} = \frac{28 - 30}{1.5} = \boxed{-1.3333}$

(c)  $Z_{in}(j28\,000) = 600 / (1 - j1.333) = \boxed{360 \angle 53.13^\circ \Omega}$

(d)  $\bar{Z}_{in}(j28,000) = \left[ \frac{1}{600} + j28,000C - j\frac{1}{28,000L} \right]^{-1}$ ,  $C = \frac{Q_o}{\omega_o R} = \frac{10}{30,000 \times 600}$

$$L = \frac{R}{\omega_o Q_o} = \frac{600}{30,000 \times 10}, \frac{1}{L} = \frac{30,000 \times 10}{600} \therefore \bar{Z}_{in} = \left[ \frac{1}{600} + j \left( \frac{28}{30} \times \frac{10}{600} - \frac{30}{28} \frac{10}{600} \right) \right]^{-1}$$

$$\bar{Z}_{in} = \frac{600}{1 + j10 \left( \frac{28}{30} - \frac{30}{28} \right)} = \boxed{351.906 \angle 54.0903^\circ \Omega}$$

(e) magnitude:  $100\% \frac{\text{approx-true}}{\text{true}} = 100\% \frac{360 - 351.906}{351.906} = \boxed{2.300\%}$

angle:  $100\% \frac{53.1301^\circ - 54.0903^\circ}{54.0903^\circ} = \boxed{-1.7752\%}$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

15.  $f_o = 400 \text{ Hz}$ ,  $Q_o = 8$ ,  $R = 500 \Omega$ ,  $\bar{I}_s = 2 \times 10^{-3} \text{ A}$   $\therefore B = 50 \text{ Hz}$

(a)  $|\bar{V}| = 2 \times 10^{-3} \times 500 / \sqrt{1 + N^2} = 0.5 \therefore 1 + N^2 = 4$ ,  $N = \pm \sqrt{3} = \frac{f - 400}{50/2}$   
 $\therefore f = 400 \pm 25\sqrt{3} = 443.3 \text{ and } 356.7 \text{ Hz}$

(b)  $|\bar{I}_R| = \frac{|v|}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + N^2}} \times \frac{1}{500} = 0.5 \times 10^{-3} \therefore \sqrt{1 + N^2} = 4$ ,  $N^2 = 15$ ,  $N = \pm \sqrt{15}$   
 $\therefore f = 400 \pm 25\sqrt{15} = 496.8 \text{ and } 303.2 \text{ Hz}$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

16.  $\omega_o = 10^6$ ,  $Q_o = 10$ ,  $R = 5 \times 10^3$ , *p.r.*

(a)  $Q_o = \frac{R}{\omega_o L} \therefore L = \frac{5 \times 10^3}{10 \times 10^6} = \boxed{0.5 \text{ mH}}$

(b) Approx:  $2 = 5 / \sqrt{1 + N^2} \therefore N = 2.291 = \frac{\omega - 10^6}{10^6 / 20} \therefore \omega = \boxed{1.1146 \text{ Mrad/S}}$

Exact:  $\bar{Y} = \frac{1}{R} \left[ 1 + jQ_o \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right) \right] \therefore 0.5 = 0.2 \sqrt{1 + 100 \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right)^2}$  ( $\omega$  in Mrad/S)

$\therefore 6.25 = 1 + 100(\omega^2 - 2 + 1/\omega^2)$ ,  $\omega^2 - 2 + \frac{1}{\omega^2} = 0.0525$ ,  $\omega^2 + \frac{1}{\omega^2} = 2.0525$

$\omega^4 - 2.0525\omega^2 + 1 = 0$ ,  $\omega^2 = \frac{1}{2} \left( 2.0525 + \sqrt{2.0525^2 - 4} \right) = 1.2569$ ,  $\omega = \boxed{1.1211 \text{ Mrad/s}}$

(c) Approx:  $\angle Y = 30^\circ \therefore \tan^{-1} N = 30^\circ$ ,  $N = 0.5774 = \frac{\omega - 1}{1/20}$ ,  $\omega = \boxed{1.0289 \text{ Mrad/s}}$

Exact:  $\bar{Y} = \frac{1}{5000} \left[ 1 + j10 \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right) \right]$  (in Mrad/s)  $\therefore \tan 30^\circ = 0.5774 = 10 \left( \omega - \frac{1}{\omega} \right)$

$\therefore \omega - \frac{1}{\omega} = 0.05774$ ,  $\omega^2 - 0.05774\omega - 1 = 0$ ,  $\omega = \frac{0.05774 + \sqrt{0.05774^2 + 4}}{2} = \boxed{1.0293 \text{ Mrad/s}}$



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

17.

$$(a) \quad C = 3 + 7 = 10 \text{ nF} \quad \therefore \omega_o = \frac{1}{\sqrt{10^{-4} 10^{-8}}} = 10^6 \text{ rad/s}$$

$$(b) \quad Q_o = \omega_o CR = 10^6 10^{-8} 5 = 5 \times 10^3 = 50$$

$$B = \omega_o / Q_o = 20 \text{ krad/s}$$

$$\text{Parallel current source is } \frac{1 \angle 0^\circ}{\bar{Z}_3} = j\omega 3 \times 10^{-9} \quad \text{At } \omega_o, I_s = j10^{6-9} \times 3$$

$$\therefore V_{1,0} = j3 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^3 = 15 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$(c) \quad \omega - \omega_o = 15 \times 10^3 \quad \therefore N = \frac{15 \times 10^3}{10 \times 10^3} = 1.5 \quad \therefore \bar{V}_1 = \frac{15 \angle 90^\circ}{1 + j1.5} = 8.321 \angle 33.69^\circ \text{ V}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

18.

$$(a) \quad \bar{Z}_{in}(s) = \frac{(5 + 0.01s)(5 + 10^6/s)}{10 + 0.01s + 10^6/s} = \frac{(5 + 0.01s)(5s + 10^6)}{0.01s^2 + 10s + 10^6}$$

$$\bar{Z}_{in}(s) = \frac{0.05s^2 + 25s + 10^4 s + 5 \times 10^6}{0.01s^2 + 10s + 10^6}$$

$$\therefore \bar{Z}_{in}(j\omega) = \frac{5 \times 10^6 - 0.05\omega^2 + j10,025\omega}{10^6 - 0.01\omega^2 + j10\omega}$$

$$\text{At } \omega = \omega_o, \frac{10,025\omega_o}{5 \times 10^6 - 0.05\omega_o^2} = \frac{10\omega_o}{10^6 - 0.01\omega_o^2}, 10.025 \times 10^9 - 100.25\omega_o^2 = 5 \times 10^7 - 0.5\omega_o^2$$

$$\therefore 99.75\omega_o^2 = 9.975 \times 10^9, \omega_o = \boxed{10,000 \text{ rad/s}}$$

$$(b) \quad \bar{Z}_{in}(j\omega_o) = (5 + j100) \parallel (5 - j100) = \frac{25 + 10,000}{10} = \boxed{1002.5 \Omega}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

19.  $f_o = 1000 \text{ Hz}$ ,  $Q_o = 40$ ,  $|\bar{Z}_{in}(j\omega_o)| = 2k\Omega \therefore B = 25 \text{ Hz}$

(a)  $\mathbf{Z}_{in}(j\omega) = \frac{2000}{1+jN}$ ,  $N = \frac{f-1000}{12.5}$ ,  $f = 1010$ ,  $\therefore N = 0.8$

$$\mathbf{Z}_{in} = 2000 / (1 + j0.8) = 1562 \angle -38.66^\circ \Omega$$

(b)  $0.9f_o < f < 1.1f_o \therefore 900 < f < 1100 \text{ Hz}$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

20. Taking  $2^{-1/2} = 0.7$ , we read from  
Fig. 16.48*a*:  $1.7 \text{ kHz} - 0.6 \text{ kHz} = 1.1 \text{ kHz}$   
Fig. 16.48*b*:  $2 \times 10^7 \text{ Hz} - 900 \text{ Hz} = 20 \text{ MHz}$



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

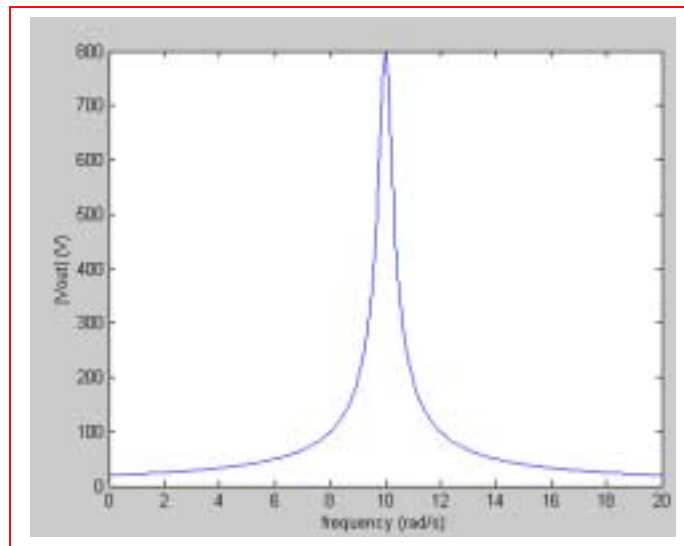
21.

(a)  $20\text{A} \parallel 6\Omega, 3 \parallel 6 = 2, 40\text{V}$  in series with  $2+1=3\Omega$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10 \text{ rad/s}, Q_o = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{60}{3} = 20\Omega$$

$$B = \frac{10}{20} = 0.5, \frac{1}{2}B = 0.25, |\bar{V}_{out}(j\omega_o)| = 40Q_o = 800\text{V}$$

$$\therefore |\bar{V}_{out}(j\omega)| = 800 / \sqrt{1 + \left( \frac{\omega - 10}{0.25} \right)^2}$$



(b)  $\omega = 9 \text{ rad/s}$

$$(\text{Approx: } |\bar{V}_{out}(j9)| = \frac{800}{\sqrt{17}} = 194.03\text{V})$$

$$\text{Exact: } \bar{V}_{out} = \frac{40}{3 + j(6\omega - 600/\omega)} \times \frac{600}{j\omega}$$

$$\therefore \bar{V}_{out}(j9) = \frac{24,000}{9[3 + j(54 - 66.67)]} = 204.86 \angle -13.325^\circ \text{ V}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

22. Series:  $R = 50\Omega$ ,  $L = 4\text{ mH}$ ,  $C = 10^{-7}$

(a)  $\omega_o = 1/\sqrt{4 \times 10^{-3} \times 10^{-7}} = 50 \text{ krad/s}$

(b)  $f_o = 50 \times 10^3 / 2\pi = 7.958 \text{ kHz}$

(c)  $Q_o = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{50 \times 10^3 \times 4 \times 10^{-3}}{50} = 4$

(d)  $B = \omega_o / Q_o = 50 \times 10^3 / 4 = 12.5 \text{ krad/s}$

(e)  $\omega_1 = \omega_o \left[ \sqrt{1 + (1/2Q_o)^2} - 1/2Q_o \right] = 50 \left[ \sqrt{1 + 1/64} - 1/8 \right] = 44.14 \text{ krad/s}$

(f)  $\omega_2 = 50 \left[ \sqrt{65/64} + 1/8 \right] = 56.64 \text{ krad/s}$

(g)  $\bar{Z}_{in}(j45,000) = 50 + j(180 - 10^7 \times 10^{-7} / 45) = 50 - j42.22 = 65.44 \angle -40.18^\circ \Omega$

(h)  $\left| \bar{Z}_c / \bar{Z}_R \right|_{45,000} = \left| 10^7 / j45,000 \times 50 \right| = 4.444$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

23. Apply 1 A, in at top.  $\therefore \bar{V}_R = 10 \text{ V}$

$$(a) \quad \bar{V}_{in} = \bar{Z}_{in} = 10^{-3}s + 10 + \frac{10^8}{5s} (0.5 \times 10 + 1) = 10^{-3}s + 10 + \frac{1.2 \times 10^8}{s}$$

$$\bar{Z}_{in}(j\omega) = 10 + j(10^{-3}\omega - 1.2 \times 10^8 / \omega) \therefore 10^{-3}\omega_o = 1.2 \times 10^8 / \omega_o$$

$$\therefore \omega_o^2 = 1.2 \times 10^{11}, \omega_o = \boxed{346.4 \text{ krad/s}}$$

$$(b) \quad Q_o = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{346.4 \times 10^{3-3}}{10} = \boxed{34.64}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

24. Find the Thévenin equivalent seen by the inductor-capacitor combination:

$$\text{SC: } 1.5 = \bar{V}_1 + 10 \left( \frac{\bar{V}_1}{125} - 0.105 \bar{V}_1 \right) \therefore \bar{V}_1 = 50 \text{ V}$$

$$\therefore \downarrow \bar{I}_{\text{SC}} = \frac{50}{125} = 0.4 \text{ A}$$

$$\text{OC: } \bar{V}_1 = 0 \therefore \bar{V}_{\text{OC}} = 1.5 \text{ V} \therefore R_{\text{th}} = \frac{1.5}{0.4} = 3.75 \Omega$$

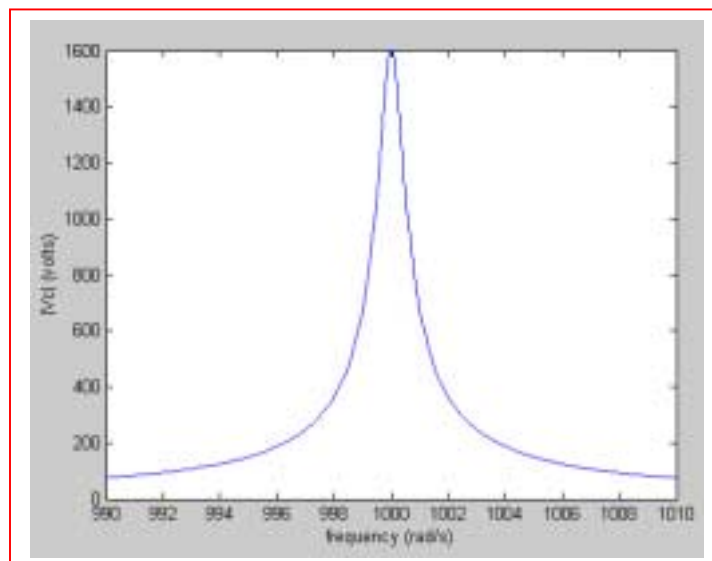
$$\therefore \omega_o = 1 / \sqrt{4 \times 0.25 \times 10^{-6}} = 1000, Q_o = \frac{1000 \times 4}{3.75} = 1066.7$$

$$B = \omega_o / Q_o = \frac{1000}{1066.7} = 0.9375, \frac{1}{2} B = 0.4688 \text{ rad/s}$$

$$|\bar{V}_C|_{\text{max}} = Q_o V_{\text{th}} = 1066.7 \times 1.5 = 1600 \text{ V}$$

Therefore, keep your hands off!

To generate a plot of  $|\mathbf{V}_C|$  vs. frequency, note that  $\mathbf{V}_C(j\omega) = 1.5 \frac{-\frac{j}{\omega C}}{3.75 + j\omega L - \frac{j}{\omega C}}$





## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

25. Series,  $f_o = 500 \text{ Hz}$ ,  $Q_o = 10$ ,  $X_{L,0} = 500 \Omega$

$$(a) \quad 500 = \omega_o L = 2\pi(500)L \quad \therefore L = 0.15915^+ \text{ H} \quad C = \frac{1}{\omega_o^2 L} = \frac{2\pi}{(2\pi \times 500)^2} = 0.6366 \mu\text{F}$$

$$Q_o = 10 = \frac{X_{L,0}}{R} = \frac{500}{R} \quad \therefore R = 50 \Omega$$

$$(b) \quad 1 = \bar{I} \left( 50 + j2\pi f \times \frac{1}{2\pi} - j \frac{10^6 \times 0.5\pi}{2\pi f} \right) = \bar{I} \left( 50 + jf - j \frac{250,000}{f} \right)$$

$$\therefore \bar{I} = 1 / 50 + j(f - 250,000 / f), \quad \bar{V}_c = \frac{10^6 \times 0.5\pi}{j2\pi f} \bar{I}$$

$$\bar{V}_c = \frac{-j250,000 / f}{50 + j(f - 250,000 / f)} \quad \therefore |\bar{V}_c(2\pi \times 450)| = 4.757 \text{ V}$$

$$|\bar{V}_c(2\pi \times 500)| = 10,000 \text{ V} \quad |\bar{V}_c(2\pi \times 550)| = 4.218 \text{ V}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

26.

$$X: s = 0, \infty, 0: s = -20,000 \pm j80,000 s^{-1}, \bar{Z}_{in}(-10^4) = -20 + j0\Omega \therefore \text{SERIES}$$

$$\alpha = 20,000, \omega_d = 80,000 \therefore \omega_o = \sqrt{(64+4)10^8} = 82,462 \text{ rad/s}, \frac{1}{LC} = \omega_o^2 = 68 \times 10^8$$

$$\frac{R}{2L} = \alpha = 20,000 \therefore \frac{R}{L_1} = 40,000, \frac{1}{LC} \times \frac{L}{R} = \frac{68 \times 10^8}{40,000} = 170,000; Z(\sigma) = R + \sigma L + \frac{1}{\sigma C}$$

$$\therefore -20 = R - 10,000L - \frac{1}{10,000C} = R - \frac{1}{4}R - \frac{170,000}{10,000}R \therefore R = 1.2308\Omega$$

$$\therefore L = \frac{1.2308}{40,000} = 30.77 \mu\text{H}, C = \frac{1}{170,000 \times 1.2308} = 4.779 \mu\text{F}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

27.

$$\omega_o = 1/\sqrt{10^{-3-7}} = 10^5 \text{ rad/s}, Q_L = \frac{10^{5-3}}{1} = 100, R_{PL} = 10,000 \Omega$$

$$Q_c = \frac{1}{10^{5-7} \times 0.2} = 500, R_{PC} = 500^2 \times 0.2 = 50,000 \Omega$$

$$50 \parallel 10 = 8.333 \text{ k}\Omega \quad \therefore Q_o = \omega_o CR = 10^{5-7} \times 8333 = 83.33$$

$$B = \frac{100,000}{83.33} = 1200 \text{ rad/s}, \bar{Z}_{in}(j\omega_o) = 8333 \Omega$$

$$\omega = 99,000 \quad \therefore N = \frac{(99-100)10^3}{600} = -1.6667, \bar{Z}_{in}(j99,000) = \frac{8.333}{1-j1.667} \\ = 4.287 \angle 59.04^\circ \text{ k}\Omega$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

28.  $R_{eq} = Q_o / \omega_o C = 50 / 10^{5-7} = 5000 \Omega$ .  
Thus, we may write  $1/5000 = 1/8333 + 1/R_x$  so that

$$R_x = 12.5 \text{ k}\Omega$$



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

29.

$$3\text{ mH} \parallel 1.5\text{ mH} = 1\text{ mH}, 2\mu\text{F} + 8\mu\text{F} = 10\mu\text{F}, \therefore \omega_o = \frac{1}{\sqrt{10^{-3-5}}} = 10\text{ krad/s}$$

$$Q = \frac{3 \times 10^{-3} \times 10^4}{0.3} = 100, R_p = 100^2 \times 0.3 = 3\text{ k}\Omega$$

$$Q = \frac{1.5 \times 10^{-3} \times 10^4}{0.25} = 60, R_p = 60 \times 0.25 = 900\Omega$$

$$900 \parallel 3000 = 692.3\Omega \therefore Q_L = \frac{692.3}{10^{4-3}} = 69.23$$

$$\therefore R_{LS} = \frac{692.3}{69.23^2} = 0.14444\Omega$$

$$Q = \frac{10^6}{10^4 \times 0.1 \times 8} = 125, R_{pc} = 125^2 \times 0.1 = 1562.5\Omega \parallel 10\mu\text{F}$$

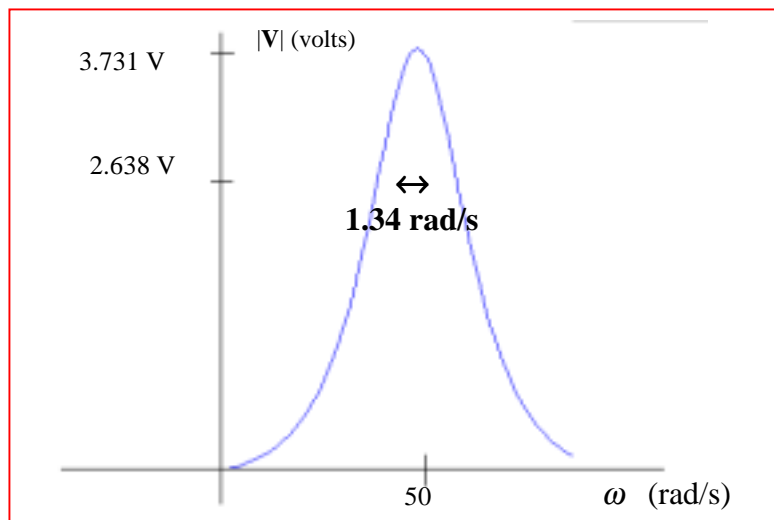
$$\therefore Q_c = 10^4 \times 10^{-5} \times 1562.5 = 156.25 \therefore R_{sc} = \frac{1562.5}{(156.25)^2} = 0.064\Omega$$

$$\therefore R_{S,tot} = 0.14444 + 0.064 = 0.2084\Omega = |\bar{Z}_{in}|_{\min}, \omega_o = 10\text{ krad/s}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

30.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \omega_o &= 1/\sqrt{2 \times 0.2 \times 10^{-3}} = 50 \text{ rad/s} \\
 Q_{leftL} &= 50 \times 2.5 / 2 = 62.5, \quad 2 \times 62.5^2 = 7812.5 \Omega \\
 Q_{rightL} &= \frac{50 \times 10}{10} = 50, \quad 10 \times 50^2 = 25 \text{ k}\Omega \\
 Q_c &= \frac{1000}{50 \times 0.2 \times 1} = 100, \quad 100^2 \times 1 = 10 \text{ k}\Omega, \quad R_p = 7.8125 \parallel 25 \parallel 10 = 3731 \Omega \\
 Q_o &= 50 \times 3731 \times 0.2 \times 10^{-3} = 37.31; \quad B = \frac{50}{37.31} = 1.3400, \quad \frac{1}{2} B = 0.6700 \\
 \therefore |V|_o &= 10^{-3} \times 3731 = \boxed{3.731 \text{ V}}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (b) \quad V &= 10^{-3} [(2 + j125) \parallel (10 + j500) \parallel (1 - j100)] \\
 &= \frac{10^{-3}}{\frac{1}{2 + j125} + \frac{1}{10 + j500} + \frac{1}{1 - j100}} = \boxed{3.7321 \angle -0.3950^\circ \text{ V}}
 \end{aligned}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

31.

$$(a) \quad \omega_o B \frac{1000}{\sqrt{0.25}} = 2000 \text{ rad/s}, Q_c = 2000 \times 2 \times 10^{-6} \times 25 \times 10^3 = 100$$

$$\therefore R_{c,s} = 25,000 / 100^2 = 2.5 \Omega; Q_L = \frac{R}{\omega_o L} = \frac{20 \times 10^4}{2000 \times 0.25} = 40$$

$$\therefore R_{L,s} = \frac{20,000}{1600} = 12.5 \Omega \quad \therefore R_{tot} = 12.5 + 2.5 = 15 \Omega$$

$$\therefore Q_o = \frac{2000 \times 0.25}{15} = 33.33 \quad \therefore |\bar{V}_x| = 1 \times 33.33 \times \frac{1}{2} = 16.667 \text{ V}$$

$$(b) \quad 20,000 \parallel j500 = \frac{20,000 \times j500}{20,000 + j500} = 12,4922 + j499.688 \Omega$$

$$25,000 \parallel -j250 = \frac{25,000(-j250)}{25,000 - j250} = 2.4998 - j249.975$$

$$\therefore \bar{Z}_{in} = 12.4922 + 2.4998 + j499.688 - j250 - j249.975 = 14.9920 - j0.2870 \Omega$$

$$\therefore |\bar{I}| = 1 / |14.9920 - j0.2870| = 66.6902 \text{ mA} \quad \therefore |\bar{V}_x| = 250 \times 66.6902 \times 10^{-3} = 16.6726 \text{ V}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

32.

$$(a) \quad K_m = \frac{50}{100} = 0.5 \quad K_f = \frac{20 \times 10^3}{10^6} = 0.02$$

$$\therefore 9.82 \mu\text{H} \rightarrow 0.5 \times 9.82 \times \frac{1}{0.02} = 24.55 \mu\text{H}, \quad 31.8 \mu\text{H} \rightarrow \frac{0.5}{0.02} \times 31.8 = 795 \mu\text{H}$$

$$2.57 \text{ nF} \rightarrow \frac{2.57}{0.5 \times 0.02} = \boxed{257 \text{ nF}}$$

(b) same ordinate; divide numbers on abscissa by  $\boxed{50}$



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

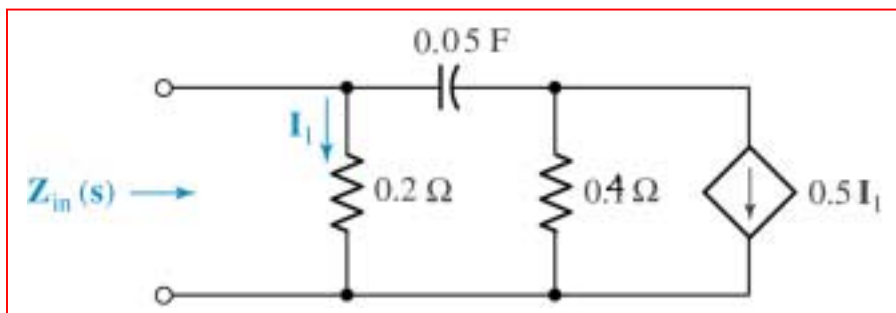
33.

(a) Apply 1 V  $\therefore \bar{I}_1 = 10\text{A}$   $\therefore 0.5\bar{I}_1 = 5\text{A} \downarrow$ ;  $5\text{A} \parallel 0.2\ \Omega$  can be replaced by 1 V in series with  $0.2\ \Omega$

$$\therefore \bar{I}_{in} \rightarrow = 10 + \frac{1 - (-1)}{0.2 + 2/s} = 10 + \frac{2s}{0.2s + 2} = \frac{4s + 20}{0.2s + 2} = \frac{20(s + 5)}{s + 10} \therefore \bar{Z}_{in}(s) = \frac{s + 10}{20(s + 5)}$$

(b)  $K_m = 2, K_f = 5 \therefore \bar{Z}_{in}(s) \rightarrow \frac{2(s/5 + 10)}{20(s/5 + 5)} = \frac{0.1(s + 50)}{s + 25}$

(c)  $0.1\ \Omega \rightarrow 0.2\ \Omega, 0.2\ \Omega \rightarrow 0.4\ \Omega, 0.5\text{F} \rightarrow 0.05\text{F}, 0.5\bar{I}_1 \rightarrow 0.5\bar{I}_1$



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

34.

(a)  $\omega_o = 1/\sqrt{(2+8)10^{-3}10^{-6}} = 10^4 \text{ rad/s}$

$$Q_{L,8} = 10^4 / 8 \times 10^{-3} 10^4 = 125 \therefore R_{L,S} = \frac{10^4}{125^2} = 0.64 \Omega$$

$$2+8=10 \text{ mH} \therefore Q_L = \frac{10^4 \times 10 \times 10^{-3}}{0.64} = 156.25$$

$$\therefore R_{L,P} = 0.64 \times 156.25^2 = 15.625 \text{ k}\Omega; Q_C = \frac{1}{10^4 \times 10^{-6}} = 100, R_{C,P} = 100^2 \times 1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$\therefore R_P = 20 \parallel 15.625 \parallel 10 = 4.673 \text{ k}\Omega \therefore Q_o = 10^4 \times 10^{-6} \times 4.673 \times 10^3 = 46.73$$

(b)  $K_f = 10^6 / 10^4 = 100, K_m = 1 \therefore R's \text{ stay the same; } 2 \text{ mH} \rightarrow 20 \mu\text{H}, 8 \text{ mH} \rightarrow 80 \mu\text{H}, 1 \mu\text{F} \rightarrow 10 \text{ nF}$

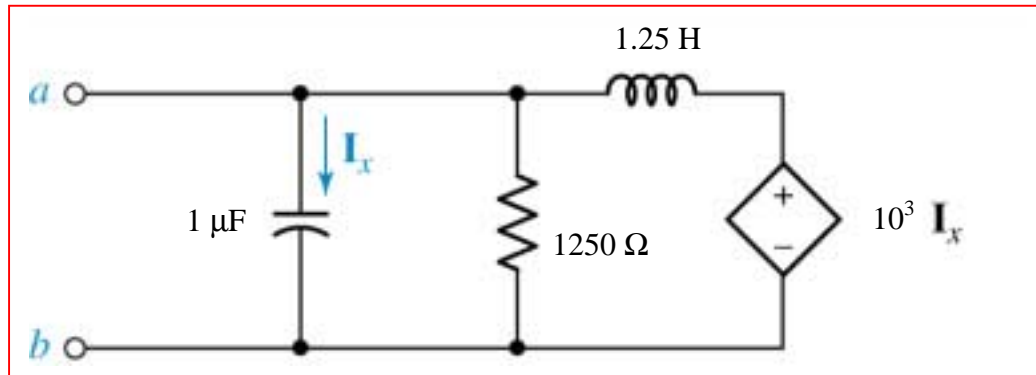
(c)  $\omega_o = 10^6 \text{ rad/s}, Q_o \text{ stays the same, } \therefore B = \frac{10^6}{46.73} = 21.40 \text{ krad/s}$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

35.

$$(a) \quad K_m = 250, K_f = 400 \therefore 0.1F \rightarrow \frac{0.1}{250 \times 400} = 1\mu F$$

$$5\Omega \rightarrow 1250\Omega, 2H \rightarrow \frac{2 \times 250}{400} = 1.25H, 4\bar{I}_x \rightarrow 10^3 \bar{I}_x$$



$$(b) \quad \omega = 10^3. \text{ Apply } 1V \therefore I_x = 10^{-6}s, \downarrow I_{1250} = \frac{1}{1250}$$

$$\therefore 1000 I_x = 10^{-3}s \therefore \rightarrow I_L = \frac{1 - 10^{-3}s}{1.25s}$$

$$\therefore I_{in} = 10^{-6}s + \frac{1}{1250} + \frac{0.8}{s}(1 - 10^{-3}s) = 10^{-6}s + \frac{0.8}{s}; s = j10^3$$

$$\therefore I_{in} = j10^{-3} + \frac{0.8 \times 10^{-3}}{j} = j0.2 \times 10^{-3} \therefore Z_{th} = \frac{1}{I_{in}} = \frac{1000}{j0.2} = \boxed{-j5 \text{ k}\Omega \quad \bar{V}_{oc} = 0}$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

36.

(a)  $\bar{I}_s = 2\angle 0^\circ \text{ A}$ ,  $\omega = 50 \therefore \bar{V}_{out} = 60\angle 25^\circ \text{ V}$

(b)  $\bar{I}_s = 2\angle 40^\circ \text{ A}$ ,  $\omega = 50 \therefore \bar{V}_{out} = 60\angle 65^\circ \text{ V}$

(c)  $\bar{I}_s = 2\angle 40^\circ \text{ A}$ ,  $\omega = 200$ ,  $\therefore$  OTSK

(d)  $K_m = 30$ ,  $\bar{I}_s = 2\angle 40^\circ \text{ A}$ ,  $\omega = 50 \therefore \bar{V}_{out} = 1800\angle 65^\circ \text{ V}$

(e)  $K_m = 30$ ,  $K_f = 4$ ,  $\bar{I}_s = 2\angle 40^\circ \text{ A}$ ,  $\omega = 200 \therefore \bar{V}_{out} = 1800\angle 65^\circ \text{ V}$



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

37.

(a)  $\bar{H}(s) = 0.2 \quad \therefore H_{dB} = 20 \log 0.2 = -13.979 \text{ dB}$

(b)  $\bar{H}(s) = 50 \quad \therefore H_{dB} = 20 \log 50 = 33.98 \text{ dB}$

(c)  $\bar{H}(j10) = \frac{12}{2 + j10} + \frac{26}{20 + j10} \quad \therefore H_{dB} = 20 \log \left| \frac{6}{1 + j5} + \frac{13}{10 + j5} \right| = 20 \log \left| \frac{292 + j380}{-60 + j220} \right| = 6.451 \text{ dB}$

(d)  $H_{dB} = 37.6 \text{ dB} \quad \therefore |\bar{H}(s)| = 10^{37.6/20} = 75.86$

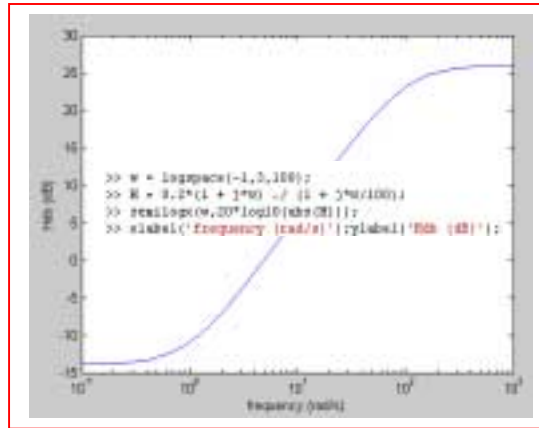
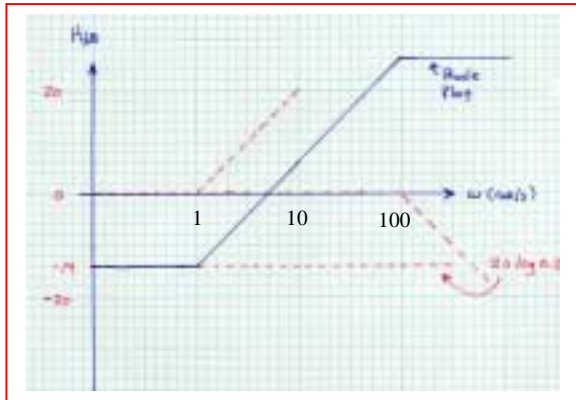
(e)  $H_{dB} = -8 \text{ dB} \quad \therefore |\bar{H}(s)| = 10^{-8/20} = 0.3981$

(f)  $H_{dB} = 0.01 \text{ dB} \quad \therefore |\bar{H}(s)| = 10^{0.01/20} = 1.0012$

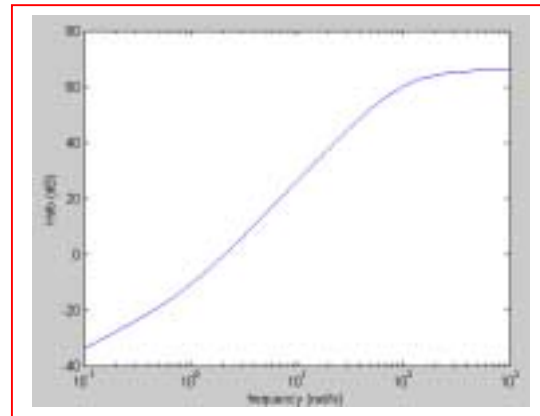
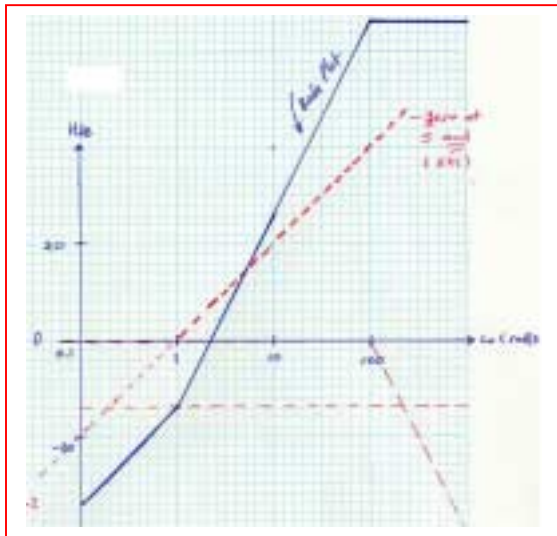
## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

38. (d) MATLAB verification- shown adjacent to Bode plots below.

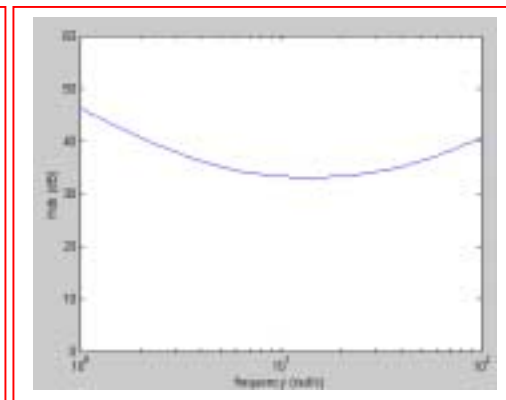
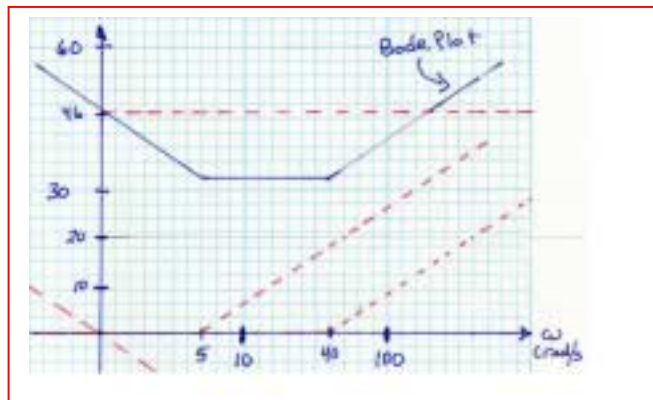
(a)  $\bar{H}(s) = \frac{20(s+1)}{s+100} = \frac{0.2(1+s)}{1+s/100}$ ,  $0.2 \rightarrow -14\text{dB}$



(b)  $\bar{H}(s) = \frac{2000(s+1)s}{(s+100)^2} = \frac{0.2s(1+s)}{(1+s/100)^2}$ ,  $0.2 \rightarrow -14\text{dB}$



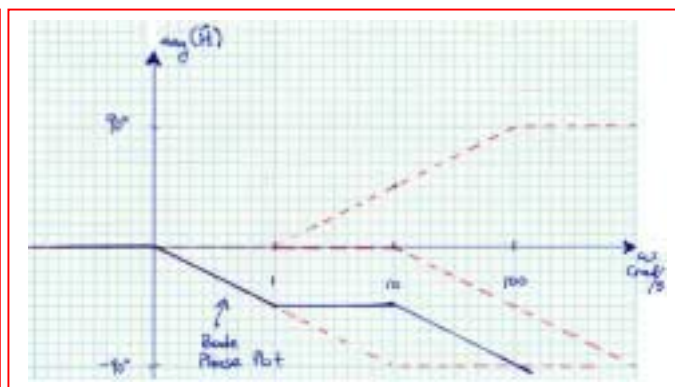
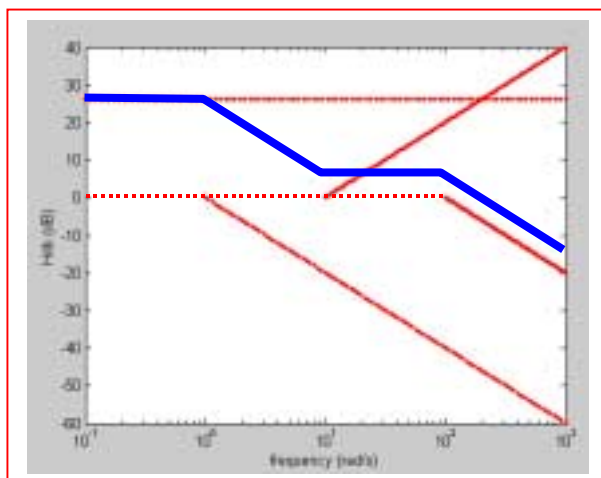
(c)  $\bar{H}(s) = s + 45 + \frac{200}{s} = \frac{s^2 + 45s + 200}{s} = \frac{(s+5)(s+40)}{s} = \frac{200(1+s/5)(1+s/40)}{s}$ ,  $200 \rightarrow 46\text{dB}$



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

39.

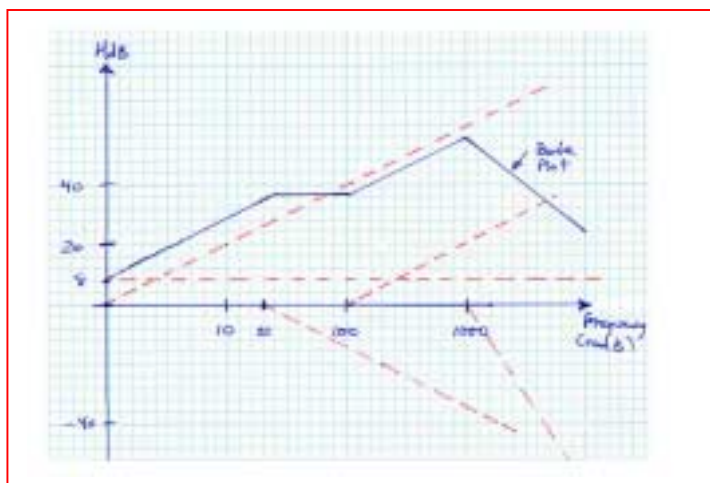
$$\begin{aligned}\bar{H}(s) &= \frac{V_C}{I_R} = \frac{(20 + 2s)(182 + 200/s)}{202 + 2s + 200/s} \times \frac{200/s}{182 + 200/s} \\ &= \frac{400(s+10)}{2(s^2 + 101s + 100)} = \frac{200(10+s)}{(1+s)(100+s)} \\ \bar{H}(s) &= \frac{20(1+s/10)}{(1+s)(1+s/100)}, \quad 20 \rightarrow 26\text{dB}\end{aligned}$$



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

40.

$$(a) \quad \bar{H}(s) = \frac{5 \times 10^8 s(s+100)}{(s+20)(s+1000)^3} = \frac{2.5s(1+s/100)}{(1+s/20)(1+s/1000)^3}, \quad 2.5 \rightarrow 8 \text{ dB}$$



$$(b) \quad \text{Corners: } \omega = 20, 34 \text{ dB;}$$

$$\omega = 100, 34 \text{ dB;}$$

$$\omega = 1000, 54 \text{ dB}$$

$$\text{Intercepts: } 0 \text{ dB, } 2.5\omega = 1, \omega = 0.4$$

$$\omega = 1, 8 \text{ dB; } 0 \text{ dB, } \frac{2.5\omega(\omega/100)}{(\omega/20)(\omega/1000)^3} = \frac{2.5\omega^2(20)10^9}{100\omega\omega^3} = 1 \quad \therefore \omega = 22,360 \text{ rad/s}$$

$$(c) \quad \text{Corners: } \omega = 20, 31.13 \text{ dB}$$

$$\omega = 100, 36.69 \text{ dB} \quad H_{dB} = 20 \log 2.5\omega \frac{\sqrt{1+(\omega/100)^2}}{\sqrt{[1+(\omega/20)^2][1+(\omega/1000)^2]^3}}$$

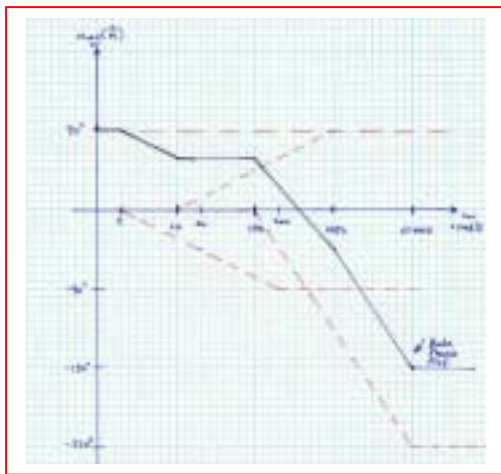
$$\omega = 1000, 44.99 \text{ dB}$$



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

41.

$$(a) \quad \bar{H}(s) = \frac{5 \times 10^8 s(s+100)}{(s+20)(s+1000)^3} = \frac{2.5s(1+s/100)}{(1+s/20)(1+s/1000)^3},$$



$$(b) \quad \omega = 2 : \angle = 90^\circ$$

$$\omega = 10 : \angle = 90^\circ - \left( 45^\circ + 45^\circ \log \frac{10}{20} \right) = 58.5^\circ$$

$$\omega = 100 : \angle = 90^\circ - \left( 45^\circ + 45^\circ \log \frac{100}{20} \right) + \left( 45^\circ + 45^\circ \log \frac{100}{100} \right) = 58.5^\circ$$

$$\omega = 200 : \angle = 90^\circ - 90^\circ + \left( 45^\circ + 45^\circ \log \frac{200}{100} \right) - 3 \left( 45^\circ + 45^\circ \log \frac{200}{100} \right) = 17.9^\circ$$

$$\omega = 1000 : \angle = 90^\circ - 90^\circ + 90^\circ - 3 \left( 45^\circ + 45^\circ \log \frac{1000}{1000} \right) = -45^\circ$$

$$\omega = 10,000 : \angle = 90^\circ - 90^\circ + 90^\circ - 3 \times 90^\circ = -180^\circ$$

$$(c) \quad \omega = 2 : \angle = 90^\circ + \tan^{-1} 0.02 - \tan^{-1} 0.1 - 3 \tan^{-1} 0.002 = 85.09^\circ$$

$$\omega = 10 : \angle = 90^\circ + \tan^{-1} 0.1 - \tan^{-1} 0.5 - 3 \tan^{-1} 0.01 = 67.43^\circ$$

$$\omega = 100 : \angle = 90^\circ + \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 5 - 3 \tan^{-1} 0.1 = 39.18^\circ$$

$$\omega = 200 : \angle = 90^\circ + \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 10 - 3 \tan^{-1} 0.2 = 35.22^\circ$$

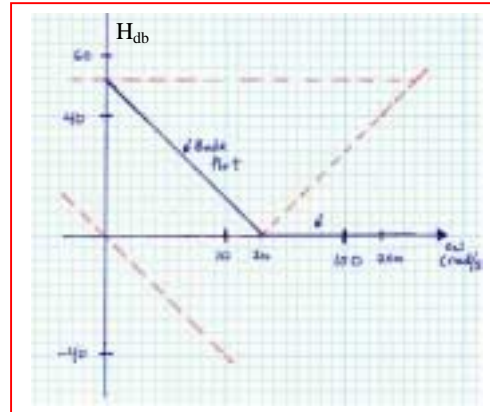
$$\omega = 1000 : \angle = 90^\circ + \tan^{-1} 10 - \tan^{-1} 50 - 3 \tan^{-1} 1 = -49.56^\circ$$

$$\omega = 10,000 : \angle = 90^\circ + \tan^{-1} 100 - \tan^{-1} 500 - 3 \tan^{-1} 10 = -163.33^\circ$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

42.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad H(s) &= 1 + \frac{20}{s} + \frac{400}{s^2} = \frac{s^2 + 20s + 400}{s^2} \\
 &= 400 \frac{1 + 2 \times 0.5(s/20) + (s/20)^2}{s^2} \\
 \therefore \omega_o &= 20, \zeta = 0.5 \\
 20 \log 400 &= 52 \text{ dB} \\
 \text{Correction at } \omega_o &\text{ is } 20 \log 2 \zeta = 0 \text{ dB}
 \end{aligned}$$



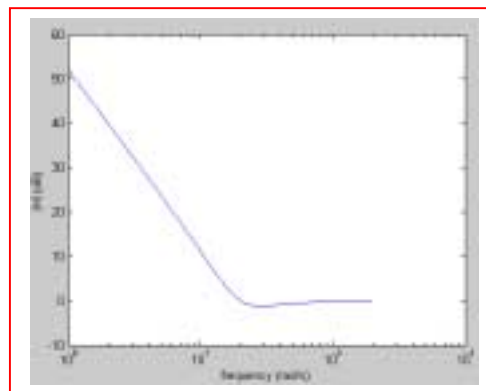
$$(b) \quad \omega = 5: H_{dB} = 52 - 2 \times 20 \log 5 = 24.0 \text{ dB (plot)}$$

$$H_{dB} = 20 \log |1 - 16 + j4| = 23.8 \text{ dB (exact)}$$

$$\omega = 100: H_{dB} = 0 \text{ dB (plot)}$$

$$H_{dB} = 20 \log |1 - 0.04 + j0.2| = -0.170 \text{ dB (exact)}$$

(c)



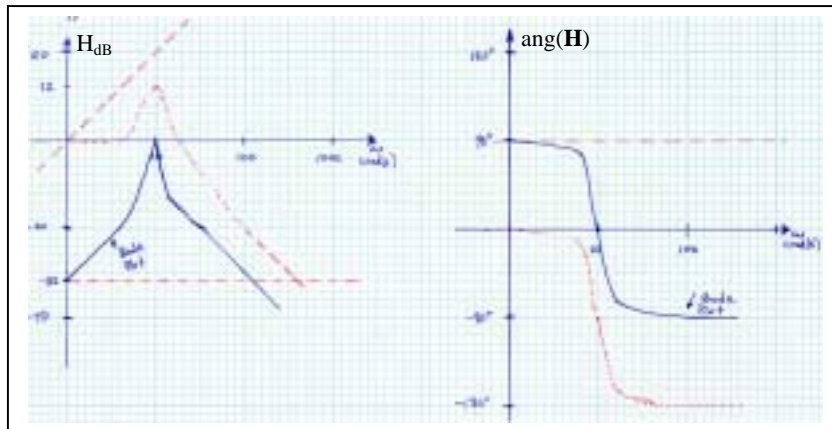
## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

43.

$$(a) \quad \bar{H}(s) = \frac{V_R}{V_s} = \frac{25}{10s + 25 + 1000/s} = \frac{25s}{10s^2 + 25s + 1000} = \frac{0.025s}{1 + 2\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{s}{10}\right) + \left(\frac{s}{10}\right)^2}$$

$$(b) \quad \therefore \omega_o = 10, \zeta = 1/8 \quad \therefore \text{correction} = -20 \log \left( 2 \times \frac{1}{8} \right) = 12 \text{ dB}$$

$$0.025 \rightarrow -32 \text{ dB}$$



$$(c) \quad \omega = 20, \bar{H}(j20) = \frac{j0.5}{1 - 4 + j0.5} \quad \therefore H_{dB} = -15.68 \text{ dB} \quad \angle H(j20) = -80.54^\circ$$

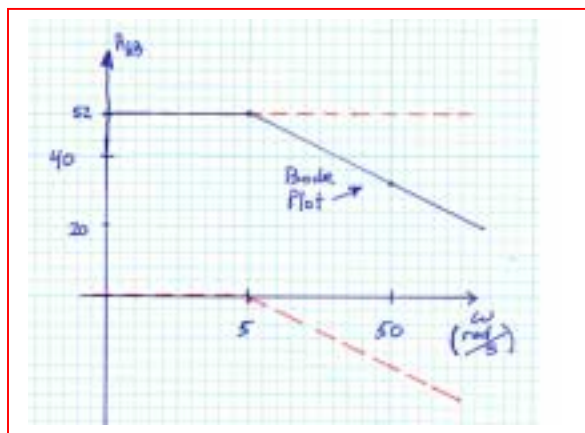
## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

44.

1st two stages,  $\bar{H}_1(s) = \bar{H}_2(s) = -10$ ;  $\bar{H}_3(s) = \frac{-1/(50 \times 10^3 \times 10^{-6})}{s + 1/(200 \times 10^3 \times 10^{-6})} = \frac{-20}{s + 5}$

$$\therefore \bar{H}(s) = (-10)(-10) \left( \frac{-20}{s + 5} \right) = \frac{-400}{1 + s/5}$$

$-400 \rightarrow 52 \text{ dB}$





## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

45.

(a) 1st stage:  $C_{1A} = 1 \mu\text{F}$ ,  $R_{1A} = \infty$ ,  $R_{fA} = 10^5$   $\therefore \bar{H}_A(s) = -R_{fA} C_{1A} s = -0.1s$

2nd stage:  $R_{1B} = 10^5$ ,  $R_{fB} = 10^5$ ,  $C_{fB} = 1 \mu\text{F}$   $\therefore \bar{H}_B(s) = \frac{-1/R_{1B} C_{fB}}{s + 1/R_{fB} C_{fB}}$

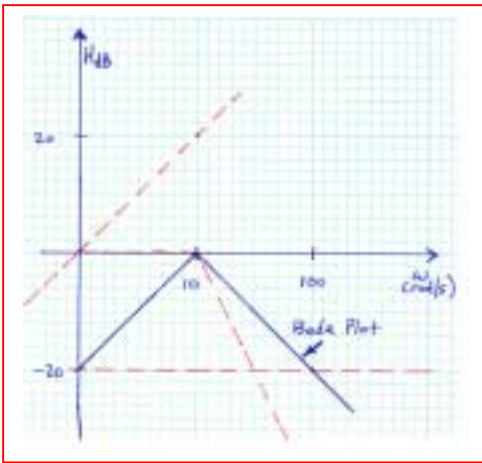
$$\therefore \bar{H}_B(s) = \frac{1/(10^5 \times 10^{-6})}{s + 1/(10^5 \times 10^{-6})} = -\frac{10}{s + 10}$$

3rd stage: same as 2nd

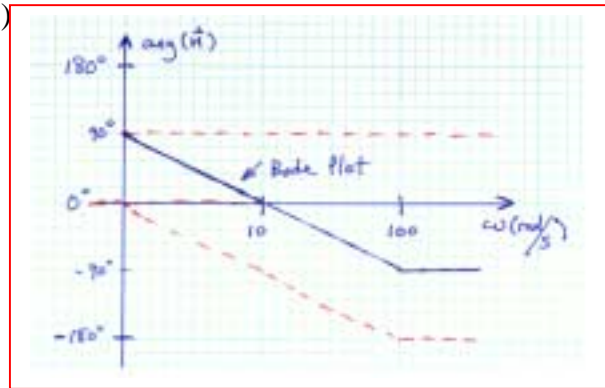
$$\therefore \bar{H}(s) = (-0.1s) \left( \frac{-10}{s + 10} \right) \left( \frac{-10}{s + 10} \right) = -\frac{0.1s}{(1 + s/10)^2}$$

$$20 \log_{10}(0.1) = -20 \text{ dB}$$

(b)



(c)



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

46. An amplifier that rejects high-frequency signals is required. There is some ambiguity in the requirements, as social conversations may include frequencies up to 50 kHz, and echolocation sounds, which we are asked to filter out, may begin below this value. Without further information, we decide to set the filter cutoff frequency at 50 kHz to ensure we do not lose information. However, we note that *this decision is not necessarily the only correct one*.

Our input source is a microphone modeled as a sinusoidal voltage source having a peak amplitude of 15 mV in series with a 1- $\Omega$  resistor. Our output device is an earphone modeled as a 1-k $\Omega$  resistor. A voltage of 15 mV from the microphone should correspond to about 1 V at the earphone according to the specifications, requiring a gain of  $1000/15 = 66.7$ .

If we select a non-inverting op amp topology, we then need  $\frac{R_f}{R_1} = 66.7 - 1 = 65.7$

Arbitrarily choosing  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ , we then need  $R_f = 65.7 \text{ k}\Omega$ . This completes the amplification part. Next, we need to filter out frequencies greater than 50 kHz.

Placing a capacitor across the microphone terminals will “short out” high frequencies.

We design for  $\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi(50 \times 10^3) = \frac{1}{R_{mic} C_{filter}}$ . Since  $R_{mic} = 1 \text{ }\Omega$ , we require

$$C_{filter} = 3.183 \text{ }\mu\text{F}.$$

## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

47. We choose a simple series RLC circuit. It was shown in the text that the “gain” of the circuit with the output taken across the resistor is  $|A_v| = \frac{\omega RC}{\left[ (1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2 \right]^{1/2}}$ .

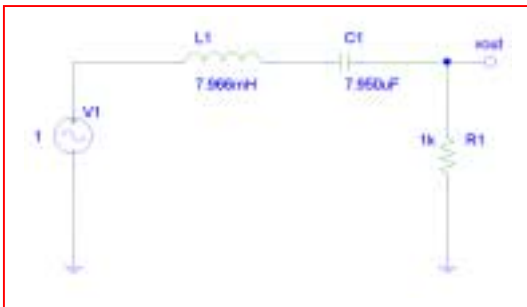
This results in a bandpass filter with corner frequencies at

$$\omega_{c_L} = \frac{-RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} \quad \text{and} \quad \omega_{c_H} = \frac{RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC}$$

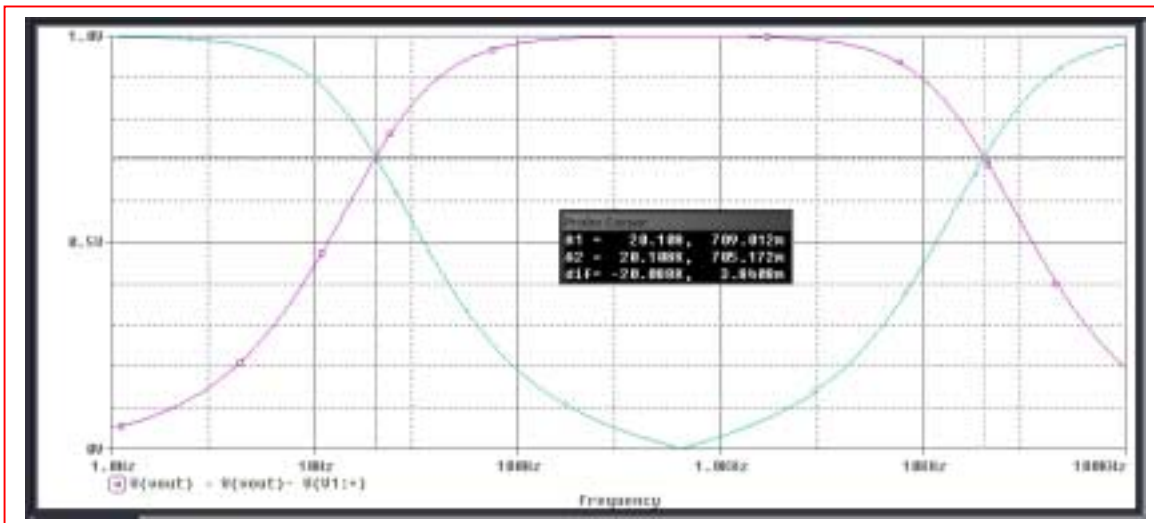
If we take our output across the inductor-capacitor combination instead, we obtain the opposite curve- *i.e.* a bandstop filter with the same cutoff frequencies. Thus, we want

$$2\pi(20) = \frac{-RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC} \quad \text{and} \quad 2\pi(20 \times 10^3) = \frac{RC + \sqrt{R^2 C^2 + 4LC}}{2LC}$$

Noting that  $\omega_{c_H} - \omega_{c_L} = R/L = 125.5 \text{ krad/s}$ , we arbitrarily select  $R = 1 \text{ k}\Omega$ , so that  $L = 7.966 \text{ mH}$ . Returning to either cutoff frequency expression, we then find  $C = 7.950 \text{ }\mu\text{F}$

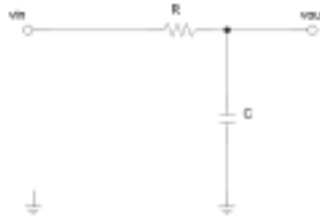


PSpice verification. The circuit performs as required, with a lower corner frequency of about 20 Hz and an upper corner frequency of about 20 kHz.



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

48. We choose a simple RC filter topology:

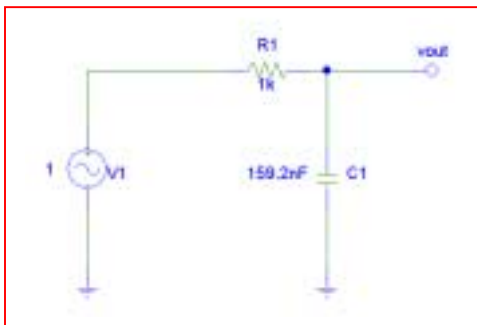


Where  $\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$  and hence  $\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$ . We desire a cutoff

frequency of 1 kHz, and note that this circuit does indeed act as a low-pass filter (higher frequency signals lead to the capacitor appearing more and more as a short circuit). Thus,

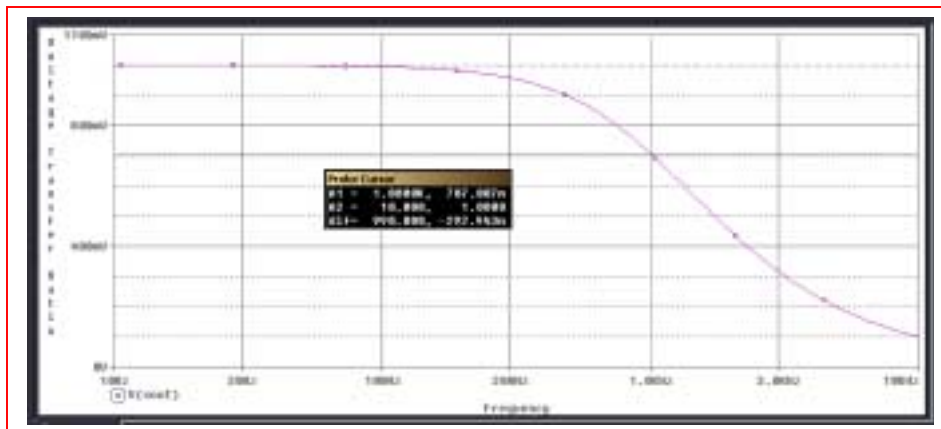
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{where } \omega_c = 2\pi f_c = 2000\pi \text{ rad/s.}$$

A small amount of algebra yields  $1 + [2\pi(1000)RC]^2 = 2$  or  $2000\pi RC = 1$ . Arbitrarily setting  $R = 1 \text{ k}\Omega$ , we then find that  $C = 159.2 \text{ nF}$ . The operation of the filter is verified in the PSpice simulation below:



### Probe Cursor

|       |          |           |
|-------|----------|-----------|
| A1 =  | 1.0000K, | 707.007m  |
| A2 =  | 10.000,  | 1.0000    |
| diff= | 990.000, | -292.943m |

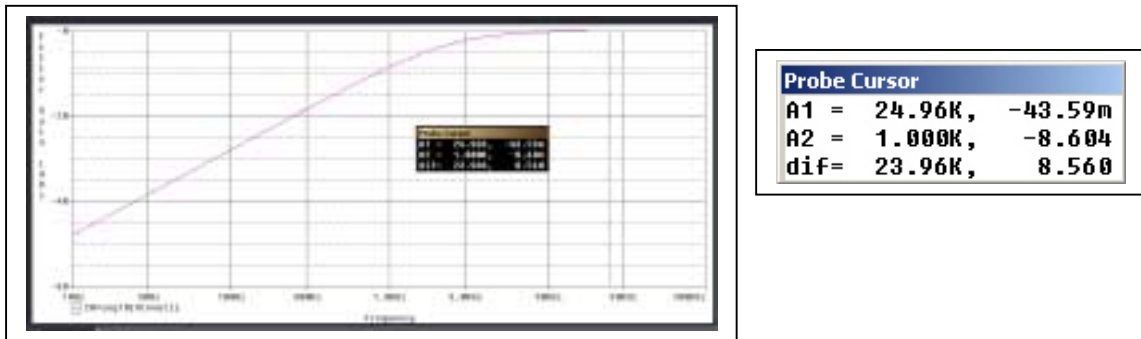




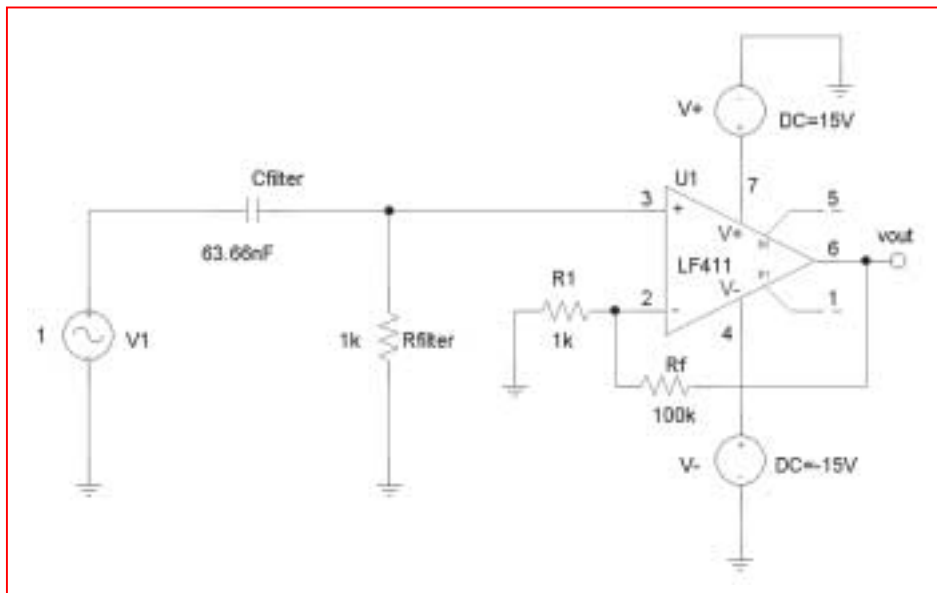
## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

49. We are not provided with the actual spectral shape of the noise signal, although the reduction to 1% of its peak value (a drop of 40 dB) by 1 kHz is useful to know. If we place a simple high-pass RC filter at the input of an op amp stage, designing for a pole at 2.5 kHz should ensure an essentially flat response above 25 kHz, and a 3 dB reduction at 2.5 kHz. If greater tolerance is required, the 40 dB reduction at 1 kHz allows the pole to be moved to a frequency even closer to 1 kHz. The PSpice simulation below shows a filter with  $R = 1 \text{ k}\Omega$  (arbitrarily chosen) and  $C = \frac{1}{2\pi(2.5 \times 10^3)(1000)} = 63.66 \text{ nF}$ .

At a frequency of 25 kHz, the filter shows minimal gain reduction, but at 1 kHz any signal is reduced by more than 8 dB.



We therefore design a simple non-inverting op amp circuit such as the one below, which with  $R_f = 100 \text{ k}\Omega$  and  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ , has a gain of 100 V/V. In simulating the circuit, a gain of approximately 40 dB at 25 kHz was noted, although the gain dropped at higher frequencies, reaching 37 dB around 80 kHz. Thus, to completely assess the suitability of design, more information regarding the frequency spectrum of the “failure” signals would be required.



## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

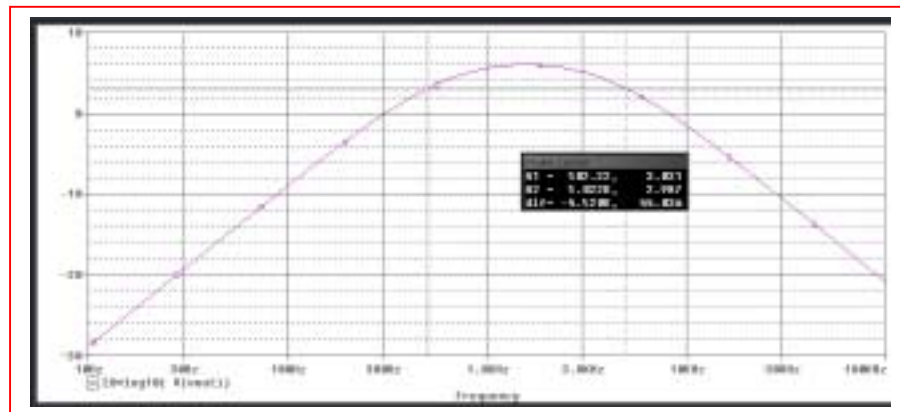
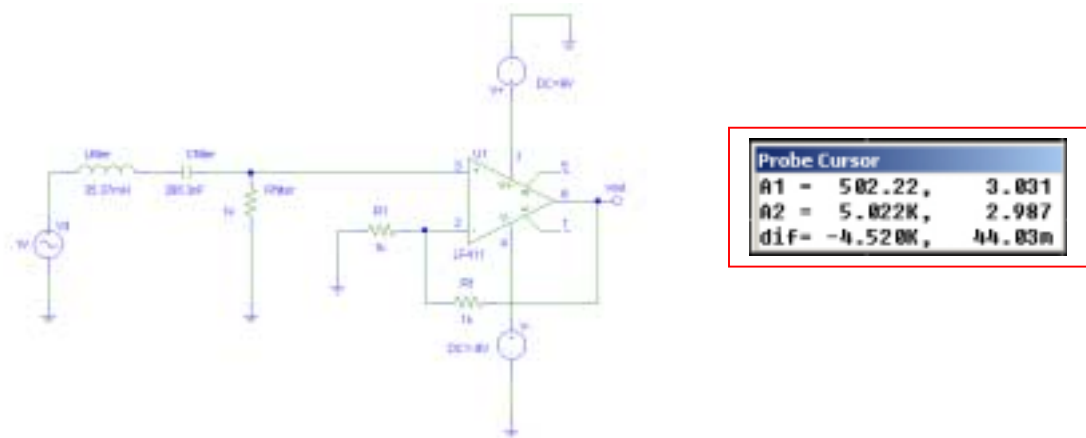
50. We select a simple series RLC circuit with the output taken across the resistor to serve as a bandpass filter with 500 Hz and 5000 Hz cutoff frequencies. From Example 16.12, we know that

$$\omega_{c_L} = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2LC} \sqrt{R^2 C^2 + 4LC} = 2\pi(500)$$

and

$$\omega_{c_H} = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2LC} \sqrt{R^2 C^2 + 4LC} = 2\pi(5000)$$

With  $\omega_{c_H} - \omega_{c_L} = 2\pi(5000 - 500) = R/L$ , we (arbitrarily) select  $R = 1 \text{ k}\Omega$ , so that  $L = 35.37 \text{ mH}$ . Substituting these two values into the equation for the high-frequency cutoff, we find that  $C = 286.3 \text{ nF}$ . We complete the design by selecting  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  and  $R_f = 1 \text{ k}\Omega$  for a gain of 2 (no value of gain was specified). As seen in the PSpice simulation results shown below, the circuit performs as specified at maximum gain (6 dB or 2 V/V), with cutoff frequencies of approximately 500 and 5000 KHz and a peak gain of 6 dB.

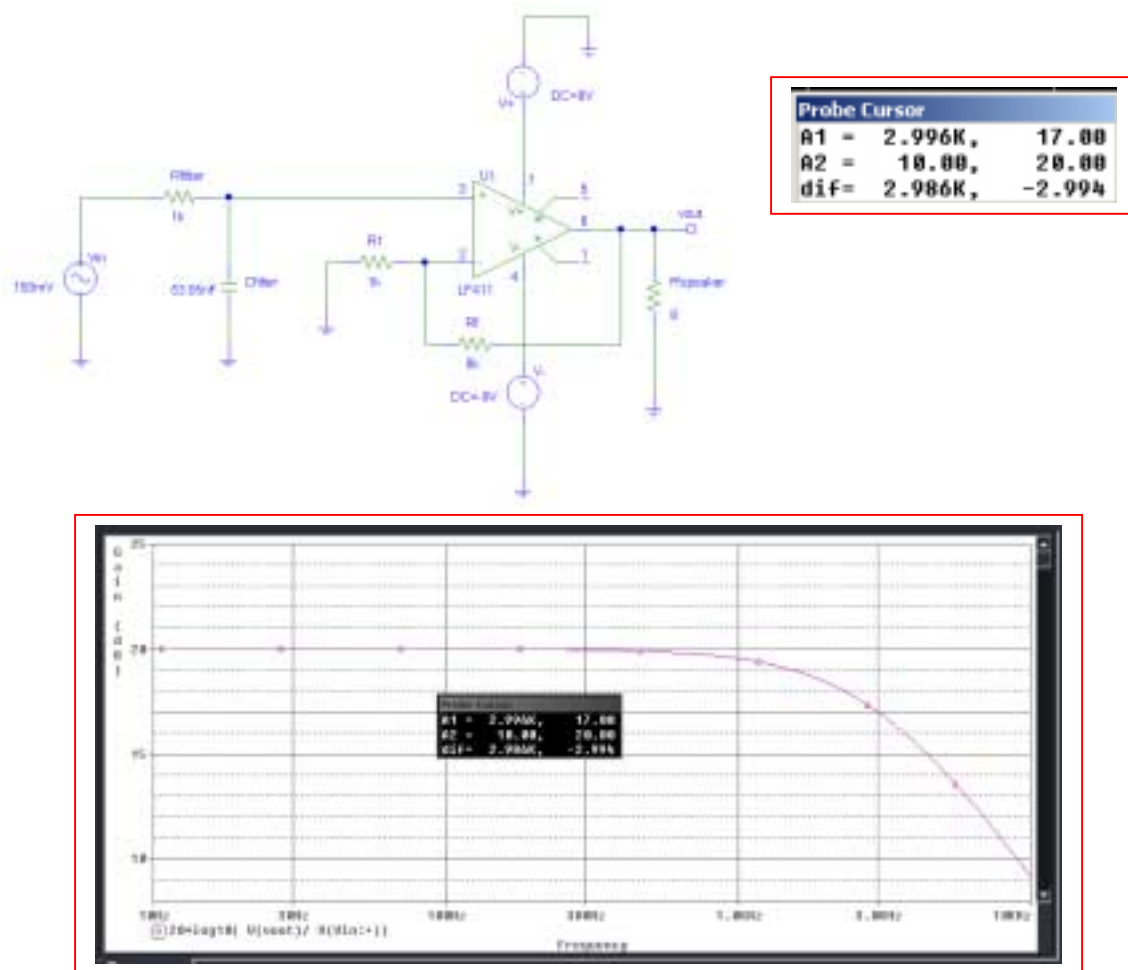


## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

51. For this circuit, we simply need to connect a low-pass filter to the input of a non-inverting op amp having  $R_f/R_1 = 9$  (for a gain of 10). If we use a simple RC filter, the cutoff frequency is

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = 2\pi(3000)$$

Selecting (arbitrarily)  $R = 1 \text{ k}\Omega$ , we find  $C = 53.05 \text{ nF}$ . The PSpice simulation below shows that our design does indeed have a bandwidth of 3 kHz and a peak gain of 10 V/V (20 dB).

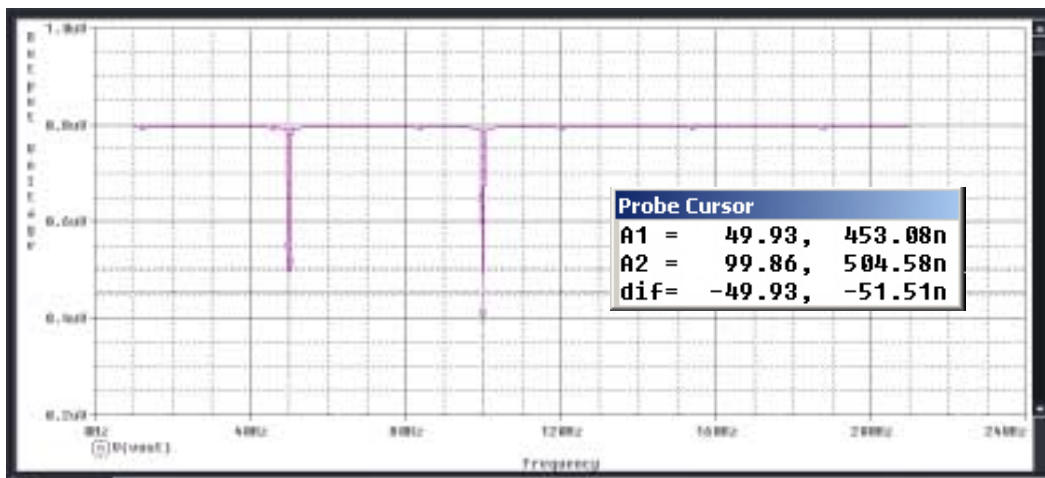
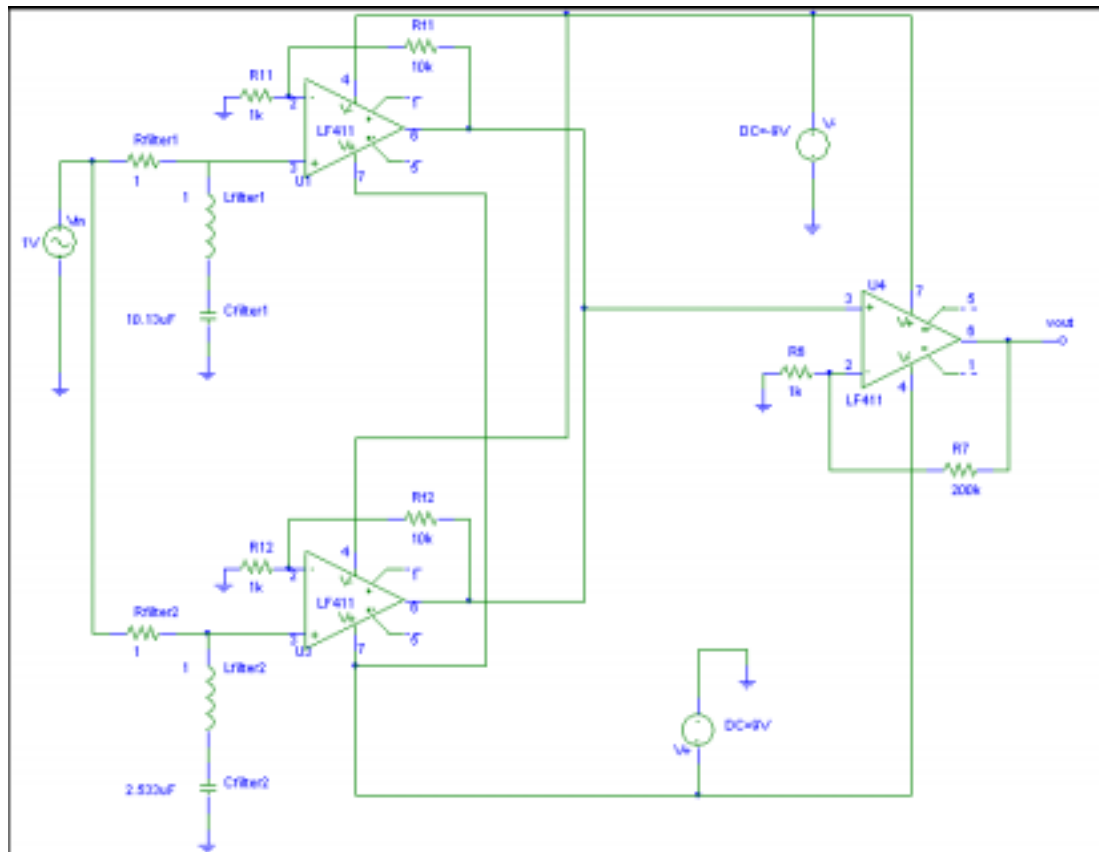


## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

52.

We require four filter stages, and choose to implement the circuit using op amps to isolate each filter sub-circuit. Selecting a bandwidth of 1 rad/s (no specification was given) and a simple RLC filter as suggested in the problem statement, a resistance value of  $1\ \Omega$  leads to an inductor value of 1 H (bandwidth for this type of filter =  $\omega_H - \omega_L = R/L$ ). The capacitance is found by designing each filter's respective resonant frequency ( $1/\sqrt{LC}$ ) at the desired "notch" frequency. Thus, we require  $C_{F1} = 10.13\ \mu\text{F}$ ,  $C_{F2} = 2.533\ \mu\text{F}$ ,  $C_{F3} = 1.126\ \mu\text{F}$  and  $C_{F4} = 633.3\ \text{nF}$ .

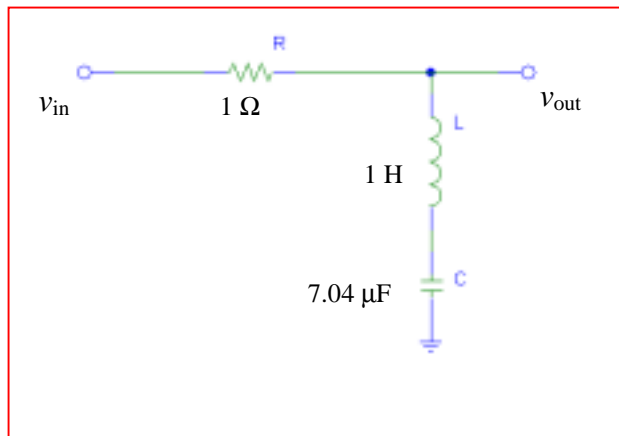
The Student Version of PSpice® will not permit more than 64 nodes, so that the total solution must be simulated in two parts. The half with the filters for notching out 50 and 100 Hz components is shown below; an additional two op amp stages are required to complete the design.





## CHAPTER SIXTEEN SOLUTIONS

53. Using the series RLC circuit suggested, we decide to design for a bandwidth of 1 rad/s (as no specification was provided). With  $\omega_H - \omega_L = R/L$ , we arbitrarily select  $R = 1\ \Omega$  so that  $L = 1\ \text{H}$ . The capacitance required is obtained by setting the resonant frequency of the circuit ( $1/\sqrt{LC}$ ) equal to 60 Hz ( $120\pi\ \text{rad/s}$ ). This yields  $C = 7.04\ \mu\text{F}$ .



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

1.

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 17 & -8 & -3 \\ -8 & 17 & -4 \\ -3 & -4 & 17 \end{vmatrix} = 17(273) + 8(-148) - 3(83) = 3208 \Omega^3$$

$$(a) \quad Z_{in1} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} = \frac{3208}{273} = 11.751 \Omega \quad \therefore P_1 = \frac{100^2}{11.751} = 851.0 \text{ W}$$

$$(b) \quad Z_{in2} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22}} = \frac{3208}{280} = 11.457 \Omega \quad \therefore P_2 = \frac{100^2}{11.457} = 872.8 \text{ W}$$

$$(c) \quad Z_{in3} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{33}} = \frac{3208}{225} = 14.258 \Omega \quad \therefore P_3 = \frac{100^2}{14.258} = 701.4 \Omega$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

2.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0.35 & -0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.5 & -0.15 \\ -0.2 & -0.15 & 0.75 \end{vmatrix} = 0.35(0.3525) + 0.1(-0.105) - 0.2(0.115) = 0.089875 \text{ S}^3$$

$$(a) \quad Y_{in1} = \frac{\Delta_y}{\Delta_{11}} = \frac{0.089875}{0.3525} = 0.254965 \quad \therefore P_1 = \frac{10^2}{0.254965} = \boxed{392.2 \text{ W}}$$

$$(b) \quad Y_{in2} = \frac{\Delta_y}{\Delta_{22}} = \frac{0.089875}{0.2225} = 0.403933 \quad \therefore P_2 = \frac{10^2}{0.403933} = \boxed{247.6 \text{ W}}$$

$$(c) \quad Y_{in3} = \frac{0.089875}{0.165} = 0.544697 \text{ S} \quad \therefore P_3 = \frac{100}{0.544697} = \boxed{183.59 \text{ W}}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

3.

$$\begin{aligned}
 [R] &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} (\Omega) = 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= 3[4(34) - 2(12) - 3(-13)] + [-1(34) - 2(-12) - 3(-4)] = 2[-1(12) - 4(-12) - 3(-6)] \\
 &= 3(73) + (-22) - 2(18) = 161 \, \Omega^4 \quad \therefore R_{in} = \frac{\Delta_R}{\Delta_{11}} = \frac{161}{73} = \boxed{2.205^+ \, \Omega}
 \end{aligned}$$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

4. Define a counter-clockwise current  $\bar{\mathbf{I}}_2$  in the left-most mesh, and a counter-clockwise current  $\bar{\mathbf{I}}_1$  flowing in the right-most mesh. Then,

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = 4\bar{\mathbf{I}}_2 \quad \therefore 0.2\bar{\mathbf{V}}_1 = 0.8\bar{\mathbf{I}}_2$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{in} = \bar{\mathbf{I}}_1 s + 5(\bar{\mathbf{I}}_1 + 0.8\bar{\mathbf{I}}_2 - \bar{\mathbf{I}}_2) = (s+5)\bar{\mathbf{I}}_1 - \bar{\mathbf{I}}_2$$

$$\text{Also, } \bar{\mathbf{I}}_2(2s+4) - 5(\bar{\mathbf{I}}_1 + 0.8\bar{\mathbf{I}}_2 - \bar{\mathbf{I}}_2) = 0$$

$$\text{or } 0 = -5\bar{\mathbf{I}}_1 + (5+2s)\bar{\mathbf{I}}_2$$

$$\therefore \Delta_Z = (s+5)(5+2s) - 5 = 2s^2 + 15s + 20, \Delta_{11} = 5+2s$$

$$\therefore Z_{th} = \frac{2s^2 + 15s + 20}{2s + 5}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

5. Define a clockwise mesh current  $\mathbf{I}_1$  flowing in the bottom left mesh, a clockwise mesh current  $\mathbf{I}_2$  flowing in the top mesh, and a clockwise mesh current  $\mathbf{I}_3$  flowing in the bottom right mesh. Then,

(a)  $\bar{V}_{in} = 10(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) - 0.6 \times 8\bar{I}_2 = 10\bar{I}_1 - 14.8\bar{I}_2$   
 $0 = 50\bar{I}_2 - 10\bar{I}_1 - 12\bar{I}_3 = -10\bar{I}_1 + 50\bar{I}_2 - 12\bar{I}_3$   
 $0 = 4.8\bar{I}_2 + 17\bar{I}_3 - 12\bar{I}_2 = -7.2\bar{I}_2 + 17\bar{I}_3$

$$\therefore \Delta_Z = \begin{vmatrix} 10 & -14.8 & 0 \\ -10 & 50 & -12 \\ 0 & -7.2 & 17 \end{vmatrix} = 10(763.6) + 10(-251.6) = 5120 \quad \therefore Z_{in} = \frac{5120}{763.6} = \boxed{6.705^+ \Omega}$$

(b)  $\bar{I}_{in} = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{28} + \frac{\bar{V}_1 - 0.6\bar{V}_x}{10} = 0.13571 \bar{V}_1 - 0.03571\bar{V}_2 - 0.06\bar{V}_x$   
 $0 = \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{28} + \frac{\bar{V}_2 - 0.6\bar{V}_x}{12} + \frac{\bar{V}_2}{5} = -0.03571\bar{V}_1 + 0.31905\bar{V}_2 - 0.05\bar{V}_x$   
 $0 = -\frac{\bar{V}_x}{8} + \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_x - V_1}{20} = -0.05\bar{V}_1 + 0.05\bar{V}_2 - 0.175\bar{V}_x$

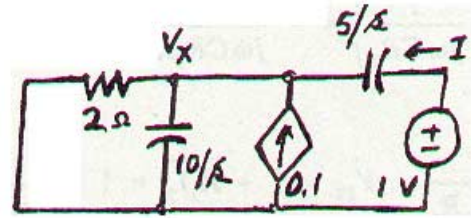
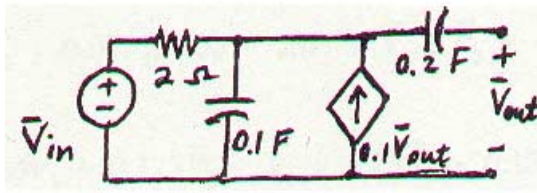
$$\therefore \Delta_y = \begin{vmatrix} 0.13571 & -0.03571 & -0.06 \\ -0.03571 & 0.31905 & -0.05 \\ -0.05 & 0.05 & -0.175 \end{vmatrix} = 0.13571(-0.05583 + 0.0025) + 0.03571(0.00625 + 0.003) - 0.05(0.00179 + 0.01914) = -0.00724$$

$$\therefore \Delta_y = 0.007954, \Delta_{11} = -0.05333 \quad \therefore \bar{Y}_m = \frac{\Delta_y}{\Delta_{11}} = \frac{-0.007954}{-0.05333} = 0.14926 \text{ S}$$

$$\therefore \bar{Z}_{in} = \frac{1}{0.14926} = \boxed{6.705^+ \Omega}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

6.



$$\frac{\bar{V}_x}{2} + \frac{s\bar{V}_x}{10} - 0.1 + \frac{s}{5}(\bar{V}_x - 1) = 0$$

$$\therefore \bar{V}_x(0.5 + 0.3s) = 0.1 + 0.2s$$

$$\therefore \bar{V}_x = \frac{0.2s + 0.1}{0.3s + 0.5}$$

$$\therefore \bar{I} = (1 - \bar{V}_x) \frac{s}{5} = \left(1 - \frac{0.2s + 0.1}{0.3s + 0.5}\right) 0.2s = 0.2s \frac{0.1s + 0.4}{0.3s + 0.5}$$

$$\therefore \bar{Y}_{out} = \bar{I} = \frac{s(0.1s + 0.4)}{1.5s + 2.5}, \bar{Z}_{out} = \frac{1.5s + 2.5}{s(0.1s + 0.4)} = \frac{15s + 25}{s(s + 4)}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

7.

$$\bar{V}_{in} = 1 \text{ V}, \bar{V}_i = 0 \quad \therefore \bar{V}_x + \bar{V}_{in} = 0, \bar{V}_x = -1 \text{ V}$$

$$\bar{I}_x = \frac{\bar{V}_x}{R_x} = -\frac{1}{R_x}; 2 \times 10^4 \bar{I}_{in} + 2 \times 10^4 \bar{I}_x = 0$$

$$\therefore \bar{I}_{in} = -\bar{I}_x = \frac{1}{R_x} \quad \therefore R_{in} = -V_{in} / I_{in} = \boxed{-R_x}$$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

8.

- (a) Assume 1 V at input. Since  $V_i = 0$  at each op-amp input, 1 V is present between  $R_2$  and  $R_3$ , and also C and  $R_4$ .

$$\therefore \bar{V}_4 = \frac{1}{R_4} \left( R_4 + \frac{1}{j\omega C} \right) = 1 + \frac{1}{j\omega C R_4}$$

$$\therefore \bar{I}_3 = \frac{1}{R_3} \left( 1 - 1 - \frac{1}{j\omega C R_4} \right) = -\frac{1}{j\omega C R_3 R_4}$$

$$\therefore \bar{I}_2 = \bar{I}_3 = -\frac{1}{j\omega C R_3 R_4} \quad \therefore \bar{V}_{12} = 1 + R_2 \bar{I}_2 = 1 - \frac{R_2}{j\omega C R_3 R_4}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{1 - \bar{V}_{12}}{R_1} = \frac{R_2}{j\omega C R_1 R_3 R_4} = \bar{I}_{in} \quad \therefore \bar{Z}_{in} = \frac{1}{\bar{I}_{in}} = \boxed{j\omega C \frac{R_1 R_3 R_4}{R_2}}$$

- (b)  $R_1 = 4 \times 10^3$ ,  $R_2 = 10 \times 10^3$ ,  $R_3 = 10 \times 10^3$ ,  $R_4 = 10^3$ ,  $C = 2 \times 10^{-10}$

$$\therefore \bar{Z}_{in} = j\omega 2 \times 10^{-10} \frac{4 \times 10 \times 1}{10} \times 10^6 = \boxed{j\omega 0.8 \times 10^3 \Omega \text{ (} L_{in} = 0.8 \text{ mH)}}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

9. Define a clockwise mesh current  $\mathbf{I}_1$  in the left-most mesh, a clockwise mesh current  $\mathbf{I}_x$  in the center mesh, and a counter-clockwise mesh current  $\mathbf{I}_2$  in the right-most mesh. Then,

$$\bar{V}_1 = 13\bar{I}_1 - 10\bar{I}_2$$

$$0 = -10\bar{I}_1 + 35\bar{I}_x + 20\bar{I}_2 \quad \therefore \bar{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{V}_1 & -10 & 0 \\ 0 & 35 & 20 \\ \bar{V}_2 & 20 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 & -10 & 0 \\ -10 & 35 & 20 \\ 0 & 20 & 22 \end{vmatrix}}$$

$$\bar{V}_2 = 20\bar{I}_x + 22\bar{I}_2$$

$$\therefore \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1(370) + \bar{V}_2(-200)}{13(370) + 10(-220)} = \frac{37}{261} \bar{V}_1 - \frac{20}{261} \bar{V}_2$$

$$\therefore \bar{y}_{11} = \frac{37}{261} = \boxed{141.76 \text{ mS}}, \quad \bar{y}_{12} = \frac{-20}{261} = \boxed{-76.63 \text{ mS}}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

10.

$$[y] = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 50 & 20 \end{bmatrix} (\text{mS}) \quad \therefore \bar{I}_1 = 0.01\bar{V}_1 - 0.005\bar{V}_2,$$

$$\bar{I}_2 = 0.05\bar{V}_1 + 0.02\bar{V}_2, \quad 100 = 25\bar{I}_1 + \bar{V}_1, \quad \bar{V}_2 = -100\bar{I}_2$$

$$\therefore 100 = 0.25\bar{V}_1 - 0.125\bar{V}_2 + \bar{V}_1 = 1.25\bar{V}_1 - 0.125\bar{V}_2$$

$$\bar{I}_2 = -0.01\bar{V}_2 = 0.05\bar{V}_1 + 0.02\bar{V}_2 \quad \therefore -0.03\bar{V}_2 = 0.05\bar{V}_1 \quad \therefore \bar{V}_2 = -\frac{5}{3} \bar{V}_1$$

$$\therefore 100 = 1.25\bar{V}_1 + \frac{0.625}{3} \bar{V}_1 = \frac{4.375}{2} \bar{V}_1 \quad \therefore \bar{V}_1 = \frac{300}{4.375} = \boxed{68.57 \text{ V}}, \quad \bar{V}_2 = -\frac{5}{3} \bar{V}_1 = \boxed{-114.29 \text{ V}}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

11.

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{25} = 0.04\bar{V}_1 - 0.04\bar{V}_2$$

$$\bar{I}_2 = 2\bar{I}_1 + \frac{\bar{V}_2}{100} - \bar{I}_1 = \bar{I}_1 + 0.01\bar{V}_2 = 0.04\bar{V}_1 - 0.03\bar{V}_2$$

$$\therefore \bar{y}_{11} = 0.04 \text{ S}, \bar{y}_{12} = -0.04 \text{ S}, \bar{y}_{21} = 0.04 \text{ S}, \bar{y}_{22} = -0.03 \text{ S}$$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

12.

$$\therefore \bar{V}_1 = 100(\bar{I}_1 - 0.5\bar{I}_1) = 50\bar{I}_1 \quad \therefore \bar{I}_1 = 0.02 \bar{V}_1$$

$$\bar{V}_2 = 300\bar{I}_2 + 200(\bar{I}_2 + 0.5\bar{I}_1) = 100\bar{I}_1 + 500\bar{I}_2$$

$$\therefore \bar{V}_2 = 2\bar{V}_1 + 500\bar{I}_2, \quad \bar{I}_2 = -0.004\bar{V}_1 + 0.002\bar{V}_2$$

$$\therefore [\bar{y}] = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ -0.004 & 0.002 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

13.

$$[y] = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.0025 \\ -8 & 0.05 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

- (a)  $\bar{I}_1 = 0.1\bar{V}_1 - 0.0025\bar{V}_2$ ,  $\bar{I}_2 = -8\bar{V}_1 + 0.05\bar{V}_2$   
 $1 = 2\bar{I}_1 + \bar{V}_2$ ,  $\bar{V}_2 = -5\bar{I}_2$   
 $\therefore \bar{I}_2 = -0.2\bar{V}_2 = -8\bar{V}_1 + 0.05\bar{V}_2 \therefore 0.25\bar{V}_2 = 8\bar{V}_1$ ,  $\bar{V}_2 / \bar{V}_1 = 32$   
 $\bar{I}_2 = -8\bar{V}_1 + 0.05 \times 32\bar{V}_1$ ,  $\bar{I}_1 = 0.1\bar{V}_1 - 0.0025 \times 32\bar{V}_1 \therefore \bar{I}_2 = -6.4\bar{V}_1$ ,  $\bar{I}_1 = 0.02\bar{V}_1$   
 $\therefore \bar{I}_2 / \bar{I}_1 = \frac{-6.4}{0.02} = -320$ ,  $\bar{V}_1 / \bar{I}_1 = \boxed{50\Omega}$
- (b)  $\bar{V}_1 = -2\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_1 = 0.1\bar{V}_1 - 0.0025\bar{V}_2$ ,  $\bar{I}_2 = -8\bar{V}_1 + 0.05\bar{V}_2$   
 $\therefore \bar{I}_1 = -0.5\bar{V}_1 = 0.1\bar{V}_1 - 0.0025\bar{V}_2 \therefore 0.6\bar{V}_1 = 0.0025\bar{V}_2$   
 $\therefore \bar{V}_1 = \bar{V}_2 / 240$ ,  $\bar{I}_2 = -8 \times \bar{V}_2 / 240 + \frac{1}{20} \bar{V}_2 = \frac{1}{60} \bar{V}_2$   
 $\therefore \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = \boxed{60\Omega}$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

$$14. \quad [\bar{y}] = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -20 & 2 \end{bmatrix} \text{ (mS)}$$

$$(a) \quad \bar{I}_1 = 0.01\bar{V}_1 - 0.005\bar{V}_2, \quad \bar{I}_2 = -0.02\bar{V}_1 + 0.002\bar{V}_2$$

$$\bar{V}_1' = 100\bar{I}_1 + \bar{V}_1$$

$$\therefore \bar{V}_1 = \bar{V}_1 - 100\bar{I}_1 \therefore \bar{I}_1 = 0.01\bar{V}_1 - \bar{I}_1 - 0.005\bar{V}_2 \therefore \bar{I}_1 = 0.005\bar{V}_1 - 0.0025\bar{V}_2$$

$$\bar{I}_2 = -0.02\bar{V}_1 + 2\bar{I}_1 + 0.002\bar{V}_2 = -0.02\bar{V}_1 + 0.01\bar{V}_1 - 0.005\bar{V}_2 + 0.002\bar{V}_2 = -0.01\bar{V}_1 - 0.003\bar{V}_2$$

$$\therefore [\bar{y}]_{new} = \begin{bmatrix} 0.005 & -0.0025 \\ -0.01 & -0.003 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

$$(b) \quad \bar{V}_2 = 100\bar{I}_2 + \bar{V}_2, \therefore \bar{V}_2 = \bar{V}_2 - 100\bar{I}_2$$

$$\therefore \bar{I}_2 = -0.02\bar{V}_1 + 0.002\bar{V}_2 - 0.2\bar{I}_2$$

$$\therefore 1.2\bar{I}_2 = -0.02\bar{V}_1 + 0.002\bar{V}_2 \therefore \bar{I}_2 = -\frac{1}{60} \bar{V}_1 + \frac{1}{600} \bar{V}_2$$

$$\bar{I}_1 = 0.01\bar{V}_1 - 0.005(\bar{V}_2 - 100\bar{I}_2) = 0.01\bar{V}_1 - 0.005\bar{V}_2 + 0.5\left(-\frac{1}{60} \bar{V}_1 + \frac{1}{600} \bar{V}_2\right)$$

$$\therefore \bar{I}_1 = \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{120}\right) \bar{V}_1 - \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{1200}\right) \bar{V}_2 = \frac{1}{600} \bar{V}_1 - \frac{1}{240} \bar{V}_2$$

$$\therefore [\bar{y}]_{new} = \begin{bmatrix} 1/600 & -1/240 \\ -1/60 & 1/600 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

15.

|        | $\bar{V}_{s1}$ | $\bar{V}_{s2}$ | $\bar{I}_1$ | $\bar{I}_2$ |
|--------|----------------|----------------|-------------|-------------|
| Exp #1 | 100 V          | 50 V           | 5 A         | -32.5 A     |
| Exp #2 | 50             | 110            | -20         | -5          |
| Exp #3 | 20             | 0              | 4           | -8          |
| Exp #4 | -8.333         | -22.22         | 5           | 0           |
| Exp #5 | -58.33         | -55.56         | 5           | 15          |

$$\bar{I}_1 = \bar{y}_{11}\bar{V}_1 + \bar{y}_{12}\bar{V}_2$$

$$\bar{I}_2 = \bar{y}_{21}\bar{V}_1 + \bar{y}_{22}\bar{V}_2$$

Use 1st 2 rows to find y's

$$\therefore 5 = 100\bar{y}_{11} + 50\bar{y}_{12}, -32.5 = 100\bar{y}_{21} + 50\bar{y}_{22}$$

$$-20 = 50\bar{y}_{11} + 100\bar{y}_{12}, -5 = 50\bar{y}_{21} + 100\bar{y}_{22} \rightarrow \therefore -10 = 100\bar{y}_{21} + 200\bar{y}_{22}$$

$$\therefore -40 = 100\bar{y}_{11} + 200\bar{y}_{12} \text{ Subtracting, } 150\bar{y}_{12} = -45 \therefore \bar{y}_{12} = -0.3 \text{ S}$$

$$\therefore 5 = 100\bar{y}_{11} - 15 \therefore \bar{y}_{11} = 0.2 \text{ S} \text{ Subtracting } 22.5 = 150\bar{y}_{22}$$

$$\therefore \bar{y}_{22} = 0.15 \text{ S} \therefore -32.5 = 100\bar{y}_{21} + 7.5 \therefore \bar{y}_{21} = -0.4 \text{ S} \therefore [\bar{y}] = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 \\ -0.4 & 0.15 \end{bmatrix} (\text{S})$$

$$\text{Completing row 3: } \bar{I}_1 = 0.2 \times 20 = 4 \text{ A}, \bar{I}_2 = -0.4 \times 20 = -8 \text{ A}$$

$$\text{Completing row 4: } 5 = 0.2\bar{V}_{s1} - 0.3\bar{V}_{s2}, 0 = -0.4\bar{V}_{s1} + 0.15\bar{V}_{s2} \therefore \bar{V}_{s2} = \frac{8}{3} \bar{V}_{s1}$$

$$\therefore 5 = 0.2\bar{V}_{s1} - 0.8\bar{V}_{s1} = -0.6\bar{V}_{s1} \therefore \bar{V}_{s1} = -\frac{50}{6} = -8.333 \text{ V}, \bar{V}_{s2} = -22.22 \text{ V}$$

$$\text{Completing row 5: } 5 = 0.2\bar{V}_{s1} - 0.3\bar{V}_{s2}, 15 = -0.4\bar{V}_{s1} + 0.15\bar{V}_{s2}$$

$$\therefore \bar{V}_{s1} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -0.3 \\ 15 & 0.15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.2 & -0.3 \\ -0.4 & 0.15 \end{vmatrix}} = \frac{0.75 + 4.5}{0.03 - 0.12} = \frac{5.25}{-0.09} = -58.33 \text{ V}, \bar{V}_{s2} = \frac{\begin{vmatrix} 0.2 & 5 \\ -0.4 & 15 \end{vmatrix}}{-0.09} = -55.56 \text{ V}$$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

16.

$$\Delta_1: 1+6+3=10\Omega \rightarrow \frac{6 \times 1}{10} = 0.6, \frac{6 \times 3}{10} = 1.8, \frac{3 \times 1}{10} = 0.3$$

$$\Delta_2: 5+1+4=10\Omega \rightarrow \frac{5 \times 1}{10} = 0.5, \frac{1 \times 4}{10} = 0.4, \frac{5 \times 4}{10} = 2$$

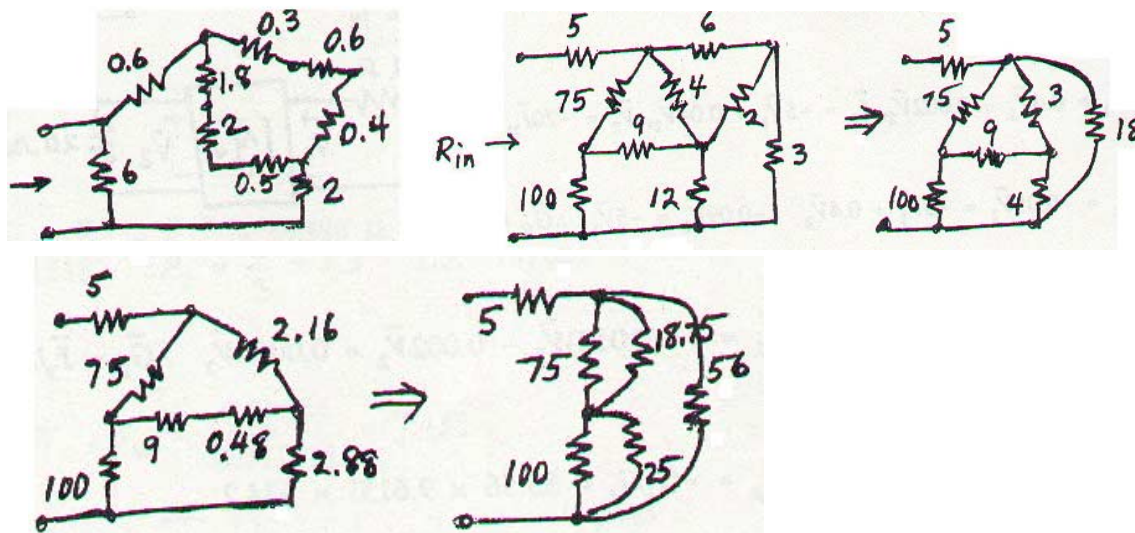
$$1.8+2+0.5=4.3\Omega, 0.3+0.6+0.4=1.3\Omega$$

$$1.3 \parallel 4.3 = 0.99821\Omega, 0.9982+0.6+2=3.598\Omega$$

$$3.598 \parallel 6 = 2.249\Omega$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

17.



$$6 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 6 = 36 \Omega^2$$

$$36/6 = 6, 36/2 = 18, 36/3 = 12$$

$$12 \parallel 4 = 3, 6 \parallel 12 = 4$$

$$4 + 3 + 18 = 25 \Omega$$

$$3 \times 18/25 = 2.16, 4 \times 18/25 = 2.88, \frac{4 \times 3}{25} = 0.48$$

$$9.48 \times 2.16 + 9.48 \times 2.88 + 2.88 \times 2.16 = 54 \Omega^2$$

$$\frac{54}{2.88} = 18.75, \frac{54}{2.16} = 25, \frac{54}{9.48} = 5.6962, 75 \parallel 18.75 = 15, 100 \parallel 25 = 20$$

$$(15 + 20) \parallel 5.696 = 4.899 \therefore R_{in} = 5 + 4.899 = \boxed{9.899 \Omega}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

18.

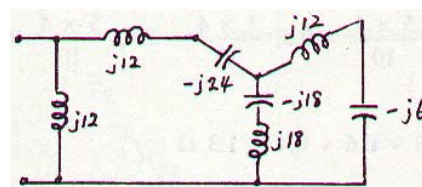
$$\Delta: -j6 + j4 + j3 = j1$$

$$\frac{24}{j1} = -j24, \frac{-12}{j1} = j12, \frac{18}{j1} = -j18, j18 - j18 = 0 \text{ (S.C)}$$

$\therefore$  ignore  $j12, -j6$

$$-j24 + j12 = -j12$$

$$-j12 \parallel j12 = \infty \therefore \boxed{\bar{Z}_m = \infty}$$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

$$19. \quad [\bar{y}] = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.002 \\ -5 & 0.04 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

$$(a) \quad \bar{I}_1 = 0.4\bar{V}_1 - 0.002\bar{V}_2, \bar{I}_2 = -5\bar{V}_1 + 0.04\bar{V}_2, \bar{V}_2 = -20\bar{I}_2, \bar{V}_s = \bar{V}_1 + 2\bar{I}_1$$

$$\bar{I}_2 = -0.05\bar{V}_2 = -5\bar{V}_1 + 0.4\bar{V}_2 \therefore -0.09\bar{V}_2 = -5\bar{V}_1 \therefore \bar{G}_v = \bar{V}_2 / \bar{V}_1 = \frac{500}{9} = 55.56$$

$$(b) \quad \bar{I}_1 = 0.4(0.018)\bar{V}_2 - 0.002\bar{V}_2 = 0.0052\bar{V}_2 \therefore \bar{G}_I = \bar{I}_2 / \bar{I}_1 = \frac{-0.05\bar{V}_2}{0.0052\bar{V}_2} = -9.615^+$$

$$(c) \quad G_p = -G_v G_I = 55.56 \times 9.615^+ = 534.2$$

$$(d) \quad \bar{I}_1 = 0.0052\bar{V}_2 = 0.0052 \times 55.56\bar{V}_1 \therefore \bar{Z}_{in} = \bar{V}_1 / \bar{I}_1 = \frac{1}{0.0052 \times 55.56} = 3.462 \Omega$$

$$(e) \quad \bar{V}_1 = -2\bar{I}_1, \bar{V}_s = 0 \therefore \bar{I}_1 = -0.5\bar{V}_1 = 0.4\bar{V}_1 - 0.002\bar{V}_2 \therefore \bar{V}_1 = \frac{0.002}{0.9} \bar{V}_2$$

$$\bar{I}_2 = -5 \left( \frac{0.002}{0.9} \right) \bar{V}_2 + 0.04\bar{V}_2 = 0.02889\bar{V}_2 \therefore \bar{Z}_{out} = \bar{V}_2 / \bar{I}_2 = 34.62 \Omega$$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

$$20. \quad [\bar{y}] = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ (S)}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \bar{I}_1 &= 0.1\bar{V}_1 - 0.05\bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 &= -0.5\bar{V}_1 + 0.2\bar{V}_2, \quad 1 = 10\bar{I}_1 + \bar{V}_1, \quad \bar{I}_2 = -0.2\bar{V}_2 \\ \therefore -0.2\bar{V}_2 &= -0.5\bar{V}_1 + 0.2\bar{V}_2 \quad \therefore \bar{G}_V = \bar{V}_2 / \bar{V}_1 = \boxed{1.25} \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \bar{G}_I = \bar{I}_2 / \bar{I}_1 = \frac{(-0.5 + 0.2 \times 1.25)\bar{V}_1}{(0.1 - 0.005 \times 1.25)\bar{V}_1} = \boxed{-6.667}$$

$$\text{(c)} \quad G_P = 1.25 \times 6.667 = \boxed{8.333}$$

$$\text{(d)} \quad \bar{I}_1 = (0.1 - 0.05 \times 1.25)\bar{V}_1 \quad \therefore \bar{Z}_{in} = \bar{V}_1 / \bar{I}_1 = \boxed{26.67 \, \Omega}$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \bar{V}_s &= 0, \quad \bar{V}_1 = -10\bar{I}_1 \quad \therefore \bar{I}_1 = -0.1\bar{V}_1 = 0.1\bar{V}_1 - 0.05\bar{V}_2 \\ \therefore \bar{V}_1 &= 0.25\bar{V}_2, \quad \therefore \bar{I}_2 = -0.05(0.25\bar{V}_2) + 0.2\bar{V}_2 = 0.075\bar{V}_2 \quad \therefore \bar{Z}_{out} = \bar{V}_2 / \bar{I}_2 = 13.333 \, \Omega \end{aligned}$$

$$\text{(f)} \quad \bar{G}_{V,rev} = \bar{V}_1 / \bar{V}_2 = \boxed{0.25}$$

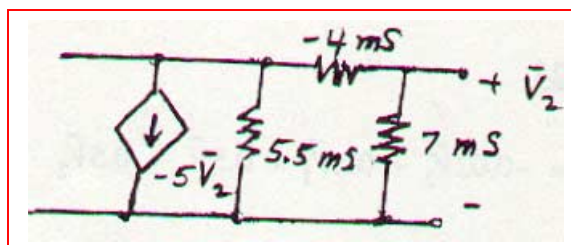
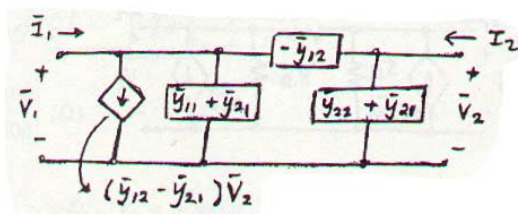
$$\begin{aligned} \text{(g)} \quad \text{With 2 port: } 1 &= 10\bar{I}_1 + 26.67\bar{I}_1 \\ \therefore 1 &= 36.67\bar{I}_1, \quad \bar{I}_1 = 1/36.67 \quad \therefore \bar{I}_2 = \frac{-6.667}{36.67} = -0.15182 \quad \therefore P_L = \frac{1}{2} \times I_2^2 \times 5 = 2.5(0.15182)^2 = 0.08264 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\text{Without 2 port: } P_L = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{15} \right)^2 \times 5 = 0.011111 \text{ W} \quad \therefore G_{ins} = \frac{0.08264}{0.011111} = \boxed{7.438}$$

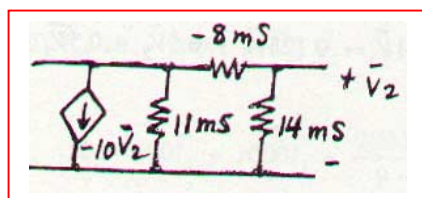
## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

21.

(a)



(b) 2 in ||:



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

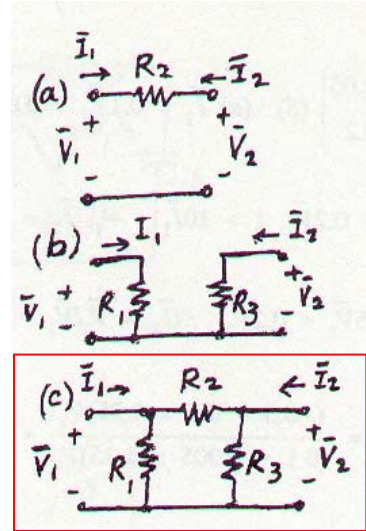
22.

$$(a) \quad \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{R_2}, \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{R_2} \quad [\bar{y}]_a = \begin{bmatrix} 1/R_2 & -1/R_2 \\ -1/R_2 & 1/R_2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad \bar{I}_1 = \bar{V}_1 / R_1, \quad \bar{I}_2 = \bar{V}_2 / R_3 \quad \therefore [\bar{y}]_b = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 \\ 0 & 1/R_3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{R_1} + \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{R_2} \quad \therefore [\bar{y}] = \begin{bmatrix} 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_2 \\ -1/R_2 & 1/R_3 + 1/R_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2}{R_3} + \frac{\bar{V}_2 - \bar{V}_1}{R_2}, \quad [\bar{y}]_a + [\bar{y}]_b = \begin{bmatrix} 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_2 \\ -1/R_2 & 1/R_3 + 1/R_2 \end{bmatrix}$$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

23.

$$\bar{V}_1 = 8\bar{I}_1 + 0.1\bar{V}_2 \quad \therefore \bar{V}_2 = 10\bar{V}_1 - 80\bar{I}_1$$

$$\bar{I}_2 = \bar{V}_2 / 12 + 0.05\bar{V}_1 \quad \therefore \bar{I}_2 = \frac{1}{12}(10\bar{V}_1 - 80\bar{I}_1) + 0.05\bar{V}_1$$

$$\therefore \bar{I}_2 = \left( \frac{5}{6} + \frac{1}{20} \right) \bar{V}_1 - \frac{20}{3} \bar{I}_1 = \frac{53}{60} \bar{V}_1 - \frac{20}{3} \bar{I}_1$$

$$\therefore \bar{V}_1 = \frac{60}{53} \left( \frac{20}{3} \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \right) = \frac{400}{53} \bar{I}_1 + \frac{60}{53} \bar{I}_2 \quad \therefore \bar{V}_2 = \frac{4000}{53} \bar{I}_1 + \frac{600}{53} \bar{I}_2 - 80\bar{I}_1$$

$$\therefore \bar{V}_2 = -\frac{240}{53} \bar{I}_1 + \frac{600}{53} \bar{I}_2 \quad \therefore [\bar{z}] = \begin{bmatrix} 7.547 & 1.1321 \\ -4.528 & 11.321 \end{bmatrix} (\Omega)$$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

24.

(a)  $\bar{I}_1 = -0.02\bar{V}_2 + 0.2\bar{V}_1 + 0.5\bar{V}_1 - 0.5\bar{V}_2$   
 $\therefore \bar{I}_1 = 0.7\bar{V}_1 - 0.52\bar{V}_2$   $\bar{I}_2 = 0.1\bar{V}_1 + 0.125\bar{V}_2 + 0.5\bar{V}_2 - 0.5\bar{V}_1$   
 $\therefore \bar{I}_2 = -0.4\bar{V}_1 + 0.625\bar{V}_2$

$$\therefore \bar{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{I}_1 & -0.52 \\ \bar{I}_2 & 0.625 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.7 & -0.52 \\ -0.4 & 0.625 \end{vmatrix}} = \frac{0.625\bar{I}_1 + 0.52\bar{I}_2}{0.2295} = 2.723\bar{I}_1 + 2.266\bar{I}_2, \bar{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.7 & \bar{I}_1 \\ -0.4 & \bar{I}_2 \end{vmatrix}}{0.2295}$$

$$\therefore \bar{V}_2 = \frac{0.4\bar{I}_1 + 0.7\bar{I}_2}{0.2295} = 1.7429\bar{I}_1 + 3.050\bar{I}_2 \quad \therefore [\bar{z}] = \begin{bmatrix} 2.723 & 2.266 \\ 1.7429 & 3.050 \end{bmatrix} (\Omega)$$

(b)  $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = 1 \text{ A} \quad \therefore \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{1.7429 + 3.050}{2.723 + 2.266} = 0.9607$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

$$25. \quad [\bar{z}] = \begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} (\Omega), R_s = 5\Omega, R_L = 2\Omega$$

$$(a) \quad \bar{V}_1 = 4\bar{I}_1 + 1.5\bar{I}_2, \bar{V}_2 = 10\bar{I}_1 + 3\bar{I}_2, \bar{V}_2 = -2\bar{I}_2 = 10\bar{I}_1 + 3\bar{I}_2 \therefore \bar{G}_1 = \bar{I}_2 / \bar{I}_1 = \boxed{-2}$$

$$(b) \quad \bar{G}_v = \bar{V}_2 / \bar{V}_1 = \frac{10\bar{I}_1 - 6\bar{I}_1}{4\bar{I}_1 - 3\bar{I}_1} = \boxed{4}$$

$$(c) \quad G_p = -\bar{G}_v \bar{G}_I = \boxed{8}$$

$$(d) \quad \bar{V}_1 = 4\bar{I}_1 - 3\bar{I}_1 = \bar{I}_1 \therefore \bar{Z}_{in} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \boxed{1 \Omega}$$

$$(e) \quad \bar{V}_1 = -5\bar{I}_1 = 4\bar{I}_1 + 1.5\bar{I}_2 \therefore \bar{I}_1 = -\frac{1}{6} \bar{I}_2 \therefore \bar{V}_2 = -\frac{10}{6} \bar{I}_2 + 3\bar{I}_2 = \frac{8}{6} \bar{I}_2 \therefore \bar{Z}_{out} = \boxed{1.3333 \Omega}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

$$26. \quad [\bar{z}] = \begin{bmatrix} 1000 & 100 \\ -2000 & 400 \end{bmatrix} (\Omega)$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \bar{V}_1 &= 1000\bar{I}_1 + 100\bar{I}_2, \quad \bar{V}_2 = -2000\bar{I}_1 + 400\bar{I}_2, \quad 10 = 200\bar{I}_1 + \bar{V}_1, \quad \bar{V}_2 = -500\bar{I}_2 \\ \therefore -500\bar{I}_2 &= -2000\bar{I}_1 + 400\bar{I}_2, \quad \bar{I}_2 = \frac{20}{9} \bar{I}_1; \quad \therefore 10 = 200\bar{I}_1 + 1000\bar{I}_1 + \frac{2000}{9} \bar{I}_1 \\ \therefore \bar{I}_1 &= 7.031 \text{ mA}, \quad \therefore \bar{I}_2 = \frac{20}{9} \bar{I}_1 = 15.625 \text{ mA} \quad \therefore P_{200} = 7.031^2 \times 200 \times 10^{-6} = \boxed{9.888 \text{ mW}} \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad P_{500} = 15.625^2 \times 500 \times 10^{-6} = \boxed{122.07 \text{ mW}}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad P_S &= 10\bar{I}_1 = 70.31 \text{ mW (gen)} \quad \therefore P_{2port} = P_S - P_{200} - P_{500} = 70.31 - 9.89 - 122.07 \quad \therefore \\ &\quad \therefore P_{2port} = \boxed{-61.65 \text{ mW}} \end{aligned}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

27.

$$\omega = 10^8, \quad \bar{I}_1 = 10^{-5} \bar{V}_1 + j5 \times 10^{-4} \bar{V}_1 + j10^{-4} (\bar{V}_1 - \bar{V}_2)$$

$$\therefore \bar{I}_1 = (10^{-5} + j6 \times 10^{-4}) \bar{V}_1 - j10^{-4} \bar{V}_2$$

$$\bar{I}_2 = 10^{-4} \bar{V}_2 + 0.01 \bar{V}_1 + j10^{-4} (\bar{V}_2 - \bar{V}_1)$$

$$\therefore \bar{I}_2 = (0.01 - j10^{-4}) \bar{V}_1 + (10^{-4} + j10^{-4}) \bar{V}_2$$

$$\therefore \bar{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{I}_1 & -j10^{-4} \\ \bar{I}_2 & 10^{-4} + j10^{-4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10^{-5} + j6 \times 10^{-4} & -j10^{-4} \\ 10^{-2} - j10^{-4} & 10^{-4} + 10^{-4} \end{vmatrix}} = \frac{(10^{-4} + j10^{-4}) \bar{I}_1 + j10^{-4} \bar{I}_2}{1.0621 \times 10^{-6} \angle 92.640^\circ} \therefore \begin{cases} \bar{z}_{11} = 133.15^\circ \angle -47.64^\circ \Omega \\ \bar{z}_{12} = 94.15^\circ \angle -2.642^\circ \Omega \end{cases}$$

$$\bar{V}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10^{-5} + j6 \times 10^{-4} & \bar{I}_1 \\ 10^{-2} - j10^{-4} & \bar{I}_2 \end{vmatrix}}{1.0621 \times 10^{-6} \angle 92.64^\circ} \therefore \begin{cases} \bar{z}_{21} = 9416 \angle 86.78^\circ \Omega \\ \bar{z}_{22} = 565.0 \angle -3.60^\circ \Omega \end{cases}$$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

28.

$$[\bar{z}] = \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 40 & 10 \end{bmatrix} (\Omega), \bar{V}_s = 100 \angle 0^\circ \text{ V}, R_s = 5 \Omega, R_L = 25 \Omega$$

$$100 = 5\bar{I}_1 + \bar{V}_1, \bar{V}_1 = 20\bar{I}_1 + 2\bar{I}_2 \therefore 100 = 25\bar{I}_1 + 2\bar{I}_2$$

$$\bar{V}_2 = 40\bar{I}_1 + 10\bar{I}_2 \therefore \bar{I}_1 = \frac{1}{40} \bar{V}_2 - \frac{1}{4} \bar{I}_2 \therefore 100 = \frac{25}{40} \bar{V}_2 - \frac{25}{4} \bar{I}_2 + 2\bar{I}_2$$

$$\therefore 100 = \frac{5}{8} \bar{V}_2 - \frac{17}{4} \bar{I}_2 \therefore \bar{V}_2 = 160 + \frac{8}{5} \times \frac{17}{4} \bar{I}_2 = 160 + 6.8\bar{I}_2$$

$$\therefore \bar{V}_{th} = 160 \text{ V}, R_{th} = 6.8 \Omega$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

$$29. \quad [\bar{h}] = \begin{bmatrix} 9\Omega & -2 \\ 20 & 0.2 \text{ S} \end{bmatrix}$$

$$(a) \quad \bar{V}_1 = 9\bar{I}_1 - 2\bar{V}_2, \quad \bar{I}_2 = 20\bar{I}_1 + 0.2\bar{V}_2, \quad \bar{V}_1' = 1\bar{I}_1 + \bar{V}_1 \quad \text{Eliminate } \bar{V}_1$$

$$\therefore \bar{V}_1 = \bar{V}_1' - \bar{I}_1 \quad \therefore \bar{V}_1' - \bar{I}_1 = 9\bar{I}_1 - 2\bar{V}_2, \quad \bar{V}_1' = 10\bar{I}_1 - 2\bar{V}_2 \quad \therefore [\bar{h}]_{new} = \begin{bmatrix} 10\Omega & -2 \\ 20 & 0.2 \text{ S} \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad \bar{V}_1 = 9\bar{I}_1 - 2\bar{V}_2, \quad \bar{I}_2 = 20\bar{I}_1 + 0.2\bar{V}_2, \quad \bar{V}_2' = 1\bar{I}_2 + \bar{V}_2$$

$$\text{Eliminate } \bar{V}_2 \quad \therefore \bar{V}_2 = \bar{V}_2' - \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = 9\bar{I}_1 - 2\bar{V}_2 + 2\bar{I}_2, \quad \bar{I}_2 = 20\bar{I}_1 + 0.2\bar{V}_2' - 0.2\bar{I}_2 \quad \therefore 1.2\bar{I}_2 = 20\bar{I}_1 + 0.2\bar{V}_2'$$

$$\therefore \bar{I}_2 = 16.667\bar{I}_1 + 0.16667\bar{V}_2' \quad \bar{V}_1 = 9\bar{I}_1 - 2\bar{V}_2' + 2(16.667\bar{I}_1 + 0.16667\bar{V}_2')$$

$$\therefore \bar{V}_1 = 42.33\bar{I}_1 - 1.6667\bar{V}_2' \quad \therefore [h]_{new} = \begin{bmatrix} 42.33\Omega & -1.6667 \\ 16.667 & 0.16667 \text{ S} \end{bmatrix}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

30.

$$R_s = 100\Omega, R_L = 500\Omega \quad [\bar{h}] = \begin{bmatrix} 100\Omega & 0.01 \\ 20 & 1 \text{ mS} \end{bmatrix}$$

$$\bar{Z}_{in}: \bar{V}_1 = 100\bar{I}_1 + 0.01\bar{V}_2, \bar{I}_2 = 20\bar{I}_1 + 0.001\bar{V}_2 = 20\bar{I}_1 - 0.5\bar{I}_2 \quad \therefore 1.5\bar{I}_2 = 20\bar{I}_1$$

$$\therefore \bar{V}_1 = 100\bar{I}_1 + 0.01(-500)\frac{20}{1.5} \bar{I}_1 = 33.33\bar{I}_1 \quad \therefore \boxed{\bar{Z}_{in} = 33.33\Omega}$$

$$\bar{Z}_{out}: \bar{V}_1 = -100\bar{I}_1 = 100\bar{I}_1 + 0.01\bar{V}_2 \quad \therefore \bar{I}_1 = \frac{0.01}{-200} \bar{V}_2$$

$$\bar{I}_2 = 20\left(\frac{0.01}{-200} \bar{V}_2\right) + 0.001 \bar{I}_2 = 0 \quad \therefore \boxed{\bar{Z}_{out} = \infty}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

31.

(a)  $\bar{h}_{12} = \bar{V}_1 / \bar{V}_2 \big|_{I_1=0}$  Let  $\bar{V}_2 = 1 \text{ V}$   
 $\therefore \bar{I}_{10} \downarrow = 0.1 \text{ A}, \bar{I}_1 = 0 \therefore \bar{I}_{4\Omega} \leftarrow = 0.2 \bar{I}_2$   
 $\therefore 0.1 = \bar{I}_2 - 0.2 \bar{I}_2 = 0.8 \bar{I}_2, \bar{I}_2 = 0.125 \text{ A}$   
 $\therefore \bar{V}_1 = 0.3 - 4(0.2)(0.125) + 1 = 1.2 \text{ V} \therefore \bar{h}_{12} = 1.2$

(b)  $\bar{z}_{12} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2} \bigg|_{I_1=0}$  From above,  $\bar{z}_{12} = \frac{1.2}{0.125} = 9.6 \Omega$

(c)  $\bar{y}_{12} = \bar{I}_1 / \bar{V}_2 \big|_{V_1=0}$  SC input Let  $\bar{V}_2 = 1 \text{ V}$   
 $\bar{I}_2 = 0.1 + \frac{1.3}{4} = 0.425 \text{ A}, \bar{I}_1 = 0.2(0.425) - \frac{1.3}{4}$   
 $\therefore \bar{I}_1 = -0.24 \text{ A} \therefore \bar{y}_{12} = 0.24 \text{ S}$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

$$32. \quad [\bar{h}] = \begin{bmatrix} 1000\Omega & -1 \\ 4 & 500\mu S \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (a) \quad 100 &= 200 \bar{I}_1 + 1000 \bar{I}_1 - \bar{V}_2 = 1200 \bar{I}_1 - \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 &= 4 \bar{I}_1 + 5 \times 10^{-4} \bar{V}_2 = -10^{-3} \bar{V}_2 \quad \therefore 4 \bar{I}_1 = -1.5 \times 10^{-3} \bar{V}_2 \\ \therefore \bar{V}_2 &= -\frac{4000}{1.5} \bar{I}_1 \quad \therefore 100 = 1200 \bar{I}_1 + \frac{4000}{1.5} \bar{I}_1 \quad \therefore \bar{I}_1 = 25.86 \text{ mA} \\ \therefore P_{200} &= 25.86^2 \times 10^{-6} \times 200 = \boxed{133.77 \text{ mW}} \end{aligned}$$

$$(b) \quad \bar{V}_2 = \frac{4000}{1.5} \times 25.86 \times 10^{-3} = 68.97 \text{ V} \quad \therefore P_{1K} = \frac{68.97^2}{1000} = \boxed{4.756 \text{ W}}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad P_s &= 100 \times 25.86 \times 10^{-3} = 2.586 \text{ W (gen)} \\ \therefore P_{2port} &= 2.586 - 0.1338 - 4.756 = \boxed{-2.304 \text{ W}} \end{aligned}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

33.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \bar{V}_1 &= 1000(\bar{I}_1 + 10^{-5} \bar{V}_2) = 1000\bar{I}_1 + 0.01\bar{V}_2 \\
 \bar{V}_2 &= 10^4 \bar{I}_2 - 100\bar{V}_1 \quad \therefore \bar{I}_2 = 10^{-4}(100\bar{V}_1 + \bar{V}_2) \\
 \therefore \bar{I}_2 &= 10^{-2}(1000\bar{I}_1 + 0.01\bar{V}_2) + 10^{-4}\bar{V}_2 \\
 \therefore \bar{I}_2 &= 10\bar{I}_1 + 2 \times 10^{-4} \bar{V}_2 \quad \therefore [\bar{h}] = \begin{bmatrix} 1000\Omega & 0.01 \\ 10 & 2 \times 10^{-4} \text{S} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \bar{V}_1 &= -200\bar{I}_1 = 1000\bar{I}_1 + 0.01\bar{V}_2 \\
 \therefore \bar{I}_1 &= \frac{-1}{12,000} \bar{V}_2 \quad \therefore \bar{I}_2 = 10\bar{I}_1 + 2 \times 10^{-4} \bar{V}_2 = \frac{-1}{12,000} \bar{V}_2 + \frac{1}{5000} \bar{V}_2 + 116.67 \times 10^{-6} \bar{V}_2 \\
 \therefore \bar{Z}_{out} &= \bar{V}_2 / \bar{I}_2 = 10^6 / 116.67 = 8.571 \text{ k}\Omega
 \end{aligned}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

34.

$$(a) \quad \begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bar{I}_1 R + \bar{V}_2 \quad \therefore \bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{R} - \frac{\bar{V}_2}{R} \\ \bar{I}_1 &= -\bar{I}_2 \quad \bar{I}_2 = -\frac{\bar{V}_1}{R} + \frac{\bar{V}_2}{R} \end{aligned} \quad [\bar{y}] = \begin{bmatrix} 1/R & -1/R \\ -1/R & 1/R \end{bmatrix}$$

$[z]$  parameters are all  $\infty$

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bar{I}_1 R + \bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 &= -\bar{I}_1 \end{aligned} \quad \therefore [\bar{h}] = \begin{bmatrix} R & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)  $[\bar{y}]$  parameters are  $\infty$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 \quad \bar{V}_1 = R\bar{I}_1 + R\bar{I}_2 \quad \therefore [\bar{z}] = \begin{bmatrix} R & R \\ R & R \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{R} - \bar{I}_2 \quad \bar{V}_2 = R\bar{I}_1 + R\bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2$$

$$\bar{I}_2 = -\bar{I}_1 + \frac{\bar{V}_2}{R} \quad \therefore [\bar{h}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1/R \end{bmatrix}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

$$35. \quad [\bar{y}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad [\bar{b}] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad [\bar{c}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\bar{d}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(a) \quad [\bar{y}][\bar{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 8 & 38 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad [\bar{b}][\bar{y}] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 16 \\ 14 & 22 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad [\bar{b}][\bar{c}] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 26 & 46 & -4 \\ -13 & 13 & 21 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad [\bar{c}][\bar{d}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 9 \\ -3 & -19 & 22 \end{bmatrix}$$

$$(e) \quad [\bar{y}][\bar{b}][\bar{c}][\bar{d}] = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 8 & 38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 & 9 \\ -3 & -19 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 64 & -34 \\ -138 & -738 & -908 \end{bmatrix}$$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

36.

(a)  $\bar{V}_1 = \bar{t}_{11} \bar{V}_2 - \bar{t}_{12} \bar{I}_2$ ,  $\bar{I}_1 = \bar{t}_{21} \bar{V}_2 - \bar{t}_{22} \bar{I}_2$

$$\bar{V}_1 = 10\bar{I}_1 + \bar{V}_2 - 1.5\bar{V}_1, \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_2}{20} + \frac{\bar{V}_2 - 1.5\bar{V}_1}{25} + \frac{\bar{V}_2 - 1.5\bar{V}_1 - \bar{V}_1}{10}$$

$$\therefore \bar{I}_2 = 0.19\bar{V}_2 - 0.31\bar{V}_1, \quad \bar{V}_1 = \frac{0.19}{0.31} \bar{V}_2 - \frac{1}{0.31} \bar{I}_2$$

$$\therefore \bar{V}_1 = 0.6129\bar{V}_2 - 3.226 \bar{I}_2$$

Then,  $10\bar{I}_1 = \bar{V}_1 - (\bar{V}_2 - 1.5\bar{V}_1) = 2.5(0.6129\bar{V}_2 - 3.226\bar{I}_2) - \bar{V}_2$

$$\therefore \bar{I}_1 = 0.05323\bar{V}_2 - 0.8065 \bar{I}_2 \quad \therefore [\bar{t}] = \begin{bmatrix} 0.6129 & 3.226\Omega \\ 0.05323S & 0.8065^- \end{bmatrix}$$

(b) Let  $R_s = 15 \Omega$

$$\therefore \bar{V}_1 = 0.06129\bar{V}_2 - 3.226\bar{I}_2, \quad \bar{I}_1 = 0.05323\bar{V}_2 - 0.8065\bar{I}_2, \quad \bar{V}_1 = -15\bar{I}_1$$

$$\therefore -15\bar{I}_1 = -15(0.05323\bar{V}_2 - 0.8065\bar{I}_2) = 0.6129\bar{V}_2 - 3.226\bar{I}_2$$

$$\therefore 1.4114\bar{V}_2 = 15.324\bar{I}_2 \quad \therefore \bar{Z}_{out} = \bar{V}_2 / \bar{I}_2 = 10.857\Omega$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

37.

$$\bar{V}_1 = 5\bar{I}_1 - 0.3\bar{V}_1 + \bar{V}_2 \quad \therefore 1.3\bar{V}_1 = 5\bar{I}_1 + \bar{V}_2$$

$$\bar{I}_1 = 0.1\bar{V}_2 + \bar{V}_2/4 - \bar{I}_2 \quad \therefore \bar{I}_1 = 0.35\bar{V}_2 - \bar{I}_2$$

$$\therefore 1.3\bar{V}_1 = 5(0.35\bar{V}_2 - \bar{I}_2) + \bar{V}_2 = 2.75\bar{V}_2 - 5\bar{I}_2$$

$$\therefore \bar{V}_1 = 2.115\bar{V}_2 - 3.846\bar{I}_2 \quad \therefore [\bar{t}] = \begin{bmatrix} 2.115\Omega & 3.846\Omega \\ 0.35\text{ S} & 1 \end{bmatrix}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

38.

$$(a) \quad \bar{V}_1 = 2\bar{I}_1 + \bar{V}_2 \quad \therefore \bar{I}_1 = 0.2\bar{V}_2 - \bar{I}_2$$

$$\bar{I}_2 = 0.2\bar{V}_2 - \bar{I}_1 \quad \therefore \bar{V}_1 = 1.4\bar{V}_2 - 2\bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = 3\bar{I}_1 + \bar{V}_2 \quad \therefore \bar{I}_1 = \frac{1}{6} \bar{V}_2 - \bar{I}_2 \quad \therefore [\bar{t}]_A = \begin{bmatrix} 1.4 & 2\Omega \\ 0.2 \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{6} \bar{V}_2 - \bar{I}_1 \quad \therefore \bar{V}_1 = 1.5\bar{V}_2 - 3\bar{I}_2 \quad \therefore [\bar{t}]_B = \begin{bmatrix} 1.5 & 3\Omega \\ \frac{1}{6} \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{V}_1 = 4\bar{I}_1 + \bar{V}_2 \quad \therefore \bar{I}_1 = \frac{1}{7} \bar{V}_2 - \bar{I}_2 \quad [\bar{t}]_C = \begin{bmatrix} 11/7 & 4\Omega \\ 1/7 \text{ S} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_R = \frac{1}{7} \bar{V}_2 - \bar{I}_1 \quad \bar{V}_1 = \frac{11}{7} \bar{V}_2 - 4\bar{I}_2$$

$$(b) \quad [\bar{t}] = [\bar{t}]_A [\bar{t}]_B [\bar{t}]_C = \begin{bmatrix} 1.4 & 2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 3 \\ 1/6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11/7 & 4 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.433 & 6.2 \\ 0.4667 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11/7 & 4 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [\bar{t}] = \begin{bmatrix} 4.710 & 15.933\Omega \\ 0.9619 \text{ S} & 3.467 \end{bmatrix}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

39.

(a)  $\bar{V}_1 = 2\bar{I}_1 + \bar{V}_2 = -2\bar{I}_2 + \bar{V}_2 = \bar{V}_2 - 2\bar{I}_2 \quad \therefore [\bar{t}]_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\bar{I}_1 = -\bar{I}_2$$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10\Omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^5 \quad \text{Also, } 10 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

40.

$$(a) \quad \bar{V}_1 = \bar{V}_2 \quad \therefore [\bar{t}]_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/R & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_1 = \bar{V}_2 / R - \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 - R\bar{I}_2 \quad \therefore [\bar{t}]_b = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_1 = -\bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 / a \quad \therefore [\bar{t}]_c = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_1 = -a\bar{I}_2$$

$$(b) \quad [\bar{t}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.02 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [\bar{t}] = \begin{bmatrix} 1.2 & 2 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.02 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 14 \\ 0.025 & 4.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.02 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.58 & 14\Omega \\ 0.115 \text{ S} & 4.5 \end{bmatrix}$$

## CHAPTER SEVENTEEN (TWO-PORT) SOLUTIONS

41.

$$(a) \quad \bar{I}_1 = 0.1\bar{V}_x, -0.1\bar{V}_x + 0.02(\bar{V}_1 - \bar{V}_x) + 0.2(\bar{V}_1 - \bar{V}_x - \bar{V}_2) = 0$$

$$\bar{I}_2 = 0.08\bar{V}_x + 0.2(\bar{V}_2 - \bar{V}_1 + \bar{V}_x)$$

$$\therefore 0.32\bar{V}_x = 0.22\bar{V}_1 - 0.2\bar{V}_2 \quad \therefore \bar{V}_x = \frac{11}{16}\bar{V}_1 - \frac{5}{8}\bar{V}_2$$

$$\therefore \bar{I}_1 = \frac{11}{160}\bar{V}_1 - \frac{1}{16}\bar{V}_2 \quad \text{Also, } \bar{I}_2 = 0.28\left(\frac{11}{16}\bar{V}_1 - \frac{5}{8}\bar{V}_2\right) + 0.2\bar{V}_2 - 0.2\bar{V}_1$$

$$\therefore \bar{I}_2 = -\frac{3}{400}\bar{V}_1 + \frac{1}{40}\bar{V}_2 \quad \therefore \bar{V}_1 = \frac{10}{3}\bar{V}_2 - \frac{400}{3}\bar{I}_2 \quad [\bar{t}] = \begin{bmatrix} 3.333 & 133.33\Omega \\ 0.16667\text{S} & 9.17 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \bar{I}_1 = \frac{11}{160}\left(\frac{10}{3}\bar{V}_2 - \frac{400}{3}\bar{I}_2\right) - \frac{1}{16}\bar{V}_2 = \frac{1}{6}\bar{V}_2 - \frac{55}{6}\bar{I}_2 \quad \therefore [\bar{t}] = \begin{bmatrix} 3.333 & 133.33\Omega \\ 0.16667\text{S} & 9.167 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.05 & 1 \end{bmatrix} \therefore [\bar{t}]_{\text{new}} = \begin{bmatrix} 10/3 & 400/3 \\ 1/6 & 55/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.05 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 133.33\Omega \\ 0.625\text{S} & 9.167 \end{bmatrix}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

1.

$$v(t) = 3 - 3\cos(100\pi t - 40^\circ) + 4\sin(200\pi t - 10^\circ) + 2.5\cos 300\pi t \text{ V}$$

$$(a) \quad V_{av} = 3 - 0 + 0 + 0 = 3.000 \text{ V}$$

$$(b) \quad V_{eff} = \sqrt{3^2 + \frac{1}{2}(3^2 + 4^2 + 2.5^2)} = 4.962 \text{ V}$$

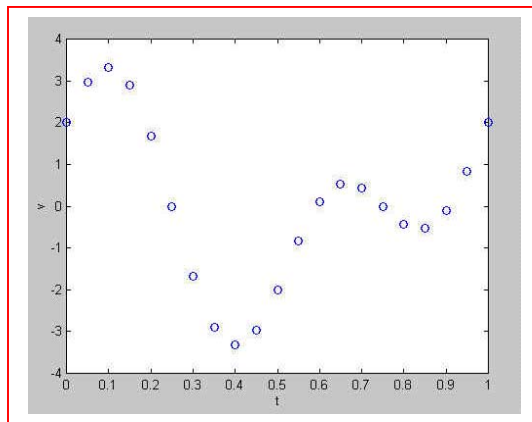
$$(c) \quad T = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{100\pi} = 0.02 \text{ s}$$

$$(d) \quad v(18\text{ms}) = 3 - 3\cos(-33.52^\circ) + 4\sin(2.960^\circ) + 2.5\cos(19.440^\circ) = -2.459 \text{ V}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

2. (a)

| t    | v      | t    | v      |
|------|--------|------|--------|
| 0    | 2      | 0.55 | -0.844 |
| 0.05 | 2.96   | 0.6  | 0.094  |
| 0.1  | 3.33   | 0.65 | 0.536  |
| 0.15 | 2.89   | 0.7  | 0.440  |
| 0.2  | 1.676  | 0.75 | 0      |
| 0.25 | 0      | 0.8  | -0.440 |
| 0.3  | -1.676 | 0.85 | -0.536 |
| 0.35 | -2.89  | 0.9  | -0.094 |
| 0.4  | -3.33  | 0.95 | 0.844  |
| 0.45 | -2.96  | 1    | 2      |
| 0.5  | -2     |      |        |



- (b)  $v' = -4\pi \sin 2\pi t + 7.2\pi \cos 4\pi t = 0$   
 $\therefore 4 \sin 2\pi t = 7.2(\cos^2 2\pi t - \sin^2 2\pi t)$   
 $\therefore 4 \sin 2\pi t = 7.2(1 - 2 \sin^2 2\pi t) \therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 414.72}}{28.8} = 0.5817, -0.8595 = \sin 2\pi t$   
 $\therefore t = 0.09881, 0.83539 \therefore v_{\max} = 3.330 (0.5593 \text{ for smaller max})$
- (c)  $|v_{\min}| = 3.330$



## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

3.

(a)  $T = 10 \text{ s}$ ,  $F_{av} = a_o = 0.1(2 \times 4 + 2 \times 2) = \boxed{1.200}$

(b) 
$$F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{5} \int_0^2 (4-t)^2 dt} = \sqrt{0.2 \int_0^2 (16-8t+t^2) dt}$$

$$= \sqrt{0.2 \left[ 16t \Big|_0^2 - 4t^2 \Big|_0^2 + \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^2 \right]} = \sqrt{0.2 \left( 32 - 16 + \frac{8}{3} \right)} = \boxed{1.9322}$$

(c) 
$$a_3 = \frac{2}{10} \times 2 \int_0^2 (4-t) \cos 3 \times \frac{2\pi t}{10} dt = 0.4 \int_0^2 4 \cos 0.6\pi t dt - 0.4 \int_0^2 t \cos 0.6\pi t dt$$

$$= 1.6 \frac{1}{0.6\pi} \sin 0.6\pi t \Big|_0^2 - 0.4 \left( \frac{1}{0.36\pi^2} \cos 0.6\pi t + \frac{t}{0.6\pi} \sin 0.6\pi t \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{8}{3\pi} \sin 1.2\pi - \frac{10}{9\pi^2} (\cos 1.2\pi - 1) - \frac{4}{3\pi} \sin 1.2\pi = \boxed{-0.04581}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

4.

(a)  $T = 8 - 2 = 6 \text{ s}$

(b)  $f_o = \frac{1}{6} \text{ Hz}$

(c)  $\omega_o = 2\pi f_o = \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$

(d)  $a_o = \frac{1}{6}(10 \times 1 + 5 \times 1) = 2.5$

(e) 
$$b_2 = \frac{2}{6} \left[ \int_2^3 10 \sin \frac{2\pi t}{3} dt + \int_3^4 5 \sin \frac{2\pi t}{3} dt \right]$$
$$= \frac{1}{3} \left[ -\frac{30}{2\pi} \cos \frac{2\pi t}{3} \Big|_2^3 - \frac{15}{2\pi} \cos \frac{2\pi t}{3} \Big|_3^4 \right]$$
$$\therefore b_2 = \frac{1}{3} \left[ -\frac{15}{\pi} \left( \cos 2\pi - \cos \frac{4\pi}{3} \right) - \frac{7.5}{\pi} \left( \cos \frac{8\pi}{3} - \cos 2\pi \right) \right] = \frac{1}{3} \left[ -\frac{15}{\pi} (1.5) - \frac{7.5}{\pi} (-1.5) \right] = -1.1937$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

5.

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{2}{6} \left[ \int_2^3 10 \cos \frac{6\pi t}{6} dt + \int_3^4 5 \cos \frac{6\pi t}{6} dt \right] = \frac{1}{3} \left[ \frac{10}{\pi} \sin \pi t \Big|_2^3 - \frac{5}{\pi} \sin \pi t \Big|_3^4 \right] \\
 &= \frac{10}{3\pi} \left( \sin 3\pi - \sin 2\pi + \frac{1}{2} \sin 4\pi - \frac{1}{2} \sin 3\pi \right) = 0 \\
 b_3 &= \frac{1}{3} \left[ \int_2^3 10 \sin \pi t dt + \int_3^4 5 \sin \pi t dt \right] = \frac{1}{3} \left[ -\frac{10}{\pi} \cos \pi t \Big|_2^3 - \frac{5}{\pi} \cos \pi t \Big|_3^4 \right] \\
 &= -\frac{10}{3\pi} \left( \cos 3\pi - \cos 2\pi + \frac{1}{2} \cos 4\pi - \frac{1}{2} \cos 3\pi \right) = -\frac{10}{3\pi} (-1) = 1.0610 \\
 \sqrt{a_3^2 + b_3^2} &= 1.0610
 \end{aligned}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

6.

(a)  $3.8 \cos^2 80\pi t = 1.9 + 1.9 \cos 160\pi t$ ,  $T = \frac{2\pi}{160\pi} = 12.5 \text{ ms}$ , ave value = 1.9

(b)  $3.8 \cos^3 80\pi t = (3.8 \cos 80\pi t)(0.5 + 0.5 \cos 160\pi t)$   
 $= 1.9 \cos 80\pi t + 0.95 \cos 240\pi t + 0.95 \cos 80\pi t = 2.85 \cos 80\pi t + 0.95 \cos 240\pi t$   
 $T = \frac{2\pi}{80\pi} = 25 \text{ ms}$ , ave value = 0

(c)  $3.8 \cos 70\pi t - 3.8 \sin 80\pi t$ ;  $\omega_o t = \pi t$ ,  $\omega_o = \pi$ ,  $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$ ; ave value = 0



## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

7.  $T = 2 \text{ s}$

(a) 
$$b_4 = \frac{2}{2} \int_0^{t_1} \sin \frac{4 \times 2\pi t}{2} dt = -\frac{1}{4\pi} \cos 4\pi t \Big|_0^{t_1}$$

$$\therefore b_4 = \frac{1}{4\pi} (1 - \cos 4\pi t_1)$$

$$\text{max when } 4\pi t_1 = \frac{\pi}{2}, t_1 = 0.125 \text{ s}$$

(b) 
$$b_4 = \frac{1}{4\pi}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

8.

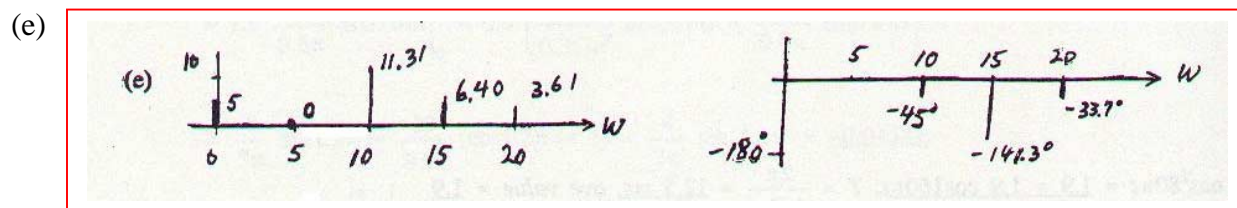
$$g(t) = 5 + 8 \cos 10t - 5 \cos 15t + 3 \cos 20t - 8 \sin 10t - 4 \sin 15t + 2 \sin 20t$$

(a)  $\omega_o = 5 \therefore T = \frac{2\pi}{5} = 1.2566 \text{ s}$

(b)  $f_o = \frac{5}{2\pi} \beta = 4 f_o = \frac{10}{\pi} = 3.183 \text{ Hz}$

(c)  $G_{av} = -5$

(d)  $G_{eff} = \sqrt{(-5)^2 + \frac{1}{2}(8^2 + 5^2 + 3^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2)} = \sqrt{116} = 10.770$



## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

9.

$$T = 0.2, f(t) = V_m \cos 5\pi t, -0.1 < t < 0.1$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{0.2} \int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \cos 10n\pi t \, dt = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} [\cos(5\pi + 10n\pi)t + \cos(10n\pi - 5\pi)t] \, dt \\ &= 5V_m \left[ \frac{1}{10n\pi + 5\pi} \sin(10n\pi + 5\pi)t + \frac{1}{10n\pi - 5\pi} \sin(10n\pi - 5\pi)t \right]_{-0.1}^{0.1} \\ &= \frac{V_m}{\pi} \left[ \frac{2}{2n+1} \sin(10n\pi + 5\pi)0.1 + \frac{2}{2n-1} \sin(10n\pi - 5\pi)0.1 \right] \\ &= \frac{V_m}{\pi} \left[ \frac{2}{2n+1} \sin(n\pi + 0.5\pi) + \frac{2}{2n-1} \sin(n\pi - 0.5\pi) \right] \\ &= \frac{V_m}{\pi} \left[ \frac{2}{2n+1} \cos n\pi + \frac{2}{2n-1} (-\cos n\pi) \right] = \frac{2V_m}{\pi} \cos n\pi \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= \frac{2V_m}{\pi} \cos n\pi \frac{2n-1-2n-1}{4n^2-1} = -\frac{4V_m}{\pi} \frac{\cos n\pi}{4n^2-1} \end{aligned}$$

$$a_o = \frac{1}{0.2} \int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \, dt = 5V_m \frac{1}{5\pi} \left[ \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{2V_m}{\pi}$$

$$\therefore v(t) = \frac{2V_m}{\pi} + \frac{4V_m}{3\pi} \cos 10\pi t - \frac{4V_m}{15\pi} \cos 20\pi t + \frac{4V_m}{35\pi} \cos 30\pi t - \frac{4V_m}{63\pi} \cos 40\pi t + \dots$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

10.

(a)  $\text{even, } \frac{1}{2} - \text{wave}$

(b)  $b_n = 0 \text{ for all } n; a_{\text{even}} = 0; a_o = 0$

(c)  $b_1 = b_2 = b_3 = 0, a_2 = 0$

$$a_n = \frac{8}{12} \int_1^2 5 \cos \frac{n\pi t}{6} dt = \frac{10}{3} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi t}{6} \Big|_1^2 = \frac{20}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{6} \right)$$

$$\therefore a_1 = \frac{20}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2.330, a_3 = \frac{20}{3\pi} \left( \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{20}{3\pi} = -2.122$$



## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

11.

(a)  $a_o = a_n = 0$

$$\therefore y(t) = 0.2 \sin 1000\pi t + 0.6 \sin 2000\pi t + 0.4 \sin 3000\pi t$$

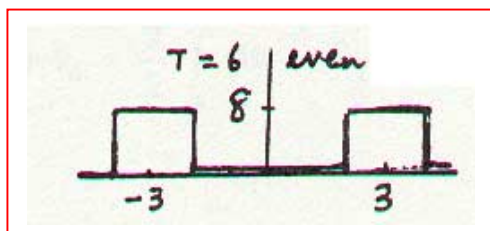
(b)  $Y_{eff} = \sqrt{0.5(0.2^2 + 0.6^2 + 0.4^2)} = \sqrt{0.5(0.56)} = 0.5292$

(c)  $y(2\text{ms}) = 0.2 \sin 0.2\pi + 0.6 \sin 0.4\pi + 0.4 \sin 0.6\pi = 1.0686$

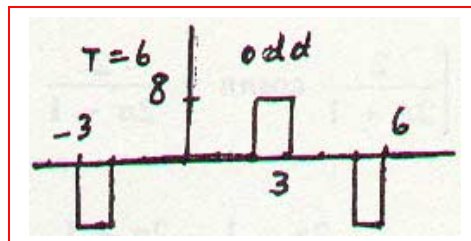
# CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

12.

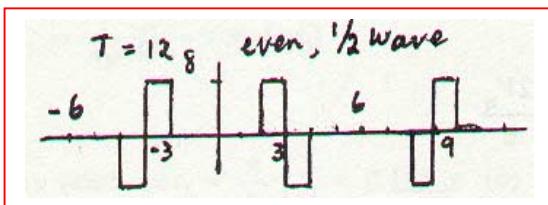
(a)



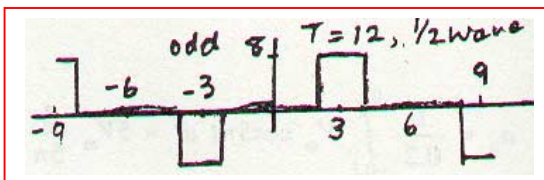
(b)



(c)



(d)



(e)  $[a]b_5 = 0, a_5 = \frac{4}{6} \int_2^3 8 \cos \frac{2\pi 5t}{6} dt = \frac{32}{6} \frac{6}{10\pi} \sin \frac{5\pi t}{3} \Big|_2^3 = \frac{3.2}{\pi} \left( \sin \frac{15\pi}{3} - \sin \frac{10\pi}{3} \right) = 0.8821$

$[b]a_5 = 0, b_5 = \frac{4}{6} \int_2^3 8 \sin \frac{2\pi 5t}{6} dt = \frac{32}{6} \left( \frac{-6}{10\pi} \right) \left( \cos \frac{15\pi}{3} - \cos \frac{10\pi}{3} \right) = -\frac{3.2}{\pi} (-0.5) = 0.5093$

$[c]b_5 = 0, a_5 = \frac{8}{12} \int_2^3 8 \cos \frac{2\pi 5t}{12} dt = \frac{64}{12} \frac{12}{10\pi} \left( \sin \frac{15\pi}{6} - \sin \frac{10\pi}{6} \right) = 3.801$

$[d]a_5 = 0, b_5 = \frac{8}{12} \int_2^3 8 \sin \frac{10\pi t}{12} dt = \frac{64}{12} \left( -\frac{12}{10\pi} \right) \left( \cos \frac{15\pi}{6} - \cos \frac{10\pi}{6} \right) = 1.0186$

# CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

13.

T = 4 ms

$$(a) \quad a_o = \frac{1000}{4} \int_0^{0.004} 8 \sin 125\pi t \, dt = \frac{250 \times 8}{-125\pi} \cos 125\pi t \Big|_0^{0.004}$$

$$= -\frac{16}{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{16}{\pi} = 5.093$$

$$(b) \quad a_1 = 4000 \int_0^{0.004} \sin 125\pi t \cos \frac{2\pi t}{0.004} \, dt$$

$$\therefore a_1 = 4000 \int_0^{0.004} \sin 125\pi t \cos 500\pi t \, dt = 2000 \int_0^{0.004} (\sin 625\pi t - \sin 375\pi t) \, dt$$

$$= 2000 \left( -\frac{\cos 625\pi t}{625\pi} + \frac{\cos 375\pi t}{375\pi} \right) \Big|_0^{0.004} = \frac{3.2}{\pi} (1 - \cos 2.5\pi) - \frac{5.333}{\pi} (1 - \cos 1.5\pi) = -0.6791$$

$$b_1 = 4000 \int_0^{0.004} \sin 125\pi t \sin 500\pi t \, dt = 2000 \int_0^{0.004} (\cos 375\pi t - \cos 625\pi t) \, dt$$

$$= 2000 \left[ \frac{1}{375\pi} (\sin 1.5\pi) - \frac{1}{625\pi} (\sin 2.5\pi) \right] = 2000 \left( \frac{-1}{375\pi} - \frac{1}{625\pi} \right) = -2.716$$

$$(c) \quad -4 < t < 0: 8 \sin 125\pi t$$

$$(d) \quad b_1 = 0, \quad a_1 = \frac{4000}{8} \int_0^{0.004} 8 \sin 125\pi t \cos 250\pi t \, dt$$

$$\therefore a_1 = 2000 \int_0^{0.004} [\sin 375\pi t - \sin 125\pi t] \, dt = 2000 \left[ -\frac{\cos 375\pi t}{375\pi} + \frac{\cos 125\pi t}{125\pi} \right] \Big|_0^{0.004}$$

$$= \frac{5.333}{\pi} (1 - \cos 1.5\pi) + \frac{16}{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{2} - 1 \right) = -3.395^+$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

14.

odd and  $\frac{1}{2}$ -wave  $\therefore a_o = 0, a_n = 0, b_{even} = 0$

$$T = 10ms = 0.01s$$

$$b_{odd} = \frac{8}{0.01} \left[ \int_0^{0.001} 10 \sin 200n\pi t \, dt \right] = 8000 \left( \frac{-1}{200n\pi} \right) \cos 200n\pi t \Big|_0^{0.001}$$

$$\therefore b_{odd} = -\frac{40}{n\pi} (\cos 0.2n\pi - 1) = \frac{40}{n\pi} (1 - \cos 0.2n\pi)$$

$$\therefore b_1 = 2.432, b_3 = 5.556, b_5 = 5.093, b_7 = 2.381, b_9 = 0.2702$$



## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

15.

$$\text{odd and } \frac{1}{2} - \text{wave, } T = 8 \text{ ms} \therefore b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_o t \, dt$$

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} = 250\pi \therefore b_n = 1000 \int_0^{0.001} 1000t \sin 250\pi n t \, dt$$

$$\text{Now, } \int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2} (\sin ax - ax \cos ax), \, a = 250n\pi$$

$$f(t) = 10^3 t \therefore b_n = \frac{10^6}{250^2 n^2 \pi^2} (\sin 250n\pi t - 250n\pi t \cos 250n\pi t)_0^{0.001}$$

$$\therefore b_n = \frac{16}{n^2 \pi^2} \left( \sin \frac{n\pi}{4} - 0 - \frac{n\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{4} + 0 \right) \therefore b_1 = \frac{16}{\pi^2} \left( \sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \right) = \boxed{0.2460}$$

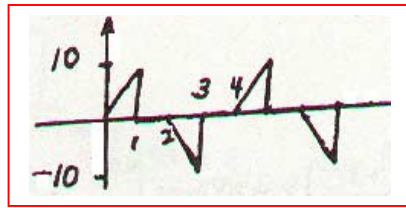
$$b_3 = \frac{16}{9\pi^2} \left( \sin \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} \right) = 0.4275^-; \, b_5 = \frac{16}{25\pi^2} \left( \sin \frac{5\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} \cos \frac{5\pi}{4} \right) = \boxed{0.13421}$$

$$b_{\text{even}} = \boxed{0}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

16.

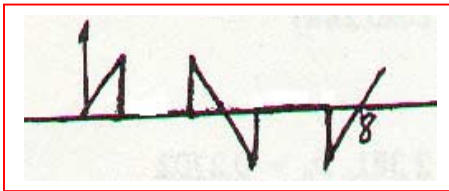
(a) odd,  $T = 4$



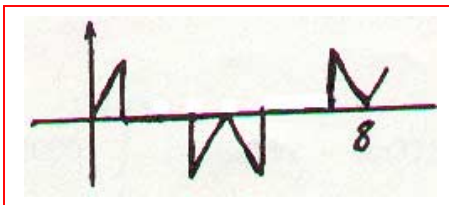
(b) even,  $T = 4$ :



(c) odd,  $\frac{1}{2}$ -wave:  $T = 8$



(d) even,  $\frac{1}{2}$ -wave,  $T = 8$ :



# CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

17.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad v_s &= 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{1, \text{odd}} \frac{1}{n} \sin \frac{2\pi n t}{0.4\pi} \quad \therefore v_{sn} = \frac{20}{n\pi} \sin 5nt, \quad \bar{V}_{sn} = \frac{20}{n\pi} (-j1) \\
 Z_n &= 4 + j5n2 = 4 + j10n, \quad \bar{I}_{fn} = \frac{\bar{V}_{sn}}{Z_n} = \frac{-j20}{n\pi(4 + j10n)} = -\frac{j5}{1 + j2.5n} \\
 \therefore \bar{I}_{fn} &= -\frac{j5}{n\pi} \frac{1 - j2.5n}{1 + 6.25n^2} = -\frac{12.5 + j5}{n\pi(1 + 6.25n^2)} \\
 \therefore i_{fn} &= -\frac{12.5}{\pi} \frac{1}{1 + 6.25n^2} \cos 5nt + \frac{5}{n\pi} \frac{1}{1 + 6.25n^2} \sin 5nt \\
 \therefore i_f &= 1.25 + \sum_{1, \text{odd}} \frac{1}{1 + 6.25n^2} \left[ -\frac{12.5}{\pi} \cos 5nt + \frac{5}{n\pi} \sin 5nt \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad i_n &= Ae^{-2t}, \quad i = i_f + i_n, \quad i(0) = 0, \quad i_f(0) = 1.25 + \sum_{1, \text{odd}} \frac{1}{1 + 6.25n^2} \left( -\frac{12.5}{\pi} \right) \\
 \therefore i_f(0) &= 1.25 - \frac{2}{\pi} \sum_{1, \text{odd}} \frac{1}{n^2 + 0.16} = 1.25 - \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4 \times 0.4} \tanh 0.2\pi = 0.55388 \\
 \therefore A &= -0.55388, \quad i = -0.55388e^{-2t} + 1.25 + \sum_{1, \text{odd}} \frac{1}{1 + 6.25n^2} \left[ -\frac{12.5}{\pi} \cos 5nt + \frac{5}{n\pi} \sin 5nt \right]
 \end{aligned}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

18.

(a)  $0 < t < 0.2\pi: i = 2.5(1 - e^{-2t}) \therefore i(0.2\pi) = 2.5(1 - e^{-0.4\pi}) = 1.78848 \text{ A}$

(b)  $0.2\pi < t < 0.4\pi: i = 1.78848 e^{-2(t-0.2\pi)} \therefore i(0.4\pi) = 0.50902 \text{ A}$

(c)  $0.4\pi < t < 0.6\pi: i = 2.5 - (2.5 - 0.50902)e^{-2(t-0.4\pi)}, i(0.6\pi) = 1.9335 \text{ A}$



# CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

19.

$$(a) \quad v_s = 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{1, \text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 5nt$$

$$v_{sn} = \frac{20}{n\pi} \sin 5nt$$

$$\bar{V}_{sn} = -j \frac{20}{n\pi}$$

$$\bar{Z}_n = 2 + \frac{1}{j5n2} = 2 + \frac{1}{j10n} \quad \therefore \bar{V}_{cn} = \frac{-j20/n\pi}{2 + 1/j10n} \times \frac{1}{j10n} = \frac{-j20/n\pi}{1 + j20n} \times \frac{1 - j20n}{1 - j20n}$$

$$\therefore \bar{V}_{cn} = \frac{-20n - j1}{1 + 400n^2} \times \frac{20}{n\pi}, \quad v_{cn} = \frac{20}{n\pi} \frac{1}{1 + 400n^2} (-20n \cos 5nt + \sin 5nt)$$

$$\therefore v_{cf} = 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{1, \text{odd}}^{\infty} \frac{1}{1 + 400n^2} \left( \frac{1}{n} \sin 5nt - 20 \cos 5nt \right)$$

$$(b) \quad v_n = Ae^{-t/4}$$

$$(c) \quad v_c(0) = A + 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{1, \text{odd}}^{\infty} \frac{-20}{1 + 400n^2} = A + 5 - \frac{1}{\pi} \sum_{1, \text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (1/20)^2}$$

$$\sum_{1, \text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (1/20)^2} = \frac{\pi}{4(1/20)} \tanh \frac{\pi}{20 \times 2} = 5\pi \tanh \frac{\pi}{40} = 1.23117$$

$$\therefore A = 0 - 5 + \frac{1}{\pi} \times 1.23117 = -4.60811$$

$$\therefore v_c(t) = -4.60811e^{-t/4} + 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{1, \text{odd}}^{\infty} \frac{1}{1 + 400n^2} \left( \frac{1}{n} \sin 5nt - 20 \cos 5nt \right)$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

20.

$$\begin{aligned}
 c_3 &= \frac{10^3}{6} \left[ \int_0^{0.001} 100e^{-j3 \times 2\pi t / 6 \times 10^{-3}} - \int_{0.003}^{0.005} 100e^{-j100\pi t} \right] \\
 &= \frac{10^5}{6} \left[ \frac{-1}{j1000\pi} e^{-j1000\pi t} \Big|_0^{0.001} + \frac{1}{j1000\pi} e^{-j1000\pi t} \Big|_{0.003}^{0.005} \right] \\
 &= \frac{100}{j6\pi} (e^{-j\pi} + 1 + e^{-j5\pi} - e^{-j3\pi}) = \frac{100}{j6\pi} (1 + 1 - 1 + 1) = -j10.610
 \end{aligned}$$

$$\therefore c_{-3} = j10.610; |c_3| = 10.610$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{2 \times 10^3}{6} \left[ \int_0^{0.001} 100 \cos 100\pi t \, dt - \int_{0.003}^{0.005} 100 \cos 1000\pi t \, dt \right] \\
 &= \frac{2 \times 10^5}{6} \frac{1}{1000\pi} (\sin \pi - 0 - \sin 5\pi + \sin 3\pi) = 0
 \end{aligned}$$

$$c_3 = \frac{1}{2}(a_3 - jb_3) = -j\frac{1}{2}b_3 \quad \therefore b_3 = 21.22 \text{ and } \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 21.22$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

21.

$$(a) \quad T = 5 \text{ ms } c_m = \frac{1}{0.005} \left[ \int_0^{0.001} 10^5 t e^{-j400\pi nt} dt + \int_{0.001}^{0.002} 100 e^{-j400\pi nt} dt \right]$$

$$\therefore c_n = 20,000 \left[ \int_0^{0.001} 1000t e^{-j400\pi nt} dt + \int_{0.001}^{0.002} e^{-j400\pi nt} dt \right]$$

$$\therefore c_n = 20,000 \left[ \frac{e^{-j400\pi nt}}{160n^2\pi^2} (j400\pi nt + 1) \Big|_0^{0.001} + \frac{1}{-j400\pi n} e^{-j400\pi nt} \Big|_{0.001}^{0.002} \right]$$

$$(b) \quad \therefore c_o = a_o = (50 \times 10^{-3} + 100 \times 10^{-3}) \frac{1}{0.005} = 0.15 \times 200 = \boxed{30}$$

$$c_1 = 20,000 \left[ \frac{1}{160\pi^2} e^{-j0.4\pi} (1 + j0.4\pi) - \frac{1}{160\pi^2} - \frac{1}{j400\pi} (e^{-j0.8\pi} - e^{-j0.4\pi}) \right]$$

$$= \frac{125}{\pi^2} (1 \angle -72^\circ) (1.60597 \angle 51.488^\circ) - 12.66515 + 15.91548 \angle 90^\circ (1 \angle -144^\circ - 1 \angle -72^\circ)$$

$$= 12.665 (1 \angle -72^\circ) (1 + j1.2566) - 12.665 + j15.915 (1 \angle -144^\circ - 1 \angle -72^\circ)$$

$$= 20.339 \angle -20.513^\circ - 12.665 + 18.709 \angle -108^\circ = \boxed{24.93 \angle -88.61^\circ}$$

$$c_2 = 3.16625 \angle -144^\circ (1 + j2.5133) - 3.16625 + j7.9575 (1 \angle -288^\circ - 1 \angle -144^\circ)$$

$$= 8.5645 \angle -75.697^\circ - 3.16625 + 15.1361 \angle 144^\circ = \boxed{13.309 \angle 177.43^\circ}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

22.

Fig. 17-8a:  $V_o = 8 \text{ V}$ ,  $\tau = 0.2 \mu\text{s}$ ,  $f_o = 6000 \text{ pps}$

$$(a) \quad T = \frac{1}{6000}, f_o = 6000, \tau = 0.2 \mu\text{s} \quad \therefore f = \frac{1}{\tau} = \boxed{5 \text{ MHz}}$$

$$(b) \quad \boxed{f_o = 6000 \text{ Hz}}$$

$$(c) \quad 6000 \times 3 = 18,000 \text{ (closest)} \quad \therefore |c_3| = \frac{8 \times 0.2 \times 10^{-6}}{1/6000} \left| \frac{\sin(1/2 \times 3 \times 12,000\pi \times 0.2 \times 10^{-6})}{0.0036\pi} \right|$$

$$\therefore |c_3| = \boxed{9.5998 \text{ mV}}$$

$$(d) \quad \frac{2 \times 10^6}{6 \times 10^3} = 333.3 \quad \therefore |c_{333}| = \frac{8 \times 0.2 \times 10^{-6}}{1/6000} \left| \frac{\sin(1/2 \times 333 \times 12,000\pi \times 0.2 \times 10^{-6})}{1/2 \times 333 \times 12,000\pi \times 0.2 \times 10^{-6}} \right| = \boxed{7.270 \text{ mV}}$$

$$(e) \quad \beta = 1/\tau = \boxed{5 \text{ MHz}}$$

$$(f) \quad 2 < \omega < 2.2 \text{ Mrad/s} \quad \therefore \frac{2000}{2\pi} < f < \frac{2200}{2\pi} \text{ kHz or } 318.3 < f < 350.1 \text{ kHz}$$

$$f_o = 6 \text{ kHz} \quad \therefore f = 6 \times 53 = 318; 324, 330, 336, 342, 348 \text{ kHz} \quad \therefore \boxed{n = 5}$$

$$(g) \quad |c_{227}| = \frac{8 \times 0.2 \times 10^{-6}}{1/6000} \left| \frac{\sin(1/2 \times 227 \times 12,000\pi \times 0.2 \times 10^{-6})}{(")} \right| = \boxed{8.470 \text{ mV}}$$

$$f = 227 \times 6 = \boxed{1362 \text{ kHz}}$$



## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

23.

$$T = 5\text{ ms}; \bar{c}_0 = 1, \bar{c}_1 = 0.2 - j0.2, \bar{c}_2 = 0.5 + j0.25, \bar{c}_3 = -1 - j2, \bar{c}_n = 0, |n| \geq 4$$

(a)  $a_n = -jb_n = 2\bar{c}_n \therefore a_0 = \bar{c}_0 = 1, a_1 - jb_1 = 0.4 - jb_1 = 0.4 - j0.4, a_2 - jb_2 = 1 + j0.5, a_3 - jb_3 = -2$   
 $\therefore v(t) = 1 + 0.4 \cos 400\pi t + \cos 800\pi t - 2 \cos 1200\pi t + 0.4 \sin 400\pi t - 0.5 \sin 800\pi t + 4 \sin 1200\pi t$

(b)  $v(1\text{ ms}) = 1 + 0.4 \cos 72^\circ + \cos 144^\circ - 2 \cos 216^\circ + 0.4 \sin 72^\circ - 0.5 \sin 144^\circ + 4 \sin 216^\circ$   
 $\therefore v(1\text{ ms}) = -0.332\text{ V}$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

24.

$$(a) \quad T = 5 \mu s \quad \therefore \bar{c}_n = \frac{10^6}{5} \times 2 \int_{0.4 \times 10^{-6}}^{0.6 \times 10^{-6}} 1 \cos 2\pi n \frac{t}{5 \times 10^{-6}} dt$$

$$\therefore \bar{c}_n = 4 \times 10^5 \frac{5 \times 10^{-6}}{2\pi n} (\sin 43.2^\circ n - \sin 28.8^\circ n)$$

$$\therefore \bar{c}_n = \frac{1}{n\pi} (\sin 43.2^\circ n - \sin 28.8^\circ n)$$

$$(b) \quad \bar{c}_4 = \frac{1}{4\pi} (\sin 172.8^\circ - \sin 115.2^\circ) = -0.06203$$

$$(c) \quad \bar{c}_o = a_o = \frac{0.2 \times 10^{-6} + 0.2 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-6}} = 0.08$$

$$(d) \quad \text{a little testing shows } |c_o| \text{ is max } \therefore |\bar{c}_{\max}| = 0.08$$

$$(e) \quad 0.01 \times 0.08 = 0.8 \times 10^{-3} \quad \therefore \left| \frac{1}{n\pi} (\sin 43.2^\circ n - \sin 28.8^\circ n) \right| \leq 0.8 \times 10^{-3}$$

$$\therefore \left| \frac{125}{n\pi} (\sin 43.2^\circ n - \sin 28.8^\circ n) \right| \leq 1$$

ok for  $n > 740$

$$(f) \quad \beta = 740 f_o = \frac{740 \times 10^6}{5} = 148 \text{ MHz}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

25.

$$T = 1/16, \omega_o = 32\pi$$

$$(a) \quad \bar{c}_3 = 16 \int_0^{1/96} 40e^{-j96\pi t} dt - \frac{16 \times 40}{-j96\pi} e^{-j96\pi t} \Big|_0^{1/96}$$

$$\therefore \bar{c}_3 = j \frac{20}{3\pi} (e^{-j\pi} - 1) = -j \frac{40}{3\pi} = \boxed{-j4.244 \text{ V}}$$

(b) Near harmonics are  $2f_o = 32 \text{ Hz}$ ,  $3f_o = 48 \text{ Hz}$

Only 32 and 48 Hz pass filter  $a_n - jb_n = 2\bar{c}_n$

$$a_3 - jb_3 = 2\bar{c}_3 = -j8.488 \quad \therefore a_3 = 0, b_3 = 8.488 \text{ V}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{8.488}{5 + j0.01 \times 96\pi} = 1.4536 \angle -31.10^\circ \text{ A}; P_3 = \frac{1}{2} \times 1.4536^2 \times 5 = 5.283 \text{ W}$$

$$\bar{c}_2 = \frac{1}{1/16} \int_0^{1/96} 40e^{-j64\pi t} dt = \frac{640}{-j64\pi} (e^{-j64\pi/96} - 1) = 2.7566 - j4.7746 \text{ V}$$

$$a_2 - b_2 = 2\bar{c}_2 = 5.5132 - j9.5492 = 11.026 \angle -60^\circ$$

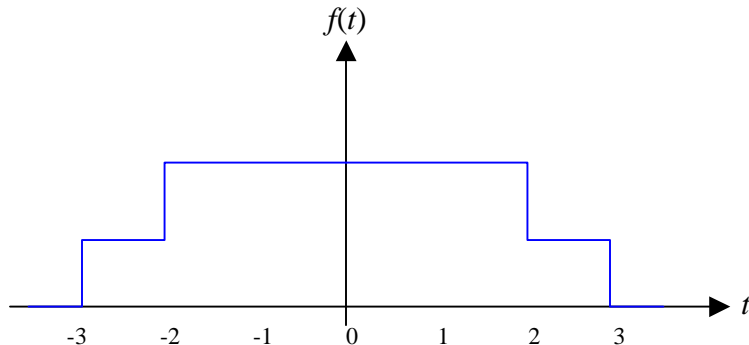
$$\therefore \bar{I}_2 = \frac{11.026 \angle -60^\circ}{5 + j0.01 \times 64\pi} = 2.046 \angle -65.39^\circ \text{ A}$$

$$\therefore P_2 = \frac{1}{2} \times 2.046^2 \times 5 = 10.465 \text{ W} \quad \therefore P_{tot} = \boxed{15.748 \text{ W}}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

26.  $f(t) = 5[u(t+3) + u(t+2) - u(t-2) - u(t-3)]$

(a)



(b)

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\therefore F(j\omega) = \int_{-3}^{-2} 5e^{-j\omega t} dt + \int_{-2}^2 10e^{-j\omega t} dt + \int_2^3 5e^{-j\omega t} dt$$

$$\therefore F(j\omega) = \frac{5}{-j\omega} (e^{j2\omega} - e^{j3\omega}) + \frac{10}{-j\omega} (e^{-j2\omega} - e^{j2\omega}) + \frac{5}{-j\omega} (e^{-j3\omega} - e^{-j2\omega})$$

$$= \frac{5}{-j\omega} (-e^{j3\omega} + e^{-j3\omega}) + \frac{5}{-j\omega} (e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}) + \frac{10}{-j\omega} (-e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})$$

$$= \frac{5}{-j\omega} (-j2) \sin 3\omega + \frac{5}{-j\omega} (j2) \sin 2\omega + \frac{10}{-j\omega} (-j2) \sin 2\omega$$

$$\therefore F(j\omega) = \frac{10}{\omega} \sin 3\omega - \frac{10}{\omega} \sin 2\omega + \frac{20}{\omega} \sin 2\omega = \frac{10}{\omega} (\sin 3\omega + \sin 2\omega)$$



## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

27.

$$(a) \quad f(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0 \quad \therefore F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$\therefore F(j\omega) = \frac{-1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \bigg|_0^{\infty} = \boxed{\frac{1}{a + j\omega}}$$

$$(b) \quad f(t) = e^{at_0} e^{-at} u(t - t_0), \quad a > 0 \quad \therefore F(j\omega) = e^{at_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt$$

$$\therefore F(j\omega) = e^{at_0} \frac{-1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \bigg|_{t_0}^{\infty} = e^{at_0} \frac{-1}{a + j\omega} \left[ -e^{-(a+j\omega)t_0} \right] = \boxed{\frac{1}{a + j\omega} e^{-j\omega t_0}}$$

$$(c) \quad f(t) = te^{-at} u(t), \quad a > 0 \quad \therefore F(j\omega) = \int_0^{\infty} te^{-(a+j\omega)t} dt$$

$$\therefore F(j\omega) = \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{(a + j\omega)^2} \left[ -(a + j\omega)t - 1 \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{(a + j\omega)^2} [-1] = \boxed{\frac{1}{(a + j\omega)^2}}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

28.

$$-4 < t < 0: f(t) = 2.5(t+4); 0 < t < 4: f(t) = 2.5(4-t)$$

$$\therefore F(j\omega) = \int_{-4}^0 2.5(t+4)e^{-j\omega t} dt + \int_0^4 2.5(4-t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{In 1<sup>st</sup>, let } t = \tau \therefore I_1 = \int_4^0 2.5(4-\tau)e^{j\omega\tau} (-d\tau)$$

$$\therefore I_1 = \int_0^4 2.5(4-\tau)e^{j\omega\tau} d\tau \therefore F(j\omega) = 2.5 \int_0^4 (4-t)(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) dt$$

$$\therefore F(j\omega) = 5 \int_0^4 (4-t) \cos \omega t dt = 20 \times \frac{1}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^4 - 5 \int_0^4 \cos \omega t dt$$

$$\begin{aligned} \therefore F(j\omega) &= \frac{20}{\omega} \sin 4\omega - \frac{5}{\omega^2} (\cos \omega t + \omega t \sin \omega t)_0^4 \\ &= \frac{20}{\omega} \sin 4\omega - \frac{5}{\omega^2} (\cos 4\omega - 1) - \frac{5}{\omega^2} 4\omega \sin 4\omega = \frac{5}{\omega^2} (1 - \cos 4\omega) \end{aligned}$$

$$\text{or, } F(j\omega) = \frac{2 \times 5}{\omega^2} \sin^2 2\omega = 10 \left( \frac{\sin 2\omega}{\omega} \right)^2$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

29.

$$f(t) = 5 \sin t, -\pi < t < \pi \quad \therefore F(j\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} 5 \sin t \, e^{-j\omega t} \, dt$$

$$\therefore F(j\omega) = \frac{5}{j2} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{jt} - e^{-jt}) \, e^{-j\omega t} \, dt$$

$$= \frac{5}{j2} \int_{-\pi}^{\pi} [e^{jt(1-\omega)} - e^{-jt(1+\omega)}] \, dt$$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{5}{j2} \left[ \frac{1}{j(1-\omega)} (e^{j\pi(1-\omega)} - e^{-j\pi(1-\omega)}) - \frac{1}{-j(1+\omega)} (e^{-j\pi(1+\omega)} - e^{j\pi(1+\omega)}) \right] \\ &= \frac{-2.5}{1-\omega} (-e^{-j\pi\omega} + e^{j\pi\omega}) - \frac{2.5}{1+\omega} (-e^{-j\pi\omega} + e^{j\pi\omega}) \\ &= \frac{-2.5}{1-\omega} (j2 \sin \pi\omega) - \frac{2.5}{1+\omega} (j2 \sin \pi\omega) = j5 \sin \pi\omega \left( -\frac{1}{1-\omega} - \frac{1}{1+\omega} \right) \\ &= j5 \sin \pi\omega (-1) \left( \frac{1+\omega+1-\omega}{1-\omega^2} \right) = -\frac{j10 \sin \pi\omega}{1-\omega^2} = \boxed{\frac{j10 \sin \pi\omega}{\omega^2 - 1}} \end{aligned}$$

# CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

30.

$$f(t) = 8 \cos t [u(t + 0.5\pi) - u(t - 0.5\pi)]$$

$$\begin{aligned} \therefore F(j\omega) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 8 \cos t e^{-j\omega t} dt = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{jt} + e^{-jt}) e^{-j\omega t} dt \\ &= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [e^{jt(1-\omega)} + e^{-jt(1+\omega)}] dt \\ &= 4 \left\{ \frac{1}{j(1-\omega)} e^{jt} e^{-j\omega t} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{j(1+\omega)} e^{-jt} e^{-j\omega t} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right\} \\ &= 4 \left\{ \frac{1}{j(1-\omega)} [je^{-j\pi\omega/2} - (-j)e^{j\pi\omega/2}] - \frac{1}{j(1+\omega)} [-je^{-j\pi\omega/2} - je^{j\pi\omega/2}] \right\} \\ &= 4 \left\{ \frac{1}{1-\omega} \times 2 \cos \frac{\pi\omega}{2} + \frac{1}{1+\omega} \times 2 \cos \frac{\pi\omega}{2} \right\} = 8 \cos \frac{\pi\omega}{2} \left( \frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1+\omega} \right) \\ &= 8 \cos \frac{\pi\omega}{2} \frac{2}{1-\omega^2} = 16 \frac{\cos \pi\omega/2}{1-\omega^2} \end{aligned}$$

(a)  $\omega = 0 \quad \therefore F(j0) = 16$

(b)  $\omega = 0.8, F(j0.8) = \frac{16 \cos 72^\circ}{0.36} = 13.734$

(c)  $\omega = 3.1, F(j3.1) = \frac{16 \cos(3.1 \times 90^\circ)}{1 - 3.12} = -0.2907$



# CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

31.

$$(a) \quad F(j\omega) = 4[u(\omega+2) - u(\omega-2)] \therefore f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega$$

$$\therefore f(t) = \frac{4}{2\pi} \int_{-2}^2 e^{j\omega t} d\omega = \frac{2}{\pi} \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \bigg|_{-2}^2 = \frac{2}{j\pi t} (e^{j2t} - e^{-j2t})$$

$$\therefore f(t) = \frac{2}{2\pi t} j2 \sin 2t = \frac{4}{\pi t} \sin 2t \therefore f(0.8) = \frac{5}{\pi} \sin 1.6^{rad} = \boxed{1.5909}$$

$$(b) \quad F(j\omega) = 4e^{-2|\omega|} \therefore f(t) = \frac{4}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\omega| + j\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned} \therefore f(t) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{(2+jt)\omega} d\omega + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{(-2+jt)\omega} d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{2+jt} (1-0) + \frac{1}{-2+jt} (0-1) \right] = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2+jt} + \frac{1}{2-jt} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{4}{4+t^2} \\ \therefore f(t) &= \frac{8}{\pi(4+t^2)} \therefore f(0.8) = \frac{8}{\pi \times 4.64} = \boxed{0.5488} \end{aligned}$$

$$(c) \quad F(j\omega) = 4 \cos \pi \omega [u(\omega+0.5) - u(\omega-0.5)]$$

$$\begin{aligned} \therefore f(t) &= \frac{4}{2\pi} \int_{-0.5}^{0.5} \cos \pi \omega \times e^{j\omega t} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{2} (e^{j\pi\omega} + e^{-j\pi\omega}) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-0.5}^{0.5} [e^{(j\pi+jt)\omega} + e^{(-j0.5\pi-j0.5t)\omega}] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{j(\pi+t)} (e^{j0.5\pi+j0.5t} - e^{-j0.5\pi-j0.5t}) + \frac{1}{j(-\pi+t)} (e^{-j0.5\pi+j0.5t} - e^{j0.5\pi-j0.5t}) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{j(\pi+t)} (je^{j0.5t} + je^{-j0.5t}) + \frac{1}{j(-\pi+t)} (-je^{j0.5t} - je^{-j0.5t}) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\pi+t} 2 \cos 0.5t - \frac{1}{-\pi+t} 2 \cos 0.5t \right] = \frac{2 \cos 0.5t}{\pi} \left( \frac{1}{\pi+t} - \frac{1}{-\pi+t} \right) \\ &= 2 \cos 0.5t \left( \frac{-2}{t^2 - \pi^2} \right) = \frac{4}{\pi^2 - t^2} \cos 0.5t \therefore f(0.8) = \boxed{0.3992} \end{aligned}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

32.  $v(t) = 20e^{1.5t} u(-t-2) \text{ V}$

(a) 
$$F_v(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 20e^{1.5t} u(-t-2) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{-2} 20e^{1.5t-j\omega t} dt$$

$$= \frac{20}{1.5-j\omega} e^{(1.5-j\omega)t} \bigg|_{-\infty}^{-2} = \frac{20}{1.5-j\omega} e^{-3+j2\omega} \therefore F_v(j0) = \frac{20}{1.5} e^{-3} = 0.6638$$

(b) 
$$F_v(j\omega) = A_v(\omega) + B_v(\omega) = \frac{20}{1.5-j\omega} e^{-3} e^{j2\omega}$$

$$\therefore F_v(j2) = \frac{20}{1.5-j2} e^{-3} e^{j4} = 0.39830 \angle 282.31^\circ = 0.08494 - j0.38913$$

$$\therefore A_v(2) = 0.08494$$

(c) 
$$B_v(2) = -0.3891$$

(d) 
$$|F_v(j2)| = 0.3983$$

(e) 
$$\phi_v(j2) = 282.3^\circ \text{ or } -77.69^\circ$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

$$33. \quad |I(j\omega)| = 3 \cos 10\omega [u(\omega + 0.05\pi) - u(\omega - 0.05\pi)]$$

$$\begin{aligned} (a) \quad W &= 4 \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |I(j\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-0.05\pi}^{0.05\pi} 9 \cos^2 10\omega d\omega \\ &= \frac{18}{\pi} \int_{-\pi/20}^{\pi/20} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 20\omega \right) d\omega = \frac{9}{\pi} \times 0.1\pi + \frac{9}{\pi} \frac{1}{20} \sin 20\omega \bigg|_{-\pi/20}^{\pi/20} = 0.9 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \frac{9}{\pi} \int_{-\omega_x}^{\omega_x} (1 + \cos 20\omega) d\omega &= 0.45 = \frac{9}{\pi} \left[ 2\omega_x + \frac{1}{20} \times 2 \sin 20\omega_x \right] \\ \therefore 0.05\pi &= 2\omega_x + 0.1 \sin 20\omega_x, \quad \omega_x = 0.04159 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

34.  $f(t) = 10te^{-4t} u(t)$

(a) 
$$W_{\Omega} = \int_0^{\infty} f^2(t) dt = \int_0^{\infty} 100t^2 e^{-8t} dt = 100 \times \frac{e^{-8t}}{(-512)} (64t^2 + 16t + 2) \Big|_0^{\infty}$$
  

$$= \frac{100}{512} \times 2 = \boxed{0.3906 \text{ J}}$$

(b) 
$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{10te^{-4t} u(t)\} = 10 \int_0^{\infty} t e^{-(4+j\omega)t} dt = \frac{10e^{-(4+j\omega)t}}{(4+j\omega)^2} [-(4+j\omega)t - 1] \Big|_0^{\infty}$$
  

$$= \frac{10}{(4+j\omega)^2} \therefore |F(j\omega)| = \frac{10}{\omega^2 + 16}$$

(c) 
$$|F(j\omega)|^2 = \frac{100}{(\omega^2 + 16)^2}$$

$$\boxed{|F(j\omega)|_{\omega=0}^2 = 390.6 \text{ mJ/Hz}, |F(j\omega)|_{\omega=4}^2 = 97.66 \text{ mJ/Hz}}$$



## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

35.  $v(t) = 8e^{-2|t|} \text{ V}$

(a)  $W_{\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt = 2 \times 64 \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = 32 \text{ J}$

(b)  $F_v(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v(t) dt = 8 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|} e^{-j\omega t} dt$

$$\therefore F_v(j\omega) = 8 \int_{-\infty}^0 e^{(2-j\omega)t} dt + 8 \int_0^{\infty} e^{-(2+j\omega)t} dt$$

$$= \frac{8}{2-j\omega} e^{(2-j\omega)t} \bigg|_{-\infty}^0 - \frac{8}{2+j\omega} e^{-(2+j\omega)t} \bigg|_0^{\infty} = \frac{8}{2-j\omega} + \frac{8}{2+j\omega} = \frac{32}{4+\omega^2} = |F_v(j\omega)|$$

(c)  $0.9 \times 32 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} \frac{32^2}{(\omega^2+4)^2} d\omega = \frac{32^2}{2\pi} \left[ \frac{\omega}{8(\omega_1^2+4)} + \frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{\omega_1}{2} \right]$

$$\therefore 0.9 = \frac{16}{\pi} \times 2 \left[ \frac{\omega_1}{8(\omega_1^2+4)} + \frac{1}{16} \frac{\omega_1}{2} \right] = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2\omega_1}{\omega_1^2+4} + \tan^{-1} \frac{\omega_1}{2} \right]$$

$$\therefore 0.45\pi = \frac{2\omega_1}{\omega_1^2+4} + \tan^{-1} \frac{\omega_1}{2} \therefore \omega_1 = 2.7174 \text{ rad/s (by SOLVE)}$$

## **CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS**

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

36.

(a) Prove:  $\mathcal{F}\{f(t-t_o)\} = e^{-j\omega t_o} \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_o)e^{-j\omega t} dt$  Let  $t-t_o = \tau$

$$\therefore \mathcal{F}\{f(t-t_o)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega t_o} d\tau = e^{-j\omega t_o} \mathcal{F}\{f(t)\}$$

(b) Prove:  $\mathcal{F}\{f(t)\} = j\omega \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \frac{df}{dt} dt$  Let  $u = e^{-j\omega t}$ ,  $du = -j\omega e^{-j\omega t} dt$ ,

$$dv = df, v = f \therefore \mathcal{F}\{f(t)\} = f(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} j\omega f(t)e^{-j\omega t} dt$$

We assume  $f(\pm\infty) = 0 \therefore \mathcal{F}\{f(t)\} = j\omega \mathcal{F}\{f(t)\}$

(c) Prove:  $\mathcal{F}\{f(kt)\} = \frac{1}{|k|} \mathcal{F}\left(\frac{j\omega}{k}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(kt)e^{-j\omega t} dt$  Let  $\tau = kt$ ,  $k > 0$

$$\therefore \mathcal{F}\{f(kt)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau/k} \frac{1}{k} d\tau = \frac{1}{k} \mathcal{F}\left(\frac{j\omega}{k}\right)$$

If  $k < 0$ , limits are interchanged and we get:  $-\frac{1}{k} \mathcal{F}\left(\frac{j\omega}{k}\right)$

$$\therefore \mathcal{F}\{f(kt)\} = \frac{1}{|k|} \mathcal{F}\left(\frac{j\omega}{k}\right)$$

(d) Prove:  $\mathcal{F}\{f(-t)\} = \mathcal{F}(-j\omega)$  Let  $k = 1$  in (c) above

(e) Prove:  $\mathcal{F}\{tf(t)\} = j \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(j\omega)$  Now,  $\mathcal{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

$$\therefore \frac{d\mathcal{F}(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-jt)e^{-j\omega t} dt = -j \mathcal{F}\{tf(t)\} \therefore \mathcal{F}\{tf(t)\} = j\omega \mathcal{F}\{f(t)\}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

37.

$$(a) \quad f(t) = 4[\text{sgn}(t)\delta(t-1)] \quad \therefore \mathcal{F}\{4[\text{sgn}(t)\delta(t-1)]\} = \mathcal{F}\{4\text{sgn}(1)\delta(t-1)\} = \mathcal{F}\{4\delta(t-1)\} = 4e^{-j\omega}$$

$$(b) \quad f(t) = 4[\text{sgn}(t-1)\delta(t)] \quad \therefore \mathcal{F}\{4\text{sgn}(-1)\delta(t)\} = \mathcal{F}\{-4\delta(t)\} = -4$$

$$(c) \quad f(t) = 4\sin(10t - 30^\circ) \quad \therefore \mathcal{F}\{4\sin(10t - 30^\circ)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{4}{j2}\left[e^{j(10t-30^\circ)} - e^{-j(10t-30^\circ)}\right]\right\} =$$

$$\mathcal{F}\{-j2e^{-j30^\circ}e^{j10t} + j2e^{j30^\circ}e^{-j10t}\} = -j2e^{-j\pi/6}2\pi\delta(\omega-10) + j2e^{j\pi/6}2\pi\delta(\omega+10)$$

$$= -j4\pi[e^{-j\pi/6}\delta(\omega-10) - e^{j\pi/6}\delta(\omega+10)]$$



## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

38.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(t) &= A \cos(\omega_o t + \phi) \quad \therefore F(j\omega) = \mathcal{F}\{A \cos \phi \cos \omega_o t - A \sin \phi \sin \omega_o t\} = \\
 &A \cos \phi \{\pi[\delta(\omega + \omega_o) + \delta(\omega - \omega_o)]\} - A \sin \phi \left\{ \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_o) - \delta(\omega + \omega_o)] \right\} = \\
 &\pi A \{ \cos \phi [\delta(\omega + \omega_o) + \delta(\omega - \omega_o)] + j \sin \phi [\delta(\omega - \omega_o) - \delta(\omega + \omega_o)] \} \\
 \therefore F(j\omega) &= \pi A [e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_o) + e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_o)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad f(t) &= 3 \operatorname{sgn}(t-2) - 2\delta(t) - u(t-1) \quad \therefore F(j\omega) = e^{-j2\omega} \times 3 \times \frac{2}{j\omega} - 2 - e^{-j\omega} \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\
 \therefore F(j\omega) &= -j \frac{6}{\omega} e^{-j2\omega} - 2 - e^{-j\omega} \left[ \pi\delta(\omega) - j \frac{1}{\omega} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad f(t) &= \sinh kt \, u(t) \quad \therefore F(j\omega) = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} [e^{kt} - e^{-kt}] u(t) \right\} \\
 \therefore F(j\omega) &= \frac{1}{2} \frac{1}{-k + j\omega} - \frac{1}{2} \frac{1}{k + j\omega} = \frac{k + j\omega + k - j\omega}{2(-k^2 - \omega^2)} = \frac{-k}{\omega^2 + k^2}
 \end{aligned}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

39.

$$(a) \quad F(j\omega) = 3u(\omega+3) - 3u(\omega-1) \quad \therefore f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [3u(\omega+3) - 3u(\omega-1)] e^{j\omega t} d\omega$$

$$\therefore f(t) = \frac{3}{2\pi} \int_{-3}^1 e^{j\omega t} d\omega = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-3}^1 = \frac{3}{j2\pi t} (e^{jt} - e^{-j3t})$$

$$\therefore f(5) = -j \frac{3}{10\pi} (1 \angle 5^{rad} - 1 \angle -15^{rad}) = 0.10390 \angle -106.48^\circ$$

$$(b) \quad F(j\omega) = 3u(-3-\omega) + 3u(\omega-1) \rightarrow$$

$$\therefore F(j\omega) = 3 - F_a(j\omega)$$

$$f(t) = 3\delta(t) - \frac{3}{j2\pi t} (e^{jt} - e^{-j3t}) \quad \therefore f(5) = 0 - 0.10390 \angle -106.48^\circ$$

$$\text{so } f(5) = 0.1039 \angle 73.52^\circ$$

$$(c) \quad F(j\omega) = 2\delta(\omega) + 3u(-3-\omega) + 3u(\omega-1) \quad \text{Now, } F\{2\delta(\omega)\} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{\pi} + \left[ -\frac{3}{j2\pi t} (e^{jt} - e^{-j3t}) \right] \quad \therefore f(5) = \frac{1}{\pi} - 0.10390 \angle -106.48^\circ = 0.3618 \angle 15.985^\circ$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

40.

$$(a) \quad F(j\omega) = \frac{3}{1+j\omega} + \frac{3}{j\omega} + 3 + 3\delta(\omega-1)$$

$$\therefore f(t) = 3e^{-t}u(t) + 1.5\operatorname{sgn}(t) + 3\delta(t) + \frac{1.5}{\pi}e^{jt}$$

$$(b) \quad F(j\omega) = \frac{1}{\omega} 5 \sin 4\omega = 8 \frac{\sin \omega 8/2}{\omega 8/2} \times 2.5$$

$$\therefore f(t) = 2.5[u(t+4) - u(t-4)]$$

$$(c) \quad F(j\omega) = \frac{6(3+j\omega)}{(3+j\omega)^2 + 4} = \frac{6(3+j\omega)}{(3+j\omega)^2 + 2^2} \therefore f(t) = 3^{-3t} \cos 2t u(t)$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

41.

$T = 4$ , periodic; find exp'l form

$$\therefore c_n = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 10te^{-jn\pi t/2} dt$$

$$\therefore c_n = 2.5 \left[ e^{-jn\pi t/2} \left( \frac{t}{-jn\pi/2} - \frac{1}{-n^2\pi^2/4} \right) \right]_{-1}^1$$

$$\therefore c_n = 2.5 \left[ e^{-jn\pi/2} \left( \frac{1}{-jn\pi/2} + \frac{1}{n^2\pi^2/4} \right) - e^{jn\pi/2} \left( \frac{1}{jn\pi/2} + \frac{1}{n^2\pi^2/4} \right) \right]$$

$$= 2.5 \left[ \frac{1}{jn\pi/2} (-e^{-jn\pi/2} - e^{jn\pi/2}) + \frac{4}{n^2\pi^2} (e^{-jn\pi/2} - e^{jn\pi/2}) \right]$$

$$= \frac{j5}{n\pi} \times 2 \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{10}{n^2\pi^2} \left( -j2 \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$\therefore f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{j10}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - j \frac{20}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right] e^{jn\pi t/2}$$

$$\therefore F(j\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{j10}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - j \frac{20}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right] 2\pi \delta \left( \omega - \frac{n\pi}{2} \right)$$



42.

$$T = 4 \text{ ms}, f_1(t) = 10u(t) - 6u(t - 0.001) - 4u(t - 0.003)$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_o t} dt, \omega_o = \frac{2\pi 10^3}{4} = 500\pi \\ &= 250 \int_{-0.002}^{0.002} f(t) e^{-j500n\pi t} dt \\ &= 250 \left[ \int_{-0.002}^{-0.001} 4e^{-j500n\pi t} dt + \int_0^{0.001} 10e^{-j500n\pi t} dt + \int_{0.001}^{0.002} 4e^{-j500n\pi t} dt \right] \\ &= \frac{j250}{500n\pi} \left[ 4e^{-j500n\pi t} \Big|_{-0.002}^{-0.001} + 10e^{-j500n\pi t} \Big|_0^{0.001} + 4e^{-j500n\pi t} \Big|_{0.001}^{0.002} \right] \\ &= \frac{j}{2n\pi} \left[ 4(e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi}) + 10(e^{-jn\pi/2} - 1) + 4(e^{-jn\pi} - e^{-jn\pi/2}) \right] \\ &= \frac{j}{2n\pi} \left[ 4(e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}) - 4(e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}) + 10(e^{-jn\pi/2} - 1) \right] \\ &= \frac{j}{2n\pi} \left[ 4j2 \sin \frac{n\pi}{2} - 4j2 \sin n\pi + 10(e^{-jn\pi/2} - 1) \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[ -4 \sin \frac{n\pi}{2} + j5(e^{-jn\pi/2} - 1) \right] = \frac{1}{n\pi} \left[ j5e^{-jn\pi/4} (e^{-jn\pi/4} - e^{jn\pi/4}) - 4 \sin \frac{n\pi}{2} \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[ j5e^{-jn\pi/4} \left( -j2 \sin \frac{n\pi}{4} \right) - 4 \sin \frac{n\pi}{2} \right] = \frac{1}{n\pi} \left[ 10e^{-jn\pi/4} \sin \frac{n\pi}{4} - 4 \sin \frac{n\pi}{2} \right] \\ \therefore F(j\omega) &= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \left( 10e^{-jn\pi/4} \sin \frac{n\pi}{4} - 4 \sin \frac{n\pi}{2} \right) \delta(\omega - 500n\pi) \end{aligned}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

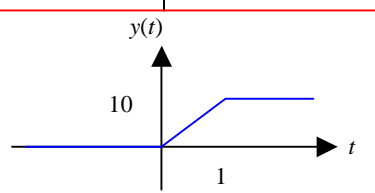
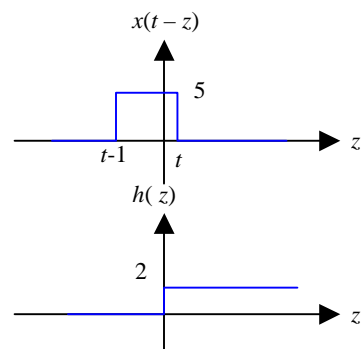
43.

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= 20 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|!+1} \delta(\omega - 20n) \\
 &= 20 \left[ \frac{1}{1+1} \delta(\omega) + \frac{1}{1+1} \delta(\omega + 20) + \frac{1}{1+1} \delta(\omega - 20) + \frac{1}{2+1} \delta(\omega + 40) + \frac{1}{3} \delta(\omega - 40) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{7} \delta(\omega + 60) + \frac{1}{7} \delta(\omega - 60) + \dots \right] \\
 &= 10\delta(\omega) + \frac{20}{2\pi} [\pi\delta(\omega + 20) + \pi\delta(\omega - 20)] + \frac{20}{3\pi} [\pi\delta(\omega + 40) + \pi\delta(\omega - 40)] + \\
 &\quad \frac{20}{7\pi} [\pi\delta(\omega + 60) + \pi\delta(\omega - 60)] + \frac{20}{25\pi} [\pi\delta(\omega + 80) + \pi\delta(\omega - 80)] + \dots \\
 \therefore f(t) &= \frac{10}{2\pi} + \frac{20}{2\pi} \cos 20t + \frac{20}{3\pi} \cos 40t + \frac{20}{7\pi} \cos 60t + \frac{20}{25\pi} \cos 80t + \dots \\
 &= \frac{20}{\pi} \left[ 0.25 + \frac{1}{2} \cos 20t + \frac{1}{3} \cos 40t + \frac{1}{7} \cos 60t + \frac{1}{25} \cos 80t + \dots \right] \\
 \therefore f(0.05) &= \frac{20}{\pi} \left[ 0.25 + \frac{1}{2} \cos 1^{rad} + \frac{1}{3} \cos 2 + \frac{1}{7} \cos 3 + \frac{1}{25} \cos 4 + \dots \right] = \boxed{1.3858}
 \end{aligned}$$

# CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

44. Input =  $x(t) = 5[u(t) - u(t-1)]$      $y(t) = \int_{-\infty}^t x(z) h(t-z) dz$

(a)  $h(t) = 2u(t)$

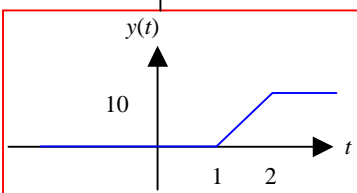
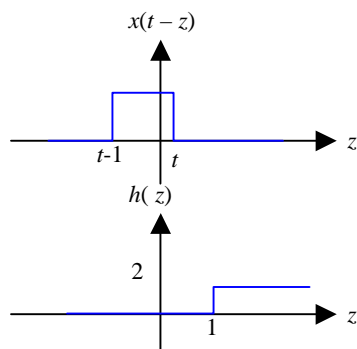


$t < 0$ :  
 $y(t) = 0$

$0 < t < 1$ :  
 $y(t) = \int_0^t 10 dz = 10t$

$t > 1$ :  
 $y(t) = \int_{t-1}^t 10 dz = 10$

(b)  $h(t) = 2u(t-1)$

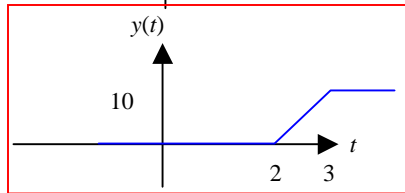
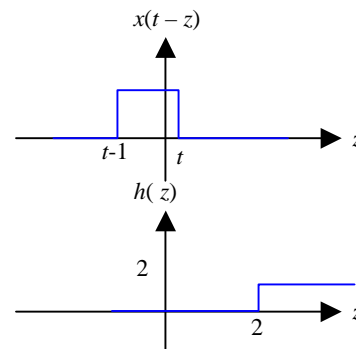


$t < 1$ :  $y(t) = 0$

$1 < t < 2$ :  
 $y(t) = \int_1^t 10 dz = 10(t-1)$

$t > 2$ :  
 $y(t) = \int_{t-1}^t 10 dz = 10$

(c)  $h(t) = 2u(t-2)$



$t < 2$ :  $y(t) = 0$

$2 < t < 3$ :  
 $y(t) = \int_2^t 10 dz = 10(t-2)$

$t > 3$ :  
 $y(t) = \int_{t-1}^t 10 dz = 10$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

45.  $x(t) = 5[u(t) - u(t-2)]; h(t) = 2[u(t-1) - u(t-2)]$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(z) h(t-z) dz$$

$$t < 1: y(t) = 0$$

$$1 < t < 2: y(t) = \int_0^{t-1} 10 dz = 10(t-1)$$

$$2 < t < 3: y(t) = 10$$

$$3 < t < 4: y(t) = \int_{t-2}^2 10 dz = 10(2-t+2) = 10(4-t)$$

$$t > 4: y(t) = 0$$

$$\therefore y(-0.4) = 0; \quad y(0.4) = 0; \quad y(1.4) = 4$$

$$y(2.4) = 10; \quad y(3.4) = 6; \quad y(4.4) = 0$$

or....  $y(t) = \int_0^{\infty} x(t-z) h(z) dz$

$$t < 1: y(t) = 0$$

$$1 < t < 2: y(t) = \int_1^t 10 dz = 10(t-1)$$

$$2 < t < 3: y(t) = 10$$

$$3 < t < 4: y(t) = \int_{t-2}^2 10 dz = 10(2-t+2) = 10(4-t)$$

$$t > 4: y(t) = 0$$

$$\text{same answers as above}$$



## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

46.

$$h(t) = 3[e^{-t} - e^{-2t}], \quad x(t) = u(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(z)h(t-z) dz$$

$$= \int_0^t 3[e^{-(t-z)} - e^{-2(t-z)}] dz$$

$$= 3e^{-t} [e^z]_0^t - 3e^{-2t} \left[ \frac{1}{2} e^{2z} \right]_0^t$$

$$= 3e^{-t} (e^t - 1) - 1.5e^{-2t} (e^{2t} - 1)$$

$$\therefore y(t) = 3(1 - e^{-t}) - 1.5(1 - e^{-2t}) = 1.5 - 3e^{-t} + 1.5e^{-2t}, \quad t > 0$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

47.

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t-2)h(z)dz$$

$$h(t) = \frac{2}{3} (5-t), 2 < t < 5$$

$$(a) \quad y(t) = \int_2^5 10 \times \frac{2}{3} (5-z) dz = \frac{20}{3} \int_2^5 (5-z) dz$$

Note:  $h(z)$  is in window for  $4 < t < 6$

$$(b) \quad y(t) = \frac{20}{3} \left( -\frac{1}{2} \right) (5-z)^2 \Big|_2^5$$

$$= -\frac{10}{3} (0-9) = 30 \text{ at } t = 5$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

48.  $x(t) = 5e^{-(t-2)} u(t-2)$ ,  $h(t) = (4t-16) [u(t-4) - u(t-7)]$ ,  $y(t) = \int_0^{\infty} x(t-z) h(z) dz$

(a)  $t < 6$ :  $y(t) = 0 \quad \therefore y(5) = 0$

(b)  $t = 8$ :  $y(8) = \int_4^6 5e^{-(8-z-2)} (4z-16) dz$

$$\therefore y(8) = 20e^{-6} \int_4^6 z e^z dz - 80e^{-6} \int_4^6 e^z dz$$

$$= 20e^{-6} \left[ \frac{e^z}{1} (z-1) \right]_4^6 - 80e^{-6} (e^6 - e^4)$$

$$= 20e^{-6} (5e^6 - 3e^4) - 80 + 80e^{-2} = 20 + 80e^{-2} - 60e^{-2}$$

$$= 20(1 + e^{-2}) = 22.71$$

(c)  $t = 10$ :  $y(10) = \int_4^7 5e^{-(10-z-2)} (4z-16) dz$

$$\therefore y(10) = \int_4^7 20e^{-8} e^z (z-4) dz$$

$$\therefore y(10) = 20e^{-8} \int_4^7 z e^z dz - 80e^{-8} \int_4^7 e^z dz = 20e^{-8} [e^z (z-1)]_4^7 - 80e^{-8} (e^7 - e^4)$$

$$= 20e^{-8} (6e^7 - 3e^4) - 80(e^{-1} - e^{-4}) = 40e^{-1} + 20e^{-4} = 15.081$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

49.

$h(t) = \sin t, 0 < t < \pi; 0$  elsewhere, Let  $x(t) = e^{-t}u(t)$

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t-z) h(z) dz$$

$$t < 0: y(t) = 0$$

$$0 < t < \pi: y(t) = \int_0^t \sin z \times e^{-t+z} dz = e^{-t} \int_0^t e^z \sin z dz$$

$$\begin{aligned} \therefore y(t) &= e^{-t} \left[ \frac{1}{2} e^z (\sin z - \cos z) \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2} e^{-t} [e^t (\sin t - \cos t) + 1] \\ &= \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t}) \end{aligned}$$

(a)  $y(1) = 0.3345^+$

(b)  $y(2.5) = 0.7409$

(c)  $y > \pi: y(t) = e^{-t} \int_0^{\pi} e^z \sin z dz$

$$y > \pi: y(t) = e^{-t} \left[ \frac{1}{2} e^z (\sin z - \cos z) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} e^{-t} (e^{\pi} + 1) = 12.070 e^{-t}$$

$\therefore y(4) = 0.2211$



# CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

50.

$$x(t) = 0.8(t-1)[u(t-1) - u(t-3)],$$

$$h(t) = 0.2(t-2)[u(t-2) - u(t-3)]$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t-z) h(z) dz,$$

$$t < 3: y(t) = 0$$

$$(a) \quad 3 < t < 4: y(t) = \int_2^{t-1} 0.8(t-z-1)0.2(z-2) dz$$

$$\therefore y(t) = 0.16 \int_2^{t-1} (tz - 2t - z^2 + 2z - z + 2) dz$$

$$= 0.16 \int_2^{t-1} [-z^2 + (t+1)z + 2 - 2t] dz = 0.16 \left[ -\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}(t+1)z^2 + (2-2t)z \right]_2^{t-1}$$

$$= 0.16 \left[ -\frac{1}{3}(t-1)^3 + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}(t+1)(t-1)^2 - \frac{1}{2}(t+1)4 + (2-2t)(t-1-2) \right]$$

$$\therefore y(t) = 0.16 \left[ -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t + \frac{1}{3} + \frac{8}{3} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)(t-1) - 2t - 2 + 2t - 6 - 2t^2 + 6t \right]$$

$$= 0.16 \left[ \frac{1}{6}t^3 + t^2 \left( 1 - \frac{1}{2} - 2 \right) + t \left( -1 - \frac{1}{2} + 6 \right) + 3 + \frac{1}{2} - 8 \right] = 0.16 \left( \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{9}{2}t - \frac{9}{2} \right)$$

$$\therefore y(3.8) = 13.653 \times 10^{-3}$$

$$(b) \quad 4 < t < 5: y(t) = \int_2^3 0.16(t-z-1)(z-2) dz = 0.16 \left[ -\frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2}(t+1)z^2 + (2-2t)z \right]_2^3$$

$$\therefore y(t) = 0.16 \left[ -\frac{1}{3}(27-8) + \frac{1}{2}(t+1)5 + (2-2t)1 \right]$$

$$= 0.16 \left[ -\frac{19}{3} + 2.5t + 2.5 + 2 - 2t \right] = 0.16 \left( 0.5t - \frac{11}{6} \right)$$

$$\therefore y(4.8) = 90.67 \times 10^{-3}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

51.

$$x(t) = 10e^{-2t}u(t), \quad h(t) = 10e^{-2t}u(t)$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t-z) h(z) dz$$

$$\therefore y(t) = \int_0^t 10e^{-2(t-z)} 10e^{-2z} dz$$

$$= 100e^{-2t} \int_0^t dz = 100e^{-2t} \times t$$

$$\therefore y(t) = 100t e^{-2t} u(t)$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

52.  $h(t) = 5e^{-4t} u(t)$

(a)  $W_{\Omega} = 25 \int_{0.1}^{0.8} e^{-8t} dt = \frac{25}{8} (e^{-0.8} - e^{-6.4}) = 1.3990 \text{ J}$

$$\therefore \% = 1.3990 / \left( \frac{25}{8} \right) \times 100\% = \boxed{44.77\%}$$

(b)  $H(j\omega) = \frac{5}{j\omega + 4} \therefore W_{\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^2 \frac{25}{\omega^2 + 16} d\omega = \frac{25}{\pi} \frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{\omega}{4} \Big|_0^2$

$$\therefore W_{\Omega} = \frac{25}{4\pi} \tan^{-1} \frac{1}{2} = 0.9224 \text{ J} \therefore \% = \frac{0.9224}{25/8} \times 100\% = \boxed{29.52\%}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

53.

$$F(j\omega) = \frac{2}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{2}{1+j\omega} - \frac{2}{2+j\omega} \therefore f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$$

$$(a) \quad W_{\Omega} = \int_0^{\infty} (4e^{-2t} - 8e^{-3t} + 4e^{-4t}) dt = \frac{4}{2} - \frac{8}{3} + \frac{4}{4} = \frac{1}{3} \text{ J}$$

$$(b) \quad f(t) = -2e^{-t} + 4e^{-2t} = 0, \quad -2 + 4e^{-t} = 0, \quad e^t = 2, \quad t = 0.69315 \\ \therefore f_{\max} = 2(e^{-0.69315} - e^{-2 \times 0.69315}) = 0.5$$



# CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

54.

$$(a) \quad F(j\omega) = \frac{1}{j\omega(2+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{1/6}{j\omega} - \frac{1/2}{2+j\omega} + \frac{1/3}{3+j\omega}$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{12} \text{sgn}(t) - \frac{1}{2} e^{-2t} u(t) + \frac{1}{3} e^{-3t} u(t)$$

$$(b) \quad F(j\omega) = \frac{1+j\omega}{j\omega(2+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{1/6}{j\omega} + \frac{1/2}{2+j\omega} - \frac{2/3}{3+j\omega}$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{12} \text{sgn}(t) + \frac{1}{2} e^{-2t} u(t) - \frac{2}{3} e^{-3t} u(t)$$

$$(c) \quad F(j\omega) = \frac{(1+j\omega)^2}{j\omega(2+j\omega)(3+j\omega)} = \frac{1/6}{j\omega} - \frac{1/2}{2+j\omega} + \frac{4/3}{3+j\omega}$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{12} \text{sgn}(t) - \frac{1}{2} e^{-2t} u(t) + \frac{4}{3} e^{-3t} u(t)$$

$$(d) \quad F(j\omega) = \frac{(1+j\omega)^3}{j\omega(2+j\omega)(3+j\omega)} = 1 + \frac{1/6}{j\omega} + \frac{1/2}{2+j\omega} - \frac{8/3}{3+j\omega}$$

$$\therefore f(t) = \delta(t) + \frac{1}{12} \text{sgn}(t) + \frac{1}{2} e^{-2t} u(t) - \frac{8}{3} e^{-3t} u(t)$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

55.  $h(t) = 2e^{-t}u(t)$

(a)  $H(j\omega) = 2 \times \frac{1}{1+j\omega} = \frac{2}{1+j\omega}$

(b)  $\frac{1}{2} H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{2} \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/j\omega}{1+1/j\omega}$

(c)  $\text{Gain} = 2$

56.

$$V_o(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}j\omega + \frac{1}{j\omega}}{1 + \frac{1}{2}j\omega + \frac{1}{j\omega}} = \frac{(j\omega)^2 + 2}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 2}$$

$$\therefore V_o(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 2 - 2(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 2} = 1 + \frac{-2(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 2}$$

$$\text{Let } j\omega = x \quad \therefore V_o(x) = 1 - \frac{2x}{x + 2x + 2}; \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm j1$$

$$\therefore V_o(x) = 1 + \frac{A}{x + 1 + j1} + \frac{B}{x + 1 - j1} = \square \quad \text{Let } x = 0 \quad \therefore \frac{A}{1 + j1} + \frac{B}{1 - j1} = 0$$

$$\text{Let } x = -1 \quad \therefore \frac{A}{j1} + \frac{B}{-j1} = 2 \quad \therefore A - B = j2, \quad A = B + j2 \quad \therefore \frac{B + j2}{1 + j1} + \frac{B}{1 - j1} = 0$$

$$\therefore B - jB + j2 + 2 + B + jB = 0 \quad \therefore B = -1 - j1 \quad \therefore A = -1 + j1$$

$$\therefore V_o(x) = 1 + \frac{-1 + j1}{x + 1 + j1} + \frac{-1 - j1}{x + 1 - j1}, \quad V_o(j\omega) = 1 - \frac{1 - j1}{(j\omega) + 1 + j1} - \frac{1 + j1}{(j\omega) + 1 - j1}$$

$$\therefore v_o(t) = \delta(t) - (1 - j1)e^{(-1 - j1)t}u(t) - (1 + j1)e^{(-1 + j1)t}u(t)$$

$$= \delta(t) - \sqrt{2}e^{-j45^\circ - jt - t}u(t) - \sqrt{2}e^{j45^\circ + jt - t}u(t)$$

$$= \boxed{\delta(t) - 2\sqrt{2}e^{-t} \cos(t + 45^\circ)u(t)}$$

## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

57.

$$V_c(j\omega) = 10 \frac{5/j\omega}{5/j\omega + 35 + 30(j\omega)} = \frac{10/j\omega}{1/j\omega + 7 + 6(j\omega)}$$

$$\therefore V_c(j\omega) = \frac{10}{6(j\omega)^2 + 7(j\omega) + 1} = \frac{10/6}{(j\omega)^2 + \frac{7}{6}(j\omega) + \frac{1}{6}}$$

$$\therefore j\omega = \left( -7/6 \pm \sqrt{\frac{49}{36} - \frac{24}{36}} \right) / 2 = -\frac{1}{6}, -1 \therefore V_c(j\omega) = \frac{10/6}{(j\omega + 1/6)(j\omega + 1)} = \frac{2}{j\omega + 1/6} - \frac{2}{j\omega + 1}$$

$$\therefore v_c(t) = 2(e^{-t/6} - e^{-t})u(t)$$



## CHAPTER EIGHTEEN (Fourier Analysis) SOLUTIONS

58.  $f(t) = 5e^{-2t}u(t), g(t) = 4e^{-3t}u(t)$

(a) 
$$f * g = \int_0^{\infty} f(t-z)g(z)dz$$

$$= \int_0^t 5e^{-2t}e^{2z}4e^{-3z}dz = 20e^{-2t} \int_0^t e^{-z}dz$$

$$= -20e^{-2t}(e^t - 1)u(t)$$

$$\therefore f * g = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

(b)  $F(j\omega) = \frac{5}{j\omega + 2}, G(j\omega) = \frac{4}{j\omega + 3} \therefore F(j\omega)G(j\omega) = \frac{20}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)}$

$$\therefore F(j\omega)G(j\omega) = \frac{20}{j\omega + 2} - \frac{20}{j\omega + 3} \therefore f * g = 20(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

## CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

1.

$$\text{Order } i_1, i_2, i_3 : -2i_1' - 6i_3' = 5 + 2\cos 10t - 3i_1 + 2i_2 \quad (1)$$

$$4i_2 = 0.05i_1 - 0.15i_2' + 0.25i_3' \quad (2)$$

$$i_2 = -2i_1 - 5i_3 + 0.4 \int_0^t (i_1 - i_3) dt + 8 \quad (3)$$

$$(1) \rightarrow -2i_1' - 6i_3' = -3i_1 + 2i_2 + 5 + 2\cos 10t = A$$

$$(2) \rightarrow 0.05i_1' - 0.15i_2' + 0.25i_3' = 4i_2 = B$$

$$(3) \rightarrow 2i_1' + i_2' + 5i_3' = 0.4i_1 - 0.4i_3 = C$$

$$\therefore i_1' = 30i_1 + 20i_2 + 50 + 20\cos 10t + 240i_2 + 3.6i_1 - 3.6i_3$$

$$\therefore i_1' = \frac{\begin{vmatrix} A & 0 & -6 \\ B & -0.15 & 0.25 \\ C & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0.05 & -0.15 & 0.25 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{A(-1) - B(6) + C(-0.9)}{-2(-1) - 6(0.35)} = \frac{-A - 6B - 0.9C}{-0.1} = 10A + 60B + 9C$$

$$i_2' = \frac{\begin{vmatrix} -2 & A & -6 \\ 0.05 & B & 0.25 \\ 2 & C & 5 \end{vmatrix}}{-0.1} = -10[-A(-0.25) + B(2) - C(-0.2)] = -2.5A - 20B - 2C$$

$$i_2' = 7.5i_1 - 5i_2 - 12.5 - 5\cos 10t - 80i_2 - 0.8i_1 + 0.8i_3$$

$$\therefore i_2' = 6.7i_1 - 85i_2 + 0.8i_3 - 12.5 - 5\cos 10t$$

$$i_3' = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 & A \\ 0.05 & -0.15 & B \\ 2 & 1 & C \end{vmatrix}}{-0.1} = -10[A(0.35) - B(-2) + C(0.3)] = -3.5A - 20B - 3C$$

$$i_3' = 10.5i_1 - 7i_2 - 17.5 - 7\cos 10t - 80i_2 - 1.2i_1 + 1.2i_3$$

$$\therefore i_3' = 9.3i_1 - 87i_2 + 1.2i_3 - 17.5 - 7\cos 10t \leftarrow$$

## CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

2.  $x' + y' = x + y + 1$ ,  $x' - 2y' = 2x - y - 1$

(a) Order  $x, y$  M by 2:  $2x' + 2y' = 2x + 2y + 2$ ; add:  $3x' = 4x + y + 1$

$$\therefore x' = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \text{ and } y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$$

(b) 
$$x'' = \frac{4}{3}x' + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}x' - \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}y + \frac{2}{9} = \frac{4}{3}x' - \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}(3x' - 4x - 1) + \frac{2}{9}$$

$$\therefore x'' = 2x' - x, \text{ or } x'' - 2x' + x = 0$$

(c) Let  $x(0) = 2$  and  $y(0) = -5$   $\therefore x'(0) = \frac{4}{3}(2) + \frac{1}{3}(-5) + \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$$\text{Also, } y'(0) = -\frac{1}{3}(2) + \frac{2}{3}(-5) + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{10}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$\therefore x''(0) = 2x'(0) - x(0) = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

$$x'''(0) = 2x''(0) - x'(0) = 2\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{4}{3} = 0$$

## CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

3.

$$x' - 2y - 3z' = f_1(t), \quad 2x' + 5z = 3, \quad z' - 2y' - x = 0 \quad \text{Order } x, y, z$$

$$\therefore x' = -2.5z + 1.5 \quad (1)$$

$$-2.5z + 1.5 - 2y - 3z' = f_1 \quad \therefore z' = -\frac{2}{3}y - \frac{5}{6}z + 0.5 - \frac{1}{3}f_1 \quad (3)$$

$$\therefore 2y' = z' - x = -\frac{2}{3}y - \frac{5}{6}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}f_1 - x \quad \therefore y' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y - \frac{5}{12}z + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}f_1 \quad (2)$$



## CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

4.  $x' = -2x - 3y + 4$ ,  $y' = 5x - 6y + 7$ ,  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = \frac{1}{3}$

(a)  $x'' = -2x' - 3y'$ ,  $x'(0) = -2(2) - 3\left(\frac{1}{3}\right) + 4 = -1$ ,  $y'(0) = 5(2) - 6\left(\frac{1}{3}\right) + 7 = 15$

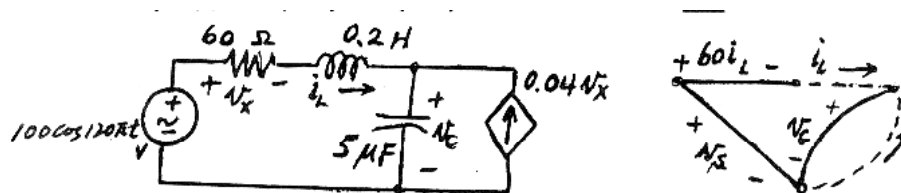
$$\therefore x''(0) = -2(-1) - 3(15) = 2 - 45 = -43$$

(b)  $y'' = 5x' - 6y'$   $\therefore y''(0) = 5(-1) - 6(15) = -95$

(c)  $y''' = 5x'' - 6y''$   $\therefore y'''(0) = 5(-43) - 6(-95) = -215 + 570 = 355$

# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

5.



$$\therefore 0.2i'_L = v_s - 60i_L - v_C$$

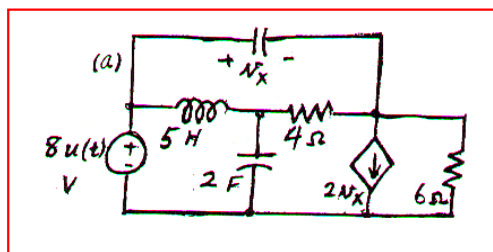
$$\therefore i_L = -300i'_L - 5v_C + 500 \cos 120\pi t \quad (1)$$

$$5 \times 10^{-6} v'_C = i_L + 2.4i'_L = 3.4i'_L \quad \therefore v'_C = 6.8 \times 10^5 i'_L \quad (2)$$

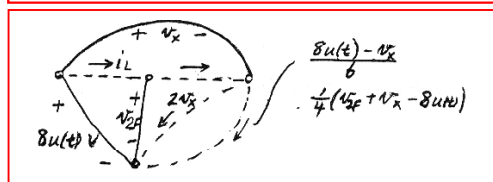
# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

6.

(a)



(b)



(c) Order:  $i_L, v_x, v_{2F}$   $\therefore 5i'_L = -v_{2F} + 8u(t)$   $\therefore i'_L = -0.2v_{2F} + 1.6u(t)$  (1)

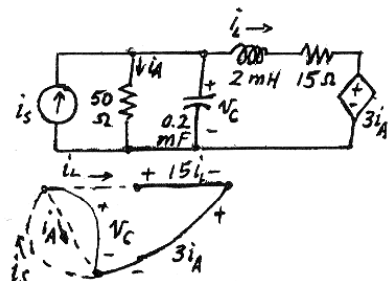
$$3v'_x = -\frac{1}{4}(v_{2F} + v_x - 8u(t)) + 2v_x + \frac{1}{6}(8u(t) - v_x) = \frac{19}{12}v_x - \frac{1}{4}v_{2F} + \frac{10}{3}u(t)$$

$$\therefore v'_x = \frac{19}{36}v_x - \frac{1}{12}v_{2F} + \frac{10}{9}u(t) \quad (2)$$

$$2v'_{2F} = i_L - \frac{1}{4}(v_{2F} + v_x - 8u(t)) \quad \therefore v'_{2F} = \frac{1}{2}i_L - \frac{1}{8}v_x - \frac{1}{8}v_{2F} + u(t) \quad (3)$$

# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

7.



(a) Order:  $i_L, v_C$

$$0.002i_L' = v_C - 3i_A - 15i_L, i_A = 0.02v_C$$

$$\therefore 0.002i_L' = -15i_L + 0.94v_C, i_L' = -7500i_L + 470v_C \quad (1)$$

$$2 \times 10^{-4} v_C' = -i_L - i_A + i_s = -i_L - 0.02v_C + i_s$$

$$\therefore v_C' = -5000i_L - 100v_C + 5000i_s \quad (2)$$

(b) Order:  $v_1, v_2, v_3$

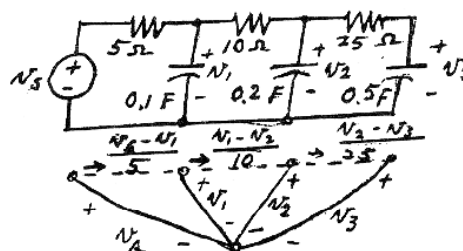
$$0.1v_1' = -0.2v_1 + 0.2v_s - 0.1v_1 + 0.1v_2$$

$$\therefore v_1' = -3v_1 + v_2 + 2v_s \quad (1)$$

$$0.2v_2' = 0.1v_1 - 0.1v_2 - 0.04v_2 + 0.04v_s$$

$$\therefore v_2' = 0.5v_1 - 0.7v_2 + 0.2v_s \quad (2)$$

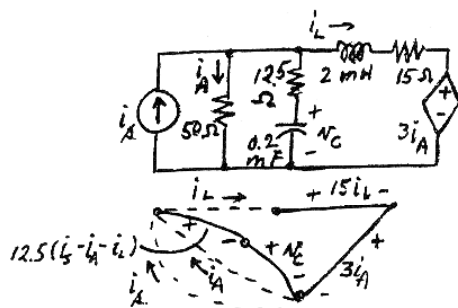
$$0.5v_3' = 0.04v_2 - 0.04v_3, v_3' = 0.08v_2 - 0.08v_3 \quad (3)$$





# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

8.



$$i_A = 0.02(12.5i_s - 12.5i_A - 12.5i_L + v_C)$$

$$\therefore 1.25i_A = -0.25i_L + 0.02v_C + 0.25i_s$$

$$\therefore i_A = -0.2i_L + 0.016v_C + 0.2i_s$$

$$0.002i'_L = -15i_L - 3i_A + v_C + 12.5i_s - 12.5i_A - 12.5i_L$$

$$\therefore 0.002i'_L = -27.5i_L + v_C - 15.5(-0.2i_L + 0.016v_C + 0.2i_s) + 12.5i_s$$

$$\therefore 0.002i'_L = -24.4i_L + 0.752v_C + 9.4i_s$$

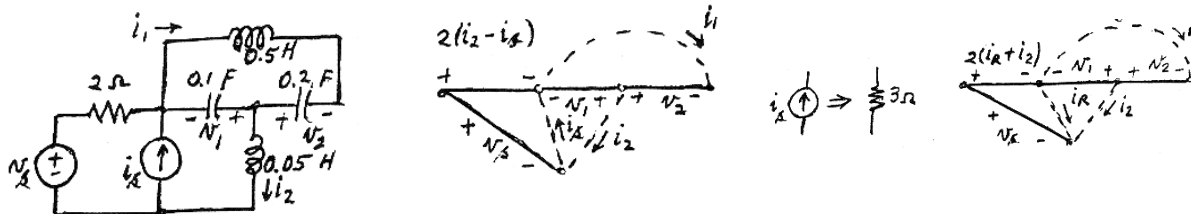
$$\therefore i'_L = -12,200i_L + 376v_C + 4700i_s \quad (1)$$

Order:  $i_L, v_C$  Also,  $0.0002v'_C = i_s - i_A - i_L = i_s + 0.2i_L - 0.016v_C - 0.2i_s - i_L$

$$\therefore 0.0002v'_C = -0.8i_L - 0.016v_C + 0.8i_s \quad \therefore v'_C = -4000i_L - 80v_C + 4000i_s \quad (2)$$

# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

9.



$$0.1v_1' = i_1 - i_2 \quad \therefore v_1' = 10i_1 - 10i_2 \quad (1)$$

$$0.2v_2' = -i_1 \quad \therefore v_2' = -5i_1 \quad (2)$$

$$0.5i_1' = -v_1 + v_2, \quad \therefore i_1' = -2v_1 + 2v_2 \quad (3)$$

$$0.05i_2' = v_1 + 2i_s - 2i_2 + v_s \quad \therefore i_2' = 20v_1 - 40i_2 + 40i_s + 20v_s \quad (4)$$

Order:  $v_1, v_2, i_1, i_2$

$$0.1v_1' = i_1 - i_2 \quad \therefore v_1' = 10i_1 - 10i_2 \quad (1)$$

$$0.2v_2' = -i_1 \quad \therefore v_2' = -5i_1 \quad (2)$$

$$0.5i_1' = -v_1 + v_2 \quad \therefore i_1' = -2v_1 + 2v_2 \quad (3)$$

$$0.05i_2' = v_1 + v_s - 2i_R - 2i_2, \quad 3i_R = -2i_R - 2i_2 + v_s \quad \therefore i_R = -0.4i_2 + 0.2v_s$$

$$\therefore 0.05i_2' = v_1 + v_s + 0.8i_2 - 0.4v_s - 2i_2 \quad \therefore i_2' = 20v_1 - 24i_2 + 12v_s \quad (4)$$

# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

10.

(a) Order:  $i_L, v_C \therefore 0.2i'_L = -v_C - 20i_L + 20i_s$

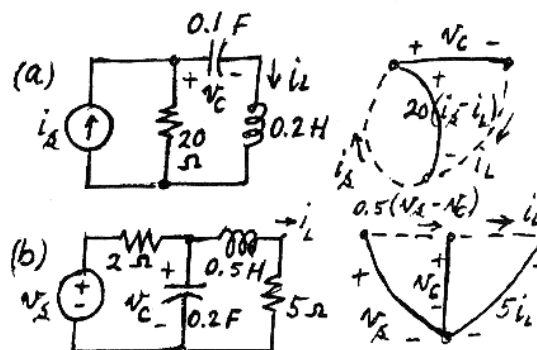
$$\therefore i'_L = -100i_L - 5v_C + 100i_s \quad (1)$$

$$0.1v'_C = i_L \therefore v'_C = 10i_L \quad (2)$$

(b)  $0.5i'_L = v_C - 5i_L \therefore i'_L = -10i_L + 2v_C \quad (1)$

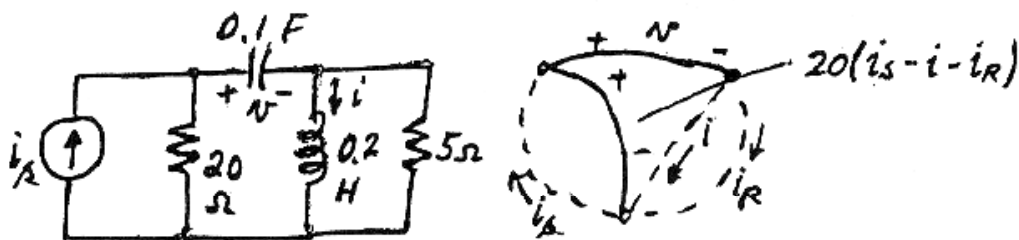
$$0.2v'_C = 0.5v_s - 0.5v_C - i_L$$

$$\therefore v'_C = -5i_L - 2.5v_C + 2.5v_s \quad (2)$$



# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

11.



$$\therefore 5i_R = -v + 20i_s - 20i - 20i_R$$

$$\therefore i_R = -0.04v - 0.8i + 0.8i_s$$

$$\therefore 0.1v' = i + i_R = -0.04v + 0.2i + 0.8i_s$$

$$\text{Order: } v, i \quad \therefore v' = -0.4v + 2i + 8i_s \quad (1)$$

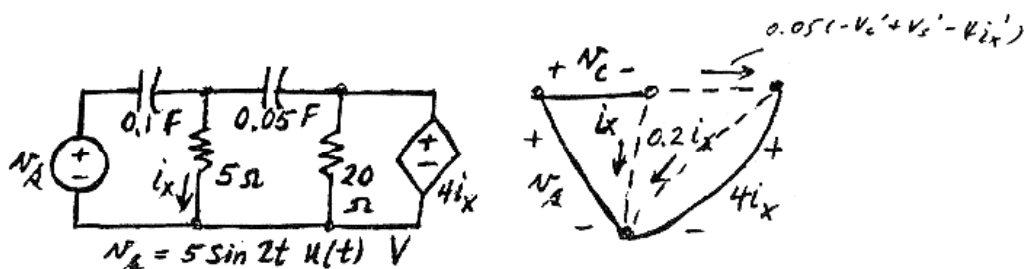
$$0.2i' = -v + 20i_s + 20i - 20(-0.04v + 0.2i + 0.8i_s)$$

$$\therefore 0.2i' = -0.2v - 4i + 4i_s \quad \therefore i' = -v - 20i + 20i_s \quad (2)$$



# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

12.



$$\frac{4i_x}{20} = 0.2i_x$$

$$0.1v_c' = i_x - 0.05v_c' + 0.05v_s' - 0.2i_x'$$

$$\therefore 0.15v_c' = i_x - 0.2i_x' + 0.05v_s'$$

$$5i_x = -v_c + v_s, \quad i_x = -0.2v_c + 0.2v_s, \quad i_x' = -0.2v_c' + 0.2v_s'$$

$$\therefore 0.15v_c' = -0.2v_c + 0.2v_s + 0.04v_c' - 0.04v_s' + 0.05v_s'$$

$$\therefore 0.11v_c' = -0.2v_c + 0.2v_s + 0.01v_s' \quad \therefore 0.11v_c' = -0.2v_c + \sin 2tu(t) + 0.1 \cos 2tu(t)$$

$$\therefore v_c' = -\frac{20}{11}v_c + \frac{100}{11}\sin 2tu(t) + \frac{10}{11}\cos 2tu(t) \quad (1)$$

## CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

13.

(a)  $\bar{q} = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ v_C \end{bmatrix}, \bar{a} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & -8 & -9 \end{bmatrix}, \bar{f} = \begin{bmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 1+t \end{bmatrix} \therefore i'_{L1} = -i_{L1} - 2i_{L2} - 3v_C + 2t \quad (1)$

$$i'_{L2} = 4i_{L1} - 5i_{L2} + 6v_C + 3t^2 \quad (2)$$

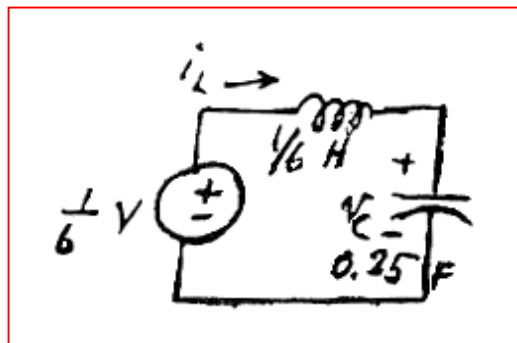
$$v'_C = 7i_{L1} - 8i_{L2} - 9v_C + 1 + t \quad (3)$$

(b)  $\bar{q} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}, \bar{a} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \bar{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore i'_L = -6v_C + 1, v'_C = 4i_L$$

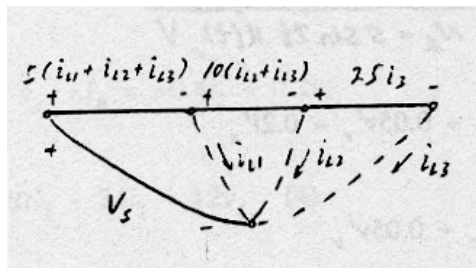
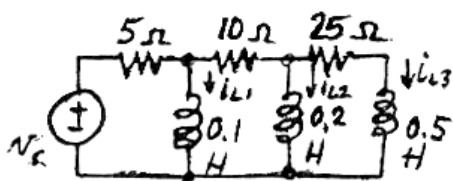
$$\therefore 0.25v'_C = i_L \therefore C = 0.25 \text{ F}$$

$$\frac{1}{6} i'_L = -v_C + \frac{1}{6} \therefore L = \frac{1}{6} \text{ H}$$



# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

14.



$$0.1i'_{L1} = -5i_{L1} - 5i_{L2} - 5i_{L3} + v_s$$

$$\therefore i'_{L1} = -50i_{L1} - 50i_{L2} - 50i_{L3} + 10v_s \quad (1)$$

$$0.2i'_{L2} = -5i_{L1} - 15i_{L2} - 15i_{L3} + v_s$$

$$\therefore i'_{L2} = -25i_{L1} - 75i_{L2} - 75i_{L3} + 5v_s \quad (2) \quad 0.5i'_{L3} = -5i_{L1} - 15i_{L2} - 40i_{L3} + v_s$$

$$\therefore i'_{L3} = -10i_{L1} - 30i_{L2} - 80i_{L3} + 2v_s \quad (3)$$

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} -50 & -50 & -50 \\ -25 & -75 & -75 \\ -10 & -30 & -80 \end{bmatrix} \quad \bar{f} = \begin{bmatrix} 10v_s \\ 5v_s \\ 2v_s \end{bmatrix}$$

## CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

15.

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix}, \bar{a} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \bar{f} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{w} = \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{02} \\ i_{R1} \\ i_{R2} \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \bar{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{w} = \bar{b}\bar{q} + \bar{d} \quad \therefore \bar{q}' = \bar{a}\bar{q} + \bar{f}, \bar{w} = \bar{b}\bar{q} + \bar{d}, \bar{w}' = \bar{b}\bar{q}' = \bar{b}\bar{a}\bar{q} + \bar{b}\bar{f}$$

$$\bar{b}\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{b}\bar{f} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \bar{w}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{C1} + v_{C2} + 10 \\ -v_{C1} - 4v_{C2} + 2i_L \\ 9v_{C2} - 4i_L \\ 3v_{C1} + 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore v'_{01} = v_{C1} + v_{C2} + 10, v'_{02} = -v_{C1} - 4v_{C2} + 2i_L, i'_{R1} = 9v_{C2} - 4i_L, i'_{R2} = 3v_{C1} + 10$$



# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

16.

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \bar{a} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \bar{f} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \bar{q}' = \bar{a}\bar{q} + \bar{f}, \bar{q} = \bar{b}\bar{y} + \bar{d}, \bar{y}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

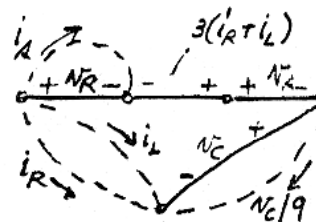
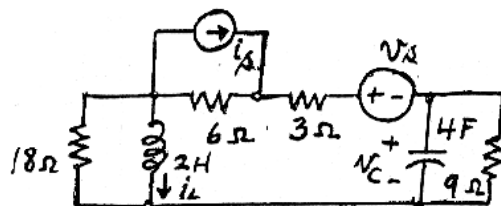
$$\therefore \bar{q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_4 + 2 \\ -y_2 + y_3 + y_4 + 1 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 + 3y_4 + 3 \end{bmatrix} \therefore \bar{q}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 53 \end{bmatrix}$$

$$\bar{q}'(0) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \\ 53 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 + 11 + 106 + 1 \\ -14 - 22 + 53 \\ -7 + 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97 \\ 17 \\ 26 \end{bmatrix}$$

# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

17.

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$



$$4v'_C = -\frac{v_C}{9} - i_L - i_R, 2i'_L = v_R - 3i_R - 3i_L + v_s + v_C, 18i_R = 2i'_L \therefore i_R = \frac{1}{9}i'_L$$

$$\frac{v_R}{6} = -i_R - i_L - i_s \therefore v_R = -6i_R - 6i_L - 6i_s = -\frac{2}{3}i'_L - 6i_L - 6i_s, \therefore 4v'_C = -\frac{v_C}{9} - i_L - \frac{1}{9}i'_L$$

$$\text{Also, } 2i'_L = -\frac{2}{3}i'_L - 6i_L - 6i_s - \frac{1}{3}i'_L - 3i_L + v_C + v_s \therefore 3i'_L = v_C - 9i_L + v_s - 6i_s$$

$$\therefore i'_L = \frac{1}{3}v_C - 3i_L + \frac{1}{3}v_s - 2i_s \quad (2) \quad 4v'_C = -\frac{1}{9}v_C - i_L - \frac{1}{27}v_C + \frac{1}{3}i_L - \frac{1}{27}v_s + \frac{2}{9}i_s$$

$$\therefore 4v'_C = -\frac{4}{27}v_C - \frac{2}{3}i_L - \frac{1}{27}v_s + \frac{2}{9}i_s \therefore v'_C = -\frac{1}{27}v_C - \frac{1}{6}i_L - \frac{1}{108}v_s + \frac{1}{18}i_s \quad (1)$$

$$\therefore [\bar{a}] = \begin{bmatrix} -1/27 & -1/6 \\ 1/3 & -3 \end{bmatrix} [\bar{f}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{108}v_s + \frac{1}{18}i_s \\ \frac{1}{3}v_s - 2i_s \end{bmatrix}$$

## CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

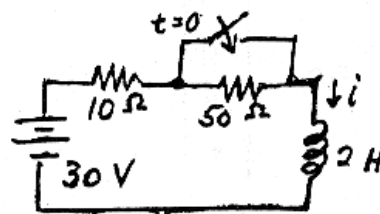
18.

(a)  $30 = 10i + 2i' \quad \therefore i' = -5i + 15$

(b)  $i(0) = 0.5 \text{ A}, a = -5 \quad \therefore i = e^{-5t} 0.5 + e^{-5t} \int_0^t 15e^{5z} dz$   
 $\therefore i = 0.5e^{-5t} + e^{-5t} 3(e^{5t} - 1) = 3 - 2.5e^{-5t} \text{ A}, t > 0$

(c)  $i_{\text{zero state}} = 3(1 - e^{-5t}) \text{ A}, i_{\text{zero input}} = 0.5e^{-5t} \text{ A}$

(d)  $i_f = 3, i_n = Ae^{-5t} \quad \therefore i = 3 + Ae^{-5t}, i(0) = 0.5 \quad \therefore i = 3 - 2.5e^{-5t} \text{ A}$   
 $\therefore i_n = -2.5e^{-5t} \text{ A}, i_f = 3 \text{ A}$



# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

19.

$$\therefore 5 \times 10^{-5} v'_C = 0.04t u(t) - 0.025v_C$$

$$\therefore v'_C = -500v_C + 800tu(t) \quad \therefore a = -500$$

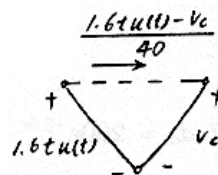
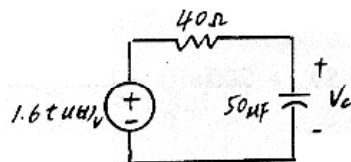
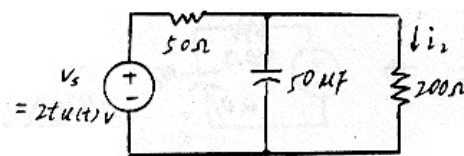
$$\therefore v_C = e^{-500t} \int_0^t e^{500Z} 800Z dz$$

$$= 800e^{-500t} \int_0^t Ze^{500Z} dz$$

$$\therefore v_C = 800e^{-500t} \left[ e^{500Z} \left( \frac{Z}{500} - \frac{1}{500^2} \right) \right]_0^t$$

$$\therefore v_C = 800e^{-500t} \left[ e^{500t} \left( \frac{t}{500} - \frac{1}{500^2} \right) + \frac{1}{500^2} \right]$$

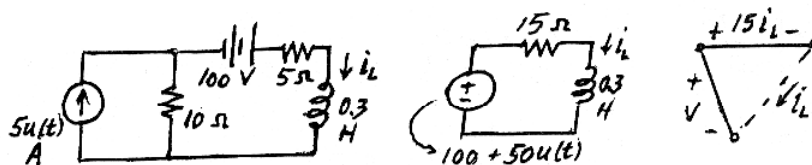
$$\therefore v_C = 1.6t + \frac{1.6}{500}(-1 + e^{-500t}) \quad \therefore i_2 = \frac{1}{200}v_C = 8 \times 10^{-3}t - 16 \times 10^{-6}(1 - e^{-500t}) \text{ A, } t > 0$$





# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

20.



$$(a) \quad 0.3i'_L = -15i_L + 100 + 50u(t), \quad i'_L = -50i_L + \frac{1000}{3} + \frac{500}{3}u(t), \quad i_L(0) = \frac{100}{15} = \frac{20}{3} \text{ A}$$

$$\therefore i_L = e^{-50t} \times \frac{20}{3} + e^{-50t} \int_0^t e^{50Z} 500 dZ = \frac{20}{3}e^{-50t} + 500e^{-50t} \frac{1}{50}(e^{50t} - 1)$$

$$\therefore i_L = \frac{20}{3}e^{-50t} + 10(1 - e^{-50t}) \quad t > 0$$

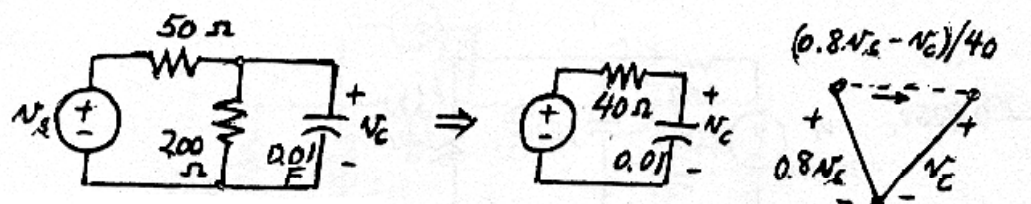
$$\therefore i_L = \frac{20}{3}u(-t) + \left[ 10 - \frac{10}{3}e^{-50t} \right] u(t) \text{ A}$$

$$(b) \quad i_{L, \text{zero input}} = \frac{20}{3}e^{-50t} \text{ A}, \quad i_{L, \text{zero state}} = 10(1 - e^{-50t}) \text{ A}$$

$$i_{Lf} = 10 \text{ A}, \quad i_{Ln} = -\frac{10}{3}e^{-50t} \text{ A}$$

# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

21.



$$v_s = 100[u(t) - u(t - 0.5)] \cos \pi t \text{ V}$$

$$0.01 v'_C = \frac{1}{40} (0.8 v_s - v_C) \therefore v'_C = -2.5 v_C + 200[u(t) - u(t - 0.5)] \cos \pi t$$

$$t < 0 \quad v_C = 0$$

$$0 \leq t \leq 0.5 \quad v_C = e^{-2.5t} \times 200 \int_0^t e^{2.5Z} \cos \pi Z \, dZ = 200 e^{-2.5t} \left[ \frac{e^{2.5Z}}{6.25 + \pi^2} (2.5 \cos \pi Z + \pi \sin \pi Z) \right]_0^t$$

$$\therefore v_C = \frac{200}{6.25 + \pi^2} (2.5 \cos \pi t + \pi \sin \pi t) - \frac{200}{6.25 + \pi^2} 2.5 e^{-2.5t}$$

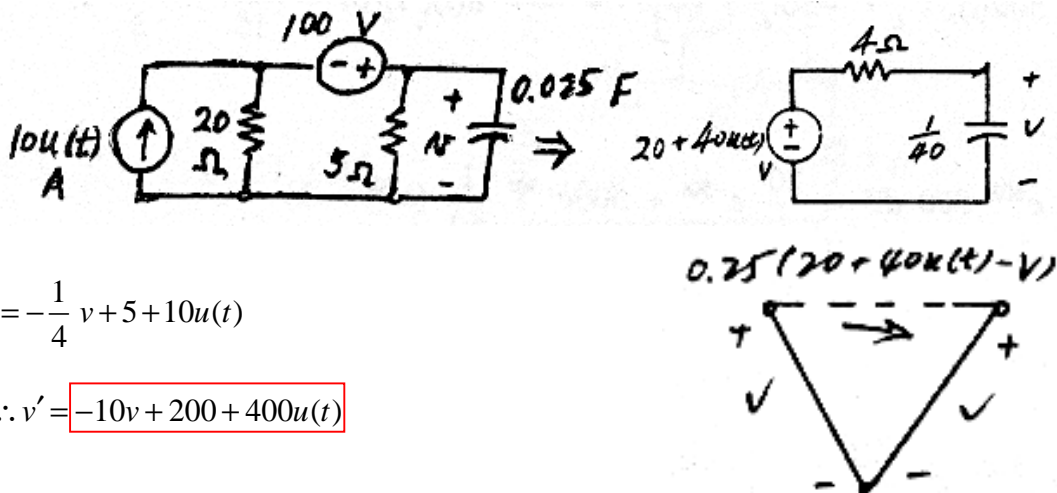
$$\therefore v_C = 31.02 \cos \pi t + 38.98 \sin \pi t - 31.02 e^{-2.5t}$$

$$t > 0.5 \quad v_C = 200 e^{-2.5t} \left[ \frac{e^{2.5Z}}{6.25 + \pi^2} (2.5 \cos \pi Z + \pi \sin \pi Z) \right]_0^{0.5}$$

$$\therefore v_C = 200 e^{-2.5t} \left[ \frac{e^{1.25}}{6.25 + \pi^2} \pi - \frac{1}{6.25 + \pi^2} \times 2.5 \right] = 105.03 e^{-2.5t} \text{ V}$$

# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

22.



$$\therefore \frac{1}{40} v' = -\frac{1}{4} v + 5 + 10u(t)$$

(a)  $\therefore v' = -10v + 200 + 400u(t)$

(b)  $t < 0 \therefore v = 20 \text{ V}$

$$t > 0 \quad v = 20e^{-10t} + 600e^{-10t} \int_0^z e^{10z} dz = 20e^{-10t} + 60e^{-10t} (e^{10t} - 1)$$

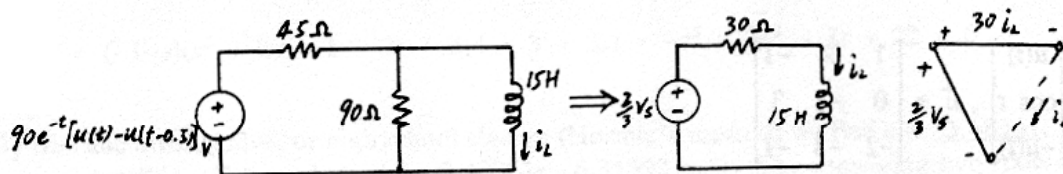
$$\therefore v = 20e^{-10t} + 60 - 60e^{-10t} \therefore v = 60 - 40e^{-10t} \text{ V}$$

(c)  $v_{\text{forced}} = 60 \text{ V} \quad v_{\text{nat}} = -40e^{-10t} \text{ V}$

$$v_{\text{zero state}} = 60(1 - e^{-10t}) \text{ V} \quad v_{\text{zero input}} = 20e^{-10t} \text{ V}$$

# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

23.



$$15'_{L} = -30i_L + \frac{2}{3}v_s$$

$$\therefore i'_L = -2i_L + 4e^{-t}[u(t) - u(t - 0.5)]$$

$$\therefore i_L = 4e^{-2t} \int_0^t e^{2z} e^{-z} [u(z) - u(z - 0.5)] dz$$

$$0 \leq t \leq 0.5 \quad i_L = 4e^{-2t} \int_0^t e^z dZ = 4e^{-2t} (e^t - 1) = \boxed{4e^{-t} - 4e^{-2t} \text{ A}}$$

$$t \geq 0.5 \quad i_L = 4e^{-2t} \int_0^{0.5} e^z dZ + 0 = 4e^{-2t} (e^{0.5} - 1) = \boxed{2.595e^{-2t} \text{ A}}$$



## CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

24.

$$[a] = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}, t = 0.01$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad e^{-t\bar{a}} &= \bar{I} - \begin{bmatrix} -0.08 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -0.08 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.08 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} - \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0.0114 & -0.0090 \\ -0.0180 & 0.0150 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0.0114 & -0.009 \\ -0.018 & 0.015 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.08 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1.08 & -0.05 \\ -0.1 & 1.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0057 & -0.0045 \\ -0.009 & 0.0075 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -0.00181 & 0.00147 \\ 0.00294 & -0.00240 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1.0860 & -0.0547 \\ -0.1095 & 1.1079 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad e^{t\bar{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.08 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0057 & -0.0045 \\ -0.009 & 0.0075 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0003 & 0.0002 \\ 0.0005 & -0.0004 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0.9254 & 0.0457 \\ 0.0915 & 0.9071 \end{bmatrix}}$$

$$\text{(c)} \quad e^{-t\bar{a}} e^{t\bar{a}} = \begin{bmatrix} 1.0860 & -0.0547 \\ -0.1095 & 1.1079 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9254 & 0.0457 \\ 0.0915 & 0.9071 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 \\ 0 & 1.0000 \end{bmatrix}}$$

# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

25.

$$(a) \quad \bar{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \bar{f} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \cos t \\ -u(t) \end{bmatrix}, \bar{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x' = x + 2y - z + u(t), \quad y' = -y + 3z + \cos t, \quad z' = -2x - 3y - z - u(t)$$

$$(b) \quad \bar{q}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \therefore \bar{q}'(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Delta t = 0.1$$

$$\bar{q}(0.1) = \bar{q}(0) + 0.1\bar{q}'(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ -2.3 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad \Delta t = 0.05 \quad \therefore \bar{q}(0.5) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.05 \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ -2.65 \\ 1.15 \end{bmatrix}$$

$$\bar{q}'(0.05) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.8 \\ -2.65 \\ 1.15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 0.05 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.65 \\ 7.0988 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{q}(0.1) = \bar{q}(0.05) + 0.05\bar{q}'(0.05) = \begin{bmatrix} 1.8 \\ -2.65 \\ 1.15 \end{bmatrix} + 0.05 \begin{bmatrix} -3.65 \\ 7.0988 \\ 2.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6175 \\ -2.2951 \\ 1.26 \end{bmatrix}$$

## CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

26.

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ Now, } \bar{a} - \bar{s} \bar{I} = \begin{bmatrix} -1-s & 2 & 3 \\ 0 & -1-s & 2 \\ 3 & 1 & -1-s \end{bmatrix}$$

$$\det[ ] = (-1-s)(s^2 + 2s + 1 - 2) + 3(4 + 3 + 3s) = -s^3 - 3s^2 + 8s + 22 = 0$$

By trial and error, Solve, or high school algebra (Horner's method) we find  $s = -3.48361$ . Now divide polynomial by  $s + 3.48361$ . Get quadratic,  $s^2 - 0.48361s - 6.31592 = 0$ .

The remaining two roots are:  $s = -2.28282$  and  $s = + 2.76641$ .

## CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

27.

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \det(\bar{a} - s\bar{I}) = \det \begin{bmatrix} -3-s & 2 \\ 1 & -4-s \end{bmatrix} = s^2 + 7s + 12 - 2 = 0$$

Roots are  $s_1 = -2$ ,  $s_2 = -5$  Now,  $e^{s_1 t} = u_o + u_1 s_1$ ,  $e^{s_2 t} = u_o + u_1 s_2$

$$\therefore e^{-2t} = u_o - 2u_1, e^{-5t} = u_o - 5u_1 \therefore e^{-2t} - e^{-5t} = 3u_1, u_1 = \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t}$$

$$\therefore u_o = e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t}, \text{ or } u_o = \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t}$$

$$e^{t\bar{a}} = u_o \bar{I} + u_1 \bar{a} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} \end{bmatrix} + \left( \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} \right) \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$e^{t\bar{a}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} - e^{-2t} + e^{-5t} & \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} \\ \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} & \frac{5}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} - \frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-5t} \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{t\bar{a}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} & \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-5t} \\ \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} & \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-5t} \end{bmatrix}$$



# CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

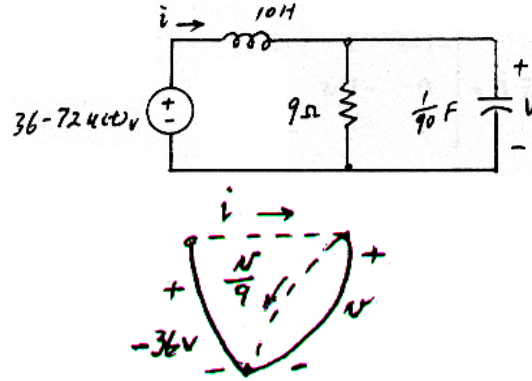
28.

$$(a) \quad \bar{q} = \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} \quad 10i' = -36 - v$$

$$\frac{1}{90}v' = i - \frac{1}{9}v$$

$$\therefore i' = -0.1v - 3.6, \quad v' = 90i - 10v$$

$$\therefore \bar{a} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 90 & -10 \end{bmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{bmatrix} -3.6 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$(b) \quad \bar{a} - s\bar{I} = \begin{bmatrix} 0-s & -0.1 \\ 90 & -10-s \end{bmatrix}, \quad \det(\bar{a} - s\bar{I}) = s^2 + 10s + 9 \quad \therefore s_1 = -1, s_2 = -9$$

$$(c) \quad e^{-t} = u_o - u_1, \quad e^{-9t} = u_o - 9u_1 \quad \therefore e^{-t} - e^{-9t} = 8u_1$$

$$\therefore u_1 = \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-9t}, \quad u_o = \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-9t} + e^{-t} = \frac{9}{8}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-9t}$$

$$(d) \quad e^{\bar{a}t} = u_o \bar{I} + u_1 \bar{a} = \frac{1}{8}(9e^{-t} - e^{-9t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{8}(e^{-t} - e^{-9t}) \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 90 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 8e^{\bar{a}t} = \begin{bmatrix} 9e^{-t} - e^{-9t} & 0 \\ 0 & 9e^{-t} - e^{-9t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.1e^{-t} + 0.1e^{-9t} \\ 90e^{-t} - 90e^{-9t} & -10e^{-t} + 10e^{-9t} \end{bmatrix}$$

$$8e^{\bar{a}t} = \begin{bmatrix} 9e^{-t} - e^{-9t} & -0.1e^{-t} + 0.1e^{-9t} \\ 90e^{-t} - 90e^{-9t} & -e^{-t} + 9e^{-9t} \end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{\bar{a}t} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8}e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-9t} & -\frac{1}{80}e^{-t} + \frac{1}{80}e^{-9t} \\ \frac{90}{8}e^{-t} - \frac{90}{8}e^{-9t} & -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{9}{8}e^{-9t} \end{bmatrix}$$

$$(e) \quad \bar{q} = e^{\bar{a}t} \bar{q}(0) + e^{\bar{a}t} \int_0^t e^{-Z\bar{a}} f(Z) dZ \quad \bar{q}(0) = \begin{bmatrix} i(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9e^{-t} - e^{-9t} & -0.1e^{-t} + 0.1e^{-9t} \\ 90e^{-t} - 90e^{-9t} & -e^{-t} + 9e^{-9t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{8} e^{\bar{a}t} \int_0^t \begin{bmatrix} 9e^Z - e^{9Z} & -0.1e^Z + 0.1e^{9Z} \\ 90e^Z - 90e^{9Z} & -e^Z + 9e^{9Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3.6 \\ 0 \end{bmatrix} dZ$$

$$\therefore \bar{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9e^{-t} - e^{-9t} - 0.9e^{-t} + 0.9e^{-9t} \\ 90e^{-t} - 90e^{-9t} - 9e^{-t} + 81e^{-9t} \end{bmatrix} - 0.45 e^{\bar{a}t} \int_0^t \begin{bmatrix} 9e^Z - e^{9Z} \\ 90e^Z - 90e^{9Z} \end{bmatrix} dZ$$

## CHAPTER NINETEEN (WEB CHAPTER) SOLUTIONS

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 4.05e^{-t} - 0.05e^{9t} \\ 40.5e^{-t} - 4.5e^{-9t} \end{bmatrix} - 0.45e^{t\bar{a}} \begin{bmatrix} 9e^t - \frac{1}{9}e^{9t} - 9 + \frac{1}{9} \\ 90e^t - 10e^{9t} - 90 + 10 \end{bmatrix} \\
 \bar{q} &= \begin{bmatrix} 4.05e^{-t} - 0.05e^{-9t} \\ 40.5e^{-t} - 4.5e^{-9t} \end{bmatrix} - \frac{0.45}{8} \begin{bmatrix} 9e^{-t} - e^{-9t} & 0.1e^{-t} + 0.1e^{-9t} \\ 90e^{-t} - 90e^{-9t} & -e^{-t} + 9e^{-9t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9e^t - \frac{1}{9}e^{9t} - \frac{80}{9} \\ 90e^t - 10e^{9t} - 80 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4.05e^{-t} & -0.05e^{-9t} \\ 40.5e^{-t} & -4.5e^{-9t} \end{bmatrix} \\
 &\quad - \frac{0.45}{8} \begin{bmatrix} 81 - e^{8t} - 80e^{-t} - 9e^{-8t} + \frac{1}{9} + \frac{80}{9}e^{-9t} - 9 + e^{8t} + 8e^{-t} + 9e^{-8t} - 1 - 8e^{-9t} \\ 810 - 10e^{8t} - 800e^{-t} - 810e^{-8t} + 10 + 800e^{-9t} - 90 + 10e^{8t} + 80e^{-t} + 810e^{-8t} - 90 - 720e^{-9t} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4.05e^{-t} - 0.05e^{-9t} \\ 40.5e^{-t} - 4.5e^{-9t} \end{bmatrix} - \frac{0.45}{7} \begin{bmatrix} 71 + \frac{1}{9} - 72e^{-t} + \frac{8}{9}e^{-9t} \\ 640 - 720e^{-t} + 80e^{-9t} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4.05e^{-t} - 0.05e^{-9t} \\ 40.5e^{-t} - 4.5e^{-9t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 - 4.05e^{-t} + 0.05e^{-9t} \\ 36 - 40.5e^{-t} + 4.5e^{-9t} \end{bmatrix} \\
 \therefore \bar{q} &= \begin{bmatrix} -4 + 8.1e^{-t} - 0.1e^{-9t} \\ -36 + 81e^{-t} - 9e^{-9t} \end{bmatrix} \quad (t > 0)
 \end{aligned}$$