

# کنترل کننده های PID و PID اصلاح شده

## ۸-۱ مقدمه

در فصل های پیش گاهی راجع به طرح های پایه ای کنترل PID صحبت کردیم. مثلاً کنترل کننده های PID الکترونیکی، هیدرولیکی، و نیوماتیکی را معرفی کردیم. همچنین سیستم های کنترلی طرح کردیم که در آنها از کنترل کننده های PID استفاده شده بود.

جالب توجه است که بیش از نیمی از کنترل کننده های صنعتی که امروزه به کار می روند، از طرح های کنترل PID یا PID اصلاح شده استفاده می کنند.

چون اغلب کنترل کننده های PID در محل تنظیم می شوند، قواعد تنظیم متفاوتی در نوشته ها پیشنهاد شده است. با استفاده از این قواعد می توان کنترل کننده ها را در محل با دقت و ظرافت تنظیم کرد. روش های تنظیم خودکار نیز ابداع شده اند، و بعضی کنترل کننده های PID قابلیت تنظیم خودکار را دارا هستند. شکل های اصلاح شده کنترل PID، مانند کنترل I-PD و کنترل PID چند درجه آزادی هم اکنون در صنعت به کار می روند. روش های عملی متعددی برای تغییر حالت بی وقفه (از دستی به خودکار) و برنامه ریزی بهره به بازار عرضه شده است.

مزیت کنترل کننده های PID در قابلیت اعمال عمومی آنها به اکثر سیستم های کنترل است. در عمل هر گاه مدل ریاضی سیستم معلوم نباشد، و به همین خاطر روش های تحلیلی طراحی را نتوان به کار برد، کنترل

کننده‌های PID بسیار مفید واقع می‌شوند. در زمینه سیستم‌های کنترل فرایند، طرح‌های کنترل PID و شکل‌های اصلاح شده آن فایده خود را در ایجاد کنترل رضایتبخش به اثبات رسانده‌اند، گرچه در بسیاری از موارد کنترل کننده بهینه نیستند.

در این فصل ابتدا طراحی یک سیستم کنترل شده با PID با استفاده از قواعد زیگلر - نیکولس را معرفی می‌کنیم. سپس طراحی کنترل‌کننده PID به استفاده از رهیافت پاسخ فرکانسی را معرفی کرده، رهیافت محاسباتی بهینه‌سازی کنترل‌کننده را بیان می‌کنیم. سپس کنترل‌کننده‌های اصلاح شده‌ای چون کنترل PI-D و کنترل I-PD را مورد بحث قرار می‌دهیم. سپس به معرفی سیستم‌های کنترل با چند درجه آزادی می‌پردازیم، این سیستم‌ها می‌توانند خواسته‌های متزاحمی را که سیستم‌های کنترل با یک درجه آزادی از پس ارضایشان برنمی‌آیند، برآورده کنند. (سیستم‌های کنترل با چند درجه آزادی در بخش ۸-۶ تعریف شده‌اند).

در موارد عملی ممکن است بخواهیم پاسخ به ورودی اغتشاش ویژگی‌هایی، و پاسخ به ورودی مرجع ویژگی‌های دیگری داشته باشد. غالباً این دو دسته ویژگی با هم تزاخم دارند و نمی‌توان آنها را با سیستم‌های دارای یک درجه آزادی برآورده کرد. با افزودن درجه آزادی سیستم کنترل می‌توان هر دو دسته را ارضا کرد. در این فصل سیستم‌های کنترل با دو درجه آزادی را به تفصیل مورد بحث قرار می‌دهیم.

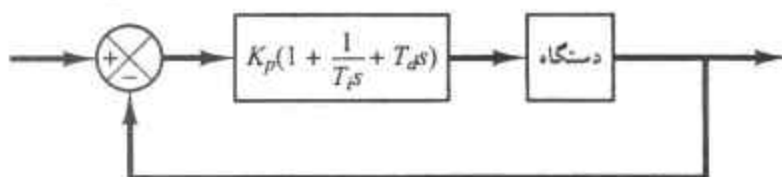
سرانجام یک رهیافت محاسباتی بسیار پرقدرت با استفاده از MATLAB معرفی می‌کنیم که بتواند مقادیر بهینه پارامترها را برای ارضای خواسته‌های پاسخ گذرا (مثلاً این که درصد فرابیش پاسخ پله و زمان نشست آن از مقدار مشخصی کمتر باشد) جستجو کند. این رهیافت را می‌توان هم برای سیستم‌های با یک درجه آزادی و هم برای سیستم‌های با چند درجه آزادی به کار برد، به شرطی که مدل ریاضی نسبتاً دقیقی از دستگاه موجود باشد.

**نمای کلی فصل.** بخش ۸-۱ مطالب مقدماتی را دربر دارد. در بخش ۸-۲ با روش‌های پایه‌ای تنظیم کنترل کننده‌های PID، موسوم به قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس آشنا می‌شویم. بخش ۸-۳ به طراحی یک کنترل‌کننده PID با رهیافت پاسخ فرکانسی اختصاص دارد. در بخش ۸-۴ یک روش محاسباتی برای یافتن پارامترهای بهینه کنترل کننده PID معرفی می‌شود. طرح‌های کنترل با چند درجه آزادی و همچنین سیستم‌های دارای کنترل‌کننده‌های PID اصلاح شده در بخش ۸-۵ معرفی می‌شوند.

## ۸-۲ قواعد زیگلر - نیکولس

### برای تنظیم کنترل‌کننده‌های PID

**کنترل PID دستگاه.** شکل ۸-۱ کنترل PID یک دستگاه را نشان می‌دهد. اگر بتوان مدل ریاضی دستگاه را به دست آورد، روش‌های طراحی مختلفی را می‌توان برای تعیین پارامترهای کنترل کننده به کار برد تا سیستم حلقه بسته مشخصات پاسخ گذرا و حالت ماندگار خواسته شده را داشته باشد، ولی اگر دستگاه آنقدر پیچیده باشد که نتوان مدل ریاضی آن را به سادگی به دست آورد، نمی‌توان از رهیافت تحلیلی برای طراحی کنترل کننده PID استفاده کرد. در این صورت باید برای تنظیم کنترل کننده PID به روش‌های تجربی متوسل شد.



شکل ۱-۸  
کنترل PID یک دستگاه.

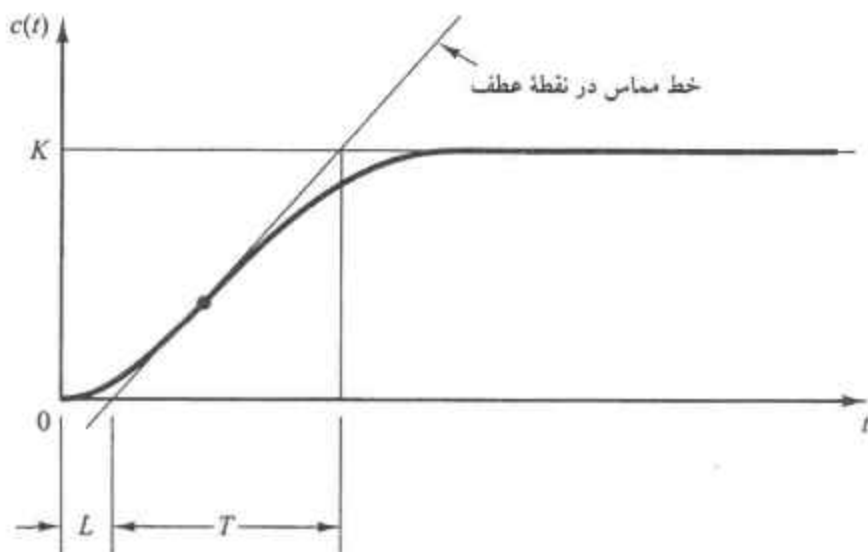
فرایند انتخاب پارامترهای کنترل کننده برای برآورده شدن مشخصات عملکرد، تنظیم کنترل کننده نامیده می شود. زیگلر و نیکولس قواعدی برای تنظیم کنترل کننده های PID (یعنی تعیین مقادیر  $K_p$ ،  $T_i$  و  $T_d$ ) پیشنهاد کرده اند. این قواعد براساس پاسخ پله به دست آمده از آزمایش یا مقدار  $K_p$  که هنگام استفاده از کنترل تناسبی تنها به پایداری مرزی منجر می شود، استوار است. قواعد زیگلر - نیکولس، که به زودی به معرفی آنها می پردازیم، در مواقعی که مدل ریاضی دستگاه معلوم نیست بسیار به کار می آیند. (البته این قواعد را می توان برای طراحی سیستم های دارای مدل ریاضی معلوم نیز به کار برد). این قواعد مجموعه ای از مقادیر برای  $K_p$ ،  $T_i$  و  $T_d$  به دست می دهند که عملکرد پایدار سیستم را به همراه دارد. البته سیستم حاصل ممکن است فراجش بزرگ و غیرقابل قبول داشته باشد. در این صورت باید با انجام یک رشته تنظیم دقیق به مشخصه مطلوب دست یافت. در واقع قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس حدس هوشمندانه ای برای پارامترها به دست می دهد که می تواند نقطه شروع خوبی برای تنظیم باشد. پس این قواعد را نباید مقدار نهایی پارامترها به حساب آورد.

**قواعد زیگلر - نیکولس برای تنظیم کنترل کننده های PID.** زیگلر و نیکولس قواعدی برای تعیین بهره تناسبی  $K_p$ ، زمان انتگرال  $T_i$  و زمان مشتق  $T_d$ ، براساس مشخصات پاسخ گذرای دستگاه تحت کنترل پیشنهاد کرده اند. این تعیین پارامتر یا تنظیم کنترل کننده PID می تواند توسط مهندس کنترل در محل و با انجام آزمایش بر روی دستگاه انجام شود. (پس از پیشنهادات زیگلر و نیکولس قواعد تنظیم متعددی برای کنترل کننده های PID عنوان شده است. این قواعد را می توان در کتابها و مقاله ها و راهنمای سازنده کنترل کننده پیدا کرد).  
دو روش موسوم به قواعد زیگلر - نیکولس وجود دارد: روش اول، و روش دوم - هر دو روش را در اینجا به اختصار معرفی می کنیم.

**روش اول.** در روش اول پاسخ دستگاه به ورودی پله واحد را به طور تجربی، به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۸ می یابیم. اگر دستگاه نه انتگرالگیر داشته باشد، نه قطبهای مزدوج مختلط غالب، پاسخ پله به صورت یک منحنی S شکل، همانند منحنی شکل ۳-۸ است. (اگر پاسخ به صورت منحنی S شکل نباشد، این روش را نمی توان به کار برد). این منحنی پاسخ پله را می توان به طور تجربی یا با شبیه سازی دستگاه به دست آورد.  
منحنی S شکل را می توان با دو پارامتر مشخص کرد، زمان تأخیر  $L$  و ثابت زمانی  $T$ . زمان تأخیر و ثابت زمانی مطابق شکل ۳-۸ با رسم خط مماس در نقطه عطف منحنی S شکل و یافتن محل برخورد آن با محور



شکل ۲-۸  
پاسخ پله واحد یک دستگاه.



شکل ۸-۳

منحنی پاسخ S شکل.

زمان و خط  $c(t) = K$  تعیین می‌شود. سپس می‌توان تابع تبدیل  $C(s)/U(s)$  را با یک سیستم مرتبه اول دارای تاخیر انتقالی، به صورت زیر تقریب زد:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts+1}$$

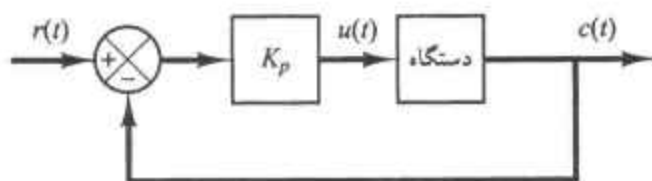
زیگلر و نیکولس پیشنهاد می‌کنند مقادیر  $K_p$ ،  $T_i$  و  $T_d$  براساس فرمولهای جدول ۸-۱ انتخاب شوند. توجه کنید که کنترل کننده PID تنظیم شده با روش اول قواعد زیگلر - نیکولس دارای تابع تبدیل زیر است:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\ &= 1/2 \frac{T}{L} \left( 1 + \frac{1}{2 L s} + 0.5 L s \right) \\ &= 0.6 T \frac{(s + 1/L)^2}{s} \end{aligned}$$

پس کنترل کننده PID یک قطب در مبدأ و صفر دوگانه‌ای در  $s = -1/L$  دارد.

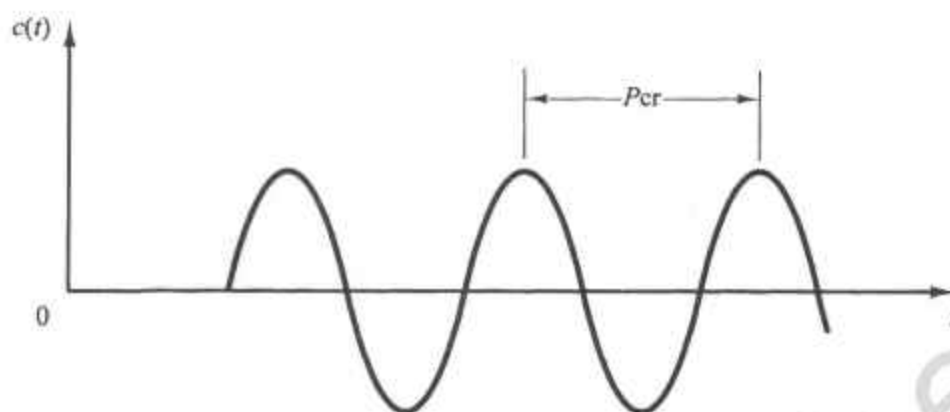
جدول ۸-۱ قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس براساس پاسخ پله دستگاه (روش اول)

$T_d$	$T_i$	$K_p$	نوع کنترل کننده
۰	$\infty$	$\frac{T}{L}$	P
۰	$\frac{L}{0.3}$	$0.9 \frac{T}{L}$	PI
$0.5 L$	$2 L$	$1/2 \frac{T}{L}$	PID



شکل ۴-۸

سیستم حلقه بسته با کنترل کننده تناسبی.

شکل ۵-۸ نوسان نامیرا با زمان تناوب  $P_{cr}$ .

روش دوم. در روش دوم ابتدا قرار می‌دهیم  $T_I = \infty$  و  $T_d = 0$ . در این صورت تنها عمل کنترلی تناسبی استفاده می‌شود (شکل ۴-۸ را ببینید).  $K_p$  را از صفر زیاد می‌کنیم تا به مقدار بحرانی  $K_{cr}$  برسد، جایی که خروجی برای اولین بار نوسان نامیرا پیدا می‌کند. (اگر به ازای هیچ مقدار  $K_p$  خروجی نوسان نامیرا نداشته باشد، این روش قابل اعمال نیست). پس مقدار بهره بحرانی  $K_{cr}$  و زمان تناوب متناظر با آن  $P_{cr}$  به طور تجربی تعیین می‌شود (شکل ۵-۸ را ببینید). زیگلر و نیکولس پیشنهاد کرده‌اند پارامترهای  $T_d$ ،  $T_I$ ،  $K_p$  و  $K_{cr}$  براساس فرمولهای جدول ۲-۸ تنظیم شوند.

توجه کنید که کنترل کننده PID تنظیم شده به روش زیگلر - نیکولس دارای تابع تبدیل زیر است

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_d s \right) \\ &= 0.6 K_{cr} \left( 1 + \frac{1}{0.5 P_{cr} s} + 0.125 P_{cr} s \right) \\ &= 0.75 P_{cr} K_{cr} \frac{(s + 4/P_{cr})^2}{s} \end{aligned}$$

پس این کنترل کننده PID یک قطب در مبدا و صفر دو گانه‌ای در  $s = -4/P_{cr}$  دارد.

جدول ۲-۸ قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس براساس بهره بحرانی  $K_{cr}$  و زمان تناوب بحرانی  $P_{cr}$  (روش دوم).

$T_d$	$T_I$	$K_p$	نوع کنترل کننده
۰	$\infty$	$0.5 K_{cr}$	P
۰	$\frac{1}{1.2} P_{cr}$	$0.45 K_{cr}$	PI
$0.125 P_{cr}$	$0.5 P_{cr}$	$0.6 K_{cr}$	PID

توجه کنید که اگر مدل ریاضی سیستم معلوم باشد (مثلاً تابع تبدیل آن) می‌توان از روش مکان هندسی برای یافتن بهره بحرانی  $K_{cr}$  و فرکانس نوسانات نامیرا  $\omega_{cr}$  استفاده کرد،  $\omega_{cr} = 2\pi / P_{cr}$ . این مقادیر با توجه به محل برخورد مکان هندس ریشه‌ها و محور  $j\omega$  تعیین می‌شود. (واضح است که اگر شاخه‌های مکان هندسی ریشه‌ها محور  $j\omega$  را قطع نکنند، این روش قابل اعمال نیست).

**ملاحظات.** قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس (و دیگر قواعد تنظیم بیان شده در نوشته‌ها) برای تنظیم کنترل کننده‌های PID به کار رفته در سیستم‌های کنترل صنعتی، که رفتار دینامیکی دستگاه دقیقاً معلوم نیست، زیاد استفاده می‌شود. این قواعد طی سالیان متمادی ثابت کرده‌اند که بسیار مفیدند؛ البته قواعد زیگلر - نیکولس را می‌توان برای دستگاه‌های دارای رفتار دینامیکی معلوم نیز به کار برد. (اگر رفتار دینامیکی دستگاه معلوم باشد، علاوه بر قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس روش‌های تحلیلی و ترسیمی متعددی برای طراحی کنترل کننده‌های PID وجود دارد).

سیستم کنترل شکل ۸-۶ را در نظر بگیرید که در آن یک کنترل کننده PID برای کنترل سیستم به کار رفته است. تابع تبدیل کنترل کننده PID به صورت زیر است

مثال ۸-۱

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

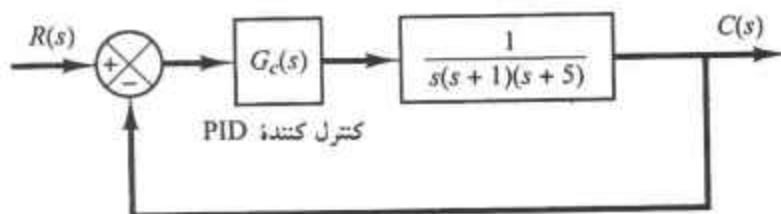
گرچه روش‌های تحلیلی متعددی برای طراحی کنترل کننده PID وجود دارد، ولی می‌خواهیم قواعد زیگلر - نیکولس را برای تعیین مقادیر  $K_p$ ،  $T_i$  و  $T_d$  به کار ببریم. پس منحنی پاسخ پله را به دست می‌آوریم تا ببینیم آیا سیستم طراحی شده دارای ماکزیمم فراجش حدود ۲۵٪ هست یا نه. اگر ماکزیمم فراجش زیاد بود (۴۰٪ یا بیشتر) تنظیم دقیقتری صورت می‌دهیم تا ماکزیمم فراجش به حدود ۲۵٪ برسد.

چون دستگاه تحت کنترل انتگرالگیر دارد، روش دوم زیگلر - نیکولس را به کار می‌بریم. با قرار دادن  $T_i = \infty$  و  $T_d = 0$  تابع تبدیل حلقه بسته را به شکل زیر می‌یابیم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5) + K_p}$$

با استفاده از معیار پایداری روث می‌توانیم مقدار  $K_p$  را که به ازای آن سیستم پایداری مرزی پیدا می‌کند، بیابیم. معادله مشخصه سیستم حلقه بسته عبارت است از

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0$$



شکل ۸-۶

سیستم دارای کنترل کننده PID

پس آرایه روث به صورت زیر است

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_p \\ s^1 & \frac{30-K_p}{6} & \\ s^0 & K_p & \end{array}$$

بررسی ضریب ستون اول نشان می‌دهد که نوسان نامیرا به ازای  $K_p = 30$  رخ می‌دهد. پس بهره بحرانی برابر است با

$$K_{cr} = 30$$

با قرار دادن  $K_p = K_{cr} = 30$  معادله مشخصه به صورت زیر به دست می‌آید

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0$$

برای یافتن فرکانس نوسان نامیرا در معادله مشخصه قرار می‌دهیم  $s = j\omega$  و به دست می‌آوریم

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 = 0$$

یا

$$6(5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0$$

که از آن فرکانس نوسان نامیرا به صورت  $\omega^2 = 5$  یا  $\omega = \sqrt{5}$  به دست می‌آید. پس زمان تناوب نوسان نامیرا عبارت است از

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.8099$$

با توجه به جدول ۲-۸ مقادیر  $K_p$ ،  $T_I$  و  $T_d$  به صورت زیر تعیین می‌شوند

$$K_p = 0.6 K_{cr} = 18$$

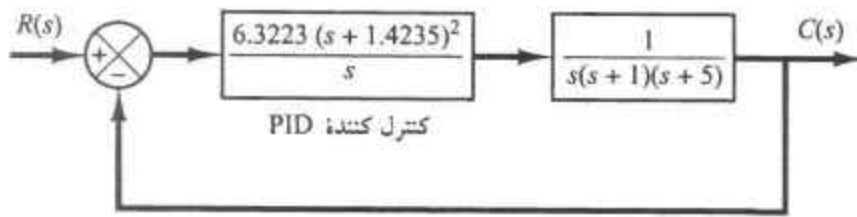
$$T_I = 0.5 P_{cr} = 1.405$$

$$T_d = 0.125 P_{cr} = 0.35124$$

پس تابع تبدیل کنترل کننده PID عبارت است از

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_d s \right) \\ &= 18 \left( 1 + \frac{1}{1.405 s} + 0.35124 s \right) \\ &= \frac{6.3223(s + 1.4235)^2}{s} \end{aligned}$$

کنترل کننده PID یک قطب در مبدا و صفر مضاعفی در  $s = -1.4235$  دارد. شکل ۷-۸ نمودار بلوکی سیستم کنترل و کنترل کننده PID طراحی شده را نشان می‌دهد.



شکل ۸-۷

نمودار بلوکی سیستم با کنترل کننده PID طراحی شده با استفاده از قواعد تنظیم زیگلر-نیکولس (روش دوم).

حال پاسخ پله سیستم را بررسی می‌کنیم. تابع تبدیل سیستم حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.3223 s^2 + 18s + 12.811}{s^3 + 6s^2 + 11.3223 s^2 + 18s + 12.811}$$

پاسخ پله این سیستم را می‌توان با استفاده از MATLAB به دست آورد. برنامه ۸-۱ را ببینید. منحنی پاسخ پله در شکل ۸-۸ نشان داده شده است. ماکزیمم فراجش پاسخ پله تقریباً ۶۲٪ است. مقدار ماکزیمم فراجش زیاد است. با تنظیم دقیقتر پارامترهای کنترل‌کننده می‌توان فراجش را کمتر کرد. این تنظیم را می‌توان بر روی کامپیوتر انجام داد. می‌بینیم که با حفظ  $K_p = 18$  و حرکت دادن صفر مضاعف کنترل کننده PID به  $s = -0.65$  یعنی با استفاده از کنترل کننده زیر

$$G_c(s) = 18 \left( 1 + \frac{1}{3.077s} + 0.7692s \right) = 13.846 \frac{(s+0.65)^2}{s} \quad (1-8)$$

می‌توان ماکزیمم فراجش را به ۱۸٪ رساند (شکل ۸-۹ را ببینید). اگر بهره تناسبی  $K_p$  را به ۳۹.۴۲ برسانیم، بدون این که محل صفر مضاعف ( $s = -0.65$ ) را تغییر دهیم، یعنی با استفاده از کنترل کننده زیر

$$G_c(s) = 39.42 \left( 1 + \frac{1}{3.077s} + 0.7692s \right) = 30.322 \frac{(s+0.65)^2}{s} \quad (2-8)$$

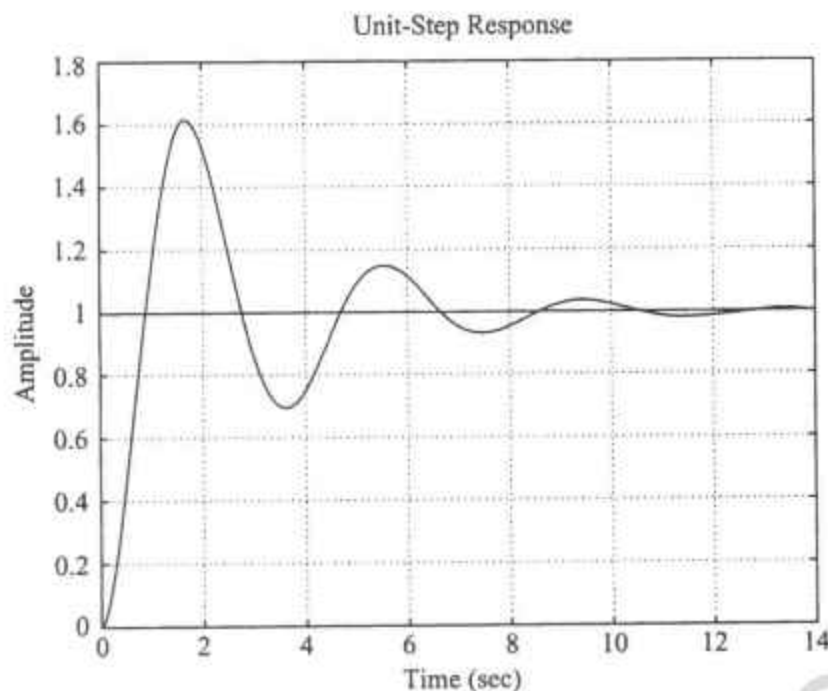
سرعت پاسخ زیادتر می‌شود، ولی ماکزیمم فراجش نیز مطابق شکل ۸-۱۰ به حدود ۲۸٪ می‌رسد، چون ماکزیمم فراجش به ۲۵٪ نزدیک است و پاسخ نسبت به سیستم دارای کنترل کننده PID معادله (۱-۸) سریعتر است،  $G_c(s)$  داده شده با معادله (۲-۸) را قابل قبول می‌یابیم. پس مقادیر تنظیم شده  $K_p$ ،  $T_I$  و  $T_d$  عبارت‌اند از

$$T_d = 0.7692, \quad T_I = 3.077, \quad K_p = 39.42$$

توجه به این نکته جالب است که این مقادیر تقریباً دو برابر مقادیری هستند که قواعد تنظیم زیگلر-نیکولس

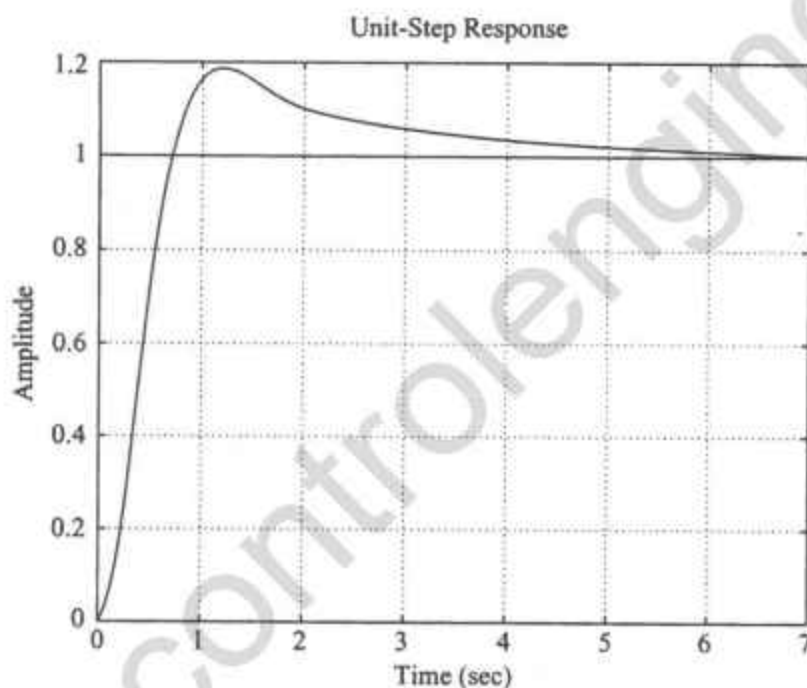
#### MATLAB Program 8-1

```
% ----- Unit-step response -----
num = [6.3223 18 12.811];
den = [1 6 11.3223 18 12.811];
step(num,den)
grid
title('Unit-Step Response')
```



شکل ۸-۸

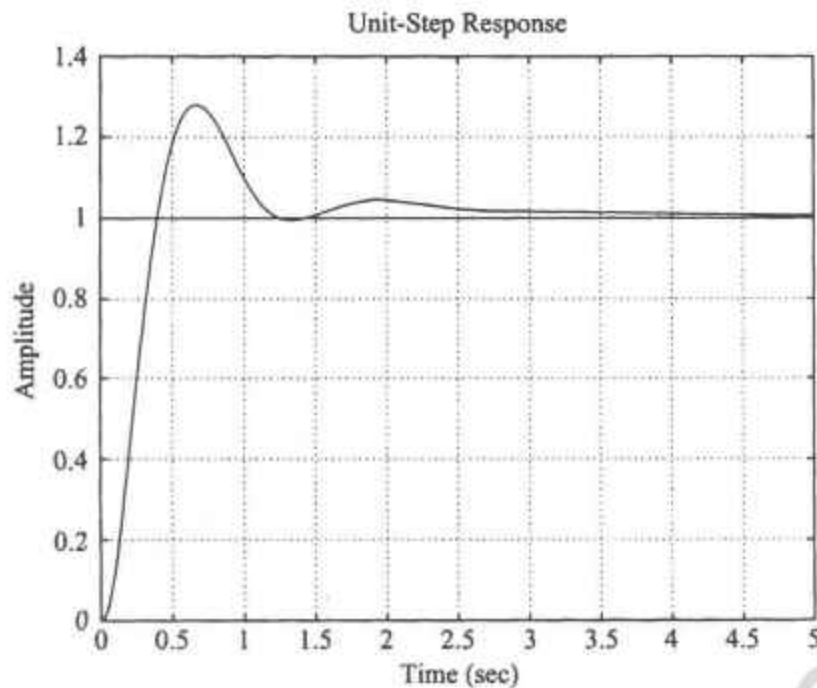
منحنی پاسخ پله سیستمی که  
کنترل کننده PID آن با استفاده  
از قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس  
(روش دوم) طرح شده است.



شکل ۹-۸

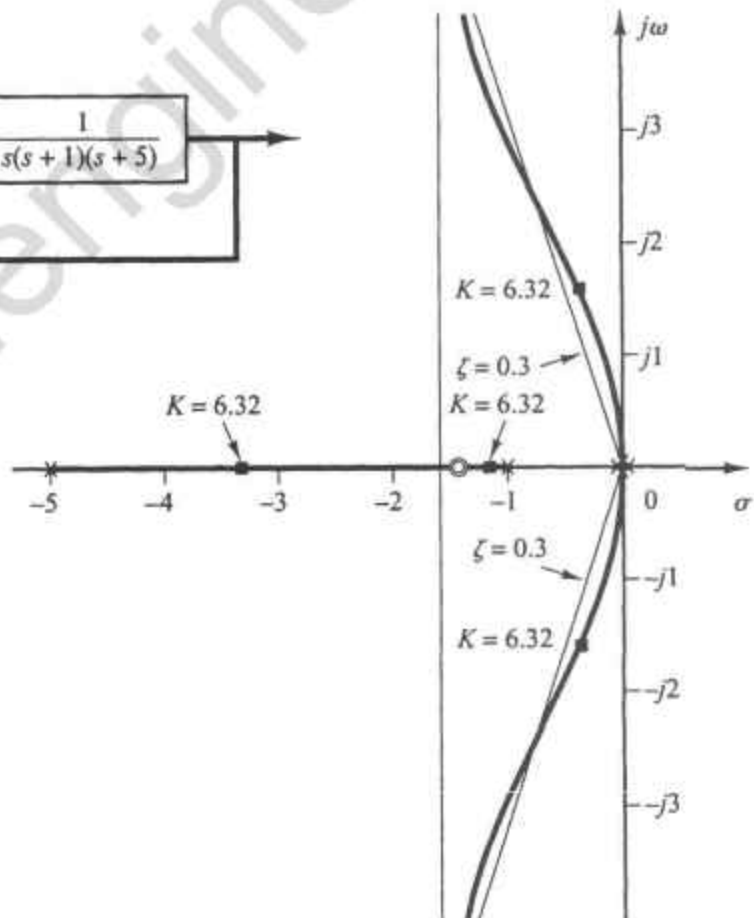
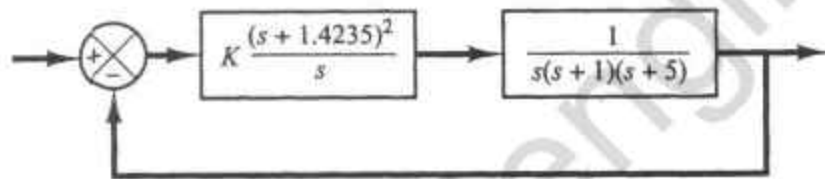
منحنی های پاسخ پله سیستم  
شکل ۶-۸ با کنترل کننده PID  
دارای پارامترهای  $K_p = 18$ ،  
 $T_i = 3.077$  و  $T_d = 0.7692$ .

پیشنهاد می کنند. نکته مهم این است که قواعد زیگلر - نیکولس نقطه شروعی برای تنظیم دقیق فراهم کرده اند. توجه به این نکته آموزنده است که برای حالتی که صفر مضاعف در  $1.4235 -$  قرار دارد، افزایش  $K_p$  سرعت سیستم را زیاد می کند، ولی از لحاظ ماکزیمم فراجهش اثر چندانی ندارد. دلیل این مطلب را می توان با تحلیل مکان هندسی ریشه ها بیان کرد. شکل ۸-۱۱ نمودار مکان هندسی را برای سیستم طرح شده با استفاده از روش دوم قواعد تنظیم نشان می دهد. چون شاخه های غالب مکان هندسی ریشه ها در گستره بزرگی از مقادیر  $K$  در امتداد خط  $\sigma = -0.3$  است، تغییر دادن  $K$  (از ۶ تا ۳۰) نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته را چندان تغییر نمی دهد. ولی تغییر محل صفر مضاعف اثر زیادی بر ماکزیمم فراجهش دارد، زیرا نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته را به شدت تغییر می دهد. این مطلب را نیز می توان با تحلیل مکان هندسی ریشه ها مستدل



شکل ۸-۱۰

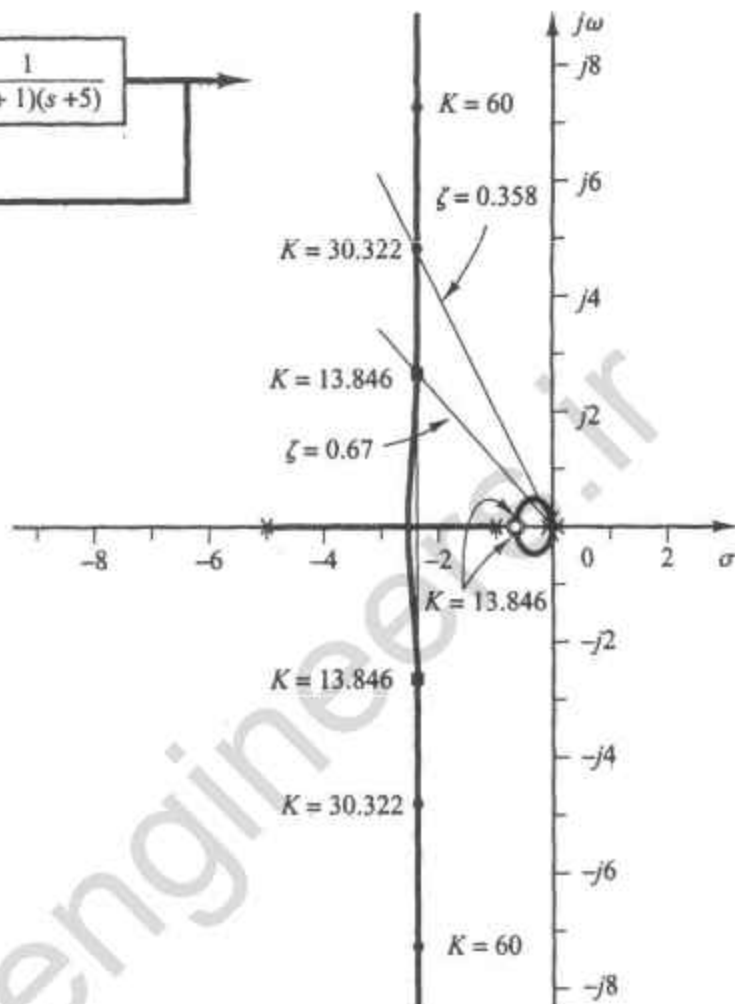
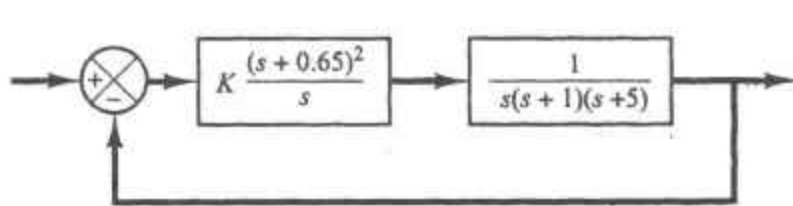
منحنی‌های پاسخ پله سیستم  
شکل ۸-۶ با کنترل‌کننده PID  
دارای پارامترهای  $K_p = ۳۹.۴۲$ ،  
 $T_d = ۰.۷۶۹۲$  و  $T_i = ۳.۰۷۷$



شکل ۸-۱۱

نمودار مکان هندسی ریشه‌ها  
برای حالتی که کنترل‌کننده PID  
در  $s = -۱.۴۲۳۵$   
صفر مضاعف دارد.

کرد. شکل ۸-۱۲ نمودار مکان هندسی ریشه‌ها را برای سیستم دارای کنترل‌کننده PID با صفر مضاعف در  $s = -۰.۶۵$  نشان می‌دهد. به تغییر آرایش مکان هندسی ریشه‌ها توجه کنید. این تغییر آرایش امکان تغییر نسبت میرایی قطبهای غالب حلقه بسته را فراهم می‌کند.



شکل ۱۲-۸

نمودار مکان هندسی ریشه‌ها برای

حالتی که کنترل کننده PID در

حالتی که کنترل کننده PID در

حالتی که کنترل کننده PID در

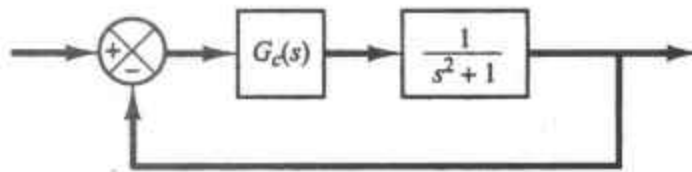
حالتی که کنترل کننده PID در

حالتی که کنترل کننده PID در

حالتی که کنترل کننده PID در

شکل ۱۲-۸ نشان می‌دهد که به ازای بهره  $K = 30.322$  قطبهای حلقه بسته واقع در  $s = -2.35 \pm j2.82$  و دو قطب حلقه بسته دیگر به صفر مضاعف واقع در  $s = -0.65$  بسیار نزدیک‌اند، در نتیجه صفر مضاعف اثر این دو قطب را تقریباً خنثی می‌کند. این قطبهای غالب حلقه بسته هستند که طبیعت پاسخ را تعیین می‌کنند. ولی به ازای بهره  $K = 13.846$  قطبهای حلقه بسته واقع در  $s = -2.35 \pm j2.62$  کاملاً غالب نیستند، زیرا دو قطب دیگر حلقه بسته که نزدیک صفر مضاعف  $s = -0.65$  قرار دارند، اثر قابل ملاحظه‌ای بر پاسخ می‌گذارند. در این حالت ماکزیمم فراجش پاسخ پله (۱۸٪) بسیار بزرگتر از فراجشی است که یک سیستم مرتبه دوم دارای قطب غالب حلقه بسته واقع در  $s = -2.35 \pm j2.62$  دارد. (ماکزیمم فراجش پاسخ پله در چنین حالتی تقریباً ۶٪ است.)

می‌توان برای بار سوم و چهارم نیز مقادیری انتخاب کرد تا پاسخ بهتری به دست آورد. ولی این کار مقدار زیادی محاسبه و زمان می‌خواهد. اگر می‌خواهید تعداد سعی‌ها را زیاد کنید بهتر است از رهیافت محاسباتی بیان شده در بخش ۳-۸ استفاده کنید. مسئله الف-۱۲ حل این مسئله را با رهیافت محاسباتی (به کمک MATLAB) نشان می‌دهد. مجموعه پارامترهای به دست آمده در این مسئله به نحوی است که فراجش ماکزیمم ۱۰٪ و زمان نشست کمتر از ۳ sec به دست می‌آید. حل به دست آمده در مسئله الف-۱۲ با کنترل کننده PID زیر متناظر است:



شکل ۸-۱۳ سیستم کنترل.

$$G_c(s) = K \frac{(s+a)^2}{s}$$

 مقادیر  $K$  و  $a$  عبارت‌اند از

$$K = 29 \quad a = 0.25$$

فراجش ماکزیمم ۹۵٪ و زمان نشست ۱/۷۸ sec است. جواب دیگری که در آن مسئله به دست آمده عبارت است از

$$K = 27 \quad a = 0.2$$

که با فراجش ماکزیمم ۵۰٪ و زمان نشست ۲/۸۹ sec متناظر است. برای جزییات مسئله الف ۸-۱۲ را ببینید.

### ۸-۳ طراحی کنترل‌کننده PID به روش پاسخ فرکانسی

در این بخش طراحی کنترل‌کننده PID بر اساس رهیافت پاسخ فرکانسی را معرفی می‌کنیم. سیستم شکل ۸-۱۳ را در نظر بگیرید. با استفاده از رهیافت پاسخ فرکانسی یک کنترل‌کننده PID طراحی کنید، به نحوی که ثابت خطای سرعت به  $4 \text{ sec}^{-1}$ ، حاشیه فاز به  $50^\circ$  یا بیشتر، و حاشیه بهره حداقل به ۱۰ dB برسد. منحنی‌های پاسخ پله و شیب سیستم جبران شده را به کمک رسم MATLAB کنید. کنترل‌کننده PID را به صورت زیر فرض می‌کنیم

$$G_c(s) = \frac{K(as+1)(bs+1)}{s}$$

چون ثابت خطای ایستای سرعت  $K_v = 4 \text{ sec}^{-1}$  تعیین شده است، داریم

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{1}{s^2+1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(as+1)(bs+1)}{s} \frac{1}{s^2+1} = K = 4$$

$$G_c(s) = \frac{4(as+1)(bs+1)}{s}$$

بنابراین

حال نمودار بوده تابع زیر را رسم می‌کنیم

$$G(s) = \frac{4}{s(s^2+1)}$$

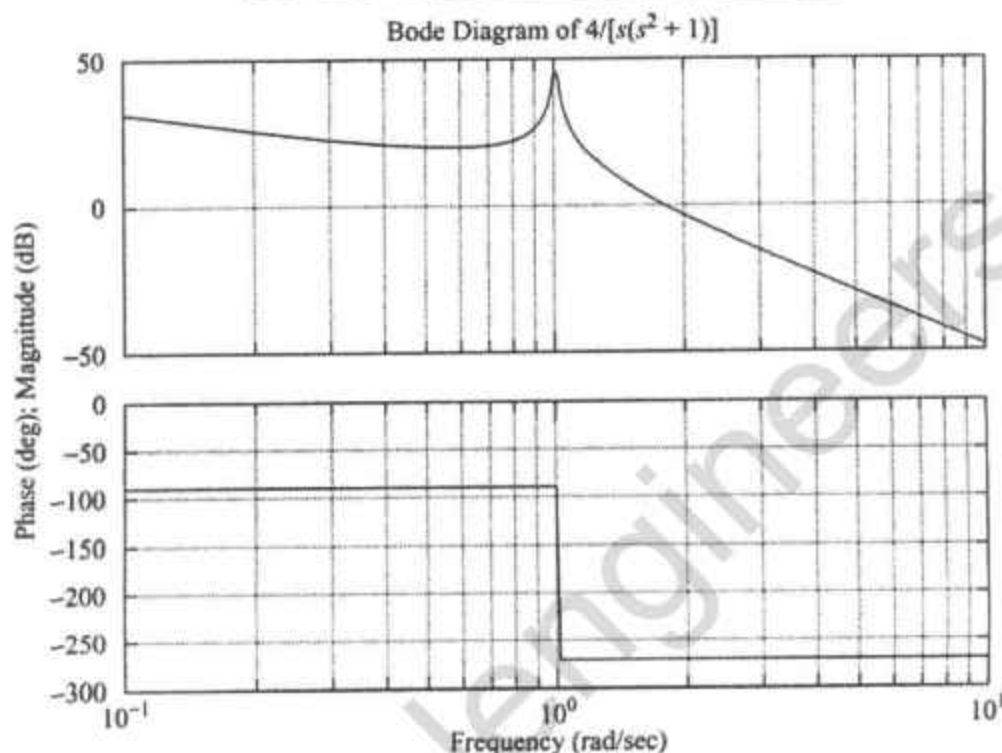
برنامه ۸-۲ نمودار بوده  $G(s)$  را به دست می‌دهد. نمودار حاصل در شکل ۸-۴ نشان داده شده است. حاشیه فاز باید حداقل  $50^\circ$  و حاشیه بهره ۱۰ dB یا بیشتر باشد. با توجه به نمودار بوده شکل ۸-۱۴ می‌بینیم که فرکانس عبور بهره تقریباً  $\omega = 1/8 \text{ rad/s}$  است. بیایید فرض کنیم که فرکانس عبور بهره سیستم جبران شده

**MATLAB Program 8-2**

```

num = [4];
den = [1 0.000000000001 1 0];
w = logspace(-1,1,200);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of 4/[s(s^2+1)]')

```



شکل ۸-۱۴

نمودار بوده  $4/[s(s^2+1)]$ .

بین  $\omega = 1$  rad/s و  $\omega = 10$  rad/s است. با توجه به این که

$$G_c(s) = \frac{4(as+1)(bs+1)}{s}$$

انتخاب می‌کنیم  $a=5$ . پس  $(as+1)$  در ناحیه فرکانس بالا  $90^\circ$  پیشگازی ایجاد می‌کند. برنامه ۳-۸ نمودار بوده تابع زیر را به دست می‌دهد.

$$\frac{4(5s+1)}{s(s^2+1)}$$

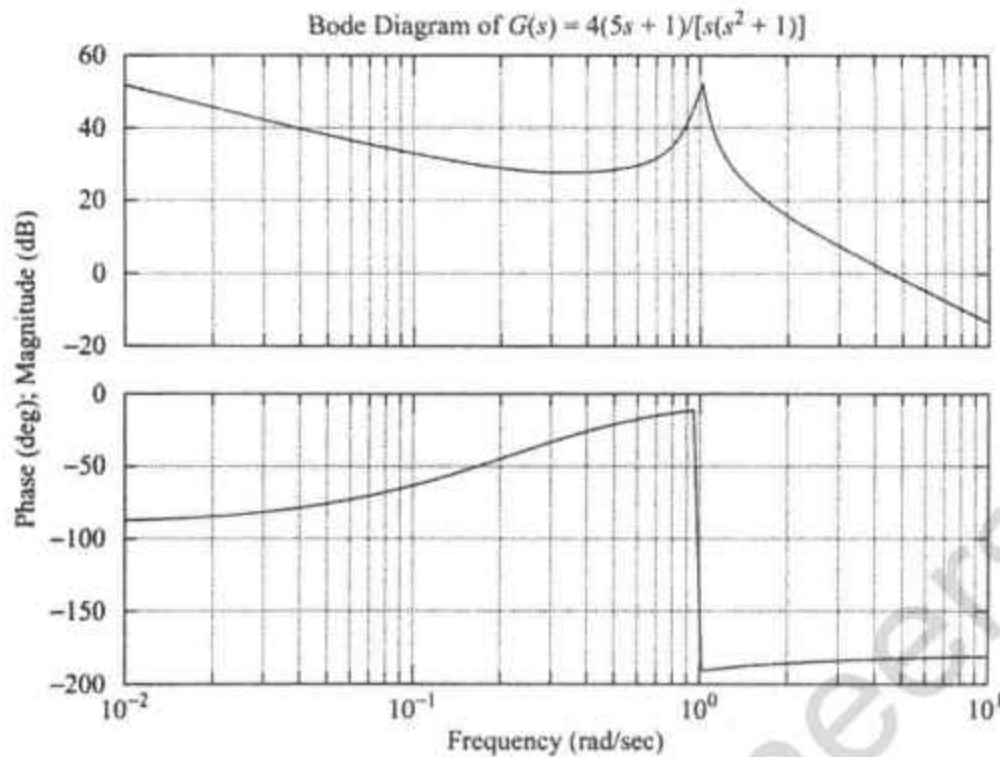
نمودار حاصل در شکل ۸-۱۵ نشان داده شده است.

**MATLAB Program 8-3**

```

num = [20 4];
den = [1 0.000000000001 1 0];
w = logspace(-2,1,101);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of G(s) = 4(5s+1)/[s(s^2+1)]')

```



شکل ۸-۱۵

نمودار بوده

$$G(s) = \frac{4(5s+1)}{s(s^2+1)}$$

مقدار  $b$  را براساس نمودار بوده شکل ۸-۱۵ انتخاب می‌کنیم. جمله  $(bs+1)$  باید حاشیه فاز  $5^\circ$  را ایجاد کند. با چند سعی و خطا به کمک MATLAB در می‌یابیم که  $b=0.25$  حاشیه فاز  $5^\circ$  و حاشیه بهره  $+\infty$  به دست می‌دهد. پس با انتخاب  $b=0.25$  داریم

$$G_c(s) = \frac{4(5s+1)(0.25s+1)}{s}$$

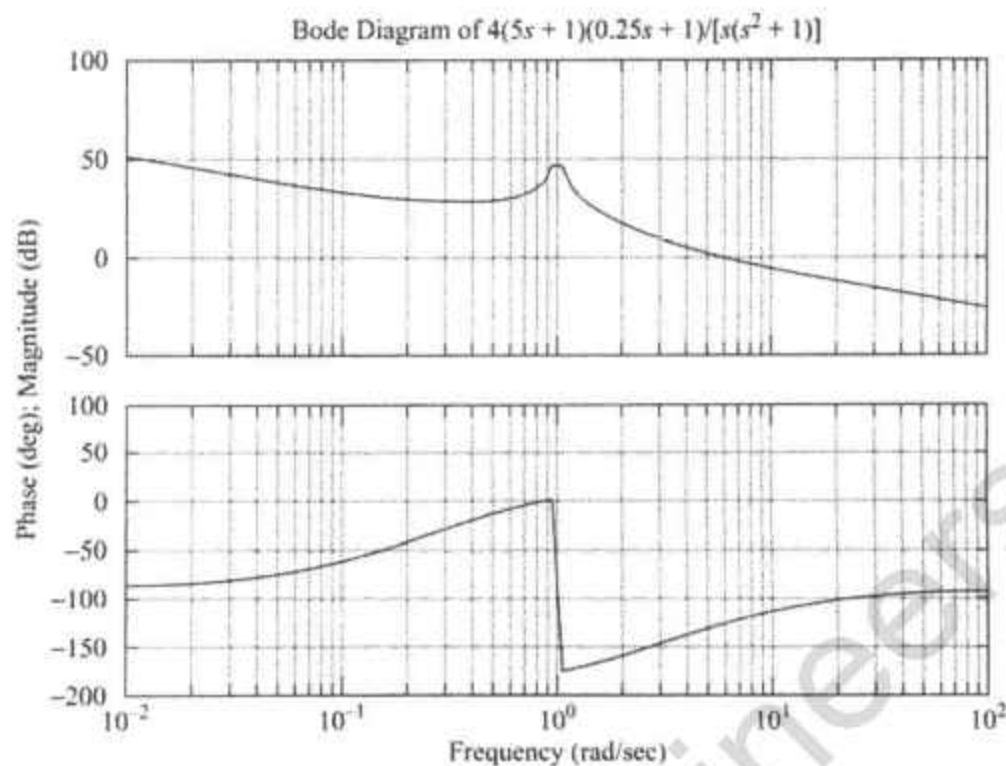
و تابع تبدیل سیستم حلقه باز به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \text{تابع تبدیل حلقه باز} &= \frac{4(5s+1)(0.25s+1)}{s} \frac{1}{s^2+1} \\ &= \frac{5s^2 + 21s + 4}{s^3 + s} \end{aligned}$$

برنامه ۸-۴ نمودار بوده تابع تبدیل حلقه باز را به دست می‌دهد. این نمودار بوده در شکل ۸-۱۶ نشان داده شده است. با توجه به این نمودار می‌بینیم که ثابت خطای سرعت  $4 \text{ sec}^{-1}$ ، حاشیه فاز  $55^\circ$  و حاشیه بهره  $+\infty$  است. پس سیستم طراحی شده تمام خواسته‌ها را برآورده می‌کند، و سیستم قابل قبولی به حساب می‌آید.

#### MATLAB Program 8-4

```
num = [5 21 4];
den = [1 0 1 0];
w = logspace(-2,2,100);
bode(num,den,w)
title('Bode Diagram of 4(5s+1)(0.25s+1)/[s(s^2+1)]')
```



شکل ۸-۱۶ نمودار بوده  $\frac{4(5s+1)(0.25s+1)}{[s(s^2+1)]}$

(توجه کنید که بینهایت سیستم دیگر می‌توان طراحی کرد که این خواسته‌ها را برآورده کند. این سیستم تنها یکی از سیستم‌های ممکن است.)

اکنون پاسخ پله و پاسخ شیب سیستم طراحی شده را به دست می‌آوریم. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است

از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5s^2 + 21s + 4}{s^3 + 5s^2 + 22s + 4}$$

توجه کنید که صف‌های حلقه بسته در محل‌های زیر قرار دارند

$$s = -4, \quad s = -0.2$$

و قطب‌های حلقه بسته در محل‌های زیر

$$s = -2.4052 + j3.9119$$

$$s = -2.4052 - j3.9119$$

$$s = -0.1897$$

همچنین توجه کنید که نسبت میرایی قطب‌های مزدوج مختلط حلقه بسته ۰/۵۲۳۷ است. برنامه ۵-۸ پاسخ پله و پاسخ شیب را به وجود می‌آورد. منحنی پاسخ پله واحد در شکل ۸-۱۷ و منحنی پاسخ شیب در شکل ۸-۱۸ نشان داده شده است. توجه کنید که قطب حلقه بسته  $s = -0.1897$  و صفر واقع در  $s = -0.2$  دنباله‌ای کوچک و بلند در پاسخ پله ایجاد کرده‌اند.

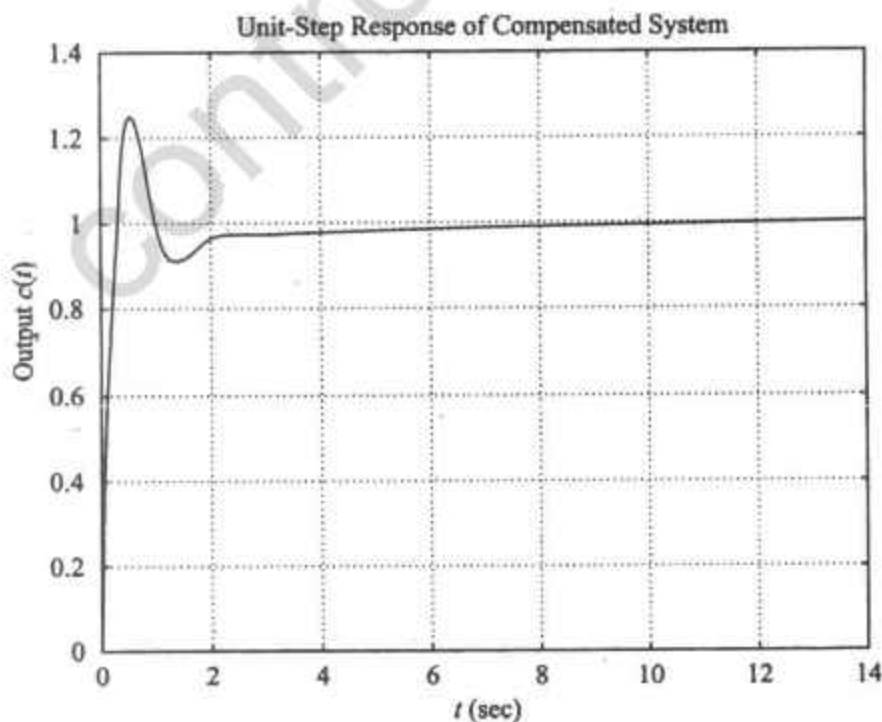
برای دیدن مثالی دیگر از طراحی کنترل‌کننده PID بر اساس رهیافت پاسخ فرکانسی مسئله الف ۷-۸ را

بینید.

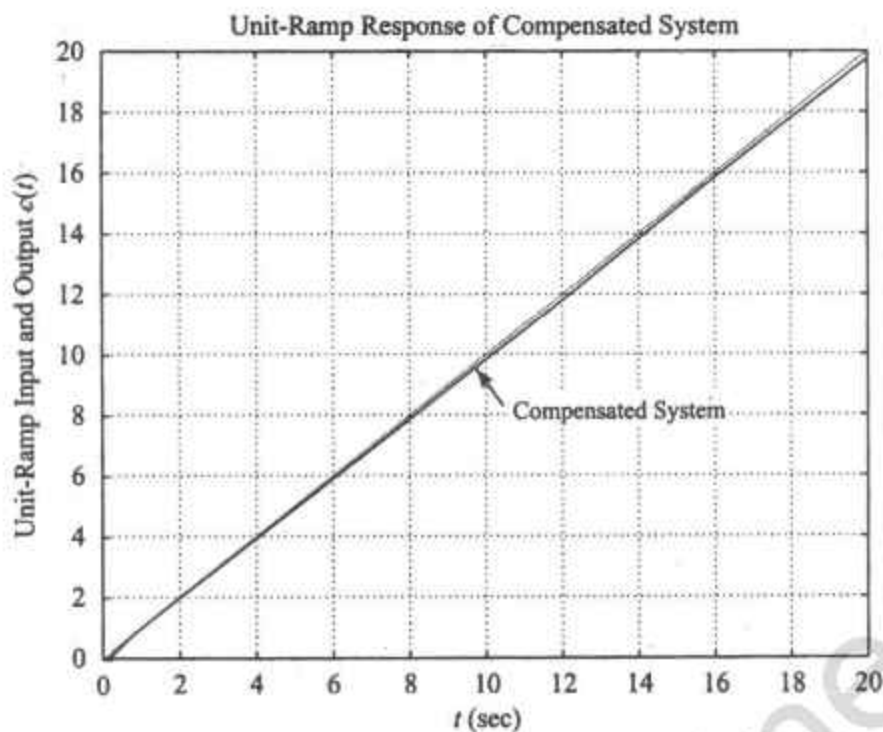
### MATLAB Program 8-5

```
%***** Unit-step response *****
num = [5 21 4];
den = [1 5 22 4];
t = 0:0.01:14;
c = step(num,den,t);
plot(t,c)
grid
title('Unit-Step Response of Compensated System')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Output c(t)')

%***** Unit-ramp response *****
num1 = [5 21 4];
den1 = [1 5 22 4 0];
t = 0:0.02:20;
c = step(num1,den1,t);
plot(t,c,'-',t,t,'--')
title('Unit-Ramp Response of Compensated System')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Unit-Ramp Input and Output c(t)')
text(10.8,8,'Compensated System')
```



شکل ۸-۱۷ منحنی پاسخ پله سیستم جبران شده.



شکل ۸-۱۸  
منحنی پاسخ شیب  
سیستم جبران شده.

## ۴-۸ رهیافت محاسباتی برای یافتن مقدار بهینه پارامترها

در این بخش روش یافتن یک مجموعه پارامتر بهینه برای ارضای مشخصات پاسخ پله به MATLAB کمک را بررسی می‌کنیم. برای نشان دادن این رهیافت دو مثال به کار می‌بریم.

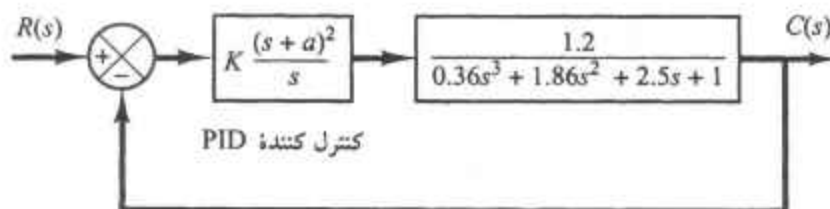
سیستم کنترل شده با PID شکل ۸-۱۹ را در نظر بگیرید. کنترل کننده PID عبارت است از

مثال ۸-۲

$$G_c(s) = K \frac{(s+a)^2}{s}$$

می‌خواهیم مقادیری برای  $K$  و  $a$  بیابیم، به نحوی که سیستم حلقه بسته زیر میرا بوده، ماکزیمم فراجهش پاسخ پله کمتر از ۱۰٪ باشد. (می‌توان شرایط دیگری نیز برای این مسئله تعیین کرد، مثلاً این که زمان نشست از حد معینی کمتر، یا زمان صعود از مقدار مشخصی کمتر باشد. برای نمونه مثال ۸-۳ را نگاه کنید.)

برای حل این مسئله به کمک MATLAB ابتدا ناحیه‌ای برای جستجوی مقادیر مناسب  $K$  و  $a$  تعیین می‌کنیم. سپس برنامه‌ای می‌نویسیم که ترکیبی از  $K$  و  $a$  بیابد، به نحوی که ماکزیمم فراجهش پاسخ پله کمتر از ۱۰٪ باشد.



شکل ۸-۱۹

سیستمی با کنترل کننده PID.

توجه کنید که بهره  $K$  نباید خیلی بزرگ باشد، وگرنه احتمال بزرگ شدن توان ورودی دستگاه به حدی غیرلازم پیش می‌آید.

فرض کنید ناحیه مورد جستجو به صورت زیر تعیین شده است

$$2 \leq K \leq 3, \quad 0.5 \leq a \leq 1.5$$

اگر در این ناحیه جوابی وجود نداشته باشد، باید آن را بزرگتر کنیم. البته در بعضی مسائل جوابی وجود ندارد و بزرگ کردن ناحیه جستجو نیز کمکی نمی‌کند.

در رهیافت محاسباتی باید اندازه گام برای  $K$  و  $a$  را تعیین کنیم. در فرایند طراحی واقعی باید این گامها به حد کافی کوچک باشد. ولی در این مثال برای این که مقدار محاسبه لازم برای حل مسئله خیلی زیاد نشود، برای هر دو مقدار  $K$  و  $a$  پله‌های ۰.۲ انتخاب می‌کنیم.

برای حل این مسئله می‌توان برنامه‌های MATLAB مختلفی نوشت. در اینجا یک برنامه ممکن ارائه شده است: برنامه ۶-۸. در این برنامه دو حلقه for به کار برده‌ایم. برنامه با اجرای حلقه بیرونی شروع می‌شود که مقدار  $K$  را تغییر می‌دهد. مقدار  $a$  در حلقه داخلی تغییر می‌کند. برنامه MATLAB را به نحوی می‌نویسیم که جستجو از کوچک‌ترین مقدار  $K$  و  $a$  شروع شود و در هر مرحله این مقادیر بزرگتر شوند. توجه کنید که زمان اجرای برنامه MATLAB بسته به سیستم، گستره جستجوی  $K$  و  $a$ ، و اندازه گامهای به کار رفته ممکن است از چند ثانیه تا چند دقیقه طول بکشد. در این برنامه دستور

$$\text{solution}(k,:) = [K(i) \ a(j) \ m]$$

مقادیر به دست آمده برای  $K$ ،  $a$ ، و  $m$  را نشان می‌دهد. (در اینجا ۱۵ مجموعه مقدار برای  $K$  و  $a$  به دست می‌آید که به ازای آنها  $m < 1/10$ ؛ یعنی فراجاهش ماکزیمم کمتر از ۱۰٪ است). برای مرتب کردن جوابها بر حسب دامنه فراجاهش ماکزیمم (با شروع از کمترین مقدار  $m$  و رسیدن به بزرگترین  $m$ ) دستور زیر به کار رفته است

$$\text{sortsolution} = \text{sortrows}(\text{solution}, 3)$$

برای رسم منحنی پاسخ پله به ازای آخرین مقادیر  $K$  و  $a$  جدول مرتب شده، دستور زیر را وارد می‌کنیم

$$K = \text{sortsolution}(k, 1)$$

$$a = \text{sortsolution}(k, 2)$$

و دستور step را به کار می‌بریم. (منحنی پاسخ پله به دست آمده در شکل ۸-۲۰ نشان داده شده است.) برای رسم منحنی پاسخ پله به ازای کمترین فراجاهش بزرگتر از ۰٪ به دست آمده در جدول مرتب شده، دستورهای زیر را وارد می‌کنیم

$$K = \text{sortsolution}(11, 1)$$

$$a = \text{sortsolution}(11, 2)$$

و دستور step را به کار می‌بریم. (منحنی پاسخ پله به دست آمده در شکل ۸-۲۱ نشان داده شده است.)

**MATLAB Program 8-6**

```

%'K' and 'a' values to test
K = [2.0 2.2 2.4 2.6 2.8 3.0];
a = [0.5 0.7 0.9 1.1 1.3 1.5];

% Evaluate closed-loop unit-step response at each 'K' and 'a' combination
% that will yield the maximum overshoot less than 10%

t = 0:0.01:5;
g = tf([1.2],[0.36 1.86 2.5 1]);
k = 0;
for i = 1:6;
    for j = 1:6;
        gc = tf(K(i)*[1 2*a(j) a(j)^2],[1 0]); % controller
        G = gc*g/(1 + gc*g); % closed-loop transfer function
        y = step(G,t);
        m = max(y);
        if m < 1.10
            k = k+1;
            solution(k,:) = [K(i) a(j) m];
        end
    end
end
solution % Print solution table
solution =
    2.0000 0.5000 0.9002
    2.0000 0.7000 0.9807
    2.0000 0.9000 1.0614
    2.2000 0.5000 0.9114
    2.2000 0.7000 0.9837
    2.2000 0.9000 1.0772
    2.4000 0.5000 0.9207
    2.4000 0.7000 0.9859
    2.4000 0.9000 1.0923
    2.6000 0.5000 0.9283
    2.6000 0.7000 0.9877
    2.8000 0.5000 0.9348
    2.8000 0.7000 1.0024
    3.0000 0.5000 0.9402
    3.0000 0.7000 1.0177
sortsolution = sortrows(solution,3) % Print solution table sorted by
                                     % column 3

```

```
sortsolution =
```

```
2.0000 0.5000 0.9002
2.2000 0.5000 0.9114
2.4000 0.5000 0.9207
2.6000 0.5000 0.9283
2.8000 0.5000 0.9348
3.0000 0.5000 0.9402
2.0000 0.7000 0.9807
2.2000 0.7000 0.9837
2.4000 0.7000 0.9859
2.6000 0.7000 0.9877
2.8000 0.7000 1.0024
3.0000 0.7000 1.0177
2.0000 0.9000 1.0614
2.2000 0.9000 1.0772
2.4000 0.9000 1.0923
```

```
% Plot the response with the largest overshoot that is less than 10%
```

```
K = sortsolution(k,1)
```

```
K =
```

```
2.4000
```

```
a = sortsolution(k,2)
```

```
a =
```

```
0.9000
```

```
gc = tf(K*[1 2*a a^2], [1 0]);
```

```
G = gc*g/(1 + gc*g);
```

```
step(G,t)
```

```
grid % See Figure 8-20
```

```
% If you wish to plot the response with the smallest overshoot that is
```

```
% greater than 0%, then enter the following values of 'K' and 'a'
```

```
K = sortsolution(11,1)
```

```
K =
```

```
2.8000
```

```
a = sortsolution(11,2)
```

```
a =
```

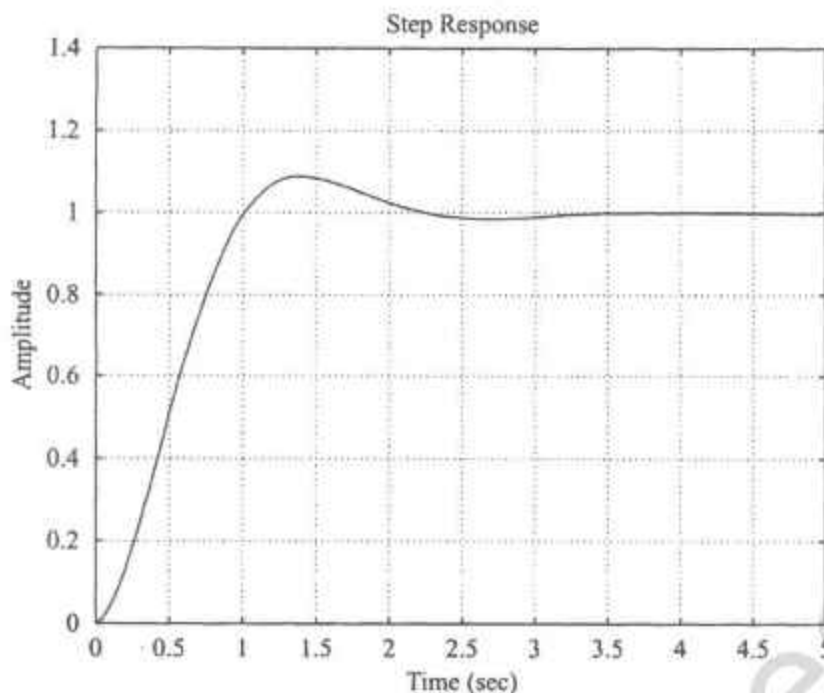
```
0.7000
```

```
gc = tf(K*[1 2*a a^2], [1 0]);
```

```
G = gc*g/(1 + gc*g);
```

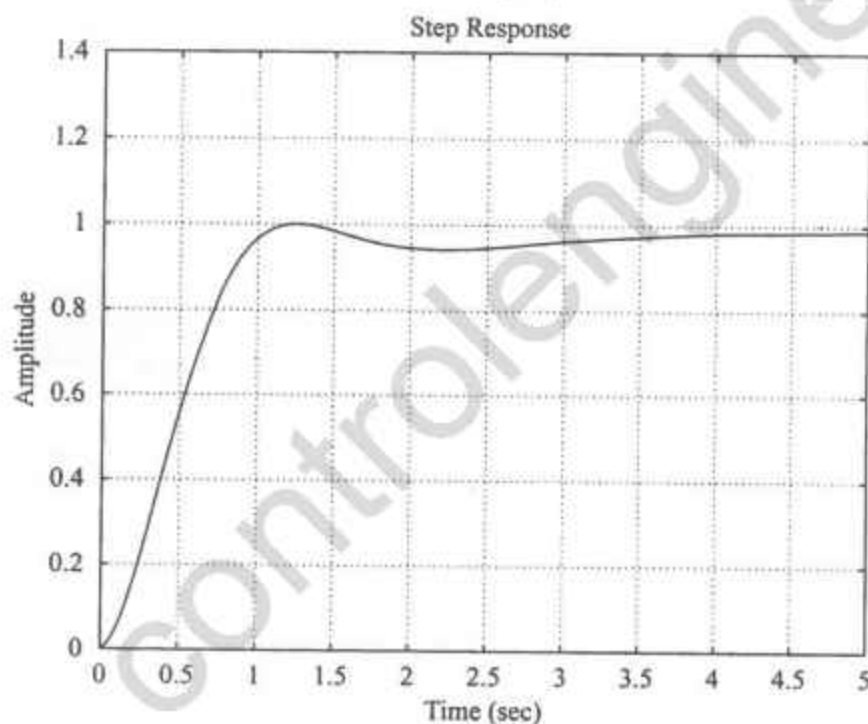
```
step(G,t)
```

```
grid % See Figure 8-21
```



شکل ۸-۲۰

منحنی پاسخ پله سیستم به ازای  
 $a=0.9$  و  $K=2.4$   
 (ماکزیمم فراجش  
 ۹.۲۳٪ است).



شکل ۸-۲۱

منحنی پاسخ پله سیستم به ازای  
 $a=0.7$  و  $K=2.8$   
 (ماکزیمم فراجش  
 ۰.۲۴٪ است).

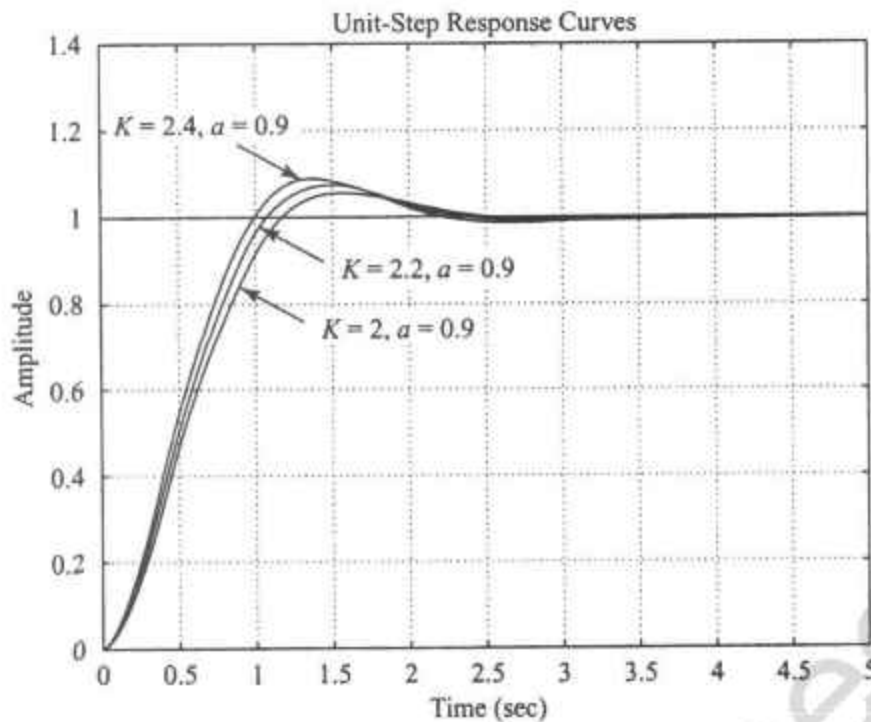
برای رسم پاسخ پله به ازای هر یک از مجموعه مقادیر به دست آمده باید مقادیر  $K$  و  $a$  متناظر را با استفاده از یک دستور `sortsolution` مناسب تعیین کنیم.

توجه کنید که سه مجموعه جواب زیر با فراجش بین ۱۰٪ و ۵٪ متناظر هستند:

$$K=2.0000, \quad a=0.9000, \quad m=1.0614$$

$$K=2.2000, \quad a=0.9000, \quad m=1.0772$$

$$K=2.4000, \quad a=0.9000, \quad m=1.0923$$



شکل ۸-۲۲

منحنی‌های پاسخ پله سیستم

 به ازای  $K=2$  و  $a=0.9$ 

 و  $K=2.2$  و  $a=0.9$ 

 و  $K=2.4$  و  $a=0.9$ 

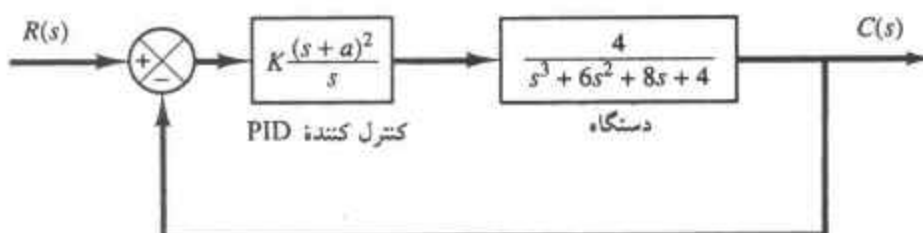
پاسخ پله متناظر با این سه مجموعه جواب در شکل ۸-۲۲ نشان داده شده است. توجه کنید که سیستم دارای  $K$  بزرگتر زمان صعودی کوچکتر و فراجهش بزرگتری دارد. این که کدام یک از این سه سیستم بهتر از بقیه است، به اهداف سیستم بستگی دارد.

سیستم شکل ۸-۲۲ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم تمام ترکیبهای  $K$  و  $a$  را که به ازای آنها ماکزیمم فراجهش پاسخ پله سیستم حلقه بسته کمتر از ۱۵٪ و بیشتر از ۱۰٪ است به دست آوریم. همچنین زمان نشست باید کمتر از ۳ ثانیه باشد. در این مسئله ناحیه جستجو را به شکل زیر می‌گیریم

$$3 \leq K \leq 5 \quad 0.1 \leq a \leq 3$$

پارامترهای  $K$  و  $a$  را برای دستیابی به این مشخصات تعیین کنید.

در این مثال گامهای جستجو را معقول، مثلاً ۰.۲ برای  $K$  و ۰.۱ برای  $a$  برمی‌گزینیم. برنامه ۸-۷ حل این مسئله را به دست می‌دهد. با توجه به جدول جواب مرتب شده به نظر می‌رسد ردیف اول بهترین جواب است. شکل ۸-۲۴ منحنی پاسخ پله به ازای  $K=3/2$  و  $a=0.9$  را نشان می‌دهد. چون این انتخاب نسبت به بقیه  $K$  کوچکتری دارد، می‌توان ردیف اول را بهترین انتخاب دانست.



شکل ۸-۲۳

سیستم کنترل شده با PID،

به ازای کنترل‌کننده PID ساده شده.

### MATLAB Program 8-7

```
t = 0:0.01:8;
k = 0;
for K = 3:0.2:5;
    for a = 0.1:0.1:3;
        num = [4*K 8*K*a 4*K*a^2];
        den = [1 6 8+4*K 4+8*K*a 4*K*a^2];
        y = step(num,den,t);
        s = 801; while y(s)>0.98 & y(s)<1.02; s = s - 1; end;
        ts = (s-1)*0.01; % ts = settling time;
        m = max(y);
        if m<1.15 & m>1.10; if ts<3.00;
            k = k+1;
            solution(k,:) = [K a m ts];
        end
    end
end
end
end
solution
```

solution =

3.0000	1.0000	1.1469	2.7700
3.2000	0.9000	1.1065	2.8300
3.4000	0.9000	1.1181	2.7000
3.6000	0.9000	1.1291	2.5800
3.8000	0.9000	1.1396	2.4700
4.0000	0.9000	1.1497	2.3800
4.2000	0.8000	1.1107	2.8300
4.4000	0.8000	1.1208	2.5900
4.6000	0.8000	1.1304	2.4300
4.8000	0.8000	1.1396	2.3100
5.0000	0.8000	1.1485	2.2100

sortsolution = sortrows(solution,3)

sortsolution =

3.2000	0.9000	1.1065	2.8300
4.2000	0.8000	1.1107	2.8300
3.4000	0.9000	1.1181	2.7000
4.4000	0.8000	1.1208	2.5900
3.6000	0.9000	1.1291	2.5800
4.6000	0.8000	1.1304	2.4300
4.8000	0.8000	1.1396	2.3100
3.8000	0.9000	1.1396	2.4700

```
3.0000 1.0000 1.1469 2.7700
5.0000 0.8000 1.1485 2.2100
4.0000 0.9000 1.1497 2.3800
```

% Plot the response curve with the smallest overshoot shown in  
sortsolution table.

```
K = sortsolution(1,1), a = sortsolution(1,2)
```

```
K =
```

```
3.2000
```

```
a =
```

```
0.9000
```

```
num = [4*K 8*K*a 4*K*a^2];
```

```
den = [1 6 8+4*K 4+8*K*a 4*K*a^2];
```

```
num
```

```
num =
```

```
12.8000 23.0400 10.3680
```

```
den
```

```
den =
```

```
1.0000 6.0000 20.8000 27.0400 10.3680
```

```
y = step(num,den,t);
```

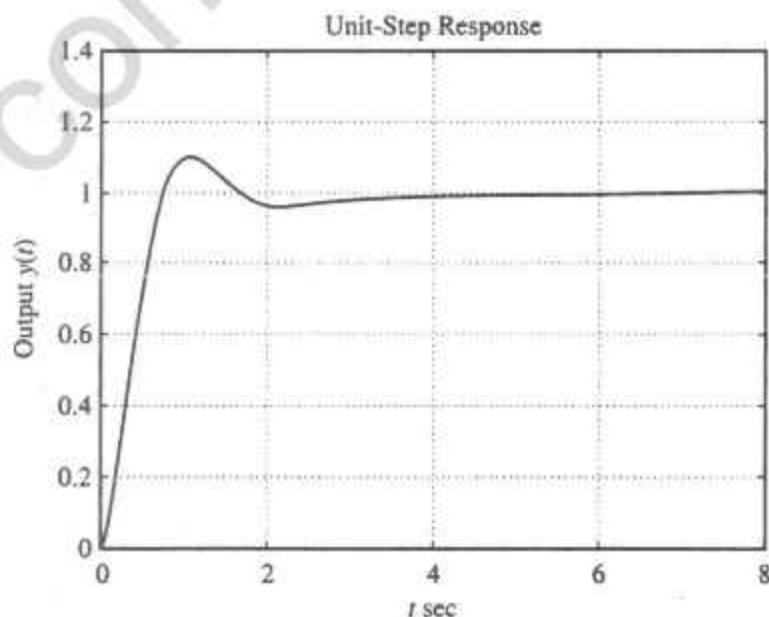
```
plot(t,y) % See Figure 8-24.
```

```
grid
```

```
title('Unit-Step Response')
```

```
xlabel('t sec')
```

```
ylabel('Output y(t)')
```



شکل ۸-۲۴

منحنی پاسخ پله به ازای  
 $K=3.2$  و  $a=0.9$

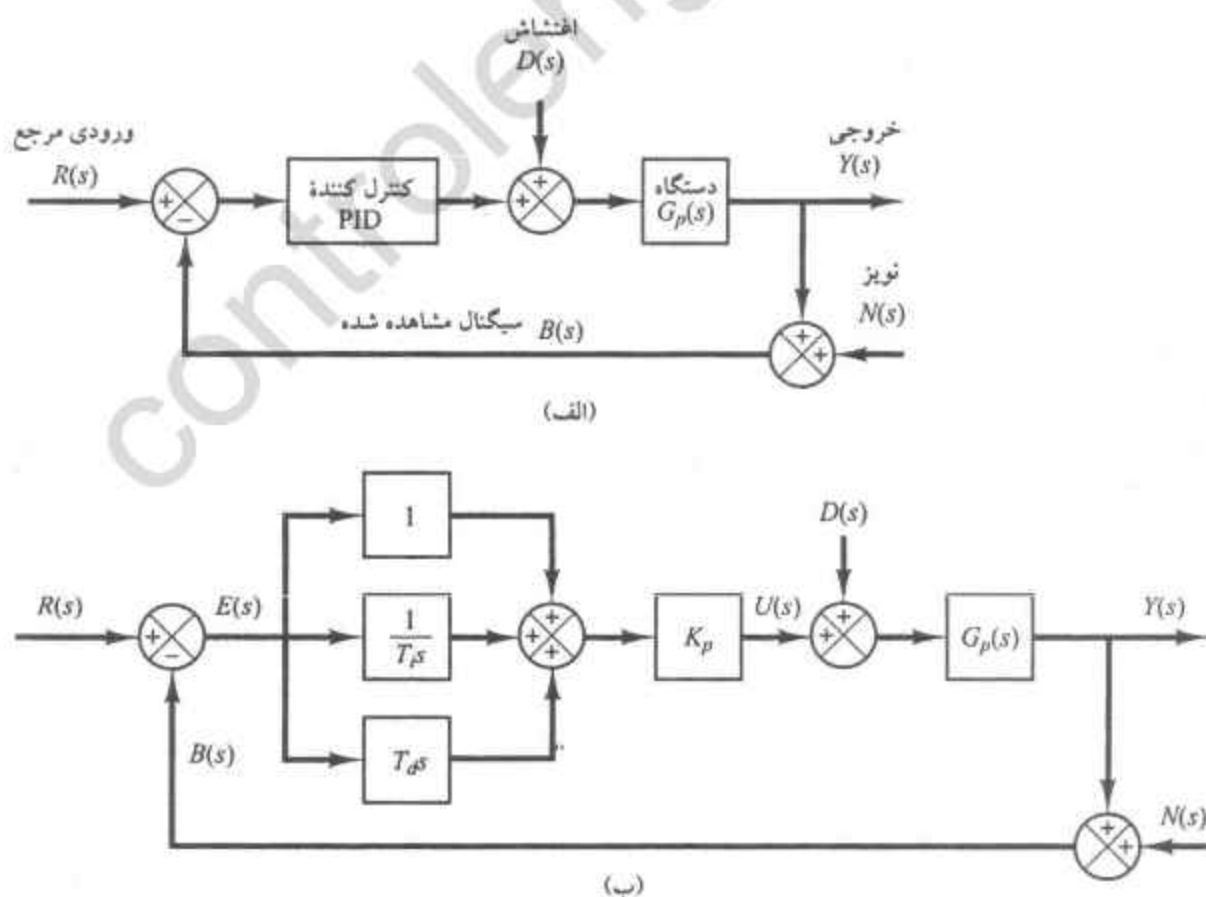
## ۵-۸ گونه‌های اصلاح شده‌ای از طرحهای کنترل PID

سیستم کنترل PID پایه شکل ۸-۲۵ (الف) را، که در آن سیستم در معرض اغتشاش و نویز قرار دارد، در نظر بگیرید. شکل ۸-۲۵ (ب) نمودار بلوکی دیگری از همان سیستم است. اگر در سیستم کنترل PID پایه‌ای چون سیستم شکل ۸-۲۵ (ب) ورودی تابع پله‌ای باشد، به خاطر وجود جمله مشتقی در عمل کنترل، متغیر کارانداز  $u(t)$  تابع ضربه (تابع دلتا) پیدا می‌کند. در کنترل کننده PID واقعی به جای جمله مشتقی خالص  $T_d s$  جمله زیر به کار می‌رود:

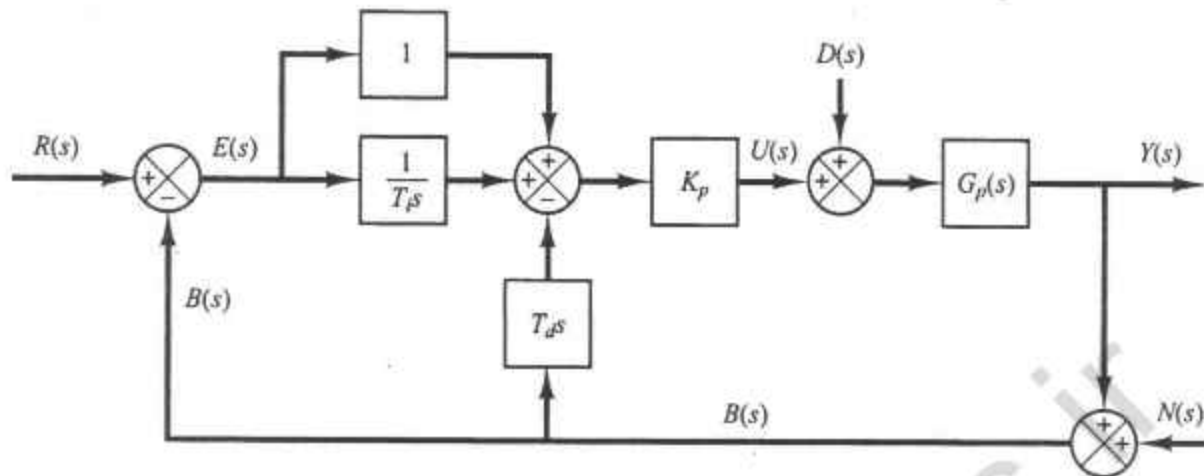
$$\frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s}$$

که در آن مقدار  $\gamma$  چیزی حدود ۱ به است. در این صورت اگر ورودی مرجع تابع پله‌ای باشد، متغیر کارانداز  $u(t)$  تابع ضربه ندارد، بلکه یک تابع پالسی تیز در آن به وجود می‌آید. این پدیده را لگد نقطه تنظیم می‌نامند.

**کنترل PI-D.** برای اجتناب از پدیده لگد نقطه تنظیم می‌توان عمل مشتقی را تنها در مسیر فیدبک به کار گرفت تا تنها از سیگنال فیدبک مشتق گرفته شود، نه از ورودی مرجع. طرح کنترلی دارای این آرایش را کنترل PI-D می‌نامند. شکل ۸-۲۶ یک سیستم دارای کنترل PI-D را نشان می‌دهد.



شکل ۸-۲۵ (الف) سیستم دارای کنترل PID؛ (ب) نمودار بلوکی هم‌ارز.



شکل ۸-۲۶ سیستم دارای کنترل PI-D.

با توجه به شکل ۸-۲۶ می‌بینیم که سیگنال کارانداز  $U(s)$  عبارت است از

$$U(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) R(s) - K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) B(s)$$

توجه کنید که اگر اغتشاش و نویز وجود نداشته باشد، تابع تبدیل حلقه بسته سیستم دارای کنترل PID (شکل ۸-۲۵ (ب)) و سیستم دارای کنترل PI-D (شکل ۸-۲۶) به ترتیب عبارت‌اند از

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) K_p G_p(s)}$$

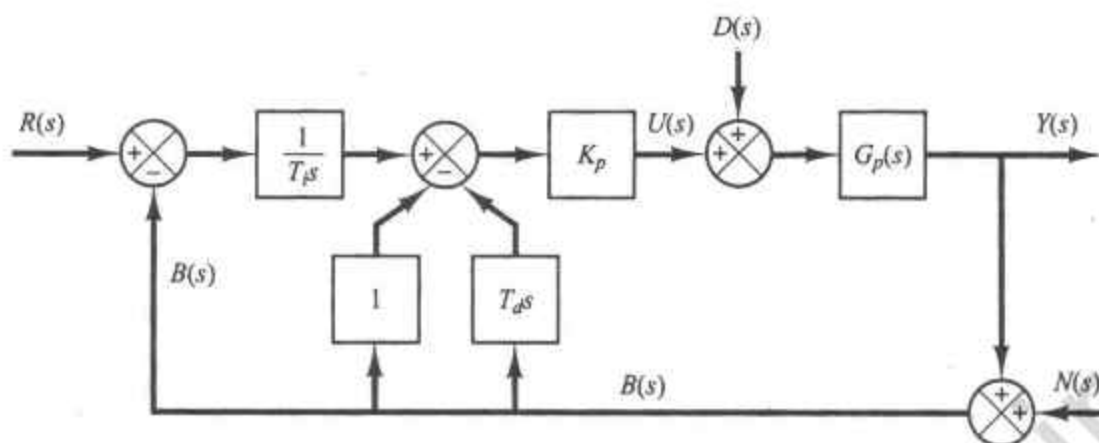
و

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) K_p G_p(s)}$$

تذکر این نکته مهم است که در صورت نبودن نویز ورودی مرجع، تابع تبدیل بین اغتشاش  $D(s)$  و خروجی  $Y(s)$  برای هر دو سیستم یکسان، و به صورت زیر است

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) K_p G_p(s)}$$

**کنترل I-PD.** باز حالتی را در نظر بگیرید که ورودی مرجع تابع پله‌ای است. در هر دو طرح کنترل PID و کنترل PI-D سیگنال کارانداز یک تابع پله‌ای دارد. در بسیاری از موارد تغییر پله‌ای در سیگنال کارانداز می‌تواند نامطلوب باشد، بنابراین انتقال عمل کنترل تناسبی و عمل کنترل مشتقی به مسیر فیدبک، به نحوی که این اعمال تنها بر سیگنال فیدبک شده اثر بگذارند، می‌تواند راهگشا باشد. شکل ۸-۲۷ این طرح کنترل را نشان می‌دهد که



شکل ۸-۲۷ سیستم دارای کنترل I-PD.

کنترل I-PD خوانده می‌شود. سیگنال کارانداز عبارت است از

$$U(s) = K_p \frac{1}{T_i s} R(s) - K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) B(s)$$

توجه کنید که ورودی مرجع  $R(s)$  تنها در بخش انتگرالی کنترل ظاهر می‌شود. پس در کنترل I-PD برای عملکرد مناسب سیستم کنترل داشتن عمل کنترل انتگرالی ضروری است.

تابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/R(s)$  در نبود ورودی‌های اغتشاشی و نویز عبارت است از

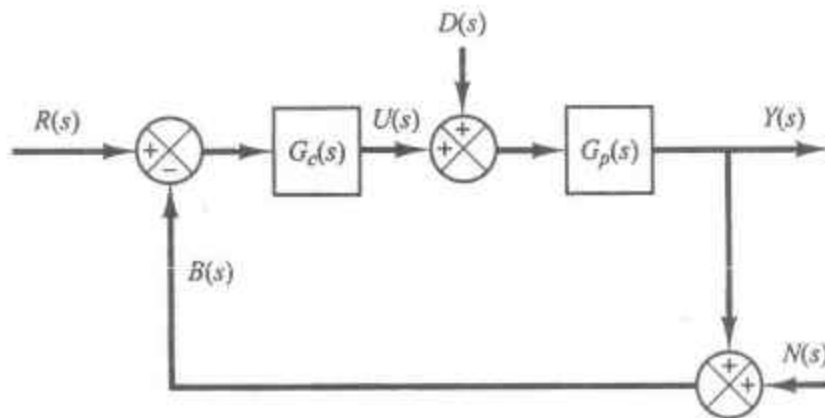
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left( \frac{1}{T_i s} \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s) \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)}$$

متذکر می‌شویم که در غیاب ورودی مرجع و سیگنال نویز، تابع تبدیل حلقه بسته بین ورودی اغتشاشی و خروجی عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) K_p G_p(s)}$$

که همانند عبارتی است که برای کنترل PID و کنترل PI-D به دست آوردیم.

**کنترل PID با دو درجه آزادی.** نشان دادیم که کنترل PI-D با بردن عمل کنترل مشتقی به مسیر فیدبک، و کنترل I-PD با بردن اعمال کنترل تناسبی و مشتقی به مسیر فیدبک حاصل می‌شود. می‌توان به جای انتقال کامل اعمال کنترل تناسبی و مشتقی به مسیر فیدبک، تنها بخشی از آنها را به مسیر فیدبک برد و بخشی را در مسیر پیشخورد نگه داشت. در نوشته‌ها کنترل PI-PD پیشنهاد شده است. این طرح کنترلی مشخصاتی بین کنترل PID و کنترل PI-D دارد. کنترل PID-PD نیز پیشنهاد و بررسی شده است. در این طرحها یک کنترل کننده در مسیر پیشخورد و یک کنترل کننده در مسیر فیدبک قرار دارد. این طرحهای کنترلی ما را به طرح عمومی‌تر کنترل با دو درجه آزادی رهنمون می‌شود. جزئیات طرح کنترل با دو درجه آزادی را در بخشهای بعدی این فصل مورد بحث قرار می‌دهیم.



شکل ۸-۲۸  
سیستم کنترل با یک درجه آزادی.

## ۸-۶ کنترل با دو درجه آزادی

سیستم شکل ۸-۲۸ را در نظر بگیرید. این سیستم علاوه بر ورودی مرجع  $R(s)$ ، در معرض ورودی اغتشاش  $D(s)$ ، و ورودی نویز  $N(s)$  نیز قرار دارد.  $G_c(s)$  تابع تبدیل کنترل‌کننده و  $G_p(s)$  تابع تبدیل دستگاه است. فرض می‌کنیم  $G_p(s)$  ثابت و غیرقابل تغییر است.

برای این سیستم توابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/R(s) = G_{yr}$ ،  $Y(s)/D(s) = G_{yd}$  و  $Y(s)/N(s) = G_{yn}$  را می‌توان به صورت زیر یافت

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p}$$

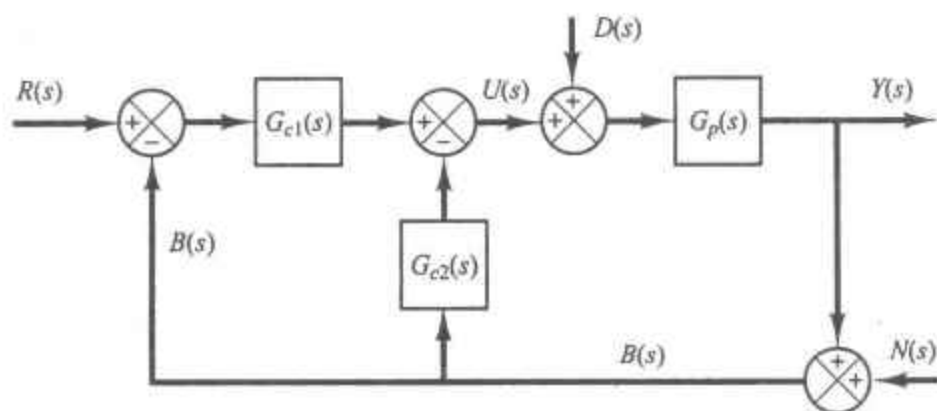
[در یافتن  $Y(s)/R(s)$  فرض کرده‌ایم  $D(s) = 0$  و  $N(s) = 0$ ؛ برای یافتن  $Y(s)/D(s)$  و  $Y(s)/N(s)$  نیز فرض مشابهی صورت گرفته است.] درجه آزادی سیستم کنترل براین اساس تعیین می‌شود که در میان این توابع تبدیل چند تابع مستقل وجود دارد. در سیستم فعلی

$$G_{yr} = \frac{G_p - G_{yd}}{G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

از سه تابع تبدیل حلقه بسته  $G_{yr}$ ،  $G_{yn}$  و  $G_{yd}$  اگر یکی معلوم باشد. دو تای دیگر نیز تعیین می‌شوند. یعنی سیستم شکل ۸-۲۸ سیستمی با یک درجه آزادی است.

حال سیستم شکل ۸-۲۹ را در نظر بگیرید، که در آن  $G_p(s)$  تابع تبدیل دستگاه است و ثابت و غیرقابل تغییر فرض می‌شود. برای این سیستم توابع تبدیل حلقه بسته  $G_{yr}$ ،  $G_{yn}$  و  $G_{yd}$  به ترتیب عبارت‌اند از



شکل ۸-۲۹  
سیستم کنترل با  
دو درجه آزادی.

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1} G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2}) G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2}) G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{(G_{c1} + G_{c2}) G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2}) G_p}$$

پس داریم

$$G_{yr} = G_{c1} G_{yd}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

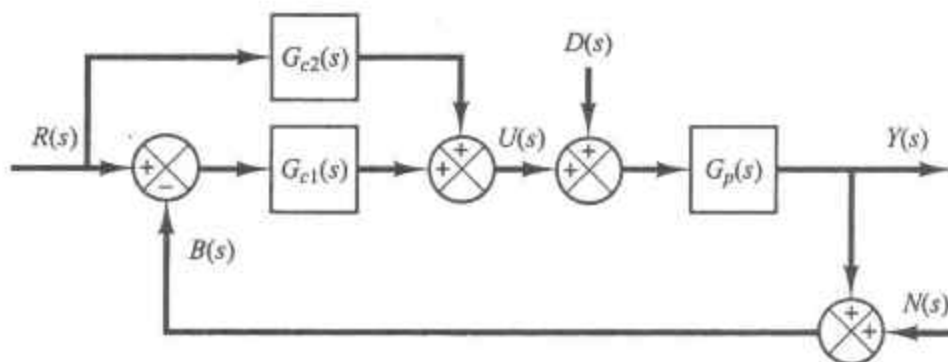
در این حالت اگر  $G_{yd}$  معلوم باشد،  $G_{yn}$  معلوم است، ولی  $G_{yr}$  نه، زیرا  $G_{c1}$  مستقل از  $G_{yd}$  است. بنابراین در توابع تبدیل  $G_{yr}$ ،  $G_{yn}$  و  $G_{yd}$  دو تابع مستقل وجود دارد. پس این سیستم کنترل دو درجه آزادی است.

به نحوی مشابه سیستم شکل ۸-۳۰ نیز یک سیستم دارای دو درجه آزادی است، زیرا برای این سیستم

$$G_{yr} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{c1} G_p}{1 + G_{c1} G_p} + \frac{G_{c2} G_p}{1 + G_{c1} + G_p}$$

$$G_{yd} = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_{c1} G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G_{c1} G_p}{1 + G_{c1} G_p}$$



شکل ۸-۳۰  
سیستم کنترل  
با دو درجه آزادی.

پس

$$G_{yr} = G_{c2} G_{yd} + \frac{G_p - G_{yd}}{G_p}$$

$$G_{yn} = \frac{G_{yd} - G_p}{G_p}$$

واضح است که با معلوم بودن  $G_{yd}$ ،  $G_{yn}$  تثبیت می‌شود، ولی  $G_{yr}$  نه، زیرا  $G_{c2}$  مستقل از  $G_{yd}$  است. در بخش ۷-۸ خواهیم دید که در این سیستم‌های کنترل دارای دو درجه آزادی می‌توان مشخصات حلقه بسته و مشخصات فیدبک را به طور مستقل از هم تنظیم کرد و عملکرد سیستم را بهبود بخشید.

## ۷-۸ رهیافت جابدهی صفر برای بهبود مشخصات پاسخ

در اینجا نشان می‌دهیم که با رهیافت جابدهی صفر که در ادامه همین بخش معرفی می‌شود می‌توان به اهداف زیر دست یافت:

پاسخ به ورودی‌های مرجع شیب و سهمی خطای حالت ماندگار نداشته باشند.

در سیستم‌های کنترل با عملکرد بسیار خوب همیشه می‌خواهیم که خروجی سیستم تغییرات ورودی را با کمترین خطا دنبال کند. برای ورودی‌های پله، شیب، و شتاب نبودن خطای حالت ماندگار امر مطلوبی است. در ادامه نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان سیستم کنترلی طراحی کرد که در دنبال کردن ورودی‌های شیب و شتاب خطای حالت ماندگار نداشته باشد، و در همین حال پاسخ به ورودی پله‌ای اغتشاش نیز به سرعت به صفر بگراید.

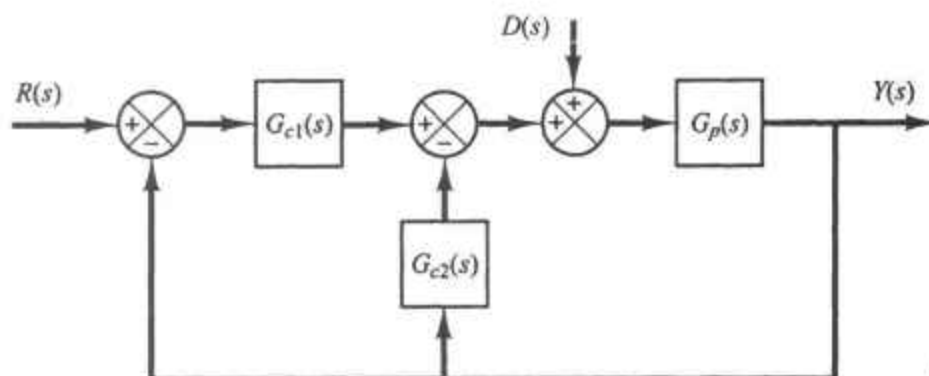
سیستم کنترل با دو درجه آزادی شکل ۸-۳۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید که تابع تبدیل دستگاه  $G_p(s)$  یک تابع تبدیل می‌نیم فاز و به صورت زیر است

$$G_p(s) = K \frac{A(s)}{B(s)}$$

که در آن

$$A(s) = (s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)$$

$$B(s) = s^N (s + p_{N+1})(s + p_{N+2}) \cdots (s + p_n)$$



شکل ۸-۳۱

سیستم کنترل با دو درجه آزادی.

که در آن  $N$  می‌تواند ۰، ۱، ۲ باشد و  $n \geq m$ . همچنین فرض کنید  $G_{c1}$  یک کنترل کننده PID است که به دنبال آن یک فیلتر  $1/A(s)$  قرار دارد، یعنی

$$G_{c1}(s) = \frac{\alpha_1 s + \beta_1 + \gamma_1 s^2}{s} \frac{1}{A(s)}$$

و  $G_{c2}$  یک کنترل کننده PID، PI، PD، I، D، یا P است که به دنبال آن یک فیلتر  $1/A(s)$  قرار دارد، یعنی

$$G_{c2}(s) = \frac{\alpha_2 s + \beta_2 + \gamma_2 s^2}{s} \frac{1}{A(s)}$$

که در آن بعضی از مقادیر  $\alpha_2$ ،  $\beta_2$ ،  $\gamma_2$  و ممکن است صفر باشد. پس می‌توان  $G_{c1} + G_{c2}$  را به صورت زیر نوشت

$$G_{c1} + G_{c2} = \frac{\alpha s + \beta + \gamma s^2}{s} \frac{1}{A(s)} \quad (3-8)$$

که در آن  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  ثابت هستند. پس

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p} = \frac{K \frac{A(s)}{B(s)}}{1 + \frac{\alpha s + \beta + \gamma s^2}{s} \frac{1}{B(s)}} \\ &= \frac{s K A(s)}{s B(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^2) K} \end{aligned}$$

به خاطر وجود  $s$  در صورت، پاسخ  $y(t)$  به اغتشاش پله‌ای با میل  $t$  به بینهایت چنانچه در زیر نشان خواهیم داد، به صفر می‌گراید. چون

$$Y(s) = \frac{s K A(s)}{s B(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^2) K} D(s)$$

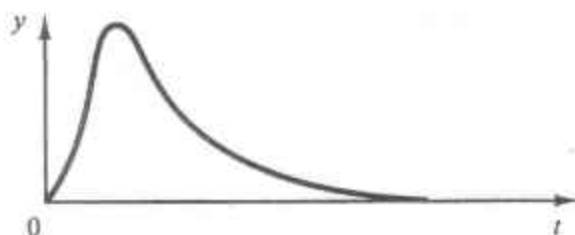
اگر ورودی اغتشاش پله‌ای به اندازه  $d$  باشد، آنگاه

$$D(s) = \frac{d}{s}$$

اگر سیستم پایدار باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{s K A(s)}{s B(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^2) K} \right] \frac{d}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s K A(s) d}{s B(s) + \beta K} \\ &= 0 \end{aligned}$$

پاسخ  $y(t)$  به اغتشاش پله‌ای ظاهر عمومی نشان داده شده در شکل ۸-۳۲ را دارد.



شکل ۸-۳۲

پاسخ نوعی به ازای ورودی اغتشاش پله‌ای.

توجه کنید که  $Y(s)/R(s)$  و  $Y(s)/D(s)$  عبارت‌اند از

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_p}{1 + (G_c + G_{cI})G_p} \quad , \quad \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_c + G_{cI})G_p}$$

توجه کنید مخرج  $Y(s)/R(s)$  و  $Y(s)/D(s)$  یکی است. (برای تمام سیستم‌ها همیشه همین طور است. هر سیستمی تنها یک معادله مشخصه دارد.) قبل از انتخاب قطبهای  $Y(s)/R(s)$  باید صفرهای  $Y(s)/R(s)$  را در محل‌های مطلوب قرار دهیم.

جایدهی صفر. سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{p(s)}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$p(s)$  را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$p(s) = a_1 s^2 + a_0 s + a_{-1} = a_1 (s + s_1)(s + s_2)$$

یعنی صفرهای  $s = -s_1$  و  $s = -s_2$  را به همراه  $a_1$  طوری برمی‌گزینیم که چندجمله‌ای صورت  $p(s)$  با مجموعه سه جمله آخر مخرج برابر باشد. در این صورت خطای حالت ماندگار سیستم به ازای ورودی‌های پله، شیب، و شتاب صفر می‌شود.

قبولی که بر مشخصات پاسخ سیستم گذاشته می‌شود. فرض کنید می‌خواهیم ماکزیمم فرایهش پاسخ به ورودی مرجع پله واحد بین دو حد دلخواه باشد، مثلاً

$$10\% < \text{ماکزیمم فرایهش} < 2\%$$

حد پایین را کمی بزرگتر از صفر برگزیده‌ایم تا پاسخ فرامیرا نشود. هر چه حد بالا کوچکتر باشد، تعیین ضرائب  $a$  مشکل‌تر می‌شود. در برخی موارد هیچ ترکیبی نمی‌تواند مشخصات خواسته شده را برآورده کند. در این صورت باید حد بالای فرایهش را بالاتر ببریم. باید به کمک MATLAB حداقل یک مجموعه جواب برای مقادیر  $a$  جستجو کنیم که مشخصات بیان شده را داشته باشد. با در نظر گرفتن ملاحظات محاسباتی بهتر است به جای جستجو برای یافتن مقادیر  $a$  قطبهای حلقه بسته قابل قبولی بیابیم، به این منظور ناحیه خاصی از نیم صفحه چپ را جستجو می‌کنیم. پس از یافتن قطبهای حلقه بسته تمام ضرائب  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  تعیین می‌شود.

تعیین  $G_{c2}$ . اکنون تمام ضرایب تابع تبدیل  $Y(s)/R(s)$  معلوم است و خود تابع تبدیل  $Y(s)/R(s)$  به صورت زیر است

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{a_r s^r + a_1 s + a_0}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_r s^r + a_1 s + a_0} \quad (4-8)$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= G_{c1} \frac{Y(s)}{D(s)} \\ &= \frac{G_{c1} s K A(s)}{s B(s) + (\alpha s + \beta + \gamma s^r) K} \\ &= \frac{G_{c1} s K A(s)}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_r s^r + a_1 s + a_0} \end{aligned}$$

چون  $G_{c1}$  یک کنترل کننده PID است و می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$G_{c1}(s) = \frac{\alpha_1 s + \beta_1 + \gamma_1 s^r}{s} \frac{1}{A(s)}$$

$Y(s)/R(s)$  را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(\alpha_1 s + \beta_1 + \gamma_1 s^r)}{s^{n+1} + a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_r s^r + a_1 s + a_0}$$

پس انتخاب می کنیم

$$K\gamma_1 = a_r, \quad K\alpha_1 = a_1, \quad K\beta_1 = a_0$$

و در نتیجه

$$G_{c1} = \frac{a_1 s + a_0 + a_r s^r}{K s} \frac{1}{A(s)} \quad (5-8)$$

می توان کاری کرد که پاسخ این سیستم به ورودی مرجع پله واحد، فراجشی بین حدود پایین و بالای انتخاب شده داشته باشد. مثلاً

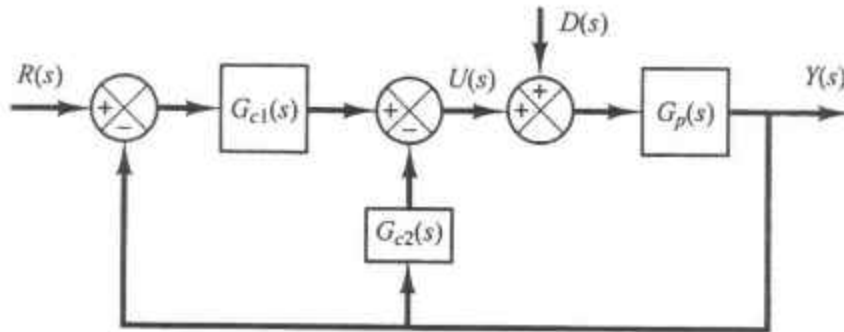
$$10\% < \text{ماکزیمم فراجش} < 2\%$$

می توان کاری کرد که خطای حالت ماندگار پاسخ سیستم به ورودی مرجع شیب و شتاب صفر باشد. مشخصه سیستم بیان شده با معادله (4-8) این است که در حالت کلی زمان نشست کوچکی دارد. اگر بخواهیم زمان نشست را کوچکتر کنیم، باید ماکزیمم فراجش بزرگتری را مجاز بدانیم، مثلاً

$$20\% < \text{ماکزیمم فراجش} < 2\%$$

اکنون می توان کنترل کننده  $G_{c2}$  را به کمک معادلات (3-8) و (5-8) تعیین کرد. چون

$$G_{c1} + G_{c2} = \frac{\alpha s + \beta + \gamma s^r}{s} \frac{1}{A(s)}$$



شکل ۸-۳۳

سیستم کنترل با دو درجه آزادی.

داریم

$$G_{c2} = \left[ \frac{\alpha s + \beta + \gamma s^2}{s} - \frac{a_1 s + a_0 + a_T s^2}{K s} \right] \frac{1}{A(s)} \quad (8-6)$$

$$= \frac{(K\alpha - a_1)s + (K\beta - a_0) + (K\gamma - a_T)s^2}{K s} \frac{1}{A(s)}$$

 دو کنترل‌کننده  $G_{c1}$  و  $G_{c2}$  به ترتیب از معادلات (۸-۵) و (۸-۶) به دست می‌آیند.

سیستم کنترل با دو درجه آزادی نشان داده شده در شکل ۸-۳۳ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل دستگاه  $G_p(s)$  عبارت است از

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

کنترل‌کننده‌های  $G_{c1}(s)$  و  $G_{c2}(s)$  را به نحوی طرح کنید که پاسخ به ورودی مرجع پله واحد ماکزیمم فرآجهشی کمتر از ۱۹٪ و بیشتر از ۲٪ داشته، زمان نشست آن کمتر از ۱ sec باشد. می‌خواهیم خطاهای حالت ماندگار در دنبال کردن ورودی‌های مرجع شیب و شتاب صفر باشد. پاسخ به ورودی اغتشاش پله واحد باید کوچک باشد و به سرعت به صفر بگراید.

برای طراحی کنترل‌کننده‌های  $G_{c1}(s)$  و  $G_{c2}(s)$  مناسب ابتدا توجه کنید که

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + (G_{c1} + G_{c2})G_p}$$

برای ساده کردن نمادگذاری تعریف می‌کنیم

$$G_c = G_{c1} + G_{c2}$$

پس

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_c G_p} = \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + \frac{10}{s(s+1)} G_c} = \frac{10}{s(s+1) + 10 G_c}$$

دوم این که

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_p G_c}{1 + G_c G_p} = \frac{1 \cdot G_c}{s(s+1) + 1 \cdot G_c}$$

توجه کنید که دو معادله مشخصه  $Y(s)/D(s)$  و  $Y(s)/R(s)$  یکی است.

ممکن است وسوسه شویم که یک صفر  $G_c(s)$  را در  $s = -1$  برگزینیم تا قطب واقع در  $s = -1$  دستگاه حذف شود، ولی قطب حذف شده  $s = -1$  چنانچه در زیر خواهیم دید به یک صفر حلقه بسته برای کل سیستم تبدیل می‌شود. اگر یک کنترل کننده PID به صورت زیر باشد

$$G_c(s) = \frac{K(s+1)(s+\beta)}{s} \quad (7-8)$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{1 \cdot}{s + (s+1) + \frac{1 \cdot K(s+1)(s+\beta)}{s}} \\ &= \frac{1 \cdot s}{(s+1)[s^2 + 1 \cdot K(s+\beta)]} \end{aligned}$$

قطب حلقه بسته  $s = -1$  یک قطب کند است، و وجود آن در سیستم حلقه بسته باعث می‌شود که پاسخ پله زمان نشستی بزرگتر از ۱ sec داشته باشد. بنابراین  $G_c(s)$  را به صورت معادله (۷-۸) انتخاب نمی‌کنیم. طراحی کنترل کننده‌های  $G_{c1}(s)$  و  $G_{c2}(s)$  در دو گام صورت می‌گیرد.

**گام اول طراحی.**  $G_c(s)$  را برای ارضای خواسته‌های بیان شده برای پاسخ به ورودی اغتشاش  $D(s)$  طرح می‌کنیم. در این مرحله طراحی فرض می‌کنیم که ورودی مرجع صفر است. فرض کنید که  $G_c(s)$  یک کنترل کننده PID به شکل زیر است

$$G_c(s) = \frac{K(s+\alpha)(s+\beta)}{s}$$

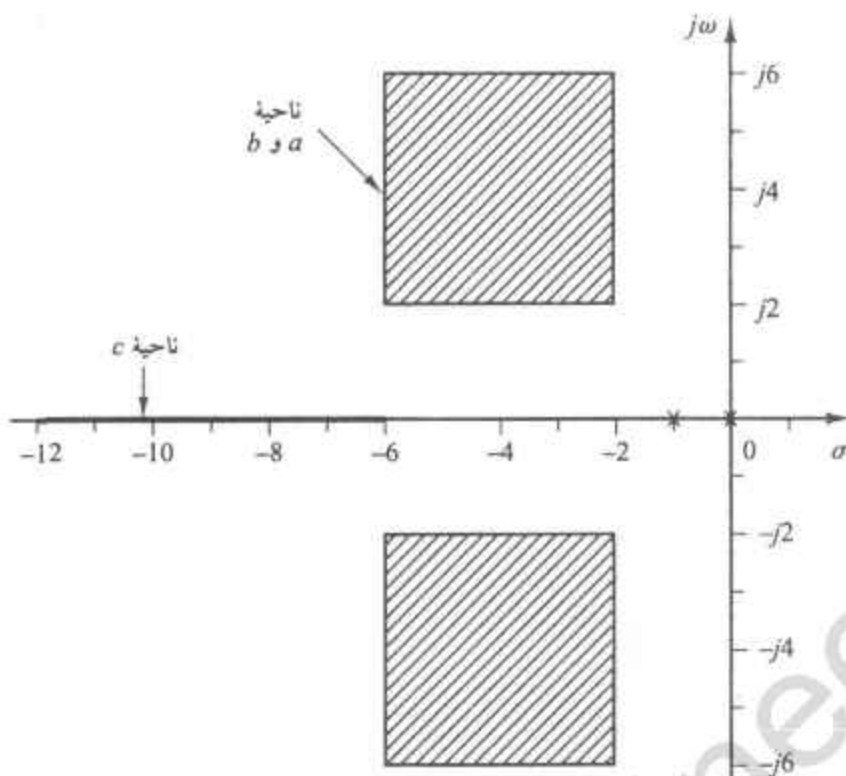
پس تابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/D(s)$  به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{1 \cdot}{s(s+1) + 1 \cdot G_c} \\ &= \frac{1 \cdot}{s(s+1) + \frac{1 \cdot K(s+\alpha)(s+\beta)}{s}} \\ &= \frac{1 \cdot s}{s^2(s+1) + 1 \cdot K(s+\alpha)(s+\beta)} \end{aligned}$$

توجه کنید که وجود  $s$  در صورت  $Y(s)/D(s)$  تضمین می‌کند که پاسخ حالت ماندگار به ورودی اغتشاش پله‌ای صفر است.

بیاید فرض کنیم که قطبهای غالب حلقه بسته مطلوب مزدوج مختلط، و به صورت زیر هستند

$$s = -a \pm jb$$



شکل ۸-۳۴

 ناحیه جستجو برای  $a$ ،  $b$ ، و  $c$ .

و دیگر قطب حلقه بسته حقیقی و به صورت زیر است

$$s = -c$$

توجه کنید که در این مسئله سه خواسته داریم. اولین خواسته این است که پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای سریعاً مستهلک شود. دومین خواسته این است که ماکزیمم فرجهش در پاسخ به ورودی مرجع پله واحد بین ۱۹٪ و ۲٪ و زمان نشست کمتر از ۱ sec باشد. سومین خواسته این است که خطاهای حالت ماندگار در پاسخ به ورودی‌های مرجع شیب و شتاب صفر باشد.

باید به صورت محاسباتی به دنبال یک مجموعه مقدار مناسب برای  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  باشیم. برای ارضای اولین خواسته ناحیه جستجو برای  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  را به صورت زیر برمی‌گزینیم

$$2 \leq a \leq 6, \quad 2 \leq b \leq 6, \quad 6 \leq c \leq 12$$

این ناحیه در شکل ۸-۳۴ نشان داده شده است. اگر قطبهای غالب حلقه بسته  $s = -a \pm jb$  در ناحیه هاشور زده این شکل باشد، پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای به سرعت مستهلک می‌شود. (اولین خواسته برآورده می‌شود).

توجه کنید که مخرج  $Y(s)/D(s)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} s^2(s+1) + 1 \cdot K(s+\alpha)(s+\beta) \\ &= s^3 + (1+K)s^2 + K(\alpha+\beta)s + K\alpha\beta \\ &= (s+a+jb)(s+a-jb)(s+c) \\ &= s^3 + (2a+c)s^2 + (a^2+b^2+2ac)s + (a^2+b^2)c \end{aligned}$$

چون مخرجهای  $Y(s)/D(s)$  و  $Y(s)/R(s)$  یکی است، مخرج  $Y(s)/D(s)$  مشخصات پاسخ به ورودی

مرجع را نیز مشخص می‌کند. برای ارضای خواسته سوم به روش جایدهی صفر توسل می‌جویم و تابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/R(s)$  را به صورت زیر برمی‌گزینیم

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(\gamma a + c)s^2 + (a^2 + b^2 + \gamma ac)s + (a^2 + b^2)c}{s^2 + (\gamma a + c)s^2 + (a^2 + b^2 + \gamma ac)s + (a^2 + b^2)c}$$

به این ترتیب خواسته سوم خود به خود برآورده می‌شود.

پس مسئله ما به جستجوی یک مجموعه قطب حلقه بسته مطلوب در ناحیه مشخص شده تبدیل می‌شود. به نحوی که پاسخ به ورودی مرجع پله واحد ماکزیمم فراجشی بین ۱۹٪ و ۲٪، و زمان نشستی کمتر از ۱ sec داشته باشد. (اگر نتوان در این ناحیه جوابی به دست آورد باید ناحیه جستجو را گسترش داد).

برای جستجوی محاسباتی باید گامهای مناسبی به کار ببریم. در این مسئله گامها را ۲٪ می‌گیریم. برنامه ۸-۸ MATLAB جدولی از مقادیر قابل قبول  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  به دست می‌دهد. می‌بینیم که خواسته مربوط به پاسخ به ورودی مرجع پله واحد توسط ۲۳ مجموعه یافته شده توسط برنامه ۸-۸ برآورده می‌شود. توجه کنید که آخرین ردیف با آخرین نقطه جستجو متناظر است. این نقطه خواسته را برآورده نمی‌کند، بنابراین باید آن را ندیده گرفت. (برنامه به نحوی نوشته شده که آخرین نقطه جستجو در ردیف آخر جدول قرار می‌گیرد، چه خواسته را برآورده کند و چه نکند).

#### MATLAB Program 8-8

```
t = 0:0.01:4;
k = 0;
for i = 1:21;
    a(i) = 6.2-i*0.2;
    for j = 1:21;
        b(j) = 6.2-j*0.2;
        for h = 1:31;
            c(h) = 12.2-h*0.2;
            num = [0 2*a(i)+c(h) a(i)^2+b(j)^2+2*a(i)*c(h) (a(i)^2+b(j)^2)*c(h)];
            den = [1 2*a(i)+c(h) a(i)^2+b(j)^2+2*a(i)*c(h) (a(i)^2+b(j)^2)*c(h)];
            y = step(num,den,t);
            m = max(y);
            s = 401; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02;
                s = s-1; end;
            ts = (s-1)*0.01;
            if m < 1.19 & m > 1.02 & ts < 1.0;
                k = k+1;
                table(k,:) = [a(i) b(j) c(h) m ts];
            end
        end
    end
end
end
```

```
table(k,:) = [a(i) b(j) c(h) m ts]
```

```
table =
```

```
4.2000 2.0000 12.0000 1.1896 0.8500
4.0000 2.0000 12.0000 1.1881 0.8700
4.0000 2.0000 11.8000 1.1890 0.8900
4.0000 2.0000 11.6000 1.1899 0.9000
3.8000 2.2000 12.0000 1.1883 0.9300
3.8000 2.2000 11.8000 1.1894 0.9400
3.8000 2.0000 12.0000 1.1861 0.8900
3.8000 2.0000 11.8000 1.1872 0.9100
3.8000 2.0000 11.6000 1.1882 0.9300
3.8000 2.0000 11.4000 1.1892 0.9400
3.6000 2.4000 12.0000 1.1893 0.9900
3.6000 2.2000 12.0000 1.1867 0.9600
3.6000 2.2000 11.8000 1.1876 0.9800
3.6000 2.2000 11.6000 1.1886 0.9900
3.6000 2.0000 12.0000 1.1842 0.9200
3.6000 2.0000 11.8000 1.1852 0.9400
3.6000 2.0000 11.6000 1.1861 0.9500
3.6000 2.0000 11.4000 1.1872 0.9700
3.6000 2.0000 11.2000 1.1883 0.9800
3.4000 2.0000 12.0000 1.1820 0.9400
3.4000 2.0000 11.8000 1.1831 0.9600
3.4000 2.0000 11.6000 1.1842 0.9800
3.2000 2.0000 12.0000 1.1797 0.9600
2.0000 2.0000 6.0000 1.2163 1.8900
```

همانطور که در بالا گفتیم ۲۳ مجموعه متغیر  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  خواسته‌ها را برآورده می‌کنند. منحنی‌های پاسخ پله سیستم به ازای هر سه ۲۳ مجموعه تقریباً یکی است. شکل ۸-۳۵ (الف) پاسخ پله واحد را به ازای مجموعه زیر نشان می‌دهد.

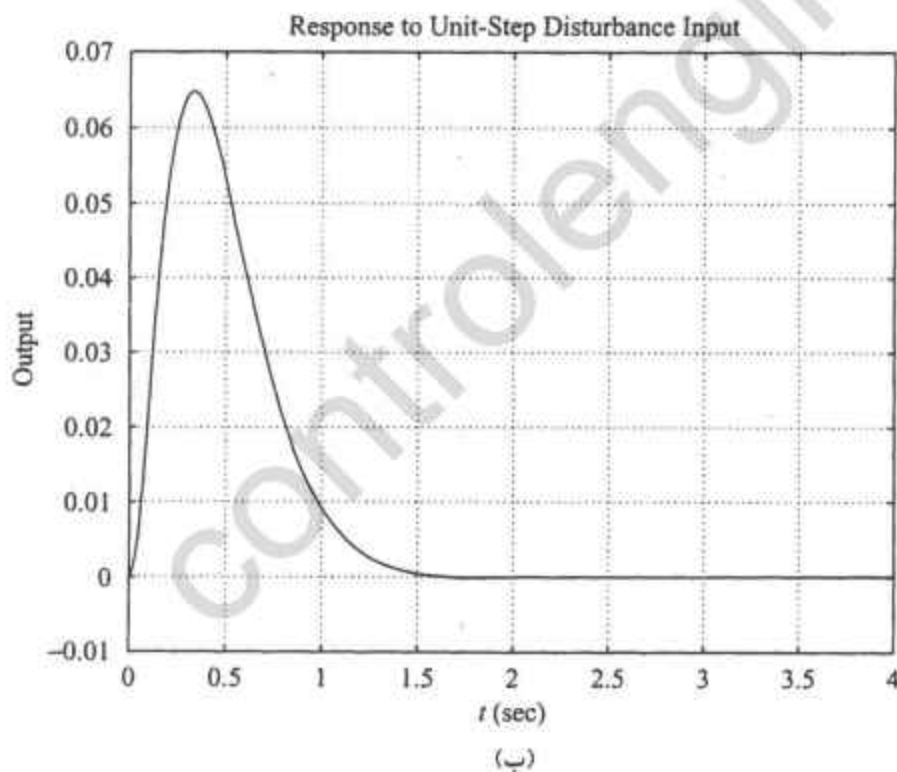
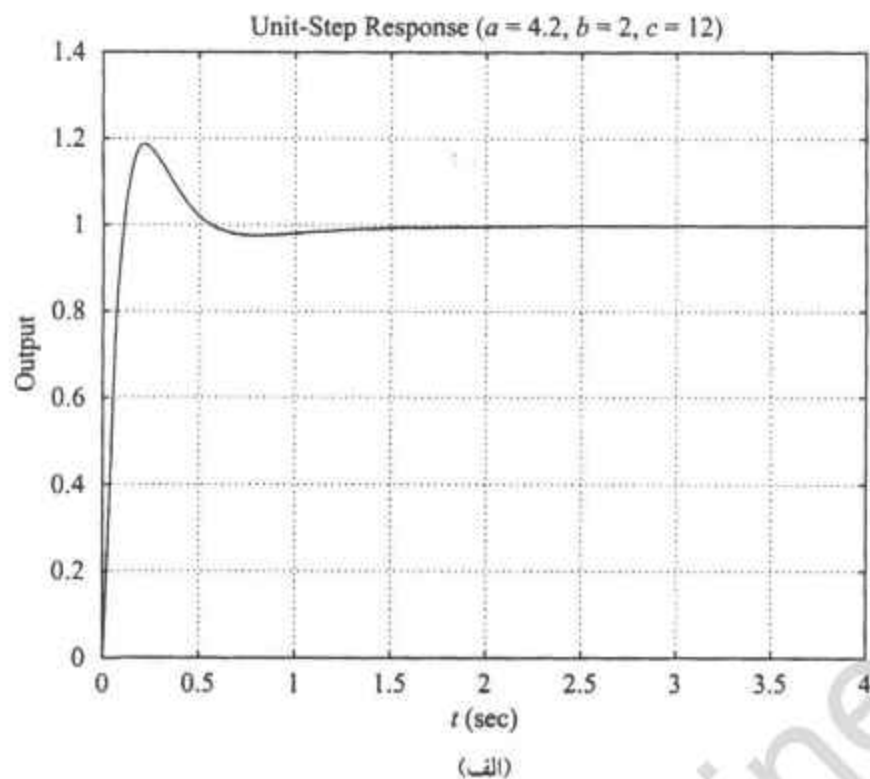
$$a = 4.2 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = 12$$

ماکزیمم فراجهش ۱/۷۹۶٪ و زمان نشست ۰/۸۵ sec است. با استفاده از مقادیر  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  بالا قطبهای حلقه بسته در مکان‌های زیر قرار دارند.

$$s = -12 \quad , \quad s = -4.2 \pm j2$$

با استفاده از این قطبهای حلقه بسته مخرج  $Y(s)/D(s)$  به صورت زیر درمی‌آید.

$$s^2(s+1) + 10K(s+\alpha)(s+\beta) = (s+4.2+j2)(s+4.2-j2)(s+12)$$



شکل ۸-۳۵

(الف) منحنی پاسخ پله سیستم

به ورودی مرجع

( $c = 12, b = 2, a = 4.2$ )

(ب) منحنی پاسخ پله سیستم به

ورودی اغتشاش

( $c = 12, b = 2, a = 4.2$ )

$$s^3 + (1 + 10K)s^2 + 10K(\alpha + \beta)s + 10K\alpha\beta = s^3 + 20/4s^2 + 122/44s + 259/68$$

با برابر قرار دادن ضرایب توانهای مشابه  $s$  دو طرف این معادله به دست می آوریم

$$1 + 10K = 20/4$$

$$10K(\alpha + \beta) = 122/44$$

$$10K\alpha\beta = 259/68$$

پس

$$K=1/94, \quad \alpha+\beta=\frac{122/44}{19/4}, \quad \alpha\beta=\frac{259/68}{19/4}$$

 و  $G_c(s)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{K(s+\alpha)(s+\beta)}{s} \\ &= \frac{K[s^2 + (\alpha+\beta)s + \alpha\beta]}{s} \\ &= \frac{1/94s^2 + 12/244s + 25/968}{s} \end{aligned}$$

 تابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/D(s)$  به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{10}{s(s+1)+10G_c} \\ &= \frac{10}{s(s+1)+10 \frac{1/94s^2 + 12/244s + 25/968}{s}} \\ &= \frac{10s}{s^3 + 20/4s^2 + 122/44s + 259/68} \end{aligned}$$

با استفاده از این عبارت می‌توان پاسخ  $y(t)$  سیستم به ازای ورودی اغتشاش پله واحد را به صورت نشان داده شده در شکل ۸-۳۵ (ب) به دست آورد.

شکل ۸-۳۶ (الف) پاسخ سیستم به ورودی مرجع پله واحد را به ازای مقادیر زیر نشان می‌دهد

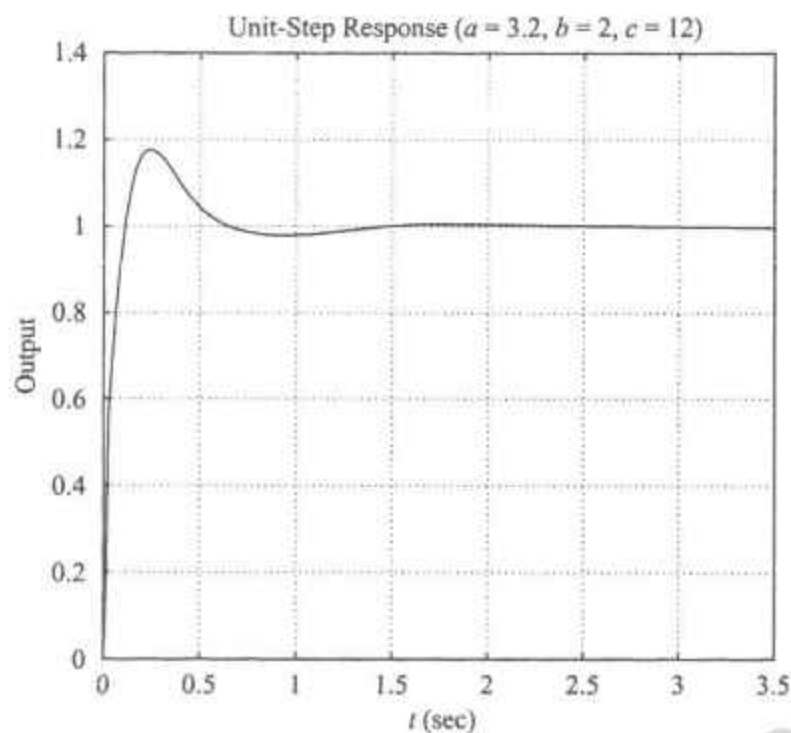
$$a=3/2, \quad b=2, \quad c=12$$

شکل ۸-۳۶ (ب) پاسخ این سیستم را به ازای ورودی اغتشاش پله واحد نشان می‌دهد. مقایسه شکل‌های ۸-۳۵ (الف) و ۸-۳۶ (الف) نشان می‌دهد که این دو پاسخ تقریباً یکسان هستند، ولی مقایسه شکل‌های ۸-۳۵ (ب) و ۸-۳۶ (ب) نشان می‌دهد که سیستم اولی کمی بهتر از سیستم دومی است. مقایسه پاسخ سیستم‌ها به ازای تمام مجموعه مقادیر مندرج در جدول نشان می‌دهد که مجموعه اول ( $a=3/2, b=2, c=12$ ) بهترین سیستم را به دست می‌دهد. بنابراین برای جواب این مسئله انتخاب می‌کنیم

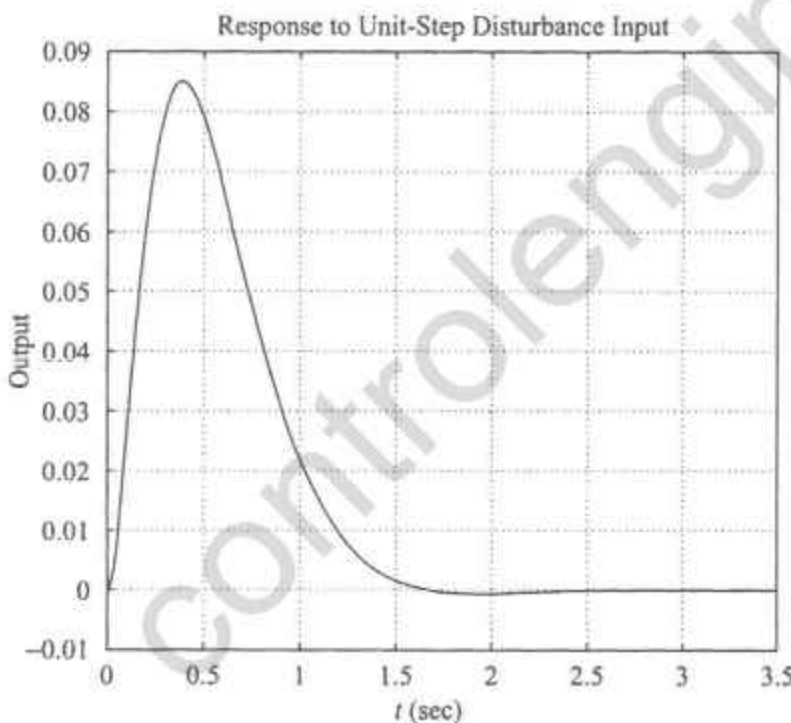
$$a=3/2, \quad b=2, \quad c=12$$

گام دوم طراحی: اکنون به سراغ طراحی  $G_{c1}(s)$  می‌رویم. چون  $Y(s)/R(s)$  را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G_{c1}G_p}{1+G_cG_p} = \frac{\frac{10}{s(s+1)}G_{c1}}{1+\frac{10}{s(s+1)}\frac{1/94s^2 + 12/244s + 25/968}{s}} \\ &= \frac{10sG_{c1}}{s^3 + 20/4s^2 + 122/44s + 259/68} \end{aligned}$$



(الف)

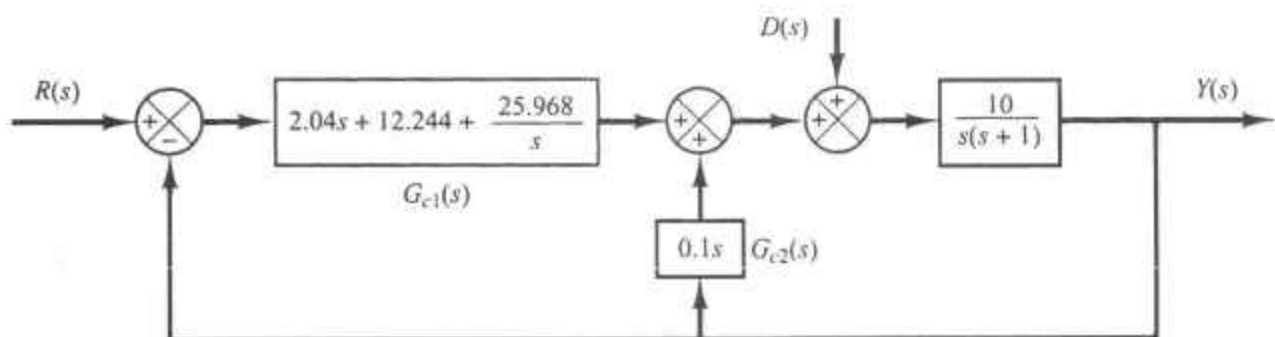


(ب)

شکل ۸-۳۶ (الف) منحنی پاسخ پله سیستم به ورودی مرجع ( $a = 3.2, b = 2, c = 12$ )؛ (ب) منحنی پاسخ پله سیستم به ورودی اغتشاش ( $a = 3.2, b = 2, c = 12$ ).

مسئله ما به طراحی  $G_c(s)$  برای برآوردن خواسته‌های مربوط به پاسخ به ورودیهای پله، شیب، و شتاب تبدیل می‌شود.

چون صورت شامل  $s$  است،  $G_c(s)$  باید انتگرالگیر داشته باشد تا این  $s$  حذف شود. [گرچه برای صفر بودن خطای حالت ماندگار به ازای ورودی اغتشاش پله واحد باید در صورت  $Y(s)/D(s)$  جمله  $s$  وجود



شکل ۸-۳۷ نمودار بلوکی سیستم طراحی شده.

داشته باشد، ولی وجود  $s$  در صورت تابع تبدیل  $Y(s)/R(s)$  لازم نیست. [ برای حذف آفست در پاسخ به ورودی مرجع پله واحد و حذف خطا در دنبال کردن ورودی مرجع شیب و شتاب، صورت  $Y(s)/R(s)$  باید برابر سه جمله آخر مخرج باشد. یعنی

$$10sG_{c1}(s) = 20/4s^2 + 122/44s + 259/68$$

یا

$$G_{c1}(s) = 2/04s + 12/244 + \frac{25/968}{s}$$

پس  $G_{c1}(s)$  یک کنترل کننده PID است. چون  $G_c(s)$  به صورت زیر می‌باشد

$$G_c(s) = G_{c1}(s) + G_{c2}(s) = \frac{1/94s^2 + 12/244s + 25/968}{s}$$

به دست می‌آوریم

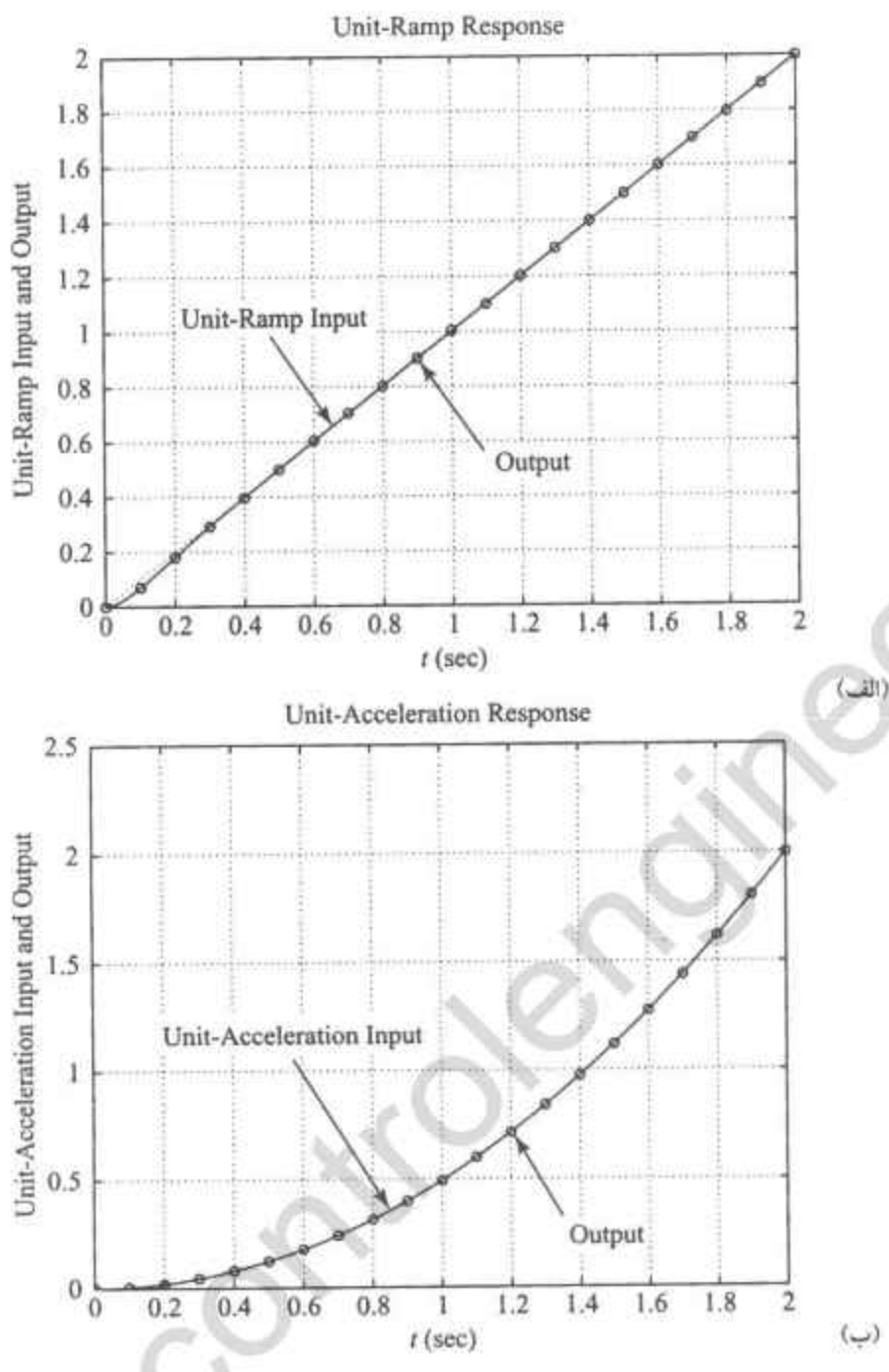
$$\begin{aligned} G_{c2}(s) &= G_c(s) - G_{c1}(s) \\ &= \left( \frac{1/94s^2 + 12/244s + 25/968}{s} \right) - \left( 2/04s + 12/244 + \frac{25/968}{s} \right) \\ &= -0/1s \end{aligned}$$

پس  $G_{c2}(s)$  یک کنترل کننده مشتقی است. نمودار بلوکی سیستم طراحی شده در شکل ۸-۳۷ نشان داده شده است.

اکنون تابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/R(s)$  عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20/4s^2 + 122/44s + 259/68}{s^2 + 20/4s^2 + 122/44s + 259/68}$$

پاسخ به ورودی مرجع شیب واحد و ورودی مرجع شتاب واحد به ترتیب در شکل‌های ۸-۳۸ (الف) و (ب) نشان داده شده است. خطاهای حالت ماندگار در دنبال کردن ورودیهای شیب و شتاب صفر است. پس تمام خواسته‌ها برآورده شده‌اند. به این ترتیب کنترل کننده‌های  $G_{c1}(s)$  و  $G_{c2}(s)$  طراحی شده قابل قبول هستند.



شکل ۳۸-۸

(الف) پاسخ به ورودی مرجع  
شیب واحد؛ (ب) پاسخ به  
ورودی مرجع شتاب واحد.

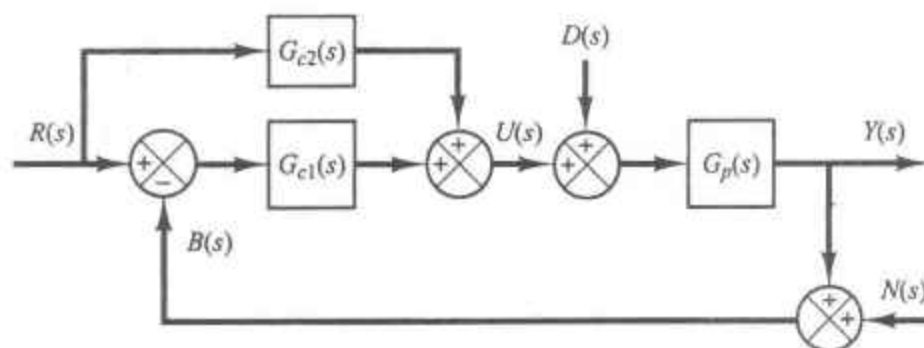
سیستم کنترل نشان داده شده در شکل ۳۹-۸ را در نظر بگیرید. این یک سیستم کنترل با دو درجه آزادی است. در مسئله طراحی در نظر گرفته شده در اینجا فرض می‌کنیم که ورودی نویز  $N(s)$  صفر است. فرض کنید که تابع تبدیل دستگاه  $G_p(s)$  عبارت است از

$$G_p(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

همچنین فرض کنید که کنترل کننده  $G_c(s)$  یک کنترل کننده PID است. یعنی

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

مثال ۵-۸



شکل ۸-۳۹

سیستم کنترل با دو درجه آزادی.

کنترل‌کننده  $G_{c2}(s)$  یک کنترل‌کننده P یا PD است. [اگر  $G_{c2}(s)$  عمل کنترلی انتگرالی داشته باشد، در سیگنال ورودی یک مولفه شیب وارد می‌کند که نامطلوب است. بنابراین  $G_{c2}(s)$  نباید شامل عمل کنترلی انتگرالی باشد.] پس فرض می‌کنیم که

$$G_{c2}(s) = \hat{K}_p (1 + \hat{T}_d s)$$

که در آن  $\hat{T}_d$  می‌تواند صفر باشد.

بیاید کنترل‌کننده‌های  $G_{c1}(s)$  و  $G_{c2}(s)$  را به نحوی طراحی کنیم که پاسخ به ورودی مرجع و پاسخ به ورودی اغتشاش «مشخصات مطلوبی» داشته باشد، به این ترتیب که

۱. پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای باید یک قله کوچک داشته باشد و سرانجام صفر شود. (یعنی خطای حالت ماندگار باید صفر باشد).

۲. پاسخ به ورودی مرجع پله‌ای باید فراجهی کمتر از ۲۵٪ داشته، زمان نشست آن کمتر از ۲ sec باشد. خطاهای حالت ماندگار در دنبال کردن ورودی‌های مرجع شیب و شتاب نیز باید صفر باشد. طراحی این سیستم کنترل دو درجه آزادی را می‌توان در دو گام زیر انجام داد:

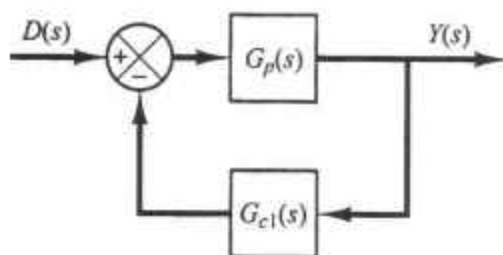
۱. تعیین  $G_{c1}(s)$  به نحوی که پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای مشخصات مطلوب را داشته باشد.  
۲. طراحی  $G_{c2}(s)$  به نحوی که پاسخ به ورودی‌های مرجع مشخصات مطلوب را داشته باشد، بدون این که پاسخ به ورودی اغتشاش در نظر گرفته شده در گام ۱ تغییر کند.

طراحی  $G_{c1}(s)$ : ابتدا توجه کنید که ورودی نویز  $N(s)$  را صفر در نظر گرفته‌ایم. برای یافتن پاسخ به ورودی اغتشاش فرض می‌کنیم که ورودی مرجع صفر است. در این صورت نمودار بلوکی مرتبط‌کننده  $D(s)$  و  $Y(s)$  را می‌توان به صورت شکل ۸-۴۰ رسم کرد. تابع تبدیل  $Y(s)/D(s)$  عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_{c1} G_p}$$

که در آن

$$G_{c1}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_d s \right)$$



شکل ۸-۴۰ سیستم کنترل.

این کنترل کننده یک قطب در مبدا، و دو صفر دارد. اگر فرض شود که دو صفر در یک محل قرار دارند (صفر مضاعف) می توان  $G_{cl}(s)$  را به صورت زیر نوشت

$$G_{cl}(s) = K \frac{(s+a)^2}{s}$$

بنابراین معادله مشخصه سیستم به صورت زیر درمی آید

$$1 + G_{cl}(s)G_p(s) = 1 + \frac{K(s+a)^2}{s} \frac{\Delta}{(s+1)(s+\Delta)} = 0$$

یا

$$s(s+1)(s+\Delta) + \Delta K(s+a)^2 = 0$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$s^3 + (6+\Delta K)s^2 + (\Delta+10Ka)s + \Delta Ka^2 = 0 \quad (8-8)$$

اگر صفر مضاعف را بین  $s=-3$  و  $s=-6$  قرار دهیم، مکان هندسی ریشه های  $G_{cl}(s)G_p(s)$  به صورت نشان داده شده در شکل ۸-۴۱ درمی آید. سرعت پاسخ باید زیاد باشد، ولی نه زیادتر از حد لازم، زیرا سرعت زیادتر در حالت کلی مستلزم استفاده از عناصر گرانتر است. بنابراین قطبهای حلقه بسته غالب را به صورت زیر برمی گزینیم

$$s = -3 \pm j2$$

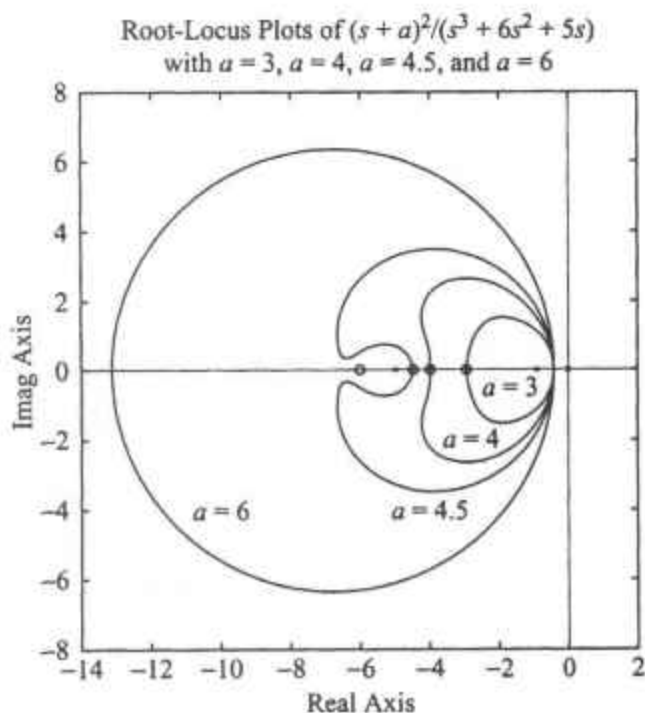
(توجه کنید که این گزینش یکتا نیست. بینهایت قطب حلقه بسته ممکن وجود دارد که قابل انتخاب است.) چون سیستم مرتبه سوم است، سه قطب حلقه بسته وجود دارد. سومین قطب را روی بخش محور حقیقی در  $s = -5$  انتخاب می کنیم.

$s = -3 + j2$  را در معادله (۸-۸) قرار می دهیم

$$(-3+j2)^3 + (6+\Delta K)(-3+j2)^2 + (\Delta+10Ka)(-3+j2) + \Delta Ka^2 = 0$$

که به صورت زیر ساده می شود

$$24 + 25K - 30Ka + \Delta Ka^2 + j(-16 - 60K + 20Ka) = 0$$



شکل ۸-۴۱

مکان هندسی ریشه‌های

$$\frac{5K(s+a)^2}{s(s+1)(s+5)}$$

 به ازای  $a=3, a=4, a=4.5$  و  $a=6$ .

با برابر صفر قرار دادن بخشهای حقیقی و موهومی به دست می‌آوریم

$$24 + 25K - 30Ka + 5Ka^2 = 0 \quad (9-8)$$

$$-16 - 60K + 20Ka = 0 \quad (10-8)$$

از معادله (۱۰-۸) به دست می‌آوریم

$$K = \frac{4}{5a-16} \quad (11-8)$$

با گذاشتن معادله (۱۱-۸) در معادله (۹-۸) به دست می‌آوریم

$$a^2 = 13$$

 پس  $a = 3.6056$  یا  $a = -3.6056$ . توجه کنید که مقدار  $K$  به صورت زیر درمی‌آید

$$K = 1.3210 \quad a = 3.6056 \quad \text{به ازای}$$

$$K = -0.1211 \quad a = -3.6056 \quad \text{به ازای}$$

 چون  $G_c(s)$  در مسیر پیشخورد است،  $K$  باید مثبت باشد. بنابراین انتخاب می‌کنیم

$$K = 1.3210 \quad a = 3.6056$$

 و  $G_c(s)$  به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K \frac{(s+a)^2}{s} = 1.3210 \frac{(s+3.6056)^2}{s} \\ &= \frac{1.3210s^2 + 9.5260s + 17.1735}{s} \end{aligned}$$

 برای تعیین  $T_d$ ،  $T_i$ ،  $K_p$  به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$G_{cl}(s) = \frac{1,3210(s^2 + 7,2112s + 13)}{s} \quad (12-8)$$

$$= 9,5260 \left( 1 + \frac{1}{0,5547s} + 0,1387s \right)$$

بنابراین

$$K_p = 9,5260, \quad T_I = 0,5547, \quad T_d = 0,1387$$

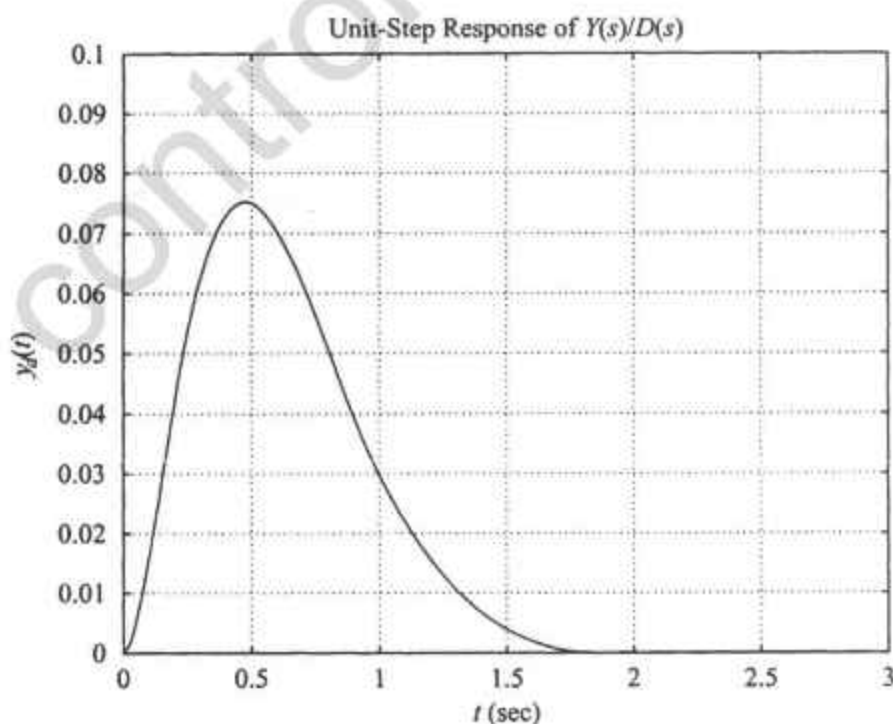
برای بررسی پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای تابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/D(s)$  را به دست می‌آوریم

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p}{1 + G_{cl} G_p}$$

$$= \frac{5s}{s(s+1)(s+5) + 5K(s+a)^2}$$

$$= \frac{5s}{s^3 + 12,605s^2 + 25,63s + 85,8673}$$

پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای در شکل ۴۲-۸ نشان داده شده است. منحنی پاسخ خوب و قابل قبول می‌نماید. توجه کنید که قطبهای حلقه بسته در  $s = -3 \pm j2$  و  $s = -6,6051$  قرار دارند. قطبهای حلقه بسته مزدوج مختلط به صورت قطبهای غالب عمل می‌کنند. طراحی  $G_{cl}(s)$ : اکنون  $G_{cl}(s)$  را برای دستیابی به پاسخ مطلوب به ورودیهای مرجع طرح می‌کنیم. تابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/R(s)$  عبارت است از



شکل ۴۲-۸ پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای.

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G_p(G_{c1} + G_{c2})}{1 + G_{c1}G_p} \\ &= \frac{\left[ \frac{1/321s^2 + 9/526s + 17/1735}{s} + \hat{K}_p(1 + \hat{T}_d s) \right] \frac{5}{(s+1)(s+5)}}{1 + \frac{1/321s^2 + 9/526s + 17/1735}{s} \frac{5}{(s+1)(s+5)}} \\ &= \frac{(6/6051 + 5\hat{K}_p\hat{T}_d)s^2 + (47/63 + 5\hat{K}_p)s + 85/8673}{s^3 + 12/6051s^2 + 52/63s + 85/8673}\end{aligned}$$

جایدهی صفر. دو صفر و بهره را طوری تعیین می‌کنیم که صورت با سه جمله آخر مخرج برابر باشد. یعنی

$$(6/6051 + 5\hat{K}_p\hat{T}_d)s^2 + (47/63 + 5\hat{K}_p)s + 85/8673 = 12/6051s^2 + 52/63s + 85/8673$$

با برابر قرار دادن ضرایب جملات هم‌توان دو طرف معادله به دست می‌آوریم

$$6/6051 + 5\hat{K}_p\hat{T}_d = 12/6051$$

$$47/63 + 5\hat{K}_p = 52/63$$

و از آن به دست می‌آوریم

$$\hat{K}_p = 1 \quad \hat{T}_d = 1/2$$

بنابراین

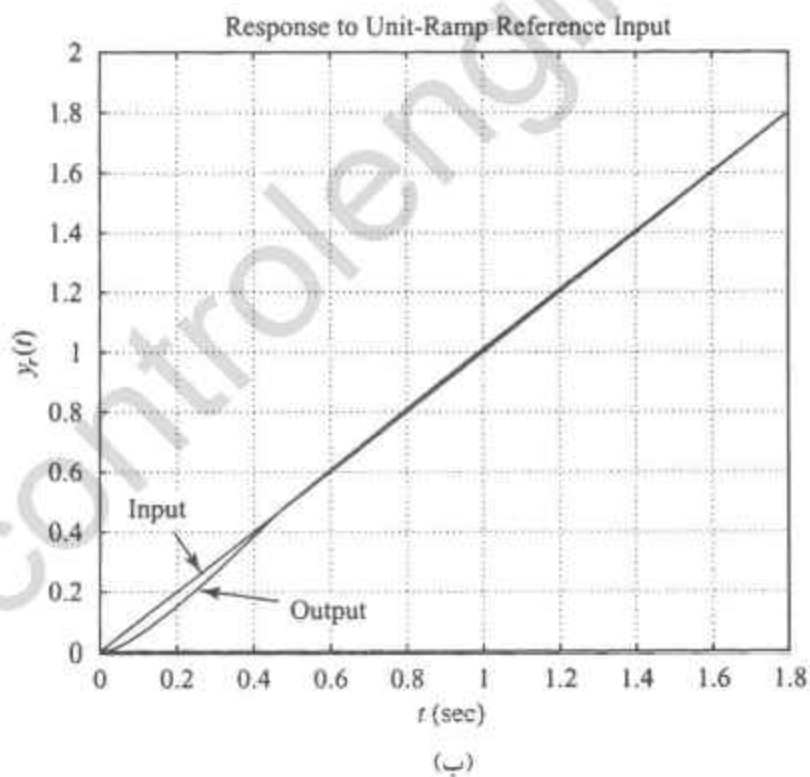
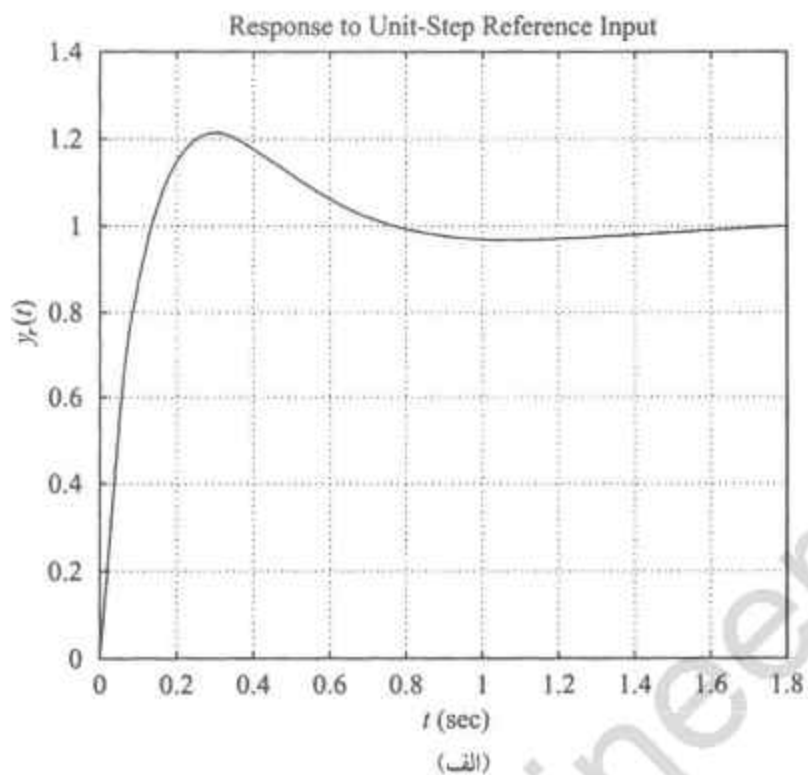
$$G_{c2}(s) = 1 + 1/2s \quad (13-8)$$

تابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/R(s)$  به ازای کنترل‌کننده  $G_{c2}(s)$  به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{12/6051s^2 + 52/63s + 85/8673}{s^3 + 12/6051s^2 + 52/63s + 85/8673}$$

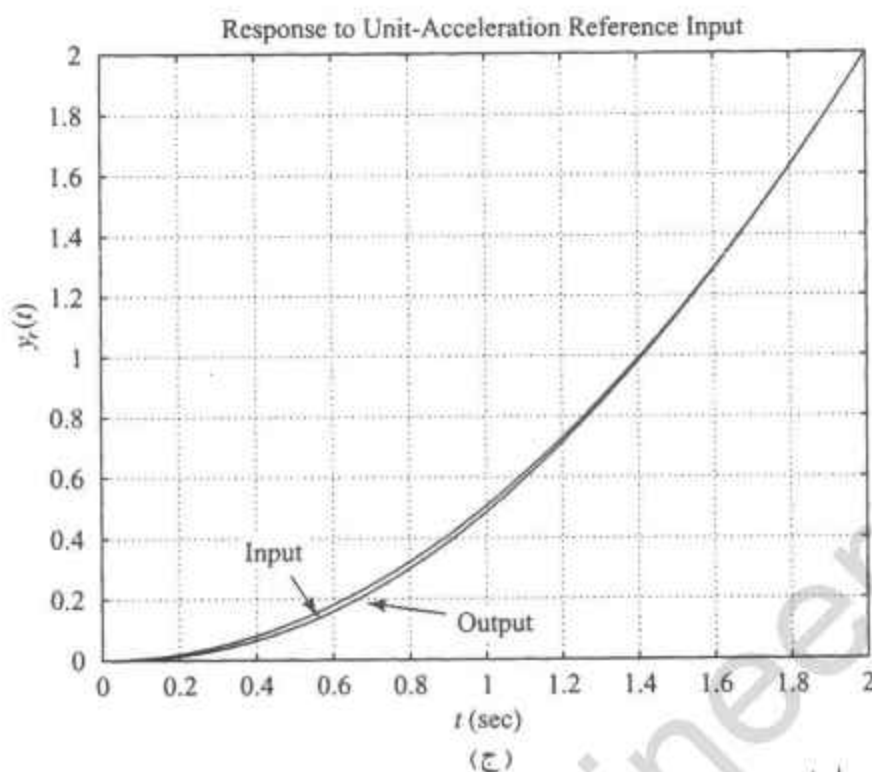
شکل ۸-۴۳ (الف) پاسخ پله این سیستم را نشان می‌دهد. پاسخ دارای ماکزیمم فراجشش ۲۱٪ و زمان نشست تقریبی ۱/۶ sec است. شکل‌های ۸-۴۳ (ب) و (ج) پاسخ به ورودیهای شیب و شتاب را نشان می‌دهند. خطای حالت ماندگار پاسخ به هر دو ورودی صفر است. پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای رضایتبخش است. پس کنترل‌کننده‌های  $G_{c1}(s)$  و  $G_{c2}(s)$  طراحی شده، که به ترتیب با معادلات (۸-۱۲) و (۸-۱۳) توصیف شده‌اند، قابل قبول هستند.

اگر مشخصات پاسخ به ورودی پله‌ای رضایتبخش نمی‌بود، می‌بایست محل قطبهای غالب را تغییر داده، فرایند طراحی را تکرار می‌کردیم. قطبهای حلقه بسته غالب باید در ناحیه خاصی از نیم‌صفحه چپ قرار گیرند (مثلاً در  $2 \leq a \leq 6$ ،  $2 \leq b \leq 6$  و  $6 \leq c \leq 12$ ). اگر بخواهیم این ناحیه را به صورت محاسباتی جستجو کنیم، باید برنامه‌ای شبیه برنامه ۸-۸ بنویسیم و آن را اجرا کنیم. به این ترتیب یک مجموعه جواب برای  $a$ ،  $b$ ، و  $c$  به دست می‌آوریم که به ازای آنها پاسخ سیستم به ورودی مرجع پله واحد تمام خواسته‌های مربوط به ماکزیمم فراجشش و زمان نشست را ارضاء کند.



شکل ۸-۴۳

(الف) پاسخ به ورودی مرجع پله واحد؛ (ب) پاسخ به ورودی مرجع شیب واحد.



شکل ۸-۴۳

(ج) پاسخ به ورودی مرجع شتاب واحد.

## مسائل نمونه و حلشان

الف ۸-۱ مشخصات دینامیکی کنترل‌کننده‌های PI، PD و PID را به اختصار شرح دهید.  
 حل: کنترل‌کننده PI با تابع تبدیل زیر مشخص می‌شود

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

کنترل‌کننده PI یک جبران‌ساز پیش‌فاز است، یک صفر در  $s = -1/T_i$  و یک قطب در  $s = 0$  دارد. پس مشخصه کنترل‌کننده PI داشتن بهره بی‌نهایت در فرکانس صفر است. این مشخصه باعث بهبود رفتار حالت ماندگار می‌شود. گذاشتن کنترل‌کننده PI در سیستم مرتبه سیستم را یک واحد زیاد می‌کند، بنابراین پایداری سیستم کمتر می‌شود و حتی ممکن است سیستمی ناپایدار حاصل شود. پس مقادیر  $K_p$  و  $T_i$  باید به دقت انتخاب شود تا پاسخ‌گذاری مطلوبی حاصل شود. با طراحی مناسب کنترل‌کننده PI می‌توان کاری کرد که پاسخ پله فراجهدی کوچک داشته باشد و حتی بدون فراجهدش باشد، ولی سرعت پاسخ خیلی کم می‌شود. علت این امر پایین گذر بودن کنترل‌کننده PI و تضعیف مولفه‌های فرکانس بالای سیگنال‌هاست.

کنترل‌کننده PD گونه ساده شده‌ای از جبران‌ساز پیش‌فاز، با تابع تبدیل  $G_c(s)$  زیر است

$$G_c(s) = K_p (1 + T_d s)$$

مقدار  $K_p$  معمولاً با توجه به خواسته‌های حالت ماندگار تعیین می‌شود. فرکانس گوشه‌ای  $1/T_d$  به نحوی انتخاب می‌شود که پیش‌فازی ماکزیمم در حوالی فرکانس عبور بهره رخ دهد. هر چند حاشیه فاز بزرگتر می‌شود،

ولی پاسخ اندازه جبران ساز در ناحیه فرکانسی  $\omega > 1/T_d$  افزایشی است. (پس کنترل کننده PD یک فیلتر بالا گذر است.) این افزایش پیوسته اندازه نامطلوب است، زیرا نویزهای فرکانس بالای موجود در سیستم را تقویت می کند. جبران ساز پیش فاز می تواند پیش فازی لازم را ایجاد کند، و افزایش دامنه آن در ناحیه فرکانس بالا بسیار کمتر از کنترل کننده PD است. به همین خاطر جبران ساز پیش فاز بر کنترل کننده PD رجحان دارد.

چون کنترل کننده PD تابع تبدیلی با یک صفر و بدون قطب دارد، نمی توان آن را با عناصر غیرفعال RLC ساخت. کنترل کننده PD را می توان با آپ امپ، مقاومت و خازن ساخت، ولی چون همانطوری که گفتیم این کنترل کننده یک فیلتر بالا گذر است، عمل مشتق گیری آن می تواند در بعضی موارد مشکلات جدی نویز را به همراه داشته باشد. این مشکل در کنترل کننده های PD ساخته شده با عناصر هیدرولیکی و نیوماتیکی وجود ندارد.

کنترل کننده PD همانند جبران ساز پیش فاز مشخصات پاسخ گذرا را بهبود می بخشد، پایداری را بهتر می کند، و پهنای باند سیستم را زیاد می کند که به معنی کوچک شدن زمان صعود است.

کنترل کننده PID ترکیبی از کنترل کننده های PI و PD است. این کنترل کننده یک جبران ساز پس فاز - پیش فاز است. توجه کنید که عملهای کنترلی PI و PD در نواحی فرکانس مختلف صورت می گیرند، کنترل PI در ناحیه فرکانس پایین و کنترل PD در ناحیه فرکانس بالا. کنترل PID را در مواقعی می توان به کار برد که هم پاسخ گذرا و هم عملکرد حالت ماندگار سیستم نیاز به بهبود داشته باشد.

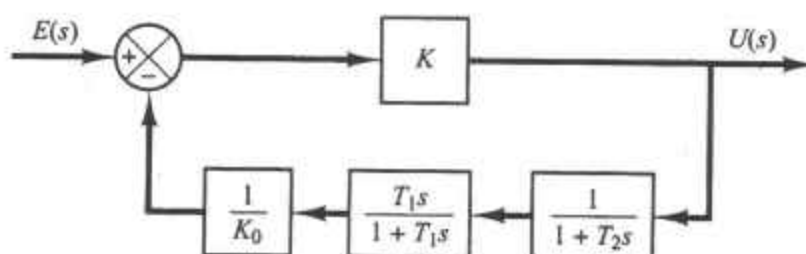
الف ۸-۲ نشان دهید که تابع تبدیل  $U(s)/E(s)$  کنترل کننده PID شکل ۸-۴ عبارت است از

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{T_1 + T_2}{T_1} \left[ 1 + \frac{1}{(T_1 + T_2)s} + \frac{T_1 T_2 s}{T_1 + T_2} \right]$$

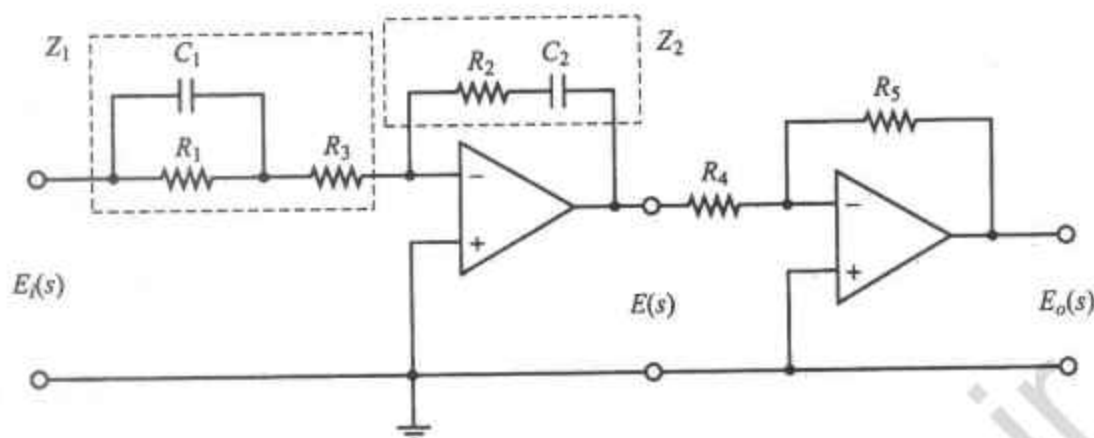
فرض کنید که بهره  $K$  از یک خیلی بزرگتر است.

حل: داریم

$$\begin{aligned} \frac{U(s)}{E(s)} &= \frac{K}{1 + K \left( \frac{1}{K_p} \frac{T_1 s}{1 + T_1 s} + \frac{1}{1 + T_2 s} \right)} \\ &= \frac{K}{K \left( \frac{1}{K_p} \frac{T_1 s}{1 + T_1 s} + \frac{1}{1 + T_2 s} \right)} \\ &= \frac{K_p (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{T_1 s} \end{aligned}$$



شکل ۸-۴  
کنترل کننده PID.



شکل ۸-۴۵ کنترل‌کننده PID اصلاح شده.

$$\begin{aligned}\frac{U(s)}{E(s)} &= K_s \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) (1 + T_d s) \\ &= K_s \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s + \frac{T_d}{T_i} \right) \\ &= K_s \frac{T_i + T_d}{T_i} \left[ 1 + \frac{1}{(T_i + T_d)s} + \frac{T_i T_d s}{T_i + T_d} \right]\end{aligned}$$

الف ۸-۳ مدار الکتریکی دو آپ امپی شکل ۸-۴۵ را در نظر بگیرید. این مدار یک کنترل‌کننده PID اصلاح شده است که تابع تبدیل آن یک انشگرالگیر و یک جمله مرتبه اول تاخیری دارد. تابع تبدیل این کنترل‌کننده PID را بیابید.

حل: چون

$$Z_1 = \frac{1}{(1/R_1) + C_1 s} + R_2 = \frac{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C_1 s}{1 + R_1 C_1 s}$$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{C_2 s}$$

داریم

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{(R_2 C_2 s + 1)(R_1 C_1 s + 1)}{C_2 s (R_1 + R_2 + R_1 R_2 C_1 s)}$$

همچنین

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_3}{R_4}$$

پس

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_o(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} = \frac{R_3}{R_4 (R_1 + R_2) C_2} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{s \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1 s + 1 \right)}$$

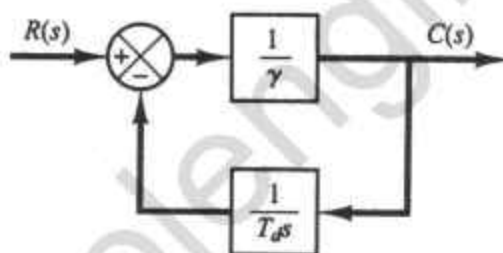
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_o R_r}{R_r R_r} \frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \left(s + \frac{1}{R_r C_r}\right)}{s \left(s + \frac{R_1 + R_r}{R_1 R_r C_1}\right)}$$

توجه کنید که  $R_1 C_1$  و  $R_r C_r$  محل صفرهای کنترل کننده را تعیین می‌کنند و  $R_1$ ،  $R_r$ ، و  $C_1$  بر محل قطب در بخش منفی محور حقیقی اثر می‌گذارد. بهره کنترل کننده با  $R_o / R_r$  تنظیم می‌شود.

الف ۸-۴ در عمل ساخت مشتگیر واقعی غیر ممکن است. بنابراین همیشه مجبوریم مشتگیر واقعی  $T_d s$  را به صورت تقریبی زیر بسازیم

$$\frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s}$$

یک راه ساخت این مشتگیر تقریبی استفاده از یک انتگرالگیر در مسیر فیدبک است. نشان دهید که تابع تبدیل حلقه بسته سیستم شکل ۸-۴۶ به صورت عبارت بالاست. (در مشتگیرهای تجارتي مقدار  $\gamma$  حدود ۰/۱ است.)



شکل ۸-۴۶ مشتگیر تقریبی.

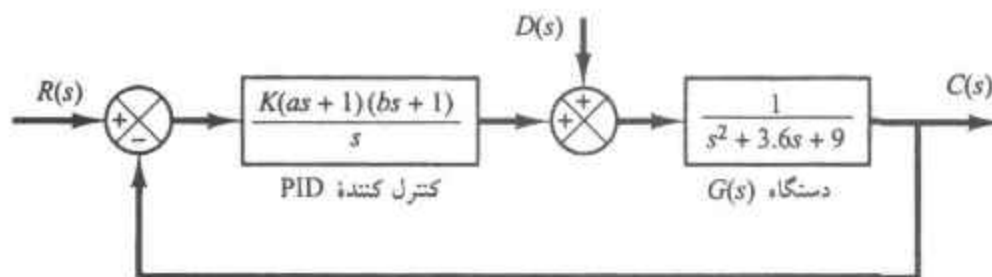
حل: تابع تبدیل حلقه بسته سیستم شکل ۸-۴۶ عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{\gamma}}{1 + \frac{1}{\gamma T_d s}} = \frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s}$$

توجه کنید که این مشتگیر دارای تاخیر مرتبه اول، پهنای باند سیستم کنترل حلقه بسته را کم کرده، اثرهای مضر سیگنالهای نویزی را کم می‌کند.

الف ۸-۵ سیستم شکل ۸-۴۷ را در نظر بگیرید که کنترل PID یک دستگاه مرتبه دوم را نشان می‌دهد. اغتشاش  $D(s)$  به صورت نشان داده شده به سیستم وارد می‌شود. فرض کنید ورودی مرجع  $R(s)$  معمولاً مقداری ثابت دارد، و مشخصات پاسخ سیستم به اغتشاش بسیار اهمیت دارد.

سیستم کنترل را به نحوی طرح کنید که پاسخ به اغتشاش پله‌ای سریعاً میرا شود (زمان نشست ۲٪ برابر ۲ تا ۳ ثانیه). آرایش قطبهای حلقه بسته را به نحوی برگزینید که سیستم یک زوج قطب مختلط غالب داشته باشد. سپس پاسخ به ورودی پله‌ای را بیابید. پاسخ به ورودی مرجع پله واحد را نیز بیابید.



شکل ۸-۴۷

 سیستم دارای  
کنترل کننده PID.

حل: تابع تبدیل کنترل کننده PID به صورت زیر است

$$G(s) = \frac{K(as+1)(bs+1)}{s}$$

برای ورودی اغتشاش، هنگام نداشتن ورودی مرجع، تابع تبدیل حلقه بسته به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \frac{C_d(s)}{D(s)} &= \frac{s}{s(s^2 + 3.6s + 9) + K(as+1)(bs+1)} \\ &= \frac{s}{s^3 + (3.6 + Kab)s^2 + (9 + Ka + Kb)s + K} \end{aligned} \quad (۱۴-۸)$$

می‌خواهیم پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای زمان نشستی برابر ۲ تا ۳ ثانیه داشته، سیستم میرایی معقولی داشته باشد. این خواسته‌ها را می‌توان به داشتن قطبهای غالبی با  $\zeta = 0.5$  و  $\omega_n = 4$  rad/s تعبیر کرد. قطب حلقه بسته سوم را در  $s = -10$  قرار می‌دهیم تا اثرش بر پاسخ گذرا ناچیز باشد. پس معادله مشخصه مطلوب شکل زیر را دارد

$$(s+10)(s^2 + 2 \times 0.5 \times 4s + 4^2) = (s+10)(s^2 + 4s + 16) = s^3 + 14s^2 + 56s + 160$$

معادله مشخصه سیستم توصیف شده با معادله (۱۴-۸) عبارت است از

$$s^3 + (3.6 + Kab)s^2 + (9 + Ka + Kb)s + K = 0$$

پس باید داشته باشیم

$$3.6 + Kab = 14$$

$$(9 + Ka + Kb) = 56$$

$$K = 160$$

که نتیجه می‌دهد

$$a+b=0.29375, \quad ab=0.765$$

کنترل کننده PID شکل زیر را به خود می‌گیرد

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{K[abs^2 + (a+b)s + 1]}{s} \\ &= \frac{160[0.765s^2 + 0.29375s + 1]}{s} \\ &= \frac{107.4[s^2 + 4.5192s + 15.385]}{s} \end{aligned}$$

با این کنترل کننده PID پاسخ به ورودی اغتشاش عبارت است از

$$G_d(s) = \frac{s}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160} D(s)$$

$$= \frac{s}{(s+10)(s^2 + 4s + 16)} D(s)$$

خروجی حالت ماندگار به ازای ورودی اغتشاش پله واحد صفر است، زیرا

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_d(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s C_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{(s+10)(s^2 + 4s + 16)} \frac{1}{s} = 0$$

با استفاده از MATLAB می‌توان پاسخ به ورودی اغتشاش پله واحد را به دست آورد. برنامه ۸-۹ منحنی پاسخ شکل ۸-۴۸ (الف) را ایجاد می‌کند. این منحنی نشان می‌دهد که زمان نشست تقریباً  $2.7$  s است. پاسخ میرایی سریعی دارد. پس سیستم طراحی شده قابل قبول است.

برای ورودی مرجع  $r(t)$  تابع تبدیل حلقه بسته به صورت زیر است

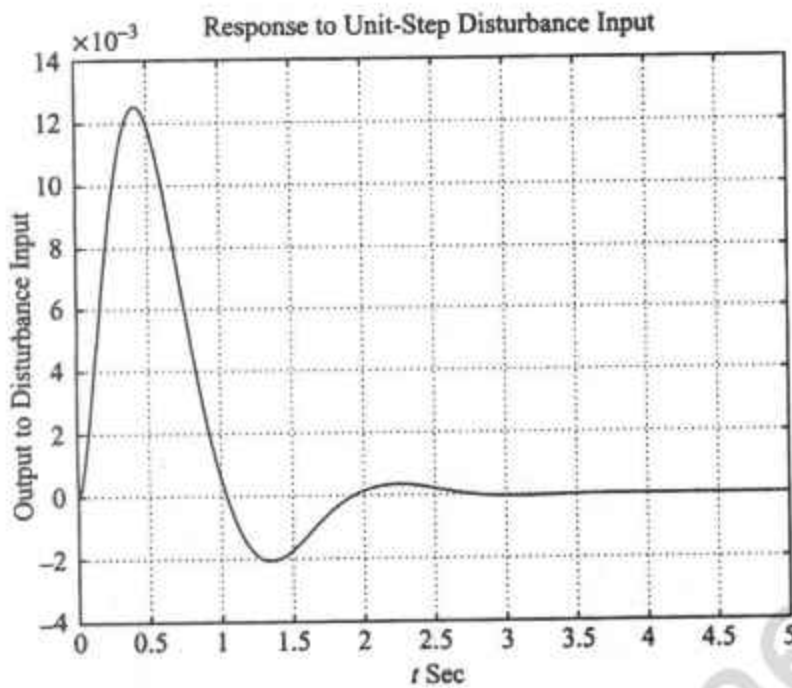
$$C_r(s) = \frac{10.4(s^2 + 4.5192s + 15.385)}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

$$= \frac{10.4s^2 + 47s + 160}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160}$$

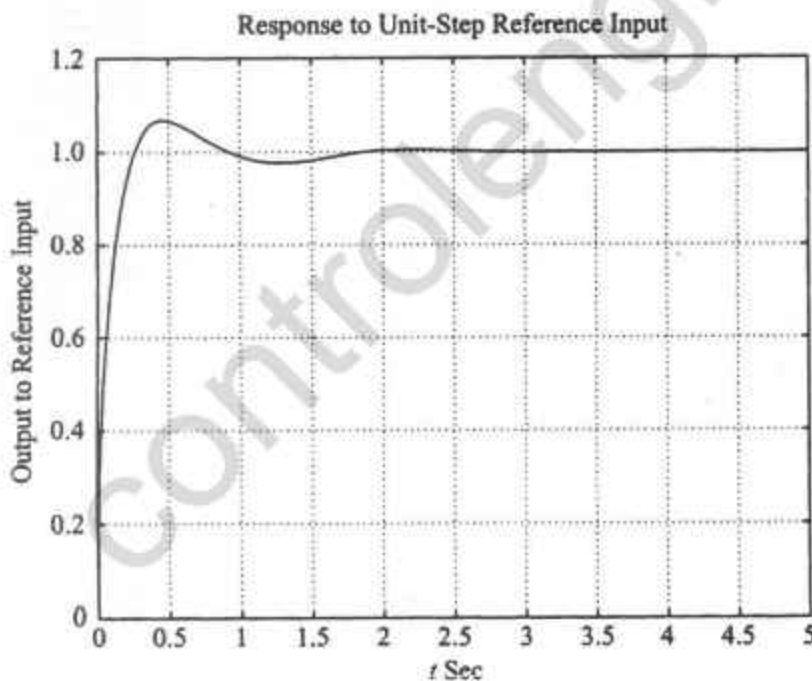
#### MATLAB Program 8-9

```
% ***** Response to unit-step disturbance input *****
numd = [1 0];
dend = [1 14 56 160];
t = 0:0.01:5;
[c1,x1,t] = step(numd,dend,t);
plot(t,c1)
grid
title('Response to Unit-Step Disturbance Input')
xlabel('t Sec')
ylabel('Output to Disturbance Input')

% ***** Response to unit-step reference input *****
numr = [10.4 47 160];
denr = [1 14 56 160];
[c2,x2,t] = step(numr,denr,t);
plot(t,c2)
grid
title('Response to Unit-Step Reference Input')
xlabel('t Sec')
ylabel('Output to Reference Input')
```



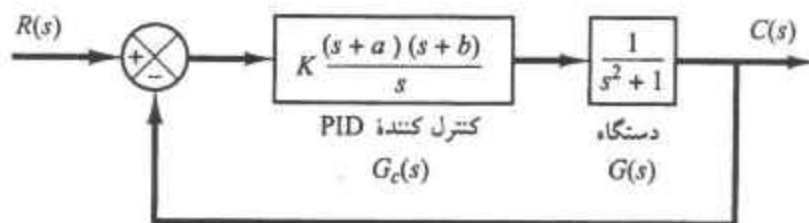
(الف)



(ب)

شکل ۸-۴۸ (الف) پاسخ به ورودی اغتشاش پله واحد؛ (ب) پاسخ به ورودی مرجع پله واحد.

پاسخ به ورودی مرجع پله واحد را نیز می‌توان با برنامه ۸-۹ به دست آورد. منحنی حاصل در شکل ۸-۴۸ (ب) نشان داده شده است. این منحنی نشان می‌دهد که ماکزیمم فرایهش  $7/3\%$  و زمان نشست  $1/2$  sec است. پاسخ گذرای سیستم نیز کاملاً قابل قبول است.



شکل ۸-۴۹  
سیستم کنترل شده با  
کنترل کننده PID

الف ۸-۶ سیستم نشان داده شده در شکل ۸-۴۹ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم یک کنترل کننده PID طراحی کنیم  $G_c(s)$  به نحوی که قطبهای غالب حلقه بسته در  $s = -1 \pm j\sqrt{3}$  قرار گیرند. برای کنترل کننده PID انتخاب کنید  $a=1$  و مقادیر  $K$  و  $b$  را بیابید. نمودار مکان هندسی ریشه‌های سیستم طراحی شده را رسم کنید. حل: چون

$$G_c(s)G(s) = \frac{K(s+1)(s+b)}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

جمع زاویه‌ها از صفر واقع در  $s = -1$  و قطبهای واقع در  $s = 0$ ،  $s = j$  و  $s = -j$  تا  $s = -1 \pm j\sqrt{3}$  (که یکی از قطبهای حلقه بسته مطلوب است) عبارت است از

$$90^\circ - 143.74^\circ - 120^\circ - 110.4^\circ = -283.89^\circ$$

پس صفر واقع در  $s = -b$  باید زاویه‌ای برابر  $103.89^\circ$  ایجاد کند. بنابراین صفر باید در محل زیر باشد

$$b = 0.5714$$

ثابت بهره  $K$  را می‌توان با توجه به شرط اندازه به دست آورد

$$\left| \frac{K(s+1)(s+0.5714)}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1$$

$$K = 2.3333$$

یا

پس جبران کننده را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G_c(s) = 2.3333 \frac{(s+1)(s+0.5714)}{s}$$

تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر درمی‌آید

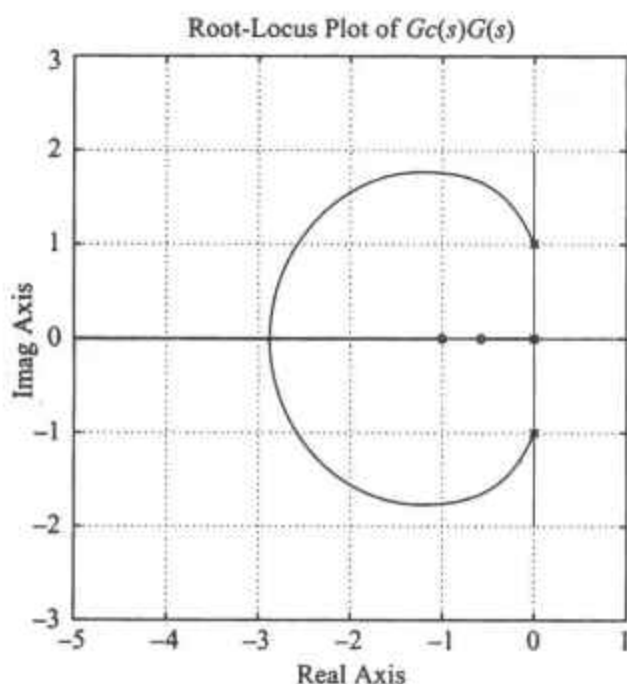
$$G_c(s)G(s) = \frac{2.3333(s+1)(s+0.5714)}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

برای این سیستم جبران شده مکان هندسی ریشه‌ها به صورت نشان داده شده در شکل ۸-۵۰ است.

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته عبارت است از

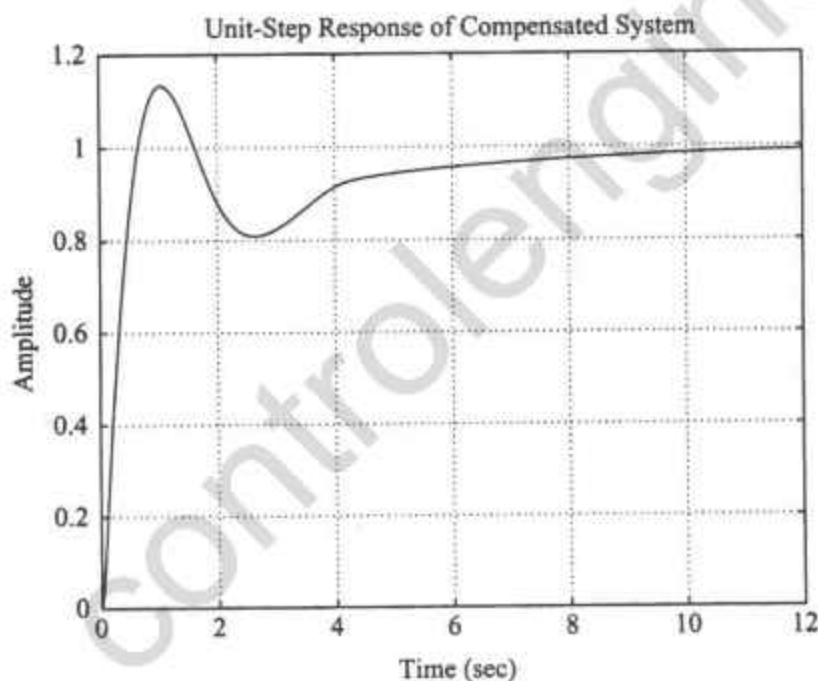
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2.3333(s+1)(s+0.5714)}{s^3 + s + 2.3333(s+1)(s+0.5714)}$$

قطبهای حلقه بسته در  $s = -1 \pm j\sqrt{3}$  و  $s = -0.3333$  قرار دارند. شکل ۸-۵۱ منحنی پاسخ پله را نشان



شکل ۸-۵۰

نمودار مکان هندسی ریشه‌های  
سیستم جبران شده (مسئله الف ۸-۶).

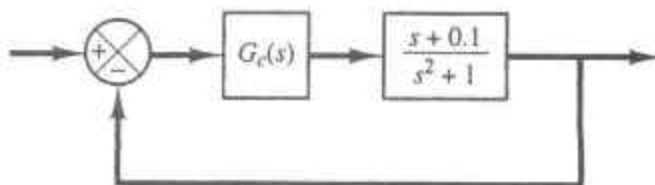


شکل ۸-۵۱

پاسخ پله واحد سیستم  
جبران شده.

می‌دهد. قطب حلقه بسته واقع در  $s = -0.3333$  و صفر واقع در  $s = -0.5714$  دنباله‌ای دراز و کوچک ایجاد کرده‌اند.

الف ۸-۷ سیستم نشان داده شده در شکل ۸-۵۲ را در نظر بگیرید. یک جبران‌ساز طراحی کنید به نحوی که ثابت خطای ایستای سرعت  $4 \text{ sec}^{-1}$ ، حاشیه فاز  $50^\circ$ ، و حاشیه بهره  $10 \text{ dB}$  یا بیشتر باشد. منحنی‌های پاسخ پله و پاسخ شیب واحد سیستم جبران شده را با استفاده از MATLAB رسم کنید. همچنین نمودار نایکویست سیستم جبران شده را نیز با استفاده از MATLAB رسم کنید. با استفاده از معیار پایداری نایکویست نشان دهید که سیستم طرح شده پایدار است.



شکل ۸-۵۲  
سیستم کنترل.

حل : چون دستگاه انتگرالگیر ندارد ، باید در جبران‌ساز یک انتگرالگیر منظور شود. جبران‌ساز را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$G_c(s) = \frac{K}{s} \hat{G}_c(s) \quad , \quad \lim_{s \rightarrow 0} \hat{G}_c(s) = 1$$

که در آن  $\hat{G}_c(s)$  را بعداً تعیین می‌کنیم . چون ثابت خطای ایستای سرعت برابر  $4 \text{ sec}^{-1}$  مشخص شده ، داریم

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) \frac{s+0.1}{s^2+1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s} \hat{G}_c(s) \frac{s+0.1}{s^2+1} = 0.1 K = 4$$

بنابراین  $K = 40$  . در نتیجه

$$G_c(s) = \frac{40}{s} \hat{G}_c(s)$$

اکنون نمودار بوده تابع تبدیل زیر را رسم می‌کنیم

$$\hat{G}_c(s) = \frac{40(s+0.1)}{s(s^2+1)}$$

برنامه ۸-۱۰ نمودار بوده  $G(s)$  را به صورت نشان داده شده در شکل ۸-۵۳ به دست می‌دهد .

حاشیه فاز باید  $50^\circ$  و حاشیه بهره  $10 \text{ dB}$  یا بیشتر باشد .  $\hat{G}_c(s)$  را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$\hat{G}_c(s) = as+1 \quad (a > 0)$$

بنابراین  $G_c(s)$  در ناحیه فرکانس بالا  $90^\circ$  پیشفازی ایجاد می‌کند . با استفاده از چند سعی و خطا به کمک MATLAB در می‌یابیم که به ازای  $a = 0.1526$  حاشیه فاز  $50^\circ$  و حاشیه بهره  $10 \text{ dB}$  می‌شود. برنامه ۸-۱۱ و نمودار بوده نشان داده شده در شکل ۸-۵۴ را ببینید. این نمودار بوده نشان می‌دهد که ثابت خطای ایستای سرعت  $4 \text{ sec}^{-1}$  ، حاشیه فاز  $50^\circ$  ، و حاشیه بهره  $10 \text{ dB}$  است . بنابراین سیستم طراحی شده تمام خواسته‌ها را برآورده می‌کند.

#### MATLAB Program 8-10

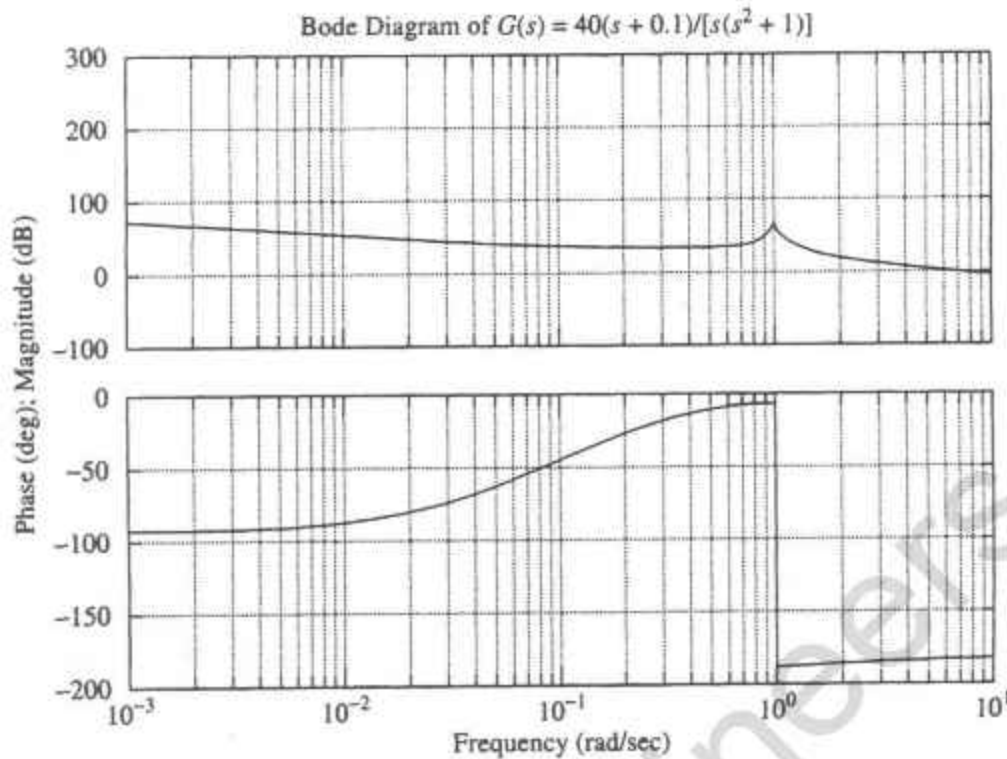
```
% ***** Bode Diagram *****
```

```
num = [40 4];
```

```
den = [1 0.000000001 1 0];
```

```
bode(num,den)
```

```
title('Bode Diagram of G(s) = 40(s+0.1)/[s(s^2+1)]')
```



شکل ۸-۵۳

نمودار بوده  $G_c(s) = \frac{K_0(s + \sigma_1)}{s(s^2 + 1)}$

#### MATLAB Program 8-11

% \*\*\*\*\* Bode Diagram \*\*\*\*\*

num = conv([40 4],[0.1526 1]);

den = [1 0.000000001 1 0];

sys = tf(num,den);

w = logspace(-2,2,100);

bode(sys,w)

[Gm,pm,wcp,wcg] = margin(sys);

GmdB = 20\*log10(Gm);

[GmdB,pm,wcp,wcg]

ans =

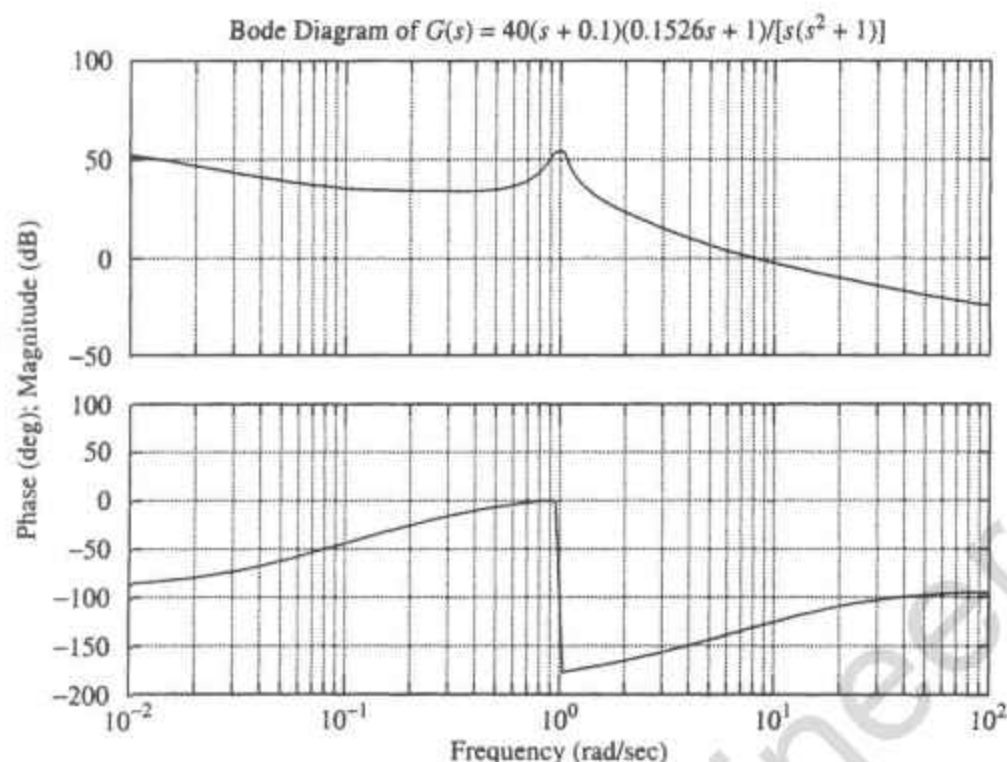
Inf 50.0026 NaN 8.0114

title('Bode Diagram of  $G(s) = 40(s+0.1)(0.1526s+1)/(s^2+1)$ ')

تابع تبدیل جبران‌ساز طراحی شده به صورت زیر است

$$G_c(s) = \frac{K_0}{s} \quad \hat{G}_c(s) = \frac{K_0(0.1526s+1)}{s}$$

تابع تبدیل حلقه باز سیستم جبران شده عبارت است از



شکل ۵۴-۸

نمودار بوده  $G(s) = 40(s + 0.1)(0.1526s + 1)/[s(s^2 + 1)]$ .

$$\begin{aligned} \text{تابع تبدیل حلقه باز} &= \frac{40(0.1526s + 1)}{s} \frac{s + 0.1}{s^2 + 1} \\ &= \frac{6.104s^2 + 40.6104s + 4}{s(s^2 + 1)} \end{aligned}$$

حال پاسخ پله واحد و پاسخ شیب واحد سیستم طراحی شده را واری می‌کنیم. تابع تبدیل حلقه بسته عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.104s^2 + 40.6104s + 4}{s^3 + 6.104s^2 + 41.6104s + 4}$$

قطبهای حلقه بسته در محلهای زیر قرار دارند

$$s = -3.0032 + j5.6573$$

$$s = -3.0032 - j5.6573$$

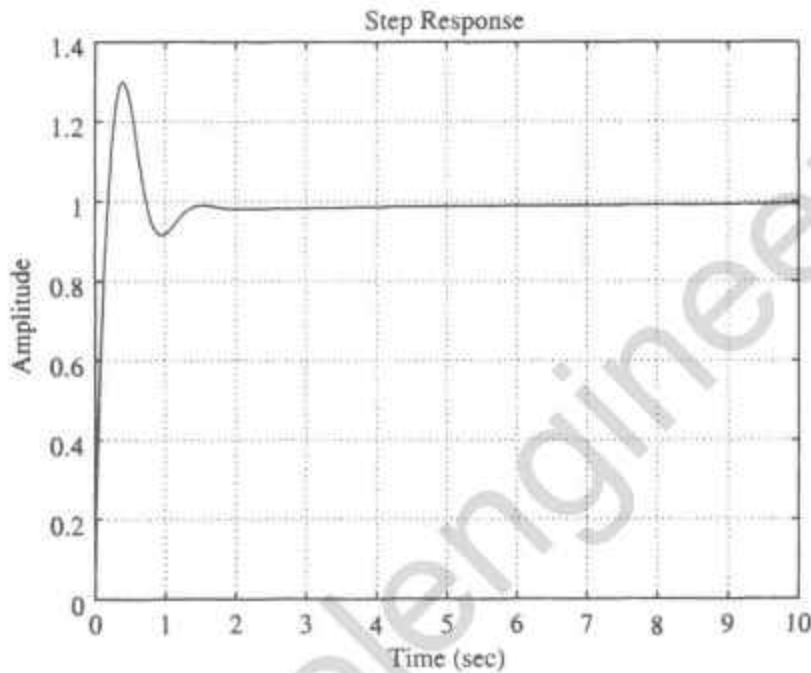
$$s = -0.0975$$

برنامه ۱۲-۸ منحنی پاسخ پله سیستم طراحی شده را به دست می‌دهد. منحنی پاسخ پله حاصل در شکل ۵۵-۸ نشان داده شده است. توجه کنید که قطب حلقه بسته واقع در  $s = -0.0975$  و صفر واقع در  $s = -0.1$  دنباله‌ای دراز و کوچک ایجاد کرده‌اند.

برنامه ۱۳-۸ منحنی پاسخ شیب واحد سیستم طراحی شده را به دست می‌دهد. این منحنی در شکل ۵۶-۸ نشان داده شده است.

### MATLAB Program 8-12

```
% ***** Unit-Step Response *****  
num = [6.104 40.6104 4];  
den = [1 6.104 41.6104 4];  
t = 0:0.01:10;  
step(num,den,t)  
grid
```



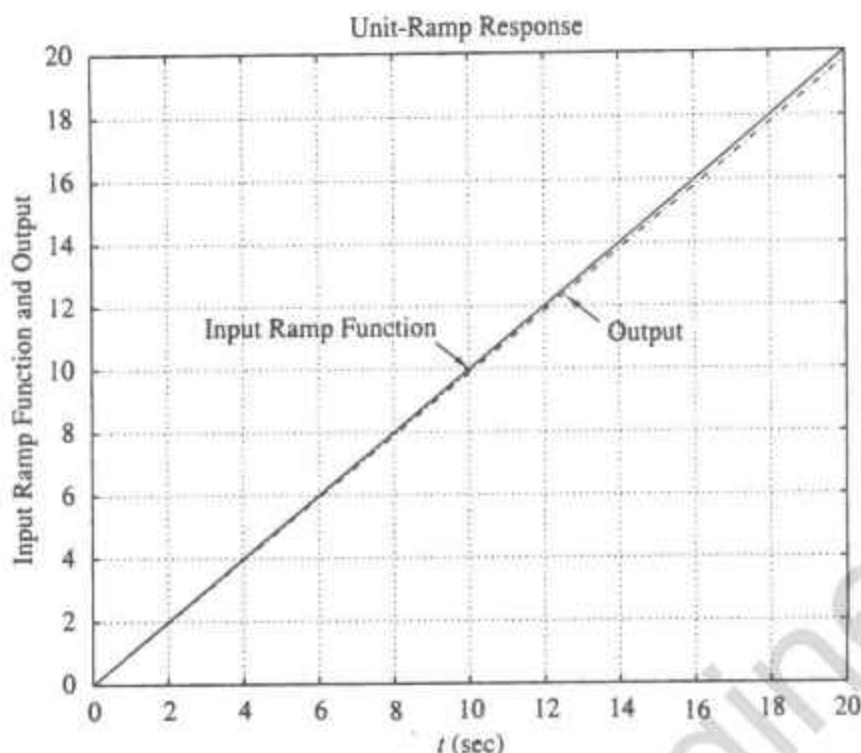
شکل ۸-۵۵

منحنی پاسخ پله واحد

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6.104s^2 + 40.6104s + 4}{s^3 + 6.104s^2 + 41.6104s + 4}$$

### MATLAB Program 8-13

```
% ***** Unit-Ramp Response *****  
num = [0 0 6.104 40.6104 4];  
den = [1 6.104 41.6104 4 0];  
t = 0:0.01:20;  
c = step(num,den,t);  
plot(t,c,'-','t,t','-')  
title('Unit-Ramp Response')  
xlabel('t(sec)')  
ylabel('Input Ramp Function and Output')  
text(3,11.5,'Input Ramp Function')  
text(13.8,11.2,'Output')
```



شکل ۸-۵۶

منحنی پاسخ شیب واحد

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6/104s^2 + 40/6104s + 4}{s^3 + 6/104s^2 + 41/6104s + 4}$$

نمودار نایکویست. قبلاً دیدیم که قطبهای حلقه بسته سیستم طراحی شده همگی در نیمه چپ صفحه  $s$  قرار دارند. بنابراین سیستم طراحی شده پایدار است. هدف از رسم نمودار نایکویست در اینجا آزمون پایداری سیستم نیست، بلکه یافتن درک بهتری از تحلیل پایداری نایکویست است. برای یک سیستم پیچیده نمودار نایکویست آنقدر پیچیده است که نمی‌توان به سادگی تشخیص داد نقطه  $1 + j\omega$  چند بار دور زده می‌شود. چون سیستم طراحی شده سه قطب حلقه باز بر روی محور  $j\omega$  دارد، و نمودار نایکویست، همانطور که خواهیم دید، خیلی پیچیده است.

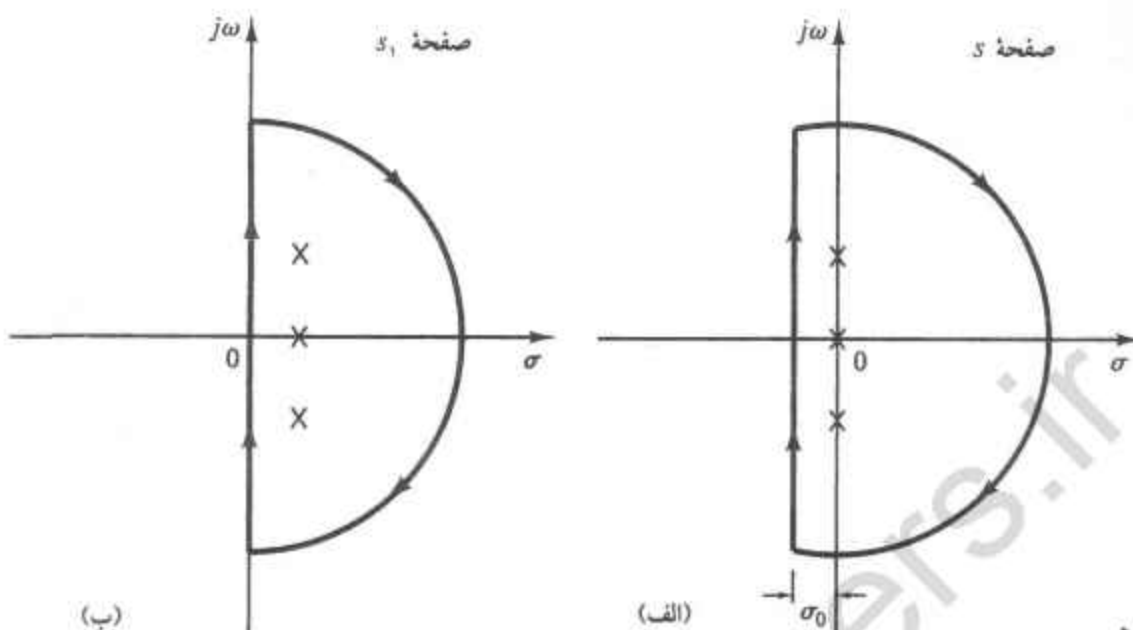
تابع تبدیل حلقه باز سیستم طراحی شده را  $G(s)$  می‌نامیم. داریم

$$G(s) = G_c(s) \frac{s + 0.1}{s^2 + 1} = \frac{6/104s^2 + 40/6104s + 4}{s(s^2 + 1)}$$

یک مسیر نایکویست اصلاح شده مطابق شکل ۸-۵۷ (الف) انتخاب می‌کنیم. این مسیر سه قطب حلقه باز (واقع در  $s=0$ ،  $s=j$ ، و  $s=-j$ ) را در بر دارد. اکنون قرار می‌دهیم  $s_1 = s + \sigma$ . در این صورت مسیر نایکویست در صفحه  $s_1$  به صورت نشان داده شده در شکل ۸-۵۷ (ب) در می‌آید. در صفحه  $s_1$  تابع تبدیل حلقه باز سه قطب در نیمه راست صفحه دارد.

با انتخاب  $\sigma = 0.1$ ، چون  $s = s_1 - \sigma$  به دست می‌آوریم

$$G(s) = G(s_1 - 0.1)$$



شکل ۸-۵۷

(الف) مسیر نایکوئیست اصلاح شده در صفحه  $s$ ، (ب) مسیر نایکوئیست در صفحه  $s_1$ .

$$\begin{aligned} \text{تابع تبدیل حلقه باز} &= \frac{6.104(s_1^2 - 0.02s_1 + 0.00001) + 40.6104(s_1 - 0.01) + 4}{(s_1 - 0.01)(s_1^2 - 0.02s_1 + 1.00001)} \\ &= \frac{6.104s_1^2 + 40.48832s_1 + 3.5945064}{s_1^3 - 0.02s_1^2 + 1.0003s_1 - 0.010001} \end{aligned}$$

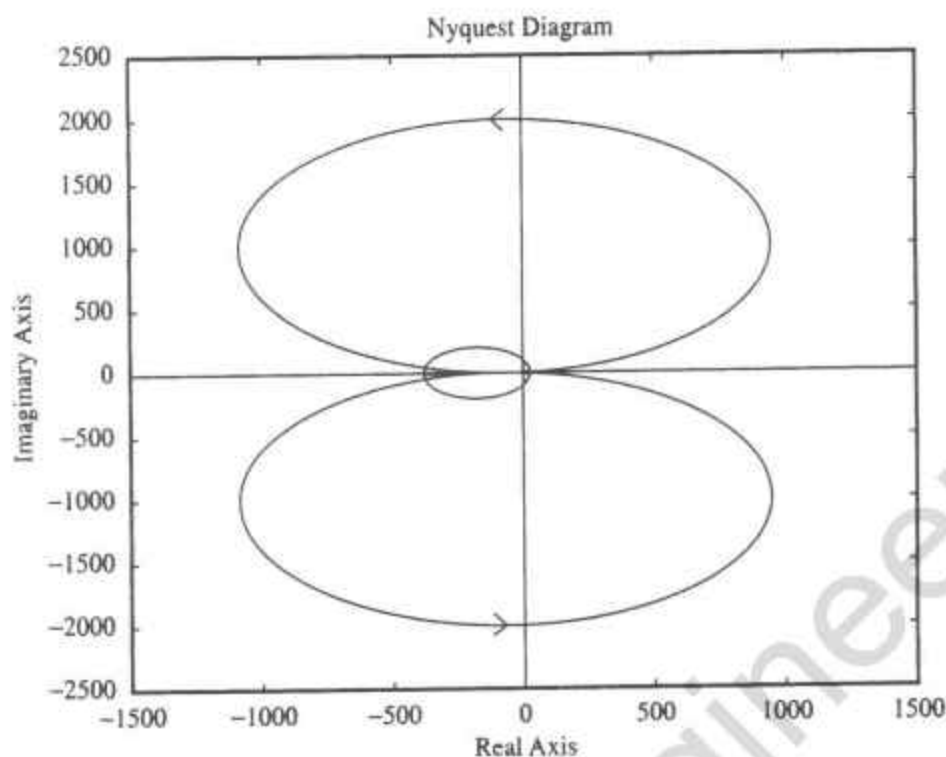
برنامه ۸-۱۴ یک برنامه MATLAB برای رسم نمودار نایکوئیست را نشان می‌دهد. نمودار نایکوئیست حاصل در شکل ۸-۵۸ نشان داده شده است.

#### MATLAB Program 8-14

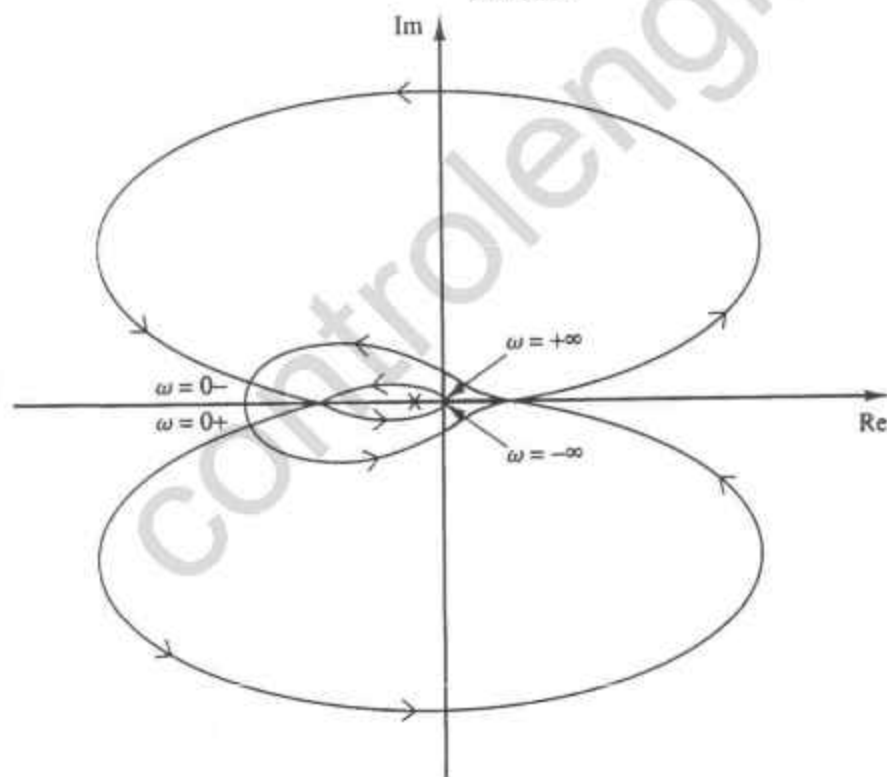
```
% ***** Nyquist Plot *****
num = [6.104 40.48832 3.5945064];
den = [1 -0.03 1.0003 -0.010001];
nyquist(num,den)
v = [-1500 1500 -2500 2500]; axis(v)
```

نمودار نایکوئیست حاصل نمی‌تواند به سادگی تعداد دورهای حول نقطه  $z = -1$  را نشان دهد. به همین خاطر باید این نمودار نایکوئیست را به صورتی رسم کنیم که جزییات آن در نزدیکی نقطه  $z = -1$  آشکار شود. نمودار نایکوئیست حاصل در شکل ۸-۵۹ نشان داده شده است.

با توجه به این نمودار می‌بینیم که نقطه  $z = -1$  سه بار در جهت پادساعتگرد دور زده می‌شود. بنابراین  $N = -3$ . چون تابع تبدیل حلقه باز در نیمه راست صفحه  $s_1$  سه قطب دارد، داریم  $P = 3$ . در نتیجه  $Z = N + P = 0$ . یعنی هیچ قطب حلقه بسته‌ای در نیمه راست صفحه  $s_1$  وجود ندارد. بنابراین سیستم پایدار است.



شکل ۸-۵۸  
نمودار نایکوئیست.

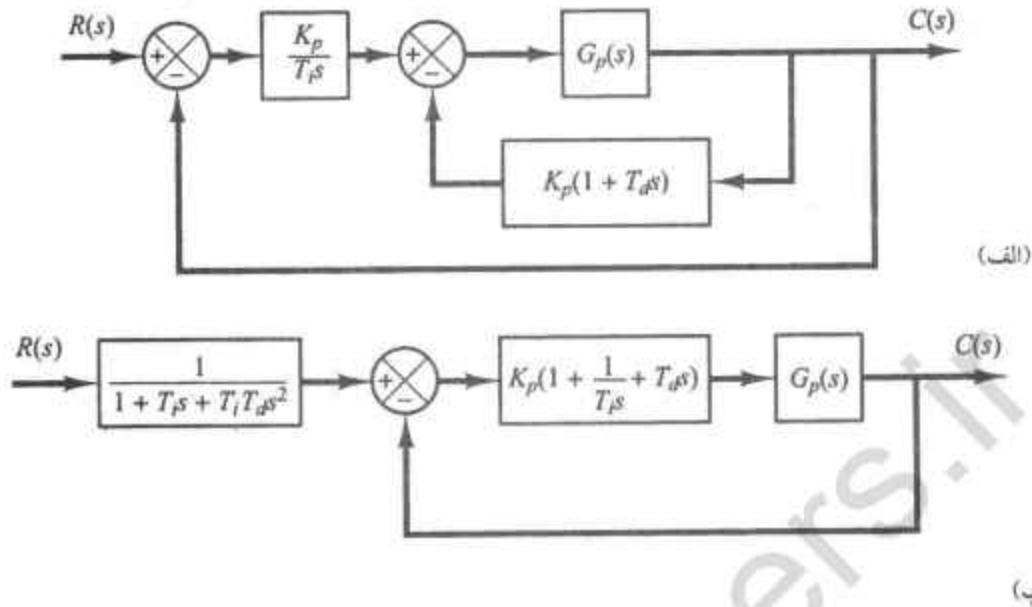


شکل ۸-۵۹  
باز ترسیم نمودار نایکوئیست.

الف ۸-۸ نشان دهید که سیستم دارای کنترل I-PD شکل ۸-۶۰ (الف) با سیستم دارای کنترل PID و فیلتر ورودی شکل ۸-۶۰ (ب) هم‌ارز است.

حل: تابع تبدیل حلقه بسته  $C(s)/R(s)$  سیستم دارای کنترل I-PD عبارت است از

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p G_p(s)}{T_I s}$$



شکل ۸-۶۰ (الف) سیستم دارای کنترل I-PD؛ (ب) سیستم دارای کنترل PID و فیلتر ورودی.

تابع تبدیل حلقه بسته  $C(s)/R(s)$  سیستم دارای کنترل PID و فیلتر ورودی عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{1}{1 + T_i s + T_i T_d s^2} \frac{K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) G_p(s)}{1 + K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) G_p(s)} \\ &= \frac{\frac{K_p}{T_i s} G_p(s)}{1 + K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) G_p(s)} \end{aligned}$$

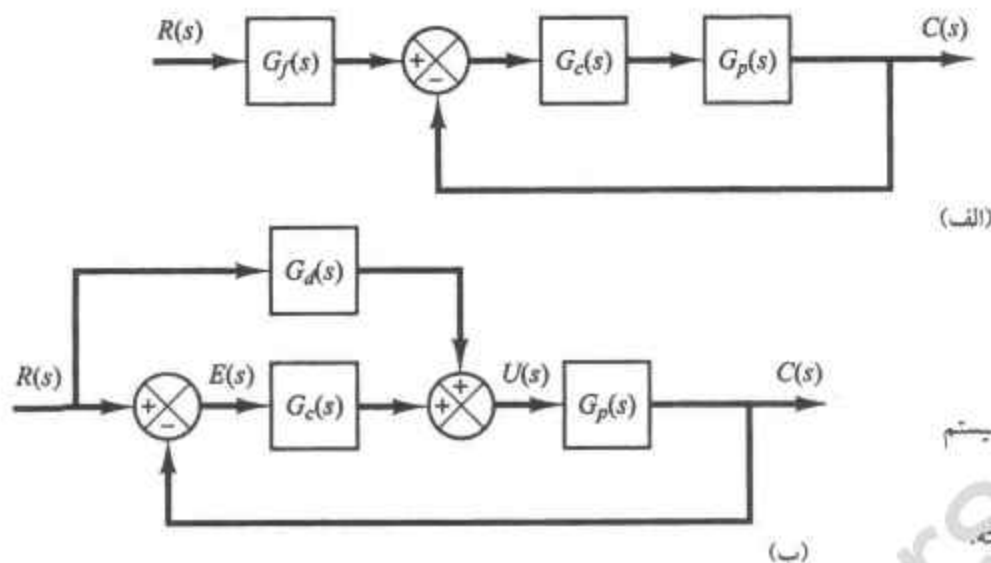
تابع تبدیل حلقه بسته هر دو سیستم یکی است. پس دو سیستم هم ارزند.

الف ۸-۹ ایده اصلی کنترل I-PD پرهیز از سیگنالهای کنترلی بزرگ در سیستم است (که می‌تواند باعث بروز پدیده اشباع شود). با آوردن عملهای کنترلی تناسبی و انتگرالی به مسیر فیدبک، امکان انتخاب  $K_p$  و  $T_d$  بزرگتر (نسبت به طرح کنترل PID) فراهم می‌شود.

پاسخ سیستم دارای کنترل PID و سیستم دارای کنترل I-PD به ورودی اغتشاش و ورودی مرجع را به طور کیفی مقایسه کنید.

حل: ابتدا پاسخ سیستم دارای کنترل I-PD به ورودی اغتشاش را در نظر بگیرید. چون در کنترل I-PD می‌توان مقادیر  $K_p$  و  $T_d$  را بزرگتر از حالت کنترل PID برگزید، سیستم دارای کنترل I-PD اثرهای اغتشاش را سریعتر از سیستم دارای کنترل PID فرو می‌نشاند.

حال پاسخ سیستم دارای کنترل I-PD به ورودی مرجع را در نظر بگیرید. چون از لحاظ ورودی مرجع کنترل I-PD و کنترل PID همراه با فیلتر ورودی هم‌ارزند (مسئله الف ۸-۸ را ببینید)، سیستم دارای کنترل PID پاسخی سریعتر از سیستم دارای کنترل I-PD دارد، به شرط این که در سیستم PID پدیده اشباع بروز نکند.



شکل ۸-۶۱

(الف) نمودار بلوکی یک سیستم

کنترل دارای فیلتر ورودی؛

(ب) نمودار بلوکی تغییر یافته.

الف ۸-۱۵ در بعضی موارد گذاشتن فیلتر ورودی مطابق شکل ۸-۶۱ (الف) امری مطلوب است. توجه کنید که فیلتر ورودی  $G_f(s)$  خارج حلقه قرار دارد، بنابراین بر پایداری و عملکرد حلقه بسته سیستم بی تاثیر است. مزیت داشتن فیلتر ورودی این است که می توان صفرهای تابع تبدیل حلقه بسته را اصلاح کرد (آنها را حذف کرد یا به جایشان صفر دیگری ایجاد کرد) و به این ترتیب به پاسخ قابل قبول دست یافت.

نشان دهید که آرایش شکل ۸-۶۱ (الف) را می توان به صورت آرایش شکل ۸-۶۱ (ب) درآورد، به شرطی که داشته باشیم  $G_d(s) = [G_f(s) - 1]G_c(s)$ . ساختار جبران سازی نشان داده شده در شکل ۸-۶۱ (ب) را گاهی جبران سازی فرمان می نامند.

حل: برای سیستم شکل ۸-۶۱ (الف) داریم

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_f(s) \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \quad (۸-۱۵)$$

برای سیستم شکل ۸-۶۱ (ب) داریم

$$U(s) = G_d(s)R(s) + G_c(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$C(s) = G_p(s)U(s)$$

پس

$$C(s) = G_p(s)\{G_d(s)R(s) + G_c(s)[R(s) - C(s)]\}$$

یا

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{[G_d(s) + G_c(s)]G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \quad (۸-۱۶)$$

با گذاشتن  $G_d(s) = [G_f(s) - 1]G_c(s)$  در معادله (۸-۱۶) به دست می آوریم

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{[G_f(s) G_c(s) - G_c(s) + G_c(s)] G_p(s)}{1 + G_c(s) G_p(s)} \\ &= G_f(s) \frac{G_c(s) G_p(s)}{1 + G_c(s) G_p(s)}\end{aligned}$$

که همان معادله (۸-۱۵) است. به این ترتیب هم‌ارزی سیستمهای شکل‌های ۸-۶۱ (الف) و (ب) ثابت می‌شود. توجه کنید که سیستم شکل ۸-۶۱ (ب) یک کنترل کننده  $G_d(s)$  پیشخوردی دارد. بنابراین  $G_d(s)$  بر پایداری بخش حلقه بسته سیستم تأثیری ندارد.

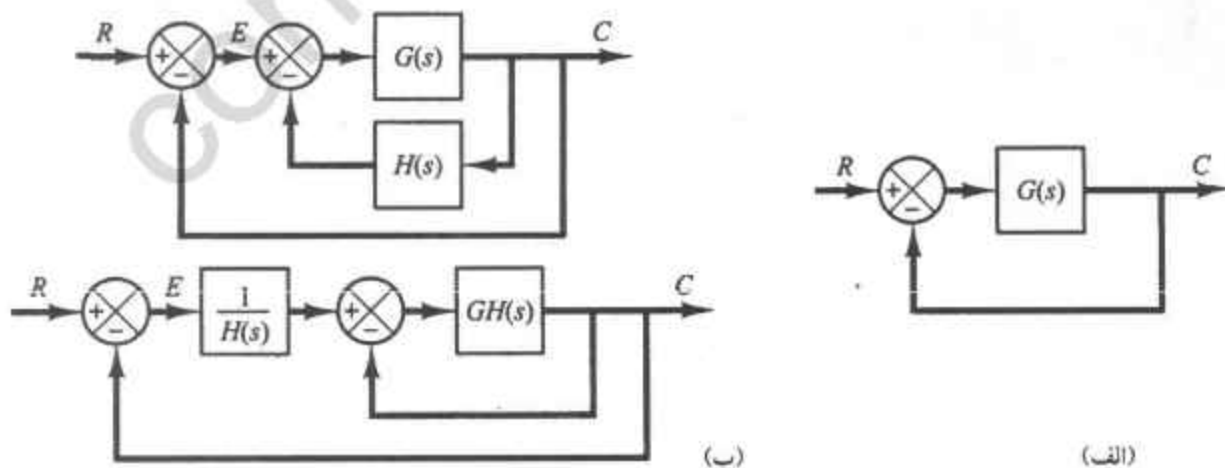
الف ۸-۱۱ سیستم حلقه بسته این مشخصه را دارد که به ازای بهره حلقه باز بسیار بزرگتر از یک، تابع تبدیل حلقه بسته تقریباً با عکس تابع تبدیل فیدبک برابر است. برای تصحیح مشخصه حلقه باز می‌توان یک حلقه فیدبک داخلی اضافه کرد که مشخصه‌اش عکس مشخصه حلقه باز مطلوب را داشته باشد. یک سیستم دارای فیدبک واحد و تابع تبدیل حلقه باز زیر در نظر بگیرد

$$G(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

تابع تبدیل  $H(s)$  عنصر فیدبک حلقه داخلی را چنان تعیین کنید که حلقه داخلی هم در فرکانسهای پایین و هم در فرکانسهای بالا بی‌اثر باشد.

حل: شکل ۸-۶۲ (الف) سیستم اصلی را نشان می‌دهد. شکل ۸-۶۲ (ب) افزودن حلقه فیدبک داخلی حول  $G(s)$  را نشان می‌دهد. چون

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)} \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



شکل ۸-۶۲ (الف) سیستم کنترل؛ (ب) افزودن حلقه فیدبک داخلی برای تصحیح مشخصات حلقه بسته.

اگر بهره داخلی خیلی بزرگتر از یک باشد،  $G(s)H(s)/[1+G(s)H(s)]$  تقریباً برابر یک و تابع تبدیل  $C(s)/E(s)$  تقریباً برابر  $1/H(s)$  است.

ولی اگر بهره  $|G(s)H(s)|$  از یک بسیار کوچکتر باشد، حلقه داخلی بی‌اثر بوده  $C(s)/E(s)$  تقریباً برابر  $G(s)$  می‌شود. برای این که حلقه داخلی هم در فرکانسهای پایین و هم در فرکانسهای بالا بی‌اثر باشد باید داشته باشیم

$$|G(j\omega)H(j\omega)| \ll 1 \quad \omega \ll 1 \quad \text{و} \quad \omega \gg 1$$

چون در این مسئله

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$$

با انتخاب  $H(s)$  به صورت زیر

$$H(s) = ks$$

شرایط لازم ارضا می‌شود، زیرا

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{Kk j\omega}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega)H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{Kk j\omega}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} = 0$$

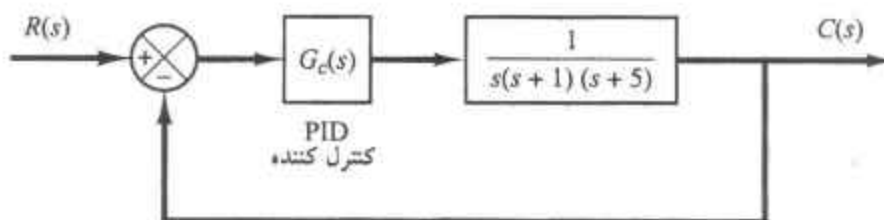
پس با  $H(s) = ks$  (فیدبک سرعت) حلقه داخلی هم در فرکانسهای پایین و هم در فرکانسهای بالا بی‌اثر می‌شود. حلقه داخلی تنها در ناحیه فرکانسهای میانی اثر دارد.

الف ۸-۱۲ سیستم کنترل شکل ۸-۶۳ را در نظر بگیرید. این همان سیستمی است که در مثال ۸-۱ در نظر گرفتیم. در آن مثال یک کنترل کننده PID طراحی کردیم، و به این منظور کار را از روش دوم زیگلر-نیکولس شروع کردیم. در اینجا می‌خواهیم با استفاده از رهیافت محاسباتی کنترل کننده PID را به کمک MATLAB طراحی کنیم. مقادیر  $a$  و  $K$  کنترل کننده PID زیر را تعیین می‌کنیم

$$G_c(s) = K \frac{(s+a)^2}{s}$$

به نحوی که پاسخ پله واحد ماکزیمم فراجشی بین ۱۰٪ و ۲٪ داشته (یعنی  $10 \leq \text{ماکزیمم خروجی} \leq 102$ )، زمان نشست خروجی کمتر از ۳ sec باشد. ناحیه جستجو را به صورت زیر برمی‌گزینیم

$$2 \leq K \leq 50, \quad 0.5 \leq a \leq 2$$



شکل ۸-۶۳

سیستم کنترل

گام تغییرات  $K$  را ۱ و گام تغییرات  $a$  را ۰/۰۵ برمی‌گزینیم.

یک برنامه MATLAB بنویسید که ابتدا مقادیر  $K$  و  $a$  ارضا کننده مشخصات را به دست آورد. همچنین یک برنامه MATLAB بنویسید که تمام مقادیر  $K$  و  $a$  برآورنده مشخصات را به دست آورد. منحنی‌های پاسخ پله سیستم طراحی شده را به ازای مقادیر برگزیده  $K$  و  $a$  رسم کنید.

حل: تابع تبدیل دستگاه عبارت است از

$$G_p(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 5s}$$

تابع تبدیل حلقه بسته  $C(s)/R(s)$  برابر است با

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ks^2 + 2Kas + Ka^2}{s^3 + 6s^2 + (5+K)s^2 + 2Kas + Ka^2}$$

یک برنامه MATLAB که اولین مجموعه قابل قبول  $K$  و  $a$  را به دست می‌آورد، برنامه ۸-۱۵ است. در این برنامه دو حلقه for به کار رفته است. مشخصات زمان نشست توسط چهار خط زیر برآورد می‌شود

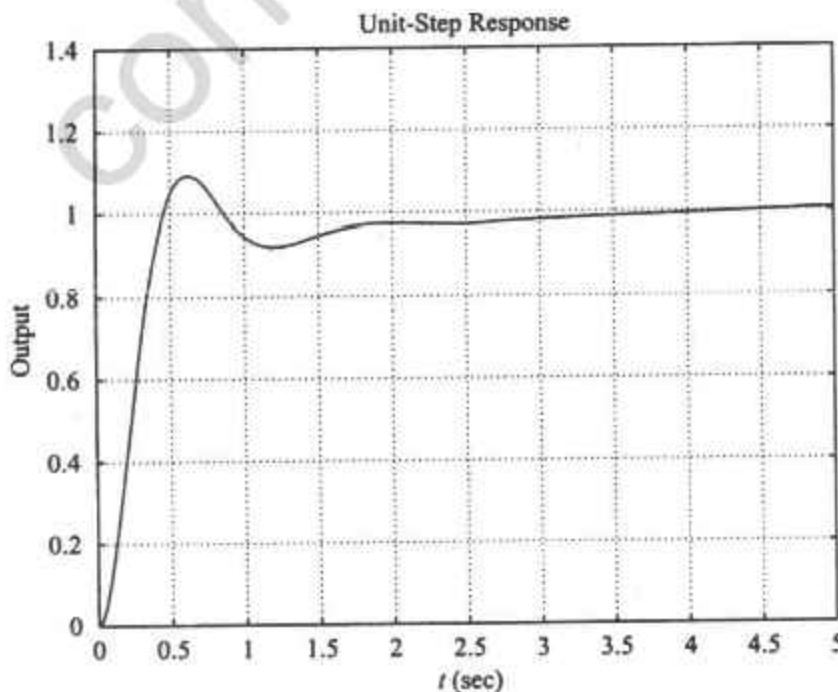
```
s=501;while y(s)>0.98 and y(s)<1.02;
s=s-1;end;
ts=(s-1)*0.01
ts<3.0
```

توجه کنید که به ازای  $t=0:0.01:5$ ، ۵۰۱ نقطه محاسباتی وجود دارد.  $s=501$  با آخرین نقطه متناظر است.

جوابی که این برنامه به دست می‌دهد عبارت است از

$$K=32 \quad , \quad a=0.2$$

که با ماکزیمم فراجش ۹/۶۹٪ و زمان نشست ۲/۶۴ sec متناظر است. منحنی پاسخ پله در شکل ۸-۶۴ نشان داده شده است.



شکل ۸-۶۴

منحنی پاسخ پله واحد.

**MATLAB Program 8-15**

```

t = 0:0.01:5;
for K = 50:-1:2;
    for a = 2:-0.05:0.05;
        num = [K 2*K*a K*a^2];
        den = [1 6 5+K 2*K*a K*a^2];
        y = step(num,den,t);
        m = max(y);
        s = 501; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02;
            s = s-1; end;
        ts = (s-1)*0.01;
        if m < 1.10 & m > 1.02 & ts < 3.0
            break;
        end
    end
    if m < 1.10 & m > 1.02 & ts < 3.0
        break
    end
end
plot(t,y)
grid
title('Unit-Step Response')
xlabel('t sec')
ylabel('Output')
solution = [K;a;m;ts]

solution =
32.0000
0.2000
1.0969
2.6400

```

حال می‌خواهیم تمام مجموعه‌هایی را بیابیم که به ازای آنها مشخصات بیان شده ارضا می‌شود. یک برنامه MATLAB ممکن برای این منظور برنامه ۸-۱۶ است. توجه کنید که در جدول به دست آمده توسط این برنامه آخرین ردیف جدول  $(k, a)$ ، یا اولین ردیف جدول مرتب شده، باید ندیده گرفت. (اینها آخرین مقادیر به کار رفته برای جستجو هستند.)

با توجه به جدول مرتب شده می‌بینیم که

$K = 29, a = 0.25$  (ماکزیمم فراجش = ۹۵۲٪، زمان نشست = ۱٫۷۸ s)

$K = 27, a = 0.2$  (ماکزیمم فراجش = ۵۵٪، زمان نشست = ۲٫۸۹ s)

**MATLAB Program 8-16**

```

t = 0:0.01:5;
k = 0;
for i = 1:49;
    K(i) = 51-i*1;
    for j = 1:40;
        a(j) = 2.05-j*0.05;
        num = [K(i) 2*K(i)*a(j) K(i)*a(j)*a(j)];
        den = [1 6 5+K(i) 2*K(i)*a(j) K(i)*a(j)*a(j)];
        y = step(num,den,t);
        m = max(y);
        s = 501; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02;
            s = s-1; end;
        ts = (s-1)*0.01;
        if m < 1.10 & m > 1.02 & ts < 3.0
            k = k+1;
            table(k,:) = [K(i) a(j) m ts];
        end
    end
end
table(k,:) = [K(i) a(j) m ts]
table =

    32.0000    0.2000    1.0969    2.6400
    31.0000    0.2000    1.0890    2.6900
    30.0000    0.2000    1.0809    2.7300
    29.0000    0.2500    1.0952    1.7800
    29.0000    0.2000    1.0726    2.7800
    28.0000    0.2000    1.0639    2.8300
    27.0000    0.2000    1.0550    2.8900
     2.0000    0.0500    0.3781    5.0000

sorttable = sortrows(table,3)

sorttable =

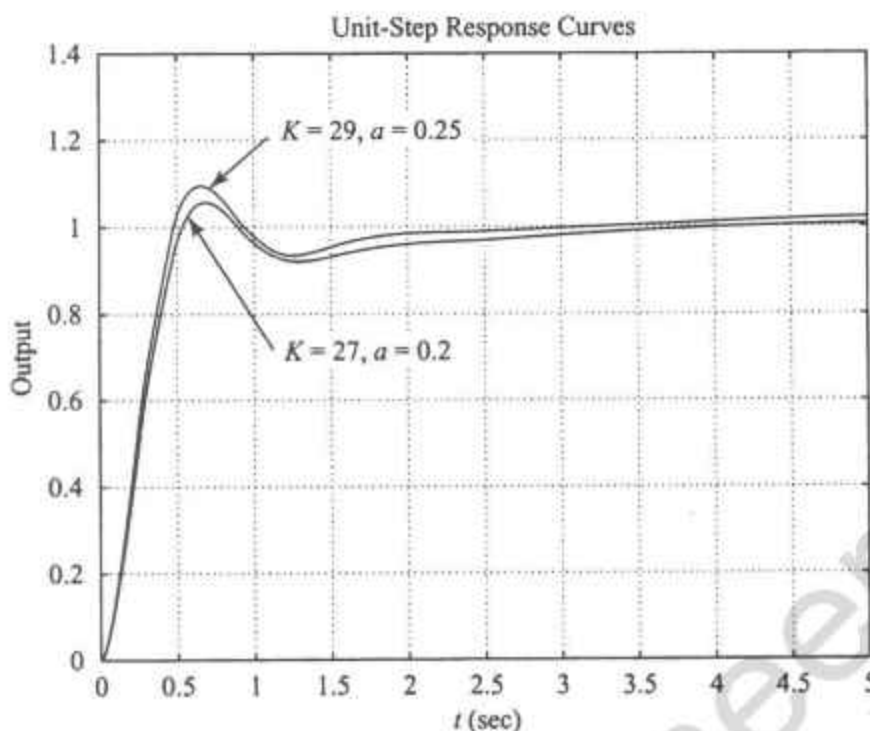
     2.0000    0.0500    0.3781    5.0000
    27.0000    0.2000    1.0550    2.8900
    28.0000    0.2000    1.0639    2.8300
    29.0000    0.2000    1.0726    2.7800
    30.0000    0.2000    1.0809    2.7300
    31.0000    0.2000    1.0890    2.6900
    29.0000    0.2500    1.0952    1.7800
    32.0000    0.2000    1.0969    2.6400
    
```

```
K = sorttable(7,1)
K =
    29
a = sorttable(7,2)
a=
    0.2500
num = [K 2*K*a K*a^2];
den = [1 6 5+K 2*K*a K*a^2];
y = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
hold
Current plot held
K = sorttable(2,1)
K=
    27
a = sorttable(2,2)
a=
    0.2000
num = [K 2*K*a K*a^2];
den = [1 6 5+K 2*K*a K*a^2];
y = step(num,den,t);
plot(t,y)
title('Unit-Step Response Curves')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Output')
text(1.22,1.22,'K = 29, a = 0.25')
text(1.22,0.72,'K = 27, a = 0.2')
```

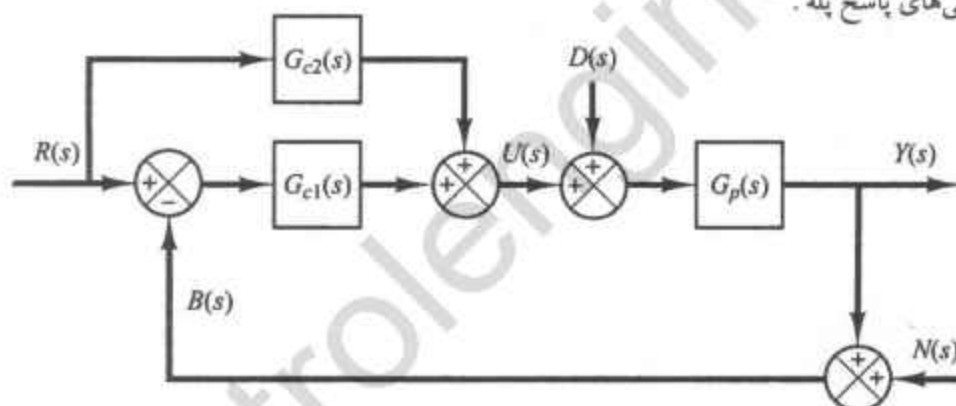
بهترین انتخابهای ممکن هستند. پاسخ پله به ازای این دو حالت در شکل ۸-۶۵ نشان داده شده است. با توجه به این منحنی می‌توانیم نتیجه بگیریم که بهترین انتخاب به هدف سیستم بستگی دارد. اگر بخواهیم ماکزیمم فراجش کوچک باشد  $a=0.2$ ،  $K=27$  بهترین انتخاب است. اگر زمان نشست کوچک مهمتر از ماکزیمم فراجش باشد  $a=0.25$ ،  $K=29$  بهترین انتخاب است.

الف ۸-۱۳ سیستم کنترل با دو درجه آزادی شکل ۸-۶۶ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل دستگاه عبارت است از

$$G_p(s) = \frac{100}{s(s+1)}$$



شکل ۸-۶۵ منحنی‌های پاسخ پله.



شکل ۸-۶۶ سیستم کنترل با دو درجه آزادی.

فرض کنید که ورودی نویز  $N(s)$  صفر است و کنترل‌کننده‌های  $G_{c1}(s)$  و  $G_{c2}(s)$  را به نحوی طرح کنید که خواسته‌های زیر برآورده شود:

۱. پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای دامنه کوچکی داشته باشد و به سرعت مستهلک شود (در حدود ۱ sec تا ۲ sec).
۲. پاسخ به ورودی مرجع پله واحد دارای ماکزیمم فراجش ۲۵٪ یا کمتر، و زمان نشست ۱ sec یا کمتر باشد.
۳. خطاهای حالت ماندگار در دنبال کردن ورودی مرجع شیب صفر باشد.

حل: تابع تبدیل حلقه بسته برای ورودی اغتشاش و ورودی مرجع به ترتیب عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_{c1}(s)G_p(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{[G_{c1}(s) + G_{c2}(s)] G_p(s)}{1 + G_{c1}(s) G_p(s)}$$

فرض می‌کنیم که  $G_{c1}(s)$  یک کنترل کننده PID به شکل زیر است

$$G_{c1}(s) = \frac{K(s+a)^2}{s}$$

معادله مشخصه سیستم عبارت است از

$$1 + G_{c1}(s) G_p(s) = 1 + \frac{K(s+a)^2}{s} \frac{100}{s(s+1)}$$

توجه کنید که قطبهای حلقه بسته در  $s=0$  (دو قطب) و  $s=-1$  قرار دارند. صفرها در  $s=-a$  (دو قطب) قرار دارند.

در ادامه رهیافت مکان هندسی ریشه‌ها را برای تعیین  $a$  و  $K$  به کار می‌بریم. فرض کنید می‌خواهیم قطبهای حلقه بسته غالب را در  $s=-5 \pm j5$  قرار دهیم. کمبود زاویه در محل قطب مطلوب، یعنی در  $s=-5+j5$  عبارت است از

$$-135^\circ - 135^\circ - 128.66^\circ + 180^\circ = -218.66^\circ$$

دو صفر واقع در  $s=-a$  باید زاویه  $218.66^\circ$  را ایجاد کنند (یعنی هر کدام زاویه  $109.33^\circ$  را به وجود آورند). با محاسبه‌ای ساده به دست می‌آوریم

$$a = 3.2460$$

پس کنترل کننده  $G_{c1}(s)$  به صورت زیر تعیین می‌شود

$$G_{c1}(s) = \frac{K(s+3.2460)^2}{s}$$

ثابت  $K$  باید با توجه به شرط اندازه تعیین شود

$$|G_{c1}(s) G_p(s)|_{s=-5+j5} = 1$$

چون

$$G_{c1}(s) G_p(s) = \frac{K(s+3.2460)^2}{s} \frac{100}{s(s+1)}$$

به دست می‌آوریم

$$K = \left| \frac{s^2(s+1)}{100(s+3.2460)^2} \right|_{s=-5+j5} = 0.11403$$

پس کنترل کننده  $G_{c1}(s)$  به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}
 G_{cl}(s) &= \frac{0.11403(s+3/2460)^2}{s} \\
 &= \frac{0.11403s^2 + 0.74028s + 1/20148}{s} \quad (17-8) \\
 &= 0.74028 + \frac{1/20148}{s} + 0.11403s
 \end{aligned}$$

به این ترتیب تابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/D(s)$  به صورت زیر است

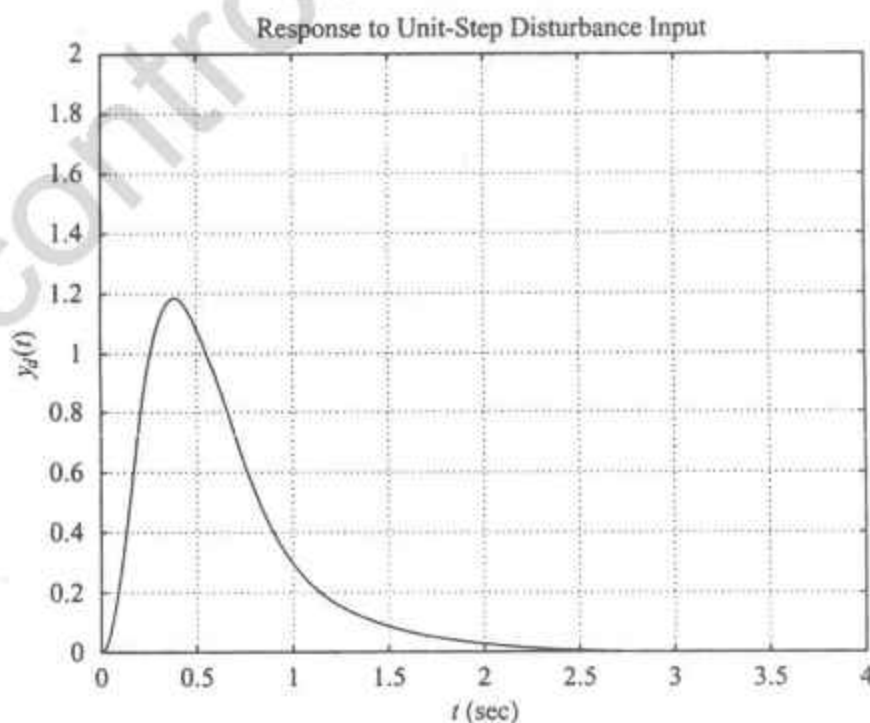
$$\begin{aligned}
 \frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{G_p(s)}{1 + G_{cl}(s)G_p(s)} \\
 &= \frac{100}{s(s+1)} \\
 &= \frac{0.11403(s+3/2460)^2}{1 + \frac{0.11403(s+3/2460)^2}{s} \cdot \frac{100}{s(s+1)}} \\
 &= \frac{100s}{s^3 + 12/403s^2 + 74/028s + 120/148}
 \end{aligned}$$

منحنی پاسخ در حالتی که  $D(s)$  یک اغتشاش پله واحد است در شکل ۶۷-۸ نشان داده شده است. حال پاسخ به ورودی مرجع را در نظر می‌گیریم. تابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/R(s)$  عبارت است از

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{[G_{cl}(s) + G_{cr}(s)]G_p(s)}{1 + G_{cl}(s)G_p(s)}$$

$$G_{cl}(s) + G_{cr}(s) = G_c(s)$$

تعریف می‌کنیم



شکل ۶۷-۸ پاسخ به ورودی اغتشاش پله واحد.

پس

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} \\ &= \frac{100sG_c(s)}{s^3 + 12/403s^2 + 74/028s + 120/148}\end{aligned}$$

برای ارضای خواسته های مربوط به ورودی مرجع شیب و ورودی مرجع شتاب رهیافت جایدهی صفر را پی می گیریم. یعنی صورت  $Y(s)/R(s)$  را برابر سه جمله آخر مخرج انتخاب می کنیم، یا

$$100sG_c(s) = 12/403s^2 + 74/028s + 120/148$$

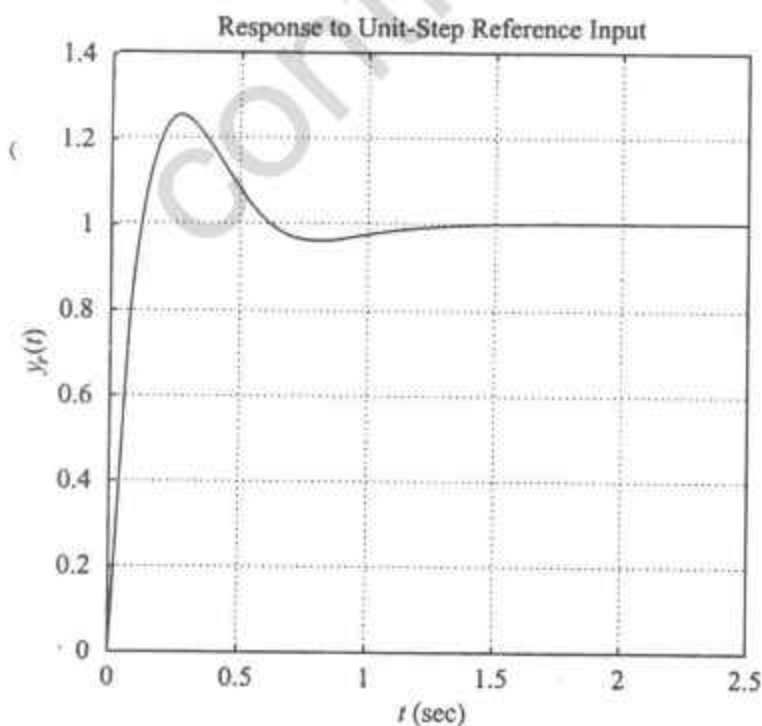
و از آن به دست می آوریم

$$\begin{aligned}G_c(s) &= \frac{0/12403s^2 + 0/74028s + 1/20148}{s} \\ &= 0/74028 + \frac{1/20148}{s} + 0/12403s\end{aligned}\quad (18-8)$$

پس تابع تبدیل حلقه بسته  $Y(s)/R(s)$  به صورت زیر است

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{12/403s^2 + 74/028s + 120/148}{s^3 + 12/403s^2 + 74/028s + 120/148}$$

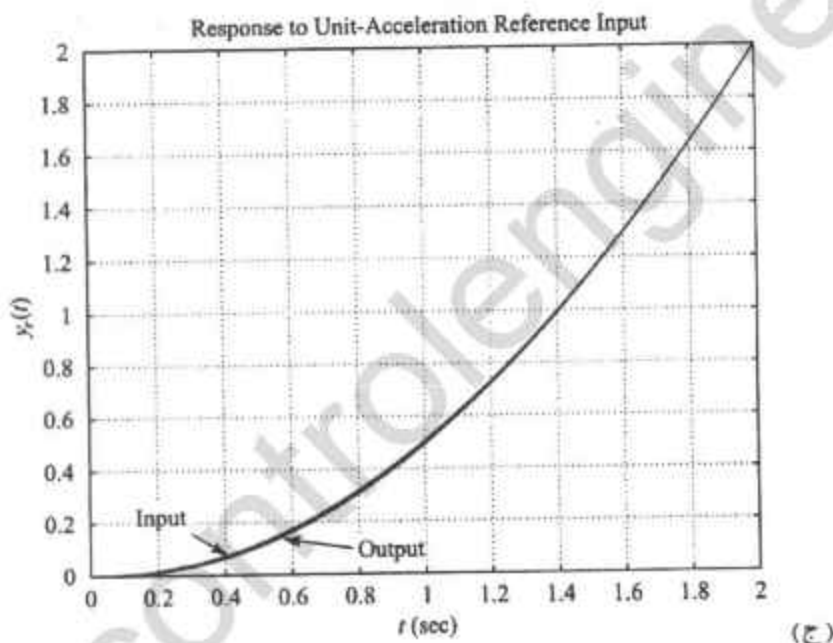
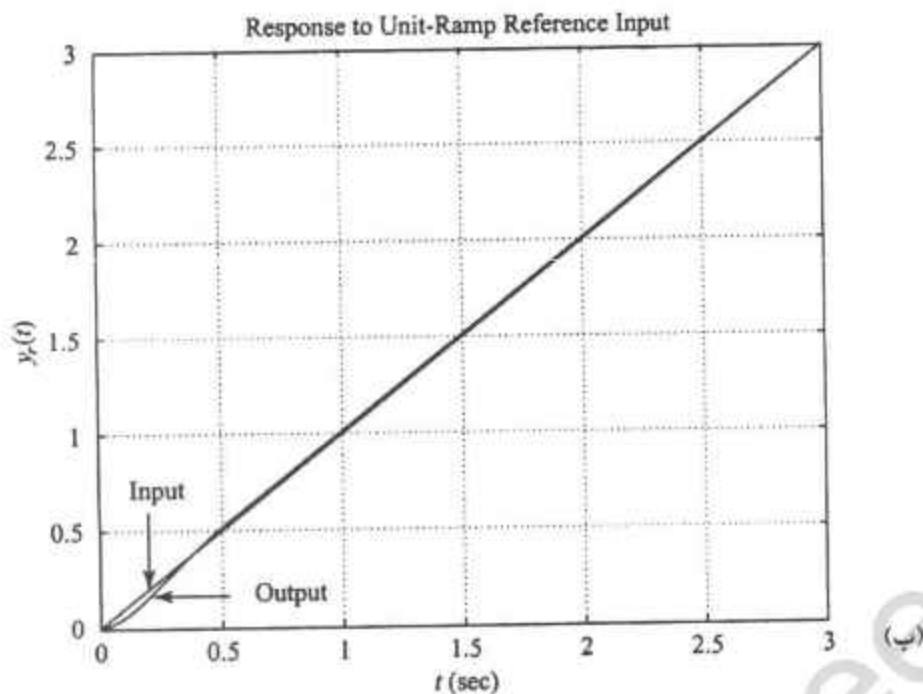
منحنی پاسخ به ورودی مرجع پله واحد، شیب واحد، و شتاب واحد به ترتیب در شکل های ۸-۶۸ (الف)، (ب)، و (ج) نشان داده شده است. ماکزیمم فراجهش پاسخ پله حدود ۲۵٪ و زمان نشست تقریباً ۱/۲ sec است. خطاهای حالت ماندگار به ازای ورودی های شیب و شتاب صفر است. بنابراین کنترل کننده طراحی شده  $G_c(s)$ ، که با معادله (۱۸-۸) توصیف می شود عملکرد مطلوبی به همراه دارد.



شکل ۸-۶۸

(الف) پاسخ به ورودی

مرجع پله واحد؛



شکل ۸-۶۸

(ب) پاسخ به ورودی مرجع شیب واحد؛ (ج) پاسخ به ورودی مرجع شتاب واحد.

سرانجام  $G_{cr}(s)$  را تعیین می‌کنیم. توجه کنید که

$$G_{cr}(s) = G_c(s) - G_{cl}(s)$$

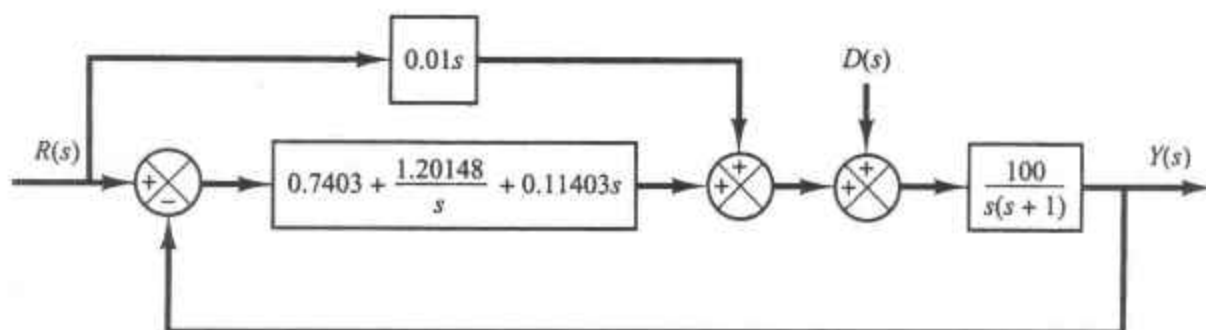
و با توجه به معادله (۸-۱۷) داریم

$$G_{cl}(s) = 0.7403 + \frac{1.20148}{s} + 0.11403s$$

پس

$$G_{cr}(s) = \left( 0.7403 + \frac{1.20148}{s} + 0.12403s \right) - \left( 0.7403 + \frac{1.20148}{s} + 0.11403s \right) \quad (۸-۱۹)$$

$$= 0.01s$$



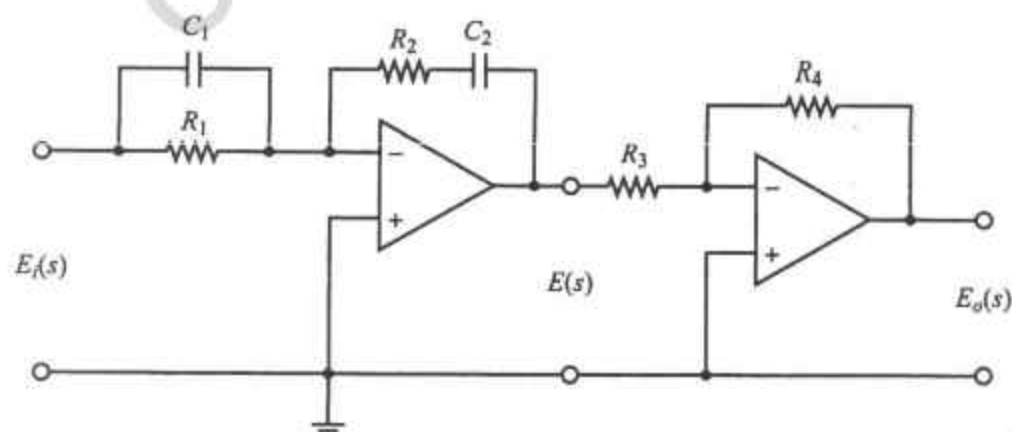
شکل ۸-۶۹ نمودار بلوکی سیستم طراحی شده.

معادلات (۸-۱۷) و (۸-۱۹) به ترتیب توابع تبدیل کنترل کننده‌های  $G_c(s)$  و  $G_e(s)$  را به دست می‌دهند. نمودار بلوکی سیستم طراحی شده در شکل ۸-۶۹ نشان داده شده است. توجه کنید که اگر ماکزیمم فراجهش بسیار بزرگتر از ۲۵٪ و یا زمان نشست بسیار بزرگتر از ۱/۲ sec باشد، یک ناحیه جستجو برگزیده (مثلاً  $3 \leq a \leq 6$ ،  $3 \leq b \leq 6$  و  $6 \leq c \leq 12$ ) و روش محاسباتی بیان شده در مثال ۸-۴ را برای یافتن یک مجموعه جواب که خواسته‌های مربوط به پاسخ به ورودی مرجع پله‌ای را برآورده کند، به کار بریم.

## مسائل

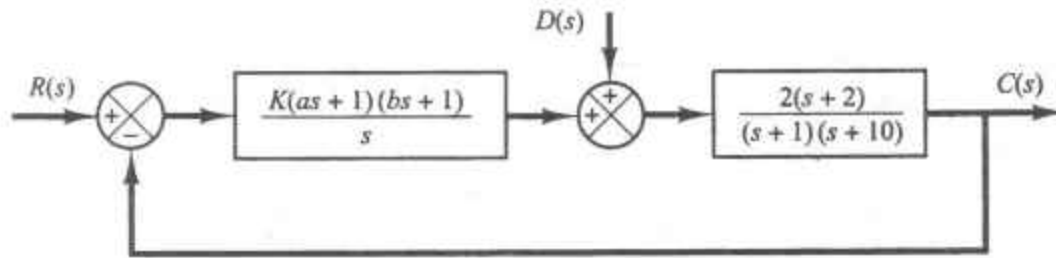
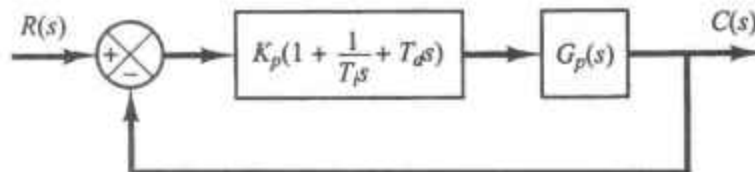
$$C_c(s) = 39.42 \left( 1 + \frac{1}{3.077s} + 0.7692s \right) \\ = 30.3215 \frac{(s+0.65)^2}{s}$$

ب ۸-۱ کنترل کننده PID الکترونیکی شکل ۸-۷۰ را در نظر بگیرید. مقادیر  $R_1$ ،  $R_2$ ،  $R_3$ ،  $R_4$ ،  $C_1$  و  $C_2$  را به نحوی تعیین کنید که تابع تبدیل زیر حاصل شود

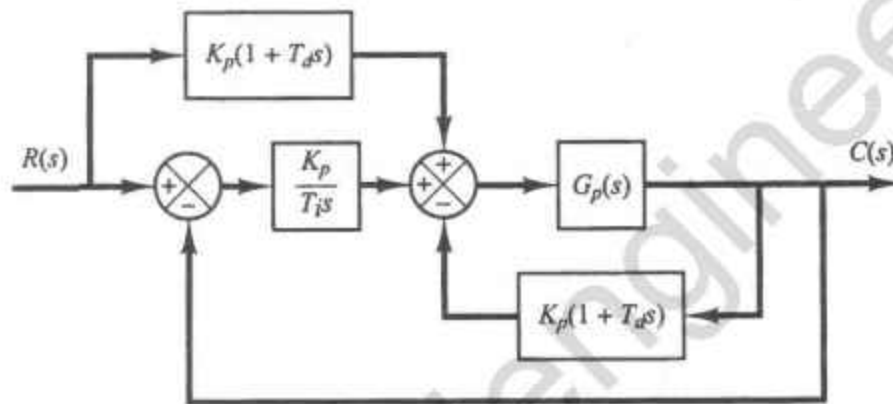


شکل ۸-۷۰

کنترل کننده PID الکترونیکی.


 شکل ۸-۷۱  
سیستم کنترل.


(الف)



(ب)

شکل ۸-۷۲

(الف) سیستم دارای کنترلر PID؛

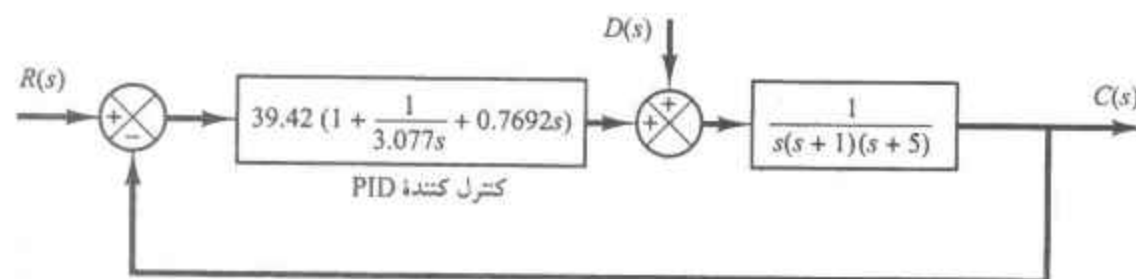
(ب) سیستم دارای کنترلر I-PD و کنترلر پیشخور.

ب ۸-۲ سیستم شکل ۸-۷۱ را در نظر بگیرید. اغتشاش  $D(s)$  به صورت نشان داده شده وارد سیستم می‌شود. پارامترهای  $K$ ،  $a$ ، و  $b$  را به نحوی تعیین کنید که پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای و پاسخ به ورودی مرجع پله‌ای این مشخصات را داشته باشد: پاسخ به ورودی اغتشاش پله‌ای و پاسخ به ورودی مرجع پله‌ای باید به سرعت میرا شود و ماکزیمم فراجش پاسخ به ورودی مرجع پله‌ای ۲۰٪ یا کمتر بوده، زمان نشست آن حدود ۲ sec باشد.

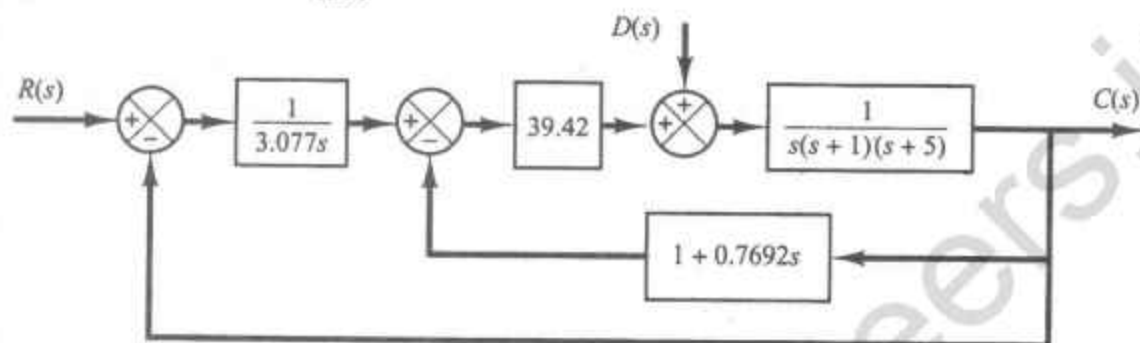
ب ۸-۳ نشان دهید که سیستم دارای کنترلر PID شکل ۸-۷۲ (الف) و سیستم دارای کنترلر I-PD و کنترل پیشخور شکل ۸-۷۲ (ب) هم‌ارزند.

ب ۸-۴ سیستم‌های شکل ۸-۷۳ (الف) و (ب) را در نظر بگیرید. سیستم شکل ۸-۷۳ (الف) سیستمی است که در مثال ۸-۱ طراحی شد. پاسخ پله این سیستم در غیاب اغتشاش در شکل ۸-۱۰ نشان داده شده است. سیستم شکل ۸-۷۳ (ب) سیستمی با کنترلر I-PD و پارامترهای  $K_p$ ،  $T_i$ ، و  $T_d$  سیستم شکل ۸-۷۳ (الف) است.

پاسخ به ورودی مرجع پله واحد سیستم با کنترل I-PD را با استفاده از MATLAB بیابید. منحنی‌های پاسخ پله را با هم مقایسه کنید.



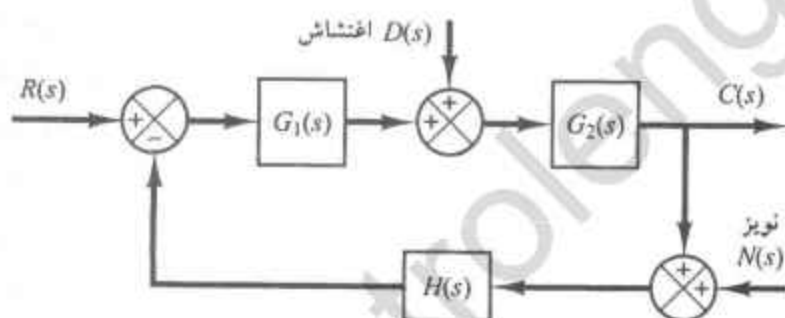
(الف)



(ب)

شکل ۷۳-۸

(الف) سیستم دارای کنترلر PID؛ (ب) سیستم دارای کنترلر I-PD.



شکل ۷۴-۸ سیستم کنترل.

مرجع، ورودی اغتشاش، و ورودی نویز. نشان دهید که معادله مشخصه این سیستم به این که کدام سیگنال ورودی در نظر گرفته شود بستگی ندارد.

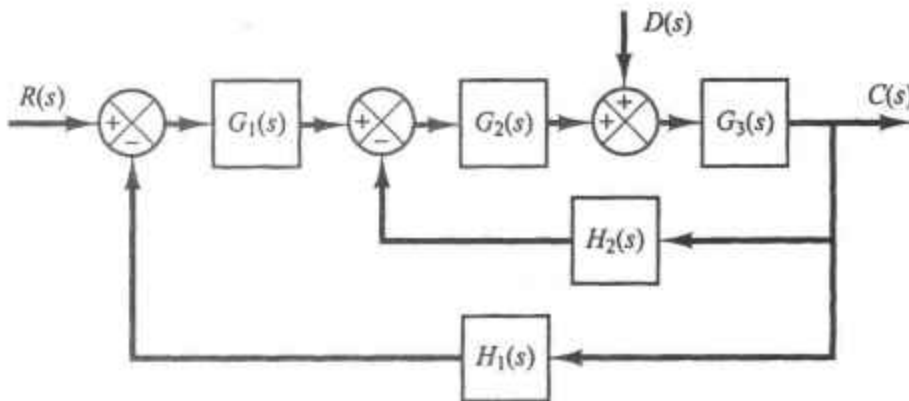
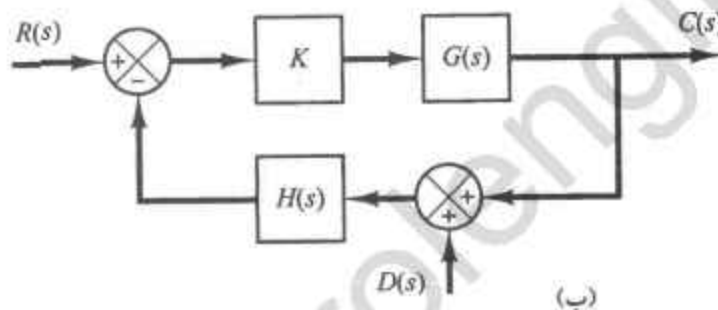
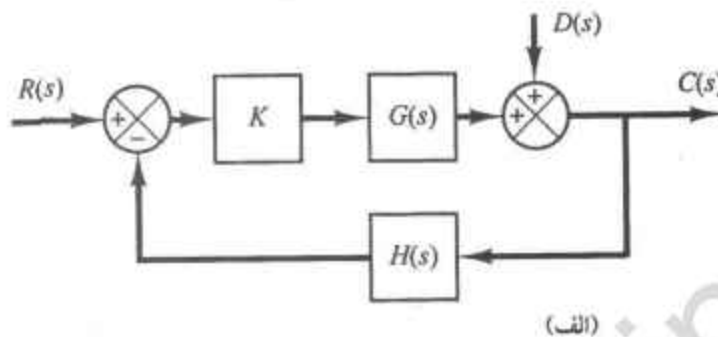
ب ۷-۸ سیستم شکل ۷۵-۸ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل حلقه بسته  $C(s)/R(s)$  برای ورودی مرجع و تابع تبدیل حلقه بسته  $C(s)/D(s)$  برای ورودی اغتشاش را بیابید. هنگام در نظر گرفتن ورودی  $R(s)$ ،  $D(s)$  را صفر فرض کنید و برعکس.

ب ۸-۸ سیستم شکل ۷۶-۸ (الف) را در نظر بگیرید، که در آن  $K$  بهره قابل تنظیم و  $G(s)$  و  $H(s)$  اجزاء ثابت‌اند. تابع تبدیل حلقه بسته برای ورودی

ب ۵-۸ با توجه به مسئله ب ۴-۸ پاسخ سیستم شکل ۷۳-۸ (الف) به ورودی اغتشاش پله واحد را بیابید.

نشان دهید که از لحاظ ورودی اغتشاش پاسخ سیستمهای PID و I-PD شکلهای ۷۳-۸ (الف) و (ب) دقیقاً یکسان است. [هنگام در نظر گرفتن پاسخ به ورودی اغتشاش  $D(s)$  ورودی مرجع  $R(s)$  را صفر بگیرید.] تابع تبدیل حلقه بسته دو سیستم را مقایسه کنید.

ب ۶-۸ سیستم شکل ۷۴-۸ را در نظر بگیرید. این سیستم دارای سه سیگنال ورودی است: ورودی


 شکل ۸-۷۵  
سیستم کنترل.


شکل ۸-۷۶

(الف) سیستم کنترلی که اغتشاش در مسیر پیش‌خورد آن وارد می‌شود؛ (ب) سیستم کنترلی که اغتشاش در مسیر فیدبک آن وارد می‌شود.

ب ۸-۱۰ نشان دهید که سیستم کنترل شکل ۸-۷۸ یک سیستم با سه درجه آزادی است.  $G_{c1}$ ،  $G_{c2}$  و  $G_{c3}$  کنترل‌کننده هستند. توابع تبدیل  $G_1$  و  $G_2$  دستگاه تحت کنترل را نشان می‌دهند. ب ۸-۱۱ سیستم کنترل شکل ۸-۷۹ را در نظر بگیرید. فرض کنید که کنترل‌کننده PID به صورت زیر است

$$G_c(s) = K \frac{(s+a)^2}{s}$$

می‌خواهیم پاسخ پله این سیستم دارای ماکزیمم فراجهش کمتر از ۱۰٪ و بیشتر از ۲٪ باشد (تا سیستمی نزدیک به سیستم فرامپرا به دست نیاید) و

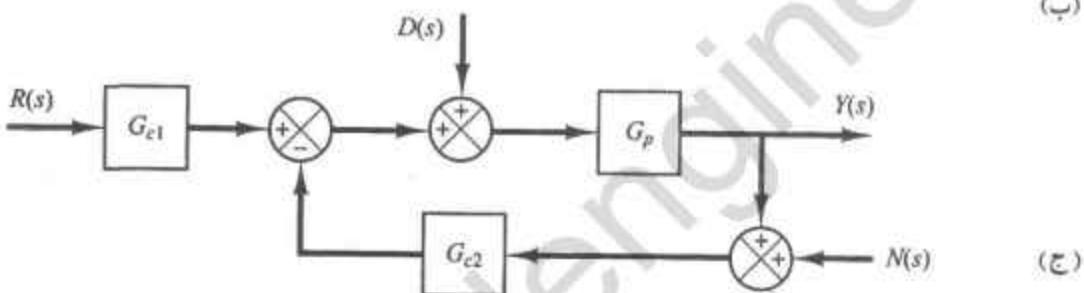
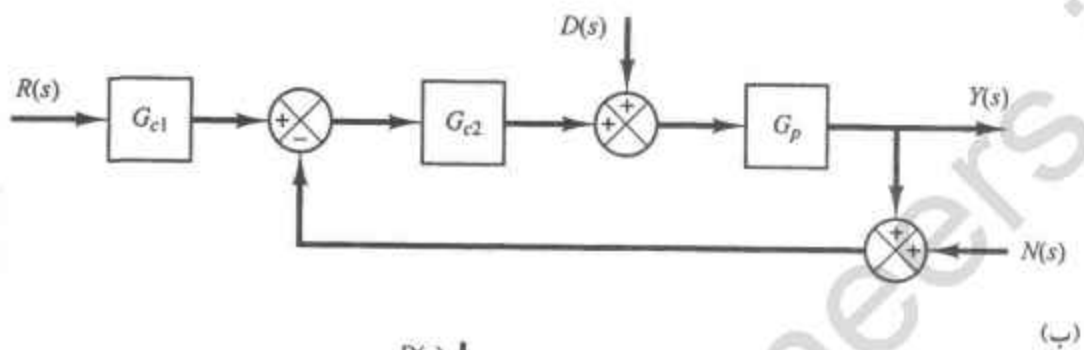
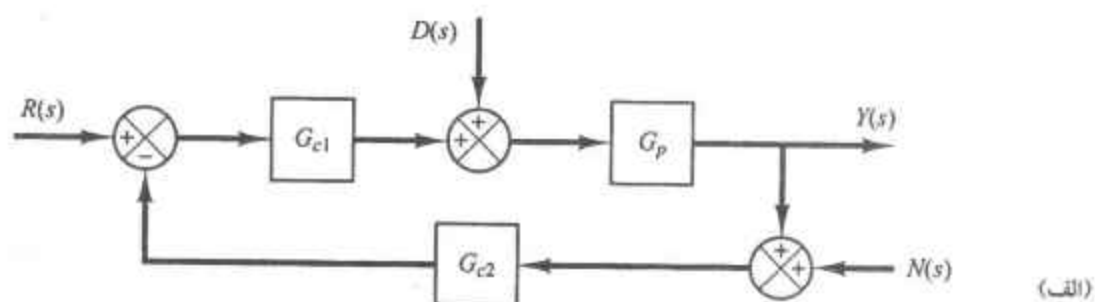
اغتشاش عبارت است از

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + K G(s) H(s)}$$

برای می‌نیمم کردن اثر اغتشاش، بهره  $K$  تا حد ممکن بزرگ انتخاب می‌شود.

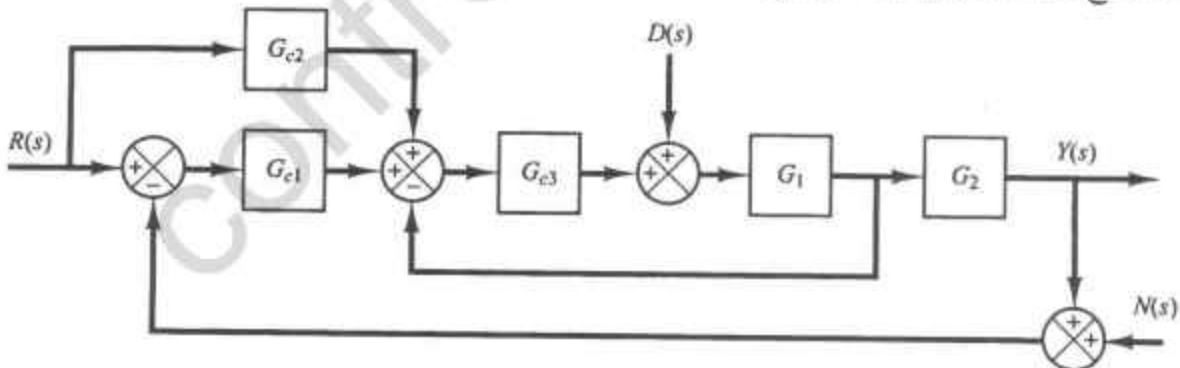
آیا برای سیستم شکل ۸-۷۶ (ب) نیز این موضوع صادق است؟

ب ۸-۹ نشان دهید که سیستمهای کنترل شکلهای ۸-۷۷ (الف)، (ب) و (ج) سیستمهای با دو درجه آزادی هستند.  $G_{c1}$  و  $G_{c2}$  کنترل‌کننده، و  $G_p$  دستگاه تحت کنترل را نشان می‌دهند.

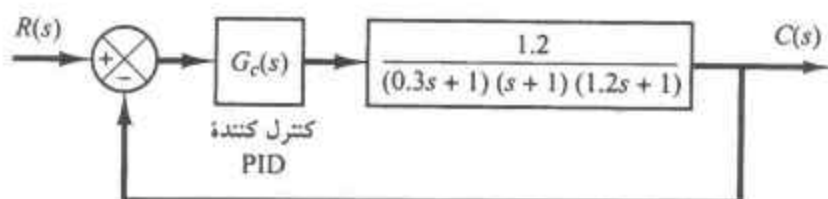


شکل ۷۷-۸

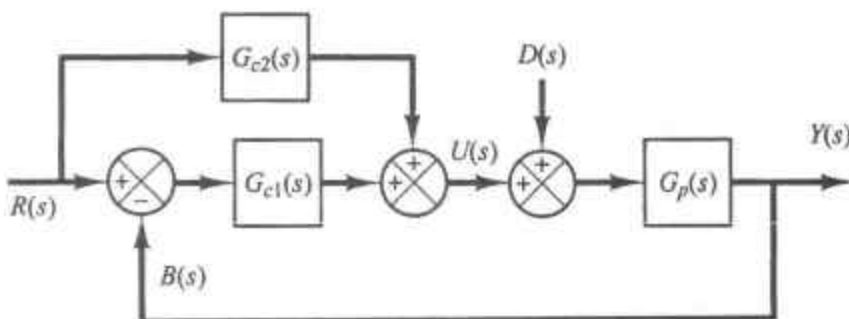
(الف)، (ب)، و (ج) سیستمهای با دو درجه آزادی.



شکل ۷۸-۸ سیستمی با سه درجه آزادی.



شکل ۷۹-۸ سیستم کنترل.



شکل ۸-۸۰

سیستم کنترل با دو درجه آزادی.

اول یک برنامه MATLAB بنویسید که در آن حلقه‌ها از بالاترین مقدار  $K$  و  $a$  شروع کرده، در گامهای بعدی آنها را تقلیل دهد، تا این که اولین دسته جواب به دست آید.

سپس یک برنامه MATLAB بنویسید که تمام جوابهای ممکن برای  $K$  و  $a$  را به دست آورد.

از میان جوابهای به دست آمده برای  $K$  و  $a$  بهترین مجموعه را برگزینید. سپس منحنی پاسخ پله را به ازای این بهترین مقادیر  $K$  و  $a$  رسم کنید.

ب ۸-۱۳ سیستم کنترل با دو درجه آزادی شکل ۸-۸۰ را در نظر بگیرید. دستگاه دارای تابع تبدیل زیر است

$$G_p(s) = \frac{3(s+5)}{s(s+1)(s^2+4s+13)}$$

کنترل‌کننده‌های  $G_{c1}(s)$  و  $G_{c2}(s)$  را به نحوی طرح کنید که پاسخ به ورودی اغتشاش پله واحد کوچک بوده، به سرعت مستهلک شود (تقریباً در زمان ۲ sec). پاسخ به ورودی مرجع پله واحد باید به نحوی باشد که ماکزیمم فراجش ۲۵٪ (یا کمتر) و زمان نشست ۲ sec باشد. همچنین خطاهای حالت ماندگار به ورودی‌های شیب و شتاب باید صفر باشد.

ب ۸-۱۴ سیستم کنترل شکل ۸-۸۱ را در نظر بگیرید. دستگاه دارای تابع تبدیل زیر است

$$G_p(s) = \frac{2(s+1)}{s(s+3)(s+5)}$$

زمان نشست پاسخ پله کمتر از ۲ sec باشد.

با استفاده از رهیافت محاسباتی بخش ۸-۴ یک برنامه MATLAB بنویسید که مقادیر  $K$  و  $a$  ارضا کننده این خواسته‌ها را بیابد. ناحیه جستجو را به صورت زیر برگزینید.

$$1 \leq K \leq 4 \quad 0.4 \leq a \leq 4$$

گامهای تغییر  $K$  و  $a$  را ۰/۰۵ انتخاب کنید. برنامه را به صورتی بنویسید که حلقه‌ها از بالاترین مقدار  $K$  و  $a$  شروع کرده، در گامهای بعدی این مقادیر را تقلیل دهند.

منحنی پاسخ پله را با استفاده از اولین مجموعه جواب به دست آمده رسم کنید.

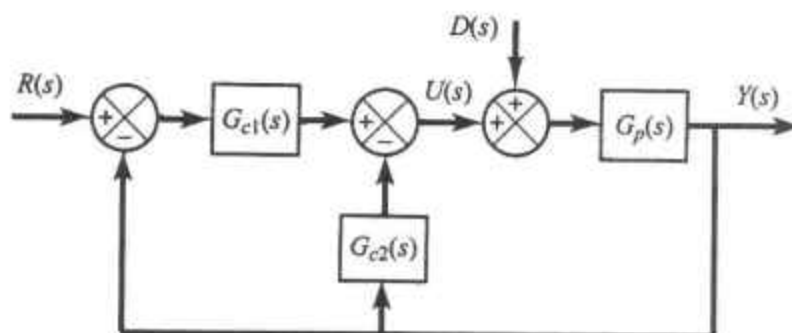
ب ۸-۱۲ سیستم کنترل مسئله ب ۸-۱۱ (شکل ۸-۷۹) را در نظر بگیرید. کنترل کننده PID به صورت زیر است:

$$G_c(s) = K \frac{(s+a)^2}{s}$$

می‌خواهیم مقادیر  $K$  و  $a$  را به نحوی تعیین کنیم که پاسخ پله این سیستم دارای ماکزیمم فراجش کمتر از ۸٪ و بیشتر از ۳٪، و زمان نشست کمتر از ۲ sec باشد. ناحیه جستجو را به صورت زیر برگزینید

$$2 \leq K \leq 4 \quad 0.5 \leq a \leq 3$$

گامهای تغییر  $K$  و  $a$  را ۰/۰۵ برگزینید.

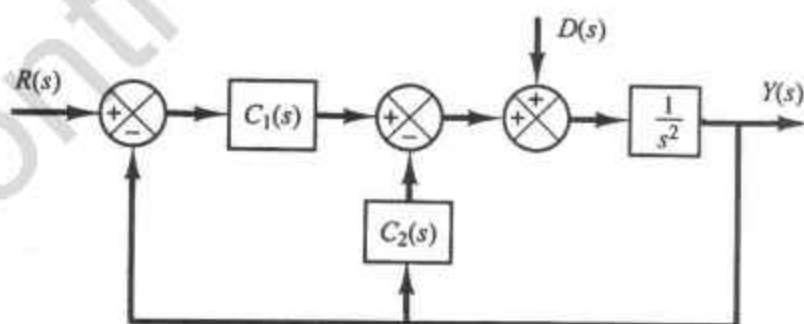


شکل ۸-۸۱

سیستم کنترل با دو درجه آزادی.

ب ۸-۱۵ سیستم کنترل با دو درجه آزادی شکل ۸-۸۲ را در نظر بگیرید کنترل‌کننده‌های  $G_{c1}(s)$  و  $G_{c2}(s)$  را به نحوی طرح کنید که پاسخ به ورودی اغتشاش پله واحد کوچک بوده، به سرعت مستهلک شود (تقریباً در زمان ۱ sec تا ۲ sec). پاسخ به ورودی مرجع پله واحد باید دارای ماکزیمم فراجهش ۲۵٪ (یا کمتر) و زمان نشست ۱ sec یا کمتر باشد. همچنین خطاهای حالت ماندگار در دنبال کردن ورودی‌های مرجع شیب و شتاب باید صفر باشد.

کنترل‌کننده‌های  $G_{c1}(s)$  و  $G_{c2}(s)$  را به نحوی طرح کنید که پاسخ به ورودی اغتشاش پله واحد کوچک بوده، به سرعت مستهلک شود (تقریباً در زمان ۱ sec تا ۲ sec). پاسخ به ورودی مرجع پله واحد باید دارای ماکزیمم فراجهش ۲۵٪ (یا کمتر) و زمان نشست ۱ sec یا کمتر باشد. همچنین خطاهای حالت ماندگار به ورودی‌های مرجع شیب و شتاب باید صفر باشد.



شکل ۸-۸۲ سیستم کنترل با دو درجه آزادی.

# تحلیل سیستمهای کنترل در فضای حالت

## ۱-۹ مقدمه<sup>۱</sup>

یک سیستم پیچیده مدرن می‌تواند چندین ورودی و چندین خروجی داشته باشد، و اندرکنش بین این ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌تواند پیچیده باشد. برای تحلیل چنین سیستمی کاستن از پیچیدگی عبارتهای ریاضی و توسل به کامپیوتر برای انجام عملیات طولانی لازم برای تحلیل ضروری است. از این دیدگاه رهیافت فضای حالت برای تحلیل سیستم مناسب‌ترین رهیافت است.

گرچه اساس نظریه سستی را رابطه ورودی - خروجی، یا تابع تبدیل تشکیل می‌دهد، ولی نظریه کنترل نوین بر توصیف معادلات سیستم برحسب  $n$  معادله دیفرانسیل مرتبه اول بنا نهاده شده است. این معادلات را می‌توان به صورت یک معادله دیفرانسیل ماتریسی مرتبه اول درآورد. کاربرد نمادهای ماتریسی نمایش ریاضی معادلات سیستم را بسیار ساده می‌کند. افزایش تعداد معادلات حالت، تعداد ورودی‌ها و تعداد خروجی‌ها پیچیدگی معادلات را بیشتر نمی‌کند. در واقع سیستمهای پیچیده چند ورودی - چند خروجی را می‌توان به روشی تحلیل کرد که اندکی مشکلتر از روش تحلیل سیستمهای اسکالر با معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. این فصل و فصل بعدی به تحلیل و طراحی سیستمهای کنترل در فضای حالت مربوط است. مطالب پایه‌ای

<sup>۱</sup> در این کتاب اگر ستاره برای یک ماتریس به صورت بالانویس به کار رود، مثل  $A^*$  معنی آن ترانهاد مزدوج ماتریس  $A$  است. ترانهاد مزدوج همان مزدوج مختلط ترانهاد یک ماتریس است. برای ماتریس حقیقی (ماتریسی با درایه‌های حقیقی) ترانهاد مزدوج  $A^*$  با ترانهاد  $A^T$  یکی است.