تحلیل و طراحی

۶ سیستمهای کنترل به روش مکان هندسی ریشه‌ها

controlengineers.ir

۶-۱ مقدمه

مشخصات اساسی پاسخ گذرای یک سیستم حلقه بسته رابطه‌ای بسیار نزدیک با محل قطبهای حلقه بسته دارد. اگر سیستم بهرهٔ حلقهٔ متغیری داشته باشد، محل قطبهای حلقه بسته به مقدار بهرهٔ انتخاب شده برای حلقه بستگی دارد. پس دانستن چگونگی تغییر محل قطبهای حلقه بسته در صفحهٔ s با تغییر بهرهٔ حلقه، برای طراح مهم است.

از دید طراحی در بعضی سیستمها یک اصلاح سادهٔ بهره می‌تواند قطبهای حلقه بسته را به محل مطلوب ببرد. به این ترتیب مسئلهٔ طراحی به انتخاب مناسب بهرهٔ حلقه می‌انجامد. اگر تنظیم بهره نتواند به تنهایی به نتیجهٔ مطلوب منجر شود، افزودن جبرانساز به سیستم ضروری می‌شود. (این موضوع در بخش‌های ۶-۶ تا ۶-۹ به تفصیل مورد بحث قرار خواهد گرفت.)

قطبهای حلقه بسته ریشه‌های معادلهٔ مشخصه هستند. یافتن ریشه‌های معادلات مشخصهٔ دارای مرتبه بالاتر از ۳ کاری طولانی است و استمداد از کامپیوتر را می‌طلبد (MATLAB راه ساده‌ای برای حل این مشکل است.) بنابراین محض یافتن ریشه‌های معادلهٔ مشخصه ارزش محدودی دارد، زیرا با تغییر بهرهٔ تابع تبدیل حلقه باز، معادلهٔ مشخصه تغییر می‌کند و محاسبهٔ جدیدی لازم می‌شود.

دبلیو آر ایوانس روش ساده‌ای برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ مشخصه ابداع کرده است که در مهندسی کنترل

بسیار به کار می‌رود. در این روش، که روش **مکان هندسی ریشه‌ها** نامیده می‌شود، ریشه‌های معادلهٔ مشخصه به ازای تمام مقادیر یک پارامتر سیستم رسم می‌شود. پس می‌توان ریشه‌های متناظر با هر مقدار خاص این پارامتر را روی نمودار حاصل مشخص کرد. این پارامتر معمولاً بهره است، ولی هر پارامتر دیگری از تابع تبدیل حلقه باز نیز می‌تواند باشد. در بحث آتی فرض می‌کنیم بهرهٔ تابع تبدیل حلقه باز پارامتری است که از صفر تا بینهایت تغییر می‌کند، مگر این که خلاف آن بیان شود.

طراح می‌تواند با استفاده از روش مکان هندسی ریشه‌ها اثرات تغییر بهره یا افزودن قطبها و یا صفرهای حلقه باز بر قطبهای حلقه بسته را پیش‌بینی کند. بنابراین طراح باید درک خوبی از روش ترسیم مکان هندسی ریشه‌های حلقه بسته، چه با دست و چه با نرم‌افزارهای کامپیوتری مانند MATLAB داشته باشد.

فایدهٔ مکان هندسی ریشه‌ها در طراحی سیستمهای کنترل خطی کاملاً آشکار است، زیرا نشان می‌دهد قطبها و صفرهای حلقه باز باید چگونه اصلاح شوند تا پاسخ مشخصات مطلوب را داشته باشد. این روش مخصوصاً برای دستیابی سریع به نتایج تقریبی مناسب است.

ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها با MATLAB کاری بسیار ساده است، بنابراین ممکن است تصور شود که ترسیم مکان هندسی با دست اتلاف وقت و انرژی است. ولی برای تعبیر مکان هندسی رسم شده با کامپیوتر داشتن تجربهٔ ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها با دست بسیار ارزشمند است، همچنین این تجربه می‌تواند شکل تقریبی مکان هندسی ریشه ها را به سرعت به ذهن متبادر کند.

نمای کلی فصل. نمای کلی فصل از این قرار است: بخش ۶-۱ مقدمه‌ای در مورد روش مکان هندسی ریشه‌هاست. در بخش ۶-۲ جزئیات مفاهیم زیربنایی روش مکان هندسی ریشه‌ها بیان شده، روش کلی ترسیم آن با چند مثال آموزنده معرفی می‌شود. در بخش ۶-۳ چگونگی ایجاد نمودارهای مکان هندسی ریشه ها با MATLAB توضیح داده شده است. بخش ۶-۴ به بررسی حالت ویژه‌ای اختصاص دارد که در آن سیستم حلقه بسته فیدبک مثبت دارد. بخش ۶-۵ در مورد جنبه‌های عمومی رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها برای طراحی سیستم‌های حلقه بسته می‌باشد. در بخش ۶-۶ راجع به طراحی سیستم کنترل با جبرانساز پیشفاز و بخش ۶-۷ راجع به طراحی سیستم کنترل با جبرانساز پسفاز است . در بخش ۶-۸ در مورد روش جبرانسازی پسفاز – پیشفاز صحبت خواهد شد. سرانجام بخش ۶-۹ راجع به روش جبرانسازی موازی اختصاص دارد.

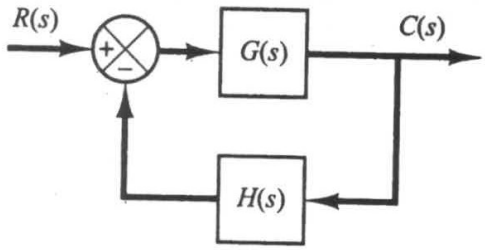
۶-۲ نمودار مکان هندسی ریشه‌ها

شرایط زاویه و فاز. سیستم دارای فیدبک منفی شکل ۶-۱ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{۶-۱}$$

معادلهٔ مشخصهٔ این سیستم حلقه بسته با برابر صفر قرار دادن مخرج طرف راست معادلهٔ (۶-۱) به دست می‌آید. یعنی

controlengineers.ir



شکل ۶-۱ سیستم کنترل.

$$1+G(s)H(s)=0$$

یا

$$G(s)H(s)=-1 \qquad (۶-۲)$$

فرض می‌کنیم $G(s)H(s)$ نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s است. [می‌توان این تحلیل را به حالتی که $G(s)H(s)$ تأخیر انتقالی e^{-Ts} دارد نیز تعمیم داد] چون $G(s)H(s)$ یک کمیت مختلط است ، معادلهٔ (۶-۲) را می‌توان با جدا کردن اندازه و فاز دو طرف معادله، به دو معادله تبدیل کرد و به دست آورد:

شرط زاویه:

$$\angle G(s)H(s)=\pm 180^\circ(2k+1) \qquad (k=0,1,2,\cdots) \qquad (۶-۳)$$

شرط اندازه:

$$|G(s)H(s)|=1 \qquad (۶-۴)$$

مقادیری از s که هر دو شرط بالا را ارضا کنند، ریشه‌های معادلهٔ مشخصه یا قطبهای حلقه بسته هستند. نمودار نقاطی از صفحهٔ مختلط که تنها شرط زاویه را ارضا می‌کنند ، مکان هندسی ریشه‌ها نامیده می‌شود. ریشه‌های معادلهٔ مشخصه (قطبهای حلقه بسته) متناظر با مقدار مشخصی از بهره با استفاده از شرط اندازه به دست می‌آید. جزییات اعمال شرایط فاز و اندازه برای یافتن قطبهای حلقه بسته در ادامهٔ این بخش معرفی می‌شود.

در بسیاری از موارد $G(s)\,H(s)$ یک پارامتر بهره K دارد و معادلهٔ مشخصه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

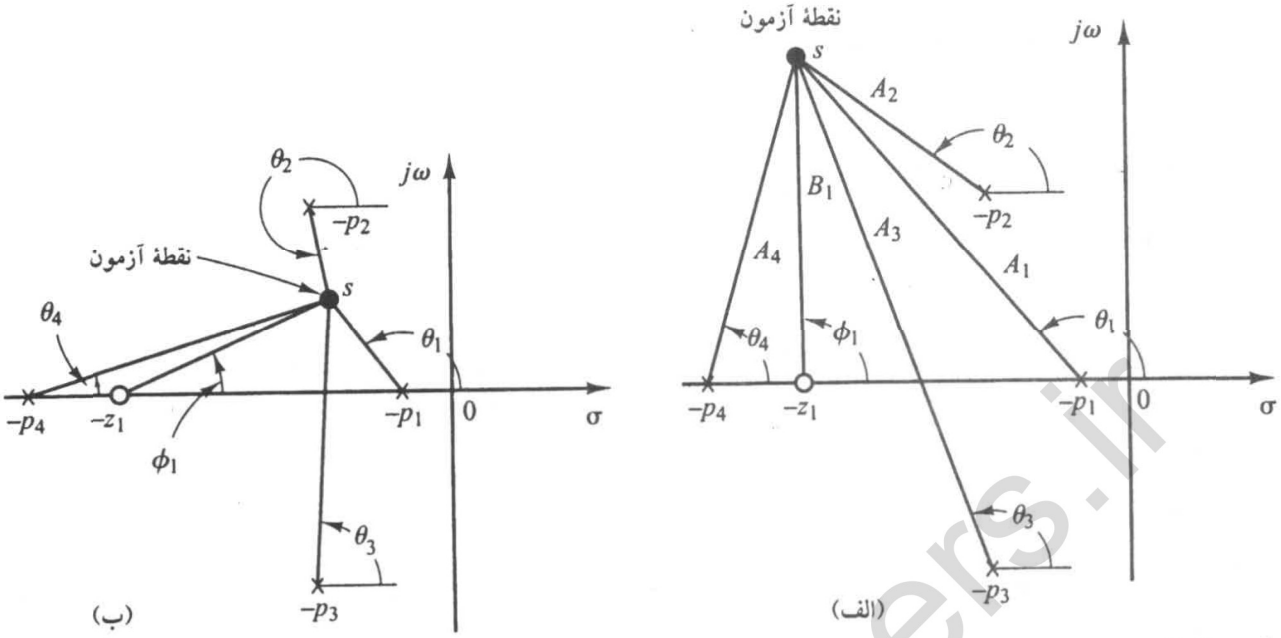
$$1+\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=0$$

پس مکان هندسی ریشه‌های این سیستم، مکان هندسی قطبهای حلقه بسته این سیستم، به ازای تغییر بهرهٔ K از صفر تا بینهایت است.

توجه کنید که در شروع رسم مکان هندسی ریشه‌ها برای یک سیستم باید ابتدا محل قطبها و صفرهای $G(s)H(s)$ مشخص شود. به یاد داشته باشید که زاویهٔ کمیات مختلطی که از قطبها و صفرهای حلقه باز به نقطهٔ آزمون s رسم می‌شوند، در جهت پادساعتگرد اندازه‌گیری می‌شود. برای مثال اگر $G(s)H(s)$ به صورت زیر باشد

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)}$$

controlengineers.ir



شکل ۶-۲

(الف) و (ب) نمودارهایی که چگونگی اندازه گیری زاویه از قطبها و صفرهای حلقه باز به نقطهٔ آزمون را نشان می‌دهد.

که در آن $-p_2$ و $-p_3$ قطبهای مزدوج مختلط‌اند، زاویهٔ $G(s)H(s)$ عبارت است از

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4$$

که ϕ_1، θ_1، θ_2، θ_3 ، و θ_4 مطابق شکل ۶-۲ (الف) و (ب) در جهت پادساعتگرد اندازه‌گیری می‌شوند. اندازهٔ $G(s)H(s)$ برای این سیستم عبارت است از:

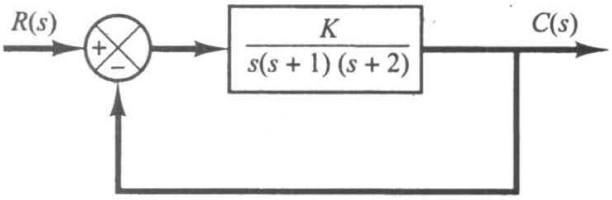
$$|G(s)H(s)| = \frac{K B_1}{A_1 A_2 A_3 A_4}$$

که در آن A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، و B_1 مطابق شکل ۶-۲ (الف) به ترتیب اندازه‌های کمیات مختلط $s+p_1$ ، $s+p_2$ ، $s+p_3$ ، $s+p_4$ ، و $s+z_1$ هستند.

توجه کنید که چون قطبها و صفرهای مختلط، در صورت وجود، مزدوج‌اند و همیشه نسبت به محور حقیقی متقارن‌اند، مکان هندسی ریشه‌ها نسبت به این محور متقارن است. پس تنها کافی است نیمهٔ بالایی مکان هندسی ریشه‌ها را رسم کرده، تصویر آینه‌ای آن را در نیمهٔ پایینی صفحهٔ s رسم کنیم.

مثالهای گویا. در ادامه دو مثال گویا از رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌ها ارائه می‌دهیم. گرچه روشهای کامپیوتری ساده‌ای برای رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌ها وجود دارد، ولی در اینجا با استفاده از محاسبات ترسیمی و تکیه بر درک شهودی مکان هندسی نقاطی را که ریشه‌های معادلهٔ مشخصه سیستم حلقه بسته روی آن قرار دارد تعیین می‌کنیم. این رهیافت ترسیمی درک ما از چگونگی حرکت قطبهای حلقه بسته در صفحهٔ مختلط ، به ازای جابه‌جایی قطبها و صفرهای حلقه باز را بیشتر می‌کند. اگرچه در این مثالها تنها سیستمهای ساده را به کار می‌بریم، ولی یافتن مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستمهای مرتبه بالاتر پیچیدگی اضافه‌ای ندارد.

controlengineers.ir



شکل ۶-۳ سیستم کنترل.

چون در این تحلیل از اندازه‌گیری ترسیمی زاویه‌ها و اندازه‌ها استفاده می‌شود، هنگام رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌ها بر روی کاغذ باید مقیاس محورهای افقی و عمودی یکسان باشد.

مثال ۶-۱ سیستم شکل ۶-۳ را در نظر بگیرید. (فرض می‌کنیم مقدار بهرهٔ K غیرمنفی است) برای این سیستم

$$G(s)=\frac{K}{s(s+۱)(s+۲)} \quad \text{و} \quad H(s)=۱$$

می‌خواهیم مکان هندسی ریشه‌ها را یافته، مقدار K را به نحوی تعیین کنیم که نسبت میرایی ζ یک زوج قطب مزدوج مختلط سیستم حلقه بسته ۰/۵ باشد.

برای سیستم داده شده شرط زاویه عبارت است از

$$\begin{aligned}\underline{|G(s)} &= \underline{\left|\frac{K}{s(s+۱)(s+۲)}\right.}\\ &= -\underline{|s} - \underline{|s+۱} - \underline{|s+۲}\\ &= \pm ۱۸۰^\circ(۲k+۱) \qquad (k=۰,۱,۲,\cdots)\end{aligned}$$

شرط اندازه عبارت است از

$$|G(s)| = \left|\frac{K}{s(s+۱)(s+۲)}\right| = ۱$$

یک روند نوعی برای رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌ها به قرار زیر است:

۱. *تعیین مکان هندسی ریشه‌ها روی محور حقیقی.* اولین گام ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها تعیین قطبهای حلقه باز $s=۰$، $s=-۱$، و $s=-۲$ در صفحهٔ مختلط است. (این سیستم صفر حلقه باز ندارد.) محل قطبهای حلقه باز با علامت ضرب × مشخص می‌شود. (در این کتاب محل صفرهای حلقه باز با دایره‌های کوچک مشخص می‌شود.) توجه کنید که نقاط شروع مکان هندسی ریشه‌ها (نقاط متناظر با $K=۰$) قطبهای حلقه باز هستند. تعداد شاخه‌های مکان هندسی برای این سیستم سه، یعنی برابر تعداد قطبهای حلقه باز سیستم است.

برای تعیین مکان هندسی روی محور حقیقی باید یک نقطهٔ آزمون s برگزینیم. اگر نقطهٔ آزمون روی بخش مثبت محور حقیقی باشد ، آنگاه

$$\underline{|s} = \underline{|s+۱} = \underline{|s+۲} = ۰^\circ$$

این رابطه نشان می‌دهد شرط زاویه نمی‌تواند ارضا شود. یعنی هیچ بخشی از مکان هندسی ریشه‌ها روی بخش مثبت محور حقیقی نیست . حال یک نقطهٔ آزمون روی بخش منفی محور حقیقی، بین ۰ و ۱- ، برمی‌گزینیم .

controlengineers.ir

در این حالت

$$\angle s = ۱۸۰^\circ \quad , \quad \angle s+۱ = \angle s+۲ = ۰^\circ$$

پس

$$-\angle s - \angle s+۱ - \angle s+۲ = -۱۸۰^\circ$$

و شرط زاویه برآورده می‌شود. بنابراین بخش بین ۰ و ۱- محور حقیقی قسمتی از مکان هندسی ریشه‌ها را تشکیل می‌دهد. اگر نقطهٔ آزمون بین ۱- و ۲- باشد، آنگاه

$$\angle s = \angle s+۱ = ۱۸۰^\circ \quad , \quad \angle s+۲ = ۰^\circ$$

و

$$-\angle s - \angle s+۱ - \angle s+۲ = -۳۶۰^\circ$$

می‌توان دید که شرط زاویه ارضا نمی‌شود. پس بخش بین ۱- و ۲- محور حقیقی جزء مکان هندسی ریشه‌ها نیست. به نحوی مشابه اگر نقطهٔ آزمون روی بخش منفی محور حقیقی، بین ۲- و ∞- باشد، شرط زاویه ارضا می‌شود. پس بخشهای بین ۰ و ۱- و بین ۲- و ∞- محور حقیقی قسمت‌هایی از مکان هندسی ریشه‌ها هستند.

۲. *تعیین مجانبهای مکان هندسی ریشه‌ها.* مجانبهای مکان هندسی ریشه‌ها به ازای $s \to \infty$ را می‌توان به این ترتیب تعیین کرد: اگر نقطهٔ آزمون s بسیار دور از مبدأ انتخاب شود، آنگاه

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s(s+۱)(s+۲)} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^۳}$$

شرط زاویه به صورت زیر درمی‌آید

$$-۳\angle s = \pm ۱۸۰^\circ(۲k+۱) \qquad (k = ۰,۱,۲,\cdots)$$

یا

$$\text{زاویه مجانبها} = \frac{\pm ۱۸۰^\circ(۲k+۱)}{۳} \qquad (k = ۰,۱,۲,\cdots)$$

چون این زاویه به ازای مضارب k تکرار می‌شود، زاویهٔ مجانبها عبارت‌اند از ۶۰°، -۶۰° ، و ۱۸۰° . پس سه مجانب وجود دارد. مجانب دارای زاویهٔ ۱۸۰° روی بخش منفی محور حقیقی قرار دارد.

قبل از رسم مجانبها در صفحهٔ مختلط باید محل برخورد آنها با محور حقیقی را بدانیم. چون

$$G(s) = \frac{K}{s(s+۱)(s+۲)}$$

برای نقاط آزمون بسیار دور از مبدأ $G(s)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(s) = \frac{K}{s^۳ + ۳s^۲ + \cdots}$$

به ازای s های بزرگ می‌توان معادلهٔ اخیر را به صورت زیر تقریب زد

$$G(s) \approx \frac{K}{(s+۱)^۳} \qquad (۶-۵)$$

controlengineers.ir

نمودار مکان هندسی $G(s)$ بیان شده با معادلهٔ (۶-۵) سه خط راست است. برای نشان دادن این مطلب به صورت زیر عمل می‌کنیم: معادلهٔ مکان هندسی ریشه ها عبارت است از

$$\left|\frac{K}{(s+1)^3}\right. = \pm 180^\circ(2k+1)$$

یا

$$-3\underline{|s+1} = \pm 180^\circ(2k+1)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\underline{|s+1} = \pm 60^\circ(2k+1)$$

با گذاشتن $s=\sigma+j\omega$ در معادلهٔ اخیر به دست می‌آوریم

$$\underline{|\sigma+j\omega+1} = \pm 60^\circ(2k+1)$$

یا

$$\tan^{-1}\frac{\omega}{\sigma+1} = 60^\circ, -60^\circ, 0^\circ$$

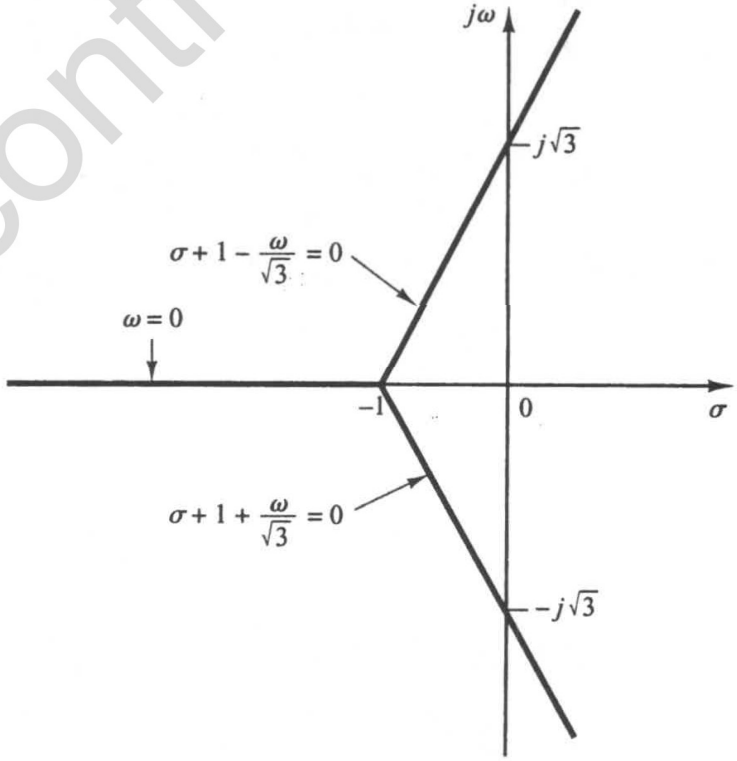
با گرفتن تانژانت از دو طرف به دست می‌آوریم

$$\frac{\omega}{\sigma+1} = \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0$$

که می‌توان آنها را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\sigma+1-\frac{\omega}{\sqrt{3}}=0, \quad \sigma+1+\frac{\omega}{\sqrt{3}}=0, \quad \omega=0$$

این سه معادله، معادلهٔ سه خط راست نشان داده شده در شکل ۶-۴ هستند. سه خط راست مجانب‌های مکان



شکل ۶-۴
سه مجانب.

controlengineers.ir

هندسی ریشه‌ها به حساب می‌آیند. اینها در $s=-1$ هم را قطع می‌کنند. پس برای یافتن محل برخورد مجانبها با محور حقیقی باید مخرج طرف راست معادلهٔ (۶-۵) را برابر صفر قرار داد، و با حل معادلهٔ حاصل s را به دست آورد. مجانبها در نواحی بسیار دور از مبدا در واقع روی مکان هندسی ریشه‌ها قرار دارند.

۳. *تعیین نقطهٔ شکست*. برای رسم دقیق مکان هندسی ریشه‌ها باید نقطهٔ شکست، یعنی جایی که شاخه‌های شروع شده از قطبهای ۰ و ۱- با افزایش بیشتر K، از هم جدا شده وارد صفحهٔ مختلط می‌شوند، تعیین شود. نقطهٔ شکست نقطه‌ای از صفحهٔ s است که در آن معادلهٔ مشخصه ریشهٔ مکرر دارد.

برای یافتن نقطهٔ شکست روش ساده‌ای وجود دارد. این روش را به صورت زیر ارائه می‌دهیم: بیایید معادلهٔ مشخصه را به صورت زیر بنویسیم

$$f(s) = B(s) + K\,A(s) = 0 \qquad (۶-۶)$$

که در $A(s)$ و $B(s)$، K وجود ندارد. توجه کنید که $f(s)=0$ در نقاطی ریشهٔ مکرر دارد که

$$\frac{d\,f(s)}{ds} = 0$$

درستی این مطلب را می‌توان به این صورت نشان داد. فرض کنید $f(s)$ ریشهٔ مکرر مرتبه r دارد، و $r \geq 2$. پس $f(s)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$f(s) = (s-s_1)^r (s-s_2)\cdots(s-s_n)$$

اگر از این معادله نسبت به s مشتق بگیریم و در آن قرار دهیم $s=s_1$، به دست می‌آوریم

$$\left.\frac{d\,f(s)}{ds}\right|_{s=s_1} = 0 \qquad (۶-۷)$$

یعنی ریشه‌های مکرر $f(s)$ معادلهٔ (۶-۷) را ارضا می‌کنند. از معادلهٔ (۶-۶) به دست می‌آوریم

$$\frac{d\,f(s)}{ds} = B'(s) + K\,A'(s) = 0 \qquad (۶-۸)$$

که در آن

$$B'(s) = \frac{d\,B(s)}{ds}\ ,\quad A'(s) = \frac{d\,A(s)}{ds}$$

مقداری از K که به ازای آن معادلهٔ مشخصه ریشهٔ مکرر دارد، به صورت زیر از معادلهٔ (۶-۸) به دست می‌آید

$$K = -\frac{B'(s)}{A'(s)}$$

گذاشتن این K در معادلهٔ (۶-۶) به دست می‌دهد

$$f(s) = B(s) - \frac{B'(s)}{A'(s)}A(s) = 0$$

یا

$$B(s)\,A'(s) - B'(s)\,A(s) = 0 \qquad (۶-۹)$$

controlengineers.ir

با حل معادلهٔ (۶-۹) نقاط متناظر با ریشه‌های مکرر به دست می‌آید. از طرف دیگر از معادلهٔ (۶-۶) به دست می‌آوریم

$$K=-\frac{B(s)}{A(s)}$$

و

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{B'(s)A(s)-B(s)A'(s)}{A^{۲}(s)}$$

اگر dK/ds را برابر صفر قرار دهیم. همان معادلهٔ (۶-۹) به دست می‌آید. بنابراین نقاط شکست را می‌توان با یافتن ریشه‌های معادلهٔ زیر به دست آورد

$$\frac{dK}{ds}=۰$$

باید گفت که تمام جوابهای معادلهٔ (۶-۹) یا $dK/ds=۰$ با نقاط شکست واقعی متناظر نیست. اگر نقطه‌ای که در آن $dK/ds=۰$ روی مکان هندسی باشد، آن نقطه یک نقطهٔ شکست است. به بیانی دیگر، اگر در نقطه‌ای که در آن $dK/ds=۰$، K مقداری مثبت و حقیقی داشته باشد، آن نقطه نقطهٔ شکست است.

در مثال فعلی معادلهٔ مشخصه $G(s)+۱=۰$ عبارت است از

$$\frac{K}{s(s+۱)(s+۲)}+۱=۰$$

یا

$$K=-(s^{۳}+۳s^{۲}+۲s)$$

با گذاشتن $dK/ds=۰$ به دست می‌آوریم

$$\frac{dK}{ds}=-(۳s^{۲}+۶s+۲)=۰$$

یا

$$s=-۰/۴۲۲۶ \quad , \quad s=-۱/۵۷۷۴$$

چون نقطهٔ شکست باید روی مکان هندسی، یعنی بین ۰ و ۱- باشد، واضح است که نقطهٔ شکست واقعی $s=-۰/۴۲۲۶$ است. نقطهٔ $s=-۱/۵۷۷۴$ روی مکان هندسی ریشه‌ها قرار ندارد. پس این نقطه یک نقطهٔ شکست واقعی نیست. در واقع مقادیر K متناظر با $s=-۰/۴۲۲۶$ و $s=-۱/۵۷۷۴$ عبارت‌اند از

به ازای $s=-۰/۴۲۲۶$ $\quad K=۰/۳۸۴۹$

به ازای $s=-۱/۵۷۷۴$ $\quad K=-۰/۳۸۴۹$

۴. ***تعیین نقاط برخورد مکان هندسی با محور موهومی.*** این نقاط را می‌توان با استفاده از معیار پایداری روث، به ترتیب زیر یافت: چون معادلهٔ مشخصه سیستم فعلی به صورت زیر است

$$s^{۳}+۳s^{۲}+۲s+K=۰$$

controlengineers.ir

آرایهٔ روث به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \dfrac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

مقدار K که جملهٔ s^1 ستون اول را صفر می‌کند $K=6$ است. پس نقاط برخورد با محور موهومی را می‌توان با حل معادلهٔ کمکی به دست آمده از ردیف s^2 یافت؛ یعنی

$$3s^2+K=3s^2+6=0$$

که به دست می‌دهد

$$s=\pm j\sqrt{2}$$

پس فرکانسهایی که در آنها مکان هندسی با محور موهومی برخورد می‌کند $\omega=\pm\sqrt{2}$ هستند. مقدار بهرهٔ متناظر با این نقاط برخورد $K=6$ است.

روش دیگر این است که در معادلهٔ مشخصه قرار دهیم $s=j\omega$، بخشهای حقیقی و موهومی حاصل را برابر صفر قرار دهیم و با حل آنها ω و K را بیابیم. برای سیستم فعلی معادلهٔ مشخصه، با جایگزینی $s=j\omega$، عبارت است از

$$(j\omega)^3+3(j\omega)^2+2(j\omega)+K=0$$

یا

$$(K-3\omega^2)+j(2\omega-\omega^3)=0$$

با برابر صفر قرار دادن بخشهای حقیقی و موهومی معادلهٔ اخیر به دست می‌آوریم

$$K-3\omega^2=0 \quad , \quad 2\omega-\omega^3=0$$

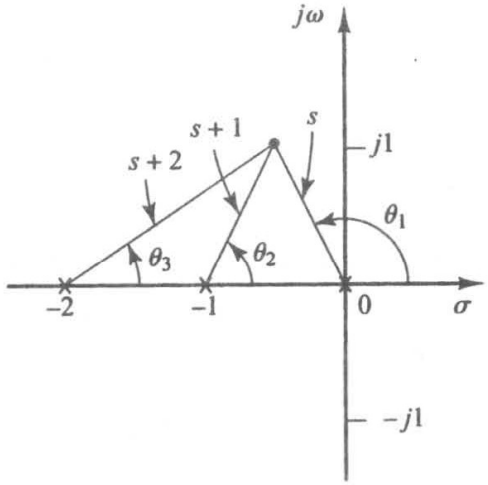
که نتیجه می‌دهد

$$\omega=\pm\sqrt{2} \quad , \quad K=6 \quad \text{یا} \quad \omega=0 \quad , \quad K=0$$

پس مکان هندسی محور موهومی را در $\omega=\pm\sqrt{2}$ قطع می‌کند و K در نقطهٔ برخورد برابر ۶ است. همچنین یک شاخهٔ مکان هندسی ریشه‌ها، که روی محور حقیقی قرار دارد، در $\omega=0$ به محور موهومی می‌رسد. مقدار K در این نقطه صفر است .

۵. ***نقطه‌ای در حوالی محور $j\omega$ و مبدا برگزینید***، و مطابق شکل ۶-۵ شرط زاویه را اعمال کنید. اگر این نقطه روی مکان هندسی ریشه‌ها باشد، جمع سه زاویهٔ $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ باید 180° باشد. اگر این نقطه شرط زاویه را ارضا نمی‌کند نقطهٔ آزمون دیگری برگزینید تا شرط زاویه را ارضا کند (جمع زاویه‌ها در نقطهٔ آزمون نشان می‌دهد که نقطهٔ آزمون باید در چه جهتی حرکت کند.) این کار را آنقدر ادامه دهید تا تعداد نقاط ارضا کنندهٔ شرط زاویه برای رسم منحنی کافی باشد.

controlengineers.ir



شکل ۶-۵
رسم مکان هندسی ریشه‌ها.

۶. ***مکان هندسی را رسم کنید.*** براساس اطلاعات به دست آمده در گامهای قبل مکان هندسی ریشه‌ها را مطابق شکل ۶-۶ رسم کنید.

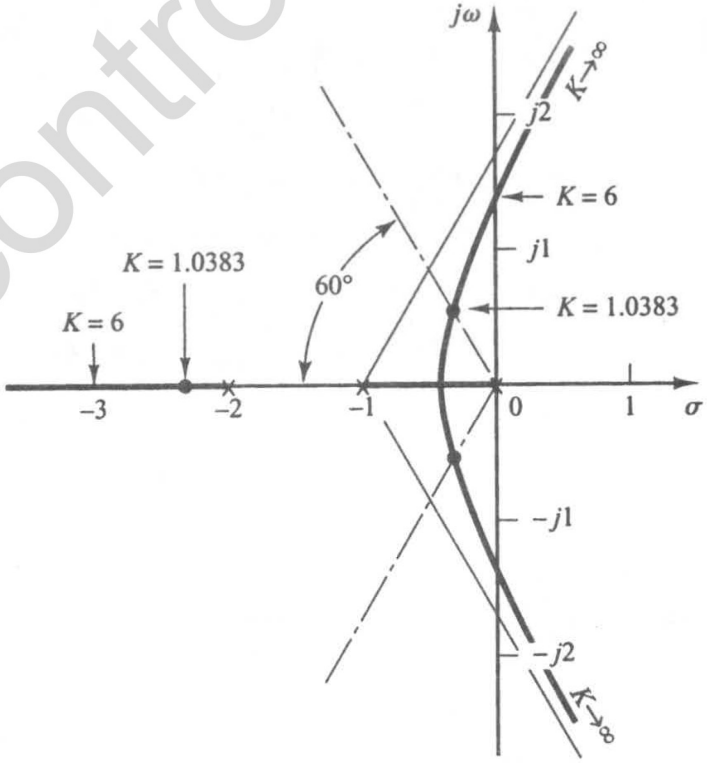
۷. ***یک زوج قطب مزدوج مختلط حلقه بسته تعیین کنید،که نسبت میرایی آنها $\zeta = ۰/۵$ باشد.*** قطبهای حلقه بستهٔ دارای $\zeta = ۰/۵$ روی خطوطی قرار دارند که از مبدا می‌گذرند و با بخش منفی محور حقیقی زاویه‌ای برابر مقدار زیر می‌سازند

$$\pm\cos^{-۱}\zeta = \pm\cos^{-۱}۰/۵ = \pm ۶۰^\circ$$

با توجه به شکل ۶-۶ این قطبهای دارای $\zeta = ۰/۵$ عبارت‌اند از

$$s_۱ = -۰/۳۳۳۷ + j۰/۵۷۸۰ \quad , \quad s_۲ = -۰/۳۳۳۷ - j۰/۵۷۸۰$$

مقدار K متناظر با این قطبها به صورت زیر با استفاده از شرط اندازه به دست می‌آید



شکل ۶-۶
نمودار مکان هندسی ریشه‌ها.

controlengineers.ir

$$K = s(s+۱)(s+۲)\Big|_{s=-۰/۳۳۳۷+j۰/۵۷۸۰} = ۱/۰۳۸۳$$

با استفاده از این مقدار K قطب سوم برابر $s=-۲/۳۳۲۶$ به دست می‌آید.

توجه کنید که در گام ۴ دیدیم به ازای $K=۶$ قطبهای حلقه بسته در $\omega=\pm j\sqrt{۲}$ روی محور موهومی قرار می‌گیرند. اگر K این مقدار باشد، سیستم نوسان پایدار دارد. به ازای $K>۶$ قطبهای حلقه بستهٔ غالب به سمت راست صفحهٔ s می‌روند، و سیستم ناپایدار می‌شود.

سرانجام توجه کنید که در صورت لزوم می‌توان مکان هندسی ریشه‌ها را برحسب K ، با استفاده از شرط اندازه، مقدارگذاری کرد. به این منظور تنها کافی است که نقطه‌ای از مکان هندسی را برگزینیم و اندازهٔ سه کمیت مختلط s ، $s+۱$ ، و $s+۲$ را اندازه بگیریم. حاصلضرب این سه مقدار با بهره K در آن نقطه برابر است، یا

$$|s|\cdot|s+۱|\cdot|s+۲|=K$$

MATLAB به راحتی می‌تواند نمودار مکان هندسی ریشه‌ها را مقدارگذاری کند. (بخش ۶-۳ را ببینید.)

مثال ۶-۲

در این مثال مکان هندسی ریشه‌ها سیستمی با قطبهای حلقه باز مزدوج مختلط را رسم می‌کنیم. سیستم شکل ۶-۷ را در نظر بگیرید. برای این سیستم داریم

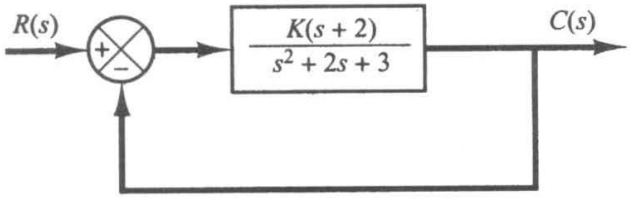
$$G(s)=\frac{K(s+۲)}{s^۲+۲s+۳}, \quad H(s)=۱$$

که در آن $K\geq ۰$. می‌بینیم که $G(s)$ یک زوج قطب مزدوج مختلط در محلهای زیر دارد

$$s=-۱+j\sqrt{۲} \quad , \quad s=-۱-j\sqrt{۲}$$

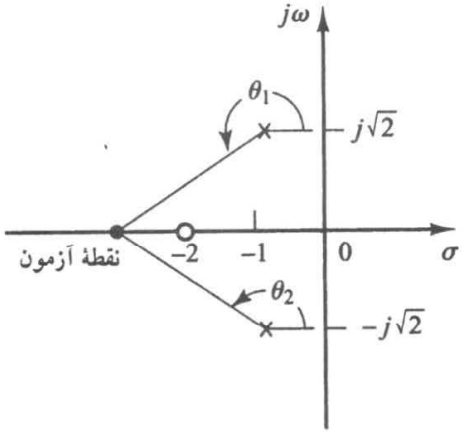
روش مرسوم رسم مکان هندسی ریشه‌ها از این قرار است:

۱. ***تعیین مکان هندسی ریشه‌ها روی محور حقیقی.*** همانطور که شکل ۶-۸ نشان می‌دهد، به ازای هر نقطهٔ آزمون روی محور حقیقی، جمع زاویهٔ قطبهای مختلط برابر ۳۶۰° است. پس اثر خالص قطبهای مزدوج مختلط روی محور حقیقی صفر است. بخش واقع بر محور حقیقی مکان هندسی توسط صفر حلقه باز تعیین می‌شود. آزمون ساده‌ای نشان می‌دهد که بخش بین ۲- و ∞- محور حقیقی بخشی از مکان هندسی ریشه‌هاست. دقت کنید که چون این بخش مکان هندسی بین دو صفر است ($s=-۲$ و $s=-\infty$) در واقع به دو شاخهٔ مکان هندسی تعلق دارد که هر کدام از یکی از دو قطب مزدوج مختلط شروع می‌شوند. در واقع روی محور حقیقی بین ۲- و ∞- یک نقطهٔ شکست وجود دارد.



شکل ۶-۷ سیستم کنترل.

controlengineers.ir



شکل ۶-۸

تعیین مکان هندسی روی محور حقیقی.

چون دو قطب حلقه باز و یک صفر وجود دارد، مکان هندسی تنها یک مجانب دارد که بر روی بخش منفی محور حقیقی منطبق است.

۲. ***تعیین زاویهٔ خروج از قطبهای مزدوج مختلط***. وجود دو قطب مختلط حلقه باز تعیین زاویهٔ خروج مکان هندسی از این قطبها را می‌طلبد. دانستن این زاویه مهم است، زیرا مکان هندسی نزدیک یک قطب نشان می‌دهد مکان هندسی شروع شده از آن به طرف محور حقیقی می‌رود یا به سمت مجانب.

شکل ۶-۹ نشان می‌دهد اگر یک نقطهٔ آزمون در حوالی قطب حلقه باز مختلط واقع در $s=-p_1$ انتخاب و در حول آن جابه‌جا شود، جمع زاویه‌هایی که از قطب $s=p_2$ و صفر $s=-z_1$ تا آن نقطه اندازه گیری می‌شود تقریباً ثابت است. اگر این نقطه بخواهد روی مکان هندسی باشد، جمع زاویه‌های ϕ'_1، $-\theta_1$ و $-\theta'_2$ باید $\pm 180^\circ(2k+1)$ باشد، که در آن $k=0,1,2,\cdots$. پس در این مثال

$$\phi'_1-(\theta_1+\theta'_2)=\pm 180^\circ(2k+1)$$

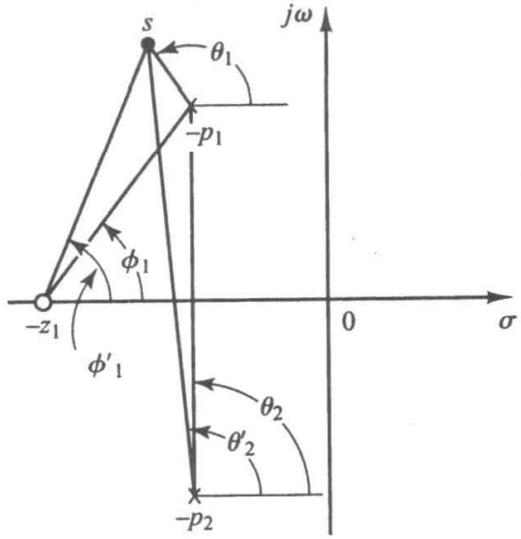
یا

$$\theta_1=180^\circ-\theta'_2+\phi'_1=180^\circ-\theta_2+\phi_1$$

پس زاویهٔ خروج عبارت است از

$$\theta_1=180^\circ-\theta_2+\phi_1=180^\circ-90^\circ+55^\circ=145^\circ$$

چون مکان هندسی نسبت به محور حقیقی متقارن است، زاویهٔ خروج از قطب $s=-p_2$ برابر -145° است.



شکل ۶-۹

تعیین زاویهٔ خروج.

controlengineers.ir

۳. *تعیین نقطهٔ شکست*. نقطهٔ شکست محل به هم پیوستن یا جدا شدن دو شاخهٔ مکان هندسی ریشه‌هاست. برای این مسئله نقطهٔ شکست را می‌توان به این صورت یافت: چون

$$K=-\frac{s^{۲}+۲s+۳}{s+۲}$$

داریم

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{(۲s+۲)(s+۲)-(s^{۲}+۲s+۳)}{(s+۲)^{۲}}=۰$$

که به دست می‌دهد

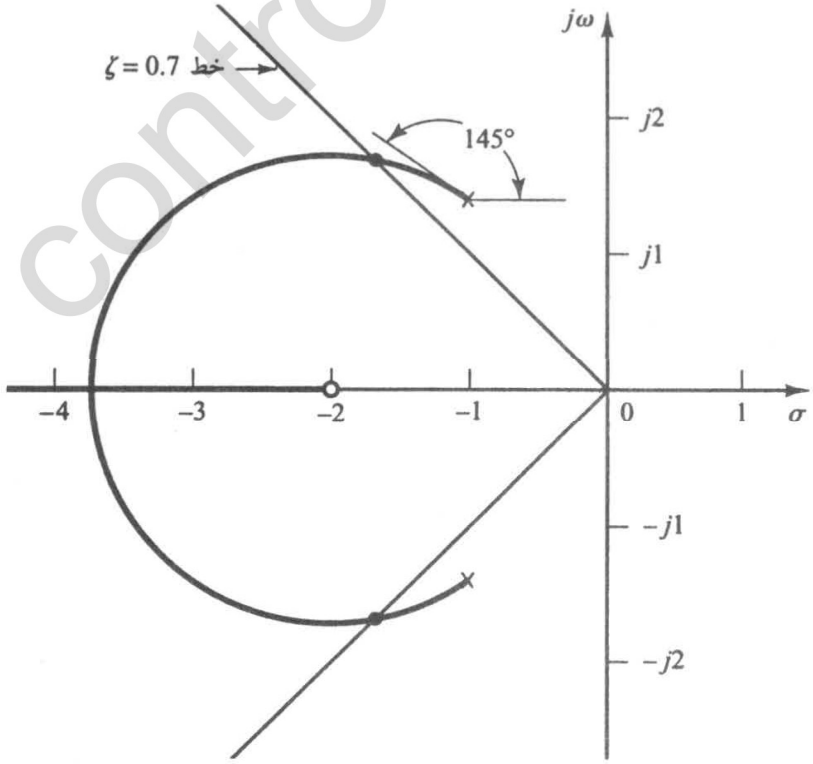
$$s^{۲}+۴s+۱=۰$$

یا

$$s=-۰/۲۶۸۰ \quad \text{یا} \quad s=-۳/۷۳۲۰$$

توجه کنید که $s=-۳/۷۳۲۰$ روی مکان هندسی ریشه‌هاست. پس این نقطه، نقطهٔ شکست واقعی است. (بهرهٔ متناظر با نقطهٔ $s=-۳/۷۳۲۰$ عبارت است از $K=۵/۴۶۴۱$) چون نقطهٔ $s=-۰/۲۶۸۰$ روی مکان هندسی نیست، نمی‌تواند نقطهٔ شکست باشد. (مقدار بهرهٔ متناظر با نقطهٔ $s=-۰/۲۶۸۰$ عبارت است از $K=-۱/۴۶۴۱$)

۴. *رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌ها*. براساس اطلاعات به دست آمده در گامهای قبل، برای تعیین هر چه دقیقتر مکان هندسی ریشه‌ها، باید با سعی و خطا چند نقطه بین نقطهٔ شکست و قطبهای حلقه باز به دست آوریم. (برای ساده شدن رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌ها، باید با جمع کردن ذهنی تغییر زاویه‌های رسم شده از صفرها و قطبها جهت جابجایی نقطهٔ آزمون را تعیین کنیم.) نمودار مکانی هندسی کامل این سیستم در شکل ۶-۱۰ رسم شده است.



شکل ۶-۱۰
نمودار مکان هندسی ریشه‌ها.

controlengineers.ir

مقدار K در هر نقطهٔ مکان هندسی ریشه‌ها را می‌توان با اعمال شرط اندازه، یا با استفاده از MATLAB تعیین کرد (بخش ۶-۳). برای مثال مقدار K را که به ازای آنها قطبهای مزدوج مختلط حلقه بسته دارای نسبت میرایی $\zeta = ۰/۷$ است به دست می‌آوریم. ابتدا مطابق شکل ۶-۱۰ این قطبها را بر روی مکان هندسی مشخص می‌کنیم و سپس K را به صورت زیر می‌یابیم

$$K = \left| \frac{\left(s+۱-j\sqrt{۲}\right)\left(s+۱+j\sqrt{۲}\right)}{s+۲} \right|_{s=-۱/۶۷+j۱/۷۰} = ۱/۳۴$$

یا برای یافتن K از MATLAB استفاده می‌کنیم. (بخش ۶-۴ را ببینید.)

متذکر می‌شویم که برای این سیستم، بخش واقع در صفحهٔ مختلط مکان هندسی روی یک دایره قرار دارد. این مکان هندسی دایروی در سیستمهای معدودی بروز می‌کند، سیستمهایی که دو قطب و یک صفر، دو قطب و دو صفر، یا یک قطب و دو صفر دارند. البته حتی در این سیستمها نیز دایره‌ای بودن یا نبودن مکان هندسی به محل قطبها و صفرها بستگی دارد.

برای اثبات دایره‌ای بودن مکان هندسی ریشه‌های سیستم در نظر گرفته شده باید معادلهٔ آن را بیابیم. برای این سیستم شرط زاویه عبارت است از

$$\angle s+۲ - \angle s+۱-j\sqrt{۲} - \angle s+۱+j\sqrt{۲} = \pm ۱۸۰^\circ (۲k+۱)$$

با جایگذاری $s=\sigma+j\omega$ در این معادله به دست می‌آوریم

$$\angle \sigma+۲+j\omega - \angle \sigma+۱+j\omega-j\sqrt{۲} - \angle \sigma+۱+j\omega+j\sqrt{۲} = \pm ۱۸۰^\circ (۲k+۱)$$

که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت

$$\tan^{-۱}\left(\frac{\omega}{\sigma+۲}\right) - \tan^{-۱}\left(\frac{\omega-\sqrt{۲}}{\sigma+۱}\right) - \tan^{-۱}\left(\frac{\omega+\sqrt{۲}}{\sigma+۱}\right) = \pm ۱۸۰^\circ (۲k+۱)$$

یا

$$\tan^{-۱}\left(\frac{\omega-\sqrt{۲}}{\sigma+۱}\right) + \tan^{-۱}\left(\frac{\omega+\sqrt{۲}}{\sigma+۱}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{\omega}{\sigma+۲}\right) \pm ۱۸۰^\circ (۲k+۱)$$

با گرفتن تانژانت از دو طرف این معادله و استفاده از رابطهٔ زیر

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{۱ \mp \tan x \tan y} \qquad (۶-۱۰)$$

به دست می‌آوریم

$$\tan\left[\tan^{-۱}\left(\frac{\omega-\sqrt{۲}}{\sigma+۱}\right) + \tan^{-۱}\left(\frac{\omega+\sqrt{۲}}{\sigma+۱}\right)\right] = \tan\left[\tan^{-۱}\left(\frac{\omega}{\sigma+۲}\right) \pm ۱۸۰^\circ (۲k+۱)\right]$$

controlengineers.ir

یا

$$\frac{\dfrac{\omega-\sqrt{۲}}{\sigma+۱}+\dfrac{\omega+\sqrt{۲}}{\sigma+۱}}{۱-\left(\dfrac{\omega-\sqrt{۲}}{\sigma+۱}\right)\left(\dfrac{\omega+\sqrt{۲}}{\sigma+۱}\right)}=\frac{\dfrac{\omega}{\sigma+۲}\pm ۰}{۱\mp\dfrac{\omega}{\sigma+۲}\times ۰}$$

که می‌توان آن را به شکل زیر ساده کرد

$$\frac{۲\omega(\sigma+۱)}{(\sigma+۱)^۲-(\omega^۲-۲)}=\frac{\omega}{\sigma+۲}$$

یا

$$\omega[(\sigma+۲)^۲+\omega^۲-۳]=۰$$

این معادله با معادله‌های زیر هم‌ارز است

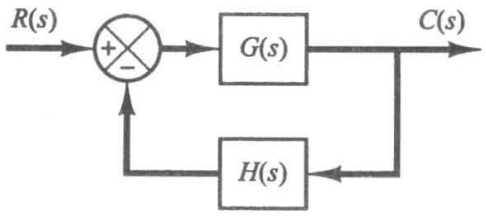
$$\omega=۰ \quad \text{یا} \quad (\sigma+۲)^۲+\omega^۲=(\sqrt{۳})^۲$$

این دو معادله، معادلات مکان هندسی ریشه‌های سیستم است و معادلهٔ اول، $\omega=۰$، به بخش روی محور حقیقی مکان هندسی مربوط می‌شود. محور حقیقی در فاصلهٔ $s=-۲$ تا $s=-\infty$ با مکان هندسی ریشه‌ها به ازای $K\geq ۰$ متناظر است. بقیهٔ محور حقیقی مکان هندسی متناظر با K منفی است. (در این سیستم K غیرمنفی است.) (توجه کنید که $K<۰$ با فیدبک مثبت متناظر است.) معادلهٔ دوم مکان هندسی معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $\omega=۰$، $\sigma=-۲$ و شعاع $\sqrt{۳}$ است. بخش سمت چپ قطبها با مکان هندسی به ازای $K\geq ۰$ متناظر است. بقیهٔ دایره به مکان هندسی به ازای K منفی تعلق دارد.

توجه به این نکته مهم است که تنها برای سیستم‌های ساده می‌توان معادلهٔ مکان هندسی ریشه‌ها را به راحتی تعبیر هندسی کرد. برای سیستمهای پیچیدهٔ دارای قطبها و صفرهای متعدد، کوشش برای یافتن چنین معادله‌ای نومید کننده است. معادلات به دست آمده بسیار پیچیده‌اند و به سختی می‌توان منحنی توصیف شده با آنها را در صفحهٔ s تصور کرد.

قواعد کلی رسم مکان هندسی ریشه‌ها . ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستمی پیچیده با تعداد زیادی قطب و صفر حلقه باز ممکن است در ظاهر کاری مشکل جلوه کند، ولی در صورت اعمال قواعد رسم مکان هندسی این کار مشکل نیست . با مشخص کردن نقاط خاص و مجانبها، محاسبهٔ زاویهٔ خروج از قطبهای مختلط، و زاویهٔ ورود به صفرهای مختلط می‌توان شکل کلی مکان هندسی را به راحتی یافت.

اکنون قواعد کلی رسم مکان هندسی ریشه‌ها را برای سیستم کنترل دارای فیدبک منفی شکل ۶-۱۱ خلاصه می‌کنیم.



شکل ۶-۱۱
سیستم کنترل.

controlengineers.ir

ابتدا معادلهٔ مشخصه را به دست آورید

$$1+G(s)H(s)=0$$

سپس این معادله را به نحوی درآورید که پارامتر مورد نظر به صورت یک ضریب، مطابق معادلهٔ زیر، خود را نشان دهد

$$1+\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=0 \qquad (۶-۱۱)$$

در این مبحث فرض می‌کنیم پارامتر مورد علاقه بهرهٔ K است، و $K>0$. (به ازای $K<0$ با حالت فیدبک مثبت سر وکار داریم و شرط زاویه باید اصلاح شود. بخش ۶-۴ را ببینید.) ولی این روش برای سیستمهایی که پارامتر مورد نظر بهره نیست هم قابل اعمال است. (بخش ۶-۶ را ببینید)

۱. *قطبها و صفرهای $G(s)H(s)$ را روی صفحهٔ s مشخص کنید. شاخه‌های مکان هندسی از قطبهای حلقه باز شروع و به صفرهای حلقه باز (صفرهای محدود یا در بی‌نهایت) ختم می‌شود.* با توجه به شکل تجزیه شدهٔ تابع تبدیل حلقه باز ، قطبها و صفرهای حلقه باز را روی صفحهٔ s مشخص کنید. [توجه کنید که صفرهای حلقه باز صفرهای $G(s)H(s)$ هستند، ولی صفرهای حلقه بسته، صفرهای $G(s)$ و قطبهای $H(s)$ هستند.]

توجه کنید که چون قطبها و صفرهای مختلط همیشه به صورت مزدوج هستند، مکان هندسی ریشه‌ها نسبت به محور حقیقی تقارن دارد.

تعداد شاخه‌های مکان هندسی با تعداد ریشه‌های معادلهٔ مشخصه برابر است. چون تعداد قطبهای حلقه باز عموماً از تعداد صفرها بیشتر است، تعداد شاخه‌ها با تعداد قطبها برابر است. اگر تعداد قطبهای حلقه بسته با تعداد قطبهای حلقه باز برابر باشد، تعداد شاخه‌های منتهی به صفرهای محدود حلقه باز با تعداد صفرهای حلقه باز، m، برابر است. $n-m$ شاخهٔ باقیمانده در امتداد مجانبها به بینهایت ($n-m$ صفر واقع در بینهایت) می‌روند.

اگر قطبها و صفرهای واقع در بینهایت را به حساب آوریم، تعداد قطبهای حلقه باز با تعداد صفرهای حلقه باز برابر است. پس می‌توان گفت شاخه‌های مکان هندسی، با افزایش K از صفر تا بینهایت، همیشه از قطبهای $G(s)H(s)$ شروع و به صفرهای $G(s)H(s)$ ختم می‌شود، به شرطی که تمام قطبها و صفرهای محدود و واقع در بینهایت به حساب آورده شود.

۲. *بخش واقع بر محور حقیقی مکان هندسی ریشه‌ها را تعیین کنید.* بخش واقع بر محور حقیقی مکان هندسی توسط قطبها و صفرهای واقع بر آن تعیین می‌شود. قطبها و صفرهای مزدوج مختلط تابع تبدیل حلقه باز اثری بر این بخش مکان هندسی ریشه‌ها ندارد، زیر اثر یک زوج صفر یا قطب مختلط مزدوج در محاسبه شرط زاویه $360°$ است. هر یک از بخشهای واقع بر محور حقیقی مکان هندسی ریشه‌ها بین یک صفر یا قطب و صفر یا قطبی دیگر قرار دارد. در رسم این بخشهای مکان هندسی نقطه‌ای روی محور حقیقی برگزینید. اگر کل تعداد قطبها و صفرهای حقیقی سمت راست این نقطه فرد باشد، این نقطه روی مکان هندسی ریشه‌ها واقع است. اگر صفرها و قطبهای حلقه باز صفرها و قطبهای ساده (مرتبه اول) باشند، آنگاه مکان هندسی و متمم آن بر روی محور حقیقی از پاره‌خطهایی تشکیل می‌شوند که به طور یک در میان قرار دارند.

controlengineers.ir

۳. ***مجانبهای مکان هندسی ریشه‌ها را تعیین کنید.*** اگر نقطهٔ آزمون s از مبدا بسیار دور باشد، زاویهٔ تمام کمیتهای مختلط را می‌توان برابر در نظر گرفت. بنابراین هر قطب حلقه باز یک صفر حلقه باز را خنثی می‌کند. پس مکان هندسی ریشه‌ها در s های بسیار بزرگ باید به خطوط راستی با زاویه‌های (شیبهای) زیر مجانب شوند

$$\text{زاویهٔ مجانبها} = \frac{\pm 180^\circ (2k+1)}{n-m} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

که در آن n = تعداد قطبهای محدود $G(s)H(s)$

m = تعداد صفرهای محدود $G(s)H(s)$

$k=0$ زاویهٔ مجانبی را می‌دهد که با بخش مثبت محور حقیقی کوچکترین زاویه را می‌سازد. گرچه k می‌تواند بینهایت مقدار به خود بگیرد، ولی زاویه‌های به دست آمده تکرار می‌شوند و تعداد مجانبهای مجزا $n-m$ است.

تمام مجانبها روی محور حقیقی هم را قطع می‌کنند. نقطهٔ برخورد را می‌توان به این ترتیب یافت: با بسط صورت و مخرج تابع تبدیل حلقه باز به دست می‌آوریم

$$G(s)H(s) = \frac{K[s^m + (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)s^{m-1} + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_m]}{s^n + (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)s^{n-1} + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_n}$$

به ازای نقاط بسیار دور از مبدا حاصل تقسیم صورت بر مخرج $G(s)H(s)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^{n-m} + [(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)]s^{n-m-1} + \cdots}$$

یا

$$G(s)H(s) = \frac{K}{\left[s + \dfrac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n-m}\right]^{n-m}} \qquad (۶-۱۲)$$

پس محل برخورد مجانبها با محور حقیقی را می‌توان با برابر صفر قرار دادن مخرج معادلهٔ (۶-۱۲) به دست آورد؛ به بیان دیگر

$$s = -\frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)}{n-m} \qquad (۶-۱۳)$$

[مثال ۶-۱ نشان داد که چرا معادلهٔ (۶-۱۳) محل برخورد را به دست می‌دهد.] پس از تعیین این محل می‌توان به راحتی مجانبها را رسم کرد.

توجه به این نکته مهم است که مجانبها رفتار مکان هندسی ریشه‌ها در $|s| \gg 1$ نشان می‌دهند. یک شاخهٔ مکان هندسی ممکن است در یک طرف مجانبش بماند، یا آن را قطع کرده ، از یک طرف آن به طرف دیگرش برود.

۴. ***نقاط شکست را بیابید.*** به خاطر تقارن مکان هندسی ریشه‌ها نسبت به محور حقیقی، نقاط شکست یا روی محور حقیقی اند یا یک زوج مزدوج مختلط تشکیل می‌دهند.

controlengineers.ir

اگر شاخه‌ای از مکان هندسی بین دو قطب حلقه باز مجاور واقع بر محور حقیقی قرار داشته باشد، بین آن دو قطب حداقل یک نقطهٔ شکست وجود دارد. به نحوی مشابه اگر شاخه‌ای از مکان هندسی بین دو صفر مجاور (که یکی می‌تواند در $-\infty$ باشد) قرار داشته باشد، حداقل یک نقطهٔ شکست بین آن دو صفر وجود دارد. اگر شاخه‌ای از مکان هندسی بین یک قطب باز و یک صفر (محدود یا در $-\infty$) قرار داشته باشد، ممکن است روی آن نقطهٔ شکستی وجود نداشته، یا دو نقطهٔ شکست وجود داشته باشد.

فرض کنید معادلهٔ مشخصه به صورت زیر است

$$B(s) + K\,A(s) = 0$$

نقاط شکست با ریشه‌های مکرر معادلهٔ مشخصه متناظرند. پس نقاط شکست را می‌توان با یافتن ریشه‌های معادلهٔ زیر به دست آورد

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)\,A(s) - B(s)\,A'(s)}{A^2(s)} = 0 \qquad (۶-۱۴)$$

در این معادله پریم مشتقگیری نسبت به s را نشان می‌دهد. توجه به این نکته مهم است که نقاط شکست ریشه‌های معادلهٔ (۶-۱۴) هستند، ولی تمام ریشه‌های این معادله نقاط شکست نیستند. هر ریشهٔ حقیقی معادلهٔ (۶-۱۴) که روی مکان هندسی ریشه‌ها باشد یک نقطهٔ شکست است، ولی ریشه‌ای که روی مکان هندسی نیست، نقطهٔ شکست نیز نیست. اگر ندانیم دو ریشهٔ مزدوج مختلط $s = s_1$ و $s = -s_1$ معادلهٔ (۶-۱۴) روی مکان هندسی هستند یا نه، باید مقدار K متناظر با آنها را بررسی کنیم. اگر K متناظر با ریشهٔ $s = s_1$ معادلهٔ $dK/ds = 0$ مثبت باشد، نقطهٔ $s = s_1$ نقطهٔ شکست است. (چون K را مثبت فرض کرده‌ایم، در صورت منفی بودن K به دست آمده، نقطهٔ $s = s_1$ نقطهٔ شکست نیست.)

۵. ***زاویهٔ خروج (یا زاویهٔ ورود) مکان هندسی به قطب (یا صفر) مختلط را تعیین کنید.*** برای این که بتوان مکان هندسی ریشه‌ها را با دقتی معقول رسم کرد ، باید راستای مکان هندسی در نزدیک قطبها و صفرهای مختلط مشخص شود. اگر نقطهٔ آزمون اطراف یک قطب مختلط (یا یک صفر مختلط) حرکت کند، اثر زاویهٔ تمام قطبها و صفرهای دیگر را می‌توان تقریباً ثابت در نظر گرفت. بنابراین زاویهٔ خروج (یا زاویهٔ ورود) مکان هندسی به قطب مختلط (یا صفر مختلط) را می‌توان با کم کردن جمع زاویهٔبردارهای رسم شده از بقیهٔ صفرها و قطبها به قطب (یا صفر) مورد نظر با علامت مناسب از 180° به دست آورد.

(جمع زاویهٔ بردارهای رسم شده از بقیهٔ قطبها به آن قطب) -180°= زاویهٔ خروج از قطب مختلط

(جمع زاویهٔ بردارهای رسم شده از بقیهٔ صفرها به آن قطب) +

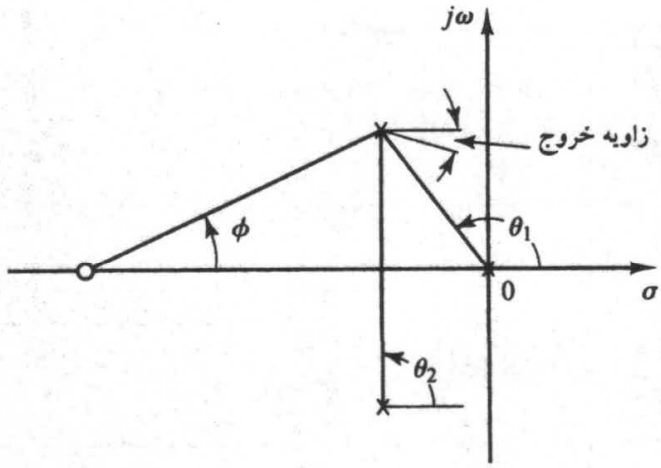
(جمع زاویهٔ بردارهای رسم شده از بقیهٔ صفرها به آن صفر) -180°=زاویهٔ ورود به صفر مختلط

(جمع زاویهٔ بردارهای رسم شده از بقیهٔ قطبها به آن صفر) +

زاویهٔ خروج در شکل ۶-۱۲ نشان داده شده است.

۶. ***محل برخورد مکان هندسی با محور موهومی را تعیین کنید.*** محل برخورد مکان هندسی ریشه‌ها با محور $j\omega$ را می‌توان به سادگی با استفاده از (الف) معیار پایداری روث، یا (ب) گذاشتن $s = j\omega$ در معادلهٔ مشخصه، برابر صفر قرار دادن بخشهای حقیقی و موهومی، و یافتن ω و K به دست آورد. مقادیر ω به دست

controlengineers.ir



شکل ۶-۱۲
رسم مکان هندسی ریشه ها ؛
$\phi + (\theta_1 + \theta_2) - 180^\circ =$ زاویهٔ خروج.

آمده فرکانسهای برخورد مکان هندسی و محور موهومی را به دست می‌دهد. مقدار K متناظر با هر فرکانس برخورد، بهره در آن نقطه را نشان می‌دهد.

۷ . ***تعدادی نقطهٔ آزمون در حوالی مبدا صفحهٔ s را مورد بررسی قرار دهید و مکان هندسی را رسم کنید.*** مکان هندسی را در اطراف محور $j\omega$ و مبدا رسم کنید. مهمترین بخش مکان هندسی نه محور حقیقی است و نه مجانبها هستند، بلکه بخشهای نزدیک محور $j\omega$ و مبدا هستند. شکل مکان هندسی در این ناحیهٔ مهم صفحهٔ s باید با دقت کافی تعیین شود. (اگر شکل دقیق مکان هندسی ریشه‌ها لازم شود، باید به جای محاسبات و ترسیم دستی از MATLAB استفاده کرد.)

۸ . ***قطبهای حلقه بسته را تعیین کنید.*** هر نقطهٔ روی مکان هندسی یک قطب حلقه بسته است، به شرطی که مقدار K در آن نقطه شرط اندازه را برآورده کند. برعکس، شرط اندازه قادرمان می‌کند مقدار بهرهٔ K برای وجود قطب در هر نقطهٔ مکان هندسی را تعیین کنیم. (در صورت لزوم می‌توان مکان هندسی ریشه‌ها را برحسب K مقدار گذاری کرد. K بر روی مکان هندسی به طور پیوسته تغییر می‌کند.)

مقدار K متناظر با هر نقطهٔ مکان هندسی ریشه‌ها را می‌توان با اعمال شرط اندازه یافت

$$K = \frac{\text{حاصلضرب طول تمام بردارهای بین } s \text{ و قطبها}}{\text{حاصلضرب طول تمام بردارهای بین } s \text{ و صفرها}}$$

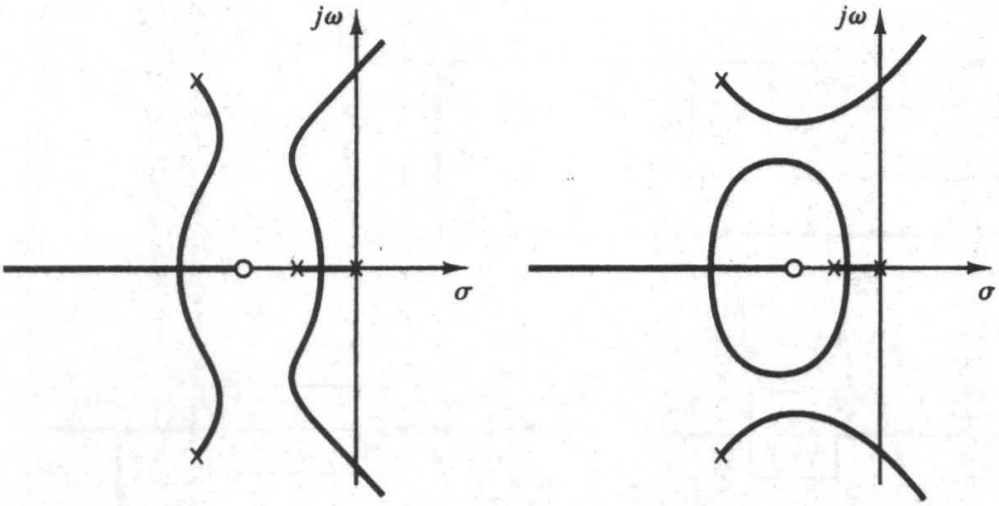
این مقدار را می‌توان هم به روش ترسیمی و هم به روش تحلیلی به دست آورد. (به کمک MATLAB می‌توان مکان هندسی ریشه‌ها را مقدارگذاری کرد. بخش ۶-۳ را ببینید.)

اگر بهرهٔ K تابع تبدیل حلقه باز در مسئله داده شده باشد، با اعمال شرط اندازه می‌توان محل درست قطبهای حلقه بسته به ازای K داده شده را روی شاخه‌های مکان هندسی با روش سعی و خطا یا با استفاده از MATLAB به دست آورد. کاربرد MATLAB در بخش ۶-۳ مورد بحث قرار می‌گیرد.

توضیحاتی راجع به نمودارهای مکان هندسی ریشه‌ها. توجه دارید که معادلهٔ مشخصه سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز زیر

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (n \geq m)$$

controlengineers.ir



شکل ۶-۱۳
نمودارهای مکان هندسی ریشه‌ها.

یک معادله جبری مرتبه n برحسب s است. اگر صورت $G(s)H(s)$ از مخرج آن دو مرتبه یا بیشتر کوچکتر باشد (یعنی دو یا تعداد بیشتری صفر در بینهایت وجود داشته باشد) ضریب a_1 منفی حاصل جمع ریشه‌های معادله و مستقل از K است. در چنین حالتی اگر با افزایش K بعضی ریشه‌ها به سمت چپ حرکت کنند، بقیهٔ ریشه‌ها باید به سمت راست حرکت کنند. این مطلب می‌تواند در یافتن شکل کلی مکان هندسی ریشه‌ها کمک کند.

همچنین باید توجه کنید که کمی تغییر در آرایش صفر – قطب می‌تواند به تغییر بزرگی در شکل مکان هندسی ریشه‌ها منجر شود. شکل ۶-۱۳ نشان می‌دهد که کمی تغییر در محل یک صفر یا یک قطب چگونه مکان هندسی کاملاً متفاوتی به دست می‌دهد.

حذف قطبهای G(s) توسط صفرهای H(s) . این نکتهٔ مهمی است که در صورت وجود عاملهای یکسان در مخرج $G(s)$ و صورت $H(s)$ ، قطبها و صفرها یکدیگر را حذف می‌کنند و درجهٔ معادلهٔ مشخصه کم می‌شود. سیستم شکل ۶-۱۴ (الف) را به عنوان نمونه در نظر بگیرید. (این سیستم فیدبک سرعت دارد.) با تغییر نمودار بلوکی شکل ۶-۱۴ (الف) و درآوردن آن به صورت شکل ۶-۱۴ (ب) به وضوح می‌توان دید که $G(s)$ و $H(s)$ دارای عامل مشترک $s+1$ هستند، تابع تبدیل حلقه بسته $C(s)/R(s)$ عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K}{s(s+1)(s+2)+K(s+1)}$$

معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$[s(s+2)+K](s+1)=0$$

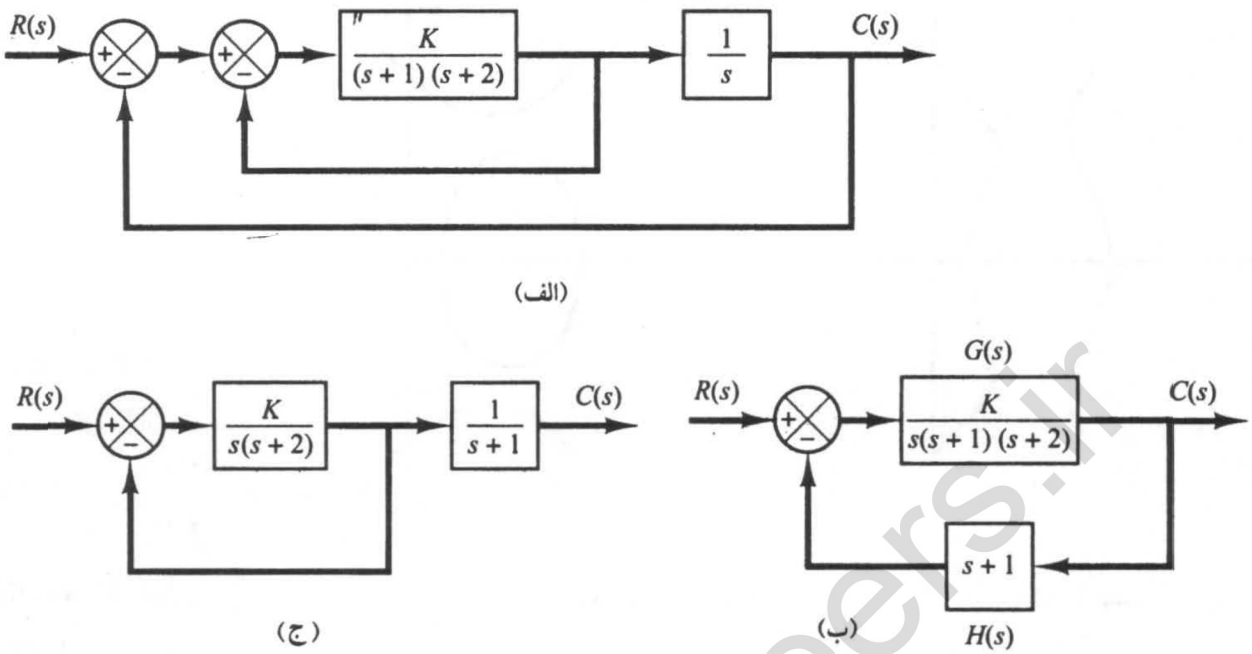
ولی به خاطر حذف عامل $(s+1)$ موجود در $G(s)$ و $H(s)$ داریم

$$1+G(s)H(s)=1+\frac{K(s+1)}{s(s+1)(s+2)}=\frac{s(s+2)+K}{s(s+2)}$$

معادلهٔ مشخصه ساده شده عبارت است از

$$s(s+2)+K=0$$

controlengineers.ir



شکل ۶-۱۴ (الف) سیستم کنترل با فیدبک سرعت؛ (ب) و (ج) نمودار بلوکی تغییر یافته.

نمودار مکان هندسی $G(s)H(s)$ نه تمام قطبهای معادلهٔ مشخصه را، بلکه تنها قطبهای معادلهٔ مشخصه ساده شده را نشان می‌دهد.

برای یافتن مجموعهٔ کامل قطبهای حلقه بسته باید قطب حذف شده $G(s)H(s)$ را به قطبهای حلقه بسته به دست آمده از مکان هندسی $G(s)H(s)$ اضافه کرد. نکتهٔ مهمی که باید به خاطر داشت این است که قطب حذف شدهٔ $G(s)H(s)$، چنانچه شکل ۶-۱۴ (ج) نشان می‌دهد، یک قطب حلقه بستهٔ سیستم است.

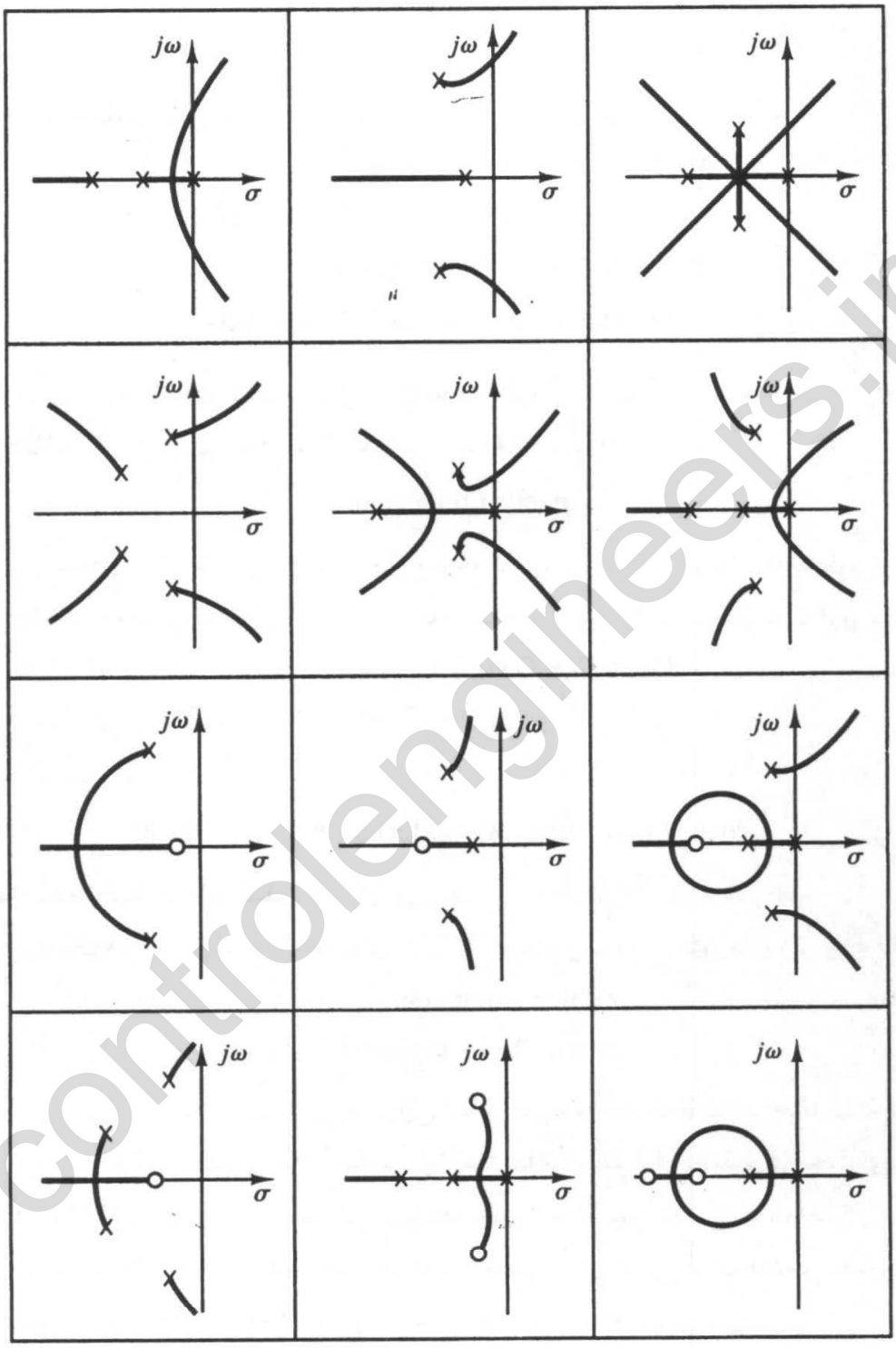
آرایشهای نوعی قطب – صفر و مکان هندسی متناظر با هر کدام. برای جمعبندی چند آرایش قطب – صفر حلقه باز و مکان هندسی ریشه‌ها متناظر با آنها در جدول ۶-۱ نشان داده شده است. شکل مکان هندسی ریشه‌ها تنها به فاصلهٔ نسبی قطبها و صفرهای حلقه باز بستگی دارد. اگر افزونی تعداد قطبهای حلقه باز از تعداد صفرهای محدود سه یا بیشتر باشد، به ازای مقدار خاصی از بهرهٔ K مکان هندسی وارد نیمهٔ راست صفحهٔ s شده، سیستم ناپایدار می‌شود. برای یک سیستم پایدار تمام قطبهای حلقه بسته باید در نیمهٔ چپ صفحهٔ s باشد.

توجه کنید که با کسب کمی تجربه به سادگی می‌توان تغییر مکان هندسی ریشه‌ها در اثر تغییر تعداد و محل قطبها و صفرهای حلقه باز را با تجسم نمودارهای مکان هندسی مربوط به آرایشهای مختلف قطب – صفر برآورد کرد.

خلاصه. مباحث بالا باید روشن کرده باشد که با دنبال کردن قواعدی ساده می‌توان مکان هندسی نسبتاً دقیقی برای سیستم داده شده رسم کرد. (توصیه می‌کنیم که خواننده نمودارهای مکان هندسی نشان داده شده در مسائل حل شدهٔ آخر فصل را مورد مطالعه قرار دهد.) در مراحل اولیهٔ طراحی، احتمالاً دانستن محل دقیق قطبهای حلقه بسته ضروری نیست. غالباً دانستن محل تقریبی قطبها تنها چیزی است که برای برآورد عملکرد سیستم نیاز داریم. پس توانایی رسم سریع نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستم داده شده برای طراحی مهم است.

controlengineers.ir

جدول ۶-۱ آرایشهای قطب – صفر حلقه باز و مکان هندسی ریشه‌های متناظر با آنها.



۶-۳ رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌ها با MATLAB

در این بخش روش ایجاد مکان هندسی ریشه‌ها با MATLAB و یافتن اطلاعات مربوط به نمودار را معرفی می‌کنیم.

رسم مکان هندسی ریشه‌ها با MATLAB . در رسم مکان هندسی ریشه‌ها با MATLAB با سیستم‌هایی کار

controlengineers.ir

می‌کنیم که معادلهٔ آنها را بتوان به شکل معادلهٔ (۶-۱۱) یعنی به صورت زیر نوشت

$$1+K\frac{\text{num}}{\text{den}}=0$$

که در آن num چندجمله‌ای صورت و den چندجمله‌ای مخرج است. یعنی

$$\begin{aligned}\text{num}&=(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)\\&=s^m+(z_1+z_2+\cdots+z_m)s^{m-1}+\cdots+z_1z_2\cdots z_m\\\text{den}&=(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)\\&=s^n+(p_1+p_2+\cdots+p_n)s^{n-1}+\cdots+p_1p_2\cdots p_n\end{aligned}$$

توجه کنید که هر دو بردار num و den باید برحسب توانهای نزولی نوشته شوند.

دستور MATLAB برای رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌ها به صورت زیر است

rlocus (num , den)

با دادن این فرمان نمودار مکان هندسی ریشه‌ها روی صفحه ترسیم می‌شود. بردار بهرهٔ K به طور خودکار تعیین می‌شود. بردار بهره تمام مقادیر بهره‌ای را که قطبهای حلقه بسته به ازای آنها محاسبه می‌شود دربر دارد.

برای سیستمهای تعریف شده در فضای حالت دستور rlocus (A,B,C,D) مکان هندسی ریشه‌ها را ترسیم می‌کند، در این حالت نیز بردار بهره به طور خودکار تعیین می‌شود.

توجه کنید که دستورهای

rlocus (num , den , K) و rlocus (A , B , C , D , K)

بردار K تعریف شده توسط استفاده کننده را به کار می‌برند.

اگر بخواهیم مکان هندسی ریشه‌ها با علامتهای 'o' یا 'x' رسم شوند، باید دستورهای زیر را به کار بریم

r = rlocus(num,den)

plot(r,'x') یا plot(r,'o')

رسم مکان هندسی ریشه‌ها با علامتهای 'o' یا 'x' از این لحاظ آموزنده است که قطبهای حلقه بستهٔ محاسبه شده نشان داده می‌شوند: در بعضی بخشهای مکان هندسی این علامتها تنگ هم قرار دارند و در بخشهای دیگر از هم فاصله دارند. MATLAB برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها یک مجموعه بهرهٔ خاص خود را به کار می‌برد. مقدار این بهره با روشی دارای گامهای تنظیم‌پذیر تعیین می‌شود. همچنین برای ترسیم مکان هندسی مقیاس محورها به طور خودکار تعیین می‌شود، یعنی به همان ترتیبی که در دستور plot انجام می‌گیرد.

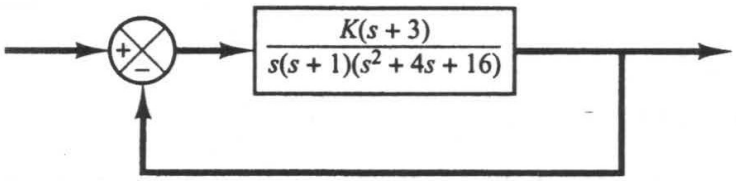
مثال ۶-۳

سیستم کنترل شکل ۶-۱۵ را در نظر بگیرید. مکان هندسی ریشه‌ها را روی محورهایی با مقیاس برابر رسم کنید به نحوی که خطی با شیب ۱ دارای زاویهٔ 45° باشد. نمودار باید در ناحیهٔ زیر رسم شود

$$-6\le x\le 6 \qquad -6\le y\le 6$$

که در آن x و y به ترتیب محور حقیقی و محور موهومی هستند.

controlengineers.ir



شکل ۶-۱۵
سیستم کنترل.

برای این که نموداری مربعی در ناحیهٔ مشخص شده روی صفحهٔ مانیتور نقش بندد باید دستور زیر را وارد کنیم

```
v=[-6 6 -6 6];axis(v);axis('square')
```

در این صورت ناحیه ای مربعی مشخص می‌شود که در آن خطی با شیب ۱ واقعاً با زاویهٔ °۴۵ رسم می‌شود، نه با زاویه‌ای دیگر.

در این مسئله صورت یک چندجمله‌ای برحسب s است، ولی مخرج به صورت حاصلضرب عاملهای مرتبه اول و مرتبه دوم داده شده است، یعنی برای یافتن چندجمله‌ای مخرج باید این عاملها را در هم ضرب کنیم. ضرب این عاملها را می‌توان به سادگی با استفاده از دستور convolution، به صورت زیر انجام داد.

بردارهای زیر را تعریف می‌کنیم

```
a = [ 1  1  0]
b= [ 1  4  16 ]
```

$a = s(s+۱)$

$b = s^۲ + ۴s + ۱۶$

سپس دستور زیر را به کار می‌بریم

```
c = conv (a,b)
```

توجه کنید که conv (a,b) حاصلضرب دو چندجمله‌ای a و b را به دست می‌دهد. خروجی کامپیوتری زیر را ببینید:

```
a = [1  1   0];
b = [1  4  16];
c = conv (a,b)
c =
     1  5  20  16  0
```

پس چندجمله‌ای مخرج عبارت است از

```
den = [ 1  5  20  16  0 ]
```

برای یافتن قطبهای مزدوج مختلط حلقه باز این تابع تبدیل (ریشه‌های $s^۲ + ۴s + ۱۶ = ۰$) می‌توانیم دستور roots را به صورت زیر به کار بریم

```
r = roots(b)
r =
  -2.0000 + 3.464li
  -2.0000 - 3.464li
```

controlengineers.ir

پس صفرها و قطبهای حلقه باز سیستم عبارت اند از

صفرهای حلقه باز : $s=-۳$

قطبهای حلقه باز : $s=۰\,,\ s=-۱\,,\ s=-۲\pm j۳٫۴۶۴۱$

برنامهٔ ۶-۱ زیر مکان هندسی ریشه‌ها را برای این سیستم رسم می‌کند. نمودار مکان هندسی در شکل ۶-۱۶ نشان داده شده است.

MATLAB Program 6–1

```
% --------- Root-locus plot ---------
num = [1   3];
den = [1   5  20  16   0];
rlocus(num,den)
v = [-6  6  -6  6];
axis(v); axis('square')
grid;
title ('Root-Locus Plot of G(s) = K(s + 3)/[s(s + 1)(s^2 + 4s + 16)]')
```

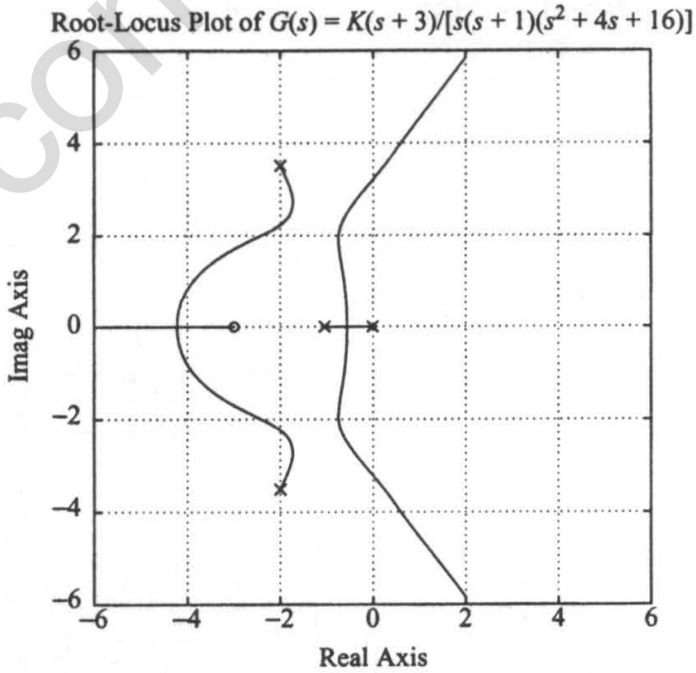
توجه کنید که در برنامهٔ MATLAB ۶-۱ می‌توانیم به جای

```
den = [ 1  5  20  16  0 ]
```

بنویسیم

```
den = conv( [ 1  1  0 ] , [ 1  4  16] )
```

نتیجه یکسان است.



شکل ۶-۱۶
نمودار مکان هندسی ریشه‌ها.

controlengineers.ir

مثال ۶-۴

سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s)H(s)=\frac{K}{(s+۰/۵)(s^۲+۰/۶s+۱۰)}$$
$$=\frac{K}{s^۴+۱/۱s^۳+۱۰/۳s^۲+۵s}$$

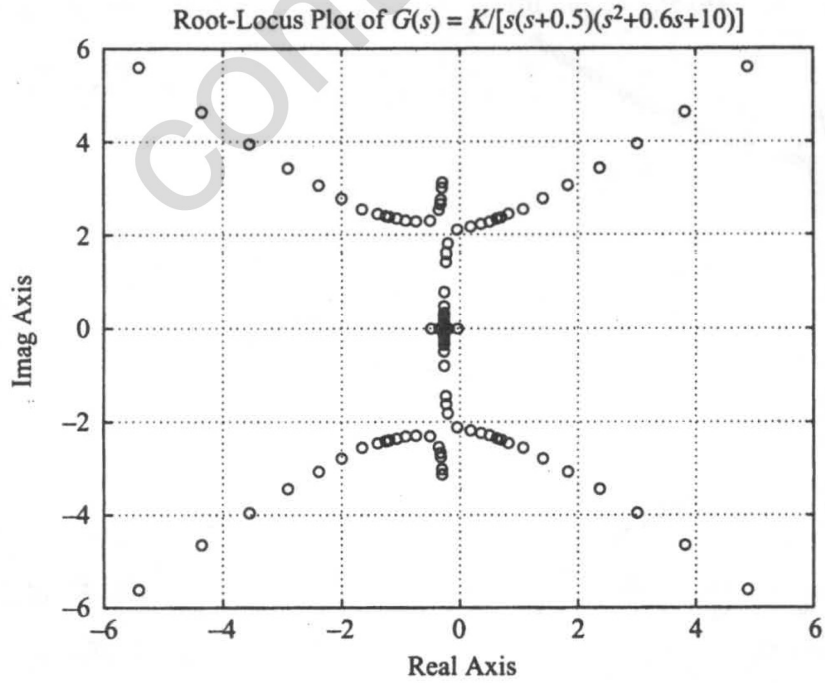
تابع صفر حلقه باز ندارد. قطبهای حلقه باز در $s=-۰/۳+j۳/۱۴۸۰$، $s=-۰/۳-j۳/۱۴۸۰$، $s=-۰/۵$ و $s=۰$ قرار دارند.

برنامهٔ MATLAB ۶-۲ را وارد می‌کنیم و نمودار مکان هندسی ریشه‌های شکل ۶-۱۷ را به دست می‌آوریم.

توجه کنید که در نواحی نزدیک $x=-۰/۳$، $y=۲/۳$ و $x=-۰/۳$، $y=-۲/۳$ دو شاخهٔ مکان هندسی به یکدیگر نزدیک می‌شوند. نمی‌دانیم که این دو شاخه به هم برخورد می‌کنند یا نه. برای بررسی این وضعیت

MATLAB Program 6–2

```
% --------- Root-locus plot ---------

num = [1];
den = [1  1.1  10.3  5  0];
r = rlocus(num,den);
plot(r,'o')
v = [-6  6  -6  6]; axis(v)
grid
title('Root-Locus Plot of G(s) = K/[s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```



شکل ۶-۱۷
نمودار مکان هندسی ریشه‌ها.

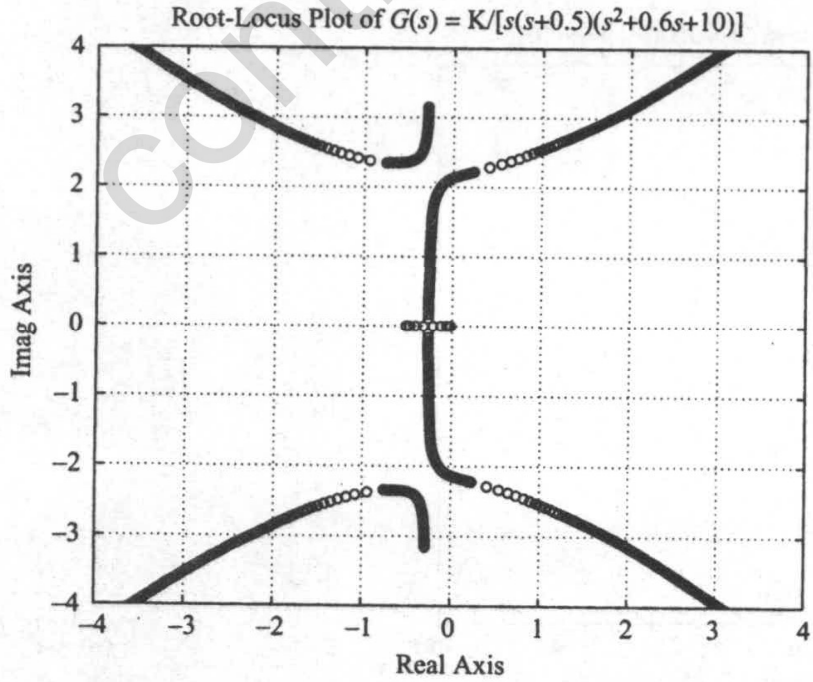
controlengineers.ir

می‌توانیم مکان هندسی ریشه‌ها را به ازای بهره‌هایی که در این ناحیهٔ بحرانی تغییرات کندتری دارند رسم کنیم.

با استفاده از سعی و خطا یا دستور rlocfind (که بعداً در همین بخش راجع به آن صحبت خواهیم کرد) درمی‌یابیم که ناحیهٔ مورد نظر با $۲۰ \leq K \leq ۳۰$ متناظر است. با وارد کردن برنامهٔ ۶-۳ نمودار مکان هندسی ریشه‌های شکل ۶-۱۸ را به دست می‌آوریم. این نمودار نشان می‌دهد که دو شاخه‌ای که در نیمهٔ بالایی صفحه (یا نیمهٔ پایینی آن) به هم نزدیک می‌شوند بر یکدیگر مماس نمی‌شوند.

MATLAB Program 6–3

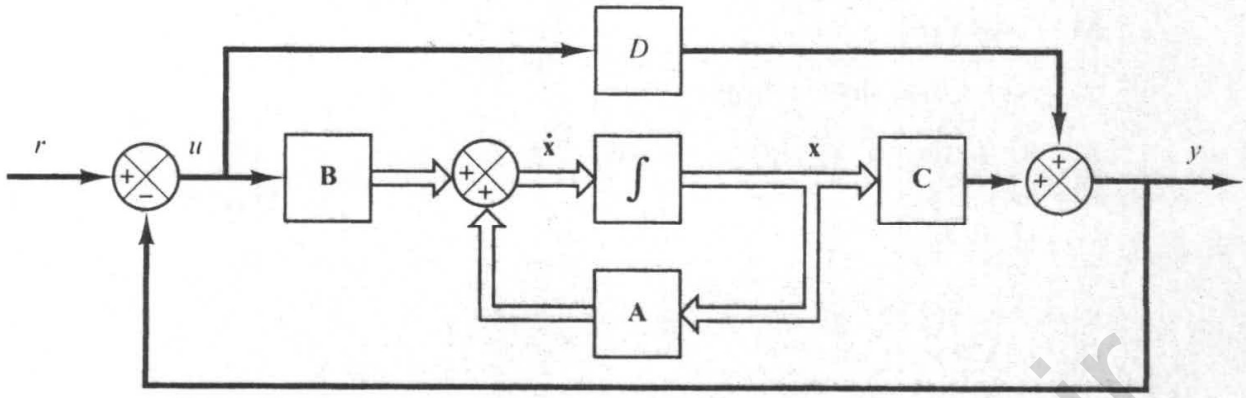
```
% --------- Root-locus plot ---------

num = [1];
den = [1  1.1  10.3  5  0];
K1 = 0:0.2:20;
K2 = 20:0.1:30;
K3 = 30:5:1000;
K = [K1  K2  K3];
r = rlocus(num,den,K);
plot(r, 'o')
v = [-4  4  -4  4]; axis(v)
grid
title('Root-Locus Plot of G(s) = K/[s(s + 0.5)(s^2 + 0.6s + 10)]')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```



شکل ۶-۱۸

نمودار مکان هندسی ریشه‌ها.

controlengineers.ir



شکل ۶-۱۹ سیستم کنترل حلقه بسته.

مثال ۶-۵

سیستم شکل ۶-۱۹ را در نظر بگیرید. معادلات سیستم عبارت‌اند از

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$
$$u = r - y$$

در این مسئله مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم تعریف شده در فضای حالت را به دست می‌آوریم.

بیایید فرض کنیم برای مثال ماتریس‌های $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$ و D به صورت زیرند

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱۶۰ & -۵۶ & -۱۴ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱۴ \end{bmatrix} \tag{۶-۱۵}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} ۰ \end{bmatrix}$$

مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را می‌توان با استفاده از دستور زیر به دست آورد

```
rlocus(A,B,C,D)
```

این دستور همان نمودار مکان هندسی ریشه‌هایی را به دست می‌دهد که دستور rlocus (num,den) ، با num و den به دست آمده به صورت زیر، رسم می‌کند

```
[num,den]=ss2tf (A,B,C,D)
```

این دستور بردارهای زیر را به دست می‌دهد

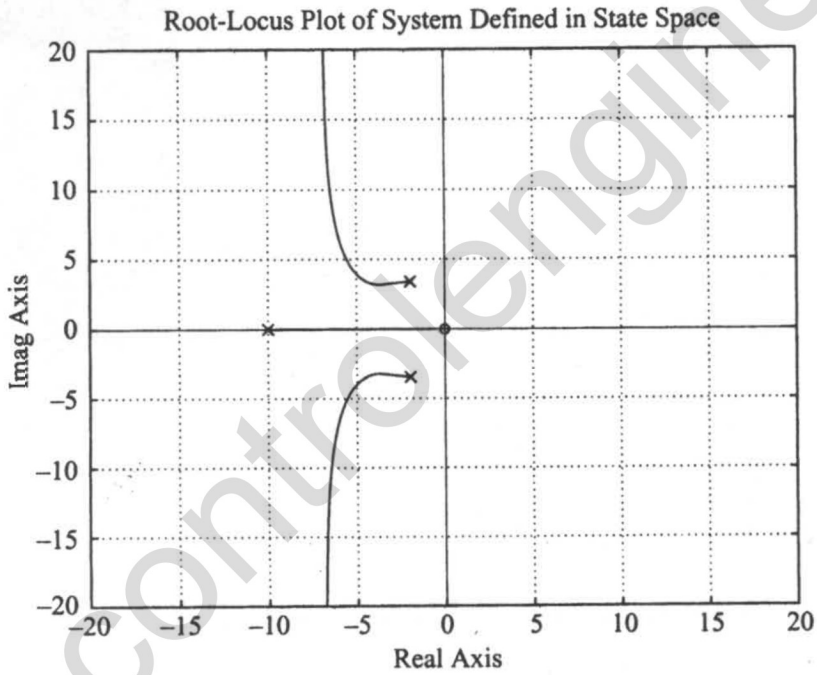
```
num = [ 0  0  1  0 ]
den = [ 1  14  56  160 ]
```

برنامهٔ ۶-۴ نمودار مکان هندسی ریشه‌ها را به صورت نشان داده شده در شکل ۶-۲۰ به دست می‌دهد.

controlengineers.ir

MATLAB Program 6–4

```
% -------- Root-locus plot ---------
A = [0 1 0;0 0 1;-160 -56 -14];
B = [0;1;-14];
C = [1 0 0];
D = [0];
K = 0:0.1:400;
rlocus(A,B,C,D,K);
v = [-20 20 -20 20]; axis(v)
grid
title('Root-Locus Plot of System Defined in State Space')
```



شکل ۶-۲۰

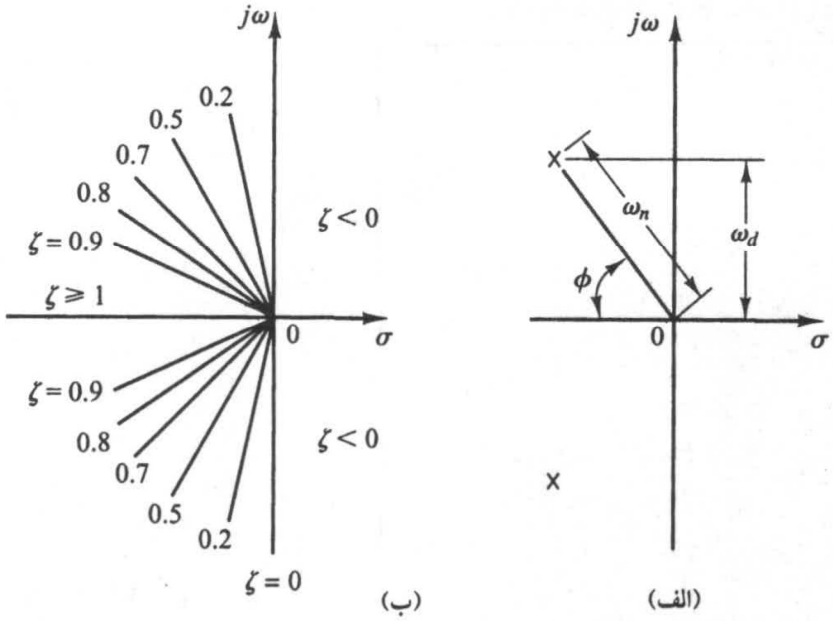
نمودار مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستمی که در فضای حالت تعریف شده و **A**، **B**، **C** و D آن در معادلهٔ (۶-۱۵) داده شده است.

مکان هندسی ζ ثابت و ω_n ثابت. به یاد دارید که در صفحهٔ مختلط نسبت میرایی ζ یک زوج قطب مزدوج مختلط را می‌توان برحسب زاویهٔ ϕ بیان کرد، زاویه‌ای که مطابق شکل ۶-۲۱ (الف) از بخش منفی محور حقیقی اندازه‌گیری می‌شود

$$\zeta = \cos\phi$$

به بیان دیگر خطوط با نسبت میرایی ثابت خطوطی شعاعی هستند که مطابق شکل ۶-۲۱ (ب) از مبدا می‌گذرند مثلاً نسبت میرایی ۰/۵ با قطبهای مزدوج مختلفی متناظر است که روی خطی گذرنده از مبدا که با محور حقیقی

controlengineers.ir



شکل ۶-۲۱
(الف) قطبهای مختلط؛
(ب) خطوط با نسبت میرایی ζ ثابت.

منفی زاویهٔ $\pm 60^\circ$ می‌سازد قرار دارند. (اگر بخش حقیقی قطبهای مزدوج مختلط مثبت باشد، که با ناپایدار بودن سیستم متناظر است، نسبت میرایی ζ منفی می‌شود.) نسبت میرایی موقعیت زاویه‌ای قطبها را نشان می‌دهد، در حالی که فاصلهٔ قطب از مبدا توسط فرکانس طبیعی نامیرا ω_n تعیین می‌شود. مکان هندسی (ثابت = ω_n) دایره‌های به مرکز مبدا هستند.

برای رسم خطوط ζ ثابت و دایره‌های ω_n ثابت بر روی نمودار مکان هندسی رسم شده توسط MATLAB از دستور sgrid استفاده می‌کنیم.

رسم شبکهٔ قطبی بر روی نمودار مکان هندسی ریشه‌ها. دستور

sgrid

خطوط نسبت میرایی ثابت (ζ بین ۰ و ۱ با گامهای ۰/۱) و دایره‌های ω_n ثابت را بر روی نمودار مکان هندسی رسم می‌کند. برنامهٔ MATLAB ۶-۵ و نمودار حاصل از آن در شکل ۶-۲۲ را نگاه کنید.

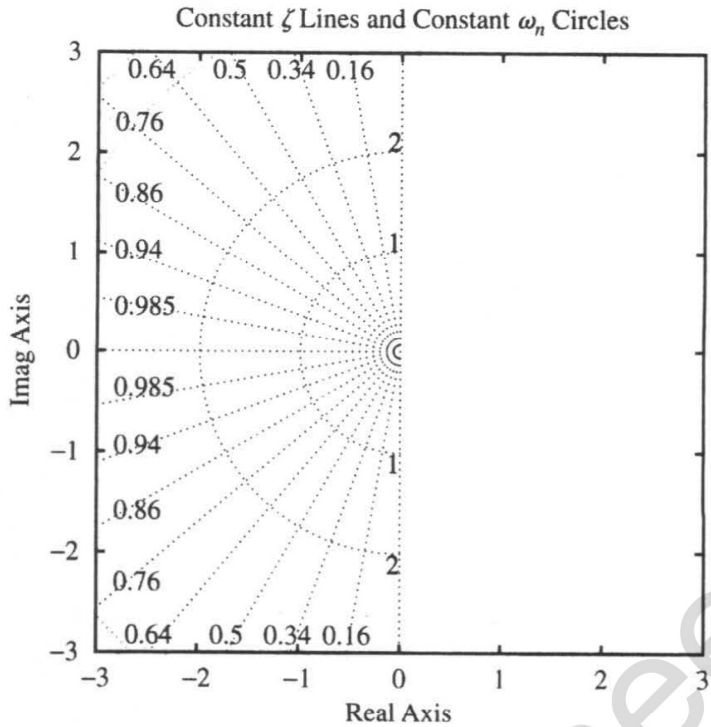
اگر تنها بخواهیم خطوطی با ζ مشخص (مثلاً خط $\zeta = 0/5$ و خط $\zeta = 0/707$) و دایره‌های با ω_n ثابت خاصی (مثلاً دایرهٔ $\omega_n = 0/5$، دایرهٔ $\omega_n = 1$ و دایرهٔ $\omega_n = 2$) رسم شود، باید دستور زیر را به کار بریم

sgrid ([0.5 , 0.707] , [0.5 , 1 , 2])

MATLAB Program 6–5

```
sgrid
v = [-3  3  -3  3]; axis(v); axis('square')
title('Constant \zeta Lines and Constant \omega_n Circles')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```

controlengineers.ir



شکل ۶-۲۲
خطوط با ζ و
دایره‌های ω_n ثابت.

اگر بخواهیم خطوط ζ ثابت و دایره‌های ω_n ثابت بالا را بر روی نمودار مکان هندسی سیستمی با

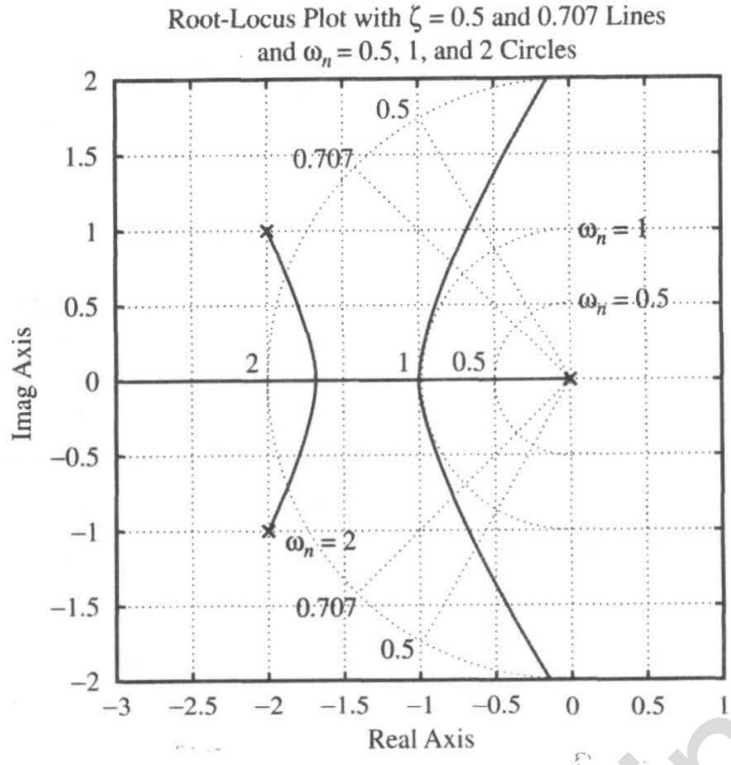
num = [0 0 0 1]
den = [1 4 5 0]

رسم کنیم ، برنامهٔ ۶-۶ را به کار می‌بریم. نمودار مکان هندسی ریشه‌های حاصل در شکل ۶-۲۳ نشان داده شده است.

MATLAB Program 6–6

```
num = [1];
den = [1 4 5 0];
K = 0:0.01:1000;
r = rlocus(num,den,K);
plot(r,'-'); v = [-3 1 -2 2]; axis(v); axis('square')
sgrid([0.5,0.707], [0.5,1,2])
grid
title('Root-Locus Plot with \zeta = 0.5 and 0.707 Lines ...
and \omega_n = 0.5,1, and 2 Circles')
xlabel('Real Axis'); ylabel('Imag Axis')
gtext('\omega_n = 2')
gtext('\omega_n = 1')
gtext('\omega_n = 0.5')
% Place 'x' mark at each of 3 open-loop poles.
gtext('x')
gtext('x')
gtext('x')
```

controlengineers.ir



شکل ۶-۲۳
خطوط با ζ ثابت و دایره‌های ω_n ثابت بر روی نمودار مکان هندسی ریشه‌ها.

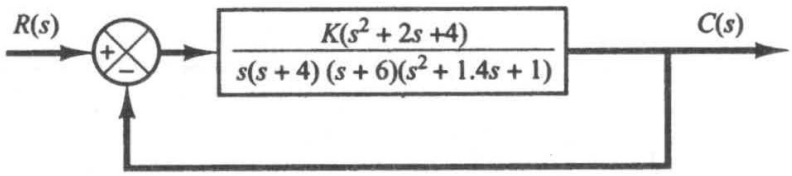
اگر بخواهیم تمام خطوط ζ ثابت، یا تمام دایره‌های ω_n ثابت از شکل حذف شوند، باید در آرگومان دستور sgrid از بردار تهی [] استفاده کنیم. مثلاً اگر بخواهیم تنها خط با نسبت میرایی ۰/۵ روی نمودار مکان هندسی شکل ۶-۲۳ رسم شود و هیچ دایره‌ای رسم نشود، باید دستور زیر را به کار بریم

```
sgrid(0.5,[ ])
```

سیستم‌های پایدار مشروط . سیستم با فیدبک منفی شکل ۶-۲۴ را در نظر بگیرید. می‌توان مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را با استفاده از قواعد رسم مکان هندسی ، یا با استفاده از MATLAB رسم کرد. برنامهٔ ۶-۷ نمودار مکان هندسی این سیستم را به دست می‌دهد. نمودار در شکل ۶-۲۵ نشان داده شده است.

نمودار مکان هندسی ریشه‌های شکل ۶-۲۵ نشان می‌دهد که این سیستم تنها به ازای مقادیر محدودی از K پایدار است ؛ این محدود $0 < K < 12$ و $73 < K < 154$ می‌باشد. سیستم به ازای $12 < K < 73$ و $K > 154$ ناپایدار می‌شود. (اگر K مقداری به خود بگیرد که متناظر با سیستم ناپایدار باشد ، سیستم ممکن است خراب شود یا به خاطر اشباع یا اثرات دیگر غیرخطی عمل کند.) چنین سیستمی پایدار مشروط خوانده می‌شود.

در عمل پایداری مشروط مطلوب نیست . مشروط بودن پایداری خطرناک است ، ولی بعضی سیستمها چنین هستند ؛ مخصوصاً سیستمهایی که مسیر پیشرو ناپایدار دارند. این مسیر پیشروی ناپایدار مثلاً می‌تواند به

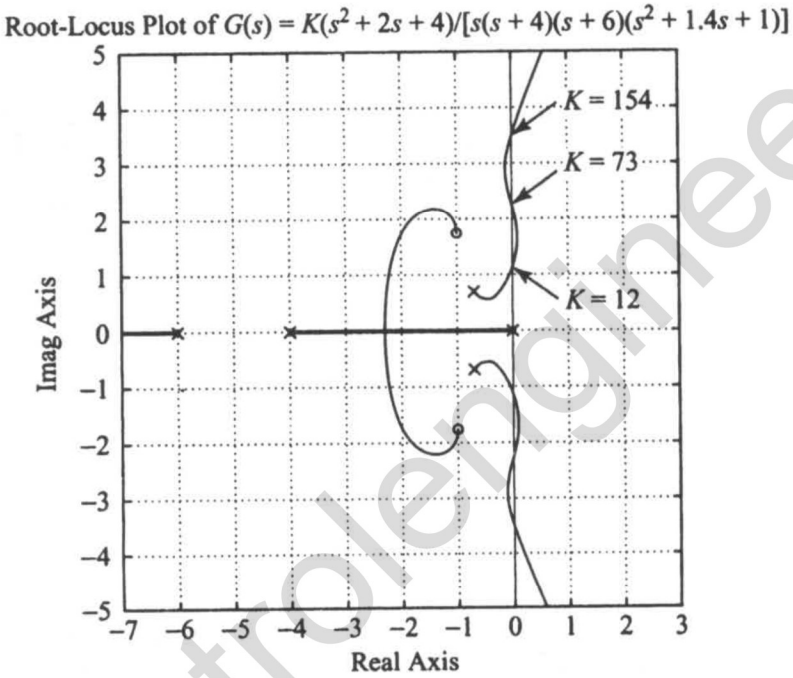


شکل ۶-۲۴
سیستم کنترل .

controlengineers.ir

MATLAB Program 6–7

```
num = [1  2  4];
den = conv(conv([1  4  0],[1  6]), [1  1.4  1]);
rlocus(num, den)
v = [-7  3  -5  5]; axis(v); axis('square')
grid
title('Root-Locus Plot of G(s) = K(s^2 + 2s + 4)/[s(s + 4)(s + 6)(s^2 + 1.4s + 1)]')
text(1.0, 0.55,'K = 12')
text(1.0,3.0,'K = 73')
text(1.0,4.15,'K = 154')
```



شکل ۶-۲۵
نمودار مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم پایدار مشروط .

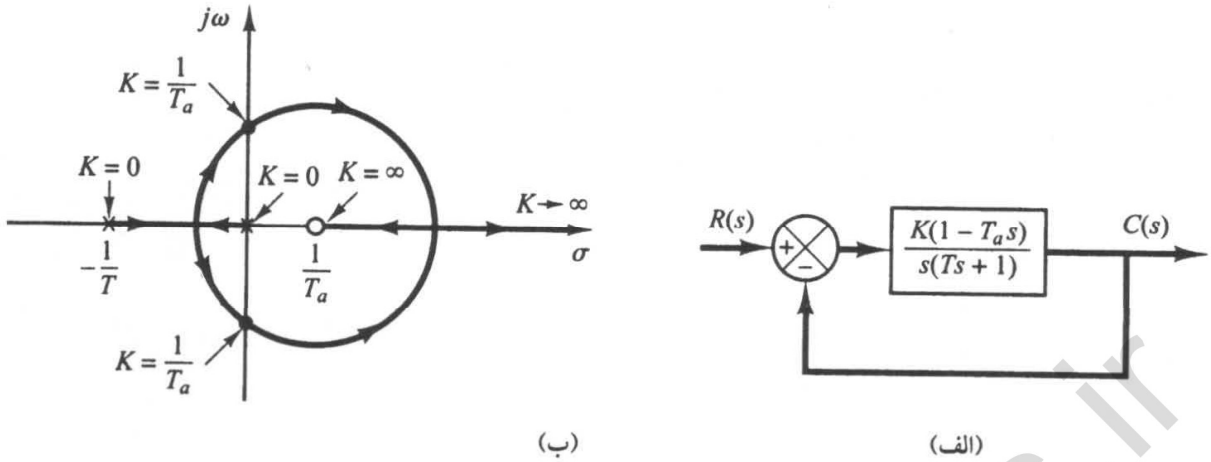
خاطر وجود حلقهٔ داخلی ایجاد شده باشد. توصیه می‌شود از این پایداری مشروط پرهیز شود ، زیرا اگر بهره به هر دلیلی از یک حد بحرانی کمتر شود ، سیستم ناپایدار می‌شود . توجه کنید که با افزودن یک شبکهٔ جبرانساز مناسب می‌توان پایداری مشروط را از بین برد. [افزودن یک صفر باعث می‌شود مکان هندسی ریشه‌ها به سمت چپ خم شود. (بخش ۶-۵ را ببینید.) پس با جبرانساز مناسب می‌توان وضعیت پایداری مشروط را از بین ببرد.]

سیستم غیر می‌نیمم فاز. اگر تمام قطبها و صفرهای یک سیستم در نیمهٔ چپ صفحهٔ s باشند، سیستم می‌نیمم فاز خوانده می‌شود. اگر سیستم در نیمهٔ راست صفحهٔ s حداقل یک قطب یا صفر داشته باشد، غیرمی‌نیمم فاز نامیده می‌شود. این نام به خاطر مشخصهٔ جابه‌جایی فاز چنین سیستمی، هنگام اعمال ورودی سینوسی، به آن داده شده است.

سیستم شکل ۶-۲۶ (الف) را در نظر بگیرید. برای این سیستم

$$G(s) = \frac{K(1 - T_a s)}{s(Ts + 1)} \qquad (T_a > 0) \quad , \quad H(s) = 1$$

controlengineers.ir



شکل ۶-۲۶ (الف) سیستم غیرمی‌نیمم فاز؛ (ب) مکان هندسی ریشه‌ها.

این یک سیستم غیرمی‌نیمم فاز است، زیرا یک صفر در نیمهٔ راست صفحهٔ s دارد. برای این سیستم شرط زاویه عبارت است از

$$\angle G(s)=\angle -\frac{K(T_a s-1)}{s(Ts+1)}=\angle\frac{K(T_a s-1)}{s(Ts+1)}+180^\circ$$
$$=\pm 180^\circ(2k+1)\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

یا

$$\angle\frac{K(T_a s-1)}{s(Ts+1)}=0^\circ \tag{۶-۱۶}$$

مکان هندسی ریشه‌ها را می‌توان از معادلهٔ (۶-۱۶) به دست آورد. شکل ۶-۲۶ (ب) مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار می‌بینیم که سیستم به شرطی پایدار است که بهرهٔ K از $1/T_a$ کوچکتر باشد.

برای رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌ها با MATLAB صورت و مخرج را طبق معمول وارد می‌کنیم. مثلاً به ازای $T=1\,\text{sec}$ و $T_a=0.5\,\text{sec}$ وارد می‌کنیم

```
num = [ -0.5  1]
den=[1  1  0]
```

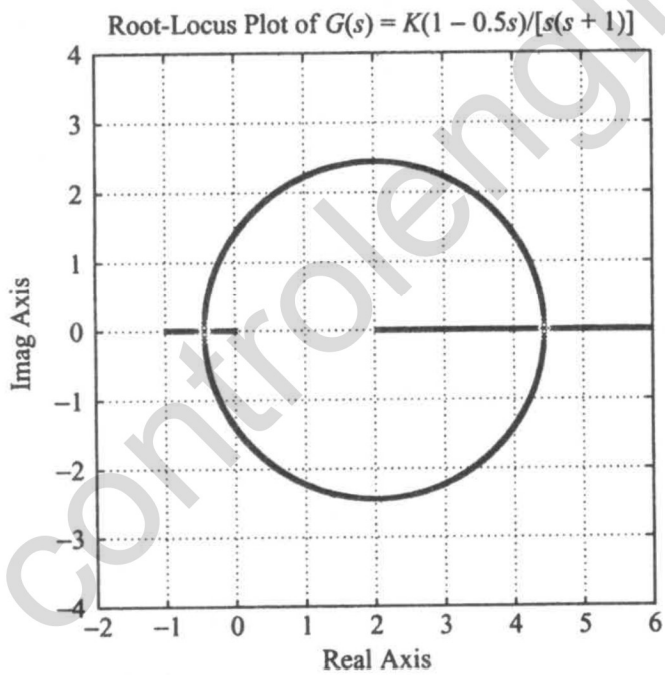
برنامهٔ ۶-۸ نمودار مکان هندسی ریشه‌های شکل ۶-۲۷ را به دست می‌دهد.

تعامد مکان هندسی ریشه‌ها و مکان هندسی بهره ثابت. سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ در نظر بگیرید. در صفحهٔ $G(s)H(s)$ مکان هندسی $|G(s)H(s)|=$ ثابت، دایره‌هایی به مرکز مبدا هستند ، و مکان هندسی متناظر با $\angle G(s)H(s)=\pm 180^\circ(2k+1)$ $(k=0,1,2,\cdots)$ مطابق شکل ۶-۲۸ روی بخش منفی محور حقیقی صفحهٔ $G(s)H(s)$ قرار دارد. [توجه کنید که صفحهٔ مختلط به کار رفته در اینجا صفحهٔ s نیست ، بلکه صفحهٔ $G(s)H(s)$ است .]

controlengineers.ir

MATLAB Program 6–8

```
num = [-0.5  1];
den = [1  1  0];
k1 = 0:0.01:30;
k2 = 30:1:100;
K3 = 100:5:500;
K = [k1  k2  k3];
rlocus(num,den,K)
v = [-2  6  -4  4]; axis(v); axis('square')
grid
title('Root-Locus Plot of G(s) = K(1 - 0.5s)/[s(s + 1)]')
% Place 'x' mark at each of 2 open-loop poles.
% Place 'o' mark at open-loop zero.
gtext('x')
gtext('x')
gtext('o')
```



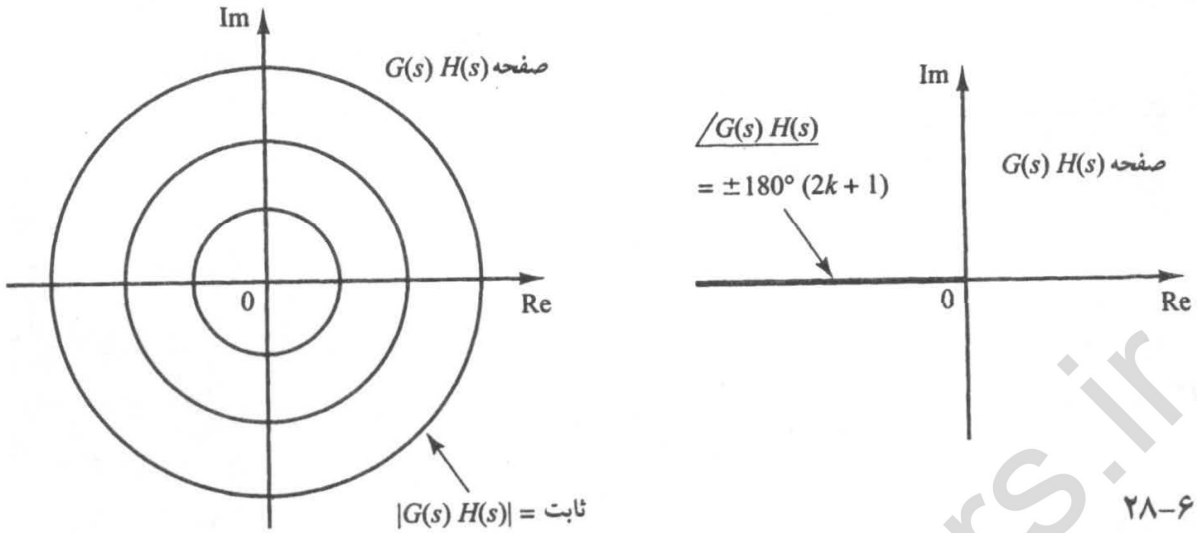
شکل ۶–۲۷
نمودار مکان هندسی ریشه‌های $G(s)=\dfrac{K(۱-۰/۵s)}{s(s+۱)}$.

مکان هندسی ریشه‌ها و مکان هندسی بهرهٔ ثابت در صفحهٔ s نگاشتهای همدیس مکان هندسی $\measuredangle G(s)H(s)=\pm ۱۸۰^\circ(۲k+۱)$ و مکان هندسی $|G(s)H(s)|=$ ثابت، در صفحهٔ $G(s)H(s)$ هستند.

چون مکان هندسی فاز ثابت و مکان هندسی بهره ثابت در صفحهٔ $G(s)H(s)$ متعامدند، مکان هندسی ریشه‌ها و مکان هندسی بهره‌ثابت در صفحهٔ s برهم عمودند. شکل ۶–۲۹ (الف) مکان هندسی ریشه‌ها و مکان هندسی بهره ثابت را برای سیستم زیر نشان می‌دهد

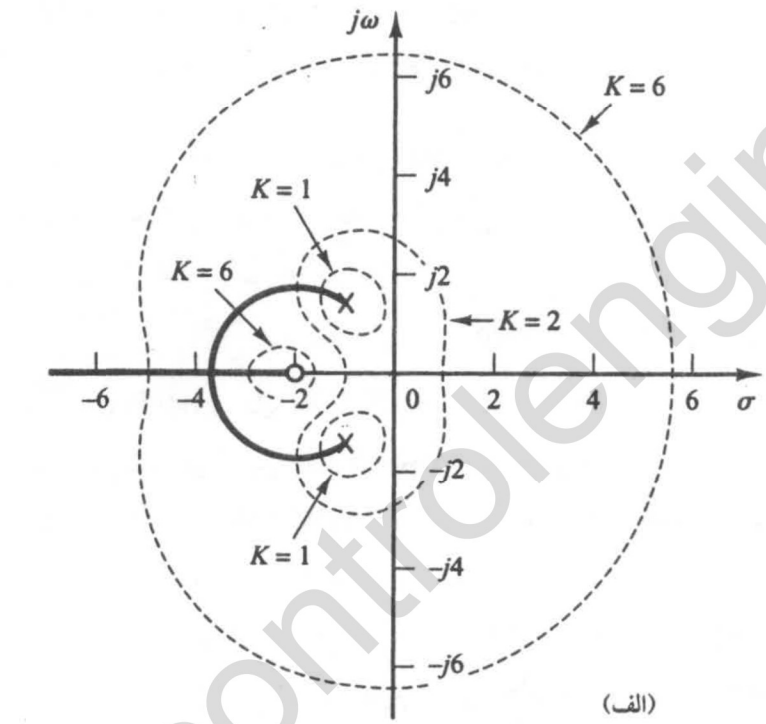
$$G(s)=\frac{K(s+۲)}{s^۲+۲s+۳}\quad,\quad H(s)=۱$$

controlengineers.ir

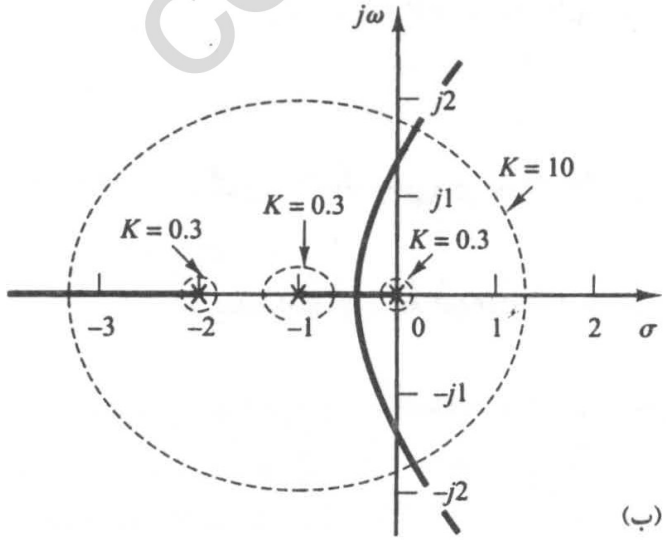


شکل ۶-۲۸

نمودارهای مکان هندسی فاز ثابت و بهرهٔ ثابت در صفحهٔ $G(s)\,H(s)$.



(الف)



(ب)

شکل ۶-۲۹

نمودارهای مکان هندسی ریشه‌ها و مکان هندسی بهره ثابت. (الف) سیستمی با $G(s) = K(s+۲)/(s^۲+۲s+۳)$ ، $H(s) = ۱$ ؛ (ب)سیستمی با $G(s) = K/[s(s+۱)(s+۲)]$ ، $H(s) = ۱$

controlengineers.ir

توجه کنید که چون آرایش صفر – قطب نسبت به محور حقیقی متقارن است، مکان هندسی بهره ثابت نیز نسبت به محور حقیقی متقارن است.

شکل ۶-۲۹ (ب) مکان هندسی ریشه‌ها و مکان هندسی بهرهٔ ثابت را برای سیستمی با مشخصات زیر نشان می‌دهد:

$$G(s)=\frac{K}{s(s+۱)(s+۲)} \quad , \quad H(s)=۱$$

توجه کنید که چون آرایش قطبها نسبت به محور حقیقی و خطی که به موازات محور $j\omega$ از نقطهٔ $(\sigma=-۱, \omega=۰)$ می‌گذرد متقارن است، مکان هندسی بهرهٔ ثابت نسبت به خط $\omega=۰$ (محور حقیقی) و خط $\sigma=-۱$ متقارن است.

شکلهای ۶-۲۹ (الف) و (ب) نشان می‌دهند که هر نقطهٔ صفحهٔ s با یک مقدار K متناظر است . با استفاده از دستور rlocfind (که در زیر معرفی شده) می‌توان مقدار K متناظر با هر نقطه ، و همین طور نزدیک‌ترین قطبهای حلقه بستهٔ متناظر با آن مقدار K را به دست آورد.

یافتن بهره در نقطهٔ خاصی از مکان هندسی ریشه‌ها. هنگام تحلیل یک سیستم حلقه بسته با MATLAB ، غالباً لازم می‌شود بهره در نقطهٔ دلخواهی از مکان هندسی ریشه‌ها پیدا شود. برای این منظور می‌توان دستور rlocfind را به صورت زیر به کار برد

```
[K,r]= rlocfind(num,den)
```

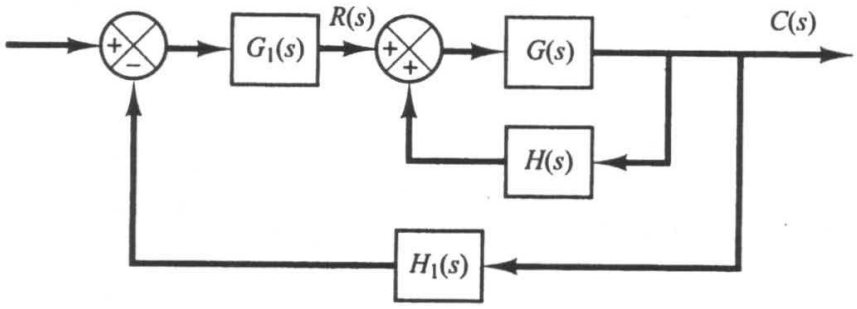
دستور rlocfind که باید به دنبال یک دستور rlocus به کار رود، یک دستگاه مختصات xy منقول روی صفحه ایجاد می‌کند. مبدا این دستگاه مختصات را می‌توان به کمک ماوس بر روی نقطهٔ مورد نظر مکان هندسی ریشه‌ها قرار داد و کلید ماوس را فشرد. MATLAB مختصات آن نقطه، بهره در آن نقطه و قطبهای حلقه بستهٔ متناظر با آن بهره را روی صفحه نشان می‌دهد.

اگر نقطهٔ انتخاب شده روی مکان هندسی ریشه ها نباشد ، مثل نقطهٔ A شکل ۶-۲۹ (الف) ، دستور rlocfind مختصات آن نقطه، بهره در آن نقطه، و قطبهای حلقه بستهٔ ، مثل نقاط B و C ، متناظر با آن بهره را نشان می‌دهد. [توجه کنید که هر نقطهٔ صفحهٔ s با یک بهره متناظر است. برای نمونه شکلهای ۶-۲۹ (الف) و (ب) را ببینید.]

۶–۴ مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستمهای با فیدبک مثبت

مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستمهای دارای فیدبک مثبت. (مرجع W-4 را ببینید.) در سیستمهای کنترل پیچیده می‌توان به صورت نشان داده شده در شکل ۶-۳۰ حلقه‌های داخلی دارای فیدبک مثبت داشت. چنین حلقه‌ای معمولاً توسط حلقهٔ بیرونی پایدار می‌شود. در ادامه تنها به حلقهٔ داخلیِ دارای فیدبک مثبت می‌پردازیم .

controlengineers.ir



شکل ۶-۳۰
سیستم کنترل.

تابع تبدیل حلقه بستهٔ حلقهٔ داخلی عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$

معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$1-G(s)H(s)=0 \qquad (۶-۱۷)$$

این معادله را می‌توان به نحوی مشابه به روش به کار رفته در بخش ۶-۲ حل کرد. البته شرط زاویه را باید تغییر داد.

معادلهٔ (۶-۱۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(s)H(s)=1$$

که معادل دو شرط زیر است

$$\angle G(s)H(s)=0^\circ \pm k360^\circ \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$
$$|G(s)H(s)|=1$$

جمع کل زاویه‌ها از قطبها و صفرهای حلقه باز باید برابر $0^\circ \pm k360^\circ$ باشد. پس مکان هندسی در این مورد یک مکان هندسی 0° است، برخلاف قبل که یک مکان هندسی 180° داشتیم. شرط اندازه هیچ تغیری نمی‌کند.

برای نشان دادن روش مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستمی با فیدبک مثبت ، توابع تبدیل $G(s)$ و $H(s)$ زیر را به عنوان مثال به کار می‌بریم

$$G(s)=\frac{K(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)} \quad , \quad H(s)=1$$

بهرهٔ K مثبت فرض می‌شود.

قواعد کلی ترسیم مکان هندسی ریشه‌های بخش ۶-۲ را باید به صورت زیر اصلاح کرد.

قاعدهٔ ۲ به این صورت اصلاح می‌شود: اگر کل تعداد قطبهای حقیقی و صفرهای حقیقی سمت راست نقطهٔ آزمون واقع بر محور حقیقی زوج باشد، این نقطه روی مکان هندسی ریشه‌ها قرار دارد.

قاعدهٔ ۳ به این صورت اصلاح می‌شود:

$$\text{زاویهٔ مجانبها}=\frac{\pm k\,360^\circ}{n-m} \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

controlengineers.ir

که در آن n = تعداد قطبهای محدود $G(s)H(s)$

m = تعداد صفرهای محدود $G(s)H(s)$

قاعدهٔ ۵ به این صورت اصلاح می‌شود: زاویهٔ خروج (یا زاویهٔ ورود) مکان هندسی به یک قطب مختلط (یا صفر مختلط) را می‌توان با کم کردن جمع زاویهٔ بردارهای رسم شده از بقیهٔ صفرها و قطبها به قطب (یا صفر) مورد نظر، با علامت مناسب، از °۰ به دست آورد.

بقیهٔ قواعد رسم مکان هندسی ریشه‌ها بدون تغییر می‌ماند. اکنون این قواعد اصلاح شده را برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها به کار می‌بریم .

۱. قطبهای حلقه باز $(s=-۳\,,\, s=-۱-j\,,\, s=-۱+j)$ و صفر حلقه باز $(s=-۲)$ را در صفحهٔ مختلط مشخص کنید. با افزایش K از ۰ تا ∞ قطبهای حلقه بسته ، درست مانند سیستمی با فیدبک منفی ، از قطبهای حلقه باز شروع شده ، به صفرهای حلقه باز (محدود یا نامحدود) ختم می‌شوند .

۲. مکان هندسی روی محور حقیقی را مشخص کنید. بخشهای بین ۲- و ∞+ و بین ۳- و ∞- روی مکان هندسی ریشه‌ها هستند .

۳. مجانبهای مکان هندسی ریشه‌ها را تعیین کنید. برای این سیستم

$$\text{زاویهٔ مجانبها}=\frac{\pm k\,۳۶۰^\circ}{۳-۱}=\pm ۱۸۰^\circ$$

یعنی مجانبها روی محور حقیقی هستند

۴. نقاط شکست را تعیین کنید. معادلهٔ مشخصه به صورت زیر است

$$(s+۳)\left(s^۲+۲s+۲\right)-K(s+۲)=۰$$

پس

$$K=\frac{(s+۳)(s^۲+۲s+۲)}{(s+۲)}$$

با مشتقگیری از K نسبت به s به دست می‌آوریم

$$\frac{dK}{ds}=\frac{۲s^۳+۱۱s^۲+۲۰s+۱۰}{(s+۲)^۲}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}۲s^۳+۱۱s^۲+۲۰s+۱۰&=۲(s+۰/۸)(s^۲+۴/۷s+۶/۲۴)\\&=۲(s+۰/۸)(s+۲/۳۵+j۰/۷۷)(s+۲/۳۵-j۰/۷۷)\end{aligned}$$

نقطهٔ $s=-۰/۸$ روی مکان هندسی ریشه‌هاست. چون این نقطه بین دو صفر است (یک صفر محدود و یک صفر در بینهایت) یک نقطهٔ شکست واقعی است. نقاط $s=-۲/۳۵\pm j۰/۷۷$ شرط زاویه را ارضا نمی‌کنند، بنابراین نقطهٔ شکست نیستند .

controlengineers.ir

۵. زاویهٔ خروج مکان هندسی از قطب مختلط را به دست آورید. برای قطب مختلط واقع در $s=-1+j$ زاویهٔ خروج θ عبارت است از

$$\theta = 0^\circ - 27^\circ - 90^\circ + 45^\circ$$

یا

$$\theta = -72^\circ$$

(زاویهٔ خروج از قطب مختلط واقع در $s=-1-j1$ برابر 72° است.)

۶. نقطهٔ آزمونی در حوالی محور $j\omega$ و مبدا برگزینید و شرط زاویه را به آن اعمال کنید. به اندازهٔ کافی نقطهٔ ارضا کنندهٔ شرط زاویه به دست آورید

شکل ۶-۳۱ مکان هندسی ریشه‌ها را برای این سیستم فیدبک مثبت نشان می‌دهد. این مکان هندسی با خطوط و خمهای بریده نشان داده شده است.

توجه کنید که اگر

$$K > \left.\frac{(s+3)(s^2+2s+2)}{(s+2)}\right|_{s=0} = 3$$

یک قطب حقیقی وارد نیمهٔ راست صفحهٔ s می‌شود. پس سیستم به ازای K بزرگتر از ۳ ناپایدار است. (سیستم را باید به ازای $K>3$ با یک حلقهٔ بیرونی پایدار کرد.)

تابع تبدیل حلقه بستهٔ سیستم دارای فیدبک مثبت عبارت است از

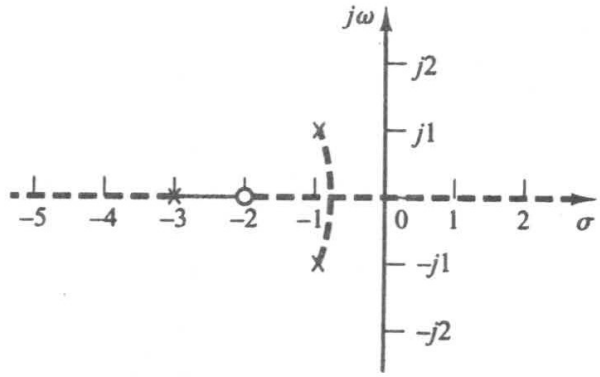
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1-G(s)H(s)} = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)-K(s+2)}$$

برای مقایسه مکان هندسی ریشه‌های این سیستم با سیستم متناظر دارای فیدبک منفی، مکان هندسی سیستم دارای فیدبک منفی و تابع تبدیل حلقه بسته زیر در شکل ۶-۳۲ نشان داده شده است.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)+K(s+2)}$$

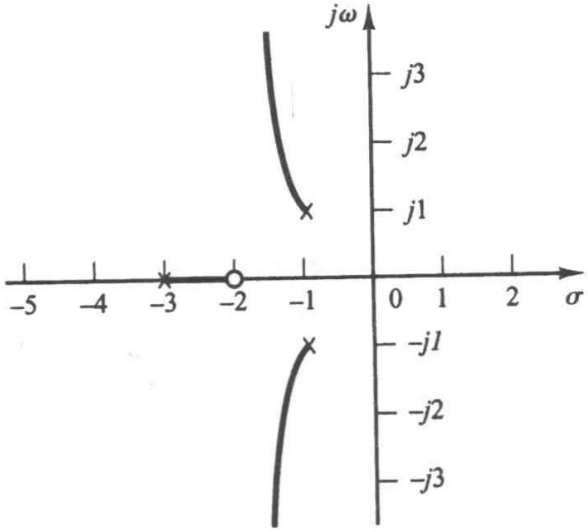
جدول ۶-۲ مکان هندسی ریشه‌های مختلفی برای سیستمهای دارای فیدبک منفی و مثبت را نشان می‌دهد. توابع تبدیل حلقه بسته عبارت‌اند از:

سیستم دارای فیدبک منفی $\quad \dfrac{C}{R} = \dfrac{G}{1+GH}$



شکل ۶-۳۱
مکان هندسی ریشه‌های سیستمی با فیدبک مثبت، دارای $H(s)=1$، و $G(s)=K(s+2)/[(s+3)(s^2+2s+2)]$.

controlengineers.ir



شکل ۶-۳۲
مکان هندسی ریشه‌های سیستمی با فیدبک منفی، دارای $H(s)=1$، و $G(s)=K(s+2)/[(s+3)(s^2+2s+2)]$.

سیستم دارای فیدبک مثبت

$$\frac{C}{R}=\frac{G}{1-GH}$$

که GH تابع تبدیل حلقه باز است. در جدول ۶-۲ مکان هندسی متناظر با سیستمهای فیدبک منفی با خطوط توپر و مکان هندسی مربوط به سیستمهای فیدبک مثبت با خطوط بریده مشخص شده است.

۶-۵ طراحی سیستم کنترل با رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها

ملاحظات اولیهٔ طراحی . می‌دانیم که در ساختن یک سیستم کنترل تغییر مناسب رفتار دینامیکی وسیله راه ساده‌ای برای دستیابی به مشخصات مطلوب است . ولی چنین کاری در بسیاری از موارد عملی ممکن نیست ، زیرا ممکن است وسیله بسته (ثابت) باشد یا تغییر آن صلاح نباشد. بنابراین باید پارامترهای خارج وسیلهٔ بسته را تغییر داد. در این کتاب فرض می‌کنیم وسیله غیرقابل تغییر است.

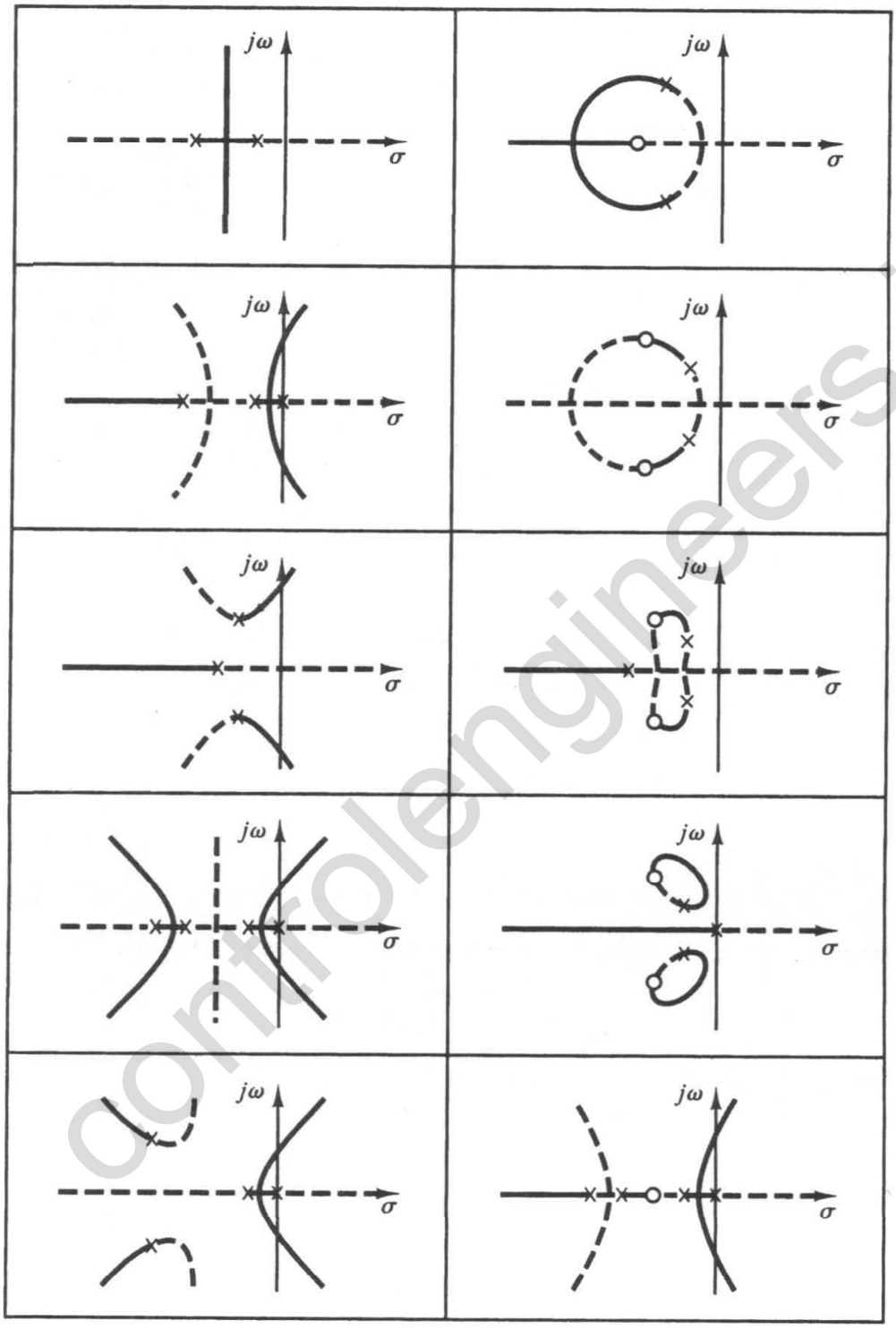
در عمل ممکن است نمودار مکان هندسی ریشه‌ها نشان دهد که با تنظیم بهره (یا یک پارامتر قابل تغییر دیگر) نمی‌توان به عملکرد مطلوب دست یافت. حتی در بعضی موارد سیستم به ازای هیچ بهره‌ای (یا هیچ مقداری از پارامتر قابل تنظیم) پایدار نیست. بنابراین باید برای دستیابی به خواسته‌ها مکان هندسی ریشه‌ها را تغییر شکل داد.

بنابراین مسئلهٔ طراحی به مسئلهٔ بهبود عملکرد سیستم با قرار دادن جبرانساز تبدیل می‌شود . جبرانسازی سیستم کنترل نیز به طراحی فیلتری منتهی می‌شود که مشخصه‌اش باید مشخصات نامطلوب و تغییرناپذیر وسیله را جبران کند.

طراحی به روش مکان هندسی ریشه‌ها. اساس طراحی به روش مکان هندسی ریشه‌ها، افزودن قطب و صفر به تابع تبدیل حلقه باز است، به نحوی که مکان هندسی ریشه‌ها تغییر کرده، از محل قطبهای حلقه بستهٔ مطلوب بگذرد. ویژگی طراحی به روش مکان هندسی ریشه‌ها مبتنی بودن بر این فرض است که سیستم حلقه بسته یک

controlengineers.ir

جدول ۶-۲ مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستمهای دارای فیدبک منفی و فیدبک مثبت.



خطوط پر به سیستمهای دارای فیدبک منفی مربوط است؛ برای سیستمهای دارای فیدبک مثبت از خطوط بریده استفاده شده است.

controlengineers.ir

زوج قطب حلقه بستهٔ غالب دارد، به این معنی که صفرها و قطبهای دیگر بر ویژگی‌های پاسخ تأثیر نمی‌گذارند.

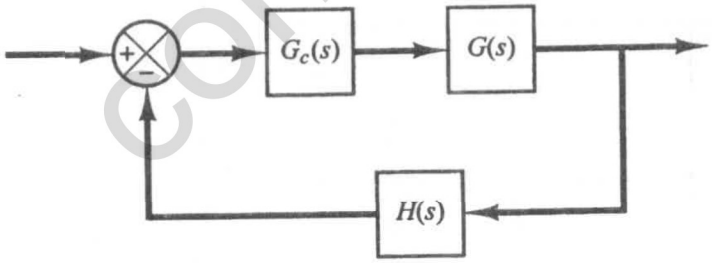
در طراحی سیستم کنترل اگر چیزی بیش از تنظیم بهره (یا یک پارامتر قابل تنظیم دیگر) لازم باشد، باید مکان هندسی ریشه‌ها را با گذاشتن جبرانساز مناسب تغییر داد. با درک کامل اثر افزودن قطب یا صفر بر مکان هندسی ریشه‌ها می‌توان محل قطب(ها) و صفر(های) جبرانساز لازم برای ایجاد تغییر شکل مطلوب را تعیین کرد. لُبّ روش طراحی با مکان هندسی ریشه‌ها این است که مکان هندسی را با استفاده از جبرانساز طوری تغییر دهیم که یک زوج قطب غالب حلقه بسته در محلهای مطلوب ایجاد شود.

جبرانسازی سری و جبرانسازی موازی (یا فیدبکی). شکلهای ۶-۳۳ (الف) و (ب) روشهای متداول جبرانسازی سیستمهای کنترل فیدبک‌دار را نشان می‌دهند. شکل ۶-۳۳ (الف) آرایشی را نشان می‌دهد که جبرانساز $G_c(s)$ با دستگاه تحت کنترل سری می‌شود. این آرایش را جبرانسازی سری می‌نامند.

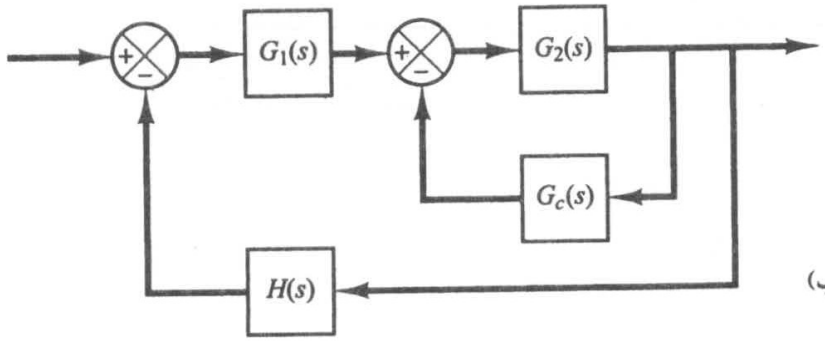
راه جایگزین جبرانسازی سری این است که سیگنال یا سیگنالهایی از بعضی عناصر فیدبک شود و در مسیر فیدبک، به صورت نشان داده شده در شکل ۶-۳۳ (ب)، یک جبرانساز قرار گیرد. این طرح را جبرانسازی موازی یا جبرانسازی فیدبکی می‌نامند.

در جبرانسازی سیستمهای کنترل مسئله معمولاً به طراحی مناسب یک جبرانساز سری یا موازی منجر می‌شود. گزینش بین جبرانسازی سری یا موازی براساس طبیعت سیگنالهای سیستم، سطح توان در نقاط مختلف، اجزاء قابل دسترس، تجربهٔ طراح، ملاحظات اقتصادی و غیره صورت می‌گیرد.

به طور کلی جبرانسازی سری ساده‌تر از جبرانسازی موازی است؛ ولی این جبرانسازی معمولاً به تقویت کننده‌های اضافی برای افزایش بهره و/یا ایجاد جداسازی نیاز دارد. (برای پرهیز از مصرف توان اضافی جبرانساز سری در کم انرژی‌ترین نقطهٔ مسیر پیشخورد قرار داده می‌شود.) در حالت کلی تعداد اجزاء لازم برای جبرانسازی موازی کمتر از تعداد اجزاء لازم برای جبرانسازی سری است (به شرطی که سیگنال مناسب موجود باشد) ، زیرا انتقال انرژی از نقطه‌ای یا انرژی بالاتر به نقطه‌ای با انرژی پایین‌تر صورت می‌گیرد. (یعنی تقویت کنندهٔ اضافی لازم نیست.)



(الف)



(ب)

شکل ۶-۳۳

(الف) جبرانسازی سری؛

(ب) جبرانسازی فیدبکی یا موازی.

controlengineers.ir

در بخش‌های ۶-۶ تا ۶-۹ ابتدا جبرانسازی سری را بررسی می‌کنیم. سپس مبحث جبرانسازی موازی را در قالب طراحی یک سیستم کنترل با فیدبک سرعت معرفی خواهیم کرد.

جبرانسازهای متداول. اگر برای دستیابی به مشخصه‌های عملکرد جبرانساز لازم باشد، طراح باید یک وسیلهٔ فیزیکی بسازد که تابع تبدیل مشخص شده برای جبرانساز را داشته باشد.
برای این منظور وسایل فیزیکی متعددی به کار می‌رود. در کتابها و مجلات علمی ایده‌های بدیع و مفیدی راجع به ساختن جبرانسازها یافت می‌شود.

اگر یک ورودی سینوسی به یک شبکه اعمال شود و خروجی حالت ماندگار (که آن هم سینوسی است) نسبت به ورودی پیشفاز باشد، آن شبکه را شبکهٔ پیشفاز می‌نامند. (زاویه پیشفازی تابعی از فرکانس ورودی است.) اگر سینوسی حالت ماندگار خروجی نسبت به ورودی پسفاز باشد، شبکه را پسفاز می‌نامند. در شبکه پسفاز-پیشفاز هم پسفازی و هم پیشفازی رخ می‌دهد، ولی در ناحیه‌های فرکانسی مختلف؛ پسفازی در ناحیه فرکانس پایین و پیشفازی در ناحیهٔ فرکانس بالا. جبرانسازی که مشخصهٔ یک شبکهٔ پیشفاز را داشته باشد، جبرانساز پیشفاز خوانده می‌شود؛ به همین ترتیب جبرانساز پسفاز و پسفاز-پیشفاز نیز داریم.

از میان انواع گوناگون جبرانسازها، پرکاربردترین آنها جبرانسازهای پیشفاز، جبرانسازهای پسفاز، جبرانسازهای پسفاز-پیشفاز ، و جبرانسازهای فیدبک سرعت (تاکومتری) هستند. در این فصل بحث خود را عمدتاً به این جبرانسازها محدود می‌کنیم. جبرانسازهای پیشفاز، و پسفاز – پیشفاز می‌توانند وسایل الکترونیکی (مثلاً مدارهای آپ‌امپی) یا شبکه‌های RC (الکتریکی، مکانیکی، نیوماتیکی، هیدرولیکی یا ترکیب از آنها) و تقویت کننده باشند.

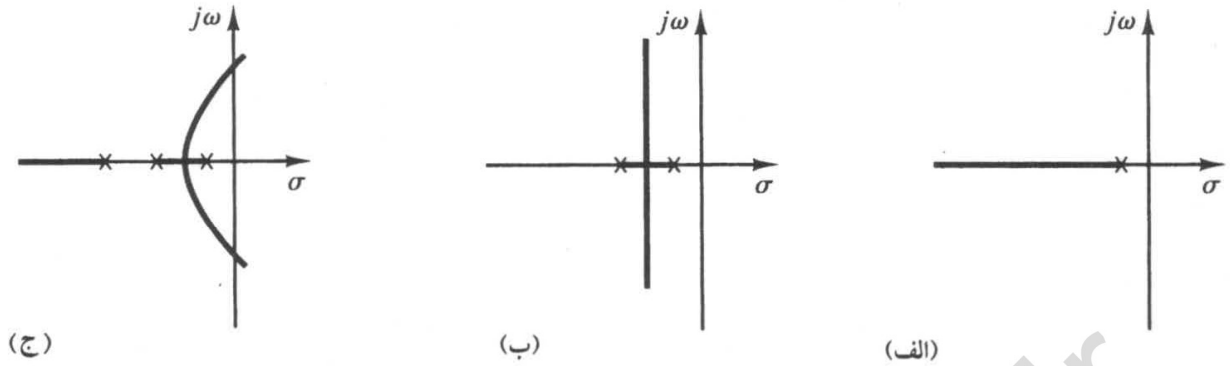
جبرانسازهای متداول در سیستم‌های کنترل ، جبرانسازهای پیشفاز ، پسفاز ، و پسفاز-پیشفاز هستند. کنترل‌کننده‌های PID که در سیستم‌های کنترل صنعتی بسیار متداول هستند در فصل ۸ مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

باید متذکر شویم که طراحی سیستم کنترل به روش مکان هندسی یا روش پاسخ فرکانسی جواب یکتایی ندارد ، زیرا بهترین جواب یا جواب بهینه را نمی‌توان در حالتی که مشخصات حوزهٔ زمان یا مشخصات حوزهٔ فرکانس داده شده است ، تعیین کرد.

اثر افزودن قطب. افزودن یک قطب به تابع تبدیل حلقه باز باعث می‌شود مکان هندسی ریشه‌ها به سمت راست کشیده شود، و در جهت کم شدن پایداری نسبی سیستم و کند کردن زمان نشست پاسخ عمل می‌کند. (به یاد داشته باشید که افزودن عمل کنترل انتگرالی یک قطب در مبدأ ایجاد می‌کند، و به سیستمی با پایداری کمتر منجر می‌شود.) شکل ۶-۳۴ اثرهای افزودن یک قطب به یک سیستم تک‌قطبی و افزودن دو قطب به یک سیستم تک قطبی را نشان می‌دهد.

اثر افزودن صفر. افزودن یک صفر به تابع تبدیل حلقه باز مکان هندسی ریشه‌ها را به سمت چپ می‌کشد، سیستم را پایدارتر و سرعت نشست پاسخ را بیشتر می‌کند . (از لحاظ فیزیکی افزودن صفر به تابع تبدیل مسیر پیشخورد معادل کاربرد کنترل مشتقی است . این کار یک حالت پیش‌بینی به سیستم می‌دهد و به پاسخ گذرا

controlengineers.ir

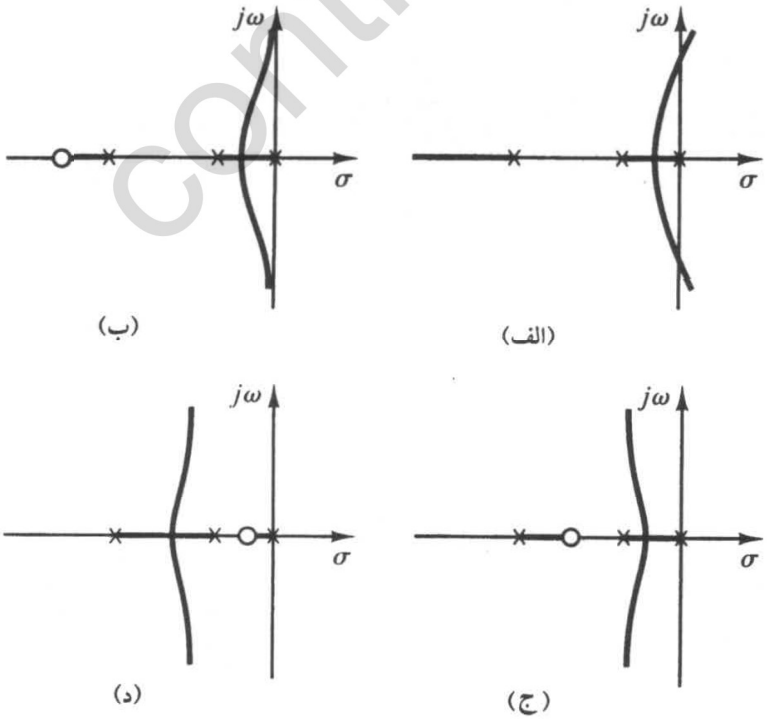


شکل ۶-۳۴ (الف) مکان هندسی ریشهٔ یک سیستم تک قطبی؛ (ب) مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم دو قطبی؛ (ج) مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم سه قطبی.

سرعت می‌بخشد.) شکل ۶-۳۵ (الف) مکان هندسی سیستمی را نشان می‌دهد که به ازای بهرهٔ کوچک پایدار است ، ولی به ازای بهرهٔ بزرگ ناپایدار می‌شود. شکلهای ۶-۳۵ (ب)، (ج) ، و (د) مکان هندسی را پس از افزودن یک صفر به تابع تبدیل حلقه باز نشان می‌دهد . توجه کنید که افزودن یک صفر به سیستم شکل ۶-۳۵ (الف) آن را به ازای تمام مقادیر بهره پایدار کرده است.

۶-۶ جبرانسازی پیشفاز

در بخش ۶-۵ جبرانسازی سیستم‌های کنترل را معرفی کرده ، مطالب مقدماتی مربوط به رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها برای طراحی سیستم کنترل و جبرانسازی را بیان کردیم. در این بخش طراحی سیستم کنترل به روش جبرانسازی پیشفاز را معرفی می‌کنیم . در این طراحی یک جبرانساز با تابع تبدیل تغییر ناپذیر $G(s)$ سری



شکل ۶-۳۵
(الف) مکان هندسی ریشه‌های یک سیستم سه‌قطبی؛ (ب)، (ج) و (د) مکان هندسی ریشه‌ها که اثر افزودن یک صفر به سیستم سه قطبی را نشان می‌دهد.

controlengineers.ir

می‌کنیم تا سیستم رفتار مطلوب را پیدا کند. پس مسئلهٔ اصلی به انتخاب سنجیدهٔ قطب (ها) و صفر(ها)ی جبرانساز $G_c(s)$ ، به منظور قرار گرفتن قطب‌های حلقه بستهٔ غالب در محل مطلوب صفحهٔ s و دستیابی به مشخصات مورد نظر منجر می‌شود.

جبرانساز پیشفاز و جبرانساز پسفاز . برای ساخت جبرانساز پیشفاز یا پسفاز روشهای مختلفی وجود دارد. شبکه‌های الکترونیکی آپ امپی، شبکه‌های الکتریکی RC ، و سیستمهای مکانیکی فنر – ضربه‌گیر نمونه‌هایی از این روشها می‌باشند.

شکل ۶-۳۶ یک مدار الکترونیکی آپ‌امپی را نشان می‌دهد. تابع تبدیل این مدار را در فصل ۳ به صورت زیر یافتیم [معادلهٔ (۳-۳۶) را ببینید] :

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{R_2R_4}{R_1R_3}\,\frac{R_1C_1s+1}{R_2C_2s+1}=\frac{R_4C_1}{R_3C_2}\,\frac{s+\dfrac{1}{R_1C_1}}{s+\dfrac{1}{R_2C_2}}$$

$$=K_c\,\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}=K_c\frac{s+\dfrac{1}{T}}{s+\dfrac{1}{\alpha T}} \qquad (۱۸-۶)$$

که در آن

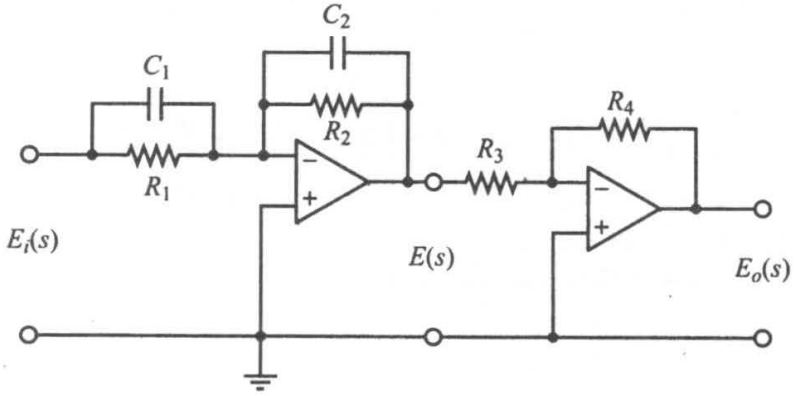
$$T=R_1C_1\ ,\quad \alpha T=R_2C_2\ ,\quad K_c=\frac{R_4C_1}{R_3C_2}$$

توجه کنید که

$$K_c\alpha=\frac{R_4C_1}{R_3C_2}\,\frac{R_2C_2}{R_1C_1}=\frac{R_2R_4}{R_1R_3}\quad ,\quad \alpha=\frac{R_2C_2}{R_1C_1}$$

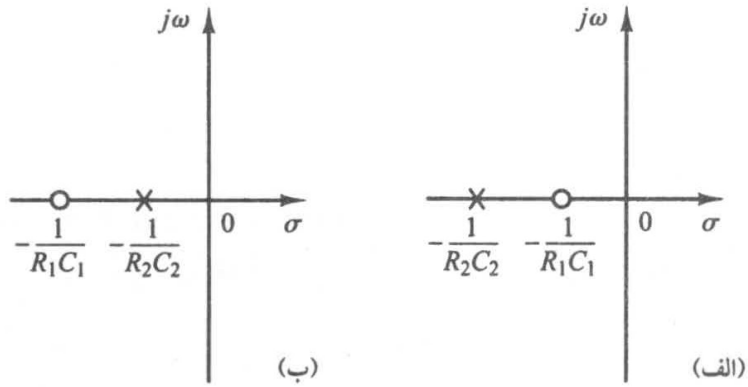
بهرهٔ dc این شبکه عبارت است از $K_c\alpha=R_2R_4/(R_1R_3)$.

معادلهٔ (۶-۱۸) نشان می‌دهد که این شبکه به ازای $R_1C_1>R_2C_2$ یا $\alpha<1$ پیشفاز ، و به ازای $\alpha>1$ ، یعنی $R_1C_1<R_2C_2$ پسفاز است . آرایش صفر – قطب این شبکه به ازای $R_1C_1>R_2C_2$ و $R_1C_1<R_2C_2$ به ترتیب در شکلهای ۶-۳۷ (الف) و (ب) نشان داده شده است.



شکل ۶-۳۶
مدار الکترونیکی که به ازای $R_1C_1>R_2C_2$ پیشفاز و به ازای $R_1C_1<R_2C_2$ پسفاز است.

controlengineers.ir



شکل ۶-۳۷
آرایش صفر – قطب
(الف) شبکهٔ پیشفاز ، و
(ب) شبکهٔ پسفاز .

روش جبرانسازی پیشفاز براساس رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها. طراحی براساس رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها وقتی قدرت خود را خوب نشان می‌دهد که مشخصات براساس کمیتهای حوزهٔ زمان، مثل نسبت میرایی و فرکانس طبیعی نامیرای قطبهای غالب حلقه بسته، ماکزیمم فراجهش، زمان صعود ، و زمان نشست بیان شده باشد.

مسئله طراحی خاصی را در نظر بگیرید که در آن سیستم اصلی یا به ازای تمام مقادیر بهرهٔ ناپایدار است، یا پایدار است ، ولی مشخصات پاسخ گذرای نامطلوبی دارد. در چنین موردی باید مکان هندسی در حوالی محور $j\omega$ و مبدأ تغییر کند تا قطبهای حلقه بستهٔغالب در محل مطلوب صفحه s قرار گیرند. به این منظور می‌توان یک جبرانساز پیشفاز مناسب را با تابع تبدیل مسیر پیشرو سری کرد.

روش طراحی جبرانساز پیشفاز برای سیستم شکل ۶-۳۸ ، براساس رهیافت مکان هندسی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

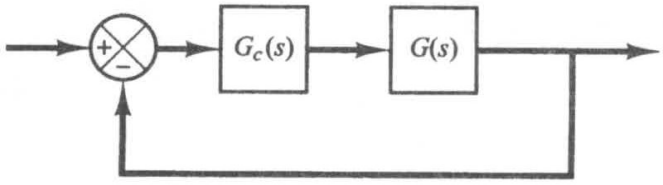
۱. با توجه به مشخصات عملکرد، محل مطلوب برای قطبهای حلقه بستهٔ غالب را تعیین کنید.

۲. با رسم مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران نشده (سیستم اصلی) تعیین کنید که آیا با تنظیم بهره می‌توان قطبهای حلقه بسته را به مکان مطلوب برد یا نه. در صورت منفی بودن جواب کمبود زاویهٔ ϕ را محاسبه کنید. این زاویه‌ای است که جبران کنندهٔ پیشفاز باید اضافه کند تا مکان هندسی جدید از محل قطبهای حلقه بستهٔ مطلوب بگذرد.

۳. جبرانساز پیشفاز را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$G_c(s) = K_c\,\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \qquad (0<\alpha<1)$$

که α و T باید با توجه به کمبود فاز تعیین شود. K_c با توجه به خواسته‌های مربوط به بهرهٔ حلقه باز تعیین می‌شوند .



شکل ۶-۳۸
سیستم کنترل.

controlengineers.ir

۴. اگر ثابتهای خطای ایستا مشخص نشده‌اند، محل قطب و صفر جبرانساز پیشفاز را به نحوی تعیین کنید که این جبرانساز کمبود فاز ϕ را تامین کند. اگر قید دیگری بر سیستم گذاشته نشده، α را تا حد ممکن بزرگ بگیرید. معمولاً هر چه α بزرگتر باشد K_v بزرگتری حاصل می‌شود که امری مطلوب است. توجه کنید که

$$K_v = \lim_{s\to 0} s G_c(s)G(s) = K_c \alpha \lim_{s\to 0} s G_c(s)$$

۵. بهرهٔ حلقه باز سیستم جبران شده K_c را با توجه به شرط اندازه تعیین کنید.

پس از طراحی جبرانساز، سیستم را بررسی کنید تا ببینید تمام مشخصه‌های عملکرد ارضا می‌شوند یا نه. در صورت برآورده نشدن خواسته‌ها فرایند طراحی را تکرار کنید و بکوشید با تنظیم قطب و صفر جبرانساز خواسته‌ها برآورده شوند. اگر دستیابی به ثابت خطای ایستای بزرگی مورد نظر باشد، یک شبکهٔ پسفاز یا جبرانساز سری کنید یا به جای جبرانساز پیشفاز از جبرانساز پسفاز – پیشفاز استفاده کنید.

توجه کنید که اگر قطبهای حلقه بستهٔ انتخاب شده قطب غالب نباشند، باید محل آنها را به نحوی عوض کرد که غالب باشند. (قطبهای حلقه بسته غیرغالب، پاسخ ناشی از قطبهای حلقه بستهٔ غالب تنها را تغییر می‌دهند. میزان تغییر به محل بقیهٔ قطبهای حلقه بسته بستگی دارد.) صفرهای حلقه بسته نیز در صورت قرار داشتن در نزدیکی مبدأ بر پاسخ اثر می‌گذارد.

مثال ۶-۶

سیستم شکل ۶-۳۹ (الف) را در نظر بگیرید. تابع تبدیل پیشخورد عبارت است از

$$G(s) = \frac{۱۰}{s(s+۱)}$$

شکل ۶-۳۹ (ب) نمودار مکان هندسی ریشه‌های این سیتسم را نشان می‌دهد. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{۱۰}{s^۲+s+۱۰} = \frac{۱۰}{(s+۰/۵+j۳/۱۲۲۵)(s+۰/۵-j۳/۱۲۲۵)}$$

قطبهای حلقه بسته عبارت‌اند از

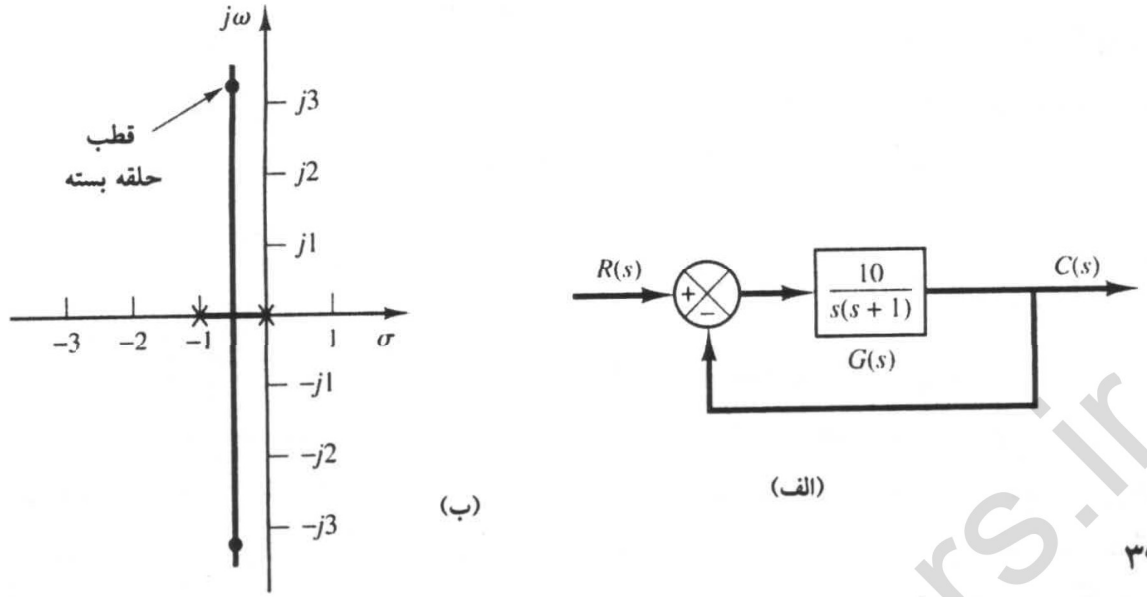
$$s = -۰/۵ \pm j۳/۱۲۲۵$$

نسبت میرایی قطبهای حلقه بسته $\zeta = (۱/۲)/\sqrt{۱۰} = ۰/۱۵۸۱$ است . فرکانس طبیعی نامیرای قطبهای حلقه بسته $\omega_n = \sqrt{۱۰} = ۳/۱۶۲۳\,\text{rad/s}$ است. چون نسبت میرایی کوچک است ، پاسخ پلهٔ این سیستم فراجهش بزرگی دارد.

می‌خواهیم مطابق شکل ۶-۴۰ (الف) یک جبرانساز پیشفاز طرح کنیم تا نسبت میرایی قطبهای حلقه بسته $\zeta = ۰/۵$ و فرکانس طبیعی نامیرا $\omega_n = ۳\,\text{rad/s}$ شود .

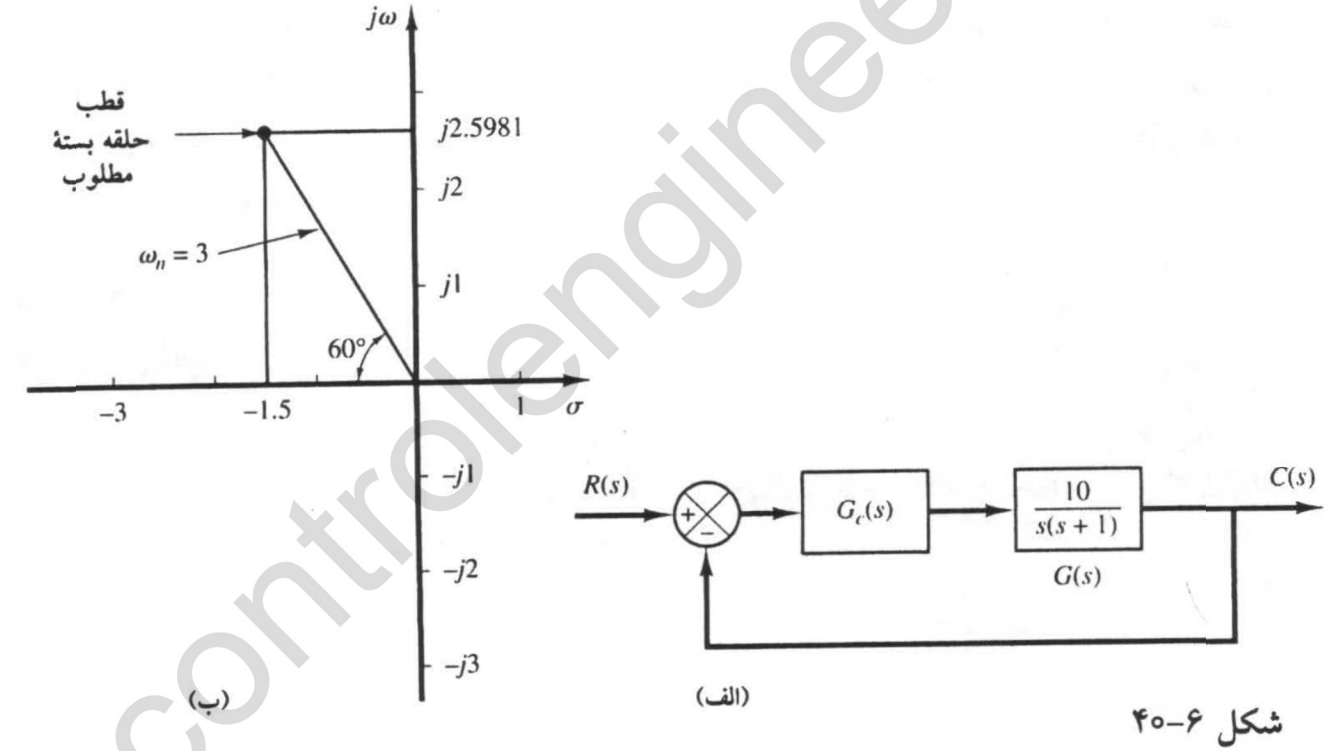
محل مطلوب قطبهای حلقه بسته را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد

controlengineers.ir



شکل ۶-۳۹

(الف) سیستم کنترل؛ (ب) نمودار مکان هندسی ریشه‌ها.



شکل ۶-۴۰

(الف) سیستم جبران شده ؛ (ب) محل قطب‌های حلقه بستهٔ مطلوب .

$$s^۲ + ۲\zeta\omega_n s + \omega_n^۲ = s^۲ + ۳s + ۹ = (s + ۱/۵ + j۲/۵۹۸۱)(s + ۱/۵ - j۲/۵۹۸۱)$$

که به دست می‌دهد

$$s = -۱/۵ \pm j۲/۵۹۸۱$$

[شکل ۶-۴۰ (ب) را ببینید.] در بعضی موارد پس از یافتن مکان هندسی ریشه‌های سیستم اصلی معلوم می‌شود با تنظیم سادهٔ بهره می‌توان قطبهای حلقه بستهٔ غالب را به مکان مطلوب برد. ولی در مثال فعلی چنین نیست. بنابراین باید در مسیر پیشخورد یک جبرانساز پیشفاز قرار دهیم.

controlengineers.ir

روش کلی تعیین جبرانساز پیشفاز به این صورت است: ابتدا جمع زاویه‌های محل مطلوب یک قطب حلقه بسته را از قطبها و صفرهای حلقه باز سیستم اصلی به دست می‌آوریم و زاویهٔ ϕ لازم برای $\pm 180^\circ(2k+1)$ شدن این جمع را تعیین می‌کنیم. جبرانساز پیشفاز باید این زاویه را اضافه کند. (اگر زاویهٔ ϕ بزرگ باشد، احتمالاً بیش از یک شبکهٔ پیشفاز لازم است.)

فرض کنید تابع تبدیل جبرانساز پیشفاز $G_c(s)$ به صورت زیر است

$$G_c(s) = K_c\,\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} \qquad (0<\alpha<1)$$

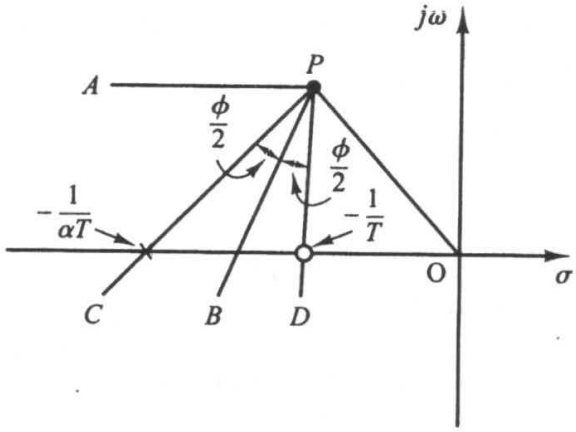
زاویه از قطب واقع در مبدا به محل قطب حلقه بستهٔ مطلوب واقع در $s=-1.5+j2.5981$ برابر 120° است. زاویه از قطب واقع در $s=-1$ تا قطب حلقه بستهٔ مطلوب نیز 100.894° است. بنابراین کمبود زاویه عبارت است از

$$\text{کمبود زاویه} = 180^\circ - 120^\circ - 100.894^\circ = -40.894^\circ$$

زاویهٔ 40.894° باید توسط جبرانساز پیشفاز تامین شود.

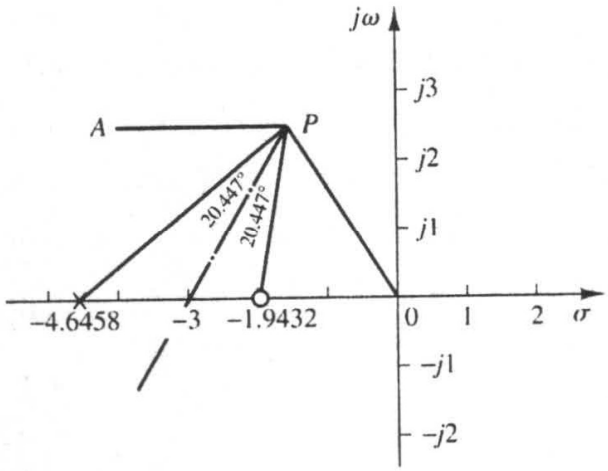
توجه کنید که این مسئله جواب یکتا ندارد. تعداد جوابها بینهایت است. در ادامه دو جواب ممکن برای این مسئله را مطرح می‌کنیم.

روش ۱. راه‌های متعددی برای تعیین محل صفر و قطب جبرانساز پیشفاز وجود دارد. در ادامه روشی برای یافتن بزرگترین مقدار α معرفی می‌کنیم. (توجه کنید که هر چه α بزرگتر باشد، K_v بزرگتر می‌شود. در اکثر موارد K_v بزرگتر با عملکرد بهتر سیستم متناظر است.) ابتدا خطی افقی رسم می‌کنیم که از نقطهٔ P، محل یکی از قطبهای حلقه بستهٔ مطلوب عبور کند. این خط در شکل ۶-۴۱ با PA مشخص شده است. خطی نیز رسم می‌کنیم که از P و مبدأ بگذرد. نیمساز زاویهٔ بین خطوط PA و PO را به صورت نشان داده شده در شکل ۶-۴۱ رسم می‌کنیم. دو خط PC و PD را در دو طرف نیمساز PB به نحوی رسم می‌کنیم که با نیمساز زاویه‌هایی برابر $\pm\phi/2$ بسازند. محل برخورد PC و PD با بخش منفی محور حقیقی محل قطب و صفر جبرانساز پیشفاز را به دست می‌دهد. جبرانساز طراحی شده به این روش باعث می‌شود مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده از نقطهٔ P بگذرد. بهرهٔ حلقه باز با توجه به شرط اندازه تعیین می‌شود.



شکل ۶-۴۱ تعیین قطب و صفر شبکهٔ پیشفاز.

controlengineers.ir



شکل ۶-۴۲

تعیین محل قطب و صفر جبرانساز پیشفاز .

در سیستم فعلی زاویهٔ $G(s)$ در قطب حلقه بستهٔ مطلوب عبارت است از

$$\left|\frac{۱۰}{s(s+۱)}\right|_{s=-۱/۵+j۲/۵۹۸۱} = -۲۲۰/۸۹۴^\circ$$

پس برای این که مکان هندسی ریشه‌ها از این قطب حلقه بسته بگذرد، جبرانساز پیشفاز باید در این نقطه زاویهٔ $\phi = ۴۰/۸۹۴^\circ$ را ایجاد کند. با دنبال کردن روش بیان شده در بالا می‌توان قطب و صفر جبرانساز پیشفاز را تعیین کرد.

با توجه به شکل ۶-۴۲ ، با رسم نیمساز زاویهٔ APO و رسم خطوطی با زاویهٔ ۴۰/۸۹۴°/۲ در دو طرف آن، محل صفر و قطب به صورت زیر تعیین می‌شود

قطب در $s = -۴/۶۴۵۸$ صفر در $s = -۱/۹۴۳۲$

پس $G_c(s)$ را به صورت زیر می‌توان بیان کرد

$$G_c(s) = K_c \frac{s+\frac{۱}{T}}{s+\frac{۱}{\alpha T}} = K_c \frac{s+۱/۹۴۳۲}{s+۴/۶۴۵۸}$$

(برای این جبرانساز داریم $\alpha = ۱/۹۴۳۲ / ۴/۶۴۵۸ = ۰/۴۱۸$.)

مقدار K_c را می‌توان با استفاده از شرط اندازه به دست آورد.

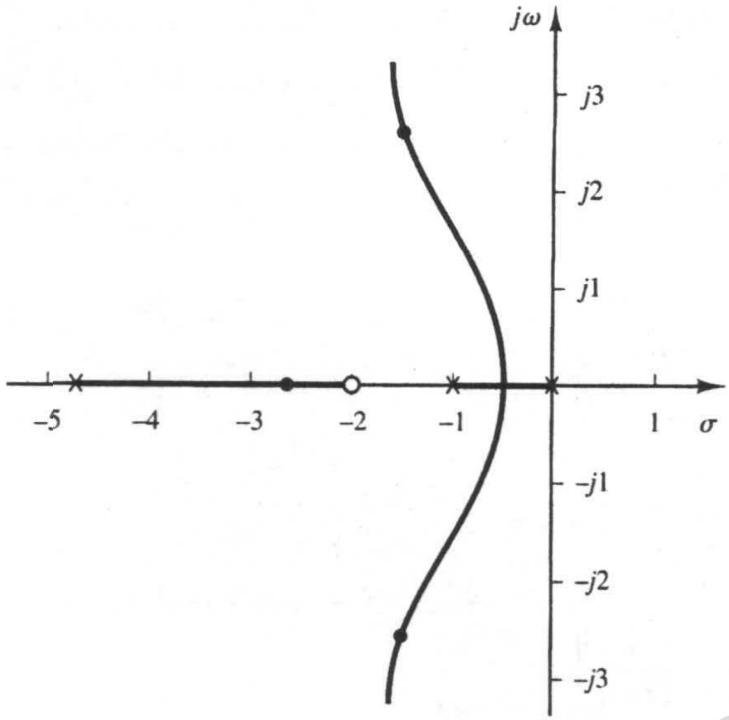
$$\left| K_c \frac{s+۱/۹۴۳۲}{s+۴/۶۴۵۸} \frac{۱۰}{s(s+۱)} \right|_{s=-۱/۵+j۲/۵۹۸۱} = ۱$$

یا

$$K_c = \left| \frac{(s+۴/۶۴۵۸)\, s(s+۱)}{۱۰(s+۱/۹۴۳۲)} \right|_{s=-۱/۵+j۲/۵۹۸۱} = ۱/۲۲۸۷$$

بنابراین جبرانساز پیشفاز طراحی شده عبارت است از

controlengineers.ir



شکل ۶-۴۳
مکان هندسی ریشه‌های سیستم طراحی شده.

$$G_c(s) = ۱/۲۲۸۷\,\frac{s+۱/۹۴۳۲}{s+۴/۶۴۵۸}$$

و تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر در می‌آید

$$G_c(s)G(s) = ۱/۲۲۸۷\left(\frac{s+۱/۹۴۳۲}{s+۴/۶۴۵۸}\right)\frac{۱۰}{s(s+۱)}$$

تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{۱۲/۲۸۷(s+۱/۹۴۳۲)}{s(s+۱)(s+۴/۶۴۵۸)+۱۲/۲۸۷(s+۱/۹۴۳۲)}$$
$$= \frac{۱۲/۲۸۷s+۲۳/۸۷۶}{s^۳+۵/۶۴۶s^۲+۱۶/۹۳۳s+۲۳/۸۷۶}$$

شکل ۶-۴۳ مکان هندسی ریشه‌های سیستم طراحی شده را نشان می‌دهد.

بد نیست ثابت خطای ایستای سرعت K_v را برای سیستم طراحی شده به دست آوریم.

$$K_v = \lim_{s\to ۰} sG_c(s)G(s)$$
$$= \lim_{s\to ۰} s\left[۱/۲۲۸۷\left(\frac{s+۱/۹۴۳۲}{s+۴/۶۴۵۸}\right)\frac{۱۰}{s(s+۱)}\right]$$
$$= ۵/۱۳۹$$

توجه کنید که سومین قطب حلقه بستهٔ سیستم طراحی شده را می‌توان با تجزیهٔ معادلهٔ مشخصه، با توجه به قطبهای معلوم، به صورت زیر به دست آورد

$$s^۳+۵/۶۴۶s^۲+۱۶/۹۳۳s+۲۳/۸۷۶ = (s+۱/۵+j۲/۵۹۸۱)(s+۱/۵-j۲/۵۹۸۱)(s+۲/۶۵)$$

controlengineers.ir

با استفاده از روش جبرانسازی بیان شده در بالا می‌توان قطبهای حلقه بستهٔ غالب را در نقاط مطلوب صفحهٔ مختلط قرار داد. قطب سوم واقع در $s=-۲/۶۵$ به صفر افزوده شده در $-۱/۹۴۳۲$ نزدیک است . در نتیجه این قطب بر پاسخ گذرا اثر زیادی نمی‌گذارد. چون هیچ قیدی برای قطب غیرغالب تعیین نشده است ، و هیچ مشخصه‌ای ناظر بر مقدار ضریب خطای ایستای سرعت داده نشده است ، طرح حاصل را رضایت‌بخش می‌یابیم.

روش ۲ . اگر صفر جبرانساز پیشفاز را در $s=-۱$ قرار دهیم تا قطب واقع در $s=-۱$ دستگاه را حذف کند ، قطب جبرانساز باید در $s=-۳$ قرار گیرد . (شکل ۶-۴۴ را ببینید.) بنابراین جبرانساز پیشفاز به صورت زیر در می‌آید

$$G_c(s)=K_c\frac{s+۱}{s+۳}$$

برای تعیین K_c از شرط اندازه استفاده می‌کنیم

$$\left|K_c\frac{s+۱}{s+۳}\frac{۱۰}{s(s+۱)}\right|_{s=-۱/۵+j۲/۵۹۸۱}=۱$$

یا

$$K_c=\left|\frac{s(s+۳)}{۱۰}\right|_{s=-۱/۵+j۲/۵۹۸۱}=۰/۹$$

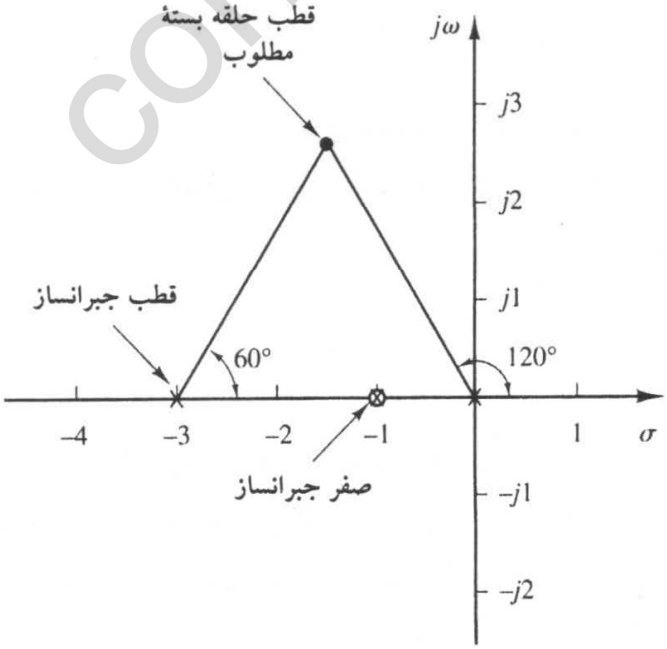
بنابراین

$$G_c(s)=۰/۹\frac{s+۱}{s+۳}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر است

$$G_c(s)G(s)=۰/۹\,\frac{s+۱}{s+۳}\,\frac{۱۰}{s(s+۱)}=\frac{۹}{s(s+۳)}$$

که تابع تبدیل حلقه بستهٔ زیر را به دست می‌دهد



شکل ۶-۴۴

قطب و صفر جبرانساز .

controlengineers.ir

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{۹}{s^{۲}+۳s+۹}$$

توجه کنید که در این حالت صفر جبرانساز پیشفاز یک قطب دستگاه را حذف می‌کند ، و به همین خاطر یک سیستم مرتبه ۲ به دست می‌آید ، در حالی که روش طراحی اول یک سیستم مرتبه سوم به دست داد.

ثابت خطای ایستای سرعت در حالت فعلی به صورت زیر تعیین می‌شود

$$K_v=\lim_{s\to ۰} sG_c(s)G(s)=\lim_{s\to ۰} s\left[\frac{۹}{s(s+۳)}\right]=۳$$

توجه کنید که سیستم طراحی شده به روش اول مقدار بزرگتری برای ثابت خطای ایستای سرعت به دست می‌دهد . بنابراین سیستم طراحی شده به روش اول نسبت به سیستم طراحی شده به روش دوم ، خطای حالت ماندگار کوچکتری در دنبال کردن ورودی شیب دارد.

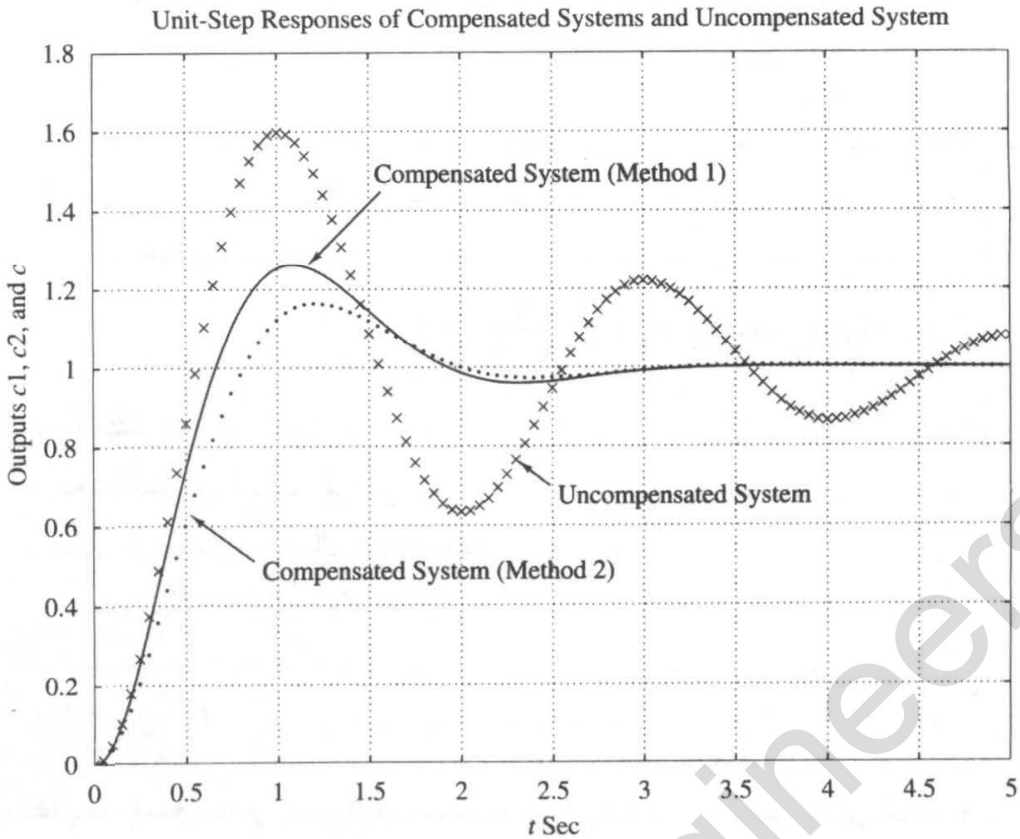
مقدار K_v به ازای ترکیب‌های مختلف صفر و قطب جبرانسازی که کمبود زاویهٔ ۴۰٫۸۹۴° را ایجاد می‌کنند، تفاوت دارد. هر چند می‌توان با بررسی این ترکیب‌های مختلف مقدار K_v را تغییر داد ، ولی اگر مقدار بزرگی برای K_v مورد نظر باشد ، باید به جای جبرانساز پیشفاز از جبرانساز پسفاز-پیشفاز استفاده کرد.

مقایسهٔ پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم جبران شده و سیستم جبران نشده. در زیر پاسخ پله و پاسخ شیب سه سیستم را مقایسه می‌کنیم : سیستم جبران نشدهٔ اصلی ، سیستم طراحی شده به روش ۱ ، و سیستم طراحی شده به روش ۲ . برنامهٔ MATLAB به کار رفته برای رسم منحنی‌های پاسخ پله برنامهٔ ۶-۹ است . در این

MATLAB Program 6–9

```
% ***** Unit-Step Response of Compensated and Uncompensated Systems *****
num1 = [12.287  23.876];
den1 = [1  5.646  16.933  23.876];
num2 = [9];
den2 = [1  3  9];
num = [10];
den = [1  1  10];
t = 0:0.05:5;
c1 = step(num1,den1,t);
c2 = step(num2,den2,t);
c = step(num,den,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.',t,c,'x')
grid
title('Unit-Step Responses of Compensated Systems and Uncompensated System')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs c1, c2, and c')
text(1.51,1.48,'Compensated System (Method 1)')
text(0.9,0.48,'Compensated System (Method 2)')
text(2.51,0.67,'Uncompensated System')
```

controlengineers.ir



شکل ۶-۴۵
منحنی‌های پاسخ پلهٔ سیستم جبران نشدهٔ اصلی و سیستمهای طراحی شده .

برنامه num1 و den1 به ترتیب صورت و مخرج سیستم طراحی شده به روش ۱ ، و num2 و den2 صورت و مخرج سیستم طراحی شده به روش ۲ هستند. برای توصیف صورت و مخرج سیستم اصلی از num و den استفاده شده است . منحنی‌های پاسخ پلهٔ حاصل در شکل ۶-۴۵ نشان داده شده‌اند . برای رسم منحنی‌های پاسخ شیب این سه سیستم برنامهٔ ۶-۱۰ به کار رفته است . در این برنامه برای یافتن پاسخ شیب از دستور step استفاده شده است ، به همین خاطر صورت و مخرج سیستمهای طراحی شده به روش ۱ و روش ۲ به صورت زیر داده شده است :

```
num1=[12.287  23.876]
den1=[1  5.646  16.933  23.876 0]
num2=[9]
den2=[1  3  9  0]
```

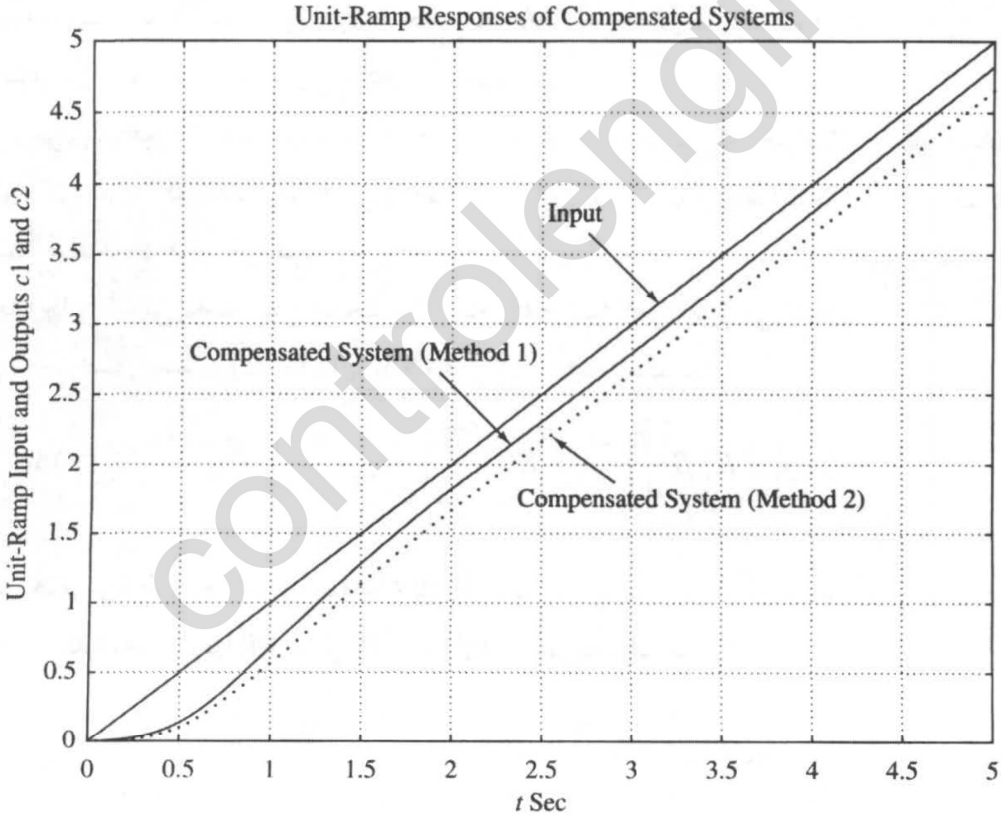
منحنی‌های پاسخ شیب حاصل در شکل ۶-۴۶ نشان داده شده است .

در بررسی این منحنی‌های پاسخ توجه کنید که در پاسخ پلهٔ سیستمهای جبران شده فراجهش سیستم طراحی شده به روش ۱ بزرگتر از فراجهش سیستم طراحی شده به روش ۲ است . ولی اولی در پاسخ به ورودی شیب مشخصات بهتری دارد. بنابراین تعیین این که کدام سیستم بهتر است کار آسانی نیست . تصمیم باید بر اساس خواسته‌هایی که از سیستم جبران شده انتظار داریم گرفته شود (مثل اندازهٔ فراجهش پاسخ پله یا خطای حالت ماندگار کمتر در دنبال کردن ورودی‌های متغیر) . اگر هم بخواهیم فراجهش پاسخ پله کوچکتر شود و هم خطای حالت ماندگار در دنبال کردن ورودیهای متغیر کمتر باشد ، باید از جبرانساز پسفاز-پیشفاز استفاده کنیم . (روش طراحی جبرانساز پسفاز-پیشفاز در بخش ۶-۸ بیان شده است .)

controlengineers.ir

MATLAB Program 6–10

```
% ***** Unit-Ramp Responses of Compensated Systems *****
num1 = [12.287  23.876];
den1 = [1  5.646  16.933  23.876  0];
num2 = [9];
den2 = [1  3  9  0];
t = 0:0.05:5;
c1 = step(num1,den1,t);
c2 = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.',t,t,'-')
grid
title('Unit-Ramp Responses of Compensated Systems')
xlabel('t Sec')
ylabel('Unit-Ramp Input and Outputs c1 and c2')
text(2.55,3.8,'Input')
text(0.55,2.8,'Compensated System (Method 1)')
text(2.35,1.75,'Compensated System (Method 2)')
```



شکل ۶-۴۶
منحنی‌های پاسخ شیب سیستم جبران نشدهٔ اصلی و سیستمهای طراحی شده .

۶-۷ جبرانسازی پسفاز

جبرانسازهای پسفاز الکترونیکی ساخته شده با آپامپ. آرایش جبرانساز پسفاز آپامپی همان آرایش جبرانساز پیشفاز آپامپی شکل ۶-۳۶ است . مدار شکل ۶-۳۶ با انتخاب $R_1C_1 < R_2C_2$ یک جبرانساز پسفاز

controlengineers.ir

می‌شود. با توجه به شکل ۶-۳۶ تابع تبدیل این جبرانساز پسفاز عبارت است از

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \hat{K}_c \beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = \hat{K}_c \frac{s+(1/T)}{s+(1/\beta T)}$$

که در آن

$$T = R_1 C_1 \ , \ \beta T = R_2 C_2 \ , \ \beta = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \ , \ \hat{K}_c = \frac{R_2 C_1}{R_3 C_2}$$

توجه کنید که در عبارت بالا به جای α از β استفاده کرده‌ایم. [در جبرانساز پیشفاز α را برای نشان دادن نسبت $R_2 C_2/(R_1 C_1)$ به کار بردیم، که مقداری کوچکتر از ۱ دارد، $0<\alpha<1$]. در این فصل همیشه فرض می‌کنیم $0<\alpha<1$ و $\beta>1$.

روشهای جبرانسازی پسفاز براساس رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها. مسئلهٔ یافتن یک شبکهٔ جبرانساز مناسب برای سیستمی را که مشخصهٔ پاسخ گذرای مطلوبی دارد، ولی رفتار حالت ماندگار آن رضایتبخش نیست، در نظر بگیرید. در این حالت جبرانسازی اساساً به معنی افزایش بهرهٔ حلقه باز است ، بدون این که مشخصات پاسخ گذرا تغییر محسوسی کند. یعنی مکان هندسی ریشه‌ها در اطراف قطبهای حلقه بستهٔ غالب نباید تغییر زیادی بکند، ولی بهرهٔ حلقه باز باید تا حد لازم زیاد شود. این کار را می‌توان با گذاشتن یک جبرانساز پسفاز در تابع تبدیل پیشخورد انجام داد.

برای پرهیز از تغییر زیاد مکان هندسی ریشه‌ها زاویه‌ای که جبرانساز پسفاز اضافه می‌کند باید در حد کوچکی، مثلاً 5° محدود شود. برای اطمینان از این امر قطب و صفر شبکهٔ پسفاز را نسبتاً نزدیک هم و نزدیک مبدأ صفحهٔ s قرار می‌دهیم. به این ترتیب قطبهای حلقهٔ بستهٔ سیستم جبران شده نسبت به حالت اولیه جابه‌جایی اندکی دارند. پس مشخصات پاسخ گذرا تنها کمی تغییر می‌کند.

جبرانساز پسفاز $G_c(s)$ را با تابع تبدیل زیر در نظر بگیرید

$$G_c(s) = \hat{K}_c \beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = \hat{K}_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \qquad (۶-۱۹)$$

اگر صفر و قطب جبرانساز پسفاز خیلی نزدیک هم باشند، در $s=s_1$ (s_1 محل یک قطب حلقه بستهٔ غالب است) اندازه‌های $s_1+(1/T)$ و $s_1+[1/(\beta T)]$ تقریباً برابرند ؛ یا

$$\left| G_c(s_1) \right| = \left| \hat{K}_c \frac{s_1+\frac{1}{T}}{s_1+\frac{1}{\beta T}} \right| \approx \hat{K}_c$$

برای این که اثر زاویهٔ بخش پسفاز کوچک باشد، باید داشته باشیم

$$-5^\circ < \angle \frac{s_1+\frac{1}{T}}{s_1+\frac{1}{\beta T}} < 0^\circ$$

controlengineers.ir

یعنی اگر بهرهٔ $\hat{K}_c$ جبرانساز پسفاز را برابر ۱ قرار دهیم ، مشخصهٔ پاسخ گذرا تغییر نمی‌کند (بنابراین بهرهٔ کل تابع تبدیل حلقه باز را می‌توان با ضریب β، $\beta>1$ افزایش داد). اگر قطب و صفر نزدیک مبدأ قرار داده شوند، می توان β را بزرگ انتخاب کرد. (در صورتی می‌توان β بزرگی برگزید که ساخت جبرانساز پسفاز از لحاظ فیزیکی امکان‌پذیر باشد.) دقت کنید که T باید بزرگ باشد، ولی مقدار دقیق آن مهم نیست. ولی مقدار آن نباید خیلی بزرگ باشد، به نحوی که در ساخت جبرانساز پسفاز با عناصر واقعی دچار مشکل شویم.

افزایش بهره به معنی افزایش ثابتهای خطای ایستاست. اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران نشده $G(s)$ باشد، ثابت خطای ایستای سرعت K_v عبارت است از

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

اگر جبرانساز بیان شده با معادلهٔ (۶-۱۹) را به کار بریم، ثابت خطای ایستای سرعت $\hat{K}_v$ برای سیستم جبران شدهٔ دارای تابع تبدیل حلقه باز $G_c(s)G(s)$ عبارت است از

$$\begin{aligned}\hat{K}_v &= \lim_{s\to 0} sG_c(s)\,G(s)\\ &= \lim_{s\to 0} G_c(s)\,K_v = \hat{K}_c\beta K_v\end{aligned}$$

که در آن K_v ثابت خطای ایستای سرعت سیستم جبران نشده است .

پس با استفاده از جبرانساز بیان شده با معادلهٔ (۶-۱۹) ثابت خطای ایستای سرعت با ضریب $\hat{K}_c\beta$ زیاد می‌شود، که در آن $\hat{K}_c$ تقریباً برابر یک است.

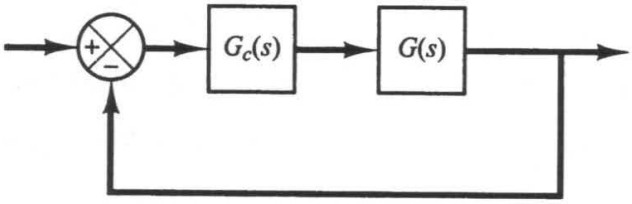
عمده‌ترین اثر منفی جبرانسازی پسفاز در این است که صفر جبرانساز نزدیک مبدا یک قطب حلقه بستهٔ نزدیک مبدا ایجاد می‌کند. این قطب حلقه بسته و صفر جبرانساز باعث می‌شود پاسخ پله دنباله‌ای دراز و کم‌دامنه داشته باشد و به این ترتیب زمان نشست افزایش می‌یابد.

روند طراحی جبرانساز پسفاز با استفاده از روش مکان هندسی ریشه‌ها. روند طراحی جبرانساز پسفاز برای سیستم شکل ۶-۴۷ با استفاده از روش مکان هندسی ریشه‌ها را می‌توان به صورت زیر بیان کرد (فرض می‌کنیم سیستم جبران نشده خواسته‌های پاسخ گذرا را با تنظیم سادهٔ بهره ارضا می‌کند؛ در مواردی که چنین نیست به بخش ۶-۸ مراجعه کنید) :

۱. مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران نشده، با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ را رسم کنید. براساس مشخصات پاسخ گذرا قطبهای حلقه بستهٔ غالب را روی مکان هندسی مشخص کنید .

۲. تابع تبدیل جبرانساز پسفاز را به صورت زیر فرض کنید

$$G_c(s) = \hat{K}_c\beta\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = \hat{K}_c\frac{s+(1/T)}{s+(1/\beta T)}$$



شکل ۶-۴۷
سیستم کنترل .

controlengineers.ir

پس تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده $G(s)G_c(s)$ است.

۳. ثابت خطای ایستای مشخص شده در مسئله را حساب کنید.

۴. میزان افزایش ثابت خطای ایستا برای برآورده شدن مشخصات خواسته شده را تعیین کنید .

۵. مکان قطب و صفر جبرانساز پسفاز لازم برای افزایش ثابت خطای ایستا، بدون تغییر محسوس مکان هندسی ریشه‌ها، را بیابید. (توجه کنید که نسبت بهرهٔ لازم برای سیستم به بهرهٔ سیستم جبران نشده با نسبت فاصله صفر از مبدأ به فاصله قطب از مبدأ برابر است.)

۶. مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده را رسم کنید. محل قطبهای حلقه بستهٔ غالب مطلوب را روی مکان هندسی ریشه‌ها مشخص کنید. (اگر اثر زاویهٔ شبکهٔ پسفاز کوچک (چند درجه) باشد، دو مکان هندسی تقریباً یکسان هستند. در غیر این صورت این دو مکان هندسی تفاوتهایی با هم دارند. در این صورت قطبهای حلقه بستهٔ غالب تعیین شده براساس مشخصه‌های پاسخ گذرا را روی مکان هندسی جدید مشخص می‌کنید.)

۷. بهرهٔ $\hat{K}_c$ جبرانساز را برابر شرط اندازه طوری تعیین کنید که قطبهای حلقه بستهٔ غالب در محلهای مطلوب قرار گیرند. ($\hat{K}_c$ تقریباً برابر ۱ است.)

مثال ۶-۷

سیستم شکل ۶-۴۸ (الف) را در نظر بگیرید. تابع تبدیل پیشخورد عبارت است از

$$G(s)=\frac{۱/۰۶}{s(s+۱)(s+۲)}$$

شکل ۶-۴۸ (ب) مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را نشان می‌دهد. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{۱/۰۶}{s(s+۱)(s+۲)+۱/۰۶}$$
$$=\frac{۱/۰۶}{(s+۰/۳۳۰۷-j۰/۵۸۶۴)(s+۰/۳۳۰۷+j۰/۵۸۶۴)(s+۲/۳۳۸۶)}$$

قطبهای حلقه بستهٔ غالب عبارت‌اند از

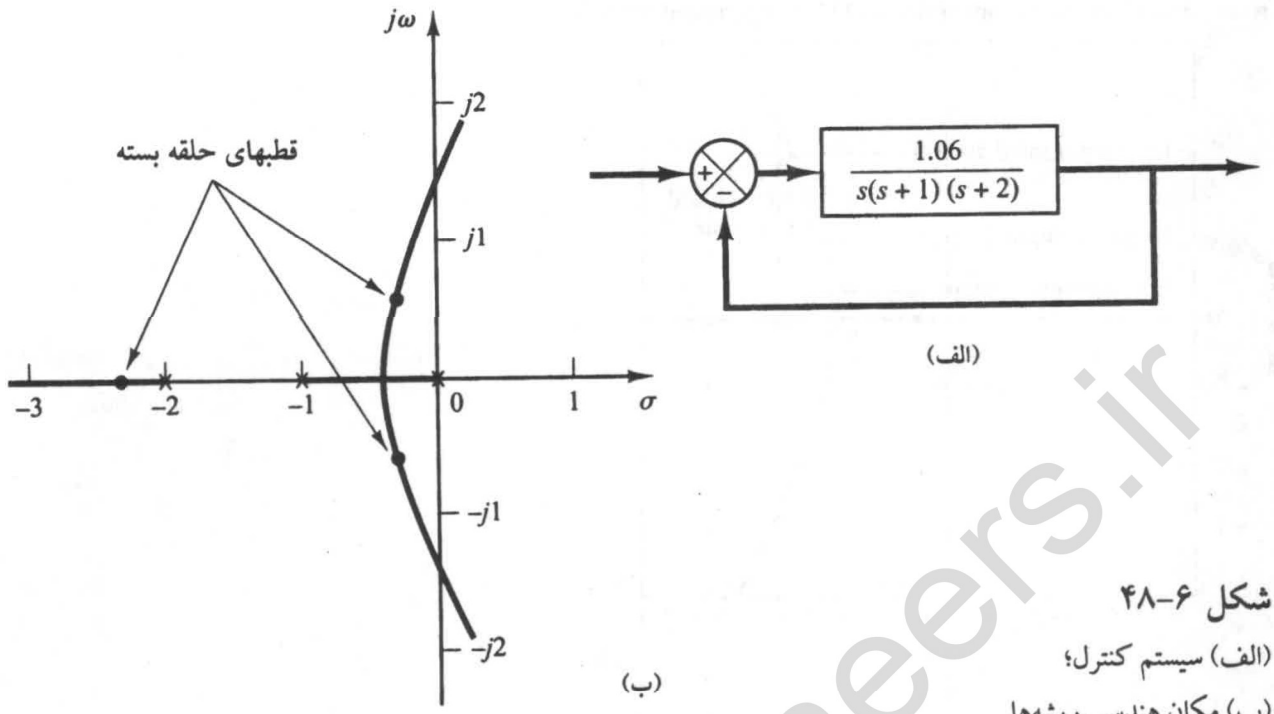
$$s=-۰/۳۳۰۷\pm j\,۰/۵۸۶۴$$

نسبت میرایی قطبهای غالب $\zeta=۰/۴۹۱$ است. فرکانس طبیعی نامیرایی قطبهای غالب ۰/۶۷۳ rad/s است. ثابت خطای ایستای سرعت $۰/۵۳s^{-۱}$ است.

می‌خواهیم ثابت خطای ایستای سرعت K_v را به حدود $۵s^{-۱}$ برسانیم، بدون این که محل قطبهای غالب حلقه بسته تغییر زیادی داشته باشد.

برای برآورده شدن این خواسته جبرانسازی با معادلهٔ (۶-۱۹) در مسیر پیشخورد سیستم می‌گذاریم. برای این که ثابت خطای ایستای سرعت با ضریب حدود ۱۰ اضافه شود، β را برابر ۱۰ برمی‌گزینیم و صفر و قطب

controlengineers.ir



شکل ۶-۴۸

(الف) سیستم کنترل؛

(ب) مکان هندسی ریشه‌ها.

جبرانساز پسفاز را به ترتیب در $s=-۰/۰۵$ و $s=-۰/۰۰۵$ قرار می‌دهیم. پس تابع تبدیل جبرانساز پسفاز به صورت زیر است

$$G_c(s)=\hat{K}_c\frac{s+۰/۰۵}{s+۰/۰۰۵}$$

زاویه‌ای که این شبکهٔ پسفاز در نزدیکی یک قطب غالب حلقه بسته ایجاد می‌کند حدود ۴° است. چون این زاویه خیلی کوچک نیست، مکان هندسی ریشه‌ها در نزدیکی قطبهای غالب مطلوب کمی تغییر می‌کند.

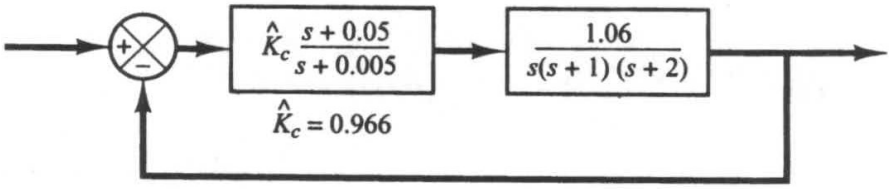
تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر است

$$\begin{aligned}G_c(s)G(s)&=\hat{K}_c\frac{s+۰/۰۵}{s+۰/۰۰۵}\frac{۱/۰۶}{s(s+۱)(s+۲)}\\&=\frac{K(s+۰/۰۵)}{s(s+۰/۰۰۵)(s+۱)(s+۲)}\end{aligned}$$

که در آن

$$K=۱/۰۶\,\hat{K}_c$$

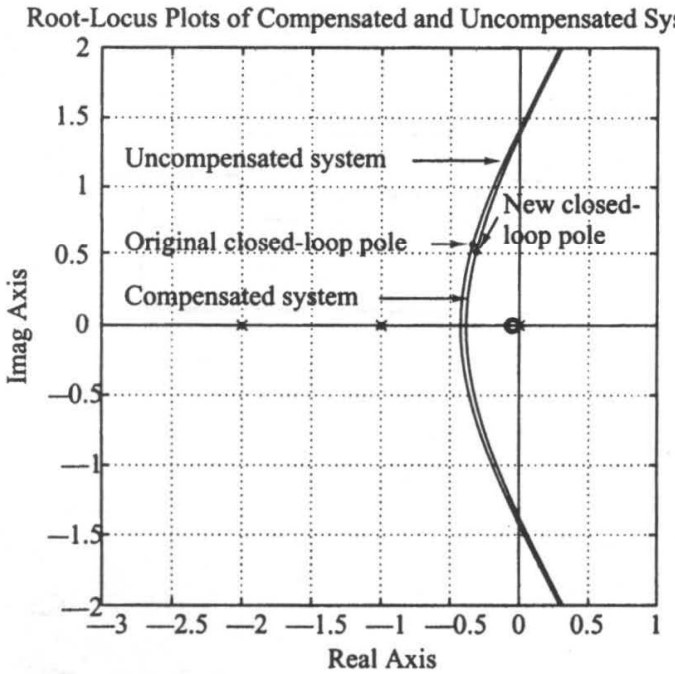
شکل۶-۴۹ نمودار بلوکی سیستم جبران شده ، و شکل ۶-۵۰ (الف) مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده و سیستم جبران نشده را در حوالی قطبهای حلقه بستهٔ غالب نشان می‌دهد. شکل ۶-۵۰ (ب) نمودار مکان



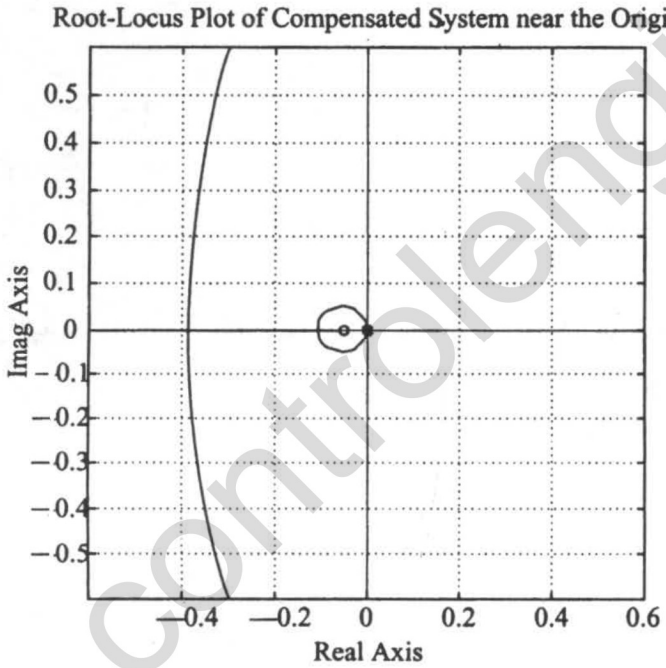
شکل ۶-۴۹

سیستم جبران شده.

controlengineers.ir



(الف)



(ب)

شکل ۶-۵۰

(الف) مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران نشده؛ (ب) مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده در حوالی مبدأ.

هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده در حوالی مبدأ را نشان می‌دهد. مکان هندسی ریشه‌های شکل‌های ۶-۵۰ (الف) و (ب) با برنامهٔ ۶-۱۱ ایجاد شده است.

با حفظ نسبت میرایی قطبهای سیستم اصلی، مکان هندسی ریشه‌های جدید قطبهای غالب مطلوب زیر را به دست می‌دهد

$$s_2 = -0.31 - j0.55 \quad s_1 = -0.31 + j0.55$$

بهرهٔ حلقه باز عبارت است از

controlengineers.ir

MATLAB Program 6–11

```
% ***** Root-locus plots of the compensated system and
% uncompensated system *****

% ***** Enter the numerators and denominators of the
% compensated and uncompensated systems *****

numc = [1  0.05];
denc = [1  3.005  2.015  0.01  0];
num = [1.06];
den = [1  3  2  0];

% ***** Enter rlocus command. Plot the root loci of both
% systems *****

rlocus(numc,denc)
hold
Current plot held
rlocus(num,den)
v = [-3  1  -2  2]; axis(v); axis('square')
grid
text(-2.8,0.2,'Compensated system')
text(-2.8,1.2,'Uncompensated system')
text(-2.8,0.58,'Original closed-loop pole')
text(-0.1,0.85,'New closed-')
text(-0.1,0.62,'loop pole')
title('Root-Locus Plots of Compensated and Uncompensated Systems')

hold
Current plot released

% ***** Plot root loci of the compensated system near the origin *****

rlocus(numc,denc)
v = [-0.6  0.6  -0.6  0.6]; axis(v); axis('square')
grid
title('Root-Locus Plot of Compensated System near the Origin')
```

$$K = \left| \frac{s(s+۰/۰۰۵)(s+۱)(s+۲)}{s+۰/۰۵} \right|_{s=-۰/۳۱+j۰/۵۵}$$
$$= ۱/۰۲۳۵$$

پس بهرهٔ $\hat{K}_c$ جبرانساز پسفاز به صورت زیر به دست می‌آید

$$\hat{K}_c = \frac{K}{۱/۰۶} = \frac{۱/۰۲۳۵}{۱/۰۶} = ۰/۹۶۵۶$$

تابع تبدیل جبرانساز پسفاز طراحی شده عبارت است از

controlengineers.ir

$$G_c(s) = ۰/۹۶۵۶\frac{s+۰/۰۵}{s+۰/۰۰۵} = ۹/۶۵۶\,\frac{۲۰s+۱}{۲۰۰s+۱} \qquad (۲۰-۶)$$

سیستم جبران شده تابع تبدیل حلقه باز زیر را دارد

$$G_۱(s) = \frac{۱/۰۲۳۵\,(s+۰/۰۵)}{s(s+۰/۰۰۵)(s+۱)(s+۲)}$$
$$= \frac{۵/۱۲(۲۰s+۱)}{s(۲۰۰s+۱)(s+۱)(۰/۵s+۱)}$$

ثابت خطای ایستای K_v عبارت است از

$$K_v = \lim_{s\to ۰} sG_۱(s) = ۵/۱۲\text{s}^{-۱}$$

در سیستم جبران شده، ثابت خطای ایستای سرعت به $۵/۱۲\text{s}^{-۱}$ یا $(۵/۱۲)/(۰/۵۳) = ۹/۶۶$ برابر مقدار اولیه افزایش یافته است. (یعنی خطای حالت ماندگار ورودی شیب به ۱۰٪ مقدار آن در سیستم اصلی رسیده است.) پس به هدف طراحی، یعنی افزایش ثابت خطای ایستای سرعت به حدود $۵\text{s}^{-۱}$ دست یافته‌ایم.

دقت کنید که چون قطب و صفر جبرانساز پسفاز نزدیک هم و نزدیک مبدأ قرار دارند، جبرانساز اثر کمی در تغییر شکل مکان هندسی ریشه‌ها داشته است. مکان هندسی ریشه‌های سیستمهای جبران شده و جبران نشده، بجز از لحاظ وجود یک دایرهٔ بستهٔ کوچک در نزدیک مبدأ، بسیار به هم شبیه‌اند، با این وجود ثابت خطای ایستای سرعت سیستم جبران شده ۹/۶۶ برابر سیستم جبران نشده است.

دو قطب حلقهٔ بستهٔ دیگر سیستم جبران شده عبارت‌اند از

$$s_۴ = -۰/۰۵۴۹ \quad , \qquad s_۳ = -۲/۳۲۶$$

افزودن جبرانساز پسفاز باعث شده است که مرتبهٔ سیستم از ۳ به ۴ برسد، و یک قطب حلقه بستهٔ اضافی نزدیک صفر جبرانساز پسفاز ایجاد شود. (قطب حلقه بستهٔ اضافی در $s=-۰/۰۵۴۹$ و نزدیک صفر واقع در $s=-۰/۰۵$ قرار دارد.) این قطب و صفر باعث می‌شوند که پاسخ گذرا دنباله‌ای دراز و با دامنهٔ کم داشته باشد، این را در پاسخ پلهٔ سیستمها به زودی خواهیم دید. چون قطب $s=-۲/۳۲۶$ در مقایسه با قطبهای حلقه بستهٔ غالب خیلی دور از محور $j\omega$ قرار دارد، اثر چندانی بر پاسخ گذرا نمی‌گذارد. بنابراین می‌توان قطبهای حلقه بستهٔ $s=-۰/۳۱\pm j۰/۵۵$ را قطبهای غالب به حساب آورد.

فرکانس طبیعی نامیرای قطبهای حلقه بستهٔ غالب سیستم جبران شده ۰/۶۳۱ rad/s است. این مقدار حدود ۶٪ کمتر از مقدار اصلی، یعنی ۰/۶۷۳ rad/s است. یعنی پاسخ گذرای سیستم جبران شده کندتر از سیستم اصلی است. زمان نشست پاسخ نیز طولانی‌تر است. ماکزیمم فراجهش پاسخ پلهٔ سیستم جبران شده نیز بزرگتر شده است. اگر بتوان این تغییرات را تحمل کرد، جبرانساز پسفاز طراحی شده در بالا، حل مناسبی برای مسئلهٔ عنوان شده است.

حال به مقایسهٔ پاسخ شیب سیستم جبران شده و سیستم جبران نشده می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که عملکرد حالت ماندگار سیستم جبران شده بسیار بهتر از سیستم جبران نشده است.

controlengineers.ir

برای یافتن پاسخ شیب با MATLAB دستور step را در مورد سیستم $C(s)/[sR(s)]$ به کار می‌بریم. برای سیستم جبران شده داریم

$$\frac{C(s)}{sR(s)}=\frac{۱/۰۲۳۵}{s[s(s+۰/۰۰۵)(s+۱)(s+۲)+۱/۰۲۳۵(s+۰/۰۵)]}$$
$$=\frac{۱/۰۲۳۵s+۰/۰۵۱۲}{s^{۵}+۳/۰۰۵s^{۴}+۲/۰۱۵s^{۳}+۱/۰۳۳۵s^{۲}+۰/۰۵۱۲s}$$

پس

```
numc = [1.0235  0.0512 ]
denc = [ 1  3.005  2.015  1.0335  0.0512  0 ]
```

همچنین $C(s)/[sR(s)]$ برای سیستم جبران نشده عبارت است از

$$\frac{C(s)}{sR(s)}=\frac{۱/۰۶}{s[s(s+۱)(s+۲)+۱/۰۶]}$$
$$=\frac{۱/۰۶}{s^{۴}+۳s^{۳}+۲s^{۲}+۱/۰۶s}$$

پس

```
num = [1.06 ]
den = [ 1  3  2  1.06  0]
```

برنامهٔ ۶-۱۲ منحنی‌های پاسخ شیب را به دست می‌دهد. نتیجه در شکل ۶-۵۱ نشان داده شده است. واضح است که سیستم جبران شده در دنبال کردن ورودی شیب واحد خطای حالت ماندگار بسیار کوچکتری دارد (یک دهم خطای حالت ماندگار سیستم اصلی) .

برنامهٔ ۶-۱۳ منحنی‌های پاسخ پلهٔ سیستمهای جبران شده و جبران نشده را به دست می‌دهد. این منحنی‌ها در شکل ۶-۵۲ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که سیستم جبران شده با جبرانساز پسفاز ماکزیمم فراجهش بزرگتری دارد و پاسخش نسبت به سیستم اصلی کندتر است. توجه کنید که قطب $s=-۰/۰۵۴۹$ و صفر $s=-۰/۰۵$ در پاسخ گذرا دنباله‌ای دراز ، با دامنهٔ کوچک ایجاد کرده است. اگر بزرگی ماکزیمم فراجهش و کندی پاسخ امرهای نامطلوب به حساب آیند، باید از جبرانسازهای پسفاز-پیشفاز معرفی شده در بخش ۶-۸ استفاده کنیم.

توضیح. باید خاطر نشان کنیم که در شرایط خاصی هم جبرانساز پسفاز و هم پیشفاز می‌تواند ویژگی‌های مطلوب را به دست دهند (هم مشخصات گذرا و هم مشخصات حالت ماندگار) . در این شرایط می‌توان هر یک از این دو روش را به کار برد.

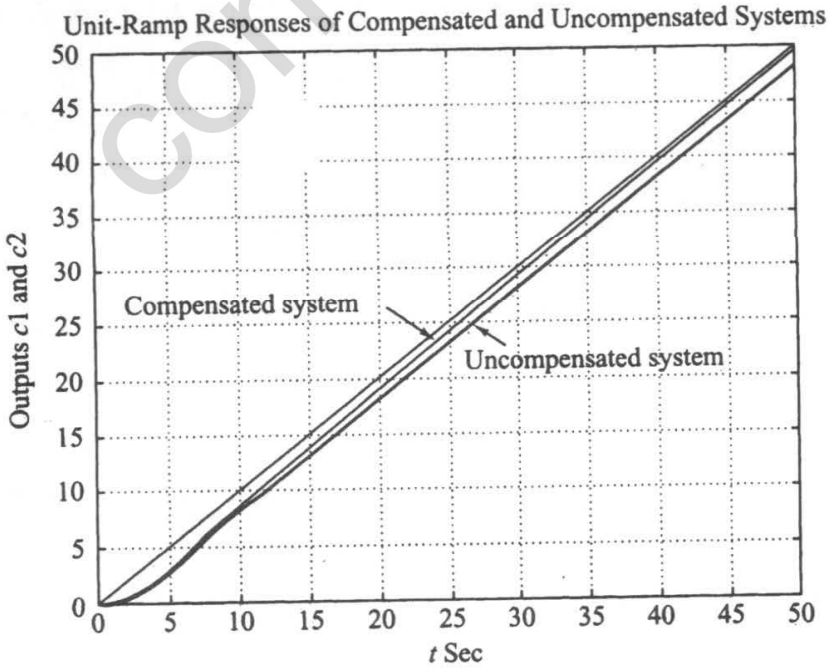
۶-۸ جبرانسازی پسفاز - پیشفاز

جبرانسازی پیشفاز اساساً سرعت پاسخ را زیاد و پایداری سیستم را بیشتر می‌کند. جبرانسازی پسفاز دقت حالت ماندگار را بهبود می‌دهد ولی از سرعت پاسخ می‌کاهد.

controlengineers.ir

MATLAB Program 6–12

```
% ***** Unit-ramp responses of compensated system and
% uncompensated system *****

% ***** Unit-ramp response will be obtained as the unit-step
% response of C(s)/[sR(s)] *****
% ***** Enter the numerators and denominators of C1(s)/[sR(s)]
% and C2(s)/[sR(s)], where C1(s) and C2(s) are Laplace
% transforms of the outputs of the compensated and un-
% compensated systems, respectively. *****

numc = [1.0235  0.0512];
denc = [1  3.005  2.015  1.0335  0.0512  0];
num = [1.06];
den = [1  3  2  1.06  0];

% ***** Specify the time range (such as t= 0:0.1:50) and enter
% step command and plot command. *****

t = 0:0.1:50;
c1 = step(numc,denc,t);
c2 = step(num,den,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.',t,t,'--')
grid
text(2.2,27,'Compensated system');
text(26,21.3,'Uncompensated system');
title('Unit-Ramp Responses of Compensated and Uncompensated Systems')
xlabel('t Sec');
ylabel('Outputs c1 and c2')
```



شکل ۶-۵۱

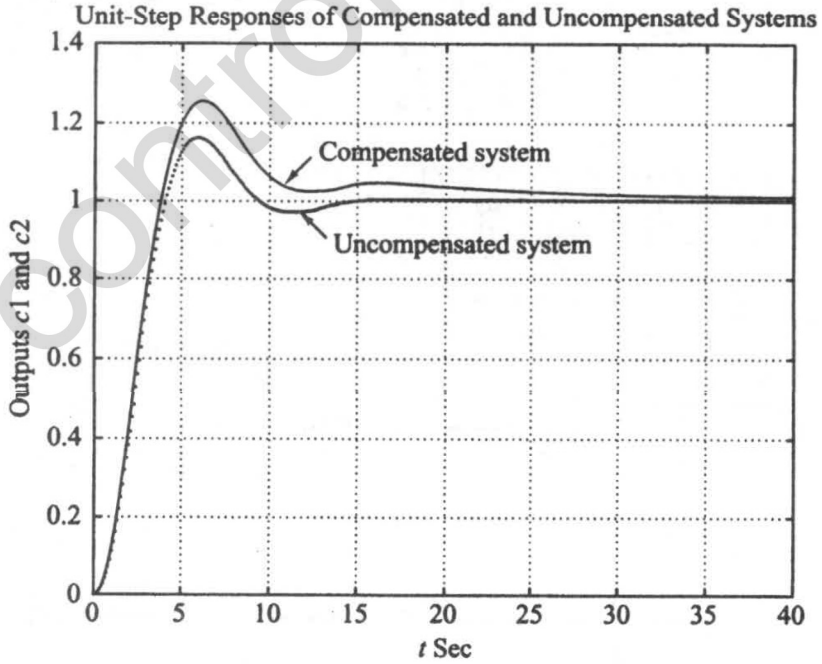
پاسخهای شیب سیستم جبران شده و سیستم جبران نشده.

[جبرانساز مطابق معادلهٔ (۶-۲۰) است.]

controlengineers.ir

MATLAB Program 6–13

```
% ***** Unit-step responses of compensated system and
% uncompensated system *****

% ***** Enter the numerators and denominators of the
% compensated and uncompensated systems *****

numc = [1.0235  0.0512];
denc = [1  3.005  2.015  1.0335  0.0512];
num = [1.06];
den = [1  3  2  1.06];

% ***** Specify the time range (such as t = 0:0.1:40) and enter
% step command and plot command. *****

t = 0:0.1:40;
c1 = step(numc,denc,t);
c2 = step(num,den,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'.')
grid
text(13,1.12,'Compensated system')
text(13.6,0.88,'Uncompensated system')
title('Unit-Step Responses of Compensated and Uncompensated Systems')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs c1 and c2')
```



شکل ۶-۵۲

پاسخ پلهٔ سیستم جبران شده و سیستم جبران نشده. [جبرانساز مطابق معادلهٔ (۶-۲۰) است.]

controlengineers.ir

اگر هدف بهبود سرعت پاسخ و پاسخ حالت ماندگار باشد، باید هم جبرانساز پیشفاز و هم جبرانساز پسفاز به کار برد. استفاده از یک جبرانساز پسفاز – پیشفاز به جای دو جبرانساز مجزا بصرفه‌تر است.

جبرانسازی پسفاز – پیشفاز مزایای هر دو جبرانسازی پسفاز و پیشفاز را دارد. چون جبرانساز پسفاز – پیشفاز دو قطب و دو صفر دارد، کاربرد آن باعث می‌شود که مرتبهٔ سیستم دو واحد زیاد شود، مگر این که در سیستم جبران شده حذف صفر – قطب رخ دهد.

جبرانساز پسفاز - پیشفاز آپامپی. شکل ۶-۵۳ یک جبرانساز پسفاز – پیشفاز آپ امپی را نشان می‌دهد. تابع تبدیل این جبرانساز را می‌توان به صورت زیر یافت: امپدانس مختلط Z_1 عبارت است از

$$\frac{1}{Z_1}=\frac{1}{R_1+(1/C_1 s)}+\frac{1}{R_3}$$

یا

$$Z_1=\frac{(R_1C_1s+1)R_3}{(R_1+R_3)C_1s+1}$$

به نحوی مشابه امپدانس مختلط Z_2 عبارت است از

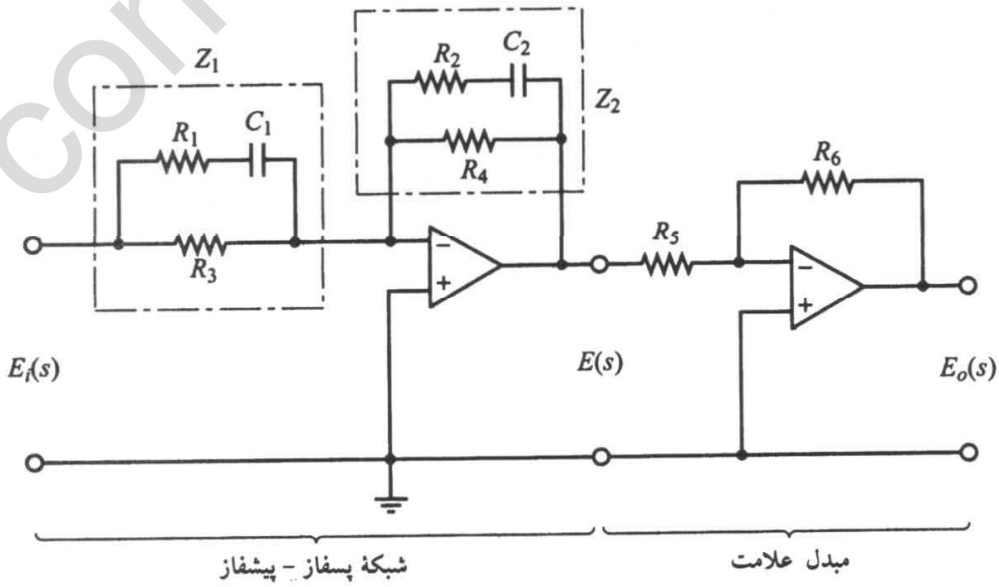
$$Z_2=\frac{(R_2C_2s+1)R_4}{(R_2+R_4)C_2s+1}$$

پس داریم

$$\frac{E(s)}{E_i(s)}=-\frac{Z_2}{Z_1}=-\frac{R_4}{R_3}\,\frac{(R_1+R_3)C_1s+1}{R_1C_1s+1}\,\frac{R_2C_2s+1}{(R_2+R_4)C_2s+1}$$

تابع تبدیل وارونساز علامت عبارت است از

$$\frac{E_o(s)}{E(s)}=-\frac{R_6}{R_5}$$



شکل ۶-۵۳ جبرانساز پسفاز – پیشفاز.

controlengineers.ir

پس تابع تبدیل جبرانساز شکل ۶-۵۳ به صورت زیر است

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{E_o(s)}{E(s)}\frac{E(s)}{E_i(s)}=\frac{R_4 R_6}{R_3 R_5}\left[\frac{(R_1+R_3)C_1 s+1}{R_1 C_1 s+1}\right]\left[\frac{R_2 C_2 s+1}{(R_2+R_4)C_2 s+1}\right] \qquad (۶-۲۱)$$

با تعریف

$$\beta T_2=\left(R_2+R_4\right)C_2 \quad , \quad \frac{T_1}{\gamma}=R_1 C_1 \quad , \quad T_2=R_2 C_2 \quad , \quad T_1=\left(R_1+R_3\right)C_1$$

معادلهٔ (۶-۲۱) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=K_c\frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{T_1 s+1}{\frac{T_1}{\gamma}s+1}\right)\left(\frac{T_2 s+1}{\beta T_2 s+1}\right)=K_c\frac{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}{\left(s+\frac{\gamma}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{\beta T_2}\right)} \qquad (۶-۲۲)$$

که در آن

$$\gamma=\frac{R_1+R_3}{R_1}>1 \quad , \quad \beta=\frac{R_2+R_4}{R_2}>1 \quad , \quad K_c=\frac{R_2 R_4 R_6}{R_1 R_3 R_5}\frac{R_1+R_3}{R_2+R_4}$$

توجه کنید که غالباً β برابر γ انتخاب می‌شود.

روش جبرانسازی پسفاز – پیشفاز براساس رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها. سیستم شکل ۶-۵۴ را در نظر بگیرید. فرض کنید جبرانساز پسفاز – پیشفاز زیر را به کار برده‌ایم:

$$G_c(s)=K_c\frac{\beta}{\gamma}\frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{\left(\frac{T_1}{\gamma}s+1\right)\left(\beta T_2 s+1\right)}=K_c\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right) \qquad (۶-۲۳)$$

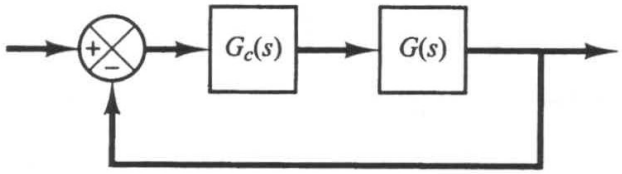
که در آن $\beta>1$ و $\gamma>1$ (K_c را به بخش پیشفاز جبرانساز نسبت می‌دهیم.)

در طراحی جبرانسازهای پسفاز – پیشفاز دو حالت $\gamma\neq\beta$ و $\gamma=\beta$ را جدا در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. $\gamma\neq\beta$ ؛ در این حالت روند طراحی ترکیبی از طراحی یک جبرانساز پیشفاز و طراحی یک جبرانساز پسفاز است. این روند را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

۱. با توجه به مشخصهٔ خواسته شده محل مطلوب قطبهای حلقه بستهٔ‌مطلوب را تعیین کنید .

۲. با توجه به تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ کمبود فاز ϕ برای قرار گرفتن قطبهای حلقه بسته در محل مطلوب را بیابید. بخش پیشفاز جبرانساز پسفاز – پیشفاز باید این زاویهٔ ϕ را ایجاد کند.



شکل ۶-۵۴
سیستم کنترل.

controlengineers.ir

۳. با فرض این که بعداً T_2 را آنقدر بزرگ انتخاب می‌کنیم که اندازهٔ بخش پسفاز، یعنی

$$\left|\frac{s_1+\left(1/T_2\right)}{s_1+\left(1/\beta T_2\right)}\right|$$

در $s=s_1$ (محل قطب غالب حلقه بستهٔ مطلوب) تقریباً یک باشد، مقادیر T_1 و γ را طوری برمی‌گزینیم که داشته باشیم

$$\left|\frac{s_1+\left(1/T_1\right)}{s_1+\left(\gamma/T_1\right)}\right|=\phi$$

T_1 و γ به طور یکتا تعیین نمی‌شوند. (یعنی بی‌نهایت T_1 و γ این شرط را برآورده می‌کند.) سپس مقدار K_c را با توجه به شرط اندازه تعیین می‌کنیم :

$$\left|K_c\frac{s_1+\left(1/T_1\right)}{s_1+\left(\gamma/T_1\right)}G\left(s_1\right)\right|=1$$

۴. اگر ثابت خطای ایستای سرعت K_v مشخص شده باشد، β را به نحوی تعیین کنید که خواستهٔ مربوط به K_v تأمین شود. ثابت خطای ایستای سرعت K_v عبارت است از

$$\begin{aligned}K_v&=\lim_{s\to 0} sG_c(s)\,G(s)\\&=\lim_{s\to 0} s\,K_c\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right)G(s)\\&=\lim_{s\to 0} s\,K_c\frac{\beta}{\gamma}\,G(s)\end{aligned}$$

که K_c و γ آن در گام ۳ تعیین شده است. پس با داشتن K_v می‌توان β را با توجه به این معادله یافت. سپس با توجه به β به دست آمده، مقدار T_2 را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$\left|\frac{s_1+\left(1/T_2\right)}{s_1+\left(1/\beta T_2\right)}\right|\approx 1$$

$$5^\circ<\left|\frac{s_1+\left(1/T_2\right)}{s_1+\left(1/\beta T_2\right)}\right|<0^\circ$$

(این روش در مثال ۶-۸ به کار رفته است .)

حالت ۲. $\gamma=\beta$. اگر بخواهیم در معادلهٔ (۶-۲۳) β و γ برابر باشند، روش طراحی بیان شده برای جبرانساز پسفاز – پیشفاز را باید به صورت زیر اصلاح کنیم :

۱. با توجه به مشخصات عملکرد داده شده، محل مطلوب قطبهای حلقه بستهٔ غالب را تعیین کنید .

۲. جبرانساز پسفاز – پیشفاز بیان شده با معادلهٔ (۶-۲۳) به صورت زیر درمی‌آید

controlengineers.ir

$$G_c(s)=K_c\frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s+1\right)(\beta T_2 s+1)}=K_c\frac{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}{\left(s+\frac{\beta}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{\beta T_2}\right)} \qquad (۲۴-۶)$$

که در آن $\beta>1$. تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده $G_c(s)G(s)$ است. اگر ثابت خطای ایستای سرعت K_v مشخص شده است، ثابت K_v را با توجه به معادلهٔ زیر تعیین کنید:

$$K_v=\lim_{s\to 0} sG_c(s)\,G(s)$$
$$=\lim_{s\to 0} sK_c\,G(s)$$

۳. برای قرار گرفتن قطبهای حلقه بستهٔ غالب در محل مطلوب، زاویهٔ ϕ لازمی را که بخش پیشفاز جبرانساز باید ایجاد کند، تعیین کنید .

۴. برای جبرانساز پسفاز – پیشفاز T_2 را به حد کافی بزرگ برمی‌گزینیم ، طوری که

$$\left|\frac{s_1+\frac{1}{T_2}}{s_1+\frac{1}{\beta T_2}}\right|$$

تقریباً یک باشد، $s=s_1$ محل یکی از قطبهای حلقه بستهٔ غالب است. مقادیر T_1 و γ را با توجه به شرایط اندازه و زاویه تعیین می‌کنیم

$$\left|K_c\left(\frac{s_1+\frac{1}{T_1}}{s_1+\frac{\beta}{T_1}}\right)G(s_1)\right|=1$$

$$\angle\frac{s_1+\frac{1}{T_1}}{s_1+\frac{\beta}{T_1}}=\phi$$

۵. با استفاده از β به دست آمده ، T_2 را طوری تعیین کنید که

$$\left|\frac{s_1+\frac{1}{T_2}}{s_1+\frac{1}{\beta T_2}}\right|\approx 1$$

$$-5^\circ<\angle\frac{s_1+(1/T_2)}{s_1+(1/\beta T_2)}<0^\circ$$

controlengineers.ir

مقدار βT_2، بزرگترین ثابت زمانی جبرانساز پسفاز – پیشفاز، نباید آنقدر بزرگ باشد که از لحاظ فیزیکی نتوان آن را ساخت . (در مثال ۶-۹ نمونه‌ای از طراحی جبرانساز پسفاز – پیشفاز به ازای $\gamma = \beta$ ارائه شده است.)

مثال ۶-۸

سیستم کنترل شکل ۶-۵۵ را در نظر بگیرید. تابع پیشخورد عبارت است از

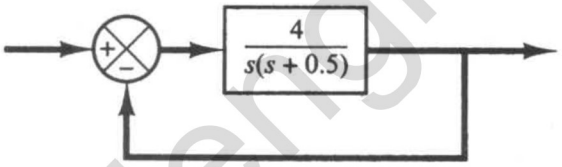
$$G(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$

قطبهای حلقه بستهٔ این سیستم عبارت است از

$$s = -0.2500 \pm j1.9843$$

نسبت میرایی ۰٫۱۲۵، فرکانس طبیعی نامیرا ۲ rad/s، و ثابت خطای ایستای سرعت $8s^{-1}$ است.

می‌خواهیم نسبت میرایی قطبهای حلقه بستهٔ غالب را به حدود ۰٫۵، فرکانس طبیعی نامیرا را به ۵ rad/s و ثابت خطای ایستای سرعت را به $80s^{-1}$ برسانیم. جبرانساز مناسبی برای دستیابی به تمام این مشخصه‌های عملکرد طرح کنید.



شکل ۶-۵۵
سیستم کنترل.

جبرانساز پسفاز – پیشفازی با تابع تبدیل زیر به کار می‌بریم

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \qquad (\gamma > 1 \ , \ \beta > 1)$$

که در آن γ با β برابر نیست. پس تابع تبدیل سیستم جبران شده عبارت است از

$$G_c(s)\, G(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) G(s)$$

قطبهای حلقه بستهٔ غالب باید با توجه به مشخصه‌های عملکرد در محلهای زیر قرار داشته باشد

$$s = -2.50 \pm j4.33$$

چون

$$\left| \frac{4}{s(s+0.5)} \right|_{s=-2.50+j4.33} = -235^\circ$$

controlengineers.ir

بخش پیشفاز جبرانساز باید °۵۵ به این زاویه اضافه کند تا مکان هندسی از محل مطلوب قطبهای غالب بسته بگذرد.

برای طراحی بخش پیشفاز جبرانساز، ابتدا محل صفر و قطب را برای ایجاد °۵۵ تعیین می‌کنیم. انتخابهای زیادی ممکن است ، ولی صفر را در $s=-۰/۵$ قرار می‌دهیم تا قطب واقع در $s=-۰/۵$ وسیلهٔ تحت کنترل خنثی شود. پس از انتخاب صفر، قطب را باید در جایی قرار داد که زاویهٔ °۵۵ ایجاد شود. با محاسبه‌ای ساده یا تحلیل ترسیمی درمی‌یابیم که قطب باید در $s=-۵/۰۲$ قرار داشته باشد ، پس بخش پیشفاز جبرانساز به صورت زیر تعیین می‌شود

$$K_c\frac{s+(۱/T_۱)}{s+(\gamma/T_۱)}=K_c\frac{s+۰/۵}{s+۵/۰۲}$$

یعنی

$$\gamma=\frac{۵/۰۲}{۰/۵}=۱۰/۰۴\quad,\quad T_۱=۲$$

سپس مقدار K_c را با توجه به شرط اندازه تعیین می‌کنیم:

$$\left|K_c\frac{۴(s+۰/۵)}{(s+۵/۰۲۱)s(s+۰/۵)}\right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳}=۱$$

پس

$$K_c=\left|\frac{(s+۵/۰۲۱)s}{۴}\right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳}=۶/۲۶$$

بخش پسفاز جبرانساز را می‌توان به این صورت طراحی کرد: ابتدا مقدار β را برای برآوردن ثابت خطای ایستای خواسته شده تعیین می‌کنیم:

$$K_v=\lim_{s\to ۰}sG_c(s)\,G(s)=\lim_{s\to ۰}s\,K_c\frac{\beta}{\gamma}G(s)$$
$$=\lim_{s\to ۰}s(۶/۲۶)\frac{\beta}{۱۰/۰۴}\;\frac{۴}{s(s+۰/۵)}=۴/۹۸۸\beta=۸۰$$

پس β عبارت است از

$$\beta=۱۶/۰۴$$

سرانجام $T_۲$ را طوری برمی‌گزینیم که داشته باشیم

$$\left|\frac{s+(۱/T_۲)}{s+[۱/(۱۶/۰۴\,T_۲)]}\right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳}\approx ۱\quad,\quad -۵^\circ<\underline{\left|\frac{s+(۱/T_۲)}{s+(۱۶/۰۴\,T_۲)}\right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳}}<۰^\circ$$

برای $T_۲$ می‌توان مقادیر مختلفی برگزید و بررسی کرد که آیا شرطهای فاز و اندازه برآورده می‌شود یا نه . پس از چند محاسبهٔ ساده می‌بینیم که به ازای $T_۲=۵$ داریم

$-۲/۱۰^\circ<$ زاویه $<۰^\circ$ $\qquad$ $۰/۹۸<$ اندازه <۱

controlengineers.ir

چون $T_۲ = ۵$ هر دو شرط را برآورده می‌کند ، انتخاب می‌کنیم

$$T_۲ = ۵$$

بنابراین تابع تبدیل جبرانساز پسفاز – پیشفاز به صورت زیر تعیین می‌شود

$$G_c(s) = ۶٫۲۶\left[\frac{s+(۱/۲)}{s+(۱۰٫۰۴/۲)}\right]\left[\frac{s+(۱/۵)}{s+[۱/(۱۶٫۰۴\times ۵)]}\right]$$
$$= ۶٫۲۶\left(\frac{s+۰٫۵}{s+۵٫۰۲}\right)\left(\frac{s+۰٫۲}{s+۰٫۰۱۲۴۷}\right)$$
$$= \frac{۱۰(۲s+۱)(۵s+۱)}{(۰٫۱۹۹۲s+۱)(۸۰٫۱۹s+۱)}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر است

$$G_c(s)\,G(s) = \frac{۲۵٫۰۴\,(s+۰٫۲)}{s(s+۵٫۰۲)(s+۰٫۰۱۲۴۷)}$$

به خاطر حذف صفر – قطب، سیستم جبران شده مرتبه سوم است. (از لحاظ ریاضی این حذف دقیقاً رخ می‌دهد، ولی در عمل به خاطر تقریبهای موجود در یافتن مدل ریاضی سیستم و دقیق نبودن ثابت زمانی‌ها حذف دقیق صورت نمی‌گیرد.) شکل ۶-۵۶ (الف) مکان هندسی سیستم جبران شده را نشان می‌دهد. شکل ۶-۵۶ (ب) بخش نزدیک مبدأ مکان هندسی ریشه‌ها را نشان می‌دهد. چون اثر زاویهٔ بخش پسفاز جبرانساز پسفاز – پیشفاز خیلی کم است، محل قطبهای حلقه بستهٔ سیستم جبران شده از محل مطلوب $s = -۲٫۵ \pm j۴٫۳۳$ فاصلهٔ بسیار کمی دارد . معادلهٔ مشخصهٔ سیستم جبران شده عبارت است از

$$s(s+۵٫۰۲)(s+۰٫۰۱۲۴۷) + ۲۵٫۰۴(s+۰٫۲) = ۰$$

یا

$$s^۳ + ۵٫۰۳۲۵s^۲ + ۲۵٫۱۰۲۶s + ۵٫۰۰۸$$
$$= (s+۲٫۴۱۲۳ + j۴٫۲۷۵۶)(s+۲٫۴۱۲۳ - j۴٫۲۷۵۶)(s+۰٫۲۰۷۸) = ۰$$

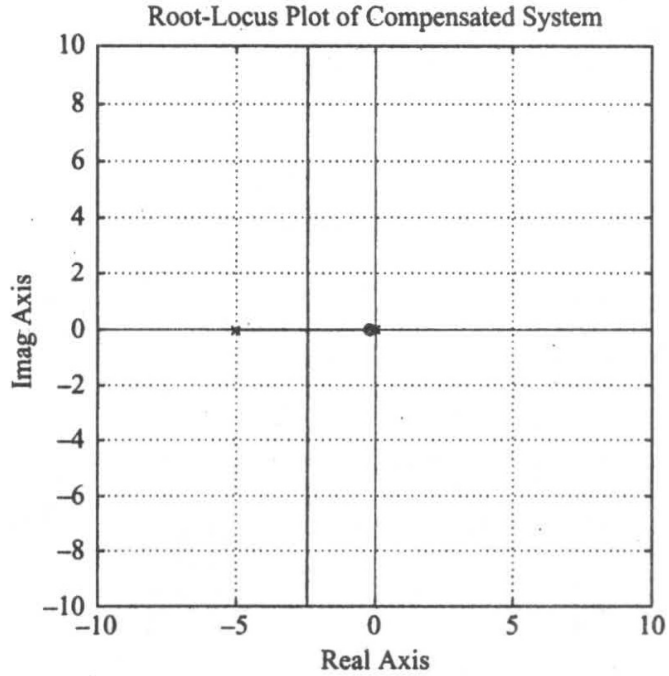
بنابراین قطبهای حلقه بستهٔ جدید در محل زیر قرار دارند

$$s = -۲٫۴۱۲۳\,j \pm ۴٫۲۷۵۶$$

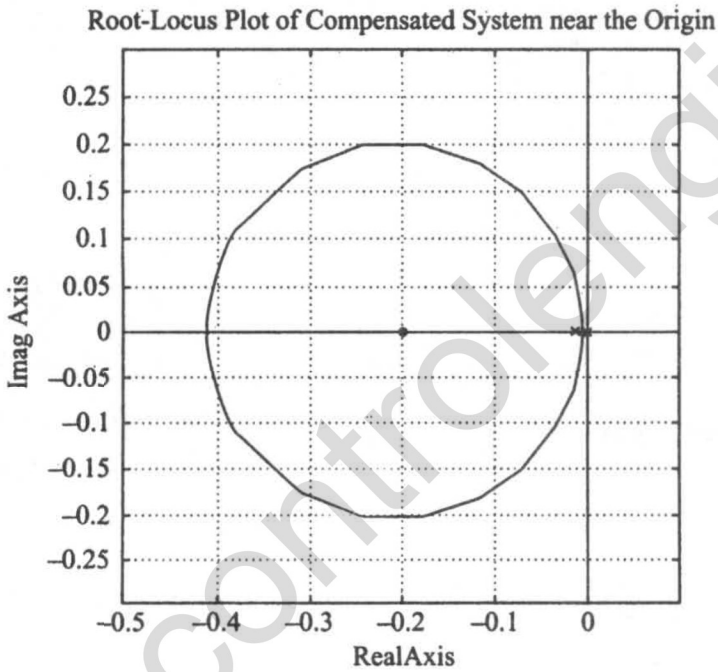
نسبت میرایی جدید $\zeta = ۰٫۴۹۱$ است. بنابراین سیستم جبران شده تمام مشخصات خواسته شده را داراست. قطب حلقه بستهٔ سوم سیستم جبران شده در $s = -۰٫۲۰۷۸$ قرار دارد. چون این قطب حلقه بسته به صفر واقع در $s = -۰٫۲$ خیلی نزدیک است، اثر این قطب بر پاسخ خیلی ناچیز است. (در حالت کلی اگر یک قطب و صفر نزدیک هم و نزدیک مبدأ قرار داشته باشند، ترکیبشان در پاسخ گذرا دنباله‌ای طولانی و کم‌دامنه ایجاد می‌کند.)

منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب سیستمهای جبران نشده در شکل ۶-۵۷ نشان داده شده است. (به دنبالهٔ دراز و کوچک پاسخ پلهٔ سیستم جبران شده توجه کنید.)

controlengineers.ir



(الف)



(ب)

شکل ۶-۵۶

(الف) مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده؛ (ب) مکان هندسی ریشه‌ها در نزدیکی مبدأ.

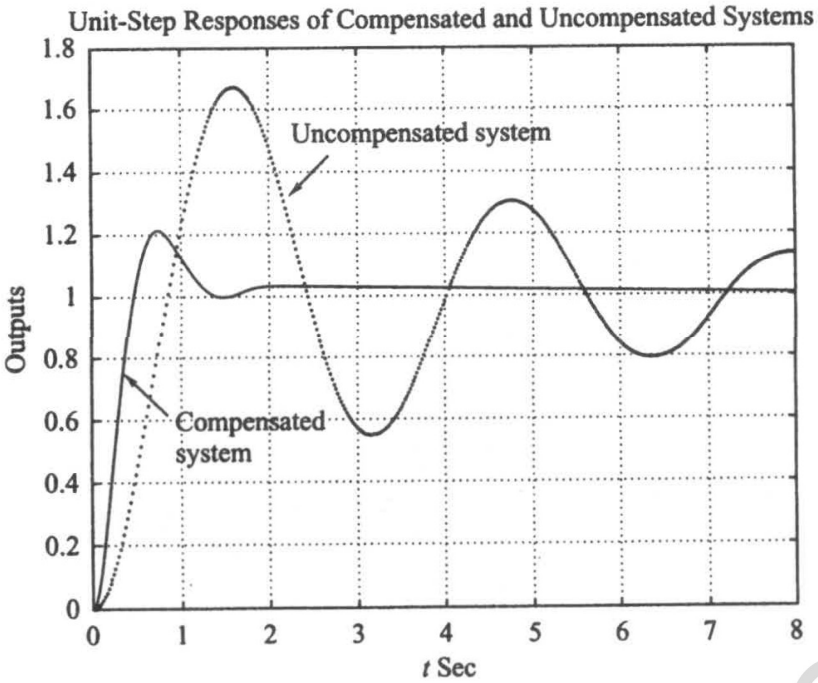
controlengineers.ir

مثال ۶-۹

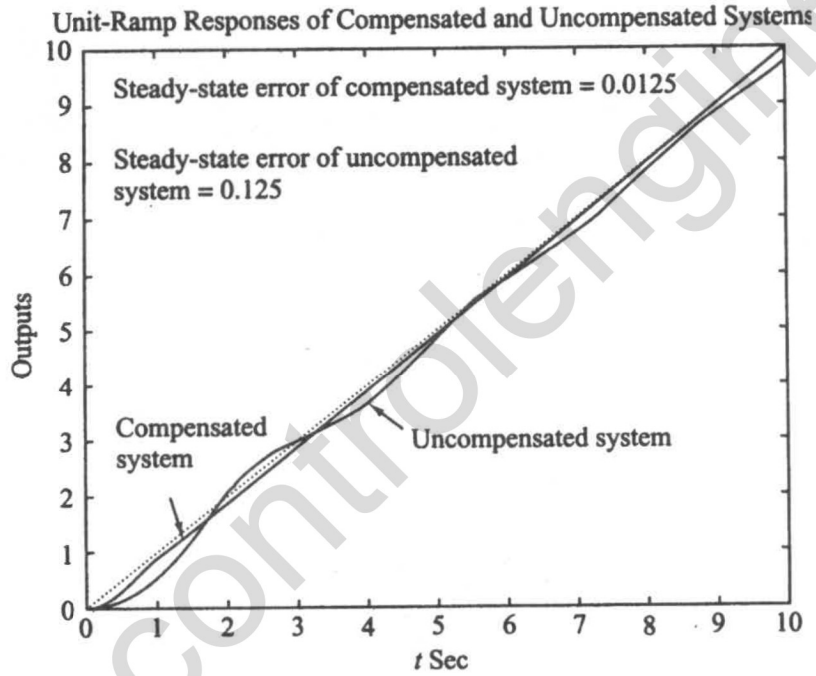
سیستم کنترل مثال ۶-۸ را در نظر بگیرید. فرض کنید از جبرانسازی که با معادلهٔ (۶-۲۴) بیان شده است استفاده می‌کنیم، یعنی

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}{\left(s+\frac{\beta}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{\beta T_2}\right)} \qquad (\beta > 1)$$

با فرض این که مشخصه‌های خواسته شده همان مشخصه‌های داده شده در مثال ۶-۸ است، جبرانساز $G_c(s)$ را طرح کنید.



(الف)



(ب)

شکل ۶-۵۷

منحنی‌های پاسخ گذاری سیستم جبران شده و سیستم جبران نشده.
(الف) منحنی‌های پاسخ پله؛
(ب) منحنی‌های پاسخ شیب.

controlengineers.ir

مکان قطبهای حلقه بستهٔ غالب عبارت است از

$$s = -۲٫۵۰ \pm j۴٫۳۳$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از

$$G_c(s)\,G(s) = K_c \frac{(s+۱/T_۱)(s+۱/T_۲)}{\left(s+\dfrac{\beta}{T_۱}\right)\left(s+\dfrac{۱}{\beta T_۲}\right)} \cdot \frac{۴}{s(s+۰٫۵)}$$

چون می‌خواهیم ثابت خطای ایستای سرعت K_v برابر $۸۰s^{-۱}$ باشد، داریم

$$K_v = \lim_{s\to ۰} s\, G_c(s)\, G(s) = \lim_{s\to ۰} K_c \frac{۴}{۰/۵} = ۸ K_c = ۸۰$$

پس

$$K_c = ۱۰$$

ثابت زمانی $T_۱$ و β از معادلات زیر به دست می‌آیند

$$\left|\frac{s+\frac{۱}{T_۱}}{s+\frac{\beta}{T_۱}}\right| \left|\frac{۴۰}{s(s+۰/۵)}\right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳} = \left|\frac{s+\frac{۱}{T_۱}}{s+\frac{\beta}{T_۱}}\right| \frac{۸}{۴/۷۷} = ۱$$

$$\left\lfloor \frac{s+\frac{۱}{T_۱}}{s+\frac{\beta}{T_۱}} \right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳} = ۵۵^\circ$$

(۵۵° بودن کمبود زاویه در مثال ۶-۸ تعیین شد.) با توجه به شکل ۶-۵۸ می‌توانیم نقاط A و B را به نحوی بیابیم که

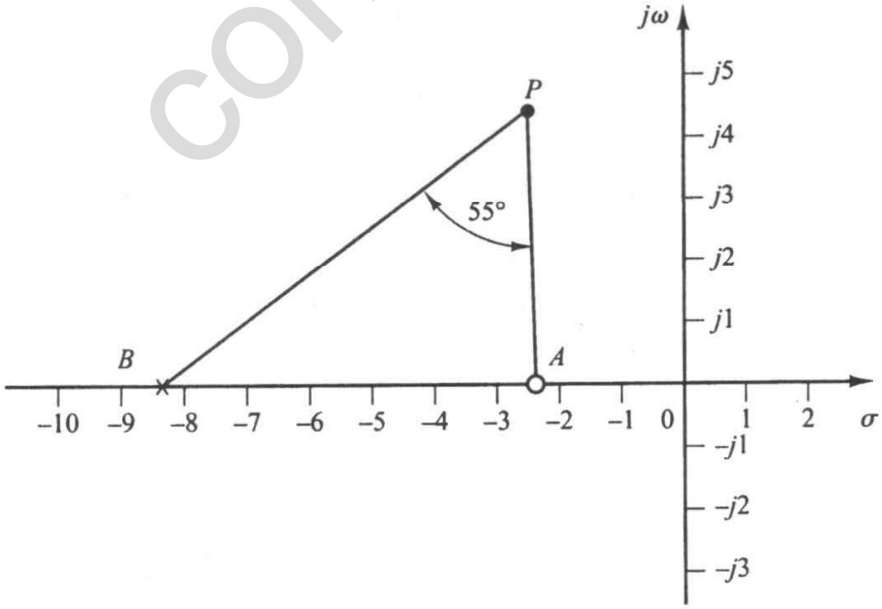
$$\lfloor APB = ۵۵^\circ \quad , \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{۴/۷۷}{۸}$$

(از روش ترسیمی یا روش مثلثاتی استفاده کنید.) نتیجه عبارت است از

$$\overline{AO} = ۲/۳۸ \quad , \quad \overline{BO} = ۸/۳۴$$

یا

$$T_۱ = \frac{۱}{۲/۳۸} = ۰/۴۲۰ \quad , \quad \beta = ۸/۳۴\, T_۱ = ۳/۵۰۳$$



شکل ۶-۵۸

تعیین محل مطلوب قطب و صفر.

controlengineers.ir

پس بخش پیشفاز شبکهٔ پسفاز – پیشفاز عبارت است از

$$۱۰\left(\frac{s+۲/۳۸}{s+۸/۳۴}\right)$$

برای بخش پسفاز جبرانساز باید $T_۲$ را طوری برگزینیم که داشته باشیم

$$\left|\frac{s+\frac{۱}{T_۲}}{s+\frac{۱}{۳/۵۰۳\,T_۲}}\right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳} \approx ۱ \quad , \quad -۵^\circ < \angle\left|\frac{s+\frac{۱}{T_۲}}{s+\frac{۱}{۳/۵۰۳\,T_۲}}\right|_{s=-۲/۵+j۴/۳۳} < ۰^\circ$$

پس از چند محاسبهٔ ساده می‌بینیم که به ازای $T_۲ = ۵$ داریم

$$۱ > \text{اندازه} > ۰/۹۸ \qquad -۱/۵^\circ < \text{زاویه} < ۰^\circ$$

و به ازای $T_۲ = ۱۰$ داریم

$$۱ > \text{اندازه} > ۰/۹۹ \qquad -۱/۰^\circ < \text{زاویه} < ۰^\circ$$

چون $T_۲$ یکی از ثابت زمانی‌های جبرانساز پسفاز-پیشفاز است ، مقدارش نباید خیلی بزرگ باشد. اگر $T_۲ = ۱۰$ به لحاظ عملی مشکلی ایجاد نکند ، انتخاب می‌کنیم $T_۲ = ۱۰$. در این صورت

$$\frac{۱}{\beta\, T_۲} = \frac{۱}{۳/۵۰۳ \times ۱۰} = ۰/۰۲۸۵$$

و تابع تبدیل جبرانساز پسفاز – پیشفاز را به صورت زیر می‌یابیم

$$G_c(s) = ۱۰\left(\frac{s+۲/۳۸}{s+۸/۳۴}\right)\left(\frac{s+۰/۱}{s+۰/۰۲۸۵}\right)$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از

$$G_c(s)\,G(s) = \frac{۴۰\,(s+۲/۳۸)(s+۰/۱)}{(s+۸/۳۴)(s+۰/۰۲۸۵)s(s+۰/۵)}$$

در این حالت حذف صفر – قطب رخ نمی‌دهد و سیستم جبران شده مرتبه چهارم است. چون اثر زاویهٔ بخش پسفاز شبکهٔ پسفاز – پیشفاز خیلی کم است، قطبهای حلقه بستهٔ غالب به محل مطلوب بسیار نزدیک‌اند. در واقع این قطبها را می‌توان به صورت زیر از معادلهٔ مشخصه به دست آورد : معادلهٔ مشخصهٔ سیستم جبران شده عبارت است از

$$(s+۸/۳۴)(s+۰/۰۲۸۵)\,s\,(s+۰/۵) + ۴۰\,(s+۲/۳۸)(s+۰/۱) = ۰$$

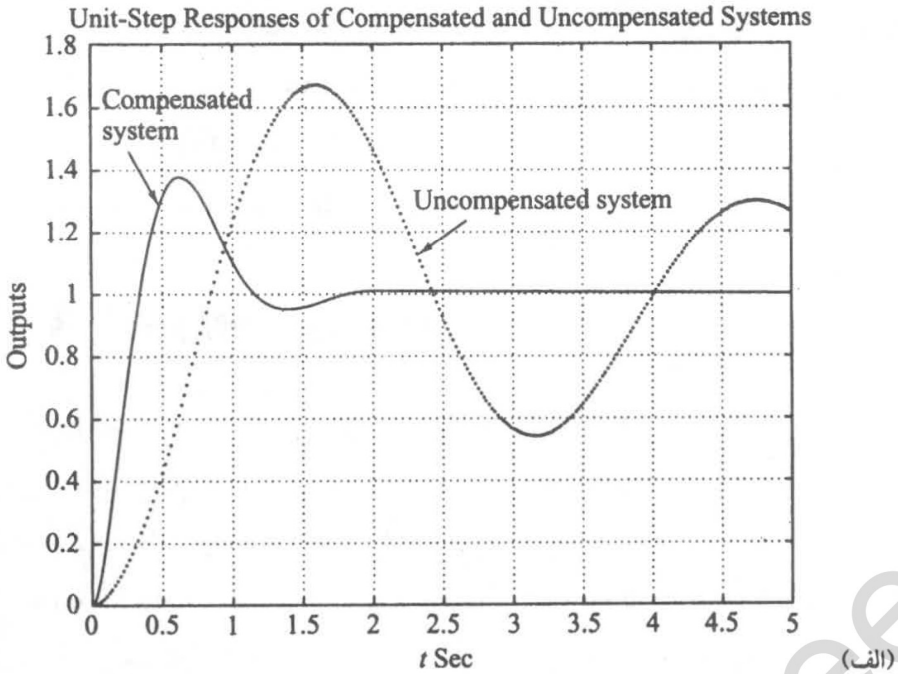
که به صورت زیر ساده می‌شود

$$s^۴ + ۸/۸۶۸۵\,s^۳ + ۴۴/۴۲۱۹\,s^۲ + ۹۹/۳۱۸۸\,s + ۹/۵۲$$
$$= (s+۲/۴۵۳۹ + j۴/۳۰۹۹)(s+۲/۴۵۳۹ - j۴/۳۰۹۹)(s+۰/۱۰۰۳)(s+۳/۸۶۰۴) = ۰$$

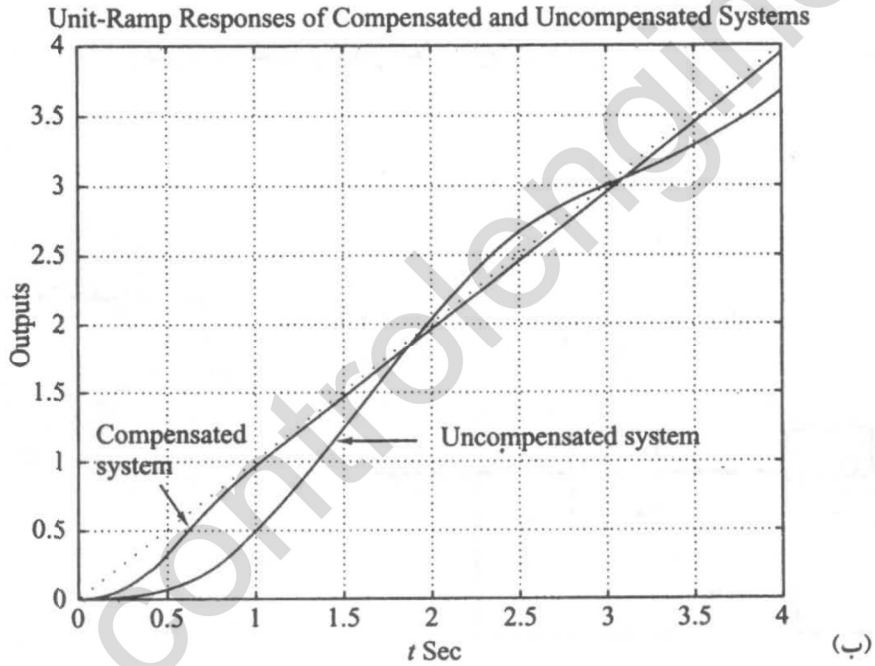
قطبهای غالب حلقه بسته در محل زیر قرار دارند

$$s = -۲/۴۵۳۹ \pm j۴/۳۰۹۹$$

controlengineers.ir



(الف)



(ب)

شکل ۶-۵۹
(الف) منحنی‌های پاسخ پلهٔ سیستم جبران شده و سیستم جبران نشده؛ (ب) منحنی‌های پاسخ شیب جبران شده و سیستم جبران نشده.

controlengineers.ir

دو قطب دیگر در محلهای زیر واقع‌اند

$$s=-۰٫۱۰۰۳ \quad , \quad s=-۳٫۸۶۰۴$$

چون قطب حلقه بستهٔ واقع در $s=-۰٫۱۰۰۳$ به صفر واقع در $s=-۰٫۱$ بسیار نزدیک است، اثر آن را تقریباً حذف می‌کند. پس اثر این قطب حلقه بسته بسیار کم است. قطب حلقه بستهٔ باقیمانده $(s=-۳٫۸۶۰۴)$ صفر واقع در $s=-۲٫۴$ را خنثی نمی‌کند. این صفر باعث می‌شود پاسخ پله فراجهشی بزرگتر از سیستم مشابه فاقد این صفر داشته باشد. منحنی‌های پاسخ پلهٔ سیستمهای جبران شده و جبران نشده در شکل ۶-۵۹ (الف) نشان داده شده است. منحنی‌های پاسخ شیب هر دو سیستم در شکل ۶-۵۹ (ب) به چشم می‌خورد.

فراجهش ماکزیمم پاسخ پلهٔ سیستم تقریباً ٪۳۸ است. (این خیلی بزرگتر از فراجهش ٪۲۱ مثال طراحی ۶-۸ است.) اگر مانند این مثال بخواهیم $\gamma=\beta$ ، نمی‌توانیم ماکزیمم فراجهش را از ٪۳۸ خیلی کمتر کنیم و مثلاً آن را به حد ٪۲۰ برسانیم. توجه کنید که اگر شرط $\gamma=\beta$ در کار نباشد، یک پارامتر دیگر در اختیار طراح قرار دارد و می‌تواند فراجهش ماکزیمم را کاهش دهد.

۶-۹ جبرانسازی موازی

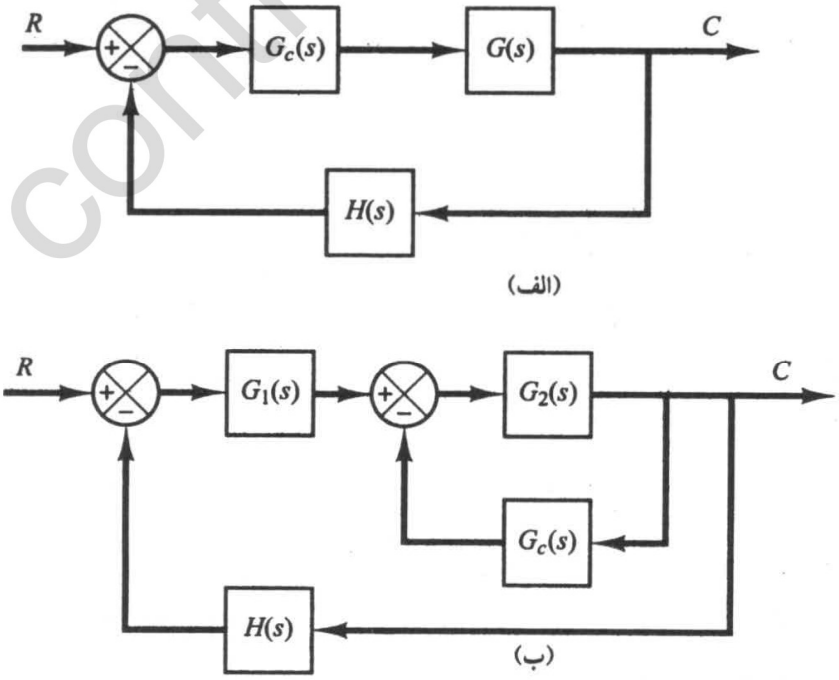
تا اینجا روشهای جبرانسازی سری با استفاده از جبرانسازهای پیشفاز، پسفاز، و پیشفاز – پسفاز را بیان کرده‌ایم. در این بخش راجع به روش جبرانسازی موازی صحبت می‌کنیم. چون در جبرانسازی موازی جبرانساز یا کنترل کننده در یک حلقهٔ فیدبک داخلی قرار دارد، طراحی پیچیده تر از طراحی جبرانسازهای سری جلوه می‌کند. ولی اگر معادلهٔ مشخصه را به صورتی بازنویسی کنیم که همان شکل معادلهٔ مشخصهٔ جبرانسازی سری را به خود بگیرد، این پیچیدگی از میان می‌رود. در این بخش یک مسئله طراحی مشتمل بر جبرانسازی موازی را مطرح می‌کنیم.

اصول پایه طراحی سیستمهای جبرانساز موازی. با توجه به شکل ۶-۶۰ (الف) تابع تبدیل حلقه بستهٔ سیستم دارای جبرانسازی سری عبارت است از

$$\frac{C}{R}=\frac{G_c G}{1+G_c G H}$$

معادلهٔ مشخصه به صورت زیر است

$$1+G_c G H=0$$



شکل ۶-۶۰
(الف) جبرانساز سری؛
(ب) جبرانسازی موازی
یا جبرانسازی با فیدبک.

controlengineers.ir

که G و H معلوم هستند و طراح باید جبرانساز G_c را به نحوی تعیین کنید که مشخصات مورد نظر تأمین شود.

تابع تبدیل حلقه بستهٔ سیستم دارای جبرانساز موازی [شکل ۶-۶۰ (ب)] عبارت است از

$$\frac{C}{R}=\frac{G_1G_2}{1+G_2G_c+G_1G_2H}$$

و معادلهٔ مشخصه به صورت زیر است

$$1+G_1G_2H+G_2G_c=0$$

با تقسیم این معادله بر جملاتی که در آنها G_c وجود ندارند به دست می‌آوریم

$$1+\frac{G_cG_2}{1+G_1G_2H}=0 \qquad (۶-۲۵)$$

با تعریف

$$G_f=\frac{G_2}{1+G_1G_2H}$$

معادلهٔ (۶-۲۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$1+G_cG_f=0$$

چون G_f یک تابع تبدیل مشخص است، طراحی G_c همانند طراحی جبرانساز سری است. پس همان روش طراحی را می‌توان در مورد طراحی سیستم جبرانساز موازی نیز به کار برد.

سیستمهای دارای فیدبک سرعت. سیستم دارای فیدبک سرعت (فیدبک تاکومتری) نمونه‌ای از سیستمهای دارای جبرانساز موازی است. در این سیستمها کنترل‌کننده (جبرانساز) یک عنصر دارای بهره است . بهره عنصر فیدبک حلقهٔ داخلی باید به نحوی مناسب تعیین شود تا کل سیستم ویژگی‌های مطلوب طراحی را برآورده کند. مشخصهٔ سیستمهای دارای فیدبک سرعت این است که پارامتر متغیر به صورت ضریبی در تابع تبدیل حلقه باز ظاهر نمی‌شود، بنابراین نمی‌توان از روش مکان هندسی ریشه‌ها به صورت مستقیم استفاده کرد. ولی می‌توان معادلهٔ مشخصه را به صورتی نوشت که پارامتر متغیر به صورت یک ضریب ظاهر شود، و به این ترتیب بتوان رهیافت طراحی به روش مکان هندسی ریشه ها را به کار برد.

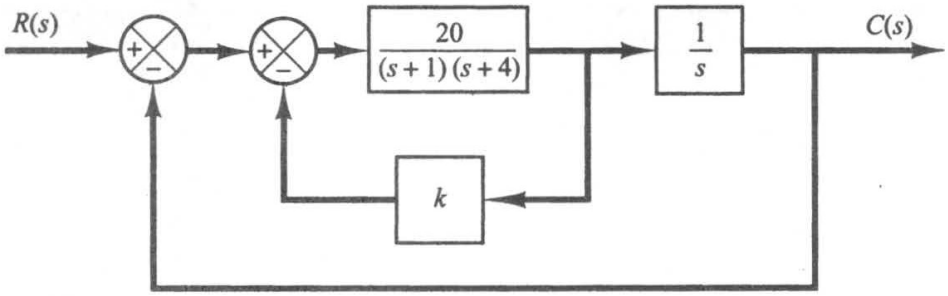
مثالی از طراحی سیستم کنترل به روش جبرانسازی موازی در مثال ۶-۱۰ مطرح شده است.

مثال ۶-۱۰ سیستم شکل ۶-۶۱ را در نظر بگیرید. نمودار مکان هندسی ریشه‌ها را رسم کنید. سپس مقدار k را به نحوی تعیین کنید که نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته ۰/۴ باشد.

در اینجا سیستم فیدبک سرعت دارد. تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$\text{تابع تبدیل حلقه باز}=\frac{20}{s(s+1)(s+4)+20ks}$$

controlengineers.ir



شکل ۶-۶۱
سیستم کنترل.

توجه کنید که متغیر قابل تنظیم k به صورت ضریب ظاهر نشده است. معادلهٔ مشخصهٔ سیستم عبارت است از

$$s^3+5s^2+4s+20ks+20=0 \qquad (۶-۲۶)$$

با تعریف

$$20k=K$$

معادلهٔ (۶-۲۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$s^3+5s^2+4s+Ks+20=0 \qquad (۶-۲۷)$$

با تقسیم دو طرف معادلهٔ (۶-۲۷) بر مجموع جملاتی که شامل K نیستند به دست می‌آوریم

$$1+\frac{Ks}{s^3+5s^2+4s+20}=0$$

یا

$$1+\frac{Ks}{(s+j2)(s-j2)(s+5)}=0 \qquad (۶-۲۸)$$

معادلهٔ (۶-۲۸) همان شکل معادلهٔ (۶-۱۱) را دارد.

اکنون مکان هندسی ریشه‌های سیستم توصیف شده با معادلهٔ (۶-۲۸) را رسم می‌کنیم. توجه کنید که قطبهای حلقه باز در $s=j2$، $s=-j2$، $s=-5$ قرار دارند، و صفر حلقه باز در $s=0$ واقع است. بخش بین ۰ و ۵- محور حقیقی روی مکان هندسی ریشه‌ها است. چون

$$\lim_{s\to\infty}\frac{Ks}{(s+j2)(s-j2)(s+5)}=\lim_{s\to\infty}\frac{K}{s^2}$$

داریم

$$\text{زاویه مجانبها}=\frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{2}=\pm 90^\circ$$

محل برخورد مجانبها به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\lim_{s\to\infty}\frac{Ks}{s^3+5s^2+4s+20}=\lim_{s\to\infty}\frac{K}{s^2+5s+\cdots}=\lim_{s\to\infty}\frac{K}{(s+2.5)^2}$$

پس

$$s=-2.5$$

controlengineers.ir

زاویهٔ خروج (زاویه θ) از قطب $s=j۲$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\theta=۱۸۰^\circ-۹۰^\circ-۲۱/۸^\circ+۹۰^\circ=۱۵۸/۲^\circ$$

پس زاویه خروج از قطب $s=j۲$ برابر $۱۵۸/۲^\circ$ است. شکل ۶-۶۲ نمودار مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را نشان می‌دهد. توجه کنید که دو شاخهٔ مکان هندسی از قطبهای $s=\pm j۲$ شروع و به صفرهای بینهایت ختم می‌شود. شاخهٔ دیگر از قطب $s=-۵$ شروع شده به صفر واقع در $s=۰$ ختم می‌شود.

قطبهای حلقه بستهٔ دارای $\zeta=۰/۴$ باید روی خطی قرار گیرند که از مبدأ می‌گذرد و با بخش منفی محور حقیقی زاویهٔ $\pm۶۶/۴۲^\circ$ می‌سازد. در این مثال خط راستی با زاویهٔ $۶۶/۴۲^\circ$ در دو نقطه شاخه بالایی مکان هندسی ریشه‌ها را قطع می‌کند. پس نسبت میرایی ζ قطبهای حلقه بسته به ازای دو مقدار K برابر ۰/۴ می‌شود.

در نقطهٔ P مقدار K عبارت است از

$$K=\left|\frac{(s+j۲)(s-j۲)(s+۵)}{s}\right|_{s=-۱/۰۴۹۰+j۲/۴۰۶۵}=۸/۹۸۰۱$$

پس

$$k=\frac{K}{۲۰}=۰/۴۴۹۰ \qquad \text{در نقطهٔ } P$$

در نقطهٔ Q مقدار K به صورت زیر به دست می‌آید

$$K=\left|\frac{(s+j۲)(s-j۲)(s+۵)}{s}\right|_{s=-۲/۱۵۸۹+j۴/۹۶۵۲}=۲۸/۲۶۰$$

پس

$$k=\frac{K}{۲۰}=۱/۴۱۳۰ \qquad \text{در نقطهٔ } Q$$

پس این مسئله دو جواب دارد. به ازای $k=۰/۴۴۹۰$ سه قطب حلقه بسته عبارت‌اند از

$$s=-۲/۹۰۲۱\ ,\ s=-۱/۰۴۹۰+j۲/۴۰۶۵\ ,\ s=-۱/۰۴۹۰-j۲/۴۰۶۵$$

به ازای $k=۱/۴۱۳۰$ سه قطب حلقه بسته عبارت‌اند از

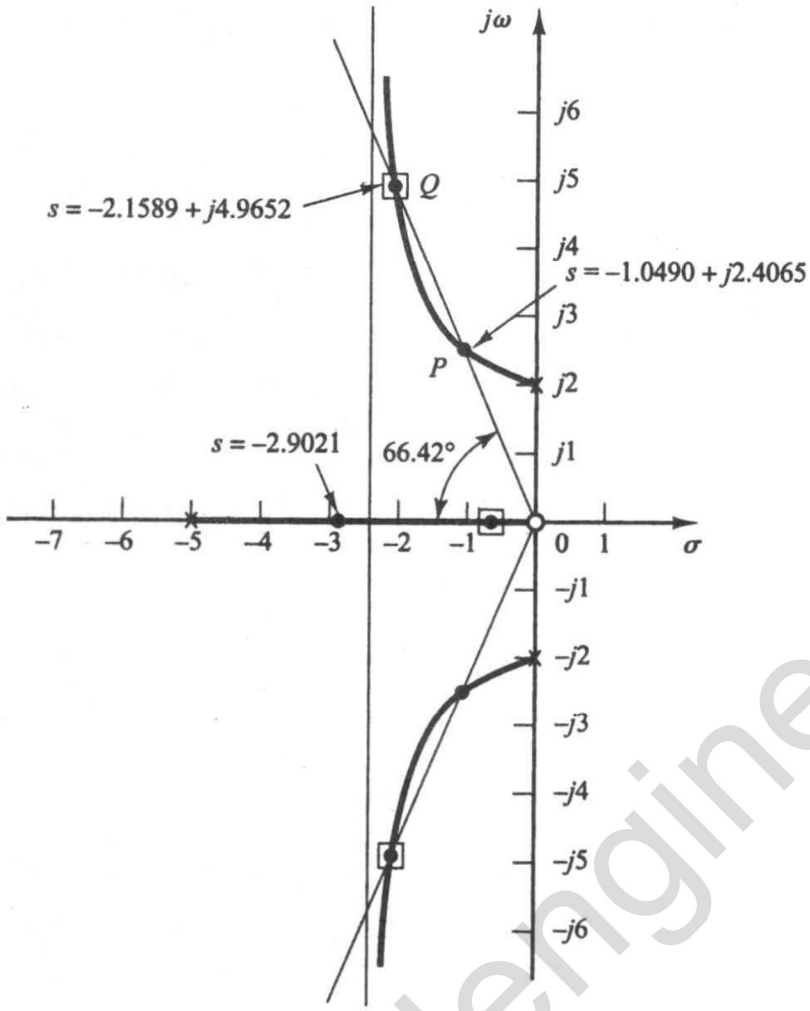
$$s=-۲/۱۵۸۹+j۴/۹۶۵۲\ ,\ s=-۲/۱۵۸۹-j۴/۹۶۵۲\ ,\ s=-۰/۶۸۲۳$$

تذکر این نکته مهم است که صفر واقع در مبدا یک صفر حلقه باز است، ولی صفر حلقه بسته نیست. این مطلب واضح است ، چون سیستم اصلی شکل ۶-۶۱ صفر حلقه بسته ندارد، زیرا

$$\frac{G(s)}{R(s)}=\frac{۲۰}{s(s+۱)(s+۴)+۲۰(۱+ks)}$$

صفر حلقه باز واقع در $s=۰$ در فرایند تغییر معادلهٔ مشخصه، به صورتی که $K=۲۰k$ به صورت ضریب ظاهر شود، ایجاد شده است.

controlengineers.ir



شکل ۶-۶۲

مکان هندسی ریشه‌های سیستم شکل ۶-۶۱.

دو مقدار متفاوت k به دست آوردیم که به ازای آنها ضریب میرایی قطبهای حلقه بسته برابر ۰/۴ می‌شود. تابع تبدیل حلقه بسته به ازای $k = ۰/۴۴۹۰$ عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{۲۰}{s^۳ + ۵s^۲ + ۱۲/۹۸s + ۲۰}$$
$$= \frac{۲۰}{(s + ۱/۰۴۹۰ + j۲/۴۰۶۵)(s + ۱/۰۴۹۰ - j۲/۴۰۶۵)(s + ۲/۹۰۲۱)}$$

تابع تبدیل حلقه بسته به ازای $k = ۰/۴۱۳۰$ به صورت زیر است

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{۲۰}{s^۳ + ۵s^۲ + ۳۲/۲۶s + ۲۰}$$
$$= \frac{۲۰}{(s + ۲/۱۵۸۹ + j۴/۹۶۵۲)(s + ۲/۱۵۸۹ - j۴/۹۶۵۲)(s + ۰/۶۸۲۳)}$$

توجه کنید که سیستم $k = ۰/۴۴۹۰$ یک زوج قطب حلقه بستهٔ غالب دارد، ولی در سیستم با $k = ۰/۴۱۳۰$ قطب حلقه بستهٔ $s = ۰/۶۸۲۳$ غالب است، نه قطبهای مزدوج مختلط. در این حالت مشخصهٔ پاسخ عمدتاً توسط قطب حقیقی تعیین می‌شود.

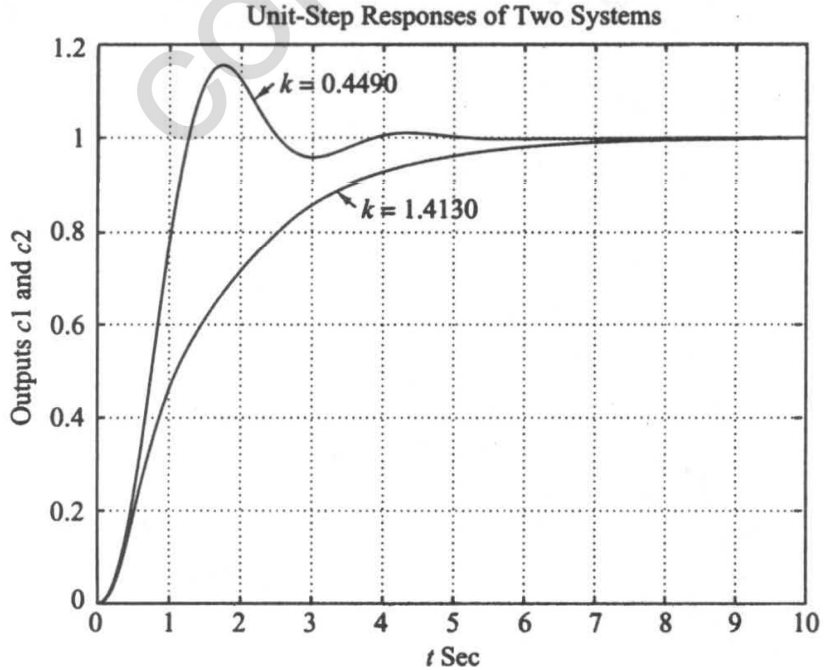
controlengineers.ir

MATLAB Program 6–14

```
% ---------- Unit-step response ----------

% ***** Enter numerators and denominators of systems with
% k = 0.4490 and k = 1.4130, respectively. *****

num1 = [20];
den1 = [1  5  12.98  20];
num2 = [20];
den2 = [1  5  32.26  20];
t = 0:0.1:10;
c1 = step(num1,den1,t);
c2 = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,t,c2)
text(2.5,1.12,'k = 0.4490')
text(3.7,0.85,'k = 1.4130')
grid
title('Unit-step Responses of Two Systems')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs c1 and c2')
```

بیایید پاسخ پله دو سیستم را به کمک MATLAB مقایسه کنیم؛ برنامهٔ ۶-۱۴ دو پاسخ پله را روی یک نمودار رسم می‌کند. شکل ۶-۶۳ منحنی‌های پاسخ پله دو سیستم $[c_1(t)$ به ازای $k = ۰/۴۴۹۰$ و $c_2(t)$ به ازای $k = ۱/۴۱۳۰]$ را نشان می‌دهد.

با توجه به شکل ۶-۶۳ می‌بینیم که پاسخ سیستم دارای $k = ۰/۴۴۹۰$ نوسانی است. (اثر قطب حلقهٔ بستهٔ $s = -۲/۹۰۲۱$ بر پاسخ پله ناچیز است.) برای سیستم دارای $k = ۱/۴۱۳۰$ نوسانات ناشی از قطبهای حلقه بستهٔ $s = -۲/۱۵۸۹ \pm j۴/۹۶۵۲$ بسیار سریعتر از پاسخ نمایی ناشی از قطب حلقه بستهٔ $s = -۰/۶۸۲۳$ میرا می‌شود.



شکل ۶-۶۳
منحنی‌های پاسخ پلهٔ سیستم شکل ۶-۶۱ که نسبت میرایی ζ قطبهای حلقه بسته‌اش در ۰/۴ تنظیم شده است. (به ازای دو مقدار k نسبت میرایی ζ برابر ۰/۴ می‌شود.)

controlengineers.ir

سیستم با $k = ۰/۴۴۹۰$ (که پاسخی سریعتر با فراجهش نسبتاً کوچک دارد)مشخصهٔ پاسخ بسیار بهتری نسبت به سیستم دارای $k = ۱/۴۱۳۰$ (با پاسخی کند و فرامیرا) دارد. پس برای این سیستم $k = ۰/۴۴۹۰$ را برمی‌گزینیم.

مسائل نمونه و حلشان

الف ۶-۱ مکان هندسی ریشه‌های سیستم شکل ۶-۶۴ (الف) را رسم کنید. (بهرهٔ K را مثبت فرض کنید.) نشان دهید که سیستم به ازای مقادیر کوچک و بزرگ K فرامیرا، و به ازای مقادیر متوسط K فرومیرا است .

حل: روش ترسیم مکان هندسی ریشه‌ها به صورت زیر است:

۱. قطبها و صفرهای حلقه باز را در صفحهٔ مختلط مشخص می‌کنیم. بخش بین ۰ و ۱- و بین ۲- و ۳- محور حقیقی جزء مکان هندسی ریشه‌هاست .

۲. تعداد قطبها و صفرهای محدود حلقه باز محدود است. پس مکان هندسی ریشه‌ها هیچ مجانبی در صفحهٔ s ندارد .

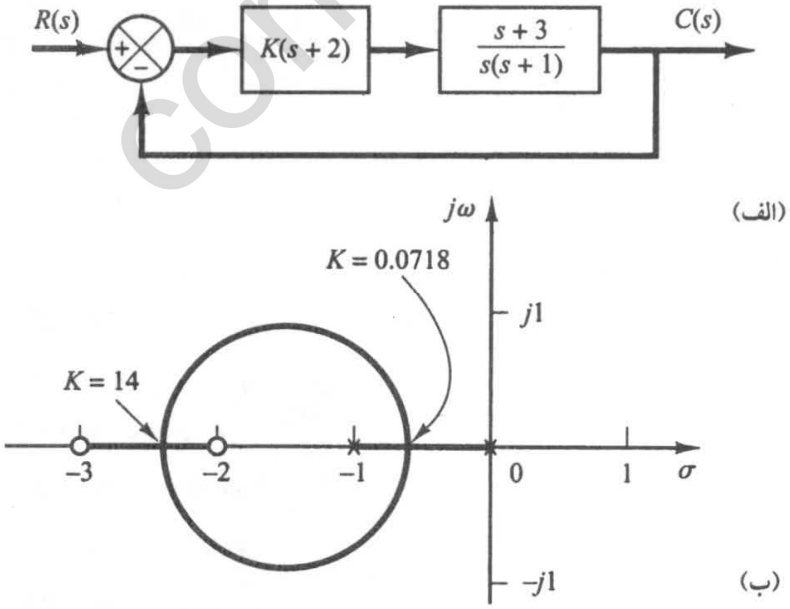
۳. نقاط شکست را تعیین می‌کنیم. معادلهٔ مشخصه سیستم عبارت است از

$$۱+\frac{K(s+۲)(s+۳)}{s(s+۱)}=۰$$

یا

$$K=-\frac{s(s+۱)}{(s+۲)(s+۳)}$$

نقاط شکست به صورت زیر تعیین می‌شوند



شکل ۶-۶۴

(الف) سیستم کنترل؛

(ب) نمودار مکان هندسی ریشه‌ها.

controlengineers.ir

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{(۲s+۱)(s+۲)(s+۳)-s(s+۱)(۲s+۵)}{[(s+۲)(s+۳)]^۲}$$
$$=-\frac{۴(s+۰/۶۳۴)(s+۲/۳۶۶)}{[(s+۲)(s+۳)]^۲}$$
$$=۰$$

که نتیجه می‌دهد

$$s=-۰/۶۳۴ \quad , \quad s=-۲/۳۶۶$$

توجه کنید که هر دو نقطه روی مکان هندسی قرار دارند، بنابراین نقاط شکست واقعی هستند. در نقطهٔ $s=-۰/۶۳۴$ مقدار K عبارت است از

$$K=-\frac{(-۰/۶۳۴)\times(۰/۳۶۶)}{(۱/۳۶۶)\times(۲/۳۶۶)}=۰/۰۷۱۸$$

به نحوی مشابه در $s=-۲/۳۶۶$

$$K=-\frac{(-۱/۳۶۶)\times(-۲/۳۶۶)}{(-۰/۳۶۶)\times(۰/۶۳۴)}=۱۴$$

(چون $s=-۰/۶۳۴$ بین دو قطب قرار دارد، شاخه‌های مکان هندسی در این نقطه از هم جدا می‌شوند و چون $s=-۲/۳۶۶$ بین دو صفر قرار دارد، شاخه‌ها در این نقطه به هم می‌پیوندد.)

۴. تعداد کافی نقطه به دست آورید که شرط زاویه را ارضا کنند. (می‌توان نشان داد که مکان هندسی دایره‌ای به مرکز ۱/۵- است که از نقاط شکست می‌گذرد.) مکان هندسی ریشه‌های این سیستم در شکل ۶-۶۴ (ب) نشان داده شده است .

توجه کنید که این سیستم به ازای تمام مقادیر مثبت K پایدار است، زیرا مکان هندسی ریشه‌ها در نیمهٔ چپ صفحهٔ s باقی می‌ماند.

مقادیر کوچک K $(۰<K<۰/۰۷۱۸)$ با یک سیستم فرامیرا متناظرند. به ازای مقادیر میانی K $(۰/۰۷۱۸<K<۱۴)$ سیستمی فرومیرا داریم. سرانجام به ازای مقادیر بزرگ K $(K>۱۴)$ باز سیستمی فرامیرا داریم. به ازای مقادیر بزرگ K زمان رسیدن به حالت ماندگار بسیار کوتاهتر از حالت مربوط به K کوچک است. مقدار K باید طوری تنظیم شود که عملکرد سیستم، طبق معیار داده شده، بهینه شود.

الف ۶-۲ مکان هندسی ریشه‌های سیستم شکل ۶-۶۵ (الف) را رسم کنید.

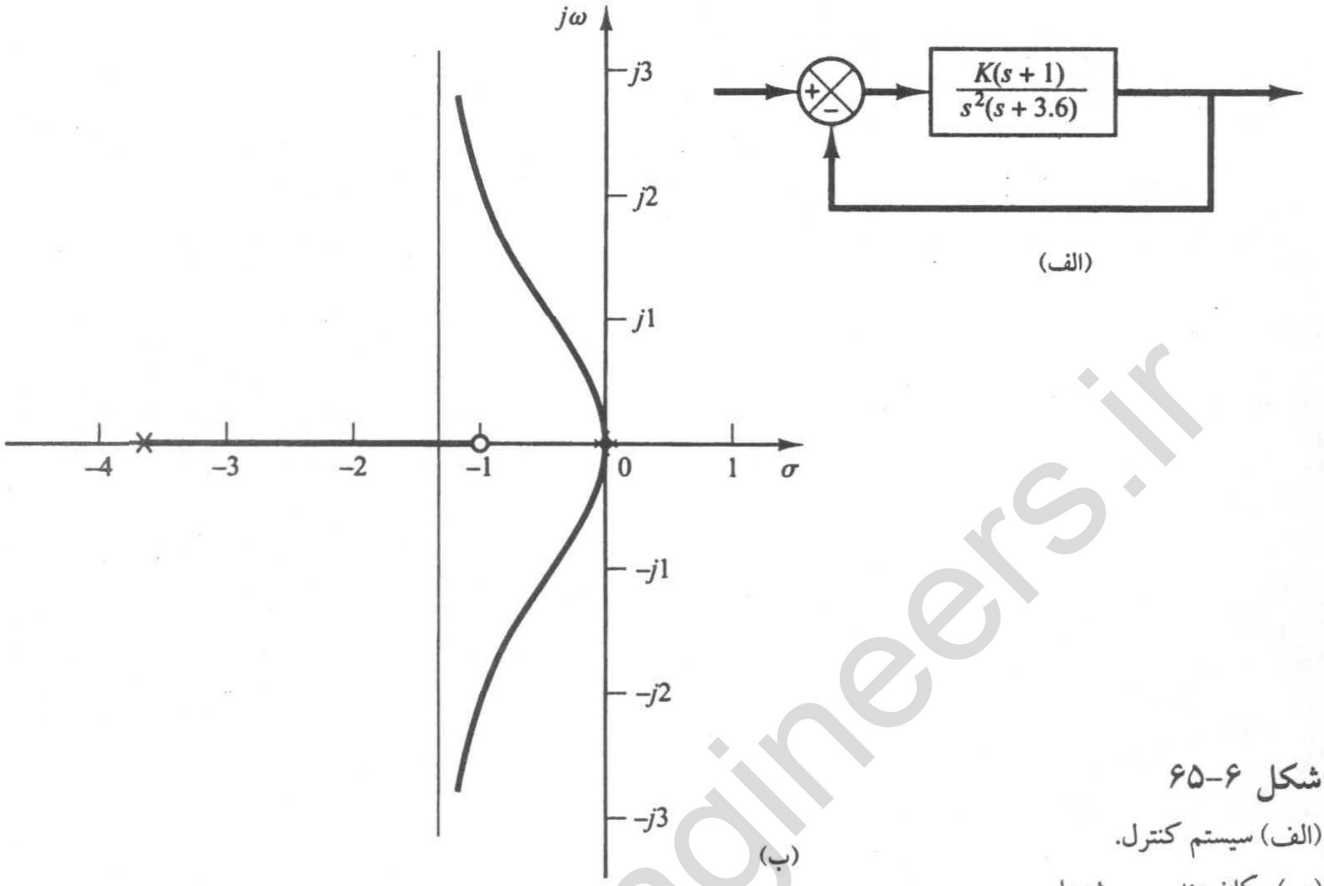
حل: بخش بین نقاط $s=-۱$ و $s=-۳/۶$ محور حقیقی جزء مکان هندسی ریشه‌هاست. زاویهٔ مجانبها به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\text{زاویهٔ مجانبها}=\frac{\pm ۱۸۰^\circ(۲k+۱)}{۳-۱}=۹۰^\circ\,,-۹۰^\circ$$

محل برخورد مجانبها و محور حقیقی به صورت زیر به دست می‌آید

$$s=-\frac{۰+۰+۳/۶-۱}{۳-۱}=-۱/۳$$

controlengineers.ir



شکل ۶-۶۵

(الف) سیستم کنترل.

(ب) مکان هندسی ریشه‌ها .

معادله مشخصه عبارت است از

$$s^3 + 3.6s^2 + K(s+1) = 0$$

پس داریم

$$K = -\frac{s^3 + 3.6s^2}{s+1}$$

نقاط شکست به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(3s + 7.2s)(s+1) - (s^3 + 3.6s^2)}{(s+1)^2} = 0$$

یا

$$s^3 + 3.3s^2 + 3.6s = 0$$

که حل آن به دست می‌دهد

$$s = 0 \quad , \quad s = -1.65 - j0.9367 \quad , \quad s = -1.65 + j0.9367$$

نقطهٔ $s = 0$ نقطهٔ شکست واقعی است. نقاط $s = -1.65 \pm j0.9367$ هیچکدام نقطهٔ شکست نیستند ، زیرا مقدار K متناظر با آنها کمیتی مختلط است.

controlengineers.ir

برای یافتن محل برخورد شاخه‌های مکان هندسی با محور موهومی در معادلهٔ مشخصه قرار می‌دهیم $s = j\omega$ و به دست می‌آوریم

$$(j\omega)^{۳} + ۳/۶(j\omega)^{۲} + K(j\omega) + K = ۰$$

یا

$$(K - ۳/۶\omega^{۲}) + j\omega(K - \omega^{۲}) = ۰$$

توجه کنید که این معادله تنها به ازای $\omega = ۰$، $K = ۰$ برآورده می‌شود. به خاطر وجود قطب دوگانه در مبدا، مکان هندسی ریشه‌ها در $\omega = ۰$ بر محور $j\omega$ مماس است. شاخه‌های مکان هندسی محور $j\omega$ را قطع نمی‌کنند. شکل ۶-۶۵ (ب) نمودار مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را نشان می‌دهد.

الف ۶-۳ مکان هندسی ریشه‌ها را برای سیستم شکل ۶-۶۶ (الف) رسم کنید.

حل: محور حقیقی، بین نقاط $s = -۰/۴$ و $s = -۳/۶$ بخشی از مکان هندسی ریشه‌هاست. مجانبها را می‌توان به صورت زیر یافت

$$\text{زاویهٔ مجانبها} = \frac{\pm ۱۸۰^{\circ}(۲k+۱)}{۳-۱} = ۹۰^{\circ}, -۹۰^{\circ}$$

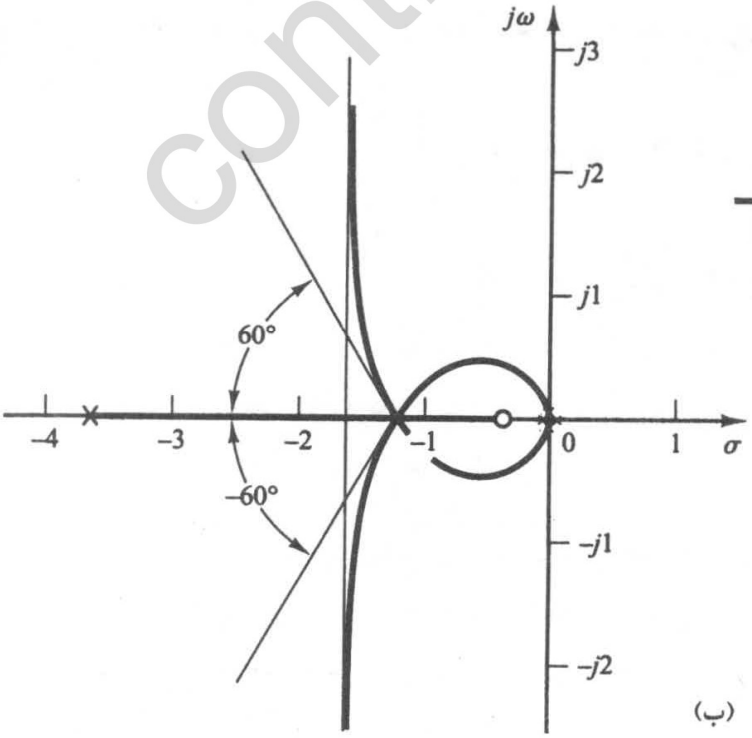
محل برخورد مجانبها و محور حقیقی عبارت است از

$$s = -\frac{۰ + ۰ + ۳/۶ - ۰/۴}{۳-۱} = -۱/۶$$

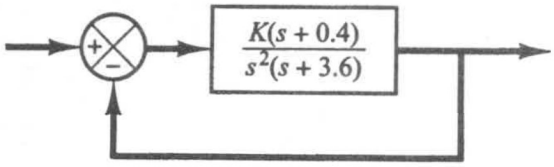
حال نقاط شکست را می‌یابیم. معادلهٔ مشخصه به صورت زیر است

$$s^{۳} + ۳/۶s^{۲} + Ks + ۰/۴K = ۰$$

پس داریم



(ب)



(الف)

شکل ۶-۶۶

(الف) سیستم کنترل.

(ب) مکان هندسی ریشه‌ها .

controlengineers.ir

$$K=-\frac{s^{3}+3/6s^{2}}{s+0/4}$$

نقاط شکست از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{(3s^{2}+7/2s)(s+0/4)-(s^{3}+3/6s^{2})}{(s+0/4)^{2}}=0$$

که نتیجه می‌دهد

$$s^{3}+2/4s^{2}+1/44s=0$$

یا

$$s(s+1/2)^{2}=0$$

پس نقاط شکست در $s=0$ و $s=-1/2$ قرار دارند. توجه کنید که $s=-1/2$ ریشهٔ دوگانه است. وقتی $dK/ds=0$ در یک نقطه ریشهٔ دو گانه دارد، در آن نقطه $d^{2}K/\left(ds^{2}\right)=0$. مقدار K در نقطهٔ $s=-1/2$ عبارت است از

$$K=-\left.\frac{s^{3}+3/6s^{2}}{s+4}\right|_{s=-1/2}=4/32$$

یعنی به ازای $K=4/32$، معادلهٔ مشخصه در $s=-1/2$ ریشهٔ سه گانه دارد. درستی این مطلب را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$s^{3}+3/6s^{2}+4/32s+1/728=\left(s+1/2\right)^{3}=0$$

پس سه شاخهٔ مکان هندسی در $s=-1/2$ همرس‌اند. زاویهٔ خروج از $s=-1/2$ شاخه‌هایی که به مجانبها میل می‌کنند $\pm 180^{\circ}/3$ یعنی 60° و -60° است. (مسئلهٔ **الف-۶-۴** را ببینید.)

سرانجام محل برخورد شاخه‌های مکان هندسی با محور موهومی را می‌یابیم. با گذاشتن $s=j\omega$ در معادلهٔ مشخصه به دست می‌آوریم.

$$(j\omega)^{3}+3/6(j\omega)^{2}+k(j\omega)-0/4K=0$$

یا

$$(0/4K-3/6\omega^{2})+j\omega(K-\omega^{2})=0$$

این معادله تنها به ازای $K=0$، $\omega=0$ ارضا می‌شود. مکان هندسی در $\omega=0$ بر محور $j\omega$ مماس است، زیرا در مبدا یک قطب مضاعف وجود دارد. شاخه‌های مکان هندسی هیچ برخورد دیگری با محور موهومی ندارد.

مکان هندسی ریشه‌های این سیستم در شکل ۶-۶۶ (ب) نشان داده شده است .

الف ۶-۴ معادلهٔ مکان هندسی ریشه‌های سیستم شکل ۶-۶۶ (الف) مسئله **الف-۶-۳** را بیابید. نشان دهید که شاخه‌های مکان هندسی در محل نقطهٔ شکست با محور حقیقی زاویه‌های $\pm 60^{\circ}$ می‌سازند.

حل: معادلهٔ مکان هندسی ریشه‌ها را می‌توان با توجه به شرط زاویه به دست آورد

controlengineers.ir

$$\angle \frac{K(s+0/4)}{s^2(s+3/6)} = \pm 180^\circ(2k+1)$$

که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت

$$\angle s+0/4 - 2\angle s - \angle s+3/6 = \pm 180^\circ(2k+1)$$

با گذاشتن $s=\sigma+j\omega$ به دست می‌آوریم

$$\angle \sigma+j\omega+0/4 - 2\angle \sigma+j\omega - \angle \sigma+j\omega+3/6 = \pm 180^\circ(2k+1)$$

یا

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+0/4}\right) - 2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+3/6}\right) = \pm 180^\circ(2k+1)$$

با تغییر آرایش جملات به دست می‌آوریم

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+0/4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+3/6}\right) \pm 180^\circ(2k+1)$$

هر دو طرف معادلهٔ بالا تانژانت می‌گیریم و با توجه به رابطهٔ زیر

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma+3/6}\right) \pm 180^\circ(2k+1)\right] = \frac{\omega}{\sigma+3/6}$$

به دست می‌آوریم

$$\frac{\dfrac{\omega}{\sigma+0/4} - \dfrac{\omega}{\sigma}}{1+\dfrac{\omega}{\sigma+0/4}\dfrac{\omega}{\sigma}} = \frac{\dfrac{\omega}{\sigma} + \dfrac{\omega}{\sigma+3/6}}{1-\dfrac{\omega}{\sigma}\dfrac{\omega}{\sigma+3/6}}$$

معادلهٔ بالا را می‌توان به شکل زیر ساده کرد

$$\frac{\omega\sigma - \omega(\sigma+0/4)}{(\sigma+0/4)\sigma+\omega^2} = \frac{\omega(\sigma+3/6)+\omega\sigma}{\sigma(\sigma+3/6)-\omega^2}$$

یا

$$\omega(\sigma^3 + 2/4\sigma^2 + 1/44\sigma + 1/6\omega^2 + \sigma\omega^2) = 0$$

که باز به صورت زیر ساده‌تر می‌شود

$$\omega[\sigma(\sigma+1/2)^2 + (\sigma+1/6)\omega^2] = 0$$

به ازای $s \neq -1/6$ می‌توان معادلهٔ بالا را به صورت زیر نوشت

$$\omega\left[\omega - (\sigma+1/2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma+1/6}}\right]\left[\omega + (\sigma+1/2)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma+1/6}}\right] = 0$$

به این ترتیب معادلهٔ شاخه‌های مکان هندسی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\omega = 0$$

controlengineers.ir

$$\omega=(\sigma+۱/۲)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma+۱/۶}}$$

$$\omega=-(\sigma+۱/۲)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma+۱/۶}}$$

معادلهٔ $\omega=۰$ محور حقیقی است. مکان هندسی به ازای $۰\le K\le\infty$ بین نقاط $s=-۰/۴$ و $s=-۳/۶$ قرار دارد. (بقیهٔ محور حقیقی، یعنی بجز این پاره‌خط و $s=۰$ مکان هندسی ریشه‌ها به ازای $-\infty\le K<۰$ است.)

معادله‌های

$$\omega=\pm(\sigma+۱/۲)\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma+۱/۶}} \qquad (۲۹-۶)$$

شاخه‌های مختلط به ازای $۰\le K\le\infty$ را نشان می‌دهند. این دو شاخه بین $\sigma=-۱/۶$ و $\sigma=۰$ قرار دارند. [شکل ۶-۶۶ (ب) را ببینید.] شیب این شاخه‌ها در نقطهٔ شکست ($\sigma=-۱/۲$) را می‌توان با محاسبهٔ $d\omega/d\sigma$ معادلهٔ (۶-۲۹) در نقطهٔ $\sigma=-۱/۲$ به دست آورد

$$\left.\frac{d\omega}{d\sigma}\right|_{\sigma=-۱/۲}=\pm\left.\sqrt{\frac{-\sigma}{\sigma+۱/۶}}\right|_{\sigma=-۱/۲}=\pm\sqrt{\frac{۱/۲}{۰/۴}}=\pm\sqrt{۳}$$

چون $\tan^{-1}\sqrt{۳}=۶۰^\circ$، مکان هندسی محور حقیقی را با زاویه‌های $\pm۶۰^\circ$ قطع می‌کند.

الف ۶-۵ سیستم شکل ۶-۶۷ (الف) را در نظر بگیرید. مکان هندسی ریشه‌ها را برای این سیستم رسم کنید. نشان دهید که سیستم به ازای مقادیر بزرگ و کوچک K فرومیرا و به ازای مقادیر متوسط K فرامیرا است.

حل: بخشی از مکان هندسی روی محور حقیقی، بین مبدا و $-\infty$ قرار دارد. زاویهٔ مجانبهای شاخه‌های مکان هندسی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\text{زاویهٔ مجانبها}=\frac{\pm۱۸۰^\circ(۲k+۱)}{۳}=۶۰^\circ\,,-۶۰^\circ\,,-۱۸۰^\circ$$

محل برخورد مجانبها و محور حقیقی عبارت است از

$$s=-\frac{۰+۲+۲}{۳}=-۱/۳۳۳۳$$

نقاط شکست از $dK/ds=۰$ به دست می‌آید. معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$s^۳+۴s^۲+۵s+K=۰$$

پس داریم

$$K=-(s^۳+۴s^۲+۵s)$$

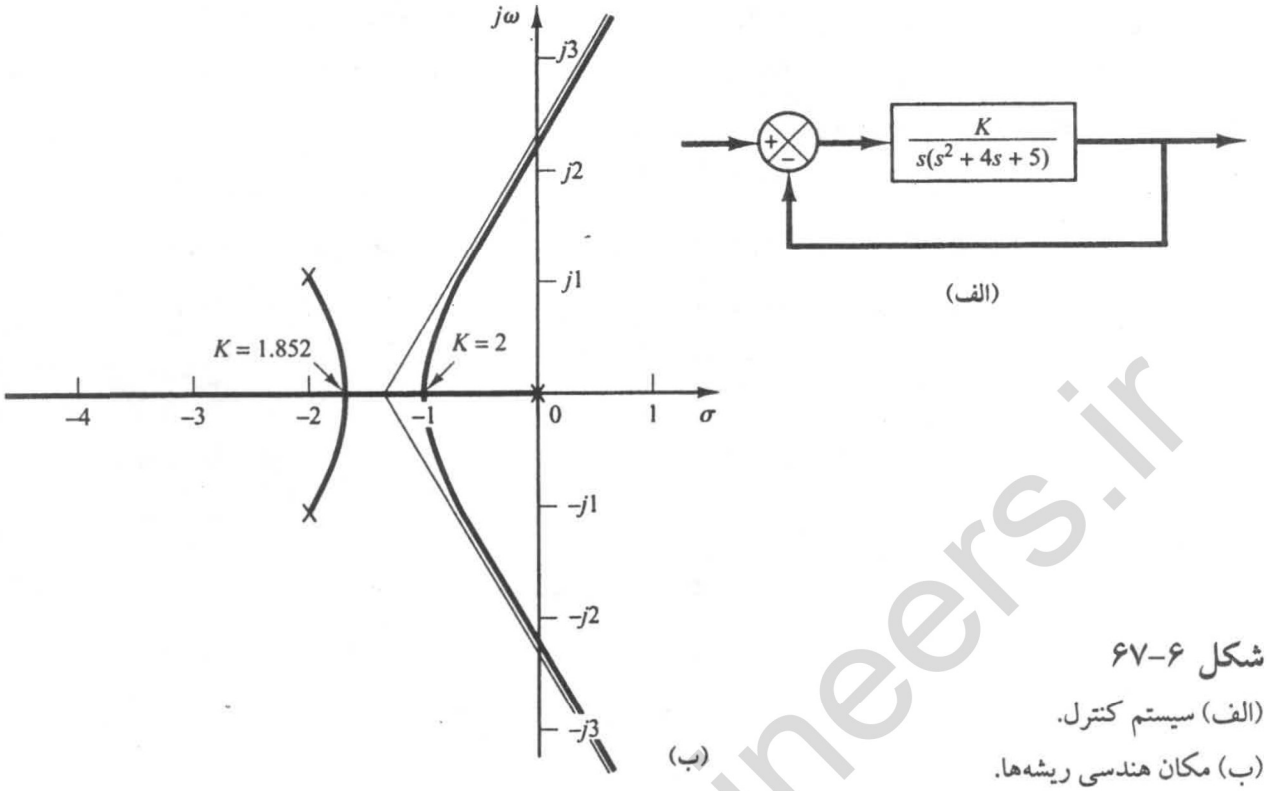
حال قرار می‌دهیم

$$\frac{dK}{ds}=-(۳s^۲+۸s+۵)=۰$$

که نتیجه می‌دهد

$$s=-۱\quad,\quad s=-۱/۶۶۶۷$$

controlengineers.ir



شکل ۶-۶۷

(الف) سیستم کنترل.

(ب) مکان هندسی ریشه‌ها.

چون این نقاط روی مکان هندسی قرار دارند نقاط شکست واقعی‌اند. (در نقطهٔ $s=-1$ مقدار K برابر ۲ است، در نقطهٔ $s=-1{,}6667$ مقدار K برابر ۱٫۸۵۲ است.)

زاویهٔ خروج از قطب مختلط واقع در نیم صفحهٔ بالایی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\theta = 180^\circ - 153{,}43^\circ - 90^\circ$$

یا

$$\theta = -63{,}43^\circ$$

شاخه‌ای از مکان هندسی که از قطب مختلط نیم صفحهٔ بالایی شروع می‌شود، در $s=-1{,}6667$ به محور حقیقی می‌رسد.

حل محل برخورد شاخه‌های مکان هندسی با محور موهومی را می‌یابیم. با گذاشتن $s=j\omega$ در معادلهٔ مشخصه به دست می‌آوریم

$$(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 5(j\omega) + K = 0$$

یا

$$\left(K - 4\omega^2\right) + j\omega\left(5 - \omega^2\right) = 0$$

که از آن به دست می‌آوریم

$$\omega = \pm\sqrt{5} \quad , \quad K = 20 \quad \text{یا} \quad \omega = 0 \quad , \quad K = 0$$

controlengineers.ir

شاخه‌های مکان هندسی در $\omega=\sqrt{5}$ و $\omega=-\sqrt{5}$ محور موهومی را قطع می‌کند. شاخهٔ واقع بر محور حقیقی در $\omega=0$ به محور $j\omega$ می‌رسد. شکل ۶-۶۷ (ب) نمودار مکان هندسی این سیستم را نشان می‌دهد.

توجه کنید که چون این سیستم مرتبه سوم است، سه قطب حلقه بسته دارد. طبیعت پاسخ سیستم به ورودی داده شده به محل قطبهای حلقه بسته بستگی دارد.

به ازای $0<K<1.852$ دو قطب حلقه بستهٔ مختلط و یک قطب حلقه بستهٔ حقیقی وجود دارد. به ازای $1.852\le K\le 2$ سه قطب حلقه بستهٔ حقیقی وجود دارد. به ازای مقادیر حدی K در این گستره داریم،

به ازای $K=1.852$: $s=-1.667$, $s=-1.667$, $s=-0.667$

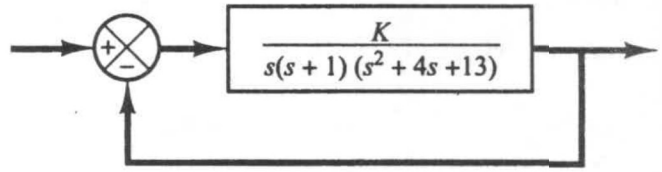
به ازای $K=2$: $s=-1$, $s=-1$, $s=-2$

به ازای $K>2$ دو قطب حلقه بستهٔ مختلط و یک قطب حلقه بستهٔ حقیقی وجود دارد. پس به ازای K کوچک $(0<K<1.852)$ سیستمی فرومیرا داریم. (چون قطب حلقه بستهٔ حقیقی قطب غالب است، در پاسخ گذرا تنها تموج کوچکی وجود دارد.) مقادیر متوسط K $(1.852\le K\le 2)$ با سیستمی فرامیرا متناظر است. به ازای مقادیر بزرگ K $(K>2)$ سیستم فرومیراست. پاسخ سیستم به ازای K بزرگتر، بسیار سریعتر از پاسخ سیستم به ازای K کوچک است.

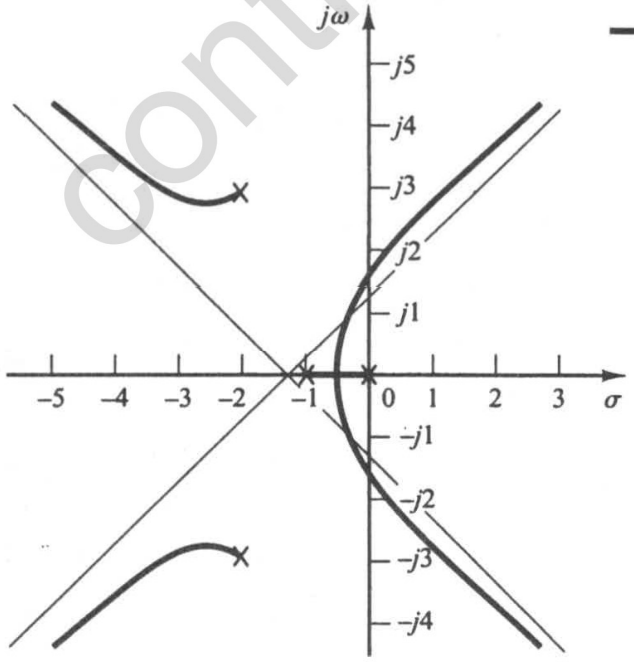
الف ۶-۶ مکان هندسی ریشه‌های سیستم شکل ۶-۶۸ (الف) را رسم کنید.

حل: قطبهای حلقه باز در $s=0$، $s=-1$، $s=-2+j3$ و $s=-2-j3$ قرار دارند. محور حقیقی بین نقاط $s=0$ و $s=-1$ بخشی از مکان هندسی ریشه‌هاست. زاویهٔ مجانبها به صورت زیر به دست می‌آید

$$\text{زاویهٔ مجانبها}=\frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{4}=45^\circ, -45^\circ, 135^\circ, -135^\circ$$



(الف)



(ب)

شکل ۶-۶۸

(الف) سیستم کنترل.

(ب) مکان هندسی ریشه‌ها .

controlengineers.ir

محل برخورد مجانبها و محور حقیقی به صورت زیر به دست می‌آید

$$s=-\frac{۰+۱+۲+۲}{۴}=-۱٫۲۵$$

نقاط شکست را از حل معادلهٔ $dK/ds=۰$ به دست می‌آوریم. توجه کنید که

$$K=-s(s+۱)(s^۲+۴s+۱۳)=-(s^۴+۵s^۳+۱۷s^۲+۱۳s)$$

پس داریم

$$\frac{dK}{ds}=-\left(۴s^۳+۱۵s^۲+۳۴s+۱۳\right)=۰$$

و از آن به دست می‌آوریم

$$s=-۱٫۶۴۲-j۲٫۰۶۷\quad,\quad s=-۱٫۶۴۲+j۲٫۰۶۷\quad,\quad s=-۰٫۴۶۷$$

نقطهٔ $s=-۰٫۴۶۷$ روی مکان هندسی قرار دارد، بنابراین یک نقطهٔ شکست است. مقدار بهره K متناظر با نقاط $s=-۱٫۶۴۲\pm j۲٫۰۶۷$ کمیتی مختلط است. چون این مقدار حقیقی و مثبت نیست، این نقاط نقاط شکست نیستند.

زاویهٔ خروج از قطب مختلط نیم صفحه بالایی عبارت است از

$$\theta=۱۸۰^\circ-۱۲۳٫۶۹^\circ-۱۰۸٫۴۴^\circ-۹۰^\circ$$

یا

$$\theta=-۱۴۲٫۱۳^\circ$$

حال نقاطی از محور $j\omega$ را که روی مکان هندسی است می‌یابیم. معادلهٔ مشخصه به صورت زیر است

$$s^۴+۵s^۳+۱۷s^۲+۱۳s+K=۰$$

با جایگذاری $s=j\omega$ به دست می‌آوریم

$$(j\omega)^۴+۵(j\omega)^۳+۱۷(j\omega)^۲+۱۳(j\omega)+K=۰$$

یا

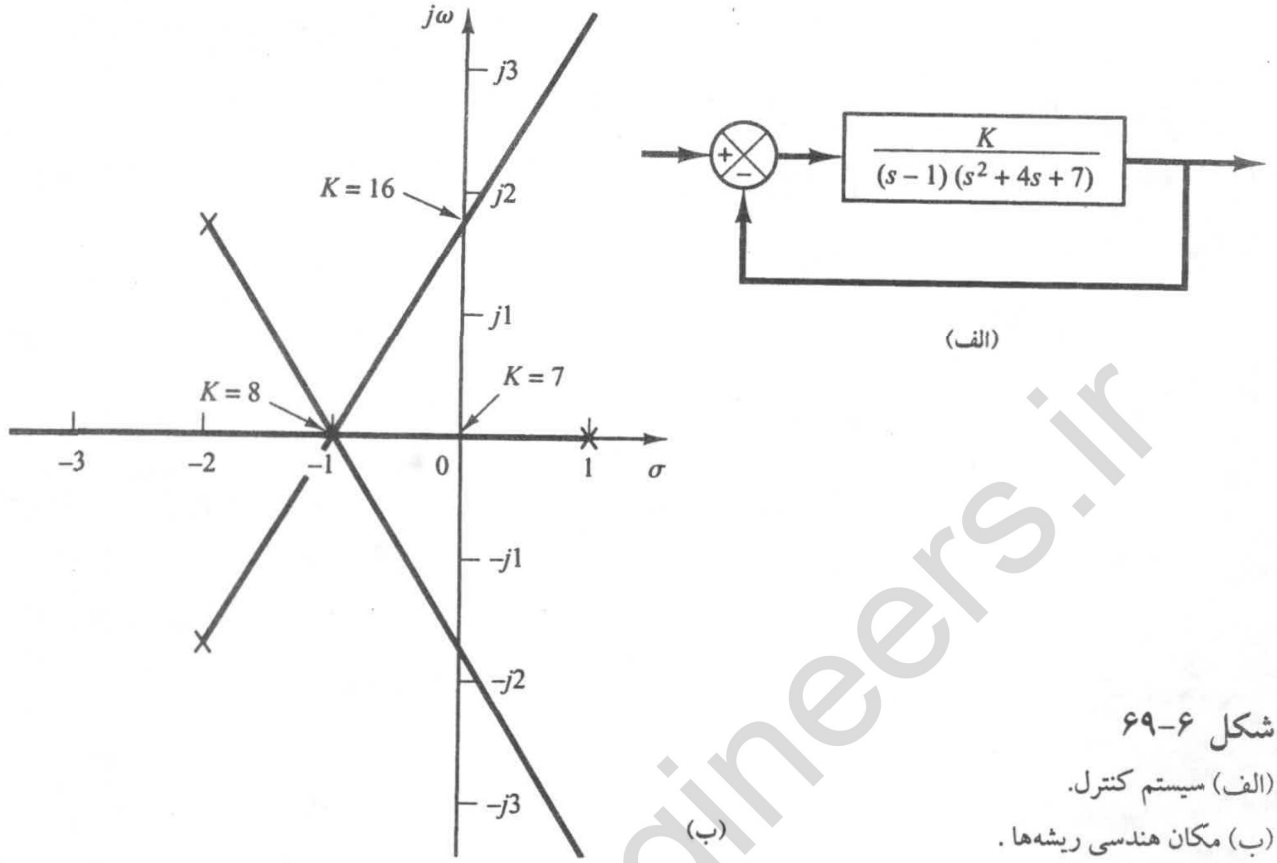
$$\left(K+\omega^۴-۱۷\omega^۲\right)+j\omega\left(۱۳-۵\omega^۲\right)=۰$$

که از آن به دست می‌آوریم

$$\omega=\pm۱٫۶۱۲۵\quad،\quad K=۳۷٫۴۴\quad \text{یا}\quad \omega=۰\quad،\quad K=۰$$

شاخه‌هایی از مکان هندسی که به سمت نیم صفحهٔ راست s می‌روند، محور $j\omega$ را در $\omega=\pm۱٫۶۱۲۵$ قطع می‌کنند. همچنین شاخهٔ واقع بر محور حقیقی در $\omega=۰$ به محور $j\omega$ می‌رسد. شکل ۶-۶۸ (ب) مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را نشان می‌دهد. توجه کنید که هر دو شاخهٔ مکان هندسی که به نیمهٔ راست صفحهٔ s می‌روند، مجانب مربوط به خود را قطع می‌کنند.

controlengineers.ir



شکل ۶-۶۹

(الف) سیستم کنترل.

(ب) مکان هندسی ریشه‌ها .

الف ۶-۷ نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستم شکل ۶-۶۹ (الف) را رسم کنید. گسترهٔ بهرهٔ لازم برای پایداری را مشخص کنید.

حل: قطبهای حلقه باز در $s=1$ و $s=-2\pm j\sqrt{3}$ قرار دارند. شاخه‌ای از مکان هندسی روی محور حقیقی، بین $s=1$ و $s=-\infty$ قرار دارد. مجانبهای مکان هندسی را می‌توان به شکل زیر یافت:

$$\text{زاویهٔ مجانبها}=\frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3}=60^\circ,\ -60^\circ,\ 180^\circ$$

محل برخورد مجانبها و محور حقیقی عبارت است از

$$s=-\frac{-1+2+2}{3}=-1$$

نقاط شکست از حل معادلهٔ $dK/ds=0$ به دست می‌آید. چون

$$K=-(s-1)(s^2+4s+7)=-(s^3+3s^2+3s-7)$$

داریم

$$\frac{dK}{ds}=-(3s^2+6s+3)=0$$

که نتیجه می‌دهد

$$(s+1)^2=0$$

پس $dK/ds=0$ در $s=-1$ ریشهٔ مضاعف دارد. (بنابراین معادلهٔ مشخصه در $s=-1$ سه ریشه دارد.) نقطهٔ

controlengineers.ir

شکست $s=-1$ است . سه شاخهٔ مکان هندسی در این نقطه هم را قطع می‌کنند. زاویه‌های خروج شاخه‌ها از نقطهٔ شکست $\pm 180^\circ/3$ یعنی 60° و -60° است.

حال نقاط برخورد شاخه‌های مکان هندسی و محور موهومی را تعیین می‌کنیم. معادلهٔ مشخصه به صورت زیر است

$$(s-1)(s^2+4s+7)+K=0$$

یا

$$s^3+3s^2+3s-7+K=0$$

با جایگذاری $s=j\omega$ به دست می‌آوریم

$$(j\omega)^3+3(j\omega)^2+3(j\omega)-7+K=0$$

این معادله را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$(K-7-3\omega^2)+j\omega(3-\omega^2)=0$$

معادلهٔ بالا به ازای مقادیر زیر ارضا می‌شود

$$K=7 \quad , \quad \omega=0 \quad \text{یا} \quad K=7+3\omega^2=16 \quad , \quad \omega=\pm\sqrt{3}$$

پس شاخه‌های مکان هندسی محور موهومی را در $\omega=\pm\sqrt{3}$ (به ازای $K=16$) و $\omega=0$ (به ازای $K=7$) قطع می‌کنند. چون مقدار بهرهٔ K در مبدا برابر ۷ است، گسترهٔ پایداری عبارت است از

$$7<K<16$$

شکل ۶-۶۹ (ب) نمودار مکان هندسی این سیستم را نشان می‌دهد. توجه کنید که هر سه شاخه خطوطی راست هستند.

خط راست بودن شاخه‌های مکان هندسی را می‌توان به این صورت اثبات کرد: شرط زاویه عبارت است از

$$\angle\frac{K}{(s-1)(s+2+j\sqrt{3})(s+2-j\sqrt{3})}=\pm 180^\circ(2k+1)$$

پس داریم

$$-\angle s-1-\angle s+2+j\sqrt{3}-\angle s+2-j\sqrt{3}=\pm 180^\circ(2k+1)$$

با جایگذاری $s=\sigma+j\omega$ در این معادله به دست می‌آوریم

$$\angle\sigma-1+j\omega+\angle\sigma+2+j\omega+j\sqrt{3}+\angle\sigma+2+j\omega-j\sqrt{3}=\pm 180^\circ(2k+1)$$

یا

$$\angle\sigma+2+j(\omega+\sqrt{3})+\angle\sigma+2+j(\omega-\sqrt{3})=-\angle\sigma-1+j\omega\pm 180^\circ(2k+1)$$

که می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega+\sqrt{3}}{\sigma+2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\sqrt{3}}{\sigma+2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sigma-1}\right)\pm 180^\circ(2k+1)$$

controlengineers.ir

با گرفتن تانژانت از دو طرف معادلهٔ بالا به دست می‌آوریم

$$\frac{\dfrac{\omega+\sqrt{3}}{\sigma+2}+\dfrac{\omega-\sqrt{3}}{\sigma+2}}{1-\left(\dfrac{\omega+\sqrt{3}}{\sigma+2}\right)\left(\dfrac{\omega-\sqrt{3}}{\sigma+2}\right)}=-\frac{\omega}{\sigma-1}$$

یا

$$\frac{2\omega(\sigma+2)}{\sigma^2+4\sigma+4-\omega^2+3}=-\frac{\omega}{\sigma-1}$$

که می‌توانیم آن را به صورت زیر ساده کنیم

$$2\omega(\sigma+2)(\sigma-1)=-\omega\left(\sigma^2+4\sigma+7-\omega^2\right)$$

یا

$$\omega(3\sigma^2+6\sigma+3-\omega^2)=0$$

که باز به صورت زیر ساده می‌شود

$$\omega\left(\sigma+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\omega\right)\left(\sigma+1-\frac{1}{\sqrt{3}}\omega\right)=0$$

این معادله سه خط زیر را تعریف می‌کند

$$\omega=0\quad,\quad \sigma+1+\frac{1}{\sqrt{3}}\omega=0\quad,\quad \sigma+1-\frac{1}{\sqrt{3}}\omega=0$$

پس شاخه‌های مکان هندسی سه خط راست هستند. توجه کنید که مکان هندسی به ازای $K>0$ بخشهایی از این سه خط راست، به صورت نشان داده شده در شکل ۶-۶۹ (ب) است. (توجه کنید که هر شاخهٔ مکان هندسی از یک قطب حلقه باز شروع شده، با زاویه‌های 180°، 60° و -60° نسبت به محور حقیقی به بی‌نهایت می‌رود.) بخشهای دیگر این خطوط با $K<0$ متناظرند.

الف ۶-۸ سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)H(s)$ زیر در نظر بگیرید.

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

با استفاده از MATLAB مکان هندسی ریشه‌ها و مجانبهای آنها را رسم کنید.

حل: مکان هندسی و مجانبهای آن را روی یک نمودار رسم می‌کنیم. تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)}=\frac{K}{s^3+3s^2+2s}$$

معادلهٔ مجانبها را می‌توان به شکل زیر به دست آورد: توجه کنید که

$$\lim_{s\to\infty}\frac{K}{s^3+3s^2+2s}\approx\lim_{s\to\infty}\frac{K}{s^3+3s^2+3s+1}=\frac{K}{(s+1)^3}$$

controlengineers.ir

پس مجانبها مکان هندسی ریشه‌های سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز زیر هستند

$$G_a(s) = \frac{K}{(s+1)^3}$$

برای سیستم اصلی داریم

```
num = [1 ]
den = [ 1  3  2  0 ]
```

و برای مجانبها

```
numa = [1 ]
dena = [ 1  3  3  1 ]
```

برای استفاده از دستورهای زیر برای ترسیم مکان هندسی

```
r = rlocus(num,den)
a = rlocus(numa ,dena)
plot ( [ r  a ] )
```

تعداد ردیفهای r و a باید یکسان باشد. برای حصول اطمینان از این امر مقادیر بهره را خود به برنامه می‌دهیم. مثلاً

```
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5.1:100;
K = [ K1  K2  K3  K4 ];
r = rlocus(num,den,K)
a = rlocus(numa,dena,K)
y = [ r  a ]
plot ( y,'-')
```

برنامهٔ ۶-۱۵ مکان هندسی ریشه‌ها و مجانبهای آن را به دست می‌دهد. شکل ۶-۷۰ را ببینید.

رسم دو یا تعداد بیشتری منحنی بر روی یک نمودار با استفاده از دستور hold نیز امکان‌پذیر است. در برنامهٔ ۶-۱۶ از دستور hold استفاده شده است. نمودار حاصل در شکل ۶-۷۱ به چشم می‌خورد.

الف-۶-۹ مکان هندسی ریشه‌ها و مجانبهای سیستم با فیدبک واحدی را که تابع تبدیل مسیر پیشخورد آن به صورت زیر است رسم کنید

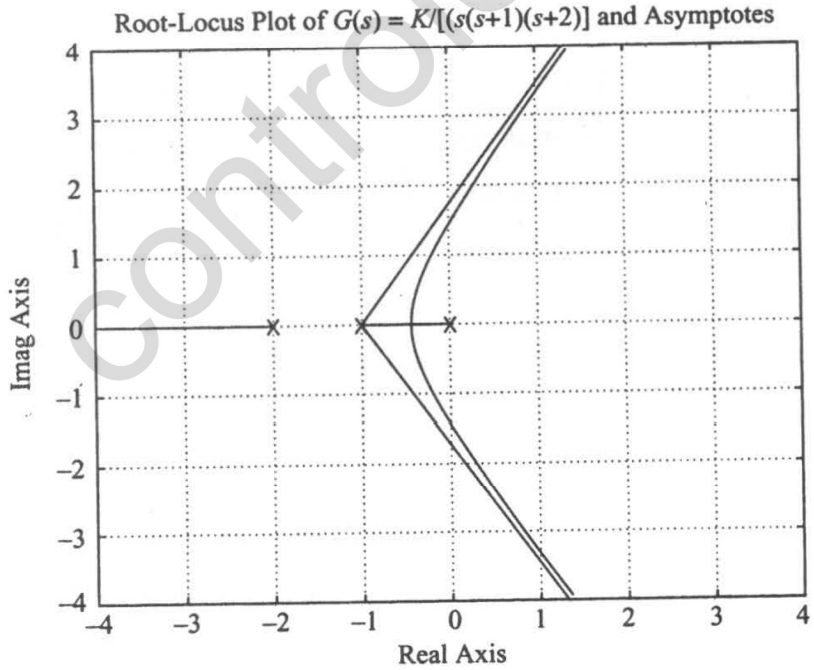
$$G(s) = \frac{K}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

محل دقیق برخورد مکان هندسی ریشه‌ها با محور $j\omega$ را بیابید.

controlengineers.ir

MATLAB Program 6–15

```
% ---------- Root-Locus Plots ----------
num = [1];
den = [1  3  2  0];
numa = [1];
dena = [1  3  3  1];
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1  K2  K3  K4];
r = rlocus(num,den,K);
a = rlocus(numa,dena,K);
y = [r    a];
plot(y,'-')
v = [-4  4  -4  4]; axis(v)
grid
title('Root-Locus Plot of G(s) = K/[s(s + 1)(s + 2)] and Asymptotes')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
% ***** Manually draw open-loop poles in the hard copy *****
```

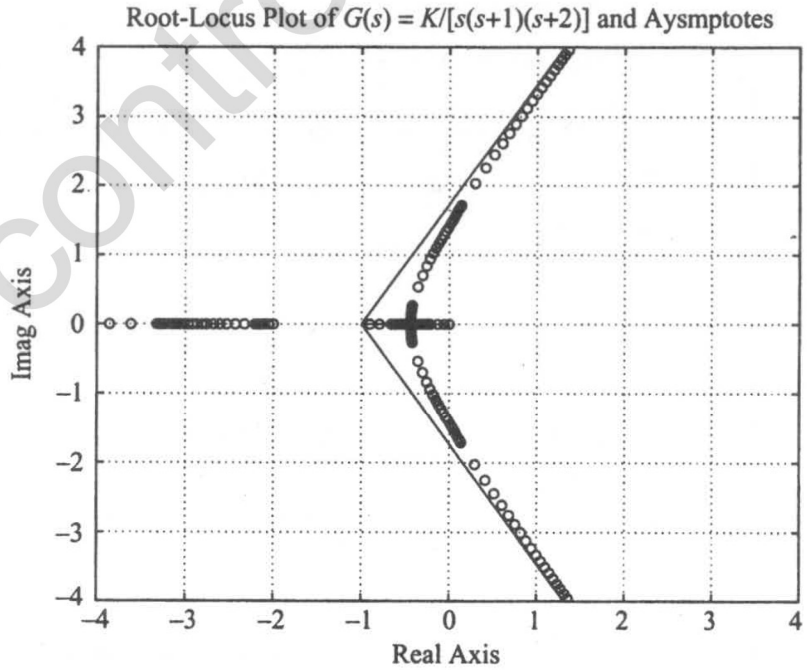


شکل ۶–۷۵ مکان هندسی ریشه‌ها.

controlengineers.ir

MATLAB Program 6–16

```
% ------------ Root-Locus Plots ------------
num = [1];
den = [1  3  2  0];
numa = [1];
dena = [1  3  3  1];
K1 = 0:0.1:0.3;
K2 = 0.3:0.005:0.5;
K3 = 0.5:0.5:10;
K4 = 10:5:100;
K = [K1  K2  K3  K4];
r = rlocus(num,den,K);
a = rlocus(numa,dena,K);
plot(r,'o')
hold
Current plot held
plot(a,'-')
v = [-4  4  -4  4]; axis(v)
grid
title('Root-Locus Plot of G(s) = K/[s(s+1)(s+2)] and Asymptotes')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```



شکل ۶-۷۱ مکان هندسی ریشه‌ها.

controlengineers.ir

حل : تابع تبدیل مسیر پیشخورد $G(s)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(s)=\frac{K}{s^4+4s^3+11s^2+14s+10}$$

توجه کنید که $\lim_{s\to\infty} G(s)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\lim_{s\to\infty} G(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{K}{s^4+4s^3+11s^2+14s+10}$$
$$\approx \lim_{s\to\infty}\frac{K}{s^4+4s^3+6s^2+4s+1}=\lim_{s\to\infty}\frac{K}{(s+1)^4}$$

که در آن از اتحاد زیر استفاده شده است

$$(s+a)^4=s^4+4as^3+6a^2s^2+4a^3s+a^4$$

عبارت

$$\lim_{s\to\infty} G(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{K}{(s+1)^4}$$

معادلهٔ مجانبها را به دست می‌دهد .

برنامهٔ ۶-۱۷ روش رسم مکان هندسی ریشه‌های $G(s)$ و مجانبهای آن با MATLAB را نشان می‌دهد. توجه کنید که صورت و مخرج $G(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

```
num=[1]
den=[1  4  11  14  10]
```

برای صورت و مخرج مجانبها ، تابع $\lim_{s\to\infty} G(s)$ را به کار می‌بریم ، یعنی

```
numa=[1]
dena=[1  4  6  4  1]
```

شکل ۶-۷۲ مکان هندسی ریشه‌ها و مجانبهای آنها را نشان می‌دهد.

چون معادلهٔ مشخصهٔ سیستم به صورت زیر است

$$(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)+K=0$$

برای یافتن محل برخورد مکان هندسی ریشه‌ها و محور موهومی ، قرار می‌دهیم $s=j\omega$ ، و به دست می‌آوریم

$$[(j\omega)^2+2(j\omega)+2][(j\omega)^2+2(j\omega)+5]+K$$
$$=(\omega^4-11\omega^2+10+K)+j(-4\omega^3+14\omega)=0$$

از برابر صفر قرار دادن بخش موهومی نتیجه می‌گیریم

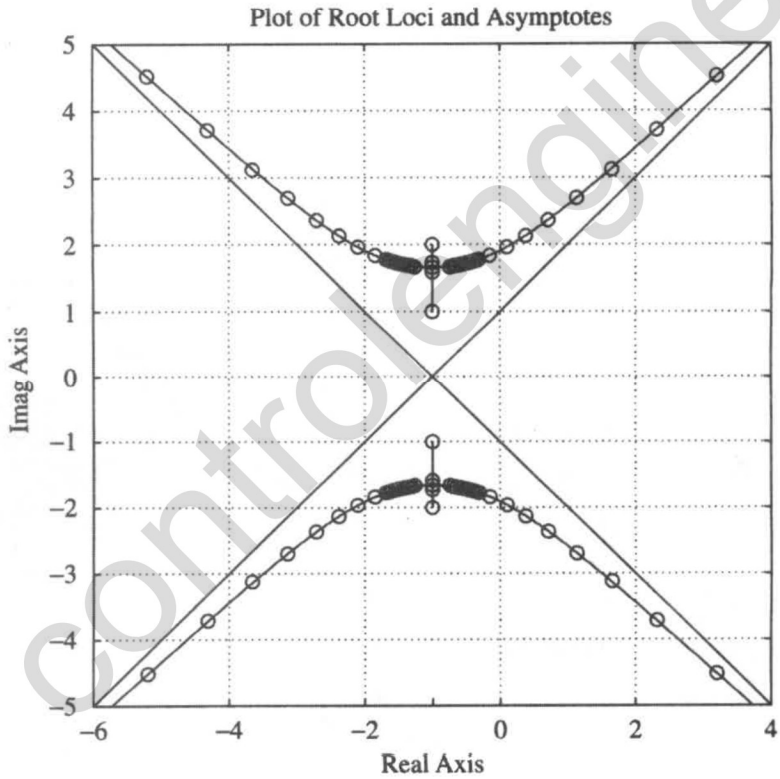
$$\omega=\pm 1/8708$$

بنابراین محل دقیق برخورد مکان هندسی ریشه‌ها و محور $j\omega$ ، $\omega=\pm 1/8708$ است . با برابر صفر قرار دادن بخش حقیقی ، مقدار متناظر K در محل برخورد را برابر ۱۶/۲۵ به دست می‌آوریم .

controlengineers.ir

MATLAB Program 6–17

```
% ***** Root-locus plot *****
num = [1];
den = [1  4  11  14  10];
numa = [1];
dena = [1  4  6  4  1];
r = rlocus(num,den);
plot(r,'-')
hold
Current plot held
plot(r,'o')
rlocus(numa,dena);
v = [-6  4  -5  5]; axis(v); axis('square')
grid
title('Plot of Root Loci and Asymptotes')
```



شکل ۶-۷۲
مکان هندسی ریشه‌ها
و مجانبهای آن .

الف-۶-۱۰ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد با تابع تبدیل مسیر پیشروی $G(s)$ زیر در نظر بگیرید

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را با استفاده از MATLAB رسم کنید.

حل: تابع تبدیل مسیر پیشرو را می‌توان به صورت زیر نوشت

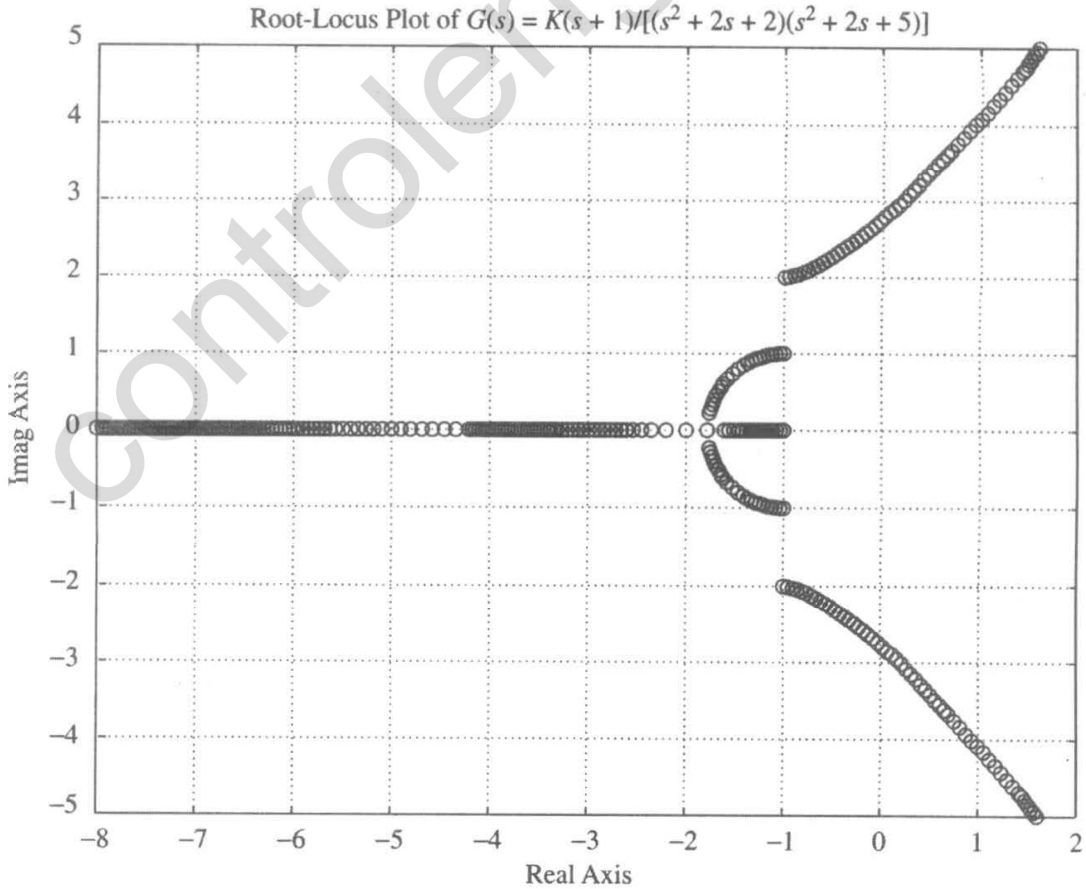
$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s^4+4s^3+11s^2+14s+10}$$

controlengineers.ir

بنابراین برنامهٔ MATLAB برای رسم نمودار مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را می‌توان به صورت برنامهٔ ۶-۱۸ نوشت . نمودار حاصل در شکل ۶-۷۳ نشان داده شده است .

MATLAB Program 6–18

```
num = [1  1];
den = [1  4  11  14  10];
K1 = 0:0.1:2;
K2 = 2:0.0.2:2.5;
K3 = 2.5:0.5:10;
K4 = 10:1:50;
K = [K1  K2  K3  K4]
r = rlocus(num,den,K);
plot(r, 'o')
v = [-8  2  -5  5]; axis(v); axis('square')
grid
title('Root-Locus Plot of G(s) = K(s+1)/[(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)]')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```



شکل ۶-۷۳ نمودار مکان هندسی ریشه‌ها .

controlengineers.ir

الف ۶-۱۱ تابع تبدیل سیتسم مکانیکی شکل ۶-۷۴ را بیابید. جابه‌جایی x_i را ورودی و جابجایی x_o را خروجی سیستم فرض کنید.

حل: با توجه به شکل معادلات حرکت زیر را به دست می‌آوریم:

$$b_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = b_1(\dot{x}_o - \dot{y})$$

$$b_1(\dot{x}_o - \dot{y}) = k\,y$$

با فرض صفر بودن شرایط اولیه از این دو معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم و با حذف $Y(s)$ به دست می‌آوریم

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_2}{b_1+b_2}\,\frac{(b_1/k)s+1}{\dfrac{b_2}{b_1+b_2}\,\dfrac{b_1}{k}s+1}$$

این تابع تبدیل بین $X_o(s)$ و $X_i(s)$ است. با تعریف

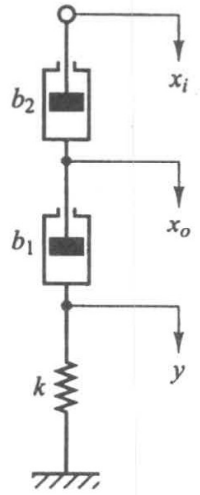
$$\frac{b_1}{k} = T \quad , \quad \frac{b_2}{b_1+b_2} = \alpha < 1$$

به دست می‌آوریم

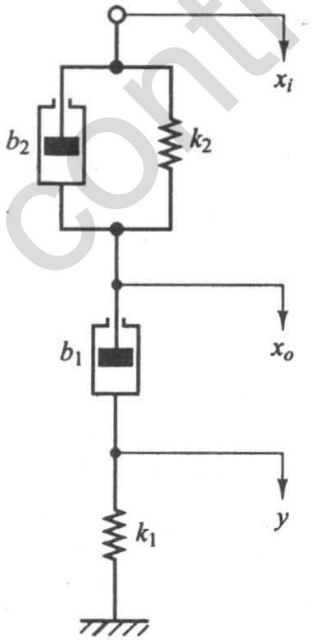
$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = \frac{s+(1/T)}{s+(1/\alpha T)}$$

پس این سیستم یک سیستم مکانیکی پیشفاز است.

الف ۶-۱۲ تابع تبدیل سیستم مکانیکی شکل۶-۷۵ را بیابید. جابه‌جایی x_i را ورودی و جابه‌جایی x_o را خروجی سیستم فرض کنید.



شکل ۶-۷۴ سیستم مکانیکی.



شکل ۷-۷۵ سیستم مکانیکی.

controlengineers.ir

حل: معادلات حرکت این سیستم عبارت است از

$$b_2(\dot{x}_i - \dot{x}_o) + k_2(x_i - x_o) = b_1(\dot{x}_o - \dot{y})$$
$$b_1(\dot{x}_o - \dot{y}) = k_1 y$$

از این معادلات با فرض صفر بودن شرایط اولیه تبدیل لاپلاس می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$$b_2[sX_i(s) - sX_o(s)] + k_2[X_i(s) - X_o(s)] = b_1[sX_o(s) - sY(s)]$$
$$b_1[sX_o(s) - sY(s)] = k_1 Y(s)$$

با حذف $Y(s)$ از این معادلات می‌توانیم تابع تبدیل $X_o(s)/X_i(s)$ زیر را بیابیم

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right)}{\left(\frac{b_1}{k_1}s+1\right)\left(\frac{b_2}{k_2}s+1\right)+\frac{b_1}{k_2}s}$$

تعریف می‌کنیم

$$T_1 = \frac{b_1}{k_1} \quad , \quad T_2 = \frac{b_2}{k_2}$$

اگر مقادیر k_1 ، k_2 ، b_1 ، و b_2 را بتوان به صورتی برگزید که β رابطهٔ زیر را برآورده کند

$$\frac{b_1}{k_1} + \frac{b_2}{k_2} + \frac{b_1}{k_2} = \frac{T_1}{\beta} + \beta T_2 \quad (\beta > 1) \tag{۶-۳۰}$$

می‌توان تابع تبدیل $X_o(s)/X_i(s)$ را به صورت زیر ساده کرد

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{\left[(T_1/\beta)s+1\right](\beta T_2 s+1)} = \frac{\left(s+\frac{1}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{T_2}\right)}{\left(s+\frac{\beta}{T_1}\right)\left(s+\frac{1}{\beta T_1}\right)}$$

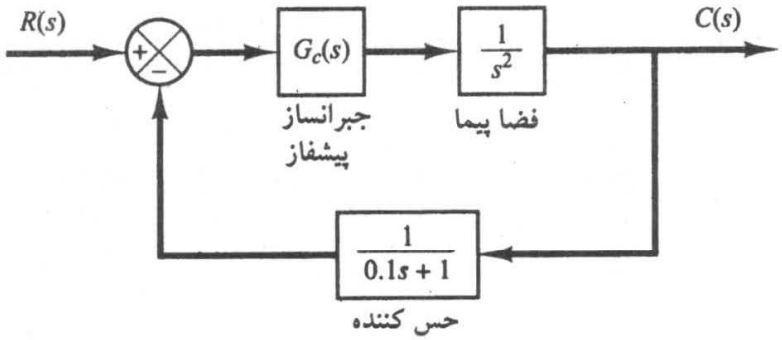
[توجه کنید که ممکن است مقادیر k_1 ، k_2 ، b_1 ، و b_2 به نحوی باشند که نتوان مقداری برای β یافت که معادلهٔ (۶-۳۰) را برآورده کند.]

اگر چنین مقداری برای β یافت شود ، و اگر یک s_1 وجود داشته باشد که به ازای آن شرایط زیر برآورده شود (که در این صورت $s = s_1$ یکی از قطبهای حلقه‌بستهٔ سیستم کنترلی است که می‌خواهیم در آن از این سیستم مکانیکی استفاده کنیم)

$$\left|\frac{s_1+\frac{1}{T_2}}{s_1+\frac{1}{\beta T_2}}\right| \approx 1 \quad , \quad -5^\circ < \angle\frac{s_1+\frac{1}{T_2}}{s_1+\frac{1}{\beta T_2}} < 0^\circ$$

در این صورت سیستم مکانیکی شکل ۶-۷۵ یک شبکهٔ پسفاز – پیشفاز است.

controlengineers.ir



شکل ۶-۷۶
سیستم کنترل فضاپیما.

الف ۶-۱۳ مدل سیستم کنترل فضاپیمای شکل ۶-۷۶ را در نظر بگیرید. جبرانساز پیشفاز $G_c(s)$ را به نحوی طرح کنید که نسبت میرایی ζ قطبهای حلقه بستهٔ غالب ۰/۵ و فرکانس طبیعی نامیرای آنها ۲ rad/s باشد.

حل:

تلاش اول: جبرانساز پیشفاز $G_c(s)$ را به صورت زیر فرض کنید

$$G_c(s)=K_c\left(\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}\right) \qquad (0<\alpha<1)$$

با توجه به مشخصات خواسته شده $\zeta=0/5$ و $\omega_n=2$ rad/s قطبهای حلقه بستهٔ غالب باید در محلهای زیر باشند:

$$s=-1\pm j\sqrt{3}$$

ابتدا کمبود زاویه در محل این قطب حلقه بسته را حساب می‌کنیم

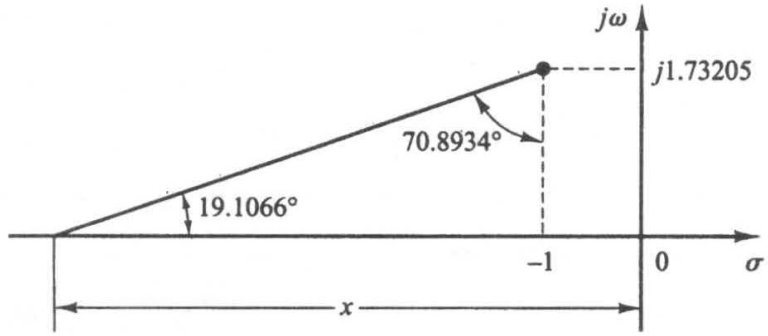
$$\text{کمبود زاویه}=-120^\circ-120^\circ-10/8934^\circ+180^\circ$$
$$=-70/8934^\circ$$

جبرانساز پیشفاز باید این زاویه را ایجاد کند. برای تعیین محل صفر و قطب شبکهٔ پیشفاز راههای مختلفی وجود دارد. بیایید صفر جبرانساز را در $s=-1$ قرار دهیم. حال با توجه به شکل ۶-۷۷ معادلهٔ زیر را داریم:

$$\frac{1/73205}{x-1}=\tan\left(90^\circ-70/8934^\circ\right)=0/34641$$

یا

$$x=1+\frac{1/73205}{0/34641}=6$$



شکل ۶-۷۷
تعیین قطب شبکهٔ پیشفاز.

controlengineers.ir

پس

$$G_c(s) = K_c \frac{s+1}{s+6}$$

مقدار K_c را می‌توان از شرط اندازه به دست آورد

$$K_c \left| \frac{s+1}{s+6} \frac{1}{s^2} \frac{1}{0.1s+1} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

یا

$$K_c = \left| \frac{(s+6)s^2(0.1s+1)}{s+1} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 11.2000$$

پس

$$G_c(s) = 11.2 \frac{s+1}{s+6}$$

تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر در می‌آید

$$G_c(s)\,G(s)\,H(s) = 11.2 \frac{s+1}{(s+6)s^2(0.1s+1)}$$
$$= \frac{11.2(s+1)}{0.1s^4 + 1.6s^3 + 6s^2}$$

نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده را می‌توان به سادگی با MATLAB و با دادن گزاره‌های num و den و دستور rlocus رسم کرد. شکل ۶-۷۸ نتیجه را نشان می‌دهد.

تابع تبدیل حلقه بستهٔ سیستم جبران شده عبارت است از:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{11.2(s+1)(0.1s+1)}{(s+6)s^2(0.1s+1) + 11.2(s+1)}$$

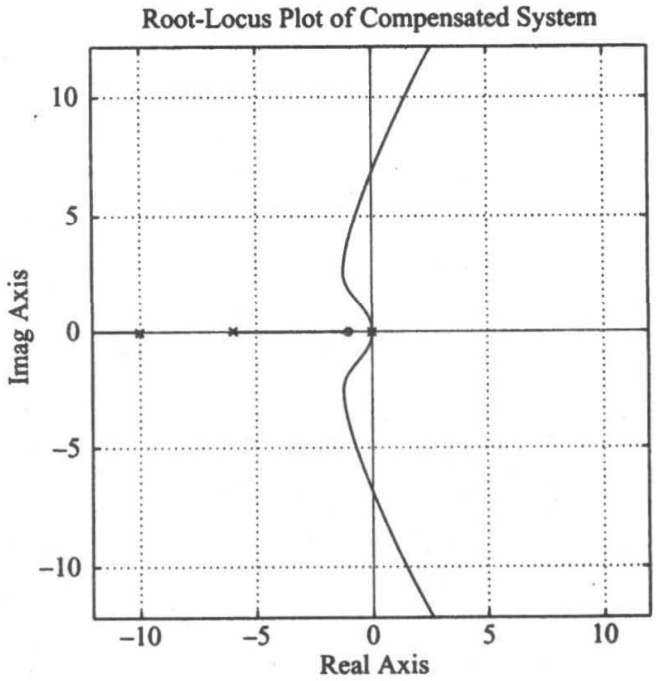
شکل ۶-۷۹ منحنی پاسخ پله را نشان می‌دهد. گرچه نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته ۰/۵ است، ولی ماکزیمم فراجهش بسیار بیشتر از حد انتظار است. بررسی دقیق‌تر مکان هندسی ریشه‌ها نشان می‌دهد که وجود صفر در $s=-1$ ماکزیمم فراجهش را زیاد کرده است . [به طور کلی اگر یک یا چند صفر حلقه بسته (صفر یا صفرهای جبرانساز) سمت راست قطبهای مختلط غالب قرار داشته باشد، قطبهای غالب دیگر غالب نیستند.] اگر فراجهش بزرگ قابل تحمل نیست، صفر (یا صفرهای) جبرانساز را باید به حد کافی به سمت چپ برد .

در طراحی فعلی باید جبرانساز را اصلاح کرده، ماکزیمم فراجهش را کمتر کنیم. این کار با تغییر جبرانساز پیشفاز، به روش صورت گرفته در زیر انجام می‌شود.

تلاش دوم: برای تغییر دادن شکل مکان هندسی ریشه‌ها می‌توان دو شبکهٔ پیشفاز به کار برد که هر کدام نصف زاویهٔ مورد نیاز، یعنی $(70.8934^\circ)/2 = 35.4467^\circ$ را تامین کند. محل صفرها را در $s=-3$ برمی‌گزینیم. (این انتخابی دلخواه است. محلهایی چون $s=-2.5$ و $s=-4$ را نیز می‌توان برگزید.)

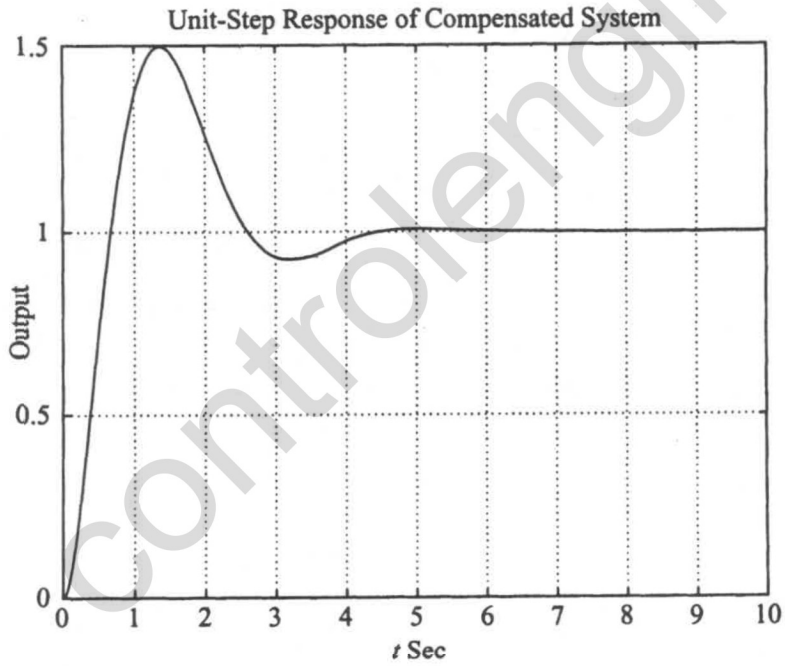
پس از انتخاب دو صفر در $s=-3$، محل قطبها را به صورت نشان داده شده، در شکل ۶-۸۰ تعیین می‌کنیم

controlengineers.ir



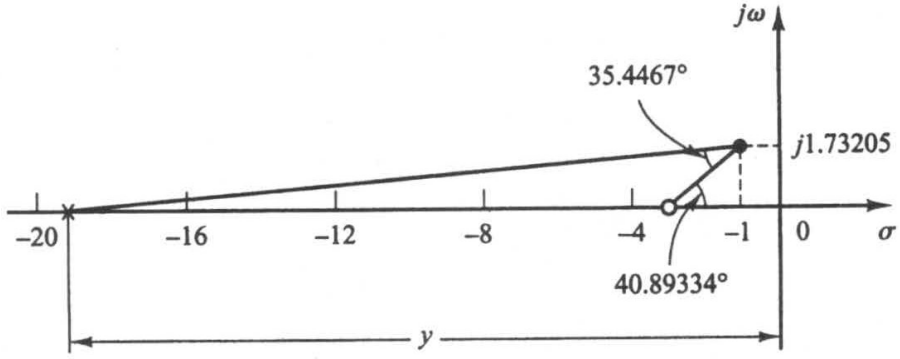
شکل ۶-۷۸

مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده.



شکل ۶-۷۹

پاسخ پلهٔ سیستم جبران شده.



شکل ۶-۸۰

تعیین قطب شبکهٔ پیشفاز.

controlengineers.ir

$$\frac{۱٫۷۳۲۰۵}{y-۱}=\tan\left(۴۰٫۸۹۳۳۴^\circ-۳۵٫۴۴۶۷^\circ\right)$$
$$=\tan\left(۵٫۴۴۶۶^\circ\right)=۰٫۰۹۵۳۵$$

که نتیجه می‌دهد

$$y=۱+\frac{۱٫۷۳۲۰۵}{۰٫۰۹۵۳۵}=۱۹٫۱۶۵۲$$

پس جبرانساز پیشفاز دارای تابع تبدیل زیر است:

$$G_c(s)=K_c\left(\frac{s+۳}{s+۱۹٫۱۶۵۲}\right)^۲$$

مقدار K_c را می‌توان از شرط اندازه به صورت زیر تعیین کرد

$$\left|K_c\left(\frac{s+۳}{s+۱۹٫۱۶۵۲}\right)^۲\frac{۱}{s^۲}\frac{۱}{۰٫۱s+۱}\right|_{s=-۱+j\sqrt{۳}}=۱$$

یا

$$K_c=۱۷۴٫۳۸۶۴$$

پس جبرانساز پیشفاز طراحی شده شکل زیر را به خود می‌گیرد

$$G_c(s)=۱۷۴٫۳۸۶۴\left(\frac{s+۳}{s+۱۹٫۱۶۵۲}\right)^۲$$

و تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر درمی‌آید

$$G_c(s)\,G(s)\,H(s)=۱۷۴٫۳۸۶۴\left(\frac{s+۳}{s+۱۹٫۱۶۵۲}\right)^۲\frac{۱}{s^۲}\frac{۱}{۰٫۱s+۱}$$

شکل ۶-۸۱ (الف) نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده را نشان می‌دهد. توجه کنید که نزدیک مبدا صفر حلقه بسته وجود ندارد. شکل ۶-۸۱ (ب) تصویر بزرگ شدهٔ مکان هندسی ریشه‌ها را در نزدیکی مبدا نشان می‌دهد.

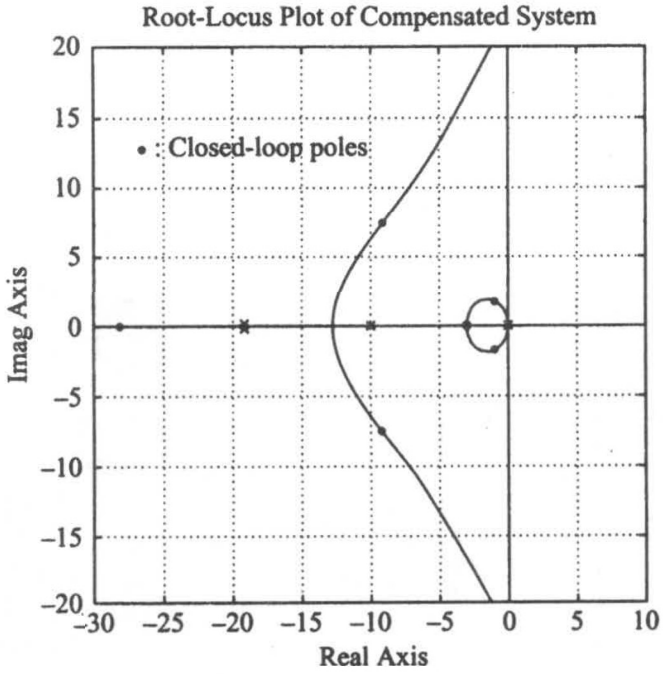
تابع تبدیل حلقه بسته به صورت زیر است

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{۱۷۴٫۳۸۶۴(s+۳)^۲(۰٫۱s+۱)}{(s+۱۹٫۱۶۵۲)^۲s^۲(۰٫۱s+۱)+۱۷۴٫۳۸۶۴(s+۳)^۲}$$

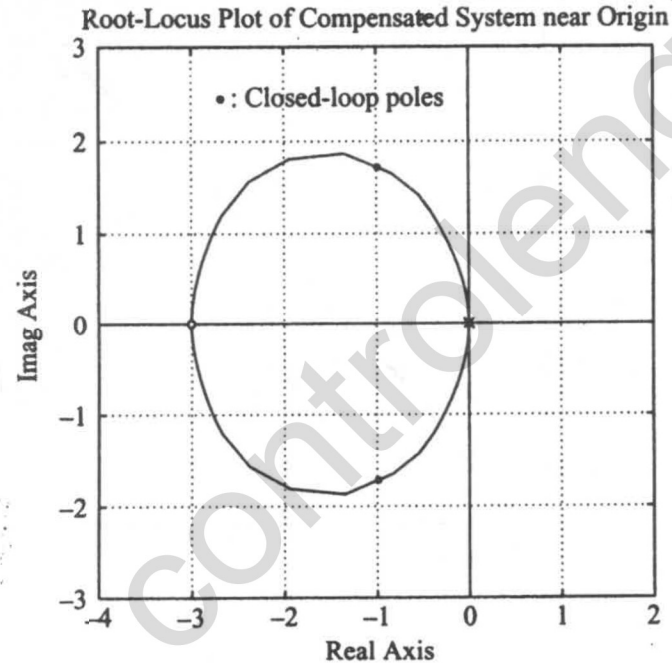
قطبهای حلقه بسته در محلهای زیر قرار دارند

$$s=-۱\pm j۱٫۷۳۲۰۵$$
$$s=-۹٫۱۸۴۷\pm j۷٫۴۸۱۴$$
$$s=-۲۷٫۹۶۰۶$$

controlengineers.ir



(الف)



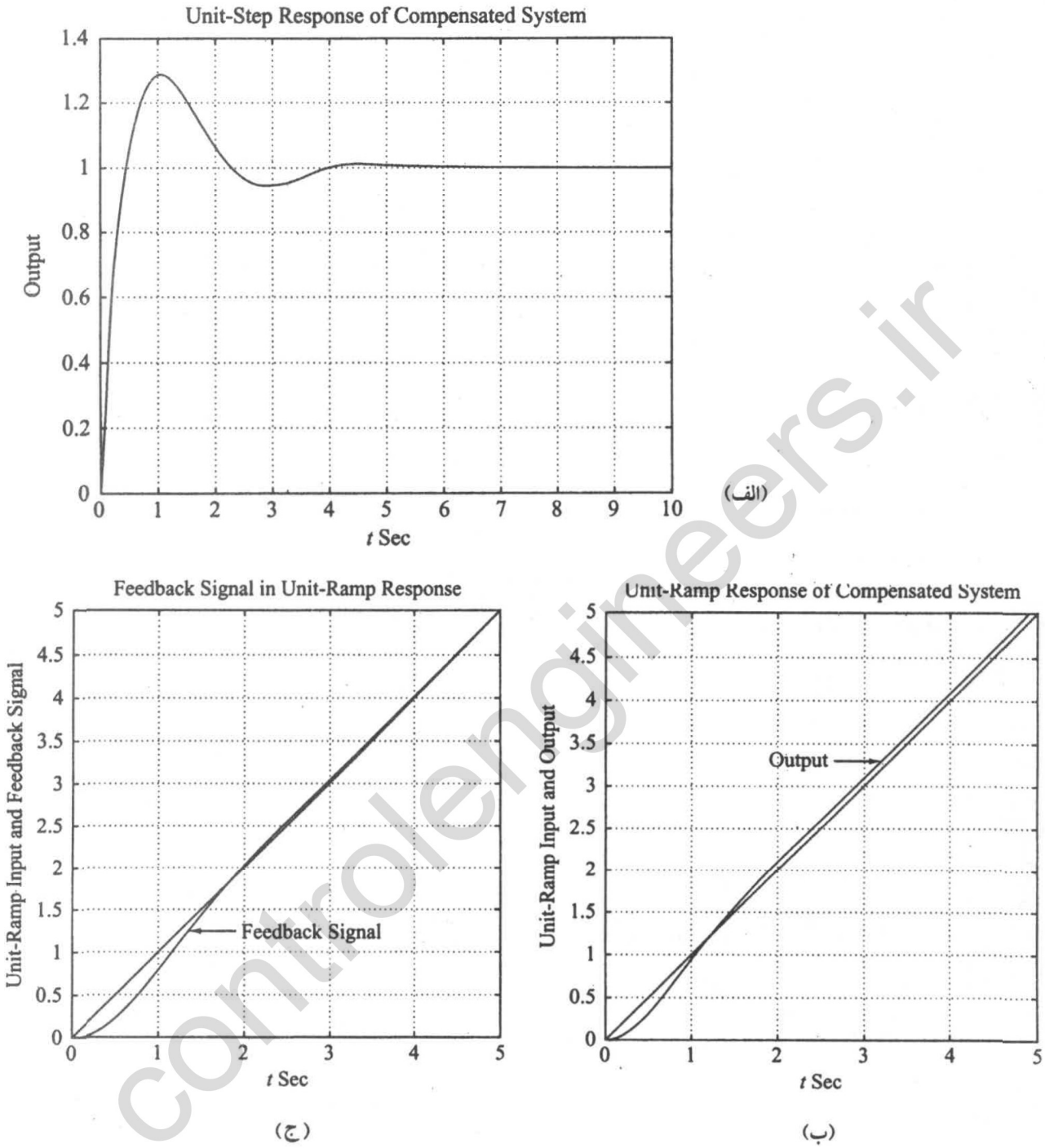
(ب)

شکل ۶-۸۱

(الف) مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده؛ (ب) مکان هندسی ریشه‌ها در حوالی مبدأ.

شکل‌های ۶-۸۲ (الف) و (ب) پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم جبران شده را نشان می‌دهند. منحنی پاسخ پله معقول است و منحنی پاسخ شیب مقبول به نظر می‌آید. توجه کنید که در پاسخ شیب خروجی کمی از ورودی پیش است. علت این امر تابع تبدیل $1/(0.1s+1)$ مسیر فیدبک است. با رسم سیگنال فیدبک برحسب t و ورودی شیب در می‌یابیم که در حالت ماندگار سیگنال فیدبک از ورودی پیش می‌افتد. شکل ۶-۸۲ (ج) را ببینید.

controlengineers.ir

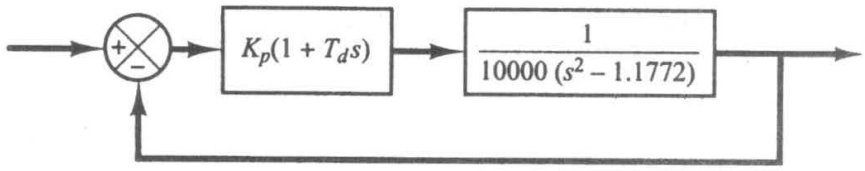


شکل ۶-۸۲ (الف) پاسخ پلهٔ واحد سیستم جبران شده ؛ (ب) پاسخ شیب واحد سیستم جبران شده ؛(ج) سیگنال فیدبک بر حسب زمان در پاسخ به ورودی شیب واحد .

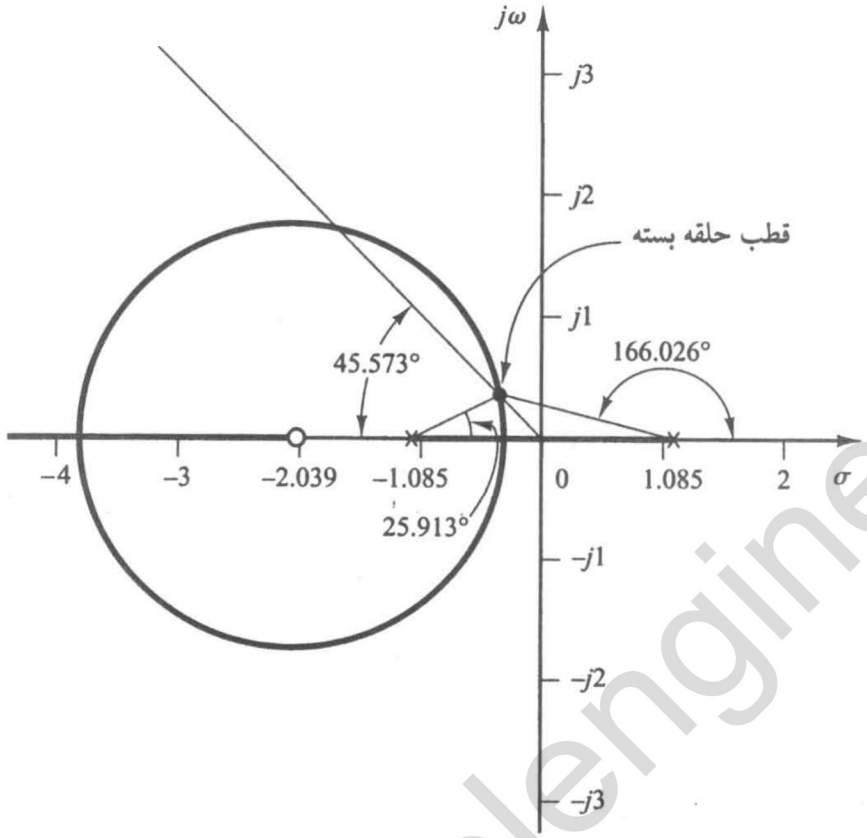
الف ۶-۱۴ سیستم دارای وسیلهٔ تحت کنترل ناپایدار شکل ۶-۸۳ (الف) را در نظر بگیرید، با استفاده از رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها یک کنترل کنندهٔ تناسبی – مشتقی طرح کنید (یعنی مقادیر K_p و T_d را تعیین کنید)، به نحوی که نسبت میرایی ζ سیستم حلقه بسته ۰/۷ و فرکانس طبیعی نامیرای آن $\omega_n = ۰/۵$ rad/s باشد.

حل: توجه کنید که تابع تبدیل حلقه باز دو قطب در $s = ۱/۰۸۵$ و $s = -۱/۰۸۵$ و یک صفر در $s = -1/T_d$ دارد، که در اینجا مقدارش معلوم نیست.

controlengineers.ir



(الف)



(ب)

شکل ۶-۸۳

(الف) کنترل PD یک وسیلهٔ ناپایدار؛

(ب) نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستم.

چون برای قطبهای حلقه بسته باید داشته باشیم $\omega_n = ۰/۵$ rad/s و $\zeta = ۰/۷$ ، قطبها باید در محلهای زیر قرار داشته باشند

$$s = ۰/۵ \angle ۱۸۰^\circ \pm ۴۵/۵۷۳^\circ$$

($\zeta = ۰/۷$ با خطی که از مبدأ می‌گذرد و با بخش منفی محور حقیقی زاویهٔ °۴۵/۵۷۳ می‌سازد متناظر است.) پس محل مطلوب قطبهای حلقه بسته عبارت است از

$$s = -۰/۳۵ \pm j۰/۳۵۷$$

قطبهای حلقه باز و قطبهای حلقه بستهٔ مطلوب در نمودار شکل ۶-۸۳ (ب) مشخص شده‌اند. کمبود زاویه در $s = -۰/۳۵ + j۰/۳۵۷$ برابر است با

$$-۱۶۶/۰۲۶^\circ - ۲۵/۹۱۳^\circ + ۱۸۰^\circ = -۱۱/۹۳۹^\circ$$

یعنی صفر واقع در $s = -1/T_d$ باید زاویه‌ای برابر °۱۱/۹۳۹ در محل قطب ایجاد کند، به این ترتیب محل صفر به صورت زیر تعیین می‌شود

controlengineers.ir

$$s=-\frac{۱}{T_d}=-۲/۰۳۹$$

پس داریم

$$K_p(۱+T_d s)=K_p T_d\left(\frac{۱}{T_d}+s\right)=K_p T_d(s+۲/۰۳۹) \qquad (۶-۳۱)$$

مقدار T_d برابر است با

$$T_d=\frac{۱}{۲/۰۳۹}=۰/۴۹۰۴$$

بهرهٔ K_p را می‌توان با توجه به شرط اندازه به صورت زیر یافت:

$$\left| K_p T_d \frac{s+۲/۰۳۹}{۱۰۰۰۰(s^۲-۱/۱۷۷۲)} \right|_{s=-۰/۳۵+j۰/۳۵۷}=۱$$

یا

$$K_p T_d=۶۹۹۹/۵$$

پس

$$K_p=\frac{۶۹۹۹/۵}{۰/۴۹۰۴}=۱۴۲۷۳$$

گذاشتن مقادیر عددی T_d و K_p در معادلهٔ (۶-۳۱) به دست می‌دهد

$$K_p(۱+T_d s)=۱۴۲۷۳(۱+۰/۴۹۰۴s)=۶۹۹۹/۵(s+۲/۰۳۹)$$

که تابع تبدیل کنترل کنندهٔ تناسبی – مشتقی مطلوب است.

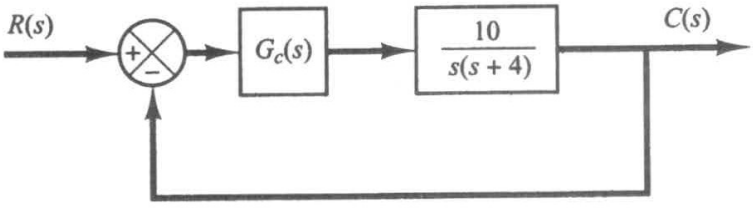
الف ۶-۱۵ سیستم کنترل شکل ۶-۸۴ را در نظر بگیرید. یک کنترل کنندهٔ پسفاز $G_c(s)$ برای دستیابی به ثابت خطای ایستای سرعت $K_v=۵۰s^{-۱}$ طرح کنید. محل قطبهای حلقه بستهٔ سیستم اصلی، که در $s=-۲\pm j\sqrt{۶}$ قرار دارند، نباید خیلی تغییر کند.

حل: تابع تبدیل جبرانساز پسفاز عبارت است از

$$G_c(s)=\hat{K}_c\frac{s+(۱/T)}{s+(۱/\beta T)} \qquad (\beta>۱)$$

برای دستیابی به $K_v=۵۰s^{-۱}$ مشخص شده، داریم

$$K_v=\lim_{s\to ۰} s\,G_c(s)\frac{۱۰}{s(s+۴)}=\hat{K}_c\beta ۲/۵=۵۰$$



شکل ۶-۸۴
سیستم کنترل.

controlengineers.ir

بنابراین

$$\hat{K}_c \beta = ۲۰$$

با انتخاب $\hat{K}_c = ۱$ به دست می‌آوریم

$$\beta = ۲۰$$

انتخاب می‌کنیم $T = ۱۰$. پس جبرانساز پسفاز را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$G_c(s) = \frac{s + ۰/۱}{s + ۰/۰۰۵}$$

اثر زاویهٔ جبرانساز پسفاز در قطب حلقه بستهٔ $s = -۲ + j\sqrt{۶}$ عبارت است از

$$\left. \angle G_c(s) \right|_{s=-۲+j\sqrt{۶}} = \tan^{-۱}\frac{\sqrt{۶}}{-۱/۹} - \tan^{-۱}\frac{\sqrt{۶}}{-۱/۹۹۵}$$
$$= -۱/۳۶۱۶^\circ$$

که مقدار کوچکی است. اندازهٔ $G_c(s)$ در $s = -۲ + j\sqrt{۶}$ برابر ۰/۹۸۱ است . بنابراین تغییر محل قطبهای حلقه بستهٔ غالب بسیار کم است.

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر است

$$G_c(s)\, G(s) = \frac{s + ۰/۱}{s + ۰/۰۰۵} \frac{۱۰}{s(s+۴)}$$

تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{۱۰s + ۱}{s^۳ + ۴/۰۰۵s^۲ + ۱۰/۰۲s + ۱}$$

برای مقایسهٔ مشخصات پاسخ گذرای سیستم، قبل و بعد از جبرانسازی، پاسخ پله و شیب سیستمهای جبران شده و جبران نشده به ترتیب در شکلهای ۶-۸۵ (الف) و (ب) نشان داده شده است. شکل ۶-۸۵ (ج) خطای حالت ماندگار پاسخ شیب را نشان می‌دهد. جبرانساز پسفاز طراحی شده قابل قبول است .

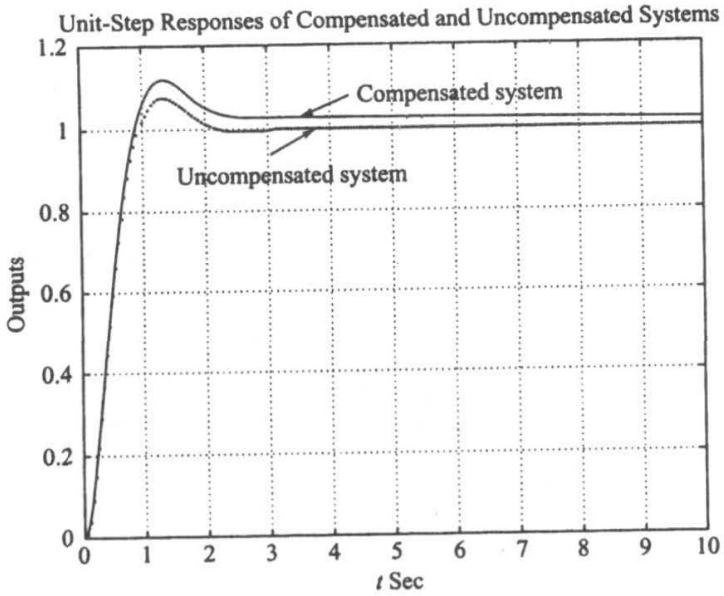
الف ۶-۱۶ سیستم کنترل با فیدبک واحدی با تابع تبدیل پیشخورد زیر در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{۱۰}{s(s+۲)(s+۸)}$$

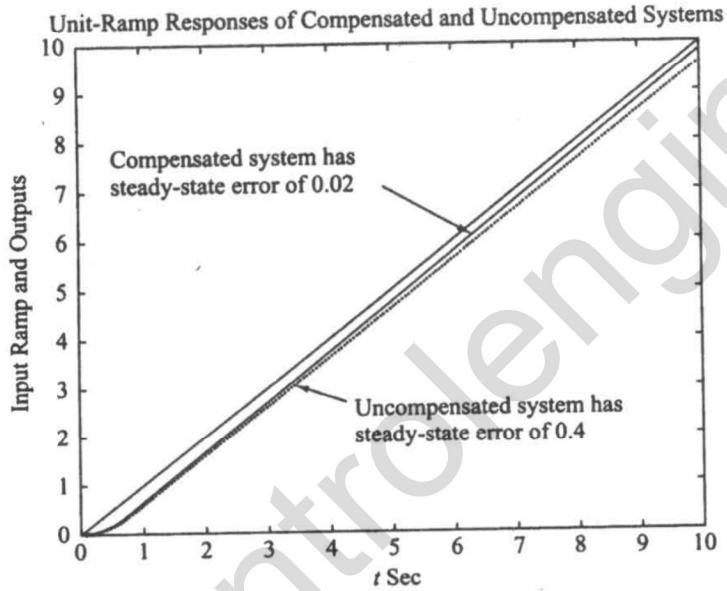
جبرانسازی طرح کنید تا قطبهای حلقه بستهٔ غالب در $s = -۲ \pm j۲\sqrt{۳}$ قرار گیرد و ثابت خطای ایستای سرعت $۸۰\ \text{sec}^{-۱}$ شود.

حل: ثابت خطای ایستای سرعت سیستم جبران نشده $K_v = \frac{۱۰}{۱۶} = ۰/۶۲۵$ است. برای رسیدن به $K_v = ۸۰$ بهرهٔ حلقه باز باید ۱۲۸ برابر شود. (بنابراین یک جبرانساز پسفاز لازم داریم.) نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران نشده نشان می‌دهد که با تنظیم بهره نمی‌توان قطبهای حلقه بستهٔ غالب را در $s = -۲ \pm j۲\sqrt{۳}$ قرار داد. شکل ۶-۸۶ را ببینید. (یعنی یک جبرانساز پیشفاز نیز لازم است.) پس باید از جبرانساز پسفاز – پیشفاز استفاده کنیم.

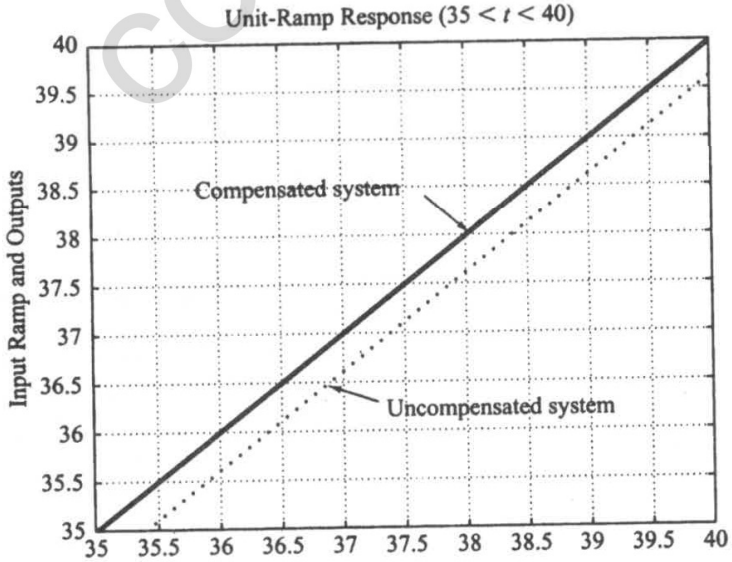
controlengineers.ir



(الف)



(ب)

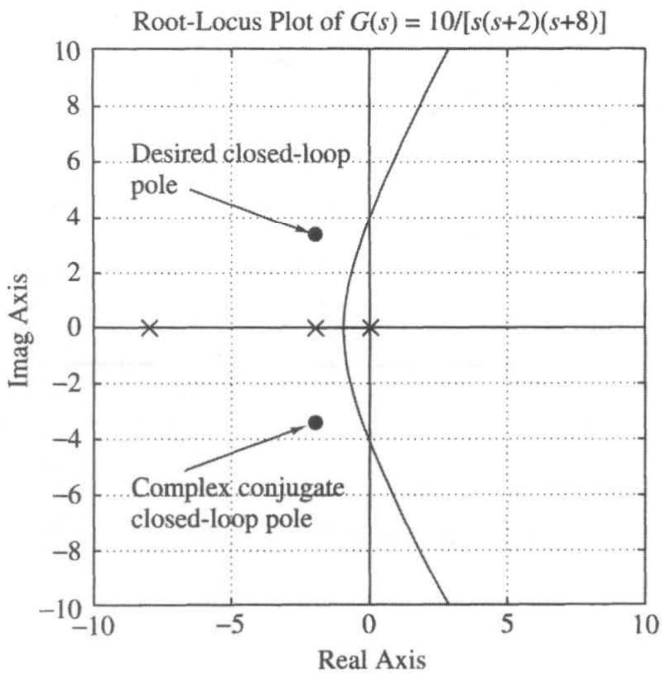


(ج)

شکل ۶-۸۵

(الف) پاسخ پله سیستمهای جبران شده و جبران نشده؛ (ب) پاسخ شیب سیستمهای جبران شده و جبران نشده؛ (ج) پاسخ‌های شیب که خطای حالت ماندگار را نشان می‌دهد.

controlengineers.ir



شکل ۶-۸۶
مکان هندسی ریشه‌ها به ازای
$G(s)=۱۰/[s(s+۲)(s+۸)]$.

تابع تبدیل جبرانساز پسفاز – پیشفاز را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$G_c(s)=K_c\left(\frac{s+\frac{۱}{T_۱}}{s+\frac{\beta}{T_۱}}\right)\left(\frac{s+\frac{۱}{T_۲}}{s+\frac{۱}{\beta T_۲}}\right)$$

که در آن $K_c=۱۲۸$ ، زیرا باید داشته باشیم

$$K_v=\lim_{s\to ۰} sG_c(s)G(s)=\lim_{s\to ۰} sK_cG(s)=K_c\frac{۱۰}{۱۶}=۸۰$$

که به ازای $K_c=۱۲۸$ حاصل می‌شود. کمبود زاویه در محل قطب حلقه بستهٔ مطلوب $s=-۲+j۲\sqrt{۳}$ عبارت است از

$$\text{کمبود زاویه}=-۱۲۰^\circ-۹۰^\circ-۳۰^\circ+۱۸۰^\circ=-۶۰^\circ$$

بخش پیشفاز جبرانساز باید این زاویه را ایجاد کند. برای یافتن $T_۱$ از روش ترسیمی بخش ۶-۸ استفاده می‌کنیم.

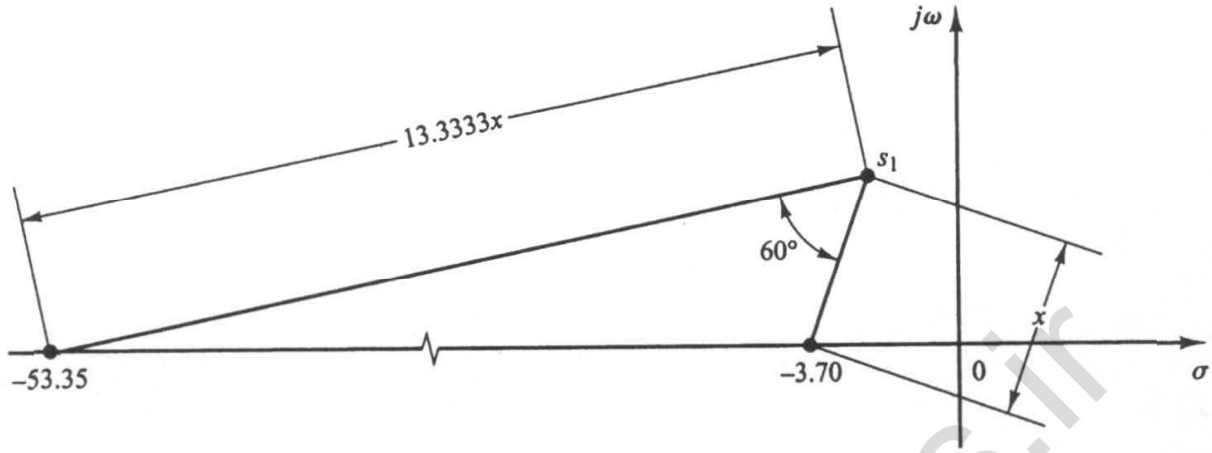
بخش پیشفاز باید شرایط زیر را ارضا کند:

$$\left|۱۲۸\frac{s_۱+(۱/T_۱)}{s_۱+(\beta/T_۱)}G(s_۱)\right|_{s_۱=-۲+j۲\sqrt{۳}}=۱$$

$$\left\angle\frac{s_۱+\left(۱/T_۱\right)}{s_۱+\left(\beta/T_۱\right)}\right|_{s_۱=-۲+j۲\sqrt{۳}}=۶۰^\circ$$

شرط اول را می‌توان به صورت زیر ساده کرد

controlengineers.ir



شکل ۶-۸۷ تعیین ترسیمی محل صفر و قطب بخش پیشفاز جبرانساز .

$$\left|\frac{s_1+(1/T_1)}{s_1+(\beta/T_1)}\right|_{s_1=-2+j2\sqrt{3}}=\frac{1}{13.3333}$$

با روش به کار رفته در بخش ۶-۸ ، صفر $(s=1/T_1)$ و قطب $(s=\beta/T_1)$ را می‌توان به شکل زیر یافت

$$\frac{1}{T_1}=3.70 \quad , \quad \frac{\beta}{T_1}=53.35$$

شکل ۶-۸۷ را ببینید. پس مقدار β به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\beta=14.419$$

برای بخش پسفاز جبرانساز می‌توان برگزید

$$\frac{1}{\beta T_2}=0.01$$

پس

$$\frac{1}{T_2}=0.1442$$

دقت کنید که

$$\left|\frac{s_1+0.1442}{s_1+0.01}\right|_{s_1=-2+j2\sqrt{3}}=0.9837 \qquad \angle\frac{s_1+0.1442}{s_1+0.01}\Bigg|_{s_1=-2+j2\sqrt{3}}=-1.697^\circ$$

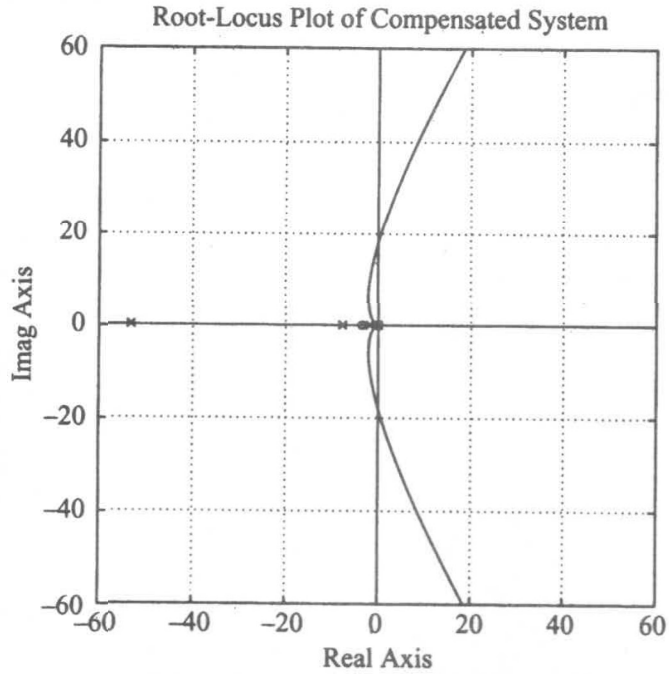
اثر فاز بخش پسفاز -1.697° و اثر اندازه آن ۰٫۹۸۳۷ است. پس قطبهای حلقه بستهٔ غالب نزدیک محلهای مطلوب $s=-2\pm j2\sqrt{3}$ قرار دارد. به این ترتیب جبرانساز طراحی شده قابل قبول است.

$$G_c(s)=128\left(\frac{s+3.70}{s+53.35}\right)\left(\frac{s+0.1442}{s+0.01}\right)$$

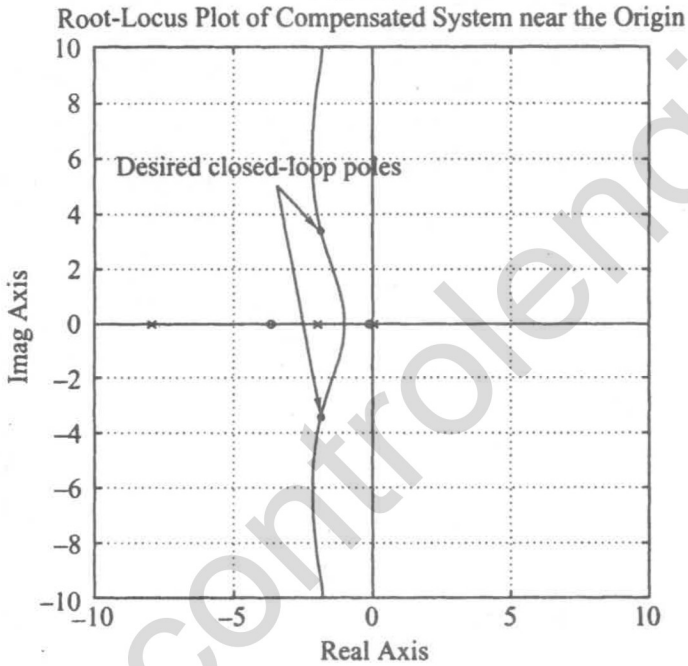
تابع تبدیل پیشخورد سیستم جبران شده به صورت زیر درمی‌آید

$$G_c(s)\,G(s)=\frac{1280(s+3.70)(s+0.1442)}{s\,(s+53.35)(s+0.01)(s+2)(s+8)}$$

controlengineers.ir



(الف)



(ب)

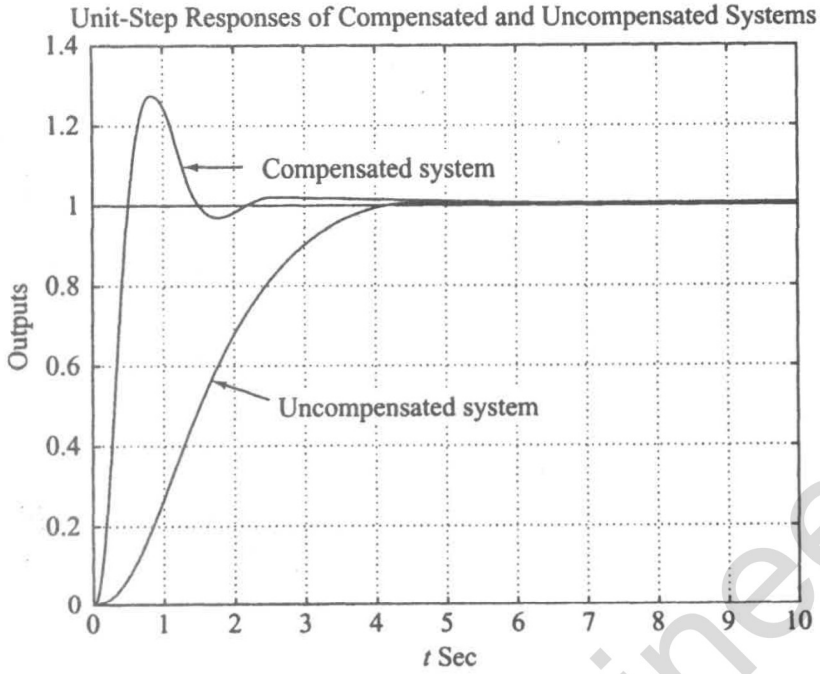
شکل ۶-۸۸
(الف) مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده؛
(ب) مکان هندسی ریشه‌ها در نزدیکی مبدأ.

شکل ۶-۸۸ (الف) مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده را نشان می‌دهد. بخش بزرگ شدهٔ نزدیک مبدأ در شکل ۶-۸۸ (ب) نشان داده شده است.

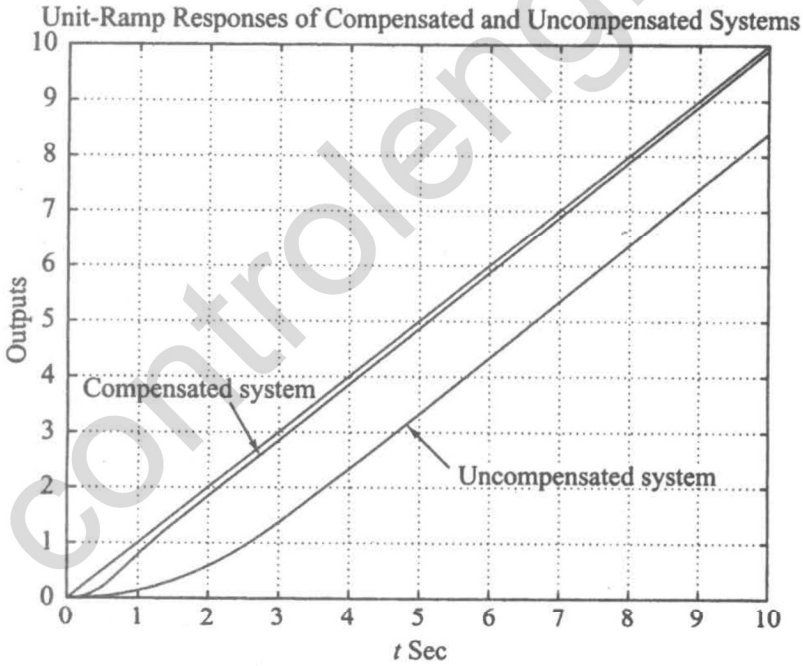
برای اثبات عملکرد بهبود یافتهٔ سیستم جبران شده، پاسخهای پله و شیب سیستمهای جبران شده و جبران نشده به ترتیب در شکلهای ۶-۸۹ (الف) و (ب) نشان داده شده است.

الف ۶-۱۷ سیستم شکل ۶-۹۰ را در نظر بگیرید. یک جبرانساز پسفاز – پیشفاز طرح کنید، به نحوی که ثابت خطای ایستای سرعت $K_v = ۵۰\ \text{sec}^{-1}$ و نسبت میرایی ζ قطب‌های حلقه بستهٔ غالب ۰/۵ باشد. (صفر بخش پیشفاز جبرانساز را به نحوی برگزینید که قطب $s = -۱$ وسیلهٔ تحت کنترل حذف شود.) تمام قطبهای حلقه بستهٔ سیستم جبران شده را تعیین کنید.

controlengineers.ir



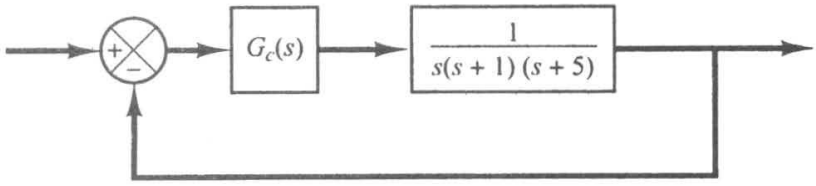
(الف)



(ب)

شکل ۶-۸۹

(الف) پاسخهای پله سیستمهای جبران شده و جبران نشده؛ (ب) پاسخهای شیب سیستم های جبران شده و جبران نشده.



شکل ۶-۹۰

سیستم کنترل .

controlengineers.ir

حل: جبرانساز پسفاز – پیشفازی با تابع تبدیل زیر به کار می‌بریم

$$G_c(s)=K_c\left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right)=K_c\frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s+1\right)(\beta T_2 s+1)}$$

که در آن $\beta>1$ پس

$$\begin{aligned}K_v&=\lim_{s\to 0} s\,G_c(s)\,G(s)\\&=\lim_{s\to 0} s\frac{K_c(T_1 s+1)(T_2 s+1)}{\left(\frac{T_1}{\beta}s+1\right)(\beta T_2 s+1)}\,\frac{1}{s(s+1)(s+5)}\\&=\frac{K_c}{5}\end{aligned}$$

مقدار داده شدهٔ $K_v=50\ \sec^{-1}$ بهرهٔ K_c را به صورت زیر تعیین می‌کند.

$$K_c=250$$

حال T_1 را برابر ۱ برمی‌گزینیم تا $s+(1/T_1)$ جملهٔ $(s+1)$ وسیلهٔ تحت کنترل را حذف کند. پس بخش پیشفاز به صورت زیر است

$$\frac{s+1}{s+\beta}$$

برای بخش پسفاز جبرانساز پسفاز – پیشفاز باید داشته باشیم

$$\left|\frac{s_1+(1/T_2)}{s_1+(1/\beta T_2)}\right|\approx 1 \qquad -5^\circ<\underline{\left|\frac{s_1+(1/T_2)}{s_1+(1/\beta T_2)}\right.}<0^\circ$$

که در آن s_1 محل یکی از قطبهای غالب حلقه بسته است. در $s=s_1$ تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$G_c(s_1)\ G(s_1)\approx K_c\left(\frac{s_1+1}{s_1+\beta}\right)\frac{1}{s_1(s_1+1)(s_1+5)}=K_c\frac{1}{s_1(s_1+\beta)(s_1+5)}$$

با توجه به این که در $s=s_1$ شرایط اندازه و فاز ارضا می‌شود، داریم

$$\left|K_c\frac{1}{s_1(s_1+\beta)(s_1+5)}\right|=1 \qquad (۶-۳۲)$$

$$\underline{\left|K_c\frac{1}{s_1(s_1+\beta)(s_1+5)}\right.}=\pm 180^\circ(2k+1) \qquad (۶-۳۳)$$

که در آن $k=0,1,2,3,\ldots$. در معادلات (۶-۳۲) و (۶-۳۳)، β و s_1 مجهول‌اند. چون نسبت میرایی ζ قطب غالب حلقه بسته ۰/۵ مشخص شده است، قطب حلقه بستهٔ $s=s_1$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$s_1=-x+j\sqrt{3}\,x$$

controlengineers.ir

که باید مقدار x را در آن تعیین کنیم.

شرط اندازه، معادلهٔ (۶-۳۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\left|\frac{K_c}{\left(-x+j\sqrt{۳}\,x\right)\left(-x+\beta+j\sqrt{۳}\,x\right)\left(-x+۵+j\sqrt{۳}\,x\right)}\right|=۱$$

با توجه به این که $K_c=۲۵۰$ داریم

$$x\sqrt{(\beta-x)^۲+۳x^۲}\,\sqrt{(۵-x)^۲+۳x^۲}=۱۲۵ \qquad (۶\text{-}۳۴)$$

شرط زاویه، معادله (۶-۳۳) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\angle K_c\frac{۱}{(-x+j\sqrt{۳}\,x)(-x+\beta+j\sqrt{۳}\,x)(-x+۵+j\sqrt{۳}\,x)}$$

$$=-۱۲۰^\circ-\tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۳}\,x}{-x+\beta}\right)-\tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۳}\,x}{-x+۵}\right)=-۱۸۰^\circ$$

یا

$$\tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۳}\,x}{-x+\beta}\right)+\tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۳}\,x}{-x+۵}\right)=۶۰^\circ \qquad (۶\text{-}۳۵)$$

باید معادلات (۶-۳۴) و (۶-۳۵) را حل کرده، β و x را بیابیم. با تعدادی سعی و خطا به دست می‌آوریم

$$\beta=۱۶/۰۲۵ \qquad x=۱/۹۰۵۴$$

پس

$$s_۱=-۱/۹۰۵۴+j\sqrt{۳}\,(۱/۹۰۵۴)=-۱/۹۰۵۴+j۳/۳۰۰۲$$

بخش پسفاز جبرانساز پسفاز – پیشفاز را می‌توان به شکل زیر تعیین کرد: چون قطب و صفر بخش پسفاز جبرانساز باید نزدیک مبدأ قرار داشته باشند، برمی‌گزینیم

$$\frac{۱}{\beta T_۲}=۰/۰۱$$

یعنی

$$T_۲=۶/۲۵ \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{T_۲}=۰/۱۶۰۲۵$$

با انتخاب $T_۲=۶/۲۵$ به دست می‌آوریم

$$\left|\frac{s_۱+(۱/T_۲)}{s+(۱/\beta T_۲)}\right|=\left|\frac{-۱/۹۰۵۴+j۳/۳۰۰۲+۰/۱۶۰۲۵}{-۱/۹۰۵۴+j۳/۳۰۰۲+۰/۰۱}\right|$$

$$=\left|\frac{-۱/۷۴۵۱۵+j۳/۳۰۰۲}{-۱/۸۹۰۵۴+j۳/۳۰۰۲}\right|=۰/۹۸\approx۱ \qquad (۶\text{-}۳۶)$$

و

controlengineers.ir

$$\left|\frac{s_1+(1/T_2)}{s_1+(1/\beta T_2)}\right| = \left|\frac{-1/9054+j3/3002+0/16025}{-1/9054+j3/3002+0/01}\right| \tag{۳۷-۶}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3/3002}{-1/74515}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3/3002}{-1/89054}\right) = -1/937^\circ$$

چون

$$-5^\circ < -1/937^\circ < 0^\circ$$

انتخاب $T_2 = 6/25$ قابل قبول است. بنابراین جبرانساز پسفاز – پیشفاز طراحی شده را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G_c(s) = 250\left(\frac{s+1}{s+16/025}\right)\left(\frac{s+0/16025}{s+0/01}\right)$$

یعنی تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به شکل زیر است

$$G_c(s)G(s) = \frac{250(s+0/16025)}{s(s+0/01)(s+5)(s+16/025)}$$

نمودار مکان هندسی سیستم جبران شده در شکل ۶-۹۱ (الف) نشان داده شده است. شکل ۶-۹۱ (ب) بخش بزرگ شدهٔ نزدیک مبدأ را نشان می‌دهد.

تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{250(s+0/16025)}{s(s+0/01)(s+5)(s+16/025)+250(s+0/16025)}$$

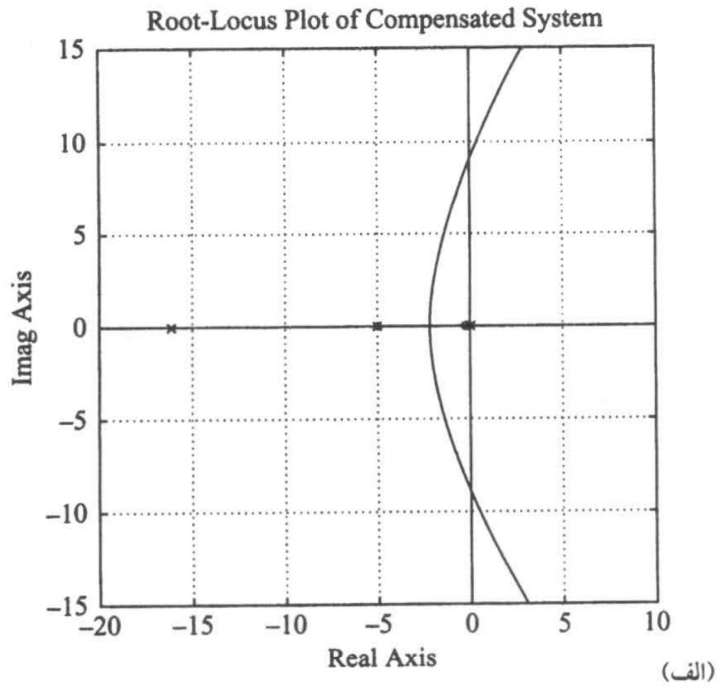
قطبهای حلقه بسته عبارت‌اند از

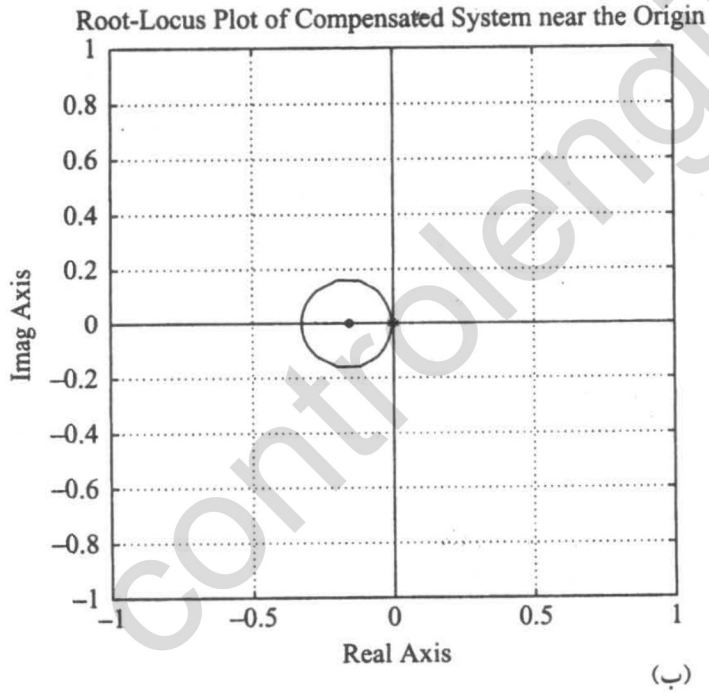
$$s = -1/8308 \pm j3/2359$$
$$s = -17/205$$
$$s = -0/1684$$

توجه کنید که قطبهای حلقه بسته $s=-1/8308 \pm j3/2359$ از قطبهای حلقه بستهٔ فرض شده در $s=\pm s_1$ که برای محاسبهٔ β و T_2 به کار رفتند، کمی فاصله دارند. فاصله گرفتن این قطبهای $s=-1/8308 \pm j3/2359$ از $s=\pm s_1=-1/9054 \pm j3/3002$ به خاطر تقریبهای به کار رفته در تعیین بخش پسفاز جبرانساز ایجاد شده است [معادلات (۶-۳۶) و (۶-۳۷) را ببینید.]

شکل‌های ۶-۹۲ (الف) و (ب) پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم طرح شده را نشان می‌دهند. توجه کنید که قطب حلقه بستهٔ واقع در $s=-0/1684$ صفر واقع در $s=-0/16025$ را تقریباً حذف می‌کند. ولی این زوج قطب – صفر حلقه بستهٔ واقع در نزدیکی مبدأ دنباله‌ای دراز و با دامنهٔ کوچک ایجاد می‌کنند. چون قطب حلقه بستهٔ واقع در $s=-17/205$ خیلی دورتر از قطبهای حلقه بستهٔ واقع در $s=-1/8308 \pm j3/2359$ قرار دارد، اثر این قطب حقیقی بر پاسخ سیستم بسیار اندک است. پس قطبهای واقع در $s=-1/8308 \pm j3/2359$ واقعاً قطبهای حلقه بستهٔ غالب هستند و مشخصهٔ پاسخ سیستم حلقه را تعیین می‌کنند. در پاسخ شیب خطای حالت ماندگار سرانجام به $1/K_v = \frac{1}{50} = 0/02$ می‌رسد.

controlengineers.ir





شکل ۶-۹۱

(الف) مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده؛ (ب) مکان هندسی ریشه‌ها در نزدیک مبدأ.

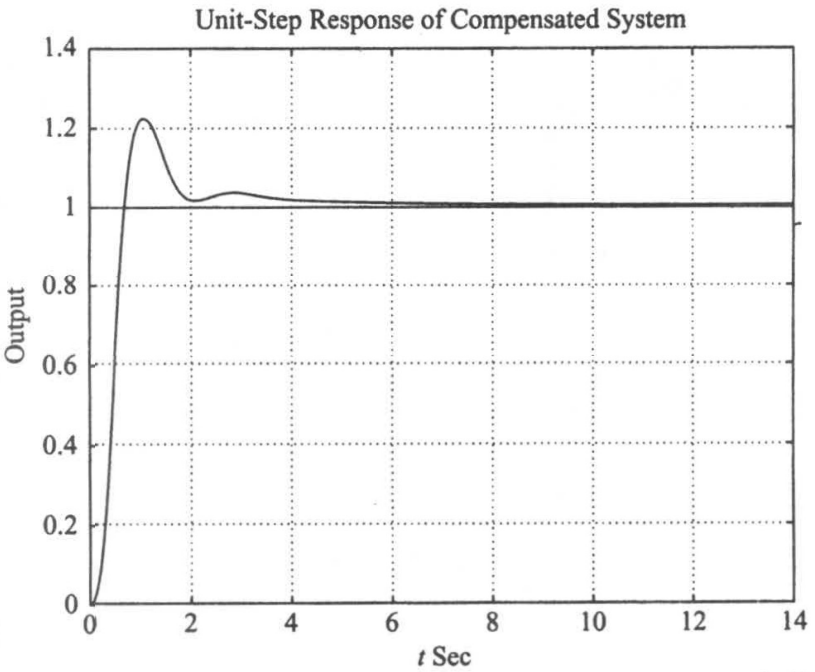
الف ۶-۱۸ شکل ۶-۹۳ (الف) نمودار بلوکی یک سیستم کنترل اوجگیری را نشان می‌دهد. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{۲s + ۰/۱}{s^۳ + ۰/۱s^۲ + ۶s + ۰/۱}$$

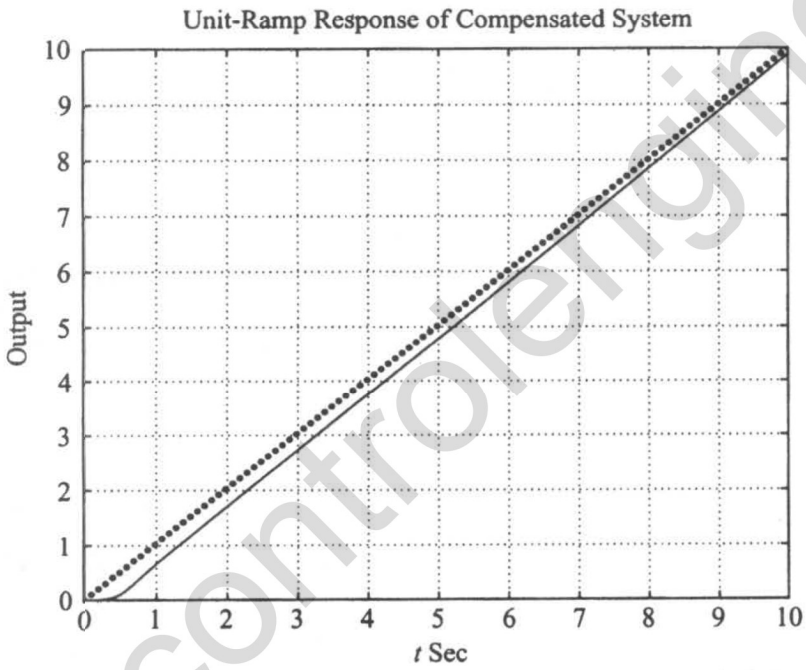
$$= \frac{۲(s + ۰/۰۵)}{(s + ۰/۰۴۱۷ + j۲/۴۴۸۹)(s + ۰/۰۴۱۷ - j۲/۴۴۸۹)(s + ۰/۰۱۶۷)}$$

پاسخ پله این سیستم در شکل ۶-۹۳ (ب) نشان داده شده است. این پاسخ نوسانهای فرکانس بالایی را در

controlengineers.ir



(الف)



(ب)

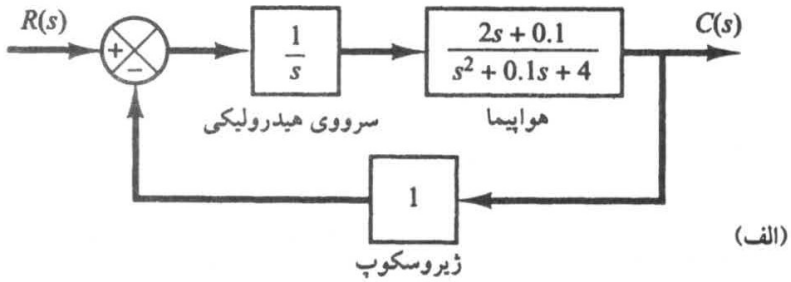
شکل ۶-۹۲
(الف) پاسخ پلهٔ سیستم جبران شده؛
(ب) پاسخ شیب سیستم جبران شده.

controlengineers.ir

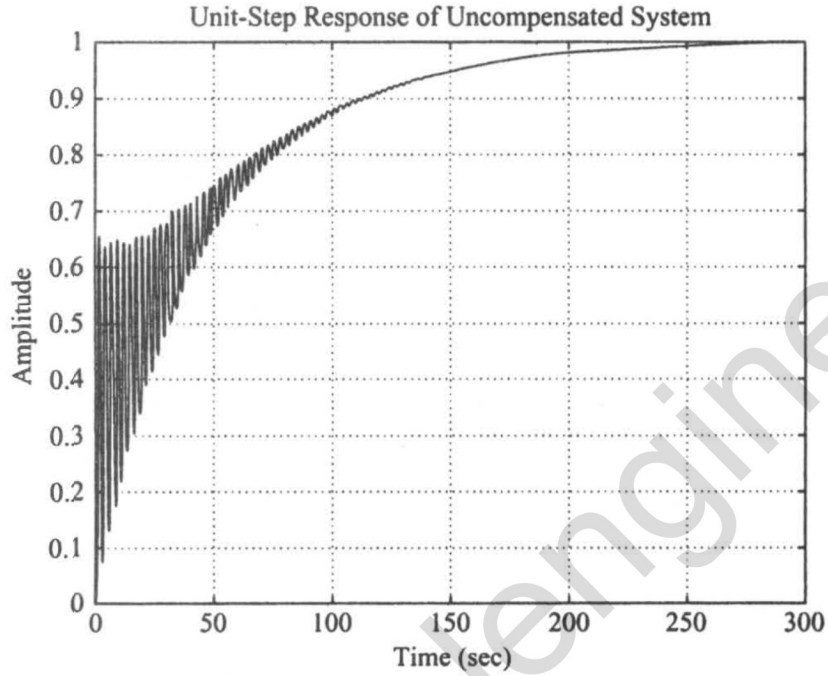
ابتدای پاسخ نشان می‌دهد که به خاطر قطبهای واقع در $s=-۰٫۰۴۱۷\pm j۲٫۴۴۸۹$ ایجاد شده‌اند. قطب غالب پاسخ در $s=-۰٫۰۱۶۷$ قرار دارد. زمان نشست تقریباً s ۲۴۰ است.

می‌خواهیم سرعت پاسخ سیستم بیشتر شده، نوسان ابتدای آن نیز حذف شود. جبرانساز مناسبی طرح کنید که قطبهای غالب حلقه بسته را در $s=-۲\pm j۲\sqrt{۳}$ قرار دهد.

حل: شکل ۶-۹۴ نمودار بلوکی سیستم جبران شده را نشان می‌دهد. توجه کنید که صفر حلقه باز $s=-۰٫۰۵$ و قطب حلقه باز $s=۰$ یک قطب حلقه بسته بین $s=۰$ و $s=-۰٫۰۵$ ایجاد می‌کند. این قطب حلقه بسته قطب



(الف)



(ب)

شکل ۶-۹۳

(الف) سیستم کنترل اوجگیری؛

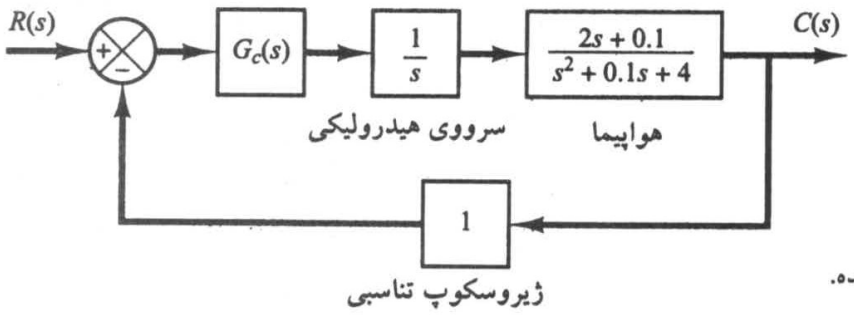
(ب) پاسخ پله.

غالب شده، باعث کندی پاسخ سیستم می‌شود. بنابراین باید به جای این صفر، صفری دور از محور $j\omega$ مثلاً در $s=-۴$ ایجاد کرد.

پس جبران کننده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$G_c(s)=\hat{G}_c(s)\frac{s+۴}{۲s+۰/۱}$$

به این ترتیب تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر درمی‌آید



شکل ۶-۹۴

سیستم کنترل اوجگیری جبران شده.

controlengineers.ir

$$G_c(s)G(s) = \hat{G}_c(s)\frac{s+۴}{۲s+۰/۱}\,\frac{۱}{s}\,\frac{۲s+۰/۱}{s^۲+۰/۱s+۴}$$
$$= \hat{G}_c(s)\,\frac{s+۴}{s(s^۲+۰/۱s+۴)}$$

برای تعیین $\hat{G}_c$ به روش مکان هندسی ریشه‌ها باید کمبود زاویه در قطب حلقه بستهٔ مطلوب $s=-۲+j۲\sqrt{۳}$ را محاسبه کرد. کمبود زاویه را می‌توان به صورت زیر یافت:

$$\text{کمبود زاویه} = -۱۴۳/۰۸۸^\circ - ۱۲۰^\circ - ۱۰۹/۶۴۲^\circ + ۶۰^\circ + ۱۸۰^\circ$$
$$= -۱۳۲/۷۳^\circ$$

پس جبرانساز پیشفاز $\hat{G}_c(s)$ باید در قطب غالب زاویهٔ $۱۳۲/۷۳^\circ$ را ایجاد کند. به خاطر بزرگ بودن کمبود زاویه دو جبرانساز پیشفاز به کار می‌بریم که هر کدام $۶۶/۳۶۵^\circ$ ایجاد کنند. پس $\hat{G}_c(s)$ به شکل زیر است

$$\hat{G}_c(s) = K_c\left(\frac{s+s_z}{s+s_p}\right)^۲$$

فرض کنید دو صفر در $s=-۲$ برگزینیم. در این صورت دو قطب جبرانسازهای پیشفاز را می‌توان به شکل زیر تعیین کرد

$$\frac{۳/۴۶۴۱}{s_p-۲} = \tan\left(۹۰^\circ - ۶۶/۳۶۵^\circ\right) = ۰/۴۳۷۶۱۶۹$$

یا

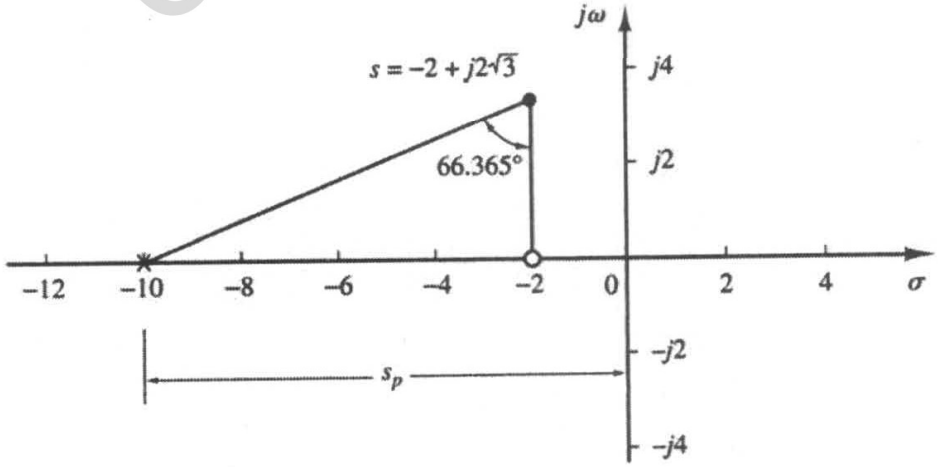
$$s_p = ۲ + \frac{۳/۴۶۴۱}{۰/۴۳۷۶۱۶۹} = ۹/۹۱۵۸$$

(شکل ۶-۹۵ را ببینید.) پس

$$\hat{G}_c = K_c\left(\frac{s+۲}{s+۹/۹۱۵۸}\right)^۲$$

جبرانساز کل به صورت زیر است

$$G_c(s) = \hat{G}_c(s)\frac{s+۴}{۲s+۰/۱} = K_c\left(\frac{s+۲}{s+۹/۹۱۵۸}\right)^۲\frac{s+۴}{۲s+۰/۱}$$



شکل ۶-۹۵
قطب و صفر $\hat{G}_c$.

controlengineers.ir

مقدار K_c را می‌توان با توجه به شرط اندازه به دست آورد. تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$G_c(s)\,G(s)=K_c\frac{(s+۲)^۲(s+۴)}{(s+۹/۹۱۵۸)^۲\,s\left(s^۲+۰/۱s+۴\right)}$$

پس شرط اندازه به صورت زیر است

$$\left|K_c\frac{(s+۲)^۲(s+۴)}{(s+۹/۹۱۵۸)^۲\,s(s^۲+۰/۱s+۴)}\right|_{s=-۲+j۲\sqrt{۳}}=۱$$

یا

$$K_c=\left|\frac{(s+۹/۹۱۵۸)^۲\,s(s^۲+۰/۱s+۴)}{(s+۲)^۲(s+۴)}\right|_{s=-۲+j۲\sqrt{۳}}=۸۸/۰۲۲۷$$

پس جبرانساز $G_c(s)$ شکل زیر را پیدا می‌کند

$$G_c(s)=۸۸/۰۲۲۷\frac{(s+۲)^۲(s+۴)}{(s+۹/۹۱۵۸)^۲(۲s+۰/۱)}$$

و تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر درمی‌آید

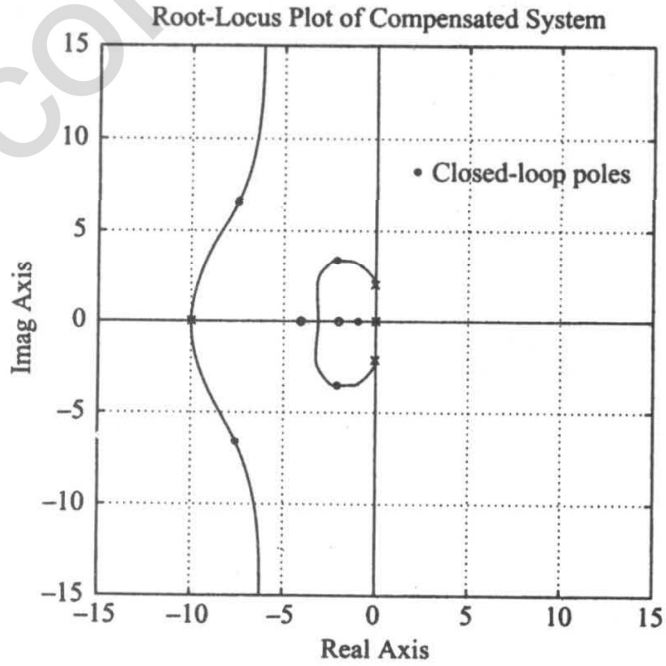
$$G_c(s)\,G(s)=\frac{۸۸/۰۲۲۷(s+۲)^۲(s+۴)}{(s+۹/۹۱۵۸)^۲\,s\,(s^۲+۰/۱s+۴)}$$

شکل ۶-۹۶ نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده را نشان می‌دهد . قطبهای حلقه بستهٔ سیستم جبران شده روی نمودار مشخص شده است. قطبهای حلقه بسته ریشه های معادلهٔ مشخصهٔ زیر هستند

$$(s+۹/۹۱۵۸)^۲\,s\,(s^۲+۰/۱s+۴)+۸۸/۰۲۲۷(s+۲)^۲(s+۴)=۰$$

که عبارت‌اند از

$$s=-۲/۰۰۰۰\pm j۳/۴۶۴۱\quad,\ s=-۷/۵۲۲۴\pm j۶/۵۳۲۶\quad,\ s=-۰/۸۸۶۸$$



شکل ۶-۹۶
نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستم جبران شده .

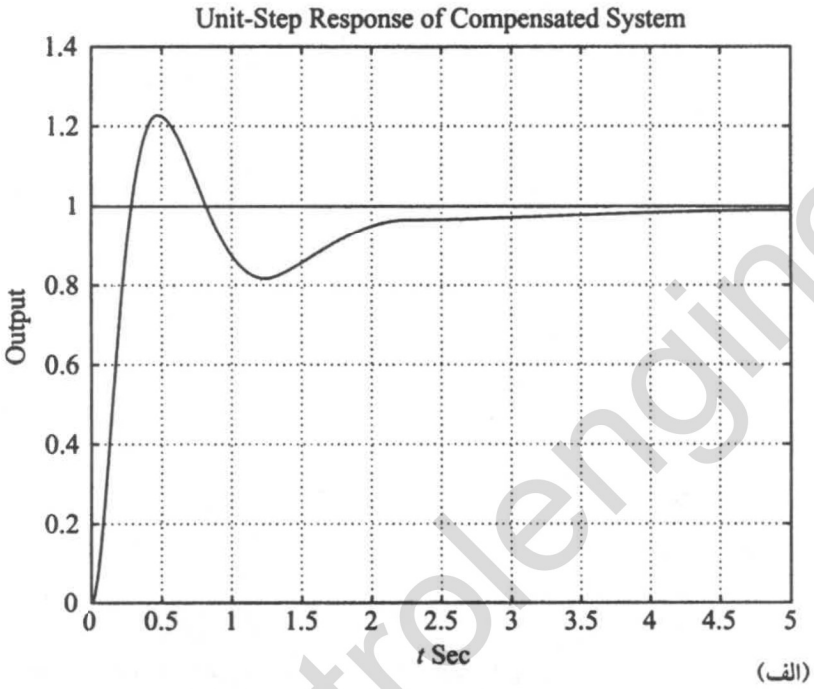
controlengineers.ir

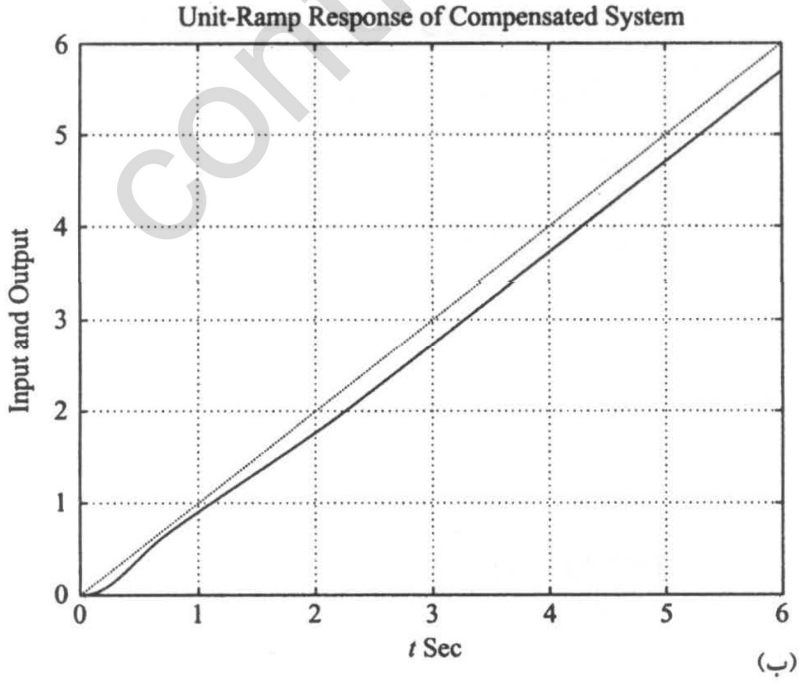
حال که جبرانساز را طرح کرده‌ایم ، مشخصات پاسخ گذرا را با MATLAB بررسی می‌کنیم. شکل‌های ۶-۹۷ نمودارهای پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم جبران شده را نشان می‌دهد. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{۸۸٫۰۲۲۷\,(s+۲)^{۲}(s+۴)}{(s+۹٫۹۱۵۸)^{۲}\,s(s^{۲}+۰٫۱s+۴)+۸۸٫۰۲۲۷(s+۲)^{۲}(s+۴)}$$

این منحنی‌ها نشان می‌دهند که سیستم طرح شده قابل قبول است.

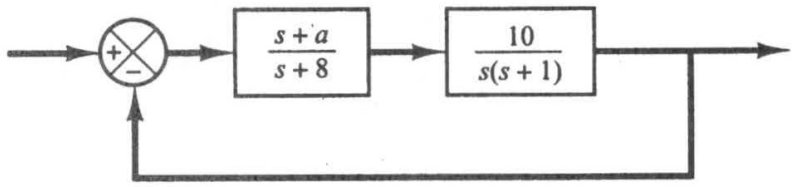
الف ۶-۱۹ سیستم شکل ۶-۹۸ (الف) را در نظر بگیرید. مقدار a را به نحوی تعیین کنید که نسبت میرایی ζ قطب غالب حلقه بسته ۰٫۵ باشد.



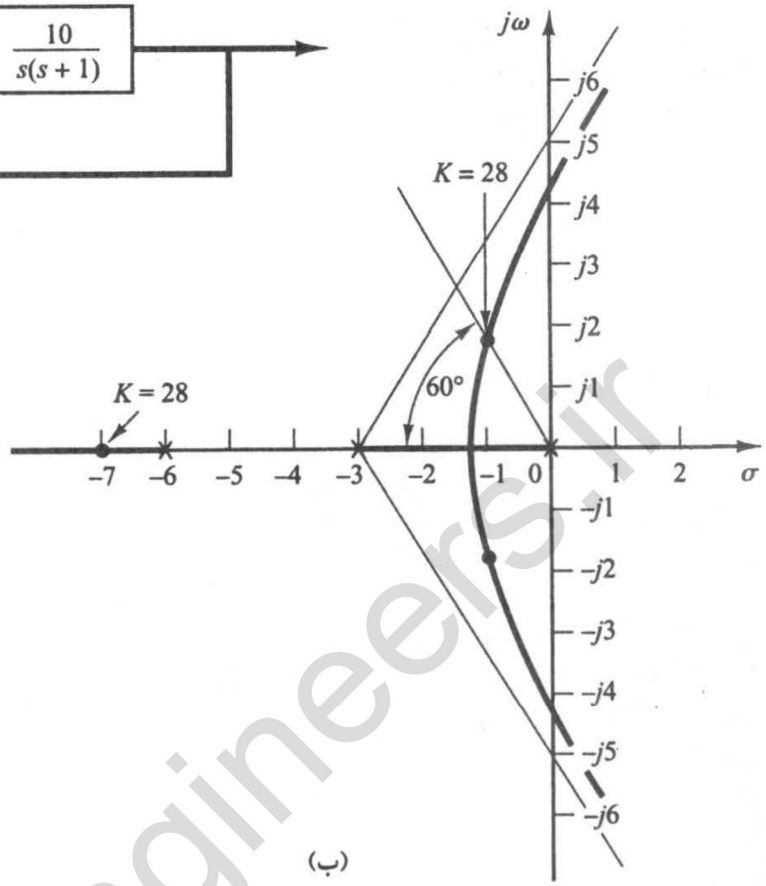


شکل ۶-۹۷
(الف) پاسخ پلهٔ و (ب) پاسخ شیب سیستم جبران شده.

controlengineers.ir



(الف)



(ب)

شکل ۶-۹۸

(الف) سیستم کنترل.

(ب) مکان هندسی ریشه‌ها به ازای $K=10a$.

حل: معادلهٔ مشخصه عبارت است از

$$1+\frac{10(s+a)}{s(s+1)(s+8)}=0$$

متغیر a به صورت ضریب ظاهر نشده است ؛ بنابراین باید معادلهٔ مشخصه را به صورت مناسبی درآوریم . معادلهٔ مشخصه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$s^3+9s^2+18s+10a=0$$

این معادله را به صورتی بازنویسی می‌کنیم که در آن a به صورت ضریب ظاهر شود

$$1+\frac{10a}{s\left(s^2+9s+18\right)}=0$$

تعریف می‌کنیم

$$K=10a$$

پس معادلهٔ مشخصه به صورت زیر در می‌آید

$$1+\frac{K}{s\left(s^2+9s+18\right)}=0$$

توجه کنید اکنون معادلهٔ مشخصه به صورت مناسب برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها است.

controlengineers.ir

این سیستم سه قطب دارد ، ولی صفر ندارد. سه قطب در $s=0$ ، $s=-3$ و $s=-6$ قرار دارند. یک شاخهٔ مکان هندسی ریشه‌ها روی محور حقیقی بین $s=0$ و $s=-3$ قرار دارد. شاخهٔ دیگری نیز بین $s=-6$ و $s=-\infty$ قرار دارد.

مجانبهای شاخه‌های مکان هندسی ریشه‌ها به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\text{زاویهٔ مجانبها} = \frac{\pm 180^\circ (2k+1)}{3} = 60^\circ , -60^\circ , 180^\circ$$

محل برخورد مجانبها با محور حقیقی به صورت زیر به دست می‌آید

$$s = -\frac{0+3+6}{3} = -3$$

نقاط شکست را می‌توان از حل معادلهٔ $dK/ds=0$ به دست آورد. داریم

$$K = -(s^3 + 9s^2 + 18s)$$

حال قرار می‌دهیم

$$\frac{dK}{ds} = -\left(3s^2 + 18s + 18\right) = 0$$

که به دست می‌دهد

$$s^2 + 6s + 6 = 0$$

یا

$$s = -1{,}268 \quad , \quad s = -4{,}732$$

نقطهٔ $s=-1{,}268$ روی یک شاخهٔ مکان هندسی ریشه‌ها قرار دارد. پس نقطهٔ $s=-1{,}268$ یک نقطهٔ شکست واقعی است. نقطهٔ $s=-4{,}732$ روی مکان هندسی ریشه ها قرار ندارد ، پس نقطهٔ شکست واقعی نیست.

حال محل برخورد شاخه‌ها با محور موهومی را تعیین می‌کنیم. در معادلهٔ مشخصه ، که به صورت زیر است

$$s^3 + 9s^2 + 18s + K = 0$$

قرار می‌دهیم $s = j\omega$ ، و به دست می‌آوریم

$$(j\omega)^3 + 9(j\omega)^2 + 18(j\omega) + K = 0$$

یا

$$(K - 9\omega^2) + j\omega(18 - \omega^2) = 0$$

و از آن به دست می‌آوریم

$$\omega = \pm 3\sqrt{2} \ , \ K = 9\omega^2 = 162 \qquad \text{یا} \qquad \omega = 0 \ , \ K = 0$$

نقاط برخورد در $\omega = \pm 3\sqrt{2}$ قرار دارند و مقدار متناظر K در این نقاط ۱۶۲ است. همچنین یک شاخهٔ مکان هندسی ریشه‌ها در $\omega=0$ به محور موهومی می‌رسد. شکل ۶-۹۸ (ب) نمودار مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را نشان می‌دهد.

چون نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته ۰/۵ تعیین شده است، قطبهای حلقه بستهٔ مطلوب باید روی

controlengineers.ir

خطوطی قرار داشته باشند که از مبدا گذشته، با بخش منفی محور حقیقی زاویهٔ °۶۰ می‌سازند. قطبهای حلقه بستهٔ مطلوب باید در نقاط زیر قرار داشته باشند

$$s = -۱ + j۱٫۷۳۲ \qquad s = -۱ - j۱٫۷۳۲$$

در این نقاط بهرهٔ K برابر ۲۸ است. بنابراین

$$a = \frac{K}{۱۰} = ۲٫۸$$

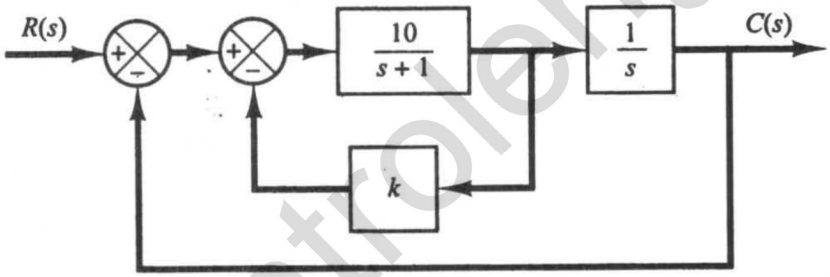
چون تفاضل تعدد قطبهای سیستم و صفرهای سیستم بزرگتر از ۲ است. (در واقع سه قطب و هیچ صفر) قطب سوم باید روی بخش منفی محور حقیقی قرار داشته باشد، زیرا حاصل جمع سه قطب حلقه بسته باید ۹- باشد. بنابراین قطب سوم را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد

$$s = -۹ - (-۱ + j۱٫۷۳۲) - (-۱ - j۱٫۷۳۲)$$

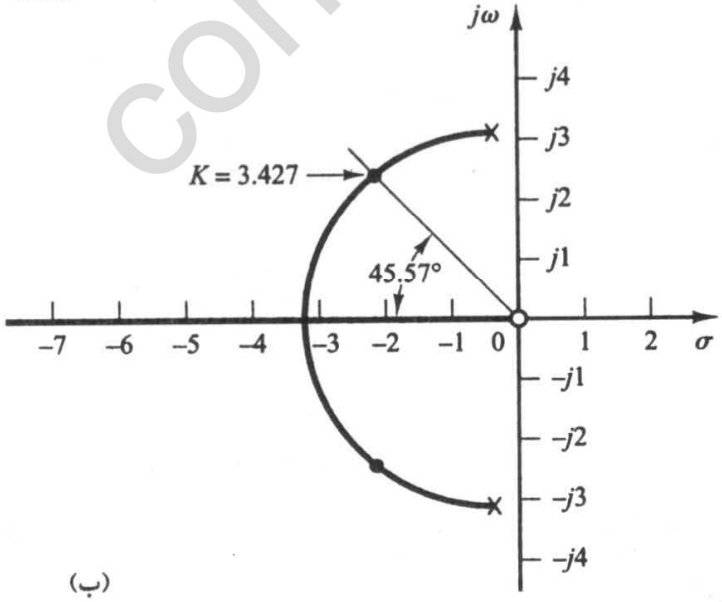
یا

$$s = -۷$$

الف ۶-۲۰ سیستم شکل ۶-۹۹ (الف) را در نظر بگیرید. مکان هندسی ریشه ها را به ازای تغییر بهرهٔ فیدبک سرعت k از صفر تا بینهایت رسم کنید. مقدار k را به نحوی تعیین کنید که نسبت میرایی ζ قطبهای غالب حلقه بسته ۰٫۷ باشد.



(الف)



(ب)

شکل ۶-۹۹

(الف) سیستم کنترل؛

(ب) مکان هندسی ریشه‌ها که در آن $K = ۱۰k$.

controlengineers.ir

حل: تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$\text{تابع تبدیل حلقه باز} = \frac{۱۰}{(s+۱+۱۰k)s}$$

چون متغیر k به صورت ضریب ظاهر نشده است ، باید معادلهٔ مشخصه را به صورتی درآوریم که در آن k به صورت ضریب باشد. معادلهٔ مشخصه به صورت زیر است

$$s^۲+s+۱۰ks+۱۰=۰$$

این معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$۱+\frac{۱۰ks}{s^۲+s+۱۰}=۰ \qquad (۳۸-۶)$$

تعریف می‌کنیم

$$K=۱۰k$$

پس معادلهٔ مشخصه به صورت زیر درمی‌آید

$$۱+\frac{Ks}{s^۲+s+۱۰}=۰$$

توجه کنید که این سیستم یک قطب در $s=۰$، و دو صفر در $s=-۰/۵\pm j۳/۱۲۲۵$ دارد. چون این سیستم دو قطب و یک صفر دارد، امکان این هست که مکان هندسی ریشه‌ها به صورت دایره باشد. در واقع چنین است، و اکنون نشان می‌دهیم که یک مکان هندسی ریشه‌های دایروی وجود دارد. شرط زاویه عبارت است از

$$\angle\frac{Ks}{s^۲+s+۱۰}=\pm۱۸۰^\circ(۲k+۱)$$

داریم

$$\angle s-\angle s+۰/۵+j۳/۱۲۲۵-\angle s+۰/۵-j۳/۱۲۲۵=\pm۱۸۰^\circ(۲k+۱)$$

با گذاشتن $s=\sigma+j\omega$ در این معادله و بازآرایی به دست می‌آوریم

$$\angle\sigma+۰/۵+j(\omega+۳/۱۲۲۵)+\angle\sigma+۰/۵+j(\omega-۳/۱۲۲۵)=\angle\sigma+j\omega\pm۱۸۰^\circ(۲k+۱)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر درآورد

$$\tan^{-۱}\left(\frac{\omega+۳/۱۲۲۵}{\sigma+۰/۵}\right)+\tan^{-۱}\left(\frac{\omega-۳/۱۲۲۵}{\sigma+۰/۵}\right)=\tan^{-۱}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)\pm۱۸۰^\circ(۲k+۱)$$

با گرفتن تانژانت از دو طرف معادلهٔ بالا به دست می‌آوریم

$$\frac{\dfrac{\omega+۳/۱۲۲۵}{\sigma+۰/۵}+\dfrac{\omega-۳/۱۲۲۵}{\sigma+۰/۵}}{۱-\left(\dfrac{\omega+۳/۱۲۲۵}{\sigma+۰/۵}\right)\left(\dfrac{\omega-۳/۱۲۲۵}{\sigma+۰/۵}\right)}=\frac{\omega}{\sigma}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر ساده کرد

controlengineers.ir

$$\frac{۲\omega(\sigma+۰/۵)}{(\sigma+۰/۵)^۲-(\omega^۲-۳/۱۲۲۵^۲)}=\frac{\omega}{\sigma}$$

یا

$$\omega(\sigma^۲-۱۰+\omega^۲)=۰$$

که به دست می‌دهد

$$\omega=۰ \quad \text{یا} \quad \sigma^۲+\omega^۲=۱۰$$

توجه کنید که $\omega=۰$ با محور حقیقی متناظر است. بخش منفی محور حقیقی (بین $s=۰$ و $s=-\infty$) با $K\geq ۰$ و بخش مثبت محور حقیقی با $K<۰$ متناظر است. معادلهٔ

$$\sigma^۲+\omega^۲=۱۰$$

دایره‌ای به مرکز مبدأ $(\sigma=۰\ ,\ \omega=۰)$ را نشان می‌دهد که شعاع آن $\sqrt{۱۰}$ است. بخشی از این دایره که سمت چپ قطبهای مختلط قرار دارد با مکان هندسی ریشه‌ها به ازای $K>۰$ متناظر است. بخشی از دایره که سمت راست قطبهای مختلط قرار دارد با مکان هندسی ریشه‌ها به ازای $K<۰$ متناظر است. شکل ۶-۹۹ (ب) مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را به ازای $K>۰$ نشان می‌دهد.

چون می‌خواهیم برای قطبهای حلقه بسته داشته باشیم $\zeta=۰/۷$، محل برخورد مکان هندسی دایروی و خطی را که با بخش منفی محور حقیقی زاویهٔ $۴۵/۵۷^\circ$ می‌سازد (توجه کنید که $\cos ۴۵/۵۷^\circ=۰/۷$) به دست می‌آوریم. محل برخورد در $s=-۲/۲۱۴+j۲/۲۵۸$ قرار دارد. K متناظر با این نقطه ۳/۴۲۷ است. بنابراین بهرهٔ فیدبک سرعت باید به صورت زیر باشد

$$k=\frac{K}{۱۰}=۰/۳۴۲۷$$

مسائل

ب ۶-۱ مکان هندسی ریشه‌های سیستم کنترل حلقه بسته‌ای با مشخصات زیر را بیابید.

$$G(s)=\frac{K(s+۱)}{s^۲}\quad,\quad H(s)=۱$$

ب ۶-۲ مکان هندسی ریشه‌های سیستم کنترل حلقه بسته‌ای با مشخصات زیر را بیابید.

$$G(s)=\frac{K}{s(s+۱)(s^۲+۴s+۵)}\quad,\quad H(s)=۱$$

ب ۶-۳ مکان هندسی ریشه‌های سیستمی با مشخصات زیر را بیابید.

$$G(s)=\frac{K}{s(s+۰/۵)(s^۲+۰/۶s+۱۰)}\quad,\quad H(s)=۱$$

ب ۶-۴ نشان دهید که مکان هندسی ریشه‌های سیستمی با

$$G(s)=\frac{K\left(s^۲+۶s+۱۰\right)}{s^۲+۲s+۱۰}\quad,\quad H(s)=۱$$

کمانهایی از دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع $\sqrt{۱۰}$ است.

controlengineers.ir

ب ۶-۵ مکان هندسی ریشه‌های سیستم کنترل حلقه بسته‌ای، با مشخصات زیر را رسم کنید.

$$G(s)=\frac{K(s+0.2)}{s^2(s+3.6)} \quad , \quad H(s)=1$$

ب ۶-۶ مکان هندسی ریشه‌های سیستم کنترل حلقه بسته‌ای، با مشخصات زیر را بیابید.

$$G(s)=\frac{K(s+9)}{s(s^2+4s+11)} \quad , \quad H(s)=1$$

قطبهای حلقه بسته را در حالتی که نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته ۰/۵ است، روی مکان هندسی ریشه‌ها مشخص کنید. مقدار متناظر K را بیابید.

ب ۶-۷ مکان هندسی ریشه‌های سیستم شکل ۶-۱۰۰ را رسم کنید. گسترهٔ بهرهٔ K را که به ازای آن سیستم پایدار است، بیابید.

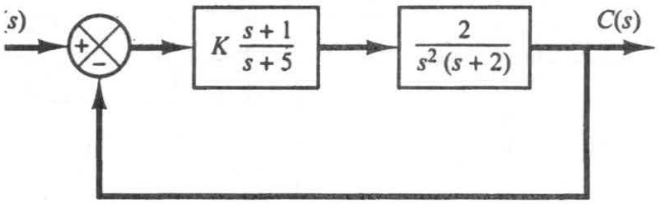
ب ۶-۸ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد و تابع تبدیل مستقیم زیر در نظر بگیرید.

$$G(s)=\frac{K}{s(s^2+4s+8)}$$

مکان هندسی ریشه‌ها را برای این سیستم رسم کنید. محل قطبهای حلقه بسته را به ازای $K=2$ تعیین کنید.

ب ۶-۹ سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s)\,H(s)=\frac{K(s-0.6667)}{s^4+3.3401s^3+7.0325s^2}$$



شکل ۶-۱۰۰ سیستم کنترل.

نشان دهید که معادلهٔ مجانبهای مکان هندسی ریشه‌های سیستم بالا عبارت است از

$$G_a(s)\,H_a(s)=\frac{K}{s^3+4.0068\,s^2+5.3515s+2.3825}$$

با استفاده از MATLAB مکان هندسی ریشه‌ها و مجانبهای آن را رسم کنید.

ب ۶-۱۰ سیستمی با فیدبک واحد و تابع تبدیل مستقیم

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

در نظر بگیرید. بهرهٔ ثابت به ازای مقدار K، از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

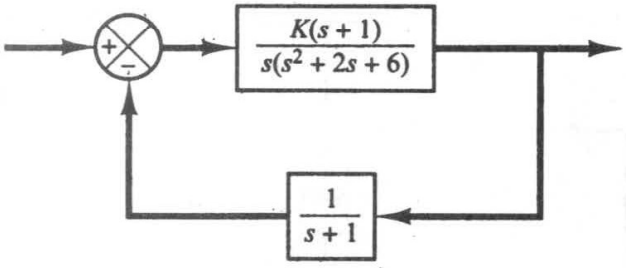
$$\left|\frac{K}{s(s+1)}\right|=1$$

نشان دهید که مکان هندسی بهرهٔ ثابت به ازای $0\le K\le\infty$ از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$\left[\sigma(\sigma+1)+\omega^2\right]^2+\omega^2=K^2$$

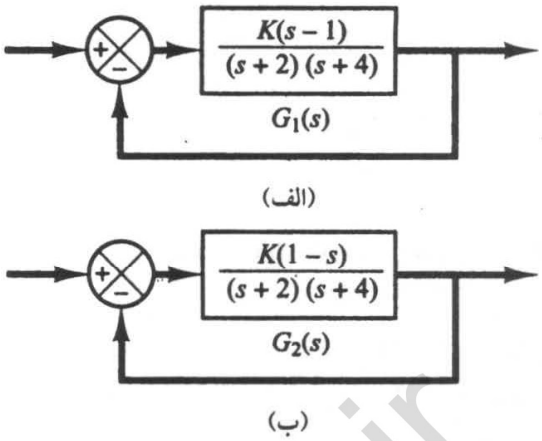
مکان هندسی بهرهٔ ثابت را به ازای $K=1$ و ۲ و ۵ و ۱۰ و ۲۰ در صفحهٔ s رسم کنید.

ب ۶-۱۱ سیستم شکل ۶-۱۰۱ را در نظر بگیرید. مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را به کمک MATLAB رسم کنید. محل قطبهای حلقه بسته را به ازای $K=2$ تعیین کنید.



شکل ۶-۱۰۱ سیستم کنترل.

controlengineers.ir

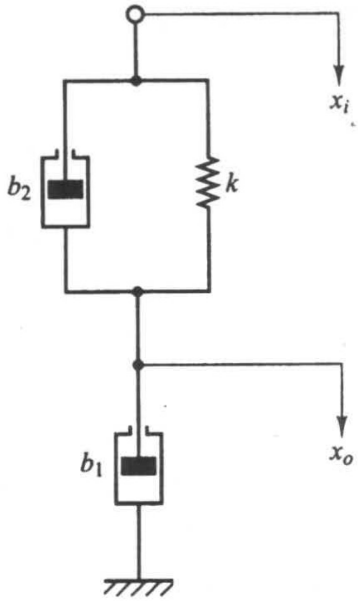


شکل ۶-۱۰۲ (الف) و (ب) سیستمهای غیر می‌نیمم فاز.

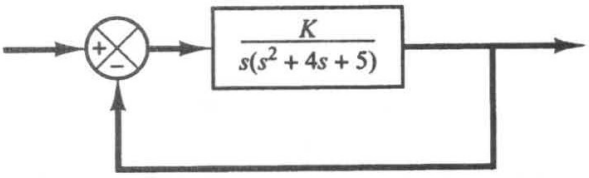
ب ۶-۱۲ نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستمهای غیر می‌نیمم فاز شکل‌های ۶-۱۰۲ (الف) و (ب) را رسم کنید.

ب ۶-۱۳ سیستم مکانیکی شکل ۶-۱۰۳ را در نظر بگیرید. این سیستم از یک فنر و دو ضربه‌گیر تشکیل شده است. تابع تبدیل سیستم را بیابید. جابجایی x_i ورودی و جابجایی x_o خروجی سیستم است. این سیستم مکانیکی یک شبکهٔ پیشفاز است یا یک شبکهٔ پسفاز؟

ب ۶-۱۴ سیستم شکل ۶-۱۰۴ را در نظر بگیرید. نمودار مکان هندسی این سیستم را رسم کنید. K را



شکل ۶-۱۰۳ سیستم مکانیکی.



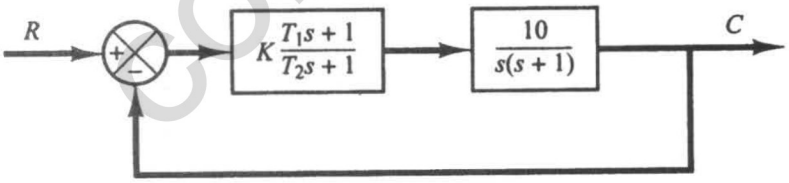
شکل ۶-۱۰۴ سیستم کنترل.

چنان تعیین کنید که نسبت میرایی ξ قطبهای حلقه بستهٔ غالب ۰/۵ باشد. سپس تمام قطبهای حلقه بسته را تعیین کنید. منحنی پاسخ پله را با استفاده از MATLAB رسم کنید.

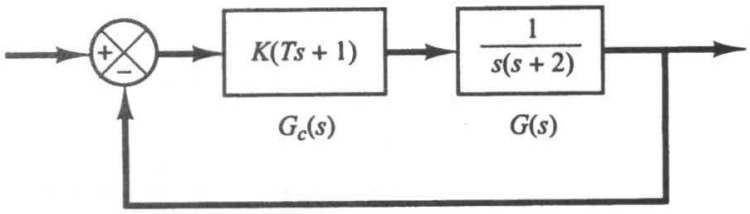
ب ۶-۱۵ مقادیر K، T_1، و T_2 سیستم شکل ۶-۱۰۵ را به نحوی تعیین کنید که قطبهای حلقه بستهٔ غالب دارای نسبت میرایی $\xi = ۰/۵$ و فرکانس طبیعی نامیرای $\omega_n = ۳$ rad/s باشند.

ب ۶-۱۶ سیستم شکل ۶-۱۰۶ را در نظر بگیرید. بهرهٔ K و ثابت زمانی T کنترل کنندهٔ $G_c(s)$ را برای قرار دادن قطبهای حلقه بسته در $s = -۲ \pm j۲$ تعیین کنید.

ب ۶-۱۷ سیستم شکل ۶-۱۰۷ را در نظر بگیرید. جبرانساز پیشفاز را برای قرار دادن قطبهای حلقه بستهٔ غالب در $s = -۲ \pm j۲\sqrt{۳}$ طرح کنید. منحنی پاسخ پلهٔ سیستم طرح شده را با استفاده از MATLAB رسم کنید.

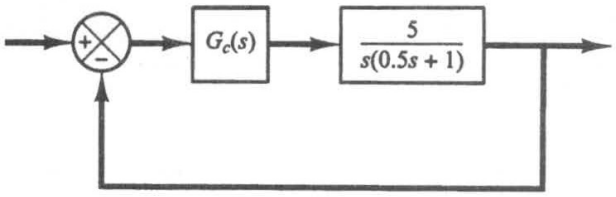


شکل ۶-۱۰۵ سیستم کنترل.

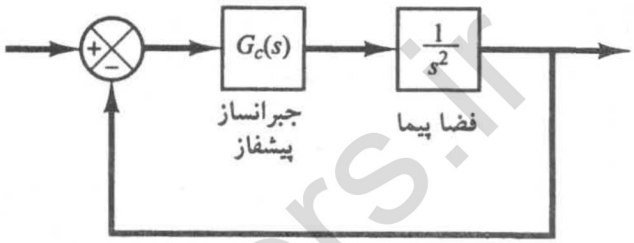


شکل ۶-۱۰۶ سیستم کنترل.

controlengineers.ir



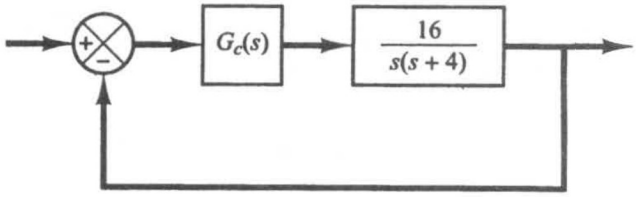
شکل ۶-۱۰۷ سیستم کنترل.



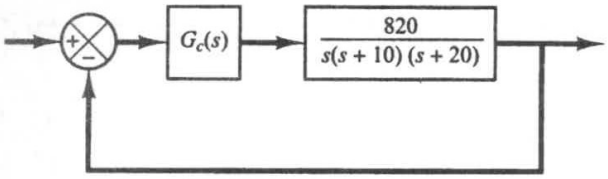
شکل ۶-۱۰۸ سیستم کنترل.

ب ۶-۱۸ سیستم شکل ۶-۱۰۸ را در نظر بگیرید. جبرانسازی برای قرار دادن قطبهای حلقه بستهٔ غالب در $s=-1\pm j1$ طرح کنید.

ب ۶-۱۹ برای سیستم شکل ۶-۱۰۹ جبرانسازی طراحی کنید تا ثابت خطای ایستای سرعت K_v به $20\,s^{-1}$ برسد ، بدون این که قطبهای مزدوج مختلط حلقه بستهٔ واقع در $s=-2\pm j2\sqrt{3}$ تغییر محسوسی داشته باشند.



شکل ۶-۱۰۹ سیستم کنترل.



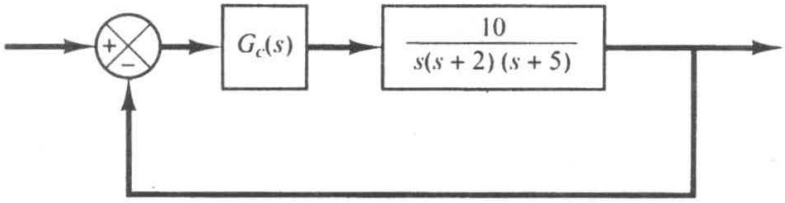
شکل ۶-۱۱۰ سیستم کنترل.

ب ۶-۲۰ سیستم کنترل وضعیت زاویه‌ای شکل ۶-۱۱۰ را در نظر بگیرید. قطبهای حلقه بستهٔ غالب در $s=-3.60\pm j4.80$ قرار دارند. نسبت میرایی ζ قطبهای حلقه بستهٔ غالب ۰٫۶ است. ثابت خطای ایستای سرعت K_v برابر $4.1\,s^{-1}$ است که نشان می‌دهد به ازای ورودی شیب $360^\circ/\sec$ خطای حالت ماندگار عبارت است از

$$e_v=\frac{\theta_i}{K_v}=\frac{360^\circ/\sec}{4.1\,s^{-1}}=87.8^\circ$$

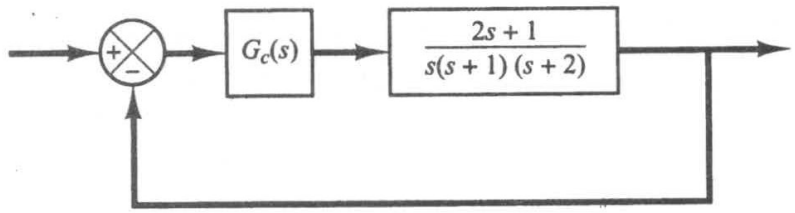
می‌خواهیم e_v را به یک دهم مقدار فعلی‌اش برسانیم ؛ یا به عبارت دیگر K_v را به $41\,s^{-1}$ افزایش دهیم. همچنین می‌خواهیم نسبت میرایی ζ قطبهای حلقه بستهٔ غالب را ۰٫۶ نگه داریم. تغییر کوچک فرکانس طبیعی نامیرای قطبهای غالب ω_n مجاز است. جبرانساز پسفاز مناسبی برای افزایش مطلوب ثابت خطای ایستای سرعت طرح کنید.

ب ۶-۲۱ برای سیستم کنترل شکل ۶-۱۱۱ جبرانسازی طرح کنید که قطبهای حلقه بستهٔ غالب را در $s=-2\pm j2\sqrt{3}$ قرار دهد و ثابت خطای ایستای سرعت K_v را به $50\,s^{-1}$ برساند.

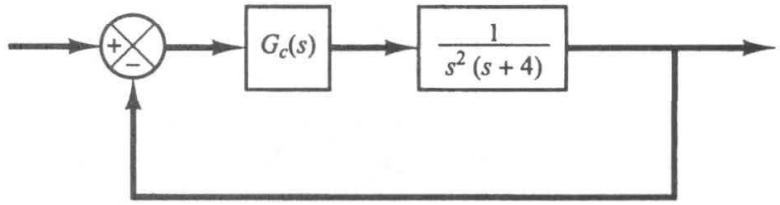


شکل ۶-۱۱۱ سیستم کنترل.

controlengineers.ir



شکل ۶-۱۱۲ سیستم کنترل.



شکل ۶-۱۱۳ سیستم کنترل.

ب ۶-۲۲ سیستم کنترل شکل ۶-۱۱۲ را در نظر بگیرید. جبرانساز را به نحوی طرح کنید که ماکزیمم فراجهش پاسخ پله ٪۳۰ یا کمتر و زمان نشست ۳ s یا کمتر باشد.

ب ۶-۲۳ برای سیستم کنترل شکل ۶-۱۱۳ جبرانسازی طرح کنید که پاسخ پله فراجهشی برابر ٪۲۵ یا کمتر و زمان نشستی برابر ۵ s یا کمتر داشته باشد.

ب ۶-۲۴ سیستم شکل ۶-۱۱۴ را در نظر بگیرید. این سیستم فیدبک سرعت دارد. بهرهٔ تقویت کننده K و بهرهٔ فیدبک سرعت K_h را طوری تعیین کنید که این شرایط برآورده شود:

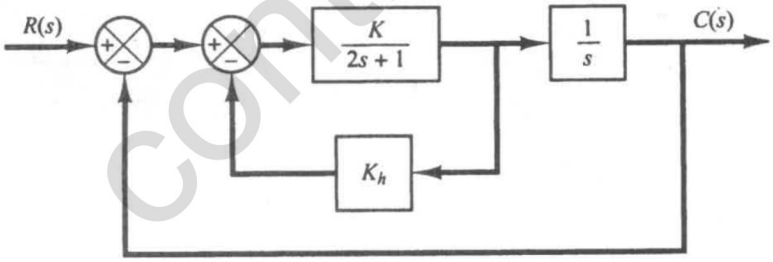
۱. نسبت میرایی قطبهای حلقه بسته ۰/۵ باشد .

۲. زمان نشست کوچکتر یا مساوی ۲s باشد .

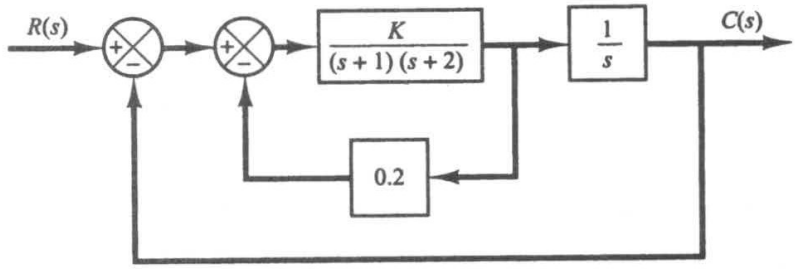
۳. ثابت خطای ایستای سرعت $K_v \leq 50s^{-1}$.

۴. $0 < k_h < 1$.

ب ۶-۲۵ سیستم شکل ۶-۱۱۵ را در نظر بگیرید. در این سیستم فیدبک سرعت به کار رفته است . مقدار K را به نحوی تعیین کنید که قطبهای غالب سیستم حلقه بسته دارای نسبت میرایی ۰/۵ باشد. پاسخ پلهٔ سیستم را به ازای این مقدار K به دست آورید.

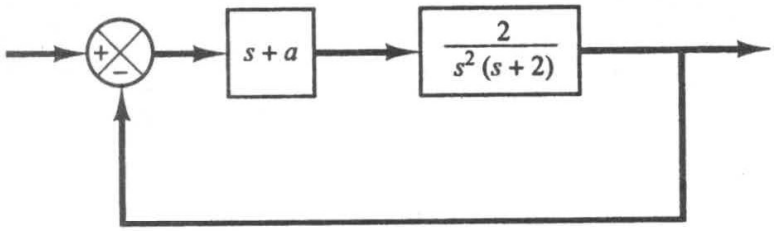


شکل ۶-۱۱۴ سیستم کنترل.



شکل ۶-۱۱۵
سیستم کنترل .

controlengineers.ir



شکل ۶-۱۱۶ سیستم کنترل.

ب ۶-۲۶ سیستم شکل ۶-۱۱۶ را در نظر بگیرید. مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را به ازای تغییر a از ۰ تا ∞ رسم کنید. مقدار a را به صورتی تعیین کنید که نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بستهٔ ۰/۵ باشد.

ب ۶-۲۷ سیستم شکل ۶-۱۱۷ را در نظر بگیرید. مکان هندسی ریشه‌های این سیستم را به ازای تغییر k از ۰ تا ∞ رسم کنید. مقدار k را به صورتی تعیین کنید که نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته ۰/۵ باشد. به ازای این مقدار k ، ثابت ایستای خطای سرعت را به دست آورید.

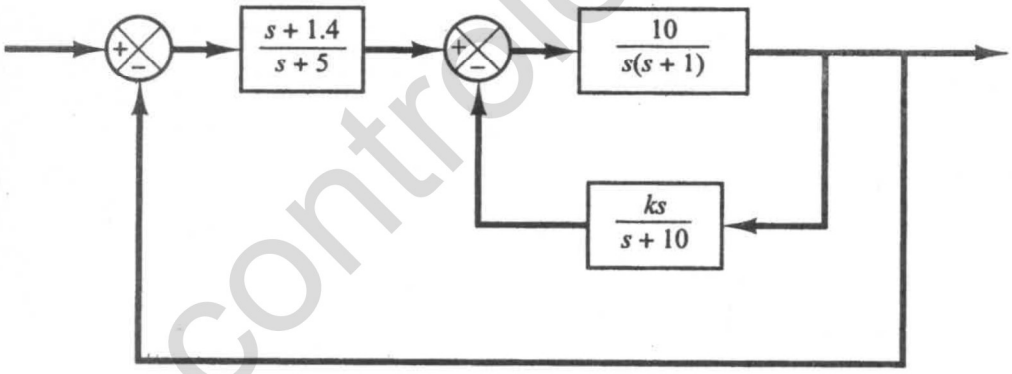
ب ۶-۲۸ سیستم شکل ۶-۱۱۸ را در نظر بگیرید. فرض کنید بهرهٔ K از ۰ تا ∞ تغییر می‌کند. مکان هندسی ریشه‌ها را به ازای $K_h=$ ۰/۱ , ۰/۳ , ۰/۵ رسم کنید.

پاسخ پلهٔ سیستم را به ازای مقادیر زیر مقایسه کنید:

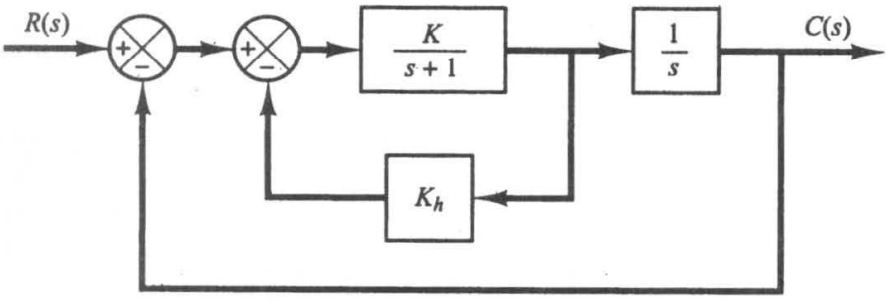
(۱) $K=$ ۱۰ ، $K_h=$ ۰/۱

(۲) $K=$ ۱۰ ، $K_h=$ ۰/۳

(۳) $K=$ ۱۰ ، $K_h=$ ۰/۵



شکل ۶-۱۱۷
سیستم کنترل.



شکل ۶-۱۱۸
سیستم کنترل.

controlengineers.ir

controlengineers.ir

تحلیل و طراحی

۷

سیستمهای کنترل به روش پاسخ فرکانسی

controlengineers.ir

۷–۱ مقدمه

منظور از ***پاسخ فرکانسی*** پاسخِ حالت ماندگار سیستم به ورودی سینوسی است. در روشهای پاسخ فرکانسی، فرکانس سیگنال ورودی را در گسترهٔ فرکانسی خاصی تغییر داده، پاسخ حاصل را بررسی می‌کنیم.

در این فصل رهیافت‌های پاسخ فرکانسی برای تحلیل و طراحی سیستمهای کنترل را معرفی می‌کنیم. اطلاعاتی که این تحلیل به دست می‌دهد با آنچه تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها به دست می‌دهد متفاوت است. در واقع رهیافت‌های پاسخ فرکانسی و مکان هندسی ریشه‌ها مکمل هم هستند. یکی از مزایای رهیافت پاسخ فرکانسی این است که می‌توانیم از داده‌های کسب شده از اندازه‌گیری سیستم فیزیکی استفاده کنیم، بدون این که نیازی به ساخت مدل ریاضی سیستم داشته باشیم. در بسیاری از طراحی‌های سیستمهای کنترل هر دو رهیافت به کار می‌رود. مهندس کنترل باید با هر دو روش آشنا باشد.

روشهای پاسخ فرکانسی در دهه‌های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ توسط نایکوییست، بوده ، نیکولس، و اشخاص دیگر پی‌ریزی شد. روشهای پاسخ فرکانسی در نظریهٔ کلاسیک کنترل بسیار کارآمد هستند. همچنین در نظریهٔ کنترل مقاوم نیز ابزارهایی کاملاً ضروری به حساب می‌آیند.

معیار پایداری نایکوییست قادرمان می‌کند با دانستن مشخصات پاسخ فرکانسی حلقه‌باز ، پایداری مطلق و نسبی سیستم‌های حلقه بستهٔ خطی را بررسی کنیم. یک مزیت رهیافت پاسخ فرکانسی این است که آزمونهای