

محاسبات عددی

دکتر مسعود نیکوکار
دکتر محمد تقی درویشی

LED CANCELED
بطل شد
LED CANCELED
بطل شد
LED CANCELED
بطل شد

گسترش علم و ادب

کتابفروشی آریا
معاون فروش کتابهای دانشگاهی
تهران، ضلع جنوب شرقی میدان انقلاب، پلاک ۱۳
تلفن: ۶۶۴۰۵۴۰، ۶۶۴۷۵۷۹۴، ۶۶۴۷۵۷۹۳
www.ketabiran.ir

به نام خدا

محاسبات عددی

تألیف:

دکتر مسعود نیکوکار

عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

دکتر محمد تقی درویشی

دانشگاه رازی

سرشناسه	: نیکوکار، مسعود ۱۳۳۲
عنوان و نام پدیدآور	: محاسبات عددی / تألیف مسعود نیکوکار، محمدتقی درویشی
وضعیت ویراست	: (ویراست ۴)
مشخصات نشر	: تهران: گسترش علوم پایه، ۱۳۸۴
مشخصات ظاهری	: (۶) ۳۳۲ ص. مصور. جدول. نمودار.
فروست	: گسترش علوم، ۱۰۲
شابک	: ۱۲۰۰۰۰ ریال، ۸-۰۴۸-۹۶۴-۹۷۸
یادداشت	: پشت جلد به انگلیسی: M.Nikoukar - Numerical Computation
یادداشت	: چاپ هفدهم ۱۳۸۸
یادداشت	: نمایه
موضوع	: محاسبات عددی
شناسه افزوده	: درویشی، محمدتقی، ۱۳۴۴
رده بندی کنگره	: ۳۹۷/۵۹۳/۱۳۸۴
رده بندی دیویی	: ۵۱۹/۴
شماره کتابشناسی ملی	: ۸۴۰۱۶۵۳۱ م

نام کتاب: محاسبات عددی
مؤلفین: دکتر مسعود نیکوکار - دکتر محمدتقی درویشی
ناشر: انتشارات گسترش علوم پایه
مدیر فنی: مهدی زنگنه
حروفچینی: ابویی
طراحی جلد: حاتمی کیا
لیتوگرافی مهرشاد
چاپخانه: مهر
سال نشر: ۱۳۹۲
نوبت چاپ: بیست و پنجم
شمارگان: ۳۰۰۰ جلد
قیمت کتاب: ۱۴۰۰۰۰ ریال
شابک: ۸-۰۴۸-۹۶۴-۹۷۸ ISBN: 978-964-490-048-8

حق چاپ و نشر محفوظ و مخصوص ناشر می باشد.
دفتر انتشارات و پخش شهرستان: میدان انقلاب، ابتدای کارگر جنوبی، کوچه مهدی زاده، پلاک ۹، طبقه همکف
تلفن: ۱۵ ~ ۶۶۹۰۵۳۱۲ تلفکس: ۰۲۱-۶۶۹۰۵۳۱۶
Email: gostaresh_op@yahoo.com
www.gostaresh-pub.com
دفتر سفارشات تهران: خ آزادی، خ جمال زاده جنوبی، خ دیلمان، پلاک ۱۴ واحد ۲
تهران: ۱۴ ~ ۶۶۵۹۵۵۱۳
فروشگاه فجر تهران: خ انقلاب، بین فروردین و اردیبهشت، پ ۱۴۶۲ - ۶۶۴۰۴۹۸۳ (۰۲۱)

توجه: فروشنده و خواننده گرامی: این کتاب دارای برچسب اصالت کالا (هولوگرام) در روی جلد است که ضمن دقت در این مورد ما را در صورت عدم وجود هولوگرام مطلع سازید.
با تشکر از همکاری شما

مقدمه

محاسبات عددی یکی از جالب‌ترین و پرمحتواترین دروس است که در دوره کارشناسی ارائه می‌شود. به عنوان مثال با مطالعه این درس، قادر به حل معادلاتی می‌شویم که به طریق کلاسیک قادر به حل آنها نبودیم و یا مقادیر انتگرال‌هایی را محاسبه می‌کنیم که به روش‌های کلاسیک قادر به تعیین مقادیر آنها نیستیم و ...

کتاب حاضر براساس مصوبه شورایعالی برنامه‌ریزی ستاد انقلاب فرهنگی برای دانشجویان رشته‌های فنی مهندسی تدوین شده که حاصل تجربیاتی است که طی سالها تدریس کسب نموده‌ایم.

در این کتاب سعی بر آن بوده تا مطالب به زبان ساده بیان شوند تا فهم آن، آسان باشد. با ارائه مثالهای متنوع که برای هر موضوع در نظر گرفته‌ایم، درک موضوع آسان و کاربرد آن نیز مشخص گردیده است.

سعی در ارائه بیان روان و ساده مطالب، ممکن است باعث لغزش‌هایی در مفاهیم گردد که از نظر دور مانده باشند. تذکرات و راهنمایی‌های سازنده استادان و دانشجویان عزیز، موجب سپاسگزاری صمیمانه مؤلفین در تصحیح و تکمیل کتاب در چاپ‌های بعدی خواهد بود. مطالب این کتاب برای تدریس یک نیمسال تحصیلی تنظیم شده است. ضمناً وظیفه خود می‌دانیم که از زحمات آقای خسرو سایه‌وند که در ویراستاری کتاب نهایت همکاری را داشته است تشکر کنیم.

دکتر محمد تقی درویشی

دانشگاه رازی

دکتر مسعود نیکوکار

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

**راهنمای حل مسائل این کتاب از
همین انتشارات چاپ گردیده است.**

پیشگفتار چاپ ششم

حمد و سپاس خداوند را که به انسان توانایی اندیشیدن عطا فرمود و فکر و اندیشه را وجه تمایز انسان با سایر مخلوقات قرار داد. اما بعد ...

محاسبات عددی علم و هنر محاسبه است. بسیاری از رشته‌های علوم پایه و فنی و مهندسی نیازمند به دست آوردن نتایجی هستند که از روشهای تحلیلی قابل حصول نیستند و یا تعیین آنها بسیار وقت‌گیر می‌باشد. با توجه به ضرورتی که در زمینه یک کتاب جامع محاسبات عددی برای استفاده دانشجویان گرامی احساس می‌شد و با توجه به سابقه تدریس این درس در دانشگاههای مختلف کشور در سال ۱۳۷۹ چاپ اول کتاب بر طبق سرفصل شورایعالی انقلاب فرهنگی به بازار عرضه شد و در اختیار علاقمندان قرار گرفت. خودآموز بودن، روانی مطالب و فراوانی مثالهای کتاب اقبال دانشجویان عزیز را به همراه داشت. در چاپ دوم کتاب با توجه به توصیه‌هایی که دانشجویان و مدرسین گرامی نمودند، مطالب جدید و تمرینهای تکمیلی به کتاب اضافه گردید. در چاپ چهارم ضمیمه برنامه‌های کامپیوتری با استفاده از نرم‌افزار C^{++} به کتاب اضافه شد. به ویرایش فعلی کتاب یک پیوست کامل از مسائل چهارگزینه‌ای اضافه گردیده است در این پیوست حدود دویست مسأله چهارگزینه‌ای از آزمونهای سالهای متفاوت کنکور سراسری و دانشگاه آزاد با حل تشریحی ارائه شده است. در پایان خود را همچنان نیازمند راهنمایی‌ها، پیشنهاد و انتقادهای سازنده تمامی عزیزان می‌دانیم که امید است ما را از این فیض دریغ نفرمایند.

والسلام

دکتر محمدتقی درویشی

دکتر مسعود نیکوکار

محاسبات عددی



۰۷	کد درس:
۲	تعداد واحد:
نظری	دفع واحد:
برنامه نویسی کامپیوتر	پیشنیاز:
(۳۴ ساعت)	سرفصل دروس:

خطاها و اشتباهات، درونیابی و برونابی، یافتن ریشه‌های معادلات با روشهای مختلف، مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی، تفاوت‌های محدود، روشهای عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه ۱ و ۲، عملیات روی ماتریس‌ها و تعیین مقادیر ویژه آنها، حل دستگاههای معادلات خطی و غیرخطی، روش حداقل مربعات.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول خطاها
۱	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ خطای مطلق و نسبی
۵	۳.۱ منابع اصلی خطا
۷	۴.۱ خطای چهار عمل اصلی
۱۱	۵.۱ خطای محاسبه فرمولها و توابع
۱۹	فصل دوم حل عددی معادلات $f(x) = 0$
۱۹	۱.۲ مقدمه
۲۰	۲.۲ تعیین ریشه‌ها با دقت مورد نظر
۲۲	۳.۲ روش‌های عددی حل معادله $f(x) = 0$
۲۲	۱.۳.۲ روش دوبخشی یا روش تنصیف
۲۷	۲.۳.۲ روش نابجایی
۳۱	۳.۳.۲ روش نیوتن - رفسون
۳۷	۴.۳.۲ روش وترى
۴۰	۵.۳.۲ روش تکرار ساده
۴۹	فصل سوم درونیابی و برونیابی
۴۹	۱.۳ مقدمه
۵۰	۲.۳ درونیابی
۵۱	۱.۲.۳ چند جمله‌ایهای لاگرانژ
۵۵	۲.۲.۳ چند جمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن
	۳.۲.۳ تفاضلات متناهی و درونیابی یک تابع هرگاه نقاط درونیابی
۶۲	متساوی الفاصله باشند
۶۹	۴.۲.۳ شکل دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب
۷۰	۳.۳ خطای چند جمله‌ای درونیاب
۷۳	۴.۳ برونیابی
۷۹	فصل چهارم مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی
۷۹	۱.۴ مشتق‌گیری عددی

۱.۱.۴	دستورهای مشتق‌گیری براساس چند جمله‌ای درونیاب	۸۰
۲.۱.۴	دستورات مشتق‌گیری با استفاده از بسط تیلور	۸۴
۲.۴	خطای مشتق‌گیری عددی	۸۶
۳.۴	انتگرال‌گیری عددی	۸۸
۱.۳.۴	قاعده ذوزنقه‌ای	۸۹
۲.۳.۴	قاعده سیمپسون	۹۱
۳.۳.۴	قاعده‌های دیگر انتگرال‌گیری	۹۴
۹۴	روش نیوتن - کاتس	
۹۷	روش گاوس	
۹۸	فرمول دونقطه‌ای گاوس	
۱۰۱	فرمول سه نقطه‌ای گاوس	
۴.۴	انتگرالهای منفرد	۱۰۳
۱.۴.۴	قاعده نقطه میانی	۱۰۳
۵.۴	خطای روشهای انتگرال‌گیری	۱۰۶
۱.۵.۴	خطای روش ذوزنقه	۱۰۷
۲.۵.۴	خطای سایر روشهای انتگرال‌گیری	۱۱۲
۱۱۹	روشهای عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی	
۱.۵	مقدمه	۱۱۹
۲.۵	روش بسط تیلور	۱۲۰
۱.۲.۵	الگوریتم روش تیلور از مرتبه k	۱۲۲
۳.۵	روش اویلر	۱۲۳
۴.۵	روش رونگه - کوتا	۱۲۵
۱.۴.۵	روش رونگه - کوتای مرتبه دو	۱۲۶
۲.۴.۵	روش رونگه - کوتای مرتبه چهار	۱۲۸
۵.۵	دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول	۱۳۱
۱.۵.۵	روش رونگه - کوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات	
۱۳۲	دیفرانسیل مرتبه اول	
۶.۵	معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم	۱۳۵
فصل ششم	ماتریسها و حل دستگاههای معادلات خطی و غیرخطی	۱۴۱
۱.۶	مقدمه	۱۴۱
۱.۱.۶	ماتریسها و بردارها	۱۴۱

۱۵۰	دستگاههای معادلات خطی	۲.۶
۱۵۲	روشهای مستقیم حل دستگاههای معادلات خطی	۱.۲.۶
۱۶۳	روشهای تکراری حل دستگاههای معادلات خطی	۲.۲.۶
۱۷۰	دستگاههای معادلات غیرخطی	۳.۶
۱۷۶	به دست آوردن وارون یک ماتریس نامفرد	۴.۶

فصل هفتم تعیین مقادیر ویژه ماتریسها

۱۸۷	مقدمه	۱.۷
۱۸۷	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	۲.۷
۱۹۰	تعیین چندجمله‌ای مشخصه یک ماتریس	۳.۷
۱۹۰	روش ضرائب نامعین برای به دست آوردن چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A	۱.۳.۷
۱۹۳	روش لوری برای به دست آوردن چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A	۲.۳.۷
۱۹۵	روش لوری برای به دست آوردن چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A	۳.۳.۷
۱۹۷	تعیین بردار ویژه نظیر یک مقدار ویژه مشخص	۴.۷
۱۹۹	به دست آوردن وارون یک ماتریس با استفاده از قضیه کیلی - هامیلتون	۵.۷
۲۰۱	روشهای تکراری برای تعیین مقادیر ویژه	۶.۷

فصل هشتم روش حداقل مربعات

۲۰۷	مقدمه	۱.۸
۲۰۸	خط حداقل مربعات	۲.۸
۲۱۴	چندجمله‌ای حداقل مربعات	۳.۸
۲۱۷	انواع دیگری از تقریب‌های حداقل مربعات	۴.۸
۲۱۸	حالت نمایی	۱.۴.۸
۲۲۰	حالت هذلولی	۲.۴.۸
۲۲۱	حالت مثلثاتی	۳.۴.۸

پیوست برنامه‌های کامپیوتری

پیوست مسائل چهارگزینه‌ای

۲۴۸	قسمت اول (مسائل چهارگزینه‌ای حل شده)
۲۸۱	قسمت دوم (آزمون‌های کارشناسی ارشد با حل تشریحی)
۳۱۰	قسمت سوم (مسائل چهارگزینه‌ای حل نشده)
۳۲۱	قسمت چهارم (حل مسائل قسمت سوم)

فصل اول

خطاها

۱.۱ مقدمه

هدف محاسبات عددی، حل مسائل عددی پیچیده، تنها با استفاده از اعمال ساده حساب به منظور توسعه و ارزیابی روشها برای محاسبه نتایج عددی از اطلاعات معلوم است. روشهای محاسبه، الگوریتم نامیده می‌شوند. به خاطر اهداف این کتاب، الگوریتم را به عنوان توصیفی کامل و بدون ابهام از روش ساختن جواب یک مسأله ریاضی تعریف می‌کنیم. هدف ما جستجوی الگوریتمهای محاسباتی است. در حالی که بعضی مسائل دارای چندین الگوریتم برای حل هستند، مسائلی یافت می‌شوند که هنوز الگوریتم رضایت بخشی برای حل ندارند.

هرگاه یک مسأله الگوریتمهای متفاوتی برای حل داشته باشد، دلایل متفاوتی برای انتخاب یکی از آنها به عنوان الگوریتم بهتر وجود دارد. دو دلیل عمده این انتخاب سرعت و دقت الگوریتم می‌باشد. پیشرفتهای سریع در طراحی کامپیوترهای رقمی تأثیر فراوانی در محاسبات عددی داشته است. هم اینک کامپیوترها میلیونها عمل محاسباتی را در کمتر از یک ثانیه انجام می‌دهند. این بدان

معنی است که انجام محاسبات طولانی و پیچیده امکانپذیر شده، اما در عوض امکان وجود خطا نیز افزایش یافته است. کسانی که الگوریتمهای محاسباتی را طرح و از آنها استفاده می کنند، باید در مورد بهتر به کار گرفتن کامپیوترهای رقمی برای انجام محاسبات، اطلاعاتی داشته باشند.

برنامه نویسی کامپیوتر اساساً به مسأله به رمز در آوردن الگوریتمها به شکلی مناسب برای کامپیوتر مربوط می شود. با توجه به این که روشهای عددی شامل محاسبات زیاد روی اعداد است و انجام این محاسبات با دست امکانپذیر نیست، لازم است محاسبات توسط یک ابزار محاسباتی صورت گیرد. در ماشین حساب و کامپیوتر، اعداد، علی الخصوص اعداد اعشاری و اعداد گویایی که دارای بسط اعشاری متناهی نیستند، مانند $0.123456789101112131415161718192021222324252627282930313233343536373839404142434445464748495051525354555657585960616263646566676869707172737475767778798081828384858687888990919293949596979899100$ به صورت تقریبی ذخیره می شوند. با انجام محاسبه روی این اعداد تقریبی، خطاهای موجود در آنها روی جواب نهایی اثر می گذارد، به نحوی که گاهی اوقات نتایج عددی بسیار دور از مقدار واقعی و در نتیجه بی فایده هستند.

۲.۱ خطای مطلق و نسبی

عدد تقریبی a عددی است که مقدار کمی با عدد دقیق A تفاوت داشته و به جای آن در محاسبات به کار برده می شود.

تعریف ۱.۱ اگر $a < A$ آن گاه a را تقریب نقصانی (کوچکتر) A و چنانچه $a > A$ در آن صورت a را تقریب اضافی (بزرگتر) A می نامیم.

مثال ۱. در مورد عدد $\sqrt{2}$ داریم

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

لذا عدد 1.41 یک تقریب نقصانی و عدد 1.42 یک تقریب اضافی $\sqrt{2}$ می باشد.

توجه: هر گاه a یک مقدار تقریبی برای عدد A باشد در آن صورت می نویسیم:

$$a \simeq A$$

تعریف ۲.۱ خطای مطلق عدد تقریبی a به عنوان یک تقریب از A را با $e(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(a) = |A - a| \quad (۱)$$

توجه: برای عدد A دو حالت وجود دارد:

- ۱- عدد A معلوم است، در این صورت خطای مطلق $e(a)$ از فرمول (۱) بدست می‌آید.
- ۲- عدد A معلوم نیست، که اغلب چنین است، بنابراین خطای مطلق $e(a)$ از فرمول (۱) قابل محاسبه نخواهد بود.

در اکثر روشها پس از محاسبه a یک حد بالا برای خطای مطلق a قابل محاسبه است. تعریف ۳.۱ خطای مطلق حدی یک عدد تقریبی a عددی است که از خطای مطلق آن کوچکتر نباشد و آن را با e_a نشان می‌دهیم، بنابراین

$$e(a) \leq e_a$$

توجه: e_a منحصر به فرد نیست در حالی که $e(a)$ منحصر به فرد است.

مثال ۲. برای $A = \frac{2}{3}$ یک تقریب اضافی، یک تقریب نقصانی، خطای مطلق این تقریبات و یک خطای مطلق حدی را به دست آورید.

$$\text{الف) } A = \frac{2}{3}, \quad a = 0,67, \quad e(a) = \left| \frac{2}{3} - \frac{67}{100} \right| = \frac{1}{300}, \quad e_a = 0,004$$

$a = 0,67$ یک تقریب اضافی A است.

$$\text{ب) } A = \frac{2}{3}, \quad a = 0,66, \quad e(a) = \left| \frac{2}{3} - \frac{66}{100} \right| = \frac{2}{300}, \quad e_a = 0,01$$

$a = 0,66$ یک تقریب نقصانی A است.

مثال ۳. اگر $A = \sqrt{2}$ آن گاه $1/41$ تقریبی نقصانی و $1/42$ تقریبی اضافی از A است، واضح است که $|A - 1/41|$ و $|A - 1/42|$ هر دو اصم هستند، بنابراین خطای مطلق به سادگی قابل

محاسبه نیست، اما داریم :

$$|\sqrt{2} - 1,41| < 0,005, \quad e_a = 0,005$$

$$|\sqrt{2} - 1,42| < 0,006, \quad e_a = 0,006$$

توجه : هرگاه e_a خطای مطلق حدی a به عنوان تقریبی از عدد A باشد، آن گاه

$$|A - a| \leq e_a$$

بنابراین

$$a - e_a \leq A \leq a + e_a$$

بنا بر قرارداد، نامساوی اخیر را منحصراً به صورت زیر می‌نویسیم :

$$A = a \pm e_a$$

مثال ۴. اگر $A = 1,324 \pm 0,003$ در این صورت $1,321 \leq A \leq 1,327$

توجه : نامساوی $1,321 \leq A \leq 1,327$ در مثال ۴ نشان می‌دهد که در بسط اعشاری A حتماً $1,32$ موجود است، ولی رقم سوم اعشاری یکی از ارقام ۱ تا ۷ می‌باشد. لذا رقم ۴ مشکوک است.

معمولاً خطای مطلق حدی و حتی خطای مطلق برای نشان دادن دقت یک عدد تقریبی کفایت

نمی‌کند.

مثال ۵. هرگاه در اندازه‌گیری دو طول برحسب سانتیمتر داشته باشیم :

$$L_1 = 235,8 \pm 0,1$$

$$L_2 = 3,2 \pm 0,1$$

علیرغم اینکه خطای مطلق حدی در هر دو مورد با هم برابرند ولی اندازه‌گیری اول بهتر از اندازه‌گیری دوم است زیرا در محاسبه L_1 طول بزرگتری اندازه‌گیری شده است، لذا در اندازه‌گیری L_1 دقت بیشتری انجام گرفته است. بنابراین آنچه دقت یک تقریب را مشخص می‌کند، خطا در واحد آن کمیت است.

تعریف ۴.۱ هرگاه a تقریبی از عدد $A \neq 0$ باشد کمیت زیر را خطای نسبی a می‌نامیم:

$$\delta(a) = \frac{|A - a|}{|A|} = \frac{e(a)}{|A|} \quad (2)$$

مثال ۶. هرگاه $A = \frac{2}{3}$ و $a = 0.67$ تقریبی از آن باشد، مطابق آنچه که در مثال ۲ بدست آمد، داریم:

$$\delta(a) = \frac{e(a)}{A} = \frac{1}{200}$$

۳.۱ منابع اصلی خطا

خطاهایی را که در مسائل ریاضی با آنها مواجه می‌شویم عمدتاً به پنج گروه تقسیم می‌شوند:

- ۱- خطاهایی که در نحوه بیان مسائل وجود دارند. عبارات ریاضی بندرت تصویر دقیقی از پدیده‌های واقعی ارائه داده و در بیشتر موارد صرفاً مدل‌هایی ایده‌آل هستند. در مطالعه پدیده‌های طبیعی می‌بایست به عنوان یک قاعده، شرایطی را قبول کنیم که باعث ساده شدن مسأله گردند. این خود یکی از منابع خطاست. گاهی اوقات حل مسأله‌ای که دقیقاً فرمول‌بندی شده است، بسیار مشکل و یا حتی غیر ممکن می‌باشد. در چنین حالتی یک مسأله تقریبی به جای آن در نظر گرفته می‌شود که تا حدودی همان نتایج را به همراه دارد. این خود خطایی را به وجود می‌آورد که خطای مدل نامیده می‌شود.
- ۲- خطاهایی که از وجود عملیات نامتناهی ناشی می‌شوند. توابع به کار رفته در روابط ریاضی معمولاً

به صورت دنباله‌ها یا سریهای نامتناهی بیان می‌گردند، مثلاً

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

به علاوه بسیاری از مسائل ریاضی را تنها می‌توان با تعداد نامتناهی عملیات حل نمود که حل آنها جواب مسأله می‌باشد. به طور کلی از آنجا که یک فرآیند نامتناهی را نمی‌توان طی مراحل متناهی انجام داد، لازم است که دنباله عملیات را در مرحله‌ای قطع کرده و به یک جواب تقریبی مسأله مورد نظر بسنده نماییم. این قطع عملیات در یک مرحله باعث بروز خطا می‌گردد. این خطا را خطای باقیمانده و یا خطای برشی می‌نامیم.

۳- خطای پارامترهای عددی (مربوط به روابط) که مقادیر آنها از طریق اندازه‌گیری به دست می‌آیند. لذا مقادیر آنها را تنها می‌توان به طور تقریبی یافت، همانند همه ثابتهای فیزیکی. این نوع خطا، خطای اولیه یا خطای داده‌ها نامیده می‌شود.

۴- به خاطر محدودیت در ذخیره ارقام بسط اعشاری اعداد، تقریباً تمام اعداد اعشاری در وسایل محاسباتی با خطا ذخیره می‌شوند. این خطا، خطای نمایش اعداد نامیده می‌شود.

۵- هنگام اجرای محاسبات با اعداد تقریبی، خطاهای مربوط به داده‌های اولیه به نتیجه نهایی منتقل می‌گردند. این نوع خطا، خطای عملیات نامیده می‌شود. به عنوان مثال عدد π خود دارای مقدار تقریبی است لذا در محاسبه عبارتی نظیر $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (زمان تناوب یک آونگ فیزیکی) خطای ناشی از مقدار π به نتیجه نهایی منتقل می‌گردد.

طبیعی است که در یک مسأله خاص بعضی از خطاها حذف شده و برخی دیگر اثری ناچیز در نتیجه نهایی داشته باشند. ولی به طور کلی یک تحلیل کامل بایستی هر نوع خطایی را شامل گردد. در ادامه بحث خطاهای مربوط به عملیات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

توجه: خطای نمایش اعداد گاهی خطای گرد کردن نامیده می‌شود، روشهای متفاوتی برای گرد کردن اعداد اعشاری وجود دارد. در اینجا روش زیر که روش مورد استفاده در ماشینهای محاسباتی

می باشد توضیح داده می شود. هرگاه بخواهیم یک عدد را تا n رقم اعشار گرد کنیم :

اگر رقم $(n+1)$ ام اعشار این عدد کمتر از ۵ باشد، در این صورت رقم $(n+1)$ ام اعشار و تمام ارقام بعد از آن را حذف می کنیم. اما هرگاه رقم $(n+1)$ ام اعشار بیشتر یا مساوی ۵ باشد یک واحد به رقم n ام اعشار اضافه نموده و رقم $(n+1)$ ام و ارقام بعد از آن را حذف می نماییم. بنابراین قانون، خطای گرد کردن همواره کمتر یا مساوی $10^{-n} \times \frac{1}{2}$ می باشد.

مثال ۶. عدد $2/3749$ را در نظر بگیرید، در این صورت گرد شده این عدد تا دو رقم اعشار عبارت است از $2/37$ و گرد شده آن تا سه رقم اعشار برابر است با $2/375$.

توجه : معمولاً تعداد ارقام اعشار یک عدد را با حرف D که تعداد ارقام اعشار عدد قبل از آن نموده است نشان می دهیم.

مثال ۷. عبارت $4/732(3D)$ یعنی $4/732$ دارای سه رقم اعشار است.

۴.۱ خطای چهار عمل اصلی

الف. خطای حاصل جمع

هرگاه a و b تقریبهایی از A و B و این اعداد همگی مثبت باشند و e_a و e_b به ترتیب خطاهای مطلق حدی a و b باشند و هرگاه e_c خطای مطلق حدی عدد $C = A + B$ باشد، در این صورت

$$e_c \leq e_a + e_b$$

ب. خطای تفاضل

به مفروضات قسمت «الف» هرگاه $C = A - B$ در این صورت

$$e_c \leq e_a + e_b$$

یعنی $e_a + e_b$ یک کران بالا برای خطای مطلق حدی C (در هر دو حالت) می باشد.

مثال ۸. هرگاه اعداد $\sqrt{17}$ و $\sqrt{5}$ را تا سه رقم اعشار گرد کنیم، مطلوب است محاسبه $\sqrt{17} \pm \sqrt{5}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

حل: داریم: $\sqrt{17} = 4,123 + e_1, \quad \sqrt{5} = 2,236 + e_2$

منظور از e_1 و e_2 خطای مرتکب شده در نمایش $\sqrt{17}$ و $\sqrt{5}$ می باشد. چون اعداد تا سه رقم اعشار گرد شده اند، پس

$$e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}, \quad e_2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

داریم: $\sqrt{17} + \sqrt{5} = (4,123 + 2,236) + e_2 = 6,359 + e_2$

و چون $e_2 \leq e_1 + e_2$ لذا $e_2 \leq 10^{-3}$ در نتیجه

$$6,359 - 10^{-3} \leq \sqrt{17} + \sqrt{5} \leq 6,359 + 10^{-3}$$

همچنین $\sqrt{17} - \sqrt{5} = 1,887 + e_2$ که در اینجا نیز

$$e_2 \leq e_1 + e_2 \leq 10^{-3}$$

بنابراین $1,887 - 10^{-3} \leq \sqrt{17} - \sqrt{5} \leq 1,887 + 10^{-3}$

مثال ۹. هرگاه اعداد π و $\sqrt{2}$ را تا چهار رقم اعشار گرد کنیم، مطلوب است محاسبه $\pi \pm \sqrt{2}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفاضل.

حل: داریم: $\pi = 3,1416 + e_1, \quad \sqrt{2} = 1,4142 + e_2$

چون اعداد تا چهار رقم اعشار گرد شده اند، پس $e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad e_2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$

همچنین داریم: $\pi + \sqrt{2} = (3,1416 + 1,4142) + e_2 = 4,5558 + e_2$

که در آن

$$e_2 \leq e_1 + e_2 \Rightarrow e_2 \leq 10^{-4}$$

در نتیجه $4,5558 - 10^{-4} \leq \pi + \sqrt{2} \leq 4,5558 + 10^{-4}$ و به طور مشابه

$$\pi - \sqrt{2} = 1,7274 + e_2$$

$$e_r \leq 10^{-4}$$

$$1,7274 - 10^{-4} \leq \pi - \sqrt{2} \leq 1,7274 + 10^{-4}$$

$$1,7273 \leq \pi - \sqrt{2} \leq 1,7275$$

پ. خطای حاصل ضرب

با مفروضات قسمت «الف» هرگاه $C = AB$ در این صورت

$$e_c \leq ae_b + be_a \quad (3)$$

توجه: در عمل تقسیم معمولاً به گونه‌ای عمل می‌شود که تقسیم تبدیل به عمل ضرب گردد، مثال ۱۱ نشان دهنده این مطلب می‌باشد.

مثال ۱۰. مقدار $\pi\sqrt{2}$ را با چهار رقم اعشار محاسبه نموده و حداکثر خطای این حاصل ضرب را نیز به دست آورید.

حل: داریم:

$$\pi = 3,1416 + e_1$$

$$\sqrt{2} = 1,4142 + e_r$$

که در آن مانند مثال ۹ داریم:

$$e_1 \leq \frac{1}{4} \times 10^{-4}, \quad e_r \leq \frac{1}{4} \times 10^{-4}$$

$$\pi\sqrt{2} = (3,1416 \times 1,4142) + e_r$$

که بنا به رابطه (۳) برای e_r داریم:

$$e_r \leq 3,1416e_r + 1,4142e_1$$

$$e_r \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} (3,1416 + 1,4142)$$

$$e_r \leq 0,5 \times 10^{-2} (4,5558) = 2,2779 \times 10^{-2}$$

اما

$$\pi\sqrt{2} = 4,4429 + e'_r$$

چون حاصل ضرب اعداد $3,1416$ و $1,4142$ در محاسبه $\pi\sqrt{2}$ بیشتر از چهار رقم اعشار دارد، هنگام نمایش حاصل ضرب دو عدد مذکور با چهار رقم اعشار خطای دیگری مرتکب شده‌ایم و خطای حدی کل را با e'_r نشان داده‌ایم. برای e'_r داریم:

$$e'_r \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} + e_r$$

$$e'_r \leq 0,5 \times 10^{-2} + 2,2779 \times 10^{-2} = 2,7779 \times 10^{-2}$$

لذا:

$$4,4429 - 2,7779 \times 10^{-2} \leq \pi\sqrt{2} \leq 4,4429 + 2,7779 \times 10^{-2}$$

$$4,4426 \leq \pi\sqrt{2} \leq 4,4432$$

توجه: همانطور که مثال 10 نشان می‌دهد، حاصل ضرب دو عدد تقریبی دارای خطای بیشتر از حاصل جمع و یا تفاضل اعداد تقریبی است. رابطه (۳) نشان می‌دهد که این خطا برای a و b بزرگ، می‌تواند مقداری قابل توجه باشد. اما هرگاه اعداد تقریبی که در هم ضرب می‌شوند کمتر یا مساوی یک باشند، خطای حاصل ضرب آنها در حد قابل قبول قرار خواهد داشت.

حداکثر خطا در حاصل ضرب سه عدد تقریبی :

هرگاه a و b و c تقریبهایی از A و B و C بوده و این اعداد همگی مثبت باشند، رابطه زیر برای خطای مطلق حدی حاصل ضرب abc به عنوان تقریبی از مقدار ABC بیان می‌شود :

$$e_{abc} \leq abe_c + ace_b + bce_a \quad (۴)$$

روابط مشابه برای حاصل ضرب بیشتر از سه عدد تقریبی به راحتی قابل نوشتن است.

مثال ۱۱. هرگاه اعداد را تا سه رقم اعشار گرد کنیم، عبارت $\frac{\pi}{3\sqrt{5}}$ را محاسبه نموده و یک خطای مطلق حدی برای این محاسبه بیان نمایید.

حل : قرار می‌دهیم $x = \frac{\pi}{3\sqrt{5}}$ ، لذا

$$\begin{aligned} x &= \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \\ &= \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot (0,2) \sqrt{5} = (0,2) \pi \frac{1}{3} \sqrt{5} \end{aligned}$$

مقدار $0,2$ به طور دقیق مشخص است، چون اعداد را تا سه رقم اعشار نمایش می‌دهیم؛ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \pi &= 3,142 + e_\pi, & e_\pi &\leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} \\ \sqrt{5} &= 2,236 + e_{\sqrt{5}}, & e_{\sqrt{5}} &\leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} \\ \frac{1}{3} &= 0,333 + e_{\frac{1}{3}}, & e_{\frac{1}{3}} &\leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} \end{aligned}$$

و از آن‌ها داریم :

$$x = (0,2) 3,142 \times 2,236 \times 0,333 + e_x$$

$$x = 0,468 + e'_x$$

توجه داشته باشید که چون حاصل ضرب اعداد فوق بیش از سه رقم اعشار دارد، هنگام نمایش این حاصل ضرب‌ها با سه رقم اعشار، خطای دیگری مرتکب می‌شویم که خطای حدی کل را با

e'_x نشان داده‌ایم. در واقع داریم :

$$e'_x \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} + e_x$$

بنا به رابطه (۴) برای e_x داریم :

$$e_x \leq 0,2[2,236 \times 0,333e_\pi + 3,142 \times 0,333e_{\sqrt{\delta}} + 3,142 \times 2,236e_{\frac{1}{2}}]$$

$$e_x \leq 0,2 \times \frac{1}{2} \times 10^{-2} \times 8,816$$

$$e_x \leq 8,816 \times 10^{-4}$$

لذا

$$e'_x \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} + 8,816 \times 10^{-4}$$

$$e'_x \leq 1,382 \times 10^{-2}$$

۵.۱ خطای محاسبه فرمولها و توابع

الف. خطای محاسبه فرمولها

هرگاه تابعی n متغیره به صورت $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ داشته باشیم و بخواهیم مقدار

این تابع را در نقاط $A_i = a_i + e_{a_i}$ برای $i = 1, \dots, n$ حساب کنیم، در این صورت خواهیم داشت :

$$f(A_1, A_2, \dots, A_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + e_f$$

که در آن .

$$e_f \leq e_{a_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_a + e_{a_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_a + \dots + e_{a_n} \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_a \quad (5)$$

در رابطه (۵) منظور از a بردار مقادیر تقریبی a_i یعنی $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ می باشد، همچنین $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_a$ به معنی محاسبه مقدار تابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ به ازای بردار a است.

مثال ۱۲. حجم کره ای به شعاع $\frac{5}{3}$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای این محاسبه را به دست آورید. اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کنید.

حل: داریم: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ و یا $V = xyz^3$ که در آن

$$\begin{aligned} x = \frac{4}{3} &= 1,3333 + e_x, & e_x &\leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \\ y = \pi &= 3,1416 + e_y, & e_y &\leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \\ z = \frac{5}{3} &= 1,6667 + e_z, & e_z &\leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \end{aligned}$$

بنابراین

$$V = (1,3333)(3,1416)(1,6667)^3 + e_v$$

$$V = 19,3933 + e'_v$$

که در آن مشابه مثال ۱۱ داریم:

$$e'_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} + e_v$$

$$e_v \leq e_x \frac{\partial V}{\partial x} + e_y \frac{\partial V}{\partial y} + e_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

که عبارت سمت راست را بایستی در $(1,3333, 3,1416, 1,6667)$ محاسبه کرد. لذا

$$e_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \{yz^3 + xz^3 + 3xyz^2\}$$

مقدار سمت راست به ازای $x = 1,3333$, $y = 3,1416$ و $z = 1,6667$ به صورت زیر

خواهد بود :

$$e_v \leq 5 \times 10^{-5} \{14,5453 + 6,1731 + 34,9072\}$$

$$e_v \leq 0,0028$$

$$e'_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} + 0,0028$$

$$e'_v \leq 5 \times 10^{-5} + 0,0028$$

$$e'_v \leq 0,00285$$

و در نتیجه $V = 19,3933 \pm 0,00285$

ب. خطای محاسبه توابع

در اکثر مسائل محاسبات عددی، نیاز به محاسبه توابعی مانند $\sin x$ و \sqrt{x} و $\ln x$ و ... در دامنه تعریف آنها پیش می‌آید. در محاسبه این توابع علاوه بر خطای موجود در نمایش x به شکل اعشاری و با تعدادی متناهی رقم، خطای دیگری نیز وارد می‌شود که ذیلاً آن را بررسی می‌کنیم. فرض کنید می‌خواهیم مقدار $e^{1/3}$ را حساب کنیم، می‌دانیم

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

مقدار $e^{1/3}$ یعنی مقدار سری واقع در سمت راست تساوی بالا به ازای $x = \frac{1}{3}$ چون محاسبه حاصل جمع بینهایت جمله (عدد) عملاً امکانپذیر نیست، معمولاً تعدادی متناهی از جملات نخست این سری، متناسب با دقت لازم، انتخاب و به ازای $x = \frac{1}{3}$ یا تقریب مناسبی از $\frac{1}{3}$ ، محاسبه می‌شود. در واقع می‌نویسیم:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

که در آن $E_n(x)$ عبارتست از :

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots$$

$E_n(x)$ باقیمانده سری یا خطای برشی در x نامیده می‌شود، بنابراین برای محاسبه $e^{1/3}$ ، تقریبی

از آن یعنی مقدار $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ را به ازای $x = \frac{1}{3}$ حساب می‌کنیم. اما در عمل به جای $\frac{1}{3}$ تقریبی از آن را استفاده می‌کنیم که به فرم اعشاری دارای تعدادی متناهی رقم است. مثلاً اگر بخواهیم $e^{1/3}$ را با خطای کمتر از 10^{-3} حساب کنیم، قرار می‌دهیم: $|E_n(x)| \leq \frac{1}{4} \times 10^{-3}$ (به ضریب $\frac{1}{4}$ در سمت راست عبارت فوق توجه نمایید، چون مجبوریم $x = \frac{1}{3}$ را به صورت تقریبی بنویسیم که آن هم دارای خطای حدی $\frac{1}{4} \times 10^{-3}$ می‌باشد). برای محاسبه n ، معمولاً از اولین جمله $E_n(x)$ استفاده می‌شود. یعنی قرار می‌دهیم:

$$E_n(x) \simeq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

بنابراین برای محاسبه $e^{1/3}$ با خطای کمتر از 10^{-3} قرار می‌دهیم

$$\frac{(\frac{1}{3})^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{4} \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-4}$$

برای $n = 3$ نامساوی فوق برقرار نیست، اما برای $n \geq 4$ نامساوی برقرار است. لذا باید مقدار زیر را حساب کنیم:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$$

خطای محاسبه این مجموع باید چنان کوچک باشد که در مقایسه با خطای برشی، قابل اغماض یا حداکثر در حدود آن باشد. لذا لازم است قرار دهیم $\frac{1}{3} = 0.3333(4D)$ و عبارت فوق را محاسبه کنیم. پس از انجام محاسبات داریم:

$$e^{1/3} \simeq 1 + 0.3333 + 0.0556 + 0.0062 + 0.0005 \\ = 1.3956$$

بنابراین با ۳ رقم اعشار خواهیم داشت:

$$e^{1/3} \simeq 1.396 (3D)$$

توجه : همان گونه که در بالا دیده می شود، هر چند که نتیجه $e^{1/2}$ را با ۳ رقم اعشار می خواهیم، اما محاسبات میانی را با ۴ رقم اعشار انجام داده ایم که این مطلب را در حالت کلی به صورت قاعده زیر بیان می کنیم :

قاعده : هرگاه نتیجه یک عبارت را تا n رقم اعشار بخواهیم، محاسبات میانی را با $(n + 1)$ رقم اعشار انجام داده و نتیجه نهایی را در آخر کار با n رقم اعشار ارائه می نماییم.

مثال ۱۴. مقدار تقریبی تابع $\sin x$ را به ازای $x = \frac{\pi}{5}$ و با خطای کمتر از 10^{-2} حساب کنید.
حل : داریم

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \cdots$$

$$|E_n(x)| = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ در اینجا قرار می دهیم}$$

$$x = \frac{\pi}{5} = \pi \frac{1}{5} = 3,1416 \times 0,1429 = 0,4489$$

بنابراین بایستی n را طوری تعیین کنیم که

$$\frac{(0,4489)^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} = 5 \times 10^{-3}$$

برای $n \geq 2$ نامساوی فوق برقرار می باشد، در نتیجه

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{5} &\simeq 0,4489 - \frac{(0,4489)^3}{3!} + \frac{(0,4489)^5}{5!} \\ &= 0,4489 - 0,0151 + 0,0002 \\ &= 0,4340 \quad (4D) \end{aligned}$$

لذا با سه رقم اعشار خواهیم داشت :

$$\sin \frac{\pi}{\sqrt{5}} \simeq 0,434(3D)$$

مجموعه مسائل فصل اول.

۱- هرگاه a تقریبی از A باشد، خطای مطلق a را به عنوان تقریب A در حالت‌های زیر حساب کنید.

الف. $A = \frac{1}{300}$ و $a = 0,003$

ب. $A = 2,5475$ و $a = 2,548$

پ. $A = 2,100007$ و $a = 2,100$

ت. $A = \frac{1}{3}$ و $a = 0,33$

جواب. الف. $\frac{1}{3000}$ ب. $0,0005$ پ. 7×10^{-6} ت. $\frac{1}{300}$

۲- یک کران خطای حدی را برای تقریب a از عدد A در هر یک از حالت‌های مسئله ۱ ارائه نمایید.

جواب. الف. 5×10^{-4} ب. 5×10^{-4} پ. 5×10^{-5} ت. 5×10^{-4}

۳- هرگاه π و $\sqrt{5}$ را تا سه رقم اعشار گرد کرده باشیم، مطلوب‌ست محاسبه $\pi\sqrt{5}$ و $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ و محاسبه حداکثر خطای مرتکب شده در هر حالت.

جواب. $\pi\sqrt{5} \simeq 7,026$ با حداکثر خطای $0,0032$

$\frac{\pi}{\sqrt{5}} \simeq 1,405$ با حداکثر خطای $0,0023$

۴- هرگاه x و y را تا چهار رقم اعشار گرد کرده باشیم، مطلوب‌ست محاسبه حداکثر خطای مرتکب

شده در $x \pm y$ و xy که $x = \sqrt{11}$ و $y = \pi$.

جواب. 10^{-4} برای جمع و تفریق و 4×10^{-4} برای ضرب.

۵- حجم کره‌ای به شعاع $\frac{V}{3}$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای آن را بنویسید. (با سه رقم اعشار).

جواب. $V = 53,184$ و حداکثر خطا $0,063$.

۶- مقدار تقریبی توابع زیر را به ازای x های داده شده و با تقریب داده شده ϵ حساب کنید:

الف. $\sin x \quad x = \frac{\pi}{5}, \quad x = -\frac{1}{3}, \quad \epsilon = 10^{-2}$

ب. $\cos x \quad x = \frac{\pi}{11}, \quad x = \frac{\sqrt{2}}{5}, \quad \epsilon = 10^{-2}$

پ. $e^{-x} \quad x = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \epsilon = 10^{-2}$

ت. $\ln(1+x) \quad x = \frac{1}{5}, \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \epsilon = 10^{-2}$

ث. $\frac{1}{1+x^2} \quad x = \frac{1}{5}, \quad x = \frac{1}{5}, \quad \epsilon = 10^{-2}$

۷- ثابت کنید $\delta(a) \leq \frac{e(a)}{|a| - e_a}$ و از آنجا نتیجه بگیرید اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد آن گاه

$$\delta(a) \leq \frac{e(a)}{|a|}$$

۸- اگر a_i ها ($1 \leq i \leq n$) همگی اعدادی مثبت باشند نشان دهید

الف. $e(\sum_{i=1}^n a_i) \leq \sum_{i=1}^n e(a_i)$

ب. $\delta(\sum_{i=1}^n a_i) \leq \max\{\delta(a_1), \dots, \delta(a_n)\}$

۹- اگر a و b به ترتیب تقریب‌هایی از A و B و این اعداد همگی مثبت باشند ثابت کنید: $e_{ab} \leq ae_b + be_a$

۱۰- فرض کنید f تابعی n متغیره به صورت $f = f(x_1, \dots, x_n)$ باشد. نشان دهید هرگاه نقاط $A = a_i + e_{a_i}$

($1 \leq i \leq n$) را در تابع قرار دهیم، داریم

$$e_f \leq \sum_{i=1}^n e_{a_i} \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| (a_1, \dots, a_n)$$

۱۱- مقدار $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$ را برای x های بزرگ با D به دست آورید و آن را با مقدار

$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ مقایسه کنید و از آن نتیجه بگیرید که تفریق دو عدد نزدیک به هم می‌تواند با خطای زیاد توأم باشد.

۱۲- با یک برنامه کامپیوتری مناسب کوچکترین مقدار مثبت ϵ را برای یک کامپیوتر به دست آورید به طوری که

هرگاه با عددی مانند ۱ جمع شود حاصل بیشتر از یک باشد. این عدد را اپسیلون ماشین یا eps می‌نامند (یعنی

$1 + \text{eps} > 1$ و اگر $\alpha < \alpha < \text{eps}$ آن گاه $1 + \alpha \neq 1$).

فصل دوم

حل عددی معادلات $f(x) = 0$

۱.۲ مقدمه

یکی از مسائلی که اغلب در کارهای مهندسی با آن مواجه می‌شویم، حل معادله‌ای به شکل $f(x) = 0$ است که در آن f یک تابع مفروض است. منظور از حل معادله $f(x) = 0$ ، یافتن مقداری از متغیر x است که به ازای آنها مقدار تابع صفر شود. هرگاه $f(\alpha) = 0$ ، آن گاه α را یک ریشه معادله می‌نامیم و یا می‌گوییم α یک صفر تابع f است.

خواننده با حل تحلیلی معادلاتی مانند معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و تعیین ریشه‌های آن آشنا می‌باشد. همچنین بعضی معادلات مانند معادلات مثلثاتی، نظیر

$$\sin 2x + 3 \cos 2x = 1$$

به روشهای کلاسیک قابل حل هستند. اما معادلاتی مانند معادلات زیر، قابل حل با روشهای تحلیلی

نبوده و برای حل آنها بایستی روشهای تقریبی مورد استفاده قرار گیرد:

$$e^{-x} - \cos x = 0$$

$$x + \cos x = 0$$

$$x^2 - (1-x)^5 = 0$$

معمولاً برای تعیین ریشه‌ای از یک معادله با دقت مورد نظر، لازم است تقریبی از آن ریشه یا فاصله کوچکی را که حاوی آن ریشه باشد، معلوم کرد. به این منظور محدودیتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

محدودیت الف: فاصله‌ای موجود باشد که شامل ریشه باشد.

محدودیت ب: بایستی ریشه در فاصله مورد نظر یکتا باشد.

از نظر ریاضی محدودیت «الف» را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

۱- تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ پیوسته است.

۲- $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامتند، یعنی $f(a)f(b) < 0$.

در نتیجه بنا به قضیه مقدار میانی، عددی مانند α در فاصله $[a, b]$ وجود دارد، به طوری که:

$$f(\alpha) = 0$$

با داشتن شرایط ۱ و ۲، محدودیت «ب» از نظر ریاضی، به صورت زیر بیان می‌شود:

۳- برای هر $x \in [a, b]$:

$$f'(x) \neq 0$$

۲.۲ تعیین ریشه‌ها با دقت مورد نظر

با مشخص بودن فاصله‌ای که شامل یک ریشه معادله $f(x) = 0$ است، برای تعیین تقریبی از ریشه مورد نظر با دقت مطلوب، دنباله‌ای از اعداد مانند x_n می‌سازیم به طوری که با افزایش n

مقدار x_n به α نزدیک شود، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

بنابراین با توجه به تعریف حد، عددی مانند N وجود دارد که

$$x_N \simeq \alpha$$

تعیین N ی که تقریب فوق را بدهد، معیار توقف محاسبه x_n ها نامیده می‌شود. در اینجا سه معیار برای توقف ارائه می‌شود. لازم به توضیح است که در یک مسأله پیچیده لزومی ندارد تا استفاده صرف از یکی از این معیارها کافی باشد، و قاعداً باید شانس استفاده از هر سه معیار را به طور مناسب در الگوریتم قرار داد.

الف) هرگاه ϵ عددی معلوم و مفروض باشد (مثلاً $\epsilon = 10^{-6}$)، x_n ها را تا جایی محاسبه می‌کنیم که $|f(x_N)| < \epsilon$ ، یعنی به محض اینکه $|f(x_N)| < \epsilon$ ، عملیات محاسبه x_n را متوقف می‌کنیم و x_N را به عنوان تقریب α می‌پذیریم.

ب) هرگاه اختلاف دو x_n متوالی، مثلاً x_N و x_{N-1} عدد کوچکی شود، یعنی هرگاه برای ϵ معلوم داشته باشیم $|x_N - x_{N-1}| < \epsilon$ ، در این صورت عملیات را متوقف نموده و x_N را به عنوان تقریب α می‌پذیریم.

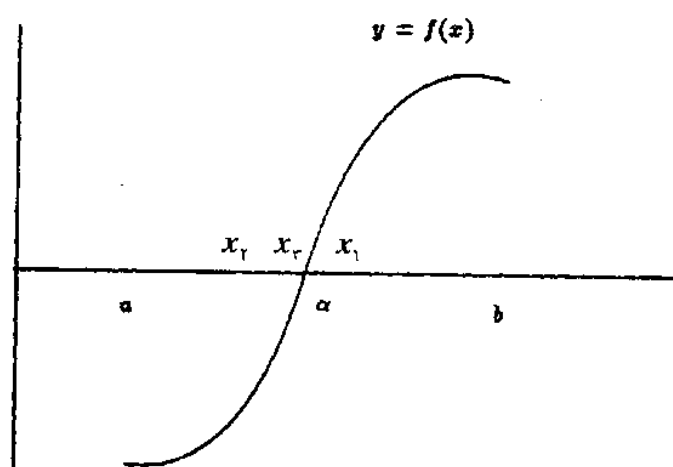
ج) هرگاه تعداد تکرار یا به عبارت دیگر n از یک عدد مشخص بیشتر شود، الگوریتم خاتمه یافته و x_n را به عنوان تقریب α می‌پذیریم.

هر قسمت بعد، چند روش عددی را برای تعیین ریشه معادله $f(x) = 0$ معرفی می‌کنیم. در تمام حالتها فرض می‌کنیم محدودیتهای «الف» و «ب» برقرارند.

۳.۲ روش‌های عددی حل معادله $f(x) = 0$

۱.۳.۲ روش دو بخشی یا روش تنصیف

هرگاه شرایط ۱ تا ۳ برقرار بوده و α ریشه معادله $f(x) = 0$ باشد، در این صورت نقطه $(\alpha, 0)$ بر روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد، مطابق شکل زیر:



در روش دو بخشی وسط فاصله $[a, b]$ را به عنوان اولین تقریب α در نظر می‌گیریم، یعنی قرار می‌دهیم:

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

برای x_1 سه حالت وجود دارد:

۱- $f(x_1) = 0$ ، که در این صورت x_1 ریشه معادله بوده و قرار می‌دهیم $\alpha = x_1$.

۲- $f(a)f(x_1) < 0$ یعنی ریشه بین a و x_1 است، که در این صورت در تکرار بعدی فاصله $[a, x_1]$ را برای تعیین ریشه معادله $f(x) = 0$ نظر می‌گیریم.

۳- $f(a)f(x_1) > 0$ ، یعنی

$[x_1, b]$ را برای تعیین ریشه مع

که در این صورت در تکرار بعدی فاصله

با مقدمه فوق، الگوریتم ۱

یر خواهیم داشت:

الگوریتم روش دو بخشی.

قدم ۱. قرار دهید $x = \frac{a+b}{2}$.

قدم ۲. اگر $f(a)f(x) < 0$ ، آن گاه ریشه در فاصله (a, x) است، قرار دهید $b = x$ و مجدداً قدم ۱ را در فاصله جدید $[a, b]$ تکرار کنید.

قدم ۳. اگر $f(a)f(x) > 0$ ، آن گاه ریشه در فاصله (x, b) است، قرار دهید $a = x$ و مجدداً قدم ۱ را در فاصله جدید $[a, b]$ تکرار کنید.

قدم ۴. اگر $f(a)f(x) = 0$ ، آن گاه x ریشه است و عملیات خاتمه پیدا می‌کند.

نکته ۱. از آنجا که لزومی ندارد که قدم ۴ اتفاق بیافتد، بنابراین جهت کنترل خطا و پایان الگوریتم باید معیارهای توقف ذکر شده را در الگوریتم به طور مناسب به کار گرفت.

نکته ۲. روش دو بخشی همگرایی تضمین شده دارد، یعنی همواره با دقت مورد نظر به جواب خواهیم رسید.

برنامه روش دو بخشی برای حل معادله $F(x) = 0$.

در این برنامه تابع $F(x) = x + \cos x$ اختیار شده است. مقادیر a و b و مقدار دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد. خروجی برنامه، ریشه مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```

c
c      Bisection Method
c
F(x)=x+cos(x)
read(*,*) a,b,eps
x=(a+b)/2
n=1
10  if (abs(F(x)) .ge. eps) then
      if ( F(x) * F(a) .gt. 0 ) then
          a=x
      else
          b=x
      endif
      x=(a+b)/2
      n=n+1
      goto 10
  else
      write(*,*) "ROOT = ",x
      write(*,*) "ITERATION = ",n
  endif
end

```

مثال ۱. تقریبی از ریشه معادله $f(x) = 3x - e^{-x} = 0$ را که در فاصله $(0,25, 0,27)$ قرار دارد، با سه رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < 0,001$ که x_n تقریب ریشه در تکرار n ام است.

حل: با توجه به الگوریتم مذکور، جدول زیر را خواهیم داشت:

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰٫۲۵	۰٫۲۷	۰٫۲۶	-	۰٫۰۰۸۹
۲	۰٫۲۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۵	+	-۰٫۰۰۹۹
۳	۰٫۲۵۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۷۵	+	-۰٫۰۰۰۵

چون $|f(x_3)| = 0,0005 < 0,001$ بنابراین x_3 را به عنوان تقریب ریشه معادله در نظر

می‌گیریم. لذا هرگاه α ریشه مورد نظر باشد، با سه رقم اعشار قرار می‌دهیم:

$$\alpha \simeq 0,258$$

تذکر ۱. با توجه به نکته بیان شده در فصل اول چون در مثال ۱ تقریب را با سه رقم اعشار

خواسته‌ایم، محاسبات میانی را با چهار رقم اعشار انجام داده و در نهایت x_3 را تا سه رقم اعشار

گرد نموده به عنوان تقریب α قرار داده‌ایم. بدیهی است این تعداد رقم اعشار برای محاسبات میانی

لزوماً در هر مسأله مفید نخواهد بود و باید بسته به نوع مسأله، خود استفاده کننده از الگوریتم، در

این مورد تصمیم بگیرد.

تذکر ۲. دقت کنید که شرایط ۱ تا ۳ برای معادله مثال ۱ برقرارند، زیرا داریم:

$$f(a) = f(0,25) = -0,0288$$

$$f(b) = f(0,27) = +0,0466$$

پس f در فاصله $(0,25, 0,27)$ دارای ریشه می‌باشد، همچنین داریم:

$$f'(x) = 3 + e^{-x} > 0 \quad \text{همواره}$$

مثال ۲. تقریبی از ریشه معادله $x^2 + x - 1 = 0$ را که در فاصله $(0, 1)$ قرار دارد، به دست

آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < 10^{-2}$ که x_n تقریب ریشه در تکرار n ام است. تقریب

را با $4D$ به دست آورید.

حل:

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰,۵	+	-۰,۳۷۵
۲	۰,۵	۱	۰,۷۵	-	۰,۱۷۱۸۸
۳	۰,۵	۰,۷۵	۰,۶۲۵	+	-۰,۱۳۰۸۶
۴	۰,۶۲۵	۰,۷۵	۰,۶۸۷۵	-	۰,۰۱۲۴۵
۵	۰,۶۲۵	۰,۶۸۷۵	۰,۶۵۶۲۵	+	-۰,۰۰۶۱۱۳
۶	۰,۶۵۶۲۵	۰,۶۸۷۵	۰,۶۷۱۸۸	+	-۰,۰۰۲۴۸۳
۷	۰,۶۷۱۸۸	۰,۶۸۷۵	۰,۶۷۹۶۹	+	-۰,۰۰۰۶۳۱

چون $|f(x_7)| = ۰,۰۰۰۶۳۱ < ۱۰^{-2}$ لذا تقریب ریشه با $4D$ عبارتست از:

$$\alpha \simeq ۰,۶۷۹۷$$

مثال ۳. تقریبی از ریشه معادله $x^2 - (1-x)^5 = 0$ را که در فاصله $(0, 1)$ قرار دارد با $4D$ به

دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < ۱۰^{-2}$ که x_n تقریب ریشه در تکرار n ام است.

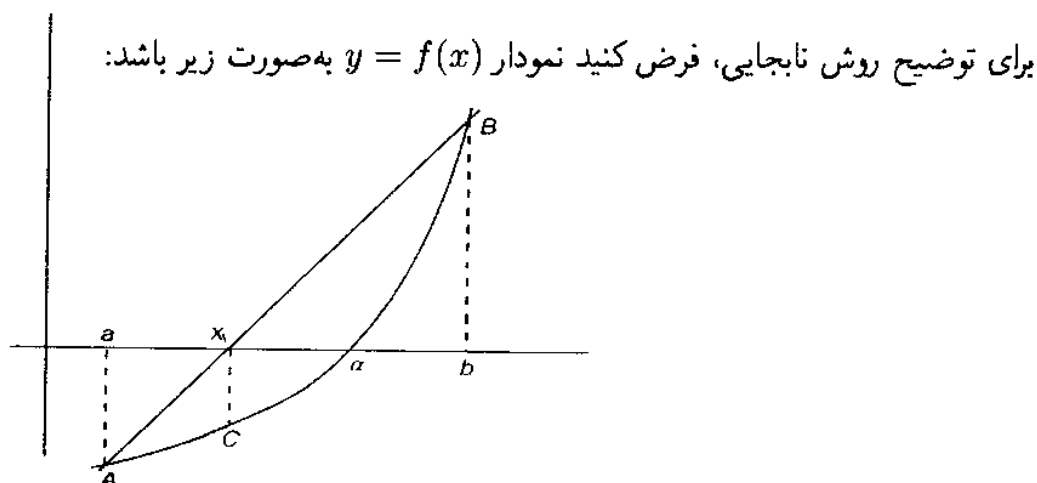
حل:

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰,۵	-	۰,۲۱۸۷۵
۲	۰	۰,۵	۰,۲۵	+	-۰,۱۷۴۸۰
۳	۰,۲۵	۰,۵	۰,۳۷۵	-	۰,۰۴۵۲۶
۴	۰,۲۵	۰,۳۷۵	۰,۳۱۲۵	+	-۰,۰۵۵۹۳
۵	۰,۳۱۲۵	۰,۳۷۵	۰,۳۴۳۷۵	+	-۰,۰۰۳۵۵

چون $|f(x_5)| = ۰,۰۰۳۵۵ < ۱۰^{-2}$ بنابراین تقریب ریشه با $4D$ عبارتست از:

$$\alpha \simeq ۰,۳۴۳۸$$

۲.۳.۲ روش نابجایی



دو نقطه A و B واقع بر منحنی را با یک خط مستقیم به هم وصل می‌کنیم، محل تلاقی این خط با محور x ها را به عنوان اولین تقریب α یعنی x_1 در نظر می‌گیریم. حال چون (طبق شکل فوق) ریشه بین x_1 و b است مجدداً با یک خط مستقیم دو نقطه B و C بر روی منحنی را به هم وصل می‌کنیم و محل تلاقی این خط با محور x ها را x_2 یعنی دومین تقریب ریشه در نظر می‌گیریم. این کار را تا جایی ادامه دهیم که به اندازه کافی به ریشه α نزدیک شویم.

برای تعیین x_1 ابتدا معادله خط AB را می‌نویسیم، این معادله به صورت زیر است:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

زیرا مختصات نقاط A و B به ترتیب عبارتند از $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$. چون $(x_1, 0)$ بر روی خط فوق واقع است، لذا خواهیم داشت:

$$\frac{0 - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

و از آن

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

حال با توجه به اینکه ریشه در فاصله $[a, x_1]$ و یا در فاصله $[x_1, b]$ قرار گرفته باشد، عمل فوق را در یکی از فاصله‌های مذکور تکرار می‌کنیم بنابراین با توجه به مفروضات روش دو بخشی، در روش نابجایی قرار می‌دهیم :

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad (۱)$$

و حالهای زیر را بررسی می‌کنیم :

اگر $f(a)f(x) < 0$ آن گاه ریشه در (a, x) است، لذا قرار می‌دهیم $b = x$ و x جدید را از رابطه (۱) حساب می‌کنیم.

اگر $f(a)f(x) > 0$ آن گاه ریشه در (x, b) است، لذا قرار می‌دهیم $a = x$ و x جدید را از رابطه (۱) حساب می‌کنیم.

اگر $f(a)f(x) = 0$ آن گاه ریشه برابر x بوده و کار تمام است.

نکته روش نابجایی نیز مانند روش دو بخشی همگرایی تضمین شده دارد.

برنامه روش نابجایی برای حل معادله $F(x) = 0$.

در این برنامه تابع $F(x) = x + \cos x$ اختیار شده است. مقادیر a و b و مقدار دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد. خروجی برنامه، ریشه مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

```

c
c      Regula Falsi Method
c
      F(x)=x+cos(x)
      read(*,*) a,b,eps
      x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a))
      n=1
10    if (abs(F(x)) .ge. eps) then
          if ( F(x) * F(a) .gt. 0 ) then
              a=x
          else
              b=x
          endif
          x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a))
          n=n+1
          goto 10
      else
          write(*,*) "ROOT = ",x
          write(*,*) "ITERATION = ",n
      endif
end

```

مثال ۴. تقریبی از ریشه معادله $f(x) = 3x - e^{-x} = 0$ را به روش نابجایی با سه رقم اعشار

به دست آورید. این ریشه در فاصله $(0,25, 0,27)$ قرار دارد. محاسبات را تا جایی ادامه دهید که

$$|f(x_n)| \geq 2 \times 10^{-2}$$

حل: با توجه به رابطه (۱) و اینکه $a = 0,25$ و $b = 0,27$ داریم:

$$x_1 = \frac{0,25 \times 0,0466 - 0,27 \times (-0,0288)}{0,0466 - (-0,0288)} = 0,2576$$

$$f(x_1) = -0,0001$$

لذا $|f(x_1)| = 0,0001 < 2 \times 10^{-4}$ بنابراین x_1 تقریب ریشه بوده و این تقریب با سه رقم اعشار عبارت است از:

$$\alpha \simeq 0,258$$

(نتیجه را با مثال ۱ مقایسه کنید.)

مثال ۵. تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x^2 - 2^x = 0$ را که در فاصله $(-1, 0)$ قرار دارد به

روش نابجایی با $4D$ به دست آورید به طوری که $|f(x_n)| < 10^{-2}$.

حل: هرگاه قرار دهیم $x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$ جدول زیر را خواهیم داشت:

n	a	b	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	-۱	۰	-۰,۶۶۶۶۷	۰,۵	-۰,۱۸۵۵۲	-
۲	-۱	-۰,۶۶۶۶۷	-۰,۷۵۶۸۸	۰,۵	-۰,۰۱۸۹۲	-
۳	-۱	-۰,۷۵۶۸۸	-۰,۷۶۵۷۴	۰,۵	-۰,۰۰۱۷۹	-

چون $|f(x_3)| = 0,00179 < 10^{-2}$ پس x_3 تقریب مورد نظر ریشه است. لذا با $4D$ تقریب ریشه عبارت است از:

$$\alpha \simeq -0,7657$$

مثال ۶. به روش نابجایی تقریبی از ریشه منفی معادله $f(x) = \sin x - \frac{x}{4} = 0$ را که در

فاصله $(-2, -1)$ قرار دارد با $4D$ به دست آورید، به طوری که $|f(x_n)| < 10^{-2}$.

حل: برای $x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$ جدول زیر را خواهیم داشت:

n	a	b	x_n	$f(a)$	$f(x_n)$	علامت $f(a)f(x_n)$
۱	-۲	-۱	-۱٫۷۹۰۱۳	۰٫۰۹۰۷۰	-۰٫۰۸۰۹۸	-
۲	-۲	-۱٫۷۹۰۱۳	-۱٫۸۸۹۱۲	۰٫۰۹۰۷۰	-۰٫۰۰۵۲۰	-

چون $|f(x_2)| = ۰٫۰۰۵۲ < ۱۰^{-۲}$ پس x_2 تقریب مورد نظر از ریشه است. بنابراین با $4D$

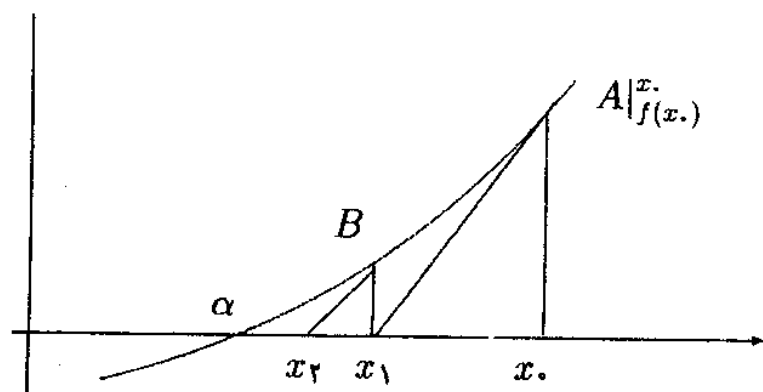
این تقریب عبارت است از:

$$\alpha \simeq -۱٫۸۸۹۱$$

توجه: هنگام محاسبه معادلاتی که شامل توابع مثلثاتی هستند، مد (حالت) رادیان ماشین حساب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳.۳.۲ روش نیوتن-رفسون

برای توضیح این روش، فرض کنید نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد:



همانگونه که شکل فوق نشان می‌دهد α ریشه مورد نظر است. هرگاه x_0 تقریبی از ریشه باشد، از نقطه $A(x_0, f(x_0))$ واقع بر منحنی $y = f(x)$ مماس بر منحنی را رسم می‌کنیم. محل تلاقی این مماس را با محور طولها x_1 می‌نامیم. سپس از نقطه $B(x_1, f(x_1))$ واقع بر منحنی مماس را

رسم می‌کنیم و محل تلاقی این مماس جدید را با محور طولها x_2 می‌نامیم. این عمل را تا جایی که به تقریب مطلوب برسیم، یعنی x_n ها به اندازه کافی به ریشه α نزدیک شوند، ادامه می‌دهیم. با داشتن x_0 برای تعیین x_1 ، بایستی معادله خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ را در نقطه $A(x_0, f(x_0))$ بنویسیم و محل تلاقی آن را با محور x ها تعیین کنیم. ضریب زاویه این خط مماس $m = f'(x_0)$ است، بنابراین معادله خط مماس عبارت است از:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

محل تلاقی این خط با محور طولها را $(x_1, 0)$ می‌گیریم، لذا

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

که اگر $f'(x_0) \neq 0$ خواهیم داشت:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

بنابراین در حالت کلی با در دست داشتن x_n خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2)$$

رابطه (۲) فرمول تکرار روش نیوتن-رفسون یا به اختصار روش تکرار نیوتن نامیده می‌شود.

نکته: روش نیوتن تضمین همگرایی ندارد، اما به محض قرار گرفتن در مسیر همگرایی می‌توان نشان داد x_n ها سریع به جواب مورد نظر میل می‌کند.

برنامه روش نیوتن برای حل معادله $F(x) = 0$.

در این برنامه تابع $F(x) = x - \cos x$ اختیار شده است. مشتق تابع $F_{\text{prime}}(x) = 1 + \sin x$ به برنامه داده شده است. مقدار x_0 و دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ و مشتق آن و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست

آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد. خروجی برنامه ریشه مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

c

c Newton's Method

c

$$F(x) = x - \cos(x)$$

$$Fprime(x) = 1 + \sin(x)$$

read(*,*) x0,eps

$$x = x0 - F(x0) / Fprime(x0)$$

n=1

10 if (abs(F(x)).lt. eps) goto 20

 x0=x

$$x = x0 - F(x0) / Fprime(x0)$$

 n=n+1

 goto 10

20 write(*,*) "ROOT = ",x

 write(*,*) "ITERATION = ",n

 end

مثال ۷. ریشه معادله $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصله $[0, 1]$ قرار دارد به روش نیوتن

با چهار رقم اعشار به دست آورید به طوری که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$ که x_n تقریب ریشه مورد

نظر در تکرار n ام است. قرار دهید $x_0 = 0.5$.

حل: داریم $f(x) = x - \cos x$ و $f'(x) = 1 + \sin x$ ، لذا از رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$$

با قرار دادن $x_0 = 0.5$ داریم:

$$x_1 = 0.75522$$

$$x_2 = 0.73914$$

$$x_3 = 0.73909$$

چون $10^{-4} < 5 \times 10^{-5} = |x_3 - x_2|$ لذا x_3 تقریب ریشه مورد نظر است و با D این تقریب عبارتست از:

$$\alpha \simeq 0.7391$$

مثال ۸. به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادله $f(x) = \sin x - \frac{x}{4}$ را که در فاصله $[1.5, 2]$ قرار دارد با چهار رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < 10^{-2}$. قرار دهید $x_0 = 1.75$.

حل: داریم $f(x) = \sin x - \frac{x}{4}$ و $f'(x) = \cos x - \frac{1}{4}$ ، لذا رابطه زیر را برای محاسبه x_n ها خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin x_n - \frac{x_n}{4}}{\cos x_n - \frac{1}{4}}$$

$$x_0 = 1.75$$

$$x_1 = 1.91069$$

$$x_2 = 1.89563$$

$$f(x_2) = -0.00011$$

چون $|f(x_2)| < 10^{-3}$ لذا x_2 تقریبی از ریشه مورد نظر است و با D^4 این تقریب عبارتست از:

$$\alpha \simeq 1,8956$$

توجه. همانگونه که مثالهای ۷ و ۸ نشان می‌دهند، تعداد تکرارهای لازم برای محاسبه ریشه یک معادله به روش نیوتن کمتر از این تعداد به روشهای قبلی است. همچنین هرگاه در مثال ۷ پس از محاسبه x_2 تکرارها را ادامه دهیم خواهیم داشت:

$$x_3 = 0,73909$$

$$x_4 = 0,73909$$

$$x_5 = 0,73909$$

⋮

به طور مشابه هرگاه در مثال ۸ پس از محاسبه x_2 تکرارها را ادامه دهیم، خواهیم داشت:

$$x_3 = 1,89563$$

$$x_4 = 1,89549$$

$$x_5 = 1,89549$$

⋮

مثال ۹. به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادله $f(x) = 3e^x - \frac{1}{x} = 0$ را که در فاصله

$(0,2, 0,3)$ قرار دارد با چهار رقم اعشار به دست آورید. قرار دهید $x_0 = 0,25$.

حل: داریم $f(x) = 3e^x - \frac{1}{x}$ و $f'(x) = 3e^x + \frac{1}{x^2}$ ، لذا:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3e^{x_n} - \frac{1}{x_n}}{3e^{x_n} + \frac{1}{x_n^2}}$$

$$x_0 = 0,25$$

$$x_1 = 0,25745$$

$$x_2 = 0,25763$$

$$x_3 = 0,25763$$

⋮

بنابراین $\alpha \simeq 0,2576$ تقریب ریشه با چهار رقم اعشار است.

مثال ۱۰. با ارائه روند تکراری نیوتن-رفسون ریشه k ام یک عدد مثبت c را حساب کنید و از آنجا تقریبی برای $\sqrt{2}$ بیابید.

حل: معادله $f(x) = x^k - c = 0$ را در نظر می‌گیریم لذا برای یافتن ریشه k ام c بایستی ریشه معادله $f(x) = 0$ را به دست آوریم. طبق روش تکراری نیوتن-رفسون با داشتن x_0 داریم:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^k - c}{kx_n^{k-1}} = \frac{kx_n^k - x_n^k + c}{kx_n^{k-1}} \\ x_{n+1} &= \frac{(k-1)x_n^k + c}{kx_n^{k-1}} \\ x_{n+1} &= \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{c}{x_n^{k-1}} \right) \end{aligned}$$

لذا برای یافتن تقریبی از $\sqrt{2}$ داریم:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$

اگر $x_0 = 1$ در این صورت :

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1,50000000 & x_2 = 1,41666667 & x_3 = 1,4142157 \\ x_4 = 1,4142136 & x_5 = 1,4142136 & \dots \end{array}$$

نهایتاً $1,4142136$ را به عنوان تقریبی از $\sqrt{2}$ بر می‌گزینیم.

۴.۳.۲ روش وتری

می‌دانیم

$$\lim_{x \rightarrow x_n} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x_n)$$

لذا هرگاه x مقداری نزدیک x_n باشد، مثلاً x_{n-1} ، در این صورت

$$\boxed{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \simeq f'(x_n) \quad (۳)}$$

بنابراین هرگاه در فرمول نیوتن، یعنی رابطه (۲) به جای $f'(x_n)$ مقدار تقریبی آن را از رابطه (۳) قرار دهیم به دست می‌آوریم :

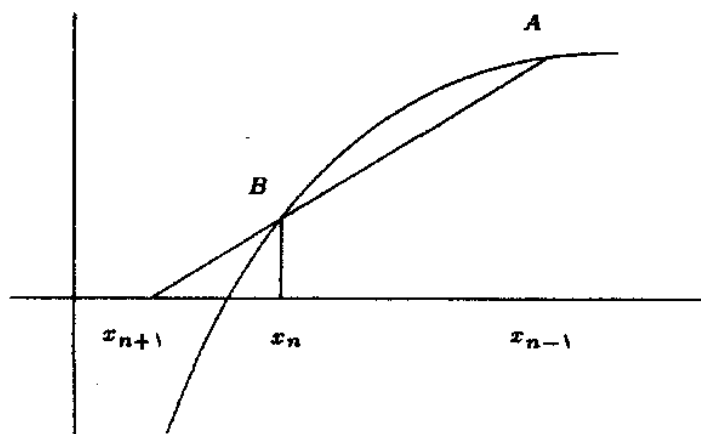
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (۴)}$$

رابطه (۴) فرمول روش وتری برای به دست آوردن ریشه معادله $f(x) = 0$ نامیده می‌شود. برای محاسبه تقریب‌های ریشه یعنی برای محاسبه x_n ها از فرمول وتری به دو مقدار اولیه x_0 و x_1 نیاز داریم.

نکته اینکه این روش را وتری نامند، آن است که در مرحله n ام x_{n+1} از محل برخورد خط (وتر)

وصل نقاط $A|_{f(x_{n-1})}$ و $B|_{f(x_n)}$ با محور x ها به دست می آید. به شکل زیر توجه کنید :



نکته: تفاوت عمده روش وترى با روش نابجایی در این است که در روش نابجایی در هر مرحله بررسی می شود و فاصله ای در نظر گرفته می شود که تابع در آن تغییر علامت می دهد. در حالی که در روش وترى صرفاً زیر فاصله آخر که نقاط انتهایی آن در تکرار اخیر به دست آمده اند، جهت تکرار روش به کار برده می شود و به همین دلیل روش وترى تضمین همگرایی ندارد، اما می توان نشان داد که سرعت همگرایی روش وترى (در صورت همگرایی) بیشتر از روش نابجایی است.

برنامه روش وترى برای حل معادله $F(x) = 0$.

در این برنامه تابع $F(x) = x^3 + x - 1$ اختیار شده است و مقادیر اولیه x_0 و x_1 و مقدار دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد. خروجی برنامه، ریشه مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

c

c Secant Method

c

$$F(x) = x^{**3} + x - 1$$

read(*,*) x0,x1,eps

```

x=x1 - (F(x1)*(x1-x0))/(F(x1)-F(x0))
n=n+1
10  if (abs(F(x)) < .eps) goto 20
    x0=x1
    x1=x
    x=x1 - (F(x1)*(x1-x0))/(F(x1)-F(x0))
    n=n+1
    goto 10
20  write(*,*) "ROOT = ",x
    write(*,*) "ITERATION = ",n
    end

```

مثال ۱۱. با استفاده از روش وتری ریشه معادله $x^2 + x - ۱ = 0$ را با سه رقم اعشار به دست

آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < 0.001$ [قر] دهید $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$.

حل: با استفاده از رابطه (۴) و $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ خواهیم داشت:

$$x_2 = 0.5$$

$$x_3 = 0.6364 \quad f(x_3) = -0.1059$$

$$x_4 = 0.6901 \quad f(x_4) = 0.0188$$

$$x_5 = 0.6820, \quad f(x_5) = -0.0008$$

چون $|f(x_5)| < 0.001$ پس

$$\alpha \approx 0.682 \quad (3D)$$

۵.۳.۲ روش تکرار ساده

در این روش پس از آزمون شرایط موجود بودن ریشه برای معادله $f(x) = 0$ در فاصله $[a, b]$ ، معادله $f(x) = 0$ پس از دستکاریهایی به صورت $x = g(x)$ نوشته می شود. به طوری که α ریشه هر دو معادله باشد، یعنی:

$$f(\alpha) = 0 \quad \& \quad \alpha = g(\alpha)$$

توجه ۱. معمولاً از روی یک معادله $f(x) = 0$ به صورتهای مختلفی می توان به شکل $x = g(x)$ رسید.

مثال ۱۲. معادله $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ را در نظر بگیرید، در این صورت برای تابع $g(x)$ انتخابهای زیر وجود دارد:

الف. $g(x) = x^2 - 2$

ب. $g(x) = \sqrt{x+2}$

پ. $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$

توجه ۲. بدیهی ترین صورتهای ممکن برای تبدیل معادله $f(x) = 0$ به صورت $x = g(x)$ عبارتند از:

$$x = x - f(x)$$

$$x = x + f(x)$$

پس از نوشتن معادله $f(x) = 0$ به صورت $x = g(x)$ ، هرگاه x تقریبی از α ، ریشه معادله باشد x_n ها به طریق زیر ساخته می شوند:

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_3 = g(x_2)$$

$$\vdots$$

و به طور کلی با در دست داشتن x_n قرار می‌دهیم:

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

رابطه (۵) فرمول روش تکرار ساده برای به دست آوردن α ، ریشه معادله $f(x) = 0$ ، نامیده می‌شود. شرط کافی برای همگرایی روش تکرار ساده:

برای اطمینان از اینکه x_n ‌هایی که از رابطه (۵) محاسبه می‌شوند، به ریشه α از معادله $f(x) = 0$ میل می‌کنند یا خیر، دو شرط زیر را به عنوان شرط کافی همگرایی دنباله $\{x_n\}$ بیان می‌کنیم:

۱- برای $x \in [a, b]$ داشته باشیم $g(x) \in [a, b]$

۲- برای $x \in [a, b]$ داشته باشیم $|g'(x)| < 1$.

توجه: شرایط فوق شرایط کافی هستند، بنابراین هرگاه تابع $g(x)$ دارای دو شرط فوق باشد x_n ‌ها به α میل می‌کنند. لذا پس از تشکیل معادله $x = g(x)$ ، ابتدا شرایط فوق را بررسی می‌کنیم هرگاه $g(x)$ در هر دو شرط صدق کرد با داشتن x_0 مقادیر x_n را از رابطه (۵) محاسبه می‌کنیم، و اگر $g(x)$ حداقل یکی از شرایط را نداشت، یک g دیگر انتخاب می‌کنیم.

برنامه روش تکرار ساده برای حل معادله $F(x) = 0$.

این برنامه برای به دست آوردن ریشه معادله $F(x) = e^{-x} - \sin x = 0$ مورد استفاده قرار گرفته است. تابع $G(x)$ به صورت $G(x) = x + e^{-x} - \sin x$ اختیار شده است. مقدار x_0 و

دقت مورد نظر eps به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ و $G(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای به دست آوردن ریشه توابع دلخواه مورد استفاده قرار داد. خروجی برنامه، ریشه مورد نظر و تعداد تکرار برای به دست آوردن ریشه است.

c

c Fixed Point Iteration Method

c

c This program solves the equation $\text{EXP}(-X) - \text{SIN}(X) = 0$

c by fixed point iteration, using the iteration function

c $G(X) = X + \text{EXP}(-X) - \text{SIN}(X)$

c

 $F(x) = \exp(-x) - \sin(x)$ $G(x) = x + \exp(-x) - \sin(x)$

read(*,*) x0,eps

x=G(x0)

n=1

10 if (abs(F(x)) .lt. eps) goto 20

x0=x

x=G(x0)

n=n+1

goto 10

20 write(*,*) "ROOT = ",x

write(*,*) "ITERATION = ",n

end

مثال ۱۳. برای تعیین تقریب ریشه معادله $f(x) = 3xe^x - 1 = 0$ که در فاصله $(0, 1)$ قرار دارد از روش تکرار ساده استفاده کنید. قرار دهید $x_0 = 0.5$ و تقریب را با $3D$ به دست آورید.

حل: معادله را به شکل $x = \frac{e^{-x}}{3}$ می‌نویسیم و قرار می‌دهیم

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{3}$$

برای نشان دادن دارا بودن شرایط ۱ و ۲ برای تابع g به صورت زیر عمل می‌کنیم، چون $x \in (0, 1)$

پس

$$0 < x < 1$$

$$-1 < -x < 0$$

$$e^{-1} < e^{-x} < e^0$$

$$\frac{1}{3e} < \frac{e^{-x}}{3} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3e} < g(x) < \frac{1}{3}$$

چون $\frac{1}{3e} = 0.12$ ، بنابراین $\frac{1}{3} < 1$ ، بنابراین $0 < 0.12 < g(x) < \frac{1}{3} < 1$

لذا برای $x \in (0, 1)$ داریم: $g(x) \in (0, 1)$ در ضمن

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{3}$$

و اگر $x \in (0, 1)$ خواهیم داشت:

$$|g'(x)| = \frac{e^{-x}}{3} < \frac{e^0}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

بنابراین $g(x)$ مناسب است. با استفاده از $x_0 = 0.5$ و از رابطه

$$x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{3}$$

داریم:

$$x_1 = 0,2022 \quad (4D)$$

$$x_2 = 0,2723$$

$$x_3 = 0,2539$$

$$x_4 = 0,2586$$

$$x_5 = 0,2574$$

$$x_6 = 0,2577$$

$$x_7 = 0,2576$$

$$x_8 = 0,2576$$

$$x_9 = 0,2576$$

لذا

$$\alpha \simeq 0,258 \quad (3D)$$

مثال ۱۴. تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x - \cos x = 0$ را که در فاصله $[0, 1]$ قرار دارد با سه رقم اعشار به دست آورید، به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < 10^{-2}$. قرار دهید $x_0 = 0,5$.
 حل: داریم $x = \cos x$ لذا قرار می‌دهیم $g(x) = \cos x$ ، برای $x \in [0, 1]$ نشان می‌دهیم $g(x) \in [0, 1]$:

$$0 \leq x \leq 1$$

چون تابع کسینوس بر $[0, 1]$ تابعی نزولی است، پس

$$\cos 1 \leq \cos x \leq \cos 0$$

$$0,5403 \leq \cos x \leq 1$$

همچنین داریم $g'(x) = -\sin x$ و بایستی نشان دهیم $|g'(x)| = |\sin x| < 1$ برای $x \in [0, 1]$ چون تابع سینوس روی $[0, 1]$ تابعی صعودی است، پس برای $0 \leq x \leq 1$ خواهیم داشت:

$$\sin 0 \leq \sin x \leq \sin 1$$

$$0 \leq \sin x \leq 0.8415 < 1$$

بنابراین $|g'(x)| < 1$ در نتیجه $g(x)$ مناسب است. برای $x_0 = 1$ و $x_{n+1} = \cos x_n$ داریم:

$$x_1 = 0.5403$$

$$x_2 = 0.8576$$

$$x_3 = 0.6543$$

$$x_4 = 0.7935$$

$$x_5 = 0.7014$$

$$x_6 = 0.7640$$

$$x_7 = 0.7221$$

$$x_8 = 0.7504$$

$$x_9 = 0.7314$$

$$x_{10} = 0.7442, \quad f(x_{10}) = 0.0086$$

$$\alpha \simeq 0.744 \quad \text{چون } |f(x_{10})| < 10^{-2} \text{ لذا } (3D)$$

توجه. گاهی به جای بیان اینکه "تقریب ریشه را طوری به دست آورید که $|f(x_n)| < \epsilon$ "

می‌گوییم "ریشه را با تقریب ϵ به دست آورید".

مجموعه مسائل فصل دوم

۱- تقریبی از ریشه معادلات زیر را به روش دو بخشی حساب کنید، به طوری که $|f(x_n)| < \epsilon$ (a).
 b و ϵ داده شده‌اند) تقریب‌ها را با $4D$ به دست آورید.

الف. $x - \cos x = 0$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$

ب. $x^2 - 3 = 0$, $a = 1$, $b = 2$, $\epsilon = 10^{-2}$

پ. $x^2 + x - 1 = 0$, $a = 0$, $b = 1$, $\epsilon = 10^{-2}$

جواب.

الف. $\alpha \simeq 0,7393$, $x_{10} = 0,73927$

ب. $\alpha \simeq 1,7320$, $x_{11} = 1,73195$

پ. $\alpha \simeq 0,6172$, $x_7 = 0,61719$

۲- به روش دو بخشی تقریبی از ریشه معادلات زیر را با تقریب ϵ به دست آورید، نتایج را با $4D$ به دست آورید. (a, b و ϵ داده شده‌اند)

الف. $\sin x - \frac{x}{2} = 0$, $a = 1$, $b = 3$, $\epsilon = 0,003$

ب. $x \sin x - 1 = 0$, $a = 1$, $b = 1,5$, $\epsilon = 0,03$

پ. $x^2 + 4x^2 - 10 = 0$, $a = 1$, $b = 2$, $\epsilon = 0,004$

جواب.

الف. $\alpha \simeq 1,8984$, $x_8 = 1,89844$

ب. $\alpha \simeq 1,125$, $x_2 = 1,12500$

پ. $\alpha \simeq 1,3652$, $x_1 = 1,36523$

۳- با روش نابجایی معادلات زیر را با تقریب ϵ با $4D$ به دست آورید. (a, b و ϵ داده شده‌اند)

الف. $2 \sin x + x - 2 = 0$, $a = 0,6$, $b = 0,8$, $\epsilon = 10^{-2}$

ب. $3 \sin x - x - \frac{1}{x} = 0$, $a = 0,7$, $b = 0,9$, $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$

پ. $x + \cos x = 0$, $a = -0,75$, $b = -0,73$, $\epsilon = 3 \times 10^{-5}$

جواب.

الف. $\alpha \simeq 0,7046$ ب. $\alpha \simeq 0,7631$ پ. $\alpha \simeq -0,7391$

۴- ریشه معادله $f(x) = x - 0,2 \sin x - 0,5 = 0$ را که در فاصله $[0, 1]$ قرار دارد به روش نیوتن به دست آورید.

جواب. $x_2 = 0,61546816$

۵- به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادله $e^{-x} = \sin x$ را که در فاصله $(0, 1/2)$ قرار دارد با $7D$ به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-2}$ (قرار دهید $x_0 = 0,6$)

جواب. $\alpha \simeq 0,58853227$ و $x_2 = 0,588532274$

۶- به روش نیوتن تقریبی از ریشه معادله $x^2 - 3 = 0$ را که در فاصله $[1, 2]$ قرار دارد با $3D$ به دست آورید به طوری که داشته باشیم $|f(x_n)| < 10^{-2}$ (قرار دهید $x_0 = 2$)

جواب. $\alpha \simeq 1,732$ و $x_2 = 1,7321$

۷- به روش وترقیبی از ریشه معادله $f(x) = x^2 - 0,2x^2 - 0,2x - 1/2 = 0$ را که در فاصله $(1, 2)$ قرار دارد با تقریب $0,002$ و با $3D$ به دست آورید. (قرار دهید $x_0 = 1$ و $x_1 = 1/5$)

جواب. $\alpha \simeq 1,198$

۸- با استفاده از روش نیوتن کوچکترین ریشه معادله $\tan x = x$ را با تقریب $0,0001$ پیدا کنید. این ریشه در فاصله $(\pi, \frac{3\pi}{4})$ قرار دارد. قرار دهید $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ و ریشه را با $5D$ به دست آورید. راهنمایی. معادله را به صورت $f(x) = \sin x - x \cos x = 0$ باز نویسی کنید.

جواب. $\alpha \simeq 4,49341$

۹- با روش تکرار ساده تقریبی از ریشه معادله $f(x) = x - \sin x - 0,25 = 0$ را که در فاصله $(1/1, 1/3)$ قرار دارد به دست آورید، به طوری که $|f(x_n)| < 10^{-2}$ (جواب را با $3D$ به دست آورید).

جواب. برای $g(x) = \sin x + 0,25$ و $x_0 = 1/2$ داریم $\alpha \simeq 1,171$

۱۰- معادله $f(x) = x^2 e^x - 1 = 0$ ریشه‌ای در $[0, 1]$ دارد. برای تعیین تقریبی از این ریشه به روش تکرار ساده $g(x)$ مناسب ارائه دهید و با فرض $x_0 = 0.7$ تقریبی از ریشه چنان حساب کنید که داشته باشیم $|f(x_n)| < 0.0001$. (جواب با ۴D)

جواب. $g(x) = \sqrt{e^{-x}}$ و $\alpha \simeq 0.7035$

۱۱- معادله $f(x) = e^x - 4x^2 = 0$ دارای ریشه‌ای در فاصله $[0, 1]$ است. با قرار دادن $x = \frac{1}{4}e^{x/2}$ و انتخاب $x_0 = 0$ این ریشه را با تقریب 0.001 حساب کنید. (جواب با ۴D)

جواب. $x_8 = 0.71466$ و $\alpha \simeq 0.7147$

فصل سوم

درونیایی و برونایی

۱.۳ مقدمه

در اغلب کشورها هر ده سال یکبار جمعیت سرشماری می‌شود. فرض کنید جدول زیر جمعیت کشوری را در سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۹۰ میلادی (به هزار نفر) نشان می‌دهد:

سال	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰
(جمعیت به هزار نفر)	۱۰۷,۹۲۳	۱۲۶,۴۰۷	۱۳۳,۱۱۷	۱۵۰,۹۰۵	۱۷۱,۱۱۰	۱۹۲,۲۳۷

جدول (۱)

حال سوال این است که آیا می‌توان با توجه به داده‌های جدول فوق، جمعیت کشور را در سال ۱۹۷۵ و یا در سال ۲۰۰۰ میلادی در حد قابل قبول تخمین زد.

تخمین جمعیت کشور را در سال ۱۹۷۵ که بین اعداد جدول است درونیایی و تخمین جمعیت کشور را در سال ۲۰۰۰ که در فاصله [۱۹۴۰, ۱۹۹۰] قرار ندارد، برونایی می‌نامیم.

هرگاه مقادیر تابع $f(x)$ در نقاط x_0, x_1, \dots, x_n به صورت f_0, f_1, \dots, f_n معلوم باشد، درونیایی روندی برای تخمین مقادیر تابع $f(x)$ بین نقاط x_0, x_1, \dots, x_n است. فرض کنید تابع $f(x)$ با جدول زیر داده شده است :

x_i	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x_i) = f_i$	f_0	f_1	f_2	\dots	f_n

جدول (۲)

درونیایی یعنی تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x \in (x_0, x_n)$ و $i = 1, \dots, n-1$ و $x \neq x_i$. و برونایی یعنی تخمین مقدار $f(x)$ وقتی $x \notin [x_0, x_n]$.
تعریف ۱.۳. تابعی مانند f که مقادیر آن در بعضی نقاط مشخص است و توسط جدولی مانند جدول (۲) بیان شده است، یک تابع جدولی نامیده می شود.

۲.۳ درونیایی

فرض کنید تابع f با جدول (۲) داده شده است، به طوری که برای $i \neq j$ داریم : $x_i \neq x_j$. برای تخمین $f(x)$ که $x \in (x_0, x_n)$ برای $i = 1, \dots, n-1$ و $x \neq x_i$ یکی از راههای ساده این است که یک چند جمله ای مانند $P(x)$ پیدا کنیم که مقدار آن در x_i همان f_i باشد. یعنی برای $i = 0, 1, \dots, n$ داشته باشیم :

$$P(x_i) = f_i \quad (۱)$$

و بعد به جای $f(x)$ در فاصله $[x_0, x_n]$ با $P(x)$ کار کنیم. در این ارتباط قضیه زیر را بیان می کنیم.
قضیه ۱.۳. فقط یک چند جمله ای $P(x)$ ، حداکثر از درجه n ، وجود دارد که در شرط (۱) صدق می کند.

در قسمت های بعد به معرفی چند روش برای تعیین $P(x)$ ، که در شرط (۱) صدق می کند، خواهیم

پرداخت.

تعریف ۲.۳. چند جمله‌ای $P(x)$ که در شرط (۱) صدق می‌کند، چند جمله‌ای درونیاب f نامیده می‌شود.

۱.۲.۳ چند جمله‌ایهای لاگرانژ

در این روش فرض می‌کنیم $L_0(x), \dots, L_n(x)$ هر یک، یک چند جمله‌ای درجه n باشند و داشته باشیم

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \dots + L_n(x)f_n \quad (2)$$

که در آن برای $j = 0, 1, \dots, n$ داریم:

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} \quad (3)$$

از (۳) داریم:

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$P(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

یعنی چند جمله‌ای $P(x)$ که با (۲) تعریف می‌شود، در شرط (۱) صدق می‌کند.

تعریف ۳.۳. چند جمله‌ای $L_j(x)$ که با (۳) تعریف می‌شود، چند جمله‌ای لاگرانژ نامیده می‌شود.

که یک چند جمله‌ای از درجه n می‌باشد.

مثال ۱. چند جمله‌ای $P(x)$ را که مربوط به تابع جدولی زیر است، به دست آورید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

حل: در این مثال داریم $n = 2$ ، بنابراین چند جمله‌ایهای لاگرانژ $L_0(x)$ ، $L_1(x)$ و $L_2(x)$ را که همگی از درجه ۲ هستند به دست می‌آوریم:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(0 + 1)(0 - 1)} = -(x^2 - 1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(1 + 1)(1 - 0)} = \frac{x^2 + x}{2}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۲) داریم:

$$\begin{aligned} P(x) &= L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 \\ &= 1 \times L_0(x) + 1 \times L_1(x) + 3 \times L_2(x) \\ &= \frac{x^2 - x}{2} - (x^2 - 1) + \frac{3}{2}(x^2 + x) \\ P(x) &= x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

توجه: چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۱ در شرط (۱) صدق می‌کند، زیرا مثلاً

$$P(x_0) = P(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 = f_0$$

$$P(x_2) = P(1) = 1 + 1 + 1 = 3 = f_2$$

مثال ۲. برای تابع جدولی مثال ۱ تقریبی از $f(0.5)$ بدست آورید.

حل: چون $x = 0.5$ بین نقاط جدولی مثال ۱ قرار داشته و برابر هیچکدام از آنها نیست، پس

$P(0,5)$ را به عنوان تقریب $f(0,5)$ محاسبه می‌کنیم، یعنی

$$\begin{aligned} f(0,5) &\simeq P(0,5) \\ &= 0,25 + 0,5 + 1 = 1,75 \end{aligned}$$

مثال ۳. چند جمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را بدست آورید.

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	-۲	-۱	۰	۷

حل: داریم $n = 3$ ، لذا بایستی چند جمله‌ایهای از درجه ۳ لاگرانژ $L_0(x)$ ، $L_1(x)$ ، $L_2(x)$ و $L_3(x)$ را به دست آوریم:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6} \\ L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2} \\ L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{-2} \\ L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x^3 - x}{6} \end{aligned}$$

چند جمله‌ای درونیاب $P(x)$ عبارت است از:

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3$$

با توجه به جدول داریم:

$$\begin{aligned} P(x) &= -2L_0(x) - 1L_1(x) + 0L_2(x) + 7L_3(x) \\ &= \frac{-2(x^3 - 3x^2 + 2x)}{-6} - \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2} + 0 + 7\frac{x^3 - x}{6} \\ P(x) &= x^3 - 1 \end{aligned}$$

مثال ۴. برای تابع جدولی مثال قبل تقریبهایی از $f(-\frac{1}{2})$ و $f(\frac{3}{2})$ به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه $P(x) = x^2 - 1$ خواهیم داشت:

$$f(-\frac{1}{2}) \simeq P(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$$

$$f(\frac{3}{2}) \simeq P(\frac{3}{2}) = \frac{19}{4}$$

مثال ۵. با اضافه کردن نقطه $(-2, -9)$ به جدول مثال ۳ چند جمله‌ای درونیاب را به دست آورید.

حل: جدول جدید عبارت است از:

x_i	-2	-1	0	1	2
f_i	-9	-2	-1	0	7

لذا $n = 4$ و چند جمله‌ایهای لاگرانژ عبارتند از:

$$L_0(x) = \frac{x(x-2)(x^2-1)}{24}, \quad L_1(x) = \frac{x(x-1)(x^2-4)}{-6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x^2-4)(x^2-1)}{4}, \quad L_3(x) = \frac{x(x+1)(x^2-4)}{-6}$$

$$L_4(x) = \frac{x(x^2-1)(x+2)}{24}$$

در نتیجه چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از

$$P(x) = -9L_0(x) - 2L_1(x) - L_2(x) + 0 \times L_3(x) + 7L_4(x)$$

$$= -\frac{9}{24}x(x-2)(x^2-1) + \frac{2}{6}x(x-1)(x^2-4) - \frac{1}{4}(x^2-4)(x^2-1)$$

$$+ 0 + \frac{7}{24}x(x^2-1)(x+2)$$

$$P(x) = x^2 - 1$$

توجه: چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۵ همان چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۳ می‌باشد و دلیل آن این است که چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۳ از نقطه $(-۹, -۲)$ می‌گذرد. همچنین با اینکه در مثال ۵ داریم $n = ۴$ چند جمله‌ای درونیاب از درجه ۳ می‌باشد.

معایب روش لاگرانژ

- ۱- محاسبات برای تعیین چند جمله‌ای درونیاب زیاد است.
- ۲- درجه چند جمله‌ای درونیاب، تنها بعد از اتمام محاسبات تعیین می‌شود.
- ۳- با اضافه کردن یک یا چند نقطه به نقاط جدولی، کلیه عملیات را بایستی مجدداً انجام داد.

۲.۲.۳ چند جمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن

تعریف ۴.۳. فرض کنید x_0, x_1, \dots, x_n نقاط دو به دو متمایز و f_0, f_1, \dots, f_n مقادیر تابع f در این نقاط باشند. تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول بین x_i و x_{i+1} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \quad (۴)$$

مثال ۶. تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول را بین x_0 و x_1 و بین x_1 و x_2 بنویسید.

حل: $f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1}, \quad f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}$

تعریف ۵.۳. تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم بین x_i, x_{i+1}, x_{i+2} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}} \quad (۵)$$

مثال ۷. تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم بین x_0, x_1, x_2 را بنویسید.

حل:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

نکته: مشابه مثالهای فوق تفاضلات تقسیم شده از مرتبه بالاتر قابل تعریف است، اما به کمک جدول می‌توان تفاضلات تقسیم شده از مرتبه‌های مختلف را بدون نوشتن فرمولهای (۴) و (۵) و با تکیه بر مقادیر تفاضلات تقسیم شده محاسبه شده از مرتبه پایین‌تر، نوشت. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۸. جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	-۱	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

حل: برای این منظور، جدول زیر را خواهیم داشت:

تفاضلات مرتبه

x_i	f_i	اول	دوم
-۱	۱		
		$\frac{1-1}{-1-0} = 0$	
۰	۱		$\frac{0-2}{-1-1} = 1$
		$\frac{1-3}{0-1} = 2$	
۱	۳		

مثال ۹. با اضافه نمودن نقطه (۲, ۷) به جدول مثال ۸، مجدداً جدول تفاضلات را تشکیل دهید.

حل: با استفاده از مقادیر به دست آمده در مثال ۸ کافیست نقطه (۲, ۹) را به آخر جدول اضافه نموده و تفاضلات جدید را محاسبه کنیم.

تفاضلات مرتبه				
x_i	f_i	اول	دوم	سوم
-۱	۱			
۰	۱	۰	۱	
۱	۳	۲	۱	۰
۲	۷	۴		

مثال ۱۰. جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	-۱	۰	۱	۲	۳
f_i	-۱	۱	۱	۵	۱۹

حل: جدول تفاضلات به صورت زیر است:

تفاضلات تقسیم شده مرتبه

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
-۱	-۱				
۰	۱	$\frac{-1-1}{-1-0} = 2$	$\frac{2-0}{-1-1} = -1$	$\frac{-1-2}{-1-2} = 1$	
۱	۱	$\frac{1-1}{0-1} = 0$	$\frac{0-4}{0-2} = 2$	$\frac{2-5}{0-3} = 1$	$\frac{1-1}{-1-3} = 0$
۲	۵	$\frac{1-5}{1-2} = 4$	$\frac{4-14}{1-3} = 5$		
۳	۱۹	$\frac{5-19}{2-3} = 14$			

هرگاه کسرهای را ننویسیم، جدول فوق به صورت زیر خلاصه می شود:

تفاضلات مرتبه

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
-۱	-۱				
		۲			
۰	۱		-۱		
		۰		۱	
۱	۱		۲		۰
		۴		۱	
۲	۵		۵		
		۱۴			
۳	۱۹				

فرمول چند جمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن :

چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط x_0, x_1, \dots, x_n عبارتست از

$$P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] \quad (۶)$$

که در آن $f[x_0, x_1, \dots, x_i]$ تفاضل مرتبه i ام بین نقاط x_0, x_1, \dots, x_i برای $i = 1, \dots, n$

می‌باشد و به صورت زیر برحسب تفاضلات مراتب قبلی محاسبه می‌شود :

$$f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{f[x_0, \dots, x_{i-1}] - f[x_1, \dots, x_i]}{x_0 - x_i}$$

مثال ۱۱. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن به دست آورید.

x_i	۰	۱	۳	۶
f_i	۱	-۶	۴	۱۶۹

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است:

تفاضلات تقسیم شده مرتبه

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۰	۱			
		-۷		
۱	-۶		۴	
		۵		۱
۳	۴		۱۰	
		۵۵		
۶	۱۶۹			

بنا به رابطه (۶) چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$P(x) = f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \\ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

تفاضلات تقسیم شده مورد نیاز در رابطه فوق، اعداد بالایی جدول تفاضلات هستند که زیر آنها خط کشیده شده است، لذا خواهیم داشت:

$$P(x) = 1 - 7x + 4x(x - 1) + x(x - 1)(x - 3)$$

$$P(x) = x^3 - 8x + 1$$

مثال ۱۲. با افزودن نقطه $(10, 921)$ به تابع جدولی مثال قبل، مجدداً چند جمله‌ای درونیاب را به دست آورید.

حل: جدول جدید تابع f ، به صورت زیر است:

x_i	۰	۱	۳	۶	۱۰
f_i	۱	-۶	۴	۱۶۹	۹۲۱

و جدول تفاضلات جدید به کمک جدول قبلی به صورت زیر خواهد بود:

تفاضلات مرتبه

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
۰	۱				
		-۷			
۱	-۶		۴		
		۵		۱	
۳	۴		۱۰		۰
		۵۵		۱	
۶	۱۶۹		۱۹		
		۱۸۸			
۱۰	۹۲۱				

جدول تفاضلات مرتبه چهارم صفر شده است بنابراین در این حالت، چند جمله‌ای درونیاب همان چند جمله‌ای به دست آمده در مثال ۱۱ یعنی چند جمله‌ای زیر خواهد بود:

$$P(x) = x^2 - 8x + 1$$

نکته: برعکس روش چند جمله‌ای‌های لاگرانژ، با اضافه نمودن نقطه یا نقاطی به یک جدول، برای محاسبه چند جمله‌ای درونیاب جدید از تمام محاسبات قبلی استفاده می‌شود.
مثال ۱۳. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید:

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۱	۱	۲	۵

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است:

تفاضلات مرتبه

x_i	f_i	اول	دوم	سوم
۰	۱			
		۰		
۱	۱		$\frac{1}{2}$	
		۱		$-\frac{1}{12}$
۲	۲		$\frac{1}{6}$	
		$\frac{3}{2}$		
۴	۵			

لذا چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر خواهد بود:

$$P(x) = 1 + 0 + \frac{1}{2}x(x-1) - \frac{1}{12}x(x-1)(x-2)$$

$$P(x) = \frac{1}{12}(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)$$

مثال ۱۴. فرض کنید $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ، به روش نیوتن چند جمله‌ای از درجه حداکثر چهار را به دست آورید که تابع f را در نقاط متساوی الفاصله زیر درونیابی کند:

$$x_i = \frac{10i}{4} - 5, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

حل: نقاط درونیابی عبارتند از:

$$x_0 = -5, \quad x_1 = -\frac{5}{4}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{5}{4}, \quad x_4 = 5$$

جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر خواهد بود :

تفاضلات مرتبه

x_i	f_i	اول	دوم	سوم	چهارم
-۵	<u>۰,۰۳۸۴۶</u>				
		<u>۰,۰۳۹۷۹</u>			
-۲,۵	۰,۱۳۷۹۳		<u>۰,۰۶۱۰۱</u>		
		۰,۳۴۴۸۳		<u>-۰,۰۲۶۵۳</u>	
۰	۱,۰۰۰۰۰		-۰,۱۳۷۹۳		<u>۰,۰۰۵۳۰۶</u>
		-۰,۳۴۴۸۳		۰,۰۲۶۵۳	
۲,۵	۰,۱۳۷۹۳		۰,۰۶۱۰۱		
		-۰,۰۳۹۷۹			
۵	۰,۰۳۸۴۹				

با استفاده از اعداد جدول که زیر آنها خط کشیده شده است، چند جمله‌ای درونیاب تابع f در نقاط

x_0, \dots, x_4 به صورت زیر است

$$P(x) = 0,03846 + 0,03979(x+5) + 0,06101(x+5)(x+2,5) - 0,02653(x+5)(x+2,5)x + 0,005306(x+5)(x+2,5)x(x-2,5)$$

۳.۲.۳ تفاضلات متناهی و درونیابی یک تابع هرگاه نقاط درونیابی متساوی

الفاصله باشند

روشهای لاگرانژ و تفاضلات تقسیم شده نیوتن در حالت کلی برای نقاط x_0, x_1, \dots, x_n چه متساوی الفاصله باشند، چه نباشند، چند جمله‌ای درونیاب را به دست می‌دهند. اما وقتی x_i ها متساوی الفاصله باشند، فرمولهای ساده‌تری موجودند که در این قسمت آنها را به دست می‌آوریم.

نمادگذاری. هرگاه فاصله $[a, b]$ را به N زیر فاصله به صورت $[x_i, x_{i+1}]$ هر کدام به طول h تقسیم کنیم، می‌نویسیم:

$$x = a(h)b$$

$$h = \frac{b-a}{N} \quad \text{که در آن}$$

مثال ۱۵. نقاط $x = ۱(۰/۱)۲$ عبارتند از:

$$x_0 = ۱, \quad x_1 = ۱/۱, \quad x_2 = ۱/۲, \dots, x_{10} = ۲$$

توجه: همانگونه که مثال ۱۵ نشان می‌دهد نقاط $x = a(h)b$ عبارتند از:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

و

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

و هرگاه $a = x_0$ در این صورت

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

در حالتی که نقاط x_i متساوی‌الفاصله هستند، یک تبدیل خطی را که باعث تغییرها می‌شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s(x) = s = \frac{x - x_0}{h} \implies x(s) = x = x_0 + sh$$

بنابراین برای تبدیل خطی فوق خواهیم داشت:

$$f(x) = f(x_0 + sh)$$

که آن را به طور خلاصه با f_s نشان می‌دهیم، یعنی

$$f(x) = f(x_0 + sh) = f_s \quad (۷)$$

رابطه (۷) یک چند جمله‌ای بر حسب x را به یک چند جمله‌ای بر حسب s تبدیل می‌کند.

تعریف ۶.۳. عملگر تفاضل پیشرو، Δ ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta^i f_s = \begin{cases} f_s, & i = 0 \\ \Delta^{i-1} f_{s+1} - \Delta^{i-1} f_s, & i > 0 \end{cases} \quad (۸)$$

مثال ۱۶. Δf_s و $\Delta^2 f_s$ را بنویسید.

حل: بنا به روابط (۸) داریم:

$$\Delta f_s = \Delta^1 f_{s+1} - \Delta^0 f_s = f_{s+1} - f_s$$

$$\Delta^2 f_s = \Delta f_{s+1} - \Delta f_s = (\Delta^1 f_{s+2} - \Delta^0 f_{s+1}) - (f_{s+1} - f_s)$$

$$= f_{s+2} - 2f_{s+1} + f_s$$

مشابه جدول تفاضلات تقسیم شده، هرگاه نقاط x_i متساوی الفاصله باشند، می‌توان جدول تفاضلات را که جدول تفاضلات متناهی هم نامیده شود، تشکیل داد.

مثال ۱۷. برای $n = 3$ جدول تفاضلات به صورت زیر است:

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	f_0			
		Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		
x_3	f_3			

مثال ۱۸. تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را حساب کنید.

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	۰	-۱	۲	۹

حل .

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
-۱	۰			
		$-۱ - ۰ = -۱$		
۰	-۱		$۳ + ۱ = ۴$	
		$۲ + ۱ = ۳$		$۴ - ۴ = ۰$
۱	۲		$۷ - ۳ = ۴$	
		$۹ - ۲ = ۷$		
۲	۹			

فرمول چند جمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات پیشرو:

هرگاه x_i نقاط متساوی الفاصله باشند و $x = x_0 + sh$ ، در این صورت چند جمله‌ای درونیاب

f برحسب تفاضلات پیشرو به صورت زیر می‌باشد:

$$P(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \quad (9)$$

رابطه (۹) چند جمله‌ای $P(x)$ را برحسب تفاضلات پیشرو نشان می‌دهد، که به فرمول تفاضل

پیشرو نیوتن موسوم است. و با توجه به اینکه داریم:

$$\frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-i+1)}{i!} = \binom{s}{i}$$

بنابراین رابطه (۹) را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم :

$$P(x) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0 \quad (10)$$

مثال ۱۹. فرمول چند جمله‌ای درونیاب مربوط به تابع جدولی زیر را برحسب تفاضلات پیشرو نیوتن به دست آورید.

x_i	۱	۲	۳	۴
f_i	۲	۵	۱۰	۱۷

حل: جدول تفاضلات پیشرو به صورت زیر است :

x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
۱	۲			
		۳		
۲	۵		۲	
		۵		۰
۳	۱۰		۲	
		۷		
۴	۱۷			

چند جمله‌ای درونیاب برحسب s عبارت است از

$$P(x) = f_0 + s \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 = 2 + 3s + \frac{s(s-1)}{2} \times 2 = s^2 + 2s + 2$$

و چون $x = x_0 + sh$ و اینکه $h = 1$ و $x_0 = 1$ بنابراین $x = 1 + s$ و یا $s = x - 1$.

لذا چند جمله‌ای درونیاب برحسب x عبارت است از :

$$P(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 2 = x^2 + 1$$

تعریف ۷.۳. عملگر تفاضل پسرو، ∇ ، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla^i f_s = \begin{cases} f_s, & i = 0 \\ \nabla^{i-1} f_s - \nabla^{i-1} f_{s-1}, & i > 0 \end{cases} \quad (11)$$

مثال ۲۰. ∇f_s و $\nabla^2 f_s$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از روابط (۱۱) خواهیم داشت:

$$\nabla f_s = \nabla^0 f_s - \nabla^0 f_{s-1} = f_s - f_{s-1}$$

و

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_s &= \nabla f_s - \nabla f_{s-1} = (f_s - f_{s-1}) - (\nabla^0 f_{s-1} - \nabla^0 f_{s-2}) \\ &= f_s - 2f_{s-1} + f_{s-2} \end{aligned}$$

مثال ۲۱. برای $n = 3$ ، جدول تفاضلات پسرو را بنویسید.

حل: این جدول به صورت زیر می‌باشد:

x_i	f_i	∇	∇^2	∇^3
x_0	f_0			
		∇f_1		
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$	
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$	
		∇f_3		
x_3	f_3			

مثال ۲۲. برای تابع جدولی مثال ۱۸، جدول تفاضلات پسرو را بنویسید:

x_i	f_i	∇	∇^2	∇^3
-۱	۰			
		-۱		
۰	-۱		۲	
		۳		۰
۱	۲		۴	
		۷		
۲	۹			

فرمول چند جمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات پسرو

برای تخمین مقدار $f(x)$ وقتی x نزدیک نقاط انتهایی جدول است، لازم است که از تفاضلات پسرو، که بر حسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می‌شود، استفاده کنیم. چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$ عبارت است از:

$$P(x) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\nabla^3 f_n + \dots + \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \quad (12)$$

که $x = x_n + sh$ رابطه (۱۲) چند جمله‌ای $P(x)$ را بر حسب تفاضلات پسرو نشان می‌دهد، که به فرمول تفاضل پسرو نیوتن موسوم است.

توجه. همانگونه که مثال ۲۲ نشان می‌دهد $\nabla^i f_n$ برای $i = 1, \dots, n$ اعداد انتهایی جدول تفاضلات است.

مثال ۲۳. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی مثال ۱۹ را با استفاده از تفاضلات پسرو بنویسید. حل: با استفاده از فرمول (۱۲) و اعداد انتهایی جدول تفاضلات مثال ۱۹ داریم:

$$\begin{aligned} P(x) &= f_2 + s\nabla f_2 + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_2 \\ &= 17 + 7s + \frac{s(s+1)}{2}2 = s^2 + 8s + 17 \end{aligned}$$

چند جمله‌ای فوق، چند جمله‌ای درونیاب f بر حسب s است. برای به دست آوردن چند جمله‌ای درونیاب بر حسب x ، چون $x = 4 + s$ پس $s = x - 4$ ، لذا

$$P(x) = (x - 4)^2 + 8(x - 4) + 17 = x^2 + 1$$

۴.۲.۳ شکل دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب

یک شکل دترمینانی چند جمله‌ای درونیاب $P(x)$ عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ f_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ f_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = 0$$

چون $P(x_k) = f_k$ بنابراین هرگاه در دترمینان فوق قرار دهیم $x = x_k$ در این صورت دو سطر از ماتریس متناظر دترمینان مساوی بوده و بنابراین دترمینان صفر است هرگاه دترمینان را بر حسب سطر اول بسط دهیم در این صورت یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه n به دست می‌آید. استفاده از این روش به علت سخت بودن محاسبه دترمینان زیاد مورد توجه نیست.

مثال ۲۴. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به کمک روش دترمینان به دست آورید.

x_i	۰	۲
f_i	۱	۳

حل: بایستی بسط دترمینان زیر را بنویسیم؛ در این مثال داریم $n = 1$.

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies 2P(x) - 1(2) + x(1-3) = 0 \implies P(x) = x + 1$$

۳.۳ خطای چند جمله‌ای درونیاب

هرگاه $P(x)$ چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط دو به دو متمایز x_0, x_1, \dots, x_n بوده و f دارای مشتق مرتبه $n+1$ باشد، آن گاه

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

که در آن c عددی نامشخص بوده و $x_0 < c < x_n$ و $f^{(k)}(x)$ مشتق مرتبه k ام تابع f می‌باشد. به دلیل مشخص نبودن c ، هرگاه M یک کران بالا برای $f^{(n+1)}(x)$ بر فاصله $[x_0, x_n]$ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \quad x \in [x_0, x_n]$$

بنابراین

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \frac{M}{(n+1)!} \quad (13)$$

رابطه (۱۳) یک کران بالا برای خطای چند جمله‌ای درونیاب $P(x)$ ارائه می‌دهد.

مثال ۲۵. چند جمله‌ای درونیاب تابع $f(x) = \cos \frac{\pi}{4} x$ را در نقاط $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ به

دست آورده و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید. مقدار $|f(\frac{1}{4}) - P(\frac{1}{4})|$ را با کران بالا در $x = \frac{1}{4}$ مقایسه کنید.

حل: جدول مربوط به تابع عبارت است از:

x_i	f_i	تفاضل مرتبه اول
۰	۱	
		-۱
۱	۰	

لذا، چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر است:

$$P(x) = 1 + (x - 0) \times (-1) = 1 - x$$

واضح است که:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 0.21 \quad (2D)$$

برای تعیین یک کران بالا برای $|f(x) - P(x)|$ باید کران بالایی برای مشتق دوم تابع f به دست آوریم:

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} x$$

بنابراین

$$|f''(x)| = \left| -\frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} x \right| \leq \frac{\pi^2}{4}$$

در نتیجه

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x - 0)(x - 1)| \times \frac{\pi^2/4}{2!} = \frac{\pi^2}{8} |x^2 - x|$$

یعنی کران بالای خطا عبارت است از $\frac{\pi^2}{8}|x^2 - x|$ ، مقدار این کران بالا برای $x = \frac{1}{4}$ برابر است با :

$$\frac{\pi^2}{8} \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{\pi^2}{32} = 0.31 \quad (2D)$$

که با مقدار واقعی خطا یعنی 0.21 به مقدار 0.1 اختلاف دارد. مقدار خطا و همچنین کران بالای خطا اعدادی بزرگ هستند که بیانگر خوب نبودن تقریب یا نامناسب بودن چند جمله‌ای درجه اول به عنوان یک تقریب تابع $\cos \frac{\pi}{4}x$ می‌باشد.

مثال ۲۶. فرض کنید $f(x) = \sin \frac{\pi}{4}x$. چند جمله‌ای درونیاب f را در نقاط $0, 1$ و 2 به دست آورید و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید.

حل: با توجه به نقاط داده شده و ضابطه تابع f جدول تفاضلات زیر را خواهیم داشت :

تفاضلات مرتبه			
x_i	$f_i = \sin \frac{\pi}{4}x_i$	اول	دوم
۰	۰		
		۱	
۱	۱		-۱
		-۱	
۲	۰		

بنابراین چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از :

$$P(x) = 0 + (x - 0)(1) + (x - 0)(x - 1)(-1) = -x^2 + 2x$$

برای تعیین کران بالای خطا باید مشتق سوم تابع $f(x)$ را حساب کنیم.

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$f'''(x) = -\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi x}{2}$$

$$|f'''(x)| = \left| -\frac{\pi^3}{8} \cos \frac{\pi x}{2} \right| \leq \frac{\pi^3}{8} = M$$

لذا

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x-0)(x-1)(x-2)| \times \frac{\pi^3/8}{3!} = \frac{\pi^3}{48} |x(x-1)(x-2)|$$

۴.۳ برونابی

هرگاه تابع f در نقاط x_0, x_1, \dots, x_n مقادیر معلوم f_0, f_1, \dots, f_n را داشته باشد، در بخش‌های قبل تخمین تابع $f(x)$ را در $x = \bar{x}$ که \bar{x} در فاصله $[x_0, x_n]$ قرار داشت، مورد بررسی قرار دادیم. با این حال یک سوال طبیعی این است که هرگاه $\bar{x} < x_0$ و یا $\bar{x} > x_n$ ، در این صورت مقدار $f(\bar{x})$ را چگونه تخمین بزنیم؟ چون در این حالتها \bar{x} خارج فاصله $[x_0, x_n]$ قرار دارد، روند تخمین مقدار تابع f را در \bar{x} برونابی می‌نامیم. برای برونابی می‌توان از همان چند جمله‌ای درونیاب تابع f استفاده نمود. درونیابی و برونابی دو مفهوم از یک روند می‌باشند. اما درونیابی بیشتر از برونابی مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا هرگاه رابطه (۱۳) یعنی کران بالای خطا را در نظر بگیریم، می‌توان نشان داد که هرگاه \bar{x} به اندازه کافی به نقاط مرکزی x_i ‌ها نزدیک باشد، خطا کمترین مقدار را دارد. برعکس هرگاه \bar{x} خارج فاصله $[x_0, x_n]$ باشد که در حالت برونابی چنین وضعی داریم، عامل‌های $\bar{x} - x_i$ در رابطه (۱۳) می‌توانند مقادیر بزرگی باشند. بنابراین مقدار خطای چند جمله‌ای $P(x)$ به عنوان تقریب تابع $f(x)$ زیاد خواهد بود، مگر \bar{x} به یکی از نقاط انتهایی فاصله $[x_0, x_n]$

بسیار نزدیک باشد. لذا برونابی نسبت به درونیابی دارای دقت کمتری است و بایستی برونابی را با احتیاط مورد استفاده قرار داد.

مثال ۲۷. برای تابع جدولی مثال ۱۹ مقادیر $f(0,5)$ و $f(4,2)$ را تخمین بزنید.

حل: در مثال ۱۹ و مثال ۲۳ چند جمله‌ای درونیاب $f(x)$ به صورت زیر به دست آمد:

$$P(x) = x^2 + 1$$

بنابراین

$$f(0,5) \simeq P(0,5) = 1,25$$

$$f(4,2) \simeq P(4,2) = 18,64$$

استفاده از چند جمله‌ای درونیاب در تمام نقاط درونیابی x_i برای $i = 0, 1, \dots, n$ تنها روند مورد استفاده در برونابی نیست، بلکه می‌توان از درونیابی خطی نیز استفاده نمود که ذیلاً توضیح داده می‌شود.

هرگاه چند جمله‌ای درونیاب گذرنده از دو نقطه (x_k, y_k) و (x_{k+1}, y_{k+1}) را بخواهیم به دست آوریم با استفاده از تفاضلات تقسیم شده نیوتن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y &= y_k + (x - x_k)f[x_k, x_{k+1}] \\ y &= y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}(y_{k+1} - y_k) \end{aligned} \quad (14)$$

رابطه (۱۴) نشان دهنده خط ماربر دو نقطه (x_k, y_k) و (x_{k+1}, y_{k+1}) می‌باشد.

حال برای برونابی، هرگاه $\bar{y} = f(\bar{x})$ و $\bar{x} < x_0$ در این صورت با قرار دادن $k = 0$ در رابطه (۱۴) داریم:

$$\bar{y} = y_0 + \frac{\bar{x} - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) \quad (15)$$

و اگر $\bar{x} > x_n$ با قرار دادن $k = n - 1$ در رابطه (۱۴) خواهیم داشت :

$$\bar{y} = y_{n-1} + \frac{\bar{x} - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) \quad (۱۶)$$

بنابراین روابط (۱۵) و (۱۶) می‌توانند برای برونابی مورد استفاده قرار گیرند.

مثال ۲۸. تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید :

x_i	-۱	۰	۱	۲
y_i	۰	-۱	۲	۹

به کمک روابط (۱۵) و (۱۶) مقادیر $f(-۱/۵)$ و $f(۲/۲)$ را تخمین بزنید.

حل: داریم :

$$x_0 = -۱, \quad x_1 = ۰, \quad x_2 = ۱, \quad x_n = x_3 = ۲$$

$$y_0 = ۰, \quad y_1 = -۱, \quad y_2 = ۲, \quad y_n = y_3 = ۹$$

در این صورت برای $\bar{x} = -۱/۵$ از رابطه (۱۵) خواهیم داشت :

$$\bar{y} = ۰ + \frac{-۱/۵ + ۱}{۰ + ۱}(-۱ - ۰) = ۰/۵$$

بنابراین $f(-۱/۵) \simeq ۰/۵$.

و برای $\bar{x} = ۲/۲$ از رابطه (۱۶) داریم :

$$\bar{y} = ۲ + \frac{۲/۲ - ۱}{۲ - ۱}(۹ - ۲) = ۱۰/۴$$

لذا $f(۲/۲) \simeq ۱۰/۴$.

لازم به ذکر است در فصل هشتم روشی به نام تقریب حداقل مربعات معرفی خواهد شد که برای

برونابی نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

مجموعه مسائل فصل سوم

۱- هرگاه x_0, x_1, \dots, x_n نقاط درونیابی و f_0, f_1, \dots, f_n مقادیر تابع $f(x)$ در این نقاط باشند نشان دهید یک و تنها یک چند جمله‌ای $P(x)$ ، حداکثر از درجه n ، وجود دارد به طوری که:

$$P(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

۲- چند جمله‌ای‌های لاگرانژ را برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۳	۲	۷	۵۹

جواب .

$$L_0(x) = -\frac{1}{8}(x^2 - 7x^2 + 14x - 8), \quad L_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 6x^2 + 8x)$$

$$L_2(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 5x^2 + 4x), \quad L_3(x) = \frac{1}{24}(x^2 - 3x^2 + 2x)$$

۳- چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی مساله ۲ را به دست آورده به کمک آن تقریبی از $f(3)$ به دست آورید.

$$f(3) \simeq 24, \quad P(x) = x^2 - 2x + 3. \quad \text{جواب.}$$

۴- برای تابع جدولی زیر تقریبی از $f(0.6)$ به دست آورید.

x_i	۰,۴	۰,۵	۰,۷	۰,۸
f_i	-۰,۹۱۶۲۹۱	-۰,۶۹۳۱۴۷	-۰,۳۵۶۶۷۵	-۰,۲۲۳۱۴۴

$$f(0.6) \simeq -0.509975. \quad \text{جواب.}$$

۵- با استفاده از چند جمله‌ای‌های لاگرانژ چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۴
f_i	۱	۱	۲	۵

جواب. $P(x) = \frac{1}{12}(-x^3 + 9x^2 - 8x + 12)$

۶- برای تابع جدولی مساله ۵ تفاضلات تقسیم شده زیر را به دست آورید.

الف. $f[2, 4]$ ب. $f[1, 2, 4]$ پ. $f[0, 1, 2]$

ت. $f[0, 1, 2, 4]$

جواب. الف. $\frac{3}{2}$ ب. $\frac{1}{6}$ پ. $\frac{1}{2}$ ت. $-\frac{1}{12}$

۷- به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چند جمله‌ایهای درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۴ و ۵ را به دست آورید.

۸- به روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را به دست آورید.

x_i	-۱	۱	۲
f_i	-۳	۰	۴

جواب. $P(x) = \frac{1}{6}(5x^2 + 9x - 14)$

۹- به کمک فرمولهای پیشرو و پسرو نیوتن تقریبهایی از $f(1/1)$ و $f(2)$ برای تابع جدولی زیر به دست آورید.

x_i	۱	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
f_i	۰,۷۶۵۱۹۷۷	۰,۶۲۰۰۰۸۶۰	۰,۴۵۵۴۰۲۲	۰,۲۸۱۸۱۸۶	۰,۱۱۰۳۶۳۲

جواب. $f(2) \simeq ۰,۲۲۳۸۷۵۵$ و $f(1/1) \simeq ۰,۷۱۹۶۴۸۰$

۱۰- به کمک شکل درمینانی چند جمله‌ای درونیاب، چند جمله‌ای درونیاب توابع جدولی مسائل ۲، ۵ و ۸ را به دست آورید.

۱۱- برای تابع جدولی مساله ۲ مقادیر $f(0/5)$ و $f(4/3)$ را تخمین بزنید.

جواب. $f(0/5) \simeq 2,125$ و $f(4/3) \simeq 73,907$

۱۲- به کمک چند جمله‌ای درونیاب به دست آمده در مساله ۸ برای $f(2/4)$ و $f(0)$ مقادیری به دست آورید.

جواب. $f(0) \simeq -2,333$ و $f(2/4) \simeq 6,067$

۱۳- مقادیر خواسته شده در مسائل ۱۱ و ۱۲ را به کمک فرمولهای (۱۵) و (۱۶) به دست آورید.

۱۴- با به دست آوردن یک چند جمله‌ای درجه چهار که تابع جدولی زیر را درونیایی می‌کند مقادیر $f(5)$ ، $f(6)$ و $f(7)$ را پیشگویی (برونیایی) کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۱	-۱	۱	-۱	۱

جواب. ۳۵۱، ۱۲۹، ۳۱

۱۵- مانند مساله ۱۴ در مورد تابع جدولی زیر عمل نموده و مقادیر $f(5)$ ، $f(6)$ و $f(7)$ را پیشگویی کنید.

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
f_i	۰	۰	۱	۰	۰

جواب. ۱۲۶، ۴۵، ۱۰

فصل چهارم

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

۱.۴ مشتق‌گیری عددی

کاربرد مشتق در ریاضیات کاربردی فراوان است و در حل بسیاری از مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد. معمولاً برای تابعی که دارای ضابطه معلوم باشد، مشتق آن را با روشهای حساب دیفرانسیل می‌توانیم به دست آوریم. اما هرگاه ضابطه تابع پیچیده و یا تابع تنها به صورت یک جدول معلوم باشد، برای مشتق‌گیری بایستی به روشهای عددی روی آورد. در این قسمت بعضی از روشهای مشتق‌گیری عددی یک تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دستورهایی مشتق‌گیری عددی را می‌توان با مشتق‌گرفتن از چند جمله‌ای درونیاب به دست آورد. هرگاه $P(x)$ چند جمله‌ای درونیاب f باشد، در این صورت مشتقهای $f'(x)$ ، $f''(x)$ و ... را به کمک $P'(x)$ ، $P''(x)$ و ... به دست می‌آوریم. البته باید متذکر شد که مشتق‌گیری عددی بر اساس چند جمله‌ای درونیاب یک عمل ناپایدار است، یعنی نمی‌توانیم دقت خوبی را برای جواب انتظار داشته باشیم، زیرا خطای حاصل از مشتق‌گیری یعنی $f'(x) - P'(x)$ ممکن است خیلی بزرگ باشد.

۱.۱.۴ دستوره‌های مشتق‌گیری بر اساس چند جمله‌ای درونیاب

هرگاه تابع f در نقاط متساوی‌فاصله $x_j, j = 0, 1, \dots, n$ داده شده باشد، در این صورت چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ به کمک دستور تفاضل پیشرو نیوتن عبارتست از:

$$P(x) = f_i + s\Delta f_i + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_i + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_i + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}\Delta^k f_i \quad (1)$$

که در آن $x = x_i + sh$ و $x_{i+1} - x_i = h$ برای $i = 0, 1, \dots, n-1$ چون $P(x)$ بر حسب s بیان شده است، بنابراین

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \simeq \frac{dP(x)}{dx} = \frac{dP(x)}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} \quad (2)$$

و چون از $x = x_i + sh$ داریم $dx = hds$ ، لذا

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h} \quad (3)$$

بنابراین با در نظر گرفتن روابط (۲) و (۳) و مشتق‌گیری از (۱) خواهیم داشت:

$$f'(x) \simeq \frac{1}{h} [\Delta f_i + (s - \frac{1}{2})\Delta^2 f_i + \frac{3s^2 - 6s + 2}{6}\Delta^3 f_i + \dots] \quad (4)$$

به طور مشابه برای مشتق مرتبه دوم داریم:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \simeq \frac{d^2 P(x)}{dx^2} \simeq \frac{1}{h^2} \frac{d^2 P(x)}{ds^2} = \frac{1}{h^2} [\Delta^2 f_i + (s-1)\Delta^3 f_i + \dots] \quad (5)$$

علی‌الخصوص هرگاه $s = 0$ برای مشتقات f در نقاط جدولی x_i دستوره‌های زیر را خواهیم داشت:

$$f'(x_i) = f'_i \simeq \frac{1}{h} [\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i + \frac{1}{3}\Delta^3 f_i - \dots] \quad (6)$$

و

$$f''(x_i) = f''_i \simeq \frac{1}{h^2} [\Delta^2 f_i - \Delta^2 f_{i+1} + \frac{11}{12} \Delta^2 f_{i+2} - \dots] \quad (7)$$

معمولاً برای محاسبه تقریبی از f'_i و f''_i یک یا چند جمله از عبارات سمت راست (۶) و (۷) انتخاب می‌شوند. مثلاً

$$f'_i \simeq \frac{1}{h} \Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad (8)$$

یا

$$f'_i \simeq \frac{1}{h} [\Delta f_i - \frac{1}{2} \Delta^2 f_i] = \frac{2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i}{h} \quad (9)$$

به طور مشابه به کمک رابطه (۷) یک تقریب برای f''_i به صورت زیر است :

$$f''_i \simeq \frac{1}{h^2} \Delta^2 f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \quad (10)$$

همچنین با قرار دادن $s = \frac{1}{2}$ در رابطه (۴) دستور زیر برای نقاط میانی x_i ها به دست می‌آید :

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) = f'_{i+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{h} [\Delta f_i - \frac{1}{24} \Delta^2 f_i + \frac{1}{48} \Delta^3 f_i - \dots] \quad (11)$$

که با انتخاب یک جمله در عبارت سمت راست خواهیم داشت :

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) \simeq \frac{1}{h} \Delta f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad (12)$$

به طور مشابه با قرار دادن $s = 1$ در دستور مشتق‌گیری (۵) داریم :

$$f''(x_i + h) = f''_{i+1} \simeq \frac{1}{h^2} [\Delta^2 f_i - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{i+1} + \dots] \quad (13)$$

که با انتخاب یک جمله در عبارت سمت راست خواهیم داشت :

$$f''_{i+1} \simeq \frac{1}{h^2} \Delta^2 f_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \quad (14)$$

مثال ۱. مقدار f'_i را برای $i = 0, 1, 2, 3$ برای تابع جدولی زیر با استفاده از فرمول (۸) به دست آورید.

x_i	۰٫۱	۰٫۱۵	۰٫۲	۰٫۲۵	۰٫۳
f_i	۱٫۱۰۵۱۷	۱٫۱۶۱۸۳	۱٫۲۲۱۴۰	۱٫۲۸۴۰۳	۱٫۳۴۹۸۶

حل: جدول تفاضلات تابع جدولی فوق به صورت زیر است :

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$
۰٫۱	۱٫۱۰۵۱۷		
		۰٫۰۵۶۶۶	
۰٫۱۵	۱٫۱۶۱۸۳		۰٫۰۰۲۹۱
		۰٫۰۵۹۵۷	
۰٫۲	۱٫۲۲۱۴۰		۰٫۰۰۳۰۶
		۰٫۰۶۲۶۳	
۰٫۲۵	۱٫۲۸۴۰۳		۰٫۰۰۳۲۰
		۰٫۰۶۵۸۳	
۰٫۳	۱٫۳۴۹۸۶		

با توجه به فرمول (۸) و اینکه $h = ۰٫۰۵$ خواهیم داشت :

i	$f'_i \simeq \frac{1}{h} \Delta f_i$
۰	۱,۱۳۳۲
۱	۱,۱۹۱۴
۲	۱,۲۵۲۶
۳	۱,۳۱۶۶

مثال ۲. برای تابع جدولی مثال ۱ مقدار f'_i را برای $i = ۰, ۱, ۲$ با استفاده از فرمول (۹) به دست آورید.

حل:

i	$f'_i \simeq \frac{1}{h} (\Delta f_i - \frac{1}{2} \Delta^2 f_i)$
۰	۱,۱۰۴
۱	۱,۱۶۰۸
۲	۱,۲۲۰۶

توجه: مقادیر f_i در مثال ۱ مربوط به مقادیر تابع $f(x) = e^x$ هستند که مشتق آن با خودش برابر است. لذا بایستی مقادیر جدولهای مثال ۱ و ۲ با مقدار تابع یعنی f_i ها برابر باشند که نیستند. و این مطلب از همان ناپایدار بودن و توأم با خطای زیاد بودن مشتق‌گیری عددی حاصل می‌شود. البته همانگونه که جدول مثال ۲ نشان می‌دهد، این مقادیر بهتر از مقادیر جدول مثال ۱ هستند.

مثال ۳. مقدار $f'' = f''(۰,۱)$ و $f''_1 = f''(۰,۱۵)$ را برای تابع جدولی مثال ۱ به کمک فرمول (۱۰) به دست آورید.

حل:

$$f''_0 \simeq \frac{1}{h^2} \Delta^2 f_0 = ۱,۱۶۴$$

$$f''_1 = f''(۰,۱۵) \simeq \frac{1}{h^2} \Delta^2 f_1 = ۱,۲۲۴$$

مثال ۴. به کمک فرمول (۱۲) تقریب‌هایی از $f'(x_i + \frac{h}{4})$ را برای $i = 0, 1, 2, 3$ به دست آورید.
حل: با توجه به فرمول (۱۲) این مقادیر همان مقادیر جدول مثال ۱ می‌باشند.

۲.۱.۴ دستوره‌ای مشتق‌گیری با استفاده از بسط تیلور

به کمک بسط تیلور یک تابع می‌توان بعضی از دستوره‌ای قسمت قبل و دستوره‌ای دیگری را برای مشتق‌گیری به دست آورد. فرض کنید داریم $x_{i+1} = x_i + h$ ، لذا خواهیم داشت:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \dots \quad (15)$$

همچنین هرگاه $x_{i-1} = x_i - h$ در این صورت خواهیم داشت:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \dots \quad (16)$$

بنابراین از رابطه (۱۵) می‌توانیم بنویسیم:

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad (17)$$

رابطه (۱۷) همان رابطه (۸) می‌باشد. به طور مشابه از رابطه (۱۶) می‌توانیم بنویسیم:

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \quad (18)$$

توجه: برای محاسبه $f'(x_0)$ از رابطه (۱۷) و برای محاسبه $f'(x_n)$ از رابطه (۱۸) استفاده می‌کنیم.
هرگاه رابطه (۱۶) را جمله به جمله از رابطه (۱۵) کم نموده و جملات اضافی را حذف کنیم خواهیم داشت:

$$f'(x_i) \simeq \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (19)$$

همچنین هرگاه جملات دو رابطه (۱۵) و (۱۶) را با هم جمع کنیم، تقریب زیر برای $f''(x_i)$ به دست می‌آید که همان رابطه (۱۰) می‌باشد. (با حذف جملات اضافی)

$$f''(x_i) \simeq \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}))}{h^2} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} \quad (20)$$

با بحثی مشابه می‌توان رابطه زیر را برای مشتق مرتبه سوم f در نقطه x_i به دست آورد.

$$f'''(x_i) \simeq \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} \quad (21)$$

مثال ۵. تابع جدولی زیر مفروض است، مقادیر f'_1, f'_2 و f''_2 را به دست آورید.

x_i	۰	۱	۲	۳
f_i	۰	۰٫۳۷۵	۰٫۹۷۱	۱٫۵۱۱

حل: از فرمول (۱۷) داریم: ($h = 1$)

$$f'_1 = f'(x_0) = f'(0) \simeq \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{0.375 - 0}{1} = 0.375$$

$$f'_2 = f'(x_2) = f'(2) \simeq \frac{f_3 - f_1}{h} = \frac{1.511 - 0.971}{1} = 0.540$$

همچنین برای f'_2 از فرمول (۱۸) داریم:

$$f'_2 \simeq \frac{f_2 - f_1}{h} = \frac{0.971 - 0.375}{1} = 0.596$$

و از فرمول (۱۹) برای f''_2 خواهیم داشت:

$$f''_2 \simeq \frac{f_3 - f_1}{2h} = \frac{1.511 - 0.375}{2} = \frac{1.136}{2} = 0.568$$

و از رابطه (۲۰) برای f''_2 داریم:

$$f''_2 = f''(x_2) \simeq \frac{f_1 - 2f_2 + f_3}{h^2} = \frac{0.375 - 1.942 + 1.511}{1} = -0.056$$

۲.۴ خطای مشتق‌گیری عددی

به منظور به دست آوردن خطای فرمولهای مختلفی که در بخش‌های قبل برای $f'(x)$ حاصل می‌شود از بسط تیلور استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال فرمول (۱۷) را در نظر بگیرید که از رابطه (۱۵) به دست آمده است، هرگاه جملات را به طور کامل بنویسیم خواهیم داشت :

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f'_i + \frac{h}{2} f''_i + \frac{h^2}{6} f'''_i + \dots \quad (22)$$

در نتیجه :

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'_i = \frac{h}{2} f''_i + \frac{h^2}{6} f'''_i + \dots \quad (23)$$

لذا مقدار سمت راست در رابطه (۲۳) خطای $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ را به عنوان تقریبی از f'_i بیان می‌کند. با توجه به این که h کوچک اختیار می‌شود، جمله غالب در سمت راست عبارت (۲۳)، $\frac{h}{2} f''_i$ است، بنابراین خطای رابطه (۱۷) را به منظور تقریب f'_i به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'_i \simeq \frac{h}{2} f''_i \quad (24)$$

چون توان h در عبارت (۲۴) یک می‌باشد، اصطلاحاً می‌گوییم خطا متناسب با h است و می‌نویسیم :

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'_i = O(h)$$

مثال ۶. نشان دهید خطای عبارت (۱۲) به منظور تقریب $f'(x_i + \frac{h}{2})$ متناسب با h^2 است، یعنی نشان دهید :

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = O(h^2)$$

حل: بسط $f'(x_i + \frac{h}{4})$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} f'(x_i + \frac{h}{4}) &= f'_i + \frac{h}{4} f''_i + \frac{(\frac{h}{4})^2}{2!} f'''_i + \dots \\ f'(x_i + \frac{h}{4}) &= f'_i + \frac{h}{4} f''_i + \frac{h^2}{8} f'''_i + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

هرگاه جملات عبارت (۲۲) را از عبارت (۲۵) کم کنیم، خواهیم داشت:

$$f'(x_i + \frac{h}{4}) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{h^2}{8} f'''_i - \frac{h^2}{6} f'''_i + \dots = -\frac{1}{24} h^2 f'''_i$$

بنابراین

$$f'(x_i + \frac{h}{4}) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = O(h^2)$$

توجه: می‌دانیم $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ هم به عنوان تقریبی از $f'(x_i)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد و هم به عنوان تقریب $f'(x_i + \frac{h}{4})$. اما همانگونه که مثالهای ۱ و ۲ نشان می‌دهند، این عبارت تقریب بهتری برای $f'(x_i + \frac{h}{4})$ می‌باشد و عبارتهای خطا نیز این مطلب را تأیید می‌کند، زیرا هر چه توان h در عبارت خطا بیشتر باشد خطا کمتر است. از اینکه با کوچکتر شدن h ، خطا کمتر می‌شود.

توضیحی در مورد ناپایداری مشتق‌گیری عددی

در حالت کلی خطای فرمولهای مشتق‌گیری عددی به صورت $O(h^p)$ است که در آن p بستگی به تعداد جملاتی دارد که برای تقریب مشتق مورد نظر استفاده می‌شود ظاهراً هر چه p بزرگتر باشد، خطا نیز کمتر خواهد بود، اما در عمل به هنگام کوچک بودن مقدار h مشکلاتی به وجود می‌آید. عنوان مثال کسر زیر را به عنوان تقریب f'_i در نظر بگیرید

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad (26)$$

که نشان دادیم، خطای آن متناسب با h است. در ظاهر برای کم بودن خطا، h را بایستی کوچک اختیار کنیم. اما کوچک بودن h به معنی نزدیک بودن f_{i+1} و f_i است، بنابراین $f_{i+1} - f_i$ می‌تواند

توأم با خطای زیاد باشد (مسأله ۱۱ فصل اول را ببینید) و چون $f_{i+1} - f_i$ بر مقدار کوچک h تقسیم می‌شود و یا در واقع در مقدار بزرگ $\frac{1}{h}$ ضرب می‌شود، خطای محاسبه کسر زیاد خواهد بود. خلاصه اینکه هرگاه h خیلی کوچک باشد، خطای محاسبه $\frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ زیاد خواهد بود. بنابراین برای کم بودن خطا از طرفی h باید خیلی کوچک اختیار شود و از طرف دیگر نباید خیلی کوچک اختیار شود. لذا برای انتخاب h در تنگنا قرار می‌گیریم و انتخاب بهترین h در عمل امکانپذیر نیست.

۳.۴ انتگرال‌گیری عددی

برای محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ هرگاه تابع اولیه f موجود نباشد و یا f به صورت جدولی داده شده باشد. از انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود. واضح است که انتگرال معین را می‌توان به عنوان مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ که محصور است به محور x ها، خطوط $x = a$ و $x = b$ تعبیر کرد و با تقسیم فاصله $[a, b]$ به چند زیر فاصله و جمع کردن مساحت‌های مربوط به این زیر فاصله‌ها مقدار انتگرال را محاسبه کرد.

فرض کنید $[a, b]$ به n قسمت مساوی به صورت زیر تقسیم شود :

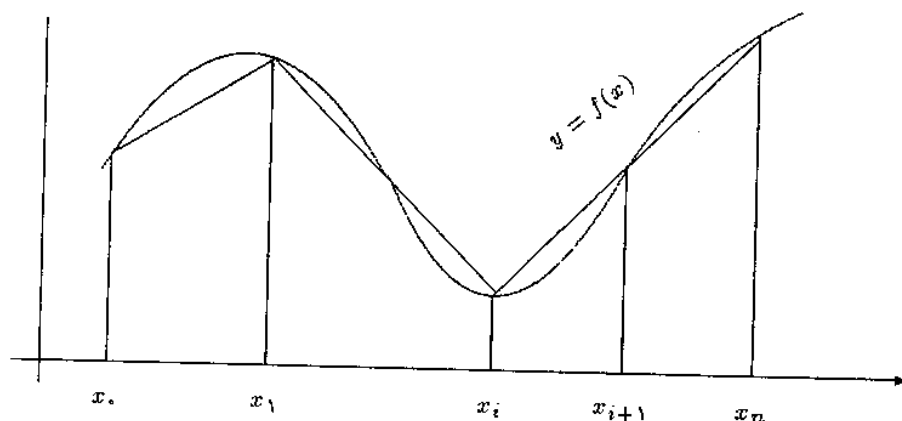
$$[x_i, x_{i+1}] \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

که در آن

$$x_{i+1} - x_i = h \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{لذا}$$

۱.۳.۴ قاعده دوزنقه‌ای



در فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ تقریب زیر را به کار می‌بریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \simeq \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) \quad (27)$$

رابطه (۲۷) مساحت دوزنقه‌ای به قاعده‌های f_i و f_{i+1} و ارتفاع h می‌باشد.

بنابراین برای پیدا کردن تقریبی از $\int_a^b f(x) dx$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \cdots + \\ &\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \\ &\simeq \frac{h}{2} (f_0 + f_1) + \frac{h}{2} (f_1 + f_2) + \cdots + \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) + \cdots + \frac{h}{2} (f_{n-1} + f_n) \\ &= \frac{h}{2} [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n] \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از قاعده دوزنقه‌ای مقدار $\int_a^b f(x) dx$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\int_a^b f(x) dx \simeq T(h) = \frac{h}{2} [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n-1} + f_n] \quad (28)$$

توجه: $T(h)$ به معنی مقدار انتگرال با استفاده از روش دوزنقه‌ای (Trapezoid) می‌باشد که هر

زیر فاصله دارای طول h می‌باشد.

برنامه کامپیوتری روش ذوزنقه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$.

این برنامه مقدار انتگرال $\int_a^b F(x)dx$ را برای تابع $F(x) = e^{-x^2}$ به روش ذوزنقه‌ای محاسبه می‌کند. مقادیر a ، b و همچنین تعداد زیر فاصله‌ها، n ، به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ و همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای محاسبه انتگرال توابع مختلف به روش ذوزنقه‌ای مورد استفاده قرار داد. خروجی برنامه مقدار انتگرال محاسبه شده است.

c

c Trapezoid Integration

c

```
F(x)= exp(-x**2)
```

```
read(*,*) a,b,n
```

```
s = (F(a) + F(b)) / 2.
```

```
h=(b-a)/n
```

```
do 10 i=1,n-1
```

```
s = s + F(a+i*h)
```

10 continue

```
s = s * h
```

```
write(*,*) "INTEGRAL = ", s
```

```
end
```

مثال ۷. تقریبهایی از $\int_{-1}^1 e^x dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $h = 0.2, 0.1, 0.05$ به دست آورید.

حل: داریم $a = 0.1$, $b = 0.3$ و $f(x) = e^x$ ، لذا

$$T(0.2) = \frac{0.2}{2} [f(0.1) + f(0.3)] = 0.1 [1.10517 + 1.34986] = 0.24550$$

$$T(0.1) = \frac{0.1}{2} [f(0.1) + 2f(0.2) + f(0.3)] = 0.05 [1.10517 + 2(1.22140) + 1.34986] = 0.24489$$

$$\begin{aligned} T(0.05) &= \frac{0.05}{2} [f(0.1) + 2(f(0.15) + f(0.2) + f(0.25)) + f(0.3)] \\ &= 0.025 [1.10517 + 2(1.16183 + 1.22140 + 1.28403) + 1.34986] \\ &= 0.24474 \end{aligned}$$

مثال ۸. با استفاده از مقادیر جدول زیر تقریبی از $\int_0^1 f(x) dx$ حساب کنید.

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
f_i	1	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255	2.7183

حل: با گرفتن $h = 0.2$ داریم:

$$\begin{aligned} T(0.2) &= \frac{0.2}{2} (f(0) + 2(f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)) + f(1)) \\ &= 1.72399 \end{aligned}$$

۲.۳.۴ قاعده سیمپسون

در قاعده دوزنقه‌ای برای تقریب $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ یک چند جمله‌ای درجه یک (یک خط) را جایگزین تابع $f(x)$ می‌کنیم که این عمل رابطه (۲۸) را نتیجه می‌دهد. اما در روش سیمپسون یک چند جمله‌ای درجه دوم را جایگزین تابع f در فاصله $[x_i, x_{i+2}]$ می‌کنیم و از آن تقریب زیر را خواهیم داشت:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \simeq \frac{h}{3} (f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) \quad (29)$$

برای به دست آوردن فرمول قاعده سیمپسون در سراسر فاصله $[x_0, x_n]$ چون رابطه (۲۹) تقریبی برای فاصله $[x_i, x_{i+2}]$ است، لذا باید n زوج باشد، یعنی تعداد نقاط فرد باشد تا بتوان (۲۹) را به کار برد با فرض زوج بودن داریم:

$$\begin{aligned}\int_x^{x_n} f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \\ &\simeq \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) \\ &\quad + \cdots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)\end{aligned}$$

بنابراین هرگاه $S(h)$ نشان‌دهنده تقریب $\int_a^b f(x)dx$ به روش سیمپسون باشد که هر زیر فاصله دارای طول h است، خواهیم داشت:

$$\int_x^{x_n} f(x)dx \simeq S(h) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

برنامه کامپیوتری روش سیمپسون برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$

این برنامه مقدار انتگرال $\int_a^b F(x)dx$ را برای تابع $F(x) = e^{-x^2}$ به روش سیمپسون محاسبه می‌کند. مقادیر a و b همچنین نصف تعداد زیر فاصله‌ها، m به صورت ورودی در اختیار برنامه قرار می‌گیرند. با تغییر تابع $F(x)$ همچنین مقادیر ورودی، می‌توان برنامه را برای محاسبه انتگرال توابع مختلف به روش سیمپسون مورد استفاده قرار داد. خروجی برنامه مقدار انتگرال محاسبه شده است.

(دقت کنید که برنامه طوری نوشته است که تعداد زیر فاصله‌ها به صورت $2n$ در نظر گرفته می‌شود.)

c

c Simpson's Method

c

```

F(x)= exp(-x**2)
read(*,*) a,b,n
s = 0.
h = (b-a) / n
h2 = h / 2.
h3 = F(a+h2)
do 10 i=1,n-1
s = s + F(a+i*h)
h3 = h3 + F(a+i*h+h2)
10 continue
s = h/6. * (F(a) + 4 * h3 + 2 * s + F(b))
write(*,*) "INTEGRAL = " , s
end

```

مثال ۹: تقریبهایی از $\int_1^{1.2} \sqrt{x} dx$ را به روش سیمپسون و به ازای $h = 0.15$ و $h = 0.05$ به دست آورید.

حل: داریم $f(x) = \sqrt{x}$ ، لذا

$$S(0.15) = \frac{0.15}{3} [1 + 4(1.07238) + 1.14018] = 0.321485$$

و

$$S(0.05) = \frac{0.05}{3} [1 + 4(1.02470) + 2(1.04881) + 4(1.07238) + 2(1.09545) + 4(1.11803) + 1.14018] = 0.32149$$

۳.۳.۴ قاعده‌های دیگر انتگرال‌گیری

در فرمول قاعده‌دوزنقه‌ای داریم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \simeq \frac{h}{2} f_i + \frac{h}{2} f_{i+1} = \sum_{k=i}^{i+1} A_k f_k$$

که در آن $A_i = A_{i+1} = \frac{h}{2}$

همچنین از قاعده سیمپسون نتیجه می‌شود که :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \simeq \frac{h}{3} f_i + \frac{4h}{3} f_{i+1} + \frac{h}{3} f_{i+2} = \sum_{k=i}^{i+2} A_k f_k$$

لذا در حالت کلی قواعدی که داریم به صورت زیر می‌باشند :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &= \sum_{k=0}^n A_k f_k + E \\ &= \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + E \end{aligned} \quad (30)$$

در رابطه (۳۰) آنچه می‌تواند مجهول باشد نقاط x_0, x_1, \dots, x_n و ضرائب A_0, A_1, \dots, A_n است، که ذیلاً دو روش را برای محاسبه آنها ارائه می‌کنیم. در رابطه (۳۰)، مقدار خطای E مقدار خطای $\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ به عنوان تقریب $\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$ است.

روش نیوتن-کاتس

در این روش نقاط x_0, x_1, \dots, x_n معلوم فرض می‌شوند، مثلاً متساوی‌الفاصله و به صورت زیر :

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

بنابراین در رابطه (۳۰) مجهولات عبارتند از $n+1$ ضریب A_0, A_1, \dots, A_n .

برای به دست آوردن این ضرائب فرض می‌کنیم در رابطه (۳۰) برای توابع زیر مقدار خطا صفر است:

$$f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^n$$

یعنی ضرائب مجهول A_k را طوری پیدا می‌کنیم که خطای عبارت $\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ به عنوان تقریب $\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$ برای چند جمله‌ایهای تا درجه n صفر باشد. هرگاه برای راحتی قرار دهیم $x_0 = 0$ در این صورت فرمول قاعده چهار نقطه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \sum_{k=0}^3 A_k f_k + E \quad (31)$$

که در آن $x_k = kh$ ، یعنی

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad x_3 = 3h$$

برای به دست آوردن ضرائب A_0 تا A_3 برای محاسبه انتگرال (31) مقدار E را برای توابع $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ برابر صفر قرار می‌دهیم.

هرگاه $f(x) = 1$ در این صورت

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \int_0^{3h} dx = 3h$$

از طرفی برای $E = 0$ مقدار سمت راست رابطه (31) عبارت است از:

$$\sum_{k=0}^3 A_k f_k = \sum_{k=0}^3 A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^3 A_k = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$$

بنابراین برای $f(x) = 1$ معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$3h = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \quad (32)$$

به طور مشابه برای $f(x) = x$ معادله زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{9h^2}{2} = hA_1 + 2hA_2 + 3hA_3 \quad (33)$$

زیرا

$$\int_0^{3h} f(x) dx = \int_0^{3h} x dx = \frac{1}{2}(9h^2)$$

و

$$\sum_{k=0}^3 A_k f_k = \sum_{k=0}^3 A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^3 A_k x_k = 0 + A_1 h + 2h A_2 + 3h A_3$$

به طور مشابه برای توابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = x^3$ معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_0^{3h} x^2 dx = 9h^3 = h^3 A_1 + 4h^3 A_2 + 9h^3 A_3 \quad (34)$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_0^{3h} x^3 dx = \frac{81h^4}{4} = h^3 A_1 + 8h^3 A_2 + 27h^3 A_3 \quad (35)$$

پس از ساده کردن معادلات (۳۲) تا (۳۵) دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 3h \\ A_1 + 2A_2 + 3A_3 = \frac{9h}{2} \\ A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 9h \\ A_1 + 8A_2 + 27A_3 = \frac{81h}{4} \end{cases}$$

پس از حل دستگاه خواهیم داشت :

$$A_0 = \frac{3h}{8}, \quad A_1 = \frac{9h}{8}, \quad A_2 = \frac{9h}{8}, \quad A_3 = \frac{3h}{8}$$

بنابراین فرمول چهار نقطه‌ای نیوتن-کاتس را به صورت زیر خواهیم داشت :

$$\int_0^{3h} f(x) dx \simeq \frac{3h}{8} (f(0) + 3f(h) + 3f(2h) + f(3h))$$

و با تغییر متغیر $X = x_0 + x$ فرمول قاعده چهار نقطه‌ای به صورت زیر خواهد بود :

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} f(X) dX \simeq \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \quad (36)$$

روش فوق‌الذکر به روش ضرائب مجهول نیز معروف است.

مثال ۱۰. با استفاده از فرمول چهار نقطه‌ای نیوتن-کاتس مقدار انتگرال $\int_0^1 x e^x dx$ را به دست

آوريد.

حل: چون فرمول چهار نقطه‌ای است پس $n = 3$ و از آن $h = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$ لذا

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^x dx &\simeq \frac{1}{8} [f(0) + 3f(\frac{1}{3}) + 3f(\frac{2}{3}) + f(1)] \\ &= \frac{1}{8} [0 + e^{\frac{1}{3}} + 2e^{\frac{2}{3}} + e] = 1.00117 \end{aligned}$$

روش گاوس

در روش گاوس نقاط و ضرایب در رابطه (۳۰) مجهول فرض می‌شوند، پس در فرمول

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + E$$

$(n+1)$ نقطه x_0, x_1, \dots, x_n و $(n+1)$ ضریب A_0, A_1, \dots, A_n مجهول هستند. به منظور به دست آوردن این $2n+2$ مجهول برای توابع $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$ قرار می‌دهیم $E = 0$.

بنابراین با این عمل $\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ برای انتگرالگیری چند جمله‌ای‌های تا درجه $2n+1$ دقیق می‌باشد.

نکته: برای آشنایی با روش‌های گاوس در حالت کلی از قبیل گاوس-لژاندر، گاوس-چبیشف و ... به یکی از کتب آنالیز عددی پیشرفته مراجعه کنید، در این بخش صرفاً بعضی از فرمولهای گاوس-لژاندر معرفی می‌شوند.

توجه: تفاوت اساسی روش گاوس با روشهای قبلی این است که در روشهای قبل تمام فرمولهای بیان شده برای نقاط متساوی‌فاصله x_k می‌باشند. در حالی که در روش گاوس چنین نیست. همچنین

فرمولهای قاعده گاوس برای فاصله $[-1, 1]$ به دست می‌آیند. واضح است که فاصله‌های $[a, b]$ و $[-1, 1]$ را به سادگی می‌توان با تغییر متغیر زیر به هم تبدیل نمود. فرض کنید $x \in [a, b]$ و $u \in [-1, 1]$ در این صورت هرگاه قرار دهیم :

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)]$$

خواهیم داشت :

$$dx = \frac{b-a}{2} du$$

لذا

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(u) du$$

که در آن

$$g(u) = f\left(\frac{1}{2}((b-a)u + (b+a))\right)$$

فرمول دونقطه‌ای گاوس

هرگاه فرمول دونقطه‌ای گاوس را برای $\int_{-1}^1 f(x) dx$ بخواهیم به دست آوریم بایستی داشته باشیم :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^1 A_k f(x_k) + E \quad (37)$$

که در آن برای توابع $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ داریم $E = 0$.

با قرار دادن توابع فوق در رابطه (37) و با $E = 0$ به دستگاهی با چهار معادله و چهار مجهول

می‌رسیم که از آن خواهیم داشت :

$$A_0 = A_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

لذا فرمول دو نقطه‌ای گاوس عبارت است از:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (38)$$

برنامه کامپیوتری روش گاوس دو نقطه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x) dx$.

این برنامه مقدار انتگرال $\int_0^1 F(x) dx$ را برای تابع $F(x) = e^{-x^2}$ به روش گاوس دو نقطه‌ای محاسبه می‌کند. با تبدیل فاصله $[0, 1]$ به فاصله $[-1, 1]$ بایستی $\int_{-1}^1 g(u) du$ محاسبه شود. لذا تابع g در اختیار برنامه قرار داده می‌شود. برای توابع مختلف F می‌توان توابع تبدیل شده g را به دست آورد و در اختیار برنامه قرار داد تا انتگرال مورد نظر محاسبه شود. خروجی برنامه مقدار انتگرال محاسبه شده است.

c

c Gaussian Rule (2-point method)

c

c for function $F(x) = \text{EXP}(-x^{**2})$

c

dimension p(2)

 $g(x) = \exp(-(x+1) ** 2 / 4.) / 2.$ $p(1) = -0.577350269$ $p(2) = -p(1)$ $s = 0.$

do 10 i = 1,2

 $s = s + g(p(i))$

10 continue

 $\text{write}(*,*) \text{"INTEGRAL = "}, s$

end

مثال ۱۱. برای محاسبه $\int_0^{\pi/2} \sin t dt$ دستور دو نقطه‌ای گاوس را بکار ببرید.

حل: با تغییر متغیر

$$t = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi(x+1)}{4}$$

نتیجه می‌شود:

$$\int_0^{\pi/2} \sin t dt = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi(x+1)}{4} dx$$

$$f(x) = \sin \frac{\pi(x+1)}{4} \Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,32589$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,94541$$

لذا بنا بر رابطه (۳۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin t dt &\simeq \frac{\pi}{4} [0,32589 + 0,94541] \\ &= 0,99848 \end{aligned}$$

نکته: توجه کنید که در مثال قبل ابتدا فاصله $[0, \pi/2]$ به فاصله $[-1, 1]$ تغییر داده شده و سپس از فرمول مربوطه استفاده شده است.

مثال ۱۲: با استفاده از روش گاوس دو نقطه‌ای مقدار تقریبی انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\int_1^3 \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

حل. با قرار دادن $x = \frac{u+3}{2}$ خواهیم داشت $dx = \frac{1}{2} du$ ، لذا

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\sin^2 \left(\frac{u+3}{2} \right)}{\left(\frac{u+3}{2} \right)} du \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\sin^2 \left(\frac{u+3}{2} \right)}{u+3} du \simeq f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{که در آن } f(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{x+3}{2}\right)}{x+3} \text{ لذا}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,361691231, \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,266475236$$

بنابراین :

$$\int_1^2 \frac{\sin^2 x}{x} dx \simeq 0,628166467$$

فرمول سه نقطه‌ای گاوس

با روش مشابه فرمول دو نقطه‌ای، دستور انتگرالگیری ۳ نقطه‌ای گاوس به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \frac{1}{9} \left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right] \quad (39)$$

توجه: نقاط و ضرائب دستوره‌ای مختلف انتگرالگیری گاوس در جداولی موجود هستند که

می‌توان از آنها استفاده نمود.

برنامه کامپیوتری روش گاوس سه نقطه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x) dx$

این برنامه مقدار انتگرال $\int_{-1}^1 F(x) dx$ را برای تابع $F(x) = e^{-x^2}$ به روش گاوس دو نقطه‌ای محاسبه می‌کند. با تبدیل فاصله $[0, 1]$ به فاصله $[-1, 1]$ بایستی $\int_{-1}^1 g(u) du$ محاسبه شود، لذا تابع g در اختیار برنامه قرار داده می‌شود. برای توابع مختلف F می‌توان توابع تبدیل شده g را به دست آورد و در اختیار برنامه قرار داد تا انتگرال مورد نظر محاسبه شود. خروجی برنامه مقدار انتگرال محاسبه شده است.

```

c
c      Gaussian Rule (3-point method)
c
c      for function F(x)= EXP(-x**2)
c
dimension p(3),w(3)
g(x) = exp(-(x+1) ** 2 / 4.) / 2.
p(1) = -0.77459667
p(2) = 0.
p(3) = -p(1)
w(1) = 5. / 9.
w(2) = 8. / 9.
w(3) = w(1)
s = 0.
do 10 i = 1,3
    s = s + w(i) * g(p(i))
10 continue
write(*,*) "INTEGRAL = ", s
end

```

مثال ۱۳ : جواب مثال ۱۲ را به کمک دستور سه نقطه‌ای گاوس به دست آورید.

حل: با داده‌های مثال ۱۲ داریم :

$$f(0) = 0,331665416$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 0,361473246$$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 0,239264512$$

لذا با توجه به فرمول (۳۹) خواهیم داشت :

$$\int_1^2 \frac{\sin^2 x}{x} dx \simeq \frac{1}{9} [0,657012118] = 0,628556902$$

۴.۴ انتگرالهای منفرد

در قسمت‌های قبل محاسبه انتگرالهایی به صورت $\int_a^b f(x)dx$ مورد بحث قرار گرفت که در آن $f(x)$ در تمام فاصله $[a, b]$ معین و تعریف شده بود. در این قسمت انتگرالهایی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{الف.}$$

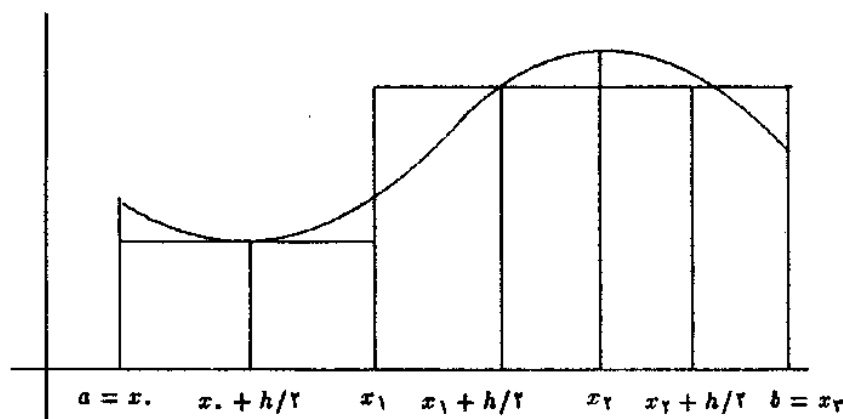
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{ب.}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{پ.}$$

که در آن توابعی که می‌خواهیم انتگرال آنها را محاسبه کنیم در یک یا هر دو نقطه انتهایی فاصله انتگرالگیری تعریف نشده‌اند. در انتگرال الف تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x = 0$ تعریف نشده است، این نقطه را نقطه منفرد یا تکین تابع می‌نامیم. همچنین نقطه $x = 1$ یک نقطه تکین تابع $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ در انتگرال قسمت ب می‌باشد. هر چند انتگرالهای فوق را می‌توان به روشهای تحلیلی به دست آورد اما هر گاه بخواهیم از روشهای عددی برای چنین انتگرالهایی استفاده کنیم، چون روشهایی مانند روش دوزنقه و سیمپسون از مقادیر تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی فاصله انتگرالگیری استفاده می‌کنند، بنابراین محاسبه انتگرالهای فوق به این روشها میسر نیست، در اینجا تنها یک روش را برای محاسبه چنین انتگرالهایی توضیح می‌دهیم.

۱.۴.۴ قاعده نقطه میانی

برای توضیح این روش، فرض کنید فاصله $[a, b]$ را به صورت زیر به سه قسمت مساوی تقسیم کرده باشیم، برای محاسبه مساحت زیر نمودار تابع f در فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ مساحت مستطیل به عرض h و طول $f(x_i + \frac{h}{4})$ را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین در این روش قرار می‌دهیم :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \simeq h f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \quad (40)$$

لذا برای محاسبه $\int_a^b f(x) dx$ با استفاده از قاعده نقطه میانی، به روش زیر عمل می‌کنیم :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \dots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

و با استفاده از فرمول (40) هرگاه $M(h)$ تقریب $\int_a^b f(x) dx$ به روش نقطه میانی باشد که هر زیر

فاصله دارای طول h است، خواهیم داشت :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \simeq M(h) = h \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right) \right]$$

مثال ۱۴. تقریبی از $\int_{0.1}^{0.9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $h = 0.3$ و $h = 0.1$ به روش نقطه میانی به دست

آورید.

حل:

$$\begin{aligned} \int_{0.1}^{0.9} \frac{dx}{\sqrt{x}} &\simeq M(0.3) = 0.3(f(0.15) + f(0.45) + f(0.75)) \\ &= 0.3(1.1650 + 1.4714 + 1.3651) \\ &= 0.4959 \end{aligned}$$

همچنین

$$\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq M(0.1) = 0.1 \left[\frac{1}{\sqrt{0.005}} + \frac{1}{\sqrt{0.015}} + \frac{1}{\sqrt{0.025}} + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{0.085}} \right] = 0.539587$$

توجه: مقدار واقعی انتگرال عبارتست از ۰.۶، زیرا

$$\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^{0.1} = 0.6$$

لذا خطای $M(0.3)$ با مقدار واقعی حدود ۰.۱۰۴ و خطای $M(0.1)$ با مقدار واقعی حدود ۰.۰۶ می‌باشد. بنابراین توصیه می‌شود در چنین انتگرالهایی برای قسمتی که نزدیک نقطه تکین تابع است، h را بسیار کوچک اختیار کنید و برای بقیه فاصله h را یک مقدار بزرگ‌تر در نظر بگیرید. مثال ۱۵. انتگرال $\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_{0.1}^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

انتگرال $\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $M(0.002)$ و انتگرال $\int_{0.1}^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ را با $M(0.02)$ تقریب بزنید. حل:

$$\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq M(0.002) = 0.002 \left[\frac{1}{\sqrt{0.001}} + \frac{1}{\sqrt{0.003}} + \frac{1}{\sqrt{0.005}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{0.007}} + \frac{1}{\sqrt{0.009}} \right] = 0.173031$$

همچنین

$$\int_{0.1}^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq M(0.02) = 0.02 \left[\frac{1}{\sqrt{0.02}} + \frac{1}{\sqrt{0.04}} + \frac{1}{\sqrt{0.06}} + \frac{1}{\sqrt{0.08}} \right] \\ = 0.393782$$

لذا

$$\int_0^{10^{-9}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \simeq 0,173031 + 0,393782 = 0,566813$$

مثال ۱۶. خطای مقدار به دست آمده برای انتگرال $\int_0^{10^{-9}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ در مثال ۱۵ با مقدار واقعی یعنی $0,6$ چقدر است.

حل:

مقدار تقریبی - مقدار واقعی = خطا

$$= 0,6 - 0,566813 = 0,033187$$

توجه: مقدار خطای به دست آمده در مثال ۱۶ کمتر از خطای مقادیر به دست آمده برای انتگرال در مثال ۱۴ می‌باشد. برای کم کردن خطا h را بایستی کوچکتر گرفت. البته برای h های کوچکتر محاسبه با دست بسیار طولانی خواهد بود، لذا بایستی از برنامه‌های کامپیوتری استفاده نمود. تذکر. توجه کنید که روش‌های گاوس از جمله روشهایی هستند که به مقدار تابع در نقاط انتهایی فاصله نیاز ندارند، لذا در انتگرالهای منفرد می‌توان از آن فرمولها جهت تعیین مقدار تقریبی انتگرال استفاده نمود.

تعریف ۱.۴. قواعد انتگرال‌گیری عددی را که نیاز به مقدار تابع در نقاط انتهایی فاصله ندارند، فرمولهای باز می‌نامیم. همچنین قواعد انتگرال‌گیری عددی را که نیاز به مقدار تابع در نقاط انتهایی فاصله دارند، فرمولهای بسته می‌نامیم.

۵.۴ خطای روشهای انتگرال‌گیری

قبل از بیان خطای روشهای انتگرال‌گیری بیان شده در این فصل، دو قضیه زیر را که در محاسبه خطاها مورد استفاده قرار می‌گیرند، در نظر بگیرید.

قضیه ۱.۴. هرگاه تابع H بر فاصله $[c, d]$ پیوسته و تابع g در این فاصله انتگرالپذیر بوده و تغییر علامت ندهد (یعنی همواره نامنفی یا همواره نامثبت باشد) در این صورت

$$\int_c^d g(x)H(x)dx = H(\gamma) \int_c^d g(x)dx$$

که در آن $\gamma \in [c, d]$.

قضیه ۲.۴. هرگاه تابع H بر فاصله $[c, d]$ پیوسته باشد و

$$\min_{c \leq x \leq d} H(x) \leq \alpha \leq \max_{c \leq x \leq d} H(x)$$

آن گاه $\beta \in [c, d]$ وجود دارد به طوری که

$$H(\beta) = \alpha$$

برای به دست آوردن خطای روشهای انتگرالگیری از چند جمله‌ای درونیاب استفاده می‌کنیم، روند محاسبه خطا را برای روش دوزنقه به طور کامل شرح داده و خطای سایر روشها را بیان می‌نماییم.

۱.۵.۴ خطای روش دوزنقه

فرمول قاعده دوزنقه‌ای را برای محاسبه $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ به وسیله چند جمله‌ای درونیاب f که در نقاط x_i و x_{i+1} با f هم مقدار است، به دست می‌آوریم. در فصل سوم خطای این چند جمله‌ای به صورت زیر بیان شد:

$$f(x) - P(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2!} f''(\eta_x), \quad \eta_x \in [x_i, x_{i+1}]$$

که در آن $P(x) = f_i + s\Delta f_i$. هرگاه از طرفین رابطه اخیر انتگرال بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2!} f''(\eta_x)dx \quad (41)$$

هرگاه فرض کنیم $f''(x)$ تابعی پیوسته است، چون برای x در $[x_i, x_{i+1}]$ داریم

$$x - x_i \geq 0$$

$$x - x_{i+1} \leq 0$$

لذا هرگاه قرار دهیم $g(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1})$ ، همواره خواهیم داشت :

$$g(x) \leq 0$$

یعنی $g(x)$ بر فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ تغییر علامت نمی‌دهد و چون تابع $H(x) = f''(\eta_x)$ نیز پیوسته فرض شده است، بنا بر قضیه ۱.۴ رابطه (۴۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i) = \frac{f''(\eta_i)}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx \quad (42)$$

که در آن $x_i \leq \eta_i \leq x_{i+1}$ ، هرگاه در انتگرال سمت راست عبارت فوق تغییر متغیر $x = x_i + sh$ را انجام دهیم، خواهیم داشت :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx = -\frac{h^2}{6}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۴۲) خواهیم داشت :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i) = -\frac{h^2}{12} f''(\eta_i) \quad (43)$$

در نتیجه برای محاسبه خطای $T(h)$ یعنی محاسبه $ET(h)$ ، چون

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - T(h) = & \left[\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_0 + f_1) \right] + \\ & \left[\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_1 + f_2) \right] + \cdots + \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i) \right] + \cdots + \\ & \left[\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}(f_{n-1} + f_n) \right] \end{aligned}$$

و بنابر رابطه (۴۳) مقدار خطا عبارت است از :

$$\begin{aligned} ET(h) &= -\frac{h^3}{12}f''(\eta_0) - \frac{h^3}{12}f''(\eta_1) - \cdots - \frac{h^3}{12}f''(\eta_i) - \cdots - \frac{h^3}{12}f''(\eta_{n-1}) \\ &= -\frac{h^3}{12}[f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})] \end{aligned} \quad (44)$$

هرگاه قرار دهیم :

$$m = \min\{f''(x) : a \leq x \leq b\}$$

$$M = \max\{f''(x) : a \leq x \leq b\}$$

در این صورت بنا به خاصیت ماکسیم و مینیم تابع $f''(x)$ داریم :

$$m \leq f''(\eta_i) \leq M, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (45)$$

هرگاه n نامساوی در رابطه (۴۵) را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت :

$$nm \leq f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1}) \leq nM$$

و از آن

$$m \leq \frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \cdots + f''(\eta_{n-1})}{n} \leq M$$

هرگاه قرار دهیم $\alpha = \frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \dots + f''(\eta_{n-1})}{n}$ بنابراین چون

$$m \leq \alpha \leq M$$

بنا بر قضیه ۲.۴ یک $\beta \in [a, b]$ هست که

$$f''(\beta) = \alpha$$

یعنی

$$f''(\beta) = \frac{f''(\eta_0) + \dots + f''(\eta_{n-1})}{n}$$

$$f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + \dots + f''(\eta_{n-1}) = n f''(\beta) \quad \text{و از آن}$$

بنابراین رابطه (۴۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$ET(h) = -\frac{nh^2}{12} f''(\beta)$$

و چون $nh = b - a$ لذا خطای انتگرال‌گیری روش دوزنقه به صورت زیر خواهد بود:

$$ET(h) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\beta) \quad (46)$$

نتیجه ۱. بنا بر رابطه (۴۶) خطای قاعده دوزنقه‌ای متناسب با h^2 است، بنابراین هرگاه h نصف شود مقدار خطا $\frac{1}{4}$ خواهد شد.

نتیجه ۲. بنا بر رابطه (۴۶) قاعده دوزنقه‌ای برای چند جمله‌ای‌های تا درجه یک دقیق است زیرا مشتق مرتبه دوم در این توابع صفر است.

توجه: هرگاه M_2 یک کران بالا برای $|f''(x)|$ باشد، یعنی

$$|f''(x)| \leq M_2, \quad x \in [a, b]$$

در این صورت :

$$|ET(h)| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 \quad (47)$$

نتیجه . نامساوی (۴۷) برای برآورد h ، به طوری که خطای $T(h)$ از مقدار معینی بیشتر نباشد به کار می رود. مثلاً هرگاه بخواهیم $|ET(h)| \leq \epsilon$ کافی است h را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم :

$$\frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 \leq \epsilon$$

مثال ۱۷. تقریبی از $\int_0^1 x \sin x dx$ به دست آورید به طوری که خطای آن حداکثر 10^{-2} باشد.

حل: داریم $a = 0$ ، $b = 1$ و $\epsilon = 10^{-2}$ ، برای به دست آوردن M_2 چون

$$f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$$

لذا

$$|f''(x)| = |2 \cos x - x \sin x| \leq 2|\cos x| + |x||\sin x| \leq 2 + 1 = 3$$

پس $M_2 = 3$ ، بنابراین بایستی h را طوری به دست آوریم که داشته باشیم :

$$\frac{(1-0)}{12} h^2 (3) \leq 10^{-2}$$

و یا

$$\frac{h^2}{4} \leq 10^{-2} \Rightarrow h \leq 0.2$$

بنابراین قرار می دهیم $h = 0.2$ و $T(0.2)$ را حساب کنیم.

$$\begin{aligned} T(0.2) &= \frac{0.2}{2} (0 + 2(0.2 \sin 0.2 + 0.4 \sin 0.4 + 0.6 \sin 0.6 + 0.8 \sin 0.8) \\ &\quad + \sin 1) = 0.30578 \end{aligned}$$

۲.۵.۴ خطای سایر روشهای انتگرال‌گیری

الف. خطای روش سیمپسون .

هرگاه $ES(h)$ خطای روش انتگرال‌گیری سیمپسون با طول زیر فاصله h باشد با روشی مشابه روش به کار رفته در محاسبه $ET(h)$ می‌توان نشان داد که داریم :

$$ES(h) \simeq -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta) \quad (48)$$

که در آن $\eta \in [a, b]$.

نتیجه ۱. رابطه (۴۸) نشان می‌دهد که خطای $S(h)$ متناسب با h^4 بوده و روش سیمپسون برای چند جمله‌ایهای تا درجه ۳ دقیق است.

نتیجه ۲. چون η مقداری نامعلوم است، لذا هرگاه داشته باشیم

$$|f^{(4)}(x)| \leq M_f, \quad x \in [a, b]$$

بنابراین کران بالای خطای زیر را برای $S(h)$ خواهیم داشت

$$|ES(h)| \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 M_f \quad (49)$$

با استفاده از رابطه (۴۹) می‌توان $S(h)$ را با دقتی که از قبل تعیین می‌شود حساب کرد. مثلاً هرگاه بخواهیم $S(h)$ را چنان به دست آوریم که

$$|ES(h)| \leq \epsilon$$

کافی است h را چنان تعیین کنیم که

$$\frac{(b-a)}{180} h^4 M_f \leq \epsilon$$

مثال ۱۸. h را طوری به دست آورید که $S(h)$ مقدار $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \cos x dx$ را با حداکثر خطای 10^{-5} تعیین کند.

حل: داریم $a = 0, b = \frac{\pi}{2}, \epsilon = 10^{-5}$ و $f(x) = x \cos x$ ، لذا برای تعیین M_2 چون

$$f^{(2)}(x) = 2 \sin x + x \cos x$$

برای $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت:

$$|f^{(2)}(x)| = |2 \sin x + x \cos x| \leq 2|\sin x| + |x||\cos x| \leq 2 + \frac{\pi}{2} < 6$$

پس قرار می‌دهیم $M_2 = 6$ و از آن:

$$\frac{b-a}{180} h^2 M_2 = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{180} h^2 \times 6 = \frac{\pi h^2}{60} \leq 10^{-5}$$

بنابراین بایستی

$$h \leq 0.1 \times \sqrt{\frac{6}{\pi}} \simeq 0.1176$$

لذا چون داریم $n h = b - a = \frac{\pi}{2}$ پس $n = \frac{\pi}{2h}$ و از آن

$$n = \frac{\pi}{2h} \geq \frac{\pi}{2 \times 0.1176} = 13.3571$$

چون در روش سیمپسون بایستی n زوج باشد، لذا قرار می‌دهیم $n = 14$ و از آن

$$h = \frac{\pi/2}{n} = \frac{\pi}{28} \simeq 0.1122$$

که از ۰/۱۱۷۶ کمتر است.

ب. خطای قاعده نقطه میانی.

خطای قاعده نقطه میانی را با $EM(h)$ نشان می‌دهیم که برابر است با:

$$EM(h) \simeq \frac{(b-a)}{24} h^2 f''(\eta) \quad (50)$$

که $\eta \in [a, b]$ هرگاه $|f''(x)| \leq M_2$ برای $x \in [a, b]$ در این صورت

$$|EM(h)| \leq \frac{(b-a)}{24} h^2 M_2 \quad (51)$$

نتیجه. رابطه (۵۱) نشان می‌دهد که خطای $M(h)$ متناسب با h^2 بوده و روش نقطه میانی برای چند جمله‌ای‌های تا درجه یک دقیق است.

مجموعه مسائل فصل چهارم

۱- تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نظر بگیرید، فاصله $[1, 1/30]$ را به صورت $x = 1/0(0/05)1/30$

جدول بندی کنید و مقادیر خواسته شده زیر را به دست آورید.

الف. با استفاده از رابطه (۸) مقدار $f'(1)$ را به دست آورید.

ب. با استفاده از رابطه (۹) مقدار $f'(1)$ را به دست آورید.

پ. با استفاده از رابطه (۱۰) یک تقریب برای $f''(1)$ به دست آورید.

جواب. الف. $0/494$ ب. $0/4999$ پ. $-0/236$.

۲- برای تابع مسئله ۱ با استفاده از رابطه (۸) مقادیری برای $i = 1, 2, \dots, 5$ به دست آورید.

۳- مساله ۲ را با استفاده از رابطه (۹) حل کنید.

۴- برای تابع مسئله ۱ با استفاده از رابطه (۱۰) مقادیری برای $i = 1, 2, \dots, 5$ به دست

آورید.

۵- برای تابع مسئله ۱ با استفاده از رابطه (۱۲) تقریبی برای $f'(1/125)$ به دست آورید.

جواب. $0/4714$.

۶- انتگرال $\int_1^{1/2} \sqrt{x} dx$ را در نظر بگیرید. مقادیر خواسته شده را با (۵D) به دست آورید.

الف. $T(0/3)$ ب. $T(0/15)$ پ. $T(0/1)$ ت. $T(0/05)$

جواب. الف. $0/32102$ ب. $0/32137$ پ. $0/32143$ ت. $0/32147$

۷- با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای مقدار $\int_1^0 \frac{dx}{1+x}$ را با $h = 1$ ، $h = 0/5$ و $h = 0/25$

(۴D) به دست آورید.

جواب. $T(0,25) = 0,6970$, $T(0,5) = 0,7083$, $T(1) = 0,7500$.

۸- مقدار $\int_1^1 x^2 dx$ را به روش ذوزنقه‌ای و به ازای $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ حساب کنید.

جواب. $T(\frac{1}{3}) = \frac{11}{32}$, $T(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$, $T(1) = \frac{1}{4}$.

۹- تقریبی از $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ را با $T(\frac{\pi}{8})$ به دست آورید.

جواب. $0,98712$.

۱۰- تقریبهایی از $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ را با $T(1)$ و $T(\frac{1}{2})$ به دست آورید.

جواب. $T(\frac{1}{2}) = \frac{67}{60}$, $T(1) = \frac{7}{6}$.

۱۱- مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ را با $S(0,1)$ به دست آورید.

جواب. $0,6931$.

۱۲- مقدار انتگرال $\int_0^1 x^2 dx$ را با $S(0,5)$ به دست آورید.

جواب. $0,25$.

۱۳- مقدار انتگرال $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ را با $S(0,25)$ به دست آورید، (قرار دهید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

جواب. $0,9461$.

۱۴- مقدار $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ را به روش سیمپسون و $h = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{64}$ به دست آورید.

جواب. $S(\frac{\pi}{8}) = 1,0001344$.

$S(\frac{\pi}{64}) = 1,0000003$, $S(\frac{\pi}{32}) = 0,99999983$, $S(\frac{\pi}{16}) = 1,00000081$,

۱۵- تابع جدولی زیر را در نظر بگیرید. مقدار $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$ را به روش ذوزنقه و روش سیمپسون به دست آورید.

x_i	۰	$\pi/12$	$2\pi/12$	$3\pi/12$	$4\pi/12$	$5\pi/12$	$\pi/2$
f_i	۰	۰,۲۵۸۸۲	۰,۵	۰,۷۰۷۱۱	۰,۸۶۶۰۳	۰,۹۶۵۹۳	۱

جواب. $S(\frac{\pi}{12}) = 1,00003$, $T(\frac{\pi}{12}) = 0,99429$.

۱۶- با استفاده از فرمول نیوتن-کاتس چهار نقطه‌ای ($n = 3$) مقدار $\int_1^2 e^{-x/2} dx$ را تقریب کنید.

جواب. ۰,۷۶۶۹۲.

۱۷- با استفاده از فرمول نیوتن-کاتس چهار نقطه‌ای ($n = 3$) تقریبی از انتگرالهای زیر به دست آورید.

$$\text{ب. } \int_{1,1}^{1,5} e^x dx$$

$$\text{الف. } \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$

$$\text{ب. } ۱,۴۷۷۵۲۸۸۵۸$$

$$\text{جواب. الف. } ۰,۱۰۲۴۵۹۸۲۱$$

۱۸- مقدار $\int_{1,1}^{1,5} e^{-x^2} dx$ را به روش نیوتن-کاتس و با $h = \frac{1}{6}$ به دست آورید.
جواب. ۰,۱۰۹۳۴۰۴.

۱۹- مقدار انتگرال مساله ۱۸ را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.
جواب. ۰,۱۰۹۴۰۰۳.

۲۰- مقدار انتگرال مساله ۱۸ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.
جواب. ۰,۱۰۹۳۶۴۲.

۲۱- مقدار $\int_0^3 e^x \sin x dx$ را با روش گاوس دو نقطه‌ای به دست آورید.
جواب. ۱۰,۹۵۰۱۴۰.

۲۲- مقدار انتگرال مساله ۲۱ را با روش گاوس سه نقطه‌ای به دست آورید.
جواب. ۱۰,۹۴۸۴۰۳.

۲۳- تقریبهایی را از انتگرالهای زیر به قاعده نقطه میانی و به ازای h های داده شده، به دست آورید.

$$\text{الف. } \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad h = ۰,۱$$

$$\text{ب. } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad h = ۰,۲$$

$$\text{پ. } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad h = ۰,۲$$

۲۴- تقریبی از $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ حساب کنید. برای این منظور قرار دهید:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{0,8} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0,8}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

سپس به روش قاعده نقطه میانی و $h = 0.1$ مقدار $\int_{0.1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ و $h = 0.1$ مقدار $\int_{0.1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ را حساب کنید.

۲۵- تقریبی از $\int_0^2 x \sin 2x dx$ را به قاعده ذوزنقه‌ای چنان حساب کنید که خطای آن کمتر از 0.5 باشد.

جواب. $h = 0.5$ و $T(0.5) = 0.392$

۲۶- تقریبی از انتگرالهای زیر را با خطای کمتر از 0.001 و به قاعده ذوزنقه‌ای حساب کنید.

الف. $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ ب. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ پ. $\int_0^1 e^x dx$

جواب. الف. $h \approx 0.34, n = 29$ ب. $h \approx 0.1378, n = 114$

پ. $h = 0.2, n = 50$

۲۷- حدود h را برای محاسبه تقریبی $\int_0^1 e^x \sin x dx$ چنان تعیین کنید که :

الف. داشته باشیم $|ET(h)| \leq 10^{-5}$

ب. داشته باشیم $|ES(h)| \leq 10^{-5}$

جواب. الف. $h = 0.0045, n = 224$ ب. $h = 0.074008, n = 14$

۲۸- روش انتگرالگیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_0^h f(\sqrt{x}) dx \approx w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f(h)$$

ضرایب w_1, w_2 و w_3 را طوری به دست آورید که روش انتگرالگیری فوق برای چند جمله‌ایهای تا درجه دو دقیق باشد.

جواب. $w_1 = h - \frac{1}{4}$ و $w_2 = \frac{2}{3}h\sqrt{h} - \frac{h}{3}$ و $w_3 = \frac{1}{4}$

۲۹. فرض کنید در تقریب زیر، معیار دقت آن باشد که رابطه برای چند جمله‌ایهای تا درجه

۳ دقیق باشد:

$$\int_0^6 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^3 w_i f(x_i)$$

که در آن $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 6$ و w_i محاسبه برای $i = 0, 1, 2, 3$ مطلوبست.

$$\text{جواب. } w_0 = \frac{2}{5}, w_1 = 3, w_2 = \frac{12}{5}, w_3 = 0$$

۳۰. برای محاسبه تقریبی از انتگرال تابع f در فاصله $[0, 6h]$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{6h} f(x) dx \simeq w_0 f(h) + w_1 f(3h) + w_2 f(5h)$$

الف. ضرایب w_0, w_1, w_2 را چنان تعیین کنید که رابطه فوق برای چند جمله‌ایهای تا درجه

دو دقیق باشد.

ب. نشان دهید قاعده فوق برای چند جمله‌ایهای درجه ۳ نیز دقیق است.

$$\text{جواب. الف. } w_0 = w_2 = \frac{1}{4}h \text{ و } w_1 = \frac{3}{4}h$$

۳۱. قسمتهای الف و ب مساله قبل را در مورد روند انتگرال‌گیری زیر انجام دهید.

$$\int_{-h}^h f(x) dx \simeq h[w_0 f(-h) + w_1 f(0) + w_2 f(h)]$$

$$\text{جواب. } w_0 = w_2 = \frac{1}{4}, w_1 = \frac{3}{4}$$

فصل پنجم

روشهای عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی

۱.۵ مقدمه

معادلات دیفرانسیل معمولی در بسیاری از مسائل کاربرد دارند. یک معادله دیفرانسیل از مرتبه p ، در حالت کلی به صورت زیر می باشد :

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(p)}) = 0$$

و منظور از حل آن پیدا کردن تابع $y = y(x)$ است که در معادله فوق صدق می کند. در درس معادلات دیفرانسیل وقت زیادی صرف تجزیه و تحلیل و یادگیری فنون و روشهای تحلیلی برای به دست آوردن جواب آنها می شود. این کار با دسته بندی معادلات انجام می گیرد و نشان داده می شود که دسته خاصی از معادلات را می توان به روش تحلیلی حل کرد. اما، همانند وجود تابع اولیه برای توابع، معادلات دیفرانسیل فراوانی وجود دارند که نمی توان به روشهای تحلیلی موجود جواب آنها را به دست آورد. حتی در مواقعی که می توان جواب تحلیلی معادلات را به دست آورد، این جواب ممکن

است دارای فرم پیچیده‌ای باشد. مثلاً جواب معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} y' = \frac{x+y}{x-y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

به صورت $\ln(x^2 + y^2) = 2 \arctan(\frac{y}{x})$ می‌باشد که پس از محاسبات زیادی به دست می‌آید. به علاوه هرگاه بخواهیم مقدار $y(x)$ را به ازای x داده شده به دست آوریم این کار مشکل است، لذا حل عددی معادلات دیفرانسیل مبحثی است که بسیار مورد نظر است و کاربرد دارد.

این قسمت را با ساده‌ترین معادله یعنی معادله مرتبه اول

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

شروع می‌کنیم که در آن x_0 و y_0 مقادیر معلومی هستند. هرگاه y جواب معادله دیفرانسیل (۱) باشد $y(x_n)$ را مقدار واقعی y به ازاء x_n و y_n را مقدار تقریبی در نظر می‌گیریم، یعنی داریم

$$y(x_n) \simeq y_n$$

روشی را که بررسی می‌کنیم این است که یک h در نظر گرفته و بعد نقاط $x_n = x_0 + nh$ را در نظر می‌گیریم. هدف این است که $y(x_n)$ را توسط y_n تقریب بزنیم و y_n را به دست آوریم. برای این منظور روشهای زیادی وجود دارند که ذیلاً چند تا از آنها را معرفی می‌کنیم.

۲.۵ روش بسط تیلور

یکی از روشهای حل عددی معادلات دیفرانسیل، استفاده از سری تیلور است. معادله دیفرانسیل (۱) را در نظر بگیرید که معادله‌ای از مرتبه اول است و در آن تابع f ممکن است نسبت به y

خطی یا غیر خطی باشد. در هر صورت فرض می‌کنیم f به اندازه کافی نسبت به x و y مشتق‌پذیر باشد. هرگاه $x_1 = x_0 + h$ در این صورت بسط تیلور تابع y را حول x_0 می‌نویسیم، بنابراین خواهیم داشت :

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_0) + \dots \quad (2)$$

چون $y(x)$ مجهول است، مشتقات آن نیز موجود نخواهند بود ولی با استفاده از (۱) و به شرط وجود مشتقات f نسبت به x و y تا هر مرتبه دلخواه می‌توان y' ، y'' و ... را به دست آورد. هرگاه $y' = f(x, y) = f$ در این صورت :

$$y'' = f_x + f_y y' = f_x + f_y f$$

$$y''' = f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f$$

به همین ترتیب می‌توانیم مشتقات مرتبه بالاتر را نیز به دست آوریم. هر چند همانطور که روابط فوق نشان می‌دهند حتی اگر تابع f تابعی ساده باشد، مشتقات مرتبه بالای y می‌توانند پیچیده باشند. لذا امکان استفاده از جملات با مرتبه بالا در سری تیلور نیست. بنابراین بایستی سری (۲) را محدود کنیم که این عمل باعث می‌شود که جواب به دست آمده برای معادله در یک نقطه از فاصله $[a, b]$ با مقدار واقعی جواب، اختلاف (فاحش) داشته باشد. هرگاه سری (۲) را تا مشتق مرتبه k ام بنویسیم در این صورت

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \simeq y(x_0) + hy'(x_0) + \dots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_0) = y_1 \quad (3)$$

برای تعیین جواب معادله (۱) در نقطه $x_2 = x_1 + h$ مراحل بالا را تکرار می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت

$$y(x_2) = y(x_1 + h) \simeq y(x_1) + hy'(x_1) + \dots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_1) \quad (4)$$

البته در اینجا دیگر $y(x_1)$ را نداریم و ناچار بایستی مقدار تقریبی آن یعنی y_1 را قرار دهیم، در نتیجه :

$$y(x_2) \simeq y_2 = y_1 + hy'_1 + \cdots + \frac{h^k}{k!} y_1^{(k)}$$

با تکرار روش فوق y را در تمام نقاط $x_i = x_0 + ih$ برای $i = 1, 2, 3, \dots$ تعیین می‌کنیم.

۱.۲.۵ الگوریتم روش تیلور از مرتبه k

برای پیدا کردن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x, y)$ با شرط $y(x_0) = y_0$ در فاصله $[a, b]$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱. فاصله $[a, b]$ را به N قسمت مساوی به طول $h = \frac{b-a}{N}$ تقسیم کرده و قرار می‌دهیم :

$$x_0 = a, \quad x_N = b, \quad y(x_n) = y(a + nh), \quad x_n = a + nh$$

۲. با داشتن y_n مقدار تقریبی $y(x_{n+1})$ یعنی y_{n+1} را از فرمول زیر به می‌آوریم:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_n, y_n)}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5)$$

مثال ۱. با استفاده از روش تیلور مرتبه چهار مطلوبست برآورد $y(0.5)$ مشروط به اینکه داشته باشیم :

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

حل: داریم $x_0 = 0, y_0 = 1$ و $f(x, y) = x + y$ بنابراین :

$$y' = f(x, y) = x + y$$

$$y'' = f'(x, y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$y''' = f''(x, y) = y'' = 1 + x + y$$

$$y^{(4)} = f'''(x, y) = y''' = 1 + x + y$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۵) و اختیار نمودن $k = 4$ و $h = 0,1$ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 0,1(x_n + y_n) + \frac{(0,1)^2}{2!}(1 + x_n + y_n) + \frac{(0,1)^3}{6}(1 + x_n + y_n) \\ &\quad + \frac{(0,1)^4}{24}(1 + x_n + y_n) \\ &\simeq 0,00517 + 0,10517x_n + 1,10517y_n \end{aligned}$$

لذا

$$y_1 = 0,00517 + 0,10517(0) + 1,10517(1) = 1,11034$$

$$y_2 = 0,00517 + 0,10517(0,1) + 1,10517(1,11034) = 1,24280$$

$$y_3 = 0,00517 + 0,10517(0,2) + 1,10517(1,24280) = 1,39971$$

$$y_4 = 0,00517 + 0,10517(0,3) + 1,10517(1,39971) = 1,58364$$

$$y_5 = 0,00517 + 0,10517(0,4) + 1,10517(1,58364) = 1,79743$$

در نتیجه

$$y(0,5) \simeq y_5 = 1,79743$$

۳.۵ روش اویلر

هرگاه در الگوریتم تیلور قرار دهیم $k = 1$ ، خواهیم داشت :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (6)$$

این روش به روش اویلر موسوم است.

برنامه کامپیوتری روش اویلر:

```

c
c      Euler's Method for solving the Following Problem:
c      y'=f(x,y), y(x0)=y0
      F(x,y)=-y+x+1
      read(*,*) x0,y0,h,M
      x=x0
      y=y0
      write(*,*) x,y
      do 10 n=1,M
          y=y+h*F(x,y)
          x=x+h
          write(*,*) x,y
10      continue
      end

```

مثال ۲. معادله $y' = 1 - \frac{y}{x}$ را با شرط $y(2) = 2$ در نظر بگیرید. به روش اویلر تقریبی از جواب معادله را در $x = 2.1$ با قرار دادن $h = 0.1$ به دست آورید.

حل: داریم $x_0 = 2, y_0 = 2, h = 0.1$ و $f(x, y) = 1 - \frac{y}{x}$ بنابراین

$$\begin{aligned}
 y(2.1) &= y(x_1) \simeq y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \\
 &= 2 + 0.1\left(1 - \frac{y_0}{x_0}\right) \\
 &= 2 + 0.1\left(1 - \frac{2}{2}\right) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

مثال ۳. تقریبی از $y(0.5)$ برای معادله دیفرانسیل مثال ۱ به روش اویلر و با $h = 0.1$ به دست

آورید.

حل: داریم $h = 0.1$, $y_0 = 1$, $x_0 = 0$ و $f(x, y) = x + y$ ، لذا

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n + y_n) = 0.1x_n + 1.1y_n$$

بنابراین:

$$y_1 = 0.1x_0 + 1.1y_0 = 0.1(0) + 1.1(1) = 1.1$$

$$y_2 = 0.1x_1 + 1.1y_1 = 0.1(0.1) + 1.1(1.1) = 1.22$$

$$y_3 = 0.1x_2 + 1.1y_2 = 0.1(0.2) + 1.1(1.22) = 1.362$$

$$y_4 = 0.1x_3 + 1.1y_3 = 0.1(0.3) + 1.1(1.362) = 1.5282$$

$$y_5 = 0.1x_4 + 1.1y_4 = 0.1(0.4) + 1.1(1.5282) = 1.72102$$

$$y(0.5) \simeq y_5 = 1.72102 \quad \text{در نتیجه}$$

۴.۵ روش رونگه-کوتا

روش تیلور مرتبه k در عمل برای مراتب بالا قابل استفاده نیست زیرا به مشتقات مرتبه بالا نیاز دارد. حالت خاص $k = 1$ یعنی روش اویلر نیز چندان مفید نیست، مگر اینکه h را خیلی کوچک در نظر بگیریم. لذا برای حل معادله دیفرانسیل از روشهای دیگر استفاده می‌شود که در آن نیازی به محاسبه مشتقات مرتبه بالای f نیست، در عین حال از دقتی در حد دقت روش تیلور و مرتبه بالا برخوردار است.

۱.۴.۵ روش رونگه-کوتای مرتبه دو

الگوریتم روش رونگه-کوتای مرتبه دو:

برای مقدار ثابت h و $x_n = x_0 + nh$ قرار دهید

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases} \quad (V)$$

عملیات فوق را برای $n = 0, 1, 2, \dots$ تکرار کنید.

برنامه کامپیوتری روش رونگه-کوتای مرتبه دو:

c

c Second Order Runge-Kutta Method for Solving the Following Problem:

c $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

implicite real (k)

$F(x, y) = -y + x + 1$

read(*,*) x0, y0, h, M

x=x0

y=y0

write(*,*) x, y

do 10 n=1, M

k1=h*F(x, y)

```

x=x+h
z=y+k1
k2=h*F(x,z)
y=y+(k1+k2)/2.
write(*,*) x,y
10  continue
end

```

مثال ۴. تقریبی از $y(0.2)$ به دست آورید هرگاه داشته باشیم

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

از روش رونگه-کوتای مرتبه ۲ استفاده کنید و قرار دهید $h = 0.1$.

حل: با توجه به الگوریتم (۷) داریم:

$$\begin{cases} k_1 = 0.1(x_n + y_n) \\ k_2 = 0.1(x_n + 0.1 + y_n + k_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

بنابراین برای $n = 0$ خواهیم داشت:

$$k_1 = 0.1(0 + 1) = 0.1$$

$$k_2 = 0.1(0.1 + 1.1) = 0.12$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}(0.1 + 0.12) = 1.11$$

و برای $n = 1$ داریم :

$$k_1 = 0.1(0.1 + 1/11) = 0.121$$

$$k_2 = 0.1(0.2 + 1/11 + 0.121) = 0.1431$$

$$y_2 = 1/11 + \frac{1}{2}(0.122 + 0.1431) = 1/2420.5$$

مثال ۵. فرض کنید

$$\begin{cases} y' = 1 - y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

با $h = 0.05$ و به روش رونگه-کوتای مرتبه دوم تقریبی برای $y(0.5)$ به دست آورید.

حل: داریم: $x_0 = 0, y_0 = 0, h = 0.05$ و $f(x, y) = 1 - y$ بنابراین

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.05(1 - 0) = 0.05$$

$$k_2 = hf(x_0 + 0.05, y_0 + k_1) = 0.05f(0.05, 0.05) = 0.05(1 - 0.05) = 0.0475$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0.04875$$

$$y(0.5) \simeq y_1 = 0.04875$$

لذا

۲.۴.۵ روش رونگه-کوتای مرتبه چهار

الگوریتم روش رونگه-کوتای مرتبه چهار

برای معادله $y' = f(x, y)$ با شرط $y(x_0) = y_0$ و مقدار ثابت h قرار دهید

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

که در آن

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

با تغییر مقدار $n = 0, 1, 2, \dots$ و داشتن y_n مقدار تقریبی $y(x_{n+1})$ یعنی y_{n+1} به دست خواهد آمد.

برنامه کامپیوتری روش رونگه-کوتای مرتبه چهار:

c

c Forthd Order Runge-Kutta Method for Solving the Following Problem:

c $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$

implicite real (k)

 $F(x, y) = -y + x + 1$

read(*,*) x0,y0,h,M

x=x0

y=y0

write(*,*) x,y

do 10 n=1,M

k1=h*F(x,y)

x=x+0.5*h

z=y+0.5*k1

```

k2=h*F(x,z)
z=y+0.5*k2
k3=h*F(x,z)
x=x+0.5*h
z=y+k3
k4=h*F(x,z)
y=y+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6.
write(*,*) x,y

```

```
10 continue
```

```
end
```

مثال ۶. معادله $y' = x + y$ را با شرط $y(0) = 1$ در نظر بگیرید. تقریبی از $y(0.1)$ را با

استفاده از فرمول رونگه-کوتای مرتبه چهار با $h = 0.1$ به دست آورید.

حل: داریم $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $f(x, y) = x + y$ و $h = 0.1$. بنابراین

$$k_1 = 0.1(0 + 1) = 0.1$$

$$k_2 = 0.1(0.05 + 1.05) = 0.11$$

$$k_3 = 0.1(0.05 + 1.055) = 0.1105$$

$$k_4 = 0.1(0.1 + 1.1105) = 0.12105$$

بنابراین

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0.1 + 2 \times 0.11 + 2 \times 0.1105 + 0.12105) = 1.11034$$

لذا

$$y(0.1) \simeq y_1 = 1.11034$$

توجه: همانگونه که ملاحظه می‌کنید در روشهای رونگه-کوتا تعداد محاسبات زیاد است و عملاً

انجام این محاسبات برای x_n های دور از x_0 با دست امکان‌پذیر نیست و نیاز به استفاده از کامپیوتر

داریم.

مثال ۷. معادله $y' = 1 - y^2$ را با شرط $y(0) = 0$ با قرار دادن $h = 0.1$ به روش رونگه-کوتای مرتبه چهار حل کنید و مقدار تقریبی $y(0.1)$ را به دست آورید.

حل: داریم $x_0 = 0, y_0 = 0, f(x, y) = 1 - y^2$ و $h = 0.1$. لذا با استفاده از الگوریتم روش رونگه-کوتای مرتبه چهار داریم:

$$k_1 = 0.1, \quad k_2 = 0.09975, \quad k_3 = 0.09975, \quad k_4 = 0.09900$$

بنابراین

$$y_1 = 0 + \frac{1}{4}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.09967$$

در نتیجه

$$y(0.1) \simeq y_1 = 0.09967$$

توجه: روش رونگه-کوتا مرتبه چهارم از دقت بیشتری نسبت به روش مرتبه دوم رونگه-کوتا برخوردار است و در عمل بیشتر از آن استفاده می‌شود.

۵.۵ دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

یک دستگاه مرتبه اول از معادلات دیفرانسیل به صورت

$$y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

به منظور تعیین n تابع $y_i(x)$ با شرایط اولیه $y_i(x_0) = a_i$ در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد. هرگاه $n = 2$ در این صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, p) \\ p' = f_2(x, y, p) \end{cases} \quad (۸)$$

با شرایط اولیه زیر:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ p(x_0) = p_0 \end{cases} \quad (9)$$

هدف از حل (۸) پیدا نمودن توابع مجهول $y(x)$ و $p(x)$ است که در شرایط اولیه (۹) صدق می‌کنند.

۱.۵.۵ روش رونگه-کوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

دستگاه معادلات دیفرانسیل (۸) را با شرایط اولیه (۹) در نظر بگیرید، به منظور حل عددی این دستگاه معادلات با قرار دادن $x_n = x_0 + nh$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$ با داشتن y_n و p_n (تقریبهای $y(x_n)$ و $p(x_n)$) به روش زیر مقادیر $y(x_{n+1})$ و $p(x_{n+1})$ را با y_{n+1} و p_{n+1} تقریب می‌زنیم؛ قرار می‌دهیم:

$$k_1 = hf_1(x_n, y_n, p_n)$$

$$l_1 = hf_2(x_n, y_n, p_n)$$

$$k_2 = hf_1\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1, p_n + \frac{1}{4}l_1\right)$$

$$l_2 = hf_2\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1, p_n + \frac{1}{4}l_1\right)$$

$$k_3 = hf_1\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, p_n + \frac{1}{2}l_2\right)$$

$$l_3 = hf_2\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, p_n + \frac{1}{2}l_2\right)$$

$$k_4 = hf_1(x_n + h, y_n + k_3, p_n + l_3)$$

$$l_4 = hf_2(x_n + h, y_n + k_3, p_n + l_3)$$

لذا با داشتن مقادیر فوق خواهیم داشت :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

حال با داشتن مقادیر y_{n+1} و p_{n+1} الگوریتم فوق را برای $x = x_{n+2}$ تکرار می‌کنیم. روش فوق روش رونگه-کوتای مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۸) می‌باشد.
مثال ۸. دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y' = p = f_1(x, y, p) \\ p' = -y + \frac{1}{2}(1 - y^2)p = f_2(x, y, p) \end{cases}$$

با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $p(0) = 0$ با قرار دادن $h = 0.2$ و استفاده از روش رونگه-کوتا مرتبه چهار تقریبهایی برای $y(0.2)$ و $p(0.2)$ به دست آورید.
حل: فرمولهای رونگه-کوتا برای این دستگاه معادلات عبارتند از :

$$k_1 = hp_n$$

$$l_1 = h[-y_n + \frac{1}{2}(1 - y_n^2)p_n]$$

$$k_2 = h(p_n + \frac{1}{4}l_1)$$

$$l_2 = h\{-(y_n + \frac{1}{4}k_1) + \frac{1}{2}[1 - (y_n + \frac{1}{4}k_1)^2](p_n + \frac{1}{4}l_1)\}$$

$$k_3 = h(p_n + \frac{1}{4}l_2)$$

$$l_3 = h\{-(y_n + \frac{1}{4}k_2) + \frac{1}{2}[1 - (y_n + \frac{1}{4}k_2)^2](p_n + \frac{1}{4}l_2)\}$$

$$k_r = h(p_n + l_r)$$

$$l_r = h\{-(y_n + k_r) + \frac{1}{2}[1 - (y_n + k_r)^2](p_n + l_r)\}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{6}(l_1 + 4l_2 + 2l_3 + l_4)$$

با انتخاب $h = 0.2$ خواهیم داشت :

$$k_1 = 0.2 p_0 = 0.2(0) = 0$$

$$l_1 = 0.2[-1 + 0.1(1-1)(0)] = -0.2$$

$$k_2 = 0.2(-0.1) = -0.02$$

$$l_2 = 0.2[-1 + 0.1(1-1)(-0.1)] = -0.2$$

$$k_3 = 0.2(-0.1) = -0.02$$

$$l_3 = 0.2[-0.99 + 0.1(0.02)(-0.1)] \simeq -0.198$$

$$k_4 = 0.2(-0.198) \simeq -0.04$$

$$l_4 = 0.2[-0.98 + 0.1(0.04)(-0.198)] \simeq -0.196$$

بنابراین با استفاده از مقادیر فوق خواهیم داشت

$$y(0.2) \simeq y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0 - 0.04 - 0.04 - 0.04) = 0.98$$

$$p(0.2) \simeq p_1 = 0 + \frac{1}{6}(-0.2 - 0.4 - 0.396 - 0.196) \simeq -0.199$$

۶.۵ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

یکی از روشهای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، تبدیل آن به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول است. معادله مرتبه دوم $y'' = f(x, y, y')$ را با شرایط اولیه $y(x_0) = a$ و $y'(x_0) = b$ در نظر بگیرید. در این صورت با قرار دادن $p = y'$ خواهیم داشت:

$$p' = y'' = f(x, y, p)$$

در نتیجه معادله مرتبه دوم اولیه به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر تبدیل می شود:

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = f(x, y, p) \end{cases}$$

که دارای شرایط اولیه $y(x_0) = a$ و $p(x_0) = b$ می باشد.

مثال ۹. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' - 0.1(1 - y^2)y' + y = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

تقریبی برای $y(0.2)$ به دست آورید.

حل: یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول معادل با معادله فوق به صورت زیر است:

$$y' = p = f_1(x, y, p)$$

$$p' = -y + 0.1(1 - y^2)p = f_2(x, y, p)$$

$$y(0) = 1, \quad p(0) = 0$$

دستگاه فوق همان دستگاه مثال ۸ است، لذا

$$y(0.2) \simeq 0.98$$

مثال ۱۰. دستگاه معادلات دیفرانسیل معادل با معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را بنویسید.

$$y'' + 101y' + 100y = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

حل: با قرار دادن $y' = p$ خواهیم داشت: $p' + 101p + 100y = 0$. لذا دستگاه مورد نظر عبارتست از:

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = -100y - 101p \end{cases}$$

با شرایط اولیه زیر

$$y(0) = 1, \quad p(0) = -1$$

مثال ۱۱. مانند مثال ۱۰ در مورد معادله زیر عمل کنید.

$$y'' - 64y + 10 = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

حل: با قرار دادن $y' = p$ خواهیم داشت:

$$p' - 64y + 10 = 0$$

بنابراین دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول مورد نظر عبارتست از:

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = -10 + 64y \end{cases}$$

با شرایط اولیه زیر :

$$y(0) = 0, \quad p(0) = 1$$

مجموعه مسائل فصل پنجم

۱- معادله $xy' = x - y, x \neq 0$ با شرط $y(2) = 2$ مفروض است. به روش تیلور مرتبه چهار

تقریبی از جواب آن را در $x = 2/1$ به دست آورید. قرار دهید $h = 0/1$.

جواب. $2/002375$.

۲- معادله زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

به روش تیلور مرتبه چهار و با $h = 0/1$ تقریبی از $y(0/5)$ به دست آورید.

جواب. $1/79744$.

۳- معادله $y' = y$ را با شرط $y(0) = 1$ با فرض $h = 0/01$ به روش اویلر حل کنید و تقریبی

برای $y(0/04)$ به دست آورید.

جواب. $1/040606$.

۴- مطلوبست جواب تقریبی معادله دیفرانسیل زیر در فاصله $[0, 1]$ با $h = 0/25$ و به روش اویلر.

$$\begin{cases} y' = \sin x + \sin y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

جواب. $y_1 = ۱,۲۱۰۴$, $y_2 = ۱,۵۰۶۲$, $y_3 = ۱,۸۷۵۵$, $y_4 = ۲,۲۸۴۴$

۵- با استفاده از روش اویلر معادله دیفرانسیل زیر را در فاصله $[۰, ۲]$ حل کنید.

$$\begin{cases} y' = -۱۰(x-۱)y \\ y(۰) = e^{-۵} \end{cases}$$

قرار دهید $h = ۰,۱$ و مقادیر زیر را تقریب کنید.

الف. $y(۰,۵)$ ب. $y(۱)$ پ. $y(۱,۵)$ ت. $y(۲)$

جواب. الف. $۰,۱۲۵۴$ ب. $۰,۴۵۲$ پ. $۰,۱۳۷$ ت. $۰,۰۰۰۰۲$

۶- فرض کنید

$$\begin{cases} y' = x - y + ۱ \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

با به کار بردن روش بسط تیلور مرتبه دوم و $h = ۰,۱$ مقدار تقریبی $y(۰,۱)$ را به دست آورید.

جواب. $۱,۰۰۵$

۷- برای معادله مساله ۶ با همان $h = ۰,۱$ و روش بسط تیلور مرتبه دوم مقدار تقریبی $y(۰,۲)$

را به دست آورید.

جواب. $۱,۰۱۹$

۸- هرگاه

$$\begin{cases} y' = ۲(x+۱) \cos ۲y \\ y(۰) = ۰ \end{cases}$$

تقریبی از $y(۰,۱)$ را با $h = ۰,۱$ به روش اویلر به دست آورید.

جواب. $۰,۲$

۹- تقریبی از جواب معادله

$$\begin{cases} y' = x \sin \pi y \\ y(0,5) = 0,5 \end{cases}$$

را به ازای $h = 0,1$ در $x = 0,6$ به روش اویلر حساب کنید.

جواب. ۰,۵۵

۱۰- معادله دیفرانسیل زیر را با روش رونگه-کوتا مرتبه دو حل کنید و تقریبی از $y(0,1)$ به دست آورید، قرار دهید $h = 0,05$.

$$\begin{cases} y' = -y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

جواب. ۰,۰۹۵۱۲۳۴۳۷

۱۱- معادله دیفرانسیل مسأله ۱۰ را با روش رونگه-کوتای مرتبه چهار حل کنید. قرار دهید $h = 0,05$ و مقادیر زیر را به دست آورید.

الف. $y(0,1)$ ب. $y(0,2)$ پ. $y(0,3)$ ت. $y(0,4)$ ث. $y(0,5)$

جواب. الف. ۰,۰۹۵۱۶۲۵۰ ب. ۰,۱۸۱۲۶۹۱۰ پ. ۰,۲۵۹۱۸۱۵۸ ت. ۰,۳۲۹۶۷۹۷۱ ث. ۰,۳۹۳۴۶۹۰۶

۱۲- با استفاده از روش رونگه-کوتا مرتبه چهار معادله دیفرانسیل زیر را در فاصله $[0, 1]$ حل نمائید. قرار دهید $h = 0,25$

$$\begin{cases} 10y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

و مقادیر زیر را به دست آورید.

الف. $y(0,25)$ ب. $y(0,5)$ پ. $y(0,75)$ پ. $y(1)$

جواب. الف. $1,0262$ ب. $1,0569$

پ. $1,0957$ ت. $1,1464$

۱۳- با استفاده از روش رونگه-کوتا مرتبه چهار و قرار دادن $h = 0,1$ تقریبی از مقدار $y(1,1)$

برای معادله دیفرانسیل زیر به دست آورید.

$$\begin{cases} y' = xy^{1/2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

جواب. $1,10682$

۱۴- تقریبهایی از $y(0,4)$ و $p(0,4)$ را برای دستگاه معادلات مثال ۸ به دست آورید.

۱۵- تقریبی برای $y(0,6)$ برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مثال ۹ به دست آورید.

۱۶- با قرار دادن $h = 0,1$ تقریبهایی از $y(0,1)$ و $y(0,2)$ برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

مثال ۱۰ به دست آورید. مقادیر به دست آمده را با مقدار واقعی جواب که $y(x) = e^{-x}$ می باشد،

مقایسه کنید.

۱۷- با قرار دادن $h = 0,2$ تقریبهایی از $y(0,1)$ و $y(0,2)$ برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

مثال ۱۱ به دست آورید.

فصل ششم

ماتریسها و حل دستگاههای معادلات خطی و غیر خطی

۱.۶ مقدمه

در این فصل روشهایی را برای حل دستگاههای معادلات (خطی و غیر خطی) معرفی می‌نماییم و در فصل هفتم به تعیین مقادیر ویژه ماتریسها خواهیم پرداخت. لذا قبل از معرفی روشهای مورد نظر، تعاریف و قضایایی را که در این دو فصل به آن نیاز خواهیم داشت، ارائه می‌دهیم.

۱.۱.۶ ماتریسها و بردارها

ماتریس را به صورت یک آرایه مستطیلی از اعداد تعریف می‌کنیم. اعداد، اعضاء، عناصر یا مولفه‌های ماتریس نامیده می‌شوند. برای نشان دادن ماتریسها، معمولاً از حروف بزرگ مانند A ، B و غیره

استفاده می‌کنیم. مولفه‌های ماتریس را با حروف کوچک لاتین با دو زیرنویس، مثلاً a_{ij} ، نشان می‌دهیم. که در آن اندیس اول یعنی i ، معرف شماره سطر و اندیس دوم یعنی j نشان دهنده شماره ستونی است که مولفه a_{ij} از ماتریس A در آرایه موجود است.

مثال ۱. ماتریس A که در زیر مشخص شده یک ماتریس با m سطر و n ستون می‌باشد.

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

توجه ۱. هرگاه بخواهیم یک ماتریس را با یک عضو کلی نشان دهیم از نماد (a_{ij}) استفاده می‌کنیم.

توجه ۲. چون ماتریس A در مثال ۱ دارای m سطر و n ستون است، می‌گوییم A ماتریسی m در n یا ماتریسی از مرتبه $m \times n$ است.

تعریف ۱.۶ هرگاه تعداد سطرها و ستونهای ماتریسی مانند A برابر باشد، یعنی $m = n$ ، آن را یک ماتریس مربع می‌نامیم. همچنین گوییم A ماتریسی (مربع) از مرتبه n می‌باشد.

مثال ۲. ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & \sqrt{5} \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت A ماتریسی مرتبه ۲ و B ماتریسی مرتبه ۳ می‌باشد.

تساوی دو ماتریس. گوییم دو ماتریس A و B مساوی هستند و می‌نویسیم $A = B$ ، هرگاه A

و B هم مرتبه بوده و برای تمام i و j ها داشته باشیم:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

که در آن $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$.

ضرب عدد در ماتریس. ضرب عدد α در ماتریس $A = (a_{ij})$ را به صورت αA یا $A\alpha$ نشان داده و عبارت است از:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) \quad (۱)$$

مثال ۳. هرگاه $\alpha = ۲$ در این صورت برای ماتریس A در مثال ۲ ماتریس $۲A$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱۴ \\ ۱۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

جمع دو ماتریس. دو ماتریس را زمانی می‌توان با هم جمع نمود که هم مرتبه باشند. هرگاه $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ ماتریسهای هم مرتبه $m \times n$ باشند در این صورت جمع آنها را با $A + B$ نشان می‌دهیم که عبارتست از ماتریسی $m \times n$ مانند $C = (c_{ij})$ که برای هر i و j داریم:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (۲)$$

و می‌نویسیم $C = A + B$.

مثال ۴. ماتریس $C = A + B$ را به دست آورید، هرگاه داشته باشیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

حل: بنا به رابطه (۲) داریم:

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس. ماتریس $A = (a_{ij})$ زمانی در ماتریس $B = (b_{ij})$ قابل ضرب است که تعداد ستونهای A برابر تعداد سطرهای ماتریس B باشد. هرگاه A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times k$ باشد، در این صورت حاصل ضرب ماتریس A در B که آن را به صورت AB می نویسیم ماتریسی $m \times k$ مانند $C = (c_{ij})$ است که برای هر i و j داریم:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj} \quad (3)$$

و می نویسیم $C = AB$.

توجه: از تعریف فوق واضح است که در حالت کلی $AB \neq BA$.

مثال ۵. ماتریس $C = AB$ را برای ماتریسهای A و B در مثال ۴ به دست آورید.

حل: بنا به رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$C = \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 3 \times (-3) & 1 \times 2 + 3 \times 5 \\ 2 \times 0 + (-7) \times (-3) & 2 \times 2 + (-7) \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 17 \\ 21 & -31 \end{bmatrix}$$

بردار. ماتریسهای را که فقط دارای یک سطر یا فقط یک ستون می باشند، یک بردار می نامیم. ماتریسی را که دارای یک سطر باشد یک بردار سطری و ماتریسی را که دارای یک ستون باشد یک بردار ستونی می نامیم. معمولاً بردارها را با حروف کوچک و سیاه نشان می دهیم، مانند a و b . ما بیشتر به بردارهای ستونی نیاز داریم تا بردارهای سطری، از این رو فرض می کنیم که هر بردار ستونی است، مگر خلاف آن تصریح شده باشد.

مثال ۶. بردار a در زیر یک بردار سطری و بردار b یک بردار ستونی است.

$$a = [1, 2, 0, 5]$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

چند ماتریس خاص.

فرض کنیم A ماتریسی مربع از مرتبه n باشد، چند نوع خاص از ماتریسها که در قسمت‌های بعد به آن نیاز داریم به قرار زیرند:

ماتریس صفر. ماتریسی را که تمام مولفه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر نامیده و آن را با 0 نشان می‌دهیم.

توجه کنید که لازم نیست ماتریس صفر یک ماتریس مربع باشد.

ماتریس قطری. ماتریس مربع A یک ماتریس قطری نامیده می‌شود، هرگاه برای هر i و j که $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

مولفه‌های قطری یک ماتریس. مولفه‌های a_{ii} ، از یک ماتریس مربع مولفه‌های قطری نامیده می‌شود. یک ماتریس قطری را به کمک اعضای قطری آن به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A = \text{diag}(a_{ii})$$

مثال ۷. ماتریسهای زیر ماتریسهای قطری می‌باشند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

ماتریس واحد یا همانی. ماتریسی قطری که تمام مولفه‌های قطری آن برابر یک باشند ماتریس واحد یا همانی نامیده می‌شود. ماتریس واحد را با I نشان می‌دهیم. مرتبه ماتریس واحد را به

صورت زیر نویس می نویسیم، مانند I_n ، که نشان دهنده ماتریس واحد مرتبه n است.

مثال ۸. ماتریسهای I_2 و I_3 به صورت زیر می باشند :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه: هرگاه A ماتریسی $m \times n$ باشد، در این صورت داریم :

$$I_m A = A I_n = A$$

همچنین داریم :

$$II = I$$

ماتریس بالا مثلثی. ماتریس مربع $A = (a_{ij})$ را بالا مثلثی گوئیم، هرگاه برای هر $i > j$ داشته باشیم :

$$a_{ij} = 0$$

ماتریس پایین مثلثی. ماتریس مربع $A = (a_{ij})$ را پایین مثلثی گوئیم، هرگاه برای هر $i < j$ داشته باشیم :

$$a_{ij} = 0$$

مثال ۹. ماتریس A در زیر یک ماتریس بالا مثلثی و ماتریس B یک ماتریس پایین مثلثی است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

تعریف ۱.۶ ماتریس مربع A وارونپذیر یا معکوس پذیر نامیده می شود، هرگاه ماتریسی مربع مانند B وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم :

$$AB = BA = I_n$$

که در آن n مرتبه ماتریسهای A و B می باشد. معمولاً ماتریس وارون A را با A^{-1} نشان می دهیم، لذا هرگاه A وارونپذیر باشد خواهیم داشت :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

تعریف ۲.۶ ماتریس مربع A نامنفرد نامیده می شود، هرگاه وارونپذیر باشد. در غیر این صورت A را منفرد می نامیم.

مثال ۱۰. ماتریس زیر را در نظر بگیرید :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت A نامنفرد است، زیرا داریم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف ۳.۶ ترانهاده یک ماتریس $m \times n$ مانند $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times m$ است که از تعویض سطرها و ستونهای A به دست می آید. به ویژه ترانهاده یک بردار سطری، برداری ستونی است و بر عکس ترانهاده یک بردار ستونی، برداری سطری است. ترانهاده ماتریس A را با A^t نشان

می‌دهیم.

مثال ۱۱. ترانزاده ماتریس A در مثال ۱۰ به صورت زیر است :

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۱۲. ترانزاده بردارهای زیر را به دست آورید.

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = [1, 0, -5]$$

حل: ترانزاده بردارهای a و b عبارتند از :

$$a^t = [3, 7, 0], \quad b^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

تذکر. گاهی به خاطر راحتی در نوشتار، یک بردار ستونی را به کمک ترانزاده آن، که برداری سطری است، نشان می‌دهیم. به عنوان مثال

بردار a در مثال ۱۲ را به صورت $a = [3, 7, 0]^t$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۶ مجموع مولفه‌های قطری یک ماتریس مربع مرتبه n را اثر یا تریس ماتریس می‌نامیم و آن را با $\text{tr} A$ نشان می‌دهیم. لذا هرگاه $A = (a_{ij})$ در این صورت

$$\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (۴)$$

مثال ۱۳. اثر ماتریس A در مثال ۱۰ و اثر ماتریس B در مثال ۹ را به دست آورید.

حل: بنا به رابطه (۴) داریم:

$$\text{tr} A = 1 + (-2) + 1 = 0$$

$$\text{tr} B = 7 + 1 + 9 = 17$$

تعریف ۵.۶ دترمینان تابعی است که از مجموعه ماتریس‌های مربع به مجموعه اعداد (حقیقی یا مختلط) تعریف می‌شود، به عبارت دیگر دترمینان تابعی است که به هر ماتریس مربع یک عدد را نسبت می‌دهد. دترمینان ماتریس A را با نماد $\det A$ یا $|A|$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۶ دترمینان وابسته به ماتریس دو در دو

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\det A = |A| = ad - bc \quad (5)$$

مثال ۱۴. با استفاده از رابطه (۵) دترمینان‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \quad (\text{الف})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-4) = 4 \quad (\text{ب})$$

توجه: دترمینان ماتریسهایی که مرتبه آنها بیشتر از ۲ است به کمک دترمینان زیر ماتریسهای 2×2 به دست می‌آید، مثال زیر نحوه محاسبه دترمینان چنین ماتریسهایی را نشان می‌دهد.

مثال ۱۵. دترمینان ماتریسهای زیر را حساب کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: دترمینان ماتریس A را به کمک سطر اول به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1(-2) - 3(1) + 4(4 - 1) = 7 \end{aligned}$$

و دترمینان ماتریس B را به کمک ستون دوم به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \det B &= -0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 1(-1) - 1(1) = -2 \end{aligned}$$

قضیه زیر رابطه بین دترمینان یک ماتریس و وارونپذیر بودن آن را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۶ ماتریس A نامنفرد است (وارونپذیر است) اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

۲.۶ دستگاههای معادلات خطی

یکی از مسائلی که اغلب در مسائل مهندسی پیش می‌آید، به دست آوردن جواب یک دستگاه از معادلات خطی است که معمولاً تعداد مجهولات این دستگاهها زیاد است. در این بخش به بررسی

دستگاههای معادلات خطی n معادله n مجهولی می‌پردازیم. چنین دستگاهی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Ax = b \quad (۶)$$

که در آن A ماتریسی مربع مرتبه n با مولفه‌های معلوم، b برداری (ستونی) با n مولفه معلوم و x یک بردار (ستونی) با n مولفه مجهول می‌باشد.

مثال زیر مثالی را از طرز تشکیل دستگاهی از معادلات مانند (۶) نشان می‌دهد.

مثال ۱۶. درصدد یافتن یک چند جمله‌ای به صورت $P(x) = a + bx + cx^2$ هستیم که در روابط زیر صدق می‌کند:

$$P(۱) = ۰, \quad P(۲) = -۱, \quad P(۳) = ۲$$

با نوشتن سه شرط فوق به سه معادله زیر می‌رسیم:

$$P(۱) = ۰ \implies a + b + c = ۰$$

$$P(۲) = -۱ \implies a + ۲b + ۴c = -۱$$

$$P(۳) = ۲ \implies a + ۳b + ۹c = ۲$$

لذا یک دستگاه شامل سه معادله و سه مجهول خواهیم داشت که در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad (۷)$$

با روشهایی که بعداً بیان خواهیم نمود، جواب دستگاه فوق را می‌توان به دست آورد و این جواب عبارتست از:

$$a = 5, \quad b = -7, \quad c = 2$$

توجه: به سادگی می‌توان بررسی نمود که چند جمله‌ای $P(x) = 5 - 7x + 2x^2$ از نقاط مورد نظر می‌گذرد.

تعریف ۷.۶ منظور از جواب یک دستگاه از معادلات مانند (۶) به دست آوردن بردار x است که مولفه‌های آن در تمام معادلات دستگاه صدق می‌کنند.

مثال ۱۷. جواب دستگاه ماتریسی (۷) در مثال قبل عبارتست از بردار زیر

$$x = [5, -7, 2]^t$$

در ادامه فصل به روشهای به دست آوردن جواب یک دستگاه از معادلات می‌پردازیم. الگوریتم‌های زیادی برای این موضوع ارائه شده است که در حالت کلی می‌توان آنها را به دو دسته زیر تقسیم نمود:

الف. روشهای مستقیم

ب. روشهای تکراری

روشهای مستقیم روشهایی هستند که پس از انجام چند مرحله مشخص به جواب می‌رسیم که این جواب، بدون در نظر گرفتن خطای گرد کردن، جواب دقیق دستگاه است. در حالیکه در روشهای تکراری تنها به یک تقریب از جواب می‌رسیم.

۱.۲.۶ روشهای مستقیم حل دستگاههای معادلات خطی

در این قسمت حل دستگاههای

$$Ax = b$$

را در نظر می‌گیریم، که A ماتریسی مربع مرتبه n و x و b بردارهای n تایی هستند. فرض می‌کنیم که A نامنفرد است و اگر A ماتریسی منفرد باشد در طی عملیات منفرد بودن آن مشخص خواهد شد، در روشهای مستقیم سعی بر این است که دستگاه داده شده از معادلات را به کمک عملیات سطری مقدماتی به یک دستگاه معادل ساده‌تر تبدیل کنیم.

عملیات سطری مقدماتی عبارتند از:

۱- تعویض دو سطر (یا دو معادله)

۲- ضرب یک سطر (یا یک معادله) در عددی مخالف صفر

۳- ضرب یک سطر (معادله) در عددی مخالف صفر و جمع نمودن آن با سطر دیگر.

قبل از بیان روشهای مستقیم برای حل دستگاههای معادلات خطی، دستگاه معادلات مثال زیر را که ماتریس ضرایب آن ماتریسی بالا مثلثی است، در نظر بگیرید. همانگونه که این مثال نشان می‌دهد، حل چنین دستگاههایی ساده‌تر می‌باشد.

مثال ۱۸. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 + 0x_3 = 7 \\ 0x_1 + 2.5x_2 + 5x_3 = 2.5 \\ 0x_1 + 0x_2 + 6.2x_3 = 6.2 \end{cases}$$

دستگاه معادلات را به شکل ماتریسی نوشته و جواب دستگاه را نیز به دست آورید.

حل: دستگاه فوق به شکل ماتریسی عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2.5 \\ 6.2 \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن جواب دستگاه از آخرین معادله دستگاه داریم :

$$۶,۲x_3 = ۶,۲ \Rightarrow x_3 = ۱$$

با جایگزین نمودن این مقدار در معادله دوم خواهیم داشت :

$$۲,۵x_2 + ۵(۱) = ۲,۵ \Rightarrow x_2 = -۱$$

نهایتاً، با قرار دادن مقادیر x_2 و x_3 در معادله اول خواهیم داشت :

$$۱^۰x_1 - ۷(-۱) + ۰(۱) = ۷ \Rightarrow x_1 = ۰$$

تعریف ۸.۶ دستگاهی مانند دستگاه معادلات مثال ۱۸ که ماتریس ضرایب آن ماتریسی بالا مثلثی است، دستگاه بالا مثلثی نامیده می شود.

تعریف ۹.۶ روش به کار رفته در مثال قبل که برای دستگاههای بالا مثلثی به منظور تعیین جواب مورد استفاده قرار می گیرد، جایگذاری پسرو (یا جایگذاری از معادله پائینی) نامیده می شود.

الگوریتم حل دستگاههای بالا مثلثی :

فرض کنید یک دستگاه بالا مثلثی به صورت زیر داشته باشیم :

$$u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = c_1$$

$$u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n = c_2$$

⋮

$$u_{nn}x_n = c_n$$

در این صورت جواب دستگاه را به صورت زیر به دست می آوریم :

۱- قرار دهید

$$x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$$

۲- برای $i = 1, 2, \dots, n-1, n$ قرار دهید:

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left\{ c_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right\}$$

همانگونه که مثال ۱۸ نشان می‌دهد، تعیین جواب دستگاههای بالا مثلثی راحت است، از اینرو روشی که ذیلاً توضیح داده می‌شود و روش حذفی گاوس نامیده می‌شود، یک دستگاه داده شده را به کمک عملیات سطری مقدماتی به یک دستگاه بالا مثلثی تبدیل می‌کند. پیش از بیان روش حذفی گاوس، در حالت کلی، ابتدا این روند به کمک یک مثال توضیح داده می‌شود.

مثال ۱۹. دستگاه معادلات زیر را به یک دستگاه بالا مثلثی تبدیل نموده و سپس جواب دستگاه را به دست آورید.

$$10x_1 - 7x_2 = 7$$

$$5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6$$

$$-3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4$$

حل: شکل ماتریسی دستگاه فوق به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

قدم اول. با استفاده از سطر اول (یا معادله اول دستگاه) ضریب x_1 را در دو معادله دیگر صفر می‌کنیم. برای این منظور $\frac{-5}{10}$ برابر سطر اول را با سطر دوم جمع می‌کنیم، همچنین $\frac{-3}{10}$ برابر سطر

اول را با سطر سوم جمع می‌کنیم با انجام این دو عمل، خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2,5 & 5 \\ 0 & -0,1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2,5 \\ 6,1 \end{bmatrix}$$

قدم دوم. با استفاده از سطر دوم ضریب x_2 را در سطر سوم حذف می‌کنیم. برای این منظور $0,4 = -\frac{-0,1}{2,5}$ برابر سطر دوم را با سطر سوم جمع می‌کنیم، با این عمل خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2,5 & 5 \\ 0 & 0 & 6,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2,5 \\ 6,2 \end{bmatrix}$$

دستگاه بالا مثلثی فوق همان دستگاه مثال ۱۸ است، لذا جواب آن عبارتست از :

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$$

تذکر. انجام عملیات مقدماتی سطری بر روی ماتریس افزوده $[A : b]$ صورت می‌گیرد و نیازی به تکرار دستگاه در هر مرحله نیست.

الگوریتم روش حذفی گاوس :

فرض کنید ماتریس افزوده دستگاه $Ax = b$ به صورت زیر باشد

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & \vdots & b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

مرحله یک. با فرض $a_{11}^{(1)} \neq 0$ سطر اول ماتریس را در $l_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ ضرب نموده و با سطر i ام برای $i = 2, 3, \dots, n$ جمع می‌کنیم. این عمل دستگاه معادل زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & : & b_1^{(1)} \\ \circ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & : & b_2^{(2)} \\ \circ & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & : & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & : & b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

که در آن برای $i, j = 2, 3, \dots, n$ داریم:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)}$$

مرحله دو. حال با فرض $a_{22}^{(2)} \neq 0$ سطر دوم را در $l_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ ضرب نموده و با سطر i ام برای $i = 3, 4, \dots, n$ جمع می‌کنیم. این عمل دستگاه معادل زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & : & b_1^{(1)} \\ \circ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & : & b_2^{(2)} \\ \circ & \circ & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} & : & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} & : & b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

(۱) در صورتی که $a_{11}^{(1)} = 0$ جای سطر اول را با سطر دیگری که عضو اول آن مخالف صفر باشد تعویض می‌کنیم

که در آن برای $i, j = 3, 4, \dots, n$ داریم:

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(2)} \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} b_2^{(2)}$$

مرحله تکرار. عملیات فوق را تا جایی که ماتریس ضرایب به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل شود، ادامه می‌دهیم.

تذکر. همانگونه که الگوریتم قبل نشان می‌دهد، برای انجام مرحله i ام بایستی $a_{ii}^{(i)}$ مخالف صفر باشد، هرگاه عضو قطری (یا محوری) در مرحله‌ای صفر باشد، کافی است با تعویض دو سطر از ماتریس افزوده به یک عضو قطری غیر صفر در آن مرحله برسیم.

مثال ۲۰. دستگاه معادلات زیر را به کمک روش حذفی گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 0 \end{cases}$$

حل: با قرار دادن $l_{21} = -\frac{1}{4}$ و $l_{31} = -\frac{1}{3}$ ضرب l_{21} در معادله اول و اضافه نمودن حاصل با معادله دوم و همچنین ضرب l_{31} در معادله اول و افزودن آن به معادله سوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ \frac{1}{12}x_2 + \frac{1}{12}x_3 = -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12}x_2 + \frac{4}{45}x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

سپس با ضرب نمودن معادله دوم در -۱ و افزودن حاصل به معادله سوم به دستگاه بالا مثلی زیر خواهیم رسید :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ \frac{1}{12}x_2 + \frac{1}{12}x_3 = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{180}x_3 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

به کمک روش جایگذاری پسرو خواهیم داشت :

$$x_3 = 30, \quad x_2 = -36, \quad x_1 = 9$$

محورگیری

رابطه زیر را که مربوط به خطای حاصل ضرب دو عدد a و b می باشد، در نظر بگیرید :

$$e_{ab} \leq be_a + ae_b \quad (۸)$$

رابطه فوق همان رابطه (۳) فصل اول می باشد. رابطه (۸) نشان می دهد که هرگاه a و یا b اعدادی بزرگ باشند، خطای حاصل ضرب این دو عدد می تواند بزرگ باشد، حتی اگر e_a و e_b مقادیر کوچکی باشند. اما هرگاه $|a|, |b| \leq ۱$ مقدار خطای عبارت سمت راست در رابطه (۸) در حد قابل قبول و نزدیک مقادیر e_a و e_b خواهد بود. لذا بایستی حتی الامکان از اعداد تقریبی بزرگ (بزرگتر از یک) اجتناب کنیم. برای توضیح مشکلاتی که در این مورد می تواند پیش آید مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۲۱. جواب دستگاه زیر را به کمک روش حذفی گاوس و جایگذاری پسرو به دست آورید. محاسبات را با $۴D$ انجام دهید.

$$\begin{cases} 10^{-5}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

حل: برای حذف x_1 از معادله دوم، بایستی معادله اول را در $l_{21} = -\frac{1}{10^{-5}}$ ضرب نموده با معادله دوم جمع کنیم، در این صورت چون $l_{21} = -10^5$ ، دستگاه بالا مثلثی حاصل عبارتست از:

$$\begin{cases} 10^{-5}x_1 + x_2 = 1 \\ (1 - 10^5)x_2 = 2 - 10^5 \end{cases}$$

در این صورت با $4D$ مقدار x_2 برابر است با:

$$x_2 = 170000$$

با قرار دادن مقدار x_2 در معادله اول خواهیم داشت:

$$10^{-5}x_1 = 0 \implies x_1 = 0$$

بنابراین جواب دستگاه بایستی به صورت $[0, 1]^t$ باشد.

مثال ۲۲. در مثال قبل جای دو معادله را تعویض نموده و مجدداً جواب دستگاه را با $4D$ به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 10^{-5}x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

با قرار دادن $l_{21} = -10^{-5}$ و انجام عملیات لازم، دستگاه بالا مثلثی زیر را خواهیم داشت:

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$(1 - 10^{-5})x_2 = 1 - 2(10^{-5})$$

بنابراین با $4D$ خواهیم داشت $x_2 = 1$ و از آن با قرار دادن در معادله اول خواهیم داشت:

$$x_1 = 1$$

لذا جواب معادله به صورت $[1, 1]^t$ می باشد.

تذکره. علت نادرست بودن جواب به دست آمده در مثال ۲۱ بزرگ بودن l_{21} نسبت به سایر ضرایب معادلات می باشد، در حالیکه در مثال ۲۲ چون l_{21} مقداری کمتر از یک می باشد جواب دقیق مساله به دست آمده است.

همانگونه که مثالهای ۲۱ و ۲۲ نشان می دهند، برای صفر نمودن ضرایب x_j در سطرهای $1 + j$ تا n ام بایستی l_{ij} را به صورت زیر محاسبه نماییم (بنا به الگوریتم روش حذفی گاوس)

$$l_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}}, \quad i = j + 1, \dots, n$$

سپس با ضرب l_{ij} در سطر j ام و جمع نمودن آن با سطر i ام ضریب x_j در سطر i ام صفر می شود. اما بنا به توضیحات بیان شده بایستی $|l_{ij}| \leq 1$ و یا بایستی داشته باشیم

$$|a_{jj}| \leq |a_{ij}|, \quad i = j + 1, \dots, n$$

بنابراین هنگامی که بخواهیم ضریب x_j را در سطرهای $1 + j$ تا n ام صفر کنیم، بایستی معادله‌ای را در سطر j ام قرار دهیم که ضریب x_j نسبت به سایر معادلات بیشترین مقدار را از نظر قدر مطلق داشته باشد.

تعریف ۱۰.۶ عمل فوق، یعنی انتقال معادله‌ای به سطر j ام که ضریب x_j در آن بیشترین مقدار را از نظر قدر مطلق دارا می باشد، محورگیری می نامیم.

استفاده از وارون ماتریس A برای حل دستگاه $Ax = b$

یکی دیگر از روشهای مستقیم برای حل دستگاه $Ax = b$ استفاده از وارون ماتریس A می باشد. چون فرض کرده ایم که در این دستگاهها ماتریس ضرایب نامنفرد است، لذا A^{-1} موجود است. با ضرب A^{-1} در طرفین دستگاه خواهیم داشت :

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

و از آن

$$x = A^{-1}b \quad (۹)$$

نتیجه ۱. هرگاه بردار $b = 0$ و $|A| \neq 0$ ، لذا A^{-1} موجود بوده و از آن بنا به رابطه (۹) جواب دستگاه $Ax = 0$ عبارتست از:

$$x = A^{-1} 0$$

$$x = 0$$

نتیجه ۲. دستگاه $Ax = 0$ دارای جواب غیر صفر خواهد بود هرگاه A منفرد باشد، یعنی هرگاه $|A| = 0$.

تعریف ۱۱.۶ دستگاهی که بردار سمت راست آن صفر باشد، یعنی دستگاه $Ax = 0$ دستگاه همگن نامیده می شود.

مثال ۲۳. با استفاده از وارون ماتریس ضرایب، دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل: ماتریس ضرایب دستگاه فوق همان ماتریس A مثال ۱۰ می باشد، بنابراین از مثال ۱۰ داریم:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لذا، بنا به رابطه (۹) جواب دستگاه عبارتست از:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب دستگاه عبارتست از: $x = [-1, 0.5, 2]^T$

۲.۲.۶ روشهای تکراری حل دستگاههای معادلات خطی

در این قسمت روشهای تکراری برای حل دستگاههای معادلات خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. روشهای تکراری برای حل دستگاههای معادلات خطی، روشهایی مناسب برای به کارگیری کامپیوتر می‌باشند، به ویژه اگر تعداد مولفه‌های صفر ماتریس ضرایب دستگاه معادلات زیاد باشد، روشهای تکراری بر روشهای مستقیم ترجیح داده می‌شوند. معروفترین روشهای تکراری عبارتند از:

۱- روش ژاکوبی ۲- روش گاوس-سایدل

در این روشها، x_i را از حل معادله i ام به دست می‌آوریم، بنابراین دستگاه $Ax = b$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$x_1 = \dots$$

$$x_2 = \dots$$

$$\vdots$$

$$x_n = \dots$$

فرض کنید دستگاهی از معادلات خطی شامل سه معادله معادله و سه مجهول به شکل زیر داشته باشیم:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (10)$$

هرگاه $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ و $a_{33} \neq 0$ در این صورت دستگاه (۱۰) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/a_{11}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 &= 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\ x_3 &= 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{aligned} \quad (11)$$

یک تقریب اولیه از جواب به صورت $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}]^t$ در نظر می‌گیریم.

حال با مفروضات بیان شده به توضیح روشهای ژاکوبی و گاوس-سایدل می‌پردازیم.

روش ژاکوبی

با قرار دادن $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ در معادلات دستگاه (۱۱) یک تقریب جدید از جواب به صورت

زیر به دست می‌آید. تقریب جدید را با $x^{(1)} = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}]^t$ نشان می‌دهیم که

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1/a_{11}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} &= 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} &= 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)}) \end{aligned} \quad (12)$$

این عمل یک تکرار را کامل می‌کند. حال می‌توانیم با استفاده از مقادیر جدید $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ و

$x_3^{(1)}$ یک تقریب دیگر برای جواب به دست آوریم در حالت کلی با در دست داشتن تقریب

می‌آوریم: $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ جواب جدید $x^{(k+1)} = [x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}]^T$ را به صورت زیر به دست

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 1/a_{11}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= 1/a_{22}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= 1/a_{33}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

دستگاه (۱۳) دستگاه تکرار ژاکوبی برای به دست آوردن جواب دستگاه اولیه (۱۰) می‌باشد. مثال ۲۴. با استفاده از روش تکراری ژاکوبی جواب دستگاه معادلات زیر را به دست آورید. جواب اولیه را بردار صفر در نظر بگیرید و محاسبات را با $4D$ انجام دهید.

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9$$

$$-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2$$

حل: با به دست آوردن x_1 از معادله اول، x_2 از معادله دوم و x_3 از معادله سوم خواهیم داشت:

$$x_1 = \frac{1}{4}(4 + x_2 - x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{6}(9 - x_1 - 2x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{5}(2 + x_1 + 2x_2)$$

لذا با قرار دادن $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ ، دستگاه تکرار ژاکوبی به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)})$$

برای $k = 0$ خواهیم داشت :

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(4 + 0 - 0) = 1$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{1}{6}(9 - 0 - 0) = 1,5$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)}) = \frac{1}{5}(2 + 0 + 0) = 0,4$$

حال برای $k = 1$ تقریب بعدی جواب به صورت زیر خواهد بود :

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(4 + 1,5 - 0,4) = 1,275$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{1}{6}(9 - 1 - 0,8) = 1,2000$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}) = \frac{1}{5}(2 + 1 + 3) = 1,2000$$

جوابهای فوق و جوابهای بعدی در جدول زیر خلاصه شده‌اند :

شماره تکرار	x_1	x_2	x_3
۰	۰	۰	۰
۱	۱,۰۰۰۰	۱,۵۰۰۰	۰,۴۰۰۰
۲	۱,۲۷۵۰	۱,۲۰۰۰	۱,۲۰۰۰
۳	۱,۰۰۰۰	۰,۸۸۷۵	۱,۱۳۵۰
۴	۰,۹۳۸۱	۰,۹۵۵۰	۱,۰۵۴۰
۵	۰,۹۷۵۳	۰,۹۹۲۳	۱,۰۰۹۲
۶	۰,۹۹۵۸	۱,۰۰۱۱	۰,۹۹۲۰
۷	۱,۰۰۲۳	۱,۰۰۳۴	۰,۹۹۹۶
۸	۱,۰۰۱۰	۰,۹۹۹۸	۱,۰۰۱۸
۹	۰,۹۹۹۵	۰,۹۹۹۲	۱,۰۰۰۹
۱۰	۰,۹۹۹۶	۰,۹۹۹۸	۰,۹۹۹۶
۱۱	۱,۰۰۰۱	۱,۰۰۰۲	۰,۹۹۹۸
۱۲	۱,۰۰۰۱	۱,۰۰۰۱	۱,۰۰۰۱
۱۳	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۱
۱۴	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰

لذا جواب در تکرار چهاردهم به صورت

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

به دست آمده است (توجه دارید که محاسبات را با $4D$ انجام داده‌ایم).

روش گاوس-سایدل

روش تکراری گاوس-سایدل همانند روش تکراری ژاکوبی است، با این تفاوت که از هر مقدار جدید به دست آمده از مولفه‌های جواب، در محاسبه سایر مولفه‌ها استفاده می‌کند. برای توضیح این روش دستگاه (۱۲) را در نظر بگیرید، پس از محاسبه $x_1^{(1)}$ از اولین معادله این دستگاه بر حسب بقیه x_i ها، از این مقدار در محاسبه $x_2^{(1)}$ استفاده می‌کنیم، لذا $x_2^{(1)}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)})$$

حال با داشتن $x_1^{(1)}$ و $x_2^{(1)}$ مولفه $x_3^{(1)}$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)})$$

این عمل یک تکرار روش گاوس-سایدل را کامل می‌کند، حال با داشتن مقادیر $x_1^{(1)}$ ، $x_2^{(1)}$ و $x_3^{(1)}$ تکرار بعدی را انجام می‌دهیم. در حالت کلی با در دست داشتن $x_1^{(k)}$ ، $x_2^{(k)}$ و $x_3^{(k)}$ جواب بعدی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}), k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

دستگاه (۱۴) دستگاه تکرار گاوس-سایدل برای به دست آوردن جواب دستگاه اولیه (۱۰) می‌باشد. مثال ۲۵. جواب دستگاه معادلات مثال ۲۴ را با استفاده از روش تکراری گاوس-سایدل به دست

آورید. محاسبات را با $4D$ انجام دهید و بردار اولیه را بردار صفر در نظر بگیرید.

حل: با قرار دادن $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ دستگاه تکرار گاوس-سایدل برای این مساله عبارتست از:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(4 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}(9 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}(2 + x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)})$$

بنابراین برای $k = 0$ خواهیم داشت:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(4 + 0 + 0) = 1$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(9 - 1 - 0) = \frac{4}{3}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(2 + 1 + \frac{8}{3}) = \frac{17}{15}$$

جواب فوق و جوابهای بعدی در جدول زیر خلاصه شده‌اند:

شماره تکرار	x_1	x_2	x_3
۰	۰	۰	۰
۱	۱٫۰۰۰۰	۱٫۳۳۳۳	۱٫۱۳۳۳
۲	۱٫۰۵۰۰	۰٫۹۴۷۳	۰٫۹۸۸۹
۳	۰٫۹۸۹۶	۱٫۰۰۵۰	۰٫۹۹۹۹
۴	۱٫۰۰۱۰	۰٫۹۹۹۹	۱٫۰۰۰۰
۵	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰

لذا جواب در تکرار پنجم به صورت زیر به دست آمده است:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

نکته: همانگونه که مثال ۲۵ نشان می‌دهد، روش تکراری گاوس-سایدل سریعتر از روش ژاکوبی به جواب می‌رسد، البته مثالهای خاصی وجود دارند که چنین نیست، اما در اکثر موارد روش گاوس-سایدل بهتر از روش ژاکوبی است یعنی سریعتر به جواب می‌رسد. (البته هیچکدام از این دو روش، تضمین همگرایی ندارند).

تذکر ۱. برای تشکیل دستگاههای تکراری ژاکوبی یا گاوس-سایدل بایستی در معادله i ام داشته باشیم $a_{ii} \neq 0$ تا بتوانیم x_i را از آن معادله به دست آوریم، اما هرگاه $a_{ii} = 0$ ، چنین کاری امکانپذیر نیست، برای رفع این مشکل کافی است دو سطر را جابجا کنیم و معادله‌ای را در سطر i ام قرار دهیم که $a_{ii} \neq 0$.

تذکر ۲. بنا به مطالب بیان شده در قسمت محورگیری بهتر است معادله‌ای را در سطر i ام قرار دهیم که $|a_{ii}|$ در میان سطرهاى دیگر بیشترین مقدار را داشته باشد، همانگونه که برای مثالهای ۲۴ و ۲۵ عمل شد، در این مثالها ضریب x_1 در معادله اول بیشترین مقدار را در میان معادلات دیگر دارد و همچنین ضریب x_2 در معادله دوم و ضریب x_3 در معادله سوم دارای خاصیت مورد نظر هستند.

تذکر ۳. حل یک دستگاه معادلات خطی با n معادله و n مجهول مشابه حالت سه متغیره است که بیان شد. مثلاً در روش گاوس-سایدل با فرض $a_{ii} \neq 0$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ تقریب $(k+1)$ ام مولفه x_i به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} [b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - a_{i2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{in}x_n^{(k)}], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

یا

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}) \quad 1 \leq i \leq n$$

شرط توقف عملیات

عملیات محاسبه x_i ها تا جایی انجام می‌شود که برای تمام i ها $x_i^{(k)}$ و $x_i^{(k+1)}$ به اندازه کافی به هم نزدیک باشند، برای این منظور هرگاه قرار دهیم:

$$M^{(k)} = \max\{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|, \quad i = 1, \dots, n\}$$

و بخواهیم جواب دستگاه را با تقریب مقدار معلوم ϵ به دست آوریم، هرگاه شرط زیر برقرار شد عملیات را خاتمه می‌دهیم :

$$M^{(k)} < \epsilon \quad (15)$$

شرط (۱۵) نشان دهنده این است که تمام مولفه‌های نظیر از جواب در دو تکرار متوالی به اندازه کافی به هم نزدیک می‌باشند.

۳.۶ دستگاههای معادلات غیر خطی

در این قسمت یکی از روشهای حل دستگاههای معادلات غیر خطی را بررسی می‌کنیم. برای سادگی دستگاههای شامل دو معادله را در نظر می‌گیریم. فرض کنید هدف تعیین یکی از جوابهای دستگاه زیر باشد :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

که در آن f و g توابع معلوم و غیر خطی از متغیرهای x و y می‌باشند. هرگاه (α, β) جواب مورد نظر دستگاه باشد و (x_0, y_0) تقریبی از (α, β) ، می‌توان نوشت :

$$\alpha = x_0 + h_0$$

$$\beta = y_0 + k_0$$

اگر بتوان h_0 و k_0 را محاسبه نمود، با افزودن آنها به ترتیب به x_0 و y_0 به جواب مطلوب میرسیم. لذا سعی می‌کنیم تقریبهایی از h_0 و k_0 به دست آوریم، برای این منظور از بسط تیلور یک تابع دو

$$(16) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) |_{(x,y)} \neq 0$$

: لغتینه داشته باشیم : غیر صفر باشد، یعنی

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

درمیان ضرائب این دستگاه درست از :

هرگاه درمیان ضرائب دستگاه (18) مخالف صفر باشد می توان از آن h و k را به دست آورد.

$$(18) \quad \begin{cases} -f(x, y) = h \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial g(x, y)} + k \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \\ -g(x, y) = h \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial g(x, y)} + k \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

: لغتینه می دهیم : برای پیدا کردن h و k دستگاه زیر را تشکیل می دهیم :

$$(19) \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} + h \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial g(x, y)} + k \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \approx 0$$

: می آید : مست به دست g تابع برای صورت

$$(20) \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + h \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial g(x, y)} + k \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx 0$$

: می توان نوشت : (α, β) هستند

و $f(\alpha, \beta) = 0$ که با توجه به اینکه $f(\alpha, \beta) = 0$ صرف نظر کردیم.

اگر x و y تقریبی جوی α و β باشند، h و k کوچک خواهند بود و می توان از جلائی

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= f(x + h, y + k) \\ &= f(x, y) + h \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ &\quad + h^2 \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + k^2 \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + \dots \end{aligned}$$

: متغیره خواهیم داشت :

هرگاه (۱۹) برقرار باشد، با استفاده از دستور گرامر می‌توانیم h_0 و k_0 را از دستگاه (۱۸) به صورت زیر به دست آوریم :

$$h_0 = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}, \quad k_0 = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}$$

که در آن $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ، $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ و به طور مشابه برای g . همچنین مقادیر توابع و مشتقات آنها بایستی در (x_0, y_0) محاسبه شوند. با به دست آوردن h_0 و k_0 مقدار $x_0 + h_0$ تقریب بهتری از x_0 برای α و مقدار $y_0 + k_0$ تقریب بهتری از y_0 برای β خواهد بود، لذا قرار می‌دهیم :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h_0 \\ y_1 = y_0 + k_0 \end{cases}$$

و عمل فوق را برای x_1 و y_1 به جای x_0 و y_0 تکرار می‌کنیم و تقریبهای x_2 و y_2 را به دست می‌آوریم. در حالت کلی اگر x_n و y_n محاسبه شده باشند، با حل دستگاه زیر

$$\begin{cases} h_n \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + k_n \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y} = -f(x_n, y_n) \\ h_n \frac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial x} + k_n \frac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial y} = -g(x_n, y_n) \end{cases} \quad (20)$$

و به دست آوردن h_n و k_n قرار می‌دهیم :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + k_n \end{cases}$$

در این حالت نیز واضح است که دستگاه (۲۰) جواب دارد، هرگاه داشته باشیم :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) |_{(x_n, y_n)} \neq 0 \quad (21)$$

معمولاً برای برقرار بودن رابطه (۲۱) در (x_n, y_n) برای تمام n ها سعی می‌کنیم قبل از محاسبات ثابت کنیم که در یک همسایگی از (α, β) رابطه زیر برقرار است :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \neq 0$$

شرایط توقف عملیات

معمولاً ترکیبی از شرایط زیر را به منظور توقف عملیات برای محاسبه جواب با تقریب مقدار معلوم ϵ مورد استفاده قرار می‌دهیم:

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon \quad , \quad |y_{n+1} - y_n| < \epsilon$$

$$|f(x_n, y_n)| < \epsilon \quad , \quad |g(x_n, y_n)| < \epsilon$$

مثال ۲۶. تقریبی از جواب دستگاه زیر چنان به دست آورید که داشته باشیم :

$$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-3} \quad , \quad |y_{n+1} - y_n| < 10^{-3}$$

محاسبات را با $4D$ انجام دهید.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

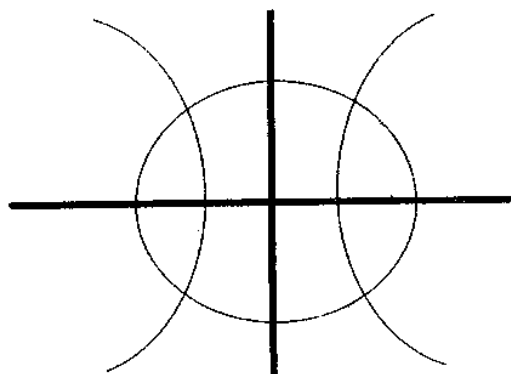
حل: در این مثال واضح است که می‌توان x^2 را از یک معادله به دست آورد و در دیگری قرار داد و y^2 را به دست آورد و نهایتاً x و y را پیدا نمود. ولی هدف از این مثال نشان دادن این نکته است که روش بیان شده چگونه مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای تعیین یک تقریب اولیه از جوابهای

دستگاه فوق، (در صورت امکان) منحنیهای $f(x, y) = 0$ و $g(x, y) = 0$ را رسم می‌کنیم، طول و عرض محل تلاقی آنها جوابهای مورد نظر هستند. در این مثال داریم :

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 5$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 25$$

رسم نمودار توابع فوق در یک دستگاه مختصات به صورت زیر خواهد بود :



از شکل فوق مشخص می‌شود که دستگاه دارای چهار جواب است و هرگاه مختصات جواب واقع در ربع اول را (α, β) بنامیم، بقیه جوابها به صورت زیر هستند :

$$(\alpha, -\beta), \quad (-\alpha, \beta), \quad (-\alpha, -\beta)$$

ضمناً مقادیر $x_0 = 4$ و $y_0 = 3$ تقریبهای اولیه مناسبی از α و β هستند، هرگاه بخواهیم در حالت کلی h_n و k_n را محاسبه کنیم، داریم :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$$

بنابراین

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 4xy$$

و با توجه به اینکه $3 < \alpha < 4$ و $3 < \beta < 4$ همسایگی (α, β) را مستطیل $3 \leq x, y \leq 4$ می‌گیریم، لذا در این همسایگی از (α, β) داریم:

$$8xy \geq 72 \neq 0$$

لذا h_n و k_n را از تمام دستگاههای به صورت دستگاه (۲۰) می‌توان به دست آورد. با توجه به مقادیر محاسبه شده فوق دستگاه (۲۰) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} 2x_n h_n - 2y_n k_n = -(x_n^2 - y_n^2 - 5) \\ 2x_n h_n + 2y_n k_n = -(x_n^2 + y_n^2 - 25) \end{cases}$$

و از آن داریم:

$$h_n = \frac{\begin{vmatrix} -x_n^2 + y_n^2 + 5 & -2y_n \\ -x_n^2 - y_n^2 + 25 & 2y_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x_n & -2y_n \\ 2x_n & 2y_n \end{vmatrix}} = \frac{-4x_n^2 y_n + 60y_n}{8x_n y_n} = \frac{-x_n^2 + 15}{2x_n}$$

$$k_n = \frac{\begin{vmatrix} 2x_n & -x_n^2 + y_n^2 + 5 \\ 2x_n & -x_n^2 - y_n^2 + 25 \end{vmatrix}}{8x_n y_n} = \frac{-4x_n y_n^2 + 40x_n}{8x_n y_n} = \frac{-y_n^2 + 10}{2y_n}$$

لذا از اینکه داریم

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + k_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای h_n و k_n خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{15 - x_n^2}{2x_n} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{10 - y_n^2}{2y_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

با تقریب اولیه $(x_0, y_0) = (4, 3)$ مقادیر بعدی جواب به صورت زیر می‌باشند :

$$\begin{cases} x_1 = 3,8750 \\ y_1 = 3,1667 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3,8730 \\ y_2 = 3,1623 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 3,8730 \\ y_3 = 3,1623 \end{cases}$$

بنابراین $(\alpha, \beta) = (x_3, y_3)$.

۴.۶ به دست آوردن وارون یک ماتریس نامنفرد

در این قسمت طرز به دست آوردن وارون یک ماتریس نامنفرد را به کمک اعمال سطری مقدماتی بیان می‌کنیم. هرگاه ماتریس وارون‌پذیر A به وسیله یک سلسله اعمال مقدماتی تبدیل به ماتریس واحد شود، آن گاه با انجام همین سلسله اعمال سطری مقدماتی بر روی ماتریس واحد، وارون ماتریس A به دست می‌آید. برای به دست آوردن وارون ماتریس A ، معمولاً اعمال سطری مقدماتی

را به طور همزمان بر روی ماتریس A و ماتریس واحد انجام می‌دهیم. لذا ماتریس افزوده $[A:I]$ را در نظر گرفته و با انجام یک سلسله اعمال سطری مقدماتی آن را تبدیل به $[I:B]$ می‌نماییم که در آن $B = A^{-1}$. انجام عمل فوق را به کمک یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۲۷. وارون ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: داریم:

$$[A:I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

با تعویض سطر اول و دوم خواهیم داشت:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

حال ۱- برابر سطر اول را با سطر سوم جمع نموده، در سطر سوم قرار می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

سه برابر سطر سوم را با سطر اول جمع نموده در سطر اول قرار می‌دهیم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & : & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

سطر دوم را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & : & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & : & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

سطر دوم را با سطر سوم جمع نموده، حاصل را در سطر سوم قرار می‌دهیم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & : & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & : & 1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(۳-) برابر سطر سوم را با سطر دوم جمع نموده، حاصل را در سطر دوم قرار می‌دهیم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1/2 & : & 1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال سطر سوم را در ۲ ضرب می‌کنیم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

لذا وارون ماتریس A عبارتست از:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

تذکره: هرگاه ماتریس A وارون پذیر نباشد، تبدیل آن به ماتریس واحد امکان پذیر نیست.

مثال ۲۸. نشان دهید ماتریس زیر وارون پذیر نیست.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

حل: با انجام عملیاتی مشابه عملیات مثال ۲۷ داریم:

$$\begin{aligned} [A:I] &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & : & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & : & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & : & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & : & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & : & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & : & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

چون تمام عناصر سطر سوم A به وسیله اعمال سطری مقدماتی تبدیل به صفر شدند، لذا A ماتریسی

منفرد است، بنابراین A را نمی توان به ماتریسی واحد تبدیل نمود، در نتیجه A وارون پذیر نیست.

توجه: یک روش دیگر برای به دست آوردن وارون یک ماتریس نامنفرد استفاده از قضیه کیلی-هامیلتون است که در فصل بعد توضیح داده خواهد شد.

مجموعه مسائل فصل ششم

۱- جواب دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس به دست آورید.

$$x_1 + 0.67x_2 + 0.33x_3 = 2$$

$$0.45x_1 + x_2 + 0.55x_3 = 2$$

$$0.67x_1 + 0.33x_2 + x_3 = 2$$

جواب: $x = [1, 1, 1]^t$

۲- جواب دستگاه $Ax = b$ را به روش حذفی گاوس به دست آورید که در آن A و b به صورت زیر می باشند:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

جواب: $x = [\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]^t$

۳- با روش حذفی گاوس جواب معادلات زیر را به دست آورید.

$$x - y + z = -4$$

$$5x - 4y + 3z = -12$$

$$2x + y + z = 11$$

جواب: $z = -1, y = 6, x = 3$

۴- جواب دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس به دست آورید.

$$2x + 6y - z = -12$$

$$5x - y + 2z = 29$$

$$-3x - 4y + z = 5$$

$$\text{جواب. } z = 6, y = -2, x = 3$$

۵- جواب دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس به دست آورید.

$$(2 + 3i)x + (2 - i)y = 2 + i$$

$$(4 + 6i)x + (3 - 6i)y = -2 - 5i$$

$$\text{جواب. } y = 2 - i, x = 1 + i$$

۶- یکی از روشهای مستقیم برای حل دستگاههای معادلات خطی، روش گاوس-ژردن است که در آن به کمک اعمال سطری مقدماتی، ماتریس ضرائب دستگاه را به یک ماتریس قطری تبدیل می‌کنیم و سپس با به دست آوردن دستگاهی از معادلات به صورت زیر جواب دستگاه را به دست می‌آوریم:

$$u_{11}x_1 = c_1$$

$$u_{22}x_2 = c_2$$

...

$$u_{nn}x_n = c_n$$

بنابراین جواب دستگاه عبارتست از:

$$x_i = \frac{c_i}{u_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n$$

الگوریتم مورد نیاز را برای تبدیل ماتریس ضرائب به یک ماتریس قطری بنویسید.

۷- جواب مسائل ۱ تا ۵ را به کمک الگوریتم گاوس-ژردن به دست آورید.

۸- نشان دهید روش حذفی گاوس نمیتواند دستگاه معادلات زیر را حل کند و از آن نتیجه بگیرید که ماتریس ضرائب دستگاه ماتریسی منفرد است.

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= -7 \\ -3x + 4y + 5z &= 1/5 \\ -4x + 2y + 6z &= 0\end{aligned}$$

۹- جواب دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس و بدون محورگیری به دست آورید. محاسبات را با (۵D) انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2,099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3,901 \\ 6 \end{bmatrix}$$

جواب: $x = [-0,35, -1,50, 0,99993]^T$

۱۰- جواب دستگاه مساله ۹ را با روش حذفی گاوس و انجام عمل محورگیری به دست آورید.

جواب: $x = [0, -1, 1]^T$

۱۱- جواب دستگاه زیر را با روش حذفی گاوس یک بار بدون عمل محورگیری و بار دیگر با انجام محورگیری به دست آورید. محاسبات را با ۴D انجام دهید.

$$\begin{aligned}x + 592y &= 437 \\ 592x + 4308y &= 2251\end{aligned}$$

جواب. بدون محورگیری $y = 0,7406, x = -1,4$

با محورگیری $y = 0,7409, x = -1,590$

۱۲- دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$1^{\circ}x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$$-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25$$

$$2x_1 - x_2 + 1^{\circ}x_3 - x_4 = -11$$

$$3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15$$

قرار دهید : $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^t$ و تقریبی از جواب دستگاه در تکرار پنجم به روش ژاکوبی به دست آورید. محاسبات را با $(4D)$ انجام دهید.

جواب. $x^{(5)} = [0,9890, 2,0114, -1,0103, 1,0214]^t$

۱۳- تقریبی از جواب دستگاه مساله ۱۲ را با خطای 10^{-2} و به روش ژاکوبی به دست آورید.

جواب. $x^{(10)} = [1,00001, 1,99998, -0,99998, 0,99998]^t$

۱۴- جواب دستگاه مساله ۱۲ را به روش تکراری گاوس-سایدل در تکرار پنجم به دست آورید. محاسبات را با $4D$ انجام دهید.

جواب. $x^{(5)} = [1,00001, 2,00000, -1,00000, 1,00000]^t$

۱۵- جواب دستگاه زیر را به روش تکراری گاوس-سایدل به دست آورید.

$$-2x_1 + x_2 = -1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$x_3 - 2x_4 = 0$$

جواب. جواب دقیق عبارتست از : $x = [0,8, 0,6, 0,4, 0,2]^t$

۱۶- به روش های ژاکوبی و گاوس-سایدل جواب دستگاه زیر را به دست آورید. از یک برنامه

کامپیوتری استفاده کنید).

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 = 0$$

جواب. جواب دقیق عبارتست از:

$$\mathbf{x} = [5, -10, 10, -5, 1]^T$$

۱۷- جواب دستگاه زیر را به روش گاوس-سایدل به دست آورید، به طوری که اختلاف بین x ، y و z در دو تکرار متوالی کمتر از 0.002 گردد.

$$10x + 2y + 6z = 28$$

$$x + 10y + 9z = 7$$

$$2x - 7y - 10z = -17$$

جواب. $z = 3.994$ ، $y = -2.990$ ، $x = 1.003$

۱۸- وارون ماتریس A را در صورت وجود به دست آورید هرگاه داشته باشیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

جواب الف. $A^{-1} = A$ ، ب. $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 3/5 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

پ. A وارون پذیر نیست. ت. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

۱۹- به کمک وارون ماتریس ضرایب دستگاه $Ax = b$ را حل کنید هرگاه داشته باشیم $b = [5, -5, 0]^t$ و

الف. A ماتریس قسمت الف در مساله ۱۸ باشد.

ب. A ماتریس قسمت ب در مساله ۱۸ باشد.

پ. A ماتریس قسمت ت در مساله ۱۸ باشد.

جواب الف. $x = [10, -10, 5]^t$ ، ب. $x = [5, 0, 0]^t$ ، پ. $x = [-25, -2/5, -12/5]^t$

۲۰- دستگاههای غیرخطی زیر را حل کنید. (جواب را VD به دست آورید)
الف.

$$\begin{cases} x^2 - 10x + y^2 = -8 \\ xy^2 + x - 10y = -8 \end{cases}$$

ب.

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 0 \\ 3xy^2 - x^2 = 1 \end{cases}$$

جواب الف. $x = 1$ و $y = 1$

ب. $x = 0.5$ و $y = 0.8660254$

فصل هفتم

تعیین مقادیر ویژه ماتریسها

۱.۷ مقدمه

حل بسیاری از مسائل فیزیک و ریاضی مستلزم یافتن و یا حداقل تخمین مقادیری از λ است که به ازای بردار مخالف صفر x ، در معادله $Ax = \lambda x$ صدق کند که در آن A یک ماتریس $n \times n$ و λ یک عدد (حقیقی یا مختلط) است. این فصل به بررسی تعیین چنین λ و x می پردازد. در این فصل \mathbb{R} را مجموعه اعداد حقیقی و \mathbb{C} را مجموعه اعداد مختلط در نظر می گیریم.

۲.۷ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

فرض کنید A یک ماتریس مربع و $Ax = \lambda x$ یک دستگاه معادلات خطی باشد که λ یک مقدار ثابت و $x \neq 0$ یکی از دسته جوابهای دستگاه باشد. از $Ax = \lambda x$ داریم : $Ax = \lambda Ix$

که در آن I ماتریس واحد هم مرتبه با ماتریس A است، بنابراین :

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (1)$$

معادله (۱) یک دستگاه معادلات خطی همگن با ماتریس ضرایب $\lambda I - A$ می باشد و بنا به مطلب بیان شده در فصل ششم می دانیم شرط آن که دستگاه همگن (۱) دارای جواب غیر صفر باشد، آن است که دترمینان ضرائب دستگاه برابر صفر باشد. به عبارت دیگر داشته باشیم

$$\det(\lambda I - A) = |\lambda I - A| = 0 \quad (2)$$

هرگاه A یک ماتریس مربع مرتبه n باشد، بسط دترمینان (۲) را می توان به صورت یک چند جمله ای درجه n برحسب λ بیان نمود که آن را با $f(\lambda)$ نشان می دهیم، بنابراین خواهیم داشت :

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0 \quad (3)$$

با توجه به مطلب فوق، تعریف زیر را داریم :

تعریف ۱.۷ معادله (۳) معادله مفسر یا معادله مشخصه ماتریس A نامیده می شود، ریشه های معادله مشخصه را مقادیر ویژه ماتریس A می نامیم.

هرگاه λ یک مقدار ویژه A باشد، در این صورت یک بردار غیر صفر x وجود دارد به طوری که

$$Ax = \lambda x$$

بردار x را بردار ویژه A نظیر λ می نامیم.

مثال ۱. بردار $x = [1, 2]^t$ یک بردار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ متناظر با مقدار ویژه

$\lambda = 3$ می باشد، زیرا داریم :

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3x \end{aligned}$$

خصوصیات مقادیر ویژه

هرگاه λ یک مقدار ویژه A و x بردار ویژه نظیر λ باشد، در این صورت داریم :

$$Ax = \lambda x$$

بنابراین خواص زیر را خواهیم داشت :

خصوصیت ۱. هرگاه $\alpha \in \mathbb{C}$ ، $\alpha \neq 0$ عددی ثابت باشد در این صورت αx نیز بردار ویژه A نظیر λ است، زیرا از $Ax = \lambda x$ داریم :

$$\alpha Ax = \alpha \lambda x$$

و از آن

$$A(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$$

بنابراین αx یک بردار ویژه A نظیر λ است.

خصوصیت ۲. از $Ax = \lambda x$ داریم :

$$A(Ax) = A(\lambda x)$$

$$A^2 x = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

بنابراین $A^2 x = \lambda^2 x$ که نشان می دهد x بردار ویژه نظیر λ^2 برای A^2 است و به استقراء می توان

نشان داد که λ^k مقدار ویژه A^k است و x بردار ویژه نظیر آن است.

۳.۷ تعیین چند جمله‌ای مشخصه یک ماتریس

می‌دانیم که

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$$

چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A است و مقادیر ویژه ماتریس A ریشه‌های چند جمله‌ای فوق می‌باشند. هرگاه مرتبه ماتریس A بالا باشد روش بسط دترمینان $\lambda I - A$ برای تعیین چند جمله‌ای مشخصه روش دقیقی نیست، چرا که λ متغیر بوده و از روشهای کامپیوتری نیز نمی‌توان برای محاسبه دترمینان $\lambda I - A$ استفاده کرد. از طرفی محاسبه دترمینان به روش دستی نیز وقت‌گیر می‌باشد، لذا باید به دنبال روشهای عددی بود که در این گونه موارد بتوان به کمک کامپیوتر چند جمله‌ای مشخصه را محاسبه کرد.

روشهای به دست آوردن مقادیر ویژه ماتریس A با استفاده از چند جمله‌ای مشخصه در این قسمت سه روش زیر را برای تعیین چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A بدون بسط دترمینان $|\lambda I - A|$ معرفی می‌نماییم که این روشها عبارتند از:

۱. روش ضرائب نامعین

۲. روش کریلف

۳. روش لوری یر

۱.۳.۷ روش ضرائب نامعین برای به دست آوردن چند جمله‌ای مشخصه

ماتریس A

در چند جمله‌ای مشخصه

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$$

n مجهول داریم که عبارتند از p_1, p_2, \dots, p_n برای تعیین این مجهولات $f(\lambda)$ را در n نقطه حساب می‌کنیم که عبارتند از مقادیر $0, 1, \dots, n-1$:

$$f(0) = p_n$$

$$f(1) = 1 + p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

$$f(2) = 2^n + 2^{n-1}p_1 + 2^{n-2}p_2 + \dots + 2p_{n-1} + p_n$$

$$\vdots$$

$$f(n-1) = (n-1)^n + (n-1)^{n-1}p_1 + (n-1)^{n-2}p_2 + \dots + (n-1)p_{n-1} + p_n$$

که در آنها p_n همان مقدار $f(0)$ است. بنابراین دستگاه n معادله و n مجهولی زیر را خواهیم داشت:

$$p_n = f(0)$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} = f(1) - f(0) - 1$$

$$2^{n-1}p_1 + 2^{n-2}p_2 + \dots + 2p_{n-1} = f(2) - f(0) - 2^n. \quad (4)$$

$$\vdots$$

$$(n-1)^{n-1}p_1 + (n-1)^{n-2}p_2 + \dots + (n-1)p_{n-1} = f(n-1) - f(0) - (n-1)^n$$

بنابراین بایستی n دترمینان عددی $f(0), f(1), \dots, f(n-1)$ را حساب کنیم و سپس با حل دستگاه (۴) مقادیر p_1, p_2, \dots, p_n را به دست می‌آوریم و از آنجا چند جمله‌ای مشخصه تعیین می‌شود.

مثال ۲. به روش ضرائب نامعین، مقادیر ویژه ماتریس زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: داریم $n = 3$ و از آن مجهولات عبارتند از p_1, p_2, p_3 .

$$p_3 = f(0) = \det(-A) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$f(1) = \det(I - A) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$f(2) = \det(2I - A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

بنابراین دستگاه (۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$p_3 = 4$$

$$p_1 + p_2 = f(1) - p_3 - 1 = 0 - 4 - 1 = -5$$

$$2^2 p_1 + 2 p_2 = f(2) - f(0) - 2^2$$

لذا دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = -5 \\ 4p_1 + 2p_2 = -10 \end{cases}$$

و از آن داریم $p_1 = 0$ و $p_2 = -5$. در نتیجه چند جمله‌ای مشخصه به صورت زیر خواهد بود:

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 4) = 0$$

در نتیجه مقادیر ویژه ماتریس A عبارتند از:

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

۲.۳.۷ روش کریلف^۱ برای به دست آوردن چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A

ابتدا قضیه زیر را که به قضیه کیلی-هامیلتون موسوم است، در نظر بگیرید:

قضیه کیلی-هامیلتون^۲. هرگاه چند جمله‌ای مشخصه A به صورت زیر باشد

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$$

در این صورت $f(A) = 0$ یعنی هر ماتریس در چند جمله‌ای مشخصه خود صدق می‌کند. بنابراین :

$$A^n + p_1 A^{n-1} + p_2 A^{n-2} + \dots + p_{n-1} A + p_n I = 0 \quad (5)$$

که در آن I یک ماتریس همانی از مرتبه n و 0 ماتریس صفر از مرتبه n است. روش کریلف. در این روش هرگاه V یک بردار دلخواه مخالف صفر باشد از رابطه (۵) داریم :

$$A^n V + p_1 A^{n-1} V + p_2 A^{n-2} V + \dots + p_{n-1} A V + p_n V = 0$$

و از آن

$$p_1 A^{n-1} V + p_2 A^{n-2} V + \dots + p_{n-1} A V + p_n V = -A^n V \quad (6)$$

۱) Krylov ۲) Kaly-Hamilton

رابطه (۶) یک دستگاه معادلات خطی به شکل زیر می باشد :

$$[A^{n-1}V, A^{n-2}V, \dots, A^2V, AV, V] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = -A^n V \quad (7)$$

بنابراین با حل دستگاه (۷) مجهولات p_1 تا p_n تعیین می شوند، به شرط اینکه دترمینان ماتریس ضرایب (۷) صفر نباشد، در غیر اینصورت بایستی بردار اولیه V را عوض نمود.
مثال ۳. چند جمله ای مشخصه ماتریس زیر را به روش کریلف به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: داریم $n = 3$ و می گیریم $V = [1, -1, 1]^t$ و بایستی دستگاه زیر را تشکیل دهیم :

$$[A^2V, AV, V] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = -A^3V$$

پس از محاسبه AV ، $A^2V = A(AV)$ و $A^3V = A(A^2V)$ خواهیم داشت :

$$AV = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^2V = A \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^3V = A \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

هرگاه از روش حذفی گاوس برای حل دستگاه فوق استفاده کنیم به دستگاه بالا مثلی زیر خواهیم

رسید :

$$\begin{aligned} 7p_1 + p_3 &= 4 \\ 3p_2 - \frac{1}{7}p_3 &= \frac{109}{7} \\ \frac{19}{21}p_3 &= \frac{76}{21} \end{aligned}$$

و از آن :

$$p_3 = 4, \quad p_2 = -5, \quad p_1 = 0$$

بنابراین چند جمله‌ای مشخصه عبارتست از :

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda + 4$$

۳.۳.۷ روش لوری برای به دست آوردن چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A این روش از این مطلب استفاده می‌کند که اگر λ مقدار ویژه A باشد λ^i مقدار ویژه A^i است. هرگاهفرض کنیم λ_k مقدار ویژه A است و قرار دهیم :

$$S_i = \sum_{k=1}^n \lambda_k^i = \lambda_1^i + \lambda_2^i + \dots + \lambda_n^i$$

در این صورت λ_k^i ها مقادیر ویژه A^i هستند. همچنین S_i قابل محاسبه است زیرا می‌توان نشان داد

که

$$S_i = \text{tr}(A^i)$$

به علاوه هرگاه چند جمله‌ای مشخصه A به صورت زیر باشد :

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$$

رابطه زیر بین S_i ها و p_k برقرار است :

$$\begin{cases} p_1 = -S_1 \\ p_k = -\frac{1}{k}(S_k + p_1 S_{k-1} + p_2 S_{k-2} + \cdots + p_{k-1} S_1), & k = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

لذا با استفاده از رابطه بازگشتی فوق و داشتن p_1 می‌توان p_k ها را حساب کرد و از آن چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A تعیین می‌شود.

مثال ۴. چند جمله‌ای مشخصه ماتریس زیر را به روش لورییر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: داریم

$$S_1 = \text{tr}(A) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S_2 = \text{tr}(A^2) = 3 + 6 + 1 = 10$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 5 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S_3 = 1 - 14 + 1 = -12$$

بنابراین :

$$p_1 = -S_1 \implies p_1 = 0$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) = -\frac{1}{2}(10 + 0) = -5$$

$$p_3 = -\frac{1}{3}(S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1) = -\frac{1}{3}(-12 + 0 + 0) = 4$$

لذا

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

۴.۷ تعیین بردار ویژه نظیر یک مقدار ویژه مشخص

هرگاه λ مقدار ویژه ماتریس A باشد، برای تعیین بردار ویژه نظیر λ بایستی دستگاه زیر را حل کنیم :

$$Ax = \lambda x$$

و یا بایستی دستگاه همگن زیر را حل کنیم :

$$(\lambda I - A)x = 0$$

که چون $|\lambda I - A| = 0$ دستگاه همگن فوق بی‌نهایت جواب خواهد داشت که هر کدام مضربی از دیگری است. مطلب را به کمک یک مثال توضیح می‌دهیم :

مثال ۵. هرگاه $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه A و بردارهای ویژه نظیر آنها را به دست آورید.

حل: از $|\lambda I - A| = 0$ داریم :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \implies (\lambda - 2)^2 - 1 = 0$$

و از آن $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 3$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند. ابتدا مقدار ویژه نظیر $\lambda_1 = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$(\lambda_1 I - A)x = 0$$

$$(I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

لذا $x_1 = -x_2$ با انتخاب $x_1 = 1$ یکی از بردارهای ویژه A نظیر λ_1 عبارتست از:

$$x = [1, -1]^t$$

و سایر مقادیر ویژه متناظر با $\lambda_1 = 1$ عبارتند از بردارهای زیر که در آن α هر عدد دلخواه غیر صفر است.

$$\alpha x = \alpha [1, -1]^t$$

مثلاً $[2, -2]^t$, $[\sqrt{5}, -\sqrt{5}]^t$ و ... نیز بردارهای ویژه نظیر $\lambda_1 = 1$ می‌باشند.

به طور مشابه برای تعیین بردار ویژه A نظیر به $\lambda_2 = 3$ بایستی جواب دستگاه $(\lambda_2 I - A)x = 0$ را به دست آوریم که این دستگاه عبارتست از:

$$(3I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

لذا $x_1 = x_2$. اینجا نیز با انتخاب $x_1 = 1$ یکی از بردارهای ویژه A نظیر $\lambda_2 = 3$ عبارتست از:

$$x = [1, 1]^t$$

و سایر بردارهای ویژه متناظر با $\lambda_2 = 3$ عبارتند از بردارهای زیر که در آن‌ها β هر عدد دلخواه مخالف صفر است:

$$\beta x = \beta [1, 1]^t$$

۵.۷ به دست آوردن وارون یک ماتریس با استفاده از قضیه

کیلی-هامیلتون

هرگاه چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$$

بنا به قضیه کیلی-هامیلتون داریم:

$$A^n + p_1 A^{n-1} + p_2 A^{n-2} + \dots + p_{n-1} A + p_n I = 0 \quad (۸)$$

هرگاه $|A| \neq 0$ ، با ضرب A^{-1} در طرفین رابطه (۸) خواهیم داشت:

$$A^{n-1} + p_1 A^{n-2} + p_2 A^{n-3} + \dots + p_{n-1} I + p_n A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{p_n} [A^{n-1} + p_1 A^{n-2} + p_2 A^{n-3} + \dots + p_{n-1} I] \quad (۹)$$

بنابراین با مشخص بودن چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A و ارون ماتریس نامنفرد A از رابطه (۹) تعیین می‌شود.

مثال ۶. ورون ماتریس زیر را به دست آورید :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: در مثالهای قبلی به دست آوردیم :

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda + 4 = 0$$

و از آن خواهیم داشت :

$$A^3 - 5A + 4I = 0$$

بنابراین از رابطه (۹) داریم :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{4}[A^3 - 5I] \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تذکر. همانگونه که رابطه (۹) نشان می‌دهد هرگاه در چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A مقدار

p_n یعنی مقدار ثابت برابر صفر باشد در این صورت ماتریس A ورون‌پذیر نمی‌باشد.

۶.۷ روشهای تکراری برای تعیین مقادیر ویژه

روشهای تکراری اغلب برای مسائلی که در آنها نیاز به محاسبه یک یا دو مقدار ویژه می باشد، مناسب هستند. البته طریقی برای تعمیم این روشها جهت یافتن تمام مقادیر ویژه یک ماتریس وجود دارد. در این روش فرض بر این است که ماتریس A دارای مولفه های حقیقی و از مرتبه n بوده و دارای n بردار ویژه مستقل خطی است.

روش توانی

در این روش به دنبال یافتن بزرگترین مقدار ویژه A «از نظر قدر مطلق» بدون استفاده از بسط دترمینان مشخصه هستیم. فرض کنید $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A و V_1, V_2, \dots, V_n بردارهای ویژه نظیر آنها هستند. همچنین بردارهای ویژه، یک مجموعه مستقل خطی تشکیل می دهند. همچنین فرض کنید، داریم:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

یعنی بزرگترین مقدار ویژه از نظر قدر مطلق، منحصر به فرد است.

هرگاه $y \neq 0$ یک بردار دلخواه باشد، در این صورت بردارهای زیر را محاسبه می کنیم:

$$Ay, \quad A^2y = A(Ay), \quad A^3y = A(A^2y), \dots, A^m y = A(A^{m-1}y), \dots$$

در این صورت با افزایش m اثبات می شود که:

$$\frac{(A^m y)_j}{(A^{m-1} y)_j} \simeq \lambda_1 \quad (10)$$

که در آن $(A^m y)_j$ مولفه j ام بردار $A^m y$ است. برای بهتر بودن تقریب، برای $j = 1, \dots, n$

مقدار λ_1 را از رابطه (۱۰) محاسبه نموده و میانگین آنها را به عنوان تقریب λ_1 ارائه می دهیم.

همچنین بردار ویژه نظیر λ_1 به صورت زیر به دست می آید:

$$V_1 = A^m y$$

که می‌توان V_1 را با تقسیم نمودن مولفه‌هایش بر بزرگترین مولفه آن، از نظر قدر مطلق، نرمال نمود. نکته: معمولاً قرار می‌دهیم $m = 10$ ، یعنی 10 تکرار انجام می‌دهیم. مثال ۷. به روش توانی، بزرگترین مقدار ویژه ماتریس زیر را از نظر قدر مطلق، به دست آورده و بردار ویژه نظیر آن را نیز به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: قرار می‌دهیم $y = [1, 1, 1]^T$ و بردارهای زیر را حساب می‌کنیم:

$$Ay, A^2y, \dots, A^{10}y$$

برای راحتی بردارهای فوق را در جدول زیر خلاصه نموده‌ایم

y	Ay	A^2y	A^3y	A^4y	A^5y	A^6y	A^7y	A^8y	A^9y	$A^{10}y$
۱	۵	۲۴	۱۱۱	۵۰۴	۲۲۶۸	۱۰۱۶۱	۴۵۴۲۳	۲۰۲۸۳۳	۹۰۵۲۳۸	۴۰۳۸۹۳۹
۱	۴	۱۵	۶۰	۲۵۲	۱۰۸۹	۴۷۷۹	۲۱۱۴۱	۹۳۹۰۶	۴۱۷۹۸۷	۱۸۶۲۴۶۰
۱	۲	۶	۲۱	۸۱	۳۳۳	۱۴۲۲	۶۲۰۱	۲۷۳۴۲	۱۲۱۲۴۸	۵۳۹۲۳۵

از جدول فوق تقریبهای λ_1 عبارتند از:

$$\lambda_1 \approx \frac{4038939}{905238} = 4,462 \quad (3D)$$

$$\lambda_1 \approx \frac{1862460}{417987} = 4,456 \quad (3D)$$

$$\lambda_1 \approx \frac{539235}{121248} = 4,447 \quad (3D)$$

بنابراین λ_1 را میانگین تقریبهای فوق در نظر می‌گیریم، یعنی

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{3}(4,462 + 4,456 + 4,447) \approx 4,455 \quad (3D)$$

لذا

$$\lambda_1 \simeq 4,46 \quad (2D)$$

V_1 بردار ویژه نظیر λ_1 عبارتست از:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 4038939 \\ 1862460 \\ 539235 \end{bmatrix}$$

هرگاه V_1 را در $\frac{1}{4038939}$ ضرب کنیم، بردار ویژه نرمال شده نظیر λ_1 عبارتست از:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,46 \\ 0,13 \end{bmatrix}$$

مجموعه مسائل فصل هفتم

۱- چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر مشخصه ماتریسهای زیر را به روشهای ضرائب نامعین، کریلف و لورییر به دست آورید.

الف. $A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 \\ -2 & -4 & -4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ جواب. $f(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

ب. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ جواب. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

پ. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ جواب. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

ت. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ جواب. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

ث. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ جواب. $f(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20 = 0$

۲- بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه A را در قسمتهای الف تا ت مساله ۱ به دست آورید.

۳- با استفاده از قضیه کیلی-هامیلتون و ارون ماتریسهای مساله ۱۸ فصل ششم را به دست آورید.

۴- تقریبی از بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A را به روش توانی در هر کدام از حالتهای زیر به دست آورید.

الف. تقریبی از $\lambda_1 = 2$ برای ماتریس A قسمت الف مساله ۱

ب. تقریبی از $\lambda_2 = 2$ برای ماتریس A قسمت پ مساله ۱

پ. تقریبی از $\lambda_3 = 3$ برای ماتریس A قسمت ت مساله ۱

۵- تقریبی از بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه مساله قبل را به روش توانی به دست آورید. بردار y را به دلخواه، خودتان انتخاب کنید.

۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & -10 & 0 \\ 5 & -13 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $y = [1, 1, 1]^t$ ، بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A را از نظر قدر

مطلق و بردار ویژه متناظر با آن را به دست آورید. (قرار دهید $m = 5$)

جواب. $\lambda_1 \simeq -9,11408$ و $V_1 = A^5 y$ که نرمال شده V_1 عبارتست از

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0,75660 \\ 1 \\ -0,06704 \end{bmatrix}$$

فصل هشتم

روش حداقل مربعات

۱.۸ مقدمه

درونیایی به وسیله چند جمله‌ای درونیاب در فصل سوم مورد بررسی قرار گرفت. روند مورد بحث در فصل سوم را در نظر بگیرید. جدول زیر مربوط به تابع $f(x) = \sqrt{x}$ می‌باشد:

x_i	۰	۱	۸	۲۷	۶۴
f_i	۰	۱	۲	۳	۴

فرض کنید بخواهیم با استفاده از درونیایی لاگرانژ، تخمینی از $\sqrt{۲۰}$ به دست آوریم. برای این منظور و با محاسبه چند جمله‌ایهای لاگرانژ خواهیم داشت:

$$P(x) = 1 \times \frac{x(x-8)(x-27)(x-64)}{1(-7)(-26)(-63)} + 2 \times \frac{x(x-1)(x-27)(x-64)}{8(7)(-19)(-56)} \\ + 3 \times \frac{x(x-1)(x-8)(x-64)}{27(26)(19)(-37)} + 4 \times \frac{x(x-1)(x-8)(x-27)}{64(63)(56)(37)}$$

برای تخمین $\sqrt[3]{20}$ قرار می‌دهیم $x = 20$ و از آن خواهیم داشت :

$$\sqrt[3]{20} \simeq P(20) = -1,3139 \quad (4D)$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود تقریب $\sqrt[3]{20}$ به کمک $P(x)$ منفی است، که به وضوح نتیجه‌ای نادرست است. با رسم منحنی $y = \sqrt[3]{x}$ مشاهده می‌شود که شکل منحنی در فاصله $[8, 27]$ به یک خط مستقیم نزدیک است. لذا هرگاه در فاصله $[8, 27]$ چند جمله‌ای درونیاب درجه اول را به دست آوریم خواهیم داشت :

$$P_1(x) = 2 \times \frac{x - 27}{8 - 27} + 3 \times \frac{x - 8}{27 - 8}$$

و از آن تقریب $\sqrt[3]{20}$ عبارتست از :

$$\sqrt[3]{20} \simeq P_1(20) = \frac{14}{19} + \frac{36}{19} = \frac{50}{19} = 2,6316 \quad (4D)$$

که از مقدار واقعی یعنی $(4D) \sqrt[3]{20} = 2,7144$ خیلی دور نیست.

مطلب فوق نشان می‌دهد که درونیابی به کمک چند جمله‌ای از درجه بالا همواره نمی‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

۲.۸ خط حداقل مربعات

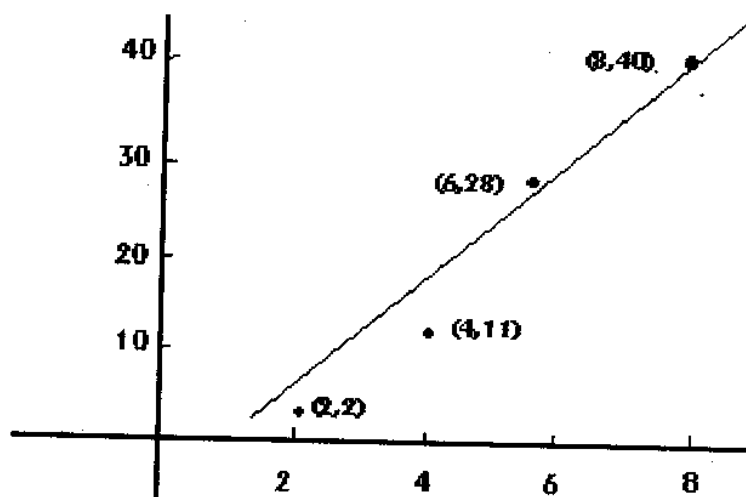
مساله تخمین مقادیر یک تابع در نقاط غیر جدولی را برای داده‌های جدول زیر در نظر بگیرید، که این داده‌ها از طریق آزمایش به دست آمده‌اند.

جدول (۱)

x_i	y_i
۲	۲
۴	۱۱
۶	۲۸
۸	۴۰

هرگاه از روش لاگرانژ برای ساختن چند جمله‌ای درونیاب استفاده کنیم، به یک منحنی (حداکثر) از درجه ۳ نیاز داریم. اما با رسم داده‌ها به نظر می‌رسد، فرض شود که رابطه واقعی بین داده‌ها یک رابطه خطی است. اما به خاطر خطای جمع آوری داده‌ها (که از طریق آزمایش به دست آمده‌اند) هیچ خطی داده‌ها را دقیقاً برازش نمی‌کند. شکل زیر رسم مقادیر (x_i, y_i) از جدول (۱) را نشان

می‌دهد :



لذا در چنین حالتی، جستجوی تابع تقریب‌سازی که بر داده‌های معلوم دقیقاً منطبق است، نامعقول بوده و راه بهتر یافتن بهترین (به یک مفهوم) خطی است که بتواند به عنوان تابع تقریب ساز به کار رود، ولو اینکه بر داده‌ها در هر نقطه دقیقاً منطبق نباشد.

لذا هرگاه قرار دهیم

$$P(x) = a_1x + a_0$$

در این صورت خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} P(x_i) &= a_1 x_i + a_0 \\ &= \bar{y}_i \end{aligned}$$

در تقریب حداقل مربعات، مساله عبارتست از تعیین ضرایب a_0 و a_1 به طوری که مقدار زیر را مینیمم کند :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m (y_i - (a_1 x_i + a_0))^2 \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن m تعداد کل داده‌ها و y_i ها مقادیر داده شده می‌باشند.

قضیه‌ای از حساب توابع چند متغیره

شرط لازم برای دارا بودن اکسترمم در یک نقطه : هرگاه $f(x, y)$ در نقطه (a, b) دارای یک مینیمم (یا ماکزیمم) باشد، در این صورت لازم است داشته باشیم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \quad (2)$$

شرط (۲) برای توابع n متغیره که $n > 2$ نیز برقرار است.

با توجه به قضیه فوق، هرگاه S بخواهد در a_0 و a_1 کمترین مقدار را داشته باشد، بایستی مشتقهای اول S نسبت به a_0 و a_1 صفر باشد، یعنی بایستی

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

بنابراین از اینکه $S = \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0)^2$ و از شرایط (۳) خواهیم داشت :

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^m 2(y_i - a_1 x_i - a_0)(-1) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^m 2(y_i - a_1 x_i - a_0)(-x_i) = 0 \quad (5)$$

از رابطه (۴) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0) &= 0 \\ \sum_{i=1}^m y_i - a_1 \sum_{i=1}^m x_i - a_0 \sum_{i=1}^m 1 &= 0 \\ \sum_{i=1}^m y_i - a_1 \sum_{i=1}^m x_i - m a_0 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

و از رابطه (۵) نیز خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (y_i - a_1 x_i - a_0) x_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i - a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 - a_0 \sum_{i=1}^m x_i &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

با مرتب نمودن روابط (۶) و (۷) به روابط زیر خواهیم رسید :

$$\begin{cases} m a_0 + (\sum x_i) a_1 = \sum y_i \\ (\sum x_i) a_0 + (\sum x_i^2) a_1 = \sum x_i y_i \end{cases} \quad (8)$$

تعریف. معادلات (۸) معادلات نرمال نامیده می‌شوند.

از حل دستگاه (۸) با استفاده از روش کرامر، برای a_0 و a_1 مقادیر زیر را خواهیم داشت :

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (9)$$

$$a_1 = \frac{m \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

نکته: می‌توان نشان داد که هرگاه حداقل دو تا از x_i ها متمایز باشند، مقادیر a_0 و a_1 موجود و از (۹) قابل محاسبه می‌باشند.

مثال ۱. فرض کنید داده‌های زیر نتیجه یک سری آزمایش باشند:

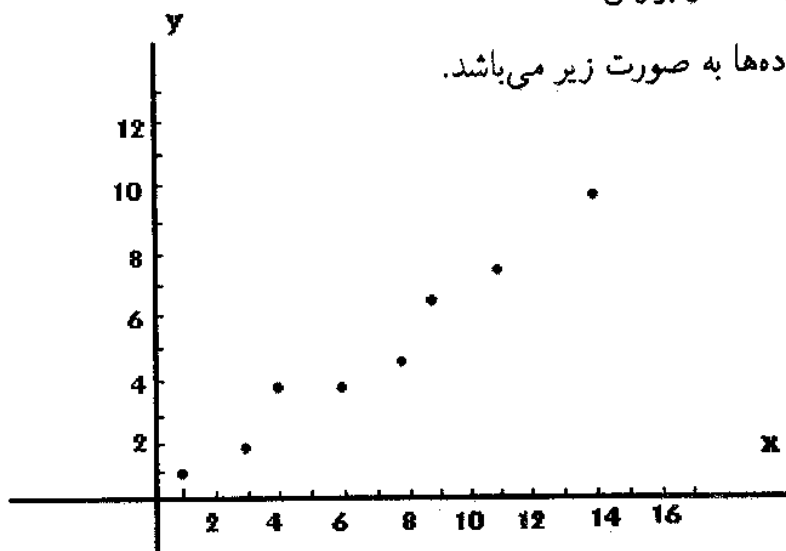
جدول (۲)

x	y
۱	۱
۳	۲
۴	۴
۶	۴
۸	۵
۹	۷
۱۱	۸
۱۴	۹

داده‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و خط حداقل مربعاتی را به دست آورید که

داده‌های جدول (۲) را برازش کند.

حل: رسم داده‌ها به صورت زیر می‌باشد.



برای محاسبه a_0 و a_1 از معادلات (۹) جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

جدول (۳)

x	y	x^2	xy
۱	۱	۱	۱
۳	۲	۹	۶
۴	۴	۱۶	۱۶
۶	۴	۳۶	۲۴
۸	۵	۶۴	۴۰
۹	۷	۸۱	۶۳
۱۱	۸	۱۲۱	۸۸
۱۴	۹	۱۹۶	۱۲۶
۵۶ مجموع	۴۰	۵۲۴	۳۶۴

بنابراین a_0 و a_1 عبارتند از:

$$a_0 = \frac{40 \times 524 - 56 \times 364}{8 \times 524 - (56)^2} = \frac{6}{11}$$

$$a_1 = \frac{8 \times 364 - 56 \times 40}{8 \times 524 - (56)^2} = \frac{7}{11}$$

لذا معادله خط کمترین مربعات عبارتست از:

$$y = \frac{7}{11}x + \frac{6}{11}$$

در این صورت خطای زیر بهترین خطایی است که می‌توان با استفاده از یک خط برای برازش داده‌های جدول (۲) به روش حداقل مربعات به دست آورد:

$$\left\{ \sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y}_i)^2 \right\}^{1/2} = 1,595$$

که در آن داریم :

$$y_1 - \bar{y}_1 = 1 - \left(\frac{7}{11} + \frac{6}{11} \right) = -\frac{2}{11}$$

$$y_2 - \bar{y}_2 = 2 - \left(\frac{7}{11} \times 3 + \frac{6}{11} \right) = -\frac{5}{11}$$

⋮

$$y_8 - \bar{y}_8 = 9 - \left(\frac{7}{11} \times 14 + \frac{6}{11} \right) = -\frac{5}{11}$$

۳.۸ چند جمله‌ای حداقل مربعات

مساله تقریب‌سازی مجموعه‌ای از داده‌ها به صورت

$$\{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, m\}$$

با یک چند جمله‌ای از درجه n که $n < m$ به صورت

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

با استفاده از روش حداقل مربعات، مشابه حالت خط کمترین مربعات می‌باشد. در حالتی مشابه حالت خطی می‌نویسیم :

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

و برای $x = x_i$ داریم :

$$\bar{y}_i = P(x_i) = a_n x_i^n + \dots + a_1 x_i + a_0$$

در اینجا، هدف حداقل ساختن مقدار زیر است :

$$S = \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y}_i)^2$$

و یا

$$S = \sum_{i=1}^m (y_i - a_n x_i^n - \dots - a_p x_i^p - \dots - a_1 x_i - a_0)^2 \quad (10)$$

بنابراین مساله عبارت است از یافتن ثابتهای a_0, a_1, \dots, a_n به طوری که مقدار S حداقل گردد مانند حالت خطی، برای آن که S حداقل شود، لازم است داشته باشیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (11)$$

در اینجا نیز مشابه حالت قبل از (۱۰) و شرایط (۱۱) معادلات نرمال را به صورت زیر به دست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} m a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 + \dots + \left(\sum x_i^k\right) a_k + \dots + \left(\sum x_i^n\right) a_n &= \sum y_i \\ \left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 + \dots + \left(\sum x_i^{k+1}\right) a_k + \dots + \left(\sum x_i^{n+1}\right) a_n &= \sum x_i y_i \\ \vdots & \\ \left(\sum x_i^p\right) a_0 + \left(\sum x_i^{p+1}\right) a_1 + \dots + \left(\sum x_i^{k+p}\right) a_k + \dots + \left(\sum x_i^{n+p}\right) a_n &= \sum x_i^p y_i \\ \vdots & \\ \left(\sum x_i^n\right) a_0 + \left(\sum x_i^{n+1}\right) a_1 + \dots + \left(\sum x_i^{k+n}\right) a_k + \dots + \left(\sum x_i^{2n}\right) a_n &= \sum x_i^n y_i \end{aligned}$$

مثال ۲. داده‌های جدول زیر را با چند جمله‌ای حداقل مربعات درجه دو، برازش کنید. داده‌ها و چند جمله‌ای حداقل مربعات درجه دو را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

جدول (۴)

i	۱	۲	۳	۴	۵
x_i	۰	۰٫۲۵	۰٫۵	۰٫۷۵	۱٫۰۰
y_i	۱٫۰۰۰۰	۱٫۲۸۴۰	۱٫۶۴۸۷	۲٫۱۱۷۰	۲٫۷۱۸۳

حل: در این مساله $m = 5$, $n = 2$ و سه معادله نرمال عبارتند از:

$$5a_0 + 2,5a_1 + 1,875a_2 = 8,7680$$

$$2,5a_0 + 1,875a_1 + 1,5625a_2 = 5,4514$$

$$1,875a_0 + 1,5625a_1 + 1,3828a_2 = 4,4015$$

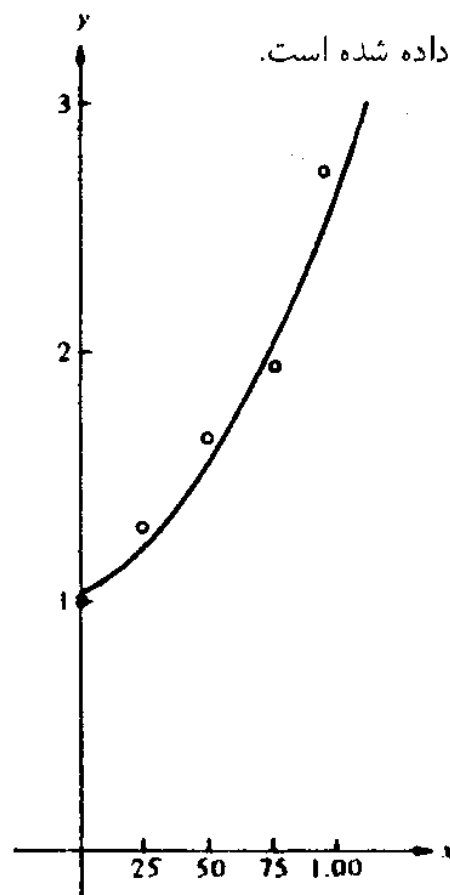
جواب این دستگاه عبارت است از

$$a_0 = 1,0052, \quad a_1 = 0,8641, \quad a_2 = 0,8437$$

بنابراین چند جمله‌ای کمترین مربعات درجه دو برازنده داده‌های فوق عبارت است از

$$P_2(x) = 1,0052 + 0,8641x + 0,8437x^2$$

که نمودار آن در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل (۳)

برای محاسبه خطای روش حداقل مربعات بایستی $y_i - \bar{y}$ و یا $y_i - P(x_i)$ را برای $i = 1, 2, 3, 4, 5$ محاسبه کنیم و از آن تقریبهای جدول (۵) را خواهیم داشت.

جدول (۵)					
i	۱	۲	۳	۴	۵
x_i	۰	۰٫۲۵	۰٫۵	۰٫۷۵	۱٫۰۰
y_i	۱٫۰۰۰۰	۱٫۲۸۴۰	۱٫۶۴۸۷	۲٫۱۱۷۰	۲٫۷۱۸۳
$P(x_i)$	۱٫۰۰۵۲	۱٫۲۷۴۰	۱٫۶۴۸۲	۲٫۱۲۷۹	۲٫۷۱۳۰
$y_i - P(x_i)$	-۰٫۰۰۵۲	۰٫۰۱۰۰	۰٫۰۰۰۵	-۰٫۰۱۰۹	۰٫۰۰۵۳

لذا خطای

$$\left\{ \sum_{i=1}^5 (y_i - P(x_i))^2 \right\}^{1/2} = ۰٫۰۱۶۶$$

بهترین خطایی است که می‌توان با استفاده از یک چند جمله‌ای درجه دو به دست آورد.

۴.۸ انواع دیگری از تقریب‌های حداقل مربعات

در خیلی از مسائل، تقریب به وسیله چند جمله‌ای مناسب نیست، زیرا وقتی (x_i, y_i) ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، ممکن است مجموعه نقاط رسم شده شبیه یک منحنی نمایی، هذلولی و یا یک منحنی مثلثاتی باشد.

در حالت نمایی رابطه بین x و y می‌تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$y = a_0 e^{a_1 x} \quad (۱۲)$$

در حالت هذلولی رابطه x و y می‌تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$y = \frac{1}{a_0 + a_1 x} \quad (۱۳)$$

در حالت مثلثاتی رابطه x و y می‌تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود :

$$y = a_0 + a_1 \cos wx \quad (۱۴)$$

که در آن w مقداری معلوم است.

در زیر برای هر کدام از حالت‌های فوق، معادلات نرمال را به دست می‌آوریم :

۱.۴.۸ حالت نمایی

هرگاه x_i ها و $\ln y_i$ ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم و رابطه‌ای خطی بین $(x_i, \ln y_i)$ ها ظاهر شود، در چنین حالتی معقول است که تقریبی به صورت زیر در نظر بگیریم :

$$y = a_0 e^{a_1 x}$$

و از آن خواهیم داشت :

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x$$

هرگاه قرار دهیم $A = \ln a_0$ و $z = \ln y$ در این صورت داریم :

$$z = A + a_1 x \quad (۱۵)$$

رابطه (۱۵) رابطه‌ای خطی بین z و x می‌باشد. لذا روش حداقل مربعات به منظور حداقل کردن مقدار زیر می‌باشد :

$$S = \sum (\ln y_i - A - a_1 x_i)^2$$

با روش به کار رفته در قسمت‌های قبل معادلات نرمال در اینجا عبارتند از :

$$\begin{cases} mA + a_1 \sum x_i = \sum \ln y_i \\ A \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i \ln y_i \end{cases} \quad (۱۶)$$

که در آن پس از تعیین A و a_1 قرار می‌دهیم $A = \ln a_0$ و از آن

$$a_0 = e^A$$

مثال ۳. داده‌های جدول زیر را در نظر بگیرید :

جدول (۶)		
i	x_i	y_i
۱	۱,۰۰	۵,۱۰
۲	۱,۲۵	۵,۷۹
۳	۱,۵۰	۶,۵۳
۴	۱,۷۵	۷,۴۵
۵	۲,۰۰	۸,۴۶

اگر x_i ها با $\ln y_i$ ها رسم شوند، معلوم می‌شود که داده‌ها رابطه‌ای خطی دارند. لذا تقریب حداقل مربعات برای برازش داده‌های فوق به صورت نمایی است. این تابع نمایی را تعیین کنید.
 حل: قرار می‌دهیم $y = a_0 e^{a_1 x}$ و یا $\ln y = \ln a_0 + a_1 x$. بنابراین با استفاده از معادلات نرمال (۱۶) برای به دست آوردن $\ln a_0$ و a_1 از روابط (۹) جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

جدول (۷)					
i	x_i	y_i	$\ln y_i$	x_i^2	$x_i \ln y_i$
۱	۱,۰۰	۵,۱۰	۱,۶۲۹	۱,۰۰۰۰	۱,۶۲۹
۲	۱,۲۵	۵,۷۹	۱,۷۵۶	۱,۵۶۲۵	۲,۱۹۵
۳	۱,۵۰	۶,۵۳	۱,۸۷۶	۲,۲۵۰۰	۲,۸۱۴
۴	۱,۷۵	۷,۴۵	۲,۰۰۸	۳,۰۶۲۵	۳,۵۱۴
۵	۲,۰۰	۸,۴۶	۲,۱۳۵	۴,۰۰۰۰	۴,۲۷۰
مجموع	۷,۵۰		۹,۴۰۴	۱۱,۸۷۵	۱۴,۴۲۲

لذا با استفاده از مقادیر جدول (۷) و روابط (۹) خواهیم داشت :

$$a_1 = \frac{(5)(14,422) - (7,5)(9,404)}{(5)(11,875) - (7,5)^2} = 0,5056$$

$$\ln a_0 = \frac{(11,875)(9,404) - (14,422)(7,5)}{(5)(11,875) - (7,5)^2} = 1,122$$

و از آن

$$a_0 = 3,071$$

لذا تقریب مورد نظر عبارتست از :

$$y_i = 3,071 e^{0,5056 x_i}$$

تقریب فوق در نقاط x_i از جدول (۶) مقادیر زیر را دارا می باشد :

جدول (۸)			
i	x_i	y_i	$3,071 e^{0,5056 x_i}$
۱	۱,۰۰	۵,۱۰	۵,۰۹
۲	۱,۲۵	۵,۷۹	۵,۷۸
۳	۱,۵۰	۶,۵۳	۶,۵۶
۴	۱,۷۵	۷,۴۵	۷,۴۴
۵	۲,۰۰	۸,۴۶	۸,۴۴

۲.۴.۸ حالت هذلولی

هر گاه با رسم نقاط (x_i, y_i) یک هذلولی را برای برازش داده ها مناسب تشخیص دهیم، قرار می دهیم

$$y = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$$

در این حالت قرار می‌دهیم $z = \frac{1}{y}$ و از آن خواهیم داشت :

$$z = a_0 + a_1 x$$

که رابطه‌ای خطی بین x و z می‌باشد. بنابراین در این حالت مساله این است که مقدار زیر را حداقل کنیم :

$$S = \sum (z_i - \bar{z}_i)^2 \quad (۱۷)$$

که در آن داریم : $\bar{z}_i = a_0 + a_1 x_i$ چون $z_i = \frac{1}{y_i}$ بنابراین حداقل کردن (۱۷) عبارتست از حداقل نمودن مقدار زیر

$$S = \sum \left(\frac{1}{y_i} - a_0 - a_1 x_i \right)^2$$

در این حالت معادلات نرمال عبارتند از :

$$\begin{cases} m a_0 + a_1 \sum x_i = \sum \frac{1}{y_i} \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum \frac{x_i}{y_i} \end{cases} \quad (۱۸)$$

از حل (۱۸) مقادیر a_0 و a_1 تعیین می‌شوند.

۳.۴.۸ حالت مثلثاتی

هرگاه y_i ها نوسان داشته باشند و به صورت متناوب ظاهر شوند، یعنی y_i ها تقریباً تکرار شوند، منحنی تقریب ساز را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$y = a_0 + a_1 \cos wx$$

که در آن w مقداری معلوم است. در این حالت قرار می‌دهیم :

$$t = \cos wx$$

لذا خواهیم داشت :

$$y = a_0 + a_1 t$$

که رابطه‌ای خطی بین y و t می‌باشد. بنابراین هدف عبارتست از حداقل نمودن مقدار زیر :

$$S = \sum (y_i - a_0 - a_1 \cos wx_i)^2$$

و از آن معادلات نرمال عبارتند از :

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum \cos(wx_i) = \sum y_i \\ a_0 \sum \cos(wx_i) + a_1 \sum \cos^2(wx_i) = \sum y_i \cos(wx_i) \end{cases} \quad (19)$$

از حل دستگاه (۱۹) مقادیر a_0 و a_1 قابل تعیین هستند.

مجموعه مسائل فصل هشتم

۱- برای داده‌های زیر خط حداقل مربعات را به دست آورید.

x	۰	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۶	۰٫۸
y	۰٫۹	۱٫۹	۲٫۸	۳٫۳	۴٫۲

جواب. $y = 4x + ۱٫۰۲$

۲- برای داده‌های زیر خط حداقل مربعات را به دست آورید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۰	۱	۲	۲	۳

جواب. $y = ۰٫۵x + ۱٫۶$

۳- داده‌های جدول زیر را در نظر بگیرید :

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۳	۴	۳	۴	۲

الف. داده‌های جدول را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ب. خط حداقل مربعات را برای برازش داده‌های جدول به دست آورید.

جواب. ب) $y = 0,2x + 2,13$

۴- برای داده‌های زیر خط حداقل مربعات را به دست آورید.

x	۳۶	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۷	۵۰
y	۲,۵	۲,۷	۲,۸	۲,۹	۳,۰	۳,۲	۳,۳	۳,۵

جواب. $y = 0,077x - 0,38$

۵- خط حداقل مربعات را برای برازش داده‌های جدول زیر به دست آورید.

x	۲۵	۲۹	۳۳	۳۶	۴۲	۵۴
y	۴۲	۴۵	۵۰	۴۸	۷۳	۹۰

جواب. $y = 1,78x - 6,99$

۶- خط حداقل مربعات مربوط به داده‌های جدول (۱) را به دست آورید.

جواب. $y = 6,55x - 12,5$

۷- برای داده‌های جدول زیر خط حداقل مربعات را به دست آورید.

x	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲	۲۴
y	۳,۸	۳,۷	۴,۰	۳,۹	۴,۳	۴,۲	۴,۲	۴,۴	۴,۵	۴,۵

جواب. $y = 0,045x + 3,49$

۸- برای داده‌های جدول زیر خط حداقل مربعات را تعیین کنید.

x	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲	۲۴
y	۴,۶	۴,۸	۴,۶	۴,۹	۵,۰	۵,۴	۵,۱	۵,۵	۵,۶	۶,۰

جواب. $y = 0,07x + 4,07$

۹- داده‌های جدول زیر را با چند جمله‌ای حداقل مربعات درجه دو، برازش کنید.

x	۰	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
y	۰	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	۱

جواب. $P(x) = -0,3334x^2 + 1,1667x - 0,0046$

۱۰- داده‌های جدول مساله ۷ را با چند جمله‌ای حداقل مربعات از درجه دو، برازش کنید.

جواب. $P(x) = -0,0023x^2 + 0,11x + 3,73$

۱۱- داده‌های جدول مساله ۳ را با چند جمله‌ای حداقل مربعات درجه دو، برازش کنید.

جواب. $P(x) = -0,36x^2 + 2,70x - 1,20$

۱۲- تقریبی به صورت $P(x) = Ae^{Mx}$ برای برازش داده‌های جدول زیر با استفاده از روش

حداقل مربعات به دست آورید.

x	۱	۲	۳	۴
y	۷	۱۱	۱۷	۲۷

جواب. $P(x) = 4,48e^{0,45x}$

۱۳- داده‌های جدول زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و تقریبی به صورت $P(x) = Ae^{Mx}$

برای برازش داده‌ها با استفاده از روش حداقل مربعات به دست آورید.

x	۱	۲	۳	۴
y	۶۰	۳۰	۲۰	۱۵

جواب. $P(x) = 84,8e^{-0,456x}$

۱۴- الف. معادلات نرمال را برای برازش m داده معلوم با یک منحنی به صورت $y = a(b^x)$

به دست آورده و از آن a و b را تعیین کنید.

راهنمایی: برای $\ln y = \ln a + x \ln b$ قرار دهید:

$$z = \ln y, \quad A = \ln a, \quad B = \ln b$$

لذا $z = A + Bx$ که رابطه‌ای خطی بین x و z است و بایستی A و B را طوری به دست آورید که مجموع زیر حداقل شود:

$$S = \sum (\ln y_i - A - Bx_i)^2$$

ب. با استفاده از قسمت الف داده‌های زیر را با یک منحنی به صورت $y = a(b^x)$ برازش کنید.

x	y	x	y
۰	۳	۲٫۵	۱۷
۰٫۵	۴	۳٫۰	۲۴
۱٫۰	۶	۳٫۵	۳۳
۱٫۵	۹	۴٫۰	۴۸
۲٫۰	۱۲		

جواب. الف. معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} mA + (\sum x_i)B = \sum \ln y_i \\ (\sum x_i)A + (\sum x_i^2)B = \sum x_i \ln y_i \end{cases}$$

ب. جواب بایستی به $y = 3(2^x)$ نزدیک باشد.

۱۵- داده‌های زیر را در نظر بگیرید:

x	y	x	y
-۸	۳۰	-۲	۶
-۶	۱۰	۰	۵
-۴	۹	۲	۴
		۴	۴

الف. داده‌های فوق را با یک منحنی به صورت $y = \frac{1}{a_0 + a_1 x}$ برازش کنید.

ب. داده‌های فوق را با یک منحنی به صورت $y = a(b^x)$ برازش کنید.

۱۶- الف. معادلات نرمال را برای برازش m داده معلوم با یک منحنی به معادله $y = ax^b$ به دست آورده و از

a و b را تعیین کنید.

راهنمایی: برای $\ln y = \ln a + b \ln x$ قرار دهید:

$$z = \ln y, \quad A = \ln a, \quad t = \ln x$$

لذا $z = A + bt$ که رابطه‌ای خطی بین z و t است و بایستی A و b را طوری به دست آورید که مجموع ز

حداقل شود:

$$S = \sum (\ln y_i - A - b \ln x_i)^2$$

ب. با استفاده از روابط به دست آمده برای a و b در قسمت الف، داده‌های زیر را به کمک یک منحنی به صورت

$y = ax^b$ برازش کنید.

x	y
۱	۵
۱٫۵	۶
۲	۳۵
۳	۱۱۰
۴	۲۰۰

جواب. الف. معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} mA + (\sum \ln x_i)b = \sum \ln y_i \\ (\sum \ln x_i)A + (\sum (\ln x_i)^2)b = \sum (\ln x_i)(\ln y_i) \end{cases}$$

ب. جواب بایستی به $y = 3x^3$ نزدیک باشد.

۱۷- الف. معادلات نرمال را برای برازش m داده معلوم توسط یک منحنی به صورت

$$y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

به دست آورده و از آن a_0 ، a_1 و b_1 را تعیین کنید.

راهنمایی: بایستی a_0 ، a_1 و b_1 را تعیین کنید که مجموع زیر حداقل شود:

$$S = \sum (y_i - a_0 - a_1 \cos x_i - b_1 \sin x_i)^2$$

ب. با استفاده از مقادیر به دست آمده برای a_0 ، a_1 و b_1 در قسمت الف، داده‌های زیر را با یک

منحنی به صورت $y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ برازش کنید:

x	y	x	y
۰	۳٫۰	۳٫۶	۲٫۰
۰٫۴	۲٫۱	۴٫۰	۲٫۹
۰٫۸	۱٫۳	۴٫۴	۳٫۵
۱٫۲	۰٫۵	۴٫۸	۴٫۰
۱٫۶	۰	۵٫۲	۴٫۲
۲٫۰	-۰٫۲	۵٫۶	۴٫۰
۲٫۴۰	۰	۶٫۰	۳٫۵
۲٫۸	۰٫۳		
۳٫۲	۱٫۱		

جواب. ب. جواب بایستی به $y = 2 + \cos x - 2 \sin x$ نزدیک باشد.

ب. داده‌های فوق را با یک منحنی به صورت $y = a(b^x)$ برازش کنید.

۱۶- الف. معادلات نرمال را برای برازش m داده معلوم با یک منحنی به معادله $y = ax^b$ به دست آورده و از آن a و b را تعیین کنید.

راهنمایی: برای $\ln y = \ln a + b \ln x$ قرار دهید:

$$z = \ln y, \quad A = \ln a, \quad t = \ln x$$

لذا $z = A + bt$ که رابطه‌ای خطی بین z و t است و بایستی A و b را طوری به دست آورید که مجموع زیر حداقل شود:

$$S = \sum (\ln y_i - A - b \ln x_i)^2$$

ب. با استفاده از روابط به دست آمده برای a و b در قسمت الف، داده‌های زیر را به کمک یک منحنی به صورت $y = ax^b$ برازش کنید.

x	y
۱	۵
۱٫۵	۶
۲	۳۵
۳	۱۱۰
۴	۲۰۰

جواب. الف. معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} mA + (\sum \ln x_i)b = \sum \ln y_i \\ (\sum \ln x_i)A + (\sum (\ln x_i)^2)b = \sum (\ln x_i)(\ln y_i) \end{cases}$$

ب. جواب بایستی به $y = 3x^3$ نزدیک باشد.

۱۷- الف. معادلات نرمال را برای برازش m داده معلوم توسط یک منحنی به صورت

$$y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

به دست آورده و از آن a_0 ، a_1 و b_1 را تعیین کنید.

راهنمایی: بایستی a_0 ، a_1 و b_1 را تعیین کنید که مجموع زیر حداقل شود:

$$S = \sum (y_i - a_0 - a_1 \cos x_i - b_1 \sin x_i)^2$$

ب. با استفاده از مقادیر به دست آمده برای a_0 ، a_1 و b_1 در قسمت الف، داده‌های زیر را با یک

منحنی به صورت $y = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$ برازش کنید:

x	y	x	y
۰	۳٫۰	۳٫۶	۲٫۰
۰٫۴	۲٫۱	۴٫۰	۲٫۹
۰٫۸	۱٫۳	۴٫۴	۳٫۵
۱٫۲	۰٫۵	۴٫۸	۴٫۰
۱٫۶	۰	۵٫۲	۴٫۲
۲٫۰	-۰٫۲	۵٫۶	۴٫۰
۲٫۴۰	۰	۶٫۰	۳٫۵
۲٫۸	۰٫۳		
۳٫۲	۱٫۱		

جواب. ب. جواب بایستی به $y = 2 + \cos x - 2 \sin x$ نزدیک باشد.

پیوست برنامه‌های کامپیوتری

در این قسمت برنامه‌های کامپیوتری الگوریتم‌های ارائه شده در کتاب با استفاده از نرم‌افزار ++C نوشته شده است. این برنامه‌ها به ترتیب عبارتند از:

- | | |
|--------------------------------|--|
| Bisection method | ۱- روش دویخشی |
| Fixed point iteration method | ۲- روش تکرار ساده |
| Secant method | ۳- روش وتری |
| Regula falsi method | ۴- روش نابجایی |
| Newton-Raphson method | ۵- روش نیوتن-رفسون |
| Trapezoid integration | ۶- انتگرال‌گیری به روش ذوزنقه‌ای |
| Simpon's method | ۷- روش انتگرال‌گیری سیمپسون |
| Gaussian Rule (2-point method) | ۸- روش انتگرال‌گیری گاوس دونقطه‌ای |
| Gaussian Rule (3-point method) | ۹- روش انتگرال‌گیری گاوس سه‌نقطه‌ای |
| Gauss method | ۱۰- روش حذف گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی |
| Gauss - Seidel | ۱۱- روش تکراری گاوس - سایدل برای حل دستگاه معادلات خطی |
| Euler method | ۱۲- روش اویلر برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول |
| | ۱۳- روش مرتبه دوم رونگه - کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول |
| | ۱۴- روش مرتبه چهارم رونگه - کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول |
| | ۱۵- روش مرتبه چهارم رونگه - کوتا برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر: |

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, p) \\ p' = f_2(x, y, p) \end{cases}, \quad y(x_0) = y_0, \quad p(x_0) = p_0.$$

Bisection method

۱- روش دوبخشی

```
//Bisection method

#include<iostream.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>

double F(double x){return 3*x-exp(-x);}

void main(){
    float a,b,eps,x;
    int n=1;
    cout<<"Enter a,b,eps";
    cin>>a>>b>>eps;
    x=(a+b)/2;
    while(fabs(F(x))>=eps){
        if(F(x)*F(a)>0)
            a=x;
        else
            b=x;
        x=(a+b)/2;
        n++;
    }
    cout<<"ROOT = "<<x;
    cout<<"ITERATION = "<<n;
    getch();
}
```

Fixed point iteration method**۲- روش تکرار ساده**

```
//Fixed point iteration method
```

```
#include<iostream.h>
```

```
#include<math.h>
```

```
#include<conio.h>
```

```
double F(double x){return 100*sin(x)-x;}
```

```
double G(double x){return asin(0.01*x);}
```

```
void main(){
```

```
    clrscr();
```

```
    double eps,x0,x1,x;
```

```
    int n=1;
```

```
    cout<<"Enter x0,eps";
```

```
    cin>>x0>>eps;
```

```
    x=G(x0);
```

```
    while(fabs(x-x0)>=eps){
```

```
        x0=x;
```

```
        x=G(x0);
```

```
        n++;
```

```
    }
```

```
    cout<<"ROOT = "<<x;
```

```
    cout<<"\nITERATION = "<<n;
```

```
    getch();
```

```
}
```

Secant method

۳- روش وتری

```
//Secant method

#include<iostream.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>
double F(double x){return x*x*x*x-sinh(x);}
void main(){
    clrscr();
    double eps,x0,x1,x;
    int n=1;
    cout<<"Enter x0,x1,eps\n";
    cin>>x0>>x1>>eps;
    x=x1-(F(x1)*(x1-x0))/(F(x1)-F(x0));
    while(fabs(x1-x0)>=eps){
        cout<<x0<<"\t"<<x1<<"\t"<<x<<"\n";
        x0=x1;
        x1=x;
        x=x1-(F(x1)*(x1-x0))/(F(x1)-F(x0));
        n++;
    }
    cout<<"ROOT = "<<x;
    cout<<"\nITERATION = "<<n;
    getch();
}
```

Regula falsi method

۴- روش نابجایی

```
//Regula falsi method

#include<iostream.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>
double F(double x){return x*x*x*x-sinh(x);}

void main(){
    clrscr();
    double eps,a,b,x;
    int n=1;
    cout<<"Enter a,b,eps";
    cin>>a>>b>>eps;
    x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a));
    while(fabs(F(x))>=eps){
        cout<<x<<"\n";
        if(F(x)*F(a)>0)
            a=x;
        else
            b=x;
        x=(a*F(b)-b*F(a))/(F(b)-F(a));
        n++;
    }
    cout<<"ROOT = "<<x;
    cout<<"\nITERATION = "<<n;

    getch();
}
```

Newton-Raphson method

۵- روش نیوتن-رفسون

```
//Newton-Raphson method

#include<iostream.h>
#include<math.h>
#include<conio.h>

double F(double x){return 100*sin(x)-x;}
double FPrime(double x){return 100*cos(x)-1;}
void main(){
    clrscr();
    double eps,x0,x;
    int n=1;
    cout<<"Enter x0,eps";
    cin>>x0>>eps;
    x=x0-F(x0)/FPrime(x0);
    while(fabs(F(x))>=eps){
        cout<<x<<"\n";
        x0=x;
        x=x0-F(x0)/FPrime(x0);
        n++;
    }
    cout<<"ROOT = "<<x;
    cout<<"\nITERATION = "<<n;
    getch();
}
```

Trapezoid integration

۶- انتگرال‌گیری به روش ذوزنقه‌ای

```
// Trapezoid integration

#include<iostream.h>
#include<math.h>

double F(double x){return exp(x);}

void main(){
    double a,b,n,s,h;
    cout<<"Enter a,b,n";
    cin>>a>>b>>n;
    s=(F(a)+F(b))/2;
    h=(b-a)/n;
    for(int i=1;i<n;i++){
        s=s+F(a+i*h);
    }
    s=s*h;
    cout<<"Integral = "<<s;
}
```

Simpson's method

۷- روش انتگرالگیری سیمپسون

```
//Simpson's Method

#include<iostream.h>
#include<math.h>

double F(double x){return sqrt(x);}

void main(){
    double a,b,n,s=0,h,h2,h3;
    cout<<"Enter a,b,n";
    cin>>a>>b>>n;
    h=(b-a)/n;
    h2=h/2;
    h3=F(a+h2);
    for(int i=1;i<n;i++){
        s=s+F(a+i*h);
        h3=h3+F(a+i*h+h2);
    }
    s=h/6*(F(a)+4*h3+2*s+F(b));
    cout<<"Integral = "<<s;
}
```


Gaussian Rule (2-point method)**۸- روش انتگرالگیری گاوس دو نقطه‌ای**

```
//Gaussian Rule(2-point Method)

#include<iostream.h>
#include<math.h>

double F(double x){return sin(x);}
double g(double x){return M_PI*sin((M_PI*(x+1))/4)/4;}

void main(){
    double s=0;
    double p[2]={-0.577350269,0.577350269};
    for(int i=0;i<2;i++){
        s=s+g(p[i]);
    }
    cout<<"Integral = "<<s;
}
```

Gaussian Rule (3-point method)

۹- روش انتگرالگیری گاوس سه نقطه‌ای

```
//Gaussian Rule(3-point Method)

#include<iostream.h>
#include<math.h>

double F(double x){return sin(x);}
double g(double x){return M_PI*sin(M_PI*(x+1)/4)/4;}

void main(){
    double s=0;
    double p[3],w[3];
    p[0]=-0.77459667;
    p[1]=0.;
    p[2]=-p[0];
    w[0]=5./9.;
    w[1]=8./9.;
    w[2]=w[0];
    for(int i=0;i<3;i++){
        s=s+w[i]*g(p[i]);
    }
    cout<<"Integral = "<<s;
}
```

Gauss method

۱۰- روش حذف گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی

```
//Gause Method

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

void main() {
    double a[10][10], x[10], m, k, g;
    int n, i, j, t;

    for(i=0; i<10; i++) {
        x[i]=0;
    }
    cout<<"Enter the number of matrix :";
    cin>>n;
    cout<<"Enter Matrix A:\n";
    cout.precision(5);

    for(i=0; i<n; i++)
        for(j=0; j<n+1; j++)
            cin>>a[i][j];
    for(i=0; i<n-1; i++) {
        for(j=i+1; j<n; j++)
            if(fabs(a[i][i])<fabs(a[j][i])) {
                for(t=0; t<=n; t++) {
                    k=a[i][t];
                    a[i][t]=a[j][t];
                    a[j][t]=k;
                }
            }
        for(j=i+1; j<n; j++) {
            g=-a[j][i]/a[i][i];
            if(g!=0)
                for(t=i; t<=n; t++) {
                    a[j][t]=a[i][t]*g+a[j][t];
                }
        }
    }
    for(j=n-1; j>=0; j--) {
        g=a[j][j];
        m=0;
        for(t=j+1; t<n; t++) {
            m=m+a[j][t]*x[t];
        }
        if(g!=0) x[j]=(a[j][n]-m)/g;
    }

    for(i=0; i<n; i++)
        cout<<"x["<<i<<"]="<<x[i]<<" \n" ;
}
```

۱۱- روش تکراری گاوس - سایدل برای حل دستگاه معادلات خطی Gauss - Seidel

```

//Gauss-Seidel

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

void main(){
    double a[10][10];
    double y[10],x[10],m[10],k,g,d,u;
    int n,i,j,t,p,l,c=0,s=0,r=1;

    for(i=0;i<10;i++){
        x[i]=0;
        y[i]=1;
        m[i]=0;
    }
    cout<<"Enter the number of matrix :";
    cin>>n;
    cout<<"Enter error :";
    cin>>u;
    cout<<"Enter Matrix A:\n";
    cout.precision(5);

    for(i=0;i<n;i++)
        for(j=0;j<n+1;j++)
            cin>>a[i][j];

    for(i=0;i<n;i++){
        g=a[i][i];
        if(g!=0)
            for(j=0;j<n+1;j++)
                a[i][j]=(1/g)*(a[i][j]);
    }
    while(c<100000){
        c++;
        r=1;
        for(l=0;l<n;l++){
            r=r*(fabs(x[l]-y[l])<u) ;
            if(r==1)
                break;
            for(i=0;i<n;i++){
                g=a[i][n];
                x[i]=y[i];
                for(l=0;l<n;l++){
                    m[l]=0;
                    for(j=0;j<n;j++){
                        if(i!=j)
                            m[i]=m[i]+a[i][j]*y[j];
                    }
                    y[i]=(g-m[i]);
                }
            }
        }
        for(i=0;i<n;i++)
            cout<<"x["<<i<<"]="<<x[i]<<" \n" ;

        cout<<"the number of stage is :"<<c;
    }
}

```

Euler method ۱۲- روش اویلر برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

```
//Euler method

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

double F(double x,double y){return x+y;}
void main(){
    double x,y,x0,y0,h,M;
    cout<<"Enter x0,y0,h,M\n";
    cin>>x0>>y0>>h>>M;
    x=x0;
    y=y0;
    cout<<"\nx\ty";
    cout<<"\n-----" <<'\n'<<x<<'\t'<<y;
    for(int i=1;i<=M;i++) {
        y=y+h*F(x,y);
        x=x+h;
        cout<<'\n'<<x<<'\t'<<y;
    }
}
```

۱۳- روش مرتبه دوم رونگه - کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

```
// Second order Runge-Kutta method for solving the following problem
//  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ 

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

double F(double x, double y) {return x+y;}

void main() {
    double x, y, x0, y0, h, M, k1, k2, z;
    cout<<"Enter x0, y0, h, M\n";
    cin>>x0>>y0>>h>>M;
    x=x0;
    y=y0;
    cout<<"\nx\ty";
    cout<<"\n-----" <<'\n' <<x<<'\t' <<y;
    for(int i=1; i<=M; i++) {
        k1=h*F(x, y);
        x=x+h;
        z=y+k1;
        k2=h*F(x, z);
        y=y+(k1+k2)/2;
        cout<<'\n' <<x<<'\t' <<y;
    }
}
```

۱۴- روش مرتبه چهارم رونگه - کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

```
// Fourth order Runge-Kutta method for solving the following problem
//  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ 

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

double F(double x, double y) {return x+y;}

void main() {
    double x, y, x0, y0, h, M, k1, k2, k3, k4, z;
    cout<<"Enter x0, y0, h, M\n";
    cin>>x0>>y0>>h>>M;
    x=x0;
    y=y0;
    cout<<"\nx\t y";
    cout<<"\n-----"<<"\n"<<x<<"\t"<<y;
    for(int i=1; i<=M; i++) {
        k1=h*F(x, y);
        x=x+0.5*h;
        z=y+0.5*k1;
        k2=h*F(x, z);
        z=y+0.5*h;
        k3=h*F(x, z);
        x=x+0.5*h;
        z=y+k3;
        k4=h*F(x, z);
        y=y+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
        cout<<"\n"<<x<<"\t"<<y;
    }
}
```

۱۵- روش مرتبه چهارم رونگه - کوتا برای حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

```
// Fourth Order Runge-Kutta method for solving the following problem
//  $y' = f_1(x, y, p)$ ,  $p' = f_2(x, y, p)$ ,  $y(x_0) = y_0$ ,  $p(x_0) = p_0$ 

#include <iostream.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>

double F1(double x, double y, double p) {return p;}
double F2(double x, double y, double p) {return -101*p - 100*y;}

void main() {
    long double x, y, p, x0, y0, p0, h, M, k1, k2, k3, k4, z, l1, l2, l3, l4, w;
    cout << "Enter x0, y0, p0, h, M\n";
    cin >> x0 >> y0 >> p0 >> h >> M;
    x = x0;
    y = y0;
    p = p0;
    cout.precision(5);
    for(int i=1; i<=M; i++) {
        k1 = h * F1(x, y, p);
        l1 = h * F2(x, y, p);

        x = x + 0.5 * h;
        z = y + 0.5 * k1;
        w = p + 0.5 * l1;
        k2 = h * F1(x, z, w);
        l2 = h * F2(x, z, w);

        z = y + 0.5 * k2;
        w = p + 0.5 * l2;
        k3 = h * F1(x, z, w);
        l3 = h * F2(x, z, w);

        x = x + 0.5 * h;
        z = y + k3;
        w = p + l3;
        k4 = h * F1(x, z, w);
        l4 = h * F2(x, z, w);

        y = y + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6.;
        p = p + (l1 + 2 * l2 + 2 * l3 + l4) / 6.;

        cout << "\n\nx\ty\tp\t\n-----" << '\n' << x << '\t' << y << '\t' << p << '\n';
        cout << "\n\tk1=" << k1 << "\tk2=" << k2 << "\tk3=" << k3 << "\tk4=" << k4 << '\n';
        cout << "\tl1=" << l1 << "\tl2=" << l2 << "\tl3=" << l3 << "\tl4=" << l4;
    }
}
```


فهرست راهنما

الف

انریا تریس یک ماتریس ۱۴۸

استفاده از وارون ماتریس برای حل دستگاه ۱۶۱

الگوریتم ۱

الگوریتم روش حل دستگاههای بالا مثلثی ۱۵۴

حذفی گاوس ۱۵۶

دو بخشی ۲۳

روننگ کوتای مرتبه چهار ۱۲۸

دو ۱۲۶

ب

بردار ستونی ۱۴۴

سطری ۱۴۴

بردار ویژه ۱۸۸

برنامه روش اویلر ۱۲۴

تکرار ساده برای حل معادله $F(x) = 0$ ۴۱

دو بخشی برای حل معادله $F(x) = 0$ ۲۳

ذوزنقه ای برای محاسبه $\int_a^b F(x) dx$ ۹۰

روننگ کوتای مرتبه چهار ۱۲۹

دو ۱۲۶

سیمپسون برای حل معادله $\int_a^b F(x) dx$ ۹۲

گاوس سه نقطه ای برای محاسبه $\int_a^b F(x) dx$ ۱۰۲

۱۰۲

نابجایی برای حل معادله $F(x) = 0$ ۲۸

نیوتن برای حل معادله $F(x) = 0$ ۳۲

وتری برای حل معادله $F(x) = 0$ ۳۸

برونیایی ۴۹

ت

تابع جدولی ۵۰

ترانواده یک ماتریس ۱۴۷

تساوی دو ماتریس ۱۴۲

تقریب اضافی ۲

تقریب نقصانی ۲

تفاضل پسر ۶۷

نیوتن ۶۸

تفاضل پیشرو ۶۴

نیوتن ۶۵

ج

چند جمله ای درونیاب ۵۱

ح

حداکثر خطا در حاصلضرب سه عدد تقریبی ۱۰

خ

خصوصیات مقادیر ویژه ۱۸۹

خطای اولیه ۶

باقیمانده یا برشی ۱۴،۶

تفاضل ۷

حاصل جمع ۷

حاصلضرب ۹

روش سیمپسون ۱۱۲

عملیات ۶

قاعده نقطه میانی ۱۱۳

گرد کردن ۶

محاسبه توابع ۱۴

محاسبه فرمولها ۱۲

مطلق ۳

حدی ۳

نسبی ۵

د

دترمینان ۱۴۹

درونیابی ۴۹

دستگاه تکرار ژاکوبی ۱۶۵

گاوس-سایدل ۱۶۷

همگن ۱۶۲	معکوس پذیر ۱۴۷
ر	مربع ۱۴۲
روش توانی ۲۰۱	منفرد ۱۴۷
حذفی گاوس ۱۵۵	نامنفرد ۱۴۷
زاکوبی ۱۶۴	واحد ۱۴۵
ضرایب مجهول ۹۷	محورگیری ۱۶۱، ۱۵۹
گاوس ۹۷	معادلات نرمال ۲۱۱
گاوس دو نقطه‌ای برای محاسبه $\int_a^b F(x)dx$ ۹۹	معادله مفسر ۱۸۸
گاوس-سایدل ۱۶۷	ن
ش	نقطه منفرد ۱۰۳
شرط کافی برای همگرایی روش تکرار ساده ۴۱	
ض	
ضرب دو ماتریس ۱۴۴	
عدد در ماتریس ۱۴۳	
ع	
عملیات سطری مقدماتی ۱۵۳	
ف	
فرمول چند جمله‌ای درونیاب بر حسب تفاضلات	
پسرو ۶۹	
پیشرو ۶۶	
تقسیم شده نیوتن ۵۸	
در نقطه‌ای گاوس ۹۸	
سه نقطه‌ای گاوس ۱۰۱	
فرمولهای باز ۱۰۶	
بسته ۱۰۶	
ق	
قضیه کیلی-هامیلتون ۱۹۳	
م	
ماتریس بالا مثلثی ۱۴۶	
پایین مثلثی ۱۴۶	
صفر ۱۴۵	
قطری ۱۴۵	

پیوست - مسائل چهارگزینه‌ای

این پیوست شامل سه قسمت است. در قسمت اول ۶۱ مسئله چهارگزینه‌ای با پاسخهای تشریحی ارائه شده است. در همین قسمت دو بحث بیان نشده در کتاب به طور مفصل تشریح شده است. این مباحث عبارتند از مرتبه همگرایی برای روشهای تکراری و انتگرال‌گیری به شیوه رامبرگ (به مسائل ۴۸ و ۵۶ مراجعه نمایید).

در قسمت دوم مسائل چهارگزینه‌ای آزمون کارشناسی ارشد سال‌های مختلف با پاسخ‌های تشریحی ارائه شده‌اند.

تجرباً در قسمت سوم، برای تمرین بیشتر، مسائل چهارگزینه‌ای ابتدا بدون پاسخ در اختیار شما قرار گرفته است که حل آنها به صورت جداگانه در قسمت چهارم این پیوست ارائه شده است.

قسمت اول (مسائل چهارگزینه‌ای حل شده)

۱- اگر اعداد $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ را تا چهار رقم اعشار گرد کنیم با توجه به خطای حاصل چه بازه‌ای برای $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ به دست می‌آید؟

$$[0,9128, 0,9130](4) \quad [0,9138, 0,9140](3) \quad [0,9136, 0,9138](2) \quad [0,9132, 0,9134](1)$$

حل:

$$\sqrt{3} = 1,7321 + e_1,$$

$$e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$\sqrt{7} = 2,6458 + e_2,$$

$$e_2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$\sqrt{7} - \sqrt{3} = 0,9137 + e_r$$

که در آن $e_r \leq e_1 + e_2$ لذا $e_r \leq 10^{-4}$ بنابراین

$$0,9137 - 10^{-4} \leq \sqrt{7} - \sqrt{3} \leq 0,9137 + 10^{-4}$$

$$0,9136 \leq \sqrt{7} - \sqrt{3} \leq 0,9138$$

در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

۲- اگر اعداد را تا چهار رقم اعشار محاسبه کنیم حداکثر خطای محاسبه $\pi\sqrt{3}$ کدام است؟

$$1,97231 \times 10^{-4} (2)$$

$$1,82351 \times 10^{-4} (1)$$

$$2,43685 \times 10^{-4} (4)$$

$$2,12457 \times 10^{-4} (3)$$

حل:

$$\pi = 3,1416 + e_\pi,$$

$$e_\pi \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

$$\sqrt{3} = 1,7321 + e_{\sqrt{3}},$$

$$e_{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

$$\pi\sqrt{3} = (3,1416 \times 1,7321) + e_1,$$

در آن بنا به رابطه (۳) فصل اول

$$e_1 \leq 3,1416 e_{\sqrt{3}} + 1,7321 e_\pi$$

$$e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} (3,1416 + 1,7321)$$

$$e_1 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \times 4,8737 = 2,4368 \times 10^{-4}$$

اما $\pi\sqrt{3} = 5,4416 + e_2$ چون حاصل ضرب اعداد $3,1416$ و $1,7321$ در محاسبه $\pi\sqrt{3}$ بیشتر از چهار رقم اعشار دارد، هنگام نمایش حاصل ضرب دو عدد مذکور با چهار رقم اعشار خطای دیگری مرتکب شده‌ایم و خطای حدی کل را با e_2 نشان داده‌ایم، برای e_2 داریم:

$$e_2 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} + e_1$$

$$e_2 \leq 0,5 \times 10^{-2} + 2,4368 \times 10^{-2} = 2,43685 \times 10^{-2}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۳- اگر اعداد را تا سه رقم اعشار محاسبه کنیم حجم کره‌ای با شعاع $\frac{V}{3}$ کدام است؟

- (۱) $53,184$ (۲) $53,213$ (۳) $53,218$ (۴) هیچکدام

حل:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = xyz^3$$

$$x = \frac{4}{3} = 1,333 + e_x, \quad e_x \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$y = \pi = 3,142 + e_y, \quad e_y \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$z = \frac{V}{3} = 2,333 + e_z, \quad e_z \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$V = (1,333)(3,142)(2,333)^3 + e_v$$

$$V = 53,184 + e'_v$$

که در آن مشابه مسأله ۲ داریم:

$$e'_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} + e_v$$

در اینجا داریم:

$$e_v \leq e_x \frac{\partial V}{\partial x} + e_y \frac{\partial V}{\partial y} + e_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

که عبارت سمت راست را بایستی در $(1,333, 3,142, 2,333)$ محاسبه کرد. لذا

$$e_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} \{yz^3 + xz^3 + 3xyz^2\}$$

مقدار سمت راست به ازای $x = ۱,۳۳۳$ ، $y = ۳,۱۴۲$ و $z = ۲,۳۳۳$ به صورت زیر خواهد بود:

$$e_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} \{ ۳۹,۸۹۸ + ۱۶,۹۲۷ + ۶۸,۳۸۹ \}$$

$$e_v \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} \times ۱۲۵,۲۱۴$$

$$e_v \leq ۰,۰۰۶۲۶$$

لذا $e'_v \leq ۰,۰۰۶۳۱$ و از آن

$$V = ۵۳,۱۸۴ + e'_v \Rightarrow V = ۵۳,۱۸۴ \pm ۰,۰۰۶۳۱$$

با محاسبه دو مقدار فوق هیچکدام از گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ صحیح نیست لذا گزینه (۴) صحیح است.

۴- در تست قبل حداکثر خطای محاسبه حجم کره کدام است؟

$$۰,۰۰۶۹ (۴)$$

$$۰,۰۰۶۷ (۳)$$

$$۰,۰۰۶۳ (۲)$$

$$۰,۰۰۵۹ (۱)$$

حل: با توجه به محاسبات در تست قبل داریم $e'_v \leq ۰,۰۰۶۳$ لذا گزینه (۲) صحیح است.

۵- در تابع $f = xyz^2z^3$ اگر خطای مطلق متغیرها Δx ، Δy و Δz باشند خطای نسبی f تقریباً با کدام گزینه برابر است؟

$$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} (۲)$$

$$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} (۱)$$

$$y^2z^2\frac{\Delta x}{x} + 2xz^2\Delta y + 3xy^2z\Delta z (۴)$$

$$\frac{\Delta x}{x} + 2\frac{\Delta y}{y} + 3\frac{\Delta z}{z} (۳)$$

حل: با توجه به رابطه (۵) فصل اول و با به کارگیری خطای نسبی به جای خطای مطلق حدی داریم.

$$\frac{\Delta f}{f} \leq \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\Delta z}{z}$$

از اینکه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$$

لذا

$$\frac{\Delta f}{f} \leq y^2z^2\frac{\Delta x}{x} + 2xyz^2\frac{\Delta y}{y} + 3xy^2z^2\frac{\Delta z}{z}$$

و از آن

$$\frac{\Delta f}{f} \leq y^2z^2\frac{\Delta x}{x} + 2xz^2\Delta y + 3xy^2z\Delta z$$

در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

۶- در تابع $y = 5^x$ نسبت خطای نسبی y به خطای مطلق x کدام است؟

- (۱) $\ln 5$ (۲) 5 (۳) $x \ln 5$ (۴) $5x$

حل:

$$y = 5^x \Rightarrow e_y = \frac{dy}{dx} e_x = \ln 5 \times 5^x \times e_x$$

$$\text{خطای نسبی } y = \frac{e_y}{y} = \frac{\ln 5 \times 5^x \times e_x}{5^x} = e_x \ln 5$$

بنابراین $\frac{\text{خطای نسبی } y}{e_x}$ برابر است با $\ln 5$ لذا گزینه (۱) صحیح است.

۷- در محاسبه تابع $y = x \ln x$ به ازای $x = \pi$ و $\pi = 3,142$ خطای مطلق حداکثر چند است؟

- (۱) $3,51 \times 10^{-2}$ (۲) $3,59 \times 10^{-2}$ (۳) $1,17 \times 10^{-2}$ (۴) $1,072 \times 10^{-2}$

حل:

$$e_y \leq \frac{dy}{dx} e_x = (\ln x + 1) e_x \leq (\ln 3,142 + 1) \times \frac{1}{4} \times 10^{-2}$$

$$e_y \leq 1,072 \times 10^{-2}$$

دقت کنید که با توجه به تستهای قبل داریم $e_x \leq \frac{1}{4} \times 10^{-2}$ بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۸- در محاسبه $w = x \sin \ln z$ به ازای $x = 21,00$ ، $y = 0,86$ و $z = 0,6$ حداکثر خطای مطلق کدام است؟

- (۱) $0,25$ (۲) $0,27$ (۳) $0,21$ (۴) هیچکدام

حل:

$$e_w \leq \frac{\partial w}{\partial x} e_x + \frac{\partial w}{\partial y} e_y + \frac{\partial w}{\partial z} e_z$$

$$\leq \sin y \ln z e_x + x \cos y \ln z e_y + \frac{x}{z} \sin y e_z$$

$$\leq \frac{1}{4} \times 10^{-2} \left\{ \sin(0,86) \ln(0,6) + 21,00 \cos(0,86) \ln(0,6) + \frac{21}{0,6} \sin(0,86) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \times 10^{-2} \{ 0,76(1,72) + 21 \times 0,65 \times 1,72 + 3,75 \times 0,76 \}$$

$$13,8176 \times 10^{-2} \approx 0,14$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۹- می‌خواهیم مقدار تقریبی $\cos x$ را با استفاده از سری مک لورن آن به‌ازای $x = \frac{\pi}{9}$ و با دقت سه رقم اعشار به‌دست آوریم. به چند جمله از بسط فوق نیاز داریم؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

حل:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \dots$$

بایستی

$$\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}, \quad x = 0,349$$

رابطه فوق به‌ازای $n = 1$ برقرار نیست اما به‌ازای $n = 2$ برقرار است بنابراین با تقریب موردنظر $\cos x$ عبارت است از

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

لذا سه جمله از سری مورد نیاز است در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۱۰- در تست قبل مقدار تقریبی $\cos \frac{\pi}{9}$ کدام گزینه است؟

- (۱) ۰,۹۳۴ (۲) ۰,۹۳۶ (۳) ۰,۹۳۷ (۴) ۰,۹۴۰

حل: با توجه به تست قبل برای $x = 0,349$ مقدار تقریبی $\cos x$ عبارت است از

$$\cos \frac{\pi}{9} \simeq 1 - \frac{(0,349)^2}{2} + \frac{(0,349)^4}{24} = 0,940$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۱۱- محاسبه انتگرال $I = \int_{2,2}^{2,4} e^x dx$ با استفاده از قاعده ذوزنقه خواسته شده است. در صورتی که بخواهید قدرمطلق ماکزیمم خطای حاصل از محاسبه این انتگرال کمتر از 10^{-5} باشد ماکزیمم مقدار گام h برابر است با:

- (۱) $e^{-2,2} \times 10^{-2}$ (۲) $e^{-1,7} \times 10^{-1}$ (۳) $10^{-2} \times e^{-2,4}$ (۴) $10^{-2} \times e^{-1,7}$

حل:

$$|ET(h)| \leq \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

که در آن M_2 کران بالایی برای $f''(x)$ در فاصله $[2/2, 3/4]$ است، یعنی $|f''(x)| \leq M_2$ داریم:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f''(x) = e^x$$

چون تابع $f''(x) = e^x$ صعودی است لذا بر فاصله $[2/2, 3/4]$ داریم $|f''(x)| \leq e^{3/4}$

$$|ET(h)| \leq \frac{3/4 - 2/2}{12} \times h^2 \times e^{3/4}$$

می‌خواهیم مقدار سمت راست از 10^{-5} کمتر باشد لذا بایستی

$$0.1h^2 e^{3/4} \leq 10^{-5} \Rightarrow h^2 \leq 10^{-4} e^{-3/4}$$

بنابراین بایستی

$$h \leq 10^{-2} \sqrt{e^{-3/4}} = 10^{-2} e^{-3/8} \Rightarrow h \leq 10^{-2} e^{-0.375}$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۱۲- برای محاسبه $f'(x_0)$ از فرمول تقریبی زیر استفاده می‌کنیم:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h}$$

خطای برشی این فرمول برابر است با:

$$\frac{h^2}{6} f^{(3)}(z) \quad (۴) \quad \frac{h^2}{3} f^{(3)}(z) \quad (۳) \quad \frac{-h^2}{6} f^{(3)}(z) \quad (۲) \quad \frac{-h^2}{3} f^{(3)}(z) \quad (۱)$$

حل: با توجه به بسط تیلور داریم

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(z)$$

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{4h^2}{2} f''(x_0) + \frac{8h^3}{6} f'''(z)$$

$$\text{بنابراین در نتیجه} \quad \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} = f'(x_0) - \frac{1}{3} h^2 f'''(z)$$

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} + \frac{1}{3} h^2 f'''(z)$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۱۳- حداکثر درجه چند جمله‌ای گذرنده از نقاط $(0, 2), (1, 4), (2, 8), (3, 14), (4, 22)$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

حل: چون نقاط x_i متساوی الفاصله هستند لذا جدول تفاضلات به صورت زیر خواهد بود:

x_i	f_i	تفاضلات مرتبه			
		اول	دوم	سوم	چهارم
۰	۲				
		۲			
۱	۴		۲		
		۴		۰	
۲	۸		۲		۰
		۶		۰	
۳	۱۴		۲		
		۸			
۴	۲۲				

چون تفاضلات مرتبه سوم به بعد صفر هستند لذا درجه چندجمله‌ای مورد نظر ۲ می‌باشد. در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۱۴- اگر $f(x) = a \cdot x^n$ در این صورت تفاضل مرتبه n ام $\Delta^n f(x)$ کدام است؟ (h فاصله بین مقادیر متوالی x در درونیابی می‌باشد)

(۴) تابعی از x است(۳) $a \cdot n!h^n$ (۲) $a \cdot nh$ (۱) $a \cdot h^n$

حل: هرگاه $f(x) = x^n$ می‌توان نشان داد $\Delta^n f(x) = n!h^n$ لذا برای $f(x) = a \cdot x^n$ داریم $\Delta^n f(x) = a \cdot n!h^n$ و از آن گزینه (۳) صحیح است.

۱۵- اگر دنباله x_0, x_1, \dots, x_{10} نقاط متساوی الفاصله با فاصله h از هم باشند و $f_i = f(x_i)$ در این صورت $\Delta^{10} f_2$ برابر کدام است؟

$$\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} f_{12-k} \quad (۲)$$

(۱) صفر

$$\sum_{k=0}^7 (-1)^k \binom{10}{k} f_{10-k} \quad (۴)$$

$$\sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} f_{10-k} \quad (۳)$$

حل: داریم $\Delta^n f_i = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f_{i+n-k}$ لذا

$$\Delta^{10} f_7 = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} f_{13-k}$$

وگزینه (۲) صحیح است.

۱۶- با داشتن نقاط $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_5, f_5)$ و با فرض $x_{i+1} = x_i + h$ اگر برای درونیابی مقدار تابع در $x = x_0 + \alpha h$ از چند جمله‌ای درونیاب پیشروی نیوتن استفاده کنیم و فرض کنیم ماکزیمم $f^{(n+1)}(x)$ برابر با M باشد آنگاه حداکثر مقدار خطا برابر با کدام گزینه است؟

$$\left| \frac{h^5}{5!} \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-5) \right| M^5 \quad (۲)$$

$$\left| \frac{h^5}{5!} \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-5) \right| M \quad (۱)$$

$$\frac{hM}{5} \quad (۴)$$

$$\left| \frac{h^6}{6!} \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-5) \right| M \quad (۳)$$

حل: با توجه به رابطه (۱۳) فصل سوم داریم:

$$\text{خطا} \leq |(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_5)| \frac{M}{(5+1)!}$$

حال اگر $x = x_0 + \alpha h$ در این صورت

$$\begin{aligned} \text{خطا} &\leq |\alpha h(\alpha-1)h(\alpha-2)h \dots (\alpha-5)h| \frac{M}{6!} \\ &= \left| \frac{h^6}{6!} \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-5) \right| M \end{aligned}$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۱۷- در تست قبل اگر از چندجمله‌ای درونیاب پسروی نیوتن استفاده کنیم ماکزیمم خطا کدام است؟

$$\left| \frac{h^5}{5!} \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+5) \right| M \quad (۲)$$

$$\left| \frac{h^6}{6!} \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+5) \right| M \quad (۱)$$

$$\left| \frac{h^6}{6!} \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+5) \right| M \quad (۴)$$

$$\left| \frac{h^5}{5!} \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+5) \right| M^5 \quad (۳)$$

حل: در این حالت داریم $x = x_0 + \alpha h$ لذا با توجه به رابطه خطا یعنی

$$\begin{aligned} \text{خطا} &\leq |(x - x_0) \dots (x - x_5)| \frac{M}{6!} \\ &= |(\alpha + 5)h(\alpha + 4)h \dots (\alpha + 1)h\alpha h| \frac{M}{6!} \\ &= \left| \frac{h^6}{6!} \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + 5) \right| M \end{aligned}$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۱۸- اگر برای درونیابی داده‌های زیر از $P(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)f_k$ استفاده کنیم که $L_k(x)$ چند جمله‌ای لاگرانژ می‌باشد در این صورت $L_1(x)$ کدام است؟

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	-۲	-۱	۰	۷

$$\frac{x^2 - 3x^2 + 2x}{-6} \quad (۲)$$

$$\frac{x^2 - 1}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{x^2 - 2x^2 - x + 2}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{x^2 - x}{6} \quad (۳)$$

حل:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ &= \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{(0 + 1)(0 - 1)(0 - 2)} = \frac{(x^2 - 1)(x - 2)}{2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - x + 2}{2} \end{aligned}$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۱۹- اگر در تست قبل نقطه $(-3, -8)$ را به نقاط اضافه کنیم مقدار $L_2(0)$ کدام است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

حل: در رابطه با چندجمله‌ای‌های لاگرانژ $L_i(x)$ همواره داریم:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

حال اگر نقطه $(-3, -8)$ را به جدول تست ۱۸ اضافه کنیم داریم $x_2 = 0$ لذا

$$L_2(0) = L_2(x_2) = 1$$

در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

۲۰- با توجه به مقادیر داده شده، مقدار تقریبی تابع در $x = 2$ کدام است.

x_i	۰	۳	۴	۷
$f(x_i)$	۲	۸	۹	۶

(۴) صفر

۶,۳ (۳)

۵,۳ (۲)

۵ (۱)

حل: با استفاده از درونیایی لاگرانژ داریم

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq f.L_0(x) + f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x) \\ &= 2 \frac{(x-3)(x-4)(x-7)}{(0-3)(0-4)(0-7)} + 8 \frac{(x-0)(x-4)(x-7)}{(3-0)(3-4)(3-7)} + \\ &\quad + 9 \frac{(x-0)(x-3)(x-7)}{(4-0)(4-3)(4-7)} + 6 \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(7-0)(7-3)(7-4)} \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} f(2) &\simeq 2 \frac{(2-3)(2-4)(2-7)}{-84} + 8 \frac{20}{12} + 9 \frac{10}{-12} + 6 \frac{4}{84} \\ &= \frac{5}{21} + \frac{40}{3} - \frac{15}{2} + \frac{2}{7} = 6,357... \end{aligned}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده گزینه (۳) صحیح است

راه حل دوم: هرگاه جدول تفاضلات تقسیم شده را تشکیل دهیم داریم:

x_i	f_i			
۰	۲			
۳	۸	۲	-۰,۲۵	۱
۴	۹	۱	-۰,۵	-۲۸
۷	۶	-۱		

بنابراین

$$P(x) = 2 + 2x - 0,25x(x-3) - \frac{1}{28}x(x-3)(x-4) \Rightarrow P(2) \simeq 6,3$$

۲۱- مقدار خطا در محاسبه $\sqrt{90}$ با استفاده از درونیایی لاگرانژ و با در نظر گرفتن نقاط $x_1 = 81, x_2 = 100, x_3 = 121$ در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ حداکثر کدام است؟

۴ $4,2 \times 10^{-3}$ ۳ $2,95 \times 10^{-3}$ ۲ $1,75 \times 10^{-3}$ ۱ $1,52 \times 10^{-3}$

حل: چون سه نقطه برای درونیایی وجود دارد، لذا خطای درونیایی به صورت زیر است

$$\text{خطا} \leq |(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)| \frac{M}{3!}$$

که در آن $x = 90$ و M کران بالای تابع $f'''(x)$ در فاصله $[81, 121]$ است. داریم:

$$f(x) = x^{1/2} \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \quad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

بنابراین حداکثر مقدار f''' در فاصله $[81, 121]$ عبارت است از:

$$f'''(81) = \frac{3}{8} \times 1,6935 \times 10^{-5} = 6,35 \times 10^{-6} = M$$

همچنین داریم $x = 90$ بنابراین $| (90 - 81)(90 - 100)(90 - 121) | = 2790$ لذا

$$\text{خطا} \leq 2790 \times \frac{6,35 \times 10^{-6}}{6} = 2,95 \times 10^{-3}$$

در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

۲۲- جدول زیر را در نظر بگیرید اگر مقادیر $f(2/2)$ و $f(-1/5)$ را با برونمایی خطی از روی این اعداد به دست آوریم مقدار $f(2/2) - f(-1/5)$ کدام است؟

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9
۱۱ (۴)	۱۰/۵ (۳)		۱۰/۱ (۲)	۹/۹ (۱)

حل: با توجه به رابطه (۱۵) فصل چهارم داریم:

$$f(-1/5) \simeq f_0 + \frac{\bar{x} - x_0}{x_1 - x_0}(f_1 - f_0)$$

که در آن $\bar{x} = -1/5$ لذا

$$f(-1/5) \simeq 0 + \frac{-1/5 - (-1)}{0 + 1}(-1 - 0) = 0,5$$

همچنین با توجه به رابطه (۱۶) فصل چهارم داریم:

$$f(2/2) \simeq f_{n-1} + \frac{\bar{X} - X_{n-1}}{X_n - X_{n-1}}(f_n - f_{n-1})$$

که در آن $\bar{X} = 2/2$ و $n = 3$ لذا

$$f(2/2) \simeq 2 + \frac{2/2 - 1}{2 - 1}(9 - 2) = 10/4$$

بنابراین $f(2/2) - f(-1/5) = 9/9$ در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۲۳- برای به دست آوردن ریشه معادله $x^2 - 4x + 4 = 0$ از روش نیوتن استفاده می‌کنیم. در این صورت کدام درست است؟

(۱) همگرایی این روش به انتخاب مقدار اولیه x_0 وابسته است و $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + 1$ می‌باشد.

(۲) همگرایی این روش به انتخاب مقدار اولیه x_0 وابسته است و $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + 1$ می‌باشد.

(۳) این روش همواره همگرا است و $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + 1$ می‌باشد.

(۴) این روش همواره همگرا است و $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + 1$ می‌باشد.

حل: فرمول تکرار روش نیوتن عبارت است از:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 4x_n + 4}{2x_n - 4} = \frac{x_n^2 - 4}{2(x_n - 2)} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + 1$$

هر چند در این مسأله $f(2) = f'(2) = 0$ یعنی ۲ ریشه تکراری معادله است اما با توجه به فرمول تکرار به دست آمده روش نیوتن همواره همگراست. زیرا هرگاه روش تکرار را با $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$ در نظر بگیریم در این صورت $|g'(x)| = \frac{1}{4} < 1$ بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۲۴- روش نیوتن را برای معادله $f(x) = 3x + \sin x - e^x = 0$ به کار می‌بریم. اگر مقدار اولیه $x_0 = 0$ را در نظر بگیریم مقدار x_2 کدام است؟

۰٫۳۶۰۱۷۱ (۴)

۰٫۳۷۳۰۱۲ (۳)

۰٫۳۶۱۲۰۷ (۲)

۰٫۳۶۳۰۱۷ (۱)

حل: داریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n + \sin x_n - e^{x_n}}{3 + \cos x_n - e^{x_n}}$$

لذا با $x_0 = 0$ مقادیر x_1 و x_2 عبارتند از:

$$x_1 = 0/33333333, x_2 = 0/3601707$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۲۵- اگر ریشه معادله $x^2 = c$ را با یک روش همگرا به دست آوریم و x_n تقریب ریشه در مرحله n ام باشد مقدار خطای $|x_n - \sqrt{c}|$ تقریباً برابر کدام است؟

$$\left| \frac{c}{x_n} \right| \quad (۱) \quad \left| x_n - \frac{c}{x_n} \right| \quad (۲) \quad \left| x_n - \frac{\sqrt{c}}{x_n} \right| \quad (۳) \quad \frac{1}{2} \left| x_n - \frac{c}{x_n} \right| \quad (۴)$$

حل:

$$\begin{aligned} |x_n - \sqrt{c}| &= \left| (x_n - \sqrt{c}) \frac{x_n + \sqrt{c}}{x_n + \sqrt{c}} \right| \\ &= \frac{|x_n^2 - c|}{|x_n + \sqrt{c}|} \approx \frac{|x_n^2 - c|}{|x_n + x_n|} = \frac{|x_n^2 - c|}{|2x_n|} = \frac{1}{2} \left| x_n - \frac{c}{x_n} \right| \end{aligned}$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۲۶- تقریبی از ریشه معادله $x^2 + x - 1 = 0$ را که در فاصله $(0, 1)$ قرار دارد با روش دو بخشی به دست آورید به طوری که خطا کمتر از 0.02 باشد.

$$0.6875 \quad (۱) \quad 0.6825 \quad (۲) \quad 0.6815 \quad (۳) \quad 0.6850 \quad (۴)$$

n	a	b	$x_n = \frac{a+b}{2}$	علامت $f(a)f(x_n)$	$f(x_n)$
۱	۰	۱	۰.۵	+	-۰.۳۷۵
۲	۰.۵	۱	۰.۷۵	-	۰.۱۷۱۸۸
۳	۰.۵	۰.۷۵	۰.۶۲۵	+	-۰.۱۳۰۸۶
۴	۰.۶۲۵	۰.۷۵	۰.۶۸۷۵	-	-۰.۰۱۲۴۵

حل:

با توجه به اینکه $0.02 < |f(x_4)|$ لذا x_4 تقریبی از ریشه است. و $\alpha \approx 0.6875$. یعنی گزینه (۱) صحیح است.

۲۷- تقریبی از ریشه معادله $f(x) = 3x - e^{-x}$ را با روش نابجایی به دست می‌آوریم. اگر این ریشه در فاصله $(0.27, 0.25)$ قرار داشته باشد و محاسبات را تا $10^{-4} \times 2 < |f(x_n)|$ ادامه دهیم برای رسیدن به این تقریب با روش نابجایی چند مرحله انجام می‌شود؟

$$۴ \text{ مرحله} \quad (۱) \quad ۳ \text{ مرحله} \quad (۲) \quad ۲ \text{ مرحله} \quad (۳) \quad ۱ \text{ مرحله} \quad (۴)$$

این مسأله، مثال ۴ فصل سوم کتاب می‌باشد لذا با توجه به آن مثال، گزینه (۴) صحیح است.

۲۸- برای به دست آوردن ریشه معادله $x^2 + x - 1 = 0$ روش وتری را ۴ مرحله انجام می‌دهیم. تقریبی که پس از ۴ مرحله از روش وتری به دست می‌آید کدام است؟ (ریشه در بازه $(0, 1)$ است.)

$$0.6821 \quad (۱) \quad 0.6797 \quad (۲) \quad 0.6875 \quad (۳) \quad 0.6923 \quad (۴)$$

حل: با استفاده از رابطه

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

و قرار دادن $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ خواهیم داشت:

$$x_2 = 0.5, \quad x_3 = 0.6364, \quad x_4 = 0.6901, \quad x_5 = 0.6821,$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۲۹- برای به دست آوردن ریشه معادله $x^2 + x - 1 = 0$ در فاصله $(0, 1)$ با استفاده از روش تکرار ساده (روش نقطه ثابت) کدامیک از روابط بازگشتی زیر را می‌توان استفاده کرد؟

$$x_n = 1 - x_{n-1}^2 \quad (1)$$

$$x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}^2} \quad (2)$$

(۳) گزینه ۱ و ۲ هر دو صحیحند.

(۴) هیچکدام از گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح نیستند.

حل: $g(x)$ گزینه (۱) عبارت است از $g(x) = 1 - x^2$ لذا $g'(x) = -2x$ و از آن $|g'(x)| = 2x^2$ که برای $x = 1$ داریم

$$|g'(x)| = 2 > 1$$

بنابراین، این g مناسب نیست. $g(x)$ گزینه (۲) عبارت است از $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ اولاً برای $x \in (0, 1)$ داریم $g(x) \in (0, 1)$ در ثانی:

$$g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

و از آن $|g'(x)| < 1$ در نتیجه این g مناسب است. لذا گزینه (۲) صحیح است.

۳۰- شرط کافی برای همگرایی روش نیوتن در به دست آوردن ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

$$\left| \frac{f'(x)}{f(x)f''(x)} \right| < 1 \quad (4) \quad \left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1 \quad (3) \quad \left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)} \right| < 1 \quad (2) \quad |f''(x)| < |f'(x)| \quad (1)$$

حل: تابع $g(x)$ در روش نیوتن عبارت است از

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

برای همگرایی کافی است $|g'(x)| < 1$. اما

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

لذا گزینه ۳ صحیح است.

۳۱- از روش نیوتن برای به دست آوردن ریشه معادله $x^k = N$ استفاده می‌کنیم. در این صورت رابطه بازگشتی کدام است؟

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left[kx_n + \frac{N-k}{x_n^{k-1}} \right] \quad (۲)$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left[(k-1)x_n + \frac{N}{x_n^{k-1}} \right] \quad (۱)$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left[kx_n + \frac{N}{x_n^{k-1}} \right] \quad (۴)$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left[(k-1)x_n + \frac{N}{x_n} \right] \quad (۳)$$

حل: قرار می‌دهیم

$$f(x) = x^k - N$$

لذا $f'(x) = kx^{k-1}$. رابطه تکراری روش نیوتن عبارت است از:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - N}{k x_n^{k-1}} = \frac{1}{k} \left(kx_n - x_n + \frac{N}{x_n^{k-1}} \right) = \frac{1}{k} \left[(k-1)x_n + \frac{N}{x_n^{k-1}} \right]$$

در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

۳۲- اگر روش نیوتن را دو مرحله برای معادله $x^2 = N$ استفاده کنیم آنگاه \sqrt{N} تقریباً برابر کدام است؟

$$\frac{A+B}{3} + \frac{N}{A+B}, N = AB \quad (۲)$$

$$\frac{A+B}{2} + \frac{N}{A+B}, N = AB \quad (۱)$$

$$A+B + \frac{N}{A+B}, N = AB \quad (۴)$$

$$\frac{A+B}{4} + \frac{N}{A+B}, N = AB \quad (۳)$$

حل: هرگاه در تست ۳۱ قرار دهیم $k = 2$ فرمول تکراری نیوتن برای این مسأله عبارت است از:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{N}{x_n} \right)$$

با قرار دادن $x_0 = \frac{A+B}{2}$ داریم:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{A+B}{2} + \frac{2N}{A+B} \right) = \frac{A+B}{4} + \frac{N}{A+B}$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۳۳- اگر انتگرال $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2 \cos x) \sin^2 x dx$ را بخواهیم با روش تقریبی سیمپسون با انتخاب $n = 4$ و تا پنج رقم اعشار حساب کنیم نتیجه چنین خواهد بود؟

$$۱,۳۰۵۵۳ \quad (۴)$$

$$۰,۵۱۲۶۸ \quad (۳)$$

$$۰,۷۶۹۰۲ \quad (۲)$$

$$۰,۴۷۱۸۹ \quad (۱)$$

حل: داریم $n = 4$ لذا

$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \frac{\pi}{8}$$

بنابراین $f(x) = \sin(2 \cos x) \sin^2 x$ برای $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{8}, x_4 = \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2 \cos x) \sin^2 x \, dx &\simeq \frac{h}{5} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) \\ &= \frac{\pi}{40} \left\{ \sin(2 \cos 0) \sin^2 0 + 4 \sin\left(2 \cos \frac{\pi}{8}\right) \sin^2 \frac{\pi}{8} + \right. \\ &\quad \left. 2 \sin\left(2 \cos \frac{\pi}{4}\right) \sin^2 \frac{\pi}{4} + 4 \sin\left(2 \cos \frac{3\pi}{8}\right) \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin\left(2 \cos \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= \frac{\pi}{40} \{0 + 0.563462 + 0.987766 + 2.265373\} = 0.51268 \end{aligned}$$

در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

۳۴. مقدار انتگرال $I = \int_0^1 e^x dx$ با $n = 4$ به روش سیمپسون چقدر می‌باشد؟

۲,۶۴۳۲ (۴)

۰,۸۸۲۳ (۳)

۱,۵۳۶۲ (۲)

۱,۷۱۸۳۲ (۱)

حل: داریم $f(x) = e^x$ و $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$ لذا

$$\begin{aligned} I &\simeq S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) \\ &= \frac{1}{12} (e^0 + 4e^{0.25} + 2e^{0.5} + 4e^{0.75} + e^1) = 1.71832 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۳۵. تعداد مراحل لازم برای محاسبه انتگرال $I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx$ با حداکثر خطای 10^{-4} به روش سیمپسون کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

حل: داریم $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi - (-\pi)}{n} = \frac{3\pi}{n}$ لذا $|ET(h)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4$ که در آن $M_4 = 1$ زیرا $f^{(4)}(x) = \sin x$ در نتیجه بایستی

$$\frac{(b-a)}{180} \frac{(b-a)^4}{n^4} < 10^{-4} \Rightarrow \frac{\pi^5}{n^4} < 180 \times 10^{-4} \Rightarrow n^4 > \frac{\pi^5 \times 10^{-4}}{180}$$

و از آن $n \geq \left\lceil \sqrt[4]{\frac{\pi^5 \times 10^{-4}}{180}} \right\rceil + 1 = 12$ لذا گزینه (۳) صحیح است.

۳۶- خطای روش ذوزنقه در محاسبه $I = \int_1^{1/2} \sqrt{x} dx$ با بازه‌های به طول $h = 0.1$ و $h = 0.05$ چه مقدار است؟

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} 2.22 \times 10^{-5} \\ 1.05 \times 10^{-5} \end{cases} & (2) \\ \begin{cases} 4 \times 10^{-5} \\ 2 \times 10^{-5} \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 4.16 \times 10^{-5} \\ 1.04 \times 10^{-5} \end{cases} & (4) \\ \begin{cases} 4.1 \times 10^{-5} \\ 1.02 \times 10^{-5} \end{cases} & (3) \end{array}$$

حل: $|ET(h)| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\alpha)|$ که $\alpha \in (1, 1/2)$ داریم $b-a = 0.2$

$$f(x) = x^{1/2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

بنابراین در فاصله $(1, 1/2)$:

$$|f''(x)| \leq \frac{1}{4(1)\sqrt{1}} = 0.25$$

و از آن برای $h = 0.05$ خواهیم داشت:

$$|ET(h)| \leq 0.2 \times \frac{1}{12} \times (0.05)^2 \times 0.25 \simeq 1.04 \times 10^{-5}$$

و برای $h = 0.1$ داریم:

$$|ET(h)| \leq 0.2 \times \frac{1}{12} \times (0.1)^2 \times 0.25 \simeq 4.16 \times 10^{-5}$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۳۷- جدول مقادیر زیر مفروض است:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	1	1.105	1.22	1.344	1.482

برای $0 \leq x \leq 0.4$ و $|f'''(x)| \leq 3$ است. در این صورت کدام یک از عبارات زیر در مورد انتگرال $I = \int_0^{0.4} f(x) dx$ صحیح است؟

$$0.488 < I < 0.490 \quad (2)$$

$$0.490 < I < 0.492 \quad (1)$$

$$0.466 < I < 0.488 \quad (4)$$

$$0.492 < I < 0.494 \quad (3)$$

حل: چون کران $f''(x)$ معلوم است و در فرمول خطای روش دوزنقه به این کران نیاز داریم لذا از روش دوزنقه استفاده می‌کنیم؛ با توجه به داده‌های جدول داریم $h = 0.1$

$$I \simeq T(h) = 0.05\{f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + 2f(0.3) + f(0.4)\} = 0.491$$

$$|ET(h)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2$$

که در آن $|ET(h)| \leq 0.01$ لذا $h = 0.1$ و $b = 0.4$, $a = 0$, $M_2 = 3$

$$0.491 - 0.001 \leq I \leq 0.491 + 0.001 \Rightarrow 0.490 \leq I \leq 0.492$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۳۸- با استفاده از روش دوزنقه مقدار انتگرال $I = \int_0^1 \sin(x^2) dx$ با $n = 10$ چقدر می‌باشد؟

$$0.6964 \times 10^{-2} (4) \quad 0.672 (3) \quad 0.365 (2) \quad 0.3112 (1)$$

حل: برای $n = 10$ داریم $h = \frac{1}{10}$ لذا

$$T\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{20}\{f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + \dots + 2f(0.9) + f(1)\}$$

که در آن $f(x) = \sin(x^2)$ بنابراین

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{10}\right) &= \frac{1}{20}\{0 + 2(0.01 + 0.040 + 0.0899 + 0.1593 + 0.2474 \\ &\quad + 0.3523 + 0.4706 + 0.5972 + 0.7143) + 0.8415\} \\ &= \frac{1}{20}(6.2234) = 0.3112 \end{aligned}$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۳۹- مقدار انتگرال $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$ ، $n = 10$ ، $i = 0, \dots, 10$ به روش دوزنقه‌ای چقدر است؟

$$0.6534 (1) \quad 0.67348 (2) \quad 1.34731 (3) \quad 4 \text{ هیچکدام} (4)$$

حل: داریم $h = \frac{1}{10}$ لذا

$$I \simeq \frac{1}{20}\{f(0) + 2(f(0.1) + f(0.2) + \dots + f(0.9)) + f(1)\}$$

که در آن $f(x) = e^{x^2}$ بنابراین

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{1}{20}\{1 + 2(1.001 + 1.008 + 1.0274 + 1.0661 + 1.1331 + 1.2411 + \\ &\quad 1.4096 + 1.6686 + 2.0730) + 2.7183\} \\ &= \frac{1}{20}(26.9734) = 1.34731 \end{aligned}$$

گزینه (۳) صحیح است.

۴۰- چنانچه مقدار تابع f در نقاط x_0 و x_1 به ترتیب برابر f_0 و f_1 باشد مقدار $f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)$ با استفاده از درونیابی f کدام است؟

$$\frac{x_0 f_1 + x_1 f_0}{x_0 + x_1} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2}(f_0 + f_1) \quad (۱)$$

$$\frac{x_0 f_0 + x_1 f_1}{x_0 + x_1} \quad (۳)$$

(۴) تعداد نقاط برای محاسبه کافی نیست.

حل: چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط x_0 و x_1 با استفاده از چندجمله‌ای لاگرانژ عبارت است از:

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}f_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}f_1 = \frac{(x - x_1)f_0 - (x - x_0)f_1}{(x_0 - x_1)}$$

حال اگر قرار دهیم $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$ در این صورت

$$\begin{aligned} P\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) &= \frac{\left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1\right)f_0 - \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_0\right)f_1}{x_0 - x_1} \\ &= \frac{(x_0 - x_1)\frac{f_0}{2} + (x_0 - x_1)\frac{f_1}{2}}{x_0 - x_1} = \frac{1}{2}(f_0 + f_1) \end{aligned}$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۴۱- $N + ۱$ نقطه متمایز به صورت $x_i = i, (i = 0, 1, \dots, N)$ موجود است چنانچه $L_i(x)$ نشان دهنده چند جمله‌ای‌های لاگرانژ باشد حاصل $\sum_{i=0}^N i L_i(x)$ کدام است؟

$$L_N(x) - L_0(x) \quad (۴)$$

$$x^2 \quad (۳)$$

$$x \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

حل: با استفاده از رابطه خطای بخش ۳.۳ فصل سوم داریم:

$$f(x) - P(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

حال اگر قرار دهیم $f(x) = x$ خواهیم داشت:

$$x - \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x) = 0$$

زیرا $f^{(n+1)}(c) = 0$ بنابراین

$$x = \sum_{i=0}^n x_i L_i(x) \Rightarrow x = \sum_{i=0}^n i L_i(x)$$

زیرا $x_i = i$ بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۴۲- طبق جدول زیر حاصل $f[x_1, x_2] + f[x_0, x_1]$ کدام است؟

i	۰	۱	۲
x_i	۱	۱٫۵	۲٫۵
$f(x_i)$	۳٫۲	۳٫۵	۴٫۵

۲ (۴)

۳٫۸ (۳)

۱٫۶ (۲)

۲٫۲ (۱)

حل:

$$f[x_1, x_2] + f[x_0, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{4.5 - 3.5}{2.5 - 1.5} + \frac{3.5 - 3.2}{1.5 - 1} = 1 + \frac{3}{5} = 1.6$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۴۳- چنانچه f یک چند جمله‌ای از درجه n باشد و g چند جمله‌ای درونیاب در نقاط متمایز $(x_i, f(x_i))$ برای $i = 1, \dots, N-1$ باشد کدام گزینه درست است؟

$f(x) < g(x)$ (۲)

$f(x) = g(x)$ (۱)

$g(x)$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه $N-1$ است (۴)

$f(x) > g(x)$ (۳)

حل: با توجه به اینکه g چند جمله‌ای درونیاب تابع f می‌باشد پس g یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر $N-1$ است زیرا تعداد نقاط درونیابی N ناست ($i = 0, \dots, N-1$). لذا گزینه (۴) صحیح است.

۴۴- تابع جدولی زیر مفروض است. اضافه کردن کدامیک از نقاط زیر به این مجموعه نقاط، تابع درونیاب را تغییر نمی‌دهد؟

x_i	-۱	۰	۱
f_i	+۱	-۱	-۱

(۱, ۲) (۴)

(۱, ۱) (۳)

(۲, ۱) (۲)

(۰, ۰) (۱)

حل: هرگاه با استفاده از روش لاگرانژ چند جمله‌ای درونیاب را به دست آوریم این چند جمله‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$P(x) = x^2 - x - 1$$

هر کدام از نقاط داده شده در گزینه‌ها که در چند جمله‌ای فوق صدق کند به این معنی است که اضافه کردن آن نقطه به جدول، چند جمله‌ای درونیاب را تغییر نمی‌دهد. البته دقت کنید که چون نقاط ۰ و ۱ جزء نقاط درونیابی هستند لذا فقط گزینه (۲) می‌تواند صحیح باشد یعنی بدون نیاز به نوشتن $P(x)$ می‌توان گزینه صحیح را مشخص نمود. با امتحان کردن نیز داریم $P(2) = 4 - 2 - 1 = 1$.

۴۵- چنانچه $f(x) = \tan \frac{\pi x}{4}$ چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ و $x_2 = 3$ کدام است؟

$$\frac{1}{3}(x^2 + x - 2) \quad (4) \quad \frac{1}{3}(-2x^2 + 5x) \quad (3) \quad \frac{1}{3}(x^2 + 2) \quad (2) \quad \frac{1}{3}(x^2 + x) \quad (1)$$

حل: هرگاه با استفاده از روش لاگرانژ چند جمله‌ای درونیاب را به دست آوریم، این چند جمله‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$P(x) = \frac{1}{3}(-2x^2 + 5x)$$

دقت کنید که با توجه به تابع f و نقاط x_i داریم $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = -1$ لذا گزینه ۳ صحیح است. البته در این موارد توصیه می‌شود که چند جمله‌ای درونیاب را به دست نیاورید بلکه با داشتن x_i ها و f_i ها از توابع داده شده در گزینه‌ها استفاده نموده و گزینه صحیح را به دست آورید. مثلاً برای $P(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x)$ در گزینه (۱) داریم

$$P(3) = \frac{1}{3}(12) = 4 \neq -1 = f_2$$

لذا گزینه (۱) صحیح نیست، به طور مشابه برای $P(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2)$ در گزینه (۲) داریم

$$P(0) = \frac{1}{3}(0 + 2) = \frac{2}{3} \neq 0 = f_0$$

لذا گزینه (۲) صحیح نیست و همچنین می‌توان گزینه (۴) را نیز به عنوان گزینه نادرست طرد نمود.

۴۶- درجه چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط ذیل کدام است؟

x_i	۰	۱	-۱	۲	۳
f_i	۰	-۱	۳	۰	۳

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن به صورت زیر است:

x_i	f_i
۰	۰
	-۱
۱	-۱
	-۲
-۱	۳
	-۱
۲	۰
	۳
۳	۲

چون تفاضلات مرتبه سوم به بعد صفر هستند، لذا چند جمله‌ای درونیاب از مرتبه ۲ است یعنی گزینه (۱) صحیح است.

۴۷- برای حل معادله $x^2 + x - 1 = 0$ در فاصله $(0, 1)$ به روش تکرار ساده کدام انتخاب برای $g(x)$ همگرایی بهتری دارد؟

$$g_2(x) = 1 - x^2 \quad (۴) \quad g_3(x) = \sqrt{1-x} \quad (۳) \quad g_4(x) = \frac{1}{1+x} \quad (۲) \quad g_1(x) = \frac{x^2+1}{2x+1} \quad (۱)$$

حل: $g(x)$ مناسب بایستی دو شرط داشته باشد

$$|g'(x)| < 1 \quad (۲) \quad g: [a, b] \rightarrow [a, b] \quad (۱)$$

مثلاً برای $g_2(x)$ شرط برقرار نیست زیرا $g'_2(x) = -2x$ به طور مشابه چون $g'_3(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ لذا وقتی $x \rightarrow 1$ تابع g'_3 می‌تواند بی‌کران زیاد شود اما برای $g_2(x)$ اولاً داریم

$$0 < x < 1 \Rightarrow 1 < 1+x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+x} < 1$$

یعنی $g_2(x) \in (\frac{1}{2}, 1) \subseteq (0, 1)$ در ثانی $g'_2(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ و از آن برای هر $x \in (0, 1)$ خواهیم

داشت $|g'_2(x)| = \frac{1}{(1+x)^2} < 1$ لذا g_2 مناسب است یعنی گزینه (۲) صحیح است.

۴۸- برای پیدا کردن ریشه سوم $a > 0$ با استفاده از روش تکرار $x_{n+1} = \frac{a}{x_n^2}$ با فرض انتخاب x_0 مناسب،

حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right|$ چیست؟ (ریشه سوم a می‌باشد.)

$$\alpha^2 \quad (۱) \quad 2\alpha^2 \quad (۲) \quad \alpha \quad (۳) \quad 2 \quad (۴)$$

حل: قبل از حل مساله ابتدا توضیحی در ارتباط با مرتبه همگرایی دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ به α را بیان می‌نماییم:

تعریف مرتبه همگرایی یک دنباله

فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ به عدد α همگراست، یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$. هرگاه اعداد مثبت c و p موجود باشند به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} \right| = c, \quad (c \neq 0)$$

در این صورت می‌گوییم دنباله $\{x_n\}$ دارای همگرایی مرتبه p است. هرگاه $p = 1$ ، همگرایی را خطی می‌نامیم. مرتبه همگرایی یک دنباله معیاری است برای تعیین آهنگ همگرایی دنباله، که با استفاده از آن می‌توان دنباله‌های مختلف را از نظر سرعت همگرایی با هم مقایسه کرد. به این معنی که هر چه مرتبه همگرایی بالاتر باشد، سرعت میل کردن جملات دنباله به حد آن یعنی α بیشتر است.

مرتبه همگرایی روش تکرار ساده

در تمام قسمتهای بعد فرض بر این است که α حد دنباله $\{x_n\}$ است. قضیه: هرگاه $x = g(x)$ به منظور حل معادله $f(x) = 0$ در روش تکرار ساده مورد استفاده قرار گرفته باشد، در این صورت اگر $g'(\alpha) \neq 0$ مرتبه همگرایی $\{x_n\}$ یک است. اثبات - چون α ریشه معادله است، لذا $\alpha = g(\alpha)$ ، همچنین $x_{n+1} = g(x_n)$ ، هرگاه بسط تیلور تابع g را حول α بنویسیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$g(x_n) = g(\alpha) + (x_n - \alpha)g'(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^2}{2!}g''(\eta_n) \quad (1)$$

که η_n عددی بین x_n و α است. از $\alpha = g(\alpha)$ و $x_{n+1} = g(x_n)$ داریم:

$$x_{n+1} = \alpha + (x_n - \alpha)g'(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^2}{2!}g''(\eta_n) \quad (2)$$

اگر $g'(\alpha) \neq 0$ لذا عبارت $(x_n - \alpha)g'(\alpha)$ در سمت راست وجود دارد و از آن از رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = g'(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)}{2!}g''(\eta_n) \quad (3)$$

حال هرگاه $n \rightarrow \infty$ ، چون $(x_n - \alpha) \rightarrow 0$ لذا از (۳) داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right| = |g'(\alpha)| \neq 0$$

در نتیجه بنا به تعریف مرتبه همگرایی داریم $p = 1$ و از آن اگر $g'(\alpha) \neq 0$ مرتبه همگرایی روش تکرار ساده یک است.

سؤال. هرگاه در روش تکرار ساده داشته باشیم $g'(\alpha) = 0$ ، همگرایی روش چند است؟

هرگاه $g'(\alpha) = 0$ عبارت $(x_n - \alpha)g'(\alpha)$ در سمت راست رابطه (۱) وجود ندارد، در این صورت از رابطه (۲) داریم:

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{(x_n - \alpha)^2}{2} g''(\eta_n) \quad (4)$$

با تقسیم طرفین رابطه (۴) بر $(x_n - \alpha)^2$ خواهیم داشت:

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{g''(\eta_n)}{2}$$

و از آن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} \right| = \left| \frac{g''(\alpha)}{2} \right| \quad (5)$$

زیرا η_n بین x_n و α است مثلاً $\alpha < \eta_n < x_n$ یا $x_n < \eta_n < \alpha$ حال برای $x_n \rightarrow \alpha$ لذا بنابه قضیه ساندویچ $\eta_n \rightarrow \alpha$ و از آن با فرض پیوستگی g'' رابطه (۵) برقرار است. حال اگر $g''(\alpha) \neq 0$ در این صورت بنابه رابطه (۵) مرتبه همگرایی $\{x_n\}$ دو است.

نکته: هرگاه در روش تکرار ساده $g'(\alpha) = 0$ و ندانیم $g''(\alpha)$ صفر است یا مخالف صفر می‌گوییم مرتبه همگرایی روش تکرار ساده حداقل دو است. به طور مشابه هرگاه $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$ در این صورت مرتبه همگرایی روش تکرار ساده حداقل سه است.

در حالت کلی هرگاه $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0$ و $g^{(k)}(\alpha) \neq 0$ در این صورت مرتبه همگرایی روش تکرار ساده (دقیقاً) k است.

مرتبه همگرایی روش نیوتن

هرگاه α ریشه ساده معادله $f(x) = 0$ باشد یعنی $f'(\alpha) \neq 0$ در این صورت مرتبه همگرایی روش نیوتن حداقل دو است.

اثبات: در روش نیوتن داریم:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

هرگاه قرار دهیم:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

در این صورت:

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

حال اگر $f'(\alpha) \neq 0$ چون $f(\alpha) = 0$ (ناصفر بودن $f'(\alpha)$ حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را ایجاد نمی‌کند) در این صورت $g'(\alpha) = 0$. در نتیجه بنا به نکته بیان شده مرتبه همگرایی روش نیوتن حداقل ۲ است، زیرا $g'(\alpha) = 0$ و در مورد $g''(\alpha)$ اطلاعی نداریم.

سوال. اگر $f'(\alpha) = 0$ یعنی α ریشه تکراری معادله $f(x) = 0$ باشد مرتبه همگرایی روش نیوتن چند است؟ هرگاه $f'(\alpha) = 0$ در این صورت α ریشه تکراری با مرتبه تکرار حداقل دو است، در این صورت تابع $f(x)$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x - \alpha)^m h(x)$$

که در آن $h(\alpha) \neq 0$. نشان می‌دهیم اگر $m > 1$ مرتبه همگرایی روش نیوتن یک است داریم:

$$f'(x) = m(x - \alpha)^{m-1} h(x) + (x - \alpha)^m h'(x)$$

$$f'(x) = (x - \alpha)^{m-1} [mh(x) + (x - \alpha)h'(x)]$$

با قرار دادن $f(x)$ و $f'(x)$ در فرمول نیوتن یعنی $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ داریم:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - \alpha)h(x_n)}{mh(x_n) + (x_n - \alpha)h'(x_n)}$$

با کم کردن α از طرفین رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$x_{n+1} - \alpha = (x_n - \alpha) \left\{ 1 - \frac{h(x_n)}{mh(x_n) + (x_n - \alpha)h'(x_n)} \right\}$$

و از آن:

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = 1 - \frac{h(x_n)}{mh(x_n) + (x_n - \alpha)h'(x_n)}$$

حال برای $n \rightarrow \infty$ چون $x_n \rightarrow \alpha$ و با فرض پیوستگی h نیز $h(x_n) \rightarrow h(\alpha)$ لذا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right| = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m} \neq 0, \quad (m \neq 1)$$

حال اگر تعریف مرتبه همگرایی را در نظر بگیرد، رابطه اخیر نشان می‌دهد که اگر $m > 1$ مرتبه همگرایی روش نیوتن یک است.

نکته. می‌توان نشان داد (نشان دهید) مرتبه همگرایی روش وتری برابر است با

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$$

این مطلب نشان می‌دهد که مرتبه همگرایی الزاماً عددی صحیح نیست.

حال با توجه به مطالب بیان شده مساله ۴۸ را حل می‌نماییم.

با توجه به رابطه (۳) داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right| = |g'(x)|$$

که در آن $g(x) = \frac{a}{x^2}$ لذا

$$g'(x) = \frac{-2a}{x^3} \Rightarrow g'(\alpha) = \frac{-2a}{\alpha^3}$$

و چون $\alpha^3 = a$ لذا $|g'(\alpha)| = 2$ بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۴۹- برای پیدا کردن ریشه دوم عدد ۶ به روش نابجایی و با بازه اولیه (۲, ۳) در تکرار اول چه جوابی به دست می‌آید؟

۲,۴ (۴)

۲,۶۴ (۳)

۲,۶ (۲)

۲,۸ (۱)

حل: هرگاه قرار دهیم $f(x) = x^2 - 6$ با توجه به اینکه در روش نابجایی داریم $x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$

با $a = 2$ و $b = 3$ داریم $x_1 = \frac{2 \times 3 - 3 \times (-2)}{3 - (-2)} = \frac{12}{5} = 2,4$ لذا گزینه (۴) صحیح است.

۵۰- چنانچه $f'''(x) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h))}{h^2}$ خطای برشی این فرمول متناسب با چه توانی از h خواهد بود؟

۴ سوم

۳ دوم

۲ اول

۱ صفر

حل: با توجه به بسط تیلور داریم:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i) + \dots$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i) + \dots$$

با جمع نمودن دو رابطه فوق خواهیم داشت:

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x_i) + \dots$$

لذا

$$\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} = f''(x_i) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x_i) + \dots$$

در نتیجه با توجه به عبارت $\frac{h^2}{12}$ در سمت راست، تقریب خطای $f''(x_i)$ با مقدار سمت چپ عبارت فوق از مرتبه h^2 است، یعنی گزینه (۳) صحیح است.

۵۱- کدام فرمول برای محاسبه $f'(x_0)$ مناسب‌تر است؟

$$\begin{array}{ll} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^2} \quad (۲) & \frac{3f(x_0) - 4f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{2h} \quad (۱) \\ \frac{3f(x_0) - 4f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{2h} \quad (۴) & \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h^2} \quad (۳) \end{array}$$

حل: گزینه‌های (۱) و (۳) به مقادیری از f نیاز دارند که موجود نیستند این مقادیر $f(x_0 - h)$ و $f(x_0 - 2h)$ هستند. همچنین با توجه به رابطه (۲۴) فصل چهارم خطای فرمول گزینه (۲) از $O(h)$ است در حالی که هرگاه مرتبه خطا را برای فرمول گزینه (۴) به دست آوریم این خطا از مرتبه $o(h^2)$ است، لذا گزینه (۴) مناسب‌تر است. برای به دست آوردن مرتبه خطای فرمول گزینه (۴) با استفاده از روش بسط تیلور داریم:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \dots \quad (a)$$

همچنین

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) + \frac{8h^3}{6}f'''(x_0) + \dots \quad (b)$$

هرگاه رابطه (a) را در ۴- ضرب نموده و نتیجه را با رابطه (b) جمع کنیم خواهیم داشت.

$$-4f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) = -3f(x_0) - 2hf'(x_0) + \frac{2h^3}{3}f'''(x_0) + \dots$$

بنابراین

$$f'(x_0) - \frac{3f(x_0) - 4f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{2h} = -\frac{h^2}{3}f'''(x_0) \pm \dots$$

بنابراین خطا $O(h^2)$ است.

$$۵۲- \text{خطای فرمول } f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \text{ کدام است؟}$$

$$O(h^2) \quad (۴) \qquad O(h^2) \quad (۳) \qquad O(h) \quad (۲) \qquad O(1) \quad (۱)$$

حل: مشابه دو مساله قبل با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \dots \quad (a)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) \pm \dots \quad (b)$$

هرگاه رابطه (b) را منفی یک ضرب نموده و حاصل را با رابطه (a) جمع کنیم خواهیم داشت:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) \pm \dots$$

لذا

$$f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = -\frac{h^2}{6}f'''(x) \pm \dots$$

در نتیجه خطا $O(h^2)$ است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

۵۳- با توجه به داده‌های جدول زیر تقریبی از $\int_{-1}^1 f(x)dx$ به روش ذوزنقه‌ای کدام است؟

x_i	-۱	-۰٫۶	-۰٫۲	۰٫۲	۰٫۶	۱
f_i	۰	۰٫۱	۰٫۱۵	۰٫۰۵	۰٫۱۵	۰٫۳

۰٫۲۴ (۴)

۰٫۱۲ (۳)

۰٫۳۵ (۲)

۰٫۱۷۵ (۱)

حل: با توجه به داده‌های جدول قرار می‌دهیم $h = ۰٫۴$ لذا

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq \frac{h}{2} \{f_0 + 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + f_5\}$$

که در آن $f_i = f(x_i)$ لذا

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq \frac{۰٫۴}{2} \{۰ + 2(۰٫۱ + ۰٫۱۵ + ۰٫۰۵ + ۰٫۱۵) + ۰٫۳\} = ۰٫۲(۱٫۲) = ۰٫۲۴$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۵۴- کدام گزینه غلط است؟

(۱) قاعده نقطه میانی برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه اول دقیق است.

(۲) قاعده ذوزنقه‌ای برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه دوم دقیق است.

(۳) قاعده سیمپسون برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه سوم دقیق است.

(۴) قاعده دو نقطه‌ای گاوس برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه سوم دقیق است.

حل: در حالت کلی برای تخمین انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ به روشهای ذکر شده خطا را به صورتهای زیر داریم:

(الف) خطای روش نقطه میانی با استفاده از رابطه (۵۰) فصل چهارم عبارت است از $\frac{(b-a)}{24} h^2 f''(\eta)$

بنابراین این روش برای چند جمله‌ایهای حداکثر از درجه اول دقیق است. زیرا برای این چند جمله‌ایها داریم $f''(x) = ۰$

(ب) خطای قاعده ذوزنقه‌ای با استفاده از رابطه (۴۶) فصل چهارم عبارت است از $-\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\beta)$

لذا این روش نیز برای چند جمله‌ایهای حداکثر از درجه اول دقیق است.

(پ) با توجه به رابطه (۴۸) فصل چهارم خطای قاعده سیمپسون عبارت است از

$$-\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

در نتیجه این روش برای چند جمله‌ایهای حداکثر از درجه سوم دقیق است زیرا برای این چند جمله‌ایها داریم $f^{(4)}(x) = 0$.

ت) در حالت کلی اثبات می‌شود قاعده گاوس n نقطه‌ای برای چند جمله‌ایهای حداکثر از درجه $2n - 1$ دقیق است.

لذا با توجه به موارد فوق گزاره بیان شده درگزینه (۲) نادرست است.

۵۵- برای محاسبه $\int_{-1}^0 e^x dx$ به روش سیمپسون و با خطای کمتر از 45×10^{-6} حداقل تعداد زیر فاصله‌ها چه میزان باید باشد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

حل: با استفاده از رابطه (۴۸) فصل چهارم خطای قاعده سیمپسون عبارت است از:

$$ES(h) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

لذا $|ES(h)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 |f^{(4)}(\eta)|$ اما چون $f(x) = e^x$ لذا $f^{(4)}(x) = e^x$ بنابراین

$$e^{-1} - 1 \leq x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq e^x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq f^{(4)}(x) \leq 1$$

در نتیجه $|f^{(4)}(x)| \leq 1$ بنابراین هرگاه بخواهیم خطای روش سیمپسون کمتر از 45×10^{-6} باشد کافی است

داشته باشیم $\frac{b-a}{180} h^4 < 45 \times 10^{-6}$ چون $b = 0$ و $a = -1$ لذا بایستی $\frac{1}{180} h^4 < 45 \times 10^{-6}$ و یا

$h^4 < 81 \times 10^{-4}$ در نتیجه باید $h < 3 \times 10^{-1}$ و یا $h < 0.3$ و چون $\frac{b-a}{h} = n$ لذا

$$n > \frac{0+1}{0.3} = \frac{10}{3} \simeq 3.3$$

بنابراین هرگاه $n = 4$ محاسبه انتگرال با دقت موردنظر امکان‌پذیر است. یعنی گزینه (۳) صحیح است.

۵۶- برای محاسبه $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ از روش ذوزنقه‌ای به ازای $h = \frac{\pi}{4}$ و $h = \frac{\pi}{2}$ استفاده کرده‌ایم، پس از اعمال روش رامبرگ بر روی دو مقدار به دست آمده فوق کدام مقدار برای انتگرال به دست می‌آید؟

$$\frac{5 + \sqrt{2}}{6} \pi \quad (۴) \quad \frac{5 - \sqrt{2}}{6} \pi \quad (۳) \quad \frac{2\sqrt{2} + 5}{6} \pi \quad (۲) \quad \frac{2\sqrt{2} + 1}{12} \pi \quad (۱)$$

قبل از حل مساله ابتدا روش رامبرگ را برای تعیین تقریب $\int_a^b f(x) dx$ توضیح می‌دهیم. با استفاده از روش رامبرگ می‌توان به کمک مقادیر تقریبی که از روش ذوزنقه برای $\int_a^b f(x) dx$ به دست می‌آید و بدون محاسبه تابع f در نقاط جدید می‌توان تقریبهای بهتری برای $\int_a^b f(x) dx$ حساب نمود. اساس این روش بر این مطلب است که هرگاه $T(h)$ تقریب $\int_a^b f(x) dx$ به روش ذوزنقه باشد می‌توان نشان داد که:

$$I = \int_a^b f(x) dx = T(h) + a_2 h^2 + a_4 h^4 + a_6 h^6 + \dots \quad (۱)$$

که در آن a_i ها مستقل از h بوده و با مشتق مرتبه i تابع f متناسب هستند هرگاه در رابطه (۱)، به جای h قرار دهیم $\frac{h}{4}$ در این صورت:

$$I = \int_a^b f(x)dx = T\left(\frac{h}{4}\right) + a_2\left(\frac{h^2}{4}\right) + a_4\left(\frac{h^4}{16}\right) + \dots \quad (2)$$

برای حذف a_2 از معادلات (۱) و (۲) معادله (۱) را از چهار برابر معادله (۲) کم می‌کنیم در این صورت خواهیم داشت:

$$4I - I = 4T\left(\frac{h}{4}\right) - T(h) - \frac{3a_2h^2}{4} + \dots$$

$$I = \frac{4T\left(\frac{h}{4}\right) - T(h)}{3} - \frac{a_2h^2}{4} + \dots \quad (3)$$

رابطه (۳) نشان می‌دهد که مقدار $\frac{4T\left(\frac{h}{4}\right) - T(h)}{3}$ تقریبی از I است که خطای آن متناسب با h^4 است (یادآوری می‌شود که خطای قاعده دوزنقه متناسب با h^2 است). برای تفهیم مطلب به مثال زیر توجه نمایید:

مثال: تقریبهایی از $I = \int_0^1 x^2 dx$ را با استفاده از قاعده دوزنقه‌ای و با $h = 1$ و $h = \frac{1}{4}$ به دست آورده سپس با استفاده از قاعده رامبرگ تقریب بهتری برای انتگرال به دست آورید.

حل: $T(1) = \frac{1}{4}$, $T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}$ لذا با استفاده از قاعده رامبرگ خواهیم داشت:

$$I = \frac{4T\left(\frac{1}{4}\right) - T(1)}{3} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{4}$$

توجه داشته باشید که $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{4}$ یعنی قاعده رامبرگ انتگرال چند جمله‌ای تا درجه ۳ را به طور دقیق محاسبه می‌کند. و این را می‌توان ادامه نیز داد.

حال مسأله ۵۶ را حل می‌نماییم. یعنی $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$ را ابتدا با $T\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $T\left(\frac{\pi}{2}\right)$ تقریب می‌زنیم، سپس مقدار انتگرال را با استفاده از قاعده رامبرگ به دست می‌آوریم. داریم:

$$T(h) = \frac{h}{4} \{f_0 + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1}) + f_n\}$$

لذا برای $h = \frac{\pi}{4}$ داریم $n = 1$ و از آن

$$T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \left(\sin 0 + \sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

و برای $h = \frac{\pi}{2}$ داریم $n = 2$ و از آن

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8} \left(\sin 0 + 2 \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}(1 + \sqrt{2})$$

در نتیجه با استفاده از قاعده رامبرگ داریم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \simeq \frac{4T(\frac{\pi}{4}) - T(\frac{\pi}{2})}{3} = \frac{\frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}}{3} = \pi \frac{2 + 2\sqrt{2} - 1}{12} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{12} \pi$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۵۷- تابع f با جدول مقادیر زیر داده شده است:

x_i	۱	۲	۳
f_i	۱	۱/۶	۱/۹

همچنین می‌دانیم در فاصله $[1, 3]$ ، $|f^{(4)}(x)| \leq 0.9$ کدام عبارت در مورد $I = \int_1^3 f(x) dx$ دقیق‌تر است؟

$$3.01 \leq I \leq 3.12(4) \quad 3 \leq I \leq 3.2(3) \quad 3.09 \leq I \leq 3.11(2) \quad 3.05 \leq I \leq 3.2(1)$$

حل: چون تعداد نقاط سه تا است لذا می‌توانیم از روش سیمپسون استفاده کنیم که در آن $h = 1$

$$I \simeq S(h) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

$$S(1) = \frac{1}{3}(1 + 4(1/6) + 1/9) = 3.1$$

با استفاده از رابطه (۴۹) فصل چهارم خطای قاعده سیمپسون به صورت زیر است:

$$|ES(h)| \leq \frac{b-a}{180} h^4 |f^{(4)}(\eta)|$$

که در آن $|f^{(4)}(\eta)| \leq 0.9$ و $b-a = 2h$ زیرا $n = 2$ و $h = \frac{b-a}{2}$ بنابراین

$$|ES(h)| \leq \frac{1}{90} h^5 \times 0.9 = 10^{-2}$$

زیرا $h = 1$ لذا $3.1 - 10^{-2} \leq I \leq 3.1 + 10^{-2}$ و یا $3.09 \leq I \leq 3.11$ پس گزینه (۲) صحیح است.

۵۸- برای اینکه $\int_a^b f(x) dx \approx w_1 f(x_1)$ حداکثر دقت را داشته باشد مقادیر مناسب برای w_1 و x_1 باید چگونه باشند؟

$$\begin{cases} x_1 = b \\ w_1 = \frac{b-a}{2} \end{cases} (4) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{b+a}{2} \\ w_1 = \frac{b-a}{2} \end{cases} (3) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{b+a}{2} \\ w_1 = b-a \end{cases} (2) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{b-a}{2} \\ w_1 = b+a \end{cases} (1)$$

حل: برای اینکه فرمول انتگرالگیری $\int_a^b f(x)dx \simeq w_1 f(x_1)$ که دارای دو مجهول w_1 و x_1 است حداکثر دقت را داشته باشد بایستی قاعده برای $f(x) = 1$ و $f(x) = x$ دقیق باشد.

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_a^b x dx = b - a = w_1 \quad (1)$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} = w_1 f(x_1) = w_1 x_1 \quad (2)$$

از (۱) چون $w_1 = b - a$ لذا رابطه (۲) عبارت است از:

$$\frac{b^2 - a^2}{2} = (b - a)x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{b + a}{2}$$

در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

۵۹- برای محاسبه $\int_a^b f(x)dx$ از روش ذوزنقه استفاده شده و خطای کمتر از ۰/۰۴ حاصل شده است برای اینکه میزان خطا به کمتر از ۰/۰۱ کاهش یابد

(۲) تعداد نقاط را ۴ برابر نماییم.

(۱) تعداد نقاط را ۲ برابر نماییم.

(۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

(۳) تعداد نقاط را ۸ برابر نماییم.

حل: چون خطای قاعده ذوزنقه‌ای متناسب با h^2 است لذا هرگاه h را نصف کنیم خطا $\frac{1}{4}$ می‌شود بنابراین در این مساله هرگاه h را نصف نماییم خطا $\frac{1}{4}$ مقدار قبلی، ۰/۰۴، خواهد بود، بنابراین برای رسیدن به خطای ۰/۰۱ بایستی h را نصف کنیم و یا به طور معادل بایستی تعداد نقاط را ۲ برابر نماییم در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

۶۰- تابع f با شرایط $f(-1) = 1$ ، $f(0) = 2$ و $f(2) = 1$ داده شده است. چنانچه مشتق سوم f در بازه $[-1, 2]$ کمتر از ۱/۳۵ باشد حداکثر خطای محاسبه $f(1)$ کدام است؟

۰/۴۵ (۴)

۰/۱۲ (۳)

۰/۲۱ (۲)

۰/۳۷ (۱)

حل: خطای چند جمله‌ای درونیاب به صورت زیر است:

$$|f(x) - P(x)| = |(x+1)(x-0)(x-2)| \frac{|f^{(3)}(z)|}{3!}$$

که z عددی در فاصله $[-1, 2]$ است. بنابراین برای $x = 1$ داریم:

$$|f(1) - P(1)| = |(1+1)(1)(1-2)| \frac{|f^{(3)}(z)|}{6} \leq \frac{1}{3} \times 1/35 = 0/45$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۶۱- تابع f به صورت جدول زیر داده شده است. با فرض اینکه در فاصله $0 \leq t \leq 3$ داشته باشیم $|f^{(4)}(t)| \leq 0/8$ یک کران بالای مناسب برای خطای حاصل از تخمین $f(1/5)$ از روی جدول کدام است؟

x_i	۰	۱	۲	۳
f_i	۱	۰	۰	-۱

$$۰,۰۲۷۸۳ (۴)$$

$$۰,۰۲۴۵۱ (۳)$$

$$۰,۰۱۸۷۵ (۲)$$

$$۰,۰۱۲۱۶ (۱)$$

حل: فرمول خطای چند جمله‌ای درونیاب در این مساله عبارت است از:

$$|f(x) - P(x)| = |(x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 3)| \frac{|f^{(4)}(z)|}{4!}$$

که z عددی در فاصله $[0, 3]$ است. برای $x = 1/5$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |f(1/5) - P(1/5)| &= |1/5(0/5)(-0/5)(-1/5)| \frac{|f^{(4)}(z)|}{24} \\ &\leq \frac{0,0625}{24} \times 0,8 = 0,01875 \end{aligned}$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

قسمت دوم (آزمون‌های کارشناسی ارشد)

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۷۶

۱- روشهای مختلف پیدا کردن ریشه معادلات برای تابع $f(x) = 0$ را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف سرعت همگرایی کدام یک از ترتیبهای ذیل صحیح است (از سرعت کم به سرعت زیاد)؟

- (۱) (a) نصف کردن فاصله (b) تکرار ساده (c) نیوتن (d) وترى
 (۲) (a) نیوتن (b) نصف کردن فاصله (c) وترى (d) تکرار ساده
 (۳) (a) نصف کردن فاصله (b) وترى (c) تکرار ساده (d) نیوتن
 (۴) (a) نصف کردن فاصله (b) تکرار ساده (c) وترى (d) نیوتن

حل: از میان روشهای بیان شده روش دو بخشی (نصف کردن فاصله) از همه کندتر است، مرتبه همگرایی روش تکرار ساده معمولاً یک است (تحت شرایطی می‌تواند بیشتر از یک نیز باشد)، روش همگرایی روش وترى $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$ است و روش نیوتن دارای مرتبه همگرایی ۲ است هرگاه ریشه مورد نظر ساده باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است. (برای تعریف مرتبه همگرایی لطفاً به مساله ۴۸ قسمت اول مراجعه نمایید)

۲- اگر دستگاه معادلات
$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30 \\ x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 31 \end{cases}$$
 را با شروع از نقطه $(1, 1, 1)$ و با روش گاوس - سایدل حل کنیم. پس از دو تکرار جواب حاصل برای x_1 برابر کدام است؟

- ۱/۴۷۵۴ (۴) ۲/۱۷۴۵ (۳) ۰/۴۵۸۳ (۲) ۳/۸۹۵۹ (۱)

حل: طرح تکراری روش گاوس - سایدل به صورت زیر است:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{8}(30 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{9}(1 - x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}(31 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)})$$

با قرار دادن $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$ داریم:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{8}(30 - 2 - 3) = 3.125$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{9}(1 - 3.125 - 2) = 0.4583$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}(31 - 2(3.125) - 3(0.4583)) = 3.8959$$

در نتیجه:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{8}(30 - 2(0,4583) - 3(3,8959)) = 2,1745$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

۳- مشتق دوم تابع $f(x)$ که به وسیله ۳ نقطه $(x_1 - h, y_1 + 4)$ ، $(x_1, y_1 + 8)$ و $(x_1 + h, y_1 + 16)$ نشان داده شده است برابر است با:

$$f''(x_1) = \frac{(y_1 + 2) - 2y_1 + (y_1 + 2)}{h^2} \quad (۱)$$

$$f''(x_1) = \frac{y_1 - 2y_1 + y_1}{h^2} \quad (۲)$$

$$f''(x_1) = \frac{(y_1 + 1) - 2(y_1 + 2) + (y_1 + 3)}{h^2} \quad (۳)$$

$$f''(x_1) = \frac{(y_1 + 4) + 2(y_1 + 8) + (y_1 + 16)}{h^2} \quad (۴)$$

حل: با توجه به رابطه (۲۰) فصل چهارم $f''(x_i)$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2f(x_i) + f(x_i + h)}{h^2}$$

برای $i = 1$ و مقادیر داده شده در مساله داریم:

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= \frac{y_1 + 4 - 2(y_1 + 8) + y_1 + 16}{h^2} = \frac{y_1 + 4 - 2y_1 + y_1}{h^2} \\ &= \frac{(y_1 + 2) - 2y_1 + (y_1 + 2)}{h^2} \end{aligned}$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۴- مقادیر زیر از تابع $f(t)$ استخراج گردیده است.

t_i	۰	۱	۲	۳	۴
$f(t_i)$	۵	۸	۱۷	۴۴	۱۰۱

۹,۳۴۴ (۴)

۹,۴۳۲ (۳)

۸,۴۳۲ (۲)

۸,۳۴۲ (۱)

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است:

t_i	$f(t_i)$
۰	۵
۱	۸
۲	۱۷
۳	۴۴
۴	۱۰۱

بنابراین چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از:

$$P(t) = 5 + 3t + 3t(t-1) + 2t(t-1)(t-2)$$

بنابراین

$$f(1/1) \simeq P(1/1) = 5 + 3(1/1) + 3(1/1)(0/1) + 2(1/1)(0/1)(-0/9) = 8,432$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

۵- اگر داده‌های $\frac{x_k}{y_k}$ را برای بررسی منحنی $y = \frac{1}{Ax+B}$ به کار ببریم در این صورت (A, B) برابر خواهد بود با:

$$(1/1) (2/1) (2/1) (1) (3/2) (1/1) (3/2) (4/2) (2/2) (1/1)$$

حل: با توجه به رابطه (۱۸) فصل هشتم کتاب، معادلات نرمال برای تعیین A و B عبارتند از:

$$\begin{cases} mB + A \sum x_i = \sum \frac{1}{y_i} \\ B \sum x_i + A \sum x_i^2 = \sum \frac{x_i}{y_i} \end{cases}$$

با $m = 4$ داریم

$$\begin{cases} 4B + A(-1 + 0 + 1 + 2) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,25} + \frac{1}{0,25} \right) \\ B(-1 + 0 + 1 + 2) + A(1 + 0 + 1 + 4) = \left(-1 + 0 + \frac{1}{0,25} + \frac{2}{0,25} \right) \end{cases}$$

و یا

$$\begin{cases} 4B + 2A = 11 \\ 2B + 6A = 11 \end{cases}$$

از حل دستگاه خواهیم داشت $A = 1/1$ و $B = 2/2$ بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۷۷

۱- معادله $f(x) = x^6 + 4x^2 - 11$ در فاصله $[1, 2]$ مفروض است. حدوداً چند تکرار لازم است که با استفاده از روش نصف کردن یکی از ریشه‌های معادله فوق در فاصله تعیین شده با دقت 10^{-7} محاسبه گردد.

(۱) ۲۳ تکرار (۲) ۱۷ تکرار (۳) ۲۶ تکرار (۴) ۲۰ تکرار

حل: کران بالای خطای در تکرار n ام تعیین ریشه در روش نصف کردن فاصله عبارت است از

$$|x_n - \alpha| < \frac{b - a}{2^n}$$

که در آن α ریشه مورد نظر از معادله در فاصله $[a, b]$ است. برای داشتن دقت 10^{-7} بایستی

$$\frac{b - a}{2^n} < 10^{-7}$$

که در آن $b = 2$ و $a = 1$ لذا

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-7} \Rightarrow 2^n > 10^7 \Rightarrow n > 7 \log_2 10 = 7 \times \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2} = 7 \times \frac{1}{0.301} = 23.25$$

بنابراین برای $n \geq 24$ دقت مورد نظر را خواهیم داشت، با توجه به گزینه‌های داده شده گزینه (۳) صحیح است.

۲- با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات خم برازنده یا پوشا، به شکل $y = ce^{Ax}$ را برای تابع جدولی ذیل به

$y = 1.578e^{-0.391x}$ (۲)	$y = -1.578e^{-0.391x}$ (۱)
$y = 1.578e^{0.391x}$ (۴)	$y = -1.578e^{0.391x}$ (۳)

x	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y	1.5	2.5	3.5	5.0	7.5

حل: از $y = ce^{Ax}$ خواهیم داشت $\ln y = \ln c + Ax$

هرگاه قرار دهیم $B = \ln c$ و $Z = \ln y$ به رابطه (۱۵) فصل هشتم کتاب می‌رسیم که: $Z = B + Ax$ با توجه به رابطه (۱۶) فصل هشتم کتاب، معادلات نرمال برای تعیین A و B عبارتند از:

$$\begin{cases} mB + A \sum x_i = \sum \ln y_i \\ B \sum x_i + A \sum x_i^2 = \sum x_i \ln y_i \end{cases}$$

که در آن $m = 5$. با استفاده از داده‌های مساله می‌توانیم جدول زیر را تشکیل دهیم:

x_i	y_i	x_i^2	$\ln y_i$	$x_i \ln y_i$
۰	۱٫۵	۰	۰٫۴۰۵	۰
۱٫۰	۲٫۵	۱	۰٫۹۱۶	۰٫۹۱۶
۲٫۰	۳٫۵	۴	۱٫۲۵۳	۲٫۵۰۶
۳٫۰	۵٫۰	۹	۱٫۶۰۹	۴٫۸۲۷
۴٫۰	۷٫۵	۱۶	۲٫۰۱۵	۸٫۰۶۰
مجموع	۱۰	۳۰	۶٫۱۹۸	۱۶٫۳۰۹

بنابراین دستگاه زیر را خواهیم داشت

$$\begin{cases} 5B + 10A + 6,198 \\ 10B + 30A = 16,309 \end{cases} \Rightarrow A = 0,3913, B = 0,457$$

و چون $\ln c = B$ لذا $c = e^B$ و از آن $c \simeq 1,578$ بنابراین

$$y = ce^{Ax} = 1,578e^{0,3913x}$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۳- اگر از روش اویلر در حل معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+y}$ با شرایط اولیه $y(0) = 1$ استفاده شود، با انتخاب $h = 0,5$ ، $y(1)$ تقریباً برابر است با:

$$1,125 \quad (1) \quad 1,5 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 1,875 \quad (4)$$

حل: با توجه به رابطه (۶) فصل پنجم کتاب فرمول اویلر عبارت است از:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

در این مساله داریم $h = 0,5$ و $f(t, y) = \frac{y}{t+y}$ ، چون هدف محاسبه $y(1)$ است و داریم $y(0) = y_0 = 1$

لذا بایستی y_1 و y_2 را به دست آوریم:

$$y(0.5) \simeq y_1 = y_0 + 0.5 \frac{y_0}{t_0 + y_0} = 1 + 0.5 \frac{1}{0 + 1} = 1.5$$

$$y(1) \simeq y_2 = y_1 + 0.5 \frac{y_1}{t_1 + y_1} = 1.5 + 0.5 \frac{1.5}{0.5 + 1.5} = 1.5 + 0.375 = 1.875$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۴- درجه چند جمله‌ای که از نقاط $(0, 2)$ ، $(1, 5)$ ، $(2, 14)$ ، $(3, 25)$ ، $(4, 74)$ می‌گذرد برابر است با:

۴ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۳ (۱)

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است:

x_i	f_i
۰	۲
	۳
۱	۵
	۹
۲	۱۴
	۲۱
۳	۲۵
	۶۹
۴	۷۴

چون تفاضلات مرتبه چهارم صفر است و تفاضلات مرتبه سوم غیر صفر، لذا درجه چند جمله‌ای درونیاب ۳ می‌باشد یعنی گزینه اول صحیح است.

۵- با استفاده از فرمول دوزنقه مقدار تخمینی خطا (R) برای محاسبه $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ در صورتی که تعداد فواصل یکسان و مساوی ۱۰ باشد برابر خواهد بود با:

$$|R| < 0.005 (1) \quad |R| < 0.002 (2) \quad |R| > 0.002 (3) \quad |R| > 0.005 (4)$$

حل: داریم

$$ET(h) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f'''(\beta)$$

که در آن $n = 10$ ، $h = \frac{b-a}{n}$ ، $a = 0$ و $b = 1$ ، لذا $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$ ، همچنین داریم:

$$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} (4x^2 - 2)$$

و از آن $|f''(x)| \leq |f''(0)| \leq 2$ بنابراین

$$|ET(h)| \leq \frac{1}{12} \times (0.1)^2 \times 2 = 0.0016 \approx 0.002$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

مهندسی شیمی مخازن هیدروکربوری کد ۱۲۵۸ سال ۱۳۷۷

۱- یک چند جمله‌ای درجه دوم درونیاب برای داده‌های زیر برابر کدام است؟

x	-۱	۰	+۱
y	-۱	۰	-۱

$-x^2$ (۱) $-x^2 + ۱$ (۲) $x^2 - ۱$ (۳) x^2 (۴)

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده به صورت زیر است:

x_i	y_i
-۱	-۱
	۱
۰	۰
	-۱
۱	-۱

بنابراین

$$\begin{aligned}
 p(x) &= -1 + (x - x_0) \times 1 + (x - x_0)(x - x_1) \times 1 \\
 &= -1 + (x + 1) + (x + 1)(x - 0) = -x^2
 \end{aligned}$$

لذا گزینه (۳) صحیح است. البته در چنین مسائلی بهتر است (x_i, y_i) ها را در توابع داده شده در چهارگزینه امتحان نماییم. توضیحات مسأله ۴۵ قسمت اول را ملاحظه نمایید.

۲- تعداد چند جمله‌ای‌های از درجه بزرگتر از n که $n + ۱$ نقطه متمایز را درونیابی می‌کند، ...

(۱) بیش از یک است. (۲) صفر است. (۳) نامتناهی است. (۴) یک است.

حل: با توجه به این قضیه که یک و فقط یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر n وجود دارد که $n + ۱$ نقطه متمایز را درونیابی می‌کند، فقط یک چند جمله‌ای هست که درجه آن حداکثر n است و $n + ۱$ نقطه متمایز را درونیابی

می‌کند. اما در مورد چند جمله‌ای‌های از درجه بزرگتر از n که $n + 1$ نقطه متمایز را درونیابی می‌کند بیش از یک چند جمله‌ای با این خاصیت وجود دارد و در حالت کلی تعداد نامتناهی چند جمله‌ای با این خاصیت وجود دارد. به عنوان مثال از نقطه $(1, 1)$ می‌توان چند جمله‌ای‌های x^2, x^3, x^4, x^5 و به طور کلی x^n را برای $n \geq 2$ عبور داد. لذا گزینه (۳) صحیح است.

$$۳- \text{ برای تابع } f(x) = x^3 - 3x - 5$$

(۱) هیچ ریشه مثبت وجود ندارد. (۲) یک ریشه در فاصله $[1, 2]$ وجود دارد.

(۳) یک ریشه در فاصله $[3, 4]$ وجود دارد. (۴) یک ریشه در فاصله $[2, 3]$ وجود دارد.

حل: از اینکه $f(2) = 8 - 6 - 5 = -3$ و $f(3) = 27 - 9 - 5 = 13$ لذا $f(2)f(3) < 0$ در نتیجه در فاصله $[2, 3]$ یک ریشه وجود دارد یعنی گزینه (۴) صحیح است.

۴- برای پیدا کردن x ، ریشه دوم یک عدد حقیقی $x = \sqrt{A}$ با استفاده از روش نیوتن رابطه تکراری کدام است؟

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right) \quad (۲)$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n - \frac{A}{x_n} \right) \quad (۱)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{A} \quad (۴)$$

$$x_{n+1} = \frac{A}{x_n} \quad (۳)$$

حل: با توجه به مثال ۱۰ فصل سوم برای $k = 2$ و $c = A$ رابطه تکراری روش نیوتن عبارت است از:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۵- برای پیدا کردن x ، وارون یک عدد حقیقی $x = \frac{1}{A}$ با استفاده از روش نیوتن رابطه تکراری کدام است؟

$$x_{n+1} = \frac{A}{x_n} \quad (۲)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{A} \quad (۱)$$

$$x_{n+1} = x_n(2 - Ax_n) \quad (۴)$$

$$x_{n+1} = x_n(2 + Ax_n) \quad (۳)$$

حل: قرار می‌دهیم $f(x) = \frac{1}{x} - A$ لذا $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ بنابراین با توجه به رابطه تکراری نیوتن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - A}{-\frac{1}{x_n^2}} = x_n + x_n - Ax_n^2 = x_n(2 - Ax_n) \end{aligned}$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۶- در یک کامپیوتر با سیستم نقطه شناور برای نمایش اعداد حقیقی با فرض آنکه اعداد حقیقی A ، B و C قابل نمایش باشند،

(۱) امکان تولید نتیجه صفر در عبارتی شامل اعداد A ، B و C وجود ندارد.

(۲) مقدار محاسبه شده برای $(A + B) + C$ ممکن است با مقدار محاسبه شده برای $A + (B + C)$ متفاوت باشد.

(۳) مقدار محاسبه شده برای $A + B + C$ همواره برابر با مقدار دقیق $A + B + C$ است.

(۴) نمایش مقدار $A + B$ با نمایش مقدار $B + A$ ممکن است متفاوت باشد.

حل: هرگاه اعداد B و C در مقایسه با عدد A کوچک باشند، این امکان وجود دارد که $A + B$ همان A شود و جمع حاصل با C مجدداً A شود اما $B + C$ عددی (کمی) بزرگتر شود و در مقایسه با A قابل جمع شدن باشد، لذا $A + (B + C)$ با $(A + B) + C$ یکسان نیست. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

۷- در یک کامپیوتر با سیستم نقطه شناور برای نمایش اعداد حقیقی با فرض آنکه A ، B و C اعداد حقیقی قابل نمایش باشند،

(۱) ممکن است محاسبه $A + B$ تولید یک عدد در ناحیه سرریز (overflow) کند.

(۲) ممکن است محاسبه $A - B$ تولید یک عدد در ناحیه زیرریز (underflow) کند.

(۳) ممکن است که مقدار محاسبه شده برای $A + C$ با مقدار A مساوی باشد.

(۴) هر یک از موارد فوق.

حل: گزینه (۴) صحیح است. هر سه مورد ۱، ۲ و ۳ صحیح و درست است. برای توضیح بیشتر در ارتباط با گزینه (۳) مساله قبل را ملاحظه نمایید.

۸- روش ذوزنقه در تخمین انتگرال $\int_a^b 2e^{x^2} dx$ برابر کدام است؟

$$(b-a)[e^{a'} + e^{b'}] \quad (۲)$$

$$\frac{(b+a)}{۲}[e^{a'} + e^{b'}] \quad (۴)$$

$$(b+a)[e^{a'} + e^{b'}] \quad (۱)$$

$$\frac{(b-a)}{۲}[e^{a'} + e^{b'}] \quad (۳)$$

حل: هرگاه قرار دهیم $h = b - a$ و $f(x) = ۲e^{x'}$ در این صورت روش دوزنقه برای تخمین انتگرال عبارت است از:

$$I \simeq T(h) = \frac{(b-a)}{۲}[f(a) + f(b)] = \frac{b-a}{۲}[۲e^{a'} + ۲e^{b'}] = (b-a)[e^{a'} + e^{b'}]$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

۹- در تخمین انتگرال معین با استفاده از روشهای عددی،

(۱) با استفاده از روش رامبرگ می‌توان روش‌هایی با مرتبه خطای معین را به روش‌هایی با خطاهایی از مرتبه بالاتر تبدیل نمود.

(۲) روش نقطه میانی دارای خطایی از مرتبه بالاتر از روش سیمپسون است.

(۳) روش‌های دوزنقه و سیمپسون دارای خطایی از مرتبه یکسان هستند.

(۴) روش دوزنقه دارای خطایی از مرتبه بالاتر از روش سیمپسون است.

حل: با توجه به عبارت خطای روشهای نقطه میانی، دوزنقه و سیمپسون هیچکدام از گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ صحیح نیستند. لذا گزینه (۱) صحیح است. برای دیدن توضیح روش رامبرگ لطفاً مساله ۵۶ قسمت اول را ملاحظه کنید.

۱۰- در تخمین انتگرال معین $I = \int_{-۱}^۰ \frac{e^x}{\sqrt{-x}} dx$ ، از آنجا که حول نقطه صفر مشکلات عددی بروز می‌کند، با تغییر متغیر می‌توان نوشت:

$$I = ۲ \int_1^0 e^{-t'} dt \quad (۲)$$

$$I = -۲ \int_0^1 e^{-t'} dt \quad (۱)$$

$$I = ۲ \int_{-1}^0 e^{-t'} dt \quad (۴)$$

$$I = -۲ \int_1^0 e^{-t'} dt \quad (۳)$$

حل: قرار می‌دهیم $-x = t'$ بنابراین

$$dx = -۲t' dt \text{ و } x = ۰ \Rightarrow t = ۰ \text{ و } x = -۱ \Rightarrow t = ۱$$

$$I = \int_1^0 \frac{e^{-t'}}{t'} (-۲t' dt) = -۲ \int_1^0 e^{-t'} dt$$

در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

۱۱- تابع دیفرانسیل $y(x) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t'} dt$ معادل کدام است؟

$$y'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{۲} e^{x'}, y(0) = ۰ \quad (۲)$$

$$y'(x) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} e^{x'}, y(0) = ۰ \quad (۱)$$

$$y'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, y(0) = 0 \quad (۴)$$

$$y'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}, y(0) = 0 \quad (۳)$$

حل: اولاً $y(0) = 0$ در ثانی با توجه به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$y'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۱۲- معادله دیفرانسیل درجه دوم با شرایط اولیه:

$$y''(x) = xy'(x) - x^2 y(x) + x, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$$

معادل است با دستگاه معادلات دیفرانسیل درجه اول (با قرار دادن $z_1 = y$).

$$\begin{cases} z_1' = z_2 & z_1(1) = 1 \\ z_2' = xz_2 - x^2 z_1 + x & z_2(1) = 0 \end{cases} \quad (۲) \quad \begin{cases} z_1' = z_2 & z_1(1) = 1 \\ z_2' = xz_1 - x^2 z_2 + x & z_2(1) = 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 & z_1(1) = 0 \\ z_2' = xz_2 - x^2 z_1 + x & z_2(1) = 0 \end{cases} \quad (۴) \quad \begin{cases} z_1' = z_2 & z_1(1) = 1 \\ z_2' = xz_1 - x^2 z_2 + x & z_2(1) = 0 \end{cases} \quad (۳)$$

حل: با قرار دادن $z_1 = y$ و $z_2 = y'$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} z_2' &= z_1'' = y'' = xy' - x^2 y + x = xz_2' - x^2 z_1 + x \\ &= xz_2 - x^2 z_1 + x \end{aligned}$$

همچنین از اینکه $y(1) = 1$ داریم $z_1(1) = 1$ و از $y'(1) = 0$ داریم $z_2'(1) = 0$ یا $z_2(1) = 0$. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۷۸

۱- اگر روش نیوتن را برای محاسبه ریشه سوم عدد ۹ بکار ببریم، در این صورت اگر تقریب اولیه $x_0 = 2$ و دقت برابر 10^{-2} فرض شود، حداکثر بعد از چند مرحله به نتیجه خواهیم رسید؟

۲ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

حل: با توجه به مثال ۱۰ فصل سوم رابطه تکراری تقریب $\sqrt[3]{9}$ با قرار دادن $k = 3$ و $c = 9$ عبارت است از:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{9}{x_n^2} \right) = \frac{2}{3}x_n + \frac{3}{x_n^2}$$

هرگاه قرار دهیم $x_0 = 2$ در این صورت

$$x_1 = 2,08333 \quad , \quad |x_1 - x_0| = 0,08333$$

$$x_2 = 2,08009 \quad , \quad |x_2 - x_1| = 0,00324$$

$$x_3 = 2,08008 \quad , \quad |x_3 - x_2| = 0,00001 \leq 10^{-4}$$

۲- مقادیر جدول زیر از تابع $f(x)$ استخراج گردیده است.

x	۰	۱	۳	۶	۱۰
$f(x)$	۱	-۶	۴	۱۶۹	۹۲۱

مقدار تابع به ازاء $x = 2$ برابر است با

$$-5,5 \quad (۴) \qquad -8 \quad (۳) \qquad -7 \quad (۲) \qquad 6 \quad (۱)$$

حل: جدول تفاضلات تقسیم شده عبارت است از:

x	$f(x)$
۰	۱
	-۷
۱	-۶
	۵
۳	۴
	۵۵
۶	۱۶۹
	۱۸۸
۱۰	۹۲۱

$$P(x) = 1 - 7(x - 0) + 4(x - 0)(x - 1) + x(x - 1)(x - 3)$$

$$P(2) = 1 - 14 + 8 + 2(1)(-1) = -7$$

در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

۳- انتگرال $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ مفروض است. با فرض $h = 0,5$ و با استفاده از روش دوزنقه مقادیر $I(\frac{h}{4})$ ، $I(h)$

و $I(\frac{h}{2})$ به ترتیب برابر $0,7084$ ، $0,6970$ و $0,6941$ محاسبه گردیده است. در صورتی که بخواهید از روش

رامبرگ استفاده نمایید، مقدار $I(\frac{h}{4}, \frac{h}{4})$ برابر است با:

۰/۶۹۲۹ (۴)

۰/۶۹۳۱ (۳)

۰/۶۹۳۳ (۲)

۰/۶۹۳۴ (۱)

حل: با توجه به مطالب نوشته شده در مورد انتگرالگیری به روش رامبرگ در مساله ۵۶ قسمت قبل داریم:

$$I\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{4}\right) = \frac{4I\left(\frac{h}{4}\right) - I\left(\frac{h}{2}\right)}{3} = \frac{4(0/6941) - 0/6970}{3} = 0/6931$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۴- اگر روش سیمپسون را برای محاسبه $\int_0^3 f(x)dx$ به کار ببریم که در آن $f(x)$ به وسیله جدول زیر تعریف شده است.

x_k	۰	۰/۵	۱	۲	۳
$f(x_k)$	۱	۱	۱	۲/۵	۱

در این صورت مقدار حاصل از این روش برابر است با

۶ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

حل: داریم $h = 0/5$ لذا

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)dx &\approx \frac{0/5}{3} (f(0) + 4f(0/5) + 2f(1) + 4f(2) + f(3)) \\ &= \frac{0/5}{3} (1 + 4 + 2 + 10 + 1) = 0/5 \times 6 = 3 \end{aligned}$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۷۹

۱- اگر ریشه معادله $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1/7 = 0$ را بخواهیم با استفاده از روش وتری (خط قاطع) و با مقادیر اولیه $x_0 = 1$ و $x_1 = 1/3$ و با دقت 10^{-2} محاسبه کنیم. در این صورت بعد از چند مرحله دیگر به ریشه $x_n = 1/2683$ خواهیم رسید.

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

حل: با توجه به رابطه (۴) فصل سوم فرمول روش وتری به صورت زیر است:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

در این مساله داریم $x_0 = 1$, $x_1 = 1/3$ و $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1/7$ بنابراین:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1/3 - \frac{0,1070(1/3 - 1)}{0,1070 - (-0,7)} = 1,2602$$

$$x_3 = 1,2602 - \frac{(-0,0265)(1,2602 - 1/3)}{-0,0265 - 0,1070} = 1,2681$$

از اینکه $|f(x_3)| = 0,0007 < 10^{-2}$ لذا x_3 تقریب موردنظر است یعنی بعد از x_1 به دو تکرار دیگر نیاز داریم بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۲- برای محاسبه $f'(x_0)$ از فرمول تقریبی زیر استفاده می‌کنیم:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h}$$

خطای برش این فرمول برابر است با:

$$\frac{h^2}{6} f^{(3)}(z) \quad (۴) \quad \frac{h^2}{3} f^{(3)}(z) \quad (۳) \quad -\frac{h^2}{6} f^{(3)}(z) \quad (۲) \quad -\frac{h^2}{3} f^{(3)}(z) \quad (۱)$$

حل: این مساله همان مساله ۱۲ قسمت اول است برای راه‌حل آن لطفاً به مساله مذکور مراجعه نمایید. گزینه (۳) صحیح است.

۳- جدول مقادیر زیر مفروض است

x	۰	۰,۱	۰,۲	۰,۳	۰,۴
f(x)	۱	۱,۱۰۵	۱,۲۲۰	۱,۳۴۴	۱,۴۸۲

برای $0,4 \geq x \geq 0,0$ و $f''(x) \leq 3,0$ در این صورت کدام یک از عبارات زیر در مورد انتگرال $I = \int_0^{0,4} f(x) dx$ صحیح است؟

$$0,488 < I < 0,490 \quad (۲)$$

$$0,490 < I < 0,492 \quad (۱)$$

$$0,466 < I < 0,488 \quad (۴)$$

$$0,492 < I < 0,494 \quad (۳)$$

حل: گزینه (۱) صحیح است. این مساله همان مساله ۳۷ قسمت اول است.

۴- اگر روش اویلر را برای حل معادله دیفرانسیل $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ و $h = 0,5$ بکار ببریم، آنگاه داریم:

$$y(1) = 1 \text{ و } y'(1) = 1,5 \quad (۲)$$

$$y(1) = 1 \text{ و } y'(1) = 1,25 \quad (۱)$$

$$y(1) = 1,25 \text{ و } y'(1) = 1 \quad (۴)$$

$$y(1) = 1,5 \text{ و } y'(1) = 1 \quad (۳)$$

حل: قرار می‌دهیم $p = y'$ لذا $p' = y''$ ، بنابراین با توجه به داده‌های مساله خواهیم داشت:

$$y'(0) = 1 \Rightarrow p(0) = 1$$

همچنین معادله دیفرانسیل عبارت است از $y'' = y$ و از آن:

$$(y')' = y \Rightarrow p' = y = f(x, y)$$

چون $h = 0.5$ لذا بایستی $y(x_1)$ ، $y(x_2)$ و $y'(x_1)$ و $y'(x_2)$ را محاسبه نماییم، بنابه فرمول اویلر:

$$p(x_1) \simeq p(x_0) + hy(x_0) \Rightarrow p(0.5) = p(0) + 0.5y(0) = 1 + 0 = 1 \Rightarrow p(0.5) = 1$$

برای y خواهیم داشت:

$$y(x_1) \simeq y(x_0) + hy'(x_0) = 0 + 0.5(1) = 0.5 \Rightarrow y(1) = y(x_2) \simeq$$

$$y(0.5) + 0.5y'(0.5) = 0.5 + 0.5p(0.5) = 0.5 + 0.5(1) = 1$$

نهایتاً

$$y'(1) = p(1) = p(0.5) + hy(0.5) = 1 + 0.5(0.5) = 1.25$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۸۰

۱- برای یافتن ریشه پنجم عدد 2^0 از روش نیوتن رافسون استفاده می‌نماییم. اگر نقطه شروع $x_0 = 2$ باشد بعد از چند مرحله به جواب $x = 1.82^0$ خواهیم رسید؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

حل: با قرار دادن $k = 5$ و $c = 2^0$ در رابطه به دست آمده در مثال ۱۰ فصل سوم کتاب، رابطه تکراری روش نیوتن برای یافتن ریشه پنجم عدد 2^0 به صورت زیر است:

$$x_{n+1} = \frac{1}{5} \left(4x_n + \frac{2^0}{x_n^4} \right)$$

با $x_0 = 2$ خواهیم داشت:

$$x_1 = 1.85, x_2 = 1.821, x_3 = 1.82056, x_4 = 1.82056, x_5 = x_4 \dots$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۲- فرمول خطا در محاسبه یک انتگرال به روش سیمپسون، با کدام گزینه برابر است؟

$$E = (b - a) \frac{h^2}{12} |f''(\xi)| \quad (۲)$$

$$E = (b - a) h |f'(\xi)| \quad (۱)$$

$$E = (b - a) \frac{h^2}{150} |f^{(3)}(\xi)| \quad (۴)$$

$$E = (b - a) \frac{h^2}{180} |f^{(3)}(\xi)| \quad (۳)$$

حل: با توجه به رابطه (۴۸) فصل پنجم کتاب گزینه (۳) صحیح است.

۳- اگر بخواهیم برای داده‌های جدول زیر خط مستقیمی براساس کمترین توانهای دوم برازش بدهیم کدام گزینه مناسب است؟

x	۲,۱۰	۶,۲۲	۷,۱۷	۱۰,۵۲
f(x)	۲,۹۰	۳,۸۸	۵,۹۸	۵,۷۱

$$y = ۲,۲۴۵۱x + ۰,۳۶۲۹ \quad (۲)$$

$$y = ۰,۳۶۲۵x + ۲,۲۶۰۱ \quad (۱)$$

$$y = ۱,۸۲۳۷x + ۰,۴۲۳۱ \quad (۴)$$

$$y = ۰,۴۲۳۱x + ۱,۸۲۳۷ \quad (۳)$$

حل: هرگاه خط کمترین مربعات را به صورت $P(x) = a_1x + a_0$ در نظر بگیریم با توجه به این که $m = ۴$ برای نوشتن معادلات نرمال رابطه (۸) فصل هشتم کتاب جدول زیر را خواهیم داشت:

x_i	$y_i = f(x_i)$	x_i^2	$x_i y_i$
۲,۱۰	۲,۹۰	۴,۴۱	۶,۰۹
۶,۲۲	۳,۸۸	۳۸,۶۸۸۴	۲۴,۱۳۳۶
۷,۱۷	۵,۹۸	۵۱,۴۰۸۹	۴۲,۸۷۶۶
۱۰,۵۲	۵,۷۱	۱۱۰,۶۷۰۴	۶۰,۰۶۹۲
مجموع	۲۶,۰۱	۱۸,۴۷	۲۰۵,۱۷۷۷
			۱۳۳,۱۶۹۴

معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} 4a_0 + ۲۶,۰۱a_1 = ۱۸,۴۷ \\ ۲۶,۰۱a_0 + ۲۰۵,۱۷۷۷a_1 = ۱۳۳,۱۶۹۴ \end{cases}$$

داده‌های گزینه ۱ (تقریباً) در دستگاه فوق صدق می‌کند، لذا گزینه (۱) صحیح است.

۴- اگر از روش درونیابی نیوتن، برای درونیابی داده‌های زیر استفاده کنیم، در این صورت چند جمله‌ای درونیاب کدام است؟

x_k	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
y_k	۰	۴	۲	۰	۴	۲۰

$$\begin{array}{ll} x^2 - x^2 - 2x + 4 & (2) \\ x^2 - 3x^2 + 4 & (1) \\ x^5 - x^2 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 4 & (4) \\ x^2 - x^2 - 2x^2 + 2x + 4 & (3) \end{array}$$

حل: با توجه به اینکه چند جمله‌ای درونیاب منحصر به فرد است، لذا کافی است نقاط (x_k, y_k) را در چند جمله‌ای داده شده در گزینه‌ها قرار دهیم، با انجام این عمل فقط چند جمله‌ای گزینه (۱) است که تمام نقاط در آن صدق می‌کنند، لذا گزینه ۱ صحیح است.

مهندسی شیمی - مخازن هیدروکربوری کد ۱۲۵۸ سال ۱۳۸۰

۱- مقادیر عددی تابع $y = f(x)$ در جدول زیر داده شده است و مقدار تقریبی مشتق دوم تابع را با استفاده از فرمول $f''(x_j) = \frac{\delta^2 f_j}{h^2}$ که در آن $\delta^2 f_j = f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}$ (تفاضل مرکزی) محاسبه می‌کنیم، مقدار تقریبی $f''(2/1)$ کدام است؟

x	۲	۲/۱	۲/۲	۲/۳	۲/۴
f(x)	۱/۴۱۴۲۱۴	۱/۴۴۹۱۳۸	۱/۴۸۳۲۹۰	۱/۵۱۶۵۷۵	۱/۵۴۹۱۹۳

$$\begin{array}{ll} f''(2/1) \simeq 0.0772 & (2) \\ f''(2/1) \simeq -0.0772 & (4) \\ f''(2/1) \simeq 0.772 & (1) \\ f''(2/1) \simeq -0.772 & (3) \end{array}$$

حل: داریم $h = 0.1$ و $x_j = x_1 = 2/1$ لذا

$$\begin{aligned} f''(x_j) &= \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} \\ &= \frac{1/414214 - 2(1/449138) + 1/483290}{0.01} = \frac{-7.72 \times 10^{-4}}{10^{-2}} = -0.0772 \end{aligned}$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۲- خطای انتگرال $\int_1^3 x^2 dx$ با استفاده از روش Simpson معمولی چند درصد می‌باشد؟ ($h = 1$)

$$\begin{array}{llll} 4 & (4) & 2 & (3) \\ 1 & (2) & 0 & (1) \end{array}$$

حل: با توجه به اینکه روش سیمپسون برای چند جمله‌ای‌های درجه دوم دقیق است لذا خطا برای انتگرال بیان شده صفر است یعنی گزینه (۱) صحیح است.

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad \text{۳- خطای مشتق دوم داده شده، با کدام گزینه برابر است؟}$$

$2h$ (۴) h^2 (۳) h^2 (۲) h (۱)

حل: با توجه به بسط تیلور برای توابع $y_{i+1} = f(x_{i+1})$ و $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ داریم:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_i) + \dots$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{6}f'''(x_i) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x_i) + \dots$$

با جمع کردن دو رابطه خواهیم داشت:

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + h^2f''(x_i) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(x_i) + \dots$$

بنابراین

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x_i) + \dots$$

بنابراین چون جمله غالب سمت راست از مرتبه h^2 است گزینه (۲) صحیح است.

۴- رابطه تکرار شونده برای محاسبه جذر عدد حقیقی $N > 0$ ، با استفاده از روش نیوتن در حل معادله $x^2 - N = 0$ کدام است؟

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{N}{x_n}\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2) \quad x_n = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{N}{x_n}\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (4) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

حل: با قرار دادن $c = N$ و $k = 2$ در رابطه به دست آمده در مثال ۱۰ فصل سوم کتاب روند تکراری نیوتن برای حل معادله فوق عبارت است از:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$$

لذا گزینه ۴ صحیح است.

۵- کدام الگوریتمها برای حل دستگاه N معادله خطی، N مجهولی به روشهای تکراری (I) جاکوبی (Jacobi) (II) گاوس سایدل (Gauss - Seidel)، به ترتیب مناسب و صحیح است؟

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2$$

\vdots

$$a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N = b_N$$

$$I)x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}, \quad (II)x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} \quad (1)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$I)x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}, \quad (II)x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} + \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} \quad (2)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$I)x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}, \quad (II)x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} \quad (3)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$I)x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)}, \quad (II)x_i^{(n+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} \quad (4)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

حل: باتوجه به روابط نوشته شده برای روشهای تکراری ژاکوبی و گاوس سایدل در فصل ششم کتاب گزینه (۳) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر کد ۱۲۷۷ سال ۱۳۸۱

۱- اگر روش گاوس دو نقطه‌ای را برای محاسبه انتگرال $\int_0^2 x^2 dx$ به کار ببریم، مقدار حاصل چقدر است؟ (دقت ۲ رقم اعشار بعد از ممیز)

$$۶,۶۳ (۴)$$

$$۶,۳۶ (۳)$$

$$۶,۳۳ (۲)$$

$$۶,۲۲ (۱)$$

حل: داریم $a = 0$ و $b = 2$ برای تبدیل انتگرال به صورت انتگرالی با کرانه‌های $+$ و $-$ تغییر متغیر زیر را اعمال می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)u + (b+a)] = \frac{1}{2}[(2-0)u + (2+0)] = u + 1$$

$$dx = du$$

لذا

و از آن:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 dx &= \int_{-1}^1 (u+1)^2 du \simeq \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right)^2 \\ &= 6,19 + 0,03 = 6,22 \end{aligned}$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۲- شرط همگرایی روش نیوتن - رافسون برای حل معادله $f(x) = 0$ در نقطه شروع x_0 با کدام گزینه برابر است؟

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| < 1 \quad (1) \quad \frac{|f(x_0)f''(x_0)|}{[f'(x_0)]^2} < 1 \quad (2)$$

$$|f(x_0)f'(x_0)| < 1 \quad (3) \quad \frac{|f(x_0)f'(x_0)|}{[f''(x_0)]^2} < 1 \quad (4)$$

حل: شرط کافی همگرایی روش تکرار ساده این است که $|g'(x)| < 1$. در روش نیوتن تابع $g(x)$ عبارت است از:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

لذا

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

$$3- \text{ برای حل دستگاه } \begin{cases} 8x + 2y + 3z = 30 \\ x - 9y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 6z = 31 \end{cases} \text{ از روش تکرار گاوس - سایدل استفاده می‌کنیم. اگر}$$

$(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ در این صورت (x_3, y_3, z_3) کدام است؟

$$(2, 174, 0, 996, 3, 997) \quad (2)$$

$$(2, 022, 0, 989, 3, 997) \quad (1)$$

$$(2, 022, 0, 996, 3, 943) \quad (4)$$

$$(2, 174, 0, 989, 3, 997) \quad (3)$$

حل: فرمول تکراری روش گاوس - سایدل عبارت است از:

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{8} [30 - 2y^{(k)} - 3z^{(k)}]$$

$$y^{(k+1)} = -\frac{1}{9} [1 - x^{(k+1)} - 2z^{(k)}]$$

$$z^{(k+1)} = \frac{1}{6} [31 - 2x^{(k+1)} - 3y^{(k+1)}]$$

با قرار دادن $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 1$ تکرارهای بعدی مطابق جدول زیر به دست می‌آیند:

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
۰	۱	۱	۱
۱	۳,۱۲۵	۰,۴۵۸	۳,۸۹۶
۲	۲,۱۷۴	۰,۹۹۶	۳,۹۴۴
۳	۲,۰۲۲	۰,۹۹۰	۳,۹۹۸

با توجه به در نظر گرفتن خطاهای محاسبه و با توجه به گزینه‌های داده شده گزینه (۱) صحیح است.

۴- تابع $f(x)$ ، تعریف شده توسط جدول داده‌های زیر مفروض است. مشتق مرتبه دوم تابع مزبور در نقطه $x_0 = 1$ چقدر است؟ ($f''(1) = ?$)

x_i	۱,۰	۱,۱	۱,۲
$f(x_i)$	۷,۱۹	۸,۴۶	۹,۸۵

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

حل: برای محاسبه مشتق‌های سرتبه اول و دوم در نقطه x_0 فرمول‌های زیر می‌توانند مورد استفاده قرار بگیرند:

$$f'(x_0) \simeq \frac{1}{h^2}(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \dots)$$

۹

$$f''(x_0) \simeq \frac{1}{h^2}(\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 f_0)$$

در هر مورد یک یا چند جمله از عبارات درون پرانتز را می‌توانیم انتخاب نموده و مشتق‌های مورد نظر را محاسبه نماییم. در این مسئله چون هدف محاسبه $f''(x_0)$ است و سه مقدار برای $f(x_i)$ داریم لذا رابطه را به صورت $f''(x_0) \simeq \frac{\Delta^2 f_0}{h^2}$ در نظر می‌گیریم. چون $h = 0,1$ و $x_0 = 1$ لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f''(1) &\simeq \frac{1}{h^2}(f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \\ &= \frac{9,85 - 2 \times 8,46 + 7,19}{(0,1)^2} = \frac{0,12}{0,01} = 12 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

مهندسی شیمی - مخازن هیدروکربوری کد ۱۲۸۵ سال ۱۳۸۱

۱- مطابق جدول زیر تابع $f(x)$ بر حسب x نمایش داده شده است. تعیین کنید مقدار تابع در نقطه $x = ۱/۵$ به

x	۱	۱/۳	۱/۶	۱/۹	۲/۲
$f(x)$	۰/۷۶	۰/۶۲	۰/۴۵	۰/۲۸	۰/۱۱
	۴	۳	۲	۱	

حل: با توجه به اینکه $۱/۵ \in (۱/۳, ۱/۶)$ لذا بهترین کار استفاده از درونیابی خطی بین دو نقطه $(۱/۳, ۰/۶۲)$ و $(۱/۶, ۰/۴۵)$ می‌باشد. خط گذرنده از این دو نقطه به صورت زیر است:

$$\frac{y - ۰/۶۲}{۰/۴۵ - ۰/۶۲} = \frac{x - ۱/۳}{۱/۶ - ۱/۳} \Rightarrow y = ۰/۶۲ - ۰/۵۶۷(x - ۱/۳)$$

بنابراین

$$f(۱/۵) = y(۱/۵) \simeq ۰/۶۲ - ۰/۵۶۷(۱/۵ - ۱/۳) = ۰/۵۰۷ \simeq ۰/۵۱$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

۲- کدام رابطه عددی زیر مشتق دوم y بر حسب x را $(\frac{d^2y}{dx^2})$ در نقطه i براساس تفاضلهای مستقیم (forward difference) نشان می‌دهد؟ ($\Delta x = h$)

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2 \quad (۲)$$

$$(y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i)/h^2 \quad (۱)$$

$$(y_{i-1} + 2y_{i-1} + y_i)/h^2 \quad (۴)$$

$$(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)/h^2 \quad (۳)$$

حل: با توجه به رابطه (۲۰) فصل چهارم کتاب، گزینه (۲) صحیح است.

۳- کدام عبارت از فرمول $f'_i = \frac{1}{h}[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3}]f_i$ حاصل می‌شود؟

$$f'_i = \frac{1}{2h}[-f_{i-1} + f_{i+1}] \quad (۱)$$

$$f'_i = \frac{1}{2h}(-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}) \quad (۲)$$

$$f'_i = \frac{1}{6h}(-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}) \quad (۳)$$

$$f'_i = \frac{1}{6h}(-2f_{i-1} - 3f_i + 6f_{i+1} - f_{i+2}) \quad (۴)$$

حل: با توجه به رابطه (۹) فصل چهارم کتاب داریم

$$\frac{1}{h}[\Delta f_i - \frac{1}{2}\Delta^2 f_i] = \frac{1}{h}[2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i]$$

بنابراین کافی است $\frac{h}{3}\Delta^2 f_i$ را به مقدار فوق اضافه کنیم، داریم:

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

لذا

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^2}{3}]f_i &= \frac{1}{h}[2f_{i+1} - \frac{1}{2}f_{i+2} - \frac{3}{2}f_i + \frac{1}{3}f_{i+2} - f_{i+1} + f_{i+1} - \frac{1}{3}f_i] \\ &= \frac{1}{h}[3f_{i+1} - \frac{3}{2}f_{i+2} + \frac{1}{3}f_{i+2} - \frac{11}{6}f_i] = \frac{1}{6h}[18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+2} - 11f_i] \end{aligned}$$

در نتیجه گزینه (۳) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر (دانشگاه آزاد اسلامی - کلیه گرایشها) سال ۱۳۷۸

۱- با استفاده از روش مینیمم مربعات معادلهٔ بهترین خط راستی را که نشان‌دهندهٔ نقاط زیر است به دست آورید.

x	۱/۱	۲/۹	۴/۳	۶/۲
f(x)	۵۰	۴۳	۲۸	۲۵

$$g(x) = 55,7167 - 5,30116x \quad (2)$$

$$g(x) = 50 - 2,8813x \quad (1)$$

$$g(x) = 43,564 + 6,8221x \quad (4)$$

$$g(x) = 55,1213 - 4,0782x \quad (3)$$

حل: در این مساله داریم $m = 4$ بنابراین هرگاه $g(x) = a_1x + a_0$ معادله بهترین خط راست برازش‌کننده نقاط داده شده باشد با توجه به رابطه (۸) فصل هشتم کتاب، معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} 4a_0 + (\sum x_i)a_1 = \sum y_i \\ (\sum x_i)a_0 + (\sum x_i^2)a_1 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

برای تشکیل دستگاه جدول زیر را ایجاد می‌کنیم:

x_i	$y_i = f(x_i)$	x_i^2	$x_i y_i$
۱/۱	۵۰	۱/۲۱	۵۵
۲/۹	۴۳	۸/۴۱	۱۲۴/۷
۴/۳	۲۸	۱۸/۴۹	۱۲۰/۴
۶/۲	۲۵	۳۸/۴۴	۱۵۵
مجموع	۱۴/۵	۱۴۶	۴۵۵/۱

بنابراین معادلات نرمال عبارتند از:

$$\begin{cases} 4a_0 + 14,5a_1 = 146 \\ 14,5a_0 + 66,55a_1 = 455,1 \end{cases}$$

با قرار دادن a_0 و a_1 گزینه‌های داده شده در دستگاه فوق صدق می‌کند، لذا گزینه (۲) صحیح است.

۲- با استفاده از روش مینیم مربعات معادلهٔ بهترین خط راستی را که نشان دهندهٔ نقاط زیر است به دست آورید.

x	۲,۱	۶,۲۲	۷,۱۷	۱۰,۵۲	۱۳,۶۸
f(x)	۲,۹	۳,۸۳	۵,۹۸	۵,۷۱	۷,۷۱

$$g(x) = 1,58 + 0,555x \quad (۲)$$

$$g(x) = 2,03839 + 0,402319x \quad (۱)$$

$$g(x) = 2,9 + 0,4567x \quad (۴)$$

$$g(x) = 1 + 0,567x \quad (۳)$$

حل: مشابه مسأله ۱ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x_i	$y_i = f(x_i)$	x_i^2	$x_i y_i$
۲,۱	۲,۹	۴,۴۱	۶,۰۹
۶,۲۲	۳,۸۳	۳۸,۶۸۸۴	۲۳,۸۲۲۶
۷,۱۷	۵,۹۸	۵۱,۴۰۸۹	۴۲,۸۷۶۶
۱۰,۵۲	۵,۷۱	۱۱۰,۶۷۰۴	۶۰,۰۶۹۲
۱۳,۶۸	۷,۷۱	۱۸۷,۱۴۲۴	۱۰۵,۴۷۲۸
مجموع	۳۹,۶۹	۲۶,۱۳	۳۹۲,۳۲۰۱
			۲۳۸,۳۳۱۲

با توجه به اینکه $m = 5$ معادلات نرمال برای تعیین a_0 و a_1 از $g(x) = a_1 x + a_0$ عبارتند از:

$$\begin{cases} 5a_0 + 39,69a_1 = 26,13 \\ 39,69a_0 + 392,3201a_1 = 238,3312 \end{cases}$$

با قرار دادن a_0 و a_1 گزینه‌های داده شده در دستگاه فوق صدق می‌کند، لذا گزینه (۱) صحیح است.

۳- معادلهٔ دیفرانسیل زیر را با استفاده از روش تقریب چهارم رونگه کوتاه در یک مرحله ($t = 0,1$) و $\Delta t = 0,1$ محاسبه کنید.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{4t}{y} - ty \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad y(t = 0,1) = ?$$

$$y(t = 0,1) = 2,111412 \quad (2)$$

$$y(t = 0,1) = 2,119437 \quad (1)$$

$$y(t = 0,1) = 2,051124 \quad (4)$$

$$y(t = 0,1) = 2,991697 \quad (3)$$

حل: فرمول رونگه - کونای مرتبه چهار به صورت زیر است:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

که در آن $y_0 = 3$ و برای $h = \Delta t = 0,1$ و $f(t, y) = \frac{4t}{y} - ty$ داریم:

$$k_1 = hf(t_0, y_0) = 0,1(0) = 0$$

$$k_2 = hf(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0,1f(0,05, 3) = 0,1(\frac{4 \times 0,05}{3} - 0,05 \times 3) = -0,008333$$

$$k_3 = hf(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_2) = 0,1f(0,05, 2,995833) \\ = 0,1(\frac{4 \times 0,05}{2,995833} - 0,05 \times 2,995833) = -0,0083032$$

$$k_4 = hf(t_0 + h, y_0 + k_3) = 0,1f(0,1, 2,991697) \\ = 0,1(\frac{4 \times 0,1}{2,991697} - 0,1 \times 2,991697) = -0,016547$$

بنابراین

$$y(0,1) \simeq y_1 = 3 + \frac{1}{6}(-0,0498194) = 2,991696767 \simeq 2,991697$$

لذا گزینه (۳) صحیح است.

۴- مقدار عددی x را در تکرار سوم برای معادله زیر از طریق روش نیوتن رافسون به دست آورید. حدس اولیه $x_0 = 1, x_1 = 9$.

$$x = 3,02353 \quad (4) \quad x = 2,9995 \quad (3) \quad x = 3,0001 \quad (2) \quad x = 3,4 \quad (1)$$

حل: فرمول تکراری نیوتن عبارت است از:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{9}{x_n})$$

با $x_0 = 1$ خواهیم داشت:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3,4$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

۵- با استفاده از چند جمله‌ای لاگرانژ برای داده‌های زیر $F(V)$ را به دست آورید.

x	۱	۲	۴	۸
F(x)	۱	۳	۷	۱۱

$$F(V) = ۹,۵۸۷ (۴) \quad F(V) = ۱۰,۵۵۵ (۳) \quad F(V) = ۱۰,۸۵۷ (۲) \quad F(V) = ۱۰,۲۲۵ (۱)$$

حل: چند جمله‌ایهای لاگرانژ $L_j(x)$ به صورت زیر می‌باشند:

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)} = \frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{-21}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)} = \frac{(x-1)(x-4)(x-8)}{12}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{-24}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{168}$$

با توجه به اینکه چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از $\sum_{j=0}^3 F_j L_j(x) = P(x)$ لذا

$$\begin{aligned} F(V) \simeq P(V) &= -\frac{(V-2)(V-4)(V-8)}{21} + \frac{(V-1)(V-4)(V-8)}{12} \\ &\quad - \frac{V}{24}(V-1)(V-2)(V-8) + \frac{11}{168}(V-1)(V-2)(V-4) \\ &\simeq ۰,۷۱۴ - ۴,۵ + ۸,۷۵ + ۵,۸۹۳ = ۱۰,۸۵۷ \end{aligned}$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

۶- با استفاده از چند جمله‌ای لاگرانژ $F(۱,۹۵) = ?$ در صورتی که می‌دانیم:

x	۱,۲	۱,۷	۱,۸	۲
F(x)	۳,۳۲۰۱	۵,۴۷۳۹	۶,۰۴۹۶	۷,۳۸۹۱

$$F(۱,۹۵) = ۶,۵ (۲)$$

$$F(۱,۹۵) = ۶,۷۵ (۱)$$

$$F(۱,۹۵) = ۷,۰۲۹ (۴)$$

$$F(۱,۹۵) = ۶,۲۵ (۳)$$

حل: مشابه مسأله قبل داریم:

$$L_0(x) = \frac{(x - 1,7)(x - 1,8)(x - 2)}{(1,2 - 1,7)(1,2 - 1,8)(1,2 - 2)} = -\frac{(x - 1,7)(x - 1,8)(x - 2)}{0,24}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - 1,2)(x - 1,8)(x - 2)}{(1,7 - 1,2)(1,7 - 1,8)(1,7 - 2)} = \frac{(x - 1,2)(x - 1,8)(x - 2)}{0,015}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - 1,2)(x - 1,7)(x - 2)}{(1,8 - 1,2)(1,8 - 1,7)(1,8 - 2)} = -\frac{(x - 1,2)(x - 1,7)(x - 2)}{0,12}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - 1,2)(x - 1,7)(x - 1,8)}{(2 - 1,2)(2 - 1,7)(2 - 1,8)} = \frac{(x - 1,2)(x - 1,7)(x - 1,8)}{0,048}$$

چند جمله‌ای درونیاب عبارت است از $P(x) = \sum_{j=0}^3 F_j L_j(x)$ بنابراین

$$F(1,95) \simeq P(1,95) = \frac{-3,3201}{0,24}(1,95 - 1,7)(1,95 - 1,8)(1,95 - 2)$$

$$+ \frac{0,4739}{0,015}(1,95 - 1,2)(1,95 - 1,8)(1,95 - 2) - \frac{6,0496}{0,12}(1,95 - 1,2)(1,95 - 1,7)(1,95 - 2)$$

$$+ \frac{7,3891}{0,048}(1,95 - 1,2)(1,95 - 1,7)(1,95 - 1,8) = 0,026 - 2,053 + 4,726 + 4,330 = 7,029$$

لذا گزینه (۴) صحیح است.

۷- اگر مقدار A برابر 100 و مقدار خطای آن 16% درصد باشد یعنی $A = 100 \pm 16\%$ مقدار عددی \sqrt{A} و خطای آن چقدر است؟ $\sqrt{A} = ?$

$$10 \pm 16\% \quad (4) \quad 10 \pm 2\% \quad (3) \quad 10 \pm 0,4\% \quad (2) \quad 10 \pm 0,8\% \quad (1)$$

حل: از اینکه $A = 100 \pm 0,16$ لذا

$$100 - 0,16 \leq A \leq 100 + 0,16 \Rightarrow 99,84 \leq A \leq 100,16 \Rightarrow 9,992 \leq \sqrt{A} \leq 10,008$$

$$10 - \frac{0,8}{100} \leq \sqrt{A} \leq 10 + \frac{0,8}{100}$$

و یا

بنابراین $\sqrt{A} = 10 \pm 0,8\%$. لذا گزینه (۱) صحیح است.

مهندسی کامپیوتر (دانشگاه آزاد اسلامی - کلیه گرایشها) سال ۱۳۷۹

۱- کدام یک از جملات زیر غلط است؟

- (۱) روش نصف کردن فاصله (Bisection) حتماً به جواب می‌رسد.
 (۲) در روش Newton - Raphson اگر نقطه شروع نزدیک به ریشه باشد، به سرعت به جواب می‌رسیم.

- (۳) در روش Secant حتماً به جواب نهایی می‌رسیم.
 (۴) در روش successive approximation ممکن است به جواب نهایی نرسیم.

حل: با توجه به نکته بیان شده در بخش ۴.۳.۲ از فصل سوم کتاب، روش وتری یا secant همگرایی تضمین شده ندارد. لذا گزینه مورد نظر گزینه (۳) است.

۲- اگر هدف برازش یک منحنی از نوع $y = ae^{-bx}$ باشد، انتقال استفاده شده چه خواهد بود؟

$$z = e^{\ln y} - e^{\ln(-y)} \quad (۲) \quad z = \frac{-\ln y}{1 + 10y} \quad (۱)$$

$$z = \ln y \quad (۴) \quad t = e^{\ln(-y)} - e^{\ln y} \quad (۳)$$

حل: ابتدا از طرفین رابطه $y = ae^{-bx}$ لگاریتم می‌گیریم $\ln y = \ln a - bx$ پس قرار می‌دهیم $z = \ln y$. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

۳- یک چند جمله‌ای با کمترین درجه براساس اعداد داده شده در جدول زیر ارائه دهید:

x	۱/۰	۱/۵	۲/۰	۲/۵	۳/۰
f(x)	۲/۰۰۰	۳/۳۷۵	۷/۰۰۰	۱۳/۶۲۵	۲۴/۰۰۰

$$x^4 - 2x^2 + 3 \quad (۱) \quad x^3 + 2x - 1 \quad (۲)$$

$$x^3 - 2x + 3 \quad (۳) \quad x^4 + x^3 - x^2 + 3 \quad (۴)$$

حل: هرگاه $P(x)$ چند جمله‌ای درونیاب تابع $f(x)$ باشد در این صورت $P(x_i) = f(x_i)$ برای x_i های داده شده در جدول با قرار دادن نقاط x_i و چند جمله‌ای‌های داده شده در گزینه‌ها فقط چند جمله‌ای گزینه (۳) است که در شرط بیان شده صدق می‌کند، لذا گزینه ۳ صحیح است.

۴- اگر $P_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$ آن‌گاه کدامیک از نامعادلات زیر دقیق‌تر است؟

$$P_{10} \leq \frac{1}{22} \quad (۴) \quad P_{10} \leq \frac{1}{22} \quad (۳) \quad P_{10} \leq \frac{1}{110} \quad (۲) \quad P_{10} \leq \frac{1}{11} \quad (۱)$$

حل: با توجه به اینکه $0 \leq x \leq 1$ لذا $0 \leq x-1 < -1$ و از آن

$$e^{-1} \leq e^{x-1} \leq 1$$

و چون $0 \leq x^n \leq 1$ لذا

$$e^{-1}x^n \leq x^n e^{x-1} \leq x^n$$

با انتگرالگیری از طرفین ناساوی فوق خواهیم داشت:

$$e^{-1} \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

و یا

$$\frac{e^{-1}}{n+1} \leq P_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow P_{10} \leq \frac{1}{11}$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

قسمت سوم (مسائل چهارگزینه‌ای حل نشده)

۱- معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = x + y$ با شرط اولیه $y(0) = 1$ مفروض است، مقدار تقریبی $y(0.2)$ به روش اویلر و با $h = 0.1$ کدام است؟

۱/۱ (۴)

۱/۱۸ (۳)

۱/۰۸ (۲)

۱/۲۲ (۱)

۲- در معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ مقدار $y(0.1)$ با استفاده از روش رونگ - کوتای مرتبه ۲ و $h = 0.1$ کدام است؟

۱/۱۵ (۴)

۱/۲۱ (۳)

۱/۲ (۲)

۱/۱۱ (۱)

۳- در معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ با استفاده از روش اویلر و $h = 0.25$ مقدار $y(0.5)$ کدام است؟

۱/۲۴۵ (۴)

۱/۳۰۵ (۳)

۱/۵۶۲۵ (۲)

۱/۲۵۳۰ (۱)

۴- در معادله $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ مقدار $y(0.1)$ با استفاده از فرمول رونگ - کوتای مرتبه چهارم و $h = 0.1$ کدام است؟

۱/۱۱۰۳۴ (۴)

۱/۱۲۰۵ (۳)

۱/۱۳۵ (۲)

۱/۱۱۵ (۱)

۵- در صورتی که $y' = -xy^2$ و $y(0) = 2$ با استفاده از روش اویلر، با طول گام 0.2 مقدار $y(0.4)$ چند است؟

۱/۶۵ (۴)

۱/۸۴ (۳)

۱/۶ (۲)

۱/۸۵ (۱)

۶- کدام رابطه برای حل تقریبی $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ به روش رونگ - کوتای مرتبه دوم صحیح است؟

$$(x_{m+1} = x_m + h)$$

$$y_{m+1} = y_m(1 + 2h + h^2) \quad (2)$$

$$y_{m+1} = y_m(1 + h + \frac{h^2}{2}) \quad (1)$$

$$y_{m+1} = y_m(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2}) \quad (4)$$

$$y_{m+1} = y_m(1 - h + h^2) \quad (3)$$

۷- در مسأله قبل عبارت متناظر با y_{m+1} در روش رونگ - کوتای مرتبه چهارم کدام است؟

$$(1) \quad (1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})y_m$$

$$(2) \quad (1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{8} + \frac{h^4}{16})y_m$$

$$(3) \quad (1 + h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24})y_m$$

$$(4) \quad (1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{8} + \frac{h^4}{16})y_m$$

۸- در معادله دیفرانسیل $\begin{cases} y' = x + 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ مقدار $y(0,1)$ با استفاده از روش بسط تیلور مرتبه دوم کدام است؟
($h = 0,1$)

$$(1) \quad 1,20 \quad (2) \quad 1,22 \quad (3) \quad 1,45 \quad (4) \quad 1,98$$

۹- برای محاسبه تقریبی ریشه‌های معادله $x^2 + 100x + 1 = 0$ کدام یک از روابط زیر تقریب دقیقتری به دست

می‌دهند؟

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = -50 - \sqrt{2499} \\ x_2 = \frac{1}{x_1} \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = -50 + \sqrt{2499} \\ x_2 = \frac{1}{x_1} \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = -50 - \sqrt{2499} \\ x_2 = -100 - x_1 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = -50 + \sqrt{2499} \\ x_2 = -50 - \sqrt{2499} \end{cases}$$

۱۰- چنانچه x و y از روابط $y = \frac{bc}{a}$ و $x = \frac{1}{y^2}$ محاسبه شوند و $\delta_a, \delta_b, \delta_c, \delta_x$ به ترتیب خطای نسبی a, b, c و x باشند، کدامیک از روابط زیر بین آنها برقرار است؟

$$(1) \quad \delta_x \leq \delta_a + \delta_b + \delta_c$$

$$(2) \quad \delta_x \leq (\delta_a + \delta_b + \delta_c)^2$$

$$(3) \quad \delta_x \leq 2(\delta_a + \delta_b + \delta_c)$$

$$(4) \quad \delta_x \leq \delta_b + \delta_c - \delta_a$$

۱۱- برای اندازه‌گیری مساحت یک دایره از دو روش می‌توان استفاده کرد، نخست اندازه‌گیری قطر دایره (D) توسط

خطکش و استفاده از فرمول $S = \frac{1}{4}\pi D^2$ ، در روش دوم شعاع دایره (R) را با خطکش اندازه گرفته و از فرمول

$S = \pi R^2$ استفاده می‌شود. کدام روش خطای مطلق کمتری تولید می‌کند؟ فواصل خطکش ۱ میلی‌متر می‌باشد

و برای مقدار π تقریب مناسبی از آن استفاده می‌شود.

(۱) روش اول

(۲) روش دوم

(۳) تفاوتی نمی‌کند.

(۴) اطلاعات مسأله کافی نیست.

۱۲- چنانچه α ریشه معادله $f(x) = 0$ بوده و مرتبه تکرار آن ۲ باشد کدام گزینه در مورد همگرایی روش نیوتن به

صورت $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ صحیح است؟

(۱) مرتبه همگرایی = ۲ و سرعت همگرایی = ۱

(۲) مرتبه همگرایی = ۱ و سرعت همگرایی = $\frac{1}{2}$

(۳) مرتبه همگرایی = سرعت همگرایی = ۱

(۴) هیچکدام

۱۳- معادله $x \cos x - 1 = 0$ چند ریشه دارد؟

(۱) ریشه ندارد. (۲) ۳ ریشه (۳) ۵ ریشه (۴) بی‌نهایت ریشه

۱۴- برای به دست آوردن ریشه معادله $x^2 + x - 1 = 0$ در فاصله $(0, 1)$ به روش نصف کردن فاصله (دو

بخشی) و با دقت 10^{-2} احتیاج به چند تکرار داریم؟

(۱) ۱۰ تکرار (۲) ۸ تکرار (۳) ۷ تکرار (۴) ۶ تکرار

۱۵- مقدار $y(0, 1)$ و $y(0, 2)$ از معادله‌ی $y' = x + y$ با شرایط اولیه‌ی $y(0) = 0$ با استفاده از روش تیلور

مرتبه دوم کدام است؟ (با فرض $h = 0, 1$)

(۱) $0, 1$ و $0, 2$ (۲) $0, 005$ و $0, 021$ (۳) $0, 005$ و $0, 025$ (۴) $0, 005$ و $0, 005$

۱۶- اگر روش اویلر را برای حل معادله‌ی دیفرانسیل $y'' - y = 0$ ، $y'(0) = 1$ و $h = 0, 5$ به کار ببریم آنگاه

داریم:

$$y(1) = 1, y'(1) = 1, 5 \quad (2)$$

$$y(1) = 1, y'(1) = 1, 25 \quad (1)$$

$$y(1) = 1, 25, y'(1) = 1 \quad (4)$$

$$y(1) = 1, 5, y'(1) = 1 \quad (3)$$

۱۷- اگر از روش اویلر در حل معادله‌ی دیفرانسیل $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+y}$ با شرط اولیه‌ی $y(0) = 1$ استفاده شود، با

انتخاب $h = 0, 5$ ، $y(1)$ تقریباً برابر است با:

$$1, 875 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$1, 5 \quad (2)$$

$$1, 125 \quad (1)$$

۱۸- روش اویلر را برای معادله‌ی دیفرانسیل $y' = 2y$ به کار برده و با توجه به اینکه $x_0 = 0$ و $y_0 = 1$ و $h = 0, 5$

جواب معادله در نقاط x_1 و x_2 و x_3 به ترتیب کدام است؟

$$2, 12, 2, 3, 2, 1 \quad (4) \quad 1, 22, 1, 31, 1, 3 \quad (3) \quad 1, 1, 1, 33, 1, 21 \quad (2) \quad 1, 33, 1, 21, 1, 1 \quad (1)$$

۱۹- حل معادله‌ی دیفرانسیل زیر به روش اویلر $y_0 = -1$ و $x_0 = 2$ و $y(2) = 1$ و $y' = xy$ و $h = 0, 1$

برای y_3 کدام است؟

۱,۶۳۴۵۲ (۴) ۲,۰۰۱۲۱ (۳) ۱,۷۷۱۴۴ (۲) ۱,۴۷۷۴۱ (۱)

۲۰- الگوریتم تیلور از مرتبه‌ی ۳ را در مورد معادله‌ی دیفرانسیل زیر به کار برده و مقادیر تقریبی $y(0/1)$ و $y(0/2)$

کدام است؟ ($y' = e^x, h = 0/1, y(0) = 1$)

۱,۷۳۵۹۲,۱,۵۴۳۸۲ (۲) ۱,۴۹۸۴۲,۱,۴۲۱۳۸ (۱)

۱,۱۱۱۸۹,۱,۸۷۳۲۳ (۴) ۱,۱۰۵۱۶۷,۱,۲۲۱۳۹ (۳)

۲۱- با استفاده از روش رونگ - کوتای مرتبه‌ی ۴، جواب‌های x_1 و y_1 از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر کدام

است؟

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 6 \\ y(0) = 4 \end{cases} \quad h = 0/2, [0, 0/2]$$

$x_1 = 6,5493252$ (۲)

$y_1 = 4,8339942$

$x_1 = 3,65942325$ (۴)

$y_1 = 7,85930252$

$x_1 = 6,29354551$

$y_1 = 4,5393249$ (۱)

$x_1 = 4,5393249$

$y_1 = 6,29354551$ (۳)

۲۲- با استفاده از روش اویلر جواب معادله‌ی روبرو کدام است؟ $y' = f(x, y) = y$

$y(0) = 1, h = 0/25, y(0/75),$ برای $m = 3$

۲,۶۴۳۵ (۴)

۲,۴۴۱۴ (۳)

۳,۵۳ (۲)

۲,۴۲۴۲ (۱)

۲۳- برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ به روی حذفی گاوس، پیچیدگی روش از لحاظ تعداد عملیات

مقدماتی (جمع و ضرب) کدام است؟ ($n =$ تعداد معادلات)

$O(n^5)$ (۴)

$O(n^4)$ (۳)

$O(n^3)$ (۲)

$O(n^2)$ (۱)

۲۴- چنانچه دستگاه $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$ را به روش تکراری گاوس- سایدل و با نقطه‌ی اولیه‌ی $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ حل نماییم مقدار z بعد از تکرار اول ...

۰,۴۵ (۴)

۰,۲۵ (۳)

۰,۵ (۲)

۰,۷۵ (۱)

۲۵- چنانچه دستگاه معادلات سؤال قبل را به روش ژاکوبی حل کنیم، مقدار x پس از ۲ تکرار؟

(۱) $x = 2$ ولی روش همگرای نیست.

(۲) $x = 0$ ولی روش همگرا نیست.

(۳) $x = 2$ و روش همگرا است.

(۴) $x = 0$ و روش همگرا است.

۲۶- روش تکرار ژاکوبی برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ که در آن $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -9 & 12 & 1 \\ 0 & 8 & -20 \end{bmatrix}$

می باشد به ازای هر نقطه اولیه $P_0(x_0, y_0, z_0) \dots$

(۱) همواره همگرا می باشد.

(۲) هیچ وقت همگرا نمی باشد.

(۳) همگرایی آن بستگی به نقطه شروع اولیه P_0 دارد.

(۴) اطلاعات مسأله کافی نمی باشد.

۲۷- همگرایی دستگاه معادلات سؤال قبل با استفاده از روش تکراری گاوس - سایدل چگونه است؟

(۱) همواره همگرا می باشد.

(۲) هیچ وقت همگرا نمی باشد.

(۳) همگرایی آن بستگی به نقطه شروع اولیه P_0 دارد.

(۴) اطلاعات مسأله کافی نمی باشد.

۲۸- چنانچه دستگاه $\begin{cases} x_1 + 0.99x_2 = 1.99 + \alpha \\ 0.99x_1 + 0.98x_2 = 1.97 \end{cases}$ را به روش حذفی گاوس حل کنیم ($|\alpha| < 10^{-2}$) رفتار جواب معادله در ازای تغییرات α چگونه خواهد بود؟

(۱) تغییرات جواب مسأله متناسب با میزان تغییرات α است.

(۲) تغییرات جواب مسأله متناسب با توان دوم تغییرات α است.

(۳) تغییرات کوچک در α منجر به تغییرات بزرگ در جواب مسأله می شود.

(۴) تغییرات بزرگ در α منجر به تغییرات کوچک در جواب مسأله می شود.

۲۹- اگر از روش تکرار ساده (تعمیم یافته) برای حل دستگاه $\begin{cases} x = \frac{8x - 4x^2 - y^2 + 1}{4} \\ y = \frac{2x - x^2 + 4x - y^2 + 3}{4} \end{cases}$ با نقطه

اولیه $P_0(1, 1/2)$ استفاده شود پس از اولین تکرار چه مقداری برای x به دست می آید؟

۱/۱۳ (۴)

۱/۱۱۵ (۳)

۰/۱۱۵ (۲)

۰/۴۴۵ (۱)

۳۰- برای حل دستگاه $\begin{cases} x = \frac{2x - x^2 + y}{2} \\ y = \frac{2x - x^2 + 8}{9} + \frac{4y - y^2}{4} \end{cases}$ با روش تکرار غیرخطی سایدل و با نقطه اولیه $P_0(1, 4, 2)$ بعد از تکرار اول چه مقداری برای y به دست می‌آید؟

۱,۹۸۱۴ (۴)

۱,۹۸۲۲ (۳)

۱,۹۸۰۴ (۲)

۱,۹۸۱۹ (۱)

۳۱- چندجمله‌ای‌های درونیاب برای داده $\begin{array}{c|ccc} x & 1 & 0 & -1 \\ y & 0 & 0 & 0 \end{array}$ بی‌شمارند.

(۲) می‌توانند چندجمله‌ایها دقیقاً درجه دوم باشند.

(۳) می‌توانند چندجمله‌ایهای دقیقاً خطی باشند.

(۴) با درجه کوچکتر یا مساوی دو، از نظر تعداد بی‌شمارند.

۳۲- خط کمترین مربعات مربوط به تابع جدول زیر کدام است؟

x_i	-۲	-۱	۰	۱	۲
f_i	۰	۱	۲	۱	۳

$$y = 0,445x + 0,3 \quad (۲)$$

$$y = 0,6x + 1,4 \quad (۱)$$

$$y = 0,21x + 0,35 \quad (۴)$$

$$y = 0,377x + 0,25 \quad (۳)$$

۳۳- روش نیوتن برای محاسبه ریشه معادله $f(x) = (x - 2)^3 = 0$ وقتی x به اندازه کافی نزدیک به عدد ۲ باشد، دارای نرخ (مرتبه) همگرایی جانبی برابر با ... است.

(۲) دو

(۱) یک

(۴) عددی بزرگتر از یک ولی کوچکتر از دو

(۳) بزرگتر از دو

۳۴- اگر مقادیر عددی تابع $y = f(x)$ در جدول زیر داده شده باشند و مقدار تقریبی مشتق دوم تابع را با استفاده

از فرمول $f(x_j) \simeq \frac{\delta^2 f_j}{h^2}$ که در آن $\delta^2 f_j = f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}$ (تفاضل مرکزی) محاسبه می‌کنیم برای $f''(2,1)$ داریم:

x	۲	۲,۱	۲,۲	۲,۳	۲,۴
$f(x)$	۱,۴۱۴۲۱۴	۱,۴۴۹۱۳۸	۱,۴۸۳۲۹۰	۱,۵۱۶۵۷۵	۱,۵۴۹۱۹۳

$$f''(2,1) \simeq 0,772 \quad (۲)$$

$$f''(2,1) \simeq 0,0772 \quad (۱)$$

$$f''(2,1) \simeq -0,0772 \quad (۴)$$

$$f''(2,1) \simeq -0,772 \quad (۳)$$

۳۵- برای معادله غیرخطی $e^x - e + 1 = 0$... قرار دارد.

(۱) بیش از یک ریشه در فاصله $[0, 1]$

(۲) تنها یک ریشه در فاصله $[-1, 0]$

(۳) بیش از یک ریشه در فاصله $[-1, 0]$

(۴) تنها یک ریشه در فاصله $[0, 1]$

۳۶- داده‌های $x_i, i = 0, 1, \dots, n, x_i \neq x_j, i \neq j$ ، موردنظر است. فرض کنید $L_i(x)$ توابع لاگرانژ وابسته به x_i ها باشند. در این صورت داریم: $\sum_{i=0}^n L_i(x) x_i^j = \dots$

(۱) $x^j, j = 1, \dots, n+1$

(۲) $x^{n+1}, j = 0, \dots, n$

(۳) $x^j, j = 0, 1, \dots, n$

(۴) $x^n, j = 0, 1, \dots, n$

۳۷- برای رسیدن به خطای $\epsilon = 0.001$ در ریشه‌یابی معادله $f(x) = x^6 - x - 1 = 0$ ($x \in [1, 2]$) تقریباً به ... مرحله تنصیف (بخش کردن) در روش تنصیف (bisection) نیاز داریم.

(۱) ۱۳

(۲) ۱۰

(۳) ۷

(۴) ۱۰۰۰

۳۸- خطای فرمول تقریبی $f'(x_i + h/2) \simeq \frac{\Delta f_i}{h}$ متناسب است با ...

(۱) h

(۲) h^2

(۳) h^3

(۴) $h^p, 1 < p < 2$

۳۹- فرض کنید $f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) + \dots$

ملاحظه می‌کنیم که برای تقریب $f'(x_0) \simeq N(h) = \frac{1}{2h}[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$ مرتبه خطای روش $O(h^2)$ است. با کدامیک از روش‌های تقریبی زیر می‌توان $f'(x_0)$ را با $O(h^4)$ تقریب زد؟

(۱) $N(\frac{h}{2}) + \frac{N(\frac{h}{2}) - N(h)}{3}$

(۲) $N(h) + \frac{N(h) - N(\frac{h}{2})}{3}$

(۳) $N(\frac{h}{2}) + \frac{N(h) - N(\frac{h}{2})}{3}$

(۴) $N(h) + \frac{N(\frac{h}{2}) - N(h)}{3}$

۴۰- روش نقطه میانی برای تخمین انتگرال معین در مقایسه با روش ذوزنقه‌ای دارای خطای برشی از مرتبه‌ای ... است و به تعداد ... محاسبه تابع نیاز دارد.

(۱) بیشتر / کمتری

(۲) یکسان / کمتری

(۳) کمتر / کمتری

(۴) بیشتر / بیشتری

۴۱- مقدار تقریبی $\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 6x - 7)dx$ از روش سیمپسون با $h = 0.25$ برابر است با ...

(۱) -4.1

(۲) -2

(۳) -4

(۴) -2.2

۴۲- فرض کنید می‌خواهیم $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ را با

$$M = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) \quad (*)$$

که در آن c_1, c_2, c_3 و x_1, x_2, x_3 تعیین می‌شوند، تقریب بزنیم. با تعیین مناسب این مقادیر، بیشترین درجه چند جمله‌ایهایی که مقدار I وابسته به آنها دقیقاً از $(*)$ به دست می‌آیند، برابر است با ...

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۴۳- معادله دیفرانسیل
$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$
 را در نظر بگیرید. به ازای $h = 0.1$ ، مقدار تقریبی $y(1.2)$ از

روش اویلر برابر است با ...

- ۱.۲ (۱) ۱.۴۶۵ (۲) ۱.۴ (۳) ۱.۲۶۵ (۴)

۴۴- محور (یا پاشنه) گزینی در روش حذفی گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی به منظور ...

- (۱) تنها ارتقای پایداری روش است.
- (۲) هم سرعت بخشیدن به زمان اجرای روش و هم ارتقای پایداری روش است.
- (۳) هم صرفه‌جویی در حافظه مورد نیاز و هم ارتقای پایداری روش است.
- (۴) هم صرفه‌جویی در حافظه مورد نیاز و هم سرعت بخشیدن به زمان اجرای روش است.

۴۵- می‌دانیم که $\lambda_1 = 2$ یک مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ است و دترمینان A برابر است

با ۳۶، دو مقدار ویژه دیگر A کدام است؟

- ۱) $\lambda_2 = 1, \lambda_3 = 18$ ۲) $\lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$ ۳) $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 9$ ۴) $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 7$

۴۶- تخمین $y(0.1)$ برای مسئله
$$\begin{cases} y'(x) = xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
 با استفاده از سری تیلور مورد نظر است. تخمینهای حاصل

از سری تیلور مرتبه دوم و سوم با قدم $h = 0.1$ را به ترتیب y_2 و y_3 بگیرید. در این صورت ...

- ۱) $y_2 < y_3$ ۲) $y_2 > y_3$ ۳) $y_2 = y_3$ ۴) $(y_2)(y_3) = 0$

۴۷- فرمول اویلر برای حل مسئله با مقدار اولیه $y(0) = 0$ و $y' = x + y$ با $h = 0.2$ عبارتست از $y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n)$. فرمول اویلر تغییر یافته (Modified Euler) برای این مسئله عبارتست از:

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n) - 0.2 \quad (1)$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n) + 0.22 \quad (2)$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.22(x_n + y_n) + 0.2 \quad (3)$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.22(x_n + y_n) + 0.2 \quad (4)$$

۴۸- مرتبه همگرایی روش تکرار نیوتن برای پیدا کردن ریشه برای مسأله $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ برابر است با ...

(۱) درجه دوم (۲) زیرخطی (بهتر از خطی) (۳) خطی (۴) درجه سوم

۴۹- برای محاسبه مقدار $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ به ... نیاز است.

(۱) $2n$ ضرب و n جمع (۲) $n-1$ ضرب و n جمع

(۳) $\frac{n(n+1)}{2} + n$ ضرب و n جمع (۴) n ضرب و n جمع

۵۰- برای معادله $f(x) = x^2 - 2x - 5 = 0$ ، روش تنصیف (نصف کردن فاصله) با شروع از فاصله ...

(۱) $[1, 2]$ به یک جواب حقیقی همگرا می‌شود. (۲) $[2, 3]$ به یک جواب حقیقی همگرا می‌شود.
(۳) $[0, 1]$ به یک جواب حقیقی همگرا می‌شود. (۴) $[2, 3]$ به یک جواب حقیقی همگرا می‌شود.

۵۱- p ، نرخ (مرتبه) همگرایی روش نیوتن، برای محاسبه ریشه برابر با صفر، در معادله $f(x) = x^5 - 2x^2 = 0$ از آنجا که مشتقات اول و دوم f در صفر مساوی صفر هستند، با شروع از یک نقطه $x_0 \neq 0$ ، نزدیک به صفر، برابر است با ...

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $1 < p < 2$ (۴) $p > 2$

۵۲- روش نیوتن برای حل مسأله $\min_x (x^2)$ به ازای هر نقطه شروع x_0 ، ...

(۱) با تعداد متناهی تکرار به جواب می‌رسد. (۲) با یک تکرار به جواب می‌رسد.
(۳) با سرعت همگرایی حداکثر خطی به جواب می‌رسد. (۴) ممکن است به جواب نرسد.

۵۳- انتگرالگیری به وسیله روشهای دوزنقه‌ای و نقطه میانی در یک فاصله به اندازه h ، ...

(۱) به ترتیب خطاهای از مرتبه h^2 و h دارند.
(۲) به ترتیب خطاهای از مرتبه h^2 دارند ولی ضریب خطای روش دوزنقه‌ای کوچکتر است.
(۳) به ترتیب خطاهای از مرتبه h^2 دارند ولی ضریب خطای نقطه میانی کوچکتر است.
(۴) به ترتیب خطاهای از مرتبه h و h^2 دارند.

۵۴. مقادیر A و B برای تخمین انتگرال به صورت $\int_a^b f(x)dx \simeq Af(a) + Bf(b)$ چه باشند تا فرمول طرف راست برای چندجمله‌ایهای ثابت (درجه ۰) و خطی (درجه ۱)، جواب دقیق به دست دهد؟

$$B = b + a, A = b - a \quad (۲)$$

$$A = B = \frac{a+b}{2} \quad (۱)$$

$$A = B = \frac{b-a}{2} \quad (۴)$$

$$B = \frac{b-a}{2}, A = \frac{b+a}{2} \quad (۳)$$

۵۵. روش هیون برای حل معادله دیفرانسیل با شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ ، $y'(x) = f(x, y(x))$ ، به شرح زیر است y_i تخمین برای $y(x_i)$ است:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h_i \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h_i f(x_i, y_i))] \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل با شرط اولیه $y(1) = 0$ ، $y'(x) = x^2 + y^2 - xy$ را در نظر بگیرید. با نقطه شروع $x_0 = 1$ و $h_1 = 0.1$ ، یک قدم از روش هیون را به کار بگیرید. y_1 تخمین $y(1.1)$ برابر است با ...

$$1.1065 \quad (۴)$$

$$1.1165 \quad (۳)$$

$$1.1155 \quad (۲)$$

$$1.1055 \quad (۱)$$

۵۶. یک روش رانگ - کاتا برای حل معادله دیفرانسیل $y(x_0) = y_0$ ، $y'(x) = f(x, y)$ به شرح زیر است y_i تخمین برای $y(x_i)$ است:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_{i+1}, y_i + k_1), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

معادله دیفرانسیل $y(1) = 1$ ، $y'(x) = x^2 + y^2$ را در نظر بگیرید. به ازای $h = 1.1 - 1 = 0.1$ مقدار تخمین $y(1.1)$ برابر است با:

$$1.23255 \quad (۴)$$

$$1.233 \quad (۳)$$

$$1.232 \quad (۲)$$

$$1.2325 \quad (۱)$$

۵۷. خطای برشی عبارت $\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$ به عنوان تخمینی برای $f''(x)$ ، مشتق دوم f در نقطه x ، متناسب است با ...

$$h^2 \quad (۴)$$

$$1 < p < 2, h^p \quad (۳)$$

$$h \quad (۲)$$

$$h^3 \quad (۱)$$

۵۸. در برازش چند جمله‌ای درجه دوم $P(x)$ به مفهوم کمترین مربعات خطا به داده‌ها:

x	۱	۰	-۱
y	۱	۰	۱

تعداد چند جمله‌ایهای حاصل ...

- (۱) برابر یک است. (۲) می‌تواند صفر باشد.
- (۳) می‌تواند نامتناهی باشد. (۴) می‌تواند بیشتر از یک باشد ولی نامتناهی نیست.
- ۵۹- اگر در درونیابی توسط چند جمله‌ایهای مرتبه n محل گره‌ها را در ریشه‌های چند جمله‌ای درجه $n + 1$ چیشف انتخاب کنیم، آنگاه در محاسبه تابع درونیاب ...
- (۱) یا به علت منحصر به فرد بودن تابع درونیاب، در میزان خطای محاسباتی ایجاد شده تغییری پدید نمی‌آید.
- (۲) خطای محاسباتی کاهش می‌یابد.
- (۳) تعداد عملیات لازم کمتر می‌شود ولی خطای محاسباتی تغییری نمی‌کند.
- (۴) تعداد عملیات لازم بیشتر می‌شود، و در نتیجه خطای محاسباتی افزایش می‌یابد.
- ۶۰- چند جمله‌ای درونیاب برای درونیاب (interpolation) داده‌های $(x_i, f(x_i))$ ، $i = 1, \dots, n$ که در آن نقاط x_i مجزا هستند و $f(x) = x^{n-1}$ ، ...
- (۱) تنها x^{n-1} است.
- (۲) x^{n-1} است ولی چند جمله‌ایهای دیگری هم که تعدادشان متناهی است، وجود دارند.
- (۳) x^{n-1} است ولی چند جمله‌ایهای بی‌شمار دیگری هم وجود دارند.
- (۴) x^{n-1} نمی‌تواند باشد.

قسمت چهارم (حل مسائل قسمت سوم)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

حل ۱.

$$f(x, y) = y' = x + y$$

$$x_0 = 0, y_0 = 1$$

$$y(0.1) = y(0) + 0.1f(0, 1) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$$

$$y(0.2) = 1.1 + 0.1f(0.1, 1.1) = 1.1 + 0.1(1.2) = 1.1 + 0.12 = 1.22$$

$$x_n = x_0 + nh$$

حل ۲.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

$$k_1 = 0.1f(0, 1) = 0.1(0 + 1) = 0.1$$

$$k_2 = 0.1f(0 + 0.1, 1 + 0.1) = 0.1(0.1 + 1.1) = 0.12$$

$$y(0.1) = y(0) + \frac{1}{4}(k_1 + k_2) = 1 + \frac{1}{4}(0.1 + 0.12) = 1.11$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

حل ۳.

$$y(0.25) = y(0) + 0.25(1) = 1.25$$

$$y(0.5) = y(0.25) + hy(0.25) = (h + 1)y(0.25) = (1.25)(1.25) = 1.5625$$

حل ۴. روش رونگه - کوتای مرتبه چهارم عبارت است از:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

که در آن

$$k_1 = hf(x_n, y_n), k_2 = hf(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{k_1}{4})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

$$y(0.1) = y(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

لذا

$$k_1 = hf(0, 1) = 0.1(0 + 1) = 0.1$$

$$k_2 = 0.1f(0.025, 1.025) = 0.11$$

$$k_3 = 0.1f(0.05, 1.055) = 0.1105$$

$$k_4 = 0.1f(0.1, 1.1105) = 0.12105$$

$$\Rightarrow y(0.1) = 1 + \frac{1}{6}(0.1 + 0.22 + 0.221 + 0.12105) = 1.11034$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), h = 0.2 \quad \text{حل ۵.}$$

$$y(0.2) = y(0) + 0.2f(0, 2) = 2 + 0.2(-0 \times 4) = 2$$

$$y(0.4) = y(0.2) + 0.2f(0.2, 2) = 2 + 0.2(-0.2 \times 4) = 1.84$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(k_1 + k_2) \quad \text{حل ۶.}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) = hy_n$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

$$f(x_n, y_n) = y_n \Rightarrow k_1 = hy_n, k_2 = h(y_n + k_1)$$

$$k_2 = h(y_n + hy_n) = hy_n + h^2y_n$$

$$k_1 + k_2 = 2hy_n + h^2y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + y_n(h + \frac{h^2}{4}) = y_n(\frac{h^2}{4} + h + 1)$$

لذا با قرار دادن $n = m$ گزینه ۱ صحیح است.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{حل ۷.}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) = hy_n$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) = h(y_n + \frac{k_1}{2}) = h(y_n + \frac{hy_n}{2}) = y_n(h + \frac{h^2}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) = h(y_n + \frac{k_2}{2}) = h(y_n + \frac{y_n}{2}(h + \frac{h^2}{2})) = y_n(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_2) = h(y_n + k_2) = h(y_n + y_n(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}))$$

$$= y_n(h + h^2 + \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{4})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{y_n}{6}(h + 2h + h^2 + 2h + h^2 + \frac{h^3}{2} + h + h^2 + \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{4})$$

$$y_{n+1} = y_n(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{24})$$

بنابراین با قرار دادن $n = m$ گزینه ۱ صحیح است.

$$y_{n+1} = y_n + kf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f'(x_n, y_n) \quad \text{حل ۸.}$$

$$f(0, 1) = 0 + 2 = 2$$

$$f'(x, y) = 1 + 2y' = 1 + 2f(x, y) \Rightarrow f'(0, 1) = 1 + 2f(0, 1) = 1 + 2(2) = 5$$

$$y(0.1) = y(0) + 0.1(2) + \frac{0.1^2}{2}(5) = 1.45$$

$$x = -50 \pm \sqrt{2500 - 1} = -50 \pm \sqrt{2499} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -50 + \sqrt{2499} \\ x_2 = -50 - \sqrt{2499} \end{cases} \quad \text{حل ۹}$$

برای حاصل ضرب دو ریشه داریم: $x_1 \cdot x_2 = 1$

می‌دانیم تفریق دو عدد تقریبی نزدیک هم با از دست دادن ارقام با معنی و در نتیجه با کم شدن خطا مواجه می‌شود. از این که $\sqrt{2499}$ و ۵۰ تقریباً مساوی هستند لذا بایستی از تفریق آن‌ها اجتناب نماییم. این حالت در گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ رخ می‌دهد درحالی که برای گزینه ۱ چنین عملی اتفاق نمی‌افتد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

$$y = b \cdot a \cdot \frac{1}{a}, \quad x = \frac{1}{y^2} = a^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2} \quad \text{حل ۱۰}$$

$$e_f \leq \sum_1^n e_a \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}$$

$$f(a, b, c) = x = a^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2a}{b^2 c^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{-2a^2}{b^3 c^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial c} = \frac{-2a^2}{c^3 b^2}$$

$$e_f \leq \frac{|2a|}{b^2 c^2} (e_a + e_b \left| \frac{a}{b} \right| + e_c \left| \frac{a}{c} \right|)$$

$$\delta_x = \frac{e_x}{|x|} = \frac{e_x}{a^2 b^2 c^2} \leq \frac{2}{|a|} (e_a + e_b \left| \frac{a}{b} \right| + e_c \left| \frac{a}{c} \right|) \Rightarrow \delta_x \leq 2 \left(\frac{e_a}{|a|} + \frac{e_b}{|b|} + \frac{e_c}{|c|} \right)$$

$$\Rightarrow \delta_x \leq 2(\delta_a + \delta_b + \delta_c)$$

$$D = d + e_1, \quad \frac{D}{2} = \frac{d}{2} + e_2 \quad \text{حل ۱۱}$$

$$D^2 = (d + e_1)^2 = d^2 + e_1^2 + 2d \cdot e_1$$

$$\frac{D^2}{4} = \frac{d^2}{4} + e_2^2 + 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot e_2 = \frac{1}{4} (d^2 + 4e_2^2 + 4d \cdot e_2)$$

$$S_1 = \frac{1}{4} \pi D^2 = \frac{\pi}{4} (d^2 + e_1^2 + 2d \cdot e_1)$$

$$S_2 = \pi \frac{D^2}{4} = \frac{\pi}{4} (d^2 + 4e_2^2 + 4d \cdot e_2)$$

اگر فرض کنیم که $e_1 = e_2 = e$ آن‌گاه داریم:

$$S_1 = \frac{\pi}{4} (d^2 + e^2 + 2d \cdot e)$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4} (d^2 + 4e^2 + 4d \cdot e)$$

روش دوم خطای بیشتری دارد. پس بهتر است که اول قطر را اندازه بگیریم. لذا گزینه (۱) درست است.
حل ۱۲. چون α ریشه تکراری معادله $f(x) = 0$ است پس مرتبه همگرایی آن خطی است لذا گزینه (۳) صحیح است.

حل ۱۳. چون معادله را می‌توان به صورت $\cos x = \frac{1}{x}$ بازنویسی نمود بنابراین با رسم نمودار دو تابع $\cos x$ و $\frac{1}{x}$ ملاحظه می‌شود که این نمودارها در بی‌نهایت نقطه برخورد دارند، که هر محل برخورد نشان‌دهنده یک ریشه معادله‌ی

$$x \cos x - 1 = 0 \text{ است. لذا گزینه (۴) صحیح است.}$$

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon, \varepsilon = 10^{-2}$$

حل ۱۴.

$$\frac{1-0}{2^n} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 10^2 \Rightarrow n \geq 10$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

$$f(x, y) = y' = x + y \quad y(0) = 0$$

حل ۱۵.

$$y(0, 1) = y(0) + hf(0, 0) + \frac{h^2}{2} f''(0, 0)$$

$$f'(x, y) = 1 + y' \Rightarrow f'(0, 0) = 1 + y'(0) = 1$$

$$\Rightarrow y(0, 1) \simeq 0 + 0, 1(0) + \frac{0, 1^2}{2}(1) = 0, 005$$

$$f'(x, y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$f'(0, 1, 0, 005) = 1 + 0, 1 + 0, 005 = 1, 105$$

$$y(0, 2) \simeq y(0, 1) + 0, 1 f'(0, 1, 0, 005) + \frac{0, 1^2}{2} f''(0, 1, 0, 005)$$

$$= 0, 005 + 0, 0105 + 0, 005525$$

$$\Rightarrow y(0, 2) = 0, 021025$$

پس با ۳ رقم اعشارگزینه (۲) جواب صحیح است.

حل ۱۶. قرار می‌دهیم $y' = p \Rightarrow y'' = p' = p$ و بنابه فرض داریم:

$$y'' = (y')' = y \Rightarrow p' = y = f(x, y)$$

$$p(x_1) = p(x_0) + hp(x_0) \Rightarrow p(0, 5) = p(0) + 0, 5y(0) = 1 + 0 = 1 \Rightarrow p(0, 5) = 1$$

$$y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) = 0 + 0, 5(1) = 0, 5 \Rightarrow y(0, 5) = 0, 5$$

$$y(1) = y(x_1) + 0, 5y'(0, 5) = 0, 5 + 0, 5p(0, 5) = 0, 5 + 0, 5 = 1$$

$$y'(1) = p(1) = p(0, 5) + hp(0, 5) = 1 + 0, 5(0, 5) = 1, 25$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 1, 25$$

$$f(t, y) = \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t+y}$$

حل ۱۷.

$$y(0, 5) = y(0) + 0, 5f(0, 1) = 1 + 0, 5\left(\frac{1}{0+1}\right) = 1, 5$$

$$y(1) = y(0, 5) + 0, 5f(0, 5, 1, 5) = 1, 5 + 0, 5\left(\frac{1, 5}{1+1, 5}\right) = 1, 875$$

$$f(x, y) = y' = 2y$$

حل ۱۸.

$$x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, y_0 = 1$$

$$y(0.5) = y(0) + 0.5 \Delta f(0, 1) = 1 + 0.5 \Delta (2 \times 1) = 1 + 0.5 = 1.5$$

$$y(1) = y(0.5) + 0.5 \Delta f(0.5, 1.5) = 1.5 + 0.5 \Delta (2, 2) = 1.5 + 0.5 = 2$$

$$y(1.5) = y(1) + 0.5 \Delta f(1, 2) = 2 + 0.5 \Delta (2, 4) = 2 + 0.5 = 2.5$$

$$y_1 = y(2) = y(1) + 0.5 \Delta f(1.5, 2.5) = 2.5 + 0.5 \Delta (3, 3) = 2.5 + 0.5 = 3$$

حل ۱۹.

$$y_2 = y(2.5) = y(2) + 0.5 \Delta f(2, 3) = 3 + 0.5 \Delta [(2, 3) \cdot (1, 2)] = 3 + 0.5 = 3.5$$

$$y_3 = y(3) = y(2.5) + 0.5 \Delta f(2.5, 3.5) = 3.5 + 0.5 \Delta [(1, 4) \cdot (2, 2)] = 3.5 + 0.5 = 4$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f'(x_n, y_n) + \frac{h^3}{6} f''(x_n, y_n)$$

حل ۲۰.

$$y' = e^x = f(x, y) \Rightarrow f'(x, y) = f''(x, y) = e^x$$

$$y_{n+1} = y_n + h e^{x_n} \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} \right)$$

$$y(0.1) \approx y(0) + (0.1) + \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{6} = 1 + 0.1 + 0.005 + 0.0001667 = 1.1051667$$

$$y(0.2) \approx 1.1051667 + 1.1051709(0.1) \left(1 + \frac{0.1}{2} + \frac{0.1^2}{6} \right) = 1.2213938$$

لذا با ۵ رقم اعشارگزین (۳) صحیح است.

$$x_0 = 6, y_0 = 4$$

حل ۲۱.

$$k_1 = hf_1(x_0, y_0) = 0.2(6 + 8) = 0.28$$

$$l_1 = hf_2(x_0, y_0) = 0.2(18 + 8) = 0.52$$

$$k_2 = hf_1\left(x_0 + \frac{k_1}{2}, y_0 + \frac{l_1}{2}\right) = (0.2)f_1(6.14, 4.26) = 0.2(14.66) = 0.2932$$

$$l_2 = hf_2(6.14, 4.26) = 0.2(18.42 + 8.52) = 0.5388$$

$$k_3 = hf_1\left(x_0 + \frac{k_2}{2}, y_0 + \frac{l_2}{2}\right) = (0.2)f_1(6.1466, 4.2694) = 0.2(14.6854) = 0.293708$$

$$l_3 = hf_2(6.1466, 4.2694) = 0.2(26.9786) = 0.539572$$

$$k_4 = hf_1(x_0 + k_3, y_0 + l_3) = (0.2)f_1(6.293708, 4.539572) = 0.30745704$$

$$l_4 = hf_2(6.293708, 4.539572) = (0.2)(27.960268) = 0.55920536$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) = 4 + \frac{1}{6}(3.23594936) = 4.539324893$$

$$x_1 = x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 6 + \frac{1}{6}(1.76127304) = 6.29354506$$

پس گزینه (۱) درست است.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hy_n = y_n(h+1) \quad \text{حل ۲۲.}$$

$$y(0,25) = (1,25)y(0) = (1,25) \times 1 = 1,25$$

$$y(0,5) = (1,25)(1,25) = 1,5625$$

$$y(0,75) = (1,25)(1,5625) = 1,9531$$

$$y(1) = (1,25)(1,9531) = 2,4414$$

حل ۲۳. گزینه (۲) درست است. زیرا اثبات می شود تعداد عملیات حسابی به صورت $O(\frac{n^2}{3})$ می باشد.

حل ۲۴. داریم:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(4 - y_0 - z_0) = \frac{1}{2}(4 - 0 - 0) = 2 \\ y_1 = \frac{1}{2}(4 - x_1 - z_0) = \frac{1}{2}(4 - 2 - 0) = 1 \\ z_1 = \frac{1}{2}(4 - x_1 - y_1) = \frac{1}{2}(4 - 2 - 1) = 0,5 \end{cases}$$

پس گزینه (۲) درست است.

حل ۲۵.

$$x_1 = y_1 = z_1 = \frac{1}{2}(4 - 0 - 0) = 2$$

$$x_2 = y_2 = z_2 = \frac{1}{2}(4 - 2 - 2) = 0$$

در تکرار دوم داریم $x_2 = 0$ ولی همانطور که ملاحظه می شود برای هر n طبیعی x_n, y_n, z_n یا صفر هستند یا ۲ و با ادامه تکرار همین دو مقدار را اختیار خواهند کرد. پس گزینه (۲) درست است.

حل ۲۶. هرگاه ماتریس A ماتریسی اکیدا قطر غالب سطری (یا ستونی) باشد روشهای تکراری ژاکوبی و گاوس - سایدل با شروع از هر نقطه اولیه همگرا هستند.

تعریف. ماتریس A قطر غالب سطری نامیده می شود هرگاه داشته باشیم

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \quad i = 1, \dots, n$$

و اگر حداقل یکی از نامساوی ها به صورت نامساوی اکیدا باشد، ماتریس A را اکیدا قطر غالب سطری می نامیم. یک ماتریس قطر غالب ستونی بایستی در شرط زیر صدق کند.

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \leq |a_{jj}|$$

دقت کنید که A هم اکیداً قطر غالب سطری است و هم اکیداً قطر غالب ستونی است.

حل ۲۷. با توجه به توضیحات ارائه شده در سؤال ۲۶ گزینه (۱) صحیح است.

حل ۲۸. معادله اول را در -0.99 ضرب کرده با معادله دوم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} -0.99X_1 - (0.99)^2 X_2 = -(0.99)(1.99 + \alpha) \\ 0.99X_1 + 0.98X_2 = 1.97 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = -19306\alpha - 38416.9501 \\ X_2 = 19503\alpha + 38810.97 \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود ضرایب α در X_1, X_2 از نظر قدرمطلق بسیار بزرگ هستند. پس تغییرات کوچک در α موجب تغییرات بزرگ در جواب مسئله می‌شود. در اصطلاح چنین مسأله‌ای را بد وضع گویند. لذا گزینه (۳) درست است.

حل ۲۹. در روش تعمیم‌یافته تکرار ساده برای x داریم:

$$x_{k+1} = \frac{1}{8}(8x_k - 4x_k^2 - y_k^2 + 1)$$

برای $k=0$ داریم $x_0 = 1$ و $y_0 = 1/2$ بنابراین

$$x_1 = \frac{1}{8}(8 - 4 - (1/2)^2 + 1) = 0.445$$

لذا گزینه (۱) صحیح است.

حل ۳۰. روش تکراری سایدل برای دستگاه داده شده به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{2}(2x_k - x_k^2 + y_k) \\ y_{k+1} = \frac{1}{9}(2x_{k+1} - x_{k+1}^2 + 8) + \frac{1}{4}(4y_k - y_k^2) \end{cases}$$

برای $k=0$ داریم $x_0 = 1/4$ و $y_0 = 2$ بنابراین:

$$x_1 = \frac{1}{2}(2(1/4) - (1/4)^2 + 2) = \frac{1}{2}(2.8 - 1/16 + 2) = 1.42$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{9}(2(1.42) - (1.42)^2 + 8) + \frac{1}{4}(4(2) - 4) \\ &= \frac{1}{9}(2.84 - 2.0164 + 8) + \frac{1}{4}(4) = 0.9804 + 1 = 1.9804 \end{aligned}$$

لذا گزینه (۲) صحیح است.

حل ۳۱. با توجه به اینکه $0, 1$ و -1 ریشه‌های p هستند، می‌توان نوشت:

$$p(x) = (x-1)(x)(x+1)A(x) \Rightarrow p(1) = p(0) = p(-1) = 0$$

که در آن $A(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه دلخواه است. چون $A(x)$ تغییر می‌کند پس $p(x)$ منحصر به فرد نیست و درواقع بی‌شمار $p(x)$ می‌توان داشت. پس گزینه (۱) درست است.

حل ۳۲. فرض کنیم خط کمترین مربعات به صورت $y = ax + b$ باشد. داریم:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
-۲	۰	۴	۰
-۱	۱	۱	-۱
۰	۲	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۳	۴	۶
مجموع	۰	۷	۱۰

$$\begin{cases} \sum y_i - a \sum x_i - b \cdot n = 0 \\ \sum x_i y_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1/4 \\ a = 5/6 \end{cases} \Rightarrow y = 5/6 x + 1/4$$

حل ۳۳. چون عدد ۲ ریشه تکراری معادله $f(x) = 0$ است پس سرعت همگرایی یک است.

$$h = 0.1$$

حل ۳۴.

$$h^2 f''(2/1) = h^2 [f(2) = 2f(2/1) + f(2, 2)] = -0.000772$$

$$f''(2/1) = \frac{-0.000772}{h^2} = -0.0772$$

پس گزینه (۴) درست است.

حل ۳۵. یک ریشه در $[0, 1]$ دارد. $e^0 - e + 1 = -e < 0$ و $e^1 - e + 1 = 1 > 0 \Rightarrow$

چون تابع $f(x) = e^x - e + 1$ اکیداً صعودی است پس فقط یک ریشه در این فاصله وجود دارد.

حل ۳۶. برای سادگی فرض کنیم $n = 3$ و $j = 2$ در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 l_i(x) \cdot x_i^j &= l_0(x)(0)^2 + l_1(x)(1) + l_2(x)(4) + l_3(x)(9) \\ &= \frac{x}{2}(x-2)(x-3) - \frac{4x}{2}(x-1)(x-3) + \frac{3x}{2}(x-1)(x-2) \\ &= \frac{x}{2}[x^2 - 5x + 6 - 4x^2 + 16x - 12 + 3x^2 - 9x + 6] \\ &= \frac{x}{2}[2x] = x^2 = x^j \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$if \quad j = 0 \quad \Rightarrow \sum_{i=0}^3 l_i(x) \cdot 1 = 1 = (x)^0$$

$$\sum_{j=0}^n l_j(x) x_i^j = x_i^j$$

لذا به کمک استقرار می توان نشان داد که برای $j = 0, 1, \dots, n$ داریم

$$\frac{b-a}{2^n} = \frac{2-1}{2^n} < 10^{-2} \Rightarrow 2^n > 10^2 \Rightarrow n \geq 10$$

پس گزینه (۳) درست است.
حل ۳۷.

پس گزینه (۲) درست است.

$$\begin{aligned} f'(x + \frac{h}{2}) &\simeq f'_i + \frac{h}{2} f''_i + \frac{(\frac{h}{2})^2}{2} f'''_i + \frac{(\frac{h}{2})^3}{6} f^{(4)}_i + \dots \\ &= f'_i + \frac{h}{2} f''_i + \frac{h^2}{8} f'''_i + \dots \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f_i}{h} &= \frac{1}{h} (f_{i+1} - f_i) = \frac{1}{h} (h f'_i + \frac{h^2}{2} f''_i + \frac{h^3}{6} f'''_i + \dots) \\ &= f'_i + \frac{h}{2} f''_i + \frac{h^2}{6} f'''_i \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1), (2) \Rightarrow f'(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{\Delta f_i}{h} = -\frac{h^2}{24} f'''_i + \dots \approx o(h^2)$$

پس گزینه (۲) درست است.

$$\text{حل ۳۹. فرض کنیم: } A = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] \text{ داریم:}$$

$$\begin{aligned} N(\frac{h}{2}) &\simeq A - \frac{h^3}{24} f'''(x_0) - \frac{h^5}{1920} f^{(5)}(x_0) + \dots \\ N(h) &\simeq A - \frac{h^3}{6} f'''(x_0) - \frac{h^5}{120} f^{(5)}(x_0) + \dots \\ \Rightarrow N(\frac{h}{2}) - N(h) &\simeq \frac{3h^3}{24} f'''(x_0) + \frac{15h^5}{1920} f^{(5)}(x_0) + \dots \\ \Rightarrow \frac{N(\frac{h}{2}) - N(h)}{3} + N(\frac{h}{2}) &\simeq A + \frac{h^5}{480} f^{(5)}(x_0) + \dots (*) \end{aligned}$$

لذا با فرمول (*) خطا از مرتبه $o(h^4)$ می شود. پس گزینه (۱) درست است.

حل ۴۰. داریم:

$$EM(h) = (\frac{b-a}{24}) h^2 f''(\eta)$$

روش نقطه میانی:

$$ET(h) = (\frac{b-a}{12}) h^2 f''(\eta)$$

روش دوزنقه ای:

همان طور که ملاحظه می شود خطای روش نقطه میانی نصف خطای روش دوزنقه ای است و چون در روش دوزنقه ای یک نقطه بیشتر از روش نقطه میانی به کار می رود، پس محاسبات روش دوزنقه ای بیشتر است. ولی مرتبه خطای هر دو روش یکسان است. پس گزینه (۲) درست است.

حل ۴۱.

$$\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 6x - 7)dx = \frac{h}{3}f(0) + 4f(0,25) + 2f(0,5) + 4f(0,75) + f(1)$$

$$= \frac{1}{12}(-7 - 22,5 - 8,5 - 10 + 0) = -4$$

که در آن $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 6x - 7$

حل ۴۲. در انتگرال گیری گاوسی n - نقطه ای در صورتی که $n = 1, 2, \dots$ برای چندجمله ای های حداکثر از درجه $2n - 1$ دقیق است پس $5 = 2 \times 3 - 1 = 5$ $2n - 1 = 5$ دقیق است.
(در صورتی که $n = 0, 1, 2, \dots$ باشد یعنی نقاط c_1, c_2, \dots و x_1, x_2, \dots باشند آن گاه انتگرال گیری گاوسی $n + 1$ - نقطه ای برای حداکثر از درجه $2n + 1$ دقیق است.)

حل ۴۳. $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

$$y(1,1) = y(1) + 0,1f(1,1) = 1 + 0,1 \times 2 = 1,2$$

$$y(1,2) = y(1,1) + 0,1f(1,1,1,2) = 1,2 + 0,1 \times 2,3 = 1,465$$

حل ۴۴. باتوجه به مطالب صفحه ۱۵۹ کتاب. گزینه (۱) صحیح است.

حل ۴۵. می دانیم:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{trace}(A) = 3 + 5 + 3 = 11 \quad (1)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(A) = 36 \quad (2)$$

لذا از این که $\lambda_1 = 2$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 9 \\ \lambda_2 \lambda_3 = 18 \end{cases}$$

که باتوجه به گزینه های داده شده، گزینه (۲) صحیح است.

حل ۴۶. روش تیلور مرتبه سوم عبارت است از

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}f'(x_n, y_n) + \frac{h^3}{6}f''(x_n, y_n)$$

اگر جمله آخر را در رابطه فوق در نظر نگیریم روش تیلور مرتبه دوم را خواهیم داشت. داریم:

$$y(0,1) = y(0) + 0,1f(0) + \frac{0,1^2}{2}(0 + 1) + \frac{0,1^3}{6}(0 + 0)$$

$$f''(x_n, y_n) = 4xy^2 + 6x^2y'y' + 2yy' \Rightarrow f''(0,1) = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow y_2 = y_3$$

حل ۴۷. فرمول اویلر تغییر یافته عبارت است از:

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n + \frac{h}{4} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i-1)})]$$

داریم $f(x, y) = x + y$ بنابراین:

$$y_{n+1}^{(i)} = y_n + \frac{h}{4} [x_n + y_n + x_{n+1} + y_{n+1}^{(i-1)}]$$

برای $h = 0.2$ و با حذف زیرنماهای i و $i-1$ داریم:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{4} [x_n + y_n + x_{n+1} + y_{n+1}]$$

اما داریم $x_{n+1} = x_n + h$ و $y_{n+1} = y_n + 0.2(x_n + y_n)$ بنابراین:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 0.1 [x_n + y_n + x_n + 0.2 + y_n + 0.2(x_n + y_n)] \\ &= y_n + 0.1 [2.2x_n + 2.2y_n] + 0.02 \\ &= y_n + 0.22(x_n + y_n) + 0.02 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

حل ۴۸. از این که $x = 1$ ریشه تکراری معادله $f(x) = 0$ است پس مرتبه همگرایی به صورت $P = 1$ یا خطی است.

حل ۴۹. در روش هورنر به n ضرب و n جمع نیاز داریم پس گزینه (۴) صحیح است. هرگاه برای سادگی قرار دهیم $n = 3$ روش هورنر برای محاسبه چندجمله‌ای $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ در $x = a$ به صورت زیر به کار می‌رود:

$$p(a) = ((a_3 \times a + a_2) \times a + a_1) \times a + a_0$$

اگر عملیات را از داخلی‌ترین پرانتز انجام دهیم به ۳ ضرب و ۳ جمع نیاز داریم و در حالت کلی برای چندجمله‌ای درجه n به n جمع و n ضرب نیاز خواهیم داشت.

۵۰. در بازه $[3, 4]$ به یک جواب حقیقی همگرا می‌شود زیرا:

$$f(0) = -5 < 0$$

$$f(1) = -6 < 0$$

$$f(2) = -5 < 0$$

$$f(3) = -2 < 0$$

$$f(4) = 3 > 0$$

چون $f(3) \cdot f(4) < 0$ در بازه $[3, 4]$ یک جواب دارد.

حل ۵۱. چون صفر ریشه تکراری معادله $f(x) = 0$ است، پس مرتبه همگرایی روش نیوتن در این جا یک است.

حل ۵۲. می توان نشان داد که روش بهینه سازی نیوتن برای توابع مجذوری با یک تکرار به جواب می رسد، لذا گزینه (۲) صحیح است.

حل ۵۳. گزینه (۳) درست است. برای توضیح به مسأله ۴۰ مراجعه نمایید.

حل ۵۴. فرض کنیم $f(x) = 1$ داریم:

$$\int_a^b f(x) dx = b - a = A + B \quad (*)$$

باتوجه به رابطه (*) فقط گزینه (۴) در آن صدق می کند. لذا نیازی به بکارگیری رابطه برای $f(x) = x$ نداریم.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{4} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + h_i f(x_i, y_i))] \quad \text{حل ۵۵}$$

$$\begin{aligned} y(1/1) &= y(1) + \frac{0.1}{4} [f(1, 0) + f(1/1, 0 + 0.1 f(1, 0))] \\ &= 0 + 0.025 [1 + f(1/1, 0.1)] = 0.025 [1 + 1/11] = 0.1055 \end{aligned}$$

پس گزینه (۱) درست است.

$$y(1/1) = y(1) + \frac{1}{4} [k_1 + k_2] \quad \text{حل ۵۶}$$

$$k_1 = 0.1 f(1, 1) = 0.1(2) = 0.2$$

$$k_2 = 0.1 f(1/1, 1/2) = 0.1(1/21 + 1/44) = 0.265$$

$$y(1/1) = 1 + 0.2325 = 1.2325$$

پس گزینه (۱) درست است.

حل ۵۷.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + \dots$$

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x) + \dots$$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f''(x) = \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) + \dots$$

پس خطا با $o(h^2)$ متناسب است. لذا گزینه (۴) درست است.

حل ۵۸. فقط چندجمله ای $p(x) = x^2$ از درجه ۲ می باشد که می توان نقاط جدول را برازش کند. پس گزینه (۱) درست است.

حل ۵۹. قضیه: خطای چندجمله‌ای درونیاب وقتی مینیمم است که نقاط درونیابی ریشه‌های چندجمله‌ای چیشف باشند. پس گزینه (۲) درست است.
حل ۶۰. داریم:

$$p(x) - f(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \cdot \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

و چون f از درجه $n - 1$ است پس:

$$p(x) - f(x) = 0 \Rightarrow p(x) = x^{n-1}$$

لذا گزینه (۱) درست است. در واقع چون f یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n - 1$ است بنابراین یک و تنها یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n - 1$ وجود دارد که با f در n نقطه x_i منطبق است که همان $p(x) = x^{n-1}$ است.

آثار منتشر شده انتشارات: گسترش علوم پایه

کد	نام کتاب	مؤلف / مترجم	نوبت چاپ	قیمت
ریاضی و آمار				
۱۲۳	۱- حسابان (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۱۱۰۰۰ ریال
۱۱۵	۲- حسابان (۲)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۹۰۰۰ ریال
۱۲۲	۳- ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ پنجم	۴۵۰۰۰ ریال
۲	۴- راهنمای حل ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۲)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ پنجم	۴۵۰۰۰ ریال
۹	۵- ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ هفتم	۴۵۰۰۰ ریال
۱۳۵	۶- راهنمای حل ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۱۲۰۰۰ ریال
۱۸۲	۷- آمار و کاربرد آن در مدیریت (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ نهم	۴۴۰۰۰ ریال
۱۱۲	۸- راهنمای حل آمار و کاربرد آن در مدیریت (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ پنجم	۷۵۰۰۰ ریال
۱۱۷	۹- آمار و کاربرد آن در مدیریت (۲)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ دوم	۴۴۰۰۰ ریال
۱۳	۱۰- ریاضیات گسسته	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۵۰۰۰ ریال
۱۰۷	۱۱- ریاضیات پیش دانشگاهی (مدیریت، حسابداری، اقتصاد و بازرگانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ یازدهم	۳۶۰۰۰ ریال
۱۳۰	۱۲- راهنمای حل ریاضیات پیش دانشگاهی (مدیریت، حسابداری، اقتصاد و بازرگانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ سوم	۲۵۰۰۰ ریال
۱۴	۱۳- ریاضیات پیش دانشگاهی (فنی مهندسی، علوم پایه)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ نهم	۲۶۰۰۰ ریال
۱۰۰	۱۴- راهنمای حل ریاضیات پیش دانشگاهی (فنی مهندسی، علوم پایه)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ سوم	۳۶۰۰۰ ریال
۲۱	۱۵- آمار و احتمال (۱)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار - جلویان	چاپ سوم	۳۶۰۰۰ ریال
۲۲	۱۶- آمار و احتمال (۲)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار - جلویان	چاپ اول	۳۲۰۰۰ ریال
۲۳	۱۷- جبر خطی بنیادی	ترجمه دکتر رحمتی - اسلام زاده	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۲۴	۱۸- نخستین درس در معادلات انتگرال	ترجمه دکتر مهدی دهقان	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۳۶	۱۹- جبر (۱)	تألیف نیکوکار - غافری	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۳۳	۲۰- جبر (۲)	تألیف نیکوکار - غافری	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۳۷	۲۱- راهنمای حل مسائل جبر (۱)	تألیف نیکوکار - غافری	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۰۲	۲۲- محاسبات عددی (ویرایش جدید)	تألیف نیکوکار - درویش	چاپ هشتم	۳۶۰۰۰ ریال
۱۸۳	۲۳- راهنمای حل مسائل آمار ریاضی ۱-۷ (جلد اول)	تألیف نیکوکار - خلکی - غازی	چاپ دوم	۳۵۰۰۰ ریال
۲۲۳	۲۴- راهنمای حل مسائل آمار ریاضی ۸-۱۲ (جلد دوم)	تألیف نیکوکار - خلکی - غازی	چاپ دوم	۳۷۰۰۰ ریال
۱۲۶	۲۵- راهنمای حل مسائل آمار ریاضی ۱۳-۱۶ (جلد سوم)	تألیف نیکوکار - خلکی - غازی	چاپ اول	۵۰۰۰۰ ریال
۲۲۹	۲۶- زبان تخصصی رشته ریاضی (ویرایش جدید)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ دوم	۲۳۰۰۰ ریال
۴۵	۲۷- گزیده مسائل جبر خطی	تألیف دکتر نیکوکار - مؤمنی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۳۴	۲۸- حل تشریحی ۱۰۰ مسئله آنالیز (سرولاتنگ)	ترجمه نیکوکار - ساروی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۴۷	۲۹- وارون ماتریسهای غیر مربعی	ترجمه نیکوکار - درویش	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۲۶	۳۰- ریاضیات گسسته پیش دانشگاهی	تألیف نیکوکار - فردوسیان	چاپ اول	۷۵۰۰۰ ریال
۲۲۲	۳۱- حل مسائل جبر خطی گنت هاکمن	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ دوم	۲۲۰۰۰ ریال
۷۱	۳۲- مبانی ریاضیات	تألیف دکتر نیکوکار - غافری	چاپ اول	۳۵۰۰۰ ریال
۱۸۱	۳۳- ریاضی عمومی (مقطع کاردانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ پنجم	۴۴۰۰۰ ریال
۷۷	۳۴- راهنمای حل ریاضی عمومی (مقطع کاردانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۵۰۰۰ ریال
۱۹۶	۳۵- آمار و احتمالات (مقطع کاردانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ سوم	۴۵۰۰۰ ریال
۷۴	۳۶- راهنمای حل آمار و احتمالات (مقطع کاردانی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۲۰۰۰ ریال
۱۱۰	۳۷- راهنمای حل معادلات دیفرانسیل (کارشناسی ناپیوسته)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۸۵	۳۸- گزیده مسائل آنالیز ریاضی	تألیف نیکوکار - سپهر خاقلی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۱۰۱	۳۹- ریاضی (۷)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ سوم	۲۷۰۰۰ ریال
۱۲۱	۴۰- راهنمای حل مسائل ریاضی (۷)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۶۶	۴۱- حساب دیفرانسیل و انتگرال (پیش دانشگاهی)	تألیف من زبان - خلعت	چاپ اول	۹۰۰۰۰ ریال
۱۱۸	۴۲- گزیده تحلیلی در عملیات پژوهش عملیاتی	تألیف مازار زاهدی - سرشت	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۱۵۲	۴۳- توپولوژی	تألیف نیکوکار - غافری	چاپ اول	۳۵۰۰۰ ریال
۱۶۵	۴۴- ایده های المپیاد ریاضی (۱) - ویرایش دوم	تألیف نیکوکار - احمدلو	چاپ دوم	۸۵۰۰۰ ریال
۱۸۵	۴۵- آشنایی با نظریه گراف (دوست)	ترجمه دکتر بیژن شمس	چاپ اول	۲۵۰۰۰ ریال
۱۸۹	۴۶- حل تشریحی سیلور من - ریاضی عمومی (۲)	تألیف دکتر نیکوکار - نصیری	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۹۱	۴۷- اصول حسابداری (۱)	تألیف محمد علی جلالی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۱۹۲	۴۸- نظریه اعداد	تألیف دکتر نیکوکار - غافری	چاپ اول	۳۵۰۰۰ ریال
۲۰۱	۴۹- مدیریت بازاریابی جهانی	تألیف دکتر زوی باغبان حسینی کیا	چاپ اول	۲۷۰۰۰ ریال
۲۱۸	۵۰- شناخت روش ها و فنون تجزیه و تحلیل سیستم های اطلاعاتی	ترجمه اکبری - موسی خانی	چاپ اول	۱۲۰۰۰ ریال
۲۲۶	۵۱- مهندسی سیستم ها (تحلیلی در عمران)	تألیف دکتر ناصر حمیدی	چاپ اول	۱۹۰۰۰ ریال
۲۳۵	۵۲- آشنایی با اصول حسابداری و مقدمات هزینه یابی	تألیف دکتر حمیدی - حمیدی زاده	چاپ اول	۳۵۰۰۰ ریال
کامپیوتر				
۲۰	۵۳- حل مسائل مهندسی کنترل MATLAB (۱)	ترجمه دکتر نیکوکار - جباریه	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۲۱۴	۵۴- برنامه نویسی با MATLAB	تألیف دکتر درویش	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۲۳۸	۵۵- تحقیق در عملیات خنثی سازی	تألیف دکتر درویش - عباس بندی	چاپ اول	۲۶۰۰۰ ریال
۱۹	۵۶- آموزش سریع Windows 2000 professional	ترجمه نیکوکار - جباریه	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۶۵	۵۷- برنامه نویسی زبان C (مقدمه ای و پیشرفته)	تألیف دکتر صفائی - توسلی	چاپ اول	۳۵۰۰۰ ریال
۱۱۲	۵۸- الگوریتم و تکنیک های برنامه نویسی به زبان پاسکال	تألیف دکتر صفائی - توسلی	چاپ اول	۴۰۰۰۰ ریال
۸۳	۵۹- C++ و برنامه سازی شی گرا با آن	تألیف مهندس ایرج صادقی	چاپ اول	۲۵۰۰۰ ریال
۱۲۷	۶۰- مبانی کامپیوتر و برنامه نویسی به زبان QBASIC	تألیف مهندس ایرج صادقی	چاپ دوم	۲۵۰۰۰ ریال
۲۲۴	۶۱- آموزش عملی Excel	تألیف دکتر صفائی - توسلی	چاپ دوم	۱۸۵۰۰ ریال
۱۲۲	۶۲- انگلیسی برای علوم کامپیوتر	تألیف ایرج صادقی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۲۳	۶۳- طراحی الگوریتم ها	تألیف مهندس ایرج صادقی	چاپ اول	۲۵۰۰۰ ریال
۳۲	۶۴- خودآموز و راهنمای مپل V	ترجمه دکتر مسعود نیکوکار	چاپ دوم	۱۸۰۰۰ ریال
۱۲۷	۶۵- معماری کامپیوتر (حل کامل مسائل معماری مورس مانو)	تألیف مهندس علی پرومندی	چاپ اول	۱۴۰۰۰ ریال
۱۵۴	۶۶- هزارمساله معماری کامپیوتر	تألیف مهندس فرشاد صفایی	چاپ اول	۴۵۰۰۰ ریال
۱۴۰	۶۷- آموزش علمی و عملی ویندوز ۹۵ تا ۱۰	تألیف دکتر صفائی - توسلی	چاپ اول	۵۰۰۰۰ ریال
۱۲۹	۶۸- آموزش عملی Word	تألیف جواد توسلی - مهتاب توسلی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال

۱۶۶	۷۱- آموزش علمی و عملی Access	تألیف جواد توسلی	چاپ اول	۱۷۰۰۰ ریال
۲۵۰	۷۲- آموزش نرم افزار S-Plus	تألیف نیکوکار - تربتی و ...	چاپ اول	۶۰۰۰۰ ریال
۱۷۰	۷۳- زبانهای ماشین و سیستمی و برنامه سازی سیستم	تألیف مهندس ایرج صادقی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۷۱	۷۴- نرم افزار ۱	تألیف مهندس ایرج صادقی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۷۲	۷۵- نرم افزار ۲	ترجمه مهندس نوید هاشمی طباطبائی	چاپ اول	۵۰۰۰۰ ریال
۱۷۸	۷۶- مهندسی نرم افزار (۱) پرسمن	ترجمه مهندس نوید هاشمی طباطبائی	چاپ اول	۷۰۰۰۰ ریال
۱۷۹	۷۷- مهندسی نرم افزار (۲) پرسمن	تألیف محبتی محمد قاضی	چاپ اول	۲۳۰۰۰ ریال
۲۰۷	۷۸- کامپیوتر برای ورود به دنیای IT	ترجمه دکتر نیکوکار - نورستانی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۱۹۹	۷۹- کتاب آموزشی Windows XP	تألیف مهندس محسنی	چاپ اول	۲۲۰۰۰ ریال
۲۲۷	۸۰- رایانه کاربر چه؟ (ICDL) (جلد اول)	تألیف مهندس وروس نورستانی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۶۰۴۶	۸۱- مولنار کامپیوتر			
دوره فراگیر (پیام نور)				
۲۰۵	۸۲- اصول کامپیوتر ۱	تألیف مهندس محسنی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۲۱۹	۸۳- اصول حسابداری	تألیف ملک پور - تلایی	چاپ اول	۲۷۰۰۰ ریال
۲۲۵	۸۴- حقوق جزای عمومی ۱	تألیف شمس محمدی	چاپ اول	۳۲۰۰۰ ریال
۲۳۹	۸۵- راهنمای فارسی عمومی	تألیف پند - شکری	چاپ اول	۳۷۰۰۰ ریال
۲۴۶	۸۶- معارف اسلامی	تألیف خدیجه اعتمادی	چاپ اول	۲۴۰۰۰ ریال
۶۰۴۶	۸۷- معارف اسلامی (فراگیر پیام نور)	تألیف رضا محمدی	چاپ اول	۲۹۰۰۰ ریال
۶۰۴۷	۸۸- زبان عمومی (فراگیر پیام نور)	تألیف حبیب پوند	چاپ اول	۴۰۰۰۰ ریال
۶۰۴۸	۸۹- فارسی عمومی (فراگیر پیام نور)	تألیف دکتر فیاضی	چاپ اول	۲۷۰۰۰ ریال
گاردانی پیوسته				
۱۵۲	۹۰- مجموعه سؤالات دروس عمومی	پروین حبیب و ناسفلاهی - حبیب پوند	چاپ اول	۱۷۰۰۰ ریال
۱۷۹	۹۱- درس و گفتاوردهای کامپیوتر و اینترنت (سواد کامپیوتری)	تألیف مهندس محسنی	چاپ سوم	۲۵۰۰۰ ریال
۱۷۲	۹۲- مجموعه سؤالات دروس پایه	تألیف مهندس محسنی	چاپ اول	۶۰۰۰۰ ریال
۱۰۸	۹۳- مجموعه سؤالات عمومی و پایه گفتاوردهای علمی کاربردی	تألیف مهندس محسنی	چاپ اول	۷۰۰۰۰ ریال
۱۳۶	۹۴- سیستم عامل (پیوسته)	تألیف استاد گزیر علی	چاپ اول	۱۲۵۰۰ ریال
۶۰۱۸	۹۵- دفترچه آزمون و پاسخ تشریحی کامپیوتر (سراسری ۸۲)	تألیف استاد کریم و ...	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۲۰۸	۹۶- اصول حسابداری	تألیف محمد علی جلالی	چاپ اول	۲۵۰۰۰ ریال
۲۰۹	۹۷- حسابداری صنعتی (بهای تمام شده)	تألیف محمد علی جلالی	چاپ اول	۲۲۰۰۰ ریال
۲۱۰	۹۸- امور عمومی بازار گاتی و سازمان و مدیریت	تألیف محمد علی جلالی	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۲۱۱	۹۹- مفاهیم و روشهای آماری	تألیف محمد علی جلالی	چاپ اول	۲۹۰۰۰ ریال
۲۱۲	۱۰۰- ریاضیات آماری	تألیف محمد علی جلالی	چاپ اول	۲۵۰۰۰ ریال
کارشناسی ناپیوسته (گاردانی به کارشناسی)				
۱۵۵	۱۰۱- زبان و ادبیات فارسی (جلد اول)	تألیف غلامی کاشمی	چاپ هشتم	۲۰۰۰۰ ریال
۲۲۰	۱۰۲- زبان و ادبیات فارسی (جلد دوم)	تألیف غلامی کاشمی	چاپ چهارم	۲۵۰۰۰ ریال
۱۳۷	۱۰۳- معارف اسلامی	تألیف علی اکبر فراهانی	چاپ هشتم	۴۸۰۰۰ ریال
۱۳۹	۱۰۴- زبان عمومی (جلد اول)	تألیف حبیب پوند	چاپ ششم	۳۰۰۰۰ ریال
۲۲۱	۱۰۵- واژگان زبان عمومی (جلد دوم)	تألیف حبیب پوند	چاپ دوم	۲۸۰۰۰ ریال
۲۳۶	۱۰۶- ریاضی عمومی (۱)	تألیف نیکوکار کارشناسی	چاپ ششم	۴۸۰۰۰ ریال
۱۵۶	۱۰۷- ریاضی عمومی (۲)	تألیف امیر هوشنگ رحمانی	چاپ اول	۴۲۰۰۰ ریال
۲۵۱	۱۰۸- فیزیک الکترونیک و مغناطیس	تألیف نیکوکار کارشناسی	چاپ سوم	۳۰۰۰۰ ریال
۲۱۵	۱۰۹- آمار و احتمالات	تألیف غلامی - حبیب پوند - فراهانی	چاپ سوم	۶۵۰۰۰ ریال
۱۸۰	۱۱۰- مجموعه سؤالات دروس عمومی کلیه رشته ها	تألیف گروه مؤلفان	چاپ اول	۴۵۰۰۰ ریال
۲۱۶	۱۱۱- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته علوم آزمایشگاهی (جلد اول)	تألیف گروه مؤلفان	چاپ اول	۳۵۰۰۰ ریال
۲۱۷	۱۱۲- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته علوم آزمایشگاهی (جلد دوم)	تألیف گروه مؤلفان	چاپ اول	۳۵۰۰۰ ریال
۲۲۳	۱۱۳- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته عمران	تألیف شاد کامانور	چاپ اول	۲۷۰۰۰ ریال
۲۲۴	۱۱۴- استاتیک (عمران)	تألیف شاد کامانور	چاپ اول	۲۷۰۰۰ ریال
۲۲۸	۱۱۵- استاتیک مکانیک	تألیف محسن دیونی زاد	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۲۳۹	۱۱۶- مکانیک خاک	تألیف مهندس محسنی	چاپ چهارم	۵۰۰۰۰ ریال
۱۲۴	۱۱۷- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته کامپیوتر (جلد اول) تا ۱۳۸۰	تألیف مهندس محسنی	چاپ پنجم	۵۰۰۰۰ ریال
۱۵۸	۱۱۸- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته کامپیوتر (جلد دوم) ۸۰-۱۳۸۲	تألیف مهندس محسنی	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۲۳۲	۱۱۹- مجموعه سؤالات کارشناسی ناپیوسته کامپیوتر (جلد سوم) ۱۳۸۳ به بعد	تألیف مهندس محسنی	چاپ سوم	۳۷۰۰۰ ریال
۲۳۷	۱۲۰- درس و گفتاوردهای Windows	تألیف مهندس محسنی	چاپ سوم	۳۵۰۰۰ ریال
۲۳۱	۱۲۱- درس و گفتاوردهای تخصصی کامپیوتر	تألیف مهندس محسنی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۲۳۷	۱۲۲- مدار منطقی (ناپیوسته)	تألیف حسن شاد کامانور	چاپ سوم	۷۱۰۰۰ ریال
۱۷۳	۱۲۳- مجموعه سؤالات آزمونهاى رشته الکترونیک (جلد اول)	تألیف حسن شاد کامانور	چاپ اول	۷۱۰۰۰ ریال
۲۲۵	۱۲۴- الکترونیک ۲	تألیف حسن شاد کامانور	چاپ اول	۷۷۰۰۰ ریال
۲۲۱	۱۲۵- ماشین های الکتریکی (جلد اول)	تألیف مهندس محسنی	چاپ هشتم	۷۰۰۰۰ ریال
۲۴۲	۱۲۶- ماشین های الکتریکی (جلد دوم)	تألیف مهندس محسنی	چاپ هشتم	۳۷۰۰۰ ریال
۱۸۲	۱۲۷- ساختمان داده ها	تألیف مهندس محسنی	چاپ هشتم	۳۳۰۰۰ ریال
۱۳۶	۱۲۸- پایگاه داده ها	تألیف مهندس محسنی	چاپ هشتم	۴۴۰۰۰ ریال
۲۱۲	۱۲۹- مفاهیم سیستم عامل	تألیف مهندس محسنی	چاپ سوم	۲۴۰۰۰ ریال
۱۹۰	۱۳۰- زبان C	تألیف مهندس محسنی	چاپ سوم	۲۶۰۰۰ ریال
۱۷۷	۱۳۱- UNIX	تألیف مهندس محسنی	چاپ هشتم	۲۷۰۰۰ ریال
۱۹۳	۱۳۲- درس و گفتاوردهای پایسکال	تألیف مهندس محسنی	چاپ پنجم	۲۷۰۰۰ ریال
۱۸۶	۱۳۳- ذخیره سازی اطلاعات	تألیف ملک پور - تلایی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۹۲	۱۳۴- درس و گفتاوردهای حسابداری	تألیف شاد کامانور - علایی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۲۲۲	۱۳۵- اقتصاد (خرد)	تألیف محمد علی جلالی	چاپ چهارم	۲۰۰۰۰ ریال
۱۵۰	۱۳۶- حسابداری	تألیف محمد علی جلالی	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۱۹۷	۱۳۷- حسابداری صنعتی	تألیف محمد علی جلالی	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۱۹۸	۱۳۸- حسابداری دولتی	تألیف محمد علی جلالی	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۲۰۰	۱۳۹- حسابداری مالی و حسابداری شرکتها	تألیف محمد علی جلالی	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۲۰۲	۱۴۰- حسابداری			
کارشناسی ارشد				
۲۳۰	۱۴۱- ریاضیات و کاربرد در مدیریت و اقتصاد و حسابداری (ویرایش جدید)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۵۸۰۰۰ ریال

۲۲۸	۱۴۲- آمار و کاربرد در مدیریت و اقتصاد و حسابداری (ویرایش جدید)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۱۰۳	۱۴۳- آمادگی کنکور تحلیلی در عملیات (رشته ریاضی)	تألیف نیکوکار - درویش - ناصری	چاپ اول	۸۰۰۰ ریال
۵۵	۱۴۴- پژوهش عملیاتی (مدیریت، حسابداری، اقتصاد، بازرگانی)	تألیف نیکوکار، درویش	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۱۰۹	۱۴۵- آمادگی کنکور (رشته صنایع) پژوهش عملیاتی	تألیف نیکوکار، درویش	چاپ اول	۸۰۰۰ ریال
۱۵	۱۴۶- تست جبر و جبر خطی	تألیف دکتر عرفانپان	چاپ دوم	۱۸۰۰۰ ریال
۲۰۳	۱۴۷- سوالات کارشناسی ارشد رشته ریاضی (ویرایش جدید)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ چهارم	۶۸۰۰۰ ریال
۳۳	۱۴۸- مجموعه سوالات ریاضی (ارشد فنی مهندسی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۱۷۰۰۰ ریال
۳۵	۱۴۹- مجموعه سوالات ریاضی (ارشد فنی مهندسی دانشگاه آزاد)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۰۰۰ ریال
۵۶	۱۵۰- آمار صنایع و مدیریت سیستم بهره‌وری	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۸۰۰۰ ریال
۱۱۶	۱۵۱- سوالات کارشناسی ارشد و مسابقات دانشجویی (۲۰۱۳ و ۲۰۱۴ همراه با حل تشریحی)	تألیف نیکوکار، درویش، بلور، زارعی	چاپ سوم	۳۷۰۰۰ ریال
۷۷	۱۵۲- آمار و احتمال: کشاورزی (گزینه‌های چهار جوابی)	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۱۴۲	۱۵۳- الکترونیک و سیستم‌های الکترونیک و مغناطیس	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۲۴۰۰۰ ریال
۱۷۸	۱۵۴- الکترونیک	تألیف دکتر مسعود نیکوکار	چاپ اول	۱۹۰۰۰ ریال
۱۶۳	۱۵۵- مدارهای منطقی	تألیف پروین سلیمانی	چاپ سوم	۲۲۰۰۰ ریال
۱۵۹	۱۵۶- انتقال داده‌ها	تألیف پروین سلیمانی	چاپ اول	۲۵۰۰۰ ریال
۱۲۰	۱۵۷- پایگاه داده‌ها	تألیف نعمتی-صفا	چاپ دوم	۱۸۰۰۰ ریال
۲۰۴	۱۵۸- معماری کامپیوتر	تألیف پروین سلیمانی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۲۰۶	۱۵۹- برنامه‌نویسی کامپیوتر (مهندسی صنایع و...)	تألیف مهندس مقیمی	چاپ اول	۴۰۰۰۰ ریال
۱۲۵	۱۶۰- سیستم عامل	تألیف مهندس مقیمی	چاپ پنجم	۲۷۰۰۰ ریال
۶۰۳۱	۱۶۱- مرور سریع بر اقتصاد خرد	تألیف دکتر خلایق اکبری مقدم	چاپ اول	۱۶۰۰۰ ریال
فنی مهندسی				
۱۱۴	۱۶۲- طراحی به کمک Mechanical Desktop	تألیف کاآوند - اسماعیل زاده	چاپ اول	۳۵۰۰۰ ریال
۱۳۱	۱۶۳- طراحی اجزای دوار	تألیف پاشنگ - فاضلی	چاپ اول	۲۷۰۰۰ ریال
۱۵۱۰	۱۶۴- مکانیک مومادرکب	تألیف دکتر رحیمی - افشاری	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۱۶۱	۱۶۵- مواد و فرایندهای پوشکاری	تألیف فاضلی - پاشنگ	چاپ اول	۱۵۰۰۰ ریال
۱۴۱	۱۶۶- آموزش آرمچر پیچی به زبان ساده	تألیف مجتبی جعفرزاده	چاپ سوم	۳۲۰۰۰ ریال
۱۰۵	۱۶۷- آموزش تعمیر لوازم خانگی به زبان ساده (جلد اول)	تألیف مجتبی جعفرزاده	چاپ هفتم	۳۵۰۰۰ ریال
۱۰۶	۱۶۸- آموزش تعمیر لوازم خانگی به زبان ساده (جلد دوم)	تألیف مجتبی جعفرزاده	چاپ هفتم	۲۰۰۰۰ ریال
۱۶۸	۱۶۹- آموزش سیم‌پیچی به زبان ساده (جلد اول)	تألیف جعفرزاده - غلامی	چاپ دوم	۲۲۰۰۰ ریال
۱۶۹	۱۷۰- آموزش سیم‌پیچی به زبان ساده (جلد دوم)	تألیف جعفرزاده - غلامی	چاپ دوم	۲۹۰۰۰ ریال
۱۸۷	۱۷۱- آموزش تراشکاری به زبان ساده (جلد اول)	تألیف شیدلون - جعفرزاده	چاپ اول	۱۸۰۰۰ ریال
۱۸۸	۱۷۲- آموزش تراشکاری به زبان ساده (جلد دوم)	تألیف شیدلون - جعفرزاده	چاپ اول	۱۷۰۰۰ ریال
۱۶۷	۱۷۳- خودآموز رسوب‌داری	تألیف پاشنگ فاضلی	چاپ اول	۱۶۰۰۰ ریال
۲۵	۱۷۴- ترمودینامیک شیمیایی	ترجمه دکتر علیرضا پیشوائی	چاپ اول	۱۴۰۰۰ ریال
۲۶	۱۷۵- مسائل شیمی تجزیه محلول‌های آبی	ترجمه دکتر علیرضا پیشوائی	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۱۷۶	۱۷۶- مسائل ترمودینامیک شیمیایی	ترجمه دکتر علیرضا پیشوائی	چاپ اول	۱۳۰۰۰ ریال
۱۷۲	۱۷۷- سینتیک شیمیایی	ترجمه دکتر علیرضا پیشوائی	چاپ اول	۱۴۰۰۰ ریال
۱۷۵	۱۷۸- مسائل سینتیک شیمیایی	ترجمه دکتر علیرضا پیشوائی	چاپ اول	۱۶۰۰۰ ریال
۲۸	۱۷۹- زمین‌شناسی عمومی و مهندسی	تألیف دکتر اسماعیل خراش	چاپ اول	۳۵۰۰۰ ریال
پزشکی				
۳۳	۱۸۰- تست بیوشیمی	تألیف مرتضی نیکوکار	چاپ اول	۱۰۰۰۰ ریال
۱۶۳	۱۸۱- مبانی لیزر پزشکی	ترجمه دکتر عباس مجدآبادی	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۳۹	۱۸۲- اصول بیوشیمی	تألیف مرتضی نیکوکار	چاپ اول	—
۶۱	۱۸۳- دانش‌های بیماری‌های عفونی	تألیف دکتر یشارت	چاپ اول	۹۰۰۰۰ ریال
۶۹	۱۸۴- بیماری‌های عفونی نوپدید قرن ۲۱	تألیف دکتر یشارت	چاپ اول	۹۰۰۰۰ ریال
۷۳	۱۸۵- گردآورد اندیش عفونی	تألیف دکتر یشارت	چاپ اول	۱۶۵۰۰ ریال
۷۹	۱۸۶- جنون گاوی بیماری عفونی نوپدید	تألیف دکتر یشارت	چاپ اول	۱۰۰۰۰ ریال
۱۱۴۰	۱۸۷- جمله‌ها و نکته‌ها	تألیف دکتر یشارت	چاپ اول	۱۳۵۰۰ ریال
۱۳۸	۱۸۸- آناتومی سرو گردن و اصول گوش و گلو و بینی	تألیف دکتر رضائیان	چاپ اول	۴۰۰۰۰ ریال
۱۱۹	۱۸۹- چگونه نمی‌توانیم از حمله قلبی جلوگیری کنیم	ترجمه مرتضی پاشنگ	چاپ اول	۱۵۵۰۰ ریال
متفرقه				
۲۴۰	۱۹۰- کانادا دو ترازو	تألیف رضا پورزاهد	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۸۱	۱۹۱- آشنایی با شوراهای اسلامی	تألیف محمد زمانی	چاپ اول	۶۰۰۰۰ ریال
۶۴	۱۹۲- فرهنگ ضرب المثل‌های معاصر	تألیف مهمن گرجیان - شیوا موئولیا	چاپ اول	۱۴۰۰۰ ریال
۱۱۱	۱۹۳- داستان‌های واقعی برای زبان آموزان مکالماتی انگلیسی	تألیف مرجان حاج‌عظیمی	چاپ اول	۶۰۰۰۰ ریال
۱۳۳	۱۹۴- سوری در قانون تجارت	تألیف مقدسیان - زمانی	چاپ اول	۶۵۰۰۰ ریال
۱۴۴	۱۹۵- سایه عشق (گزیده‌های عاشقانه)	گردآورنده مهندس مقیمی	چاپ اول	۹۵۰۰۰ ریال
۶۰۱۵	۱۹۶- مباحث در مجموعه‌های نظریه‌های	گردآورنده دکتر پروین	چاپ اول	۱۰۰۰۰ ریال
۶۰۲۷	۱۹۷- ریاضیات پیشرفته برای دانشجوین مهندسی و علوم (اشوپرگل)	ترجمه دکتر رضائیان	چاپ اول	۳۹۰۰۰ ریال
۶۰۲۸	۱۹۸- اصول نظریه انتگرال	ترجمه دکتر رضائیان	چاپ اول	۲۰۰۰۰ ریال
۶۰۳۱	۱۹۹- مسائل ترکیبیات (المپیاد ریاضی آمریکا)	ترجمه عباس ترونی	چاپ اول	۱۲۰۰۰ ریال
۶۰۳۲	۲۰۰- المپیاد ریاضی کشورهای مختلف ۱۹۹۵	ترجمه مرتضی مجدآبادی	چاپ اول	۵۰۰۰۰ ریال
۶۰۳۳	۲۰۱- المپیاد ریاضی ایران (۸۳-۸۲)	تألیف شیوا موئولیا	چاپ اول	۳۰۰۰۰ ریال
۶۰۳۴	۲۰۲- الفبای نور مهندسی	تألیف علیرضا صادقی‌راد	چاپ اول	۲۱۰۰۰ ریال
۶۰۳۵	۲۰۳- پاسخی بر المپیادهای کامپیوتر ایران (۱)	تألیف یاسر احمدی فولادی	چاپ اول	—
۶۰۳۶	۲۰۴- پاسخی بر المپیادهای کامپیوتر ایران (۲)	تألیف یاسر احمدی فولادی	چاپ اول	۲۲۰۰۰ ریال

آدرس: تهران - میدان انقلاب - ابتدای خ کارگر جنوبی - کوچه مهدی زاده - پلاک ۷ - طبقه همکف
 کدپستی: ۱۳۱۴۹۵۳۶ - تلفن: ۱۵ ~ ۶۹۰۵۳۱۲ - فاکس: ۶۹۰۵۳۱۶ - همراه: ۰۹۱۲-۱۳۰۱۹۰۵
 ساعت کاری: شنبه‌ها، ۱۸:۳۰ تا ۱۹:۰۰ - شنبه: ۱۷:۳۰ تا ۱۸:۰۰ (استراحت: ۱۵ تا ۱۴)

WWW.Gostarehaeoloomenaveh.com
 E-mail: info@gostarehaeoloomenaveh.com

۱۰۲



شابک: ۹۷۸-۹۶۴-۴۹۰-۰۴۸-۸
تلفن انتشارات: ۶۶۹۰۵۳۱۲-۱۵
مرکز پخش تهران:

ISBN: 978-964-490-048-8
تلفکس: ۰۲۱- ۶۶۹۰۵۳۱۶
۶۶ ۵۹ ۵۵ ۱۳ - ۶۶ ۵۹ ۵۵ ۱۴

کتابخوان

۹B*



معاینات عددی

۸۸۲۶۱-۲۵