مقدمه ای بر روش المان محدود
روش‌های تقریبی

مدرس:
مجید خزایی
کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا
دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران)

فهرست مطالب

۱ مقدمه

۲ روش رایلی- ریتز

۳ روش گالرکین

۴ نتیجه‌گیری

- مقدمه

روش‌های حل معادله دیفرانسیل

پیش نیازها

معرفی انواع شرایط مرزی

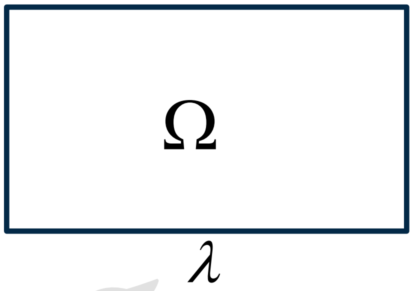
مقدمه

معادله دیفرانسیل در دامنه **Ω**

$$L(\phi) + A = 0$$

شرط مرزی در مرز **λ**

$$m(\phi) + B = 0$$



مثال

$$\partial^2\phi / \partial x^2 + 2 = 0 \quad on \qquad \Omega$$

$$\phi + 2 = 0 \quad on \quad \lambda$$

مقدمه

حل معادله دیفرانسیل

روش‌های تحلیلی

روش‌های عددی

روش‌های تحلیلی

- روش‌های دقیق ←
  - ❑ جداسازی متغیرها
  - ❑ تبدیل فوریه
- روش‌های تقریبی ←
  - ❑ روش رایلی - ریتز
  - ❑ روش گالرکین

روش‌های عددی

- روش‌های تفاضل محدود
- روش‌های المان محدود
- روش المان مرزی

مقدمه

$$\pi = \int_0^L \left(\frac{AE}{2} \left(u_{,x} \right)^2 - qu \right) dx$$

$$AE \frac{d^2u}{dx^2} + q = 0$$

استخراج معادله دیفرانسیل یا فانکشنال

فرض یک جواب سری تقریبی

اعمال شرایط مرزی

روش‌های تقریبی

مقدمه

پیش نیازها:

اصل کار مجازی و اصل حداقل سازی تابع پتانسیل

سیستم در حالت تعادل استاتیک ⬅ جابجایی δ (شرایط قیدی را حفظ کند)

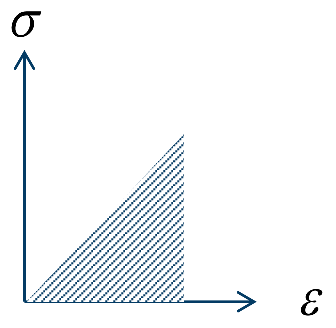
⬅ کار مجازی نیروی داخلی و خارجی با هم برابر

$$\underbrace{\text{تابع پتانسیل} \leftarrow \pi}\; = \underbrace{u}_{\text{انرژی کرنشی}} - \underbrace{W_{ext}}_{\text{کار نیروی خارجی}} \;\Rightarrow\; \underbrace{\delta}_{\text{اپراتور حساب تغییرات}}\pi = 0$$

مقدمه

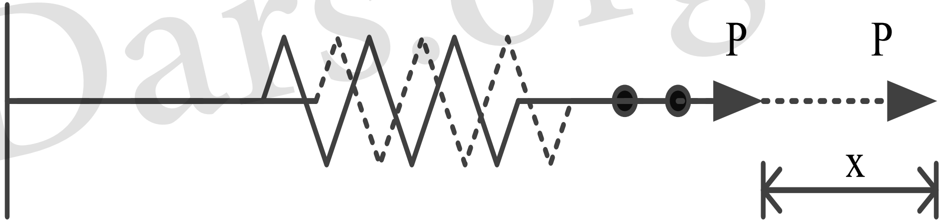
پیش نیازها:

- انرژی کرنشی



$$U = \int \tfrac{1}{2}\sigma\varepsilon \, dv$$

- کار نیروی خارجی



$$W_{ext} = px$$

- اپراتور دیفرانسیل حساب تغییرات

$$\delta F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y$$

مقدمه

پیش نیازها:

- فانکشنال (Functional) ⟵ ورودی: تابع و خروجی عدد اسکالر

$$I(u) = \int F(x, u, u', u'')dx$$

- معادله دیفرانسیل

$$L(u) + A = 0$$

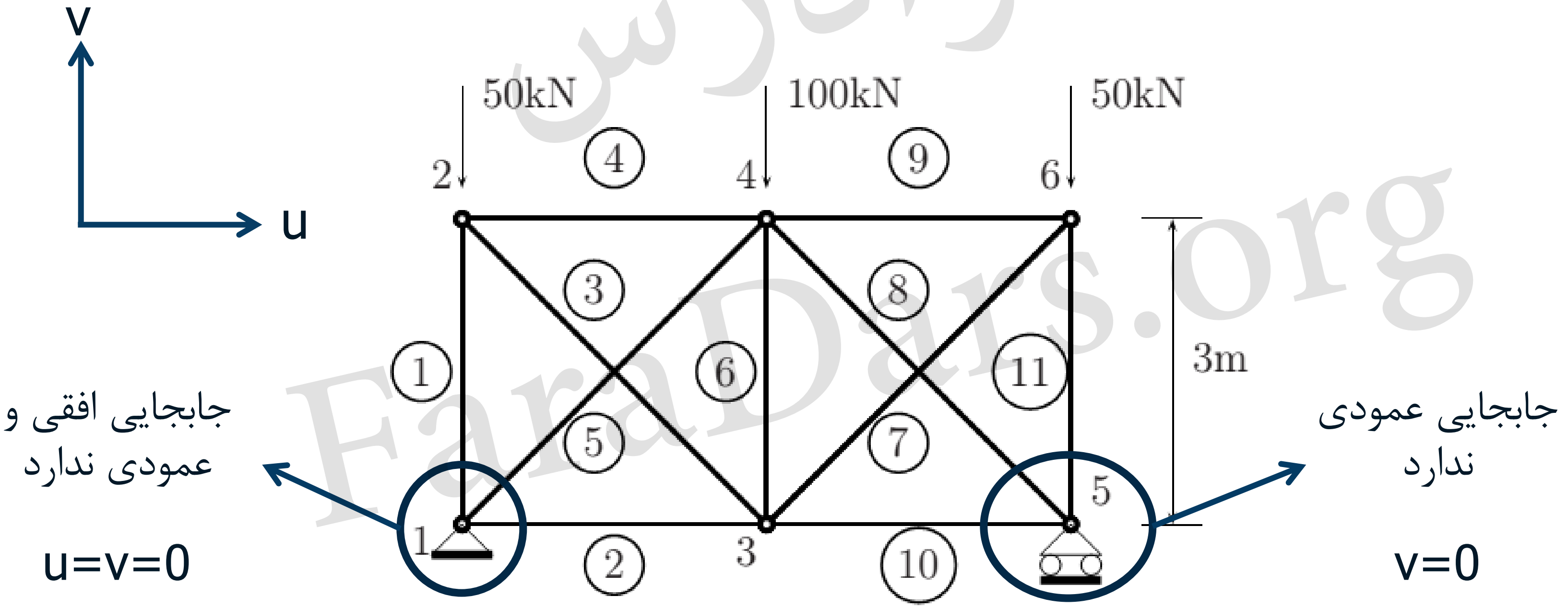
فانکشنال (Functional) ⟷ معادله دیفرانسیل

[An introduction to finite element method, Reddy]

مقدمه

شرایط مرزی چیست؟

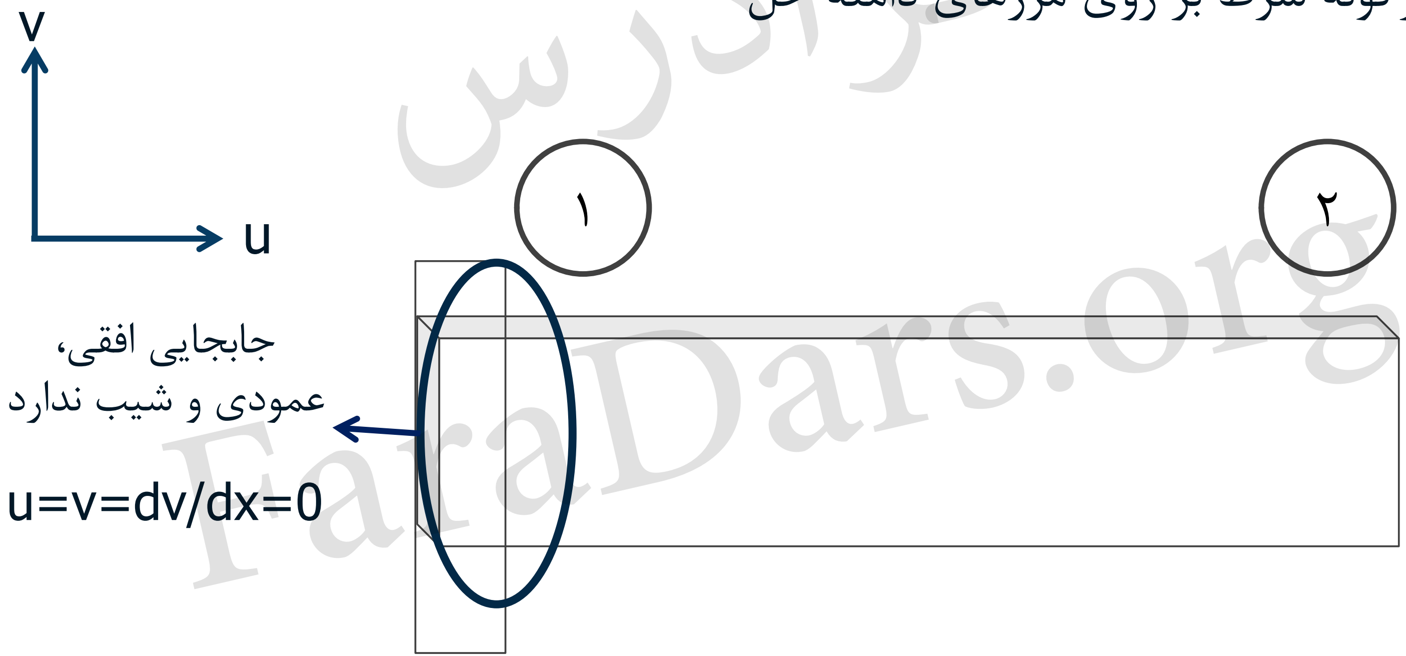
- وجود هرگونه شرط بر روی مرزهای دامنه حل



مقدمه

شرایط مرزی چیست؟

- وجود هرگونه شرط بر روی مرزهای دامنه حل



مقدمه

انواع شرایط مرزی

$$\frac{d^m \phi}{dx^m} + A = 0$$

- n=m/2
- شرط مرزی از درجه **0** تا **n-1**، ضروری
- شرط مرزی از درجه **n** تا **m-1**، طبیعی

شرط مرزی ضروری (هندسی)

شرط مرزی طبیعی (نیرویی)

روش رایلی- ریتز

- روش رایلی- ریتز
- روش رایلی- ریتز به همراه تابع پنالتی
- مثال عددی به همراه برنامه نویسی متلب

روش رایلی- ریتز

هدف:

یافتن تقریبی تابع u که فانکشنال را حداقل نماید

$$I(u) = \int F(x, u, u', u'')dx$$

از فانکشنال استفاده می‌شود

مشتقات کمتر هستند

توابع پایه جواب از درجه کمتری هستند

$$\delta\left(I(u)\right) = 0$$

روش رایلی- ریتز

1

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x)+\psi(x)$$

ارضا نمودن شرط مرزی ضروری

عدم نیاز به ارضا نمودن شرط مرزی طبیعی (نیرویی)

2

$N_i(x)$

توابع امتحانی

(Trail Function)

$\psi(x)$

توابع کمکی برای ارضاء شروط مرزی ضروری

3

یافتن a_i

$$\pi(u)=\int F(x,u,u',u'')dx = \pi(a_1,\ldots,a_n)$$

$$\delta\pi(a_1,\ldots,a_n)=0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial a_1}=0 \quad \cdots \quad \frac{\partial\pi}{\partial a_n}=0$$

روش رایلی- ریتز به همراه تابع پنالتی

3

یافتن a_i

$$\pi_1(u)=\pi_1(a_1,\dots,a_n)$$

$$\delta\pi_1(a_1,\dots,a_n)=0$$

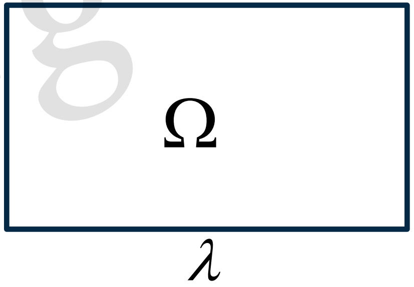
$$\frac{\partial\pi_1}{\partial a_1}=0 \quad \dots \quad \frac{\partial\pi_1}{\partial a_n}=0$$

برای ارضاء شرایط مرزی ضروری

$$m(\phi)+B=0 \quad on \quad \lambda$$

$$\pi_1(u)=\pi(u)+\alpha\int_{\lambda}\left[m(\phi)+B\right]^2 dx$$

α عدد پنالتی: عددی بزرگ $(\alpha=10^6)$



توضیحات تکمیلی روش رایلی- ریتز

توابع امتحانی (Trail Function) $N_i(x)$

توابع تقریبی سری جواب

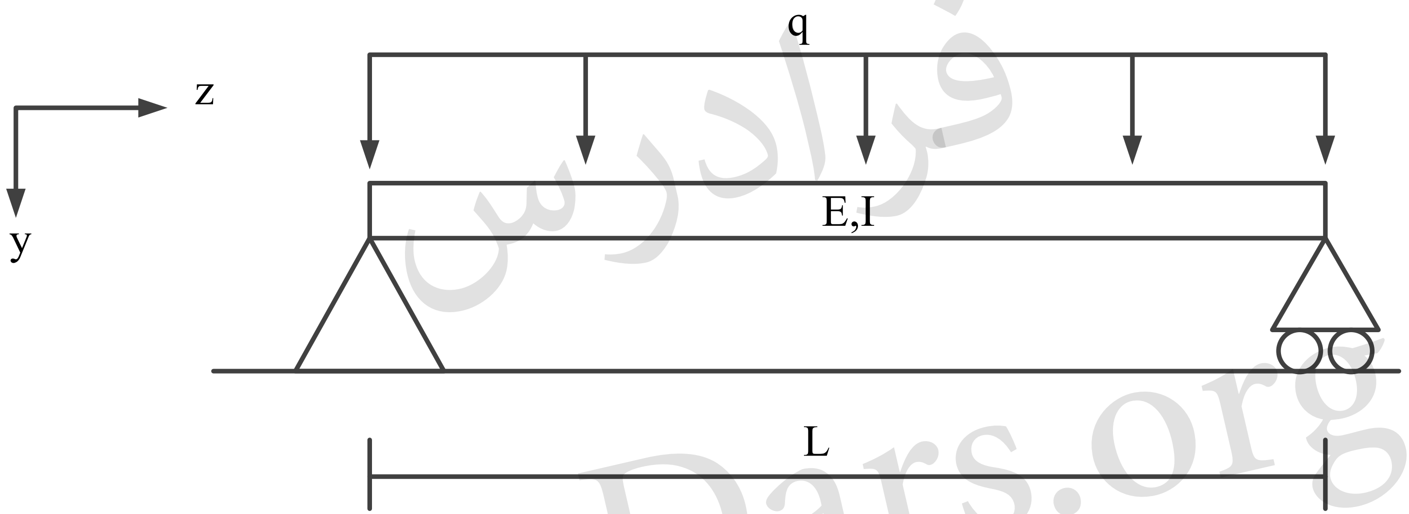
1) مستقل خطی
2) تشکیل فضای کامل
3) ارضاء نمودن شرط مرزی ضروری

- چند جمله‌ای
- مثلثاتی

$$N_i(x) = x^i$$

$$N_i(x) = \sin(ix)$$

مثال ۱–۱: تیر اویلر برنولی به‌روش رایلی – ریتز



$$\pi = \int_0^L \left[\tfrac{1}{2} EI \left(y'' \right)^2 - qy \right] dx$$

$$B.C.\begin{cases} y = 0 \ at \ z = 0 \\ y = 0 \ at \ z = L \end{cases}$$

مثال ۱-۱: تیر اویلر برنولی

توابع تقریب: تنها تقریب دو جمله

$$N_n(z) = \sin\frac{\left(2\left(n-1\right)+1\right)\pi z}{L}$$

$$N_1(z) = \sin\frac{\pi z}{L}$$

$$N_2(z) = \sin\frac{3\pi z}{L}$$

$$y(z) = a_1 \sin\frac{\pi z}{L} + a_2 \sin\frac{3\pi z}{L} + \underbrace{\psi(z)}_{0}$$

شرط مرزی اساسی به تنهایی ارضاء می‌شود

مثال ۱–۱: تیر اویلر برنولی

دستورات متلب مورد نیاز:

syms L E I	تعریف متغیرهای غیر عددی (سمبلیک)
diff(y,’z’,1)	دیفرانسیل تابع y نسبت به متغیر z به تعداد ۱ مرتبه
int(y,’z’)	انتگرال نامعین تابع y نسبت به متغیر z
int(y,’z’,0,L)	انتگرال معین تابع y نسبت به متغیر z از 0 تا L
x=1;eval(y)	مقداردهی تابع y به ازای x=1

مثال ۱-۱: تیر اویلر برنولی

الگوریتم حل

start

تعریف نمادهای L,E,I,z,a1,a2,q

$$y(z)=a_1N_1(z)+a_2N_2(z)$$

$$F=\tfrac{1}{2}EI(y'')^2-qy$$

$$\pi=\int_0^L\left[\tfrac{1}{2}EI(y'')^2-qy\right]dx$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial a_1}=0,\frac{\partial\pi}{\partial a_2}=0$$

End

مثال ۱-۱: تیر اویلر برنولی

الگوریتم حل

$$\begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \begin{cases} A(q,L,E,I)a_1 + B(q,L,E,I) = 0 \\ C(q,L,E,I)a_2 + D(q,L,E,I) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -B(q,L,E,I)/A(q,L,E,I) \\ a_2 = -D(q,L,E,I)/C(q,L,E,I) \end{cases}$$

چگونه به صورت پارامتری حل شود؟

$$a_1 : \begin{cases} den1 = \dfrac{\partial M}{\partial a_1} = A(q,L,E,I) \\ num1 = M\big|_{a_1=0} = B(q,L,E,I) \end{cases}$$

$$a_2 : \begin{cases} den2 = \dfrac{\partial N}{\partial a_2} = C(q,L,E,I) \\ num2 = N\big|_{a_2=0} = D(q,L,E,I) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\dfrac{num1}{den1} = -M\big|_{a_1=0} / \dfrac{\partial M}{\partial a_1} \\ a_2 = -\dfrac{num2}{den2} = -N\big|_{a_2=0} / \dfrac{\partial N}{\partial a_2} \end{cases}$$

مثال ۱-۱: تیر اویلر برنولی

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{4qL^4}{EI\,\pi^5} \\[2ex] a_2 = \dfrac{4qL^4}{243EI\,\pi^5} \end{cases} \Rightarrow \quad y(z) = \frac{4qL^4}{EI\,\pi^5}\sin\frac{\pi z}{L} + \frac{4qL^4}{243EI\,\pi^5}\sin\frac{3\pi z}{L}$$

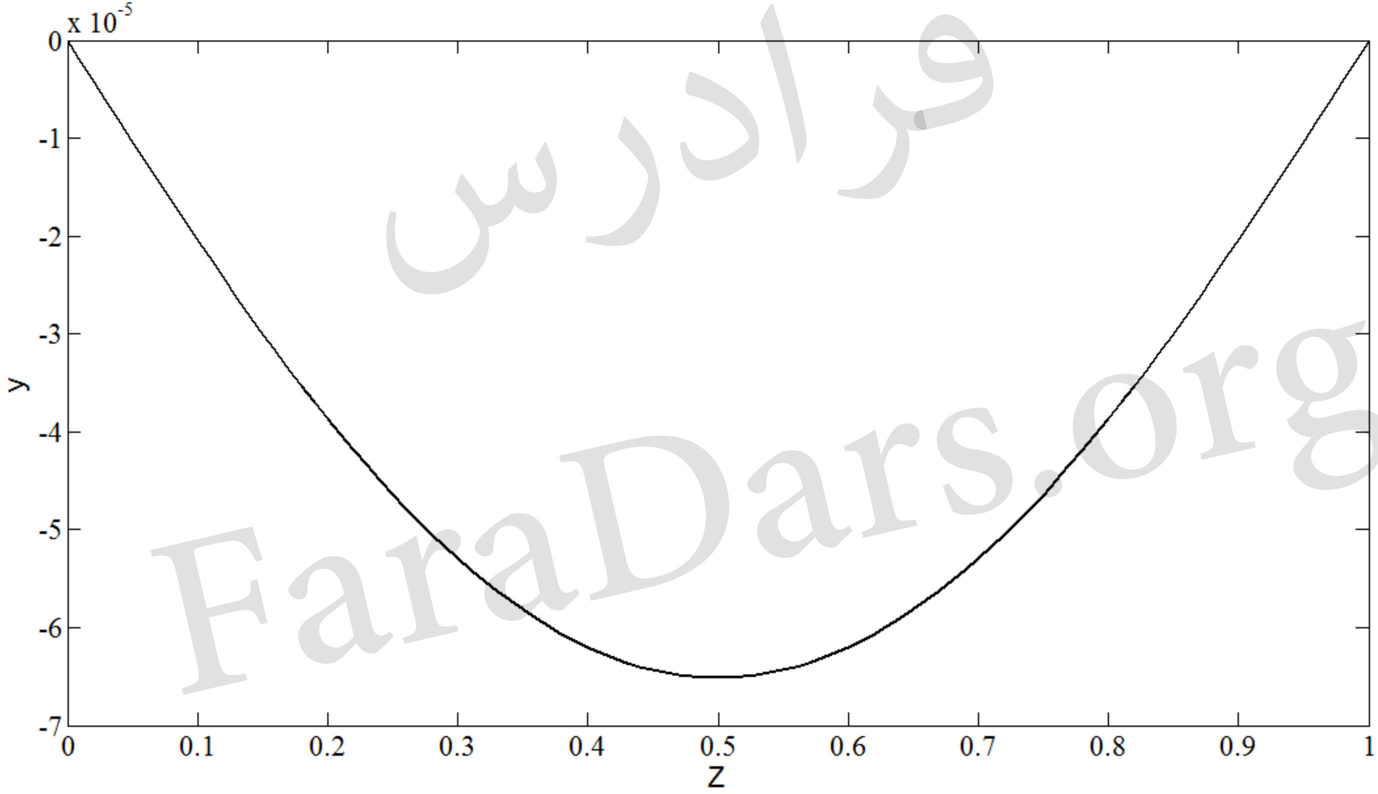
$$q = -1000$$

$$L = 1$$

$$E = 200Gpa$$

$$I = 10^{-6}$$

مثال ۱-۱: تیر اویلر برنولی

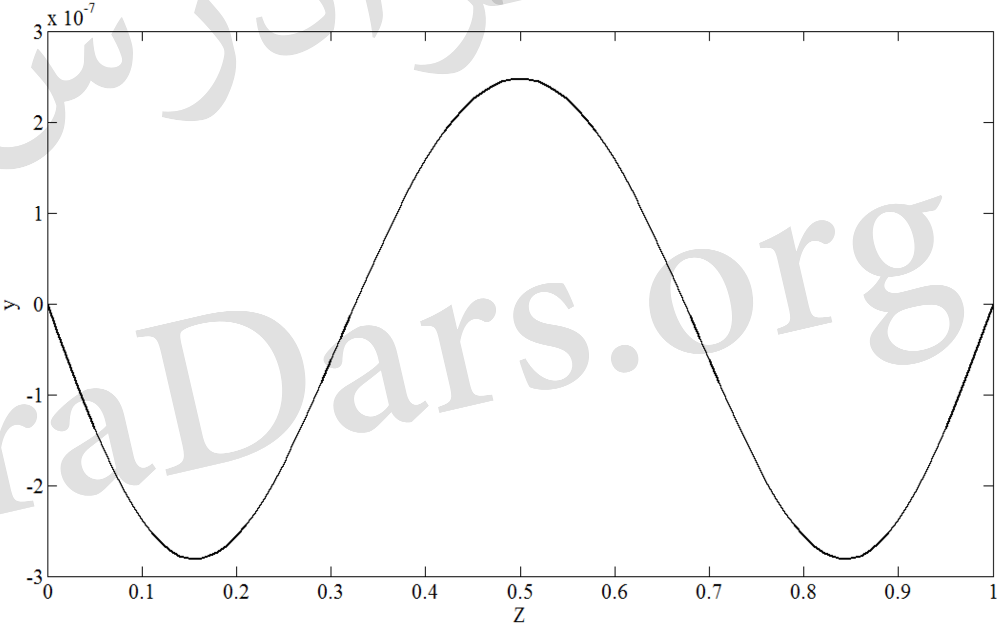


مثال ۱-۱: تیر اویلر برنولی

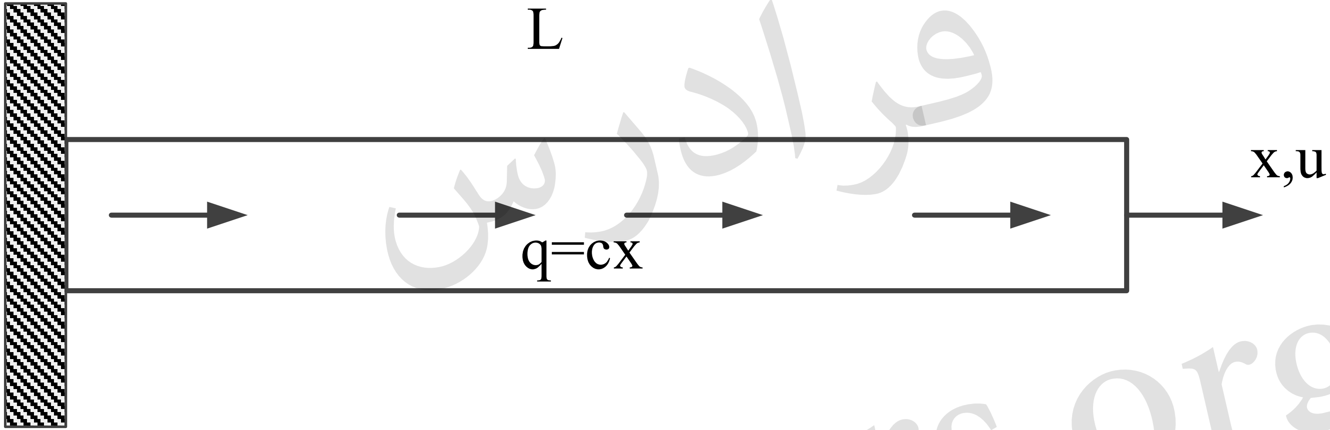
توابع تقریب: تنها تقریب دو جمله

$$N_1(x) = \sin\frac{3\pi z}{L}$$

$$N_2(x) = \sin\frac{5\pi z}{L}$$



مثال ۱-۲: یک عضو محوری (یک عضو خرپا) به‌روش رایلی- ریتز



$$\pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2} AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - cxu \right] dx \qquad B.C.\ u = 0\ at\ x = 0$$

مثال ۱-۲: یک عضو محوری (یک عضو خرپا)

توابع تقریب: تنها تقریب دو جمله- پایه‌های جواب چند جمله‌ای

$$N_1(x)=1$$

$$N_2(x)=x$$

$$N_3(x)=x^2$$

$$N_n(x)=x^{n-1}$$

$$u(x)=\underset{0}{a_0}+a_1x+a_2x^2+\underset{0}{\psi(x)}$$

شرط مرزی اساسی به تنهایی ارضاء می‌شود

مثال ۱–۲: یک عضو محوری (یک عضو خرپا)

الگوریتم حل

$$\begin{cases} A\left(q,L,E,I\right)a_1+B\left(q,L,E,I\right)a_2=R1 \\ C\left(q,L,E,I\right)a_1+D\left(q,L,E,I\right)a_2=R2 \end{cases}$$

در متلب این معادلات به صورت:

$$\begin{cases} Eq.1: A\left(q,L,E,I\right)a_1+B\left(q,L,E,I\right)a_2-R1 \\ Eq.2: C\left(q,L,E,I\right)a_1+D\left(q,L,E,I\right)a_2-R2 \end{cases}$$

$$a_1:\begin{cases} A\left(q,L,E,I\right)=\dfrac{\partial\left(Eq.1\right)}{\partial a_1} \\ B\left(q,L,E,I\right)=\dfrac{\partial\left(Eq.1\right)}{\partial a_2} \\ R1=-\left(Eq.1\right)\Big|_{\substack{a_1=0\\a_2=0}} \end{cases}$$

$$a_2:\begin{cases} C\left(q,L,E,I\right)=\dfrac{\partial\left(Eq.2\right)}{\partial a_1} \\ D\left(q,L,E,I\right)=\dfrac{\partial\left(Eq.2\right)}{\partial a_2} \\ R2=-\left(Eq.2\right)\Big|_{\substack{a_1=0\\a_2=0}} \end{cases}$$

مثال ۱-۲: یک عضو محوری (یک عضو خرپا)

الگوریتم حل

$$Coef\_matrix = \begin{bmatrix} A(q,L,E,I) & B(q,L,E,I) \\ C(q,L,E,I) & D(q,L,E,I) \end{bmatrix}$$

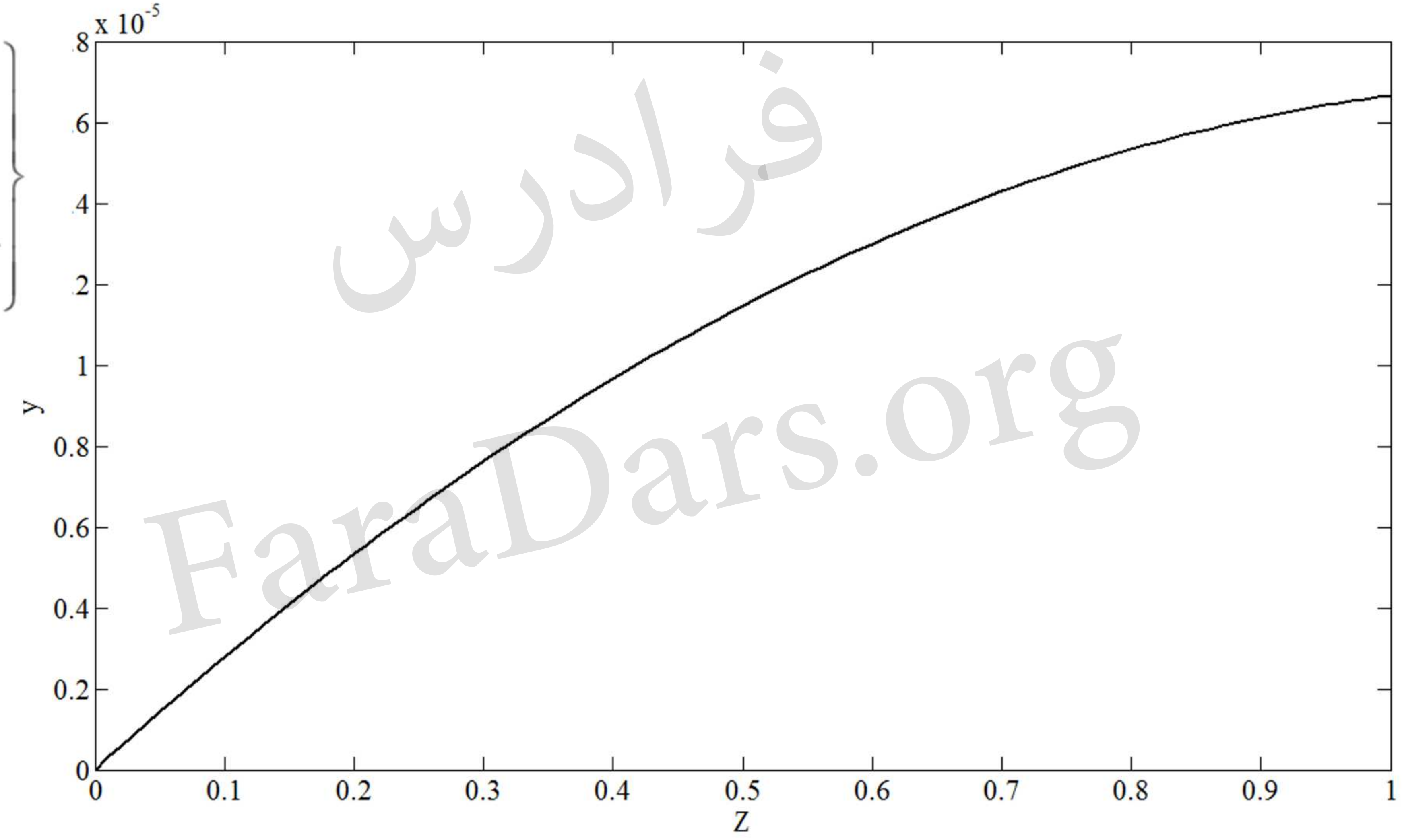
$$R = \begin{bmatrix} R1 \\ R2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[Coef\_matrix\right]\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \left[R\right]$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \left[Coef\_matrix\right]^{-1}\left[R\right]$$

مثال ۱–۲: یک عضو محوری (یک عضو خرپا)

$$
\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{7c}{12AE} \\ -\dfrac{c}{4AE} \end{Bmatrix}
$$



مثال ۱-۳: فانکشنال با شرط مرزی غیر همگن به‌روش رایلی- ریتز

$$\pi = \int_0^1 \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \phi^2\right]dx \qquad B.C.\begin{cases}\phi = 0 \ \ at \ \ x = 0\\ \phi = 1 \ \ at \ \ x = 1\end{cases}$$

$$0 \le \Omega \le 1$$

0 ———————————— 1

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 1$$

مثال ۱–۳: فانکشنال با شرط مرزی غیر همگن

توابع تقریب: تقریب سه جمله- پایه‌های جواب چند جمله‌ای

$$N_1(x) = 1$$

$$N_2(x) = x$$

$$N_3(x) = x^2$$

$$N_n(x) = x^{n-1}$$

$$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$$

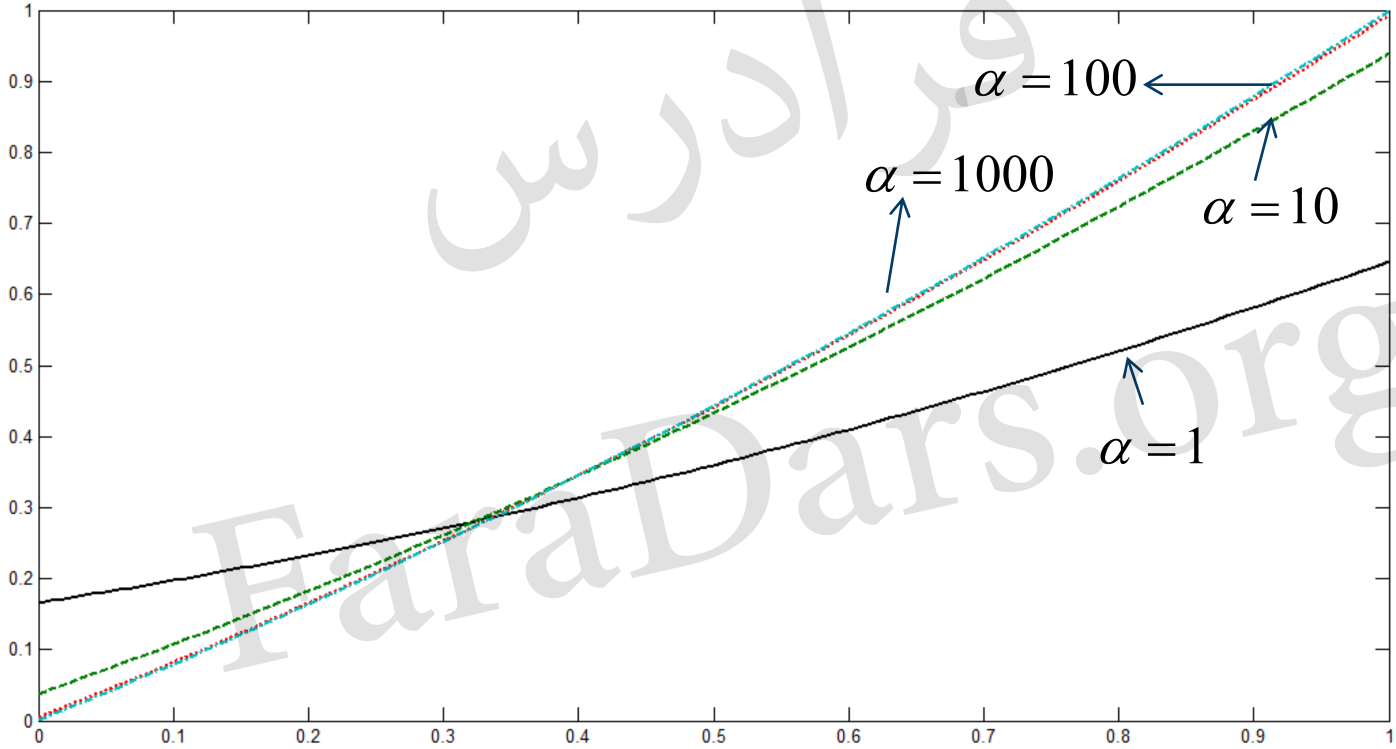
شرط مرزی اساسی به تنهایی ارضاء نمی‌شود

مثال ۱–۳: فانکشنال با شرط مرزی غیر همگن

$$\pi_1 = \int_0^1 \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \phi^2\right]dx + \alpha\left[\phi^2\right]_{x=0} + \alpha\left[(\phi-1)^2\right]_{x=1}$$

$$B.C.\begin{cases}\phi = 0 \;\; at \;\; x = 0 \\ \phi = 1 \;\; at \;\; x = 1\end{cases}$$

مثال ۱–۳: فانکشنال با شرط مرزی غیر همگن



❑ روش گالرکین

روش گالرکین

روش گالرکین توسعه یافته

مثال عددی به همراه برنامه نویسی متلب

روش گالرکین

یافتن تقریبی تابع **u** که معادله دیفرانسیل را ارضاء نماید

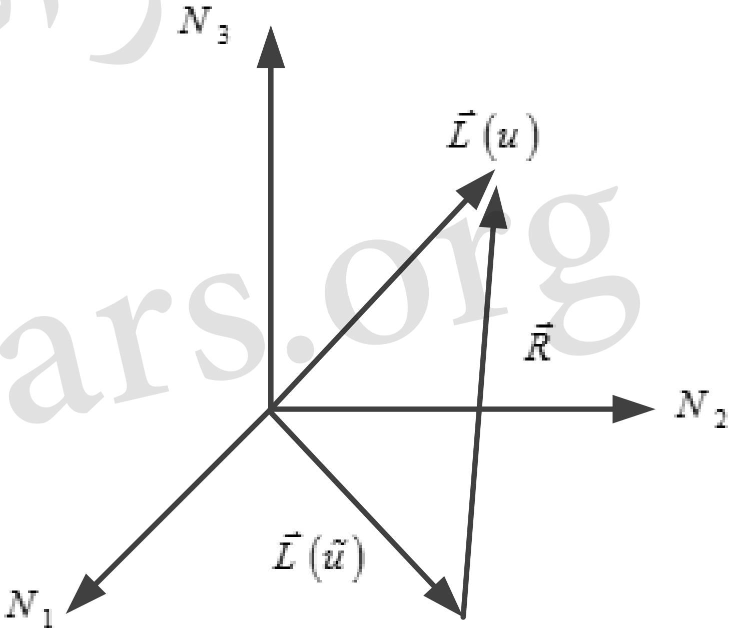
$$L\left(u\right)+A=0$$

حدس تقریبی جواب به صورت سری

$$\tilde{u}(x)=\sum_{i=1}^{n}a_iN_i\left(x\right)+\psi\left(x\right)$$

مینیمم کردن خطا

$$L\left(\tilde{u}\right)+A=R$$



روش گالرکین

1

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x)+\psi(x)$$

ارضا نمودن شرط مرزی ضروری

2

جایگذاری در معادله دیفرانسیل

$$L(\tilde{u})+A=R_\Omega$$

3

یافتن a_i

مینیمم کردن خطا

$$\int W_i R_\Omega d\Omega=0$$

$$\boxed{W_i=N_i \quad Babnov\ Galerkin}$$

$$W_i\neq N_i \quad Petrov\ Galerkin$$

روش گالرکین- توضیحات تکمیلی

$$\left.\begin{array}{l}\int W_i R_\Omega \, d\Omega = 0 \\ L(\tilde{u}) + A = R_\Omega\end{array}\right\} \Rightarrow \int W_i \left[L(\tilde{u}) + A\right] d\Omega = 0$$

$$\Rightarrow \int W_i \left[L(\tilde{u})\right] d\Omega = -\int W_i \left[A\right] d\Omega \Rightarrow [K]\{a_i\} = \{F_i\}$$

روش گالرکین توسعه یافته

3

یافتن a_i

مینیمم کردن خطا

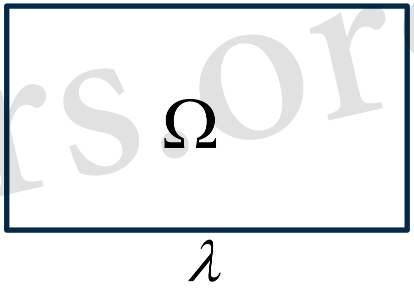
$$\int W_i R_\Omega d\Omega + \oint_\lambda \bar{W}_i R_\lambda d\lambda = 0$$

$$W_i = \bar{W}_i$$

$$W_i = -\bar{W}_i$$

برای ارضاء شرایط مرزی ضروری

$$m(\tilde{u}) + B = R_\lambda \quad on \quad \lambda$$



روش گالرکین توسعه یافته- توضیحات تکمیلی

$$\int W_i R_\Omega \, d\Omega + \int_\lambda \bar{W}_i R_\lambda \, d\lambda = 0$$

$$L(\tilde{u}) + A = R_\Omega$$

$$m(\tilde{u}) + B = R_\lambda$$

$$\Rightarrow \int W_i \left[L(\tilde{u}) + A \right] d\Omega + \int_\lambda \bar{W}_i \left[m(\tilde{u}) + B \right] d\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int W_i \left[L(\tilde{u}) \right] d\Omega}_{[K]} +$$ [redacted]

$$[K'] \qquad \{F_i\} \qquad \{F'_i\}$$

$$\Rightarrow [K + K']\{a_i\} = \{F_i + F'_i\}$$

مثال ۱–۴: معادله دیفرانسیل به روش گالرکین

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) - u = 0 \qquad B.C.\begin{cases} u = 0 \ at \ \ x = 0 \\ u = 1 \ at \ \ x = 1 \end{cases}$$

$$0 \le \Omega \le 1$$

0 1

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 1$$

مثال ۱–۴: معادله دیفرانسیل به روش گالرکین

توابع تقریب: تنها تقریب دو جمله سری فوریه سینوسی

$$N_n(x) = \sin(n\pi x)$$

$$N_n(x) = \sin(\pi x)$$

$$N_n(x) = \sin(2\pi x)$$

$$u(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{a_0} + a_1 \sin(2\pi x) + a_2 \sin(\pi x) + \underset{\substack{\downarrow \\ \psi(x) = x}}{\psi}(x)$$

شرط مرزی اساسی به تنهایی ارضاء نمی‌شود

مثال ۱–۴: معادله دیفرانسیل به روش گالرکین

الگوریتم حل

start

تعریف نمادهای X,a1,a2

$$N_1(x)=\sin(\pi x)\quad N_2(x)=\sin(2\pi x)$$

$$\tilde{u}(x)=a_1N_1(x)+a_2N_2(x)+x$$

$$R_\Omega=\left(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2}\right)-\tilde{u}$$

$$W_i=N_i$$

$$\int N_1R_\Omega d\Omega=0$$

$$\int N_2R_\Omega d\Omega=0$$

End

مثال ۱–۵: معادله دیفرانسیل به روش گالرکین اصلاح شده

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) - u = 0 \qquad B.C.\begin{cases} u = 0 \ at \ x = 0 \\ u = 1 \ at \ x = 1 \end{cases}$$

$$0 \le \Omega \le 1$$

0 —————————————— 1

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 1$$

مثال ۱-۵: معادله دیفرانسیل به روش گالرکین اصلاح شده

توابع تقریب: تنها تقریب سه جمله – تابع چند جمله‌ای

$$N_1(x) = 1$$

$$N_n(x) = x^{n-1}$$

$$N_2(x) = x$$

$$N_3(x) = x^2$$

$$\tilde{u}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

شرط مرزی اساسی به تنهایی ارضاء نمی‌شود

مثال ۱–۵: معادله دیفرانسیل به روش گالرکین اصلاح شده

$$R_\Omega = \left(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2}\right) - \tilde{u}$$

$$u = 0 \ at \ x = 0 \qquad R_{\lambda_1} = \tilde{u}\Big|_{x=0}$$

$$u = 1 \ at \ x = 1 \qquad R_{\lambda_2} = \tilde{u}\Big|_{x=1}$$

$$\int W_i R_\Omega \, d\Omega + \oint_\lambda \bar{W}_i R_\lambda \, d\lambda = 0$$

$$W_i = N_i$$

$$\bar{W}_i = -N_i$$

مثال ۱-۵: معادله دیفرانسیل به روش گالرکین اصلاح شده

الگوریتم حل

start

تعریف نمادهای X,a1,a2

$N_1(x)=1 \quad N_2(x)=x \quad N_3(x)=x^2$

$\tilde{u}(x)=a_1N_1(x)+a_2N_2(x)+a_3N_3(x)$

$R_\Omega, R_{\lambda_1}, R_{\lambda_2}$

$W_i=N_i \quad \bar{W}_i=-N_i$

$$\int_0^1 N_1 R_\Omega dx+\left[-N_1R_{\lambda_1}\right]_{x=0}+\left[-N_1R_{\lambda_2}\right]_{x=1}=0$$

End

مثال ۱–۵: معادله دیفرانسیل به روش گالرکین اصلاح شده

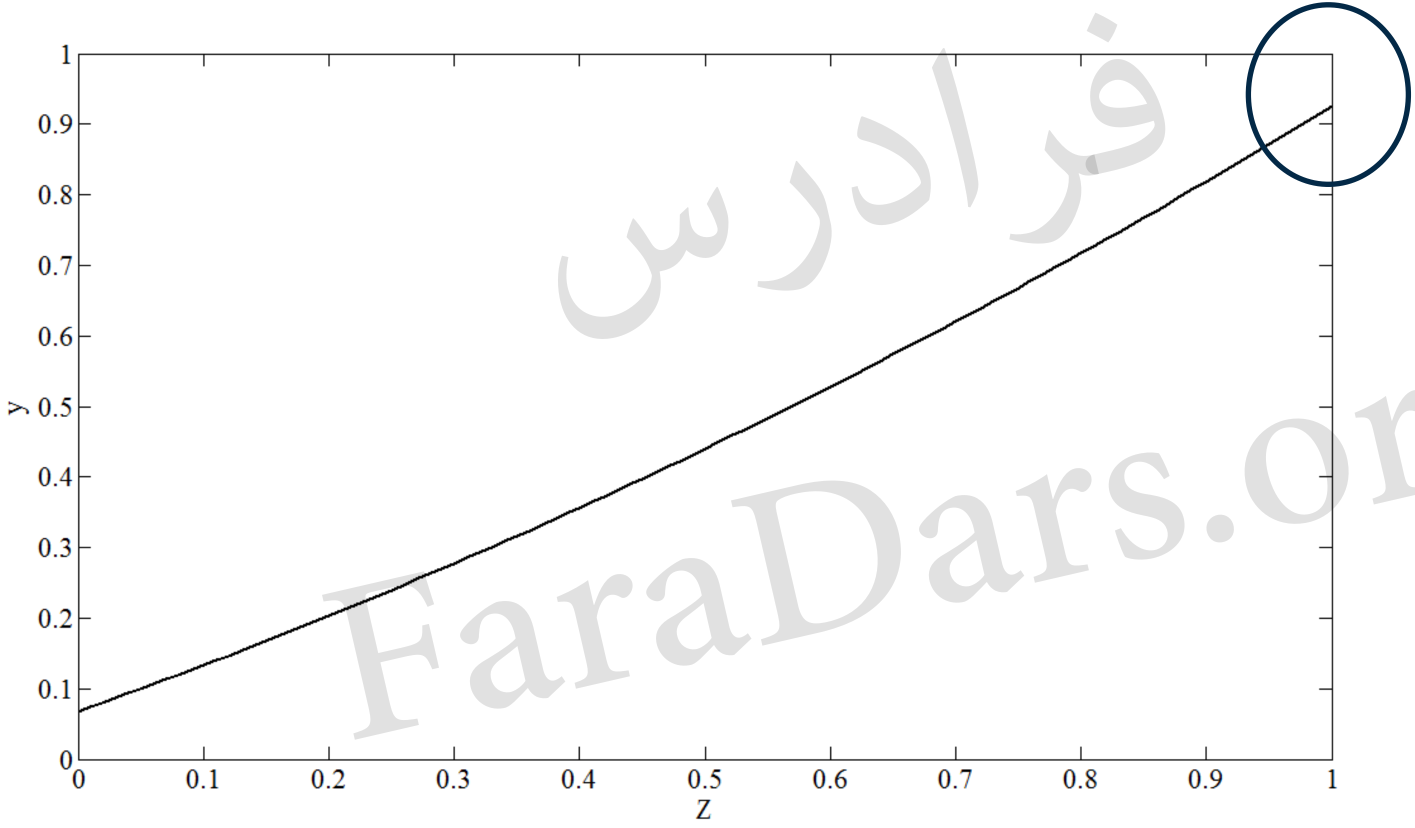
نتیجه

۱– دقت نامناسب

۲– عدم تقارن ماتریس سختی

$$[K]=\begin{bmatrix} 3 & 3/2 & -2/3 \\ 3/2 & 4/3 & 1/4 \\ 4/3 & 5/4 & 8/15 \end{bmatrix}$$

مثال ۱-۵: معادله دیفرانسیل به روش گالرکین اصلاح شده



- نتیجه گیری

نتیجه گیری

روش‌های تقریبی حل معادلات دیفرانسیل

- روش رایلی- ریتز
  - اعمال بر روی فانکشنال (عدم عمومیت در تمام معادلات دیفرانسیل)
  - تابع تقریبی با مرتبه کمتر
  - شرط مرزی ضروری ارضاء شود

- روش رایلی- ریتز با تابع پنالتی
  - الزاما شرط مرزی ضروری نیاز نمی‌باشد

نتیجه گیری

روش‌های تقریبی حل معادلات دیفرانسیل

❑ روش گالرکین

- اعمال بر روی تمام معادلات دیفرانسیل
- تابع تقریبی با مرتبه بیشتر
- شرط مرزی ضروری ارضاء شود

❑ روش گالرکین توسعه یافته

- الزاما شرط مرزی ضروری نیاز نمی‌باشد
- ماتریس سختی نامتقارن است

فرادرس
فراتر از یک کلاس درس
www.faradars.org

مقدمه ای بر روش المان محدود

مراحل انجام تحلیل المان محدود

مدرس:
مجید خزایی
کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا
دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران)

فهرست مطالب

۱ استخراج معادله دیفرانسیل یا فانکشنال

۲ شبکه‌بندی

۳ انتخاب نوع تابع تغییر شکل و تابع‌های تغییر شکل مرتبه بالاتر

۴ استخراج ماتریس سختی

فهرست مطالب

۵ ادغام ماتریس‌های سختی المان‌ها

۶ اعمال شرایط مرزی و روش‌های مختلف اعمال شرایط مرزی

۷ حل ماتریس پاسخ

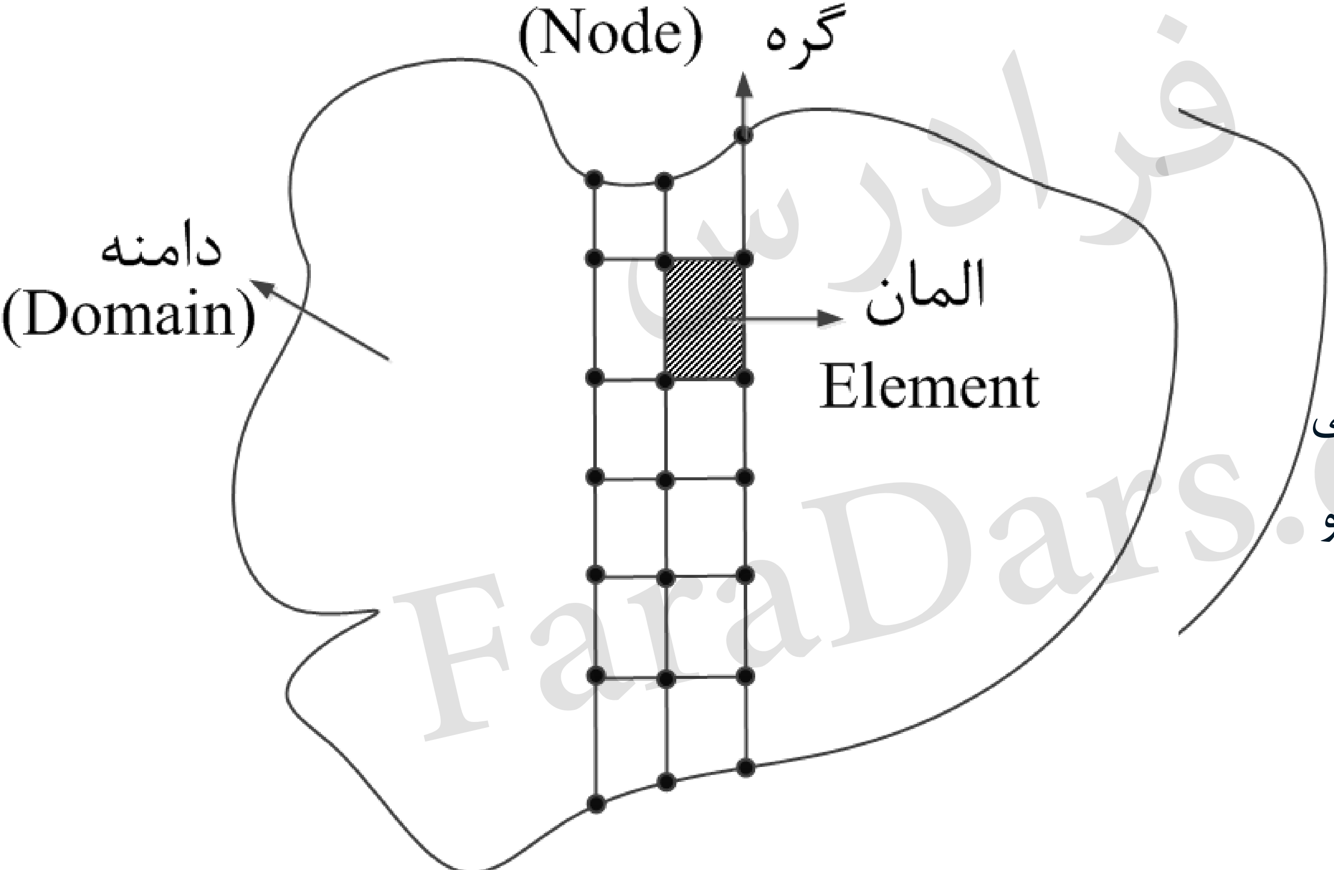
۸ نتیجه‌گیری

مقدمه

تحلیل المان محدود

- استخراج معادله دیفرانسیل یا فانکشنال
- استخراج ماتریس سختی هر المان
- شبکه‌بندی دامنه حل
- ادغام ماتریس‌های سختی
- انتخاب تابع تغییر شکل (نوع المان)
- اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

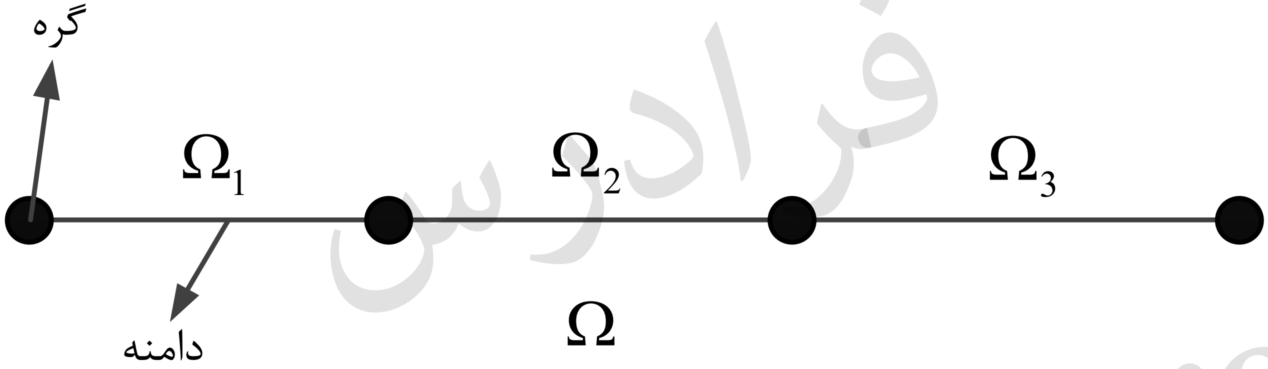
مقدمه



نقش گره‌ها

- حفظ پیوستگی در میان شبکه محاسباتی
- اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

مقدمه



روش گالرکین اصلی

$$\int_{\Omega} N_i \, R_{\Omega} \, d\Omega = 0$$

روش گالرکین در المان محدود

$$\int_{\Omega_1} N_i \, R_{\Omega_1} \, d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} N_i \, R_{\Omega_2} \, d\Omega_2 + \int_{\Omega_3} N_i \, R_{\Omega_3} \, d\Omega_3 = 0$$

مقدمه

روش گالرکین اصلی: افزایش جملات N_i → بد وضع شدن ماتریس سختی

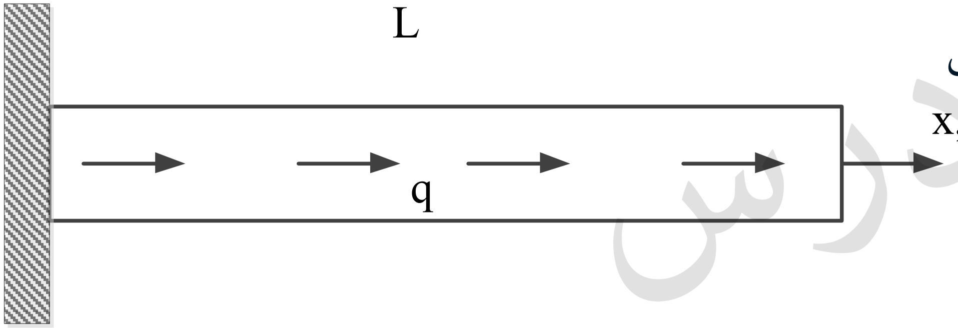
روش گالرکین اصلی در المان محدود: افزایش المان‌ها با ثابت بودن N_i

← بد وضع شدن ماتریس سختی بوجود نمی‌آید

❑ استخراج معادله دیفرانسیل یا فانکشنال

- استخراج فانکشنال برای یک عضو خرپا و تیر
- روش تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال
- روش تبدیل فانکشنال به معادله دیفرانسیل

استخراج فانکشنال برای یک عضو خرپا



$$\pi = u - W_{ext}$$

تابع پتانسیل

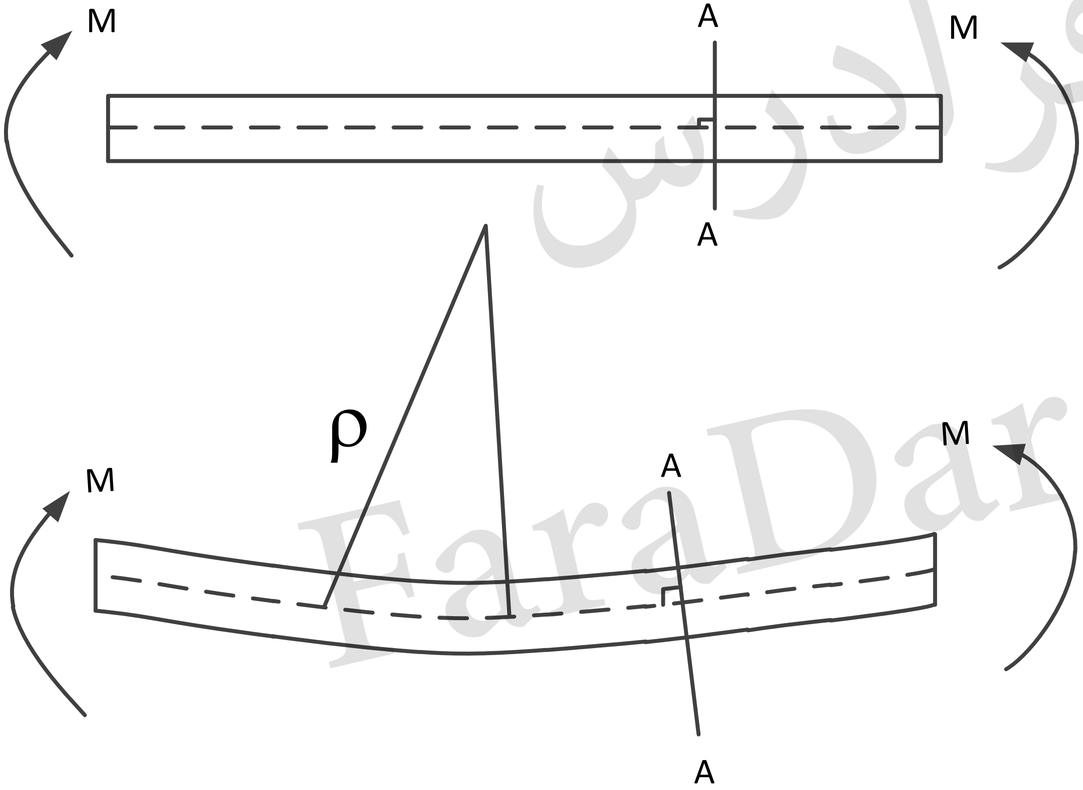
انرژی کرنشی

کار نیروی خارجی

$$\left.\begin{aligned} u &= \int \frac{1}{2}\sigma\,\varepsilon_x\,dv \\ \sigma &= E\,\varepsilon_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u &= \int \frac{1}{2}E\,\varepsilon_x^2\,A\,dx \\ \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u = \int \frac{1}{2}E\,A\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

$$W_{ext} = \int q\,u\,dx \Rightarrow \pi = \int \left[\frac{1}{2}E\,A\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - qu\right]dx$$

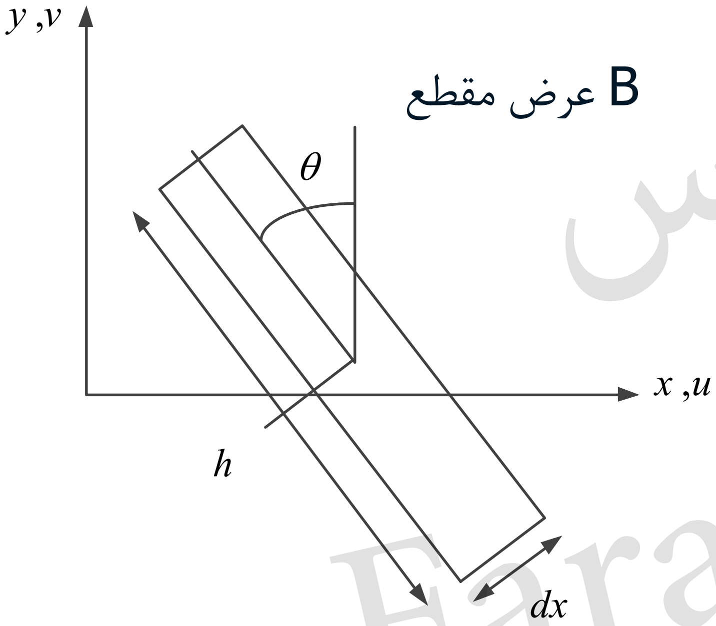
استخراج فانکشنال برای یک عضو تیر اویلر برنولی



در تیر اویلر برنولی:

- سطح مقطع عمود بر محور تیر
- اثرات اینرسی دورانی صرفنظر

استخراج فانکشنال برای یک عضو تیر اویلر برنولی



$$\left.\begin{aligned}\theta &= \frac{dv}{dx} \\ u &= -y\,\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow u = -y\,\frac{dv}{dx}$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_x = -y\,\frac{d^2v}{dx^2}}$$

$$u = \int \frac{1}{2} E\,\varepsilon_x^2\,dv = \iint \frac{1}{2} E\,\varepsilon_x^2\,b\,dx\,dy$$

$$u = \iint \frac{1}{2} E \left(-y\,\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 b\,dx\,dy \Rightarrow \boxed{u = \int \frac{1}{2} E\,I_z \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx} \quad I_z = \int y^2\,b\,dy$$

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی → فانکشنال

معادله دیفرانسیل

$$L(u) + A = 0$$

شرایط تبدیل

$$\int_{\Omega} \theta L(u) d\Omega = \int_{\Omega} u L(\theta) d\Omega$$

Symmetric (Self-adjoint)

$$\int_{\Omega} u L(u) d\Omega \geq 0$$

Positive definite

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

$$L\left(u\left(x\right)\right)+A=0$$

$$0\leq x\leq L$$

مرتبه معادله دیفرانسیل: n

شرط مرزی ضروری: $m\left(u\left(x\right)\right)\Big|_{x=0}=B$

شرط مرزی طبیعی: $n\left(u\left(x\right)\right)\Big|_{x=L}=C$

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

۱

تشکیل انتگرال باقی‌مانده وزنی

Weighted- Residual

$$\int_0^L W(x)\left[L\left(u(x)\right)+A\right]dx = 0$$

تابع وزنی $W(x)$

$$\int_0^L W(x)\left[L\left(u(x)\right)\right]dx + \int_0^L W(x)A\,dx = 0$$

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

۲

تشکیل شکل ضعیف با انتگرال‌گیری جزء به جزء

Weak-form

$$\int_0^L W(x)\left[L\left(u(x)\right)\right]dx + \int_0^L W(x)A\,dx = 0$$

$$\int_0^L u\,dv = \left[uv\right]_0^L - \int_0^L v\,du$$

انتگرال جزء به جزء

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

۲

تشکیل شکل ضعیف با انتگرال‌گیری جزء به جزء

Weak-form

$$\int_0^L W(x)\left[L\left(u(x)\right)\right]dx+\int_0^L W(x)A\,dx=0$$

$$V(x)=\int_0^L L\left(u(x)\right)dx$$

$$\left[W(x)V(x)\right]\Big|_0^L-\int_0^L \frac{dW(x)}{dx}V(x)\,dx+\int_0^L W(x)A\,dx=0$$

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

۲

تشکیل شکل ضعیف با انتگرال‌گیری جزء به جزء

Weak-form

$$\int_0^L W(x)\left[L\left(u(x)\right)\right]dx+\int_0^L W(x)A\,dx=0$$

انتگرال جزء به جزء تا زمانی که مرتبه مشتق **u** با مرتبه مشتق **W** برابر شود

$$\ldots u(x)\big)dx$$

$$\left[W(x)V(x)\right]_0^L-\int_0^L\frac{dW(x)}{dx}V(x)\,dx+\int_0^L W(x)A\,dx=0$$

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

۳

اعمال شرایط مرزی

- در نقطه‌ای که شرط مرزی ضروری است $W(x)=0$
- اعمال مقدار شرط مرزی طبیعی

$$\left[W(x)V(x)\right]\Big|_0^L - \int_0^L \frac{dW(x)}{dx}V(x)\,dx + \int_0^L W(x)A\,dx = 0$$

$$\left[W(x)\cancel{V}(x)\right]\Big|_{x=L} - \left[W(x)V(\cancel{x})\right]\Big|_{x=0} + \int_0^L \left[-\frac{dW(x)}{dx}V(x) + W(x)A\right]dx = 0$$

$$W(L)\,V(L) = W(L)\,C \qquad 0$$

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

۴

تشکیل فانکشنال

$$-W(L)C+\int_0^L\left[-\frac{dW(x)}{dx}V(x)+W(x)A\right]dx=0$$

$$V(x)=\int_0^L L(u(x))dx$$

$$\boxed{\int_0^L\left[-\frac{dW(x)}{dx}\left[\int_0^L L(u(x))dx\right]\right]dx}+\boxed{\int_0^L\left[W(x)A\right]dx-W(L)C}=0$$

$$B(u,W)\qquad\qquad L(W)$$

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

۴

تشکیل فانکشنال

$$B(u,W)=\int_0^L\left[-\frac{dW(x)}{dx}\left[\int_0^L L(u(x))dx\right]\right]dx$$

$$L(W)=\int_0^L\left[W(x)A\right]dx-W(L)C$$

$$\pi(u)=\frac{1}{2}B(u,u)+L(u)$$

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

مثال

معادله دیفرانسیل

$$-\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right]=q$$

شرط مرزی ضروری:

$$u(x)\big|_{x=0}=0$$

شرط مرزی طبیعی (نیروی متمرکز):

$$AE\frac{du}{dx}\bigg|_{x=L}=Q_0$$

گام اول: انتگرال باقی مانده وزنی

$$\int_0^L W(x)\left[-\frac{d}{dx}\left[AE\frac{du}{dx}\right]-q\right]dx=0$$

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

مثال

گام دوم: یک مرتبه انتگرال جزء به جزء

$$-\left[AEW(x)\frac{du}{dx}\right]\Bigg|_0^L+\int_0^L AE\frac{dW(x)}{dx}\frac{du}{dx}dx-\int_0^L W(x)q\,dx=0$$

$$\left[AEW(x)\frac{du}{dx}\right]\Bigg|_{x=0}-\left[AEW(x)\frac{du}{dx}\right]\Bigg|_{x=L}+\int_0^L\left[AE\frac{dW(x)}{dx}\frac{du}{dx}-W(x)q\right]dx=0$$

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

مثال

گام سوم: اعمال شرایط مرزی

$$\left[AEW\underbrace{(x)}_{0}\frac{du}{dx}\right]\Bigg|_{x=0} - \left[AEW(x)\frac{du}{dx}\right]\Bigg|_{x=L} + \int_0^L \left[AE\frac{dW(x)}{dx}\frac{du}{dx} - W(x)q\right]dx = 0$$

$$AE\frac{du}{dx}\Bigg|_{x=L} = Q_0$$

$$-W(L)Q_0 + \int_0^L \left[AE\frac{dW(x)}{dx}\frac{du}{dx} - W(x)q\right]dx = 0$$

تبدیل معادله دیفرانسیل به فانکشنال

مثال

گام چهارم: تشکیل فانکشنال

$$\int_0^L \left[AE \frac{dW(x)}{dx}\frac{du}{dx} \right] dx - \int_0^L \left[-W(x)q \right] dx - W(L)Q_0 = 0$$

$B(u,W)$ $\qquad$ $L(W)$

$$B(u,u) = \int_0^L \left[AE \frac{du}{dx}\frac{du}{dx} \right] dx = \int_0^L \left[AE \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx$$

$$L(u) = -\int_0^L \left[-u(x)q \right] dx - u(L)Q_0$$

$$\pi(u) = \frac{1}{2} B(u,u) + L(u)$$

تبدیل فانکشنال به معادله دیفرانسیل

۱

اصل حداقل سازی تابع پتانسیل

$$I(u)=\int_a^b F(x,u,u',u'')dx$$

$$\delta I(u)=0 \Rightarrow \delta I(u)=\int_a^b\left[\cancel{\frac{\partial F}{\partial x}\delta x}+\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\boxed{\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'}+\boxed{\frac{\partial F}{\partial u''}\delta u''}\right]=0$$

تغییرات مجازی x وجود ندارد

انتگرال جزء به جزء

تبدیل فانکشنال به معادله دیفرانسیل

۱

اصل حداقل سازی تابع پتانسیل

انتگرال جزء به جزء

۱) $$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'\right] = \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u\right]\Bigg|_a^b - \int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\delta u\right]$$

۲) $$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u''}\delta u''\right] = \left[\frac{\partial F}{\partial u''}\delta u'\right]\Bigg|_a^b - \boxed{\int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\delta u'\right]}$$

$$\int_a^b \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\delta u'\right] = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\delta u\right]\Bigg|_a^b - \int_a^b \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\delta u\right]$$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u''}\delta u''\right] = \left[\frac{\partial F}{\partial u''}\delta u'\right]\Bigg|_a^b - \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\delta u\right]\Bigg|_a^b + \int_a^b \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\delta u\right]$$

تبدیل فانکشنال به معادله دیفرانسیل

۱

اصل حداقل سازی تابع پتانسیل

$$\delta I(u)=\cancelto{0}{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u'}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\right)\delta u\right]_a^b}+\cancelto{0}{\left[\frac{\partial F}{\partial u''}\delta u'\right]_a^b}$$

$$+\int_a^b\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\right)\delta u\right]=0$$

جایگذاری:

$$\begin{aligned} u(a)&=A \\ u(b)&=B \end{aligned} \;\Rightarrow\; [\delta u]_a^b=0$$

$$\begin{aligned} u'(a)&=A' \\ u'(b)&=B' \end{aligned} \;\Rightarrow\; [\delta u']_a^b=0$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)=0}$$

Euler Equation

تبدیل فانکشنال به معادله دیفرانسیل

مثال

فانکشنال

$$\pi = \int \left[\frac{1}{2} E A \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - qu \right] dx$$

$$F = \left[\frac{1}{2} E A \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - qu \right] \Rightarrow \left\{ \frac{\partial F}{\partial u} = -q \qquad \frac{\partial F}{\partial u'} = AE \frac{du}{dx} \right\}$$

Euler Equation $\Rightarrow -q - \frac{d}{dx}\left(AE \frac{du}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{AE \frac{d^2u}{dx^2} + q = 0}$

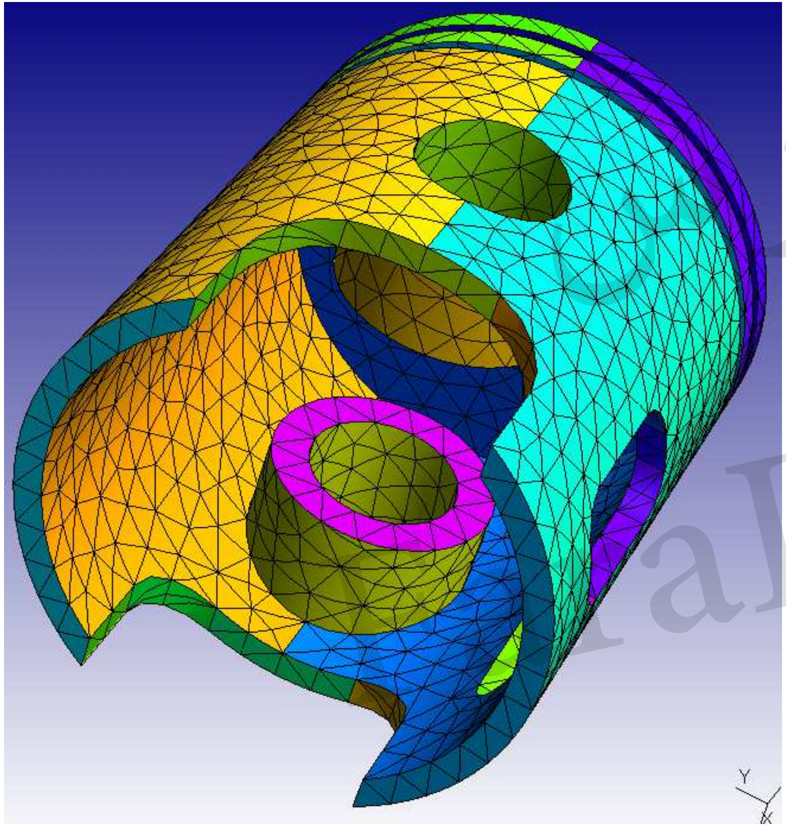
شبکه‌بندی

شبکه‌بندی ۱ بعدی

شبکه‌بندی ۲ بعدی

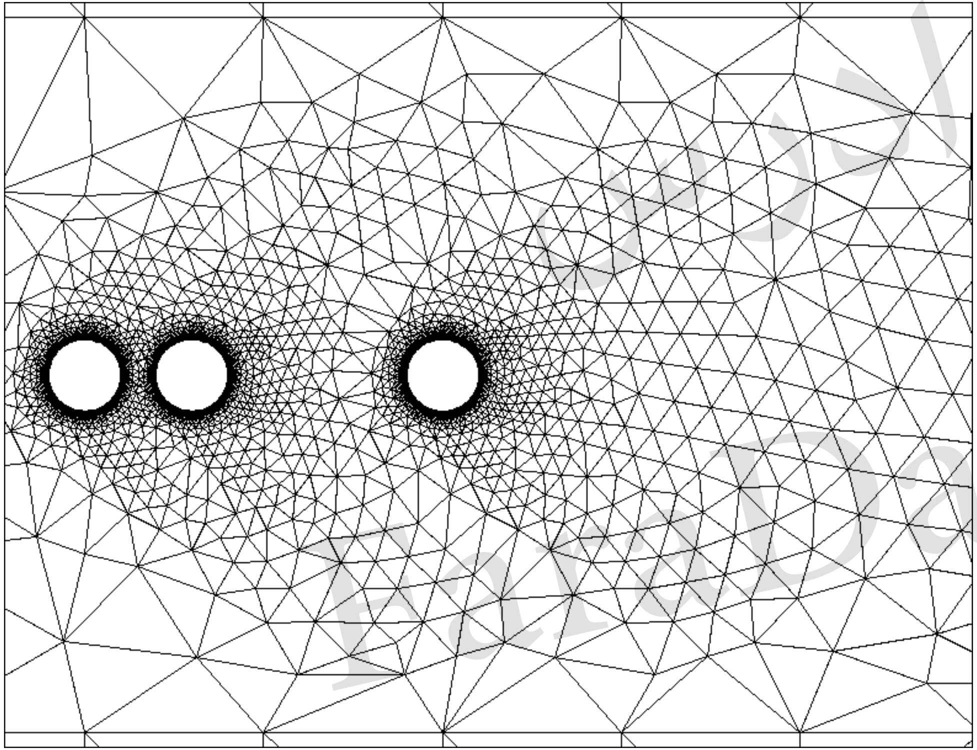
ملاحظات مدلسازی

شبکه‌بندی



تقسیم دامنه حل به المان‌های کوچکتر

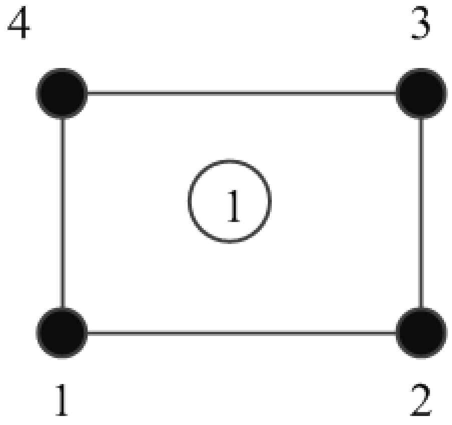
شبکه‌بندی



شبکه‌بندی:

- یکنواخت
- غیر یکنواخت

شبکه‌بندی

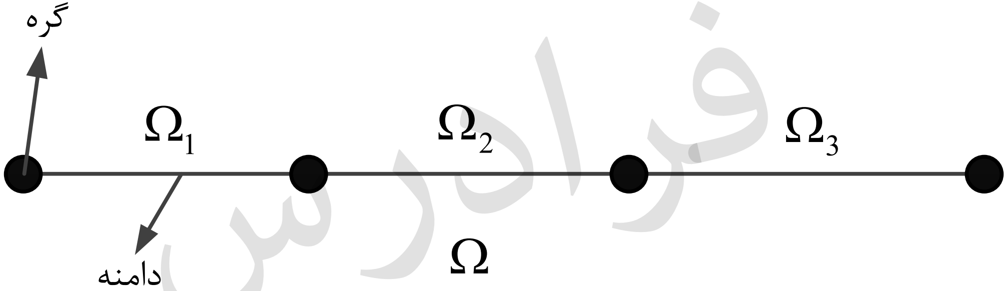


اطلاعات مورد نیاز برای یک شبکه:

- مختصات گره‌ها
- ویژگی‌های المان (تعداد گره در هر المان)
- نحوه اتصال گره‌ها در یک المان

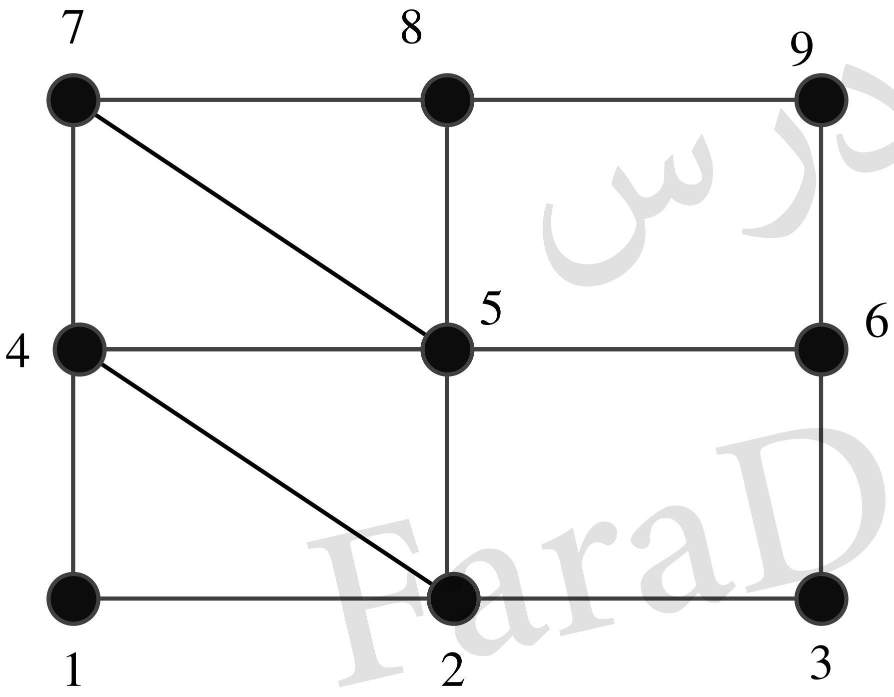
- مختصات گره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴
- ۴ گره در یک المان
- المان ۱: ۱-۲-۳-۴

شبکه‌بندی ۱ بعدی



N= number of elements (Number of divisions)

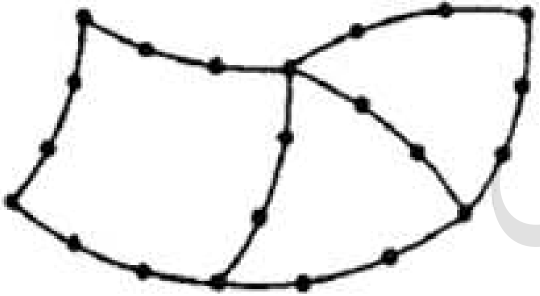
شبکه‌بندی ۲ بعدی



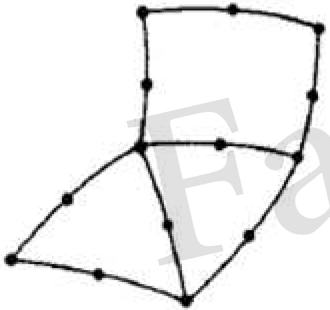
المان‌های ۲ بعدی خطی:

- المان مربعی
- المان مثلثی

شبکه‌بندی ۲ بعدی

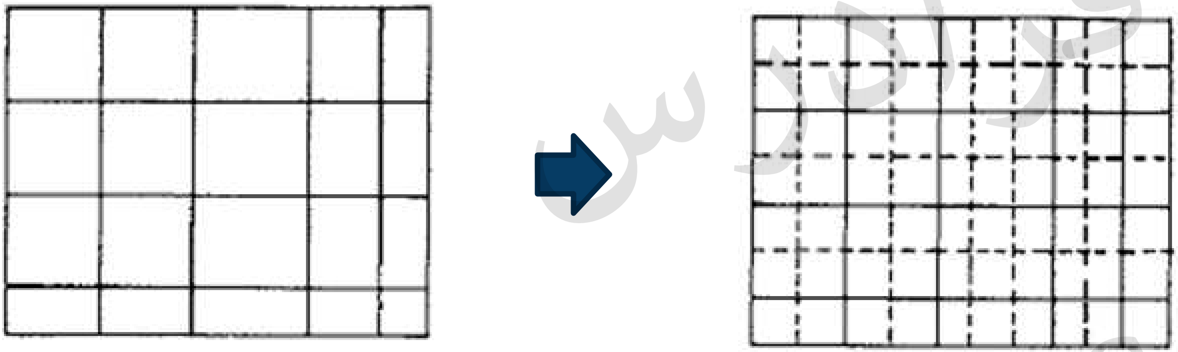


المان‌های ۲ بعدی غیر خطی:

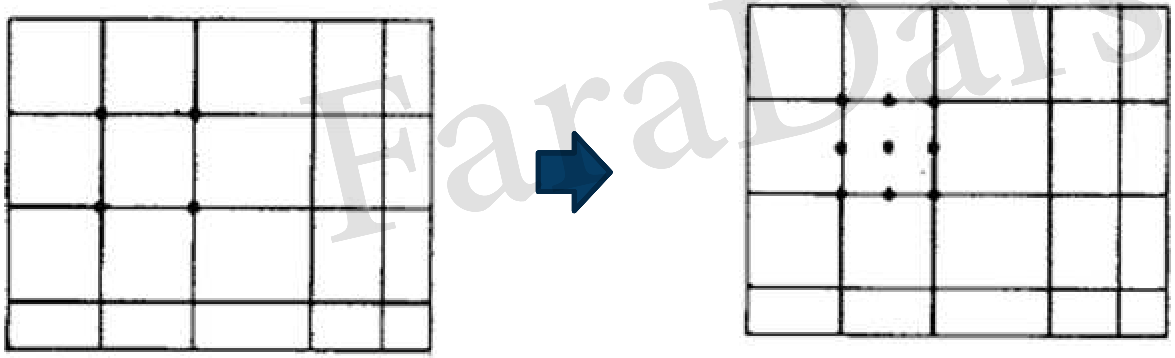


ملاحظات مدلسازی

بهبود شبکه‌بندی



h-version



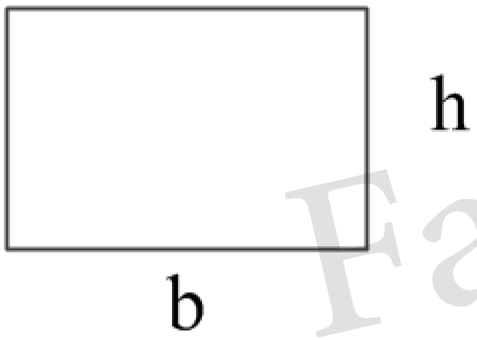
p-version

ملاحظات مدلسازی

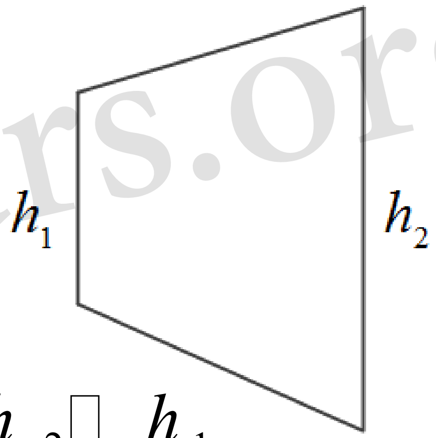
ضریب منظری (Aspect Ratio)

Aspect Ratio= بیشترین طول/ کمترین طول

Aspect Ratio به عدد ۱ نزدیکتر، بهتر



$b \gg h$

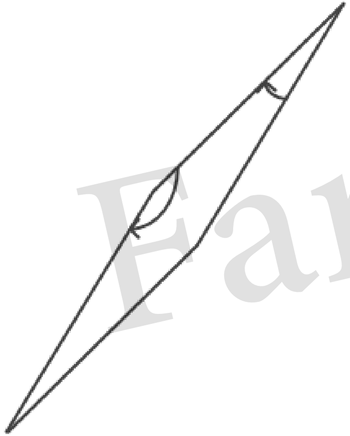


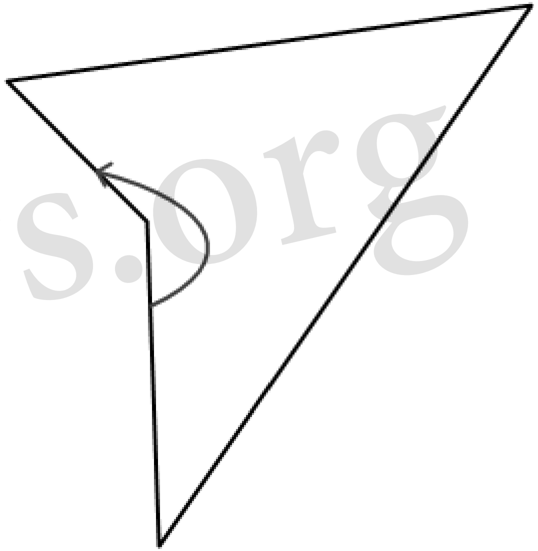
$h_2 \gg h_1$

ملاحظات مدلسازی

زاویه:

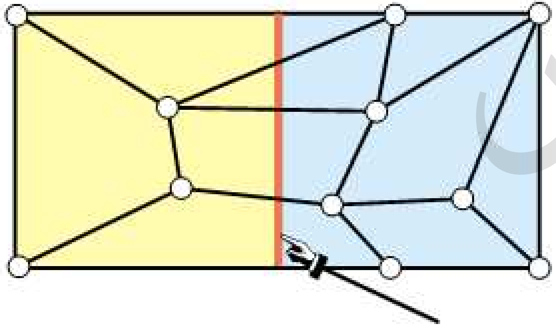
زاویه‌های بزرگتر از ۱۶۰ درجه مناسب نمی‌باشد



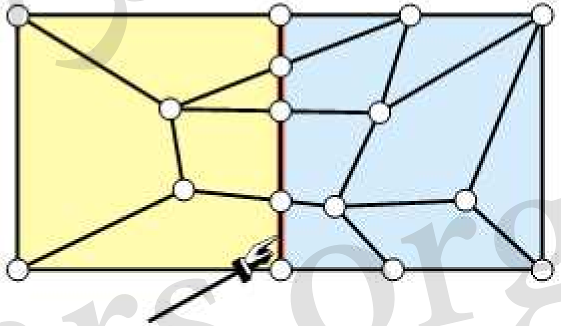


ملاحظات مدلسازی

بیانگر صحیح ویژگی‌های فیزیکی مسئله



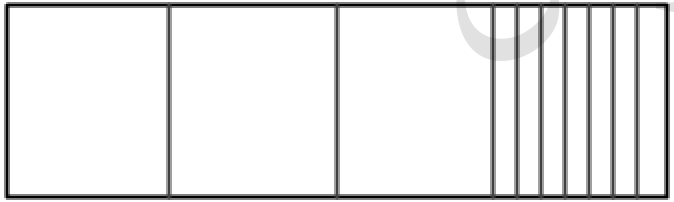
مرز ویژگی ماده رعایت نشده‌است



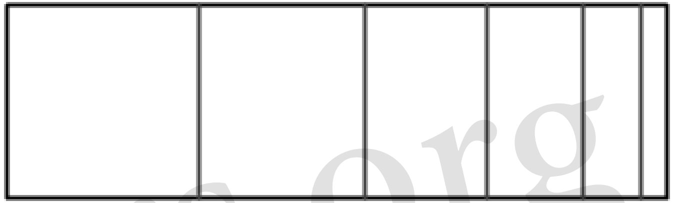
مرز ویژگی ماده رعایت شده‌است

ملاحظات مدلسازی

تغییر گام:



تغییر گام ناگهانی



تغییر گام تدریجی

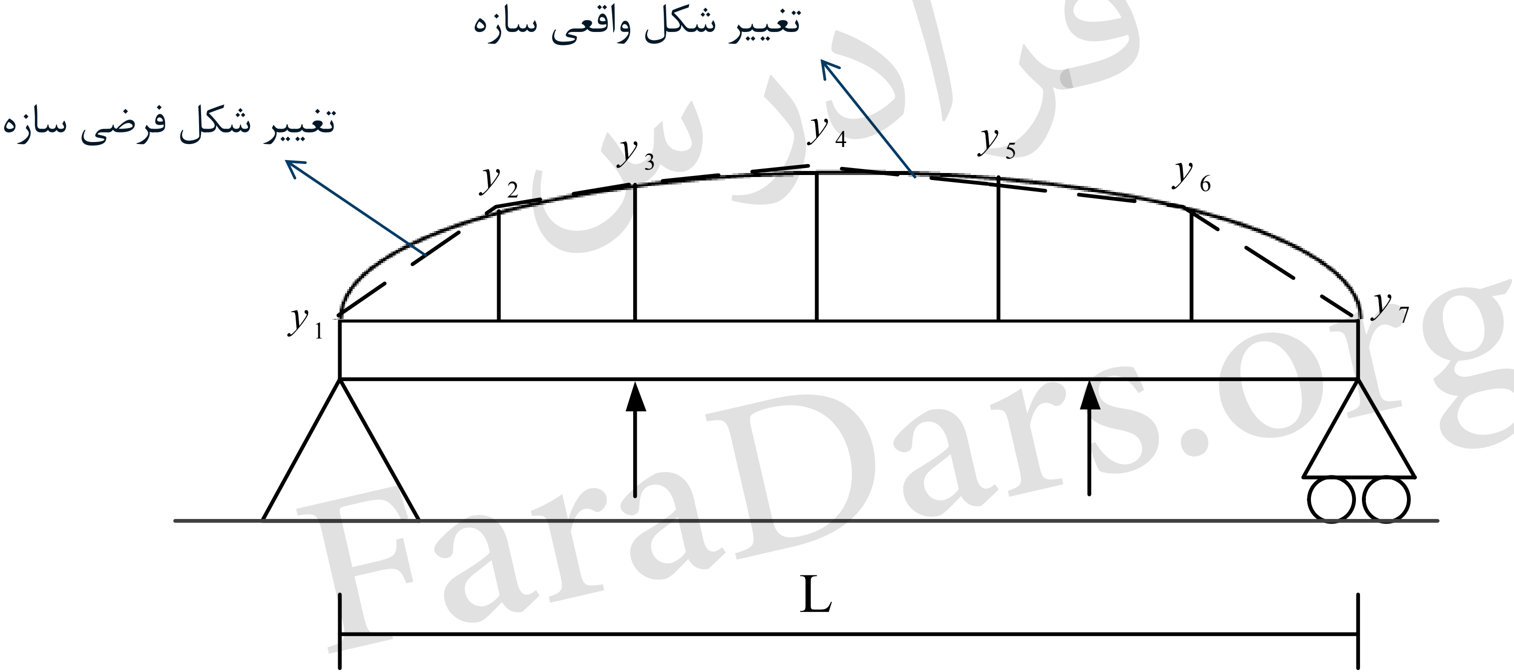
❑ انتخاب تابع تغییر شکل و توابع شکل مرتبه بالاتر

- تابع تغییر شکل ۱ بعدی (خطی، مرتبه۲، مرتبه ۳)

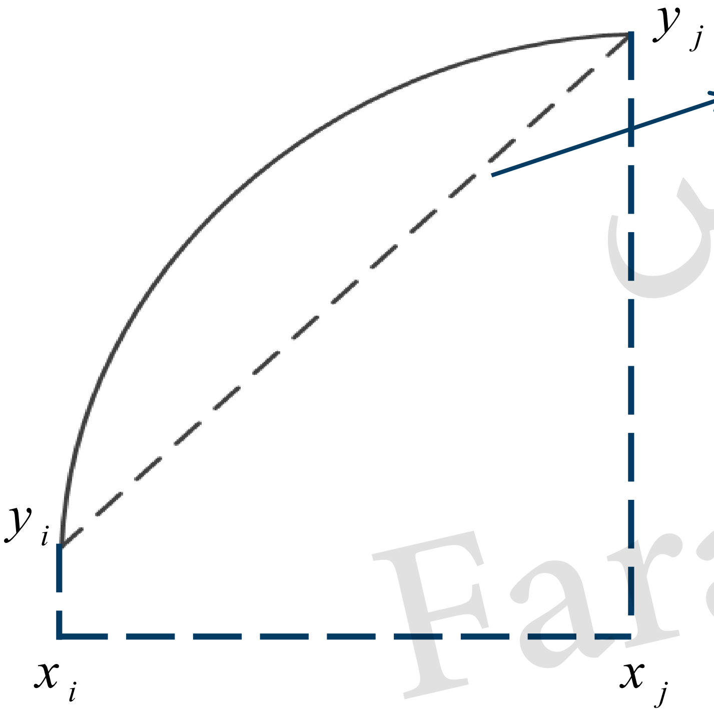
- تابع تغییر شکل ۲ بعدی (مثلثی، مربعی)

- المان‌های سرندپیتی

تابع تغییر شکل خطی



تابع تغییر شکل خطی



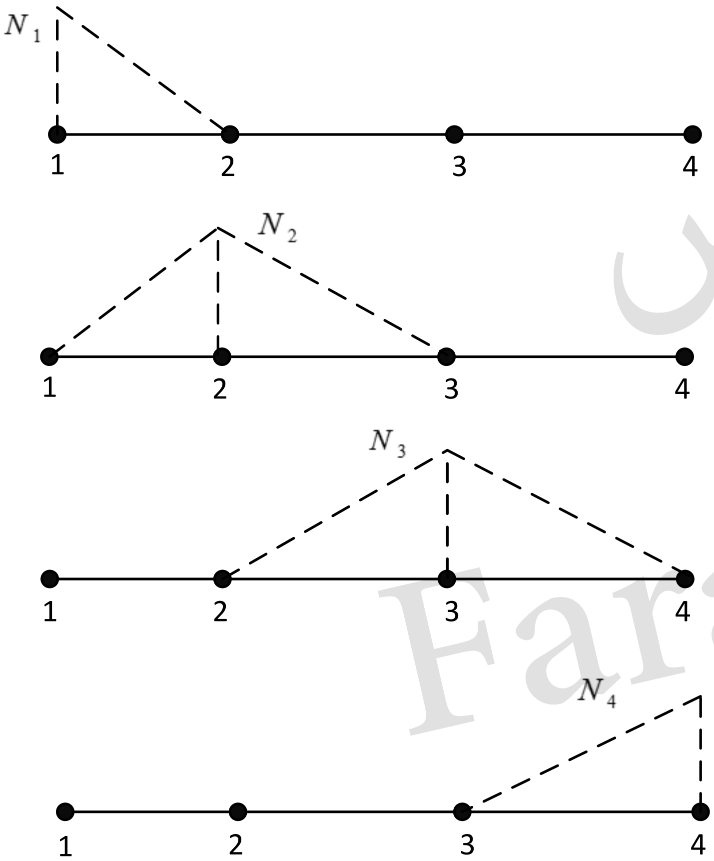
$$y(x) = ax + b$$

$$y(x) = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}(x - x_i) + y_i$$

$$y(x) = \underbrace{\boxed{\left(1 - \frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right)}}_{N_i} y_i + \underbrace{\boxed{\left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i}\right)}}_{N_j} y_j$$

$$y(x) = N_i y_i + N_j y_j = \sum_{m=i}^{j} N_m y_m$$

تابع تغییر شکل خطی

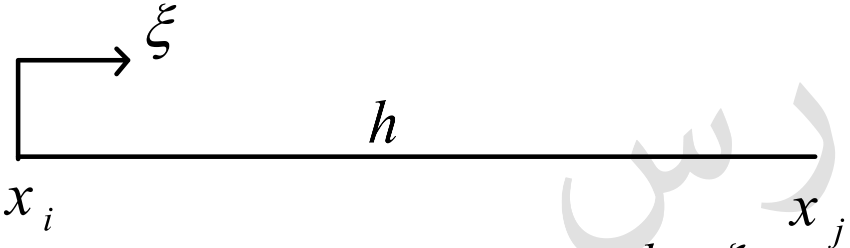


N_i تنها در گره i مقدار دارد و در سایر گره‌ها صفر است

$$N_1 = \left(1 - \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right)$$

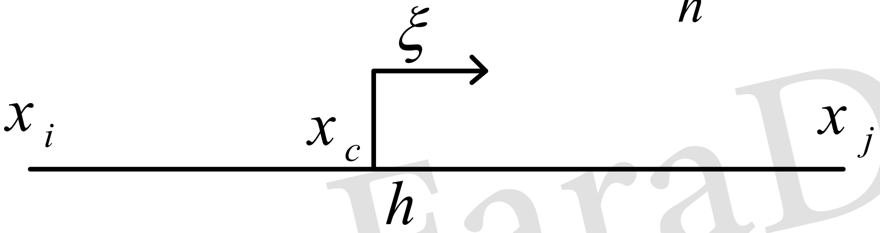
تابع تغییر شکل خطی

تابع تغییر شکل خطی در مختصات محلی:



$$\xi = x - x_i \qquad 0 \le \xi \le h$$

$$N_i = \frac{h-\xi}{h} \qquad N_j = \frac{\xi}{h}$$



$$\xi = \frac{2(x - x_c)}{h} \qquad -1 \le \xi \le +1$$

$$N_i = \frac{1-\xi}{2} \qquad N_j = \frac{1+\xi}{2}$$

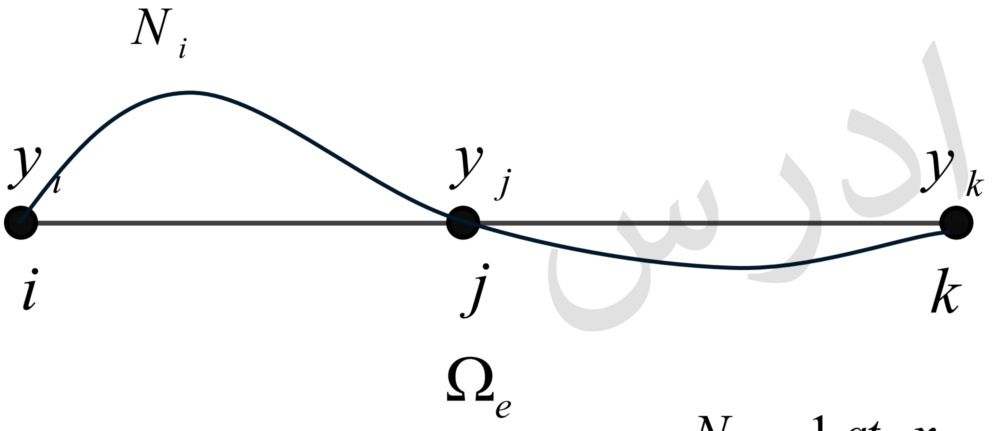
فرمول لاگرانژ برای توابع تغییر شکل المان لاگرانژی

Lagrange Interpolation Function

$$N_k = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{N} (x_i - x)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{N} (x_i - x_k)}$$

$$N_k = \frac{(x_\ell - x)(x_m - x)\ldots(x_n - x)}{(x_\ell - x_k)(x_m - x_k)\ldots(x_n - x_k)}$$

تابع تغییر شکل درجه ۲



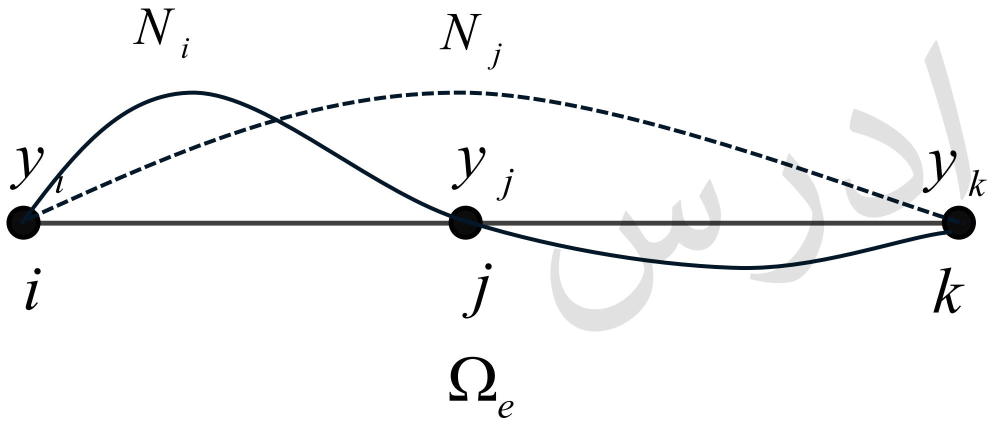
المان درجه ۲، ۳ گره‌ای

$$y(x) = N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k$$

توابع درجه ۲ $\quad N_i, N_j, N_k$

$$N_i = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2 \Rightarrow \begin{cases} N_i = 1 \; at \;\; x = x_i \\ N_i = 0 \; at \;\; x = x_j \\ N_i = 0 \; at \;\; x = x_k \end{cases}$$

تابع تغییر شکل درجه ۲



المان درجه ۲، ۳ گره‌ای

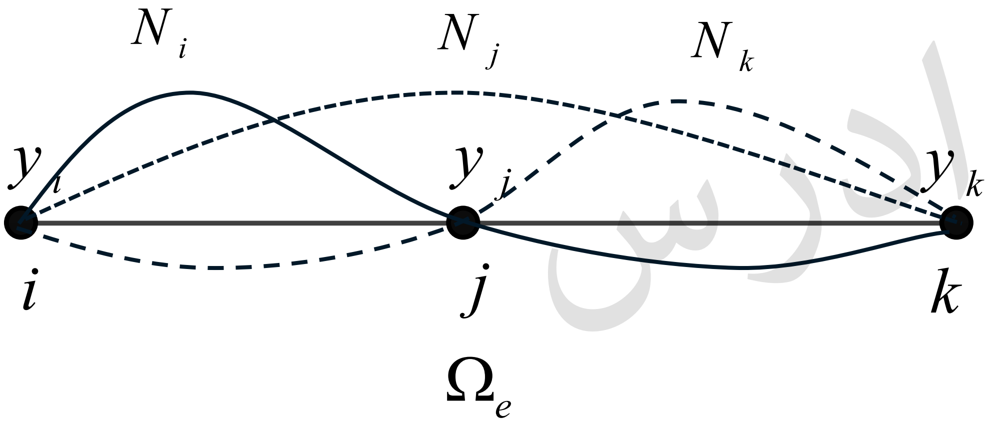
$$y(x) = N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k$$

توابع درجه ۲ N_i, N_j, N_k

$$N_i = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$$

$$N_j = \alpha_j + \beta_j x + \gamma_j x^2 \Rightarrow \begin{cases} N_j = 0 \ at \ \ x = x_i \\ N_j = 1 \ at \ \ x = x_j \\ N_j = 0 \ at \ \ x = x_k \end{cases}$$

تابع تغییر شکل درجه ۲



المان درجه ۲، ۳ گره‌ای

$$y(x) = N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k$$

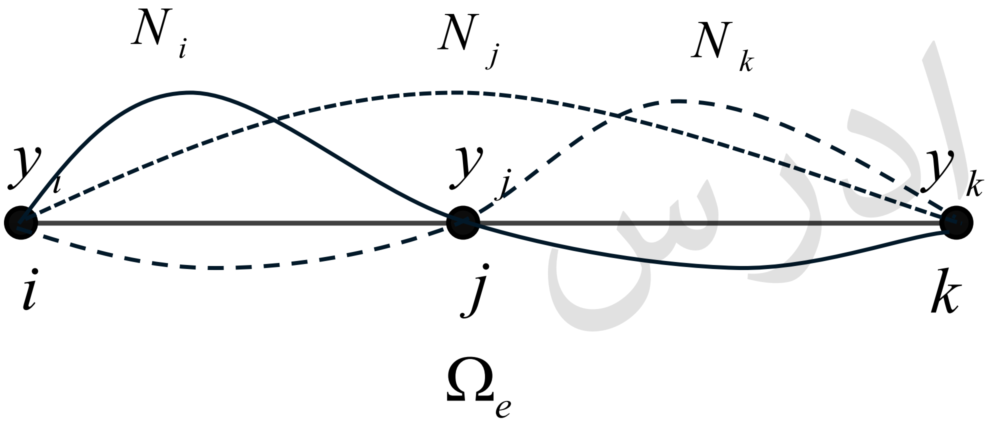
توابع درجه ۲ $\quad N_i, N_j, N_k$

$$N_i = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2$$

$$N_j = \alpha_j + \beta_j x + \gamma_j x^2$$

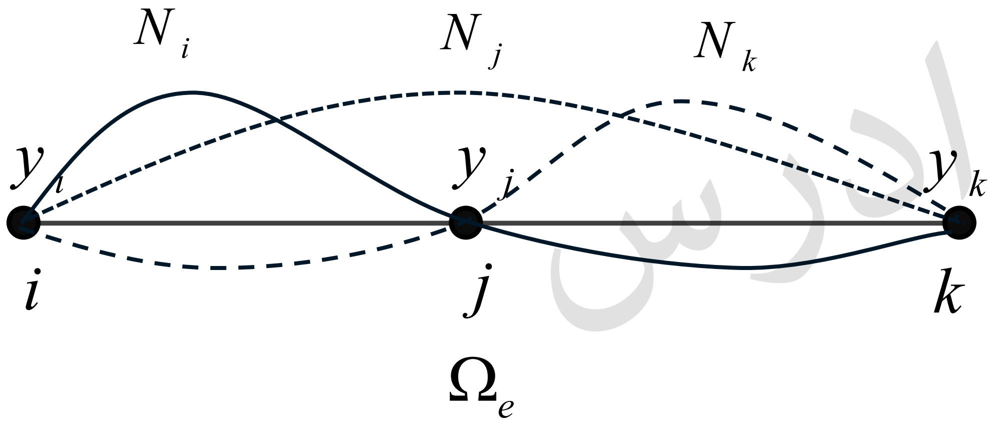
$$N_k = \alpha_k + \beta_k x + \gamma_k x^2 \Rightarrow \begin{cases} N_k = 0 \text{ at } x = x_i \\ N_k = 0 \text{ at } x = x_j \\ N_k = 1 \text{ at } x = x_k \end{cases}$$

تابع تغییر شکل درجه ۲



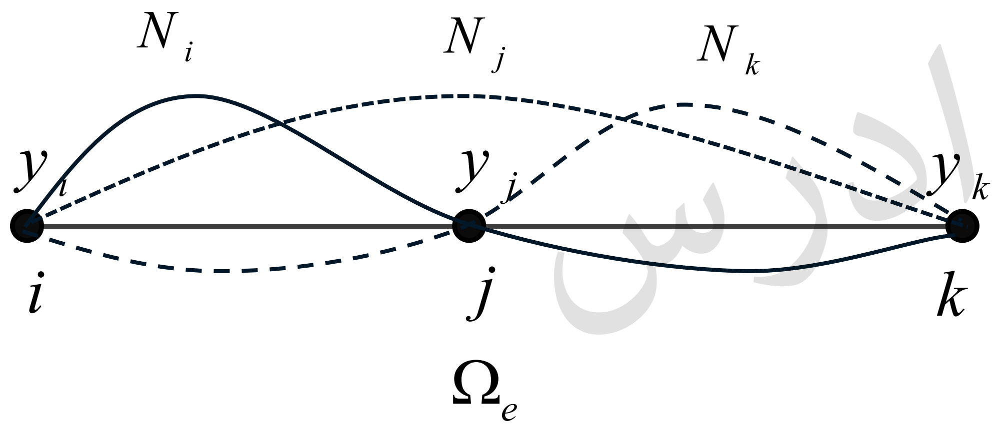
$$N_i = \frac{\prod\limits_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{N} \left(x_m - x\right)}{\prod\limits_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{N} \left(x_m - x_i\right)} = \frac{\left(x_j - x\right)\left(x_k - x\right)}{\left(x_j - x_i\right)\left(x_k - x_i\right)}$$

تابع تغییر شکل درجه ۲



$$N_j = \frac{\prod\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{N}\left(x_m - x\right)}{\prod\limits_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{N}\left(x_m - x_j\right)} = \frac{\left(x_i - x\right)\left(x_k - x\right)}{\left(x_i - x_j\right)\left(x_k - x_j\right)}$$

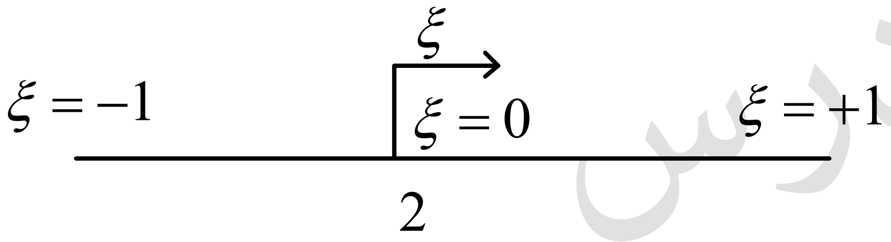
تابع تغییر شکل درجه ۲



$$N_k = \frac{\prod_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N}\left(x_m - x\right)}{\prod_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N}\left(x_m - x_k\right)} = \frac{\left(x_i - x\right)\left(x_j - x\right)}{\left(x_i - x_k\right)\left(x_j - x_k\right)}$$

تابع تغییر شکل درجه ۲

تابع تغییر شکل درجه ۲ در مختصات محلی:

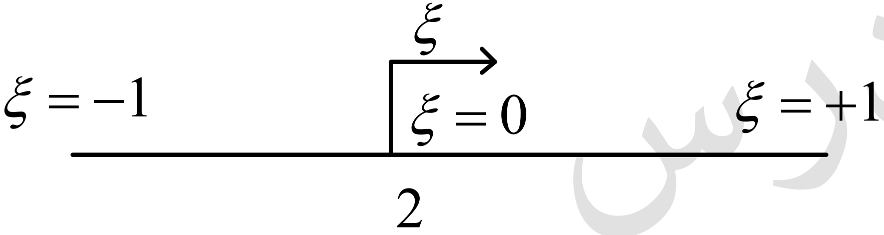


$$\xi=\frac{2\left(x-x_c\right)}{h} \qquad -1\le\xi\le+1$$

$$N_i=\frac{\left(\xi_j-\xi\right)\left(\xi_k-\xi\right)}{\left(\xi_j-\xi_i\right)\left(\xi_k-\xi_i\right)}=\frac{\left(0-\xi\right)\left(1-\xi\right)}{\left(0-\left(-1\right)\right)\left(1-\left(-1\right)\right)}=\frac{\xi\left(\xi-1\right)}{2}$$

تابع تغییر شکل درجه ۲

تابع تغییر شکل درجه ۲ در مختصات محلی:

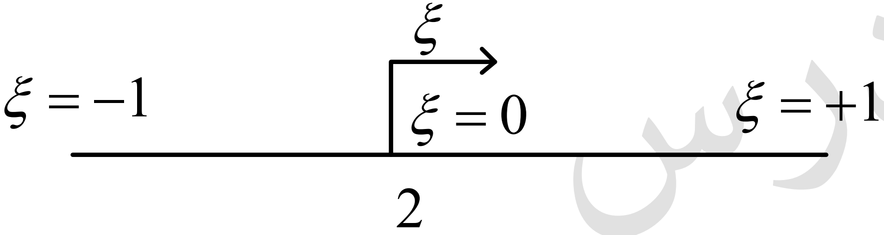


$$\xi = \frac{2\left(x - x_c\right)}{h} \qquad -1 \le \xi \le +1$$

$$N_j = \frac{\left(\xi_i - \xi\right)\left(\xi_k - \xi\right)}{\left(\xi_i - \xi_j\right)\left(\xi_k - \xi_j\right)} = \frac{\left(-1 - \xi\right)\left(1 - \xi\right)}{\left(-1 - (0)\right)\left(1 - (0)\right)} = \left(1 - \xi\right)\left(1 + \xi\right)$$

تابع تغییر شکل درجه ۲

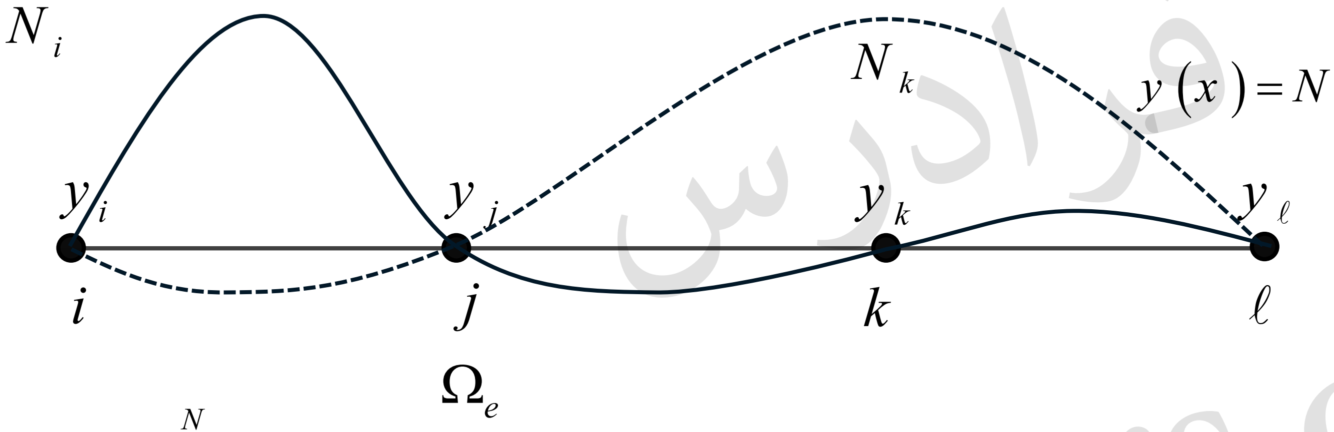
تابع تغییر شکل درجه ۲ در مختصات محلی:



$$\xi = \frac{2\left(x - x_c\right)}{h} \qquad -1 \le \xi \le +1$$

$$N_k = \frac{\left(\xi_i - \xi\right)\left(\xi_j - \xi\right)}{\left(\xi_i - \xi_k\right)\left(\xi_j - \xi_k\right)} = \frac{\left(-1 - \xi\right)\left(0 - \xi\right)}{\left(-1 - (1)\right)\left(0 - (1)\right)} = \frac{\xi\left(1 + \xi\right)}{2}$$

تابع تغییر شکل درجه ۳



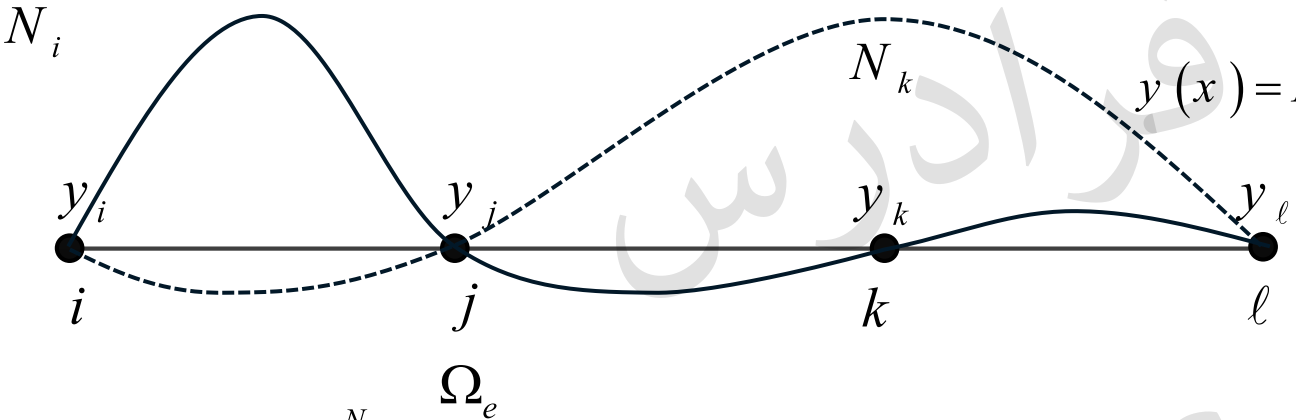
$$y(x) = N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k + N_\ell y_\ell$$

N_i, N_j, N_k, N_ℓ

توابع درجه ۳

$$N_i = \frac{\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{N} (x_m - x)}{\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{N} (x_m - x_i)} = \frac{(x_j - x)(x_k - x)(x_\ell - x)}{(x_j - x_i)(x_k - x_i)(x_\ell - x_i)}$$

تابع تغییر شکل درجه ۳



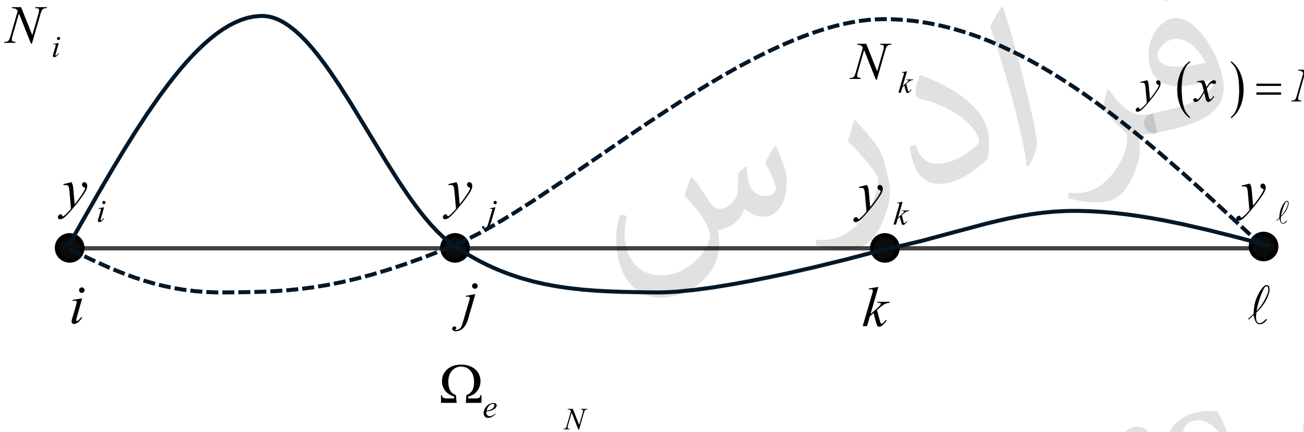
$$y(x) = N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k + N_\ell y_\ell$$

$$N_i, N_j, N_k, N_\ell$$

توابع درجه ۳

$$N_j = \frac{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{N} (x_m - x)}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{N} (x_m - x_j)} = \frac{(x_i - x)(x_k - x)(x_\ell - x)}{(x_i - x_j)(x_k - x_j)(x_\ell - x_j)}$$

تابع تغییر شکل درجه ۳



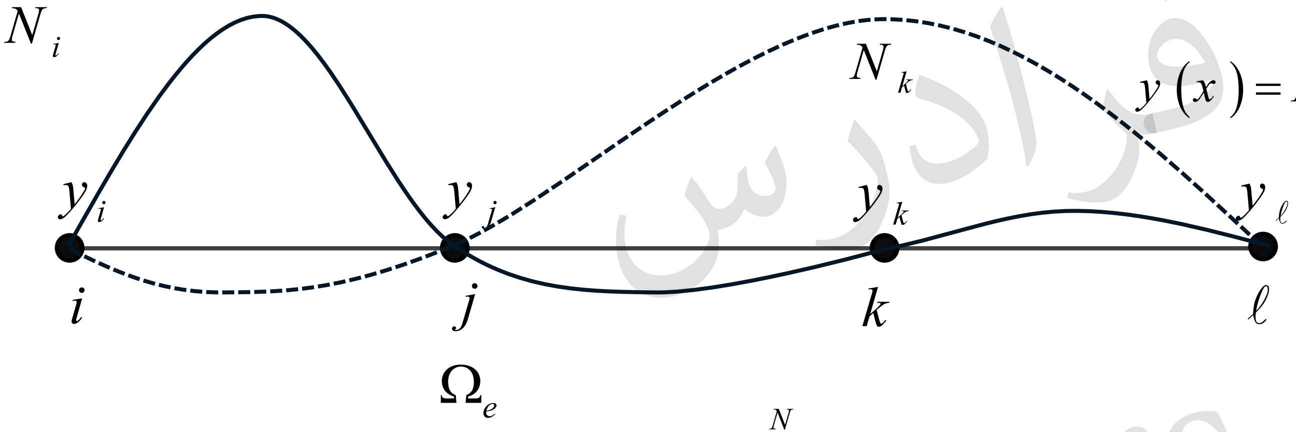
$$y(x)=N_i y_i+N_j y_j+N_k y_k+N_\ell y_\ell$$

$$N_i, N_j, N_k, N_\ell$$

توابع درجه ۳

$$N_k=\frac{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N}\left(x_m-x\right)}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N}\left(x_m-x_k\right)}=\frac{\left(x_i-x\right)\left(x_j-x\right)\left(x_\ell-x\right)}{\left(x_i-x_k\right)\left(x_j-x_k\right)\left(x_\ell-x_k\right)}$$

تابع تغییر شکل درجه ۳



$$y(x) = N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k + N_\ell y_\ell$$

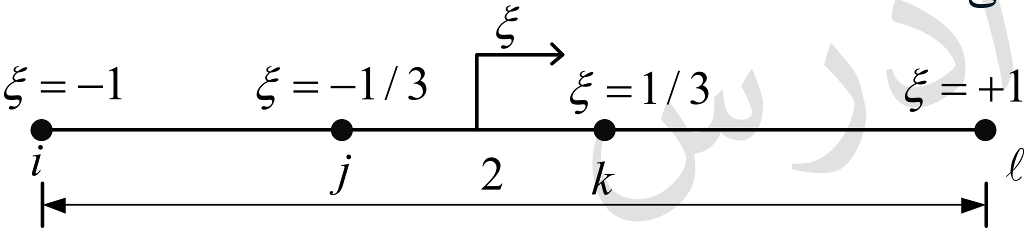
$$N_i, N_j, N_k, N_\ell$$

توابع درجه ۳

$$N_\ell = \frac{\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq \ell}}^{N} (x_m - x)}{\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq \ell}}^{N} (x_m - x_\ell)} = \frac{(x_i - x)(x_j - x)(x_k - x)}{(x_i - x_\ell)(x_j - x_\ell)(x_k - x_\ell)}$$

تابع تغییر شکل درجه ۳

تابع تغییر شکل درجه ۳ در مختصات محلی:



$$\xi = \frac{2(x - x_c)}{h}$$

$$-1 \le \xi \le +1$$

$$N_i = -\frac{9}{16}\left(\xi + \frac{1}{3}\right)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi - 1)$$

$$N_k = -\frac{27}{16}(\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{3}\right)(\xi - 1)$$

$$N_j = \frac{27}{16}(\xi + 1)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi - 1)$$

$$N_\ell = \frac{9}{16}(\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{3}\right)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)$$

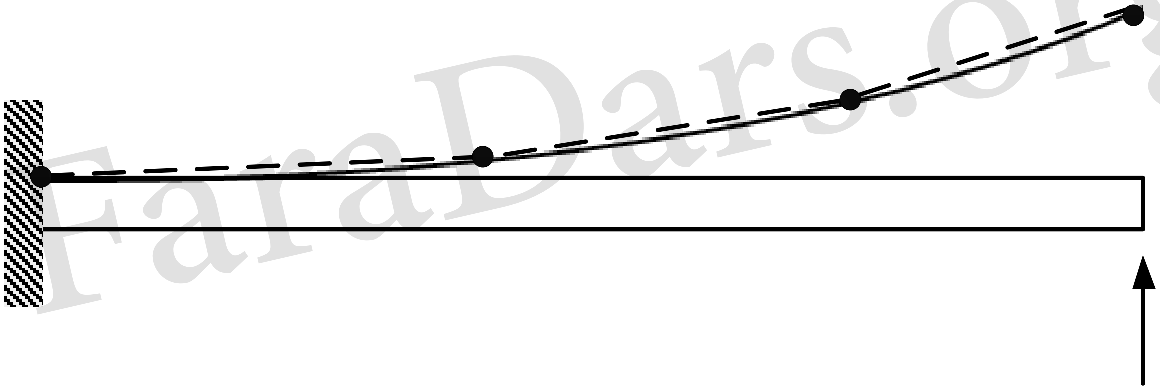
المان‌های لاگرانژی و هرمیتی

المان‌های لاگرانژی

تنها مقادیر y_i در گره‌ها معلوم است

پیوستگی تنها بر روی مقادیر گره‌ها وجود دارد

المان کلاس C^0



المان‌های لاگرانژی و هرمیتی

المان‌های هرمیتی

اطلاعات در گره‌ها بیشتر از تنها مقادیر y_i است

المان کلاس C^n

پیوستگی علاوه بر بر مقادیر گره‌ها، شامل شیب تغییر مکان هم خواهد بود

۴ ضریب مجهول در تابع تغییر شکل درجه ۳

$$N_i = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2 + \lambda_i x^3$$

y_i, y_j, y_k, y_ℓ

افزایش گره‌های میانی

المان‌های لاگرانژی و هرمیتی

المان‌های هرمیتی

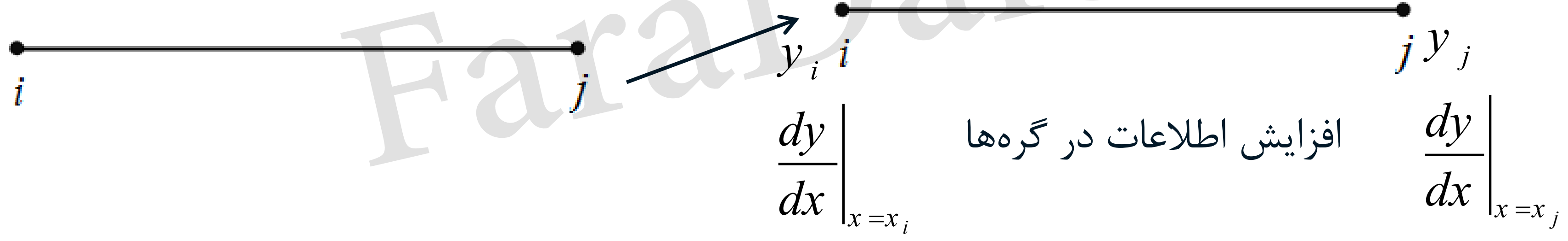
اطلاعات در گره‌ها بیشتر از تنها مقادیر y_i است

المان کلاس C^n

پیوستگی علاوه بر بر مقادیر گره‌ها، شامل شیب تغییر مکان هم خواهد بود

۴ ضریب مجهول در تابع تغییر شکل درجه ۳

$$N_i = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2 + \lambda_i x^3$$



روش محاسبه تابع شکل هرمیتی

تابع المان‌های هرمیتی با استفاده از تعریف توابع شکل

y_i

y_j

$$y(x) = N_{i1} y_i + N_{i2}\theta_i + N_{j1} y_j + N_{j2}\theta_j$$

$$\theta_i = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \qquad \theta_j = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j}$$

$$N_{i1}, N_{i2}, N_{j1}, N_{j2}$$

توابع درجه ۳

$$N_{i1} = \alpha_{i1} + \beta_{i1} x + \gamma_{i1} x^2 + \lambda_{i1} x^3$$

۱۶ مجهول، ۱۶ معادله نیاز است

روش محاسبه تابع شکل هرمیتی

تابع المان‌های هرمیتی با استفاده از تعریف توابع شکل

$$\theta_i = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \qquad \theta_j = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_j}$$

$$y(x) = N_{i1} y_i + N_{i2}\theta_i + N_{j1} y_j + N_{j2}\theta_j$$

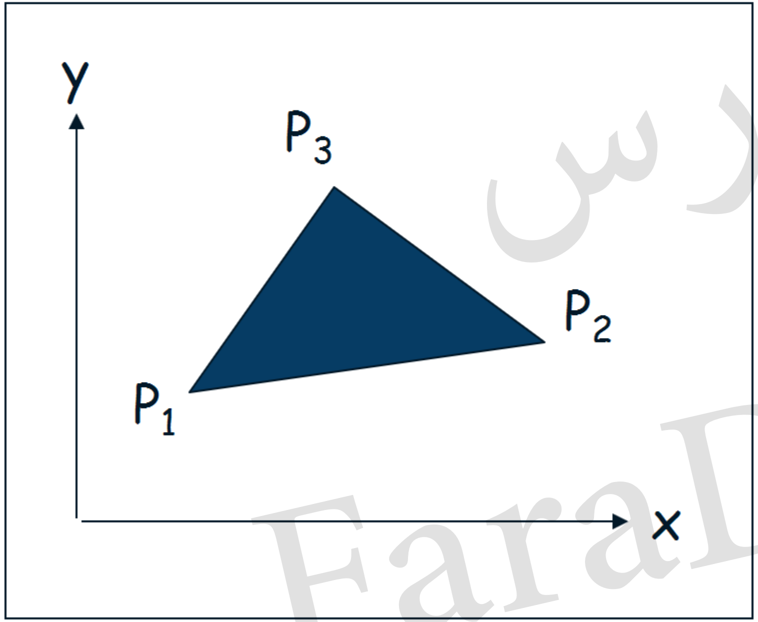
$$y'(x) = N'_{i1} y_i + N'_{i2}\theta_i + N'_{j1} y_j + N'_{j2}\theta_j$$

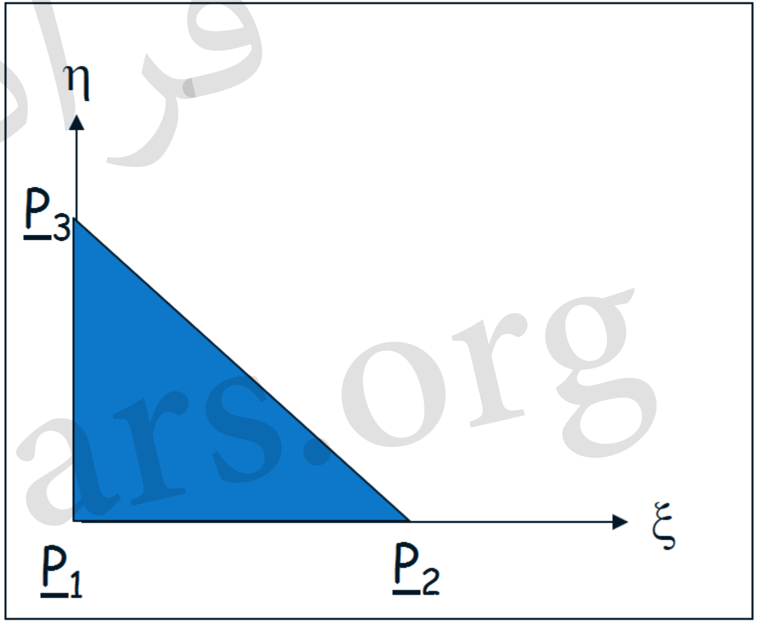
$$x = x_j \begin{cases} y(x) = y_j \\ y'(x) = \theta_j \end{cases}$$

$$N_{i1} = 0, N_{i2} = 0, N_{j1} = 1, N_{j2} = 0$$

$$N'_{i1} = 0, N'_{i2} = 0, N'_{j1} = 0, N'_{j2} = 1$$

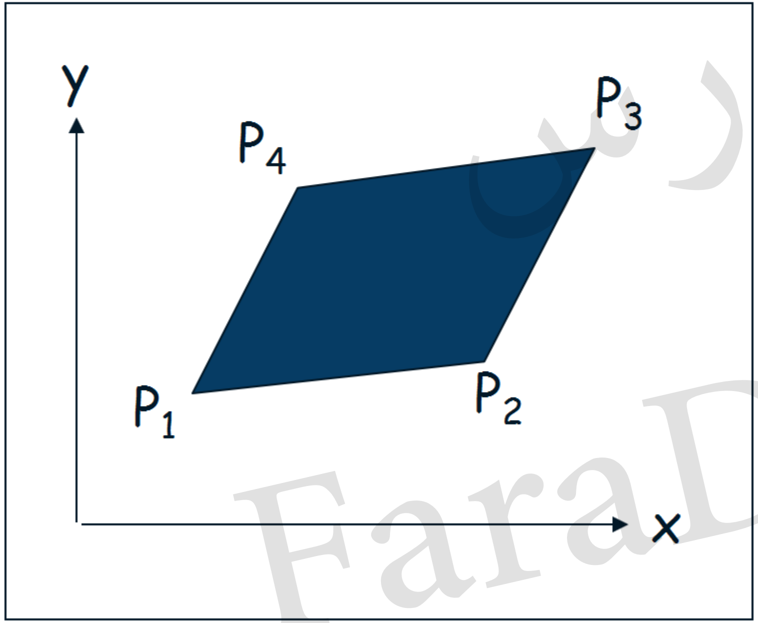
المان‌های دو بعدی

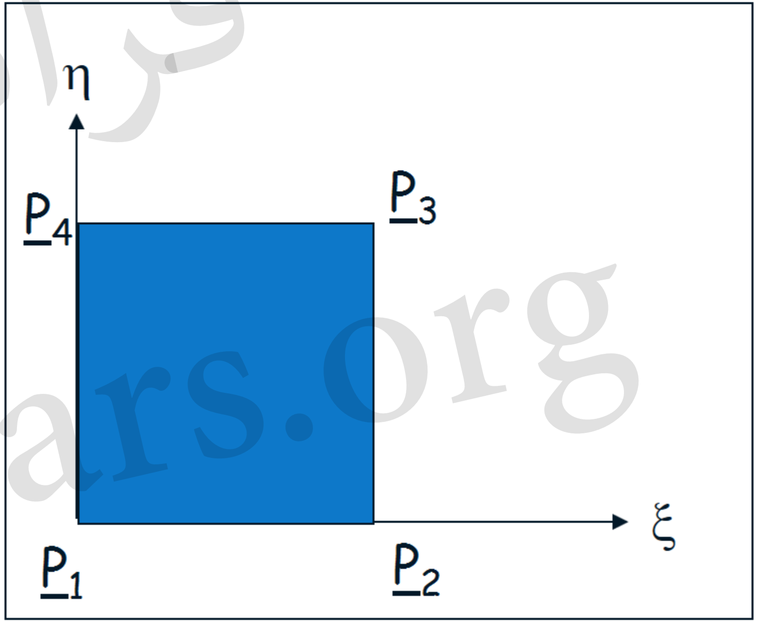




المان‌های مثلثی

المان‌های دو بعدی





المان‌های چهارگوش

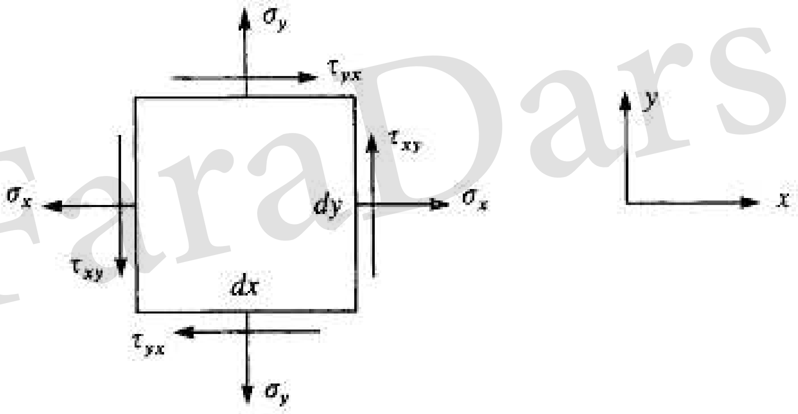
مروری بر مقاومت مصالح

- تانسور تنش

تنش سه بعدی

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}\sigma_{xy}&=\sigma_{yx}\\ \sigma_{yz}&=\sigma_{zy}\\ \sigma_{xz}&=\sigma_{zx}\end{aligned}$$

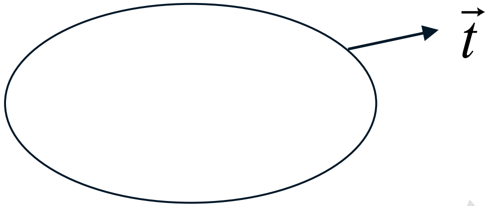
تنش دو بعدی



$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}$$

مروری بر مقاومت مصالح

- نیروی سطحی (Traction)



$$t_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y$$

$$t_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y$$

- قانون تعادل نیوتن:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

استاتیک

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = \rho \ddot{u}_x$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = \rho \ddot{u}_y$$

دینامیک

مروری بر مقاومت مصالح

- کرنش

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

- قانون عمومی هوک

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

تنش ⬅ کرنش

مروری بر مقاومت مصالح

- کرنش

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

- قانون عمومی هوک

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2G\,\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2G\,\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2G\,\varepsilon_{zz}$$

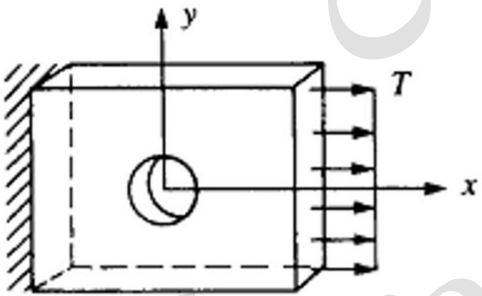
$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

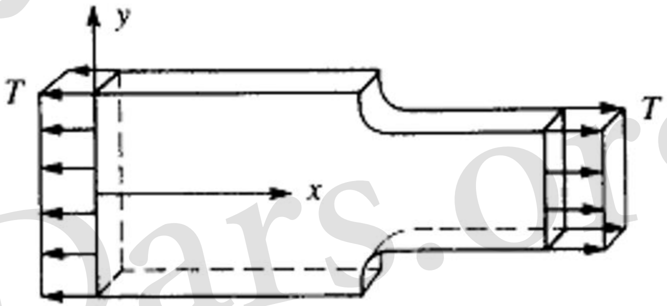
تنش ⇦ کرنش

مروری بر مقاومت مصالح

- تنش صفحه‌ای

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$





مروری بر مقاومت مصالح

- تنش صفحه‌ای

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

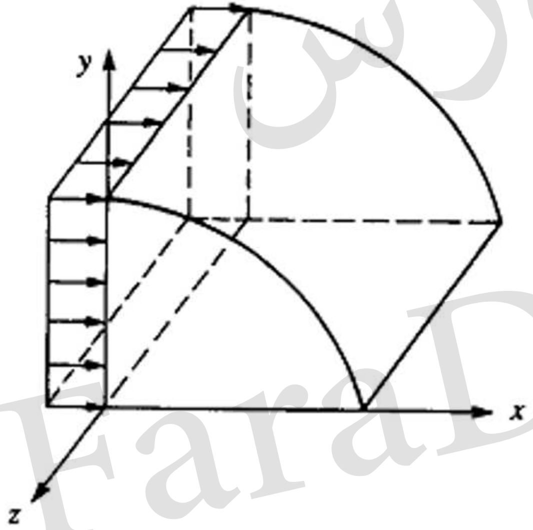
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

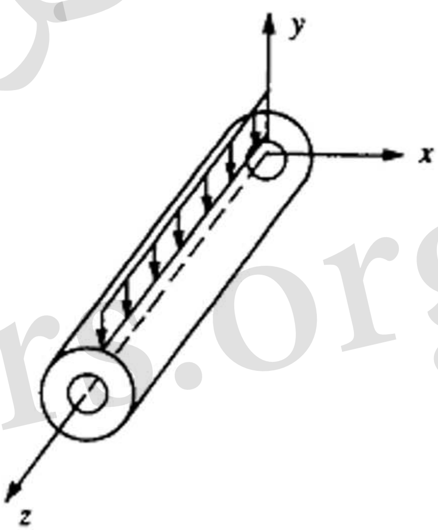
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

مروری بر مقاومت مصالح

- کرنش صفحه‌ای

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$





مروری بر مقاومت مصالح

- کرنش صفحه‌ای

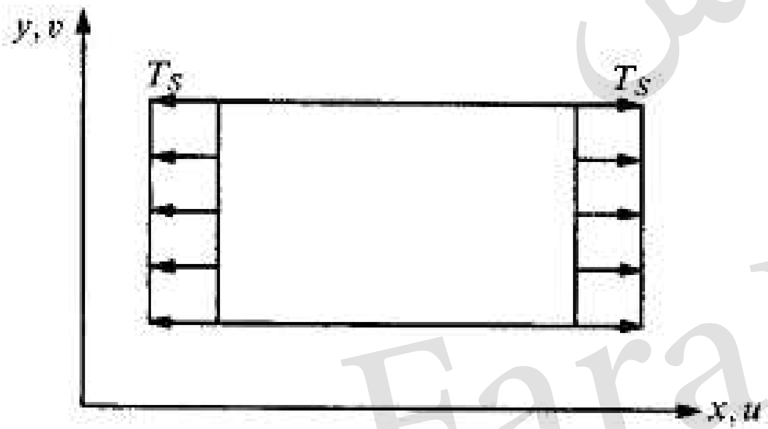
$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

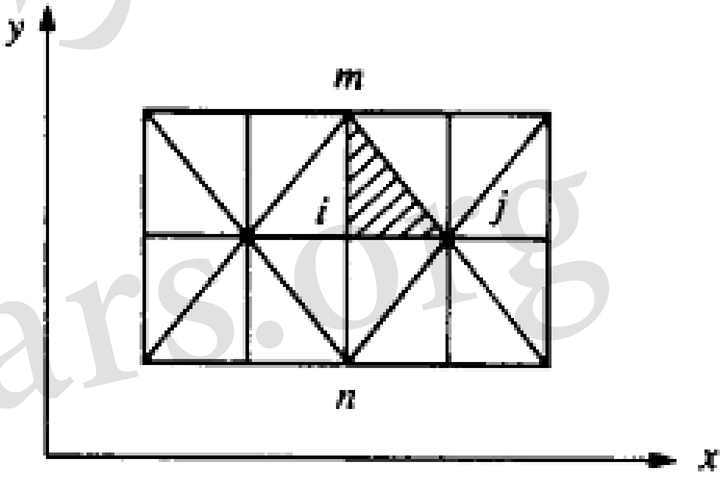
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \dfrac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \dfrac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

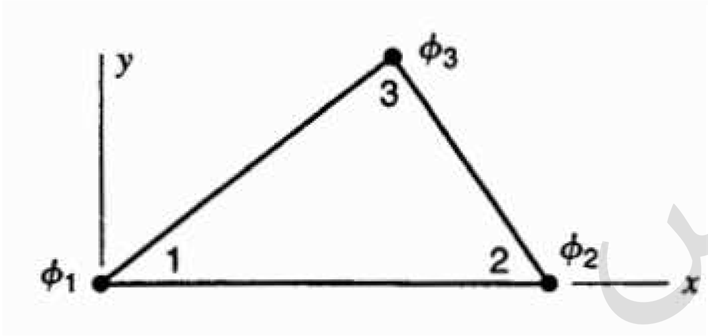
المان خطی مثلثی (CST)

- المان‌های تنش و کرنش صفحه‌ای

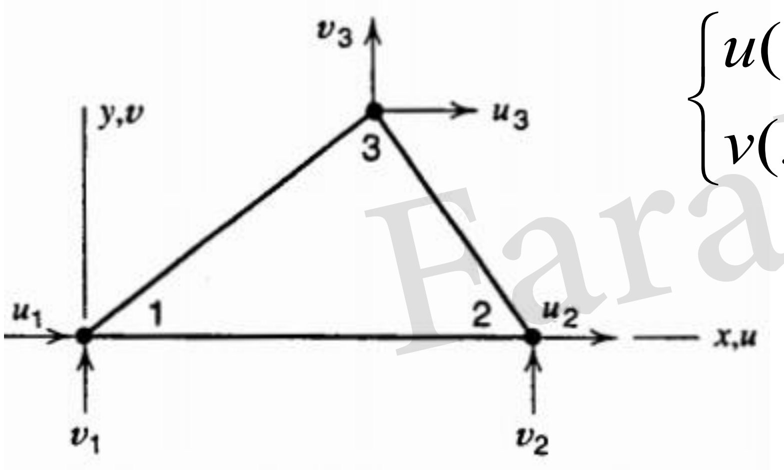




المان خطی مثلثی (CST)



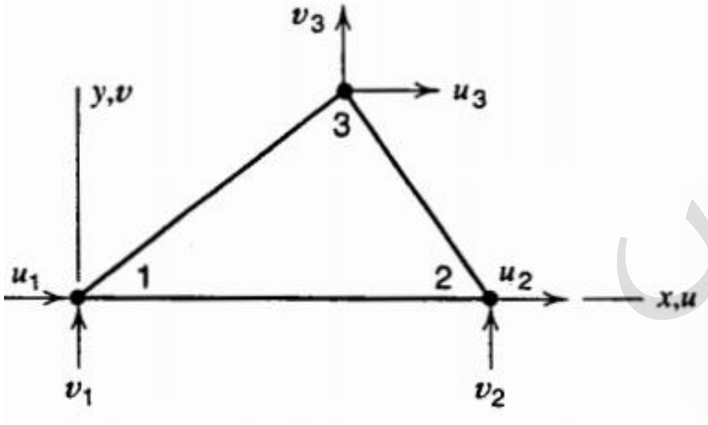
$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \underline{d}_i \\ \underline{d}_j \\ \underline{d}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$



$$\begin{cases} u(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 \\ v(x,y) = c_5 + c_6 x + c_7 y = \phi_1 v_1 + \phi_2 v_2 + \phi_3 v_3 \end{cases}$$

جابجایی خطی

المان خطی مثلثی (CST)



- میدان جابجایی:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x + a_3 y \\ a_4 + a_5 x + a_6 y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

جایگذاری گره ها

$$u_i = u(x_i, y_i) = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i$$

$$u_j = u(x_j, y_j) = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j$$

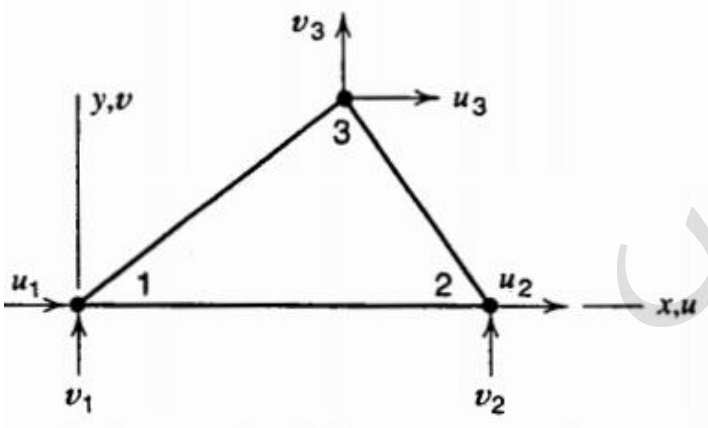
$$u_m = u(x_m, y_m) = a_1 + a_2 x_m + a_3 y_m$$

$$v_i = v(x_i, y_i) = a_4 + a_5 x_i + a_6 y_i$$

$$v_j = v(x_j, y_j) = a_4 + a_5 x_j + a_6 y_j$$

$$v_m = v(x_m, y_m) = a_4 + a_5 x_m + a_6 y_m$$

المان خطی مثلثی (CST)



- توابع شکل:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{a\} = [x]^{-1}\{u\}$$

$$[x]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

المان خطی مثلثی (CST)

$$[x]^{-1} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix}$$

$$\alpha_i = x_j y_m - y_j x_m \qquad \alpha_j = y_i x_m - x_i y_m \qquad \alpha_m = x_i y_j - y_i x_j$$

$$\beta_i = y_j - y_m \qquad \beta_j = y_m - y_i \qquad \beta_m = y_i - y_j$$

$$\gamma_i = x_m - x_j \qquad \gamma_j = x_i - x_m \qquad \gamma_m = x_j - x_i$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}}$$

المان خطی مثلثی (CST)

$$\{u\} = [1 \quad x \quad y]\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{u\} = \frac{1}{2A}[1 \quad x \quad y]\begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}$$

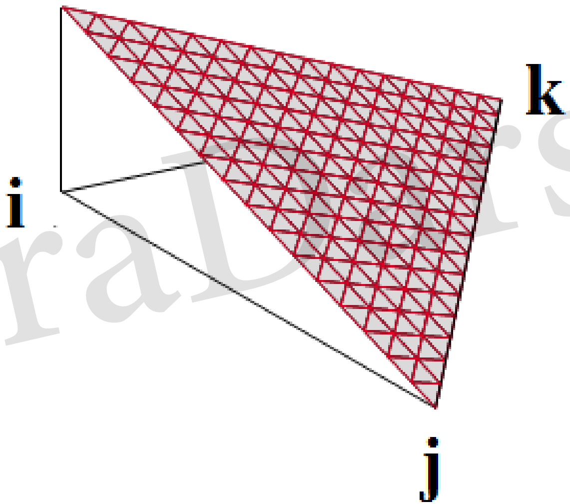
$$\Rightarrow \{u\} = \frac{1}{2A}[1 \quad x \quad y]\begin{Bmatrix} \alpha_i u_i + \alpha_j u_j + \alpha_m u_m \\ \beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_m u_m \\ \gamma_i u_i + \gamma_j u_j + \gamma_m u_m \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \frac{1}{2A}\{(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)u_i + (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y)u_j + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y)u_m\}}$$

المان خطی مثلثی (CST)

$$u(x,y)=\frac{1}{2A}\{(\alpha_i+\beta_i x+\gamma_i y)u_i+(\alpha_j+\beta_j x+\gamma_j y)u_j+(\alpha_m+\beta_m x+\gamma_m y)u_m\}$$

$$N_i=\frac{1}{2A}(\alpha_i+\beta_i x+\gamma_i y) \qquad N_j=\frac{1}{2A}(\alpha_j+\beta_j x+\gamma_j y) \qquad N_m=\frac{1}{2A}(\alpha_m+\beta_m x+\gamma_m y)$$



المان خطی مثلثی (CST)

- میدان جابجایی

$$\begin{cases} u(x,y) = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v(x,y) = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{cases} \Rightarrow \{\psi\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{Bmatrix}$$

$$\{\psi\} = \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}}}_{[N]} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

$$\{\psi\} = [N]\{d\}$$

المان مثلثی مرتبه بالاتر

- مثلث خیام – پاسکال

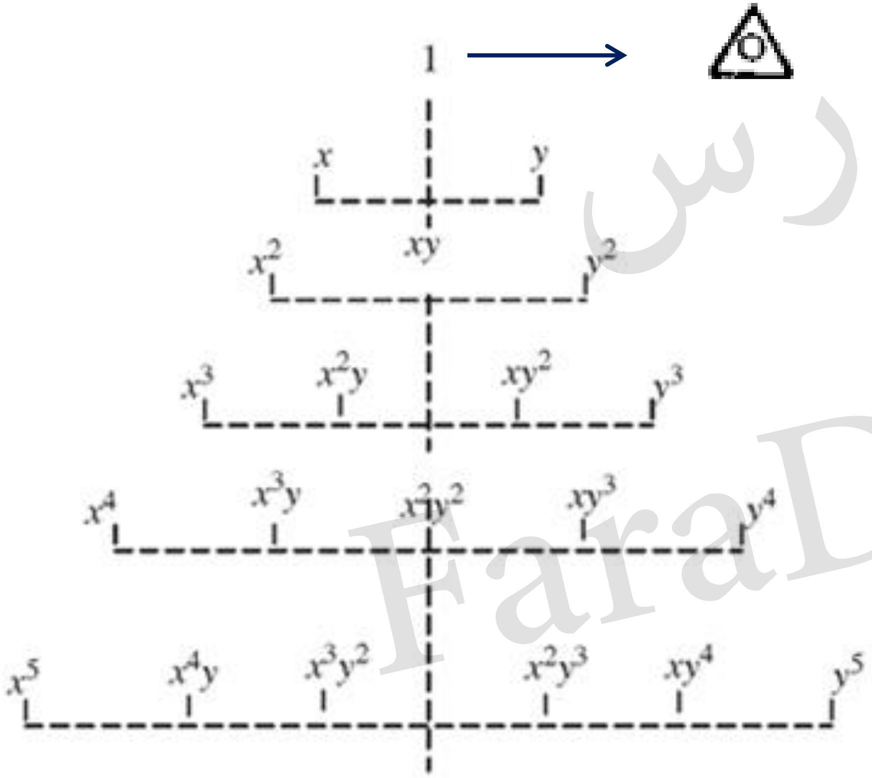
$$n = \tfrac{1}{2}(p+1)(p+2)$$

P مرتبه المان مثلثی

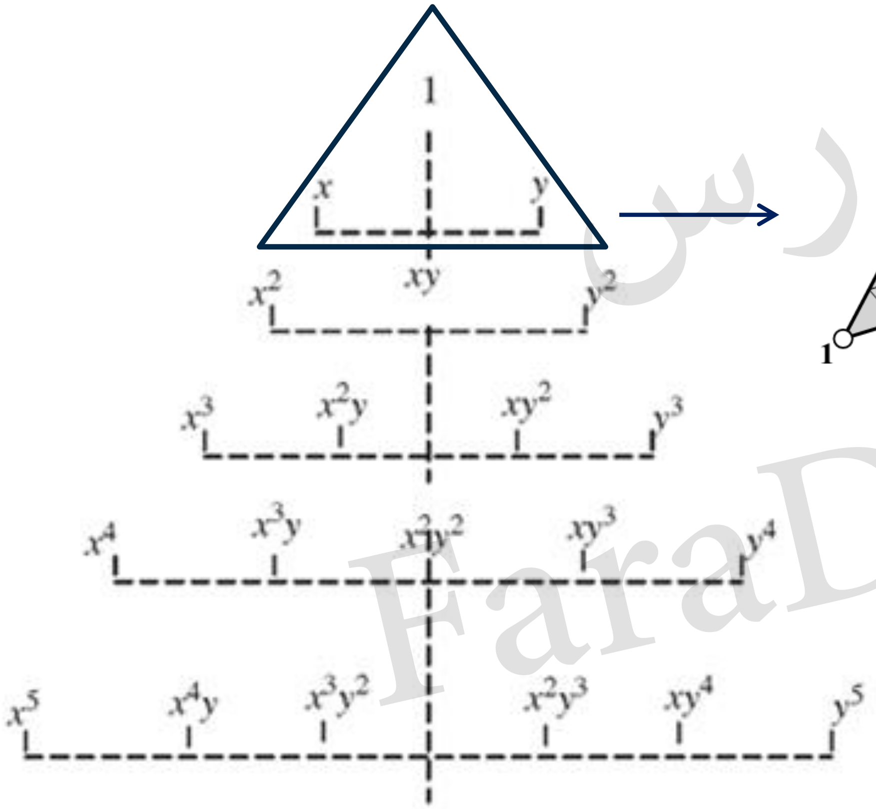
N تعداد گره ها

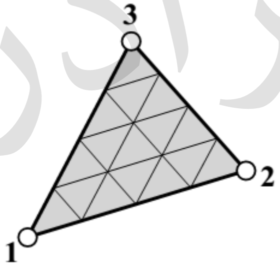
مرتبه 0- 1 گره

$$N_i = a_0$$



المان مرتبه بالاتر مثلثی



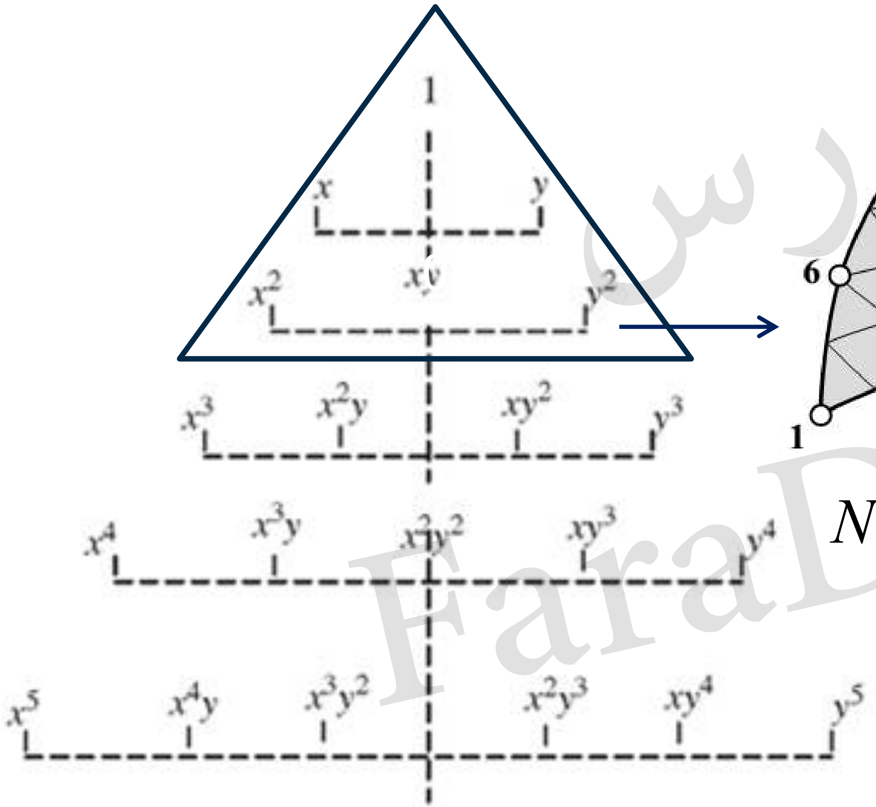


- مثلث خیام – پاسکال

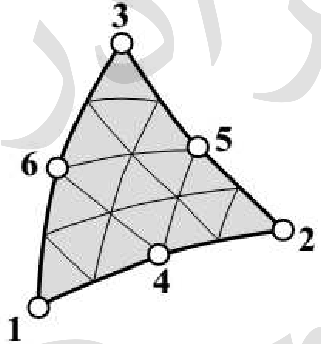
مرتبه ۱- ۳ گره

$$N_i = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

المان مرتبه بالاتر مثلثی



- مثلث خیام - پاسکال

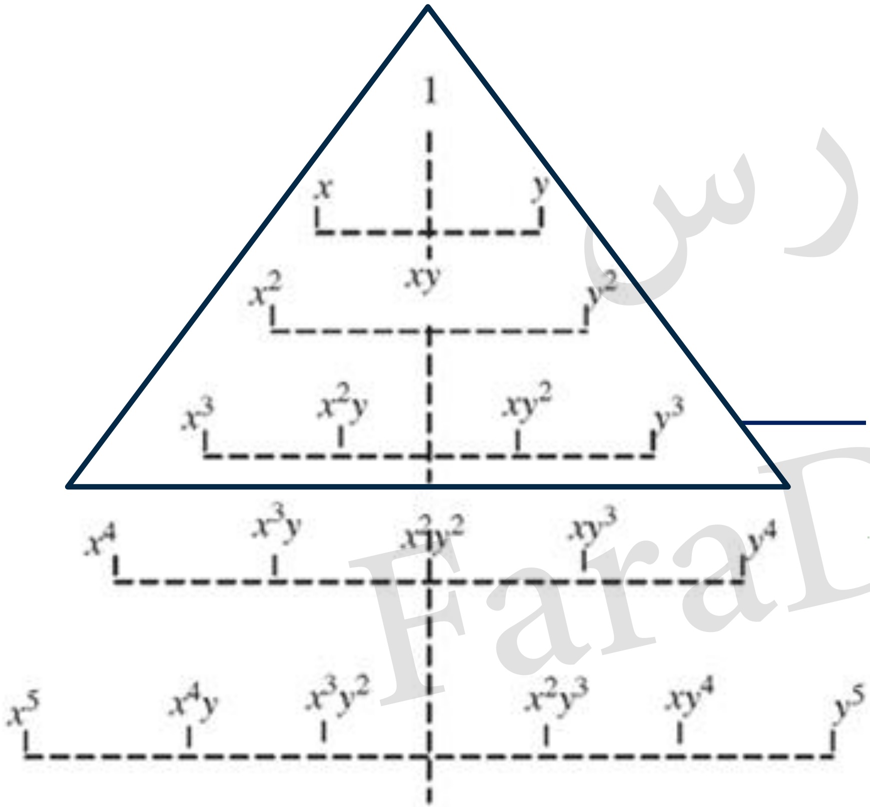


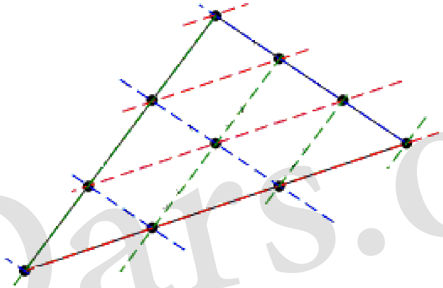
مرتبه ۲- ۶ گره

$$N_1 = a_{01} + a_{11}x + a_{21}x^2 + a_{31}xy + a_{41}y^2 + a_{51}y$$

المان مرتبه بالاتر مثلثی

- مثلث خیام – پاسکال





مرتبه ۳– ۱۰ گره

المان مرتبه بالاتر مثلثی

- تابع شکل المان مثلثی مرتبه ۲- ۶ گره

$$N_1 = a_{01} + a_{11}x + a_{21}x^2 + a_{31}xy + a_{41}y^2 + a_{51}y$$

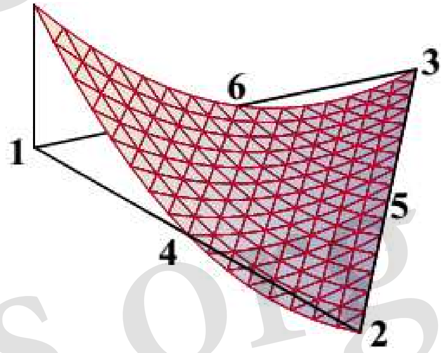
$$N_2 = a_{02} + a_{12}x + a_{22}x^2 + a_{32}xy + a_{42}y^2 + a_{52}y$$

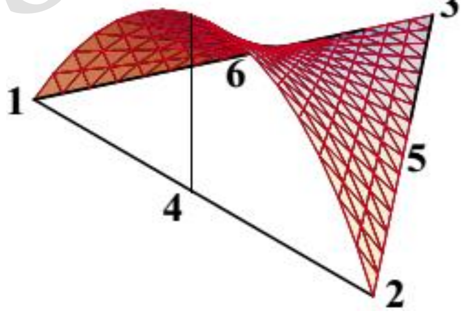
$$N_3 = a_{03} + a_{13}x + a_{23}x^2 + a_{33}xy + a_{43}y^2 + a_{53}y$$

$$N_4 = a_{04} + a_{14}x + a_{24}x^2 + a_{34}xy + a_{44}y^2 + a_{54}y$$

$$N_5 = a_{05} + a_{15}x + a_{25}x^2 + a_{35}xy + a_{45}y^2 + a_{55}y$$

$$N_6 = a_{06} + a_{16}x + a_{26}x^2 + a_{36}xy + a_{46}y^2 + a_{56}y$$





المان مرتبه بالاتر مثلثی

- تابع شکل المان مثلثی مرتبه ۲- ۶ گره: تعریف اصلی تابع شکل

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_1 \\ N_1 \\ N_1 \\ N_1 \\ N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} \\ a_{04} & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} \\ a_{05} & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \\ a_{06} & a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ xy \\ y^2 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} at\ x = x_1, y = y_1 : N_i = 0\ (i \neq 1) \quad and \quad N_1 = 1 \\ \quad \text{۶ معادله} \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ at\ x = x_6, y = y_6 : N_i = 0\ (i \neq 6) \quad and \quad N_6 = 1 \end{cases}$$

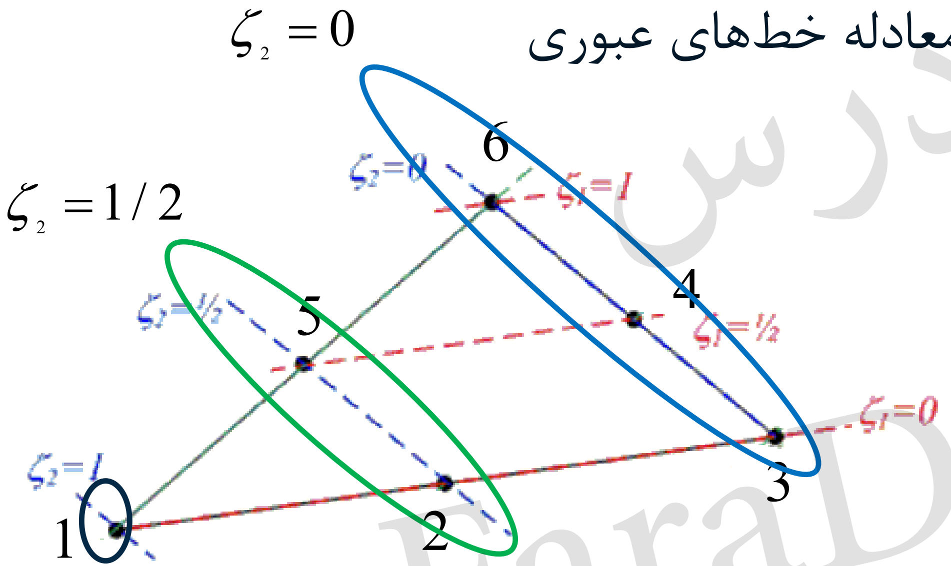
۶ معادله

---

۳۶ معادله

المان مرتبه بالاتر مثلثی

- تابع شکل المان مثلثی مرتبه ۲- ۶ گره: معادله خطهای عبوری



تابع شکل i: معادله خط عبوری از همه گره ها به غیر از گره i

تابع شکل ۱:

معادله خط عبوری از همه گره ها به غیر از گره ۱

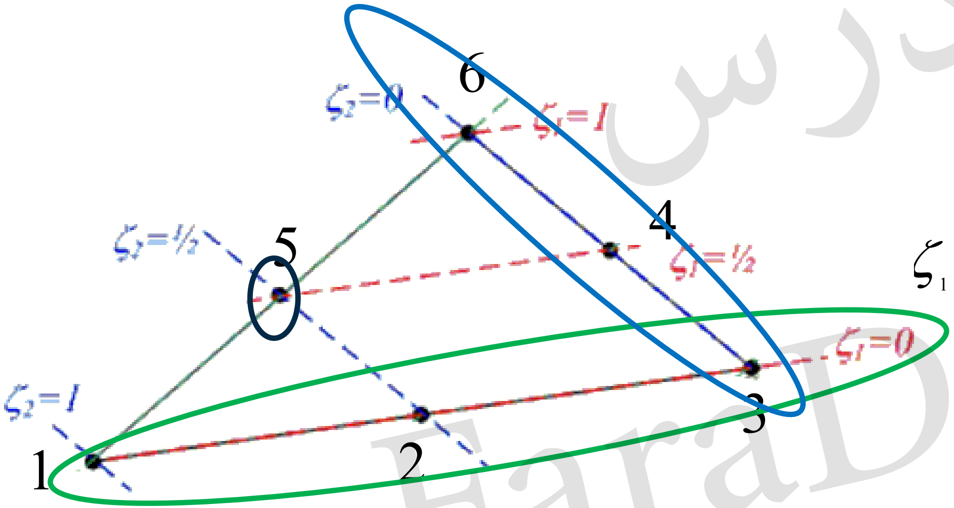
$$N_1 = C_1 \zeta_2 \left(\zeta_2 - 1/2\right)$$

$$at\ node\ 1\left(\zeta_2 = 1\right) \Rightarrow N_1 = 1 \quad N_1 = C_1(1)(1-1/2) = 1 \quad C_1 = 2$$

المان مرتبه بالاتر مثلثی

- تابع شکل المان مثلثی مرتبه ۲- ۶ گره: معادله خطهای عبوری

$\zeta_2 = 0$



$\zeta_1 = 0$

تابع شکل ۵:

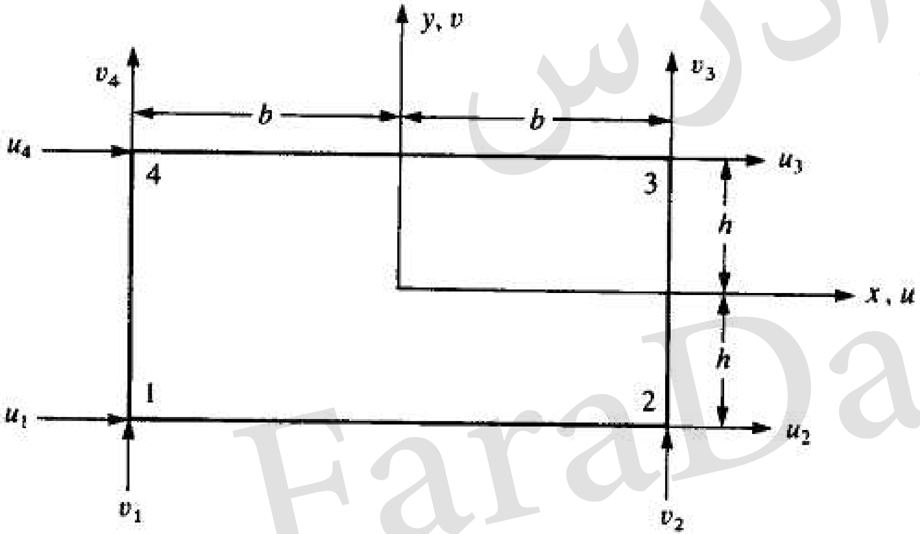
معادله خط عبوری از همه گره ها به غیر از گره ۵

$$N_5 = C_5 \zeta_1 \zeta_2$$

$$at\ node\ 5 \left(\zeta_1 = \frac{1}{2}, \zeta_2 = \frac{1}{2} \right) \Rightarrow N_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad N_5 = C_5 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_5 = 4$$

المان چهارگوش مرتبه اول

المان چهارگوش ۴ گره:



درجات آزادی

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

المان چهارگوش مرتبه اول

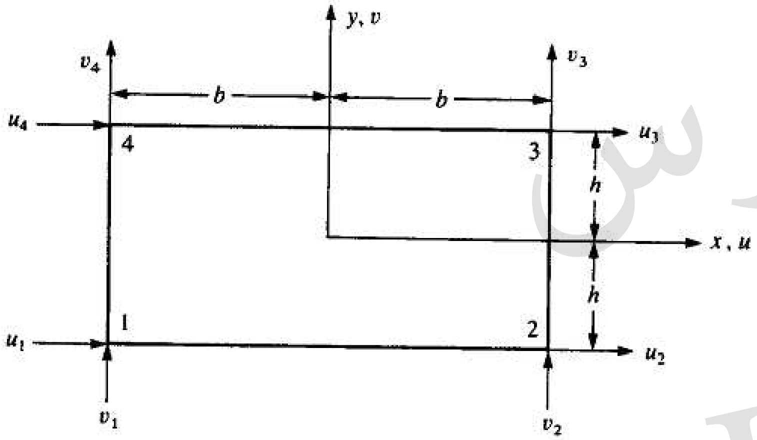
المان چهارگوش ۴ گره:

توابع تخمینی درجات آزادی:

$$u = \sum_{i=1}^{4} a_i N_i$$

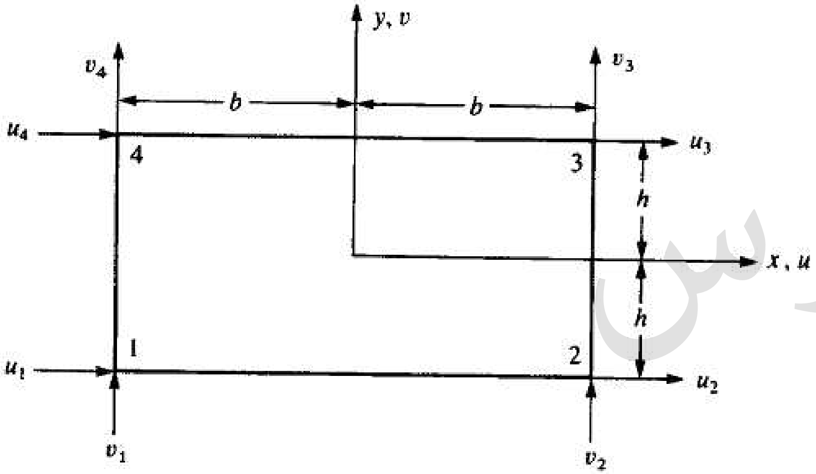
$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$$

$$v(x,y) = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy$$



$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

المان چهارگوش مرتبه اول



المان چهارگوش ۴ گره:

توابع شکل: $u = \sum_{i=1}^{4} a_i N_i$

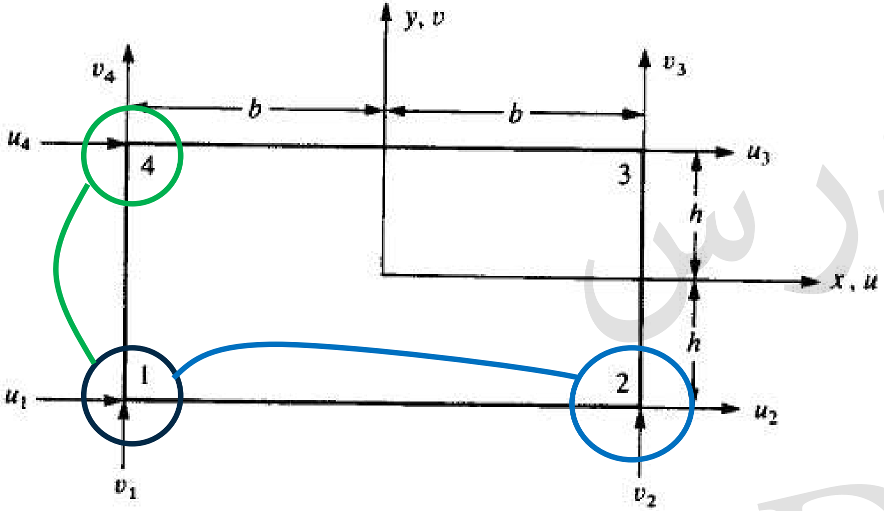
$$\Lambda_k^P(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} (x_i - x) / \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} (x_i - x_k)$$

$$N_i = \boxed{\Lambda_i^P(x)} \times \boxed{\Lambda_i^P(y)}$$

$$\Lambda_k^P(y) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} (y_i - y) / \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} (y_i - y_k)$$

Lagrange interpolation Function

المان چهارگوش مرتبه اول



المان چهارگوش ۴ گره:

توابع شکل N_1

گره مجاور در جهت x: گره ۲

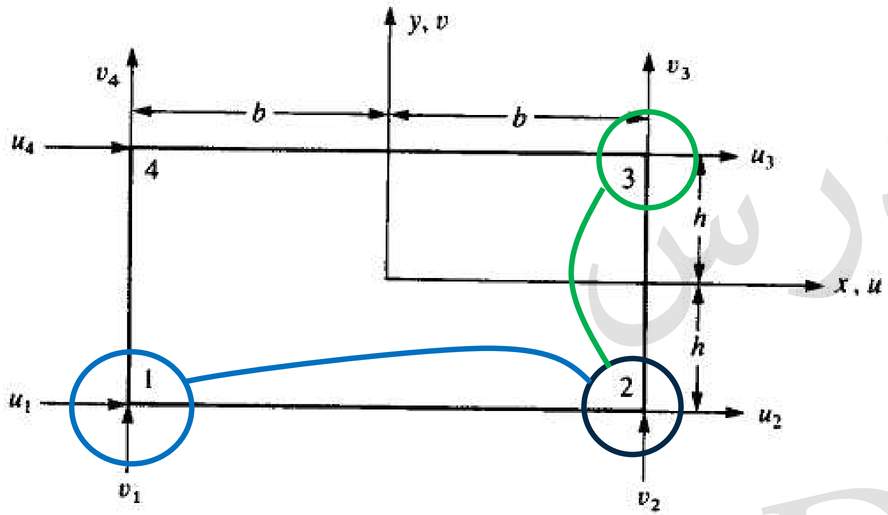
گره مجاور در جهت y: گره ۴

$$\Lambda_1^1(x)=\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$$

$$\Lambda_1^1(y)=\frac{(y-y_4)}{(y_1-y_4)}$$

$$N_1=\underbrace{\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}}_{(-2b)}\times\underbrace{\frac{(y-y_4)}{(y_1-y_4)}}_{(-2h)}=\frac{1}{4bh}(x-b)(y-h)$$

المان چهارگوش مرتبه اول



المان چهارگوش ۴ گره:

توابع شکل N_2

گره مجاور در جهت X: گره ۱

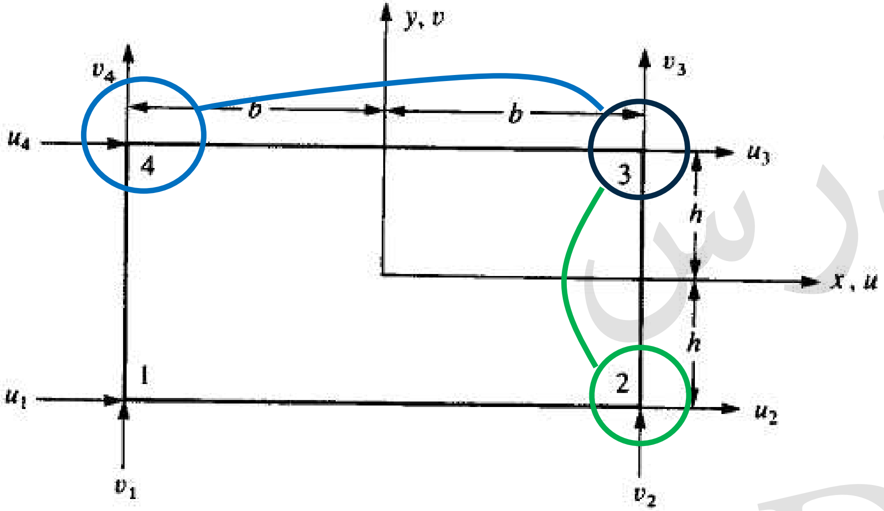
گره مجاور در جهت y: گره ۳

$$\Lambda_2^1(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}$$

$$\Lambda_2^1(y)=\frac{(y-y_3)}{(y_2-y_3)}$$

$$N_2=\underbrace{\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}}_{(2b)}\times\underbrace{\frac{(y-y_3)}{(y_2-y_3)}}_{(-2h)}=-\frac{1}{4bh}(x+b)(y-h)$$

المان چهارگوش مرتبه اول



المان چهارگوش ۴ گره:

توابع شکل N_3

گره مجاور در جهت X: گره ۴

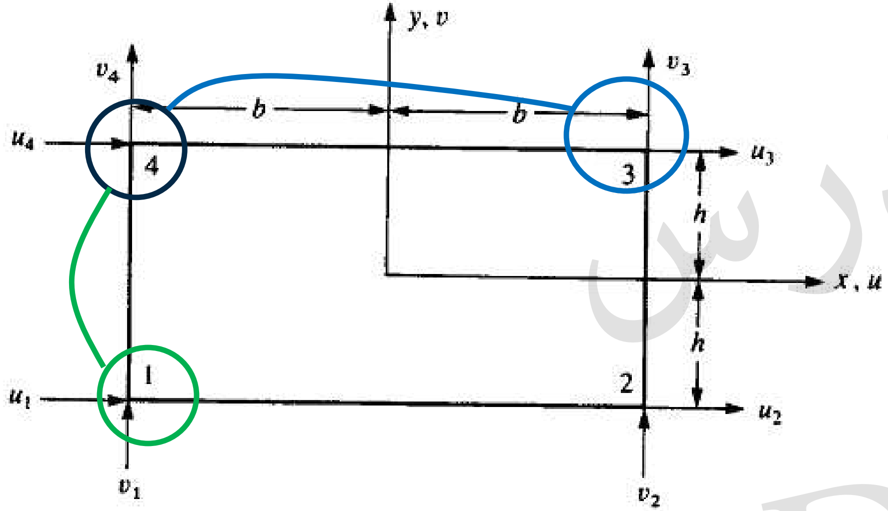
گره مجاور در جهت y: گره ۲

$$\Lambda_4^1(x)=\frac{(x-x_4)}{(x_3-x_4)}$$

$$\Lambda_4^1(y)=\frac{(y-y_2)}{(y_3-y_2)}$$

$$N_3=\frac{(x-x_4)}{\underbrace{(x_3-x_4)}_{(2b)}}\times\frac{(y-y_2)}{\underbrace{(y_3-y_2)}_{(2h)}}=\frac{1}{4bh}(x+b)(y+h)$$

المان چهارگوش مرتبه اول



المان چهارگوش ۴ گره:

توابع شکل N_4

گره مجاور در جهت X: گره ۳

گره مجاور در جهت y: گره ۱

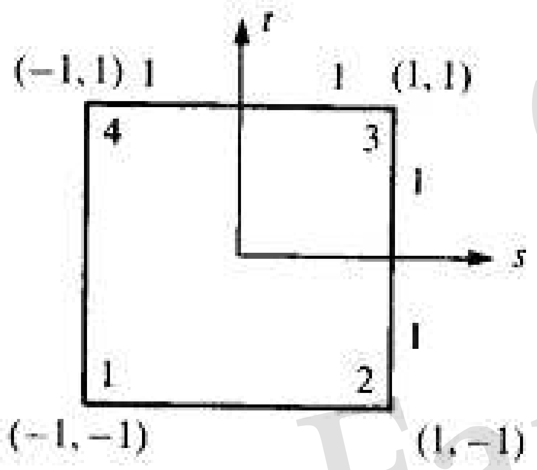
$$\Lambda_4^1(x)=\frac{(x-x_3)}{(x_4-x_3)}$$

$$\Lambda_4^1(y)=\frac{(y-y_1)}{(y_4-y_1)}$$

$$N_4=\frac{(x-x_3)}{\underbrace{(x_4-x_3)}_{-(2b)}}\times\frac{(y-y_1)}{\underbrace{(y_4-y_1)}_{(2h)}}=-\frac{1}{4bh}(x-b)(y+h)$$

المان چهارگوش مرتبه اول

المان چهارگوش ۴ گره: مختصات محلی



$$b = h = 1$$

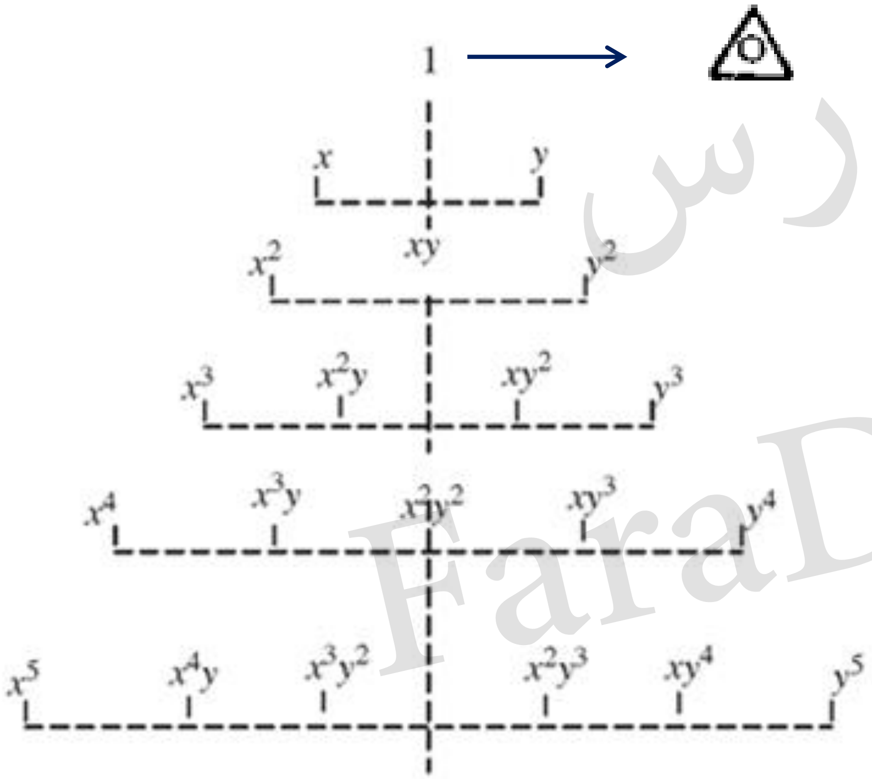
$$N_1 = \frac{(1-s)(1-t)}{4} \qquad N_2 = \frac{(1+s)(1-t)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+s)(1+t)}{4} \qquad N_4 = \frac{(1-s)(1+t)}{4}$$

المان چهار گوش مرتبه بالاتر

- مثلث خیام – پاسکال

مرتبه 0- 1 گره



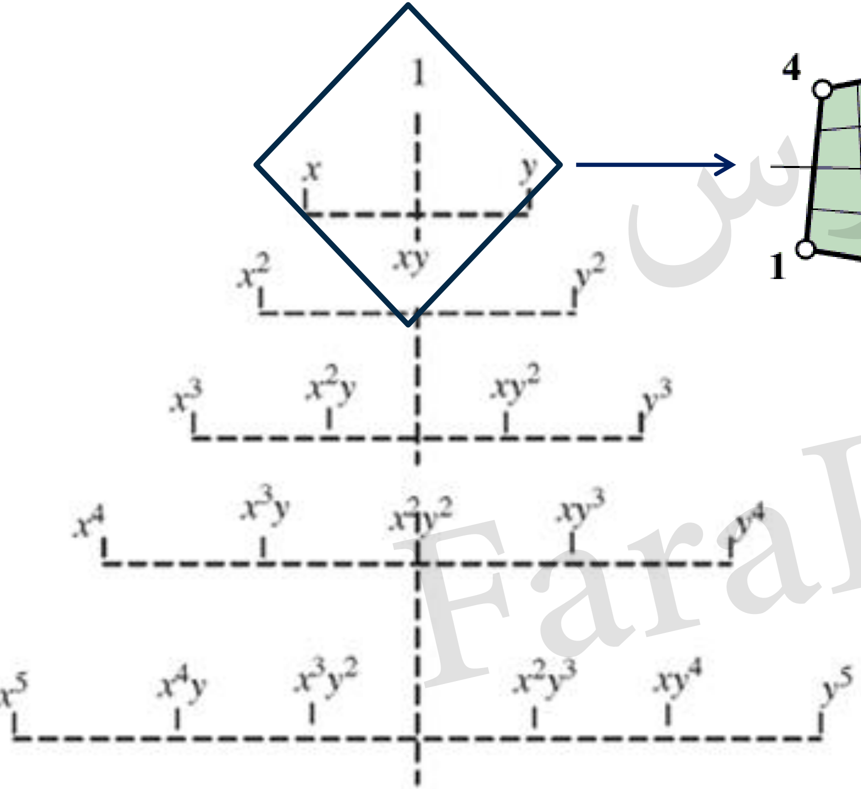
$$N_i = a_0$$

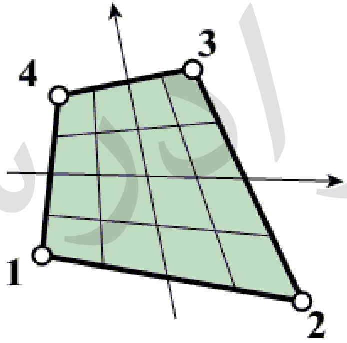
$$n=(p+1)^2$$

P مرتبه المان چهارگوش

n تعداد گره ها

المان چهار گوش مرتبه بالاتر

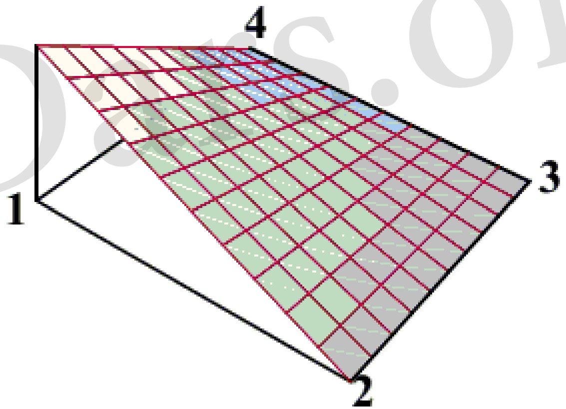




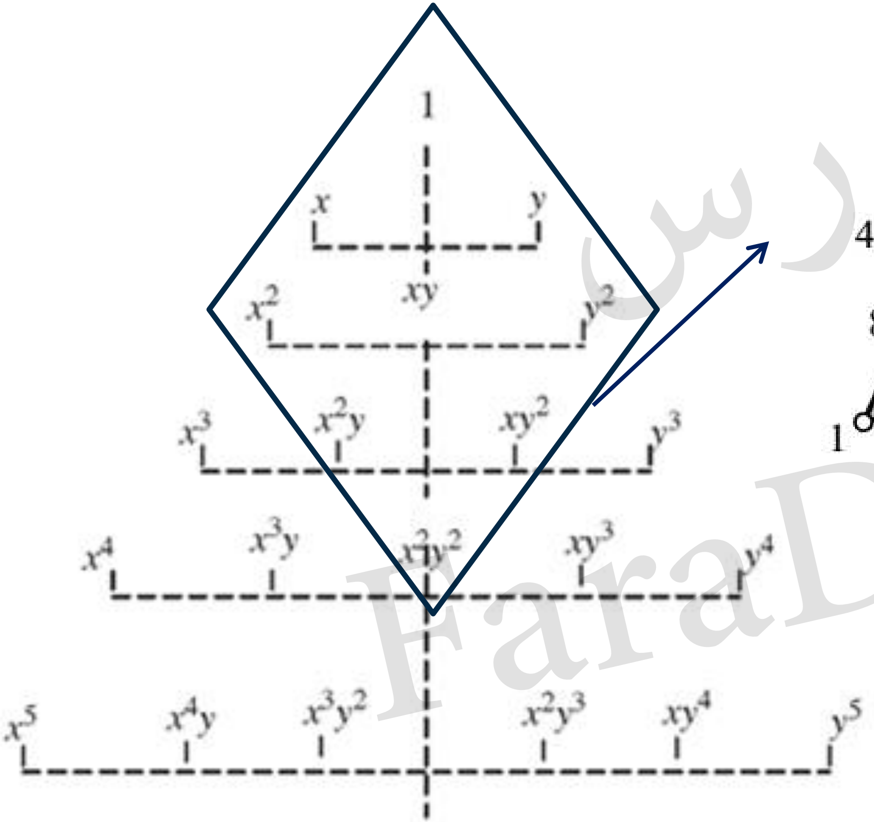
- مثلث خیام – پاسکال: مرتبه ۱

مرتبه ۱- ۴ گره

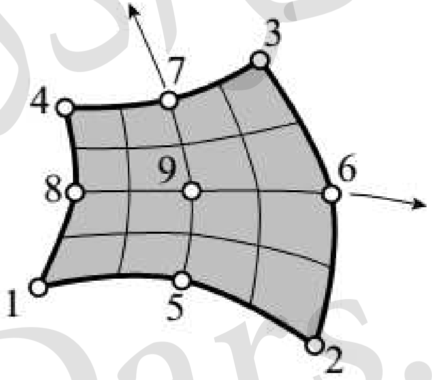
$$N_i = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$$



المان چهار گوش مرتبه بالاتر



- مثلث خیام – پاسکال: المان مرتبه ۲

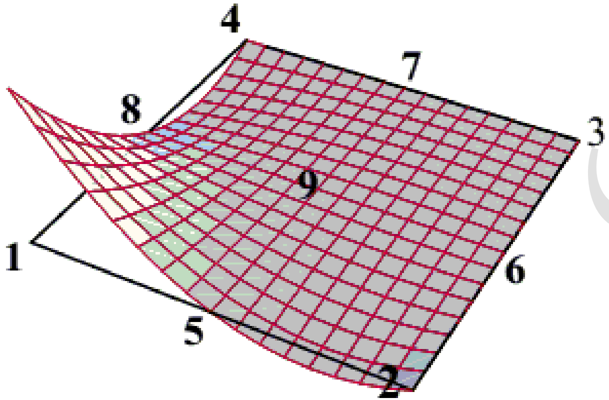


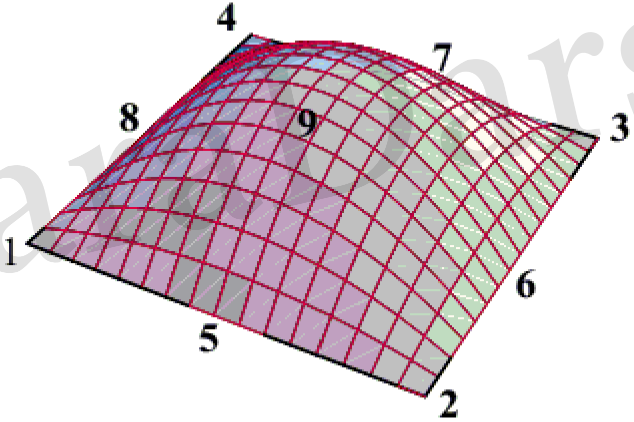
مرتبه ۲- ۹ گره

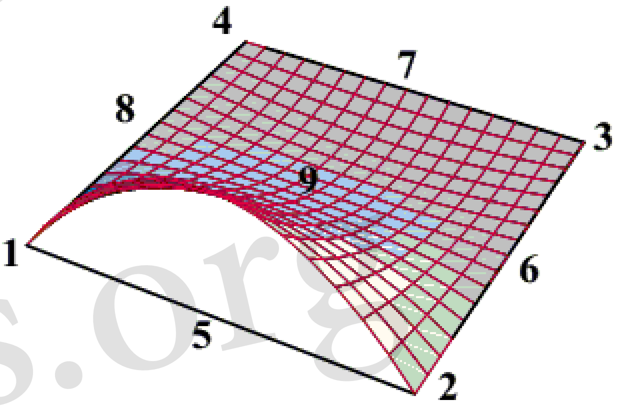
$$N_1 = a_{01} + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}x^2 + a_{41}xy$$
$$+ a_{51}y^2 + a_{51}x^2y + a_{61}xy^2 + a_{71}x^2y^2$$

المان چهار گوش مرتبه بالاتر

- مثلث خیام – پاسکال: المان مرتبه ۲

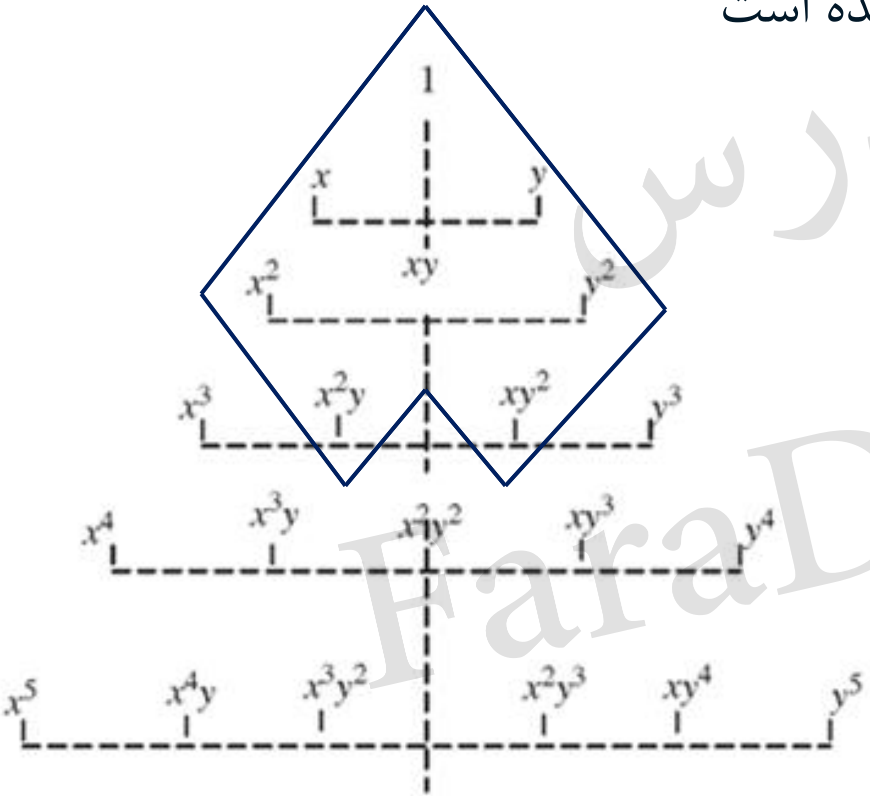


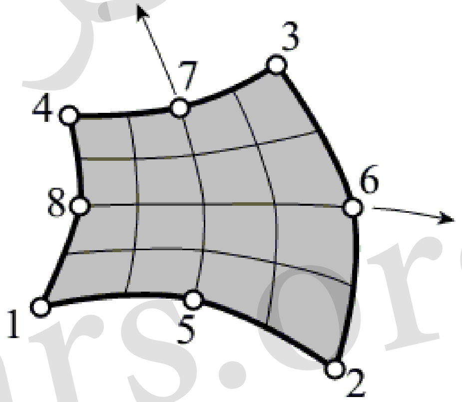




المان سرندپیتی

- المان‌های مربعی که گره میانی آن حذف شده است



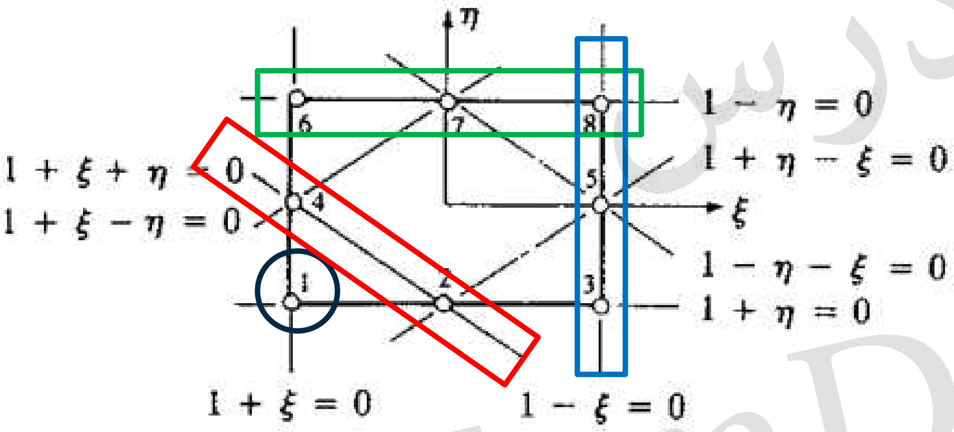


$$N_1 = a_{01} + a_{11} x + a_{21} y + a_{31} x^2 + a_{41} xy$$
$$+ a_{51} y^2 + a_{51} x^2 y + a_{61} xy^2$$

المان سرندیپیتی

- تابع شکل

تابع شکل i: معادله خط عبوری از همه گره ها به غیر از گره i



$$N_1(\xi,\eta)=C\,(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_1(-1,-1)=C\,(1+1)(1+1)(1-1-1)=1 \quad \Rightarrow \quad C=-1/4$$

$$N_1(\xi,\eta)=-\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

المان چهار گوش مرتبه بالاتر

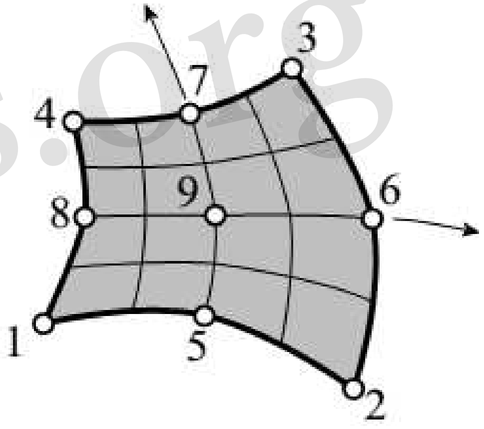
- مثال: تابع شکل

مرتبه ۲- ۹ گره

$$N_9 = \Lambda_9^P(x) \times \Lambda_9^P(y)$$

$$\Lambda_9^2(x) = \frac{(x_6 - x)(x_8 - x)}{(x_6 - x_9)(x_8 - x_9)}$$

$$\Lambda_9^2(y) = \frac{(y_7 - y)(y_5 - y)}{(y_7 - y_9)(y_5 - y_9)}$$



$$N_9 = \frac{(x_6 - x)(x_8 - x)}{(x_6 - x_9)(x_8 - x_9)} \times \frac{(y_7 - y)(y_5 - y)}{(y_7 - y_9)(y_5 - y_9)}$$

❑ استخراج ماتریس سختی

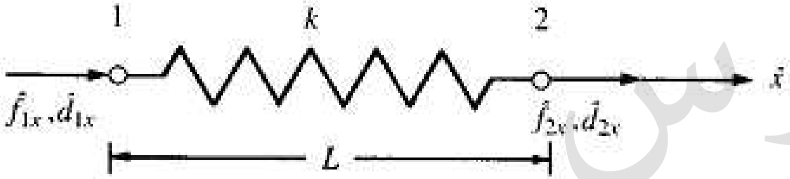
مفهوم ماتریس سختی

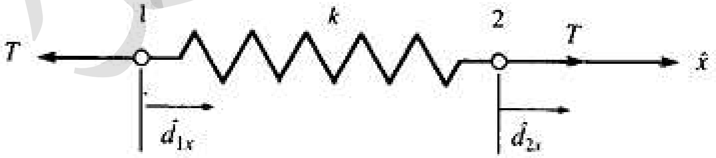
روابط کلی محاسبه ماتریس سختی

انتگرال گیری عددی گوس

استخراج ماتریس سختی

- ماتریس سختی فنر:





$$T = -\hat{f}_{1x} = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$$
$$T = \hat{f}_{2x} = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$$

$$\hat{f}_{1x} = k(\hat{d}_{1x} - \hat{d}_{2x})$$
$$\hat{f}_{2x} = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}} \boxed{\begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix}}$$

نیرو

درجات
آزادی

ماتریس سختی

$$\underline{\hat{k}} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

استخراج ماتریس سختی

نیرو = درجات آزادی × $\boxed{?}$

ماتریس سختی

روابط کلی محاسبه ماتریس سختی

$$L(u) + A = 0 \ on \ \Omega$$

روش گالرکین

حدس تقریبی جواب به صورت سری

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x) \boxed{\cancel{+\psi(x)}}$$

مینیمم کردن خطا

$$L(\tilde{u}) + A = R_\Omega$$

$$\boxed{\int_{\Omega_1} N_i R_\Omega d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} N_i R_\Omega d\Omega_2 + \int_{\Omega_3} N_i R_\Omega d\Omega_3 = 0}$$

روابط کلی محاسبه ماتریس سختی

روش گالرکین در المان محدود

$$\int_{x_1}^{x_2} N_i \boxed{R_\Omega} dx + \int_{x_2}^{x_3} N_i R_\Omega dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} N_i R_\Omega x = 0$$

$$L(\tilde{u}) + A = R_\Omega \quad \Rightarrow \quad L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x)\right) + A = R_\Omega$$

$$\int_{x_1}^{x_2} N_i \left[L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x)\right) + A \right] dx + \int_{x_2}^{x_3} N_i \left[L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x)\right) + A \right] dx + \ldots$$

$$+ \int_{x_{n-1}}^{x_n} N_i \left[L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x)\right) + A \right] dx = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

روابط کلی محاسبه ماتریس سختی

$$\int_{x_1}^{x_2} N_i\left[L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x)\right)\right]dx+\int_{x_2}^{x_3} N_i\left[L\left(\sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x)\right)\right]dx$$

$$=-\left[\int_{x_1}^{x_2} N_i\left[L(A)\right]dx+\int_{x_2}^{x_3} N_i\left[L(A)\right]dx\right]$$

فرض: ۲ جمله، ۲ المان

$$\tilde{u}(x)=a_1N_1(x)+a_2N_2(x)$$

$$k_{i1}\quad \boxed{\int_{x_1}^{x_2} N_i\left[L\left(a_1N_1(x)+a_2N_2(x)\right)\right]dx}+\boxed{\int_{x_2}^{x_3} N_i\left[L\left(a_1N_1(x)+a_2N_2(x)\right)\right]dx}\quad k_{i2}$$

$$F_i \quad =\boxed{-\int_{x_1}^{x_2} N_i\left[L(A)\right]dx-\int_{x_2}^{x_3} N_i\left[L(A)\right]dx}$$

روابط کلی محاسبه ماتریس سختی

$i = 1 \Rightarrow k_{11}u_1 + k_{12}u_2 = F_1$

$i = 2 \Rightarrow k_{21}u_1 + k_{22}u_2 = F_2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

❑ شرایط مرزی و نحوه اعمال شرایط مرزی

مفهوم شرایط مرزی

روش حذفی برای اعمال شرایط مرزی

روش پنالتی برای اعمال شرایط مرزی

روش ضرایب لاگرانژ برای اعمال شرایط مرزی

مفهوم شرایط مرزی

تحلیل المان محدود

اعمال شرایط مرزی

روش حذفی

روش پنالتی

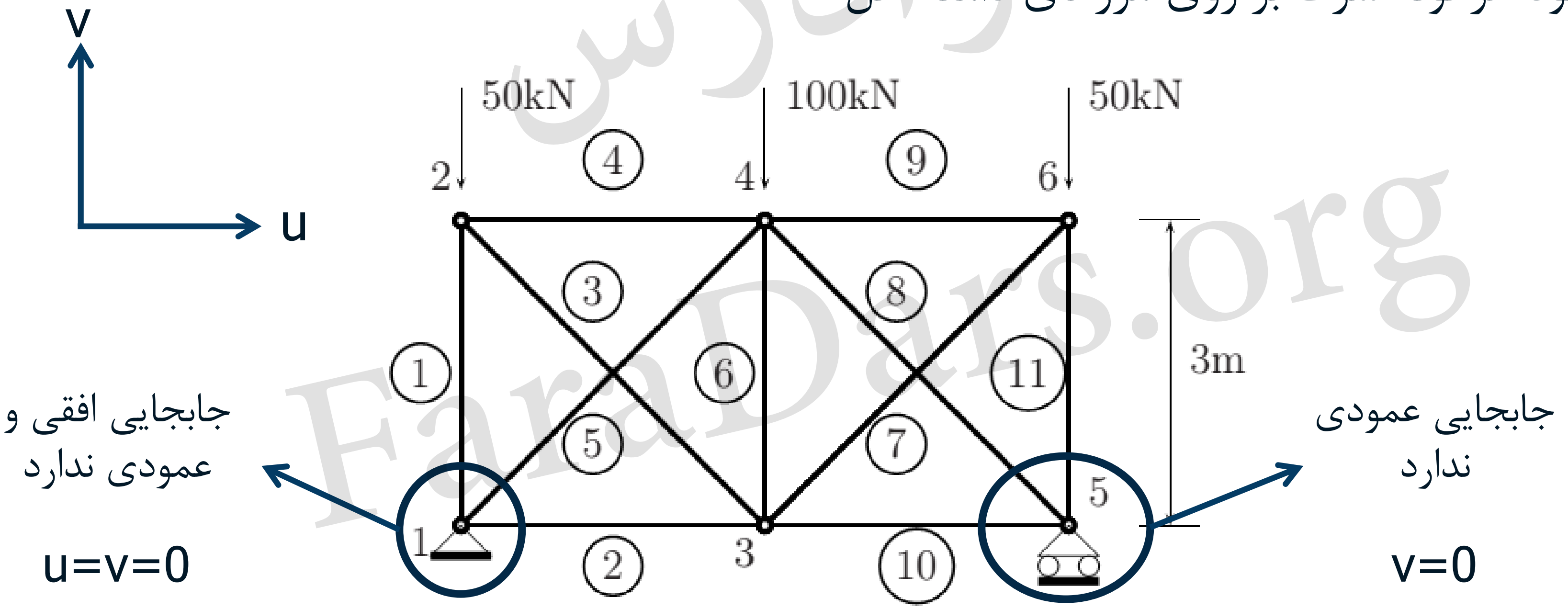
روش ضرایب لاگرانژ

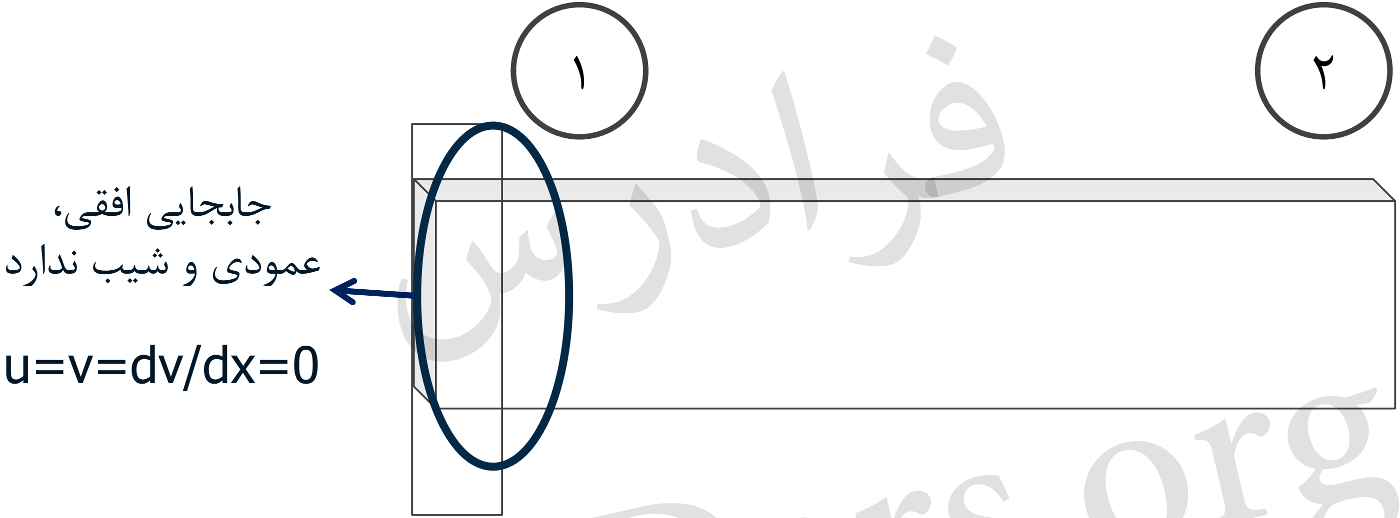
اعمال شرایط مرزی

مفهوم شرایط مرزی

شرایط مرزی چیست؟

- وجود هرگونه شرط بر روی مرزهای دامنه حل





۱
۲
جابجایی افقی،
عمودی و شیب ندارد
u=v=dv/dx=0

انواع شرایط مرزی

$$\frac{d^m\phi}{dx^m} + A = 0$$

- n=m/2
- شرط مرزی از درجه 0 تا n-1، ضروری
- شرط مرزی از درجه n تا m-1، طبیعی

شرط مرزی ضروری (هندسی)

شرط مرزی طبیعی (نیرویی)

انواع شرایط مرزی

مثال: خرپا

شرط مرزی طبیعی: مشتق درجه یک

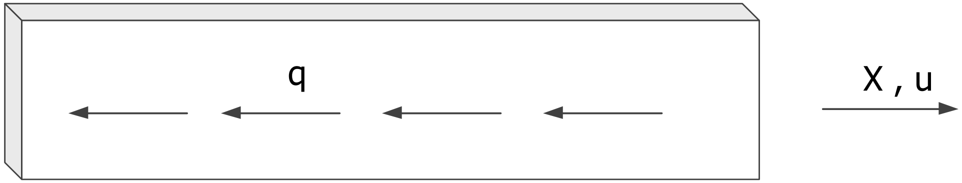
$$\frac{du}{dx} + B = 0 \quad on \quad nodes$$

شرط مرزی ضروری: مشتق درجه صفر

$$u + A = 0 \quad on \quad nodes$$

$$m = 2, n = 1$$

$$AE\frac{d^2u}{dx^2} - q = 0$$



اعمال شرایط مرزی ضروری به روش حذفی

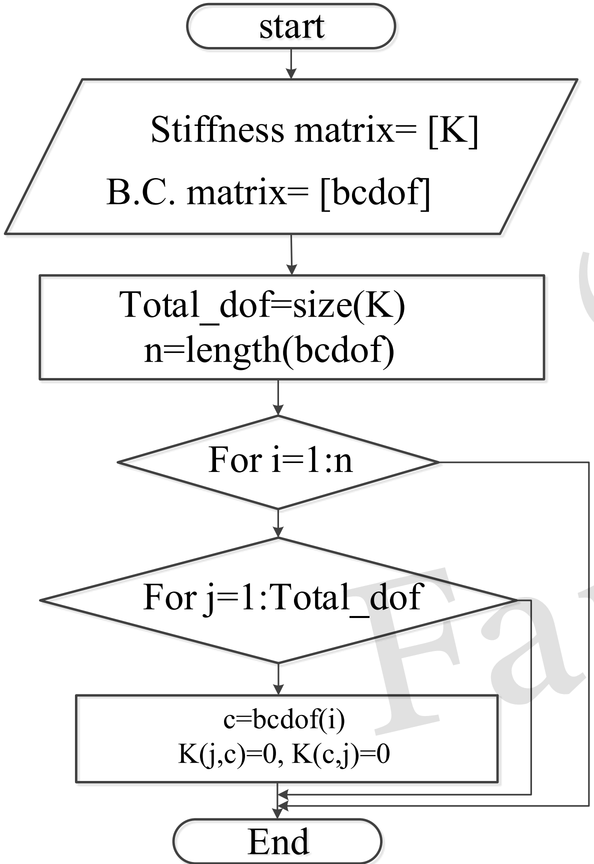
- صفر نمودن سطر و ستون درجه آزادی مربوطه در ماتریس سختی

$$[K]_{n\times n}=\begin{bmatrix} \boxed{k_{11}} & . & . & . & k_{1n} \\ k_{21} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ k_{n1} & & & & k_{nn} \end{bmatrix}$$

درجه آزادی ۱ مقید است

سطر و ستون ۱ ماتریس [k]، صفر

اعمال شرایط مرزی ضروری به روش حذفی



- الگوریتم برنامه نویسی متلب

$$K = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$bcdof = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اعمال شرایط مرزی ضروری به روش حذفی

- مثال:

ورودی

$$K = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

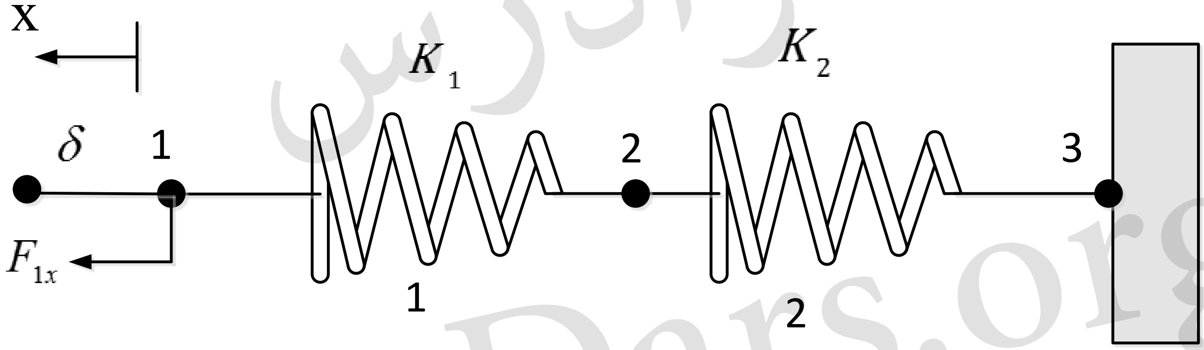
$$bcdof = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

خروجی

$$K = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

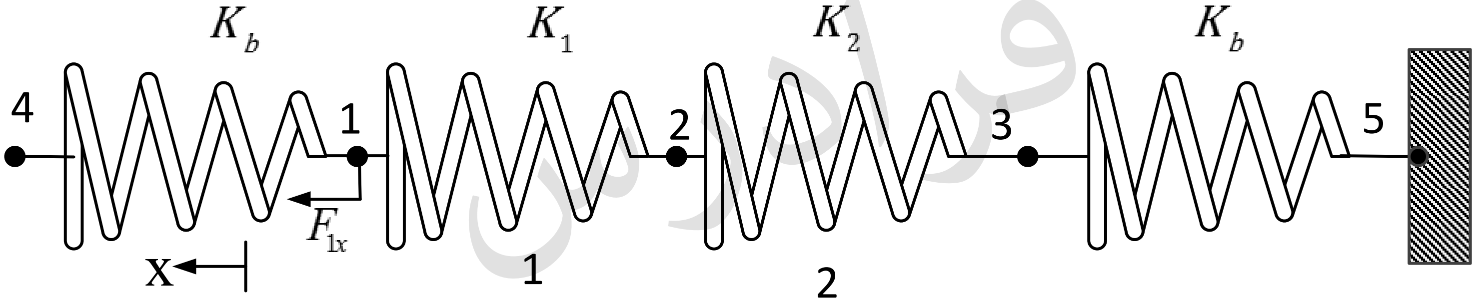
اعمال شرایط مرزی ضروری به روش پنالتی

فنری به مقدار سختی بسیار بزرگ برابر با $K_b = \max([K_{ii}]_G)\times 10^6$ را به آن گره اتصال سری می‌دهیم.



$$[K]_G = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \qquad \{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

اعمال شرایط مرزی ضروری به روش پنالتی



$$
[K]_G = \begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}
\begin{bmatrix}
K_b & -K_b & 0 & 0 & 0 \\
-K_b & K_1 + K_b & -K_1 & 0 & 0 \\
0 & -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\
0 & 0 & -K_2 & K_2 + K_b & -K_b \\
0 & 0 & 0 & -K_b & K_b
\end{bmatrix}
$$

$$
\{F\} = \begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}
\begin{Bmatrix}
F_4 \\
F_1 + K_b \delta \\
F_2 \\
(F_3 = 0) + K_b \times 0 \\
F_5
\end{Bmatrix}
$$

اعمال شرایط مرزی ضروری به روش پنالتی

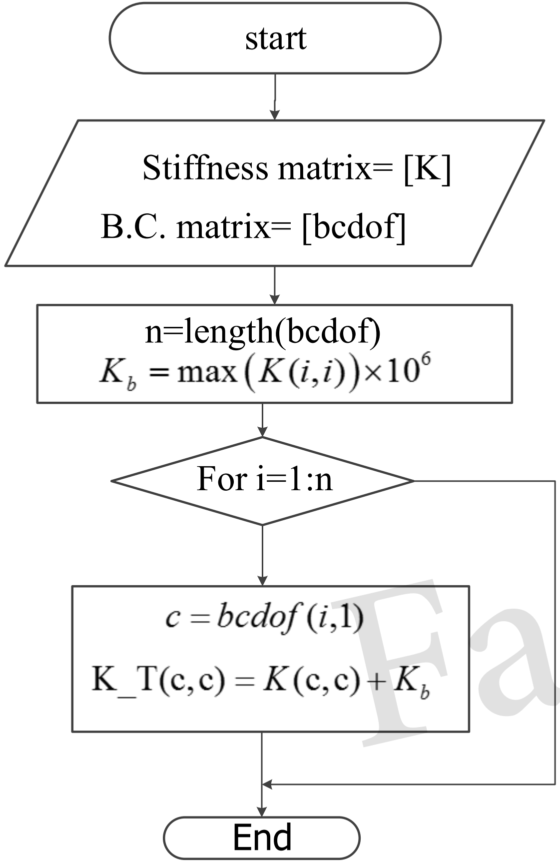
$$[K]_G = \begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}\begin{bmatrix} K_b & -K_b & 0 & 0 & 0 \\ -K_b & K_1+K_b & -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & 0 & -K_2 & K_2+K_b & -K_b \\ 0 & 0 & 0 & -K_b & K_b \end{bmatrix}$$

$$[K]_G = \begin{bmatrix} K_1+K_b & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2+K_b \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}\begin{Bmatrix} \boxed{F_4} \\ F_1+K_b\delta \\ F_2 \\ (F_3=0)+K_b\times 0 \\ \boxed{F_5} \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{bmatrix} F_{1x}+K_b\delta_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اعمال شرایط مرزی ضروری به روش پنالتی



- الگوریتم برنامه نویسی متلب

$$K = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$bcdof = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

روش ضرایب لاگرانژ برای اعمال شرایط مرزی

$$[\mathbf{C}]\{\mathbf{D}\} - \{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$\pi = U - W \quad \Rightarrow \quad \tilde{\pi} = \pi + \lambda^T \left([c]\{d\} - \{Q\} \right)$$

$$\lambda^T = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \right)$$

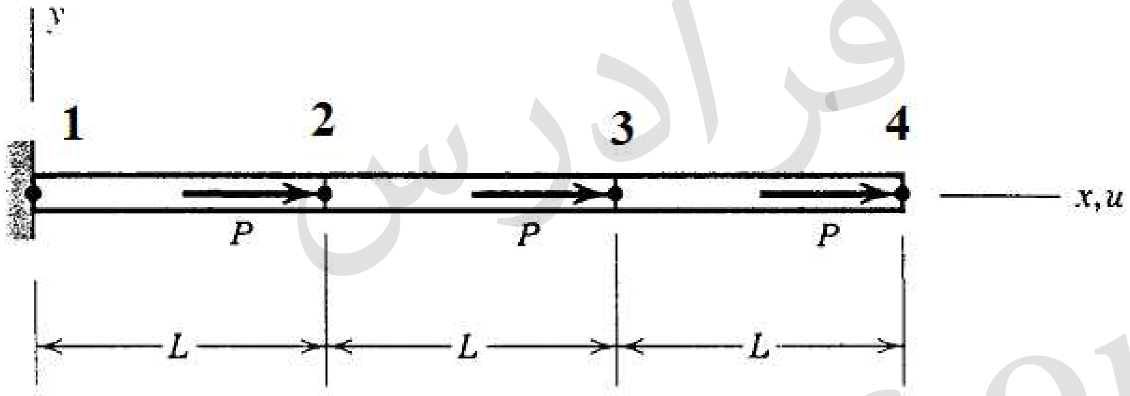
$$\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \{d\}} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial \{\lambda\}} = 0$$

$$\begin{bmatrix} [K] & [c]^T \\ [c] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix}$$

روش ضرایب لاگرانژ برای اعمال شرایط مرزی

مثال:



$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_3 &= u_4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_3 - u_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 4}}}_{[c]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}_{4\times 1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{2\times 1}$$

روش ضرایب لاگرانژ برای اعمال شرایط مرزی

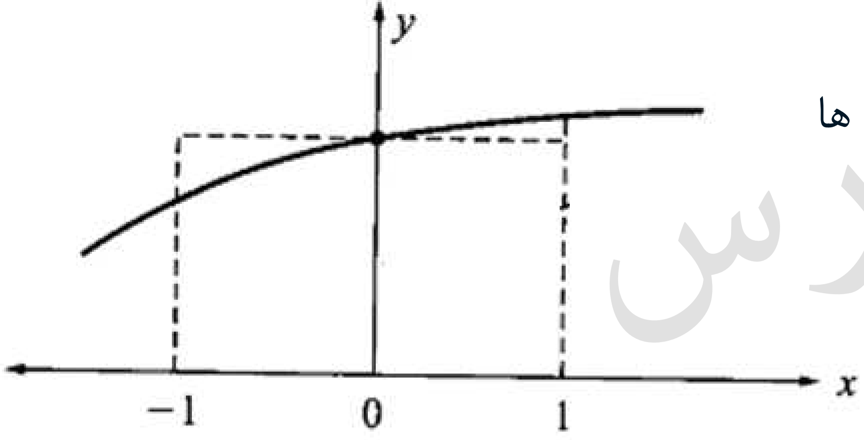
مثال:

$$K=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14}\\ & k_{22} & k_{23} & k_{24}\\ & & k_{33} & k_{34}\\ Sym. & & & k_{44}\end{bmatrix}\end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 1 & 0\\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0\\ & & k_{33} & k_{34} & 0 & 1\\ Sym & & & k_{44} & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\\lambda_1\\\lambda_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\\0\\0\end{Bmatrix}$$

توصیه: برای اعمال شرایط مرزی عادی از روش پنالتی و شرایط قیدی از ضرایب لاگرانژ

- انتگرال‌گیری عددی گوس

انتگرال‌گیری عددی گوس – ۱ بعدی



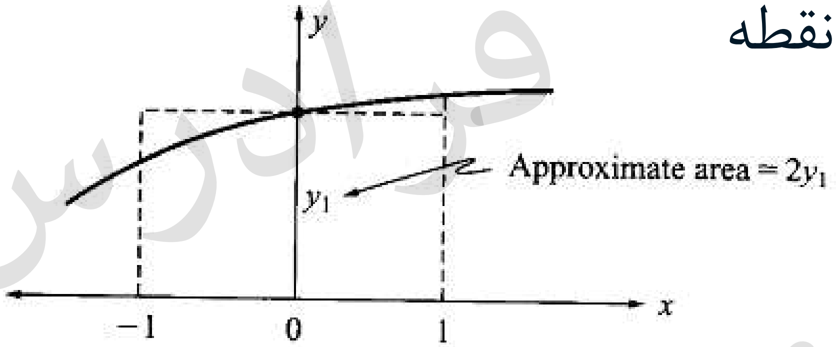
تقریب توسط مجموع حاصلضرب مقادیر تابع در وزن آن ها در نقاط مشخص

$$I = \int_{-1}^{1} y\,dx = \sum_{i=1}^{n} W_i y_i$$

انتگرال‌گیری عددی گوس – ۱ بعدی

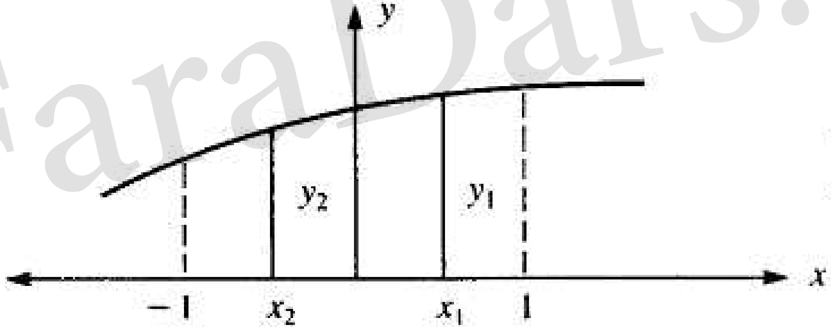
تقریب یک نقطه

$$I = \int_{-1}^{1} y(x)\, dx \cong 2y(0)$$



تقریب دو نقطه

$$I = \int_{-1}^{1} y\, dx = W_1 y_1 + W_2 y_2 = W_1 y(x_1) + W_2 y(x_2)$$



$x_1 = +0.5773\ldots$
$x_2 = -0.5773\ldots$

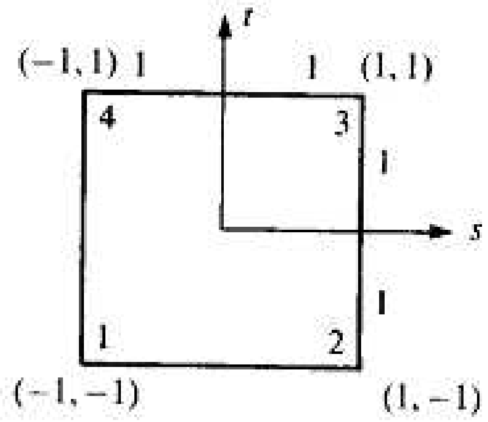
انتگرال‌گیری عددی گوس – ۱ بعدی

مختصات و وزن‌ها

$$I = \int_{-1}^{1} y\,dx = \sum_{i=1}^{n} W_i y_i$$

Number of Points	Locations, x_i	Associated Weights, W_i
1	$x_1 = 0.000\ldots$	2.000
2	$x_1, x_2 = \pm 0.57735026918962$	1.000
3	$x_1, x_3 = \pm 0.77459666924148$	$\frac{5}{9} = 0.555\ldots$
	$x_2 = 0.000\ldots$	$\frac{8}{9} = 0.888\ldots$
4	$x_1, x_4 = \pm 0.8611363116$	0.3478548451
	$x_2, x_3 = \pm 0.3399810436$	0.6521451549

انتگرال‌گیری عددی گوس – ۲ بعدی



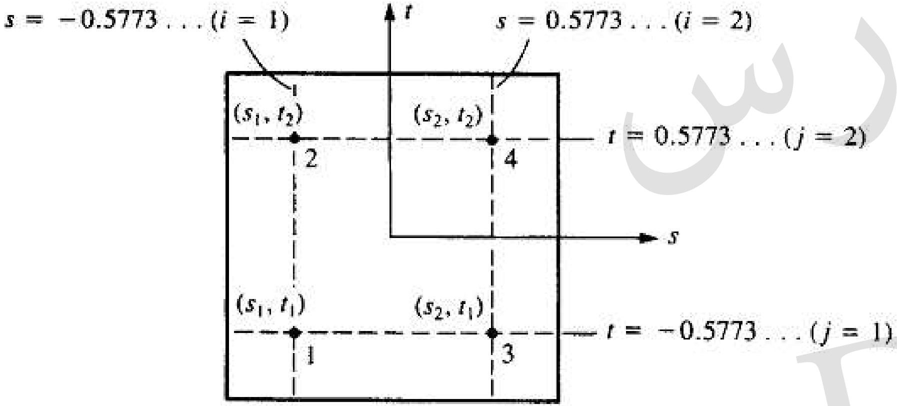
$$I = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \mathrm{f}(s,t)\,ds\,dt$$

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(s,t)\,ds\,dt = \int_{-1}^{1}\left[\sum_i W_i f(s_i,t)\right]dt$$

$$= \sum_j W_j\left[\sum_i W_i f(s_i,t_j)\right] = \sum_i\sum_j W_i W_j f(s_i,t_j)$$

انتگرال‌گیری عددی گوس – ۲ بعدی

تقریب استفاده از ۲ نقطه در هر جهت = مجموعا ۴ نقطه



$N_{Gauss\ Points}$	S, t	W_i
1	0.0	2.0
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1.0
3	±0.7745966692 0	0.5555555556 0.8888888889
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0.0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889

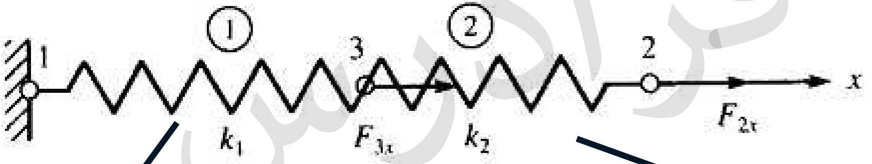
$$I = W_1 W_1 f(s_1, t_1) + W_1 W_2 f(s_1, t_2) + W_2 W_1 f(s_2, t_1) + W_2 W_2 f(s_2, t_2)$$

$$I = (1)(1) f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (1)(1) f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (1)(1) f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (1)(1) f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- ادغام ماتریس‌های سختی المان‌ها

ادغام ماتریس‌های سختی

ادغام دو المان فنر:



$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x}^{(1)} \\ d_{3x}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{3x}^{(2)} \\ d_{2x}^{(2)} \end{Bmatrix}$$

پیوستگی گره‌ها در المان

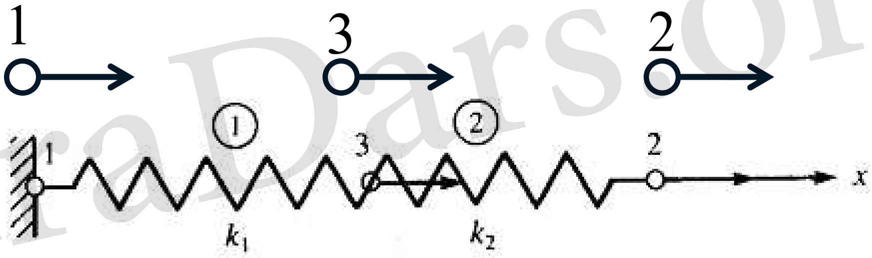
$$d_{3x}^{(1)} = d_{3x}^{(2)} = d_{3x}$$

ادغام ماتریس‌های سختی

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی کلی (Total stiffness matrix)

$$dof = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



ادغام ماتریس‌های سختی

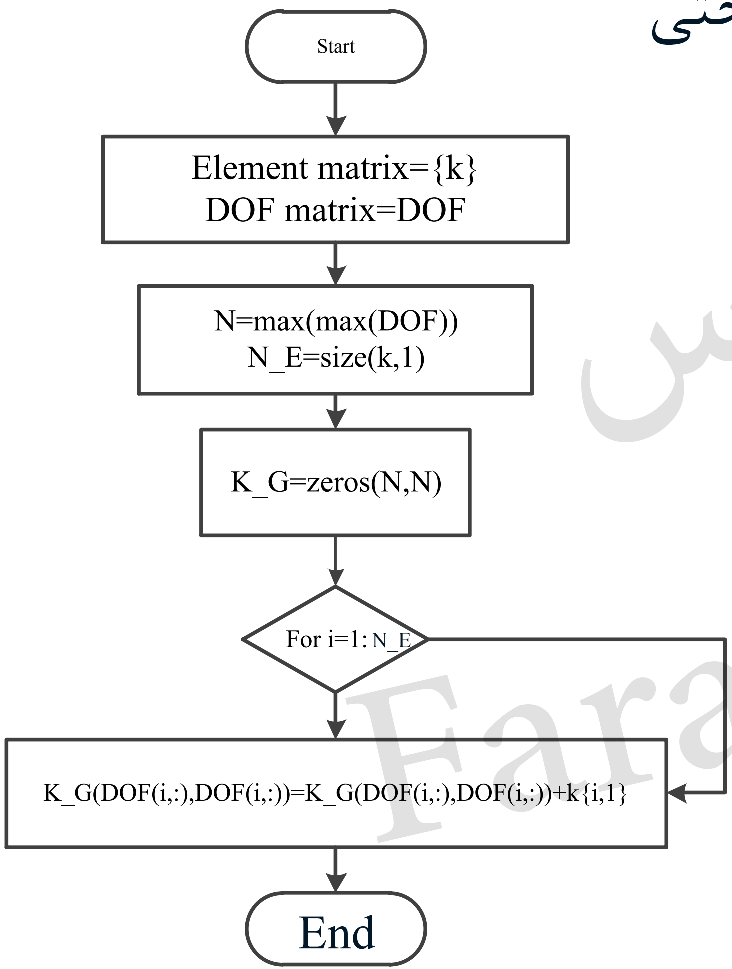
$$\begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{2x} \\ F_{1x} \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} d_{3x} \\ d_{2x} \\ d_{1x} \end{Bmatrix}$$

ترتیب درجات آزادی در ماتریس سختی، <u>مهم است</u>

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{2x} \\ d_{3x} \end{Bmatrix}$$

ادغام ماتریس‌های سختی

الگوریتم برنامه نویسی:



مقدمه ای بر روش المان محدود

تحلیل المان محدود خرپا

مدرس:

مجید خزایی

کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا

دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران)

فهرست مطالب

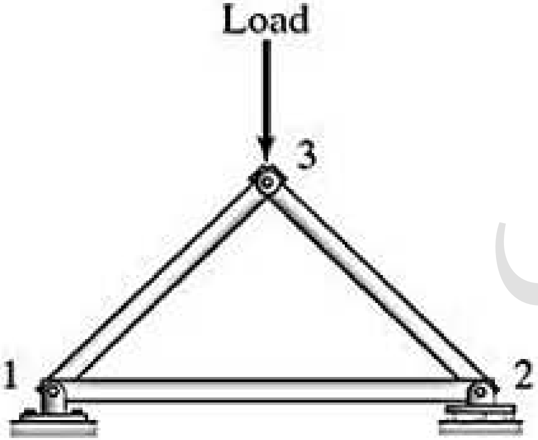
۱ توابع شکل المان خرپا

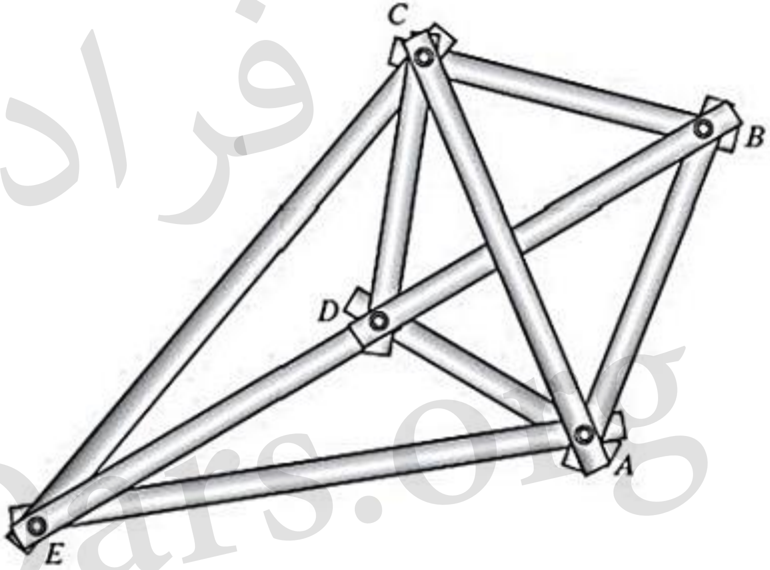
۲ ماتریس سختی در المان محلی

۳ ماتریس سختی در مختصات عمومی

۴ برنامه نویسی متلب

سازه خرپا





عضوهای خرپا تنها توانایی تحمل نیروی محوری دارند (گشتاور تحمل نمی‌نمایند)

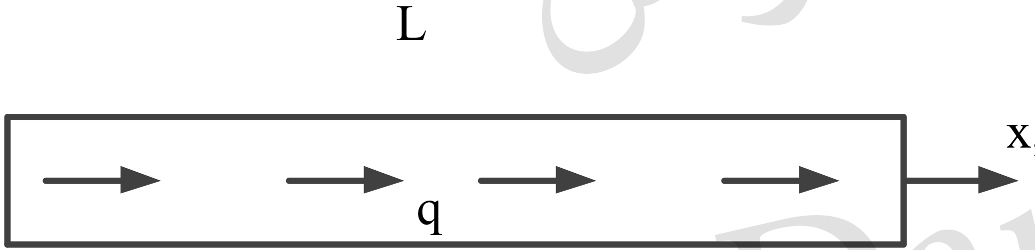
مراحل انجام تحلیل

تحلیل المان محدود

- استخراج معادله دیفرانسیل یا فانکشنال
- استخراج ماتریس سختی هر المان
- شبکه‌بندی دامنه حل
- ادغام ماتریس‌های سختی
- انتخاب تابع تغییر شکل (نوع المان)
- اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

استخراج معادله دیفرانسیل خرپا

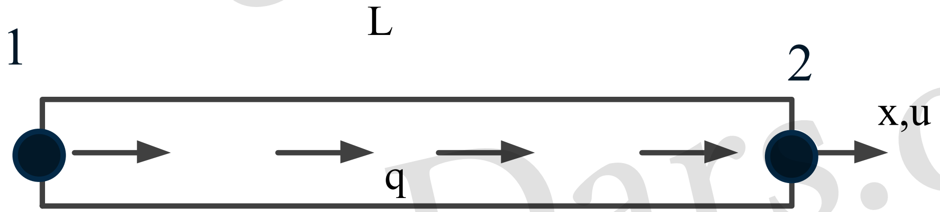
معادله دیفرانسیل



$$AE\frac{d^2u}{dx^2}+q=0$$

شبکه‌بندی دامنه حل

هر عضو خرپا به عنوان ۱ المان دارای ۲ گره در نظر گرفته می‌شود

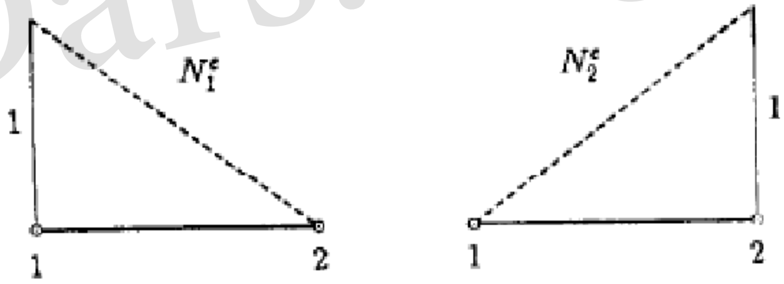


انتخاب تابع تغییر شکل (نوع المان)

- خرپا تنها نیروی محوری تحمل می‌کند – عضو بسیار ساده
- المان خطی مرتبه اول در نظر گرفته می‌شود

x_i $\qquad \xi = x - x_i \qquad 0 \le \xi \le L \qquad$ x_j

تابع تغییر شکل خطی در مختصات محلی:



$$N_i = \frac{L-\xi}{L} \qquad N_j = \frac{\xi}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u} = u_i N_i + u_j N_j$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

روش گالرکین

$$\int N_i \boxed{R_\Omega} d\Omega = 0$$

$$L(\tilde{u}) + A = R_\Omega \quad \Rightarrow \quad R_\Omega = AE\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} + q$$

المان خطی است

مرتبه مشتق معادله ۲ است

$$\int_0^L N_m\left(AE\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} + q\right)dx = 0$$

$$m = i, j$$

از شکل ضعیف باید استفاده شود (مشتق کمتر **U** در معادله)

استخراج ماتریس سختی هر المان

انتگرال جزء به جزء

$$\int_0^L \boxed{N_m \left(AE \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2}\right.} \left. + q \right) dx = 0$$

$$m = i, j$$

$$N_m AE \frac{d\tilde{u}}{dx}\Bigg|_0^L - \int_0^L \left(\frac{dN_m}{dx} AE \frac{d\tilde{u}}{dx} + qN_m \right) dx = 0$$

$$m = i, j$$

تغییر به مختصات محلی:

- در غیر اینصورت باید برای هر المان انتگرال گیری انجام شود

$$\xi = x - x_i \qquad \frac{d}{d\xi} = \frac{d}{dx}$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

$$N_m AE \frac{d\tilde{u}}{dx}\bigg|_0^L - \int_0^L \left(\frac{dN_m}{dx} AE \frac{d\tilde{u}}{dx} + qN_m \right) dx = 0 \qquad \frac{d}{d\xi} = \frac{d}{dx}$$

$$m = i, j$$

$$\int_0^L \frac{dN_m}{d\xi}\left(AE \frac{d\tilde{u}}{d\xi} \right) d\xi = N_m AE \frac{d\tilde{u}}{d\xi}\bigg|_0^L - \int_0^L (qN_m) d\xi \qquad \tilde{u} = u_i N_i + u_j N_j$$

$$m = i, j$$

$$\int_0^L \frac{dN_m}{d\xi}\left(AE \frac{d\left(u_i N_i + u_j N_j\right)}{d\xi} \right) d\xi = N_m AE \frac{d\left(u_i N_i + u_j N_j\right)}{d\xi}\bigg|_0^L - \int_0^L (qN_m) d\xi$$

$$m = i, j$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

$$AE\int_0^L \frac{dN_m}{d\xi}\left(u_i\frac{dN_i}{d\xi}+u_j\frac{dN_j}{d\xi}\right)d\xi = N_m AE\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\Bigg|_0^L - \int_0^L (qN_m)d\xi \qquad m=i,j$$

$$AE\int_0^L \frac{dN_m}{d\xi}\left(u_i\frac{dN_i}{d\xi}\right)d\xi + AE\int_0^L \frac{dN_m}{d\xi}\left(u_j\frac{dN_j}{d\xi}\right)d\xi =$$

$$N_m AE\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\Bigg|_0^L - \int_0^L (qN_m)d\xi \qquad m=i,j$$

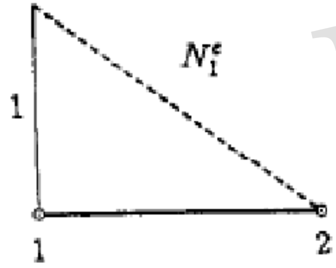
استخراج ماتریس سختی هر المان

$m=i$

$$\left[AE\int_0^L\left(\frac{dN_i}{d\xi}\frac{dN_i}{d\xi}\right)d\xi\right]u_i+\left[AE\int_0^L\left(\frac{dN_i}{d\xi}\frac{dN_j}{d\xi}\right)d\xi\right]u_j=$$

$$N_i\,AE\,\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\bigg|_{x=L}-N_i\,AE\,\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\bigg|_{x=0}-\int_0^L(qN_i)d\xi$$

$$N_i\big|_{x=L}=0$$



استخراج ماتریس سختی هر المان

$$\boxed{\left[AE\int_0^L\left(\frac{dN_i}{d\xi}\frac{dN_i}{d\xi}\right)d\xi\right]}u_i+\boxed{\left[AE\int_0^L\left(\frac{dN_i}{d\xi}\frac{dN_j}{d\xi}\right)d\xi\right]}u_j=\boxed{-N_i AE\left.\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\right|_{x=0}-\int_0^L (qN_i)d\xi}$$

K_{ii} K_{ij} F_i

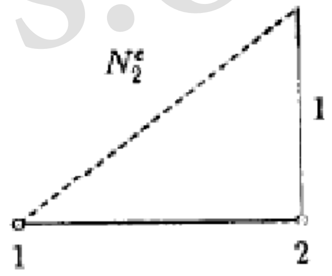
$$K_{ii}u_i+K_{ij}u_j=F_i$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

$$m = j \qquad \left[AE\int_0^L\left(\frac{dN_j}{d\xi}\frac{dN_i}{d\xi}\right)d\xi\right]u_i + \left[AE\int_0^L\left(\frac{dN_j}{d\xi}\frac{dN_j}{d\xi}\right)d\xi\right]u_j =$$

$$N_j\, AE\left.\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\right|_{x=L} - N_j\, AE\left.\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\right|_{x=0} - \int_0^L\left(qN_j\right)d\xi$$

$$\left.N_j\right|_{x=L} = 0$$



استخراج ماتریس سختی هر المان

$$\underbrace{\boxed{\left[AE\int_0^L\left(\frac{dN_j}{d\xi}\frac{dN_i}{d\xi}\right)d\xi\right]}}_{K_{ji}}u_i+\underbrace{\boxed{\left[AE\int_0^L\left(\frac{dN_j}{d\xi}\frac{dN_j}{d\xi}\right)d\xi\right]}}_{K_{jj}}u_j=\underbrace{\boxed{N_j\,AE\left.\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\right|_{x=L}-\int_0^L\left(qN_j\right)d\xi}}_{F_j}$$

$$K_{ji}u_i+K_{jj}u_j=F_j$$

$$K_{ii}u_i+K_{ij}u_j=F_i$$

$$K_{ji}u_i+K_{jj}u_j=F_j$$

$$\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}K_{ii} & K_{ij}\\ K_{ji} & K_{jj}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ u_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_i\\ F_j\end{Bmatrix}$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

$$K_{mn} = AE\int_0^L \left(\frac{dN_m}{d\xi}\frac{dN_n}{d\xi}\right)d\xi$$

$$N_i = \frac{L-\xi}{L}$$

$$N_j = \frac{\xi}{L}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dN_i}{d\xi} = \frac{-1}{L}$$

$$\frac{dN_j}{d\xi} = \frac{1}{L}$$

$$\Rightarrow$$

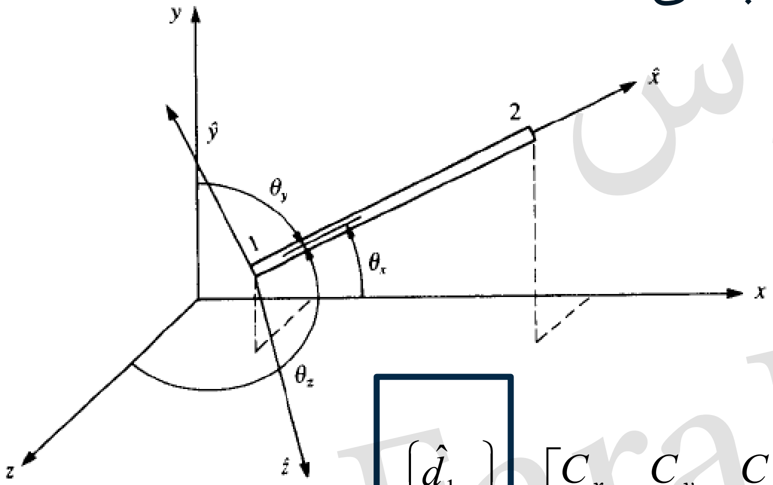
$$K_{ii} = AE/L \qquad K_{ij} = -AE/L$$

$$K_{ji} = -AE/L \qquad K_{jj} = AE/L$$

$$[K] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

تبدیل مختصات محلی به مختصات عمومی: سه بعدی



$$\hat{i}\cdot i = \frac{x_2 - x_1}{L} = C_x$$

$$\hat{i}\cdot j = \frac{y_2 - y_1}{L} = C_y$$

$$\hat{i}\cdot k = \frac{z_2 - z_1}{L} = C_z$$

مختصات عمومی

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix}} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \boxed{\begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \end{Bmatrix}}$$

مختصات محلی

استخراج ماتریس سختی هر المان

تبدیل مختصات محلی به مختصات عمومی: سه بعدی

$$\underline{T}^{*}=\begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix}$$

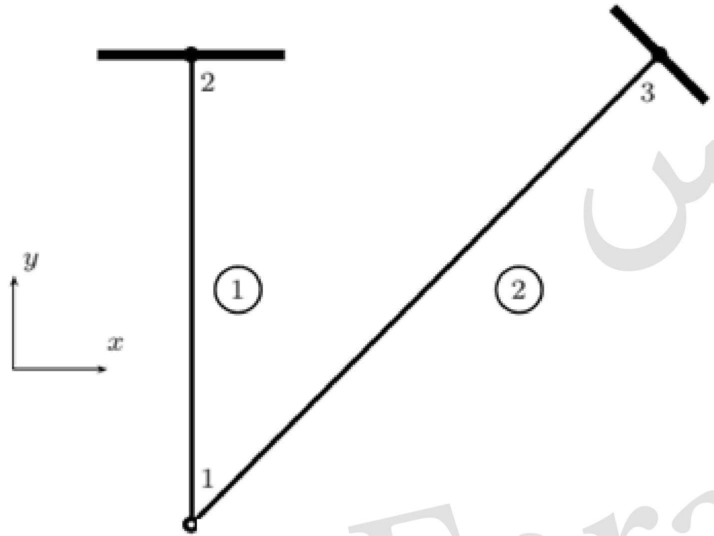
$$\boxed{\underline{k}}=\left(\underline{T}^{*}\right)^{T}\boxed{\underline{\hat{k}}}\,\underline{T}^{*}$$

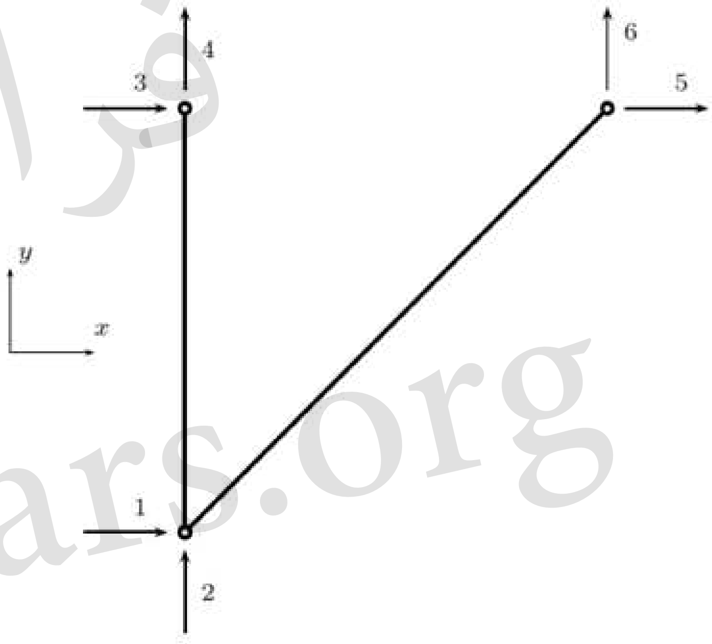
ماتریس سختی در مختصات محلی

ماتریس سختی در مختصات عمومی

$$\underline{k}=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} C_xC_x & C_xC_y & C_xC_z & -C_xC_x & -C_xC_y & -C_xC_z \\ & C_yC_y & C_yC_z & -C_xC_y & -C_yC_y & -C_yC_z \\ & & C_zC_z & -C_xC_z & -C_yC_z & -C_zC_z \\ & & & C_xC_x & C_xC_y & C_xC_z \\ & & & & C_yC_y & C_yC_z \\ Symmetry & & & & & C_zC_z \end{bmatrix}$$

ادغام ماتریس‌های سختی

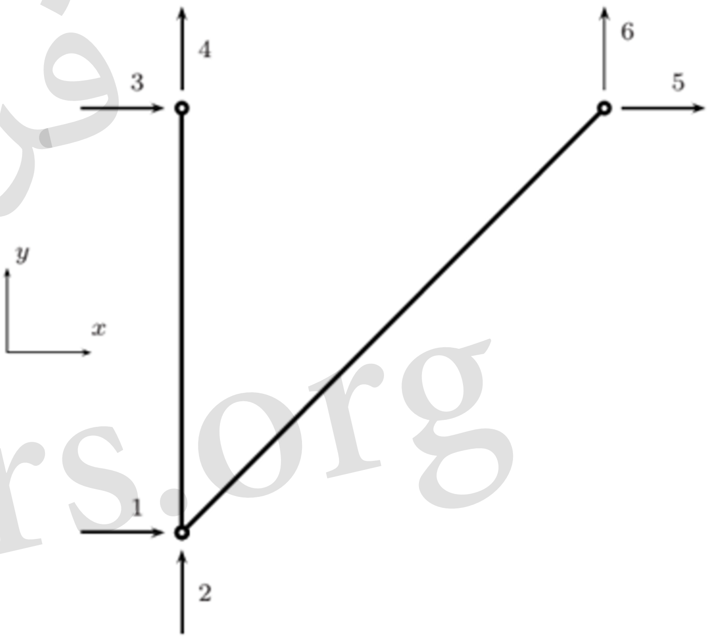




ادغام ماتریس‌های سختی

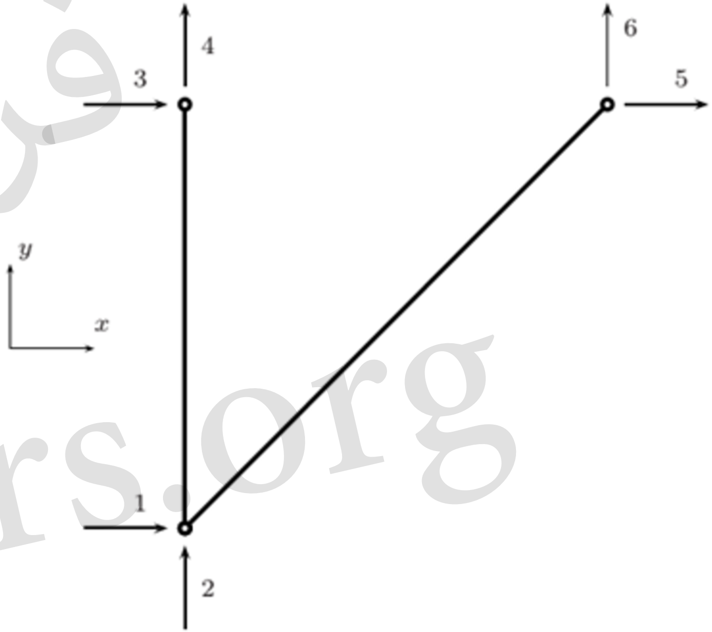
$$
K^{(1)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ Sym. & & & k_{44} \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
K^{(2)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{15} & k'_{16} \\ & k'_{22} & k'_{25} & k'_{26} \\ & & k'_{55} & k'_{56} \\ Sym. & & & k'_{66} \end{bmatrix} \end{array}
$$



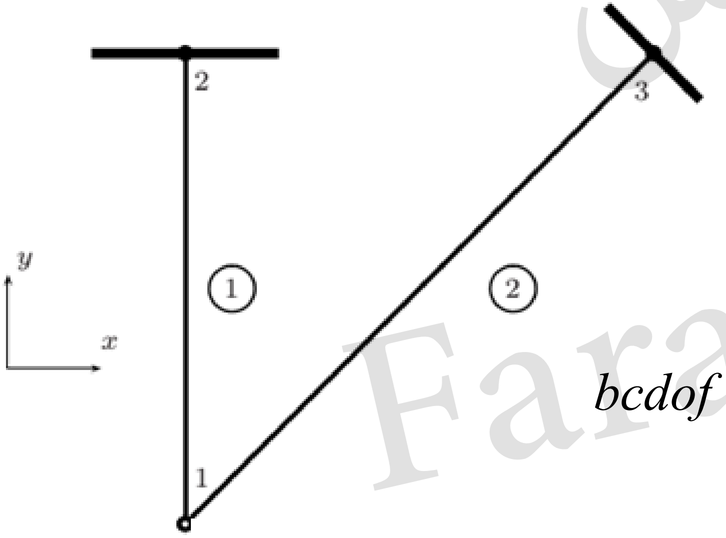
ادغام ماتریس‌های سختی

$$K = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{11}+k'_{11} & k_{12}+k'_{12} & k_{13} & k_{14} & k'_{15} & k'_{16} \\ & k_{22}+k'_{22} & k_{23} & k_{24} & k'_{25} & k'_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & 0 & 0 \\ & & & k_{44} & 0 & 0 \\ & & & & k'_{55} & k'_{56} \\ Sym. & & & & & k'_{66} \end{bmatrix} \end{array}$$

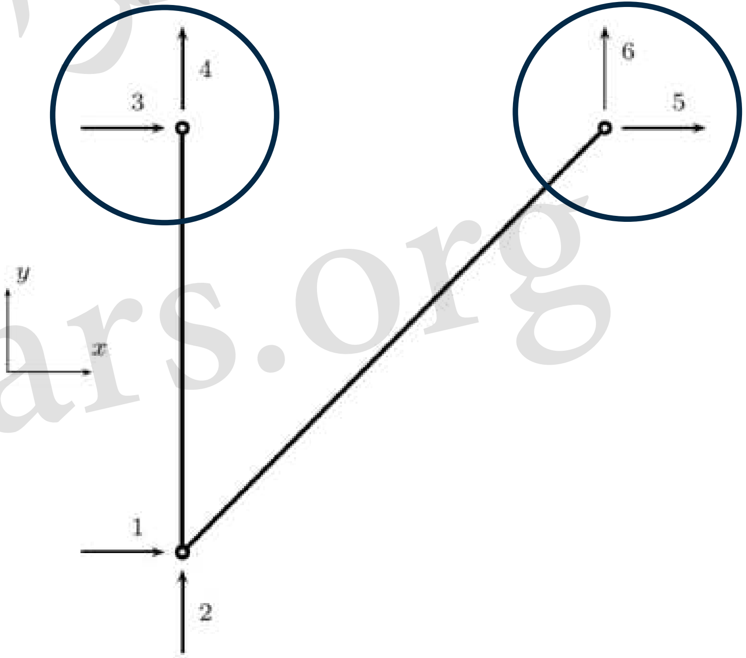


اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

شرط مرزی: (به روش پنالتی)



$$bcdof = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

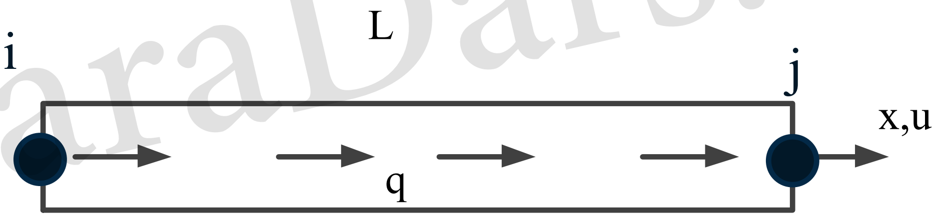


اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

اعمال نیروها:

$$F_i = -N_i AE \frac{d\tilde{u}}{d\xi}\bigg|_{x=0} - \int_0^L (qN_i) d\xi \Rightarrow F_i = -AE \frac{d\tilde{u}}{d\xi}\bigg|_{x=0} - \int_0^L (qN_i) d\xi$$

$$\Rightarrow F_i = -AE\,\varepsilon\big|_{x=0} - \int_0^L \left(q\left(\frac{L-\xi}{L}\right)\right) d\xi \Rightarrow F_i = -P - \frac{qL}{2}$$



اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

اعمال نیروها:

$$F_j = N_j AE \left.\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\right|_{x=L} - \int_0^L (qN_j)\,d\xi \Rightarrow F_j = AE \left.\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\right|_{x=L} - \int_0^L (qN_j)\,d\xi$$

$$\Rightarrow F_j = AE \left.\frac{d\tilde{u}}{d\xi}\right|_{x=L} - \int_0^L \left(q\left(\frac{\xi}{L}\right)\right)d\xi \Rightarrow F_j = P - \frac{qL}{2}$$

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

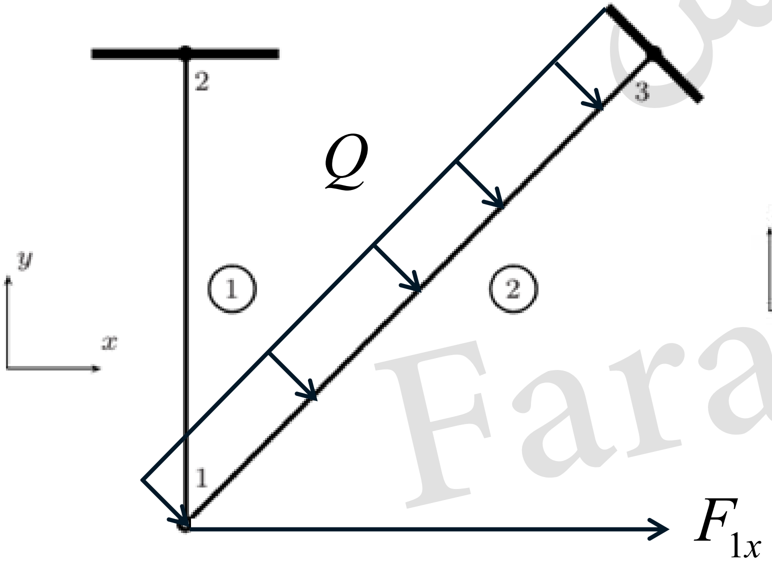
اعمال نیروها:

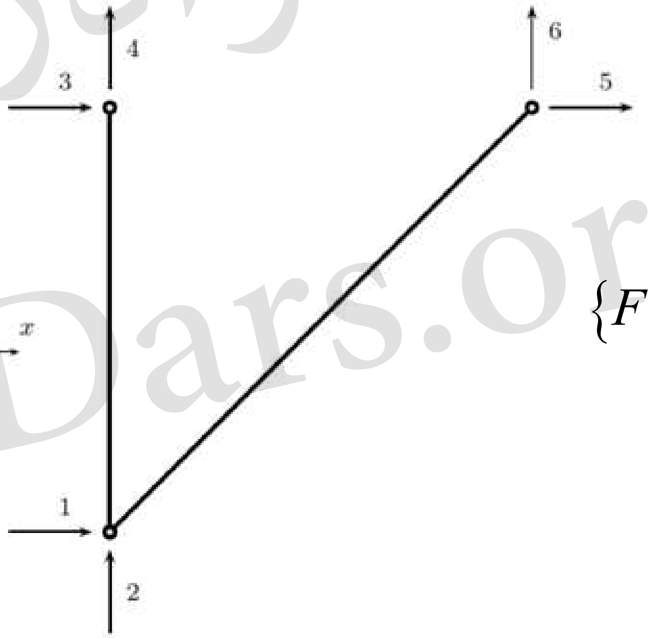
نیروهای داخلی گره ها حذف می شوند – تنها نیروهای خارجی وجود دارند

نیروی گسترده معادل:

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

اعمال نیروها:



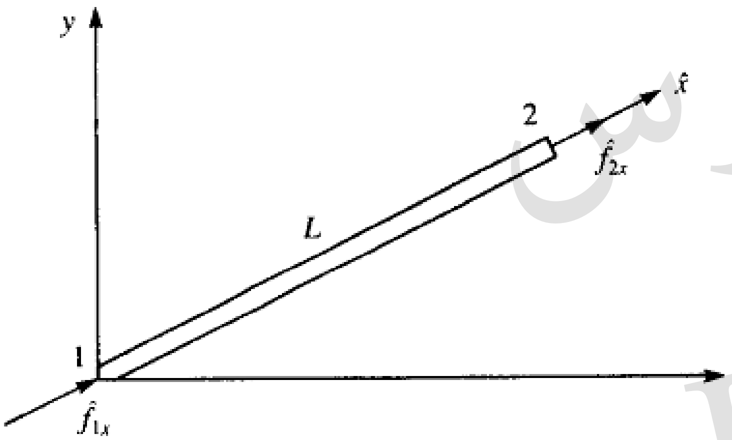


$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} + Q_{1x} \\ Q_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x} + Q_{3x} \\ R_{3y} + Q_{3y} \end{Bmatrix}$$

محاسبه تنش در هر عضو خرپا

ارتباط نیرو و درجه آزادی یک عضو خرپا

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix}$$



تنش: نیروی محوری تقسیم بر سطح مقطع

$$\sigma = \frac{\hat{f}_{2x}}{A}$$

محاسبه تنش در هر عضو خرپا

$$\sigma = \frac{\hat{f}_{2x}}{A}$$

$$\hat{f}_{2x} = \frac{AE}{L}[-1 \quad 1]\begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma} = \frac{E}{L}[-1 \quad 1]\underline{\hat{d}}$$

درجه آزادی محلی

ارتباط درجه آزادی محلی با درجه آزادی عمومی

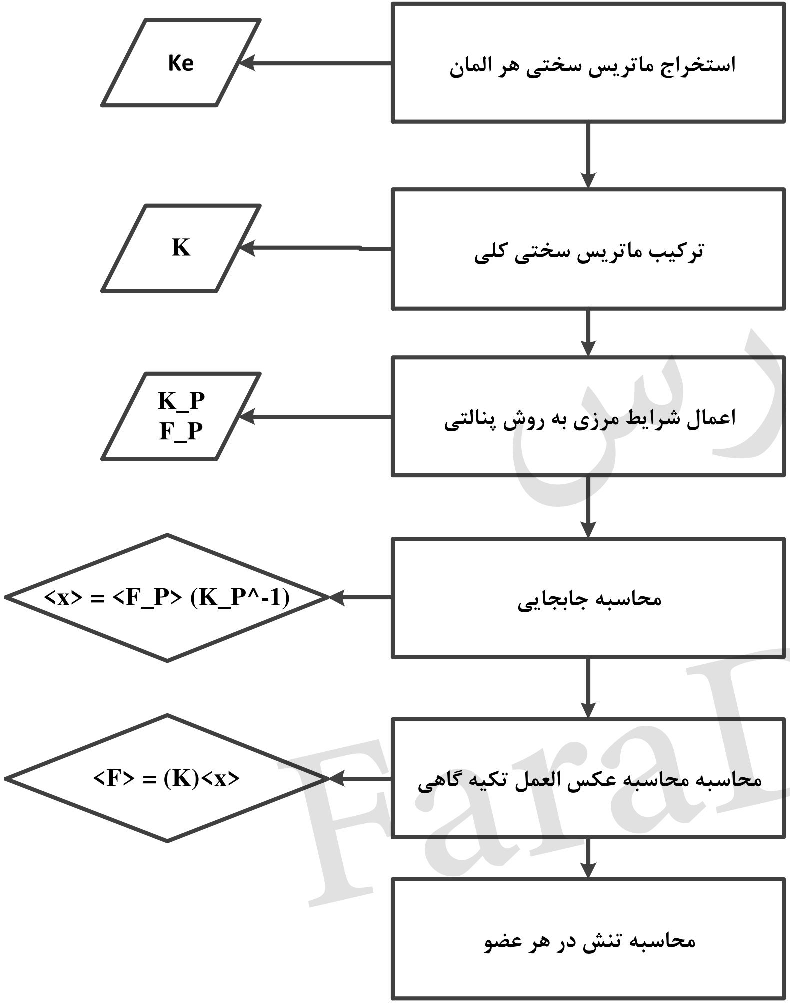
$$\underline{\hat{d}} = \underline{T}^* \underline{d}$$

$$\underline{T}^* = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}$$

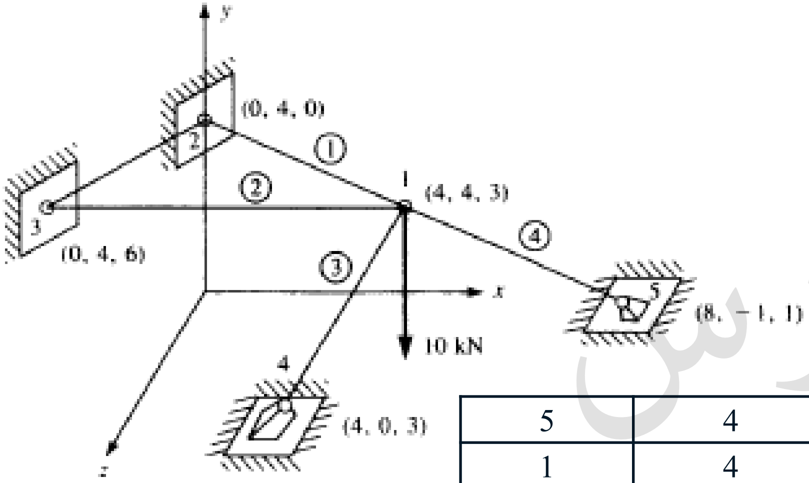
$$\Rightarrow \underline{\sigma} = \frac{E}{L}[-1 \quad 1]\underline{T}^* \underline{d} \Rightarrow \underline{\sigma} = \underline{C}' \underline{d}$$

$$\boxed{\underline{C}' = \frac{E}{L}[-C \quad -S \quad C \quad S]}$$

الگوریتم حل

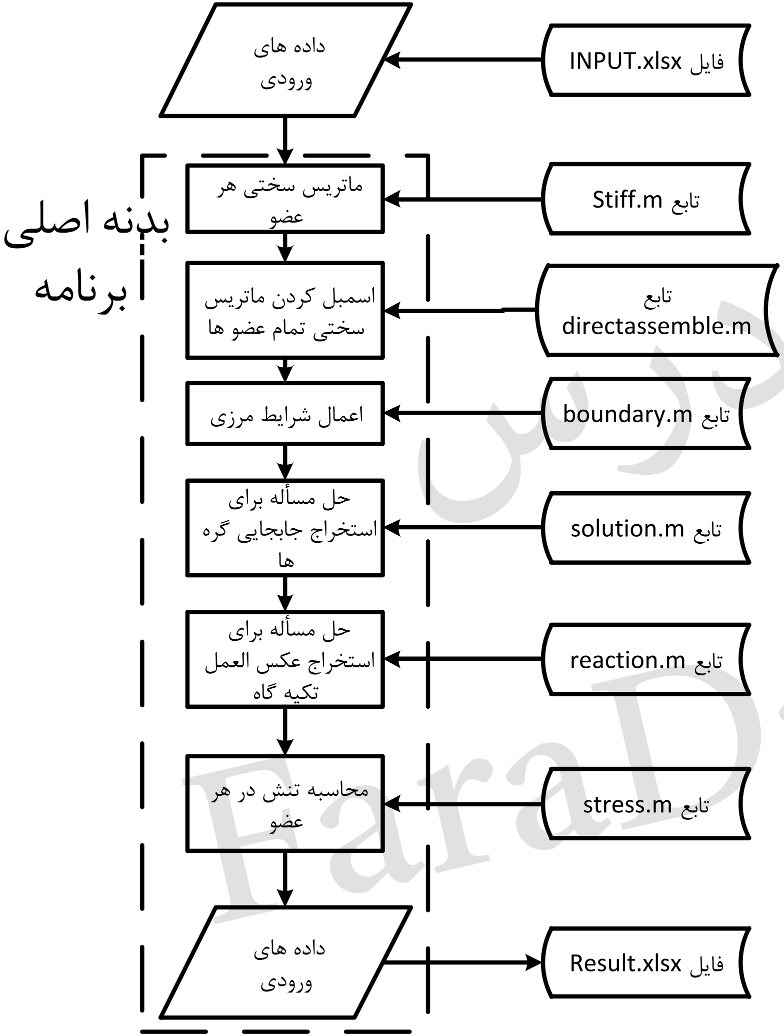

استخراج ماتریس سختی هر المان
Ke
ترکیب ماتریس سختی کلی
K
اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی
K_P
F_P
محاسبه جابجایی
<x> = <F_P> (K_P^-1)
محاسبه محاسبه عکس العمل تکیه گاهی
<F> = (K)<x>
محاسبه تنش در هر عضو

مثال ۱:



5	4	1	1						
1	4	4	3	0	0	0	0	-10000	0
2	0	4	0	1	1	1	0	0	0
3	0	4	6	1	1	1	0	0	0
4	4	0	3	1	1	1	0	0	0
5	8	-1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	2	1	1					
2	1	3	1	1					
3	1	4	1	1					
4	1	5	1	1					
1	1.00E-03								
1	2.10E+11								

ساختار برنامه:



المان ماتریس جرم خرپا

انرژی جنبشی

$$K.E. = \int \frac{1}{2} \dot{\Psi}^T \dot{\Psi} \, dm$$

میدان جابجایی

$$[\Psi] = [N]\{d\}$$

$$K.E. = \int \frac{1}{2} \left([N]\{\dot{d}\}\right)^T \left([N]\{\dot{d}\}\right) dm \Rightarrow K.E. = \int \frac{1}{2} \left(\{\dot{d}\}^T [N]^T\right)\left([N]\{\dot{d}\}\right)(\rho A \, dx)$$

$$K.E. = \frac{1}{2}\{\dot{d}\}^T \left(\int [N]^T [N] \rho A \, dx \right) \{\dot{d}\}$$

$$K.E. = \frac{1}{2}\{\dot{d}\}^T [M] \{\dot{d}\} \Rightarrow [M] = \int [N]^T [N] \rho A \, dx \Rightarrow [M] = \int \rho A \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 \end{bmatrix} dx$$

المان ماتریس جرم خرپا

در مختصات محلی:

$$N_1 = \frac{L-\xi}{L}\,,\; N_2 = \frac{\xi}{L}$$

$$[M] = \int_{\xi=0}^{\xi=L} \rho A \begin{bmatrix} \left(\frac{L-\xi}{L}\right)^2 & \left(\frac{L-\xi}{L}\right)\left(\frac{\xi}{L}\right) \\ \left(\frac{L-\xi}{L}\right)\left(\frac{\xi}{L}\right) & \left(\frac{\xi}{L}\right)^2 \end{bmatrix} d\xi$$

$$[M] = \frac{\rho A}{L^2} \int_{\xi=0}^{\xi=L} \begin{bmatrix} (L-\xi)^2 & \left(L\xi-\xi^2\right) \\ \left(L\xi-\xi^2\right) & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi \;\Rightarrow\; [M] = \frac{\rho A L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

المان ماتریس جرم خرپا

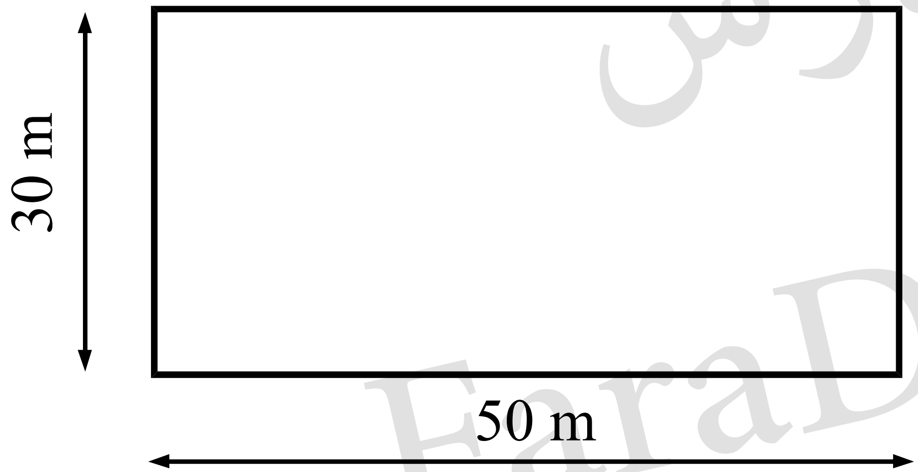
در مختصات عمومی:

$$[M]_{Global} = [T^*]^T [M]_{Local} [T^*]$$

$$\underline{T}^* = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}$$

مسئله طراحی سازه خرپا

ساخت سقف سوله توسط سازه خرپا



داده های ورودی طراحی

چگالی عضوها $\rho = 7800\, kg/m^3$

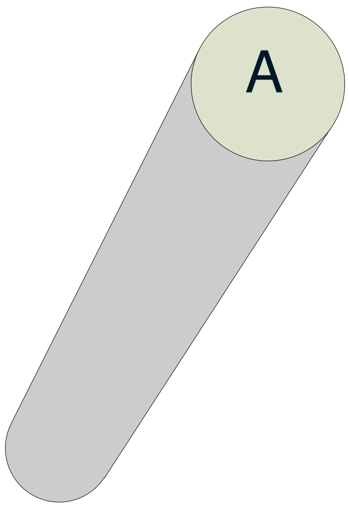
چگالی سقف $\rho = 7000\, kg/m^3$

تنش مجاز $\sigma = 1400\, MPa$

ضریب اطمینان $n = 2$

ضخامت ورق سقف $t = 0.05\, m$

مسئله طراحی سازه خرپا



پارامترهای مورد نظر:

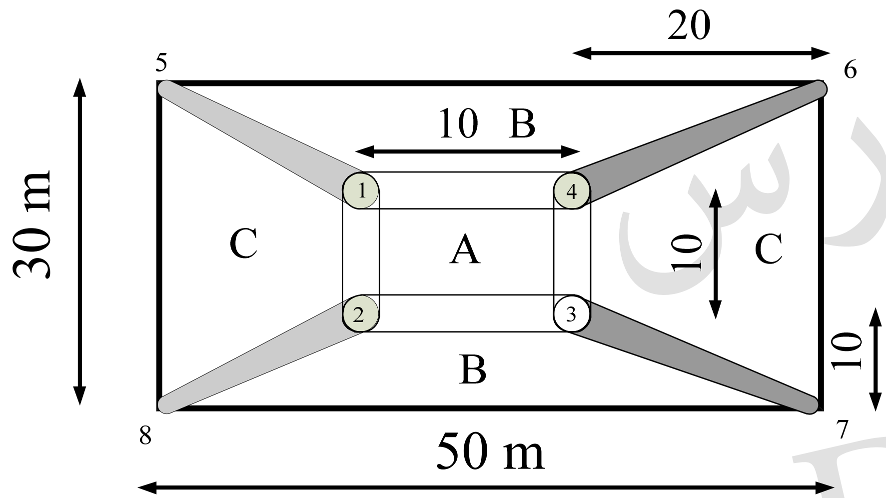
مساحت سطح مقطع عضوها

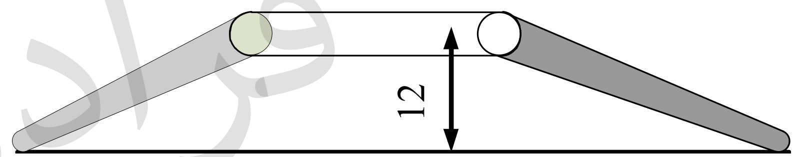
$$\sigma = 1400\,MPa$$

$$n = 2$$

Allowable Stress $\sigma_{allowable} = 700\,MPa = 7.0\times10^{8}\,Pa$

مسئله طراحی سازه خرپا





$1:(x,y,z)=(20,20,12)$

$2:(x,y,z)=(20,10,12)$

$3:(x,y,z)=(30,10,12)$

$4:(x,y,z)=(30,20,12)$

$5:(x,y,z)=(0,30,0)$

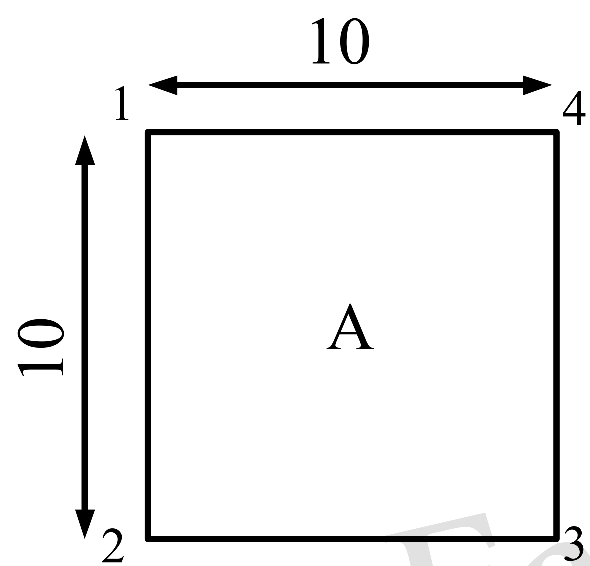
$6:(x,y,z)=(50,30,0)$

$7:(x,y,z)=(50,0,0)$

$8:(x,y,z)=(0,0,0)$

مسئله طراحی سازه خرپا

نیروهای ناشی از سقف بر گره‌ها

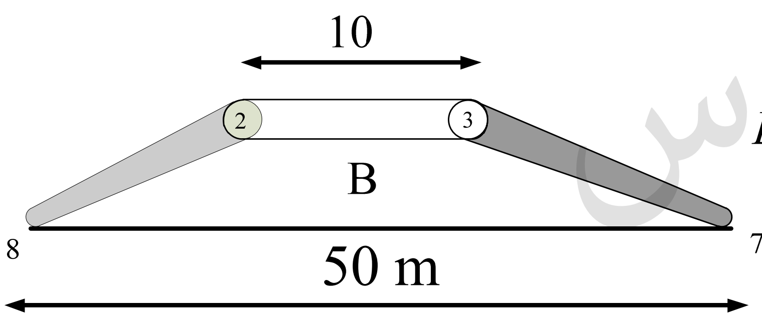


$$A = 100\,m^2$$
$$t = 0.05\,m$$
$$\Rightarrow V = 5\,m^3$$
$$\rho = 7000\,kg/m^3$$
$$\Rightarrow m_A = 35000\,kg$$

$$f_{1A} = f_{2A} = f_{3A} = f_{4A} = \left(\frac{35000}{4}kg\right) \times 9.81 = 85837.5\,N$$

مسئله طراحی سازه خرپا

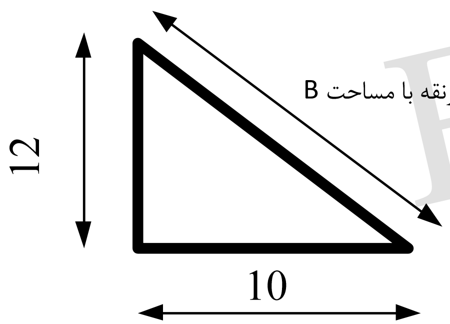
نیروهای ناشی از سقف بر گره‌ها



$$B = \left(\frac{50+10}{2}\right)(15.62) = 468.6 m^2$$

$$t = 0.05 m$$

$$\Rightarrow V = 23.43 m^3 \qquad \rho = 7000 kg/m^3$$



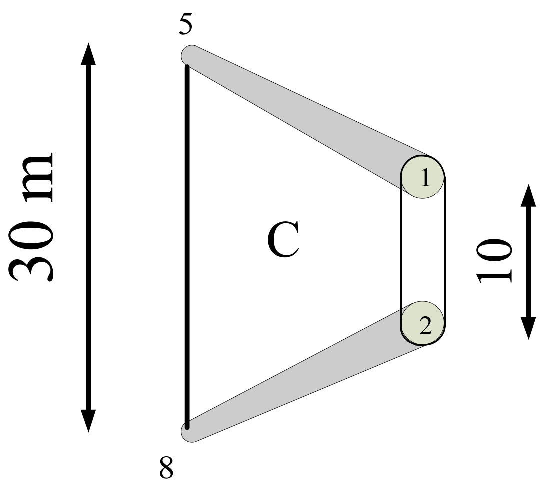
ارتفاع ذوزنقه با مساحت B $= \sqrt{(10^2+12^2)} = 15.62 m$

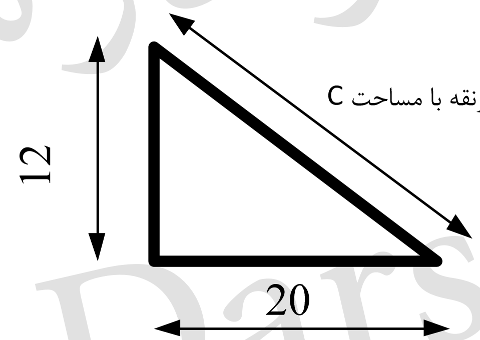
$$\Rightarrow m_B = 164010 kg$$

$$f_{2B} = f_{3B} = \left(\frac{164010}{2} kg\right) \times 9.81 = 804469.05 N \qquad f_{7B} = f_{8B} = 0$$

مسئله طراحی سازه خرپا

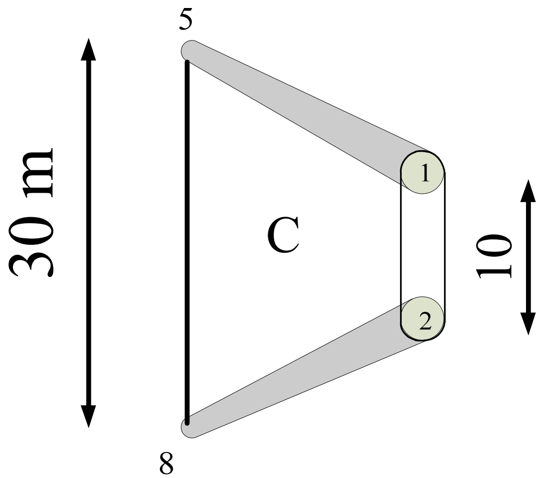
نیروهای ناشی از سقف بر گره‌ها





ارتفاع ذوزنقه با مساحت C $= \sqrt{\left(20^2 + 12^2\right)} = 23.32\,m$

مسئله طراحی سازه خرپا



نیروهای ناشی از سقف بر گره‌ها

$$C=\left(\frac{30+10}{2}\right)(23.32)=466.4m^2$$

$$t=0.05m$$

$$\Rightarrow V=23.32m^3 \qquad \rho=7000kg/m^3$$

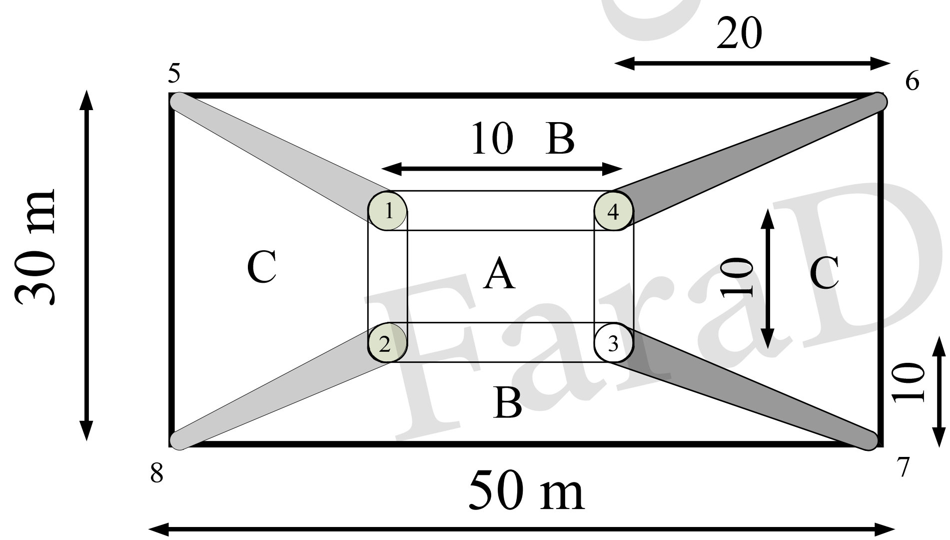
$$\Rightarrow m_C=163240kg$$

$$f_{1C}=f_{2C}=\left(\frac{164010}{2}kg\right)\times 9.81=800692.2N \qquad f_{5C}=f_{8C}=0$$

مسئله طراحی سازه خرپا

نیروهای ناشی از سقف بر گره‌ها

$$f_1 = f_{1A} + f_{1B} + f_{1c} = 85837.5N + 804469.05N + 800692.2N = 1690998.75N$$



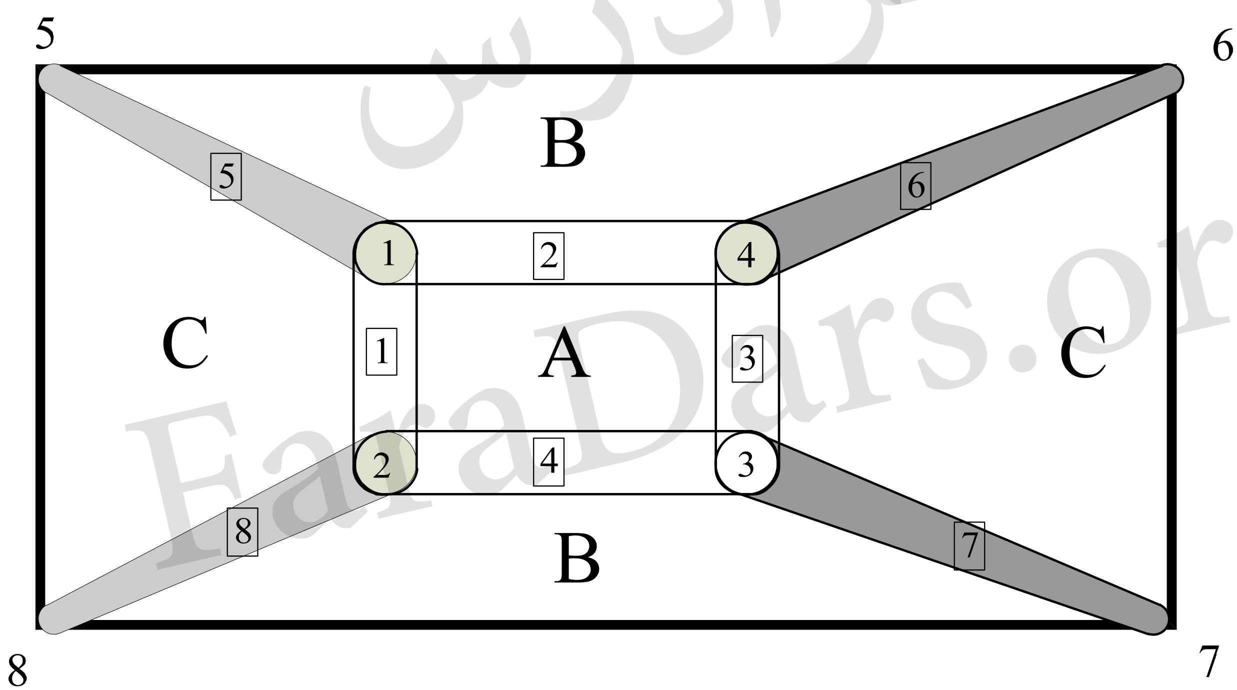
$$f_2 = 1690998.75N$$

$$f_3 = 1690998.75N$$

$$f_4 = 1690998.75N$$

مسئله طراحی سازه خرپا

گره ها و المان ها



مسئله طراحی سازه خرپا

8	8	1	1				
1	20	20	12	0	0	0	0
2	20	10	12	0	0	0	0
3	30	10	12	0	0	0	0
4	30	20	12	0	0	0	0
5	0	30	0	1	1	1	0
6	50	30	0	1	1	1	0
7	50	0	0	1	1	1	0
8	0	0	0	1	1	1	0
1	1	2	1	1			
2	1	4	1	1			
3	4	3	1	1			
4	3	2	1	1			
5	5	1	1	1			
6	6	4	1	1			
7	3	7	1	1			
8	2	8	1	1			
1	1.00E-03						
1	2.10E+11						

مسئله طراحی سازه خرپا

$A = 0.005 m^2$	**1**	-2.82E+08
	2	-5.64E+08
	3	-2.82E+08
	4	-5.64E+08
	5	-7.15E+08
	6	-7.15E+08
	7	-7.15E+08
	8	-7.15E+08
$A = 0.01 m^2$	**1**	-1.41E+08
	2	-2.82E+08
	3	-1.41E+08
	4	-2.82E+08
	5	-3.58E+08
	6	-3.58E+08
	7	-3.58E+08
	8	-3.58E+08

آموزش تحلیل المان محدود کاربردی با متلب

درس سوم: تحلیل تیرهای اویلر، تیموشنکو و قاب در متلب

مدرس:

مهندس مجید خزایی

کارشناس ارشد مهندسی هوافضا

فهرست مطالب

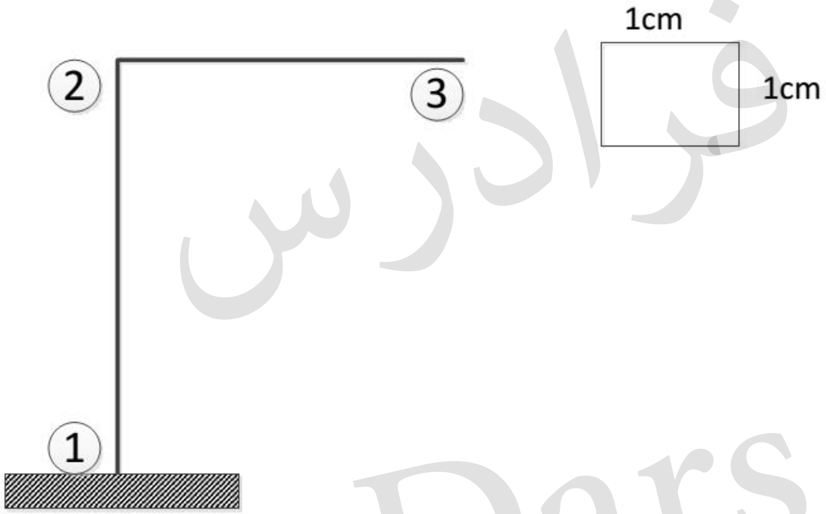
۱ تحلیل تیر اویلر- برنولی

۲ تحلیل تیر تیموشنکو

۳ تحلیل قاب سه بعدی

۴ تحلیل مودال تیر و قاب

سازه تیر



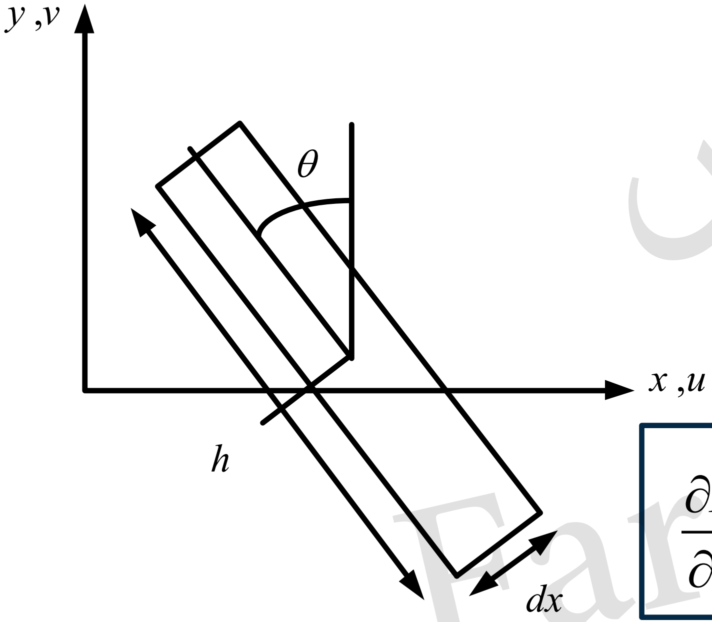
عضوهای تیر توانایی تحمل نیروها و گشتاورهای مختلف را دارند

مراحل انجام تحلیل

تحلیل المان محدود

- استخراج معادله دیفرانسیل یا فانکشنال
- استخراج ماتریس سختی هر المان
- شبکه‌بندی دامنه حل
- ادغام ماتریس‌های سختی
- انتخاب تابع تغییر شکل (نوع المان)
- اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

استخراج معادله دیفرانسیل تیر اویلر

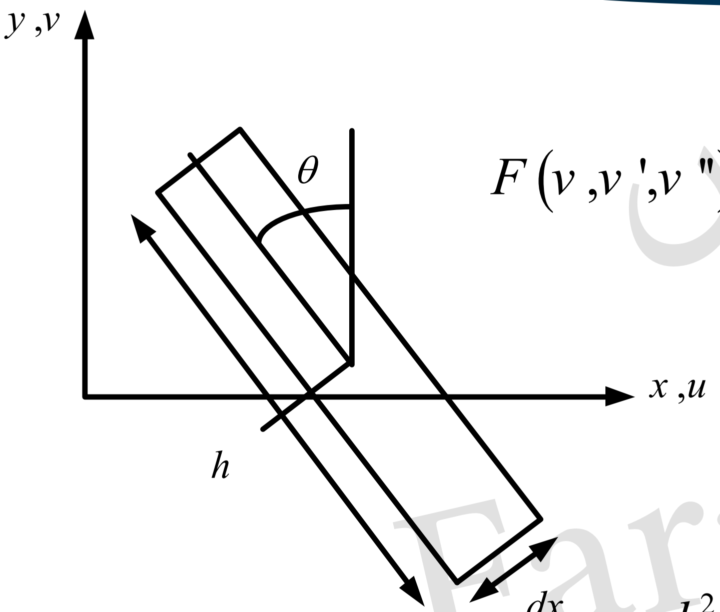


فانکشنال

$$u = \int \frac{1}{2} E\, I \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \qquad I = \int y^2 b\, dy$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right) = 0}$$ Euler Equation

استخراج معادله دیفرانسیل تیر اویلر



$$F\left(v, v', v''\right) = \frac{1}{2} E I \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial v'} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial v''} = E I \left(\dfrac{d^2 v}{dx^2}\right) \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E I \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)\right) = 0 \Rightarrow E I \left(\frac{d^4 v}{dx^4}\right) = 0$$

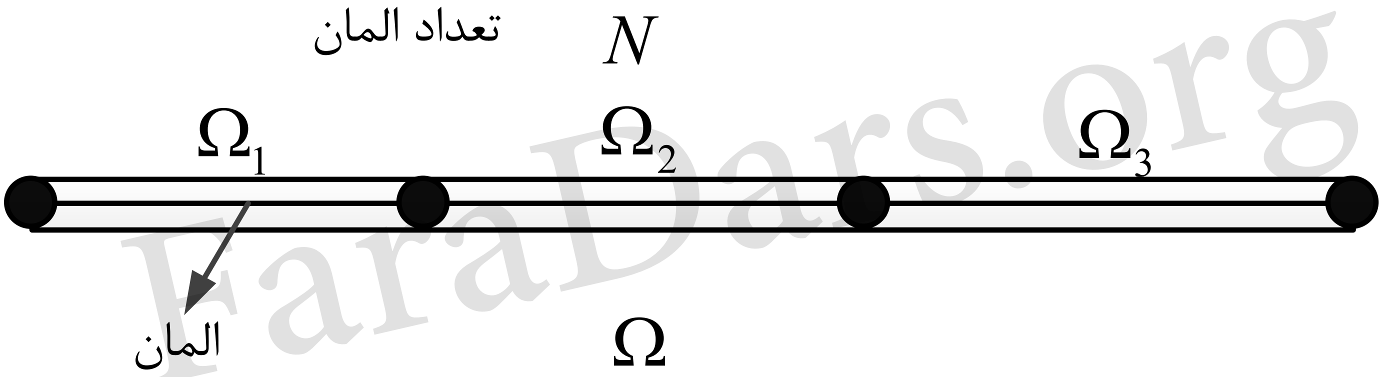
استخراج معادله دیفرانسیل تیر اویلر

معادله دیفرانسیل با نیروی گسترده

$$EI\frac{d^4\hat{v}}{d\hat{x}^4}+w=0$$

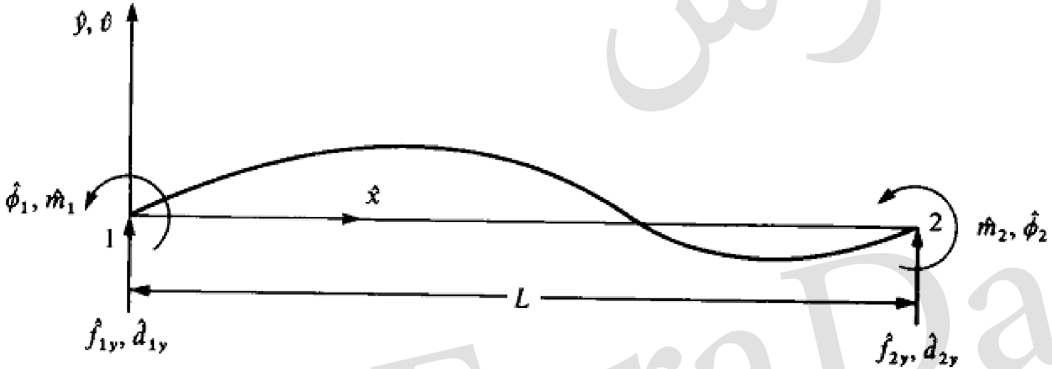
شبکه‌بندی دامنه حل

هر عضو تیر می تواند به بخش های کوچکتر تقسیم شود



انتخاب تابع تغییر شکل (نوع المان)

- المان هرمیتی مرتبه اول در نظر گرفته می‌شود



هر گره ۲ درجه آزادی:

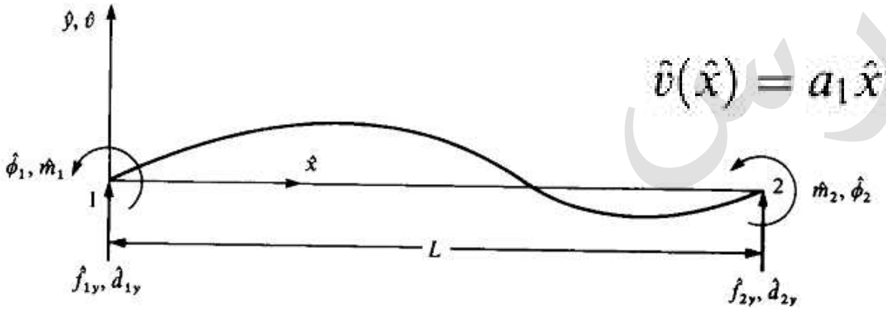
- جابجایی عمودی
- تغییر شیب در گره

جهت مثبت قراردادی:

- جابجایی و نیروی عمودی در راستای y مثبت
- شیب و گشتاور مثبت در جهت خلاف عقربه های ساعت

انتخاب تابع تغییر شکل (نوع المان)

- تابع درونیاب: تابع درجه ۳ (المان هرمیتی مرتبه اول)



$$\hat{v}(\hat{x}) = a_1\hat{x}^3 + a_2\hat{x}^2 + a_3\hat{x} + a_4$$

$$at\ x = 0; \hat{v}(0) = \hat{d}_{1y} \Rightarrow \hat{v}(0) = \hat{d}_{1y} = a_4$$

$$at\ x = 0; \frac{d\hat{v}}{dx}(0) = \hat{\phi}_1 \Rightarrow \frac{d\hat{v}(0)}{d\hat{x}} = \hat{\phi}_1 = a_3$$

$$at\ x = L; \hat{v}(L) = \hat{d}_{2y} \Rightarrow \hat{v}(L) = \hat{d}_{2y} = a_1L^3 + a_2L^2 + a_3L + a_4$$

$$at\ x = L; \frac{d\hat{v}}{dx}(L) = \hat{\phi}_2 \Rightarrow \frac{d\hat{v}(L)}{d\hat{x}} = \hat{\phi}_2 = 3a_1L^2 + 2a_2L + a_3$$

انتخاب تابع تغییر شکل (نوع المان)

- تابع درونیاب: تابع درجه ۳ (المان هرمیتی مرتبه اول)

$$\hat{v}(\hat{x}) = a_1\hat{x}^3 + a_2\hat{x}^2 + a_3\hat{x} + a_4$$

$$\hat{v} = \left[\frac{2}{L^3}(\hat{d}_{1y} - \hat{d}_{2y}) + \frac{1}{L^2}(\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2)\right]\hat{x}^3 + \left[-\frac{3}{L^2}(\hat{d}_{1y} - \hat{d}_{2y}) - \frac{1}{L}(2\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2)\right]\hat{x}^2 + \hat{\phi}_1\hat{x} + \hat{d}_{1y}$$

$$\hat{v} = N_1\hat{d}_{1y} + N_2\hat{\phi}_1 + N_3\hat{d}_{2y} + N_4\hat{\phi}_2 \Rightarrow \hat{v} = [N]\{\hat{d}\}$$

$$\boxed{\{\hat{d}\} = \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1y} \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{d}_{2y} \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}}$$

$$\boxed{[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]}$$

$$N_1 = \frac{1}{L^3}(2\hat{x}^3 - 3\hat{x}^2L + L^3) \qquad N_2 = \frac{1}{L^3}(\hat{x}^3L - 2\hat{x}^2L^2 + \hat{x}L^3)$$

$$N_3 = \frac{1}{L^3}(-2\hat{x}^3 + 3\hat{x}^2L) \qquad N_4 = \frac{1}{L^3}(\hat{x}^3L - \hat{x}^2L^2)$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

روش گالرکین

$$\int N_i \boxed{R_\Omega} d\Omega = 0$$

$$L(\tilde{u}) + A = R_\Omega$$

$$R_\Omega = EI\frac{d^4\hat{v}}{d\hat{x}^4} + w$$

مرتبه تابع شکل ۳

$$\int_0^L \left(EI\frac{d^4\hat{v}}{d\hat{x}^4} + w \right) N_i \, d\hat{x} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

مرتبه مشتق معادله ۴

از شکل ضعیف باید استفاده شود (مشتق کمتر V در معادله

استخراج ماتریس سختی هر المان

انتگرال جزء به جزء

$$\int_0^L \left(\boxed{EI \frac{d^4 \hat{v}}{d\hat{x}^4}} + w \right) N_i \, d\hat{x} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\int_0^L EI(\hat{v}_{,\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{x}}) N_i \, d\hat{x} = \int_0^L EI \boxed{(\hat{v}_{,\hat{x}\hat{x}})} (N_{i,\hat{x}\hat{x}}) \, d\hat{x} + EI[N_i(\hat{v}_{,\hat{x}\hat{x}\hat{x}}) - (N_{i,\hat{x}})(\hat{v}_{,\hat{x}\hat{x}})]_0^L$$

$$\hat{v}_{,\hat{x}\hat{x}} = \left[\frac{12\hat{x} - 6L}{L^3} \; \frac{6\hat{x}L - 4L^2}{L^3} \; \frac{-12\hat{x} + 6L}{L^3} \; \frac{6\hat{x}L - 2L^2}{L^3} \right] \{\hat{d}\} \Rightarrow \hat{v}_{,\hat{x}\hat{x}} = [B]\{\hat{d}\}$$

$$\Rightarrow \int_0^L (N_{i,\hat{x}\hat{x}}) EI [B] \, d\hat{x} \{\hat{d}\} + \int_0^L N_i w \, d\hat{x} + [N_i \hat{V} - (N_{i,\hat{x}}) \hat{m}]|_0^L = 0$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

$$\int_0^L \boxed{N_{i,\hat{x}\hat{x}}} EI[B]\, d\hat{x}\{\hat{d}\} + \int_0^L N_i w\, d\hat{x} + [N_i\hat{V} - (N_{i,\hat{x}})\hat{m}]|_0^L = 0$$

$$[N]_{,xx} = [B]$$

$$\boxed{\int_0^L [B]^T EI[B]\, d\hat{x}\{\hat{d}\}} = \boxed{\int_0^L -[N]^T w\, d\hat{x} + ([N]^T_{,\hat{x}}\hat{m} - [N]^T\hat{V})|_0^L}$$

$[\bar{K}]$

$[F]$

استخراج ماتریس سختی هر المان

$$[\bar{K}]=\int_0^L [B]^T EI\,\boxed{[B]}\,d\hat{x}$$

$$[B]=[N_{1,xx}\;\; N_{2,xx}\;\; N_{3,xx}\;\; N_{4,xx}]$$

$$[B]=\left[\frac{12\hat{x}-6L}{L^3}\;\; \frac{6\hat{x}L-4L^2}{L^3}\;\; \frac{-12\hat{x}+6L}{L^3}\;\; \frac{6\hat{x}L-2L^2}{L^3}\right]$$

$$[\bar{K}]=EI\int_{x=0}^{L}\begin{bmatrix} N_{1,xx}N_{1,xx} & N_{1,xx}N_{2,xx} & N_{1,xx}N_{3,xx} & N_{1,xx}N_{4,xx} \\ & N_{2,xx}N_{2,xx} & N_{2,xx}N_{3,xx} & N_{2,xx}N_{4,xx} \\ & & N_{3,xx}N_{3,xx} & N_{3,xx}N_{4,xx} \\ Sym. & & & N_{4,xx}N_{4,xx} \end{bmatrix} d\hat{x}$$

$$N_{1,xx}=\frac{12\hat{x}-6L}{L^3}$$

$$N_{2,xx}=\frac{6\hat{x}L-4L^2}{L^3}$$

$$N_{3,xx}=\frac{-12\hat{x}+6L}{L^3}$$

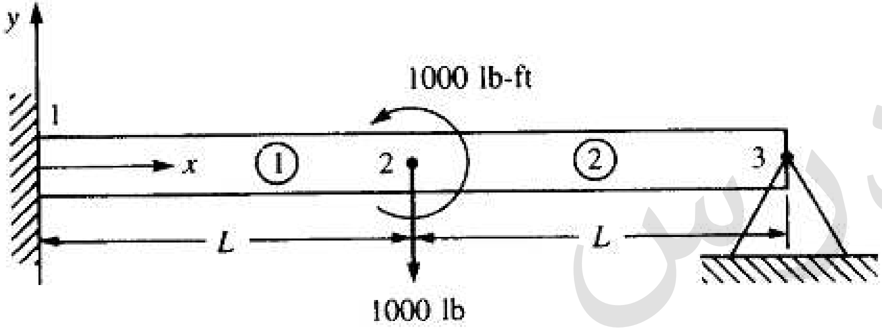
$$N_{4,xx}=\frac{6\hat{x}L-2L^2}{L^3}$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

$$\left[\bar{K}\right] = EI\int_{x=0}^{L}\begin{bmatrix} \left(\frac{12\hat{x}-6L}{L^3}\right)^2 & \left(\frac{12\hat{x}-6L}{L^3}\right)\left(\frac{6\hat{x}L-4L^2}{L^3}\right) & \left(\frac{12\hat{x}-6L}{L^3}\right)\left(\frac{-12\hat{x}+6L}{L^3}\right) & \left(\frac{12\hat{x}-6L}{L^3}\right)\left(\frac{6\hat{x}L-2L^2}{L^3}\right) \\ & \left(\frac{6\hat{x}L-4L^2}{L^3}\right)^2 & \left(\frac{6\hat{x}L-4L^2}{L^3}\right)\left(\frac{-12\hat{x}+6L}{L^3}\right) & \left(\frac{6\hat{x}L-4L^2}{L^3}\right)\left(\frac{6\hat{x}L-2L^2}{L^3}\right) \\ & & \left(\frac{-12\hat{x}+6L}{L^3}\right)^2 & \left(\frac{-12\hat{x}+6L}{L^3}\right)\left(\frac{6\hat{x}L-2L^2}{L^3}\right) \\ Sym. & & & \left(\frac{6\hat{x}L-2L^2}{L^3}\right)^2 \end{bmatrix} d\hat{x}$$

$$\underline{\hat{k}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

ادغام ماتریس‌های سختی



$$\underline{k}^{(1)} = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_{1y} & \phi_1 & d_{2y} & \phi_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

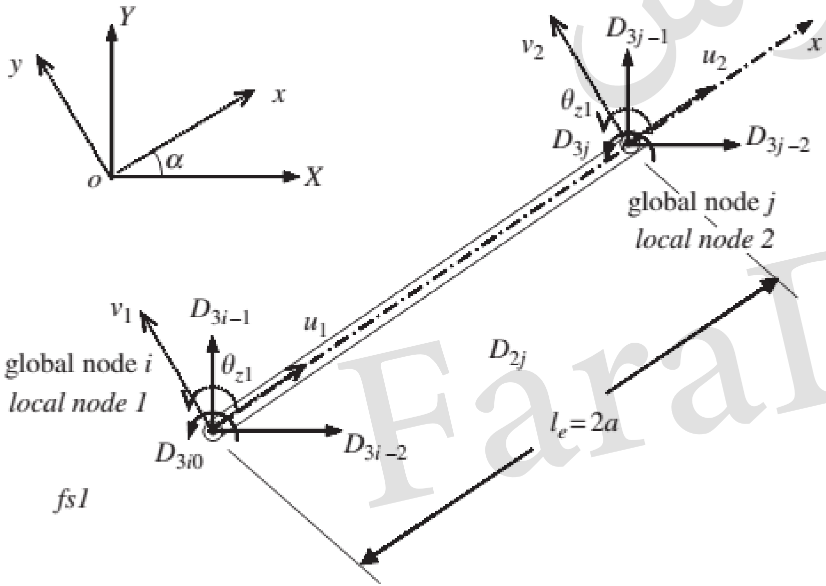
$$\underline{k}^{(2)} = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_{2y} & \phi_2 & d_{3y} & \phi_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12+12 & -6L+6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L+6L & 4L^2+4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_{1y} \\ \phi_1 \\ d_{2y} \\ \phi_2 \\ d_{3y} \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

تبدیل مختصات محلی به مختصات عمومی

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \boxed{\mathbf{T}} \rightarrow T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

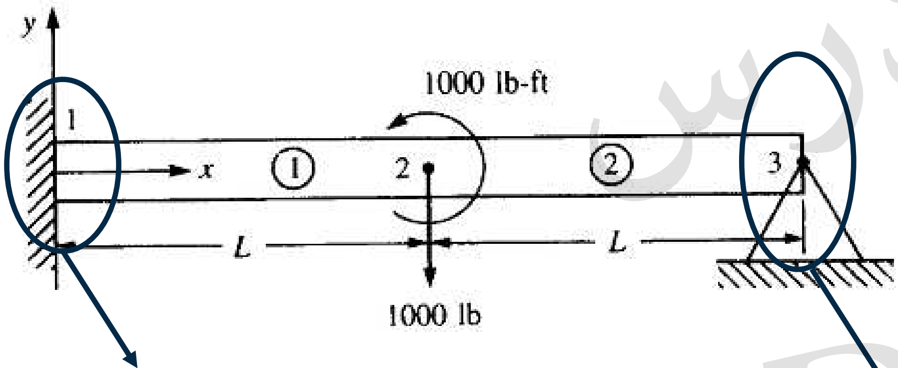


$$l_x = \cos(x, X) = \cos\alpha = \frac{X_j - X_i}{l_e}$$

$$l_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$$

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

شرط مرزی: (به روش حذفی)



$\phi_1 = 0$ $\quad d_{1y} = 0$ $\quad d_{3y} = 0$

$$bcdof = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

اعمال نیروها:

$$[F] = \int_0^L -[N]^T w\, d\hat{x} + \left([N]^T{}_{,\hat{x}}\, \hat{m} - [N]^T \hat{V}\right)\Big|_0^L$$

نیروی گسترده   نیروی نقطه ای

نیروی نقطه ای:

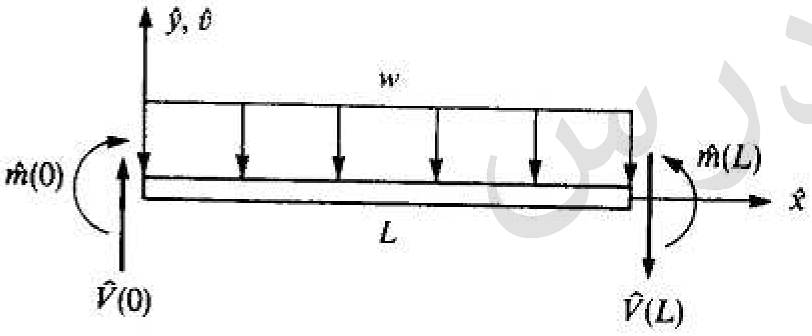
$$[N]_{,\hat{x}}|_0 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \qquad [N]_{,\hat{x}}|_L = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$[N]|_0 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \qquad [N]|_L = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

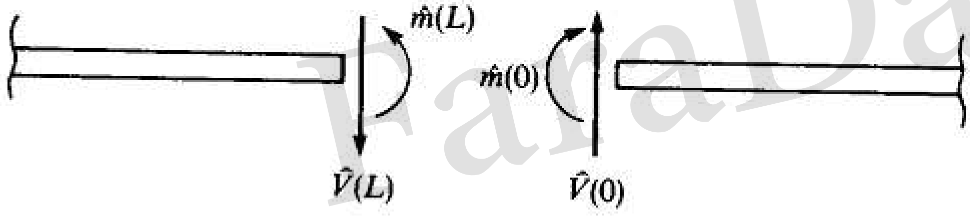
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \hat{m}(L) - \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \hat{m}(0) - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \hat{V}(L) + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \hat{V}(0)$$

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

نیروی نقطه ای:



- نیروهای داخلی گره ها حذف می شوند
- تنها نیروهای خارجی وجود دارند



اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

نیروی گسترده معادل:

قانون کار معادل نیروی گسترده

$$W_{\text{distributed}} = W_{\text{discrete}}$$

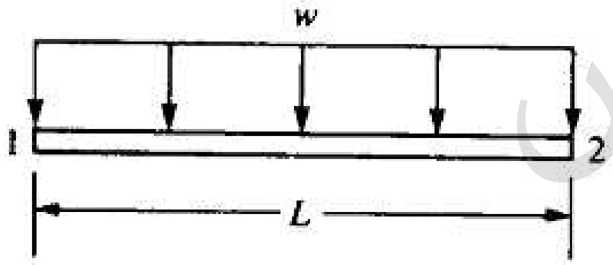
$$W_{\text{distributed}} = \int_0^L w(\hat{x})\hat{v}(\hat{x})\,d\hat{x}$$

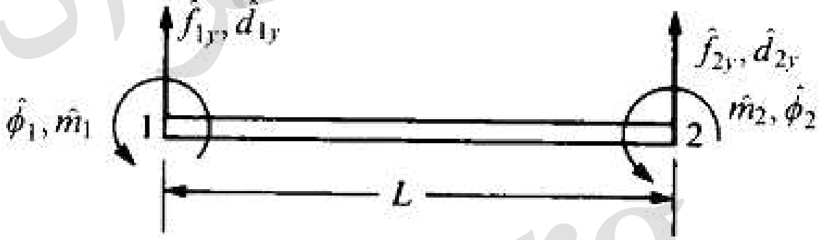
$$W_{\text{discrete}} = \hat{m}_1\hat{\phi}_1 + \hat{m}_2\hat{\phi}_2 + \hat{f}_{1y}\hat{d}_{1y} + \hat{f}_{2y}\hat{d}_{2y}$$

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

نیروی گسترده معادل:

مثال





$$\int_0^L w(\hat{x})\hat{v}(\hat{x})\, d\hat{x} = \hat{m}_1\hat{\phi}_1 + \hat{m}_2\hat{\phi}_2 + \hat{f}_{1y}\hat{d}_{1y} + \hat{f}_{2y}\hat{d}_{2y}$$

$$w(\hat{x}) = -w \qquad \hat{v} = \left[\frac{2}{L^3}(\hat{d}_{1y} - \hat{d}_{2y}) + \frac{1}{L^2}(\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2)\right]\hat{x}^3 + \left[-\frac{3}{L^2}(\hat{d}_{1y} - \hat{d}_{2y}) - \frac{1}{L}(2\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2)\right]\hat{x}^2 + \hat{\phi}_1\hat{x} + \hat{d}_{1y}$$

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

نیروی گسترده معادل:

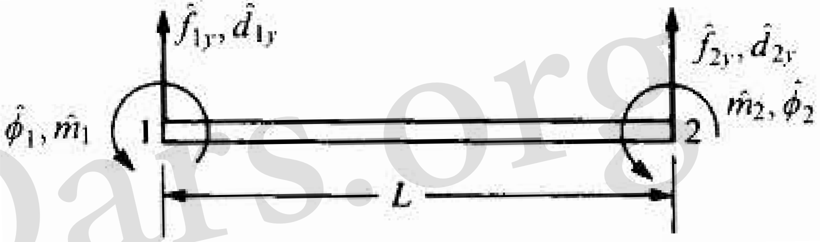
$$\int_0^L w(\hat{x})\hat{v}(\hat{x})\,d\hat{x} = -\frac{Lw}{2}(\hat{d}_{1y}-\hat{d}_{2y}) - \frac{L^2w}{4}(\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2) - Lw(\hat{d}_{2y}-\hat{d}_{1y}) + \frac{L^2w}{3}(2\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2) - \hat{\phi}_1\left(\frac{L^2w}{2}\right) - \hat{d}_{1y}(wL)$$

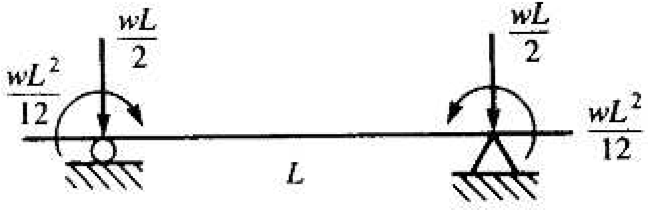
$$\hat{m}_1(1) = -\left(\frac{L^2w}{4} - \frac{2}{3}L^2w + \frac{L^2}{2}w\right) = -\frac{wL^2}{12}$$

$$\hat{m}_2(1) = -\left(\frac{L^2w}{4} - \frac{L^2w}{3}\right) = \frac{wL^2}{12}$$

$$\hat{f}_{1y}(1) = -\frac{Lw}{2} + Lw - Lw = -\frac{Lw}{2}$$

$$\hat{f}_{2y}(1) = \frac{Lw}{2} - Lw = -\frac{Lw}{2}$$





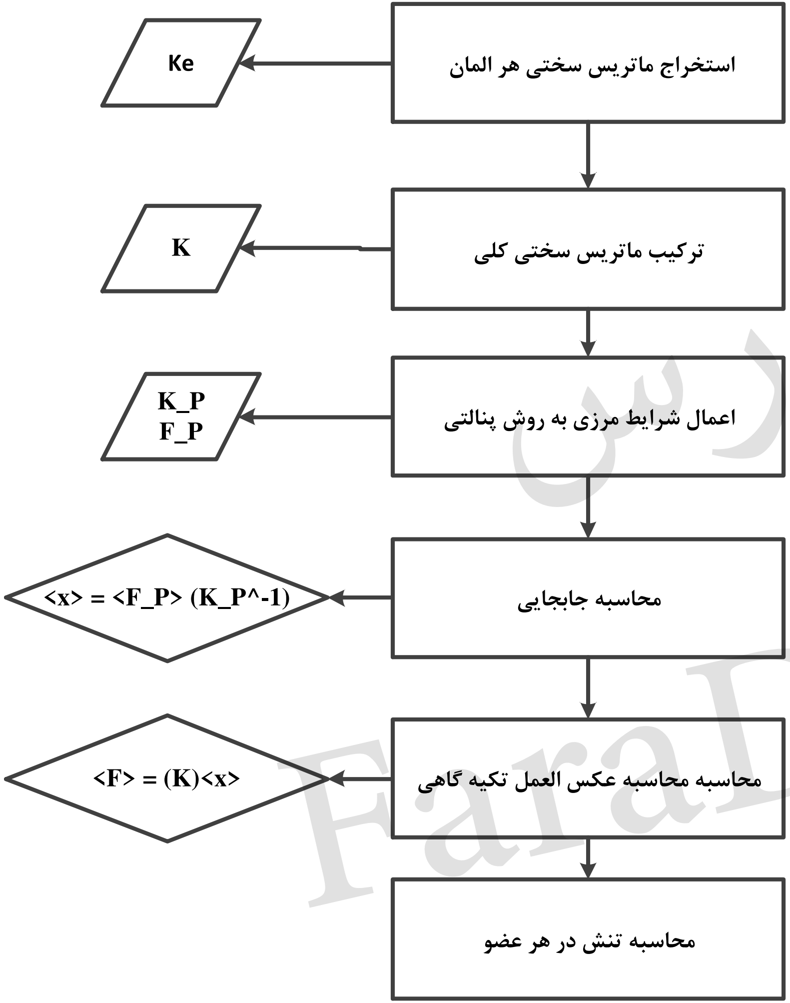
تحلیل مودال

$$\mathbf{m}_e = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N}\, \mathrm{d}V$$

$$[m_e] = \rho A \int_{x=0}^{L} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ & & N_3 N_3 & N_3 N_4 \\ Sym. & & & N_4 N_4 \end{bmatrix} d\hat{x}$$

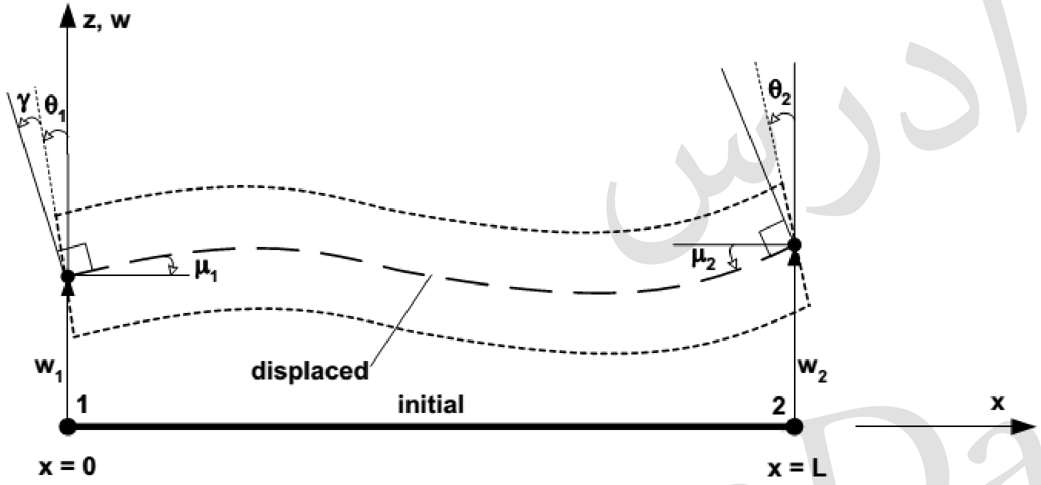
$$m_e = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

الگوریتم حل



استخراج ماتریس سختی هر المان
Ke
ترکیب ماتریس سختی کلی
K
اعمال شرایط مرزی به روش پنالتی
K_P
F_P
محاسبه جابجایی
<x> = <F_P> (K_P^-1)
محاسبه محاسبه عکس العمل تکیه گاهی
<F> = (K)<x>
محاسبه تنش در هر عضو

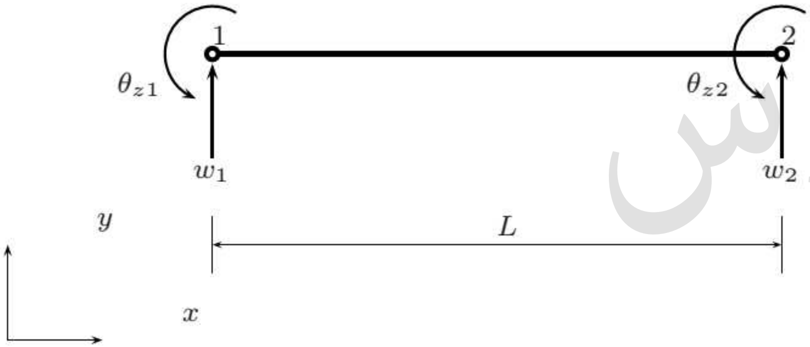
استخراج ماتریس سختی تیر تیموشنکو



تیر تیموشنکو تئوری عمیق‌تری نسبت به تیر اویلر- برنولی است. در این تئوری فرض بر این است که صفحه تغییر شکل همچنان صفحه باقی بماند اما دیگر شرط عمود بودن برقرار نمی‌باشد.

$$u = y\theta_z, \quad w = w_0$$

استخراج ماتریس سختی تیر تیموشنکو



$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial \theta_z}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}$$

انرژی کرنشی برای این المان، ناشی از نقش‌های خمشی و برشی است

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_x \epsilon_x dV + \frac{1}{2}\int_V \tau_{xy}\gamma_{xy} dV$$

$$\sigma_x = E\epsilon_x \qquad \tau_{xy} = kG\gamma_{xy} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- ضریب k ضریب اصلاح برشی
- وابسته به نوع سطح مقطع و مسئله
- آنالیزهای استاتیک برابر با 5/6

استخراج ماتریس سختی تیر تیموشنکو

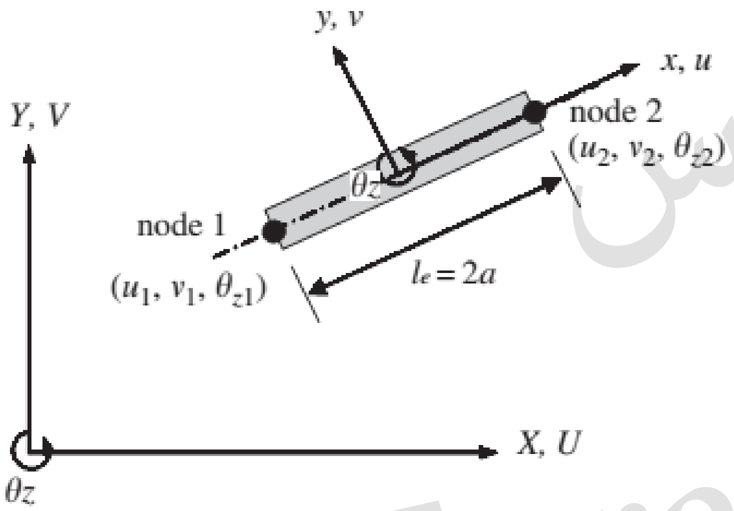
$$U=\frac{1}{2}\int_V E\epsilon_x^2 dV+\frac{1}{2}\int_V kG\gamma_{xy}^2 dV=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} EI_z\left(\frac{\partial\theta_z}{\partial x}\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} kAG\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\theta_z\right)^2 dx$$

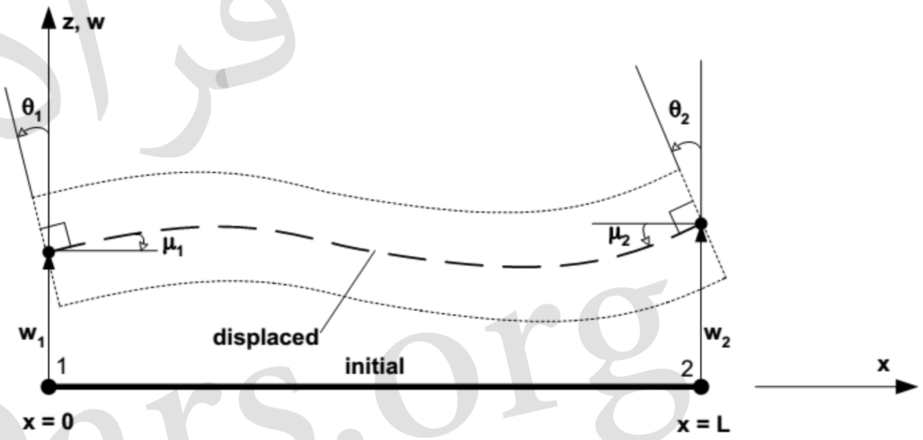
$$[K^e]=[K_b^e]+[K_s^e]$$

$$[K_b^e]=\frac{EI}{\ell}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[K_s^e]=\frac{\mu GA}{4\ell}\begin{bmatrix}4 & 2\ell & -4 & 2\ell\\ 2\ell & \ell^2 & -2\ell & \ell^2\\ -4 & -2\ell & 4 & -2\ell\\ 2\ell & \ell^2 & -2\ell & \ell^2\end{bmatrix}$$

استخراج ماتریس سختی قاب سه بعدی





$$\mathbf{d}_e = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \text{displacement components at node 1} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \text{displacement components at node 2} \end{matrix}$$

استخراج ماتریس سختی قاب سه بعدی

$$
\mathbf{k}_e^{\text{truss}} =
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
d_1 = u_1 & & & d_4 = u_2 & & \\
\uparrow & & & \uparrow & &
\end{array}
\\
\begin{bmatrix}
AE/(2a) & 0 & 0 & -AE/(2a) & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & AE/(2a) & 0 & 0 \\
 & sy. & & & 0 & 0 \\
 & & & & & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\rightarrow d_1 = u_1 \\ \\ \\ \rightarrow d_4 = u_2 \\ \\ \\
\end{array}
$$

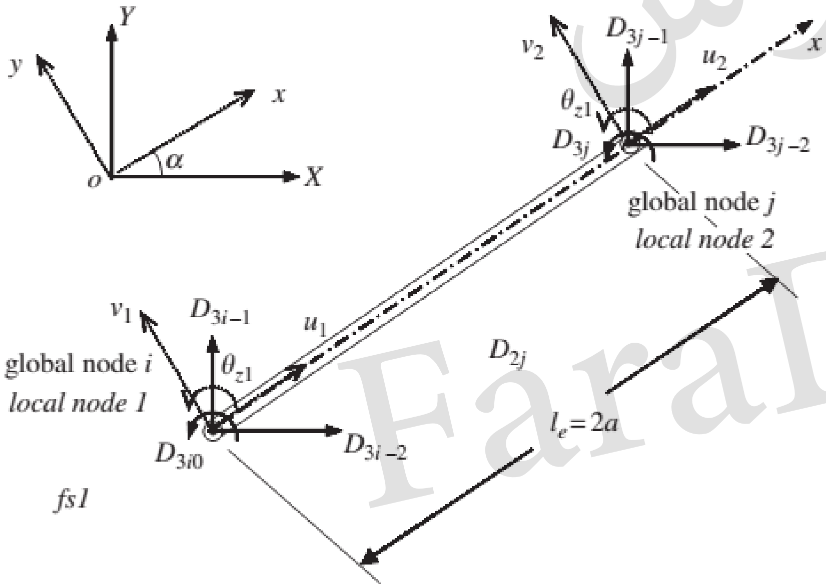
$$+$$

$$
\mathbf{k}_e^{\text{beam}} =
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
 & d_2(v_1) & d_3(\theta_{z1}) & & d_5(v_2) & d_6(\theta_{z2}) \\
 & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow
\end{array}
\\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} \\
 & & \frac{2EI_z}{a} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{EI_z}{a} \\
 & & & 0 & 0 & 0 \\
 & sy. & & & \frac{3EI_z}{2a^3} & -\frac{3EI_z}{2a^2} \\
 & & & & & \frac{2EI_z}{a}
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \rightarrow d_2 = v_1 \\ \rightarrow d_3 = \theta_{z1} \\ \\ \rightarrow d_5 = v_2 \\ \rightarrow d_6 = \theta_{z2}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{k}_e =
\begin{bmatrix}
\frac{AE}{2a} & 0 & 0 & -\frac{AE}{2a} & 0 & 0 \\
 & \frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} \\
 & & \frac{2EI_z}{a} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{EI_z}{a} \\
 & & & \frac{AE}{2a} & 0 & 0 \\
 & sy. & & & \frac{3EI_z}{2a^3} & -\frac{3EI_z}{2a^2} \\
 & & & & & \frac{2EI_z}{a}
\end{bmatrix}
$$

استخراج ماتریس سختی قاب سه بعدی

تبدیل مختصات محلی به مختصات عمومی



$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \boxed{\mathbf{T}} \rightarrow \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_y & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & m_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_y & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_x = \cos(x, X) = \cos\alpha = \frac{X_j - X_i}{l_e}$$

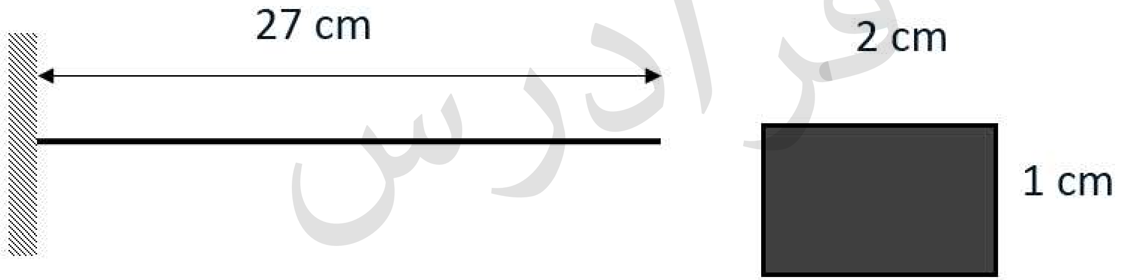
$$l_y = \cos(y, X) = \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha = -\frac{Y_j - Y_i}{l_e}$$

$$m_x = \cos(x, Y) = \sin\alpha = \frac{Y_j - Y_i}{l_e}$$

$$m_y = \cos(y, Y) = \cos\alpha = \frac{X_j - X_i}{l_e}$$

$$l_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$$

مثال: تیر ضخیم

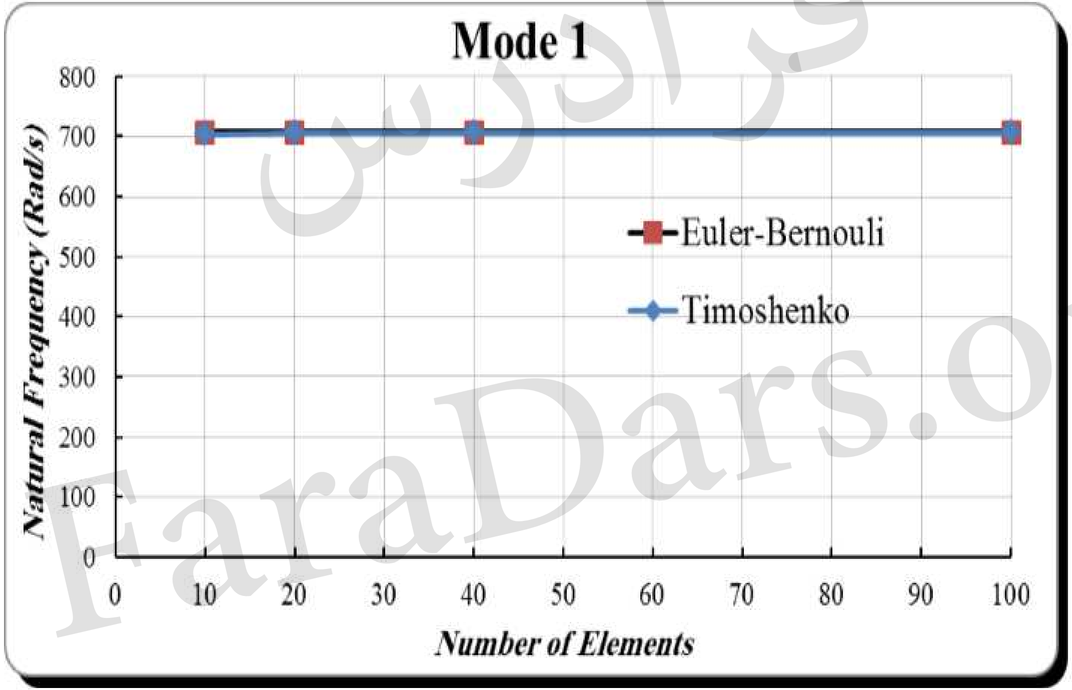


Area(m^2)	I(mm^2)	E (Pa)	ρ (kg/m^3)	G (Pa)
2.00E-04	1.67E-09	2.00E+11	7750	7.69E+10

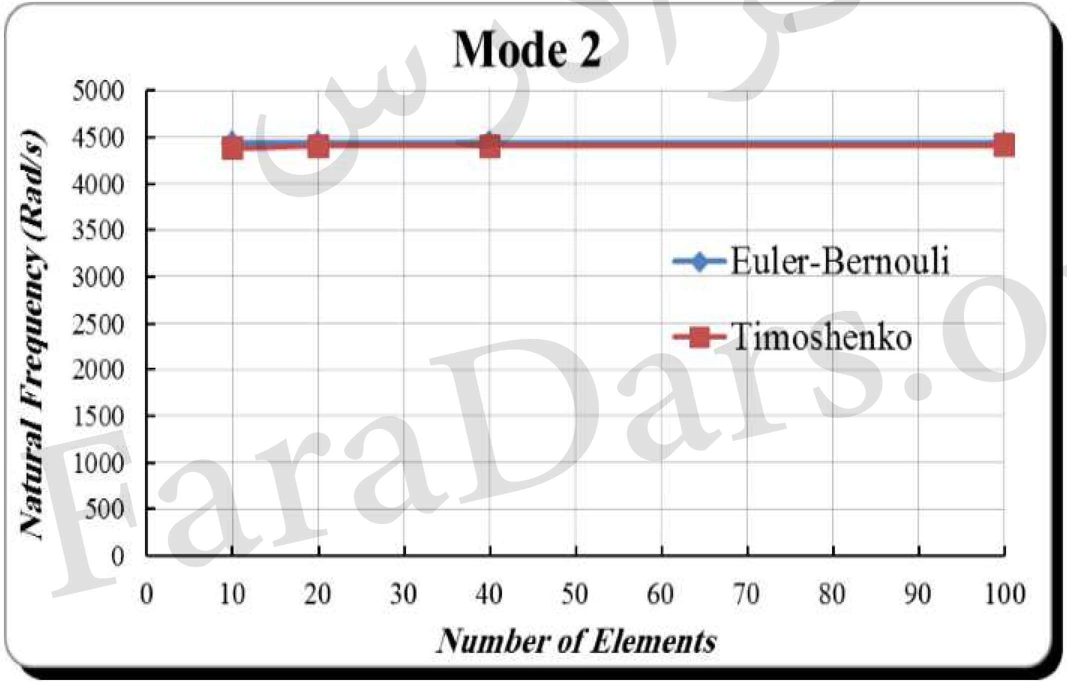
مثال: تیر ضخیم

	Element Number							
	10		20		40		100	
	E	T	E	T	E	T	E	T
MODE 1	707.29	704.41	707.29	706.13	707.29	706.56	707.29	706.68
MODE 2	4432.65	4378.74	4432.51	4399.88	4432.50	4405.28	4432.50	4406.80
MODE 3	12414.30	12202.02	12411.34	12231.15	12411.15	12240.33	12411.14	12243.00
MODE 4	24344.05	23873.87	24322.39	23743.94	24320.97	23728.15	24320.88	23724.48
MODE 5	40305.49	39592.36	40210.96	38806.30	40204.58	38694.89	40204.16	38667.31

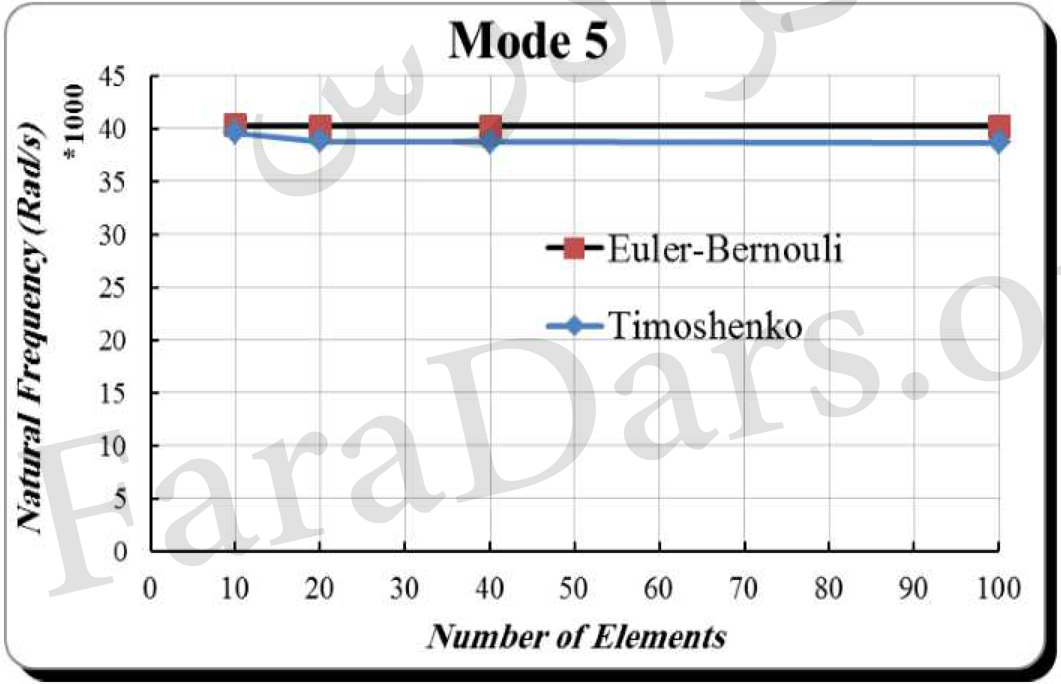
مثال: تیر ضخیم



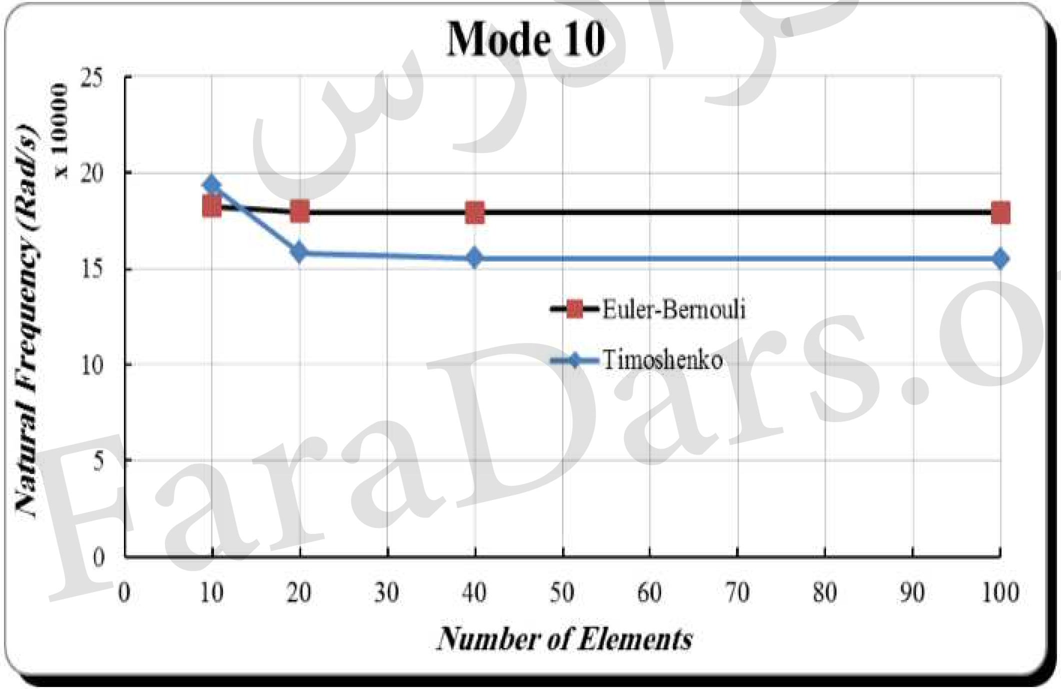
مثال: تیر ضخیم



مثال: تیر ضخیم



مثال: تیر ضخیم

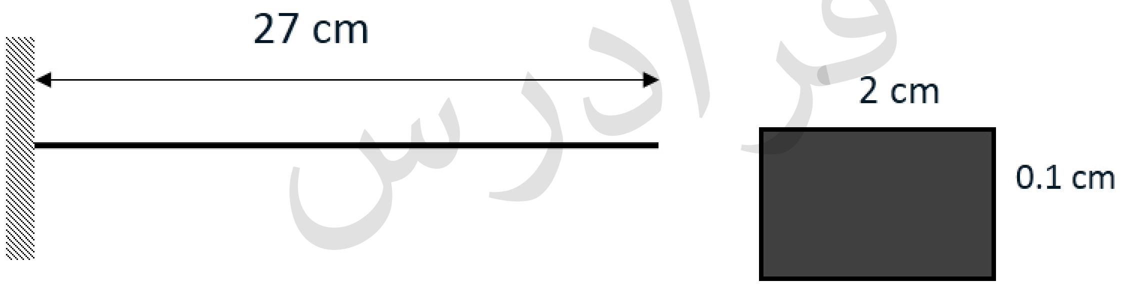


مثال: تیر ضخیم

خطای میان مدل تیر اویلر- برنولی و تیر تیموشنکو بر حسب تعداد المان‌ها برای تیر ضخیم (%)

	Element Number			
	10	20	40	100
MODE 1	**0.41**	**0.16**	**0.10**	**0.09**
MODE 2	**1.23**	**0.74**	**0.62**	**0.58**
MODE 3	**1.74**	**1.47**	**1.40**	**1.37**
MODE 4	**1.97**	**2.44**	**2.50**	**2.51**
MODE 5	**1.80**	**3.62**	**3.90**	**3.97**
MODE 6	**1.12**	**5.04**	**5.60**	**5.74**
MODE 7	**0.11**	**6.71**	**7.59**	**7.81**
MODE 8	**1.80**	**8.65**	**9.86**	**10.15**
MODE 9	**3.70**	**10.89**	**12.41**	**12.76**
MODE 10	**5.47**	**13.48**	**15.24**	**15.62**

مثال: تیر نازک



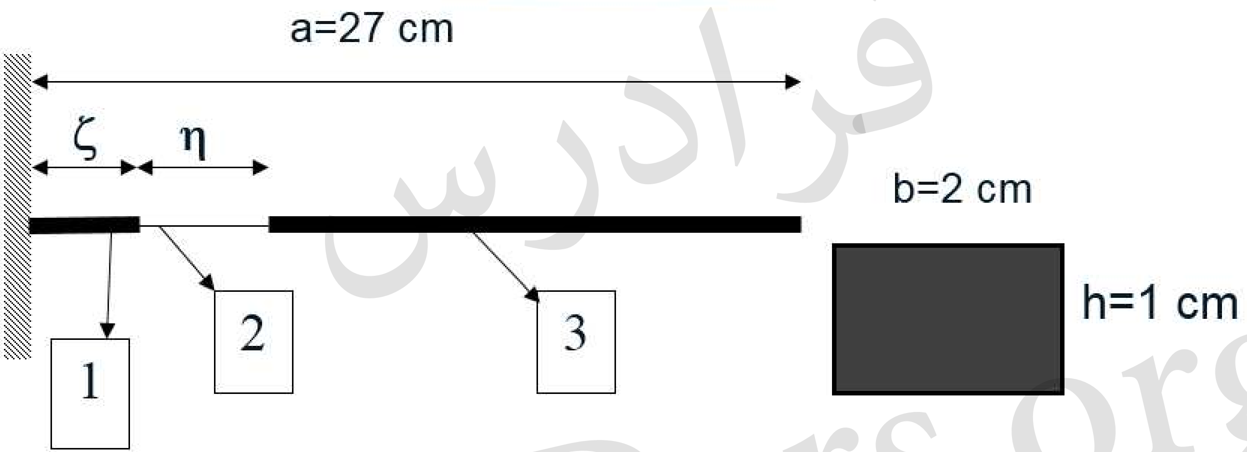
ویژگی‌های ماده و هندسی تیر نازک یک سر گیردار

Area(m^2)	I(mm^2)	E (Pa)	ρ (kg/m^3)	G (Pa)
2.00E-05	1.67E-12	2.00E+11	7750	7.69E+10

مثال: تیر نازک

Element Number	100		
	E	T	Error (%)
MODE 1	707.29	706.68	0.00
MODE 2	4432.50	4406.80	0.01
MODE 3	12411.14	12243.00	0.02
MODE 4	24320.88	23724.48	0.02
MODE 5	40204.16	38667.31	0.02
MODE 6	60058.07	56795.24	0.02
MODE 7	83882.81	77805.99	0.02
MODE 8	111678.40	101383.11	0.01
MODE 9	143444.90	127209.77	0.00
MODE 10	179182.39	154979.52	0.01

مثال: تیر به‌همراه خرابی



$\eta = 0.1cm$

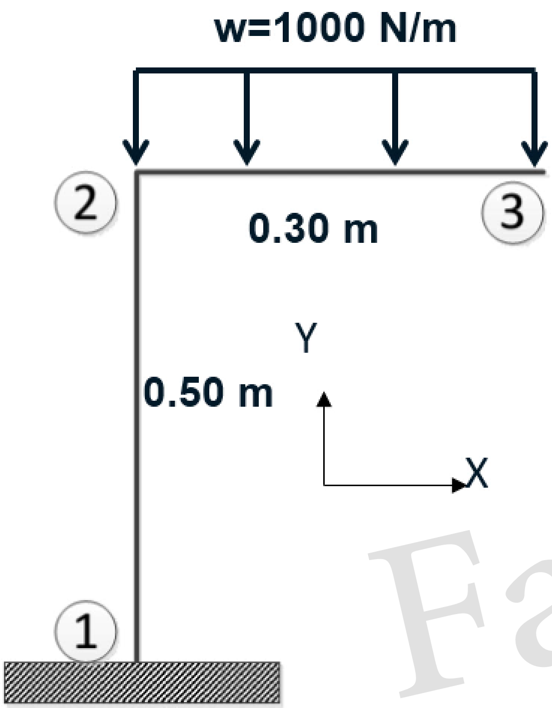
ζ=20 cm

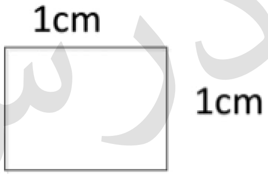
	E (Pa)	ρ (kg/m³)	G (Pa)
1	2.00E+11	7750	7.69E+10
2	1.80E+11	7750	6.92E+10
3	2.00E+11	7750	7.69E+10

مثال: تیر به‌همراه خرابی

Mode	Cracked beam	Healthy
1	694.817	706.68
2	4333.252	4406.8
3	12039.23	12243
4	23328.69	23724.48
5	38021.43	38667.31
6	55848.37	56795.24
7	76504.26	77805.99
8	99672.97	101383.11
9	125064	127209.77
10	152383.6	154979.52

مثال: قاب

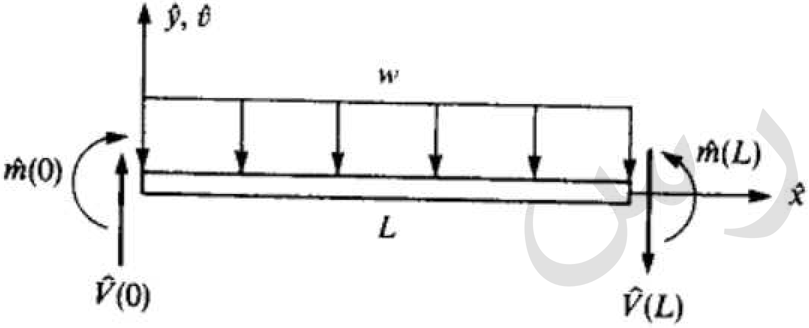


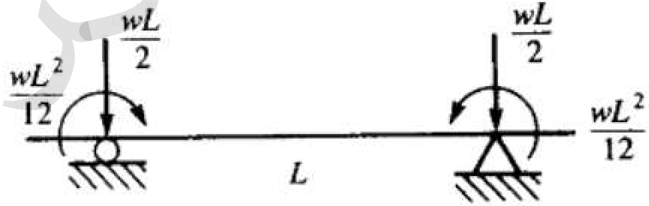


ویژگی‌های ماده و هندسی قاب مثال عددی دوم

Area(m^2)	I(mm^2)	E (Pa)	ρ (kg/m^3)	G (Pa)
1.00E-04	8.33E-10	1.00E+11	1000	3.85E+10

مثال: قاب





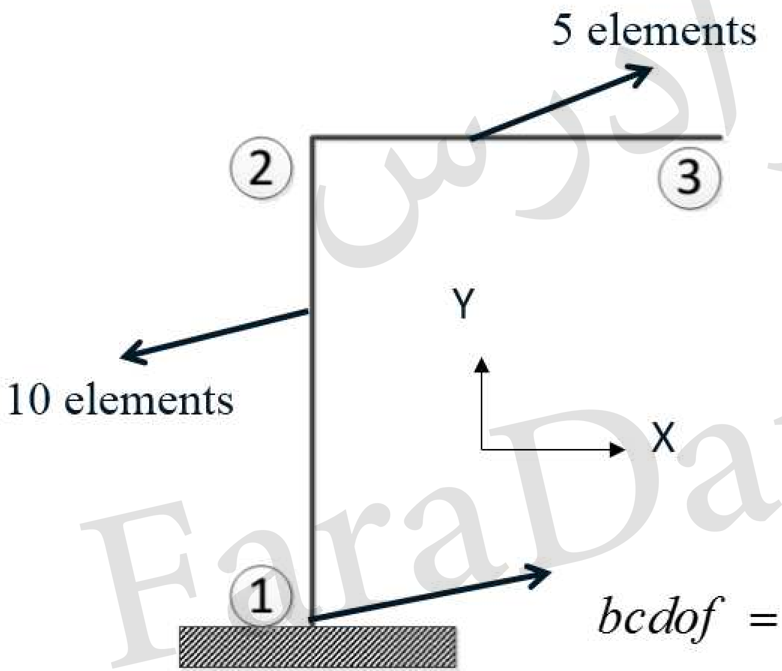
$$m(Node=2) = -\frac{1000*(0.3)^2}{12} = -7.5$$

$$m(Node=3) = \frac{1000*(0.3)^2}{12} = 7.5$$

$$f\ (Node=2) = -\frac{1000*0.3}{2} = -150$$

$$f\ (Node=3) = -\frac{1000*0.3}{2} = -150$$

مثال: قاب



$$bcdof = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

مثال: قاب

حل مودال: فرکانس طبیعی

Mode	Healthy
1	0
2	0
3	0
4	199.2479867
5	700.5744358
6	2445.754368
7	5381.82759
8	7293.834789
9	13034.43327
10	17466.4306
11	22470.57136
12	29405.75059
13	32525.10621

مثال: قاب

حل استاتیک

Non- Deformed Shape		Deformed Shape	
x	y	x	y
0	0	0	0
0	0.05	0.00	0.05
0	0.1	0.00	0.10
0	0.15	0.01	0.15
0	0.2	0.01	0.20
0	0.25	0.02	0.25
0	0.3	0.02	0.30
0	0.35	0.03	0.35
0	0.4	0.04	0.40
0	0.45	0.05	0.45
0	0.5	0.07	0.50
0.06	0.5	0.13	0.48
0.12	0.5	0.19	0.46
0.18	0.5	0.25	0.45
0.24	0.5	0.31	0.43
0.3	0.5	0.37	0.41

مثال: قاب

مقدمه ای بر روش المان محدود

تحلیل انتقال حرارت دائم و غیر دائم یک صفحه دو بعدی با المان‌های مثلثی سه گره‌ای

مدرس:

مجید خزایی

کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا

دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران)

فهرست مطالب

۱ مقدمه

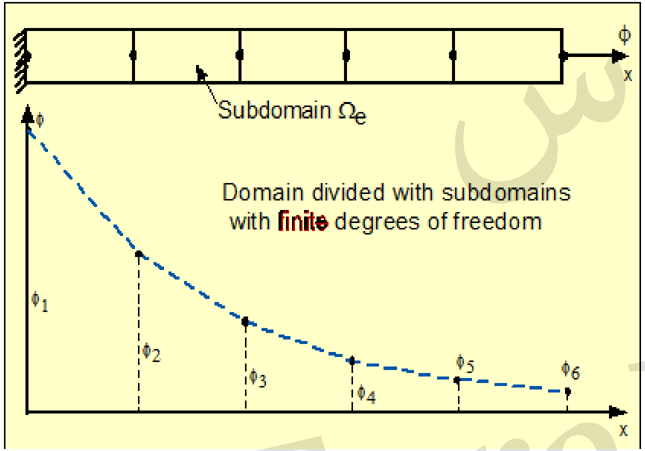
۲ تحلیل انتقال حرارت پایدار

۳ تحلیل انتقال حرارت ناپایدار (نسبت به زمان)

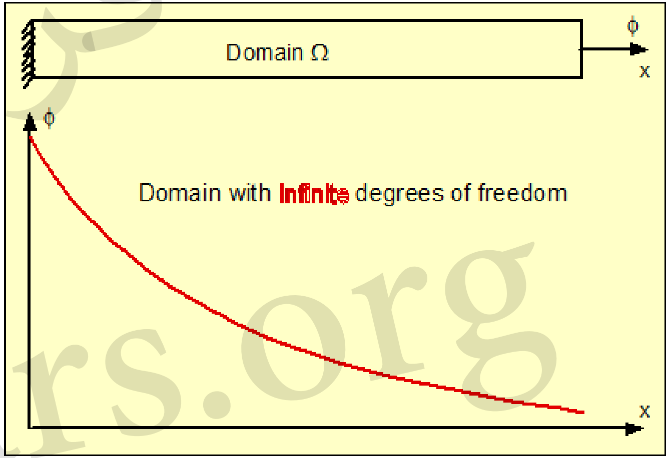
۴ نتیجه گیری

- مقدمه

مقدمه

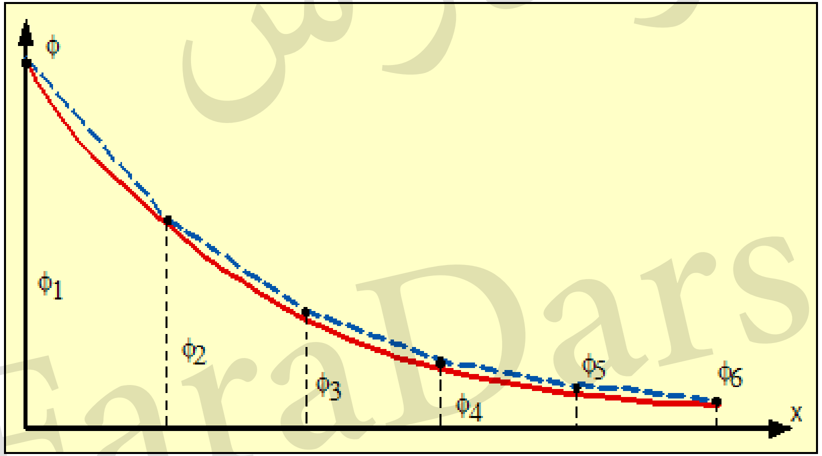


روش المان محدود



روش تحلیلی انتقال حرارت

مقدمه



مقدمه

تحلیل سازه‌ای	تحلیل انتقال حرارت
انتخاب نوع المان	انتخاب نوع المان
فرض نمودن تابع تغییر شکل	فرض نمودن تابع تغییر دما
روابط تنش و کرنش	روابط دمایی
استخراج ماتریس سختی المان	استخراج ماتریس هدایتی المان
ادغام نمودن ماتریس‌های المان‌ها	ادغام نمودن ماتریس‌های المان‌ها
حل جابجایی‌های گره‌ها	حل دمایی گره‌ها
حل نیروهای المانی	حل شار / اختلاف المانی

مراحل انجام تحلیل انتقال حرارت

تحلیل المان محدود

- استخراج معادله دیفرانسیل یا فانکشنال
- استخراج ماتریس سختی هر المان
- شبکه‌بندی دامنه حل
- ادغام ماتریس‌های سختی
- انتخاب تابع تغییر شکل (نوع المان)
- اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

استخراج معادله دیفرانسیل انتقال حرارت

معادله هلم‌هولتز

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)+Q=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_x \\ q_y \\ q_z \end{array}\right\}$$ المان‌های جریان حرارتی در راستاهای مربوطه

ρ چگالی ماده

c ظرفیت گرمایی ماده

T دما

$Q=Q(x,y,z,t)$ تابع تولید حرارت بر واحد حجم

استخراج معادله دیفرانسیل انتقال حرارت

قانون فوریه، شارهای حرارتی در جهت‌های مختلف

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}$$

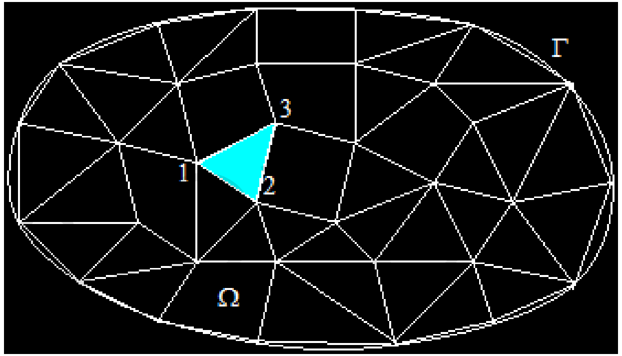
$$q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

k ضریب انتقال حرارت هدایتی جسم

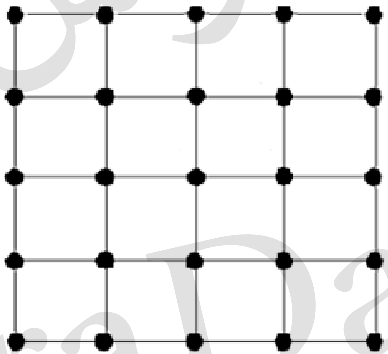
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+Q=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}}$$

شبکه‌بندی دامنه حل

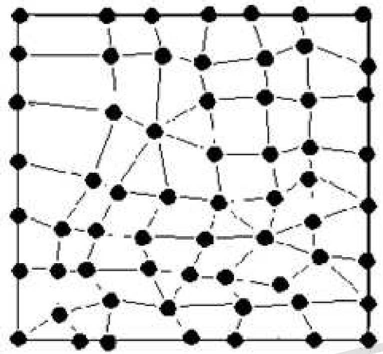
می‌توان دامنه حل را به شبکه‌های مثلثی، چهارگوش یا ترکیبی تقسیم بندی نمود



مش مثلثی



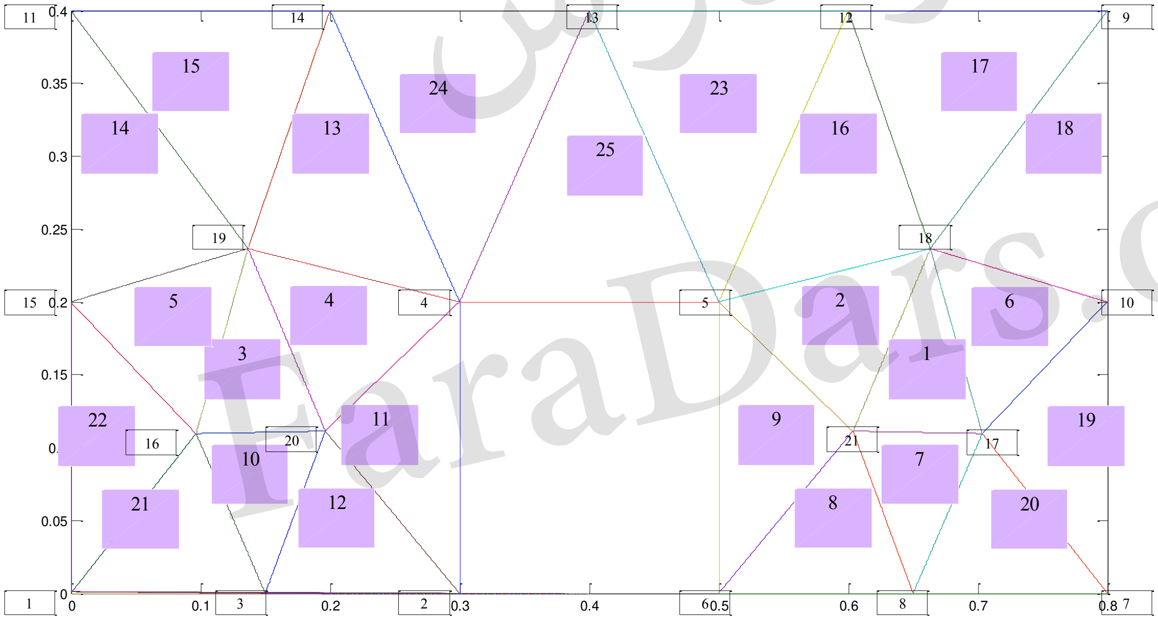
مش مربعی



مش ترکیبی

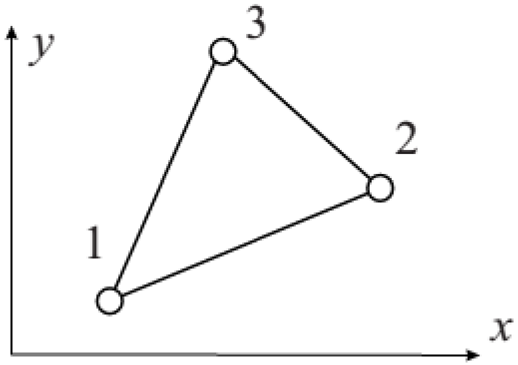
شبکه‌بندی دامنه حل

در این برنامه از شبکه مثلثی استفاده خواهد شد



مش مثلثی

انتخاب تابع تغییر شکل (نوع المان)



- المان مثلثی مرتبه اول در نظر گرفته می‌شود

هر گره ۱ درجه آزادی:

- دما

$$T(x,y)=N_1(x,y)T_1+N_2(x,y)T_2+N_3(x,y)T_3$$

$$N_i(x,y)=\alpha_i+\beta_i x+\gamma_i y$$

$$N_i=\frac{1}{2\Delta}(a_i+b_i x+c_i y),$$

$$a_i=x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1},$$

$$b_i=y_{i+1}-y_{i+2},$$

$$c_i=x_{i+2}-x_{i+1},$$

$$\Delta=\frac{1}{2}(x_2y_3+x_3y_1+x_1y_2-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3)$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

روش گالرکین

$$\int N_i \boxed{R_\Omega} d\Omega = 0$$

$$R_\Omega = \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - Q + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

$$\int_V \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} - Q + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\right) N_i dV = 0$$

$$T = [N]\{T\},$$

$$\{q\} = -k[B]\{T\}$$

$$[N] = [N_1 \; N_2 \; \ldots],$$

$$\{T\} = \{T_1 \; T_2 \; \ldots\}.$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \ldots \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \ldots \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial z} & \dfrac{\partial N_2}{\partial z} & \ldots \end{bmatrix} \{T\} = [B]\{T\}$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

از شکل ضعیف باید استفاده شود

$$\int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} N_i dV - \int_V \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \;\; \frac{\partial N_i}{\partial y} \;\; \frac{\partial N_i}{\partial z} \right] \{q\} dV = \int_V Q N_i dV - \int_{S_1} \{q\}^{\mathrm{T}} \{n\} N_i dS$$

$$+ \int_{S_2} q_s N_i dS - \int_{S_3} h(T - T_e) N_i dS - \int_{S_4} (\sigma \varepsilon T^4 - \alpha q_r) N_i dS$$

$$\boxed{[C]}\{\dot{T}\} + \boxed{([K_c] + [K_h] + [K_r])\{T\}} = \boxed{\{R_T\} + \{R_Q\} + \{R_q\} + \{R_h\} + \{R_r\}}$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

تعریف ماتریس ها

$$[C] = \int_V \rho c [N]^{\mathrm{T}} [N] dV$$

$$[K_c] = \int_V k [B]^{\mathrm{T}} [B] dV$$

$$[K_h] = \int_{S_3} h [N]^{\mathrm{T}} [N] dS$$

$$[K_r]\{T\} = \int_{S_4} \sigma \varepsilon T^4 [N]^{\mathrm{T}} dS$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

$$[C]$$

$$[C]=\int_V \rho c[N]^{\mathrm{T}}[N]dV$$

t بیانگر، ضخامت صفحه

$$[C]=\int_A \rho c\begin{bmatrix} N_1N_2 & N_1N_2 & N_1N_3 \\ N_2N_1 & N_2N_2 & N_2N_3 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3N_3 \end{bmatrix} t\, dA$$

$$[C]=\rho ct\int\begin{bmatrix} N_1N_2 & N_1N_2 & N_1N_3 \\ N_2N_1 & N_2N_2 & N_2N_3 \\ N_3N_1 & N_3N_2 & N_3N_3 \end{bmatrix} dA$$

$$N_iN_j=\frac{1}{4\Delta^2}\left[a_ia_j+\left(a_ib_j+a_jb_i\right)x+\left(a_ic_j+a_jc_i\right)y+\left(b_ic_j+b_jc_i\right)xy+b_ib_jx^2+c_ic_jy^2\right]$$

مختصات نقاط ۱، ۲ و ۳ در المان با چرخش ۱-۲-۳ $\quad (x_3,y_3)\ \ (x_2,y_2)\ \ (x_1,y_1)$

استخراج ماتریس سختی هر المان

$[C]$

m	n	$I = \int_A x^m y^n \, dx \, dy$
0	0	$\int dA = A = [\, x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \,]/2$
0	1	$\int y \, dA = A\bar{y} = A(y_1 + y_2 + y_3)/3$
1	0	$\int x \, dA = A\bar{x} = A(x_1 + x_2 + x_3)/3$
0	2	$\int y^2 \, dA = A(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 9\bar{y}^2)/12$
1	1	$\int xy \, dA = A(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 9\overline{x}\,\overline{y})/12$
2	0	$\int x^2 \, dA = A(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9\bar{x}^2)/12$

استخراج ماتریس سختی هر المان

$$[K_c] = \int_V k[B]^{\mathrm{T}}[B]dV \qquad [K_c]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \cdots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \cdots \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$[k_c] = \frac{k}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_1^2+c_1^2 & b_1b_2+c_1c_2 & b_1b_3+c_1c_3 \\ b_1b_2+c_1c_2 & b_2^2+c_2^2 & b_2b_3+c_2c_3 \\ b_1b_3+c_1c_3 & b_2b_3+c_2c_3 & b_3^2+c_3^2 \end{bmatrix}$$

استخراج ماتریس سختی هر المان

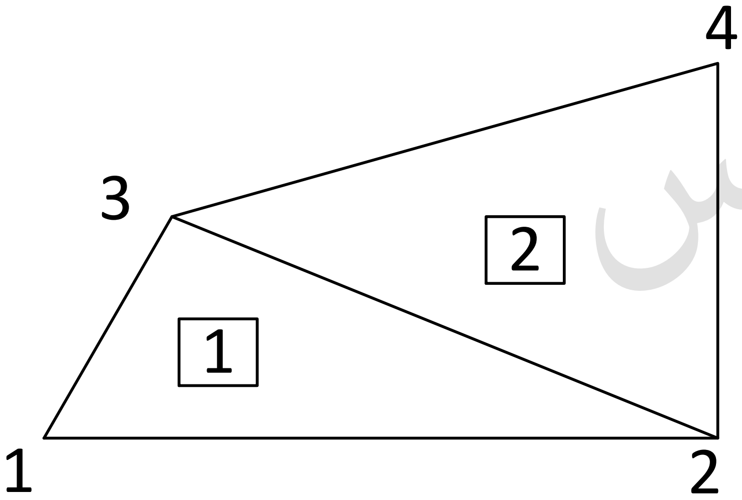
$$[K_h]$$

وجه jk تحت تاثیر این انتقال حرارت جابجایی

$$[K_h] = \int_{S_3} h[N]^{\mathrm{T}}[N]dS$$

$$[K_h] = \frac{hL_{i-j^t}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ادغام ماتریس‌های سختی



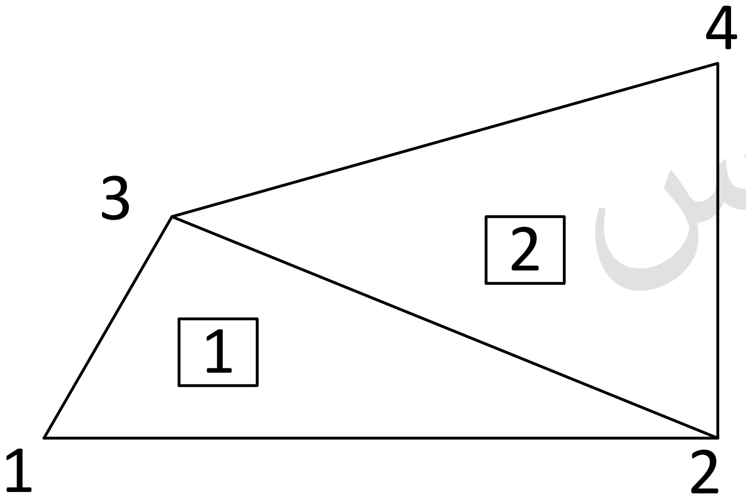
1: 1-2-3

2: 2-4-3

$$K_e^{(1)} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} \\ & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} \\ sym. & & k_{33}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$K_e^{(2)} = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} \\ & k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} \\ sym. & & k_{44}^{(2)} \end{bmatrix}$$

ادغام ماتریس‌های سختی



$$
[K]=\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & 0 \\ & k_{22}^{(1)}+k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(1)}+k_{23}^{(2)} & k_{24}^{(2)} \\ & & k_{33}^{(1)}+k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(2)} \\ Sym. & & & k_{44}^{(2)} \end{bmatrix}
$$

1: 1-2-3

2: 2-4-3

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

شرط مرزی:

شرایط مرزی در انتقال حرارت می‌توانند یکی از ۴ حالت کلی

۱) درجه حرارت ثابت

$$T_s = T_1(x,y,z,t) \text{ on } S_1$$

T_s درجه حرارت مشخص سطح

۲) جریان حرارتی مشخص

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = -q_s \text{ on } S_2$$

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

۳) شرط مرزی انتقال حرارت جابجایی

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = h(T_s - T_e) \text{ on } S_3$$

h ضریب انتقال حرارت جابجایی

T_e درجه حـرارت منبـع جابجـایی

۴) شرط مرزی انتقال حرارت تابش

$$q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z = \sigma \varepsilon T_s^4 - \alpha q_r \text{ on } S_4$$

α ضریب جذب سطح

q_r جریان حرارتی تابش برخوردی بـه سـطح واحد

ε ضریب تابشی سطح

σ ثابت استفان- بولتزمن

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

شرط مرزی:

$$\{R_T\} = -\int_{S_1} \{q\}^{\mathrm{T}}\{n\}[N]^{\mathrm{T}} dS$$

$$\{R_Q\} = \int_{V} Q[N]^{\mathrm{T}} dV$$

$$\{R_q\} = \int_{S_2} q_{\mathrm{s}}[N]^{\mathrm{T}} dS$$

$$\{R_r\} = \int_{S_4} \alpha q_{\mathrm{r}}[N]^{\mathrm{T}} dS$$

$$\{R_h\} = \int_{S_3} hT_{\mathrm{e}}[N]^{\mathrm{T}} dS$$

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

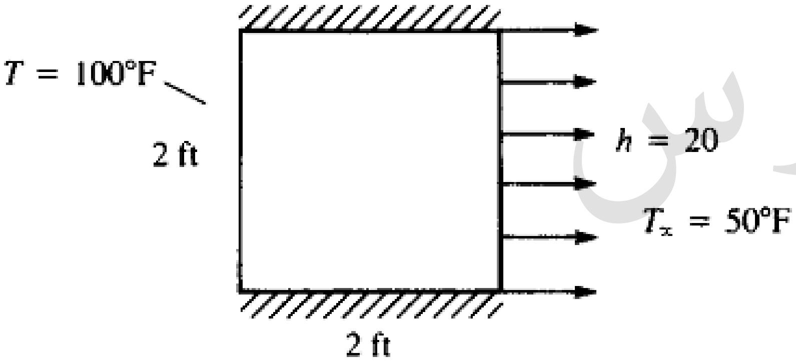
انتقال حرارت جابجایی $\{R_h\}$

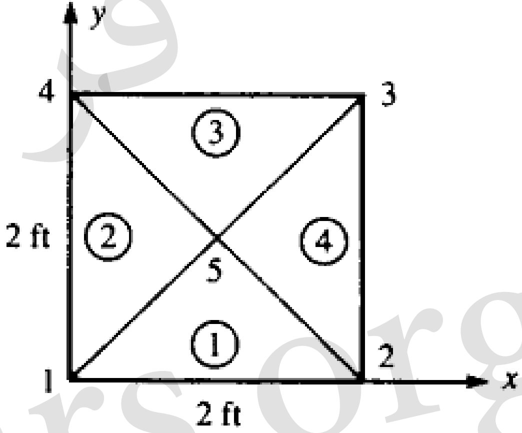
$$\{R_h\} = \int_L hT_e [N]^T \, dL = \int_0^1 hT_e [N_1 \; N_2]^T L \, d\xi = hT_e L \int_0^1 [N_1 \; N_2]^T d\xi$$

$$N_1 = 1 - \xi, \quad N_2 = \xi$$

$$\{R_h\} = \frac{hT_e L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

مثال اول:

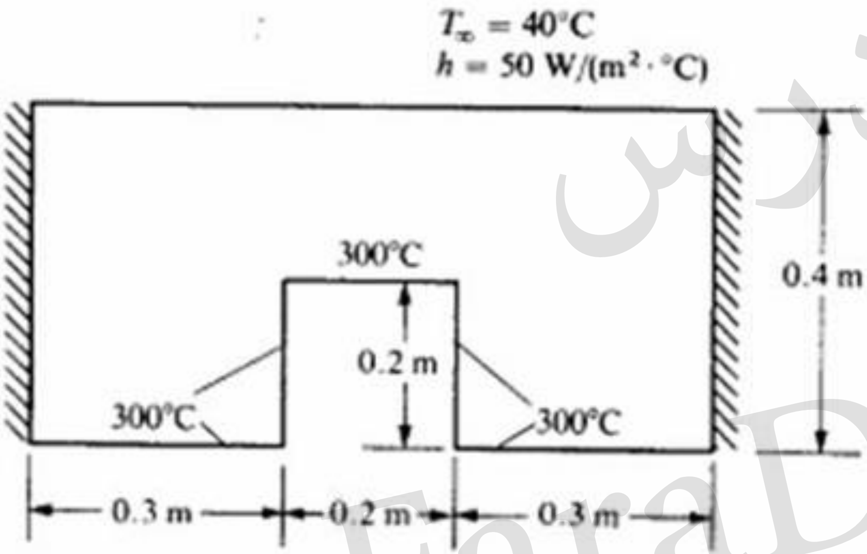




$$K_{xx} = K_{yy} = 25\, Btu/(h - ft^2 - {}^\circ F)$$

ضخامت صفحه نیز برابر با 1 ft.

مثال دوم:



$$K_{xx} = K_{yy} = 150W \ / (m^2 - °C)$$

C=870

$$\rho = 2800\left(\frac{kg}{m^3}\right)$$

ضخامت صفحه نیز برابر با 0.1 m

مقدمه ای بر روش المان محدود

تحلیل تنش بر روی صفحه‌ی دارای ناپیوستگی

مدرس:
مجید خزایی
کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا
دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران)

فهرست مطالب

۱ مقدمه

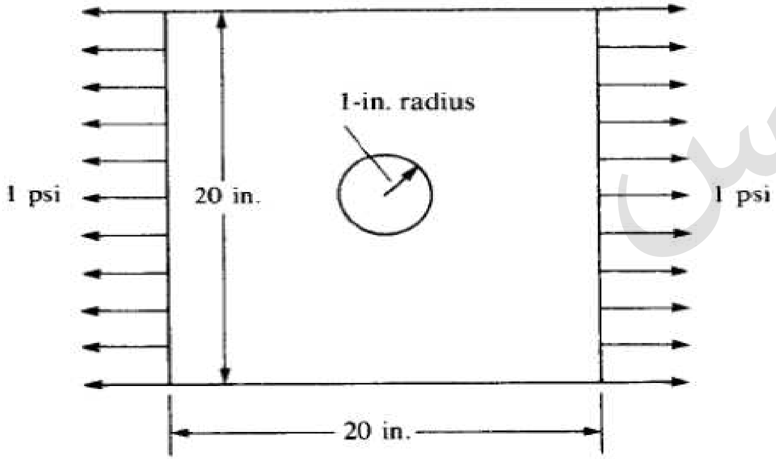
۲ المان‌های ایزوپارامتریک و انتگرال‌گیری عددی

۳ تحلیل تنش صفحه دارای ناپیوستگی

۴ نتیجه گیری

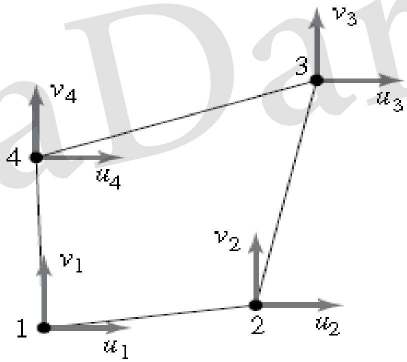
❑ مقدمه

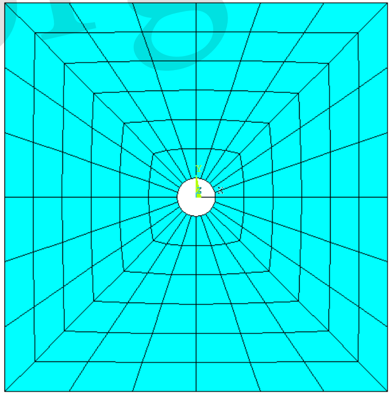
مقدمه



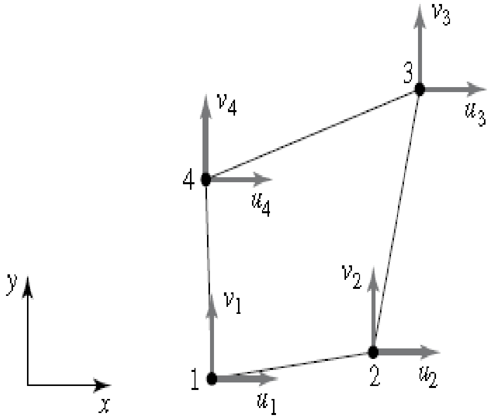
تحلیل تنش صفحات دارای ناپیوستگی

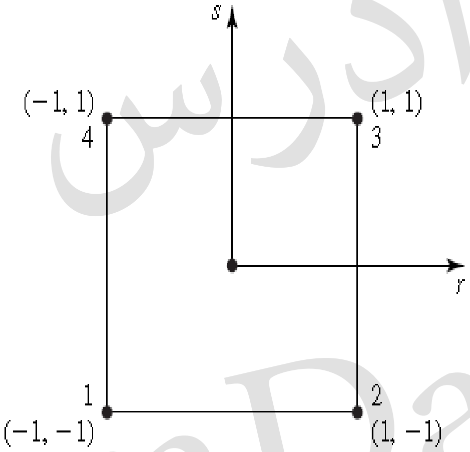
المان‌ها دارای شکل مستطیلی کامل نیستند





مقدمه





شکل غیر استاندارد ایجاد شده ⟷ شکل استاندارد

نگاشت

مشکلات ایجاد شده:

- انتگرال‌گیری عددی بر روی دامنه سخت می‌شود
- توابع شکل برای این حالت تعریف نشده‌اند

المان‌های ایزوپارامتریک

$\{x\}=[\bar{N}]\{c\}^T$ $\{c\}=\{x_1 x_2 x_3 x_4\}$ $[\bar{N}]=[\bar{N}_1 \bar{N}_2 \bar{N}_3 \bar{N}_4]$

$\{\phi\}=[N]\{d\}^T$ $\{d\}$ درجات آزادی $[N]=[N_1 N_2 N_3 N_4]$

مرتبه $[\bar{N}]$ کمتر از مرتبه $[N]$ باشد، **Sub parametric**

مرتبه $[\bar{N}]$ برابر با مرتبه $[N]$ باشد، **Isoparametric**

مرتبه $[\bar{N}]$ بیشتر از مرتبه $[N]$ باشد، **Supper parametric**

المان‌های ایزوپارامتریک

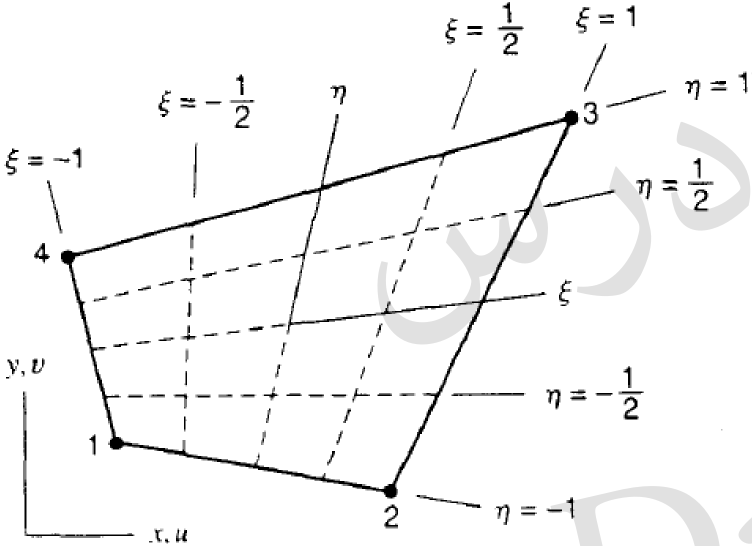
Geometric relations:

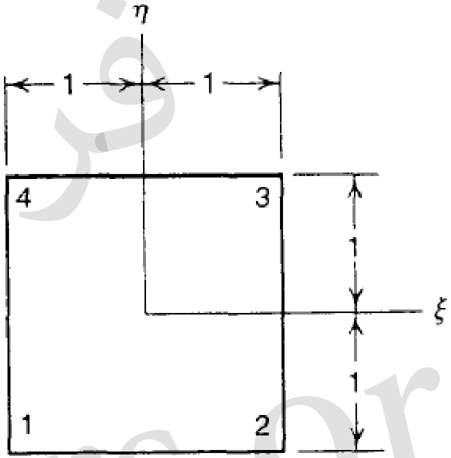
$$\boxed{1 = \sum_{i=1}^{n} N_i^{(e)}, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i N_i^{(e)}, \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i N_i^{(e)}.}$$

Displacement expansion:

$$\boxed{u_x = \sum_{i=1}^{n} u_{xi} N_i^{(e)}, \qquad u_y = \sum_{i=1}^{n} u_{yi} N_i^{(e)}.}$$

المان‌های ایزوپارامتریک مربعی چهارگوش





$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum N_i x_i \\ \sum N_i y_i \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{c}\} \qquad \text{and} \qquad \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum N_i u_i \\ \sum N_i v_i \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{d}\}$$

المان‌های ایزوپارامتریک مربعی چهارگوش

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum N_i x_i \\ \sum N_i y_i \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{c}\} \quad \text{and} \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum N_i u_i \\ \sum N_i v_i \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{d}\}$$

$$\{\mathbf{c}\} = \lfloor x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4 \rfloor^T$$

$$\{\mathbf{d}\} = \lfloor u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \rfloor^T$$

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

المان‌های ایزوپارامتریک مربعی چهارگوش

تبدیلات مشتق

هدف یافتن مشتق یک پارامتر میدان مانند f نسبت به s و t

قانون مشتق زنجیری

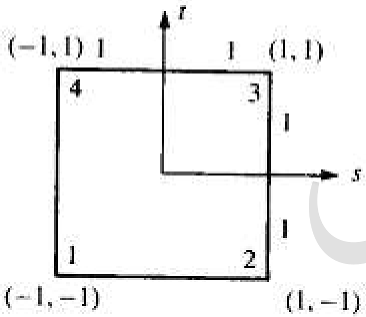
$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

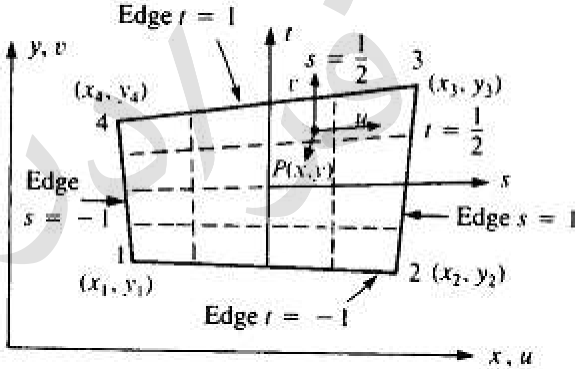
$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial s}\\ \frac{\partial f}{\partial t}\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{bmatrix} \Rightarrow [J]=\begin{bmatrix}\sum\left(\frac{\partial N}{\partial s}\right)_i x_i & \sum\left(\frac{\partial N}{\partial s}\right)_i y_i\\ \sum\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_i x_i & \sum\left(\frac{\partial N}{\partial s}\right)_i y_i\end{bmatrix} \Rightarrow [J]^{-1}=[\Gamma]=\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{bmatrix}$$

المان‌های ایزوپارامتریک مربعی چهارگوش





$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [N]\{C\} \qquad \{C\} = [x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y_3\, x_4\, y_4]^T$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$[J]_{2\times2} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial N}{\partial s} \right)_i \\ \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial N}{\partial t} \right)_i \end{bmatrix}_{2\times4} \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{Bmatrix}_{4\times2}$$

المان‌های ایزوپارامتریک مربعی چهارگوش

$$[A]_{2\times 4}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{4}\left(\dfrac{\partial N}{\partial s}\right)_i\\ \sum\limits_{i=1}^{4}\left(\dfrac{\partial N}{\partial t}\right)_i\end{bmatrix}_{2\times 4}\Rightarrow [A]_{2\times 4}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-(1-t) & (1-t) & (1+t) & -(1+t)\\ -(1-s) & -(1+s) & (1+s) & (1-s)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}=[\Gamma]\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial s}\\ \dfrac{\partial f}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial s}\\ \dfrac{\partial f}{\partial t}\end{bmatrix}$$

مراحل انجام تحلیل تنش صفحات

تحلیل المان محدود

- استخراج معادله دیفرانسیل یا فانکشنال
- استخراج ماتریس سختی هر المان
- شبکه‌بندی دامنه حل
- ادغام ماتریس‌های سختی
- انتخاب تابع تغییر شکل (نوع المان)
- اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

استخراج معادله دیفرانسیل

تابع پتانسیل

$$\pi_p = \pi_p(u_i, v_i, u_j, \ldots, v_m)$$

$$\pi_p = U + \Omega_b + \Omega_p + \Omega_s$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}\, dV$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\}\, dV$$

استخراج معادله دیفرانسیل

$$\Omega_b = -\iiint_V \{\psi\}^T \{X\}\, dV$$

$\{\psi\}$ تابع میدان جابجایی

$\{X\}$ وزن یا ماتریس چگالی بر واحد حجم

$$\Omega_p = -\{d\}^T \{P\}$$

$\{d\}$ جابجایی درجات آزادی

$\{p\}$ نیروی متمرکز

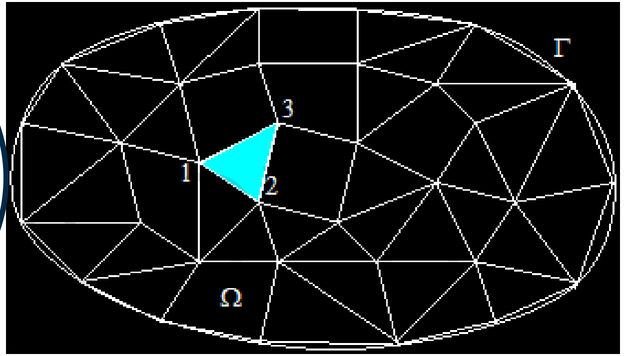
$$\Omega_s = -\iint_S \{\psi_S\}^T \{T_S\}\, dS$$

$\{T_s\}$ نیروهای سطحی

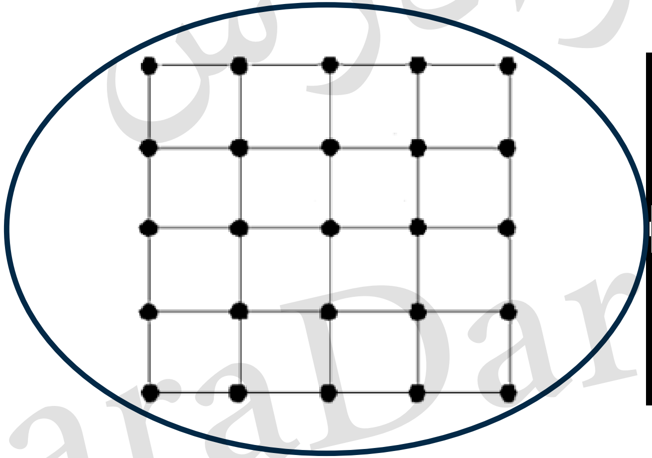
$\{\psi_s\}$ میدان جابجایی سطح

شبکه‌بندی دامنه حل

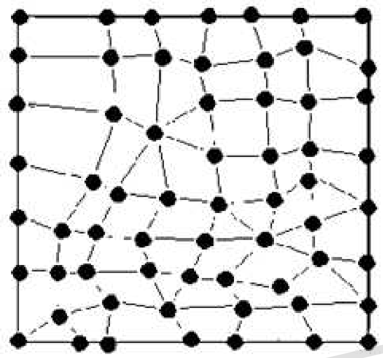
می‌توان دامنه حل را به شبکه‌های مثلثی، چهارگوش یا ترکیبی تقسیم بندی نمود



مش مثلثی

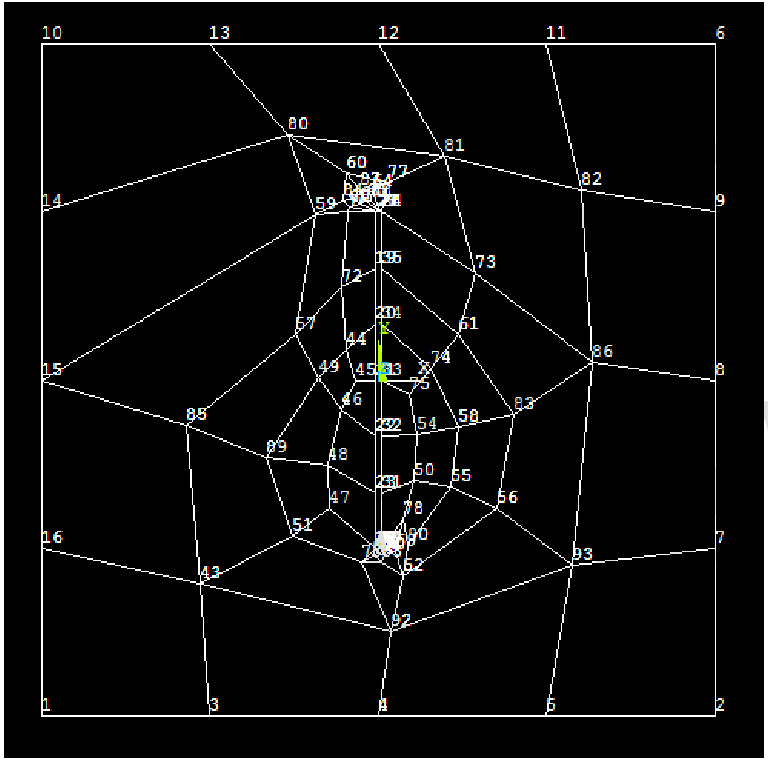


مش مربعی



مش ترکیبی

شبکه‌بندی دامنه حل

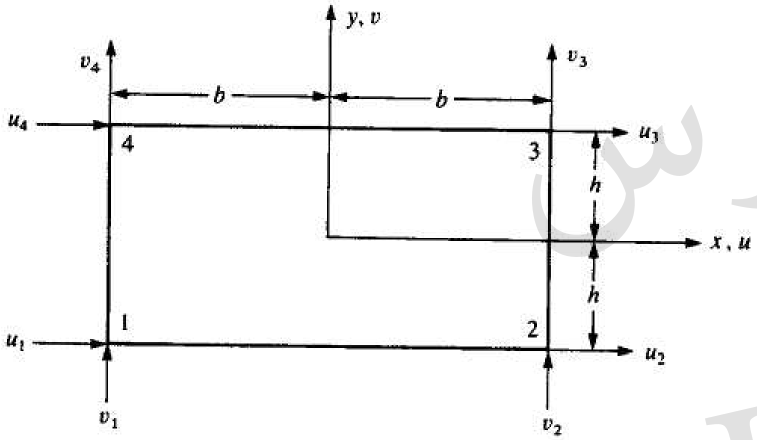


در این برنامه از شبکه چهارگوش استفاده خواهد شد

مش چهارگوش

انتخاب تابع تغییر شکل (نوع المان)

المان چهارگوش ۴ گره:



توابع تخمینی درجات آزادی:

$$u = \sum_{i=1}^{4} a_i N_i$$

$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$$

$$v(x,y) = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

استخراج ماتریس سختی

$$\pi_p = \frac{1}{2}\iiint_V \{d\}^T [B]^T [D][B]\{d\}\, dV - \iiint_V \{d\}^T [N]^T \{X\}\, dV$$

$$- \{d\}^T \{P\} - \iint_S \{d\}^T [N_S]^T \{T_S\}\, dS$$

$$\pi_p = \frac{1}{2}\{d\}^T \iiint_V [B]^T [D][B]\, dV \{d\} - \{d\}^T \iiint_V [N]^T \{X\}\, dV$$

$$- \{d\}^T \{P\} - \{d\}^T \iint_S [N_S]^T \{T_S\}\, dS$$

استخراج ماتریس سختی

$$\{f\} = \iiint_V [N]^T \{X\}\, dV + \{P\} + \iint_S [N_S]^T \{T_S\}\, dS$$

$$\pi_p = \frac{1}{2}\{d\}^T \iiint_V [B]^T [D][B]\, dV \{d\} - \{d\}^T \{f\}$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \{d\}} = \left[\iiint_V [B]^T [D][B]\, dV\right] \{d\} - \{f\} = 0$$

$$\iiint_V [B]^T [D][B]\, dV \{d\} = \{f\}$$

$$[k] = \iiint_V [B]^T [D][B]\, dV \qquad [k] = t \iint_A [B]^T [D][B]\, dx\, dy$$

استخراج ماتریس سختی

$$[K]=\iint_A [B]^T [D][B]\, t\, dx\, dy$$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\iint_A f(s,t)\,|J|\,ds\,dt$$

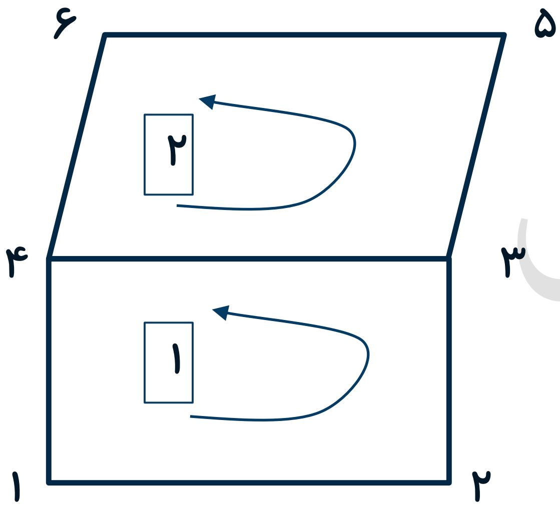
$$[K]=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}[B]^T[D][B]\,t\,|J|\,ds\,dt$$

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}F(s,t)\,ds\,dt$$

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}F(s,t)\,ds\,dt=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}W_i W_j F(s_i,t_j)$$

$N_{Gauss\ Points}$	**S, t**	W_i
1	0.0	2.0
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1.0
3	±0.7745966692 0	0.5555555556 0.8888888889
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0.0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889

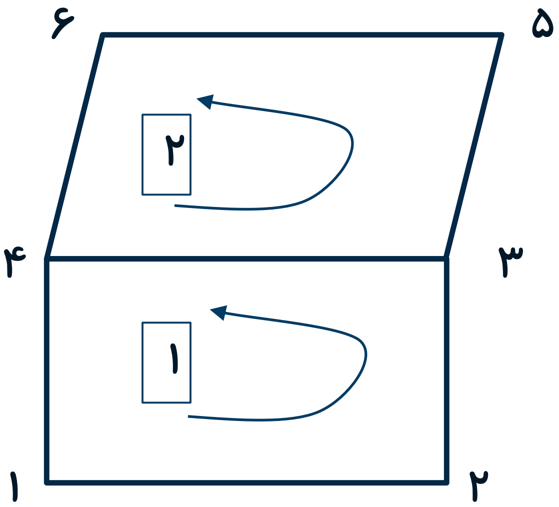
ادغام ماتریس‌های سختی



$$K_e^{(1)} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} \\ & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{34}^{(1)} \\ & & k_{33}^{(1)} & k_{34}^{(1)} \\ & & & k_{44}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$K_e^{(2)} = \begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} k_{33}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} & k_{34}^{(2)} \\ & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} & k_{54}^{(2)} \\ & & k_{66}^{(2)} & k_{64}^{(2)} \\ & & & k_{44}^{(2)} \end{bmatrix}$$

ادغام ماتریس‌های سختی

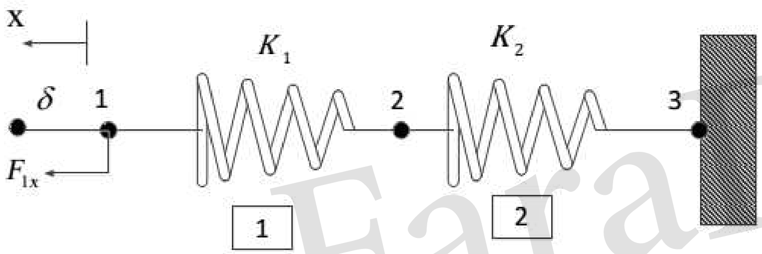


$$K_e = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{14}^{(1)} & 0 & 0 \\ & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} & k_{34}^{(1)} & 0 & 0 \\ & & k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{34}^{(1)} + k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\ & & & k_{44}^{(1)} + k_{44}^{(2)} & k_{45}^{(2)} & k_{46}^{(2)} \\ & & & & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} \\ & & & & & k_{66}^{(2)} \end{bmatrix}$$

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری

شرط مرزی:

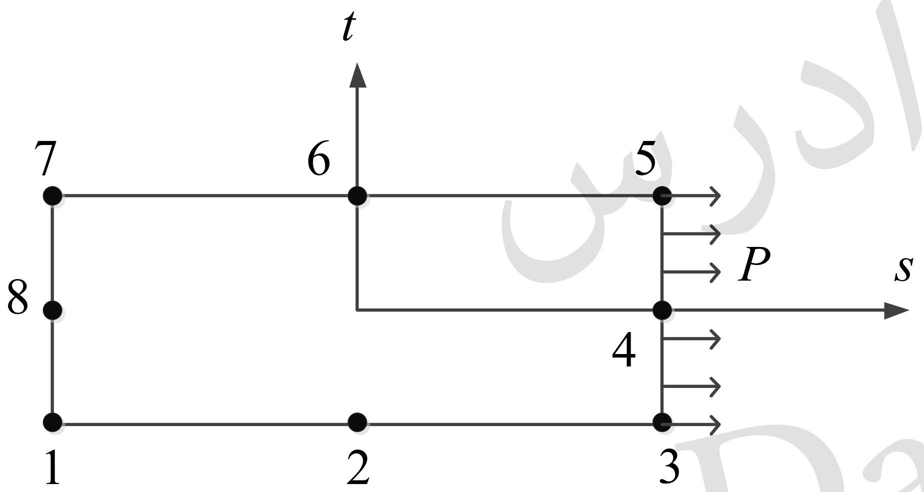
شرط مرزی به روش پنالتی اعمال میگردد



$$[K]_G = \begin{bmatrix} K_1 + K_b & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_b \end{bmatrix}$$

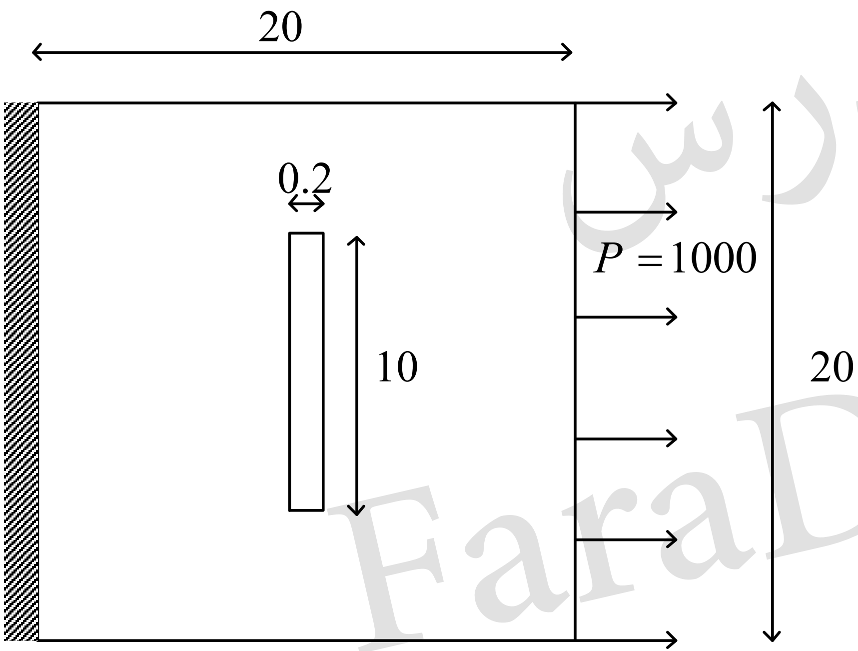
$$\{F\} = \begin{bmatrix} F_{1x} + K_b \delta_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اعمال شرایط مرزی و بارگذاری



$$\{f_s\} = \int_{-1}^{1} [N_s]^T \{T\} h \frac{L}{2} dt$$

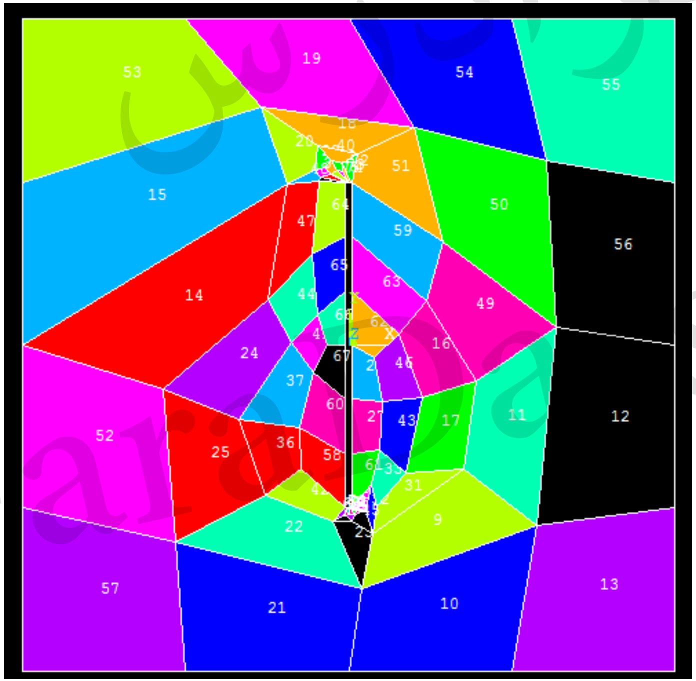
مثال



$$E = 200Gpa \qquad \nu = 0.3$$

مثال

این نوع شبکه بندی از ۹۳ گره و ۷۵ المان چهارگوش ۴ گره ایی



- نتیجه گیری

نتیجه‌گیری

تحلیل تنش صفحات دارای ترک

- المان های ایزوپارامتریک
- انتگرال گیری عددی
- تحلیل جابجایی
- تحلیل تنش