

بائگاہ معذسان سمنان

حل المائل الکترو مغناطیس چنگ

www.sem-eng.com

تعیین کتاب: عارف ناصری

اسکن: محمدرضا خالصی

ارسال: ایمان شریعت پناهی

فصل اول و دوم: مدل الکترو مغناطیس و آنالیز برداری

فهرست

فصل ۱

۱ مدل الکترومغناطیس

فصل ۲

۷ آنالیز برداری

فصل ۳

۶۴ میدان های الکتریکی ساکن

فصل ۴

۱۵۰ حل مسائل الکتریسیته ساکن

فصل ۵

۲۰۵ جریانهای الکتریکی دائم

فصل ۶

۲۴۵ کمیدان های مغناطیسی ساکن

پاسخ به پرسشهای فصل اول

مدل الکترومغناطیس

فصل ۱

۱.۱ مدل الکترومغناطیس

پرسش ۱-۱: الکترومغناطیس چیست؟

پاسخ پرسش ۱-۱: الکترومغناطیس، مطالعه تأثیرات بارهای الکتریکی ساکن و متحرک است.

پرسش ۲-۱: علاوه بر موارد شکل‌های ۱-۱ و ۲-۱ دو پدیده یا مورد دیگر، بیان کنید که توسط نظریه مدار، بطور مناسب قابل توضیح نباشند.

پاسخ پرسش ۲-۱: اصول نظریه مدار بر معادلات ماکسول استوارند، اما باید مسیر بسته داشته باشیم. ابعاد مدار در مقایسه با طول موج باید کوچک باشند و لازم است که از عناصر تعریف شده استفاده کنیم.

اکنون وسیله‌ای را در نظر می‌گیریم که بیشتر این الزامها در موردش صدق نمی‌کند اما هنوز بسیاری از نتایج تحلیلی را می‌توان با تفسیر جملات نظری مدار برایش بدست آورد.

وسیله‌ای که ما بعنوان مثال مدار معادلی برایش می‌کشیم حفره تشدید هم محور است. چنین تشدید کننده‌هایی نسبت به فرکانس فوق‌العاده حساس هستند.

بنابراین در فرکانس مترها، آمپلی فایرهای تطبیق شده و نوسان سازها مورد استفاده قرار می‌گیرند. حتی می‌توان از آنها برای تعیین ضریب پذیرش و نفوذ مواد عایق مثلاً در کنترل یک فرآیند تولید یا تشخیص ... استفاده کرد.

۲

پاسخ به مسائل فصل دوم

آنالیز برداری

پرسش ۱-۵: چهار کمیت اصلی میدان در مدل الکترومغناطیسی کدامند؟ واحد آنها چیست؟

جدول ۱.۲: ۱-۲

نام کمیت میدان	واحد	علامت اختصاری
شدت میدان الکتریکی	$\frac{V}{m}$	E
چگالی شار الکتریکی	$\frac{C}{m^2}$	D
چگالی شار مغناطیسی	T	B
شدت میدان مغناطیسی	$\frac{A}{m}$	H

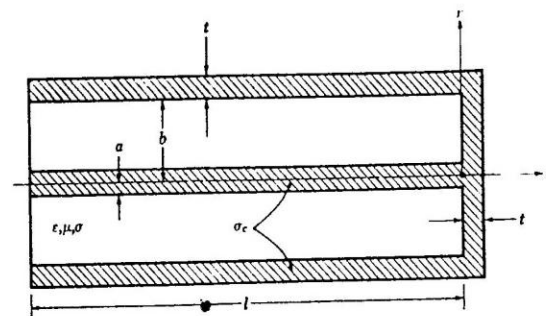
پرسش ۱-۶: سه ثابت جهانی مدل الکترومغناطیس کدامند، و رابطه آنها چیست؟

جدول ۱.۳: ۱-۳

نام ثابتهای جهانی	مقدار ثابت	واحد	علامت اختصاری
سرعت نور در فضای آزاد	3×10^8	$\frac{m}{s}$	c
نفوذ پذیری فضای آزاد	$4\pi \times 10^{-7}$	$\frac{H}{m}$	μ_0
گذردهی فضای آزاد	$\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$	$\frac{F}{m}$	ϵ_0

پرسش ۱-۷: کمیات منبع در مدل الکترومغناطیس کدامند؟

منبع الکترومغناطیسی همواره بارهای الکتریکی در حال سکون یا متحرک است.



شکل ۱.۱ پرسش ۲

پرسش ۱-۳: سه گام اساسی در بنا نهادن یک مدل ایده‌آل در مطالعه موضوعات علمی کدامند؟

پاسخ پرسش ۱-۳: در بنانهادن نظریه‌ای بر روی یک مدل ایده‌آل سه گام اساسی مطرح است:

۱ - کمیت‌های بنیادی مربوط به موضوع مطالعه تعریف می‌شوند.

۲ - قواعد عملیاتی (ریاضیات) این کمیات مشخص می‌گردند.

۳ - روابط اساسی چندی فرض می‌شوند.

پرسش ۱-۴: چهار واحد اصلی SI در الکترومغناطیس کدامند؟

جدول ۱.۱: ۱-۱

نام کمیت	واحد	علامت اختصاری
طول	متر	m
جرم	کیلوگرم	Kg
زمان	ثانیه	s
جریان	آمپر	A

فصل ۲

۱.۲ آنالیز برداری

مسئله ۱: سه بردار A ، B و C به صورت زیر داده شده‌اند:

$$A = a_x + a_y 2 - a_z 3$$

$$B = -a_y 4 + a_z$$

$$C = a_x 5 - a_z 2$$

مطلوب است

$|A - B|$ (ب)

a_A (الف)

θ_{AB} (ت)

$A \cdot B$ (پ)

$A \times C$ (ج)

ث مؤلفه A در جهت C

(ح) $A \times (B \times C)$ و $(A \times B) \times C$ (چ) $(A \times B) \cdot C$ و $A \cdot (B \times C)$

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{cases} a_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \\ \vec{A} = a_x + 2a_y - 3a_z \Rightarrow \vec{a}_A = \frac{(a_x + 2a_y - 3a_z)}{\sqrt{14}} \\ |\vec{A}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \end{cases}$$

$$A_{\vec{c}} = \frac{(a_x + 2a_y - 3a_z) \cdot (5a_x + 0a_y - 2a_z)}{\sqrt{29}} \quad (*)$$

$$= \frac{(1 \times 5) + (2 \times 0) + (-3 \times -2)}{\sqrt{29}} \\ = \frac{5 + 0 + 6}{\sqrt{29}} = \frac{11}{\sqrt{29}}$$

پاسخ قسمت ج)

$$\begin{cases} A = a_x + 2a_y - 3a_z \\ C = 5a_x + 0a_y - 2a_z \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} A_x = 1, A_y = 2, A_z = -3 \\ C_x = 5, C_y = 0, C_z = -2 \end{cases}$$

$$A \times C = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

حلّ درمیان فوق بروش مثلث بصورت زیر خواهد بود:

$$-4a_z + 0a_z - 10a_y - 10a_z + 0a_x + 2a_y \\ = -4a_x - 13a_y - 10a_z = -(4a_x + 13a_y + 10a_z)$$

پاسخ قسمت چ)

$$A \cdot (B \times C) = ?$$

$$B \times C = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$10a_x + 0a_z + 5a_y + 20a_z + 0a_x + 0a_y$$

$$= 10a_x + 5a_y + 20a_z$$

$$A = a_x + 2a_y - 3a_z$$

$$\Rightarrow A \cdot (B \times C) = (a_x + 2a_y - 3a_z) \cdot (10a_x + 5a_y + 20a_z)$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases} A = a_x + 2a_y - 3a_z \\ B = -4a_y + a_z \end{cases}$$

$$A - B = (a_x + 2a_y - 3a_z) - (0a_x - 4a_y + a_z)$$

$$A - B = (1 - 0)a_x + (2 + 4)a_y + (-3 - 1)a_z$$

$$A - B = a_x + 6a_y - 4a_z \Rightarrow |A - B| = \sqrt{1 + 36 + 16} = \sqrt{53}$$

پاسخ قسمت پ)

$$\begin{cases} A = a_x + 2a_y - 3a_z \\ B = 0a_y - 4a_y + a_z \end{cases}$$

$$A \cdot B = (1 \times 0) + (-4 \times 2) + (-3 \times 1) = 0 - 8 - 3 = -11$$

پاسخ قسمت ت)

$$A \cdot B = |A||B| \cos(\theta_{AB}) \quad \text{می دانیم}$$

$$|B| = \sqrt{0 + 16 + 1} \quad \text{و داریم} \quad |A| = \sqrt{14} \quad \text{بنابراین قسمت الف):}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta_{AB}) = \frac{A \cdot B}{|A||B|} = \frac{-11}{\sqrt{14} \times \sqrt{17}} = -0.713024095$$

$$\Rightarrow \theta_{AB} = \cos^{-1}(-0.713024095) = 135.4814998$$

$$\Rightarrow \theta_{AB} \approx 135.5^\circ$$

پاسخ قسمت ث)

$$\boxed{A_{\vec{c}} = \vec{A} \cdot \vec{a}_c} \\ \Rightarrow A_{\vec{c}} = \vec{A} \cdot \left(\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} \right) \quad (*)$$

$$\vec{C} = 5a_x + 0a_y - 2a_z$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{25 + 0 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{5a_x + 0a_y - 2a_z}{\sqrt{29}}$$

(این بردار یعنی $A \times B$ در قسمت ج بتفصیل محاسبه شده است).
لذا :

$$(A \times B) \times C = (-10a_x - a_y - 4a_z) \times (5a_x + 0a_y - 2a_z)$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ (A \times B)_x & (A \times B)_y & (A \times B)_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ -10 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2a_x + 0a_z - 20a_y + 5a_z - 20a_y + 0a_x$$

$$= 2a_x - 40a_y + 5a_z$$

مسئله ۲: بردارهای زیر داده شده‌اند

$$A = a_x - a_y + a_z$$

$$B = a_x + a_y - a_z$$

عبارتی برای بردار واحد C ، که هم بر A و هم بر B عمود پیدا کند.

پاسخ مسئله ۲:

(بردار واحدی که هم بر A و هم بر B عمود است، بردار حاصل ضرب خارجی آنهاست که تبدیل به واحد شده باشد.)

$$A \times B = D = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a_x + 5a_y + 3a_z$$

$$C = \frac{D}{|D|} = \frac{a_x + 5a_y + 3a_z}{\sqrt{35}}$$

مسئله ۳: دو میدان برداری با $A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$ و $B = a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z$ داده شده است که در آن، تمام مؤلفه‌ها می‌توانند توابعی از مختصات فضایی باشند. اگر این دو میدان در تمام نقاط با یکدیگر موازی باشند، چه رابطه‌ای باید بین مؤلفه‌های آنها برقرار باشد؟

$$= (1 \times 8) + (2 \times 5) + (-3 \times 20)$$

$$= 8 + 10 - 60 = -42$$

$$(A \times B) \cdot C = ?$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2a_x - 4a_z + 0a_y + 0a_z - 12a_x - a_y$$

$$= -10a_x - a_y - 4a_z$$

$$C = 5a_x + 0a_y - 2a_z$$

$$\Rightarrow (A \times B) \cdot C = (-10a_x - a_y - 4a_z) \cdot (5a_x + 0a_y - 2a_z)$$

$$= -50 + 0 + 8 = -42$$

$$A \times (B \times C) = ?$$

پاسخ قسمت ح)

$$B \times C = 8a_z + 5a_y + 20a_x$$

(این بردار یعنی $B \times C$ در قسمت ج بتفصیل محاسبه شده است).

$$A \times (B \times C) = (a_x + 2a_y - 3a_z) \times (8a_z + 5a_y + 20a_x)$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ (B \times C)_x & (B \times C)_y & (B \times C)_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 20 \end{vmatrix}$$

$$40a_x + 5a_z - 24a_y - 16a_z + 15a_x - 20a_y$$

$$= 55a_x - 44a_y - 11a_z$$

$$(A \times B) \times C = ?$$

$$A \times B = -10a_x - a_y - 4a_z$$

$$A \times (A \cdot B) - B \times (A \cdot A) = A \times (A \cdot C) - C(A \cdot A) \quad : (**)$$

$$A \times (A \cdot B) - B \times (A \cdot A) = A \times (A \cdot B) - C(A \cdot A) \quad : (*)$$

$$B \times |A|^T = C \times |A|^T \Rightarrow \vec{B} = \vec{C} \quad : (***)$$

مسئله ۵: یک بردار مجهول را می‌توان تعیین کرد، اگر هم ضرب عددی و هم ضرب برداری آن با یک بردار معلوم داده شده باشد، با فرض اینکه A یک بردار معلوم است، بردار مجهول X را تعیین کنید اگر هم p و هم B داده شده باشند $p = A \cdot X$ و $B = A \times X$ پاسخ مسئله ۵:

$$P = A \cdot X \Rightarrow \vec{PA} = (A \cdot X)A \quad (*)$$

$$B = A \times X \Rightarrow B \times A = (A \times X) \times A \quad (**)$$

$$A \times (B \times C) = B \times (A \cdot C) - C \times (A \cdot B)$$

$$\Rightarrow (B \times C) \times A = -[B(A \cdot C) - C(A \cdot B)]$$

$$\Rightarrow (B \times C) \times A = C(A \cdot B) - B(A \cdot C) \quad (***)$$

$$(***), (**) \Rightarrow B \times A = (A \times X) \times A$$

$$= X(A \cdot A) - A(A \cdot X)$$

$$= XA^T - A(A \cdot X)$$

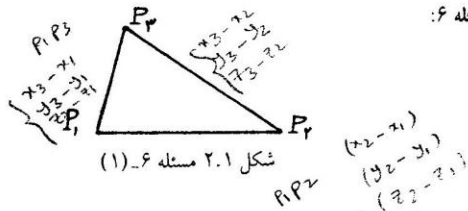
$$(*) \Rightarrow B \times A = XA^T - PA$$

$$\Rightarrow X = \frac{PA + B \times A}{A^T}$$

مسئله ۶: سه رأس مثلثی عبارتند از $P_1(0, 1, -2)$ ، $P_2(4, 1, -3)$ و $P_3(6, 2, 5)$ الف) تعیین کنید آیا قائم الزاویه است یا نه.

ب) سطح مثلث را بدست آورید.

پاسخ مسئله ۶:



پاسخ مسئله ۳:

تعریف - دو بردار را موازی هم گویند هرگاه مضارب عددی مثبت یا منفی یکدیگر باشند. یعنی:

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A} = k\vec{B} \\ k \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین:

$$a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z = k(a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z)$$

$$a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z = k a_x B_x + k a_y B_y + k a_z B_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_x = k B_x \\ A_y = k B_y \\ A_z = k B_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A_x}{B_x} = k \\ \frac{A_y}{B_y} = k \\ \frac{A_z}{B_z} = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = k$$

مسئله ۴: نشان دهید اگر $A \cdot B = A \cdot C$ و $A \times B = A \times C$ ، که در آنها A بردار صفر

نیست، آنگاه $B = C$

پاسخ مسئله ۴:

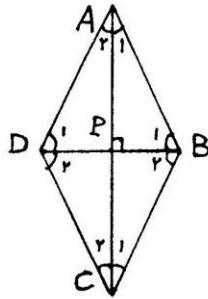
$$\begin{cases} A \cdot B = A \cdot C & (*) \\ A \times B = A \times C & (**) \\ \vec{A} \neq \vec{0} & (***) \end{cases}$$

$$A \times B = A \times C \Rightarrow A \times (A \times B) = A \times (A \times C)$$

بنابه قاعده $back - cab$ مذکور در صفحه ۲۴ کتاب درسی دیوید چنگ داریم:

$$A \times (B \times C) = B \times (A \cdot C) - C \times (A \cdot B)$$

$$\begin{cases} A \times (A \times B) = A \times (A \cdot B) - B \times (A \cdot A) \\ A \times (A \times C) = A \times (A \cdot C) - C \times (A \cdot A) \end{cases}$$



شکل ۲.۳ مسئله ۷

$$\triangle ABD : AB = AD \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_1$$

$$ABCD : (\text{متوازی الاضلاع}) \Rightarrow \angle B = \angle D$$

$$\begin{cases} \angle B_1 = \angle D_2 \\ \angle B_1 = \angle D_1 \end{cases} \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2 \quad \text{است.} \Rightarrow DB \text{ نیمساز زاویه } D$$

به همین ترتیب ثابت می شود DB نیمساز زاویه B و AC نیمساز زوایای A و C است یعنی :

$$\begin{cases} \angle A_1 = \angle A_2 \\ \angle B_1 = \angle B_2 \\ \angle C_1 = \angle C_2 \end{cases}$$

$$ABCD : (\text{متوازی الاضلاع}) \Rightarrow \angle A + \angle B = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\angle A + \angle B}{2} \right) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow (\angle A_1 + \angle B_1) = 90^\circ$$

$$\triangle APB : \begin{cases} \angle A_1 + \angle B_1 + \angle P = 180^\circ \\ \angle A_1 + \angle B_1 = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle P = 90^\circ \Rightarrow AC \perp DB$$

مسئله ۸: ثابت کنید خطی که نقاط وسط دو ضلع مثلثی را به هم وصل می کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است.

پاسخ مسئله ۸:

$$\begin{cases} BH = AH \\ BK = CK \end{cases}$$

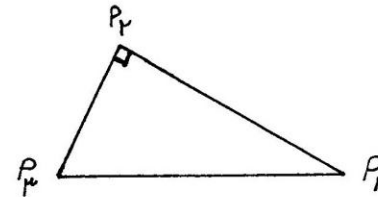
پاسخ قسمت الف)

بردارهای $P_1 P_2, P_1 P_3, P_1 P_4$ را تشکیل می دهیم. می دانیم هرگاه دو بردار برهم عمود باشند، حاصل ضرب داخلی آنها مساوی صفر است. لذا حاصل ضرب داخلی دویزدی بردارهای فوق را تشکیل می دهیم هر کدام صفر شد آن دو بردار بر هم عمودند یعنی :

$$\begin{cases} P_1 P_2 = 4a_x + 0a_y - a_z \\ P_1 P_3 = 6a_x + a_y + 7a_z \\ P_1 P_4 = 2a_x + a_y + 8a_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (P_1 P_2) \cdot (P_1 P_3) = 24 + 0 - 7 \neq 0 \\ (P_1 P_2) \cdot (P_1 P_4) = 8 + 0 - 8 = 0 \\ (P_1 P_3) \cdot (P_1 P_4) = 12 + 1 + 56 \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین مثلث $P_1 P_2 P_3$ در رأس P_2 قائم الزویه است.



شکل ۲.۲ مسئله ۶- (۲)

پاسخ قسمت ب)

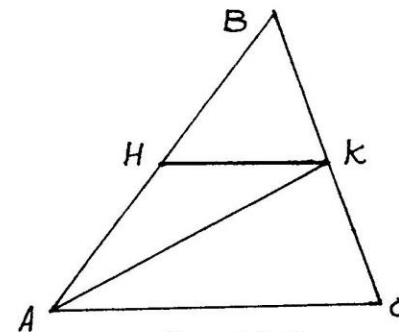
$$S = \frac{1}{2} |P_1 P_2| \cdot |P_2 P_3|$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{16 + 0 + 1}) (\sqrt{4 + 1 + 64}) = \frac{(\sqrt{17})(\sqrt{69})}{2} = 17/12454379$$

مسئله ۷: نشان دهید که قطرهای یک لوزی برهم عمودند. (لوزی یک متوازی الاضلاع با اضلاع متساوی است.)

پاسخ مسئله ۷:

$$\begin{cases} AB \parallel DC \\ DB \text{ موزب} \end{cases} \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_2$$



شکل ۲.۴ مسئله ۹

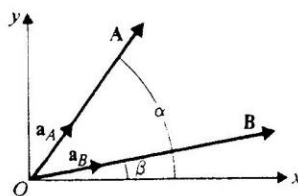
$$\begin{aligned} HK &= AK - AH = (AB + BK) - AH \\ &= (AB + \frac{1}{4}BC) - \frac{1}{4}AB \\ \frac{1}{4}(AB + BC) &= \frac{1}{4}AC \end{aligned}$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد که بردار HK مضرب عددی مثبتی از بردار AC است لذا این دو بردار موازی هم هستند. ضریب $\frac{1}{4}$ نیز نشان می‌دهد که اندازه بردار HK نصف اندازه بردار AC است. مسئله ۹: بردارهای واحد a_A و a_B جهت‌های بردارهای دوبعدی A و B را نشان می‌دهند که مطابق شکل ۲-۳ با محور مرجع x ، به ترتیب زاویه α و β را می‌سازند.

الف) با در نظر گرفتن ضرب عددی $A \cdot a_B$ ، فرمولی برای بسط کسینوس اختلاف دو زاویه، $\cos(\alpha - \beta)$ بیابید.

ب) فرمولی برای $\sin(\alpha - \beta)$ بدست آورید.

پاسخ مسئله ۹
قسمت الف)



شکل ۲.۵ مسئله ۹

$$A \cdot a_B = |A||a_B| \cos(\alpha - \beta) = |A| \cos(\alpha - \beta)$$

$$A \cdot a_B = (A_x a_x + A_y a_y) \cdot a_B = |A| \cos(\alpha - \beta)$$

$$A_x(a_x \cdot a_B) + A_y(a_y \cdot a_B) = A_x|a_y| \cos \beta + A_y|a_y| \cos(90^\circ - \beta)$$

$$= A_x \cos \beta + A_y \sin \beta = |A| \cos(\alpha - \beta)$$

$$\begin{cases} A_x = |A| \cos \alpha, & A_y = |A| \sin \alpha \\ A_x \cos \beta + A_y \sin \beta = |A| \cos(\alpha - \beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

پاسخ قسمت ب)

$$A \times a_B = |A| \sin(\alpha - \beta)$$

$$A \times a_B = (A_x a_x + A_y a_y) \times a_B = A_x(a_x \times a_B) + A_y(a_y \times a_B)$$

$$= A_x \sin \beta + A_y \sin(90^\circ - \beta)$$

$$= |A| \sin(\alpha - \beta)$$

$$|AB||BC|\sin B|\vec{a}_N = |AC||BC|\sin C|\vec{a}_N$$

$$|AB|\sin B = |AC|\sin C$$

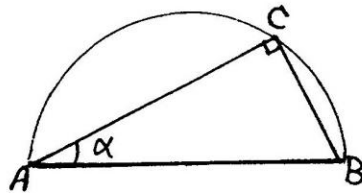
$$c \cdot \sin B = b \sin C \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (**)$$

$$(**), (*) \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

مسئله ۱۱: ثابت کنید زاویه محاطی در یک نیم دایره قائمه است.

پاسخ مسئله ۱۱:

$$\begin{aligned} AC \cdot CB &= AC(CA + AB) \\ &= AC \cdot CA + AC \cdot AB \end{aligned}$$



شکل ۲.۷ مسئله ۱۱

$$\begin{aligned} &= -|AC|^2 + |AC||AB|\cos \alpha \\ &= -|AC|^2 + |AC||AB|\frac{|AC|}{|AB|} \\ &= -|AC|^2 + |AC|^2 = 0 \end{aligned}$$

حاصل ضرب داخلی دو بردار AC و CB مساوی با صفر شد، لذا زاویه بین این دو بردار ۹۰° است.

مسئله ۱۲: درستی قاعده back - cab را در مورد ضرب سه گانه برداری سه بردار، طبق معادله

$$\begin{cases} A_x = |A| \cos \alpha, A_y = |A| \sin \alpha \\ A_x \sin \beta + A_y \cos \beta = |A| \sin(\alpha - \beta) \end{cases}$$

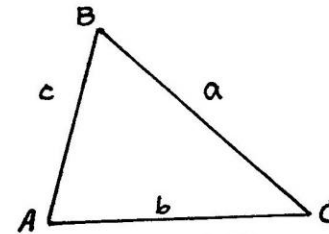
$$\Rightarrow \boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$$

مسئله ۱۰: قانون سینوس ها را در یک مثلث اثبات کنید.

پاسخ مسئله ۱۰:

$$\begin{cases} |AB| = c \\ |BC| = a \\ |AC| = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} AB \times AC = |AB| \cdot |AC| \cdot \sin A |\vec{a}_N| = 2S \\ AC \times BC = |AC| \cdot |BC| \cdot \sin C |\vec{a}_N| = 2S \end{cases}$$



شکل ۲.۶ مسئله ۱۰

(S مساحت مثلث ABC می باشد).

$$\begin{aligned} |AB| \cdot |AC| \cdot \sin A |\vec{a}_N| &= |AC||BC|\sin C |\vec{a}_N| \\ |AB| \cdot \sin A &= |BC| \cdot \sin C \\ c \cdot \sin A &= a \sin C \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} AC \times BC = |AC| \cdot |BC| \cdot \sin C |\vec{a}_N| = 2S \\ AB \times BC = |AB| \cdot |BC| \cdot \sin B |\vec{a}_N| = 2S \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & y_B z_A z_C - y_C z_A z_B + x_A x_C y_B - x_A x_B y_C \\ & , x_A x_C z_B - x_A x_B z_C - y_A y_B z_C + y_A y_C y_B \\ & = (x_B z_C z_A - x_C z_A z_B + x_B y_A y_C - x_C y_A y_B) a_x \\ & + (y_B z_A z_C - y_C z_A z_B - x_A x_B y_C + x_A x_C y_B) a_y \\ & + (x_A x_C z_B - x_A x_B z_C - y_A y_B z_C + y_A y_C z_B) a_z \quad (***) \\ & (***) , (*) \Rightarrow A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \end{aligned}$$

مسئله ۱۳: با روابط برداری ثابت کنید که دو خط در صفحه

$L_1: b_1x + b_2y = c$ و $L_2: b'_1x + b'_2y = c'$ برهم عمود هستند اگر شیب آنها منفی معکوس یکدیگر باشد.

پاسخ مسئله ۱۳:

$$\begin{cases} \text{شیب } L_1 = m_1 = -\frac{b_1}{b_2} \\ \text{شیب } L_2 = m_2 = -\frac{b'_1}{b'_2} \end{cases}$$

بنابراین فرض مسئله:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow m_1 = -\left(-\frac{b'_1}{b'_2}\right) = \frac{b'_1}{b'_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1: -b'_2x + b'_1y = \frac{cb'_1}{b'_2} \\ L_2: b'_1x + b'_2y = c' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 \text{ بردار هادی خط} = (-b'_2)a_x + (b'_1)a_y + 0a_z = V_1 \\ L_2 \text{ بردار هادی خط} = (b'_1)a_x + (b'_2)a_y + 0a_z = V_2 \end{cases}$$

$$V_1 \cdot V_2 = -b'_1b'_2 + b'_1b'_2 + 0 = 0 \Rightarrow V_1 \perp V_2$$

مسئله ۱۴:

الف) ثابت کنید که معادله هر صفحه در فضا را می‌توان به صورت $b_1x + b_2y + b_3z = c$ نوشت. (راهنمایی: ثابت کنید ضرب نقطه‌ای بردار مکان به هر نقطه از صفحه و یک بردار عمودی، ثابت است.)

(۲۰-۲) در مختصات کارتزین تحقیق نمایید.

پاسخ مسئله ۱۲:

فرض کنیم: $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

$$B \times C = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$$

$$= a_x(y_B z_C - z_B y_C) + a_y(z_B x_C - x_B z_C) + a_z(x_B y_C - y_B x_C)$$

$$A \times (B \times C) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ x_A & y_A & z_A \\ y_B z_C - z_B y_C & z_B x_C - x_B z_C & x_B y_C - y_B x_C \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & = (x_B z_C z_A - x_C z_A z_B + x_B y_A y_C - x_C y_A y_B) a_x \\ & + (y_B z_A z_C - y_C z_A z_B - x_A x_B y_C + x_A x_C y_B) a_y \\ & + (x_A x_C z_B - x_A x_B z_C - y_A y_B z_C + y_A y_C z_B) a_z \quad (*) \end{aligned}$$

$$A \cdot C = x_A x_C + y_A y_C + z_A z_C$$

$$A \cdot B = x_A x_B y_A + y_B + z_A z_B$$

$$\begin{aligned} B(A \cdot C) &= (x_A x_B x_C + x_B y_A y_C + x_B z_A z_C, x_A x_C y_B + y_A y_B y_C + y_B z_A z_C \\ &, x_A x_C z_B + y_A y_C z_B + z_A z_B z_C) \quad (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(A \cdot B) &= (x_A x_B x_C + x_C y_A y_B + x_C z_A z_B, x_A x_B y_C + y_A y_B y_C + y_C z_A z_B \\ &, x_A x_B z_C + y_A y_B z_C + z_A z_B z_C) \quad (***) \end{aligned}$$

رابطه $(**)$ را از $(***)$ کم می‌کنیم:

$$B(A \cdot C) - C(A \cdot B) = (x_B z_C z_A - x_C z_A z_B + x_B y_A y_C - x_C y_A y_B$$

$$a_v = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} (b_1 a_x + b_2 a_y + b_3 a_z)$$

پاسخ قسمت پ)

بشرطی که معادله صفحه بصورت $ax + by + cz = d$ و مختصات نقطه بصورت (x_0, y_0, z_0) باشد، فاصله این نقطه از صفحه فوق از رابطه $h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ بدست می‌آید.

$$\begin{cases} P: 3x - 2y + yz = 5 \\ (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow h = \frac{|3(0) + (-2)(0) + 6(0) - 5|}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = \frac{5}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7} = 0.7142857143$$

مسئله ۱۵: مؤلفه بردار y از $A = -a_y z + a_z y$ را در نقطه $P_1(0, -2, 3)$ که به سمت نقطه $P_2(\sqrt{3} - 6, 0, 1)$ جهت گرفته است، بیابید.

پاسخ مسئله ۱۵:

P_2 در مختصات استوانه‌ای داده شده است لذا:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi = \sqrt{3} \cos(-60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = r \sin \phi = \sqrt{3} \sin(-60^\circ) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right) \Rightarrow \vec{P_1 P_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -2\right)$$

$$\vec{P_1 P_2} = \frac{(A \cdot \vec{P_1 P_2})}{|P_1 P_2|}$$

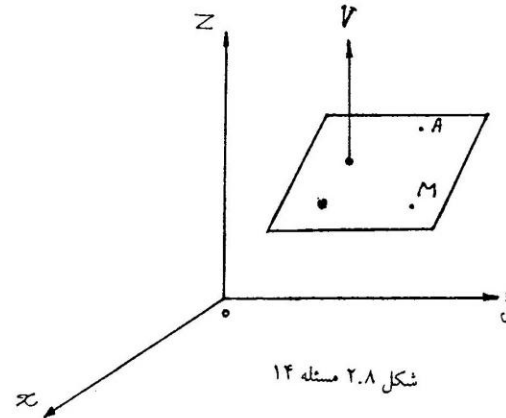
$$= \frac{-\frac{z}{2} - 2y}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 4}} = \frac{-(z + 4y)}{2\sqrt{5}} = \frac{-(3 - 8)}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{2 \times 5} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1/118033989 \approx 1/12$$

ب) عبارتی را برای عمود واحد گذرنده از مبدأ بیابید.

پ) در مورد صفحه $3x - 2y + 6z = 5$ ، فاصله عمودی از مبدأ تا صفحه را پیدا کنید.

پاسخ مسئله ۱۴:



شکل ۲.۸ مسئله ۱۴

پاسخ قسمت الف)

فرض می‌کنیم از نقطه مفروض $M(x_1, y_1, z_1)$ صفحه P عمود بر بردار $\vec{V}(b_1, b_2, b_3)$ رسم شده باشد. در این صورت بردار \vec{V} همان بردار نرمال صفحه خواهد بود. بنابراین اگر نقطه $A(x, y, z)$ نقطه‌ای اختیاری از صفحه P باشد نتیجه می‌گیریم:

$$\vec{M} \cdot \vec{A}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

$$\forall A \in P \Rightarrow \vec{V} \perp \vec{MA} \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{MA} = 0$$

$$\Rightarrow b_1(x - x_1) + b_2(y - y_1) + b_3(z - z_1) = 0$$

$$b_1 x + b_2 y + b_3 z = \underbrace{b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 z_1}_C$$

$$b_1 x + b_2 y + b_3 z = c$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases} \vec{V}(b_1, b_2, b_3) = \text{بردار نرمال صفحه} = b_1 a_x + b_2 a_y + b_3 a_z \\ |\vec{V}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = a_R \left(\frac{25}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

$$\Rightarrow |E| = \frac{25}{(9 + 16 + 25)} = \frac{1}{2} \quad \text{در نقطه } P$$

$$E_r = \vec{E} \cdot \vec{a}_r = \frac{25}{R^2} (a_R \cdot a_r) = \frac{25}{R^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$= \frac{25}{R^2} \left(\frac{-3}{\sqrt{9 + 16 + 25}} \right) = \frac{25(-3)}{50(\sqrt{50})}$$

$$= \frac{-3}{10\sqrt{2}} = -0.2121320334 \approx -0.212$$

پاسخ قسمت ب)

$$E = a_R \left(\frac{25}{R^2} \right) + a_\theta(\circ) + a_\phi(\circ)$$

میدان E را به مختصات کارتزین می‌بریم :

$$E = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_x = \frac{A_R x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \circ - \circ \\ A_y = \frac{A_R y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \circ + \circ \\ A_z = \frac{A_R z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \circ \end{array} \right.$$

(رجوع کنید به مثال (۱۱-۲) حل شده در صفحه ۴۳ کتاب درسی)

$$\Rightarrow E = a_x \left(\frac{25x}{R^3} \right) + a_y \left(\frac{25y}{R^3} \right) + a_z \left(\frac{25z}{R^3} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} \\ P(-3, 4, -5) \end{array} \right.$$

مسئله ۱۶: موقعیت یک نقطه در مختصات استوانه‌ای توسط $(4, 2\pi/3, 3)$ مشخص شده است.

محل نقطه را در حالتهای زیر تعیین کنید.

الف) در مختصات کارتزین؟

ب) در مختصات کروی؟

پاسخ مسئله ۱۶:

قسمت الف)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \phi = 4 \times \cos \frac{2\pi}{3} = -2 \\ y = r \sin \phi = 4 \times \sin \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow A(-2, 2\sqrt{3}, 3) \\ z = 3 \end{array} \right.$$

پاسخ قسمت ب)

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4 + 12 + 9} = 5$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{R} = \cos^{-1} \frac{3}{5} = \cos^{-1} \frac{3}{\sqrt{4 + 12 + 9}}$$

$$= \cos^{-1}(0.6) = (53.0^\circ, 7', 48.3'')$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3}}{-2} \right) = 120^\circ$$

مسئله ۱۷: یک میدان در مختصات کروی توسط $E = a_R(25/R^2)$ توصیف شده است.

الف) $|E|$ و E_x را در نقطه $P(-3, 4, -5)$ بیابید.

ب) زاویه‌ای را که E با بردار $B = a_x 2 - a_y 2 + a_z 3$ در نقطه P می‌سازد بدست آورید.

پاسخ مسئله ۱۷:

پاسخ قسمت الف)

$$E = a_R \left(\frac{25}{R^2} \right)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{در مختصات کروی}$$

$$\Rightarrow a_R = \frac{xa_x + ya_y + za_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\begin{cases} (a_\theta \cdot a_x)a_x = \cos \theta \cos \phi a_x \\ (a_\theta \cdot a_y)a_y = \cos \theta \sin \phi a_y \\ (a_\theta \cdot a_z)a_z = -\sin \theta a_z \end{cases}$$

$$a_\theta = \cos \theta \cos \phi a_x + \cos \theta \sin \phi a_y - \sin \theta a_z$$

$$\begin{cases} \tan \phi = \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \phi} = \cos^2 \phi \\ \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \text{ بطور مشابه}$$

$$\Rightarrow a_\theta = \frac{xza_x + yza_y}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} a_z$$

$$\begin{cases} (a_\theta \cdot a_x)a_x = -\sin \phi a_x \\ (a_\theta \cdot a_y)a_y = \cos \phi a_y \\ (a_\theta \cdot a_z)a_z = 0 \end{cases}$$

$$a_\phi = -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y$$

$$\Rightarrow a_\phi = \frac{-ya_x + xa_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= a_x \left(\frac{25(-3)}{50\sqrt{50}} \right) + a_y \left(\frac{25(4)}{50\sqrt{50}} \right) + a_z \left(\frac{25(-5)}{50\sqrt{50}} \right) \\ &= a_x (-0.707106781) + a_y (0.707106781) + a_z (-0.707106781) \\ E \cdot B &= |E||B| \cos \theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{E \cdot B}{|E||B|} \right) \\ E \cdot B &= 2(-0.707106781) - 2(0.707106781) + 1(-0.707106781) \\ &= -1/3435.2884 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |E| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ |B| = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow |E||B| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{-1/3435.2884}{(1/2)} \right) = 153/5942376 \approx 154^\circ$$

مسئله ۱۸: بردارهای پایه a_ϕ , a_θ , a_R دستگاه مختصات کروی را در مختصات کارتزین بیان کنید.
پاسخ مسئله ۱۸:

	a_R	a_θ	a_ϕ
a_x	$\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \phi$
a_y	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$
a_z	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0

$$\begin{cases} (a_R \cdot a_x)a_x = \sin \theta \cos \phi a_x \\ (a_R \cdot a_y)a_y = \sin \theta \sin \phi a_y \\ (a_R \cdot a_z)a_z = \cos \theta a_z \end{cases}$$

$$a_R = \sin \theta \cos \phi a_x + \sin \theta \sin \phi a_y + \cos \theta a_z$$

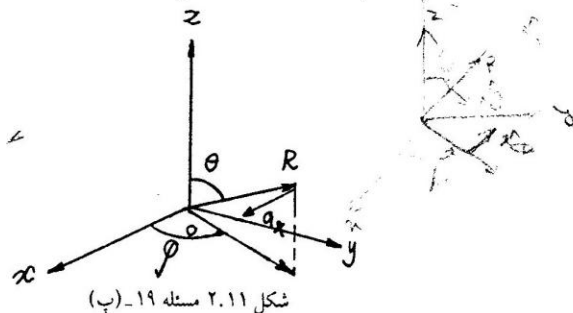
$$x = R \sin \theta \cos \phi \Rightarrow \sin \theta \cos \phi = \frac{x}{R} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi \Rightarrow \sin \theta \sin \phi = \frac{y}{R} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$z = \cos \theta R \Rightarrow \cos \theta = \frac{z}{R} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$a_r \times a_\theta$ (پ) ✓

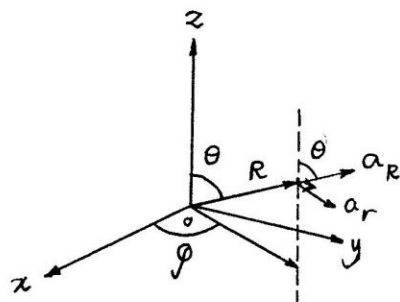
$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad a_r \times a_\theta = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{vmatrix} = -\sin \phi a_z$$



شکل ۲.۱۱ مسئله ۱۹- (پ)

$a_R \cdot a_r$ (ت)

$$a_R \cdot a_r = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$



شکل ۲.۱۲ مسئله ۱۹- (ت)

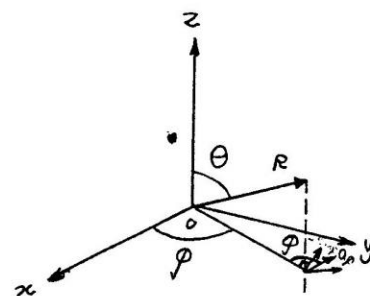
$a_y \cdot a_R$ (ث)

$$a_y \cdot a_R = \sin \theta \sin \phi$$

✓ مسئله ۱۹: مقادیر ضرب‌های زیر را در مورد بردارهای پایه تعیین کنید:

$a_r \times a_\theta$ (پ)	$a_\theta \cdot a_y$ (ب)	$a_x \cdot a_\phi$ (الف)
$a_R \cdot a_z$ (ج)	$a_y \cdot a_R$ (ث)	$a_R \cdot a_r$ (ت)
$a_z \times a_\theta$ (ح)	$a_\theta \cdot a_z$ (ز)	$a_R \times a_z$ (چ)

پاسخ مسئله ۱۹:



شکل ۲.۹ مسئله ۱۹- (الف)

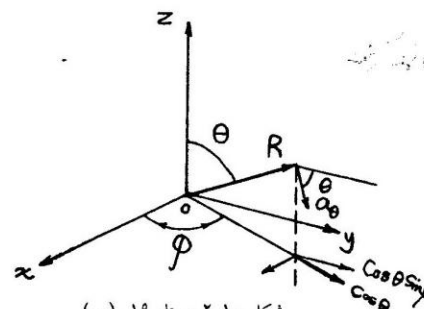
$a_x \cdot a_\phi$ (الف)

$$a_x \cdot a_\phi = 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin \phi$$

$a_x \cdot a_\phi = -\sin \phi$: لذا $(-a_x)$ چون در جهت

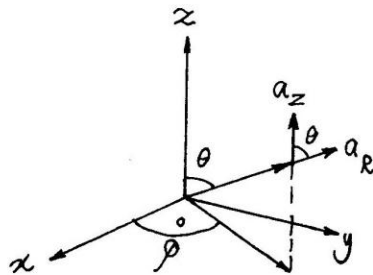
$a_\theta \cdot a_y$ (ب)

$$a_\theta \cdot a_y = \cos \theta \sin \phi$$



شکل ۲.۱۰ مسئله ۱۹- (ب)

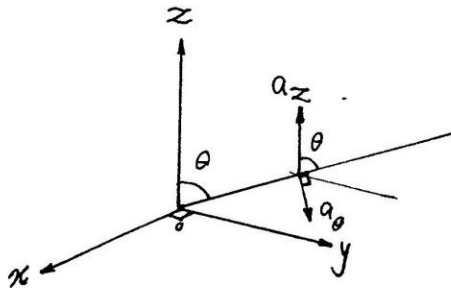
$$\begin{aligned} &= \sin \theta \cdot \sin \phi a_x - \cos \phi \sin \theta a_y \\ &= \sin \theta (\sin \phi a_x - \cos \phi a_y) \\ &= -\sin \theta \cdot a_\phi \\ (a_\phi &= -\sin \phi a_x + \cos \phi a_y \quad \text{زیرا:}) \end{aligned}$$



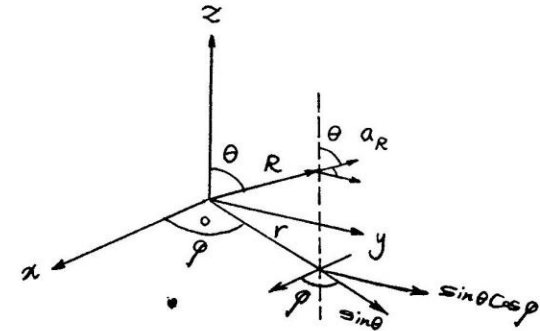
شکل ۲.۱۵ مسئله ۱۹- (ج)

$$a_\theta \cdot a_z \quad (\text{ج})$$

$$\begin{aligned} a_\theta \cdot a_z &= |1| \cdot |1| \cos(\widehat{a_\theta, a_z}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ &= -\sin \theta \end{aligned}$$



شکل ۲.۱۶ مسئله ۱۹- (ج)

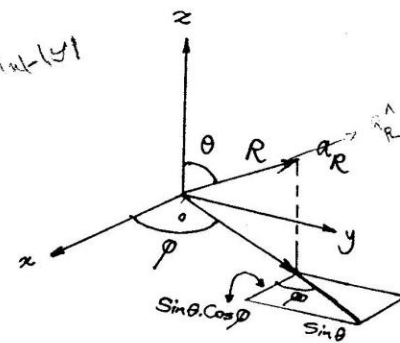


شکل ۲.۱۳ مسئله ۱۹- (ث)

$$a_R \cdot a_z \quad (\text{ج})$$

$$\begin{aligned} a_R \cdot a_z &= |1| \cdot |1| \cdot \cos(\widehat{a_R, a_z}) \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x+y| &< |x| + |y| \\ 1 &< 0 \end{aligned}$$



شکل ۲.۱۴ مسئله ۱۹- (ج)

$$a_R \times a_z \quad (\text{ج})$$

$$\begin{cases} a_R = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ a_z = (0, 0, 1) \end{cases}$$

$$a_R \times a_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\int F \cdot dl = \int [a_x xy + a_y (rx - y^2)] [a_x dx + a_y dy + a_z dz]$$

$$= \int [xy dx + (rx - y^2) dy] = \int xy dx + \int (rx - y^2) dy$$

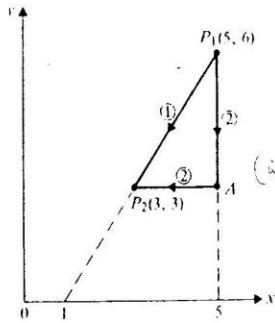
معادله مسیر $P_1 P_2$ بصورت زیر است:

$$\frac{y - 6}{x - 5} = \frac{r}{y} \Rightarrow x = \frac{r + y}{r} \quad y = \frac{rx - r}{y}$$

$$\Rightarrow \int_{P_1 P_2} F \cdot dl = \int_2^r x \left(\frac{rx - r}{y} \right) dx + \int_6^r \left[r \left(\frac{r + y}{r} \right) - y^2 \right] dy$$

$$= \frac{r}{y} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \Big|_2^r + \left(-\frac{y^2}{2} + \frac{ry}{y} + ry \right) \Big|_6^r$$

$$= \frac{r}{y} \left(9 - \frac{9}{2} - \frac{125}{2} + \frac{25}{2} \right) + (-9 + 9 + 9 + 72 - 36 - 18) = -10$$



شکل ۲.۱۸ مسئله ۲۰

پاسخ قسمت ب)

$$\int_{P_1 A P_2} F \cdot dl = \int_{P_1 A} F \cdot dl + \int_{A P_2} F \cdot dl$$

$$= \int_{P_1 A} xy dy + \int_{P_1 A} (rx - y^2) dy + \int_{A P_2} xy dx + \int_{A P_2} (rx - y^2) dy$$

$$= 0 + \int_6^r (r(5) - y^2) dy + r \int_5^r x dx = 0$$

$$= \left(10y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_6^r + \frac{rx^2}{2} \Big|_5^r$$

$a_z \times a_\theta$ (خ)

$$\begin{cases} a_z = (0, 0, 1) \\ a_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \end{cases}$$

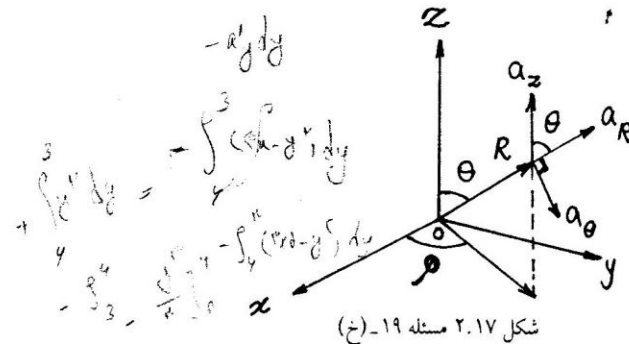
$$a_z \times a_\theta = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos \theta \cdot \cos \phi \cdot a_y - \cos \theta \cdot \sin \phi \cdot a_x$$

$$= \cos \theta (-\sin \phi a_x + \cos \phi a_y)$$

$$= \cos \theta \cdot a_\phi$$

(زیرا: $a_\phi = -\sin \phi \cdot a_x + \cos \phi \cdot a_y$)



مسئله ۲۰: تابع برداری $F = a_x xy + a_y (rx - y^2)$ داده شده است، انتگرال $\int F \cdot dl$ را از $P_1(5, 6)$ تا $P_2(3, 3)$ در شکل ۲۵-۲ محاسبه کنید.

الف) در امتداد مسیر مستقیم $P_1 P_2$.

ب) در امتداد مسیر $P_1 A P_2$.

پاسخ مسئله ۲۰:

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{cases} F = a_x xy + a_y (rx - y^2) \\ dl = a_x dx + a_y dy + a_z dz \end{cases}$$

$$= (45 - 9) - (90 - 72) + \frac{3}{4}(9 - 25) = -6$$

مسئله ۲۱: تابع برداری $E = a_x y + a_y x$ داده شده است. انتگرال خطی عددی $\int E \cdot dl$ را از نقطه $P_1(2, 1, -1)$ تا نقطه $P_2(8, 2, -1)$ محاسبه کنید.

الف) در امتداد سهمی $x = 2y^2$.

ب) در امتداد خط راست رابط دو نقطه.

آیا E یک میدان ذخیره شونده است؟

پاسخ مسئله ۲۱:

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{cases} E = a_x y + a_y x \\ dl = a_x dx + a_y dy \end{cases} \Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} E \cdot dl = \int_{P_1}^{P_2} (y dx + x dy)$$

$$2y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} E \cdot dl = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\frac{x}{2}} dx + \int_{P_1}^{P_2} 2y^2 dy$$

$$= \int_2^8 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} dx + 2 \int_1^2 y^2 dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^8 x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{2}{3} y^3 \Big|_1^2$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} \Big|_2^8 + \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{2}{3} \left[\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 7 \right] = 14$$

پاسخ قسمت ب)

معادله خط گذرنده از نقاط P_2, P_1 :

$$\begin{cases} \frac{x-2}{6} = \frac{y-1}{1} \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6y - 4 \\ y = \frac{x}{6} + \frac{1}{6} \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} E \cdot dl = \int_{P_1}^{P_2} y dx + \int_{P_1}^{P_2} x dy$$

$$= \int_1^8 \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{6} \right) dx + \int_1^2 (6y - 4) dy$$

$$= \left(\frac{x^2}{12} + \frac{x}{6} \right) \Big|_1^8 + (3y^2 - 4y) \Big|_1^2$$

$$= \left[\frac{64}{12} + \frac{8}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} \right] + [3(4) - 4(2) - 3 + 4] = 9 + 5 = 14$$

خیر. زیرا کرل (curl) آن مخالف صفر است.

مسئله ۲۲: برای E در مسئله ۲۱ $\int E \cdot dl$ را از $P_2(3, 4, -1)$ تا $P_1(4, -3, -1)$ با تبدیل E و نیز موقعیت‌های P_2 و P_1 به مختصات استوانه‌ای، محاسبه کنید.

پاسخ مسئله ۲۲:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$P_1 \begin{cases} r_1 = \sqrt{9 + 16} = 5 \\ \phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = (53^\circ, 7', 48/37'') = 0.9272952118(Rad) \\ z_1 = -1 \end{cases}$$

$$P_2 \begin{cases} r_2 = \sqrt{16 + 9} = 5 \\ \phi_2 = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = (-36^\circ, 52', 11/63'') = -0.6435011088(Rad) \\ z_2 = -1 \end{cases}$$

E را به مختصات استوانه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$E = y a_x + x a_y$$

$$E_r = E \cdot a_r = E_x(a_x \cdot a_r) + E_y(a_y \cdot a_r)$$

$$= y \cos \phi + x \sin \phi = r \sin \phi \cos \phi + r \sin \phi \cos \phi = 2r \sin \phi \cos \phi$$

$$E_\phi = E \cdot a_\phi = E_x(a_x \cdot a_\phi) + E_y(a_y \cdot a_\phi) = -r \sin^2 \phi + r \cos^2 \phi$$

$$E_z = E \cdot a_z = E_z(a_z \cdot a_z) = 0(1) = 0$$

$$\begin{cases} E \text{ (در مختصات استوانه‌ای)} = (r \sin^2 \phi) a_r + (r \cos^2 \phi) a_\phi \\ dl = a_r dr + a_\phi r d\phi + a_z dz \end{cases}$$

$$E \cdot dl = r \sin \varphi dr + r^2 \cos \varphi d\varphi$$

$$\int E \cdot dl = \int_0^{\varphi} r \sin \varphi dr + \int_0^{\varphi} r^2 \cos \varphi d\varphi = 0 + 25 \int_0^{\varphi} \cos \varphi d\varphi$$

$$\int E \cdot dl = 25 \int_0^{\varphi} \cos \varphi d\varphi = -24$$

(انتگرال گیری در مد رادیان انجام شده است.)

مسئله ۲۳: تابع عددی

$$V = \left(\sin \frac{\pi}{4} x \right) \left(\sin \frac{\pi}{4} y \right) e^{-z}$$

داده شده است.

(الف) اندازه و جهت حداکثر نرخ افزایش V را در نقطه $P(1, 2, 3)$ تعیین کنید.

(ب) نرخ افزایش V در P را در جهت مبدأ تعیین کنید.

پاسخ مسئله ۲۳:

پاسخ قسمت الف)

حداکثر نرخ افزایش V در جهت بردار گرادیان است.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{a}_z$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} e^{-z} \cos \frac{\pi}{4} x \sin \frac{\pi}{4} y \right) \vec{a}_x$$

$$+ \left(\frac{\pi}{4} e^{-z} \cos \frac{\pi}{4} y \sin \frac{\pi}{4} x \right) \vec{a}_y - e^{-z} \sin \frac{\pi}{4} x \sin \frac{\pi}{4} y \vec{a}_z$$

در نقطه P :

$$\nabla V(P) = \left(\frac{\pi}{4} e^{-3} \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \right) \vec{a}_x$$

$$+ \left(\frac{\pi}{4} e^{-3} \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \right) \vec{a}_y - e^{-3} \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \vec{a}_z$$

$$= (0) \vec{a}_x - 0.26 \vec{a}_y - 0.43 \vec{a}_z$$

$$|\nabla V_P| = \sqrt{(-0.26)^2 + (-0.43)^2} = 0.5$$

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{cases} P(1, 2, 3) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{PO} = -a_x - 2a_y - 3a_z$$

$$|\vec{PO}| = \sqrt{14} \Rightarrow \vec{a}_{PO} = \frac{-a_x - 2a_y - 3a_z}{\sqrt{14}}$$

$$\nabla V_P \cdot \vec{a}_{PO} = ((0)a_x - 0.26a_y - 0.43a_z) \cdot \frac{(-a_x - 2a_y - 3a_z)}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{(0.26)(2) + (0.43)(3)}{\sqrt{14}} = 0.4837 \approx 0.485$$

البته تقریب فوق بادی محاسباتی تقریب خوبی نیست و علت این امر در گرد کردن مقادیر است وگرنه در یک محاسبه دقیق داریم:

$$\frac{\pi}{4} e^{-3} \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = -0.2606844804 = A$$

$$-e^{-3} \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = -0.4311686599 = B$$

$$\Rightarrow \nabla V_P \cdot \vec{a}_{PO} = \frac{(-2A - 3B)}{\sqrt{14}} = 0.4850457305$$

که دقیق تر است.

مسئله ۲۴: انتگرال

$$\oint_S (a_R^3 \sin \theta) \cdot ds$$

را روی سطح کره‌ای به شعاع ۵ و مرکز مبدأ مختصات محاسبه کنید.

پاسخ مسئله ۲۴:

$$I = \oint_C (a_R^3 \sin \theta) \cdot ds = \oint_C (a_R^3 \sin \theta) (R^2 \sin \theta d\theta d\phi)$$

(در مختصات کروی بر روی سطح R ثابت $ds = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ برای اطلاع بیشتر رجوع

کنید به صفحه ۴۱ کتاب درسی رابطه (۶۷-۲) الف))

$$I = 3R^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta d\phi = 3(25)(2\pi) \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{75(2\pi)}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi = 75\pi(\pi - 0 - 0 + 0) = 75\pi^2$$

$$a_n = \frac{a_N}{|a_N|} \text{ (تبدیل به واحد)} = \frac{y a_y + z a_z}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_y + \frac{1}{\sqrt{2}} a_z$$

$$\Rightarrow a_n = 0 a_x + \frac{1}{\sqrt{2}} a_y + \frac{1}{\sqrt{2}} a_z \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ m = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ p = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$s \cos \alpha = s' \Rightarrow ds' = \cos \alpha ds \Rightarrow ds = \frac{1}{\cos \alpha} ds' = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx dy = \sqrt{2} dx dy$$

$$\int (F \cdot ds) a_n = \int (a_x + y a_y + z a_z) (0 a_x + \frac{1}{\sqrt{2}} a_y + \frac{1}{\sqrt{2}} a_z) ds$$

$$\int (\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}) ds = \frac{5}{\sqrt{2}} \int_0^2 \int_0^2 \sqrt{2} dx dy = 5(2)(2) = 20$$

روش دوم:

$$\int (F \cdot ds) a_n = \frac{5}{\sqrt{2}} \int ds$$

که $\int ds$ بیانگر مساحت مربع است یعنی:

$$\int ds = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{2}} \int ds = \frac{5}{\sqrt{2}} \times 4\sqrt{2} = 20$$

مسئله ۲۶: دیورژانس میدانهای برداری شعاعی زیر را پیدا کنید:

الف) $f_1(R) = a_R R^n$

ب) $f_2(R) = a_R \frac{k}{R^2}$

پاسخ مسئله ۲۶:

پاسخ قسمت الف)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f_1 &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 a_R)}{\partial R} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^{n+2})}{\partial R} \\ &= \frac{(n+2)R^{n+1}}{R^2} = (n+2)R^{n-1} \end{aligned}$$

مسئله ۲۵: معادله صفحه‌ای در فضا که نقطه (x_1, y_1, z_1) را در خود داراست، به صورت زیر قابل نوشتن است

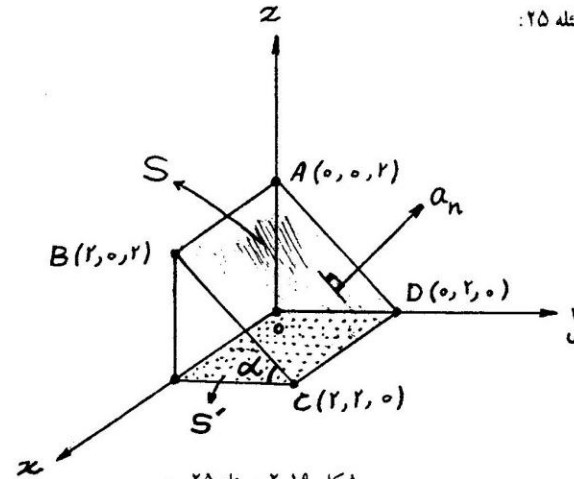
$$l(x - x_1) + m(y - y_1) + p(z - z_1) = 0$$

که در آن l, m, p کسینوس‌های جهتی عمود واحد بر سطح هستند:

$$a_n = a_x l + a_y m + a_z p$$

میدان برداری $F = a_x + a_y^2 + a_z^3$ داده شده است، انتگرال $\int_S F \cdot ds$ را روی سطح مسطح مربعی شکلی که رئوس آن در $(0,0,2), (2,0,2), (2,2,2), (0,2,2)$ هستند، محاسبه کنید.

پاسخ مسئله ۲۵:



شکل ۲.۱۹ مسئله ۲۵

$$AB : (y a_x + 0 a_y + 0 a_z)$$

$$AD : (0 a_x + 2 a_y - 2 a_z)$$

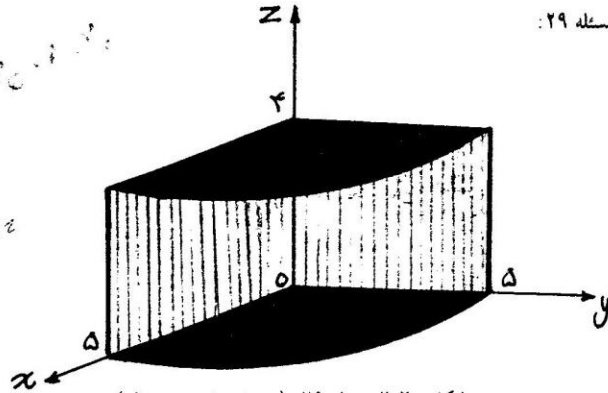
$$a_N = AB \times AD = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2 a_y + 2 a_z$$

$$+A_x \frac{\partial f}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z} = f \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$+(A_x + A_y + A_z) \cdot (\nabla f) = f(\nabla \cdot A) + A \cdot \nabla f$$

مسئله ۲۹: برای تابع برداری $A = a_r r^2 + a_z z$ ، قضیه دیورژانس را در مورد ناحیه مدور استوانه‌ای محصور توسط $z = 4$ و $z = 0$ ، $r = 5$ ، $\phi = 0$ و $\phi = 2\pi$ تحقیق نمایید.

پاسخ مسئله ۲۹:



شکل ۲.۲۰ مسئله ۲۹ - (ربع استوانه مورد نظر)

$$\oint A \cdot ds = \underbrace{\int_{s_1} A \cdot ds_1}_{\text{سطح جانبی}} + \underbrace{\int_{s_2} A \cdot ds_2}_{\text{سطح بالا}} + \underbrace{\int_{s_3} A \cdot ds_3}_{\text{سطح پایین}}$$

$$\begin{cases} ds_1 = a_r r d\phi dz \\ ds_2 = a_z r d\phi dr \\ ds_3 = -a_z r d\phi dr \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{s_1} A \cdot ds_1 &= \int_{s_1} (a_r r^2 + a_z z) \cdot (a_r r d\phi dz) \\ &= \int \int r^3 d\phi dz = 125 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^4 dz = 125(2\pi)(4) = 1000\pi \end{aligned}$$

پاسخ قسمت ب)

$$\nabla \cdot f_r = \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 A_R)}{\partial R} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 K / R^2)}{\partial R} = 0$$

مسئله ۲۷: نشان دهید $\frac{1}{V} \oint_S R \cdot ds = V$ که در آن R بردار شعاعی و V حجم ناحیه در برگرفته شده توسط S است.

پاسخ مسئله ۲۷:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \oint_S R \cdot ds &= \frac{1}{V} \oint_S R \cdot R^r \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^r \sin \theta d\theta d\phi = \frac{2\pi(R^r)}{V} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{V} R^r (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{4\pi}{V} R^r = V \Rightarrow \frac{1}{V} \oint_S R \cdot ds = V \end{aligned}$$

مسئله ۲۸: برای تابع عددی f و تابع برداری A ، رابطه

$$\nabla \cdot (fA) = f \nabla \cdot A + A \cdot \nabla f$$

را در مختصات کارتزین ثابت کنید.

پاسخ مسئله ۲۸:

$$A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$$

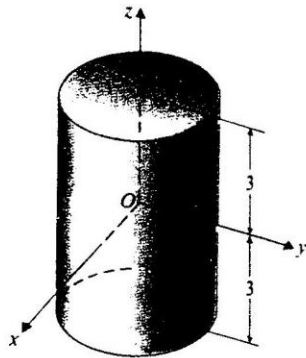
$$\nabla \cdot (fA_x a_x + fA_y a_y + fA_z a_z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (fA_x) + \frac{\partial}{\partial y} (fA_y) + \frac{\partial}{\partial z} (fA_z) \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$= f \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} A_x + f \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} A_y + f \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} A_z + f \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot F &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi} + \frac{r\partial(A_z)}{\partial z} \right] \\ \nabla \cdot F &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rk_1)}{\partial r} + \frac{\partial(0)}{\partial \phi} + \frac{r\partial(k_1 z)}{\partial z} \right] \\ &= k_1 \Rightarrow \nabla \cdot F = k_1 \\ \iiint \nabla \cdot F dv &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{-r}^r k_1 r dr d\phi dz \\ &= k_1 (2\pi) \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_{-r}^r = 2\pi k_1 r\end{aligned}$$



شکل ۲.۲۱ مسئله ۳۰-۲)

علت درماندن قضیه دیورژانس عدم پیوستگی F در r است.

مسئله ۳۱: از تعریف معادله (۹۸-۲) برای نتیجه گرفتن عبارت $\nabla \cdot A$ در مورد میدان برداری $A = a_r A_r + a_\theta A_\theta + a_z A_z$ در مختصات استوانه‌ای استفاده کنید.
پاسخ مسئله ۳۱:

$$\begin{aligned}\int_{S_r} A \cdot ds_r &= \int_{S_r} (a_r r^\gamma + a_z \gamma z) \cdot (a_z r d\phi dr) \\ &= \int \int \gamma z r d\phi dr = \gamma \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r r dr = \gamma (2\pi) \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^r = \gamma \pi r^2 \\ \int_{S_r} A \cdot ds_r &= \int_{S_r} (r^\gamma a_r + \gamma z a_z) \cdot (-a_z r d\phi dr) \\ &= \int \int -\gamma z r dr d\phi = \int \int -\gamma (0) r dr d\phi = 0 \\ \Rightarrow \oint A \cdot ds &= 1000\pi + 200\pi + 0 = 1200\pi \quad (*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_v \text{div} A \cdot dv &=? \\ \text{div} A &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(rA_z)}{\partial z} \right] \\ \Rightarrow \text{div} A &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \times r^\gamma)}{\partial r} + 0 + \frac{r\partial(\gamma z)}{\partial z} \right] = \frac{1}{r} [\gamma r^\gamma + \gamma r] = \gamma r + \gamma \\ \Rightarrow \int_v \text{div} A \cdot dv &= \int \int \int (\gamma r + \gamma) r dr d\phi dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r (\gamma r + \gamma) r dr d\phi dz \\ &= 8\pi (125 + 25) = 1200\pi \quad (**)\end{aligned}$$

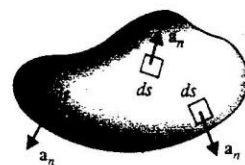
$r \quad dr \quad d\phi \quad dz$

$r^\gamma \quad \frac{r^\gamma}{\gamma} \quad \frac{r^\gamma}{\gamma}$

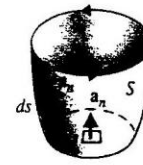
$\gamma r + \gamma$

مسئله ۳۰: در مورد تابع برداری $F = a_r k_1/r + a_z k_2 z$ داده شده در مثال ۱۵-۲ (صفحه ۵۰)، $\iiint \nabla \cdot F dv$ را روی حجم توصیف شده در آن مثال محاسبه نمایید، توضیح دهید چرا قضیه دیورژانس در می‌ماند.

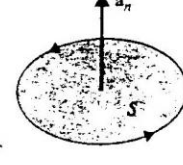
پاسخ مسئله ۳۰:



پ) یک سطح بسته



ب) یک سطح باز



الف) یک قرص

شکل ۲.۲۱ مسئله ۳۰-۱)

$$= (A_z - \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{r})(-r \Delta r \Delta \phi)$$

$$\int_{\text{سطح پشت}} A_r \cdot ds = A_r \cdot (\Delta z \Delta r a_\phi) = A_\phi(r_*, \phi_* + \frac{\Delta \phi}{r}, z_*)(\Delta z \Delta r a_\phi)$$

$$= (A_\phi - \frac{\Delta \phi}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})(\Delta z \Delta r)$$

$$\int_{\text{سطح جلو}} A_r \cdot ds = A_r \cdot (\Delta z \Delta r (-a_\phi))$$

$$= A_\phi(r_*, \phi_* - \frac{\Delta \phi}{r}, z_*)(-\Delta z \Delta r a_\phi)$$

$$= (A_\phi - \frac{\Delta \phi}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})(-\Delta z \Delta r)$$

$$\int_{\text{سطح چپ}} A_\phi \cdot ds = A_\phi(-r \Delta \phi \Delta z a_r)$$

$$= A_r(r_* - \frac{\Delta r}{r}, \phi_*, z_*)(-r \Delta \phi \Delta z a_r)$$

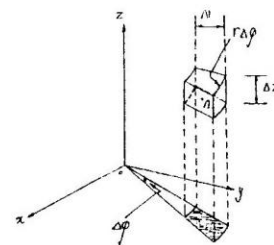
$$= (A_r - \frac{\Delta r}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r})(-\Delta \phi \Delta z)$$

$$\int_{\text{سطح راست}} A_\phi \cdot ds = A_\phi(r \Delta \phi \Delta z a_r)$$

$$= A_r(r_* + \frac{\Delta r}{r}, \phi_*, z_*)(r \Delta \phi \Delta z a_r)$$

$$= (A_r + \frac{\Delta r}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r})(\Delta \phi \Delta z)$$

$$\oint_s A \cdot ds(\text{کل}) = \frac{\partial A_z}{\partial z} r \Delta r \Delta \phi \Delta z + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta \phi \Delta z \Delta r$$



شکل ۲.۲۳ مسئله ۳۱

معادله (۹۸-۲) :

$$\text{div } A \triangleq \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s A \cdot ds}{\Delta v}$$

صورت معادله (۹۸-۲) که نمایشگر شار خالص خروجی است، انتگرالی روی کل سطح است که حجم را در بردارد.

$$\oint_s A \cdot ds = \int_{\text{سطح پشت}} A_r ds + \int_{\text{سطح پائین}} A_\phi ds + \int_{\text{سطح بالا}} A_z ds$$

$$+ \int_{\text{سطح جلو}} A_r \cdot ds + \int_{\text{سطح چپ}} A_\phi \cdot ds + \int_{\text{سطح راست}} A_\phi \cdot ds$$

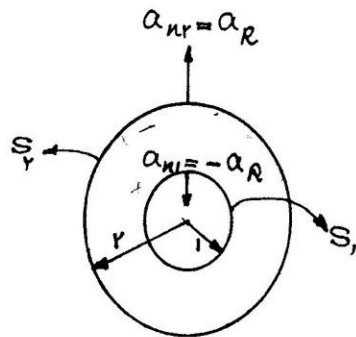
$$\int_{\text{سطح بالا}} A_z \cdot ds = A_z(r_*, \phi_*, z_* + \frac{\Delta z}{r})(r \Delta r \Delta \phi a_z)$$

$$= (A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{r}) r \Delta r \Delta \phi$$

(توصیه می شود قبل از حل این مسئله، صفحات ۵۷ تا ۶۰ کتاب درسی را دقیقاً مطالعه نمایید.)

$$\int_{\text{سطح پائین}} A_r \cdot ds = A_r(r_*, \phi_*, z_* - \frac{\Delta z}{r})(-r \Delta r \Delta \phi a_z)$$

پاسخ مسئله ۳۲:



شکل ۲.۲۴ مسئله ۳۲

پاسخ قسمت الف)

$$D \cdot ds = (a_R(\cos^r \phi)/R^r)(a_R(R^r \sin \theta d\theta d\phi)) = \frac{\cos^r \phi \sin \theta d\theta d\phi}{R}$$

$$\Rightarrow \oint_S D \cdot ds = \oint \frac{\cos^r \phi \sin \theta d\theta d\phi}{R}$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^r \phi \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} -(\cos \pi - \cos 0) \cos^r \phi d\phi$$

$$= \frac{2}{R} \int_0^{2\pi} \cos^r \phi d\phi$$

$$= \frac{2}{R} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} \cos^r \phi \right) d\phi = \left(\frac{1}{r} \phi + \frac{1}{r} \sin^r \phi \right) \Big|_0^{2\pi} \times \frac{2}{R}$$

$$= \frac{2\pi}{R} = \frac{2\pi}{R_1} = \pi (R_1 \text{ سطح } 1)$$

$$(R_1 = 1) \text{ روی سطح } 1: \oint D \cdot ds = -\frac{2\pi}{R} = -\frac{2\pi}{1} = -2\pi$$

$$\oint D \cdot ds = \oint_{S_1} D \cdot ds + \oint_{S_2} D \cdot ds = \pi + (-2\pi) = -\pi$$

توضیح اینکه، برای سطح S_2 بردار a_n بطرف بیرون و مثبت است در حالیکه برای سطح S_1 بردار

$$+ \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} \Delta r \Delta \phi \Delta z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta v + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta v$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) \Delta v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rA_z) \Delta v$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta v + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) \Delta v$$

بنا به تعریف:

$$\text{div } A \triangleq \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S A \cdot ds}{\Delta v}$$

$$\triangleq \frac{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rA_z) \Delta v + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta v + \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} \Delta v}{\Delta v}$$

$$\Delta v \rightarrow 0$$

$$\triangleq \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (rA_z) \right] = \nabla \cdot A$$

$$\Delta v \rightarrow 0$$

معادله (۱۱۴-۲) را ببینید.

مسئله ۳۲: میدان برداری $D = a_R(\cos^r \phi)/R^r$ در ناحیه‌ای بین دو پوسته کروی توصیف شده

توسط $R = 1$ و $R = 2$ موجود است.

الف) $\oint D \cdot ds$

ب) $\int \nabla \cdot D dv$

را محاسبه کنید.

a_n بطرف درون و منفی است. این موضوع در شکل مشهود است.

پاسخ قسمت ب)

$$\begin{aligned} \text{div } D &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial (R^2 \sin \theta \cos \phi / R^2)}{\partial R} + \dots \right] \\ &= \frac{-\cos \phi \sin \theta}{R^2 \sin \theta} = \frac{-\cos \phi}{R^2} \\ \int \nabla \cdot D dv &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^2 \left(\frac{\cos \phi R^2 \sin \theta d\theta d\phi}{R^2} \right) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{R} \cos \phi \sin \theta \right) d\theta d\phi \\ &= - \left(\frac{1}{R} \theta + \frac{1}{R} \sin \theta \right) \Big|_0^\pi = -\pi \end{aligned}$$

مسئله ۳۲: در مورد توابع برداری دیفرانسیل پذیر E و H ثابت کنید:

$$\nabla \cdot (E \times H) = H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H)$$

پاسخ مسئله ۳۳:

$$E = E_x a_x + E_y a_y + E_z a_z$$

$$H = H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z$$

$$E \times H = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$= a_x (E_y H_z - E_z H_y) + a_y (E_z H_x - E_x H_z) + a_z (E_x H_y - E_y H_x)$$

$$\text{div}(E \times H) = \frac{\partial (E_y H_z - E_z H_y)}{\partial x} + \frac{\partial (E_z H_x - E_x H_z)}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial (E_x H_y - E_y H_x)}{\partial z} = \frac{\partial (E_y H_z)}{\partial x} - \frac{\partial (E_z H_y)}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial (E_z H_x)}{\partial y} - \frac{\partial (E_x H_z)}{\partial y} + \frac{\partial (E_x H_y)}{\partial z} - \frac{\partial (E_y H_x)}{\partial z}$$

$$= E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} + H_z \frac{\partial E_y}{\partial x} - H_y \frac{\partial E_z}{\partial x} - E_z \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$+ H_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} - H_z \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

$$+ E_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + H_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} - H_x \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$= (H_x \frac{\partial E_z}{\partial y} - H_x \frac{\partial E_y}{\partial z}) + (H_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - H_y \frac{\partial E_z}{\partial x})$$

$$+ (H_z \frac{\partial E_y}{\partial x} - H_z \frac{\partial E_x}{\partial y}) - (E_x \frac{\partial H_z}{\partial y} - E_x \frac{\partial H_y}{\partial z})$$

$$- (E_y \frac{\partial H_x}{\partial z} - E_y \frac{\partial H_z}{\partial x}) - (E_z \frac{\partial H_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial H_x}{\partial y})$$

$$= (H_x a_x + H_y a_y + H_z a_z)(\text{Curl } E) - (E_x a_x + E_y a_y + E_z a_z)(\text{Curl } H)$$

$$= H \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times H)$$

مسئله ۳۴: تابع برداری $A = a_x x^2 y^2 - a_y x^2 y^2$ را در نظر بگیرید.

الف) $\oint A \cdot dl$ را به دور مسیر مثلثی شکل نشان داده شده در شکل ۳۶-۲ بیابید.

ب) $\int (\nabla \times A) \cdot ds$ را روی سطح مثلثی فوق محاسبه کنید.

پ) آیا A می‌تواند به صورت گرادیان یک کمیت عددی بیان شود؟ توضیح دهید.

$$Curl A = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y^2 & -x^2 y^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_z(-x^2 y^2) - a_y(x^2 y^2) = a_z(-x^2 y^2 - x^2 y^2)$$

$$ds = -a_z dx dy$$

$$\int (\nabla \times A) \cdot ds = \int_1^2 \int_y^2 (x^2 y^2 + x^2 y^2) dx dy$$

$$= x^2 \int_1^2 \int_y^2 y^2 dx dy + x^2 \int_1^2 \int_y^2 y^2 dx dy$$

$$= x^2 \int_1^2 \left(\frac{x^2 y^2}{2} \right) \Big|_y^2 dy + x^2 \int_1^2 \left(\frac{x^2 y^2}{2} \right) \Big|_y^2 dy$$

$$= x^2 \int_1^2 \left(\frac{4y^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy + x^2 \int_1^2 \left(\frac{4y^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

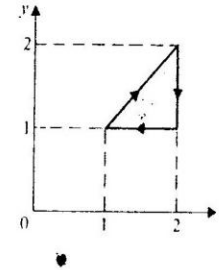
$$= x^2 \left(\frac{4y^3}{6} - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_1^2 + x^2 \left(\frac{4y^3}{6} - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_1^2 = 19/7666666667$$

پاسخ قسمت پ) با توجه به عبارت اگر یک میدان برداری بدون کرل باشد، آنگاه می‌تواند به صورت گرادیان یک میدان عددی بیان شود.

مندرج در صفحه ۷۵ از فصل دوم کتاب درسی، چون $Curl A$ مخالف صفر است پس نمی‌تواند بصورت گرادیان یک میدان عددی بیان شود.

مسئله ۳۵: با استفاده از تعریف معادله (۱۲۶-۲) عبارتی برای مؤلفه a_R ، a_θ و a_ϕ در مختصات کروی، در مورد میدان برداری $A = a_R A_R + a_\theta A_\theta + a_\phi A_\phi$ نتیجه بگیرید.

پاسخ مسئله ۳۴:



شکل ۲.۲۶ مسئله ۳۴

پاسخ قسمت الف)

$$\oint A \cdot dl = \oint (a_x x^2 y^2 - a_y x^2 y^2)(dx a_x + dy a_y + dz a_z) \\ = \int_1^2 x^2 y^2 dx - \int_1^2 x^2 y^2 dy = \int_1^2 x^2 y^2 dx - \int_1^2 y^2 y^2 dy \\ = \frac{x^3 y^2}{3} \Big|_1^2 - \frac{y^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{243}{30}$$

$$\oint A \cdot dl = \oint (a_x x^2 y^2 - a_y x^2 y^2)(dx a_x + dy a_y + dz a_z) \\ = \int_1^2 x^2 y^2 dx - \int_1^2 x^2 y^2 dy = 0 - 8 \int_1^2 y^2 dy = \frac{56}{3}$$

$$\oint A \cdot dl = \int_1^2 x^2 dx - 0 = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = -7$$

$$\Rightarrow \oint A \cdot dl = \frac{243}{30} + \frac{56}{3} - 7 = 19/7666666667$$

پاسخ قسمت ب)

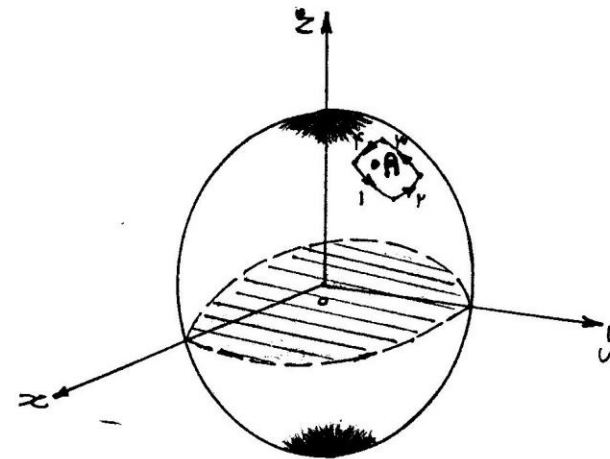
$$\int (\nabla \times A) \cdot ds = ?$$

پاسخ مسئله ۳۵:

معادله (۱۲۶-۲):

$$(\nabla \times A) = a_u \cdot (\nabla \times A) = \lim_{\Delta s_u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_u} \left(\oint_{C_u} A \cdot dl \right)$$

(توصیه می‌شود قبل از حل این مسئله، صفحات ۶۷ تا ۷۰ کتاب درسی را دقیقاً مطالعه فرمایید.)



شکل ۲.۲۷ مسئله ۳۵

$$(\nabla \times A)_n = \left(\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint A \cdot dl}{\Delta s} \right)_n, n = a_R$$

$$\oint_{\text{surface}} A \cdot dl = \int_{\text{surface}} A_1 \cdot dl + \int_{\text{surface}} A_2 \cdot dl + \int_{\text{surface}} A_3 \cdot dl + \int_{\text{surface}} A_4 \cdot dl$$

$$\int_{\text{surface}} A_1 \cdot dl = A_1 \cdot (R \sin \theta \Delta \phi a_\phi) = A_\phi R \sin \theta \Delta \phi$$

$$= A_\phi \left(R, \theta, \phi + \frac{\Delta \theta}{r}, \phi \right) R \sin \theta \Delta \phi$$

$$= [A_\phi + \frac{\Delta \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta)] R \Delta \phi$$

$$\int_{\text{surface}} A_2 \cdot dl = A_\theta (R, \theta, \phi + \frac{\Delta \theta}{r}) (-R \Delta \theta)$$

$$= [A_\theta + \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta) \frac{\Delta \phi}{r}] (-R \Delta \theta)$$

$$\int_{\text{surface}} A_3 \cdot dl = A_\phi (R, \theta, \phi + \frac{\Delta \theta}{r}) (-R \sin \theta \Delta \phi)$$

$$= [A_\phi - \frac{\Delta \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta)] (-R \Delta \phi)$$

$$\int_{\text{surface}} A_4 \cdot dl = A_\theta (R, \theta, \phi - \frac{\Delta \phi}{r}) R \Delta \theta$$

$$= [A_\theta - \frac{\Delta \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta)] (R \Delta \theta)$$

$$\oint_{\text{surface}} A \cdot dl = [A_\phi + \frac{\Delta \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta)] R \Delta \phi$$

$$+ [A_\theta + \frac{\Delta \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta)] (-R \Delta \theta)$$

$$+ [A_\phi - \frac{\Delta \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta)] (-R \Delta \phi)$$

$$+ [A_\theta - \frac{\Delta \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta)] (R \Delta \theta)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) R \Delta \theta \Delta \phi - \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta) R \Delta \phi \Delta \theta$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint A \cdot dl}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) R \Delta \theta \Delta \phi - \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta) R \Delta \phi \Delta \theta}{R^2 \sin \theta \Delta \phi \Delta \theta}$$

$$\nabla \times A = \left(\frac{1}{R^2 \sin \theta} \right) \begin{vmatrix} a_R & Ra_\theta & R^2 \sin \theta a_\phi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & R \sin(\frac{\phi}{2}) \sin \theta \end{vmatrix}$$

$$= ((R \sin(\frac{\phi}{2}) \cos \theta) a_R - (R \sin(\frac{\phi}{2}) \sin \theta) a_\theta) \times \frac{1}{R^2 \sin \theta}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\phi}{2}) \cos \theta a_R - \sin(\frac{\phi}{2}) \sin \theta a_\theta}{R \sin \theta}$$

$$ds = R^2 \sin \theta d\phi d\theta \vec{a}_R \Rightarrow \int_S (\nabla \times A) \cdot ds = \int R \sin(\frac{\phi}{2}) \cos \theta d\phi d\theta$$

$$= b(-2 \cos \frac{\phi}{2}) \Big|_0^{2\pi} (\sin \theta) \Big|_0^{\pi/2} = b(4)(1) = 4b \quad (**)$$

$$(**), (*) \Rightarrow \oint_C A \cdot dl = \int_S (\nabla \times A) \cdot ds$$

مسئله ۳۷: در مورد تابع عددی f و تابع برداری G ، رابطه زیر در مختصات کارتزین ثابت کنید.

$$\nabla \times (fG) = f \nabla \times G + (\nabla f) \times G$$

پاسخ مسئله ۳۷:

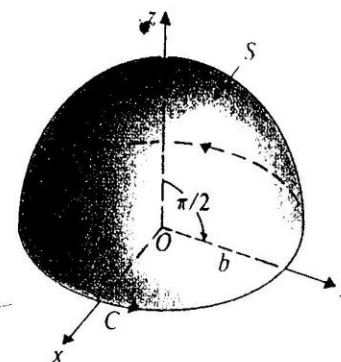
$$G = G_x a_x + G_y a_y + G_z a_z$$

$$fG = fG_x a_x + fG_y a_y + fG_z a_z$$

$$\nabla \times (fG) = \text{Curl}(fG) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ fG_x & fG_y & fG_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\theta) \right] = (\nabla \times A)_{a_R}$$

مسئله ۳۶: تابع برداری $A = a_\phi \sin(\phi/2)$ داده شده است. قضیه استوکس را روی سطح نیم کره و مسیر دایره‌ای آن طبق شکل ۲-۳۷ تحقیق نمایید.
پاسخ مسئله ۳۶:



شکل ۲.۲۸ مسئله ۳۶

$$\oint_C A \cdot dl = \int_S (\nabla \times A) \cdot ds$$

$$\begin{cases} A = a_\phi \sin(\phi/2) \\ dl = dR a_R + R d\theta a_\theta + R \sin \theta d\phi a_\phi \end{cases}$$

$$A \cdot dl = R \sin \theta \sin(\phi/2) d\phi$$

$$\oint_C A \cdot dl = \int_0^{2\pi} R \sin \theta \sin(\frac{\phi}{2}) d\phi = R \sin \theta (-2 \cos \frac{\phi}{2}) \Big|_0^{2\pi} = -2R \sin \theta (-2)$$

$$(\theta = \frac{\pi}{2}, R = b) \Rightarrow \oint_C A \cdot dl = -2(b)(1)(-2) = 4b \quad (*)$$

$$\nabla \times (\nabla V) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 a_{u_1} & h_2 a_{u_2} & h_3 a_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 \frac{\partial V}{\partial u_1} & h_2 \frac{\partial V}{\partial u_2} & h_3 \frac{\partial V}{\partial u_3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\left[h_1 \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial V}{\partial u_3} \right) - h_1 \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\partial V}{\partial u_2} \right) \right] a_{u_1} \right. \\ &+ \left[h_2 \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\partial V}{\partial u_1} \right) - h_2 \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial V}{\partial u_3} \right) \right] a_{u_2} \\ &+ \left. \left[h_3 \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial V}{\partial u_2} \right) - h_3 \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial V}{\partial u_1} \right) \right] a_{u_3} \right] \\ &= \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 V}{\partial u_3 \partial u_2} \right) a_{u_1} \\ &+ \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_3} \right) a_{u_2} \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 V}{\partial u_2 \partial u_1} \right) a_{u_3} \end{aligned}$$

(*) می‌دانیم اگر f و مشتقات جزئی آن در مراتب اول و دوم پیوسته باشند آنگاه:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

لذا:

$$\nabla \times (\nabla V) = \frac{1}{h_1 h_2} (0) + \frac{1}{h_1 h_3} (0) + \frac{1}{h_2 h_3} (0) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla V) \equiv 0$$

پاسخ قسمت ب)

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\begin{aligned} &a_x \frac{\partial f G_z}{\partial y} + a_z \frac{\partial f G_y}{\partial x} + a_y \frac{\partial f G_x}{\partial z} \\ &- a_z \frac{\partial f G_x}{\partial y} - a_y \frac{\partial f G_z}{\partial x} - a_x \frac{\partial f G_y}{\partial z} \\ &= a_x \frac{\partial f}{\partial y} G_z + a_x \frac{\partial G_z}{\partial y} f + a_z \frac{\partial f}{\partial x} G_y + a_z \frac{\partial G_y}{\partial x} f \\ &+ a_y \frac{\partial f}{\partial z} G_x + a_y \frac{\partial G_x}{\partial z} f - a_z \frac{\partial f}{\partial y} G_x - a_z \frac{\partial G_x}{\partial y} f \\ &- a_y \frac{\partial f}{\partial x} G_z - a_y \frac{\partial G_z}{\partial x} f - a_x \frac{\partial f}{\partial z} G_y - a_x \frac{\partial G_y}{\partial z} f \\ &= f \left(a_x \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) + a_y \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) \right. \\ &+ f a_z \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right) + a_x \left(\frac{\partial f}{\partial y} G_z - \frac{\partial f}{\partial z} G_y \right) \\ &+ a_y \left(\frac{\partial f}{\partial z} G_x - \frac{\partial f}{\partial x} G_z \right) + a_z \left(\frac{\partial f}{\partial x} G_y - \frac{\partial f}{\partial y} G_x \right) \\ &= f(\nabla \times G) + (\nabla f) \times G \end{aligned}$$

مسئله ۳۸: اتحادهای صفر زیر را با بسط در مختصات کلی منحنی الخط متعامد ثابت کنید.

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times A) dV = \oint_S (\nabla \times A) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times (\nabla V) \equiv 0 \quad \text{(الف)}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) \equiv 0 \quad \text{(ب)}$$

پاسخ مسئله ۳۸:

پاسخ قسمت الف)

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial u_1} a_{u_1} + \frac{\partial V}{\partial u_2} a_{u_2} + \frac{\partial V}{\partial u_3} a_{u_3}$$

$$\int_V \nabla \times (\nabla V) dV = 0$$

مسئله ۳۹: تابع برداری $F = a_x(x + c_1 z) + a_y(c_2 x - 3z) + a_z(x + c_3 y + c_4 z)$ داده شده است.

(الف) اگر F غیر گردشی باشد، ثابت‌های c_1 ، c_2 و c_3 را تعیین کنید.

(ب) اگر F غیری سلونویدی نیز باشد، ثابت c_4 را نیز تعیین کنید.

(پ) تابع پتانسیل عددی V را که منفی گرادیان آن برابر F است، تعیین کنید.

پاسخ مسئله ۳۹:

پاسخ قسمت الف)

$$F \Rightarrow \text{Curl} F = 0$$

$\nabla \times E = 0$
غیر گردشی

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + c_1 z & c_2 x - 3z & x + c_3 y + c_4 z \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a_x(c_2) + a_z(c_2) + a_y(c_1) - a_z(0) - a_x(-3) - a_y(1) = 0$$

$$\Rightarrow a_x(c_2 + 3) + a_y(c_1 - 1) + a_z(c_2 - 0) = 0 \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -3$$

پاسخ قسمت ب)

$$F \Rightarrow \text{div} F = 0 \Rightarrow 1 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = -1$$

پاسخ قسمت پ)

$$-\nabla V = F, -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z\right)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial x} = x + c_1 z \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -x - c_1 z \Rightarrow V = -\frac{x^2}{2} - zx + f(y, z) \\ -\frac{\partial V}{\partial y} = c_2 x - 3z \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = -c_2 x + 3z \Rightarrow V = 3zy + f(x, z) \\ -\frac{\partial V}{\partial z} = x + c_3 y + c_4 z \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = -x - c_3 y - c_4 z \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = -\frac{x^2}{2} + 3zy + \frac{z^2}{2} f(x, y)$$

$$\nabla \times A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 a_{u_1} & h_2 a_{u_2} & h_3 a_{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\left[h_1 \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - h_3 \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right] a_{u_1} \right.$$

$$+ \left[h_2 \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) - h_1 \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 A_3) \right] a_{u_2} \left. + \left[h_3 \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 A_2) - h_2 \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \right] a_{u_3} \right]$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right) a_{u_1} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 A_3) \right) a_{u_2}$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \right) a_{u_3}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial u_2} \right) - \frac{h_2 h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial u_1} \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u_2} \left[\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial (h_2 A_2)}{\partial u_3} \right] - \frac{h_1 h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial u_2} \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u_3} \left[\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial (h_3 A_3)}{\partial u_1} \right] - \frac{h_1 h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_1 A_1)}{\partial u_3} \right]$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_1} \right]$$

$$+ \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_2} + \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_3} \right]$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_1} \right]$$

$$+ \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_2} + \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_3} \right]$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_1} + \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_2} + \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_3} \right]$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_1} + \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_2} + \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_3} \right]$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_1} + \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_2} + \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_3} \right]$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_1} + \frac{\partial^2 (h_2 A_2)}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_2} + \frac{\partial^2 (h_3 A_3)}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2 (h_1 A_1)}{\partial u_1 \partial u_3} \right]$$

$$(*) \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot (\nabla \times A) \equiv 0}$$