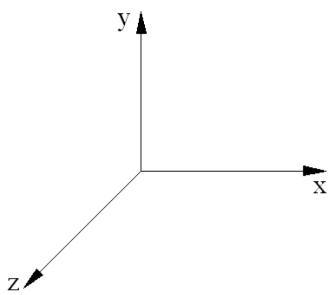
فصل دوم

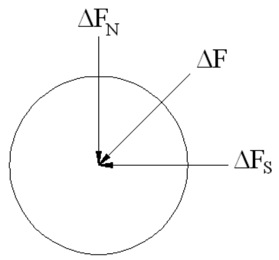
استاتیک سیالات

مقدمه

در این فصل ابتدا تنش و مولفه های آن معرفی می شوند و سپس اثبات می شود در یک نقطه درون یک سیال ساکن فشار در همه جهات یکسان است. در بخش دوم معادله اساسی استاتیک سیالات بدست آورده می شود و برای سیالات غیر قابل تراکم و قابل تراکم استفاده می شود. در بخش سوم مانومترها و روش حل مسائل مانومترها معرفی می شوند. در بخش چهارم نیروهای وارد بر سطوح افقی و مایل و منحنی مورد بحث و بررسی قرار می گیرد و در ادامه روش منشور فشار و روش انتگرال معرفی می شوند. آخرین مبحث این بخش به نیروهای وارد به سطوح منحنی می پردازد. در نهایت در انتهای فصل نیروی شناوری، شتاب خطی یکنواخت و دوران حول یک محور قائم مورد بحث و بررسی قرار می گیرد.

۲-۱ تنش در یک نقطه

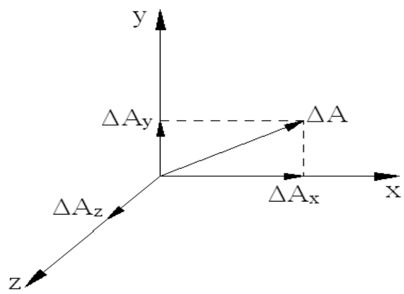


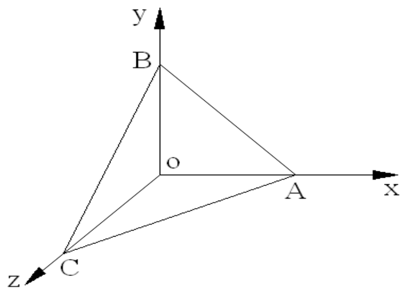


اگر به المان سطح $\Delta\vec{A}$ نیرو $\Delta\vec{F}$ اعمال شود، تنش در یک نقطه بصورت زیر تعریف می شود که و هر کدام سه مولفه دارند.

$$Stress = Lim_{\Delta\vec{A}\to 0}\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta\vec{A}}$$

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x\hat{i} + \Delta A_y\hat{j} + \Delta A_z\hat{k}$$





$\Delta A_X = (OCB)$ سطح

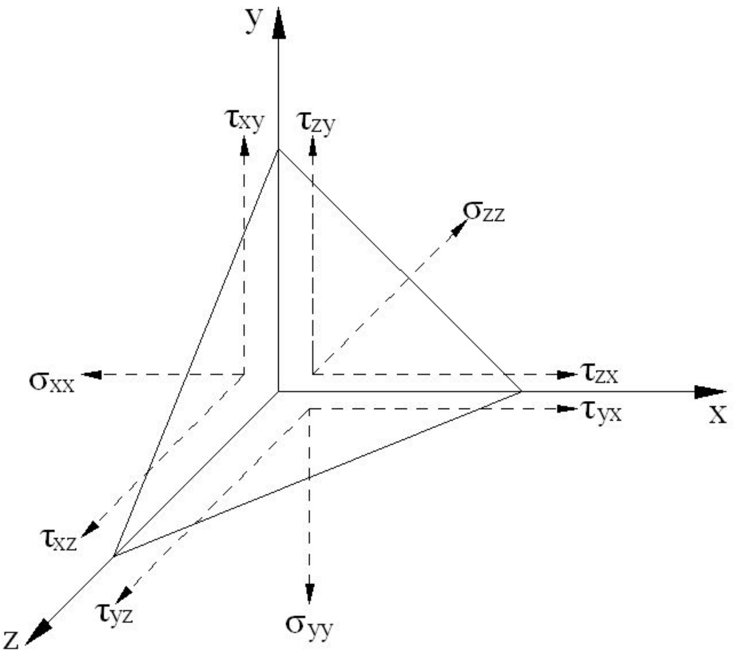
$\Delta A_Y = (OCA)$ سطح

$\Delta A_Z = (OAB)$ سطح

$$\Delta\vec{F} = \Delta F_X \hat{i} + \Delta F_Y \hat{j} + \Delta F_Z \hat{K}$$

$$\frac{\Delta F_X}{\Delta A_X} = \sigma_{xx} \quad , \quad \frac{\Delta F_Y}{\Delta A_X} = \tau_{xy} \quad , \quad \frac{\Delta F_Z}{\Delta A_X} = \tau_{xz}$$

بنابراین روی هر سطح مانند ΔA_x سه مولفه تنش وجود دارد که دو تای آنها تنشهای مماسی (نیرو بصورت مماسی به سطح اعمال می شود) و یکی بصورت تنش نرمال (نیرو بصورت عمود بر سطح وارد می شود) می باشند. این تنشها در شکل زیر نشان داده شده اند.



$$Stress\ Tensor = \tau = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{YX} & \sigma_{YY} & \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} & \tau_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$

σ_{xx} تنش نرمال

τ_{XY} مولفه تنش برشی موازی محور Oy

τ_{XZ} مولفه تنش برشی موازی محور Oz

همانطوریکه ملاحظه می شود اندیس اول از سمت چپ نشان دهنده جهت عمود بر صفحه ای است که تنش آن مورد نظر است و اندیس دوم جهت تنش را نشان می دهد. برای مثال τ_{XY} تنش برشی روی صفحه ایی که عمود بر جهت محور x ها است می باشد که این تنش در جهت y اعمال می شود. یک تنش یک تانسور درجه دوم است که ۹ ($۳^۲$) مولفه دارد همانطور که یک بردار و یک کمیت اسکالر بترتیب تانسور درجه اول و تانسور درجه صفر هستند که بترتیب ۳ ($۳^۱$) و ۱ ($۳^۰$) مولفه دارند. تانسور تنش بصورت زیر نشان داده می شود.

$$\text{تنش در یک نقطه} = \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{XX} & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{YX} & \sigma_{YY} & \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} & \tau_{ZY} & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$

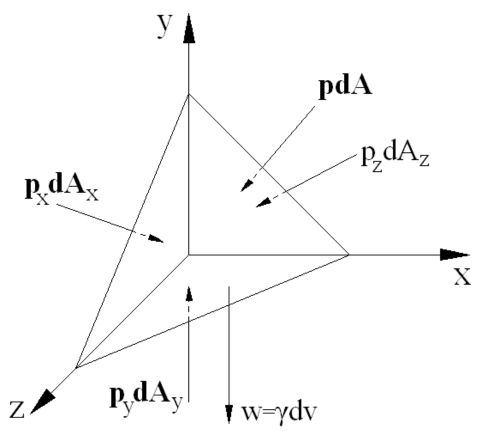
در *سیال ساکن* حرکت وجود ندارد در نتیجه حرکت نسبی(گرادیان سرعت) هم وجود ندارد، بنابراین تنش برشیصفر می شود و تانسور تنش به فرم زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ZZ} \end{bmatrix}$$

چون سیال ساکن است فقط تنش فشاری وجود دارد (عمود بر سطح) و این تنش همواره عمود بر سطح است.

فشار در یک نقطه در درون یک سیال ساکن در تمام جهات یکسان است.

برای نشان دادن این موضوع یک المان به فرم زیر می گیریم .



فشارموثربروجه عمودبرمحور $P_X = X$

فشارموثربروجه عمودبرمحور $P_Y = Y$

فشارموثربروجه عمودبرمحور $P_Z = Z$

فشارموثربروجه مایل $P = dA$

وقتی سیال ساکن است نیروی برشی وجود ندارد و فقط نیروی فشاری وجود دارد. در نتیجه برای سیال ساکن این المان باید در حالت تعادل باشد یعنی:

$$\sum F = 0 \Rightarrow \sum F_X = 0 \quad , \quad \sum F_Y = 0 \quad , \quad \sum F_Z = 0$$

به طور کلی دو نوع نیرو داریم :

۱) نیروهای سطحی[1]
۲) نیروهای حجمی[2]

نیروهای سطحی روی سطح عمل می کنند و در مرزها به سیال وارد می شوند ولی نیروهای حجمـی روی تـک تـک ذرات عمل می کنند حال باید اثبات کرد که :

$$P_X = P_Y = P_Z = P$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow P_X dA_X - PdA_l = 0 \Rightarrow P_X = P$$

جون dA_l همان dA_x است.

[1]Surface forces
[2]Body forces

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow P_Y dA_Y - PdA_m - \gamma dv = 0$$

وقتی که حجم المان به سمت صفر میل می کندو با توجه به اینکه dA_m همان dA_y است داریم :

$$P_Y dA_Y - PdA_m = 0 \Rightarrow P_Y = P$$

و به همین ترتیب ثابت می شود که $P_Z = P$ پس :

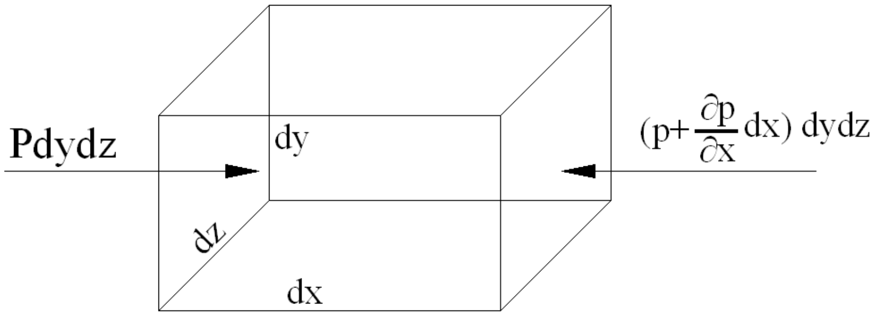
$$P_X = P_Y = P_Z = P$$

یعنی وقتی که حجم جسم به سمت صفر میل می کند فشار در تمام جهاتی که بر یک نقطه وارد میشود یکسان است .بنابراین در مکانیک سیالات ساکن،فشار در یک نقطه در تمام جهات یکسان است . ولی اگر سیال در حال حرکت باشد، فشار در تمام جهات یکسان نیست و آن نیز به دلیل تنش برشی می باشد. می توان اثبات کرد برای سیال تراکم ناپذیر در حال حرکت، فشار در یک نقطه متوسط تنشهای نرمال در آن نقطه است.

۲-۲ معادله اساسی استاتیک سیالات[3]

برای بدست آوردن معادلات اساسی استاتیک سیالات، المانی به صورت مکعب مستطیل در نظر می گیریم به ابعاد dx, dy, dz و قانون دوم نیوتن را برای آن می نویسیم.

[3] Basic equation of fluid static



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

در این رابطه نیرو مجموع نیروهای سطحی و حجمی هستند. در این حالت سیال می تواند شتاب داشته باشد ولی تنش برشی ندارد، در این حالت تمام ذرات سیال با یک سرعت حرکت می کنند مثل حرکت سیالی که درون یک ماشین قرار دارد یعنی هر گاه لایه های مختلف سیال نسبت به هم سرعتی نداشته باشند تنش برشی بین آنها صفر است.

در وجه سمت چپ المان فشار را P گرفته و در وجه سمت راست طبق بسط تیلور فشار را می یابیم.

بسط تیلور $f(x+dx) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.\frac{(dx)^2}{2!} + ...$

اگر تابع f(x) را P در نظر بگیریم و از جملات سوم به بعد را نیز حذف کنیم داریم:

فشار در سمت راست المان $= p + \frac{\partial p}{\partial x}dx$

$$\Rightarrow \sum F_x = P\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz = -\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

$$\sum F_y = p\,dx\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dx\,dz - \gamma\,dx\,dy\,dz = -\frac{\partial p}{\partial y}dx\,dy\,dz - \gamma dx\,dy\,dz$$

$$\sum F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}dx\,dy\,dz$$

$$\sum \vec{F} = \sum F_x\hat{i} + \sum F_y\hat{j} + \sum F_z\hat{k} = (-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz)\hat{i} + (-\frac{\partial p}{\partial y}dy\,dx\,dz - \gamma\,dx\,dy\,dz)\hat{j}$$

$$+ (-\frac{\partial p}{\partial z}dz\,dy\,dx)\hat{k} = m\vec{a} = \rho\,dx\,dy\,dz\vec{a}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right)dx\,dy\,dz - \gamma\,dx\,dy\,dz\,\hat{j}$$
$$= \rho\,dx\,dy\,dz\,\vec{a}$$

اگر معادله فوق را به $dx.dy.dz$ تقسیم کنیم:

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right) - \gamma\,\hat{j} = \rho\,\vec{a}$$

این معادله، معادله اساسی سیالات در حال حرکت بدون تنش برشی می باشد که بفرم فشرده بصورت ذیل است.

$$-\nabla P - \gamma\,\hat{j} = \rho\,\vec{a}$$

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \qquad \nabla : del$$

در معادله قبل عبارت ∇P گرادیان فشار نامیده می شود.

در استاتیک سیالات شتاب صفر می باشد و داریم :

$$-\nabla \rho - \gamma\,\hat{j} = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right) - \gamma\,\hat{j} = 0$$

این معادله نشان می دهد که ماکزیمم سرعت تغییرفشاردرجهت بردارجاذبه رخ می دهد چون $(Isolines)$ عمود بر گرادیان هستند خطوط فشار ثابت عمودبربردارجاذبه هستند.از این معادله کلی سه معادله بدست می آید.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

یعنی P تابعی از x نیست و با تغییر x، P تغییر نمی کند. یعنی در یک سطح افقی فشار ثابت است که یک شکل از قانون پاسکال است.

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \gamma = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma$$

این رابطه نشان می دهد که P تابعی از y است.

$$-\frac{\partial\, p}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\, p}{\partial z} = 0$$

یعنی P تابعی از z نیست. بنابراین P فقط تابعی ازy است.

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma \Rightarrow \frac{dp}{dy} = -\gamma \Rightarrow dp = -\gamma dy$$

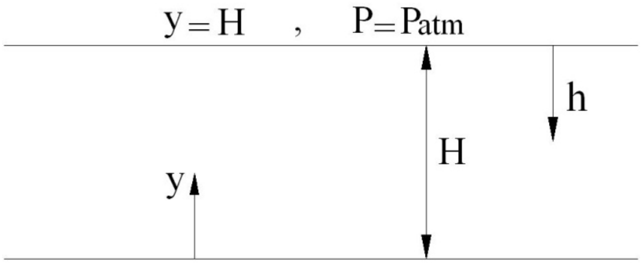
به این معادله، معادله دیفرانسیل استاتیک سیالات گویند.

۲-۲-۱ سیالات غیر قابل تراکم

برای سیالات غیر قابل ترکم دانسیته ثابت است لذا داریم:

$$\Rightarrow \int dp = \int -\rho g dy \Rightarrow P = -\rho g y + c \qquad (1)$$

حال فرض کنید می خواهیم در درون استخری فشار را در یک نقطه بیابیم. باید توجه داشت که در رابطه (1) جهت مثبت محور y رو به بالا است با توجه به آنکه در کارهای مهندسی جهت مثبت رو به پایین است (مثلا هر چقدر از سطح آب پایین تر برویمفشار اضافه می شود) لذا رابطه (1) در کارهای مهندسی همانطور که نشان داده خواهد شد به شکل $P = \rho g h$ استفاده می شود که در آن عمق از سطح آزاد سیال است و جهت مثبت آن رو به پایین است .



$$\begin{cases} P = -\rho g y + c \\ at \ \ y = H \quad P = P_{atm} \end{cases}$$

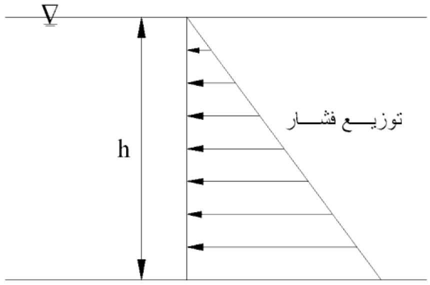
$$\Rightarrow P_{atm} = -\rho g H + c \Rightarrow c = P_{atm} + \rho g H$$

$$\Rightarrow P = -\rho g y + P_{atm} + \rho g H = P_{atm} + \rho g\left(H - y\right) \qquad h = H - y$$

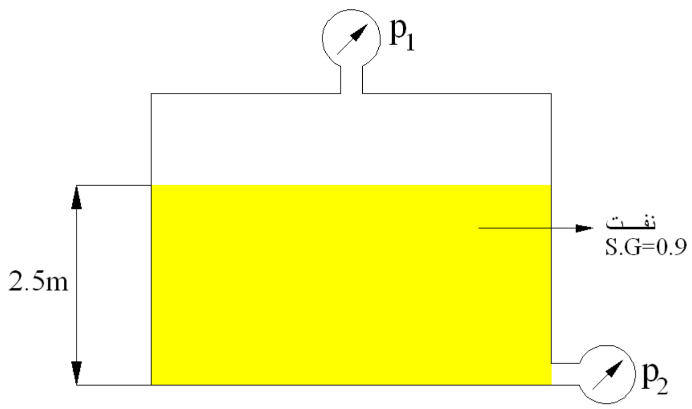
$$\Rightarrow P_{abs} = P_{atm} + \rho g h \Rightarrow P_{abs} - P_{atm} = P_{gauge} = \rho g h = \gamma h$$

h ارتفاع از سطح مایع به طرف پایین است.

توجه : از آنجا که فشار با عمق تناسب مستقیم دارد توزیع آن مثلث گونه است.



مثال۲-۱: مخزن سوختی در شکل زیر در نظر بگیرید. فشار عقربه در قاعده مخزن P_2 را در حالاتی که فشار بـالای مخزن ارقام صفر یا $25kpa$ و یا $-10kpa$ را نشان می دهد تعیین نمایید؟



$$P = \gamma h = \rho g h = 0.9 \times 1000 \times 9.81 \times 2.5 = 22.1kpa$$

الف) اگر $P_1 = 0kpa$ باشد $\qquad p_2 = 22.1kpa$

ب) اگر $P_1 = 25kpa$ باشد $\quad P_2 = 25 + 22.1 = 47.1kpa$

ج) اگر $P_1 = -10kpa$ باشد $\quad P_2 = -10 + 22.1 = 12.1kpa$

۲-۲-۲ سیالات قابل تراکم

در این حالت دانسیته سیال با فشار تغییر می کند.

$$dp = -\rho\, gdy$$

در شرایط ایزوترمال(دما ثابت) اگر بخواهیم رابطه فشار با دانسیته را در یک سیال قابل تراکم با فرض گاز ایده آل بدست آوریم داریم :

$$\mathrm{PV} = nRT \Rightarrow \mathrm{PV} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{MW}} RT \Rightarrow \mathrm{P} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}} \frac{R}{MW} T$$
$$\Rightarrow \mathrm{P} = \rho \overline{\mathrm{R}} \mathrm{T}, \quad \overline{\mathrm{R}} = \frac{R}{MW}$$

$$P = \rho \overline{R} T$$
$$P_0 = \rho_0 \overline{R} T$$
$$\Rightarrow \frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{P_0} P$$

$$\Rightarrow dp = -\frac{\rho_0}{P_0} pgdy \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{P_0} gdy \Rightarrow \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_{y_0}^{y} \frac{\rho_0}{p_0} gdy$$
$$\Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g(y - y_0) \Rightarrow \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{\rho_O}{P_0} g(y - y_0)}$$

در معادلات بالا R ثابت گازها و MW جرم مولکولی می باشند.

تمرین: اگر درجه حرارت بصورت خطی با ارتفاع تغییر کند، رابطه بالا را مجددا اثبات کنید.

$$T = T_0(1 + mz)$$

مثال۲-۲: در صورتیکه درجه حرارت اتمسفر ثابت باشد $(Isothermal\ Condition)$ و فشار و دانسیته هوا در سطح دریا $\rho_0 = 1.24\frac{kg}{m^3}\ ,\ p_0 = 10^5\frac{N}{m^2}(abs)$ باشند، فشار P و دانسیته ρ هوا را در ارتفاع 2000 متری از سطح دریا حساب کنید.

$$\rho_0 = 1.24kg/m^3 \qquad y - y_0 = 2000$$
$$p_0 = 10^5 N/m^2 \quad \rho = ?$$
$$P = ?$$

$$e^{-\frac{\rho_O}{P_0}g(y-y_0)} = \frac{p}{p_0}$$

$$P = P_0\ e^{\frac{-\rho_0}{p_0}g(y-y_0)} \Rightarrow P = 10^5\ e^{\frac{-1.24\times9.806}{10^5}(2000)} \Rightarrow P = 78412N/m^2$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0} \Rightarrow \rho = \frac{P}{P_0}\rho_0 = \frac{78412}{10^5}\times1.24 = 0.972Kg/m^3$$

تمرین: شدت فشار در اقیانوس در عمق 1500 متر برای دو حالت زیر چقدراست ؟

۱) فرض کنید آب شور غیر قابل تراکم است و $\gamma_w = 10050\,N/m^3$

۲) فرض کنید آب شور قابل تراکم است و $k = 2.07\times10^9 N/m^2$ که k ضریب ارتجاع است.

تمرین : در یـک روز معلـوم تغییـرات فشـار اتمسـفر در طـول ارتفـاع $10000\,ft$ از سـطح زمـین بـه صـورت $P = P_0 - az^{\frac{1}{3}}$ داده شده است که :

$P_0 = 14.646\,psia =$ فشاردر سطح دریا

$$a = 10\frac{lb_f}{ft^2 . ft^{1/3}}$$

$z =$ ارتفاع از سطح دریا و ft

مقادیر زیر را حساب کنید :

1) وزن مخصوص هوا در ارتفاع $10000\,ft$

2) درجه حرارت هوا در ارتفاع $10000\,ft$

واحدها و مقیاسهای اندازه گیری فشار

وقتی که فشار نسبت به خلاء اندازه گیری شود به آن فشار مطلق[4] گویند و اگر نسبت به فشار اتمسفر اندازه گیری شود به آن فشار نسبی[5] گویند .

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{guage}$$

$$P = \gamma h \quad , \quad s = \frac{\gamma}{\gamma_w} \Rightarrow \quad P = s\gamma_w h$$

[4] ***Absolute pressure***
[5] ***Gauge pressure***

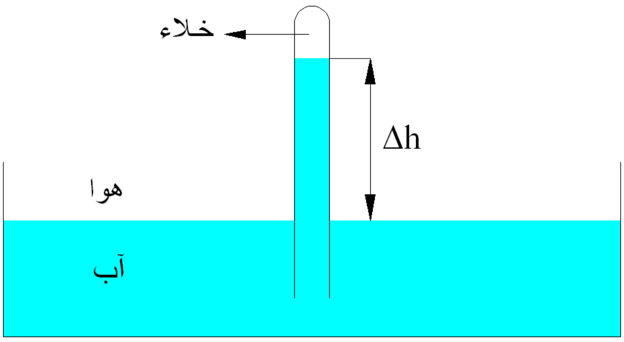
واحدهای فشار

فشار برحسب پاسکال، (lb_f /in^2) psi ، ftH_2O ، mmHg و inHg اندازه گیری می شود که mmHg و واحدهای مشابه ارتفاع معادل فشار می باشند.

فشار بارومتریک

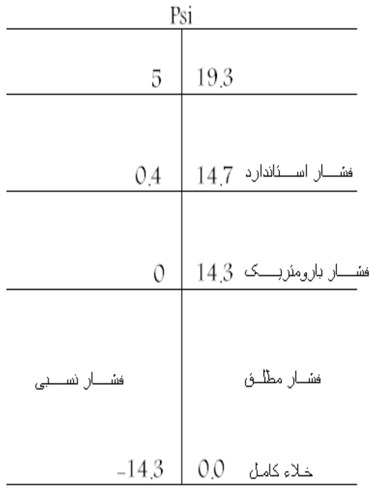
قرائت فشار اتمسفریک از فشار سنج شکل زیربه عنوان فشار بارومتری می باشد .

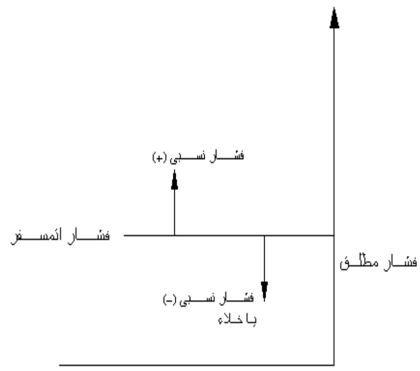
فشار بارومتریک = فشار اتمسفر



فشار استاندارد

عبارت است از فشار متوسط هوا در سطح دریا که برابر است با: $760mmHg$ یا $14.7Psia$ یا $29.92inHg$. در شکل زیر ارتباط بین فشار نسبی و فشار مطلق نشان داده شده است.





برای اندازه گیری فشار در فشارهای بالا از فشار سنج بوردن استفاده می شود و برای فشارهای کم و متوسط از مانومترها استفاده می شود.

۲-۳ مانومترها

یکی از روشهای ساده و معمولی برای اندازه گیری فشار سیالات در فشار کم تا متوسط استفاده از پیزومترها[6] و مانومترها[7] است که هر دوی این فشار سنج ها اساسشان بر مشاهده تغییر ارتفاع ستونی از مایع که تعادل یافته است قرار دارد.

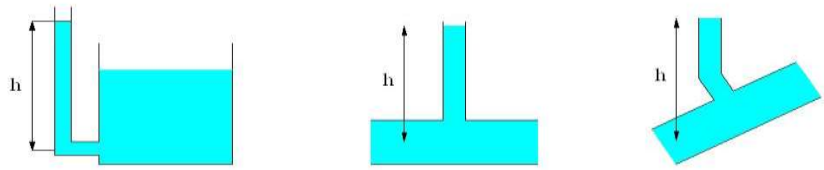
۲-۳-۱ پیزومتر

ساده ترین وسیله اندازه گیری فشار عبارت است از یک لوله شفاف باریک که یک انتهای آن به طور عمودی به لوله اصلی و یا مخزن اتصال یافته و سر دیگرش باز و درنقطه ای بالاتر قرار گرفته است . نکته مهم این است که اتصال به

---

[6] ***Piezometers***
[7] ***Manometers***

نقطه مورد توجه بایستی در جهت عمود بر سطح جداره در آن محل باشد در غیر این صورت فشار اندازه گیری شده درست نخواهد بود. پیزومتر ها وسیله ای ساده و دقیق برای اندازه گیری فشار سیالات هستند ولی فقط برای مایعات غیر فرار و غیر سمی در فشارهای کم مناسب اند.

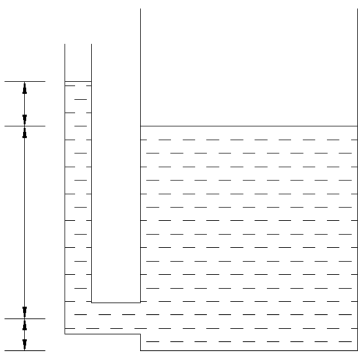


مثال۲-۳: برای پیزومتر شکل زیر تعیین کنید :

الف- فشار پیزومتر واقع در ورودی مخزن

ب- فشار در قاعده آن

ج- فشار در فضای بالای آن



الف) $p = \gamma h = \rho g h = s\rho_w g h = 1000 \times 0.78 \times 9.81 \times 8 = 61.2 kpa$

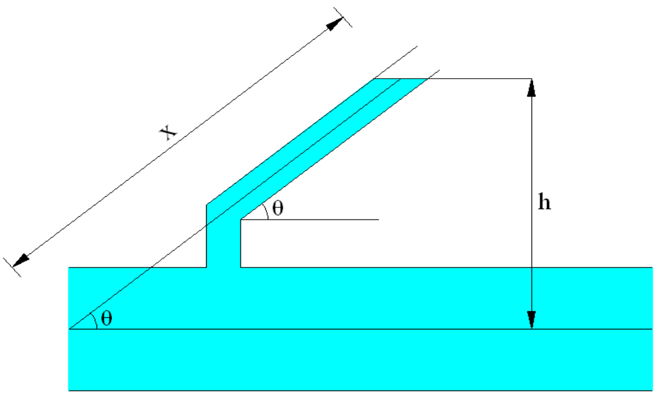
ب) $p = 1000 \times 0.78 \times 9.81 \times 9 = 68.9 \ \ kpa$

ج) $p = 1000 \times 0.78 \times 9.81 \times 2 = 15.3 kpa$

نکته:اگر بین دو نقطه از یک مایع پیوسته وجود داشته باشد، فشار در یک خط افقی ثابت است.

پیزومتر شیب دار

هر گاه فشاری که مورد اندازه گیری است، کوچک باشد با مورب کردن لوله پیزومتر می توان دقت عمل را زیادتر نمود . در این مورد فشار در محور لوله اصلی را از طریق اندازه گیری طول مایع در لوله مورب (x) بدین طریق به دست می آورند.

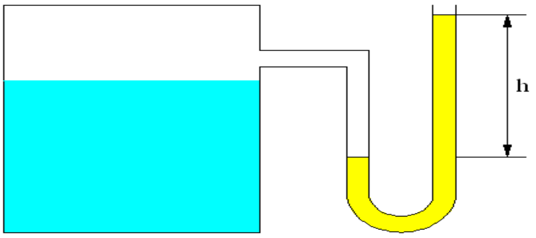


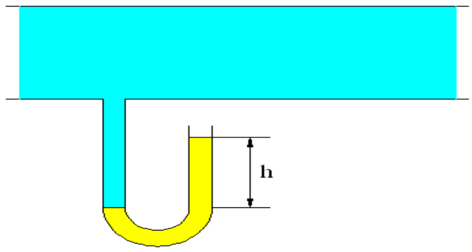
$$\begin{cases} P = \rho\, g\, h \\ \sin\theta = \dfrac{h}{x} \end{cases} \Rightarrow P = \rho\, g\, x \sin\theta$$

۲-۳-۲ مانومتر

مانومتر حالتی از پیزومتر است که در آن از لوله خمیده به شکل U استفاده می شود،این کار سبب می شود که با آن بتوان هم فشار مایعات و هم فشار گازها را اندازه گیری نمود و اگر در آن از جیوه استفاده شود می توان فشارهای

بالاتری نسبت به پیزومتر را اندازه گیری نمود. این وسیله نیز مثل پیزومتر می بایست به طور عمودی به محل اتصال نصب شود ولی برخلاف پیزومتر می توان آن را در بالا یا پایین لوله اصلی متصل نمود.





نکات مهم برای مانومترها :

1) هر دو نقطه در یک ارتفاع در یک مایع پیوسته فشار یکسانی دارند

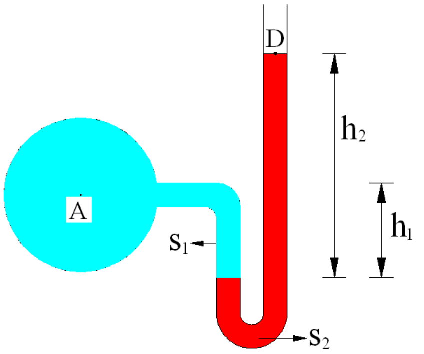
2) هر چه پایین می رویم فشار افزایش پیدا می کند و هرچه بالا می رویم فشار کاهش می یابد یعنی:

۲-۳-۳ *روش حل مسائل مانومترها* :

1) از یک نقطه شروع کرده فشار در این نقطه را بر حسب واحد مناسبی بنویسید.

2) به این فشار،تغییر در فشار از یک سطح تا سطح بعدی از سیال را با همان واحد اضافه کنید (اگر سطح بعدی پایین تر است جمع و اگر بالاتر است تفریق می کنیم)

3) عملیات را تا رسیدن به انتهای دیگر مانومتر ادامه دهید وعبارت را مساوی فشار در آن نقطه قرار دهید چه معلوم باشد چه مجهول.



$$P_A+\gamma_1 h_1-\gamma_2 h_2=P_D=P_{atm}$$
$$P_A-P_{atm}+s_1\gamma_w h_1-s_2\gamma_w h_2=P_D=P_{atm}-P_{atm}$$
$$(P_A)_{gauge}+s_1\gamma_w h_1-s_2\gamma_w h_2=0$$

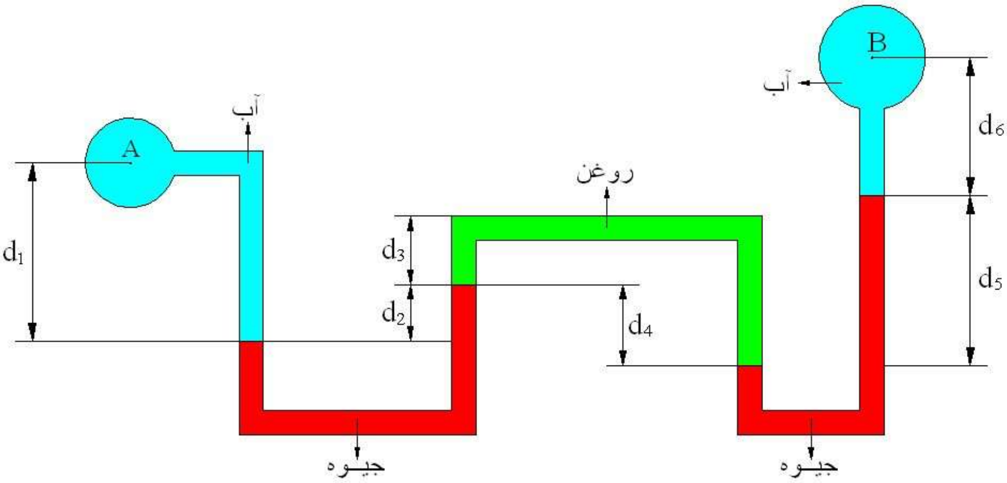
وقتی نقطه دوم در اتمسفر باشد، اگر عبارت سمت چپ را مساوی صفر قرار دهیم فشار در نقطه A بصورت نسبی بدست می آید.

مثال۲-۴ : در شکل بالا فرض کنید $h_1=0.6m, S_1=S_w=1\,, S_2=S_{Hg}=13.57$ و $h_2=0.9m$ باشد P_A را محاسبه کنید؟

$$P_A+1\times 9806\times 0.6-13.57\times 9806\times 0.9=0 \Rightarrow P_A=113877\ \mathrm{P}a$$

مثال۲-۵: در شکل زیر با توجه به اطلاعات داده شده P_A-P_B را محاسبه کنید؟

به این مانومتر، مانومتر تفاضلی می گویند زیرا اختلاف فشار دو نقطه A و B را اندازه می گیرد.



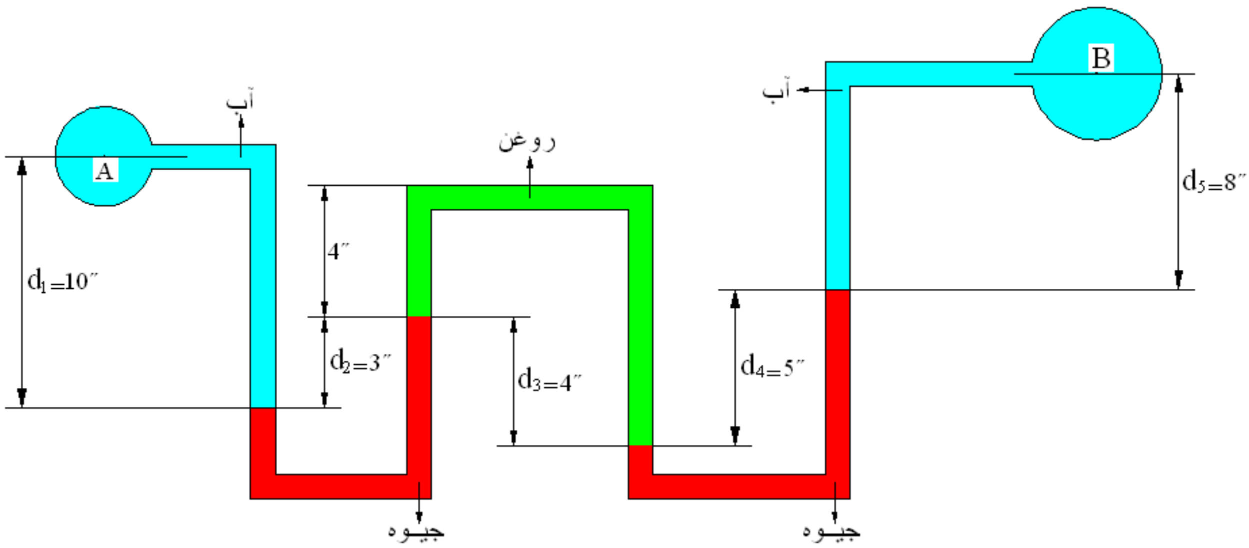
$S_{Hg} = 13.57$
$S_{oil} = 0.8$
$d_1 = 0.25m$
$d_2 = 0.075m$
$d_3 = 0.1m$
$d_4 = 0.1m$
$d_5 = 0.12m$
$d_6 = 0.2m$
$P_A - P_B = ?$

$$P_A + \gamma_w d_1 - \gamma_{Hg} d_2 + \gamma_{oil} d_4 - \gamma_{Hg} d_5 - \gamma_w d_6 = P_B$$

$$P_A - P_B = -9806 \times 0.25 + 13.57 \times 9806 \times 0.075 - 0.8 \times 9806 \times 0.1$$

$$+13.57 \times 9806 \times 0.12 + 9806 \times 0.2 = 24.673 Kpa$$

مثال۲-۶: در شکل زیر با توجه به اطلاعات داده شده P_A-P_B را محاسبه کنید؟



$S_0 = 0.8$

$S_{Hg} = 13.6$

$P_A - P_B = ?$

$$\mathrm{P_A} + \gamma_{\mathrm{w}} \mathrm{d}_1 - \gamma_{\mathrm{Hg}} \mathrm{d}_2 + \gamma_0 \mathrm{d}_3 - \gamma_{\mathrm{Hg}} \mathrm{d}_4 - \gamma_{\mathrm{w}} \mathrm{d}_5 = \mathrm{P_B}$$

$$P_A - P_B = \gamma_w \left(-d_1 + 13.6 d_2 - 0.8 d_3 + 13.6 d_4 + d_5\right)$$

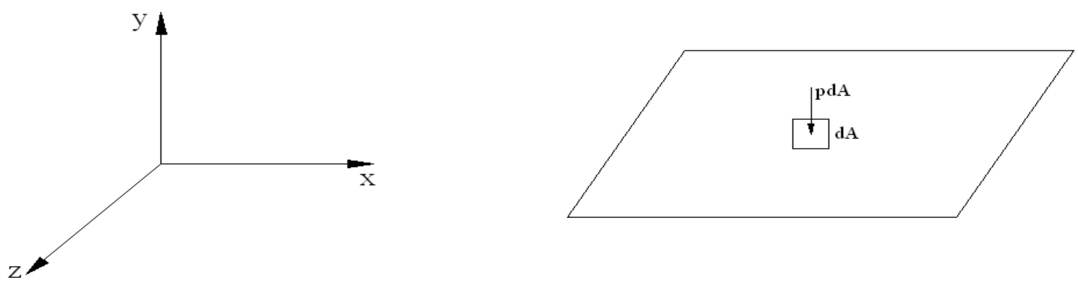
$$= \gamma_w (-10 + 40.8 - 3.2 + 68 + 8) in = \gamma_w \times 103.6 in$$

$$= 62.4 \frac{lb_f}{ft^3} \times 103.6 in \times \frac{1 ft}{12 in} \times \frac{1 ft^2}{144 in^2} = 3.74 \frac{lb_f}{in^2}$$

۲-۴ نیروهای وارد بر سطوح مغروق

۲-۴-۱ نیروهای فشاری وارد بر سطوح افقی[۸]

اگریک صفحه افقی در زیر سیال قرار داشته باشد نیروی وارد بر آن را می توان از روی وزن سیال بالای آن حساب نمود . راه دیگر به فرم زیر یک المان از سطح گرفته می شود و ابتدا نیروی فشاری بر المان محاسبه و سپس روی کل سطح انتگرال می گیریم.



$dF = PdA$ نیروی فشار وارد بر المان

$$\Rightarrow F = \int PdA = P\int dA = PA$$

چون فشار روی سطح افقی ثابت است از انتگرال بیرون می آید. پس برای محاسبه نیروی فشار بر یک سطح افقی ابتدا فشار را می یابیم و در سطح ضرب می کنیم که نیروی فشار بدست آید و نقطه اثر آن در مرکز سطح[۹]می باشد. وقتی که سطح افقی است نیروی فشار بصورت یک بار یکنواخت روی سطح عمل می کند بنابراین نقطه اثر نیروی

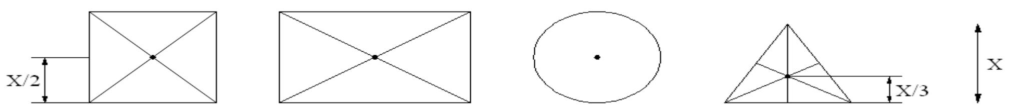
[8]***Pressure forces on the horizontal surface***
[9]***Centroid***

برآیند در مرکز سطح صفحه خواهد بود همانند یک خط کش افقی که وقتی روی یک تکیه گاه قرار می گیـرد بـرای تعادل باید تکیه گاه در وسط خط کش قرار گیرد.

مرکز فشار[10]

محل اثر بر آیند نیروها را مرکز فشار گویند . در موردسطوح افقی مرکز فشار با مرکز ثقل منطبق است (به شـرطی که ضخامت سطح یکنواخت باشد).

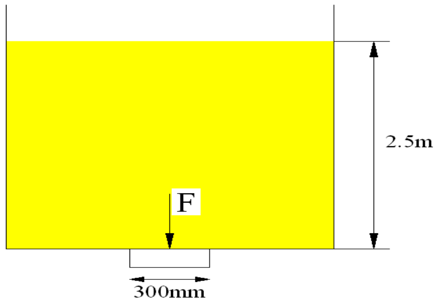
مرکز ثقل شکل های معمولی به فرم زیر است.



مثال۲-۷: صفحه ای دایره ای شکل به قطر $300mm$ به طور افقی در قاعده یک مخزن که تا ارتفـاع $2.5m$ در آن نفت $(S.G = 0.9)$ قرار دارد پیچ شده است . مقدار نیروی وارد بر آن و محل اثر آن را محاسبه کنید :

الف-به روش وزن سیال

ب-به روش فشار



[10]*Pressure center*

الف)

$$F = mg = \rho gV = \rho gAH$$

$$\Rightarrow F = \pi \frac{0.3^2}{4} \times 2.5 \times 0.9 \times 10^3 \times 9.81 = 1.56kN$$

ب)

$$F = PA$$

$$P = \rho gh = 0.9 \times 10^3 \times 9.81 \times 2.5 = 22.1kpa \Rightarrow F = PA = 22.1 \times \pi \times \frac{0.3^2}{4} = 1.56KN$$

محل اثر : چون صفحه افقی است محل اثر آن مرکز ثقل صفحه دایره ای شکل است .

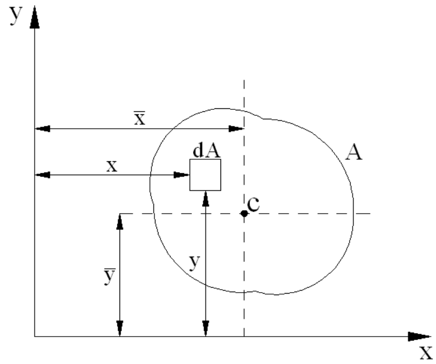
۲-۴-۲ سطوح مایل[11]

برای پیدا کردن نیروهای وارد بر سطوح مایل ابتدا در مورد گشتاور اول سطح، گشتاور دوم سطح و حاصلضرب ماند توضیحاتی آورده می شود.

گشتاور اول سطح:

گشتاور اول سطح A حول محور y چنین بیان می شود:

$$\int_A x dA$$



[11] *Inclined surface*

برای تعیین گشتاور حول یک محور موازی ، مثلاً $x = k$ گشتاور چنینمی گردد.

$$\int_A (x-k)dA = \int_A xdA - kA$$

حال اگر (محور مرکزی) $x = k = \bar{x}$ باشد گشتاور حول آن برابـر صـفر مـی گـردد. چـون سـطح بصـورت جفـت المانهایی قرینه هم در می آید که حاصل جمعهای (x.dA+(-x)dA) برابر با صفر خواهند بود.

$$\int_A (x-\bar{x})dA = \int_A xdA - \bar{x}A = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{A}\int_A xdA$$

و به همین ترتیب می توان اثبات کرد:

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_A ydA$$

محل تلاقی $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز سطحنامیده می شود.

گشتاور دوم سطح

گشتاور دوم سطح A حول محور y عبارت است از :

$$I_y = \int_A x^2 dA$$ [۱۲]

که I_y گشتاور ماند[۱۳]نامیده شده و همواره مثبت است . پس از انتقال محور به محوری موازی آن که از مرکز سـطح Cمی گذرد داریم:

۱۲

[13] ***Moment of inertia***

$$I_c = \int_A (x-\bar{x})^2 dA = \int_A x^2 dA - 2\bar{x}\int_A x dA + \bar{x}^2 \int_A dA$$

$$\int_A x dA = \bar{x} A \quad , \quad \int_A x^2 dA = I_y \quad , \quad \int_A dA = A \Rightarrow \boxed{I_y = I_c + \bar{x}^2 A}$$

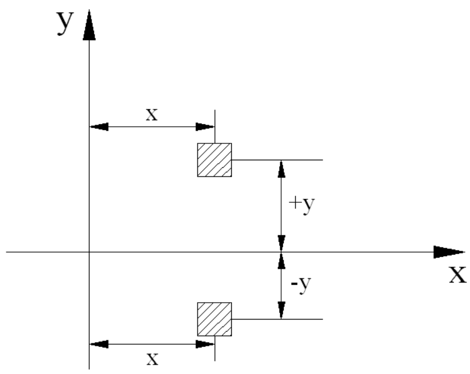
یعنی گشتاور ماند یک سطح حول یک محور برابر است با مجموع گشتاور ماند حول یک محور موازی آن که از مرکز سطح می گذرد و حاصلضرب مساحت در مربع فاصله محورها.

حاصلضرب ماند (ممان اینرسی حاصلضرب)

حاصل ضرب ماند بصورت زیر تعریف می شود.

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

هر گاه یکی از محورها یک محور تقارن سطح باشد I_{xy} برابر صفر خواهد بود.



$$x(+y)dA + x(-y)dA = 0$$

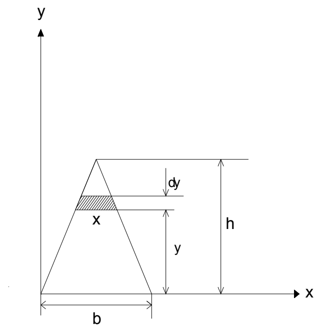
چون کل سطح را می توان متشکل از زوج عناصر المان، نظیر این دو در نظر گرفت، در نتیجه حاصلضرب ماند برای کل سطح نیز برابر با صفر است.پس از انتقال محور به محوری موازی آن که از مرکز سطح C می گذرد داریم:

$$\bar{I}_{xy} = \int_A (x-\bar{x})(y-\bar{y})dA = \int_A xydA - \bar{y}\int_A xdA - \bar{x}\int_A ydA + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\Rightarrow \bar{I}_{xy} = I_{xy} - \bar{x}\bar{y}A \Rightarrow \boxed{I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A}$$

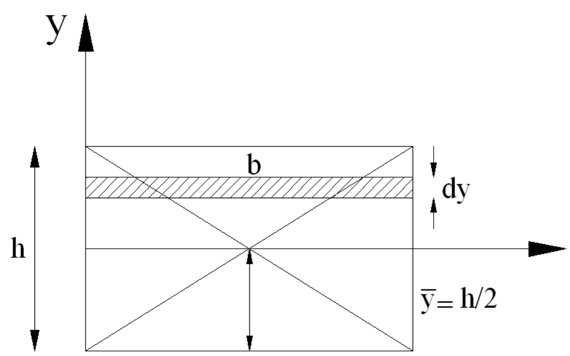
<u>مثال۲-۸</u>: موقعیت مرکز سطح مثلثی به قاعده b و ارتفاع h را مشخص کنید.

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$
$$\frac{x}{h-y} = \frac{b}{h}$$



$$A\bar{y} = \int ydA \quad , \quad dA = xdy$$
$$\frac{bh}{2}\bar{y} = \int_0^h y\frac{b(h-y)}{h}dy = \frac{bh^2}{6} \Rightarrow \bar{y} = \frac{h}{3}$$

<u>مثال۲-۹</u>:مرکز سطح مستطیل زیر را پیدا کنید؟

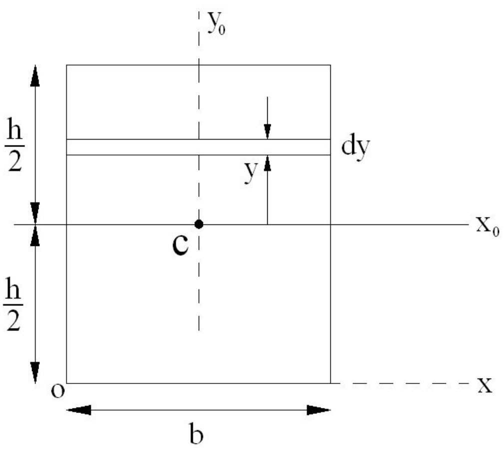


$$A\bar{y} = \int ydA = \int ybdy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} bydy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$=\left[\frac{h^2}{8}-\frac{h^2}{8}\right]=0 \Rightarrow$ گشتاور اول سطح حول محور تقارن $=0$

محاسبه گشتاور دوم سطح یک مستطیل

برای محاسبه گشتاور دوم سطح حول محوری که موازی محور x ها است و از مرکز سطح عبور می کند مطابق شکل یک المان مستطیلی گرفته می شود.



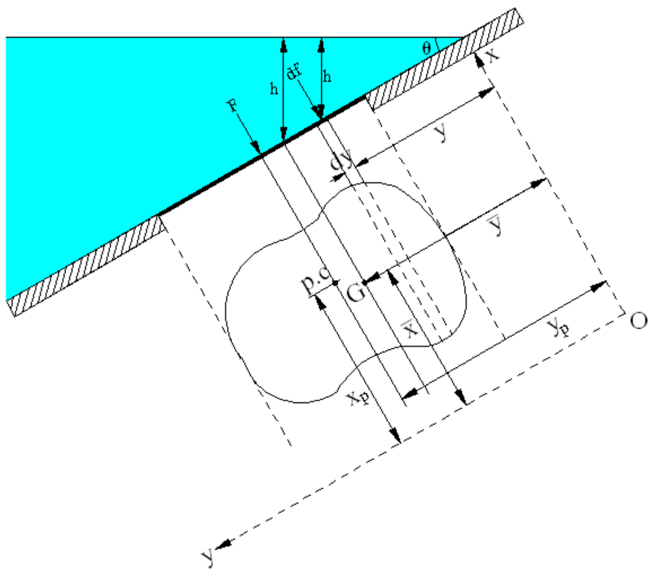
$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 bdy = \frac{1}{12}bh^3 \quad \bar{I}_x = I_c = \int y^2 dA$$

برای پیدا کردن گشتاور دوم سطح حول محور x ها با توجه به I_c از رابطه ذیل استفاده می شود.

$$I_x = I_c + \bar{y}^2 A = \frac{1}{12}bh^3 + \frac{h^2}{4}\times bh = \frac{1}{12}bh^3 + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

نیروی های وارد بر سطوح مایل

دریچه ای به شکل نامشخص در زیر سطح یک مایع بصورت مایل در نظر می گیریم کهمی خواهیم نیـروی وارد بـه دریچه و نقطه اثر آن را بیابیم.در این حالت مطابق شکل یک محور را موازی و روی دریچه مایل درنظر می گیریم که آن را محور y ها و محور عمود بر صفحه کاغذ را محور x ها می نامیم و مبداء مختصات را همیشه در سـطح مـایع قرار می دهیم. یک المان در نظر می گیریم که روی آن المان فشار ثابت است. در شکل دریچه بطـور کامـل از مـایع بیرون آورده شده و نشان داده شده است که در آن G مرکز ثقل دریچه و .P.C نقطه اثر نیروی برآیند است.



$$dF = PdA = \gamma\, hdA = \gamma\, y \sin\theta\, dA$$

$$\Rightarrow F = \int_A \gamma\, y \sin\theta dA = \gamma \sin\theta \int_A ydA$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A ydA}{A} \Rightarrow \int_A ydA = \bar{y}A$$

$$\Rightarrow F = \gamma \sin\theta\, \bar{y}A = \gamma\, \bar{h}A = P_G A$$

یعنی اندازه نیرو برابر است با حاصلضرب مساحت دریچه در اندازه فشار در مرکز سطح (ثقل) دریچه. نکته ایی که باید به آن توجه کرد این است که فاصله مرکز ثقل دریچه تا سطح آزاد مایع ($\bar{h}$) بدرستی پیدا شود. حال نقطه اثر این نیروی فشار در کجاست؟

مرکز فشار

فرض می کنیم که مرکز فشار دارای مختصاتی مثلx_p و y_pباشد. برای پیدا کردن x_p گشتاور نیروی برآیند و مولفه های آن را حول محور y ها پیدا می کنیم که مطابق اصل گشتاورها می باشد. طبق اصل گشتاورها، گشتاور یک نیروی برآیند حول یک محور برابر است با مجموع گشتاورهای مولفه های آن نیرو حول همان محور.

$$\text{گشتاور حول } y = M_y = F.x_P = \int_A (dF)x = \int_A \gamma\, y \sin\theta\, dA.x$$

$$\Rightarrow F.x_P = \gamma \sin\theta \int_A xydA = \gamma \sin\theta\, I_{xy}$$

$$F = \gamma\, \bar{y}A \sin\theta \Rightarrow \gamma\, \bar{y}A \sin\theta x_P = \gamma \sin\theta\, I_{xy} \Rightarrow x_P = \frac{I_{xy}}{\bar{y}A}$$

حال اگر بخواهیم ممان اینرسی حاصل ضرب را نسبت به محور های قبلی بیابیم مشکل است به همین دلیل آن را نسبت به $\bar{x}$ و $\bar{y}$ بدست می آوریم.

و از قبل می دانیم که :

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\boxed{\Rightarrow x_P = \frac{\bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A}{\bar{y}A} = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A}}$$

اگر شکلی نسبت به $\bar{y}$ یا $\bar{x}$ متقارن باشد $\bar{I}_{xy}$ مساوی صفر می باشد که در این صورت x_P و $\bar{x}$ بر هم منطبقند .

حال برای یافتن y_P گشتاور را حول محور x ها می یابیم .

$$M_x = F.y_p = \int_A dF.y = \int_A \gamma\, y \sin\theta\, dA.y$$
$$\Rightarrow \gamma\, \bar{y} \sin\theta\, A\, y_p = \gamma \sin\theta \int_A y^2 dA \Rightarrow y_P = \frac{\int_A y^2 dA}{\bar{y}A}$$

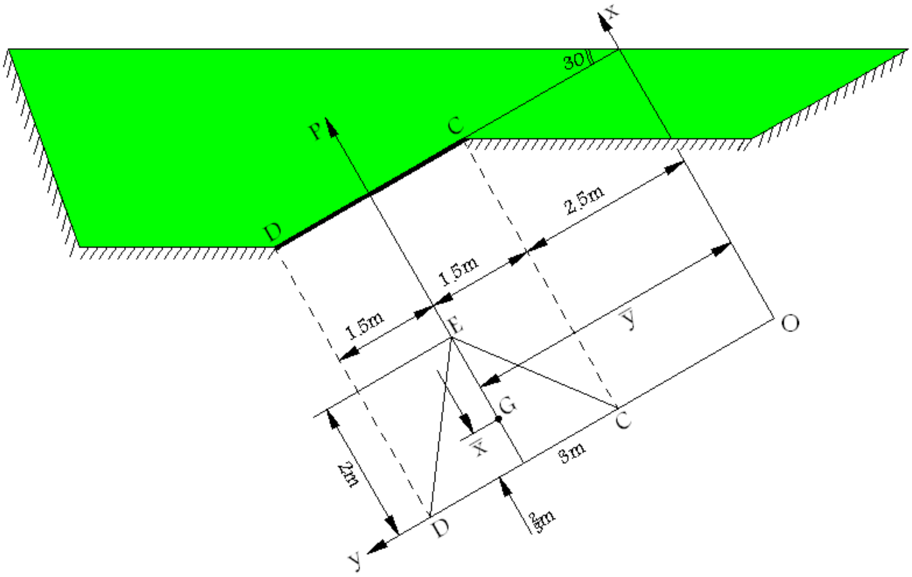
$$I_x = \int_A y^2 dA \Rightarrow y_p = \frac{I_x}{\bar{y}A} \qquad , \qquad I_x = \bar{I}_x + \bar{y}^2 A$$
$$\boxed{\Rightarrow y_P = \frac{\bar{I}_x + \bar{y}^2 A}{\bar{y}A} \Rightarrow y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}_x}{\bar{y}A}}$$

پس y_P همواره از $\bar{y}$ بزرگتر است یعنی پایین تر قرار می گیرد.

روابط x_p و y_p کلی هستند حتی در صفحات افقی نیز درست هستند. درصفحات افقی $\bar{y}$ به سمت بینهایت میل می کند زیرا دریچه هیچگاه سطح آب را قطع نمی کند. پس برای $\bar{y} \to \infty$ داریم :

$$x_p = \bar{x} \qquad , \qquad y_p = \bar{y}$$

__مثال ۲-۱۰:__ دریچه مثلثی شکل CDE در طول CD لولا شده است و با یک نیروی قائم P که در E اعمال می شود باز می گردد این دریچه روغن با چگالی S=0.8 را روی خود نگه داشته واز قسمت پایین با اتمسفر در ارتباط است . با صرف نظر از وزن دریچه تعیین کنید.



الف- اندازه نیروی وارد شده بر دریچه ب-موقعیت مرکز فشار ج- نیروی P مورد نیاز جهت باز کردن دریچه

مبداء مختصات در سطح مایع اختیار می شود.

الف) $$F = P_G . A = \gamma\, \bar{h} A = (0.8 \times 9.806 \times 1000)(4 Sin30)\left(3 \times \frac{2}{2}\right) = 47068.8N$$

ب) $$\bar{x} = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3} m \qquad \bar{y} = 2.5 + 1.5 = 4m$$

بدلیل تقارن نسبت به $\bar{x}$ پس $\bar{I}_{xy} = 0$

$$\Rightarrow x_P = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3} m$$

$$y_P = \bar{y} + \frac{\bar{I}_x}{\bar{y}A} \quad , \quad \bar{I}_x = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} \times 2 \times (1.5)^3$$

$$\Rightarrow y_p = 4 + \frac{2\left[\frac{1}{12} \times 2 \times (1.5)^3\right]}{4\left(3 \times \frac{2}{2}\right)} = 4.094m$$

یعنی همواره مرکز فشار پایین تر از $\bar{y}$ می کند.برای پیدا کردن $\bar{I}_x$ مثلث CDE به دو مثلث سمت راست و سمت چپ تقسیم شده است که هرکدام حول قاعده خود می چرخند و قاعده و ارتفاع آنها ۲متر و ۱/۵ متر می باشد. چون $\bar{I}_x$ یعنی گشتاور دوم سطح مثلث حول محوری که از مرکز سطح می گذرد و موازی محور x ها است.

ج) برای پیدا کردن نیروی P مجموع گشتاور ها را حول محورCD بدست می آوریم. F و P دو گشتاور مخالف حول CD اعمال می کنند لذا:

$$P \times 2 = F \times \frac{2}{3} \Rightarrow P \times 2 = 47068.8 \times \frac{2}{3} \Rightarrow P = 15689.6N$$

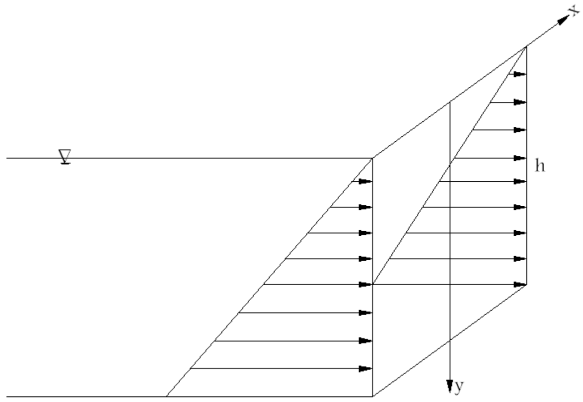
۲-۴-۳ روش منشور فشار[۱۴]

روش دیگر تعیین نیروی برآیند و خط اثر نیرو روی یک سطح صاف،مفهوم منشور فشار است. اگر سطحی در زیر آب باشدو بخواهیم نیروی فشار را بیابیم ابتدا المانی از سطح در نظر می گیریم و روی این المان یک حجم فرضی به ارتفاع γh می سازیم لذا داریم:

$$dF = PdA = \text{ارتفاع} \quad (\gamma h) \times \text{مساحت} \quad (dA) = \text{حجم} \quad (dV) \Rightarrow F = V$$

[14] *The pressure prism*

یعنی حجم منشور برابر نیروی فشاری می شود. فرض کنید دیوارAB به شکل مستطیل به طول و عرض h و bرا داریم که در پشت آن یک مایع است نیروی وارد بر این دیوار برابر حجم منشور است ونقطه اثر آن در مرکز حجم منشور می باشد.



$$F = \text{حجم منشور} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \left(\frac{\gamma h}{2}\times h\right)b = \frac{\gamma\, \mathrm{b}h^2}{2} \quad \text{یا} = (bh)\left(\frac{\gamma h}{2}\right) = \frac{\gamma bh^2}{2}$$

در حالت اول قاعده منشور مثلث و ارتفاع آن b است. در حالت دوم قاعده منشور مستطیل است و ارتفـاع آن $\frac{\gamma h}{2}$ که در این حالت ارتفاع از 0 تا γh تغییر می کند که متوسط آن $\frac{\gamma h}{2}$ است. نقطه اثر این نیرو چنـین اسـت:

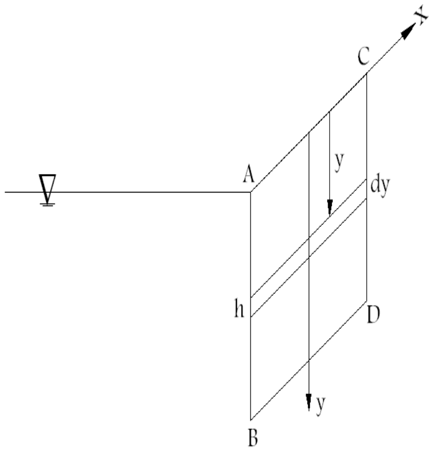
$$x_p = 0,\ y_p = \frac{2h}{3}$$

چون در جهت x یک بار یکنواخت داریم لذا نقطه اثر نیرو در وسط عرض مستطیل خواهد بـود و ازآنجائیکـه مبـداء مختصات در وسط این عرض قرار دارد لذا مقدار x_p برابر صفر خواهد بود. در جهت y توزیع فشار مثلث گونـه اسـت لذا y_p در مرکز سطح این مثلث یعنی 2h/3 قرار دارد البته مقدار h از سطح آب در نظر گرفته شده است.

۲-۴-۴ روش انتگرال گیری[۱۵]

در این روش یک المان مستطیلی به طول b و عرض dy می گیریم و مبـداء مختصـات در سـطح آب وسـط عـرض دیوار مستطیلی در نظر گرفته می شود.نیروی وارد به این المان بصورت زیر محاسبه می شود.

$$dF = PdA = \gamma\, ybdy$$
$$\Rightarrow F = \int_0^h \gamma\, ybdy = \gamma b \int_0^h ydy$$
$$\Rightarrow F = \frac{\gamma bh^2}{2}$$



برای پیدا کردن نقطه اثر x_p چون در جهت x روی دیوار یک بار یکنواخت داریم لذا x_p در $x = \frac{b}{2}$ است ولـی در این مساله $x_p=0$ است چون مبداء مختصات در $x=b/2$ است. چـون تمـام مولفـه هـا بـر روی یـک محورنـد بنابراین برآیند هم روی همان محور می باشد. روش دیگر برای محاسبه x_p بصورت زیر اسـتفاده از اصـل گشـتاورها است:

$$x_p.F = \int_A x.\gamma.y.dA = \gamma \int_A xydA = \gamma I_{xy} \xRightarrow{I_{xy}=\bar{I}_{xy}+A\bar{x}\bar{y}}$$

$$x_p.F = \gamma\big(\bar{I}$$

[15] *Integration method*

برای محاسبه y_p به روش انتگرال از اصل گشتاورها بصورت زیر استفاده می کنیم:

$$y_p.F = \int_A yPdA = \int y.\gamma y.bdA = \gamma b\int_0^h y^2 dy$$

$$= \gamma b \times \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^h = \frac{\gamma bh^3}{3} \Rightarrow y_p = \frac{\frac{\gamma bh^3}{3}}{\frac{\gamma bh^2}{2}} = \frac{2}{3}h$$

می توان مساله قبل را با توجه به روش کلی نیز حل کرد یعنی:

$$F = P_G A$$

که P_G فشار در مرکز سطح (ثقل) دیوار مستطیلی شکل است .

$$\Rightarrow F = \gamma \frac{h}{2}bh = \frac{\gamma\, bh^2}{2}$$

$$x_p = \bar{x} + \frac{\bar{I}_{xy}}{\bar{y}A} \Rightarrow x_p = \bar{x} = 0$$

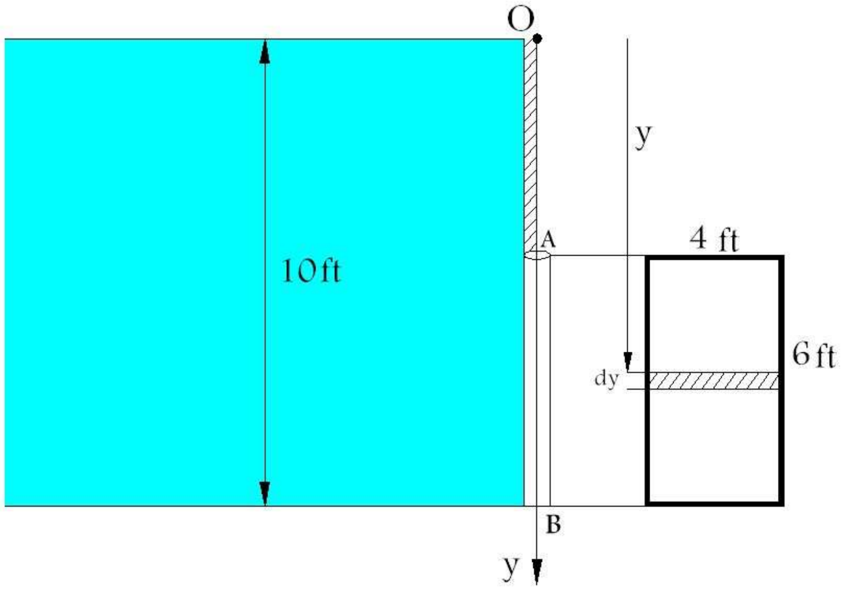
$$y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}_x}{\bar{y}A} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}.bh} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2h}{3}$$

$\bar{I}_x$ ممان حول محوری است موازی محور x ها که از مرکز سطح می گذرد.

بنابراین در هر سه روش(روش کلی، روش منشور فشار و روش انتگرال) به یک جواب می رسیم ولـی روش انتگـرال گیری کمتر استفاده می شود. روش منشور فشار فقط برای اشکال مستطیلیمثل فشار وارده بـه دیـوار اسـتخر قابـل استفاده است. روش کلی برای کلیه مسائل قابل استفاده است و ساده ترین روش نیز همین روش است.

مثال۲-۱۱:در شکل زیر دریچهAB به عرض 4ft (به شکل مستطیل) و طول 6 ft آب را پشت خود نگه می دارد و می تواند حول نقطه A گردش نماید.الف- گشتاوری را که در نقطه A وجود دارد تعیین کنید

ب- اگر در سطح آب یک فشار نسبی $30lb_f\ /\ ft^2$ به آب وارد می شود مقدا ر نیروی براینده و نقطه اثر آن که به دریچه وارد می شود محاسبه کنید.



الف)

$$F_w = \gamma_w \bar{h} A = 62.4(4+3)\times(4\times6) = 10483.2lb_f$$

$$y_p = \bar{y} + \frac{\bar{I}_x}{\bar{y}A} \qquad , \qquad \bar{I}_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$\Rightarrow y_P = 7 + \frac{\frac{1}{12}\times4\times6^3}{7\times(4\times6)} = 7.43ft$$

می توان به روش انتگرال گیری به صورت زیر نیز مقدار نیرو را پیدا کرد.

$$F=\int_A PdA \qquad , \qquad P=\gamma_w y \qquad , \qquad dA=bdy$$
$$\Rightarrow F=\int_4^{10}\gamma_w ybdy=\gamma_w b\left[\frac{1}{2}y^2\right]_4^{10}$$
$$\Rightarrow F=62.4\times 4\left[\frac{1}{2}\times 10^2-\frac{1}{2}\times 4^2\right]=10483.2\,lb_f$$

$$M_A=10483.2\times(7.43-4)=35957.376 lb_f.ft$$

به روش انتگرال می توان مقدار گشتاور را بطور مستقیم پیدا کرد یعنی:

$$M_A=\int_4^{10} y.$$

ب- طبق اصل پاسکال فشار اعمال شده به طور یکسان به تمامی جهات منتقل می شودو این فشار بصورت یـک بـار یکنواخت روی دریچه وارد می شود و مقدار آن بصورت زیر محاسبه می شود.

$F=PA=30lb_f/ft^2\times 24ft^2=720lb_f$ اضافی وارد بر دریچه

چون فشار بصورت بار یکنواخت است به مرکز سطح دریچه اعمال می شود. بنابراین نیروی کل بصورت زیر محاسـبه می شود.

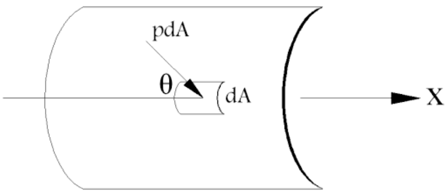
$$F_{total}=720+10483.2=11203.2\,lb_f$$

حال طبق اصل گشتاورها می توان نقطه اثر نیروی برآیند را پیدا کرد.

$$11203.2y_p=720\times 7+10483.2\times 7.43\Rightarrow y_p=7.402\,ft$$

۲-۴-۵ نیروهای وارد بر سطوح منحنی

نیروی وارد بر سطح منحنی دارای دو مولفه F_x و F_y می باشد که :



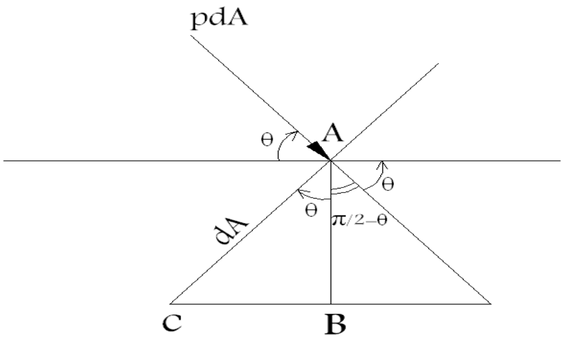
$$F=\sqrt{F_x^{\,2}+F_y^{\,2}}$$

$$dF_x=PdACos\theta$$

$$\Rightarrow F_x=\int_A PdA\cos\theta$$

$$F_y=\int_A \mathrm{PdAsin}\,\theta$$

اگر المان dA را بزرگ کنیم داریم :



$$\cos\theta=\frac{AB}{dA}\Rightarrow AB=dA\cos\theta=$$ تصویر قائم سطح منحنی

چون المان اصلی و تصویر آن در یک عمقند بنابراین فشار در آن دو باهم برابراست و بنابراین می توان به جای خود منحنی بر روی تصویر آن کار کرد. یعنی:

مولفه افقی نیروی فشاری وارد بر یک سطح منحنی برابر نیروی فشاری است که بر تصویر قـائم سـطح منحنـی (بـر روی یک سطح قائم) وارد می شود.

$$F_x = \gamma \bar{h}_v A_v$$

که در رابطه بالا، $\bar{h}_v$ فاصله قائم مرکز سطح، سطح تصویر شده تا سطح آزاد مایع است و A_v مسـاحت سـطح تصـویر شده است.

مولفه عمودی نیروی اعمال شده بر یک سطح منحنی :

در مثلث ABC در شکل قبل داریم:

$$\sin\theta = \frac{CB}{dA} \Rightarrow CB = dA\sin\theta = \text{تصویر افقی سطح منحنی}$$

$$dF_y = PdA\sin\theta$$

در اینجا فشار روی المان اصلی و تصویر با هم برابر نیستند.

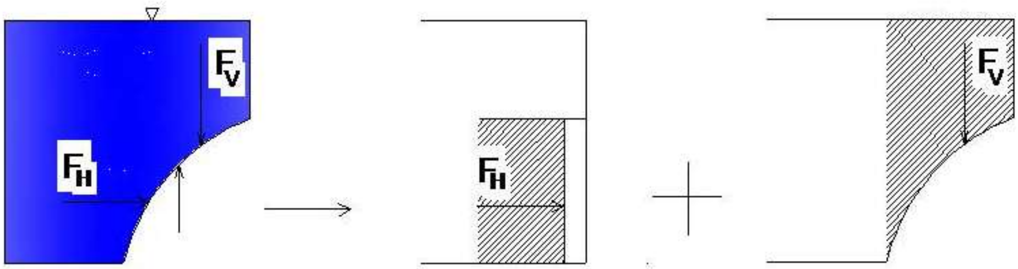
$$F_V = F_y = \int_A P\sin\theta\, dA = \gamma\int_A h\sin\theta\, dA = \gamma\int_V dV = \gamma V$$

که در آن dV حجم منشور با ارتفاع h و قاعده $\sin\theta\, dA$ و یا حجم مایع بالای سطح می باشد. بنابراین:

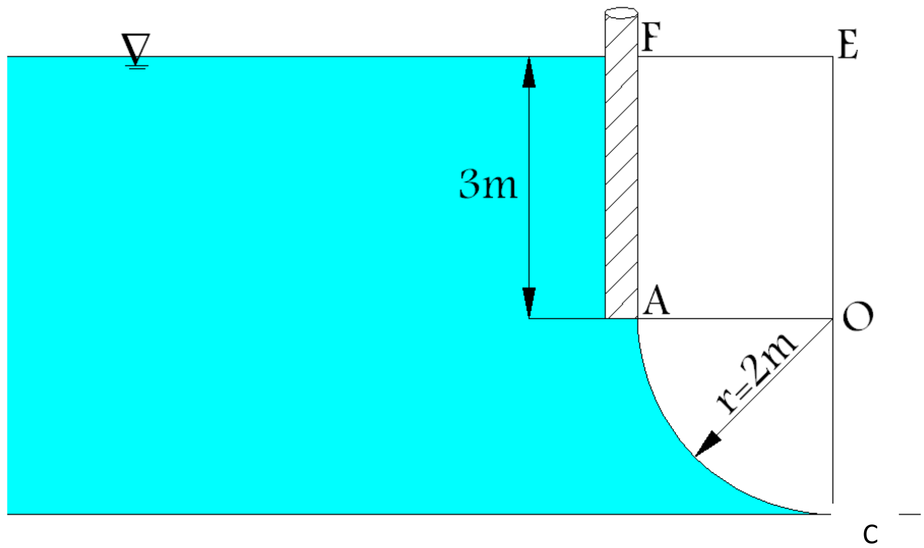
وزن مایع مجازی یا حقیقی محصور بین سطح منحنی تا سطح آزاد مایع: $\Rightarrow F_V = \gamma V = W$

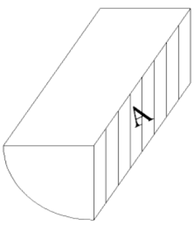
چون فشار روی سطح منحنی و تصویر افقی آن با هم برابر نیستند لذا برای پیدا کردن مولفه عمودی،از ابتدا و انتهای سطح منحنی تا سطح آزاد مایع دو خط قائم (عمودی) رسم می کنیم و حجم بالای سطح منحنی را محاسبه

و در γ ی مایع ضرب می کنیم. اگر بالای سطح منحنی مایع وجود داشته حجم محاسبه شده یک حجم واقعی است که در این صورت نیروی عمودی از بالا به سطح وارد می شود ولی اگر بالای سطح منحنی مایع وجود نداشته باشد حجم محاسبه شده یک حجم مجازی است و نیروی عمودی از پایین به سطح وارد می شود. فرآیند محاسبه مولفه های نیروی افقی و عمودی وارد بر یک سطح منحنی در شکل زیر نشان داده شده است.



مثال۲-۱۲: در شکل یک دریچه یک چهارم استوانه جلوی آب قرار گرفته است. نیروهای افقی و عمودی وارد بر دریچه و محل اثر آن ها رابیابید؟ طول استوانه ۲ متر است.





الف) برای پیدا کردن نیروی افقی، دریچه روی یک صفحه قائم تصویر می شود که صفحه تصویر شده یک مربع می شود که در شکل با حرف A نشان داده شده است. فاصله مرکز سطح صفحه تصویر شده تا سطح آزاد مایع و مساحت آن پیدا می شوند.

$$F_H = \gamma\, \overline{h} A = 9806 \times (3+1)(2\times 2) = 156896\, N$$

برای پیدا کردن نیروی عمودی از ابتدا (A) و انتهای (C) سطح منحنی دو خط قائم تا سطح آزاد مایع رسم می کنیم و حجم بالای آن محاسبه می شود. در این مورد حجم یک حجم مجازی است و نیرو از پایین به سطح اعمال می شود.

$$F_{\text{v}} = \gamma\, \text{V} = \gamma\left(OAC \;\; \text{حجم} \; + AOEF \;\text{حجم}\;\right)$$

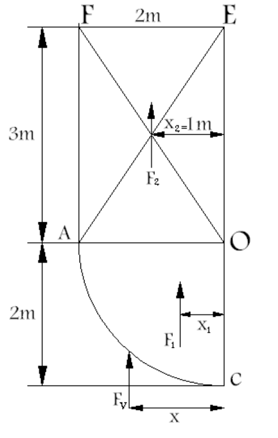
$$\Rightarrow F_V = 9806\left(\frac{\pi \times 2^2}{4}\times 2 + 2\times 2\times 3\right) = 179285N$$

نقطه اثر F_H همانند سطوح صاف محاسبه می شود. برای پیدا کردن نقطه اثر نیروی عمودی دو روش ارائه می شود.

روش اول:

نیروی F_V که از نظر مقداری برابر مجموع دو نیروی F_1 و F_2 که به ترتیب از مرکز سطحهای AOC و $FEOA$ می گذرند، می باشد و از مرکز سطح، کل سطح $FEOCA$ می گذرد.

مرکز سطح ربع دایره $4r/3\pi$ می باشد.



$$x_2 = 1m \ , \ x_1 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 2}{3\pi} = 0.849 \ \ m$$

با توجه به اصل گشتاورها داریم:

$$F_V.x_p = F_1x_1 + F_2x_2$$

$$F_1 = \gamma V_1 = 9806\left(\frac{\pi \times 2^2}{4} \times 2\right) = 61613N$$
$$F_2 = \gamma V_2 = 9806 \times (2 \times 2 \times 3) = 117672N$$

$$179285x = 61613 \times 0.849 + 117872 \times 1 \Rightarrow x_p = 0.9481\,\mathrm{m}$$

می توان رابطه بالا را بصورت زیر نیز نوشت:

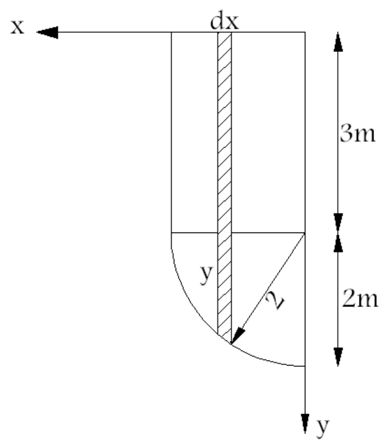
$$F_V.x_p = F_1x_1 + F_2x_2 \Rightarrow \gamma \mathrm{V}.\mathrm{x_p} = \gamma \mathrm{v}_1 x_1 + \gamma \mathrm{v}_2 x_2$$
$$\Rightarrow \gamma(2\mathrm{A}).\mathrm{x_p} = \gamma(2\mathrm{A}_1)x_1 + \gamma(2\mathrm{A}_2)x_2 \Rightarrow \mathrm{x_p} = \frac{\mathrm{A}_1x_1 + \mathrm{A}_2x_2}{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2} = 0.9481\,\mathrm{m}$$

روش دوم:

چون نیروی عمودی وارد بر ربع دایره برابر با وزن مایع فرضی بالای آن است پس امتداد خط اثر نیروی عمودی باید بـا وزن خنثـی شود و از مرکز ثقل نیز بگذرد و از طرفی طبق اصل گشتاورها داریم:

$$F_V.x_p = \int x.dF_\mathrm{v} \Rightarrow \gamma \mathrm{v}.\mathrm{x_p} = \int_\mathrm{v} \mathrm{x}.\gamma \mathrm{dv}$$
$$\gamma(2\mathrm{A}).\mathrm{x_p} = \int_A x.\gamma(2dA) \;\; \Rightarrow \;\; \mathrm{x_p} = \frac{1}{A}\int_A xdA$$

حال با توجه به شکل زیر یک المان گرفته می شود و $\mathrm{x_p}$ محاسبه می شود.



$$dA = dA_1 + dA_2 \Rightarrow \quad dA_1 = 3dx \qquad , \qquad dA_2 = ydx = \sqrt{4-x^2}\,dx$$

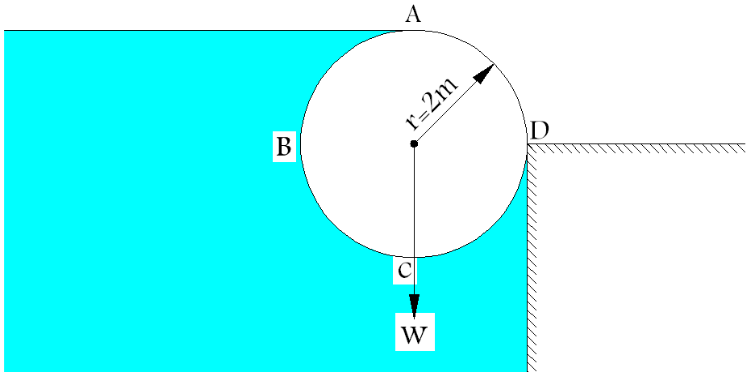
$$dA = \left(3+\sqrt{4-x^2}\right)dx \qquad , \qquad A = \left(6+\frac{4\pi}{4}\right) = 9.14\,m^2$$

$$x_p = \frac{1}{9.14}\int_0^2 x\left(3+\sqrt{4-x^2}\right)dx = 0.9481\,m$$

مثال۲-۱۳: یک مانع استوانه ای شکل که در شکل نشان داده شده است آب را نگه می دارد. سطح تماس بین دیواره و استوانه صیقلی است . تعیین کنید :(طول استوانه یک متر است)

الف - وزن استوانه

ب- نیروی وارد شده بر دیواره



در محل تماس استوانه با دیواره دو نیروی افقی و عمودی R_x و R_y وجود دارد که چون اصـطکاک وجـود نـدارد R_y برابـر صـفر است.

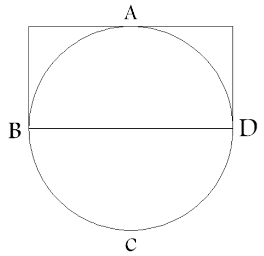
نیروی فشاری که به سطح AB وارد می شود به دو مولفه افقی و عمودی تقسیم می شود. همچنین به سـطحهای BC و CD دو نیروی افقی و عمودی وارد می شود که مولفه عمودی به طرف بالا است.

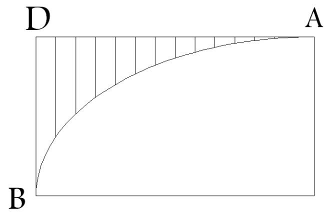
الف)برای تعادل استوانه باید:

$$\sum F_x = 0 \qquad , \qquad \sum F_y = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W + F^V_{AB} - F^V_{BCD} = 0 \Rightarrow W = F^V_{BCD} - F^V_{AB}$$

برای سطح BCD دو خط قائم از ابتدا و انتهای آن تا سطح آزاد مایع رسم می شود و حجم آبی کهدر بالای آن به طور مجازی وجود دارد محاسبه می شود که در این مورد مطابق شکل حجم یک نیم دایره و یک مکعب مستطیل محاسبه می شوند.





O $\gamma_w \times 4 \times 2 \times 1$

(حجم مکعب

مستطیل)+

$$F_{BCD}^{v} = \text{(حجم نیم دایره)}\,\gamma_w \frac{\pi \times 2^2}{2} \times 1$$

برای پیدا کردن F_{AB}^{V} مطابق شکل حجم یک چهارم دایره (AOB) از حجم مکعب مستطیل AOBD کم می شود که یک حجم واقعی است.

$$F^{V}_{AB} = \text{حجم } (AOBD) - \text{حجم } (\mathrm{AOB}) = \gamma_w \left(2 \times 2 - \frac{\pi 2^2}{4} \right) \times 1$$

$$\Rightarrow W = F_{BCD}^{V} - F_{AB}^{V} = (3\pi + 4)\gamma_w = 0.132MN$$

ب)

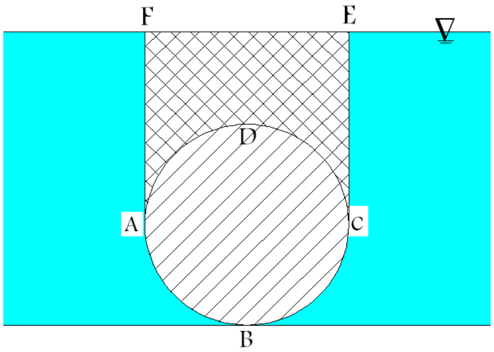
$$F_{AB}^{H} + F_{BC}^{H} - F_{CD}^{H} - R_x = 0$$

نیروهای افقی وارد به سطوح CD و BC با هم مساویند چون هر دو در یک عمق واقع شده اند.برای محاسبه فشار روی این سطوح فاصله عمودی تا سطح آزاد مایع مدنظر قرار می گیرد.

$$\Rightarrow R_x = F_{AB}^{H} = \gamma_w \bar{h} A = \gamma_w \times 1(2 \times 1) = 2\gamma_w = 19.6KN$$

نیروی شناوری[1]

به برآیند نیروهایی که از طرف سیال به جسم وارد می شوند، نیروی شناوری گفته می شود. اگر مطابق شکل جسم ABCD در یک مایع غوطه ور باشد. چون جسم مسطح نیست، نیروی وارده به جسم دو مولفه قائم وافقی دارد. اگر تصویر ها را بکشیم F_x ها همدیگر را خنثی می کنند پس در جهت x نیرو نداریم.



= وزن سیال روی سطح - وزن سیال مجازی روی سطح =نیروی شناوری بالایی یعنی ناحیه

$ADCEF$ پایینی یعنی ناحیه $ABCEF$

(از بالا به پایین) (از پایین به بالا)

وزن سیال هم حجم $ABCD$ (خود جسم)= $\Rightarrow$

که جهت آن نیز رو به بالا است. پس :

[1]*Buoyant force*

(وزن سیال جا به جا شده) وزن سیال هم حجم جسم $=F_B$نیروی شناوری

(جهت آن از پایین به بالا است ونقطه اثر آن نیز در مرکز حجم جسم می باشد (یا مرکز حجم، حجم مایع جا به جا شده)

برای پیدا کردن رابطه ای برای نیروی شناوری مطابق شکل یک المان منشوری با سطح مقطع dA در نظر می گیریم و برای آن برآیند نیروها را در جهت عمودی می نویسیم.

$$dF_B = P_2 dA - P_1 dA = \gamma(H+h)dA - \gamma\ HdA = \gamma\ HdA + \gamma\ hdA - \gamma\ HdA$$
$$= \gamma\ hdA = \gamma\ d\mathrm{V} \Rightarrow F_B = \gamma_{Fluid} V_{Body}$$

که γ_{Fluid} وزن مخصوص سیال و V_{Body} حجم جسم می باشد.برای پیدا کردن نقطه اثر از اصل گشتاورها استفاده می کنیم.

$$F_B . x_p = \int x . dF_B \Rightarrow \gamma\ \mathrm{v.x_p} = \int_{\mathrm{v}} \mathrm{x.}(\gamma\ \mathrm{dv})$$
$$\Rightarrow x_p = \frac{1}{V}\int_V x dV$$

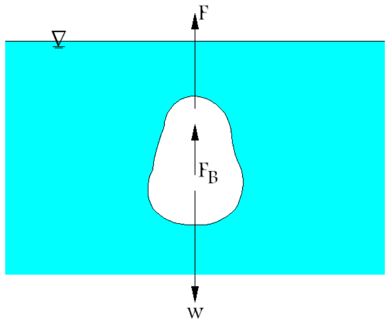
که x_p فاصله نقطه اثر نیروی برآیند تا نقطهO (یک نقطه اختیاری) یا فاصله تا مرکز حجم سیال جا به جا شده است.

اگر جسمی مطابق شکل در سیالی غوطه ور باشد داریم:

W = وزن جسم در هوا

$\mathrm{F_B}$ = نیروی شناوری

F = وزن جسم هنگام غوطه وری یا وزن ظاهری



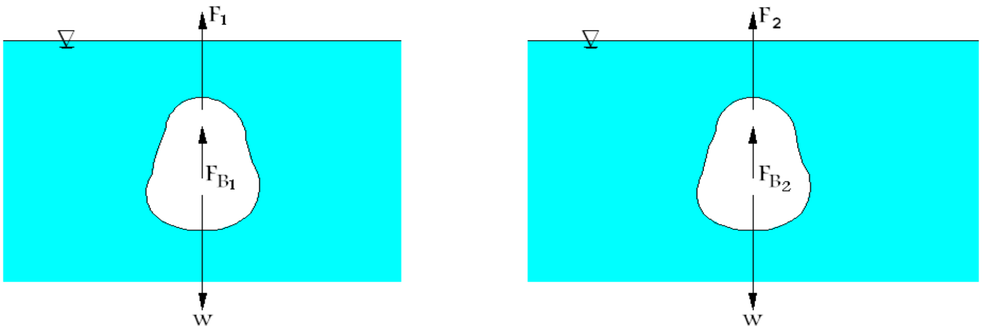
$$F + F_B = W$$
$$F + \gamma V = W$$

مثال۲-۱۴: سنگی با وزن $1.5N$ در هوا،هنگام غوطه وری در آب $1.1N$ وزن دارد حجم وچگالی آن چقدر است ؟

$$F = 1.1\,N, \mathrm{W} = 1.5\,\mathrm{N} \qquad F_B = W - F = 1.5 - 1.1 = 0.4N = \gamma V$$
$$\Rightarrow 9806 \times V = 0.4 \Rightarrow V = 40.8cm^3$$
$$S = \frac{W/V}{\gamma_\omega} = \frac{1.5/0.0000408}{9806} = 3.75$$

اگر بخواهیم سنگی را که وزن و حجم آن نامشخص است وزن و حجـم آن را انـدازه گیـری کنـیم ابتـدا آن را در سـیال ۱ بـا وزن مخصوص γ_1 قرار می دهیم و F_1 وزن در سیال ۱را اندازه گیری می کنیم و بعد در سیال 2 با وزن مخصـوص γ_2 قـرار مـی

دهیم و F_2 را اندازه می گیریم و داریم

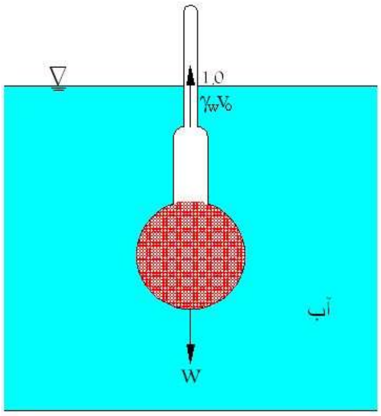


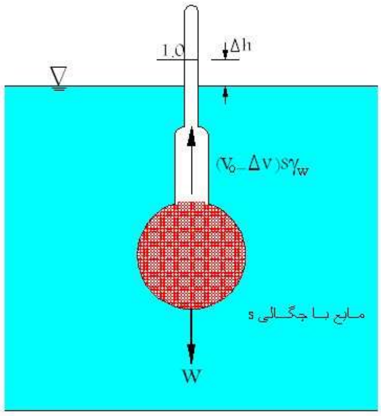
$$F_1 + F_{B_1} = W$$
$$F_2 + F_{B_2} = W$$

$$\begin{cases} F_1 + \gamma_1 V = W \\ \\ F_2 + \gamma_2 V = W \end{cases} \Rightarrow V = \frac{F_1 - F_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad , \quad W = \frac{F_1\gamma_2 - F_2\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

با توجه به روابط بالا وزن و حجم سنگ پیدا می شوند.

هیدرومتر[1]





این وسیله جهت تعیین چگالی مایعات به کار می رود هیدرومتر دارای یک میله منشوری با سطح مقطع a می باشد. اگر هیدرومتر در آب قرار گیرد چگالی یک را نشان می دهد. لذا اگر مطابق شکل سمت چپ یک هیدرومتر در آب قرار گیرد، برای مدرج کردن آن در موقعیت سطح سیال بر روی میله آن عدد ۱ گذارده می شود. در حالت تعادل داریم:

$$\gamma_W V_0 = W \text{ (وزن هیدرومتر)}$$

V_0 =حجم قسمت غوطه ور در آب

[1]Hydrometer

حال اگر این هیدرومتر مطابق شکل سمت راست در یک مایع با چگالی بزرگتر از ۱ قرار گیرد، به اندازه Δh میلـه آن از آب بیـرون می افتد و در حال تعادل داریم:

$$
\begin{aligned}
&(V_0-\Delta V)S\gamma_W=W\Rightarrow(V_0-\Delta V)S\gamma_w=\gamma_w V_0\Rightarrow V_0 S\gamma_w-\Delta V S\gamma_w=\gamma_w V_0\\
&\Rightarrow \Delta V S\gamma_w=\gamma_w V_0(S-1)
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{cases}\Rightarrow \Delta V=\dfrac{\gamma_w V_0(S-1)}{S\gamma_w}\\[2em] \Delta V=a\Delta h\end{cases}\right\}\Rightarrow \Delta h=\frac{V_0}{a}\times\frac{(S-1)}{S}
$$

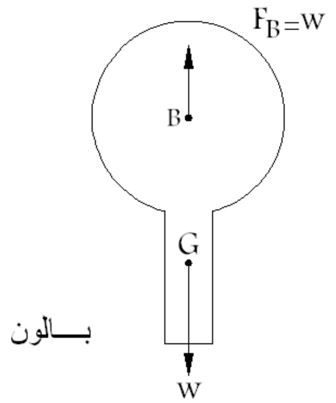
با توجه به رابطه بالا می توان هیدرومتر را برای این مایع مدرج کرد یا اگر Δh معلوم باشد چگالی این مایع بدسـت مـی آیـد. اگـر چگالی مایع کوچکتر از یک باشد، میله هیدرومتر نسبت به حالت آب بیشتر در مایع فرو می رود و رابطه ذیل بدست می آید.

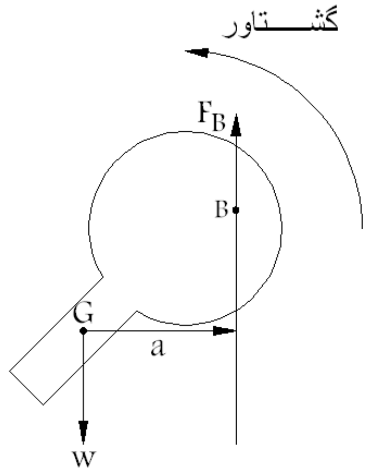
$$
\Delta h=\frac{V_0}{a}\times\frac{(1-S)}{S}
$$

پایداری

چون اجسام شناور تحت اثر نیروی وزن ونیروی شناوری در حال تعادل هستند، بنابراین امتداد خط اثر نیـروی شـناوری ، پایـداری آنها را معین می کند.

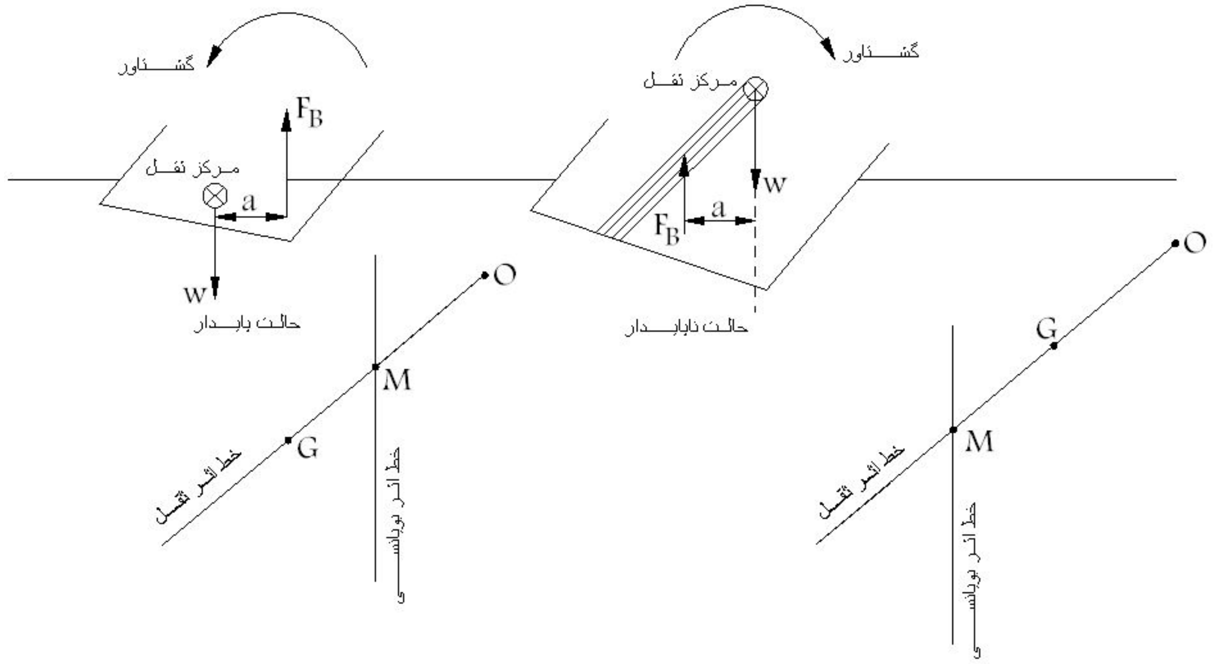
۱) برای جسم کاملاً غوطه ور برای پایداری باید مرکز ثقل زیر مرکز شناوری باشد.





۲) هر جسم شناور $(Float)$ که مرکز ثقل (G) آن زیر مرکز شناوری (B) باشد پایدار است ولی اجسام شناوری هم در حالت خاص که G بالا B است باز هم پایدار هستند

به شرطی که ارتفاع فرا مرکزی انها مثبت باشد. $\overline{MG} > 0$



$MG>0 \Rightarrow MG=OG-OM$

$\overline{OG}>\overline{OM} \Rightarrow \overline{MG}>0$

$MG<0 \Rightarrow OG<OM$

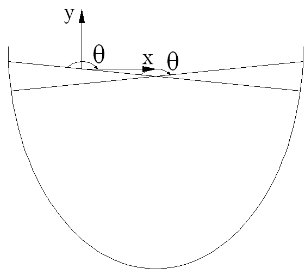
$\Rightarrow MG<0$

در حالت پایدار گشتاوری ایجاد می شود که تمایل دارد کشتی را به حالت عمودی در آورد و در حالت ناپایدار گشتاوری کـه وجـود دارد کشتی را واژگون می کند . به MG ارتفاع فرامرکزی (metacentric height) گویند. اگر نقطه M بـالای G باشـد MG مثبت است و جسم پایدار است. اگر نقطه M زیر G باشد MG منفی است و جسم ناپایدار است.

شتاب خطی یکنواخت *Uniform Linear Acceleration*

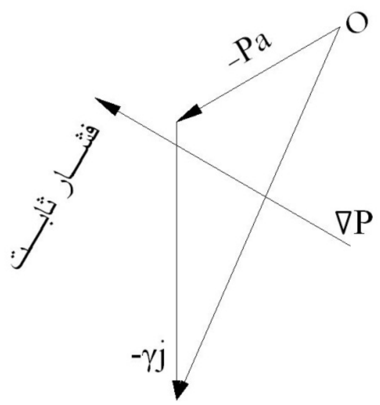
اگر جسمی حاوی سیال باشد و با شتاب a حرکت بکند سطح آب مقداری تغییر می کند کهشیب آن بسـتگی بـه شـتاب دارد .

وقتی شتاب صفر شود باز سطح به حالت اول برمی گردد. حرکت بین لایه ای وجود ندارد و تنش برشی وجود ندارد. $\frac{du}{dy}=0$



$$-\nabla \rho - \gamma \hat{j} = \rho \vec{a}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right) - \gamma \ \hat{j} = \rho\left(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\right)$$

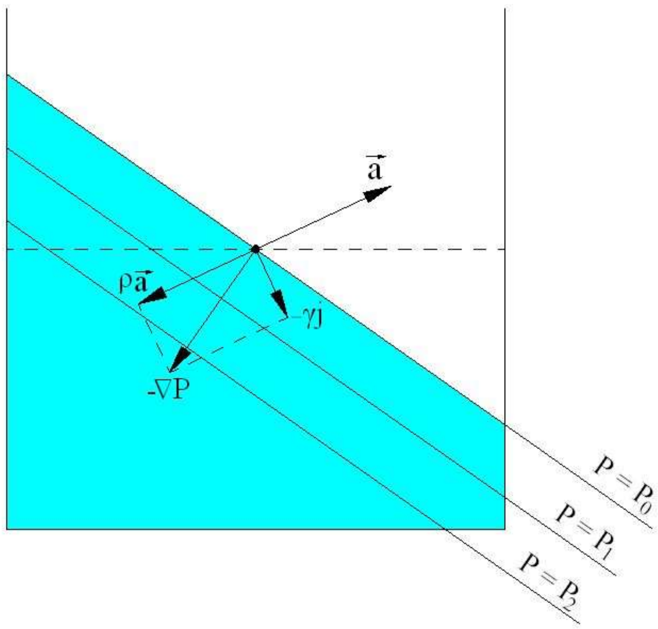


$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -\rho g - \rho a_y \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho a_z \end{cases}$$

عمود به ∇P تغییر در فشار نداریم چون ∇P در جهت تغییر ماکزیمم در P است سطوح فشار ثابت شامل سطح آزاد ، باید عمـود بر ∇P باشد .

اختلاف فشار بین $(x.y.z)$ و $(x+dx, y+dy, z+dz)$: $p = p(x.y.z)$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$
$$\Rightarrow dp = -\rho a_x dx - \rho\left(g + a_y\right)dy - \rho\, a_z\, dz$$



مساله را دو بعدی در نظر می گیریم .

$$\Rightarrow dp = -\rho a_x\, dx - \rho\left(g + a_y\right)dy$$

برای سیالات غیر قابل تراکم $(\rho = cte)$ و شتاب ثابت داریم :

$$P = -\rho a_x x - \rho\left(g + a_y\right)y + c$$

اگر مرکز مختصات را در جایی روی سطح آب بگیریم:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow p = 0$$

در سطح آزاد مایع فشار ثابت است (خط با فشار ثابت):

$$\Rightarrow 0+0+c \Rightarrow c=0$$
$$P=-\rho\, a_x x-\rho(g+a_y)\,y$$

بر روی سطح آزاد :

$$0=-\rho\, a_x x \;-\rho\left(g+a_y\right)y$$
$$\rho\left(g+a_y\right)y=-\rho\, a_x x \Rightarrow y=\frac{-a_x}{g+a_y}x$$

برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ مشتق می گیریم .

$Free\,Surface\,Slope$ (شیب سطح آزاد) $\theta>90$ منفرجه:
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-a_x}{g+a_y}=tg\theta$$

علامت منفی بیانگر این است که θ منفرجه است.

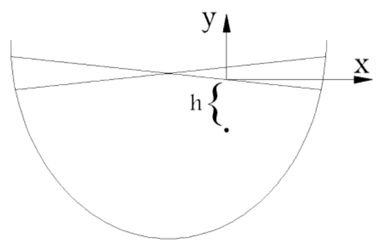
اگر بخواهیم فشار را در نقطه ای در سیال بیابیم ،داریم .

$$P=-\rho\, a_x x-\rho\left(g+a_y\right)y$$

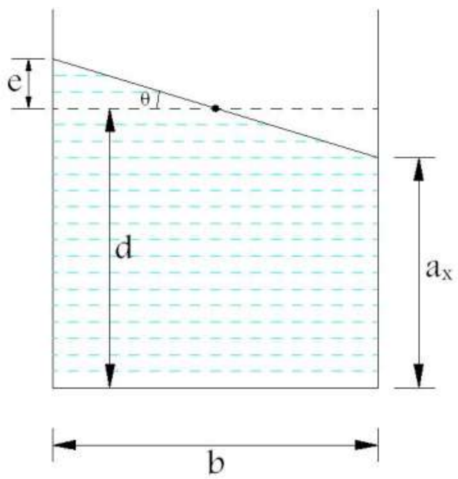
که برای هر نقطه ای درون سیال می توانیم x, y را بیابیم . به همین دلیل مبدا مختصات را به نقطه بالای نقطه فوق انتقـال مـی دهیم تا $x=0$ شود پس:

$$P_A=-\rho\, a_x(0)-\rho\left(g+a_y\right)(-h)$$
$$\Rightarrow P_A=\rho\left(g+a_y\right)h$$

که اگر $a_y = 0$ باشد: $P = \rho g h$



$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-a_x}{g+a_y} \\ P_A = \rho\left(g+a_y\right)h \end{cases}$$



$d =$ (عمق) ارتفاع اولیه مایع

$e =$ ارتفاع بالا رفته

$b =$ طول تانک در جهت موازی حرکت

$$tg\theta = \frac{e}{\frac{b}{2}} \Rightarrow e = \frac{b}{2}.tg\theta$$

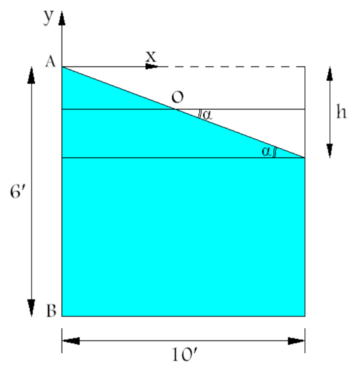
$$\Rightarrow e = \frac{b}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{free\,surface}$$

مثال 2-15 : ظرف مکعب مستطیل شکلی به طول $10\,ft$ و عرض $5\,ft$ و عمق $6\,ft$ را پر از آب نموده و با شتاب ثابتی در جهت افقی به حرکت در می آوریم چنانچه با این حرکت یک سوم حجم آب از ظرف بیرون بریزد.

الف- شتاب حرکت جسم را پیدا کنید .

ب- در صورتیکه ظرف تا ارتفاع 3 فوتی از آب پر شده باشد و ظرف با شتاب $10\,ft/s^2$ در جهت افقی حرکت کند P_B را محاسبه کنید .

$$\rho_w = 62.4\frac{lb_m}{ft^3} \qquad , \qquad g = 32.2\,ft/\sec^2$$



الف)

حجم مایع ریخته شده$=\dfrac{1}{3}\times 10\times 5\times 6 = 100\,ft^3$

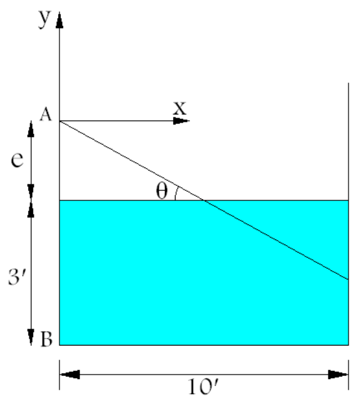
$$100 = \frac{1}{2}\times 10\times 5\times h_1 \Rightarrow h_1 = 4\,ft$$

$$tg\alpha = \frac{h_1}{10} = \frac{4}{10} = 0.4 = \frac{+a_x}{g + a_y}$$

علامت مثبت برای این است که نشان دهد α زاویه حاده است.

$$\Rightarrow a_x = 0.4 \times 32.2 = 12.88\, ft/s^2$$

ب)



$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a_x}{g + a_y} = \frac{-10}{32.2} = -0.31$$

$$e = \frac{b}{2}\, tg\theta = \frac{10}{2} \times 0.31 = 1.55\, ft$$

$$P_B = -\rho\, a_x x_B - \rho(g + ay) y_B \quad , \quad \begin{cases} x_B = 0 \\ y_B = -(3 + 1.155) = -4.55 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_B = -62.4 \times 32.2 \times \frac{(-4.55)}{32.174}$$

$$= 284.15 \frac{1b_f}{ft^2} = 1.97\, psig$$

دوران یکنواخت حول یک محور قائم

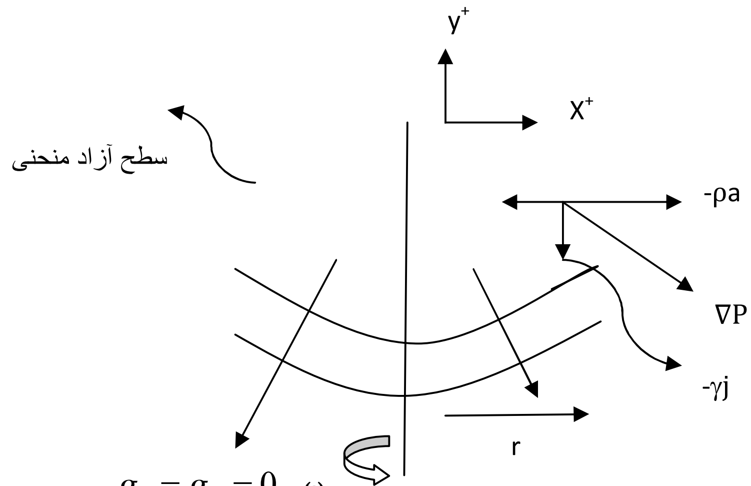
بـرای سـرعت زاویـه ای ω ، هـر جـزء از سـیال P دارای شـتاب شـعاعی $r\omega^2$ بـه سـمت داخـل مـی باشـد بطوریکـه :

$$a=-\hat{e}_r r\omega^2$$

مختصات استوانه ای $:r.\theta.z$

$$\nabla p=-\vec{j}\gamma-\rho\vec{a}$$

عمود به خط ∇P فشار تغییر نمی کند بنابراین اگر P در سطح باشد سطح آزاد عمود به ∇P است .



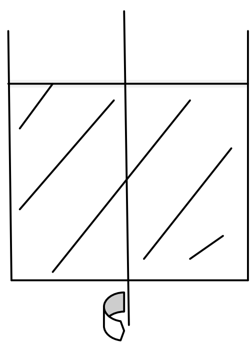
$$g_y=-g \quad , \quad g_r=g_\theta=0 \quad \omega$$

$$-\left(\hat{e}_r\frac{\partial p}{\partial r}+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\hat{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right)-\hat{k}\gamma=\rho\left(\hat{e}_r a_r+\hat{e}_\theta a_\theta+\hat{k}a_z\right)$$

$$a_r=-\omega^2 r \quad , \quad a_\theta=a_z=0$$

$$\Rightarrow -\left(\hat{e}_r\frac{\partial p}{\partial r}+\hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\hat{k}\frac{\partial p}{\partial y}\right)=-\hat{e}_r\rho\omega^2 r+\hat{k}\gamma$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\rho w^2 r \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial\theta}=0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\gamma=-\rho g$$



در اینجا چون نسبت به محور y تقارن وجود دارد یعنی فشار P تابع θ نمی باشد .

$$p = p(r, y) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

توجه کنید که سطح آزاد مایع سطحی است که در روی آن فشار ثابت است .

$$\Rightarrow dp = -\rho\, g dy + \rho\, \omega^2 r dr$$

برای سیال غیر قابل تراکم و سرعت ثابت ω داریم :

$$P = -\rho g y + \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + C$$

فرضیات:۱- ثابت =ρ (سیال تراکم ناپذیر است.)

۲-سرعت زاویه ای ثابت

مختصات را در 0 اختیار کرده (روی محور استوانه در سطح آزاد مایع):

$$\text{در} \begin{cases} r = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow p = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow p = -\rho\, g\, y + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2$$

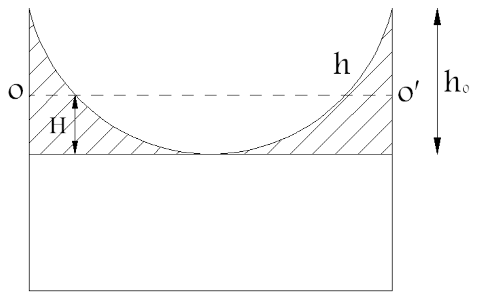
برای یافتن معادله سطح آزاد داریم : $P = 0$

معادله سطح آزاد:

$$\boxed{y = \frac{\omega^2 r^2}{2g}} \Rightarrow \rho g y = \frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2 \Rightarrow$$

برای فشار در هر نقطه یک خط شاقولی تا سطح آزاد می کشیم تا h بدست آید و داریم :

$$P = \rho g h = \gamma h$$



هنگامی که آب درمبداءخود OO' می چرخد، محور دوران آب به اندازه H پایین می آید و در کنار به اندازه h بالا می رود .

$2\times AH =$ حجم سیال هاشورخورده $\times 2 =$ حجم سهمیگون $\times 2 = Ah_0 =$ حجم استوانه محیط به سهمیگون

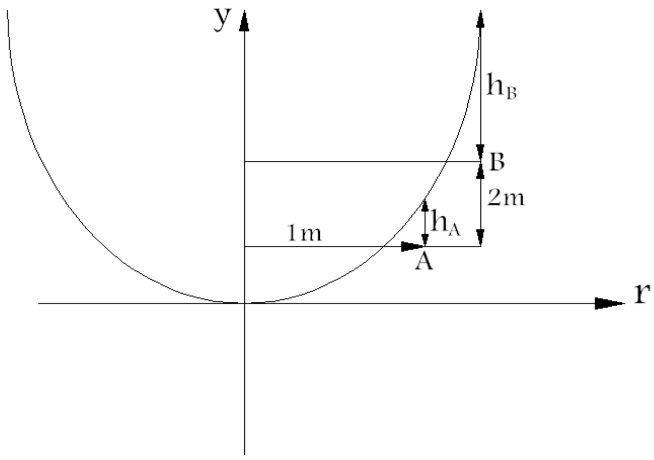
زیرا حجم سیال زیرسهمیگون حاصل از دوران همان حجم اولیه می باشد .

سیال $\Rightarrow h_0 = 2H$

پس دو رابطه اصلی داریم :

$$\begin{cases} h_0 = 2H \\ y = \dfrac{\omega^2 r^2}{2g} \end{cases}$$

مثال2-16 : یک مایع با چگالی $S=1.2$ با سرعت $200rpm$ حول محور قائمی دوران می کند در یـک نقطـه A درون سیال با فاصله $1m$ از محور فشار $70Kpa$ می باشد فشار در نقطه B که $2m$ بالاتر از A و $1.5m$ با محور فاصـله دارد چقدر است؟



$$w=2\pi n \quad , \quad n=200rpm \Rightarrow \omega=\frac{2\pi\times 200}{60}=20.95\frac{rad}{s}$$

$$\gamma=1.2\times 9806=11767\ N/m^3$$

$$r_A=1m \quad , \quad r_B=1.5m$$

$$P_A=-\rho g y_A+\frac{\rho\omega^2}{2}{r_A}^2$$

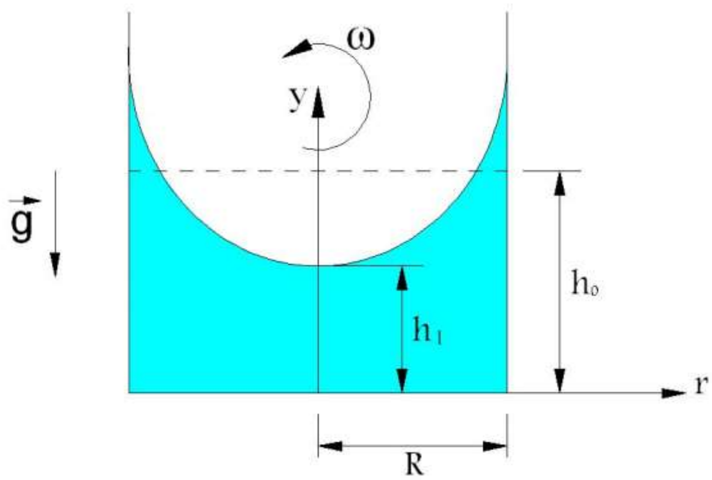
$$P_B=-\rho g y_B+\frac{\rho\omega^2}{2}r_B^2$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = 2\gamma + \frac{\rho\omega^2}{2}\left(r_A^2 - r_B^2\right)$$

$$\Rightarrow 70000 - P_B = 2\times 11767 + \frac{11767}{2\times 9.806}\times(20.95)^2\left(1^2 - 1.5^2\right)$$

$$\Rightarrow P_B = 376.6Kpa$$

اگر مبداء مختصات در پایین ظرف انتخاب شود .



$$\begin{cases} r = 0 \\ y = h_1 \end{cases} \Rightarrow p = 0 \Rightarrow 0 = -\rho g h_1 + 0 + C$$

$$\Rightarrow C = \rho\, g h_1$$

$$p = \frac{\rho\,\omega^2}{2} r^2 - \rho\, g\left(y - h_1\right)$$

$$p = 0 \Rightarrow y = h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

یک سهمی که راس آن روی محور در $y = h_1$ است .

محاسبه h_1 برحسب h_0:

ارتفاع در حال چرخش $= h_1$

ارتفاع سطح اولیه(در نبود چرخش) $= h_0$

با توجه به اینکه حجم مایع ثابت می ماند:

در نبود چرخش $V = \pi R^2 h_0$

با چرخش $V = \int_0^R \int_0^y 2\pi\, r\, dy\, dr = \int_0^R 2\pi\, yrdr$

$$= \int_0^R 2\pi\left(h_1 + \frac{w^2 r^2}{2g}\right) r dr = \pi\left[h_1 R^2 + \frac{W^2 R^4}{4g}\right]$$

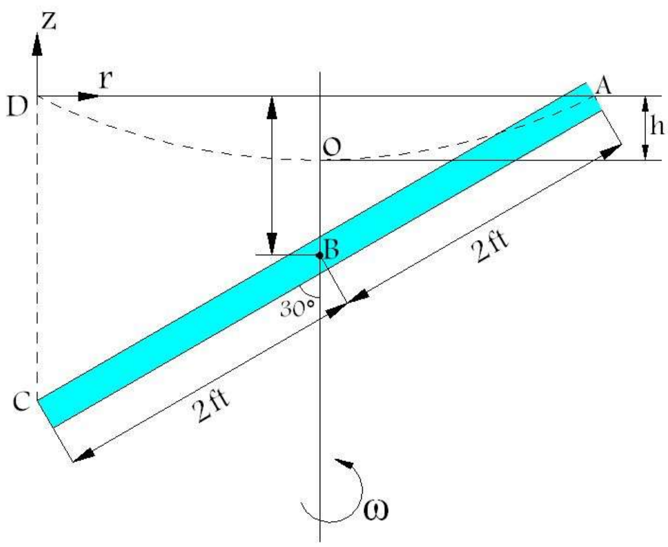
$$\pi R^2 h_0 = \pi\left[h_1 R^2 + \frac{W^2 R^4}{4g}\right] \Rightarrow h_1 = h_0 - \frac{w^2 R^2}{4g}$$

مثال 2-17:یک لوله مستقیم به طول $4\,ft$ از طرف پایین بسته و با آب پر شده است . این لوله مورب بوده با خط قائم زاویه 30 درجه می سازد و با سرعت یکنواخت زاویه ای $8.02\, rad/s$ حول محور قائمی که از نقطه وسط آن می گذرد ،دوران داده می شود . سهمیگون فشار صفر را رسم کرده ،فشار را در طرف پایین و وسط لوله تعیین کنید؟

سطح آزاد مجازی حتماً از A می گذرد.

چون P در A صفراست .

اگر مبدا مختصات در O اختیار شود، داریم :



$$h = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad , \quad R = 2Sin30$$

$$h = \frac{(8.02)^2}{64.4}(2Sin30)^2 = 1ft$$

$$p_C = \rho g h_C = 62.4 \times (4Cos30) = 216\, lb_f \big/ ft^2$$

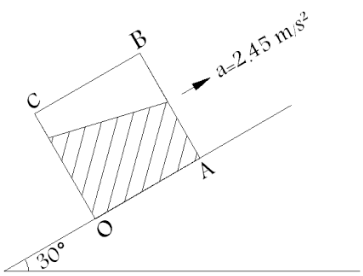
$$p_B = \rho\, g h_B \quad , \quad h_B = 2Cos30 - 1 = 0.732\, ft$$

$$\Rightarrow P_B = 62.4 \times 0.732 = 45.6\ Lb_f\ /\ ft^2$$

تمرین2-4: یک تانک مکعبی شکل به اضلاع $0.6m$ و دارای شتابی برابر $2.45\, m/s^2$ میباشد در صورتیکه تا نصف تانک پر از روغن با $S = 0.9$ باشد مطلوبست محاسبه:

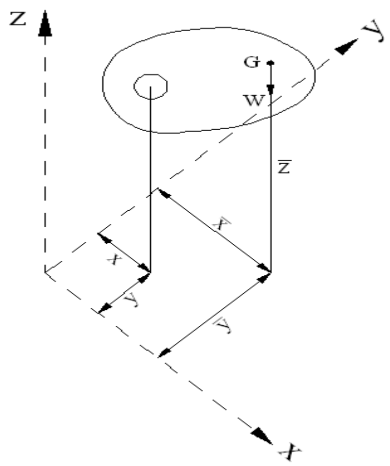
الف- شیب سطح آزاد روغن

ب-محاسبه P_0 , P_A



توضیح بیشتر در مورد گشتاور

قضیه دارینیون یا اصل گشتاورها : گشتاور برآیند نیروها حول یک محور برابر است با مجموع گشتاورهای مربوط به مولفه هـای آن نیرو حول همان محور(برای نیروهای در یک صفحه)



$$\int xdw = w\bar{x} \;,\;\; w = mg \;, dw = gdm$$

$$\Rightarrow \int xgdm = mg\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int xdm}{m}$$

$$\bar{y} = \frac{\int ydm}{m}, \bar{Z} = \frac{\int zdm}{m}$$

موضع مرکز جرم :

مرکز جرم برای حالتی که میدان ثقل بصورت شار موازی و یکنواخت در نظر گرفته می شود همان گرانیگاه است

.

$dm = \rho dv$

جرم مخصوص :

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\rho dv}{\int \rho dv}, \bar{y} = \frac{\int y\rho dv}{\int \rho dv}, \bar{z} = \frac{\int z\rho dv}{\int \rho dv}$$

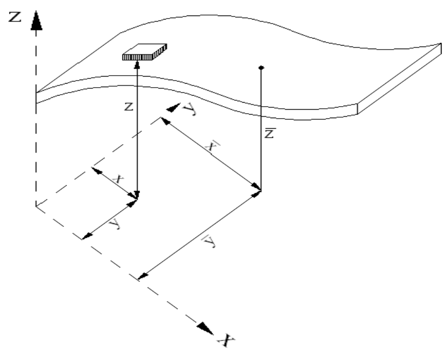
$$if\ \rho = cte \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int xdv}{\int dv}$$

در این مورد چون خواص فیزیکی حذف شده اند به جای گرانیگاه یا مرکز جرم از اصطلاح مرکز هندسی استفاده می شود. اگر ρ ثابت باشد موقعیت مرکز هندسی و مرکزجرم آن بر یکدیگر منطبق هستند.

$dm = \rho\, tdA$

$$\bar{x} = \frac{\int x\rho tdA}{\rho tA} = \frac{\int xdA}{A}$$

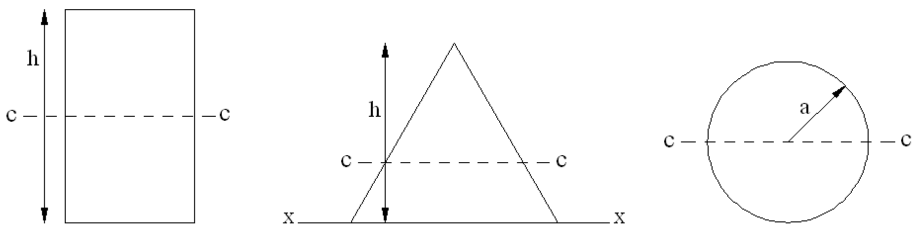
$$\bar{y} = \frac{\int ydA}{A}, , , \bar{Z} = \frac{\int zdA}{A}$$



در اینجا مرکـز جـرم همـان

مرکز هندسی (سطح)است.

I_C برای چند شکل خاص:



$$I_C = \frac{1}{12} bh^3$$

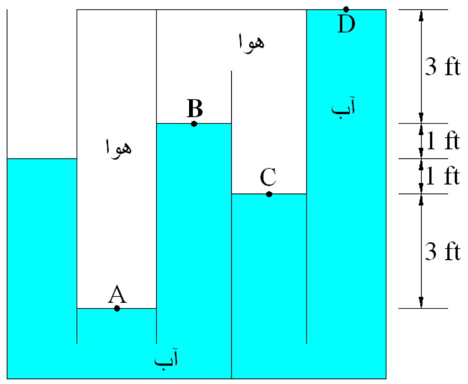
$$I_C = \frac{1}{36} bh^3$$

$$I_{xx} = \frac{1}{12} bh^3$$

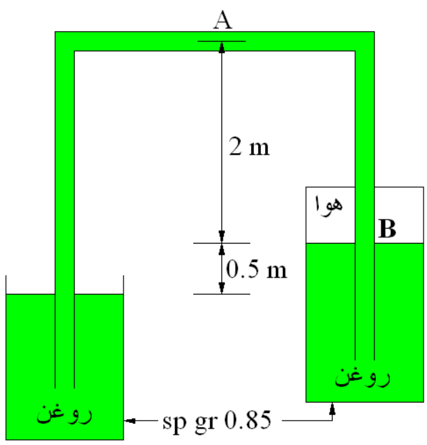
$$I_C = \frac{\pi a^4}{4}$$

مسائل

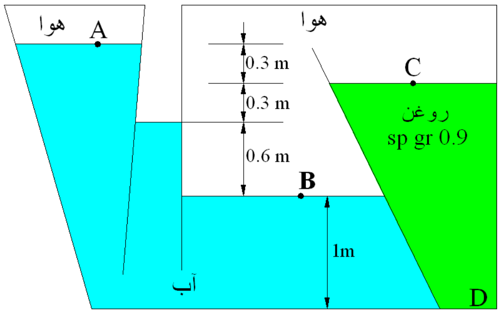
۲-۱- مخزن شکل زیر محتوی آب و هواست. فشار در نقاط A،B،CوD را برحسب پاسکال به دست آورید.



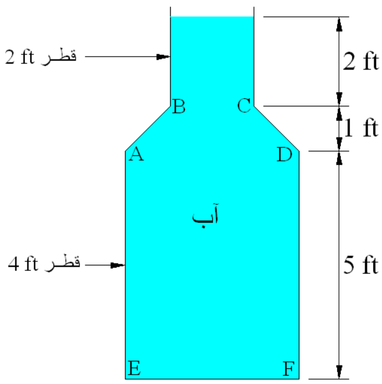
۲-۲- در شکل زیر لوله با روغن پر شده است. فشار در A و B را بر حسب متر ستون آب به دست آورید.



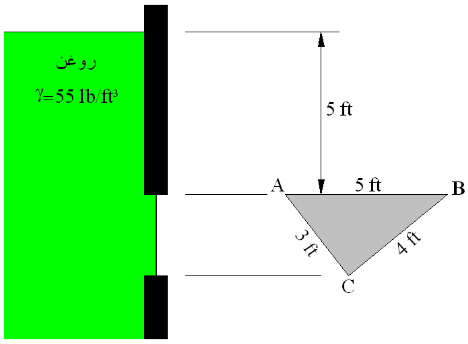
۲-۳- برای شکل زیر فشار در نقاط A،B،C،D را برحسب پاسکال به دست آورید.



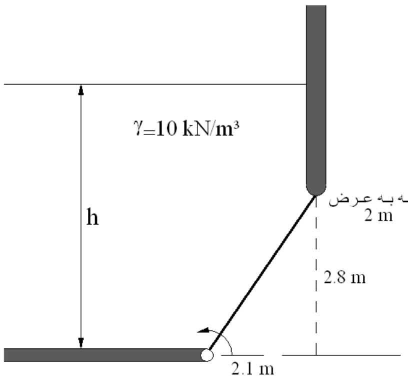
۲-۴- مقطع ظرفی که در شکل زیر نشان داده شده، دایره است. مقدار نیروی قائم رو به بالا وارده به سطح مخروط ناقص ABCD را تعیین کنید. مقدار نیروی رو به پایین وارده به صفحهٔ EF را تعیین کنید. آیا این نیرو با وزن سیال برابر است؟ چرا؟



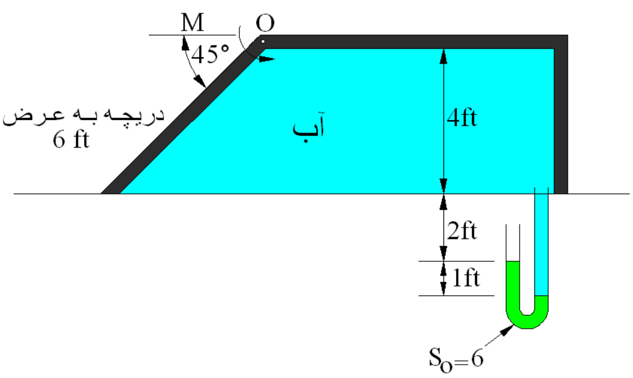
۲-۵- سطح مثلثی ABC در شکل زیر قائم الزاویه است. نیروی وارد به یک طرف سطح را الف) با انتگرال گیری و ب) با استفاده از فرمول، تعیین کنید.



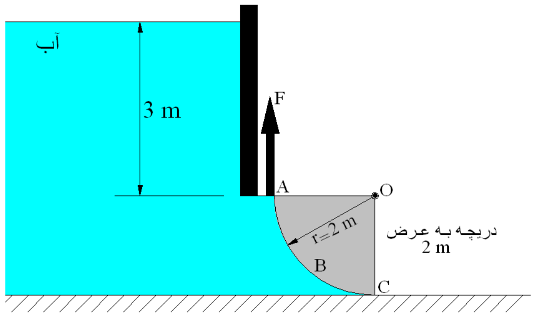
۲-۶- در شکل زیر لولای دریچه تحت گشتاور ۱۵۰kN.m از کار می افتد. عمق مایع، h، حداکثر چقدر می تواند باشد؟



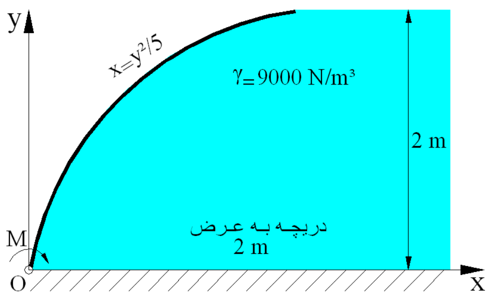
۲-۷- در شکل زیر گشتاور حول O برای بسته نگه داشتن دریچه چقدر است؟



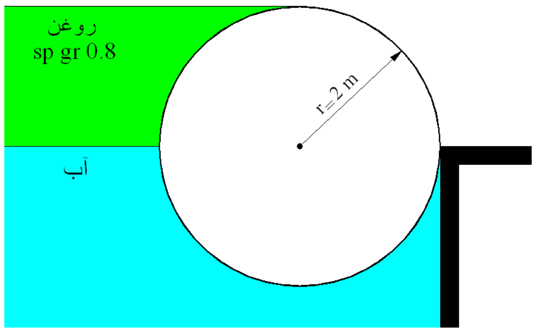
۲-۸- در شکل زیر یک دریچه قطاعی نشان داده شده است. الف) مؤلفهٔ افقی نیروی وارد به دریچه و خط اثر آن را تعیین کنید. ب) مؤلفهٔ قائم نیرو و خط اثر آن را تعیین کنید. ج) نیروی لازم برای باز کردن دریچه ،F، را به دست آورید. از وزن دریچه صرفنظر کنید. د) گشتاور نیروها حول محوری که از O می گذرد، چقدر است؟



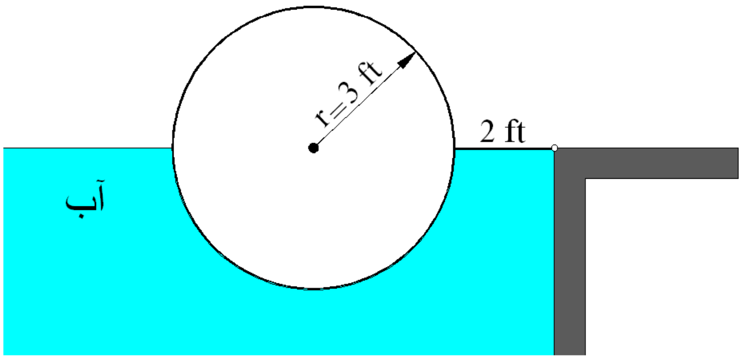
۲-۹- در شکل زیر مؤلفهٔ قائم نیروی وارد به دریچه و خط اثر آن را تعیین کنید.



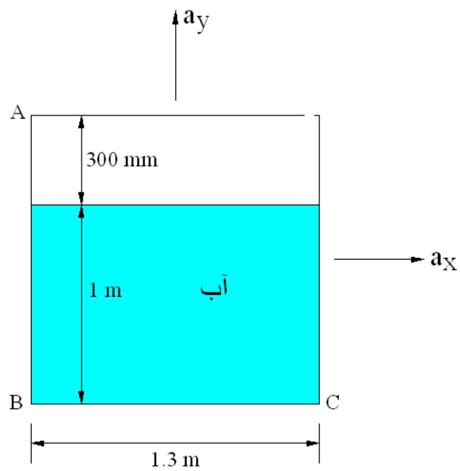
۲-۱۰- یک تنهٔ درخت مطابق شکل زیر جلوی آب و روغن را بند آورده است. شکل کنده را استوانه فرض کرده، برای واحد طول آن مطلوب است : الف) نیرویی که استوانه را به دیواره می فشارد، ب) وزن استوانه، ج) چگالی استوانه.



۲-۱۱-دریچهٔ شکل زیر از یک استوانه توخالی و یک صفحه تشکیل شده است. صفحه به دیواره لولا شده است. موقعیت دریچه با پمپاژ آب به داخل یا خارج استوانه کنترل می شود. در حالتی که استوانه خالی است، مرکز ثقل کل دریچه در روی محور تقارن و به فاصلهٔ ۴ ft از لولا قرار دارد. در این حالت دریچه به صورتی که در شکل نشان داده شده است، متعادل است. هنگامی که سطح آب ۳ft بالاتر رود، چند فوت آب باید به داخل استوانه پمپ شود تا دریچه در موقعیت خود باقی بماند. عرض دریچه را ۱ ft بگیرید.



۲-۱۲- در شکل زیر $a_x=۹.۸۰۶\ m/s^2$ و $a_y=۰$ است، فشار در نقاط A،B وC را تعیین کنید.

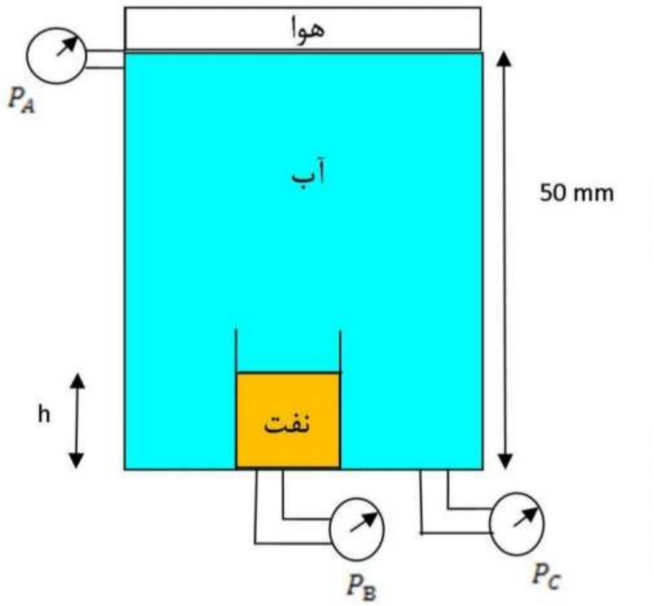


۲-۱۳- با انتگرال گیری ثابت کنید که حجم سهمیگون نصف حجم استوانه محاط بر آن است.

۲-۱۴- یک استوانه به قطر۲ftو طول ۶ ft در امتداد محور خود در امتداد افقی با شتاب $۱۶.۱ ft/s^2$ حرکت می کند. استوانه با مایعی به وزن مخصوص $۵۰ lb/ft^3$ پر شده است و فشار روی محور استوانه قبل از آنکه حرکت شتابدار شروع شود ۱۰ psi است. نیروی خالص افقی که به مایع وارد می شود را به دست آورید.

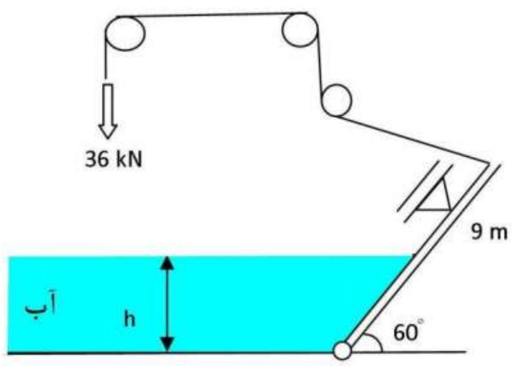
۲-۱۵- یک مخزن استوانه ای آب به ارتفاع ۵۰ mm می باشد.داخل مخزن یک استوانه روباز محتوی نفت به ارتفاع h وچگالی ۰.۸ قرار دارد.از فشارسنج ها مقادیر زیرخوانده می شود:

فشار نسبی P_A وارتفاع h چقدر است؟ فرض کنید که از صعود نفت به بالای تانک جلوگیری می شود.

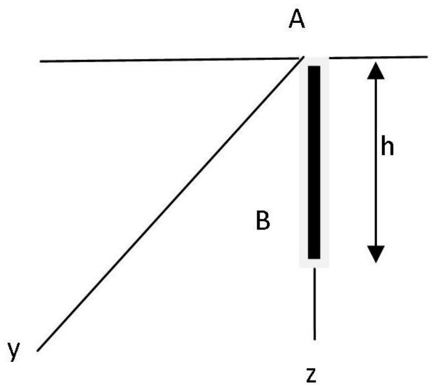


۲-۱۶- چه ارتفاعی از آب باعث می شود که دریچه در جهت عقربه های ساعت دوران کند؟

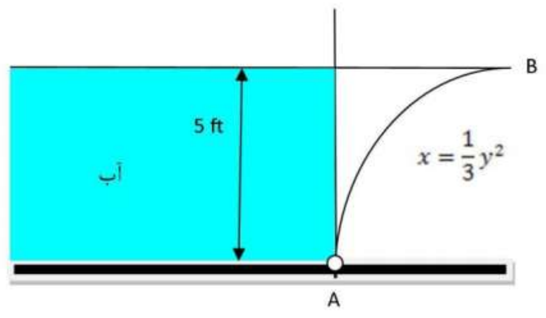
عرض دریچه ۳ m است و از اصطکاک صرف نظر کنید.



۲-۱۷- مایعی را تصور کنید که به هنگام سکون وزن مخصوصش متناسب با جذر فشار است.وزن مخصوص مایع در سطح آزادمعلوم و برابر γ_0 است.فشار را به عنوان تابعی از عمق مایع از سطح آزاد به دست آورید.نیروی برآیند وارده به سطح AB از صفحه مستطیلی شکل غوطه ور در مایع چقدر است؟ پهنای صفحهb است.

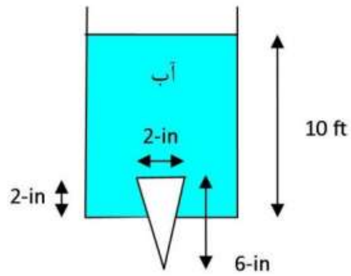


۲-۱۸- دریچه سهمی شکل AB در نقطه لولا شده است ودر نقطه B محکم شده است.اگرعرض دریچه $10 ft$ باشد مولفه های نیروی وارده از آب به دریچه را محاسبه کنید؟

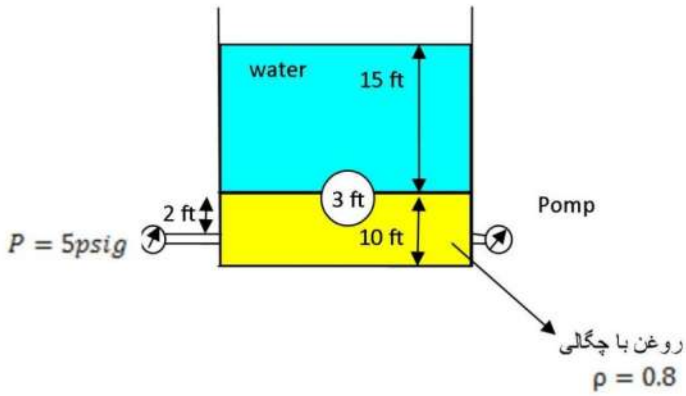


۲-۱۹- دیوار موجداری به عرض ۱۰ ft را درنظربگیرید که مطابق شکل موجهای نیم دایره ای دارد.نیروهای افقی و عمود وارده از آب و هوا به دیوار را به دست آورید. جواب را بر واحد عرض و برای تعداد n موج بدست آورید.

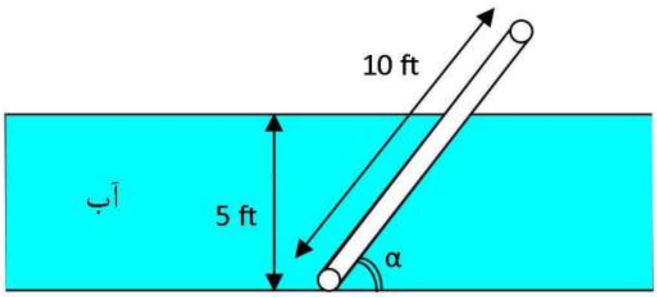
۲-۲۰- نیروی وارده از آب به درپوش مخروطی را به دست آورید؟



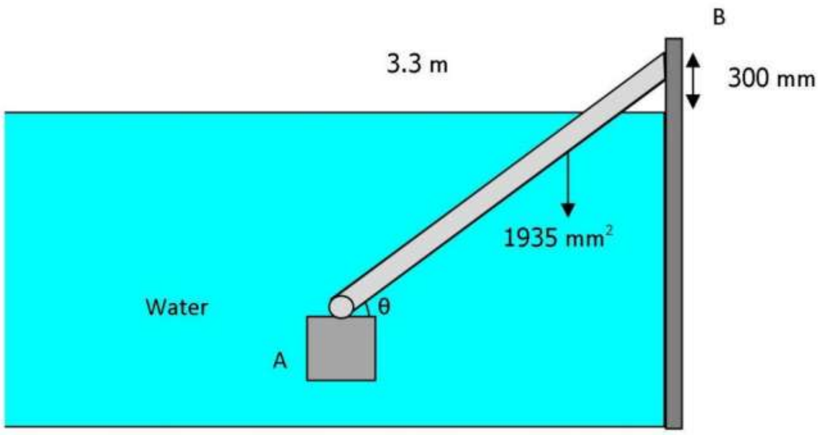
۲-۲۱- اگر دو قسمت مخزن کاملاً نسبت به هم آب بندی شده باشند نیروی عمودی وارد به کره چه قدراست؟



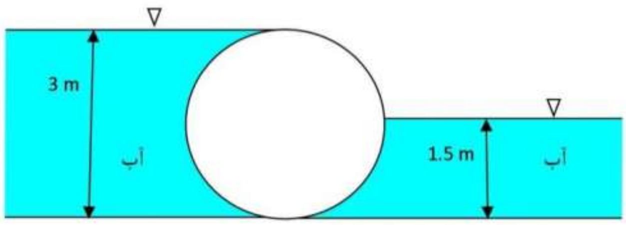
۲-۲۲- یک میله چوبی به وزن $10\,lb_f$ در عمق $5ft$ از سطح آزاد لولا شده است.طول میله $10ft$ بوده وسطح مقطع آن یکنواخت است.هنگامی که میله از وضعیت عمود رها شود تحت چه زاویه ای به حالت تعادل در خواهد آمد؟ سطح مقطع میله $1.5\ in^2$ است.



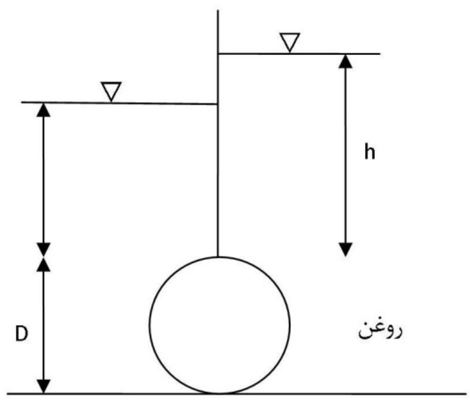
۲-۲۳- بلوکی از یک ماده به حجم $0.028\ m^3$ و وزن ۲۹۰N را در آب غوطه ور کرده ایم. یک میله چوبی به طول ۳.۳m و سطح مقطع $1935\ mm^2$ از یک طرف به بلوک و از طرف دیگر به دیواره متصل است.اگر وزن میله ۱۳N باشد در حالت تعادل زاویه θ چقدر خواهد بود؟



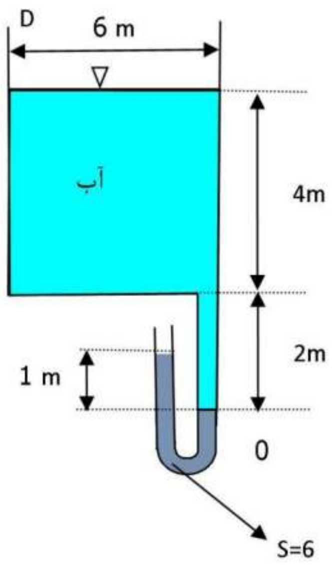
۲-۲۴- مطابق شکل زیر سرریز استوانه ای برای کنترل سطح آب به کار می رود.قطر این استوانه ۳ m و طول آن ۶ m است.نیروی برآیند وارد ازطرف سیال ها به سرریز را بدست آورید.



۲-۲۵- اگر وزن مخصوص نسبی روغن ۰.۸ باشد ارتفاع h چقدر باید باشد تا برآیند نیروی افقی وارد بر لوله استوانه ای شکل به قطر D صفر شود؟

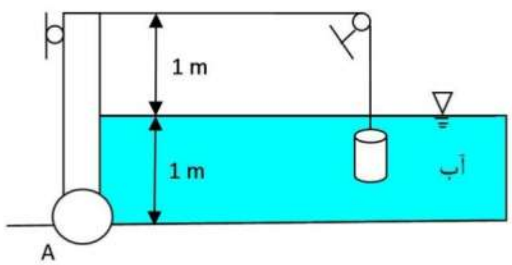


۲-۲۶- در شکل زیر مخزنی به ابعاد $6m \times 6m \times 4m$ ازآب پر شده است و در کف به مانومتری اتصال یافته است.اختلاف سطح سیال در مانومتر m ۱ و چگالی نسبی سیال درآن ۶ است.نیروی وارد بر سمت چپ بدنه مخزن از طرف آب چقدر است؟

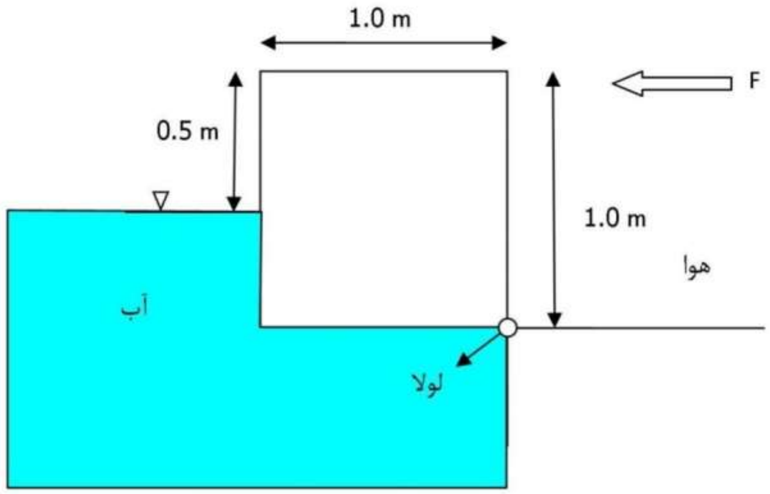


۲-۲۷- در شکل زیر برای این که دریچه حول نقطه A بچرخد حداقل دانسیته وزنه چند $\frac{kg}{m^3}$ است؟

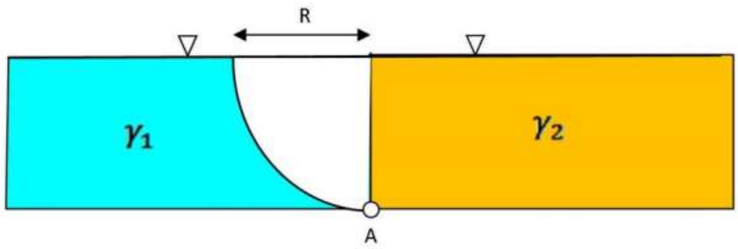
پهنای دریچه ۱m است. قطر و ارتفاع وزنه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۲۰ میلی متر است.



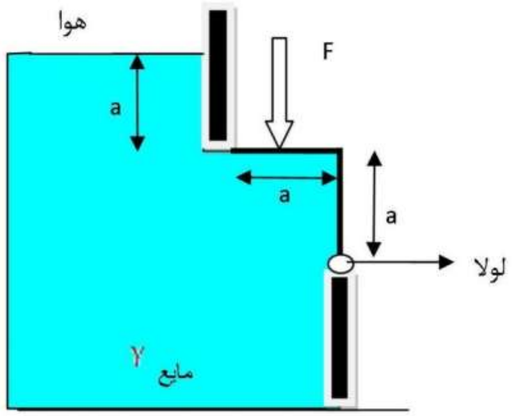
۲-۲۸- قطعه بلوک مکعب مستطیلی به طول ۴m در حال تعادل است.اگر سطح آب تا سطح فوقانی بلوک بالا بیاید برای نگهداری بلوک در وضعیت نشان داده شده چه نیرویی باید بر بال فوقانی آن وارد شود تا تعادل حفظ شود؟ بر حسب نیوتن



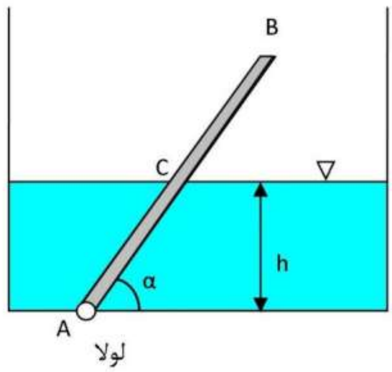
۲-۲۹- یک دریچه قطاعی به شکل ربع استوانه و به شعاع R مطابق شکل در کف A لولا شده است.در طرفین این دریچه دونوع مایع به وزن مخصوص های γ_1 و γ_2 قرار دارد.با صرف نظر کردن از وزن دریچه برای برقراری تعادل نسبت $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ چقدر است؟ (طول دریچه واحد فرض شود)



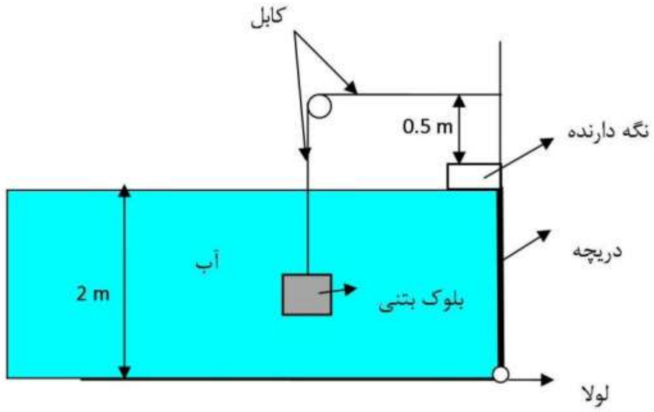
۲-۳۰- در مخزن نشان داده شده در شکل نیروی لازم برای بسته نگاه داشتن دریچه با ابعاد داده شده را بدست آورید؟ (عرض دریچه واحد است)



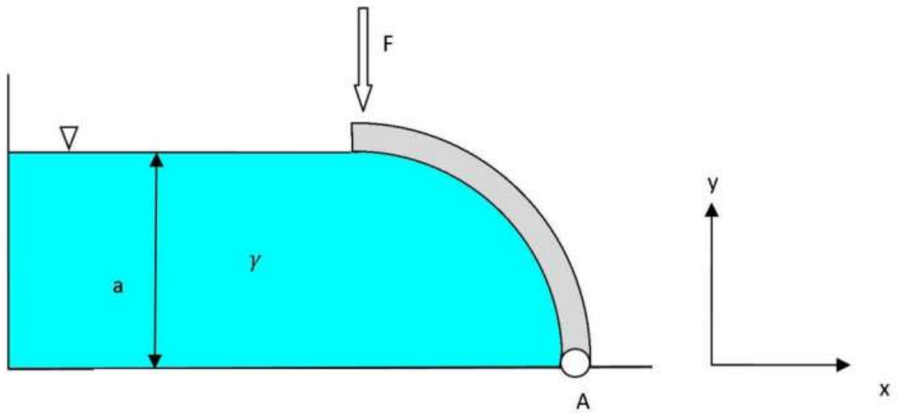
۲-۳۱- در شکل زیر میله چوبی AB با مقطع ثابت در A لولا شده است.ارتفاع آب در مخزن (h) را به تدریج اضافه می کنیم تا زاویه α به ۹۰ درجه برسد.آیا قسمتی از طول میله (AC) که در داخل آب قرار دارد ثابت می ماند؟



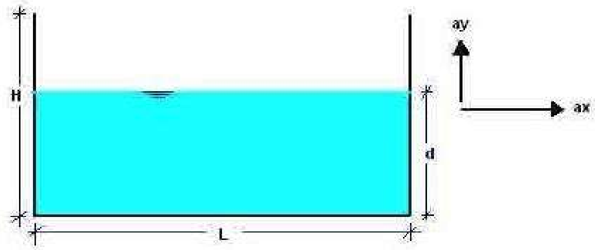
۲-۳۲- در شکل زیر مقدار حداقل حجم بلوک بتنی ($\gamma = 23.3\ {kN}/{m^3}$) برای نگه داشتن دریچه(با عرض ۱متر) در حالت بسته بودن را بر حسب مترمکعب بدست آورید.



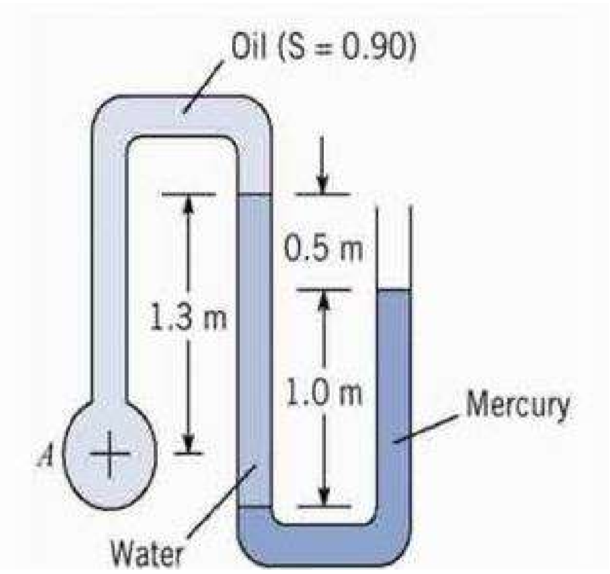
۲-۳۳- در شکل زیر دریچه ربع دایره شکل به شعاع a آزادانه حول مفصل A دوران می کند.اگر دوران دریچه توسط نیروی عمودی F مهار شده باشد عکس العمل عمود وارد بر تکیه گاه A را در واحد عرض دریچه حساب کنید.



۲-۳۴- مخزنی مکعب مستطیل به طول L=6m ،ارتفاع H=4m وعرض B=2m تا عمق d=2m از آبپر شده است و تحت شتابی با مولفه های افقی و قائم ax=ay=0.5g قرار می گیرد. نیروی وارد بر کف مخزن چند برابر شرایط سکون است؟

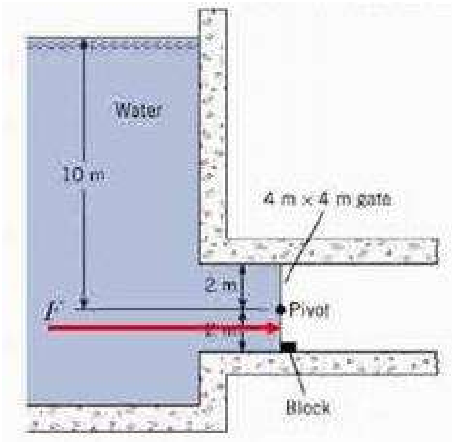


۲-۳۵- در صورتی که وزن مخصوص نسبی جیوه ۱۳/۶ باشد با توجه به شکل ابتدا فشارنسبی در نقطه A را محاسبه نمایید سپس با فرض آنکه فشار هوا ۷۵ سانتیمترجیوه است، فشار مطلق در نقطه A را بر حسب متر ستون آب بدست آورید.

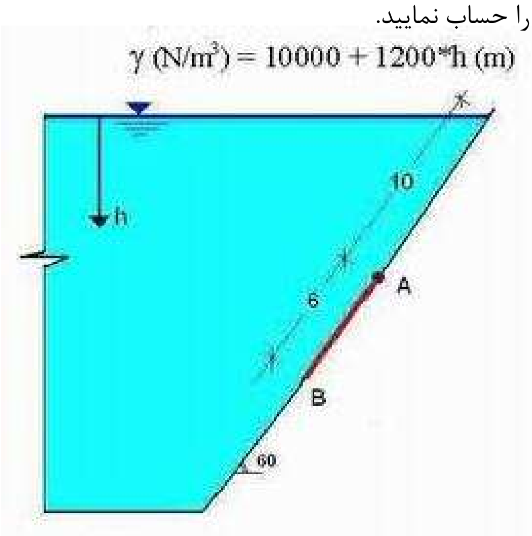


۲

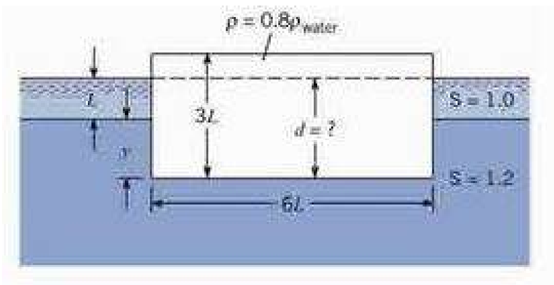
-۳۶-دریچه مربعی شکل زیر حول محور مرکزیش لولا شده است برای بسته ماندن دریچه، این محور باید چه لنگری را تحمل کند.



۲-۳۷- دریچه مستطیلی مایل AB به عرض ۴ متر مطابق شکل برروی دیواره مخزنی نصب شده است در صورتی که وزن مخصوص مایع با معادله زیر در عمق مخزن تغییر نمایید نیروی وارد بر دریچه را حساب نمایید.



۲-۳۸- مطابق شکل جسم مکعب مستطیلی در سطح دو مایع مخلوط ناشدنی شناور است. مقدار d را بر حسب L محاسبه کنید.



۲-۳۹- در صورتی که در شکل زیر مقدار l=3m و فشارهوای محبوس در بالای مخزن P(air)=12Kpa وعرض مخزن(عمود بر صفحه) ۱ متر باشد، نیروی قائم وارد بر دریچه ربع استوانه AB را محاسبه کنید.