

نمودار نیکولس منحنی‌های دامنه حلقه بسته ثابت و فاز ثابت رسم شده‌اند. طراح می‌تواند حاشیه‌فاز، حاشیه بهره، دامنه قله تشدید، فرکانس تشدید و پهنای باند سیستم را به صورت ترسیمی از روی مکان هندسی حلقه باز $G(j\omega)$ به دست آورد.

نمودار نیکولس نسبت به محور -180° متقارن است. مکانهای هندسی M و N در هر 360° تکرار می‌شوند، و در فواصل 180° درجه‌ای متقارن‌اند. مرکز مکانهای هندسی M نقطه بحرانی $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ است. نمودار نیکولس برای یافتن پاسخ فرکانسی حلقه بسته از پاسخ فرکانسی حلقه باز، بسیار مناسب است. اگر منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز روی نمودار نیکولس رسم شود، نقاط برخورد منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز $G(j\omega)$ و مکانهای هندسی M و N مقادیر دامنه M و زاویه فاز α پاسخ فرکانسی حلقه بسته را در فرکانسهای مختلف به دست می‌دهد. اگر مکان هندسی $G(j\omega)$ مکان هندسی $M = M_r$ را قطع نکند، بلکه بر آن مماس باشد، مقدار قله تشدید پاسخ فرکانسی حلقه بسته است. فرکانس تشدید را فرکانس متناظر با نقطه تماس تعیین می‌کند.

به عنوان مثال سیستم دارای فیدبک واحدی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

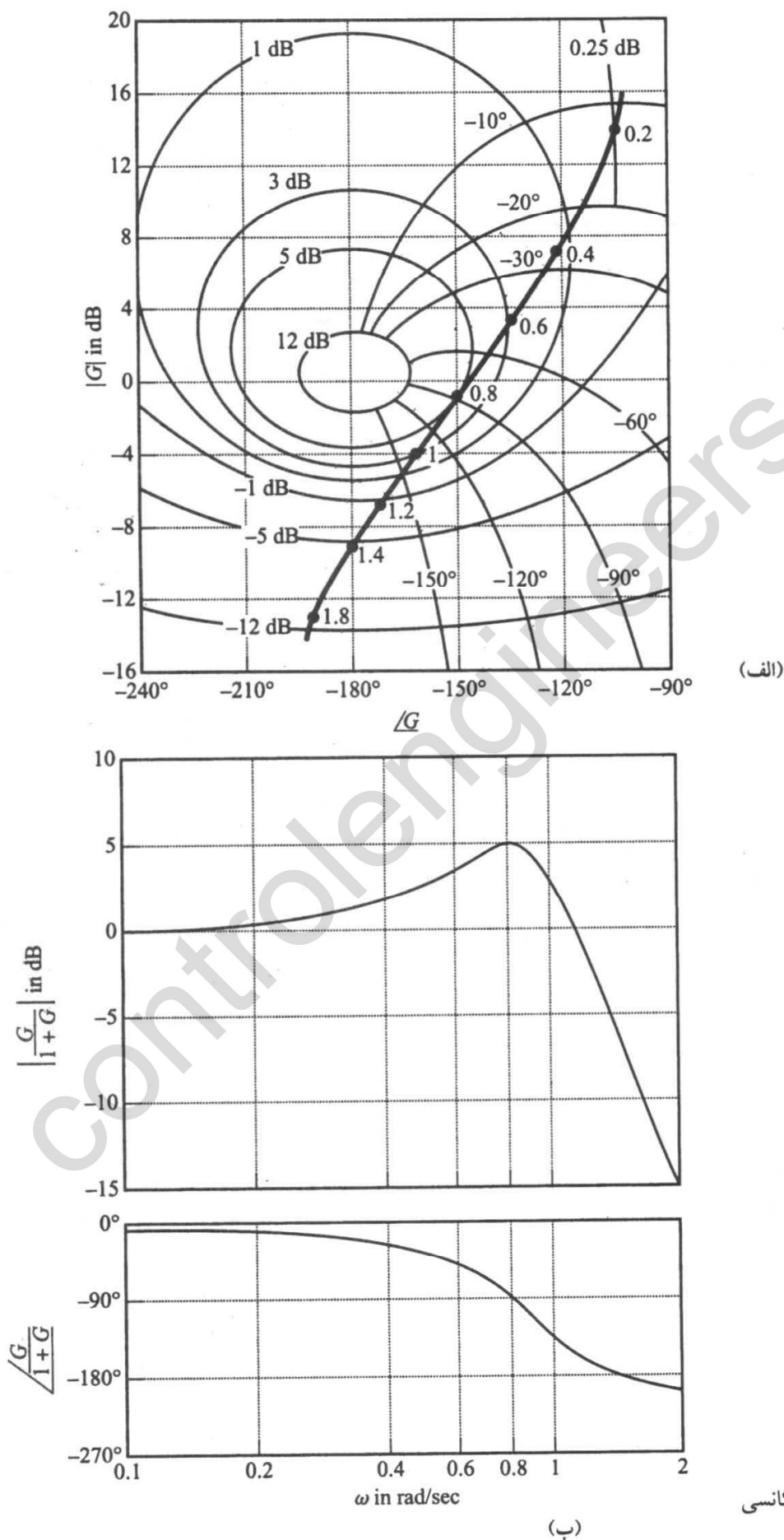
$$G(j\omega) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}, \quad K=1$$

برای یافتن پاسخ فرکانسی حلقه بسته با استفاده از نمودار نیکولس، باید مکان هندسی $G(j\omega)$ بر روی صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز رسم شود، به این منظور می‌توان از MATLAB یا نمودار بوده استفاده کرد. شکل ۸۵-۷ (الف) مکان هندسی $G(j\omega)$ را بر روی مکانها M و N نشان می‌دهد. منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه بسته را می‌توان با خواندن دامنه و فاز در فرکانسهای مختلف مکان هندسی $G(j\omega)$ به صورت نشان داده شده در شکل ۸۵-۷ (ب) رسم کرد. چون مکان هندسی $M = 5 \text{ dB}$ بر مکان هندسی $G(j\omega)$ مماس است، دامنه قله تشدید $M_r = 5 \text{ dB}$ است. فرکانس تشدید 0.8 rad/sec است.

توجه کنید که فرکانس عبور فاز را نقطه برخورد مکان هندسی $G(j\omega)$ و محور -180° تعیین می‌کند (برای این سیستم $1/4 \text{ rad/sec}$) و فرکانس عبور بهره محل برخورد مکان هندسی $G(j\omega)$ و محور 0 dB است (برای این سیستم 0.76 rad/sec). حاشیه فاز فاصله افقی (برحسب درجه) بین نقطه عبور بهره و نقطه بحرانی $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ است. حاشیه بهره فاصله قائم (برحسب دسیبل) نقطه عبور فاز و نقطه بحرانی است.

پهنای باند سیستم حلقه بسته را می‌توان از مکان هندسی $G(j\omega)$ رسم شده بر روی نمودار نیکولس به راحتی یافت، فرکانس نقطه برخورد مکان هندسی $G(j\omega)$ و مکان هندسی $M = -3 \text{ dB}$ پهنای باند را به دست می‌دهد.

با تغییر بهره حلقه باز K شکل مکان هندسی $G(j\omega)$ در صفحه لگاریتم دامنه برحسب فاز بی‌تغییر می‌ماند، و تنها در امتداد محور قائم بالا (با افزایش K) یا پایین (با کاهش K) می‌رود. بنابراین مکان هندسی $G(j\omega)$ مکانهای هندسی M و N را در نقاطی متفاوت قطع کرده، منحنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته متفاوتی به دست می‌آید. به ازای بهره کوچک K مکان هندسی به هیچ یک از مکانهای هندسی M مماس نمی‌شود، یعنی پاسخ فرکانسی حلقه بسته تشدید ندارد.



شکل ۷-۸۵

(الف) منحنی $G(j\omega)$

بر روی نمودار نیکولس؛

(ب) منحنیهای پاسخ فرکانسی

حلقه بسته.

مثال ۷-۲۴

سیستم کنترل دارای فیدبک واحدی با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)}$$

بهره K را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $M_r = 1/4$.

اولین گام تعیین بهره K رسم نمودار قطبی تابع زیر است

$$\frac{G(j\omega)}{K} = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)}$$

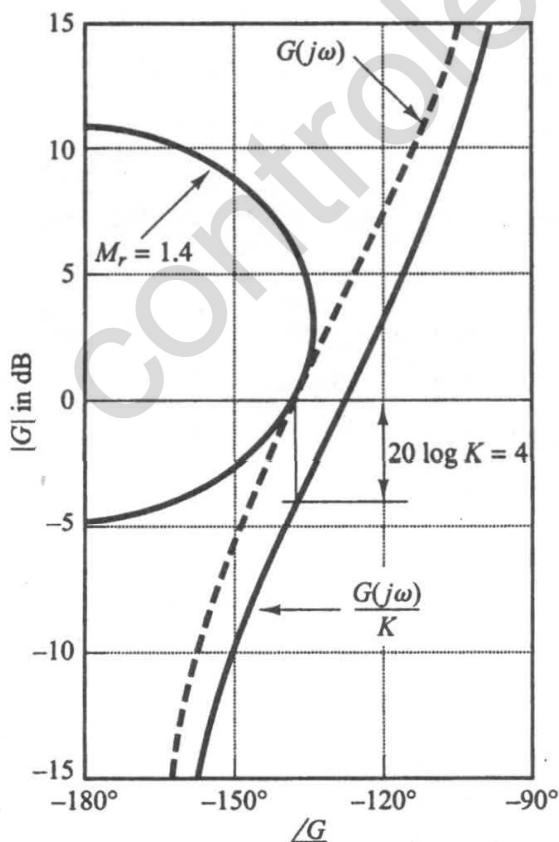
شکل ۷-۸۶ مکان هندسی $M_r = 1/4$ و مکان هندسی $G(j\omega)/K$ را نشان می‌دهد. تغییر بهره زاویه فاز را تغییر نمی‌دهد و تنها اثر آن حرکت قائم منحنی به سمت بالا ($K > 1$) و پایین ($K < 1$) است.

شکل ۷-۸۶ نشان می‌دهد برای مماس شدن مکان هندسی $G(j\omega)/K$ به مکان هندسی $M_r = 1/4$ ، مکان هندسی $G(j\omega)$ باید به اندازه ۴ dB بالا برود. این جابه‌جایی قائم، بهره لازم برای رسیدن به M_r مطلوب را نشان می‌دهد. پس با حل معادله

$$20 \log K = 4$$

به دست می‌آوریم

$$K = 1.59$$



شکل ۷-۸۶

تعیین بهره K با استفاده از نمودار نیکولس.

۷-۹ تعیین تجربی تابع تبدیل

گام اول تحلیل و طراحی یک سیستم کنترل یافتن مدل ریاضی فرایند مورد نظر است. یافتن مدل به روش تحلیلی می‌تواند بسیار مشکل باشد. ممکن است مجبور شویم این مدل را با تحلیل تجربی به دست آوریم. اهمیت روشهای پاسخ فرکانسی این است که تابع تبدیل فرایند یا هر یک از اجزاء آن را می‌توان با اندازه‌گیری‌های ساده پاسخ فرکانسی به دست آورد.

اگر نسبت دامنه و جابه‌جایی فاز در گستره فرکانسی مورد نظر در تعدادی فرکانس اندازه گرفته شود و تعداد نقاط به دست آمده کافی باشد می‌توان نمودار بوده سیستم را رسم کرد. سپس می‌توان تابع تبدیل را از تقریبهای مجانبی به دست آورد. منحنی مجانبی لگاریتم دامنه را با چند پاره‌خط رسم می‌کنیم. با چند سعی و خطا و جابه‌جا کردن‌های فرکانسی گوشه‌ای معمولاً می‌توان یک منحنی مجانبی دارای تطبیق خوب با منحنی اصلی به دست آورد. (توجه کنید که اگر مقیاس فرکانس برحسب دور بر ثانیه باشد نه برحسب رادیان ثانیه، قبل از محاسبه ثابت زمانی‌ها باید فرکانسهای گوشه‌ای به رادیان بر ثانیه تبدیل شود).

مولدهای سیگنال سینوسی. برای آزمایشهای پاسخ فرکانسی مولدهای سینوسی خوبی موجود است. سیگنال لازم ممکن است مکانیکی، الکتریکی یا نیوماتیکی باشد. گستره فرکانسی مورد نیاز برای آزمایش برای سیستمهای با ثابت زمانی بزرگ تقریباً 0.001 Hz تا 10 Hz و برای سیستمهای با ثابت زمانی کوچک 1 Hz تا 1000 Hz است. سیگنال سینوسی باید عاری از هارمونیکهای اضافی و تداخل باشد.

در گستره‌های فرکانسی خیلی پایین (زیر 0.01 Hz) می‌توان از مولدهای سیگنال مکانیکی (و در صورت لزوم به همراه تراگردانه‌های نیوماتیکی یا الکتریکی مناسب) استفاده کرد. در گستره فرکانسی 0.01 Hz تا 1000 Hz می‌توان یک مولد سیگنال سینوسی مناسب (و در صورت لزوم تراگردان مناسب) به کار برد.

تعیین توابع تبدیل می‌نیمم فاز از نمودار بوده. چنانچه قبلاً گفتیم می‌نیمم فاز بودن یک سیستم را می‌توان با توجه به منحنی پاسخ فرکانسی و بررسی مشخصات فرکانس بالای آن تعیین کرد.

برای تعیین تابع تبدیل ابتدا مجانبهای منحنی به دست آمده از آزمایش را رسم می‌کنیم. شیب مجانبها باید مضاربی از $\pm 20 \text{ dB/dec}$ باشد. اگر در $\omega = \omega_1$ شیب منحنی تجربی لگاریتم دامنه از -20 dB/dec به -40 dB/dec برسد، در تابع تبدیل عامل $1/[1+j(\omega/\omega_1)]$ وجود دارد. اگر در $\omega = \omega_2$ شیب به اندازه -40 dB/dec تغییر کند، باید عاملی مرتبه دوم به شکل زیر در تابع تبدیل دخیل باشد

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_2} \right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2}$$

فرکانس طبیعی نامیرای این عامل مرتبه دوم با فرکانس گوشه‌ای ω_2 برابر است، نسبت میرایی ζ را می‌توان با اندازه گیری دامنه قلّه تشدید حول فرکانس گوشه‌ای ω_2 منحنی تجربی، و مقایسه آن با شکل ۷-۹ به دست آورد.

پس از تعیین عاملهای تابع تبدیل $G(j\omega)$ ، می‌توان بهره را با توجه به بخش فرکانس پایین منحنی لگاریتم دامنه به دست آورد. چون عاملهایی مثل $1 + j(\omega/\omega_1)$ و $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_2) + (j\omega/\omega_2)^2]$ با میل ω به صفر (فرکانسهایی بسیار پایین) برابر یک می‌شود، تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\lambda}$$

در بسیاری از سیستمهای عملی، λ برابر ۰، ۱، یا ۲ است.

۱. برای $\lambda = 0$ یا سیستم نوع ۰

$$G(j\omega) = K \quad \omega \ll 1$$

یا

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K \quad \omega \ll 1$$

مجانب فرکانس پایین خطی افقی در $20 \log K$ dB است. مقدار K را می‌توان با توجه به این مجانب افقی به دست آورد.

۲. برای $\lambda = 1$ یا سیستم نوع ۱

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega} \quad \omega \ll 1$$

یا

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \omega \quad \omega \ll 1$$

که می‌گوید مجانب فرکانس پایین دارای شیب -20 dB/dec است. فرکانسی که در آن مجانب فرکانس پایین (یا امتداد آن) خط 0 dB را قطع می‌کند، از لحاظ عددی با K برابر است.

۳. برای $\lambda = 2$ یا سیستم نوع ۲

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2} \quad \omega \ll 1$$

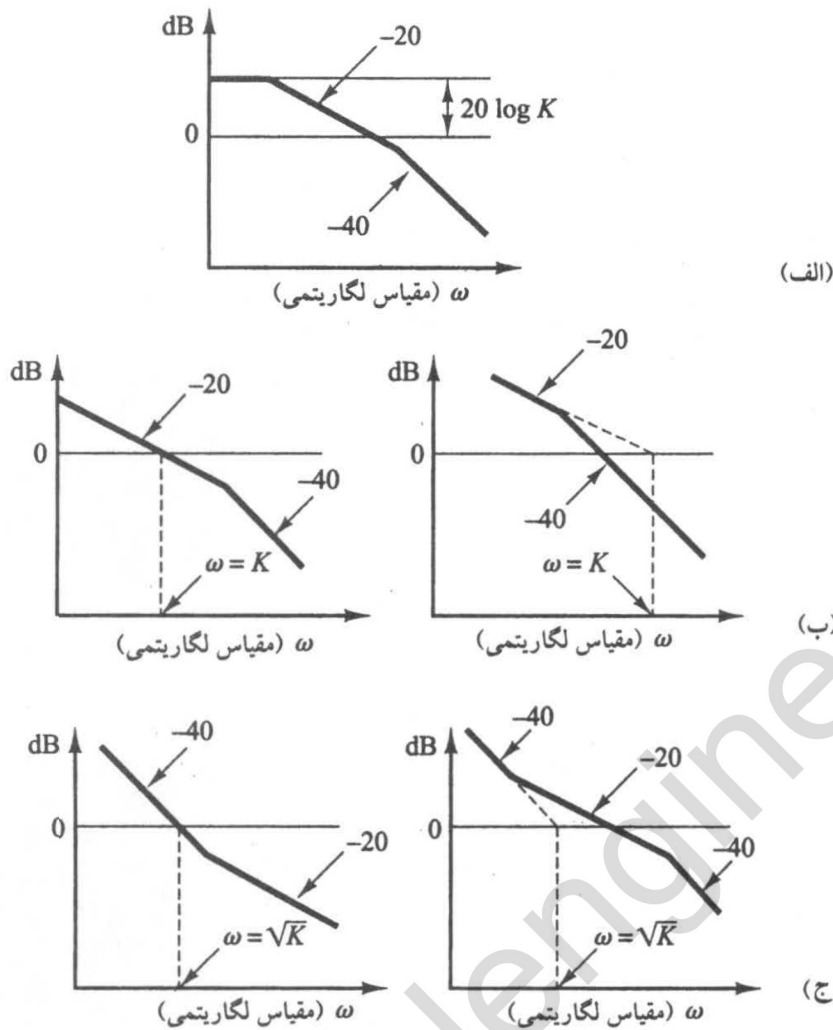
یا

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log K - 40 \log \omega \quad \omega \ll 1$$

شیب مجانب فرکانس پایین -40 dB/dec است. فرکانس محل برخورد این مجانب (یا امتداد آن) و خط 0 dB از لحاظ عددی برابر \sqrt{K} است.

شکل ۷-۸۷ نمونه‌هایی از منحنی لگاریتم دامنه سیستمهای نوع ۰، نوع ۱، و نوع ۲ را نشان می‌دهد، فرکانس مرتبط با بهره K در هر حالت مشخص شده است.

منحنی زاویه فاز به دست آمده از آزمایش امکان امتحان تابع تبدیل به دست آمده از منحنی لگاریتم دامنه را فراهم می‌کند. برای سیستمهای می‌نیم فاز منحنی زاویه فاز تجربی باید تطابق خوبی با منحنی زاویه فاز نظری



شکل ۷-۱۷

(الف) منحنی لگاریتم دامنه
سیستم نوع ۰؛ (ب) منحنی
لگاریتم دامنه سیستم نوع ۱؛
(ج) منحنی لگاریتم دامنه
سیستم نوع ۲. شبیهها
برحسب dB/dec بیان شده است.

تعیین شده توسط تابع تبدیل به دست آمده در بالا داشته باشد. این دو منحنی فاز باید هم در فرکانسهای بالا و هم در فرکانسهای پایین دقیقاً منطبق باشند. اگر زاویه فاز تجربی در فرکانسهای خیلی بالا (در مقایسه با فرکانسهای گوشه‌ای) برابر $(q-p) - 90^\circ$ نباشد، تابع تبدیل باید تابع تبدیل یک سیستم غیرمی نیم فاز باشد؛ p و q به ترتیب درجه چندجمله‌ایهای صورت و مخرج هستند.

توابع تبدیل غیرمی نیم فاز. اگر در فرکانسهای بالا تاخیر فاز محاسبه شده از آنچه به طریق تجربی به دست آمده، 180° کمتر باشد، یکی از صفرهای تابع تبدیل باید در نیمه راست صفحه s باشد نه در نیمه چپ. اگر تفاوت تاخیر فاز تجربی تابعی خطی از فرکانس باشد، در سیستم تاخیر انتقال یا زمان مرده وجود دارد. اگر تابع تبدیل را به صورت زیر فرض کنیم

$$G(s) e^{-Ts}$$

که در آن $G(s)$ نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s است، آنگاه

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} [G(j\omega) e^{-j\omega T}] &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} [G(j\omega) + e^{-j\omega T}] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} [G(j\omega) - \omega T] = 0 - T = -T \end{aligned}$$

که از ثابت بودن زاویه $|G(j\omega)|$ در $\omega \rightarrow \infty$ استفاده کرده‌ایم. پس با توجه به این معادله می‌توانیم اندازه تأخیر انتقالی T را بیابیم.

چند تذکره راجع به یافتن تجربی تابع تبدیل

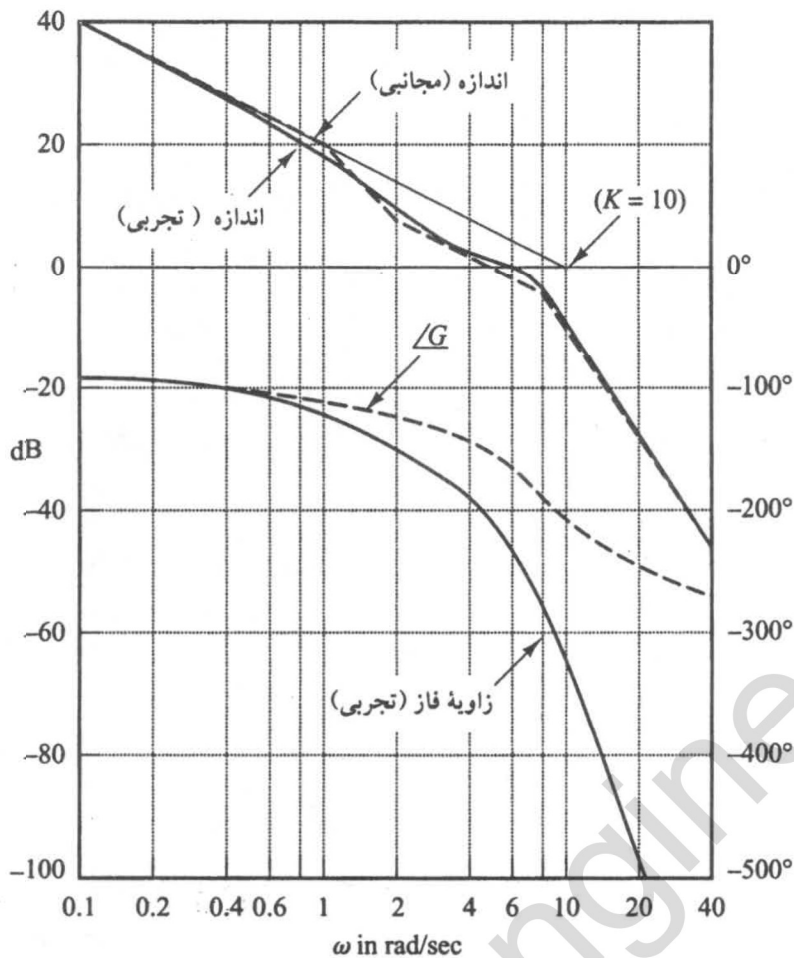
۱. معمولاً اندازه‌گیری دقیق دامنه از اندازه‌گیری دقیق فاز ساده‌تر است. اندازه‌گیری جابه‌جایی فاز خطاهایی ناشی از ابزارها یا سوء تعبیر نتایج آزمایشها را دربر دارد.
۲. منحنی دامنه برحسب فرکانس ابزارهای به کار رفته برای اندازه‌گیری خروجی باید هموار باشد. به علاوه زاویه فاز آن نیز باید با فرکانس متناسب باشد.
۳. سیستمهای فیزیکی چند نوع اثر غیرخطی دارند. بنابراین لازم است دامنه سیگنال ورودی سینوسی به دقت زیر نظر گرفته شود. اگر دامنه سیگنال ورودی از حدی بزرگتر باشد، سیستم اشباع می‌شود و آزمایش پاسخ فرکانسی نتایج غیردقیقی به دست می‌دهد. دامنه‌های کوچک نیز خطای ناشی از ناحیه مرده را به همراه دارد. بنابراین دامنه سیگنال سینوسی باید به دقت انتخاب شود. باید شکل موج خروجی سیستم به دقت سنجیده شود تا از سینوسی بودن آن و عمل کردن سیستم در ناحیه خطی مطمئن شویم. (در صورتی که سیستم در ناحیه غیرخطی کار کند، شکل موج خروجی سینوسی نیست).
۴. اگر سیستم مورد نظر روزها و هفته‌ها پیوسته کار می‌کند، برای آزمونهای پاسخ فرکانسی لازم نیست عمل عادی سیستم را متوقف کرد. می‌توان سیگنال سینوسی آزمون را با ورودی عادی سیستم جمع کرد. برای تعیین تابع تبدیل سیستم در حین کار عادی، گاهی اوقات از سیگنالهای آماری (سیگنال نویز سفید) استفاده می‌شود. با استفاده از توابع همبستگی می‌توان تابع تبدیل سیستم را بدون قطع کار عادی آن تعیین کرد.

مثال ۷-۲۵ تابع تبدیل سیستمی را که منحنیهای پاسخ فرکانسی تجربی آن به صورت شکل ۷-۸۸ است، بیابید.

گام اول تعیین تابع تبدیل، تقریب زدن منحنی لگاریتم دامنه با مجانبهای دارای شیب ± 20 dB/dec و مضارب آن است. به این ترتیب منحنیهای خط چین شکل ۷-۸۸ به دست می‌آید. سپس فرکانسهای گوشه‌ای را تخمین می‌زنیم. برای سیستم شکل ۷-۸۸ می‌توان تابع تبدیلی به شکل زیر پیشنهاد کرد

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega) \left[1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\lambda} \right) + \left(j\frac{\omega}{\lambda} \right)^2 \right]}$$

نسبت میرایی ζ با بررسی قله تشدید در حوالی $\omega = 6$ rad/sec تعیین می‌شود. با توجه به شکل ۷-۹ به دست می‌آوریم $\zeta = 0.5$. بهره K از لحاظ عددی با فرکانس محل برخورد مجانب فرکانس پایین و خط 0 dB برابر



شکل ۷-۸۸
 نمودار بوده یک سیستم
 (منحنیهای ممتد به صورت
 تجربی تعیین شده‌اند).

است. مقدار K را برابر ۱۰ به دست می‌آوریم. پس $G(j\omega)$ فرضی عبارت است از

$$G(j\omega) = \frac{10(1 + 0.5j\omega)}{j\omega(1 + j\omega) \left[1 + \left(\frac{j\omega}{8} \right) + \left(\frac{j\omega}{8} \right)^2 \right]}$$

$$G(s) = \frac{320(s+2)}{s(s+1)(s^2 + 8s + 64)}$$

یا

این تابع تبدیل را فرضی نامیدیم، زیرا هنوز منحنی فاز را بررسی نکرده‌ایم.

پس از تعیین فرکانسهای گوشه‌ای می‌توان منحنی زاویه فاز مربوط به هر عامل تبدیل را به سادگی رسم کرد. با جمع کردن منحنی‌هایی که به این ترتیب به دست می‌آید. منحنی زاویه فاز کل تابع تبدیل حاصل می‌شود. منحنی زاویه فاز در $G(j\omega)$ شکل ۷-۸۸ با $|G|$ مشخص شده است. شکل ۷-۸۸ به وضوح اختلاف منحنی فاز محاسبه شده و منحنی فاز تجربی را نشان می‌دهد. در فرکانسهای بالا اختلاف دو منحنی خطی با شیب ثابت است. پس این اختلاف می‌تواند از تاخیر انتقال ناشی شده باشد.

پس تابع تبدیل کامل را به صورت $G(s)e^{-Ts}$ فرض می‌کنیم. اختلاف دو منحنی در فرکانسهای بالا -0.2ω است. بنابراین مقدار T به صورت زیر تعیین می‌شود

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} |G(j\omega) e^{-j\omega T}| = -T = -0.2$$

$$T = 0.2 \text{ sec}$$

به این ترتیب وجود تاخیر انتقالی ثابت شده و تابع تبدیل کامل به دست آمده برای منحنی‌های تجربی به صورت زیر تعیین می‌شود

$$G(s)e^{-Ts} = \frac{320(s+2)e^{-0.2s}}{s(s+1)(s^2+8s+64)}$$

۱۰-۷ طراحی سیستم کنترل

با استفاده از رهیافت پاسخ فرکانسی

در فصل ۶ تحلیل و طراحی به روش مکان هندسی ریشه‌ها را بیان کردیم. نشان دادیم که روش مکان هندسی ریشه‌ها برای بازسازی ویژگی‌های پاسخ گذرای سیستم حلقه بسته بسیار مفید است. رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها مستقیماً اطلاعات مربوط به پاسخ گذرای سیستم حلقه بسته را به ما می‌دهد. ولی رهیافت پاسخ فرکانسی این اطلاعات را به صورت غیرمستقیم به دست می‌دهد. ولی چنانچه در این فصل خواهیم دید رهیافت پاسخ فرکانسی برای طراحی سیستمهای کنترل بسیار مفید است.

در بسیاری از مسائل طراحی، مهندس طراح باید هر دو رهیافت طراحی را به کار برد، و جبرانسازی را برگزیند که پاسخ حلقه بسته مطلوب را دقیقتر به دست می‌دهد.

در طراحی سیستم کنترل عملکرد حوزه زمان معمولاً مهمترین عملکرد است. در رهیافت پاسخ فرکانسی عملکرد پاسخ گذرا را به نحوی غیرمستقیم مشخص می‌کنیم. در این رهیافت عملکرد پاسخ گذرا برحسب حاشیه فاز، حاشیه بهره، دامنه قلّه تشدید (که تقریبی از میرایی سیستم به دست می‌دهند)؛ و ثابتهای خطای ماندگار (که دقت حالت ماندگار را تعیین می‌کنند) بیان می‌شود. گرچه همبستگی پاسخ گذرا و پاسخ فرکانسی یک همبستگی غیرمستقیم است، ولی با استفاده از نمودار بوده به راحتی می‌توان به مشخصات پاسخ فرکانسی مطلوب دست یافت.

پس از طراحی سیستم حلقه باز می‌توان قطبها و صفرهای حلقه بسته را تعیین کرد. مشخصات پاسخ گذرا باید بررسی شود تا معلوم شود سیستم طراحی شده خواسته‌های حوزه زمان را برآورده می‌کند یا نه. در صورت برآورده نشدن خواسته‌ها باید اصلاحاتی به عمل آورد و تحلیل را تکرار کرد تا نتایج مطلوب به دست آید.

طراحی در حوزه فرکانس ساده و سرراست است. نمودار پاسخ فرکانسی به روشنی نشان می‌دهد که سیستم چگونه باید اصلاح شود، هر چند پیش‌بینی دقیق کمی مشخصات پاسخ گذرا ممکن نیست. رهیافت پاسخ فرکانسی را می‌توان به سیستمها یا اجزایی که مشخصات دینامیکی‌شان به صورت اطلاعات پاسخ فرکانسی داده شده است، اعمال کرد. به خاطر سختی یافتن معادلات حاکم بر بعضی عناصر مانند عناصر نیوماتیکی و هیدرولیکی، مشخصات دینامیکی این عناصر معمولاً به صورت تجربی با آزمایشهای پاسخ فرکانسی تعیین می‌شود. با استفاده از نمودار بوده می‌توان نمودارهای پاسخ فرکانسی به دست آمده از آزمایش را به آسانی با

دیگر نمودارهای پاسخ فرکانسی ترکیب کرد. همچنین توجه کنید که رهیافت پاسخ فرکانسی برای بررسی نویزهای فرکانس بالا از هر رهیافت دیگری کارآمدتر است.

طراحی در حوزه فرکانس دو روش اساسی دارد، یکی روش نمودار قطبی و یکی روش نمودار بوده. با افزودن جبران ساز نمودار قطبی تغییر شکل می دهد و باید نمودار دیگری رسم شود، این کار وقت گیر است و بنابراین مناسب نیست. ولی نمودار بوده جبران ساز را می توان به سادگی با نمودار بوده اصلی جمع کرد، و ترسیم نمودار بوده کامل کاری ساده است. همچنین با تغییر بهره حلقه باز منحنی دامنه به سمت بالا یا پایین جابه جا می شود و شیبهای منحنی تغییر نمی کند، منحنی فاز نیز بدون تغییر می ماند. بنابراین در مقاصد طراحی کار با نمودار بوده بهتر است.

روش متداول طراحی بر اساس نمودار بوده این است که ابتدا بهره حلقه باز تنظیم شود تا سیستم به دقت حالت ماندگار مطلوب برسد. سپس منحنیهای دامنه و فاز حلقه باز جبران نشده (به ازای بهره حلقه باز تنظیم شده) رسم می شود. اگر مشخصات حاشیه فاز و حاشیه بهره ارضا نمی شود، باید جبران ساز مناسبی برای تغییر شکل تابع تبدیل حلقه باز تعیین شود. سرانجام اگر خواسته های دیگری باید برآورده شود، سعی در ارضای آن خواهد شد، مگر این که بین خواسته ها تناقض وجود داشته باشد.

اطلاعات قابل دستیابی از پاسخ فرکانسی حلقه باز. ناحیه فرکانس پایین (ناحیه بسیار پایین تر از فرکانس عبور بهره) رفتار حالت ماندگار سیستم حلقه بسته را تعیین می کند. ناحیه فرکانس میانی (ناحیه نزدیک نقطه $j\omega = -1$) پایداری نسبی را مشخص می کند. ناحیه فرکانس بالا (بسیار بالاتر از فرکانس عبور بهره) میزان پیچیدگی سیستم را نشان می دهد.

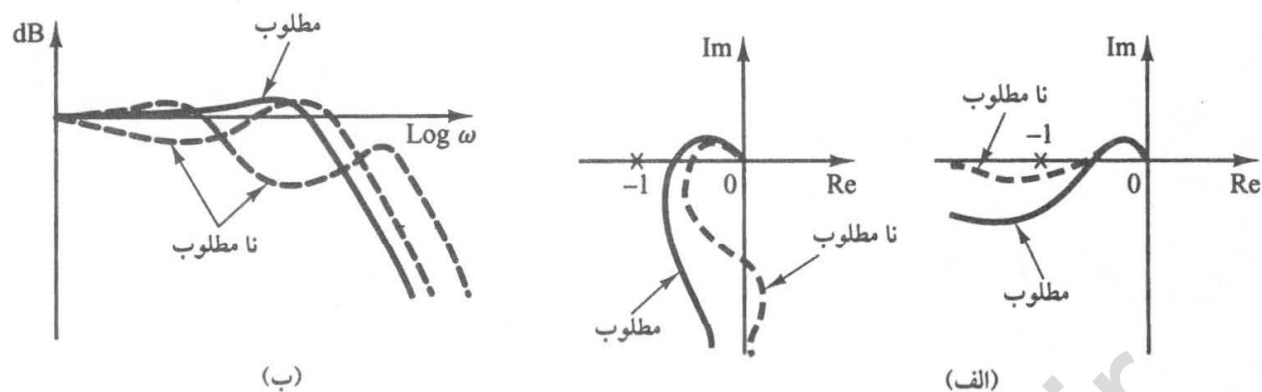
خصوصیات لازم پاسخ فرکانسی حلقه باز. می توانیم بگوییم که در بسیاری از موارد عملی جبران سازی اساساً چیزی نیست جز مصالحه ای بین دقت حالت ماندگار و پایداری نسبی.

برای این که ثابت خطای سرعت بزرگ و پایداری نسبی رضایتبخش باشد، باید منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز را تغییر شکل دهیم.

بهره در ناحیه فرکانس پایین باید به حد کافی بزرگ باشد. همچنین نزدیک فرکانس عبور بهره شیب منحنی لگاریتم دامنه نمودار بوده باید -20 dB/dec باشد. این شیب باید در باند فرکانسی پهنی وجود داشته باشد تا حاشیه فاز مناسبی را تضمین کند. در ناحیه فرکانس بالا بهره باید به سرعت تضعیف شود تا اثرات نویز می نیم شود.

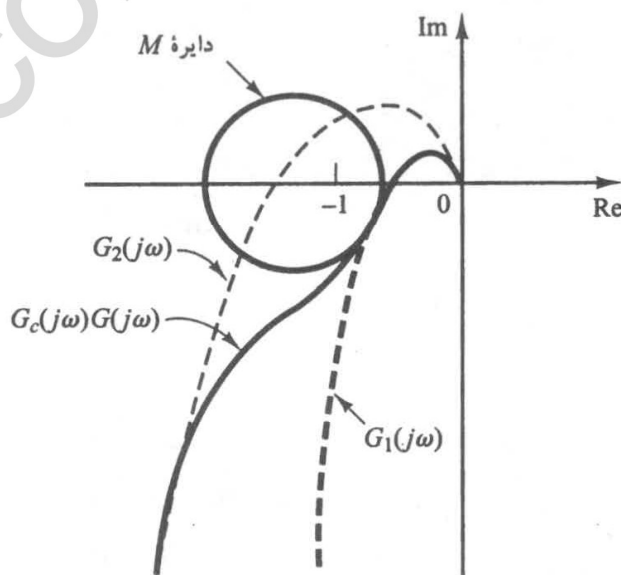
شکل ۷-۸۹ نمونه هایی از منحنی های پاسخ فرکانسی مطلوب و نامطلوب حلقه باز و حلقه بسته را نشان می دهد.

با توجه به شکل ۷-۹۰ نشان می دهیم که اگر بخواهیم بخش فرکانس بالای پاسخ فرکانسی همانند مکان هندسی $G_1(j\omega)$ و بخش پایینی آن همانند مکان هندسی $G_2(j\omega)$ باشد، منحنی پاسخ فرکانسی حلقه باز باید تغییر شکل یابد. مکان هندسی تغییر شکل یافته $G_c(j\omega)G(j\omega)$ می تواند حاشیه فاز و حاشیه بهره معقولی داشته؛ مطابق شکل بر دایره M مناسبی مماس باشد.



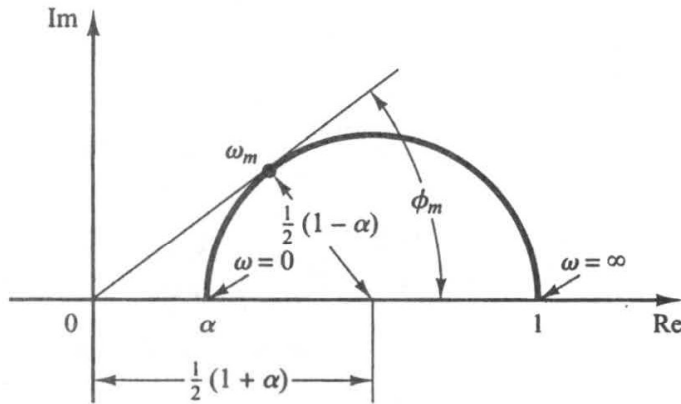
شکل ۷-۱۹ (الف) نمونه‌های از منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه باز مطلوب و نامطلوب؛ (ب) نمونه‌هایی از منحنی‌های پاسخ فرکانسی حلقه بسته مطلوب و نامطلوب.

مشخصات پایه‌ای جبران‌سازی پیشفاز، پسفاز و پسفاز - پیشفاز. جبران‌سازی پیشفاز اساساً بهبود قابل ملاحظه‌ای در پاسخ گذرا ایجاد می‌کند و بر دقت حالت ماندگار تأثیر اندکی دارد. این جبران‌سازی ممکن است به تقویت نویز فرکانس بالا منجر شود. برعکس، جبران‌سازی پسفاز بهبود قابل ملاحظه‌ای در دقت حالت ماندگار ایجاد می‌کند، البته به قیمت زیاد شدن زمان پاسخ گذرا. جبران‌سازی پسفاز سیگنالهای نویزی فرکانس بالا را تضعیف می‌کند و جبران‌سازی پسفاز - پیشفاز ترکیبی از مشخصات این دو نوع جبران‌ساز را داراست. استفاده از جبران‌ساز پسفاز یا پیشفاز باعث می‌شود که مرتبه سیستم یک واحد زیاد شود (مگر این که صفر جبران‌ساز یکی از قطبهای تابع تبدیل حلقه باز جبران نشده را حذف کند). کاربرد جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز به مرتبه سیستم دو واحد می‌افزاید (مگر این که بین صفر یا صفرهای جبران‌ساز و قطب یا قطبهای تابع تبدیل جبران نشده حذفی صورت بگیرد)، یعنی پیچیدگی سیستم بیشتر و کنترل رفتار پاسخ گذرای سیستم مشکلتر می‌شود. هر وضعیت خاصی جبران‌ساز مورد نیاز خود را می‌طلبد.



شکل ۷-۹۰

شکلدهی پاسخ فرکانسی حلقه باز.



شکل ۷-۹۱

نمودار قطبی جبرانساز پیشفاز

$$\alpha(j\omega T + 1) / (j\omega\alpha T + 1)$$

 با $0 < \alpha < 1$

۷-۱۱ جبرانسازی پیشفاز

ابتدا مشخصات فرکانسی جبرانساز پیشفاز را بررسی می‌کنیم. سپس یک روش طراحی جبرانساز پیشفاز براساس نمودار بوده را توضیح می‌دهیم.

مشخصات جبرانسازی پیشفاز. جبرانساز پیشفازی با تابع تبدیل زیر در نظر بگیرید

$$K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1)$$

α ضریب تضعیف جبرانساز نامیده می‌شود. این جبرانساز صفری در $s = -1/T$ و قطبی $s = -1/(\alpha T)$ دارد. چون $0 < \alpha < 1$ ، صفر در صفحه مختلط، سمت راست قطب قرار دارد. اگر α کوچک باشد، قطب از مبدأ خیلی دور می‌شود. مقدار می‌نیم α را ساختمان فیزیکی جبرانساز پیشفاز محدود می‌کند. این مقدار می‌نیم معمولاً حدود ۰/۰۵ گرفته می‌شود. (یعنی ماکزیمم پیشفازی حاصل از این جبرانسازی حدود 65° است.) [معادله (۷-۲۵) را ببینید]

شکل ۷-۹۱ نمودار قطبی تابع تبدیل زیر را به ازای $K_c = 1$ نشان می‌دهد

$$K_c \alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega\alpha T + 1} \quad (0 < \alpha < 1)$$

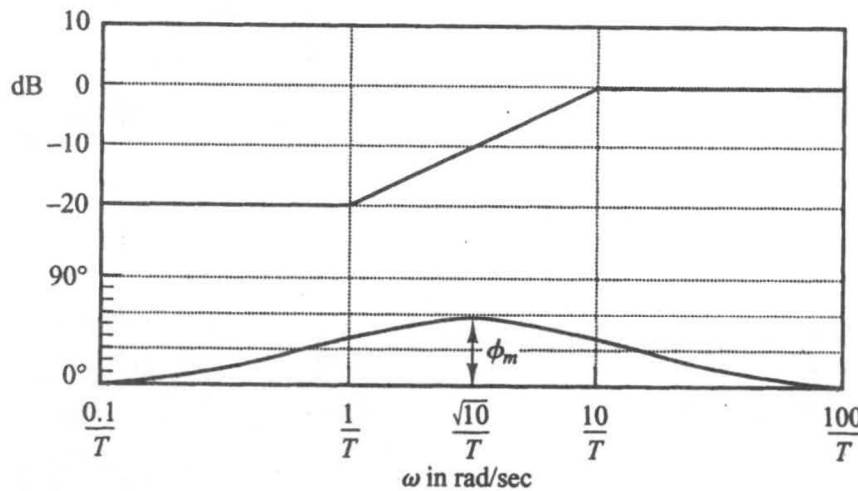
به ازای α معین، زاویه بین بخش مثبت محور حقیقی و خط مماسی که از مبدأ به نیمدایره رسم می‌شود ماکزیمم پیشفازی ϕ_m را تعیین می‌کند. فرکانس محل نقطه تماس را ω_m می‌نامیم. با توجه به شکل ۷-۹۱ زاویه فاز در $\omega = \omega_m$ برابر ϕ_m است و

$$\sin \phi_m = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (۷-۲۵)$$

معادله (۷-۲۵) ماکزیمم زاویه پیشفازی را به α مرتبط می‌کند.

شکل ۷-۹۲ نمودار بوده جبرانساز پیشفاز را به ازای $K_c = 1$ و $\alpha = 0/1$ نشان می‌دهد. فرکانسهای گوشه‌ای

جبرانساز پیشفاز $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/(\alpha T) = 10/T$ است. با بررسی شکل ۷-۹۲ درمی‌یابیم که ω_m واسطه



شکل ۹۲-۷

نمودار بوده جبرانساز پیشفاز
 $\alpha(j\omega T + 1) / (j\omega\alpha T + 1)$
 با $\alpha = 0.1$.

هندسی دو فرکانس گوشه‌ای است، یا

$$\log \omega_m = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{T} + \log \frac{1}{\alpha T} \right)$$

پس

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T} \quad (۲۶-۷)$$

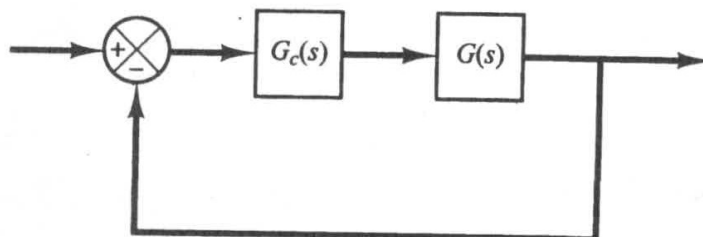
چنانچه شکل ۹۲-۷ نشان می‌دهد جبرانساز پیشفاز اساساً یک فیلتر بالاگذر است. (فرکانسهای بالا عبور داده شده، فرکانسهای پایین تضعیف می‌شوند).

روشهای جبرانسازی پیشفاز براساس رهیافت پاسخ فرکانسی. کار اصلی جبرانساز پیشفاز تغییر شکل دادن منحنی پاسخ فرکانسی است، به نحوی که زاویه پیشفازی لازم برای جبران پهنای اضافی ایجاد شده توسط سیستم اصلی ایجاد شود.

سیستم شکل ۹۳-۷ را در نظر بگیرید. فرض کنید خواسته‌ها برحسب حاشیه فاز، حاشیه بهره، ثابت خطای ایستای سرعت و غیره داده شده است. روند طراحی جبرانساز پیشفاز با رهیافت پاسخ فرکانسی از این قرار است:

۱. جبرانساز پیشفاز زیر را در نظر بگیرید:

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (0 < \alpha < 1)$$



شکل ۹۳-۷

سیستم کنترل.

فرض کنید

$$K_c \alpha = K$$

پس

$$G_c(s) = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده به صورت زیر درمی آید

$$G_c(s)G(s) = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} KG(s) = \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G_1(s)$$

که در آن

$$G_1(s) = KG(s)$$

بهره K را به نحوی تعیین می کنیم که خواسته هایمان در مورد ثابت خطای ایستا برآورده شود.

۲. با استفاده از K به دست آمده نمودار بوده $G_1(j\omega)$ ، یعنی سیستم جبران نشده ولی دارای بهره تنظیم شده، را رسم می کنیم. حاشیه فاز را تعیین می کنیم.

۳. زاویه پیشفازی لازم ϕ برای افزودن به سیستم را تعیین می کنیم. 5° تا 12° به زاویه پیشفازی لازم بیفزایید، زیرا با گذاشتن جبران ساز پیشفاز فرکانس عبور بهره به سمت راست می رود و حاشیه فاز کم می شود.

۴. با استفاده از معادله (۷-۲۵) ضریب تضعیف α را به دست می آوریم. فرکانسی را که در آن دامنه سیستم جبران نشده $G_1(j\omega)$ برابر $20 \log(1/\sqrt{\alpha})$ است می یابیم. این فرکانس را به عنوان فرکانس عبور بهره جدید برمی گزینیم. این فرکانس با $\omega_m = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ متناظرست و ماکزیمم زاویه فاز ϕ_m در آن رخ می دهد.

۵. فرکانسهای گوشه ای جبران ساز را به صورت زیر تعیین می کنیم:

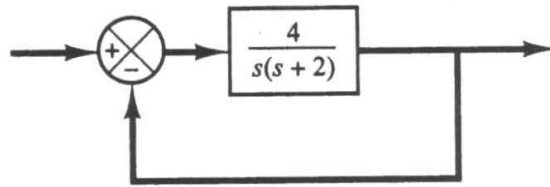
$$\omega = \frac{1}{T} \quad \text{صفر جبران ساز پیشفاز:}$$

$$\omega = \frac{1}{\alpha T} \quad \text{قطب جبران ساز پیشفاز:}$$

۶. با استفاده از K به دست آمده در گام ۱ و α به دست آمده در گام ۴ ثابت K_c را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$K_c = \frac{K}{\alpha}$$

۷. حاشیه بهره را بررسی می کنیم تا از رضایتبخش بودن آن اطمینان حاصل کنیم. اگر چنین نبود فرایند طراحی را با اصلاح محل صفرها و قطبها تکرار می کنیم تا نتایج دلخواه حاصل شود.



شکل ۷-۹۴
سیستم کنترل.

سیستم شکل ۷-۹۴ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

مثال ۷-۲۶

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

می‌خواهیم جبرانسازی طرح کنیم تا ثابت خطای ایستای سرعت $K_v = 20 \text{ sec}^{-1}$ ، حاشیهٔ فاز حداقل 5° ، و حاشیهٔ بهره حداقل 10 dB باشد.

یک جبران‌ساز پیشفاز به شکل زیر به کار می‌بریم

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده $G_c(s)G(s)$ است. عبارت زیر را تعریف می‌کنیم

$$G_1(s) = K G(s) = \frac{4K}{s(s+2)}$$

که در آن $K = K_c \alpha$.

گام اول طراحی تنظیم بهرهٔ K برای دستیابی به عملکرد حالت ماندگار مناسب است، در اینجا باید ثابت خطای ایستای سرعت به 20 sec^{-1} برسد، پس

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4sK}{s(s+2)} = 2K = 20$$

یا

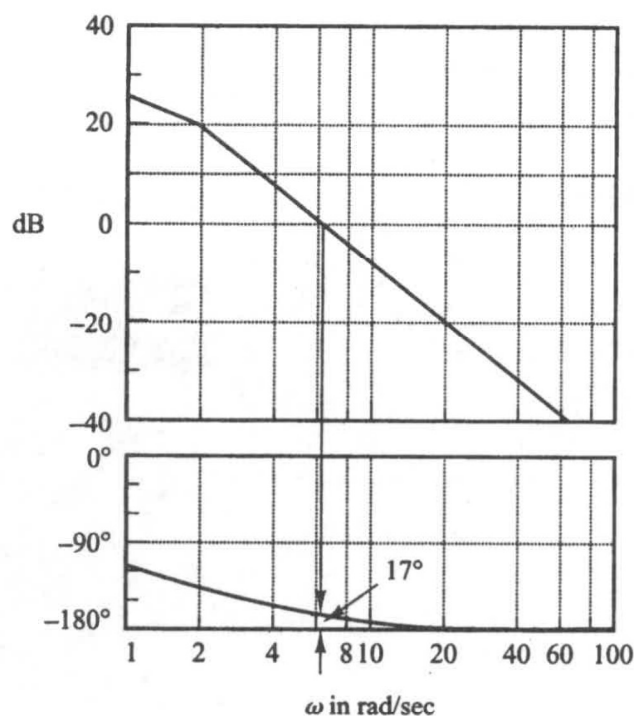
$$K = 10$$

به ازای $K = 10$ سیستم جبران شده خواسته‌های حالت ماندگار را برآورده می‌کند.

حال نمودار بوده تابع زیر را رسم می‌کنیم

$$G_1(j\omega) = \frac{40}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega+1)}$$

شکل ۷-۹۵ منحنی‌های دامنه و فاز $G_1(j\omega)$ را نشان می‌دهد. این نمودار حاشیهٔ فاز و حاشیهٔ بهرهٔ سیستم را به ترتیب 17° و $+\infty \text{ dB}$ به دست می‌دهد. (حاشیهٔ فاز 17° خبر از سیستمی کاملاً نوسانی می‌دهد. بنابراین برآورده شدن خواستهٔ مربوط به حالت ماندگار عملکرد پاسخ گذرای نامطلوبی به همراه داشته است.) حداقل



شکل ۷-۹۵

نمودار بوده

$$G_1(j\omega) = 10G(j\omega) = 40 / [j\omega(j\omega + 2)]$$

حاشیه فاز خواسته شده 5° است. بنابراین پیشفازی لازم برای برآورده شدن پایداری نسبی خواسته شده 33° است. برای نیل به حاشیه فاز 5° بدون کاهش K ، جبران ساز پیشفاز باید زاویه خواسته شده را فراهم کند. با توجه به این نکته که جبران ساز پیشفاز منحنی دامنه را تغییر می دهد، درمی یابیم که فرکانس عبور بهره به سمت راست جابه جا می شود. باید تاخیر فاز اضافی $G_1(j\omega)$ ناشی از افزایش فرکانس عبور بهره نیز خنثی شود. با در نظر گرفتن این موضوع ϕ_m ، ماکزیمم زاویه پیشفاز، را تقریباً 38° فرض می کنیم. (یعنی برای خنثی کردن اثر جابه جا شدن فرکانس عبور بهره 5° به زاویه لازم افزوده ایم).

چون

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

$\phi_m = 38^\circ$ با $\alpha = 0.24$ متناظر است. پس از تعیین ضریب تضعیف α براساس پیشفازی لازم، به گام بعدی یعنی تعیین فرکانسهای گوشه ای $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/(\alpha T)$ جبران ساز پیشفاز می رسیم. به این منظور ابتدا توجه می کنیم که ماکزیمم پیشفازی ϕ_m در واسطه هندسی دو فرکانس گوشه ای، یا $\omega = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ رخ می دهد. [معادله (۷-۲۶) را ببینید.] میزان تغییر بهره در فرکانس $\omega = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ ناشی از جمله $(Ts + 1)/(\alpha Ts + 1)$ عبارت است از

$$\left| \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} \right|_{\omega = 1/(\sqrt{\alpha} T)} = \left| \frac{1 + j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + j\alpha\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

پس چون

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.24}} = \frac{1}{0.49} = 6.2 \text{ dB}$$

و $|G_1(j\omega)| = -6.2 \text{ dB}$ با $\omega = 9 \text{ rad/s}$ متناظر است، این فرکانس را به عنوان فرکانس جدید عبور بهره ω_c برمی‌گزینیم. این فرکانس با $\omega_c = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ متناظر است. پس به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha} \omega_c = 4.41$$

و

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = 18.4$$

پس جبرانسازی پیشفاز به صورت زیر تعیین می‌شود

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 4.41}{s + 18.4} = K_c \alpha \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1}$$

که در آن

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{10}{0.24} = 41.7$$

یعنی تابع تبدیل جبرانسازی عبارت است از

$$G_c(s) = 41.7 \frac{s + 4.41}{s + 18.4} = 10 \frac{0.227s + 1}{0.054s + 1}$$

توجه کنید که

$$\frac{G_c(s)}{K} G_1(s) = \frac{G_c(s)}{10} 10 G(s) = G_c(s) G(s)$$

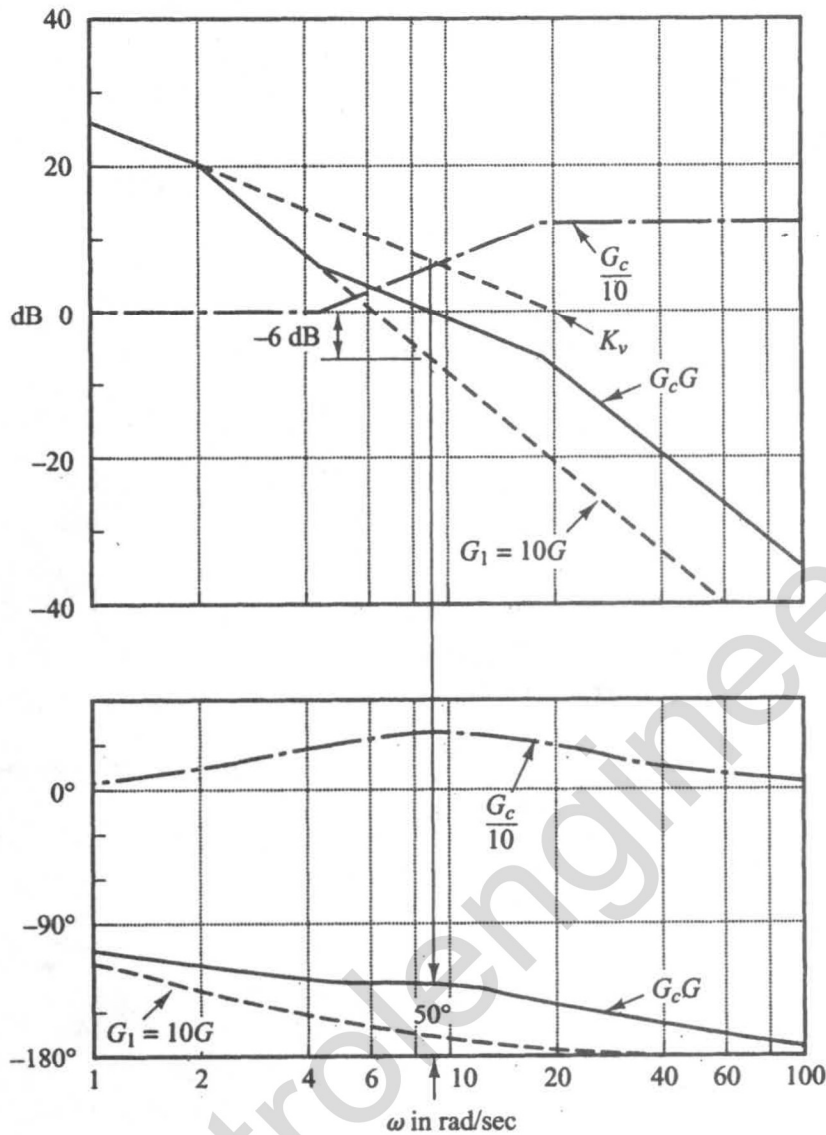
منحنی‌های دامنه و فاز $G_c(j\omega)/10$ در شکل ۷-۹۶ نشان داده شده است. سیستم جبران شده دارای تابع تبدیل زیر است:

$$G_c(s) G(s) = 41.7 \frac{s + 4.41}{s + 18.4} \frac{4}{s(s+2)}$$

منحنی‌های ممتد شکل ۷-۹۶ منحنی‌های دامنه و فاز سیستم جبران شده هستند. جبرانسازی پیشفاز فرکانس عبور بهره را از 6.3 rad/s به 9 rad/s می‌رساند. افزایش این فرکانس به معنی افزایش پهنای باند و افزایش پهنای باند به معنی افزایش سرعت پاسخ است. می‌بینیم که حاشیه فاز تقریباً 5° و حاشیه بهره $+\infty$ است. بنابراین سیستم جبران شده شکل ۷-۹۷ خواسته‌های حالت ماندگار و پایداری نسبی را برآورده می‌کند.

دقت کنید که برای سیستمهای نوع ۱، مانند سیستم در نظر گرفته شده، ثابت خطای ایستای سرعت K_v از لحاظ مقدار چیزی جز محل برخورد امتداد خط با شیب -20 dB/dec اولیه و محور 0 dB ، به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۹۶ نیست. همچنین توجه کنید که شیب منحنی دامنه را در حوالی فرکانس عبور بهره از -40 dB/dec به -20 dB/dec تغییر داده‌ایم.

شکل ۷-۹۸ نمودارهای قطبی سیستم جبران نشده، که بهره‌اش تنظیم نشده، یعنی $G_1(j\omega) = 10 G(j\omega)$ ، و سیستم جبران شده $G_c(j\omega) G(j\omega)$ را نشان می‌دهد. از شکل ۷-۹۸ می‌بینیم که فرکانس تشدید سیستم



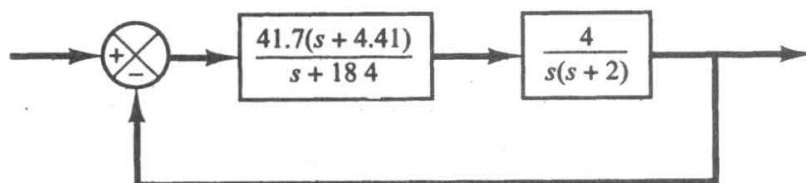
شکل ۷-۹۶

نمودار بوده سیستم جبران شده.

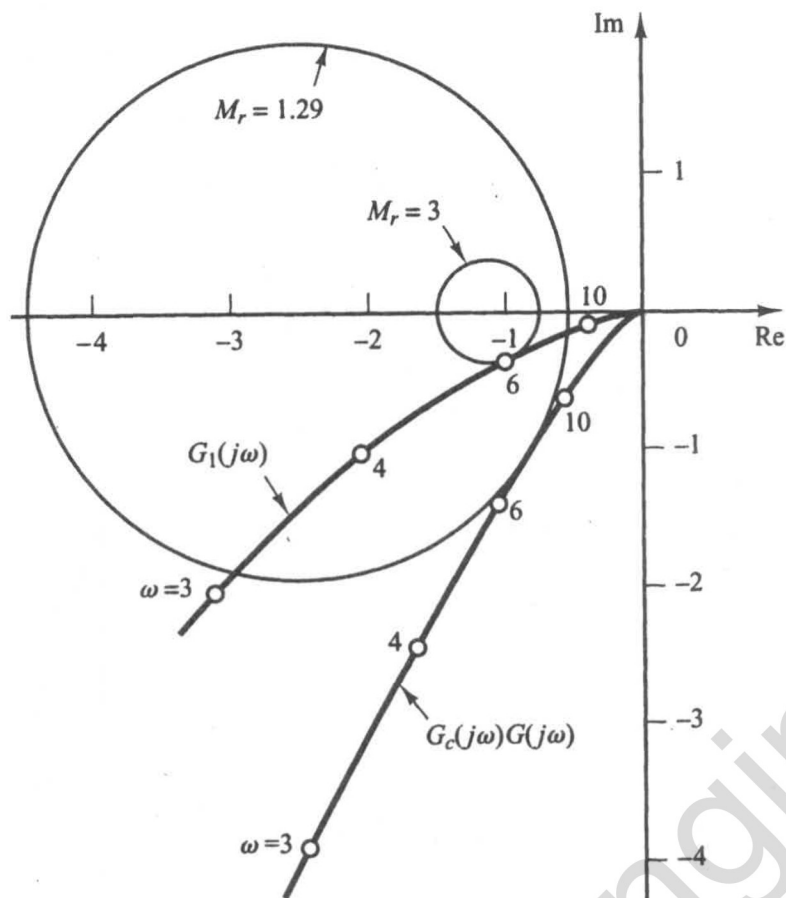
جبران نشده حدود ۶ rad/s و از آن سیستم جبران شده حدود ۷ rad/s است. (این هم نشانه دیگری از افزایش پهنای باند است).

از شکل ۷-۹۸ درمی یابیم که دامنه تشدید M_r برای سیستم جبران نشده به ازای $K=10$ برابر ۳ است. مقدار M_r سیستم جبران شده حدود ۱/۲۹ است. این مطلب به وضوح بهبود پایداری نسبی سیستم جبران شده را نشان می دهد.

اگر زاویه فاز $G_1(j\omega)$ در نزدیکی فرکانس عبور بهره به شدت کم شود، جبران سازی پیش فاز چاره ساز نیست، زیرا جابه جایی فرکانس عبور بهره به سمت راست فراهم سازی لازم در فرکانس عبور بهره



شکل ۷-۹۷ سیستم جبران شده.



شکل ۷-۹۸
نمودارهای قطبی تابع تبدیل
حلقه باز جبران نشده و جبران شده
(G_1): جبران نشده؛
($G_c G$): سیستم جبران شده).

جدید را مشکل می‌کند. یعنی برای رسیدن به حاشیه فاز مطلوب باید α را بسیار کوچک بگیریم. ولی نه مقدار α می‌تواند خیلی کوچک شود (کوچکتر از ۰/۰۵) نه ماکزیمم پیشفازی ϕ_m می‌تواند خیلی بزرگ باشد (بزرگتر از ۶۵°) زیرا برای رسیدن به این مقادیر بهره اضافی خیلی بزرگ می‌شود. [در صورت نیاز به پیشفازی بزرگتر از ۶۵° باید دو (یا تعدادی بیشتر) شبکه پیشفاز را با استفاده از تقویت کننده جداساز سری کرد].

سرانجام به واریسی مشخصات پاسخ گذرای سیستم طرح شده می‌پردازیم. منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب سیستمهای جبران نشده و جبران شده را با MATLAB به دست می‌آوریم. توابع تبدیل حلقه بسته سیستمهای جبران نشده و جبران شده به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

و

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{166,8s + 735,588}{s^3 + 20,4s^2 + 203,6s + 735,588}$$

برنامه ۷-۱۳ MATLAB برای یافتن منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب است. شکل ۷-۹۹ منحنی‌های پاسخ پله و شکل ۷-۱۰۰ منحنی‌های پاسخ شیب را نشان می‌دهند. این منحنی‌ها نشان می‌دهند که سیستم طراحی شده عملکردی رضایتبخش دارد.

MATLAB Program 7-13

```

%*****Unit-step responses*****

num = [4];
den = [1 2 4];
numc = [166.8 735.588];
denc = [1 20.4 203.6 735.588];
t = 0:0.02:6;
[c1,x1,t] = step(num,den,t);
[c2,x2,t] = step(numc,denc,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'-')
grid
title('Unit-Step Responses of Compensated and Uncompensated Systems')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs')
text(0.4,1.31,'Compensated system')
text(1.55,0.88,'Uncompensated system')

%*****Unit-ramp responses*****

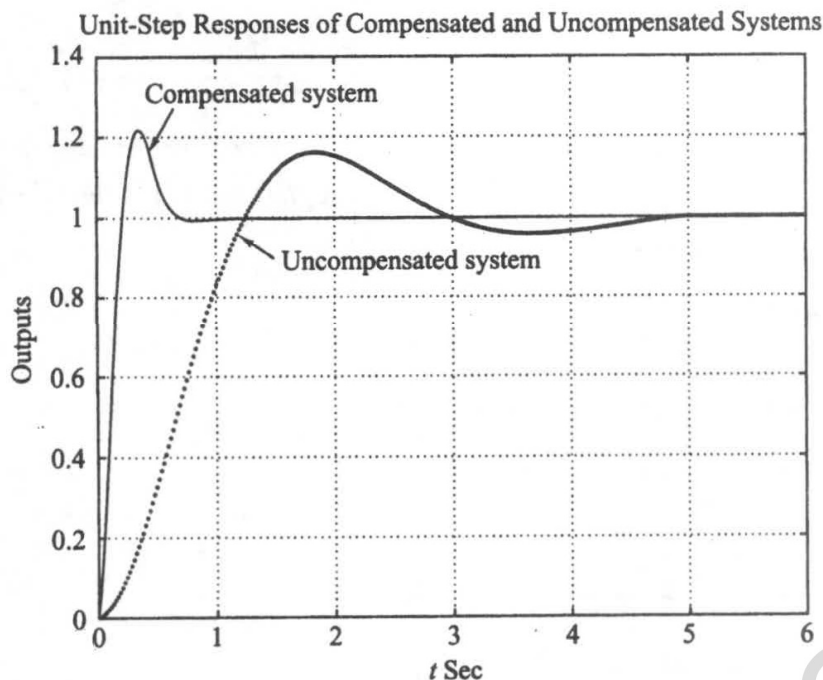
num1 = [4];
den1 = [1 2 4 0];
num1c = [166.8 735.588];
den1c = [1 20.4 203.6 735.588 0];
t = 0:0.02:5;
[y1,z1,t] = step(num1,den1,t);
[y2,z2,t] = step(num1c,den1c,t);
plot(t,y1,'-',t,y2,'-',t,t,'--')
grid
title('Unit-Ramp Responses of Compensated and Uncompensated Systems')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs')
text(0.89,3.7,'Compensated system')
text(2.25,1.1,'Uncompensated system')

```

خاطر نشان می‌کنیم که قطبهای حلقه بسته سیستم جبران شده عبارت‌اند از:

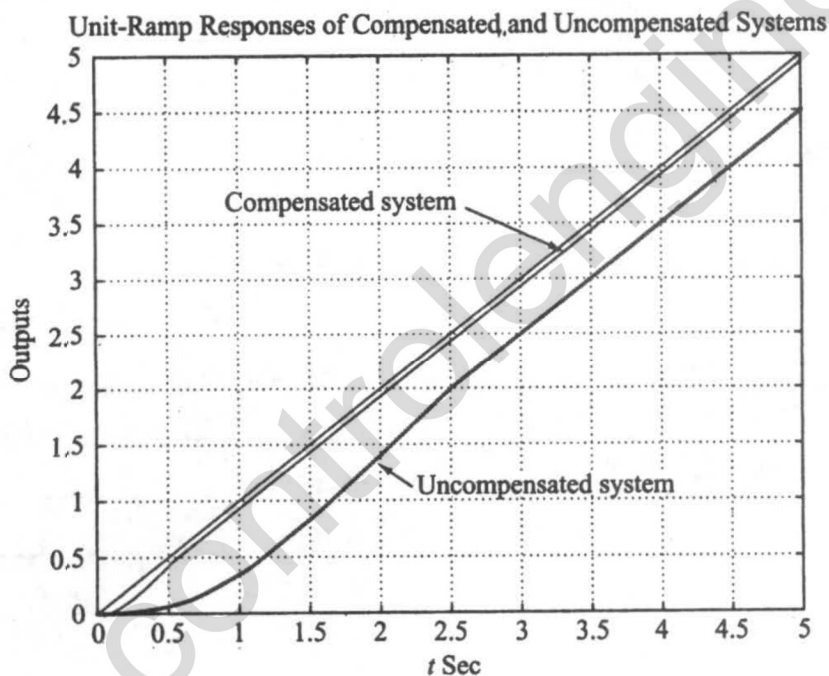
$$s = -6.4918, \quad s = -6.9541 \pm j8.0592$$

چون قطبهای حلقه بسته غالب از محور $j\omega$ خیلی فاصله دارند، پاسخ گذرا به سرعت میرا می‌شوند.



شکل ۷-۹۹

منحنی های پاسخ پله واحد
سیستم های جبران نشده
و جبران شده.



شکل ۷-۱۰۰

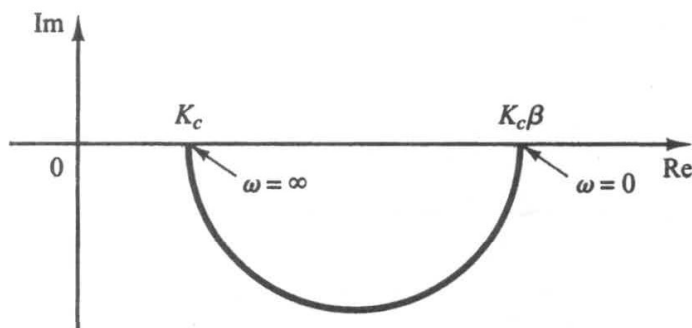
منحنی های پاسخ شیب
واحد سیستم های جبران نشده
و جبران شده.

۱۲-۷ جبرانسازی پسفاز

در این بخش ابتدا به بحث در مورد نمودارهای نایکویست و بوده جبرانساز پسفاز می پردازیم. سپس روش جبرانسازی پسفاز را براساس رهیافت پاسخ فرکانسی معرفی می کنیم.

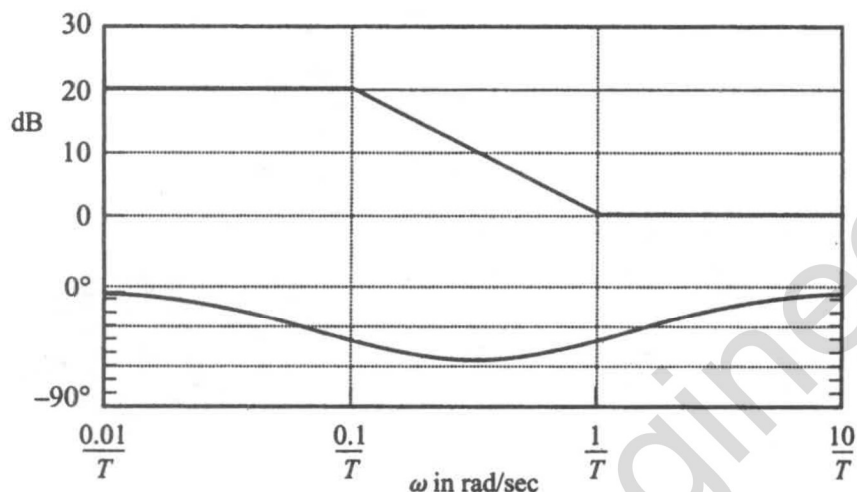
مشخصات جبرانسازی پسفاز. یک جبرانساز پسفاز با تابع تبدیل زیر در نظر بگیرید :

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$



شکل ۷-۱۰۱

نمودار قطبی جبران‌ساز پسفاز
 $K_c \beta (j\omega T + 1) / (j\omega \beta T + 1)$



شکل ۷-۱۰۲

نمودار بوده جبران‌ساز پسفاز
 $\beta (j\omega T + 1) / (j\omega \beta T + 1)$
 $\beta = 10$

جبران‌ساز پسفاز در صفحه مختلط یک صفر در $s = -1/T$ و یک قطب در $s = -1/(\beta T)$ دارد. قطب سمت راست صفر واقع شده است.

شکل ۷-۱۰۱ نمودار قطبی جبران‌ساز پسفاز را نشان می‌دهد. شکل ۷-۱۰۲ نمودار بوده جبران‌ساز را به ازای $K_c = 1$ و $\beta = 10$ نشان می‌دهد. فرکانسهای گوشه‌ای جبران‌ساز پسفاز در $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/(\beta T)$ قرار دارند. چنانچه از شکل ۷-۱۰۲ (که دارای مقادیر $K_c = 1$ و $\beta = 10$ است) برمی‌آید، دامنه جبران‌ساز در فرکانسهای پایین ۱۰ (یا ۲۰ dB) و در فرکانسهای بالا یک (یا ۰ dB) است. پس جبران‌ساز پسفاز اساساً یک فیلتر پایین‌گذر است.

روشهای جبران‌سازی پسفاز براساس رهیافت پاسخ فرکانسی. کار اصلی جبران‌ساز پسفاز ایجاد تضعیف در فرکانسهای بالاست، به نحوی که حاشیه فاز سیستم به حد مطلوب برسد. مشخصه پسفازی این جبران‌ساز در جبران‌سازی پسفاز دخیل نیست.

روند طراحی جبران‌ساز پسفاز برای سیستم شکل ۷-۹۳ براساس رهیافت پاسخ فرکانسی، از این قرار است:

۱. جبران‌ساز پسفاز زیر را در نظر بگیرید

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$

با تعریف

$$K_c \beta = K$$

داریم

$$G_c(s) = K \frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از

$$G_c(s) G(s) = K \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} G(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} K G(s) = \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} G_1(s)$$

که در آن

$$G_1(s) = K G(s)$$

K را به نحوی تعیین می‌کنیم که خواسته‌های مربوط به ثابت خطای ماندگار برآورده شود.

۲. اگر سیستم جبران نشده $G_1(j\omega) = K G(j\omega)$ حاشیه فاز و حاشیه بهره خواسته شده را ندارد، فرکانسی را که در آن فاز تابع تبدیل حلقه باز برابر -18° به اضافه حاشیه فاز لازم می‌شود بیابید. حاشیه فاز لازم، حاشیه فاز خواسته شده به اضافه 5° تا 12° است. (این 5° تا 12° اضافی، پسفازی ناشی از جبران‌ساز را خنثی می‌کند.) این فرکانس را به عنوان فرکانس عبور بهره جدید برگزینید.

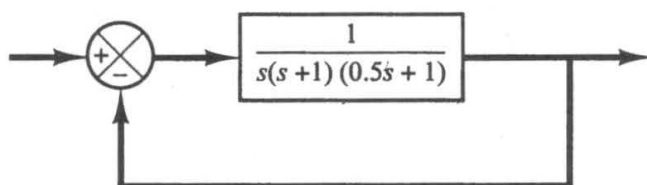
۳. برای پیشگیری از اثر تاخیر فاز جبران‌ساز پسفاز، قطب و صفر جبران‌ساز پسفاز باید پایین‌تر از فرکانس عبور بهره جدید قرار داده شود. بنابراین فرکانس گوشه ای $\omega = 1/T$ (متناظر با صفر جبران‌ساز پسفاز) را یک اکتاو تا یک دهه قبل از فرکانس عبور بهره جدید برمی‌گزینیم. (اگر ثابت زمانهای جبران‌ساز پسفاز خیلی بزرگ نباشد، فرکانس گوشه‌ای $\omega = 1/T$ را باید یک دهه قبل از فرکانس عبور بهره جدید انتخاب کنیم.)

توجه کنید که قطب و صفر جبران‌ساز را به حد کافی کوچک برمی‌گزینیم. بنابراین پسفازی در ناحیه فرکانس پایین ایجاد می‌شود و اثری بر حاشیه فاز نمی‌گذارد.

۴. تضعیف لازم برای dB شدن منحنی دامنه در فرکانس عبور بهره جدید را تعیین می‌کنیم. چون این تضعیف $-20 \log \beta$ است، مقدار β به دست می‌آید. سپس فرکانس گوشه‌ای دیگر (متناظر با قطب جبران‌ساز پسفاز) از رابطه $\omega = 1/(\beta T)$ به دست می‌آید.

۵. با توجه به K به دست آمده در گام ۱ و β تعیین شده در گام ۴، ثابت K_c از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$K_c = \frac{K}{\beta}$$



شکل ۷-۱۰۳
سیستم کنترل.

مثال ۷-۲۷

سیستم شکل ۷-۱۰۳ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

می‌خواهیم سیستم را به نحوی جبران کنیم که ثابت خطای ایستای سرعت $K_v = 5 \text{ sec}^{-1}$ ، حاشیه فاز حداقل 40° ، و حاشیه بهره حداقل 10 dB باشد.

جبران‌ساز پسفازی با تابع تبدیل زیر به کار می‌بریم

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$

با تعریف

$$K_c \beta = K$$

و همچنین

$$G_1(s) = K G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

گام اول طراحی را با تنظیم بهره K ، برای دستیابی به ثابت خطای ایستای سرعت خواسته شده آغاز می‌کنیم. پس

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} G_1(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK}{s(s+1)(0.5s+1)} = K = 5 \end{aligned}$$

پس

$$K = 5$$

سیستم جبران شده با $K = 5$ خواسته‌های عملکرد حالت ماندگار را برآورده می‌کند.

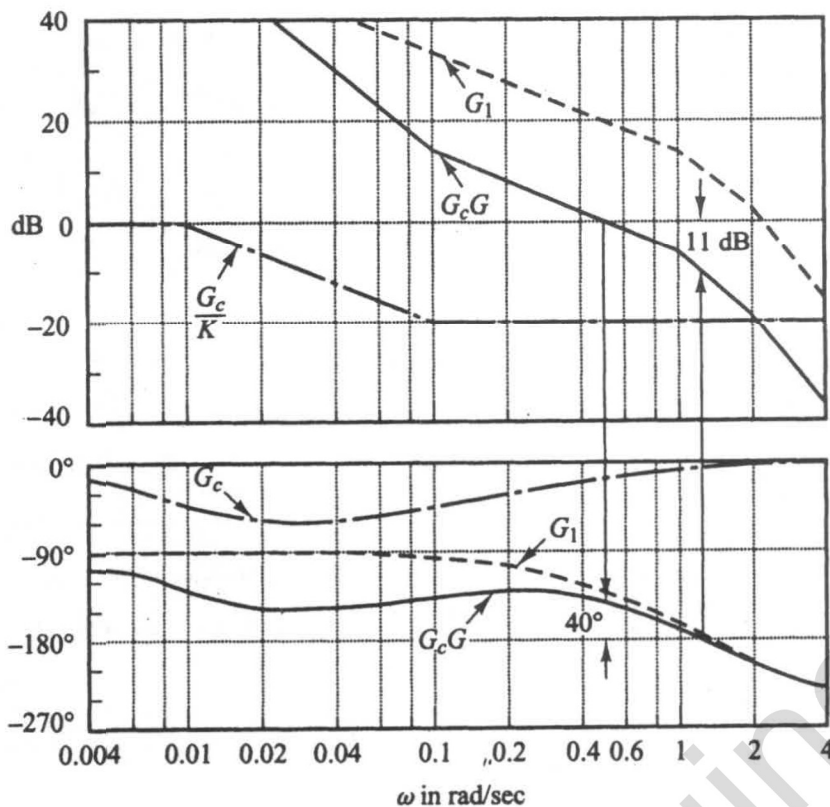
حال نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم می‌کنیم

$$G_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega+1)(0.5j\omega+1)}$$

منحنی‌های دامنه و فاز $G_1(j\omega)$ در شکل ۷-۱۰۴ نشان داده شده است. با توجه به این نمودار حاشیه فاز 20° است، که نشان می‌دهد سیستم ناپایدار است.

چون افزودن جبران‌ساز پسفاز منحنی فاز نمودار بوده را تغییر می‌دهد، باید 5° تا 12° به حاشیه فاز اضافه

کنیم تا این اثر خنثی شود. چون فرکانس متناظر با حاشیه فاز 40° برابر 0.7 rad/sec است، فرکانس عبور بهره



شکل ۷-۱۰۴

نمودارهای بوده سیستم
جبران نشده، جبران ساز،
و سیستم جبران شده.

(G_1 : سیستم جبران نشده؛

G_c : جبران ساز؛

$G_1 G_c$: سیستم جبران شده.)

جدید را (برای سیستم جبران شده) باید نزدیک این مقدار برگزینیم. برای پرهیز از ثابت زمانی های خیلی بزرگ فرکانس گوشه ای $\omega = 1/T$ جبران ساز پسفاز را (که با صفر جبران ساز متناظر است) 0.1 rad/sec انتخاب می کنیم. چون این فرکانس گوشه ای از فرکانس عبور بهره جدید خیلی پایین تر نیست، اثر فاز جبران ساز ناچیز نیست. بنابراین 12° به حاشیه فاز اضافه می کنیم تا پسفازی ناشی از جبران ساز را منظور کرده باشیم. پس اکنون حاشیه فاز لازم 52° است. زاویه فاز تابع تبدیل حلقه باز جبران نشده در حدود $\omega = 0.5 \text{ rad/sec}$ برابر -128° است. پس فرکانس عبور بهره جدید را 0.5 rad/sec برمی گزینیم. برای این که منحنی دامنه در این فرکانس عبور بهره جدید برای 0 dB باشد، جبران ساز باید تضعیف لازم را که در این مورد -20 dB است، ایجاد کند. پس

$$20 \log \frac{1}{\beta} = -20$$

$$\beta = 10$$

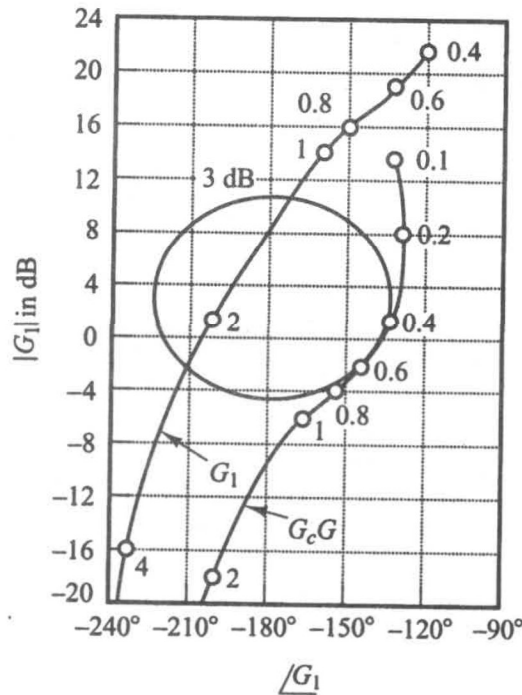
یا

به این ترتیب دیگر فرکانس گوشه ای جبران ساز، $\omega = 1/(\beta T)$ که با قطب جبران ساز متناظر است، به صورت زیر تعیین می شود

$$\frac{1}{\beta T} = 0.1 \text{ rad/s}$$

پس تابع تبدیل جبران ساز پسفاز عبارت است از

$$G_c(s) = K_c (10) \frac{10s+1}{100s+1} = K_c \frac{s+0.1}{s+0.01}$$



شکل ۷-۱۰۵

منحنی‌های لگاریتم دامنه برحسب فاز
سیستم جبران نشده و سیستم جبران شده.
(G_1 : سیستم جبران نشده؛
 $G_c G_1$: سیستم جبران شده.)

بهره K برابر ۵ و β برابر ۱۰ تعیین شده بود، پس

$$K_c = \frac{K}{\beta} = \frac{5}{10} = 0.5$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از

$$G_c(s) G(s) = \frac{5(10s+1)}{s(100s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

منحنی‌های دامنه و از $G_c(j\omega) G(j\omega)$ نیز در شکل ۷-۱۰۴ نشان داده شده است.

حاشیه فاز سیستم جبران شده حدود 40° است که مقدار مطلوب است. حاشیه بهره حدود ۱۱ dB است که کاملاً قابل قبول است. ثابت خطای ایستای سرعت مقدار خواسته شده 5 sec^{-1} است. بنابراین سیستم جبران شده هم خواسته‌های حالت ماندگار و هم خواسته‌های پایداری نسبی را برآورده می‌کند. توجه کنید که فرکانس عبور بهره از حدود 1 rad/s به 0.5 rad/s کاهش یافته است که نشان دهنده کاهش پهنای باند سیستم است.

برای بهتر دیدن اثر جبرانسازی پسفاز منحنی‌های لگاریتم دامنه برحسب فاز سیستم جبران نشده $G_1(j\omega)$ و سیستم جبران شده $G_c(j\omega) G(j\omega)$ در شکل ۷-۱۰۵ نشان داده شده است. نمودار $G_1(j\omega)$ به وضوح ناپایداری سیستم جبران شده را نشان می‌دهد. افزودن جبران‌ساز پسفاز سیستم را پایدار می‌کند. نمودار $G_c(j\omega) G(j\omega)$ بر مکان هندسی $M=3 \text{ dB}$ مماس است. پس قله تشدید ۳ dB، یا $1/4$ است و در $\omega = 0.5 \text{ rad/sec}$ رخ می‌دهد.

جبران‌سازهای طراحی شده به روشهای متفاوت یا طراحان مختلف (حتی با استفاده از یک روش) می‌توانند بسیار متفاوت باشند. ولی تمام سیستمهای خوب طراحی شده رفتار گذرا و حالت ماندگار مشابهی دارند. از میان طرحهای مختلف باید با توجه به این ملاحظه اقتصادی که ثابت زمانهای جبران‌ساز پسفاز نباید خیلی بزرگ باشد، بهترین را برگزید.

MATLAB Program 7-14

```

%*****Unit-step response*****
num = [1];
den = [0.5 1.5 1 1];
numc = [50 5];
denc = [50 150.5 101.5 51 5];
t = 0:0.1:40;
[c1,x1,t] = step(num,den,t);
[c2,x2,t] = step(numc,denc,t);
plot(t,c1,'.',t,c2,'-')
grid
title('Unit-Step Responses of Compensated and Uncompensated Systems')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs')
text(12.7,1.27,'Compensated system')
text(12.2,0.7,'Uncompensated system')

%*****Unit-ramp response*****
num1 = [1];
den1 = [0.5 1.5 1 1 0];
num1c = [50 5];
den1c = [50 150.5 101.5 51 5 0];
t = 0:0.1:20;
[y1,z1,t] = step(num1,den1,t);
[y2,z2,t] = step(num1c,den1c,t);
plot(t,y1,'.',t,y2,'-',t,t,'--');
grid
title('Unit-Ramp Responses of Compensated and Uncompensated Systems')
xlabel('t Sec')
ylabel('Outputs')
text(8.3,3,'Compensated system')
text(8.3,5,'Uncompensated system')

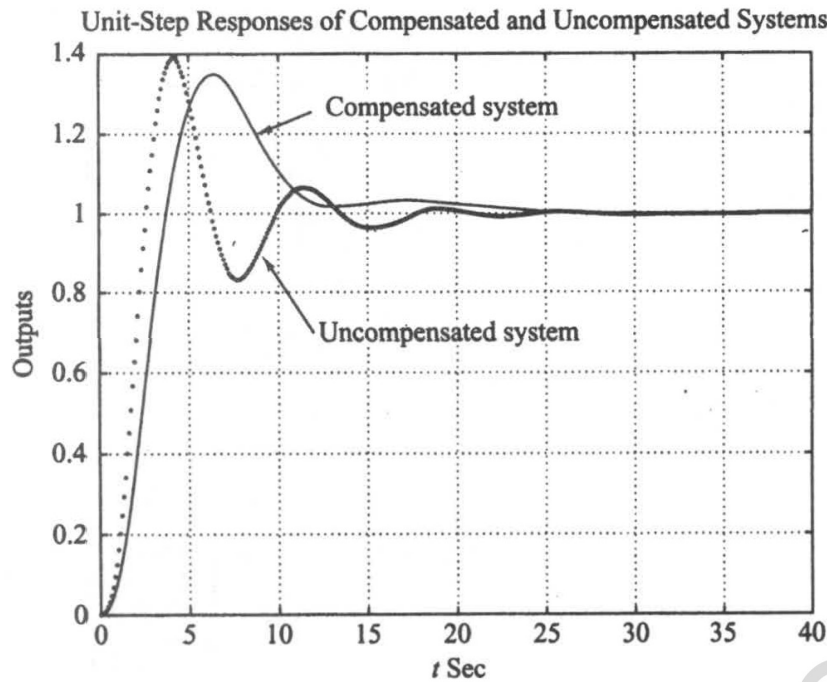
```

سرانجام پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم جبران نشده و سیستم جبران شده را به دست می‌آوریم. توابع تبدیل حلقه بسته سیستمهای جبران شده و جبران نشده به ترتیب عبارت‌اند از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50s+5}{50s^4 + 150.5s^3 + 101.5s^2 + 51s + 5}$$

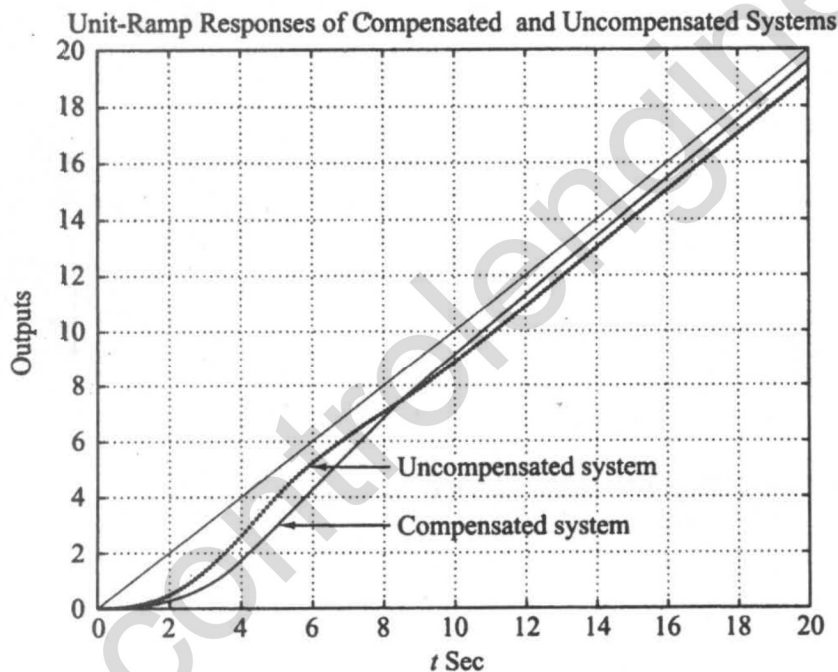
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{0.5s^3 + 1.5s^2 + s + 1}$$

برنامه ۷-۱۴ منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب سیستمهای جبران شده و جبران نشده را به دست می‌دهد. منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب حاصل به ترتیب در شکل‌های ۷-۱۰۶ و ۷-۱۰۷ نشان داده شده است. با



شکل ۷-۱۰۶

منحنی‌های پاسخ پله واحد سیستمهای جبران نشده و جبران شده (مثال ۷-۲۷).



شکل ۷-۱۰۷

منحنی‌های پاسخ شیب واحد سیستمهای جبران نشده و جبران شده (مثال ۷-۲۷).

توجه به این منحنی‌ها می‌بینیم که سیستم طراحی شده مشخصات خواسته شده را برآورده می‌کند و رضایتبخش است.

قطبها و صفرهای حلقه بسته سیستم طراحی شده عبارت‌اند از

$$\text{صفر در } s = -0.1$$

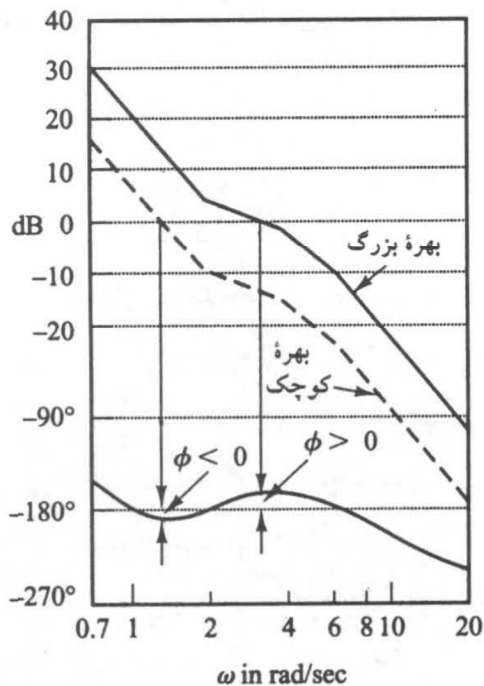
$$\text{قطبها در } s = -2.3155 \text{ و } s = -0.1228 \text{ و } s = -0.2859 \pm j0.5196$$

قطبهای حلقه بسته غالب به محور $j\omega$ بسیار نزدیک‌اند، بنابراین پاسخ کند است. همچنین قطب حلقه بسته

$s = -0.1228$ و صفر واقع در $s = -0.1$ باعث می‌شوند انتهای پاسخ با دامنه‌ای کوچک و با کندی امتداد یابد.

توضیحاتی راجع به جبرانسازی پسفاز

۱. جبرانسازهای پسفاز در اساس فیلترهای پایین گذر هستند. بنابراین با این جبرانسازها می‌توان در فرکانس پایین بهره‌ای بزرگ داشت (این بهره بزرگ عملکرد حالت ماندگار را بهبود می‌بخشد) و بهره را در فرکانسهای بالا کاهش داد، که باعث بهبود حاشیه‌فاز می‌شود. توجه کنید که در جبرانسازی پسفاز از مشخصات تضعیف در فرکانس بالا استفاده می‌کنیم نه از مشخصه پسفازی. (مشخصه پسفازی برای جبرانسازی کاربردی ندارد).
۲. فرض کنید صفر و قطب جبرانساز پسفاز به ترتیب در $s = -p$ و $s = -z$ قرار دارند. اگر صفر و قطب به مبداء نزدیک بوده، نسبت z/p با ضریب لازم ثابت خطای ایستای سرعت برابر باشد، محل دقیقشان مهم نیست. ولی باید توجه کرد که صفر و قطب جبرانساز پسفاز را نباید بیش از حد نیاز به مبداء نزدیک کرد، زیرا قطب حلقه بسته‌ای که در اثر جبرانساز پسفاز ایجاد می‌شود در همان ناحیه‌ای است که صفر و قطب جبرانساز در آن قرار دارند.
- قطب حلقه بسته نزدیک مبداء پاسخ گذرایی با میرایی بسیار کند ایجاد می‌کند، البته دامنه این پاسخ خیلی کوچک می‌شود، زیرا صفر جبرانساز اثر قطب را تقریباً خنثی می‌کند. ولی پاسخ گذرای ناشی از این قطب آنقدر کند است که زمان نشست به شدت تغییر می‌کند.
- همچنین باید توجه کرد که در سیستمی که با جبرانساز پسفاز جبران شده است، تابع تبدیل بین ورودی اختلافی وسیله تحت کنترل و خطای سیستم ممکن است صفر نزدیک به این قطب را نداشته باشد. بنابراین پاسخ گذرا به ورودی اغتشاشی بسیار طولانی می‌شود.
۳. تضعیف ناشی از جبرانساز پسفاز فرکانس عبور بهره را پایین می‌آورد به نحوی که حاشیه فاز به مقداری قابل قبول برسد. پس جبرانساز پسفاز پهنای باند سیستم را کاهش داده، پاسخ گذرا کند می‌شود. [منحنی فاز $G_c(j\omega)G(j\omega)$ از نزدیکی فرکانس عبور بهره به بعد نسبتاً بی‌تغییر می‌ماند].
۴. چون جبرانساز پسفاز در جهت انتگرالگیری از سیگنال ورودی عمل می‌کند، تقریباً عملی شبیه کنترل کننده تناسبی - انتگرالی انجام می‌دهد. به همین خاطر سیستم دارای جبران شده پسفاز پایداری کمتری دارد. برای اجتناب از این ویژگی نامطلوب ثابت زمانی T باید از بزرگترین ثابت زمانی سیستم به حد کافی بزرگتر باشد.
۵. اگر سیستمی که خروجی‌اش اشباع یا محدود می‌شود با استفاده از جبرانساز پسفاز جبران شود، احتمال دارد وضعیت پایداری مشروط پیش آید. با بروز اشباع یا محدودیت، بهره موثر حلقه کاهش می‌یابد. به این ترتیب سیستم پایداری کمتری پیدا می‌کند و حتی ممکن است مطابق شکل ۷-۱۰۸ ناپایدار شود. برای پرهیز از این رخداد سیستم باید طوری طراحی شود که اثر جبرانساز پسفاز تنها هنگامی مهم شود که دامنه ورودی عنصر اشباع شونده کوچک باشد. (این کار را می‌توان با جبرانسازی حلقه‌های داخلی انجام داد).



شکل ۷-۱۰۸

نمودارهای بوده سیستم دارای پایداری مشروط.

۷-۱۳ جبران سازی پسفاز - پیشفاز

ابتدا مشخصات پاسخ فرکانسی جبران ساز پسفاز و پیشفاز را بررسی می کنیم. سپس روش جبران سازی پسفاز - پیشفاز را براساس رهیافت پاسخ فرکانسی معرفی می کنیم.

مشخصات جبران ساز پسفاز - پیشفاز. جبران ساز پسفاز - پیشفاز زیر را در نظر بگیرید

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right) \quad (۷-۲۷)$$

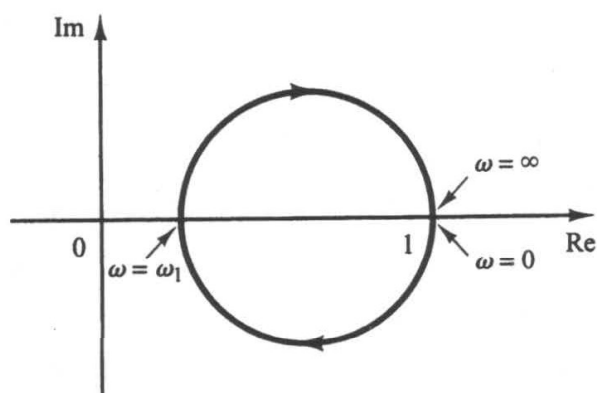
که در آن $\gamma > 1$ و $\beta > 1$. جمله زیر اثر شبکه پیشفاز

$$\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_1 s + 1}{\frac{T_1}{\gamma} s + 1} \right) \quad (\gamma > 1)$$

و جمله زیر اثر شبکه پسفاز را ایجاد می کند:

$$\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} = \beta \left(\frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1} \right) \quad (\beta > 1)$$

در طراحی جبران ساز پسفاز - پیشفاز معمولاً γ برابر β انتخاب می شود. (البته این کار ضروری نیست و می توان $\gamma \neq \beta$ را به کار برد.) در ادامه حالت $\gamma = \beta$ را در نظر می گیریم. نمودار قطبی جبران ساز



شکل ۷-۱۰۹

نمودار قطبی جبرانساز پسفاز - پیشفاز

بیان شده با معادله (۷-۲۷)، به ازای

$$K_c = 1 \text{ و } \gamma = \beta$$

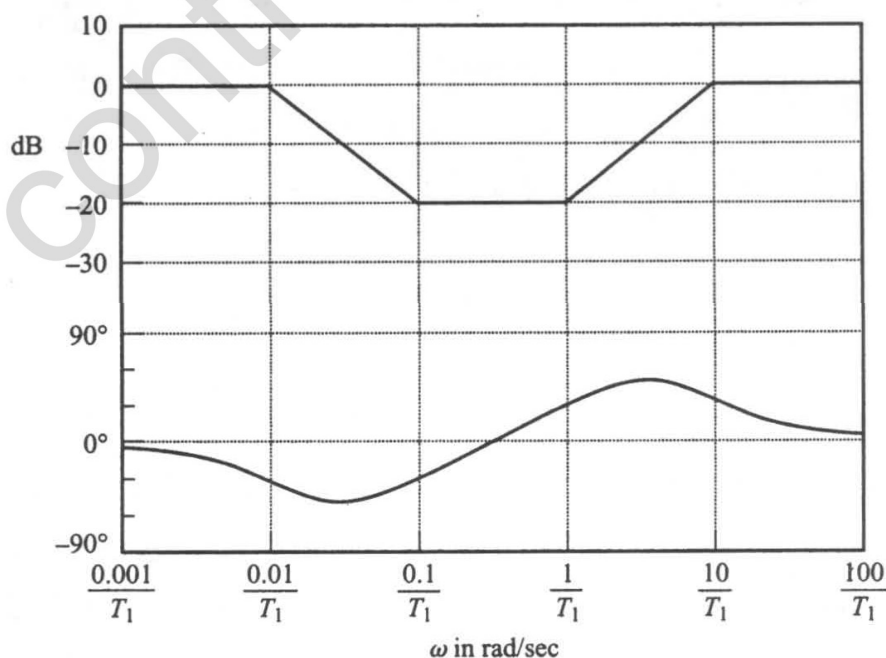
پسفاز - پیشفاز با $K_c = 1$ و $\gamma = \beta$ به صورت شکل ۷-۱۰۹ است. می‌توان دید که برای $0 < \omega < \omega_1$ جبرانساز همانند جبرانساز پسفاز عمل می‌کند. حال آن که برای $\omega_1 < \omega < \infty$ عملی چون جبرانساز پیشفاز دارد. ω_1 فرکانسی است که در آن زاویه فاز صفر می‌شود. این فرکانس عبارت است از

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_f}}$$

(برای یافتن این معادله مسئله الف-۷-۲۱ را ببینید.)

شکل ۷-۱۱۰ نمودار بوده جبرانساز پسفاز - پیشفاز را به ازای $K_c = 1$ ، $\gamma = \beta = 10$ ، و $T_f = 10 T_1$ نشان می‌دهد. توجه کنید که منحنی دامنه در نواحی فرکانس پایین و فرکانس بالا dB است.

جبرانسازی پسفاز - پیشفاز براساس رهیافت پاسخ فرکانسی. طراحی جبرانساز پسفاز - پیشفاز در رهیافت پاسخ فرکانسی براساس ترکیب روشهای طراحی بیان شده در مورد جبرانسازی پیشفاز و جبرانسازی پسفاز صورت می‌گیرد.



شکل ۷-۱۱۰ نمودار بوده جبرانساز پسفاز - پیشفاز معادله (۷-۲۷) به ازای $K_c = 1$ ، $\gamma = \beta = 10$ ، و $T_f = 10 T_1$.

جبران ساز پسفاز - پیشفاز را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$G_c(s) = K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\beta} s + 1\right)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \quad (28-7)$$

که در آن $\beta > 1$. بخش پیشفاز جبران ساز پسفاز - پیشفاز (بخش مربوط به T_1) منحنی پاسخ فرکانسی را با افزودن زاویه و افزایش حاشیه فاز در فرکانس عبور بهره تغییر می دهد. بخش پسفاز (بخش مربوط به T_2) در نزدیک فرکانس عبور بهره و پس از آن تضعیف ایجاد می کند و به این ترتیب امکان افزایش بهره در فرکانسهای پایین را برای بهبود عملکرد حالت ماندگار فراهم می سازد. جزییات روش طراحی جبران ساز پسفاز - پیشفاز را با مثالی روشن می کنیم.

سیستمی با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

مثال ۷-۲۸

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

خواسته شده است که ثابت خطای سرعت ایستا 10 sec^{-1} ، حاشیه فاز 50° و حاشیه بهره 10 dB یا بیشتر باشد.

فرض کنید از جبران ساز پسفاز - پیشفاز بیان شده با معادله (۲۸-۷) استفاده می کنیم. [توجه کنید که بخش پیشفاز هم حاشیه فاز و هم پهنای باند سیستم را زیاد می کند (که به معنی افزایش سرعت پاسخ است). بخش پسفاز بهره فرکانس پایین را حفظ می کند].

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده $G_c(s)G(s)$ است. چون بهره K وسیله تحت کنترل قابل تنظیم است، K_c را برابر یک فرض می کنیم. پس $\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) = 1$.

با توجه به خواسته مربوط به ثابت خطای ایستای سرعت به دست می آوریم

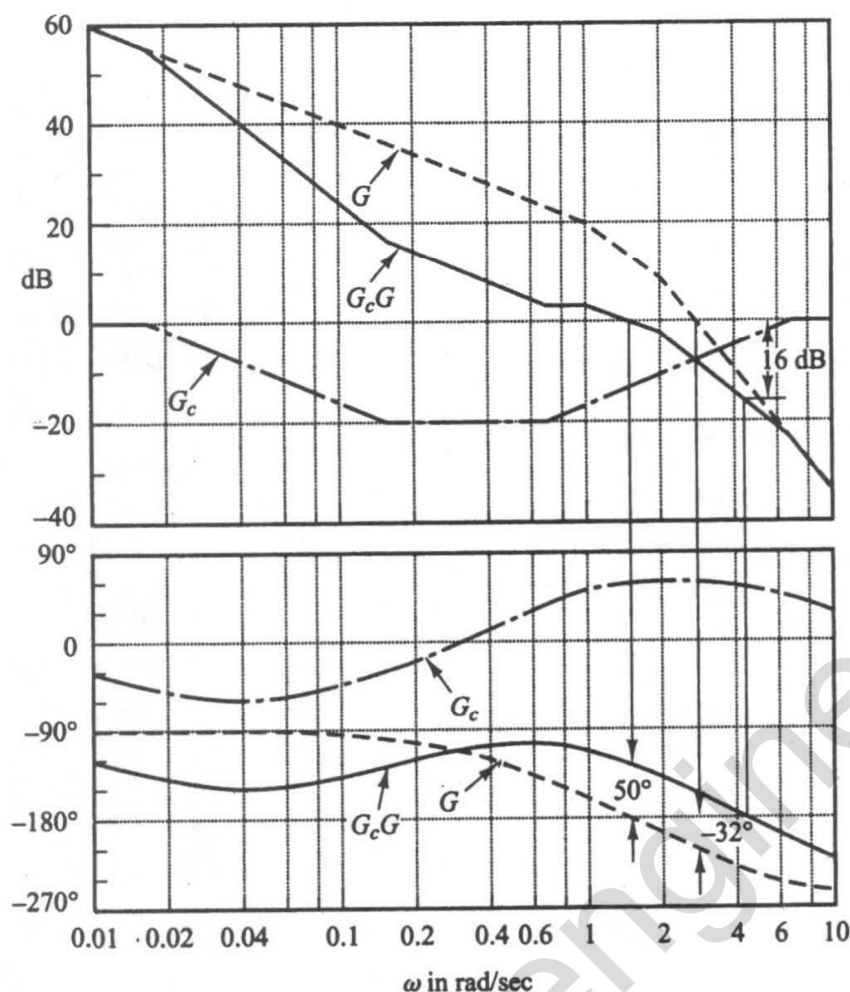
$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K}{2} = 10 \end{aligned}$$

پس

$$K = 20$$

حال نمودار بوده سیستم جبران نشده را مطابق شکل ۷-۱۱۱ به ازای $K = 20$ ، رسم می کنیم. حاشیه فاز سیستم جبران نشده را -32° می یابیم که نشان می دهد سیستم جبران نشده ناپایدار است.

گام بعدی طراحی جبران ساز پسفاز - پیشفاز انتخاب فرکانس عبور بهره جدید است. منحنی زاویه فاز نشان می دهد که در $\omega = 1/5 \text{ rad/s}$ داریم $\angle G(j\omega) = -18^\circ$. انتخاب فرکانس $1/5 \text{ rad/sec}$ به عنوان فرکانس عبور بهره جدید مناسب به نظر می آید، زیرا زاویه پیشفازی لازم در $\omega = 1/5 \text{ rad/sec}$ برابر 50° می شود که با یک



شکل ۷-۱۱۱

نمودار بوده سیستمهای

جبران نشده، جبران ساز

و جبران شده.

(G: سیستم جبران نشده؛

G_c: جبران ساز،

G_cG: سیستم جبران شده).

شبکه پسفاز - پیشفاز می توان به آن دست یافت.

با انتخاب $\omega = 1/5 \text{ rad/sec}$ به عنوان فرکانس عبور بهره می توان فرکانس گوشه ای بخش پسفاز جبران کننده را تعیین کرد. بیایید فرکانس گوشه ای $\omega = 1/T_p$ (صفر بخش پسفاز جبران ساز) را یک دهه پایینتر از فرکانس عبور بهره جدید، یعنی $\omega = 0.15 \text{ rad/sec}$ برگزینیم.

به یاد دارید که برای جبران ساز پیشفاز ماکزیمم زاویه پیشفازی ϕ_m از معادله (۷-۲۵) به دست می آید، البته برای این حالت به جای α معادله (۷-۲۵) باید $1/\beta$ بگذریم. این جایگزینی در معادله (۷-۲۵) به دست می دهد

$$\sin \phi_m = \frac{1 - (1/\beta)}{1 + (1/\beta)} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

با $\beta = 10$ $\phi_m = 54.9^\circ$ متناظر است. چون حاشیه فاز مورد نیاز 5° است، $\beta = 10$ را برمی گزینیم. (توجه کنید که از ماکزیمم زاویه پیشفازی 54.9° استفاده نمی کنیم.) پس

$$\beta = 10$$

پس فرکانس گوشه ای $\omega = 1/\beta T_p$ (قطب بخش پسفاز جبران ساز) $\omega = 0.15 \text{ rad/sec}$ است. به این ترتیب تابع تبدیل بخش پسفاز جبران ساز پسفاز - پیشفاز عبارت است از

$$\frac{s+0.15}{s+0.015} = 10 \left(\frac{6.67s+1}{66.7s+1} \right)$$

بخش پیشفاز را می‌توان به این صورت تعیین کرد: چون فرکانس عبور بهره جدید $\omega = 1/5 \text{ rad/sec}$ است، $G(j1/5)$ از شکل ۷-۱۱۱ برابر 13 dB به دست می‌آید. پس اگر جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز در $\omega = 1/5 \text{ rad/s}$ تضعیفی به میزان 13 dB ایجاد کند، فرکانس عبور بهره جدید مقدار مطلوبی می‌یابد. با توجه به این خواسته، می‌توان خط راستی با شیب 20 dB/dec رسم کرد که از نقطه $(1/5 \text{ rad/sec}, -13 \text{ dB})$ بگذرد. محل برخورد این خط با خطوط 0 dB و -20 dB فرکانسهای گوشه‌ای را تعیین می‌کند. پس فرکانسهای گوشه‌ای بخش پیشفاز $\omega = 0.7 \text{ rad/s}$ و $\omega = 7 \text{ rad/s}$ است. به این ترتیب تابع تبدیل بخش پیشفاز جبران‌ساز عبارت است از

$$\frac{s+0.7}{s+7} = \frac{1}{10} \left(\frac{1/43s+1}{0.143s+1} \right)$$

با ترکیب توابع تبدیل بخش پسفاز و پیشفاز جبران‌ساز، تابع تبدیل جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز را به دست می‌آوریم. چون $K_c = 1$ داریم

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \left(\frac{s+0.7}{s+7} \right) \left(\frac{s+0.15}{s+0.015} \right) \\ &= \left(\frac{1/43s+1}{0.143s+1} \right) \left(\frac{6.67s+1}{66.7s+1} \right) \end{aligned}$$

منحنی‌هایی دامنه و زاویه فاز جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز به دست آمده در شکل ۷-۱۱۱ نشان داده شده است. تابع تبدیل حلقه باز جبران شده عبارت است از

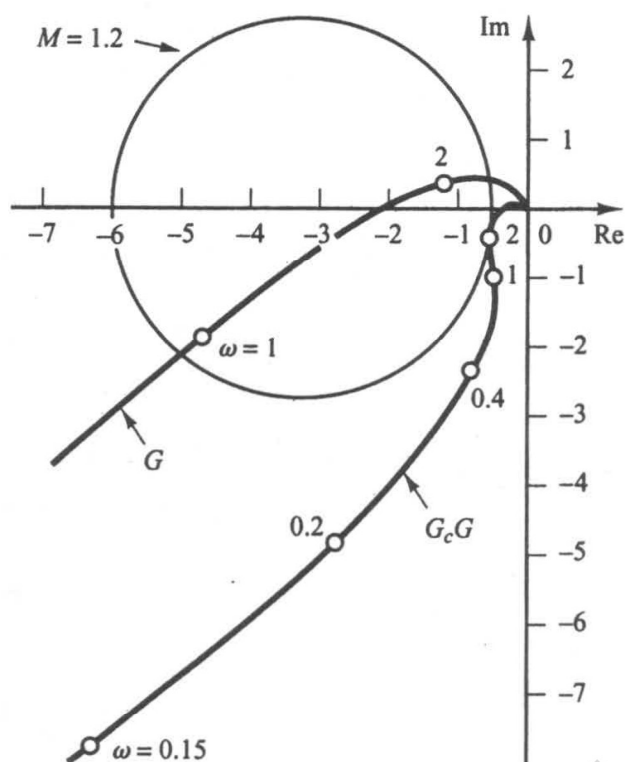
$$\begin{aligned} G_c(s) G(s) &= \frac{(s+0.7)(s+0.15) 20}{(s+7)(s+0.015)s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{10(1/43s+1)(6.67s+1)}{s(0.143s+1)(66.7s+1)(s+1)(0.5s+1)} \end{aligned} \quad (7-29)$$

منحنی‌های دامنه و فاز سیستم بیان شده با معادله (۷-۲۹) نیز در شکل ۷-۱۱۱ رسم شده است. حاشیه فاز سیستم جبران شده 50° ، حاشیه بهره آن 16 dB و ثابت خطای ایستای سرعت آن 10 sec^{-1} است. بنابراین تمام خواسته‌ها برآورده شده، طراحی کامل می‌شود.

شکل ۷-۱۱۲ نمودارهای قطبی سیستم جبران نشده و سیستم جبران شده را نشان می‌دهد. مکان هندسی $G_c(j\omega) G(j\omega)$ در فرکانسی حدود $\omega = 2 \text{ rad/sec}$ بر دایره $M = 1/2$ مماس است. این مطلب به وضوح نشان می‌دهد که سیستم جبران شده پایداری نسبی رضایتبخشی دارد. پهنای باند سیستم جبران شده کمی از 2 rad/sec بزرگتر است.

در ادامه مشخصات پاسخ گذاری سیستم جبران شده را بررسی می‌کنیم (سیستم جبران نشده ناپایدار است) تابع تبدیل حلقه بسته سیستم جبران شده عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{95.381s^2 + 81s + 10}{4.7691s^5 + 47.7287s^4 + 110.3026s^3 + 163.724s^2 + 82s + 10}$$



شکل ۱۱۲-۷
نمودارهای قطبی G
(که فقط بهره آن تنظیم
شده) و $G_c G$

شکلهای ۱۱۳-۷ و ۱۱۴-۷ به ترتیب منحنیهای پاسخ پله و پاسخ شیب به دست آمده با MATLAB را نشان می‌دهند.

سیستم کنترل حلقه بسته طراحی شده دارای این صفرها و قطبهای حلقه بسته است:

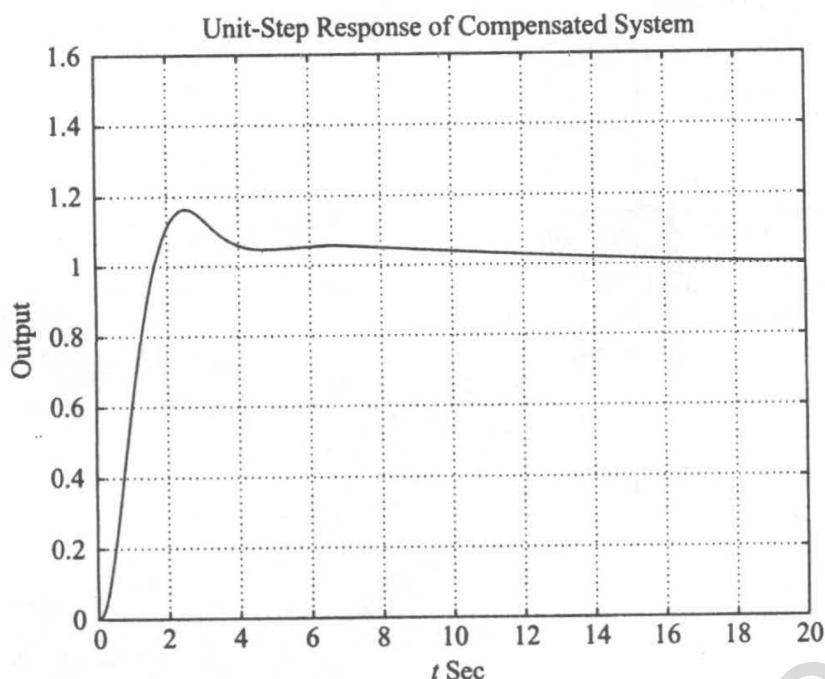
$$s = -0.1499 \quad s = -0.6993 \quad \text{صفرها در}$$

$$s = -0.8973 \pm j1.4439 \quad s = -7.4923 \quad \text{قطبها در}$$

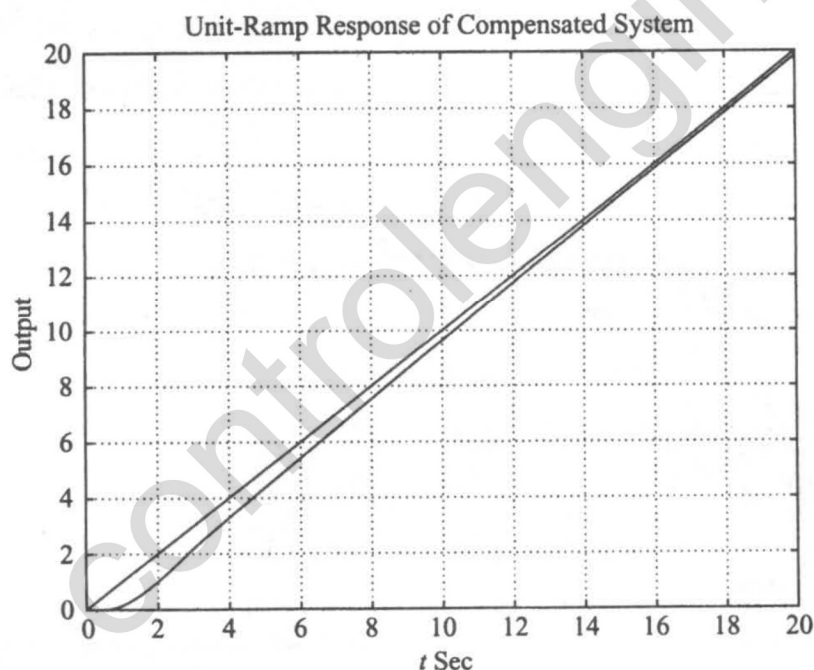
$$s = -0.1785 \quad s = -0.5425$$

قطب $s = -0.1785$ و صفر $s = 0.1499$ خیلی نزدیک‌اند، این قطب و صفر مطابق شکل ۱۱۳-۷ دنباله درازی با دامنه کوچک در پاسخ پله ایجاد می‌کند. قطب $s = -0.5425$ و صفر $s = -0.6993$ نیز نسبتاً به هم نزدیک‌اند. این دو باعث افزایش دامنه دنباله پاسخ می‌شوند.

خلاصه طراحی سیستم کنترل با رهیافت پاسخ فرکانسی. در سه بخش اخیر روشهای طراحی جبرانسازهای پسفاز، پیشفاز، و پسفاز - پیشفاز طی مثالهای ساده‌ای معرفی شد. نشان دادیم که طراحی جبرانساز برای ارضای شرایط داده شده (برحسب حاشیه فاز و حاشیه بهره) را می‌توان با استفاده از نمودار بوده به صورتی ساده و سراسر انجام داد. باید خاطرنشان کنیم که نمی‌توان هر سیستمی را با جبرانساز پیشفاز، پسفاز، یا پسفاز-پیشفاز جبران کرد. در بعضی موارد می‌توان از جبرانسازهایی با صفر و قطب مختلط استفاده کرد. برای سیستمهایی که جبرانسازی‌شان به روشهای مکان هندسی ریشه‌ها و پاسخ فرکانسی ممکن نیست، می‌توان روش جایدهی قطب را به کار برد. (فصل ۱۰ را ببینید). در بعضی از مسائل طراحی می‌توان هم رهیافتهای سستی و هم روش جایدهی قطب را به کار برد. روشهای سستی (مکان هندسی ریشه‌ها و پاسخ فرکانسی) معمولاً



شکل ۷-۱۱۳
پاسخ پله واحد سیستم
جبران شده (مثال ۷-۲۸).



شکل ۷-۱۱۴
پاسخ شیب سیستم
جبران شده (مثال ۷-۲۸).

جبران‌ساز پایدار مرتبه پایین‌تری به دست می‌دهند. توجه کنید که طراحی مناسب جبران‌ساز برای سیستمی پیچیده نیازمند کاربرد خلاقانه این اصول پایه‌ای طراحی است.

مقایسه جبران‌سازهای پسفاز، پیشفاز، و پسفاز - پیشفاز

۱. جبران‌ساز پیشفاز معمولاً برای بهبود حاشیه‌های پایداری به کار می‌رود. جبران‌ساز پسفاز معمولاً برای بهبود عملکرد حالت ماندگار به کار می‌رود. در جبران‌سازی پیشفاز نتیجه مطلوب به خاطر اثر

پیشفازی جبرانساز حاصل می‌شود، حال آن که در جبرانسازی پسفاز تضعیف در فرکانسهای بالا نتیجه مطلوب را به همراه می‌آورد.

۲. در بعضی مسائل طراحی هم جبرانساز پسفاز و هم جبرانساز پیشفاز می‌تواند نتیجه‌بخش باشد. فرکانس عبور بهره‌ای که در جبرانسازی پیشفاز حاصل می‌شود بزرگتر از آنی است که جبرانسازی پسفاز نتیجه می‌دهد. بزرگتر بودن فرکانس عبور بهره به معنی پهنای باند بزرگتر است. پهنای باند بزرگتر به کاهش زمان نشست منجر می‌شود. پهنای باند سیستمی با جبرانساز پیشفاز همیشه بزرگتر از پهنای باند آن سیستم با جبرانساز پسفاز است. پس اگر پهنای باند بزرگ یا پاسخ سریع بخواهیم باید از جبرانساز پیشفاز استفاده کنیم. ولی در صورت وجود سیگنالهای نویزی پهنای باند بزرگ ممکن است مطلوب نباشد، زیرا به خاطر داشتن بهره فرکانس بالای بزرگتر سیستم را بیشتر در معرض نویز قرار می‌دهد. در این گونه موارد باید از جبرانساز پسفاز استفاده کرد.

۳. جبرانسازی پیشفاز مستلزم افزایش بهره، برای جبران تضعیف ذاتی شبکه پیشفاز است. یعنی بهره لازم در جبرانسازی پیشفاز بیشتر از بهره لازم در جبرانسازی پسفاز است. در بسیاری از موارد بهره بیشتر به منزله فضای بیشتر، وزن بیشتر و هزینه بالاتر است.

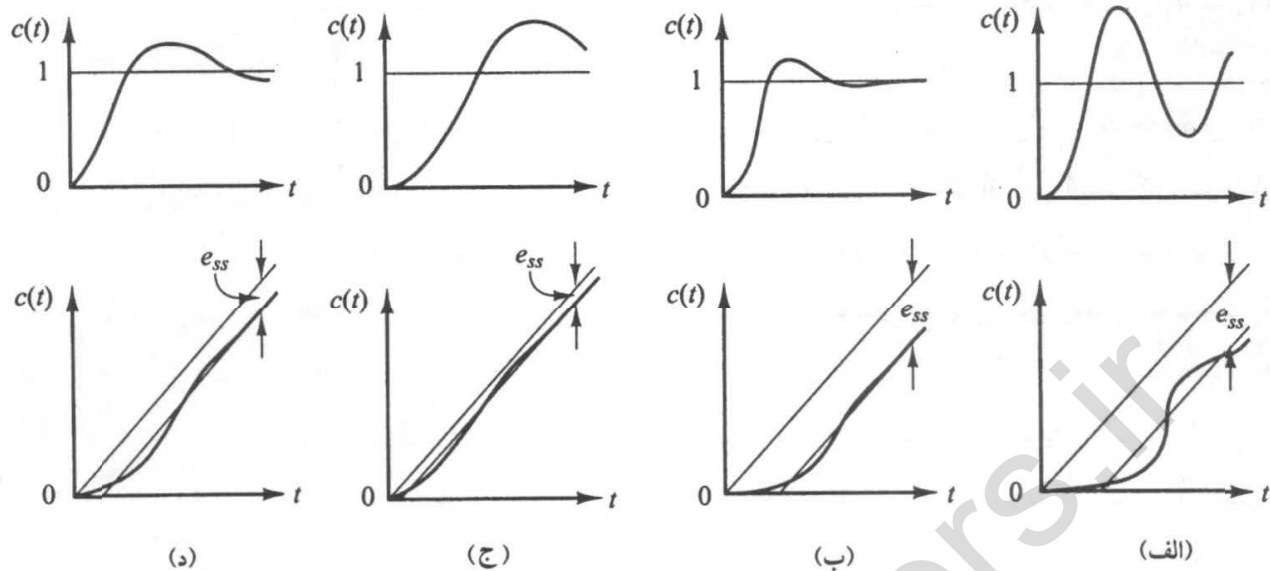
۴. جبرانسازی پیشفاز ممکن است باعث بزرگ شدن سیگنالهای موجود در سیستم شود. این سیگنالهای بزرگ ممکن است به خاطر احتمال اشباع شدن سیستم مطلوب نباشند.

۵. جبرانساز پسفاز بهره سیستم در فرکانسهای بالا را کم می‌کند، بدون این که بهره در فرکانسهای پایین کم شود. چون پهنای باند سیستم کم می‌شود، سرعت پاسخ سیستم نیز کاهش می‌یابد. به خاطر کاهش بهره فرکانس بالا، کل بهره سیستم را می‌توان زیاد کرد، و به این ترتیب بهره فرکانس پایین نیز افزایش می‌یابد که باعث بهبود دقت حالت ماندگار می‌شود. همچنین نویز فرکانس بالای سیستم نیز می‌تواند تضعیف شود.

۶. جبرانساز پسفاز یک ترکیب قطب - صفر در نزدیک مبدا ایجاد می‌کند، که ممکن است باعث شود پاسخ گذرا دنباله‌ای طولانی و کم دامنه داشته باشد.

۷. اگر هم پاسخ سریع و هم دقت ایستای بزرگ لازم باشد، می‌توان جبرانساز پسفاز-پیشفاز به کار برد. به این ترتیب بهره فرکانس پایین افزایش می‌یابد (که به معنی بهبود دقت حالت ماندگار است) و هم پهنای باند سیستم حاشیه‌های پایداری بیشتر می‌شود.

۸. هر چند می‌توان با استفاده از جبرانسازهای پسفاز، پیشفاز، و پسفاز-پیشفاز عملیات جبرانسازی متنوعی انجام داد، ولی برای سیستمهای پیچیده ممکن است این جبرانسازها عملکرد رضایتبخشی نداشته باشند. در این صورت باید از جبرانسازهای دیگری با آرایشهای قطب-صفر متفاوت استفاده کرد.



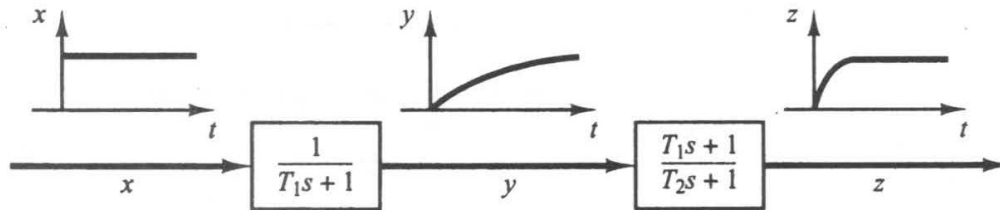
شکل ۷-۱۱۵ منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب (الف) سیستم جبران نشده؛ (ب) سیستم جبران شده با جبران‌ساز پیشفاز؛ (ج) سیستم جبران شده با جبران‌ساز پسفاز؛ (د) سیستم جبران شده با جبران‌ساز پسفاز-پیشفاز.

مقایسه ترسیمی. شکل ۷-۱۱۵ (الف) منحنی پاسخ پله واحد و منحنی پاسخ شیب واحد یک سیستم جبران نشده را نشان می‌دهد. پاسخ پله و پاسخ شیب نوعی سیستم جبران شده با جبران‌سازهای پیشفاز، پسفاز، و پسفاز-پیشفاز به ترتیب در شکل‌های ۷-۱۱۵ (ب)، (ج)، و (د) نشان داده شده است. سیستم جبران شده با جبران‌ساز پیشفاز سریع‌ترین پاسخ را دارد، ولی سیستم جبران شده با جبران‌ساز پسفاز کندترین پاسخ را دارد، ولی پاسخ شیب آن بسیار بهتر است. جبران‌ساز پسفاز-پیشفاز مصالحه‌ای بین این دو ایجاد می‌کند؛ به صورتی که بهبود معقولی در پاسخ گذرا و پاسخ حالت ماندگار حاصل شود. این منحنی‌ها طبیعت بهبودهای قابل دسترس با هر یک از این جبران‌سازها را نشان می‌دهد.

جبران‌سازی با فیدبک. تاکومتر یک عنصر فیدبک مشتقی است. ژيروسکوپ مشتقی یکی دیگر از عناصر معمول برای فیدبک مشتقی است که در سیستمهای ناوبری خودکار استفاده می‌شود.

در سیستمهای سرووی موقعیت از فیدبک سرعت، با استفاده از تاکومتر، بسیار استفاده می‌شود. گفتیم که اگر سیستم در معرض سیگنال‌های نویزی قرار داشته باشد و طرح فیدبک سرعت به کار رفته مستلزم مشتق‌گیری از سیگنال خروجی باشد، فیدبک سرعت می‌تواند مشکلاتی به همراه داشته باشد. (نتیجه این مشتق‌گیری تقویت اثرهای نویز است.)

حذف قطبهای ناخواسته. چون حاصلضرب دو عنصر متوالی حاصلضرب توابع تبدیل آنها است، می‌توان با متوالی کردن یک عنصر جبران‌ساز بعضی قطبها یا صفرهای نامطلوب را حذف کرد. برای این منظور باید قطبها و صفرهای عنصر جبران‌ساز را طوری تنظیم کرد که صفرها و قطبهای نامطلوب را حذف کند. مثلاً ثابت زمانی بزرگ T_1 را می‌توان با استفاده از شبکه پیشفاز $(T_1s+1)/(T_2s+1)$ به صورت زیر حذف کرد



شکل ۷-۱۱۶ منحنی‌های پاسخ پله که اثر حذف ثابت زمانی بزرگ را نشان می‌دهند.

$$\left(\frac{1}{T_1 s + 1} \right) \left(\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \right) = \frac{1}{T_2 s + 1}$$

اگر T_2 از T_1 خیلی کوچکتر باشد، عملاً ثابت زمانی T_1 حذف می‌شود. شکل ۷-۱۱۶ اثر حذف ثابت زمانی بزرگ در پاسخ گذرا به پله را نشان می‌دهد.

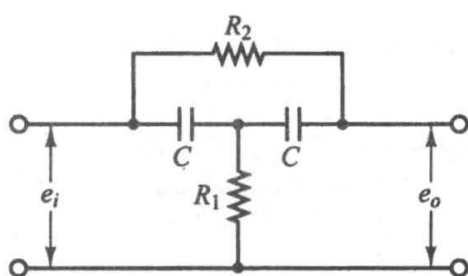
اگر قطب نامطلوب سیستم اصلی در نیمه راست صفحه s باشد، نمی‌توان این طرح جبرانسازی را به کار برد، زیرا گرچه حذف قطب نامطلوب با افزودن یک صفر از لحاظ ریاضی ممکن است، ولی از لحاظ فیزیکی حذف دقیق به خاطر عدم دقت‌های ذاتی در تعیین محل قطبها و صفرها ناممکن است. قطب نیم‌صفحه راست که توسط صفر جبرانساز دقیقاً حذف نشده باشد، باعث عملکرد ناپایدار سیستم می‌شود، زیرا پاسخ یک جمله‌نمایی پیدا می‌کند که با گذشت زمان بزرگ می‌شود.

گفتیم که اگر یک قطب نیم‌صفحه چپ تقریباً (چنانچه معمول است) و نه دقیقاً، حذف شود ترکیب قطب - صفر حاصل در پاسخ گذرا مولفه‌ای با دامنه کوچک ولی بلند مدت ایجاد می‌کند. اگر حذف نسبتاً خوب صورت گیرد، این مولفه بسیار کوچک می‌شود.

باید تذکر دهیم که سیستم کنترل ایده‌آل سیستمی با تابع تبدیل برابر یک نیست. از لحاظ فیزیکی ساخت چنین سیستمی ممکن نیست، زیرا نمی‌توان انرژی را به طور آنی از ورودی به خروجی منتقل کرد. به علاوه چون نویز همیشه به شکلی وجود دارد، تابع تبدیل واحد مطلوب نیست. در بسیاری از موارد عملی سیستم کنترل مطلوب باید مجموعه‌ای از قطبهای حلقه بسته مزدوج غالب، با نسبت میرایی و فرکانس طبیعی نامیرای معقول داشته باشد. تعیین محل قطبها و صفرهای مهم حلقه بسته، مثلاً قطبهای حلقه بسته غالب، بر اساس مشخصاتی صورت می‌گیرد که عملکرد سیستم بر اساس آنها سنجیده می‌شود.

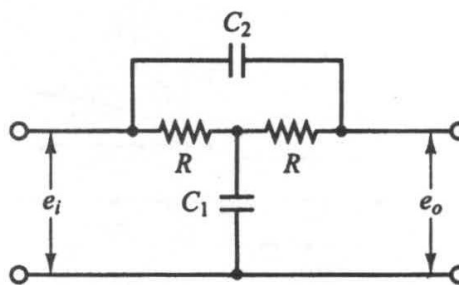
حذف قطبهای مزدوج مختلط ناخواسته. اگر تابع تبدیل سیستم تحت کنترل یک یا چند زوج قطب مزدوج مختلط داشته باشد، ممکن است جبرانسازهای پسفاز، پیشفاز، و پسفاز-پیشفاز نتوانند نتایج مطلوب را ایجاد کنند. در چنین مواردی شبکه‌ای با دو صفر و دو قطب می‌تواند مفید باشد. اگر بتوان صفرها را طوری برگزید که قطبهای مزدوج مختلط نامطلوب سیستم حذف شود، عملاً می‌توان به جای قطبهای نامطلوب قطبهای مطلوبی ایجاد کرد. اگر قطبهای مزدوج مختلط ناخواسته در نیم‌صفحه چپ و به شکل زیر باشند

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2}$$



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 C R_2 C s^2 + 2 R_1 C s + 1}{R_1 C R_2 C s^2 + (R_2 C + 2 R_1 C) s + 1}$$

(ب)



$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R C_1 R C_2 s^2 + 2 R C_2 s + 1}{R C_1 R C_2 s^2 + (R C_1 + 2 R C_2) s + 1}$$

(الف)

شکل ۷-۱۱۷

 شبکه‌های T پل‌دار.

گذاشتن شبکه جبرانسازی با تابع تبدیل زیر

$$\frac{s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + 2\zeta_2 \omega_2 s + \omega_2^2}$$

قطبهای مزدوج مختلط نامطلوب را به قطبهایی قابل قبول تبدیل می‌کند. توجه کنید که هر چند حذف دقیق ممکن نیست، ولی سیستم جبران شده پاسخی با مشخصات بهتر دارد. (چنانچه قبلاً گفتیم اگر قطبهای مزدوج مختلط نامطلوب در نیم‌صفحه راست باشند، نباید از این روش استفاده کرد.)

شبکه‌های T پل دار شبکه‌هایی هستند که تنها از خازن و مقاومت ساخته شده‌اند و تابع تبدیلی با دو صفر و دو قطب دارند. شکل ۷-۱۱۷ نمونه‌هایی از این شبکه‌ها و توابع تبدیل آنها را نشان می‌دهد. (این توابع تبدیل در مسئله الف-۳-۵ به دست آورده شده است.)

توضیحات نهایی. در مثالهای طراحی این فصل تنها به تابع تبدیل جبران‌ساز نظر داشتیم. در مسائل طراحی واقعی باید سخت‌افزار مناسب برای جبران‌ساز نیز تعیین شود. به این ترتیب محدودیت‌های طراحی دیگری چون هزینه، اندازه، و قابلیت اطمینان نیز در نظر گرفته می‌شود.

سیستم طراحی شده ممکن است در شرایط عادی کار مشخصات لازم را برآورده کند، ولی در صورت بروز تغییرات شدید در محیط رفتار کاملاً متفاوتی از خود نشان دهد. چون تغییر شرایط محیطی بر بهره و ثابت زمانی‌های سیستم تاثیر می‌گذارد، باید امکان تنظیم دستی یا خودکار بهره برای خنثی کردن اثرهای این تغییرات، اثرهای غیرخطی در نظر گرفته نشده در طراحی و تولرانسهای ساخت، که باعث می‌شود اجزاء سیستم دقیقاً آنچه فرض شده‌اند نباشد، در نظر گرفته شود. (اثر تولرانس ساخت در سیستمهای حلقه بسته تا حد زیادی پوشیده می‌شود؛ بنابراین چنین اثرهایی در عملکرد حلقه بسته چندان بحرانی نیستند، ولی در عملکرد حلقه باز می‌توانند بحرانی باشند.) به علاوه طراح باید به خاطر داشته باشد که هر سیستمی کم‌کم تغییر می‌کند، علت عمده این تغییر فرسودگی تدریجی آن است.

مسائل نمونه و حلشان

الف ۷-۱ سیستمی با تابع تبدیل حلقه بسته زیر در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)}$$

قطبهای حلقه بسته در $s = -2$ و $s = -5$ قرار دارند و سیستم نوسانی نیست.

نشان دهید که پاسخ فرکانسی حلقه بسته، به رغم بزرگتر از یک بودن نسبت میرایی قطبهای حلقه بسته، قله تشدید دارد.

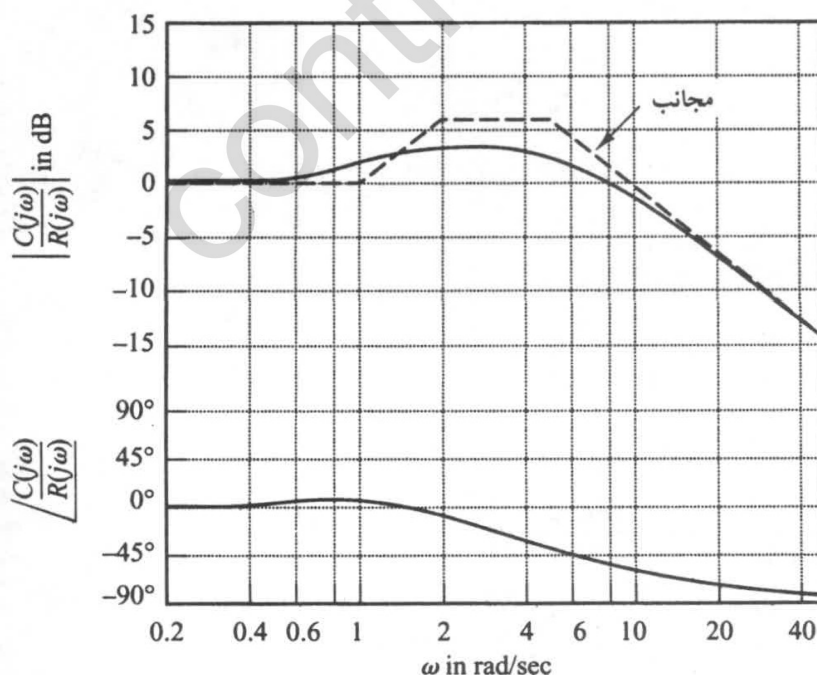
حل: شکل ۷-۱۱۸ نمودار بوده سیستم را نشان می دهد. مقدار قله تشدید تقریباً ۳/۵ dB است. (توجه کنید که در صورت نبودن صفر، سیستم مرتبه دوم دارای $\zeta > 0.7$ قله تشدید ندارد، ولی وجود یک صفر حلقه بسته می تواند چنین قله ای به وجود آورد.)

الف ۷-۲ سیستمی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

توابع تبدیل $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ ، $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ ، $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ ، و تابع $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ را بیابید. در یافتن $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ و $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ داریم $U_2(j\omega) = 0$ ؛ به نحوی مشابه در یافتن



شکل ۷-۱۱۸

نمودار بوده سیستم

$$10(1+j\omega)/[(2+j\omega)(5+j\omega)]$$

$U_1(j\omega) = 0$ و $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ و $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ فرض کنید.

حل: عبارتهای ماتریسی زیر را برای این سیستم داریم

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

ماتریس تبدیل عبارت است از

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s)$$

که در آن

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

برای سیستم مورد نظر ماتریس تبدیل عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 4s + 25} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s^2 + 4s + 25} & \frac{s+5}{s^2 + 4s + 25} \\ \frac{-25}{s^2 + 4s + 25} & \frac{s-25}{s^2 + 4s + 25} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

پس

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s^2 + 4s + 25} & \frac{s+5}{s^2 + 4s + 25} \\ \frac{-25}{s^2 + 4s + 25} & \frac{s-25}{s^2 + 4s + 25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

با فرض $U_2(j\omega) = 0$ ، $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ و $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ را به شکل زیر می‌یابیم

$$\frac{Y_1(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{j\omega + 4}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 25}$$

$$\frac{Y_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{-25}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 25}$$

به نحوی مشابه با فرض $U_1(j\omega) = 0$ ، $Y_1(j\omega)/U_2(j\omega)$ و $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ را به صورت زیر می‌یابیم

$$\frac{Y_1(j\omega)}{U_2(j\omega)} = \frac{j\omega + 5}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 25}$$

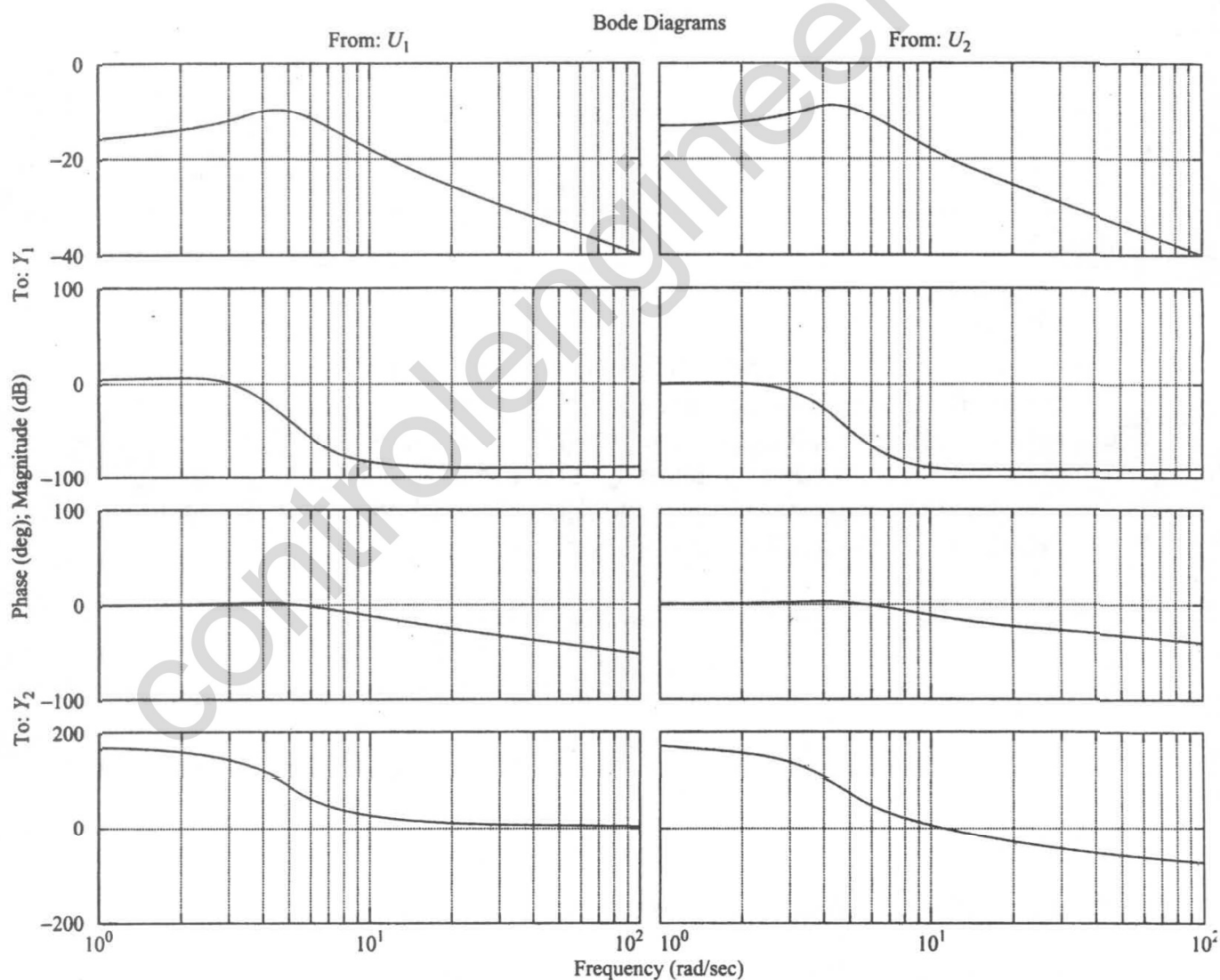
$$\frac{Y_2(j\omega)}{U_2(j\omega)} = \frac{j\omega - 25}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 25}$$

توجه کنید که $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ یک تابع تبدیل غیرمی‌نیم فاز است.

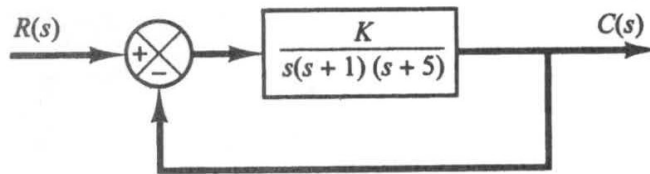
الف ۳-۷ نمودارهای بوده سیستم توصیف شده در مسئله الف-۷-۲ را با استفاده از MATLAB بیابید.
 حل: برنامه ۱۵-۷ نمودارهای بوده سیستم را به دست می‌دهد. چهار مجموعه نمودار بوده وجود دارد: دو مجموعه به ازای ورودی ۱ و دو مجموعه به ازای ورودی ۲. نمودارهای بوده در شکل ۱۱۹-۷ نشان داده شده‌اند.

MATLAB Program 7-15

```
A = [0 1;-25 -4];
B = [1 1;0 1];
C = [1 0;0 1];
D = [0 0;0 0];
bode(A,B,C,D)
```



شکل ۱۱۹-۷ نمودارهای بوده .



شکل ۷-۱۲۰

سیستم حلقه بسته.

الف ۷-۴ با استفاده از MATLAB نمودارهای بوده سیستم شکل ۷-۱۲۰ را به ازای $K=1$ ، $K=10$ ، و $K=20$ رسم کنید. سه نمودار دامنه را در یک شکل و سه نمودار فاز را نیز در یک شکل رسم کنید.

حل: تابع تبدیل حلقه بسته سیستم عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+5)+K} = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 5s + K}$$

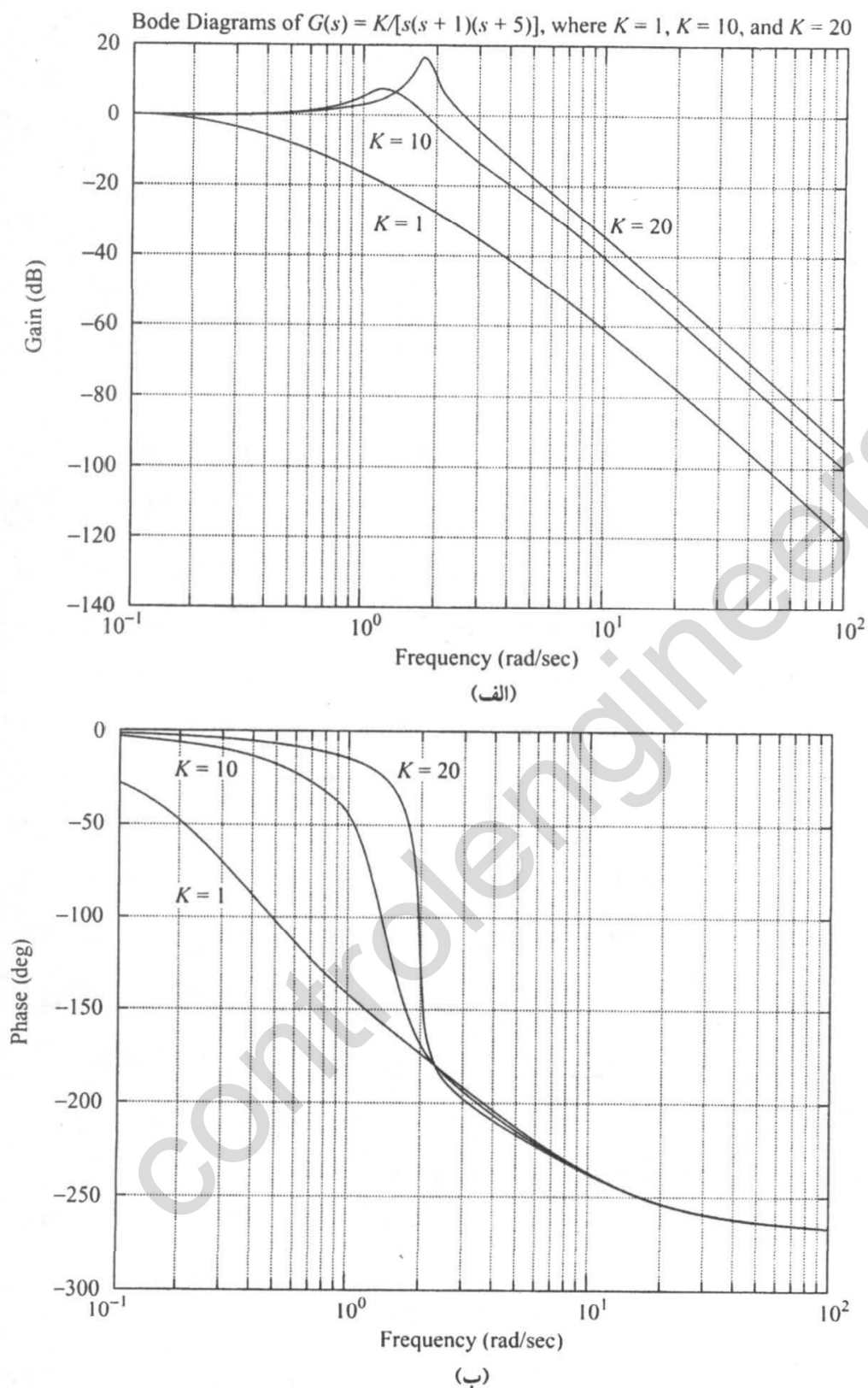
پس صورت و مخرج عبارتند از

$$\begin{aligned} \text{num} &= [K] \\ \text{den} &= [1 \ 6 \ 5 \ K] \end{aligned}$$

برنامه ۷-۱۶ یک روش انجام کار خواسته شده را نشان می‌دهد. نمودارهای بوده حاصل در شکل‌های ۷-۱۲۱ (الف) و (ب) نشان داده شده‌اند.

MATLAB Program 7-16

```
w = logspace(-1,2,200);
for i = 1:3;
    if i = 1; K = 1; [mag,phase,w] = bode([K],[1 6 5 K],w);
        mag1dB = 20*log10(mag); phase1 = phase; end;
    if i = 2; K = 10; [mag,phase,w] = bode([K],[1 6 5 K],w);
        mag2dB = 20*log10(mag); phase2 = phase; end;
    if i = 3; K = 20; [mag,phase,w] = bode([K],[1 6 5 K],w);
        mag3dB = 20*log10(mag); phase3 = phase; end;
end
semilogx(w,mag1dB,'-',w,mag2dB,'-',w,mag3dB,'-')
grid
title('Bode Diagrams of G(s) = K/[s(s + 1)(s + 5)], where K = 1, K = 10, and K = 20')
xlabel('Frequency (rad/sec)')
ylabel('Gain (dB)')
text(1.2,-31,'K = 1')
text(1.1,-8,'K = 10')
text(11,-31,'K = 20')
semilogx(w,phase1,'-',w,phase2,'-',w,phase3,'-')
grid
xlabel('Frequency (rad/sec)')
ylabel('Phase (deg)')
text(0.2,-90,'K = 1')
text(0.2,-20,'K = 10')
text(1.6,-20,'K = 20')
```



شکل ۷-۱۲۱
نمودارهای بوده.
(الف) نمودارهای دامنه؛
(ب) نمودارهای فاز
بر حسب فرکانس.

الف ۷-۵ ثابت کنید نمودارهای قطبی تابع تبدیل سینوسی زیر یک نیمدایره است

$$G(j\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} \quad 0 \leq \omega \leq \infty$$

مرکز و شعاع دایره را بیابید.

حل: تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega)$ داده شده را می توان به شکل زیر نوشت

$$G(j\omega) = X + jY$$

که در آن

$$Y = \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2}, \quad X = \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2}$$

پس

$$\left(X - \frac{1}{4}\right)^2 + Y^2 = \frac{(\omega^2 T^2 - 1)^2}{4(1 + \omega^2 T^2)^2} + \frac{\omega^2 T^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = \frac{1}{4}$$

می بینیم که نمودار $G(j\omega)$ دایره ای به مرکز $(0, 0.5)$ و شعاع 0.5 است. نیمدایره بالایی با $0 \leq \omega \leq \infty$ و نیمدایره پایینی با $-\infty \leq \omega \leq 0$ متناظر است.

الف ۶-۷ قضیه نگاشت زیر را ثابت کنید: $F(s)$ را نسبت دو چند جمله ای بر حسب s فرض کنید. P را تعداد قطبها و Z را تعداد صفرهای $F(s)$ واقع در مسیر بسته ای در صفحه s ، با منظور کردن مرتبه صفرها و قطبها، در نظر بگیرید. مسیر بسته به نحوی فرض شده است که از هیچ صفر و قطبی نمی گذرد. بنابراین مسیر صفحه s به یک مسیر بسته در صفحه $F(s)$ نگاشته می شود. اگر جهت مسیر صفحه s ساعتگرد باشد، تعداد دورهایی که مسیر متناظر صفحه $F(s)$ در جهت پاد ساعتگرد حول مبدأ می زند، N ، برابر $Z - P$ است.

حل: برای اثبات این قضیه از قضیه های کوشی و باقیمانده استفاده می کنیم. قضیه کوشی می گوید انتگرال $F(s)$ روی مسیر بسته ای در صفحه s ، که $F(s)$ در آن و روی مرز آن تحلیلی[†] است، برابر صفر است؛ یا

$$\oint F(s) ds = 0$$

$F(s)$ را به صورت زیر فرض کنید.

$$F(s) = \frac{(s+z_1)^{k_1} (s+z_2)^{k_2} \dots}{(s+p_1)^{m_1} (s+p_2)^{m_2} \dots} X(s)$$

که $X(s)$ در مسیر بسته صفحه s تحلیلی است و تمام قطبها و صفرهای آن داخل مسیر است. پس $F'(s)/F(s)$ را می توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \left(\frac{k_1}{s+z_1} + \frac{k_2}{s+z_2} + \dots \right) - \left(\frac{m_1}{s+p_1} + \frac{m_2}{s+p_2} + \dots \right) + \frac{X'(s)}{X(s)} \quad (30-7)$$

درستی رابطه بالا را می توان به این صورت نشان داد: اگر $\hat{F}(s)$ به صورت زیر باشد

$$\hat{F}(s) = (s+z_1)^k X(s)$$

یعنی $\hat{F}(s)$ یک صفر مرتبه k در $s = -z_1$ دارد. با مشتقگیری از $\hat{F}(s)$ نسبت به s به دست می آوریم

[†] برای تعریف تابع تحلیلی، زیرنویس صفحه ۴۷۹ را ببینید.

$$\hat{F}'(s) = k(s+z_1)^{k-1} X(s) + (s+z_1)^k X'(s)$$

پس

$$\frac{\hat{F}'(s)}{\hat{F}(s)} = \frac{k}{s+z_1} + \frac{X'(s)}{X(s)} \quad (۳۱-۷)$$

می‌بینیم که با گرفتن نسبت $\hat{F}'(s)/\hat{F}(s)$ صفر مرتبه k تابع $\hat{F}(s)$ به قطب ساده‌ای از $\hat{F}'(s)/\hat{F}(s)$ تبدیل می‌شود.

اگر جمله آخر طرف راست معادله (۳۱-۷) در داخل مسیر بسته صفحه s قطب یا صفر نداشته باشد، آنگاه $F'(s)/F(s)$ در داخل این مسیر، بجز نقطه $s = -z_1$ تحلیلی است. پس با توجه به معادله (۳۰-۷) و استفاده از قضیه باقیمانده که می‌گوید انتگرال $F'(s)/F(s)$ روی مسیر بسته‌ای در صفحه s در جهت ساعتگرد، برابر است با حاصلضرب $-2\pi j$ در باقیمانده‌های قطبهای ساده $F'(s)/F(s)$ یا

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = -2\pi j \quad (\text{جمع باقیمانده‌ها})$$

به دست می‌آوریم

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = -2\pi j [(k_1 + k_2 + \dots) - (m_1 + m_2 + \dots)] = -2\pi j (Z - P)$$

که در آن $k_1 + k_2 + \dots = Z$ = تعداد کل صفرهای $F(s)$ داخل مسیر بسته صفحه s

$m_1 + m_2 + \dots = P$ = تعداد کل قطبهای $F(s)$ داخل مسیر بسته صفحه s

[صفر (یا قطب) مرتبه k ، صفر (یا قطب) واقع در آن نقطه فرض می‌شود.] چون $F(s)$ یک کمیت مختلط است، می‌توان آن را به شکل زیر نوشت

$$F(s) = |F| e^{j\theta}$$

$$\ln F(s) = \ln |F| + j\theta$$

و

چون $F'(s)/F(s)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{d \ln F(s)}{ds}$$

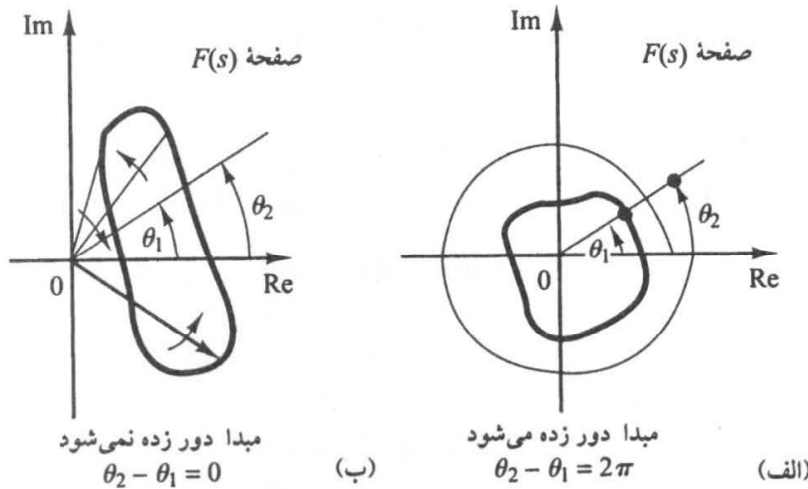
$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{d \ln |F|}{ds} + j \frac{d\theta}{ds}$$

به دست می‌آوریم

اگر مسیر بسته صفحه s به مسیر بسته Γ در صفحه $F(s)$ نگاشته شود داریم

$$\oint \frac{F'(s)}{F(s)} ds = \oint_{\Gamma} d \ln |F| + j \oint_{\Gamma} d\theta = j \int d\theta = 2\pi j (P - Z)$$

انتگرال $\oint_{\Gamma} d \ln |F|$ صفر است، زیر دامنه $\ln |F|$ در ابتدا و انتهای مسیر Γ یکسان است. پس به دست می‌آوریم



شکل ۷-۱۲۲
 تعیین دورهایی حول
 مبدأ صفحه $F(s)$.

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = P - Z$$

تفاوت زاویه‌ها در ابتدا و انتهای مسیر، با کل تغییر فاز $F'(s)/F(s)$ ، هنگامی که نقطه مرجع صفحه s مسیر بسته را می‌پیماید، برابر است. توجه کنید که N تعداد دورهایی است که در جهت پاد ساعتگرد حول مبدأ صفحه $F(s)$ زده می‌شود، و $\theta_2 - \theta_1$ صفر یا مضربی از 2π رادیان است. پس داریم

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = -N$$

و رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$N = Z - P$$

که اثبات قضیه است.

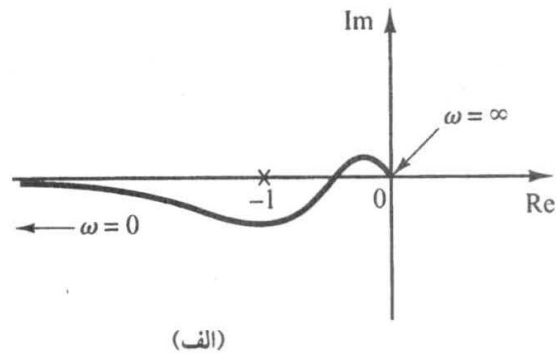
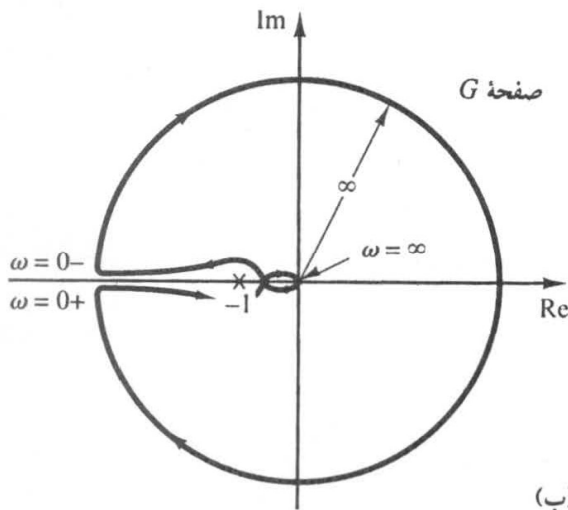
توجه کنید که این قضیه تعداد دقیق صفرها و قطبها را نمی‌دهد و تنها تفاضلشان را تعیین می‌کند. همچنین در شکل‌های ۷-۱۲۲ (الف) و (ب) نشان داده شده است که تا θ به اندازه 2π رادیان تغییر نکند، مبدأ صفحه $F(s)$ دور زده نمی‌شود.

الف ۷-۷ شکل ۷-۱۲۳ (الف) نمودار نایکویست (قطبی) پاسخ فرکانسی حلقه باز یک سیستم کنترل دارای فیدبک واحد را نشان می‌دهد. با فرض این که مسیر نایکویست در صفحه s تمام نیم‌صفحه راست را دربر دارد، نمودار نایکویست کامل را در صفحه G رسم کنید. سپس به پرسشهای زیر پاسخ دهید:

(الف) آیا اگر تابع تبدیل حلقه باز در نیم‌صفحه راست صفحه s قطب نداشته باشد، سیستم حلقه بسته پایدار است یا نه؟

(ب) اگر تابع تبدیل حلقه باز در نیم‌صفحه راست یک قطب داشته ولی صفر نداشته باشد، سیستم حلقه بسته پایدار است یا نه؟

(ج) اگر تابع تبدیل حلقه باز در نیمه راست صفحه s یک صفر داشته ولی قطب نداشته باشد، سیستم حلقه بسته پایدار است یا نه؟



شکل ۷-۱۲۳

(الف) نمودار نایکویست.

(ب) نمودار نایکویست کامل در صفحه G .

حل: شکل ۷-۱۲۳ (ب) نمودار نایکویست کامل را نشان می‌دهد. جواب سه سوال به صورت زیر است:

(الف) سیستم حلقه بسته پایدار است، زیرا نمودار نایکویست نقطه بحرانی $(-1, j0)$ را دور نمی‌زند. پس چون $P=0$ و $N=0$ ، بنابراین $Z=N+P=0$.

(ب) تابع تبدیل حلقه باز قطبی در نیمه راست صفحه s دارد. پس $P=1$ (سیستم حلقه باز ناپایدار است). برای این که سیستم حلقه بسته پایدار باشد، نمودار نایکویست باید نقطه بحرانی $(-1, j0)$ را یک بار در جهت پاد ساعتگرد دور بزند. ولی نمودار نایکویست این نقطه را دور نمی‌زند، بنابراین $N=0$ ، پس $Z=N+P=1$ و سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

(ج) چون تابع تبدیل حلقه باز در نیم صفحه راست یک صفر دارد و قطب ندارد داریم $Z=N+P=0$ ؛ پس سیستم حلقه بسته پایدار است. (توجه کنید که صفرهای تابع تبدیل حلقه باز بر پایداری سیستم حلقه بسته اثر نمی‌گذارد).

الف ۷-۸ آیا سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر به ازای $K=2$ پایدار است؟

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(2s+1)}$$

مقدار بحرانی K برای پایداری چقدر است؟

حل: تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$\begin{aligned} G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(2j\omega+1)} \\ &= \frac{K}{-3\omega^2 + j\omega(1-2\omega^2)} \end{aligned}$$

این تابع تبدیل حلقه باز در نیم صفحه راست قطب ندارد. پس برای پایداری سیستم نمودار نایکویست نباید نقطه $(-1, j0)$ را دور بزند. بیایید محل برخورد نمودار نایکویست و بخش منفی محور حقیقی را بیابیم. بخش موهومی $G(j\omega)H(j\omega)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$1 - 2\omega^2 = 0$$

که به دست می‌دهد

$$\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با گذاشتن $\omega = 1/\sqrt{2}$ در $G(j\omega)H(j\omega)$ به دست می‌آوریم

$$G\left(j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)H\left(j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2K}{3}$$

مقدار بحرانی K با برابر ۱- قرار دادن $-2K/3$ به دست می‌آید

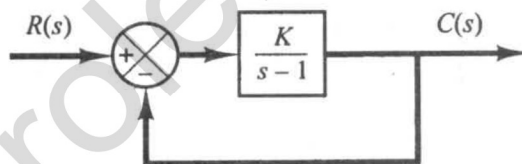
$$-\frac{2}{3}K = -1$$

پس

$$K = \frac{3}{2}$$

سیستم به ازای $\frac{2}{3} < K < \infty$ پایدار است. پس به ازای $K = 2$ سیستم ناپایدار داریم.

الف ۷-۹ سیستم حلقه بسته شکل ۷-۱۲۴ را در نظر بگیرید. با استفاده از معیار پایداری نایکویست مقدار بحرانی K برای پایداری را تعیین کنید.



شکل ۷-۱۲۴

سیستم حلقه بسته.

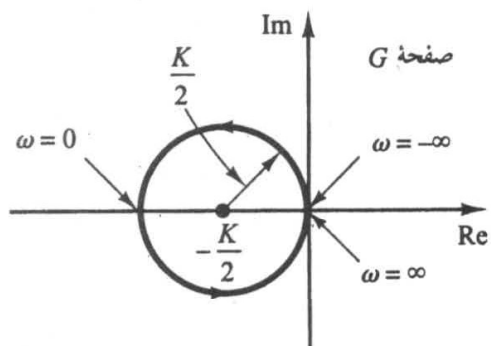
حل: نمودار قطبی تابع

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega - 1}$$

دایره‌ای به مرکز $(-K/2, 0)$ و شعاع $K/2$ به صورت شکل ۷-۱۲۵ (الف) است. با تغییر ω از $-\infty$ تا $+\infty$ مکان هندسی $G(j\omega)$ یک دور در جهت پادساعتگرد می‌زند. در این سیستم $P=1$ ، زیرا $G(s)$ یک قطب در نیم‌صفحه راست دارد. برای پایداری بودن سیستم باید داشته باشیم $Z=0$. چون $N=Z-P$ ، برای پایداری بودن سیستم نمودار قطبی باید نقطه $1+j0$ را یکبار در جهت پادساعتگرد دور بزند. (اگر نقطه $1+j0$ دور زده نشود، سیستم ناپایدار است.) پس برای پایداری باید K بزرگتر از یک باشد، و $K=1$ مرز پایداری را مشخص می‌کند. شکل ۷-۱۲۵ (ب) نمودارهای $G(j\omega)$ پایدار و ناپایدار را نشان می‌دهد.

الف ۷-۱۰ سیستمی با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{K e^{-0.8s}}{s+1}$$



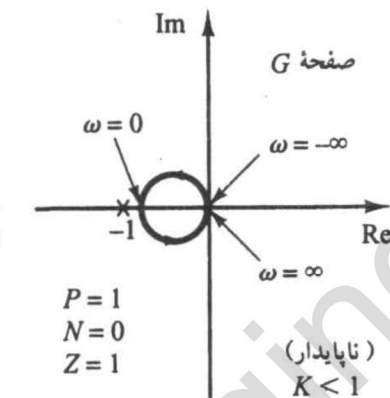
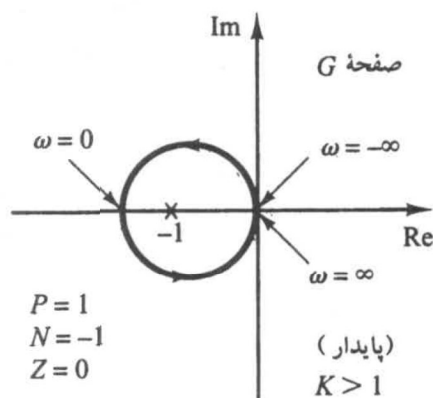
(الف)

شکل ۷-۱۲۵

(الف) نمودار قطبی $K/(j\omega - 1)$ ؛

(ب) نمودارهای قطبی $K/(j\omega - 1)$

برای حالت‌های ناپایدار و پایدار.



(ب)

با استفاده از نمودار نایکویست مقدار بحرانی K برای پایداری را تعیین کنید.

حل: برای این سیستم

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K e^{-j\omega} j\omega}{j\omega + 1} \\ &= \frac{K(\cos \omega - j \sin \omega)(1 - j\omega)}{1 + \omega^2} \\ &= \frac{K}{1 + \omega^2} [(\cos \omega - \omega \sin \omega) - j(\sin \omega + \omega \cos \omega)] \end{aligned}$$

بخش موهومی $G(j\omega)$ به شرطی صفر است که

$$\sin \omega + \omega \cos \omega = 0$$

$$\omega = -\tan \omega$$

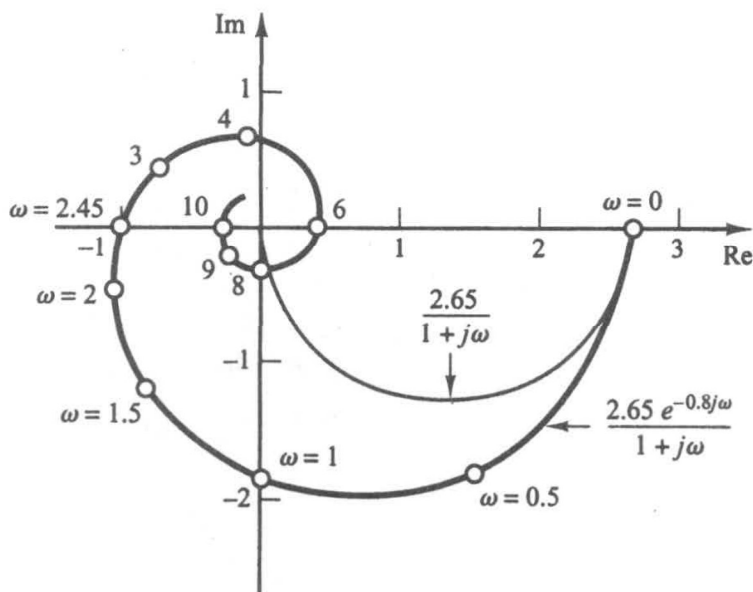
پس

این معادله را حل می‌کنیم تا کوچکترین ω مثبت ارضا کننده آن را بیابیم

$$\omega = 2.4482$$

با گذاشتن $\omega = 2.4482$ در $G(j\omega)$ به دست می‌آوریم

$$G(j 2.4482) = \frac{K}{1 + 2.4482^2} (\cos 1.9586 - 2.4482 \sin 1.9586) = -0.378 K$$



شکل ۷-۱۲۶

نمودارهای قطبی

 $\frac{2.65}{1+j\omega}$ و $\frac{2.65 e^{-0.8j\omega}}{1+j\omega}$

 مقدار بحرانی K با حل معادله $G(j2.4482) = -1$ به دست می آید. پس

$$K = 0.378$$

یا

$$K = 2.65$$

نمودار نایکویست یا نمودار قطبی $\frac{2.65}{1+j\omega}$ و $\frac{2.65 e^{-0.8j\omega}}{1+j\omega}$ در شکل ۷-۱۲۶ دیده می شود. سیستم مرتبه اول فاقد تاخیر انتقالی به ازای تمام مقادیر K پایدار است، ولی سیستم دارای تاخیر انتقالی ۰.۷ sec به ازای $K > 2.65$ ناپایدار می شود.

الف ۷-۱۱ سیستمی با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

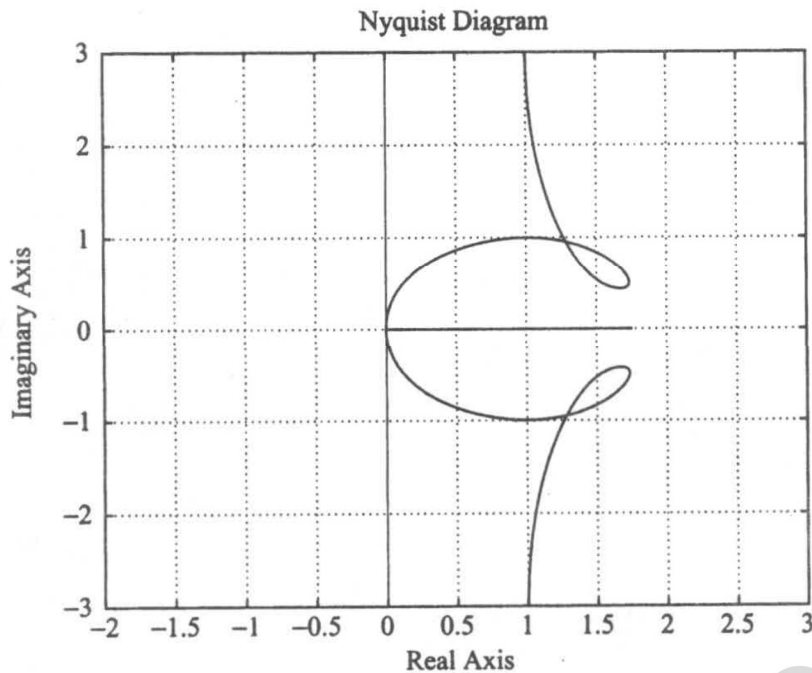
$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s+1)(s+10)}$$

نمودار نایکویست این تابع تبدیل را با MATLAB رسم کرده، پایداری حلقه بسته را بررسی کنید.

حل: برنامه ۷-۱۷ نمودار نایکویست شکل ۷-۱۲۷ را به دست می دهد. این شکل نشان می دهد که نمودار نایکویست نقطه $0 + j-1$ را دور نمی زند. چون در نیم صفحه راست قطب حلقه باز وجود ندارد، در معیار پایداری نایکویست $P = 0$. بنابراین $Z = N + P = 0$ ، پس سیستم حلقه بسته پایدار است.

MATLAB Program 7-17

```
num = [20 20 10];
den = [1 11 10 0];
nyquist(num,den)
v = [-2 3 -3 3]; axis(v)
grid
```



شکل ۷-۱۲۷

نمودار نایکویست

$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s+1)(s+10)}$$

الف ۷-۱۲ سیستم مسئله الف ۷-۱۱ را در نظر بگیرید. نمودار نایکویست را تنها برای فرکانسهای مثبت رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار نایکویست برای فرکانسهای مثبت می‌توان از دستور زیر استفاده کرد

$$[re, im, w] = \text{nyquist}(\text{num}, \text{den}, w)$$

ناحیه فرکانسی را باید با استفاده از گامهای مختلف به زیر ناحیه‌هایی تقسیم کرد. مثلاً می‌توان ناحیه مورد نظر را به سه زیر ناحیه تقسیم کرد

$$w1 = 0.1:0.1:10;$$

$$w2 = 10:2:100;$$

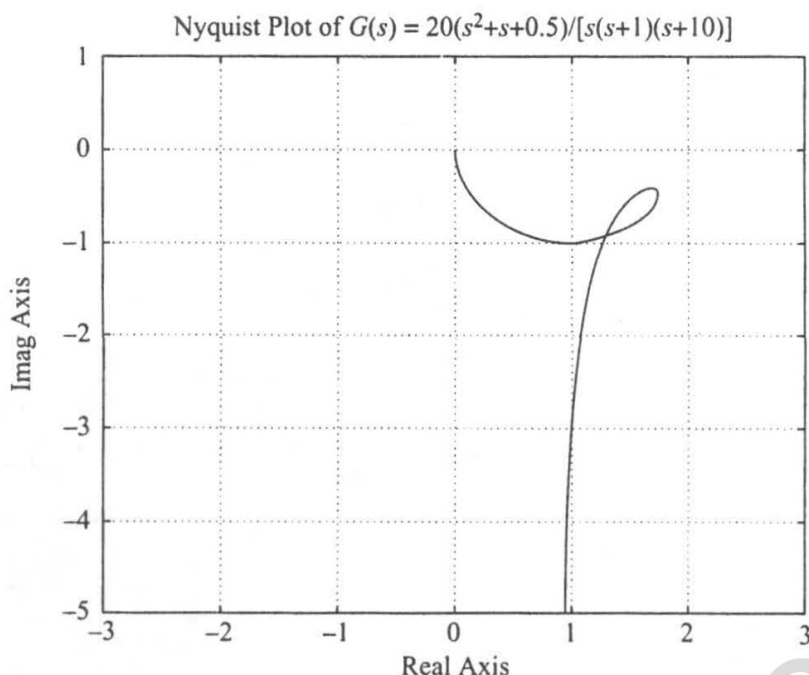
$$w3 = 100:10:500;$$

$$w = [w1 \ w2 \ w3]$$

در برنامه ۷-۱۸ از این سه زیر ناحیه استفاده شده است. با دادن این برنامه نمودار نایکویست شکل ۷-۱۲۸ به دست می‌آید.

MATLAB Program 7-18

```
num = [20 20 10];
den = [1 11 10 0];
w1 = 0.1:0.1:10; w2 = 10:2:100; w3 = 100:10:500;
w = [w1 w2 w3];
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im)
v = [-3 3 -5 1]; axis(v);
grid
title('Nyquist Plot of G(s) = 20(s^2 + s + 0.5)/[s(s + 1)(s + 10)]')
xlabel('Real Axis')
ylabel('Imag Axis')
```



شکل ۷-۱۲۸
نمودار نایکوئیست
برای فرکانسهای مثبت.

الف ۷-۱۳ با توجه به حل مسئله الف-۷-۱۲ نمودار قطبی $G(s)$ زیر را رسم کنید.

$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 0.5)}{s(s+1)(s+10)}$$

روی نمودار قطبی فرکانسهای $\omega = 0.2, 0.3, 0.5, 1, 2, 6, 10, 20$ rad/sec را مشخص کنید. اندازه و فاز $G(j\omega)$ را در این فرکانسها بیابید.

حل: در برنامه ۷-۱۹ بردار فرکانسی w را به کار بردیم که شامل زیربردارهای w_1, w_2 و w_3 بود. تنها کافی است به جای این w بردار فرکانسی $w = \text{logspace}(d1, d2, n)$ را به کار ببریم در برنامه ۷-۱۹ از بردار فرکانسی زیر استفاده شده است.

$$w = \text{logspace}(-1, 2, 100)$$

برنامه ۷-۱۹ نمودار قطبی را رسم کرده، نقاط فرکانسی خواسته شده را به صورت نشان داده شده در شکل ۷-۱۲۹ مشخص می کند.

الف ۷-۱۴ سیستمی با فیدبک مثبت واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 6}{s^2 + 5s + 4}$$

نمودار نایکوئیست سیستم را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار نایکوئیست سیستم دارای فیدبک مثبت می توان num و den زیر را به کار برد

$$\text{num} = [-1 \ -4 \ -6]$$

$$\text{den} = [1 \ 5 \ 4]$$

و دستور $\text{nyquist}(\text{num}, \text{den})$ را داد. برنامه ۷-۲۰ نمودار نایکوئیست شکل ۷-۱۳۰ را به دست می دهد.

MATLAB Program 7-19

```

num = [20 20 10];
den = [1 11 10 0];
ww = logspace(-1,2,100);
nyquist(num,den,ww)
v = [-2 3 -5 0]; axis(v);
grid
hold
Current plot held
w = [0.2 0.3 0.5 1 2 6 10 20];
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
plot(re,im,'o')
text(1.1,-4.8,'w = 0.2')
text(1.1,-3.1,'0.3')
text(1.25,-1.7,'0.5')
text(1.37,-0.4,'1')
text(1.8,-0.3,'2')
text(1.4,-1.1,'6')
text(0.77,-0.8,'10')
text(0.037,-0.8,'20')

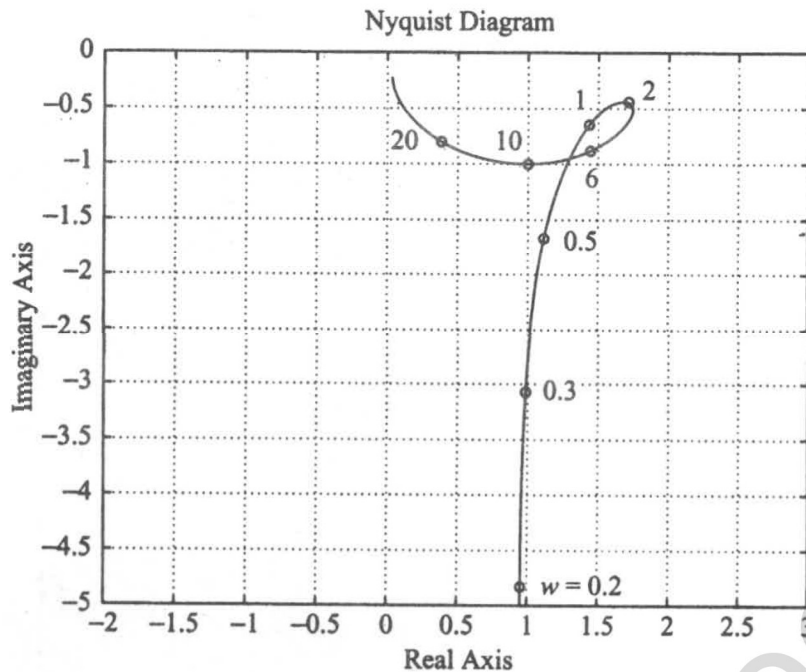
% ----- To get the values of magnitude and phase (in degrees) of G(jw)
% at the specified w values, enter the command [mag,phase,w]
% = bode(num,den,w) -----

[mag,phase,w] = bode(num,den,w);

% ----- The following table shows the specified frequency values w and
% the corresponding values of magnitude and phase (in degrees) -----

[w mag phase]
ans =
    0.2000    4.9176   -78.9571
    0.3000    3.2426   -72.2244
    0.5000    1.9975   -55.9925
    1.0000    1.5733   -24.1455
    2.0000    1.7678   -14.4898
    6.0000    1.6918   -31.0946
   10.0000    1.4072   -45.0285
   20.0000    0.8933   -63.4385

```

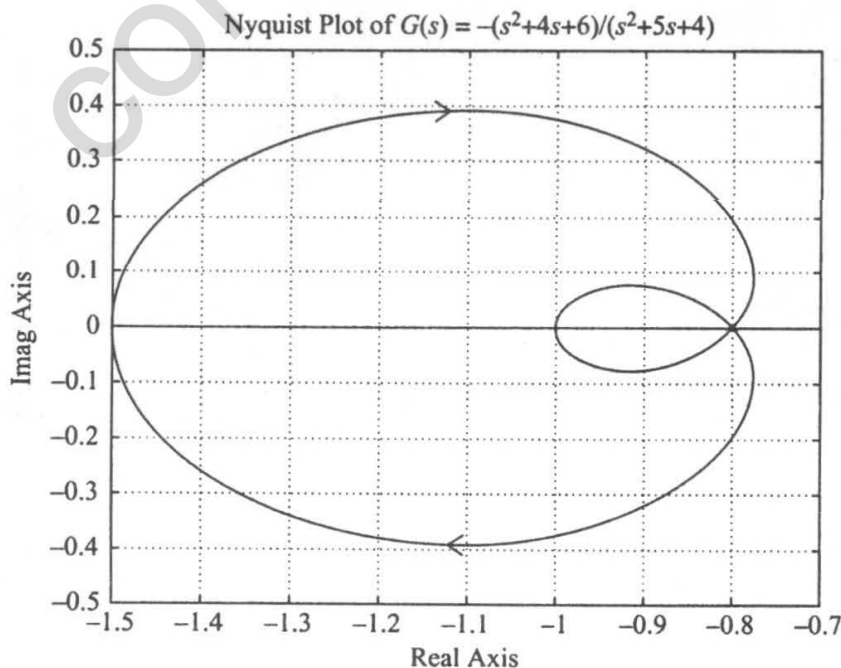


شکل ۷-۱۲۹
نمودار قطبی $G(j\omega)$
مسئله الف ۷-۱۳.

این سیستم ناپایدار است، زیرا نقطه $z = -1$ یکبار در جهت ساعتگرد دور زده می‌شود. توجه کنید که نمودار نایکویست در این حالت خاص هم از نقطه $z = -1$ می‌گذرد و هم این نقطه را دور می‌زند. مفهوم این نمودار نایکویست این است که سیستم تباهیده شده، یعنی به صورتی عمل می‌کند که گویی یک سیستم ناپایدار مرتبه اول است. تابع تبدیل حلقه بسته این سیستم با فیدبک مثبت عبارت است از

MATLAB Program 7-20

```
num = [-1 -4 -6];
den = [1 5 4];
nyquist(num,den);
grid
title('Nyquist Plot of  $G(s) = -(s^2 + 4s + 6)/(s^2 + 5s + 4)$ ')
```



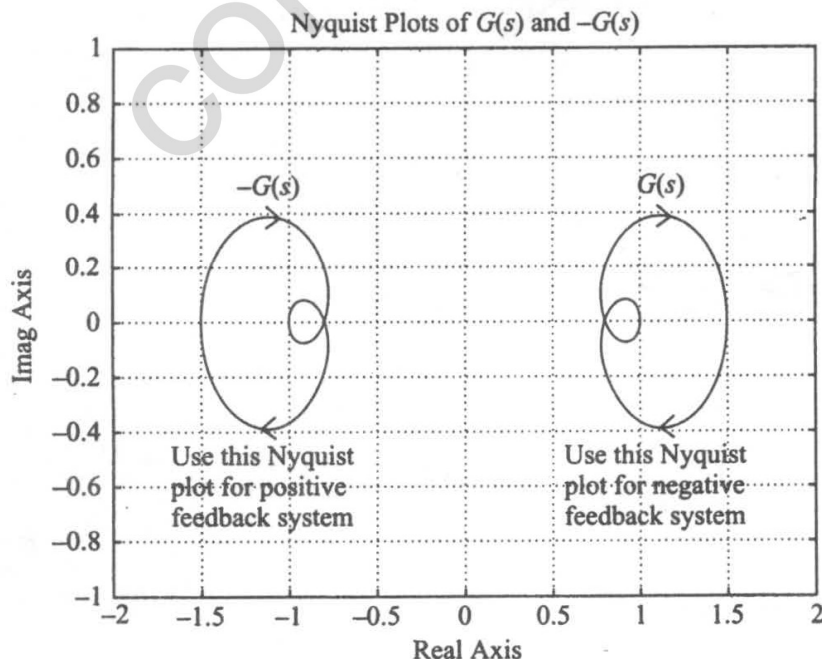
شکل ۷-۱۳۰
نمودار نایکویست
سیستم فیدبک مثبت.

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{s^2 + 4s + 6}{s^2 + 5s + 4 - (s^2 + 4s + 6)} \\ &= \frac{s^2 + 4s + 6}{s - 2}\end{aligned}$$

نمودار نایکویست برای سیستم با فیدبک مثبت تصویر آینه‌ای نمودار نایکویست برای سیستم دارای فیدبک منفی نسبت به محور موهومی است. این مطلب در شکل ۷-۱۳۱ که توسط برنامه ۷-۲۱ رسم شده، دیده می‌شود. توجه کنید که سیستم دارای فیدبک مثبت ناپایدار و سیستم دارای فیدبک منفی پایدار است.

MATLAB Program 7-21

```
num1 = [1 4 6];
den1 = [1 5 4];
num2 = [-1 -4 -6];
den2 = [1 5 4];
nyquist(num1,den1);
hold on
nyquist(num2,den2);
v = [-2 2 -1 1];
axis(v);
grid
title('Nyquist Plots of G(s) and -G(s)')
text(1.0,0.5,'G(s)')
text(0.57,-0.48,'Use this Nyquist')
text(0.57,-0.61,'plot for negative')
text(0.57,-0.73,'feedback system')
text(-1.3,0.5,'-G(s)')
text(-1.7,-0.48,'Use this Nyquist')
text(-1.7,-0.61,'plot for positive')
text(-1.7,-0.73,'feedback system')
```



شکل ۷-۱۳۱

نمودارهای نایکویست سیستم
دارای فیدبک مثبت و سیستم
دارای فیدبک منفی.

الف ۷-۱۵ سیستم کنترل شکل ۷-۶۰ را در نظر بگیرید (به مثال ۷-۱۹ مراجعه کنید). با استفاده از نمودار قطبی وارون گستره بهره K برای عملکرد پایدار سیستم را تعیین کنید.
حل: چون

$$G_r(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 1}$$

$$G(s) = G_1(s) G_r(s) = \frac{K(s + 0.5)}{s^3 + s^2 + 1}$$

داریم

پس

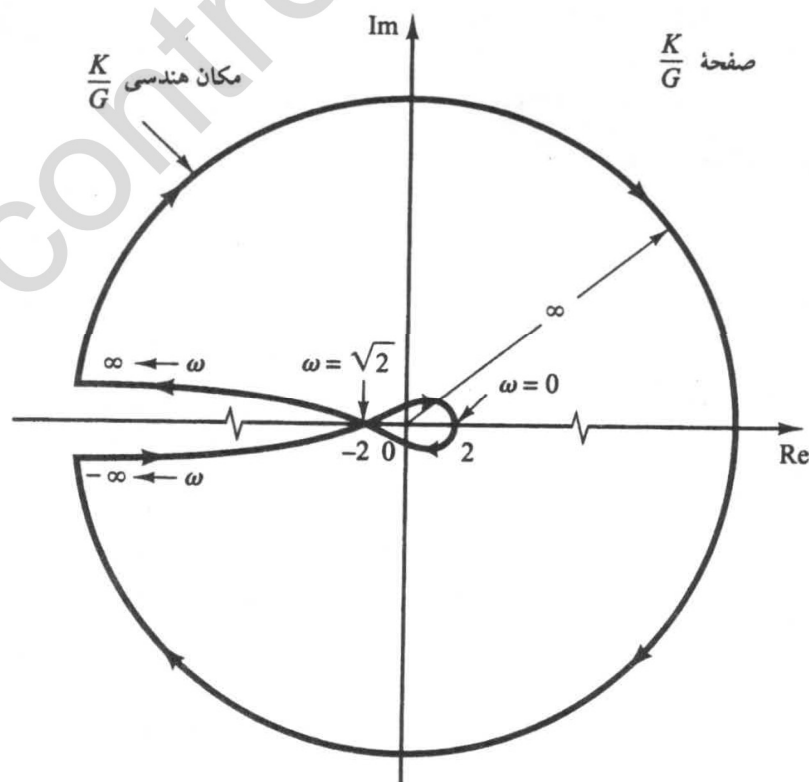
$$\frac{1}{G(s)} = \frac{s^3 + s^2 + 1}{K(s + 0.5)}$$

$1/G(s)$ در $s = -0.5$ قطب دارد و در نیم صفحه راست هیچ قطبی ندارد. پس معیار پایداری نایکویست

$$Z = P + N$$

با $P = 0$ به شکل ساده $Z = N$ درمی آید. این معادله ساده شده می گوید تعداد صفرهای $1 + [1/G(s)]$ در نیم صفحه راست با N ، تعداد دورهای در جهت ساعتگرد منحنی حول نقطه $0.5 - j0$ برابر است. برای پایداری N باید صفر باشد، یا به عبارتی منحنی نباید نقطه $0.5 - j0$ را دور بزند. شکل ۷-۱۳۲ نمودار نایکویست یا نمودار قطبی $K/G(j\omega)$ را نشان می دهد. دقت کنید که چون

$$\begin{aligned} \frac{K}{G(j\omega)} &= \left[\frac{(j\omega)^3 + (j\omega)^2 + 1}{(j\omega + 0.5)} \right] \left(\frac{0.5 - j\omega}{0.5 - j\omega} \right) \\ &= \frac{0.5 - 0.5\omega^2 - \omega^4 + j\omega(-1 + 0.5\omega^2)}{0.25 + \omega^2} \end{aligned}$$



شکل ۷-۱۳۲

نمودار قطبی $K/G(j\omega)$.

مکان هندسی $K / G(j\omega)$ محور حقیقی را به ازای $\omega = \sqrt{2}$ قطع می‌کند و نقطه برخورد با محور حقیقی منفی ۲- است.

با توجه به شکل ۷-۱۳۲ می‌بینیم که اگر نقطه بحرانی در ناحیه بین ۲- و $-\infty$ باشد، منحنی آن را دور نمی‌زند. پس برای پایداری باید داشته باشیم

$$-1 < \frac{-2}{K}$$

و گستره K برای پایداری عبارت است از

$$2 < K$$

که همان نتیجه به دست آمده در مثال ۷-۱۹ است.

الف ۷-۱۶ شکل ۷-۱۳۳ نمودار بلوکی سیستم کنترل یک فضاپیما را نشان می‌دهد. بهره K را به نحوی تعیین کنید که حاشیه فاز 50° باشد. در این حالت حاشیه بهره چقدر است؟

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega + 2)}{(j\omega)^2} \quad \text{حل: چون}$$

داریم

$$\angle G(j\omega) = \angle(j\omega + 2) - 2 \angle j\omega = \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - 180^\circ$$

چون خواسته‌ایم حاشیه فاز 50° باشد، $\angle G(j\omega_c)$ باید برابر -130° باشد، که در آن فرکانس عبور بهره است

$$\angle G(j\omega_c) = -130^\circ$$

$$\tan^{-1} \frac{\omega_c}{2} = 50^\circ$$

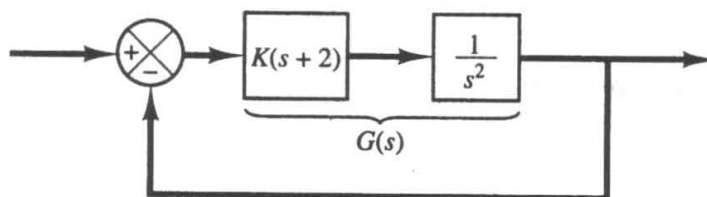
پس قرار می‌دهیم

و از آن به دست می‌آوریم

$$\omega_c = 2.3835 \text{ rad/sec}$$

چون منحنی فاز خط -180° را قطع نمی‌کند، حاشیه بهره $+\infty$ dB است. در $\omega = 2.3835$ دامنه $G(j\omega)$ باید ۰ dB باشد، پس

$$\left| \frac{K(j\omega + 2)}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=2.3835} = 1$$



شکل ۷-۱۳۳

سیستم کنترل فضاپیما.

که به دست می‌دهد

$$K = \frac{2,3835^2}{\sqrt{2^2 + 2,3835^2}} = 1,8259$$

به ازای این مقدار K حاشیه فاز برابر 50° است.

الف ۷-۱۷ برای سیستم استاندارد مرتبه دوم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

نشان دهید که پهنای باند ω_b از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\omega_b = \omega_n \left(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right)^{1/2}$$

توجه کنید که ω_b / ω_n تنها تابعی از ζ است. منحنی ω_b / ω_n بر حسب ζ را رسم کنید.

حل: حل معادله $|C(j\omega_b)/R(j\omega_b)| = -3 \text{ dB}$ پهنای باند ω_b را به دست می‌دهد. غالباً به جای -3 dB

مقدار $-3,01 \text{ dB}$ را به کار می‌برند که برابر $0,707$ است. پس

$$\left| \frac{C(j\omega_b)}{R(j\omega_b)} \right| = \left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega_b)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_b) + \omega_n^2} \right| = 0,707$$

$$\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_b)^2}} = 0,707$$

و

که از آن به دست می‌آوریم

$$\omega_n^4 = 0,5 \left[(\omega_n^2 - \omega_b^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2 \omega_b^2 \right]$$

تقسیم دو طرف معادله اخیر بر ω_n^4 به دست می‌دهد

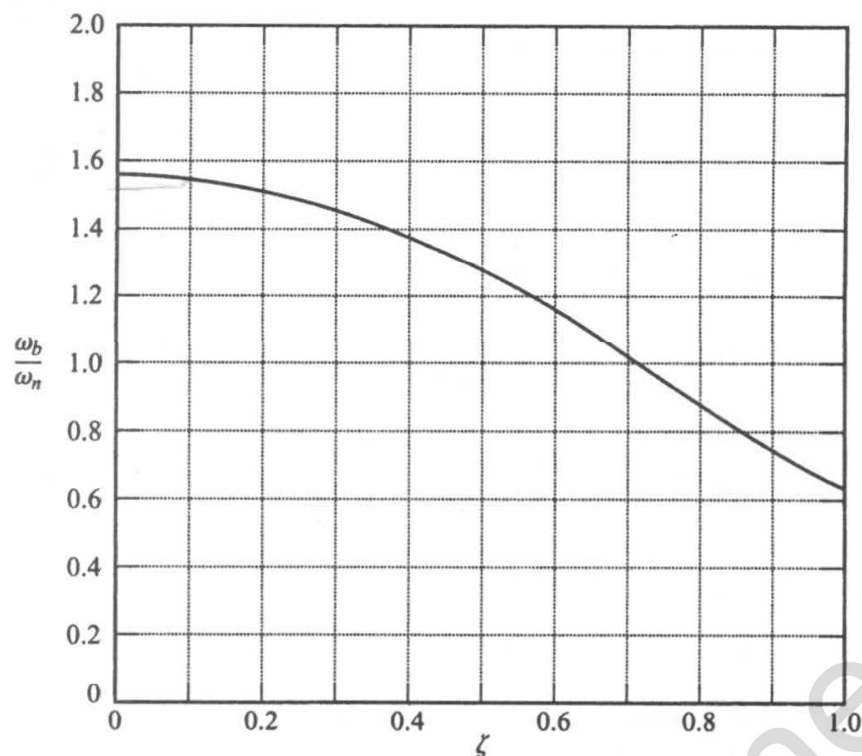
$$1 = 0,5 \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega_b}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega_b}{\omega_n} \right)^2 \right\}$$

با حل این معادله $(\omega_b / \omega_n)^2$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\left(\frac{\omega_b}{\omega_n} \right)^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}$$

چون $(\omega_b / \omega_n)^2 > 0$ علامت + معادله اخیر را به کار می‌بریم. پس

$$\omega_b^2 = \omega_n^2 \left(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right)$$



شکل ۷-۱۳۴
منحنی ω_b / ω_n بر حسب ζ ،
 ω_b پهنای باند است.

یا

$$\omega_b = \omega_n \left(1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right)^{1/2}$$

شکل ۷-۱۳۴ منحنی ω_b / ω_n بر حسب ζ را نشان می‌دهد.

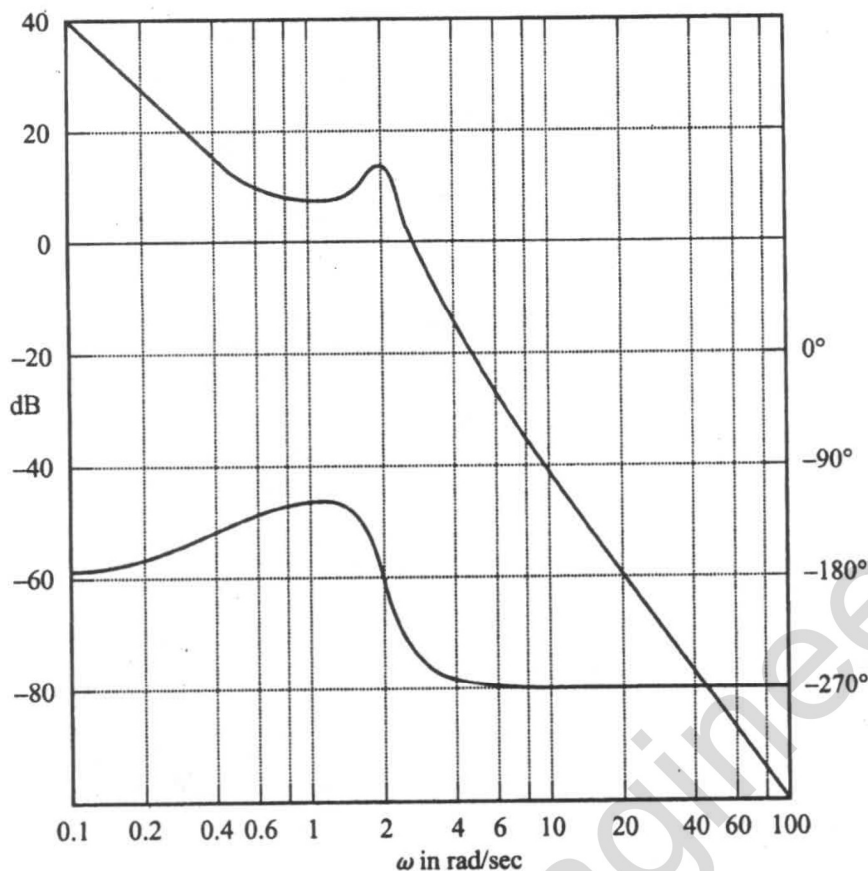
الف ۷-۱۸ نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ یک سیستم کنترل دارای فیدبک واحد در شکل ۷-۱۳۵ نشان داده شده است. می‌دانیم که تابع تبدیل حلقه باز می‌نیم فاز است. نمودار نشان می‌دهد که یک زوج قطب مزدوج مختلط در $\omega = 2 \text{ rad/sec}$ وجود دارد. نسبت میرایی جمله مرتبه دوم مربوط به این قطبهای مزدوج مختلط را تعیین کنید. تابع تبدیل $G(s)$ را نیز بیابید.

حل: با توجه به شکل ۷-۹ و بررسی نمودار بوده شکل ۷-۱۳۵ نسبت میرایی ζ و فرکانس طبیعی نامیرای جمله مرتبه دوم به صورت زیر به دست می‌آید

$$\zeta = 0.1, \quad \omega_n = 2 \text{ rad/sec}$$

توجه به فرکانس گوشه‌ای دیگر در $\omega = 0.5 \text{ rad/sec}$ و شیب -40 dB/dec منحنی دامنه در فرکانسهای پایین $G(j\omega)$ فرضی زیر را به دست می‌دهد

$$G(j\omega) = \frac{K \left(\frac{j\omega}{0.5} + 1 \right)}{(j\omega)^2 \left[\left(\frac{j\omega}{2} \right)^2 + 0.1(j\omega) + 1 \right]}$$



شکل ۷-۱۳۵

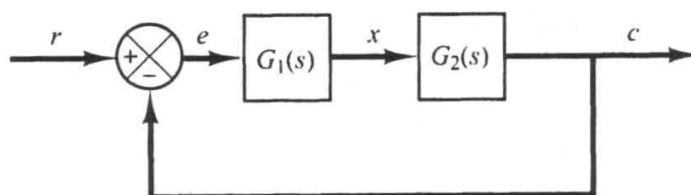
نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز یک سیستم کنترل با فیدبک واحد.

چون شکل ۷-۱۳۵ به دست می دهد $|G(j\omega)| = 40 \text{ dB}$ مقدار بهره K برابر یک تعیین می شود. همچنین منحنی فاز $G(j\omega)$ با منحنی فاز داده شده تطبیق دارد. پس تابع تبدیل $G(s)$ عبارت است از

$$G(s) = \frac{4(2s+1)}{s^2(s^2+0.4s+4)}$$

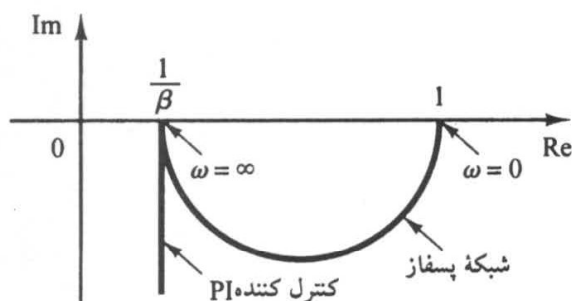
الف ۷-۱۹ در یک سیستم کنترل حلقه بسته ممکن است عنصری ناپایدار وجود داشته باشد. برای اعمال معیار پایداری نایکویست به چنین سیستمی باید منحنی های پاسخ فرکانسی این نوع عناصر را به دست آورد. چگونه می توان منحنی های پاسخ فرکانسی این عناصر ناپایدار را به طریق تجربی یافت؟ یک روش عملی برای تعیین تجربی پاسخ فرکانسی یک عنصر خطی ناپایدار پیشنهاد کنید.

حل: یک روش ممکن برای یافتن مشخصات پاسخ فرکانسی عنصر ناپایدار این است که آن را در یک سیستم پایدار به کار ببریم.

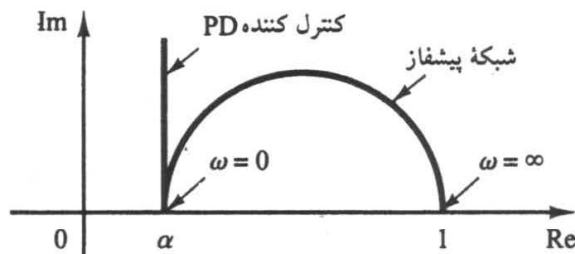


شکل ۷-۱۳۶

سیستم کنترل.



(ب)



(الف)

شکل ۷-۱۳۷ (الف) نمودارهای قطبی شبکه پیشفاز و کنترل کننده تناسبی - مشتقی؛ (ب) نمودارهای قطبی شبکه پسفاز و کنترل کننده تناسبی - انتگرالی.

سیستم شکل ۷-۱۳۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید عنصر $G_1(s)$ ناپایدار است. کل سیستم را می‌توان با انتخاب مناسب عنصر خطی $G_2(s)$ پایدار کرد. یک سیگنال سینوسی به ورودی اعمال می‌کنیم. در حالت پایدار تمام سیگنال‌های حلقه سینوسی‌اند. سیگنال‌های $e(t)$ ورودی عنصر ناپایدار، و $x(t)$ خروجی عنصر ناپایدار را اندازه می‌گیریم. با تغییر فرکانس ورودی $[\omega]$ و احتمالاً دامنه آن، برای سهولت اندازه‌گیری $e(t)$ و $x(t)$ و تکرار این فرایند می‌توان پاسخ فرکانسی عنصر خطی ناپایدار را به دست آورد.

الف ۷-۲۰ نشان دهید اگر یک شبکه پیشفاز (یک شبکه پسفاز) به طور متوالی در یک حلقه باز قرار گیرد، در فرکانسهای پایین (بالا) به صورت یک کنترل کننده تناسبی - مشتقی (تناسبی - انتگرالی) عمل می‌کند. حل: در ناحیه فرکانسهای پایین نمودار قطبی شبکه پیشفاز تقریباً همانند نمودار قطبی یک کنترل کننده تناسبی - مشتقی است. این مطلب در شکل ۷-۱۳۷ (الف) نشان داده شده است. به نحوی مشابه در ناحیه فرکانس بالا نمودار قطبی شبکه پسفاز همانند نمودار قطبی یک کنترل کننده تناسبی - انتگرالی است. این مطلب در شکل ۷-۱۳۷ (ب) نشان داده شده است.

الف ۷-۲۱ یک جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز $G_c(s)$ به صورت زیر تعریف شده است

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

نشان دهید که در فرکانس ω_1 زیر

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

زاویه فاز $G_c(j\omega)$ صفر می‌شود. (این جبران‌ساز در $0 < \omega < \omega_1$ به صورت جبران‌ساز پسفاز و در $\omega_1 < \omega < \infty$ به صورت جبران‌ساز پیشفاز عمل می‌کند.) (شکل ۷-۱۰۹ را ببینید.)

حل: زاویه فاز $G_c(j\omega)$ عبارت است از

$$\angle G_c(j\omega) = \left[j\omega + \frac{1}{T_1} \right] + \left[j\omega + \frac{1}{T_2} \right] - \left[j\omega + \frac{\beta}{T_1} \right] - \left[j\omega + \frac{1}{\beta T_2} \right]$$

$$= \tan^{-1} \omega T_1 + \tan^{-1} \omega T_2 - \tan^{-1} \omega T_1 / \beta - \tan^{-1} \omega T_2 \beta$$

در $\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{T_1 T_2}$ داریم

$$\angle G_c(j\omega_1) = \tan^{-1} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \tan^{-1} \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - \tan^{-1} \beta \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

چون

$$\tan \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right) = \frac{\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}}{1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}} = \infty$$

یا

$$\tan^{-1} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 90^\circ$$

و چون

$$\tan^{-1} \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} + \tan^{-1} \beta \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 90^\circ$$

داریم

$$\angle G_c(j\omega_1) = 0^\circ$$

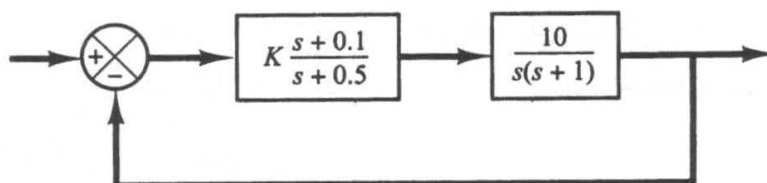
پس زاویه $G_c(j\omega_1)$ در $\omega = \omega_1 = 1/\sqrt{T_1 T_2}$ برابر 0° است.

الف ۷-۲۲ سیستم کنترل شکل ۷-۱۳۸ را در نظر بگیرید. مقدار بهره K را طوری تعیین کنید که زاویه فاز 60° باشد. به ازای این K حاشیه بهره چقدر است؟

حل: تابع تبدیل حلقه باز عبارت است از

$$G(s) = K \frac{s+0.1}{s+0.5} \frac{10}{s(s+1)}$$

$$= \frac{K(10s+10)}{s^3 + 1.5s^2 + 0.5s}$$

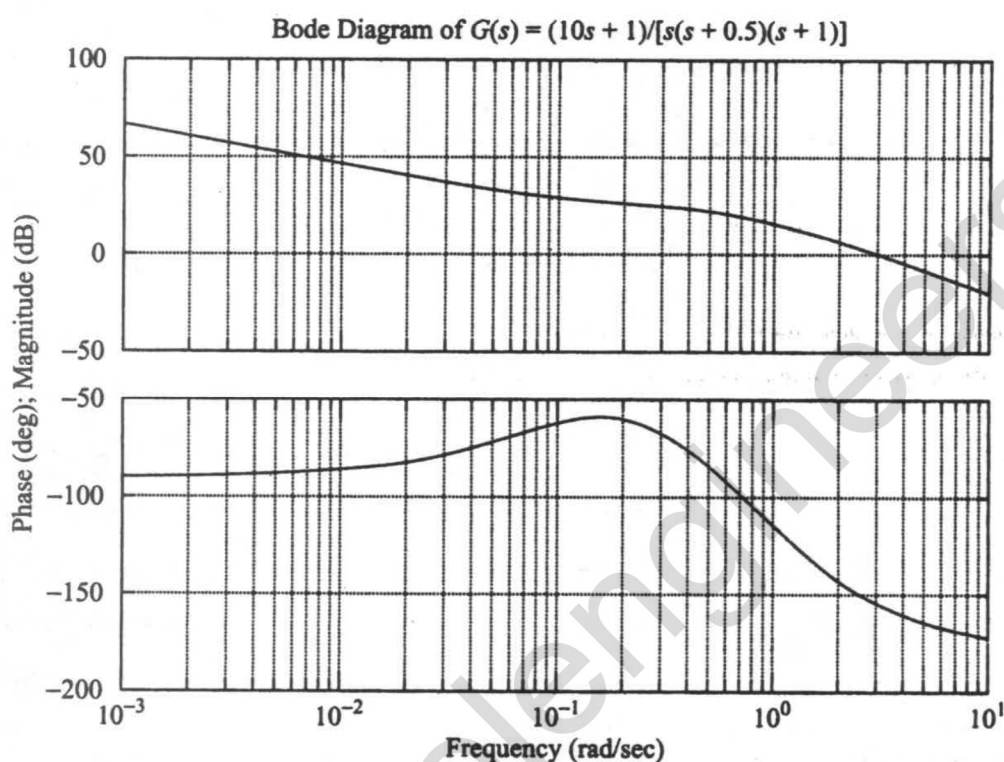


شکل ۷-۱۳۸

سیستم کنترل.

MATLAB Program 7-22

```
num = [10 1];
den = [1 1.5 0.5 0];
bode(num,den)
title('Bode Diagram of G(s) = (10s + 1)/[s(s + 0.5)(s + 1)]')
```



شکل ۷-۱۳۹ نمودار بوده $G(s) = (10s + 1)/[s(s + 0.5)(s + 1)]$.

نمودار بوده $G(s)$ را به ازای $K=1$ رسم می‌کنیم. برنامه ۷-۲۲ را می‌توان به این منظور به کار برد. شکل ۷-۱۳۹ نمودار بوده رسم شده با این برنامه را نشان می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که حاشیه فاز 60° در فرکانس $\omega = 1/15$ rad/sec حاصل می‌شود. دامنه $G(j\omega)$ در این فرکانس $14/5$ dB است. پس بهره K باید معادله زیر را ارضا کند

$$20 \log K = -14/5 \text{ dB}$$

یا

$$K = 0.188$$

به این ترتیب مقدار بهره K تعیین می‌شود. چون منحنی زاویه از خط -180° نمی‌گذرد، حاشیه بهره $+\infty$ است. برای بررسی درستی نتایج نمودار نایکویست G را در گستره فرکانسی زیر رسم می‌کنیم

$$w = 0.5:0.01:1.15$$

نقطه انتهایی مکان هندسی ($\omega = 1/15 \text{ rad/sec}$) روی دایره واحد صفحه نایکویست است. برای حاشیه فاز بهتر است نمودار نایکویست روی نمودار قطبی شبکه‌دار رسم شود.

برای رسم نمودار نایکویست روی نمودار قطبی ابتدا بردار مختلط z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$z = re + i \cdot im = re^{j\theta}$$

که در آن r و θ عبارت‌اند از

$$r = \text{abs}(z)$$

$$\theta = \text{angle}(z)$$

منظور از abs جذر مجموع مربعات بخشهای حقیقی و موهومی، و منظور از angle مقدار حاصل از $\tan^{-1}(im/re)$ است.

دستور زیر نمودار قطبی را در مختصات قطبی رسم می‌کند

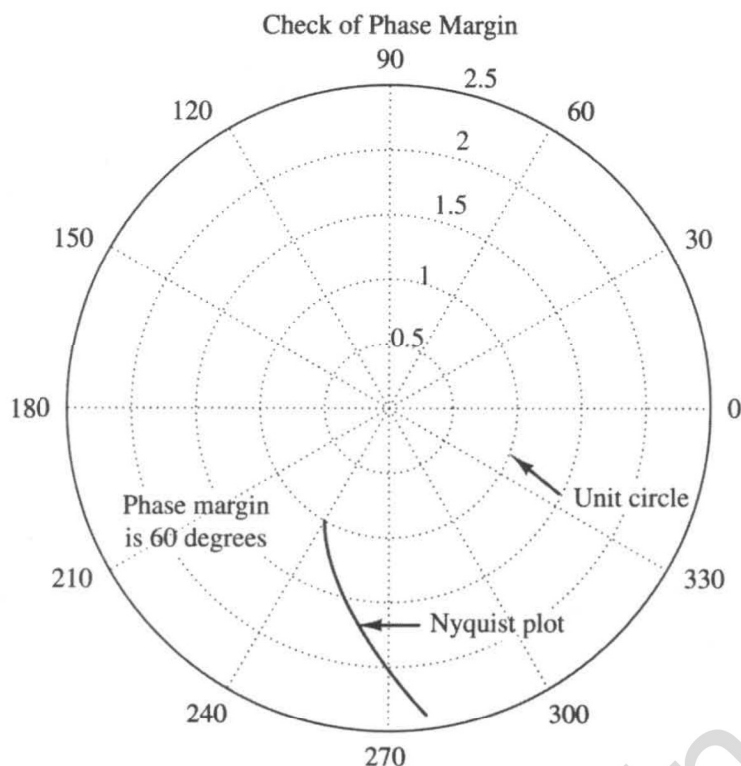
$$\text{polar}(\theta, r)$$

دستور grid شبکه قطبی را به صورت خطوط شعاعی و دایره‌های هم‌مرکز رسم می‌کند.

برنامه ۷-۲۳ نمودار قطبی $G(j\omega)$ را به ازای ω بین 0.5 rad/sec و $1/15 \text{ rad/s}$ رسم می‌کند. شکل ۷-۱۴ نمودار حاصل را نشان می‌دهد. دقت کنید که نقطه $G(j/15)$ روی دایره واحد قرار دارد و زاویه آن -12° است. پس حاشیه فاز 6° است. این که نقطه $G(j/15)$ روی دایره واحد است نشان می‌دهد که در $\omega = 1/15 \text{ rad/s}$ دامنه برابر ۱ یا 0 dB است. پس $\omega = 1/15 \text{ rad/sec}$ فرکانس عبور بهره جدید است و $K = 0.188$ حاشیه فاز مطلوب 6° را به دست می‌دهد.

MATLAB Program 7-23

```
%*****Nyquist plot in rectangular coordinates*****
num = [1.88 0.188];
den = [1 1.5 0.5 0];
w = 0.5:0.01:1/15;
[re,im,w] = nyquist(num,den,w);
%*****Convert rectangular coordinates into polar coordinates
% by defining z, r, theta as follows*****
z = re + i*im;
r = abs(z);
theta = angle(z);
%*****To draw polar plot, enter command 'polar(theta,r)'*****
polar(theta,r)
text(-1,3,'Check of Phase Margin')
text(0.3,-1.7,'Nyquist plot')
text(-2.2,-0.75,'Phase margin')
text(-2.2,-1.1,'is 60 degrees')
text(1.45,-0.7,'Unit circle')
```



شکل ۷-۱۴۰

نمودار نایکویست $G(j\omega)$ که نشان می‌دهد حاشیه فاز 60° است.

دقت کنید که در دستور text برای نوشتن روی نمودار قطبی، آن را به صورت زیر به کار برده‌ایم

`text (x , y , ' ')`

مثلاً برای نوشتن Nyquist plot در محلی که از نقطه $(-1.7, 0.3)$ شروع می‌شود، دستور زیر را وارد می‌کنیم

`text (0.3 , -1.7 , 'Nyquist plot')`

نوشته به صورت افقی روی صفحه نقش می‌بندد.

الف ۷-۲۳ اگر تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ دارای قطبهای مزدوج مختلطی با میرایی اندک باشد، ممکن است بیش از یک دایره M بر مکان هندسی $G(j\omega)$ مماس باشد.

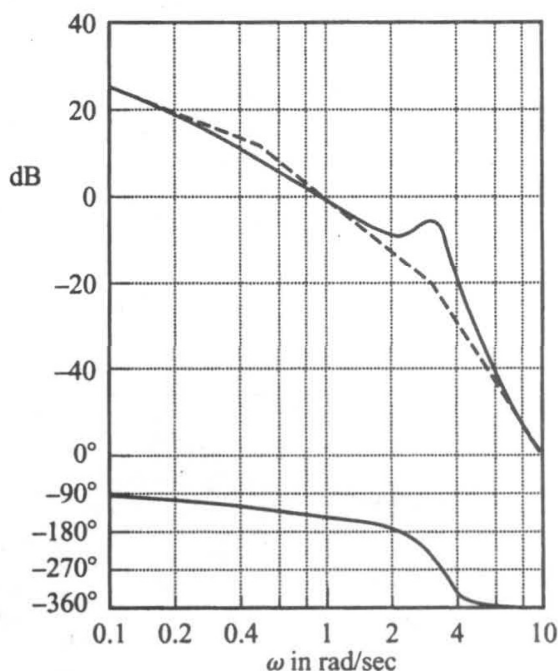
سیستمی با فیدبک واحد در نظر بگیرید که تابع تبدیل حلقه باز زیر را داشته باشد

$$G(s) = \frac{9}{s(s+0.5)(s^2+0.6s+1.0)} \quad (7-32)$$

نمودار بوده این تابع تبدیل حلقه باز را رسم کنید. لگاریتم دامنه برحسب فاز را نیز رسم کنید و نشان دهید که دو دایره M بر مکان هندسی $G(j\omega)$ مماس است. سرانجام نمودار بوده تابع تبدیل حلقه بسته را رسم کنید.

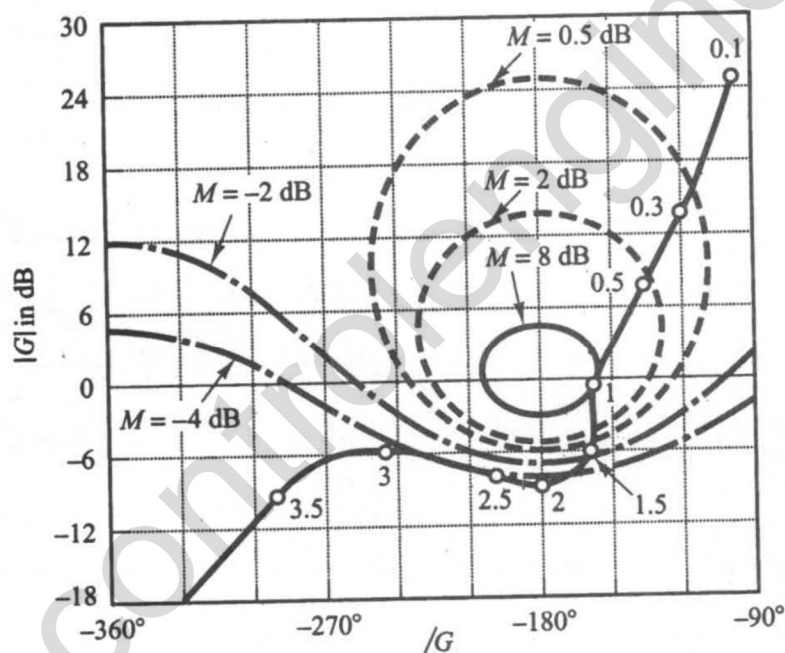
حل: شکل ۷-۱۴۱ نمودار بوده $G(j\omega)$ را نشان می‌دهد. شکل ۷-۱۴۲ لگاریتم دامنه برحسب فاز $G(j\omega)$ را نشان می‌دهد. می‌توان دید که مکان هندسی $G(j\omega)$ در $\omega = 0.97 \text{ rad/sec}$ بر مکان هندسی $M = -8 \text{ dB}$ و در $\omega = 2.8 \text{ rad/sec}$ بر مکان هندسی $M = -4 \text{ dB}$ مماس است.

شکل ۷-۱۴۳ نمودار بوده تابع تبدیل حلقه بسته را نشان می‌دهد. منحنی دامنه پاسخ فرکانسی حلقه بسته دو قلّه تشدید را نشان می‌دهد. این وضعیت موقعی بروز می‌کند که تابع تبدیل حلقه بسته حاصلضرب دو عامل مرتبه دوم دارای میرایی کم را دربر داشته و دو فرکانس تشدید متناظر با آنها به حد کافی از هم جدا باشد. تابع



شکل ۷-۱۴۱

نمودار بوده $G(j\omega)$ معادله (۷-۳۲).



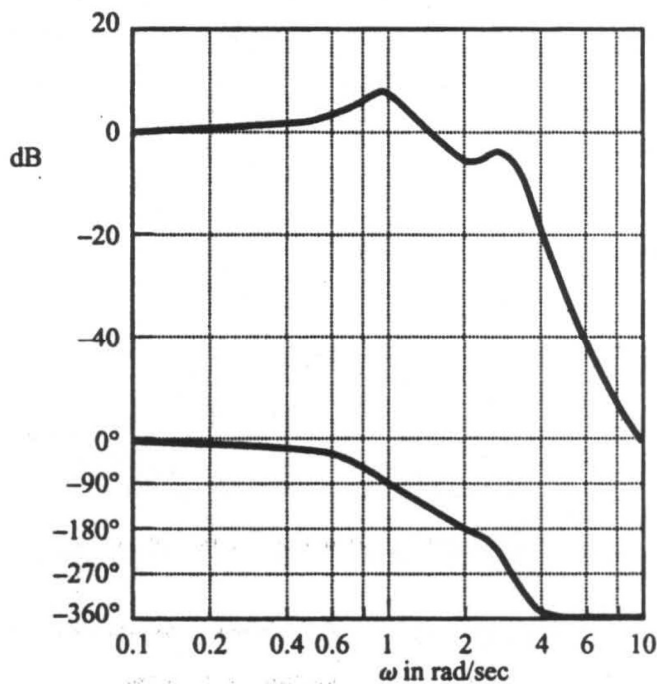
شکل ۷-۱۴۲

منحنی لگاریتم دامنه بر حسب فاز
 $G(j\omega)$ معادله (۷-۳۲).

تبدیل حلقه بسته این سیستم را می توان به شکل زیر نوشت

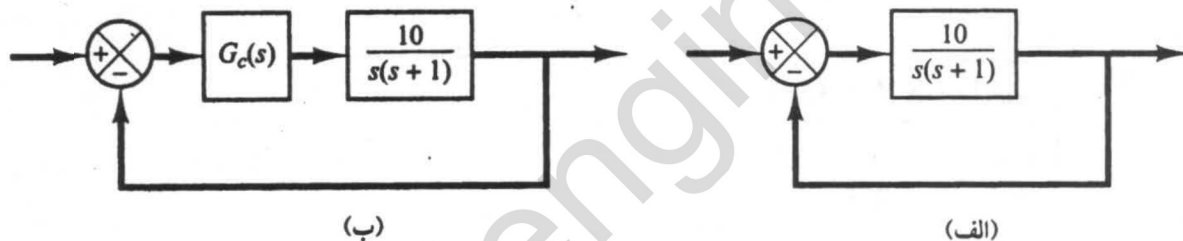
$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1+G(s)} \\ &= \frac{9}{(s^2 + 0.487s + 1)(s^2 + 0.613s + 9)} \end{aligned}$$

واضح است که تابع تبدیل حلقه بسته حاصلضرب دو عامل مرتبه دوم دارای میرایی کم (با نسبتهای میرایی ۲۴۳٪ و ۱۰۲٪) است و دو فرکانس تشدید به حد کافی از هم دورند.



شکل ۷-۱۴۳

نمودار بوده $G(j\omega) / [1 + G(j\omega)]$ به ازای $G(j\omega)$ معادله (۷-۳۲).



شکل ۷-۱۴۴ (الف) سیستم کنترل؛ (ب) سیستم جبران شده.

الف ۷-۲۴ سیستم شکل ۷-۱۴۴ (الف) را در نظر بگیرید. جبرانسازی طرح کنید که سیستم حلقه بسته‌ای با ثابت خطای ایستای سرعت 20 sec^{-1} ، حاشیه فاز برابر 50° ، و حاشیه بهره 10 dB یا بیشتر به دست دهد. حل: برای رسیدن به این خواسته‌ها جبران‌ساز پیشفاز $G_c(s)$ زیر را می‌آزماییم

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

$$= K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

(در صورتی که جبران‌ساز پیشفاز جوابگو نباشد جبران‌سازی دیگر به کار می‌بریم). سیستم جبران شده در شکل ۷-۱۴۴ (ب) نشان داده شده است.

تعریف می‌کنیم

$$G_1(s) = K G(s) = \frac{10K}{s(s+1)}$$

که در آن $K = K_c \alpha$. گام اول طراحی تنظیم بهره K برای نیل به عملکرد حالت ماندگار خواسته شده، مربوط

به ثابت خطای ایستای سرعت، است. چون ثابت خطای ایستای سرعت K_v برابر 20 sec^{-1} داده شده است. داریم

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1} G_1(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 \circ s K}{s(s+1)} = 1 \circ K = 20 \\ K &= 2 \end{aligned}$$

یا

به ازای $K=2$ سیستم جبران شده خواسته حالت ماندگار را برآورده می‌کند.

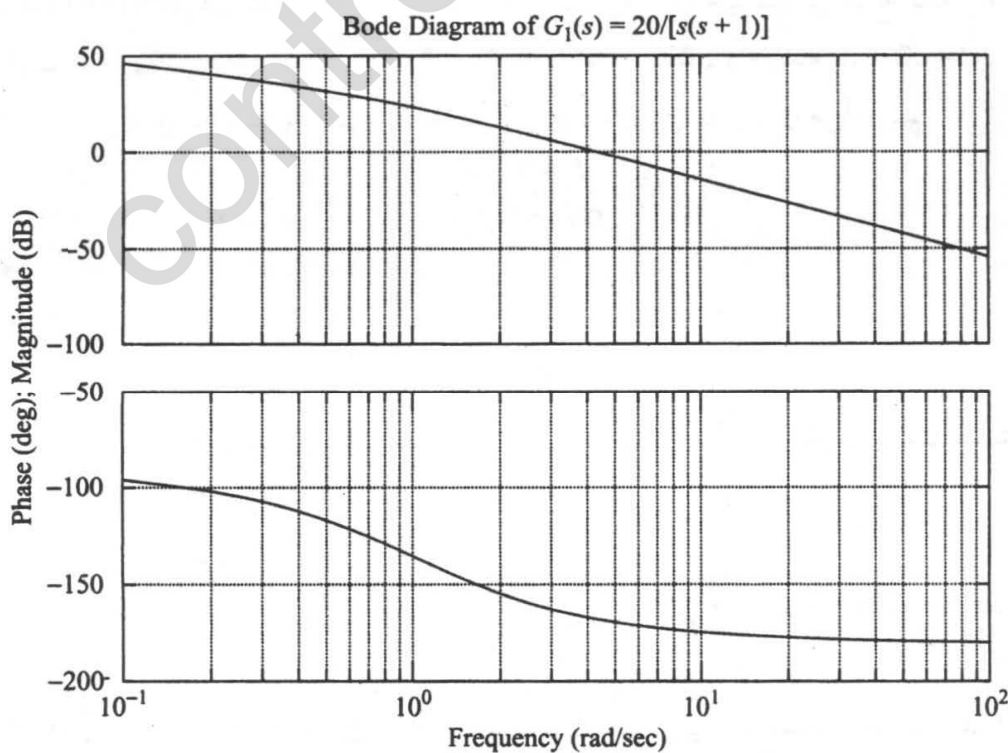
سپس نمودار بوده تابع زیر را رسم می‌کنیم

$$G_1(s) = \frac{20}{s(s+1)}$$

برنامه ۷-۲۴ نمودار بوده شکل ۷-۱۴۵ را به دست می‌دهد. این نمودار حاشیه فاز را 14° به دست می‌دهد. حاشیه بهره $\infty \text{ dB}$ است.

MATLAB Program 7-24

```
num = [20];
den = [1 1 0];
w = logspace(-1,2,100);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of G1(s) = 20/[s(s + 1)]')
```



شکل ۷-۱۴۵
نمودار بوده $G_1(s)$.

چون باید حاشه فاز برابر 5° باشد، پیشفازی لازم برای ارضای حاشیه فاز 36° است. جبران‌ساز پیشفاز می‌تواند این پیشفازی را ایجاد کند.

می‌دانیم که با گذاشتن جبران‌ساز پیشفاز منحنی دامنه نمودار بوده تغییر کرده، فرکانس عبور بهره به سمت راست جابه‌جا می‌شود. باید پیشفازی ناشی از این جابه‌جایی فرکانس بهره نیز در نظر گرفته شود. برای منظور کردن اثر این جابه‌جایی ϕ_m ، ماکزیمم پیشفازی را 41° فرض می‌کنیم. (یعنی تقریباً 5° اضافی برای خنثی شدن اثر جابه‌جایی فرکانس عبور بهره.) چون

$$\sin \phi_m = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$\phi_m = 41^\circ$ با $\alpha = 0.2077$ متناظر است. $\alpha = 0.21$ با $\phi_m = 40.76^\circ$ متناظر است. انتخاب $\phi_m = 41^\circ$ یا $\phi_m = 40.76^\circ$ در جواب نهایی تأثیر زیادی ندارد. پس α را برابر 0.21 انتخاب می‌کنیم.

پس از تعیین α براساس زاویه پیشفازی لازم به تعیین فرکانسهای گوشه‌ای $\omega = 1/T$ و $\omega = 1/\alpha T$ جبران‌ساز می‌رسیم. ماکزیمم زاویه پیشفازی ϕ_m در واسطه هندسی دو فرکانس گوشه‌ای، یعنی در $\omega = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ رخ می‌دهد.

تغییر منحنی دامنه در $\omega = 1/(\sqrt{\alpha} T)$ ، ناشی از جمله $(Ts+1)/(\alpha Ts+1)$ عبارت است از

$$\left| \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1} \right|_{\omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}} = \left| \frac{1 + j\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + j\alpha\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

داریم

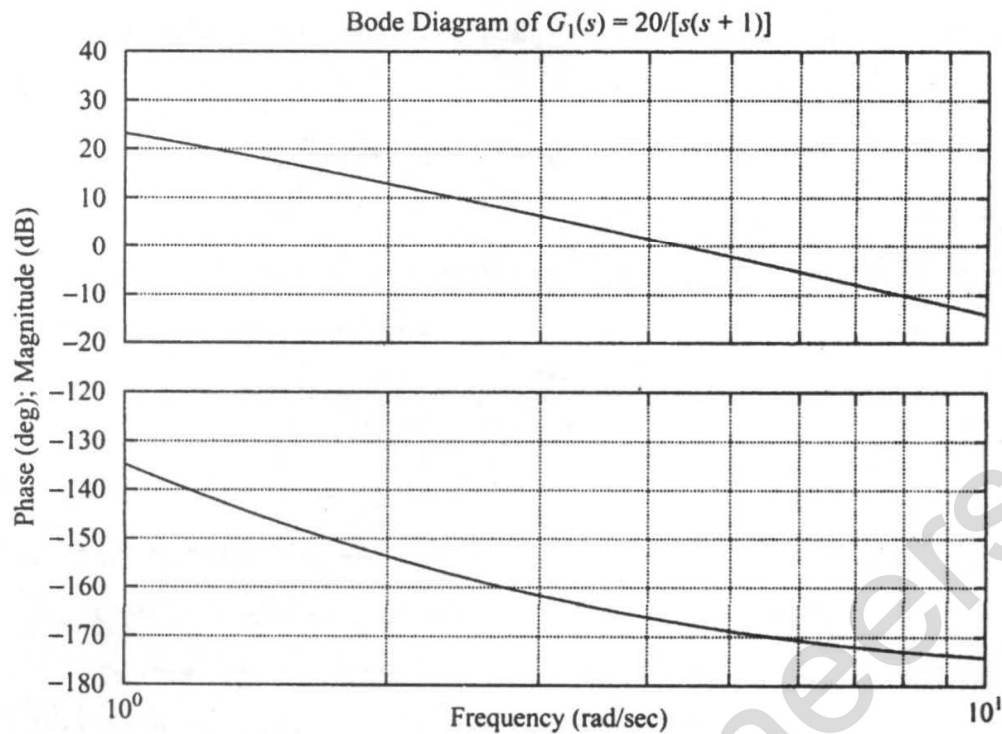
$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.21}} = 6.7778 \text{ dB}$$

حال باید فرکانسی را بیابیم که در آن با افزودن جبران‌ساز کل دامنه 0 dB شود.

شکل ۷-۱۴ نشان می‌دهد فرکانسی که در آن دامنه $G_1(j\omega)$ برابر -6.7778 dB است، بین $\omega = 1 \text{ rad/sec}$ و $\omega = 10 \text{ rad/sec}$ قرار دارد. بنابراین نمودار بوده جدیدی برای $G_1(j\omega)$ در گستره فرکانسی $\omega = 1$ تا $\omega = 10$ رسم می‌کنیم تا محل دقیق $|G_1(j\omega)| = -6.7778 \text{ dB}$ را بیابیم. برنامه ۷-۲۵ نمودار بوده را در این گستره فرکانسی به دست می‌دهد. این نمودار در شکل ۷-۱۴۶ نشان داده شده است و با توجه به آن می‌بینیم که $|G_1(j\omega)| = -6.7778 \text{ dB}$ در $\omega = 6.5686 \text{ rad/s}$ رخ می‌دهد. این فرکانس را به عنوان فرکانس جدید عبور

MATLAB Program 7-25

```
num = [20];
den = [1 1 0];
w = logspace(0,1,100);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of G1(s) = 20/[s(s + 1)]')
```



شکل ۷-۱۴۶
نمودار بوده $G_1(s)$.

بهره برمی‌گزینیم یا $\omega_c = ۶/۵۶۸۶ \text{ rad/s}$. چون این فرکانس با $1/(\sqrt{\alpha} T)$ متناظر است، یعنی

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}$$

$$\frac{1}{T} = \omega_c \sqrt{\alpha} = ۶/۵۶۸۶ \sqrt{۰/۲۱} = ۳/۰۱۰۱$$

به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = \frac{۶/۵۶۸۶}{\sqrt{۰/۲۱}} = ۱۴/۳۳۳۹$$

و

بنابراین جبران‌ساز پیش‌فاز به صورت زیر تعیین می‌شود

$$G_c(s) = K_c \frac{s + ۳/۰۱۰۱}{s + ۱۴/۳۳۳۹} = K_c \alpha \frac{۰/۳۳۲۲s + ۱}{۰/۰۶۹۷۶s + ۱}$$

که K_c آن عبارت است از

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{۲}{۰/۲۱} = ۹/۵۲۳۸$$

یعنی تابع تبدیل جبران‌ساز عبارت است از

$$G_c(s) = ۹/۵۲۳۸ \frac{s + ۳/۰۱۰۱}{s + ۱۴/۳۳۳۹} = ۲ \frac{۰/۳۳۲۲s + ۱}{۰/۰۶۹۷۶s + ۱}$$

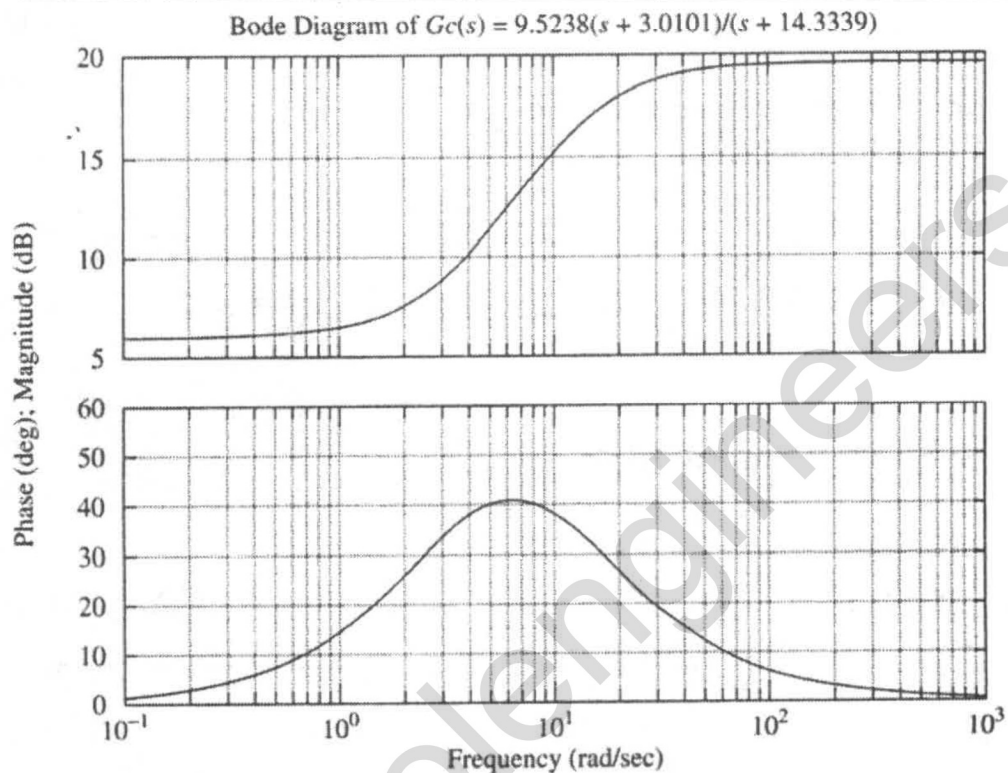
برنامه ۷-۲۶ نمودار بوده این جبران‌ساز را که در شکل ۷-۱۴۷ نشان داده شده است، به دست می‌دهد.

تابع تبدیل حلقه باز سیستم طراحی شده عبارت است از

$$G_c(s) G(s) = ۹/۵۲۳۸ \frac{s + ۳/۰۱۰۱}{s + ۱۴/۳۳۳۹} \frac{۱۰}{s(s+۱)} = \frac{۹۵/۲۳۸s + ۲۸۶/۶۷۵۹}{s^3 + ۱۵/۳۳۳۹s^2 + ۱۴/۳۳۳۹s}$$

MATLAB Program 7-26

```
numc = [9.5238 28.6676];
denc = [1 14.3339];
w = logspace(-1,3,100);
bode(numc,denc,w)
title('Bode Diagram of Gc(s) = 9.5238(s + 3.0101)/(s + 14.3339)')
```



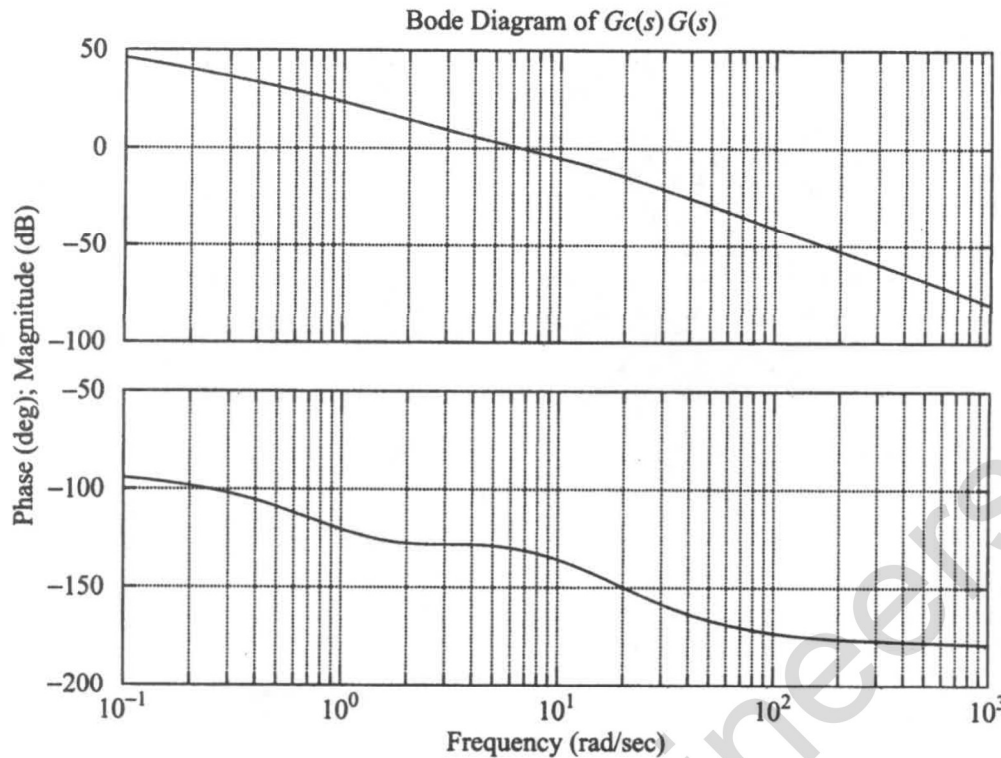
شکل ۷-۱۴۷

نمودار بوده $G_c(s)$.

برنامه ۷-۲۷ نمودار بوده $G_c(s)G(s)$ را که در شکل ۷-۱۴۸ نشان داده شده است، به دست می‌دهد. برنامه ۷-۲۷ و شکل ۷-۱۴۸ به وضوح نشان می‌دهد که حاشیه فاز تقریباً 50° و حاشیه بهره ∞ dB است. چون ثابت خطای ایستای سرعت $K_v = 20 \text{ sec}^{-1}$ است، به تمام خواسته‌ها رسیده‌ایم. قبل از اتمام این

MATLAB Program 7-27

```
num = [95.238 286.6759];
den = [1 15.3339 14.3339 0];
sys = tf(num,den);
w = logspace(-1,3,100);
bode(sys,w);
grid;
title('Bode Diagram of Gc(s)G(s)')
[Gm,pm,wcp,wcg] = margin(sys);
GmdB = 20*log10(Gm);
[Gmdb,pm,wcp,wcg]
ans =
    Inf 49.4164    Inf 6.5686
```



شکل ۷-۱۴۸

 نمودار بوده $G_c(s)G(s)$.

مسئله باید مشخصات پاسخ گذرا را بررسی کنیم.

پاسخ پله: باید پاسخ پله سیستم جبران شده و پاسخ پله سیستم جبران نشده اولیه را مقایسه کنیم. تابع تبدیل حلقه بسته سیستم جبران نشده اولیه عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم جبران شده عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{95/238s + 286/6759}{s^2 + 15/3339s^2 + 110/5719s + 286/6759}$$

برنامه ۷-۲۸ پاسخ پله سیستمهای جبران شده و جبران نشده را به دست می‌دهد. منحنی‌های پاسخ در شکل ۷-۱۴۹ نشان داده شده‌اند. سیستم جبران شده به وضوح پاسخ رضایتبخش دارد. محل صفر و قطبهای حلقه بسته به شرح زیر است:

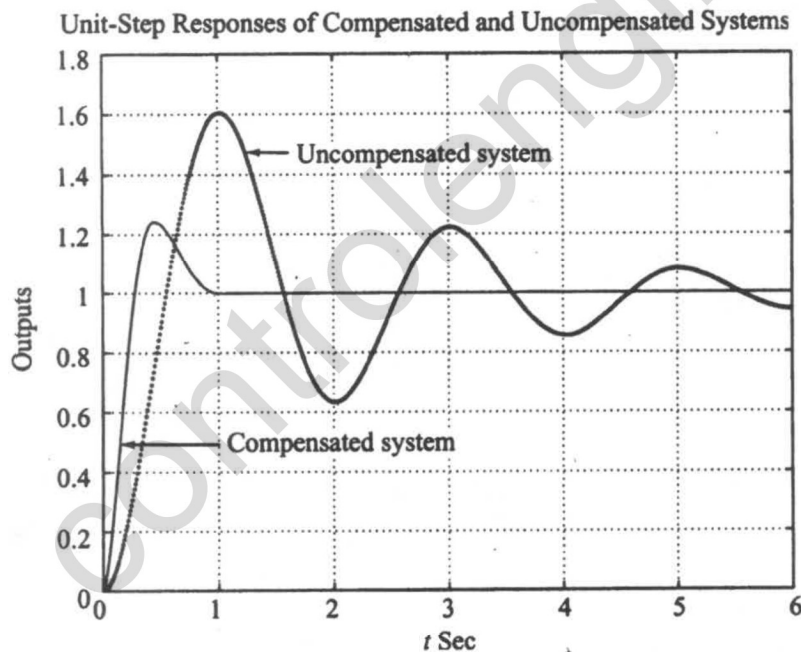
$$s = -3/0101 \quad \text{صفر در}$$

$$s = -5/2880 \pm j5/6824, \quad s = -4/7579 \quad \text{قطبها در}$$

پاسخ شیب: بررسی پاسخ شیب سیستم جبران شده نیز به زحمتش می‌ارزد. چون $K_v = 20 \text{ sec}^{-1}$ ، خطای حالت ماندگار به ازای ورودی شیب $1/K_v = 0/05$ است. ثابت خطای ایستای سرعت سیستم جبران نشده 10 sec^{-1} است. پس خطای حالت ماندگار سیستم جبران نشده اولیه در دنبال کردن ورودی شیب دو برابر سیستم جبران شده است.

MATLAB Program 7-28

```
%*****Unit-step responses*****
num1 = [10];
den1 = [1 1 10];
num2 = [95.238 286.6759];
den2 = [1 15.3339 110.5719 286.6759];
t = 0:0.01:6;
[c1,x1,t] = step(num1,den1,t);
[c2,x2,t] = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'-')
grid;
title('Unit-Step Responses of Uncompensated System and Compensated System')
xlabel('t Sec');
ylabel('Outputs')
text(1.70,1.45,'Uncompensated System')
text(1.1,0.5,'Compensated System')
```



شکل ۷-۱۴۹

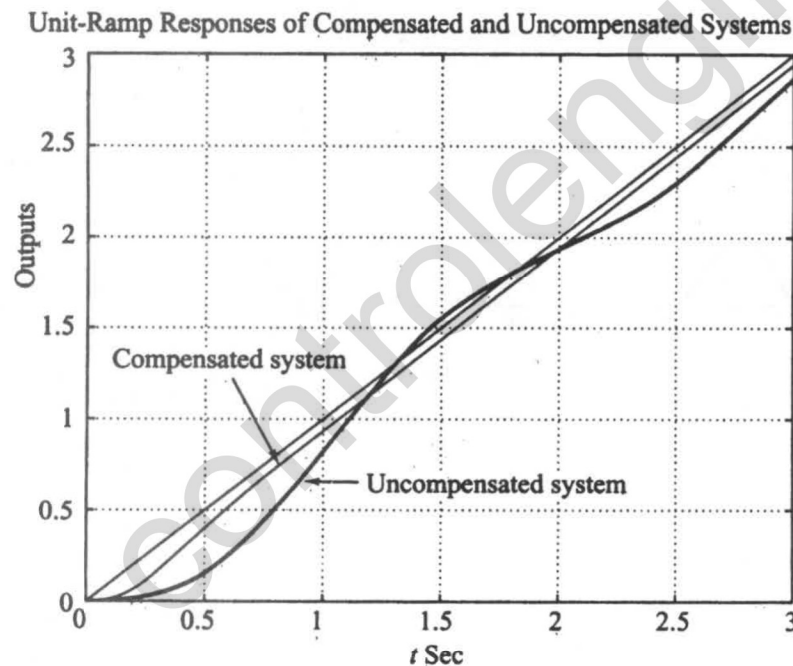
پاسخ پله واحد سیستمهای جبران شده و جبران نشده.

برنامه ۷-۲۹ منحنی‌های پاسخ شیب را به دست می‌دهد. [توجه کنید که پاسخ شیب به صورت پاسخ پله سیستم $C(s)/sR(s)$ دست آمده است.] منحنی‌های حاصل در شکل ۷-۱۵۰ نشان داده شده‌اند. خطای حالت ماندگار سیستم جبران شده نصف خطای حالت ماندگار سیستم جبران نشده است.

MATLAB Program 7-29

```
%*****Unit-ramp responses*****

num1 = [10];
den1 = [1 1 10 0];
num2 = [95.238 286.6759];
den2 = [1 15.3339 110.5719 286.6759 0];
t = 0:0.01:3;
[c1,x1,t] = step(num1,den1,t);
[c2,x2,t] = step(num2,den2,t);
plot(t,c1,'-',t,c2,'-',t,t,'--');
grid;
title('Unit-Ramp Responses of Uncompensated System and Compensated System');
xlabel('t Sec');
ylabel('Outputs')
text(1.2,0.65,'Uncompensated System')
text(0.1,1.3,'Compensated System')
```



شکل ۷-۱۵۰

پاسخهای شیب سیستمهای
جبران شده و جبران نشده.

الف ۷-۲۵ سیستمی با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

یک جبران‌ساز طرح کنید به نحوی که ثابت خطا ایستای سرعت 10 sec^{-1} ، حاشیه فاز 5° ، و حاشیه بهره 10 dB یا بیشتر باشد.

حل: یک جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز به صورت زیر طرح می‌کنیم

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}$$

پس تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده $G_c(s)G(s)$ است. چون بهره K قابل تنظیم است، فرض می‌کنیم $K_c = 1$ ، یعنی $\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) = 1$. با توجه به خواسته مربوط به ثابت خطای ایستای سرعت به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{K}{s(s+1)(s+4)} \\ &= \frac{K}{4} = 10 \\ K &= 40 \end{aligned}$$

پس

ابتدا نمودار بوده سیستم جبران نشده را به ازای $K = 40$ رسم می‌کنیم. برنامه ۷-۳۰ برای ترسیم این نمودار بوده به کار رفته است. نمودار حاصل در شکل ۷-۱۵۱ نشان داده شده است.

MATLAB Program 7-30

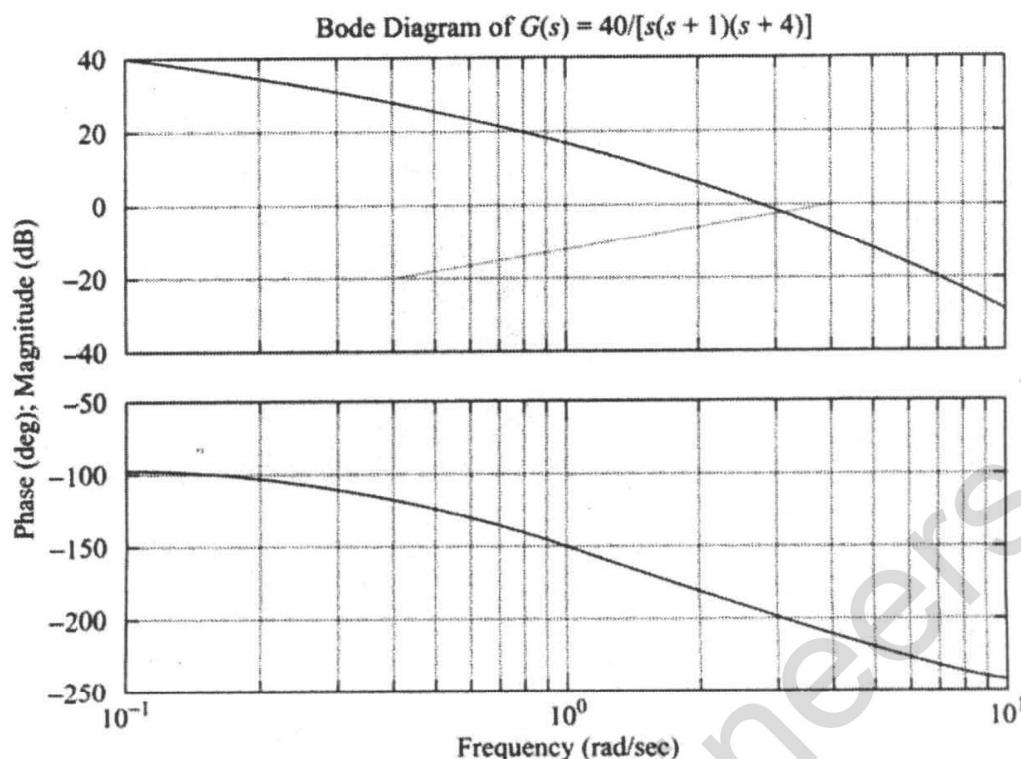
```
num = [40];
den = [1 5 4 0];
w = logspace(-1,1,100);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of G(s) = 40/[s(s + 1)(s + 4)]')
```

شکل ۷-۱۵۱ حاشیه فاز سیستم جبران نشده دارای بهره مناسب را -16° به دست می‌دهد، یعنی سیستم جبران نشده ناپایدار است. گام بعدی طراحی جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز انتخاب فرکانس عبور بهره جدید است. از منحنی فاز $G(j\omega)$ فرکانس عبور فاز $\omega = 2$ rad/sec به دست می‌آید. می‌توانیم فرکانس عبور بهره جدید را ۲ rad/sec بگیریم تا زاویه پیشفازی لازم حدود 50° باشد. یک جبران‌ساز پسفاز - پیشفاز به سادگی می‌تواند این مقدار پیشفازی را ایجاد کند.

حال که فرکانس جدید عبور بهره را ۲ rad/sec برگزیده‌ایم، می‌توانیم فرکانسهای گوشه‌ای بخش پسفاز و بخش پیشفاز جبران‌ساز را تعیین کنیم. اجازه دهید فرکانس گوشه‌ای $\omega = 1/T_2$ (صفر بخش پسفاز جبران‌ساز) را یک دهه قبل از فرکانس عبور بهره، یعنی ۰/۲ rad/sec برگزینیم. برای تعیین فرکانس گوشه‌ای دیگر $\omega = 1/(\beta T_2)$ مقدار β را لازم داریم. β را می‌توانیم با توجه به بخش پیشفاز جبران‌ساز، چنانچه نشان خواهیم داد، تعیین کنیم.

برای بخش پیشفاز ماکزیمم زاویه پیشفازی ϕ_m عبارت است از

$$\sin \phi_m = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$



شکل ۷-۱۵۱

نمودار بوده $G(s) = \frac{40}{s(s+1)(s+4)}$

با $\beta = 10$ و $\phi_m = 54.9^\circ$ متناظر است. چون می‌خواهیم حاشیه فاز 5° باشد، β را برابر 10 می‌گیریم. (توجه کنید که به این ترتیب از تمام ماکزیمم زاویه، 54.9° استفاده نمی‌کنیم). پس

$$\beta = 10$$

به این ترتیب فرکانس گوشه‌ای $\omega = 1/(\beta T_p)$ (قطب بخش پهنای جبران‌ساز) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\omega = 0.02$$

تابع تبدیل بخش پهنای جبران‌ساز - پیشفاز به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{s+0.02}{s+0.2} = 10 \left(\frac{5s+1}{50s+1} \right)$$

بخش پیشفاز را می‌توان به این صورت تعیین کرد: فرکانس عبور بهره جدید $\omega = 2$ rad/sec است؛ از شکل ۷-۱۵۱ مقدار $|G(j2)|$ را برابر ۶ dB به دست می‌آوریم. پس اگر جبران‌ساز در $\omega = 2$ rad/s تضعیفی برابر ۶ dB ایجاد کند، فرکانس عبور بهره در محل مورد نظر قرار می‌گیرد. به این منظور می‌توان خط راستی با شیب ۲۰ dB/dec از نقطه (۲ rad/sec, -۶ dB) عبور داد. (این خط در شکل ۷-۱۵۱ با دست رسم شده است). محل برخورد این خط و خطوط ۰ dB و -۲۰ dB فرکانسهای گوشه‌ای را تعیین می‌کند. به این ترتیب فرکانسهای گوشه‌ای بخش پیشفاز در $\omega = 0.4$ rad/sec و $\omega = 4$ rad/sec به دست می‌آیند. پس تابع تبدیل بخش پیشفاز جبران‌ساز - پیشفاز به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{s+0.4}{s+4} = \frac{1}{10} \left(\frac{2.5s+1}{0.25s+1} \right)$$

با ترکیب بخشهای پسفاز و پیشفاز جبران ساز تابع تبدیل $G_c(s)$ جبران ساز پسفاز - پیشفاز به دست می آید. چون $K_c = 1$ داریم

$$G_c(s) = \frac{s+0.4}{s+4} \frac{s+0.2}{s+0.02} = \frac{(2.5s+1)(5s+1)}{(0.25s+1)(50s+1)}$$

نمودار بوده جبران ساز پسفاز - پیشفاز $G_c(s)$ را با استفاده از برنامه ۷-۳۱ به دست می آوریم. نمودار حاصل در شکل ۷-۱۵۲ نشان داده شده است.

MATLAB Program 7-31

```
numc = [1 0.6 0.08];
denc = [1 4.02 0.08];
bode(numc,denc)
title('Bode Diagram of Lag-Lead Compensator')
```

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از

$$G_c(s) G(s) = \frac{(s+0.4)(s+0.2)}{(s+4)(s+0.02)} \frac{40}{s(s+1)(s+4)}$$

$$= \frac{40s^2 + 24s + 3.2}{s^5 + 9.02s^4 + 24.18s^3 + 16.48s^2 + 0.32s}$$

با استفاده از برنامه ۷-۳۲ منحنی های دامنه و فاز تابع تبدیل حلقه باز $G_c(s)G(s)$ را به صورت شکل ۷-۱۵۳ به دست می آوریم. چند جمله ای مخرج den1 به صورت زیر با استفاده از دستور conv به دست آمده است:

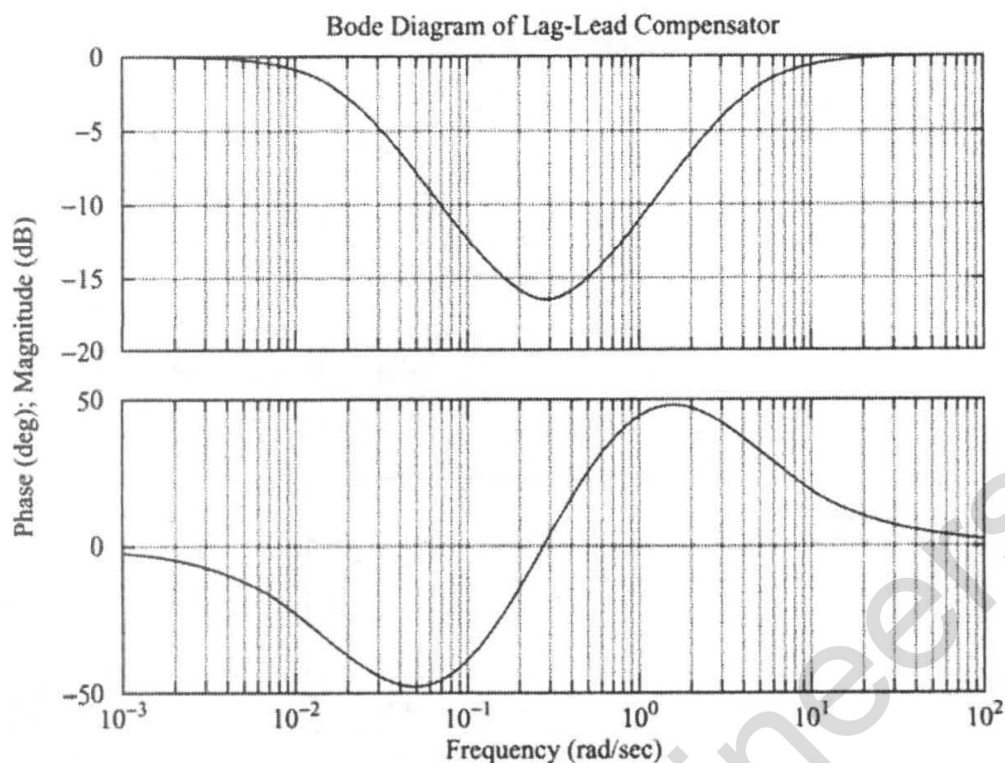
```
a = [1 4.02 0.08];
b = [1 5 4 0];
conv(a,b)
ans =
1.0000 9.0200 24.1800 16.4800 0.320000 0
```

چون حاشیه فاز سیستم جبران شده 50° ، حاشیه بهره آن ۱۲ dB و ثابت خطای ایستای سرعت آن 10 sec^{-1} است، تمام خواسته ها برآورده شده اند.

حال به بررسی مشخصات پاسخ گذرای سیستم طراحی شده می پردازیم.

پاسخ پله: با توجه به این که

$$G_c(s) G(s) = \frac{40(s+0.4)(s+0.2)}{(s+4)(s+0.02)s(s+1)(s+2)}$$



شکل ۷-۱۵۲

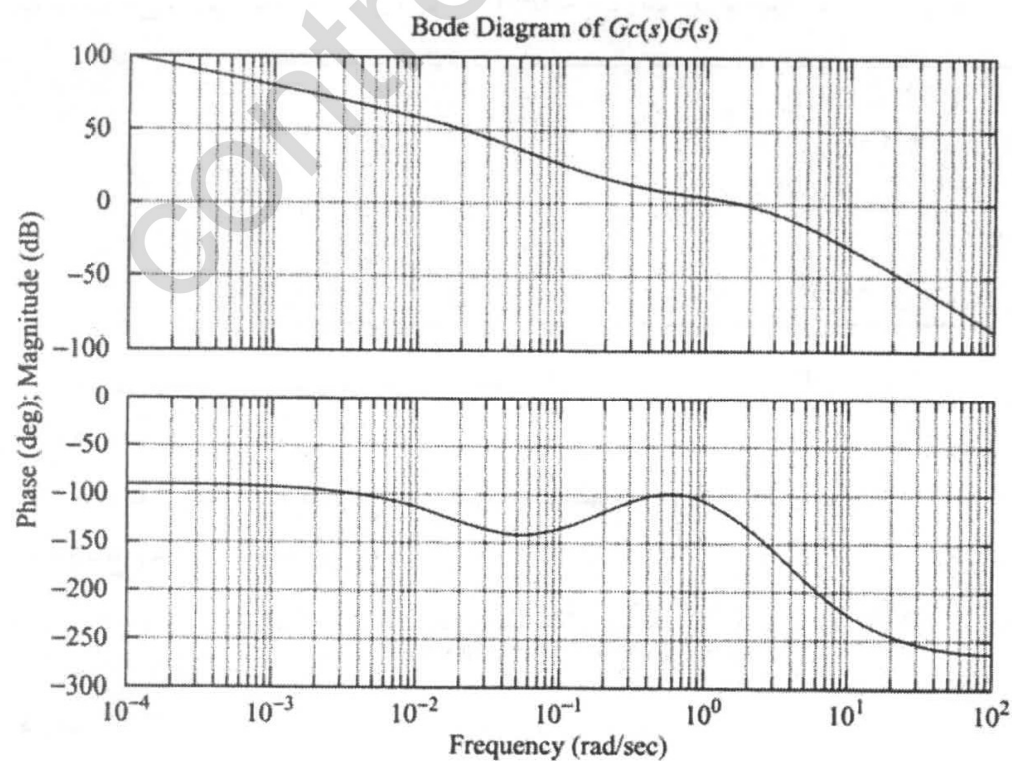
نمودار بوده جبران ساز

پس فاز - پیش فاز

طراحی شده.

MATLAB Program 7-32

```
num1 = [40 24 3.2];
den1 = [1 9.02 24.18 16.48 0.32 0];
bode(num1,den1)
title('Bode Diagram of Gc(s)G(s)')
```



شکل ۷-۱۵۳

نمودار بوده تابع تبدیل

حلقه باز $G_c(s)G(s)$

سیستم جبران شده.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

$$= \frac{40(s+0.4)(s+0.2)}{(s+4)(s+0.2)s(s+1)(s+4) + 40(s+0.4)(s+0.2)}$$

برای تعیین چند جمله‌ای مخرج با MATLAB به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$a(s) = (s+4)(s+0.2) = s^2 + 4.2s + 0.8$$

$$b(s) = s(s+1)(s+4) = s^3 + 5s^2 + 4s$$

$$c(s) = 40(s+0.4)(s+0.2) = 40s^2 + 24s + 3.2$$

حال داریم

$$a = [1 \ 4.02 \ 0.08]$$

$$b = [1 \ 5 \ 4 \ 0]$$

$$c = [40 \ 24 \ 3.2]$$

با استفاده از برنامه MATLAB زیر چندجمله‌ای مخرج را می‌یابیم

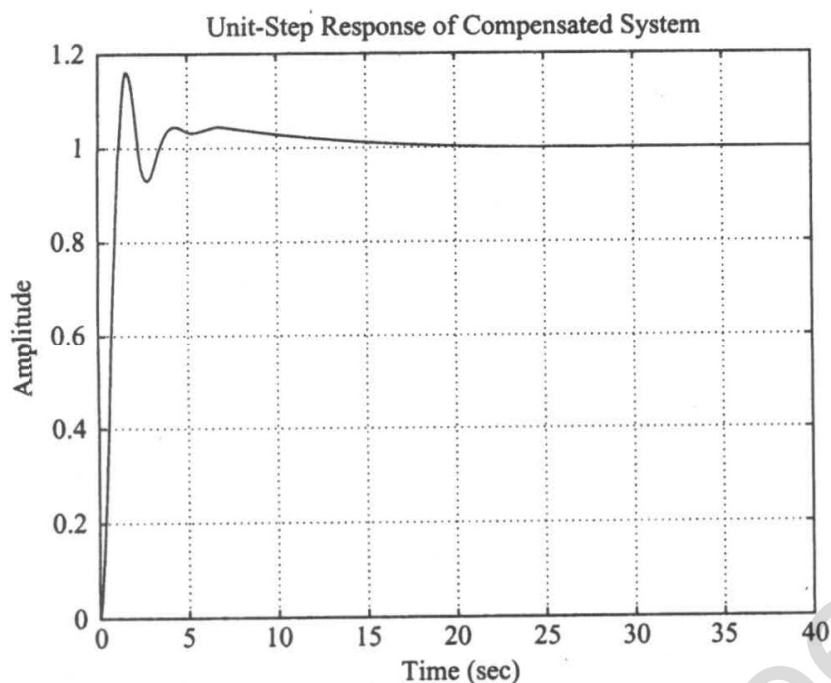
```
a = [1 4.02 0.08];
b = [1 5 4 0];
c = [40 24 3.2];
p = [conv(a,b)] + [0 0 0 c]
p =
1.0000 9.0200 24.1800 56.4800 24.3200 3.2000
```

برنامه ۷-۳۳ برای به دست آوردن پاسخ پله سیستم جبران شده به کار رفته است. منحنی پاسخ پله در شکل ۷-۱۵۴ نشان داده شده است. (توجه کنید که سیستم جبران نشده دارای بهره مناسب ناپایدار است.)

MATLAB Program 7-33

```
%*****Unit-step response*****
num = [40 24 3.2];
den = [1 9.02 24.18 56.48 24.32 3.2];
t = 0:0.2:40;
step(num,den,t)
grid
title('Unit-Step Response of Compensated System')
```

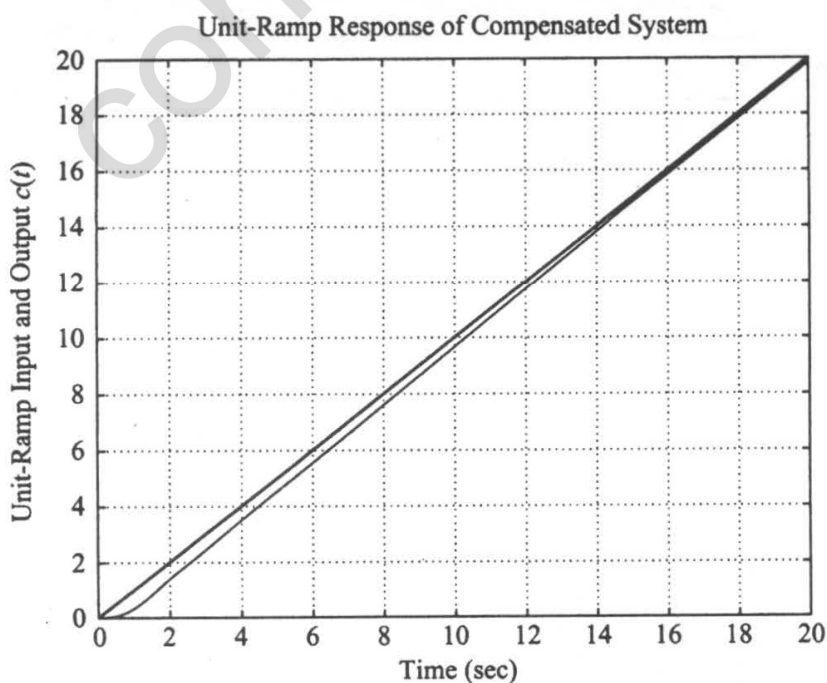
پاسخ شیب: پاسخ شیب سیستم را می‌توان با دادن برنامه ۷-۳۴ به دست آورد. در این برنامه پاسخ شیب $G_c G / (1 + G_c G)$ با پاسخ پله $G_c G / [s(1 + G_c G)]$ به دست آمده است. شکل ۷-۱۵۵ منحنی پاسخ شیب به دست آمده از این برنامه را نشان می‌دهد.



شکل ۷-۱۵۴
منحنی پاسخ پله سیستم جبران شده.

MATLAB Program 7-34

```
%*****Unit-ramp response*****
num = [40 24 3.2];
den = [1 9.02 24.18 56.48 24.32 3.2 0];
t = 0:0.05:20;
c = step(num,den,t);
plot(t,c,'-',t,t,'.')
grid
title('Unit-Ramp Response of Compensated System')
xlabel('Time (sec)')
ylabel('Unit-Ramp Input and Output c(t)')
```



شکل ۷-۱۵۵
پاسخ شیب سیستم جبران شده.

مسائل

ب ۶-۷ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد دارای تابع تبدیل حلقه باز زیر است

$$G(s) = \frac{s+0.5}{s^3+s^2+1}$$

که تابعی غیرمی نیمم فاز است. از سه قطب حلقه باز دو تا در نیم صفحه راست هستند، قطبها عبارتند از:

$$s = -1.4656 \quad \text{قطبهای حلقه باز}$$

$$s = 0.2328 + j0.7926$$

$$s = 0.2328 - j0.7926$$

نمودار بوده $G(s)$ را با استفاده از MATLAB رسم کنید. توضیح دهید چرا منحنی فاز از 0° شروع و به 180° ختم می شود.

ب ۷-۷ نمودارهای قطبی تابع تبدیل حلقه باز زیر

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

را به ازای دو حالت زیر رسم کنید

$$T_a > T > 0, \quad T_b > T > 0 \quad (\text{الف})$$

$$T > T_a > 0, \quad T > T_b > 0 \quad (\text{ب})$$

ب ۸-۷ نمودار نایکویست یک سیستم کنترل با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر را رسم کنید

$$G(s) = \frac{K(1-s)}{s+1}$$

با استفاده از معیار پایداری نایکویست، پایداری سیستم حلقه بسته را تعیین کنید.

ب ۹-۷ سیستم با تابع تبدیل حلقه باز زیر

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(T_1 s + 1)}$$

ذاتاً ناپایدار است. این سیستم را می توان با افزودن کنترل کننده مشتقی پایدار کرد. نمودارهای قطبی تابع تبدیل حلقه باز را با کنترل کننده مشتقی و بدون آن رسم کنید.

ب ۱-۷ سیستم با فیدبک واحدی دارای تابع تبدیل حلقه باز زیر است

$$G(s) = \frac{10}{s+1}$$

خروجی حالت ماندگار سیستم را به ازای ورودیهای زیر بیابید.

$$r(t) = \sin(t + 30^\circ) \quad (\text{الف})$$

$$r(t) = 2 \cos(2t - 45^\circ) \quad (\text{ب})$$

$$r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2 \cos(2t - 45^\circ) \quad (\text{ج})$$

ب ۲-۷ سیستمی با تابع تبدیل حلقه بسته زیر در نظر بگیرید

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(T_2 s + 1)}{T_1 s + 1}$$

خروجی حالت ماندگار این سیستم را به ازای ورودی $r(t) = R \sin \omega t$ بیابید.

ب ۳-۷ با استفاده از MATLAB نمودارهای بوده $G_1(s)$ و $G_2(s)$ زیر را رسم کنید.

$$G_1(s) = \frac{1+s}{1+2s}$$

$$G_2(s) = \frac{1-s}{1+2s}$$

$G_1(s)$ سیستمی می نیمم فاز، و $G_2(s)$ غیرمی نیمم فاز است.

ب ۴-۷ نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم کنید.

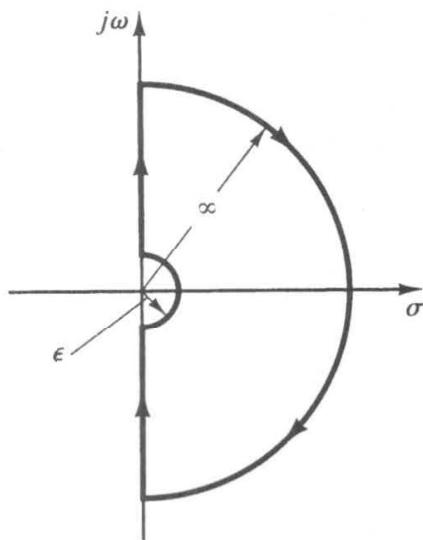
$$G(s) = \frac{10(s^2 + 0.4s + 1)}{s(s^2 + 0.8s + 9)}$$

ب ۵-۷ داریم

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

نشان دهید که

$$|G(j\omega_n)| = 1/2\zeta$$



شکل ۷-۱۵۶ مسیر نایکویست.

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

فرض کنید که مسیر نایکویست شکل ۷-۱۵۶ را در نظر گرفته‌ایم. مکان هندسی $G(j\omega)$ را در صفحه $G(s)$ رسم کنید. با استفاده از معیار پایداری نایکویست پایداری سیستم را بررسی کنید.

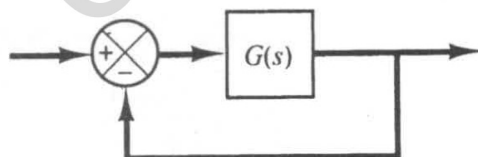
ب ۷-۱۶ سیستم حلقه بسته شکل ۷-۱۵۷ را در نظر بگیرید. $G(s)$ در نیمه راست صفحه s قطب ندارد.

اگر نمودار نایکویست به صورت نشان داده شده

در شکل ۷-۱۵۸ (الف) باشد، آیا سیستم پایدار است؟

اگر نمودار نایکویست به صورت نشان داده شده در

شکل ۷-۱۵۸ (ب) باشد، آیا سیستم پایدار است؟



شکل ۷-۱۵۷ سیستم حلقه بسته.

ب ۷-۱۷ شکل ۷-۱۵۹ نمودار نایکویست سیستمی

با فیدبک واحد و تابع تبدیل مسیر پیشروی $G(s)$ را نشان می‌دهد.

ب ۷-۱۰ سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{10K(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+10)}$$

نمودارهای قطبی مستقیم و وارون $G(s)H(s)$ را به ازای $K=1$ و $K=10$ رسم کنید. با اعمال معیار پایداری نایکویست پایداری سیستم را به ازای این مقادیر K بررسی کنید.

ب ۷-۱۱ سیستم حلقه بسته‌ای با تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s}$$

ماکزیمم K را که به ازای آن سیستم پایدار است بیابید.

ب ۷-۱۲ نمودار نایکویست $G(s)$ زیر را رسم کنید:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 0.8s + 1)}$$

ب ۷-۱۳ سیستم کنترل با فیدبک واحدی در نظر بگیرید که دارای تابع تبدیل حلقه باز زیر باشد:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 0.2s^2 + s + 1}$$

نمودار نایکویست $G(s)$ را رسم کرده، پایداری آن را بررسی کنید.

ب ۷-۱۴ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 0.2s^2 + s + 1}$$

نمودار نایکویست $G(s)$ را رسم کرده، پایداری آن را بررسی کنید.

ب ۷-۱۵ سیستمی با فیدبک واحد و $G(s)$ زیر در نظر بگیرید.

آیا اگر $G(s)$ در نیم صفحه راست یک قطب داشته باشد سیستم پایدار است؟ آیا اگر $G(s)$ در نیم صفحه راست قطب نداشته، ولی یک صفر داشته باشد، سیستم پایدار است؟

ب ۷-۱۸ سیستم کنترل دارای فیدبک واحدی با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ زیر در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+10)}$$

نمودار نایکویست $G(s)$ را به ازای این بهره‌ها رسم کنید

$$K=100, K=10, K=1$$

ب ۷-۱۹ یک سیستم کنترل دارای فیدبک منفی با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ زیر در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

نمودار نایکویست $G(s)$ را رسم کنید. اگر این سیستم دارای فیدبک مثبت و همین تابع تبدیل حلقه باز باشد، نمودار نایکویست آن چه شکلی می‌داشت؟
ب ۷-۲۰ سیستم کنترل شکل ۷-۱۶۰ را در نظر بگیرید. $G(s)$ به صورت زیر است:

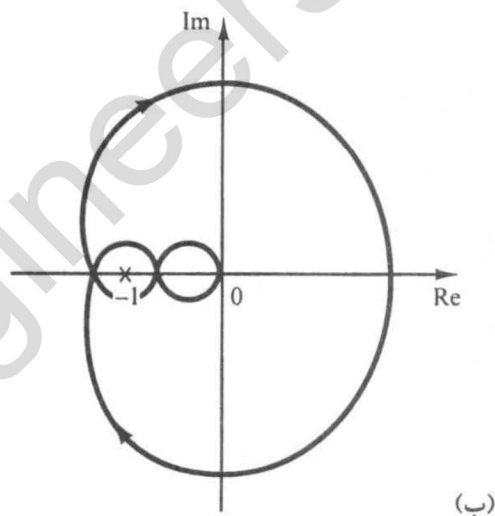
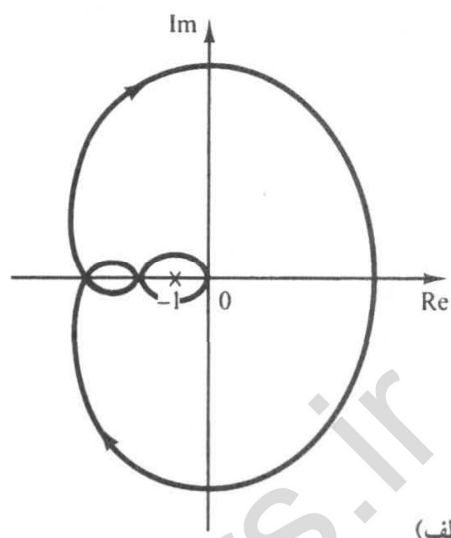
$$G(s) = \frac{10}{s[(s+1)(s+5)+10k]} = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + (5+10k)s}$$

نمودار نایکویست $G(s)$ را به ازای $k=0.3$ ، $k=0.7$ و $k=0.5$ رسم کنید.

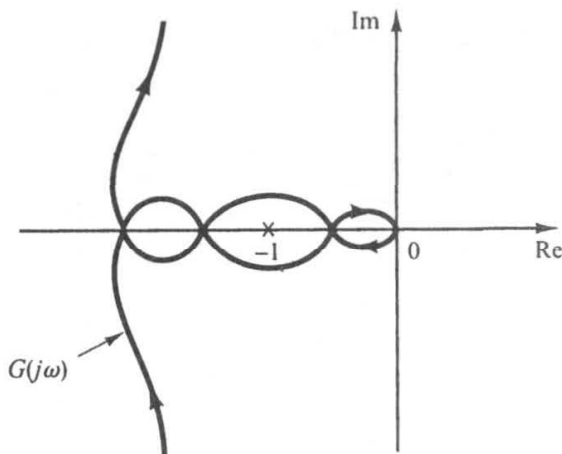
ب ۷-۲۱ سیستمی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

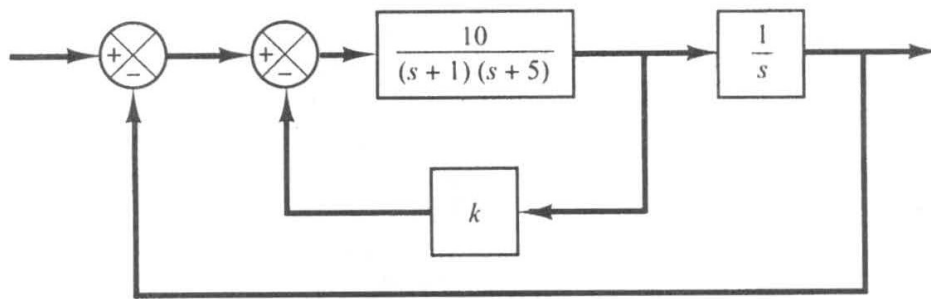
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



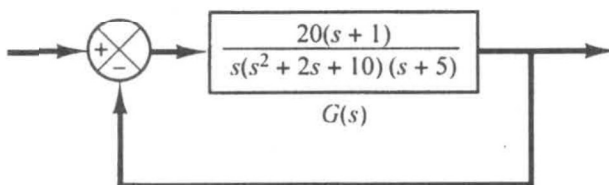
شکل ۷-۱۵۸ نمودارهای نایکویست.



شکل ۷-۱۵۹ نمودار نایکویست.



شکل ۷-۱۶۰ سیستم کنترل.



شکل ۷-۱۶۲ سیستم کنترل.

این سیستم چهار نمودار نایکویست دارد. دو نمودار نایکویست به ازای ورودی u_1 و دو نمودار نایکویست به ازای ورودی u_2 . یک برنامه MATLAB برای رسم این نمودارها بنویسید.

ب ۷-۲۲ می‌خواهیم $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ سیستم مسئله ب ۷-۲۱ را تنها به ازای $\omega > 0$ رسم کنیم. یک برنامه MATLAB برای این منظور بنویسید.

اگر بخواهیم $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$ را به ازای $-\infty < \omega < \infty$ رسم کنیم، باید در برنامه چه تغییری بدهیم؟

ب ۷-۲۳ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{as+1}{s^2}$$

را به نحوی تعیین کنید که حاشیه فاز 45° باشد. ب ۷-۲۴ سیستم شکل ۷-۱۶۱ را در نظر بگیرید. نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ را رسم کرده، حاشیه فاز و حاشیه بهره را تعیین کنید.

ب ۷-۲۵ سیستم شکل ۷-۱۶۲ را در نظر بگیرید. نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ را رسم کرده،

حاشیه فاز و حاشیه بهره را با استفاده از MATLAB تعیین کنید.

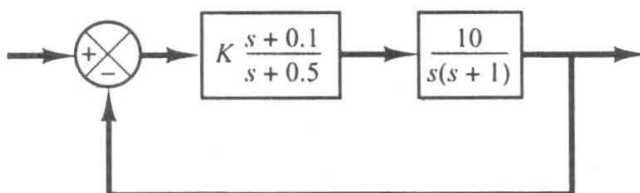
ب ۷-۲۶ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 4)}$$

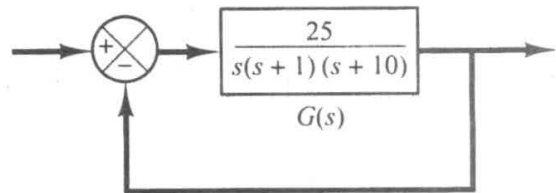
بهره K را به نحوی تعیین کنید که حاشیه فاز 50° باشد. به ازای این K حاشیه بهره سیستم چقدر است؟ ب ۷-۲۷ سیستم شکل ۷-۱۶۳ را در نظر بگیرید. نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز را رسم کرده، مقدار K را به نحوی تعیین کنید که حاشیه فاز 50° باشد. به ازای این مقدار K حاشیه بهره چقدر است؟

ب ۷-۲۸ تابع تبدیل حلقه باز سیستمی با فیدبک واحد به صورت زیر است

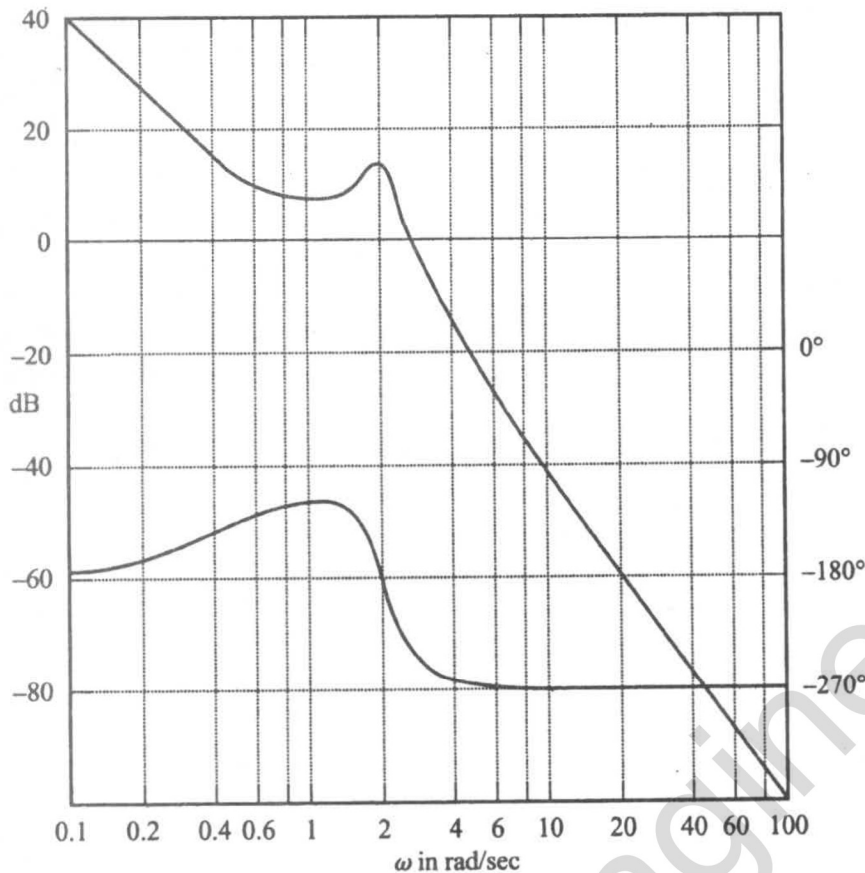
$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 0.5)}$$



شکل ۷-۱۶۳ سیستم کنترل.



شکل ۷-۱۶۱ سیستم کنترل.



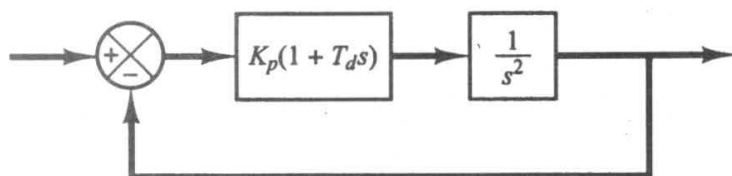
شکل ۱۶۴-۷

نمودار بودی تابع تبدیل
حلقه باز یک سیستم کنترل
با فیدبک واحد.

و کنترل کننده PD زیر را رسم کنید.

$$G_c(s) = 5(1 + 0.5s)$$

ب ۳۱-۷ شکل ۱۶۵-۷ نمودار بلوکی سیستم کنترل ارتفاع یک فضاپیما را نشان می‌دهد. ثابت بهره K_p و زمان مشتقگیری T_d را به نحوی تعیین کنید که پهنای باند سیستم حلقه بسته 0.4 rad/s تا 0.5 rad/s باشد. (توجه کنید که پهنای باند حلقه بسته نزدیک فرکانس عبور بهره است.) حاشیه فاز سیستم باید به حد کافی باشد. نمودارهای بوده پاسخ فرکانسی حلقه باز و حلقه بسته را بیاپید.



بهره K را به نحوی تعیین کنید که دامنه قلّه تشدید پاسخ فرکانسی 2 dB باشد، یعنی داشته باشیم $M_r = 2 \text{ dB}$.

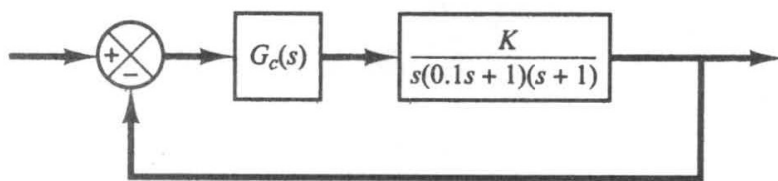
ب ۲۹-۷ نمودار بودی تابع تبدیل حلقه باز $G(s)$ یک سیستم کنترل با فیدبک واحد در شکل ۱۶۴-۷ نشان داده شده است. می‌دانیم که تابع تبدیل حلقه باز می‌نیم فاز است. این نمودار نشان می‌دهد که یک زوج قطب مختلط در $\omega = 2 \text{ rad/sec}$ وجود دارد. نسبت میرایی جمله مرتبه دوم متناظر با این قطبها را بیاپید. تابع تبدیل $G(s)$ را نیز تعیین کنید.

ب ۳۰-۷ نمودار بوده کنترل کننده PI زیر

$$G_c(s) = 5 \left(1 + \frac{1}{2s} \right)$$

شکل ۱۶۵-۷

نمودار بلوکی سیستم کنترل ارتفاع فضاپیما.



شکل ۷-۱۶۶

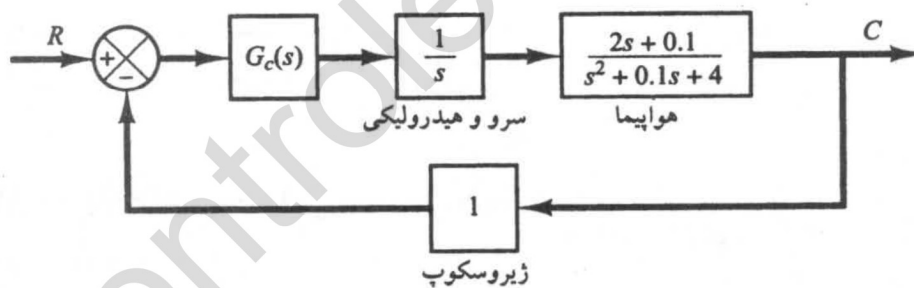
سیستم حلقه بسته.

ب ۷-۳۲ برای سیستم حلقه بسته شکل ۷-۱۶۶ پاسخ شیب سیستم جبران شده را با MATLAB رسم کنید. نمودار نایکویست سیستم جبران شده را نیز با MATLAB رسم کنید.

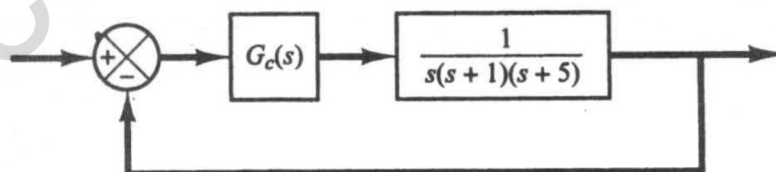
ب ۷-۳۴ برای سیستم شکل ۷-۱۶۸ یک جبران ساز پسفاز - پیشفاز طرح کنید تا ثابت خطای ایستای سرعت K_v برابر 2°sec^{-1} ، حاشیه فاز 60° ، و حاشیه بهره ۸ dB یا بیشتر باشد. منحنی های پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم جبران شده را با استفاده از MATLAB رسم کنید.

ب ۷-۳۲ برای سیستم حلقه بسته شکل ۷-۱۶۶ جبران ساز پیشفاز $G_c(s)$ را برای دستیابی به حاشیه فاز 45° ، حاشیه بهره بزرگتر از ۸ dB، و ثابت خطای سرعت $K_v = 4^\circ \text{sec}^{-1}$ طراحی کنید. منحنی های پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم جبران شده را با استفاده از MATLAB رسم کنید.

ب ۷-۳۳ سیستم شکل ۷-۱۶۷ را در نظر بگیرید. جبران سازی برای دستیابی به ثابت خطای ایستای سرعت 4°sec^{-1} ، حاشیه فاز 50° و حاشیه بهره



شکل ۷-۱۶۷ سیستم کنترل.



شکل ۷-۱۶۸ سیستم کنترل.

کنترل کننده های PID و PID اصلاح شده

۸-۱ مقدمه

در فصل های پیش گاهی راجع به طرح های پایه ای کنترل PID صحبت کردیم. مثلاً کنترل کننده های PID الکترونیکی، هیدرولیکی، و نیوماتیکی را معرفی کردیم. همچنین سیستم های کنترلی طرح کردیم که در آنها از کنترل کننده های PID استفاده شده بود.

جالب توجه است که بیش از نیمی از کنترل کننده های صنعتی که امروزه به کار می روند، از طرح های کنترل PID یا PID اصلاح شده استفاده می کنند.

چون اغلب کنترل کننده های PID در محل تنظیم می شوند، قواعد تنظیم متفاوتی در نوشته ها پیشنهاد شده است. با استفاده از این قواعد می توان کنترل کننده ها را در محل با دقت و ظرافت تنظیم کرد. روش های تنظیم خودکار نیز ابداع شده اند، و بعضی کنترل کننده های PID قابلیت تنظیم خودکار را دارا هستند. شکل های اصلاح شده کنترل PID، مانند کنترل I-PD و کنترل PID چند درجه آزادی هم اکنون در صنعت به کار می روند. روش های عملی متعددی برای تغییر حالت بی وقفه (از دستی به خودکار) و برنامه ریزی بهره به بازار عرضه شده است.

مزیت کنترل کننده های PID در قابلیت اعمال عمومی آنها به اکثر سیستم های کنترل است. در عمل هر گاه مدل ریاضی سیستم معلوم نباشد، و به همین خاطر روش های تحلیلی طراحی را نتوان به کار برد، کنترل

کننده‌های PID بسیار مفید واقع می‌شوند. در زمینه سیستم‌های کنترل فرایند، طرح‌های کنترل PID و شکلهای اصلاح شده آن فایده خود را در ایجاد کنترل رضایتبخش به اثبات رسانده‌اند، گرچه در بسیاری از موارد کنترل کننده بهینه نیستند.

در این فصل ابتدا طراحی یک سیستم کنترل شده با PID با استفاده از قواعد زیگلر - نیکولس را معرفی می‌کنیم. سپس طراحی کنترل‌کننده PID به استفاده از رهیافت پاسخ فرکانسی را معرفی کرده، رهیافت محاسباتی بهینه‌سازی کنترل‌کننده را بیان می‌کنیم. سپس کنترل‌کننده‌های اصلاح شده‌ای چون کنترل PI-D و کنترل I-PD را مورد بحث قرار می‌دهیم. سپس به معرفی سیستم‌های کنترل با چند درجه آزادی می‌پردازیم، این سیستم‌ها می‌توانند خواسته‌های متزاحمی را که سیستم‌های کنترل با یک درجه آزادی از پس ارضایشان برنمی‌آیند، برآورده کنند. (سیستم‌های کنترل با چند درجه آزادی در بخش ۸-۶ تعریف شده‌اند).

در موارد عملی ممکن است بخواهیم پاسخ به ورودی اغتشاش ویژگی‌هایی، و پاسخ به ورودی مرجع ویژگی‌های دیگری داشته باشد. غالباً این دو دسته ویژگی با هم تزامم دارند و نمی‌توان آنها را با سیستم‌های دارای یک درجه آزادی برآورده کرد. با افزودن درجه آزادی سیستم کنترل می‌توان هر دو دسته را ارضا کرد. در این فصل سیستم‌های کنترل با دو درجه آزادی را به تفصیل مورد بحث قرار می‌دهیم.

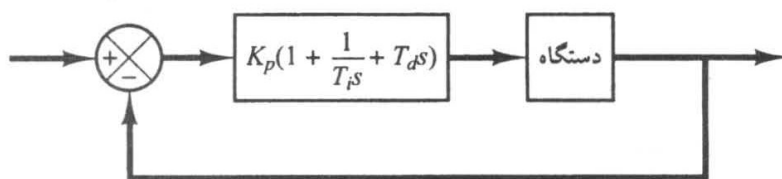
سرانجام یک رهیافت محاسباتی بسیار پرقدرت با استفاده از MATLAB معرفی می‌کنیم که بتواند مقادیر بهینه پارامترها را برای ارضای خواسته‌های پاسخ گذرا (مثلاً این که درصد فراجش پاسخ پله و زمان نشست آن از مقدار مشخصی کمتر باشد) جستجو کند. این رهیافت را می‌توان هم برای سیستم‌های با یک درجه آزادی و هم برای سیستم‌های با چند درجه آزادی به کار برد، به شرطی که مدل ریاضی نسبتاً دقیقی از دستگاه موجود باشد.

نمای کلی فصل. بخش ۸-۱ مطالب مقدماتی را دربر دارد. در بخش ۸-۲ با روش‌های پایه‌ای تنظیم کنترل کننده‌های PID، موسوم به قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس آشنا می‌شویم. بخش ۸-۳ به طراحی یک کنترل‌کننده PID با رهیافت پاسخ فرکانسی اختصاص دارد. در بخش ۸-۴ یک روش محاسباتی برای یافتن پارامترهای بهینه کنترل کننده PID معرفی می‌شود. طرح‌های کنترل با چند درجه آزادی و همچنین سیستم‌های دارای کنترل‌کننده‌های PID اصلاح شده در بخش ۸-۵ معرفی می‌شوند.

۸-۲ قواعد زیگلر - نیکولس

برای تنظیم کنترل‌کننده‌های PID

کنترل PID دستگاه. شکل ۸-۱ کنترل PID یک دستگاه را نشان می‌دهد. اگر بتوان مدل ریاضی دستگاه را به دست آورد، روش‌های طراحی مختلفی را می‌توان برای تعیین پارامترهای کنترل کننده به کار برد تا سیستم حلقه بسته مشخصات پاسخ گذرا و حالت ماندگار خواسته شده را داشته باشد، ولی اگر دستگاه آنقدر پیچیده باشد که نتوان مدل ریاضی آن را به سادگی به دست آورد، نمی‌توان از رهیافت تحلیلی برای طراحی کنترل کننده PID استفاده کرد. در این صورت باید برای تنظیم کنترل کننده PID به روش‌های تجربی متوسل شد.

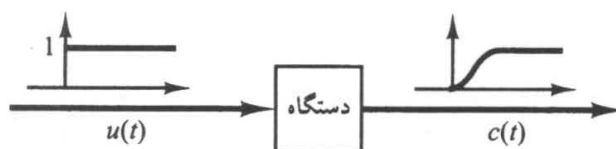


شکل ۱-۸
کنترل PID یک دستگاه .

فرایند انتخاب پارامترهای کنترل کننده برای برآورده شدن مشخصات عملکرد، تنظیم کنترل کننده نامیده می شود. زیگلر و نیکولس قواعدی برای تنظیم کنترل کننده های PID (یعنی تعیین مقادیر K_p ، T_i و T_d) پیشنهاد کرده اند. این قواعد براساس پاسخ پله به دست آمده از آزمایش یا مقدار K_p که هنگام استفاده از کنترل تناسبی تنها به پایداری مرزی منجر می شود، استوار است. قواعد زیگلر - نیکولس، که به زودی به معرفی آنها می پردازیم، در مواقعی که مدل ریاضی دستگاه معلوم نیست بسیار به کار می آیند. (البته این قواعد را می توان برای طراحی سیستمهای دارای مدل ریاضی معلوم نیز به کار برد). این قواعد مجموعه ای از مقادیر برای K_p ، T_i و T_d به دست می دهند که عملکرد پایدار سیستم را به همراه دارد. البته سیستم حاصل ممکن است فراجش بزرگ و غیرقابل قبول داشته باشد. در این صورت باید با انجام یک رشته تنظیم دقیق به مشخصه مطلوب دست یافت. در واقع قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس حدس هوشمندانه ای برای پارامترها به دست می دهد که می تواند نقطه شروع خوبی برای تنظیم باشد. پس این قواعد را نباید مقدار نهایی پارامترها به حساب آورد.

قواعد زیگلر - نیکولس برای تنظیم کنترل کننده های PID. زیگلر و نیکولس قواعدی برای تعیین بهره تناسبی K_p ، زمان انتگرال T_i و زمان مشتق T_d ، براساس مشخصات پاسخ گذرای دستگاه تحت کنترل پیشنهاد کرده اند. این تعیین پارامتر یا تنظیم کنترل کننده PID می تواند توسط مهندس کنترل در محل و با انجام آزمایش بر روی دستگاه انجام شود. (پس از پیشنهادات زیگلر و نیکولس قواعد تنظیم متعددی برای کنترل کننده های PID عنوان شده است. این قواعد را می توان در کتابها و مقاله ها و راهنمای سازنده کنترل کننده پیدا کرد).
دو روش موسوم به قواعد زیگلر - نیکولس وجود دارد: روش اول، و روش دوم - هر دو روش را در اینجا به اختصار معرفی می کنیم.

روش اول. در روش اول پاسخ دستگاه به ورودی پله واحد را به طور تجربی، به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۸ می یابیم. اگر دستگاه نه انتگرالگیر داشته باشد، نه قطبهای مزدوج مختلط غالب، پاسخ پله به صورت یک منحنی S شکل، همانند منحنی شکل ۳-۸ است. (اگر پاسخ به صورت منحنی S شکل نباشد، این روش را نمی توان به کار برد). این منحنی پاسخ پله را می توان به طور تجربی یا با شبیه سازی دستگاه به دست آورد. منحنی S شکل را می توان با دو پارامتر مشخص کرد، زمان تأخیر L و ثابت زمانی T . زمان تأخیر و ثابت زمانی مطابق شکل ۳-۸ با رسم خط مماس در نقطه عطف منحنی S شکل و یافتن محل برخورد آن با محور



شکل ۲-۸
پاسخ پله واحد یک دستگاه .