

# سیستمهای کنترل به روش پاسخ فرکانسی

## ۷-۱ مقدمه

منظور از پاسخ فرکانسی پاسخ حالت ماندگار سیستم به ورودی سینوسی است. در روشهای پاسخ فرکانسی، فرکانس سیگنال ورودی را در گستره فرکانسی خاصی تغییر داده، پاسخ حاصل را بررسی می‌کنیم. در این فصل رهیافت‌های پاسخ فرکانسی برای تحلیل و طراحی سیستمهای کنترل را معرفی می‌کنیم. اطلاعاتی که این تحلیل به دست می‌دهد با آنچه تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها به دست می‌دهد متفاوت است. در واقع رهیافت‌های پاسخ فرکانسی و مکان هندسی ریشه‌ها مکمل هم هستند. یکی از مزایای رهیافت پاسخ فرکانسی این است که می‌توانیم از داده‌های کسب شده از اندازه‌گیری سیستم فیزیکی استفاده کنیم، بدون این که نیازی به ساخت مدل ریاضی سیستم داشته باشیم. در بسیاری از طراحی‌های سیستمهای کنترل هر دو رهیافت به کار می‌رود. مهندس کنترل باید با هر دو روش آشنا باشد.

روشهای پاسخ فرکانسی در دهه‌های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ توسط نایکویست، بوده، نیکولس، و اشخاص دیگر پی‌ریزی شد. روشهای پاسخ فرکانسی در نظریه کلاسیک کنترل بسیار کارآمد هستند. همچنین در نظریه کنترل مقاوم نیز ابزارهایی کاملاً ضروری به حساب می‌آیند.

معیار پایداری نایکویست قادرمان می‌کند با دانستن مشخصات پاسخ فرکانسی حلقه باز، پایداری مطلق و نسبی سیستم‌های حلقه بسته خطی را بررسی کنیم. یک مزیت رهیافت پاسخ فرکانسی این است که آزمونهای

پاسخ فرکانسی عموماً ساده‌اند و با استفاده از مولدهای سینوسی و وسائل اندازه‌گیری موجود می‌توان این آزمونها را انجام داد. به علاوه، رهیافت پاسخ فرکانسی این مزیت را دارد که به کمک آن می‌توان سیستمی طرح کرد که اثرهای نامطلوب نویز و تداخل در آن می‌نیم شود و این نوع تحلیل و طراحی را می‌توان به سیستمهای کنترل غیرخطی خاصی تعمیم داد.

همچنین پاسخ فرکانسی سیستم کنترل تصویری کیفی از پاسخ گذرا به دست می‌دهد، و همبستگی بین پاسخ فرکانسی و پاسخ گذرا جز در مورد سیستمهای مرتبه دوم یک همبستگی غیرمستقیم است. در طراحی سیستم حلقه بسته، مشخصات پاسخ فرکانسی تابع تبدیل حلقه باز را با توجه به چند معیار طراحی طوری تنظیم می‌کنیم که سیستم پاسخ گذرایی با مشخصات مطلوب داشته باشد.

**یافتن خروجی حالت ماندگار به ورودی سینوسی.** نشان خواهیم داد که خروجی حالت ماندگار یک تابع تبدیل را می‌توان مستقیماً از تابع تبدیل سینوسی آن به دست آورد؛ منظور از تابع تبدیل سینوسی تابع تبدیلی بر حسب  $j\omega$  به جای  $s$  است، که  $\omega$  فرکانس است.

سیستم خطی مستقل از زمان شکل ۷-۱ را در نظر بگیرید. ورودی و خروجی این سیستم که تابع تبدیل آن  $G(s)$  است، به ترتیب با  $x(t)$  و  $y(t)$  مشخص شده‌اند. اگر  $x(t)$  یک سیگنال سینوسی باشد، خروجی حالت ماندگار نیز یک سینوسی با همان فرکانس است، ولی دامنه و فاز آن می‌تواند متفاوت باشد.

فرض کنید سیگنال ورودی به صورت زیر است

$$x(t) = X \sin \omega t$$

[ در این کتاب یکای  $\omega$  همیشه رادیان بر ثانیه است. هر گاه منظورمان فرکانس دارای یکای دور بر ثانیه (هرتز) باشد، از نماد  $f$  استفاده می‌کنیم، یعنی  $\omega = 2\pi f$ . ]

همچنین فرض کنید که تابع تبدیل  $G(s)$  را می‌توان به صورت دو چندجمله‌ای بر حسب  $s$  نوشت، یعنی

$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{p(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\cdots(s+s_n)}$$

پس تبدیل لاپلاس خروجی  $Y(s)$  عبارت است از

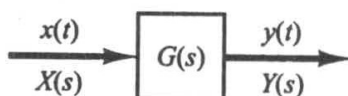
$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{p(s)}{q(s)}X(s) \quad (1-7)$$

که در آن  $X(s)$  تبدیل لاپلاس  $x(t)$  است.

نشان خواهیم داد که اگر صبر کنیم تا به حالت ماندگار برسیم، می‌توانیم پاسخ فرکانسی را با گذاشتن  $j\omega$  به جای  $s$  به دست آوریم. همچنین نشان خواهیم داد که پاسخ حالت ماندگار عبارت است از

$$G(j\omega) = M e^{j\phi} = M \angle \phi$$

شکل ۷-۱



سیستم پایدار، خطی، و مستقل از زمان.

که در آن  $M$  نسبت دامنه‌های سینوسی‌های ورودی و خروجی، و  $\phi$  اختلاف فاز بین آنها است. در آزمون پاسخ فرکانسی، فرکانس ورودی  $\omega$  را تغییر می‌دهیم تا تمام گستره فرکانسی مورد نظر جارو شود.

پاسخ حالت ماندگار یک سیستم پایدار، خطی، و مستقل از زمان به ورودی سینوسی به شرایط اولیه بستگی ندارد. (پس می‌توانیم شرایط اولیه را صفر فرض کنیم.) اگر  $Y(s)$  تنها قطبهای مجزا داشته باشد، بسط معادله (۱-۷) به کسرهای جزئی به دست می‌دهد

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} \quad (2-7)$$

$$= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + s_1} + \frac{b_2}{s + s_2} + \dots + \frac{b_n}{s + s_n}$$

که در آن  $a$  و  $b_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) مقادیر ثابت، و  $\bar{a}$  مزدوج مختلط  $a$  است. عکس تبدیل لاپلاس معادله (۲-۷) به دست می‌دهد.

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1 t} + b_2e^{-s_2 t} + \dots + b_ne^{-s_n t}, \quad t \geq 0 \quad (3-7)$$

در سیستمهای پایدار بخش حقیقی  $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$  منفی است. پس با میل  $t$  به بینهایت جملات  $e^{-s_1 t}, e^{-s_2 t}, \dots$  و  $e^{-s_n t}$  به صفر می‌گریند. پس در حالت ماندگار تمام جملات سمت راست معادله (۳-۷) صفر می‌شوند، بجز دو جمله اول.

اگر  $Y(s)$  قطب مکرر  $s_j$ ، با تکرر  $m_j$  داشته باشد، در  $y(t)$  جملاتی به صورت  $t^{h_j}e^{-s_j t}$  به وجود می‌آید ( $h_j = 0, 1, 2, \dots, m_j - 1$ ). در سیستمهای پایدار، با میل  $t$  به بینهایت  $t^{h_j}e^{-s_j t}$  به صفر می‌گراید. پس مستقل از این که سیستم قطبهای مجزا داشته باشد یا نه، پاسخ حالت ماندگار عبارت است از

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} \quad (4-7)$$

که در آن  $a$  ثابت است و می‌توان آن را از معادله (۲-۷) به صورت زیر به دست آورد

$$a = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{X G(-j\omega)}{2j}$$

توجه کنید که

$$\bar{a} = G(s) \frac{\omega X}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{X G(j\omega)}{2j}$$

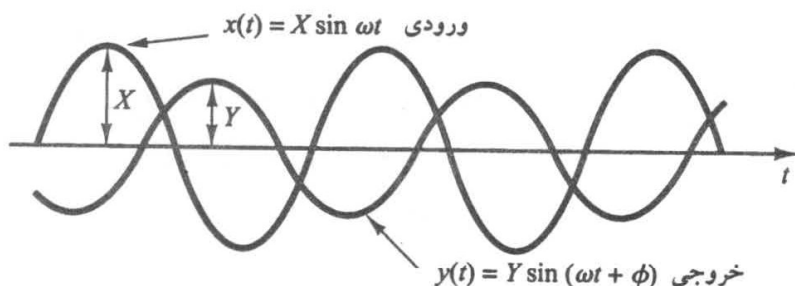
چون  $G(j\omega)$  یک کمیت مختلط است، می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$$

که در آن  $|G(j\omega)|$  اندازه و  $\phi$  زاویه فاز  $G(j\omega)$  است؛ یعنی

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[ \frac{\text{بخش موهومی } G(j\omega)}{\text{بخش حقیقی } G(j\omega)} \right]$$

زاویه  $\phi$  می‌تواند مثبت، صفر، یا منفی باشد. به نحوی مشابه می‌توان عبارت زیر را برای  $G(-j\omega)$  به دست آورد



شکل ۷-۲

سیگنالهای سینوسی ورودی و خروجی.

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\phi} = |G(j\omega)| e^{-j\phi}$$

حال با توجه به این که

$$a = -\frac{X |G(j\omega)| e^{-j\phi}}{2j}, \quad \bar{a} = \frac{X |G(j\omega)| e^{j\phi}}{2j}$$

معادله (۷-۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= X |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= X |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) = Y \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (7-5)$$

که در آن  $Y = X |G(j\omega)|$  می بینیم که اگر ورودی یک سیستم پایدار، خطی، و مستقل از زمان سینوسی باشد، خروجی حالت ماندگار نیز یک سینوسی با همان فرکانس ورودی است. البته در حالت کلی دامنه و فاز سیگنال خروجی و ورودی متفاوت اند. در واقع دامنه خروجی حاصل ضرب دامنه ورودی و  $|G(j\omega)|$  است، و فاز خروجی و ورودی به اندازه  $\phi = \angle G(j\omega)$  تفاوت دارد. شکل ۷-۲ سیگنال سینوسی ورودی و خروجی نوعی را نشان می دهد.

بر این اساس این نتیجه مهم را به دست می آوریم: برای ورودی های سینوسی

$$|G(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|X(j\omega)|} = \text{نسبت دامنه سینوسی خروجی به دامنه سینوسی ورودی}$$

$$\angle G(j\omega) = \frac{\angle Y(j\omega)}{\angle X(j\omega)} = \text{تغییر فاز سینوسی خروجی نسبت به سینوسی ورودی}$$

بنابراین مشخصات پاسخ یک سیستم به ورودی سینوسی را می توان مستقیماً از رابطه زیر به دست آورد

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = G(j\omega)$$

تابع  $G(j\omega)$  را تابع تبدیل سینوسی می نامند. این تابع نسبت  $Y(j\omega)$  به  $X(j\omega)$ ، و کمیتی مختلط است که می توان آن را با دو کمیت وابسته به فرکانس اندازه و زاویه فاز نشان داد. تابع تبدیل سینوسی یک سیستم خطی را می توان با گذاشتن  $j\omega$  به جای  $s$  در تابع تبدیل سیستم به دست آورد. در فصل ۶ گفتیم که زاویه فاز منفی را پسفازی و زاویه فاز مثبت را پیشفازی می نامند. شبکه دارای مشخصه پیشفازی شبکه پیشفاز، و شبکه دارای مشخصه پسفازی شبکه پسفاز نامیده می شود.



شکل ۳-۷  
سیستم مرتبه اول.

### مثال ۱-۷

سیستم شکل ۳-۷ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل  $G(s)$  عبارت است از

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

خروجی حالت ماندگار  $y_{ss}(t)$  را به ازای ورودی سینوسی  $x(t) = X \sin \omega t$  بیابید.

به جای  $s$  در  $G(s)$  قرار می‌دهیم  $j\omega$  و به دست می‌آوریم

$$G(j\omega) = \frac{K}{jT\omega + 1}$$

نسبت دامنه خروجی به ورودی برابر است با

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

و زاویه فاز عبارت است از

$$\phi = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} T\omega$$

پس به ازای ورودی  $x(t) = X \sin \omega t$  پاسخ حالت ماندگار  $y_{ss}(t)$  را می‌توان به صورت زیر از معادله (۵-۷) به دست آورد

$$y_{ss}(t) = \frac{XK}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} T\omega) \quad (۶-۷)$$

با توجه به معادله (۶-۷) می‌بینیم که به ازای  $\omega$  کوچک، دامنه خروجی حالت ماندگار  $y_{ss}(t)$  تقریباً  $K$  برابر دامنه ورودی است. تغییر فاز نیز به ازای  $\omega$  کوچک کم است. به ازای  $\omega$  بزرگ دامنه خروجی کوچک است و تقریباً با  $\omega$  نسبت عکس دارد. با گراییدن  $\omega$  به بینهایت زاویه فاز به  $-90^\circ$  میل می‌کند. این شبکه پسفاز است.

### مثال ۲-۷

شبکه توصیف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_2}}$$

پیشفاز یا پسفاز بودن شبکه را تعیین کنید.

به ازای ورودی  $x(t) = X \sin \omega t$  پاسخ حالت ماندگار  $y_{ss}(t)$  را می‌توان به این صورت یافت : چون

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + (1/T_1)}{j\omega + (1/T_2)} = \frac{T_2(1 + T_1 j\omega)}{T_1(1 + T_2 j\omega)}$$

داریم

$$|G(j\omega)| = \frac{T_2 \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}{T_1 \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}$$

و

$$\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega$$

پس خروجی حالت ماندگار عبارت است از

$$y_{ss}(t) = \frac{X T_2 \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}{T_1 \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega)$$

با توجه به این عبارت می‌بینیم که اگر  $T_1 > T_2$ ، آنگاه  $\tan^{-1} T_1 \omega - \tan^{-1} T_2 \omega > 0$ . پس این شبکه به ازای  $T_1 > T_2$  یک شبکه پیشفاز است. به ازای  $T_1 < T_2$  شبکه یک شبکه پسفاز است.

**نمایش تصویری مشخصات پاسخ فرکانسی.** تابع تبدیل سینوسی، که کمیتی مختلط و وابسته به  $\omega$  است، با دامنه و زاویه فاز، به صورت تابعی از فرکانس، مشخص می‌شود. برای نمایش تابع تبدیل سینوسی سه روش وجود دارد:

۱. نمودار بوده یا نمودار لگاریتمی

۲. نمودار نایکویست یا نمودار قطبی

۳. نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز (نمودار نیکولس)

در این فصل در مورد این نمایش‌ها به تفصیل صحبت می‌کنیم. همچنین روش ترسیم نمودارهای بوده، نایکویست و نیکولس با MATLAB را نیز بیان می‌کنیم.

**نمای کلی فصل.** بخش ۷-۱ مطالب مقدماتی را در مورد پاسخ فرکانسی بیان می‌کند. در بخش ۷-۲ راجع به نمودارهای بوده توابع تبدیل مختلف صحبت می‌شود. بخش ۷-۳ راجع به نمودارهای قطبی توابع تبدیل سینوسی، و بخش ۷-۴ راجع به نمودارهای لگاریتم دامنه برحسب فاز است. بخش ۷-۵ بحث مفصلی در مورد معیار پایداری نایکویست است. بخش ۷-۶ راجع به تحلیل پایداری سیستمهای حلقه بسته بر اساس معیار نایکویست می‌باشد. بخش ۷-۷ معیارهای پایداری نسبی معرفی می‌شوند. در بخش ۷-۸ روشی برای یافتن پاسخ فرکانسی حلقه بسته از پاسخ فرکانسی حلقه باز، به کمک دایره‌های  $M$  و  $N$  ارائه می‌شود. کاربرد نمودار نیکولس در همین بخش معرفی می‌شود. بخش ۷-۹ به روشهای تجربی تعیین تابع تبدیل اختصاص دارد. در بخش ۷-۱۰ جنبه‌های مقدماتی طراحی سیستم کنترل با رهیافت پاسخ فرکانسی معرفی می‌شود. در بخشهای ۷-۱۱، ۷-۱۲، و ۷-۱۳ به ترتیب در مورد جبرانسازی پیشفاز، جبرانسازی پسفاز، و جبرانسازی پسفاز-پیشفاز به تفصیل صحبت خواهد شد.

## ۲-۷ نمودار بوده

**نمودار بوده یا نمودار لگاریتمی.** یک تابع تبدیل سینوسی را می‌توان با دو نمودار مجزا نمایش داد: یک نمودار تغییرات دامنه تابع تبدیل سینوسی برحسب فرکانس، و دیگری زاویه فاز (با واحد درجه) را برحسب فرکانس نشان می‌دهد. هر دو منحنی برحسب لگاریتم فرکانس رسم می‌شوند.

بیان استاندارد لگاریتم دامنه  $G(j\omega)$ ،  $20 \log |G(j\omega)|$  است که در آن لگاریتم در پایه ۱۰ محاسبه می‌شود. واحد این بیان دسیبل، با علامت اختصاری dB است. در نمایش لگاریتمی، منحنی‌ها روی کاغذ نیم‌لگاریتمی رسم می‌شود، مقیاس لگاریتمی برای فرکانس و مقیاس خطی برای دامنه (برحسب دسیبل) یا فاز (برحسب درجه) به کار می‌رود. (گستره فرکانسی مورد نیاز تعداد دهه‌های محور افقی را تعیین می‌کند).

مزیت اصلی استفاده از نمودار بوده این است که ضرب دامنه‌ها به جمع تبدیل می‌شود. به علاوه روش ساده‌ای برای رسم تقریبی منحنی‌های لگاریتم دامنه وجود دارد. اساس این روش تقریب مجانبی است. تقریب با استفاده از مجانب‌های راست در مواردی که تنها اطلاعات تقریبی مشخصات پاسخ فرکانسی لازم است، تقریب خوبی است. هر گاه منحنی دقیق‌تری لازم باشد می‌توان منحنی رسم شده براساس این مجانب‌ها را تصحیح کرد. منحنی‌های زاویه فاز را می‌توان تنها با داشتن الگوی منحنی فاز رسم کرد. استفاده از مقیاس لگاریتمی برای فرکانس به خاطر باز شدن ناحیه فرکانس‌های پایین بسیار مهم است، زیرا برای اکثر سیستم‌های عملی مشخصات فرکانس پایین بسیار مهم هستند. این که به خاطر لگاریتمی بودن فرکانس نمی‌توان منحنی‌ها را تا فرکانس صفر رسم کرد ( $\log 0 = -\infty$ ) مشکلی جدی ایجاد نمی‌کند.

با نمایش اطلاعات پاسخ فرکانسی به شکل نمودار بوده، تعیین تابع تبدیل به روش تجربی کار ساده‌ای می‌شود.

**عوامل پایه‌ای  $G(j\omega)H(j\omega)$ .** چنانچه قبلاً گفتیم مزیت اصلی نمودار لگاریتمی سادگی نسبی ترسیم منحنی‌های پاسخ فرکانسی است. عوامل پایه موجود در یک تابع تبدیل دلخواه  $G(j\omega)H(j\omega)$  عبارت‌اند از:

۱. بهره  $K$

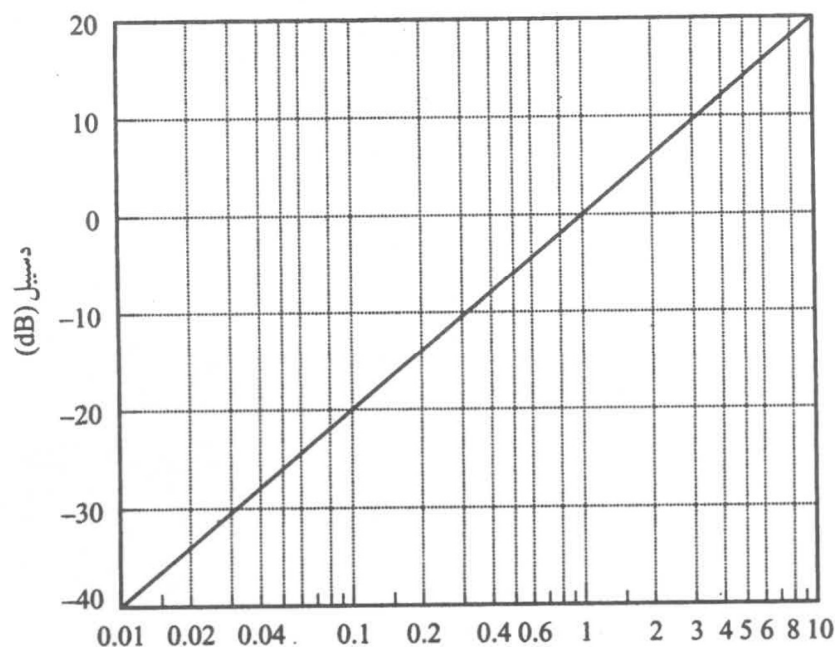
۲. عوامل مشتگیری و انتگرالگیری  $(j\omega)^{\pm 1}$

۳. عوامل مرتبه  $(1+j\omega T)^{\pm 1}$

۴. عوامل مرتبه دوم  $[1+\zeta(j\omega/\omega_n)^2+(j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$

پس از آشنا شدن با نمودارهای لگاریتمی این عوامل پایه‌ای می‌توانیم آنها را برای ترسیم نمودار لگاریتمی مرکب یک تابع تبدیل کلی  $G(j\omega)H(j\omega)$  به کار ببریم، به این منظور منحنی‌های این عوامل را رسم کرده، آنها را با هم جمع می‌کنیم، زیرا جمع لگاریتم این عوامل با ضرب آنها هم‌ارز است.

**بهره  $K$ .** برحسب دسیبل، اعداد بزرگتر از یک مثبت و اعداد کوچکتر از یک منفی هستند. منحنی لگاریتم اندازه بهره ثابت  $K$ ، خطی افقی با اندازه  $20 \log K$  دسیبل است. زاویه فاز بهره  $K$  صفر است. اثر تغییر بهره  $K$  در تابع تبدیل، بالا و پایین بردن منحنی لگاریتم دامنه به اندازه‌ای ثابت است، ولی بر منحنی فاز اثری ندارد.



شکل ۷-۴

منحنی تبدیل عدد به دسیبل.

شکل ۷-۴ یک منحنی تبدیل عدد به دسیبل را نشان می‌دهد. با توجه به این منحنی می‌توان مقدار هر عدد برحسب دسیبل را یافت. با هر ۱۰ برابر شدن عدد، مقدار برحسب دسیبل به اندازه ۲۰ زیاد می‌شود. اثبات این مطلب به صورت زیر است

$$20 \log(K \times 10) = 20 \log K + 20$$

به نحوی مشابه

$$20 \log(K \times 10^n) = 20 \log K + 20n$$

توجه کنید که برحسب دسیبل، هر عدد و عکس آن تنها در علامت تفاوت دارند، یعنی برای عدد  $K$

$$20 \log K = -20 \log \frac{1}{K}$$

**عوامل مشتقگیری و انتگرالگیری  $(j\omega)^{\pm 1}$ .** لگاریتم دامنه  $1/j\omega$  برحسب دسیبل عبارت است از

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$$

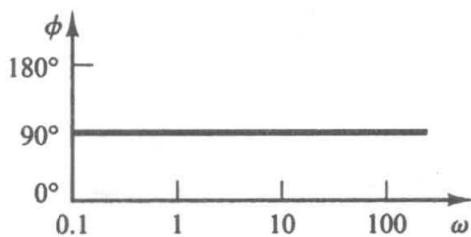
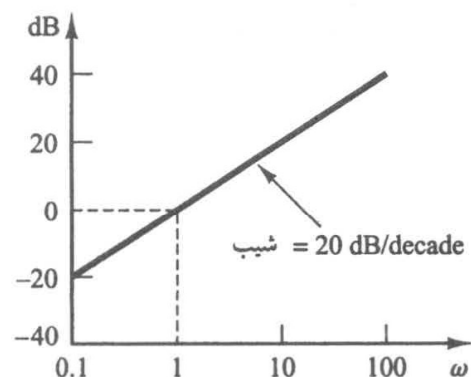
زاویه فاز  $1/j\omega$  ثابت و برابر  $-90^\circ$  است.

در نمودارهای بوده، نسبتهای فرکانسی برحسب اکتاو یا دهه بیان می‌شوند. اکتاو فاصله فرکانسی  $\omega_1$  تا  $2\omega_1$  است، که  $\omega_1$  می‌تواند هر فرکانسی باشد. دهه فاصله فرکانسی  $\omega_1$  تا  $10\omega_1$  است؛ باز هم  $\omega_1$  می‌تواند هر فرکانسی باشد، (در مقیاس لگاریتمی کاغذ نیم‌لگاریتمی هر نسبت فرکانسی با فاصله افقی یکسانی متناظر است. برای مثال فاصله افقی  $\omega = 1$  تا  $\omega = 10$  برابر فاصله افقی  $\omega = 3$  تا  $\omega = 30$  است.)

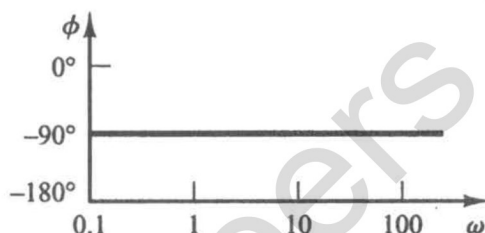
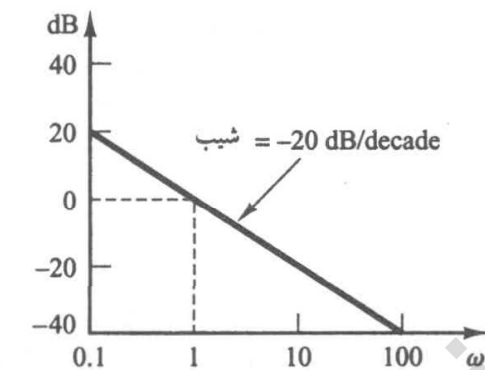
وقتی  $\omega$  روی مقیاس لگاریتمی قرار می‌گیرد، لگاریتم دامنه  $-20 \log \omega \text{ dB}$  یک خط راست می‌شود. برای

رسم این خط راست تنها مشخص کردن یک نقطه ( $\omega = 1$ ,  $0 \text{ dB}$ ) کافی است، چون

$$(-20 \log 10 \omega) \text{ dB} = (-20 \log \omega - 20) \text{ dB}$$

نمودار بودی  $G(j\omega) = j\omega$ 

(ب)

نمودار بودی  $G(j\omega) = 1/j\omega$ 

(الف)

شکل ۵-۷ (الف) نمودار بودی  $G(j\omega) = 1/j\omega$ ؛ (ب) نمودار بودی  $G(j\omega) = j\omega$ .

شیب این خط راست  $20 \text{ dB/dec}$  - (بخوانید منهای  $20 \text{ dB}$  بر دهه) یا  $6 \text{ dB/oct}$  - (بخوانید منهای  $6 \text{ dB}$  بر اکتاو) است.

به نحوی مشابه لگاریتم دامنه  $j\omega$  برحسب دسیبل عبارت است از

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB}$$

زاویه فاز  $j\omega$  ثابت و برابر  $90^\circ$  است. منحنی لگاریتم دامنه خط راستی با شیب  $20 \text{ dB/dec}$  است، شکل‌های ۵-۷ (الف) و (ب) به ترتیب منحنی‌های پاسخ فرکانسی عوامل  $1/j\omega$  و  $j\omega$  را نشان می‌دهند. به وضوح پیداست که پاسخ فرکانسی عوامل  $1/j\omega$  و  $j\omega$  تنها در علامت شیب منحنی‌های دامنه و علامت زاویه فاز تفاوت دارند. هر دو لگاریتم دامنه در  $\omega=1$  برابر  $0 \text{ dB}$  هستند.

اگر تابع تبدیل دارای عوامل  $(1/j\omega)^n$  یا  $(j\omega)^n$  باشد، لگاریتم دامنه به ترتیب عبارت است از

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n \times 20 \log |j\omega| = -20 n \log \omega \text{ dB}$$

یا

$$20 \log |(j\omega)^n| = n \times 20 \log |j\omega| = 20 n \log \omega \text{ dB}$$

پس شیب منحنی‌های لگاریتم دامنه عوامل  $(1/j\omega)^n$  و  $(j\omega)^n$  به ترتیب  $-20 n \text{ dB/dec}$  و  $20 n \text{ dB/dec}$  است. در تمام گستره فرکانسی زاویه فاز  $(1/j\omega)^n$  برابر  $-90^\circ \times n$  و زاویه فاز  $(j\omega)^n$  برابر  $90^\circ \times n$  است. منحنی‌های دامنه از نقطه  $(\omega=1, 0 \text{ dB})$  می‌گذرند.

**عامل مرتبه اول**  $(1+j\omega T)^{-1}$ . لگاریتم دامنه عامل مرتبه اول  $1/(1+j\omega T)$  عبارت است از

$$20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \text{ dB}$$

در فرکانسهای پایین، یعنی فرکانسهایی که برایشان  $\omega \ll 1/T$ ، لگاریتم دامنه را می‌توان به صورت زیر تقریب زد

$$-20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \approx -20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

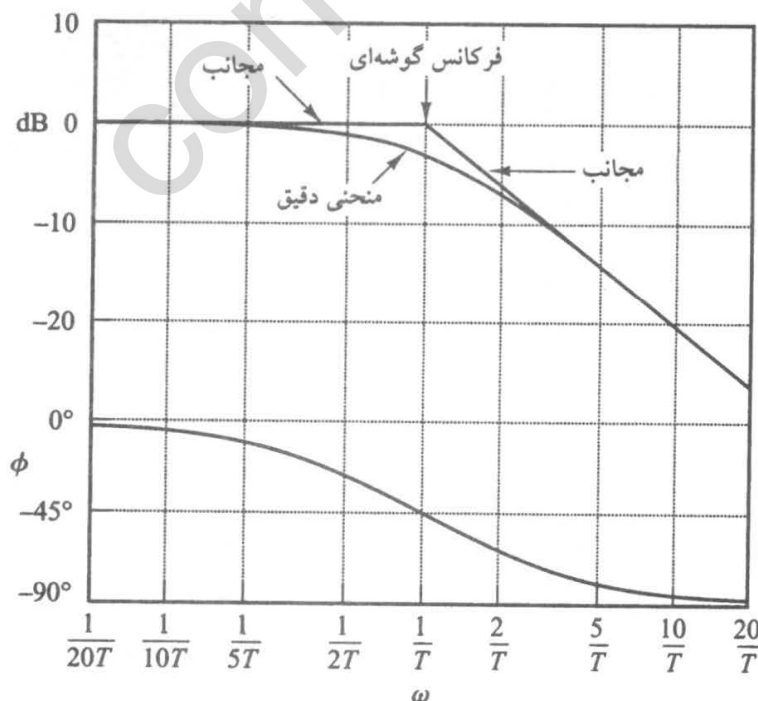
پس منحنی لگاریتم دامنه در فرکانسهای پایین خط راست ۰ dB است. در فرکانسهای بالا که برایشان  $\omega \gg 1/T$

$$-20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \approx -20 \log \omega T \text{ dB}$$

این عبارت تقریبی گستره فرکانس بالاست. در  $\omega = 1/T$  این منحنی مقدار ۰ dB را به دست می‌دهد و در  $\omega = 10/T$  مقدار -۲۰ dB را. پس مقدار  $-20 \log \omega T$  dB با هر دهه افزایش  $\omega$  به اندازه ۲۰ dB کم می‌شود. پس در  $\omega \gg 1/T$  منحنی لگاریتم دامنه خط راستی با شیب -۲۰ dB/dec (یا -۶ dB/oct) است.

تحلیل بالا نشان می‌دهد که منحنی پاسخ فرکانسی عامل  $1/(1+j\omega T)$  را می‌توان با دو مجانب تقریب زد. یک مجانب خط راست ۰ dB در گستره فرکانسی  $0 < \omega < 1/T$  است، و دیگری خط راستی با شیب -۲۰ dB/dec در گستره فرکانسی  $1/T < \omega < \infty$ . منحنی دقیق لگاریتم دامنه، مجانبها و منحنی فاز در شکل ۶-۷ نشان داده شده است.

فرکانس محل برخورد دو مجانب را فرکانس گوشه‌ای یا شکست می‌نامند. برای عامل  $1/(1+j\omega T)$ ، فرکانس  $\omega = 1/T$  فرکانس گوشه‌ای است، چون در  $\omega = 1/T$  دو مجانب مقدار یکسانی دارند. (در عبارت مجانب فرکانس پایین در  $\omega = 1/T$  داریم  $20 \log 1 = 0 \text{ dB}$  و در عبارت مجانب فرکانس بالا نیز در  $\omega = 1/T$  داریم  $20 \log 1 = 0 \text{ dB}$ .) فرکانس گوشه‌ای منحنی پاسخ فرکانسی را به دو بخش تقسیم می‌کند، ناحیه فرکانس



شکل ۶-۷

منحنی لگاریتم دامنه و مجانبهای آن و منحنی زاویه فاز  $1/(1+j\omega T)$ .

پایین و ناحیه فرکانس بالا. فرکانس گوشه‌ای در رسم منحنی‌های پاسخ فرکانسی بسیار مهم است.

مقدار دقیق زاویه فاز  $\phi$  عامل  $1/(1+j\omega T)$  عبارت است از

$$\phi = -\tan^{-1} \omega T$$

در فرکانس صفر زاویه فاز  $0^\circ$  است. در فرکانس گوشه‌ای زاویه فاز عبارت است

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{T}{T} = -\tan^{-1} 1 = -45^\circ$$

در بینهایت زاویه فاز  $-90^\circ$  می‌شود. چون زاویه فاز تابع تانژانت معکوس است، زاویه فاز نسبت به نقطه عطف واقع در  $\phi = -45^\circ$  تقارن دارد.

خطای منحنی‌های مجانبی دامنه از مقدار واقعی را می‌توان محاسبه کرد. ماکزیمم خطا در فرکانس گوشه‌ای رخ می‌دهد و تقریباً برابر  $-3$  dB است، زیرا

$$-20 \log \sqrt{1+1} + 20 \log 1 = -10 \log 2 = -3.03 \text{ dB}$$

خطا در فرکانسی که یک اکتاو پایین‌تر از فرکانس گوشه‌ای است، یعنی در  $\omega = 1/(2T)$ ، برابر است با

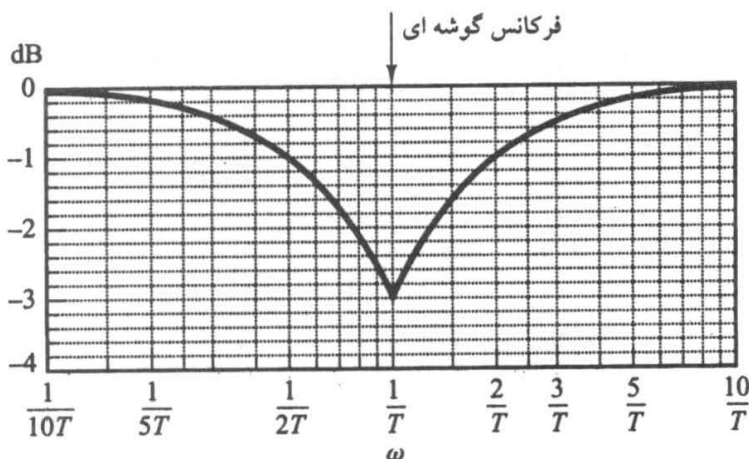
$$-20 \log \sqrt{\frac{1}{4} + 1} + 20 \log 1 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

خطا در فرکانسی که یک اکتاو بالاتر از فرکانس گوشه‌ای است، یعنی در  $\omega = 2/T$ ، برابر است با

$$-20 \log \sqrt{2^2 + 1} + 20 \log 2 = -20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97 \text{ dB}$$

پس خطا در یک اکتاو پایین‌تر یا بالاتر از فرکانس گوشه‌ای تقریباً  $-1$  dB است. به نحوی مشابه می‌توان دید که خطا در یک دهه بالاتر یا پایین‌تر از فرکانس گوشه‌ای تقریباً  $-0.4$  dB است. شکل ۷-۷ خطای استفاده از مجانبها به عنوان منحنی پاسخ فرکانسی  $1/(1+j\omega T)$  را برحسب دسیبل نشان می‌دهد.

چون رسم مجانبها بسیار ساده است، و مجانبها به حد کافی به منحنی واقعی نزدیک‌اند، کاربرد این مجانبها در ترسیم نمودار بوده برای یافتن سریع مشخصات کلی پاسخ فرکانسی بسیار مناسب است و در مراحل ابتدایی کار می‌توان آنها را به کار برد. هر گاه منحنی پاسخ فرکانسی دقیقتری لازم بود، می‌توان تصحیح لازم را با مراجعه به شکل ۷-۷ انجام داد. در عمل برای صورت دادن این تصحیح می‌توان تصحیح  $3$  dB در فرکانس



شکل ۷-۷

خطای لگاریتم دامنه برای مجانب پاسخ فرکانسی  $1/(1+j\omega T)$ .

گوشه‌ای و تصحیح ۱ dB در یک اکتاو بالاتر و یک اکتاو پایین‌تر از فرکانس گوشه‌ای را در نظر گرفت و منحنی همواری رسم کرد که از این سه نقطه بگذرد.

توجه کنید که تغییر ثابت زمانی  $T$  باعث جابه‌جا شدن فرکانس گوشه‌ای می‌شود، ولی شکل‌های منحنی لگاریتم دامنه و زاویه فاز بی‌تغییر می‌ماند.

تابع تبدیل  $1/(1+j\omega T)$  مشخصات یک فیلتر پایین‌گذر را دارد. در فرکانسهای بزرگتر از  $\omega=1/T$  لگاریتم دامنه به سرعت به سمت  $-\infty$  افت می‌کند. این افت عمدتاً از ثابت زمانی ناشی می‌شود. در فیلتر پایین‌گذر خروجی می‌تواند به خوبی ورودی سینوسی فرکانس پایین را دنبال کند. ولی با افزایش فرکانس ورودی، خروجی نمی‌تواند ورودی را دنبال کند، زیرا خروجی برای رسیدن به دامنه مطلوب به زمان نیاز دارد. در فرکانسهای بالا دامنه به سمت صفر و اختلاف فاز خروجی نسبت به ورودی به  $-90^\circ$  میل می‌کند. بنابراین اگر ورودی هارمونیکهای زیادی داشته باشد، مولفه‌های فرکانس پایین به خوبی در خروجی ظاهر می‌شوند، ولی مولفه‌های فرکانس بالا با کاهش دامنه و تغییر فاز به خروجی می‌رسند. بنابراین چنین عنصر مرتبه اولی تنها پدیده‌های ثابت یا دارای تغییر کند را به طور دقیق، یا تقریباً دقیق، در خروجی بازسازی می‌کند. یک مزیت نمودار بوده این است که برای عاملهای عکس یکدیگر، مثلاً  $1+j\omega T$ ، منحنی‌های لگاریتم دامنه و زاویه فاز تنها در علامت تفاوت می‌کنند. چون

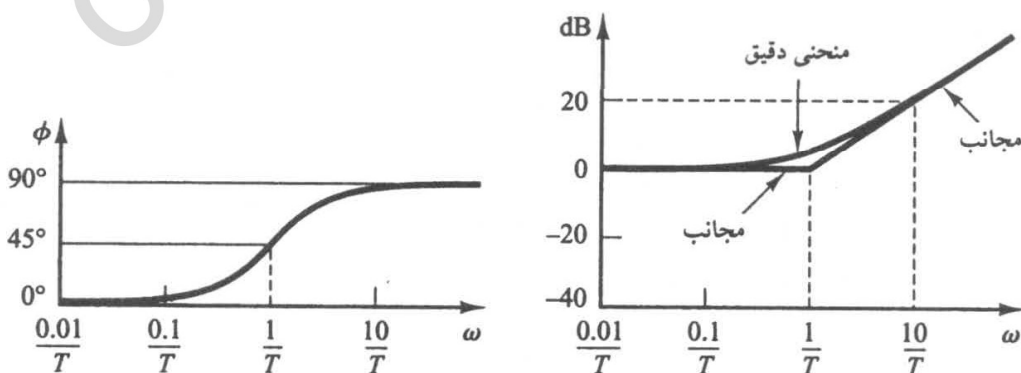
$$20 \log |1+j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right|$$

$$\angle (1+j\omega T) = \tan^{-1} \omega T = - \angle \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right|$$

در هر دو حالت فرکانس گوشه‌ای یکسان است. شیب مجانب فرکانس بالا ۲۰ dB/dec است و زاویه فاز با تغییر  $\omega$  از صفر تا بینهایت از  $0^\circ$  تا  $90^\circ$  تغییر می‌کند. شکل ۷-۸ منحنی لگاریتم دامنه و زاویه فاز عامل  $1+j\omega T$  را نشان می‌دهد.

برای رسم دقیق منحنی فاز باید چند نقطه از منحنی را مشخص کنیم. زاویه فاز  $(1+j\omega T)^{-1}$  عبارت است

از



شکل ۷-۸

منحنی لگاریتم دامنه و مجانبهای آن، و منحنی زاویه فاز  $1+j\omega T$ .

$$\omega = \frac{1}{T} \quad \text{در} \quad \pm 45^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{2T} \quad \text{در} \quad \pm 26,6^\circ$$

$$\omega = \frac{1}{10T} \quad \text{در} \quad \pm 5,7^\circ$$

$$\omega = \frac{2}{T} \quad \text{در} \quad \pm 63,4^\circ$$

$$\omega = \frac{10}{T} \quad \text{در} \quad \pm 84,3^\circ$$

در مواردی که تابع تبدیل داده شده جملاتی چون  $(1+j\omega T)^{\pm n}$  دارد، ترسیم مجانبهای مشابهی ممکن است. فرکانس گوشه‌ای باز هم  $\omega = 1/T$  و مجانبها باز هم خطوط راست هستند. مجانب فرکانس پایین خط افقی ۰ dB است و مجانب فرکانس بالا خطی با شیب  $-20 \text{ dB/dec}$  یا  $20 \text{ dB/dec}$  است. خطای مجانبها با منحنی واقعی  $n$  برابر خطای  $(1+j\omega T)^{\pm 1}$  است. زاویه فاز در هر فرکانس خاص  $n$  برابر زاویه  $(1+j\omega T)^{\pm 1}$  است.

**عاملهای مرتبه دوم**  $[1+2\zeta(j\omega/\omega_n)+(j\omega/\omega_n)^2]^{\pm 1}$ . سیستمهای کنترل غالباً عاملهای مرتبه دومی به

شکل زیر دارند

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (7-7)$$

به ازای  $\zeta > 1$  این عامل مرتبه دوم را می‌توان به صورت حاصلضرب دو جمله مرتبه اول دارای قطبهای حقیقی بیان کرد. به ازای  $0 < \zeta < 1$  این عامل مرتبه دوم حاصلضرب دو عامل مختلط مزدوج است. برای عاملهای مرتبه دوم دارای  $\zeta$  کوچک تقریب مجانبی برای منحنیهای پاسخ فرکانسی چندان دقیق نیست. علت این امر بستگی دامنه و فاز عامل مرتبه دوم به فرکانس گوشه‌ای و نسبت میرایی  $\zeta$  است.

منحنی مجانبی پاسخ فرکانسی را می‌توان به این ترتیب یافت. داریم

$$20 \log \left| \frac{1}{1+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

برای فرکانسهای پایین،  $\omega \ll \omega_n$  لگاریتم دامنه عبارت است از  $-20 \log 1 = 0 \text{ dB}$

پس مجانب فرکانس پایین خط افقی واقع در ۰ dB است. در فرکانسهای بالا،  $\omega \gg \omega_n$  لگاریتم دامنه عبارت است از

$$-20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB}$$

پس معادلهٔ مجانب فرکانس بالا خط راستی با شیب  $-40 \text{ dB/dec}$  است، زیرا

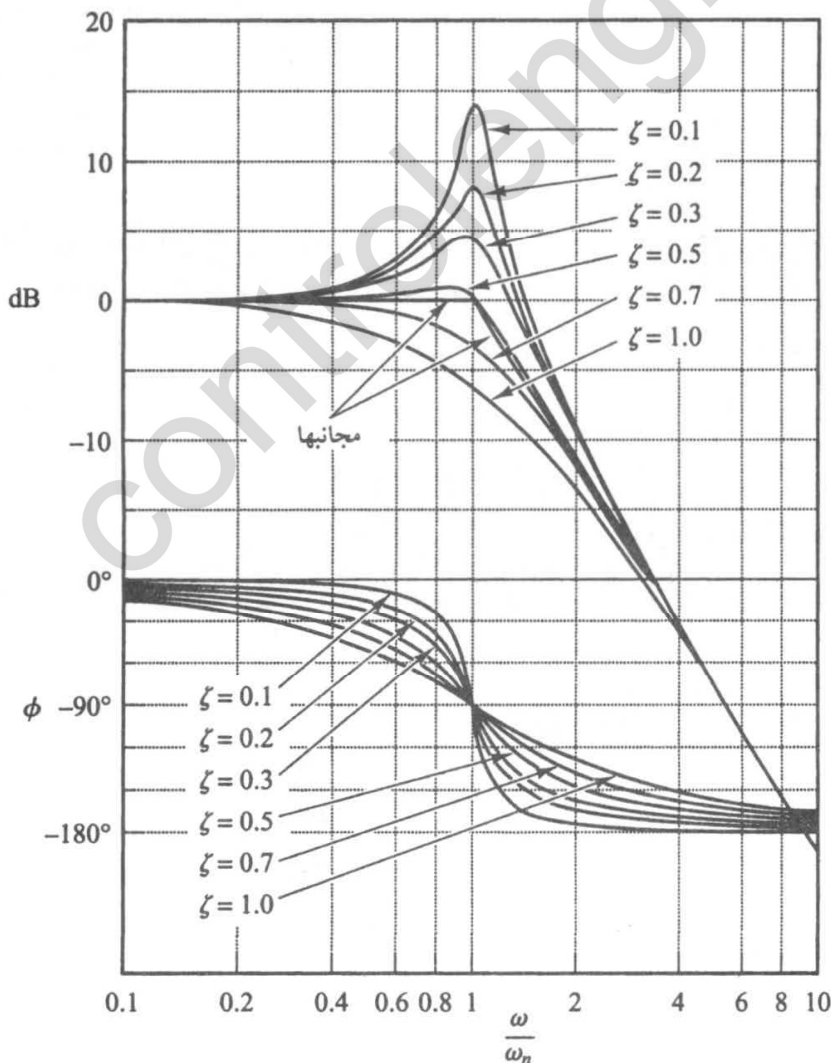
$$-40 \log \frac{1 \cdot \omega}{\omega_n} = -40 - 40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

مجانب فرکانس بالا و مجانب فرکانس پایین در  $\omega = \omega_n$  هم را قطع می‌کند، زیرا در این فرکانس

$$-40 \log \frac{\omega_n}{\omega_n} = -40 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

فرکانس  $\omega_n$  فرکانس گوشه‌ای این عامل مرتبه دوم است.

دو مجانب به دست آمده مستقل از مقدار  $\zeta$  است. چنانچه معادلهٔ (۷-۷) نشان می‌دهد، نزدیک فرکانس  $\omega = \omega_n$  یک حالت تشدید وجود دارد. نسبت میرایی  $\zeta$  اندازهٔ قلهٔ این تشدید را تعیین می‌کند. واضح است که تقریب با مجانبهای راست خطا دارد. اندازهٔ خطا به مقدار  $\zeta$  بستگی دارد. این خطا به ازای مقادیر کوچک  $\zeta$  بزرگ است. شکل ۷-۹ منحنی‌های دقیق لگاریتم دامنه و مجانبهای آن و منحنی‌های دقیق زاویهٔ فاز را به ازای چند مقدار مختلف  $\zeta$  نشان می‌دهد. در صورتی که بخواهیم منحنی‌های مجانبی را تصحیح کنیم باید با توجه به شکل ۷-۹ تصحیح را در نقاط مختلف صورت دهیم.



شکل ۷-۹

منحنی‌های لگاریتم دامنه و  
مجانبهای آن و منحنی‌های  
زاویهٔ فاز عامل درجه دوم  
معادلهٔ (۷-۷).

زاویه فاز عامل مرتبه دوم  $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$  عبارت است از

$$\phi = \left| \frac{1}{1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right| = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (۸-۷)$$

زاویه فاز تابعی از  $\omega$  و  $\zeta$  است؛ در  $\omega = 0$  زاویه فاز  $0^\circ$  است. در فرکانس  $\omega = \omega_n$  زاویه فاز مستقل از مقدار  $\zeta$  برابر  $-90^\circ$  است، زیرا

$$\phi = -\tan^{-1} \left( \frac{2\zeta}{0} \right) = -\tan^{-1} \infty = -90^\circ$$

در  $\omega = \infty$  زاویه فاز  $-180^\circ$  می‌شود. منحنی زاویه فاز نسبت به نقطه عطف واقع در  $\omega = \omega_n$ ،  $\phi = 90^\circ$  تقارن دارد. برای رسم این منحنی‌های فاز راه ساده‌ای وجود ندارد. به این منظور باید به منحنی‌های زاویه فاز شکل ۹-۷ مراجعه کرد.

منحنی پاسخ فرکانسی عامل

$$1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2$$

را می‌توان با عوض کردن علامت منحنی‌های لگاریتم دامنه و زاویه فاز عامل زیر به دست آورد.

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

برای ترسیم منحنی‌های پاسخ فرکانسی یک تابع مرتبه دوم ابتدا باید مقادیر فرکانس گوشه‌ای  $\omega_n$  و نسبت میرایی  $\zeta$  را یافت. سپس می‌توان با استفاده از منحنی‌های شکل ۹-۷، منحنی‌های پاسخ فرکانسی را رسم کرد. **فرکانس تشدید  $\omega_r$  و قله تشدید  $M_r$**  دامنه

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

عبارت است از

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}} \quad (۹-۷)$$

اگر  $|G(j\omega)|$  در فرکانسی قله داشته باشد، آن فرکانس را **فرکانس تشدید** می‌نامند. چون صورت  $|G(j\omega)|$  ثابت است، مقدار قله  $|G(j\omega)|$  در فرکانسی رخ می‌دهد که تابع زیر می‌نیم شود

$$g(\omega) = \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \quad (۱۰-۷)$$

معادله (۷-۱۰) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$g(\omega) = \left[ \frac{\omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2)}{\omega_n^2} \right]^2 + 4\zeta^2(1 - \zeta^2) \quad (۷-۱۱)$$

پس می‌نیمیم  $g(\omega)$  در  $\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  رخ می‌دهد. بنابراین فرکانس تشدید  $\omega_r$  عبارت است از

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{به ازای } 0 \leq \zeta \leq 0.707 \quad (۷-۱۲)$$

با میل به صفر، فرکانس تشدید به  $\omega_n$  میل می‌کند. به ازای  $0 < \zeta \leq 0.707$  فرکانس تشدید  $\omega_r$  کوچکتر از فرکانس تشدید میرا  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ، که در پاسخ گذرا وجود دارد، است. با توجه به معادله (۷-۱۲) می‌توان دید که به ازای  $\zeta > 0.707$  فرکانس تشدید وجود ندارد. با افزایش فرکانس  $\omega$  دامنه  $|G(j\omega)|$  به طور یکنواخت کم می‌شود. (به ازای تمام مقادیر  $\omega > 0$  دامنه کمتر از ۰ dB است. توجه کنید که به ازای  $1 > \zeta > 0.707$  پاسخ پله نوسانی است، ولی نوسانها آنقدر شدید میرا می‌شوند که قابل مشاهده نیستند.)

دامنه در فرکانس تشدید،  $M_r = |G(j\omega_r)|$ ، را می‌توان برای  $0 \leq \zeta \leq 0.707$  با استفاده از معادلات (۷-۱۲) و (۷-۹) یافت. به ازای  $0 \leq \zeta \leq 0.707$

$$M_r = |G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (۷-۱۳)$$

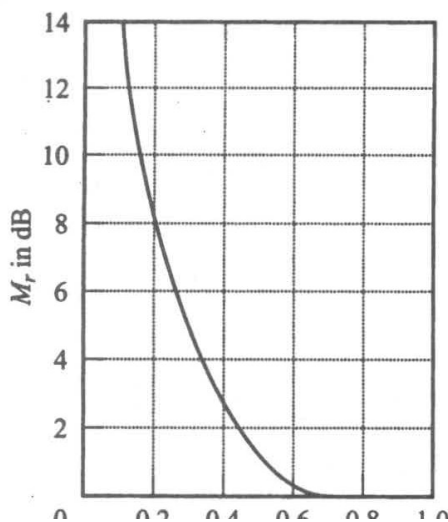
به ازای  $\zeta > 0.707$

$$M_r = 1 \quad (۷-۱۴)$$

با میل  $\zeta$  به صفر،  $M_r$  به بینهایت میل می‌کند. یعنی اگر یک سیستم نامیرا در فرکانس طبیعی‌اش تحریک شود، دامنه  $G(j\omega)$  بینهایت می‌شود. رابطه  $M_r$  و  $\zeta$  در شکل ۷-۱۰ نشان داده شده است.

زاویه فاز  $G(j\omega)$  در فرکانس تشدید را می‌توان با گذاشتن معادله (۷-۱۲) در معادله (۷-۸) به دست آورد. در فرکانس تشدید

$$\angle G(j\omega_r) = -\tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta} = -90^\circ + \sin^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$



شکل ۷-۱۰

منحنی  $M_r$  برحسب  $\zeta$  سیستم مرتبه دوم

$$1/[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]$$

روش عمومی رسم نمودار بوده. MATLAB روش ساده‌ای برای رسم نمودار بوده دارد. (این روش در ادامه این بخش توضیح داده می‌شود). ولی در اینجا می‌خواهیم روش دستی رسم نمودارهای بوده، بدون استفاده از MATLAB را بیان کنیم.

ابتدا تابع تبدیل سینوسی  $G(j\omega)H(j\omega)$  را به صورت حاصلضرب عوامل پایه‌ای بیان شده در بالا می‌نویسیم. سپس فرکانسهای گوشه‌ای متناظر با این عوامل پایه‌ای را مشخص می‌کنیم. سرانجام منحنی‌های مجانبی لگاریتم دامنه را با شیبهای مناسب رسم می‌کنیم. منحنی دقیق را، که نزدیک منحنی مجانبی است، می‌توان با افزودن اصلاحاتی رسم کرد.

منحنی زاویه فاز  $G(j\omega)H(j\omega)$  را می‌توان با افزودن منحنی‌های زاویه فاز عوامل جداگانه تابع تبدیل به دست آورد.

نمودارهای بوده رسم شده با استفاده از مجانبها، از تمام روشهای دیگر محاسبه پاسخ فرکانسی تابع تبدیل کمتر وقت می‌برد. سهولت ترسیم منحنی‌های پاسخ فرکانسی یک تابع تبدیل و سهولت اصلاح منحنی پاسخ فرکانسی هنگام افزودن جبران ساز، دلایل اصلی کاربرد فراوان نمودارهای بوده در مسائل عملی است.

نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم کنید.

مثال ۳-۷

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]}$$

اصلاحات لازم برای دقیق بودن منحنی لگاریتم دامنه را صورت دهید.

برای پرهیز از اشتباهات ممکن در ترسیم منحنی لگاریتم دامنه بهترست  $G(j\omega)$  را به صورت زیر بهنجار کنیم، تا مجانب فرکانس پایین عوامل مرتبه اول و مرتبه دوم dB باشد.

$$G(j\omega) = \frac{7.5 \left( \frac{j\omega}{3} + 1 \right)}{(j\omega) \left( \frac{j\omega}{2} + 1 \right) \left[ \frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1 \right]}$$

این تابع از عوامل زیر تشکیل شده است

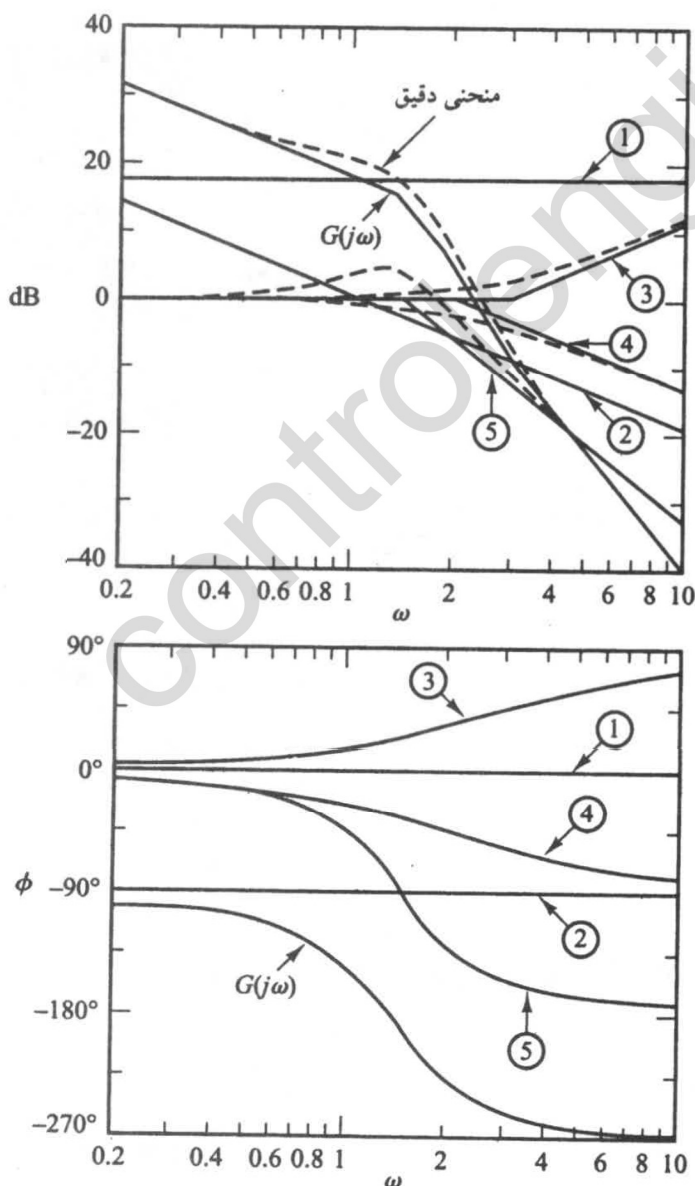
$$7.5, \quad (j\omega)^{-1}, \quad 1 + \frac{j\omega}{3}, \quad \left( 1 + \frac{j\omega}{2} \right)^{-1}, \quad \left[ 1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{2} \right]^{-1}$$

فرکانسهای گوشه‌ای عوامل سوم، چهارم، و پنجم به ترتیب  $\omega = 3$ ،  $\omega = 2$ ، و  $\omega = \sqrt{2}$  است. دقت کنید که نسبت میرایی آخرین جمله ۰/۳۵۳۶ است.

منحنی‌های مجانبی هر عامل به طور مجزا در شکل ۷-۱۱ نشان داده شده است. منحنی کل را می‌توان با جمع جبری منحنی‌های مجزا، به صورت نشان داده در شکل ۷-۱۱ به دست آورد. توجه کنید که در هر فرکانس گوشه‌ای شیب منحنی تغییر می‌کند، و در فاصله بین هر دو فرکانس گوشه‌ای شیب منحنی با جمع شیبهای منحنی‌های مجزا برابر است. در زیر فرکانس  $\omega = \sqrt{2}$  شیب منحنی dB/dec -۲۰ است. در اولین فرکانس

گوشه‌ای،  $\omega = \sqrt{2}$  شیب به  $-60 \text{ dB/dec}$  تغییر یافته تا فرکانس گوشه‌ای بعدی، یعنی  $\omega = 2$  ادامه می‌یابد. در  $\omega = 2$  شیب  $-80 \text{ dB/dec}$  می‌شود. سرانجام در آخرین فرکانس گوشه‌ای  $\omega = 3$  شیب  $-60 \text{ dB/dec}$  می‌شود. پس از رسم این منحنی تقریبی می‌توان منحنی دقیق را با انجام اصلاحاتی در فرکانسهای گوشه‌ای و یک اکتاو بالاتر و یک اکتاو پایین‌تر از فرکانسهای گوشه‌ای به دست آورد. برای عاملهای مرتبه اول  $(1+j\omega T)^{\pm 1}$  تصحیحات لازم  $\pm 3 \text{ dB}$  در فرکانس گوشه‌ای و  $\pm 1 \text{ dB}$  در فرکانسهای یک اکتاو بالاتر یا پایین‌تر از فرکانس گوشه‌ای است. تصحیحات لازم برای عوامل مرتبه دوم از شکل ۷-۹ به دست می‌آید. منحنی لگاریتم دامنه دقیق  $G(j\omega)$  در شکل ۷-۱۱ با خط چین مشخص شده است.

توجه کنید که تغییر شیبها تنها در فرکانسهای گوشه‌ای تابع تبدیل  $G(j\omega)$  رخ می‌دهند. بنابراین به جای رسم منحنی‌های مجزای دامنه و جمع کردن آنها به صورت نشان داده شده، می‌توانیم از ابتدا منحنی اصلی را رسم کنیم. از خط راست واقع در اولین بخش فرکانس (در این مثال خط با شیب  $-20 \text{ dB/dec}$  واقع در  $\omega < \sqrt{2}$ ) شروع می‌کنیم. با افزایش فرکانس به اثر قطب مختلط (عامل مرتبه دوم) با فرکانس گوشه‌ای  $\omega = \sqrt{2}$  می‌رسیم. قطبهای مختلط مزدوج باعث می‌شوند شیب منحنی دامنه از  $-20$  به  $-60 \text{ dB/dec}$  برسد. در فرکانس



شکل ۷-۱۱

نمودار بوده سیستم مثال ۷-۳.

گوشه‌ای بعد،  $\omega=2$  قطب مرتبه اول باعث می‌شود شیب به  $-80 \text{ dB/dec}$  تغییر یابد. سرانجام در فرکانس گوشه‌ای  $\omega=3$  اثر صفر باعث می‌شود شیب از  $-80$  به  $-60 \text{ dB/dec}$  برسد. برای ترسیم منحنی زاویه فاز کامل باید منحنی‌های زاویه فاز تمام عوامل رسم شود. جمع جبری منحنی‌های مجزای فاز، مطابق شکل ۷-۱۱ منحنی فاز کامل را به دست می‌دهد.

**سیستمهای می نیمم فاز و سیستمهای غیر می نیمم فاز.** توابع تبدیلی که در نیمه راست صفحه  $s$  نه قطب دارند و نه صفر، توابع تبدیل می نیمم فاز هستند، و آنهایی که در نیمه راست صفحه  $s$  قطب و / یا صفر دارند توابع تبدیل غیر می نیمم فاز هستند. سیستمهای با تابع تبدیل می نیمم فاز سیستمهای می نیمم فاز و سیستمهای با تابع تبدیل غیر می نیمم فاز سیستمهای غیر می نیمم فاز نامیده می‌شوند.

از میان سیستمهایی که مشخصه دامنه یکسانی دارند، گستره تغییرات فاز سیستم می نیمم فاز کمتر از بقیه است، و هر سیستم غیر می نیمم فازی با آن مشخصه دامنه، گستره تغییرات فاز بزرگتری دارد. توجه کنید که برای یک سیستم می نیمم فاز تابع تبدیل را می‌توان تنها با توجه به منحنی دامنه به طور یکتا مشخص کرد. برای سیستمهای غیر می نیمم فاز چنین نیست. ضرب هر تابع تبدیلی در تابع تبدیل یک فیلتر تمام گذر منحنی دامنه آن را تغییر نمی‌دهد. ولی مشخصه فاز آن تغییر می‌کند. برای مثال دو سیستم با توابع تبدیل سینوسی زیر در نظر بگیرید.

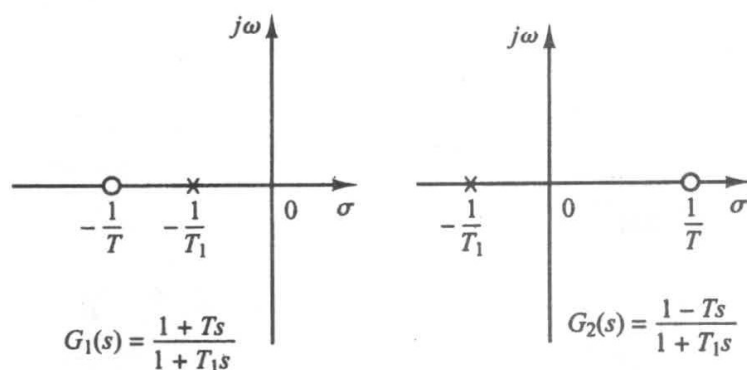
$$G_1(j\omega) = \frac{1+j\omega T}{1+j\omega T_1}, \quad G_2(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1-j\omega T_1}, \quad 0 < T < T_1$$

آرایش قطب - صفر این سیستمها در شکل ۷-۱۲ نشان داده شده است. دو تابع تبدیل سینوسی مشخصه دامنه یکسانی دارند. ولی چنانچه شکل ۷-۱۳ نشان می‌دهد مشخصات زاویه فازشان متفاوت است. این دو سیستم در عوامل زیر با هم تفاوت دارند

$$G(j\omega) = \frac{1-j\omega T}{1+j\omega T}$$

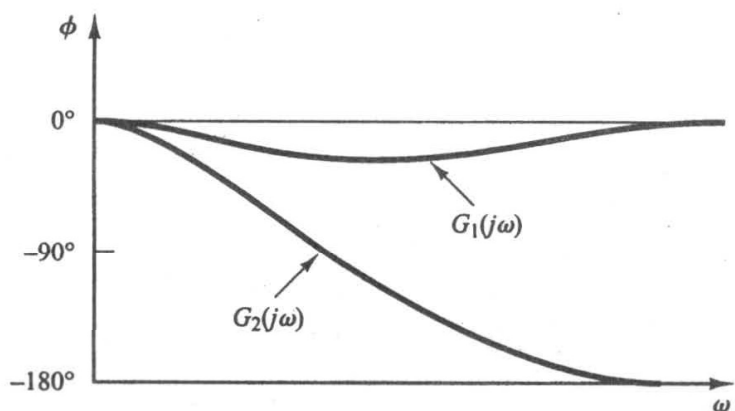
دامنه عامل  $(1-j\omega T)/(1+j\omega T)$  همواره یک است. ولی زاویه فاز آن  $-2 \tan^{-1} \omega T$  است و با تغییر  $\omega$  از صفر تا بینهایت، از  $0^\circ$  تا  $-180^\circ$  تغییر می‌کند.

همانطور که قبلاً گفتیم برای سیستمهای می نیمم فاز رابطه یکتایی بین مشخصه‌های دامنه و فاز وجود دارد.



شکل ۷-۱۲

آرایش قطب - صفر سیستم می نیمم فاز  $G_1(s)$  و سیستم غیر می نیمم فاز  $G_2(s)$ .



شکل ۷-۱۳

مشخصه‌های زاویه فاز سیستمهای

 $G_1(s)$  و  $G_2(s)$  شکل ۷-۱۲.

یعنی اگر منحنی دامنه یک سیستم می‌نیم فاز در تمام گستره فرکانسی از صفر تا بینهایت مشخص باشد، منحنی فاز نیز به طور یکتا مشخص می‌شود و برعکس. این مطلب برای سیستمهای غیرمی‌نیم فاز صادق نیست. وضعیت می‌نیم نبودن فاز به دو صورت ممکن است پیش بیاید. یکی وقتی سیستم یک عنصر یا چند عنصر غیرمی‌نیم فاز داشته باشد، و یکی وقتی سیستم حلقه‌های داخلی ناپایدار داشته باشد.

در یک سیستم می‌نیم فاز، زاویه فاز در  $\omega = \infty$  به  $-90^\circ(q-p)$  می‌رسد که در آن  $p$  و  $q$  به ترتیب درجه چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج است. در سیستمهای غیرمی‌نیم فاز، زاویه فاز در  $\omega = \infty$  با  $-90^\circ(q-p)$  تفاوت دارد. هر دو نوع سیستم شیب منحنی لگاریتم دامنه در  $\omega = \infty$  برابر  $-20^\circ(q-p)$  دسیبل بر دهه است. بنابراین می‌توان می‌نیم فاز بودن یک سیستم را با بررسی شیب مجانب فرکانس بالای منحنی دامنه و زاویه فاز در  $\omega = \infty$  تشخیص داد. اگر با میل  $\omega$  به بینهایت شیب منحنی لگاریتم دامنه  $-20^\circ(q-p)$  dB/dec باشد و فاز در  $\omega = \infty$  به  $-90^\circ(q-p)$  برسد، آنگاه سیستم می‌نیم فاز است.

پاسخ سیستمهای غیرمی‌نیم فاز کند است، زیرا در شروع پاسخ رفتاری ناقص دارند. در بسیاری از سیستمهای کنترل عملی باید از پسفازی بیش از حد به دقت اجتناب کرد. در طراحی یک سیستم اگر سرعت پاسخ در درجه اول اهمیت باشد، نباید از عناصر غیرمی‌نیم فاز استفاده کرد. (در سیستمهای کنترل، تأخیر انتقالی یک نمونه متداول از عناصر غیرمی‌نیم فاز است.)

متذکر می‌شویم که روشهای تحلیل و طراحی براساس پاسخ فرکانسی، که در این فصل و فصل بعد معرفی می‌شوند، هم برای سیستمهای می‌نیم فاز و هم برای سیستمهای غیرمی‌نیم فاز معتبرند.

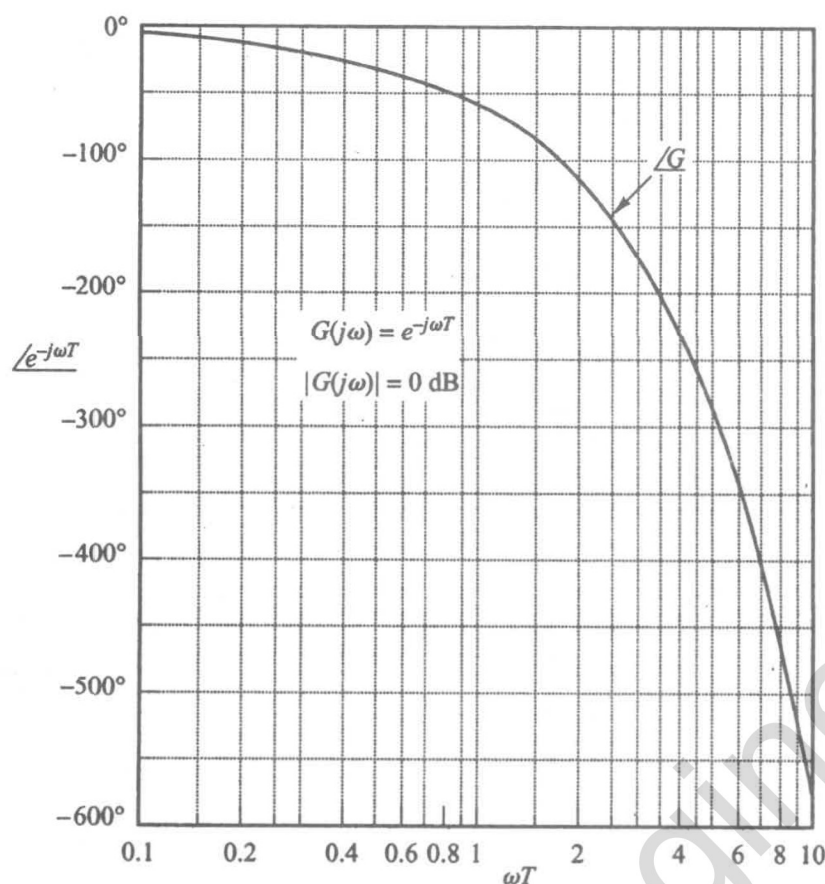
**تأخیر انتقالی.** تأخیر انتقالی یک رفتار غیرمی‌نیم فاز است که در فرکانسهای بالا پسفازی زیادی ایجاد می‌کند، ولی باعث تضعیف دامنه نمی‌شود. تأخیر انتقالی معمولاً در سیستمهای حرارتی، هیدرولیکی، و نیوماتیکی وجود دارد.

تأخیر انتقالی بیان شده در زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

دامنه همواره برابر یک است، زیرا

$$|G(j\omega)| = |\cos \omega T - j \sin \omega T| = 1$$



شکل ۱۴-۷  
مشخصه فاز تأخیر انتقالی.

بنابراین لگاریتم دامنه تأخیر انتقالی  $e^{-j\omega T}$  برابر ۰ dB است. فاز تأخیر انتقالی برابرست با

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= -\omega T \quad (\text{رادیان}) \\ &= -57.3 \omega T \quad (\text{درجه}) \end{aligned}$$

زاویه فاز با افزایش  $\omega$  به طور خطی تغییر می‌کند. مشخصه زاویه فاز تأخیر انتقالی در شکل ۱۴-۷ نشان داده شده است.

نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم کنید:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$$

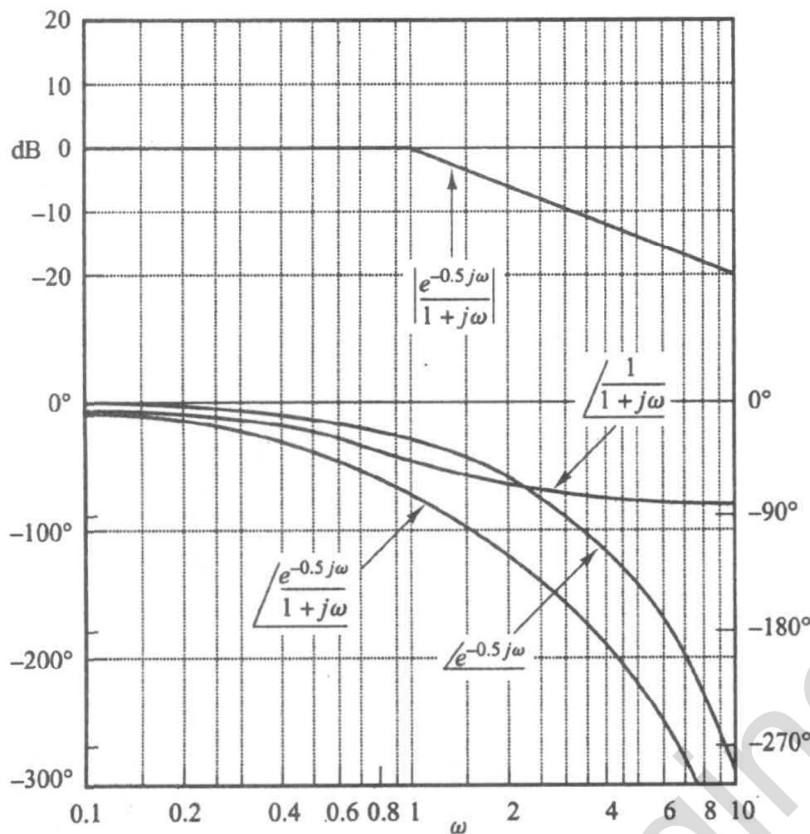
مثال ۴-۷

لگاریتم دامنه عبارت است از:

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| &= 20 \log |e^{-j\omega L}| + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \\ &= 0 + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \end{aligned}$$

فاز  $G(j\omega)$  برابر است با

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) &= \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1 + j\omega T} \\ &= -\omega L - \tan^{-1} \omega T \end{aligned}$$



شکل ۷-۱۵

نمودار بوده تابع تبدیل

$$e^{-j\omega L} / (1 + j\omega T)$$

به ازای  $L = 0.5$  و  $T = 1$ .

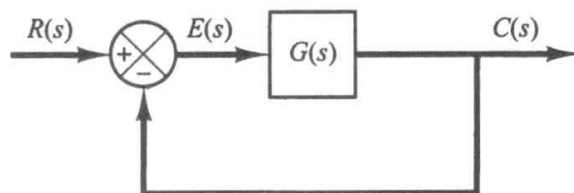
منحنی‌های لگاریتم دامنه و زاویه فاز این تابع تبدیل به ازای  $L = 0.5$  و  $T = 1$  در شکل ۷-۱۵ نشان داده شده است.

**رابطه بین نوع سیستم و منحنی لگاریتم دامنه.** سیستم با فیدبک واحد شکل ۷-۱۶ را در نظر بگیرید. خطاهای ایستای وضعیت، سرعت، و شتاب به ترتیب رفتار فرکانس پایین سیستمهای نوع ۰، نوع ۱، و نوع ۲ را توصیف می‌کنند. برای هر سیستم تنها یکی از خطاهای ایستا محدود و مهم است. (هر چه مقدار خطای ایستای محدود بزرگتر باشد، بهره حلقه به ازای  $\omega \rightarrow 0$  بزرگتر است).

نوع سیستم شیب منحنی لگاریتم دامنه در فرکانسهای پایین را تعیین می‌کند. بنابراین اطلاعات مربوط به وجود و دامنه خطای حالت ماندگار یک سیستم کنترل به یک ورودی خاص را می‌توان با مشاهده رفتار منحنی لگاریتم دامنه در فرکانسهای پایین تعیین کرد.

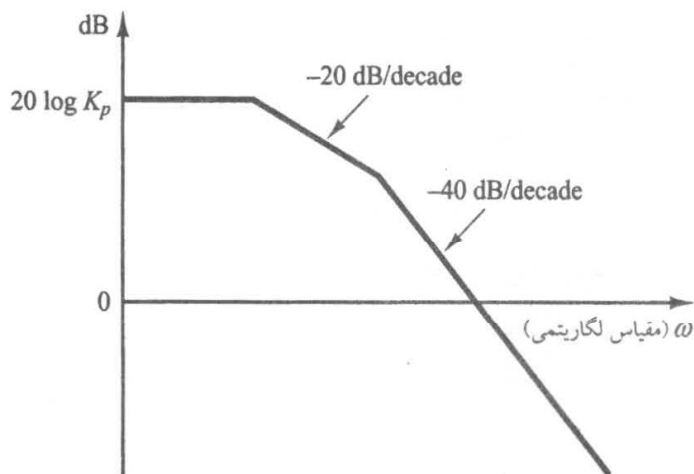
**تعیین ثابت خطای ایستای وضعیت.** سیستم کنترل با فیدبک واحد شکل ۷-۱۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$



شکل ۷-۱۶

سیستم کنترل با فیدبک واحد.



شکل ۱۷-۷  
منحنی لگاریتم دامنه یک  
سیستم نوع صفر.

$$G(j\omega) = \frac{K(T_a j\omega + 1)(T_b j\omega + 1) \cdots (T_m j\omega + 1)}{(j\omega)^N (T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) \cdots (T_p j\omega + 1)} \quad \text{یا}$$

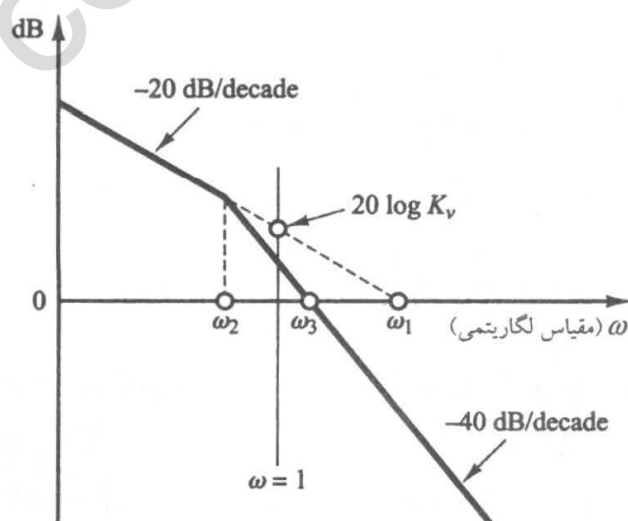
شکل ۱۷-۷ نمونه‌ای از منحنی‌های لگاریتم دامنه سیستم‌های نوع ۰ را نشان می‌دهد. در چنین سیستمی دامنه  $G(j\omega)$  در فرکانسهای پایین  $K_p$  است، یا

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = K = K_p$$

پس مجانب فرکانس پایین یک خط افقی در  $20 \log K_p$  dB است.

**تعیین ثابت خطای ایستای سرعت.** سیستم کنترل با فیدبک واحد شکل ۱۶-۷ را در نظر بگیرید. شکل ۱۸-۷ نمونه‌ای از منحنی‌های لگاریتم دامنه سیستم‌های نوع ۱ را نشان می‌دهد. محل برخورد پاره‌خط ابتدایی دارای شیب  $-20$  dB/dec (یا امتداد آن) با خط  $\omega = 1$ ، دامنه  $20 \log K_v$  را نشان می‌دهد. درستی مطلب را می‌توان به این شکل نشان داد: برای سیستم نوع ۱:

$$G(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega}, \quad \omega \ll 1$$



شکل ۱۸-۷  
منحنی لگاریتم دامنه  
یک سیستم نوع ۱.

پس

$$20 \log \left| \frac{K_v}{j\omega} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_v$$

محل برخورد پاره خط اول دارای شیب  $-20 \text{ dB/dec}$  (یا امتداد آن) با خط  $0 \text{ dB}$  فرکانسی است که از لحاظ عددی با  $K_v$  برابر است. برای پی بردن به این مطلب این فرکانس را  $\omega_1$  می نامیم؛ پس

$$\left| \frac{K_v}{j\omega} \right| = 1$$

یا

$$K_v = \omega_1$$

به عنوان مثال یک سیستم نوع ۱ با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرد

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + F)}$$

اگر فرکانس گوشه ای را  $\omega_2$  و فرکانس برخورد خط با شیب  $-40 \text{ dB/dec}$  (یا امتداد آن) با خط  $0 \text{ dB}$  را  $\omega_3$  بنامیم، داریم

$$\omega_2 = \frac{F}{J}, \quad \omega_3^2 = \frac{K}{J}$$

چون

$$\omega_1 = K_v = \frac{K}{F}$$

نتیجه می گیریم

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_3^2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_2}{\omega_3}$$

یا

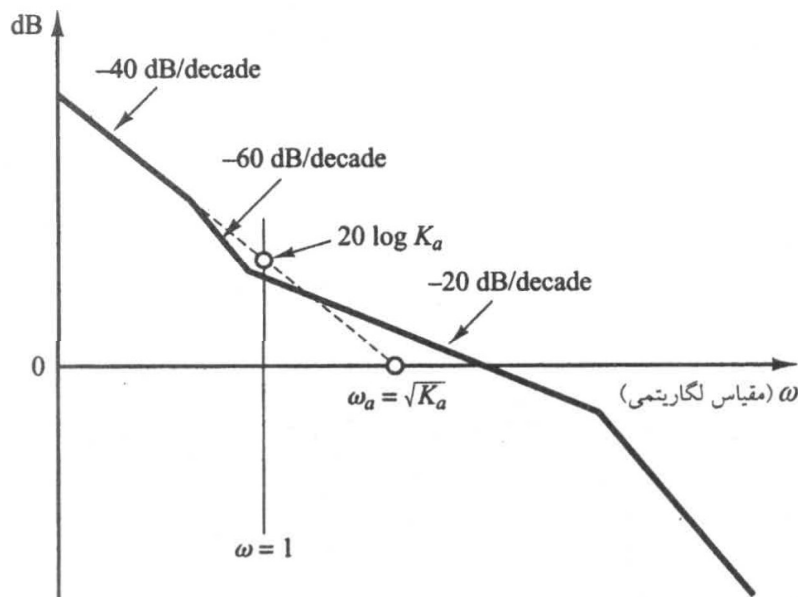
روی نمودار بوده

$$\log \omega_1 - \log \omega_3 = \log \omega_2 - \log \omega_3$$

پس نقطه  $\omega_3$  درست بین نقاط  $\omega_1$  و  $\omega_2$  است. نسبت میرایی  $\zeta$  سیستم عبارت است از

$$\zeta = \frac{F}{2\sqrt{KJ}} = \frac{\omega_2}{2\omega_3}$$

**تعیین ثابت خطای ایستای شتاب.** سیستم کنترل با فیدبک واحد شکل ۷-۱۶ را در نظر بگیرید. شکل ۷-۱۹ نمونه ای از منحنی های لگاریتمی سیستمهای نوع ۲ را نشان می دهد. محل برخورد خط اولیه با شیب  $-40 \text{ dB/dec}$  (یا امتداد آن) با خط  $\omega=1$  دامنه  $20 \log K_a$  را نشان می دهد. چون در فرکانسهای پایین



شکل ۱۹-۷  
منحنی لگاریتم دامنه یک  
سیستم نوع ۲.

$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2}, \quad \omega \ll 1 \text{ برای}$$

نتیجه می شود که

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=1} = 20 \log K_a$$

فرکانس  $\omega_a$ ، محل برخورد خط اولیه دارای شیب  $-40 \text{ dB/dec}$  (یا امتداد آن) با خط  $0 \text{ dB}$  از لحاظ عددی با جذر  $K_a$  برابر است. برای اثبات این مطلب توجه کنید که

$$20 \log \left| \frac{K_a}{(j\omega_a)^2} \right| = 20 \log 1 = 0$$

که نتیجه می دهد

$$\omega_a = \sqrt{K_a}$$

رسم نمودارهای بوده با **MATLAB**. دستور bode دامنه و زاویه فاز پاسخ فرکانسی سیستمهای خطی پیوسته مستقل از زمان را حساب کنید.

اگر دستور bode بدون آرگومان سمت چپ به کامپیوتر داده شود، MATLAB نمودار بوده را روی صفحه رسم می کند. شکلهای متداول دستور bode عبارت اند

```
bode(num,den)
bode(num,den,w)
bode(A,B,C,D)
bode(A,B,C,D,w)
bode (A,B,C,D,iu,w)
bode(sys)
```

دستور bode با آرگومانهای سمت چپ، به صورت زیر

$$[mag, phase, w] = bode(num, den, w)$$

پاسخ فرکانسی را در ماتریسهای mag، phase، و w ثبت می‌کند. نموداری روی صفحه رسم نمی‌شود. ماتریسهای mag و phase دامنه و فاز پاسخ فرکانسی سیستم، محاسبه شده در فرکانسهای قید شده در بردار w را دربر دارند. زاویه فاز برحسب درجه داده می‌شود. دامنه را می‌توان با دستور زیر به دسیبل تبدیل کرد

$$magdB = 20 * \log_{10}(mag)$$

دیگر دستورهای bode دارای آرگومان سمت چپ به صورت زیرند

$$[mag, phase, w] = bode(num, den)$$

$$[mag, phase, w] = bode(num, den, w)$$

$$[mag, phase, w] = bode(A, B, C, D)$$

$$[mag, phase, w] = bode(A, B, C, D, w)$$

$$[mag, phase, w] = bode(A, B, C, D, iu, w)$$

$$[mag, phase, w] = bode(sys)$$

برای تعیین گستره فرکانسی دستور logspace(d1,d2,n) یا logspace(d1,d2) را به کار برید. logspace(d1,d2) برداری شامل ۵۰ درایه تولید می‌کند، هر درایه فرکانسی در فاصله  $10^{d1}$  تا  $10^{d2}$  است و فرکانسها روی مقیاس لگاریتمی همفاصله‌اند. (نقاط ابتدایی و نقاط انتهایی نیز جزء این ۵۰ نقطه هستند و بینشان ۴۸ نقطه ایجاد می‌شود). پس برای ایجاد ۵۰ نقطه همفاصله بین  $1 \text{ rad/sec}$  و  $100 \text{ rad/s}$  دستور زیر را به کار می‌بریم

$$w = \text{logspace}(-1, 2)$$

logspace(d1,d2,n)، n نقطه همفاصله لگاریتمی بین  $10^{d1}$  تا  $10^{d2}$  ایجاد می‌کند. مثلاً برای ایجاد ۱۰۰ نقطه همفاصله بین  $1 \text{ rad/s}$  و  $1000 \text{ rad/s}$  دستور زیر را به کار می‌بریم

$$w = \text{logspace}(0, 3, 100)$$

برای استفاده از این فرکانسها در رسم نمودار بوده دستورهای bode(num,den,w) یا bode(A,B,C,D,w) را به کار می‌بریم. این دستورها بردار فرکانسی w تولید شده توسط استفاده کننده را به کار می‌برند.

#### مثال ۷-۵

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

نمودار بوده این تابع تبدیل را رسم کنید.

وقتی سیستم به شکل زیر تعریف شده است

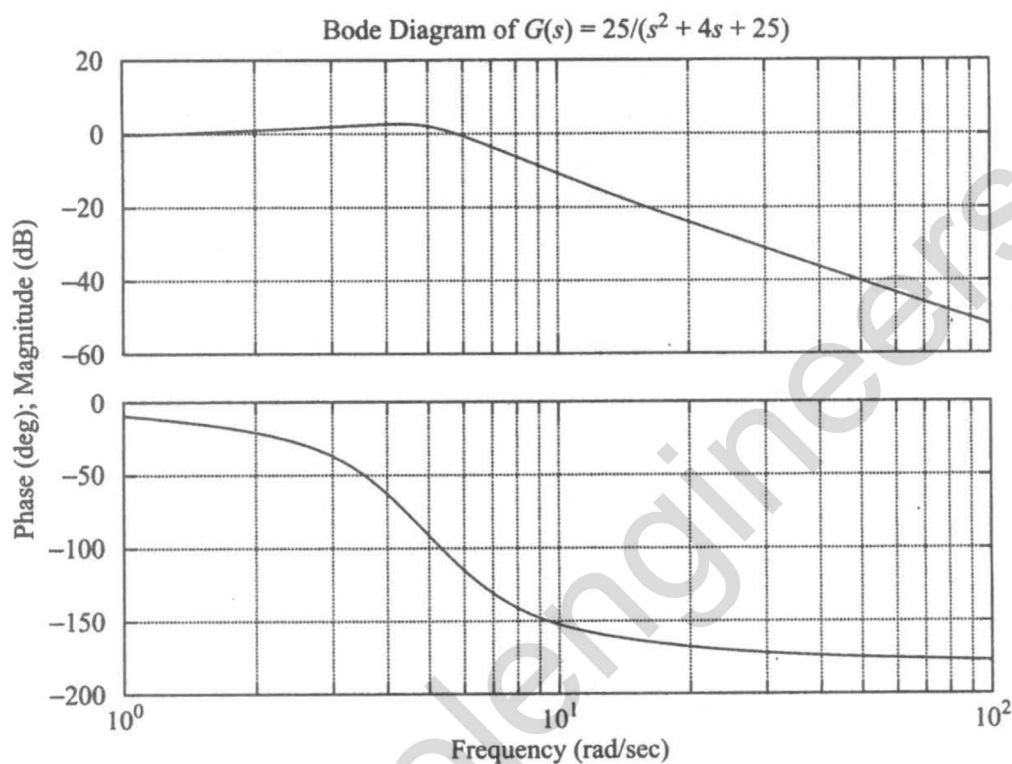
$$G(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$$

**MATLAB Program 7-1**

```

num = [25];
den = [1 4 25];
bode(num,den)
title('Bode Diagram of G(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)')

```



شکل ۲۰-۷

نمودار بوده  $G(s) = 25 / (s^2 + 4s + 25)$ .

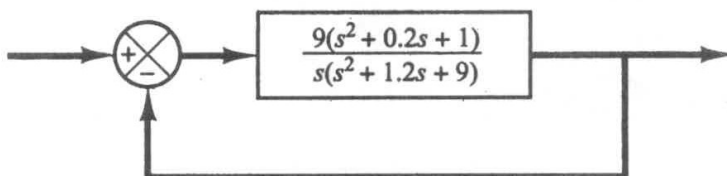
برای رسم نمودار بوده از دستور `bode(num,den)` استفاده می‌کنیم [اگر `num` و `den` ضرایب چندجمله‌ایهای صورت و مخرج را برحسب توانهای نزولی  $s$  دربر داشته باشند، دستور `bode(num,den)` نمودار بوده را رسم می‌کند]. برنامه ۱-۷ برای رسم نمودار بوده این سیستم است. نمودار بوده در شکل ۲۰-۷ دیده می‌شود.

سیستم شکل ۲۱-۷ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$G(s) = \frac{9(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s^2 + 1.2s + 9)}$$

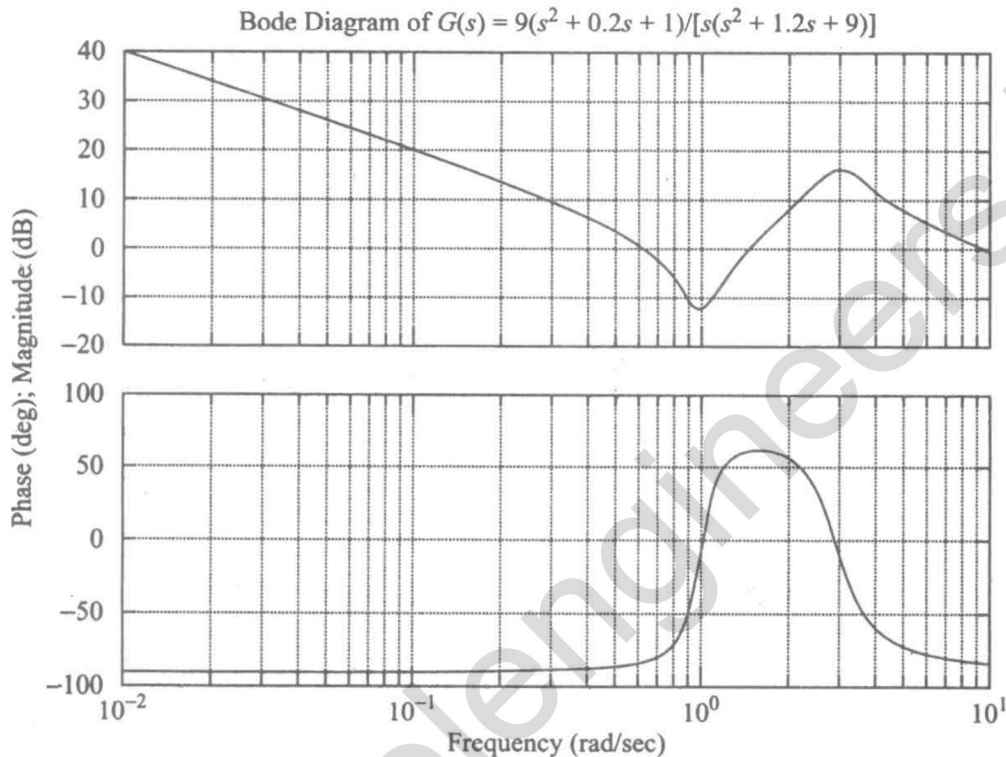
نمودار بوده را رسم کنید.

مثال ۶-۷

شکل ۲۱-۷  
سیستم کنترل.

### MATLAB Program 7-2

```
num = [9 1.8 9];
den = [1 1.2 9 0];
bode(num,den)
title('Bode Diagram of G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1)/[s(s^2 + 1.2s + 9)]')
```



شکل ۷-۲۲

نمودار بوده  $G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1) / s(s^2 + 1.2s + 9)$ .

برنامه ۷-۲ نمودار بوده این سیستم را رسم می‌کند. نمودار حاصل در شکل ۷-۲۲ نشان داده شده است. در این حالت گستره فرکانسی به طور خودکار از  $0.1 \text{ rad/sec}$  تا  $10 \text{ rad/sec}$  تعیین شده است. اگر بخواهیم نمودار بوده را در گستره  $0.1 \text{ rad/sec}$  تا  $1000 \text{ rad/sec}$  رسم کنیم، دستور زیر را می‌دهیم

$w = \text{logspace}(-2,3,100)$

این دستور ۱۰۰ نقطه همفاصله لگاریتمی بین  $0.1 \text{ rad/sec}$  و  $100 \text{ rad/sec}$  ایجاد می‌کند. (این بردار  $w$  فرکانس‌هایی را، برحسب رادیان بر ثانیه، دربر دارد که پاسخ فرکانسی در آنها حساب می‌شود.) با استفاده از دستور زیر

$\text{bode}(\text{num},\text{den},w)$

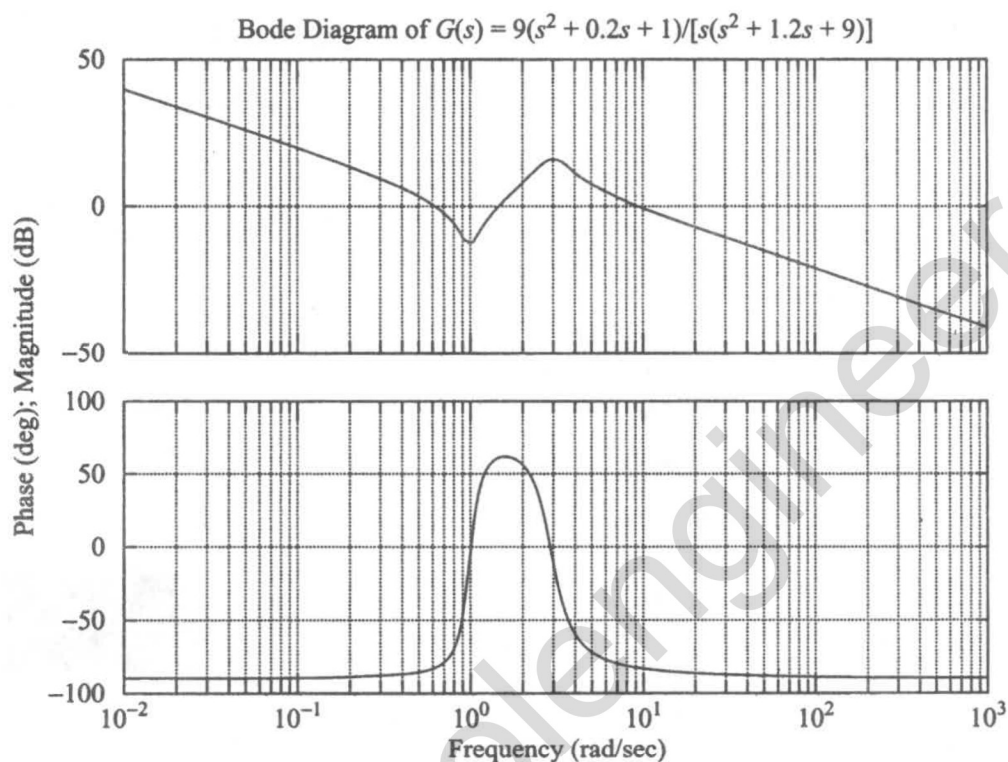
گستره فرکانسی توسط کاربر تعیین می‌شود. ولی گستره دامنه و گستره زاویه فاز به طور خودکار تعیین می‌شود. برنامه ۷-۳ و نمودار حاصل نشان داده شده در شکل ۷-۲۳ را ببینید.

**MATLAB Program 7-3**

```

num = [9 1.8 9];
den = [1 1.2 9 0];
w = logspace(-2,3,100);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1)/[s(s^2 + 1.2s + 9)]')

```



شکل ۲۳-۷

نمودار بوده  $G(s) = 9(s^2 + 0.2s + 1) / s(s^2 + 1.2s + 9)$ .

نمودار بوده سیستم تعریف شده در فضای حالت. سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

که در آن  $\mathbf{x}$  بردار حالت (بردار  $n \times 1$ )

$\mathbf{y}$  بردار خروجی (بردار  $m \times 1$ )

$\mathbf{u}$  بردار کنترل (بردار  $r \times 1$ )

$\mathbf{A}$  = ماتریس حالت (ماتریس  $n \times n$ )

$\mathbf{B}$  = ماتریس کنترل (ماتریس  $r \times n$ )

$\mathbf{C}$  = ماتریس خروجی (ماتریس  $n \times m$ )

$\mathbf{D}$  = ماتریس انتقال مستقیم (ماتریس  $r \times m$ )

نمودار بوده این سیستم را می توان با دستور زیر به دست آورد

bode(A,B,C,D)

یا از دستورهایی بیان شده در ابتدای این بخش استفاده کرد.

دستور  $\text{bode}(A,B,C,D)$  یک دسته نمودار بوده، برای هر ورودی یکی، ایجاد می‌کند و گستره فرکانسی هر یک را به طور خودکار تعیین می‌کند. (در مکانهایی که پاسخ تغییر سریعی دارد، تعداد نقاط بیشتری به کار می‌رود).

دستور  $\text{bode}(A,B,C,D,iu)$  که در آن  $iu$  ورودی  $i$  ام سیستم است، یک دسته نمودار بوده برای تابع تبدیل‌هایی از ورودی  $iu$  به تمام خروجی‌ها  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  به دست می‌دهد، گستره فرکانسی هر یک از نمودارها به طور خودکار تعیین می‌شود. (مقدار اسکالر  $iu$  شماره ورودی‌یی را که باید برای رسم نمودارهای بوده به کار رود تعیین می‌کند.) اگر بردار کنترل  $u$  شامل سه ورودی باشد، به نحوی که

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$iu$  باید ۱، ۲، یا ۳ باشد.

اگر سیستم تنها یک ورودی داشته باشد، دو دستور زیر یکسان هستند.

$\text{bode}(A,B,C,D)$   
 $\text{bode}(A,B,C,D,1)$

مثال ۷-۷

سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

نمودار بودی سیستم را به دست آورید.

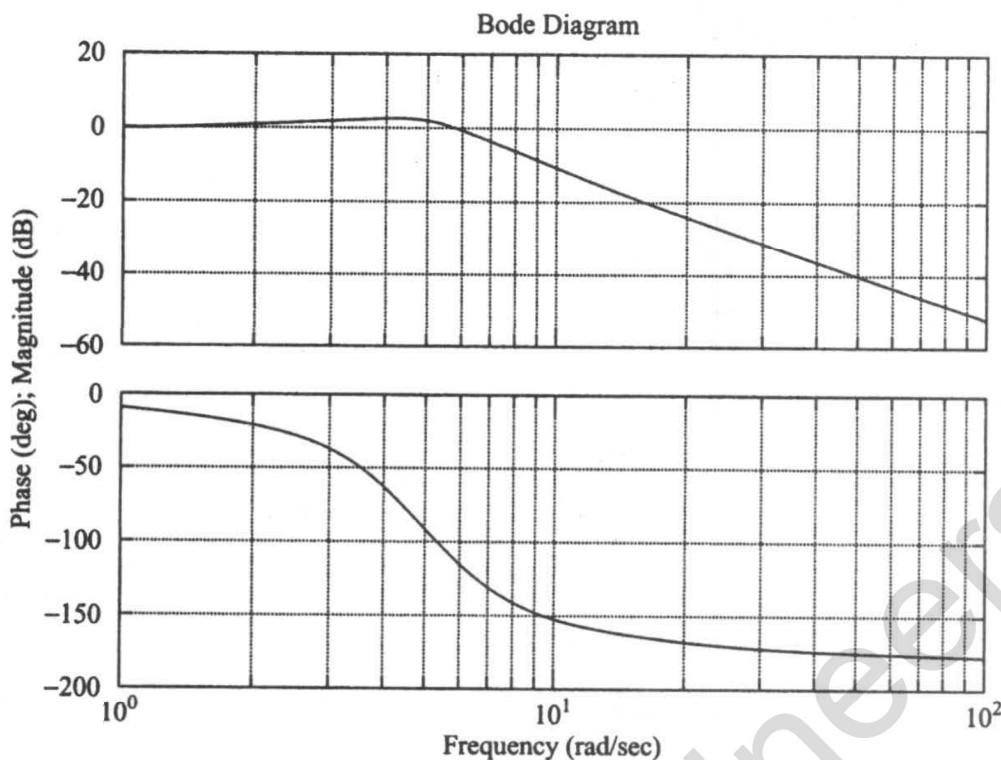
این سیستم یک ورودی  $u$  و یک خروجی  $y$  دارد. با استفاده از دستور

$\text{bode}(A,B,C,D)$

و دادن برنامه ۷-۴ به کامپیوتر، نمودار بوده شکل ۷-۲۴ را به دست می‌آوریم.

#### MATLAB Program 7-4

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [0;25];
C = [1 0];
D = [0];
bode(A,B,C,D)
title('Bode Diagram')
```



شکل ۲۴-۷

نمودار بوده سیستم

مثال ۷-۷.

اگر به جای دستور `bode(A,B,C,D)` برنامه ۴-۷، دستور زیر را به کار ببریم

`bode(A,B,C,D,1)`

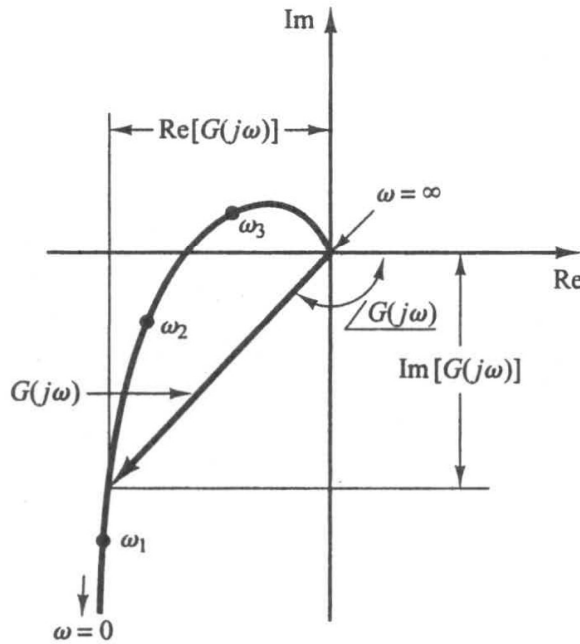
نمودار بوده حاصل با نمودار بوده شکل ۲۴-۷ تفاوتی نمی‌کند.

## ۳-۷ نمودارهای قطبی

نمودار قطبی تابع تبدیل سینوسی  $G(j\omega)$  نمودار دامنه  $G(j\omega)$  برحسب زاویه  $G(j\omega)$  در مختصات قطبی است، وقتی که  $\omega$  از صفر تا بینهایت تغییر می‌کند. پس نمودار قطبی، مکان هندسی بردارهای  $G(j\omega)$  با تغییر  $\omega$  از ۰ تا  $\infty$  است. توجه کنید که در نمودار قطبی زاویه مثبت (منفی) در جهت پادساعتگرد (ساعتگرد) و نسبت به محور حقیقی سنجیده می‌شود. نمودار قطبی غالباً نمودار نایکویست نامیده می‌شود. شکل ۲۵-۷ نمونه‌ای از این نمودارها را نشان می‌دهد. هر نقطه این منحنی سر یک بردار به ازای مقدار خاصی از  $\omega$  است. در نمودار قطبی مقدارگذاری منحنی برحسب فرکانس امری مهم است. تصویر  $G(j\omega)$  روی محورهای حقیقی و موهومی مولفه‌های حقیقی و موهومی  $G(j\omega)$  را به دست می‌دهد.

برای رسم نمودار قطبی  $G(j\omega)$  یا یافتن  $|G(j\omega)|$  و  $\angle G(j\omega)$  به ازای مقادیر مختلف  $\omega$  در گستره فرکانسی مورد نظر، می‌توان از MATLAB هم استفاده کرد.

یک مزیت نمودار قطبی این است که مشخصات پاسخ فرکانسی سیستم در تمام گستره فرکانسی روی یک نمودار نشان داده می‌شود. یک عیب این نمودار این است که اثر هر عامل تشکیل دهنده تابع تبدیل حلقه باز را به وضوح نشان نمی‌دهد.



شکل ۷-۲۵

نمودار قطبی.

عاملهای انتگرالگیری و مشتقگیری  $(j\omega)^{\mp 1}$ . نمودار قطبی  $G(j\omega) = 1/j\omega$  بخش منفی محور موهومی است، زیرا

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

نمودار  $G(j\omega) = j\omega$  بخش مثبت محور موهومی است.

عاملهای مرتبه اول  $(1 + j\omega T)^{\mp 1}$ . برای تابع تبدیل سینوسی زیر

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1} \omega T$$

مقادیر  $G(j\omega)$  در  $\omega = 0$  و  $\omega = 1/T$  به ترتیب عبارت‌اند

$$G(j0) = 1 \angle 0^\circ, \quad G\left(j\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

با میل  $\omega$  به بی‌نهایت، دامنه  $G(j\omega)$  به صفر و زاویه آن به  $-90^\circ$  میل می‌کند. نمودار قطبی این تابع تبدیل، با تغییر فرکانس از صفر تا بینهایت، نیمدایره‌ای مطابق شکل ۷-۲۶ (الف) است. مرکز نیمدایره در  $0.5$  روی محور حقیقی قرار دارد و شعاع آن  $0.5$  است.

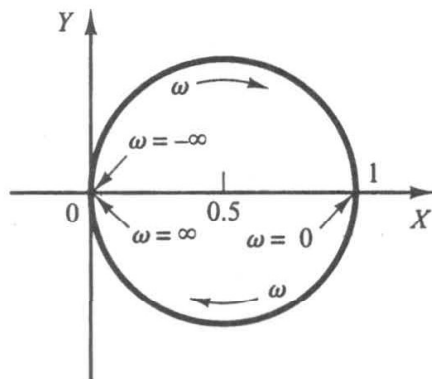
برای اثبات نیمدایره بودن نمودار قطبی عامل  $G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T)$  فرض کنید

$$G(j\omega) = X + jY$$

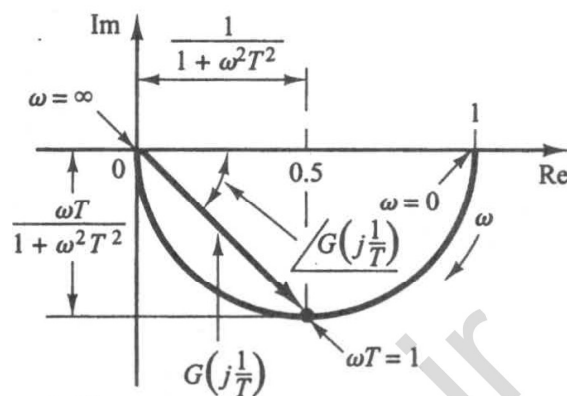
که در آن

$$X = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} = G(j\omega) \text{ بخش حقیقی}$$

$$Y = \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = G(j\omega) \text{ بخش موهومی}$$



(ب)



(الف)

شکل ۲۶-۷

(الف) نمودار قطبی  $1/(1 + j\omega T)$ ؛ (ب) نمودار  $G(j\omega)$  در صفحه  $X-Y$ .

حال به دست می آوریم

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{1 - \omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

پس در صفحه  $X-Y$ ، دایره‌ای به مرکز  $X = \frac{1}{2}$  و  $Y = 0$  و شعاع  $\frac{1}{2}$  است؛ این دایره در شکل ۲۶-۷ (ب) نشان داده شده است، نیم‌دایره پایینی  $0 \leq \omega \leq \infty$  و نیم‌دایره بالایی با  $-\infty \leq \omega \leq 0$  متناظر است.

نمودار قطبی تابع تبدیل  $1 + j\omega T$  نیم‌خطی است که مطابق شکل ۲۷-۷ در صفحه مختلط از نقطه  $(1, 0)$  به موازات محور  $j\omega$  رسم می‌شود. نمودار قطبی  $1 + j\omega T$  ظاهری کاملاً متفاوت با نمودار قطبی  $1/(1 + j\omega T)$  دارد.

**عوامل مرتبه دوم**  $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ . تابع تبدیل سینوسی زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad \text{به ازای } \zeta > 0$$

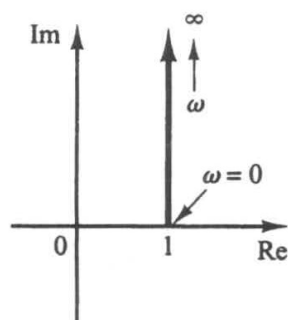
بخشهای فرکانسی پایین و فرکانس بالای نمودار قطبی این تابع به ترتیب عبارت‌اند از

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$$

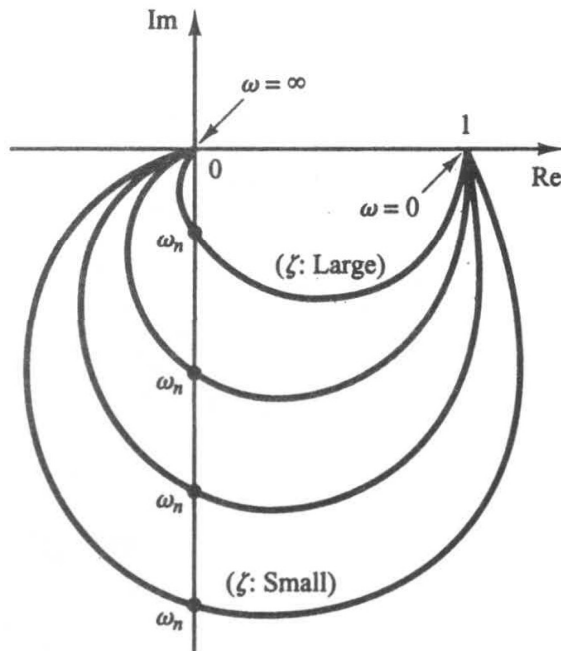
با تغییر  $\omega$  از صفر تا بینهایت نمودار قطبی این تابع تبدیل سینوسی از  $1 \angle 0^\circ$

شروع می‌شود و به  $0 \angle -180^\circ$  می‌رسد. پس بخشهای فرکانس بالای  $G(j\omega)$

بر بخش منفی محور حقیقی مماس است.



شکل ۲۷-۷ نمودار قطبی  $1 + j\omega T$ .



شکل ۷-۲۸

نمودار قطبی

$$1/[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]$$

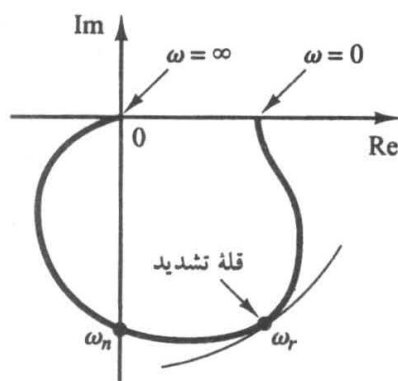
به ازای  $\zeta > 0$ .

شکل ۷-۲۸ نمونه‌هایی از نمودارهای قطبی تابع تبدیل در نظر گرفته شده را نشان می‌دهد. شکل دقیق نمودار قطبی به مقدار ضریب میرایی  $\zeta$  بستگی دارد، ولی شکل عمومی آن برای حالت‌های زیر میرا ( $\zeta > 0$ ) و فرامیرا ( $\zeta > 1$ ) یکی است.

برای حالت فرومیرا در  $\omega = \omega_n$  داریم  $G(j\omega_n) = 1/(j^2\zeta)$ ، و زاویه فاز در  $\omega = \omega_n$  برابر  $-90^\circ$  است. پس فرکانسی که به ازای آن مکان هندسی  $G(j\omega)$  محور موهومی را قطع می‌کند، فرکانس طبیعی نامیرا  $\omega_n$  است. در نمودار قطبی فرکانسی که به ازای آن فاصله نمودار قطبی از مبدأ ماکزیمم می‌شود، فرکانس تشدید  $\omega_r$  است. مقدار ماکزیمم  $G(j\omega)$  نسبت اندازه بردار در فرکانس تشدید  $\omega_r$  به اندازه بردار در  $\omega = 0$  است. در نمودار قطبی شکل ۷-۲۹ فرکانس تشدید  $\omega_r$  مشخص شده است.

برای حالت فرامیرا  $\zeta$  از یک بزرگتر است و مکان هندسی  $G(j\omega)$  به نمیدایره نزدیک می‌شود. صحت این مطلب را می‌توان با توجه به این نکته نشان داد که برای سیستم‌های دارای میرایی شدید ریشه‌های مشخصه سیستم حقیقی‌اند و یکی از آنها بسیار کوچکتر از دیگری است. چون به ازای  $\zeta$  خیلی بزرگ اثر قطب بزرگتر (بزرگتر از لحاظ قدر مطلق) بر پاسخ بسیار اندک است، سیستم مانند یک سیستم مرتبه اول عمل می‌کند.

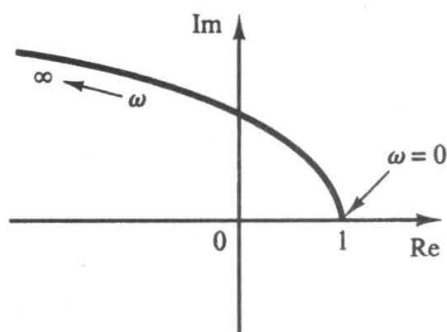
حال تابع تبدیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید



شکل ۷-۲۹

نمودار قطبی نشان دهنده

قله تشدید و فرکانس تشدید  $\omega_r$ .



شکل ۳۰-۷

نمودار قطبی

$1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2$   
به ازای  $\zeta > 0$ .

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= 1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \\ &= \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \left( \frac{2\zeta \omega}{\omega_n} \right) \end{aligned}$$

بخش فرکانس پایین منحنی عبارت است از

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$$

و بخش فرکانس بالای آن عبارت است از

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \infty \angle -180^\circ$$

چون بخش موهومی  $G(j\omega)$  به ازای  $\omega > 0$  مثبت است و به طور یکنوا زیاد می‌شود و بخش حقیقی آن به طور یکنوا از مقدار اولیه یک رو به کاهش می‌گذارد، نمودار قطبی  $G(j\omega)$  شکل کلی نشان داده شده در شکل ۳۰-۷ را دارد. زاویه فاز بین  $0^\circ$  و  $180^\circ$  است.

## مثال ۸-۷

تابع تبدیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts+1)}$$

نمودار قطبی این تابع تبدیل را رسم کنید.

تابع تبدیل سینوسی را می‌توان به شکل زیر نوشت

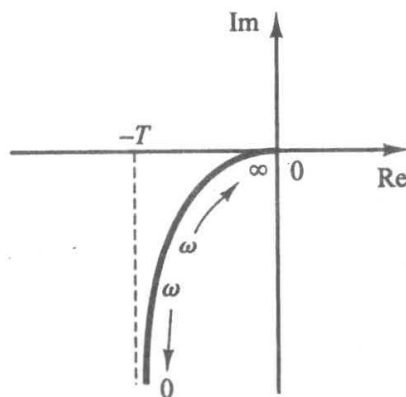
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega T)} = -\frac{T}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{1}{\omega(1+\omega^2 T^2)}$$

بخش فرکانس پایین نمودار قطبی عبارت است از

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -T - j\infty$$

و بخش فرکانس بالای آن

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 - j0$$



شکل ۷-۳۱

نمودار قطبی  $1/[j\omega(1+j\omega T)]$ .

شکل کلی نمودار قطبی  $G(j\omega)$  به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۳۱ است. نمودار  $G(j\omega)$  یک مجانب قائم دارد که از نقطه  $(-T, 0)$  می‌گذرد. چون این تابع تبدیل یک انتگرالگیر دارد  $(1/s)$  شکل عمومی نمودار قطبی آن با شکل عمومی توابع مرتبه دوم فاقد انتگرالگیر تفاوت اساسی دارد.

نمودار قطبی تابع تبدیل زیر را بیابید:

مثال ۷-۹

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1+j\omega T}$$

$G(j\omega)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(j\omega) = (e^{-j\omega L}) \left( \frac{1}{1+j\omega T} \right)$$

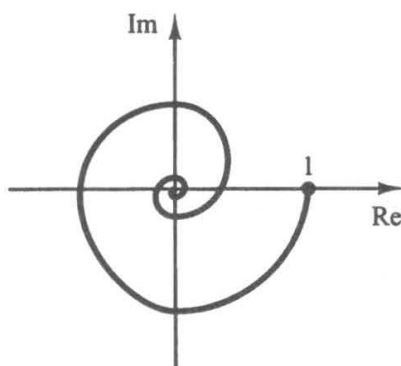
پس دامنه و زاویه فاز به ترتیب عبارت‌اند از

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| \cdot \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

و

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega L} + \angle \frac{1}{1+j\omega T} = -\omega L - \tan^{-1} \omega T$$

دامنه به طور یکنوا از یک به سمت صفر کاهش می‌یابد و فاز نیز به طور یکنوا و بدون کران کاهش می‌یابد، پس نمودار قطبی این تابع تبدیل یک مارپیچ است که در شکل ۷-۳۲ نشان داده شده است.



شکل ۷-۳۲

نمودار قطبی  $e^{-j\omega L} / (1+j\omega T)$ .

شکل کلی نمودارهای قطبی. تابع تبدیلی به شکل زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{K(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\dots}{(j\omega)^\lambda(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\dots}$$

$$= \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots}$$

که در آن  $n > m$  یعنی درجه چندجمله‌ای مخرج بزرگتر از درجه چندجمله‌ای صورت است. نمودار قطبی این تابع تبدیل شکلهای کلی زیر را دارد:

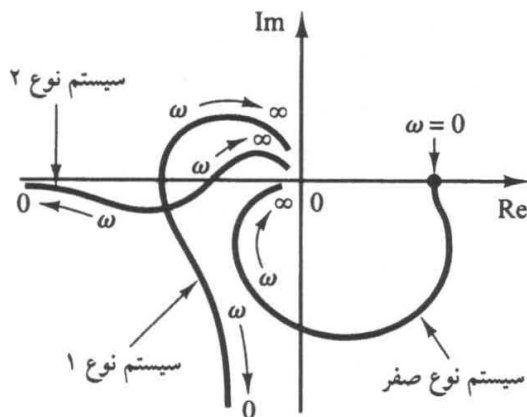
۱.  $\lambda = 0$  یا سیستم نوع ۰: نقطه شروع نمودار قطبی (که با  $\omega = 0$  متناظر است) محدود و روی بخش مثبت محور حقیقی است. مماس بر نمودار قطبی در  $\omega = 0$  بر محور حقیقی عمود است. نقطه نهایی، که با  $\omega = \infty$  متناظر است، در مبدأ قرار دارد و منحنی در آن بر یکی از محورها مماس است.

۲.  $\lambda = 1$  یا سیستم نوع ۱: جمله  $j\omega$  موجود در مخرج در تمام فاصله  $0 \leq \omega \leq \infty$ ،  $-90^\circ$  به زاویه  $G(j\omega)$  اضافه می‌کند. در  $\omega = 0$  اندازه  $G(j\omega)$  بینهایت، و زاویه فاز  $-90^\circ$  است. در فرکانسهای پایین نمودار قطبی بر خطی موازی با بخش منفی محور موهومی مجانب است. در  $\omega = \infty$  دامنه صفر می‌شود، منحنی به مبدأ می‌رسد و بر یکی از محورها مماس می‌شود.

۳.  $\lambda = 2$  یا سیستم نوع ۲: جمله  $(j\omega)^2$  موجود در مخرج در تمام فاصله  $0 \leq \omega \leq \infty$ ،  $-180^\circ$  به زاویه  $G(j\omega)$  اضافه می‌کند. در  $\omega = 0$  دامنه  $G(j\omega)$  بینهایت و زاویه فاز  $-180^\circ$  است. در فرکانسهای پایین، نمودار قطبی با خطی موازی با بخش منفی محور حقیقی مجانب است. در  $\omega = \infty$  دامنه صفر می‌شود و منحنی بر یکی از محورها مماس است.

شکل کلی بخشهای فرکانس پایین نمودارهای قطبی سیستمهای نوع ۰، نوع ۱، و نوع ۲ در شکلهای ۷-۳۳ نشان داده شده است. می‌توان دید که اگر درجه چندجمله‌ای مخرج  $G(j\omega)$  از درجه چندجمله‌ای صورت بزرگتر باشد، مکان هندسی  $G(j\omega)$  به صورت ساعتگرد، به مبدأ همگرا می‌شود. در مکان هندسی به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۳۴ بر یکی از محورها مماس می‌شود.

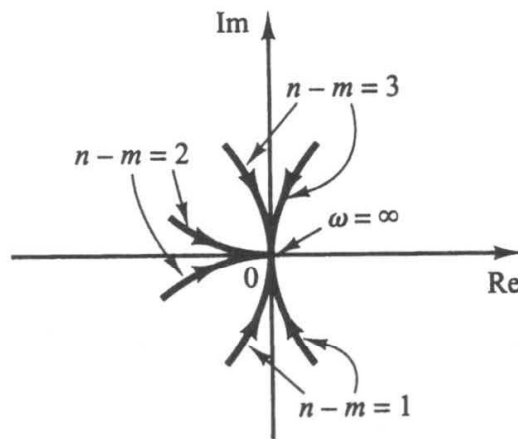
رفتار دینامیکی صورت، یعنی ثابت زمانی‌های صورت تابع تبدیل، می‌تواند هر شکل پیچیده‌ای به نمودار قطبی سیستم بدهد. شکل ۷-۳۵ نمونه‌هایی از نمودارهای قطبی دارای رفتار دینامیکی در صورت تابع تبدیل را



شکل ۷-۳۳

نمودارهای قطبی سیستمهای

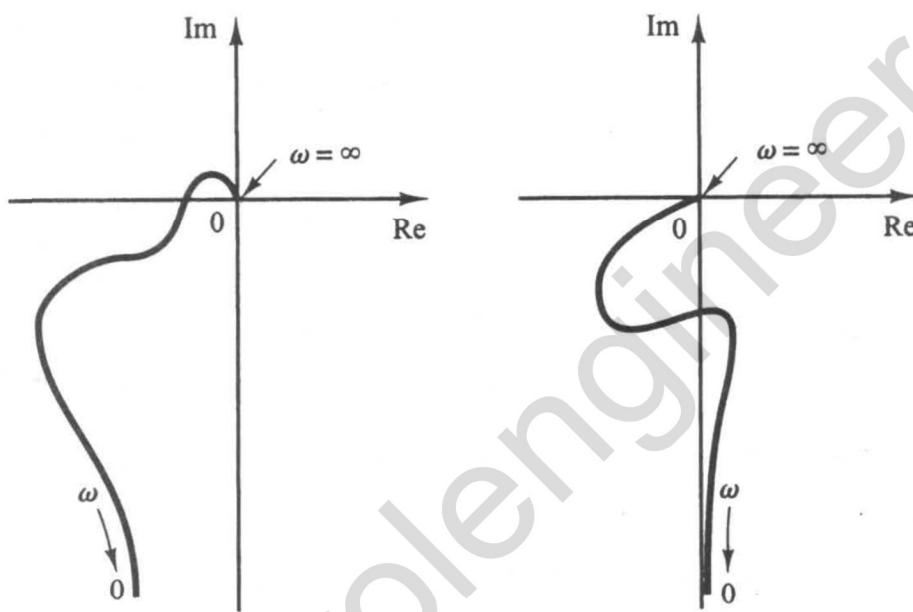
نوع ۰، نوع ۱، و نوع ۲.



$$G(j\omega) = \frac{b_o (j\omega)^m + \dots}{a_o (j\omega)^n + \dots}$$

شکل ۷-۳۴

نمودارهای قطبی در گستره فرکانس بالا.



شکل ۷-۳۵

نمودارهای قطبی توابع تبدیل

دارای رفتار دینامیکی در صورت.

نشان می‌دهد. در تحلیل سیستمهای کنترل باید نمودار قطبی  $G(j\omega)$  در گستره فرکانسی مورد نظر به طور دقیق مشخص شود.

جدول ۷-۱ نمودارهای قطبی چند تابع تبدیل را نشان می‌دهد.

**ترسیم نمودارهای نایکویست با MATLAB.** نمودارهای نایکویست نیز مانند نمودارهای بوده برای نمایش پاسخ فرکانسی سیستمهای کنترل پایدار، خطی، و مستقل از زمان بسیار به کار می‌رود. نمودارهای نایکویست نمودارهای قطبی هستند، حال آن که نمودارهای بوده نمودارهای قائم‌اند. برای هر منظور خاص یکی از این دو نوع نمودار مناسبتر است، ولی معمولاً هر دو را می‌توان برای هر منظوری به کار برد.

دستور nyquist پاسخ فرکانسی سیستمهای پیوسته خطی مستقل از زمان پایدار را محاسبه می‌کند. وقتی این

دستور بدون آرگومان سمت چپ به کار رود، نمودار نایکویست روی صفحه ترسیم می‌شود

دستور

Nyquist(num,den)

جدول ۱-۷ نمودارهای قطبی توابع تبدیل ساده.


نمودار نایکوئیست تابع تبدیل زیر را رسم می کند

$$G(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$$

که در آن num و den ضرایب چندجمله ای را برحسب توانهای نزولی s دربر دارند. دیگر شکل های متداول دستور nyquist عبارت است از

```
nyquist(num,den,w)
nyquist(A,B,C,D)
nyquist(A,B,C,D,w)
nyquist(A,B,C,D,iu,w)
nyquist(sys)
```

در دستورهای که بردار فرکانس توسط کاربر تعیین می‌شود، مثل

```
nyquist(num,den,w)
```

از فرکانسهایی که توسط کاربر در بردار  $w$  مشخص شده است، استفاده می‌شود. بردار  $w$  فرکانس‌هایی را که در آنها پاسخ فرکانسی محاسبه می‌شود، برحسب رادیان بر ثانیه، دربر دارد. هنگام استفاده با آرگومانهای سمت چپ، به صورت

```
[re,im,w] = nyquist(num,den)
[re,im,w] = nyquist(num,den,w)
[re,im,w] = nyquist(A,B,C,D)
[re,im,w] = nyquist(A,B,C,D,w)
[re,im,w] = nyquist(A,B,C,D,iu,w)
[re,im,w] = nyquist(sys)
```

MATLAB پاسخ فرکانسی را در ماتریسهای  $re$  و  $im$  برمی‌گرداند و نموداری روی صفحه رسم نمی‌شود. ماتریسهای  $re$  و  $im$  به ترتیب بخشهای حقیقی و موهومی پاسخ فرکانسی سیستم، محاسبه شده در فرکانسهای قید شده در  $w$  را دربر دارند. تعداد ستونهای ماتریسهای  $re$  و  $im$  با تعداد خروجی‌ها و تعداد ردیفهای آنها با تعداد درایه‌های  $w$  برابر است.

مثال ۷-۱۰

تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

نمودار نایکویست را با MATLAB رسم کنید.

چون سیستم به صورت یک تابع تبدیل بیان شده است برای رسم نمودار نایکویست می‌توان دستور زیر را به کار برد

```
nyquist(num,den)
```

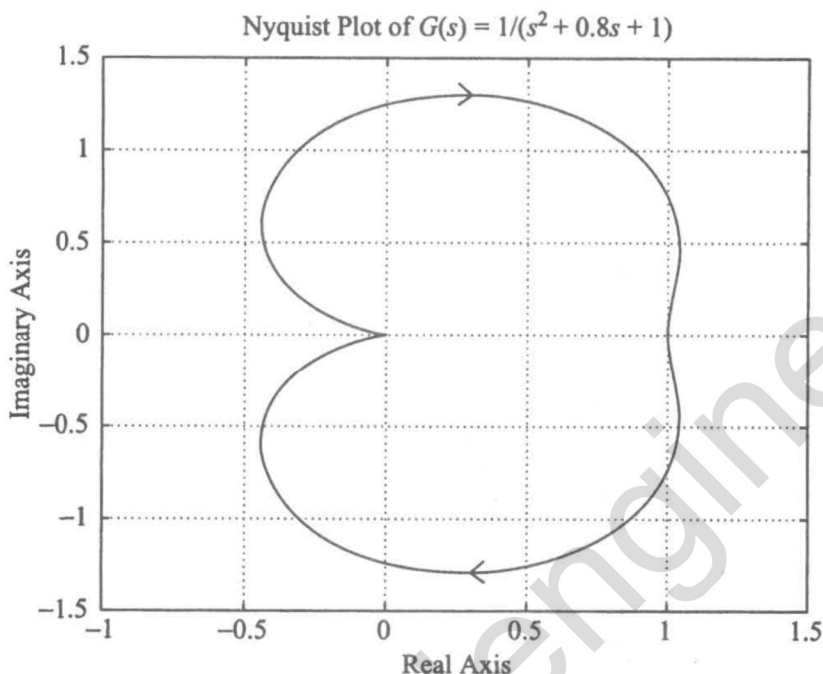
برنامه ۷-۵ نمودار نایکویست شکل ۷-۳۶ را به دست می‌دهد. در این نمودار گستره محور حقیقی و محور موهومی به طور خودکار تعیین شده است.

**MATLAB Program 7-5**

```

num = [1];
den = [1 0.8 1];
nyquist(num,den)
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 1/(s^2 + 0.8s + 1)')

```



شکل ۳۶-۷

نمودار نایکویست

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

اگر بخواهیم نمودار نایکویست را به نحوی رسم کنیم که بتوانیم گستره‌ها را خودمان تعیین کنیم، مثلاً -۲ تا +۲ برای محور حقیقی و -۲ تا +۲ برای محور موهومی؛ دستور زیر را به کامپیوتر می‌دهیم

```

v = [-2 2 -2 2];
axis(v);

```

یا این دستورها را در دستور زیر ادغام می‌کنیم

```

Axis([-2 2 -2 2])

```

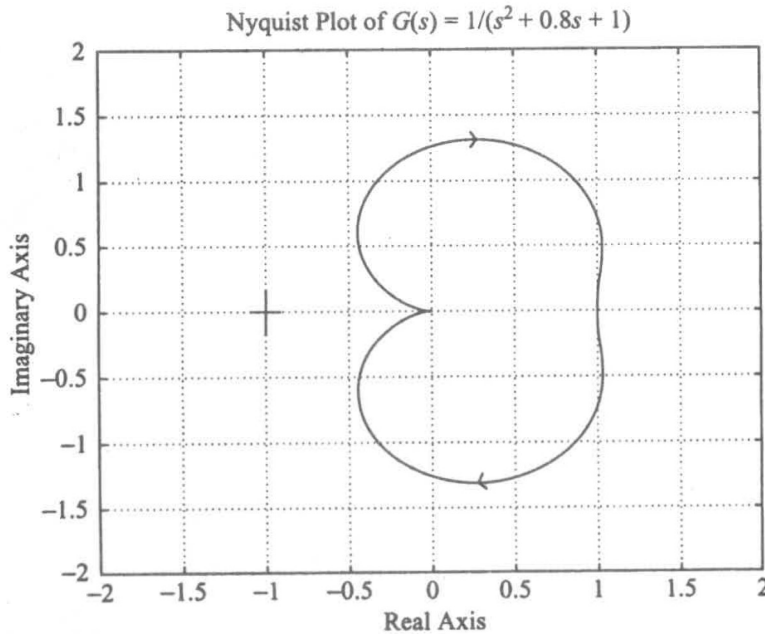
برنامه ۶-۷ و شکل ۳۷-۷ را ببینید.

**MATLAB Program 7-6**

```

% ----- Nyquist plot -----
num = [1];
den = [1 0.8 1];
nyquist(num,den)
v = [-2 2 -2 2]; axis(v)
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 1/(s^2 + 0.8s + 1)')

```



شکل ۷-۳۷

نمودار نایکوئیست

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$$

**احتیاط.** اگر MATLAB در هنگام کار برای ترسیم نمودار نایکوئیست پیغام "Divide by zero" (تقسیم بر صفر) بدهد، نمودار نایکوئیست حاصل ممکن است اشتباه باشد. برای مثال تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

دستورهای

```
num = [ 1 ];
den = [ 1 1 0 ];
nyquist(num,den)
```

یک نمودار نایکوئیست اشتباه رسم می‌کند. نمونه‌ای از این نمودار اشتباه در شکل ۷-۳۸ نشان داده شده است. در صورت بروز چنین اشتباهی می‌توان آن را با استفاده از دستور axis(v) تصحیح کرد. برای مثال دادن دستور زیر

```
v=[ -2 2 -5 5];axis(v)
```

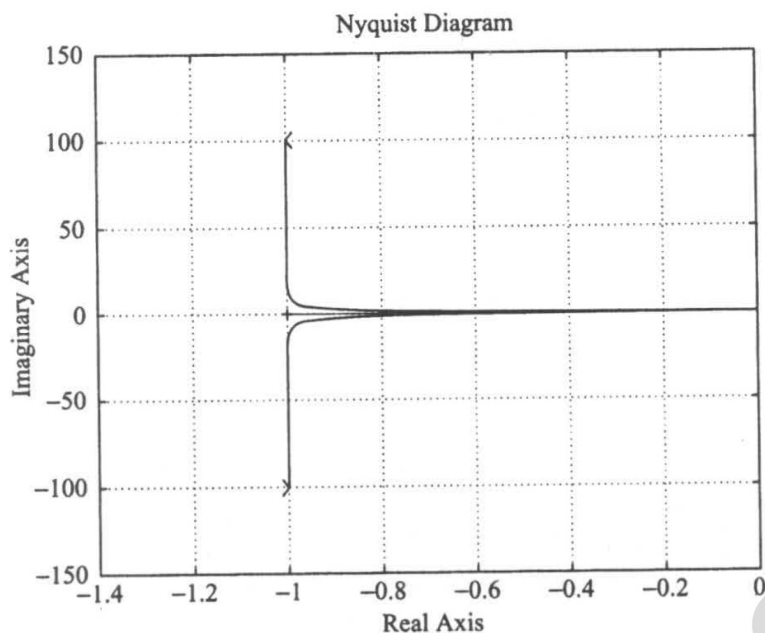
می‌تواند نمودار نایکوئیست صحیحی به دست دهد. مثال ۷-۱۱ را ببینید.

نمودار نایکوئیست  $G(s)$  زیر را رسم کنید:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

مثال ۷-۱۱

برنامه ۷-۷ نمودار نایکوئیست صحیح را به دست می‌دهد، گرچه پیغام "Devide by zero" نیز ممکن است ظاهر شود. نمودار نایکوئیست حاصل در شکل ۷-۳۹ نشان داده شده است.

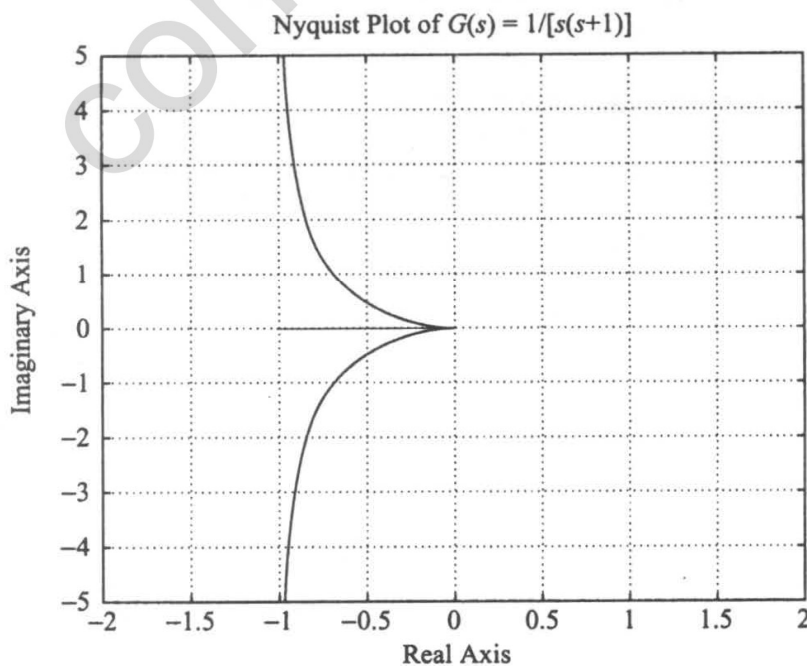


شکل ۳۸-۷  
نمودار نایکوئیست اشتباه.

#### MATLAB Program 7-7

```
% ----- Nyquist plot-----
num = [1];
den = [1 1 0];
nyquist(num,den)
v = [-2 2 -5 5]; axis(v)
grid
title('Nyquist Plot of  $G(s) = 1/[s(s+1)]$ ')
```

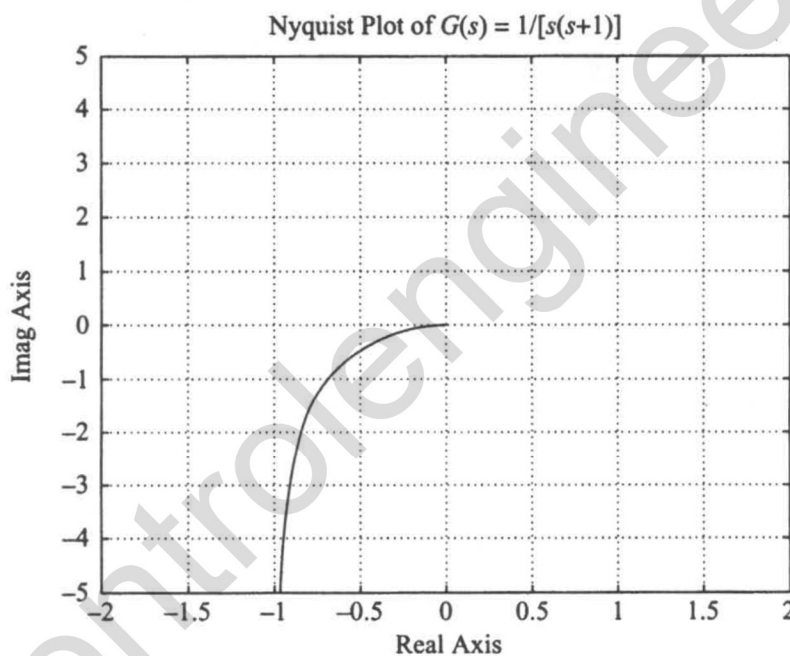
توجه کنید که نمودار نایکوئیست نشان داده شده در شکل ۳۹-۷، مکان هندسی به ازای  $\omega > 0$  و  $\omega < 0$  است. اگر بخواهیم نمودار نایکوئیست تنها به ازای  $\omega > 0$  رسم شود باید دستور nyquist را به صورت زیر به کار ببریم



شکل ۳۹-۷  
نمودار نایکوئیست  
 $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

### MATLAB Program 7-8

```
% ----- Nyquist plot-----
num = [1];
den = [1 1 0];
w = 0.1:0.1:100;
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im)
v = [-2 2 -5 5]; axis(v)
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 1/[s(s + 1)]')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```



شکل ۷-۴۰

نمودار نایکوئیست

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

در  $\omega > 0$ .

`[re,im,w]=nyquist(num,den,w)`

برنامه ۷-۸ یک برنامه MATLAB برای این منظور را نشان می‌دهد. نمودار نایکوئیست حاصل در شکل ۷-۴۰ نشان داده شده است.

ترسیم نمودار نایکوئیست سیستم تعریف شده در فضای حالت. سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

که در آن  $\mathbf{x}$  = بردار حالت (بردار  $n \times 1$ )

$\mathbf{y}$  = بردار خروجی (بردار  $m \times 1$ )

$u$  = بردار کنترل (بردار  $r \times 1$ )

$A$  = ماتریس حالت (ماتریس  $n \times n$ )

$B$  = ماتریس کنترل (ماتریس  $r \times n$ )

$C$  = ماتریس خروجی (ماتریس  $n \times m$ )

$D$  = ماتریس انتقال مستقیم (ماتریس  $r \times m$ )

برای رسم نمودارهای نایکویست این سیستم دستور زیر را به کار می‌بریم

`nyquist(A,B,C,D)`

این دستور مجموعه‌ای از نمودارهای نایکویست، به ازای هر ترکیب ورودی و خروجی ممکن یک نمودار، به دست می‌دهد. گستره فرکانسی به طور خودکار تعیین می‌شود.

دستور

`nyquist(A,B,C,D,iu)`

تنها یک ورودی را برای رسم نمودارهای نایکویست سیستم انتخاب می‌کند، گستره فرکانسی باز هم به طور خودکار تعیین می‌شود. کمیت اسکالر  $iu$  شماره ورودی مورد نظر را به برنامه معرفی می‌کند.

دستور

`nyquist(A,B,C,D,iu,w)`

بردار فرکانس  $w$  تعریف شده توسط کاربر را نیز به برنامه می‌دهد. بردار  $w$  فرکانس‌هایی را که پاسخ فرکانسی در آنها باید حساب شود، برحسب رادیان بر ثانیه در بر دارد.

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

مثال ۷-۱۲

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

نمودار نایکویست سیستم را رسم کنید.

این سیستم یک ورودی  $u$  و یک خروجی  $y$  دارد. نمودار نایکویست را می‌توان با هر یک از دستورهای زیر به دست آورد

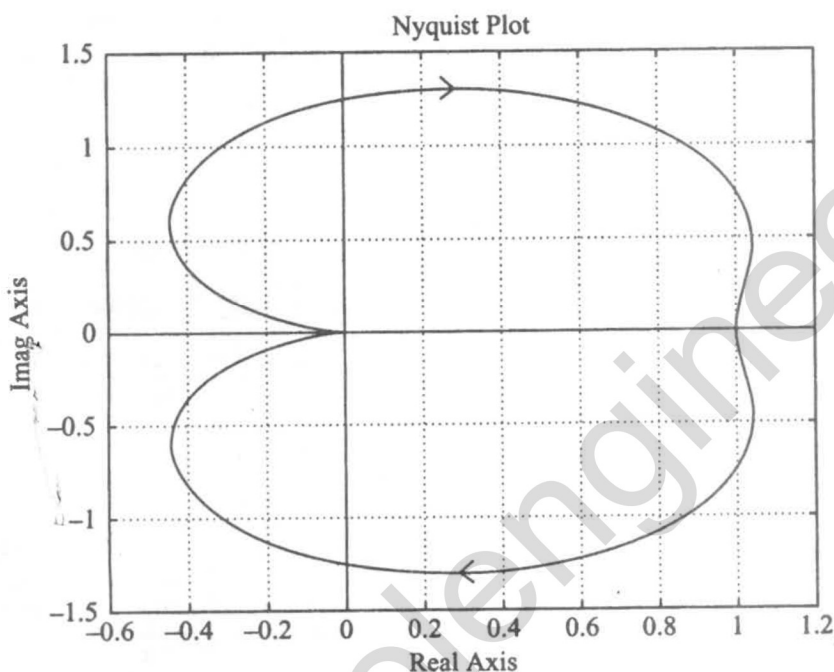
`nyquist(A,B,C,D)`

`nyquist(A,B,C,D,1)`

برنامه ۷-۹ نمودار نایکویست سیستم را به دست می‌دهد. (توجه کنید که هر یک از دستورهای بالا به کار رود، نتیجه یکسانی دارد) شکل ۷-۴۱ نمودار نایکویست حاصل از برنامه ۷-۹ را نشان می‌دهد.

**MATLAB Program 7-9**

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [0;25];
C = [1 0];
D = [0];
nyquist(A,B,C,D)
grid
title('Nyquist Plot')
```



شکل ۷-۴۱  
نمودار نایکوئیست  
سیستم مثال ۷-۱۲.

سیستم تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

مثال ۷-۱۳

این سیستم دو ورودی و دو خروجی دارد. چهار رابطه خروجی - ورودی سینوسی این سیستم عبارتند از  $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ ،  $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ ،  $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$  و  $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ . نمودارهای نایکوئیست سیستم را رسم کنید. (هنگام در نظر گرفتن ورودی  $u_1$ ، ورودی  $u_2$  صفر در نظر گرفته می‌شود و برعکس).

دستور زیر چهار نمودار نایکوئیست را به دست می‌دهد

nyquist(A,B,C,D)

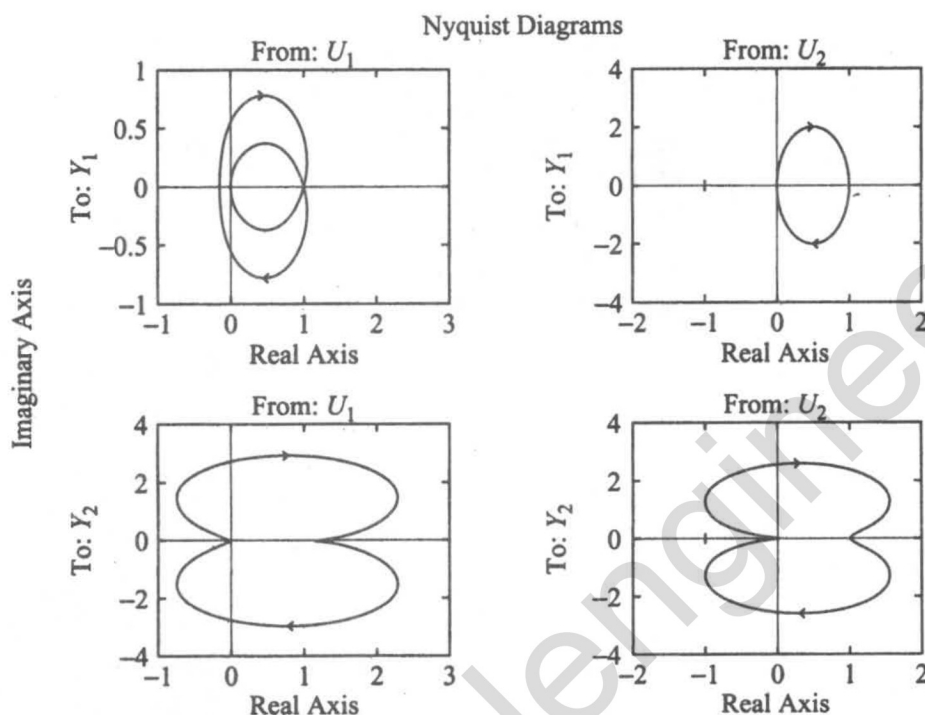
برنامه ۷-۱۰ نمودار نایکوئیست شکل ۷-۴۲ را به دست داده است.

## MATLAB Program 7-10

```

A = [-1 -1; 6.5 0];
B = [1 1; 1 0];
C = [1 0; 0 1];
D = [0 0; 0 0];
nyquist(A,B,C,D)

```



شکل ۴۲-۷  
نمودارهای نایکوئیست  
سیستم مثال ۷-۱۳.

## ۴-۷ نمودارهای لگاریتم دامنه برحسب فاز

راه دیگر نمایش ترسیمی مشخصات پاسخ فرکانسی استفاده از نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز است. در این نمودار لگاریتم دامنه برحسب دسیبل، برحسب زاویه فاز یا حاشیه فاز، در گستره فرکانسی مورد نظر رسم می‌شود. [حاشیه فاز تفاضل بین زاویه فاز واقعی و  $-180^\circ$  است؛ یعنی  $180^\circ + \phi = \phi - (-180^\circ)$  منحنی حاصل برحسب  $\omega$  مقدارگذاری می‌شود. این گونه نمودار لگاریتم دامنه برحسب زاویه فاز را معمولاً نمودار نیکولس می‌نامند.

در نمودار بوده مشخصات پاسخ فرکانسی  $G(j\omega)$  توسط دو منحنی مختلف روی کاغذ نیم‌لگاریتمی نشان داده می‌شود؛ این منحنی‌ها منحنی‌های لگاریتم دامنه و زاویه فاز هستند. در نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز این دو منحنی در هم ادغام می‌شوند. نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز را می‌توان با خواندن دامنه و فاز از نمودار بوده به راحتی رسم کرد. توجه کنید که در نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز تغییر بهره ثابت  $G(j\omega)$  تنها منحنی را بالا (بهره زیادتر) یا پایین (بهره کمتر) می‌برد، ولی شکل منحنی تغییر نمی‌کند. مزیت نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز این است که می‌توان پایداری نسبی سیستم حلقه بسته را به سرعت تعیین و مشخصات جبران کننده لازم را به سهولت به دست آورد.

منحنی‌های لگاریتم دامنه برحسب فاز توابع تبدیل سینوسی  $G(j\omega)$  و  $1/G(j\omega)$  نسبت به مبدأ تقارن دارند، زیرا

$$\left| \frac{1}{G(j\omega)} \right| \text{dB} = -|G(j\omega)| \text{dB}$$

$$\angle \frac{1}{G(j\omega)} = -\angle G(j\omega)$$

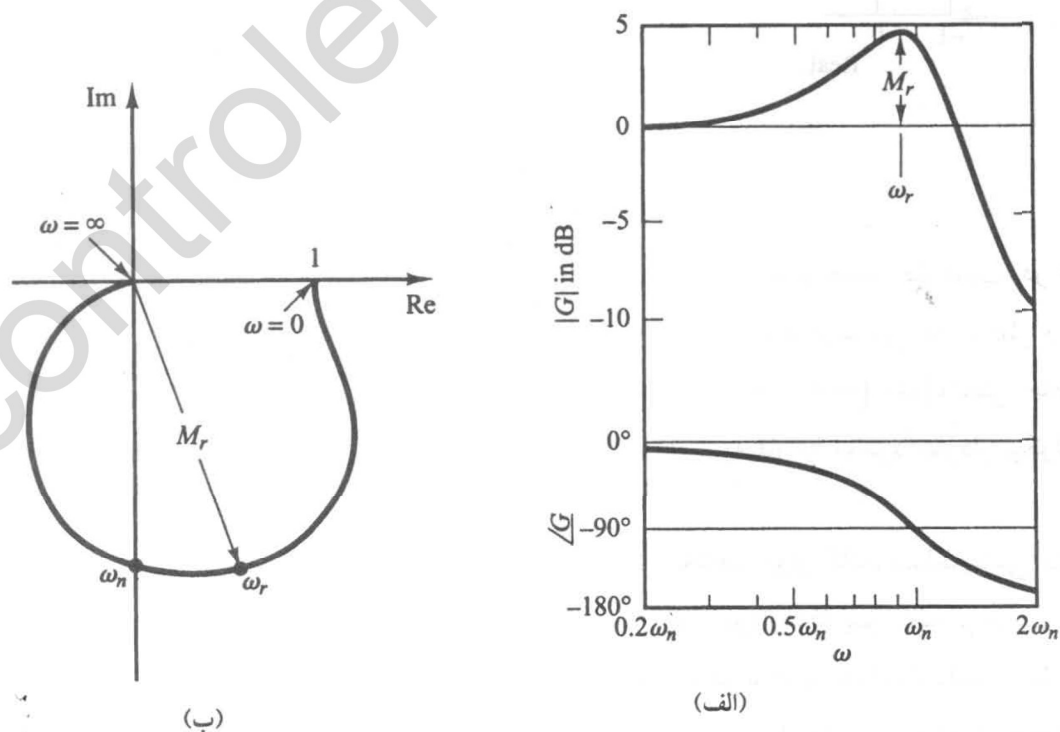
و

تابع تبدیل فرکانسی زیر را در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right) + \left( j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

در شکل ۷-۴۳ سه نمایش پاسخ فرکانسی این تابع تبدیل مقایسه شده است. در منحنی لگاریتم دامنه برحسب فاز، فاصله قائم بین نقاط  $\omega = 0$  و  $\omega = \omega_r$  که در آن فرکانس تشدید است، مقدار اوج  $G(j\omega)$  برحسب دسیبل را به دست می‌دهد.

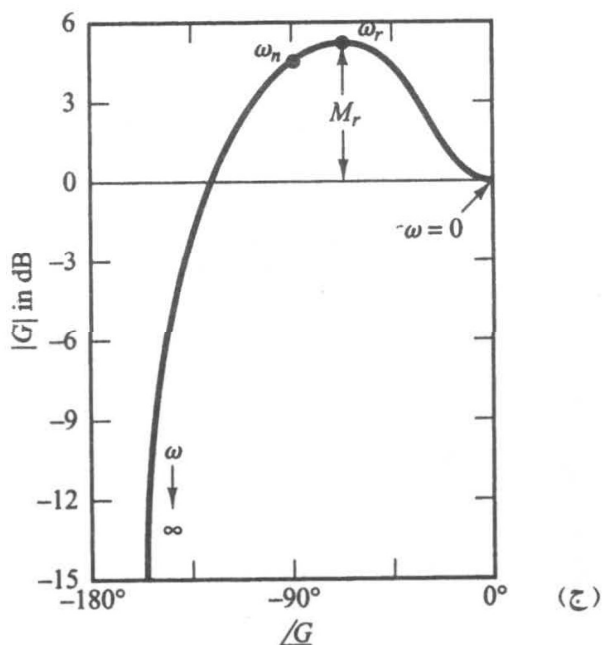
چون مشخصات لگاریتم دامنه و زاویه فاز توابع تبدیل پایه در بخشهای ۷-۲ و ۷-۳ به تفصیل مورد بحث قرار گرفت، در اینجا کافی است چند مثال از نمودارهای لگاریتم دامنه برحسب فاز ارائه دهیم. جدول ۷-۲ این مثالها را نشان می‌دهد. (البته در بخش ۷-۶ در مورد نمودار نیکولس بیشتر صحبت خواهیم کرد).



شکل ۷-۴۳

سه نمایش پاسخ فرکانسی  $\frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$  به ازای  $\zeta > 0$ ؛

(الف) نمودار بوده؛ (ب) نمودار قطبی.



شکل ۷-۴۳

(ج) نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز.

## ۵-۷ معیار پایداری نایکویست

معیار پایداری نایکویست سیستم حلقه بسته را برحسب پاسخ فرکانسی حلقه باز و قطبهای حلقه باز تعیین می‌کند.

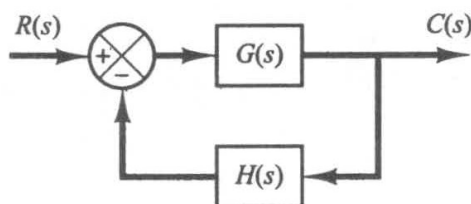
در این بخش معیار پایداری نایکویست و مطالب ریاضی مربوط و پشتیبان آن مورد بحث قرار می‌گیرد. سیستم حلقه بسته شکل ۷-۴۴ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

برای پایداری تمام ریشه‌های معادله مشخصه زیر باید در نیمه چپ صفحه  $s$  باشند

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

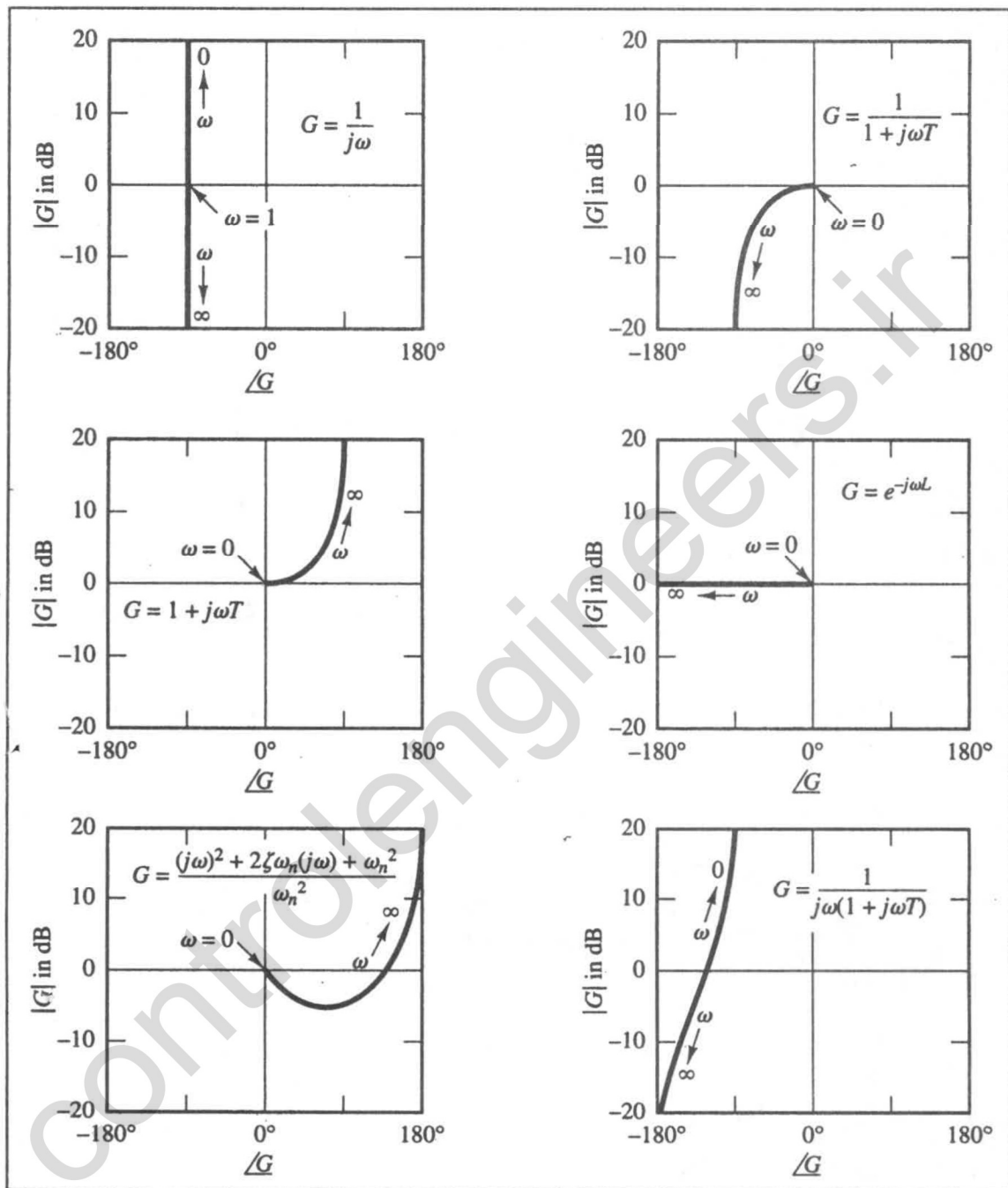
[قبلاً تاکر داده‌ایم که حتی اگر صفرها و قطبهای تابع تبدیل حلقه باز  $G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$  باشند، در صورت وجود تمام قطبهای تابع تبدیل حلقه بسته (یعنی ریشه‌های معادله مشخصه) در نیمه چپ صفحه  $s$ ، سیستم پایدار است.] معیار پایداری نایکویست رابطه پاسخ فرکانسی حلقه باز  $G(j\omega)H(j\omega)$  با تعداد صفرها و قطبهای موجود در نیمه راست صفحه  $s$  معادله  $1 + G(s)H(s)$  را مشخص می‌کند. این معیار، که توسط نایکویست ابداع شده، در مهندسی کنترل بسیار به کار می‌رود، زیرا به کمک آن پایداری مطلق سیستم حلقه بسته را می‌توان به روش ترسیمی و با توجه به منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه باز تعیین کرد، بدون این



شکل ۷-۴۴

سیستم حلقه بسته.

جدول ۷-۲ لگاریتم دامنه برحسب فاز توابع تبدیل ساده.



که تعیین قطبهای حلقه بسته واقعاً لازم باشد. برای تحلیل پایداری می‌توان هم از منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه باز به دست آمده از روش تحلیلی و هم از منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه باز به دست آمده از روش تجربی استفاده کرد. این امر بسیار کارساز است، زیرا در طراحی یک سیستم کنترل غالباً عبارتهای ریاضی بعضی اجزاء معلوم نیست، بلکه تنها مشخصات فرکانسی آنها در دسترس است.

معیار پایداری نایکویست براساس یکی از قضایای نظریه متغیرهای مختلط استوار است. برای درک این معیار ابتدا نداشت مسیرها در صفحه مختلط را مورد بحث قرار می‌دهیم.

فرض می‌کنیم که تابع تبدیل حلقه باز  $G(s)H(s)$  را می‌توان به صورت نسبت دو چندجمله‌ای بر حسب  $s$  نشان داد. برای یک سیستم قابل ساخت درجه چندجمله‌ای مخرج باید بزرگتر یا مساوی درجه چندجمله‌ای صورت باشد. یعنی برای سیستمهای واقعی قابل ساخت حد  $G(s)H(s)$  هنگام میل  $s$  به بینهایت برابر صفر است.

**مطالعات اولیه.** معادله مشخصه سیستم شکل ۷-۴ عبارت است از

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

نشان خواهیم داد که برای هر مسیر پیوسته بسته‌ای در صفحه  $s$  که از هیچ نقطه تکینی نگذرد، منحنی بسته‌ای در صفحه  $F(s)$  وجود دارد. این که این منحنی بسته به چه تعداد و در چه جهتی مبدأ صفحه  $F(s)$  را دور می‌زند در ادامه بحث نقش مهمی دارد، زیرا بعداً نشان خواهیم داد که تعداد و جهت دورها با پایداری سیستم ارتباط دارد.

برای مثال تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s-1}$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$\begin{aligned} F(s) &= 1 + G(s)H(s) \\ &= 1 + \frac{2}{s-1} = \frac{s+1}{s-1} = 0 \end{aligned} \quad (15-7)$$

تابع  $F(s)$  در تمام نقاط صفحه  $s$ ، بجز نقاط تکین  $F(s)$  تحلیلی<sup>†</sup> است. به ازای هر نقطه‌ای از صفحه  $s$  که  $F(s)$  در آن تحلیلی است، نقطه متناظری در صفحه  $F(s)$  وجود دارد. برای مثال اگر  $s = 2 + j1$ ، آنگاه  $F(s)$  عبارت است از

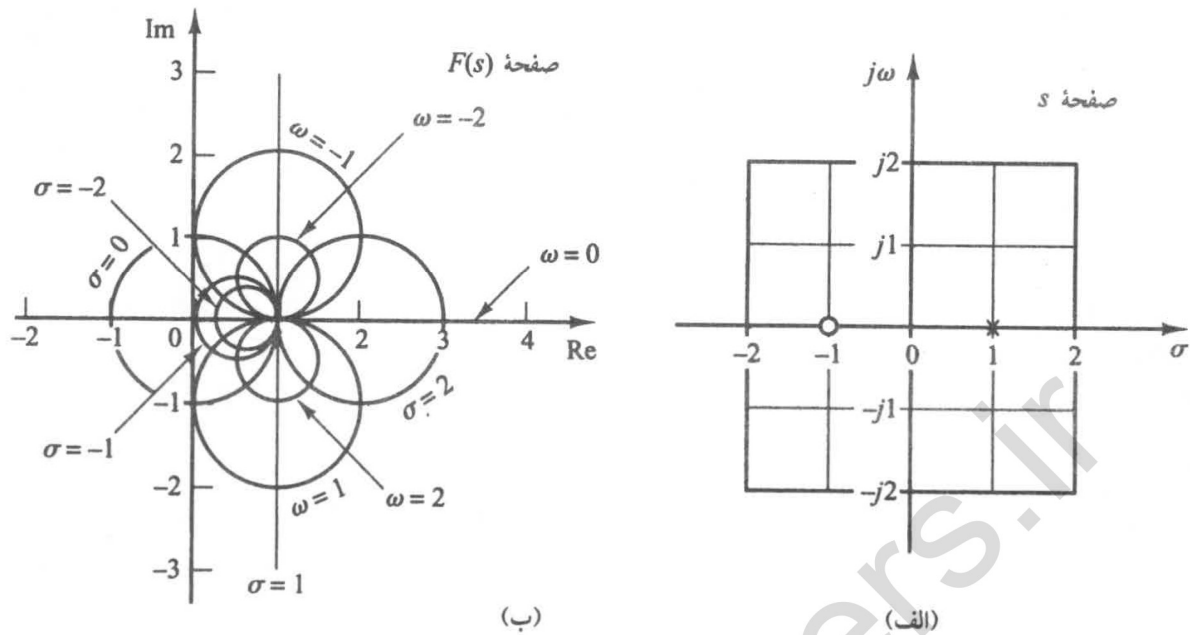
$$F(2 + j1) = \frac{2 + j1 + 1}{2 + j1 - 1} = 2 - j1$$

پس نقطه  $s = 2 + j1$  از صفحه  $s$  با نقطه  $2 - j1$  صفحه  $F(s)$  متناظر است.

پس همانطور که قبلاً گفته شد برای هر منحنی بسته صفحه  $s$  که از هیچ نقطه تکینی نمی‌گذرد، منحنی بسته متناظری در صفحه  $F(s)$  وجود دارد.

به ازای معادله مشخصه  $F(s)$  معادله (۷-۱۵)، نگاشت همدیس خطوط  $\omega = 0, \pm 1, \pm 2$  و خطوط  $\sigma = 0, \pm 1, \pm 2$  [شکل ۷-۴۵ (الف)] دایره‌های شکل ۷-۴۵ (ب) را در صفحه  $F(s)$  به دست می‌دهد. فرض کنید که نقطه نمونه  $s$  مسیری در صفحه  $s$  را در جهت ساعتگرد طی می‌کند. اگر مسیر صفحه  $s$  قطب  $F(s)$  را دور بزند، مسیر نگاشسته شده به صفحه  $F(s)$  مبدأ صفحه  $F(s)$  را در جهت پاد ساعتگرد دور می‌زند. [شکل ۷-۴۶ (الف) را ببینید.] اگر مسیر صفحه  $s$  صفر  $F(s)$  را دور بزند، مسیر نگاشسته شده به صفحه  $F(s)$  مبدأ صفحه  $F(s)$  را در جهت ساعتگرد دور می‌زند. [شکل ۷-۴۶ (ب) را ببینید.] اگر مسیر صفحه  $s$  هم صفر و هم

<sup>†</sup> تابع مختلط  $F(s)$  در یک ناحیه به شرطی تحلیلی است که در آن ناحیه خود  $F(s)$  و تمام مشتقهای آن وجود داشته باشد.



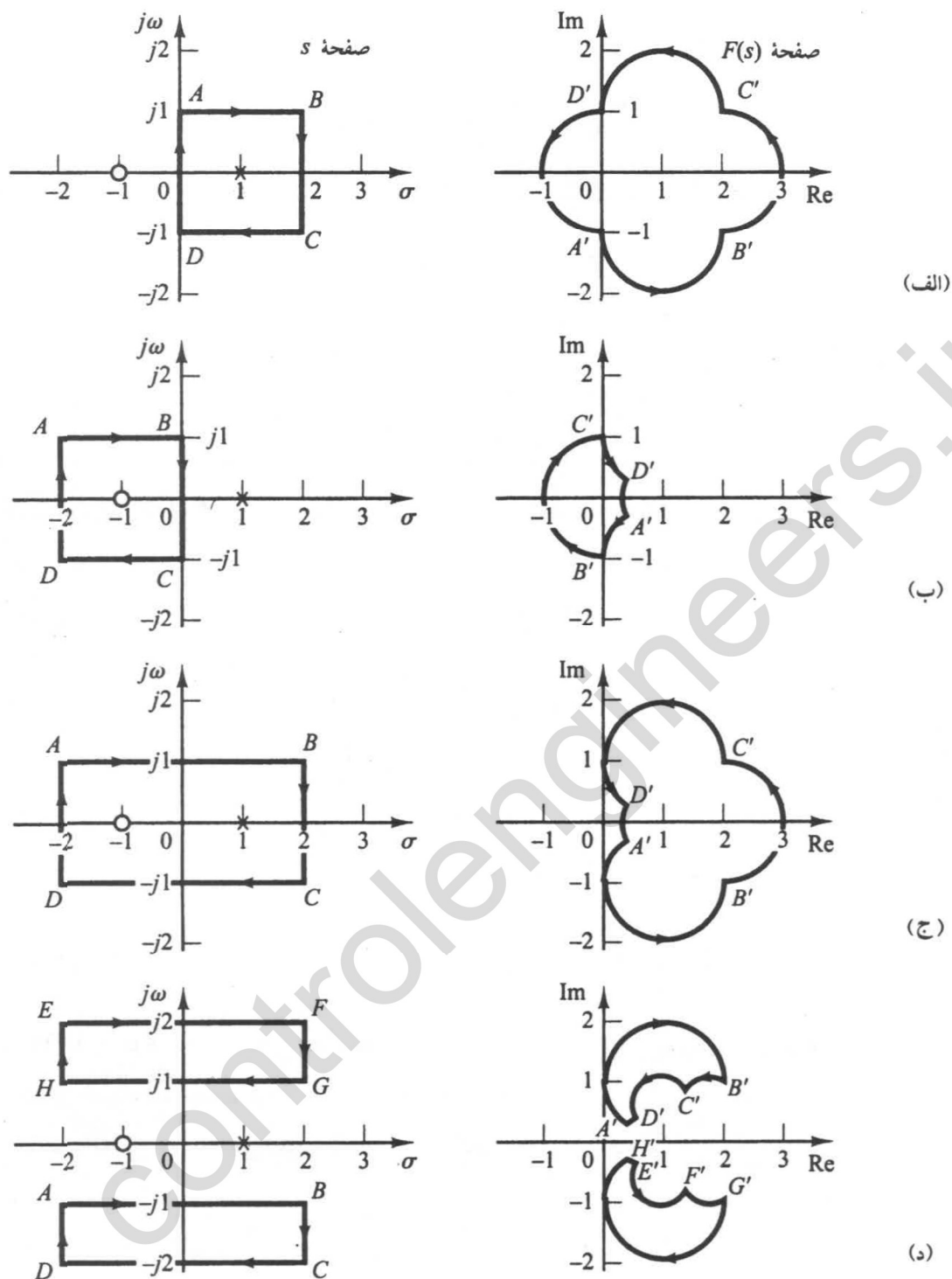
شکل ۷-۴۵ نگاشت همدیس از صفحه  $s$  به صفحه  $F(s)$  به ازای  $F(s) = (s+1)/(s-1)$ .

قطب  $F(s)$  را دور بزنند، مسیر نگاشته شده به صفحه  $F(s)$  مبدأ صفحه  $F(s)$  را اصلاً دور نمی‌زنند. [شکلای ۴۶-۷ (ج) و (د) را ببینید.]

با توجه به تحلیل بالا می‌توان گفت که جهت دور زدن مبدأ صفحه  $F(s)$  توسط مسیر نگاشته شده به صفحه  $F(s)$ ، به این بستگی دارد که مسیر صفحه  $s$  قطب یا صفری را دور بزند یا نه. توجه کنید که محل قطب و صفر در صفحه  $s$  چه نیم‌صفحه راست و چه چپ، در این امر تأثیری ندارد؛ تنها دور زده شدن صفرها و قطبها مهم است. اگر مسیر صفحه  $s$  تعداد یکسانی قطب و صفر را دور بزند، مسیر بسته متناظر در صفحه  $F(s)$  مبدأ صفحه  $F(s)$  را دور نمی‌زنند. مباحث بالا توضیح ترسیمی قضیه نگاشت است، که اساس معیار پایداری نایکویست را تشکیل می‌دهد.

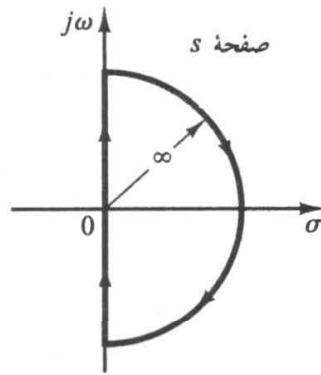
**قضیه نگاشت.**  $F(s)$  را نسبت دو چندجمله‌ای برحسب  $s$  فرض کنید.  $P$  تعداد قطبها و  $Z$  تعداد صفرهای  $F(s)$  در مسیر بسته‌ای واقع در صفحه  $s$  است. در شمارش صفرها و قطبها چندگانه بودن یک قطب یا صفر نیز منظور شده است. این مسیر در صفحه  $s$  به مسیر بسته‌ای در صفحه  $F(s)$  نگاشته می‌شود. اگر نقطه‌ای روی مسیر بسته  $F(s)$  در جهت ساعتگرد یک دور کامل حرکت کند، مبدأ را به تعداد  $N = Z - P$  دور می‌زنند. (توجه کنید که با این روش تعداد قطبها و صفرها تعیین نمی‌شود. بلکه تنها تفاضلشان به دست می‌آید.)

در اینجا به اثبات این قضیه نمی‌پردازیم، بلکه آن را به مسئله الف-۷-۶ واگذار می‌کنیم. توجه کنید که مثبت بودن  $N$  به معنی این است که تعداد صفرهای  $F(s)$  از تعداد قطبهای آن بیشتر است و منفی بودن آن به معنی بیشتر بودن تعداد قطبهاست. در کاربردهای کنترلی عدد  $P$  برای  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$  را به سادگی و با توجه به تابع  $G(s)H(s)$  می‌توان تعیین کرد. بنابراین اگر  $N$  با توجه به نمودار  $F(s)$  تعیین شود، تعداد صفرهای داخل مسیر بسته صفحه  $s$  را می‌توان به سادگی تعیین کرد. توجه کنید که شکل دقیق مسیر در صفحه  $s$  و مکان هندسی در صفحه  $F(s)$  مهم نیست، بلکه تنها تعداد دورهایی که حول مبدأ زده می‌شود مهم است، زیرا این تعداد تنها به تعداد صفرها و قطبهای بستگی دارد که داخل مسیر صفحه  $s$  است.



شکل ۷-۴۶ مسیرهای بسته در صفحه  $s$  و مسیرهای متناظر در صفحه  $F(s)$  به ازای  $F(s) = (s+1)/(s-1)$ .

کاربرد قضیه نگاشت در تحلیل پایداری سیستمهای حلقه بسته. برای تحلیل پایداری سیستمهای کنترل خطی، مسیر بسته صفحه  $s$  را به نحوی برمی‌گزینیم که تمام نیمه راست صفحه  $s$  را دربر داشته باشد. این مسیر از محور  $j\omega$ ، از  $\omega = -\infty$  تا  $\omega = +\infty$  و نیمدایره‌ای به شعاع بینهایت در نیم صفحه راست تشکیل می‌شود. این مسیر را مسیر نایکویست می‌نامند. (جهت مسیر ساعتگرد است.) مسیر نایکویست تمام نیم صفحه راست



شکل ۷-۴۷

 مسیر بسته در صفحه  $s$  .

را دربر داشته، تمام صفرها و قطبهای دارای بخش حقیقی مثبت تابع  $1 + G(s)H(s)$  در داخل آن قرار دارند. [اگر  $1 + G(s)H(s)$  در نیم صفحه راست صفر نداشته باشد، سیستم حلقه بسته در نیم صفحه راست قطب ندارد و سیستم پایدار است.] مسیر نایکویست نباید از هیچ صفر یا قطبی از  $1 + G(s)H(s)$  بگذرد. اگر  $G(s)H(s)$  در مبدأ صفحه  $s$  صفر یا قطب داشته باشد، نگاشت نقطه  $s = 0$  نامعین می شود. در چنین مواردی باید مسیر را به نحوی اصلاح کرد که از کنار مبدأ بگذرد. (بعداً راجع به این اصلاح به تفصیل صحبت می کنیم).

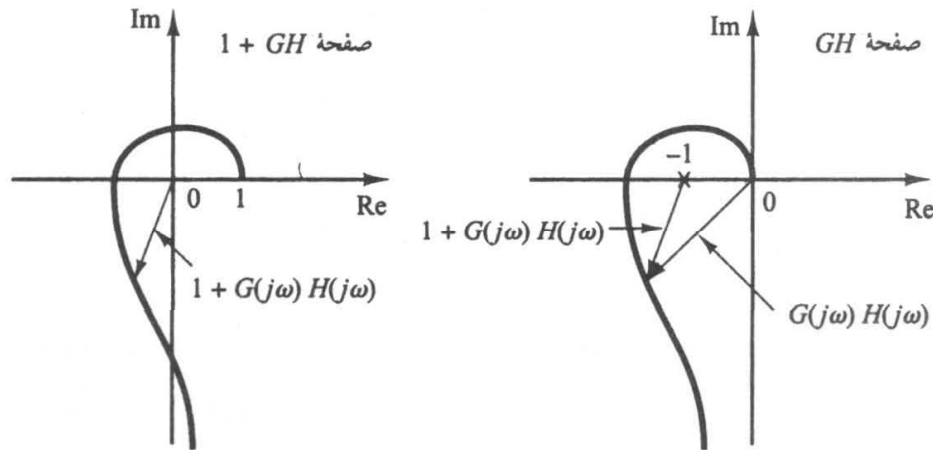
با اعمال قضیه نگاشت به حالت خاصی که  $F(s)$  برابر  $1 + G(s)H(s)$  است می توان گزاره زیر را بیان کرد: اگر مسیر بسته، به صورت شکل ۷-۴۷ تمام نیم صفحه راست را دربر داشته باشد، تعداد صفرهای تابع تبدیل  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$  برابر است با مجموع تعداد قطبهای واقع در نیمه راست صفحه  $s$  تابع  $1 + G(s)H(s)$  و تعداد باری که منحنی متناظر در صفحه  $F(s)$  مبدأ این صفحه را در جهت ساعتگرد دور می زند.

چون فرض کرده ایم که

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [1 + G(s)H(s)] = \text{ثابت}$$

تابع  $1 + G(s)H(s)$  در هنگامی که نیمدایره به شعاع بینهایت را می بینیم، ثابت می ماند. بنابراین تعداد دورهای زده شده حول مبدأ توسط مکان هندسی  $1 + G(s)H(s)$  را تنها می توان با در نظر گرفتن بخشی از مسیر بسته صفحه  $s$ ، یعنی محور  $j\omega$  تعیین کرد. تنها هنگامی مسیر متناظر در صفحه  $1 + G(s)H(s)$  می تواند مبدأ این صفحه را دور بزند که  $s$  در امتداد محور  $j\omega$  تا  $\infty + j\omega$  تغییر می کند، به شرطی که روی محور  $j\omega$  هیچ قطب یا صفری وجود نداشته باشد.

بخش متناظر با محور  $j\omega$  تابع  $1 + G(s)H(s)$  چیزی جز  $1 + G(j\omega)H(j\omega)$  نیست. چون  $1 + G(j\omega)H(j\omega)$  جمع برداری بردار ۱ و بردار  $G(j\omega)H(j\omega)$  است، مطابق شکل ۷-۴۸ با برداری که از نقطه  $1 + j0$  به انتهای بردار  $G(j\omega)H(j\omega)$  رسم می شود برابر است. تعداد باری که  $1 + G(j\omega)H(j\omega)$  مبدأ را دور می زند با تعداد باری که  $G(j\omega)H(j\omega)$  نقطه  $1 + j0$  را دور می زند، برابر است. پس پایداری یک سیستم حلقه بسته را می توان با یافتن تعداد باری که مکان هندسی تابع تبدیل حلقه  $G(j\omega)H(j\omega)$  نقطه  $1 + j0$  را دور می زند تعیین کرد. برای این که ببینیم منحنی  $G(j\omega)H(j\omega)$  چند بار نقطه  $1 + j0$  را دور می زند، می توانیم برداری از نقطه  $1 + j0$  به مکان هندسی  $G(j\omega)H(j\omega)$  رسم کنیم،



شکل ۷-۴۸

منحنی‌های  $1 + G(j\omega)H(j\omega)$  در صفحه  $1 + GH$  و صفحه  $GH$ .

با تغییر  $\omega$  از  $-\infty$ ، رسیدن آن به  $0$  و رفتن آن به  $+\infty$  نوک این بردار تغییر می‌کند، تعداد چرخشهای ساعتگرد این بردار تعداد دورهای خواسته شده را به دست می‌دهد.

رسم  $G(j\omega)H(j\omega)$  برای مسیر نایکویست کار سراسری است. نگاشت بخش منفی محور  $j\omega$  تصویر آینه‌ای نگاشت بخش مثبت محور  $j\omega$ ، نسبت به محور حقیقی است. یعنی  $G(j\omega)H(j\omega)$  و نمودار  $G(-j\omega)H(-j\omega)$  نسبت به محور حقیقی متقارن‌اند. نیم‌دایره به شعاع بینهایت یا به مبدأ صفحه  $GH$  یا به نقطه‌ای واقع بر محور حقیقی این صفحه نگاشته می‌شود.

در بحث بالا  $G(s)H(s)$  را نسبت دو چندجمله‌ای برحسب  $s$  فرض کردیم. بنابراین تأخیر انتقالی  $e^{-Ts}$  در بحث ما راه نداشت. البته متذکر می‌شویم که در مورد سیستمهای دارای تأخیر انتقالی نیز همین مطالب صادق است، ولی به اثبات آن نمی‌پردازیم. پایداری سیستم دارای تأخیر انتقالی را می‌توان با توجه به پاسخ فرکانسی حلقه باز و بررسی تعداد دورهای پیموده شده حول نقطه  $0 + j-1$ ، درست همانند سیستمی که تابع تبدیل حلقه بازش نسبت دو چندجمله‌ای برحسب  $s$  است، تعیین کرد.

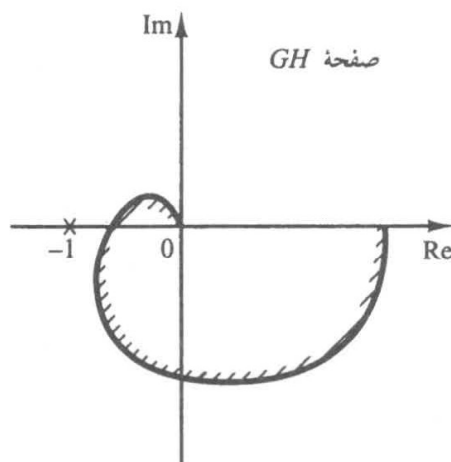
**معیار پایداری نایکویست.** تحلیل بالا، مبتنی بر تعداد دورهایی که مکان هندسی  $G(j\omega)H(j\omega)$  حول نقطه  $0 + j-1$  می‌زند، در معیار پایداری نایکویست خلاصه می‌شود.

معیار پایداری نایکویست [برای حالت خاصی که  $G(s)H(s)$  روی محور  $j\omega$  نه صفر دارد و نه قطب]: در سیستم شکل ۷-۴۴ اگر تابع تبدیل حلقه باز  $G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$ ،  $k$  قطب داشته باشد و ثابت  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = 1$ ، برای پایداری باید مکان هندسی  $G(j\omega)H(j\omega)$  با تغییر  $\omega$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$ ، نقطه  $0 + j-1$  را  $k$  بار در جهت پاد ساعتگرد دور بزند.

**ملاحظات در مورد معیار پایداری نایکویست**

۱. این معیار را می‌توان به شکل زیر بیان کرد

$$Z = N + P$$



شکل ۷-۴۹

ناحیه محصور در نمودار نایکویست.

که در آن  $Z$  = تعداد صفرهای  $1 + G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$

$N$  = تعداد دور حول نقطه  $-1 + j0$  در جهت ساعتگرد

$P$  = تعداد قطبهای  $G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$

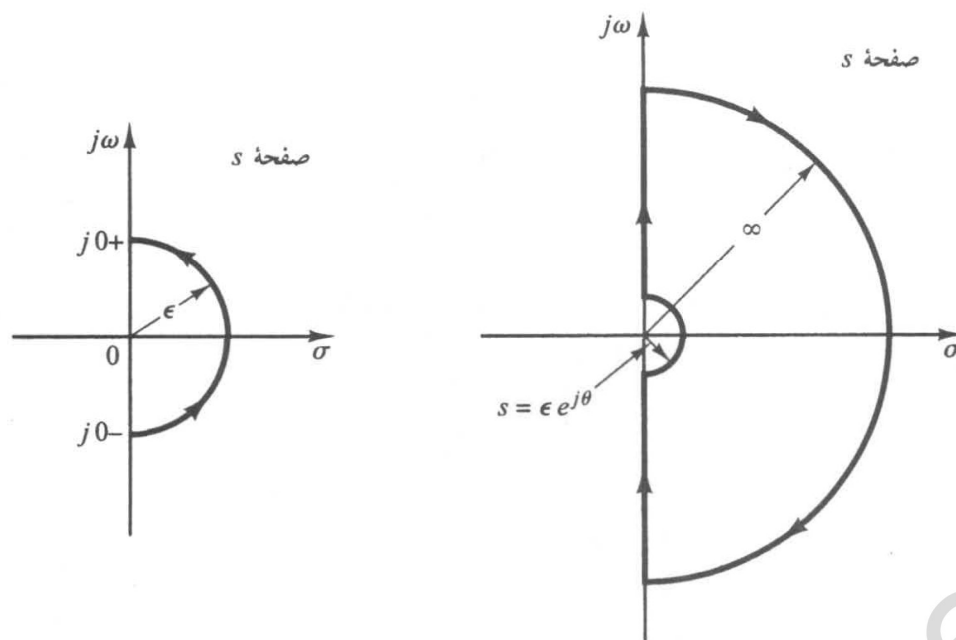
اگر  $P$  صفر نباشد، برای داشتن سیستمی پایدار باید داشته باشیم  $Z = 0$  یا  $N = -P$ ؛ یعنی نقطه  $-1 + j0$  باید  $P$  بار در جهت پاد ساعتگرد دور زده شود.

اگر  $G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$  قطب نداشته باشد،  $Z = N$ ؛ یعنی برای پایداری مکان هندسی  $G(j\omega)H(j\omega)$  نباید نقطه  $-1 + j0$  را دور بزند. در این حالت لازم نیست مکان هندسی به ازای تمام محور  $j\omega$  در نظر گرفته شود، بلکه تنها بخش فرکانسهای مثبت کافی است. پایداری چنین سیستمی از اینجا تعیین می شود که آیا  $-1 + j0$  داخل نمودار نایکویست  $G(j\omega)H(j\omega)$  قرار می گیرد یا نه. شکل ۷-۴۹ ناحیه ای را که نمودار نایکویست دربر می گیرد نشان می دهد. برای پایداری نقطه  $-1 + j0$  باید خارج ناحیه هاشورزده قرار بگیرد.

۲. هنگام بررسی پایداری سیستمهای چندحلقه ای باید دقت کنیم، زیرا این سیستمها ممکن است در نیمه راست صفحه  $s$  قطب داشته باشند. (توجه کنید که ممکن است حلقه های داخلی ناپایدار باشند، ولی کل سیستم حلقه بسته با طراحی مناسب پایدار شده باشد.) بررسی ساده دورهای حول  $-1 + j0$  توسط نمودارهای  $G(j\omega)H(j\omega)$  برای تشخیص پایداری یا ناپایداری سیستمهای چندحلقه ای کافی نیست. البته برای این موارد می توان با اعمال معیار پایداری روث به مخرج  $G(s)H(s)$  تعیین کرد که  $1 + G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$  قطب دارد یا نه.

اگر  $G(s)H(s)$  شامل توابع عالی، مانند تأخیر انتقالی  $e^{-Ts}$  باشد، می توان قبل از اعمال معیار پایداری روث این توابع را با یک بسط سری تقریب زد.

۳. اگر مکان هندسی  $G(j\omega)H(j\omega)$  از نقطه  $-1 + j0$  بگذرد، صفرهای معادله مشخصه، یا قطبهای حلقه بسته، روی محور  $j\omega$  قرار دارند. چنین وضعیتی برای سیستمهای کنترل عملی مطلوب نیست. در یک سیستم حلقه بسته دارای طراحی خوب، هیچکدام از ریشه های معادله مشخصه نباید روی محور  $j\omega$  باشد.



شکل ۵-۷

مسیرهای بسته در صفحه  $s$  برای پرهیز از صفرها و قطبهای واقع در مبدأ.

**حالت خاصی که  $G(s)H(s)$  روی محور  $j\omega$  صفر و / یا قطب دارد.** در بحث بالا فرض کردیم تابع تبدیل حلقه باز  $G(s)H(s)$  در مبدأ نه صفر دارد و نه قطب. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که  $G(s)H(s)$  روی محور  $j\omega$  صفر و - یا قطب دارد.

چون مسیر نایکویست نباید از قطبها و صفرهای  $G(s)H(s)$  بگذرد، در صورتی که  $G(s)H(s)$  در مبدأ (یا نقطه‌ای غیر از مبدأ ولی روی محور  $j\omega$ ) صفر و / یا قطب داشته باشد، مسیر صفحه  $s$  باید اصلاح شود. روش معمول اصلاح مسیر در نزدیک مبدأ این است که نیمدایره‌ای به شعاع بینهایت کوچک  $\epsilon$  به صورت نشان داده شده در شکل ۵-۷ به کار برده شود. [توجه کنید که این نیمدایره می‌تواند در نیمه چپ یا نیمه راست صفحه  $s$  قرار داشته باشد؛ در اینجا ما نیمدایره را در نیمه راست صفحه  $s$  فرض می‌کنیم]. نقطه  $s$  روی محور  $j\omega$  از  $j\omega^-$  تا  $j\omega^+$  حرکت می‌کند، در فاصله  $s = j\omega^-$  تا  $s = j\omega^+$  نقطه روی نیمدایره به شعاع کوچک  $\epsilon$  حرکت می‌کند، سرانجام این نقطه بخش مثبت محور  $j\omega$ ، از  $j\omega^+$  تا  $j\omega^-$  را می‌پیماید. مسیر در  $s = j\omega^-$  نیمدایره به شعاع بینهایت را پیموده به نقطه شروع می‌رسد. مسیر بسته اصلاح شده سطح بسیار کوچکی از نیمصفحه راست را دربر ندارد، و این سطح حذف شده با میل  $\epsilon$  به صفر، به صفر می‌رسد. بنابراین اگر قطب یا صفری در نیمه راست صفحه  $s$  وجود داشته باشد، داخل مسیر قرار می‌گیرد.

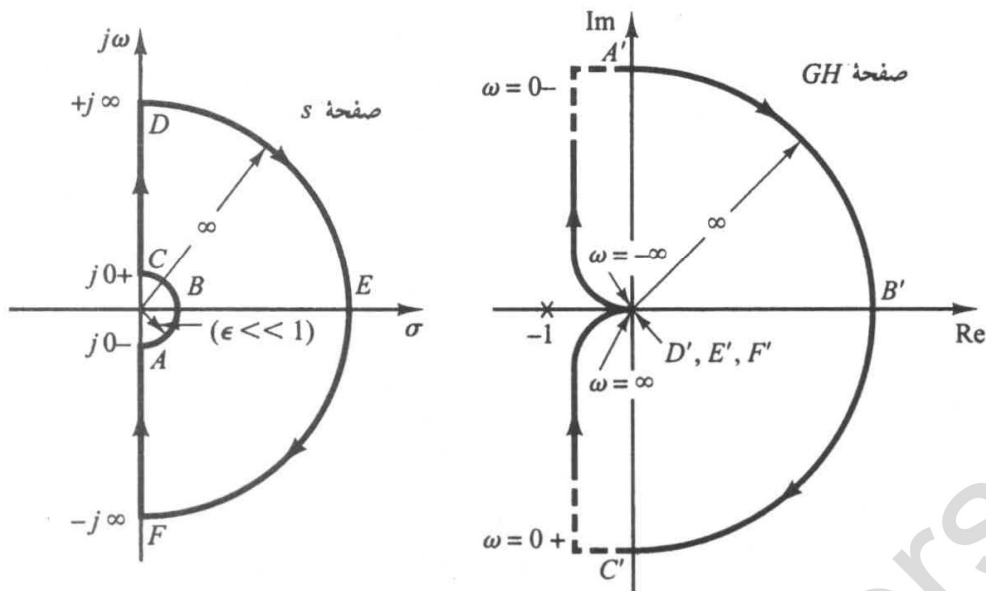
برای مثال سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

نقاط متناظر با  $s = j\omega^+$  و  $s = j\omega^-$  در مکان هندسی  $G(s)H(s)$  به ترتیب  $j\omega^-$  و  $j\omega^+$  است. روی مسیر نیمدایره دارای شعاع  $\epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ ) متغیر مختلط  $s$  را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$s = \epsilon e^{j\theta}$$

که در آن  $\theta$  بین  $-90^\circ$  و  $+90^\circ$  تغییر می‌کند. پس  $G(s)H(s)$  عبارت است از



شکل ۷-۵۱

مسیر صفحه  $s$  و مکان هندسی در صفحه  $GH$ ، به ازای  $G(s)H(s) = K / [s(Ts+1)]$ .

$$G(\epsilon e^{j\theta}) H(\epsilon e^{j\theta}) = \frac{K}{\epsilon e^{j\theta}} = \frac{K}{\epsilon} e^{-j\theta}$$

با میل  $\epsilon$  به صفر،  $K/\epsilon$  به بینهایت میل می‌کند و با حرکت  $s$  روی نیمدایره  $-\theta$  از  $90^\circ$  و  $-90^\circ$  تغییر می‌کند. پس نقاط  $G(j0^-)H(j0^-) = j\infty$  و  $G(j0^+)H(j0^+) = -j\infty$  توسط نیمدایره‌ای به شعاع  $\infty$ ، واقع در نیمه راست صفحه  $s$  به هم وصل می‌شوند. مسیر نیمدایره بینهایت کوچک صفحه  $s$  به نیمدایره‌ای به شعاع بینهایت در صفحه  $GH$  نگاشته می‌شود. شکل ۷-۵۱ مسیر صفحه  $s$  و مکان هندسی  $G(s)H(s)$  در صفحه  $GH$  را نشان می‌دهد. نقاط  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  واقع بر مسیر صفحه  $s$  به ترتیب به نقاط  $A'$ ،  $B'$ ، و  $C'$  صفحه  $s$  نگاشته می‌شوند. همانطور که شکل ۷-۵۱ نشان می‌دهد نقاط  $D$ ،  $E$ ، و  $F$  نیمدایره با شعاع بینهایت صفحه  $s$  به مبدأ مختصات  $GH$  نگاشته می‌شوند. چون در نیمه راست صفحه  $s$  قطبی وجود ندارد و مکان هندسی  $G(s)H(s)$  نقطه  $j0-1$  را دور نمی‌زند، تابع  $1+G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$  صفر ندارد. بنابراین سیستم پایدار است.

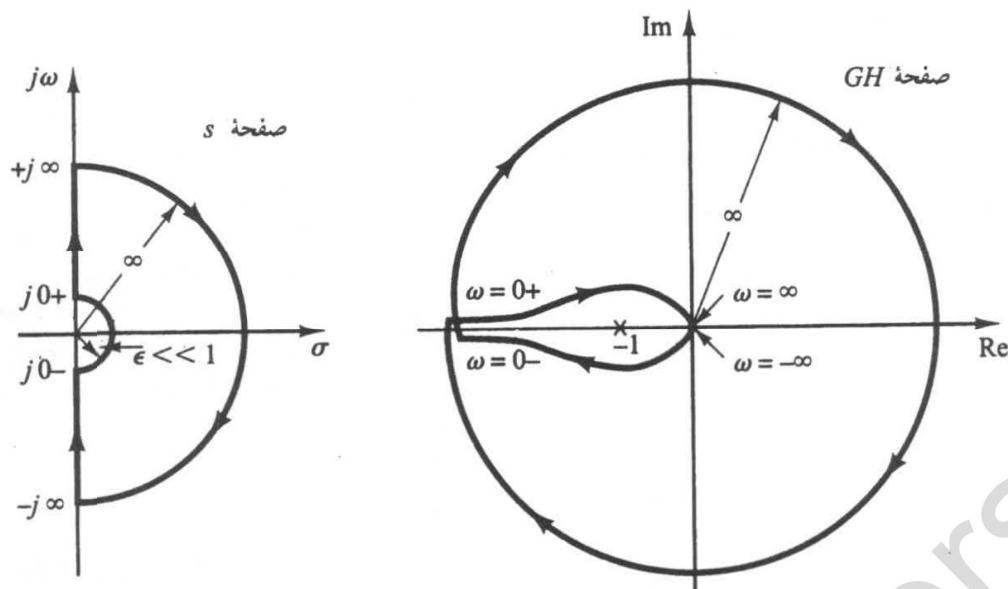
برای توابع تبدیل حلقه باز  $G(s)H(s)$  دارای عوامل  $1/s^n$  ( $n=2,3,\dots$ ) با حرکت نقطه  $s$  روی نیمدایره به شعاع  $\epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ )، منحنی  $G(s)H(s)$  در جهت ساعتگرد، روی دایره‌ای به شعاع بینهایت  $n$  نیمدایره را در جهت ساعتگرد طی می‌کند. مثلاً تابع تبدیل حلقه باز زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2 + (Ts+1)}$$

پس

$$\lim_{s \rightarrow \epsilon e^{j\theta}} G(s)H(s) = \frac{K}{\epsilon^2 e^{2j\theta}} = \frac{K}{\epsilon^2} e^{-2j\theta}$$

با تغییر  $\theta$  از  $-90^\circ$  تا  $90^\circ$  در صفحه  $s$  زاویه  $G(s)H(s)$  مطابق شکل ۷-۵۲ از  $180^\circ$  تا  $-180^\circ$  تغییر می‌کند.



شکل ۵۲-۷

مسیر صفحه  $s$  و مکان هندسی  $G(s)H(s)$  در صفحه  $GH$  به ازای  $G(s)H(s) = K/[s^2(Ts+1)]$ .

چون در نیمه راست صفحه  $s$  قطبی وجود ندارد و مکان هندسی نقطه  $j\omega + 1$  را به ازای هر مقدار مثبت  $K$  دو بار در جهت ساعتگرد دور می‌زند،  $1 + G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$  دو صفر دارد. پس این سیستم هم ناپایدار است.

در صورتی که  $G(s)H(s)$  روی محور  $j\omega$  قطب و / یا صفر داشته باشد، نیز تحلیل مشابهی می‌توان انجام داد. اکنون معیار پایداری نایکویست را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

معیار پایداری نایکویست [برای حالت عمومی که  $G(s)H(s)$  روی محور  $j\omega$  قطب و / یا صفر دارد]: در سیستم شکل ۷-۴۴ اگر تابع تبدیل حلقه باز  $G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$ ،  $k$  قطب داشته باشد، برای پایدار بودن سیستم باید مکان هندسی  $G(s)H(s)$ ، هنگامی که نقطه  $s$  روی مسیر اصلاح شده نایکویست در جهت ساعتگرد حرکت می‌کند، نقطه  $j\omega + 1$  را در جهت پاد ساعتگرد  $k$  بار دور بزند.

## ۶-۷ تحلیل پایداری

در این بخش چند مثال روشنگر از تحلیل پایداری سیستمهای کنترل با استفاده از معیار پایداری نایکویست ارائه می‌دهیم.

اگر مسیر نایکویست در صفحه  $s$ ،  $Z$  صفر و  $P$  قطب تابع  $1 + G(s)H(s)$  را در جهت ساعتگرد دور بزند و از هیچ یک از صفرها و قطبهای تابع  $1 + G(s)H(s)$  نگذرد، مسیر متناظر در صفحه  $G(s)H(s)$  نقطه  $j\omega + 1$  را  $N = Z - P$  بار در جهت ساعتگرد دور می‌زند. ( $N$  منفی به معنی دور زدن در جهت پاد ساعتگرد است).

- در بررسی پایداری سیستمهای کنترل خطی با استفاده از معیار پایداری نایکویست سه امکان پیش رو داریم
۱. نقطه  $-1+j0$  دور زده نمی‌شود. این به آن معنی است که اگر  $G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$  قطب نداشته باشد سیستم پایدار است؛ در غیر این صورت سیستم ناپایدار است.
  ۲. نقطه  $-1+j0$  در جهت پاد ساعتگرد یک یا چند بار دور زده می‌شود. در این صورت اگر تعداد دورها با تعداد قطبهای  $G(s)H(s)$  واقع در نیمه راست صفحه  $s$  برابر باشد، سیستم پایدار است وگرنه سیستم پایدار نیست.
  ۳. نقطه  $-1+j0$  در جهت پاد ساعتگرد دور زده می‌شود. در این صورت سیستم ناپایدار است. در مثالهای زیر فرض می‌کنیم مقادیر بهره  $K$  و ثابت زمانی‌ها (مثل  $T_1, T_2, T$  و غیره) همگی مثبت‌اند.

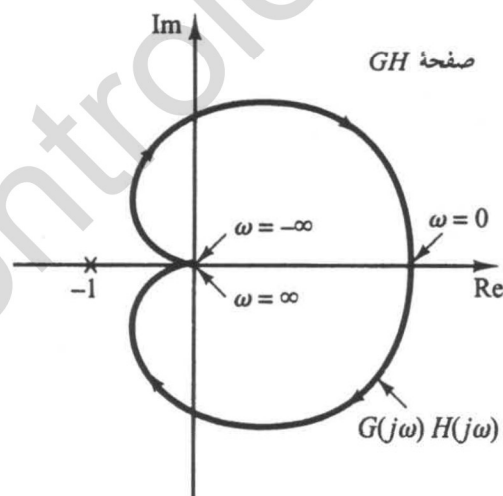
سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

مثال ۷-۱۴

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

پایداری سیستم را بررسی کنید.

شکل ۷-۵۳ نمودار  $G(j\omega)H(j\omega)$  را نشان می‌دهد. چون  $G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$  قطب ندارد و مکان هندسی  $G(j\omega)H(j\omega)$  نقطه  $-1+j0$  را دور نمی‌زند، این سیستم به ازای تمام مقادیر  $K, T_1$  و  $T_2$  پایدار است.



شکل ۷-۵۳

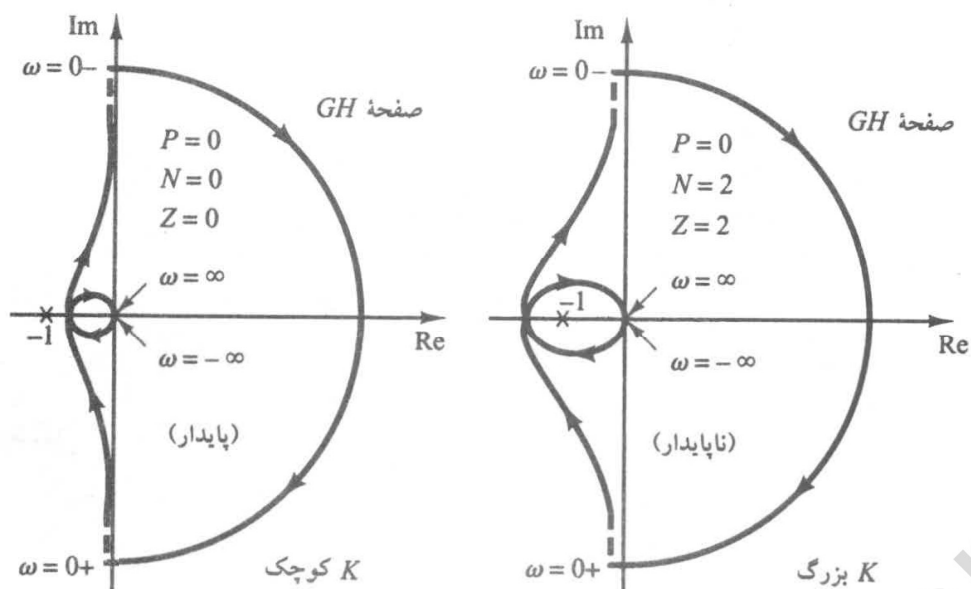
نمودار قطبی  $G(j\omega)H(j\omega)$  مثال ۷-۱۴.

سیستمی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

مثال ۷-۱۵

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

پایداری سیستم را به ازای (۱)  $K$  های کوچک و (۲)  $K$  های بزرگ بررسی کنید.



شکل ۵۴-۷

نمودار قطبی سیستم

مثال ۱۵-۷

شکل ۵۴-۷ نمودار نایکویست تابع تبدیل حلقه باز را به ازای مقادیر کوچک  $K$  و مقادیر بزرگ  $K$  نشان می‌دهد. تعداد قطبهای  $G(s)H(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$  صفر است. پس برای پایدار بودن سیستم باید داشته باشیم  $N=Z=0$ ، یا  $G(s)H(s)$  نقطه  $0+1j$  را دور نزنند.

به ازای مقادیر کوچک  $K$  نقطه  $0+1j$  دور زده نمی‌شود. پس سیستم به ازای مقادیر کوچک  $K$  پایدار است. به ازای مقادیر بزرگ  $K$  مکان هندسی  $G(s)H(s)$  نقطه  $0+1j$  را دوبار در جهت ساعتگرد دور می‌زند، که نشان می‌دهد سیستم دو قطب حلقه بسته در نیمه راست صفحه  $s$  دارد و ناپایدار است. (این سیستم برای داشتن دقت خوب باید  $K$  بزرگی داشته باشد، ولی از دیدگاه پایداری  $K$  بزرگ باعث می‌شود سیستم پایداری ضعیفی داشته باشد و حتی ناپایدار شود. برای ایجاد مصالحه بین دقت و پایداری لازم است یک شبکه جبران‌ساز به سیستم افزوده شود. روشهای جبران‌سازی در حوزه فرکانس در بخشهای ۷-۱۱ تا ۷-۱۳ مورد بحث قرار می‌گیرد.)

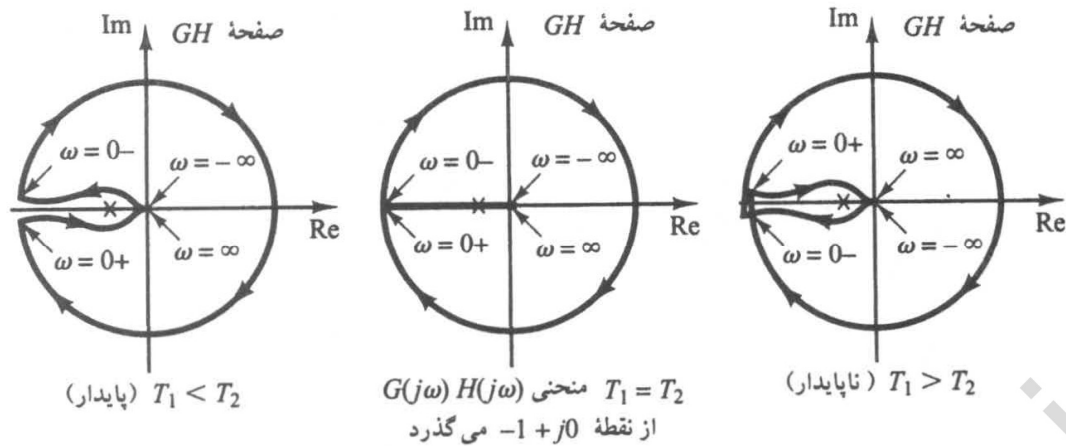
پایداری سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر به مقادیر نسبی  $T_1$  و  $T_2$  بستگی دارد

مثال ۱۶-۷

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2 s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$

نمودار نایکویست را براساس مقادیر نسبی  $T_1$  و  $T_2$  رسم کرده، پایداری سیستم را بررسی کنید.

شکل ۵۵-۷ نمودار نایکویست  $G(s)H(s)$  را در سه حالت  $T_1 < T_2$ ،  $T_1 = T_2$ ، و  $T_1 > T_2$  نشان می‌دهد. به ازای  $T_1 < T_2$  مکان هندسی  $G(s)H(s)$  نقطه  $0+1j$  را دور نمی‌زند و سیستم حلقه بسته پایدار است. به ازای  $T_1 = T_2$  مکان هندسی  $G(s)H(s)$  از نقطه  $0+1j$  می‌گذرد که نشان می‌دهد قطبهای حلقه باز



شکل ۵۵-۷

نمودارهای قطبی سیستم مثال ۱۶-۷.

روی محور  $j\omega$  قرار دارند. به ازای  $T_1 > T_2$  مکان هندسی  $G(s)H(s)$  نقطه  $-1 + j0$  را در جهت ساعتگرد دوبار دور می‌زند. پس سیستم حلقه بسته دو قطب در نیم‌صفحه راست دارد و ناپایدار است.

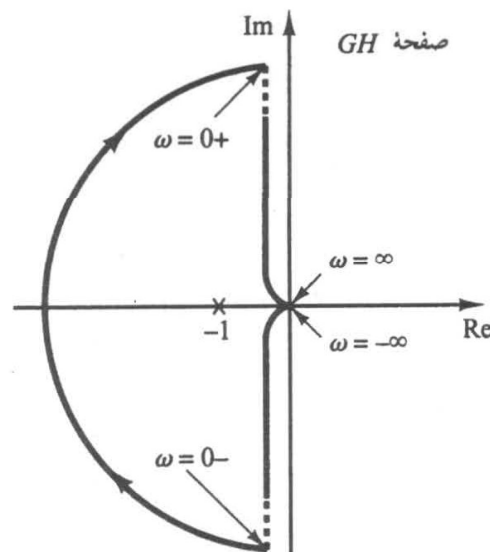
سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید:

مثال ۱۷-۷

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts-1)}$$

پایداری سیستم را بررسی کنید.

تابع  $G(s)H(s)$  در نیم‌صفحه راست یک قطب (در  $s=1/T$ ) دارد، پس  $P=1$ . شکل ۵۶-۷ نمودار نایکویست را نشان می‌دهد و مکان هندسی  $G(s)H(s)$  نقطه  $-1 + j0$  را در جهت ساعتگرد یک بار دور می‌زند، پس  $N=1$ . چون  $Z=N+P$ ،  $Z=2$ ، یعنی سیستم حلقه بسته در نیم‌صفحه راست  $s$  دو قطب دارد و ناپایدار است.



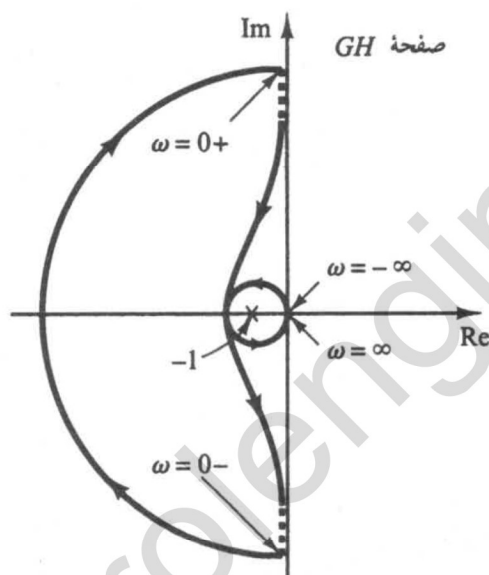
شکل ۵۶-۷

نمودار قطبی سیستم مثال ۱۷-۷.

پایداری سیستم حلقه بسته دارای تابع تبدیل حلقه باز زیر را بررسی کنید:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)} \quad (K > 1)$$

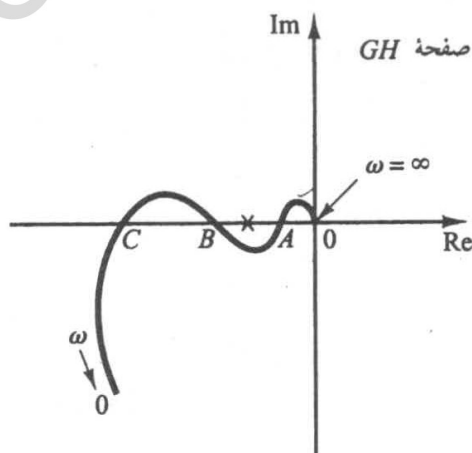
تابع تبدیل حلقه باز در نیم صفحه راست یک قطب ( $s=1$ ) دارد، پس  $P=1$  و سیستم حلقه باز ناپایدار است. نمودار نایکویست شکل ۵۷-۷ نشان می‌دهد که مکان هندسی  $G(s)H(s)$  نقطه  $0+ j-1$  را در جهت پاد ساعتگرد یکبار دور می‌زند،  $N=-1$ . پس طبق رابطه  $Z=N+P$  صفر است که نشان می‌دهد  $1+G(s)H(s)$  در طرف راست صفحه  $s$  صفر ندارد و سیستم حلقه بسته پایدار است. این نمونه‌ای از سیستم‌هایی است که به صورت حلقه باز ناپایدارند، ولی با بسته شدن حلقه پایدار می‌شوند.



شکل ۵۷-۷

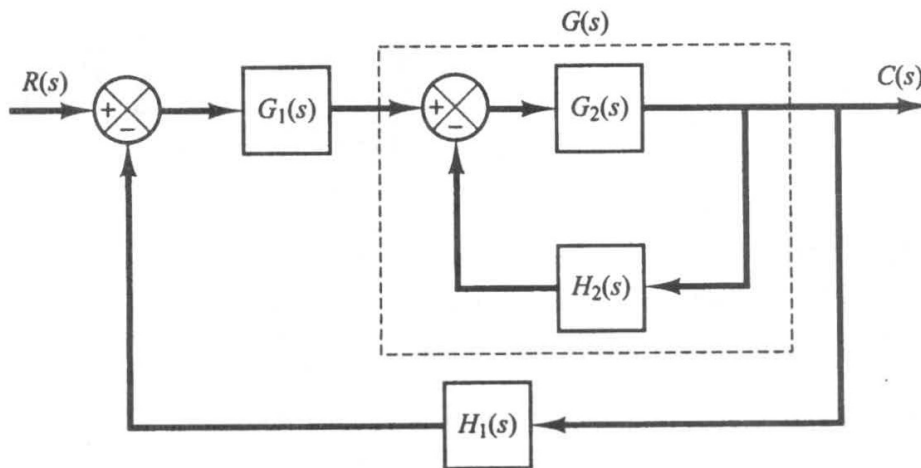
نمودار قطبی سیستم مثال ۱۸-۷.

سیستم‌های با پایداری مشروط. شکل ۵۸-۷ یک  $G(j\omega)H(j\omega)$  نمونه را نشان می‌دهد که به ازای آن سیستم حلقه بسته با تغییر بهره حلقه باز می‌تواند ناپایدار شود. اگر بهره حلقه باز به حد کافی بزرگ شود، مکان هندسی  $G(j\omega)H(j\omega)$  نقطه  $0+ j-1$  را دو بار دربر می‌گیرد و سیستم ناپایدار می‌شود. اگر بهره حلقه باز به حد کافی کوچک شود نیز مکان هندسی  $G(j\omega)H(j\omega)$  نقطه  $0+ j-1$  را دو بار دور می‌زند. برای پایداری



شکل ۵۸-۷

نمودار قطبی یک سیستم دارای پایداری مشروط.



شکل ۵۹-۷  
سیستم چندحلقه‌ای.

سیستم در نظر گرفته شده، نقطه بحرانی  $1+j0$  نباید در نواحی بین  $OA$  و  $BC$  شکل ۵۸-۷ باشد. سیستمی که تنها به ازای گستره محدودی از مقادیر بهره حلقه باز پایدار است و نقطه  $1+j0$  کاملاً خارج از مکان هندسی  $G(j\omega)H(j\omega)$  آن قرار می‌گیرد، سیستم دارای پایداری مشروط نامیده می‌شود.

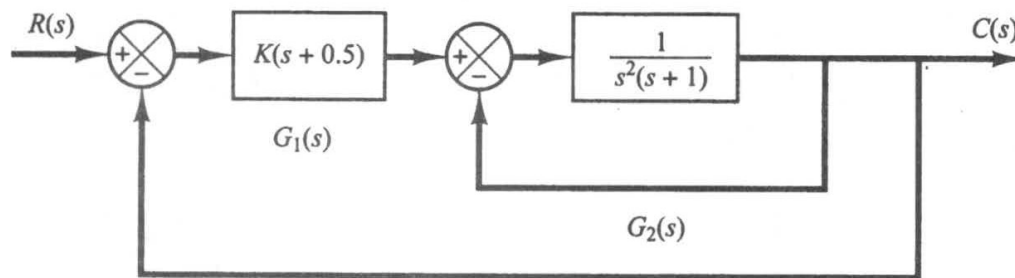
یک سیستم دارای پایداری مشروط به ازای بهره حلقه باز واقع بین مقادیر بحرانی بهره پایدار است، ولی اگر بهره حلقه باز به حد کافی بزرگ یا کوچک شود، ناپایدار می‌شود. چنین سیستمی به ازای ورودی بزرگ ممکن است ناپایدار شود، زیرا ورودی بزرگ می‌تواند باعث اشباع شود که به نوبه خود بهره حلقه باز را کم می‌کند. توصیه می‌کنیم از ایجاد چنین شرایطی اجتناب شود.

**سیستم چندحلقه‌ای.** سیستم شکل ۵۹-۷ را در نظر بگیرید. این سیستم چندحلقه‌ای است. تابع تبدیل حلقه داخلی عبارت است از:

$$G(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H_2(s)}$$

اگر  $G(s)$  ناپایدار باشد، اثر ناپایداری آن ایجاد قطب یا قطبهای در نیمه راست صفحه  $s$  است. پس معادله مشخصه حلقه داخلی  $1 + G_2(s)H_2(s)$  صفر یا صفرهایی در این ناحیه صفحه  $s$  دارد. اگر  $G_2(s)$  و  $H_2(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$  قطب داشته باشند، تعداد صفرهای  $1 + G_2(s)H_2(s)$  در نیمه صفحه راست را می‌توان از رابطه  $Z_1 = N_1 + P_1$  یافت، که در آن  $N_1$  تعداد دورهایی است که مکان هندسی  $G_2(s)H_2(s)$  در جهت ساعتگرد حول نقطه  $1+j0$  می‌زند. چون تابع تبدیل حلقه باز سیستم  $G_1(s)G(s)H_1(s)$  است، پایداری این سیستم را می‌توان با توجه به نمودار نایکویست  $G_1(s)G(s)H_1(s)$  و با دانستن قطبهای نیمه صفحه راست  $G_1(s)G(s)H_1(s)$  تعیین کرد.

دقت کنید که اگر با ساده کردن نمودار بلوکی یک حلقه فیدبک حذف شود، امکان دارد قطبهای ناپایدار حاصل شود. اگر در اثر ساده کردن نمودار بلوکی یک شاخه پیشخورد حذف شود، امکان دارد در نیمه صفحه راست صفرهایی ایجاد شود. پس باید تمام قطبها و صفرهای نیمه صفحه راست حاصل از ساده کردن نمودار بلوکی در نظر گرفته شود. داشتن این اطلاعات برای تعیین پایداری سیستمهای چندحلقه‌ای ضروری است.



شکل ۶۰-۷  
سیستم کنترل.

سیستم کنترل شکل ۶۰-۷ را در نظر بگیرید. این سیستم دو حلقه دارد. با استفاده از معیار پایداری نایکویست گسترده بهره  $K$  برای پایداری سیستم را تعیین کنید. (بهره  $K$  مثبت است).

مثال ۱۹-۷

برای بررسی پایداری سیستم کنترل باید نمودار نایکویست  $G(s)$  را رسم کنیم؛ عبارت است از:

$$G(s) = G_1(s) G_2(s)$$

ولی فعلاً قطبهای  $G(s)$  را نمی‌دانیم. پس باید بینیم حلقه داخلی قطب نیم‌صفحه راست دارد یا نه. این کار با استفاده از معیار پایداری روث به سادگی انجام می‌شود. چون

$$G_2(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 1}$$

آرایه روث به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 0 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & -1 & 0 \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

توجه کنید که در ستون اول دو تغییر علامت وجود دارد. پس  $G_2(s)$  در نیمه راست صفحه  $s$  دو قطب دارد. پس از تعیین تعداد قطبهای نیم‌صفحه راست  $G_2(s)$ ، به رسم نمودار نایکویست  $G(s)$  می‌پردازیم. داریم

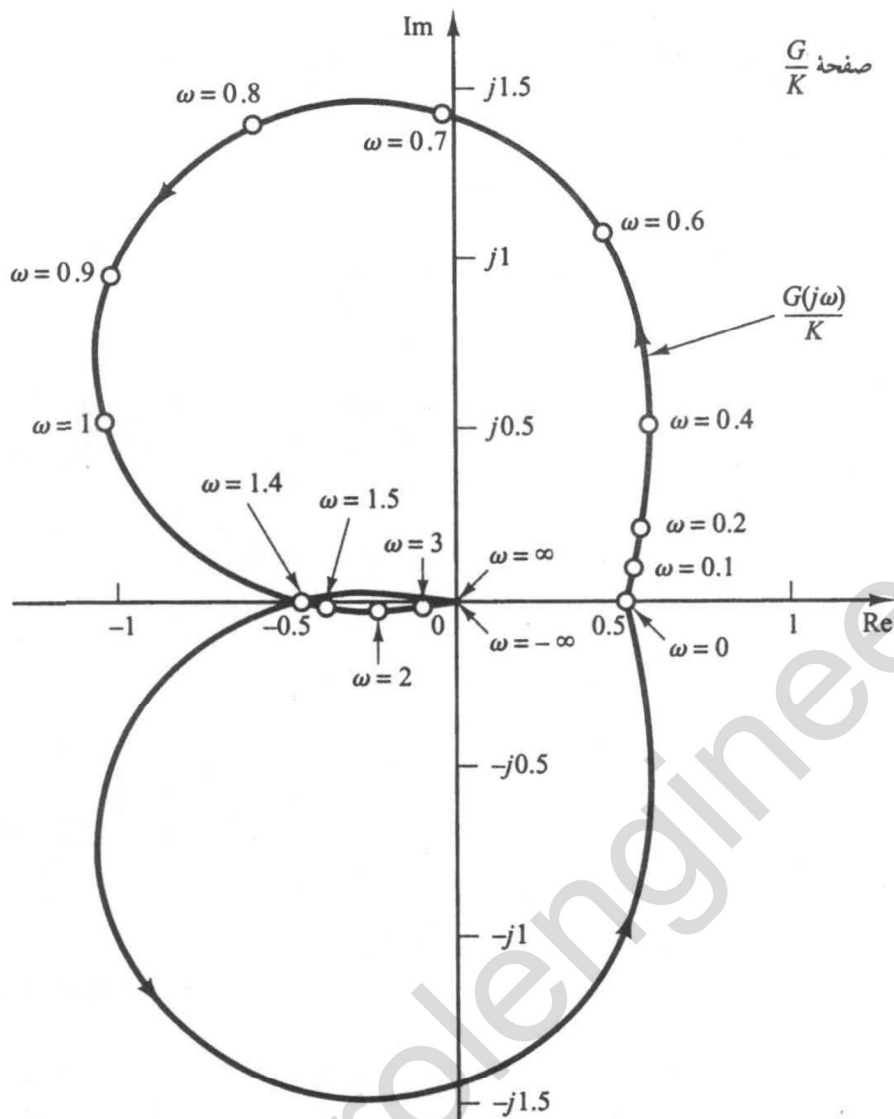
$$G(s) = G_1(s) G_2(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^3 + s^2 + 1}$$

هدف ما تعیین گستره  $K$  برای عملکرد پایدار سیستم است. پس به جای رسم نمودار نایکویست  $G(j\omega)$  به ازای مقادیر مختلف  $K$ ، نمودار نایکویست  $G(j\omega)/K$  را رسم می‌کنیم. شکل ۶۱-۷ نمودار نایکویست یا نمودار قطبی  $G(j\omega)/K$  را نشان می‌دهد.

چون  $G(s)$  در نیم‌صفحه راست دو قطب دارد،  $P=2$ ، با توجه به این که

$$Z = P + N$$

برای پایداری باید داشته باشیم  $Z=0$  یا  $N=-2$ ؛ یعنی نمودار نایکویست  $G(j\omega)$  باید نقطه  $1 + j0$  را در جهت پادساعتگرد دوبار دور بزند. شکل ۶۱-۷ نشان می‌دهد که اگر نقطه بحرانی بین  $0$  و  $-0.5$  قرار داشته



شکل ۷-۶۱  
نمودار قطبی  $G(j\omega)/K$

باشد،  $G(j\omega)/K$  نقطه بحرانی را در جهت پاد ساعتگرد دوبار دور می‌زند. پس باید داشته باشیم

$$-0.5K < -1$$

پس گستره پایداری برای بهره  $K$  عبارت است از

$$2 < K$$

**اعمال معیار پایداری نایکویست به نمودار قطبی وارون.** در تحلیل‌های بالا معیار پایداری نایکویست به نمودارهای قطبی تابع تبدیل حلقه باز  $G(s)H(s)$  اعمال شد.

در تحلیل سیستمهای چند حلقه‌ای گاهی می‌توان برای فراهم کردن شرایط تحلیل ترسیمی از تابع تبدیل وارون استفاده کرد. (معیار پایداری نایکویست را می‌توان به نمودارهای قطبی وارون نیز اعمال کرد. اثبات ریاضی معیار پایداری نایکویست برای نمودارهای قطبی وارون همانند اثبات برای نمودارهای قطبی غیر وارون است.)

نمودار قطبی وارون  $G(j\omega)H(j\omega)$  عبارت است از  $1/[G(j\omega)H(j\omega)]$  برحسب  $\omega$ . برای مثال اگر

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{j\omega T}{1+j\omega T}$$

آنگاه

$$\frac{1}{G(j\omega)H(j\omega)} = \frac{1}{j\omega T} + 1$$

نمودار قطبی وارون به ازای  $\omega \geq 0$  نیمه پایینی خط قائمی است که از نقطه  $(0, 1)$  محور حقیقی شروع می‌شود. معیار پایداری نایکویست برای اعمال به نمودار قطبی وارون را می‌توان به این صورت بیان کرد: برای پایدار بودن یک سیستم حلقه بسته، با حرکت  $s$  روی مسیر نایکویست، منحنی  $1/[G(s)H(s)]$  باید یا نقطه  $-1+j0$  را دور نزند، یا تعداد دورها در جهت پادساعتگرد با تعداد قطبهای  $1/[G(s)H(s)]$  [یعنی صفرهای  $G(s)H(s)$ ] در نیمه راست صفحه  $s$  برابر باشد. [تعداد صفرهای نیم صفحه راست  $G(s)H(s)$  را می‌توان با استفاده از معیار پایداری روث تعیین کرد.] اگر تابع تبدیل حلقه باز  $G(s)H(s)$  در نیم صفحه راست صفر نداشته باشد، برای پایدار بودن سیستم حلقه بسته باید منحنی  $1/[G(s)H(s)]$  نقطه  $-1+j0$  را دور نزند.

هر چند معیار پایداری نایکویست را می‌توان به نمودارهای قطبی وارون اعمال کرد، ولی اگر اطلاعات پاسخ فرکانسی به صورت تجربی در اختیار باشد، شمارش تعداد دورهای مکان هندسی  $1/[G(s)H(s)]$  می‌تواند به خاطر دشواری اندازه‌گیری تغییر فاز ناشی از مسیر نیمدایره بینهایت صفحه  $s$  مشکل باشد. برای مثال اگر تابع تبدیل حلقه باز  $G(s)H(s)$  به صورت زیر تاخیر انتقالی داشته باشد

$$G(s)H(s) = \frac{K e^{-j\omega L}}{s(Ts+1)}$$

منحنی  $1/[G(s)H(s)]$  نقطه  $-1+j0$  را بینهایت بار دور می‌زند و نمی‌توان معیار پایداری نایکویست را به نمودار قطبی وارون چنین تابع تبدیل حلقه بازی اعمال کرد.

در حالت کلی اگر اطلاعات پاسخ فرکانسی به دست آمده به روش تجربی را نتوان به صورت تحلیلی درآورد، هم نمودار  $G(j\omega)H(j\omega)$  و هم نمودار  $1/[G(j\omega)H(j\omega)]$  را باید رسم کرد. به علاوه تعداد صفرهای نیم صفحه راست  $G(s)H(s)$  نیز باید مشخص شود. تعیین صفرهای نیم صفحه راست  $G(s)H(s)$  (یا به عبارت دیگر تعیین می‌نیم فاز بودن اجزاء داده شده) از تعیین قطبهای نیم صفحه راست  $G(s)H(s)$  (یا به عبارت دیگر تعیین پایدار بودن اجزاء داده شده) سخت تر است.

آزمون مناسب پایداری برای سیستمهای چندحلقه‌ای را باید با توجه به این نکات برگزید که اطلاعات به صورت ترسیمی داده شده‌اند یا تحلیلی، و اجزاء غیرمی‌نیم فاز وجود دارند یا نه. اگر اطلاعات داده شده تحلیلی باشند، یا عبارتهای ریاضی تمام اجزاء مشخص باشند، اعمال معیار پایداری نایکویست به نمودارهای قطبی وارون هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کند، و سیستمهای چندحلقه‌ای را می‌توان در صفحه  $GH$  وارون تحلیل و طراحی کرد. (مسئله الف-۷-۱۵ را ببینید.)

## ۷-۷ پایداری نسبی

**پایداری نسبی.** در طراحی سیستم کنترل، پایدار بودن سیستم شرطی است که باید مراعات شود. به علاوه پایداری نسبی سیستم هم باید کافی باشد.

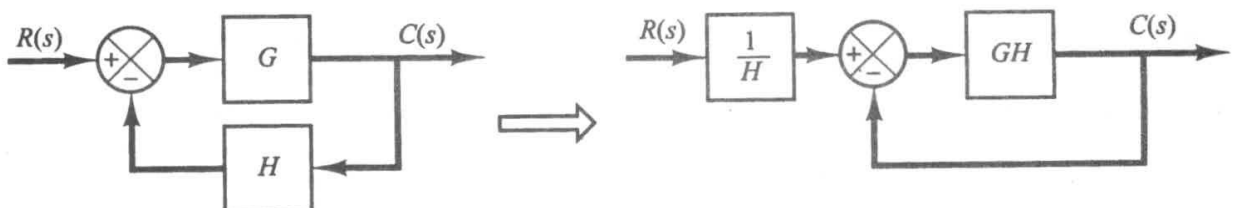
در این بخش نشان خواهیم داد که نمودار نایکویست علاوه بر تعیین پایدار بودن یا نبودن سیستم، میزان پایداری آن را نیز نشان می‌دهد. نمودار نایکویست همچنان نشان می‌دهد که چگونه می‌توان میزان پایداری را، در صورت لزوم، بهبود داد.

در مباحث زیر فرض می‌کنیم سیستمهای در نظر گرفته شده فیدبک واحد دارند. توجه کنید که همیشه می‌توان یک سیستم را به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۶۲، به سیستمی با فیدبک واحد تبدیل کرد. پس می‌توان تحلیل پایداری نسبی سیستمهای با فیدبک واحد را به سیستمهای با فیدبک غیر واحد تعمیم داد. همچنین فرض می‌کنیم سیستمها می‌نیم فاز هستند، مگر خلاف آن ذکر شود؛ یعنی سیستمها در نیم صفحه راست نه صفر دارند و نه قطب.

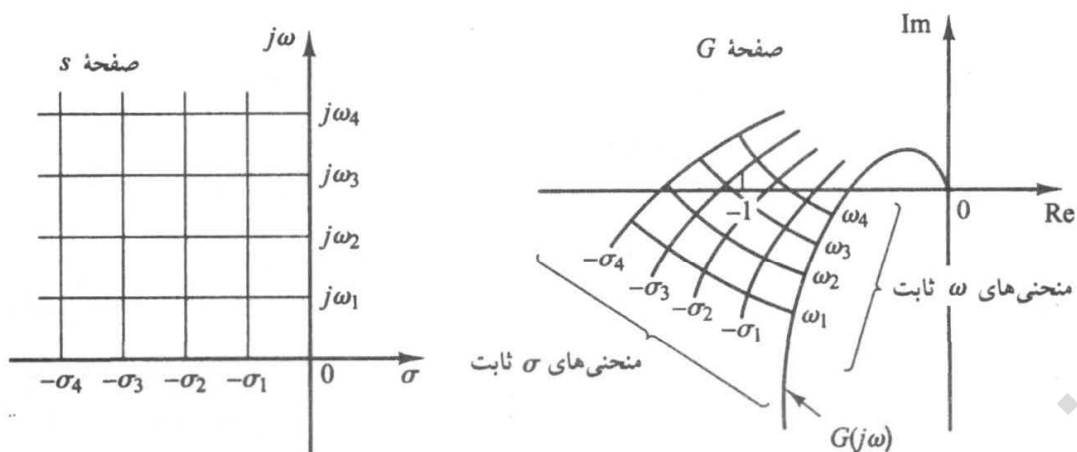
**تحلیل پایداری نسبی با نگاشت همدیس.** یکی از مسائل مهم در تحلیل سیستمهای کنترل یافتن تمام قطبهای حلقه بسته یا حداقل قطبهای نزدیک محور  $j\omega$  (یا قطبهای حلقه بسته غالب) است. اگر مشخصات فرکانسی حلقه باز یک سیستم معلوم باشد می‌توان نزدیکترین قطبهای حلقه بسته به محور  $j\omega$  را تخمین زد. گفتیم که لازم نیست مکان هندسی  $G(j\omega)$  به صورت تابعی تحلیلی از  $\omega$  معلوم باشد. تمام نمودار نایکویست را می‌توان به صورت تجربی به دست آورد. روشی که در اینجا بیان می‌کنیم اساساً یک روش ترسیمی مبتنی بر یک نگاشت از صفحه  $s$  به صفحه  $G(s)$  است.

نگاشت همدیس خطوط  $\sigma$  ثابت (خطوط  $s = \sigma + j\omega$  که در آن  $\omega$  ثابت و  $\sigma$  متغیر است) و خطوط  $\omega$  ثابت (خطوط  $s = \sigma + j\omega$  که در آن  $\sigma$  ثابت و  $\omega$  متغیر است) را در نظر بگیرید. خط  $\sigma = 0$  (محور  $j\omega$  صفحه  $s$  به نمودار نایکویست صفحه  $G(s)$  نگاشته می‌شود. خطوط  $\sigma$  ثابت صفحه  $s$  به خمهایی مشابه نمودار نایکویست نگاشته می‌شوند، که مطابق شکل ۷-۶۳ به نوعی با نمودار نایکویست موازی‌اند. در شکل ۷-۶۳ نشان داده شده است که خطوط  $\omega$  ثابت نیز به خمهایی نگاشته می‌شود.

شکل مکانهای هندسی  $\sigma$  ثابت و  $\omega$  ثابت در صفحه  $s$  و نزدیکی خمها در حوالی نقطه  $0 + j\omega$  به تابع  $G(s)$  بستگی دارد، و این نزدیکی نشانی از پایداری نسبی یک سیستم پایدار است. در حالت کلی هر چه



شکل ۷-۶۲ تبدیل سیستمی با عنصر فیدبک به یک سیستم با فیدبک واحد.

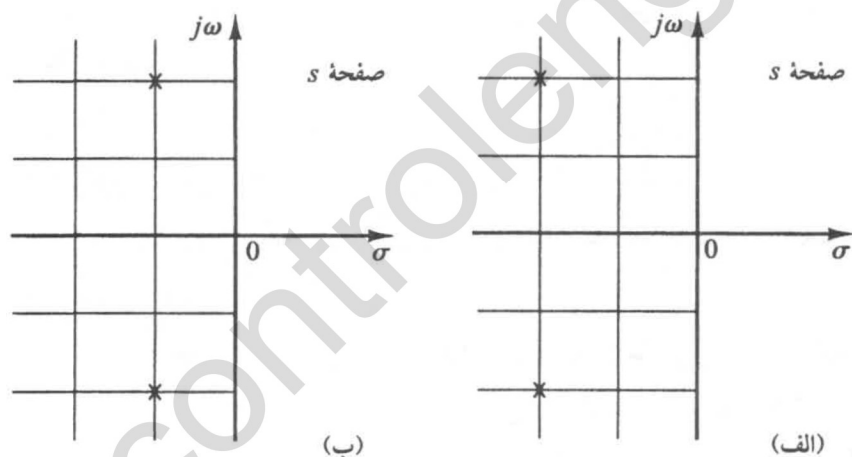


شکل ۶۳-۷

نگاشت همدیس شبکه‌ای از صفحه  $s$  به صفحه  $G(s)$ .

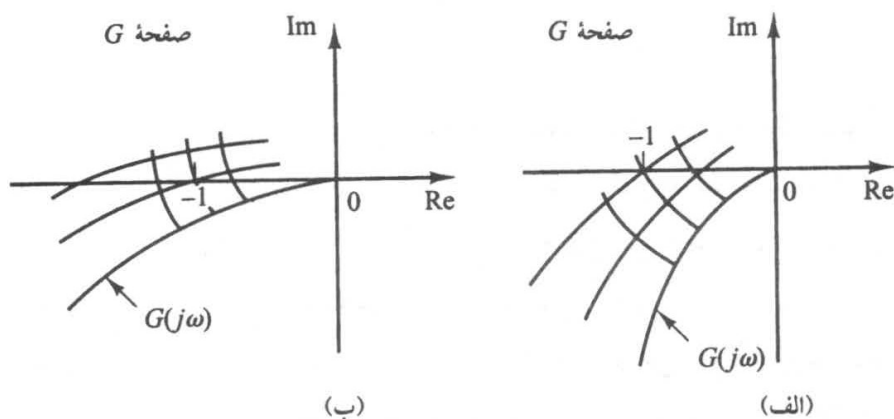
مکانهای هندسی  $G(j\omega)$  به نقطه  $1 + j0$  نزدیکتر باشد، پاسخ پله فراجهش ماکزیمم بزرگتری داشته، دیرتر میرا می‌شود.

دو سیستم شکل‌های ۶۴-۷ (الف) و (ب) را در نظر بگیرید. (در این شکل قطبهای حلقه بسته با علامت  $\times$  مشخص شده‌اند.) واضح است که سیستم (الف) پایدارتر از سیستم (ب) است، زیرا قطبهای حلقه بسته سیستم (الف)، نسبت به سیستم (ب) دورتر از محور  $j\omega$  قرار دارد. شکل‌های ۶۵-۷ (الف) و (ب) نگاشت همدیس



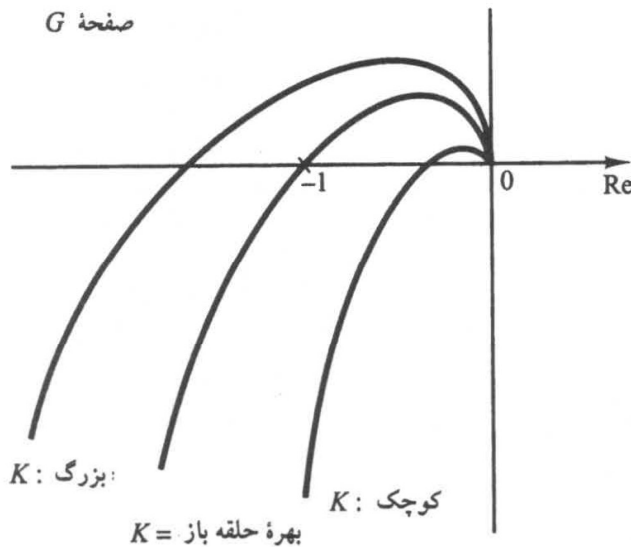
شکل ۶۴-۷

دو سیستم با دو قطب حلقه بسته.



شکل ۶۵-۷

نگاشت همدیس شبکه  
صفحه  $s$  سیستمهای  
شکل ۶۴-۷ به  
صفحه  $G(s)$ .



شکل ۷-۶۶

نمودارهای قطبی

$$\frac{K(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\dots}{(j\omega)(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\dots}$$

به ازای مقادیر مختلف  $K$ .

شبکه صفحه  $s$  به صفحه  $G(s)$  را نشان می‌دهد. هر چه قطبهای حلقه بسته به محور  $j\omega$  نزدیکتر باشند، مکان هندسی  $G(j\omega)$  به نقطه  $1+j0$  نزدیکتر است.

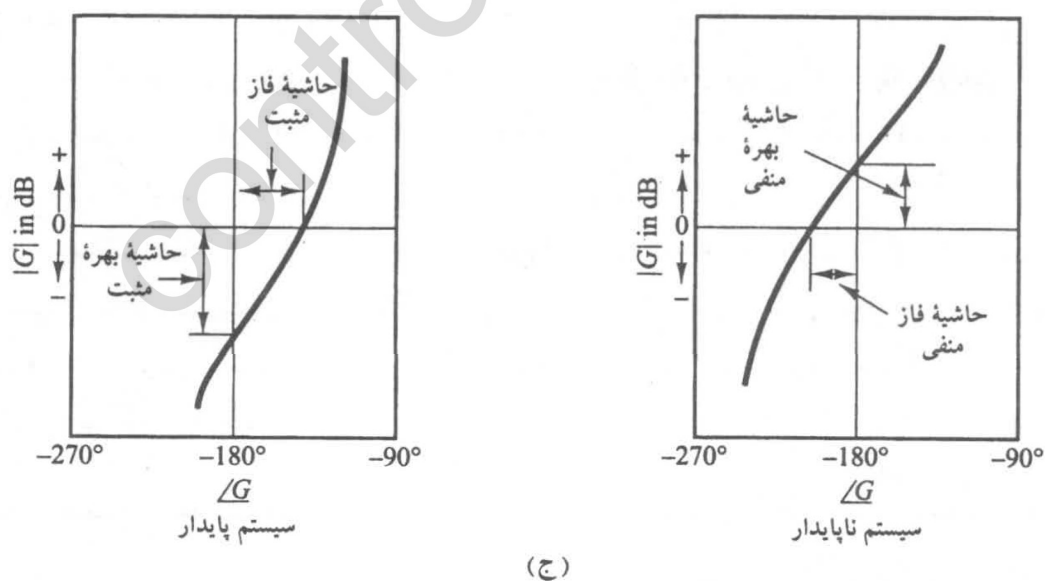
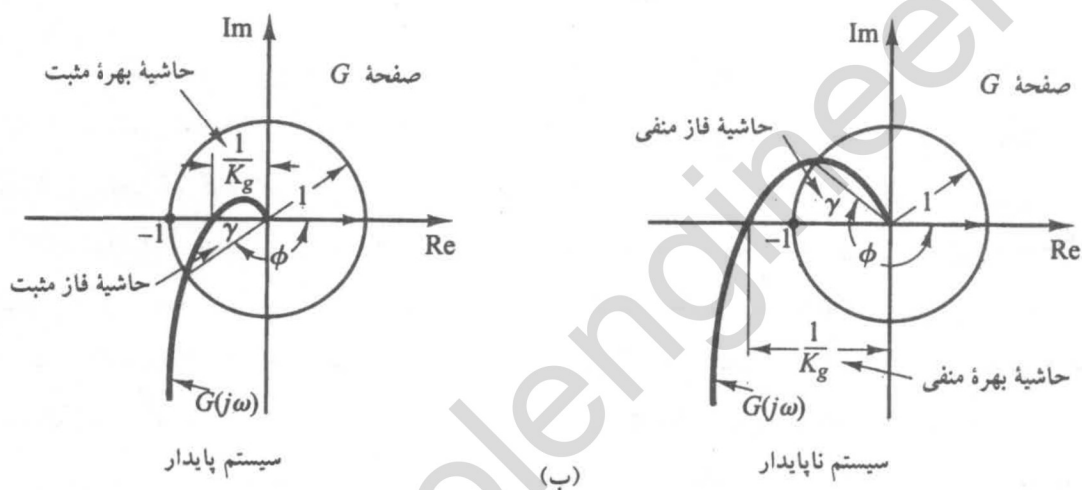
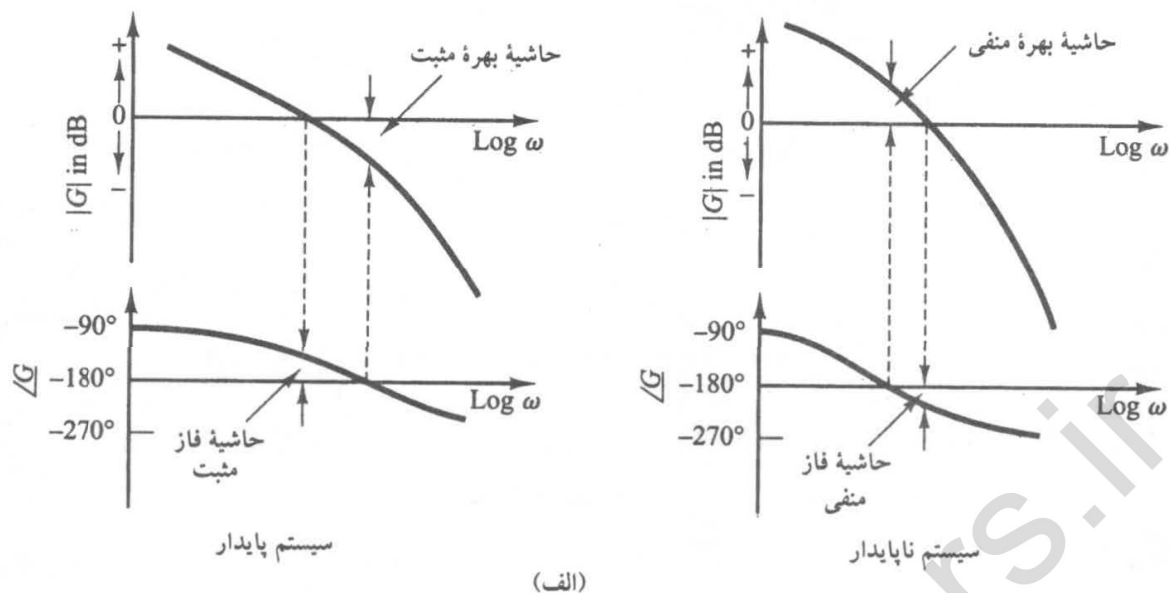
**حاشیه‌های فاز و بهره.** شکل ۷-۶۶ نمودارهای قطبی  $G(j\omega)$  را به ازای سه مقدار متفاوت بهره حلقه باز  $K$  نشان می‌دهد. به ازای  $K$  بزرگ سیستم ناپایدار است. با کاهش بهره به یک حد خاص، مکان هندسی  $G(j\omega)$  از نقطه  $1+j0$  می‌گذرد. یعنی سیستم به ازای این مقدار بهره در آستانه ناپایداری است و نوسانات نامیرا دارد. به ازای بهره کوچک سیستم پایدار است.

در حالت کلی هر چه مکان هندسی  $G(j\omega)$  برای دور زدن نقطه  $1+j0$  به آن نزدیکتر شود، پاسخ سیستم نوسانی‌تر می‌شود. نزدیکی نمودار  $G(j\omega)$  به نقطه  $1+j0$  می‌تواند معیاری از حاشیه پایداری باشد. (این مطلب در مورد سیستمهای دارای پایداری مشروط صادق نیست.) معمولاً میزان نزدیکی را برحسب حاشیه فاز و حاشیه بهره بیان می‌کنند.

**حاشیه فاز:** حاشیه فاز عبارت است از مقدار پسفازی لازم در فرکانس عبور بهره، برای قرار دادن سیستم در مرز ناپایداری. فرکانس عبور بهره فرکانسی است که در آن  $|G(j\omega)|$  یعنی دامنه تابع تبدیل حلقه باز برابر یک می‌شود. حاشیه فاز  $\gamma$  حاصل جمع  $180^\circ$  و فاز  $\phi$  تابع تبدیل حلقه باز در فرکانس عبور بهره است، یا

$$\gamma = 180^\circ + \phi$$

شکلهای ۷-۶۷ (الف)، (ب) و (ج) حاشیه فاز یک سیستم پایدار و یک سیستم ناپایدار را روی نمودارهای بوده، قطبی، و لگاریتم دامنه برحسب فاز نشان می‌دهد. در نمودار قطبی می‌توان خطی از مبدأ به محل برخورد دایره واحد با مکان هندسی  $G(j\omega)$  رسم کرد. زاویه بین این خط و بخش منفی محور حقیقی با حاشیه فاز برابر است. به ازای  $\gamma > 0^\circ$  (خط بالای بخش منفی محور حقیقی) حاشیه فاز مثبت و به ازای  $\gamma < 0^\circ$  (خط زیر محور حقیقی) حاشیه فاز منفی است. برای این که یک سیستم می‌نیم فاز پایدار باشد، باید حاشیه فاز آن مثبت باشد. در منحنی‌های لگاریتمی نقطه بحرانی صفحه مختلط محل برخورد خط  $0^\circ$  و خط  $180^\circ$  است.



شکل ۷-۶۷ حاشیه‌های فاز و بهره سیستمهای پایدار و ناپایدار. (الف) نمودار بوده؛ (ب) نمودار قطبی؛ (ج) نمودار لگاریتم دامنه برحسب فاز.

**حاشیه بهره:** حاشیه بهره عکس دامنه  $|G(j\omega)|$  در فرکانسی است که زاویه فاز  $-180^\circ$  می‌شود. اگر فرکانس عبور زاویه فاز  $\omega_1$  را فرکانسی تعریف کنیم که در آن زاویه تابع تبدیل حلقه باز  $-180^\circ$  می‌شود، حاشیه بهره  $K_g$  عبارت است از:

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_1)|}$$

برحسب دسیبل

$$K_g \text{ dB} = 20 \log K_g = -20 \log |G(j\omega_1)|$$

حاشیه بهره برحسب دسیبل مثبت است، اگر  $K_g$  از یک بزرگتر باشد، و منفی است اگر  $K_g$  از یک کوچکتر باشد. پس حاشیه بهره مثبت (برحسب دسیبل) به معنی پایدار بودن سیستم است و حاشیه بهره منفی (برحسب دسیبل) به معنی ناپایدار بودن سیستم است. حاشیه بهره در شکل‌های ۷-۶۷ (الف)، (ب)، و (ج) نشان داده شده است.

برای یک سیستم می‌نیم فاز پایدار، حاشیه بهره نشان می‌دهد که بهره را چقدر می‌توان زیاد کرد، بدون این که سیستم ناپایدار شود. برای سیستم‌های ناپایدار حاشیه بهره نشان می‌دهد که برای پایدار شدن سیستم باید بهره را چقدر کم کرد.

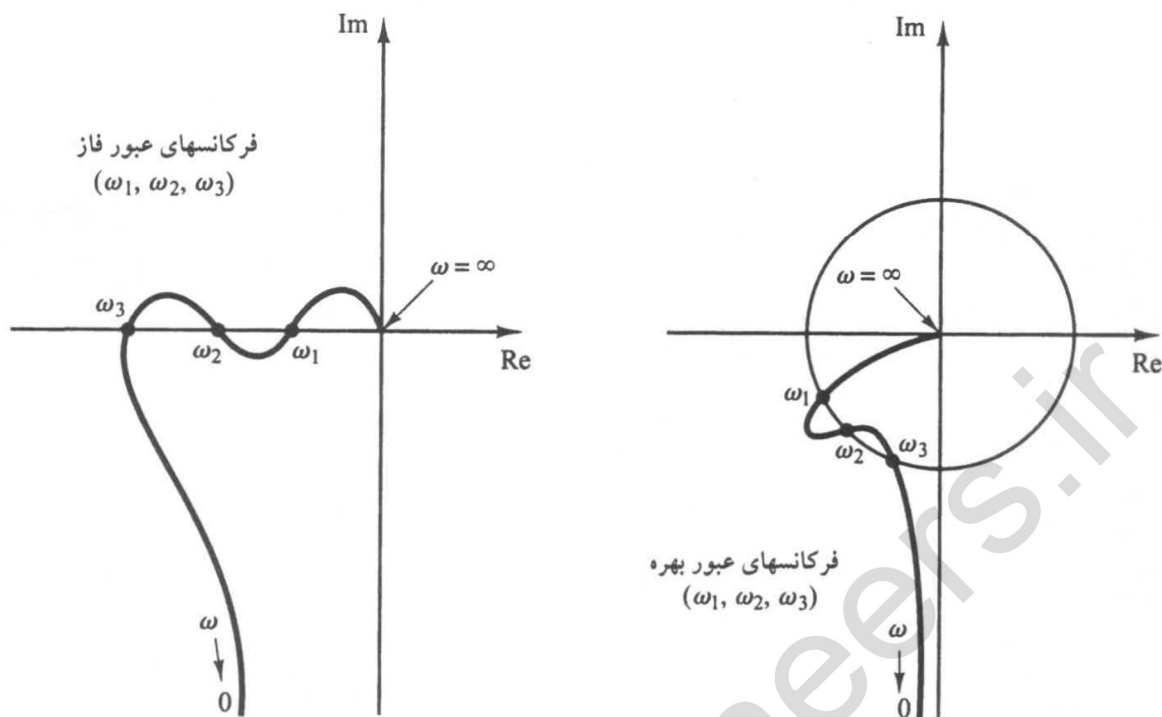
حاشیه بهره سیستم‌های مرتبه اول و مرتبه دوم بینهایت است، زیرا برای چنین سیستم‌هایی نمودار قطبی بخش منفی محور حقیقی را قطع نمی‌کند. پس از لحاظ نظری سیستم‌های مرتبه اول و مرتبه دوم نمی‌توانند ناپایدار باشند. (البته توجه کنید که سیستم‌های موسوم به سیستم‌های مرتبه اول و مرتبه دوم تقریبی‌اند، از این جهت که در اشتقاق معادلات سیستم تاخیرهای زمانی کوچک ندیده گرفته می‌شود، پس اینها واقعاً مرتبه اول و مرتبه دوم نیستند؛ با در نظر گرفتن این تاخیرهای زمانی کوچک، سیستم‌های موسوم به سیستم‌های مرتبه اول و مرتبه دوم نیز می‌توانند ناپایدار شوند.)

گفته شد که برای یک سیستم غیرمی‌نیم فاز دارای تابع تبدیل حلقه باز ناپایدار، برای ارضای شرط پایداری نمودار  $G(j\omega)$  باید حتماً نقطه  $1+j0$  را دور بزند. بنابراین حاشیه فاز و حاشیه بهره این سیستم غیرمی‌نیم فاز پایدار، منفی است.

توجه به این نکته نیز مهم است که سیستم‌های دارای پایداری مشروط بیش از یک فرکانس عبور فاز دارند، همچنین بعضی سیستم‌های مرتبه بالای دارای صفر نیز ممکن است مطابق شکل ۷-۶۸ چند فرکانس عبور بهره داشته باشند. برای سیستم‌های پایداری که چند فرکانس عبور بهره دارند، حاشیه فاز در فرکانس عبوری که بالاترین بهره را دارد حساب می‌شود.

**چند توضیح راجع به حاشیه فاز و حاشیه بهره.** حاشیه‌های فاز و بهره یک سیستم کنترل معیاری و از نزدیکی نمودار قطبی آن به نقطه  $1+j0$  است. بنابراین از این حاشیه‌ها می‌توان به عنوان معیارهای طراحی استفاده کرد.

باید گوشزد کرد که نه حاشیه فاز نه حاشیه بهره، هیچکدام به تنهایی نمی‌توانند پایداری نسبی را به حد کافی مشخص کنند. برای تعیین پایداری نسبی باید هر دو مشخص باشد.



شکل ۷-۶۸

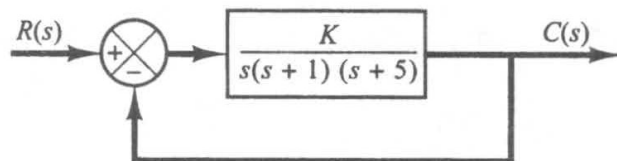
نمودارهای قطبی که وجود بیش از یک فرکانس عبور بهره یا فاز را نشان می‌دهد.

در سیستم‌های می‌نیم فاز برای پایداری هم حاشیه فاز و هم حاشیه بهره باید مثبت باشد. منفی بودن حاشیه‌ها نشانه ناپایداری است.

حاشیه‌های فاز و بهره مناسب تضمین می‌کنند که سیستم به رغم تغییرات عناصر پایدار می‌ماند، و برای فرکانس‌های خاصی مشخص می‌شوند. مقادیر حاشیه فاز و حاشیه بهره رفتار سیستم حلقه بسته نزدیک فرکانس تشدید را در محدوده خاصی قرار می‌دهد. برای عملکرد مطلوب حاشیه فاز باید بین  $30^\circ$  و  $60^\circ$  بوده، حاشیه بهره از ۶ dB بزرگتر باشد. به ازای این مقادیر پایداری سیستم می‌نیم فاز تضمین می‌شود، حتی اگر بهره حلقه باز و ثابت زمانی‌های اجزاء سیستم تا حد معینی تغییر کند. گرچه حاشیه‌های فاز و بهره تنها تخمینی از میرایی نسبی سیستم حلقه بسته به دست می‌دهند، ولی راه مناسبی برای طراحی سیستم‌های کنترل یا تنظیم بهره‌های اجزاء سیستم ایجاد می‌کند.

در سیستم‌های می‌نیم فاز مشخصات دامنه و فاز تابع تبدیل حلقه بسته کاملاً به هم وابسته‌اند. لازمه بین  $30^\circ$  و  $60^\circ$  بودن حاشیه فاز این است که شیب منحنی لگاریتم دامنه فاز نمودار بوده در فرکانس عبور بهره کمتر از ۴۰ dB/dec باشد. در اغلب موارد عملی برای پایداری سیستم بهتر است شیب منحنی در فرکانس عبور بهره ۲۰ dB/dec باشد. در صورت ۴۰ dB/dec بودن شیب، سیستم می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد. (حتی اگر سیستم پایدار باشد، حاشیه فاز کوچکی دارد.) اگر شیب در فرکانس عبور بهره ۶۰ dB/dec یا بیشتر باشد، سیستم به احتمال زیاد ناپایدار است.

در سیستم‌های غیر می‌نیم فاز تعبیر درست حاشیه‌های پایداری مستلزم بررسی دقیق است. برای تعیین پایداری سیستم‌های غیر می‌نیم فاز بهتر است به جای نمودار بوده از نمودار نایکویست استفاده شود.



شکل ۶۹-۷  
سیستم کنترل.

حاشیه فاز و بهره سیستم شکل ۶۹-۷ را برای دو حالت  $K=10$  و  $K=100$  به دست آورید.

مثال ۲۰-۷

حاشیه‌های فاز و بهره را می‌توان به سادگی از نمودار بوده تعیین کرد. شکل ۷۰-۷ (الف) نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز را به ازای  $K=10$  نشان می‌دهد. حاشیه‌های فاز و بهره به ازای  $K=10$  عبارت‌اند از:

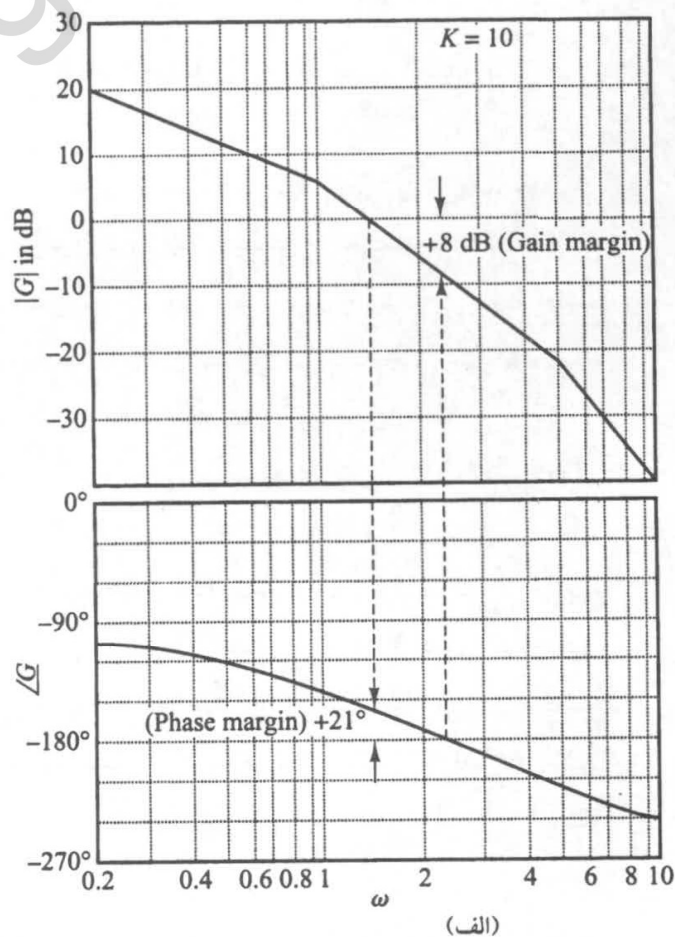
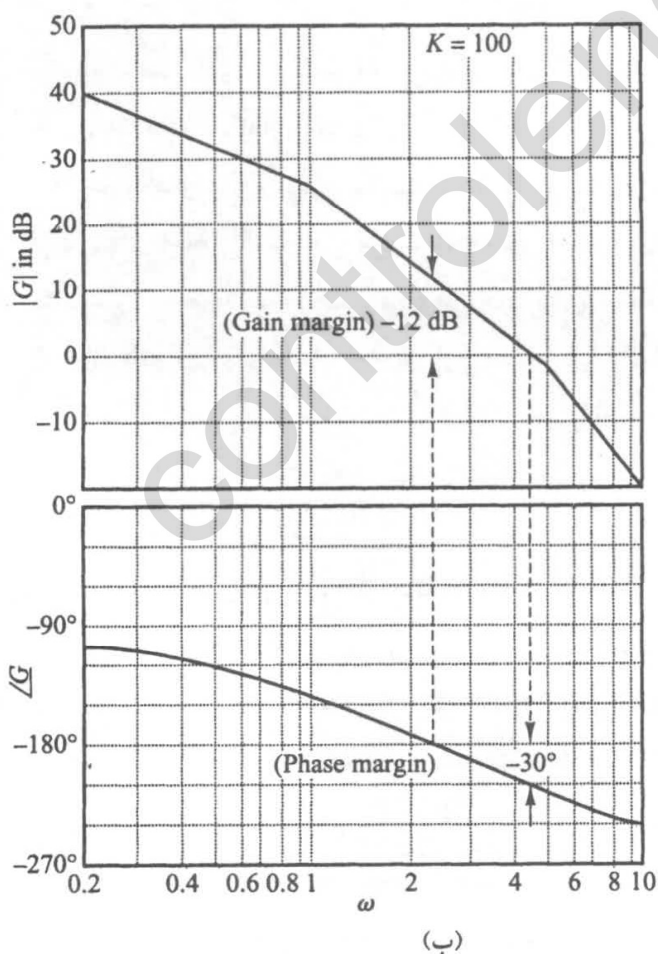
$$\text{حاشیه بهره} = 8 \text{ dB} \quad \text{حاشیه فاز} = 21^\circ$$

بنابراین می‌توان بهره سیستم را تا ۸ dB زیاد کرد، بدون این که سیستم ناپایدار شود.

افزایش بهره از  $K=10$  به  $K=100$  باعث می‌شود محور dB مطابق شکل ۷۰-۷ (ب) ۲۰ dB پایین رود. حاشیه‌های فاز و بهره عبارت‌اند از:

$$\text{حاشیه بهره} = -12 \text{ dB} \quad \text{حاشیه فاز} = -30^\circ$$

پس سیستم به ازای  $K=10$  پایدار و به ازای  $K=100$  ناپایدار است.



شکل ۷۰-۷ نمودارهای بوده سیستم شکل ۶۹-۷ به ازای: (الف)  $K=10$  و (ب)  $K=100$ .

دقت کنید که یکی از جنبه‌های بسیار خوب نمودار بوده سادگی بررسی اثرات تغییر بهره است. برای دستیابی به عملکرد مطلوب باید حاشیه فاز را به  $30^\circ$  تا  $60^\circ$  برسانیم. این کار با کاهش بهره  $K$  انجام می‌شود. ولی کاهش  $K$  مطلوب نیست، زیرا کوچکی  $K$  باعث می‌شود خطای ورودی شیب بزرگ باشد. پس تغییر شکل منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز با افزودن شبکه جبران‌ساز ضروری است. روشهای جبران‌سازی در بخشهای ۷-۱۱ تا ۷-۱۳ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

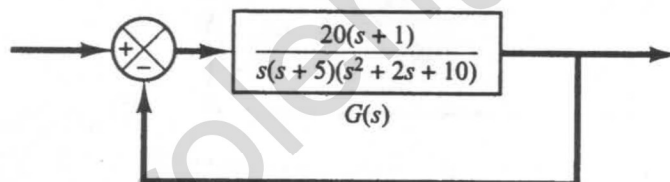
**یافتن حاشیه فاز، حاشیه بهره، فرکانس عبور فاز، و فرکانس عبور بهره به کمک MATLAB.** حاشیه فاز، حاشیه بهره، فرکانس عبور فاز، و فرکانس عبور بهره را می‌توان به کمک MATLAB به راحتی به دست آورد. به این منظور باید دستور زیر را به کار برد

$$[Gm, pm, wcp, wcg] = \text{margin}(\text{sys})$$

که در آن  $pm$  حاشیه فاز،  $Gm$  حاشیه بهره،  $wcp$  فرکانس عبور فاز، و  $wcg$  فرکانس عبور بهره است. برای جزییات این دستور مثال ۷-۲۱ را ببینید.

نمودار بوده سیستم حلقه بسته نشان داده شده در شکل ۷-۷۱ را رسم کنید. حاشیه فاز، حاشیه بهره، فرکانس عبور فاز، و فرکانس عبور بهره را به کمک MATLAB بیابید.

مثال ۷-۲۱



شکل ۷-۷۱

سیستم حلقه بسته.

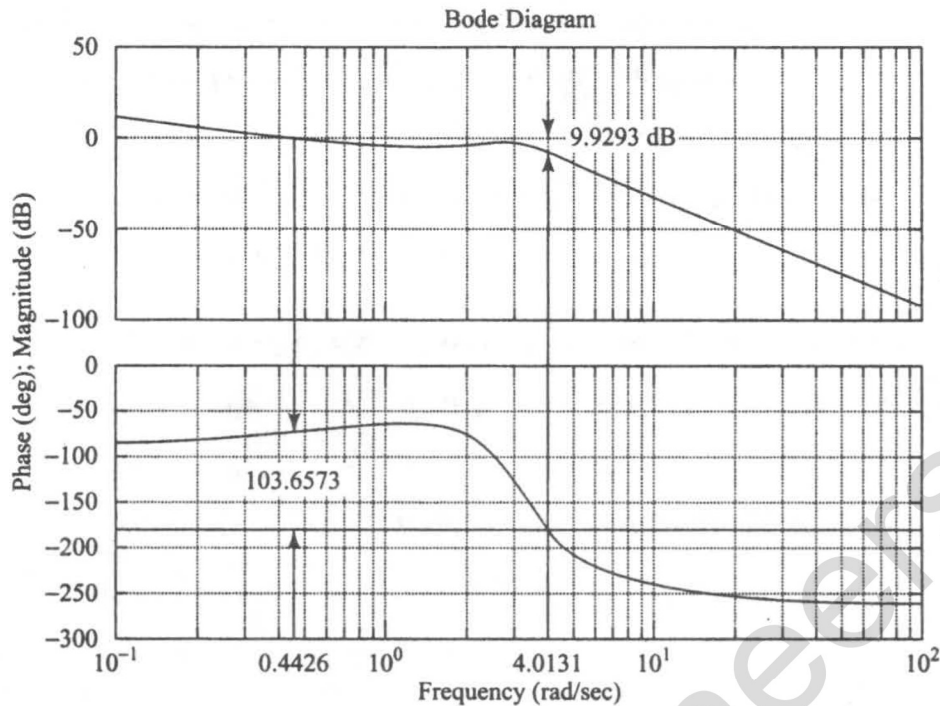
برنامه ۷-۱۱ روش رسم نمودار بوده، و یافتن حاشیه فاز، حاشیه بهره، فرکانس عبور فاز، و فرکانس عبور بهره را نشان می‌دهد. نمودار بوده در شکل ۷-۷۲ نشان داده شده است.

#### MATLAB Program 7-11

```
num = [20 20];
den = conv([1 5 0],[1 2 10]);
sys = tf(num,den);
w = logspace(-1,2,100);
bode(sys,w)
[Gm,pm,wcp,wcg] = margin(sys);
GmdB = 20*log10(Gm);
[GmdB pm wcp wcg]

ans =
```

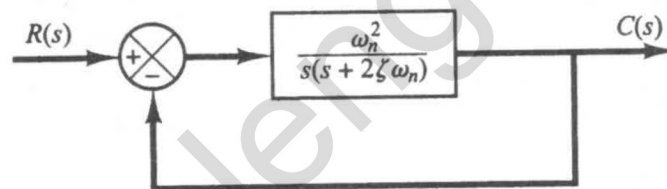
9.9293 103.6573 4.0131 0.4426



شکل ۷-۷۲

نمودار بوده  $G(s)$

سیستم شکل ۷-۷۱.



شکل ۷-۷۳

سیستم کنترل.

دامنه قلّه تشدید  $M_r$  و فرکانس تشدید  $\omega_r$ . سیستم شکل ۷-۷۳ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (۷-۱۶)$$

که در آن  $\zeta$  و  $\omega_n$  به ترتیب نسبت میرایی و فرکانس طبیعی نامیراست. پاسخ فرکانسی حلقه بسته عبارت است از:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}} = M e^{j\alpha}$$

که در آن

$$M = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad , \quad \alpha = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

چنانچه معادله (۷-۱۲) نشان می‌دهد، به ازای  $0 \leq \zeta \leq 0.707$  در فرکانس  $\omega_r$  رخ می‌دهد و

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (17-7)$$

فرکانس  $\omega_r$  فرکانس تشدید است. در فرکانس تشدید مقدار  $M$  ماکزیمم می‌شود و مقدار آن طبق معادله (۷-۱۳) عبارت است از:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (18-7)$$

$M_r$  را **دامنه قله تشدید** می‌نامند. دامنه قله تشدید با میرایی سیستم مرتبط است.

دامنه قله تشدید پایداری نسبی سیستم را نشان می‌دهد. بزرگ بودن دامنه قله تشدید نشان می‌دهد که یک زوج قطب حلقه بسته با نسبت میرایی کوچک وجود دارد که پاسخ گذرای نامطلوبی ایجاد می‌کند. ولی کوچک بودن قله تشدید نبودن چنین قطبهای با میرایی کوچک را نشان می‌دهد، که به معنی وجود سیستمی با میرایی خوب است.

توجه کنید که  $\omega_r$  تنها هنگامی حقیقی است که  $0.707 < \zeta$ . پس به ازای  $0.707 < \zeta$  تابع تبدیل حلقه بسته تشدید ندارد. [ $M_r$  تنها به ازای  $0.707 < \zeta$  یک می‌شود. معادله (۷-۱۴) را ببینید.] چون در سیستمهای فیزیکی مقادیر  $M_r$  و  $\omega_r$  را به راحتی می‌توان اندازه گرفت، این مقادیر برای بررسی همخوانی تحلیلهای نظری و تجربی بسیار مفیدند.

البته باید بگوییم که در مسائل عملی طراحی برای بیان درجه میرایی سیستم از حاشیه فاز و حاشیه بهره بیشتر از دامنه قله تشدید استفاده می‌شود.

**همبستگی بین پاسخ پله و پاسخ فرکانسی سیستمهای استاندارد مرتبه دوم.** فراجش ماکزیمم پاسخ گذاری پله واحد سیستم استاندارد مرتبه دوم شکل ۷-۷۳ با دامنه قله تشدید پاسخ فرکانسی همبستگی کاملی دارد. پس در پاسخ فرکانسی و پاسخ گذرا اطلاعات یکسانی راجع به رفتار دینامیکی سیستم وجود دارد. به ازای ورودی پله واحد، خروجی سیستم شکل ۷-۷۳ طبق معادله (۵-۱۲) عبارت است از:

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad t \geq 0$$

که در آن

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (19-7)$$

فراجش ماکزیمم  $M_p$  پاسخ پله نیز طبق معادله (۵-۲۱) عبارت است از:

$$M_p = e^{-\left(\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \pi} \quad (20-7)$$

این فراجش ماکزیمم در پاسخ گذرای با فرکانس طبیعی میرای  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  رخ می‌دهد. فراجش ماکزیمم به ازای  $0.4 < \zeta$  مقداری بزرگ است.

تابع تبدیل حلقه باز سیستم مرتبه دوم شکل ۷-۷۳ عبارت است از:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

به ازای ورودی سینوسی دامنه  $G(j\omega)$  هنگامی یک است که داشته باشیم

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 + 4\zeta^4 - 2\zeta^2}$$

این رابطه با برابر یک قرار دادن  $|G(j\omega)|$  و حل معادله حاصل به دست می‌آید. در این فرکانس زاویه فاز عبارت است از:

$$\angle G(j\omega) = -\angle j\omega - \angle j\omega + 2\zeta\omega_n = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^4 - 2\zeta^2}}{2\zeta}$$

پس حاشیه فاز برابرست با

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ + \angle G(j\omega) \\ &= 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^4 - 2\zeta^2}}{2\zeta} \\ &= \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{1 + 4\zeta^4 - 2\zeta^2}} \end{aligned} \quad (7-21)$$

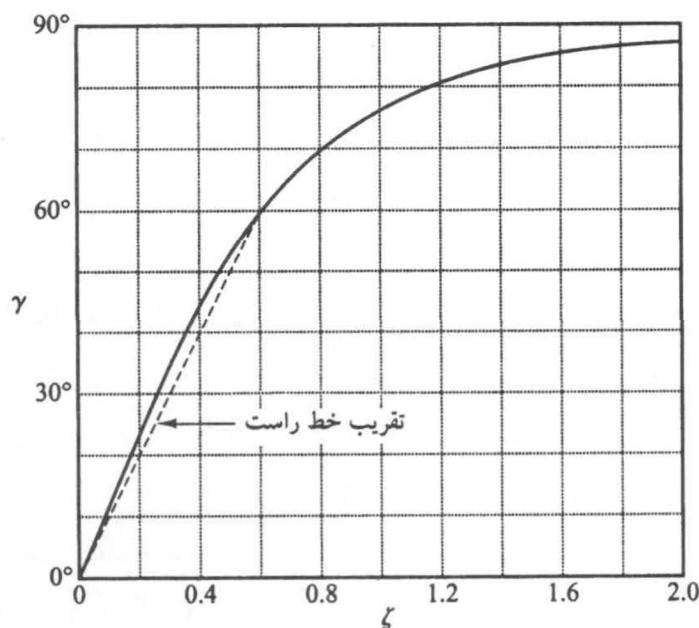
معادله (۷-۲۱) رابطه بین نسبت میرایی  $\zeta$  و حاشیه فاز  $\gamma$  را به دست می‌دهد. (توجه کنید که حاشیه فاز  $\gamma$  تنها تابعی از نسبت میرایی  $\zeta$  است.) در زیر همبستگی بین پاسخ پله و پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه دوم توصیف شده با معادله (۷-۱۶) خلاصه شده است:

۱. حاشیه فاز و نسبت میرایی مستقیماً به هم مرتبط‌اند. شکل ۷-۷۴ نمودار حاشیه فاز  $\gamma$  را به صورت تابعی از نسبت میرایی  $\zeta$  نشان می‌دهد. در شکل مشخص شده است که برای سیستم مرتبه دوم استاندارد شکل ۷-۷۳ حاشیه فاز  $\gamma$  و نسبت میرایی به ازای  $0 \leq \zeta \leq 0.6$  تقریباً با خط راستی دارای رابطه زیر به هم مرتبط‌اند

$$\zeta = \frac{\gamma}{100}$$

پس حاشیه فاز  $60^\circ$  با نسبت میرایی  $0.6$  متناظر است. برای سیستمهای مرتبه بالاتری که یک زوج قطب حلقه بسته غالب دارند می‌توان این رابطه را به عنوان قاعده‌ای سرانگشتی در محاسبه پایداری نسبی پاسخ گذرا (یعنی نسبت میرایی) از پاسخ فرکانسی به کار برد.

۲. معادلات (۷-۱۷) و (۷-۱۹) نشان می‌دهند که به ازای مقادیر کوچک  $\zeta$  مقادیر  $\omega_d$  و  $\omega_r$  تقریباً برابرند. پس به ازای  $\zeta$  کوچک مقدار  $\omega_r$  سرعت پاسخ گذرای سیستم را نشان می‌دهد.



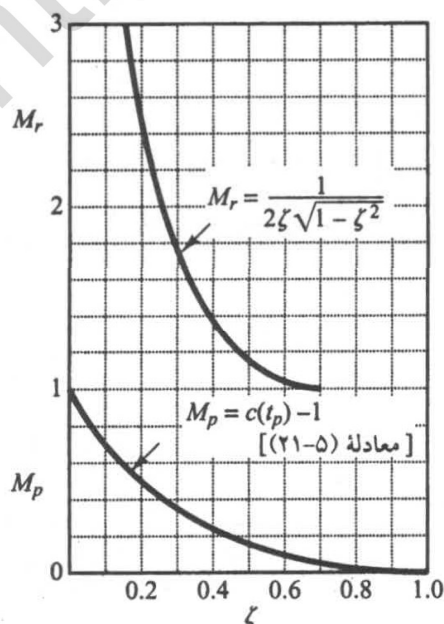
شکل ۷-۷۴

منحنی  $\gamma$  (حاشیه فاز)بر حسب  $\zeta$  برای سیستم

شکل ۷-۷۳.

۳. معادلات (۷-۱۸) و (۷-۲۰) نشان می‌دهند که هر چه  $\zeta$  کوچکتر باشد، مقادیر  $M_p$  و  $M_r$  بزرگتر می‌شود. شکل ۷-۷۵ رابطه بین  $M_p$  و  $M_r$  را به صورت تابعی از  $\zeta$  نشان می‌دهد. می‌توان دید که به ازای  $\zeta > 0.4$  رابطه نزدیکی بین  $M_p$  و  $M_r$  برقرار است. برای مقادیر کوچک  $\zeta$ ،  $M_r$  خیلی بزرگ می‌شود ( $M_r \gg 1$ ) ولی  $M_p$  از یک تجاوز نمی‌کند.

همبستگی بین پاسخ پله و پاسخ فرکانسی در یک سیستم عمومی. طراحی سیستمهای کنترل غالباً براساس پاسخ فرکانسی صورت می‌گیرد. علت اصلی این امر سهولت نسبی این رهیافت در مقایسه با رهیافتهای دیگر است. چون در بسیاری از کاربردها پاسخ گذاری سیستم به یک ورودی نامتناوب از درجه اول اهمیت برخوردار



شکل ۷-۷۵

منحنی‌های  $M_p$  و  $M_r$ بر حسب  $\zeta$  برای سیستم

شکل ۷-۷۳.

است نه پاسخ حالت ماندگار به ورودی سینوسی، مسئله همبستگی بین پاسخ گذرا و پاسخ فرکانسی پیش می‌آید.

برای سیستم مرتبه دوم شکل ۷-۷۳ روابط ریاضی بین پاسخ گذرا و پاسخ فرکانسی را می‌توان به راحتی به دست آورد. پاسخ زمانی یک سیستم مرتبه دوم را می‌توان با داشتن  $M_r$  و  $\omega_r$  پاسخ فرکانسی حلقه بسته دقیقاً پیش‌بینی کرد.

در سیستمهای مرتبه بالاتر همبستگی پیچیده‌تری وجود دارد و ممکن است نتوان پاسخ گذرا را به سادگی از روی پاسخ فرکانسی پیش‌بینی کرد، زیرا قطبهای اضافی می‌توانند رابطه‌ای را که بین پاسخ پله و پاسخ فرکانسی سیستمهای مرتبه دوم وجود دارد تغییر دهند. روشهای ریاضی خاصی برای یافتن رابطه دقیق پاسخ گذرا و پاسخ فرکانسی وجود دارند، ولی بسیار طولانی هستند و ارزش عملی چندانی ندارند.

امکان اعمال رابطه پاسخ گذرا - پاسخ فرکانسی موجود در سیستم مرتبه دوم شکل ۷-۷۳ به سیستمهای مرتبه بالاتر، به وجود یک زوج قطب غالب حلقه بسته در این سیستمها بستگی دارد. واضح است که اگر پاسخ فرکانسی یک سیستم مرتبه بالا عمدتاً توسط یک زوج قطب مزدوج مختلط حلقه بسته تعیین شود، رابطه پاسخ گذرا - پاسخ فرکانسی سیستم مرتبه دوم را می‌توان به آن سیستم تعمیم داد.

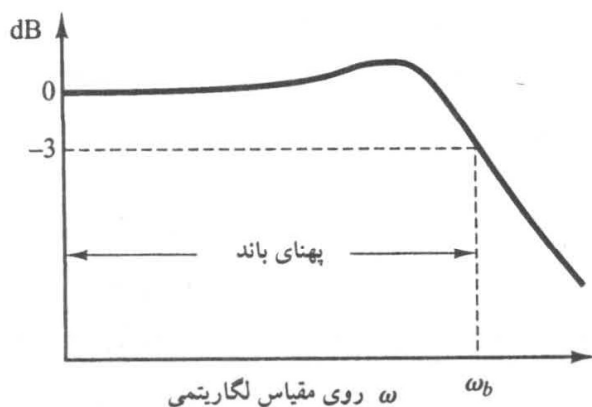
برای سیستمهای خطی مستقل از زمان مرتبه بالایی که یک زوج قطب حلقه بسته غالب دارند، روابط زیر عموماً بین پاسخ گذرای پله و پاسخ فرکانسی برقرار است.

۱. مقدار  $M_r$  پایداری نسبی را نشان می‌دهد. عملکرد گذرای مطلوب معمولاً به ازای  $M_r$  واقع در گستره  $1/4 < M_r < 1/2$  ( $0\text{dB} < M_r < 3\text{dB}$ ) که با نسبت میرایی  $0.7 < \zeta < 0.4$  متناظر است، به دست می‌آید. به ازای  $M_r > 1/2$  پاسخ گذرا ممکن است چند فراجش داشته باشد. (در حالت کلی  $M_r$  بزرگ با فراجش بزرگ در پاسخ گذرا متناظر است. اگر سیستم در معرض نویزی با فرکانسهای حول و حوش  $\omega_r$  قرار داشته باشد، نویز تقویت می‌شود و در خروجی مشکلاتی جدی بروز می‌کند).

۲. مقدار فرکانس تشدید  $\omega_r$  سرعت پاسخ گذاری سیستم را نشان می‌دهد. هر چه  $\omega_r$  بزرگتر باشد، پاسخ زمانی سریعتر است. به عبارت دیگر زمان صعود با  $\omega_r$  نسبت عکس دارد. برحسب پاسخ فرکانسی حلقه باز، فرکانس طبیعی میرای پاسخ گذرا بین فرکانس عبور بهره و فرکانس عبور فاز است.

۳. در سیستمهای با میرایی کم، فرکانس تشدید  $\omega_r$  و فرکانس طبیعی میرا  $\omega_d$  پاسخ پله بسیار به هم نزدیک‌اند.

سه رابطه مذکور در بالا برای ایجاد ارتباط بین پاسخ پله و پاسخ فرکانسی سیستمهای مرتبه بالا بسیار مفیدند، به شرطی که بتوان سیستم را با یک سیستم مرتبه دوم یا یک زوج قطب حلقه بسته مزدوج مختلط تقریب زد. اگر یک سیستم مرتبه بالا دارای این شرایط باشد، می‌توان مشخصات حوزه زمان آن را به زبان مشخصات حوزه فرکانس بیان کرد. به این ترتیب کار طراحی یا جبرانسازی سیستمهای مرتبه بالا بسیار ساده می‌شود.



شکل ۷-۷۶

یک نمودار پاسخ فرکانسی که فرکانس قطع  $\omega_b$  و پهنای باند را نشان می‌دهد.

علاوه بر حاشیه فاز، حاشیه بهره، قله تشدید،  $M_r$  و فرکانس تشدید  $\omega_r$  کمیات حوزه فرکانس دیگری نیز برای بیان مشخصات کاری سیستمها به کار می‌رود. این کمیات عبارت‌اند از فرکانس قطع، پهنای باند، و آهنگ قطع، که در زیر به تعریف آنها می‌پردازیم.

**فرکانس قطع و پهنای باند.** شکل ۷-۷۶ را ببینید. فرکانس  $\omega_b$  که در آن دامنه پاسخ فرکانسی حلقه بسته ۳ dB کمتر از دامنه پاسخ فرکانسی در فرکانس صفر است، **فرکانس قطع** نامیده می‌شود. پس

$$\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| < \left| \frac{C(j^0)}{R(j^0)} \right| - 3 \text{ dB} \quad \text{برای } \omega > \omega_b$$

برای سیستمی با  $|C(j^0)/R(j^0)| = 0 \text{ dB}$

$$\left| \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \right| < -3 \text{ dB} \quad \text{برای } \omega > \omega_b$$

سیستم حلقه بسته مولفه‌های سیگنال دارای فرکانس بالاتر از فرکانس قطع را فیلتر کرده، مولفه‌هایی را عبور می‌دهد که فرکانسهای پایین تر از فرکانس قطع داشته باشند.

گستره فرکانسی  $0 \leq \omega \leq \omega_b$  که در آن اندازه  $C(j\omega)/R(j\omega)$  بالاتر از -۳ dB است، **پهنای باند** سیستم نامیده می‌شود. پهنای باند فرکانسی را مشخص می‌کند که در آن افت بهره نسبت به مقدار فرکانس پایین شروع می‌شود. پس پهنای باند نشان می‌دهد که سیستم در دنبال کردن ورودی سینوسی چقدر خوب عمل می‌کند. توجه کنید که به ازای  $\omega_n$  معین، هر چه نسبت میرایی  $\zeta$  بزرگتر باشد، زمان صعود نیز بزرگتر می‌شود. از طرف دیگر با افزایش  $\zeta$  پهنای باند کم می‌شود. پس زمان صعود و پهنای باند با هم نسبت عکس دارند.

مشخصات پهنای باند را می‌توان با عوامل زیر تعیین کرد:

۱. توانایی سیستم در بازسازی سیگنال ورودی. پهنای باند بزرگ با زمان صعود کوچک، یا پاسخ سریع متناظرست. تقریباً می‌توان گفت که پهنای باند با سرعت پاسخ متناسب است. (مثلاً برای کاهش زمان صعود پاسخ پله با ضریب ۲ باید پهنای باند نیز تقریباً با ضریب ۲ افزایش یابد).
۲. مشخصات فیلتر لازم برای حذف نویز فرکانس بالا.

برای این که سیستم یک ورودی دلخواه را به خوبی دنبال کند باید پهنای باند بزرگی داشته باشد. ولی از

دید نوبر پهنای باند سیستم نباید خیلی بزرگ باشد. پس پهنای باند باید دو خواسته متناقض را برآورده کند، و بنابراین برای طراحی خوب معمولاً باید مصالحه‌ای صورت بگیرد. دقت کنید که برای بزرگ بودن پهنای باند باید اجزاء سیستم کیفیت خوبی داشته باشند. بنابراین معمولاً هزینه سیستم با افزایش پهنای باند زیادتر می‌شود.

**آهنگ قطع.** آهنگ قطع شیب منحنی لگاریتم دامنه در نزدیک فرکانس قطع است. آهنگ قطع توانایی سیستم برای جداسازی سیگنال از نویز را نشان می‌دهد.

توجه کنید که یک منحنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته با شیب قطع تند ممکن است دامنه قلّه تشدید بزرگی داشته باشد، که نشان می‌دهد حاشیه پایداری سیستم نسبتاً کم است.

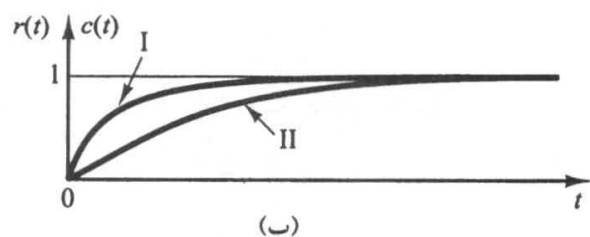
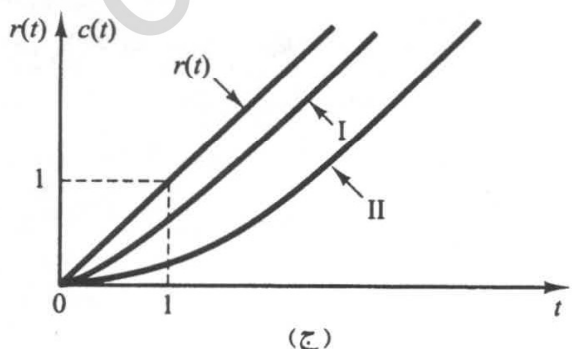
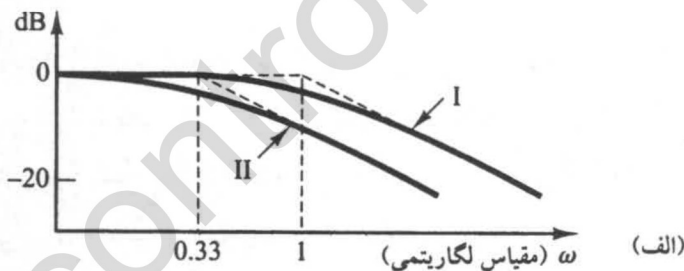
### مثال ۷-۲۲

دو سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{سیستم I: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+1} \quad \text{و} \quad \text{سیستم II: } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{3s+1}$$

پهنای باند دو سیستم را مقایسه کرده، نشان دهید سیستم با پهنای باند بزرگتر پاسخ سریعتری دارد و بسیار بهتر از سیستم دارای پهنای باند کوچکتر ورودی را دنبال می‌کند.

شکل ۷-۷۷ (الف) منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه بسته دو سیستم را نشان می‌دهد. (منحنی‌های مجانبی با خط چین مشخص شده‌اند). پهنای باند سیستم I،  $0 \leq \omega \leq 1$  rad/sec و از آن سیستم II،  $0 \leq \omega \leq 0.33$  rad/sec است. شکل‌های ۷-۷۷ (ب) و (ج) به ترتیب پاسخ پله و پاسخ شیب دو سیستم را نشان می‌دهند. سیستم I که پهنای باند آن سه برابر پهنای باند سیستم II است، پاسخ سریعتری دارد و بهتر می‌تواند ورودی را دنبال کند.



شکل ۷-۷۷ مقایسه مشخصات دینامیکی دو سیستم در نظر گرفته شده در مثال ۷-۲۲. (الف) پاسخ فرکانسی حلقه بسته؛ (ب) منحنی‌های پاسخ پله؛ (ج) منحنی‌های پاسخ شیب.

کاربرد MATLAB برای یافتن قله تشدید، فرکانس تشدید و پهنای باند. قله تشدید ماکزیمم دامنه پاسخ فرکانسی حلقه بسته (برحسب دسیبل) است. فرکانس تشدید فرکانسی است که این ماکزیمم دامنه در آن حاصل می‌شود. برای یافتن قله تشدید و فرکانس تشدید می‌توان به صورت زیر از MATLAB استفاده کرد:

```
[mag,phase,w]=bode(sys,w);   یا   [mag,phase,w]=bode(num,den,w)
[Mp,k]=max(mag);
resonant_peak=20*log10(Mp);
resonant_frequency=w(k)
```

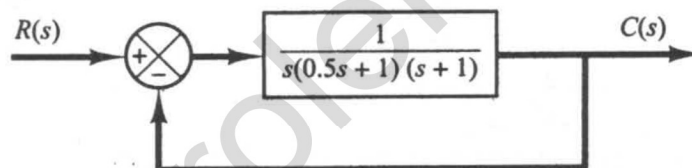
برای یافتن پهنای باند می‌توان خطوط زیر را به برنامه افزود:

```
n=1;
while 20*log10(mag(n)) >= -3; n=n+1;
end
bandwidth=w(n)
```

برای جزئیات بیشتر مثال ۷-۲۳ را ببینید.

سیستم شکل ۷-۷۸ را در نظر بگیرید. با استفاده از MATLAB نمودار بوده تابع تبدیل حلقه بسته را رسم کنید. همچنین قله تشدید، فرکانس تشدید، و پهنای باند را بیابید.

مثال ۷-۲۳



شکل ۷-۷۸

سیستم کنترل حلقه بسته.

برنامه ۷-۱۲ MATLAB نمودار بوده سیستم حلقه بسته این سیستم را رسم می‌کند و قله تشدید، فرکانس تشدید، و پهنای باند را نیز به دست می‌دهد. نمودار حاصل در شکل ۷-۷۹ نشان داده شده است. قله تشدید برابر ۲۳۷۷ dB/۵ است. فرکانس تشدید ۰/۷۹۰۶ rad/s و پهنای باند ۱/۲۶۴۹ rad/s است. درستی این مقادیر را می‌توان با توجه به نمودار شکل ۷-۷۹ بررسی کرد.

## ۸-۷ پاسخ فرکانسی حلقه بسته

### سیستمهای با فیدبک واحد

پاسخ فرکانسی حلقه بسته. برای یک سیستم حلقه بسته پایدار دارای فیدبک واحد، پاسخ فرکانسی را می‌توان به سادگی از پاسخ فرکانسی حلقه باز به دست آورد. سیستم با فیدبک واحد شکل ۷-۸۰ (الف) را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از:

### MATLAB Program 7-12

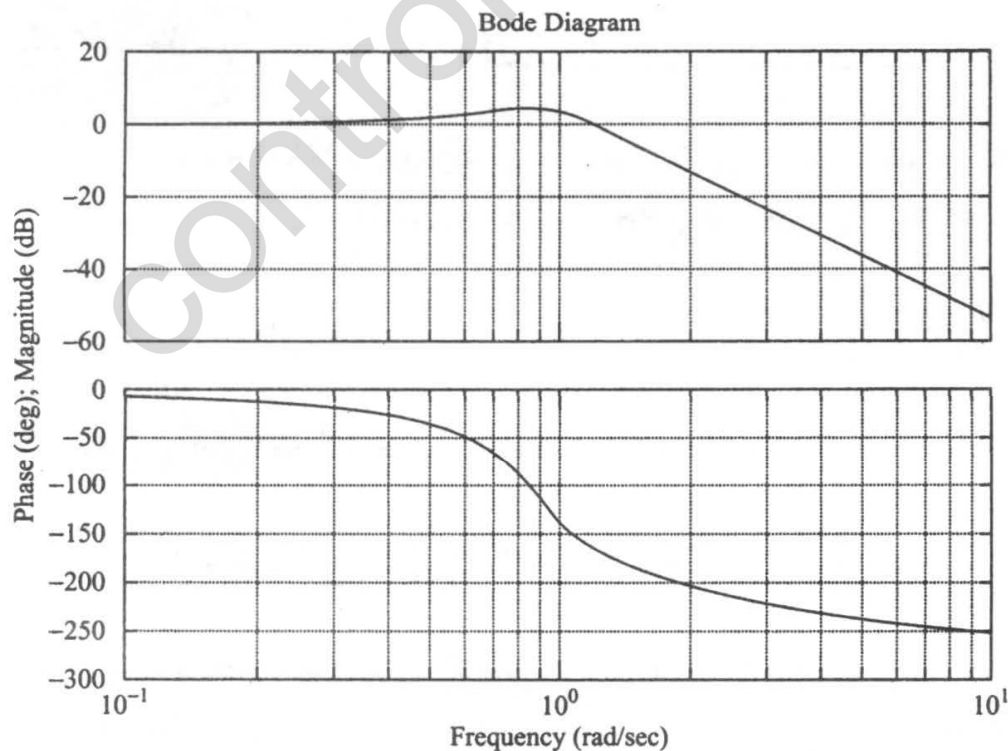
```
nump = [1];
denp = [0.5 1.5 1 0];
sysp = tf(nump,denp);
sys = feedback(sysp,1);
w = logspace(-1,1);
bode(sys,w)
[mag,phase,w] = bode(sys,w);
[Mp,k] = max(mag);
resonant_peak = 20*log10(Mp)

resonant_peak =
    5.2388

resonant_frequency = w(k)
resonant_frequency =
    0.7906

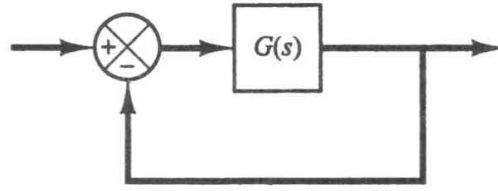
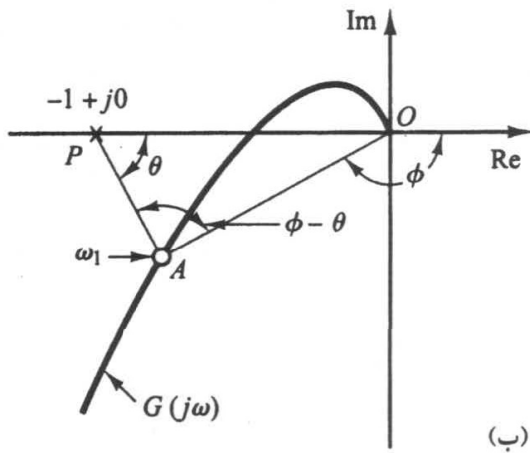
n = 1;
while 20*log(mag(n))>= -3; n = n + 1;
end
bandwidth = w(n)

bandwidth =
    1.2649
```



شکل ۷-۷۹

نمودار بوده تابع تبدیل حلقه بسته سیستم شکل ۷-۷۸.



(الف)

شکل ۸-۷

(الف) سیستم با فیدبک واحد: (ب) تعیین پاسخ فرکانسی حلقه بسته از پاسخ فرکانسی حلقه باز.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

در نمودار نایکویست یا قطبی شکل ۸-۷ (ب) بردار  $\overline{OA}$  مقدار  $G(j\omega_1)$  را نشان می‌دهد که در آن  $\omega_1$  فرکانس در نقطه  $A$  است. طول بردار  $\overline{OA}$  برابر  $|G(j\omega_1)|$  است و زاویه بردار  $\overline{OA}$  برابر  $\angle G(j\omega_1)$ . بردار  $\overline{PA}$ ، بردار از نقطه  $-1 + j0$  به مکان هندسی نایکویست، مقدار  $1 + G(j\omega_1)$  را نشان می‌دهد. بنابراین نسبت  $\overline{OA}$  به  $\overline{PA}$  پاسخ فرکانسی حلقه بسته را نشان می‌دهد، یا

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{PA}} = \frac{G(j\omega_1)}{1 + G(j\omega_1)} = \frac{G(j\omega_1)}{R(j\omega_1)}$$

اندازه تابع تبدیل حلقه بسته در  $\omega = \omega_1$  با نسبت اندازه‌های  $\overline{OA}$  و  $\overline{PA}$  برابر است. زاویه فاز تابع تبدیل حلقه بسته در  $\omega = \omega_1$  زاویه بین بردارهای  $\overline{OA}$  و  $\overline{PA}$  یعنی  $\phi - \theta$  شکل ۸-۷ (ب) است. با اندازه گیری دامنه و زاویه فاز در فرکانسهای مختلف می‌توان منحنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته را یافت.

اجازه دهید دامنه پاسخ فرکانسی حلقه بسته را با  $M$  و زاویه فاز آن را با  $\alpha$  مشخص کنیم. یعنی

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = M e^{j\alpha}$$

در زیر مکان هندسی دامنه - ثابت و مکان هندسی فاز - ثابت را می‌یابیم. این مکانهای هندسی برای تعیین پاسخ فرکانسی حلقه بسته از نمودار نایکویست یا نمودار قطبی به کار می‌آیند.

**مکان هندسی دامنه - ثابت (دایره‌های  $M$ )**. برای یافتن مکان هندسی دامنه - ثابت ابتدا به این نکته توجه کنید که  $G(j\omega)$  کمیتی مختلط است و می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$G(j\omega) = X + jY$$

که در آن  $X$  و  $Y$  کمیت‌های حقیقی‌اند. پس  $M$  عبارت است از:

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|}$$

و  $M^2$  برابرست با

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$

پس

$$X^2(1 - M^2) - 2M^2X - M^2 + (1 - M^2)Y^2 = 0 \quad (22-7)$$

به ازای  $M=1$  معادله (۲۲-۷) نشان می‌دهد که  $X = -\frac{1}{3}$ . این معادله خط راستی موازی با محور  $Y$  است که از نقطه  $(-\frac{1}{3}, 0)$  می‌گذرد.

به ازای  $M \neq 1$  معادله (۲۲-۷) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$X^2 + \frac{2M^2}{M^2 - 1}X + \frac{M^2}{M^2 - 1} + Y^2 = 0$$

با افزودن جمله  $M^2 / (M^2 - 1)^2$  به دو طرف این معادله به دست می‌آوریم

$$\left(X + \frac{2M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2} \quad (23-7)$$

معادله (۲۳-۷) معادله دایره‌ای به مرکز  $Y=0$  و  $X = -M^2 / (M^2 - 1)$  و شعاع  $|M / (M^2 - 1)|$  است.

پس مکانهای هندسی  $M$ - ثابت در صفحه  $G(s)$  یک دسته دایره است. مرکز و شعاع دایره را به ازای هر  $M$  خاص می‌توان به سادگی یافت. برای مثال به ازای  $M=1/3$  مرکز دایره  $(-2/45, 0)$  و شعاع آن برابر  $1/88$  است. شکل ۷-۸۱ دسته‌ای از دوائر  $M$ - ثابت را نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که با بزرگتر شدن  $M$  نسبت به ۱، دایره‌های  $M$  کوچکتر شده به نقطه  $0 + j\omega - 1$  میل می‌کند. به ازای  $M > 1$  مراکز دوائر  $M$ - ثابت سمت چپ نقطه  $0 + j\omega - 1$  قرار دارند. به نحوی مشابه هر چه  $M$  از ۱ کوچکتر شود، دایره‌ها کوچکتر شده، به مبدأ همگرا می‌شوند. به ازای  $0 < M < 1$  مراکز دوائر  $M$  ثابت سمت راست مبدأ قرار دارند.  $M=1$  مکان هندسی نقاط همفاصله از مبدأ و  $0 + j\omega - 1$  است. چنانچه قبلاً گفتیم این مکان هندسی خط راستی موازی محور موهومی است که از نقطه  $(-\frac{1}{3}, 0)$  می‌گذرد. (دوائر  $M$ - ثابت متناظر با  $M > 1$  سمت چپ خط  $M=1$  و دوائر  $M$ - ثابت متناظر با  $0 < M < 1$  سمت راست این خط قرار دارند.) دوائر  $M$  نسبت به خط  $M=1$  و نسبت به محور حقیقی متقارن‌اند.

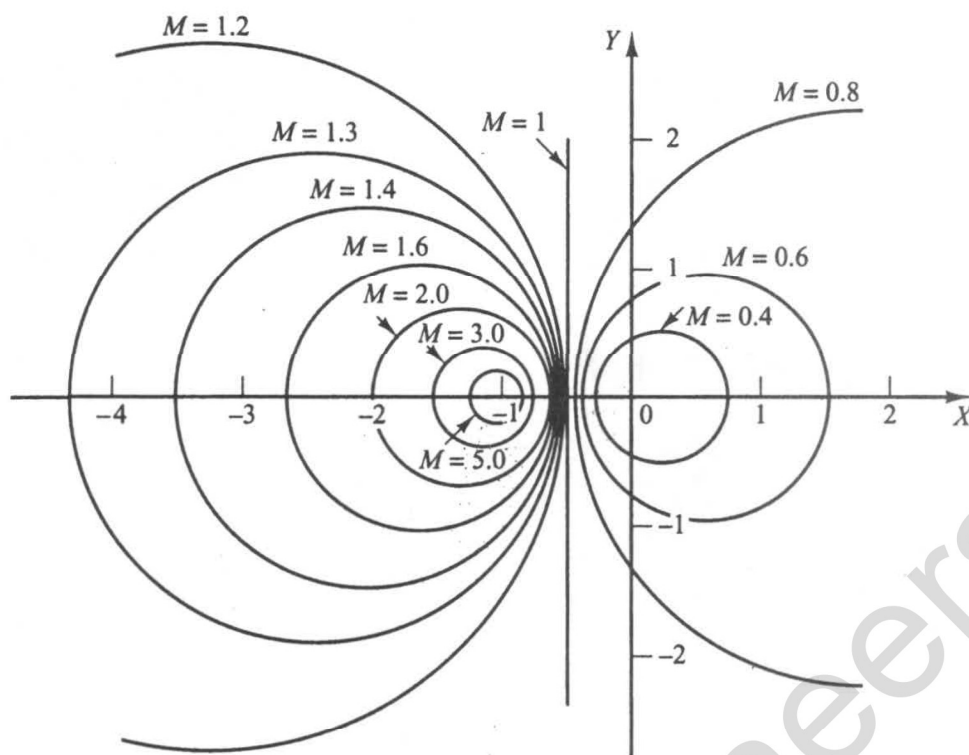
**مکان هندسی فاز ثابت (دایره‌های  $N$ ).** حال زاویه فاز  $\alpha$  را بر حسب  $X$  و  $Y$  دست می‌آوریم. چون

$$|e^{j\alpha}| = \left| \frac{X + jY}{1 + X + jY} \right|$$

زاویه فاز  $\alpha$  عبارت است از:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{Y}{1+X}\right)$$

با تعریف



شکل ۸-۷  
دسته‌ای از دوائر  $M$  ثابت.

$$\tan \alpha = N$$

به دست می‌آوریم

$$N = \tan \left[ \tan^{-1} \left( \frac{Y}{X} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{Y}{1+X} \right) \right]$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

چون

نتیجه می‌گیریم

$$N = \frac{\frac{Y}{X} - \frac{Y}{1+X}}{1 + \frac{Y}{X} \left( \frac{Y}{1+X} \right)} = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2}$$

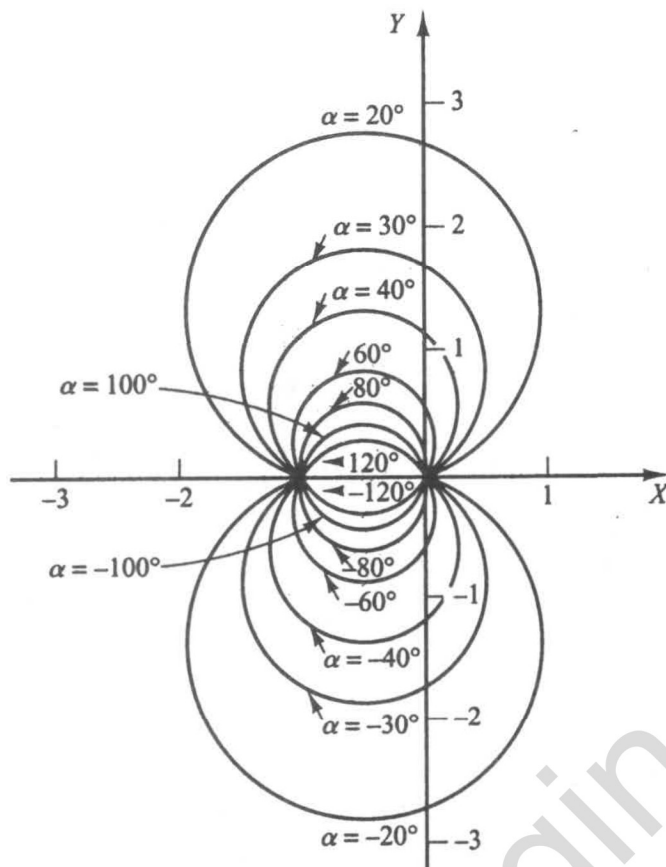
$$X^2 + X + Y^2 - \frac{1}{N} Y = 0$$

یا

افزودن  $\left(\frac{1}{4}\right) + 1/(2N)^2$  به دو طرف این معادله به دست می‌دهد

$$\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2 \quad (24-7)$$

این معادله دایره‌ای به مرکز  $X = -\frac{1}{2}$ ,  $Y = 1/(2N)$  و شعاع  $\sqrt{(1/4) + 1/(2N)^2}$  است. مثلاً به ازای  $\alpha = 30^\circ$ ,  $N = \tan \alpha = 0.577$  مرکز و شعاع دایره متناظر آن به ترتیب  $(-0.5, 0.866)$  و یک است. چون معادله (۲۴-۷)



شکل ۷-۸۲  
دسته‌ای از دایره‌های  $N$  ثابت.

به ازای  $X=Y=0$  و  $Y=0$  و  $X=-1$  مستقل از مقدار  $N$  ارضا می‌شود. تمام دایره‌های  $N$  از مبدا و نقطه  $1+j0$  می‌گذرند، با یافتن مقدار  $N$  مکان هندسی  $-\alpha$  ثابت را به راحتی می‌توان رسم کرد. شکل ۷-۸۲ دسته‌ای از دایره‌های  $N$  را با  $\alpha$  های مختلف نشان می‌دهد.

باید تذکر دهیم که مکان هندسی  $N$  ثابت به ازای یک  $\alpha$  تمام دایره نیست، بلکه تنها کمائی از آن است. به عبارت دیگر کمانهای  $\alpha=3^\circ$  و  $\alpha=-15^\circ$  بخشهایی از یک دایره هستند. علت این است که با افزودن  $\pm 18^\circ$  (و مضارب آن) به یک زاویه تانژانت تغییر نمی‌کند.

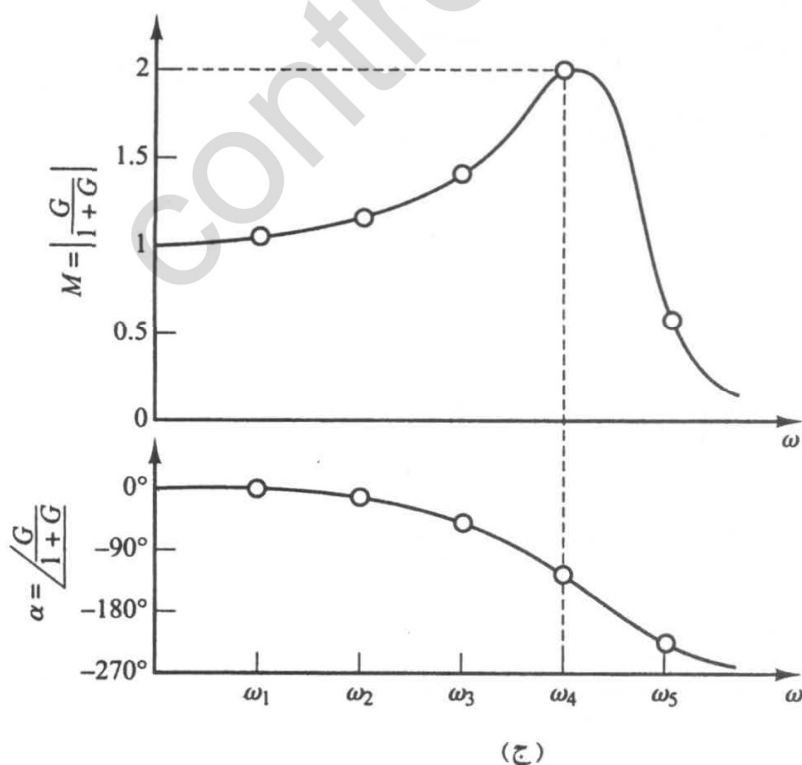
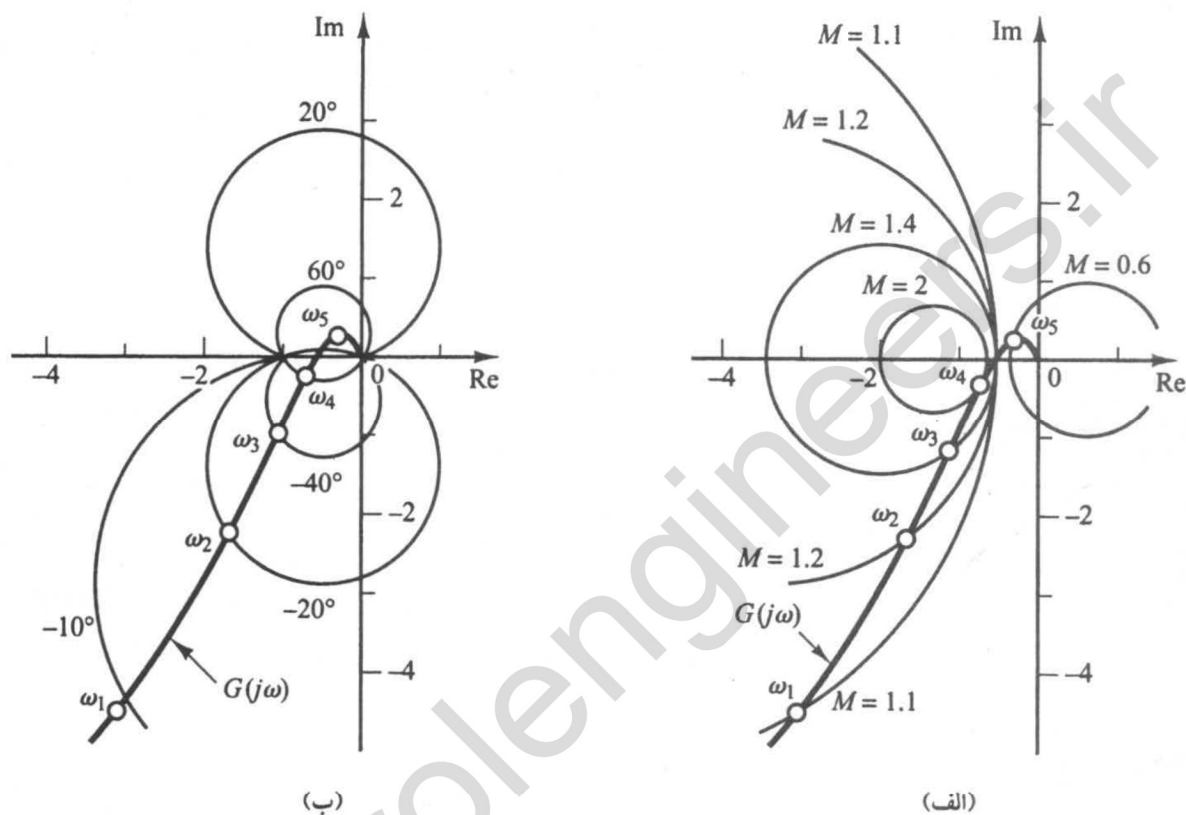
استفاده از دایره‌های  $M$  و  $N$  قادرمان می‌کند بدون محاسبه دامنه و فاز تابع تبدیل حلقه بسته در فرکانسهای مختلف، پاسخ فرکانسی کامل حلقه بسته را از پاسخ فرکانسی حلقه باز  $G(j\omega)$  به دست آوریم. نقاط برخورد مکان هندسی  $G(j\omega)$  و دایره‌های  $M$  و  $N$  مقادیر  $M$  و  $N$  را به ازای فرکانسهای روی  $G(j\omega)$  به دست می‌دهند.

دایره‌های  $N$  چند مقداری هستند، از این جهت که دایره  $\alpha=\alpha_1$  و دایره  $\alpha=\alpha_1 \pm 18^\circ$  یکسان‌اند ( $n=1,2,\dots$ ). در استفاده از دایره‌های  $N$  برای تعیین زاویه فاز سیستمها حلقه بسته باید تعبیر درست  $\alpha$  به کار برده شود. برای پرهیز از هر نوع اشتباه، از فرکانس صفر، که با  $\alpha=0^\circ$  متناظر است، شروع کنید و به فرکانسهای بالاتر بروید. منحنی زاویه فاز باید پیوسته باشد.

نقاط برخورد مکان هندسی  $G(j\omega)$  و دایره‌های  $M$ ، مقادیر  $M$  در فرکانسهای مشخص شده روی مکان هندسی  $G(j\omega)$  را به دست می‌دهند. پس دایره  $M$  ثابتی که کوچکترین شعاع را دارد، و بر مکان هندسی

$G(j\omega)$  مماس است، مقدار قله تشدید  $M_r$  را به دست می‌دهد. اگر بخواهیم مقدار قله تشدید از مقدار معینی کمتر باشد، منحنی  $G(j\omega)$  نباید نقطه بحرانی (نقطه  $-1+j^0$ ) را دربر گیرد و در همین حال نباید دایره  $M$  دارای آن مقدار معین را قطع کند.

شکل ۷-۸۳ (الف) مکان هندسی  $G(j\omega)$  رسم شده روی دایره‌های  $M$  را نشان می‌دهد. شکل ۷-۸۳ (ب)



شکل ۷-۸۳

(الف) مکان هندسی  $G(j\omega)$

رسم شده روی دایره‌های  $M$ .

(ب) مکان هندسی  $G(j\omega)$

رسم شده روی دایره‌های  $N$ ؛

(ج) منحنی پاسخ فرکانسی

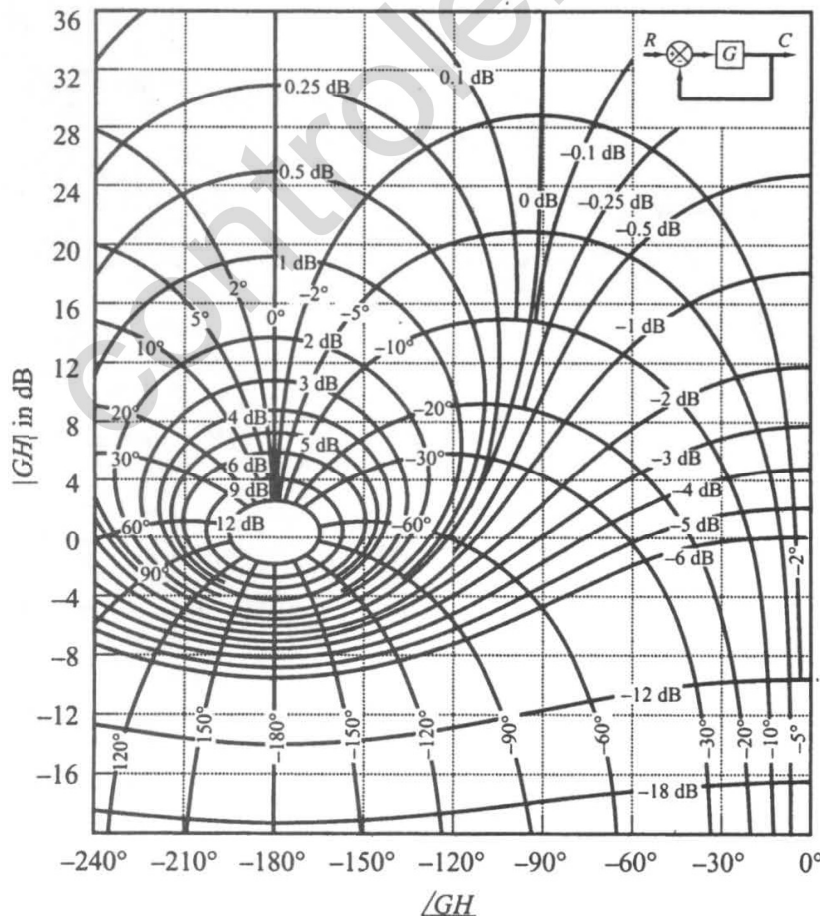
حلقه بسته.

مکان هندسی رسم شده روی دایره‌های  $N$  را نشان می‌دهد. از این منحنی‌ها می‌توان پاسخ فرکانسی حلقه بسته را به دست آورد. می‌بینیم که دایره  $M=1/1$  مکان هندسی  $G(j\omega)$  را در فرکانس  $\omega=\omega_1$  قطع می‌کند. یعنی در این فرکانس دامنه تابع تبدیل حلقه بسته  $M=2$  (الف) دایره  $M=2$  درست بر منحنی  $G(j\omega)$  مماس است. پس تنها به ازای یک نقطه  $G(j\omega)$  دامنه  $|C(j\omega)R(j\omega)|$  برابر ۲ است. شکل ۷-۸۳ (ج) منحنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته را نشان می‌دهد. منحنی بالایی  $M$  را برحسب فرکانس نشان می‌دهد و منحنی پایینی منحنی زاویه فاز  $\alpha$  برحسب  $\omega$  است.

مقدار قله تشدید  $M$  مقدار متناظر با کوچکترین دایره  $M$  مماس بر منحنی  $G(j\omega)$  است. پس در نمودار نایکویست مقدار قله تشدید  $M_r$  فرکانس تشدید  $\omega_r$  را می‌توان از دایره  $M$  مماس بر مکان هندسی  $G(j\omega)$  به دست آورد. (در این مثال  $M_r=2$  و  $\omega_r=\omega_1$ ).

**نمودار نیکولس.** در مسائل طراحی ترسیم مکانهای  $M$  و  $N$  در صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز مناسبتر است. نمودار متشکل از مکانهای هندسی  $M$  و  $N$  در صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز، نمودار نیکولس نامیده می‌شود. مکان هندسی  $G(j\omega)$  رسم شده بر روی نمودار نیکولس هم مشخصه بهره و هم مشخصه فاز تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را به دست می‌دهد. شکل ۷-۸۴ این نمودار را برای زاویه‌های فاز بین  $0^\circ$  تا  $-240^\circ$  نشان می‌دهد.

توجه کنید که نقطه بحرانی  $1+z^{-1}$  در نمودار نیکولس به نقطه  $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$  نگاشته می‌شود. در



شکل ۷-۸۴

نمودار نیکولس.

نمودار نیکولس منحنی‌های دامنه حلقه بسته ثابت و فاز ثابت رسم شده‌اند. طراح می‌تواند حاشیه‌فاز، حاشیه بهره، دامنه قله تشدید، فرکانس تشدید و پهنای باند سیستم را به صورت ترسیمی از روی مکان هندسی حلقه باز  $G(j\omega)$  به دست آورد.

نمودار نیکولس نسبت به محور  $-180^\circ$  متقارن است. مکانهای هندسی  $M$  و  $N$  در هر  $360^\circ$  تکرار می‌شوند، و در فواصل  $180^\circ$  درجه‌ای متقارن‌اند. مرکز مکانهای هندسی  $M$  نقطه بحرانی  $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$  است. نمودار نیکولس برای یافتن پاسخ فرکانسی حلقه بسته از پاسخ فرکانسی حلقه باز، بسیار مناسب است. اگر منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز روی نمودار نیکولس رسم شود، نقاط برخورد منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز  $G(j\omega)$  و مکانهای هندسی  $M$  و  $N$  مقادیر دامنه  $M$  و زاویه فاز  $\alpha$  پاسخ فرکانسی حلقه بسته را در فرکانسهای مختلف به دست می‌دهد. اگر مکان هندسی  $G(j\omega)$  مکان هندسی  $M = M_r$  را قطع نکند، بلکه بر آن مماس باشد، مقدار قله تشدید پاسخ فرکانسی حلقه بسته است. فرکانس تشدید را فرکانس متناظر با نقطه تماس تعیین می‌کند.

به عنوان مثال سیستم دارای فیدبک واحدی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}, \quad K=1$$

برای یافتن پاسخ فرکانسی حلقه بسته با استفاده از نمودار نیکولس، باید مکان هندسی  $G(j\omega)$  بر روی صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز رسم شود، به این منظور می‌توان از MATLAB یا نمودار بوده استفاده کرد. شکل ۸۵-۷ (الف) مکان هندسی  $G(j\omega)$  را بر روی مکانها  $M$  و  $N$  نشان می‌دهد. منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه بسته را می‌توان با خواندن دامنه و فاز در فرکانسهای مختلف مکان هندسی  $G(j\omega)$  به صورت نشان داده شده در شکل ۸۵-۷ (ب) رسم کرد. چون مکان هندسی  $M = 5 \text{ dB}$  بر مکان هندسی  $G(j\omega)$  مماس است، دامنه قله تشدید  $M_r = 5 \text{ dB}$  است. فرکانس تشدید  $0.8 \text{ rad/sec}$  است.

توجه کنید که فرکانس عبور فاز را نقطه برخورد مکان هندسی  $G(j\omega)$  و محور  $-180^\circ$  تعیین می‌کند (برای این سیستم  $1/4 \text{ rad/sec}$ ) و فرکانس عبور بهره محل برخورد مکان هندسی  $G(j\omega)$  و محور  $0 \text{ dB}$  است (برای این سیستم  $0.76 \text{ rad/sec}$ ). حاشیه فاز فاصله افقی (برحسب درجه) بین نقطه عبور بهره و نقطه بحرانی  $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$  است. حاشیه بهره فاصله قائم (برحسب دسیبل) نقطه عبور فاز و نقطه بحرانی است.

پهنای باند سیستم حلقه بسته را می‌توان از مکان هندسی  $G(j\omega)$  رسم شده بر روی نمودار نیکولس به راحتی یافت، فرکانس نقطه برخورد مکان هندسی  $G(j\omega)$  و مکان هندسی  $M = -3 \text{ dB}$  پهنای باند را به دست می‌دهد.

با تغییر بهره حلقه باز  $K$  شکل مکان هندسی  $G(j\omega)$  در صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز بی‌تغییر می‌ماند، و تنها در امتداد محور قائم بالا (با افزایش  $K$ ) یا پایین (با کاهش  $K$ ) می‌رود. بنابراین مکان هندسی  $G(j\omega)$  مکانهای هندسی  $M$  و  $N$  را در نقاطی متفاوت قطع کرده، منحنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته متفاوتی به دست می‌آید. به ازای بهره کوچک  $K$  مکان هندسی به هیچ یک از مکانهای هندسی  $M$  مماس نمی‌شود، یعنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته تشدید ندارد.