

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



# مقدمه ای بر طراحی بهین

جلد دوم

جاسبیر اس. آرورا

ترجمه

دکتر محمد حسین ابوالبشری

## فهرست مطالب

۳۶۱	فصل پنجم - روشهای عددی برای طراحی بهین نامقید
۳۶۱	۵.۱ مقدمه
۳۶۵	۵.۲ مفاهیم عمومی مربوط به الگوریتمهای عددی
۳۶۵	۵.۲.۱ یک الگوریتم کلی
۳۶۸	۵.۲.۲ پنداره گام کاهشی
۳۷۰	۵.۲.۳ همگرایی الگوریتمها
۳۷۰	۵.۲.۴ نرخ همگرایی
۳۷۰	۵.۲.۵ ارزیابی عددی گرادیانها
۳۷۳	۵.۳ مینیمم سازی یک بعدی
۳۷۳	۵.۳.۱ تعریف مسأله
۳۷۳	کاهش به تابع یک متغیره
۳۷۵	روش تحلیلی محاسبه اندازه گام
۳۷۶	روشهای عددی محاسبه اندازه گام
۳۷۹	۵.۳.۲ جست و جوی بازه یکسان
۳۸۳	جایگزین جست و جوی بازه یکسان
۳۸۴	۵.۳.۳ جست و جوی بخش طلایی
۳۸۴	محصور کردن اولیه مینیمم
۳۸۶	کاهشی بازه عدم اطمینان

۳۸۷	الگوریتم جست و جوی یک بعدی با روش بخش طلایی
۳۹۱	۵.۳.۴* درون یابی چند جمله ای
۳۹۱	برازاندن منحنی درجه دوم
۳۹۵	۵.۴ روش تندترین کاهش
۳۹۶	۵.۴.۱ خواص بردار گرادیان
۴۰۱	۵.۴.۲ الگوریتم تندترین کاهش
۴۰۳	معیار توقف جست و جوی خطی
۴۰۷	۵.۴.۳* مقیاس بندی متغیرهای طراحی
۴۱۱	۵.۵ روش گرادیان مزدوج
۴۱۴	۵.۶ روش نیوتن
۴۲۳	۵.۶.۱* بهبود مارکوارت
۴۲۴	۵.۷* روشهای شبه نیوتن
۴۲۵	۵.۷.۱* روش دیویدان - فلتچر - پاول
۴۲۹	۵.۷.۲* روشهای بهنگام مستقیم
۴۳۲	۵.۸ کاربردهای مهندسی روشهای نامقید
۴۳۲	۵.۸.۱* مینیم سازی انرژی پتانسیل کل
۴۳۵	۵.۸.۲ حل معادلات غیر خطی
۴۳۷	۵.۹* روشهای تبدیل برای طراحی بهین
۴۳۸	۵.۹.۱ روشهای مینیم سازی نامقید دنباله ای
۴۴۰	۵.۹.۲ روشهای ضرایب (لاگرانژین افزایش یافته)
۴۴۱	تمرینهای فصل ۵

## ۴۵۱ **افصل ششم - روشهای عددی برای طراحی بهین مقید**

۴۵۱	۶.۱ مقدمه
۴۵۴	۶.۲ مفاهیم اصلی و پنداره ها
۴۵۴	۶.۲.۱ مفاهیم اساسی مربوط به الگوریتمهای مسائل مقید
۴۵۷	۶.۲.۲ وضعیت قید در یک نقطه طراحی

۴۵۷	قید فعال
۴۵۷	قید غیر فعال
۴۵۷	قید نقض شده
۴۵۷	قید $\varepsilon$ فعال
۴۵۸	۶.۲.۳ نرمال سازی قید
۴۶۱	۶.۲.۴ راهبرد قید پتانسیل
۴۶۳	۶.۲.۵ تابع کاهشی
۴۶۳	۶.۲.۶ همگرایی یک الگوریتم
۴۶۴	۶.۳ خطی سازی مسأله مقید
۴۷۳	۶.۴ الگوریتم برنامه ریزی خطی دنباله ای
۴۷۳	۶.۴.۱ پنداره اصلی
۴۷۵	۶.۴.۲ یک الگوریتم اس ال پی (SLP)
۴۸۱	۶.۴.۳ نگرشی بر الگوریتم SLP
۴۸۲	۶.۵ زیرمسأله برنامه ریزی درجه دو
۴۸۲	۶.۵.۱ قید اندازه گام درجه دو
۴۸۴	۶.۵.۲ زیرمسأله برنامه ریزی درجه دو (QP)
۴۸۹	۶.۵.۳ حل مسائل برنامه ریزی درجه دو
۴۸۹	تعریف مسأله QP
۴۹۰	یک روش حل - شرایط کان - تاکر برای مسأله QP
۴۹۲	روش سیمپلکس برای حل مسائل QP
۴۹۸	۶.۶ روش تندترین کاهش مقید
۴۹۹	۶.۶.۱ تابع کاهشی
۵۰۱	۶.۶.۲ به دست آوردن اندازه گام
۵۰۸	۶.۶.۳ الگوریتم سی اس دی (CSD)
۵۱۷	۶.۶.۴ نگرشی بر الگوریتم CSD
۵۱۸	۶.۶.۵ استفاده از راهبرد قید پتانسیل
۵۲۳	۶.۷* روشهای شبه نیوتن مقید

۵۲۴	۶.۷.۱	به دست آوردن زیرمسأله برنامه ریزی درجه دو
۵۲۷	۶.۷.۲	تقریب همیان شبه نیوتن
۵۲۹	۶.۷.۳	الگوریتم تندترین کاهش مقید بهبود یافته
۵۳۲	۶.۷.۴	نگرشی بر روشهای شبه نیوتن مقید
۵۳۳		توابع کاهشی
۵۳۵	۶.۸*	روشهای دیگر
۵۳۵	۶.۸.۱	روش جهت‌های قابل قبول
۵۳۸	۶.۸.۲	روش تصویر گردادیان
۵۴۰	۶.۸.۳	روش گردادیان کاهش یافته عمومی
۵۴۲		تمرینهای فصل ۶

## فصل هفتم - بهینه سازی طراحی تعاملی

۵۵۵	۷.۱	مقدمه
۵۵۵	۷.۲	نقش تعامل در بهینه سازی طراحی
۵۵۷	۷.۲.۱	بهینه سازی طراحی تعاملی چیست؟
۵۵۸	۷.۲.۲	نقش رایانه در بهینه سازی طراحی تعاملی
۵۶۰	۷.۲.۳	چرا بهینه سازی طراحی تعاملی؟
۵۶۰	۷.۳	الگوریتمهای بهینه سازی طراحی تعاملی
۵۶۱	۷.۳.۱	الگوریتم کاهش هزینه
۵۶۷	۷.۳.۲	الگوریتم تصحیح قید
۵۶۹	۷.۳.۳	الگوریتم تصحیح قید در هزینه ثابت
۵۷۲	۷.۳.۴	الگوریتم تصحیح قید برای افزایش مشخصی در هزینه
۵۷۳	۷.۳.۵	تصحیح قید با حداقل افزایش در هزینه
۵۷۵	۷.۳.۶	نگرشی بر الگوریتمهای تعاملی
۵۷۶	۷.۴	قابلیتهای تعاملی مطلوب
۵۷۷	۷.۴.۱	آماده سازی داده های تعاملی
۵۷۷	۷.۴.۲	قابلیتهای تعاملی

۵۷۹	۷.۴.۳	تصمیم سازی تعاملی
۵۸۰	۷.۴.۴	ترسیم تعاملی
۵۸۱	۷.۵	نرم افزار بهینه سازی طراحی تعاملی
۵۸۲	۷.۵.۱	ارتباط متقابل کاربر با برنامه آی دی زاین (IDESIGN)
۵۸۵	۷.۵.۲	قابلیت‌های برنامه آی دی زاین (IDESIGN)
۵۸۷	۷.۶	مثالهایی از بهینه سازی طراحی تعاملی
۵۸۸	۷.۶.۱	رابطه سازی مسئله طراحی فنر
۵۸۹		تابع هزینه
۵۸۹		قید تغییر مکان
۵۸۹		قید تنش برشی
۵۹۰		قید بسامد موج امواج
۵۹۰		قید قطر
۵۹۰		محدوده صریح متغیرهای طراحی
۵۹۰		تعریف استاندارد مسئله
۵۹۱	۷.۶.۲	حل بهین مسئله طراحی فنر
۵۹۳	۷.۶.۳	حل تعاملی مسئله طراحی فنر
۵۹۵	۷.۶.۴	استفاده از ترسیم تعاملی
۵۹۵		گرایش متغیرهای طراحی
۵۹۶		تاریخچه بیشترین نقض قید
۵۹۶		تاریخچه تابع هزینه
۵۹۷		تاریخچه پارامتر همگرایی
۵۹۸		تاریخچه توابع قیود
۵۹۸		نمودار حساسیت تابع هزینه
۵۹۹		حساسیت متغیرهای طراحی
۶۰۰		نمودار حساسیت قیود
۶۰۱		نتیجه گیری
۶۰۱		تمرینهای فصل ۷

۶۰۳	<b>فصل هشتم - بهینه سازی طراحی عملی</b>
۶۰۳	۸.۱ مقدمه
۶۰۴	۸.۲ رابطه سازی مسائل بهینه سازی عملی
۶۰۴	۸.۲.۱ راهنماییهای عمومی
۶۰۷	۸.۲.۲ مثالی از یک مسأله بهینه سازی طراحی عملی
۶۱۵	۸.۳ ارزیابی گرادیان
۶۱۶	مشتقات جزئی تنش برشی
۶۱۸	مشتقات جزئی تنش خمشی
۶۲۰	مشتقات جابه جاییها
۶۲۱	۸.۴ مباحثی چند در بهینه سازی طراحی عملی
۶۲۱	۸.۴.۱ انتخاب یک الگوریتم
۶۲۱	توانمندی
۶۲۲	راهبرد قید پتانسیل
۶۲۲	۸.۴.۲ ویژگیهای یک الگوریتم خوب بهینه سازی
۶۲۴	۸.۵ استفاده از نرم افزار عمومی
۶۲۴	۸.۵.۱ انتخاب نرم افزار
۶۲۵	۸.۵.۲ ترکیب یک کاربرد با یک نرم افزار عمومی
۶۲۷	۸.۶ طراحی بهین یک قاب دو عضوی با بارهای خارج از صفحه
۶۲۹	۸.۷ طراحی بهین یک سازه سه میله ای برای برآورده شدن شرایط عملکرد چندگانه
۶۳۰	۸.۷.۱ سازه سه میله ای متقارن
۶۳۴	۸.۷.۲ سازه سه میله ای نامتقارن
۶۳۹	۸.۷.۳ مقایسه جوابها
۶۳۹	۸.۸ طراحی بهین متغیر گسسته
۶۴۱	۸.۸.۱ بهینه سازی متغیر پیوسته
۶۴۲	۸.۸.۲ بهینه سازی متغیر گسسته
۶۴۳	۸.۹ کنترل بهین سیستمها با برنامه ریزی غیر خطی

۶۴۳	یک مسأله کنترل بهین نمونه	۸.۹.۱
۶۴۶	جرم	
۶۴۶	ثابت فتر	
۶۴۹	مینیمم سازی خطا در متغیر حالت	۸.۹.۲
۶۵۰	رابطه سازی برای جواب عددی	
۶۵۲	نتایج عددی	
۶۵۴	اثر نرمال سازی مسأله	
۶۵۶	بحث نتایج	
۶۵۷	مسأله مینیمم سازی تلاش کنترلی	۸.۹.۳
۶۶۰	مسأله کنترل حداقل زمان	۸.۹.۴
۶۶۳	مقایسه سه رابطه سازی برای کنترل بهین حرکت سیستم	۸.۹.۵
۶۶۴	تمرینهای فصل ۸*	

### پیوست A - تحلیل اقتصادی

۶۷۳	A.1 ارزش زمانی نقدینگی
۶۷۳	A.2 نمودار جریان نقدینگی
۶۷۹	A.3 مبنایهای اقتصادی برای مقایسه
۶۸۰	A.3.1 مقایسه سال مبنایی
۶۸۱	A.3.2 مقایسه ارزش فعلی
۶۸۴	تمرینهای پیوست A
۶۸۷	

### پیوست B - جبر برداری و ماتریسی

۶۹۵	B.1 مقدمه
۶۹۵	B.2 تعریف ماتریسها
۶۹۶	B.3 انواع ماتریسها و عملیات آنها
۶۹۸	B.3.1 ماتریس صفر
۶۹۸	B.3.2 بردار

۶۹۸	جمع ماتریسها	B.3.3
۶۹۹	ضرب ماتریسها	B.3.4
۷۰۱	ترانزاده یک ماتریس	B.3.5
۷۰۲	عملیات سطر و ستون مقدماتی	B.3.6
۷۰۲	ماتریسهای معادل	B.3.7
۷۰۳	ضرب اسکالر - ضرب نقطه ای بردارها	B.3.8
۷۰۳	ماتریس مربعی	B.3.9
۷۰۴	افرازیندی ماتریسها	B.3.10
۷۰۶	حل $n$ معادله خطی $n$ مجهولی	B.4
۷۰۶	مقدمه	B.4.1
۷۰۷	دترمینانها	B.4.2
۷۰۹	خواص دترمینانها	
۷۱۰	مایر اصلی	
۷۱۱	روش حذفی گوسی	B.4.3
۷۱۵	وارون یک ماتریس : حذف گوس - جردن	B.4.4
۷۱۹	حل $m$ معادله خطی $n$ مجهولی : نظریه عمومی	B.5
۷۱۹	رتبه یک ماتریس	B.5.1
۷۲۱	نظریه عمومی برای حل معادلات خطی	B.5.2
۷۲۸	مفاهیم مربوط به مجموعه بردارها	B.6
۷۲۸	استقلال خطی یک مجموعه از بردارها	B.6.1
۷۳۳	فضاهای برداری	B.6.2
۷۳۷	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	B.7
۷۳۸	نرم و عدد شرطی یک ماتریس	B.8*
۷۳۸	نرم بردارها و ماتریسها	B.8.1
۷۴۰	عدد شرطی یک ماتریس	B.8.2
۷۴۰	تمرینهای پیوست B	

۷۴۵	<b>پیوست C - يك روش عددی برای حل معادله های غیرخطی</b>
۷۴۶	C.1 یک معادله غیرخطی
۷۴۹	C.2 معادله های غیرخطی چندگانه
۷۵۵	تمرینهای پیوست C
۷۵۷	<b>پیوست D - نمونه برنامه های رایانه ای</b>
۷۵۷	D.1 مقدمه
۷۵۷	D.2 جست و جوی بازه یکسان
۷۶۰	D.3 جست و جوی بخش طلایی
۷۶۳	D.4 روش تندترین کاهش
۷۶۸	D.5 روش نیوتن بهبود یافته
۷۷۳	<b>مراجع</b>
۷۷۹	پاسخهای تمرینهای انتخابی
۷۸۹	واژه نامه انگلیسی - فارسی
۷۹۵	واژه نامه فارسی - انگلیسی
۸۰۱	نمایه



### روشهای عددی برای طراحی بهین نامقید

#### ۵.۱ مقدمه

در بهینه سازی غیرخطی، بعضی یا تمام توابع مسأله (تابع هزینه و یا توابع قیود) غیرخطی اند. تعبیر برنامه ریزی غیرخطی (NLP) برای روشهای عددی که مسائل بهینه سازی غیرخطی را حل می کنند استفاده می شود. این فصل روی تشریح روشهای مربوط به مسائل نامقید متمرکز است. فصل ۶ حاوی روشهای مربوط به مسائل مقید است.

روشهای عددی مسائل بهینه سازی غیرخطی بدین خاطر مورد نیازند که روشهای تحلیلی برای بعضی مسائل یا خیلی خسته کننده اند و یا اصلاً قابل کاربرد نیستند. در روشهای تحلیلی، که در فصل (۳) تشریح شد، ما شرایط لازم را می نویسیم و آنها را برای به دست آوردن طراحیهای نامزد مینیمم محلی حل می کنیم. سه دلیل عمده نامناسب بودن روشهای تحلیلی برای بسیاری از مسائل طراحی مهندسی عبارتند از:

۱. تعداد متغیرهای طراحی و قیود می تواند زیاد باشد. شرایط لازم تعداد زیادی معادله می دهند که ممکن است حل آنها مشکل باشد. این حقیقت بخصوص برای مسائل مقید وقتی که شرایط لازم باید برای حالتیهای بسیاری حل شوند صادق است. به علاوه، حل دقیق معادلات به خاطر غیرخطی بودن، مشکل است.

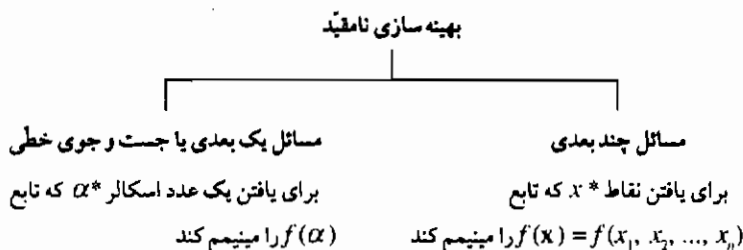
۲. توابع مسائل طراحی (هزینه و قید) می‌تواند بسیار غیرخطی باشد. بنابراین، اگر حتی ابعاد مسأله کوچک باشد، مجموعه شرایط لازم بسیار غیرخطی و پیچیده اند.
۳. در بسیاری از کاربردهای مهندسی، توابع هزینه و یا قید می‌تواند برحسب متغیرهای طراحی ضمنی باشد. برای چنان مسائلی، شکل تابع برحسب متغیرهای طراحی مستقل شناخته شده نیست. اما وقتی متغیرهای طراحی مشخص باشند این توابع را می‌توان محاسبه کرد. حل چنین توابعی به روشهای تحلیلی که براساس نوشتن شرایط لازم انجام می‌شود، مشکل است.

به این دلایل، ما باید روشهای عددی نظام‌مندی را برای طراحی بهین سیستمهای مهندسی تدوین کنیم. در این روشها، یک طرح اولیه حدس می‌زنیم و آن را تا برآورده شدن شرایط بهینگی بهبود می‌بخشیم.

روشهای عددی بسیاری برای بهینه‌سازی غیرخطی تدوین شده‌اند. بعضی از آنها از بعضی دیگر بهترند و پژوهش در زمینه یافتن روشهای برتر ادامه دارد. به دست آوردن جزئیات و نظریه روشهای مختلف از حد کتاب حاضر خارج است. به هر حال فهمیدن چند مفهوم اساسی، نظریه‌ها و روشهایی که در بیشتر الگوریتمها برای بهینه‌سازی مقید و نامقید استفاده می‌شوند مهم است. بنابراین، روشی که در این فصل و فصل (۶) دنبال می‌شود عبارت است از تأکید بر مفاهیم اساسی در قالب مسائل نمونه. براساس این مفاهیم الگوریتمهای عددی متعددی می‌تواند برای طرحهای بهین سیستمهای مهندسی تدوین گردد. ما چند روش را شرح خواهیم داد.

در این فصل، مسائل بهینه‌سازی نامقید مورد بحث قرار می‌گیرند و برای این که دانشجویان به نوع محاسباتی که برای مسائل بهینه‌سازی غیرخطی مورد نیاز است آشنا شوند جزئیات عددی بعضی از الگوریتمها بررسی می‌شوند. بیشتر کتابخانه‌های مراکز رایانه‌ای یا چند برنامه رایانه‌ای استاندارد برای استفاده‌های عمومی دارند، یا این که می‌توانند آن برنامه‌ها را به راحتی به دست آورند. بنابراین، نوشتن برنامه الگوریتم باید به عنوان آخرین چاره مطرح باشد. به هر حال فهم روشها و پنداره‌های اساسی مهم است، زیرا بسیاری از آنها می‌توانند در مسائل بهینه‌سازی مقید به کار روند (یا تعمیم داده شوند).

مسائل عددی متعددی با استفاده از برنامه‌های داده شده در پیوست D حل می‌شوند تا عملکرد الگوریتمهای مختلف و مقایسه آنها مورد مطالعه قرار گیرند. بسیاری از نتایج در شکل



شکل ۵.۱ دسته بندی مسائل بهینه سازی نامقید

جدولی داده می شوند. باید دانست که عملکرد هر الگوریتم به مقدار زیادی به جزئیات پیاده سازی عددی آن بستگی دارد. به علاوه، عملکرد عددی یک برنامه می تواند از یک رایانه به رایانه دیگر و از یک تلفیق گر<sup>۱</sup> به تلفیق گر دیگر متفاوت باشد. بنابراین، ممکن است نتایج عددی داده شده در جداول که از رایانه های مختلف به دست می آید، دقیقاً مثل هم نباشند. نتایجی که در این کتاب داده شده از یک ایستگاه کاری آپولو دی ان ۵۶۰<sup>۲</sup> به دست آمده است.

همچنان که در شکل ۵.۱ تعریف شده است، مسائل بهینه سازی نامقید به مسائل یک بعدی (جست و جوی خطی) یا چند بعدی تقسیم می شوند. در چند دهه اخیر روشهای عددی حل مسائل تدوین و ارائه شده اند. با این همه در فاصله سالهای دهه ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ کار قابل توجهی انجام شد، زیرا نشان داده شد که مسائل بهینه سازی مقید می توانند به رشته ای از مسائل نامقید تبدیل شوند. بدین خاطر این روشها توجه زیادی را به خود جلب کردند و تلاشهای زیادی برای تدوین الگوریتمهای کارا و برنامه های رایانه ای صورت گرفت. بنابراین، فهم کامل روشهای بهینه سازی نامقید مهم است.

خلاصه ای از مباحث این فصل در زیر می آید.

بخش ۵.۲ مفاهیم عمومی مربوط به الگوریتمهای عددی. پنداره الگوریتم عددی تکراری معرفی می شود. یک روش جست و جوی کلی برای مسائل طراحى بهین ارائه می گردد. الگوریتم برای مسائل مقید و نامقید کاربرد دارد. چون می خواهیم تابع هزینه را مینیم کنیم، پنداره گام کاهشی معرفی می شود که به معنی تغییر طرح در هر چرخه است به شکلی که به کاهش تابع هزینه بینجامد. همگرایی یک الگوریتم و نرخ همگرایی باختصار

بحث می شوند. بیشتر الگوریتمهایی که در کتاب بحث شده اند به گرادیان توابع هزینه و قید نیاز دارند. گاهی ارزیابی تحلیلی گرادیان بسیار پر زحمت و یا حتی غیر ممکن است. بنابراین، گرادیانها باید با استفاده از تفاضل محدود به روش عددی ارزیابی گردند.

بخش ۵.۳ مینیم سازی یک بعدی. بیشتر الگوریتمهای بهینه سازی به دو بخش تقسیم می شوند: زیرمسأله تعیین جهت جست و جو و تعیین طول گام. هنگامی که جهت جست و جو مشخص شد، تعیین طول گام یک مسأله مینیم سازی یک بعدی است. سه الگوریتم ساده برای حل مسأله تشریح می شود: جست و جوی بازه یکسان، جست و جوی بخش طلایی و درون یابی چند جمله ای. روشها با مثال تشریح می شوند.

بخش ۵.۴ روش تندترین کاهش. این روش ساده ترین و قدیمی ترین روش محاسبه جهت جست و جوست و در آن از خواص گرادیان تابع هزینه استفاده می شود. ولی الگوریتم خیلی پویا نیست و بدین سبب برای کاربردهای عمومی توصیه نمی شود و در این جا به خاطر سابقه موضوع ارائه می گردد. به علاوه، الگوریتمهای جدید بسیاری را می توان به عنوان روش تندترین کاهش تغییر یافته محسوب کرد. روش تندترین کاهش در قالب مثالهایی تشریح می شود. مقیاس بندی متغیرهای طراحی در بسیاری از کاربردها تأثیری بسزا دارد، بنابراین با مثالهایی توضیح داده می شود.

بخش ۵.۵ روش گرادیان مزدوج. این یک روش بسیار ساده و مؤثر از روش تندترین کاهش بهبود یافته است. چگونگی بهبود یافتن تشریح شده و روش با ذکر مثال توضیح داده می شود.

بخش ۵.۶ روش نیوتن. این روش برای تعیین جهت جست و جو از هسیان تابع هزینه استفاده می کند. تدوین این روش با اختصار بیان شده و با مثالهایی تشریح می شود. یک حالت بهبود یافته مفید از روش نیز بیان می شود.

بخش ۵.۷ روشهای شبه نیوتن. روش نیوتن به محاسبه مشتقات مرتبه دوم تابع هزینه نیاز دارد. به علاوه ماتریس هسیان دقیق ممکن است منفرد یا نامعین بوده و اشکالات عددی به وجود آورد. روشهای شبه نیوتن برای تولید هسیان تقریبی، که در هر چرخه معین مثبت باقی می ماند، تنها از اطلاعات مرتبه یک استفاده می کنند. دو نوع از این روشها تشریح و بیان می شوند.

بخش ۵.۸ کاربردهای مهندسی روشهای نامقید. کاربردهای مهندسی مفید متعددی از

روشهای نامقید وجود دارد. ما چند نمونه از آنها را توضیح می دهیم. اولین آنها مینیم سازی انرژی پتانسیل کل است که حالت تعادل سیستمهای مکانیکی و سازه ها را بیان می کند. این روش با مثال عددی ساده ای تشریح می شود. کاربرد دوم شامل حل یک مجموعه از معادله های غیر خطی است که در کاربردهای مهندسی بی شماری مطرح می شود. یک تابع نامقید که توابع اصلی را نیز شامل می شود تعریف می شود. مینیم ساختن تابع، ریشه های مجموعه معادلات غیر خطی را می دهد. این روش هم با ارائه مثالی تشریح می شود.

بخش ۵.۹ روشهای تبدیل برای طراحی بهین. از روشهای بهینه سازی نامقید می توان برای حل مسائل مقید استفاده کرد. این بخش چنین روشهایی را که مسأله مقید را به رشته ای از مسائل نامقید تبدیل می کنند، باختصار توضیح می دهد. روشهای مینیم سازی نامقید دنباله ای<sup>۱</sup> و روشهای ضرایب جدیدتر به طور خلاصه مرور می شوند.

## ۵.۲ مفاهیم عمومی مربوط به الگوریتمهای عددی

روشهای عددی برای طراحی بهین از نظر مفهوم با روشهای تحلیلی که در فصل (۳) تشریح شد، متفاوتند. در نگرشی تحلیلی ما شرایط بهینگی را نوشته، و آنها را برای به دست آوردن طرحهای نامزد مینیم محلی حل می کنیم. با استفاده از روشهای عددی، طرحی را به عنوان حدس اولیه برای نقطه بهین انتخاب کرده و آن را در چرخه های متوالی تغییر می دهیم تا شرایط بهینگی برآورده شوند. فرآیند ممکن است به چندین چرخه نیاز داشته باشد. پس روشهای عددی می کوشیم تا شرایط بهینگی را با استفاده از یک فرآیند چرخه ای برآورده سازیم. در این بخش، چند مفهوم اساسی را که هم برای روشهای بهینه سازی مقید و هم نامقید به کار می روند توضیح می دهیم.

### ۵.۲.۱ بند الگوریتم کلی

تمامی روشهای عددی که در این فصل و فصل بعدی مطرح می شوند با روابط چرخه ای زیر قابل توضیحند:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

$$i = 1 \text{ to } n$$

در این معادله ها اندیس بالایی  $k$  شماره چرخه، اندیس پایینی  $i$  شماره متغیر طراحی،  $x^{(k)}$  طرح اولیه و  $\Delta x^{(k)}$  بیانگر تغییرات کوچک در طرح فعلی است. طرح چرخه ای که در معادله (۵.۱) (۵.۲) تشریح شد، تا برآورده شدن شرایط بهینگی یا به دست آمدن یک طرح قابل قبول ادامه می یابد.

رابطه چرخه ای هم برای مسائل مقید و هم برای مسائل نامقید کاربرد دارد. برای مسائل نامقید، محاسبه  $\Delta x^{(k)}$  بستگی به تابع هزینه و مشتقهایش در نقطه طراحی فعلی دارد. برای مسائل مقید، قیود نیز باید هنگام محاسبه تغییرات در طراحی  $\Delta x^{(k)}$  مورد توجه قرار گیرند. بنابراین، علاوه بر تابع هزینه و مشتقات آن، توابع قید و مشتقهای آنها در به دست آوردن  $\Delta x^{(k)}$  نقش دارند. روشهای متعددی برای محاسبه  $\Delta x^{(k)}$  برای مسائل مقید و نامقید وجود دارد. ما بعضی از روشهای اساسی را بعداً در همین فصل تشریح خواهیم کرد.

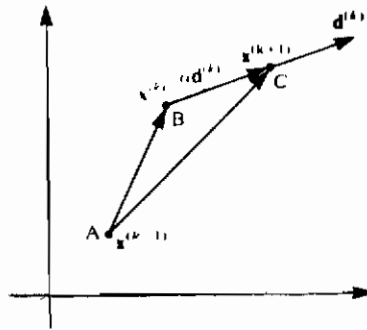
برای روشهای بهینه سازی، تغییر در طراحی  $\Delta x^{(k)}$  به دو قسمت تجزیه می شود:

$$\Delta x^{(k)} = \alpha_k d^{(k)} \quad (5.3)$$

در آن  $d^{(k)}$  یک جهت جست و جوی مطلوب در حرکت در فضای طراحی و  $\alpha_k$  یک عدد اسکالر مثبت است که اندازه گام در آن جهت نامیده می شود. پس، فرآیند محاسبه  $\Delta x^{(k)}$  دو زیرمسئله جداگانه را شامل می شود: زیرمسئله یافتن جهت و زیرمسئله به دست آوردن اندازه گام (مقیاس بندی در امتداد جهت). فرآیند حرکت از یک نقطه طراحی به نقطه دیگر در شکل ۵.۲ تشریح شده است. در شکل،  $B$  نقطه طراحی فعلی،  $d^{(k)}$  جهت جست و جوی مطلوب و  $\alpha$  طول گام است. بنابراین، وقتی  $\alpha d^{(k)}$  به طرح فعلی اضافه شود ما به نقطه طراحی جدید  $C$  در فضای طراحی می رسیم. تمامی فرآیند از نقطه  $C$  تکرار می شود.

روشهای زیادی برای محاسبه اندازه گام  $\alpha$  و بردار جهت جست و جوی  $d^{(k)}$  وجود دارد. با ترکیبهای گوناگون روشها می توان الگوریتمهای بهینه سازی مختلفی تدوین کرد.

به طور خلاصه، پنداره اصلی روشهای عددی برای مسائل بهینه سازی غیرخطی این است که با یک حدس منطقی برای طراحی بهین شروع شود. توابع هزینه و قیود و مشتقات آنها در آن نقطه محاسبه می شوند. براساس آنها، طرح به نقطه جدیدی حرکت داده می شود.



شکل ۵.۲ نمودار مفهومی گامهای چرخه‌ای برای روش بهینه‌سازی

فرآیند ادامه پیدا می‌کند تا یا شرایط بهینگی یا سایر معیارهای توقف برآورده شوند. می‌توان دید که فرآیند چرخه‌ای نشان از یک جست و جوی سازمان یافته در فضای طراحی برای یافتن نقاط مینیمم محلی دارد. لذا این روشها اغلب فنون جست و جوی روشهای مستقیم بهینه‌سازی نامیده می‌شوند.

فرآیند چرخه‌ای ذکر شده به عنوان یک الگوریتم کلی با قابلیت کاربرد در مسائل مقید و نامقید می‌تواند به شکل زیر خلاصه شود:

گام ۱. یک طراحی اولیه  $x^{(0)}$  منطقی حدس بزنید. شمارنده چرخه را برابر صفر قرار دهید ( $k = 0$ ).

گام ۲. یک جهت جست و جو  $d^k$  در فضای طراحی محاسبه کنید. این محاسبه عموماً در مسائل نامقید به مقدار تابع هزینه و گرادیان آن و در مسائل مقید علاوه بر آنها، به توابع قید و گرادیان آنها نیاز دارد.

گام ۳. همگرایی الگوریتم را بررسی کنید. اگر همگرا شده است، فرآیند چرخه را قطع کنید. در غیر این صورت ادامه دهید.

گام ۴. یک اندازه گام مثبت  $\alpha_k$  محاسبه کنید.

گام ۵. طرح جدید را از رابطه زیر محاسبه کنید.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)} \quad (5.4)$$

شمارنده را یک شماره افزایش داده،  $k = k + 1$ ، و به گام ۲ بروید.

در بخشهای آینده این فصل، روشهای محاسبه اندازه گام  $\alpha$  و جهت جست و جوی  $d^{(k)}$

را برای مسائل بهینه سازی نامقید بحث خواهیم کرد.

#### ۵.۴.۲ پنداره گام کاهشی

ما قبلاً به  $d^{(k)}$  به عنوان جهت مطلوب در تغییر طرح در فرآیند چرخه اشاره کرده ایم. اکنون منظور از جهت مطلوب در تغییر طرح را توضیح می دهیم.

هدف از فرآیند بهینه سازی چرخه ای این است که به یک نقطه مینیمم برای تابع هزینه  $f(x)$  برسیم. فرض می کنیم که در  $k$  امین چرخه هستیم و برایمان مشخص شده که  $x^{(k)}$  یک نقطه مینیمم نیست، یعنی شرایط بهینگی قضیه ۳.۴ برآورده نشده است. اگر  $x^{(k)}$  یک نقطه مینیمم نباشد آن گاه باید بتوانیم نقطه دیگر  $x^{(k+1)}$  را بیابیم که مقدار تابع هزینه کمتری نسبت به نقطه  $x^{(k)}$  داشته باشد. این بیان می تواند به شکل ریاضی زیر عنوان شود

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}) \quad (5.5)$$

$x^{(k+1)}$  را از معادله (۵.۴) در نامعادله فوق جایگزین کنید تا نامعادله زیر به دست آید

$$f(x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}) < f(x^{(k)}) \quad (5.6)$$

با تقریب زدن طرف چپ معادله (۵.۶) از بسط تیلور خطی حول نقطه  $x^{(k)}$ ، داریم

$$f(x^{(k)} + \alpha_k (c^{(k)} \cdot d^{(k)})) < f(x^{(k)}) \quad (5.7)$$

که  $c^{(k)} = \nabla f(x^{(k)})$  گرادیان  $f(x)$  در نقطه  $x^{(k)}$  و  $(\cdot)$  نشان دهنده ضرب نقطه ای دو بردار است. چون در معادله (۵.۷) طرف چپ باید کوچکتر از طرف راست باشد، نتیجه می گیریم که جمله دوم طرف چپ باید منفی باشد، یعنی

$$\alpha_k (c^{(k)} \cdot d^{(k)}) < 0 \quad (5.8)$$

چون  $\alpha_k > 0$  است، می تواند از نامعادله (۵.۸) حذف شود. همچنین چون  $c^{(k)}$  کمیتی معلوم است (گرادیان تابع هزینه)، جهت جست و جو  $d^{(k)}$  باید طوری محاسبه گردد تا نامعادله (۵.۸) برآورده شود. از نظر هندسی، نامعادله نشان می دهد که زاویه بین بردارهای  $c^{(k)}$  و  $d^{(k)}$  باید بین  $90^\circ$  تا  $270^\circ$  باشد. به عبارت دیگر، هر تغییر کوچک در آن جهت باید باعث کاهش تابع هزینه گردد.

حال می توانیم یک جهت مطلوب در تغییر طرح را به عنوان هر بردار  $d^{(k)}$  که

در نامعادله (۵.۸) صدق می کند تعریف کنیم. چنین بردارهایی جهت کاهش برای تابع هزینه نیز نامیده می شوند و نامعادله (۵.۸) شرط کاهش خوانده می شود. گامی از روش بهینه سازی چرخه ای براساس این جهتها را یک گام کاهشی می گویند. در یک نقطه طراحی جهتهای کاهش بسیاری می تواند وجود داشته باشد و هر الگوریتم بهینه سازی آن را به شکلی متفاوت محاسبه می کند.

جهت کاهش گاهی جهت "پایین تپه" نیز نامیده می شود. مسأله مینیمم سازی  $f(x)$  می تواند به عنوان یک مسأله تلاش برای رسیدن به پایین تپه از یک نقطه بالا در نظر گرفته شود. از آن جا یک جهت "پایین تپه" را پیدا کرده و در آن امتداد تا حد امکان حرکت می کنیم. از پایین ترین نقطه در آن جهت، فرآیند را تکرار می کنیم تا به کف برسیم. روشی که براساس پنداره گام کاهشی است روش کاهشی نامیده می شود. روشن است که چنین روشی به نقطه ماکزیمم تابع همگرا نخواهد شد.

مفهوم جهتهای کاهشی در بیشتر روشهای بهینه سازی عددی استفاده می شود. بنابراین باید به طور روشن فهمیده شود.

#### مثال ۵.۱ شرط کاهش را امتحان کنید

تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^{(x_1+x_2)}$$

نشان دهید که بردار  $d = (1, 2)$  در نقطه  $(0, 0)$  یک جهت کاهشی برای تابع  $f$  است.

حل. اگر  $d = (1, 2)$  جهت کاهشی باشد، آن گاه باید در نامعادله (۵.۸) صدق کند. برای نشان دادن این مطلب، گرادیان تابع  $f(x)$  را در  $(0, 0)$  محاسبه می کنیم که عبارت است از

$$c = (2x_1 - x_2 - 2 + e^{(x_1+x_2)}, -x_1 + 4x_2 + e^{(x_1+x_2)}) = (-1, 1)$$

بنابراین،

$$(c \cdot d) = (-1, 1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 + 2 = 1 > 0.$$

پس، نامعادله (۵.۸) برآورده نشده و  $d$  داده شده جهت کاهشی برای تابع  $f(x)$  نیست.

## ۵.۲.۳ همگرایی الگوریتمها

پنداره اصلی تمامی روشهای عددی بهینه سازی این است که برای یافتن نقطه بهینه در قالب یک فرآیند چرخه ای که رشته ای از طراحیها را تولید می کند، جست و جو می کند. مهم است که به این نکته دقت کنید که موفقیت یک روش در گرو تضمین همگرایی رشته به نقطه بهین است. خاصیت همگرایی به یک نقطه بهینه محلی بدون توجه به نقطه شروع، همگرایی فراگیر روش عددی نامیده می شود. در عمل، به کارگیری روشهای عددی همگرا مورد نظر است، زیرا آنها بیشتر قابل اعتمادند. برای مسائل نامقید، یک الگوریتم همگرا باید در هر چرخه تابع هزینه را کاهش دهد تا به مینیمم برسد.

## ۵.۲.۴ نرخ همگرایی

در عمل، یک روش عددی ممکن است تا رسیدن به نقطه بهین چرخه های بسیار زیادی طی کند. بنابراین، به کارگیری روشهایی که نرخ همگرایی سریعتری دارند، مهم است. نرخ همگرایی یک الگوریتم معمولاً با تعداد چرخه ها و محاسبه تابع برای رسیدن به جواب قابل قبول اندازه گیری می شود. در الگوریتمهای سریعتر معمولاً اطلاعات مرتبه دوی توابع مسأله استفاده می شود که به نام روشهای نیوتن شناخته می شوند. بسیاری از الگوریتمها نیز اطلاعات مرتبه دو را تنها با استفاده از اطلاعات مرتبه یک تقریب می زنند، که با عنوان روشهای شبه نیوتن شناخته می شوند. ما چند نمونه از آنها را تشریح خواهیم کرد.

## ۵.۲.۵ ارزیابی عددی گرادیانها

اغلب محاسبه تحلیلی گرادیان یک تابع پیچیده، خسته کننده و طاقت فرساست. در این حالتها، تقریب گرادیان با ماتریس هسیان تابع به کمک تفاضلهای محدود امکان پذیر است. در این جا به طور خلاصه چنین روشهایی را توضیح می دهیم. فرض شده است که تابع پیوسته و قابل مشتق گیری باشد.

مشتقل جزئی یک تابع چندمتغیره  $f(x)$  نسبت به متغیر  $x_i$  به شکل زیر تعریف می شود

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\delta x_i} \quad (5.9)$$

در حالی که  $\delta x_i$  یک تغییر کوچک در متغیر  $x_i$  است. با استفاده از این تعریف مشتق جزئی، می توانیم گرادیان یک تابع را در یک نقطه داده شده به دست آوریم. عبارات متعددی را می توان براساس رابطه (۵.۹) تدوین کرد. ما روشهای ساده تفاضل پیش رو، تفاضل پس رو و تفاضل مرکزی را توضیح خواهیم داد. در تمامی روشها،  $\delta x_i$  با یک تغییر محدود  $\Delta x_i$  جایگزین شده و یک مقدار مشتق تقریبی با استفاده از معادله (۵.۹) به دست می آید. تابع در دو نقطه همسایه ارزیابی شده و تفاضل مقادیر تابع به تغییر  $\Delta x_i$  تقسیم می شود. به این کار مشتق گیری عددی تابع نیز گفته می شود.

در روش تفاضل پیش رو، تغییر  $\Delta x_i$  به  $x_i$  اضافه می شود و مشتق جزئی در نقطه  $(x_1, \dots, x_n)$  به شکل زیر محاسبه می شود

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (5.10)$$

معادله (۵.۱۰) برای تمامی  $x_i$  ها  $i = 1$  to  $n$  استفاده شده تا تمامی مشتقات جزئی محاسبه گردد.

در روش تفاضل پس رو، تغییر  $\Delta x_i$  از  $x_i$  کم شده و مشتق جزئی در نقطه  $(x_1, \dots, x_n)$  به شکل زیر محاسبه می شود

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i - \Delta x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (5.11)$$

در روش تفاضل مرکزی، تغییر  $\frac{1}{2} \Delta x_i$  هم از  $x_i$  کم و هم به آن اضافه می گردد و مشتق جزئی در نقطه  $(x_1, \dots, x_n)$  محاسبه می گردد

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_1, \dots, x_i + \frac{1}{2} \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i - \frac{1}{2} \Delta x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (5.12)$$

دقت کنید که اگر تغییر  $\Delta x_i$  در متغیر  $x_i$  خیلی بزرگ باشد، ارزیابی گرادیان دقیق نیست. چندین راهکار برای انتخاب یک تغییر منطقی در متغیرهای طراحی وجود دارد. معمولاً، اگر تابع خیلی غیر خطی نباشد، تغییر ۱٪ تقریباً خوب کار می کند (یعنی،  $\Delta x_i = 0.01 |x_i|$ ). برای جزئیات بیشتر در مورد تعیین تغییرات متغیرها به مراجع گیل، ماری و رایت<sup>[۱۹۸۱]</sup> مراجعه کنید.

عیب اصلی محاسبه گرادیان به روش تفاضل محدود این است که تعداد دفعاتی که باید تابع ارزیابی شود به طور قابل توجهی افزایش می یابد و این یک الگوریتم بهینه سازی را غیر مؤثر می سازد. این افزایش به خاطر این است که برای هر نمونه  $\Delta x_i$  تابع باید دوباره محاسبه شود. همچنین دقت کنید که روش تفاضل مرکزی در مقایسه با روشهای تفاضل پیش رو و یا پس رو به دو برابر ارزیابی تابع نیاز دارد.

**مثال ۵.۲ ارزیابی عددی گرادیان.** گرادیان تابع  $f(x) = x_1^2 + x_2$  را در نقطه  $(2, 1)$  به کمک روش عددی تفاضل محدود ارزیابی کرده و آن را با گرادیان تحلیلی مقایسه کنید. تغییر ۱٪ برای متغیرهای طراحی در نظر بگیرید.

**حل.** مقدار دقیق گرادیان تابع در نقطه  $(2, 1)$  عبارت است از

$$\nabla f = (2x_1, 1) = (4, 1)$$

ما گرادیان تابع را با هر سه روش محاسبه خواهیم کرد. یک تغییر ۱٪ در متغیرها به ما  $\Delta x_1 = 0.02$  و  $\Delta x_2 = 0.01$  را می دهد.

روش تفاضل پیش رو:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \approx \frac{f(2.02, 1) - f(2, 1)}{0.02} = \frac{0.0804}{0.02} = 4.02$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \approx \frac{f(2, 1.01) - f(2, 1)}{0.01} = \frac{0.01}{0.01} = 1.00$$

روش تفاضل پس رو:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \approx \frac{f(2, 1) - f(1.98, 1)}{0.02} = \frac{0.0796}{0.02} = 3.98$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \approx \frac{f(2, 1) - f(2, 0.99)}{0.01} = \frac{0.01}{0.01} = 1.00$$

روش تفاضل مرکزی:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{f(2.01, 1) - f(1.99, 1)}{0.02} = \frac{0.08}{0.02} = 4.00$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{f(2, 1.005) - f(2, 0.995)}{0.01} = \frac{0.01}{0.01} = 1.00$$

دقت کنید که برای تابع داده شده، مقدار گرادیان به دست آمده از هر سه روش، با تقریب خیلی خوبی به گرادیان دقیق نزدیک است. با این همه، روش تفاضل مرکزی بهترین تقریب را می دهد. همچنین دقت کنید که هر سه روش برای  $\partial f / \partial x_2$  مقدار دقیق را

داده اند. علت آن این است که تابع بر حسب  $x_2$  خطی است. برای توابع خطی، مشتق گیری عددی همیشه مقدار دقیق گرادیان را می دهد.

### ۵.۳ مینیم سازی یک بعدی

#### ۵.۳.۱ تعریف مساله

روشهای بهینه سازی عددی نامقید براساس رابطه چرخه ای داده شده در معادله (۵.۱) قرار دارند. همچنان که قبلاً بحث شد، مساله به دست آوردن تغییر در طراحی  $\Delta x$  معمولاً به دو قسمت تجزیه می شود: مساله یافتن جهت و مساله به دست آوردن اندازه گام، چنان که در معادله (۵.۳) دیده شد. در این جا نیاز به بحث روشهای عددی برای حل هر دو مساله داریم. در بند زیر، ما ابتدا مساله تعیین اندازه گام را بحث می کنیم. این کار اغلب مساله جست و جوی یک بعدی (یا جست و جوی خطی) نامیده می شود. چنین مسائلی از نظر حل ساده ترند که خود دلیلی برای مقدم داشتن بحث آنهاست. به دنبال روشهای مینیم سازی یک بعدی، روشهای متعدد یافتن جهت جست و جوی  $d$  در فضای طراحی، در بخشهای ۵.۴ تا ۵.۷ تشریح می شود.

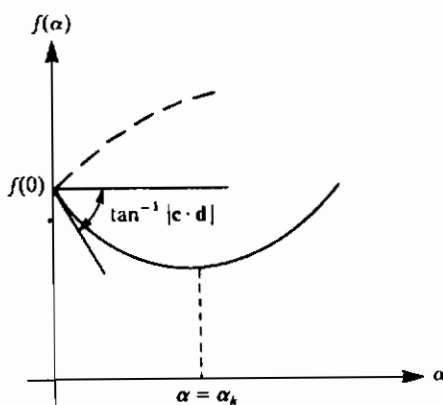
برای مساله بهینه سازی چند متغیره، باید ابتدا مساله یافتن جهت حل شود. آن گاه باید با جست و جو برای مینیم تابع در امتداد جهت داده شده در فضای طراحی، یک اندازه گام تعیین شود. این همیشه یک مساله مینیم سازی یک بعدی است.

۵.۳.۱.۱ کاهش به تابع یک متغیره. برای این که ببینیم چگونه از جست و جوی خطی در مسائل چند بعدی استفاده خواهد شد، بیایید فرض کنیم که جهت مطلوب تغییر طراحی  $d^{(k)}$  پیدا شده است. آن گاه در معادله های (۵.۱) و (۵.۳)، تنها مجهول عدد اسکالر  $\alpha$  است. با جایگزینی معادله (۵.۱) در تابع هزینه  $f(x)$ ، خواهیم داشت

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$$

حال، چون  $d^{(k)}$  معلوم است، طرف راست فقط تابعی از پارامتر اسکالر  $\alpha$  می شود و ما می توانیم معادله قبلی را به شکل زیر بنویسیم

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)}) = \tilde{f}(\alpha) \quad (۵.۱۳)$$

شکل ۵.۳ ترسیمه  $f(\alpha)$  بر حسب  $\alpha$ 

در حالی که  $\bar{f}(\alpha)$  تابع جدیدی است که  $\alpha$  تنها متغیر مستقل آن است (بعداً ما "خط بالا"ی تابع یک متغیره را حذف خواهیم کرد). دقت کنید که در  $\alpha = 0$ ،  $\bar{f}(0) = f(x^{(k)})$ ، که مقدار فعلی تابع هزینه است. مهم است که کاهش یک تابع  $n$  متغیره به یک تابع یک متغیره در معادله (۵.۱۳) درک شود؛ زیرا این گام اساسی تقریباً در تمامی روشهای بهینه سازی کاربرد دارد. این پنداره را در بند بعدی بیشتر شرح خواهیم داد.

اگر  $x^{(k)}$  نقطه مینیمم نباشد، آن گاه، یافتن یک جهت کاهشی  $d^{(k)}$  در آن نقطه امکان پذیر است. یادآور می شود که یک حرکت کوچک در امتداد  $d^{(k)}$  تابع هزینه را کاهش می دهد. بنابراین، با استفاده از معادله های (۵.۵) و (۵.۱۳)، شرط کاهش تابع هزینه می تواند به شکل نامعادله زیر بیان شود:

$$f(\alpha) < f(0) \quad (5.14)$$

چون  $f'(\alpha)$  یک تابع تک متغیره است، می توانیم  $f(\alpha)$  را بر حسب  $\alpha$  در یک صفحه رسم کنیم. برای برآورده شدن نامعادله (۵.۱۴) منحنی  $f(\alpha)$  بر حسب  $\alpha$  باید یک شیب منفی در نقطه  $\alpha = 0$  داشته باشد. چنین منحنی با خط پر در شکل ۵.۳ نشان داده شده است. باید درک شود که اگر جهت جست و جو درست باشد، ترسیمه  $f(\alpha)$  بر حسب  $\alpha$  نمی تواند منحنی خط چین باشد، زیرا هر  $\alpha$  ی مثبت باعث افزایش  $f(\alpha)$  می شود و نامعادله (۵.۱۴) نقض می شود. این نیز برخلاف این است که  $d^{(k)}$  جهتی است کاهشی برای تابع هزینه. بنابراین،

ترسیمه  $f(\alpha)$  بر حسب  $\alpha$  باید برای همه مسائل خط پر شکل ۵.۳ باشد. در حقیقت، شیب منحنی  $f(\alpha)$  در  $\alpha=0$  به شکل  $f'(0) = c^{(k)*} \cdot d^{(k)*}$  محاسبه می شود که منفی است، همچنان که در معادله (۵.۸) دیده شد.

**۵.۳.۱.۲ روش تحلیلی محاسبه اندازه گام.** بحث فوق نشان می دهد اگر  $d^{(k)*}$  یک جهت کاهشی باشد، آن گاه  $\alpha$  در معادله (۵.۸)، باید همیشه یک عدد اسکالر مثبت باشد. پس، مسأله مینیم سازی یک بعدی عبارت است از یافتن  $\alpha = \alpha_k$  چنان که  $f(\alpha)$  مینیمم شود. اگر  $f(\alpha)$  یک تابع ساده باشد، آن گاه، می توانیم روش تحلیلی (شرایط لازم و کافی بخش ۳.۳) را برای به دست آوردن  $\alpha_k$  استفاده کنیم. شرط لازم عبارت است از  $df(\alpha_k)/d\alpha = 0$ ، و شرط کافی عبارت است از  $d^2f(\alpha_k)/d\alpha^2 > 0$ . در این جا روش جست و جوی خطی تحلیلی را با مثالی تشریح خواهیم کرد. دقت کنید که مشتق  $f(x^{(k+1)})$  در معادله (۵.۱۳) نسبت به  $\alpha$  رابطه زیر را می دهد

$$\frac{df(x^{(k+1)})}{d\alpha} = \frac{\partial f^T(x^{(k+1)})}{\partial x} \frac{dx^{(k+1)}}{d\alpha} = \nabla f(x^{(k+1)}) \cdot d^{(k)}$$

پس، شرط لازم برای اندازه گام بهین ( $df/d\alpha = 0$ ) به ما رابطه زیر را می دهد

$$\nabla f(x^{(k+1)}) \cdot d^{(k)} = 0, \quad \text{or} \quad c^{(k+1)} \cdot d^{(k)} = 0 \quad (5.15)$$

که نشان می دهد گرادیان تابع هزینه در نقطه جدید بر جهت جست و جو در  $k$  امین چرخه عمود است.

**مثال ۵.۳ به دست آوردن تحلیلی اندازه گام.** فرض کنید جهت تغییر تابع

$$f(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 7 \quad (\text{الف})$$

در نقطه  $(1, 2)$  به شکل  $(-1, -1)$  داده شده باشد. اندازه گام  $\alpha$  را برای مینیم کردن  $f(x)$  در جهت داده شده محاسبه کنید.

**حل.** برای نقطه داده شده  $x^{(k)} = (1, 2)$ ،  $f(x^{(k)}) = 22$  و  $d^{(k)*} = (-1, -1)$ . ابتدا بررسی می کنیم تا ببینیم آیا  $d^{(k)*}$  جهت کاهشی است یا خیر. گرادیان تابع در  $(1, 2)$  عبارت است از  $c^{(k)*} = (10, 10)$  و  $c^{(k)*} \cdot d^{(k)*} = 10(-1) + 10(-1) = -20 < 0$  بنابراین  $(-1, -1)$  جهت کاهشی است.

نقطه جدید  $x^{(k+1)}$  از معادله (۵.۱) عبارت است از

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

یا، به شکل مؤلفه ای

$$x_1^{(k+1)} = 1 - \alpha; \quad x_2^{(k+1)} = 2 - \alpha \quad (\text{پ})$$

با جای گزینی معادله های (پ) در معادله (الف) داریم

$$f(x^{(k+1)}) = 3(1 - \alpha)^2 + 2(1 - \alpha)(2 - \alpha) + 2(2 - \alpha)^2 + 7$$

با ساده کردن معادله فوق خواهیم داشت

$$f(x^{(k+1)}) = 7\alpha^2 - 20\alpha + 22 \equiv f(\alpha) \quad (\text{ت})$$

بنابراین، در امتداد جهت داده شده  $(-1, -1)$ ،  $f(x)$  تابعی از یک متغیر  $\alpha$  می شود. همچنین از معادله (ت) مشاهده می شود:  $f'(0) = 22$ ، که مقدار تابع هزینه در نقطه فعلی است و  $f'(0) = -20 < 0$  که شیب  $f(\alpha)$  در  $\alpha = 0$  است (همچنین یادآور می شود که  $f'(0) = c^k \cdot d^k$ ).

اکنون با استفاده از شرایط لازم و کافی بهینگی برای  $f(\alpha)$ ، داریم

$$\frac{df}{d\alpha} = 14\alpha_k - 20 = 0; \quad \alpha_k = \frac{10}{7}$$

$$\frac{d^2f}{d\alpha^2} = 14 > 0$$

پس، شرط کافی در  $\alpha_k$  برآورده شده است. بنابراین،  $\alpha_k = \frac{10}{7}$  تابع  $f(x)$  را در امتداد  $(-1, -1)$  مینیمم می کند. نقطه جدید طراحی عبارت است از

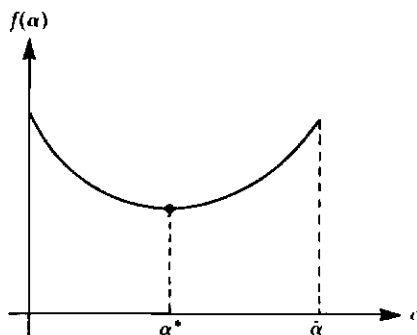
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{10}{7}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} \quad (\text{ث})$$

با جای گزینی طراحی جدید  $(-\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$  در معادله (الف)، مقدار جدید تابع هزینه را به دست می آوریم که عبارت است از  $\frac{54}{7}$ . این بهبود (کاهش) نسبت به تابع هزینه ۲۲ در نقطه طراحی قبلی چشمگیر است.

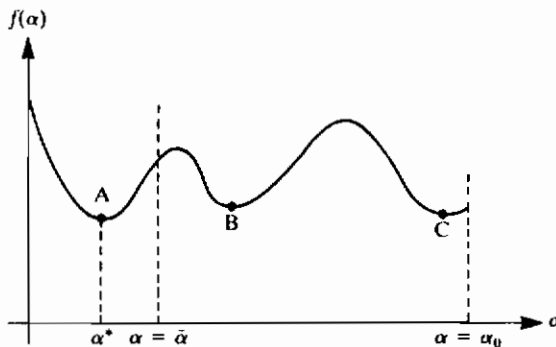
شکلی صریح برای تابع  $f(\alpha)$  ممکن بود. همچنین، شکل تابع  $f(\alpha)$  کاملاً ساده بود. استفاده از شرایط لازم و کافی برای یافتن مینیمم تابع  $f(\alpha)$  و محاسبه تحلیلی اندازه گام  $\alpha_k$  ممکن بود. برای خیلی از مسائل به دست آوردن عبارتی صریح برای  $f(\alpha)$  ممکن نیست. به علاوه، اگر شکل تابع  $f(\alpha)$  معلوم باشد، ممکن است آن قدر پیچیده باشد که حل تحلیلی آن ممکن نباشد. بنابراین، باید از یک روش عددی برای یافتن  $\alpha_k$  به منظور مینیمم کردن  $f(x)$  در امتداد  $d^k$  استفاده شود.

فرآیند جست و جوی خطی عددی خودش چرخه ای است و قبل از رسیدن به نقطه مینیمم به چند چرخه نیاز دارد. بیشتر روشهای جست و جوی خطی براساس مقایسه مقادیر تابع در نقاط مختلف در امتداد جهت جست و جو قرار دارند. معمولاً، باید بعضی از فرضیات را روی شکل تابع جست و جوی خطی داشته باشیم تا با روشهای عددی اندازه گام را محاسبه کنیم. برای مثال، باید فرض شود که یک مینیمم وجود دارد و در بازه مورد نظر یگانه است. تابعی با این خواص تابع تک حالتی نامیده می شود. شکل ۵.۴ ترسیمه چنین تابعی را که تا رسیدن به نقطه مینیمم کاهشی پیوسته دارد، نشان می دهد. با مقایسه شکل های ۵.۳ و ۵.۴ می بینیم که  $f(\alpha)$  در بعضی از بازه ها تابع تک حالتی است. بنابراین، یک مینیمم یگانه دارد.

بیشتر روشهای جست و جوی یک بعدی فقط برای توابع تک حالتی کاربرد دارند. این محدودیت ممکن است جدی به حساب آید، اما چنین نیست. برای توابعی که تک حالتی



شکل ۵.۴ تابع تک حالتی  $f(\alpha)$



شکل ۵.۵ تابع غیر تک‌حالتی  $f(\alpha)$  در بازه  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$  (تک‌حالتی برای  $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ ).

نیستند، ما می‌توانیم فقط یک مینیمم محلی را که به نقطه شروع نزدیکترین است به دست آوریم. این مطلب در شکل ۵.۵ تشریح شده است که  $f(\alpha)$  در فاصله  $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$  تک‌حالتی نیست. نقاط A، B و C جملگی مینیممهای محلی اند. اگر  $\alpha$  را محدود کنیم به شکلی که بین 0 و  $\bar{\alpha}$  باشد، فقط یک مینیمم محلی A وجود دارد، زیرا  $f(\alpha)$  در فاصله  $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$  تک‌حالتی است. پس فرض تک‌حالتی بودن آن طور که به نظر می‌رسید یک محدودیت نیست.

پس مسأله جست و جو عبارت است از یافتن  $\alpha$  در محدوده  $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$  که در آن تابع  $f(\alpha)$  مقدار مینیمم فراگیر داشته باشد. این نوع بیان مسأله باید بهبود یابد. چون ما با روشهای عددی سروکار داریم، امکان یافتن دقیق نقطه مینیمم  $\alpha^*$  ممکن نیست. در حقیقت، آنچه ما به دست می‌آوریم بازه‌ای است که مینیمم در آن قرار دارد، یعنی حدود پایین و بالای  $\alpha_l$  و  $\alpha_u$  برای  $\alpha^*$  تعیین می‌گردد. بازه  $(\alpha_l, \alpha_u)$  بازه عدم اطمینان نامیده می‌شود و با  $l = \alpha_u - \alpha_l$  نشان داده می‌شود. بیشتر روشهای عددی در یک فرآیند چرخه‌ای بازه عدم اطمینان را کاهش می‌دهند تا آن که از یک عدد مثبت کوچک مشخص  $\varepsilon$  کوچکتر شود؛ یعنی  $l < \varepsilon$ . این دقت مطلوب برای تعیین مینیمم است. وقتی معیار توقف برآورده شد،  $\alpha^*$  را از رابطه  $0.5(\alpha_l + \alpha_u)$  به دست می‌آوریم. روشهایی که براساس این فلسفه بنا شده‌اند گاهی روشهای کاهش بازه نامیده می‌شوند.

روشهای متعددی برای مینیمم‌سازی یک بعدی در دسترس است [کوپر و اشتبرگ،

[۱۹۷۰]. ولی ما فقط سه روش مریهٔ صفر را بحث خواهیم کرد. عبارت مرتبهٔ صفر بر این نکته تأکید دارد که فقط مقادیر تابع برای یافتن مینیم استفاده می شوند. مراحل اصلی این روشها به دو گام تقسیم می شوند: در گام اول، موقعیت نقطهٔ مینیم محصور می شود و بازهٔ اولیهٔ عدم اطمینان ایجاد می شود. در گام دوم، بازهٔ عدم اطمینان با جدا کردن ناحیه ای که نمی تواند حاوی مینیم باشد کوچکتر می شود. این کار با محاسبه و مقایسهٔ مقادیر تابع در بازهٔ عدم اطمینان انجام می شود. این دو گام را در زیر بخشهای زیر با جزئیات بیشتر تشریح خواهیم کرد.

## ۵.۳.۳ جست و جوی بازه یکسان

پندارهٔ اصلی هر فن جست و جوی یک بعدی این است که پی در پی بازهٔ عدم اطمینان را کاهش دهد تا به یک مقدار کوچک قابل قبول برسد. برای این که پنداره را به روشنی بحث کنیم، با یک روش بسیار ساده که جست و جوی بازه یکسان نامیده می شود شروع می کنیم. پنداره همان طور که در شکل ۵.۶ تشریح شده کاملاً ابتدایی است. در بازه  $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ ، تابع  $f(\alpha)$  در نقاط متعددی با استفاده از یک شبکه یکنواخت محاسبه می شود. برای این کار، یک عدد کوچک  $\delta$  انتخاب می کنیم و تابع را با استفاده از نقاط  $\delta$ ،  $2\delta$ ،  $3\delta$ ، ...،  $9\delta$ ،  $(q+1)\delta$  و غیره محاسبه می کنیم. دو مقدار متوالی تابع مثلاً  $q$  و  $q+1$  را با هم مقایسه می کنیم. آن گاه اگر تابع در نقطهٔ  $q$  از مقدار تابع در  $q+1$  بزرگتر است، یعنی

$$f(q\delta) > f((q+1)\delta)$$

هنوز از نقطهٔ مینیم رد نشده ایم. اما اگر تابع شروع به افزایش کرد، یعنی

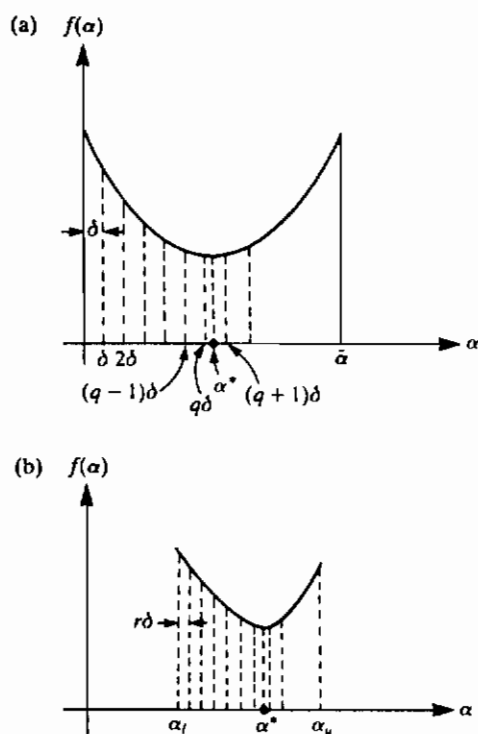
$$f(q\delta) < f((q+1)\delta) \quad (۵.۱۶)$$

آن گاه از نقطهٔ مینیم رد شده ایم.

دقت کنید که تا شرایط معادله (۳.۱۶) برای دو نقطهٔ  $q$  و  $q+1$  برآورده شود، مینیم می تواند یا بین نقاط  $(q-1)$  و  $q$  و یا بین نقاط  $q$  و  $q+1$  باشد. برای این که هر دو احتمال را در نظر بگیریم، مینیم را بین  $(q-1)$  و  $(q+1)$  در نظر می گیریم. پس حدود پایین و بالای بازهٔ عدم اطمینان عبارتند از

$$\alpha_l = (q-1)\delta, \quad \alpha_u = (q+1)\delta \quad (۵.۱۷)$$

و بازهٔ عدم اطمینان عبارت است از  $2\delta$ .



شکل ۵.۶. فرآیند بازه یکسان. (a) محصور کردن اولیه مینیم؛ (b) کاهش بازه عدم اطمینان

به محض این که حدود بالا و پایین به دست آمدند، دوباره فرآیند جست و جو را از  $\alpha = \alpha_l$  با مقدار کاهشی برای نمو  $\delta$  مثل  $r\delta$  که  $r \ll 1$  است، شروع می کنیم. فرآیند گذشته تکرار می شود و مینیم دوباره محصور می شود. بازه عدم اطمینان  $2r\delta$  کاهش پیدا می کند. این موضوع در شکل (b) ۵.۶ تشریح شده است. مقدار نمو بیشتر کاهش می یابد و فرآیند تکرار می شود تا بازه عدم اطمینان به مقداری به اندازه کافی کوچک  $\epsilon$  کاهش پیدا کند و شرایط دقت را برآورده کند. توجه کنید که این روش برای توابع تک حالتی همگراست و می توان برنامه رایانه ای آن را بسادگی نوشت. پیوست D شامل لیست یک برنامه رایانه ای برای جست و جو بازه یکسان است.

بازده روشی مانند جست و جوی بازه یکسان به تعداد ارزیابی مقدار تابع برای رسیدن به دقت مورد نظر بستگی دارد. واضح است که تعداد ارزیابی تابع به انتخاب اولیه مقدار  $\delta$

بستگی دارد. اگر  $\delta$  خیلی کوچک باشد، فرآیند ممکن است به چندبار ارزیابی تابع برای محصور کردن اولیهٔ مینیم نیاز داشته باشد. یک فایدهٔ  $\delta$  کوچکتر این است که بازهٔ عدم اطمینان در پایان جست و جوی اولیه برای مینیم، به اندازهٔ مطلوب کوچک است. بهبود بخشیدن پی در پی بازهٔ عدم اطمینان به تعداد ارزیابی تابع کمتری نیاز دارد. معمولاً شروع با یک مقدار بزرگتر  $\delta$  و محصور کردن سریع مینیم بهتر است. بدین ترتیب فرآیند تا شرط دقت برآورده شود، ادامه پیدا می کند.

**مثال ۵.۲ جست و جوی بازهٔ یکسان.** برای تابع  $f(\alpha) = 2 - 4\alpha + e^\alpha$ ، با استفاده از

جست و جوی بازهٔ یکسان و با دقت  $\epsilon = 0.001$  مینیم را بیابید.  $\delta = 0.5$  را استفاده کنید.

حل. با نوشتن شرایط لازم بهینگی داریم  $df/d\alpha = -4 + e^\alpha = 0$ . بنابراین،  $\alpha = 1.3863$  یک نامزد نقطهٔ مینیم است. این در حقیقت یک مینیم محلی است، زیرا در آن  $d^2f/d\alpha^2 > 0$  است. ما این جواب را با استفاده از روش جست و جوی بازهٔ یکسان تأیید می کنیم.

با استفاده از  $\delta = 0.5$ . تابع در اندازهٔ گامهای آزمایشی مختلفی همچنان که در جدول ۵.۱ نشان داده شده محاسبه می شود. دیده می شود که تابع بعد از اندازهٔ گام آزمایشی ۱.۵ شروع به افزایش می کند. بنابراین، حد پایینی اندازهٔ گام ۱.۰ و حد بالایی ۰.۲ است. بازهٔ عدم اطمینان عبارت است از  $1.0 = (2.0 - 1.0)$ ، (یعنی  $2\delta$ ).

برای کوچکتر کردن بازهٔ عدم اطمینان،  $\delta = 0.05$  انتخاب می کنیم. چرخه های ۶ تا ۱۴ در جدول ۵.۱ با این مقدار  $\delta$  به دست آمده اند. بازهٔ عدم اطمینان به ۰.۱ (یعنی  $2\delta$ ) کاهش پیدا می کند. فرآیند کاهش بازهٔ عدم اطمینان با دقت  $\delta = 0.005$  و سپس با  $\delta = 0.0005$  ادامه می یابد.

در پیوست D جزئیات یک برنامه رایانه ای برای مینیم کردن تابع یک متغیره با استفاده از جست و جوی بازهٔ یکسان آمده است. برنامه، چند داده برای الگوریتم تعریف کرده و برنامهٔ فرعی اکوال<sup>۱</sup> را برای جست و جوی خطی بازهٔ یکسان فرامی خواند. بعد از آن که مینیم پیدا شد، نتایج را چاپ می کند. برنامهٔ فرعی اکوال، الگوریتم جست و جوی بازهٔ یکسان را اجرا می کند. برنامهٔ فرعی اکوال برنامهٔ فرعی فانکت<sup>۲</sup>

جدول ۵.۱ جست و جوی بازه یکسان برای  $f(\alpha) = 2 - 4\alpha + e^\alpha$

تعداد گامهای آزمایشی	مقدار تابع	
1	0.000 000	3.000 000 $\delta = 0.5$
2	0.500 000	1.648 721
3	$\alpha_l \rightarrow 1.000 000$	0.718 282
4	1.500 000	0.481 689
5	$\alpha_u \rightarrow 2.000 000$	1.389 056
6	1.050 000	0.657 651
7	1.100 000	0.604 166
8	1.150 000	0.558 193
9	1.200 000	0.520 117
10	1.250 000	0.490 343
11	1.300 000	0.469 297
12	$\alpha_l \rightarrow 1.350 000$	0.457 426
13	1.400 000	0.455 200
14	$\alpha_u \rightarrow 1.450 000$	0.463 115
15	1.355 000	0.456 761
16	1.360 000	0.456 193
17	1.365 000	0.455 723
18	1.370 000	0.455 351
19	1.375 000	0.455 077
20	$\alpha_l \rightarrow 1.380 000$	0.454 902
21	1.385 000	0.454 826
22	$\alpha_u \rightarrow 1.390 000$	0.454 850
23	1.380 500	0.454 890
24	1.381 000	0.454 879
25	1.381 500	0.454 868
26	1.382 000	0.454 859
27	1.382 500	0.454 851
28	1.383 000	0.454 844
29	1.383 500	0.454 838
30	1.384 000	0.454 833
31	1.384 500	0.454 829
32	1.385 000	0.454 826
33	1.385 500	0.454 824
34	$\alpha_l \rightarrow 1.386 000$	0.454 823
35	1.386 500	0.454 823
36	$\alpha_u \rightarrow 1.387 000$	0.454 824
37	1.386 500	0.454 823

را برای ارزیابی مقدار تابع برای هر  $\alpha$  داده شده فرا می خواند. تابعی که مینیمم آن مورد نظر است می تواند در این زیربرنامه معرفی شود. با  $\delta = 0.5$  و  $\varepsilon = 0.001$ ، مینیمم تابع  $f(\alpha) = 2 - 4\alpha + e^{\alpha}$  عبارت است از  $\alpha^* = 1.3865$  با  $f(\alpha^*) = 0.454823$  با ۳۷ بار ارزیابی تابع.

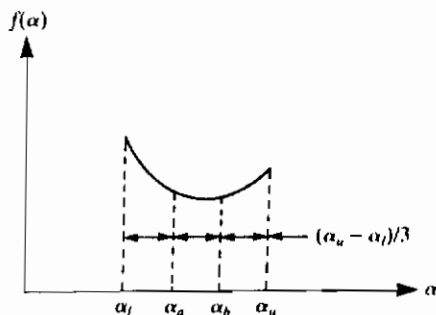
**۵.۳.۲.۱ جایگزین جست وجوی بازه یکسان.** یک روش محاسباتی کمی متفاوت می تواند برای کاهش بازه عدم اطمینان دنبال شود تا مینیمم محصور شود. این روش بدین صورت است که تابع در دو نقطه مثل  $\alpha_l$  و  $\alpha_u$  در بازه عدم اطمینان ارزیابی می شود. نقاط  $\alpha_l$  و  $\alpha_u$  در فواصل  $1/3$  و  $2/3$  (در حالی که  $\alpha_l = \alpha_l - \alpha_u$ ) از حد پایینی  $\alpha_l$  قرار دارند؛ یعنی

$$\alpha_a = \alpha_l + \frac{1}{3}(\alpha_u - \alpha_l) = \frac{1}{3}(\alpha_u + 2\alpha_l) \quad (5.18)$$

$$\alpha_b = \alpha_l + \frac{2}{3}(\alpha_u - \alpha_l) = \frac{1}{3}(2\alpha_u + \alpha_l) \quad (5.19)$$

این موضوع در شکل ۵.۷ نشان داده شده است. آن گاه تابع در نقاط  $\alpha_a$  و  $\alpha_b$  ارزیابی می شوند. اکنون دو شرط زیر باید مورد توجه قرار گیرد:

۱. اگر تابع در  $\alpha_u$  از مقدار آن در  $\alpha_b$  کوچکتر است، یعنی  $f(\alpha_u) < f(\alpha_b)$ ، آن گاه مینیمم بین  $\alpha_l$  و  $\alpha_b$  قرار دارد. بازه  $\frac{1}{3}$  طرف راست بین  $\alpha_b$  و  $\alpha_u$  کنار گذاشته می شود. حدود جدید بازه عدم اطمینان عبارت است از  $\alpha_l' = \alpha_l$  و  $\alpha_u' = \alpha_b$  (علامت پریم برای نشان دادن تجدید نظر در حدود بازه عدم اطمینان است). بنابراین،  $\alpha_l' = \alpha_l$  و  $\alpha_u' = \alpha_b$ . روش با حدود جدید تکرار می شود.



شکل ۵.۷ فرآیند یک جایگزین برای جست وجوی بازه یکسان

۲. اگر تابع در  $\alpha_n$  از مقدار آن در  $\alpha_{n-1}$  بزرگتر است؛ یعنی  $f(\alpha_n) > f(\alpha_{n-1})$ ، آن گاه مینیمم بین  $\alpha_n$  و  $\alpha_{n-1}$  قرار دارد. بازه بین  $\alpha_n$  و  $\alpha_{n-1}$  کنار گذاشته می شود. روش با  $\alpha'_n = \alpha'_{n-1}$  و  $\alpha'_n = \alpha_n$  تکرار می شود.

با محاسبات قبلی بازه عدم اطمینان بعد از هر دوبار ارزیابی تابع به  $I' = 2I/3$  کاهش می یابد. تمام مراحل فرآیند تا این که بازه عدم اطمینان به مقداری قابل قبول کاسته شود، ادامه می یابد.

### ۵.۳.۳ جست و جوی بخش طلایی

۵.۳.۳.۱ محصور کردن اولیه مینیمم. در روش قبلی، نحوه انتخاب شده اولیه برای محصور کردن مینیمم ثابت نگه داشته می شد. در صورتی که  $\delta$  عددی کوچکی باشد این روش فرآیندی ناکارا است. یک روش جایگزین این است که در هر گام نحوه را تغییر دهیم؛ یعنی آن را با عدد ثابت  $r$  بزرگتر از ۱ ضرب کنیم. با این روش محصور شدن اولیه مینیمم سرعت یافته، اما طول بازه عدم اطمینان اولیه افزایش می یابد. روش بخش طلایی یکی از این روشهای جست و جوی با بازه متغیر است. در این روش مقدار  $r$  اختیاری گزینش نمی شود. مقدار  $r$  را مساوی نسبت طلایی که از دنباله فیبوناچی<sup>۱</sup> به دست می آید، یعنی ۱.۶۱۸ می گیرند. بعداً مقدار نسبت طلایی را به دست خواهیم آورد.

دنباله فیبوناچی به شکل زیر تعریف می شود

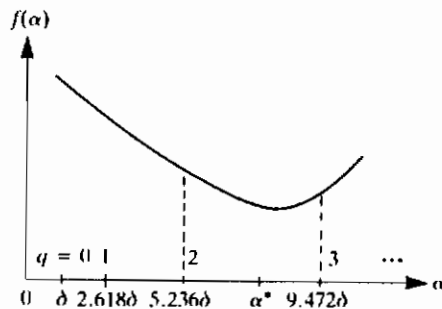
$$F_0 = 1; \quad F_1 = 1; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.20)$$

هر عدد از دنباله فیبوناچی با جمع دو عدد قبلی به دست می آید، پس دنباله عبارت است از

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

با استفاده از این دنباله، روشی که جست و جوی فیبوناچی نامیده می شود می تواند تدوین شود [کوپر و اشتاینبرگ<sup>۲</sup>، ۱۹۷۰]. در این جا از بحث این روش خودداری می کنیم. دنباله فیبوناچی ویژگی زیر را دارد

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} \rightarrow 1.618 \left( \text{or, } \frac{F_{n-1}}{F_n} \rightarrow 0.618 \right) \text{ وقتی } n \rightarrow \infty$$



شکل ۵.۸ محصور کردن ابتدایی نقطه مینیمم در روش بخش طلایی

یعنی، وقتی  $n$  بزرگ می شود، نسبت بین دو عدد متوالی  $F_n$  و  $F_{n-1}$  در دنباله فیبوناچی به یک عدد ثابت ۱.۶۱۸ یا  $(\sqrt{5} + 1) / 2$  می رسد. این نسبت طلایی خواص جالب دیگری دارد که در روش جست و جوی یک بعدی به کار خواهد آمد.

شکل ۵.۸ فرآیند گذشته محصور کردن اولیه مینیمم را تشریح می کند. با شروع در  $q = 0$ ، تابع  $f(\alpha)$  را در  $\alpha = \delta$  در حالی که  $\delta > 0$  یک عدد کوچک است ارزیابی می کنیم. مقدار  $f(\delta)$  را با  $f(0)$  مقایسه می کنیم. اگر کوچکتر است، آن گاه مقدار نمو در اندازه گام را برابر  $1.618\delta$  (یعنی نمو عبارت است از  $1.618$  ضرب در نمو قبلی) می گیریم. بدین ترتیب ما مقادیر تابع را در نقاط زیر ارزیابی و آنها را مقایسه می کنیم:

$$\begin{aligned} q = 0; & \quad \alpha_0 = \delta \\ q = 1; & \quad \alpha_1 = \delta + 1.618\delta = 2.618\delta = \sum_{j=0}^1 \delta(1.618)^j \\ q = 2; & \quad \alpha_2 = 2.618\delta + 1.618(1.618\delta) = 5.236\delta = \sum_{j=0}^2 \delta(1.618)^j \\ q = 3; & \quad \alpha_3 = 5.236\delta + 1.618^3\delta = 9.472\delta = \sum_{j=0}^3 \delta(1.618)^j \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

به طور کلی، ارزیابی تابع را در نقاط زیر ادامه می دهیم

$$\alpha_q = \sum_{j=0}^q \delta(1.618)^j; \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (۵.۲۱)$$

بباید فرض کنیم تابع در  $\alpha_{q-1}$  از مقدار آن در  $\alpha_q$  کمتر است، یعنی

$$f(\alpha_{q-1}) < f(\alpha_{q-2}), \quad \text{و} \quad f(\alpha_{q-1}) < f(\alpha_q) \quad (5.22)$$

بنابراین، نقطهٔ مینیمم رد شده است. در حقیقت نقطهٔ مینیمم بین دو بازهٔ قبلی یعنی بین  $\alpha_q$  و  $\alpha_{q-2}$  قرار دارد. بنابراین، حدود بالا و پایین بازهٔ عدم اطمینان عبارتند از

$$\alpha_u \equiv \alpha_q = \sum_{j=0}^q \delta(1.618)^j \quad (5.23)$$

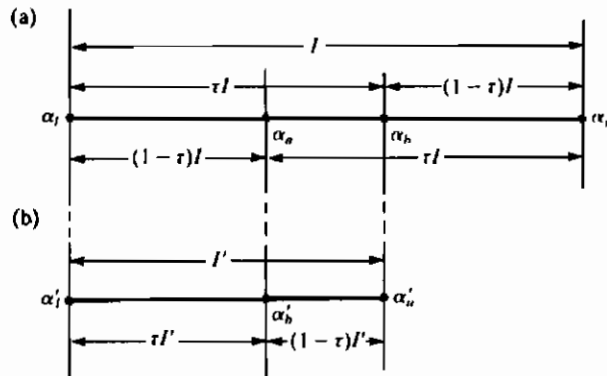
$$\alpha_l \equiv \alpha_{q-2} = \sum_{j=0}^{q-2} \delta(1.618)^j \quad (5.24)$$

و بازهٔ عدم اطمینان اولیه عبارت است از

$$\begin{aligned} l &= \alpha_u - \alpha_l \\ &= \sum_{j=0}^q \delta(1.618)^j - \sum_{j=0}^{q-2} \delta(1.618)^j \\ &= \delta(1.618)^{q-1} + \delta(1.618)^q \\ &= \delta(1.618)^{q-1}(1 + 1.618) \\ &= 2.618(1.618)^{q-1}\delta \end{aligned} \quad (5.25)$$

**۵.۳.۳.۲ کاهش بازهٔ عدم اطمینان.** کار بعدی این است که با استفاده از مقدار تابع که در چند نقطه در  $I$  محاسبه می شود و مقایسهٔ آنها، شروع به کاهش بازهٔ عدم اطمینان کنیم. این روش، مانند جست و جوی بازهٔ یکسان جایگزین شکل ۵.۷، در بازهٔ  $I$  دو مقدار تابع را استفاده می کند. تفاوت در این است که  $\alpha_u$  و  $\alpha_l$  در فاصله  $l/3$  از دو انتهای بازهٔ عدم اطمینان قرار ندارند. در عوض، آنها به فاصله  $0.382l$  (یا  $0.618l$ ) از دو انتها قرار گرفته اند. ضریب  $0.382$  به نسبت طلایی مربوط می شود که در زیر خواهیم دید.

برای این که ببینیم ضریب  $0.618$  چگونه به دست می آید، دو نقطه که به طور قرینه از دو انتها قرار گرفته اند مانند آنچه در شکل (a) ۵.۹ نشان داده شده در نظر بگیرید. نقاط  $\alpha_u$  و  $\alpha_l$  به فاصله  $l/3$  از دو انتهای بازه قرار گرفته اند، با مقایسهٔ مقادیر تابع در  $\alpha_u$  و  $\alpha_l$ ، طرف چپ  $(\alpha_l, \alpha_u)$  یا طرف راست  $(\alpha_u, \alpha_l)$  بازه باید کنار گذاشته شوند. بگذارید فرض کنیم طرف راست کنار گذاشته می شود مانند شکل (b) ۵.۹، پس  $\alpha'_l$  و  $\alpha'_u$  محدوده های پایین و بالای مینیمم هستند. بازه جدید عدم اطمینان عبارت است از  $l' = l/3$ . در بازه جدید فقط یک نقطه است که در آن مقدار تابع معلوم است. لازم است که این نقطه در فاصله  $l'/3$  طرف چپ قرار بگیرد؛ بنابراین



شکل ۵.۹ جداسازی بازه در روش بخش طلایی

$$\tau l' = (1 - \tau)l \quad (۵.۲۶)$$

چون  $l' = \tau l$ ، معادله زیر به دست می آید

$$\tau^2 + \tau - 1 = 0 \quad (۵.۲۷)$$

ریشه مثبت این معادله عبارت است از

$$\tau = (-1 + \sqrt{5})/2 = 0.618 \quad (۵.۲۸)$$

پس دو نقطه در فواصل  $0.618l$  یا  $0.382l$  از دو انتهای بازه قرار دارند.

وقتی اولین بازه عدم اطمینان مشخص شد، جست و جوی بخش طلایی می تواند شروع شود. اگر محصور کردن اولیه با استفاده از نمودار گام متغیر (با ضریب ۱.۶۱۸ که عبارت است از  $1/0.618$ ) انجام شود، آن گاه مقدار تابع در یکی از نقاط  $\alpha_{q-1}$  از قبل معلوم است. مشخص است که  $\alpha_{q-1}$  به طور خودکار نقطه  $\alpha_q$  است. این مطلب را با ضرب بازه اولیه  $l$  معادله (۵.۲۵) در ۰.۳۸۲ می توان دید. اگر روش قبلی برای محصور کردن اولیه مینیمم استفاده شود، آن گاه نقاط  $\alpha_q$  و  $\alpha_{q-1}$  باید با روش بخش طلایی محاسبه شوند.

### ۵.۳.۳.۳ الگوریتم جست و جوی یک بعدی با روش بخش طلایی

گام ۱. برای یک اندازه گام کوچک  $\delta$  انتخاب شده در  $\alpha$ ، فرض کنید  $q$  کوچکترین عدد صحیحی باشد که در معادله (۵.۲۲) صدق می کند، در حالی که  $\alpha_q$ ،  $\alpha_{q-1}$  و  $\alpha_{q-2}$  از

معادله (۵.۲۱) محاسبه می شوند. حدود بالا و پایین  $\alpha^*$  (مقدار بهین اندازه گام) از معادله های (۵.۲۳) و (۵.۲۴) به دست می آیند.

**گام ۲.**  $f(\alpha_n)$  و  $f(\alpha_b)$  را محاسبه کنید، در حالی که  $\alpha_n = \alpha_l + 0.382l$  و  $\alpha_b = \alpha_l + 0.618l$  بازه عدم اطمینان). دقت کنید که در اولین چرخه،  $\alpha_n = \alpha_{n-1}$ ، پس  $f(\alpha_n)$  لازم نیست محاسبه شود.

**گام ۳.**  $f(\alpha_n)$  و  $f(\alpha_b)$  را مقایسه کرده، به گامهای ۴، ۵ یا ۶ بروید.

**گام ۴.** اگر  $f(\alpha_n) < f(\alpha_b)$ ، آن گاه نقطه بهین  $\alpha^*$  بین  $\alpha_l$  و  $\alpha_n$  قرار دارد یعنی،  $\alpha_b \leq \alpha^* \leq \alpha_l$ . محدوده جدید برای بازه عدم اطمینان کاهش یافته عبارت است از  $\alpha'_l = \alpha_l$  و  $\alpha'_b = \alpha_n$ . همچنین،  $\alpha'_b = \alpha_n$ .  $f(\alpha'_n)$  را که در آن  $\alpha'_n = \alpha'_l + 0.382(\alpha'_n - \alpha'_l)$  محاسبه کرده و به گام ۷ بروید.

**گام ۵.** اگر  $f(\alpha_n) > f(\alpha_b)$ ، آن گاه نقطه بهین  $\alpha^*$  بین  $\alpha_n$  و  $\alpha_b$  قرار دارد یعنی،  $\alpha_n \leq \alpha^* \leq \alpha_b$ . مشابه گام ۴، فرض کنید  $\alpha'_l = \alpha_n$  و  $\alpha'_b = \alpha_b$ ، پس  $\alpha'_n = \alpha_b$ .  $f(\alpha'_b)$  را محاسبه کنید که  $\alpha'_b = \alpha'_l + 0.618(\alpha'_n - \alpha'_l)$  و به گام ۷ بروید.

**گام ۶.** اگر  $f(\alpha_n) = f(\alpha_b)$ ، فرض کنید  $\alpha_l = \alpha_n$  و  $\alpha_b = \alpha_n$  و به گام ۲ بروید.

**گام ۷.** اگر بازه جدید عدم اطمینان  $I' = \alpha'_n - \alpha'_l$  به اندازه کافی کوچک است و معیار همگرایی را برآورده می کند (یعنی  $I' < \varepsilon$ )، فرض کنید  $I' / 2 = (\alpha'_n - \alpha'_l)$  و محاسبات را متوقف کنید. در غیر این صورت، پریم را از روی  $\alpha'_l$ ،  $\alpha'_n$ ،  $\alpha'_b$  و  $\alpha'_n$  برداشته و به گام ۳ بروید.

**مثال ۵.۵** مینیمم سازی يك تابع با جست وجوی بخش طلایی. مانند مثال ۵.۴ تابع

$f(\alpha) = 2 - 4\alpha + e^{\alpha}$  را در نظر بگیرید، و برای یافتن مینیمم از روش جست وجوی بخش طلایی با دقت 0.001 استفاده کنید.  $\delta = 0.5$  بگیرید. بازه روش جست وجوی نسبت طلایی و جست وجوی بازه یکسان را با هم مقایسه نمایید.

**حل.** مقدار دقیق بهین  $\alpha$  عبارت است از 1.3863. در جست وجوی بخش طلایی، ما ابتدا نیاز به محصور کردن نقطه مینیمم داریم، سپس کاهش متوالی بازه ای که مینیمم در آن قرار دارد تا این که آن را دقیقاً بیابیم. جدول ۵.۲ چرخه های مختلف روش را نشان می دهد. نقطه مینیمم در فقط چهار چرخه محصور شده همچنان که در قسمت اول جدول نشان داده شده است. بازه اولیه عدم اطمینان

عبارت است از  $l = (\alpha_{II} - \alpha_I) = 2.618034 - 0.5 = 2.118034$  زیرا در جدول ۵.۲،  $f(2.618034) > f(1.309017)$  است. دقت کنید که این بازه در مقایسه با بازه جست و جوی بازه یکسان به اندازه قابل توجهی بزرگتر است.

اکنون برای کاهش بازه عدم اطمینان، ابتدا  $\alpha_{II}$  را محاسبه می کنیم که عبارت است از  $(\alpha_I + 0.618l)$ ؛ همچنین،  $\alpha_{II} = \alpha_{II} - 0.382l$  (محاسبات در قسمت دوم جدول ۵.۲ نشان داده شده است). دقت کنید که  $\alpha_{II}$  و  $f(\alpha_{II})$  از قبل معلومند و لازم نیست دوباره محاسبه شوند. این اصلی ترین مزیت جست و جوی بخش طلایی است که وقتی بازه عدم اطمینان معلوم شد، تنها به یک بار ارزیابی تابع نیاز دارد. ما  $\alpha_{II} = 1.809017$  و  $f(\alpha_{II}) = 0.868376$  را محاسبه می کنیم. چون  $f(\alpha_{II}) < f(\alpha_I)$ ، محدوده جدید بازه عدم اطمینان عبارت است از  $\alpha'_I = 0.5$  و  $\alpha'_{II} = 1.809017$ . همچنین،  $\alpha'_{II} = 1.309017$  که در آن مقدار تابع قبلاً معلوم بوده است. ما به محاسبه  $f(\alpha'_{II})$  نیاز داریم که  $(\alpha'_{II} - \alpha'_I) = 1.000$ ،  $\alpha'_I = 0.5$  و  $\alpha'_{II} = 1.809017$  را محاسبه می کنیم. چون  $f(\alpha'_{II}) < f(\alpha'_I)$ ، ما کوچکتر کردن بازه عدم اطمینان فرآیند تکراری است و می تواند با یک برنامه رایانه ای انجام شود.

برنامه فرعی گلد (GOLD) که روش جست و جوی بخش طلایی را اجرا می کند در پیوست D آمده است. مینیمم تابع  $f$  در  $\alpha^* = 1.386511$  و با  $f(\alpha^*) = 0.454823$  به دست می آید که حاصل ۲۲ بار ارزیابی تابع است، چنان که در جدول ۵.۲ نشان داده شده است. تعداد دفعاتی که یک تابع ارزیابی می شود معیاری از بازده یک الگوریتم بهینه سازی است. دقت کنید که تعداد ارزیابی تابع در جست و جوی بخش طلایی از جست و جوی بازه یکسان کمتر است. این تأییدی است بر ادعای قبلی ما مبنی بر این که جست و جوی بخش طلایی برای یک دقت مشخص و طول گام اولیه معین کاراترین روش است.

ممکن است به نظر رسد که اگر طول گام اولیه  $\delta$  در روشهای بازه یکسان یا بخش طلایی خیلی بزرگ باشد، جست و جوی خطی موفقیت آمیز نیست، یعنی  $f(0) > f(\delta)$  است. در واقع این نقص نشان می دهد که  $\delta$  اولیه مناسب نیست و باید آن قدر آن را کاهش داد تا  $f(0) < f(\delta)$  شود. با این کار، همگرایی روشهای مرتبه صفر می تواند از نظر عددی تقویت شود. روشهای عددی در برنامه های فرعی اکوال و گلد که در پیوست D آمده است، گنجانده شده اند.

جدول ۰.۲ جست و جوی بخش طلایی برای تابع  $f(\alpha) = 2 - 4\alpha + e^{\alpha}$  مثال ۰.۵

محصول کردن اولیه مینیمم		
شماره	گام آزمون	مقدار تابع
1	0.000 000	3.000 000
2	$\alpha_l \rightarrow 0.500 000$	1.648 721
3	$\alpha_u \rightarrow 1.309 017$	0.466 464
4	$\alpha_u \rightarrow 2.618 034$	5.236 610

کاهش بازه عدم اطمینان

شماره	$\alpha_l; [f(\alpha_l)]$	$\alpha_u; [f(\alpha_u)]$	$\alpha_b; [f(\alpha_b)]$	$\alpha_m; [f(\alpha_m)]$	$f$
1	0.500 000 [1.648 721]	1.309 017 [0.466 464]	1.809 017 [0.868 376]	2.618 034 [5.236 610]	2.118 034
2	0.500 000 [1.648 721]	1.000 000 [0.718 282]	1.309 017 [0.466 464]	1.809 017 [0.868 376]	1.309 017
3	1.000 000 [0.718 282]	1.309 017 [0.466 464]	1.500 000 [0.481 689]	1.809 017 [0.868 376]	0.809 017
4	1.000 000 [0.718 282]	1.190 983 [0.526 382]	1.309 017 [0.466 464]	1.500 000 [0.481 689]	0.500 000
5	1.190 983 [0.526 382]	1.309 017 [0.466 464]	1.381 966 [0.454 860]	1.500 000 [0.481 689]	0.309 017
6	1.309 017 [0.466 464]	1.381 966 [0.454 860]	1.427 051 [0.458 190]	1.500 000 [0.481 689]	0.190 983
7	1.309 017 [0.466 464]	1.354 102 [0.456 873]	1.381 966 [0.454 860]	1.427 051 [0.458 190]	0.118 034
8	1.354 102 [0.456 873]	1.381 966 [0.454 860]	1.399 187 [0.455 156]	1.427 051 [0.458 190]	0.072 949
9	1.354 102 [0.456 873]	1.371 323 [0.455 269]	1.381 966 [0.454 860]	1.399 187 [0.455 156]	0.045 085
10	1.371 323 [0.455 269]	1.381 966 [0.454 860]	1.388 544 [0.454 833]	1.399 187 [0.455 156]	0.027 864
11	1.381 966 [0.454 860]	1.388 544 [0.454 833]	1.392 609 [0.454 902]	1.399 187 [0.455 156]	0.017 221
12	1.381 966 [0.454 860]	1.386 031 [0.454 823]	1.388 544 [0.454 833]	1.392 609 [0.454 902]	0.010 643
13	1.381 966 [0.454 860]	1.384 479 [0.454 829]	1.386 031 [0.454 823]	1.388 544 [0.454 833]	0.006 57
14	1.384 479 [0.454 829]	1.386 031 [0.454 823]	1.386 991 [0.454 824]	1.388 544 [0.454 833]	0.004 065
15	1.384 479 [0.454 829]	1.385 438 [0.454 824]	1.386 031 [0.454 823]	1.386 991 [0.454 824]	0.002 512
16	1.385 438 [0.454 824]	1.386 031 [0.454 823]	1.386 398 [0.454 823]	1.386 991 [0.454 824]	0.001 553
17	1.386 031 [0.454 823]	1.386 398 [0.454 823]	1.386 624 [0.454 823]	1.386 991 [0.454 823]	0.000 960

$$\alpha^* = 0.5(1.386 398 + 1.386 624) = 1.386 511; f(\alpha^*) = 0.454 823.$$

## ۵.۳.۴۰ درون‌یابی چندجمله‌ای

روشهای مرتبهٔ صفر که قبلاً تشریح شد ممکن است در خلال جست و جوی خطی برای یافتن یک اندازه گام مناسب به تعداد بسیار زیادی ارزیابی تابع نیاز داشته باشند. در مسائل طراحی مهندسی واقعی، ارزیابی تابع کار رایانه‌ای قابل توجهی را می‌طلبد. بنابراین، روشهای مرتبهٔ صفر مانند جست و جوی بازهٔ یکسان برای بسیاری از کاربردهای عملی بازده خوبی ندارند. به جای ارزیابی مقدار تابع در گامهای آزمایشی متعدد، می‌توانیم یک منحنی از تعداد محدودی نقطه بگذرانیم. هر تابع پیوسته‌ای در یک بازه می‌تواند با برازاندن یک چندجمله‌ای با درجهٔ به اندازه کافی بالا تقریب دلخواه را به دست دهد و مینیم آن می‌تواند به طور دقیق به دست آید. نقطهٔ مینیم چندجمله‌ای تقریبی اغلب تخمین خوبی از مینیم دقیق تابع جست و جوی خط  $(\alpha)$  فراست. پس، درون‌یابی چندجمله‌ای می‌تواند یک روش کارا برای جست و جوی یک بعدی باشد.

۵.۳.۴.۱ برازاندن منحنی درجهٔ دوم. بیشتر مواقع تقریب تابع  $(\alpha)$  در بازهٔ عدم اطمینان با یک منحنی درجهٔ دو (یا، چندجمله‌ای درجهٔ دو) رضایت بخش است. اگرچه برای دقت بیشتر ممکن است چندجمله‌ای از درجات بالاتر ساخت، در این جا خود را به ساده‌ترین حالت یعنی یک چندجمله‌ای درجه دو محدود خواهیم کرد. برای درون‌یابی یک تابع با منحنی درجهٔ دو، نیاز به مقدار تابع در سه نقطهٔ متفاوت داریم تا سه ضریب چندجمله‌ای درجهٔ دو را به دست آوریم. باید همچنین فرض شود که تابع  $(\alpha)$  به اندازهٔ کافی هموار و تک‌حالتی، و بازهٔ اولیهٔ عدم اطمینان  $(\alpha_l, \alpha_u)$  معلوم است.

فرض کنید  $\alpha_l$  یک نقطهٔ میانی در بازهٔ  $(\alpha_l, \alpha_u)$ ، و  $f(\alpha_l)$ ،  $f(\alpha)$  و  $f(\alpha_u)$  مقادیر تابع در آن نقاط باشد. شکل ۵.۱۰ تابع  $f(\alpha)$  و تقریب درجه دو  $q(\alpha)$  آن را در بازهٔ  $(\alpha_l, \alpha_u)$  نشان می‌دهد.  $\bar{\alpha}$  نقطهٔ مینیم تابع  $q(\alpha)$  است، در حالی که  $\alpha^*$  نقطهٔ مینیم دقیق است. یک فرایند چرخه‌ای می‌تواند برای بهبود دادن  $\bar{\alpha}$  به سوی  $\alpha^*$  مورد استفاده قرار گیرد.

هر تابع درجهٔ دو  $q(\alpha)$  را می‌تواند به شکل عمومی زیر بیان کرد

$$q(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 \quad (5.29)$$

در حالی که  $a_0$ ،  $a_1$  و  $a_2$  ضرایب مجهولند. چون مقدار تابع  $q(\alpha)$  در نقاط  $\alpha_l$ ،  $\alpha$  و  $\alpha_u$  باید با مقدار تابع  $f(\alpha)$  در آن نقاط مساوی باشد، ما سه معادله و سه مجهول  $a_0$ ،  $a_1$  و  $a_2$  را به شکل

زیر داریم :

$$a_0 + a_1\alpha_l + a_2\alpha_l^2 = f(\alpha_l)$$

$$a_0 + a_1\alpha_i + a_2\alpha_i^2 = f(\alpha_i)$$

$$a_0 + a_1\alpha_u + a_2\alpha_u^2 = f(\alpha_u)$$

با حل دستگاه معادلات همزمان خطی برای به دست آوردن  $a_0$ ،  $a_1$  و  $a_2$  داریم

$$a_2 = \frac{1}{(\alpha_u - \alpha_i)} \left[ \frac{f(\alpha_u) - f(\alpha_l)}{(\alpha_u - \alpha_l)} - \frac{f(\alpha_i) - f(\alpha_l)}{(\alpha_i - \alpha_l)} \right] \quad (5.30)$$

$$a_1 = \frac{f(\alpha_i) - f(\alpha_l)}{(\alpha_i - \alpha_l)} - a_2(\alpha_l + \alpha_i)$$

$$a_0 = f(\alpha_l) - a_1\alpha_l - a_2\alpha_l^2$$

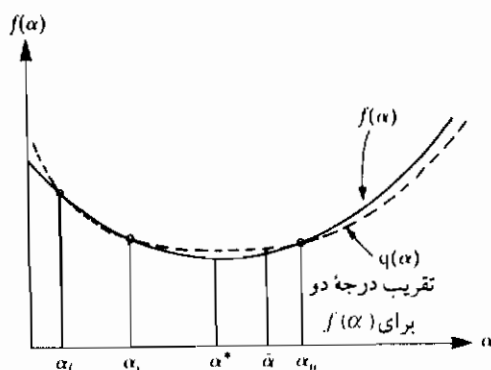
نقطه مینیمم  $\bar{\alpha}$  منحنی درجه دو  $q(\alpha)$  در معادله (۵.۲۹) با حل شرط لازم  $dq(\bar{\alpha})/d\alpha = 0$  و بررسی شرط کافی  $d^2q(\bar{\alpha})/d\alpha^2 > 0$  محاسبه می شود. پس داریم،

$$\bar{\alpha} = -\frac{1}{2a_2} a_1; \quad \text{if } \frac{d^2q}{d\alpha^2} = 2a_2 > 0 \quad (5.31)$$

یک فرآیند چرخه ای می تواند برای کوچک کردن بازه عدم اطمینان استفاده شود.

روش برازاندن منحنی درجه دو اکنون می تواند به شکل یک الگوریتم محاسباتی

ارائه شود :



شکل ۵.۱۰ تقریب درجه دو برای تابع  $f(\alpha)$

گام ۱. محل بازه عدم اطمینان  $(\alpha_i, \alpha_{ii})$  را با انتخاب یک عدد کوچک  $\delta$  مشخص کنید. هر روش مرتبه صفری که قبلاً بحث شد می‌تواند به کار رود.

گام ۲. فرض کنید  $\alpha_i$  یک نقطه میانی در بازه  $(\alpha_i, \alpha_{ii})$  بوده و  $f(\alpha_i)$  مقدار تابع  $f(\alpha)$  در نقطه  $\alpha_i$  باشد.

گام ۳. ضرایب  $a_{ii}, a_i$  و  $a_2$  را از معادله  $(5.30)$ ،  $\bar{\alpha}$  را از معادله  $(5.31)$ ، و  $f(\bar{\alpha})$  را محاسبه کنید.

گام ۴.  $\alpha_i$  را با  $\bar{\alpha}$  مقایسه کنید. اگر  $\alpha_i < \bar{\alpha}$  است به گام ۵a یا ۵b بروید. در غیر این صورت به گام ۶a یا ۶b بروید.

گام ۵a. اگر  $f(\alpha_i) < f(\bar{\alpha})$  است، آن گاه  $\alpha_i \leq \alpha^* \leq \bar{\alpha}$ . محدوده جدید بازه عدم اطمینان کاهش یافته عبارت است از  $\alpha'_i = \alpha_i$ ،  $\alpha'_{ii} = \bar{\alpha}$  و به گام ۷ بروید.

گام ۵b. اگر  $f(\alpha_i) > f(\bar{\alpha})$  است، آن گاه  $\alpha_i \leq \alpha^* \leq \alpha_{ii}$ . محدوده جدید بازه عدم اطمینان کاهش یافته عبارت است از  $\alpha'_i = \alpha_i$ ،  $\alpha'_{ii} = \alpha_{ii}$  و به گام ۷ بروید.

گام ۶a. اگر  $f(\alpha_i) < f(\bar{\alpha})$  است، آن گاه  $\bar{\alpha} \leq \alpha^* \leq \alpha_{ii}$ . محدوده جدید بازه عدم اطمینان کاهش یافته عبارت است از  $\alpha'_i = \bar{\alpha}$ ،  $\alpha'_{ii} = \alpha_{ii}$  و به گام ۷ بروید.

گام ۶b. اگر  $f(\alpha_i) > f(\bar{\alpha})$  است، آن گاه  $\alpha_i \leq \alpha^* \leq \alpha_i$ . محدوده جدید بازه عدم اطمینان کاهش یافته عبارت است از  $\alpha'_i = \bar{\alpha}$ ،  $\alpha'_{ii} = \alpha_i$  و به گام ۷ بروید.

گام ۷. اگر دو تخمین متوالی نقطه مینیم  $f(\alpha)$  به اندازه کافی به هم نزدیکند عملیات را متوقف کنید، در غیر این صورت علامت پریم را از روی  $\alpha'_i$ ،  $\alpha'_{ii}$  و  $\alpha'_{ii}$  برداشته، به گام ۲ برگردید.

مثال ۵.۶ مینیم سازی یک بعدی با درونیابی درجه دو. نقطه مینیم  $f(\alpha) = 2 - 4\alpha + e^{\alpha}$  را

با درونیابی چندجمله‌ای بیابید. برای محصور کردن ابتدایی نقطه مینیم از روش جست و جوی بخش طلایی با  $\delta = 0.5$  استفاده کنید.

حل.

چرخه ۱. از مثال ۵.۵ اطلاعات زیر معلوم است.

$$\begin{array}{lll} \alpha_i = 0.5 & \alpha_i = 1.309\,017 & \alpha_{ii} = 2.618\,034 \\ f(\alpha_i) = 1.648\,721 & f(\alpha_i) = 0.466\,464 & f(\alpha_{ii}) = 5.236\,610 \end{array}$$

ضرایب  $a_{ii}$ ،  $a_i$  و  $a_2$  از معادله‌های  $(5.30)$  محاسبه می‌شوند

$$a_2 = \frac{1}{1.30902} \left( \frac{3.5879}{2.1180} - \frac{-1.1823}{0.80902} \right) = 2.410$$

$$a_1 = \frac{-1.1823}{0.80902} - (2.41)(1.80902) = -5.821$$

$$a_0 = 1.648271 - (-5.821)(0.50) - 2.41(0.25) = 3.957$$

بنابراین از معادله (۵.۳۱)،  $\bar{\alpha} = 1.2077$  و  $f(\bar{\alpha}) = 4$  دقت کنید که  $\bar{\alpha} < \alpha_1$  و  $f(\alpha_1) < f(\bar{\alpha})$ . پس، محدوده جدید بازه عدم اطمینان کاهش یافته عبارت است از  $\alpha'_1 = \alpha_1 = 1.309017$  و  $\alpha'_u = \alpha_u = 2.618034$ ،  $\alpha'_l = \bar{\alpha} = 1.2077$ . چرخه ۲. ما حدود جدیدی برای بازه عدم اطمینان داریم، نقطه میانی و مقادیر تابع در آن نقاط عبارتند از

$$\begin{aligned} \alpha_l &= 1.2077, & \alpha_1 &= 1.309017, & \alpha_u &= 2.618034 \\ f(\alpha_l) &= 0.5149, & f(\alpha_1) &= 0.466464, & f(\alpha_u) &= 5.23661 \end{aligned}$$

ضرایب  $a_0$ ،  $a_1$  و  $a_2$  مانند قبل محاسبه می شوند،  $a_0 = 5.7129$ ،  $a_1 = -7.8339$  و  $a_2 = 2.9228$ . پس  $\bar{\alpha} = 1.34014$  و  $f(\bar{\alpha}) = 0.4590$ .

از مقایسه با جواب بهین که در جدول ۵.۲ داده شده، مشاهده می کنیم که  $\bar{\alpha}$  و  $f(\bar{\alpha})$  به جواب نهایی کاملاً نزدیکند. یک چرخه بیشتر می تواند یک تقریب خوب از بهین بدهد. دقت کنید که تنها ۵ بار محاسبه تابع برای یک اندازه گام بهین نسبتاً دقیق برای  $f(\alpha)$  لازم است. بنابراین، استفاده از درون یابی چندجمله ای می تواند برای بهینه سازی یک بعدی کاملاً کارا باشد.

**مثال ۵.۷ بهینه سازی یک بعدی با درون یابی درجه دوی جایگزین.** نقطه مینیمم تابع  $f(\alpha) = 2 - 4\alpha + e^{\alpha}$  را، با استفاده از  $f(0)$ ،  $f'(\alpha)$  و  $f(\alpha_u)$  برای برازاندن یک منحنی درجه دو، پیدا کنید. در حالی که  $\alpha_u$  حد بالایی نقطه مینیمم  $f(\alpha)$  است.

**حل.** فرض کنید معادله عمومی یک منحنی درجه دو  $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$  باشد که  $a_0$ ،  $a_1$  و  $a_2$  ضرایب مجهول هستند. حد بالایی  $\alpha^*$  را از جست و جوی بخش طلایی 2.618034 انتخاب می کنیم. با استفاده از تابع داده شده  $f(\alpha)$ ، داریم  $f(0) = 3$ ،  $f(2.618034) = 5.23661$  و  $f'(0) = -3$ . حال مانند گذشته، برای به دست آوردن سه ضریب مجهول  $a_0$ ،  $a_1$  و  $a_2$  سه معادله زیر را داریم.

$$a_0 = f(0) = 3$$

$$a_0 + 2.618\,034a_1 + 6.854a_2 = f(2.618\,034) = 5.236\,61$$

$$a_1 = f'(0) = -3$$

با حل همزمان سه معادله داریم،  $a_0 = 3$ ،  $a_1 = -3$  و  $a_2 = 1.4722$ . نقطهٔ مینیمم منحنی سهموی با استفاده از معادله  $(5.31)$  عبارت است از  $\bar{\alpha} = 1.0189$  و  $f(\bar{\alpha}) = 0.69443$ . این تخمین می‌تواند مانند گذشته با استفاده از چرخه بهبود یابد.

دقت کنید که در این جا تخمین نقطهٔ مینیمم تابع  $f(\alpha)$  تنها با دوبار محاسبهٔ تابع پیدا شد. برای مسائل چندبعدی برای تعیین مقدار شیب در  $\alpha = 0$  چون شیب  $f'(0) = c^{(k)} \cdot d^{(k)}$  معلوم است، نیازی به محاسبه نیست.

#### ۵.۴ روش تندترین کاهش

در بخش گذشته فرض کردیم که یک جهت جست و جو در فضای طرّاحی معلوم است و ما به مسألهٔ تعیین اندازهٔ گام پرداختیم. در این بخش و بخشهای آینده ما سؤال تعیین جهت جست و جوی  $d$  را مطرح خواهیم کرد. ویژگی اساسی  $d$  باید این باشد که تابع هزینه در صورت هر حرکت کوچکی در آن امتداد کاهش یابد. این جهت کاهشی نامیده خواهد شد. روشهای متعددی به منظور تعیین جهت کاهشی برای مسائل بهینه سازی نامقیّد در دسترسند. روش تندترین کاهش یا روش گرادیان ساده ترین، قدیمی ترین و شاید شناخته شده ترین روش عددی برای بهینه سازی نامقیّد است. فلسفهٔ روش، که توسط کوچی<sup>۱</sup> در ۱۸۴۷ معرفی شد، عبارت است از یافتن جهت  $d$  در چرخهٔ فعلی که در آن امتداد تابع  $f(x)$  حداقل به طور محلی با بیشترین سرعت کاهش یابد. به خاطر همین فلسفه است که این روش فن جست و جوی تندترین کاهش نامیده می‌شود. همچنین، خواص بردار گرادیان در فرآیند چرخه استفاده می‌شود که دلیل نام دیگر آن، یعنی: روش گرادیان است. روش تندترین کاهش یک روش مرتبهٔ اول است، زیرا فقط گرادیان تابع هزینه محاسبه و برای یافتن جهت جست و جو استفاده می‌شود. بعداً، ما روشهای مرتبهٔ دورا که در آنها از هسیان تابع برای تعیین جهت جست و جو استفاده می‌شود بحث خواهیم کرد. ابتدا و قبل از این که الگوریتمی برای روش بیان کنیم، به مطالعهٔ خواص بردار گرادیان یک تابع اسکالر خواهیم پرداخت.

## ۵.۴.۱ خواص بردار گرادیان

بردار گرادیان تابع اسکالر  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  در فصل (۳) تعریف شد. برای یادآوری، آن را دوباره به عنوان یک بردار ستونی تعریف می کنیم که عبارت است از :

$$\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T = c \quad (5.32)$$

برای ساده سازی علامت، از بردار  $c$  برای نشان دادن گرادیان تابع اسکالر  $f(x)$  استفاده خواهیم کرد، یعنی  $c_i = \partial f / \partial x_i$ . در این جا اندیس بالا را برای نشان دادن نقطه ای که در آن بردار محاسبه شده، به کار می بریم؛ مانند

$$c^{(k)} = c(x^{(k)}) = \left[ \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i} \right]^T \quad (5.33)$$

بردار گرادیان خواص متعددی دارد که در روش تندترین کاهش استفاده می شود. چون اثبات این خواص بسیار سازنده است، آنها را در این جا مطرح می کنیم.

**خاصیت ۱.** بردار گرادیان  $c$  یک تابع  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  در نقطه

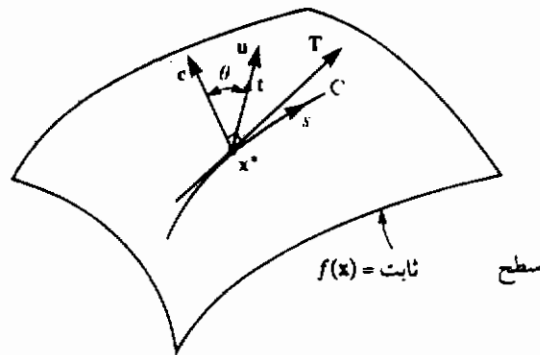
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.} \quad \text{بر صفحه مماس بر سطح} \quad x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$
 عمود است.

این یک خاصیت مهم بردار گرادیان است که در شکل ۵.۱۱ به صورت ترسیمی

نشان داده شده است. در شکل،  $f(x) = \text{constant}$ ؛  $x^*$  نقطه ای روی سطح  $C$ ؛ یک منحنی روی سطح که از نقطه  $x^*$  می گذرد،  $T$  بردار مماس بر منحنی  $C$  در نقطه  $x^*$ ،  $u$  بردار یکه، و  $c$  بردار گرادیان در  $x^*$  نشان داده شده است. براساس خاصیت فوق، بردار  $c$  و  $T$  برهم عمودند، یعنی ضرب نقطه ای آنها صفر است،  $c \cdot T = 0$ .

**اثبات.** برای نشان دادن این موضوع، یک منحنی  $C$  روی سطح  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  در نظر می گیریم، همچنان که در شکل ۵.۱۱ نشان داده شده است. فرض کنید منحنی از نقاط  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  بگذرد. همچنین، فرض کنید  $s$  پارامتری در امتداد  $C$  باشد. آن گاه بردار مماس یکه  $T$  در امتداد  $C$  در نقطه  $x^*$  به صورت زیر بیان می شود

$$T = \left[ \frac{\partial x_1}{\partial s} \quad \frac{\partial x_2}{\partial s} \quad \dots \quad \frac{\partial x_n}{\partial s} \right]^T \quad (\text{الف})$$



شکل ۵.۱۱ بردار گرادیان برای سطح ثابت  $f(x)$  در نقطه  $x^*$

چون عدد ثابت  $f(x)$ ، مشتق  $f$  در امتداد  $C$  صفر است، یعنی

$$\frac{df}{ds} = 0 \quad (\text{مشتق سویی } f)$$

یا با استفاده از قاعده زنجیره ای مشتق

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial s} = 0 \quad (\text{ب})$$

با نوشتن معادله (ب) به شکل برداری و مشخص کردن  $\partial f / \partial x_i$  و  $\partial x_i / \partial s$  (از معادله الف) به عنوان مؤلفه های بردار گرادیان و بردار مماس یک، داریم

چون ضرب نقطه ای بردار گرادیان  $c$  در بردار مماسی  $T$  صفر است، بردارها برهم عمودند. اما  $T$  هر بردار مماسی در  $x^*$  است، پس  $c$  عمود بر صفحه مماسی سطح عدد ثابت  $f(x)$  در نقطه  $x^*$  است.

خاصیت ۲. خاصیت دوم این است که گرادیان نشان دهنده جهت بیشترین نرخ افزایش تابع  $f(x)$  در نقطه  $x^*$  است.

اثبات. برای نشان دادن این خاصیت، فرض کنید  $u$  یک بردار یک در جهتی باشد که مماس بر سطح نباشد. این موضوع در شکل ۵.۱۱ نشان داده شده است. اگر

یک پارامتر در امتداد  $\mathbf{u}$  باشد، مشتق  $f(\mathbf{x})$  در امتداد  $\mathbf{u}$  در نقطه  $\mathbf{x}^*$  (یعنی مشتق مربوط به جهت  $f$ ) عبارت است از

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{\varepsilon} \quad (\text{پ})$$

که در آن  $\varepsilon$  یک عدد کوچک است. با استفاده از بسط سری تیلور

$$f(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \varepsilon \left[ u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] + O(\varepsilon^2)$$

که  $\mathbf{u}$  ها مؤلفه‌های بردار یک  $\mathbf{u}$  و  $O(\varepsilon^2)$  جملات از درجه  $\varepsilon^2$  هستند. معادله گذشته را دوباره به شکل زیر می‌نویسیم

$$f(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) = \varepsilon \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + O(\varepsilon^2) \quad (\text{ت})$$

با جای‌گزینی معادله (ت) در معادله (پ) و گرفتن حد، داریم

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{c}^T \mathbf{u} \quad (\text{ث})$$

با استفاده از تعریف ضرب نقطه‌ای برای معادله (ث) داریم

$$\frac{df}{dt} = \|\mathbf{c}\| \|\mathbf{u}\| \cos \theta \quad (\text{ج})$$

که  $\theta$  زاویه بین بردارهای  $\mathbf{c}$  و  $\mathbf{u}$  است. طرف راست معادله (ج) وقتی  $\theta = 0$  یا  $180^\circ$  باشد مقدار اکستروم (مماکزیم، مینیم) خواهد داشت. وقتی  $\theta = 0$  است، بردار  $\mathbf{u}$  در امتداد  $\mathbf{c}$  و  $\cos \theta = 1$  است. بنابراین، از معادله (ج)، وقتی که  $\theta = 0$  باشد  $df/dt$  نشان‌دهنده بیشترین نرخ افزایش  $f(\mathbf{x})$  است. به طور مشابه، وقتی  $\theta = 180^\circ$  است، بردار  $\mathbf{u}$  خلاف جهت  $\mathbf{c}$  است. بنابراین، از معادله (ج)، وقتی  $\theta = 180^\circ$  باشد  $df/dt$  نشان‌دهنده بیشترین نرخ کاهش  $f(\mathbf{x})$  است.

بنابر خاصیت قبلی بردار گرادیان، اگر بخواهیم از صفحه عدد ثابت  $f(\mathbf{x})$  دور شویم، تابع در امتداد بردار گرادیان نسبت به امتدادهای دیگر با سرعت بیشتری افزایش پیدا می‌کند. در شکل ۱۱.۵، حرکت در امتداد جهت  $\mathbf{c}$  در مقایسه با حرکت مشابهی در امتداد  $\mathbf{u}$  افزایش بیشتری را در تابع سبب می‌شود. البته، هر حرکت کوچکی در امتداد  $T$  تغییری در تابع ایجاد

نمی‌کند، زیرا  $T$  مماس بر سطح است.

خاصیت ۳. بیشترین نرخ تغییرات  $f(x)$  در نقطه  $x^*$  مقدار بردار گرادیان است.

اثبات. چون  $u$  یک بردار یکه است، بیشترین مقدار  $df/dt$  از معادله (ج) عبارت است از

$$\max \left| \frac{df}{dt} \right| = \|c\|$$

اما برای  $\theta = 0$ ،  $u$  عبارت است از جهت بردار گرادیان. بنابراین، مقدار گرادیان نشان دهنده بیشترین نرخ تغییرات  $f(x)$  می‌باشد.

این خواص نشان می‌دهند که بردار گرادیان در هر نقطه  $x^*$  نشان دهنده جهت بیشترین افزایش  $f(x)$  است و نرخ افزایش، مقدار بردار است. بنابراین گرادیان جهت تندترین افزایش برای تابع  $f(x)$  نامیده می‌شود.

**مثال ۵.۸ نشان دادن خواص بردار گرادیان.** خواص بردار گرادیان را برای تابع  $f(x) = 25x_1^2 + x_2^2$  در نقطه  $x^{(0)} = (0.6, 4)$  نشان دهید.

**حل.** شکل ۱۲. ۵. در صفحه  $x_1 - x_2$  خطوط هزینه ثابت ۲۵ و ۱۰۰ تابع  $f$  را نشان می‌دهد. مقدار تابع در  $(0.6, 4)$  عبارت است از  $f(0.6, 4) = 25$ . گرادیان تابع در  $(0.6, 4)$  عبارت است از

$$\begin{aligned} c &= \nabla f(0.6, 4) = (\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2) \\ &= (50x_1, 2x_2) = (30, 8) \\ \|c\| &= \sqrt{30^2 + 8^2} = 31.04835 \end{aligned}$$

بنابراین یک بردار یکه در امتداد گرادیان به شکل زیر است

$$C = c / \|c\| = (0.966235, 0.257663)$$

با استفاده از تابع داده شده، یک بردار مماس بر منحنی در نقطه  $(0.6, 4)$  عبارت است از

$$t = (-4, 15)$$

این بردار با استفاده از معادله منحنی  $25x_1^2 + x_2^2 = 25$  و نوشتن بردار مماس به شکل  $(\partial x_1 / \partial s, \partial x_2 / \partial s)$  که  $s$  پارامتری در امتداد منحنی است، به دست آمده است. بردار مماس یکه عبارت است از

$$T = t / \|t\| = (-0.257663, 0.966235)$$

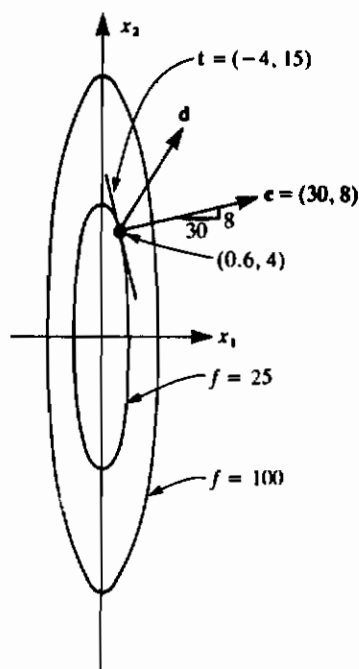
خاصیت ۱. اگر گرادیان بر مماس عمود باشد، آن گاه  $C \cdot T = 0$ . این در حقیقت برای داده‌های قبلی درست است. ما همچنین می‌توانیم شرطی را که اگر دو خط عمود باشند آن گاه  $m_1 m_2 = -1$  است استفاده کنیم که در آن  $m_1$  و  $m_2$  شیب دو خط است. برای محاسبه شیب مماس، معادله منحنی  $25x_1^2 + x_2^2 = 25$  یا  $x_2 = 5\sqrt{1 - x_1^2}$  را به کار می‌بریم. بنابراین، شیب مماس در نقطه  $(0.6, 4)$  عبارت است از

$$m_1 = dx_2/dx_1 = -5x_1/\sqrt{1 - x_1^2} = -3.75$$

شیب بردار گرادیان عبارت است از  $m_2 = \frac{30}{8} = 3.75$ . پس  $m_1 m_2 = -1$  در حقیقت است و دو خط برهم عمودند.

خاصیت ۲. یک جهت دلخواه

$$d = (0.501\ 034, 0.865\ 430)$$



شکل ۵.۱۲ خطوط هزینه ثابت تابع  $f = 25x_1^2 + x_2^2$  برای  $f = 25, 100$

در نقطه  $(0.6, 4)$  مانند شکل ۵.۱۲ در نظر بگیرید. اگر  $C$  جهت تندترین افزایش باشد، آن گاه تابع باید در امتداد  $C$  با سرعت بیشتری نسبت به امتداد  $d$  افزایش یابد. فرض کنید اندازه گام  $\alpha = 0.1$  باشد، دو نقطه زیر را در امتداد  $C$  و  $d$  محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} + \alpha C \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 \\ 4.0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0.966 \ 235 \\ 0.257 \ 663 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.696 \ 623 \ 5 \\ 4.025 \ 766 \ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{x}^{(0)} + \alpha d \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 \\ 4.0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0.501 \ 034 \\ 0.865 \ 430 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.650 \ 103 \ 4 \\ 4.086 \ 5 \ 430 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

اکنون تابع را در این نقاط محاسبه کرده و آنها را با هم مقایسه می کنیم

$$f(\mathbf{x}^{(1)}) = 28.3389$$

$$f(\mathbf{x}^{(2)}) = 27.2657$$

چون  $f(\mathbf{x}^{(1)}) > f(\mathbf{x}^{(2)})$ ، تابع در امتداد  $C$  با سرعت بیشتری افزایش پیدا می کند تا در امتداد  $d$ .

خاصیت ۳. اگر مقدار بردار گرادیان نشان دهنده بیشترین نرخ تغییرات  $f(\mathbf{x})$  باشد، آن گاه،  $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) > (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ ،  $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) = 964.0$  و  $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = 21.9545$ . بنابراین، بردار گرادیان این خاصیت را نیز برآورده می کند.

دقت کنید که دو خاصیت آخر فقط به طور محلی معتبرند، یعنی فقط در همسایگی کوچک نقطه ای که گرادیان محاسبه شده است.

از خواص بردار گرادیان می توان برای تعریف یک الگوریتم چرخه ای برای مسائل بهینه سازی نامقید استفاده کرد. جهت بیشترین کاهش تابع هزینه در جهت منفی گرادیانش در نقطه داده شده  $\mathbf{x}$  می باشد. هر حرکت کوچک در جهت منفی گرادیان به بیشترین نرخ کاهش محلی تابع هزینه منجر می شود. پس منفی بردار گرادیان جهت تندترین کاهش را برای تابع هزینه نشان می دهد. این نتیجه در قضیه زیر خلاصه شده است.

**نضیه ۵.۱ جهت تندترین کاهش.** فرض کنید  $f(x)$  تابع مشتق پذیری نسبت به  $x$  باشد.

آن گاه جهت تندترین کاهش  $f(x)$  در هر نقطه عبارت است از

$$d = -c, \quad \text{یا} \quad d_i = -c_i = \frac{-\partial f}{\partial x_i}; \quad i = 1 \text{ to } n \quad (5.34)$$

معادله (۵.۳۴) جهت تغییر در فضای طراحی را برای استفاده در معادله (۵.۴)

می دهد. براساس بحث گذشته، الگوریتم تندترین کاهش به شکل زیر بیان می شود.

**گام ۱.** طرح اولیه  $x^{(0)}$  را تخمین بزنید و شمارنده چرخه  $k = 0$  قرار دهید. یک پارامتر همگرایی  $\varepsilon > 0$  انتخاب کنید.

**گام ۲.** گرادیان  $f(x)$  را در نقطه  $x^{(k)}$  از  $c^{(k)} = \nabla f(x^{(k)})$  محاسبه کنید. مقدار  $\|c^{(k)}\|$  را نیز حساب کنید. اگر  $\|c^{(k)}\| < \varepsilon$ ، آن گاه فرآیند چرخه را متوقف کنید و  $x^* = x^{(k)}$  نقطه مینیمم است. در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

**گام ۳.** فرض کنید جهت جست و جو در نقطه فعلی  $x^{(k)}$  عبارت باشد از  $d^{(k)} = -c^{(k)}$ .

**گام ۴.** یک اندازه گام  $\alpha_k$  محاسبه کنید که  $(x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)})$  فرما مینیمم کند. برای تعیین  $\alpha_k$  جست و جوی یک بعدی استفاده می شود.

**گام ۵.** طراحی را از رابطه  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$  روز آمد کنید.  $k = k + 1$  قرار داده و به گام ۲ بروید.

پنداره اصلی روش تندترین کاهش بسیار ساده است. با یک تخمین اولیه برای طرح مینیمم شروع می کنیم. جهت تندترین کاهش را در آن نقطه محاسبه می کنیم. اگر جهت غیر صفر باشد، در آن جهت تاجایی که ممکن است حرکت می کنیم تا تابع هزینه مینیمم شود. در نقطه طراحی جدید جهت تندترین کاهش را دوباره محاسبه کرده و تمامی فرآیند را تکرار می کنیم. دقت کنید چون  $d = -c$ ، شرط کاهش نامعادله (۵.۸) به طور خودکار برآورده شده است، چون  $c \cdot d = -\|c\|^2 < 0$ .

جالب است توجه کنید که جهتهای تندترین کاهش متوالی بر یکدیگر عمودند، یعنی

$$c^{(k)} \cdot c^{(k+1)} = 0 \quad (5.35)$$

این موضوع می تواند با استفاده از شرایط لازم به دست آوردن اندازه گام بهین یسادیگی نشان داده شود. در گام ۴ الگوریتم، لازم است  $\alpha_k$  را برای مینیمم ساختن  $f(x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)})$  محاسبه

کنیم. شرط لازم  $df/d\alpha_k = 0$  است. با استفاده از قانون مشتق زنجیره‌ای، داریم

$$\frac{df(\mathbf{x}^{(k+1)})}{d\alpha_k} = \left[ \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k+1)})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \frac{\partial \mathbf{x}^{(k+1)}}{\partial \alpha_k}$$

که رابطه زیر را می‌دهد

$$\mathbf{c}^{(k+1)} \cdot \mathbf{d}^{(k)} = 0, \quad \text{یا} \quad \mathbf{c}^{(k+1)} \cdot \mathbf{c}^{(k)} = 0 \quad (5.36)$$

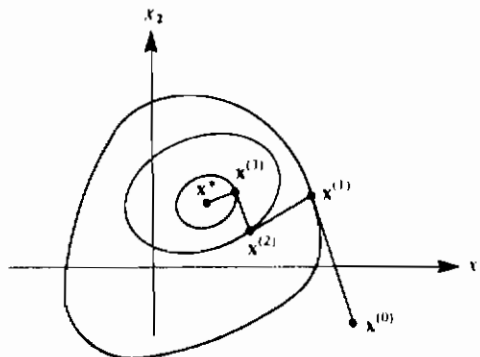
زیرا

$$\mathbf{c}^{(k+1)} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k+1)})}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \mathbf{x}^{(k+1)}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}) = \mathbf{d}^{(k)}$$

در حالت دوبعدی،  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  است. شکل ۵.۱۳ یک دید از فضای متغیرهای طراحی است. منحنیهای بسته در شکل، ترازهای تابع هزینه  $f(\mathbf{x})$  است. شکل جهتهای تندترین کاهش متعددی را که برهم عمودند، نشان می‌دهد.

**۵.۴.۲.۱ معیار توقف جست و جوی خطی.** اغلب برای انجام جست و جوی خطی در مسائل چندبعدی روشهای عددی مینیم سازی یک بعدی استفاده می‌شود. بسیاری از مواقع روشهای عددی برای اندازه گام یک مقدار تقریبی یا غیر دقیق می‌دهند. پس، برای تصمیم در مورد دقت یک روش عددی معیار توقف جست و جوی خطی در محاسبه اندازه گام کارساز است. برای مقدار دقیق اندازه گام رابطه (۵.۳۶) باید برقرار باشد، یعنی

$$\mathbf{c}^{(k+1)} \cdot \mathbf{d}^{(k)} = 0 \quad (5.37)$$



شکل ۵.۱۳ مسیرهای تندترین کاهش متعامد

که  $c^{(k+1)}$  گرادیان در  $x^{(k+1)}$  و  $d^{(k)}$  جهت حرکت در چرخه قبلی است. به دلیل خطاهای گرد کردن و قطع کردن<sup>۱</sup> در محاسبات رایانه ای، معیار توقف جست و جوی خطی معادله (۵.۳۷) به طور صریح برآورده نمی شود؛ با این همه، آن یک نشانه از دقت محاسبه عددی اندازه گام است. دقت کنید که معیار توقف جست و جوی خطی به چگونگی محاسبه جهت کاهش  $d$  بستگی ندارد.

**مثال ۵.۹ استفاده از الگوریتم تندترین کاهش.** تابع  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$  را با استفاده از روش تندترین کاهش و با شروع از نقطه  $(1, 0)$  مینیمم کنید.

حل. برای حل مسأله، گامهای الگوریتم تندترین کاهش را دنبال می کنیم.

۱. طراحی شروع عبارت است از  $x^{(0)} = (1, 0)$ .

۲.  $c^{(0)} = (2x_1 - 2x_2, 2x_2 - 2x_1) = (2, -2)$ ;  $\|c^{(0)}\| = 2\sqrt{2} \neq 0$ .

۳.  $d^{(0)} = -c^{(0)} = (-2, 2)$ .

۴.  $\alpha$  را طوری محاسبه می کنیم که  $f(x^{(0)} + \alpha d^{(0)})$  مینیمم شود که در آن  $x^{(0)} + \alpha d^{(0)} = (1 - 2\alpha, 2\alpha)$ .

$$\begin{aligned} f(x^{(0)} + \alpha d^{(0)}) &= (1 - 2\alpha)^2 + (2\alpha)^2 - 2(1 - 2\alpha)(2\alpha) \\ &= 16\alpha^2 - 8\alpha + 1 = f(\alpha) \end{aligned}$$

چون این یک تابع ساده از  $\alpha$  است، ما می توانیم برای به دست آوردن طول گام بهین از شرایط لازم و کافی استفاده کنیم. در حالت کلی باید جست و جوی یک بعدی عددی برای محاسبه  $\alpha$  استفاده شود.  $\alpha$  را با استفاده از روش تحلیلی محاسبه می کنیم، داریم

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 0; \quad 32\alpha - 8 = 0 \text{ or } \alpha_0 = 0.25$$

$$\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2} = 32 > 0.$$

بنابراین، شرط کفایت برای مینیمم حاصل شده است.

۵. طراحی  $(x^{(0)} + \alpha_0 d^{(0)})$  را روز آمد می کنیم:

$$x_1^{(1)} = 1 - 0.25(2) = 0.5$$

$$x_2^{(1)} = 0 + 0.25(2) = 0.5$$

با استفاده از عبارت گام ۲ مقدار  $c^{(1)}$  را به دست می آوریم، می بینیم که  $c^{(1)} = (0, 0)$  که معیار توقف را برآورده می کند. بنابراین،  $(0.5, 0.5)$  یک نقطهٔ مینیمم برای مسأله داده شده است.

مسألهٔ قبلی بسیار ساده است و نقطهٔ بهین تنها با یک چرخه به دست آمد. این امر بدین خاطر است که عدد شرطی هسیان تابع هزینه یک است (عدد شرطی یک عدد اسکالر مربوط به یک ماتریس است؛ به بخش B.8 از پیوست B مراجعه کنید). در چنین حالتی، روش تندترین کاهش با هر نقطهٔ شروعی تنها در یک چرخه همگرا می شود. در حالت کلی، الگوریتم تا قبل از رسیدن به یک بهین قابل قبول به چرخه های متعددی نیاز دارد.

**مثال ۵.۱۰ استفاده از الگوریتم تندترین کاهش** تابع

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

تندترین کاهش و با طراحی شروع  $(2, 4, 10)$  مینیمم کنید. پارامتر همگرایی  $\varepsilon$  را برابر  $0.005$  در نظر بگیرید. با جست و جوی بخش طلایی و با اندازه گام  $\delta = 0.05$  و دقت  $0.0001$  یک جست و جوی خطی انجام دهید.

**حل.**

۱. فرض کنیم  $\nabla f = (2x_1 + 2x_2, 4x_2 + 2x_1 + 2x_3, 4x_3 + 2x_2)$  باشد.

$$\text{در این صورت، } c^{(0)} = (12, 40, 48) \text{ و } \|c^{(0)}\| = \sqrt{4048} = 63.6 > \varepsilon.$$

$$2. \quad d^{(0)} = -c^{(0)} = (-12, -40, -48).$$

۳.  $\alpha_i$  را با جست و جوی بخش طلایی برای مینیمم کردن  $f(x^{(0)} + \alpha d^{(0)})$  محاسبه می کنیم؛  $\alpha_i = 0.1587$ .

۴. طراحی را روز آمد می کنیم  $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_i d^{(0)}$ :

$$x^{(1)} = (0.0956, -2.348, 2.381)$$

$$5. \quad \|c^{(1)}\| = 7.952 > \varepsilon, \quad c^{(1)} = (-4.5, -4.438, 4.828).$$

دقت کنید که  $c^{(1)} \cdot d^{(0)} = 0$  و این نشان دهندهٔ معیار توقف جست و جوی خطی است. در الگوریتم تندترین کاهش باید تا برآورده شدن معیار همگرایی گامها تکرار

جدول ۵.۳ حل بهین مثال ۵.۱۰ با برنامه تندترین کاهش

شمار	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x)$	$\alpha$	$\ e\ $
1	2.000 00E + 00	4.000 00E + 00	1.000 00E + 01	3.320 00E + 02	1.587 18E - 01	6.362 39E + 01
2	9.538 70E - 02	-2.348 71E + 00	2.381 55E + 00	1.075 03E + 01	3.058 72E - 01	7.959 22E + 00
3	1.473 84E + 00	-9.903 42E - 01	9.045 62E - 01	1.059 36E + 00	1.815 71E - 01	2.061 42E + 00
4	1.298 26E + 00	-1.134 77E + 00	6.072 28E - 01	6.737 57E - 01	6.499 89E - 01	8.139 10E - 01
5	1.085 73E + 00	-6.615 14E - 01	5.036 40E - 01	4.585 34E - 01	1.905 88E - 01	1.217 29E + 00
6	9.240 28E - 01	-7.630 36E - 01	3.718 42E - 01	3.172 18E - 01	5.880 53E - 01	5.631 54E - 01
7	7.346 84E - 01	-4.922 94E - 01	3.946 01E - 01	2.240 07E - 01	1.938 77E - 01	8.193 77E - 01
8	6.406 97E - 01	-5.484 01E - 01	2.794 74E - 01	1.589 46E - 01	5.725 54E - 01	3.991 41E - 01
9	5.350 08E - 01	-3.461 39E - 01	2.673 96E - 01	1.133 73E - 01	1.946 60E - 01	5.775 45E - 01
10	4.614 78E - 01	-3.890 14E - 01	1.939 50E - 01	8.091 74E - 02	5.697 67E - 01	2.848 37E - 01
11	3.789 02E - 01	-2.493 07E - 01	1.952 19E - 01	5.783 10E - 02	1.946 01E - 01	4.118 95E - 01
12	3.284 64E - 01	-2.786 95E - 01	1.402 91E - 01	4.131 41E - 02	5.720 88E - 01	2.033 39E - 01
13	2.715 19E - 01	-1.772 81E - 01	1.381 32E - 01	2.949 40E - 02	1.944 39E - 01	2.947 10E - 01
14	2.348 72E - 01	-1.987 04E - 01	9.963 96E - 02	2.104 99E - 02	5.726 50E - 01	1.451 12E - 01
15	1.934 49E - 01	-1.266 69E - 01	9.898 06E - 02	1.502 33E - 02	1.944 57E - 01	2.104 30E - 01
16	1.674 77E - 01	-1.418 72E - 01	7.125 41E - 02	1.071 97E - 02	5.717 77E - 01	1.035 80E - 01
17	1.381 96E - 01	-9.039 73E - 02	7.052 67E - 02	7.653 62E - 03	1.945 34E - 01	1.500 77E - 01
18	1.195 99E - 01	-1.012 63E - 01	5.081 80E - 02	5.463 41E - 03	5.708 32E - 01	7.395 59E - 02
19	9.866 59E - 02	-6.460 51E - 02	5.039 27E - 02	3.901 56E - 03	1.945 71E - 01	1.070 16E - 01
20	8.541 14E - 02	-7.232 89E - 02	3.631 34E - 02	2.786 93E - 03	5.721 47E - 01	5.280 78E - 02
21	7.044 12E - 02	-4.608 67E - 02	3.597 26E - 02	1.989 46E - 03	1.943 20E - 01	7.653 97E - 02
22	6.097 61E - 02	-5.162 11E - 02	2.592 30E - 02	1.419 91E - 03	5.743 72E - 01	3.766 50E - 02
23	5.022 96E - 02	-3.284 70E - 02	2.566 47E - 02	1.012 41E - 03	1.942 24E - 01	5.469 15E - 02
24	4.347 74E - 02	-3.680 93E - 02	1.848 53E - 02	7.219 38E - 04	5.744 09E - 01	2.685 89E - 02
25	3.581 70E - 02	-2.341 88E - 02	1.830 00E - 02	5.148 07E - 04	1.943 79E - 01	3.901 03E - 02
26	3.099 71E - 02	-2.624 87E - 02	1.317 57E - 02	3.670 49E - 04	5.714 30E - 01	1.916 85E - 02
27	2.557 04E - 02	-1.673 48E - 02	1.305 84E - 02	2.621 04E - 04	1.944 75E - 01	2.776 37E - 02
28	2.213 38E - 02	-1.874 14E - 02	9.409 25E - 03	1.871 31E - 04	5.725 54E - 01	1.368 15E - 02
29	1.824 92E - 02	-1.193 96E - 02	9.321 00E - 03	1.335 49E - 04	1.944 75E - 01	1.983 48E - 02
30	1.579 51E - 02	-1.337 52E - 02	6.714 12E - 03	9.530 54E - 05	5.718 73E - 01	9.766 61E - 03
31	1.302 74E - 02	-8.524 32E - 03	6.653 48E - 03	6.804 63E - 05	1.944 39E - 01	1.415 34E - 02
32	1.127 62E - 02	-9.547 93E - 03	4.793 62E - 03	4.856 93E - 05	5.726 20E - 01	6.970 01E - 03
33	9.296 91E - 03	-6.082 44E - 03	4.748 60E - 03	3.466 11E - 05	1.942 83E - 01	1.010 55E - 02

متغیرهای طراحی بهین به ترتیب:  $8.04787E - 03$ ،  $6.81319E - 03$  و  $3.42174E - 03$

مقدار تابع هزینه بهین:  $2.47347E - 05$

نرم گرادیان در بهین:  $4.97071E - 03$

تعداد کل ارزیابی تابع: 753.

شود. برای پیاده کردن گامهای الگوریتم تندترین کاهش، پوست D حاوی یک برنامه اصلی و دو برنامه فرعی فانک و گرید، که توسط استفاده کننده ارائه می شود، می باشد. تاریخچه چرخه های مسأله که توسط برنامه تهیه شد در جدول ۵.۳ داده شده است. مقدار تابع بهین 0.0 است و نقطه بهین عبارت است از (0.0, 0.0). دقت

کنید که برای رسیدن به نقطه بهین چرخه های متعدد و دفعات زیادی محاسبه تابع مورد نیاز است.

روش تندترین کاهش بسیار ساده و توانمند (همگرا) است. با این همه، نقایصی هم دارد. این نواقص عبارتند از:

۱. حتی اگر همگرایی روش تضمین شده باشد، ممکن است برای مینیمم سازی حتی یک شکل درجه دوی معین مثبت هم تعداد زیادی چرخه لازم باشد؛ یعنی روش برای همگرا شدن به نقطه بهین ممکن است بسیار کند باشد.
۲. اطلاعات چرخه قبل استفاده نمی شود. هر چرخه مستقل از سایر چرخه ها شروع می شود که ناکاراست.
۳. در هر چرخه برای تعیین جهت جست و جو فقط اطلاعات مرتبه یک استفاده می شود. این یک دلیل کند بودن همگرایی روش است که اگر تنها جست و جوی خطی غیر دقیق استفاده شده باشد می تواند بدتر هم شود. به علاوه، نرخ همگرایی بستگی به عدد شرطی هسیان تابع هزینه در نقطه بهین دارد. اگر عدد شرطی بزرگ باشد، نرخ همگرایی روش کند است.
۴. تجربه عملی کار با روش نشان داده است که در چند چرخه اولیه کاهش قابل توجهی در تابع هزینه به وجود می آید، ولی در چرخه های بعدی تابع هزینه بسیار کند کاهش می یابد.
۵. جهت تندترین کاهش (جهتی که تابع هزینه با سرعت بیشتری کاهش می یابد) ممکن است در یک دید محلی (در یک همسایگی کوچک) خوب باشد، ولی در یک دید فراگیر خوب نباشد. در روشهایی که در بخشهای بعدی بحث خواهد شد، سعی شده بعضی از این نواقص جبران شود.

#### ۵.۴.۳\* مقیاس بندی متغیرهای طرّاحی

نرخ همگرایی روش تندترین کاهش حتی برای یک تابع هزینه درجه دو حداکثر خطی است. شتاب بخشیدن به نرخ همگرایی روش تندترین کاهش به کمک مقیاس بندی متغیرهای طرّاحی امکان پذیر است. برای یک تابع هزینه درجه دو این امکان وجود دارد که متغیرهای طرّاحی را طوری مقیاس بندی کرد که عدد شرطی ماتریس هسیان با متغیرهای جدید طرّاحی، واحد شود. روش تندترین کاهش برای یک تابع درجه دو مثبت معین با عدد شرطی واحد تنها

جدول ۵.۴ حل بهین مثال ۵.۱۱ به روش تندترین کاهش:  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)$ ;  $f(\mathbf{x}) = 25x_1^2 + x_2^2$

شماره	$x_1$	$x_2$	$f(\mathbf{x})$	$\alpha$	$\ c\ $
1	1.000 00E + 00	1.000 00E + 00	2.600 00E + 01	2.003 29E - 02	5.004 00E + 01
2	-1.644 37E - 03	9.599 34E - 01	9.215 41E - 01	4.789 76E - 02	1.921 63E + 00
3	3.773 64E - 02	4.036 27E - 02	3.723 01E - 02	2.003 29E - 02	1.888 55E + 00
4	-6.205 22E - 05	3.874 55E - 02	1.501 31E - 03	4.815 11E - 01	7.755 31E - 02
5	1.431 89E - 03	1.432 69E - 03	5.331 03E - 05	2.003 29E - 02	7.165 18E - 02

متغیرهای طراحی بهین به ترتیب:  $-2.35450E - 06$  و  $1.37529E - 03$

مقدار تابع هزینه بهین:  $1.89157E - 06$

نرم گرادینان در بهین:  $2.75310E - 03$

تعداد دفعات ارزیابی تابع: 111

در یک چرخه همگرا می شود. برای به دست آوردن نقطه بهین برای متغیرهای طراحی اصلی می توان متغیرهای طراحی تبدیل یافته را مقیاس بندی معکوس کرد. فایده مقیاس بندی متغیرهای طراحی را با دو مثال زیر شرح خواهیم داد.

**مثال ۵.۱۱ اثر مقیاس بندی متغیرهای طراحی.** تابع  $f(x_1, x_2) = 25x_1^2 + x_2^2$  را به روش

تندترین کاهش و با طراحی شروع  $(1, 1)$  مینیمم کنید. چگونه متغیرهای طراحی را برای افزایش نرخ همگرایی مقیاس بندی می کنید؟

**حل.** مسأله را با برنامه رایانه ای روش تندترین کاهش (پیوست D) حل می کنیم.

تاریخچه فرآیند چرخه در جدول ۵.۴ داده شده است. به ناکارا بودن روش برای چنین

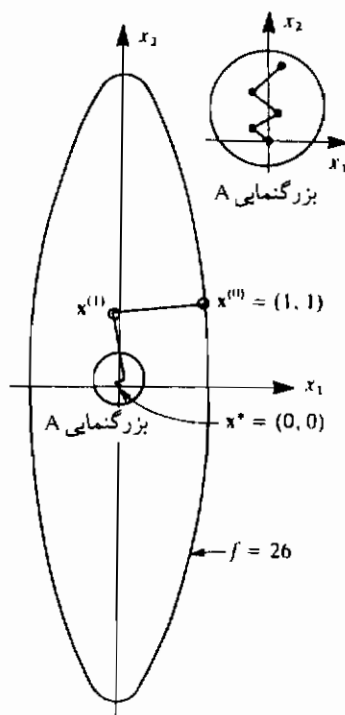
تابع هزینه درجه دوی ساده ای توجه کنید. شکل ۵.۱۴ خطوط هزینه ثابت تابع هزینه و

پیشرفت روش را از طراحی اولیه نشان می دهد. هسیان  $f(x_1, x_2)$  عبارت است از

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حال بیاییم متغیرهای طراحی جدید  $y_1$  و  $y_2$  را طوری تعریف کنیم که

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{y} \quad \text{در حالی که} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{50}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



شکل ۵.۱۴ تاریخچه چرخه برای مثال ۵.۱۱ با روش تندترین کاهش

دقت کنید که به طور کلی اگر همیان یک ماتریس قطری است، ما ممکن است از  $n$  تا  $i=1$  برای  $D_{ii} = 1 / \sqrt{H_{ii}}$  استفاده کنیم پس،  $x_1 = y_1 / \sqrt{50}$  و  $x_2 = y_2 / \sqrt{2}$

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$$

با روش تندترین کاهش نقطه مینیمم  $f(y_1, y_2)$  می‌تواند در یک چرخه به دست آید. نقطه بهین در فضای طراحی جدید عبارت است از  $(0, 0)$ . برای به دست آوردن نقطه بهین در فضای طراحی اصلی، باید متغیرهای طراحی تبدیل یافته را مقیاس بندی معکوس کنیم، یعنی

$$x_1^* = y_1 / \sqrt{50} = 0 \quad \text{و} \quad x_2^* = y_2 / \sqrt{2} = 0$$

**مثال ۵.۱۲** تأثیر مقیاس بندی متغیرهای طراحی تابع

$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2 - 5x_1 + 4x_2 + 2$  را با روش تندترین کاهش و با طراحی شروع  $(-1, -2)$  مینیمم کنید. متغیرهای طراحی را طوری مقیاس بندی کنید که عدد شرطی ماتریس هسیان تابع  $f$  بر حسب متغیرهای جدید واحد شود.

حل. دقت کنید که تابع  $f$  در این مسأله برخلاف مسأله قبل شامل جمله حاصل ضرب  $x_1x_2$  است. پس، باید مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس هسیان را محاسبه کنیم تا مقیاس بندی یا تبدیل مناسب متغیرهای طراحی را پیدا کنیم. هسیان  $H$  تابع  $f$  عبارت است از

$$H = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه هسیان می تواند محاسبه شود که عبارتند از 0.7889 و 15.211. بردارهای ویژه مربوطه عبارت است از  $(0.4718, 0.8817)$  و  $(-0.8817, 0.4718)$  بگذارید متغیرهای جدید  $y_1$  و  $y_2$  را با تبدیل زیر تعریف کنیم

$$x = Qy \quad (\text{الف})$$

که در آن

$$Q = \begin{bmatrix} 0.4718 & -0.8817 \\ 0.8817 & 0.4718 \end{bmatrix}$$

دقت کنید که ستونهای  $Q$  بردارهای ویژه ماتریس هسیان  $H$  است. تبدیل متغیرها که با معادله (الف) تعریف می شود تابع را بر حسب  $y_1$  و  $y_2$  می دهد

$$f(y_1, y_2) = 0.5(0.7889y_1^2 + 15.211y_2^2) + 1.1678y_1 + 6.2957y_2 + 2$$

عدد شرطی ماتریس هسیان متغیرهای جدید  $y_1$  و  $y_2$  هنوز واحد نیست. برای رسیدن به عدد شرطی واحد باید تبدیل دیگری از  $y_1$  و  $y_2$  تعریف کنیم، طوری که

$$y = Dz$$

که در آن

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{0.7889}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{15.211}} \end{bmatrix}$$

سرانجام متغیرهای طراحی عبارتند از

$$y_1 = \frac{z_1}{\sqrt{0.7889}} \quad \text{و} \quad y_2 = \frac{z_2}{\sqrt{15.211}}$$

و  $f(z_1, z_2) = 0.5(z_1^2 + z_2^2) + 1.3148z_1 + 1.6142z_2$  دقت کنید که عدد شرطی همسان  $f$  برحسب متغیرهای  $z_1$  و  $z_2$  واحد است. روش تندترین کاهش به جواب  $f(z_1, z_2)$  در یک چرخه همگرا می شود که عبارت است از  $(-1.3158, -1.6142)$ . نقطه مینیم در فضای طراحی اصلی با تبدیل معکوس زیر به دست می آید

$$\mathbf{x} = \mathbf{QDz}$$

که این در فضای طراحی اصلی نقطه مینیم  $(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2})$  را می دهد.

### ۵.۵ روش گرادیان مزدوج

روش گرادیان مزدوج، منسوب به فلتچر و ریوس<sup>[۱۹۶۴]</sup>، یک روش بسیار ساده و بهبود یافته مؤثری از روش تندترین کاهش است. در بخش قبل یادآوری شد که جهت‌های تندترین کاهش دو گام متوالی برهم عمودند. این روش تندترین کاهش را آهسته می سازد هرچند که همگراست. جهت‌های گرادیان مزدوج برهم عمود نیستند. در عوض، این جهت‌ها، جهت‌های متعامد تندترین کاهش را به شکل قطری می پیمایند. بنابراین، آنها نرخ همگرایی روش تندترین کاهش را به طور قابل توجهی بهبود می بخشند. در حقیقت، جهت‌های گرادیان مزدوج نسبت به ماتریس متقارن معین مثبت  $A$  متعامدند، یعنی  $\mathbf{d}^{(i)T} \mathbf{A} \mathbf{d}^{(j)} = 0$  برای تمامی  $i$  ها و  $j$  ها وقتی که  $i \neq j$ .

الگوریتم گرادیان مزدوج به شکل زیر بیان می شود.

گام ۱. یک طرح اولیه مثل  $\mathbf{x}^{(0)}$  حدس بزنید. شمارنده چرخه را صفر قرار دهید  $k = 0$ . پارامتر همگرایی  $\epsilon$  را انتخاب کنید. عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\mathbf{d}^{(0)} = -\mathbf{c}^{(0)} \equiv -\nabla f(\mathbf{x}^{(0)})$$

بررسی کنید و ببینید که آیا  $\|\mathbf{c}^{(0)}\| < \epsilon$  است یا نه. اگر هست متوقف شوید؛ در غیر این صورت، به گام ۴ بروید (دقت کنید که گام ۱ گرادیان مزدوج و روش تندترین کاهش یکسان است).

گام ۲. گرادیان تابع هزینه را حساب کنید.

$$\mathbf{c}^{(k)} = \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$$

$\|\mathbf{c}^{(k)}\|$  را محاسبه کنید. اگر  $\|\mathbf{c}^{(k)}\| < \varepsilon$  باشد آن گاه متوقف شوید؛ در غیر این صورت ادامه دهید.

گام ۳. جهت مزدوج جدید را محاسبه کنید

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{c}^{(k)} + \beta_k \mathbf{d}^{(k-1)} \quad (5.38)$$

در حالی که

$$\beta_k = (\|\mathbf{c}^{(k)}\| / \|\mathbf{c}^{(k-1)}\|)^2 \quad (5.39)$$

گام ۴.  $\alpha_k = \alpha$  را چنان بیابید که  $(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)})$  فرمینیوم شود.

گام ۵. طرح را مانند زیر تغییر دهید

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)} \quad (5.40)$$

$k = k + 1$  قرار داده و به گام ۲ بروید.

دقت کنید که جهت مزدوج در معادله (۵.۳۸) شرط کاهش نامعادله (۵.۸) را برآورده می کند. این را می توان با جایگزینی  $\mathbf{d}^{(k)}$  از معادله (۵.۳۸) در نامعادله (۵.۸)، و با استفاده از شرط تعیین اندازه گام معادله (۵.۱۵) نشان داد.

اولین گام روش گرادیان همان گام روش تندترین کاهش است. تنها تفاوت بین گرادیان مزدوج و روش تندترین کاهش در معادله (۳.۳۸) است. در این گام جهت تندترین کاهش فعلی با اضافه کردن یک جهت مقیاس بندی شده به چرخه قبلی بهبود می یابد. ضریب مقیاس همچنان که در معادله (۵.۳۹) نشان داده شده است، با استفاده از طول بردار گرادیان تابع هزینه در دو چرخه به دست می آید. پس جهت مزدوج چیزی جز جهت تندترین کاهش مایل شده نیست. این یک بهبود بسیار ساده است که به محاسبات اضافی کمی نیاز دارد. در هر حال این کار پیشرفتی قابل توجه و مؤثر در نرخ روش تندترین کاهش است. بنابراین، روش گرادیان مزدوج همیشه باید بر روش تندترین کاهش ترجیح داده شود. در بخش آینده مثالی بحث خواهد شد که در آن نرخ همگرایی روشهای تندترین کاهش، گرادیان مزدوج و نیوتن مقایسه می شود. در آن جا خواهیم دید که روش گرادیان مزدوج در مقایسه با دو روش دیگر بسیار بهتر است.

الگوریتم گرادیان مزدوج مینیوم را برای یک شکل درجه دوی معین مثبت که  $\|\cdot\|$  متغیر طراحی دارد در  $\|\cdot\|$  چرخه می یابد. برای معادلات عمومی، توصیه می شود که برای پایداری

محاسبات، فرآیند چرخه هر  $(n+1)$  چرخه اگر تا آن زمان مینیم پیدا نشده بود مجدداً شروع شود. یعنی  $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n-1)}$  قرار داده و فرآیند را از گام ۱ الگوریتم دوباره شروع کنید. الگوریتم خیلی ساده است و براحتی قابل برنامه ریزی است و برای مسائل مینیم سازی نامقید عمومی بسیار مناسب است. الگوریتم یک الگوریتم همگراست و در سیستم نرم افزار آی دی زاین<sup>۱</sup> [آروا و سنج<sup>۲</sup>، ۱۹۸۷] جایی که یک جست و جوی خطی غیر دقیق استفاده شده در دسترس است.

**مثال ۵.۱۳** استفاده از الگوریتم گرادیان مزدوج. مسأله مثال حل شده ۵.۱۰ را در نظر بگیرید:

تابع  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$  را مینیم کنید.

دو چرخه از روش گرادیان مزدوج را انجام دهید و از طرح (2, 4, 10) شروع کنید.

**حل.** اولین چرخه از روش گرادیان مزدوج مانند مثال ۵.۱۰ است:

$$\mathbf{c}^{(0)} = (12, 40, 48); \quad \|\mathbf{c}^{(0)}\| = 63.6, \quad f(\mathbf{x}^{(0)}) = 332.0$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0.0956, -2.348, 2.381)$$

چرخه دوم از گام ۲ الگوریتم گرادیان مزدوج شروع می شود:

$$\mathbf{c}^{(1)} = (-4.5, -4.438, 4.828), \quad f(\mathbf{x}^{(1)}) = 10.75$$

پس ادامه می دهیم،  $\|\mathbf{c}^{(1)}\| = 7.952 > \epsilon$

$$\beta_1 = \left[ \frac{\|\mathbf{c}^{(1)}\|}{\|\mathbf{c}^{(0)}\|} \right]^2 \\ = (7.952/63.3)^2 = 0.015633$$

$$\mathbf{d}^{(1)} = -\mathbf{c}^{(1)} + \beta_1 \mathbf{d}^{(0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.500 \\ 4.438 \\ -4.828 \end{bmatrix} + (0.015633) \begin{bmatrix} -12 \\ -40 \\ -48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.31241 \\ 3.81268 \\ -5.57838 \end{bmatrix}$$

طرح به شکل زیر روزآمد می شود

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0956 \\ -2.348 \\ 2.381 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 4.31241 \\ 3.81268 \\ -5.57838 \end{bmatrix}$$

جدول ۵.۵ تاریخچه چرخه‌های مثال ۵.۱۳ با روش گرادیان مزدوج

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f(x)$	$\ c\ $
1	2.0000E+00	4.0000E+00	1.0000E+01	3.3200E+02	6.3624E+01
2	9.5358E-02	-2.3488E+00	2.3814E+00	1.0750E+01	7.9593E+00
3	1.4578E+00	-1.1452E+00	6.2143E-01	7.5823E-01	7.7937E-01
4	-6.4550E-10	-5.8410E-10	-1.3150E-10	6.8520E-20	3.0512E-05

اندازه گام برای مینیمم ساختن  $f(x^{(1)} + \alpha d^{(1)})$  عبارت است از  $\alpha = 0.3156$ . با جایگزینی این در عبارت بالا، داریم  $x^{(2)} = (1.4566, -1.1447, 0.6205)$ . با محاسبه گرادیان در این نقطه داریم  $\varepsilon = 0.7788 > \|c^{(2)}\| = (0.6238, -0.4246, 0.1926)$  و بدین خاطر نیاز به ادامه چرخه‌ها داریم. دقت کنید  $d^{(1)} \cdot c^{(2)} = 0$ .

مسئله با استفاده از روش گرادیان مزدوج که در سیستم نرم افزار ای دی زاین در دسترس است با  $\varepsilon = 0.005$  حل شده است. جدول ۵.۵ تاریخچه چرخه‌های برنامه را نشان می‌دهد. دیده می‌شود که بهین دقیق با فقط ۴ چرخه و ۱۰ بار محاسبه تابع به دست آمده است. اگر این را با روش تندترین کاهش که نتایج آن در جدول ۵.۳ داده شده مقایسه کنیم، نتیجه می‌گیریم که روش گرادیان مزدوج به مراتب عالی تر است.

## ۵.۶ روش نیوتن

برای تعیین جهت حرکت در روش تندترین کاهش، تنها از اطلاعات مشتق مرتبه اول برای نمایش تابع هزینه در یک نقطه استفاده می‌شود. اگر مشتقات مرتبه دو در دسترس باشند، ما می‌توانیم آنها را برای نمایش دقیقتر صفحه هزینه استفاده کنیم و جهت حرکت بهتری می‌تواند یافت شود. با ورود اطلاعات مرتبه دو می‌توان انتظار نرخ همگرایی بهتری داشت. به عنوان مثال، روش نیوتن که از ماتریس هسیان تابع استفاده می‌کند نرخ همگرایی درجه دو دارد. به عبارت دیگر، برای هر تابع درجه دوی معین مثبت، روش نیوتن تنها در یک چرخه همگرا می‌شود، و اندازه گام واحد خواهد بود.

پنداره اصلی روش نیوتن استفاده از بسط تیلور مرتبه دو برای تابع حول نقطه طراحی فعلی است. این بسط شامل عبارتی درجه دو برای تغییر طراحی  $\Delta x$  است. از حل معادلات

شرایط لازم برای مینیمم سازی تابع، جهت حرکت در فضای طراحی محاسبه می شود. اندازه گام مناسب در این جهت یک چرخه از روش را کامل می کند.

در زیر، ما شناسه<sup>(۱)</sup>  $x$  را از تمامی توابع حذف می کنیم، زیرا به دست آوردن روابط زیر در هر چرخه طراحی امکان پذیر است. با استفاده از بسط تیلور مرتبه دو برای تابع  $f(x)$  داریم.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + c^T \Delta x + 0.5 \Delta x^T H \Delta x \quad (5.41)$$

که در آن  $\Delta x$  تغییر کوچکی در طراحی و  $H$  هسیان تابع  $f$  در نقطه  $x$  (که گاهی با  $\nabla^2 f$  نشان داده می شود) می باشد. معادله (۵.۴۱) یک تابع درجه دو بر حسب  $\Delta x$  است. نظریه مسائل برنامه ریزی محدب در فصل (۳) تضمین می کند که اگر  $H$  نیمه معین مثبت باشد، آن گاه  $\Delta x$  ای وجود دارد که یک مینیمم فراگیر برای تابع معادله (۵.۴۱) است. به علاوه، اگر  $H$  معین مثبت باشد آن گاه مینیمم معادله (۵.۴۱) یگانه است. با نوشتن شرایط بهینگی ( $\partial f / \partial (\Delta x) = 0$ ) برای تابع معادله (۵.۴۱) داریم

$$c + H \Delta x = 0 \quad (5.42)$$

فرض می کنیم  $H$  غیر منفرد باشد، در آن صورت عبارت زیر را برای  $\Delta x$  می یابیم

$$\Delta x = -H^{-1}c \quad (5.43)$$

با استفاده از این مقدار  $\Delta x$ ، تخمین جدید برای طراحی عبارت است از

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x \quad (5.44)$$

چون معادله (۵.۴۱) فقط یک تقریب برای  $f$  در نقطه  $x^{(0)}$  است،  $x^{(1)}$  شاید نقطه مینیمم دقیق برای  $f(x)$  نباشد. بنابراین، فرآیند برای به دست آوردن تخمین بهتر باید تکرار شود تا به مینیمم برسد.

هر چرخه روش نیوتن به محاسبه هسیان تابع هزینه که یک ماتریس متقارن است نیاز دارد. بنابراین، روش نیوتن به  $n(n+1)/2$  بار محاسبه مشتق مرتبه دو  $f(x)$  (یادآور می شود که  $n$  تعداد متغیرهای طراحی است) نیاز دارد. این کار می تواند حجم محاسبات قابل توجهی را دربرگیرد و ما باید سعی کنیم بازده روش را قبل از محاسبه مجدد اطلاعات مرتبه دو بهبود بخشیم. یک روش ساده برای بهبود روش استفاده از پارامتر طول گام در جهت  $\Delta x$  است. طول گام می تواند طوری محاسبه شود که تابع هزینه را در جهت  $\Delta x$  مینیمم کند. هر روش

جست و جوی یک بعدی می تواند بدین منظور استفاده شود. علاوه بر بهبود بازده، در صورتی که هسیان  $H$  در تمامی چرخه ها معین مثبت بماند استفاده از اندازه گام، روش را بسیار پایدار و همگرایی اش را برای یک نقطهٔ مینیمم و با شروع از هر نقطه طراحی تضمین می کند. روش نیوتن کلاسیک اندازه گام در جهت  $\Delta x$  را واحد می گیرد. با این همه، یک گام کامل در امتداد  $\Delta x$  ممکن است به یک گام کاهشی برای تابع هزینه منجر نشود، یعنی  $f(x + \Delta x)$  ممکن است کوچکتر از  $f(x)$  نباشد. بنابراین، همگرایی روش نیوتن کلاسیک تضمین نمی شود. الگوریتم نیوتن بهبود یافته به شکل زیر بیان می شود.

گام ۱. برای طراحی شروع  $x^{(0)}$  یک حدس مهندسی بزنید. شمارندهٔ چرخه را  $k = 0$  قرار دهید. مقدار خطا،  $\varepsilon$  را برای معیار توقف انتخاب کنید.

گام ۲.  $c_i^{(k)} = \partial f(x^{(k)}) / \partial x_i$  را برای  $i = 1$  to  $n$  محاسبه کنید. اگر  $\|c^{(k)}\| < \varepsilon$  است آن گاه فرآیند چرخه را متوقف کنید. در غیر این صورت ادامه دهید.

گام ۳. ماتریس هسیان را از رابطه زیر محاسبه کنید.

$$H(x^{(k)}) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]; \quad i = 1 \text{ to } n; \quad j = 1 \text{ to } n$$

گام ۴. با استفاده از معادله (۵.۴۳) جهت حرکت را در فضای طراحی محاسبه

کنید؛ یعنی

$$d^{(k)} = -H^{-1}c^{(k)} \quad (5.45)$$

دقت کنید که محاسبهٔ  $d^{(k)}$  در معادله فوق نمادی است. برای کارایی محاسباتی، به جای محاسبهٔ معکوس ماتریس هسیان یک دستگاه معادلات همزمان خطی حل می شود.

گام ۵. طراحی را روزآمد کنید، یعنی  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha d^{(k)}$ ، در حالی که  $\alpha_i$  برای مینیمم کردن  $f(x^{(k)} + \alpha d^{(k)})$  محاسبه می شود. برای محاسبهٔ  $\alpha$  یک روش جست و جوی یک بعدی ممکن است استفاده شود. برای شروع،  $\alpha = 1$  یک حدس اولیه خوب برای اندازه گام است.

گام ۶. شمارنده را یکی افزایش دهید،  $k = k + 1$  و به گام ۲ بروید.

در این جا تأکید می شود که بجز وقتی  $H$  معین مثبت است، جهت  $d^{(k)}$  که از معادله (۵.۴۵) به دست می آید ممکن است کاهش تابع هزینه را به دنبال نداشته باشد. برای دیدن این،

$\mathbf{d}^{(k)}$  را از معادله (۵.۴۵) در شرط کاهشی معادله (۵.۸) جایگزین می‌کنیم، داریم

$$-\mathbf{c}^{(k)T} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}^{(k)} < 0$$

این شرط وقتی  $\mathbf{H}$  معین مثبت است همیشه برآورده خواهد شد. اگر  $\mathbf{H}$  معین منفی یا نیمه معین منفی باشد شرط همیشه نقض می‌شود. با  $\mathbf{H}$  نامعین یا نیمه معین مثبت، شرط ممکن است برآورده شود و یا نشود، پس باید آن را بررسی کرد. اگر جهتی که در گام ۴ به دست آمد برای تابع هزینه کاهشی نباشد، آن گاه باید متوقف شویم، زیرا یک اندازه گام مثبت نمی‌تواند به دست آید.

**مثال ۵.۱۴** استفاده از روش نیوتن بهبود یافته. تابع  $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 7$  تابع  $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 7$  با استفاده از الگوریتم نیوتن بهبود یافته و با شروع از نقطه  $(5, 10)$  مینیمم کنید.  $\varepsilon = 0.0001$  را به عنوان معیار توقف به کار برید.

حل. گامهای روش نیوتن بهبود یافته را دنبال می‌کنیم.

۱.  $\mathbf{x}^{(0)}$  عبارت است از  $(5, 10)$

۲. بردار گرادیان  $\mathbf{c}^{(0)}$  در نقطه  $(5, 10)$  عبارت است از

$$\mathbf{c}^{(0)} = (6x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2) = (50, 50)$$

$$\|\mathbf{c}^{(0)}\| = \sqrt{50^2 + 50^2} = 50\sqrt{2} > \varepsilon$$

بنابراین، معیار همگرایی برآورده نشده است.

۳. ماتریس هسیان در نقطه  $(5, 10)$  عبارت است از

$$\mathbf{H}^{(0)} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

دقت کنید که هسیان معین مثبت است.

۴. جهت تغییر طراحی عبارت است از

$$\mathbf{d}^{(0)} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}^{(0)} = \frac{-1}{20} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

دقت کنید که چون  $\mathbf{H}$  معین مثبت است، جهت  $\mathbf{d}^{(0)}$  برای تابع هزینه کاهشی است.

۵. اندازه گام  $\alpha$  برای مینیمم شدن  $f(\mathbf{x}^{(0)} + \alpha \mathbf{d}^{(0)})$  محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha \mathbf{d}^{(0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 5\alpha \\ 10 - 10\alpha \end{bmatrix}$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 0; \quad \text{یا} \quad \nabla f(\mathbf{x}^{(i)}) \cdot \mathbf{d}^{(0)} = 0$$

با استفاده از محاسبات گام ۲،  $\nabla f(\mathbf{x}^{(1)})$  عبارت است از

$$\nabla f(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 6(5 - 5\alpha) + 2(10 - 10\alpha) \\ 2(5 - 5\alpha) + 4(10 - 10\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 - 50\alpha \\ 50 - 50\alpha \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\nabla f(\mathbf{x}^{(1)}) \cdot \mathbf{d}^{(0)} = (50 - 50\alpha, 50 - 50\alpha) \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{یا } -5(50 - 50\alpha) - 10(50 - 50\alpha) = 0$$

از حل معادله فوق داریم  $\alpha = 1$ . دقت کنید که از روش جست و جوی بخش

طلایی نیز  $\alpha = 1$  به دست می آید؛ بنابراین

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 - 5\alpha \\ 10 - 10\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

گرایان تابع هزینه در  $\mathbf{x}^{(1)}$  عبارت است از

$$\mathbf{c}^{(1)} = \begin{bmatrix} 50 - 50\alpha \\ 50 - 50\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

چون  $\|\mathbf{c}^{(1)}\| < \varepsilon$ ، روش نیوتن تنها در یک چرخه جواب داده است. چنین حالتی کمتر اتفاق می افتد و در این جا به سبب درجه دو و معین مثبت بودن شکل تابع بوده است (هسیان  $f$  همه جا معین مثبت است).

یک برنامه رایانه ای براساس روش نیوتن بهبود یافته در پیوست D داده شده که سه برنامه فرعی فانکت، گرید و هاسن<sup>۱</sup> را باید کاربر تهیه کند. این برنامه های فرعی به ترتیب تابع، گرایان و ماتریس هسیان تابع هزینه را ارزیابی می کنند.

**مثال ۵.۱۵** استفاده از روش نیوتن بهبود یافته. تابع

$$f(\mathbf{x}) = 10x_1^4 - 20x_1^2x_2 + 10x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 + 5$$

روش نیوتن بهبود یافته که در پیوست D داده شده و با شروع از نقطه  $(-1, 3)$  مینیمم

کنید. برای پیدا کردن اندازه گام از جست و جوی بخش طلایی با  $\delta = 0.05$  و دقت جست و جوی خطی مساوی  $1.0E - 04$  استفاده شود. برای معیار توقف  $\varepsilon = 0.005$  در نظر بگیرید.

حل. دقت کنید که  $f(x)$  تابعی درجه دو از متغیرهای طرّاحی نیست. پس نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم روش نیوتن در یک چرخه همگرا شود. گرادیان  $f(x)$  عبارت است از

$$c = \nabla f(x) = (40x_1^3 - 40x_1x_2 + 2x_1 - 2, -20x_1^2 + 20x_2)$$

و هسیان ماتریس  $f(x)$  عبارت است از

$$H = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 120x_1^2 - 40x_2 + 2 & -40x_1 \\ -40x_1 & 20 \end{bmatrix}$$

تاریخچه چرخه روش نیوتن برای این مثال در جدول ۵.۶ داده شده است. نقطه بهین  $(1, 1)$  و مقدار بهین  $f(x)$  عبارت است از ۴.۰. روش نیوتن در هفت چرخه به جواب بهین همگرا شده است. شکل ۵.۱۵ خطوط هزینه ثابت را برای تابع و پیشرفت روش را از نقطه طرّاحی شروع  $(-1, 3)$  نشان می‌دهد. دقت کنید که اندازه گام در مرحله آخر فرآیند چرخه تقریباً برابر یک است. دلیل آن این است که تابع در نزدیکی نقطه بهین شکل تابع درجه دو دارد و اندازه گام برای تابع درجه دو، یک است.

نقاط ضعف روش نیوتن برای کاربردهای عمومی عبارت است از:

۱. به محاسبه مشتقات مرتبه دو در هر چرخه نیاز دارد که معمولاً بسیار وقت گیر است. حتی ممکن است در بعضی از کاربردها، محاسبه آنها امکان پذیر نباشد. همچنین، یک دستگاه معادلات خطی همزمان باید حل شود. بنابراین هر چرخه روش در مقایسه با روش تندترین کاهش به محاسبات زیادتری نیاز دارد.

۲. هسیان تابع ممکن است در بعضی از چرخه‌ها منفرد باشد. پس معادله  $(5.43)$  نمی‌تواند برای محاسبه جهت جست و جو به کار رود. همچنین، در صورتی که هسیان معین مثبت نباشد، جهت نیوتن نمی‌تواند کاهش تابع هزینه را تضمین کند.

جدول ۵.۶ جواب بهین برای مثال ۵.۱۵ به روش نیوتن بهبود یافته :

$$f(\mathbf{x}) = 10x_1^4 - 20x_1^2x_2 + 10x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 + 5; \mathbf{x}^{(0)} = (-1, 3)$$

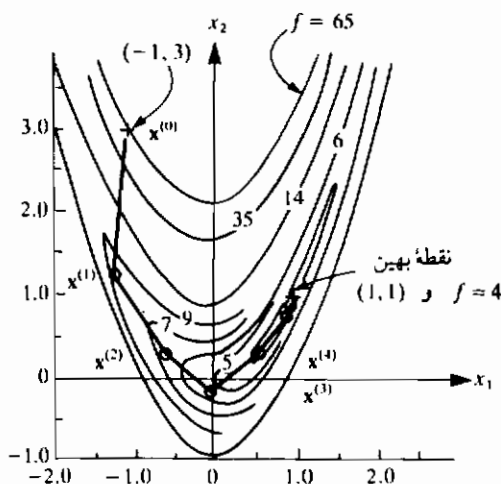
شماره	$x_1$	$x_2$	$f(\mathbf{x})$	$\alpha$	$\ \mathbf{c}\ $
1	-1.000 00E + 00	3.000 00E + 00	4.800 00E + 01	9.961 01E - 01	8.588 36E + 01
2	-1.051 08E + 00	1.109 96E + 00	8.207 21E + 00	1.901 81E - 01	3.885 43E + 00
3	-6.158 44E - 01	1.940 34E - 01	6.954 06E + 00	1.599 29E + 00	8.630 19E + 00
4	-6.655 13E - 02	-1.862 86E - 01	5.501 25E + 00	3.113 32E + 00	4.639 26E + 00
5	6.231 68E - 01	3.156 68E - 01	4.194 81E + 00	2.146 04E + 00	1.797 58E + 00
6	9.527 89E - 01	8.824 41E - 01	4.008 66E + 00	1.113 63E + 00	1.009 13E + 00
7	9.876 69E - 01	9.771 56E - 01	4.000 18E + 00	9.572 47E - 01	9.641 31E - 02

متغیرهای طراحی بهین : 9.998 80E - 01 ، 9.996 81E - 01

مقدار تابع هزینه بهین : 4.000 00E + 00

نرم گرادیان در بهین : 3.268 83E - 03

تعداد دفعات ارزیابی تابع : 198



شکل ۵.۱۵ تاریخچه چرخه برای مثال ۵.۱۵ به روش نیوتن

۳. هر چرخه بدون استفاده از اطلاعات چرخه های گذشته کار می کند. گرادیانها و

هسیانهای که قبلاً محاسبه شده اند استفاده نمی شوند. بنابراین روشی بدون حافظه است.

۴. روش همگرا نیست مگر هسیان معین مثبت بماند و یک روش اندازه گیری اندازه گام

استفاده شود. با این همه، روش، نرخ همگرایی بالا (درجه دو) دارد. برای یک تابع درجه دوی کاملاً محدب، روش از هر نقطه شروع تنها با یک چرخه همگرا می شود.

**مثال ۵.۱۶** مقایسه روشهای تندترین کاهش، نیوتن و گرادیان مزدوج تابع

$$f(x) = 50(x_2 - x_1^2)^2 + (2 - x_1)^2$$

را با شروع از نقطه  $(5, -5)$  مینیمم کنید. از روشهای تندترین کاهش، نیوتن و گرادیان مزدوج استفاده کرده و عملکرد آنها را مقایسه کنید.

**حل.** می دانیم که جواب بهین برای مسئله عبارت است از  $(2, 4)$  با  $f(2, 4) = 0$ . از عبارت دقیق گرادیان و  $\varepsilon = 0.005$  استفاده می کنیم تا مسئله را با استفاده از روشهای تندترین کاهش و نیوتن که در پیوست D آمده و روش گرادیان که در آی دی زاین (IDESIGN) در دسترس است حل کنیم. خلاصه نتایج نهایی هر سه روش در جدول ۵.۷ آمده است. برای روش تندترین کاهش،  $\delta_{||} = 0.05$  و معیار توقف جست و جوی خطی  $0.00001$  استفاده شده و برای روش نیوتن آنها به ترتیب عبارتند از  $0.005$  و  $0.0001$ . در هر دو روش از جست و جوی بخش طلایی استفاده شده است. دوباره می توان دید که روش تندترین کاهش ناکاراترین و گرادیان مزدوج کاراترین روش برای این مسئله است. بنابراین، روش گرادیان مزدوج برای کاربردهای عمومی توصیه می شود.

جدول ۵.۸ و ۵.۹ تاریخچه چرخه ها را برای روشهای گرادیان مزدوج و نیوتن نشان می دهند.

جدول ۵.۷ ارزیابی مقایسه ای سه روش برای مثال ۵.۱۶:

$$f(x) = 50(x_2 - x_1^2)^2 + (2 - x_1)^2$$

	نیوتن روش	گرادیان مزدوج	تندترین کاهش
$x_1$	2.0000E + 00	2.0000E + 00	1.9941E + 00
$x_2$	3.9999E + 00	3.9998E + 00	3.9765E + 00
$f$	2.5054E - 10	1.0239E - 08	3.4564E - 05
$\ e\ $	9.0357E - 04	1.2860E - 04	3.3236E - 03
تعداد دفعات ارزیابی تابع	349	65	138 236
تعداد چرخه ها	13	22	9670

جدول ۵.۸ تاریخچه چرخه‌ها برای مثال ۵.۱۶ با روش گرادینان مزدوج در آی دی زاین:

$$f(x) = 50(x_2 - x_1^2)^2 + (2 - x_1)^2$$

شماره	$x_1$	$x_2$	$f(x)$	$\ c\ $
1	5.0000E+00	-5.0000E+00	4.50090E+04	3.01556E+04
2	8.3032E-01	-4.5831E+00	1.39135E+03	1.02007E+03
3	-2.6902E-01	-3.9193E+00	8.01838E+02	4.55450E+02
4	1.9543E-01	4.2482E-02	3.25737E+00	3.80095E+00
5	2.3653E-01	2.0314E-02	3.17330E+00	4.01101E+00
6	4.4392E-01	1.2086E-01	2.71174E+00	8.45104E+00
7	8.8952E-01	7.2438E-01	1.45672E+00	1.17608E+01
8	8.8169E-01	7.7490E-01	1.25093E+00	1.81853E+00
9	1.0894E+00	1.1451E+00	9.16247E-01	8.38204E+00
10	1.2857E+00	1.5986E+00	6.58001E-01	1.36765E+01
11	1.3261E+00	1.7676E+00	4.58143E-01	3.83876E+00
12	1.4782E+00	2.1584E+00	3.07739E-01	7.33075E+00
13	1.5795E+00	2.4589E+00	2.41686E-01	1.11396E+01
14	1.6437E+00	2.7122E+00	1.32514E-01	4.30367E+00
15	1.7595E+00	3.0783E+00	7.32938E-02	5.97270E+00
16	1.8439E+00	3.3749E+00	5.57989E-02	9.27973E+00
17	1.8946E+00	3.5934E+00	1.18616E-02	1.72534E+00
18	1.9453E+00	3.7794E+00	4.20064E-03	1.87303E+00
19	1.9950E+00	3.9760E+00	7.81425E-04	1.58999E+00
20	1.9923E+00	3.9692E+00	5.95153E-05	2.79413E-02
21	2.0000E+00	3.9998E+00	1.02387E-08	5.38526E-02
22	2.0000E+00	3.9998E+00	2.11192E-09	1.28596E-04

جدول ۵.۹ تاریخچه چرخه‌ها برای مثال ۵.۱۶ به روش نیوتن:

$$f(x) = 50(x_2 - x_1^2)^2 + (2 - x_1)^2$$

شماره	$x_1$	$x_2$	$f(x)$	$\alpha$	$\ c\ $
1	5.00000E+00	-5.00000E+00	4.50090E+04	9.99989E-01	3.01556E+04
2	4.99900E+00	2.49897E+01	8.99401E+00	1.03337E-01	6.33885E+00
3	4.69931E+00	2.19934E+01	7.69235E+00	1.41499E+00	9.05499E+01
4	4.31782E+00	1.85355E+01	5.95692E+00	2.53887E+00	9.86086E+01
5	3.81968E+00	1.45082E+01	3.64537E+00	1.99432E+00	6.65934E+01
6	3.42414E+00	1.16495E+01	2.31069E+00	2.41733E+00	5.48439E+01
7	3.01993E+00	9.06313E+00	1.20182E+00	2.21292E+00	3.68141E+01
8	2.68227E+00	7.14953E+00	5.67042E-01	2.51119E+00	2.59346E+01
9	2.37113E+00	5.59355E+00	1.78943E-01	2.50477E+00	1.46402E+01
10	2.13097E+00	4.52655E+00	2.76354E-02	2.39858E+00	6.59378E+00
11	2.00264E+00	4.01435E+00	7.21896E-04	9.86271E-01	1.55590E+00
12	1.99845E+00	3.99385E+00	2.45127E-06	9.94786E-01	1.71863E-02
13	2.00000E+00	3.99999E+00	2.50538E-10	—	9.03571E-04

۵.۶.۱\* بهبود مارکوارت<sup>۱</sup>

چنان که قبلاً بیان شد روش نیوتن معایب متعددی دارد که می تواند از نظر عددی مشکلاتی به بار آورد. به عنوان مثال، اگر هسیان تابع هزینه  $H$  معین مثبت نباشد جهتی که از معادله (۵.۴۵) به دست می آید ممکن است جهت کاهشی برای تابع هزینه نباشد. در آن حالت، نمی توان در آن امتداد گامی برداشت.

مارکوارت [۱۹۶۳] بهبودی برای فرآیند یافتن جهت پیشنهاد کرد که مزایای روشهای تندترین کاهش و نیوتن را دارد. این روش در فواصل دور از نقطه جواب مثل روش تندترین کاهش عمل می کند که برای آن فواصل بسیار خوب است. در نزدیکی نقطه جواب مثل روش نیوتن عمل می کند که در آن جا بسیار کارا است. در روش بهبود یافته، هسیان به شکل  $(H + \lambda I)$  بهبود می یابد که در آن  $\lambda$  عددی مثبت است. جهت جست و جو آن گاه از معادله (۵.۴۵) به شکل زیر محاسبه می شود

$$d^{(k)} = -(H + \lambda I)^{-1} c^{(k)} \quad (5.46)$$

دقت کنید وقتی  $\lambda$  بزرگ است، اثر  $H$  در حقیقت از بین می رود و  $d^{(k)}$  می شود  $c^{(k)} / \lambda$ ، که جهت تندترین کاهش است با اندازه گام  $(1/\lambda)$ . همچنان که الگوریتم پیش می رود،  $\lambda$  کاهش پیدا می کند (یعنی اندازه گام افزایش پیدا می کند). وقتی  $\lambda$  به اندازه کافی کوچک شود، اثر  $\lambda I$  از بین می رود و از معادله (۵.۴۶) جهت نیوتن به دست می آید. اگر جهت  $d^{(k)}$  معادله (۵.۴۶) تابع هزینه را کم نکند، آن گاه  $\lambda$  افزایش پیدا کرده (اندازه گام کاهش یافته) و جهت دوباره محاسبه می شود.

الگوریتم مارکوارت در گامهای زیر ارائه می شود.

گام ۱. حدسی مهندسی برای طراحی شروع  $x^{(0)}$  بزنید. شمارنده چرخه را مساوی صفر قرار دهید،  $k = 0$ . مقدار خطا،  $\varepsilon$  را به عنوان معیار توقف و  $\lambda_1$  را یک عدد بزرگ (مثلاً  $1.0E + 04$ ) انتخاب کنید.

گام ۲.  $c_i^{(k)} = \partial f(x^{(k)}) / \partial x_i$ ;  $i = 1$  to  $n$  را محاسبه کنید. اگر  $\|c^{(k)}\| < \varepsilon$  است فرآیند چرخه را متوقف کنید. در غیر این صورت ادامه دهید.

گام ۳. از رابطه زیر ماتریس هسیان را محاسبه کنید.

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]; \quad i = 1 \text{ to } n; \quad j = 1 \text{ to } n$$

گام ۴. از رابطه زیر جهت تغییر را محاسبه کنید.

$$\mathbf{d}^{(k)} = -(\mathbf{H} + \lambda_k \mathbf{I})^{-1} \mathbf{c}^{(k)}$$

گام ۵. اگر  $f(\mathbf{x}^{(k+1)} + \mathbf{d}^{(k)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$  است، آن گاه به گام ۶ بروید. در غیر این صورت،  $\lambda_k = 2\lambda_k$  قرار دهید و به گام ۴ بروید.

گام ۶.  $\lambda_{k+1} = 0.5\lambda_k$  و  $k = k + 1$  قرار دهید و به گام ۲ بروید.

## ۵.۷۰ روشهای شبه نیوتن

در بخش ۵.۴ روش تندترین کاهش تشریح شد. بعضی از عیوب روش نیز بیان شد. گفته شد که روش نرخ همگرایی پایینی دارد، زیرا فقط از اطلاعات مرتبه اول استفاده می شود. این نقص در روش نیوتن رفع شد، زیرا در آن اطلاعات مرتبه دوم استفاده می شود. روش نیوتن خاصیت همگرایی خوبی دارد. با این همه، این روش می تواند ناکارا باشد، زیرا به  $n(n+1)/2$  بار محاسبه مشتق دوم ( $n$  تعداد متغیرهای طراحی است) نیاز دارد. برای بیشتر مسائل طراحی مهندسی، محاسبه مشتقات مرتبه دوم می تواند نه تنها خسته کننده بلکه ناممکن باشد. به علاوه، هم روش تندترین کاهش و هم نیوتن فرآیندهای خودآموزی نیستند. یعنی در هر دو روش هر چرخه با متغیرهای طراحی جدیدی شروع می شود و از اطلاعات چرخه های قبل استفاده نمی کند. همچنین، اگر هیان تابع در چرخه ای منفرد باشد، روش نیوتن دچار مشکل می شود.

روشهایی که در این زیربخش ارائه می شود فقط نیاز به محاسبه مشتقات اول دارند. ولی با استفاده از اطلاعات چرخه های گذشته، همگرا شدن به طرف مینیمم، سرعت می یابد. یکی از روشها برای ماتریس مشتقات دوم تابع هزینه یک مقدار تقریبی به کار می برد. بنابراین، این روشها فرآیندهای خودآموزی دارند، زیرا آنها اطلاعات را از چرخه های قبلی جمع می کنند. با توجه به موارد پیش گفته شده، روشی که این جا ارائه می شود مزایای هر دو روش تندترین کاهش و نیوتن را دارد. آنها همچنین روشهای شبه نیوتن یا به هنگام نامیده می شوند. آنها مشتقات مرتبه اول را برای تقریب زدن ماتریس هیان به کار می برند.

این روشها در ابتدا برای تابع درجه دوی معین مثبت تدوین شدند. برای چنان توابعی این روشها حداکثر در  $n$  چرخه که  $n$  تعداد متغیرهای طرّاحی است به بهین دقیق همگرا می شوند. این عملکرد مطلوب در مورد توابع هزینه کلی اتفاق نمی افتد. ولی یک تابع هزینه کلی نزدیک به نقطه مینیمم خود بسیار شبیه به یک تابع درجه دوی معین مثبت است. بنابراین وقتی که نزدیک نقطه بهین هستیم عملکرد مشابهی را می توان برای آن توابع انتظار داشت. برای یک تابع غیر محدب تضمینی برای همگرایی در  $n$  چرخه وجود ندارد. اگر روش همگرا نبود، عموماً در هر  $(n+1)$  امین چرخه دوباره شروع می شود.

چندین روش برای تقریب هسیان یا وارون آن وجود دارد. پنداره اصلی این است که تقریب فعلی را با تغییر طرّاحی و بردار گرادیان بهنگام کنیم؛ در حالی که خواص تقارن و معین مثبت حفظ شوند. معین مثبت بودن ضروری است، زیرا بدون آن جهت جست و جو ممکن است برای تابع هزینه کاهشی نباشد. ما دو روش از مشهورترین آنها را در قالب روشهای بهنگام تشریح خواهیم کرد.

#### ۵.۷.۱\* روش دیویدان - فلتچر - پاول<sup>۱</sup>

روشی که ابتدا توسط دیویدان [۱۹۵۹] پیشنهاد شد، توسط فلتچر و پاول [۱۹۶۳] تکمیل و اصلاح شد که آن روش در این جا ارائه می شود. این روش یکی از قدرتمندترین روشهای مینیم سازی تابع عمومی  $f(x)$  است. این روش وارون تقریبی هسیان  $f''(x)$  را با استفاده از تنها مشتقات اول تشکیل می دهد. این روش اغلب روش دی اف پی (DFP) (دیویدان، فلتچر و پاول) نامیده می شود. گامهای این روش عبارت است از:

گام ۱. طرّاحی اولیه  $x^{(0)}$  را حدس بزنید. به عنوان حدس اولیه برای وارون هسیان تابع هزینه یک ماتریس متقارن معین مثبت  $A^{(0)}$  انتخاب کنید. در فقدان اطلاعات بیشتر، ممکن است  $A^{(0)} = I$  انتخاب گردد. همچنین پارامتر همگرایی  $\varepsilon$  را مشخص کنید.  $k = 0$  قرار دهید. بردار گرادیان را به شکل زیر محاسبه کنید

$$c^{(0)} = \nabla f(x^{(0)})$$

گام ۲. نرم بردار گرادیان  $\|c^{(k)}\|$  را محاسبه کنید. اگر  $\|c^{(k)}\| < \varepsilon$  آن گاه فرآیند چرخه را

متوقف کنید. در غیر این صورت ادامه دهید.

گام ۳. جهت جست و جو را محاسبه کنید

$$\mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{c}^{(k)}$$

گام ۴. اندازه گام بهین  $\alpha_k = \alpha$  را که تابع  $f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)})$  فرا مینیمم می کند محاسبه کنید.

گام ۵. طراحی را بهنگام کنید

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$$

گام ۶. ماتریس  $\mathbf{A}^{(k)}$  را بهنگام کنید؛ تقریب وارون همیان تابع هزینه عبارت است از

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{(k)} + \mathbf{B}^{(k)} + \mathbf{C}^{(k)}; \quad \text{ماتریس } n \times n$$

که در آن ماتریس تصحیح  $\mathbf{B}^{(k)}$  و  $\mathbf{C}^{(k)}$  به شکل زیر محاسبه می شوند.

$$\mathbf{B}^{(k)} = \frac{\mathbf{s}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)T}}{(\mathbf{s}^{(k)} \cdot \mathbf{y}^{(k)})}; \quad \mathbf{C}^{(k)} = \frac{-\mathbf{z}^{(k)} \mathbf{z}^{(k)T}}{(\mathbf{y}^{(k)} \cdot \mathbf{z}^{(k)})}$$

با

$$\mathbf{s}^{(k)} = \alpha_k \mathbf{d}^{(k)} \quad (\text{تغییر در طراحی})$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{c}^{(k+1)} - \mathbf{c}^{(k)} \quad (\text{تغییر در گرادیان})$$

$$\mathbf{c}^{(k+1)} = \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)})$$

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)}$$

گام ۷.  $k = k + 1$  قرار داده و به گام ۲ بروید.

دقت کنید که اولین چرخه روش مانند اولین چرخه روش تندترین کاهش است.

فلنچر و پاول [۱۹۶۳] ثابت کردند که این الگوریتم خواص زیر را داراست:

۱. ماتریس  $\mathbf{A}^{(k)}$  برای تمامی  $k$  ها معین مثبت است. این گویای این مطلب است که روش

همیشه به یک نقطه مینیمم محلی همگرا می شود، زیرا

$$\frac{d}{d\alpha} f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)})|_{\alpha=0} = -\mathbf{c}^{(k)T} \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{c}^{(k)} < 0$$

تا وقتی که  $\mathbf{c}^{(k)} \neq 0$  باشد. این یعنی اگر  $\mathbf{c}^{(k)} \neq 0$  باشد،  $f(\mathbf{x}^{(k)})$  فرممکن است با انتخاب

$\alpha > 0$  کاهش یابد (یعنی  $\mathbf{d}^{(k)}$  جهت کاهشی است).

۲. وقتی این روش در مورد یک شکل درجه دوی معین مثبت به کار رود،  $\mathbf{A}^{(k)}$  به وارون هسیان شکل درجه دو همگرا می شود.

**مثال ۵.۱۷ کاربرد روش دی اف پی (DFP).** دو چرخه از روش دی اف پی (DFP) را برای مسأله مینیم کردن تابع

$$f(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 7$$

و با شروع از نقطه  $(1, 2)$  به دست آورید.

حل. گامهای الگوریتم را دنبال می کنیم.

**چرخه ۱**

$$\mathbf{x}^{(0)} = (1, 2); \mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{I}, k = 0, \varepsilon = 0.001 \quad . ۱$$

$$\mathbf{c}^{(0)} = (10x_1 + 2x_2, 2x_1 + 2x_2) = (14, 6)$$

$$\|\mathbf{c}^{(0)}\| = \sqrt{14^2 + 6^2} = 15.232 > \varepsilon, \text{ پس ادامه می دهیم} \quad . ۲$$

$$\mathbf{d}^{(0)} = -\mathbf{c}^{(0)} = (-14, -6) \quad . ۳$$

. ۴

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha \mathbf{d}^{(0)} = (1 - 14\alpha, 2 - 6\alpha)$$

$$f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\alpha) = 5(1 - 14\alpha)^2 + 2(1 - 14\alpha)(2 - 6\alpha) + (2 - 6\alpha)^2 + 7$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 5(2)(-14)(1 - 14\alpha) + 2(-14)(2 - 6\alpha) + 2(-6)(1 - 14\alpha) + 2(-6)(2 - 6\alpha) = 0$$

$$\alpha = 0.0988$$

$$\frac{d^2f}{d\alpha^2} = 2348 > 0$$

بنابراین، اندازه گام عبارت است از  $\alpha = 0.0988$ .

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha \mathbf{d}^{(0)} = (-0.386, 1.407) \quad . ۵$$

$$\mathbf{s}^{(0)} = \alpha \mathbf{d}^{(0)} = (-1.386, -0.593) \quad . ۶$$

$$\mathbf{c}^{(1)} = (-1.046, 2.042)$$

$$\mathbf{y}^{(0)} = \mathbf{c}^{(1)} - \mathbf{c}^{(0)} = (-15.046, -3.958)$$

$$\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{y}^{(0)} = (-15.046, -3.958)$$

$$\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{y}^{(0)} = 23.20$$

$$\mathbf{y}^{(0)} \cdot \mathbf{z}^{(0)} = 242.05$$

روشهای عددی برای طراحی بهین نامتقید

$$\mathbf{s}^{(0)}\mathbf{s}^{(0)T} = \begin{bmatrix} 1.921 & 0.822 \\ 0.822 & 0.352 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(0)} = \frac{\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{s}^{(0)T}}{\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{y}^{(0)}} = \begin{bmatrix} 0.0828 & 0.0354 \\ 0.0354 & 0.0152 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}^{(0)}\mathbf{z}^{(0)T} = \begin{bmatrix} 226.40 & 59.55 \\ 59.55 & 15.67 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{(0)} = -\frac{\mathbf{z}^{(0)}\mathbf{z}^{(0)T}}{\mathbf{y}^{(0)} \cdot \mathbf{z}^{(0)}} = \begin{bmatrix} -0.935 & -0.246 \\ -0.246 & -0.065 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}^{(0)} + \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{C}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.148 & -0.211 \\ -0.211 & 0.950 \end{bmatrix}$$

## چرخه ۲

۲. پس ادامه می دهیم  $\|\mathbf{e}^{(1)}\| = 2.29 > \epsilon$

۳.  $\mathbf{d}^{(1)} = -\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{e}^{(1)} = (0.586, -1.719)$

۴. به دست آوردن اندازه گام: تابع  $f(\mathbf{x}^{(1)} + \alpha \mathbf{d}^{(1)})$  را مینیمم کنید؛  $\alpha = 0.776$

۵.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{x}^{(1)} + \alpha \mathbf{d}^{(1)} \\ &= (-0.386, 1.407) + (0.455, -1.334) = (0.069, 0.073) \end{aligned}$$

$$\mathbf{s}^{(1)} = \alpha \mathbf{d}^{(1)} = (0.455, -1.334) \quad ۶.$$

$$\mathbf{e}^{(2)} = (0.836, 0.284)$$

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{e}^{(2)} - \mathbf{e}^{(1)} = (1.882, -1.758)$$

$$\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{y}^{(1)} = (0.649, -2.067)$$

$$\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{y}^{(1)} = 3.201$$

$$\mathbf{y}^{(1)} \cdot \mathbf{z}^{(1)} = 4.855$$

$$\mathbf{s}^{(1)}\mathbf{s}^{(1)T} = \begin{bmatrix} 0.207 & -0.607 \\ -0.607 & 1.780 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \frac{\mathbf{s}^{(1)}\mathbf{s}^{(1)T}}{\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{y}^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0.0647 & -0.19 \\ -0.19 & 0.556 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}^{(1)}\mathbf{z}^{(1)T} = \begin{bmatrix} 0.421 & -1.341 \\ -1.341 & 4.272 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{(1)} = -\frac{\mathbf{z}^{(1)}\mathbf{z}^{(1)T}}{\mathbf{y}^{(1)} \cdot \mathbf{z}^{(1)}} = \begin{bmatrix} -0.0867 & 0.276 \\ 0.276 & -0.880 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{C}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.126 & -0.125 \\ -0.125 & 0.626 \end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که ماتریس  $\mathbf{A}$  کاملاً به وارون هسیان تابع هزینه نزدیک است. چرخه

دیگری از روش دی اف پی (DFP) به جواب بهین  $(0, 0)$  خواهد رسید.

## ۵.۷.۲۰ روشهای بهنگام مستقیم

در این روشها، در هر چرخه هسیان بهنگام می شود و نه وارون آن. روشهای بهنگام متعددی می تواند ارائه شود. ما روشی را که از همه مشهورتر و ثابت شده که در کاربردها مؤثرتر است ارائه خواهیم کرد. جزئیات به دست آوردن روش در مرجع گیل و دیگران<sup>۱</sup> [۱۹۸۱] ارائه شده است. روش یاد شده به عنوان بی اف جی اس (BFGS) (برای دن - فلتچر - گلدفرب - شنو)<sup>۲</sup> شناخته می شود و گامهای آن عبارت است از:

گام ۱. یک طراحی اولیه  $\mathbf{x}^{(0)}$  حدس بزنید. ماتریس معین مثبت متقارن  $\mathbf{H}^{(0)}$  را به عنوان حدسی برای هسیان تابع هزینه انتخاب کنید، در نبود اطلاعات بیشتر،  $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{I}$  در نظر بگیرید. پارامتر همگرایی  $\varepsilon$  را انتخاب کنید. شمارنده  $k$  را مساوی صفر قرار دهید و بردار گرادیان را مانند زیر محاسبه کنید.

$$\mathbf{c}^{(0)} = \nabla f(\mathbf{x}^{(0)})$$

گام ۲. نرم بردار گرادیان  $\|\mathbf{c}^{(k)}\|$  را محاسبه کنید. اگر  $\|\mathbf{c}^{(k)}\| < \varepsilon$  است، آن گاه فرآیند چرخه را متوقف کنید، در غیر این صورت ادامه دهید.

گام ۳. دستگاه معادلات خطی زیر را برای به دست آوردن جهت جست و جو حل کنید:

$$\mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} = -\mathbf{c}^{(k)}$$

گام ۴. اندازه گام بهین  $\alpha_k = \alpha$  را برای مینیمم شدن  $f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)})$  محاسبه کنید.

گام ۵. طراحی را بهنگام کنید

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}$$

گام ۶. تقریب هسیان تابع هزینه را بهنگام کنید

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{H}^{(k)} + \mathbf{D}^{(k)} + \mathbf{E}^{(k)}$$

که در آن ماتریس تصحیح  $\mathbf{D}^{(k)}$  و  $\mathbf{E}^{(k)}$  عبارتند از

$$\mathbf{D}^{(k)} = \frac{\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)T}}{(\mathbf{y}^{(k)} \cdot \mathbf{s}^{(k)})}; \quad \mathbf{E}^{(k)} = \frac{\mathbf{c}^{(k)} \mathbf{c}^{(k)T}}{(\mathbf{c}^{(k)} \cdot \mathbf{d}^{(k)})}$$

با

$$\mathbf{s}^{(k)} = \alpha_k \mathbf{d}^{(k)} \quad (\text{تغییر در طراحی})$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{c}^{(k+1)} - \mathbf{c}^{(k)} \quad (\text{تغییر در گرادیان})$$

$$\mathbf{c}^{(k+1)} = \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)})$$

گام ۷.  $k = k + 1$  قرار داده و به گام ۲ بروید.

دوباره دقت کنید که اولین چرخه روش مانند اولین چرخه روش تندترین کاهش است. می توان نشان داد که اگر جست و جوی خطی دقیق استفاده شود، رابطه بهنگام کردن بی اف جی اس تقریب هسیان را معین مثبت نگه می دارد. در محاسبات عددی، به خاطر غیردقیق بودن جست و جوی خطی و خطاهای گرد کردن و قطع کردن ماتریس هسیان ممکن است منفرد یا نامعین شده و مشکلاتی بروز کند. بنابراین، باید در مقابل مشکلات عددی برای برنامه های رایانه ای تدابیری اندیشیده شود تا محاسبات پایدار و همگرا باشد. روش عددی دیگری که بسیار مفید است بهنگام کردن ضرایب تجزیه شدن (ضرایب چالسکی) هسیان است به جای خود هسیان [گیل و دیگران، ۱۹۸۱]. بدین طریق معین مثبت بودن ماتریس از نظر عددی تضمین می شود.

**مثال ۵.۱۸ کاربرد روش بی اف جی اس.** دوچرخه از روش بی اف جی اس را برای مسأله زیر انجام دهید. تابع

$$f(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 7$$

را با شروع از نقطه (۱، ۲) مینیمم کنید.

حل. گامهای الگوریتم را دنبال می کنیم. دقت کنید که اولین چرخه، گام تندترین کاهش را برای تابع هزینه می دهد.

### چرخه ۱

$$\mathbf{x}^{(0)} = (1, 2), \mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{I}, \varepsilon = 0.001, k = 0 \quad . ۱$$

$$\mathbf{c}^{(0)} = (10x_1 + 2x_2, 2x_1 + 2x_2) = (14, 6)$$

$$\|\mathbf{c}^{(0)}\| = \sqrt{14^2 + 6^2} = 15.232 > \varepsilon, \text{ پس ادامه می دهیم} \quad . ۲$$

$$\mathbf{d}^{(0)} = -\mathbf{c}^{(0)} = (-14, -6); \text{ زیرا } \mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{I} \quad . ۳$$

۴. تعیین اندازه گام - مانند مثال ۱۷. ۵؛  $\alpha = 0.099$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} + \alpha \mathbf{d}^{(0)} \\ &= (-0.386, 1.407) \end{aligned} \quad . ۵$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(0)} &= \alpha_0 \mathbf{d}^{(0)} = (-1.386, -0.593) \\ \mathbf{c}^{(1)} &= (-1.046, 2.042) \\ \mathbf{y}^{(0)} &= \mathbf{c}^{(1)} - \mathbf{c}^{(0)} = (-15.046, -3.958) \\ \mathbf{y}^{(0)} \cdot \mathbf{s}^{(0)} &= 23.20 \\ \mathbf{c}^{(0)} \cdot \mathbf{d}^{(0)} &= -232.0 \end{aligned} \quad . ۶$$

$$\mathbf{y}^{(0)} \mathbf{y}^{(0)T} = \begin{bmatrix} 226.40 & 59.55 \\ 59.55 & 15.67 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{(0)} = \frac{\mathbf{y}^{(0)} \mathbf{y}^{(0)T}}{\mathbf{y}^{(0)} \cdot \mathbf{s}^{(0)}} = \begin{bmatrix} 9.760 & 2.567 \\ 2.567 & 0.675 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^{(0)} \mathbf{c}^{(0)T} = \begin{bmatrix} 196 & 84 \\ 84 & 36 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{\mathbf{c}^{(0)} \mathbf{c}^{(0)T}}{\mathbf{c}^{(0)} \cdot \mathbf{d}^{(0)}} = \begin{bmatrix} -0.845 & -0.362 \\ -0.362 & -0.155 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{H}^{(0)} + \mathbf{D}^{(0)} + \mathbf{E}^{(0)} = \begin{bmatrix} 9.915 & 2.205 \\ 2.205 & 0.520 \end{bmatrix}$$

چرخه ۲ ( $k = 1$ )

$$\|\mathbf{c}^{(1)}\| = 2.29 > \varepsilon, \text{ پس ادامه می دهیم} \quad . ۲$$

$$\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{d}^{(1)} = -\mathbf{c}^{(1)}; \text{ or, } \mathbf{d}^{(1)} = (17.20, -76.77) \quad . ۳$$

۴. تعیین اندازه گام :  $\alpha = 0.018455$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{x}^{(1)} + \alpha \mathbf{d}^{(1)} \\ &= (-0.0686, -0.0098) \end{aligned} \quad . ۵$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(1)} &= \alpha_1 \mathbf{d}^{(1)} = (0.317, -1.417) \\ \mathbf{c}^{(2)} &= (-0.706, -0.157) \\ \mathbf{y}^{(1)} &= \mathbf{c}^{(2)} - \mathbf{c}^{(1)} \\ &= (0.340, -2.199) \\ \mathbf{y}^{(1)} \cdot \mathbf{s}^{(1)} &= 3.224 \\ \mathbf{c}^{(1)} \cdot \mathbf{d}^{(1)} &= -174.76 \end{aligned} \quad . ۶$$

$$\mathbf{y}^{(1)} \mathbf{y}^{(1)T} = \begin{bmatrix} 0.1156 & -0.748 \\ -0.748 & 4.836 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{(1)} = \frac{\mathbf{y}^{(1)} \mathbf{y}^{(1)T}}{\mathbf{y}^{(1)} \cdot \mathbf{s}^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0.036 & -0.232 \\ -0.232 & 1.500 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^{(1)} \mathbf{c}^{(1)T} = \begin{bmatrix} 1.094 & -2.136 \\ -2.136 & 4.170 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{\mathbf{c}^{(1)} \mathbf{c}^{(1)T}}{\mathbf{c}^{(1)} \cdot \mathbf{d}^{(1)}} = \begin{bmatrix} -0.0063 & 0.0122 \\ 0.0122 & -0.0239 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{E}^{(1)} = \begin{bmatrix} 9.945 & 1.985 \\ 1.985 & 1.996 \end{bmatrix}$$

می توان نشان داد که  $\mathbf{H}^{(2)}$  به هسیان تابع هزینه داده شده کاملاً نزدیک است. یک چرخه دیگر از روش بی اف جی اس به جواب بهین (0, 0) خواهد رسید.

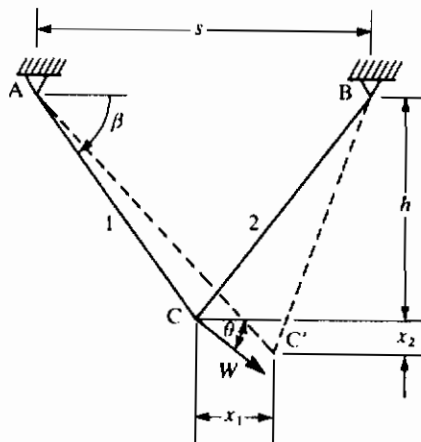
## ۵.۸ کاربردهای مهندسی روشهای نامقیّد

مسائل مهندسی بسیاری است که در آنها از روشهای بهینه سازی نامقیّد استفاده می شود. به عنوان مثال، دستگاه معادلات همزمان خطی و غیرخطی می توانند با روشهای بهینه سازی نامقیّد حل شوند؛ پاسخ سیستمهای مکانیکی و سازه ای می تواند با مینیم سازی انرژی پتانسیل کل محاسبه شود. این مسائل می توانند با روشهای نامقیّد رابطه سازی و حل گردند. بعضی از روشها نیز در نرم افزارهای تجاری در دسترس، ارائه شده اند. به علاوه، روشهای بهینه سازی نامقیّد می تواند برای حل مسائل مقیّد استفاده شود. این مطلب در بخش ۵.۹ تشریح می شود. در این بخش، دو کاربرد از روشهای نامقیّد را بیان می کنیم.

### ۵.۸.۱۰ مینیم سازی انرژی پتانسیل کل

حالت تعادل سیستمهای مکانیکی و سازه ای با نقاط ایستای انرژی پتانسیل کل معین می شود. این به عنوان اصل ایستای انرژی پتانسیل شناخته می شود. اگر در یک نقطه ایستای انرژی پتانسیل واقعاً مقدار مینیم داشته باشد، حالت تعادل پایدار نامیده می شود. در مکانیک سازه ها، این اصول اهمیت اساسی دارند و زیربنای بسیاری از روشهای عددی تحلیل سازه ها را تشکیل می دهند.

برای تشریح این اصل، خرابای دو عضوی متقارنی را که در شکل ۵.۱۶ نشان داده شده در نظر می گیریم. سازه تحت تأثیر بار  $W$  در نقطه  $C$  است. تحت این بار، نقطه  $C$  به  $C'$  منتقل می شود. مسأله عبارت است از: محاسبه تغییر مکان  $x_1$  و  $x_2$  نقطه  $C$ . این کار می تواند با نوشتن انرژی پتانسیل کل خرابا برحسب  $x_1$  و  $x_2$  و سپس مینیم کردن آن انجام شود. وقتی تغییر مکانهای  $x_1$  و  $x_2$  مشخص شوند، نیرو و تنش اعضا می تواند با استفاده از آنها محاسبه گردد. فرض کنید



شکل ۵.۱۶ خربای دو عضوی

$E$  = ضربه ارتجاعی ( $N/m^2$ ) (خاصیتی از ماده که تنش مواد را به کرنش آن مربوط می کند).

$s$  = دهانه خربا (m).

$h$  = ارتفاع خربا (m).

$A_1$  = مساحت سطح مقطع عضو ۱ ( $m^2$ ).

$A_2$  = مساحت سطح مقطع عضو ۲ ( $m^2$ ).

$\theta$  = زاویه ای که در آن بار  $W$  اعمال می شود (درجه).

$L$  = طول اعضا ( $L^2 = h^2 + 0.25s^2$ ) (m).

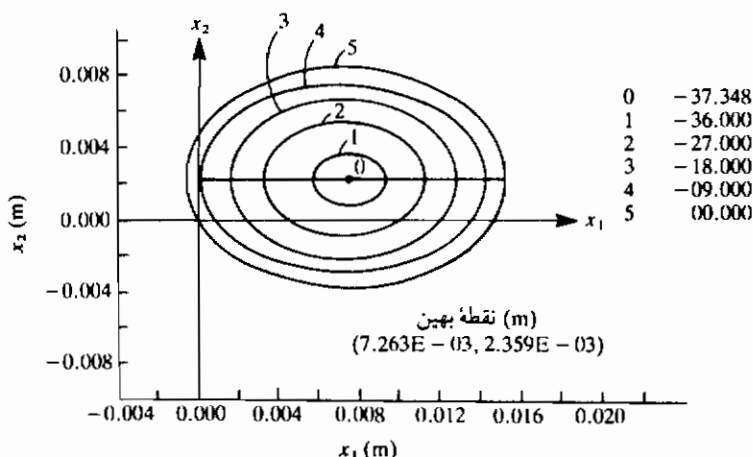
$W$  = بار (N).

$x_1$  = تغییر مکان افقی (m).

$x_2$  = تغییر مکان عمودی (m).

پس انرژی پتانسیل کل سیستم، با فرض تغییر مکانهای کوچک، عبارت است از

$$P(x_1, x_2) = \frac{EA_1}{2L} (x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta)^2 + \frac{EA_2}{2L} (-x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta)^2 - Wx_1 \cos \theta - Wx_2 \sin \theta, \quad N \cdot m \quad (\text{الف})$$



شکل ۵.۱۷ خطوط هزینه ثابت تابع انرژی پتانسیل  $P(x_1, x_2)$  برای خرابای دو عضوی

$$(P = 0, -9.0, -18.0, -27.0, -36.0, -37.348, \text{N.m})$$

در حالی که زاویه  $\beta$  در شکل ۵.۱۶ نشان داده شده است. مینیمم ساختن  $P$  نسبت به  $x_1$  و  $x_2$  تغییر مکانهای  $x_1$  و  $x_2$  را برای حالت تعادل خرابای دوبعدی می دهد.

**مثال ۵.۱۹ مینیمم سازی انرژی پتانسیل یک خرابای دوبعدی.** برای مسأله خرابای دو عضوی داده های عددی زیر را استفاده کنید.  $h = 1.0 \text{ m}$ ،  $A_1 = A_2 = 1.0 \text{E} - 05 \text{ m}^2$ ،  $E = 207 \text{ GPa}$ ،  $\theta = 30^\circ$ ،  $W = 10 \text{ kN}$ ،  $s = 1.5 \text{ m}$  در معادله (الف) داده شده مینیمم کنید: (i) به روش ترسیمی، (ii) به روش تحلیلی، و (iii) به روش گرادیان مزدوج.

**حل.** با جای گزینی داده های فوق در معادله (الف) و ساده کردن آن داریم (دقت کنید که  $\sin \beta = \frac{h}{L}$  و  $\cos \beta = \frac{s}{2L}$ ):

$$P(x_1, x_2) = \frac{EA}{L} (s/2L)^2 x_1^2 + \frac{EA}{L} (h/L)^2 x_2^2 - Wx_1 \cos \theta - Wx_2 \sin \theta$$

$$= (5.962\text{E}+06)x_1^2 + (1.0598\text{E}+06)x_2^2 - (8.66\text{E}+03)x_1 - (5.00\text{E}+03)x_2, \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

خطوط هزینه ثابت برای تابع در شکل ۵.۱۷ نشان داده شده است. جواب بهین از روی ترسیمه عبارت است از

$$x_1 = (7.2634\text{E}-03) \text{ m}; \quad x_2 = (2.3359\text{E}-03) \text{ m}; \quad P = -37.348 \text{ N} \cdot \text{m}$$

با استفاده از شرایط لازم داریم

$$2(5.962\text{E}+06)x_1 - (8.66\text{E}+03) = 0, \quad x_1 = (7.2629\text{E}-03) \text{ m}$$

$$2(1.0598\text{E}+06)x_2 - (5.00\text{E}+03) = 0, \quad x_2 = (2.3589\text{E}-03) \text{ m}$$

روش گرادیان مزدوج داده شده در آی دی زاین نیز به جوابی مشابه همگرا می شود.

### ۵.۸.۲ حل معادلات غیرخطی

روشهای بهینه سازی نامقید می تواند برای یافتن ریشه های دستگاه معادلات غیرخطی استفاده شود. برای توضیح این موضوع، ما دستگاه  $2 \times 2$  زیر را در نظر می گیریم:

$$F_1(x_1, x_2) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$F_2(x_1, x_2) = 0 \quad (\text{ب})$$

تابعی تعریف می کنیم که مجموع مربعات توابع  $F_1$  و  $F_2$  است

$$f(x_1, x_2) = F_1^2(x_1, x_2) + F_2^2(x_1, x_2) \quad (\text{پ})$$

دقت کنید اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه های معادلات (الف) و (ب) باشند، آن گاه در معادله (پ)،  $f = 0$  است. اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه ها نباشند آن گاه تابع  $f > 0$  نشان دهنده مجموع مربعات خطاها در معادله های  $F_1 = 0$  و  $F_2 = 0$  است. پس، مسأله بهینه سازی عبارت است از یافتن  $x_1$  و  $x_2$  طوری که تابع  $f(x_1, x_2)$  معادله (پ) مینیم شود. باید نشان دهیم که شرایط لازم مینیم سازی  $f(x)$  ریشه های دستگاه معادلات غیرخطی را می دهد. شرایط لازم به ما معادله های زیر را می دهد

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2F_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + 2F_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{ت})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2F_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + 2F_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{ث})$$

دقت کنید که اگر  $F_1 = F_2 = 0$  باشد، شرایط لازم برآورده می شوند، یعنی  $x_1$  و  $x_2$  ریشه های معادله های  $F_1 = 0$  و  $F_2 = 0$  هستند. در این حالت  $f = 0$  است. همچنین دقت کنید که اگر

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0 \quad \text{باشد باز هم شرایط لازم برآورده می شود. اگر } \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0 \text{ باشد، } x_1, x_2$$

$x_2$  و نقاط ایستای توابع  $F_1$  و  $F_2$  هستند. برای اکثر توابع نقاط ایستای  $F_1$  و  $F_2$  ریشه های  $F_1 = 0$  و  $F_2 = 0$  نیستند، بنابراین می توانیم این حالت را در نظر نگیریم. در هر حالت، اگر  $x_1$  و  $x_2$  ریشه های معادلات باشند، آن گاه  $f$  باید مقدار صفر داشته باشد. همچنین اگر مقدار بهین  $f$  صفر نباشد ( $f \neq 0$ )، آن گاه  $x_1$  و  $x_2$  نمی تواند ریشه های دستگاه غیرخطی باشد. پس اگر الگوریتم بهینه سازی با  $f \neq 0$  همگرا شد، آن گاه نقطه بهین مسأله مینیم سازی  $f$  ریشه های دستگاه غیرخطی نیست. الگوریتم باید از نقطه دیگری مجدداً شروع شود.

**مثال ۵.۴۰ ریشه های معادلات غیرخطی با مینیم سازی نامفید.**

ریشه های معادلات زیر را بیابید

$$F_1(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 12x_2^2 + 10x_1 = 0$$

$$F_2(\mathbf{x}) = 24x_1x_2 + 4x_2 + 3 = 0$$

**حل.** تابع خطای  $f(\mathbf{x})$  را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$f(\mathbf{x}) = F_1^2 + F_2^2 = (3x_1^2 + 12x_2^2 + 10x_1)^2 + (24x_1x_2 + 4x_2 + 3)^2$$

برای مینیم ساختن این تابع، ما می توانیم هر یک از روشهایی را که قبلاً بحث کردیم استفاده کنیم. جدول ۵.۱۰ تاریخچه چرخه ها را به روش گرادینان مزدوج که در نرم افزار آی دی زاین [آرورا و تسنج، ۱۹۸۷] ارائه شده نشان می دهد. یک ریشه معادلات عسبارت است از  $x_1 = -0.3980$ ،  $x_2 = 0.5404$  با شروع از نقطه  $(1, 1)$ . با شروع از نقطه  $(-50, 50)$  ریشه دیگری به دست می آید  $(-3.331, 0.03948)$ . اما با شروع از نقطه دیگر  $(2, 3)$  برنامه به  $(-0.2812, 0.02063)$  با  $f = 4.351$  همگرا می شود. چون  $f \neq 0$  است، این نقطه یک ریشه دستگاه معادله های داده شده نیست. وقتی این اتفاق می افتد، ما از نقطه دیگری شروع کرده و مسأله را دوباره حل می کنیم.

دقت کنید که روش قبلی می تواند برای یک دستگاه  $n$  معادله  $n$  مجهولی تعمیم داده شود. در این حالت، تابع خطای  $f(\mathbf{x})$  به شکل زیر تعریف می شود

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n F_i^2(\mathbf{x})$$

جدول ۵.۱۰ ریشه‌های معادلات غیرخطی مثال ۵.۲۰: روش گرادیان مزدوج

شماره	$x_1$	$x_2$	$F_1$	$F_2$	$f$
0	-1.0000	1.0000	5.0000	-17.0000	314.0000
1	-0.5487	0.4649	-1.9900	-1.2626	5.5530
2	-0.4147	0.5658	0.1932	-0.3993	0.1968
3	-0.3993	0.5393	-0.0245	-0.0110	7.242E - 4
4	-0.3979	0.5403	-9.377E - 4	-1.550E - 3	2.759E - 6
5	-0.3980	0.5404	-4.021E - 4	-3.008E - 4	1.173E - 8

## ۵.۹\* روشهای تبدیل برای طراحی بهین

روشهای بهینه سازی نامقید می‌توانند برای حل مسائل مقید به کار روند. پنداره اصلی عبارت است از ساختن یک تابع ترکیبی از توابع هزینه و قید. آن تابع پارامترهای معینی - که پارامترهای جریمه نامیده می‌شوند - نیز دارد که تابع ترکیبی را برای نقض قیود جریمه می‌کند. هرچه نقض بزرگتر باشد، جریمه بیشتر است. وقتی تابع ترکیبی برای یک مجموعه پارامترهای جریمه تعریف شدند، آن گاه آن تابع با استفاده از یکی از روشهای بهینه سازی نامقید مینیمم می‌شود. سپس پارامترهای جریمه براساس شرایط معینی تنظیم شده و تابع ترکیبی دوباره تعریف شده و مینیمم می‌شود. تا وقتی که بهبود قابل توجه دیگر در حدس نقطه بهین به وجود نیاید، فرآیند ادامه می‌یابد.

روشهایی که براساس فلسفه پیشین قرار دارند به طور کلی روشهای مینیمم سازی نامقید دنباله‌ای یا باختصار اس یو ام تی (SUMT) نامیده می‌شوند. می‌توان دید که پنداره اصلی اس یو ام تی بسیار ساده است. به خاطر سادگی آنها، در سالهای دهه ۱۹۶۰ و دهه ۱۹۷۰ اشتیاق قابل توجهی برای استفاده از این روشها در طراحی مهندسی بوده است. با این همه، روشهای مقید کاراتری در اواخر دهه ۱۹۷۰ و دهه ۱۹۸۰ تدوین شده و جایگزین اس یو ام تی گردیده‌اند. اخیراً روشها جان تازه‌ای گرفته و پژوهش برای بهبود بیشتر آنها ادامه دارد. یک بحث بسیار مختصر از مفاهیم اساسی و فلسفه روش برای آشنایی اجمالی دانشجویان در کتاب آورده شده است. برای تفصیل بیشتر باید به کتابهای گیل و دیگران<sup>[۱۹۸۱]</sup>، رکلایتز، راویندران و راگسدل<sup>[۱۹۸۳]</sup>، و هفتکه و کامات<sup>[۱۹۸۵]</sup> مراجعه شود.

عبارت "روش تبدیل" برای تشریح هر روشی که مسأله بهینه سازی مقید را با تبدیل آن به یک یا چند مسأله نامقید حل می کند استفاده می شود. آنها روشهای توابع جریمه (خارجی) و مانع (داخلی) و ضرایب (لاگرانژین افزایش یافته) را شامل می شود. برای یادآوری خواننده از مسأله اصلی مقیدی که می خواهیم حل کنیم، آن را به شکل زیر مجدداً شروع می کنیم: بردار  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  را برای مینیمم کردن تابع هزینه

$$f = f(x) \quad (5.47)$$

مشروط به قیود مساوی

$$h_i(x) = 0; \quad i = 1 \text{ to } p \quad (5.48)$$

و قیود نامساوی

$$g_i(x) \leq 0; \quad i = 1 \text{ to } m \quad (5.49)$$

بیابید.

تمامی روشهای تبدیل مسأله بهینه سازی مقید تعریف شده در معادله های (5.47) تا (5.49) را به یک مسأله نامقید تابع تبدیل:

$$\phi(x, r) = f(x) + P(h(x), g(x), r) \quad (5.50)$$

که در آن  $r$  بردار کنترل (جریمه) پارامترها و  $P$  یک تابع با مقدار حقیقی است که عمل جریمه آن توسط  $r$  کنترل می شود، تبدیل می کنند. شکل تابع جریمه  $P$  به روش به کار رفته بستگی دارد. روش اصلی این است که یک حدس طراحی اولیه<sup>(۱)</sup>  $x$  انتخاب کرده و تابع  $\phi$  معادله (5.50) را تعریف کنیم. پارامتر کنترلی  $r$  نیز در ابتدا انتخاب می شود. تابع  $\phi$  با ثابت نگه داشتن  $r$  مینیمم می شود تا  $x$  به دست آید. آن گاه پارامتر  $r$  تنظیم شده و روش تکرار می شود تا وقتی که دیگر امکان بهبودی نباشد.

#### ۵.۹.۱ روشهای مینیمم سازی نامقید دنباله ای

روشهای مینیمم سازی نامقید دنباله ای اصولاً از دو نوع تابع جریمه مختلف تشکیل شده اند. اولین آنها روش تابع جریمه و دومین روش تابع مانع نامیده می شود. پنداره اصلی تابع جریمه عبارت است از تعریف تابع  $P$  در معادله (5.50) به طوری که اگر نقض قیدی وجود دارد،

جریمه بزرگی به تابع هزینه اضافه گردد. روشن است که توابع جریمه متعددی می تواند تعریف شود. مشهورترین آنها تابع افت درجه دو است که به شکل زیر تعریف می شود

$$P(\mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}), r) = r \left\{ \sum_{i=1}^p [h_i(\mathbf{x})]^2 + \sum_{i=1}^m [g_i^+(\mathbf{x})]^2 \right\} \quad (5.51)$$

که در آن  $g_i^+(\mathbf{x}) = \max(0, g_i(\mathbf{x}))$  و  $r$  یک عدد اسکالر است. دقت کنید که  $g_i^+(\mathbf{x}) \geq 0$  است؛ یعنی اگر نامساوی غیرفعال باشد ( $g_i(\mathbf{x}) < 0$ ) مقدار آن صفر است و اگر نامساوی نقض شود مثبت خواهد بود. می توان دید که اگر قید مساوی برآورده نشود، یعنی  $h_i(\mathbf{x}) \neq 0$ ، یا قید نامساوی نقض شود یعنی  $g_i(\mathbf{x}) > 0$ ، معادله (۵.۵۱) مقدار مثبتی برای تابع  $P$  می دهد، و تابع هزینه جریمه می شود؛ همچنان که در معادله (۵.۵۰) دیده می شود. نقطه طراحی شروع برای روش می تواند اختیاری باشد. روشهایی که براساس فلسفه توابع جریمه بنا شده اند گاهی روشهای خارجی نامیده می شوند، زیرا در ناحیه غیر قابل قبول چرخ می زنند.

روشهای تابع مانع تنها در مورد مسائلی که دارای قید نامساوی اند کاربرد دارند. توابع مانع مشهور عبارتند از

۱. تابع مانع وارون

$$P(\mathbf{g}(\mathbf{x}), r) = (1/r) \sum_{i=1}^m [-1/g_i(\mathbf{x})] \quad (5.52)$$

۲. تابع مانع لگاریتمی

$$P(\mathbf{g}(\mathbf{x}), r) = (-1/r) \sum_{i=1}^m \log(-g_i(\mathbf{x})) \quad (5.53)$$

اینها بدین خاطر روشهای تابع مانع نامیده می شوند که یک مانع بزرگ در اطراف ناحیه قابل قبول می سازند. در حقیقت اگر هریک از قیود نامساوی فعال شوند تابع  $P$  بی نهایت می شود. پس هرگاه فرآیند چرخه از یک نقطه قابل قبول شروع شود، نمی تواند به ناحیه غیر قابل قبول برود؛ زیرا فرآیند چرخه نمی تواند از مانع به این بزرگی عبور کند.

برای هر دو روش، می توان نشان داد که وقتی  $r \rightarrow \infty$  میل کند،  $\mathbf{x}(r) \rightarrow \mathbf{x}^*$  خواهد کرد که  $\mathbf{x}(r)$  مینیمم تابع تبدیل یافته  $\phi(\mathbf{x}, r)$  معادله (۵.۵۰) و  $\mathbf{x}^*$  جواب مسأله بهینه سازی مقید اصلی است.

مزایا و معایب روش تابع جریمه عبارتند از:

۱. در مسائل مقید عمومی کاربرد دارند، یعنی مسأله می تواند هم قیود مساوی و هم قیود نامساوی داشته باشد.
  ۲. نقطه طراحی شروع می تواند اختیاری باشد.
  ۳. روش در ناحیه غیر قابل قبول چرخ می زند: جایی که ممکن است توابع تعریف نشده باشند.
  ۴. اگر فرآیند چرخه زودتر قطع شود، طرح نهایی ممکن است قابل قبول و قابل استفاده نباشد.
- مزایا و معایب روش تابع مانع عبارتند از:

۱. روش فقط برای مسائل با قید نوع مساوی کاربرد دارد.
۲. نقطه طراحی شروع باید قابل قبول باشد. با این همه روش می تواند برای به دست آوردن نقطه شروع مورد استفاده قرار گیرد [هاگ و آرورا، ۱۹۷۹].
۳. روش همیشه در ناحیه قابل قبول چرخ می زند، پس اگر زودتر از موقع متوقف شود، طراحی نهایی قابل قبول و بنابراین قابل استفاده است.

در مقالات دوروش فوق را روشهای مینیم سازی نامقید دنباله ای یا اس یو ام تی می گویند [فیاکو و مک کورمیک<sup>۲</sup>، ۱۹۶۸]. این روشها وقتی  $r$  بزرگ است ضعف مشخصی دارند که خیلی جدی است. توابع جریمه و مانع در نزدیکی مرز ناحیه قابل قبول (مجموعه قید) جایی که معمولاً نقاط مینیم قرار دارند خوب کار نمی کنند. انتخاب رشته<sup>۱</sup>  $r^{(k)}$  نیز خود یک مسأله است. انتخاب<sup>(۳)</sup>  $r^{(k)}$  و نرخی که<sup>(۴)</sup>  $r^{(k)}$  باید به طرف بی نهایت برود می تواند به طور جدی محاسبات مربوط به یافتن جواب را تحت تأثیر قرار دهد. به علاوه، ماتریس هسیان تابع نامقید وقتی  $r \rightarrow \infty$  میل کند بدخیم<sup>۳</sup> می شود. بعضی از این مشکلات با استفاده از توابع مانع تعمیم یافته [هفتکه و کامات<sup>۴</sup>، ۱۹۸۵] برطرف می شود.

#### ۵.۹.۲ روشهای ضرایب (لاگرانژین افزایش یافته)

برای تخفیف بعضی از مشکلات روشهایی که در بخش قبل ارائه شدند دسته ای دیگر از روشهای تبدیل در مقالات ارائه شده است. این روشها، روشهای ضرایب یا روشهای

1. Haug and Arora

2. Fiacco and McCormick

3. ill-conditioned

4. Halitka and Kumat

لاگرانژین افزایش یافته نامیده می شوند. در این روشها، نیازی به کنترل پارامترهای  $r$  هنگامی که به سوی بی نهایت میل می کنند نیست. در نتیجه تابع تبدیل  $\phi$  شرایط خوبی داشته و منفرد نیست. روشهای ضرایب مانند روشهای اس یو ام تی همگرا هستند. یعنی آنها از هر نقطه که شروع شده باشند به یک مینیمم محلی همگرا می شوند. ثابت شده است که این روشها از دو روش قبلی بخش ۵.۹.۱ نرخ همگرایی سریعتری دارند. در روشهای ضرایب، تابع جریمه به شکل زیر است

$$P(\mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p r'_i (h_i + \theta'_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i [(g_i + \theta_i)^+]^2 \quad (5.54)$$

که در آن  $\theta'_i > 0$ ،  $r'_i > 0$  و  $\theta_i > 0$ ،  $r_i > 0$  پارامترهای مربوط به  $i$  امین قید نامساوی و مساوی است. اگر  $r_i = r'_i = r$ ،  $\theta_i = \theta'_i = 0$  باشد، آن گاه معادله (۵.۵۴) به معادله افت درجه دوی مشهور که در معادله (۵.۵۱) داده شده تبدیل می شود که با میل  $r \rightarrow \infty$  همگرایی قطعی خواهد بود. اما هدف روشهای ضرایب عبارت از محدود نگه داشتن  $r_i$  و  $r'_i$  است. پنداره روشهای ضرایب عبارت است از شروع با  $r_i$ ،  $r'_i$ ،  $\theta_i$  و  $\theta'_i$  و مینیمم کردن تابع تبدیل معادله (۵.۵۰). آن گاه پارامترهای  $r_i$ ،  $r'_i$ ،  $\theta_i$  و  $\theta'_i$  با استفاده از قواعدی تنظیم می شوند و تمامی فرآیند تا برآورده شدن شرایط بهینگی تکرار می شود. برای بحث با جزئیات بیشتر و کاربردهای روش، خواننده باید به مراجع [بلگاندا و آرورا، ۱۹۸۴b] و مراجعی که پیش از این اشاره شدند مراجعه کند.

## تمرینهای فصل ۵

### بخش ۵.۲ مفاهیم عمومی مربوط به الگوریتمهای عددی

#### ۵.۱ با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید.

۱. تمامی الگوریتمهای طراحی بهین برای شروع فرآیند چرخه نیاز به نقطه شروع دارند.
۲. در هر چرخه فرآیند چرخه ای یک بردار تغییر طراحی باید محاسبه شود.
۳. محاسبه تغییر طراحی می تواند به دو زیرمسئله تعیین اندازه گام و یافتن جهت تقسیم شود.
۴. جهت جست و جو نیاز به محاسبه گرادیان تابع هزینه دارد.

۵. اندازه گام در امتداد جهت جست و جو همیشه منفی است.
  ۶. اندازه گام در امتداد جهت جست و جو می تواند صفر باشد.
  ۷. در بهینه سازی نامقید، با یک گام کوچک دلخواه در امتداد جهت کاهشی تابع هزینه می تواند افزایش یابد.
  ۸. اگر نقطه فعلی مینیم محلی نباشد همیشه یک جهت کاهشی وجود دارد.
  ۹. در بهینه سازی نامقید، در نقطه ای که گرادیان تابع هزینه صفر است می توان یک جهت کاهشی یافت.
  ۱۰. جهت کاهشی با گرادیان تابع هزینه زاویه  $90^\circ - 0^\circ$  می سازد.
- مشخص کنید که آیا جهت داده شده در نقطه جهت کاهشی توابع زیر است یا خیر (تمامی محاسبات را نشان دهید):

- ۵.۲  $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 7; \quad \mathbf{d} = (-1, 1) \text{ at } \mathbf{x} = (2, 1)$
- ۵.۳  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 4; \quad \mathbf{d} = (2, 1) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 1)$
- ۵.۴  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3; \quad \mathbf{d} = (-3, 10, -12) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 2, 3)$
- ۵.۵  $f(\mathbf{x}) = 0.1x_1^2 + x_2^2 - 10; \quad \mathbf{d} = (1, 2) \text{ at } \mathbf{x} = (4, 1)$
- ۵.۶  $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2; \quad \mathbf{d} = (2, 3) \text{ at } \mathbf{x} = (4, 3)$
- ۵.۷  $f(\mathbf{x}) = 10(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2; \quad \mathbf{d} = (162, -40) \text{ at } \mathbf{x} = (2, 2)$
- ۵.۸  $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2; \quad \mathbf{d} = (-2, 2) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 1)$
- ۵.۹  $f(\mathbf{x}) = 0.5x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2; \quad \mathbf{d} = (7, 6) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 1)$
- ۵.۱۰  $f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2; \quad \mathbf{d} = (4, 8, 4) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 1, 1)$
- ۵.۱۱  $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2; \quad \mathbf{d} = (2, 4, -2) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 2, -1)$
- ۵.۱۲  $f(\mathbf{x}) = (x_1 + 3x_2 + x_3)^2 + 4(x_1 - x_2)^2; \quad \mathbf{d} = (-2, -6, -2) \text{ at } \mathbf{x} = (-1, -1, -1)$
- ۵.۱۳  $f(\mathbf{x}) = 9 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3; \quad \mathbf{d} = (-2, 2, 0) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 1, 1)$
- ۵.۱۴  $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 4)^2; \quad \mathbf{d} = (2, -2, 2, -2) \text{ at } \mathbf{x} = (2, 1, 4, 3)$

## بخش ۵.۳ مینیم سازی یک بعدی

- ۵.۱۵ با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید
۱. تعیین اندازه گام همیشه مسأله ای یک بعدی است.
۲. در بهینه سازی نامقید، شیب تابع هزینه در امتداد جهت کاهشی در اندازه گام صفر همیشه مثبت است.
۳. گام بهین خارج از بازه عدم اطمینان قرار دارد.

۴. بعد از محصور کردن اولیه، جست و جوی بخش طلایی برای کاهش بازه عدم اطمینان به دوبار محاسبه تابع نیاز دارد.

۵. ۱۶. مینیمم تابع  $f(\alpha) = 7\alpha^2 - 20\alpha + 22$  را با استفاده از روش جست و جوی بازه یکسان با دقت 0.001 بیابید.  $\delta = 0.05$  را به کار ببرید.

۵. ۱۷. برای تابع  $f(\alpha) = 7\alpha^2 - 20\alpha + 22$ ، به منظور یافتن مینیمم، روش بخش طلایی با دقت 0.005 را استفاده کنید (بازه نهایی عدم اطمینان باید کمتر از 0.005 باشد).  $\delta = 0.05$  را به کار ببرید.

۵. ۱۸. برنامه ای به زبان فرترن بنویسید تا فرآیند جست و جوی بازه یکسان جایگزین را که در شکل ۵.۷ نشان داده شده برای هر تابع  $f(\alpha)$  اجرا کند. برای تابع  $f(\alpha) = 2 - 4\alpha + e^{\alpha}$ ، برنامه فرترن خود را برای یافتن مینیمم با دقت 0.001 استفاده کنید.  $\delta = 0.5$  را به کار ببرید.

۵. ۱۹. تابع  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$  را در نظر بگیرید. نشان دهید که آیا بردار  $\mathbf{d} = (-12, -40, -48)$  در نقطه  $(2, 4, 10)$  یک جهت کاهشی برای  $f$  است یا خیر. شیب تابع در نقطه داده شده چیست؟ یک اندازه گام بهین در امتداد  $\mathbf{d}$  با یک روش عددی بیابید.

۵. ۲۰. تابع  $f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 4$  را در نظر بگیرید. در نقطه  $(1, 1)$ ، یک جهت جست و جوی  $\mathbf{d} = (1, 2)$  فرض کنید.  $f$  را به عنوان تابعی یک متغیره در نقطه داده شده و در امتداد  $\mathbf{d}$  بیان کنید. یک اندازه گام بهین در امتداد  $\mathbf{d}$  به صورت تحلیلی بیابید.

برای توابع زیر جهت تغییر در یک نقطه داده شده است. تابع یک متغیره ای (تابع جست و جوی خطی) بیابید که بتواند برای به دست آوردن اندازه گام بهین استفاده شود (تمام محاسبات را نشان دهید):

$$f(\mathbf{x}) = 0.1x_1^2 + x_2^2 - 10; \quad \mathbf{d} = (-1, -2) \text{ at } \mathbf{x} = (5, 1) \quad ۵. ۲۱$$

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2; \quad \mathbf{d} = (-4, -6) \text{ at } \mathbf{x} = (4, 4) \quad ۵. ۲۲$$

$$f(\mathbf{x}) = 10(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2; \quad \mathbf{d} = (-162, 40) \text{ at } \mathbf{x} = (2, 2) \quad ۵. ۲۳$$

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2; \quad \mathbf{d} = (2, -2) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 1) \quad ۵. ۲۴$$

$$f(\mathbf{x}) = 0.5x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 7x_1 - 7x_2; \quad \mathbf{d} = (7, 6) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 1) \quad ۵. ۲۵$$

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_1)^2; \quad \mathbf{d} = (-4, -8, -4) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 1, 1) \quad ۵. ۲۶$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2; \quad \mathbf{d} = (-2, -4, 2) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 2, -1) \quad ۵. ۲۷$$

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 + 3x_2 + x_3)^2 + 4(x_1 - x_2)^2; \quad \mathbf{d} = (1, 3, 1) \text{ at } \mathbf{x} = (-1, -1, -1) \quad ۵. ۲۸$$

$$f(\mathbf{x}) = 9 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3; \quad ۵.۲۹$$

$$\mathbf{d} = (2, -2, 0) \text{ at } \mathbf{x} = (1, 1, 1)$$

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 4)^2; \quad ۵.۳۰$$

$$\mathbf{d} = (-2, 2, -2, 2) \text{ at } \mathbf{x} = (2, 1, 4, 3)$$

برای مسائل زیر، اندازه گام بهین  $\alpha^*$  را با استفاده از جست و جوی بازه یکسان با  $\delta = 0.05$  و  $\varepsilon = 0.001$  در نقطه و جهت جست و جوی داده شده پیدا کنید (تمام محاسبات را نشان دهید):

$$۵.۲۱ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۳۱ \quad ۵.۲۲ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۳۲$$

$$۵.۲۳ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۳۳ \quad ۵.۲۴ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۳۴$$

$$۵.۲۵ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۳۵ \quad ۵.۲۶ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۳۶$$

$$۵.۲۷ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۳۶ \quad ۵.۲۸ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۳۸$$

$$۵.۲۹ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۳۸ \quad ۵.۳۰ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۴۰$$

برای مسائل زیر، اندازه گام بهین  $\alpha^*$  را با استفاده از جست و جوی بخش طلایی با  $\delta = 0.05$  و  $\varepsilon = 0.001$  در نقطه و جهت جست و جوی داده شده بیابید (تمامی محاسبات را نشان دهید):

$$۵.۴۱ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۴۱ \quad ۵.۴۲ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۴۲$$

$$۵.۴۳ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۴۳ \quad ۵.۴۴ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۴۴$$

$$۵.۴۵ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۴۵ \quad ۵.۴۶ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۴۶$$

$$۵.۴۷ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۴۷ \quad ۵.۴۸ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۴۸$$

$$۵.۴۹ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۴۹ \quad ۵.۵۰ \quad \text{تمرین} \quad ۵.۵۰$$

۵.۵۱ برنامه ای به زبان فرترن بنویسید که درون یابی چندجمله ای را با برازش منحنی درجه

دو انجام دهد. تابع  $f(\alpha) = 7\alpha^2 - 20\alpha + 22$  را انتخاب کنید. روش بخش طلایی

را برای محصور کردن اولیه نقطه مینیمم  $f(\alpha)$  با  $\delta = 0.05$  به کار ببرید. از برنامه

خود برای یافتن نقطه مینیمم  $f(\alpha)$  استفاده کنید. درباره دقت جواب بحث کنید.

۵.۵۲ برای تابع  $f(\alpha) = 7\alpha^2 - 20\alpha + 22$ ، از دو مقدار تابع  $f(0)$  و  $f(\alpha_0)$  و شیب  $f$

در نقطه  $\alpha = 0$  استفاده کرده و منحنی درجه دویی را برازنید. در این جا  $\alpha_0$  یک حد

بالایی برای نقطه مینیمم  $f(\alpha)$  است. از منحنی درجه دو برازنده شده، نقطه مینیمم

حدسی چیست؟ چند چرخه برای یافتن  $\alpha^*$  نیاز است؟ چرا؟

۵.۵۳ تحت چه موقعیتی روش درون یابی چندجمله ای نمی تواند برای مینیمم سازی یک بعدی

استفاده شود؟

## ۵.۵۴ داریم

$$f(\mathbf{x}) = 10 - x_1 + x_1x_2 + x_2^2$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = (2, 4); \quad \mathbf{d}^{(0)} = (-1, -1)$$

- برای جست و جوی یک بعدی، سه مقدار  $\alpha_1 = 0$ ،  $\alpha_2 = 2$ ،  $\alpha_3 = 4$  به کار رفته اند. با استفاده از درون یابی چندجمله ای درجه دو
۱. در چه  $\alpha$  تابع مینیمم می شود؟ ثابت کنید این نقطه مینیمم است و نه ماکزیمم.
  ۲. در چه  $\alpha$ ،  $f(\alpha) = 15$  است؟

## بخش ۵.۴ روش تندترین کاهش

۵.۵۵ با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید

۱. روش تندترین کاهش همگراست.
۲. با شروع از نقطه ای که گرادیان تابع در آن غیر صفر است روش تندترین کاهش می تواند به یک مینیمم محلی همگرا شود.
۳. جهت های تندترین کاهش بر هم عمودند.
۴. جهت تندترین کاهش عمود بر سطح هزینه است.

برای مسائل زیر، سه چرخه از روش تندترین کاهش را کامل کنید. از نقاط طراحی داده شده شروع کنید.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 2x_1x_2; \quad \text{طراحی شروع } (1, 1) \quad 5.56$$

$$f(x_1, x_2) = 12.096x_1^2 + 21.504x_2^2 - 1.7321x_1 - x_2; \quad \text{طراحی شروع } (1, 1) \quad 5.57$$

$$f(x_1, x_2) = 6.983x_1^2 + 12.415x_2^2 - x_1; \quad \text{طراحی شروع } (2, 1) \quad 5.58$$

$$f(x_1, x_2) = 12.096x_1^2 + 21.504x_2^2 - x_2; \quad \text{طراحی شروع } (1, 2) \quad 5.59$$

$$f(x_1, x_2) = 25x_1^2 + 20x_2^2 - 2x_1 - x_2; \quad \text{طراحی شروع } (3, 1) \quad 5.60$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3; \quad \text{طراحی شروع } (1, 1, 1) \quad 5.61$$

$$f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 8x_2^2 - 80\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 20x_2 + 100 - 80\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + 20x_2 + 100 - 5x_1 - 5x_2 \quad 5.62$$

طراحی شروع (4, 6)؛ اندازه گام را می شود تقریبی گرفت و یا با استفاده از یک برنامه رایانه ای محاسبه کرد

$$f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 9x_2^2 - 100\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 20x_2 + 100 - 64\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + 16x_2 + 64 - 5x_1 - 41x_2 \quad 5.63$$

طراحی شروع (5, 2)؛ اندازه گام را می شود تقریبی گرفت و یا با استفاده از یک برنامه رایانه ای محاسبه کرد.

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2; \quad \text{طراحی شروع (5, 2)} \quad 5.64$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4 \quad 5.65$$

طراحی شروع را (1, 2, 3, 4) بگیرید.

تمرینهای ۵.۵۶ تا ۵.۶۵ را با برنامه رایانه ای که در پیوست D برای روش تندترین کاهش ارائه داده حل کنید.

سه تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2; \quad f_2 = x_1^2 + 10x_2^2 + 100x_3^2; \quad f_3 = 100x_1^2 + x_2^2 + 0.1x_3^2$$

توابع  $f_1$ ،  $f_2$  و  $f_3$  را با استفاده از برنامه روش تندترین کاهش که در پیوست D داده شده مینیمم کنید. برای تمامی توابع طراحی شروع را (1, 1, 2) انتخاب کنید. از مشاهده عملکرد روش روی توابع فوق چه نتیجه ای می گیرید؟ برای بهبود نرخ همگرایی روش چگونه متغیرهای طراحی را برای توابع  $f_1$  و  $f_2$  مقیاس بندی می کنید؟

۵.۶۸ گرادیان توابع زیر را در نقاط داده شده با روشهای تفاضل پیشرو، پس رو و مرکزی با ۱٪ تغییر در نقطه محاسبه کرده و آنها را با گرادیان دقیق مقایسه کنید:

$$f(\mathbf{x}) = 12.096x_1^2 + 21.504x_2^2 - 1.7321x_1 - x_2 \text{ at } (5, 6) \quad 1.$$

$$f(\mathbf{x}) = 50(x_2 - x_1^2)^2 + (2 - x_1)^2 \text{ at } (1, 2) \quad 2.$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \text{ at } (1, 2, 3) \quad 3.$$

۵.۶۹ مسأله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید. عبارت

$$\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\mathbf{c} \cdot \mathbf{u})$$

را با شرط

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$$

ماکزیمم کنید. در این جا  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  مؤلفه های یک بردار یکه هستند.

این مسأله بهینه سازی را حل کنید و نشان دهید  $\mathbf{u}$  که تابع هدف فوق را ماکزیمم می کند در حقیقت در جهت گرادیان  $\mathbf{c}$  است.

## بخش ۵.۵ روش گرادیان مزدوج

۵.۷۰ با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید

۱. روش گرادیان مزدوج معمولاً از روش تندترین کاهش سریعتر همگرا می شود.
  ۲. جهت‌های مزدوج با استفاده از گرادیانهای تابع هزینه محاسبه می شوند.
  ۳. جهت‌های مزدوج برهم عمودند.
  ۴. در محاسبه دقیق اندازه گام، جهت مزدوج در  $k$  امین نقطه عمود بر گرادیان تابع هزینه در  $(k + 1)$  امین نقطه است.
  ۵. جهت مزدوج در  $k$  امین نقطه عمود بر گرادیان تابع هزینه در  $(k - 1)$  امین نقطه است.
- برای مسائل زیر، دو چرخه از روش گرادیان مزدوج را کامل کنید.

۵.۷۱ تمرین ۵.۵۶      ۵.۷۲ تمرین ۵.۵۷

۵.۷۳ تمرین ۵.۵۸      ۵.۷۴ تمرین ۵.۵۹

۵.۷۵ تمرین ۵.۶۰      ۵.۷۶ تمرین ۵.۶۱

۵.۷۷ تمرین ۵.۶۲      ۵.۷۸ تمرین ۵.۶۳

۵.۷۹ تمرین ۵.۶۴      ۵.۸۰ تمرین ۵.۶۵

- ۵.۸۱ یک برنامه رایانه‌ای به زبان فترن بنویسید که روش گرادیان مزدوج را اجرا کند (در واقع برنامه تندترین کاهش داده شده در پوست D را بهبود بخشید). تمرینهای ۵.۷۱ تا ۵.۸۰ را با استفاده از برنامه حل کنید.

## بخش ۵.۶ روش نیوتن

۵.۸۲ با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید

۱. در روش نیوتن، محاسبه جهت جست و جو در هر نقطه‌ای همیشه امکان پذیر است.
۲. جهت نیوتن همیشه جهت کاهشی تابع هزینه است.
۳. روش نیوتن با شروع از هر نقطه و با اندازه گام واحد همگراست.
۴. روش نیوتن در هر نقطه فقط به اطلاعات گرادیان نیاز دارد.

برای مسائل زیر، یک چرخه از روش نیوتن بهبود یافته را کامل کنید؛ همچنین شرط کاهشی را

بررسی کنید.

۵.۸۳	تمرین ۵.۵۶	۵.۸۴	تمرین ۵.۵۷
۵.۸۵	تمرین ۵.۵۸	۵.۸۶	تمرین ۵.۵۹
۵.۸۷	تمرین ۵.۶۰	۵.۸۸	تمرین ۵.۶۱
۵.۸۹	تمرین ۵.۶۲	۵.۹۰	تمرین ۵.۶۳
۵.۹۱	تمرین ۵.۶۴	۵.۹۲	تمرین ۵.۶۵

۵.۹۳ یک برنامه رایانه‌ای به زبان فرترن برای الگوریتم نیوتن بهبود یافته بنویسید. برای جست و جوی خطی از جست و جوی بازه یکسان استفاده کنید. تمرینهای ۵.۸۳ تا ۵.۹۲ را با استفاده از برنامه حل کنید.

#### بخش ۵.۷ روش شبه نیوتن

۵.۹۴ با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید: برای مسائل نامقید

۱. روش دی اف پی تقریبی برای وارون هسیان تولید می کند.
  ۲. روش دی اف پی تقریبی معین مثبت برای وارون هسیان تولید می کند.
  ۳. روش دی اف پی یک جهت کاهشی برای تابع هزینه می دهد.
  ۴. روش بی اف جی اس تقریبی معین مثبت برای هسیان تابع هزینه تولید می کند.
  ۵. روش بی اف جی اس همیشه جهت کاهشی برای تابع هزینه می دهد.
  ۶. روش بی اف جی اس همیشه به هسیان تابع هزینه همگرا می شود.
- برای مسائل زیر، دو چرخه از روشهای دیویدان-فلتچر-پاول و بی اف جی اس را کامل کنید.

۵.۹۵	تمرین ۵.۵۶	۵.۹۶	تمرین ۵.۵۷
۵.۹۷	تمرین ۵.۵۸	۵.۹۸	تمرین ۵.۵۹
۵.۹۹	تمرین ۵.۶۰	۵.۱۰۰	تمرین ۵.۶۱
۵.۱۰۱	تمرین ۵.۶۲	۵.۱۰۲	تمرین ۵.۶۳
۵.۳.۱	تمرین ۵.۶۴	۵.۱۰۴	تمرین ۵.۶۵

۵.۱۰۵ برنامه‌ای بنویسید که روش دیویدان-فلتچر-پاول را اجرا کند. تمرینهای ۵.۹۵ تا ۵.۱۰۴ را با استفاده از برنامه حل کنید.

۵.۱۰۶ یک برنامه رایانه ای برای اجرای روش بی اف جی اس بنویسید. تمرینهای ۵.۹۵ تا ۵.۱۰۴ را با استفاده از برنامه حل کنید.

### بخش ۵.۸ کاربردهای مهندسی روشهای نامقید

حالت تعادل سازه دو میله ای شکل ۵.۱۶ را با استفاده از داده های عددی زیر بیابید.

$$A_1 = 1.5 \text{ cm}^2, A_2 = 2.0 \text{ cm}^2, h = 100 \text{ cm}, s = 150 \text{ cm}, \quad ۵.۱۰۷$$

$$W = 100\,000 \text{ N}, \theta = 45^\circ, E = 21 \text{ MN/cm}^2$$

$$A_1 = 100 \text{ mm}^2, A_2 = 200 \text{ mm}^2, h = 1000 \text{ mm}, s = 1500 \text{ mm}, \quad ۵.۱۰۸$$

$$W = 50\,000 \text{ N}, \theta = 60^\circ, E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$$

ریشه های معادلات غیرخطی زیر را با استفاده از روش گرادیان مزدوج بیابید:

$$F(x) = 3x - e^x = 0 \quad ۵.۱۰۹$$

$$F(x) = \sin x = 0 \quad ۵.۱۱۰$$

$$F(x) = \cos x = 0 \quad ۵.۱۱۱$$

$$F(x) = \frac{2x}{3} - \sin x = 0 \quad ۵.۱۱۲$$

$$F_1(\mathbf{x}) = 1 - \frac{10}{(x_1^2 x_2)} = 0, \quad F_2(\mathbf{x}) = 1 - \frac{2}{(x_1 x_2^2)} = 0 \quad ۵.۱۱۳$$

$$F_1(\mathbf{x}) = 5 - \frac{1}{8}x_1 x_2 - \frac{1}{4x_1^2} x_2^2 = 0, \quad F_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{16}x_1^2 + \frac{1}{2x_1} x_2 = 0 \quad ۵.۱۱۴$$



## فصل ششم

### روشهای عددی برای طراحی بهین مقید

#### ۶.۱ مقدمه

در فصل گذشته، مسأله مقید به دنباله ای از مسائل نامقید تبدیل شد. جوابهای مسائل نامقید به جواب مسأله مقید اصلی همگرا شد. برای حل مسأله مقید تبدیل شده، هر روش بهینه سازی عددی نامقید می تواند به کار رود.

در این فصل، ما روشهای عددی را - که گاهی روشهای ابتدایی نامیده می شوند - که مستقیماً مسأله بهینه سازی مقید اصلی را حل می کنند شرح می دهیم. مسأله مقیدی که ما می خواهیم حل کنیم در بخش ۲.۷ رابطه سازی شده است. برای سادگی کار، در این جا مجدداً بیان می شود: یک بردار  $n$  بعدی متغیر طراحی  $x = (x_1, \dots, x_n)$  بیابید تا تابع هزینه

$$f = f(x) \quad (۶.۱)$$

را مشروط به قیود مساوی

$$h_i(x) = 0; \quad i = 1 \text{ to } p \quad (۶.۲)$$

قیود نامساوی

$$g_i(x) \leq 0; \quad i = 1 \text{ to } m \quad (۶.۳)$$

## و محدوده صریح متغیرهای طراحی

$$N = \{x \mid x \in S \quad \text{با} \quad \|x - x^*\| < \delta\} \quad (۶.۴)$$

که در آن  $x_i$  و  $x_{iii}$  به ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقدار مجاز  $i$  امین متغیر طراحی  $x_i$  است، مینیمم کند. دقت کنید که قیود محدوده صریح متغیرهای طراحی معادله (۶.۴) کاملاً ساده هستند و در برنامه های روشهای عددی براحتی می توان با آنها برخورد کرد. معمولاً این نوع برخورد از کارایی بیشتری برخوردار است. با این همه در بحث روشهای عددی فرض می کنیم آنها در معادله (۶.۳) قیود نامساوی ملحوظ شده اند. دقت کنید که ما تنها روشهایی را بحث خواهیم کرد که با استفاده از آنها می توان مسائل مفید عمومی که در معادله های (۶.۱) تا (۶.۴) تعریف شدند، حل کرد.

مانند مسائل نامفید، روشهای متعددی برای الگوی عمومی مسائل بهینه سازی مفید فوق مورد بحث قرار گرفته است. بیشتر روشها مانند گذشته نگرش دوگامی را دنبال می کنند: گامهای تعیین جهت جست و جو و طول گام. دیدگاهی که این جا دنبال می شود عبارت است از تشریح پنداره ها و مفاهیم زیربنایی روشها، و از بیان جامع روشها و محاسن و معایب آنها پرهیز می شود. تنها چند روش ساده که کاربری عمومی تری دارند با بیان مثالهایی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

در بخش ۵.۴ روش تندترین کاهش را برای حل مسائل بهینه سازی نامفید تشریح کردیم. آن روش بسیار ساده بود. اما مستقیماً برای مسائل مفید کاربری نداشت. یک دلیل این است که ما باید هنگام محاسبه جهت جست و جو قیودی را در نظر بگیریم. در این فصل، ما روش تندترین کاهش مفید را تشریح خواهیم کرد که جهت تغییر طراحی را با در نظر گرفتن عملکرد محلی توابع قیود و هزینه محاسبه می کند. این روشها (و بسیاری از روشهای دیگر) بر اساس خطی سازی مسأله حول حدس فعلی طرح بهین قرار دارند. بنابراین، خطی سازی مسأله بسیار مهم است و با جزئیات بحث خواهد شد. وقتی مسأله خطی شد، طبیعی است که سؤال شود آیا مسأله را می توان با استفاده از روشهای برنامه ریزی خطی حل کرد یا خیر. بنابراین، ابتدا روشی را که یک توسعه ساده روش سیمپلکس برنامه ریزی خطی است شرح می دهیم. سپس توسعه روش تندترین کاهش را برای مسائل مفید به بحث خواهیم گذاشت. خلاصه ای از مباحث این فصل در زیر می آید.

بخش ۶.۲ مفاهیم و پنداره های اساسی. این بخش حاوی مفاهیم اصلی، پنداره ها و

تعاریف عباراتی که در روشهای عددی بهینه سازی مقید استفاده می شود است. وضعیت یک قید در یک نقطه طراحی تعریف می شود. قیود فعال، غیرفعال، نقض شده و  $\varepsilon$  فعال (مساوی و غیرمساوی) تعریف می شوند. نرمال سازی قیود و مزایای آن با مثال تشریح می شود. پنداره "راهبرد قید پتانسیل"، تابع کاهشی، و همگرایی الگوریتم تشریح می شوند.

بخش ۶.۳ خطی سازی مسأله. استفاده از بسط سری تیلور برای خطی سازی یک مسأله بهینه سازی مقید غیرخطی گامی اساسی در اکثر روشهای بهینه سازی عددی است. این مطلب را با مثال تشریح خواهیم کرد.

بخش ۶.۴ الگوریتم برنامه ریزی خطی دنباله ای. وقتی خطی سازی مسأله تعریف شد، از روش سیمپلکس برنامه ریزی خطی می توان برای به دست آوردن جهت جست و جو استفاده کرد. این موضوع با مثالهایی توضیح داده می شود. پنداره حدود حرکت و لزوم آن تشریح می شود. یک برنامه ریزی خطی دنباله ای (اس ال پی، SLP) تعریف می شود. محاسن و معایب روش بحث می شوند.

بخش ۶.۵ زیرمسأله برنامه ریزی درجه دو. زیربرنامه خطی شده تبدیل به یک زیرمسأله برنامه ریزی درجه دو (کیو پی QP) می شود که تابع هزینه درجه دو و قیود خطی دارد. محاسن زیرمسأله QP نسبت به زیرمسأله LP تشریح می شود. روشی برای حل مسائل QP براساس تعمیم روش سیمپلکس برای LP شرح داده می شود.

بخش ۶.۶ روش تندترین کاهش مقید. با استفاده از زیرمسأله QP الگوریتم تندترین کاهش مقید ارائه و با مثالهایی تشریح می شود. یک تابع کاهشی و شرط کاهش تعریف می شوند. یک روش ساده دو قسمتی برای به دست آوردن اندازه گام مناسب ارائه می شود. روش بسیار عمومی است و می تواند قیود مساوی و نامساوی را دربر گیرد و نقطه طراحی اولیه اختیاری باشد، یعنی می تواند قابل قبول یا غیرقابل قبول باشد.

بخش ۶.۷ روشهای شبه نیوتن مقید. در این بخش، الگوریتم تندترین کاهش مقید تعمیم داده می شود تا شامل هسیان تابع لاگرانژ در تعریف زیرمسأله QP شود. چگونگی به دست آوردن زیرمسأله بیان شده و روش بهنگام کردن هسیان تقریبی تشریح می شود. پنداره روشهای شبه نیوتن مقید کاملاً ساده و سراسر هستند، اما در عملکرد عددی بسیار مؤثرند. روش با یک مثال تشریح شده و جنبه های عددی بحث می شوند. این روش در فصل ۷ و ۸ برای مسائل طراحی متعددی استفاده می شود.

بخش ۶.۸ روشهای دیگر. روشهای متعدد دیگری برای مسائل بهینه سازی مقید تدوین شده و مورد ارزیابی قرار گرفته اند. به علاوه، شکلهای متفاوتی از روشها بحث شده است. ما به طور مختصر پنداره های اساسی سه روش - جهت قابل قبول، تصویر گرادیان و گرادیان کاهش یافته عمومی - را که برای حل بعضی از مسائل طراحی مهندسی به کار رفته اند شرح می دهیم.

## ۶.۲ مفاهیم اصلی و پنداره ها

### ۶.۲.۱ مفاهیم اساسی مربوط به الگوریتمهای مسائل مقید

در روشهای عددی مستقیم (جست و جو)، همچنان که برای روشهای نامقید در فصل ۵ شرح دادیم برای شروع فرآیند چرخه، یک طراحی انتخاب می کنیم؛ فرآیند چرخه را تا زمانی که حرکت بیشتری امکان پذیر نباشد و شرایط بهینگی برآورده شوند ادامه می دهیم. بیشتر مفاهیم عمومی الگوریتمهای عددی چرخه ای که در بخش ۵.۲ بحث شد به روشهای مسائل بهینه سازی مقید قابل تعمیم هستند. بنابراین، تمامی آن مفاهیم باید دوباره مرور شوند. همه روشهای بحث شده در این فصل براساس دستورالعمل چرخه ای زیر قرار دارند؛ همچنان که در معادله های (۵.۱) و (۵.۲) برای مسائل نامقید نیز ارائه شد:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \mathbf{x}_i^{(k)} + \Delta \mathbf{x}_i^{(k)}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

$$i = 1 \text{ to } n$$

اندیس بالایی  $k$  نمایشگر شماره چرخه یا سیکل طراحی، اندیس پایینی  $i$  مربوط به  $i$  امین متغیر طراحی،  $\mathbf{x}^{(k)}$  حدس طراحی شروع، و  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  نمایانگر تغییر کوچکی در طرح فعلی است. مانند روشهای عددی نامقید، تغییر طرح  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  از دو قسمت تشکیل شده است:

$$\Delta \mathbf{x}^{(k)} = \alpha_k \mathbf{d}^{(k)} \quad (6.7)$$

که در آن  $\alpha_k$  عبارت است از اندازه گام در جهت جست و جوی  $\mathbf{d}^{(k)}$ . پس بهبود طراحی شامل جواب زیر مسائل جهت جست و جو و تعیین اندازه گام است. جواب هر دو زیرمسئله می تواند شامل مقادیر توابع هزینه و قید و گرادیان آنها در نقطه طراحی فعلی باشد.

از نظر مفهومی، الگوریتم مسائل بهینه سازی مقید و نامقید براساس فلسفه چرخه ای

مشابهی قرار دارند. اما یک تفاوت مهم وجود دارد: برای مسائل مقید، باید هنگام تعیین جهت جست و جو و اندازه گام، قیود در نظر گرفته شوند. تغییر روش در تعیین هر کدام از آنها می تواند الگوریتم بهینه سازی متفاوتی را بدهد. ما به طور کلی یکی دو تا از این روشها را که الگوریتمها را در فضای طراحی پیش می برد بحث خواهیم کرد.

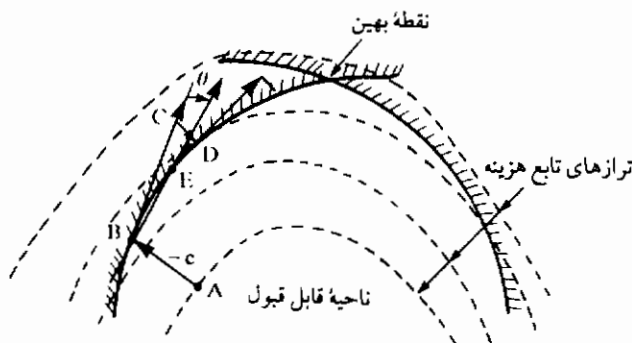
تمامی الگوریتمها به یک حدس طراحی برای شروع فرآیند چرخه نیاز دارند. طراحی شروع می تواند قابل قبول یا غیر قابل قبول باشد. اگر داخل فضای قابل قبول باشد، مانند نقطه A در شکل ۶.۱، آن گاه دو امکان وجود دارد:

۱. گرادیان تابع هزینه در نقطه صفر است، پس یک نقطه ایستای نامقید است. شرط کافی برای بهینگی. نقطه را باید بررسی کنیم.

۲. اگر نقطه فعلی ایستا نیست، آن گاه می توانیم تابع هزینه را با حرکت در امتداد جهت کاهشی کاهش دهیم؛ مثلاً، جهت تندترین کاهش (c-) همچنان که در شکل ۶.۱ نشان داده شده است. چنین چرخه هایی را تازمانی که به قیدی برخورد شود یا به نقطه مینیم نامقید برسیم ادامه می دهیم.

در ادامه بحث فرض می کنیم که نقطه بهین در روی مرز مجموعه قید قرار دارد، یعنی بعضی از قیود در بهین فعال هستند.

زمانی که با مرز قیدی برخورد می شود مثل نقطه B، یک راهبرد این است که در امتداد مماس بر مرز حرکت شود، مثل جهت B-C در شکل ۶.۱. این به یک نقطه غیر قابل قبول می رسد که از آن جا دوباره قید تصحیح می شود تا به نقطه قابل قبولی مثل D در شکل ۶.۱



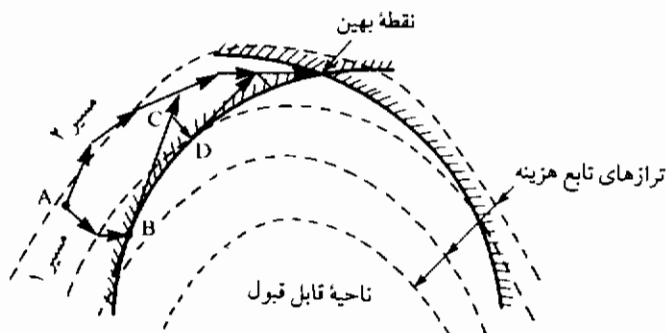
شکل ۶.۱ گامهای مفهومی الگوریتمهای بهینه سازی مقید که از یک نقطه قابل قبول شروع شده است

برسیم. از آن جا گامهای قبلی تکرار می شود تا به نقطه بهین برسیم. راهکار دیگر عبارت است از مایل نمودن جهت مماسی B-C به اندازه زاویه مشخصی مثل  $\theta$  به طرف ناحیه قابل قبول. آن گاه یک جست و جوی خطی در ناحیه قابل قبول انجام می شود تا به نقطه مرزی E برسیم؛ همچنان که در شکل ۶.۱ نشان داده شده است. آن گاه روش از آن جا تکرار می شود.

وقتی نقطه شروع غیر قابل قبول است، مانند نقطه A در شکل ۶.۲، آن گاه یک راهکار این است که قیود را تصحیح کنیم تا به مرز قید در نقطه B برسیم. از آن جا، راهکاری را که در بند قبلی تشریح شد می توان دنبال کرد تا به نقطه بهین برسیم. این مطلب در مسیر ۱ در شکل ۶.۲ نشان داده شده است. راهکار دوم عبارت است از کاربرد یک فرآیند چرخه ای در ناحیه غیر قابل قبول با محاسبه جهت هایی که نقاط طراحی متوالی را به نقطه بهین نزدیکتر می کند و با مسیر ۲ در شکل ۶.۲ نشان داده شده است.

بر اساس راهکارهایی که تاکنون تشریح کردیم الگوریتمهای متعددی تدوین شده و مورد ارزیابی قرار گرفته اند. بعضی از الگوریتمها برای دسته ای از مسائل از بقیه بهترند. تعدادی از الگوریتمها اگر مسأله فقط قیود نامساوی داشته باشد خوب کار می کنند، در صورتی که بعضی دیگر می توانند به طور همزمان قیود مساوی و نامساوی را در نظر بگیرند. در این کتاب، ما بیشتر روی الگوریتمهای عمومی که محدودیتی روی توابع هزینه یا قیود ندارند تکیه می کنیم. بیشتر الگوریتمهایی که تشریح خواهیم کرد بر اساس چهار گام اساسی زیر قرار دارند:

۱. خطی سازی توابع هزینه و قید حول حدس طراحی بهین داده شده (فعلی). بعضی از روشها نیاز به خطی سازی همه آنها دارند، در صورتی که بعضی دیگر فقط به خطی سازی تعدادی از آنها اکتفا می کنند.



شکل ۶.۲ گامهای مفهرمی الگوریتمهای بهینه سازی مقید که از يك نقطه غیر قابل قبول شروع می شود.

۲. تعریف زیر مسأله تعیین جهت جست و جو با استفاده از توابع هزینه و قید خطی شده (همه یا بخشی از آنها).

۳. حل زیر مسأله که جهت جست و جو را در فضای طرّاحی می دهد.

۴. محاسبه اندازه گامی که یک تابع کاهشی مناسب را در جهت جست و جو مینیمم کند (در بخشهای ۶.۲.۵ و ۶.۱ و ۶.۶ با جزئیات بیشتر تشریح می شود). برای مسائل نامقید، تابع هزینه به عنوان تابع کاهشی استفاده می شود. برای مسائل مقید، توابع کاهشی متعددی، مانند تابع هزینه، به کار رفته اند. بعضی از توابع کاهشی تابع هزینه را با اضافه کردن جملات جریمه استفاده می کنند که اثر نقض قید در آنها ملحوظ شده است.

#### ۶.۲.۲ وضعیت قید در یک نقطه طرّاحی

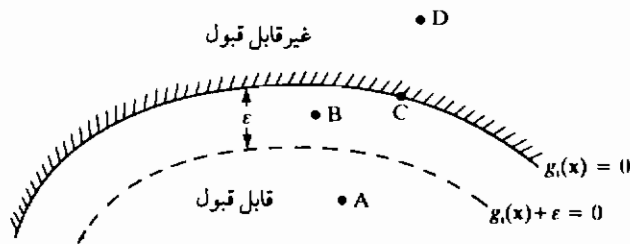
یک قید نامساوی در نقطه طرّاحی می تواند فعال باشد یا  $\varepsilon$  فعال باشد یا نقض شود و یا غیر فعال باشد. از طرف دیگر، یک قید مساوی در یک نقطه طرّاحی یا فعال یا نقض شده است. تعریف دقیق وضعیت قید در یک نقطه طرّاحی در تدوین و بحث روشهای عددی مورد نیاز است. قید فعال. یک قید نامساوی  $g_i(x) \leq 0$  در یک نقطه طرّاحی  $x^{(k)}$  فعال (یا محکم) گفته می شود اگر در نقطه به صورت مساوی برآورده شود؛ یعنی  $g_i(x^{(k)}) = 0$ .

قید غیر فعال. یک قید نامساوی  $g_i(x) \leq 0$  در نقطه طرّاحی  $x^{(k)}$  غیر فعال گفته می شود اگر در آن نقطه مقدار منفی داشته باشد؛ یعنی  $g_i(x^{(k)}) < 0$ .

قید نقض شده. یک قید نامساوی  $g_i(x) \leq 0$  در نقطه طرّاحی  $x^{(k)}$  را نقض شده گویند اگر در آن نقطه مقدار مثبت داشته باشد، یعنی  $g_i(x^{(k)}) > 0$ . یک قید مساوی  $h_i(x) = 0$  در یک نقطه طرّاحی  $x^{(k)}$  نقض شده است اگر در آن نقطه مقدار غیر صفر داشته باشد یعنی  $h_i(x^{(k)}) \neq 0$ . دقت کنید که با این تعاریف، یک قید مساوی در هر نقطه طرّاحی همیشه یا فعال است یا نقض شده.

اکنون قیود  $\varepsilon$  فعال را معرفی می کنیم. برای تعریف چنین قیودی، یک عدد کوچک مثبت  $\varepsilon$  انتخاب می کنیم.

قید  $\varepsilon$  فعال. هر قید نامساوی  $g_i(x) \leq 0$  را در نقطه  $x^{(k)}$ ،  $\varepsilon$  فعال گویند اگر  $g_i(x^{(k)}) < 0$  ولی  $g_i(x^{(k)}) + \varepsilon \geq 0$  باشد، در حالی که  $\varepsilon > 0$  یک عدد کوچک است. یک قید  $\varepsilon$  فعال برای یک نقطه طرّاحی بسادگی این مفهوم را می رساند که نقطه طرّاحی در نزدیکی مرز قید در طرف قابل قبول (در کران  $\varepsilon$ ، همچنان که در شکل ۶.۳ نشان داده شده) است.



شکل ۶.۳ وضعیت یک قید در نقاط طراحی A ، B ، C و D.

برای درک پنداره وضعیت قید، به شکل ۶.۳ برمی گردیم. قید نامساوی  $i$  ام  $g_i(x) \leq 0$  را در نظر بگیرید. مرز قید (که در فضای  $n$  بعدی یک سطح است)،  $g_i(x) = 0$ ، رسم می شود. یک مرز مصنوعی در فاصله  $\varepsilon$  از مرز  $g_i(x) = 0$  و در داخل ناحیه قابل قبول نیز رسم می شود. چهار نقطه طراحی A ، B ، C و D را در نظر می گیریم، همچنان که در شکل ۶.۳ نشان داده شده است. برای نقطه طراحی A، قید  $g_i(x)$  منفی بوده و حتی  $g_i(x) + \varepsilon < 0$  است. پس، قید برای نقطه طراحی A، غیرفعال است. برای نقطه طراحی B،  $\varepsilon$  فعال است. برای نقطه طراحی C،  $g_i(x) = 0$  است، همچنان که در شکل ۶.۳ نشان داده شده است. بنابراین، قید در آن جا فعال است. برای نقطه طراحی D،  $g_i(x)$  از صفر بزرگتر است، پس قید نقض شده است.

### ۶.۲.۳ نرمال سازی قید

در محاسبات عددی نرمال سازی تمامی توابع قیود مطلوب است. همان طور که قبلاً گفته شد، از قیود  $\varepsilon$  فعال، فعال و نقض شده برای محاسبه یک جهت مطلوب در تغییر طرح استفاده می شود. معمولاً برای تمامی قیود از یک مقدار برای  $\varepsilon$  (مثلاً ۰.۱۰) استفاده می شود. چون قیود مختلف از نظر بزرگی مرتبه های مختلفی دارند، استفاده از یک  $\varepsilon$  مشابه برای تمامی قیود مناسب نیست مگر آن که آنها را نرمال کنیم. به عنوان مثال، یک قید تنش مثل

$$\sigma \leq \sigma_a, \quad \text{یا} \quad \sigma - \sigma_a \leq 0 \quad (6.8)$$

و یک قید جابه جایی مثل

$$\delta \leq \delta_a, \quad \text{یا} \quad \delta - \delta_a \leq 0 \quad (6.9)$$

در نظر بگیرید که  $\sigma =$  تنش محاسبه شده در یک عضو،  $\sigma_0 =$  تنش مجاز (تنش کارکرد)،  $\delta =$  خیز محاسبه شده در یک نقطه و  $\delta_0 =$  خیز مجاز می باشد.

دقت کنید که واحدهای دو قید با هم متفاوتند. قید معادله (۶.۸) شامل تنش است که واحد آن پاسکال ( $\text{Pa}$ ,  $\text{N/m}^2$ ) می باشد. به عنوان مثال تنش مجاز فولاد 250 MPa است. قید دیگر معادله (۶.۹) شامل خیز سازه می باشد که ممکن است فقط چند سانتی متر باشد. به عنوان مثال خیز مجاز  $\delta$  ممکن است تنها 2 cm باشد. پس، مقدار دو قید از نظر مرتبه بزرگی بسیار تفاوت دارد. اگر قیود نقض شوند، قضاوت در مورد شدت نقض شدنشان مشکل است. می توانیم قیود را با تقسیم آنها بر مقادیر مجاز مربوطه شان نرمال کنیم و قید نرمال شده

$$R - 1.0 \leq 0 \quad (6.10)$$

را به دست آوریم که در آن برای قید تنش  $R = \sigma/\sigma_0$  و برای قید خیز  $R = \delta/\delta_0$  است. در این جا، فرض شده هر دو  $\sigma_0$  و  $\delta_0$  مثبت باشند، در غیر این صورت جهت نامساوی تغییر می کند. برای قیود نرمال شده، واریسی قیود  $\varepsilon$  فعال با استفاده از یک  $\varepsilon$  برای هر دوی آنها ساده است. قیود دیگری هستند که وقتی نسبت به مقدار اسمی شان نرمال می شوند باید به شکل

$$1.0 - R \leq 0 \quad (6.11)$$

نوشته شوند. به عنوان مثال، بسامد اصلی ارتعاشی  $\omega$  یک سازه و یا یک عضو سازه باید بالای مقدار حدی  $\omega_0$  باشد، یعنی  $\omega \geq \omega_0$ . وقتی قید نرمال شده و به شکل استاندارد "کوچکتر از" تبدیل شود مانند آنچه در معادله (۶.۱۱) داده شده می شود که در آن  $R = \omega/\omega_0$  است. در بحثهای بعدی، فرض شده که تمامی قیود مساوی و نامساوی به شکل نرمال شده معادلات (۶.۱۰) و یا (۶.۱۱) تبدیل شده اند.

قیدهایی وجود دارند که نمی توان آنها را نرمال کرد. برای این قیدها ممکن است مقادیر مجاز صفر باشد. به عنوان مثال، حد پایینی بعضی از متغیرها ممکن است صفر باشد. چنین قیدهایی نمی توانند نسبت به حد پایینی شان نرمال شوند، زیرا تقسیم بر صفر ممکن نیست. این قیود را می شود به شکل اصلی شان نگاه داشت.

**مثال ۶.۱ نرمال سازی قید و وضعیت آن در يك نقطه.** دو قید  $18 \leq x_1^2 + x_2^2 / 2$

و  $500x_1 - 30\,000x_2 \leq 0$  را در نظر بگیرید. در نقاط طراحی (۱.۱) و

(-4.5، -4.5)، فعال بودن، نقض شدن،  $\varepsilon$  فعال و غیرفعال بودن قیود را بحث کنید.

از  $\varepsilon = 0.1$  برای بررسی قیود  $\varepsilon$  فعال استفاده کنید.

حل. قید  $h$  را نرمال کرده و آن را به شکل استاندارد در می آوریم. داریم

$$h = \frac{1}{18}x_1^2 + \frac{1}{36}x_2 - 1.0 = 0$$

با ارزیابی قید در دو نقطه داریم،  $h(1, 1) = -0.9166$ ، و  $h(-4.5, -4.5) = 0$ . بنابراین قید مساوی در  $(1, 1)$  نقض و در  $(-4.5, -4.5)$  فعال است.

قید نامساوی  $g$  نمی تواند با تقسیم آن بر  $30\,000x_2$  نرمال شود زیرا  $x_2$  در نقطه دوم مقدار منفی دارد. با این موقعیت باید با دقت برخورد کنیم. برای نقطه  $(1, 1)$ ، می توانیم قید را بر  $30\,000x_2$  تقسیم کنیم و آن را به شکل زیر بنویسیم؛ زیرا  $x_2$  مثبت است،

$$g = \frac{x_1}{60x_2} - 1.0 \leq 0$$

در نقطه  $(1, 1)$ ،  $g = -0.9833 < 0$ ، بنابراین قید غیر فعال است. حتی  $g + \varepsilon < 0$  و قید  $\varepsilon$  فعال هم نیست.

برای تعیین وضعیت قید نامساوی در نقطه دوم دو راه وجود دارد: در روش اول، چون می دانیم که  $x_2$  مقدار منفی دارد، وقتی بر  $30\,000x_2$  تقسیم می شود، جهت نامساوی عوض شده و می شود  $x_1/60x_2 - 1.0 \geq 0$ . حال می توانیم با ضرب آن در  $-1$ ، این را به قید "نوع  $\leq$ " تبدیل کنیم یعنی

$$g = \frac{-x_1}{60x_2} + 1.0 \leq 0$$

اکنون  $g(-4.5; -4.5) = 0.98370$ ، بنابراین قید نقض شده است.

روش دیگر عبارت است از تقسیم قید با استفاده از مقدار قدر مطلق  $x_2$ ، یعنی  $|x_2|$  30 000. در این حالت قید می شود

$$g = \frac{x_1}{60|x_2|} - \frac{x_2}{|x_2|} \leq 0.$$

می توانیم یک تابع علامت تعریف کنیم، نظیر

$$\text{sign}(x_2) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_2 > 0 \\ -1, & \text{if } x_2 < 0 \end{cases}$$

آن گاه قید می شود

$$g = \frac{x_1}{60|x_2|} - \text{sign}(x_2) \leq 0$$

این شکل قید می تواند برای هر دو نقطه داده شده استفاده گردد. می توان نشان داد که با این شکل  $g(1, 1) = -0.9833 < 0$ ، و  $g(-4.5, -4.5) = 0.983 > 0$ .

برای بعضی از انواع قیود، نرمال سازی آنها در محاسبات عددی واقعی ممکن است مطلوب نباشد. به عنوان مثال، وقتی قید  $500x_1 - 30\,000x_2 \leq 0$  با  $\frac{x_1}{60|x_2|} - \text{sign}(x_2) \leq 0$  جایگزین شود، طبیعت تابع عوض می شود. تابع اصلی خطی، ولی تابع نرمال شده غیرخطی است. از نظر عددی کار کردن با قیود خطی ساده تر است تا کار با قیود غیرخطی. هنگام نرمال سازی قیود در محاسبات عددی دقت و تجربه لازم است. اگر یک نرمال سازی کار نکرد، نرمال سازی دیگری باید انجام شود. در بعضی از حالتها بویژه برای قیود مساوی ممکن است استفاده کردن از قیود نرمال شده بهتر باشد. پس، در محاسبات عددی، برای بعضی از مسائل تجربیات نرمال سازی قیود باید به کار گرفته شوند.

#### ۶.۲.۴ راهبرد لید پتانسیل

برای یافتن جهت جست و جو در روشهای عددی بهینه سازی مقید، در هر چرخه طراحی، شخص نیاز به داشتن توابع هزینه و قیود و گرادیان آنها دارد. الگوریتمهای عددی بهینه سازی مقید را می توان براساس این که در هر چرخه طراحی گرادیان تمام قیود و یا زیرمجموعه ای از آنها را نیاز دارند، دسته بندی کرد. الگوریتمهای عددی که در هر چرخه طراحی فقط از گرادیان زیرمجموعه ای از قیود استفاده می کنند به الگوریتمهایی که راهبرد قید پتانسیل را به کار می برند مشهورند. مجموعه قید پتانسیل، به طور کلی، شامل قیود فعال،  $\varepsilon$  فعال و نقض شده در چرخه فعلی می شود. راهبردهای قید پتانسیل مختلفی می تواند وجود داشته باشد. به عنوان مثال، می توانیم یک راهبرد قید پتانسیل بسیار ساده ای را با تعریف یک مجموعه اندیسی  $I_k$  در چرخه  $k$ ام به شکل زیر تعریف کنیم:

$$I_k = \left[ \begin{array}{l} \{j \mid j = 1 \text{ to } p \text{ مساویها} \} \quad \text{و} \\ \{i \mid g_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \varepsilon \geq 0, i = 1 \text{ to } m\} \end{array} \right] \quad (6.12)$$

دقت کنید که مجموعه اندیسی قید پتانسیل  $I_k$  معادله (۶.۱۲) تمامی قیود فعال،  $\varepsilon$  فعال و نقض شده را شامل می شود. قیود مساوی طبق تعریف مجموعه  $I_k$  همیشه در آن وجود دارند.

همچنین دقت کنید که  $I_4$  شامل فهرست قیود مجموعه پتانسیل است.

مثال ۶.۲ به دست آوردن مجموعه قید پتانسیل. شش قید زیر را در نظر بگیرید:

$$g_1 = \frac{1}{18}x_1^2 + \frac{1}{36}x_2 - 1.0 \leq 0$$

$$g_2 = x_2 - 10 \leq 0$$

$$g_3 = -x_2 - 2 \leq 0$$

$$g_4 = -\frac{x_1}{60x_2} + 1.0 \leq 0$$

$$g_5 = -\frac{x_2}{x_1} + 1.0 \leq 0$$

$$g_6 = -x_1 \leq 0$$

فرض کنید  $x^k = (-4.5, -4.5)$  و  $\varepsilon = 0.1$ . مجموعه اندیسی قید پتانسیل  $I_4$  را که با معادله (۶.۱۲) تعریف می شود تشکیل دهید.

حل. بعد از نرمال سازی، قیود  $g_1$  و  $g_2$  عبارت خواهند بود از  $\bar{g}_2 = x_2 / 10 - 1.0 \leq 0$  و  $\bar{g}_3 = -x_2 / 2 - 1.0 \leq 0$  با ارزیابی قیود در نقطه داده شده، داریم

$$g_1 = \frac{1}{18}(-4.5)^2 + \frac{1}{36}(-4.5) - 1.0 = 0 \quad (\text{فعال})$$

$$\bar{g}_2 = -\frac{4.5}{10} - 1.0 = -1.45 < 0 \quad (\text{غیرفعال})$$

$$\bar{g}_3 = -\frac{-4.5}{2} - 1.0 = 1.25 > 0 \quad (\text{نقض شده})$$

$$g_4 = -\frac{-4.5}{60(-4.5)} + 1.0 = 0.983 > 0 \quad (\text{نقض شده})$$

$$g_5 = -\frac{-4.5}{-4.5} + 1.0 = 0 \quad (\text{فعال})$$

$$g_6 = -(-4.5) = 4.5 > 0 \quad (\text{نقض شده})$$

بنابراین، می بینیم که  $g_1$  و  $g_5$  فعال و  $g_3$ ،  $g_4$  و  $g_6$  نقض شده اند. چون  $\bar{g}_2 + \varepsilon < 0$  است پس آن فعال نیست. بنابراین

## ۶.۲.۵ تابع کاهشی

برای بهینه سازی نامقیّد، الگوریتمهای فصل (۵) در هر چرخه طرّاحی به کاهش تابع هزینه نیاز داشتند. با آن ضرورت، در فرآیند همیشه کاهش به طرف نقطه مینیمم وجود داشت. تابعی را که برای بازبینی و کنترل پیشرفت به طرف مینیمم به کار می رود تابع کاهشی یا تابع شایستگی می نامند. در مسائل بهینه سازی نامقیّد از تابع هزینه به عنوان تابع کاهشی استفاده می شود.

پنداره تابع کاهشی در بهینه سازی مقیّد نیز بسیار مهم است. ولی استفاده از تابع هزینه به عنوان تابع کاهشی برای بهینه سازی مقیّد بسیار وقت گیر است. بنابراین، توابع کاهشی دیگر پیشنهاد و استفاده شده اند. بعداً در این فصل بعضی از آن توابع را بررسی خواهیم کرد. در این موقعیت باید مقصود از تابع کاهشی به شکلی مطلوب درک شود. پنداره اصلی عبارت است از محاسبه یک جهت جست و جو<sup>(۱)</sup> و یک اندازه گام در امتداد آن طوری که تابع کاهشی باقی بماند. با این تضمین پیشرفت مورد نظر به سوی نقطه مینیمم همچنان باقی است. تابع کاهشی این خاصیت را نیز دارد که مقدار مینیمم آن با مینیمم تابع اصلی یکسان است.

## ۶.۲.۶ همگرایی يك الگوریتم

پنداره همگرایی یک الگوریتم در مسائل بهینه سازی مقیّد بسیار مهم است. ابتدا این پنداره را تعریف و سپس اهمیت آن را بحث کرده و آن گاه چگونگی رسیدن به آن را بیان می کنیم.

یک الگوریتم اگر با شروع از یک نقطه طرّاحی دلخواه به مینیمم برسد همگرا گویند. الگوریتمی را که اثبات شده با شروع از یک نقطه دلخواه همگرا می شود روش توانمند گویند. در کاربردهای عملی بهینه سازی چنین الگوریتمهای قابل اعتمادی بسیار مطلوبند. بسیاری از مسائل طرّاحی مهندسی نیاز به محاسبات عددی زیادی برای محاسبه توابع و گرادیانهای آنها دارند. ناکامی الگوریتم می تواند اثرات زیان باری روی فکر و برداشت طرّاحان داشته باشد و به از بین رفتن منابع ارزشمندی بینجامد. پس، برای کاربردهای عملی، تدوین الگوریتمهای همگرا بسیار مهم است. به همان اندازه تقویت همگرایی در پیاده سازی عددی الگوریتمها در نرم افزارهای بهینه سازی طرّاحی عمومی اهمیت دارد.

هر الگوریتم همگرا دو ویژگی زیر را داراست :

۱. برای الگوریتم یک تابع کاهشی وجود دارد. پنداره عبارت است از این که تابع کاهشی در هر چرخه باید کاهش یابد. بدین طریق، پیشرفت به طرف نقطهٔ مینیمم می تواند بازبینی و کنترل شود.

۲. جهت تغییرات طراحی 'd یک تابع پیوسته از متغیرهای طراحی است. این نیز ضرورتی مهم است و ایجاب می کند که یک جهت کاهشی در هر چرخه در فضای طراحی یافت شود. جهت می تواند طوری یافت شود که کاهشی مناسب به طرف نقطهٔ مینیمم بتواند ادامه داشته باشد. این ضرورت مانع از «نوسان» یا «زیگزاگ»<sup>۱</sup> در تابع کاهشی می شود.

علاوه بر دو ضرورت گذشته، برای تضمین همگرایی الگوریتم، این فرض که ناحیهٔ قابل قبول (مجموعهٔ قید) مسأله باید بسته و کراندار باشد لازم است برقرار باشد. اگر این دو ویژگی برقرار نباشند، الگوریتم ممکن است همگرا یا و اگر باشد. بسته بودن یک مجموعه بدین معنی است که تمامی نقاط مرزی در مجموعه باشند. کراندار بودن ایجاب می کند که عناصر مجموعه حد بالایی و پایینی داشته باشند. اگر تمامی توابع مسأله پیوسته باشند این ضرورتها برآورده می شوند. فرضهای گذشته با واقعیات بسیاری از کاربردهای طراحی مهندسی مطابقت دارند.

### ۶.۳ خطی سازی مسأله مقید

بیشتر روشهای عددی بهینه سازی مقید، در هر چرخه، تغییر طراحی را با حل یک زیرمسأله تقریبی که با نوشتن بسط سری تیلور خطی برای توابع هزینه و قید به دست می آید محاسبه می کنند. این پندارهٔ تقریب یا خطی سازی زیرمسأله محور اصلی تدوین روشهای بهینه سازی عددی است و باید بخوبی درک شود.

تمامی روشهای جست و جو یا یک طراحی حدسی شروع شده و در فرآیندی چرخه ای آن طراحی بهبود می یابد. فرض کنید  $x^{(k)}$  حدس طراحی در چرخه  $k$  ام و  $\Delta x^{(k)}$  تغییر مورد نظر در طراحی باشد. بسط سری تیلور را برای توابع هزینه و قیود حول نقطه  $x^{(k)}$  می نویسیم تا زیرمسألهٔ تقریبی را به دست آوریم. داریم : تابع

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}) \cong f(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla f^T(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} \quad (۶.۱۳)$$

را با قیود مساوی خطی شده

$$h_j(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}) \cong h_j(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla h_j^T(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} = 0; \quad j = 1 \text{ to } p \quad (۶.۱۴)$$

و قید نامساوی خطی شده

$$g_j(\mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}) \cong g_j(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla g_j^T(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} \leq 0; \quad j = 1 \text{ to } m \quad (۶.۱۵)$$

که در آنها  $\nabla f$ ،  $\nabla h_j$  و  $\nabla g_j$  به ترتیب گرادیانهای توابع هزینه و  $z$  امین قید مساوی و  $z$  امین قید نامساوی بوده و « $\cong$ » نشانه تقریبی بودن مساوی است، مینیمم کنید.

در بحث بعدی، چند علامت خلاصه شده را به شکل زیر معرفی می کنیم:

$$f_k = f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (۶.۱۶)$$

یعنی مقدار تابع هزینه در طراحی فعلی  $\mathbf{x}^{(k)}$ ،

$$e_j = -h_j(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (۶.۱۷)$$

یعنی، منفی مقدار تابع قید مساوی  $z$  ام در طراحی فعلی  $\mathbf{x}^{(k)}$ ،

$$b_j = -g_j(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (۶.۱۸)$$

یعنی منفی مقدار تابع قید نامساوی  $z$  ام در طراحی فعلی  $\mathbf{x}^{(k)}$ ،

$$c_i = \partial f(\mathbf{x}^{(k)}) / \partial x_i \quad (۶.۱۹)$$

یعنی، مؤلفه  $i$  ام گرادیان تابع هزینه در طراحی فعلی  $\mathbf{x}^{(k)}$ ، که مشتق تابع هزینه نسبت به  $i$  امین متغیر طراحی  $x_i$  است،

$$n_{ij} = \partial h_j(\mathbf{x}^{(k)}) / \partial x_i \quad (۶.۲۰)$$

یعنی،  $i$  امین مؤلفه گرادیان قید مساوی  $z$  ام در طراحی فعلی  $\mathbf{x}^{(k)}$ ، یا مشتق تابع قید مساوی  $z$  ام نسبت به  $i$  امین متغیر طراحی  $x_i$ ،

$$a_{ij} = \partial g_j(\mathbf{x}^{(k)}) / \partial x_i \quad (۶.۲۱)$$

یعنی،  $i$  امین مؤلفه گرادیان قید نامساوی  $z$  ام در طراحی فعلی  $\mathbf{x}^{(k)}$ ، یا مشتق  $z$  امین قید نامساوی نسبت به  $i$  امین متغیر طراحی  $x_i$ ، و

$$d_i = \Delta x_i^{(k)} \quad (۶.۲۲)$$

یعنی  $d$  بردار تغییر طراحی  $n$  بعدی است یا جهت جست و جو.

همچنین دقت کنید که خطی سازی مسأله در هر چرخه طراحی انجام شده، پس شناسه  $x^{(k)}$  و اندیس بالایی  $k$  که شماره چرخه است برای بعضی از کمیتها حذف خواهند شد.

با استفاده از این علائم، زیرمسأله تقریبی که در معادله های (۶.۱۳) تا (۶.۱۵) داده شده به شکل زیر تعریف می شود: تابع

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^n c_i d_i \quad (\bar{f} = c^T d) \quad (۶.۲۳)$$

را مشروط به قیود مساوی خطی شده

$$\sum_{i=1}^n n_{ij} d_i = e_j; \quad j = 1 \text{ to } p \quad (N^T d = e) \quad (۶.۲۴)$$

و قیود نامساوی خطی شده

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} d_i \leq b_j; \quad j = 1 \text{ to } m \quad (A^T d \leq b) \quad (۶.۲۵)$$

مینیمم کنید؛ در حالی که ستونهای ماتریس  $N (n \times p)$  گرادیانهای قیود مساوی و ستونهای ماتریس  $A (n \times m)$  گرادیانهای قیود نامساوی هستند. دقت کنید چون  $f_k$  عدد ثابتی است که بر جواب زیرمسأله خطی شده تأثیر نمی گذارد، از معادله (۶.۲۳) حذف شده است. بنابراین،  $\bar{f}$  نشان دهنده تغییر خطی در تابع هزینه اصلی است.

فرض کنید  $n^{(j)}$  و  $a^{(j)}$  به ترتیب نشان دهنده گرادیانهای  $z$  امین قید مساوی و  $z$  امین قید نامساوی باشند. بنابراین، عبارتند از

$$n^{(j)} = \left( \frac{\partial h_j}{\partial x_1}, \frac{\partial h_j}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h_j}{\partial x_n} \right) \quad (۶.۲۶)$$

$$a^{(j)} = \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_1}, \frac{\partial g_j}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g_j}{\partial x_n} \right) \quad (۶.۲۷)$$

ماتریسهای  $N$  و  $A$  نیز عبارتند از

$$N = [n^{(j)}]_{(n \times p)}; \quad A = [a^{(j)}]_{(n \times m)} \quad (۶.۲۸)$$

مثال ۶.۳ تعریف زیرمسأله خطی شده. مسأله بهینه سازی مثال ۳.۲۸ را در نظر بگیرید، تابع

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

را نسبت به قیود

$$g_1(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) \equiv -x_1 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) \equiv -x_2 \leq 0$$

مینیم کنید. توابع هزینه و قیود را حول نقطه  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)$  خطی کرده و مسأله تقریبی را با استفاده از معادلات (۶.۲۳) تا (۶.۲۵) بنویسید.

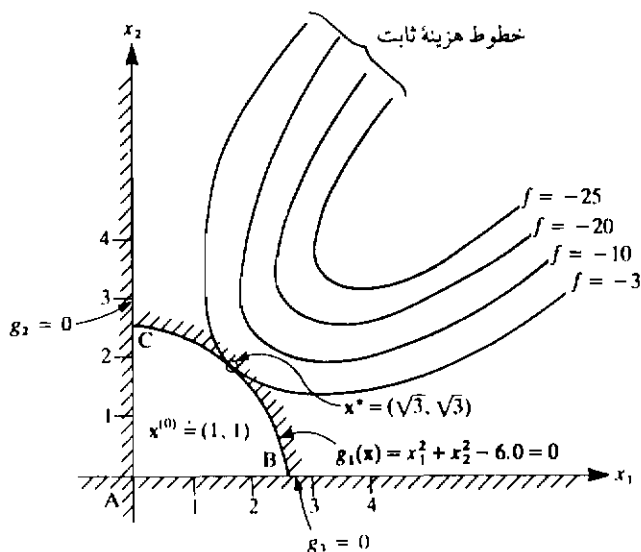
حل. حل ترسیمی مسأله در شکل ۶.۴ نشان داده شده است. می توان دید که جواب بهین در نقطه  $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$  با مقدار تابع هزینه -۳ قرار دارد. نقطه داده شده  $(1, 1)$  داخل ناحیه قابل قبول قرار دارد. گرادیان توابع هزینه و قید عبارتند از:

$$\nabla f = (2x_1 - 3x_2, 2x_2 - 3x_1)$$

$$\nabla g_1 = (\frac{1}{3}x_1, \frac{1}{3}x_2)$$

$$\nabla g_2 = (-1, 0)$$

$$\nabla g_3 = (0, -1)$$



شکل ۶.۴ نمایش هندسی هزینه و قیود مثال ۶.۳.

با محاسبه مقدار توابع هزینه و قیود و گرادین آنها در نقطه  $(1, 1)$  داریم

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) = -1.0$$

$$b_1 \equiv -g_1(\mathbf{x}^{(0)}) = \frac{2}{3}$$

$$b_2 \equiv -g_2(\mathbf{x}^{(0)}) = 1$$

$$b_3 \equiv -g_3(\mathbf{x}^{(0)}) = 1$$

$$\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) = (-1, -1), \quad \mathbf{c} = (-1, -1) \text{ یعنی بردار}$$

$$\nabla g_1(\mathbf{x}^{(0)}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

دقت کنید نقطه طراحی داده شده  $(1, 1)$  در محدوده قابل قبول قرار دارد، زیرا تمامی قیود برآورده شده اند. ماتریس  $A$  و بردار  $b$  معادله های  $(6.25)$  به شکل زیر تعریف می شوند

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اکنون زیرمسئله خطی شده معادله های  $(6.23)$  تا  $(6.25)$  را می توان به شکل زیر نوشت، تابع

$$\bar{f} = [-1 \quad -1] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

را نسبت به

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

مینیم کنید. یا، با علایم بسط داده شده، داریم: تابع

$$\bar{f} = -d_1 - d_2$$

را نسبت به قیود

$$\frac{1}{3}d_1 + \frac{1}{3}d_2 \leq \frac{2}{3}$$

$$-d_1 \leq 1; \quad -d_2 \leq 1$$

مینیم کنید. دو قید آخر زیرمسئله، نامنفی بودن متغیرهای طراحی را که در مسئله

بهینه سازی اصلی مورد نیاز بود تضمین می کند. دقت کنید در صورتی که محدودیتی را روی تغییرات طراحی  $d_i, i = 1, 2$  اعمال نکنیم، زیرمسأله قبلی ممکن است بی کران باشد.

همچنین دقت کنید که زیرمسأله خطی شده قبلی برحسب متغیرهای  $d_1$  و  $d_2$  یعنی تغییرات متغیرهای طراحی است. ما می توانیم زیرمسأله را برحسب متغیرهای اصلی  $x_1$  و  $x_2$  نیز بنویسیم. برای این کار، توابع اصلی مسأله را در نقطه با توابع تقریبی خطی شان جایگزین می کنیم. برای مسأله قبلی، خطی سازی مسأله اصلی در نقطه  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)$  با استفاده از بسط سری تیلور معادله (۳.۱۱)، به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x_1, x_2) &= f(\mathbf{x}^{(0)}) + \nabla f \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) \\ &= -1 + [-1 \quad -1] \begin{bmatrix} (x_1 - 1) \\ (x_2 - 1) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= -x_1 - x_2 + 1$$

$$\bar{g}_1(x_1, x_2) = g_1(\mathbf{x}^{(0)}) + \nabla g_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)})$$

$$= -\frac{2}{3} + \left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right] \begin{bmatrix} (x_1 - 1) \\ (x_2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 - 4) \leq 0$$

$$\bar{g}_2 = -x_1 \leq 0$$

$$\bar{g}_3 = -x_2 \leq 0$$

در عبارات گذشته، علامت "-" که بالای توابع است نشان دهنده تقریب خطی آنهاست. ناحیه قابل قبول برای مسأله خطی شده در نقطه  $(1, 1)$  و مسأله اصلی در شکل ۶.۵ نشان داده شده است. چون تابع هزینه خطی شده موازی اولین قید خطی شده  $\bar{g}_1$  است، جواب بهین مسأله خطی شده هر نقطه روی خط D-E در شکل ۶.۵ است.

مهم است به این نکته توجه کنید که تقریب خطی توابع مسأله از یک نقطه به نقطه دیگر متفاوت خواهد بود. بنابراین، ناحیه قابل قبول برای مسأله خطی با تغییر نقطه ای که در آن تقریبهای خطی نوشته شده اند، تغییر می کند.

**مثال ۶.۴** خطی سازی مسأله طراحی یک تیر مکعب مستطیل. مسأله طراحی تیر مکعب مستطیلی را که در بخش ۲.۸.۵ رابطه سازی شد در نقطه  $(50, 200)$  mm خطی کنید.

**حل.** مسأله بعد از نرمال سازی به شکل زیر تعریف می شود. عرض  $b$  و عمق  $d$  را برای

مینیمم کردن

$$f(b, d) = bd$$

مشروط به قیود

$$g_1 = \frac{(2.40E+07)}{bd^2} - 1.0 \leq 0$$

$$g_2 = \frac{(1.125E+05)}{bd} - 1.0 \leq 0$$

$$g_3 = \frac{d}{2b} - 1.0 \leq 0$$

$$g_4 = -b \leq 0$$

$$g_5 = -d \leq 0$$

پیدا کنید. در نقطه داده شده توابع مسأله عبارتند از

$$f(50, 200) = (1.00E+04)$$

$$g_1(50, 200) = 11.00 > 0 \text{ (نقض شده)}$$

$$g_2(50, 200) = 10.25 > 0 \text{ (نقض شده)}$$

$$g_3(50, 200) = 1.00 > 0 \text{ (نقض شده)}$$

$$g_4(50, 200) = -50 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

$$g_5(50, 200) = -200 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

در محاسبات زیر، فرض خواهیم کرد که قیود  $g_4$  و  $g_5$  همچنان برآورده شده باقی می ماند، یعنی طراحی در ربع اول باقی می ماند.

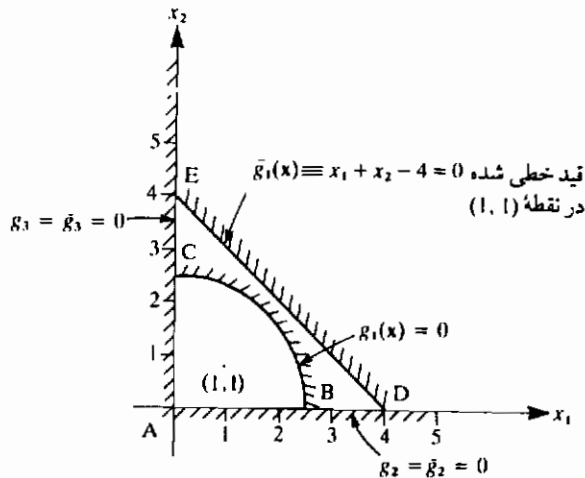
گرادیانهای توابع عبارت می شوند از

$$\begin{aligned}\nabla f(50, 200) &= (d, b) \\ &= (200, 50)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla g_1(50, 200) &= (2.40E+07) \left( \frac{-1}{b^2 d^2}, \frac{-2}{b d^3} \right) \\ &= (-0.24, -0.12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla g_2(50, 200) &= (1.125E+05) \left( \frac{-1}{b^2 d}, \frac{-1}{b d^2} \right) \\ &= (-0.225, -0.05625)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla g_3(50, 200) &= \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{b^2 d}, \frac{1}{b} \right) \\ &= (-0.04, 0.01)\end{aligned}$$



شکل ۶.۵ نمایش هندسی ناحیه قابل قبول خطی شده برای مثال ۶.۳

با استفاده از مقادیر توابع و گرادیانهایشان، بسط سری تیلور خطی، زیرمسأله خطی را در نقطه  $(50, 200)$  برحسب متغیرهای اصلی می دهد

$$\bar{f}(b, d) = 200b + 50d - 10\,000$$

$$\bar{g}_1(b, d) = -0.24b - 0.12d + 47.00 \leq 0$$

$$\bar{g}_2(b, d) = -0.225b - 0.05625d + 32.75 \leq 0$$

$$\bar{g}_3(b, d) = -0.04b + 0.01d + 1.00 \leq 0$$

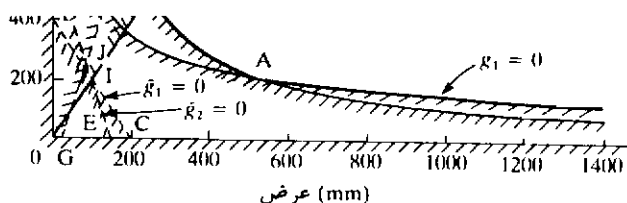
توابع قیود خطی شده در شکل ۶.۶ رسم شده و ناحیه قابل قبول آنها مشخص گردیده است. ناحیه قابل قبول برای قیود اصلی نیز مشخص شده است. دیده می شود که دو ناحیه کاملاً با هم متفاوت هستند. چون تابع هزینه خطی شده موازی قید  $\bar{g}_2$  است، جواب بهین روی خط  $l-l$  قرار دارد. اگر نقطه  $l$  به عنوان جواب زیرمسأله انتخاب شود، آن گاه نقطه جدید عبارت است از

$$b = 95.28, \quad d = 201.10, \quad \bar{f} = 19.111$$

برای هر نقطه روی خط  $l-l$  تمامی قیود اصلی همچنان نقض شده اند. از آن طرف، برای قیود غیرخطی، چرخه های متعددی برای تصحیح نقض قیود و

رسیدن به ناحیه قابل قبول لازم است. این مطلب در مثالهای مختلفی در این فصل و فصل (۸) مشاهده خواهد شد.

نکته جالب توجه مربوط به سومین قید است؛ قید اصلی  $d - 2b \leq 0$  به شکل  $d/2b - 1 \leq 0$  نرمال شده است. نرمال سازی محدوده قید را تغییر نمی دهد؛ پس نمایش هندسی مسأله به همان شکل باقی می ماند، همان طور که از شکل ۶.۶ می توان دریافت. اما نرمال سازی، شکل تابع قید را تغییر می دهد و بر خطی شدن آن تأثیر خواهد گذاشت. اگر قید نرمال نشود، خطی شدن آن برای تمامی نقاط طراحی تابعی مشابه تابع قید اصلی خواهد داد، یعنی  $d - 2b \leq 0$ . این در شکل ۶.۶ با خط O-K نشان داده شده است. شکل خطی قیود نرمال شده فرق می کند، که در نقطه (50, 200) با خط G-H نشان داده شده است. این با قید اصلی کاملاً متفاوت است. فرآیند چرخه با قیود نرمال شده یا نشده می تواند به مسیرهای مختلفی برای نقطه بهین ختم شود. در نتیجه باید هنگام نرمال سازی قیود دقت کنیم تا جایی که امکان دارد شکل تابع قیود تغییر نکند.



شکل ۶.۶ ناحیه قابل قبول برای قیود اصلی و خطی شده مسأله طراحی تیر مکعب مستطیل مثال ۶.۴

## ۶.۴ الگوریتم برنامه ریزی خطی دنباله ای

## ۶.۴.۱ پنداره اصلی

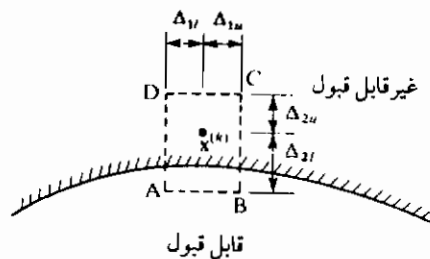
دقت کنید که تمامی توابع در معادله های (۶.۲۳) تا (۶.۲۵) برحسب متغیر  $d_i$  خطی هستند. بنابراین، روشهای برنامه ریزی خطی می تواند برای حل آنها و به دست آوردن  $d_i$  استفاده شود. به چنین روشی که در آن در هر چرخه برای محاسبه تغییرات طراحی از برنامه ریزی خطی استفاده شود، روشهای برنامه ریزی خطی دنباله ای یا به طور خلاصه اس ال پی (SLP) می گویند. در این بخش به طور خلاصه چنین روشهایی را تشریح خواهیم کرد.

برای حل LP به روش سیمپلکس استاندارد، پارامتر طرف راست  $e_j$  و  $b_j$  در معادلات (۶.۱۷) و (۶.۱۸) باید نامنفی باشند. اگر یکی از  $b_j$  ها منفی باشد باید قید مربوطه را در  $-1$  ضرب کنیم تا طرف راست را نامنفی کنیم. این کار جهت نامساوی معادله (۶.۲۵) را تغییر می دهد، یعنی قیدی از "نوع  $\geq$ " خواهد شد. باید دقت کرد که مسأله ای که در معادله های (۶.۲۳) تا (۶.۲۵) تعریف شد ممکن است یک جواب کراندار نداشته باشد یا تغییرات در طراحی خیلی بزرگ باشد، که تقریب خطی را نامعتبر می سازد. بنابراین، روی تغییرات طراحی باید حدودی اعمال شود. چنین قیودی در مقالات بهینه سازی معمولاً «حدود حرکت»<sup>۱</sup> نامیده می شود. حدود حرکت را می توان به شکل زیر بیان کرد

$$-\Delta_{ij}^{(k)} \leq d_i \leq \Delta_{ij}^{(k)}; \quad i = 1 \text{ to } n \quad (۶.۳۱)$$

که در آن  $\Delta_{ij}^{(k)}$  و  $\Delta_{iij}^{(k)}$  به ترتیب بیشترین کاهش و افزایش مجاز در  $i$  امین متغیر طراحی و در  $k$  امین چرخه است. مسأله هنوز برحسب  $d_i$  خطی است، پس روشهای LP را می توان برای حل آن به کار برد. دقت کنید که شماره چرخه  $k$  برای مشخص کردن  $\Delta_{ij}$  و  $\Delta_{iij}$  استفاده می شود. یعنی حدود حرکت در هر چرخه ممکن است تغییر کند. شکل ۶.۷ اثر اعمال حدود حرکت را روی تغییر طراحی<sup>۱</sup>  $x^{(k)}$  نشان می دهد؛ برای باقی ماندن در محدوده مستطیلی ABCD تخمین طراحی جدیدی لازم است.

انتخاب حدود حرکت مناسب از اهمیت تعیین کننده ای برخوردار است، زیرا می تواند به منزله موفقیت یا شکست الگوریتم SLP باشد. در تعیین آنها داشتن تجربه کاری با این روش، داشتن دید مهندسی و قدرت تشخیص مفید است. بنابراین، کسی که مسأله را حل می کند اگر



شکل ۶.۷. حدود حرکت خطی بر روی تغییرات طراحی

دید یک حدود حرکت مشخص به شکست یا طراحی نامناسبی انجامید، نباید از به کار گرفتن حدود حرکت دیگری نگران باشد. بیشتر مواقع برای متغیر طراحی واقعی  $x_i$  حد بالا و پایین مشخص می شود. بنابراین، حدود حرکت باید طوری انتخاب شود که در داخل محدوده مشخص شده باقی بماند. همچنین، چون تقریبهای خطی برای توابع استفاده می شوند، تغییرات طراحی و حدود حرکت نباید بسیار بزرگ باشند. معمولاً مقادیر  $\Delta_{1l}$  و  $\Delta_{1u}$  ضربی از مقدار متغیرهای طراحی انتخاب می شوند (این ضرب ممکن است از ۱ تا ۱۰۰٪ تغییر کند). اگر مسأله LP غیر قابل قبول شد، حدود حرکت باید آزاد شود (یعنی تغییرات بزرگتری در طراحی مجاز باشد) و زیرمسأله دوباره حل شود. معمولاً برای حل موفقیت آمیز مسأله باید انتخاب مناسب حدود حرکت و تنظیم آن در هر چرخه را با تجربه به دست آورد.

قبل از بیان الگوریتم SLP به نکته دیگری نیز باید توجه کرد. این نکته درباره علامت متغیر  $d_i$  (یا  $\Delta x_i$ ) است که می تواند مثبت یا منفی باشد؛ یعنی مقدار متغیرهای طراحی فعلی می تواند اضافه یا کم شوند. برای این که چنین تغییراتی امکان پذیر شود، متغیر LP و  $d_i$  را باید از نظر علامت به عنوان متغیری آزاد در نظر بگیریم. این کار می تواند براساس آنچه در بخش ۴.۲ توضیح داده شد انجام شود. هر متغیر آزاد  $d_i$  با  $d_i^+ - d_i^-$  در تمامی عبارات جایگزین می شود. آن گاه زیرمسأله LP تعریف شده در معادله های (۶.۲۳) تا (۶.۲۵) به شکل استاندارد تبدیل شده تا روش سیمپلکس استفاده شود.

باید معیار توقف زیر را برای روش SLP مشخص کنیم:

۱. تمامی قیود باید برآورده شوند. این می تواند به شکل زیر بیان شود

$$g_i \leq \varepsilon_1; i = 1 \text{ to } m \quad \text{و} \quad |h_i| \leq \varepsilon_1; i = 1 \text{ to } p$$

که  $\varepsilon_1 > 0$  عدد مشخص کوچکی است که مقدار خطای نقض قید را تعریف می کند.

۲. تغییرات در طراحی باید تقریباً صفر باشد؛ یعنی  $\varepsilon_2 \leq \|d\|$  که  $\varepsilon_2 > 0$  عدد کوچک مشخصی است.

در حالت مطلوب،  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  بهترین انتخاب برای به دست آوردن نقطهٔ مینیمم دقیق است ولی در عمل در اجرای الگوریتم بهینه سازی توسط رایانه یک خطای مثبت کوچک برای این اعداد باید مشخص شود.

#### ۶.۴.۲ یک الگوریتم SLP

الگوریتم برنامه ریزی خطی دنباله ای به شکل زیر بیان می شود:

گام ۱. یک طراحی شروع  $x^{(0)}$  حدس بزنید.  $k = 0$  قرار دهید. دو عدد مثبت کوچک برای  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  مشخص کنید.

گام ۲. توابع هزینه و قیود را در طراحی فعلی  $x^{(k)}$  محاسبه کنید، یعنی  $f_k$ ،  $b_j$ ؛  $j = 1$  to  $m$  و  $c_i$ ؛  $i = 1$  to  $p$  را آن چنان که در معادله های (۶.۱۶) تا (۶.۱۸) تعریف شده اند محاسبه کنید.

گام ۳. گرادینان توابع هزینه و قید را در طراحی فعلی  $x^{(k)}$  محاسبه کنید؛ یعنی

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}; \quad i = 1 \text{ to } n$$

$$n_{ij} = \frac{\partial h_j}{\partial x_i}; \quad j = 1 \text{ to } p; \quad i = 1 \text{ to } n$$

$$a_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}; \quad j = 1 \text{ to } m; \quad i = 1 \text{ to } n$$

را محاسبه کنید. (دقت کنید که راهبرد قید پتانسیل استفاده نمی شود، زیرا گرادینان تمامی قیود محاسبه می شوند. با این همه می توان برای مؤثر ساختن روش از آن راهبرد نیز استفاده کرد).

گام ۴. مقدار حدود حرکت  $\Delta_{//}^{(k)}$  و  $\Delta_{///}^{(k)}$  مناسب را کسری از طراحی فعلی انتخاب کنید.

گام ۵. زیرمسئله LP معادله های (۶.۲۳) تا (۶.۲۵) را تعریف کنید.

گام ۶. اگر نیاز است، زیرمسئله LP را به شکل استاندارد سیمپلکس تبدیل کنید (به بخش ۴.۲ رجوع کنید)، و با حل آن  $d^{(k+1)}$  را به دست آورید.

گام ۷. همگرایی را بررسی کنید. اگر  $g_i \leq \varepsilon_1$ ،  $i = 1$  to  $m$  و  $\|r_i\| \leq \varepsilon_2$ ؛  $i = 1$  to  $p$  و  $\|d^{(k+1)}\| \leq \varepsilon_2$ ، آن گاه محاسبات را متوقف کنید. در غیر این صورت ادامه دهید.

## گام ۸. طراحی را به شکل

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}$$

بهنگام کرده،  $k = k + 1$  قرار دهید به گام ۲ بروید.

جالب است در این جا توجه کنید که مسأله LP تعریف شده در معادله های (۶.۲۳) تا (۶.۲۵) می تواند با جایگزینی  $d_i = x_i - x_i^{(k)}$  به متغیرهای اصلی تبدیل شود. این کار در مثالهای ۶.۳ و ۶.۴ تشریح شد. حدود حرکت روی  $d_i$  معادله (۶.۳۱) نیز می تواند به متغیرهای اصلی تبدیل شود. بدین طریق، حل مسأله LP مستقیماً حدس نقطه طراحی جدید را می دهد.

**مثال ۶.۵ مطالعه الگوریتم برنامه ریزی خطی دنباله ای.** مسأله ارائه شده در مثال ۶.۳ را در نظر بگیرید، زیرمسأله خطی را در نقطه (3, 3) تعریف کرده و با اعمال حدود حرکت مناسب حل آن را بحث کنید.

**حل.** برای تعریف زیرمسأله خطی، کمیت های زیر در نقطه داده شده (3, 3) محاسبه می شوند:

$$f(3, 3) = 3^2 + 3^2 - 3(3)(3) = -9$$

$$g_1(3, 3) = \frac{1}{6}(3^2) + \frac{1}{6}(3^2) - 1 = 2 > 0 \quad (\text{نقض شده})$$

$$g_2(3, 3) = -x_1 = -3 < 0 \quad (\text{غیرفعال})$$

$$g_3(3, 3) = -x_2 = -3 < 0 \quad (\text{غیرفعال})$$

$$\mathbf{c} = \nabla f = (2x_1 - 3x_2, 2x_2 - 3x_1) = (-3, -3)$$

$$\nabla g_1 = (\frac{1}{3}x_1, \frac{1}{3}x_2) = (1, 1)$$

$$\nabla g_2 = (-1, 0)$$

$$\nabla g_3 = (0, -1)$$

نقطه داده شده در ناحیه غیرقابل قبول است، زیرا اولین قید نقض شده است. زیرمسأله خطی شده براساس معادله های (۶.۲۳) تا (۶.۲۵) به شکل زیر تعریف می شود. تابع

$$\bar{f} = [-3 \quad -3] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

را با قیود

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

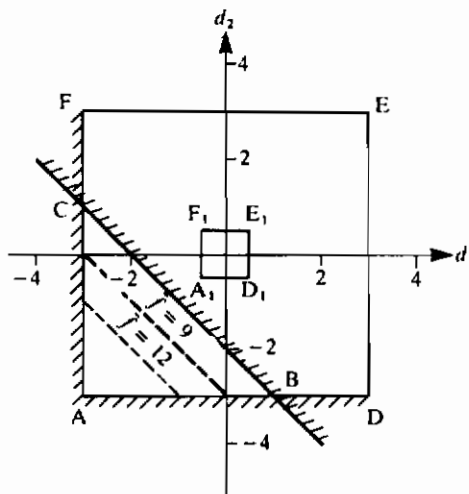
مینیمم کنید. زیرمسئله فقط دو متغیر دارد پس می‌تواند از روش ترسیمی حل شود، همچنان که در شکل ۶.۸ نشان داده شده است. وقتی این شکل و شکل ۶.۴ را با هم مقایسه کنیم یک تقریب خطی برای مسئله در نقطه  $(3, 3)$  را نشان می‌دهد. جواب قابل قبول زیرمسئله خطی شده باید در ناحیه ABC در شکل ۶.۸ قرار داشته باشد. تابع هزینه موازی خط B-C است، پس هر نقطه روی خط تابع را مینیمم می‌کند. ممکن است  $d_1 = -1$  و  $d_2 = -1$  را به عنوان جوابی که تمامی قیود را برآورده می‌کند انتخاب کنیم (دقت کنید که تغییرات خطی در هزینه  $\bar{F}$  عبارت است از ۶).

اگر حدود حرکت ۱۰٪ انتخاب شود، یعنی

$$-3 \leq d_1 \leq 3; \quad -3 \leq d_2 \leq 3$$

آن‌گاه جواب زیرمسئله LP باید در ناحیه ADEF قرار داشته باشد. اگر حدود حرکت ۲۰٪ مقدار فعلی متغیرهای طراحی باشد، آن‌گاه جواب باید دو نامعادله زیر را برآورده کند

$$-0.6 \leq d_1 \leq 0.6; \quad -0.6 \leq d_2 \leq 0.6$$



شکل ۶.۸ حل ترسیمی زیرمسئله خطی شده مثال ۶.۵

در این حالت جواب باید در ناحیه  $A_1D_1E_1F_1$  قرار داشته باشد. دیده می شود که جواب قابل قبولی برای زیرمسئله خطی شده وجود نخواهد داشت، زیرا ناحیه  $A_1D_1E_1F_1$  خط  $B-C$  را قطع نمی کند. ما باید ناحیه  $A_1D_1E_1F_1$  را با افزایش حدود حرکت بزرگ کنیم. پس، توجه می کنیم که اگر حدود حرکت خیلی محدود باشد، زیرمسئله خطی شده ممکن است جوابی نداشته باشد.

اگر  $d_1 = -1$  و  $d_2 = -1$  را انتخاب کنیم، آن گاه طراحی بهبود یافته عبارت می شود از  $(2, 2)$ . این هنوز نقطه ای غیر قابل قبول است، همچنان که در شکل ۶.۴ نیز دیده می شود. بنابراین، هر چند قید خطی شده با  $d_1 = -1$  و  $d_2 = -1$  برآورده شده، قید غیرخطی اصلی  $g_1$  همچنان نقض شده است.

**مثال ۶.۶** استفاده از برنامه ریزی خطی دنباله ای. مسئله ارائه شده در مثال ۶.۳ را در نظر بگیرید. یک چرخه از الگوریتم SLP را انجام دهید. از  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$  استفاده کنید و حدود حرکت را طوری انتخاب کنید که ۱۵٪ تغییرات طراحی امکان پذیر باشد. فرض کنید نقطه شروع طراحی  $x^{(0)} = (1, 1)$  باشد.

**حل.** نقطه داده شده یک جواب قابل قبول مسئله است، همچنان که در شکل ۶.۴ دیده می شود. زیرمسئله خطی شده با حدود حرکت مناسب روی تغییرات طراحی  $d_1$  و  $d_2$  در نقطه  $x^{(0)}$  در مثال ۶.۳ به دست آمده که عبارت است از: تابع

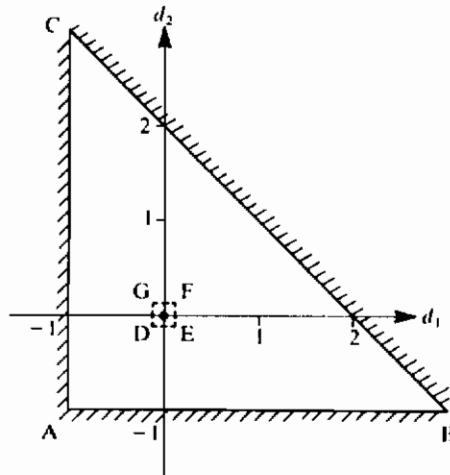
$$\bar{f} = -d_1 - d_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}d_1 + \frac{1}{3}d_2 &\leq \frac{1}{3} \\ -(1 + d_1) &\leq 0 \\ -(1 + d_2) &\leq 0 \\ -0.15 \leq d_1 \leq 0.15 \\ -0.15 \leq d_2 \leq 0.15 \end{aligned}$$

مینیمم کنید.

حل ترسیمی زیرمسئله خطی شده در شکل ۶.۹ ارائه شده است. حدود حرکت ۱۵٪ ناحیه جواب DEFG را می دهد. جواب بهین مسئله در نقطه F قرار دارد با  $d_1 = 0.15$



شکل ۶.۹ حل ترسیمی زیرمسئله خطی شده مثال ۶.۶

و  $d_2 = 0.15$  دیده می شود که در این حالت در نظر گرفتن حدود حرکت بسیار بزرگتری امکان پذیر است.

مسئله را با استفاده از روش سیمپلکس حل می کنیم. دقت کنید که در زیرمسئله خطی شده، تغییرات طراحی  $d_1$  و  $d_2$  از نظر علامت آزاد هستند. اگر بخواهیم مسئله را با روش سیمپلکس حل کنیم باید متغیرهای جدید  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  را طوری تعریف کنیم که

$$d_1 = A - B, d_2 = C - D \quad \text{و} \quad A, B, C \quad \text{و} \quad D \geq 0$$

بنابراین، با جایگزینی این متغیرها در معادله های قبلی مسئله LP زیر را که به شکل استاندارد نوشته شده به دست می آوریم. تابع

$$\bar{f} = -A + B - C + D$$

را با قیود

$$\frac{1}{2}(A - B + C - D) \leq \frac{1}{2}$$

$$-A + B \leq 1.0$$

$$-C + D \leq 1.0$$

$$A - B \leq 0.15$$

$$B - A \leq 0.15$$

$$C - D \leq 0.15$$

$$D - C \leq 0.15$$

$$A, B, C, D \geq 0$$

مینیم کنید. جواب مسأله LP فوق از روش سیمپلکس عبارت است از  $A = 0.15$ ،  
 $B = 0$ ،  $C = 0.15$  و  $D = 0$  بنابراین،

$$d_1 = A - B = 0.15$$

$$d_2 = C - D = 0.15$$

بعد از بهنگام کردن طراحی داریم،

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d}^{(0)} \\ &= (1.15, 1.15) \end{aligned}$$

در طراحی جدید (1.15, 1.15) داریم،

$$f(\mathbf{x}^{(1)}) = -1.3225$$

$$g_1(\mathbf{x}^{(1)}) = -0.6166$$

دقت کنید که مقدار تابع هزینه برای طراحی جدید  $\mathbf{x}^{(1)}$ ، بدون این که قيود نقض شده باشند کاهش یافته است. این به مفهوم این است که طراحی جدید نسبت به قبلی بهبود یافته است. چون نرم تغییرات طراحی،  $\|\mathbf{d}\| = 0.212$  بزرگتر از خطای قابل قبول (0.001) است، باید چرخه های بیشتری را برای برآوردن معیار توقف انجام دهیم.

همچنین توجه کنید که زیرمسأله خطی شده در نقطه (1, 1) می تواند برحسب متغیرهای اصلی نوشته شود. این در مثال ۶.۳ انجام شده و زیرمسأله خطی شده زیر به دست آمده است. تابع

$$\bar{f} = -x_1 - x_2 + 1$$

را با قيود

$$\bar{g}_1 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 - 4) \leq 0$$

$$\bar{g}_2 = -x_1 \leq 0$$

$$\bar{g}_3 = -x_2 \leq 0$$

مینیم کنید. ۱۵٪ حدود حرکت نیز می تواند با استفاده از  $\Delta_{ii}^{(0)} \leq x_i - x_i^{(0)} \leq \Delta_{ii}$

برحسب متغیرهای اصلی تبدیل شود. داریم

$$-0.15 \leq (x_1 - 1) \leq 0.15 \quad \text{یا} \quad 0.85 \leq x_1 \leq 1.15$$

$$-0.15 \leq (x_2 - 1) \leq 0.15 \quad \text{یا} \quad 0.85 \leq x_2 \leq 1.15$$

با حل زیرمسأله، جواب (1.15, 1.15) مشابه قبل به دست می‌آوریم.

### ۶.۴.۳ نگرشی بر الگوریتم SLP

الگوریتم برنامه ریزی خطی دنباله‌ای یک روش ساده و سراسر برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید است. الگوریتم برای حل مسائل مختلف طراحی مهندسی به کار رفته است. با این همه روشهای برتری پیدا شده و جایگزین الگوریتم SLP شده‌اند. نکته‌های زیر محدودیتهای مهم روش SLP را یادآور می‌شود:

۱. روش نمی‌تواند به عنوان یک جعبه سیاه برای مسائل طراحی مهندسی به کار رود. انتخاب حدود حرکت یک فرآیند آزمون و خطاست و برای رسیدن به آن یک حالت تعامل بهترین است. مثالهای گذشته نشان دادند که حدود حرکت می‌تواند آن قدر محدودکننده باشد که برای زیرمسأله LP جوابی پیدا نشود. حدود حرکت می‌تواند از یک نقطه قابل قبول نیز نرخ همگرایی را کاهش دهد.
۲. روش همگرا نیست، زیرا تابع کاهشی تعریف نمی‌شود و جست و جوی خطی در امتداد جهت جست و جو انجام نمی‌شود. بنابراین روش برای نقاط شروع اختیاری قابل اطمینان نیست.
۳. نرخ همگرایی و عملکرد روش SLP به مقدار زیادی به انتخاب حدود حرکت بستگی دارد.
۴. به کار بردن یک راهبرد قید پتانسیل در روش SLP برای بالا بردن کارایی آن امکان پذیر است. الگوریتمی که در این بخش بحث شد برای سادگی شامل چنین راهبردی نمی‌شد.
۵. اگر جواب بهین یک رأس از مجموعه قید نباشد، روش ممکن است بین دو نقطه مشخص دور بزند.
۶. اگرچه روش بسیار ساده است (هم از نظر مفهومی و هم از نظر عددی) ولی به عنوان روشی برای مسائل بهینه‌سازی عمومی توصیه نمی‌شود، زیرا در تعیین حدود حرکت ناتوان و نامطمئن است.

### ۶.۵ زیرمسئله برنامه ریزی درجه دو

همان طور که در بخش گذشته مشاهده شد الگوریتم SLP یک تعمیم ساده برنامه ریزی خطی برای حل مسائل بهینه سازی مقید عمومی است. با این همه این روش معایب متعددی دارد که از همه آنها مهمتر فقدان توانمندی لازم است. برای رفع این عیب، روشی را تدوین می کنیم که یک زیرمسئله برنامه ریزی درجه دو (QP) به طور چرخه ای حل شود و اندازه گامی پیدا شود تا یک تابع کاهشی را در امتداد جهت جست و جو مینیمم کند. در این بخش یک زیرمسئله QP را تعریف و روشی را برای حل آن پیشنهاد خواهیم کرد.

#### ۶.۵.۱ قید اندازه گام درجه دو

عملکرد روش برنامه ریزی خطی دنباله ای به اندازه زیادی به انتخاب حدود حرکت تغییرات طراحی بستگی دارد. این روش با شروع از یک طراحی اختیاری معلوم نیست که به یک مینیمم محلی همگرا شود. به علاوه، حدود حرکت باید در هر چرخه طراحی تنظیم شود. برای غلبه بر این مشکلات، روشهای دیگری برای یافتن تغییرات طراحی تدوین شده اند. بیشتر روشها تقریب خطی معادله های (۶.۲۳) تا (۶.۲۵) را برای مسئله برنامه ریزی غیرخطی استفاده می کنند. به هر حال، حدود حرکت خطی معادله (۶.۳۱) به دلیل قید اندازه گام

$$\|d\| \leq \xi \quad (6.32)$$

که در آن  $\|d\|$  اندازه جهت جست و جو و  $\xi$  یک عدد مثبت کوچک مشخص است، شکل استاندارد را ندارد. معادله (۶.۳۲) قیدی را به اندازه بردار تغییر طراحی تحمیل می کند. بعداً خواهیم دید که پارامتر  $\xi$  لازم نیست که حتماً در معادله (۶.۳۲) مشخص شود. با استفاده از تعریف طول یک بردار و به توان دو رساندن هر دو طرف معادله (۶.۳۲)، قید اندازه گام درجه دو را برای  $d$  به شکل زیر به دست می آوریم

$$0.5 \sum_{i=1}^n (d_i)^2 \leq \xi^2 \quad (0.5d^T d \leq \xi^2) \quad (6.33)$$

ضریب 0.5 در طرف چپ آورده شده تا ضریب 2 را که هنگام مشتق گیری در محاسبات بعدی به وجود می آید، از بین ببرد. این ضریب بر محاسبات جهت جست و جو تأثیر نمی گذارد، ولی محاسبات اندازه گام را کمی تحت تأثیر قرار می دهد. الگوریتم محاسباتی نهایی متأثر

نمی شود. شکل ۶.۱۰ قید اندازه گام درجه دو روی  $\mathbf{d}$  را نشان می دهد که با حدود حرکت خطی نشان داده شده در شکل ۶.۷ کاملاً متفاوت است. می توان دید که طراحی جدید باید در کره بالایی به شعاع  $\sqrt{2}$  و به مرکز نقطه فعلی باشد. پس، زیرمسأله تقریبی که در هر چرخه طراحی باید حل شود به شکل زیر تعریف می شود:

تغییرات طراحی  $d_1, d_2, \dots, d_n$  را چنان محاسبه کنید که تابع هزینه خطی

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^n c_i d_i \quad (\bar{f} = \mathbf{c}^T \mathbf{d}) \quad (6.34)$$

مشروط به قیود مساوی خطی شده

$$\sum_{i=1}^n n_{ij} d_i = e_j; \quad j = 1 \text{ to } p \quad (\mathbf{N}^T \mathbf{d} = \mathbf{e}) \quad (6.35)$$

و قیود نامساوی خطی شده

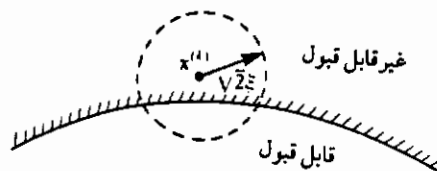
$$\sum_{i=1}^n a_{ij} d_i \leq b_j; \quad j = 1 \text{ to } m \quad (\mathbf{A}^T \mathbf{d} \leq \mathbf{b}) \quad (6.36)$$

و قید اندازه گام درجه دو

$$0.5 \sum_{i=1}^n (d_i^2) \leq \xi^2 \quad (0.5 \mathbf{d}^T \mathbf{d} \leq \xi^2) \quad (6.37)$$

مینیمم شود.

شکلها و خواص مختلفی از مسأله تقریبی در بخشهای بعدی بحث می شوند. زیرمسأله غیرخطی است، زیرا قید اندازه گام خطی نیست. بنابراین، روش سیمپلکس که در فصل (۴) ارائه شد نمی تواند برای حل زیرمسأله به کار رود. اما همچنان که بعداً خواهیم دید آن را می توان بسط داد.



شکل ۶.۱۰ قید اندازه گام درجه دو روی تغییرات طراحی

## ۶.۵.۲ زیرمسئله برنامه ریزی درجه دو (QP)

یک مسئله برنامه ریزی درجه دو، تابع هزینه درجه دو و قیود خطی دارد. زیرمسئله یافتن جهت غیرخطی که در معادله های (۶.۳۴) تا (۶.۳۷) تعریف شد بدین شکل نیست ولی می تواند به آن تبدیل شود. زیرمسئله تعریف شده در معادله های (۶.۳۴) تا (۶.۳۷) یک عیب دارد، و آن این است که امکان دارد اگرچه خیلی کوچک باشد و طراحی فعلی غیرقابل قبول باشد، جواب نداشته باشد. این موضوع را می شود با مراجعه به شکل ۶.۱۰ به طریق ترسیمی مشاهده کرد. اگر کره بالایی در شکل ۶.۱۰ ناحیه قابل قبول را قطع نکند (یعنی شعاع خیلی کوچک باشد) آن گاه زیرمسئله غیرقابل قبول است. از طرف دیگر، مزیت حل زیرمسئله QP (که در زیر تعریف می شود) این است که همیشه جواب دارد (وقتی قیود سازگارند) و در حقیقت اگر مسئله محدب قطعی باشد، منحصر به فرد نیز هست. همچنین، روشهای عددی بسیاری برای حل مؤثر و دقیق مسئله QP وجود دارد. روش سیمپلکس بهبود یافته یا شرایط کان-تاکر و روشهای فصل (۳) می تواند برای مسائل ساده تر استفاده شود. نرم افزارهای تجاری متعددی برای حل مسائل QP موجود است، مانند کیو پی سول (QPSOL) [گیل، موری، سوندرز و رایت<sup>۱</sup>، ۱۹۸۴]، لیندو (LINDO) [شریج<sup>۲</sup>، ۱۹۸۱]، وی ای صفر شش ای (VE06A) [هوپر<sup>۳</sup>، ۱۹۸۱]، و ای صفر چهار ان ای اف (E04NAF) [ناگ<sup>۴</sup>، ۱۹۸۴].

این امکان وجود دارد که زیرمسئله QP معادل زیر را رابطه سازی کنید که جوابش با زیرمسئله تعریف شده در معادله های (۶.۳۴) تا (۶.۳۷) یکسان است: تابع

$$\bar{f} = \mathbf{c}^T \mathbf{d} + 0.5 \mathbf{d}^T \mathbf{d} \quad (۴.۳۸)$$

را به شرط

$$\mathbf{N}^T \mathbf{d} = \mathbf{e} \quad (۶.۳۹)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{d} \leq \mathbf{b} \quad (۶.۴۰)$$

مینیمم کنید. نشان دادن این که با نوشتن شرایط لازم K-T فصل (۳) جواب زیرمسئله QP با جواب زیرمسئله قبلی، با ضریب لاگرانژ یک برای قید اندازه گام، معادل است؛ به عهده دانشجویان گذاشته می شود. دقت کنید که زیرمسئله QP محدب است و بنابراین انتظار

1. Gill, Murray, Saunders and Wright

2. Schrage

3. Hopper

4. NAG

می رود که روش حل پایدار باشد. به علاوه، جواب زیرمسئله QP (اگر وجود داشته باشد) منحصر به فرد است، زیرا یک مسئله برنامه ریزی محدب قطعی (اکید) است.

**مثال ۶.۷ تعریف زیرمسئله QP.** مسئله بهینه سازی مقید زیر را در نظر بگیرید: تابع

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1^3 + 15x_2^2 - 8x_1x_2 - 4x_1$$

را نسبت به قیود

$$h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + 1.0 = 0$$

$$g(\mathbf{x}) = x_1 - \frac{1}{4}x_2^2 - 1.0 \leq 0$$

مینیمم کنید. توابع هزینه و قید را حول نقطه  $(1, 1)$  خطی کرده و زیرمسئله QP را تعریف کنید.

**حل.** شکل ۶.۱۱ نمایش هندسی مسئله را نشان می دهد. قید مساوی به شکل  $h = 0$  و قید نامساوی به شکل  $g = 0$  نشان داده شده است. ناحیه قابل قبول برای قید نامساوی تعریف شده و چندین خط هزینه ثابت نشان داده شده اند. چون قید مساوی باید برآورده شود، نقطه بهین باید روی منحنی  $h = 0$  قرار داشته باشد. دو جواب بهین عبارتند از

$$\text{نقطه A: } \mathbf{x}^* = (1, -2), f(\mathbf{x}^*) = 74$$

$$\text{نقطه B: } \mathbf{x}^* = (-1, 2), f(\mathbf{x}^*) = 78$$

گرایان توابع هزینه و قیود عبارتند از

$$\nabla f = (6x_1^2 - 8x_2 - 4, 30x_2 - 8x_1)$$

$$\nabla h = (2x_1 + x_2, x_1)$$

$$\nabla g = (1, -x_2/2)$$

مقادیر توابع هزینه و قید و گرایانهایشان در نقطه  $(1, 1)$  عبارت است از

$$f(1, 1) = 5$$

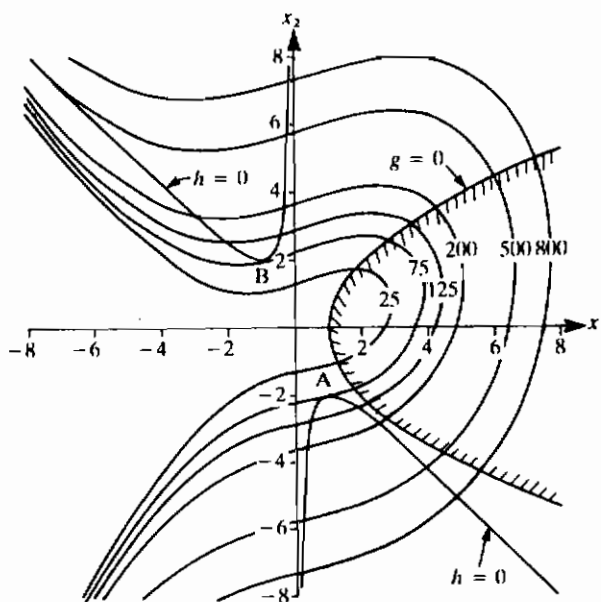
$$h(1, 1) = 3 \neq 0 \quad (\text{نقض شده})$$

$$g(1, 1) = -0.25 < 0 \quad (\text{غیرفعال})$$

$$\mathbf{c} = \nabla f = (-6, 22)$$

$$\nabla h = (3, 1)$$

$$\nabla g = (1, -0.5)$$



شکل ۶.۱۱ نمایش ترسیمی مثال ۶.۷

با استفاده از حدود حرکت ۵۰٪، زیرمسئله برنامه ریزی خطی بیان شده در معادله های (۶.۲۳) تا (۶.۲۵) به شکل زیر تعریف می شود: تابع

$$\bar{f} = -6d_1 + 22d_2$$

را نسبت به قیود

$$3d_1 + d_2 = -3$$

$$d_1 - 0.5d_2 \leq 0.25$$

$$-0.5 \leq d_1 \leq 0.5$$

$$-0.5 \leq d_2 \leq 0.5$$

مینیمم کنید.

زیرمسئله QP معادله های (۶.۳۸) تا (۶.۴۰) به شکل زیر تعریف می شود: تابع

$$\bar{f} = (-6d_1 + 22d_2) + 0.5(d_1^2 + d_2^2)$$

را نسبت به قیود

$$3d_1 + d_2 = -3$$

$$d_1 - 0.5d_2 \leq 0.25$$

مینیمم کنید.

دقت کنید که اگر راهبرد قید پتانسیل اعمال شود قید نامساوی لازم نیست که در تعریف زیرمسئله QP بیاید، زیرا آن قید غیرفعال است. گرادیان قید  $g$  لازم نیست در نقطه طراحی داده شده محاسبه شود.

برای مقایسه جوابها، زیرمسئله های LP و QP گذشته به ترتیب در شکلهای ۶.۱۲ و ۶.۱۳ رسم شده اند. در این شکلها، جواب باید قید مساوی خطی شده را برآورده کند، بنابراین باید روی خط C-D قرار داشته باشد. ناحیه قابل قبول برای قید نامساوی خطی شده نیز نشان داده شده است. بنابراین جواب زیرمسئله باید روی خط G-C باشد. در شکل ۶.۱۲ دیده می شود که با حدود حرکت ۵۰٪، زیرمسئله خطی شده غیرقابل قبول می شود. حدود حرکت ایجاب می کند که تغییرات داخل مربع HIJK قرار داشته باشد که خط G-C را قطع نمی کند. اگر حدود حرکت را ۱۰۰٪ کنیم، آن گاه نقطه L جواب بهین را می دهد که عبارت است از

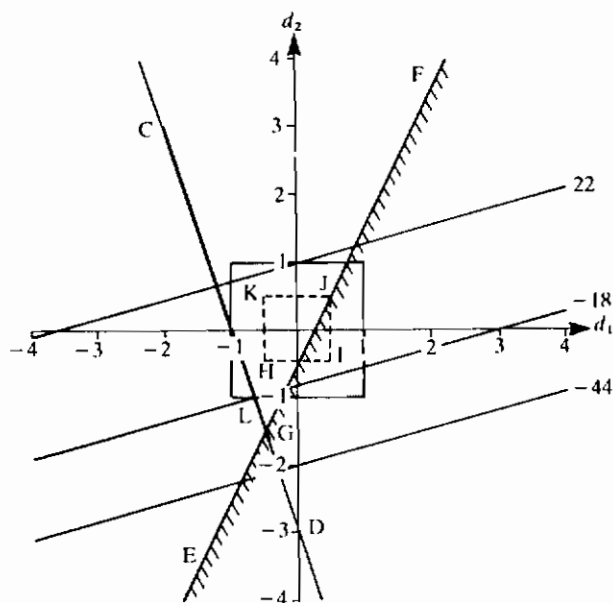
$$d_1 = -\frac{2}{3}, \quad d_2 = -1.0, \quad \bar{f} = -18$$

پس، می بینیم که تغییر طراحی با زیرمسئله خطی شده از حدود حرکت تأثیر پذیرفته است.

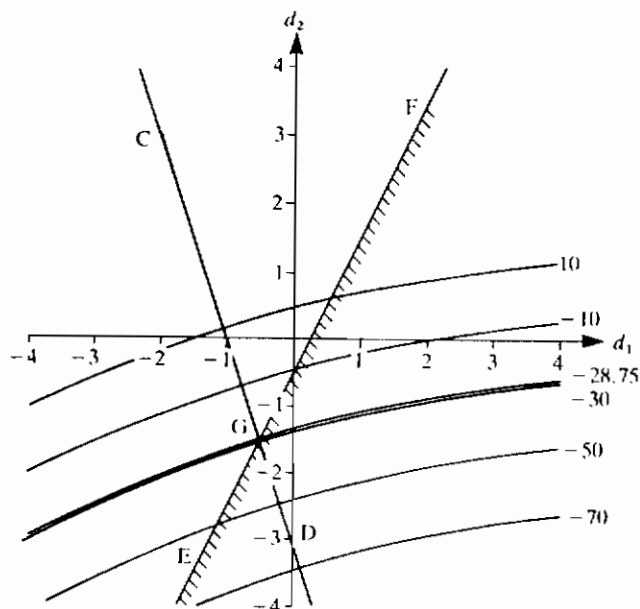
در زیرمسئله QP، مجموعه قید ثابت می ماند ولی نیازی به حدود حرکت نیست همچنان که در شکل ۶.۱۳ نشان داده شده است. تابع هزینه اکنون یک تابع درجه دو است که جواب بهین را که نقطه G است، می دهد؛ یعنی

$$d_1 = -0.5, \quad d_2 = -1.5, \quad \bar{f} = -28.75$$

دقت کنید که جهت طراحی به دست آمده از زیرمسئله QP منحصر به فرد است، ولی در زیرمسئله LP به حدود حرکت بستگی دارد. در حالت کلی جهتهای به دست آمده از زیرمسئله های LP و QP با هم متفاوتند.



شکل ۶.۱۲ حل زیرمسئله خطی شده مثال ۶.۷ در نقطه  $(1, 1)$ .



شکل ۶.۱۳ حل زیرمسئله برنامه ریزی درجه دو مثال ۶.۷ در نقطه  $(1, 1)$ .

## ۶.۵.۳ حل مسائل برنامه ریزی درجه دو

۶.۵.۳.۱ تعریف مسأله QP. مسائل برنامه ریزی درجه دو (QP) در بسیاری از کاربردهای واقعی وجود دارند. به علاوه، بسیاری از الگوریتمهای برنامه ریزی غیرخطی کلی (که در بخشهای بعدی بحث می شوند) در هر چرخه به حل زیرمسأله برنامه ریزی درجه دو نیاز دارند. همان طور که در معادله های (۶.۳۸) تا (۶.۴۰) دیده می شود، هنگامی که یک مسأله غیرخطی، به خطی تبدیل شده و قید اندازه گام درجه دو اعمال می شود، زیرمسأله QP به وجود می آید. حل مؤثر یک مسأله QP بسیار مهم است، زیرا مسائل بزرگ را به وسیله آن می توان حل کرد. پس اگر پژوهشهای قابل توجهی برای تدوین و ارائه الگوریتمهای متعدد برای حل مسائل QP انجام شده باشد تعجب آمیز نیست [گیل و دیگران<sup>۱</sup>، ۱۹۸۱؛ لوتن برگر<sup>۲</sup>، ۱۹۸۴]. همچنان که یادآور شدیم، برنامه های مناسبی نیز برای حل چنین مسائلی ارائه شده است.

در این جا روشی را برای حل مسائل QP تشریح خواهیم کرد که تعمیم ساده ای از روش سیمپلکس است. روشهای بسیار دیگری در دسترس هستند که می توان آنها را صورتی از روش یاد شده دانست. بعضی از برنامه های LP نیز این قابلیت را دارند و در آنها گزینه ای برای حل مسائل QP وجود دارد [شریج<sup>۳</sup>، ۱۹۸۱]. روش حل در آنها معمولاً براساس روش سیمپلکس است.

می توانیم یک مسأله کلی QP را به شکل زیر تعریف کنیم؛ تابع

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + 0.5 \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} \quad (۶.۴۱)$$

را نسبت به قیود نامساوی و مساوی خطی

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (۶.۴۲)$$

$$\mathbf{N}^T \mathbf{x} = \mathbf{e} \quad (۶.۴۳)$$

و

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (۶.۴۴)$$

مینیمم کنید که در آن،  $\mathbf{c}$  = برداری  $n$  بعدی از اعداد ثابت داده شده،  $\mathbf{x}$  = بردار  $n$  بعدی از

مجهولها،  $\mathbf{b}$  بردار  $m$  بعدی از اعداد ثابت داده شده،  $\mathbf{e}$  بردار  $p$  بعدی از اعداد ثابت داده شده،  $\mathbf{H}$  = ماتریس هسیان  $n \times n$  از اعداد ثابت،  $\mathbf{A}$  = ماتریس  $n \times m$  از اعداد ثابت داده شده و  $\mathbf{N}$  = ماتریس  $n \times p$  از اعداد ثابت داده شده می باشد.

توجه کنید که تمامی قیود نامساوی خطی به "شکل  $\leq$ " بیان می شوند. این کار ضرورت دارد، زیرا شرایط لازم کان-تاکر بخش ۳.۴ را خواهیم نوشت. آن جا برای قیود نامساوی "شکل  $\leq$ " را استفاده کردیم. همچنین دقت کنید که اگر ماتریس هسیان نیمه معین مثبت باشد، مسئله QP محدب است و هر جوابی (اگر وجود داشته باشد) یک نقطهٔ مینیمم فراگیر است (که لازم نیست منحصر به فرد باشد). به علاوه، اگر ماتریس هسیان معین مثبت باشد، مسئله محدب قطعی (اکید) است. بنابراین مسئله یک جواب فراگیر منحصر به فرد دارد (اگر جوابی وجود داشته باشد). ما فرض خواهیم کرد که ماتریس  $\mathbf{H}$  حداقل نیمه معین مثبت باشد. این در عمل فرضی غیر منطقی نیست، زیرا در بسیاری از موارد صادق است. به عنوان مثال، در زیر مسئله QP معادله های (۶.۳۸) تا (۶.۴۰)، (ماتریس واحد)  $\mathbf{H} = \mathbf{I}$  است، بنابراین هسیان در واقع معین مثبت است. همچنین دقت کنید که متغیر  $x$  باید در معادله (۶.۴۴) نامنفی باشد. متغیرهایی که از نظر علامت آزادند می توانند به روشی که در بخش ۴.۲ تشریح شد مورد استفاده قرار گیرند.

۶.۵.۳.۲ **یک روش حل - شرایط کان-تاکر برای مسئله QP.** یک روش برای حل مسئله QP معادله های (۶.۴۱) تا (۶.۴۴) این است که ابتدا شرایط لازم کان-تاکر بخش ۳.۴ را نوشته و سپس آن را به شکلی که بتواند با گام I روش سیمپلکس بخش ۴.۵ حل شود، تبدیل کنیم. برای نوشتن شرایط لازم، متغیر کمبود  $s$  را برای نامساویهای (۶.۴۲) معرفی کرده و آنها را به مساویهایی به شکل زیر تبدیل می کنیم

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{b}; \quad \text{با} \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \quad (۶.۴۵)$$

یا، متغیر کمبود برای  $z$  امین نامساوی معادله (۶.۴۲) می تواند با استفاده از معادله (۶.۴۵) به شکل زیر بیان شود

$$s_j = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \quad (\mathbf{s} = \mathbf{b} - \mathbf{A}^T \mathbf{x}) \quad (۶.۴۶)$$

توجه کنید که قیود نامنفی بودن معادله های (۶.۴۴) (وقتی به شکل استاندارد  $x \geq 0$  بیان شود) به متغیر کمبود نیازی ندارند، زیرا  $x \geq 0$  خودش متغیر کمبود است.

می توانیم تابع لاگرانژ را برای مسأله QP به شکل زیر تعریف کنیم

$$L = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + 0.5 \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{s} - \mathbf{b}) - \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{x} + \mathbf{v}^T (\mathbf{N}^T \mathbf{x} - \mathbf{e})$$

که در آن  $\mathbf{u}$ ،  $\mathbf{v}$  و  $\boldsymbol{\zeta}$  به ترتیب بردارهای ضرایب لاگرانژ قیود نامساوی معادله های (۶.۴۲) یا (۶.۴۶)، قیود مساوی معادله (۶.۴۳)، و قید نامنفی بودن ( $\mathbf{x} \geq 0$ ) هستند. شرط لازم کان-تاکر معادله های زیر را می دهد

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} + \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{A} \mathbf{u} - \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{N} \mathbf{v} = 0 \quad (۶.۴۷)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{s} - \mathbf{b} = 0 \quad (۶.۴۸)$$

$$\mathbf{N}^T \mathbf{x} - \mathbf{e} = 0 \quad (۶.۴۹)$$

$$u_i s_i = 0; \quad i = 1 \text{ to } m \quad (۶.۵۰)$$

$$\zeta_i x_i = 0; \quad i = 1 \text{ to } n \quad (۶.۵۱)$$

$$s_i, u_i \geq 0 \text{ for } i = 1 \text{ to } m; \quad \zeta_i \geq 0 \text{ for } i = 1 \text{ to } n \quad (۶.۵۲)$$

چون ضرایب لاگرانژ  $\mathbf{v}$  مربوط به قیود مساوی از نظر علامت آزادند، می شود آنها را به دو متغیر دیگر تبدیل کرد؛ یعنی

$$\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{z} \quad \text{با} \quad \mathbf{y}, \mathbf{z} \geq 0 \quad (۶.۵۳)$$

اکنون، با نوشتن معادله های (۶.۴۷)، (۶.۴۸) و (۶.۴۹) به شکل ماتریسی، داریم

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{A} & -\mathbf{I}_{(n)} & \mathbf{0}_{(n \times m)} & \mathbf{N} & -\mathbf{N} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0}_{(m \times m)} & \mathbf{0}_{(m \times n)} & \mathbf{I}_{(m)} & \mathbf{0}_{(m \times p)} & \mathbf{0}_{(m \times p)} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0}_{(p \times m)} & \mathbf{0}_{(p \times n)} & \mathbf{0}_{(p \times m)} & \mathbf{0}_{(p \times p)} & \mathbf{0}_{(p \times p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\zeta} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (۶.۵۴)$$

که در آن  $\mathbf{I}_{(n)}$  و  $\mathbf{I}_{(m)}$  به ترتیب ماتریسهای واحد  $n \times n$  و  $m \times m$ ، و 0 ماتریسهای صفر از مرتبه های یاد شده می باشند. معادله (۶.۵۴) به شکل علایم ماتریسی خلاصه شده عبارت است از

$$\mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{D} \quad (۶.۵۵)$$

که ماتریس  $B$  و بردارهای  $X$  و  $D$  از معادله (۶.۵۴) به شکل زیر خواهند بود

$$B = \begin{bmatrix} H & A & -I_{(n)} & 0_{(n \times m)} & N & -N \\ A^T & 0_{(m \times m)} & 0_{(m \times n)} & I_{(m)} & 0_{(m \times p)} & 0_{(m \times p)} \\ N^T & 0_{(p \times m)} & 0_{(p \times n)} & 0_{(p \times m)} & 0_{(p \times p)} & 0_{(p \times p)} \end{bmatrix}_{[(n+m+p) \times (2n+2m+2p)]} \quad (۶.۵۶)$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ u \\ \zeta \\ s \\ y \\ z \end{bmatrix}_{(2n+2m+2p)} \quad D = \begin{bmatrix} -c \\ b \\ e \end{bmatrix}_{(n+m+p)} \quad (۶.۵۷)$$

اکنون شرایط کان-تاکر به یافتن بردار  $X$  جواب سیستم معادله های خطی (۶.۵۵) مشروط به معادله های (۶.۵۰) تا (۶.۵۲) می انجامد. برحسب متغیر جدید  $X_i$ ، شرط کمبود مکمل معادله (۶.۵۰) و (۶.۵۱)، به معادله زیر ختم می شود

$$X_i X_{n+m+i} = 0; \quad i = 1 \text{ to } (n+m) \quad (۶.۵۸)$$

و شرایط نامنفی بودن معادله (۶.۵۲) به شکل زیر ختم می شود

$$X_i \geq 0; \quad i = 1 \text{ to } (2n+2m+2p) \quad (۶.۵۹)$$

**۶.۵.۳.۳ روش سیمپلکس برای حل مسائل QP.** حل سیستم معادله های خطی معادله های (۶.۵۵) که کمبود مکمل معادله (۶.۵۸) و شرط نامنفی بودن معادله (۶.۵۹) را برآورده می کند جواب مسأله اصلی است. توجه کنید که شرط کمبود مکمل معادله (۶.۵۸) برحسب متغیرهای  $X_i$  غیر خطی هستند. بنابراین، ممکن است چنین به نظر برسد که روش سیمپلکس مربوط به LP نمی تواند برای حل معادله (۶.۵۵) به کار رود. اما روشی که توسط ولف<sup>۱</sup> [۱۹۵۹] تدوین و توسط هدلی<sup>۲</sup> [۱۹۶۴] بهبود یافت، می تواند برای حل مسأله به کار رود. این روش در صورتی که ماتریس  $H$  در معادله (۶.۴۱) معین مثبت باشد، در چند گام محدود به جواب همگرا می شود. به علاوه می توان نشان داد [کانزی و کرل<sup>۳</sup>، ۱۹۶۶، ص ۱۲۳] که حتی اگر  $H$  نیمه معین مثبت نیز باشد در صورتی که بردار  $c$  در معادله (۶.۴۱) صفر باشد روش همگراست.

1. Wolfe

2. Hadley

3. Kunzi and Krelle

روش براساس گام I روش سیمپلکس فصل (۴) قرار دارد که در آن جا برای هر قید مساوی یک متغیر مصنوعی معرفی کردیم و همچنین یک تابع هزینه مصنوعی تعریف شد که از آن برای به دست آوردن یک جواب قابل قبول اصلی اولیه استفاده می شد. در این جا هم ما متغیر مصنوعی  $Y_i$  را برای هریک از معادله های (۶.۵۵) به شکل زیر تعریف می کنیم

$$\mathbf{BX} + \mathbf{Y} = \mathbf{D} \quad (۶.۶۰)$$

در حالی که  $\mathbf{Y}$  یک بردار  $(n+m+p)$  بعدی است. بدین ترتیب تمامی  $X_i$  ها را در ابتدا به عنوان متغیرهای غیر اصلی و تمامی  $Y_i$  ها را به عنوان متغیرهای اصلی انتخاب می کنیم. توجه کنید که تمامی درایه های  $\mathbf{D}$  باید برای قابل قبول بودن جواب اصلی اولیه نامنفی باشند. اگر هریک از درایه های  $\mathbf{D}$  منفی باشند، معادله مربوطه در معادله های (۶.۵۵) باید در  $-۱$  ضرب شود تا یک درایه نامنفی در طرف راست داشته باشد.

تابع هزینه مصنوعی برای مسأله به شکل زیر تعریف می شود

$$w = \sum_{i=1}^{n+m+p} Y_i \quad (۶.۶۱)$$

برای استفاده از روش سیمپلکس، باید تابع هزینه مصنوعی را فقط برحسب متغیرهای غیر اصلی بیان کنیم. متغیرهای اصلی  $Y_i$  را از معادله (۶.۶۱) با جایگزینی معادله (۶.۶۰) در آن حذف می کنیم، داریم

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^{n+m+p} D_i - \sum_{j=1}^{2(n+m+p)} \sum_{i=1}^{n+m+p} B_{ij} X_j \\ &= w_0 + \sum_{j=1}^{2(n+m+p)} C_j X_j \end{aligned} \quad (۶.۶۲)$$

در حالی که

$$C_j = - \sum_{i=1}^{n+m+p} B_{ij} \quad \text{و} \quad w_0 = \sum_{i=1}^{n+m+p} D_i \quad (۶.۶۳)$$

پس  $w_0$  مقدار اولیه تابع هزینه مصنوعی و  $C_j$  ضریب هزینه نسبی اولیه است که با جمع کردن درایه های ستون  $\mathbf{z}$  ام ماتریس  $\mathbf{B}$  و عوض کردن علامت آن به دست می آید.

قبل از این که بتوانیم از گام I روش سیمپلکس استفاده کنیم، نیاز به تدوین روشی برای اعمال شرط کمبود مکمل معادله (۶.۵۸) داریم. در صورتی که  $X_i$  ها و  $X_{n+m+i}$  ها

به طور همزمان اصلی نباشند، شرایط برآورده می شود. یا، اگر آنها به طور همزمان اصلی اند، آن گاه یکی از آنها صفر است (جواب قابل قبول اصلی تباهیده). این شرایط می توانند هنگام به دست آوردن درایه لولا در روش سیمپلکس بررسی شوند.

پس روش حل مسائل  $QP$  به شکل زیر خلاصه می شود:

۱. با استفاده از مسئله  $QP$  معادله های (۶.۴۱) تا (۶.۴۴) ماتریس  $B$  معادله (۶.۵۶) را تعریف کنید.

۲. بردار  $D$  معادله (۶.۵۷) را تعریف کنید؛ مطمئن شوید که تمامی درایه ها نامنفی اند، یعنی  $D_i \geq 0$ . اگر درایه ای منفی بود، علامتش را عوض کرده و سطر مربوطه ماتریس  $B$  در معادله (۶.۵۰) را در  $-1$  ضرب کنید.

۳. مقدار فعلی تابع هزینه مصنوعی و ضرایب هزینه مصنوعی را با استفاده از معادله های (۶.۶۳) محاسبه کنید.

۴. گام ۱ روش سیمپلکس فصل (۴) را کامل کنید. اگر تابع هزینه مصنوعی غیر صفر است و تمامی ضرایب هزینه نسبی نامنفی اند، یا نشود درایه لولا را به دست آورد، آن گاه مسئله  $QP$  اصلی غیر قابل قبول است.

۵. اگر جواب قابل قبولی برای معادله های (۶.۵۵)، (۶.۵۸) و (۶.۵۹) پیدا شده آن گاه از تعریف بردار  $X$  در معادله (۶.۵۷) استفاده کنید تا مقادیر بهین متغیرهای  $QP$  اصلی  $x$ ، ضرایب لاگرانژ  $u$ ،  $v$  و متغیرهای کمبود  $s$  را بازیابی کنید.

روش گذشته در یک مسئله نمونه تشریح خواهد شد. در این جا توجه به این نکته مفید است که یک روش کمی متفاوت برای حل شرایط لازم کان-تاکر برای مسئله  $QP$  توسط لمک<sup>۱</sup> [۱۹۶۵] تدوین شده است. آن روش به عنوان روش لولایی مکمل شناخته می شود. تجربیات عددی [راویندران و لی<sup>۲</sup>، ۱۹۸۱] نشان داده است که این روش وقتی ماتریس  $H$  نیمه معین مثبت است، از نظر محاسباتی بسیار پرجاذبه تر از دیگر روشهای حل مسائل  $QP$  است.

مثال ۶.۸ حل مسئله  $QP$ . مسئله  $QP$  زیر را حل کنید:

تابع

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \quad (\text{الف})$$

را مشروط به

$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad (\text{ب})$$

$$x_1 - 3x_2 = 1 \quad (\text{پ})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مینیم کنید.

حل. چون این یک مسأله دو متغیره است، با استفاده از شرایط کان-تاکر و روش بخش ۳.۴ نیز می تواند حل شود. مسأله را با استفاده از روش سیمپلکس حل کرده و برآورده شدن شرایط کان-تاکر را برای آن نشان خواهیم داد.

تابع هزینه می تواند به شکل زیر بیان شود

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 18$$

از ثابت (18) تابع هزینه صرف نظر کرده و تابع درجه دوی زیر را که به شکل معادله (۶.۴۱) بیان شد، مینیم می کنیم:

$$q(\mathbf{x}) = [-6 \quad -6] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{ت})$$

از معادله های (ت)، (ب) و (پ)، مقادیر زیر را مشخص می کنیم:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = [4]$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e} = [1]$$

با استفاده از این مقادیر، ماتریس B و بردارهای D و X معادله های (۶.۵۶) و (۶.۵۷) به شکل زیر مشخص می شوند

$$\mathbf{B} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{D} = [6 \quad 6 \mid 4 \mid 1]^T$$

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \mid u_1 \mid \zeta_1 \quad \zeta_2 \mid s_1 \mid y_1 \quad z_1]^T$$

توجه کنید که چون تمامی مؤلفه های  $D$  نامنفی اند، برای نامنفی شدن طرف راست معادله (۶.۵۵) نیازی به ضرب هیچ کدام از سطرهای  $B$  در  $-1$  نیست.

جدول ۶.۱ جدول اولیه سیمپلکس و چهار چرخه رسیدن به جواب بهین را نشان می دهد. دقت کنید که ضرایب هزینه نسبی  $C_j$  در جدول اولیه با جمع کردن تمامی درایه ها در ستون  $z$  ام و تغییر علامت آنها به دست می آید. همچنین، شرط کمبود مکمل معادله (۶.۵۸) ایجاب می کند که

$$X_1 X_4 = 0$$

$$X_2 X_5 = 0$$

$$X_3 X_6 = 0$$

یعنی  $X_1$  و  $X_4$ ،  $X_2$  و  $X_5$ ،  $X_3$  و  $X_6$  نمی توانند همزمان متغیر اصلی باشند. این شرایط را وقتی لولا را در گام ۱ روش سیمپلکس به دست می آوریم اعمال می کنیم.

بعد از چهار چرخه روش سیمپلکس، تمامی متغیرهای مصنوعی غیر اصلی شده و تابع هزینه مصنوعی صفر می شود. بنابراین جواب بهین عبارت است از

$$X_1 = \frac{13}{4}, \quad X_2 = \frac{3}{4}, \quad X_3 = \frac{3}{4}, \quad X_4 = \frac{5}{4}$$

$$X_5 = 0, \quad X_6 = 0, \quad X_7 = 0$$

جواب بهین مسئله QP اصلی عبارت است از

$$x_1 = \frac{13}{4}, \quad x_2 = \frac{3}{4}, \quad u_1 = \frac{3}{4}, \quad \zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = 0$$

$$s_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \frac{3}{4}, \quad v_1 = y_1 - z_1 = -\frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{41}{8}$$

اکنون ببینیم شرایط کان-تاکر برای این جواب چگونه برآورده می شود.

لاگرانژین مسئله با استفاده از معادله های (الف) تا (پ) عبارت است از

$$L = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + u_1(x_1 + x_2 - 4) + v_1(x_1 - 3x_2 - 1) \\ - \zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2$$

چون متغیر کمبود برای قید نامساوی صفر است، باید به صورت مساوی برآورده شود.

بنابراین، با حل معادله های (ب) تا (پ)، داریم  $x_1 = \frac{13}{4}$ ،  $x_2 = \frac{3}{4}$ ، چون  $x_1 > 0$ ،  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ ، با مشتق گیری از لاگرانژین داریم

جدول ۶.۱ روش حل سیمپلکس برای مسأله QP مثال ۶.۸

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$D$
اولیه													
$Y_1$	2	0	1	-1	0	0	1	-1	1	0	0	0	6
$Y_2$	0	2	1	0	-1	0	-3	3	0	1	0	0	6
$Y_3$	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
$Y_4$	1	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	-4	0	-2	1	1	-1	2	-2	0	0	0	0	$w - 17$
اولین چرخه													
$Y_1$	0	6	1	-1	0	0	1	-1	1	0	0	-2	4
$Y_2$	0	2	1	0	-1	0	-3	3	0	1	0	0	6
$Y_3$	0	4	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	3
$X_1$	1	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	0	-12	-2	1	1	-1	2	-2	0	0	0	4	$w - 13$
دومین چرخه													
$X_2$	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$Y_2$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{3}$
$Y_3$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$X_1$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	3
	0	0	0	-1	1	-1	4	-4	2	0	0	0	$w - 5$
سومین چرخه													
$X_2$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$Y_2$	0	0	4	-3	-1	-5	0	0	3	1	-5	-1	3
$X_8$	0	0	-1	1	0	$\frac{3}{4}$	-1	1	-1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$X_1$	1	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{4}$
	0	0	-4	3	1	5	0	0	-2	0	6	2	$w - 3$
چهارمین چرخه													
$X_2$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$X_3$	0	0	1	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$X_8$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-1	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$X_1$	1	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{4}$
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	$w - 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 3) + u_1 + v_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) + u_1 - 3v_1 = 0$$

با جای‌گزینی  $x_1 = \frac{13}{4}$ ،  $x_2 = \frac{3}{4}$ ،  $u_1 = \frac{3}{4}$  و  $v_1 = -\frac{5}{4}$  در معادله‌های فوق می‌بینیم که آنها برآورده می‌شوند. بنابراین، جوابی که با استفاده از روش سیمپلکس به دست آمد تمامی شرایط کان-تاکر را برآورده می‌کند. همچنین دقت کنید که چون تابع هزینه محدب قطعی (اکید) است، جوابی که به دست آمده منحصر به فرد و فراگیر است.

#### ۶.۶ روش تندترین کاهش مقید

زیرمسئله QP که در معادله‌های (۶.۳۸) تا (۶.۴۰) بخش گذشته تعریف شد، می‌تواند برای تدوین یک الگوریتم کلی برای مسائل بهینه‌سازی مقید به کار رود. در این بخش ما چنین روشی را تشریح می‌کنیم. یک تابع کاهش و یک راه به دست آوردن اندازه گام برای این روش توضیح داده می‌شود. یک روش گام به گام ارائه خواهد شد که بتواند در یک رایانه پیاده شود.

دقت کنید هنگامی که یا قیدی وجود ندارد و یا هیچ کدام از قیدها فعال نیستند، مینیمم ساختن تابع درجه دوی معادله (۶.۳۸) به ما  $d = -c$  را می‌دهد (با استفاده از شرایط لازم،  $\partial f / \partial d = 0$ ). این درست جهت تندترین کاهش بخش ۵.۴ برای مسائل نامقید است. وقتی قیود وجود دارند، اثر آنها در محاسبه جهت جست و جو باید در نظر گرفته شود. جهت جست و جو باید تمامی قیود خطی شده را برآورده سازد. چون جهت جست و جو جهت تندترین کاهش بهبود یافته است، جهت تندترین کاهش مقید نامیده می‌شود. وقتی یک تابع کاهش و یک روش جست و جوی خطی مربوط به آن را تعریف کرده تا اندازه گام را در امتداد جهت جست و جو محاسبه کنیم، مراحل الگوریتم تندترین کاهش مقید روشن خواهد شد. این مراحل قبل از بیان الگوریتم تشریح خواهد شد.

زیرمسئله QP و روش تندترین کاهش مقید (CSD) که در این بخش ارائه شد مقدماتی‌ترین و ساده‌ترین تفسیر روشهای برنامه‌ریزی درجه دو دنباله‌ای (SQP) نوین و قدرتمند است. تمامی امکانات الگوریتم در این جا بحث نشد، زیرا ارائه پنداره‌های کلیدی

ساده و سرراست مورد نظر بوده است. مهم است توجه کنید که این روش صرف نظر از این که از یک نقطه قابل قبول یا غیر قابل قبول شروع شود، خوب کار می کند؛ همچنین می تواند قیود مساوی و نامساوی را در نظر بگیرد.

## ۶.۶.۱ تابع کاهشی

یادآوری می شود که در روشهای بهینه سازی نامقیّد تابع هزینه به عنوان تابع کاهشی استفاده می شد که پیشرفت الگوریتم به طرف نقطه بهین را نشان می داد. برای مسائل مقیّد، تابع کاهشی معمولاً با اضافه کردن جریمه ای برای نقض قید به مقدار تابع هزینه ساخته می شود. توابع کاهشی زیادی برای مسائل بهینه سازی مقیّد وجود دارد. در این بخش یکی از آنها را تشریح کرده و مزایای آن را نشان می دهیم.

یکی از ویژگیهای تابع کاهشی این است که مقدار آن در نقطه بهین باید با مقدار تابع هزینه یکسان باشد. همچنین باید طوری باشد که یک اندازه گام واحد در همسایگی نقطه بهین قابل قبول باشد. یک اندازه گام واحد نرخ همگرایی الگوریتم بهینه سازی را افزایش می دهد. ما تابع کاهشی شنیچنی<sup>۱</sup> را به خاطر ساده بودن و موفقیتش در حل بسیاری از مسائل طراحی معرفی خواهیم کرد [شنیچنی و دانی لین<sup>۲</sup>، ۱۹۷۸؛ بلگوندا و آرورا<sup>۳</sup>، ۱۹۸۴]. سایر توابع کاهشی در بخش ۶.۷ بحث خواهد شد.

تابع کاهشی شنیچنی  $\Phi$  در هر نقطه  $x$  به شکل زیر تعریف می شود

$$\Phi(x) = f(x) + RV(x) \quad (۶.۶۴)$$

که در آن  $R$  عددی مثبت است و پارامتر جریمه (که در ابتدا توسط کاربر مشخص می شود) نامیده می شود،  $V(x) \geq 0$  عبارت است از بیشترین مقدار نقض قید در میان تمامی قیود یا صفر (بعداً تعریف می شود)، و  $f(x)$  عبارات است از مقدار تابع هزینه در  $x$ . به عنوان یک مثال، تابع کاهشی در نقطه<sup>۱</sup>  $x^{(k)}$  در چرخه<sup>k</sup> ام به شکل زیر محاسبه می شود

$$\Phi_k = f_k + RV_k \quad (۶.۶۵)$$

که در آن  $\Phi_k$  و  $V_k$  مقادیر  $\Phi(x)$  و  $V(x)$  در  $x^{(k)}$  هستند؛ یعنی

$$\Phi_k = \Phi(\mathbf{x}^{(k)}); \quad V_k = V(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (۶.۶۶)$$

و  $R$  بیشترین مقدار فعلی پارامتر جریمه است. دقت کنید که پارامتر جریمه ممکن است در فرآیند چرخه تغییر کند. در حقیقت، باید مطمئن شد که مقدار آن بزرگتر و یا مساوی مجموع تمامی ضرایب لاگرانژ زیرمسئله QP در نقطه  $\mathbf{x}^{(k)}$  است. این شرطی ضروری است که به شکل زیر نوشته می شود

$$R \geq r_k \quad (۶.۶۷)$$

که در آن عبارت  $r_k$  عبارت است از مجموع تمامی ضرایب لاگرانژ در  $k$  امین چرخه :

$$r_k = \sum_{i=1}^p |v_i^{(k)}| + \sum_{i=1}^m u_i^{(k)} \quad (۶.۶۸)$$

چون ضریب لاگرانژ  $v_i^{(k)}$  برای یک قید مساوی از نظر علامت آزاد است، در معادله (۶.۶۸) مقدار قدر مطلق آن استفاده شده.  $u_i^{(k)}$  ضریب  $i$  امین قید نامساوی است.

پارامتر  $V_k \geq 0$  مربوط به بیشترین نقض قید در چرخه  $k$  ام، با استفاده از مقادیر توابع قیود محاسبه شده در نقطه طراحی  $\mathbf{x}^{(k)}$  به دست می آید؛ یعنی

$$V_k = \max\{0; |h_1|, |h_2|, \dots, |h_p|; g_1, g_2, \dots, g_m\} \quad (۶.۶۹)$$

چون قید مساوی در صورتی که غیر صفر باشد نقض می شود، با هر  $h_i$  در معادله (۶.۶۹)، قدر مطلق استفاده می شود. دقت کنید که  $V_k$  همیشه نامنفی است، یعنی  $V_k \geq 0$ . اگر همه قیدها در  $\mathbf{x}^{(k)}$  برآورده شوند، آن گاه  $V_k = 0$ .

مثال ۶.۹ محاسبه تابع کاهشی. یک مسئله طراحی به شکل زیر رابطه سازی شده است :

تابع

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 320x_1x_2$$

را با قیود

$$\frac{x_1}{60x_2} - 1 \leq 0$$

$$1 - \frac{x_1(x_1 - x_2)}{3600} \leq 0$$

$$-x_1 \leq 0; \quad -x_2 \leq 0$$

مینیمم کنید.

با فرض پارامتر جریمه  $R$  برابر ۱۰ ۰۰۰، مقدار تابع کاهشی را در نقطه  $x^{(0)} = (40, 0.5)$  محاسبه کنید.

حل. توابع هزینه و قیود در نقطه داده شده  $x^{(0)} = (40, 0.5)$  محاسبه شده و عبارتند از

$$f_0 = f(40, 0.5) = (40)^2 + 320(40)(0.5) = 8000$$

$$g_1 = \frac{40}{60(0.5)} - 1 = 0.333 \text{ (نقض شده)}$$

$$g_2 = 1 - \frac{40(40 - 0.5)}{3600} = 0.5611 \text{ (نقض شده)}$$

$$g_3 = -40 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

$$g_4 = -0.5 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

پس، بیشترین نقض قید با استفاده از معادله (۶.۶۹) عبارت است از

$$V_0 = \max \{0; 0.333, 0.5611, -40, -0.5\} = 0.5611$$

با استفاده از معادله (۶.۶۵)، تابع کاهشی به شکل زیر محاسبه می گردد

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= f_0 + RV_0 \\ &= 8000 + (10\,000)(0.5611) \\ &= 13\,611\end{aligned}$$

## ۶.۶.۲ به دست آوردن اندازه گام

قبل از این که بتوان الگوریتم تندترین کاهش مقید را ارائه کرد، روش به دست آوردن اندازه گام باید معرفی شود. ما این روش را در آینده تشریح می کنیم. هنگام پیاده سازی الگوریتمها در عمل برای محاسبه اندازه گام بیشتر یک جست و جوی خطی غیر دقیق که نسبتاً خوب کار می کند استفاده می شود. این روش و کاربرد آن را در مثالی شرح خواهیم داد. دقت کنید که روشهای جست و جوی خطی دقیقی که قبلاً تشریح شد، مثل جست و جوی بخش طلایی، نیز می تواند استفاده شود. ولی آن روشها ممکن است ناکارا باشند، بنابراین در بیشتر روشهای بهینه سازی مقید جست و جوی خطی غیر دقیق ترجیح داده می شود.

یک رشته از اندازه های گام آزمایشی  $t_j$  مثل زیر تعریف می کنیم:

$$t_j = \left(\frac{1}{2}\right)^j; \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (۶.۷۰)$$

یعنی، رشته اندازه گامهای آزمایشی عبارتند از

$$j = 0; \quad t_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$j = 1; \quad t_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$j = 2; \quad t_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$j = 3; \quad t_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$j = 4; \quad t_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

⋮

پس، با اندازه گام آزمایشی  $t_0 = 1$  شروع می کنیم. اگر شرط کاهشی مشخصی (که در بند زیر تعریف می شود) برآورده نشود، گام آزمایشی به اندازه نصف آزمایش قبلی، یعنی  $t_1 = \frac{1}{2}$  انتخاب می شود. اگر باز هم شرط کاهشی برآورده نشود، اندازه گام آزمایشی دوباره نصف می شود. این روش ادامه پیدا می کند تا شرط کاهشی برآورده شود.

در تدوین زیر، یک اندیس پایینی یا بالایی را برای مشخص کردن مقدار کمیت‌های مشخصی در اندازه های گام آزمایشی به کار خواهیم برد. به عنوان مثال، فرض کنید  $t_j$  اندازه گام آزمایشی در  $k$  امین چرخه باشد. آن گاه نقطه طراحی آزمایشی که شرط کاهشی برای آن بررسی خواهد شد، به شکل زیر بیان می شود

$$\mathbf{x}^{(k+1,j)} = \mathbf{x}^{(k)} + t_j \mathbf{d}^{(k)} \quad (۶.۷۱)$$

در  $k$  امین چرخه، یک اندازه گام قابل قبول مانند  $t_j = \alpha_k$  تعیین می کنیم که عبارت است از کوچکترین عدد صحیحی که شرط کاهشی زیر را برآورده می کند

$$\Phi_{k+1,j} \leq \Phi_k - t_j \beta_k \quad (۶.۷۲)$$

که در آن  $\Phi_{k+1,j}$  تابع کاهشی معادله (۶.۶۵) است که در اندازه گام آزمایشی  $t_j$  و نقطه طراحی مربوط  $\mathbf{x}^{(k+1,j)}$  محاسبه می شود و عبارت است از

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1,j} &= \Phi(\mathbf{x}^{(k+1,j)}) \\ &= f_{k+1,j} + RV_{k+1,j} \end{aligned} \quad (۶.۷۳)$$

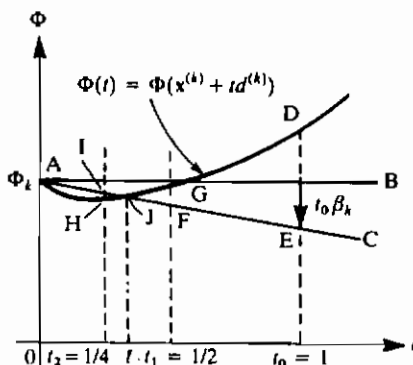
که در آن  $V_{k+1,j}$  و  $f_{k+1,j} = f(\mathbf{x}^{(k+1,j)})$  عبارت است از بیشترین نقض قید در نقطه طراحی آزمایشی که با استفاده از معادله (۶.۶۹) محاسبه می شود. دقت کنید که در محاسبه  $\Phi_{k+1,j}$  و  $\Phi_k$  از معادله (۶.۷۲)، مقدار پارامتر جریمه  $R$  استفاده می شود. ثابت  $\beta_k$  در معادله (۶.۷۲) با

استفاده از جهت جست و جوی  $d^{(k)}$  به دست می آید

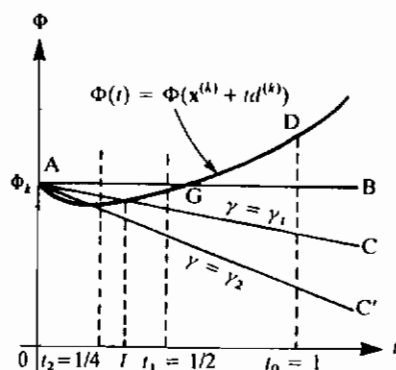
$$\beta_k = \gamma \|d^{(k)}\|^2 \quad (۶.۷۴)$$

که در آن  $\gamma$  یک عدد ثابت مشخص بین ۰ و ۱ است. بعداً اثر  $\gamma$  را روی فرآیند تعیین اندازه گام بررسی خواهیم کرد. دقت کنید که در  $k$  امین چرخه،  $\beta_k$  تعریف شده در معادله (۶.۷۴) عددی ثابت است. در حقیقت  $t$  تنها متغیر طرف راست نامعادله (۶.۷۲) است. اما وقتی  $t$  تغییر می کند، نقطه طراحی نیز تغییر می کند و مقادیر توابع هزینه و قید را متأثر می کند. بدین ترتیب مقدار تابع کاهشی طرف چپ نامساوی (۶.۷۲) تغییر می یابد.

نامساوی (۶.۷۲) شرط کاهشی نامیده می شود. این شرط مهمی است و باید در هر چرخه برآورده شود تا یک الگوریتم همگرا به دست آید. برای درک شرط (۶.۷۲)، شکل ۶.۱۴ را در نظر بگیرید که در آن کمیتهای مختلف به عنوان توابعی از  $t$  رسم شده اند. به عنوان مثال، خط افقی A-B نمایانگر  $\Phi_k$  است که مقدار تابع کاهشی در نقطه طراحی فعلی  $x^{(k)}$  است؛ خط A-C نمایانگر تابع  $t\beta_k$  است که مرکزش به نقطه A منتقل شده؛ و منحنی AHGD نمایانگر تابع کاهشی  $\Phi$  است که به عنوان یک تابع از پارامتر  $t$  و به مرکز نقطه A رسم شده است. خط A-C و منحنی AHGD در نقطه J هم را قطع می کنند که مربوط به نقطه  $t = \bar{t}$  روی محور  $t$  است. برای برآورده شدن شرط کاهشی نامعادله (۶.۷۲) منحنی AHGD باید زیر خط A-C باشد. این فقط قسمت AHJ از منحنی AHGD را می دهد. پس از روی شکل در می یابیم که اندازه گام بزرگتر از  $\bar{t}$  شرط کاهشی نامعادله (۶.۷۲) را برآورده نمی کند. برای



شکل ۶.۱۴ نمایش هندسی شرط کاهشی برای محاسبه اندازه گام در الگوریتم تندترین کاهش



شکل ۶.۱۵ اثر پارامتر  $\gamma$  روی به دست آوردن اندازه گام

نشان دادن این موضوع، نقاط D و E روی خط  $t_0 = 1$  را در نظر بگیرید. نقطه D نمایانگر  $\Phi_k + 1.0 = \Phi(x^{(k+1.0)})$  و نقطه E نمایانگر  $(\Phi_k - t_0\beta_k)$  است. پس نقطه D نمایانگر طرف چپ و نقطه E نمایانگر طرف راست نامعادله (۶.۷۲) است. چون نقطه D بالاتر از نقطه E است، نامعادله (۶.۷۲) نقض شده است. به طور مشابه، نقاط G و F روی خط  $t_1 = \frac{1}{2}$  شرط کاهشی را نقض می کنند. نقاط H و I روی خط  $t_2 = \frac{1}{4}$  شرط کاهشی را برآورده می کنند، پس اندازه گام  $\alpha_k$  در  $k$  امین چرخه برای مثال شکل ۶.۱۴،  $\frac{1}{4}$  است.

درک اثر  $\gamma$  روی به دست آوردن اندازه گام مهم است.  $\gamma$  به عنوان عددی مثبت بین ۰، ۱ انتخاب می شود.  $\gamma$  های بزرگتر برای ثابت  $\beta_k$  در معادله (۶.۷۴) مقدار بزرگتری می دهد. از آن جا که  $\beta_k$  شیب خط  $t\beta_k$  است، در شکل ۶.۱۵ خط A-C را با  $\gamma = \gamma_1$  و A-C' را با  $\gamma = \gamma_2$  مشخص می کنیم. پس، از شکل می بینیم که  $\gamma$  بزرگتر به منظور برآورده کردن شرط کاهشی نامعادله (۶.۷۲) تمایل به کاهش اندازه گام دارد.

برای بررسی شرط کاهشی در محاسبات واقعی، بهتر است نامعادله (۶.۷۲) به شکل زیر نوشته شود

$$\Phi_{k+1,j} + t_j\beta_k \leq \Phi_k; \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (6.75)$$

ما این مراحل را برای محاسبه اندازه گام در مسأله نمونه زیر تشریح می کنیم.

مثال ۶.۱۰ محاسبات اندازه گام در روش تندترین کاهش مقید. مسأله طراحی مهندسی به شکل

زیر رابطه سازی شده است. تابع

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 320x_1x_2$$

را مشروط به قیود

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{60x_2} - 1 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = 1 - \frac{x_1(x_1 - x_2)}{3600} \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = -x_2 \leq 0$$

مینیم کنید. در نقطه طراحی  $\mathbf{x}^{(0)} = (40, 0.5)$ ، جهت جست و جو عبارت است از  $\mathbf{d}^{(0)} = (25.6, 0.45)$ . بردار ضرایب لاگرانژ برای قیود عبارت است از  $\mathbf{u} = (4880, 19400, 0, 0)$ .  $\gamma = 0.5$  فرض کرده و اندازه گام را برای تغییر طراحی با استفاده از روش جست و جوی خطی غیردقیق محاسبه کنید.

حل. چون ضرایب لاگرانژ برای قیود داده شده است، مقدار اولیه پارامتر جریمه به شکل زیر محاسبه می شود

$$R = \sum_{i=1}^4 u_i \\ = 4880 + 19\,400 = 24\,280$$

به این نکته مهم توجه کنید که برای  $R$  در دو طرف شرط کاهشی نامعادله (۶.۷۲) یا (۶.۷۵) باید مقداری مشابه استفاده شود. ثابت  $\beta_0$  معادله (۶.۷۴) به شکل زیر محاسبه می شود

$$\beta_0 = 0.5(25.6^2 + 0.45^2) \\ = 328$$

محاسبه  $\Phi_0$ : توابع هزینه و قیود در نقطه شروع  $\mathbf{x}^{(0)} = (40, 0.5)$  به شکل زیر محاسبه می شوند

$$f_0 = f(40, 0.5) = 40^2 + 320(40)(0.5) = 8000$$

$$g_1(40, 0.5) = \frac{40}{60(0.5)} - 1 = 0.333 \text{ (نقض شده)}$$

$$g_2(40, 0.5) = 1 - \frac{40(40 - 0.5)}{3600} = 0.5611 \text{ (نقض شده)}$$

روشهای عددی برای طراحی بهین متبذ

$$g_3(40, 0.5) = -40 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

$$g_4(40, 0.5) = -0.5 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

بیشترین نقض قید با استفاده از معادله (۶.۶۹) عبارت است از

$$\begin{aligned} V_0 &= \max \{0; 0.333, 0.5611, -40, -0.5\} \\ &= 0.5611 \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (۶.۶۵)، تابع کاهشی فعلی محاسبه می شود

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= f_0 + RV_0 \\ &= 8000 + (24\ 280)(0.5611) \\ &= 21\ 624 \end{aligned}$$

اندازه گام آزمایشی  $t_1 = 1$ . فرض کنیم در معادله (۶.۷۰)،  $0 = 0$  زی باشد، بنابراین اندازه گام آزمایشی عبارت است از  $t_1 = 1$ . نقطه طراحی آزمایشی از معادله (۶.۷۱) به شکل زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned} x_1^{(1,0)} &= x_1^{(0)} + t_0 d_1^{(0)} \\ &= 40 + (1.0)(25.6) = 65.6 \\ x_2^{(1,0)} &= x_2^{(0)} + t_0 d_2^{(0)} \\ &= 0.5 + (1.0)(0.45) = 0.95 \end{aligned}$$

توابع هزینه و قیود در نقطه طراحی آزمایشی به شکل زیر محاسبه می شوند

$$\begin{aligned} f_{1,0} &= f(65.6, 0.95) \\ &= (65.6)^2 + 320(65.6)(0.95) = 24\ 246 \\ g_1(65.6, 0.95) &= \frac{65.6}{60(0.95)} - 1 \\ &= 0.151 > 0 \text{ (نقض شده)} \\ g_2(65.6, 0.95) &= 1 - \frac{65.6(65.6 - 0.95)}{3600} \\ &= -0.1781 < 0 \text{ (غیرفعال)} \\ g_3(65.6, 0.95) &= -65.6 < 0 \text{ (غیرفعال)} \\ g_4(65.6, 0.95) &= -0.95 < 0 \text{ (غیرفعال)} \end{aligned}$$

بیشترین نقض قید با استفاده از معادله (۶.۶۹) عبارت است از

$$V_{1,0} = \max \{0; 0.151, -0.1781, -65.6, -0.95\}$$

$$= 0.151$$

تابع کاهشی در نقطه آزمایش با استفاده از معادله (۶.۷۳) محاسبه می شود

$$\Phi_{1,0} = f_{1,0} + RV_{1,0}$$

$$= 24\,246 + 24\,280(0.151) = 27\,912$$

برای شرط کاهشی معادله (۶.۷۵)، داریم

$$\text{LHS} = 27\,912 + 328 = 28\,240$$

$$\text{RHS} = 21\,624$$

چون  $\text{LHS} > \text{RHS}$  (طرف چپ از طرف راست بزرگتر است)، نامعادله (۶.۷۵) نقض شده است.

اندازه گام آزمایشی  $t_1 = 0.5$ . فرض کنیم در معادله (۶.۷۰)،  $\lambda = 1$  باشد، بنابراین اندازه گام آزمایشی  $t_1 = 0.5$  است. نقطه طراحی آزمایشی جدید عبارت است از

$$x_1^{(1,1)} = x_1^{(0)} + t_1 d_1^{(0)}$$

$$= 40 + 0.5(25.6) = 52.8$$

$$x_2^{(1,1)} = x_2^{(0)} + t_1 d_2^{(0)}$$

$$= 0.5 + 0.5(0.45) = 0.725$$

توابع هزینه و قیود در نقطه طراحی آزمایشی به شکل زیر محاسبه می شوند

$$f_{1,1} = f(52.8, 0.725)$$

$$= (52.8)^2 + 320(52.8)(0.725) = 15\,037$$

$$g_1(52.8, 0.725) = \frac{52.8}{60(0.725)} - 1$$

$$= 0.2138 > 0 \quad (\text{نقض شده})$$

$$g_2(52.8, 0.725) = 1 - \frac{52.8(52.8 - 0.725)}{3600}$$

$$= 0.2362 > 0 \quad (\text{نقض شده})$$

$$g_3(52.8, 0.725) = -52.8 < 0 \quad (\text{غیرفعال})$$

$$g_4(52.8, 0.725) = -0.725 < 0 \quad (\text{غیرفعال})$$

بیشترین نقض قید با استفاده از معادله (۶.۶۹) عبارت است از

$$V_{1,i} = \max \{0; 0.2138, 0.2362, -52.8, -0.725\} \\ = 0.2362$$

تابع کاهش در نقطه طراحی آزمایشی با استفاده از معادله (۶.۶۴) محاسبه می شود

$$\Phi_{1,i} = f_{1,i} + RV_{1,i} \\ = 15\,037 + 24\,280(0.2362) = 20\,772$$

با محاسبه تابع کاهش از معادله (۶.۷۵) داریم

$$\text{LHS} = 20\,772 + (0.5)(328) = 20\,936$$

$$\text{RHS} = 21\,624$$

چون  $\text{LHS} < \text{RHS}$ ، نامعادله (۶.۷۵) برآورده شده است. بنابراین اندازه گام ۰.۵ قابل قبول است.

### ۶.۶.۳ الگوریتم سی اس دی (CSD)

اکنون می توانیم الگوریتم تندترین کاهش مقید (CSD) را به شکل گام به گام بیان کنیم. ثابت شده است [شنیجی و دانیلین<sup>۱</sup>، ۱۹۷۸] که نقطه جواب رشته  $\{x^{(k)}\}$  الگوریتم زیر یک نقطه کان-تاکر برای مسأله بهینه سازی مقید است که در معادله های (۶.۱) تا (۶.۴) تعریف شد. برای یک نقطه طراحی قابل قبول معیار همگرایی برای الگوریتم عبارت است از  $\|d\| \leq \varepsilon$ . در این جا  $\varepsilon$  یک عدد مثبت کوچک است و  $d$  بردار جهت است که جواب زیرمسأله QP می باشد. روش تندترین کاهش مقید اکنون به شکل یک الگوریتم محاسباتی خلاصه می شود. گام ۱.  $k = 0$  قرار دهید. مقادیر اولیه متغیرهای طراحی  $x^{(0)}$  را حدس بزنید. یک مقدار مناسب اولیه برای پارامتر جریمه  $R_0$ ، یک ثابت  $\gamma$  بین ۰ و ۱ ( $0 < \gamma < 1$ ) و دو عدد کوچک  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  که به ترتیب نقض قید مجاز و پارامتر همگرایی اند را انتخاب کنید.  $R_0 = 1$  و  $\gamma = 0.25$  انتخابی مناسب است.

گام ۲. در  $x^{(k)}$  توابع هزینه و قیود و گرادیانهای آنها را محاسبه کنید. بیشترین نقض قید  $V_k$  را همچنان که در معادله (۶.۶۹) تعریف شد، محاسبه کنید.

گام ۳. با استفاده از مقادیر تابع هزینه و قیود و گرادیان آنها زیرمسأله QP را که در معادله های (۶.۳۸) تا (۶.۴۰) داده شده تعریف کنید. مسأله QP را برای به دست آوردن

جهت جست و جوی  $d^{(k)}$  و ضرایب لاگرانژ  $v^{(k)}$  و  $u^{(k)}$  حل کنید.

گام ۴. معیار همگرایی

$$\|d^{(k)}\| \leq \varepsilon_2$$

و بیشترین نقض قید  $\varepsilon_1 \leq V_k$  را بررسی کنید؛ اگر معیار بهینگی برآورده شده محاسبات را متوقف کنید. در غیر این صورت ادامه دهید.

گام ۵. برای بررسی شرط لازم معادله (۶.۶۷) در مورد پارامتر جریمه  $R$ ، مجموع  $r_k$  حاصل از ضرایب لاگرانژ را که در معادله (۶.۶۸) تعریف شد، محاسبه کنید.  $R = \max \{R_k, r_k\}$  قرار دهید. این همیشه شرط لازم معادله (۶.۶۷) را برآورده می کند.

گام ۶.  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$  قرار دهید که در آن  $\alpha = \alpha_k$  یک اندازه گام مناسب است. مانند مسائل نامقید، اندازه گام می تواند با مینیمم ساختن تابع کاهشی معادله (۶.۶۴) در امتداد جهت جست و جوی  $d^{(k)}$  به دست آید. هر کدام از روشهای بحث شده در بخش ۵.۳، مثل جست و جوی بخش طلایی، می تواند برای به دست آوردن اندازه گام به کار رود. اما معمولاً این روشها کارا نبوده و بندرت در کاربردهای عملی استفاده می شوند. اغلب، فقط یک جست و جوی خطی غیر دقیق که در بخش ۶.۶.۲ مطرح شد استفاده می شود.

گام ۷. مقدار پارامتر جریمه فعلی را ذخیره کنید  $R_{k+1} = R$ . شمارنده را بهنگام کنید یعنی  $k = k + 1$ ، و به گام ۲ بروید.

الگوریتم CSD همراه روش به دست آوردن اندازه گام ذکر شده در صورتی همگراست که مشتق دوم تمامی توابع قطعه به قطعه پیوسته (این را شرط لیپسچیتز<sup>۱</sup> می گویند) و مجموعه نقاط طراحی  $x^{(k)}$  کراندار باشند به شکل زیر

$$\Phi(x^{(k)}) \leq \Phi(x^{(0)}); \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

مثال ۶.۱۱ استفاده از الگوریتم تندترین کاهش مقید. مسأله مثال ۶.۳ را در نظر بگیرید. تابع

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

را مشروط به قیود

$$g_1(x) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \leq 0$$

$$g_2(x) = -x_1 \leq 0$$

$$g_3(x) = -x_2 \leq 0$$

مینیمم کنید. فرض کنید  $x^{(0)} = (1, 1)$  طراحی اولیه باشد. در روش تندترین کاهش مقید  $R_0 = 10$ ،  $\gamma = 0.5$  و  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$  را استفاده کنید. تنها دو چرخه را انجام دهید.

حل. توابع مسأله در شکل ۶.۴ رسم شده اند. جواب بهین مسأله عبارت است از  $f = -3$ ،  $u = (3, 0, 0)$ ،  $x = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

چرخه ۱ ( $k = 0$ )

گام ۱. داده های اولیه به شکل زیر مشخص شده اند

$$x^{(0)} = (1, 1); R_0 = 10; \gamma = 0.5 (0 < \gamma < 1); \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$$

گام ۲. برای تشکیل زیرمسأله QP، مقادیر توابع هزینه و قیود و گرادیانهای آنها باید در نقطه طراحی  $x^{(0)}$  محاسبه شوند:

$$f(1, 1) = -1$$

$$g_1(1, 1) = -\frac{2}{3} < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

$$g_2(1, 1) = -1 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

$$g_3(1, 1) = -1 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

$$\nabla f(1, 1) = (-1, -1)$$

$$\nabla g_1(1, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\nabla g_2(1, 1) = (-1, 0)$$

$$\nabla g_3(1, 1) = (0, -1)$$

دقت کنید که تمامی قیود در نقطه شروع غیرفعالند، بنابراین از معادله  $(۶.۶۹)$ ،  $V_0 = 0$  محاسبه می شود، یعنی  $\{0; -\frac{2}{3}, -1, -1\}$ ،  $V_0 = \max$  قیود خطی شده در شکل ۶.۵ رسم شده و مجموعه قید خطی در شکل ۶.۹ ترسیم شده است.

گام ۳. با استفاده از مقادیر قبلی، زیرمسأله QP معادله های  $(۶.۳۸)$  تا  $(۶.۴۰)$  در  $(1, 1)$  عبارت است از: تابع

$$\bar{f} = (-d_1 - d_2) + 0.5(d_1^2 + d_2^2)$$

را مشروط به قیود

$$\frac{1}{3}d_1 + \frac{1}{3}d_2 \leq \frac{2}{3}$$

$$-d_1 \leq 1; -d_2 \leq 1$$

مینیمم کنید.

دقت کنید که زیرمسئله QP فوق محدب قطعی (اکید) است و بنابراین یک جواب یگانه دارد. عموماً باید از روشهای عددی برای حل زیرمسئله استفاده شود. اما چون مسئله فعلی ساده است، می تواند با نوشتن شرایط لازم کان-تاکر به شکل زیر حل شود:

$$L = (-d_1 - d_2) + 0.5(d_1^2 + d_2^2) + u_1[\frac{1}{3}(d_1 + d_2 - 2) + s_1^2] + u_2(-d_1 - 1 + s_2^2) + u_3(-d_2 - 1 + s_3^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_1} = -1 + d_1 + \frac{1}{3}u_1 - u_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_2} = -1 + d_2 + \frac{1}{3}u_1 - u_3 = 0$$

$$\frac{1}{3}(d_1 + d_2 - 2) + s_1^2 = 0$$

$$(-d_1 - 1) + s_2^2 = 0; \quad (-d_2 - 1) + s_3^2 = 0$$

$$u_i s_i = 0; \quad u_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3$$

در حالی که  $u_1$ ،  $u_2$  و  $u_3$  ضرایب لاگرانژ سه قید و  $s_1^2$ ،  $s_2^2$  و  $s_3^2$  متغیرهای کمبود مربوطه هستند. با حل شرایط K-T قبلی بردار جهت  $\mathbf{d}^{(0)} = (1, 1)$  و  $\bar{f} = -1$  و  $\mathbf{u}^{(0)} = (0, 0, 0)$  به دست می آید. این جواب با جواب ترسیمی شکل ۶.۱۶ مطابقت داد. ناحیه قابل قبول زیرمسئله، مثلث ABC، و جواب بهین در نقطه D است.

گام ۴. چون  $\|\mathbf{d}^{(0)}\| = \sqrt{2} > \varepsilon_2$ ، معیار همگرایی برآورده نشده است.

گام ۵.  $r_0 = \sum_{i=1}^m u_i^{(0)} = 0$  را به شکلی که در معادله (۶.۶۸) تعریف شده محاسبه کنید. برای برآوردن شرایط لازم نامعادله (۶.۶۷)،  $R = 10$  می بایست در تمامی مراحل چرخه اول استفاده شود تا شرط کاهشی معادله (۶.۷۲) یا (۶.۷۵) برآورده شود.

گام ۶. برای به دست آوردن اندازه گام، جست و جوی خطی غیردقیق را به کار می بریم که در بخش ۶.۶.۲ تشریح شد. مقدار فعلی تابع کاهشی  $\Phi_{11}$  معادله (۶.۶۵) و ثابت  $\beta_{11}$  معادله (۶.۷۴) به شکل زیر محاسبه می شوند

روشهای عددی برای طراحی بهین مقید

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= f_0 + RV_0 \\ &= -1 + (10)(0) = -1 \\ \beta_0 &= \gamma \|\mathbf{d}^{(0)}\|^2 \\ &= 0.5(1 + 1) = 1\end{aligned}$$

با فرض اندازه گام آزمایشی  $t_1 = 1$  مقدار جدید تابع کاهشی را محاسبه کرده و شرط کاهشی معادله (۶.۷۲) را بررسی کنید :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1,0)} &= \mathbf{x}^{(0)} + t_0 \mathbf{d}^{(0)} \\ &= (2, 2)\end{aligned}$$

در نقطه طراحی آزمایشی، توابع هزینه و قیود را محاسبه کنید، آن گاه بیشترین نقض قید را برای محاسبه تابع کاهشی به دست آورید :

$$\begin{aligned}f_{1,0} &= f(2, 2) = -4 \\ V_{1,0} &= V(2, 2) \\ &= \max \{0; \frac{1}{3}, -2, -2\} = \frac{1}{3} \\ \Phi_{1,0} &= f_{1,0} + RV_{1,0} \\ &= -4 + (10)\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \\ \Phi_0 - t_0 \beta_0 &= -1 - 1 = -2\end{aligned}$$

چون  $\Phi_{1,0} > \Phi_0 - t_0 \beta_0$  شرط کاهشی نامعادله (۶.۷۲) برآورده نمی شود. حال فرض کنیم  $z = 1$  (یعنی اندازه گام را نصف کنید  $t_1 = 0.5$ ).

با در نظر گرفتن اندازه گام آزمایشی  $t_1 = 0.5$  مقدار جدید تابع کاهشی را محاسبه کرده و شرط کاهشی معادله (۶.۷۲) را بررسی کنید :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1,1)} &= \mathbf{x}^{(0)} + t_1 \mathbf{d}^{(0)} \\ &= (1.5, 1.5)\end{aligned}$$

در نقطه طراحی آزمایشی، توابع هزینه و قیود را محاسبه کنید، آن گاه بیشترین نقض قید را برای محاسبه تابع کاهشی به دست آورید :

$$\begin{aligned}f_{1,1} &= f(1.5, 1.5) = -2.25 \\ V_{1,1} &= V(1.5, 1.5) \\ &= \max \{0; -\frac{1}{4}, -1.5, -1.5\} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{1,1} &= f_{1,1} + RV_{1,1} \\ &= -2.25 + (10)0 = -2.25\end{aligned}$$

و

$$\Phi_0 - t_1\beta_0 = -1 - 0.5 = -1.5$$

اکنون شرط کاهشی نامعادله (۶.۷۲) برآورده شده است (یعنی  $\Phi_{1,1} < \Phi_0 - t_1\beta_0$ ) پس

$$\alpha_0 = 0.5 \quad \text{و} \quad \mathbf{x}^{(1)} = (1.5, 1.5)$$

گام ۷.  $R_{10,1} = R_0 = 10$ ،  $k = 1$  قرار داده و به گام ۲ بروید.

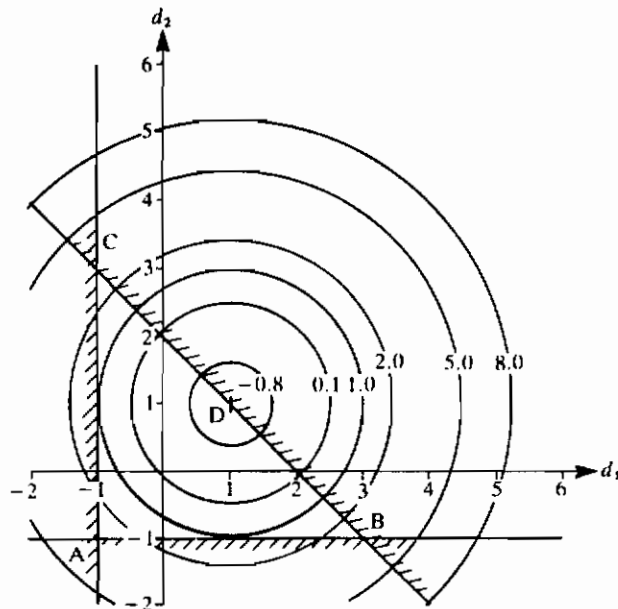
چرخه ۲ ( $k = 1$ ). برای چرخه دوم، گامهای ۲ تا ۷ الگوریتم تکرار می شوند

به شکل زیر :

گام ۳. زیرمسئله QP معادله های (۶.۳۸) تا (۶.۴۰) در  $\mathbf{x}^{(1)} = (1.5, 1.5)$

به شکل زیر تعریف می شود :

$$(-1.5d_1 - 1.5d_2) + 0.5(d_1^2 + d_2^2)$$



شکل ۶.۱۶ حل زیرمسئله برنامه ریزی درجه دو مثال ۶.۱۱ در نقطه (۱, ۱).

را مشروط به قیود

$$0.5d_1 + 0.5d_2 \leq 0.25$$

$$-d_1 \leq 1.5, -d_2 \leq 1.5$$

مینیمم کنید. چون تمامی قیود غیرفعالند، بیشترین نقض از معادله (۶.۶۹)

عبارت است از  $V_1 = 0$ . تابع هزینه جدید عبارت است از  $f_1 = -2.25$ . جواب زیرمسئله

QP بالا عبارت است از  $\mathbf{d}^{(1)} = (0.25, 0.25)$  و  $\mathbf{u}^{(1)} = (2.5, 0, 0)$ .

گام ۴. چون  $\varepsilon_2 > 0.3535 = \|\mathbf{d}^{(1)}\|$ ، معیار همگرایی برآورده نمی شود.

گام ۵. فرض کنید  $r_1 = \sum_{i=1}^m u_i^{(1)} = 2.5$ . بنابراین،

$$R = \max \{R_1, r_1\} = \max \{10, 2.5\} = 10.$$

گام ۶. برای جست و جوی خطی، در نامعادله (۶.۷۲)،  $z = 0$  بگیرید (یعنی

$$: t_0 = 1$$

$$\Phi_1 = f_1 + RV_1$$

$$= -2.25 + 10(0) = -2.25$$

$$\beta_1 = \gamma \|\mathbf{d}^{(1)}\|^2$$

$$= 0.5(0.125) = 0.0625$$

فرض کنید اندازه گام آزمایشی  $t_0 = 1$  باشد. مقدار جدید تابع کاهشی را

محاسبه کرده و شرط کاهشی معادله (۶.۷۲) را بررسی کنید:

$$\mathbf{x}^{(2,0)} \equiv \mathbf{x}^{(1)} + t_0 \mathbf{d}^{(1)}$$

$$= (1.75, 1.75)$$

$$f_{2,0} \equiv f(1.75, 1.75)$$

$$= -3.0625$$

$$V_{2,0} \equiv V(1.75, 1.75)$$

$$= \max \{0; 0.0208, -1.75, -1.75\} = 0.0208$$

$$\Phi_{2,0} = f_{2,0} + RV_{2,0}$$

$$= -3.0625 + (10)0.0208 = -2.8541$$

و

$$\Phi_1 - t_0 \beta_1 = -2.25 - (1)(0.0625)$$

$$= -2.3125$$

چون شرط کاهشی نامعادله (۶.۷۲) برآورده شده،

$$\alpha_1 = 1.0 \text{ and } \mathbf{x}^{(2)} = (1.75, 1.75)$$

گام ۷.  $R_2 = R_1 = 10$ ،  $k = 2$  و به گام ۲ بروید.

بیشترین نقض قید در طراحی فعلی  $\mathbf{x}^{(2)} = (1.75, 1.75)$  عبارت است از 0.0208، که از نقض قید مجاز بیشتر است. نیاز به چرخه‌های بیشتری داریم تا به ناحیه قابل قبول برگردیم. توجه کنید نقطه بهین برای این مسأله عبارت است از  $(1.732, 1.732)$ . بنابراین، نقطه فعلی به نقطه بهین با  $f_2 = -3.0625$  بسیار نزدیک است.

**مثال ۶.۱۲ اثر  $\gamma$  روی عملکرد الگوریتم CSD.** برای مسأله طراحی بهین مثال ۶.۱۱ اثر تغییرات پارامتر  $\gamma$  را روی عملکرد الگوریتم CSD مطالعه کنید.

**حل.** در مثال ۶.۱۱،  $\gamma = 0.5$  استفاده شد. ببینیم اگر یک مقدار بسیار کوچک (مثلاً 0.01) برای  $\gamma$  استفاده شود چه اتفاقی می‌افتد. تمامی محاسبات تا گام ۶ چرخه ۱ بدون تغییر می‌مانند. در گام ۶، مقدار  $\beta_0$  به  $\beta_0 = \gamma \|\mathbf{d}^{(0)}\|^2 = 0.01(2) = 0.02$  تغییر می‌کند. بنابراین،

$$\begin{aligned}\Phi_0 - t_0 \beta_0 &= -1 - 1(0.02) \\ &= -1.02\end{aligned}$$

که کوچکتر از  $\Phi_{1,0}$  است؛ پس شرط کاهشی نامعادله (۶.۷۲) نقض شده است. بنابراین، اندازه گام در چرخه ۱، مانند گذشته 0.5 خواهد بود.

محاسبات در چرخه ۲ تا گام ۶ بدون تغییر می‌مانند در حالی که

$$\beta_1 = \gamma \|\mathbf{d}^{(1)}\|^2 = 0.02(0.125) = 0.0025$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\Phi_1 - t_0 \beta_1 &= -2.25 - (1)(0.0025) \\ &= -2.2525\end{aligned}$$

شرط کاهشی نامساوی (۶.۷۲) برآورده شده است. پس مقدار کوچک  $\gamma$  اثری روی دو چرخه اول ندارد.

ببینیم اگر مقداری بزرگتر (مثلاً 0.9) برای  $\gamma$  انتخاب شود، چه اتفاقی می‌افتد. می‌توان نشان داد که در چرخه ۱، تفاوتی در محاسبات وجود ندارد. در گام ۲، اندازه گام به 0.5 کاهش پیدا می‌کند. بنابراین، نقطه طراحی جدید عبارت است از

روشهای عددی برای طراحی بهین مقید

$x^{(2)} = (1.625, 1.625)$  در این نقطه،  $f_2 = -2.641$ ،  $g_1 = -0.1198$  و  $V_1 = 0$  پس  $\gamma$  بزرگتر به اندازه گام کوچکتر می انجامد و نقطه طراحی جدید قطعاً قابل قبول باقی می ماند.

**مثال ۶.۱۳** اثر پارامتر جریمه  $R$  روی الگوریتم CSD. برای مسأله طراحی بهین مثال ۶.۱۱، اثر تغییرات پارامتر  $R$  را روی عملکرد الگوریتم CSD مطالعه کنید.

حلی. در مثال ۶.۱۱،  $R$  اولیه ۱۰ انتخاب شده است. ببینیم اگر  $R$  برابر ۱.۰ انتخاب شود، چه اتفاقی می افتد. در محاسبات تا گام ۵ در چرخه ۱ تغییری پیدا نمی شود. در گام ۶،

$$\begin{aligned}\Phi_{1,0} &= -4 + (1)(3) \\ &= -\frac{11}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_0 - t_0\beta_0 &= -1 + (1)(0) \\ &= -1\end{aligned}$$

بنابراین،  $\alpha_0 = 1$  شرط کاهشی نامساوی (۶.۷۲) را برآورده می کند و طراحی جدید عبارت است از  $x^{(1)} = (2, 2)$ . این جواب با آنچه در مثال ۶.۱۱ به دست آمد متفاوت است.

## چرخه ۲

**گام ۳.** زیرمسأله QP معادله های (۶.۳۸) تا (۶.۴۱) در  $x^{(1)} = (2, 2)$  به شکل زیر تعریف می شود: عبارت

$$(-2d_1 - 2d_2) + 0.5(d_1^2 + d_2^2)$$

را مشروط به قیود

$$\frac{2}{3}d_1 + \frac{2}{3}d_2 \leq -\frac{1}{3}$$

$$-d_1 \leq 2, \quad -d_2 \leq 2$$

مینیمم کنید.

در نقطه  $(2, 2)$ ،  $V_1 = \frac{1}{3}$  و  $f_1 = -4$ . جواب زیرمسأله QP عبارت است از  $u^{(1)} = (\frac{27}{8}, 0, 0)$  و  $d^{(1)} = (-0.25, 0.25)$

**گام ۴.** چون  $\varepsilon_2 > 0.3535 = \|d^{(1)}\|$ ، معیار همگرایی برآورده نمی شود.

گام ۵. فرض کنید  $r_1 = \sum_{i=1}^3 u_i^{(1)} = \frac{27}{8}$ ، بنابراین،

$$R = \max \{R_1, r_1\} = \max \{1, \frac{27}{8}\} = \frac{27}{8}$$

گام ۶. برای جست و جوی خطی، در نامساوی (۶.۷۲)،  $0 = z$  قرار می دهیم.

یعنی  $t_0 = 1$ :

$$\Phi_1 = f_1 + RV_1 = -4 + (\frac{27}{8})(\frac{1}{2}) = -2.875$$

$$\begin{aligned}\Phi_{2,0} &= f_{2,0} + RV_{2,0} \\ &= -3.0625 + (\frac{27}{8})(0.0208) = -2.9923\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \gamma \|d^{(1)}\|^2 \\ &= 0.5(0.125) = 0.0625\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1 - t_0\beta_1 &= -2.875 - (1)(0.0625) \\ &= -2.9375\end{aligned}$$

چون شرط کاهشی برآورده شده است،  $\alpha_1 = 1.0$  و  $x^{(2)} = (1.75, 1.75)$ .

گام ۷.  $R_2 = R_1 = \frac{27}{8}$ ،  $k = 2$  و به گام ۲ می رویم.

طراحی در پایان چرخه دوم مانند مثال ۶.۱۱ است این چیزی جز یک اتفاق نیست. می بینیم که یک  $R$  کوچکتر اندازه گام بزرگتری در چرخه اول داد. در حالت کلی این می تواند تاریخچه فرآیند چرخه را تغییر دهد.

## ۶.۶.۲ نگرشی بر الگوریتم CSD

الگوریتم شنیچنی که قبلاً ارائه شد می تواند به عنوان یک الگوریتم مقید مشابه روش تندترین کاهش برای مسائل مقید در نظر گرفته شود. نکات زیر برای الگوریتم قابل توجه است:

۱. الگوریتم CSD یک روش مرتبه - اول برای بهینه سازی مقید است. الگوریتم با شروع از یک نقطه اختیاری به نقطه مینیم محلی همگرا می شود. الگوریتم می تواند قیود مساوی و نامساوی را در نظر بگیرد.

۲. بنابر نظر شنیچنی، راهبرد قید پتانسیل برای حفظ سادگی در الگوریتم معرفی نشده است. ولی این راهبرد می تواند بسادگی اضافه گردد. الگوریتم دارای راهبرد قید پتانسیل برای مسائل طراحی مهندسی از کارایی بیشتری برخوردارند [بلگاندا و آورا، ۱۹۸۴].

۳. برای یافتن اندازه گام به جای برآوردن شرط کاهشی، می شود با مینیمم ساختن تابع کاهشی از جست و جوی بخش طلایی استفاده کرد. با این همه، توجه کنید که برای الگوریتمهای عددی بهینه سازی مقید روش بخش طلایی به خاطر ناکارا بودن توصیه نمی شود.
۴. در زیرمسئله QP، نرخ همگرایی الگوریتم CSD می تواند با اضافه کردن اطلاعات مرتبه بالاتر از توابع مساله بیش از پیش بهبود یابد [لیم و آرورا، ۱۹۸۶]. این مطلب در بخش بعدی بحث خواهد شد.
۵. توجه به این نکته مهم است که اندازه گامی که با استفاده از معادله (۶.۷۰) به دست آمده نباید از یک بزرگتر باشد. با این همه، برای بسیاری از مسائل وقتی به اندازه گام اجازه بزرگتر بودن از یک داده شود، از نظر پیاده سازی و اجرای عددی، الگوریتم بسیار پویاتر و کاراتر است [لیم و آرورا، ۱۹۸۶]. این کار با تجویز مقدار منفی داشتن برای عدد صحیح  $z$  در معادله (۶.۷۰) می تواند عملی شود. بنابراین در کاربردهای عملی، توصیه می شود که استفاده از اندازه گام بزرگتر از یک مورد ارزیابی قرار گیرد.
۶. توجه به این نکته مهم است که هر چند از جنبه نظری الگوریتم CSD باید با شروع از هر نقطه ای به طرف نقطه مینیمم محلی همگرا شود، ولی از نظر عددی می تواند کاملاً متفاوت باشد. این تفاوت به خاطر عدم اطمینان در انتخاب مقادیر  $\gamma$  و  $R_{ii}$  است. برای مقدار خاصی از این مقادیر، اندازه گام ممکن است بسیار کوچک شود. اگر چنین حالتی اتفاق افتاد، انتخابهای دیگری باید مورد بررسی و آزمایش قرار گیرند.
۷. نقطه شروع نیز می تواند بر عملکرد الگوریتم تأثیر بگذارد. به عنوان مثال، زیرمسئله QP ممکن است در بعضی از نقاط جوابی نداشته باشد. این ضرورتاً به معنی غیرقابل قبول بودن مساله اصلی نیست. ممکن است مساله بسیار غیرخطی باشد و قیود خطی شده ناسازگار باشند و زیرمساله غیرقابل قبولی بدهد. این مشکل می تواند یا با حذف موقت قیود ناسازگار یا با شروع از نقطه دیگر برطرف گردد. برای بحث بیشتر پیرامون ملاحظات پیاده سازی الگوریتم، باید به مقاله سنج و آرورا [۱۹۸۸] مراجعه شود.

#### ۶.۶.۵ استفاده از راهبرد لید پتانسیل

همچنان که قبل از این بیان شد، راهبرد مجموعه پتانسیل وقتی که تنها یک زیرمجموعه

از قیود در تعریف زیرمسئله وجود داشته باشد می تواند در الگوریتم CSD در نظر گرفته شود. روش عبارت است از محاسبه تمامی قیود مسئله و تعریف یک مجموعه پتانسیل به شکل معادله (۶.۱۲). راههای دیگری هم برای تعریف مجموعه پتانسیل وجود دارد و این روشها می تواند به جهتهای متفاوت جست و جو و مسیرهای مختلف در رسیدن به نقطه بهین منتهی شود.

اثر اصلی استفاده از راهبرد مجموعه پتانسیل در یک الگوریتم روی بازدهی کلی فرآیند تکرار (چرخه) است. این مطلب بویژه برای کاربردهای بزرگ و پیچیده که ارزیابی گرادیان قیود از نظر محاسباتی هزینه بر هستند صادق است. در راهبرد مجموعه پتانسیل، تنها گرادیانهای قیود پتانسیل محاسبه می شوند و در تعریف زیرمسئله جهت جست و جوی استفاده می شوند. مسئله اصلی ممکن است صدها قید داشته باشد، ولی تنها تعدادی از آنها در مجموعه پتانسیل باشند. بنابراین در این راهبرد، نه تنها تعداد دفعات ارزیابی گرادیان کاهش می یابد که ابعاد زیرمسئله جهت جست و جو نیز به طور چشمگیری کم می شود. این کاهشها می تواند به صرفه جویی بیشتر در حجم محاسبات بینجامد. بنابراین، راهبرد مجموعه پتانسیل بسیار سودمند بوده و باید در کاربردهای عملی بهینه سازی استفاده شود.

بعد از این و در فصل (۷)، جهتهای جست و جو برای یک مسئله نمونه با تعریف زیرمسئله های QP با راهبرد مجموعه پتانسیل و بدون آن حل می شود. در آن جا نشان داده می شود که دو جهت کاملاً متفاوت بوده و هر دو به طرف جواب بهین می روند.

**مثال ۶.۱۴ طراحی یک تیر مکعب مستطیلی با مساحت سطح مقطع مینیمم.** برای مسئله طراحی تیر با مساحت سطح مقطع مینیمم بخش ۲.۸.۵، با استفاده از الگوریتم CSD و شروع از نقاط (50, 200) میلی متر و (1000, 1000) میلی متر جواب بهین را بیابید.

**حل.** مسئله در بخش ۲.۸.۵ رابطه سازی شده و به روش ترسیمی حل گردیده است. بعد از نرمال سازی قیود مسئله به شکل زیر تعریف می شود. پهنای  $b$  و ضخامت  $d$  را چنان بیابید که مساحت سطح مقطع

$$f(b, d) = bd$$

مینیمم گردد مشروط به قید تنش خمشی

$$\frac{(2.40E+07)}{bd^2} - 1.0 \leq 0$$

و قید تنش برشی

$$\frac{(1.125E+05)}{bd} - 1.0 \leq 0$$

و قید ضخامت

$$\frac{d}{2b} - 1.0 \leq 0$$

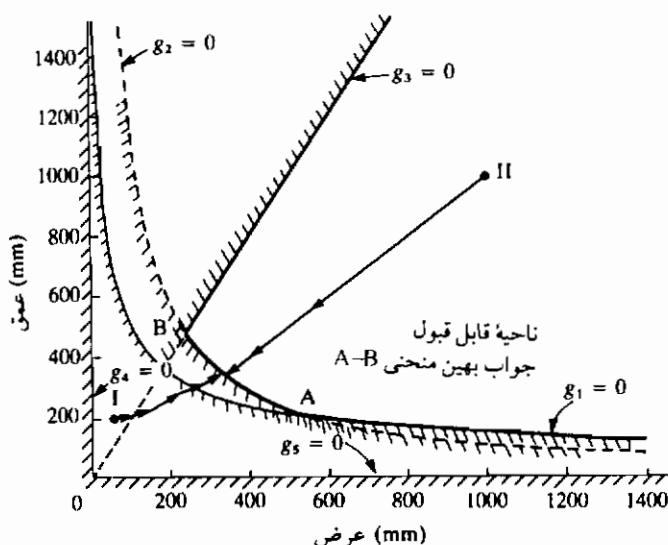
و محدوده متغیرهای طراحی

$$10 \leq b \leq 1000$$

$$10 \leq d \leq 1000$$

حل ترسیمی مسأله در شکل ۶.۱۷ آمده است. هر نقطه روی منحنی AB یک جواب بهین را می دهد.

مسأله با الگوریتم CSD که در بسته نرم افزاری IDESIGN ارائه شده [آرورا و سنج، ۱۹۸۷] و با شروع از نقاط داده شده، حل شده است. الگوریتم با استفاده از راهبرد مجموعه پتانسیل نصب شده است. داده های اولیه به برنامه داده شده و تا رسیدن به همگرایی برنامه بدون توقف اجرا گردیده است. نتایج برنامه در جدول ۶.۲ و ۶.۳ خلاصه شده است.



شکل ۶.۱۷ تاریخچه فرآیند تکرار برای مسأله طراحی تیر مکعب مستطیل.

جدول ۶.۲ حاوی تاریخچه بیشترین مقدار نقض قید، پارامتر همگرایی، تابع هزینه و متغیرهای طراحی با شروع از نقطه (50, 200) است. نقطه شروع با بیشترین مقدار نقض قید ۱۱/۰۰٪ غیرقابل قبول است. برنامه جواب بهین را در هشت چرخه می یابد. فعال بودن قیود و متغیرهای طراحی در نقطه بهین نیز در جدول ۶.۲ مشخص شده است. مسیر فرآیند چرخه روی ترسیمه مسأله با شروع از نقطه I نشان داده شده است، همچنان که در شکل ۶.۱۷ مشاهده می شود. الگوریتم از ناحیه غیرقابل قبول

جدول ۶.۲ تاریخچه فرآیند چرخه و جواب بهین برای مسأله طراحی تیر مکعب مستطیل  
با شروع از نقطه (50, 200) میلی متر

	عمق	عرض	هزینه	پارامتر همگرایی	بیشترین نقض	I
1	2.000 0E + 02	5.000 0E + 01	1.000 00E + 04	1.000 00E + 00	1.100 00E + 01	1
2	2.107 2E + 02	9.287 6E + 01	1.957 07E + 04	1.000 00E + 00	4.819 71E + 00	2
3	2.390 3E + 02	1.571 2E + 02	3.755 57E + 04	1.000 00E + 00	1.995 55E + 00	3
4	2.870 7E + 02	2.302 0E + 02	6.608 55E + 04	1.000 00E + 00	7.023 40E - 01	4
5	3.334 3E + 02	2.880 1E + 02	9.603 01E + 04	2.414 74E + 01	1.715 08E - 01	5
6	3.542 9E + 02	3.121 6E + 02	1.105 92E + 05	2.979 67E + 00	1.724 81E - 02	6
7	3.569 9E + 02	3.151 4E + 02	1.124 75E + 05	3.859 68E - 02	2.180 08E - 04	7
8	3.569 5E + 02	3.151 7E + 02	1.125 00E + 05	6.342 75E - 06	3.581 47E - 08	8

ضریب لاگرانژ	مقدار	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00	-4.023 36E - 01	خیر
1.125 00E + 05	3.581 47E - 08	آری
0.000 00E + 00	-4.337 34E - 01	خیر

ضریب لاگرانژ	حد بالا	حد پایین	طراحی	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00	1.000 00E + 03	1.000 00E + 01	3.151 75E + 02	خیر
0.000 00E + 00	1.000 00E + 03	1.000 00E + 01	3.569 45E + 02	خیر

تابع هزینه در بهین = 1.125 000E + 05

تعداد دفعات فراخوان برای ارزیابی تابع هزینه 8 = (USERMF).

تعداد دفعات فراخوان برای ارزیابی گرادیان تابع هزینه 8 = (USERMG).

تعداد دفعات فراخوان برای ارزیابی تابع قید 8 = (USERCF).

تعداد دفعات فراخوان برای گرادیان تابع قید 8 = (USERCG).

کل تعداد دفعات ارزیابی گرادیان = 14.

مرحله به مرحله تا رسیدن به جواب بهین به پیش می رود که با جواب تحلیلی به دست آمده در بخش ۳.۸.۲ مطابقت دارد.

توجه به این نکته جالب است که اگرچه شروع از نقطه اول تعداد چرخه بیشتری (۸) در مقایسه با نقطه دوم (۶) لازم دارد تا به نقطه بهین برسد، ولی تعداد فراخوان ارزیابی تابع برای نقطه اول کمتر است. تعداد کل دفعات ارزیابی گرادیان برای دو نقطه به ترتیب برابر است با ۱۴ و ۳. دقت کنید که اگر از راهبرد مجموعه پتانسیل استفاده نمی شد، تعداد کل دفعات ارزیابی گرادیان برای دو نقطه به ترتیب ۲۴ و ۱۸ بود که

جدول ۶.۳ تاریخچه فرآیند چرخه و جواب بهین برای مسأله طراحی تیر مکعب مستطیل  
با شروع از نقطه (1000, 1000) میلی متر

عمق	عرض	هزینه	پارامتر همگرایی	بیشترین نقض	I
1.0000E + 03	1.0000E + 03	1.000 00E + 06	1.000 00E + 03	0.000 00E + 00	1
5.0500E + 02	5.0500E + 02	2.550 25E + 05	5.050 00E + 02	0.000 00E + 00	2
3.8125E + 02	3.8125E + 02	1.453 52E + 05	3.812 50E + 02	0.000 00E + 00	3
3.3484E + 02	3.3484E + 02	1.121 20E + 05	5.650 12E - 01	3.386 21E - 03	4
3.3541E + 02	3.3541E + 02	1.124 99E + 05	1.434 12E - 03	8.551 55E - 06	5
3.3541E + 02	3.3441E + 02	1.125 00E + 05	9.198 03E - 09	5.484 72E - 11	6

ضریب لاگرانژ	مقدار	فعال بودن قید
0.000 00E + 00	-3.639 63E - 01	خیر
1.125 00E + 05	5.484 72E - 11	آری
0.000 00E + 00	-5.000 00E - 01	خیر

ضریب لاگرانژ	حد بالا	حد پایین	طراحی	فعال بودن متغیر طراحی
0.000 00E + 00	1.000 00E + 03	1.000 00E + 01	3.354 10E + 02	خیر
0.000 00E + 00	1.000 00E + 03	1.000 00E + 01	3.354 10E + 02	خیر

تابع هزینه در بهین =  $1.125\ 000E + 05$

تعداد دفعات فراخوان برای ارزیابی تابع هزینه 12 = (USERMG).

تعداد دفعات فراخوان برای ارزیابی گرادیان تابع هزینه 6 = (USERMF).

تعداد دفعات فراخوان برای ارزیابی تابع قید 12 = (USERCF).

تعداد دفعات فراخوان برای ارزیابی گرادیان تابع قید 3 = (USERCG).

کل تعداد دفعات ارزیابی گرادیان = 3.

بسیار زیادتر از تعداد دفعات ارزیابی گرادیان با IDESIGN است که راهبرد مجموعه پتانسیل را به کار می برد. روشن است که برای کاربردهای بزرگ، راهبرد مجموعه پتانسیل می تواند روی بازده محاسبات برای یک الگوریتم بهینه سازی تأثیری قابل توجه داشته باشد.

### ۶.۷\* روشهای شبه نیوتن مقید

تاکنون ما در تعریف تعیین جهت جست و جو در زیرمسئله فقط تقریب خطی توابع هزینه و قید را به کار برده ایم. نرخ همگرایی الگوریتمهایی که براساس چنان زیرمسئله هایی قرار دارند می تواند آهسته باشد. این امکان وجود دارد که تقریبهای درجه دو برای توابع هزینه و قیود در تعریف زیرمسئله استفاده شود. این کار به احتمال زیاد نرخ همگرایی الگوریتم را بهبود می بخشد، زیرا در تعیین جهت جست و جو اطلاعات انحنای توابع استفاده می شود. با این همه، به نظر می رسد حل زیرمسئله با تعریف تقریب درجه دو برای توابع به اندازه حل مسئله بهینه سازی غیرخطی اصلی مشکل است. بنابراین برای بحث در این راستا ضرورت و مزیتی وجود ندارد.

به نظر می رسد زیرمسئله QP، که در بخش ۶.۵.۲ تعریف شد، می تواند مقداری تغییر یابد تا اطلاعات انحنای تابع لاگرانژ را برای تابع هزینه درجه دوی معادله (۶.۳۸) تعریف کند [ویلسون، ۱۹۶۳]. اما قیود غیرخطی اصلی با قیود خطی تقریب زده می شود، مانند آنچه در معادله های (۶.۳۹) و (۶.۴۰) آمده است. بنابراین برای تعریف زیرمسئله QP جدید، نیاز به ارزیابی ماتریس هسیان تابع لاگرانژ داریم. این روش تا این جا با دو مشکل روبه روست:

۱. مشتقات مرتبه دوی همه قیود و تابع هزینه باید ارزیابی گردد، که معمولاً محاسبات بسیار طولانی و خسته کننده ای است.
۲. ضرایب لاگرانژی که برای همه قیود حدس زده می شود باید برای محاسبه هسیان تابع لاگرانژ معلوم باشند. این ضرایب معمولاً بعد از حل زیرمسئله QP معلوم می گردند.

در روشهایی که براساس فلسفه فوق قرار دارند، بزرگترین گشایش وقتی اتفاق می افتد که می بینیم هسیان تابع لاگرانژ می تواند با استفاده از اطلاعات درجه اول تقریب زده شود [هان<sup>۱</sup>، ۱۹۷۶، ۱۹۷۷؛ پاول<sup>۲</sup>، ۱۹۷۸a، ۱۹۷۸b]. این پنداره بسیار شبیه موردی است که در روشهای شبه نیوتن نامقید در بخش ۵.۷ استفاده شد. برای بهنگام کردن تقریب هسیان تابع لاگرانژ از گرادیان تابع لاگرانژ در دو نقطه و تغییرات طراحی استفاده می کنیم. ما این روشها را روشهای شبه نیوتن مقید می نامیم. در مقالات اینها را متغیرهای متریک مقید (CVM)، برنامه ریزی درجه دو دنباله ای (SQP)، یا برنامه ریزی درجه دو برگشتی (RQP) نیز می نامند. صورتهای مختلفی از روش را می توان ارائه کرد. با این همه ما یک روش را براساس فلسفه فوق تشریح می کنیم.

#### ۶.۷.۱ به دست آوردن زیرمسئله برنامه ریزی درجه دو

راههای متفاوتی برای به دست آوردن زیرمسئله برنامه ریزی درجه دو (QP) که باید در هر چرخه بهینه سازی حل شود وجود دارد. فهم جزئیات به دست آوردن زیرمسئله QP در استفاده از روش شبه نیوتن مقید ضروری نیست. بنابراین خوانندگانی که به نحوه به دست آوردن آن علاقه مند نیستند می توانند از این زیربخش بگذرند.

معمول است که زیرمسئله QP را با در نظر گرفتن مسئله بهینه سازی طراحی با قید مساوی به دست می آورند، یعنی مینیم کردن تابع  $f(x)$  مشروط به قیود  $h_i(x) = 0; i = 1 \text{ to } p$ .

$$f(x) \quad \text{مشروط به} \quad h_i(x) = 0; \quad i = 1 \text{ to } p \quad (۶.۷۶)$$

قیود نامساوی بعداً براحتی در زیرمسئله وارد می شوند. روش به دست آوردن زیرمسئله QP عبارت است از نوشتن شرایط لازم کان-تاکر برای مسئله تعریف شده در معادله (۶.۷۶) و حل آنها به روش نیوتن وقتی که معادله ها غیرخطی اند. هر چرخه از روش نیوتن آن گاه می تواند به عنوان معادل حل یک زیرمسئله QP تعبیر شود. در روش به دست آوردن زیر فرض می کنیم که توابع دوبار مشتق پذیر پیوسته بوده و گرادیان تمامی قیود به طور خطی مستقلند.

تابع لاگرانژ برای مسئله بهینه سازی تعریف شده در معادله (۶.۷۶) عبارت است از

$$L(x, v) = f(x) + \sum_{i=1}^p v_i h_i(x) = f(x) + v \cdot h(x) \quad (۶.۷۷)$$

که  $v_i$  ضریب لاگرانژ  $i$  امین قید مساوی  $h_i(\mathbf{x}) = 0$  است. دقت کنید که  $v_i$  از نظر علامت آزاد است. شرایط لازم کان-تاکر روابط زیر را می دهد

$$\nabla L(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad \nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p v_i \nabla h_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (۶.۷۸)$$

و

$$h_i(\mathbf{x}) = 0; \quad i = 1 \text{ to } p \quad (۶.۷۹)$$

توجه کنید که معادله (۶.۷۸) در واقع نمایشگر  $n$  معادله است، زیرا بعد بردار متغیر طراحی،  $n$  است. این معادله ها به اضافه  $p$  قید مساوی در معادله (۶.۷۹)،  $(n+p)$  معادله  $(n+p)$  مجهولی را ( $n$  متغیر طراحی  $\mathbf{x}$  و  $p$  ضریب لاگرانژ  $\mathbf{v}$ ) تشکیل می دهند. اینها معادله های غیرخطی اند و برای حل آنها روش نیوتن رافسون (پیوست C) می تواند استفاده گردد. می توان معادله های (۶.۷۸) و (۶.۷۹) را به شکل خلاصه تر زیر نوشت

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (۶.۸۰)$$

که در آن  $\mathbf{F}$  و  $\mathbf{y}$  به شکل زیر تعریف می شوند

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \nabla L \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}_{(n+p \times 1)} \quad , \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}_{(n+p \times 1)} \quad (۶.۸۱)$$

اکنون با استفاده از روش چرخه ای (بخش C.2 پیوست C)، فرض می کنیم  $\mathbf{y}^{(k)}$  در  $k$  امین چرخه معلوم بوده و یک تغییر  $\Delta \mathbf{y}^{(k)}$  مورد نظر است. با استفاده از بسط سری تیلور برای معادله (۶.۸۰)،  $\Delta \mathbf{y}^{(k)}$  عبارت است از جواب دستگاه خطی زیر (مراجعه کنید به معادله C.12 در پیوست C):

$$\nabla \mathbf{F}^T(\mathbf{y}^{(k)}) \Delta \mathbf{y}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{y}^{(k)}) \quad (۶.۸۲)$$

که در آن  $\nabla \mathbf{F}$  عبارت است از ماتریس  $(n+p) \times (n+p)$  جاکوبین برای معادله های غیرخطی که  $i$  امین ستون آن گرادینان تابع  $F_i(\mathbf{y})$  نسبت به بردار  $\mathbf{y}$  است. با جایگزینی تعریفهای  $\mathbf{F}$  و  $\mathbf{y}$  از معادله های (۶.۸۱) در معادله (۶.۸۲)، داریم

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 L & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{v} \end{bmatrix}^{(k)} = - \begin{bmatrix} \nabla L \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (۶.۸۳)$$

که در آن اندیس بالایی  $k$  مشخص کننده این است که مقادیر در  $k$  امین چرخه محاسبه شده اند،  $\nabla^2 L$  عبارت است از ماتریس  $n \times n$  هسیان تابع لاگرانژ،  $N$  عبارت است از یک ماتریس  $n \times p$  که در معادله (۶.۲۸) تعریف شده که ستون  $i$  ام آن گرادیان قید مساوی  $h_i$  است،  $\Delta \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$  و  $\Delta \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k)}$ . معادله (۶.۸۳) می تواند با نوشتن اولین سطر به شکل

$$\nabla^2 L \Delta \mathbf{x}^{(k)} + N \Delta \mathbf{v}^{(k)} = -\nabla L \quad (۶.۸۴)$$

به گونه دیگری درآید. با جایگزینی  $\Delta \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k)}$  و  $\nabla L$  از معادله (۶.۷۸) در معادله (۶.۸۴) داریم

$$\nabla^2 L \Delta \mathbf{x}^{(k)} + N(\mathbf{v}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k)}) = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) - N\mathbf{v}^{(k)} \quad (۶.۸۵)$$

یا، معادله به شکل زیر ساده می شود

$$\nabla^2 L \Delta \mathbf{x}^{(k)} + N\mathbf{v}^{(k+1)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (۶.۸۶)$$

با ترکیب معادله (۶.۸۶) با سطر دوم معادله (۶.۸۳)، داریم

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 L & N \\ N^T & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{(k)} \\ \mathbf{v}^{(k+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (۶.۸۷)$$

جواب معادله (۶.۸۷)، تغییری در طراحی  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  و مقدار جدیدی بردار ضریب لاگرانژ  $\mathbf{v}^{(k+1)}$  است. روش چرخه ای تا برآورده شدن معیار همگرایی ادامه می یابد.

اکنون نشان داده می شود که معادله (۶.۸۷) نیز جواب مسأله QP مشخصی است که

در چرخه  $k$  ام تعریف می شود. عبارت

$$\nabla f^T \Delta \mathbf{x} + 0.5 \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 L \Delta \mathbf{x} \quad (۶.۸۸)$$

را با قیود مساوی خطی

$$\mathbf{h}_i + \mathbf{n}^{(i)T} \Delta \mathbf{x} = 0; \quad i = 1 \text{ to } p \quad (۶.۸۹)$$

مینیمم کنید. در معادله فوق  $\mathbf{n}^{(i)}$  گرادیان تابع  $h_i$  است. تابع لاگرانژ برای مسأله ای که در معادله های (۶.۸۸) و (۶.۸۹) تعریف شد، عبارت است از

$$\bar{L} = \nabla f^T \Delta \mathbf{x} + 0.5 \Delta \mathbf{x}^T \nabla^2 L \Delta \mathbf{x} + \sum_{i=1}^p v_i (\mathbf{h}_i + \mathbf{n}^{(i)T} \Delta \mathbf{x}) \quad (۶.۹۰)$$

شرایط لازم کان-تاکر با فرض  $\Delta x$  به عنوان متغیر مجهول روابط زیر را می دهد

$$\nabla \bar{L} = 0; \quad \nabla f + \nabla^2 L \Delta x + Nv = 0 \quad (۶.۹۱)$$

و

$$h_i + n^{(i)T} \Delta x = 0 \quad (۶.۹۲)$$

می توان دید اگر معادله های (۶.۹۱) و (۶.۹۲) را ترکیب کرده و آنها را به شکل ماتریسی بنویسیم، معادله (۶.۸۷) به دست خواهد آمد. پس، مسأله مینیم کردن  $f(x)$  با شرط  $h_i(x) = 0; i = 1 \text{ to } p$  می تواند با حل چرخه ای زیرمسأله QP که در معادله های (۶.۸۸) و (۶.۸۹) تعریف شد، حل شود.

دقیقاً مانند روش نیوتن برای مسائل نامقید، برای داشتن یک الگوریتم همگرا،  $\Delta x$  باید جواب جهت جست و جو و اندازه گامی باشد که با مینیم کردن یک تابع کاهشی مناسب تعیین می گردد. با تعریف  $d$  به عنوان جهت جست و جو به جای  $\Delta x$  و با در نظر داشتن قیود مساوی، زیرمسأله QP برای مسأله کلی بهینه سازی به شکل زیر تعریف می شود. عبارت

$$c^T d + 0.5d^T H d \quad (۶.۹۳)$$

را نسبت به قیود معادله های (۶.۳۹) و (۶.۴۰)، یعنی

$$n^{(i)T} d = e_i; \quad i = 1 \text{ to } p \quad (۶.۹۴)$$

$$a^{(i)T} d \leq b_i; \quad i = 1 \text{ to } m \quad (۶.۹۵)$$

مینیم کنید. در روابط فوق علایم بخش ۶.۳ استفاده شده و  $H$  ماتریس هسیان  $\nabla^2 L$  و یا مقدار تقریبی آن است. معمولاً یک راهبرد قید پتانسیل می تواند در کاهش تعداد نامساویها در معادله (۶.۹۵) استفاده شود، همچنان که در بخش ۶.۶.۵ بحث شد. ما درباره این نکته در آینده بیشتر بحث خواهیم کرد.

دقیقاً مانند روشهای شبه نیوتن بخش ۵.۷ برای مسائل نامقید، می توان برای مسائل مقید هسیان تابع لاگرانژ را تقریب زد. فرض می کنیم هسیان تقریبی  $H^{(k)}$  در چرخه  $k$  ام در دسترس است و می خواهیم آن را بهنگام کنیم به  $H^{(k+1)}$ . رابطه BFGS بخش ۵.۷ می تواند

برای بهنگام کردن مستقیم هسیان استفاده شود. توجه به این نکته مهم است که هسیان بهنگام شده باید معین مثبت نگاه داشته شود، زیرا با این خاصیت زیرمسئله QP تعریف شده در معادله های (۶.۹۳) تا (۶.۹۵) محدب قطعی (اکید) می ماند. بنابراین یک جهت جست و جوی یگانه به دست می آید. رابطه بهنگام BFGS استاندارد ممکن است به هسیان منفرد یا نامعین منتهی شود. برای غلبه بر این مشکل، پاول<sup>۱</sup> [۱۹۷۸a] یک تغییر در رابطه BFGS استاندارد پیشنهاد کرد. هرچند تغییر براساس یک دید فنی و شهودی قرار دارد، در بیشتر کاربردها خوب کار می کند. ما رابطه تغییر یافته BFGS را ارائه خواهیم کرد.

قبل از ارائه رابطه نهایی چندین کمیت اسکالر و بردار باید محاسبه شوند. اینها را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbf{s}^{(k)} = \alpha_k \mathbf{d}^{(k)}; \quad \begin{array}{l} \text{بردار تغییرات در طراحی} \\ (\text{توجه: } \alpha_k \text{ اندازه گام است}) \end{array} \quad (6.96)$$

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)}; \quad \text{یک بردار} \quad (6.97)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \nabla L(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)}) - \nabla L(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)}); \quad (6.98)$$

اختلاف گرادیانهای تابع لاگرانژ در دو نقطه

$$\xi_1 = \mathbf{s}^{(k)} \cdot \mathbf{y}^{(k)}; \quad \text{یک اسکالر} \quad (6.99)$$

$$\xi_2 = \mathbf{s}^{(k)} \cdot \mathbf{z}^{(k)}; \quad \text{یک اسکالر} \quad (6.100)$$

$$\theta = 1 \text{ if } \xi_1 \geq 0.2\xi_2, \text{ در غیر این صورت } \theta = \frac{0.8\xi_2}{(\xi_2 - \xi_1)}; \quad \text{یک اسکالر} \quad (6.101)$$

$$\mathbf{w}^{(k)} = \theta \mathbf{y}^{(k)} + (1 - \theta) \mathbf{z}^{(k)}; \quad \text{یک بردار} \quad (6.102)$$

$$\xi_3 = \mathbf{s}^{(k)} \cdot \mathbf{w}^{(k)}; \quad \text{یک اسکالر} \quad (6.103)$$

$$\mathbf{D}^{(k)} = \frac{1}{\xi_3} \mathbf{w}^{(k)} \mathbf{w}^{(k)T}; \quad \text{یک ماتریس } n \times n \quad (6.104)$$

$$\mathbf{E}^{(k)} = \frac{1}{\xi_2} \mathbf{z}^{(k)} \mathbf{z}^{(k)T}; \quad \text{یک ماتریس } n \times n \quad (6.105)$$

با تعریفهای گذشته از ماتریسهای  $D^{(k)}$  و  $E^{(k)}$ ، هسیان به شکل زیر بهنگام می شود.

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + D^{(k)} - E^{(k)} \quad (۶.۱۰۶)$$

معلوم است که اگر  $\beta_k$  در معادله (۶.۹۹) منفی باشد، رابطه اصلی BFGS می تواند به هسیان نامعین بینجامد. استفاده از بردار بهبود یافته  $w^{(k)}$  که در معادله (۶.۱۰۲) ارائه شد این مشکل را کمتر خواهد کرد.

به خاطر مزیت وجود هسیان در یک الگوریتم بهینه سازی، در مقالات اخیر، روشهای بهنگام کردن متعددی تدوین و ارائه شده است [گیل<sup>۱</sup> و غیره، ۱۹۸۱]. به عنوان مثال، ضرایب چولسکی هسیان می توانند مستقیماً بهنگام شوند. هنگام پیاده سازی عددی، استفاده از چنین روشهایی مفید است، زیرا پایداری عددی را می توان تضمین کرد.

### ۶.۷.۳ الگوریتم تندترین کاهش مقید بهبود یافته

الگوریتم CSD بخش ۶.۶ اخیراً توسعه یافته و بهنگام شدن هسیان و راهبرد مجموعه پتانسیل را در آن گنجانده اند [بلغاندا و آرورا<sup>۲</sup>، ۱۹۸۴a؛ لیم و آرورا<sup>۳</sup>، ۱۹۸۶؛ ثانه دار، آرورا و سنج<sup>۴</sup>، ۱۹۸۶]. الگوریتم اصلی از راهبرد مجموعه پتانسیل استفاده نمی کرد [هان<sup>۵</sup>، ۱۹۷۶، ۱۹۷۷؛ پاول<sup>۶</sup>، ۱۹۷۸a, b, c]. الگوریتم جدید از نظر عددی به طور وسیعی مورد بحث قرار گرفته و از نظر محاسباتی جنبه های متعددی در آن ملحوظ شده تا آن را مناسب و کارا سازد. در ادامه، ما یک الگوریتم بسیار اساسی را با توسعه ساده ای از الگوریتم CSD تشریح می کنیم. از این الگوریتم جدید که از یک راهبرد مجموعه پتانسیل استفاده می کند با نام پی ال بی ای (PLBA) [شنیچنی-لیم-بلغاندا-آرورا<sup>۷</sup>] یاد می کنیم:

گام ۱. مانند الگوریتم CSD بخش ۶.۶ بجز این که برای حدس اولیه هسیان تقریبی نیز ماتریس واحد در نظر بگیرید یعنی  $H^{(0)} = I$ .

گام ۲. مقادیر توابع هزینه و قید گرادیان را در  $x^*$  محاسبه کنید. مقدار نقض قید ماکزیمم  $V_x$  را همچنان که در معادله (۶.۶۹) تعریف شد، محاسبه کنید. اگر  $k > 0$  است،

- |                                   |                              |
|-----------------------------------|------------------------------|
| 1. Gill                           | 2. Belegundu and Arora       |
| 3. Lim and Arora                  | 4. Thanedar, Arora and Tseng |
| 5. Han                            | 6. Powell                    |
| 7. Pshenichny-Lim-Belegundu-Arora |                              |

با استفاده از معادله های (۶.۹۶) تا (۶.۱۰۶) هسیان تابع لاگرانژ را بهنگام کنید. اگر  $k = 0$  است، از بهنگام کردن صرف نظر کنید و به گام ۳ بروید.

گام ۳. زیرمسأله QP معادله های (۶.۹۳) تا (۶.۹۵) را تعریف و آنها را حل کنید تا جهت جست و جو  $d^{(k)}$  و ضرایب لاگرانژ  $u^{(k)}$  و  $v^{(k)}$  به دست آید.

گام ۴-۷. مانند الگوریتم CSD بخش ۶.۶.

بنابراین می بینیم که تنها تفاوت بین دو الگوریتم عبارت است از گامهای ۲ و ۳. استفاده از الگوریتم را با یک مسأله نمونه شرح می دهیم.

مثال ۶.۱۵ استفاده از روش شبه نیوتن مقید. دو چرخه از الگوریتم PLBA را برای

مثال ۶.۱۱ کامل کنید: تابع

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

را مشروط به قیود

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1.0 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \leq 0$$

مینیمم کنید. نقطه شروع عبارت است از  $(1, 1)$ ،  $R_0 = 10$ ،  $\gamma = 0.5$ ،  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$ .

حل. اولین چرخه الگوریتم PLBA مانند الگوریتم CSD است. برای مثال ۶.۱۱، نتایج چرخه اول عبارت است از:

$$\mathbf{d}^{(0)} = (1, 1); \quad \alpha_0 = 0.5, \quad \mathbf{x}^{(1)} = (1.5, 1.5)$$

$$\mathbf{u}^{(0)} = (0, 0, 0); \quad R_1 = 10, \quad \mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{I}.$$

چرخه ۲. در نقطه  $\mathbf{x}^{(1)} = (1.5, 1.5)$ ، توابع قید و هزینه و گرادیان آنها عبارت است از:

$$f = -6.75$$

$$g_1 = -0.25$$

$$g_2 = -1.5$$

$$g_3 = -1.5$$

$$\nabla f = (-1.5, -1.5)$$

$$\nabla g_1 = (0.5, 0.5)$$

$$\nabla g_2 = (-1, 0)$$

$$\nabla g_3 = (0, -1)$$

برای بهنگام کردن ماتریس هسیان، بردارهای معادله‌های (۶.۹۶) و (۶.۹۷) را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(0)} &= \alpha_0 \mathbf{d}^{(0)} \\ &= (0.5, 0.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(0)} &= \mathbf{H}^{(0)} \mathbf{s}^{(0)} \\ &= (0.5, 0.5) \end{aligned}$$

چون بردار ضریب لاگرانژ  $\mathbf{u}^{(0)} = (0, 0, 0)$  است، گرادیان لاگرانژین  $\nabla L$  همان گرادیان تابع هزینه  $\nabla f$  است. بنابراین، بردار  $\mathbf{y}^{(0)}$  معادله (۶.۹۸) عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(0)} &= \nabla f(\mathbf{x}^{(1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) \\ &= (-0.5, -0.5) \end{aligned}$$

همچنین کمیت‌های اسکالر معادله‌های (۶.۹۹) و (۶.۱۰۰) عبارتند از

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{y}^{(0)} \\ &= -0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{z}^{(0)} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

چون  $\xi_2 < 0.2\xi_1$  است،  $\theta$  معادله (۶.۱۰۱) به شکل زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \theta &= 0.8(0.5)/(0.5 + 0.5) \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

بردار  $\mathbf{w}^{(0)}$  در معادله (۶.۱۰۲) عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{(0)} &= 0.4(-0.5, -0.5) + (1 - 0.4)(0.5, 0.5) \\ &= (0.1, 0.1) \end{aligned}$$

کمیت اسکالر  $\xi_3$  در معادله (۶.۱۰۳) عبارت است از  $(0.5, 0.5) \cdot (0.1, 0.1) = 0.1$  دو ماتریس تصحیح معادله‌های (۶.۱۰۴) و (۶.۱۰۵) به شکل زیر محاسبه می‌شوند

$$\mathbf{D}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

بالاخره، از معادله (۶.۱۰۶) هسیان بهنگام شده عبارت است از

$$\mathbf{H}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

گام ۳. با هسیان بهنگام شده و داده های دیگری که قبلاً محاسبه شده، زیرمسئله QP معادله های (۶.۹۳) تا (۶.۹۵) به شکل زیر تعریف می شود. عبارت

$$-1.5d_1 - 1.5d_2 + 0.5(0.6d_1^2 - 0.8d_1d_2 + 0.6d_2^2)$$

را نسبت به قیود

$$0.5d_1 + 0.5d_2 \leq 0.25$$

$$-d_1 \leq 1.5, -d_2 \leq 1.5$$

مینیم کنید. زیرمسئله QP محدب قطعی (اکید) است و یک جواب یگانه دارد. با استفاده از شرایط  $K-T$  جواب زیرمسئله QP به شکل زیر به دست می آید

$$\mathbf{d}^{(1)} = (0.25, 0.25), \quad \mathbf{u}^{(1)} = (2.9, 0, 0)$$

این جواب مانند جواب مثال ۶.۱۱ است. بنابراین گامهای باقی مانده محاسبات مشابهی دارند.

دیده می شود که در این مثال، وارد کردن هسیان تقریبی در چرخه دوم جهت جست و جو را تغییر نداد. در حالت کلی، جهتهای متفاوت و همگرایی بهتری خواهد داد.

#### ۶.۷.۴ نگرشی بر روشهای شبه نیوتن مقید

روشهای شبه نیوتن اخیراً تدوین شده اند. آنها به عنوان کاراترین و قابل اطمینان ترین روشها شناخته شده اند که کاربردی عمومی دارند. شیتکوفسکی<sup>۱</sup> و همکارانش [۱۹۸۳ و ۱۹۸۱] این روشها را در سطح وسیعی تحلیل و با استفاده از مجموعه ای از مسائل آزمایشی برنامه ریزی غیرخطی، آنها را در مقایسه با سایر روشها ارزیابی نموده اند. نتایج آنها گویای این واقعیت است که روشهای شبه نیوتن نسبت به دیگر روشها مزایای بسیاری دارند. لیم و آرورا<sup>۲</sup>

[۱۹۸۶]، ثانه دار<sup>۱</sup> و دیگران [۱۹۸۶]، ثانه دار، آرورا، سنج، لیم و پارک<sup>۲</sup> [۱۹۸۷] و آرورا و سنج<sup>۳</sup> [۱۹۸۷a] روشها را برای دسته ای از مسائل طراحی مهندسی ارزیابی کرده اند. جبرئیل و بلترچی<sup>۴</sup> [۱۹۸۷] نیز جنبه های تکمیلی متعددی از الگوریتم تندترین کاهشی مقید (CSD) شنیدنی<sup>۵</sup> و از جمله بهنگام کردن شبه نیوتن همیان لاگرانژین را مورد بحث قرار داده اند. به طور کلی این بحثها حکایت از ممتاز بودن روشهای شبه نیوتن دارد. بنابراین روشهای شبه نیوتن برای کاربردهای عمومی طراحی مهندسی توصیه می شوند.

پیاده سازی و نصب عددی یک الگوریتم نوعی مهارت و هنر است. در یک نرم افزار باید ابزار و ویژگیهای: دقت، قدرت تشخیص و قضاوت، نگاهبانی از خود و سادگی کار با آن طراحی و در نظر گرفته شود. محاسبات عددی باید به طور مناسبی پیاده شوند. هر گام از الگوریتم باید تحلیل شده و روشهای عددی مناسب برای آن تدوین شود تا مقصود از آن گام برآورده شود. عملکرد نرم افزار باید با حل مسائل متفاوت متعددی به طور مناسب ارزیابی گردد. جنبه های بسیاری از پیاده سازی و نصب عددی الگوریتمها توسط گیل<sup>۶</sup> و دیگران [۱۹۸۱] بحث شده است.

گامهای الگوریتم PLBA اخیراً تحلیل شده است [سنج و آرورا<sup>۷</sup>، ۱۹۸۸]. راهبردهای قید پتانسیل متفاوتی در نظر گرفته شده و ارزیابی گردیده اند. توابع کاهشی متعددی بحث شده اند. روشهای جبران ناسازگاریها در زیرمسأله QP تدوین و ارزیابی شده اند. نتیجه این ارزیابیها و تکامل یافتنها در دسترس بودن الگوریتمی توانمند برای کاربردهای طراحی مهندسی است.

۶.۷.۴.۱ توابع کاهشی: توابع کاهشی نقشی مهم در روشهای شبه نیوتن مقید بازی می کنند. به این دلیل آنها را باختصار بررسی خواهیم کرد. تابع کاهشی معادله (۶.۶۴) می تواند از تابع لاگرانژ مسأله که در معادله های (۶.۱) تا (۶.۳) تعریف شد، به دست آید:

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p v_i h_i + \sum_{i=1}^m u_i g_i \quad (6.107)$$

1. Thanedar

3. Arora and Tseng

5. Pshenichny

7. Tseng and Arora

2. Thanedar, Arora, Tseng, Lim and Park

4. Gebrielle and Beltracchi

6. Gill

که در آن  $v_i$  ضرایب لاگرانژ قیود مساوی هستند که از نظر علامت آزادند و  $u_i \geq 0$  ضرایب لاگرانژ قیود نامساوی است. با استفاده از مقادیر مطلق  $v_i/h_i$ ، می توانیم تابع کاهشی معادله (۶.۶۴) را از معادله (۶.۱۰۷) به شکل زیر به دست آوریم

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &\leq f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p |v_i h_i| + \sum_{i=1}^m u_i g_i \\ &\leq f(\mathbf{x}) + \left( \sum_{i=1}^p |v_i| + \sum_{i=1}^m u_i \right) V(\mathbf{x}) \\ &\leq f(\mathbf{x}) + RV = \Phi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (۶.۱۰۸)$$

بنابراین تابع لاگرانژ حد پایین تابع کاهشی  $\Phi(\mathbf{x})$  معادله (۶.۶۴) است. توجه کنید که  $\Phi(\mathbf{x})$  مشتق پذیر نیست.

تابع کاهشی غیرمشتق پذیر دیگری توسط هان<sup>۱</sup> [۱۹۷۷] و پاول<sup>۲</sup> [۱۹۷۸c] پیشنهاد شده است. این تابع را با  $\Phi_H$  نشان می دهیم و آن را در چرخه  $k$  ام به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\Phi_H = f(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{i=1}^p r_i^{(k)} |h_i| + \sum_{i=1}^m \mu_i^{(k)} \max \{0, g_i\} \quad (۶.۱۰۹)$$

که در آن  $r_i^{(k)} \geq |v_i^{(k)}|$  پارامترهای جریمه برای قیود مساوی و  $\mu_i^{(k)} \geq u_i^{(k)}$  پارامترهای جریمه قیود نامساوی است. پارامترهای جریمه گاهی بسیار بزرگ می شوند، از این جهت پاول [۱۹۸۷c] روشی را برای تنظیم آنها به شکل زیر پیشنهاد کرد:

$$r_i^{(0)} = |v_i^{(0)}|; \quad \mu_i^{(0)} = u_i^{(0)} \quad \text{اولین چرخه} \quad (۶.۱۱۰)$$

$$\begin{aligned} r_i^{(k)} &= \max \{ |v_i^{(k)}|, \frac{1}{2}(r_i^{(k-1)} + |v_i^{(k)}|) \} \\ \mu_i^{(k)} &= \max \{ u_i^{(k)}, \frac{1}{2}(\mu_i^{(k-1)} + u_i^{(k)}) \} \end{aligned} \quad \text{چرخه های بعدی} \quad (۶.۱۱۱)$$

شبتکوفسکی<sup>۳</sup> [۱۹۸۱] پیشنهاد کرده است که از تابع لاگرانژین افزایش یافته  $\Phi_\lambda$  به عنوان تابع کاهشی استفاده شود:

$$\Phi_\lambda = f(\mathbf{x}) + P_1(\mathbf{v}, \mathbf{h}) + P_2(\mathbf{u}, \mathbf{g}) \quad (۶.۱۱۲)$$

که در آن

$$P_1(\mathbf{v}, \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^p (v_i h_i + \frac{1}{2} r_i h_i^2) \quad (۶.۱۱۳)$$

$$P_2(\mathbf{u}, \mathbf{g}) = \sum_{i=1}^m \begin{cases} (u_i g_i + \frac{1}{2} \mu_i g_i^2), & \text{if } (g_i + u_i/\mu_i) \geq 0 \\ \frac{1}{2} u_i^2/\mu_i, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۶.۱۱۴)$$

و پارامترهای جریمه  $r_i$  و  $\mu_i$  قبلاً در معادله های (۶.۱۱۰) و (۶.۱۱۱) تعریف شده اند. یکی از مزایای  $\Phi_A$  این است که تابع و گرادیان آن پیوسته اند.

### ۶.۸\* روشهای دیگر

در مقالات مختلف، روشهای دیگر و صورتهای متنوعی از آنها برای بهینه سازی مقید تدوین و ارزیابی شده اند. برای جزئیات بیشتر می شود به مراجع گیل و دیگران<sup>۱</sup> [۱۹۸۱]، لوئن برگر<sup>۲</sup> [۱۹۸۴] و رکلایس و دیگران<sup>۳</sup> [۱۹۸۳] رجوع کرد. در این بخش، باختصار پنداره های اصلی سه روش را که برای مسائل طراحی مهندسی با موفقیت به کار رفته اند بحث می کنیم.

### ۶.۸.۱ روش جهتهای قابل قبول

روش جهتهای قابل قبول یکی از روشهای قدیمی مقدماتی برای حل مسائل بهینه سازی مقید است. پنداره اصلی روش عبارت است از حرکت از یک طراحی قابل قبول به یک طراحی قابل قبول بهبود یافته. بنابراین، با داشتن طراحی قابل قبول  $\mathbf{x}^{(k)}$ ، یک "جهت قابل قبول بهبود یافته"  $\mathbf{d}^{(k)}$  طوری تعیین می شود که برای اندازه گام به اندازه کافی کوچک  $\alpha > 0$ ، دو خاصیت زیر برآورده شوند (i) طراحی جدید،  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{d}^{(k)}$  قابل قبول باشد، و (ii) تابع هزینه جدید از تابع هزینه قدیمی کوچکتر باشد، یعنی  $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$ . وقتی  $\mathbf{d}^{(k)}$  مشخص شد، یک جست و جوی خطی انجام می شود تا مشخص شود که چقدر می توان در امتداد  $\mathbf{d}^{(k)}$  پیش رفت. این کار به یک طراحی قابل قبول جدید  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  می انجامد، و فرآیند از آن جا تکرار می شود.

روش براساس الگوریتم کلی تشریح شده در بخش ۶.۲.۱ قرار دارد که یافتن تغییرات طراحی به زیرمسأله های تعیین جهت جست و جو و اندازه گام تقسیم می شود. جهت با تعریف

1. Gill et al.

2. Luenberger

3. Reklaitis et al.

یک زیرمسئله که در نقطه قابل قبول فعلی خطی شده، تعیین می شود و اندازه گام طوری تعیین می شود که تابع هزینه علاوه بر کاهش قابل قبول بماند. چون از تقریبهای خطی استفاده می شود، در ناحیه قابل قبول ماندن نسبت به قیود مساوی مشکل است. بنابراین، روش بیشتر برای مسائل مقید با قیدهای نامساوی به کار می رود. برای مواردی که قیود مساوی وجود دارند مرحله‌ای به این روشها اضافه شده است. با این همه، ما فقط برای مسائل با قیدهای نامساوی روشی را تشریح خواهیم کرد.

اکنون یک زیرمسئله که جهت قابل قبول را در نقطه طراحی فعلی بهبود می بخشد تعریف می کنیم. یک جهت قابل قبول بهبود یافته جهتی است که تابع هزینه را کاهش داده و برای یک اندازه گام کوچک قطعاً قابل قبول باقی بماند. بنابراین یک جهت کاهشی برای تابع هزینه بوده و در همان حال نقطه اش در داخل ناحیه قابل قبول است. جهت قابل قبول بهبود یافته  $d$  شرایط  $c^T d < 0$  و  $a^{(i)T} d < 0$  با  $i \in I_k$  را برآورده می کند که در آن  $I_k$  مجموعه قید پتانسیل در نقطه فعلی است، همان طور که در معادله (۶.۱۲) تعریف شده است. جهت قابل قبول بهبود یافته می تواند با مینیمم کردن ماکزیمم  $c^T d$  و  $a^{(i)T} d$  برای  $i \in I_k$  به دست آید. اگر این ماکزیمم را با  $\beta$  نشان دهیم، زیرمسئله پیدا کردن جهت به شکل زیر تعریف می شود

$$\beta \text{ مینیمم کنید} \quad (۶.۱۱۵)$$

$$c^T d \leq \beta \quad (۶.۱۱۶)$$

$$a^{(i)T} d \leq \beta \text{ برای } i \in I_k \quad (۶.۱۱۷)$$

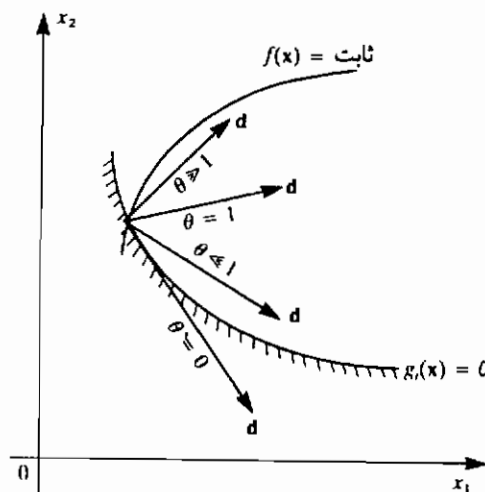
$$-1 \leq d_j \leq 1; \quad j = 1 \text{ to } n \quad (۶.۱۱۸)$$

نرمال سازی قید معادله (۶.۱۱۸) به این خاطر معرفی شده که یک جواب کران دار به دست آید. شکلهای دیگر نرمال سازی قیود نیز می تواند به کار رود. فرض کنیم  $(\beta, d)$  یک جواب بهین برای مسئله فوق باشد. اگر  $\beta < 0$  باشد، آن گاه  $d$  یک جهت قابل قبول بهبود یافته است. اگر  $\beta = 0$  باشد، آن گاه نقطه طراحی فعلی شرایط لازم کان-تاکر را برآورده می کند.

الگوریتمهای جست و جوی خطی متفاوت بسیاری وجود دارند که می شود برای به دست آوردن اندازه گام مناسب در جهت جست و جو به کار گرفته شوند. همچنین، برای تخمین یک جهت قابل قبول بهتر  $d^{(k)}$ ، قیود معادله (۶.۱۱۷) می توانند به شکل  $a^{(i)T} d \leq \theta, \beta$  می توانند به شکل

بیان شوند که در آن  $\theta_i > 0$  ضرایب "سوق دادن" هستند. هرچه  $\theta_i$  بزرگتر باشد، بردار جهت  $d$  به ناحیه قابل قبول بیشتر سوق داده می‌شود. دلیل معرفی  $\theta_i$  عبارت است از جلوگیری چرخه‌ها از برخورد مکرر به مرز قیود که همگرایی را آهسته می‌کند. شکل ۶.۱۸ اهمیت فیزیکی  $\theta_i$  را در زیرمسئله یافتن جهت نشان می‌دهد. آن شکل یک فضای طراحی دو متغیره را با یک قید فعال نشان می‌دهد. اگر  $\theta_i$  صفر در نظر گرفته شود، آن گاه طرف راست معادله (۶.۱۱۷)  $(\theta, \beta)$  صفر می‌شود. در این حالت جهت  $d$  تمایل به دنبال کردن قیود فعال دارد، یعنی به سطح قید مماس است. از طرف دیگر، اگر  $\theta_i$  خیلی بزرگ باشد، جهت  $d$  به دنبال کردن خطوط تابع هزینه تمایل دارد. بنابراین، مقدار کوچک  $\theta_i$  به جهتی که تابع هزینه را با سرعت کاهش می‌دهد خواهد انجامید. با این همه به خاطر غیرخطی بودن ممکن است سطح قید مشابهی را دربرگیرد. مقادیر بزرگ  $\theta_i$  خطر این که قید مشابهی را مجدداً دربرگیرد کاهش خواهد داد، ولی تابع هزینه را با آن سرعت کاهش نخواهد داد. مقدار  $\theta_i = 1$  برای بیشتر مسائل به نتیجه قابل قبولی می‌انجامد.

معایب روش عبارتند از: (i) یک نقطه قابل قبول شروع مورد نیاز است - اگر این نقطه معلوم نباشد باید یک الگوریتم مخصوص برای یافتن چنین نقطه‌ای استفاده شود - و (ii) قیود مساوی را نمی‌شود باسانی اعمال کرد و روشهای مخصوصی برای در نظر گرفتن آنها مورد نیاز است.



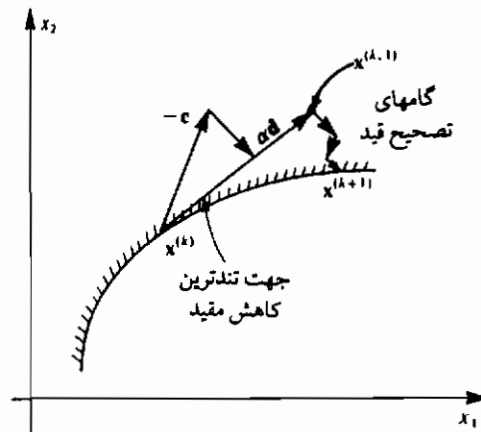
شکل ۶.۱۸ اثر ضریب سوق‌دهی  $\theta_i$  روی جهت جست‌وجوی  $d$  در روش جهت‌های قابل قبول.

## ۶.۸.۲ روش تصویر گرادیان

روش تصویر گرادیان توسط روزن<sup>۱</sup> در سال ۱۹۶۱ تدوین شد. درست مثل روش جهت‌های قابل قبول، این روش نیز از اطلاعات درجه اول مسأله در نقطه فعلی استفاده می‌کند. روش جهت‌های قابل قبول برای یافتن جهت جست و جو حل یک LP را در هر چرخه نیاز دارد. در بعضی از کاربردها این محاسبات می‌تواند پرهزینه باشد. بنابراین، روزن تصمیم گرفت روشی ارائه کند که به حل LP نیاز نداشته باشد. پنداره او این بود که روشی را تدوین کند که در آن بردار جهت بتواند بآسانی محاسبه شود، هر چند این امکان وجود داشته باشد که جهت به دست آمده به خوبی جهتی که از روش جهت‌های قابل قبول به دست می‌آید، نباشد. بنابراین، در روش تصویر گرادیان، عبارتی صریح برای جهت جست و جو در دسترس است.

مراحل اساسی در روش تصویر گرادیان عبارت است از یک نقطه اولیه. اگر نقطه در داخل ناحیه قابل قبول باشد، جهت تندترین کاهش تابع هزینه به کار می‌رود تا به یک مرز قید برخورد شود. اگر نقطه شروع غیر قابل قبول است آن گاه گام تصحیح قید استفاده می‌شود تا به یک مجموعه قید برسد. وقتی نقطه روی مرز است، جهتی که به سطح قید مماس است استفاده می‌شود تا طراحی را تغییر دهد. این جهت با تصویر کردن جهت تندترین کاهش تابع هزینه در امتداد صفحه مماس محاسبه می‌شود. این کار در بخش ۶.۶ جهت تندترین کاهش مقید (CSD) نامیده شد. در جهت منفی گرادیان تصویر شده گام برداشته می‌شود. چون جهت بر سطح قید مماس است، نقطه جدید غیر قابل قبول خواهد بود. بنابراین باید برای رسیدن به ناحیه قابل قبول چندین گام تصحیحی برداشته شود.

فرآیند چرخه‌ای روش تصویر گرادیان در شکل ۶.۱۹ تشریح شده است. در نقطه  $x^{(k)}$ ، جهت تندترین کاهش و  $d^{(k)}$  جهت منفی گرادیان تصویر شده (تندترین کاهش مقید) است. یک گام دلخواه نقطه  $x^{(k+1)}$  را به  $x^{(k)}$  می‌برد که از آن جا مراحل تصحیح قید برای رسیدن به نقطه قابل قبول  $x^{(k+1)}$  انجام می‌شود. با مقایسه روش تصویر گرادیان و تندترین کاهش مقید بخش ۶.۶، مشاهده می‌کنیم که در یک نقطه قابل قبول که بعضی از قیود فعال هستند، هر دو روش جهات یکسانی دارند. تنها تفاوت در تعیین اندازه گام است.



شکل ۶.۱۹ گامهای روش تصویر گرادیان

فلسفه پنداره روش تصویر گرادیان بسیار خوب است؛ یعنی جهت جست و جو براحتی قابل محاسبه است، اگرچه ممکن است به خوبی جهت قابل قبول نباشد. با این همه، این روش از نظر محاسباتی به میزان زیادی غیر قابل اطمینان است. مشخص کردن اندازه گام اختیاری و فرآیند تصحیح قید بسیار طولانی و خسته کننده است. عیب جدی خسته کننده بودن همگرا کردن الگوریتم است. به عنوان مثال، هنگام انجام گامهای تصحیح قید، باید مطمئن بود که  $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$  است. اگر این شرط برآورده نشود و یا قیود تصحیح نشوند، آن گاه اندازه گام باید کاهش یافته و تمامی فرآیند تکرار شود. این کار می تواند بسیار طولانی، خسته کننده و ناکارا باشد. با وجود این عیب، این روش برای محدوده وسیعی از مسائل طراحی مهندسی با موفقیت بسیاری به کار رفته است [هاگ و آرورا، ۱۹۷۹]. علاوه بر این، صورتهای متفاوتی از این روش در مقالات بحث شده است [گیل و دیگران<sup>۲</sup>، ۱۹۸۱؛ لانبرگر<sup>۳</sup>، ۱۹۸۴، بلگاندا و آرورا<sup>۴</sup>، ۱۹۸۵]. روش و صورتهای متفاوت آن برای نصب در یک محیط تعاملی بسیار مناسب هستند. ما در فصل (۷) روی این جنبه بحث خواهیم کرد.

1. Haug and Arora

2. Gill et al.

3. Lucenberger

4. Belegundu and Arora

## ۶.۸.۳ روش گرادیان کاهش یافته عمومی

در سال ۱۹۶۷، ولف<sup>۱</sup> روش گرادیان کاهش یافته را براساس روش ساده حذف متغیر برای مسائل با قید مساوی تدوین کرد [عبادی<sup>۲</sup>، ۱۹۷۰]. روش گرادیان کاهش یافته عمومی (GRG) تعمیمی از روش گرادیان کاهش یافته برای در نظر گرفتن قیود نامساوی غیرخطی است. در این روش، یک جهت جست و جو یافت می شود، طوری که برای هر حرکت کوچکی قیود فعال فعلی همچنان فعال بمانند. اگر بعضی از قیود به دلیل غیرخطی بودن توابع آنها کاملاً برآورده نشوند، روش نیوتن-رافسون برای برگشتن به مرز قید استفاده می شود. بنابراین، روش GRG می تواند چیزی شبیه روش تصویر گرادیان تصور شود.

از آن جا که قیود نامساوی همیشه می توانند با اضافه کردن متغیرهای کمبود به قیود مساوی تبدیل شوند، می توانیم یک الگوی قیود مساوی NLP استفاده کنیم. همچنین می توانیم راهبرد قید پتانسیل را به کار بگیریم و همه قیود زیرمسئله را قید مساوی لحاظ کنیم. زیرمسئله یافتن جهت در روش GRG به طریق زیر می تواند تعریف شود [عبادی و کارپنتر<sup>۳</sup>، ۱۹۶۹]:  
بردار متغیر اصلی  $x$  را به  $[y^T, z^T]^T$  تقسیم می کنیم که  $y_{(n-p)}$  و  $z_{(p)}$  به ترتیب بردارهای مستقل و وابسته متغیرهای طراحی هستند. تغییرات مرتبه اول توابع هزینه و قید (که به عنوان مساوی در نظر گرفته شده اند) عبارت است از

$$\Delta f = \frac{\partial f^T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f^T}{\partial z} \Delta z \quad (۶.۱۱۹)$$

$$\Delta h_i = \frac{\partial h_i^T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial h_i^T}{\partial z} \Delta z \quad (۶.۱۲۰)$$

چون با یک طراحی قابل قبول شروع کردیم، هر تغییری در متغیرها باید مساویهای فعلی را دست کم تا مرتبه اول برآورده کند؛ یعنی  $\Delta h_i = 0$ . بنابراین معادله (۶.۱۲۰) می تواند به شکل ماتریسی زیر نوشته شود

$$\Delta f = \left( \frac{\partial f^T}{\partial y} - \frac{\partial f^T}{\partial z} B^{-T} A^T \right) \Delta y \quad (۶.۱۲۱)$$

که در آن ستونهای ماتریسهای  $A_{(n-p) \times p}$  و  $B_{(p \times p)}$  به ترتیب گرادیانهای قیود مساوی نسبت به  $y$  و  $z$  هستند. معادله (۶.۱۲۱) را می توان به عنوان معادله ای که با معلوم بودن  $\Delta y$  (تغییر متغیر

مستقل)  $\Delta z$  (تغییر متغیر وابسته) را می‌دهد، در نظر گرفت. با جای‌گزینی  $\Delta z$  از معادله (۶.۱۲۱) در معادله (۶.۱۱۹) می‌توانیم  $df/dy$  را تعیین کنیم.

$$\frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} - \mathbf{AB}^{-1} \frac{\partial f}{\partial z}$$

یا

$$\mathbf{A}^T \Delta y + \mathbf{B}^T \Delta z = 0, \quad \text{یا} \quad \Delta z = -(\mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T) \Delta y \quad (6.122)$$

این عموماً به عنوان گرادیان کاهش یافته عمومی شناخته می‌شود و می‌توان آن را به عنوان گرادیان یک تابع نامقید در نظر گرفت.

در جست و جوی خطی، تابع هزینه به عنوان تابع کاهش‌ی لحاظ می‌شود. برای مقدار آزمایشی  $\alpha$ ، متغیرهای طراحی با استفاده از  $\Delta y = -\alpha df/dy$  و  $\Delta z$  از رابطه (۶.۱۲۱) به‌نگام می‌شوند. اگر طراحی آزمایشی قابل قبول نباشد، آن گاه متغیرهای طراحی مستقل را ثابت نگاه داشته و متغیرهای وابسته را در طی چند تکرار و با اعمال روش نیوتن-رافسون (NR) (معادله (۶.۱۲۱)) تغییر می‌دهیم تا یک نقطه طراحی قابل قبول به دست آوریم. اگر طراحی قابل قبول جدید شرط کاهش را برآورده کند، آن گاه جست و جوی خطی قطع می‌شود؛ در غیر این صورت، اندازه گام آزمایشی قبلی کنار گذاشته می‌شود و روش با یک اندازه گام کاهش یافته تکرار می‌شود. مشاهده می‌گردد که اگر در رابطه (۶.۱۲۲)،  $df/dy = 0$  باشد، شرایط کان-تاکر بهینگی برای مسئله NLP اصلی برآورده می‌شوند.

مشکل اصلی محاسباتی در الگوریتم GRG در چرخه‌های نیوتن-رافسون (NR) هنگام جست و جوی خطی اتفاق می‌افتد. به عبارت روش‌تر، گرادیان قیود باید مجدداً محاسبه شوند و هنگام جست و جوی خطی جاکوبین ماتریس  $\mathbf{B}$  باید در هر چرخه NR وارون شود. این کارها هزینه سنگینی دارند. تاکنون طرح‌های عددی کارایی پیشنهاد شده است: به عنوان مثال، استفاده از رابطه شبه نیوتن برای به‌نگام کردن  $\mathbf{B}$  بدون محاسبه مجدد گرادیانها، و تنها با استفاده از مقادیر توابع قیود. اگر مجموعه متغیرهای مستقل در هر چرخه تغییر یابند این کار می‌تواند مشکلاتی به بار آورد. مشکل دیگر انتخاب یک نقطه شروع قابل قبول است. برای شروع از نقاط اختیاری باید از الگوریتمهای ویژه‌ای استفاده گردد، مانند آنچه در روش‌های قابل قبول استفاده شد.

در شایستگی و ناشایستگی روش گرادیان کاهش یافته در مقالات مختلف، نظریات روشنی وجود ندارد. به عنوان مثال، افرادی ممتاز بودن این روش نسبت به روش تصویر گرادیان را ادعا کرده اند در حالی که توسط سارجینت<sup>۱</sup> [۱۹۷۴] این دو مشابه وانمود شده اند. سر در گمی وقتی پیش می آید که روش گرادیان کاهش یافته را برای حل مسائل نامقید به کار می بریم؛ بعضی از الگوریتمها قیود نامساوی را با اضافه کردن متغیرهای کمبود نامفی به قیود مساوی تبدیل می کنند، در حالی که بعضی دیگر راهبرد قید پتانسیل را بر می گزینند. اگر یک راهبرد قید پتانسیل استفاده شود، روش گرادیان کاهش یافته در حقیقت مانند روش تصویر گرادیان است [بلگاندا و آرورا<sup>۲</sup>، ۱۹۸۵]. از طرف دیگر، اگر قیود نامساوی به مساوی تبدیل شوند، عملکرد آن با روش تصویر گرادیان بسیار متفاوت می شود. متأسفانه، مسئله قیود نامساوی در بیشتر کاربردهای مهندسی باید با استفاده از راهبرد قید پتانسیل حل شوند، زیرا اضافه کردن متغیرهای کمبود به نامساویها، فعال بودن همه قیود را در هر چرخه ایجاب می کند که در این صورت باید مشتق گیری شوند. در کاربردهای بسیار بزرگ این کار به دلیل محاسبات حجیم و ذخیره اطلاعاتی که باید انجام پذیرد، عملی نیست. بنابراین، همان طور که بلگاندا و آرورا<sup>۲</sup> [۱۹۸۵] ابراز کرده اند، تفاوت قائل شدن بین روشهای تصویر گرادیان و گرادیان کاهش یافته در حل بسیاری از مسائل بهینه سازی مهندسی لازم نیست.

## تمرینهای فصل ۶

### بخش ۶.۲ مفاهیم و پنداره های اساسی

۶.۱ با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید.

۱. اساس فلسفه چرخه عددی برای حل مسائل مقید و نامقید مشابه است.
۲. تعیین اندازه گام در مسائل نامقید مسأله ای یک بعدی است.
۳. برای مسائل مقید، تعیین اندازه گام یک مسأله چند بعدی است.
۴. اگر  $g_j(x^{(k)}) > 0$  باشد، قید نامساوی  $g_j(x) \leq 0$  در  $x^{(k)}$  نقض می شود.
۵. اگر  $g_j(x^{(k)}) > 0$  باشد، قید نامساوی  $g_j(x) \leq 0$  در  $x^{(k)}$  فعال است.

۶. اگر  $h_i(x^{(k)}) > 0$  باشد، قید مساوی  $h_i(x) = 0$  در  $x^{(k)}$  نقض می شود.
۷. در بهین یک قید مساوی همیشه فعال است.
۸. در بررسی قیود  $\varepsilon$  فعال نرمال سازی قیود مفید است.
۹. راهبرد قید پتانسیل یعنی فقط یک زیرمجموعه از قیود در زیرمسئله یافتن جهت استفاده می شود.
۱۰. در مسائل بهینه سازی مقید، جهت جست و جو تنها با استفاده از گرادینان هزینه به دست می آید.
۱۱. در مسائل بهینه سازی مقید، جهت جست و جو تنها با استفاده از گرادینانهای قیود به دست می آید.
۱۲. در مسائل مقید، برای محاسبه جهت جست و جو از تابع کاهشی استفاده می شود.
۱۳. در مسائل مقید، برای محاسبه یک نقطه قابل قبول از تابع کاهشی استفاده می شود.
۱۴. در مسائل مقید، تابع هزینه می تواند به عنوان یک تابع کاهشی مورد استفاده قرار گیرد.
۱۵. برای همگرایی الگوریتمها، روی یک تابع کاهشی، جست و جوی یک بعدی باید انجام پذیرد.
۱۶. یک الگوریتم توانمند همگرایی را تضمین می کند.
۱۷. مجموعه قید باید محدود و کران دار باشد تا همگرایی الگوریتمها را تضمین کند.
۱۸. الگوریتمهای کارا از راهبرد قید پتانسیل استفاده می کنند.
۱۹. قید  $x_1 + x_2 \leq -2$  می تواند به شکل  $(x_1 + x_2)/(-2) \leq 1.0$  نرمال شود.
۲۰. قید  $x_1^2 + x_2^2 \leq 9$  در  $x_1 = 3$  و  $x_2 = 3$  فعال است.

### بخش ۶.۳ خطی سازی مسائل مقید

#### ۶.۲ با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید

۱. خطی سازی توابع هزینه و قید گامی اساسی در حل مسائل بهینه سازی غیرخطی است.
۲. مسائل مقید عمومی نمی توانند با حل یک رشته از زیرمسائل برنامه ریزی خطی حل شوند.
۳. به طور کلی، زیرمسئله خطی شده بدون حدود حرکت، ممکن است بدون کران باشد.
۴. همگرایی روش برنامه ریزی خطی دنباله ای برای مسائل مقید عمومی تضمین شده است.
۵. حدود حرکت در روش برنامه ریزی خطی دنباله ای ضروری است.

۶. در الگوریتم برنامه ریزی خطی دنباله ای قیود مساوی می توانند لحاظ شوند.

در مسائل زیر، در نقاط داده شده یک تقریب خطی ساخته و آن را روی ترسیمه مسئله اصلی نشان دهید:

۶.۳ مسئله طراحی تیر بخش ۲.۸.۵ را در نظر بگیرید: تابع

$$f(b, d) = bd$$

را نسبت به قیود

$$g_1 = \frac{(2.40E+08)}{bd^2} - 10 \leq 0$$

$$g_2 = \frac{(2.25E+05)}{bd} - 2 \leq 0$$

$$g_3 = d - 2b \leq 0$$

$$10 \leq b \leq 1000; \quad 10 \leq d \leq 1000$$

مینیمم کنید. در روابط بالا،  $b$  عرض و  $d$  ضخامت تیر است (برحسب میلی متر). یک تقریب خطی برای مسئله در نقطه  $(250, 300)$  میلی متر بسازید. زیرمسئله خطی شده و مسئله اصلی را روی یک کاغذ ترسیم رسم کنید.

۶.۴ یک مسئله طراحی پایه تابلو با مینیمم جرم در بخش ۲.۶.۷ رابطه سازی شد که عبارت بود از یافتن شعاع متوسط  $R$  و ضخامت  $t$  برای مینیمم شدن

$$\text{جرم} = 2\pi R t$$

مشروط به قید تنش

$$\frac{P}{2\pi R t} \leq \sigma_s$$

و قید بار کماتش

$$P \leq \frac{\pi^3 E R^3 t}{4l^2}$$

و محدودیتهای ساده روی متغیرهای طراحی به شکل زیر

$$5 \leq R \leq 100 \text{ cm}; \quad 0.5 \leq t \leq 5 \text{ cm}$$

فرض کنید  $\sigma_s = 250 \text{ MPa}$ ،  $l = 500 \text{ cm}$ ،  $E = 210 \text{ GPa}$ ،  $P = 50 \text{ kN}$  و

$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  . در نقطه  $R = 12 \text{ cm}$  و  $t = 4 \text{ cm}$  برای مسأله یک تقریب خطی بسازید. روی یک کاغذ رسم، زیرمسأله خطی شده و مسأله اصلی را رسم کنید.

۶.۵ یک مسأله پایه دیواری با حجم مینیمم در بخش ۳.۸.۱ رابطه سازی شد که عبارت بود از یافتن مساحت سطح مقطع  $A_1$  و  $A_2$  (cm<sup>2</sup>) برای مینیمم ساختن

$$\text{حجم} = 50A_1 + 40A_2$$

مشروط به قيود تنش

$$\frac{125}{A_1} - 1 \leq 0$$

$$\frac{100}{A_2} - 1 \leq 0$$

و قيد نامنفی بودن متغیرهای طراحی

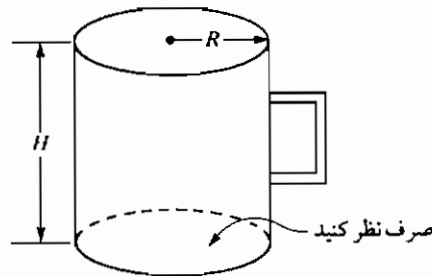
$$-A_1 \leq 0; \quad -A_2 \leq 0$$

در نقطه  $A_1 = 150 \text{ cm}^2$  و  $A_2 = 150 \text{ cm}^2$  برای مسأله یک تقریب خطی بسازید. زیرمسأله خطی شده و مسأله اصلی را روی یک کاغذ ترسیم رسم کنید.

۶.۶ برای ساختن یک ساختمان اداری چند طبقه یک زمین  $100 \times 100 \text{ m}$  در دست است. حداقل مساحت مورد نیاز در تمامی طبقات  $20\,000 \text{ m}^2$  است. براساس دستورالعمل منطقه ای، ارتفاع ساختمان حداکثر می تواند ۲۱ متر باشد و مساحت توقفگاه بیرون ساختمان باید دست کم ۲۵٪ مساحت تمامی طبقات باشد. تصمیم براین است که ارتفاع هر طبقه حداقل ۳/۵ متر باشد. هزینه ساخت برحسب میلیون دلار  $(0.6h + 0.001A)$  تخمین زده می شود که در آن  $A$  مساحت سطح مقطع ساختمان در هر طبقه و  $h$  ارتفاع ساختمان است. مسأله طراحی کمترین هزینه را رابطه سازی کرده (مانند تمرین ۲.۱) و آن را به شکل نرمال استاندارد تبدیل کنید و در نقطه  $h = 12$ ،  $A = 4000$  یک تقریب خطی بسازید. زیرمسأله خطی شده و مسأله اصلی را روی یک کاغذ ترسیم رسم کنید.

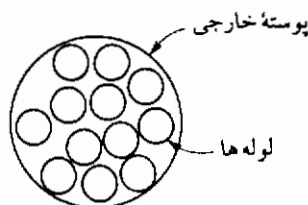
۶.۷ لیوان نوشابه ای را که در شکل ۶.۷ نشان داده شده طوری طراحی کنید که ظرفیت آن ماکزیمم باشد (مانند تمرین ۲.۳). ارتفاع و شعاع لیوان نباید بیشتر از ۲۰ سانتی متر باشد. شعاع لیوان باید حداقل ۵ سانتی متر باشد. مساحت سطح جانبی

نباید بیشتر از ۹۰۰ سانتی متر مربع باشد (از مساحت کف و دسته لیوان صرف نظر کنید). مسأله طراحی بهین را رابطه سازی کرده، آن را به شکل نرمال استاندارد تبدیل کنید؛ و در نقطه شعاع = ۶ سانتی متر و ارتفاع = ۱۵ سانتی متر یک تقریب خطی بسازید. زیرمسأله خطی شده و مسأله اصلی را روی یک کاغذ ترسیم رسم کنید.



شکل E۶.۷ لیوان نوشابه

کارخانه ای برای افزایش سطح انتقال حرارت مبدل‌های پوسته و لوله به طول / تولیدی خود آنها را مجدداً طراحی می کند. یک دید از مقطع آن در شکل E۶.۸ نشان داده شده است. محدودیتهای مشخصی در مسأله طراحی وجود دارد. حداقل شعاع لوله های در دسترس 0.5 cm بوده و همه آنها باید از یک اندازه باشند. به علاوه، مساحت سطح مقطع تمامی لوله نباید از ۲۰۰۰ سانتی متر مربع تجاوز کند، زیرا باید فضای مناسب در داخل پوسته بیرونی وجود داشته باشد. برای ماکزیمم شدن سطح تبادل حرارت و به دست آوردن تعداد لوله ها و شعاع هر لوله مسأله را رابطه سازی کنید (مانند تمرین ۲.۴). مسأله را به شکل نرمال استاندارد تبدیل کرده و در نقطه شعاع = ۲ و تعداد لوله = ۱۰۰ تقریب خطی بسازید. زیرمسأله خطی شده و مسأله اصلی را روی یک کاغذ ترسیم رسم کنید.



شکل E۶.۸ سطح مقطع یک مبدل پوسته و لوله

- ۶.۹ بعد از برنده شدن در یک مناقصه برای ساختن یک توقفگاه، تصمیم گرفتیم که در منطقه بازسازی شده مرکز شهر یک توقفگاه بسازیم. قیمت زمین  $200W + 100D$  است که در آن  $W$  پهنای زمین در امتداد خیابان و  $D$  طول آن برحسب متر می باشد. پهنای در امتداد خیابان ۱۰۰ متر و بیشترین طول در دسترس ۲۰۰ متر است. می خواهیم مساحت زمین حداقل ۱۰۰۰۰ متر مربع باشد. برای خوش منظر بودن، شهرداری اجازه نمی دهد که طول زمین بیشتر از دو برابر عرض آن باشد. مسأله طراحی را برای مینیمم شدن هزینه رابطه سازی کرده (مانند تمرین ۲.۵)، آن را به شکل نرمال استاندارد تبدیل کنید؛ و در نقطه  $W = 100$  و  $D = 100$  یک تقریب خطی بسازید. زیر مسأله خطی شده و مسأله اصلی را روی یک کاغذ ترسیم رسم کنید.
- ۶.۱۰ یک قوطی نوشابه سر باز طراحی کنید که ۶۰۰ سانتی متر مکعب گنجایش داشته باشد و مساحت ورق فلزی به کار رفته در آن حداقل باشد. این قوطی استوانه ای به ارتفاع داخلی  $h$ ، و شعاع  $r$  است. نسبت ارتفاع به قطر نباید کمتر از ۱.۰ و بیشتر از ۱.۵ باشد. ارتفاع نباید از ۲۰ سانتی متر بیشتر شود. مسأله بهینه سازی طراحی را رابطه سازی کرده (مانند تمرین ۲.۹)، آن را به شکل نرمال استاندارد تبدیل کنید؛ و در نقطه  $r = 6$ ،  $h = 16$  یک تقریب خطی بسازید. زیر مسأله خطی شده و مسأله اصلی را روی یک کاغذ ترسیم رسم کنید.
- ۶.۱۱ یک کانتینر حمل و نقل را با ابعاد  $b \times b \times h$  برای مینیمم شدن نسبت زیر طراحی کنید: (هزینه حمل بار برای رفت) / (هزینه رفت و برگشت کانتینر به تنهایی). از داده های زیر استفاده کنید:

$$\text{سطح/جرم کانتینر} : 80 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{ماکزیمم مقدار } b : 10 \text{ m}$$

$$\text{ماکزیمم مقدار } h : 18 \text{ m}$$

$$\text{جرم خالص } \$18/\text{kg} : \text{هزینه رفت، پر یا خالی}$$

$$\text{جرم بار} : 150 \text{ kg/m}^3$$

مسأله بهینه سازی طراحی را رابطه سازی کرده (مانند تمرین ۲.۱۰)، آن را به شکل نرمال استاندارد تبدیل کنید؛ و در نقطه  $b = 5$  و  $h = 10$  یک تقریب خطی بسازید. زیر مسأله خطی شده و مسأله اصلی را روی یک کاغذ ترسیم رسم کنید.

۶.۱۲ برای عملیات استخراج معدن یک واگن مکعب مستطیل روباز برای حمل مواد نیاز است. داده های مسأله عبارتند از:

هزینه ساخت

بدنه ها:  $\$50/m^2$

دو انتها:  $\$60/m^2$

کف:  $\$90/m^2$

قیمت بیمه: ۲۵٪ هزینه ساخت

عمر مفید: ۲۰ سال

نگهداری سالیانه: سطح خارجی  $\$12/m^2$

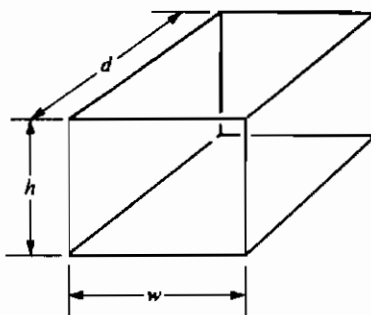
حداقل حجم مورد نیاز:  $150 m^3$

نرخ بهره: ۱۲٪ در سال

مسأله به دست آوردن ابعاد کانتینر را برای مینیمم شدن هزینه رابطه سازی کنید (مانند تمرین ۲.۱۱). مسأله را به شکل نرمال استاندارد تبدیل کرده و در نقطه عرض  $= 5$ ، طول  $= 5$  و ارتفاع  $= 5$  یک تقریب خطی بسازید.

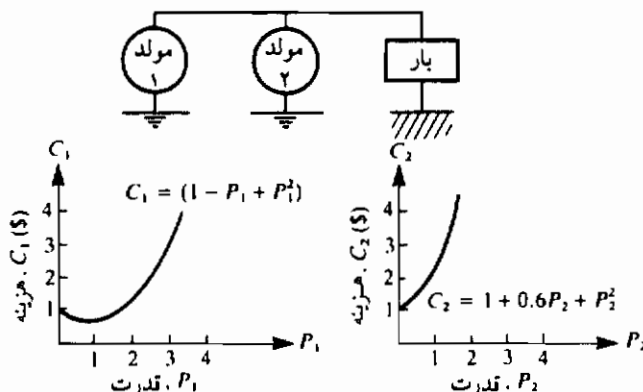
۶.۱۳ مخزن استوانه ای شکلی طراحی کنید که دو طرف آن بسته و حجم آن  $150 m^3$  باشد. هزینه ساخت متناسب با مساحت ورق مصرفی و برابر ۴۰۰ دلار در متر مربع است. قرار است مخزن در انباری که سقف آن شیب دار است گذاشته شود. بنابراین ارتفاع  $H$  مخزن با رابطه  $H \leq 10 - \frac{D}{2}$  محدود می شود که در آن  $D$  قطر مخزن است. مسأله طراحی مینیمم کردن هزینه را رابطه سازی کنید (مانند تمرین ۲.۱۲). مسأله را به شکل نرمال استاندارد تبدیل کرده و در نقطه  $D = 4$  و  $H = 8$  یک تقریب خطی بسازید. زیرمسأله خطی شده و مسأله اصلی را روی یک کاغذ ترسیم رسم کنید.

۶.۱۴ قاب فولادی نشان داده شده در شکل ۶.۱۴ را طوری طراحی کنید که هزینه آن مینیمم گردد. هزینه عضوهای افقی در یک بعد  $20w$  و در بعد دیگر  $30d$  است. هزینه ستونهای عمودی  $50h$  است. قاب باید حداقل  $600 m^3$  حجم را بپوشاند. مسأله بهینه سازی طراحی را رابطه سازی کرده (مانند تمرین ۲.۱۳) و آن را به شکل نرمال استاندارد تبدیل کنید. در نقطه  $w = 10$ ،  $d = 10$  و  $h = 4$  یک تقریب خطی بسازید.



شکل E۶.۱۴ قاب فولادی

۶.۱۵ دو مولد الکتریکی به هم متصل شده‌اند تا قدرت کلی مورد نیاز بار را تولید کنند. هزینه هر مولد تابعی از قدرت خروجی آن است، همچنان که در شکل E۶.۱۵ نشان داده شده است. تمامی هزینه‌ها و قدرتها براساس یک واحد بیان شده است. قدرت مورد نیاز حداقل ۶۰ واحد می‌باشد. مسأله طراحی را برای مینیمم شدن هزینه رابطه سازی کرده (مانند تمرین ۲.۱۴)، آن را به شکل نرمال استاندارد تبدیل کنید؛ و در نقطه  $P_1 = 2$  و  $P_2 = 1$  یک تقریب خطی بسازید. زیرمسأله خطی شده و مسأله اصلی را روی یک کاغذ ترسیم رسم کنید.



شکل E۶.۱۵ مولد برق

## بخش ۶.۴ الگوریتم برنامه ریزی خطی دنباله ای

برای مسائل زیر دو چرخه از الگوریتم برنامه ریزی خطی دنباله ای را کامل کنید (حدود حرکت را ۵۰٪ بگیرید و در صورت لزوم آن را تنظیم کنید):

۶.۱۶	تمرین ۶.۳	۶.۱۷	تمرین ۶.۴
۶.۱۸	تمرین ۶.۵	۶.۱۹	تمرین ۶.۶
۶.۲۰	تمرین ۶.۷	۶.۲۱	تمرین ۶.۸
۶.۲۲	تمرین ۶.۹	۶.۲۳	تمرین ۶.۱۰
۶.۲۴	تمرین ۶.۱۱	۶.۲۵	تمرین ۶.۱۲
۶.۲۶	تمرین ۶.۱۳	۶.۲۷	تمرین ۶.۱۴
۶.۲۸	تمرین ۶.۱۵		

## بخش ۶.۵ زیرمسائل برنامه ریزی درجه دو

مسائل  $QP$  زیر را با استفاده از روش سیمپلکس توسعه یافته حل کنید:

۶.۲۹	تابع	$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$
	رابطه به قیود	$x_1 + x_2 \leq 5$
	مینیمم کنید.	$x_1, x_2 \geq 0$
۶.۳۰	تابع	$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$
	رابطه به قیود	$x_1 + 2x_2 \leq 6$
	مینیمم کنید.	$x_1, x_2 \geq 0$
۶.۳۱	تابع	$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$
	رابطه به قیود	$x_1 + 2x_2 \leq 2$
	مینیمم کنید.	$x_1, x_2 \geq 0$
۶.۳۲	تابع	$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3x_1$
	رابطه به قیود	$x_1 + x_2 \leq 3$
	مینیمم کنید.	$x_1, x_2 \geq 0$
۶.۳۳	تابع	$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 2x_2 + 2$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2 - 8x_1$$

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 - 4 = 0$$

$$x_1 - x_2 - 2 = 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2 - 8x_1$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 18x_1 + 9x_2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 10$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 - 4 \leq 0$$

$$2 - x_1 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - 0.8x_2x_3$$

$$1.3x_1 + 1.2x_2 + 1.1x_3 \geq 1.15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 \leq 0.7$$

$$x_2 \leq 0.7$$

$$x_3 \leq 0.7$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

رانبت به قیود

مینیم کنید.

۶.۳۴

تابع

رانبت به قیود

مینیم کنید.

۶.۳۵

تابع

رانبت به قیود

مینیم کنید.

۶.۳۶

تابع

رانبت به قیود

مینیم کنید.

۶.۳۷

تابع

رانبت به قیود

مینیم کنید.

۶.۳۸

تابع

رانبت به قیود

مینیم کنید.

۶.۳۹

تابع

رانبت به قیود

مینیم کنید.

۶.۴۰

تابع

رانبت به قیود

مینیم کنید.

در تمرینهای زیر، زیرمسأله برنامه ریزی خطی و درجه دو را بیابید و آنها را روی یک کاغذ ترسیم رسم کنید. جهت جست و جو را برای زیرمسأله یافته و آنها را روی ترسیمه مسأله اصلی نشان دهید.

۶.۴۱	تمرین ۶.۳	۶.۴۲	تمرین ۶.۴
۶.۴۳	تمرین ۶.۵	۶.۴۴	تمرین ۶.۶
۶.۴۵	تمرین ۶.۷	۶.۴۶	تمرین ۶.۸
۶.۴۷	تمرین ۶.۹	۶.۴۸	تمرین ۶.۱۰
۶.۴۹	تمرین ۶.۱۱	۶.۵۰	تمرین ۶.۱۲
۶.۵۱	تمرین ۶.۱۳	۶.۵۲	تمرین ۶.۱۴
۶.۵۳	تمرین ۶.۱۵		

#### بخش ۶.۶ روش تندترین کاهش مقید

۶.۵۴ با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید

۱. وقتی قیود فعال وجود دارند اساس روش تندترین کاهش مقید (CSD) برای جهت جست و جو، استفاده از گرادینان تابع هزینه است.
۲. روش تندترین کاهش مقید دو زیرمسأله را حل می کند: تعیین جهت جست و جو و اندازه گام.
۳. در روش CSD تابع هزینه به عنوان تابع کاهش استفاده می شود.
۴. زیرمسأله QP در روش CSD محدب قطعی است.
۵. برای زیرمسأله QP در روش CSD اگر جهت جست و جویی موجود باشد یگانه است.
۶. در روش CSD نقض قید در تعیین اندازه گام نقشی ایفا نمی کند.
۷. در روش CSD ضرایب لاگرانژ زیرمسأله در تعیین اندازه گام نقش دارند.
۸. هنگام جست و جوی خطی در روش CSD مقدار قیود باید محاسبه شوند.
۹. در روش CSD جهت جست و جوی خطی غیر دقیق استفاده می شود.
۱۰. در روش CSD راهبرد قید پتانسیل می تواند استفاده گردد.

برای مسائل زیر، دو چرخه از روش تندترین کاهش مقید را برای نقطه شروع داده شده کامل

کنید (فرض کنید  $R_0 = 1$  و  $\gamma = 0.5$ ):

تمرین ۶.۴	۶.۵۶	تمرین ۶.۳	۶.۵۵
تمرین ۶.۶	۶.۵۸	تمرین ۶.۵	۶.۵۷
تمرین ۶.۸	۶.۶۰	تمرین ۶.۷	۶.۵۹
تمرین ۶.۱۰	۶.۶۲	تمرین ۶.۹	۶.۶۱
تمرین ۶.۱۲	۶.۶۴	تمرین ۶.۱۱	۶.۶۳
تمرین ۶.۱۴	۶.۶۶	تمرین ۶.۱۳	۶.۶۵
		تمرین ۶.۱۵	۶.۶۷

#### بخش ۶.۷ روشهای شبه نیوتن مقید

برای مسائل زیر، دو چرخه از روش شبه نیوتن را کامل کرده و جهت‌های جست و جو را با جهت‌هایی که از الگوریتم CSD به دست آمده مقایسه کنید (توجه کنید که اولین چرخه برای هر دو روش یکسان است؛ (فرض کنید  $R_0 = 1$  و  $\gamma = 0.5$ ):

تمرین ۶.۴	۶.۶۹	تمرین ۶.۳	۶.۶۸
تمرین ۶.۶	۶.۷۱	تمرین ۶.۵	۶.۷۰
تمرین ۶.۸	۶.۷۳	تمرین ۶.۷	۶.۷۲
تمرین ۶.۱۰	۶.۷۵	تمرین ۶.۹	۶.۷۴
تمرین ۶.۱۲	۶.۷۷	تمرین ۶.۱۱	۶.۷۶
تمرین ۶.۱۴	۶.۷۹	تمرین ۶.۱۳	۶.۷۸
		تمرین ۶.۱۵	۶.۸۰



### بهینه سازی طراحی تعاملی

#### ۷.۱ مقدمه

روشهای بهینه سازی، به تعبیری، جنبه های آزمون و خطای خسته کننده فرآیند طراحی را خودکار می کنند؛ بنابراین به مهندس اجازه تمرکز بیشتر روی جنبه های خلاقیت و نوآوری می دهد. روشهای بهینه سازی با جمع بین سرعت رایانه و الگوریتمهای محاسباتی طراحیهای را به روشی نظام مند به وجود می آورند که بازده بالایی داشته (نه فقط قانع کننده باشند) و در دنیای پر رقابت امروزی مورد نیاز هستند. روشهای بهینه سازی تقریباً در هر موقعیت طراحی مهندسی می توانند به کار روند، مانند طراحی بدنه هواپیماها، ساختمانها، سازه های مربوط به خودرو، اجزای موتور، مبدل های حرارتی، توسعه زمینها، پروژه های استحصال آب، فرآیندهای شیمی، مدارهای الکترونیک و بسیاری دیگر.

بیشتر روشهای عددی بهینه سازی طراحی شامل محاسبات تکراری قابل توجهی هستند. این روشها باید به نرم افزارهای رایانه ای تبدیل شوند. عملکرد و توانمندی روشها از خطاهای گرد کردن و قطع کردن تأثیر می پذیرد. بیشتر الگوریتمهای بهینه سازی فقط تا حد خاصی همگرا هستند، یعنی الگوریتمی که برای مسائل بهینه سازی عمومی در تعداد محدودی چرخه همگرا شود وجود ندارد. به علاوه، آنها در گامهای محاسباتی یکنواخت نیستند، زیرا یک الگوریتم می تواند بسته به دانش، تجربه و اولویتهای برنامه نویس به روشهایی متفاوت نصب و اجرا

گردد. مشکل آفرین تر این که وقتی یک نرم افزار روی دو رایانه نصب می شود و یا هنگامی که مترجمهای متفاوتی در یک رایانه به کار گرفته می شوند، عملکرد نرم افزار ممکن است تغییر کند. تمامی این مشکلات و نبود یکنواختی بر ضرورت کنترل عملکرد یک الگوریتم و تعامل با آن در کاربردهای عملی دلالت می کند.

به منظور کنترل پیشرفت فرآیند طراحی بهین، به نرم افزارها و سخت افزارهای مناسبی نیاز است. نرم افزار باید ابزار تعاملی مناسب را برای طراحی فراهم کند تا او بتواند در صورت نیاز فرآیند طراحی را تغییر دهد. اطلاعات طراحی باید به شکلی جامع نمایش داده شوند. ابزارهای کمکی مناسب نیز باید در دسترس باشند. نمایش هندسی داده ها و اطلاعات مختلف می تواند فرآیند تصمیم گیری تعاملی را آسانتر کند؛ بنابراین باید در دسترس باشد.

در این فصل ما فرآیند بهبود سازی طراحی تعاملی را تشریح می کنیم. نقش طراحی و الگوریتم در تعامل توضیح داده می شود. قابلیت تعامل و ابزار تصمیم بحث می شود و از مثالهای ساده برای تشریح کاربرد آنها در فرآیند طراحی استفاده می شود. این بحثها ویژگیهای یک نرم افزار بهبود سازی طراحی تعاملی را مشخص می کند.

در زیر خلاصه ای از مطالب این فصل آمده است.

بخش ۷.۲ نقش تعامل در بهبود سازی طراحی. فرآیند بهبود سازی طراحی تعاملی تعریف و نقش نرم افزار و سخت افزار رایانه ای مناسب مطرح می شود. مزایای تعامل طراحی این که چرا مفید است مورد بحث قرار می گیرد.

بخش ۷.۳ الگوریتمهای بهبود سازی طراحی تعاملی. الگوریتمهای متعدد مناسب برای طراحی تعاملی تشریح و با مثالهایی توضیح داده می شود. با استفاده از این الگوریتمها، طراحی می تواند طراحی قابل قبول را بیابد، کاهش مشخصی در تابع هزینه را به وجود آورد، و تصحیح قیود را بدون تغییر در هزینه و یا افزایش مشخصی در هزینه انجام دهد. اینها روشهای بسیار مفیدی هستند و، هرگاه به طور مناسبی نصب شوند، می توانند برای هدایت فرآیند طراحی تعاملی به سمت طراحی بهتر و در نهایت طراحی بهین به کار روند.

بخش ۷.۴ قابلیتهای تعاملی مطلوب. قابلیتهای مفید برای تعامل طراحی تشریح می شود. اینها شامل فراهم کردن داده ها، تصمیم سازی، و ابزار ترسیم می شوند.

بخش ۷.۵ نرم افزار بهبود سازی طراحی تعاملی. در این بخش، یک نرم افزار که قابلیتهای تعاملی مختلف دارد تشریح می شود. چگونگی ارتباط برقرار کردن کاربر با برنامه توضیح

داده می شود.

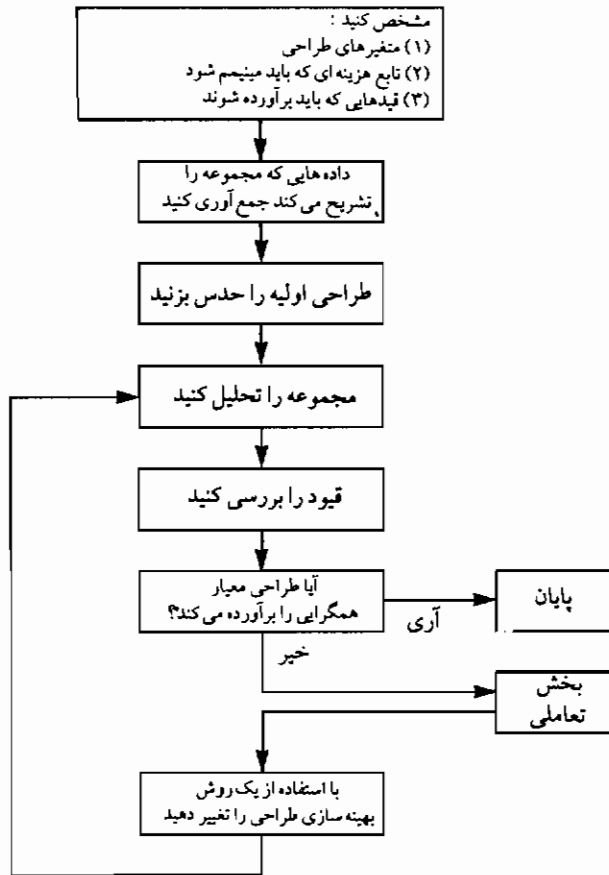
بخش ۷.۶ مثالهایی از بهینه سازی طراحی تعاملی. برای تشریح استفاده از قابلیت‌های تعاملی متفاوت، مثالی از طراحی فتر حلقوی انتخاب شده است. مسأله به طور کامل رابطه سازی می شود. برای حل مسأله قابلیت‌های مختلف نرم افزار (اعم از اجرای یکسره و تعاملی) مورد بررسی قرار می گیرد. استفاده از تصمیم گیری تعاملی و ترسیم شرح داده می شود.

## ۷.۲ نقش تعامل در بهینه سازی طراحی

### ۷.۲.۱ بهینه سازی طراحی تعاملی چیست؟

در فصل (۱) فرآیند طراحی مهندسی را تشریح کردیم. تفاوت بین فرآیند طراحی بهین و طراحی قراردادی بیان شد. فرآیند طراحی بهین نیاز به الگوریتمهای محاسباتی هوشمند دارد. با این همه بیشتر الگوریتمها در گامهای محاسباتی خود عدم قطعیت‌هایی دارند. بنابراین، کنترل تعاملی پیشرفت آنها و راهنمایی فرآیند طراحی بهین کاری عاقلانه است. الگوریتمهای بهینه سازی طراحی تعاملی بر اساس استفاده از ورودیهای طراحی فرآیند تعاملی استوار است. به عبارتی آنها الگوریتمهای بدون پایان هستند که در آنها طراحی می تواند آنچه را بر حسب شرایط طراحی فعلی مورد نیاز تشخیص داد، مشخص کند. آنها باید در نرم افزارهایی که قابلیت متوقف کردن فرآیند تعاملی را دارند و می توانند وضعیت طرح را برای کاربر گزارش کنند، نصب و اجرا گردند. به دستور طراحی، داده های مربوط و شرایط موجود باید روی رایانه های تصویری نمایش داده شود. گزینه های مختلف باید برای طراحی موجود باشد تا تصمیم گیری و تغییر داده های طرح را سهولت بخشد. باید امکان شروع مجدد و یا قطع فرآیند وجود داشته باشد. با چنین تسهیلاتی طراحی کنترل خود را روی فرآیند بهینه سازی طراحی کامل می کند. آنها می توانند فرآیند را برای به دست آوردن طرح بهتر و در نهایت بهترین طرح راهنمایی کنند.

واضح است که برای بهینه سازی طراحی تعاملی، الگوریتمهای مناسب باید در نرم افزارهای بسیار انعطاف پذیر و با کاربری آسان نصب شوند. باید برای طراحی این امکان وجود داشته باشد که با الگوریتم رابطه متقابل برقرار کند و ترتیب محاسبات را تغییر دهد. ما در بخش ۷.۳ الگوریتمهایی را که برای تعامل طراحی مناسب هستند تشریح خواهیم کرد. شکل ۷.۱ یک نمودار جریانی مفهومی برای فرآیند بهینه سازی طراحی تعاملی است. آن یک حالت تکامل یافته از



شکل ۷.۱ فرآیند طراحی بهین تعاملی

شکل ۱.۳ است که در آن یک جعبه تعاملی اضافه شده است. طراحی توسط این جعبه با فرآیند طراحی ارتباط برقرار می کند. قابلیت های تعامل مطلوب و استفاده از آنها را بعداً در این فصل بررسی خواهیم کرد.

#### ۷.۲.۲ نقش رایانه در بهبود سازی طراحی تعاملی

همان طور که قبلاً بحث کردیم، با ورود رایانه های با سرعت بالا و الگوریتم های محاسباتی، فلسفه اصلی طراحی قراردادی آزمون و خطا تغییر یافت. روش طراحی نوین با

نوبین باد و کلمه الگو و تحلیل مشخص می شود. وقتی مسأله طراحی به طور مناسبی رابطه سازی شد، روشهای عددی می توانند برای بهینه کردن سیستم استفاده شوند. روشها تکراری هستند و تا همگرا شدن به جواب بهین رشته ای از نقاط طراحی تولید می کنند. آنها برای نصب رایانه ای بسیار مناسبند تا از سرعت رایانه برای انجام محاسبات تکراری استفاده کنند.

برای کاربردهای عملی انتخاب الگوریتمهای بهینه سازی توانمند بسیار مهم است. در غیر این صورت عدم موفقیت فرآیند طراحی بدون شک به اتلاف منابع رایانه ای و از همه مهمتر از بین رفتن وقت و روحیه طراحی می انجامد.

الگوریتم بهینه سازی شامل یک فرآیند حد است، زیرا بعضی از پارامترها با نزدیک شدن به طراحی بهین به سمت صفر میل می کنند. ظهور چنین فرآیندهای حدی در نصب رایانه ای مشکل است، زیرا ممکن است به پدیدار شدن اعداد بسیار بزرگ و بسیار کوچک بینجامد که رایانه از ادامه کار باز می ماند. به عبارت دیگر فرآیندهای حدی هرگز نمی توانند در یک رایانه به طور دقیق برآورده شوند و چنین صفر و یایی نهاییهایی باید در رایانه به ترتیب با اعداد بسیار کوچک و بسیار بزرگ تعریف شوند. این مقادیر نسبی اند و به رایانه مورد استفاده بستگی دارند.

اغلب اثبات همگرایی یا نرخ همگرایی یک الگوریتم بهینه سازی چرخه ای براساس عملیات ریاضی دقیق و تحت شرایط محدودی انجام می پذیرد. بنابراین عملکرد نظری یک الگوریتم ممکن است در عمل، به خاطر عملیات غیر دقیق ریاضی که خطاهای گرد کردن و قطع کردن را در نمایش اعداد باعث می شود، اصلاً معتبر نباشد. این بحث ضرورت برنامه نویسی مناسب و کنترل تعاملی الگوریتمهایی را که حتی از جنبه نظری همگرا می باشند نیز روشن می سازد.

حتی اگر نظریه های بهینه سازی فراوانی برای مسائل برنامه ریزی غیر خطی وجود داشته باشند، لزوماً به ما چگونگی نصب و پیاده کردن گامهای مشخص آن را در برنامه رایانه ای بیان نمی کنند. بنابراین ما باید راهکارها و قواعدی را براساس تجربیات عملی و عددی تدوین کنیم. اطلاعات بارزشی هنگام فرآیند بهینه سازی چرخه ای تولید می شود. این اطلاعات می تواند در مشخص کردن طراحی و تولید اطلاعات بیشتر راجع به مسأله مورد استفاده قرار گیرد که محاسبه آن در غیر این صورت مشکل بود. به عنوان مثال، در روشهای شبه نیوتن برای بهینه سازی نامقید، اطلاعات مرتبه بالاتر تقریبی از داده های محاسبه شده تولید می شود. برای به کار بستن تمامی اطلاعاتی که در فرآیند بهینه سازی طراحی چرخه ای به وجود می آید،

روش جاری، تدوین سیستمهای هوشمند مبتنی بر دانش است که قدرت تصمیم را در یک سیستم تقویت می کند. چنین سیستمهای نرم افزاری می تواند فرآیند طراحی تعاملی را به میزان قابل توجهی ساده کند.

### ۲.۲.۳ چرا بهینه سازی طراحی تعاملی؟

فرآیند طراحی می تواند کاملاً پیچیده باشد. اغلب مسأله نمی تواند برای تحلیل کامل به شکل صریح بیان شود و در داده های طراحی عدم قطعیتها و وجود دارد. لازم نیست جواب مسأله وجود داشته باشد. در بسیاری از مواقع، رابطه سازی مسأله باید به عنوان قسمتی از فرآیند طراحی ارائه شود. بنابراین، بهینه کردن یک مسأله غیر دقیق تا آخر و انجام یکسره آن نه مطلوب است و نه مفید. این که در پایان کار مشخص شود داده های غلط استفاده شده اند و یا قیدی ناخودآگاه حذف شده، چیزی جز به هدر دادن منابع ارزشمند نیست. لازم است یک الگوریتم تعاملی و نرم افزاری که قابلیت ایجاد رابطه متقابل با طراح دارد داشته باشیم. چنین قابلیت می تواند در طراحی عملی بسیار مفید باشد. با استفاده از این قابلیتها، نه تنها طراحیهای بهتر را می توان به دست آورد بلکه دید بیشتری از عملکرد می توان پیدا کرد. رابطه سازی مسأله می تواند با دقت بیشتر انجام شده و طراحیهای نامناسب و بی معنی کنار گذاشته شود. ما چند الگوریتم تعاملی و سایر قابلیتهای مناسب را برای تشریح مفید بودن تعامل طراح در فرآیند طراحی توضیح خواهیم داد.

### ۲.۳ الگوریتمهای بهینه سازی طراحی تعاملی

از بحث قبل روشن است که برای قابلیت تعامل مفید، الگوریتمهای مناسب باید در یک نرم افزار که خوب طراحی شده، نصب و پیاده شود. بعضی از الگوریتمهای بهینه سازی برای تعامل طراح مناسب نیستند. به عنوان مثال، روش تندترین کاهش مقید بخش ۶.۶ و روش شبه نیوتن بخش ۶.۷ برای تعامل مناسب نیستند. گامهای آنها به تعبیری غیر قابل انعطاف هستند که برای طراح شانس کمی وجود دارد که بتواند فرآیند طراحی چرخه ای را تغییر دهد. با این همه، زیرمسأله  $QP$  و مفاهیم اساسی که در آن جا بحث شد می توانند در طراحی الگوریتمهای مناسب برای موقعیتهایی که رابطه متقابل را طلب می کنند استفاده شوند. ما این الگوریتمها را بیان کرده و با مثالهایی شرح می دهیم.

بسته به شرط طراحی در چرخه فعلی، طراحی ممکن است یکی از چهار سؤال زیر را بپرسد:

۱. اگر طراحی فعلی قابل قبول است ولی بهین نیست، آیا تابع هزینه می تواند  $\gamma\%$  کاهش یابد؟
۲. اگر طراحی اولیه در شروع غیر قابل قبول است، آیا یک طراحی قابل قبول با هر هزینه ای می تواند به دست آید؟
۳. اگر طراحی فعلی غیر قابل قبول است، آیا یک طراحی قابل قبول می تواند بدون افزایش هزینه به دست آید؟
۴. اگر طراحی فعلی غیر قابل قبول است، آیا یک طراحی قابل قبول می تواند تنها با  $\delta\%$  جریمه در مقدار هزینه به دست آید؟

در این جا الگوریتمهایی را برای پاسخ به این سؤالات بیان خواهیم کرد. دیده خواهد شد که الگوریتمها از نظر مفهومی کاملاً ساده و برای پیاده کردن آسان هستند. در حقیقت، آنها حالت بهبود یافته روشهای تندترین کاهش مقید (CSD) و شبه نیوتن بخشهای ۶.۶ و ۶.۷ هستند. باید روشن باشد که اگر نرم افزاری تعاملی با قابلیت اجرای مراحل فوق در دسترس باشد، طراحی می تواند فرآیند را گام به گام به سوی طراحی بهتر و در نهایت یک طرح بهین هدایت کند.

### ۷.۳.۱ الگوریتم کاهش هزینه

یک زیرمسئله برای الگوریتم کاهش هزینه می تواند با تقریب هسیان  $H$  و یا بدون آن تعریف شود. بدون بهنگام کردن هسیان، مسئله در معادله های (۶.۳۸) تا (۶.۴۰) تعریف شد و، با بهنگام کردن هسیان، در معادله های (۶.۹۳) تا (۶.۹۵) تعریف می شود. هرچند بهنگام کردن هسیان می تواند به کار رود، ما زیرمسئله کاهش هزینه را بدون آن تعریف خواهیم کرد تا بحث و ارائه آن ساده باشد. چون مسئله کاهش هزینه از یک نقطه قابل قبول یا تقریباً قابل قبول حل می شود، طرف راست بردار  $e$  در معادله (۶.۴۰) صفر است. پس با زیرمسئله QP کاهش هزینه به شکل زیر تعریف می شود. تابع

$$c^T d + 0.5 d^T d \quad (۷.۱)$$

را نسبت به قیود

$$N^T d = 0 \quad (۷.۲)$$

(۷.۳)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{d} \leq \mathbf{b}$$

مینیمم کنید.

ستونهای ماتریسهای  $\mathbf{N}$  و  $\mathbf{A}$  به ترتیب حاوی گرادیانهای قیود مساوی و نامساوی هستند، و  $\mathbf{c}$  گرادیان تابع هزینه است. معادله (۷.۲) ضرب عددی  $\mathbf{d}$  در ستونهای  $\mathbf{N}$  را صفر می دهد. بنابراین،  $\mathbf{d}$  عمود بر گرادیانهای تمامی قیود مساوی است. چون گرادیانهای ماتریس  $\mathbf{N}$  عمود بر سطوح قیود مربوطه هستند، جهت جست و جوی  $\mathbf{d}$  روی صفحه مماس بر قیود مساوی قرار دارد. بردار طرف راست  $\mathbf{b}$  برای قیود نامساوی در معادله (۷.۳) حاوی درایه های صفر برای قیود فعال و درایه های مثبت برای قیود غیرفعال است. اگر قید فعالی با حالت مساوی برآورده شده باقی بماند (یعنی  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}^{(i)} = 0$ )، جهت  $\mathbf{d}$  در صفحه مماس بر قید است. در غیر این صورت باید به طرف ناحیه قابل قبول برای قیود باشد.

زیرمسئله QP که در معادله های (۷.۱) تا (۷.۳) تعریف شد، می تواند دربر گیرنده راهبرد قید پتانسیل باشد، همچنان که در بخش ۶.۶ تشریح شد. زیرمسئله تعیین جهت کاهش هزینه می تواند با هر کدام از برنامه های فرعی ارائه شده در بخش ۶.۵.۳ حل شود. در مسائل نمونه، ما زیرمسئله QP را با استفاده از شرایط کان-تاکر حل می کنیم. روش کاهش هزینه از یک نقطه قابل قبول را الگوریتم کاهش هزینه (CR) می نامیم.

بعد از این که جهت تعیین شد، اندازه گام می تواند با جست و جوی خطی بر روی تابع کاهشی مناسب محاسبه گردد. یا، می توانیم کاهش مشخصی را در تابع هزینه در نظر بگیریم و اندازه گام را به آن طریق به دست آوریم. به عنوان مثال، می توانیم یک کاهش کسری  $\gamma$  در تابع هزینه (برای 5% کاهش،  $\gamma = 0.05$ ) در نظر بگیریم، و براساس آن اندازه گام را محاسبه کنیم. فرض کنید  $\alpha$  اندازه گام در امتداد  $\mathbf{d}$  باشد. آن گاه تغییرات مرتبه اول در هزینه با استفاده از بسط سری تیلور عبارت است از  $\alpha \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$ . با مساوی قرار دادن این با کاهش مورد نظر در هزینه یعنی  $|\gamma f|$ ، اندازه گام به شکل زیر محاسبه می گردد

$$\alpha = \frac{|\gamma f|}{|\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}|} \quad (۷.۴)$$

توجه کنید که برای داشتن اندازه گام منطقی،  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$  نباید در معادله (۷.۴) صفر باشد.

مثال ۷.۱ گام کاهش هزینه. مسئله بهینه سازی طراحی زیر را در نظر بگیرید. تابع

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4.5x_2^2 - 10x_1 - 6x_2$$

را نسبت به قیود

$$x_1 - x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مینیمم کنید.

از نقطه قابل قبول (4, 4)، جهت کاهش هزینه را محاسبه کرده و نقطه طراحی جدید که ۱۰٪ کاهش هزینه را دربر داشته باشد به دست آورید.

حل. قیود را می توان به شکل استاندارد زیر نوشت

$$g_1 = \frac{1}{3}(x_1 - x_2) - 1.0 \leq 0$$

$$g_2 = \frac{1}{12}(x_1 + 2x_2) - 1.0 \leq 0$$

$$g_3 = -x_1 \leq 0$$

$$g_4 = -x_2 \leq 0$$

جواب بهین مسأله با استفاده از شرایط کان-تاکر به شکل زیر محاسبه می شود

$$\mathbf{x}^* = (6, 3); \quad \mathbf{u}^* = (17, 16, 0, 0); \quad f(\mathbf{x}^*) = -55.5$$

در نقطه داده شده (۴، ۴)،

$$f(4, 4) = -24$$

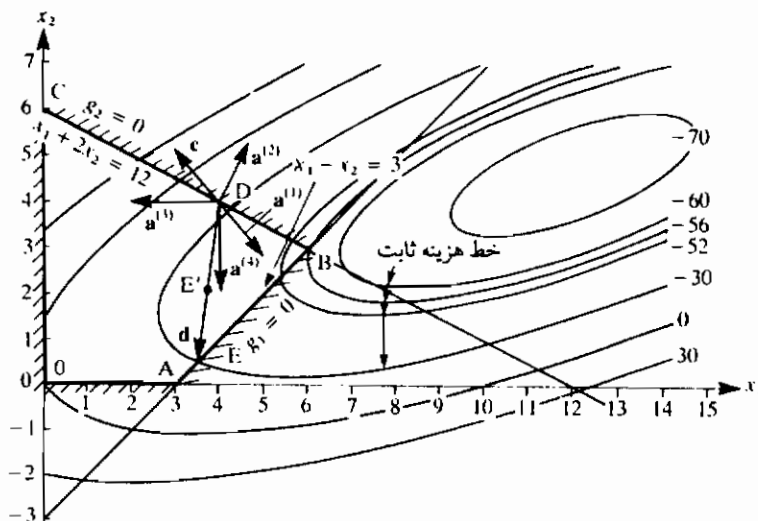
$$g_1 = -1.0 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

$$g_2 = 0 \text{ (active)}$$

$$g_3 = -4.0 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

$$g_4 = -4.0 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

بنابراین، قید  $g_2$  فعال و سایر قیود غیرفعالند. تابع هزینه بسیار بزرگتر از مقدار بهین است. قیود مسأله در شکل ۷.۲ رسم شده اند. ناحیه قابل قبول عبارت است از OABC. چند خط هزینه ثابت در آن جا نشان داده شده است. جواب بهین در نقطه B (6, 3) قرار دارد. نقطه داده شده (4, 4) با حرف D و روی خط B-C در شکل ۷.۲ نشان داده شده است.



شکل ۷.۲ ناحیه قابل قبول برای مثال ۷.۱. گام کاهش هزینه از نقطه D

گرادیان توابع هزینه و قیود در نقطه D (4, 4) به شکل زیر محاسبه می شوند

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (2x_1 - 3x_2 - 10, -3x_1 + 9x_2 - 6) \\ &= (-14, 18) \end{aligned}$$

$$\mathbf{a}^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\mathbf{a}^{(3)} = (-1, 0)$$

$$\mathbf{a}^{(4)} = (0, -1)$$

این گرادیانها در شکل ۷.۲ در نقطه D نشان داده شده اند. جهت هر گرادیان قید به طرفی است که مقدار تابع قید افزایش پیدا می کند. با استفاده از این مقادیر زیرمسئله QP معادله های (۷.۱) تا (۷.۳) به شکل زیر تعریف می شود: عبارت

$$(-14d_1 + 18d_2) + 0.5(d_1^2 + d_2^2)$$

را به شرط

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

مینیمم کنید.

جواب زیرمسئله QP با استفاده از شرایط کان-تاکر یا روش سیمپلکس بخش ۶.۵ عبارت است از

$$\mathbf{d} = (-0.5, -3.5); \quad \mathbf{u} = (43.5, 0, 0, 0)$$

در نقطه جواب تنها یک قید فعال است و ضریب لاگرانژ مقدار مثبت دارد. جهت  $\mathbf{d}$  در شکل ۷.۲ نشان داده شده است. چون قید دوم غیرفعال است،  $\mathbf{d}$  براساس  $\mathbf{a}^{(2)}$  براساس معادله (۷.۳) باید منفی باشد و مقدار آن عبارت است از  $(-0.625)$ . بنابراین، جهت  $\mathbf{d}$  به طرف ناحیه قابل قبول قید دوم است که در شکل ۷.۲ مشاهده می شود.

اندازه گام از معادله (۷.۴) محاسبه می شود و براساس ۱۰٪ کاهش ( $\gamma = 0.1$ ) تابع هزینه عبارت است از

$$\alpha = \frac{|0.1(-24)|}{|(14, -18) \cdot (-0.5, -3.5)|} = 0.3/7$$

بنابراین، نقطه طراحی جدید عبارت است از

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{0.3}{7} \begin{bmatrix} -0.5 \\ -3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.979 \\ 3.850 \end{bmatrix}$$

که در امتداد  $\mathbf{d}$  بسیار به نقطه  $D$  نزدیک است. تابع هزینه در این نقطه به شکل زیر محاسبه می شود

$$f(\mathbf{x}^{(1)}) = -26.304$$

که تقریباً ۱۰٪ از مقدار آن در نقطه فعلی  $(4, 4)$  کمتر است. می توان دید که همه قیود در نقطه جدید غیرفعالند.

جهت  $\mathbf{d}$  در نقطه  $D$  به طرف ناحیه قابل قبول است، چنان که در شکل ۷.۲ می توان دید. هر حرکت کوچکی در امتداد  $\mathbf{d}$  به یک طراحی قابل قبول می انجامد. اگر اندازه گام را یک بگیریم (که اگر جست و جوی خطی غیردقیق بخش ۶.۶ انجام شود به دست می آید)، آن گاه نقطه جدید عبارت است از  $(3.5, 0.5)$  که در شکل ۷.۲ با حرف E نشان داده شده است. در نقطه E قید  $g_1$  فعال و تابع هزینه مقدار  $-29.875$  را خواهد داشت که از مقدار قبلی  $-26.304$  کمتر است. اگر جست و جوی خطی دقیق

انجام دهیم آن گاه مقدار محاسبه شده  $\alpha$  عبارت خواهد بود از 0.5586 و نقطه جدید عبارت است از (3.7207, 2.0449) که در شکل ۷.۲ با نقطه  $E'$  مشخص شده است. تابع هزینه در این نقطه عبارت است از 39.641- که هنوز از اندازه گام واحد بهتر است.

**مثال ۷.۲ گام کاهش هزینه با لیود پتانسیل.** برای مثال ۷.۱، گام کاهش هزینه را تنها با در نظر گرفتن قیود نامساوی پتانسیل محاسبه کنید.

حل. همان طور که قبلاً در بخش ۶.۶ بحث شد، در بعضی از الگوریتمها در تعریف زیر مسأله پیدا کردن جهت فقط قیود نامساوی پتانسیل در نقطه فعلی در نظر گرفته می شوند. جهتی که از این زیر مسأله به دست می آید، با جهتی که در زیر مسأله همه قیود در نظر گرفته شود متفاوت است.

برای این مسأله، در نقطه (4, 4) فقط قید دوم فعال است ( $g_2 = 0$ ). زیر مسأله QP با فعال بودن این قید به شکل زیر تعریف می شود: عبارت

$$(-14d_1 + 18d_2) + 0.5(d_1^2 + d_2^2)$$

را نسبت به قید

$$\frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{6}d_2 \leq 0$$

مینیمم کنید.

با حل مسأله به کمک شرایط کان-تاکر داریم

$$\mathbf{d} = (14, -18); \quad u = 0$$

چون ضریب لاگرانژ برای قید صفر است، فعال نیست؛ بنابراین  $\mathbf{d} = -\mathbf{c}$  جواب زیر مسأله است. این جهت جست و جو به طرف ناحیه قابل قبول در امتداد جهت منفی گرادیان تابع هزینه است؛ همچنان که در شکل ۷.۲ دیده می شود. یک اندازه گام مناسب می تواند در امتداد جهت محاسبه شود.

اگر بخواهیم قید فعال بماند (یعنی  $d_1/12 + d_2/6 = 0$ )، آن گاه جواب زیر مسأله عبارت است از

$$\mathbf{d} = (18.4, -9.2); \quad u = -52.8$$

این جهت مماس بر قید است، یعنی در امتداد خط D-B در شکل ۷.۲.

## ۷.۳.۲ الگوریتم تصحیح قید

اگر در یک نقطه طراحی، مقدار نقض قید خیلی بزرگ باشد، دانستن این که یک طراحی قابل قبول می تواند به دست آید، ممکن است مفید باشد. الگوریتمهای متفاوتی می تواند برای تصحیح نقض قید استفاده شود. ما روشی را که نسبت به روش تندترین کاهش مقید بخش ۶.۶ تفاوت کمی دارد تشریح خواهیم کرد. یک زیرمسئله QP که تصحیح قید را می دهد می تواند از معادله های (۶.۳۸) تا (۶.۴۰) با حذف عبارت مربوط به تابع هزینه به دست آید. به عبارت دیگر، ما هیچ محدودیتی روی تغییرات تابع هزینه نمی گذاریم و زیرمسئله را به شکل زیر تعریف می کنیم. عبارت

$$0.5d^T d \quad (7.5)$$

را مشروط به قیود

$$N^T d = e \quad (7.6)$$

$$A^T d \leq b \quad (7.7)$$

مینیمم کنید.

جواب زیرمسئله جهتی با کوتاهترین فاصله از یک نقطه غیر قابل قبول تا مرز قید (تقریب خطی) را می دهد. معادله (۷.۵) در واقع می گوید: جهت  $d$  را که کوتاهترین مسیر را از نقطه فعلی تا ناحیه قابل قبول می دهد بیابید. معادله های (۷.۶) و (۷.۷) کار تصحیح قید را انجام می دهند. توجه کنید که راهبرد قید پتانسیل که در بخش ۶.۶ بیان شد، این جا نیز قابل استفاده است. بعد از این که جهت پیدا شد، یک اندازه گام می تواند به دست آید که بهبود یافتن نقض قید را تضمین کند. این روش را الگوریتم تصحیح قید (CC) خواهیم خواند.

دقت کنید که معمولاً تصحیح قید، افزایشی را در هزینه به وجود خواهد آورد. با این همه، بعضی از حالت های غیر معمول می تواند باشد که در آنها تصحیح قید همراه با کاهش تابع هزینه است.

**مثال ۷.۳ گام تصحیح قید.** برای مثال ۷.۱، از نقطه غیر قابل قبول (9, 3) گام تصحیح

قید را محاسبه کنید.

**حل.** ناحیه قابل قبول مسئله و نقطه شروع (F) در شکل ۷.۳ نشان داده شده است. گرادیانهای قید و هزینه نیز در آن جا نشان داده شده است. در نقطه (9, 3)، داده های

زیر محاسبه می شوند :

$$f(9, 3) = -67.5$$

$$g_1 = 1 > 0 \text{ (نقض شده)}$$

$$g_2 = 0.25 > 0 \text{ (نقض شده)}$$

$$g_3 = -9 < 0 \text{ (غیر فعال)}$$

$$g_4 = -3 < 0 \text{ (غیر فعال)}$$

$$c = (-1, -6)$$

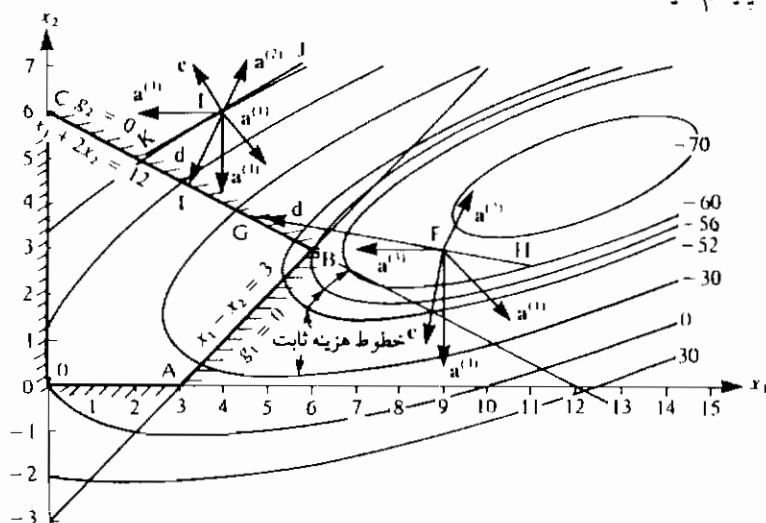
و گرادیانهای قیود مانند مثال ۷.۱ هستند. گرادیانهای هزینه و قید در نقطه F در شکل ۷.۳ نشان داده شده اند. پس، زیرمسئله QP تصحیح قید معادله های (۷.۵) تا (۷.۷) به شکل زیر تعریف می شود. عبارت

$$0.5(d_1^2 + d_2^2)$$

را مشروط به قیود

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ -0.25 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مینیمم کنید.



شکل ۷.۳ ناحیه قابل قبول برای مثال ۷.۱. گامهای تصحیح قید و هزینه ثابت از نقطه F: گام هزینه ثابت از نقطه A

با استفاده از شرایط لازم کان-تاکر، جواب زیرمسئله QP عبارت است از

$$\mathbf{d} = (-3, 0); \quad \mathbf{u} = (6, 12, 0, 0)$$

دقت کنید که کوتاهترین مسیر از نقطه F تا ناحیه قابل قبول امتداد خط F-B است و زیرمسئله QP در حقیقت این جواب را می دهد. نقطه طراحی جدید عبارت است از

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

که در شکل ۷.۳ نقطه B است. در نقطه جدید، قیود  $g_1$  و  $g_2$  فعال و  $g_3$  و  $g_4$  غیرفعالند. بنابراین، تنها یک گام هر دو نقض را دقیقاً تصحیح می کند. این به خاطر خطی بودن تمامی قیود در مثال فعلی است. به طور کلی ممکن است چرخه های متعددی برای تصحیح نقض قید نیاز باشد. دقت کنید که نقطه جدید در واقع نمایانگر جواب بهین است.

### ۷.۳.۳ الگوریتم تصحیح لید در هزینه ثابت

بعضی از مواقع، مقادیر نقض قیود خیلی زیاد نیستند. دانستن این که یک طراحی قابل قبول می تواند بدون افزایش هزینه به دست آید، مفید است. این زیرمسئله هزینه ثابت نامیده می شود که می تواند با اضافه کردن قید دیگری به زیرمسئله QP داده شده در معادله های (۷.۵) تا (۷.۷) تعریف شود. قید اضافی عبارت است از این که هزینه خطی شده یا ثابت بماند و یا کاهش یابد، یعنی تغییر خطی شده در هزینه  $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$  نامثبت باشد که به شکل زیر بیان می شود

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} \leq 0 \quad (7.8)$$

این قید یا شرط عمود بودن جهت  $\mathbf{d}$  را بر گرادیان تابع هزینه بیان می کند (یعنی  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 0$ )، یا یک زاویه بین  $90^\circ$  و  $270^\circ$  بین آنها را (یعنی  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} < 0$ ). ما این مطلب را در مسئله نمونه ای که بعداً بحث می شود خواهیم دید.

اگر نامساوی (۷.۸) فعال باشد (یعنی ضرب عددی صفر شود، که به معنی عمود بودن  $\mathbf{d}$  بر  $\mathbf{c}$  است)، آن گاه تغییری در مقدار تابع هزینه خطی شده وجود نخواهد داشت. ولی ممکن است تغییراتی در تابع هزینه اصلی به خاطر غیر خطی بودن وجود داشته باشد. اگر قید غیر فعال

باشد، آن گاه همراه تصحیح قید، کاهش در تابع هزینه خطی شده وجود دارد. این موقعیتی مطلوب است. بنابراین، مشاهده می کنیم که مسأله هزینه ثابت نیز یک زیرمسأله QP است که در معادله های (۷.۵) تا (۷.۸) تعریف شد. این مسأله کوتاهترین مسیر تا ناحیه قابل قبول را جست و جو می کند که یا تابع هزینه را کاهش می دهد یا آن را بدون تغییر نگاه می دارد. ما این روش را الگوریتم تصحیح در هزینه ثابت (CCC) خواهیم نامید.

دقت کنید که زیرمسأله QP هزینه ثابت اگر خطوط هزینه ثابت فعلی ناحیه قابل قبول را قطع نکنند می تواند غیر قابل قبول باشد. این در عمل می تواند پیش آید. بنابراین زیرمسأله QP باید به طور مناسبی حل شود. اگر غیر قابل قبول شد، آن گاه قید معادله (۷.۸) باید آزاد گردد و به تابع هزینه خطی شده اجازه داد که برای به دست آوردن یک نقطه قابل قبول افزایش یابد. این موضوع در زیربخش آینده بحث خواهد شد.

**مثال ۷.۴ تصحیح قید در هزینه ثابت.** برای مثال ۷.۳، گام هزینه ثابت را از نقطه غیر قابل قبول (9, 3) محاسبه کنید.

حل. برای به دست آوردن گام هزینه ثابت از نقطه F در شکل ۷.۳، به زیرمسأله QP که در مثال ۷.۳ داده شد شرط اضافه معادله (۷.۸) یعنی  $(c \cdot d) \leq 0$  را اعمال می کنیم. با جایگزینی مقدار c، قید عبارت است از

$$-d_1 - 6d_2 \leq 0 \quad (7.9)$$

که این شرط را اعمال می کند که تابع هزینه یا در 67.5- ثابت بماند یا بیشتر کاهش پیدا کند. از ترسیمه مسأله در شکل ۷.۳ مشاهده می کنیم که مقدار تابع هزینه 67.5- در نقطه (9, 3) زیر هزینه بهین 55.5- است. بنابراین، مقدار تابع هزینه فعلی حد پایینی مقدار تابع هزینه بهین را می دهد. با این همه، خط تابع هزینه خطی شده که در شکل ۷.۳ با G-H نشان داده شده است ناحیه قابل قبول را قطع می کند. پس، زیرمسأله QP مثال ۷.۳ با شرط قید اضافی جواب قابل قبول دارد. نامساوی معادله (۷.۸) ایجاب می کند که جهت d یا روی خط G-H باشد (اگر قید فعال است) یا بالای آن قرار گیرد (اگر قید غیر فعال است). در حالتی که غیر فعال باشد زاویه بین c و d بین 90° و 270° خواهد بود. اگر زیرخط G-H باشد، نامساوی (۷.۸) را نقض می کند. توجه کنید که کوتاهترین مسیر از نقطه F تا ناحیه قابل قبول در امتداد خط F-B

است. اما این مسیر زیر خط  $G-H$  است و برای زیرمسئله  $QP$  ما قابل قبول نیست. با حل مسئله توسط شرایط کان-تاکر، جواب زیرمسئله  $QP$  را به شکل زیر به دست می آوریم

$$d = (-4.5, 0.75); \quad u = (0, 83.25, 0, 0, 2.4375)$$

بنابراین نقطه جدید عبارت است از

$$x = (4.5, 3.75) \quad \text{با} \quad f = -34.6$$

در نقطه جدید ( $G$  در شکل ۷.۳)، تمامی قیود غیرفعالند بجز قید دوم ( $g_2$ ). شرط هزینه ثابت معادله (۷.۸) نیز فعال است که بیانگر آن است که جهت  $d$  عمود بر بردار گرادیان هزینه  $c$  است. همان طور که در شکل ۷.۳ دیده می شود، این در حقیقت درست است. توجه کنید که به خاطر طبیعت بسیار غیرخطی تابع هزینه در نقطه  $F(9, 3)$ ، تابع هزینه جدید به مقدار قابل توجهی افزایش می یابد. بنابراین جهت  $d$  در واقع یک جهت هزینه ثابت نیست. گرچه نقطه جدید تمامی نقضها را تصحیح می کند، تابع هزینه از نقطه بهین بیشتر می شود که مطلوب نیست. در واقع، از نقطه  $F$  بهتر است که فقط مسئله تصحیح قید را حل کنیم، همچنان که در مثال ۷.۳ انجام دادیم. برای آن جهت، افزایش در هزینه کمتر است. پس، در حالتی مشخص، بهتر است که فقط زیرمسئله تصحیح قید را حل کرد.

**مثال ۷.۵** تصحیح لید در هزینه ثابت. نقطه شروع دیگری مثل (4, 6) را برای مثال ۷.۴ در نظر گرفته و از آن جا گام هزینه ثابت را محاسبه کنید.

**جواب.** در شکل ۷.۳، نقطه شروع با  $I$  نشان داده شده است. داده های زیر در نقطه (4, 6) محاسبه می شوند:

$$f(4, 6) = 30$$

$$g_1 = -1 \quad (\text{غیرفعال})$$

$$g_2 = \frac{1}{3} > 0 \quad (\text{نقض شده})$$

$$g_3 = -4 < 0 \quad (\text{غیرفعال})$$

$$g_4 = -6 < 0 \quad (\text{غیرفعال})$$

$$c = (-20, 36)$$

و گرادینانهای قیود مشابه مثال ۷.۱ هستند. گرادینانهای هزینه و قیود در شکل ۷.۳ و در نقطه I نشان داده شده اند. توجه کنید که مقدار تابع هزینه در نقطه I بالاتر از مقدار بهین است. بنابراین، قید هزینه ثابت معادله (۷.۸) ممکن است برای جواب زیرمسئله فعال نباشد، یعنی ممکن است بتوانیم قیود را تصحیح کرده و همزمان تابع هزینه را نیز کاهش دهیم.

زیرمسئله QP داده شده در معادله های (۷.۵) تا (۷.۸) به شکل زیر تعریف می شود. عبارت

$$0.5(d_1^2 + d_2^2)$$

را مشروط به

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 6 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$-20d_1 + 36d_2 \leq 0$$

مینیمم کنید.

با نوشتن شرایط کان-تاکر برای زیرمسئله QP جواب را به شکل زیر به دست می آوریم

$$\mathbf{d} = (-0.8, -1.6); \quad \mathbf{u} = (0, 9.6, 0, 0, 0)$$

دقت کنید که تنها قید دوم فعال است. بنابراین، نقطه جدید باید دقیقاً روی معادله قید  $x_1 + 2x_2 = 12$  باشد که در شکل (۷.۳) با نقطه L نشان داده شده است. قید هزینه ثابت فعال نیست (جهت d زیرخط J-K در شکل ۷.۳ قرار دارد و با c زاویه بزرگتر از ۹۰ می سازد). پس مقدار تابع هزینه جدید باید در نقطه جدید (3.2, 4.4) کاهش یافته باشد و مقدارش در واقع 3.28- است که نسبت به 30 کاهش قابل توجهی دارد.

#### ۷.۳.۴ الگوریتم تصحیح لید برای افزایش مشخصی در هزینه

چنان که در زیربخش گذشته مشاهده شد، زیرمسئله هزینه ثابت می تواند غیر قابل قبول باشد. در آن حالت، مقدار فعلی تابع هزینه باید اجازه افزایش داشته باشد. این کار با تغییر کوچکی در نامساوی (۷.۸) بسادگی عملی می شود، یعنی

$$\mathbf{c}^T \mathbf{d} \leq \Delta \quad (۷.۱۰)$$

که  $\Delta$  حد مشخص افزایش هزینه است. مقدار افزایش هزینه می تواند براساس این شرط که هزینه خطی شده در یک نقطه قابل قبول - اگر مشخص باشد - نباید بیشتر از هزینه قبلی باشد، تعیین شود. مجدداً دقت کنید که زیرمسأله QP در این حالت، اگر مقدار افزایش هزینه مشخص شده در  $\Delta$  کافی نباشد، می تواند غیر قابل قبول باشد. بنابراین، ممکن است  $\Delta$  نیاز به تنظیم داشته باشد. ما این روش را الگوریتم تصحیح قید در هزینه مشخص (CCS) خواهیم نامید.

**مثال ۷.۶ تصحیح قید برای افزایش مشخص در هزینه.** برای مثال ۷.۴، گام تصحیح قید از نقطه غیر قابل قبول (9, 3) را با ۱۰٪ افزایش در هزینه محاسبه کنید.

**حل.** چون مقدار فعلی تابع هزینه 67.5- است، ۱۰٪ افزایش در هزینه مقدار  $\Delta$  را در معادله (۷.۱۰)، 6.75 می دهد. بنابراین، با استفاده از  $\mathbf{c} = (-1, -6)$  که در مثال ۷.۳ محاسبه شد، قید معادله (۷.۱۰) عبارت است از

$$-d_1 - 6d_2 \leq 6.75$$

قیود دیگر و تابع هزینه مانند آنچه در مثال ۷.۳ تعریف شد، هستند. با استفاده از شرایط کان-تاکر مسأله حل می شود و جواب زیرمسأله عبارت است از

$$\mathbf{d} = (-3, 0); \quad \mathbf{u} = (6, 12, 0, 0, 0)$$

در این جواب، دو قید اول فعال و قید معادله (۷.۱۰) غیرفعال است. دقت کنید که این جواب مانند جواب مثال ۷.۳ است. بنابراین نقطه جدید نمایانگر جواب بهین است.

### ۷.۳.۵ تصحیح قید با حداقل افزایش در هزینه

این امکان وجود دارد که زیرمسأله ای تعریف شود که افزایش هزینه را مینیمم کرده و در همان حال قیود را نیز تصحیح کند. زیرمسأله به شکل زیر تعریف می شود. تابع

$$f_L = \mathbf{c}^T \mathbf{d}$$

را مشروط به قیود معادلات (۷.۶) و (۷.۷) مینیمم کنید که در آن  $f_L$  تغییر خطی تابع هزینه است. این مسأله ممکن است بدون کران باشد؛ پس باید حدود حرکت زیر را اعمال کنیم تا یک مسأله کران دار داشته باشیم.

$$-\Delta_i \leq d_i \leq \Delta_i; \quad i = 1 \text{ to } n$$

در این جا  $\Delta_i$  نشان دهنده مقدار ماکزیمم و مینیمم  $d_i$  است. زیرمسئله فوق خطی است، بنابراین از هر برنامه LP می توان برای حل آن استفاده کرد. برای یافتن اندازه گام مناسب، می توان یک جست و جوی خطی در امتداد  $d$  انجام داد.

**مثال ۷.۷ تصحیح قید با حداقل افزایش در هزینه.** برای مثال ۷.۴، مسئله تصحیح قید را از نقطه  $F(9, 3)$  که در شکل ۷.۳ نشان داده شده است با مینیمم افزایش در هزینه حل کنید.

حل. در نقطه  $(9, 3)$  داده های زیر در مثال ۷.۳ محاسبه شده اند:

$$f(9, 3) = -67.5$$

$$g_1 = 1 > 0 \text{ (نقض شده)};$$

$$g_2 = 0.25 > 0 \text{ (نقض شده)};$$

$$g_3 = -9 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

$$g_4 = -3 < 0 \text{ (غیرفعال)}$$

$$c = (-1, -6).$$

بنابراین، زیرمسئله به شکل زیر تعریف می شود. تابع

$$f_L = -d_1 - 6d_2$$

را مشروط به قیود

$$\frac{1}{3}d_1 - \frac{1}{3}d_2 \leq -1$$

$$\frac{1}{12}d_1 + \frac{1}{6}d_2 \leq -0.25$$

$$-d_1 \leq 9$$

$$-d_2 \leq 3$$

$$-\Delta_1 \leq d_1 \leq \Delta_1; \quad -\Delta_2 \leq d_2 \leq \Delta_2$$

مینیمم کنید.

زیرمسئله برنامه ریزی خطی می تواند با استفاده از روش سیمپلکس فصل (۴) حل شود. ما با استفاده از برنامه LINDO [شریح<sup>۱</sup>، ۱۹۸۱]. با  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ ، مسئله

غیرقابل قبول است و محدوده‌های حرکت بیش از حد محدودکننده هستند و نقطه قابل قبول نمی‌تواند به دست آید. چون مسأله دو متغیر دارد، شخص می‌تواند براحتی تمامی توابع را روی کاغذ رسم کند و نشان دهد که زیرمسأله خطی شده فوق جوابی ندارد. وقتی  $\Delta_1 = \Delta_2 = 3$  است، جواب زیر به دست می‌آید:

$$d_1 = -3, \quad d_2 = 0, \quad f_L = 3$$

و قید دوم با ضریب لاگرانژ 36 فعال است. حد پایینی  $d_1$  نیز با ضریب لاگرانژ 2.0 فعال است. وقتی  $d_1$  و  $d_2$  به نقطه شروع (3, 9) اضافه شوند، نقطه جدید عبارت است از (3, 6). این در حقیقت نقطه بهین است با مقدار تابع هزینه -55.5. دقت کنید که چون  $f_L = 3$  است، فرض شده که تابع هزینه از -67.5 فقط به اندازه 3 واحد افزایش یافته است. با این همه، به خاطر غیرخطی بودن، تابع در حقیقت 12 واحد افزایش یافته است.

دقت کنید که چون ضریب لاگرانژ برای حد پایینی قید  $d_1$ ، 2 است، قضیه حساسیت قید ۱۴.۳ پیش‌بینی می‌کند اگر  $\Delta_1$  به 4 تغییر یابد،  $f_L$  به اندازه 2 واحد کم خواهد شد و مقدار آن 1 می‌شود. این واقعیت چیزی است که اتفاق می‌افتد. با  $\Delta_1 = \Delta_2 = 4$ ، جواب زیرمسأله به شکل زیر به دست می‌آید

$$d_1 = -4, \quad d_2 = 0.5, \quad f_L = 1.0$$

و قید دوم با ضریب لاگرانژ 36 فعال است. حد پایینی روی  $d_1$  هنوز فعال است با ضریب لاگرانژ 2.0. نقطه جدید عبارت است از (3.5, 5). با تابع هزینه -43.375. برای این نقطه تابع هزینه در حقیقت به اندازه 24.125 افزایش می‌یابد در مقایسه با 1 که با جواب زیرمسأله خطی شده پیش‌بینی شد.

### ۷.۳.۶ نگرشی بر الگوریتمهای تعاملی

ما الگوریتمهای مختلفی را که برای بهینه‌سازی طراحی تعاملی مفیدند بحث کرده‌ایم. آنها برای مسائلی با قيود خطی و توابع هزینه درجه دو تشریح شدند. این الگوریتمها محدودیتهای مشخصی دارند که باید بروشنی فهمیده شوند:

۱. تمامی الگوریتمها برای توابع هزینه و قید از تقریب خطی استفاده می‌کنند. بنابراین

برای مسائل بسیار غیرخطی، جواب زیرمسئله ها فقط برای ناحیه کوچکی در اطراف نقطه فعلی معتبرند.

۲. اندازه گام محاسبه شده در معادله (۷.۴) که با استفاده از کاهش  $\gamma$  در تابع هزینه محاسبه شد، براساس تقریب خطی تابع هزینه قرار دارد. با اندازه گام محاسبه شده، مقدار واقعی کاهش تابع هزینه بسته به غیرخطی بودن تابع هزینه ممکن است بزرگتر یا کوچکتر از  $\gamma$  باشد.
۳. در مسئله تصحیح قید مثال ۷.۳، برای تصحیح تمامی قیود تنها یک گام مورد نیاز است. این به خاطر خطی بودن تمامی قیود است. وقتی قیود غیرخطی باشند، معمولاً گامهای متعددی برای رسیدن به ناحیه قابل قبول باید برداشته شود. مسئله طراحی فر که بعداً در همین فصل حل می شود، این حقیقت را بازگو می کند.
۴. تصحیح قیود در اکثر مواقع با افزایش تابع هزینه همراه است. با این همه، در حالت های خاصی ممکن است به کاهش تابع هزینه بینجامد. این حالت بسیار نادر است و به غیرخطی بودن توابع و نقطه شروع بستگی دارد.
۵. شرط هزینه ثابت معادله (۷.۸) براساس تابع هزینه خطی شده قرار دارد. حتی اگر این قید در جواب زیرمسئله فعال باشد، ممکن است در نقطه جدید در مقدار تابع هزینه اصلی تغییری نباشد. این به دلیل غیرخطی بودن توابع هزینه و قیود است. این پدیده را در مثال های ۷.۴ تا ۷.۷ مشاهده کردیم.
۶. برای بعضی از نقاط غیرقابل قبول، بهتر است که زیرمسئله تصحیح قید به جای زیرمسئله هزینه ثابت حل شود.
۷. همچنان که در مثال های ۷.۱ و ۷.۲ دیده شد، در نقطه داده شده جهت های کاهش هزینه متعددی وجود دارد. این جهات به تعریف زیرمسئله QP بستگی دارند. تعیین بهترین جهت ممکن مشکل است.
۸. ضرایب لاگرانژی که هنگام حل زیرمسئله QP محاسبه می شوند می توانند از مقادیر آنها در جواب بهین مسئله اصلی کاملاً متفاوت باشند. این حقیقت می تواند در حل مثال های ۷.۷-۷.۱ مشاهده شود.

## ۷.۴ قابلیت های تعاملی مطلوب

نرم افزارهای تعاملی بهینه سازی طراحی باید انعطاف پذیر و استفاده آنها برای فرد آسان

و راحت باشد. امکانات کمک در برنامه باید در دسترس باشد که می‌تواند روی صفحه رایانه و یا به وسیله دستور مشخص و یا به هر دو صورت باشد. ما قابلیت‌های متعدد مطلوب را برای چنین نرم افزارهای تعاملی شرح خواهیم داد.

اوّل از همه، برنامه باید بتواند مسائل برنامه ریزی غیرخطی عمومی و همچنین نامقید را حل کند، باید بتواند قیود مساوی و نامساوی و همچنین محدوده‌های متغیرهای طراحی را در نظر بگیرد. باید گزینه‌های انتخاب الگوریتم‌هایی را که به طور مناسبی نصب و پیاده شده‌اند داشته باشد. باید اشتباهات کاربر را متوجه شود و به طور غیرمعمول از اجرا خارج نشود.

#### ۷.۴.۱ آماده سازی داده‌های تعاملی

نرم افزار باید برای آماده سازی داده‌های تعاملی و امکان تغییر آنها قسمتی را در نظر گرفته باشد. دستورات وارد کردن داده‌ها باید روشن باشند. مقدار حداقلی از داده‌ها باید مورد نیاز باشد. کاربر باید بتواند هر داده‌ای را که قبلاً وارد کرده تغییر دهد. روشی گام به گام برای نشان دادن صفحه رایانه که در آن انتخاب و وارد کردن داده‌ها انجام می‌شود، باید وجود داشته باشد. یا، باید بتوان داده‌ها را به شکل یک فرآیند پرسش و پاسخ وارد کرد. سیستم باید به شکلی باشد که از اشتباهات طراحی مصون باشد. اگر داده غیرمناسبی پیدا شد، باید پیام‌هایی داده شود. روش کار با یک نرم افزار تعاملی باید چنان ساده باشد که یک مبتدی بتواند آن را براحتی دنبال کند.

#### ۷.۴.۲ قابلیت‌های تعاملی

همان طور که پیش تر مشاهده شد، بسیار مطلوب است که تعامل طراحی در فرآیند طراحی به کمک رایانه وجود داشته باشد. چنین گفتگویی می‌تواند بسیار سودمند، و از نظر نیروی انسانی و منابع رایانه‌ای مقرون به صرفه باشد. برای استفاده از سیستم‌های نرم افزاری تعاملی در مهندسی دو سؤال مطرح می‌شود: (i) مزایا و معایب تعامل چیست، و (ii) چه نوع از قابلیت‌های تعاملی باید فراهم باشد؟ ما هر دو سؤال را مطرح می‌کنیم.

تمامی نرم افزارهای بهینه سازی طراحی با کاربری عمومی درباره مسأله‌ای که می‌خواهد حل شود به داده‌های زیر نیاز دارند: (i) داده‌های ورودی مثل تعداد متغیرهای

طراحی، تعداد قیود و غیره، (ii) توابع هزینه و قیود، (iii) گرادیان توابع هزینه و قیود. اگر گرادیانها در دسترس نباشند، آن گاه سیستم باید به طور خودکار آنها را به روش تفاضل محدود به طور تقریبی به دست آورد، همان طور که در فصل (۵) تشریح شد. اگر اشتباهی در داده های ورودی یا تعریف مسأله وجود داشته باشد، در حل مسأله خطا رخ خواهد داد. سیستم بهینه سازی باید تا حد امکان چنین اشتباهاتی را شناسایی کند.

کنترل و بازبینی فرآیند بهین از طریق تعامل نیز بسیار مفید است. تاریخچه تابع هزینه و توابع قید، متغیرهای طراحی، بیشترین نقض قید، و پارامتر همگرایی باید بازبینی و کنترل شوند. وقتی این تاریخچه به شکل ترسیمی نمایش داده شود، می تواند کمک بزرگی در تصمیم گیریهای مشخص داشته باشد. اگر پیشرفت فرآیند طراحی قانع کننده نباشد (ممکن است در رابطه سازی و مدل کردن مسأله بی دقتی و یا خطایی وجود داشته باشد)، لازم است طراحی را متوقف کرده و رابطه سازی مسأله را بررسی کرد. این کار نیروی انسانی و امکانات رایانه ای را از هدر رفتن حفظ می کند. همچنین اگر الگوریتمی پیشرفت قانع کننده ای نداشته باشد، باید بتوان الگوریتم دیگری را اجرا کرد. سیستم باید بتواند بر اساس تحلیل خواسته ها پیشنهادهایی برای تغییر طراحی بدهد. بنابراین، بازبینی تعاملی فرآیند چرخه یک قابلیت مهم است که یک نرم افزار بهینه سازی طراحی باید دارا باشند.

طراح باید بتواند فرآیند حل مسأله را نیز هدایت کند. به عنوان مثال، برنامه را می توان پس از اجرای تعداد مشخصی چرخه متوقف کرد تا بررسی شود که آیا پیشرفت فرآیند قانع کننده است یا خیر. اگر چنان که انتظار می رود پیش نرفته بود، باید این امکان فراهم باشد که برای تغییر روش محاسبات بتوان تصمیم گرفت. اگر نقض قیدی وجود دارد، طراح ممکن است بخواهد ببیند آیا بدون جریمه ای برای تابع هزینه می شود آن را تصحیح کرد یا خیر. اگر این کار ممکن نباشد باید با جریمه ای برای تابع هزینه، تصحیح قید عملی باشد. وقتی طراحی در ناحیه قابل قبول است، سیستم باید این توانایی را داشته باشد که محاسباتی را انجام دهد تا مشخص کند آیا می شود درصدی از هزینه را کاهش داد و همچنان در ناحیه قابل قبول باقی ماند یا خیر. اگر فرآیند چرخه پیشرفت خوبی نداشته باشد، آن گاه باید طراح بتواند برنامه را از هر چرخه قبلی یا هر طرح دیگر مجدداً شروع کند. در نقطه بهین، جریمه محکمتر کردن قیود و یا مزیت آزاد ساختن آن نمایش داده شود. این اطلاعات از ضرایب لاگرانژ قیود در دسترس هستند. در بهینه سازی عملی، این قابلیت های تعاملی می توانند بسیار مفید باشند.

در بین فرآیند چرخه برای یک مسأله طراحی باید امکان تغییر داده‌های ورودی وجود داشته باشد. بعد از بازبینی چند چرخه از فرآیند ممکن است تغییر پارامترهای مسأله یا برنامه ضرورت پیدا کند. این تغییر باید بدون قطع برنامه ممکن باشد. ضرایب حساسیت طراحی تابع هزینه و قید پتانسیل باید به شکل قابل استفاده‌ای نمایش داده شوند، مثلاً به شکل نمودارهای ستونی نرمال شده. این اطلاعات حساسیت نسبی متغیرهای طراحی را نشان خواهد داد. طراحی باید بتواند وضعیت متغیرهای طراحی را نیز به دست آورد و اگر لازم بود آنها را هنگام کار تغییر دهد. وقتی اطلاعات مربوط به روند تغییر اطلاعات به صورت ترسیمی نمایش داده شوند می‌توانند طراحی را در به دست آوردن نگرشی از عملکرد مسأله کمک کنند. پس این قابلیت باید در دسترس باشد.

همچنین باید امکان استفاده از نرم افزار بهینه سازی طراحی تعاملی به صورت غیرتعاملی و با حداقل اطلاعات ورودی نیز وجود داشته باشد. سیستم باید بتواند برای پارامترها بهترین مقادیر از قبل تعیین شده‌ای را که توسط متخصصان و تجربیات عددی تعیین گشته اند ارائه دهد.

### ۷.۴.۳ تصمیم‌سازی تعاملی

وقتی برنامه به صورت تعاملی اجرا می‌شود، گزینه‌های متنوعی باید برای طراحی در دسترس باشد. فهرستی از قابلیت‌هایی که می‌تواند طراحی را در تصمیم‌سازی کمک کند عبارت است از:

۱. ممکن است طراحی بخواهد رابطه سازی مسأله یا داده‌های طراحی را مجدداً مورد آزمایش و بازبینی قرار دهد. بنابراین باید در هر چرخه‌ای امکان خروج از اجرای برنامه وجود داشته باشد.
۲. در هر چرخه باید امکان نمایش وضعیت طراحی نظیر مقادیر فعلی متغیرها، تابع هزینه، بیشتر مقدار نقض قید و داده‌هایی دیگری از این قبیل وجود داشته باشد.
۳. باید در هر چرخه امکان تغییر داده‌ها از قبیل متغیرهای طراحی و محدوده آنها، معیار همگرایی و سایر داده‌ها وجود داشته باشد.
۴. طراحی باید بتواند مقادیر متغیرهای طراحی را در هر مقداری ثابت نگه دارد. همچنین باید امکان رها ساختن متغیرهای طراحی ثابت شده نیز وجود داشته باشد.

۵. طراحی باید بتواند الگوریتم را برای یک چرخه و یا چند چرخه محدود اجرا کند.
۶. باید امکان شروع مجدد از هر چرخه ای وجود داشته باشد.
۷. باید امکان تعویض الگوریتم هنگام فرآیند چرخه موجود باشد.
۸. طراحی باید بتواند  $x\%$  کاهش تابع هزینه از یک نقطه قابل قبول را داشته باشد.
۹. طراحی باید بتواند تصحیح قیود در هر چرخه ای را انجام دهد.
۱۰. طراحی باید بتواند یک گام هزینه ثابت داشته باشد.
۱۱. طراحی باید بتواند تصحیح قیود با حد  $x\%$  افزایش در هزینه را انجام دهد.
۱۲. طراحی باید بتواند نمایشهای ترسیمی مختلف را داشته باشد.

#### ۷.۴.۴ ترسیم تعاملی

نمایش نموداری داده ها راه آسان تعبیر یافته ها و استنباط نتایج است. ترسیم تعاملی می تواند در تصمیم سازی طراحی در فرآیند بهینه سازی دنباله ای نقش مهمی را بازی کند. نمایشهای ترسیمی ممکن عبارتند از:

۱. ترسیمه تاریخچه تابع هزینه، پارامترهای همگرایی و بیشترین نقض قیود. این نمودارها پیشرفت فرآیند چرخه ای را به طرف نقطه بهین نشان می دهند.
۲. تاریخچه متغیرهای طراحی. این تاریخچه می تواند برای مشاهده گرایش متغیرهای طراحی و احتمالاً استنباط مقادیر آنها مورد استفاده قرار گیرد.
۳. تاریخچه تابع قید می تواند نمایش داده شود. این کار می تواند قیودی را که در فرآیند طراحی نقشی ندارند، نشان دهد. تاریخچه قیود غالب را نیز نشان می دهد.
۴. ضرایب حساسیت توابع هزینه و قید را می توان به شکل نمودارهای ستونی نمایش داد. اینها چیزی جز گرادیانهای نرمال شده توابع هزینه و قیود نیستند و متغیرها و توابع حساس و غیر حساس را نشان می دهند.

می توان دید که با استفاده از قابلیت ترسیم تعاملی، طراحی می تواند پیشرفت فرآیند بهینه سازی را مشاهده کند. طراحی می تواند عملکرد مسأله طراحی را بهتر درک کنند و در صورت لزوم رابطه سازی را بهتر کنند. این قابلیتها را با آوردن مثالهای نمونه بیشتر بحث خواهیم کرد.

## ۷.۵ نرم افزار بهینه سازی طراحی تعاملی

بندهای قبلی در حقیقت مشخصات یک نرم افزار بهینه سازی طراحی تعاملی با کاربری عمومی را تشریح کردند. براساس آنها، یک سیستم نرم افزار می تواند طراحی و پیاده شود. روشن است که برای تأمین تمامی انعطاف پذیرها و قابلیتها، نرم افزار، بسیار بزرگ و پیچیده خواهد شد. برای رسیدن به اهداف یاد شده بسیاری از جدیدترین روشهای طراحی نرم افزار و مدیریت داده ها، باید مورد استفاده قرار گیرند. فرآیند طراحی نرم افزار، پیاده سازی و ارزیابی آن می تواند بسیار پرهزینه و وقت گیر بوده و معادل چندین نفر-سال باشد.

در این بخش، نرم افزاری را باختصار تشریح می کنیم که بعضی از قابلیت‌هایی را که قبلاً گفته شد داراست. سایر نرم افزارهای در دسترس برای داشتن قابلیت‌های فوق ممکن است به طور مشابهی تجهیز شوند. برنامه فعلی آی دیزاین (IDESIGN) نامیده می شود که به منزله بهینه سازی طراحی تعاملی سیستمهای مهندسی<sup>۱</sup> است. این برنامه تجهیزات تعاملی و ترسیمی دارد که برای بهینه سازی به وسیله کامپیوتر و طراحی مناسب است [آرورا<sup>۲</sup>، ۱۹۸۴؛ آرورا و سنج<sup>۳</sup>، ۱۹۸۷]. با برنامه IDESIGN، رایانه و تجربیات طراحی می توانند برای تنظیم متغیرها جهت بهبود هدف طراحی و برآوردن قیود استفاده شوند. برنامه IDESIGN شامل چهار الگوریتم بهینه سازی غیرخطی مدرن و پیشرفته است. نصب و پیاده سازی مؤثر و قابل اعتماد الگوریتمها طی سالیان متمادی آزمایش به دست آمده است. حالت‌های ساده بهینه سازی خطی و نامقیّد نیز می تواند توسط برنامه انجام شود.

برنامه IDESIGN مجهز به قابلیت‌هایی است که به مهندس امکان تعامل و کنترل فرآیند بهینه سازی را می دهد. شخص می تواند به هر طراحی قبلی برگردد و یا یک طراحی آزمایشی جدید را به طور دستی وارد کند. اطلاعات طراحی می توانند به شکلهای مختلف نشان داده شده و یا توسط نمودارها نمایش داده شوند. سیستم طوری طراحی شده که کاربرهای ماهر و مبتدی هر دو از آن بهره می گیرند. افراد مبتدی می توانند هر بار به گزینه ای در صفحه رایانه که با دستورالعمل همراه است پاسخ دهند. افراد ماهر می توانند برای داده ها پرونده ورودی تشکیل دهند و از صفحات نمایشی رد شوند. نرم افزار پاسخهای نامناسب را تشخیص داده و به فرد

فرصت تصحیح می دهد. ورودی و خروجی می تواند در یک پرونده "گویا" برای مراجعه کاربر منعکس شود. برای مسائل خیلی بزرگ و اجرای یکسره ورودی نیز می تواند در یک پرونده دریافت شود.

برنامه IDESIGN به زبان فرترن ۷۷<sup>۲</sup> با دقت مضاعف نوشته شده است. با داشتن چندین زیربرنامه، وابستگی احتمالی آن به سخت افزار و سیستم عامل برطرف شده است. برنامه در رایانه های مختلفی (IBM, PRIME, VAX, APOLLO, CDC) و تحت سیستمهای عامل متنوعی (PRIMOS, VMS, AEGIS) با موفقیت تلفیق و اجرا شده است. با استفاده از برنامه، مسائل طراحی مختلف بخش ۶.۷ و فصل (۸) را می توانیم بهینه کنیم.

#### ۲.۵.۱ ارتباط متقابل کاربر با برنامه IDESIGN

برنامه IDESIGN از یک برنامه اصلی و تعدادی برنامه فرعی استاندارد که نیازی به تغییر توسط کاربر ندارد، تشکیل شده است. به منظور حل یک مسأله طراحی (برای تعریف مناسب IDESIGN به بخش ۶.۱ و ۶.۲.۳ مراجعه کنید.) کاربر باید برنامه های فرعی اضافی دیگری برای برنامه اصلی تهیه کند. داده های ورودی مثل طراحی اولیه، حد بالا و پایین متغیرهای طراحی، پارامترهای مسأله و مقدار پارامترهایی که برای فراخوان گزینه های مختلف برنامه لازم است، نیز باید تهیه گردند. داده های ورودی و گزینه های موجود در برنامه در دستورالعمل کاربر [آرورا و سنج، ۱۹۸۷a] تشریح شده است.

کاربر باید مسأله طراحی را با چهار برنامه فرعی فرترن زیر توضیح دهد:

USERMF: برنامه فرعی ارزیابی تابع مینیمم شونده (هزینه)

USERCF: برنامه فرعی ارزیابی توابع قیود

USRMG: برنامه فرعی ارزیابی گرادیان تابع مینیمم شونده (هزینه)

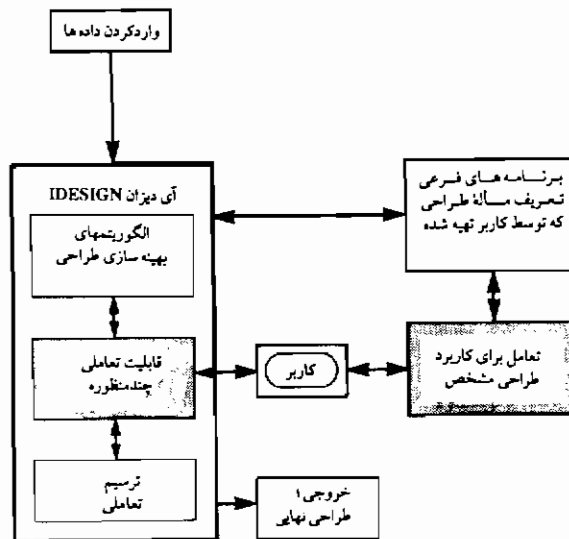
USERCG: برنامه فرعی ارزیابی گرادیان توابع قیود

برنامه فرعی پنجمی نیز ممکن است توسط کاربر برای تحلیل پس بهینگی جواب بهین و به دست آوردن خروجی بیشتر با استفاده از شکل ویژه فراهم گردد.

1. dialogue

2. FORTRAN77

3. Arora and Tseng



شکل ۷.۴ آرایش مفهومی بهینه سازی طراحی تعاملی با IDESIGN

شکل ۷.۴ یک آرایش مفهومی از بهینه سازی طراحی تعاملی با برنامه IDESIGN را نشان می دهد. برای ایجاد یک سیستم طراحی برای کاربری مشخص، طراح باید برای تعریف مسأله و توابع هزینه و قیود و گزاردانیهای آنها برنامه هایی فرعی به زبان فرترن تهیه کند. طراح در تهیه این برنامه های فرعی کاملاً آزاد و انعطاف پذیر است، مشروط به این که تناسب شناسه برای برقراری ارتباط با IDESIGN رعایت شود. به عنوان مثال آرایه های اضافی می توانند تعریف شوند، برنامه های دیگری و یا برنامه های فرعی می توانند فراخوان شوند، و ورودیهای بیشتری وارد شوند. در میان این برنامه های فرعی، طراح ممکن است دستورهای تعاملی بیشتری که ویژه کاربری خاص است، نیز به کار بگیرد.

قابلیت تعامل چندمنظوره همان طور که در قسمت چپ شکل ۷.۴ نشان داده شده، در IDESIGN وجود دارد. در این قسمت، دستورالعملهای تعاملی که به کاربرد خاصی محدود نمی شوند وجود دارند. فهرستی از این دستورالعملها که هم اکنون در دسترس هستند در جدول ۷.۱ آمده است. با استفاده از این دستورها، طراح قادر است فرآیند را به صورت تعاملی به سوی طراحی قابل قبول هدایت کند. در میان این دستورها، دستور CH/XXX بسیار مفید است، زیرا به طراح این اجازه را می دهد که مقدار متغیرهای طراحی و حد بالا و پایینی آنها، الگوریتم، و معیار همگرایی را تغییر دهد. این دستور برای به دست آوردن توصیه

IDESIGN برای بهترین تغییر متغیرهای طراحی که قیود را تصحیح کند نیز می تواند استفاده شود. دستورهای PLOT می توانند برای مشاهده تمایل متغیرهای طراحی، به دست آوردن قیود بحرانی، و به دست آوردن متغیرهای حساس و غیر حساس در توابع هزینه و قیود استفاده شوند.

جدول ۷.۱ دستورهای تعاملی در برنامه IDESIGN

دستور	منظور
CON	IDESIGN را ادامه بده
DIS	داده ها را نمایش ده
HELP	به کاربر کمک کن
QUIT	اجرای برنامه IDESIGN را متوقف کن
PLOT/NO.	NO = 1 تاریخچه هزینه
	NO = 2 تاریخچه پارامتر همگرایی
	NO = 3 تاریخچه بیشترین نقض قید
	NO = 4 تاریخچه متغیرهای طراحی
	NO = 5 تاریخچه قیود
	NO = 6 نمودار ستونی حساسیت قیود و هزینه
	را رسم کن
CH/XXX	متغیرها یا پارامترها را تغییر ده
	XXX = نام خلاصه شده پارامتر
OPT	برو به بهین
OK/XX	برنامه IDESIGN را ادامه بده
	XX = تعداد چرخه ها؛
	اگر XX/ حذف شود، برنامه IDESIGN
	به نقطه طراحی بعدی می رود
	با OK/FEA، برنامه IDESIGN
	به نقطه طراحی قابل قبول بعدی می رود
RS/XXX	شروع مجدد از چرخه شماره XXX
CR	مسأله کاهش هزینه را حل می کند
CC	مسأله تصحیح قید را حل می کند
CCC	مسأله تصحیح قید را در هزینه ثابت حل می کند
CCS	مسأله تصحیح قید با کرانی بر افزایش هزینه حل می کند

می‌توان دید که ابزارهای تعاملی گذشته می‌تواند برای به دست آوردن نگرشی از عملکرد یک مسئله طراحی خاص استفاده شوند. با به دست آوردن این دانش، طراح شاید بتواند مفاهیم طراحی جایگزینی را ارائه کند که کاراتر و از نظر اقتصادی مقرون به صرفه تر باشند.

## ۷.۵.۲ قابلیت‌های برنامه‌آی دی زاین (IDESIGN)

آی دی زاین (IDESIGN) یک برنامه بهینه‌سازی کلی است که از اواخر سال ۱۹۷۰ در حال تدوین بوده است. الگوریتم‌های برنامه‌ریزی غیرخطی نوین و پیشرفته و دیگر قابلیت‌ها به آن اضافه شده است. گزینه‌ها و ابزارهای با کاربری آسان بیشماری دارد که با وارد کردن داده‌ها در دسترس قرار می‌گیرند. برنامه برای حل دسته‌های متفاوتی از مسائل طراحی بهین مورد استفاده قرار گرفته است:

۱. مسائل طراحی مهندسی با مقیاس کوچک که توابع هزینه و قید صریح دارند، مانند آنچه قبلاً در این کتاب تشریح شد.
۲. مسائل طراحی سازه‌ها که با استفاده از اجزای محدود مدل می‌شوند، مانند خرپاها، قابها، اجزای محدود مختلط، پلها، ساختمانهای صنعتی، ساختمانهای بلند، صفحات باربر، اجزای ماشین و بسیاری دیگر [آرورا و هاگ<sup>۱</sup>، ۱۹۷۹؛ آرورا و ثاندار<sup>۲</sup>، ۱۹۸۶]. جزئیات بیشتری از این کاربریها در فصل (۸) نیز ارائه می‌شود.
۳. کاربردهای بهینه‌سازی پاسخ دینامیکی، مانند مسائل جلوگیری از ارتعاش، پاسخ حالت یکنواخت، طراحی برای مقاوم بودن در مقابل زلزله، طراحی برای بدترین حالت و پاسخ گذرا [هوشی و آرورا<sup>۳</sup>، ۱۹۸۴؛ لیم و آرورا<sup>۴</sup>، ۱۹۸۷؛ سنج و آرورا<sup>۵</sup>، ۱۹۸۷].
۴. کاربردهای مکانیک زیستی، مانند مسائل توزیع نیرو ماهیچه‌ها و تعیین نیروی تماسی [پدرسن<sup>۶</sup> و غیره، ۱۹۸۷].
۵. کنترل بهینه سیستمها، سازه‌ای، مکانیکی و کاربردهای هوا-فضا. جزئیات بیشتر از این کاربردها در فصل (۸) بررسی می‌شوند.
۶. مسائل شناسایی سیستم، مانند مسائل مدل‌سازی محیطی و مصالح.

1. Arora and Haug

2. Arora and Thanedar

3. Hsieh and Arora

4. Lim and Arora

5. Tseng and Arora

6. Pederson

نوع مسأله و الگوریتمها. برنامه می تواند مسائل برنامه ریزی غیرخطی کلی که در معادله های (۶.۱) تا (۶.۴) رابطه آن ارائه شد، مسائل برنامه ریزی خطی و مسائل نامقید را حل کند. اگرچه برنامه گزینه ای برای حل مسائل برنامه ریزی خطی دارد، ولی الگوریتم استفاده شده به کارایی روش سیمپلکس نیست. بنابراین، برای مسائل برنامه ریزی خطی بزرگ، استفاده از برنامه ای که براساس روش سیمپلکس قرار دارد توصیه می شود. الگوریتمهای زیر موجود می باشند:

۱. الگوریتم مرزبندی تابع هزینه [آرورا<sup>۱</sup>، ۱۹۸۴].
۲. روش خطی شنیچنی [بخش ۶.۶؛ بلگاندا و آرورا<sup>۲</sup>، ۱۹۸۴].
۳. الگوریتم برنامه ریزی درجه دو دنباله ای که برای تابع لاگرانژ اطلاعات مرتبه دوی تقریبی تولید کرده و به کار می برد [بخش ۶.۷؛ لیم و آرورا<sup>۳</sup>، ۱۹۸۶].
۴. یک روش ترکیبی که الگوریتمهای مرزبندی تابع هزینه و برنامه ریزی درجه دوی دنباله ای را با هم ترکیب می کند [ثانه دار<sup>۴</sup> و دیگران، ۱۹۸۶].
۵. روش گرادیان مزدوج برای مسائل نامقید (بخش ۵.۵).

اگر الگوریتمی توسط کاربر مشخص نشود، برنامه به طور خودکار بهترین الگوریتم را استفاده می کند.

قابلیت تعاملی. بخش وسیعی از قابلیتهای تعاملی همچنان که قبلاً بحث شد، در دسترسند. به عنوان مثال داده های ورودی می توانند وارد شده و ویراستاری گردند، پارامترهای مسأله و گزینه های برنامه می توانند تغییر یابند، مشاوره به منظور بهبود بخشیدن به طراحی اولیه در دسترس است، و نمودارها و منحنیهای مختلف می توانند روی صفحه رسم شوند.

ارزیابی گرادیان. قابلیتهای زیر برای ارزیابی گرادیان و آزمایش عبارت گرادیان در دسترس است:

۱. اگر کاربر عبارت گرادیان را در برنامه های فرعی USERMG و USERCG معرفی نکند، برنامه به طور خودکار آنها را محاسبه می کند. برای این محاسبات روش تفاضل محدود (پیش رو، پس رو، یا مرکزی) که در بخش ۵.۴ تشریح شد، با مقداره مشخص شده

(داده های ورودی) مورد استفاده قرار می گیرد.

۲. گزینه ای در IDESIGN در دسترس است که مقدار بهینه  $\delta$  را برای ارزیابی گرادیان به روش تفاضل محدود برای توابع هزینه و قید می دهد.

۳. اگر کاربر عبارت گرادیان را در برنامه های فرعی USERMG و USERCG معرفی کرده باشد، گزینه ای برای تأیید آنها در دسترس است؛ یعنی ارزیابی گرادیان با روش تفاضل محدود مقایسه می شود. اگر در عبارت گرادیان خطایی وجود داشت، گزینه ای در دسترس است که یا برنامه را متوقف کند و یا محاسبات را ادامه دهد.

این گزینه ها نشان داده اند که در کاربردهای عملی بسیار مفیدند.

خروجی. خروجی برنامه می تواند در سطوح مختلف گرفته شود. این سطوح در داده های ورودی مشخص می شود. حداقل خروجی، طرح نهایی، متغیرهای طراحی، فعال بودن قیود، تاریخچه تابع هزینه، پارامتر همگرایی، و بیشترین نقض قید را می دهد. جزئیات بیشتر در هر چرخه، مانند ماتریس گرادیان و دیگر نشایح در آن چرخه نیز می تواند به دست آید. در اصل خروجی اطلاعات جزئی برای بازنگری برنامه استفاده می شود.

## ۷.۶ مثالهایی از بهینه سازی طراحی تعاملی

در این بخش با حل مسأله بهینه سازی طراحی فتر استفاده از قابلیت های تعاملی را تشریح خواهیم کرد. رابطه سازی دقیق مسأله بحث خواهد شد. داده های عددی داده خواهد شد تا مسأله با استفاده از حل یکسره یا قابلیت های تعاملی IDESIGN حل شود. قابلیت های برنامه با استفاده از چندین مسأله طراحی در فصل (۸) و چندین منبع دیگر [آرورا و بان زیگر<sup>۱</sup>، ۱۹۸۶، ۱۹۸۷؛ آرورا و سنج<sup>۲</sup>، ۱۹۸۷، ۱۹۸۸؛ سنج و آرورا<sup>۳</sup>، ۱۹۸۷] نیز تشریح می شود.

از فتر حلقوی در بسیاری از کاربردهای عملی استفاده می شود. روش های تحلیل و طراحی چنین قطعات مکانیکی در طول سالها تدوین و ارائه شده است (به عنوان مثال به مراجع زیر نگاه کنید: اسپات<sup>۴</sup>، ۱۹۵۳؛ وهل<sup>۵</sup>، ۱۹۶۳؛ شیگلی<sup>۶</sup>، ۱۹۷۷، هاگ و آرورا<sup>۷</sup>،

1. Arora and Baenziger

2. Arora and Tseng

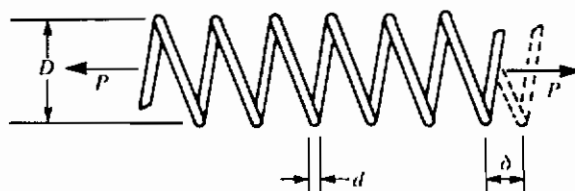
3. Tseng and Arora

4. Spott

5. Wahl

6. Shigley

7. Haug and Arora



شکل ۷.۵ یک فنر حلقوی

(۱۹۷۹). به عنوان مثال طراحی بهین، فنر حلقوی را در نظر بگیرید که تحت کشش یا فشار قرار دارد؛ مانند آنچه در شکل ۷.۵ نشان داده شده است. مسأله عبارت است از طراحی فتری با کمترین جرم که باری مشخص را بدون شکستن تحمل کرده و سایر شرایط عملکردی را نیز برآورده کند.

#### ۷.۶.۱ رابطه سازی مسأله طراحی فنر

برای رابطه سازی مسأله طراحی فنر حلقوی، اصطلاحات و داده های زیر تعریف می شوند:

$Q = 2$	تعداد حلقه های غیرفعال
$P = 10 \text{ lbs}$	نیروی اعمال شده
$G = (1.15E + 07) \text{ lb/in}^2$	ضریب ارتجاعی برشی
$\delta$	تغییر مکان در امتداد محور فنر
$\Delta = 0.5 \text{ in}$	حداقل تغییر مکان فنر
$\gamma = 0.285 \text{ lb/in}^3$	وزن مخصوص فنر
$g = 386 \text{ in/sec}^2$	شتاب ثقل
$\rho = (7.38342E-04) \text{ lb-sec}^2/\text{in}^4$	چگالی مصالح ( $\rho = \gamma/g$ )
$\tau_u = (8.0E + 04) \text{ lb/in}^2$	تنش برشی مجاز
$\omega$	بسامد موج امواج
$\omega_0 = 100 \text{ Hz}$	حد پایین بسامد موج امواج
$\bar{D} = 1.5 \text{ in}$	حد قطر خارجی

سه متغیر طراحی مسأله عبارتند از قطر مفتول  $d = (\text{in})$ ، قطر متوسط حلقه  $D = (\text{in})$  و تعداد حلقه های فعال  $N$ .

برای فنر تحت کشش یا فشار، مفتول می پیچد. بنابراین، قید تنش برشی باید اعمال شود. عبارات طراحی زیر را برای فنر داریم:

$$P = K\delta \quad \text{معادله نیرو و تغییر مکان} \quad (۷.۱۱)$$

$$K = \frac{d^4 G}{8D^3 N} \quad \text{ثابت فنر} \quad (۷.۱۲)$$

$$\tau = \frac{8kPD}{\pi d^3} \quad \text{تنش برشی} \quad (۷.۱۳)$$

$$k = \frac{(4D-d)}{(4D-4d)} + \frac{0.615d}{D} \quad \text{ضریب تمرکز تنش وهل}^1 \quad (۷.۱۴)$$

$$\omega = \frac{d}{2\pi D^2 N} \sqrt{\frac{G}{2\rho}} \quad (۷.۱۵)$$

عبارت ضریب تمرکز تنش وهل  $k$  در معادله (۷.۱۴) به طور تجربی به دست آمده و برای در نظر گرفتن تنشهای بالای غیرمعمول در نقاط مشخصی از فنر به کار می رود. این عبارات می توانند برای تعریف قیود مسأله استفاده شوند.

تابع هزینه. مسأله عبارت است از مینیم کردن جرم فنر (چگالی  $\times$  حجم)

$$\text{جرم} = \frac{1}{4}(N+Q)\pi^2 D d^2 p \quad (۷.۱۶)$$

قید تغییر مکان. اغلب لازم است که تغییر مکان فنر تحت بار  $P$  حداقل به اندازه  $\Delta$  باشد. بنابراین، قید عبارت است از این که تغییر مکان محاسبه شده بیشتر یا مساوی  $\Delta$  باشد. این شکل از قیود در طراحی فنرها معمول است. در کاربردهای بسیاری، عمل فنر عبارت است از ذخیره یک نیروی متوسط وقتی که تغییر مکان زیادی تحت تأثیر حرکت اتفاق می افتد. از نظر ریاضی، این عملکرد ( $\delta \leq \Delta$ ) به شکل نامساوی و با استفاده از معادله های (۷.۱۱) و (۷.۱۲) بیان می شود

$$\frac{8PD^3 N}{d^4 G} \geq \Delta \quad (۷.۱۷)$$

قید تنش برشی. برای جلوگیری از تنش اضافی مصالح، تنش برشی در مفتول باید بیشتر از  $\tau_y$  نباشد. با استفاده از معادله های (۷.۱۳) و (۷.۱۴) قید به عبارت ریاضی به شکل

زیر بیان می شود

$$\frac{8PD}{\pi d^3} \left[ \frac{(4D-d)}{(4D-4d)} + \frac{0.615d}{D} \right] \leq \tau_a \quad (۷.۱۸)$$

قید بسامد تموج امواج . می خواهیم که در عملکرد دینامیکی فنر از تشدید نیز جلوگیری شود. اگر بسامد تموج امواج (در امتداد فنر) را تا حد امکان بزرگ در نظر بگیریم، می تواند از پیش آمدن تشدید جلوگیری کند. در مسأله حاضر، باید بسامد تموج امواج فنر حداقل  $\omega_0$  (هرتز) باشد. با استفاده از معادله (۷.۱۵)، این قید ( $\omega \geq \omega_0$ ) به شکل ریاضی عبارت است از

$$\frac{d}{2\pi D^2 N} \sqrt{G} \geq \omega_0 \quad (۷.۱۹)$$

قید قطر. قطر خارجی فنر نباید از  $\bar{D}$  بیشتر باشد، بنابراین

$$D + d \leq \bar{D} \quad (۷.۲۰)$$

محدوده صریح متغیرهای طراحی. برای جلوگیری از مشکلات عملی، ما روی قطر مفتول، قطر فنر و تعداد حلقه ها حد ماکزیمم و مینیمم قرار می دهیم:

$$d_{\min} \leq d \leq d_{\max}; \quad D_{\min} \leq D \leq D_{\max}; \quad N_{\min} \leq N \leq N_{\max} \quad (۷.۲۱)$$

پس مسأله طراحی فنر با مینیمم جرم عبارت است از انتخاب متغیرهای طراحی  $d$ ،  $D$  و  $N$  برای مینیمم شدن جرم معادله (۷.۱۶)، مشروط به ده قید نامساوی معادله های (۷.۱۷) تا (۷.۲۱).

تعریف استاندارد مسأله. بعد از نرمال سازی قیود، با استفاده از داده های تعریف شده و نوشتن آنها به شکل استاندارد بخش ۲.۷، رابطه سازی طراحی بهین مسأله فنر به شکل زیر خواهد بود. تابع

$$f = (N+2)Dd^2 \quad (۷.۲۲)$$

را نسبت به قید تغییر مکان

$$g_1 = 1.0 - \frac{D^3 N}{(71875d^4)} \leq 0 \quad (۷.۲۳)$$

قید تنش برشی

$$g_2 = \frac{D(4D-d)}{12566d^3(D-d)} + \frac{2.46}{12566d^2} - 1.0 \leq 0 \quad (۷.۲۴)$$

قید بسامد تموج امواج

$$g_3 = 1.0 - \frac{140.54d}{D^2N} \leq 0 \quad (۷.۲۵)$$

و قید قطر خارجی

$$g_4 = \frac{D+d}{1.5} - 1.0 \leq 0 \quad (۷.۲۶)$$

مینیمم کنید. کرانهای بالا و پایین متغیرهای طراحی عبارت است از :

$$0.05 \leq d \leq 0.20 \text{ in}$$

$$0.25 \leq D \leq 1.30 \text{ in} \quad (۷.۲۷)$$

$$2 \leq N \leq 15$$

توجه کنید که عدد ثابت  $\pi^2 p/4$  در تابع هزینه معادله (۷.۲۲) حذف شده است. این ضریب مقدار تابع هزینه را تغییر می دهد بدون این که اثری روی جواب بهین داشته باشد. مسأله سه متغیر طراحی و ۱۰ قید نامساوی معادله های (۷.۲۳) تا (۷.۲۷) دارد. اگر بنخواهیم مسأله را به صورت تحلیلی و با استفاده از شرایط کان-تاکر بخش ۳.۴ حل کنیم، لازم است <sup>(۱۱)</sup> 2 حالت در نظر بگیریم که بسیار وقت گیر و خسته کننده است.

## ۷.۶.۲ حل بهین مسأله طراحی فنر

هر برنامه مناسبی می تواند برای حل مسأله تعریف شده در معادله های (۷.۲۲) تا (۷.۲۷) به کار رود. ما مسأله را با استفاده از الگوریتم برنامه ریزی درجه دوی دنباله ای بخش ۶.۷ که در نرم افزار IDESIGN موجود است، حل می کنیم. تاریخچه فرآیند طراحی چرخه ای در جدول ۷.۲ نشان داده شده است. جدول شماره چرخه (Iter)، بیشترین نقض قید (Max. vio.)، پارامتر همگرایی (Conv. parm.)، تابع هزینه (Cost)، و متغیرهای طراحی را در هر چرخه نشان می دهد. جدول همچنین چگونگی فعال بودن قیود در نقطه بهین که آیا فعال است یا نه، و مقدار تابع قید و ضرایب لاگرانژ را می دهد. چگونگی فعال بودن متغیرهای طراحی در نقطه بهین و مقدار تابع هزینه نهایی و تعداد دفعات فراخوان برنامه های فرعی که توسط کاربر تهیه شده نیز در جدول آمده است.

جدول ۷.۲ تاریخچه فرآیند بهینه سازی چرخه ای برای مسأله طراحی فنر در حالت اجرای یکباره

	$N$	$D$	$d$	هزینه	پارامتر همگرایی	بیشترین نقض چرخه
1	2.0000E + 00	1.3000E + 00	2.0000E - 01	2.080 00E - 01	1.000 00E + 00	9.617 91E - 01
2	2.0038E + 00	1.3000E + 00	5.0000E - 02	1.301 22E - 02	1.000 00E + 00	2.488 14E + 00
3	2.0000E + 00	9.2743E - 01	5.7491E - 02	1.226 13E - 02	1.000 00E + 00	6.898 74E - 01
4	2.0000E + 00	7.7256E - 01	6.2522E - 02	1.207 98E - 02	1.422 46E - 01	1.603 01E - 01
5	2.0336E + 00	9.1481E - 01	6.8435E - 02	1.728 14E - 02	8.922 16E - 03	1.239 63E - 02
6	2.0396E + 00	9.2373E - 01	6.8770E - 02	1.764 75E - 02	6.477 93E - 03	1.973 57E - 05
7	2.0460E + 00	9.2208E - 01	6.8732E - 02	1.762 48E - 02	3.214 48E - 02	9.254 86E - 06
8	2.0782E + 00	9.1385E - 01	6.8542E - 02	1.750 88E - 02	7.688 89E - 02	2.271 39E - 04
9	2.2346E + 00	8.7486E - 01	6.7635E - 02	1.694 69E - 02	8.802 80E - 02	5.143 38E - 03
10	2.9549E + 00	7.1706E - 01	6.3848E - 02	1.448 39E - 02	8.870 76E - 02	8.790 64E - 02
11	4.0781E + 00	5.9653E - 01	6.0328E - 02	1.319 58E - 02	6.668 81E - 02	9.070 17E - 02
12	5.4942E + 00	5.1028E - 01	5.7519E - 02	1.265 17E - 02	7.906 47E - 02	7.207 05E - 02
13	7.2798E + 00	4.3814E - 01	5.4977E - 02	1.228 89E - 02	6.868 92E - 02	6.745 01E - 02
14	8.8781E + 00	4.0092E - 01	5.3497E - 02	1.248 15E - 02	4.504 82E - 02	2.817 92E - 02
15	1.0202E + 01	3.7413E - 01	5.2424E - 02	1.254 65E - 02	1.942 56E - 02	1.578 25E - 02
16	1.1113E + 01	3.5896E - 01	5.1790E - 02	1.262 54E - 02	4.930 63E - 03	5.859 35E - 03
17	1.1289E + 01	3.5692E - 01	5.1698E - 02	1.267 72E - 02	2.692 44E - 05	1.496 87E - 04
18	1.1289E + 01	3.5695E - 01	5.1699E - 02	1.267 87E - 02	9.769 24E - 08	0.000 00E + 00

## فعال بودن قید

شماره	فعال بودن	مقدار	ضریب لاگرانژ
1	آری	-4.663 82E - 09	1.077 17E - 02
2	آری	-2.462 86E - 09	2.440 46E - 02
3	خیر	-4.047 92E + 00	0.000 00E + 00
4	خیر	-7.275 68E - 01	0.000 00E + 00

## فعال بودن متغیر طراحی

شماره	فعال بودن	طراحی	حد پایین	حد بالا	ضریب لاگرانژ
1	پایین	5.169 87E - 02	5.000 00E - 02	2.000 00E - 01	0.000 00E + 00
2	پایین	3.569 50E - 01	2.500 00E - 01	1.300 00E + 00	0.000 00E + 00
3	خیر	1.128 95E + 01	2.000 00E + 00	1.500 00E + 01	0.000 00E + 00

مقدار تابع هزینه در بهین =  $1.267\ 868E - 02$ .

تعداد دفعات فراخوان برای ارزیابی تابع هزینه 18 = (USERMF).

تعداد دفعات فراخوان برای ارزیابی گرادینت تابع هزینه 18 = (USERMG).

تعداد دفعات فراخوان برای ارزیابی توابع قیود 18 = (USERCF).

تعداد دفعات فراخوان برای ارزیابی گرادینت توابع قیود 18 = (USERCG).

تعداد کل دفعات ارزیابی گرادینت = 34.

برای مسأله فعلی، معیارهای توقف زیر به کار رفته است:

۱. بیشترین نقض قید (Max. vio.) باید از  $\varepsilon_1$  کمتر باشد، یعنی در گام ۴ الگوریتم داده شده در بخش ۶.۷،  $V \leq \varepsilon_1$ . مقدار  $\varepsilon_1$  عبارت است از  $1.00E - 04$ .
  ۲. طول بردار جهت (Conv. parm.) باید از  $\varepsilon_2$  کمتر باشد، یعنی در گام ۴ الگوریتم داده شده در بخش ۶.۷،  $\|d\| \leq \varepsilon_2$ . مقدار  $\varepsilon_2$  عبارت است از  $1.00E - 03$ .
- حدس طراحی در شروع عبارت است از (0.2, 1.3, 2.0) در حالی که بیشترین نقض قید 96.2% و مقدار تابع هزینه 0.208 است. در چرخه ششم، یک طراحی قابل قبول (بیشترین نقض قید عبارت است از 05 - 1.97E) به دست می آید که مقدار تابع هزینه آن (02 - 1.764E) است. توجه کنید که در این مثال، تصحیح قید با کاهش قابل توجه (با ضریب ۱۰) تابع هزینه همراه است. با این همه، اغلب، تصحیح قید به افزایش هزینه می انجامد. برنامه برای رسیدن به طراحی بهین ۱۲ چرخه دیگر انجام می دهد. در نقطه بهین، قیود تغییر مکان و تنش برشی معادله های (۷.۲۳) و (۷.۲۴) فعال هستند. مقدار ضرایب لاگرانژ عبارت است از (02 - 1.077E) و (02 - 2.440E). متغیر طراحی اول (قطر مفتول) به کران پایینی خودش نزدیک است.

### ۷.۶.۳ حل تعاملی برای مسأله طراحی فنر

در زیربخش گذشته، مسأله طراحی فنر با یک اجرای یکسره حل شد و طراحی در فرآیند چرخه کنترلی نداشت. برنامه تا رسیدن به نقطه بهین ۱۸ چرخه را انجام داد. ما همین مسأله را به صورت تعاملی و با شروع از همان نقطه، حل خواهیم کرد. روش عبارت خواهد بود از توقف برنامه در هر چرخه، تحلیل شرایط طراحی، و اعمال یک دستور تعاملی برای انجام گام مشخص. در کاربرد فعلی، فقط مقدار تابع هزینه و بیشترین نقض قید مورد بازبینی قرار گرفته و برای تصمیم سازی استفاده می شود. در کاربردهای پیشرفته، تاریخچه متغیرهای طراحی و سایر نمودارهایی که در زیربخش آینده تشریح می شوند نیز می توانند در تصمیم سازی استفاده شوند. به عنوان مثال، مقادیر متغیرهای طراحی می تواند با مشاهده گرایش آنها برون یابی شود. این مطلب در زیربخش آینده تشریح خواهد شد.

جدول ۷.۳ حاوی تاریخچه متغیرهای طراحی، بیشترین نقض قید، پارامتر همگرایی و تابع هزینه است. جدول همچنین الگوریتم تعاملی استفاده شده در هر چرخه را نشان می دهد.

## جدول ۷.۳ فرآیند حل تعاملی برای مسأله طراحی فتر

		بیشترین نقض الگوریتم	پارامتر همگرایی	هزینه	$d$	$D$	$N$
1	CC	9.617 91E - 01	1.000 00E + 00	2.080 00E - 01	2.0000E - 01	1.3000E + 00	2.0000E + 00
2	CC	2.488 14E + 00	1.000 00E + 00	1.301 22E - 02	5.0000E - 02	1.3000E + 00	2.0038E + 00
3	CC	6.898 74E - 01	1.000 00E + 00	1.226 13E - 02	5.7491E - 02	9.2743E - 01	2.0000E + 00
4	CC	1.603 01E - 01	1.000 00E + 00	1.207 98E - 02	6.2522E - 02	7.7256E - 01	2.0000E + 00
5	CC	3.705 54E - 01	1.000 00E + 00	1.033 15E - 02	5.8477E - 02	5.1558E - 01	3.8601E + 00
6	CC	5.060 54E - 01	1.000 00E + 00	7.968 02E - 03	5.0000E - 02	2.9195E - 01	8.9170E + 00
7	CR	0.000 00E + 00	1.676 23E - 02	1.473 52E - 02	5.5455E - 02	4.3230E - 01	9.0837E + 00
8	CCC	3.533 58E - 02	1.676 23E - 02	1.196 85E - 02	5.2692E - 02	3.8896E - 01	9.0828E + 00
9	CCC	4.249 50E - 04	1.676 23E - 02	1.272 98E - 02	5.3485E - 02	4.0151E - 01	9.0831E + 00
10	CCS	1.089 57E - 04	1.676 23E - 02	1.272 90E - 02	5.3395E - 02	3.9916E - 01	9.1854E + 00
11	CR	0.000 00E + 00	5.490 55E - 05	1.273 00E - 02	5.3396E - 02	3.9918E - 01	9.1854E + 00

## فعال بودن قید

شماره	فعال بودن	مقدار	ضریب لاگرانژ
1	آری	-2.946 70E - 09	1.095 81E - 02
2	آری	-1.361 88E - 09	2.457 45E - 02
3	خیر	-4.123 84E + 00	0.000 00E + 00
4	خیر	-6.982 84E - 01	0.000 00E + 00

## فعال بودن متغیر طراحی

شماره	فعال بودن	طراحی	حد پایین	حد بالا	ضریب لاگرانژ
1	پایین	5.339 56E - 02	5.000 00E - 02	2.000 00E - 01	0.000 00E + 00
2	خیر	3.991 78E - 01	2.500 00E - 01	1.300 00E + 00	0.000 00E + 00
3	خیر	9.185 39E + 00	2.000 00E + 00	1.500 00E + 01	0.000 00E + 00

تابع هزینه در بهین =  $1.273\ 000E - 02$ .

تعداد دفعات فراخوان ارزیابی تابع هزینه 11 = (USERMF).

تعداد دفعات فراخوان ارزیابی گرادیان تابع هزینه 11 = (USERMG).

تعداد دفعات فراخوان ارزیابی توابع قیود 11 = (USERCF).

تعداد دفعات فراخوان ارزیابی گرادیان توابع قیود 11 = (USERCG).

تعداد کل دفعات ارزیابی گرادیان = 20.

CC، گام تصحیح قید؛ CR، گام کاهش هزینه؛ CCC، تصحیح قید در هزینه ثابت؛ CCS، تصحیح قید در هزینه مشخص.

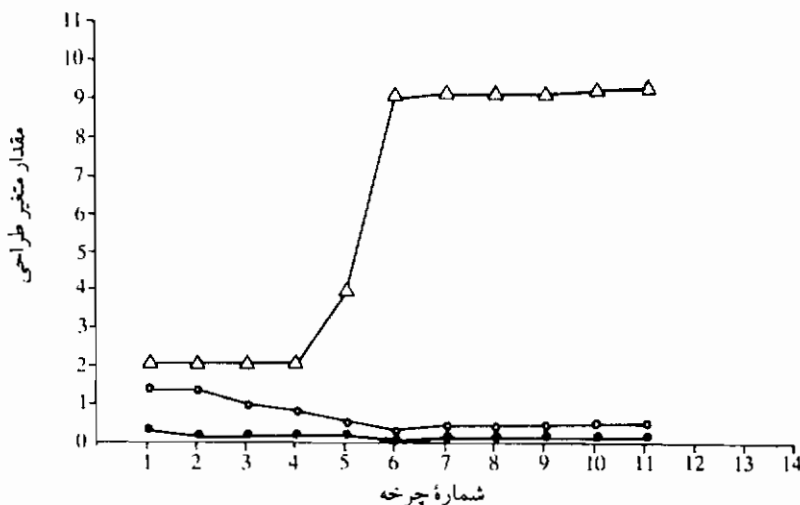
هدف اولیه عبارت است از به دست آوردن یک طراحی قابل قبول. بنابراین در شش چرخه اول الگوریتم تصحیح قید (CC) اجرا شده است. در چرخه هفتم طراحی قابل قبول به دست می آید. توجه کنید که در شش چرخه اول تصحیح قید با کاهش تابع هزینه همراه است.

در چرخه هفتم، الگوریتم کاهش هزینه (CR) با ۲۰٪ کاهش در تابع هزینه اجرا شده است. در چرخه هشتم تابع هزینه کاهش می‌یابد ولی دوباره نقض قید ظاهر می‌شود. برای دو چرخه بعدی، تصحیح قید در هزینه ثابت (CCC) به کار رفته که یک طراحی نسبتاً قابل قبول در دهمین چرخه به دست می‌دهد. در چرخه دهم، تصحیح قید با افزایشی مشخص (CCS) دیده می‌شود. در چرخه یازدهم، تمامی قیود برآورده می‌شوند و پارامتر همگرایی بسیار کوچک است، بنابراین برنامه متوقف شده است. تابع هزینه به بهین واقعی نزدیک است. با این همه، نقطه طراحی متفاوت است. معلوم می‌شود که برای این مسأله طراحیهای نزدیک به بهین متعددی در همسایگی بهین واقعی وجود دارد.

#### ۷.۶.۴ استفاده از ترسیم تعاملی

نمایش ترسیمی حجم زیاد داده‌ها، روش بسیار راحت تعبیر نتایج و نتیجه‌گیری است. ترسیم تعاملی می‌تواند نقش مهمی در تصمیم‌سازی فرآیند طراحی بازی کند. کاربرد احتمالی ترسیم تعاملی را در فرآیند بهینه‌سازی طراحی با استفاده از مسأله طراحی فنر به عنوان نمونه تشریح می‌کنیم. ما مسأله طراحی فنر را برای ده چرخه و با شروع از نقطه (0.2, 1.3, 2.0) اجرا می‌کنیم. در چرخه دهم برنامه متوقف شده و کنترل اجرا به طراحی منتقل می‌شود. از دستورهای مختلف ترسیم منحنی که در برنامه IDESIGN وجود دارد برای نمایش داده‌ها روی صفحه استفاده می‌شوند. تمامی محاسبات با رایانه APOLLO DN460 انجام شده است. در زیر، ابزارهای مختلف ترسیمی و امکان استفاده از آنها را در طراحی عملی تشریح خواهیم کرد.

**گرایش متغیرهای طراحی.** تاریخچه متغیرهای طراحی وقتی روی صفحه نمایش داده شوند تمایل آنها را نشان می‌دهد. به عنوان مثال، شکل ۷.۶ تغییرات متغیرهای طراحی را بر حسب تعداد چرخه‌ها نشان می‌دهد. شکل نشان می‌دهد که متغیر طراحی ۱ در چرخه اول کاهش یافته و آن‌گاه تقریباً ثابت می‌ماند. اگر اطلاعات در یک چرخه میانی نمایش داده شده بودند، متغیر می‌توانست مقدار ثابتی را دارا باشد، زیرا تغییر زیادی نداشت. متغیر طراحی ۲ در چند چرخه اول کاهش یافته و آن‌گاه تقریباً ثابت می‌ماند. متغیر ۳ در سه چرخه اول تغییر نکرده آن‌گاه برای دو چرخه بعدی سرعت افزایش یافته است. با استفاده از اطلاعات مربوط به گرایش متغیرها، طراحی می‌تواند مقدار متغیر طراحی را بدون استفاده از رایانه برون‌یابی کند.



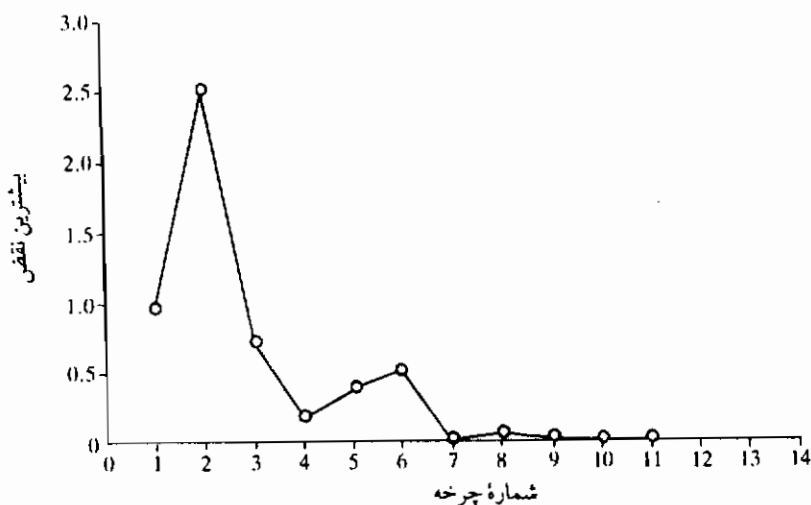
شکل ۷.۶ تاریخچه متغیرهای طراحی برای فنر. N : Δ : D : ○ : d : ●

نتیجه می گیریم که با استفاده از تاریخچه متغیر طراحی، می توانیم تصمیم گیری زیر را انجام دهیم :

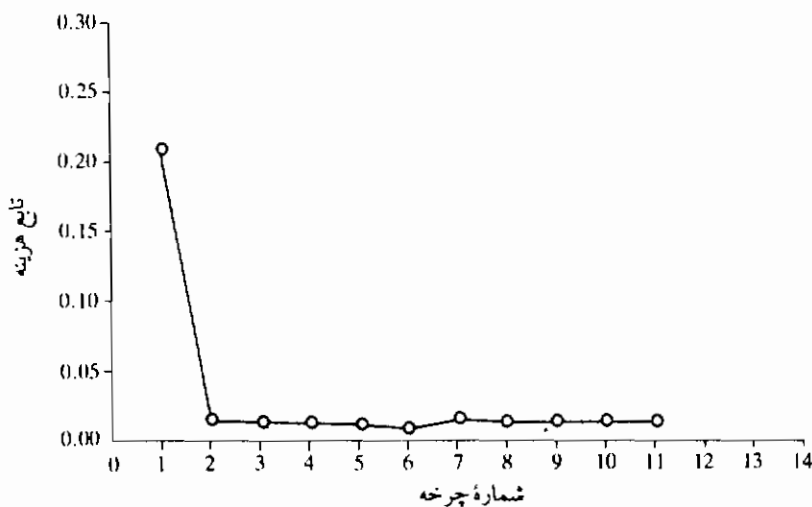
۱. براساس نمایش گرایش متغیرهای طراحی، می توانیم مقدار آنها را با برون یابی بدست آوریم.
۲. اگر یک متغیر طراحی تغییر نکند، می توانیم آن را برای چند چرخه ثابت در نظر گرفته و فقط بقیه متغیرها را بهینه کنیم.

**تاریخچه بیشترین نقض قید.** شکل ۷.۷ ترسیمه ای از بیشترین نقض قید را برحسب تعداد چرخه ها برای مسأله طراحی فنر نشان می دهد. با استفاده از این منحنی، می توانیم طراحیهای قابل قبول را مشخص کنیم. به عنوان مثال، طراحیهای بعد از چرخه هفتم قابل قبول هستند. تمامی طراحیهای چرخه های قبلی مقداری نقض قید داشته اند.

**تاریخچه تابع هزینه.** شکل ۷.۸ تاریخچه تابع هزینه را برای ده چرخه اول مسأله طراحی فنر نشان می دهد. این شکل نشان می دهد که تابع هزینه در چرخه اول به میزان چشمگیری کاهش می یابد. بعد از آن بکندی تغییر می کند و چنین به نظر می رسد که نزدیک بهین است. فرآیند چرخه می توانست در یک طراحی قابل قبول متوقف شود.

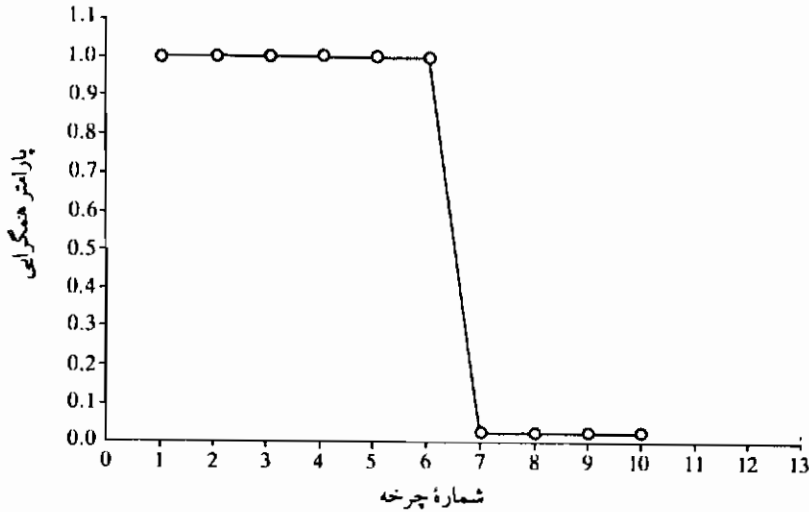


شکل ۷.۷ تاریخچه بیشترین نقض قید برای مسأله طراحی فنر



شکل ۷.۸ تاریخچه تابع هزینه برای مسأله طراحی فنر

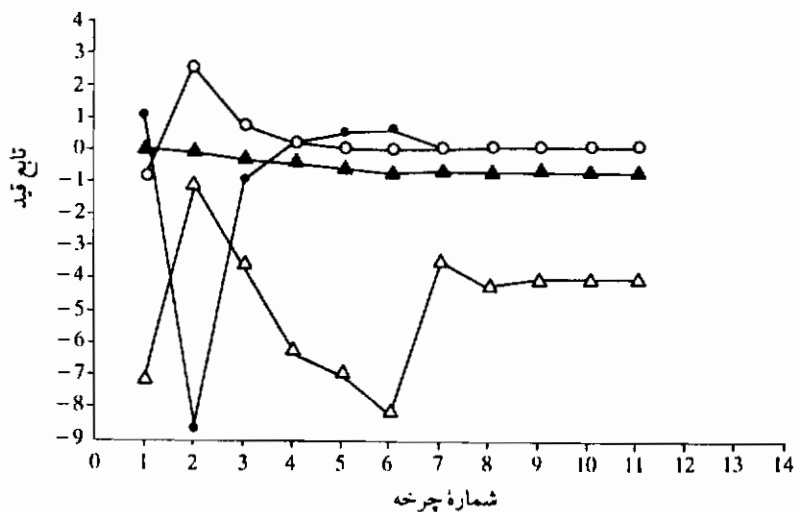
تاریخچه پارامتر همگرایی. شکل ۷.۹ تاریخچه پارامتر همگرایی را برای مسأله طراحی فنر نشان می‌دهد. این پارامتر وقتی به بهین می‌رسیم باید نزدیک صفر شود. دیده می‌شود که پارامتر در هفتمین چرخه نزدیک صفر است، بنابراین جواب کاملاً به بهین نزدیک است و فرآیند چرخه می‌تواند متوقف شود.



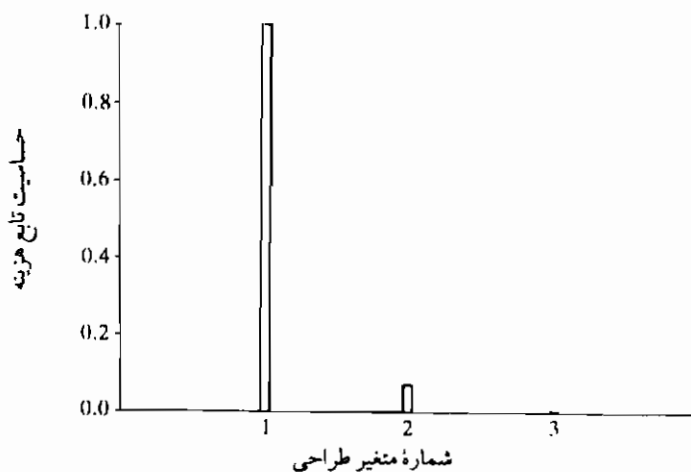
شکل ۷.۹ تاریخچه پارامتر همگرایی برای مسأله طراحی فنر

تاریخچه توابع قیود. شکل ۷.۱۰ تاریخچه چهار قید مسأله طراحی فنر را نشان می دهد. مقدار کمتر از صفر نشان دهنده قید غیر فعال و بزرگتر از صفر نشان دهنده نقض شدن قید است. دیده می شود که قید اول و چهارم در ابتدا نقض شده اند، ولی در چرخه های بعدی قیود اول و دوم فعالند. قید سوم هرگز فعال نبوده و نقض هم نشده و می تواند حذف شود. این قید بر جواب و یا فرآیند بهینه سازی تأثیر نمی گذارد. پس با استفاده از تاریخچه توابع قیود، می توانیم قیدهایی را شناسایی کنیم که در به دست آوردن جواب بهین نقش ویژه دارند. طراح می تواند این قیدها را بیشتر تحلیل کند تا ببیند که آیا می توان آنها را برای بهبود بخشیدن به جواب بهین تنظیم کرد.

نمودار حساسیت تابع هزینه. شکل ۷.۱۱ یک نمودار ستونی نرمال شده حساسیت تابع هزینه را به متغیرهای طراحی نشان می دهد. نمودار با رسم مقدار نسبی مؤلفه های گرادیان تابع هزینه به دست آمده است (مشتقها نسبت به متغیرهای طراحی). برای مسأله طراحی فنر، تابع هزینه از همه بیشتر به اولین متغیر طراحی و از همه کمتر به سومین متغیر طراحی حساسیت نشان می دهد. با دانستن این موضوع، طراح می تواند تصمیم بگیرد که متغیر سوم را ثابت در نظر گرفته و تنها متغیر اول و دوم را بهینه کند.

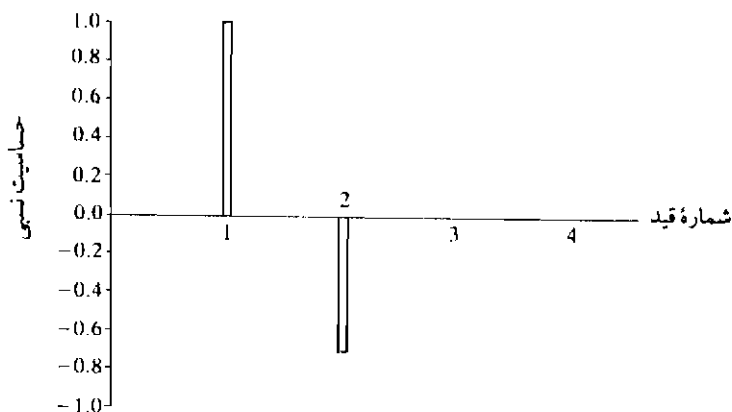


شکل ۷.۱۰ توابع قیود برای مسأله طراحی فنر. ● :  $g_1$ ، ○ :  $g_3$ ، ▲ :  $g_4$ ، △ :  $g_2$



شکل ۷.۱۱ حساسیت تابع هزینه نسبت به متغیرهای طراحی برای مسأله طراحی فنر

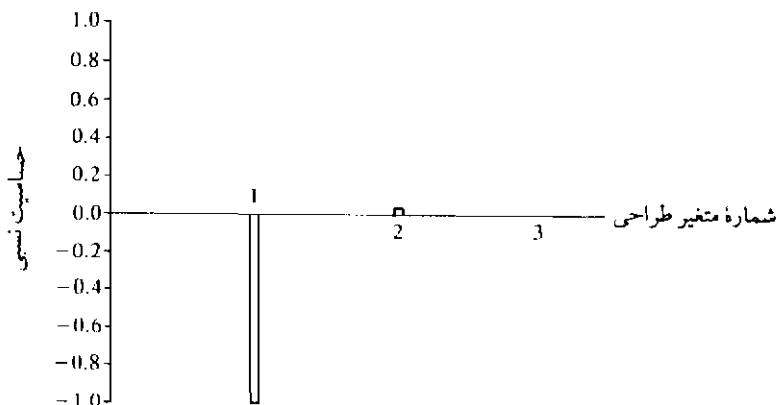
حساسیت متغیرهای طراحی نسبت به قیدهای مختلف. دانستن این که اگر یک متغیر طراحی تغییر کند، برای قیدهای مختلف چه اتفاقی می افتد، ممکن است مفید باشد. شکل ۷.۱۲ چنین نمودار ستونی نرمال شده را برای متغیر طراحی ۱ (قطر مفتول) در مسأله



شکل ۷.۱۲ حساسیت قید نسبت به متغیر طراحی ۱ برای مسأله طراحی فتر

طراحی فتر نشان می دهد. این نمودار چگونگی تغییر چهار قید را با تغییر کوچکی در متغیر طراحی ۱ نشان می دهد. به عنوان مثال، افزایش کمی در متغیر طراحی، مقدار قید اول را افزایش و مقدار قید دوم را کاهش می دهد. نمودار ستونی با رسم مشتقات نرمال شده تمامی قیود فعال نسبت به متغیر طراحی اول به دست آمده است.

نمودار حساسیت قیود. شکل ۷.۱۳ ترسیم مؤلفه های گرادینان نرمال شده برای قید دوم مسأله طراحی فتر است. این منحنی نشان می دهد که اگر هریک از متغیرهای طراحی تغییر



شکل ۷.۱۳ حساسیت قید شماره ۲ نسبت به متغیرهای طراحی برای مسأله طراحی فتر

کنند برای مقدار تابع قید چه پیش می‌آید. به عنوان مثال، افزایش متغیر ۱ (قطر مفتول) مقدار قید را با سرعت کاهش می‌دهد. افزایش مقدار متغیر طراحی ۲ مقدار قید ۲ را افزایش می‌دهد.

نتیجه‌گیری. دیده می‌شود که ترسیم‌های مختلف و نمودارهای ستونی اطلاعات بسیار سودمندی را جمع به مسأله طراحی می‌دهند. این اطلاعات می‌توانند در سرعت بخشیدن به فرآیند طراحی بهین و درک بیشتر عملکرد سیستم مورد استفاده قرار گیرند. شواهد به دست آمده می‌تواند به مفاهیم نوین و طراحی بهتر سیستم بینجامد.

## تمرینهای فصل ۷

### بخش ۷.۱ الگوریتمهای بهینه‌سازی طراحی تعاملی

#### ۷.۱ مسأله مقید زیر را در نظر بگیرید: تابع

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^3 - 2x_2^2$$

را مشروط به قیود

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مینیمم کنید. توابع مسأله را روی کاغذ رسم ترسیم کرده و ناحیه قابل قبول را مشخص کنید. نقطه بهین را تعیین کنید.

۷.۲ برای تمرین ۷.۱، در نقطه قابل قبول  $(0, 2)$ ، جهت کاهش هزینه را محاسبه کرده و نقطه جدیدی را که ۱۰٪ کاهش در تابع هزینه به وجود می‌آورد به دست آورید. جهت را روی کاغذ رسم نشان داده و حل خود را شرح دهید.

۷.۳ برای تمرین ۷.۱، در نقطه غیر قابل قبول  $(3, 3)$ ، جهت تصحیح قید را محاسبه کرده و آن را روی کاغذ ترسیم نشان داده و حل خود را شرح دهید.

۷.۴ برای تمرین ۷.۱، در نقطه غیر قابل قبول  $(2, 0.8)$ ، جهت هزینه ثابت را محاسبه کرده و آن را روی کاغذ ترسیم نشان داده و حل خود را شرح دهید.

۷.۵ برای تمرین ۷.۱، در نقطه غیر قابل قبول  $(2, 0.8)$ ، جهت تصحیح قید را با فقط ۱۰٪ افزایش در تابع هزینه محاسبه کرده و آن را روی کاغذ ترسیم نشان داده و حل خود را شرح دهید.

۷.۶ مسأله مقید زیر را در نظر بگیرید؛ عبارت

$$2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

را مشروط به قیود

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

ماکزیمم کنید. توابع مسأله را روی کاغذ ترسیم رسم کرده و ناحیه قابل قبول را مشخص کنید. نقطه بهین را تعیین کنید.

۷.۷ برای تمرین ۷.۶، در نقطه قابل قبول (0, 1.25)، جهت کاهش هزینه را محاسبه کرده و نقطه جدیدی را که ۱۰٪ کاهش در تابع هزینه باعث شود به دست آورید. جهت را روی کاغذ ترسیم نشان داده و حل خود را شرح دهید.

۷.۸ برای تمرین ۷.۶، در نقطه غیرقابل قبول (4, 2)، جهت تصحیح قید را محاسبه کرده، آن را روی کاغذ ترسیم نشان داده و حل خود را شرح دهید.

۷.۹ برای تمرین ۷.۶، در نقطه غیرقابل قبول (1, 2)، جهت هزینه ثابت را محاسبه کرده، آن را روی کاغذ ترسیم نشان داده و حل خود را شرح دهید.

۷.۱۰ برای تمرین ۷.۶، در نقطه غیرقابل قبول (2, 2)، جهت تصحیح قید را که تنها ۱۰٪ افزایش در تابع هزینه داشته باشد محاسبه کنید. جهت را روی کاغذ رسم نشان داده و حل خود را شرح دهید.

## فصل هشتم

### بهینه سازی طراحی عملی

#### ۸.۱ مقدمه

ما تاکنون مسائل طراحی مهندسی ساده‌ای را برای تشریح مفاهیم بهینه سازی و روشهای محاسباتی در نظر گرفتیم. برای تمامی توابع مسأله، فرض شده بود که عبارت صریحی بر حسب متغیرهای طراحی وجود دارد. با وجود آن که بعضی از مسائل می‌توانند بر حسب توابع صریح رابطه سازی شوند، کاربردهای پیچیده متعددی وجود دارند که بستگی صریح توابع مسأله به متغیرهای طراحی مشخص نیست. به علاوه، سیستمهای پیچیده، الگوهای تحلیل بزرگ و تخصصی تری را نیاز دارند. تعداد متغیرهای طراحی می‌تواند بسیار زیاد باشد. بررسی تحدب مسأله تقریباً غیرممکن است. حتی وجود طراحیهای قابل قبول تضمین نمی‌شود، چه رسد به جواب بهین. محاسبه توابع مسأله می‌تواند حجم محاسباتی بالایی را نیاز داشته باشد. در حالت‌های زیادی برنامه‌های ویژه بزرگی باید برای محاسبه توابع استفاده شود. در فصل‌های گذشته نیز دیدیم که الگوریتمهای محاسباتی نوین، به گرادیان توابع هزینه و قیود نیاز دارند. وقتی شکل صریحی از توابع مسأله معلوم نیست، ارزیابی گرادینانها به روشهای خاصی نیاز دارد که باید تدوین شده و در نرم افزارهای مناسبی پیاده شوند. بالاخره، برای ایجاد توانایی طراحی بهین برای یک دسته خاص از مسائل طراحی، اجزای نرم افزاری مختلف نیز باید به طور مناسبی با هم ترکیب شوند.

در این فصل، بحث طراحی بهین سیستمهای مهندسی عملی پیچیده مطرح می شود. رابطه سازی مسأله، ارزیابی گرادیان، و بحثهای عملی دیگر مانند انتخاب الگوریتم و نرم افزار به بحث گذاشته می شوند. مسأله مهم آمیختگی یک کاربرد خاص با نرم افزار بهینه سازی طراحی بحث می شود و کاربردهای طراحی مهندسی متعددی تشریح می شوند. در زیر عناوین این فصل را می آوریم.

بخش ۸.۲ رابطه سازی مسائل بهینه سازی طراحی عملی. این بخش راهنمایهای عمومی برای رابطه سازی مناسب یک مسأله طراحی را ارائه می کند. بیشتر مسائل عملی پیچیده بوده و توابع هزینه و قید ضمنی دارند. پنداره ها با مسأله نمونه تشریح می شوند.

بخش ۸.۳ ارزیابی گرادیان. این بخش به بیان روشهای ارزیابی گرادیانهای قیود ضمنی می پردازد. یک مثال عددی برای تشریح یکی از روشها آورده می شود.

بخش ۸.۴ بحثهایی درباره کاربردهای عملی. شاخصهای خوبی یک الگوریتم برای کاربردهای عملی تشریح می شود. این شاخصها عبارتند از توانمندی، بازده، عمومیت داشتن و سهولت استفاده.

بخش ۸.۵ استفاده از نرم افزار عمومی. برای حل مسائل طراحی عملی به اجزای نرم افزاری زیادی نیاز است. مباحثی درباره ساختار نرم افزارهای بهینه سازی طراحی عمومی ارائه می شوند. مسأله آمیختگی یک کاربرد با یک نرم افزار بهینه سازی عمومی مورد بحث قرار می گیرد.

بخش ۸.۶-۸.۹ کاربردهای عملی. این بخشها کاربردهای طراحی مختلفی را شرح می دهند. مسائل ابتدا تعریف شده، سپس رابطه سازی و حل می شوند تا قدرت روشهای بهینه سازی عددی تشریح شود.

## ۸.۲ رابطه سازی مسائل بهینه سازی عملی

### ۸.۲.۱ راهنمایهای عمومی

رابطه سازی مسأله در یک طراحی گامی مهم است و باید الگویی واقع بینانه برای سیستم مهندسی مورد نظر تعریف کرد. بخش ریاضی روشهای بهینه سازی می تواند به سادگی به موقعیتهایی برسد که یک قانون فیزیکی را بی معنی یا نقض کند. بنابراین برای تبدیل صحیح کار طراحی به یک الگوی ریاضی، طراح باید از دید مهندسی، مهارت و تجربه استفاده کند.

نکات زیر می تواند به عنوان اصول راهنما برای ساختن الگوی ریاضی که با کار طراحی در دنیای واقعی همخوانی داشته باشد مورد استفاده قرار گیرد.

۱. هنگامی که طراحی از نظر مفهوم آماده شد، باید روی طراحی جزئیات سیستم کار کنیم تا وظیفه خواسته شده را انجام داده باشیم. برای شروع، تمامی پارامترهای احتمالی یا مجهولات باید به عنوان متغیرهای طراحی بالقوه مورد توجه قرار گیرند و تا حد ممکن از هم مستقل باشند. همچنین، برای کارکرد قابل اطمینان سیستم باید انواع معیارهای شکست و دیگر ضرورت های فنی به عنوان قید در نظر گرفته شوند. به طور خلاصه، باید انعطاف پذیری و آزادی قابل توجهی قبل از تحلیل احتمالات مختلف وجود داشته باشد. به تدریج که آگاهی بیشتری راجع به مسأله پیدا کردیم، متغیرهای طراحی اضافی و غیر ضروری می توانند به عنوان ثابت در نظر گرفته شوند یا از الگو حذف شوند. بالاخره، تنها توابع هزینه و قید قابل ملاحظه می توانند در الگوی بهینه سازی طراحی مورد نظر باشند.
۲. وجود یک جواب بهین برای یک الگوی بهینه سازی طراحی به رابطه سازی آن بستگی دارد. اگر قيود خیلی محدودکننده باشند، ممکن است جوابی برای مسأله وجود نداشته باشد. در چنین حالتی، قيود باید آزاد شوند و محدوده منابع بزرگتری برای قیدهای مساوی در نظر گرفته شود. سؤال از یگانگی جواب فراگیر برای مسأله به تحدب قطعی توابع هزینه و قيود بستگی دارد. در عمل، بیشتر مسائل طراحی مهندسی محدب نیستند؛ بنابراین بهینگی فراگیر یک جواب محلی نمی تواند تضمین شود. معمولاً جوابهای بهین محلی چندگانه وجود دارد. این حالت یک موقعیت نامطلوب نیست، زیرا به طراح آزادی بیشتری می دهد تا جواب مناسب را از میان چند جواب موجود انتخاب کند.
۳. در محاسبات عددی، گاهی پیدا کردن یک طراحی قابل قبول نسبت به قيود نامساوی آسانتر از یافتن آن نسبت به قيود مساوی است. این البته به ساختار مسأله و غیرخطی بودن توابع بستگی دارد. قیدی که به صورت نامساوی بیان می شود فضای قابل قبول بسیار بزرگتری را نسبت به وقتی که همان قید به صورت مساوی بیان می شود تعریف می کند. در حالتی که تعداد قيود مساوی مسأله از تعداد متغیرهای طراحی بیشتر باشد، جوابی وجود نخواهد داشت، مگر آن که بعضی از قيود به هم وابسته باشند.
۴. نمایش مسائل طراحی مهندسی به وسیله الگوی بهینه سازی طراحی برنامه ریزی غیرخطی استاندارد با یک تابع هدف تک مقداری حقیقی مشروط به یک دسته از قيود مساوی و

نامساوی آن چنان که به نظر می رسد محدودکننده نیست. مسأله بهینه سازی همزمان بیش از یک تابع هدف (مسائل چند هدفه) می تواند با معرفی ضرایب وزنی به توابع هدف مختلف و ترکیب آنها به صورت یک تابع هدف واحد به شکل یک مسأله استاندارد تبدیل شود. یا، مهمترین معیار می تواند به عنوان تابع هزینه و بقیه به صورت قیود در نظر گرفته شوند. با تغییر محدوده های توابع هزینه ای که به صورت قید در نظر گرفته شده اند، منحنیهای کمکی می تواند رسم شود و برای طراحی نهایی سیستم به کار رود.

۵. به منظور کاهش تعداد متغیرهای طراحی در یک الگوی بهینه سازی، پنداره ارتباط دادن متغیرهای طراحی سودمند است. اگر یکی از متغیرهای طراحی بتواند برحسب دیگر متغیرها بیان شود، آن گاه آن متغیر می تواند از الگو حذف شود. همچنین اگر طراحی بتواند تقارنی را در سیستم شناسایی کند، ممکن است در کاهش تعداد متغیرهای طراحی مؤثر باشد.

۶. تابع هزینه ممکن است برای بسیاری از سیستمهای سازه ای، مکانیکی، خودرویی و هوافضایی، وزن، حجم، جرم، تنش در نقطه خاص، عملکرد، قابل اطمینان بودن سیستم و غیره باشد. قیود می تواند بر روی تنشها، کرنشها، تغییر مکانها، بسامدهای ارتعاشی، محدودیتهای ساخت و سایر معیارهای عملکردی باشد.

۷. داشتن توابع هزینه و قیود پیوسته و مشتق پذیر مهم است. اگر تابعی پیوسته یا مشتق پذیر نباشد آن گاه نظریه های بهینه سازی معمولی کارساز نیستند. در مواقع مشخصی، ممکن است بتوان یک تابع مشتق ناپذیر مثل  $|x|$  را با یک تابع هموار  $x^2$  بدون تغییر فاحشی در تعریف مسأله عوض کرد.

۸. در حالت کلی یافتن قیود وابسته و حذف آنها از روابط مشکل است. الگوریتمهای نوین بهینه سازی و نرم افزارهای مربوط می توانند مشکلاتی را که از ناحیه قیود وابسته ناشی می شود برطرف کنند. همچنین، قیود مساوی می تواند برای کاهش تعداد متغیرهای طراحی و با نوشتن یک متغیر برحسب متغیرهای دیگر مورد استفاده قرار گیرد. با این همه، چنین کاری تنها برای مسائل کوچکتر که در آنها عبارت صریحی برای قیود وجود دارد مناسب است. در کاربردهای پیچیده تر، قیود مساوی باید نگاه داشته شده و در الگوریتم بهینه سازی مورد نظر قرار گیرند.

۹. در مسائل طراحی مهندسی، به خاطر محدودیتهای عملی اغلب برای متغیرهای طراحی

حد بالا و پایین در نظر گرفته می شود. اگر حد پایین برای متغیر طراحی وجود نداشته باشد، آن گاه می توان یک عدد منفی خیلی بزرگ را برای حد پایینی در نظر گرفت، و به طور مشابه اگر حد بالایی در تعریف مسأله داده نشده باشد یک عدد مثبت بزرگ را می توان به عنوان حد بالایی در نظر گرفت.

۱۰. در مسائل برنامه ریزی غیرخطی، متغیرهای طراحی اغلب پیوسته فرض می شوند. در عمل اغلب متغیرها گسسته و عدد صحیحند. به عنوان مثال، به دلیل محدودیتهای ساخت، اجزای سازه ای و قطعات یدکی برای بیشتر سیستمهای مهندسی تنها در شکلهای اندازه های مشخصی در دسترس هستند. بنابراین، وقتی جواب بهین را به دست آوردیم، می توانیم قطعاتی را که از نظر اندازه به مقدار بهین نزدیکترند انتخاب کنیم. یا، می توان روش بهینه سازی بیان شده در بخش ۲.۷ را برای به دست آوردن جواب عملی استفاده کرد.

۱۱. به طور کلی، نرمال سازی تمامی قیود نسبت به مقادیر حدی شان مطلوب است. در محاسبات عددی، این کار به عملکرد پایدارتری می انجامد. بنابراین، تا حد امکان، در کاربردهای عملی تمامی قیود باید نرمال سازی شوند.

#### ۸.۲.۲ مثالی از یک مسأله بهینه سازی طراحی عملی

رابطه سازی طراحی بهین سیستمهای مهندسی پیچیده، ابزار و روشهای کلی تری نسبت به آنچه قبلاً بحث شد نیاز دارد. ما این ابزار و روشها را با در نظر گرفتن یک دسته از مسائل که کاربرد وسیعی در مهندسی خودرو، هوا-فضا، مکانیک و سازه دارند، تشریح خواهیم کرد. این زمینه های کاربردی مهم برای تشریح روشهای رابطه سازی مسائل و توضیح چگونگی برخورد با قیود ضمنی انتخاب شده اند. نحوه ارزیابی مقدار توابع قیود و گرادینهای آنها باید بیان شوند. خوانندگانی که با این کاربردها آشنایی ندارند باید از مطالب به عنوان اصول راهنما برای زمینه مورد علاقه خود استفاده کنند، زیرا در دیگر کاربردهای عملی، تحلیلها و روشهای مشابهی باید مورد استفاده قرار گیرند.

زمینه کاربردی که ما برای تشریح انتخاب کرده ایم طراحی بهین سیستمهایی است که با روشهای اجزای محدود مدل شده اند. مرسوم است که برای تحلیل سیستمهای سازه ای پیچیده از روشهایی استفاده شود که در بسیاری از بسته بندیهای نرم افزاری تجاری در دسترس هستند.

جابه جایی، تنشها و کرنشها در نقاط مختلف، بسامد ارتعاشی، و بار کماتش برای سیستم را می توان محاسبه کرد و قیودی روی آنها گذاشت. ما برای این زمینه کاربردی یک رابطه سازی طراحی بهین را شرح خواهیم داد.

فرض کنید  $x$  نمایشگر یک بردار  $n$  مؤلفه ای از پارامترهای طراحی سیستم باشد. این مؤلفه ها ممکن است ضخامت اعضا، مساحت سطح مقطع، پارامترهایی که شکل سیستم را مشخص می کند، و سختی و خواص مصالح اجزا باشند. وقتی  $x$  مشخص شد، طرحی از سیستم معلوم می شود. برای تحلیل سیستم (محاسبه تنشها، کرنشها و بسامدها، نیروهای کماتش و جابه جاییها)، روش این است که ابتدا جابه جاییها را در چند نقطه کلیدی - نقاط شبکه یا گره - مدل اجزای محدود محاسبه شود. از روی این جابه جاییها، می توان کرنش (جابه جایی نسبی ذرات مصالح) و تنش را در نقاط مختلف سیستم به دست آورد که در کتابهای متعدد [Cook<sup>۱</sup>، ۱۹۸۱؛ هیوبنر و ترنتون<sup>۲</sup>، ۱۹۸۲؛ گرندین<sup>۳</sup>، ۱۹۸۶] چگونگی به دست آوردن آنها آمده است.

فرض کنید  $U$  برداری باشد که  $U$  مؤلفه آن جابه جاییهای نقاط کلیدی سیستم باشند. معادله اصلی که بردار جابه جایی  $U$  را برای یک سیستم ارتجاعی خطی به دست می دهد - که معادله تعادل بر حسب جابه جاییها نامیده می شود - عبارت است از

$$K(x)U = F(x) \quad (۸.۱)$$

که در آن  $K(x)$  یک ماتریس  $n \times n$  است و ماتریس سختی نامیده می شود و  $F(x)$  بردار نیروی مؤثر است که  $U$  مؤلفه دارد. ماتریس سختی  $K(x)$  یک خاصیت سیستم سازه است که آشکارا به متغیرهای طراحی، خواص مصالح و هندسه سیستم بستگی دارد. برای اجزای محدود مختلف روشهای نظام مندی برای محاسبه خودکار ماتریس سختی تدوین شده است. بردار نیروی  $F(x)$  نیز، در حالت کلی، می تواند به متغیرهای طراحی وابسته باشد. ما روشهای محاسبه  $K(x)$  را به دلیل مربوط نبودن به مقصود اصلی این کتاب بحث نخواهیم کرد. هدف این است که توضیح دهیم چگونه بعد از به دست آمدن مدل اجزای محدود (یعنی معادله ۸.۱) طراحی می تواند بهینه شود. این هدف را با فرض این که مدل اجزای محدود سیستم به دست آمده دنبال می کنیم.

می توان دید که وقتی بردار طراحی  $x$  مشخص شد، با حل دستگاه معادلات خطی

1. Cook

2. Huebner and Thornton

3. Grandin

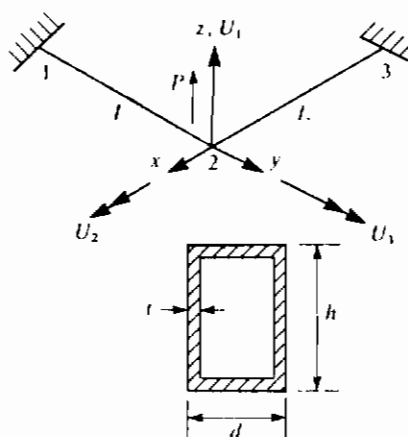
معادله (۸.۱)، جابه جاییهای  $U$  می تواند محاسبه شود. توجه کنید که یک  $x$  دیگر، در حالت کلی، مقادیر متفاوتی برای جابه جاییهای  $U$  خواهد داد. بنابراین  $U$  تابعی از  $x$  است؛ با این همه، شکل تابعی صریح آن نمی تواند نوشته شود. یعنی،  $U$  یک تابع ضمنی از متغیرهای طراحی  $x$  است. تنش  $\sigma_i$  در نقطه  $i$  ام با استفاده از جابه جاییها محاسبه می شود و تابع صریحی از  $U$  و  $x$  است، یعنی  $\sigma_i(U, x)$ . با این همه، چون  $U$  یک تابع ضمنی از  $x$  است،  $\sigma_i$  نیز یک تابع ضمنی از متغیرهای طراحی  $x$  می شود. قیود مربوط به تنش و جابه جایی می تواند به شکل تابع زیر نوشته شود.

$$g_i(x, U) \leq 0 \quad (8.2)$$

در کاربردهای متعددی از مهندسی خودرو، هوا-فضا، مکانیک و سازه، مقدار مصالح استفاده شده باید مینیمم شود تا سیستم کارا و مقرون به صرفه باشد. بنابراین، تابع هزینه معمول در این دسته از کاربردها وزن، جرم یا حجم مصالح سیستم است. این معمولاً یک تابع صریح از متغیرهای طراحی  $x$  است. توابع هزینه ضمنی، مانند تنش، جابه جایی، بسامد ارتعاش، و غیره، نیز می توانند با معرفی متغیرهای طراحی مصنوعی [هاگ و آرورا<sup>۱</sup>، ۱۹۷۹] مورد استفاده قرار گیرند. ما فرض می کنیم این کار انجام شده و تنها توابع هزینه صریح را در نظر می گیریم.

به طور خلاصه، یک رابطه سازی کلی برای مسائل طراحی با توابع صریح و ضمنی از متغیرهای طراحی به شکل زیر تعریف می شود: یک بردار  $n$  بعدی  $x$  از متغیرهای طراحی بیابید که تابع هزینه  $f(x)$  را مینیمم کند و قیود طراحی ضمنی معادلات (۸.۲) با  $U$  ای که در دستگاه معادلات (۸.۱) صدق می کند را برآورده کرده و دیگر محدودیتهای عملی را نیز نقض نکند. توجه کنید که اگر قیود مساوی هم وجود داشته باشند می توانند مانند فصل گذشته در نظر گرفته شوند. ما روش رابطه سازی مسأله را با یک مسأله نمونه تشریح می کنیم.

**مثال ۸.۱ طراحی يك قاب دو عضوی.** طراحی یک قاب دو عضوی مانند شکل ۸.۱ را که تحت تأثیر بارهای خارج از صفحه قرار دارد در نظر بگیرید. چنین قابهایی در کاربردهای متعددی از مهندسی خودرو، هوا-فضا، مکانیک و سازه مطرح می شود. می خواهیم مسأله مینیمم سازی حجم قاب را مشروط به محدودیتهای تنش و ابعاد رابطه سازی کنیم [بارتل<sup>۲</sup>، ۱۹۶۹].



شکل ۸.۱ قاب دو عضوی

حل. چون سازه بهین قرینه خواهد بود، دو عضو قاب یکسان هستند. همچنین مشخص شده است که مقاطع مربع مستطیل توخالی با سه متغیر طراحی  $d$  = عرض عضو (اینچ)،  $h$  = ارتفاع عضو (اینچ) و  $t$  = ضخامت دیواره (اینچ) برای اعضا استفاده خواهد شد. بنابراین، بردار متغیر طراحی عبارت است از  $\mathbf{x} = (d, h, t)$ .

حجم سازه به عنوان تابع هزینه در نظر گرفته شده که یک تابع صریح از متغیرهای طراحی است و عبارت است از

$$f(\mathbf{x}) = 2L(2dt + 2ht - 4t^2) \quad (۸.۳)$$

برای محاسبه تنشها، باید مسأله را تحلیل کنیم. اعضا تحت تأثیر دو تنش خمشی و پیچشی قرار دارند و باید قید تنش مرکب در نقاط ۱ و ۲ اعمال شود. فرض کنید  $\sigma$  و  $\tau$  به ترتیب تنشهای ماکزیمم خمشی و برشی در اعضا باشند. معیار گسیختگی برای عضو براساس نظریه تنش مرکب است که به شرط تسلیم وان میسر<sup>۱</sup> (یا انرژی اعوجاج<sup>۲</sup> ماکزیمم) معروف است [کراندال<sup>۳</sup> و دیگران، ۱۹۷۸]. با این معیار، تنش

1. von Mises

2. distortion

3. Crandall

مؤثر  $\sigma_e$  برابر است با  $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$  و قید تنش به صورت نرمال شده زیر نوشته می شود،

$$\frac{1}{\sigma_e^2}(\sigma^2 + 3\tau^2) - 1.0 \leq 0 \quad (۸.۴)$$

که در آن  $\sigma_e$  تنش طراحی مجاز است.

تنشها از گشتاورها و لنگرهای انتهای اعضوها محاسبه می شوند که با استفاده از روش اجزای محدود به دست می آیند. سه جابه جایی گره عمومیت یافته (تغییر مکانها و پیچشها) برای مدل اجزای محدود که در شکل ۸.۱ نشان داده شده به شکل زیر تعریف می شوند،  $U_1$  = جابه جایی عمودی در گره ۲،  $U_2$  = چرخش حول خط ۲-۳ و  $U_3$  = چرخش حول خط ۱-۲. با استفاده از این متغیرها، معادله تعادل (معادله ۸.۱) برای مدل اجزای محدود که جابه جاییهای  $U_1$ ،  $U_2$  و  $U_3$  را می دهد به شکل زیر است (برای جزئیات روش به دست آوردن معادله ها با استفاده از معادلات تعادل اعضا به کتابهای نویسندگان زیر مراجعه کنید؛ کوک<sup>۱</sup>، ۱۹۸۱؛ هاگ و آرورا<sup>۲</sup>، ۱۹۷۹؛ هیوینر و تورنتون<sup>۳</sup>، ۱۹۸۲؛ گرندین<sup>۴</sup>، ۱۹۸۶):

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & -6L & 6L \\ -6L & \left(4L^2 + \frac{GJ}{EI}L^2\right) & 0 \\ 6L & 0 & \left(4L^2 + \frac{GJ}{EI}L^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۸.۵)$$

که در آن  $E$  = ضریب ارتجاعی،  $(3.0E + 07)$  psi

$L$  = طول عضو، 100 in

$G$  = ضریب ارتجاعی برشی،  $(1.154E + 07)$  psi

$P$  = بار در گره ۲، -10 000 lbs

$$I = \text{گشتاور ماند} = \frac{1}{12} [dh^3 - (d - 2t)(h - 2t)^3] \quad (۸.۶)$$

$$J = \text{گشتاور ماند قطبی} = \frac{2t(d-t)^2(h-t)^2}{(d+h-2t)} \quad (۸.۷)$$

$$A = \text{مساحت برای محاسبه تنش برشی پیچشی} = (d-t)(h-t) \quad (۸.۸)$$

از معادله (۸.۵)، مساتریس سختی  $K(x)$  و بردار نیرو  $F(x)$  معادله (۸.۱) می تواند مشخص شود. توجه کنید که در مثال فعلی، بردار نیرو  $F$  به متغیرهای طراحی بستگی ندارد.

از معادله (۸.۵) می توان دید که  $U$  یک تابع ضمنی از  $x$  است. اگر  $K$  بتواند صریحاً برحسب متغیرهای طراحی معکوس شود، آن گاه  $U$  می تواند به عنوان تابعی صریح از  $x$  نوشته شود. این در مثال فعلی ممکن است؛ ولی ما برای بحث روشهای ارزیابی قیود و گرادیانهای آنها شکل ضمنی را در نظر خواهیم گرفت.

برای یک طراحی داده شده، وقتی  $U_1$ ،  $U_2$  و  $U_3$  از معادله (۸.۵) محاسبه شد، گشتاور، و لنگر خمشی در نقاط ۱ و ۲ برای عضو ۱-۲ به شکل زیر محاسبه می شوند

$$T = -\frac{GJ}{L} U_3, \quad \text{lb-in} \quad (۸.۸)$$

$$M_1 = \frac{2EI}{L^2} (-3U_1 + U_2L), \quad (\text{لنگر در انتهای ۱}) \quad (۸.۹)$$

$$M_2 = \frac{2EI}{L^2} (-3U_1 + 2U_2L), \quad (\text{لنگر در انتهای ۲}) \quad (۸.۱۰)$$

با استفاده از این لنگرها، تنشهای برشی و خمشی به شکل زیر محاسبه می شوند

$$\tau = \frac{T}{2At}, \quad \text{psi} \quad (۸.۱۱)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2I} M_1 h, \quad (\text{تنش خمشی در انتهای ۱}) \quad (۸.۱۲)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2I} M_2 h, \quad (\text{تنش خمشی در انتهای ۲}) \quad (۸.۱۳)$$

پس قیود تنش معادله (۸.۴) در نقاط ۱ و ۲ عبارتند از

$$g_1(x, U) = \frac{1}{\sigma_a^2} (\sigma_1^2 + 3\tau^2) - 1.0 \leq 0 \quad (۸.۱۴)$$

$$g_2(x, U) = \frac{1}{\sigma_a^2} (\sigma_2^2 + 3\tau^2) - 1.0 \leq 0 \quad (۸.۱۵)$$

می توان دید که چون لنگرهای  $T$ ،  $M_1$  و  $M_2$  توابع ضمنی از متغیرهای طراحی هستند، تنشها نیز توابع ضمنی هستند. آنها همچنین توابع صریحی از متغیرهای طراحی هستند، همچنان که در معادلات (۸.۱۲) و (۸.۱۳) دیده می شود. بنابراین، قیود تنش معادلات (۸.۱۴) و (۸.۱۵) هم توابع ضمنی و هم صریح از متغیرهای طراحی هستند. این نکته مهم است، زیرا ارزیابی گرادیان برای توابع قیود ضمنی به روشهای خاصی نیاز دارد که در بخش بعدی تشریح می شوند.

علاوه بر دو قید تنش، قیود حد بالا و پایین زیر برای متغیرهای طراحی اعمال می شوند:

$$2.5 \leq d \leq 10.0$$

$$2.5 \leq h \leq 10.0$$

$$0.1 \leq t \leq 1.0$$

مشاهده می شود که به دست آوردن شکل صریح تابع قید  $g_1$  و  $g_2$  برحسب متغیرهای طراحی  $d$ ،  $h$  و  $t$  حتی برای این مسأله ساده بسیار مشکل است. ما برای داشتن یک شکل صریح از تنشهای  $\tau$ ،  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  به شکل صریح جابه جاییهای  $U_1$ ،  $U_2$  و  $U_3$  در معادله های (۸.۸) تا (۸.۱۰) نیاز داریم. برای داشتن یک شکل صریح برای  $U_1$ ، باید ماتریس ضرایب معادله تعادل (۸.۵) را به طور صریح وارون کنیم. هرچند این کار برای مثال فعلی ناممکن نیست، در حالت کلی، انجام این کار به احتمال زیاد ناممکن است. بنابراین مشاهده می کنیم که قیود توابع ضمنی از متغیرهای طراحی هستند.

برای تشریح روش، یک نقطه طراحی مثل (2.5, 2.5, 0.1) انتخاب می کنیم و جابه جاییها و تنشها را محاسبه می کنیم. با استفاده از داده های مسأله، کمیتهای زیر را که در محاسبات بعدی مورد نیازند محاسبه می کنیم:

$$I = \frac{1}{12}[2.5^4 - 2.3^4] = 0.9232 \text{ in}^4$$

$$J = \frac{1}{4.8}[2(0.1)(2.4)^2(2.4)^2] = 1.3824 \text{ in}^4$$

$$A = (2.4)(2.4) = 5.76 \text{ in}^2$$

$$GJ = (1.154\text{E}+07)(1.3824) = (1.5953\text{E}+07)$$

$$EI = (3.0\text{E}+07)(0.9232) = (2.7696\text{E}+07)$$

$$4L^2 + \frac{GJ}{EI}L^2 = \left(4 + \frac{1.5953}{2.7696}\right)100^2 = (4.576\text{E}+04)$$

با استفاده از داده های فوق، معادله تعادل (معادله ۸.۵)، عبارت است از

$$27.696 \begin{bmatrix} 24 & -600 & 600 \\ -600 & 45\,760 & 0 \\ 600 & 0 & 45\,760 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10\,000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با حل معادله گذشته، سه جابه جایی عمومی گره ۲ عبارتند از

$$U_1 = -43.681\,90 \text{ in}$$

$$U_2 = -0.572\,75$$

$$U_3 = 0.572\,75$$

با استفاده از معادله های (۸.۸) تا (۸.۱۰)، پیچش در اعضا و لنگر خمشی در نقاط ۱ و ۲ عبارتند از

$$T = -\frac{1.5953\text{E}+07}{100} (0.572\,75) = -(9.1371\text{E}+04) \text{ lb-in}$$

$$M_1 = \frac{2(2.7696\text{E}+07)}{(100)(100)} [-3(-43.681\,90) - 0.572\,75(100)] \\ = (4.086\,31\text{E}+05) \text{ lb-in}$$

$$M_2 = \frac{2(2.769\text{E}+07)}{(100)(100)} [-3(-43.6819) - 2(0.572\,75)(100)] \\ = (9.1373\text{E}+04) \text{ lb-in}$$

چون  $M_1 > M_2$  است،  $\sigma_1$  بزرگتر از  $\sigma_2$  است، همچنان که در معادله های (۸.۱۲) و

(۸.۱۳) دیده می شود. بنابراین، تنها لازم است قید  $g_1$  معادله (۸.۱۴) را اعمال کنیم.

تنش برشی پیچشی و تنش خمشی در نقطه ۱ از معادله های (۸.۱۱) و (۸.۱۲)

محاسبه می شود؛ داریم

$$\tau = \frac{-(9.137\,31\text{E}+04)}{2(5.76)(0.1)} = -(7.931\,7\text{E}+04) \text{ psi}$$

$$\sigma_1 = \frac{(4.086\,31\text{E}+05)(2.5)}{2(0.9232)} = (5.532\,81\text{E}+05) \text{ psi}$$

اگر تنش مجاز  $\sigma_a$  را  $40\,000 \text{ psi}$  در نظر بگیریم، قید تنش مؤثر معادله (۸.۱۴)

عبارت است از

$$g_1 = \frac{1}{(4.0\text{E}+04)^2} [(5.532\,81\text{E}+05)^2 + 3(-7.9317\text{E}+04)^2] - 1 \\ = (2.0212\text{E}+02) > 0$$

بنابراین، در نقطه طراحی داده شده قید به طور جدی نقض شده است.

### ۸.۳ ارزیابی گرادیان

برای استفاده از روش بهینه سازی نوین، نیاز به ارزیابی گرادیانهای توابع قیود داریم. وقتی توابع قیود برحسب متغیرهای طراحی ضمنی باشند، باید روشهای خاصی را برای ارزیابی گرادیانها تدوین و استفاده کنیم. ما با استفاده از کاربرد اجزای محدود بخش ۸.۲ روشی را ارائه خواهیم داد.

تابع قید  $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{U})$  معادله (۸.۲) را در نظر بگیرید. با استفاده از قاعده مشتق گیری زنجیری، مشتق کلی  $g_i$  نسبت به زامین متغیر طراحی عبارت است از

$$\frac{dg_i}{dx_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i^T}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{dx_j} \quad (۸.۱۶)$$

در حالی که

$$\frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{U}} = \left[ \frac{\partial g_i}{\partial U_1} \frac{\partial g_i}{\partial U_2} \cdots \frac{\partial g_i}{\partial U_l} \right]^T \quad (۸.۱۷)$$

و

$$\frac{d\mathbf{U}}{dx_j} = \left[ \frac{\partial U_1}{\partial x_j} \frac{\partial U_2}{\partial x_j} \cdots \frac{\partial U_l}{\partial x_j} \right]^T \quad (۸.۱۸)$$

بنابراین، برای محاسبه گرادیان قید، ما نیاز به محاسبه مشتقات جزئی  $\partial g_i / \partial x_j$ ، و مشتقات کلی  $dU/dx_j$  داریم. محاسبه مشتقات جزئی  $\partial g_i / \partial x_j$  و  $\partial g_i / \partial \mathbf{U}$  با استفاده از شکل تابع  $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{U})$  ساده است. برای محاسبه  $dU/dx_j$ ، از معادله تعادل (۸.۱) مشتق می گیریم

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{U} + \mathbf{K}(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{U}}{dx_j} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j} \quad (۸.۱۹)$$

یا، معادله را می توان به شکل زیر مرتب کرد

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{U}}{dx_j} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{U} \quad (۸.۲۰)$$

معادله می تواند برای محاسبه  $dU/dx_j$  استفاده شود. اگر بستگی صریح  $\mathbf{K}$  به  $\mathbf{x}$  معلوم باشد مشتق ماتریس سختی  $\partial \mathbf{K}(\mathbf{x}) / \partial x_j$  می تواند بسادگی محاسبه شود. دقت کنید معادله (۸.۲۰)

باید برای هر متغیر طراحی حل شود. وقتی  $dU/dx_i$  ها معلوم باشند، گرادیان قیود از معادله (۸.۱۶) محاسبه می شود. بردار مشتق در معادله (۸.۱۶) اغلب گرادیان طراحی نامیده می شود. روش را با یک مسأله نمونه تشریح خواهیم کرد.

باید یادآور شد کارهای چشمگیری برای تدوین و پیاده سازی روشهای مؤثر محاسبه مشتقات توابع ضمنی نسبت به متغیرهای طراحی انجام شده است [آرورا و هاگ<sup>۱</sup>، ۱۹۷۹؛ عادل من و هفته<sup>۲</sup>، ۱۹۸۶]. موضوع به طور کلی به عنوان تحلیل حساسیت طراحی شناخته می شود. برای بالابردن بازده و پیاده سازی مناسب عددی، مقالات قبلی باید مورد مشورت قرار گیرند. برای محاسبه خودکار گرادیانهای طراحی در نرم افزار عمومی روشهایی برنامه ریزی شده اند.

**مثال ۸.۴ ارزیابی گرادیانها برای قاب دو عضوی.** گرادیان قید تنش  $g_1(x, U)$  قاب دو عضوی مثال ۸.۱ را در نقطه طراحی (2.5, 2.5, 0.1) محاسبه کنید.

**حل.** مسأله در مثال ۸.۱ رابطه سازی شده است. مدل اجزای محدود در آن جا تعریف شده و جابه جاییهای گرهها و تنش اعضا محاسبه شده اند. ما معادله های (۸.۱۶) و (۸.۲۰) را برای ارزیابی گرادیان قید تنش معادله (۸.۱۴) به کار خواهیم برد. مشتقات جزئی قیود معادله (۸.۱۴) نسبت به  $x$  و  $U$  عبارت خواهند بود از

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{1}{\sigma_1^2} \left[ 2\sigma_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + 6\tau \frac{\partial \tau}{\partial x} \right] \quad (۸.۲۱)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial U} = \frac{1}{\sigma_1^2} \left[ 2\sigma_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial U} + 6\tau \frac{\partial \tau}{\partial U} \right] \quad (۸.۲۲)$$

با استفاده از معادله های (۸.۸) تا (۸.۱۳)، مشتقات جزئی  $\sigma_1$  و  $\tau$  نسبت به  $x$  و  $U$  به شکل زیر محاسبه می شود.

**مشتقات جزئی تنش برشی.** با مشتق گیری عبارت تنش برشی در معادله (۸.۱۱) نسبت به متغیرهای طراحی  $x$ ، داریم

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{2At} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{T}{2At^2} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{T}{2At} \frac{\partial t}{\partial x} \quad (۸.۲۳)$$

در حالی که مشتقات جزئی گشتاور  $T$  نسبت به متغیر طراحی  $x$  عبارت است از

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{GU_3}{L} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \quad (۸.۲۴)$$

که  $\partial J / \partial \mathbf{x}$  به شکل زیر محاسبه می شود

$$\frac{\partial J}{\partial d} = \frac{4t(d-t)(h-t)^2(d+h-2t) - 2t(d-t)^2(h-t)^2}{(d+h-2t)^2} = 0.864$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = \frac{4t(d-t)^2(h-t)(d+h-2t) - 2t(d-t)^2(h-t)^2}{(d+h-2t)^2} = 0.864$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \frac{2(d-t)^2(h-t)^2 - 4t(d-t)(h-t)^2 - 4t(d-t)^2(h-t)}{(d+h-2t)} \\ &\quad - \frac{2t(d-t)^2(h-t)^2(-2)}{(d+h-2t)^2} = 12.096 \end{aligned}$$

بنابراین،  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}}$  به شکل زیر در خواهد آمد

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0.864 \\ 0.864 \\ 12.096 \end{bmatrix}$$

و معادله (۸.۲۴) عبارت  $\partial T / \partial \mathbf{x}$  را می دهد

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} &= -\frac{(1.154\text{E}+07)}{100} (0.572\ 75) \begin{bmatrix} 0.864 \\ 0.864 \\ 12.096 \end{bmatrix} \\ &= -(6.610\text{E}+04) \begin{bmatrix} 0.864 \\ 0.864 \\ 12.096 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

کمیت‌های دیگری که برای تکمیل محاسبات در معادله (۸.۲۳) لازم هستند عبارتند از  $\partial A / \partial \mathbf{x}$  و  $\partial t / \partial \mathbf{x}$ ، که به شکل زیر محاسبه می شوند

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} (h-t) \\ (d-t) \\ -(h-t) - (d-t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.4 \\ -4.6 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial t}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

با جایگزینی کمیت‌های مختلف در معادله (۸.۲۳)، مشتق جزئی  $\tau$  را نسبت به  $x$  به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{2At} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{T}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{T}{t} \frac{\partial t}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} -1.653E+04 \\ -1.653E+04 \\ 3.580E+04 \end{bmatrix}$$

اگر از عبارت تنش برشی  $\tau$  در معادله (۸.۱۱) نسبت به جابه‌جایی‌های عمومی  $U$  مشتق بگیریم، داریم

$$\frac{\partial \tau}{\partial U} = \frac{1}{2At} \frac{\partial T}{\partial U}$$

که در آن

$$\frac{\partial T}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -GJ/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.5953E+05 \end{bmatrix}$$

بنابراین،  $\partial \tau / \partial U$  عبارت است از

$$\frac{\partial \tau}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.3848E+05 \end{bmatrix}$$

مشتقات جزئی تنش خمشی، با مشتق‌گیری عبارت  $\sigma_1$  که در معادله (۸.۱۲) آمده نسبت به متغیر طراحی  $x$ ، داریم

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{h}{2I} \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{M_1}{2I} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{M_1 h}{2I^2} \frac{\partial I}{\partial x} \quad (۸.۲۵)$$

در حالی که  $\partial M_1 / \partial x$ ،  $\partial I / \partial x$  و  $\partial h / \partial x$  عبارتند از

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} = \frac{2E}{L^2} (-3U_1 + U_2 L) \frac{\partial I}{\partial x}$$

$$\frac{\partial I}{\partial d} = \frac{1}{12} [h^3 - (h-2t)^3]$$

$$= 0.288167$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial h} &= \frac{1}{4}[dh^2 - (d-2t)(h-2t)^2] \\ &= 0.8645 \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \frac{(h-2t)^3}{6} + \frac{(h-2t)^2(d-2t)}{2} \\ &= 8.11133 \\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

با جایگزینی کمیت‌های مختلف در معادله (۸.۲۵) داریم

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.2131\text{E}+05 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با مشتق‌گیری از عبارت  $\sigma_1$  در معادله (۸.۱۲) نسبت به جابه‌جایی‌های عمومی  $U$ ، داریم

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial U} = \frac{h}{2I} \frac{\partial M_1}{\partial U}$$

در حالی که  $\partial M_1 / \partial U$  از معادله (۸.۹) عبارت است از

$$\frac{\partial M_1}{\partial U} = \frac{2EI}{L^2} \begin{bmatrix} -3 \\ L \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین،  $\partial \sigma_1 / \partial U$  عبارت است از

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial U} = \frac{Eh}{L^2} \begin{bmatrix} -3 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.25\text{E}+05 \\ 7.50\text{E}+05 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با جایگزینی کمیت‌های مختلف در معادله‌های (۸.۲۱) و (۸.۲۲)، مشتقات جزئی قیود را به شکل زیر به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4.9167 \\ 157.973 \\ -10.648 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} -15.561 \\ 518.700 \\ 41.19 \end{bmatrix}$$

**مشتقات جابه جاییها.** برای محاسبه مشتقات جابه جاییها از معادله (۸.۲۰) استفاده می کنیم. چون بردار نیرو به متغیرهای طراحی بستگی ندارد، در معادله (۸.۲۰)،  
 (۸.۲۰)، از معادله (۸.۵) نسبت به متغیرهای طراحی مشتق می گیریم. به عنوان مثال، مشتق معادله (۸.۵) نسبت به  $d$  بردار زیر را می دهد:

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial d} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -3.1214\text{E}+03 \\ -2.8585\text{E}+04 \\ 2.8585\text{E}+04 \end{bmatrix}$$

به طور مشابه، با مشتق گیری نسبت به  $h$  و  $t$ ، در نهایت داریم

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{U} = (1.0\text{E}+3) \begin{bmatrix} -3.1214 & -9.3642 & -87.861 \\ -28.585 & 28.454 & 3.300 \\ 28.585 & -28.454 & -3.300 \end{bmatrix}$$

چون  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  از قبل در مثال ۸.۱ معلوم است، از معادله (۸.۲۰) برای محاسبه  $d\mathbf{U}/d\mathbf{x}$  استفاده می کنیم

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 16.909 & 37.645 & 383.42 \\ 0.2443 & 0.4711 & 5.0247 \\ -0.2443 & -0.4711 & -5.0247 \end{bmatrix}$$

در نهایت، با جایگزینی تمامی کمیتها در معادله (۸.۱۶)، گرادیان متغیرهای طراحی برای قید تنش مؤثر معادله (۸.۱۴) را به شکل زیر به دست می آوریم

$$\frac{dg_1}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -141.55 \\ -202.87 \\ -3577.30 \end{bmatrix}$$

همان طور که در مثال ۸.۱ یادآوری شد، قید تنش معادله (۸.۱۴) در نقطه طراحی داده شده کاملاً نقض شده است. علامت مشتق متغیرهای طراحی بالا نشانگر

این است که تمامی متغیرها باید برای کاهش نقض قید در نقطه  $(2.5, 2.5, 0.1)$  افزایش پیدا کنند.

#### ۸.۴ مباحثی چند در بهینه سازی طراحی عملی

موضوعات مختلفی در بهینه سازی طراحی عملی باید مورد توجه قرار گیرد. به عنوان مثال، در مورد انتخاب یک الگوریتم و نرم افزار باید دقت شود. انتخاب نامناسب هر کدام از آنها می تواند به شکست فرآیند طراحی بهین و بی نتیجه شدن فنون بهینه سازی بینجامد. در این بخش موضوعاتی را که می توانند اثرات چشمگیری بر کاربردهای عملی روشهای بهینه سازی داشته باشند، بحث می کنیم.

##### ۸.۴.۱ انتخاب يك الگوریتم

الگوریتمهای زیادی برای بهینه سازی عملی ارائه شده و مورد ارزیابی قرار گرفته اند. هنگام انتخاب یک الگوریتم برای بهینه سازی عملی باید جنبه های مختلفی مانند توانمندی، کارایی، عمومیت و سادگی استفاده را مورد توجه قرار دهیم.

۸.۴.۱.۱ توانمندی مشخصه های یک الگوریتم توانمند در بخش ۶.۲.۶ بحث شد. برای کاربردهای عملی استفاده از روشی که از جنبه نظری همگرایی آن تضمین شده باشد بسیار مهم است. به روشی که چنین تضمینی را با شروع از هر نقطه حدس اولیه طراحی داشته باشد توانمند می گویند. الگوریتمهای توانمند در مقایسه با الگوریتمهایی که همگرایی آنها ثابت نشده معمولاً در هر چرخه به محاسبات بیشتری نیاز دارند. الگوریتمهای تقریبی که همگرایی آنها ثابت نشده، معمولاً باید برای مسأله مورد نظر به میزان قابل توجهی تنظیم شوند تا به یک جواب بهین منطقی برسند، و در بسیاری از موارد به جوابهای غیربهین همگرا می شوند. بنابراین اگرچه الگوریتمهای تقریبی زمان محاسباتی کمتری صرف می کنند، ولی در عملکردشان به مقدار قابل توجهی عدم اطمینان وجود دارد. معمولاً به کارگیری آنها در یک مسأله خاص به میزان قابل توجهی تجربه و تنظیم نیاز دارد. این کارها می تواند یک آشفتگی خاطر غیر ضرور ایجاد کند که وقت طراح را می گیرد. بنابراین، از دید کلی، چنین الگوریتمهای تقریبی در واقع از نظر استفاده پرهزینه تر هستند. توصیه می شود که در کاربردهای عملی فقط الگوریتمهای نیرومند

استفاده شود، یعنی در انتخاب یک الگوریتم و نرم افزار مربوط، نیرومندی نسبت به بازده باید از اولویت بالاتری برخوردار باشد.

**۸.۴.۱.۴ راهبرد قید پتانسیل** برای محاسبه جهت جست و جو در روشهای عددی بهینه سازی مقید، باید توابع هزینه و قیود و گرادینهای آنها معلوم باشد. الگوریتمهای عددی بسته به این که در چرخه طراحی گرادین همه قیود و یا فقط زیرمجموعه ای از آنها را نیاز داشته باشند به دو دسته تقسیم می شوند. به الگوریتمهای عددی که تنها گرادین یک زیرمجموعه از قیود را لازم دارند، الگوریتمهایی که راهبرد قید پتانسیل را استفاده می کنند می گویند. مجموعه قید پتانسیل، در حالت کلی در چرخه فعلی، شامل قیود فعال، تقریباً فعال و نقض شده می باشد. برای بحث بیشتر در موضوع راهبرد مجموعه پتانسیل به بخش ۶.۲.۴ مراجعه کنید.

#### ۸.۴.۲ ویژگیهای یک الگوریتم خوب بهینه سازی

بر اساس بحث گذشته، ویژگیهای یک الگوریتم خوب برای کاربردهای طراحی عملی به شکل زیر تعریف می شود.

۱. قابل اطمینان بودن. الگوریتم باید برای کاربردهای طراحی عمومی قابل اعتماد باشد، زیرا چنین الگوریتمهایی با شروع از هر طراحی اولیه حدس زده شده به نقطه مینیمم همگرا می شوند. قابل اطمینان بودن یک الگوریتم در صورتی تضمین می شود که از جنبه نظری همگرایی آن ثابت شود.

۲. کلی بودن. الگوریتم باید کلی باشد، یعنی باید بتواند قیود مساوی و نامساوی را در نظر بگیرد. به علاوه، نباید محدودیتی روی شکل توابع مسأله تحمیل کند.

۳. سهولت استفاده. الگوریتم از نظر استفاده باید هم برای طراحان باتجربه و هم برای طراحان مبتدی آسان باشد. از دیدگاه عملی، این یک ضرورت بسیار مهم است، زیرا الگوریتمی که به گزینش یک پارامتر تنظیمی نیاز داشته باشد، کاربردش بسیار مشکل است. انتخاب مناسب پارامترها معمولاً نه تنها دانش کامل و درک ساختار ریاضی الگوریتم را می طلبد، که نیاز به تجربه کردن برای هر مسأله دارد. چنین الگوریتمی برای کاربردهای طراحی عملی نامناسب است.

۴. بازدهی. الگوریتم باید برای کاربردهای مهندسی عمومی بازده بالایی داشته باشد.

یک الگوریتم با بازده بالا ویژگیهای زیر را دارد (i) نرخ همگرایی آن به نقطهٔ مینیمم بیشتر است، و (ii) در یک چرخه طراحی به کمترین مقدار محاسبات نیاز دارد. نرخ همگرایی می تواند با وارد کردن اطلاعات مرتبهٔ دوم مسأله در الگوریتم شتاب بیشتری بگیرد. ولی وارد کردن اطلاعات مرتبهٔ دوم حجم محاسبات در هر چرخه را افزایش می دهد. بنابراین، میان بازده محاسبات در یک چرخه و نرخ همگرایی باید تعادلی به وجود آید. بعضی از الگوریتمهای موجود از اطلاعات مرتبهٔ دوم استفاده می کنند، در حالی که بعضی دیگر چنین نیستند. بازده بالا در یک چرخه یعنی داشتن کمترین حجم محاسبات برای جهت جست و جو و اندازه گام. یک راه برای رسیدن به بازده بالا استفاده از راهبرد قید پتانسیل در محاسبات جهت جست و جوست. الگوریتمهایی وجود دارند که از این راهبرد در محاسبات خودشان استفاده می کنند، در حالی که بعضی دیگر استفاده نمی کنند. وقتی راهبرد قید پتانسیل استفاده می شود، زیرمسأله یافتن جهت فقط نیاز به گرادیانهای قید پتانسیل دارد. در غیر این صورت، گرادیان تمامی قیود مورد نیاز است که در بیشتر کاربردهای عملی بازده را پایین می آورد.

راه دیگری که برای بهبود بخشیدن به بازده در یک چرخه مورد استفاده قرار می گیرد عبارت است از پایین نگه داشتن تعداد محاسبات مقدار تابع در به دست آوردن اندازه گام. این کار با استفاده از روشهای به دست آوردن اندازه گام که فراخوان کمتری برای محاسبه مقدار تابع دارند، عملی است مانند جست و جوی خطی غیر دقیق.

طراح قبل از انتخاب یک الگوریتم بهینه سازی برای کاربردهای عملی نیاز به پاسخگویی به پرسشهای زیر دارد:

۱. آیا الگوریتم همگرایی ثابت شده ای دارد؟ یعنی، آیا از جنبه نظری همگرا شدنش به یک بهین با شروع از هر طراحی حدس زده شده تضمین می شود؟ آیا طراحی شروع می تواند غیر قابل قبول باشد؟
۲. آیا الگوریتم می تواند یک مسأله بهینه سازی عمومی را بدون محدودیتی روی توابع قیود حل کند؟ آیا الگوریتم می تواند قیود مساوی و نامساوی را در نظر بگیرد؟
۳. آیا استفاده کردن از الگوریتم ساده است؟ به عبارت دیگر، آیا برای هر مسأله نیاز به تنظیم دارد؟
۴. آیا الگوریتم از یک راهبرد قید پتانسیل استفاده می کند؟

### ۸.۵ استفاده از نرم افزار عمومی

همچنان که در بخشهای گذشته دیدیم، در سیستمهای عملی برای به دست آوردن جواب بهین به تحلیل رایانه ای قابل توجهی نیاز است. برای یک کاربرد مشخص، نرم افزار ارزیابی توابع و گرادینهای مسأله و نرم افزار بهینه سازی باید با هم ترکیب شوند تا یک توان طراحی بهین به وجود آورند. بسته به کاربرد، هریک از اجزای نرم افزاری می تواند بسیار بزرگ باشد. بنابراین، برای به وجود آوردن یک مجموعه بهینه سازی طراحی، باید بهترین نرم افزارهای تخصصی و نوین با هم ترکیب شوند.

برای تحلیل سازه هایی که توسط اجزای محدود مدل شده بودند و در مثالی در بخش ۸.۲.۲ بحث شد، باید بسته های نرم افزاری تحلیل بزرگ استفاده شوند. از پاسخهای محاسبه شده، توابع قیود باید ارزیابی و برنامه هایی برای محاسبه گرادینها تدوین شوند. تمام اجزای نرم افزاری باید ترکیب شوند تا توان طراحی بهین برای سازه هایی که با اجزای محدود مدل شده اند به وجود آید.

در این بخش ما مطالبی پیرامون انتخاب یک نرم افزار بهینه سازی عمومی را به بحث خواهیم گذاشت. همچنین مواجهه نرم افزار با یک کاربرد خاص را بحث خواهیم کرد.

#### ۸.۵.۱ انتخاب نرم افزار

قبل از انتخاب یک نرم افزار بهینه سازی عمومی برای ترکیب با دیگر نرم افزارهای ویژه مسأله، باید جنبه های مختلفی مدنظر قرار گیرد. مهمترین پرسش مربوط به الگوریتم بهینه سازی و کیفیت پیاده شدن آن است. ویژگیهای یک الگوریتم خوب در بخش ۸.۴.۲ ارائه شد. نرم افزار باید دست کم حاوی یک الگوریتم با تمامی ویژگیهای بیان شده باشد. الگوریتم باید به طور مناسبی پیاده شده باشد زیرا اگر الگوریتم خوبی بد پیاده شود چندان مفید نیست. اثبات همگرایی بیشتر الگوریتمها بر اساس فرضهای مشخصی است. این فرضها باید هنگام پیاده کردن الگوریتم دقیقاً انجام شود. به علاوه، بیشتر الگوریتمها از نظر عددی عدم اطمینانهایی در مراحل مختلف دارند که باید مورد توجه قرار گیرند و روشهای مناسبی برای پیاده سازی عددی آنها تدوین شود. همچنین مورد آزمایش قرار دادن نرم افزار برای کاربردهای گوناگون و با مشکلات متفاوت نیز مهم است.

وجود ابزارهای با کاربری آسان دیگر نیز مطلوب است. به عنوان مثال، امکان تعامل هنگام فرآیند چرخه، ترسیم تعاملی و سایر ابزارهایی که تصمیم سازی طراحی را سهولت

می بخشند بسیار مطلوب هستند. موضوع پینه سازی طراحی تعاملی و دیگر ابزارهای آن به طور مفصل در فصل (۷) عنوان شدند. نحوه ارائه اطلاعات مربوط به نرم افزار نیز بسیار مهم است. دستورالعمل کاربر با چه کیفیتی نوشته شده؟ چه مسائل نمونه ای حل شده و توضیحات آن با چه کیفیتی مستندسازی شده؟ آیا پیاده سازی برنامه روی سیستمهای رایانه ای مختلف ساده است یا مشکل؟ همه این سؤالات باید قبل از انتخاب نرم افزار بحث شوند.

#### ۸.۵.۲ ترکیب یک کاربرد با یک نرم افزار عمومی

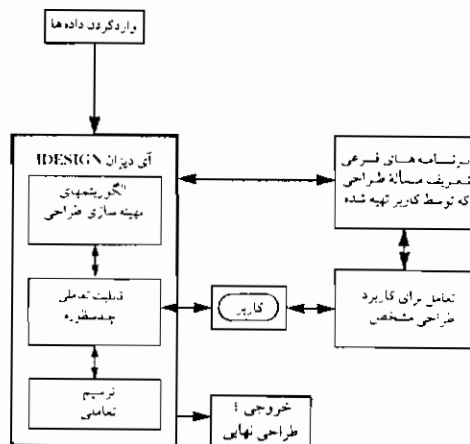
در هر برنامه عمومی برای بهینه سازی لازم است به شکلی کاربرد طراحی مورد نظر را در نرم افزار وارد کرد. سهولت وارد کردن اجزای نرم افزاری برای کاربریهای مختلف می تواند انتخاب آن را تحت تأثیر قرار دهد. همچنین، مقدار داده هایی که باید برای برنامه آماده شود تا بتوان برنامه را استفاده کرد، مهم است.

کتابخانه های عمومی مختلفی از برنامه ها در دسترسند که شامل برنامه های فرعی متنوعی هستند و الگوریتمهای مختلفی در آنها به کار گرفته شده است. هر کاربری لازم است که یک برنامه اصلی بنویسد تا برنامه های فرعی را فرا بخواند. برنامه های فرعی ارزیابی تابع و گرادینان نیز باید نوشته شود. بارها از برنامه فرعی خارج شده و دوباره با شرایط دیگری به آن وارد می شود. برنامه اصلی بسیار پیچیده شده و در معرض خطای کاربر است. به علاوه، در این حالت برای تعامل کاربر شانس کمی وجود دارد زیرا کاربر باید قابلیت تعامل خاص خودش را تدوین کند.

رویکرد دیگر عبارت است از تدوین یک برنامه رایانه ای که گزینه هایی برای انتخاب الگوریتمها و ابزارها داشته باشد. هر کاربردی از طریق یک ورودی استاندارد که از "فراخوانهای برنامه های فرعی" تشکیل شده به برنامه متصل می شود. کاربر تنها چند برنامه فرعی که مسأله طراحی را تشریح می کند آماده می کند. تمامی اطلاعات و داده هایی که بین برنامه و برنامه های فرعی در جریان است از طریق شناسه برنامه های فرعی است. به عنوان مثال، متغیرهای طراحی به برنامه فرعی فرستاده می شوند و خروجی مورد انتظار مقدار توابع قید و گرادینانهای آنهاست. بیشتر قابلیتهای تعاملی، ترسیمی و دیگر ابزار با کاربری آسان در برنامه قرار دارند. مسأله کلیدی در گنجاندن این ابزارها این است که طراح با انتخاب پارامترهای مختلف برای به اجرا در آوردن برنامه درگیر ویرژگیهای خاص الگوریتم نشود. با تمهید تهیه کنندگان الگوریتمها، طراحان و استفاده کنندگان از این کار آسوده شده اند تا بتوانند وقت خود را روی رابطه سازی مسأله و معرفی آن برای برنامه متمرکز کنند.

هر دو روشی که تا به حال گفته شد در گذشته برای بسیاری از کاربردهای عملی بهینه سازی با موفقیت انجام می شده است. در بیشتر حالات، انتخاب روشها تحت تأثیر در دسترس بودن آنها بوده است. ما از برنامه IDESIGN که براساس روش دوم است برای حل چندین مسأله بهینه سازی طراحی استفاده خواهیم کرد. شکل ۸.۲ نشان می دهد که چگونه یک کاربرد می تواند در برنامه IDESIGN وارد شود. همان طور که در بخش ۷.۵ تشریح شد. برنامه به برنامه های فرعی که توسط کاربر تهیه می شود متصل می شود تا یک مجموعه قابل اجرا را به وجود بیاورد. برنامه های فرعی که توسط کاربر تهیه می شود برای مسائلی که توابع صریح دارند ساده، و برای مسائلی که توابع ضمنی دارند پیچیده است. برای مقادیر تابع و گرادیانهای آنها که مورد نیاز IDESIGN است، ممکن است برنامه های فرعی یا خارجی فراخوانده شوند. این کار انجام شده و چندین مسأله پیچیده نیز حل شده که در مقالات منتشر شده اند [سنج و آرورا (Tseng and Arora)، ۱۹۸۷، ۱۹۸۸].

علاوه بر قابلیت های تعاملی عمومی که در IDESIGN موجود است، کاربر می تواند ابزارهای تعاملی بیشتری برای کاربردهای مشخص بنویسد، همچنان که در شکل ۸.۲ نشان داده شده است. داده های ورودی کاربرد مورد نظر در برنامه وارد می شود تا آن قابلیت ها را اجرا کند. با استفاده از این بحثها چندین مسأله عملی در زمینه های مختلف با این برنامه حل شده اند. در بخشهای بعدی این فصل، مسائل طراحی متعددی را بیان کرده و با توضیحاتی که برای برنامه IDESIGN گفتیم حل می کنیم.



شکل ۸.۲ وارد کردن يك کاربری طراحی در IDESIGN. IDESIGN با برنامه های فرعی که توسط طراح تهیه شد: ترکیب شده تا يك مجموعه قابل اجرا را به وجود آورد.

## ۸.۶ طراحی بهین یک قاب دو عضوی با بارهای خارج از صفحه

شکل ۸.۱ یک قاب دو عضوی را که تحت تأثیر بارهای خارج از صفحه است نشان می‌دهد. اعضای قاب تحت تأثیر بارهای پیچشی، خمشی و برشی هستند. هدف مسأله عبارت است از طراحی سازه‌ای که تحت بارهای وارده مقاوم بوده و کمترین حجم را داشته باشد. مسأله در بخش ۸.۲.۲ با استفاده از نگره اجزای محدود رابطه سازی شده است. در تعریف قید تنش، معیار تسلیم وان میسر<sup>۱</sup> استفاده شده و از تنش برشی حاصل از بار جانبی صرف نظر شده است.

رابطه‌ها و معادله‌های به دست آمده در بخش ۸.۲.۲ و ۸.۳ برای تدوین برنامه‌های فرعی برنامه IDESIGN مورد استفاده قرار گرفته‌اند. برای بهینه‌سازی مسأله از داده‌های ارائه شده در آن جا استفاده شده است. دو طراحی شروع بسیار متفاوت (2.5, 2.5, 0.1) و (10, 10, 1) به کار گرفته شده‌اند تا اثر آنان روی نرخ همگرایی مشاهده شود. برای نقطه شروع اول همه متغیرها در حد پایینی خود و برای نقطه دوم، تمامی آنها در حد بالایی خود هستند. هر دو نقطه شروع به جواب بهین مشابهی همگرا می‌شوند با مقادیر متغیرهای طراحی تقریباً یکسان و ضرایب لاگرانژ قیود فعال یکسان، همچنان که در جداول ۸.۱ و ۸.۲ دیده می‌شود (برای توضیح علائم به کار رفته شده در جدولها به بخش ۷.۶ مراجعه کنید). ولی تعداد چرخه‌ها و دفعات فراخوان تابع و ارزیابی گرادیان برای دو نقطه شروع کاملاً متفاوت است. برای اولین نقطه شروع، قید تنش به طور جدی نقض شده است (با 2021%). برای آوردن طراحی به نزدیک ناحیه قابل قبول چرخه‌های متعددی انجام شده است. برای نقطه شروع دوم، قید تنش برآورده شده و برنامه برای یافتن جواب بهین تنها شش چرخه انجام داده است. توجه کنید که هر دو جواب گزارش شده در جدولهای ۸.۱ و ۸.۲ با استفاده از گزینه برنامه ریزی درجه دوی دنباله ای (SQP) موجود در IDESIGN به دست آمده است. همچنین یک معیار همگرایی بسیار کوچک استفاده شده تا نقطه بهین دقیقی به دست آید.

بحث گذشته نشان می‌دهد که طراحی اولیه حدس زده شده برای فرآیند چرخه می‌تواند اثر بسزایی بر نرخ همگرایی یک الگوریتم بگذارد. در بسیاری از کاربردهای عملی، یک طراحی شروع خوب در دسترس است یا می‌تواند پس از تحلیلهای اولیه به دست آید. استفاده از چنین طراحی‌هایی برای الگوریتمهای بهینه‌سازی مطلوب است، زیرا می‌تواند مقدار زیادی از حجم محاسبات بکاهد.

جدول ۸.۱ تاریخچه فرایند چرخه و جواب بهین برای يك قاب دوعضوی، نقطه شروع (2.5, 2.5, 0.10)

	$t$	$h$	$d$	هزینه	پارامتر همگرایی	بیشترین نقض چرخه
1	2.021 19E + 02	1.000 00E + 00	1.920 00E + 02	2.5000E + 00	2.5000E + 00	1.0000E - 01
2	8.578 97E + 01	1.000 00E + 00	2.318 57E + 02	2.5000E + 00	3.4964E + 00	1.0000E - 01
3	3.587 17E + 01	1.000 00E + 00	2.854 19E + 02	2.5000E + 00	4.8355E + 00	1.0000E - 01
4	2.329 76E + 01	1.000 00E + 00	3.506 78E + 02	5.7019E + 00	3.2651E + 00	1.0000E - 01
5	1.238 49E + 01	1.000 00E + 00	3.689 07E + 02	4.0394E + 00	5.3833E + 00	1.0000E - 01
6	1.186 48E + 01	1.000 00E + 00	3.738 86E + 02	2.5000E + 00	7.0472E + 00	1.0000E - 01
7	2.715 33E + 01	1.000 00E + 00	3.834 11E + 02	7.2853E + 00	2.5000E + 00	1.0000E - 01
8	1.252 10E + 01	1.000 00E + 00	4.037 73E + 02	6.5039E + 00	3.7904E + 00	1.0000E - 01
9	6.626 98E + 00	1.000 00E + 00	4.238 16E + 02	4.5737E + 00	6.2217E + 00	1.0000E - 01
10	5.932 94E + 00	1.000 00E + 00	4.396 60E + 02	2.5000E + 00	8.6915E + 00	1.0000E - 01
11	1.720 46E + 01	1.000 00E + 00	4.573 49E + 02	9.1337E + 00	2.5000E + 00	1.0000E - 01
12	7.639 27E + 00	1.000 00E + 00	4.810 71E + 02	8.5316E + 00	3.6952E + 00	1.0000E - 01
13	3.532 62E + 00	1.000 00E + 00	5.038 13E + 02	7.1404E + 00	5.6550E + 00	1.0000E - 01
14	2.256 09E + 00	1.000 00E + 00	5.244 50E + 02	3.7077E + 00	9.6036E + 00	1.0000E - 01
15	2.982 13E + 00	1.000 00E + 00	5.748 22E + 02	1.0000E + 01	4.5705E + 00	1.0000E - 01
16	1.275 17E + 00	1.000 00E + 00	5.975 47E + 02	8.4379E + 00	6.7008E + 00	1.0000E - 01
17	6.788 24E - 01	1.000 00E + 00	6.144 56E + 02	5.5614E + 00	1.0000E + 01	1.0000E - 01
18	1.589 21E - 01	6.222 70E - 01	6.762 20E + 02	7.1055E + 00	1.0000E + 01	1.0000E - 01
19	1.472 60E - 02	7.012 49E - 02	7.011 11E + 02	7.7278E + 00	1.0000E + 01	1.0000E - 01
20	1.560 97E - 04	7.593 55E - 04	7.039 16E + 02	7.7979E + 00	1.0000E + 01	1.0000E - 01

فعال بودن قیود

ضریب لاگرانژ	مقدار	فعال بودن شماره
1.946 31E + 02	1.560 97E - 04	آری

فعال بودن متغیر طراحی

ضریب لاگرانژ	حد بالا	حد پایین	طراحی	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00	1.000 00E + 01	2.500 00E + 00	7.797 91E + 00	خیر
7.897 73E + 01	1.000 00E + 01	2.500 00E + 00	1.000 00E + 01	بالا
3.190 90E + 02	1.000 00E + 00	1.000 00E - 01	1.000 00E - 01	پایین

تابع هزینه در بهین = 7.039 163E + 02

تعداد فراخوان ارزیابی تابع هزینه (USERMF) = 20

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان تابع هزینه (USERMG) = 20

تعداد فراخوان ارزیابی توابع قیود (USERCF) = 20

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان توابع قیود (USERCG) = 20

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان در کل = 20

جدول ۸.۲ تاریخچه فرآیند چرخه و جواب بهین برای يك قاب دوبعدی، شروع از نقطه (10, 10, 1)

$t$	$h$	$d$	هزینه	پارامتر همگرایی	بیشترین نقض چرخه
1	1.0000E + 01	1.0000E + 01	7.200 00E + 03	6.400 00E + 03	0.000 00E + 00
2	9.9438E + 00	9.9438E + 00	7.875 00E + 02	2.278 73E + 01	0.000 00E + 00
3	9.0133E + 00	9.0133E + 00	7.130 63E + 02	1.319 93E + 00	1.250 20E - 02
4	1.0000E + 01	7.6933E + 00	6.997 34E + 02	1.036 43E - 01	2.199 48E - 02
5	1.0000E + 01	7.7970E + 00	7.038 80E + 02	1.673 49E - 03	3.441 15E - 04
6	1.0000E + 01	7.7987E + 00	7.039 47E + 02	4.305 13E - 07	9.404 69E - 08
فعال بودن قید					
ضریب لاگرانژ		مقدار		فعال بودن شماره	
1.946 30E + 02		9.404 69E - 08		آری 1	
فعال بودن متغیر طراحی					
ضریب لاگرانژ		حد بالا	حد پایین	طراحی	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00		1.000 00E + 01	2.500 00E + 00	7.798 67E + 00	خیر 1
7.897 67E + 01		1.000 00E + 01	2.500 00E + 00	1.000 00E + 01	بالا 2
3.190 90E + 02		1.000 00E + 00	1.000 00E - 01	1.000 00E - 01	پایین 3

تابع هزینه در بهین =  $7.039\ 466E + 02$

تعداد فراخوان ارزیابی تابع هزینه (USERMF) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان تابع هزینه (USERMG) = 6

تعداد فراخوان ارزیابی توابع قیود (USERCF) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان توابع قیود (USERCG) = 4

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان در کل = 4

## ۸.۷ طراحی بهین يك سازه سه میله ای برای برآورده شدن شرایط عملکرد چندگانه

در بخش گذشته، طراحی یک سیستم سازه ای را بحث کردیم که تنها یک شرط عملکردی داشت، یعنی مصالح نباید در مقابل بارهای وارده گسیخته شوند. در این بخش ما کاربرد مشابهی را بحث می کنیم که سیستم باید تحت شرایط مختلفی کار کند. مسأله ای که انتخاب کرده ایم عبارت است از سازه سه میله ای که در بخش ۲.۶.۸ رابطه سازی شد. سازه در شکل ۲.۵ نشان داده شده است. ضرورت های طراحی عبارتند از مینیمم کردن وزن سازه و برآورده شدن قید تنش اعضا، خیز گره ۴، کمانش اعضا، بسامد ارتعاشی و کرانه های صریح روی متغیرهای طراحی. سازه را با فرض تقارن و بدون آن بهینه کرده و جوابها را با هم مقایسه می کنیم. یک معیار همگرایی کوچک استفاده خواهد شد تا طراحیهای بهین دقیق را به دست آوریم.

## ۸.۷.۱ سازه سه میله ای متقارن

یک رابطه سازی کامل برای سازه متقارن که در آن عضوهای ۱ و ۳ مشابه هستند در بخش ۲.۶.۸ بحث شد. در کاربرد فعلی، سازه برای تحمل سه بار گذاری و با قیود گذشته طراحی می شود. جدول ۸.۳ تمامی داده هایی را که برای طراحی سازه استفاده می شود ارائه می دهد. تمامی عباراتی که برای IDESIGN به صورت برنامه در آمده اند در بخش ۲.۶.۸ ارائه شده اند. توابع قیود به طور مناسبی نرمال شده و به شکل استاندارد بیان گردیده اند.

برای مطالعه اثر اعمال قیود بیشتر روی عملکرد، سه حالت طراحی زیر تعریف شده اند (دقت کنید که قیود صریح روی متغیرهای طراحی در همه حالات اعمال می شوند).

حالت ۱. فقط قیود تنش (تعداد کل قیود = ۱۳).

جدول ۸.۳ داده های طراحی برای سازه سه میله ای

$\sigma_{1a} = \sigma_{3a} = 5000 \text{ psi}$ ، عضو ۱ و ۳	تنش مجاز :
$\sigma_{2a} = 20\,000 \text{ psi}$ ، عضو ۲	
$u_a = 0.005 \text{ in}$	جابجایی مجاز :
$v_a = 0.005 \text{ in}$	
$E = (1.00E + 07) \text{ psi}$	ضریب ارتجاعی :
$\gamma = (1.00E - 01) \text{ lb/in}^3$	وزن مخصوص :
$\beta = 1.0$	عدد ثابت :
$(0.1, 0.1, 0.1) \text{ in}^2$	حد پایینی طراحی :
$(100, 100, 100) \text{ in}^2$	حد بالایی طراحی :
$(1, 1, 1) \text{ in}^2$	طراحی شروع :
2500 Hz	حد پایینی بسامد :
3	شرایط بار گذاری :

زاویه،  $\theta$  (درجه)

	45	90	135
بار، $P \text{ (lb)}$	40 000	30 000	20 000

حالت ۲. قیود تنش و جابه جایی (تعداد کل قیود = ۱۹).

حالت ۳. تمام قیود - تنش، جابه جایی، کماتش اعضا و بسامد (تعداد کل قیود = ۲۹).

جدول ۸.۴ تاریخچه فرآیند چرخه و جواب نهایی برای یک سازه سه میله ای متقارن، حالت ۱ - قیود تنش

	$A_1 = A_3$	$A_2$	هزینه	پارامتر همگرایی	بیشترین نقض چرخه
1	1.0000E + 00	1.0000E + 00	3.828 43E + 00	1.000 00E + 00	4.656 80E + 00
2	1.9528E + 00	1.1973E + 00	6.720 82E + 00	1.000 00E + 00	2.145 31E + 00
3	3.3986E + 00	1.6531E + 00	1.126 58E + 01	1.000 00E + 00	8.742 38E - 01
4	5.0449E + 00	2.2580E + 00	1.652 72E + 01	1.090 96E + 00	2.784 05E - 01
5	6.1359E + 00	2.7697E + 00	2.012 46E + 01	2.611 72E - 01	4.979 00E - 02
6	6.3971E + 00	2.9788E + 00	2.107 24E + 01	5.786 37E - 02	2.289 84E - 03
7	6.3874E + 00	3.0501E + 00	2.111 63E + 01	3.885 94E - 02	2.899 32E - 05
8	6.3140E + 00	3.2482E + 00	2.110 68E + 01	3.972 59E - 03	2.204 83E - 04
9	6.3094E + 00	3.2657E + 00	2.111 14E + 01	5.341 72E - 05	1.586 18E - 06

فعال بودن قید	ضریب لاگرانژ	مقدار	فعال بودن شماره
1 آری	2.111 14E + 01	1.586 18E - 06	
2 خیر	0.000 00E + 00	-7.320 69E - 01	
3 خیر	0.000 00E + 00	-8.169 82E - 01	
4 خیر	0.000 00E + 00	-6.117 57E - 01	
5 خیر	0.000 00E + 00	-6.117 57E - 01	
6 خیر	0.000 00E + 00	-8.058 79E - 01	
7 خیر	0.000 00E + 00	-8.660 35E - 01	
8 خیر	0.000 00E + 00	-4.999 99E - 01	
9 خیر	0.000 00E + 00	-9.084 91E - 01	

فعال بودن متغیر طراحی	ضریب لاگرانژ	حد بالا	حد پایین	طراحی	فعال بودن شماره
1 خیر	0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	6.309 42E + 00	
2 خیر	0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	3.265 69E + 00	

تابع هزینه در بهین  $= 2.111 143E + 01$

تعداد فراخوان ارزیابی تابع هزینه (USERMF) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان تابع هزینه (USERMG) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی توابع قیود (USERCF) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان توابع قیود (USERCG) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان در کل = ۱۹

جدول ۸.۵ تاریخچه فرآیند چرخه و جواب نهایی برای يك سازه سه میله ای متقارن،

حالت ۲ - قیود تنش و جابه جایی

	$A_1 = A_3$	$A_2$	هزینه	پارامتر همگرایی	بیشترین نقض چرخه
1	1.0000E + 00	1.0000E + 00	3.828 43E + 00	1.000 00E + 00	6.999 92E + 00
2	1.8750E + 00	1.6027E + 00	6.905 98E + 00	1.000 00E + 00	3.266 63E + 00
3	3.3105E + 00	2.0868E + 00	1.145 04E + 01	1.000 00E + 00	1.416 50E + 00
4	5.2511E + 00	2.0868E + 00	1.693 91E + 01	1.000 00E + 00	5.234 73E - 01
5	7.0554E + 00	2.0868E + 00	2.204 25E + 01	1.000 00E + 00	1.338 70E - 01
6	7.8884E + 00	1.0868E + 00	2.339 85E + 01	2.802 30E - 01	1.413 63E - 02
7	7.9984E + 00	2.7066E - 01	2.289 35E + 01	2.058 97E - 02	1.242 55E - 02
8	7.9999E + 00	3.4230E - 01	2.296 95E + 01	3.054 85E - 04	1.506 50E - 04
9	7.9999E + 00	3.4320E - 01	2.297 04E + 01	4.538 76E - 08	2.268 86E - 08

فعال بودن قید

ضریب لاگرانژ	مقدار	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00	-2.860 00E - 02	آری 1
0.000 00E + 00	-9.714 00E - 01	خیر 2
0.000 00E + 00	-7.643 00E - 01	خیر 3
1.697 04E + 01	1.332 27E - 15	آری 4
0.000 00E + 00	-5.720 00E - 02	آری 5
0.000 00E + 00	-5.000 00E - 01	خیر 6
0.000 00E + 00	-5.000 00E - 01	خیر 7
0.000 00E + 00	-7.500 00E - 01	خیر 8
0.000 00E + 00	-1.000 00E + 00	خیر 9
6.000 00E + 00	2.268 86E - 08	آری 10
0.000 00E + 00	-9.857 00E - 01	خیر 11
0.000 00E + 00	-5.143 00E - 01	خیر 12
0.000 00E + 00	-8.821 50E - 01	خیر 13
0.000 00E + 00	-5.000 00E - 01	خیر 14
0.000 00E + 00	-5.286 00E - 01	خیر 15

فعال بودن متغیر طراحی

ضریب لاگرانژ	حد بالا	حد پایین	طراحی	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	7.999 92E + 00	خیر 1
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	3.432 00E - 01	خیر 2

تابع هزینه در بهین = 2.297 040E + 01

تعداد فراخوان ارزیابی تابع هزینه (USERMF) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان تابع هزینه (USERMG) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی توابع قیود (USERCF) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان توابع قیود (USERCG) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان در کل = 48

جدول ۸.۶ تاریخچه فرآیند چرخه و جواب نهایی برای يك سازه سه عضوی، حالت ۳ - تمامی قیود

	$A_1 = A_3$	$A_2$	هزینه	پارامتر همگرایی	بیشترین نقض چرخه
1	1.000 0E + 00	1.0000E + 00	3.828 43E + 00	1.000 00E + 00	6.999 92E + 00
2	2.057 3E + 00	1.4738E + 00	7.292 79E + 00	1.000 00E + 00	2.888 48E + 00
3	3.585 6E + 00	1.8923E + 00	1.203 39E + 01	1.000 00E + 00	1.231 13E + 00
4	5.564 1E + 00	1.8923E + 00	1.763 00E + 01	1.694 16E + 00	4.377 71E - 01
5	7.258 3E + 00	8.9226E - 01	2.142 17E + 01	6.728 96E - 01	1.021 80E - 01
6	7.931 2E + 00	3.9172E - 01	2.282 44E + 01	4.809 65E - 02	8.669 19E - 03
7	7.999 3E + 00	3.4362E - 01	2.296 91E + 01	3.187 76E - 04	7.387 41E - 05
8	7.999 9E + 00	3.4320E - 01	2.297 04E + 01	2.315 29E - 08	5.456 57E - 09

فعال بودن قید

ضریب لاگرانژ	مقدار	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00	-1.569 67E - 01	1 خیر
0.000 00E + 00	-2.860 00E - 02	2 آری
0.000 00E + 00	-9.714 00E - 01	3 خیر
0.000 00E + 00	-7.643 00E - 01	4 خیر
1.697 04E + 01	5.456 57E - 09	5 آری
0.000 00E + 00	-5.720 00E - 02	6 آری
0.000 00E + 00	-5.000 00E - 01	7 خیر
0.000 00E + 00	-5.000 00E - 01	8 خیر
0.000 00E + 00	-7.500 00E - 01	9 خیر
0.000 00E + 00	-1.000 00E + 00	10 خیر
6.000 00E + 00	0.000 00E + 00	11 آری
0.000 00E + 00	-9.857 00E - 01	12 خیر
0.000 00E + 00	-5.143 00E - 01	13 خیر
0.000 00E + 00	-8.821 50E - 01	14 خیر
0.000 00E + 00	-5.000 00E - 01	15 خیر
0.000 00E + 00	-5.286 00E - 01	16 خیر

فعال بودن متغیر طراحی

ضریب لاگرانژ	حد بالا	حد پایین	طراحی	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	7.999 92E + 00	1 خیر
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	3.432 00E - 01	2 خیر

تابع هزینه در بهین = 2.297 040E + 01

تعداد فراخوان ارزیابی تابع هزینه (USERMF) = 8

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان تابع هزینه (USERMG) = 8

تعداد فراخوان ارزیابی توابع قیود (USERCF) = 8

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان توابع قیود (USERCG) = 8

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان در کل = 50

جدول ۸.۴ تا ۸.۶ شامل تاریخچه فرآیند چرخه، نحوه فعال بودن قیود و متغیرهای طراحی در طراحی نهایی، و تابع هزینه بهین سه حالت، باروش SQP در IDESIGN است. قیود فعال در نقطه بهین و ضرایب لاگرانژ آنها (برای قیدهای نرمال شده) عبارتند از:

حالت ۱. تنش در عضو ۱ تحت بارگذاری ۱، ۱، 21.11.

حالت ۲. تنش در عضو ۱ تحت بارگذاری ۱، 0.0؛ جابه جایی افقی تحت بارگذاری ۱، 16.97؛ جابه جایی عمودی تحت بارگذاری ۱، 6.00؛ جابه جایی افقی تحت بارگذاری ۲، 0.0.

حالت ۳. مانند حالت ۲.

دقت کنید که مقدار تابع هزینه در نقطه بهین در حالت ۲ نسبت به حالت ۱ افزایش پیدا کرده است. این با فرضیه این که "قیود بیشتر روی سیستم، ناحیه قابل قبول را کاهش داده و مقدار بالاتری برای تابع هزینه بهین می دهد" مطابقت دارد. تفاوتی بین جوابهای حالت ۲ و ۳ وجود ندارد زیرا هیچ کدام از قیود اضافی حالت ۳ فعال نیستند.

#### ۸.۷.۲ سازه سه میله ای نامتقارن

وقتی شرط متقارن بودن سازه (یکسان بودن عضو ۱ و ۳) را نداشته باشیم، ما برای مسأله سه متغیر طراحی خواهیم داشت در حالی که برای حالت متقارن دو متغیر طراحی وجود داشت. این سه متغیر طراحی عبارتند از مساحتهای  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  به ترتیب برای اعضای ۱، ۲، ۳. در این حالت فضای طراحی توسعه می یابد، بنابراین می توانیم نسبت به حالت های گذشته طراحی بهین بهتری را انتظار داشته باشیم. داده های استفاده شده در مسأله مانند آنچه در جدول ۸.۳ آمده می باشد. سازه برای سه حالت زیر بهینه می شود (دقت کنید که قیدهای محدودیتهای متغیرهای طراحی در همه حالات وجود دارند).

حالت ۴. تنها قیدهای تنش (تعداد کل قیود = ۱۵).

حالت ۵. قیود تنش و جابه جایی (تعداد کل قیود = ۲۱).

حالت ۶. تمامی قیود - تنش، جابه جایی، کماتش، و بسامد (تعداد کل قیود = ۳۱).

سازه می تواند با توجه به تعادل گره ۴ و یاروشهای اجزای محدود عمومی [کوک<sup>۱</sup>،

[۱۹۸۱] تحلیل شود. با استفاده از روش عمومی، عبارات زیر برای جابه جایی، تنش اعضا، و بسامدهای ارتعاشی اصلی به دست می آیند (توجه کنید که علایم در بخش ۲.۶.۸ تعریف شده اند):

جابه جاییها:

$$u = \frac{l}{E} \left[ \frac{(A_1 + 2\sqrt{2}A_2 + A_3)P_u + (A_1 - A_3)P_v}{A_1A_2 + \sqrt{2}A_1A_3 + A_2A_3} \right], \quad \text{in}$$

$$v = \frac{l}{E} \left[ \frac{-(A_1 - A_3)P_u + P_v(A_1 + A_3)}{A_1A_2 + \sqrt{2}A_1A_3 + A_2A_3} \right], \quad \text{in}$$

تنش اعضا:

$$\sigma_1 = \frac{(\sqrt{2}A_2 + A_3)P_u + A_3P_v}{A_1A_2 + \sqrt{2}A_1A_3 + A_2A_3}, \quad \text{psi}$$

$$\sigma_2 = \frac{-(A_1 - A_3)P_u + (A_1 + A_3)P_v}{A_1A_2 + \sqrt{2}A_1A_3 + A_2A_3}, \quad \text{psi}$$

$$\sigma_3 = \frac{-(A_1 + \sqrt{2}A_2)P_u + A_1P_v}{A_1A_2 + \sqrt{2}A_1A_3 + A_2A_3}, \quad \text{psi}$$

پایین ترین مقدار ویژه:

$$\xi = \frac{3E}{2\sqrt{2}\rho l^2} \left[ \frac{A_1 + \sqrt{2}A_2 + A_3 - [(A_1 - A_3)^2 + 2A_2^2]^{1/2}}{\sqrt{2}(A_1 + A_3) + A_2} \right]$$

بسامد اصلی:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\xi}, \quad \text{Hz}$$

جداول ۸.۷ تا ۸.۹ حاوی تاریخچه فرآیند چرخه، نحوه فعال بودن قیود و متغیرهای طراحی در طراحی نهایی، و هزینه بهین برای سه حالت است که باروش SQP در IDESIGN به دست آمده است. قیود فعال در نقطه بهین و ضرایب لاگرانژ مربوطه (برای قیود نرمال شده) عبارتند از

حالت ۴. تنش در عضو ۱ تحت بارگذاری ۱، ۱۱.۰۰؛ تنش در عضو ۳ تحت بارگذاری

حالت ۵. جابه جایی افقی تحت بارگذاری ۱، ۱۱.۹۶؛ جابه جایی عمودی تحت بارگذاری ۲، ۸.۵۸.

جدول ۸.۷ تاریخچه فرآیند چرخه و جواب نهایی برای یک سازه سه میله ای نامتقارن، حالت ۴ - قیود تنش

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	هزینه	پارامتر همگرایی	بیشترین نقض چرخه
1	1.0000E + 00	1.0000E + 00	1.0000E + 00	3.828 43E + 00	1.000 00E + 00	4.656 80E + 00
2	1.9491E + 00	1.4289E + 00	1.6473E + 00	6.514 95E + 00	1.000 00E + 00	2.106 35E + 00
3	3.4599E + 00	1.9566E + 00	2.2849E + 00	1.008 09E + 01	1.000 00E + 00	8.511 50E - 01
4	5.2718E + 00	2.4566E + 00	2.5513E + 00	1.352 03E + 01	1.313 59E + 00	2.687 61E - 01
5	6.5854E + 00	2.5261E + 00	2.5799E + 00	1.548 78E + 01	2.307 91E - 01	4.698 96E - 02
6	6.9464E + 00	2.4233E + 00	2.6233E + 00	1.595 71E + 01	8.464 22E - 02	2.124 93E - 03
7	6.9820E + 00	2.3237E + 00	2.6694E + 00	1.597 28E + 01	5.201 74E - 02	1.174 23E - 04
8	7.0220E + 00	2.1322E + 00	2.7572E + 00	1.596 20E + 01	2.524 83E - 03	4.031 39E - 04
9	7.0236E + 00	2.1383E + 00	2.7558E + 00	1.596 84E + 01	6.270 73E - 05	4.809 86E - 07

فعال بودن قیود

ضریب لاگرانژ	مقدار	فعال بودن شماره
1.100 20E + 01	4.809 86E - 07	آری
0.000 00E + 00	-8.385 71E - 01	خیر
0.000 00E + 00	-6.457 16E - 01	خیر
0.000 00E + 00	-6.575 54E - 01	خیر
0.000 00E + 00	-6.961 93E - 01	خیر
0.000 00E + 00	-1.272 18E - 01	خیر
0.000 00E + 00	-8.228 58E - 01	خیر
0.000 00E + 00	-7.942 85E - 01	خیر
4.966 50E + 00	4.809 18E - 07	آری

فعال بودن متغیر طراحی

ضریب لاگرانژ	حد بالا	حد پایین	طراحی	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	7.023 59E + 00	خیر
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	2.138 31E + 00	خیر
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	2.755 79E + 00	خیر

تابع هزینه در بهین  $= 1.596 844E + 01$

تعداد فراخوان ارزیابی تابع هزینه (USERMF) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان تابع هزینه (USERMG) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی توابع قیود (USERCF) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان توابع قیود (USERCG) = 9

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان در کل = 26

جدول ۸.۸ تاریخچه فرآیند چرخه و جواب نهایی برای يك سازه سه میله ای نامتقارن،

حالت ۵. قیود تنش و جابه جایی

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	هزینه	پارامتر همگرایی	بیشترین نقض چرخه
1	1.000 0E + 00	1.0000E + 00	1.0000E + 00	3.828 43E + 00	1.000 00E + 00	6.999 92E + 00
2	1.963 4E + 00	1.6469E + 00	1.6616E + 00	6.773 40E + 00	1.000 00E + 00	3.265 89E + 00
3	3.603 5E + 00	2.2775E + 00	2.5799E + 00	1.102 22E + 01	1.000 00E + 00	1.410 09E + 00
4	5.805 2E + 00	2.3814E + 00	3.6743E + 00	1.578 74E + 01	1.000 00E + 00	5.106 70E - 01
5	7.783 7E + 00	2.0911E + 00	4.4842E + 00	1.944 06E + 01	8.954 54E - 01	1.223 08E - 01
6	8.679 2E + 00	1.7974E + 00	4.4975E + 00	2.043 20E + 01	7.643 35E - 02	9.560 69E - 03
7	8.808 4E + 00	1.8341E + 00	4.4244E + 00	2.054 81E + 01	7.951 90E - 02	2.035 55E - 04
8	8.884 8E + 00	1.9071E + 00	4.2900E + 00	2.053 92E + 01	1.448 77E - 02	2.367 02E - 04
9	8.910 8E + 00	1.9299E + 00	4.2508E + 00	2.054 32E + 01	3.830 28E - 04	2.187 02E - 05
10	8.910 6E + 00	1.9295E + 00	4.2516E + 00	2.054 36E + 01	1.425 07E - 06	6.721 42E - 09

فعال بودن قید

ضریب لاگرانژ	مقدار	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00	-1.954 61E - 01	1 خیر
0.000 00E + 00	-8.477 31E - 01	2 خیر
0.000 00E + 00	-8.045 39E - 01	3 خیر
1.196 42E + 01	6.721 42E - 09	4 آری
0.000 00E + 00	-3.909 23E - 01	5 خیر
0.000 00E + 00	-6.769 85E - 01	6 خیر
0.000 00E + 00	-7.500 00E - 01	7 خیر
0.000 00E + 00	-3.230 15E - 01	8 خیر
0.000 00E + 00	-6.460 30E - 01	9 خیر
8.579 42E + 00	6.721 41E - 09	10 آری
0.000 00E + 00	-9.022 69E - 01	11 خیر
0.000 00E + 00	-8.404 35E - 01	12 خیر
0.000 00E + 00	-2.640 08E - 01	13 خیر
0.000 00E + 00	-1.662 77E - 01	14 خیر
0.000 00E + 00	-3.617 39E - 01	15 خیر

فعال بودن متغیر طراحی

ضریب لاگرانژ	حد بالا	حد پایین	طراحی	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	8.910 58E + 00	1 خیر
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	1.929 54E + 00	2 خیر
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	4.251 57E + 00	3 خیر

تابع هزینه در بهین  $= 2.054\ 363E + 01$

تعداد فراخوان ارزیابی تابع هزینه (USERMF) = 10

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان تابع هزینه (USERMG) = 10

تعداد فراخوان ارزیابی توابع قیود (USERCF) = 10

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان توابع قیود (USERCG) = 10

تعداد فراخوان ارزیابی گرادینان در کل = 43

جدول ۸.۹. تاریخچه فرآیند چرخه و جواب نهایی برای يك سازه سه میله ای نامتقارن،

حالت ۶ - تمامی قیود

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	هزینه	پارامتر همگرایی	بیشترین نقض چرخه
1	1.0000E + 00	1.0000E + 00	1.0000E + 00	3.828 43E + 00	1.000 00E + 00	6.999 92E + 00
2	2.0573E + 00	1.4738E + 00	2.0573E + 00	7.292 79E + 00	1.000 00E + 00	2.888 48E + 00
3	3.7189E + 00	1.9853E + 00	3.1892E + 00	1.175 48E + 01	1.000 00E + 00	1.225 37E + 00
4	6.0225E + 00	2.1056E + 00	4.0492E + 00	1.634 91E + 01	1.673 31E + 00	4.274 37E - 01
5	7.6958E + 00	1.5955E + 00	5.1586E + 00	1.977 44E + 01	3.900 47E - 01	9.441 47E - 02
6	8.2455E + 00	1.2450E + 00	5.6753E + 00	2.093 20E + 01	3.013 29E - 02	7.387 41E - 03
7	8.2901E + 00	1.2017E + 00	6.7435E + 00	2.104 82E + 01	2.255 16E - 04	6.754 06E - 05
8	8.2905E + 00	1.2013E + 00	5.7442E + 00	2.104 94E + 01	1.881 51E - 08	6.466 97E - 09

فعال بودن قید

ضریب لاگرانژ	مقدار	فعال بودن شماره
6.731 33E + 00	2.997 88E - 09	آری 1
0.000 00E + 00	-1.141 25E - 01	خیر 2
0.000 00E + 00	-8.070 62E - 01	خیر 3
0.000 00E + 00	-8.858 75E - 01	خیر 4
1.327 73E + 01	6.466 97E - 09	آری 5
0.000 00E + 00	-2.282 49E - 01	خیر 6
0.000 00E + 00	-5.907 14E - 01	خیر 7
0.000 00E + 00	-7.500 00E - 01	خیر 8
0.000 00E + 00	-4.092 86E - 01	خیر 9
0.000 00E + 00	-8.185 73E - 01	خیر 10
7.772 13E + 00	1.234 90E - 09	آری 11
0.000 00E + 00	-9.429 38E - 01	خیر 12
0.000 00E + 00	-8.607 69E - 01	خیر 13
0.000 00E + 00	-3.860 13E - 01	خیر 14
0.000 00E + 00	-3.289 51E - 01	خیر 15
0.000 00E + 00	-4.430 75E - 01	خیر 16

فعال بودن متغیر طراحی

ضریب لاگرانژ	حد بالا	حد پایین	طراحی	فعال بودن شماره
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	8.290 52E + 00	خیر 1
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	1.201 30E + 00	خیر 2
0.000 00E + 00	1.000 00E + 02	1.000 00E - 01	5.744 23E + 00	خیر 3

تابع هزینه در بهین =  $2.104\ 943E + 01$

تعداد فراخوان ارزیابی تابع هزینه (USERMF) = 8

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان تابع هزینه (USERMG) = 8

تعداد فراخوان ارزیابی توابع قیود (USERCF) = 8

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان توابع قیود (USERCG) = 8

تعداد فراخوان ارزیابی گرادیان در کل = 48

جدول ۸.۱۰ مقایسه هزینه های بهین برای شش حالت يك سازه سه میله ای

	سازه متقارن			سازه نامتقارن		
	حالت ۱	حالت ۲	حالت ۳	حالت ۴	حالت ۵	حالت ۶
وزن بهین (lb)	21.11	22.97	22.97	15.97	20.54	21.05
NIT <sup>a</sup>	9	9	8	9	10	8
NCF <sup>a</sup>	9	9	8	9	10	8
NGE <sup>a</sup>	19	48	50	26	43	48

NIT<sup>a</sup>، تعداد چرخه ها ؛ NCF، تعداد فراخوان برای ارزیابی تابع ؛ NGE، تعداد کل ارزیابی گرادیان

حالت ۶. قید بسامد، 6.73 ؛ جابه جایی افقی تحت بارگذاری ۱، 13.28 ؛ جابه جایی عمودی تحت بارگذاری ۲، 7.77.

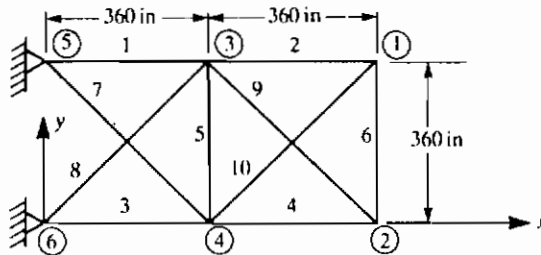
دقت کنید که وزن بهین برای حالت ۵ بیشتر از حالت ۴، و برای حالت ۶ بیشتر از حالت ۵ است. این با برداشتهای قبلی هماهنگ و سازگار است ؛ تعداد قیود در حالت ۵ بیشتر از حالت ۴ است، و برای حالت ۶ بیشتر از حالت ۵ است.

#### ۸.۷.۳ مقایسه جوابها

جدول ۸.۱۰ حاوی مقایسه جوابهای شش حالت است. چون هر سازه نامتقارن فضای طراحی بزرگتری نسبت به حالت متقارن دارد، جوابهای بهین باید بهتر باشند، و چنین نیز هستند، حالت ۴ از ۱ بهتر است و حالت ۵ از ۲، و حالت ۶ از ۳. این نتایج نشان می دهد که برای یک جواب عملی بهتر، باید با تعریف متغیرهای طراحی بیشتر، انعطاف پذیری بیشتری در فرآیند طراحی به وجود آورد.

#### ۸.۸ طراحی بهین متغیر گسسته

در بسیاری از کاربردهای عملی بهینه سازی، متغیرهای طراحی برای یک مسأله باید از مجموعه ای از مقادیر داده شده انتخاب گردد. به عنوان مثال، اجزای سازه ای باید از انواع که در بازار موجود است، انتخاب گردند. این کار بهینه سازی متغیر گسسته نامیده می شود.



شکل ۸.۳ خرابای يك سر گیردار ده میله ای

برای اقتصادی کردن هزینه های ساخت در طراحی ضرورت دارد. این موضوع در بخش ۲.۷.۶ به طور خلاصه بحث شد. ما روشی را که در آن جا تشریح شد برای یک مسأله ساده طراحی توضیح می دهیم.

زمینه کاربردی که انتخاب کرده ایم عبارت است از طراحی بهین سیستمهای هوا-فضا، خودرو، مکانیک و سازه با استفاده از الگوی اجزای محدود. مسأله عبارت است از طراحی یک سیستم با کمترین وزن که قیود متنوعی روی مشخصه های عملکرد آن وجود دارد. به عنوان کاربردی نمونه، یک سازه یک سر گیردار ده میله ای را که در شکل ۸.۳ نشان داده شده در نظر می گیریم. بارگذاری و سایر داده های طراحی مسأله در جدول ۸.۱۱ داده شده است. مجموعه مقادیر گسسته از کتابچه مؤسسه امریکایی فولاد سازه ای نیز در جدول ارائه شده است. طراحی نهایی سازه باید از این مجموعه انتخاب گردد. مساحت سطح مقطع هر عضو به عنوان یک متغیر طراحی در نظر گرفته شده که در کل ده متغیر طراحی خواهد شد. قیود روی تنش عضو (۱۰)، جابه جاییهای گره ها (۸)، کمانش عضو (۱۰)، بسامد ارتعاشی (۱)، و کرانه های صریح متغیرهای طراحی (۲۰) اعمال می شوند. اینها در مجموع ۴۹ قید را تشکیل می دهند. در اعمال قید کمانش، گشتاور ماند  $M = \beta I$  در نظر گرفته شده که  $\beta$  عدد ثابت و  $A$  مساحت سطح مقطع عضو است. رابطه سازی مسأله کاملاً شبیه مسأله سازه سه میله ای است که در بخش ۲.۶.۸ بحث شد. تنها تفاوت این است که شکل صریح تابع قیود معلوم نیست. بنابراین، باید برای تحلیل سازه و محاسبه گرادیان قیود از روشهای اجزای محدود که در بخشهای ۸.۲ و ۸.۳ تشریح شدند، استفاده کنیم.

جدول ۸.۱۱ داده های طراحی برای سازه ده میلله ای

$E = (1.00E + 07)$ psi	ضریب ارتجاعی
$\gamma = (1.0E - 01)$ lb/in <sup>3</sup>	وزن مخصوص مصالح
$\pm 2.0$ in	حد جابه جایی
25 000 psi	حد تنش
22 Hz	حد بسامد
1.62 in <sup>2</sup>	حد پایینی متغیرهای طراحی
وجود ندارد	حد بالایی متغیرهای طراحی
1.0	ثابت $\beta$ ( $I = \beta A^2$ )

شماره گره	نیرو در جهت y (lbs)
1	50 000
2	-150 000
3	50 000
4	-150 000

(in)<sup>2</sup> : اندازه اعضای موجود 1.62, 1.80, 1.99, 2.13, 2.38, 2.62, 2.63, 2.88, 2.93, 3.09, 3.13, 3.38, 3.47, 3.55, 3.63, 3.84, 3.87, 3.88, 4.18, 4.22, 4.49, 4.59, 4.80, 4.97, 5.12, 5.74, 7.22, 7.97, 11.50, 13.50, 13.90, 14.20, 15.50, 16.00, 16.90, 18.80, 19.90, 22.00, 22.90, 26.50, 30.00, 33.50.

#### ۸.۸.۱ بهینه سازی متغیر پیوسته

برای مقایسه جوابها، ابتدا مسأله بهینه سازی متغیر پیوسته حل می شود. برای استفاده از برنامه IDESIGN، برنامه های فرعی USER با استفاده از مطالب بخشهای ۸.۲ و ۸.۳ تهیه می شوند تا مقدار توابع و گرادینهای آنها را ارزیابی کنند. جواب بهین با استفاده از یک معیار همگرایی دقیق و طراحی شروع یکنواخت 1.62 in<sup>2</sup> به شکل زیر به دست می آید

متغیرهای طراحی : 1.62، 28.28، 1.62، 27.262، 13.737، 1.62، 4.0026، 13.595، 17.544، 19.13، 1.62

تابع هزینه بهین : 5396.5 lbs

تعداد چرخه : 19

تعداد تحلیل : 21

بیشترین نقض قید در بهین : (8.024E - 10)

پارامتر همگرایی در بهین : (2.660E - 5)

### قیود فعال در بهین و ضرایب لاگرانژ آنها

بسامد، 392.4

تنش در عضو ۲، 38.06

جابه جایی در گره ۲ در جهت y، 4967

حد پایینی عضو ۲، 7.829

حد پایینی عضو ۵، 205.1

حد پایینی عضو ۱۰، 140.5

### ۸.۸.۲ بهینه سازی متغیر گسسته

ما روش بهینه سازی عددی تطبیقی را که در بخش ۲.۷.۶ تشریح شد به کار می بریم تا جواب متغیر گسسته را به دست آوریم. روش کار عبارت است از استفاده از برنامه IDESIGN در حالت تعاملی اش. شرایط طراحی مورد بررسی و بازبینی قرار می گیرد و تصمیمهایی در ارتباط با ثابت کردن متغیرهای طراحی که تغییر نمی کنند گرفته می شود. تسهیلات تعاملی به کار رفته عبارتند از: تاریخچه متغیرهای طراحی، بیشترین نقض قید، و تابع هزینه.

جدول ۸.۱۲ اطلاعات مختصری از شرایط طراحی در چرخه های مختلف و تصمیم گیرها را ارائه می دهد. می توان دید که برای پنج چرخه اول نقض قید بسیار بزرگ است، بنابراین الگوریتم تصحیح قید (CC) برای تصحیح قیود استفاده شده است. در چرخه ششم، معلوم می شود که متغیرهای طراحی ۵ و ۱۰ تغییر نمی کنند، بنابراین آنها در مقدار فعلی خودشان ثابت می شوند. به طور مشابه، در چرخه های دیگر، مقدار متغیرها از مجموعه در دسترس جایگزین می شوند. در چرخه چهاردهم، تمامی متغیرها مقادیر گسسته دارند، نقض قید حدود ۱.4% است و وزن سازه عبارت است از 5424.69، که افزایشی کمتر از ۱٪ نسبت به بهین واقعی دارد. این یک جواب نهایی کاملاً قابل قبولی است.

لازم به یادآوری است که با متغیرهای گسسته، امکان به دست آوردن جوابهای متعددی در نزدیکی نقطه بهین واقعی وجود دارد. یک سری متفاوت از متغیرهای ثابت می تواند یک جواب دیگر باشد. به عنوان مثال، با شروع از جواب بهین که با متغیرهای پیوسته به دست آمده، جوابهای گسسته قابل قبول زیر از طریق تعاملی به دست می آید:

جدول ۸.۱۲ حل تعاملی سازه ده عضوی با متغیرهای گسسته

شماره چرخه	بیشترین نقض (%)	تابع هزینه	الگوریتم استفاده شده	متغیرها در اندازه های داخل کمان ثابت شده اند
1	1.274E + 04	679.83	CC	همه آزاد
2	4.556E + 03	1019.74	CC	همه آزاد
3	1.268E + 03	1529.61	CC	همه آزاد
4	4.623E + 02	2294.42	CC	همه آزاد
5	1.144E + 02	3441.63	CC	همه آزاد
6	2.020E + 01	4722.73	CC	5(1.62), 10(1.62)
7	2.418	5389.28	CCC	2(1.80)
11	1.223E - 01	5402.62	SQP	1(30.0), 6(3.84), 7(13.5)
13	5.204E - 04	5411.13	SQP	3(26.5), 9(19.9)
14	1.388	5424.69	—	4(13.5), 8(16.9)

CC ، الگوریتم تصحیح قید ؛ CCC ، تصحیح قید با هزینه ثابت ؛ SQP برنامه ریزی درجه دوی دنباله ای

۱. 30.0 ، 1.62 ، 26.5 ، 13.9 ، 1.62 ، 4.18 ، 13.5 ، 18.8 ، 18.8 ، 1.62 ؛

هزینه = 5485.6 ، بیشترین نقض = 4.167% برای تنش در عضو ۲ .

۲. مانند (۱) بجز ۸ امین متغیر طراحی که عبارت است از 16.9 ؛ هزینه = 5388.9 و بیشترین نقض قید = 0.58% .

۳. مانند (۱) بجز متغیر طراحی ۲ و ۶ که عبارتند از 2.38 و 2.62 ؛ هزینه = 5456.8 ؛ بیشترین نقض قید = 3.74% برای تنش در عضو ۲ .

۴. مانند (۳) بجز متغیر طراحی ۲ که عبارت است از 2.62 ؛ هزینه = 5465.4 ؛ همه قیدها برآورده می شوند . دیده می شود که تسهیلات تعاملی که در فصل (۷) تشریح شد ، می توانند در به دست آوردن طراحیهای مهندسی عملی به کار گرفته شوند .

## ۸.۹ کنترل بهین سیستمها با برنامه ریزی غیرخطی

### ۸.۹.۱ یک مسأله کنترل بهین نمونه

همان طور که در بخش ۱.۶ بیان شد مسائل کنترل بهین طبیعتی دینامیک دارند . بحثی مختصر از تفاوت مسائل کنترل بهین و طراحی بهین در آن جا ارائه شد . بعضی از مسائل کنترل بهین می توانند توسط روشهای برنامه ریزی غیرخطی که در فصلهای (۶) و (۷) بحث شد ،

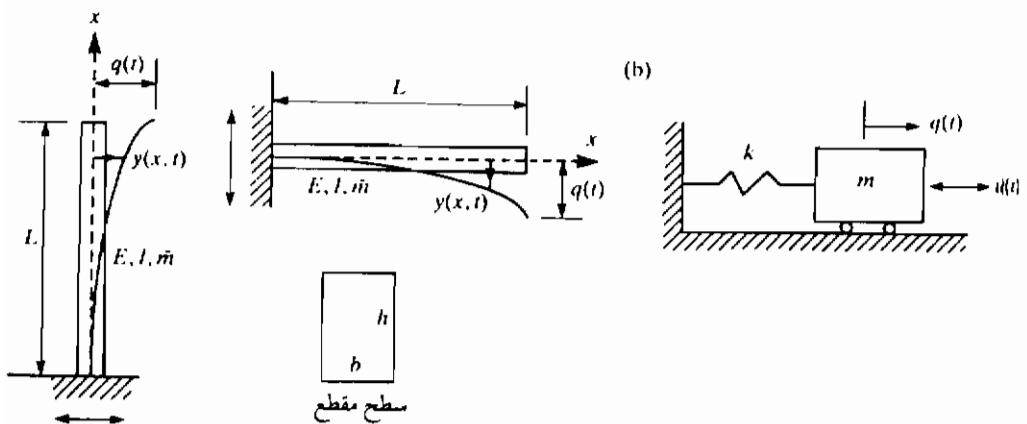
رابطه سازی و حل شوند. در این بخش، یک مسأله ساده کنترل بهین را که کاربردهای عملی متعددی دارد مورد توجه قرار می دهیم. رابطه سازیهای مختلفی از مسأله ارائه می شود و جوابهای بهین به دست آورده می شوند و درباره آنها بحث می شود.

زمینه کاربردی که ما برای تشریح استفاده از روشهای برنامه ریزی غیرخطی برای این دسته از مسائل انتخاب کرده ایم عبارت است از کنترل ارتعاشی سیستمها. این دسته ای مهم از مسائلی است که در کاربردهای متعدد در عمل وجود دارد. به عنوان مثال، می توان از: کنترل سازه ها تحت اثر زلزله و بارهای حاصل از باد، کنترل ارتعاشی ابزارهای حساس در اثر بارهای انفجاری و ورودیهای ناگهانی، کنترل سازه های فضایی بزرگ، کنترل دقیق ماشینها و مانند اینها نام برد. برای تجزیه و تحلیل این مسائل، یک نمونه ساده از سیستم را در نظر خواهیم گرفت تا رابطه سازی اساسی و روشهای حل را تشریح کنیم. با استفاده از این روشها، می توان نمونه های پیچیده تری برای مشابه سازی دقیق تر سیستمهای واقعی مورد تجزیه و تحلیل قرار داد.

برای تجزیه و تحلیل مسائل کنترل بهین، توانایی تحلیل پاسخ دینامیکی باید موجود باشد. در این کتاب، فرض می کنیم که دانشجویان اطلاعاتی در زمینه تحلیل ارتعاشی سیستمها دارند. بویژه، ما سیستمها را به عنوان یک سیستم جرم-فنر خطی با یک درجه آزادی مدل می کنیم. این کار به یک معادله دیفرانسیلی خطی مرتبه دو منجر می شود که حل تحلیلی آن موجود است [کلاف و پنزی، ۱۹۷۵]. برای دانشجویان مرور مختصری بر حل معادلات دیفرانسیل خطی ارزشمند خواهد بود.

برای تشریح فرآیند رابطه سازی و حل، یک سازه یک سرگیردار را که در شکل ۸.۴ نشان داده شده، در نظر می گیریم. داده های مسأله و علایم مختلفی که در شکل ۸.۴ استفاده شده در جدول ۸.۱۳ تعریف شده اند. سازه یک نمونه ایده آل شده بسیاری از سیستمهاست که در عمل استفاده می شوند. طول سازه عبارت است از  $L$  و سطح مقطع آن مستطیلی با عرض  $b$  و ارتفاع  $h$ . سیستم ابتدا در  $t = 0$  در حالت سکون است. سازه تحت تأثیر بار ناگهانی قرار می گیرد که در اثر یک موج شوک یا حالتی دیگر به وجود آمده است. مسأله عبارت است از کنترل ارتعاشی سیستم طوری که جابه جاییها بسیار بزرگ نباشند و سیستم با روش کنترل شده ای به سکون برگردد. سیستم، گیرنده ها و تنظیم کننده های مناسبی دارد که نیروی لازم را

برای کم کردن ارتعاشات تولید می‌کند و سیستم را به حالت سکون می‌رساند. نیروی کنترلی می‌تواند به وسیله مستهلک‌کننده‌ها یا تکیه‌گاههای ارتجاعی لُزج که در امتداد طول سازه به طور مناسبی طراحی شده باشند نیز تولید شود. ما جزئیات طراحی ساز و کار به وجود آوردن نیروی کنترلی را بحث نخواهیم کرد و تنها به بیان مسأله به دست آوردن شکل بهین نیروی کنترلی اکتفا می‌کنیم.



شکل ۸.۴ گونه یک سیستم تحت تأثیر یک ورودی ناگهانی. (a) سازه یک سر گیردار تحت تأثیر ورودی ناگهانی. (b) مدل یک درجه آزادی معادل.

#### جدول ۸.۱۳ داده‌های مسأله کنترل بهین

$L = 1.0 \text{ m}$	طول سازه
$h = 0.02 \text{ m}$	عرض سطح مقطع
$E = 200 \text{ GPa}$	ضریب ارتجاعی
$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$	چگالی
$I = (6.667E - 09) \text{ m}^4$	گشتاور ماند
$\bar{m} = 1.56 \text{ kg/m}$	جرم بر واحد طول
$u(t)$ باید تعیین شود	تابع کنترلی
$u_a = 30 \text{ N}$	حد تابع کنترلی
$u_0 = 1.5 \text{ m/s}$	سرعت اولیه

معادله حاکمی که حرکت سیستم را بیان می کند یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دو است. برای ساده سازی تحلیل، از روش جداسازی متغیرها استفاده می کنیم، و تابع خیز  $y(x, t)$  را به شکل زیر بیان می کنیم

$$y(x, t) = \psi(x)q(t) \quad (۸.۲۶)$$

در حالی که  $\psi(x)$  تابع معلومی است که تابع شکل نامیده می شود، و  $q(t)$  جابه جایی سر آزاد سازه یک سر گیردار است، همچنان که در شکل ۸.۴ نشان داده شده است. توابع شکل مختلفی می تواند مورد استفاده قرار گیرد؛ ما از تابع شکل زیر استفاده خواهیم کرد

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - \xi^3); \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (۸.۲۷)$$

با استفاده از انرژیهای جنبشی و پتانسیل سیستم،  $\psi(x)$  معادله (۸.۲۷)، و داده های جدول ۸.۳، ثابتهای جرم و فنر برای یک سیستم معادل یک درجه آزادی که در شکل ۸.۴ نشان داده شده به شکل زیر محاسبه می شود | کلاف و پترین، ۱۹۷۵ :

جرم

$$\begin{aligned} \text{انرژی جنبشی} &= \frac{1}{2} \int_0^L \bar{m} \dot{y}^2(t) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^L \bar{m} \psi^2(x) dx \right] \dot{q}^2(t) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{q}^2(t) \end{aligned}$$

در حالی که جرم  $m$  به شکل زیر تعیین می شود

$$\begin{aligned} m &= \int_0^L \bar{m} \psi^2(x) dx \\ &= \frac{33}{140} \bar{m} L \\ &= \frac{33}{140} (1.56)(1.0) = 0.3677 \text{ kg} \end{aligned}$$

ثابت فنر

$$\begin{aligned}
 \text{انرژی کرنشی} &= \frac{1}{2} \int_0^L EI [y''(x)]^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^L EI (\psi''(x))^2 dx \right] q^2(t) \\
 &= \frac{1}{2} k q^2(t)
 \end{aligned}$$

در حالی که ثابت فنر به شکل زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned}
 k &= \int_0^L EI (\psi''(x))^2 dx \\
 &= \frac{3EI}{L^3} \\
 &= 3(2.0\text{E}+11)(6.667\text{E}-09)/(1.0)^3 = 4000 \text{ N/m}
 \end{aligned}$$

در رابطه های فوق "نقطه" روی یک متغیر نشانگر مشتق نسبت به زمان و "پریم" نشانگر مشتق نسبت به مختصات  $x$  است.

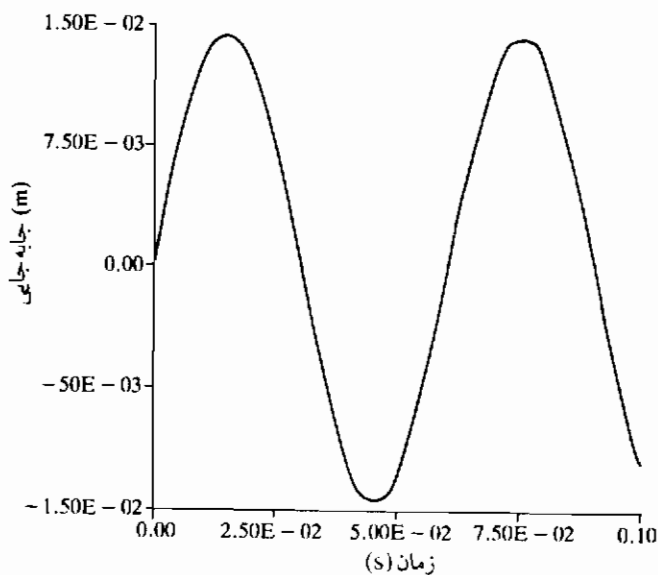
معادله حرکت سیستم یک درجه آزادی با شرایط اولیه (جابه جایی اولیه  $q_0$ ، سرعت اولیه  $\dot{q}_0$ ) به شکل زیر خواهد بود

$$m\ddot{q}(t) + kq(t) = u(t) \quad (۸.۲۸)$$

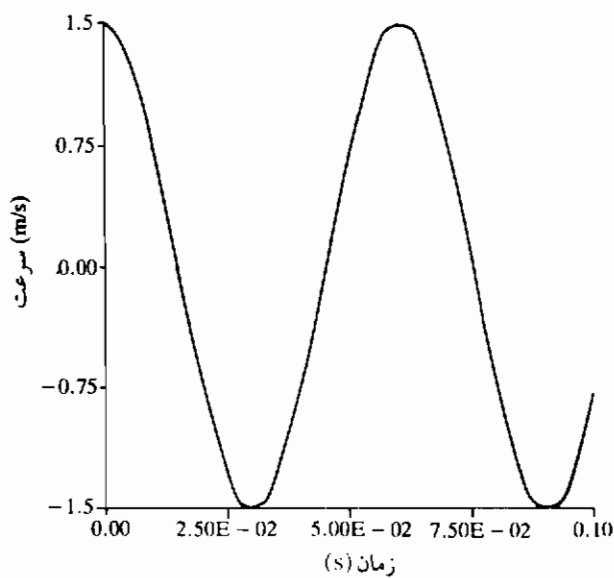
$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = v_0 \quad (۸.۲۹)$$

در حالی که  $u(t)$  نیروی کنترلی مورد نیاز برای کم کردن ارتعاشاتی است که به خاطر سرعت اولیه  $v_0$  به وجود آمده (بار ناگهانی به سیستم به صورت یک سرعت اولیه معادل تبدیل می شود که با تقسیم ضربه نیرو بر جرم محاسبه می شود). دقت کنید که از استهلاك سازه ای سیستم چشم پوشی شده است. بنابراین، اگر نیروی کنترلی  $u(t)$  استفاده نشود، ارتعاش سیستم ادامه می یابد. شکل ۸.۵ و ۸.۶ پاسخ جابه جایی و سرعت سیستم را برای ۰.۱۰ ثانیه اول وقتی  $u(t) = 0$  است یعنی، هیچ ساز و کار کنترلی استفاده نمی شود نشان می دهد.

مسأله کنترلی عبارت است از به دست آوردن تابع نیروی  $u(t)$  طوری که سیستم در زمان معین به حالت سکون برسد. مسأله را به شکل زیر می توانیم بیان کنیم: نیروی کنترلی که زمان به حالت سکون رساندن سیستم را مینیمم می کند به دست آورید. ما این رابطه سازه های مختلف را در بندهای آینده بحث خواهیم کرد.



شکل ۸.۵ پاسخ جابه جایی سیستم يك درجه آزادی معادل به بار ناگهانی بدون نیروی کنترلی



شکل ۸.۶ پاسخ سرعت سیستم يك درجه آزادی معادل به بار ناگهانی بدون نیروی کنترلی

در این جا توجه می کنیم که برای مسأله ساده فوق، روشهای حل دیگری بجز روشهای برنامه ریزی غیرخطی وجود دارد [مایرویچ<sup>۱</sup>، ۱۹۸۵]. آن روشها ممکن است برای مسائل ساده بهتر باشند. ولی، ما رابطه سازی برنامه ریزی غیرخطی را برای حل مسأله استفاده خواهیم کرد تا عمومیت روش را تشریح کنیم.

## ۸.۹.۳ مینیمم سازی خطا در متغیر حالت

به عنوان یک رابطه سازی، ما شاخص عملکرد (تابع هزینه) را، مینیمم سازی خطا در متغیر حالت (پاسخ) در بازه زمانی 0 و T تعریف می کنیم که عبارت است از

$$f_1 = \int_0^T q^2(t) dt \quad (۸.۳۰)$$

قیود در روی پاسخ نهایی، پاسخ جابه جایی و نیروی کنترل عبارتند از:

$$|q(t)| \leq q_a \quad \text{قید جابه جایی:} \quad \text{در بازه زمانی } 0 \text{ تا } T \quad (۸.۳۱)$$

$$q(T) = q_T \quad \text{قید جابه جایی نهایی:} \quad (۸.۳۲)$$

$$q(T) = v_T \quad \text{قید سرعت نهایی:} \quad (۸.۳۳)$$

$$|u(t)| \leq u_a \quad \text{قید نیروی کنترل:} \quad \text{در بازه زمانی } 0 \leq t \leq T \quad (۸.۳۴)$$

در حالی که بیشترین جابه جایی مجاز سیستم،  $q_T$  و  $v_T$  اعداد ثابت کوچک، و  $u_a$  حد نیروی کنترل است. پس، مسأله طراحی عبارت است از محاسبه تابع کنترلی  $u(t)$  در بازه زمانی 0 تا T تا شاخص عملکرد معادله (۸.۳۰) با شرایط قیود معادله های (۸.۳۱) تا (۸.۳۴) و برآورده شدن معادله های حرکت (۸.۲۸) و شرایط اولیه معادله (۸.۲۹) مینیمم شود. دقت کنید که قیود معادله های (۸.۲۸) و (۸.۳۴) طبیعتاً دینامیک است و باید در کل بازه زمانی 0 تا T برآورده شود. شاخص عملکرد دیگر می تواند به عنوان مجموع مربعات جابه جایی و سرعت تعریف شود، یعنی:

$$f_2 = \int_0^T [q^2(t) + \dot{q}^2(t)] dt \quad (۸.۳۵)$$

۸.۹.۲.۱ رابطه سازی برای جواب عددی. برای به دست آوردن نتایج عددی، داده های زیر استفاده می شوند:

$T = 0.10 \text{ s}$	زمان مجاز برای متوقف کردن حرکت
$v_0 = 1.5 \text{ m/s}$	سرعت اولیه
$q_0 = 0.0 \text{ m}$	جابه جایی اولیه
$q_d = 0.01 \text{ m}$	جابه جایی مجاز
$u_f = 0.0 \text{ m/s}$	سرعت نهایی
$q_f = 0.0 \text{ m}$	جابه جایی نهایی
$u_a = 30.0 \text{ N}$	حد نیروی کنترلی

برای این مسأله، معادله حرکت کاملاً ساده و حل تحلیلی آن می تواند با استفاده از انتگرال دو هامل<sup>۱</sup> [کلاف و پنزی<sup>۲</sup>، ۱۹۷۵] به شکل زیر نوشته شود:

$$q(t) = \frac{1}{\omega} v_0 \sin \omega t + q_0 \cos \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t u(\eta) \sin \omega(t - \eta) d\eta \quad (۸.۳۶)$$

$$\dot{q}(t) = v_0 \cos \omega t - q_0 \omega \sin \omega t + \frac{1}{m} \int_0^t u(\eta) \cos \omega(t - \eta) d\eta \quad (۸.۳۷)$$

در کاربردهای پیچیده تر، معادله حرکت باید با استفاده از روشهای عددی انتگرال گیری شود [شمپاین و گردون<sup>۳</sup>، ۱۹۷۵؛ هاشی و آرورا<sup>۴</sup>، ۱۹۸۴].

چون شکل صریح جابه جایی و سرعت بر حسب متغیر طراحی  $u(t)$  معلوم است، می توانیم مشتقات آنها را با دیفرانسیل گیری معادله های (۸.۳۶) و (۸.۳۷) نسبت به  $u(\eta)$  محاسبه کنیم، در حالی که  $\eta$  نقطه ای بین ۰ و  $T$  می باشد، داریم

$$\frac{dq(t)}{du(\eta)} = \frac{1}{m\omega} \sin \omega(t - \eta) \quad \text{برای } t \geq \eta$$

$$= 0 \quad \text{for } t < \eta \quad (۸.۳۸)$$

$$\frac{d\dot{q}(t)}{du(\eta)} = \frac{1}{m} \cos \omega(t - \eta) \quad \text{برای } t \geq \eta$$

$$= 0 \quad \text{برای } t < \eta \quad (۸.۳۹)$$

1. Duhamel

2. Clough and Penzien

3. Shampine and Gordon

4. Hsieh and Arora

در عبارات فوق،  $\delta(t - \eta) = du(t)/du(\eta)$  استفاده شده است، در حالی که  $\delta(t - \eta)$  تابع دیرک دلتا<sup>۱</sup> است. برای اعمال قیود مسأله عبارت مشتق می تواند به سادگی برنامه ریزی شود. برای کاربردهای عمومی تر، مشتقات باید با استفاده از روشهای محاسبات عددی به دست آیند. چندین روش توسط هاشی و آرورا<sup>۲</sup> [۱۹۸۴] و سنج و آرورا<sup>۳</sup> [۱۹۸۷] تدوین و ارائه شده اند که برای کاربردهای پیچیده تر می تواند به کار رود.

معادله های (۸.۳۶) تا (۸.۳۹) برای تدوین برنامه های فرعی که باید توسط کاربر برای برنامه IDESIGN تهیه شود استفاده می شوند. روشهای متعددی برای حل مسأله به روش عددی مورد نیاز است. اول از همه، یک شبکه باید برای تقسیم بندی زمان، و لحظاتی که جابه جایی، سرعت و نیروی کنترلی ارزیابی خواهند شد استفاده شود. روشهای درون یابی، مانند منحنی برازش درجه سه، منحنی برازش B [دی بور<sup>۴</sup>، ۱۹۷۸] و غیره می تواند برای ارزیابی توابع در نقاطی غیر از نقاط گرهما استفاده شوند.

مشکل دیگر در ارتباط با قید جابه جایی دینامیک معادله (۸.۳۱) است. قید باید در میان کل بازه زمانی بین 0 تا T اعمال شود. برای چنین قیدهایی تحلیلهای متعددی مورد بحث قرار گرفته است [هاشی و آرورا<sup>۵</sup>، ۱۹۸۴؛ سنج و آرورا<sup>۶</sup>، ۱۹۸۷]. به عنوان مثال، قید می تواند یا با قیود متعددی که در هر نقطه مینیم محلی تابع  $q(t)$  اعمال می شوند جایگزین شود، یا با یک قید انتگرالی جایگزین شود؛ و یا در هر نقطه گره اعمال شود.

به علاوه روشهای عددی فوق، یک روش محاسبه انتگرال عددی، مانند جمع ساده، قاعده دوزنقه ای، قاعده سیمسون<sup>۷</sup>، تربیع گوسی<sup>۸</sup> و غیره، باید برای محاسبه انتگرالهای معادله های (۸.۳۰)، (۸.۳۶) و (۸.۳۷) انتخاب شود. براساس یک بررسی اولیه، روشهای عددی زیر، به دلیل سادگی آنها، برای حل مسأله فعلی انتخاب شده اند:

انتگرال عددی :	روش سیمسون
قیود دینامیکی :	در هر نقطه گره اعمال می شود
متغیر طراحی (نیروی کنترلی) :	مقدار آن در هر نقطه گره

1. Dirac delta

3. Tseng and Arora

5. Hsieh and Arora

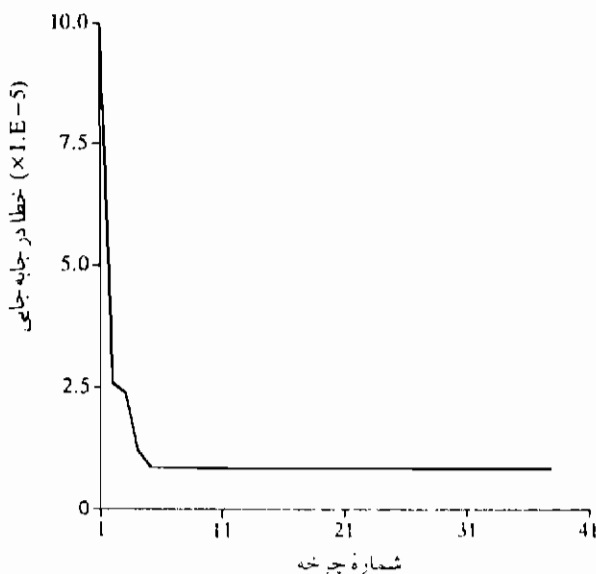
7. Simpson

2. Hsieh and Arora

4. De Boor

6. Tseng and Arora

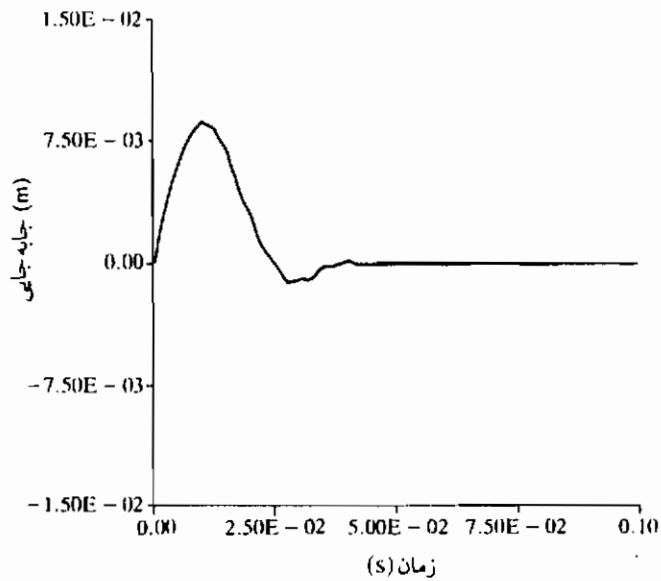
8. Gaussian quadrature



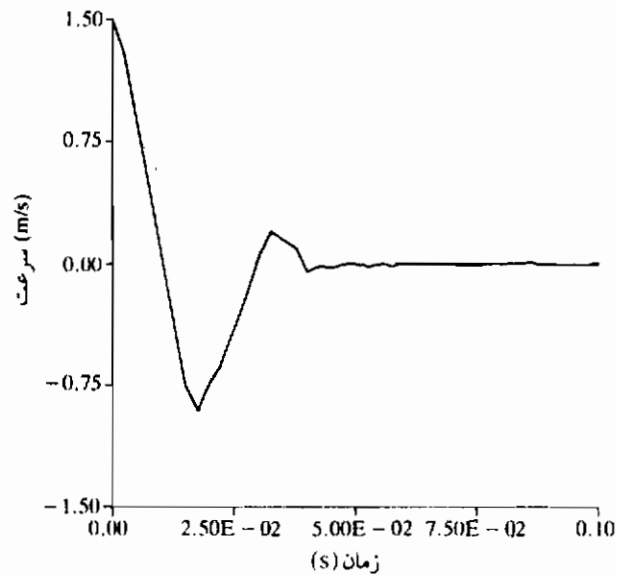
شکل ۸.۷. تاریخچه تابع هزینه برای مسأله کنترل بهین مینیمم ساختن خطا در متغیر حالت (تابع هزینه /)

**۸.۹.۲.۲ نتایج عددی.** با استفاده از روشهای فوق و داده های عددی، مسأله با استفاده از روش SQP بخش ۶.۷ که در بسته نرم افزاری IDESIGN موجود است، حل می شود. تعداد نقاط گرمی ۴۱ انتخاب شده، بنابراین ۴۱ متغیر طراحی وجود دارد. قید جابه جایی معادله (۸.۳۱) در نقاط گرمی اعمال می شود و حد آن  $q_0 = 0.01 \text{ m}$  در نظر گرفته می شود. به عنوان یک حدس اولیه،  $u(t)$  را برابر صفر قرار می دهیم؛ بنابراین قیود معادله های (۸.۳۱) تا (۸.۳۳) نقض می شوند. الگوریتم تنها در سه چرخه یک طراحی قابل قبول پیدا می کند. در این سه چرخه، تابع هزینه معادله (۸.۳۰) نیز کاهش می یابد. الگوریتم در چرخه یازدهم به نزدیک نقطه بهین می رسد. به خاطر معیار همگرایی دقیق، ۲۷ چرخه دیگر انجام می شود تا معیار همگرایی مشخص شده را برآورده کند. تاریخچه تابع هزینه در شکل ۸.۷ ترسیم شده است. برای تمامی مقاصد عملی جواب چیزی در حدود ۱۵ امین تا ۳۰ امین چرخه به دست می آید. بنابراین، اگر IDESIGN در حالت تعاملی اجرا می شد، طراح می توانست فرایند چرخه را در ۱۷ امین چرخه قطع کند.

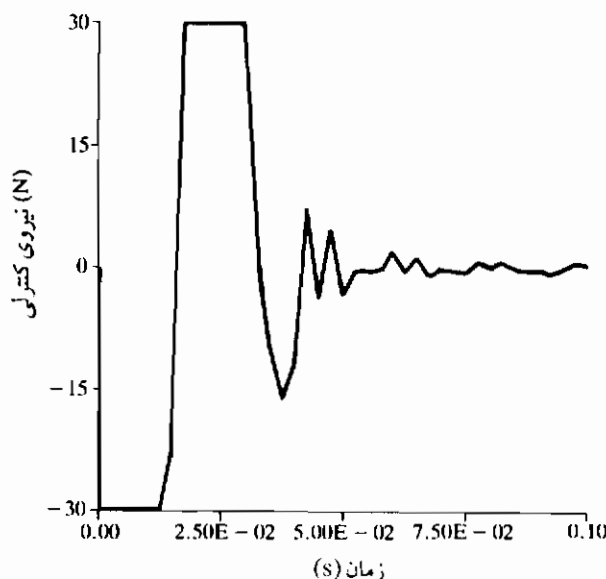
پاسخ جابه جایی و سرعت نهایی و تاریخچه نیروی کنترلی در شکلهای ۸.۸ تا ۸.۱۰



شکل ۸.۸ پاسخ جابه‌جایی در بهین با مینیم‌سازی خطا در متغیر حالت به عنوان شاخص عملکرد (تابع هزینه  $f_1$ )



شکل ۸.۹ پاسخ سرعت در بهین با مینیم‌سازی خطا در متغیر حالت به عنوان شاخص عملکرد (تابع هزینه  $f_1$ )



شکل ۸.۱۰ نیروی کنترلی بهین برای مینیم کردن خطا در متغیر حالت در اثر ورودی ناگهانی (تابع هزینه  $f_1$ )

نشان داده شده است. می توان دید که جابه جایی و سرعت در حدود 0.05 ثانیه به صفر می رسند، بنابراین سیستم در آن نقطه به حالت سکون می رسد. نیروی کنترلی نیز بعد از آن نقطه مقدار صفر دارد و در نقاط متعددی در آن بازه به مقدار حدی خودش می رسد. مقدار تابع هزینه نهایی عبارت است از  $(8.536E - 07)$ .

**۸.۹.۲.۳. اثر نرمال سازی مسأله.** برای کاربرد فعلی، نرمال سازی مسأله و بهینه سازی آن با متغیرهای نرمال شده مفید است. ما این نرمال سازی را باختصار بحث خواهیم کرد، زیرا می تواند در دیگر کاربردها نیز مفید باشد. بدون نرمال سازی در این مسأله، تابع هزینه و گرادیان آن و توابع قید و گرادیانهای آنها مقادیری بسیار کوچک دارند. الگوریتم یک مقدار بسیار کوچکی  $(1.0E - 09)$  برای پارامتر همگرایی نیاز دارد تا به همان جواب بهینه برسد که با مسأله نرمال شده می رسد. به علاوه، نرخ همگرایی بدون نرمال سازی بسیار کند است. این مشکل عددی به خاطر شرایط بدخیم مسأله بود که با روش نرمال سازی برطرف شده و در زیر تشریح می شود.

تبدیل متغیر مستقل زمان به شکل زیر تعریف می شود

$$t = \tau T \quad \text{or} \quad \tau = \frac{t}{T} \quad (۸.۴۰)$$

در حالی که  $\tau$  متغیر مستقل نرمال شده است. با این تبدیل، وقتی  $t$  بین ۰ و  $T$  تغییر می کند،  $\tau$  بین ۰ و ۱ تغییر می کند. جابه جایی به شکل زیر نرمال می شود

$$q(t) = Tq_{\max}\bar{q}(\tau) \quad \text{یا} \quad \bar{q}(\tau) = \frac{q(t)}{Tq_{\max}} \quad (۸.۴۱)$$

در حالی که  $\bar{q}(\tau)$  جابه جایی نرمال شده و  $q_{\max}$  عبارت است از ۰.۰۱۵. مشتقات جابه جایی نسبت به زمان به شکل زیر تبدیل می شوند

$$\dot{q}(t) = q_{\max}\dot{\bar{q}}(\tau) \quad \text{یا} \quad \dot{\bar{q}}(0) = \frac{v_0}{q_{\max}} \quad (۸.۴۳)$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{T} q_{\max}\ddot{\bar{q}}(\tau) \quad (۸.۴۴)$$

نیروی کنترلی به شکل زیر نرمال می شود

$$u(t) = u_{\max}\bar{u}(\tau), \quad \text{یا} \quad \bar{u}(\tau) = \frac{u(t)}{u_{\max}} \quad (۸.۴۵)$$

با این نرمال سازی، وقتی  $u(t)$  بین  $u_{\max}$  و  $-u_{\max}$  تغییر کند  $\bar{u}(\tau)$  بین -۱ و ۱ تغییر می کند. اگر تبدیلهای فوق را در معادله های (۸.۲۸) و (۸.۲۹) جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$\bar{m}\ddot{\bar{q}}(\tau) + \bar{k}\bar{q}(\tau) = \bar{u}(\tau) \quad (۸.۴۶)$$

$$\bar{q}(0) = \frac{q_0}{Tq_{\max}}, \quad \dot{\bar{q}}(0) = \frac{v_0}{q_{\max}} \quad (۸.۴۷)$$

$$\bar{k} = \frac{kT}{u_{\max}} q_{\max}, \quad \bar{m} = \frac{m}{Tu_{\max}} q_{\max}$$

قبود معادله های (۸.۳۱) تا (۸.۳۴) نیز به شکل زیر نرمال می شوند

$$|\bar{q}(\tau)| \leq \frac{q_a}{Tq_{\max}} \quad \text{در بازه} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (۸.۴۸)$$

$$\bar{q}(1) = \frac{1}{Tq_{\max}} q_T \quad \text{قید جابه جایی نهایی} \quad (۸.۴۹)$$

$$\dot{q}(1) = \frac{1}{q_{\max}} \quad \text{: قید سرعت نهایی} \quad (۸.۵۰)$$

$$|\ddot{u}(\tau)| \leq 1 \quad \text{: قید نیروی کنترلی} \quad (۸.۵۱)$$

همچنان که پیشتر بیان شد، با نرمال سازی فوق، عملکرد الگوریتم عددی به میزان چشمگیری بهبود می یابد و به سرعت به جواب بهین همگرا می شود. بنابراین، وقتی امکان نرمال سازی وجود دارد عموماً نرمال سازی مسأله توصیه می شود. توجه کنید که به غیر از آنچه در بالا ارائه شد، شکلهای مختلفی از نرمال سازی امکان پذیر است. اگر شکلی کار نکرد، شکل دیگری باید آزمایش شود. ما نرمال سازی را در دو رابطه سازی دیگر که در بخشهای ۸.۹.۳ و ۸.۹.۴ بحث می شوند به کار می بریم.

**۸.۹.۴.۴ بحث تابع.** جواب نهایی مسأله می تواند با تعداد نقاط گره و معیار همگرایی متأثر شود. جوابی که در قبل ارائه شد با استفاده از ۴۱ نقطه گرهی و معیار همگرایی (03 - 1.0E) به دست آمده بود. یک معیار همگرایی دقیق تر مانند (06 - 1.0E) نیز با چند چرخه بیشتر همان جواب را می دهد.

تعداد نقاط گرهی نیز می تواند بر دقت جواب نهایی تأثیر بگذارد. استفاده از ۲۱ نقطه گرهی نیز تقریباً جوابی مشابه می دهد. شکل نیروی کنترلی نهایی کمی متفاوت بود. مقدار تابع هزینه کمی بالاتر از حالت ۴۱ نقطه گرهی بود.

توجه به این نکته نیز مهم است که اگر حد  $q_1$  جابه جایی در معادله (۸.۳۱) خیلی دقیق باشد مسأله غیر قابل قبول می شود. به عنوان مثال، وقتی  $q_1$  مقدارش 0.008 m باشد، مسأله با ۴۱ نقطه گرهی غیر قابل قبول می شد. ولی با ۲۱ نقطه گرهی یک جواب به دست آمد. این موضوع همچنین نشان می دهد که وقتی تعداد نقاط گرهی کم است قید جابه جایی ممکن است بین نقاط گرهی نقض شود، هرچند در آن نقاط برآورده شده باشد. بنابراین، نقاط گرهی باید به تعداد مناسب انتخاب گردد.

بحث گذشته نشان می دهد که برای اعمال قیود به شکل دقیق تر، نقاط ماکزیمم محلی واقعی باید انتخاب و قیود در آن جا اعمال شوند. برای پیدا کردن نقاط ماکزیمم محلی واقعی، روشهای درون یابی یا نیمه کردن بازه ای که نقطه ماکزیمم قرار دارد را می توان به کار برد [هاشی و آرورا، ۱۹۸۴]. گرادیان قیود نیز باید در نقاط ماکزیمم محاسبه شوند. برای مسأله فعلی،

پیاده کردن روش قبل چندان مشکل نیست، زیرا شکل تحلیلی پاسخ معلوم است. برای کاربردهای عمومی تر، باید برای پیاده سازی روش فوق کار محاسباتی و برنامه ریزی بیشتری انجام شود. توجه به این نکته نیز مفید است که با نقاط شروع متعدد دیگری برای نیروی کنترلی مثل  $u(t) = -30 \text{ N}$ ،  $u(t) = 30 \text{ N}$  نیز به جواب مشابهی که در شکل‌های ۸.۸ تا ۸.۱۰ داده شد می‌رسیم. حجم محاسبات به نوعی متفاوت است. با رایانه Apollo DN460 و با  $u(t) = 0$  به عنوان نقطه شروع زمان محاسبات<sup>۱</sup> برای ۲۱ نقطه گره ۴۶ ثانیه و برای ۴۱ نقطه گره ۲۱۲ ثانیه بود.

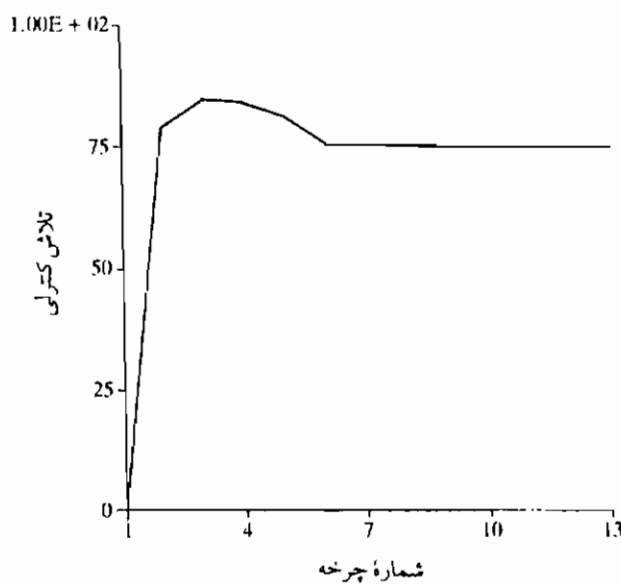
توجه به این نکته جالب است که در نقطه بهین، قید دینامیک معادله (۸.۳۱) در هیچ یک از نقاط گره زمانی فعال نیست و در بسیاری از چرخه های میانی نقض شده است. قید پاسخ نهایی معادله های (۸.۳۲) و (۸.۳۳) نیز در بهین برآورده شده اند با ضرایب لاگرانژ نرمال شده  $(-7.97E - 04)$  و  $(5.51E - 05)$ . چون ضرایب تقریباً صفرند، قیود می‌توانند بدون متأثر کردن جواب بهین به نوعی آزاد گردند. این می‌تواند در پاسخ جابه جایی و سرعت نهایی که به ترتیب در شکل‌های ۸.۸ و ۸.۹ نشان داده شده، مشاهده گردد. چون سیستم بعد از  $t = 0.05$  ثانیه در حالت سکون است، اعمال قیود نهایی معادله های (۸.۳۲) و (۸.۳۳) اثری ندارد.

نیروی کنترلی در نقاط گرهی متعددی در مقدار حدی خودش یعنی  $(u_{\text{li}} = 30 \text{ N})$  است؛ به عنوان مثال، در شش نقطه گرهی اول در حد پایین خودش و در شش نقطه گرهی بعدی در حد بالای خودش است. ضریب لاگرانژ برای قید در ابتدا بیشترین مقدار خود را دارد و به تدریج بعد از ۱۳ امین نقطه گرهی به صفر می‌رسد. براساس قضیه ۳.۱۴ حساسیت تغییر قید، در صورت برداشته شدن حد نیروی کنترلی برای یک زمان کوتاه بعد از وارد شدن بار ناگهانی، تابع هزینه بهین به میزان قابل ملاحظه ای می‌تواند کاهش پیدا کند.

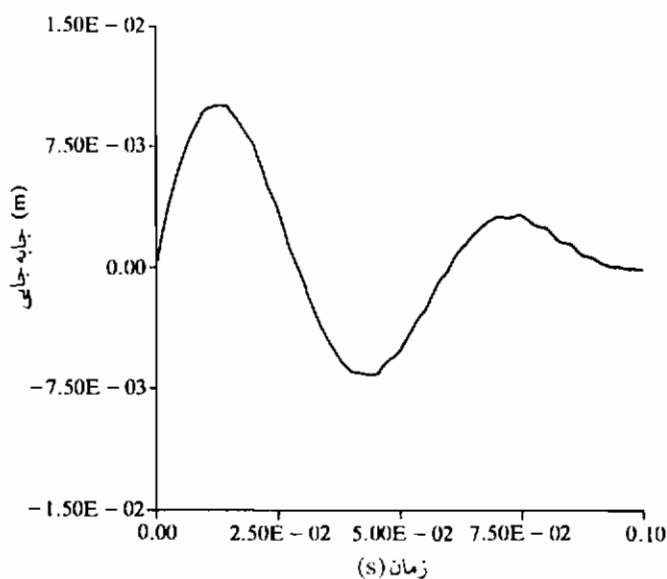
### ۸.۹.۳ مسأله مینیم سازی تلاش کنترلی

رابطه سازی دیگری برای مسأله امکان پذیر است و آن مینیم کردن کل تلاش کنترلی است که به شکل زیر تعریف می‌شود

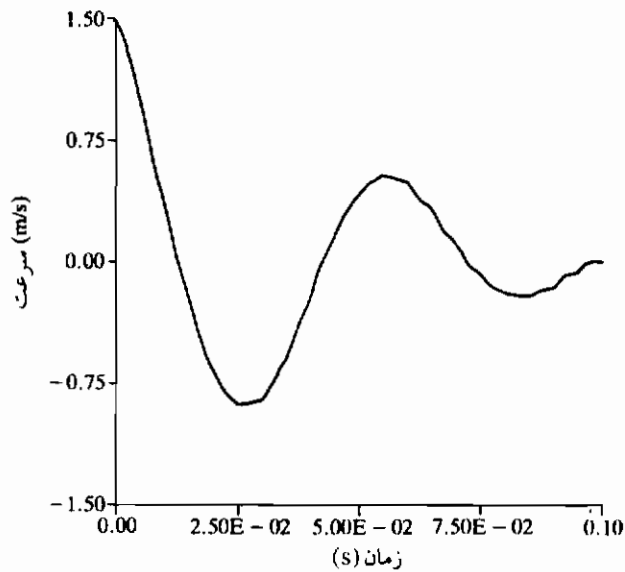
$$J_3 = \int_0^T u^2(t) dt \quad (۸.۵۲)$$



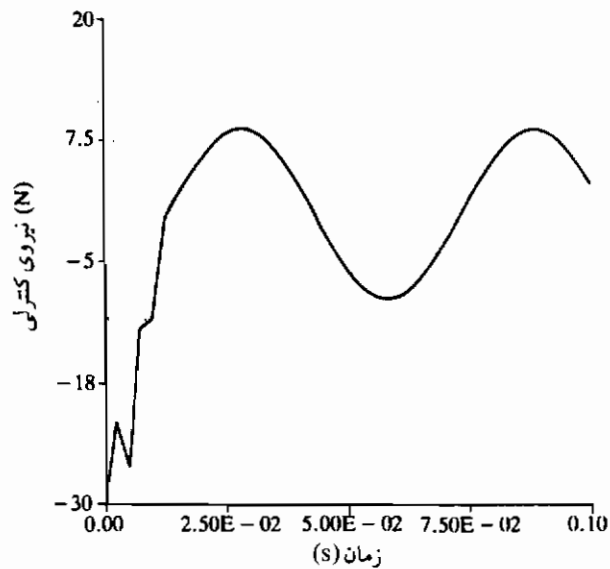
شکل ۸.۱۱ تاریخچه تابع هزینه برای مسأله کنترل بهین مینیمم سازی تلاش کنترلی (تابع هزینه ۱/)



شکل ۸.۱۲ پاسخ جابه جایی در بهین با مینیمم سازی تلاش کنترلی به عنوان شاخص عملکرد (تابع هزینه ۲/)



شکل ۸.۱۳ پاسخ سرعت در بهین با مینیم سازی تلاش کنترلی به عنوان شاخص عملکرد (تابع هزینه  $J$ )



شکل ۸.۱۴ نیروی کنترلی بهین برای مینیم سازی تلاش کنترلی برای به حالت سکون رساندن سیستم بعد از ورود ناگهانی (تابع هزینه  $J$ )

قیود مانند آنچه در معادله های (۸.۳۱) تا (۸.۳۴) و معادله های (۸.۲۸) و (۸.۲۹) تعریف شد می باشد. روشهای عددی برای به دست آوردن یک جواب بهین برای مسأله مانند آن چیزی است که در بخش ۸.۹.۲ تشریح شد.

این رابطه سازی مسأله کاملاً خوش خیم است. با شروع از نقاط مختلفی جواب بهین مشابهی به دست می آید، آن هم خیلی زود (۲۷-۹ چرخه). شکل های ۸.۱۴-۸.۱۱ تاریخچه هزینه، پاسخهای جابه جایی و سرعت، و نیروی کنترلی در جواب بهین را که با شروع از  $u(t) = 0$  و ۴۱ نقطه گرهی به دست آمده ارائه می دهد. تلاش کنترلی نهایی ۷.۴۸ بسیار کمتر از حالت اول است که ۲۸.۷۴ بود. ولی سیستم در ۰.۱۰ ثانیه به حالت سکون می رسد که در حالت قبل ۰.۰۵ ثانیه بود. جواب با ۲۱ نقطه گرهی به تلاش کنترلی کمی کوچکتر می انجامد که همچنان که قبلاً توضیح داده شد، به خاطر روشهای عددی استفاده شده است.

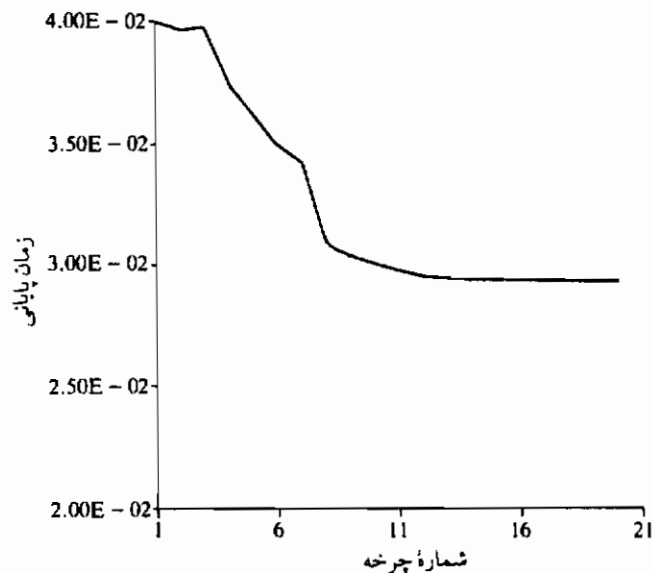
توجه به این نکته جالب است که قید معادله (۸.۳۱) در ۸ امین نقطه گرهی با ضریب لاگرانژ نرمال شده  $(2.429E - 02)$  فعال است. قیود معادلات (۸.۳۲) و (۸.۳۳) نیز با ضرایب لاگرانژ نرمال شده  $(-1.040E - 02)$  و  $(-3.753E - 04)$  فعالند. به علاوه، نیروی کنترلی در اولین نقطه گرهی در حد پایین خودش است با ضریب لاگرانژ  $(7.153E - 04)$ . این نشان می دهد که با افزایش یا کاهش نیروی کنترلی، تابع هزینه بهین زیاد متاثر نمی شود.

#### ۸.۹.۴ مسأله کنترل حداقل زمان

پنداره این رابطه سازی عبارت است از مینیمم سازی زمانی که برای استهلاك حرکت سیستم تحت شرایط قیدی مختلف مورد نیاز است. در رابطه سازی قبلی، زمان لازم برای رسیدن به سکون مشخص بود. در این رابطه سازی، ما زمان  $T$  را مینیمم می کنیم. بنابراین، تابع هزینه عبارت است از

$$f_4 = T \quad (۸.۵۳)$$

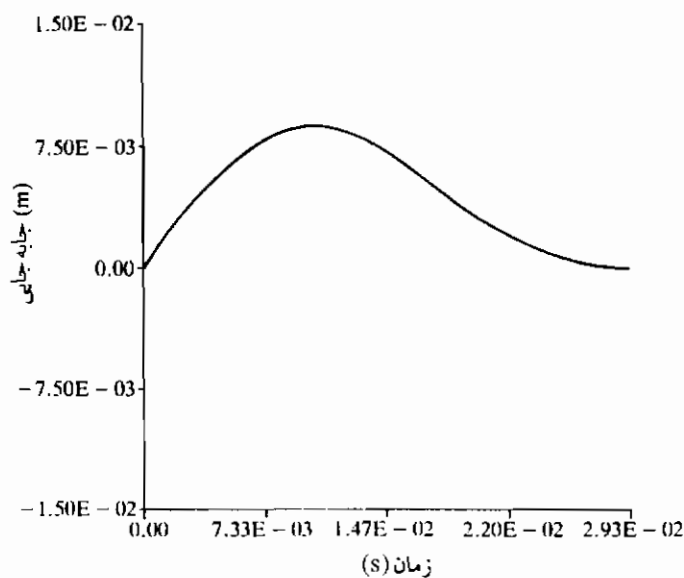
قیود روی سیستم مانند آنچه در معادله های (۸.۲۸)، (۸.۲۹) و (۸.۳۱) تا (۸.۳۴) تعریف شد می باشد. دقت کنید که در مقایسه با رابطه سازی گذشته، گرادیان قیود نسبت به  $T$  نیز مورد نیاز است. این می تواند به راحتی محاسبه گردد، زیرا عبارت تحلیلی توابع معلوم است.



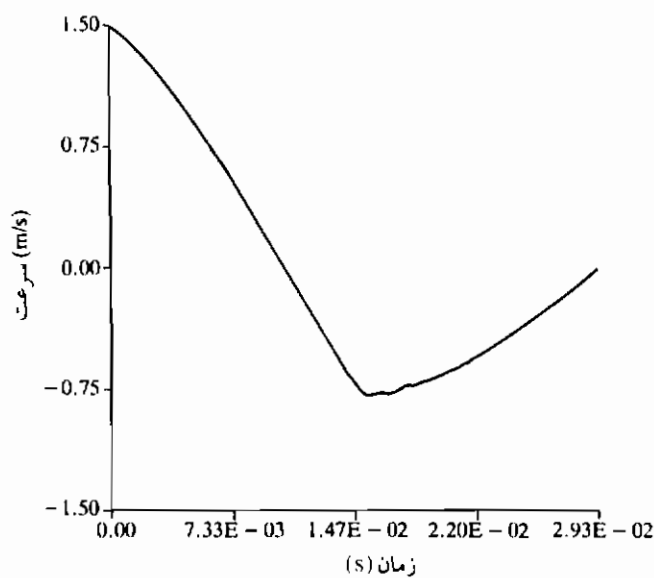
شکل ۸.۱۵ تاریخچه تابع هزینه برای مسئله کنترل بهین می‌نیم سازی زمان برای به حالت سکون رساندن سیستم (تابع هزینه  $f_0$ )

با شروع از نقاط مختلف مانند  $T = 0.1, 0.04, 0.02$  و  $u(t) = 0, 30, -30$  جواب بهین مشابهی به دست می‌آید. شکل‌های ۸.۱۸-۸.۱۵ تاریخچه تابع هزینه، پاسخ جابه‌جایی و سرعت، و نیروی کنترلی در بهین با ۴۱ نقطه گرهی،  $T = 0.04$  و  $u(t) = 0$  به عنوان نقطه شروع را نشان می‌دهند. زمان محاسبه توسط رایانه Apollo DN460 برای کل فرآیند حل، ۳۰۲ ثانیه است. برای به سکون رساندن سیستم ۰.۰۲۹۳۳ ثانیه طول می‌کشد. بسته به نقطه شروع، تعداد چرخه‌های همگرایی به جواب نهایی بین ۲۰ و ۵۶ متغیر است.

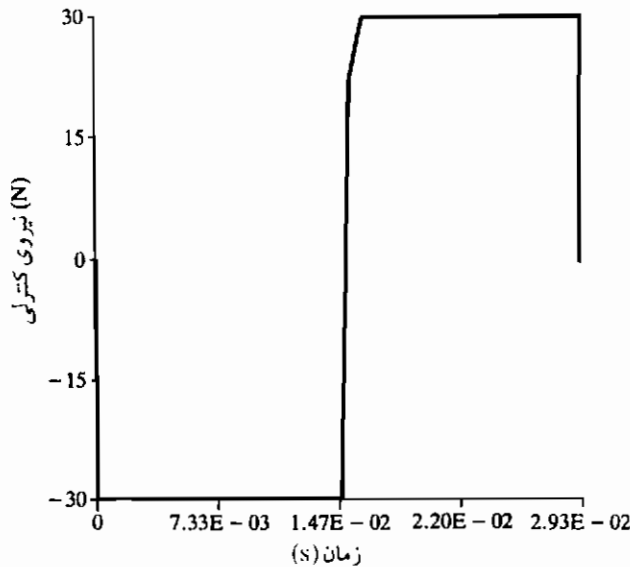
قیود معادله‌های (۸.۳۲) و (۸.۳۳) با ضرایب لاگرانژ  $(6.395E-02)$  و  $(-1.771E-01)$  فعالند. نیروی کنترلی در ۲۲ نقطه گرهی اول در حد پایینی خودش و در بقیه نقاط در حد بالایی آن قرار دارد.



شکل ۸.۱۶ پاسخ جابه جایی در بهین با مینیمم سازی زمان به عنوان شاخص عملکرد (تابع هزینه  $1/4$ ).



شکل ۸.۱۷ پاسخ سرعت در بهین با مینیمم سازی زمان به عنوان شاخص عملکرد (تابع هزینه  $1/4$ ).



شکل ۸.۱۸ نیروی کنترلی بهین برای مینیمم سازی زمان به سکون رساندن سیستم بعد از ورودی ناگهانی (تابع هزینه  $f_1$ )

توجه به این نکته نیز جالب است که حتی پس از نرمال سازی مسأله، نرخ همگرایی مسأله می تواند با ضرب تابع هزینه در عددی مثبت متأثر شود. به عنوان مثال، تعداد چرخه ها وقتی ضریب ۱۰۰۰ استفاده شد از ۶۰ به ۲۰ کاهش یافت. نتایج ارائه شده قبلی همه با استفاده از این ضریب ۱۰۰۰ است. از طرفی، استفاده از این ضریب فرآیند تعیین اندازه گام را برای الگوریتم تحت تأثیر قرار می دهد. نتیجه ای که براساس مطالعات می تواند به دست آید عبارت است از این که: فرآیند تعیین اندازه گام در سیستم IDESIGN جای بهبود بیشتری دارد.

#### ۸.۹.۵ مقایسه سه رابطه سازی برای کنترل بهین حرکت سیستم

مقایسه سه رابطه سازی کنترل بهین حرکت سیستم نشان داده شده در شکل ۸.۴ جالب توجه است. جدول ۸.۱۴ حاوی خلاصه ای از جوابهای بهین با سه رابطه سازی مختلف است. تمامی جوابها با ۴۱ نقطه گرهی و با  $u(t) = 0$  به عنوان نقطه شروع و با استفاده از رایانه Apollo DN460 به دست آمده است. برای رابطه سازی سوم،  $T = 0.04$  ثانیه به عنوان نقطه شروع استفاده شده است.

جدول ۸.۱۴ خلاصه جواب بهین برای سه رابطه سازی کنترل بهین حرکت

يك سیستم تحت اثر ورودی ناگهانی

	رابطه سازی ۱ : مینیمم سازی خطا در متغیر حالت	رابطه سازی ۲ : مینیمم سازی تلاش کنترلی	رابطه سازی ۳ : مینیمم سازی زمان پایانی
$f_1$	$8.536\ 07E - 07$	$2.320\ 08E - 06$	$8.644\ 66E - 07$
$f_2$	$1.682\ 41E - 02$	$2.735\ 40E - 02$	$1.459\ 66E - 02$
$f_3$	$2.873\ 98E + 01$	$7.481\ 04$	$2.597\ 61E + 01$
$f_4$	$0.10$	$0.10$	$2.93\ 36E - 02$
NIT	38	13	20
NCF	38	13	20
NGE	100	68	64
CPU	212	43	302

NIT ، تعداد چرخه ها؛ NCF ، تعداد فراخوان برای ارزیابی تابع؛ NGE ، تعداد دفعات ارزیابی گرادیان .

نتایج جدول ۸.۱۴ نشان می دهد که تلاش کنترلی در رابطه سازی اول بزرگترین مقدار و در رابطه سازی دوم کمترین مقدار را دارد . رابطه سازی دوم از نظر پیاده سازی کاراترین و راحت ترین است . با تغییر زمان کل  $T$  ، این رابطه سازی می تواند برای تولید نتایج رابطه سازی ۳ استفاده شود . به عنوان مثال ، با استفاده از  $T = 0.05$  و  $T = 0.029\ 33$  ثانیه جوابهای رابطه سازی ۲ به دست آمده اند . با  $T = 0.029\ 33$  ثانیه ، جوابی مشابه رابطه سازی ۳ به دست می آید . همچنین ، وقتی  $T = 0.025$  ثانیه استفاده شده است ، رابطه سازی ۲ به یک مسأله غیرقابل قبول منجر شده است . برای کاربردهای عملی ، رابطه سازی ۲ برای مسائل کنترل ارتعاش توصیه می شود .

### تمرینهای فصل ۸\*

مسائل طراحی زیر را رابطه سازی کرده و با استفاده از یک الگوریتم برنامه ریزی غیرخطی و با یک طراحی اولیه منطقی آنها را حل کنید . همچنین مسائل را به روش ترسیمی حل کرده و تاریخچه فرآیند چرخه را روی ترسیمه مسأله دنبال کنید :

۸.۱ تمرین ۲.۴۸

۸.۲ تمرین ۲.۴۹

۸.۳ تمرین ۲.۵۰

۸.۴ تمرین ۲.۶۲

۸.۵ تمرین ۲.۶۳

۸.۶ تمرین ۲.۶۴

۸.۷ تمرین ۲.۶۵

۸.۸ سیستم تیر یک سر گیردار - جرم نشان داده شده در شکل E8.8 را در نظر بگیرید. مسأله طراحی برای مینیمم کردن وزن را برای سطح مقطع مستطیلی طوری رابطه سازی و حل کنید که بسامد ارتعاشی اساسی بزرگتر از 8 rad/sec و ابعاد سطح مقطع محدوده زیر را برآورده کنند

$$0.5 \leq b \leq 1.0, \quad \text{in}$$

$$0.2 \leq h \leq 2.0, \quad \text{in}$$

از یک الگوریتم برنامه ریزی غیرخطی برای حل مسأله استفاده کنید. جواب را به وسیله ترسیمه تأیید و تاریخچه فرآیند چرخه را روی ترسیمه مسأله دنبال کنید. نقطه شروع را (0.5, 0.2) بگیرید. داده ها و روابط مختلف مسأله عبارت است از:

$$\omega = \sqrt{k_r/m} \quad \text{rad/s}$$

$$\frac{1}{k_r} = \frac{1}{k} + \frac{L^3}{3EI}$$

$$m = \frac{W}{g}$$

$$W = 50 \text{ lb}$$

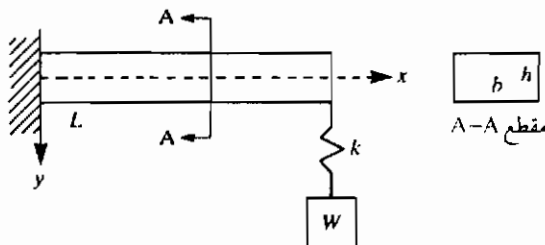
$$L = 12 \text{ in}$$

$$E = (3.00 \times 10^7) \text{ psi}$$

$$k = 10 \text{ lb/in}$$

$$I, \text{ in}^4$$

$$g, \text{ in/sec}^2$$



شکل E8.8 تیر یک سر گیردار با جرم و فنر در سر آزاد

۸.۹

یک تیر فولادی منشوری با سطح مقطع متقارن I در شکل E8.9 نشان داده شده است.

مسئله طراحی مینیمم وزن را مشروط به قیود زیر رابطه سازی و حل کنید:

۱. تنش محوری ماکزیمم که به خاطر اثر بارهای خمشی و محوری مرکب است نباید از 100 MPa بیشتر شود.

۲. بیشترین تنش برشی نباید از 60 MPa بیشتر شود.

۳. خیز ماکزیمم نباید از 15 mm تجاوز کند.

۴. تیر باید در مقابل کمانش جانبی مقاوم باشد.

۵. متغیرهای طراحی باید محدوده های زیر را برآورده کنند  $b \geq 100 \text{ mm}$ ,

$$h \leq 150 \text{ mm}, t_2 \leq 15 \text{ mm}, t_1 \leq 10 \text{ mm}$$

با استفاده از یک روش بهینه سازی عددی مسئله را حل کرده، و با جواب به دست آمده

از شرایط لازم K-T مقایسه کنید. داده های مسئله عبارتند از:

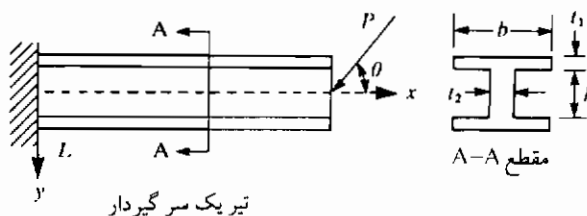
ضریب ارتجاعی  $E = 200 \text{ GPa}$

ضریب برشی  $G = 70 \text{ GPa}$

بار  $P = 70 \text{ kN}$

زاویه بار  $\theta = 45^\circ$

طول تیر  $L = 1.5 \text{ m}$



شکل E8.9 تیر A یک سر گیردار. متغیرهای طراحی:  $b, t_1, t_2, h$

۸.۱۰

بهینه سازی شکلی یک سازه. هدف طراحی عبارت است از به دست آوردن شکل

یک سازه سه میله ای که در شکل ۸.۱۰ نشان داده شده طوری که وزن آن مینیمم باشد

[کارکوران<sup>۱</sup>، ۱۹۷۰]. متغیرهای طراحی برای مسئله عبارت است از مساحت های

سطح مقطع اعضا  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  و مختصات نقاط گرهی A، B و C (توجه کنید که  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  در شکل مقادیر مثبت دارند؛ مقدار نهایی آنها ممکن است مثبت یا منفی باشد)، طوری که خرپا تا حد امکان سبک باشد و قیود تنش به ازای شرایط بارگذاری سه گانه زیر برآورده شوند

شماره شرایط $j$	بار $P_j$ (lb)	زاویه $\theta_j$ (درجه)
1	40 000	45
2	30 000	90
3	20 000	135

قیود تنش به شکل زیر نوشته می شوند

$$-5000 \leq \sigma_{1j} \leq 5000, \quad \text{psi}$$

$$-20\,000 \leq \sigma_{2j} \leq 20\,000, \quad \text{psi}$$

$$-5000 \leq \sigma_{3j} \leq 5000, \quad \text{psi}$$

در حالی که  $j = 1, 2, 3$  نشان دهنده سه نوع شرایط بارگذاری است و تنشها از عبارات زیر محاسبه می شوند:

$$\sigma_{1j} = \frac{E}{L_1} [u_j \cos \alpha_1 + v_j \sin \alpha_1] = \frac{E}{L_1^2} (u_j x_1 + v_j L)$$

$$\sigma_{2j} = \frac{E}{L_2} [u_j \cos \alpha_2 + v_j \sin \alpha_2] = \frac{E}{L_2^2} (u_j x_2 + v_j L)$$

$$\sigma_{3j} = \frac{E}{L_3} [u_j \cos \alpha_3 + v_j \sin \alpha_3] = \frac{E}{L_3^2} (-u_j x_3 + v_j L)$$

در حالی که  $L = 10$  in و

$$L_1 = \text{طول عضو ۱} = \sqrt{L^2 + x_1^2}$$

$$L_2 = \text{طول عضو ۲} = \sqrt{L^2 + x_2^2}$$

$$L_3 = \text{طول عضو ۳} = \sqrt{L^2 + x_3^2}$$

و  $u_j$  و  $v_j$  عبارتند از جابه جاییهای افقی و عمودی زامین شرایط بارگذاری که از روابط خطی زیر به دست می آید.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_j \cos \theta_j \\ P_j \sin \theta_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3$$

در حالی که ضرایب سختی عبارتند از ( $E = 3.0 \times 10^7$  psi)

$$k_{11} = E \left( \frac{A_1 x_1^2}{L_1^3} + \frac{A_2 x_2^2}{L_2^3} + \frac{A_3 x_3^2}{L_3^3} \right)$$

$$k_{12} = E \left( \frac{A_1 L x_1}{L_1^3} + \frac{A_2 L x_2}{L_2^3} - \frac{A_3 L x_3}{L_3^3} \right) = k_{21}$$

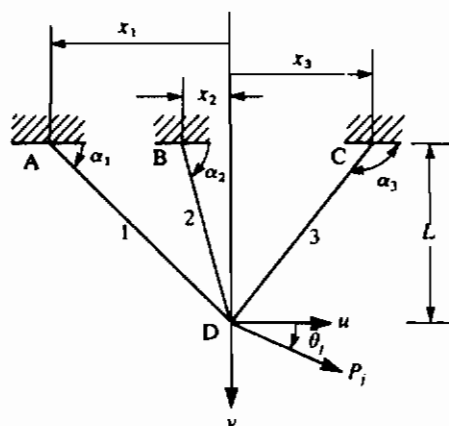
$$k_{22} = E \left( \frac{A_1 L^2}{L_1^3} + \frac{A_2 L^2}{L_2^3} + \frac{A_3 L^2}{L_3^3} \right)$$

مسئله طراحی را رابطه سازی کرده و جواب بهین را با شروع از نقطه زیر بیابید

$$A_1 = 6.0, A_2 = 6.0, A_3 = 6.0$$

$$x_1 = 5.0, x_2 = 0.0, x_3 = 5.0$$

جوابها را با جوابهای داده شده در جدول ۸.۷ مقایسه کنید.



شکل E8.10 سازه سه میله ای. بهینه سازی شکلی

۸.۱۱ طراحی مجموعه یک جعبه دنده نه سرعت. نحوه آرایش یک جعبه دنده نه سرعت

در شکل E8.11 نشان داده شده است. هدف از ترکیب این مجموعه عبارت است از

یافتن اندازه تمامی چرخ دنده ها از معادلات شبکه و نسبت سرعت، طوری که اندازه

بزرگترین چرخ دنده مینیمم باشد [عثمان، سانکر و دوکیپاتی، ۱۹۷۸]. به خاطر

معادلات شبکه و نسبت سرعت، تنها سه پارامتر مستقل زیر باید انتخاب شوند:

$x_1 =$  نسبت دنده  $d/a$

$x_2 =$  نسبت دنده  $e/a$

$x_3 =$  نسبت دنده  $j/a$

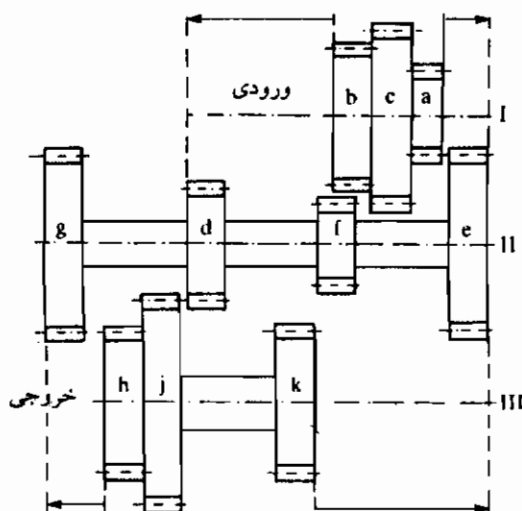
به خاطر لحاظ کردن مسائل عملی، مینیمم کردن  $|x_2 - x_3|$  به کاهش هزینه تولید جعبه دنده می انجامد.

اندازه چرخ دنده ها باید معادلات شبکه زیر را برآورده کنند:

$$\phi^2 x_1 (x_1 + x_3 - x_2) - x_2 x_3 = 0$$

$$\phi^3 x_1 - x_2 (1 + x_2 - x_1) = 0$$

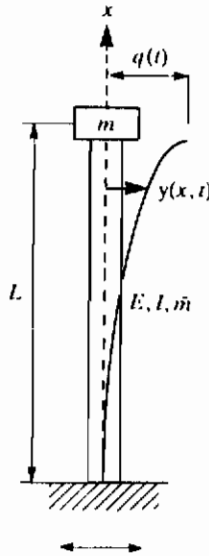
در حالی که  $\phi$  نسبت گام سرعت است. جواب بهین مسأله را با دو مقدار متفاوت  $\phi$  یعنی  $\sqrt{2}$  و  $(2)^{1/3}$  بیابید.



شکل E8.11 نحوه آرایش يك جعبه دنده نه سرعته

۸.۱۲ طراحی یک میلله پله ای پرچم. مسأله طراحی میلله پرچم تمرین ۲.۶۳ را برای داده های ارائه شده در آن جا رابطه سازی کنید. از یک لوله با ضخامت ثابت به عنوان عضو سازه استفاده کنید. جرم میلله پرچم باید نسبت به قیود مختلف مینیمم شود. از یک روش بهینه سازی عددی برای به دست آوردن جواب نهایی استفاده کرده و آن را با جواب بهین میلله یکنواخت پرچم مقایسه کنید.

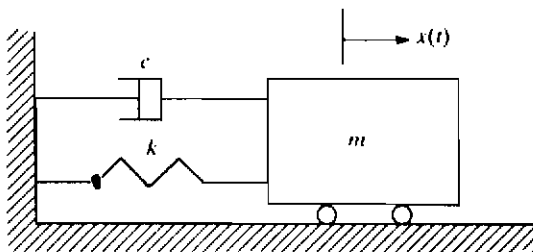
۸. ۱۳ طراحی پایه تابلو. مسأله طراحی پایه تابلو را که در تمرین ۲. ۶۴ تشریح شد با داده های ارائه شده در آن جا رابطه سازی کنید. از یک لوله پله ای با ضخامت ثابت به عنوان عضو سازه استفاده کنید. جرم پایه باید نسبت به قیود مختلف مینیمم شود. با استفاده از یک روش بهینه سازی عددی جواب نهایی را یافته و آن را با جواب بهین پایه یکنواخت مقایسه کنید.
۸. ۱۴ مسأله تمرین ۸. ۱۲ را برای یک پایه پله ای مربع با ضخامت یکنواخت تکرار کنید.
۸. ۱۵ مسأله تمرین ۸. ۱۳ را برای یک پایه پله ای مربع با ضخامت یکنواخت تکرار کنید.
۸. ۱۶ برای مسأله کنترل بهین مینیمم سازی خطا در متغیر حالت که در بخش ۸. ۹. ۲ رابطه سازی و حل شد، اثر تغییرات حدود نیروی کنترلی ( $u$ ) را به ۲۵ N یا ۳۵ N بررسی کنید.
۸. ۱۷ برای مسأله مینیمم سازی تلاش کنترل که در بخش ۸. ۹. ۳ رابطه سازی و حل شد، اثر تغییرات حدود نیروی کنترلی ( $u$ ) را به ۲۵ N یا ۳۵ N بررسی کنید.
۸. ۱۸ برای مسأله کنترل حداقل زمان که در بخش ۸. ۹. ۴ رابطه سازی و حل شد، اثر تغییرات حدود نیروی کنترلی ( $u$ ) را به ۲۵ N یا ۳۵ N بررسی کنید.
۸. ۱۹ برای مسأله کنترل بهین مینیمم سازی خطا برای متغیر حالت که در بخش ۸. ۹. ۲ رابطه سازی و حل شد، اثر اضافه شدن یک جرم متمرکز  $M$  در سر آزاد تیر ( $M = 0.05 \text{ kg}$ ) را همچنان که در شکل E8.19 دیده می شود، بررسی کنید.
۸. ۲۰ برای مسأله کنترل حداقل زمان که در بخش ۸. ۹. ۳ رابطه سازی و حل شد، اثر اضافه شدن یک جرم متمرکز  $M$  را در سر آزاد تیر مطالعه کنید ( $M = 0.05 \text{ kg}$ ).
۸. ۲۱ برای مسأله کنترل حداقل زمان که در بخش ۸. ۹. ۴ رابطه سازی و حل شد، اثر اضافه شدن یک جرم متمرکز  $M$  را در سر آزاد تیر مطالعه کنید ( $M = 0.05 \text{ kg}$ ).
۸. ۲۲ برای تمرین ۸. ۱۹ اگر جرم  $M$  با محدوده  $0 \leq M \leq 0.10 \text{ kg}$  به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شود، جواب بهین چه خواهد بود؟
۸. ۲۳ برای تمرین ۸. ۲۰ اگر جرم  $M$  با محدوده  $0 \leq M \leq 0.10 \text{ kg}$  به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شود، جواب بهین چه خواهد بود؟
۸. ۲۴ برای تمرین ۸. ۲۱ اگر جرم  $M$  با محدوده  $0 \leq M \leq 0.10 \text{ kg}$  به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شود، جواب بهین چه خواهد بود؟



شکل E8.19 سازه يك سر گیردار با جرم در سر آزاد

- ۸.۲۵ برای مسأله کنترل بهین مینیمم سازی متغیر حالت که در بخش ۸.۹.۳ رابطه سازی و حل شد، اثر اضافه کردن ۱٪ به استهلاك بحرانی در رابطه سازی را مطالعه کنید.
- ۸.۲۶ برای مسأله مینیمم سازی تلاش کنترلی که در بخش ۸.۹.۳ رابطه سازی و حل شد، اثر اضافه کردن ۱٪ به استهلاك بحرانی در رابطه سازی را مطالعه کنید.
- ۸.۲۷ برای مسأله کنترل حداقل زمان که در بخش ۸.۹.۴ رابطه سازی و حل شد، اثر اضافه کردن ۱٪ به استهلاك بحرانی در رابطه سازی را مطالعه کنید.
- ۸.۲۸ برای سیستم جرم فنر مستهلك کننده که در شکل E8.28 نشان داده شده است، مسأله به دست آوردن ثابت فنر و ضریب استهلاكی را برای مینیمم شدن شتاب ماکزیمم سیستم در یک بازه ۱۰ ثانیه ای وقتی که با سرعت اولیه 5 m/sec رها می شود، رابطه سازی و حل کنید. جرم برابر است با 5 kg. جابه جایی جرم در کل بازه ۱۰ ثانیه ای نباید از 5 cm تجاوز کند. ثابت فنر و ضریب استهلاكی باید در محدوده  $1000 \leq k \leq 3000$  N/m و  $0 \leq c \leq 300$  N.S/m باشد. (راهنمایی: هدف از مینیمم سازی ماکزیمم شتاب عبارت است از یک مسأله مین-ماکس<sup>۱</sup> که با معرفی

یک متغیر طراحی مصنوعی می تواند به یک مسأله برنامه ریزی غیر خطی تبدیل شود. اگر  $u(t)$  شتاب و  $A$  متغیر مصنوعی باشد، آن گاه هدف می تواند مینیمم کردن  $A$  به شرط یک قید اضافی  $|u(t)| \leq A$  در بازه  $0 \leq t \leq 10$  باشد.



شکل E8.28 سیستم استهلاکی يك درجه آزادی

## تحلیل اقتصادی

بخش عمده این کتاب به بیان روشهای تحلیلی و عددی بهینه سازی طراحی مهندسی اختصاص یافته است. این پیوست خارج از آن موضوع کلی بوده و شامل مقدمه ای در تصمیم سازی مهندسی براساس نگرش اقتصادی است. برای اطلاع از جزئیات بیشتر در این باره به کتابهای گرانث، آیرسون و لیون ورث<sup>۱</sup> [۱۹۸۲]، استارک و نیکولز<sup>۲</sup> [۱۹۷۲] و بلنک و تارکون<sup>۳</sup> [۱۹۸۳] مراجعه کنید.

### A.1 ارزش زمانی نقدینگی

سیستمهای مهندسی برای انجام وظایفی خاص طراحی می شوند. معمولاً طراحیهای جایگزین متعددی می توانند یک وظیفه را انجام دهند. سؤال این است که کدام یک از این جایگزینها بهترین است؟ عوامل مختلفی مثل سابقه، جو اجتماعی، زیبایی، ارزشهای اقتصادی و روانی می توانند در انتخاب نهایی مؤثر باشند. این پیوست تنها به عوامل اقتصادی که در انتخاب یک جایگزین مؤثرند می پردازد.

مسائل اقتصادی بخشی جداناپذیر از مهندسی هستند، زیرا مهندسان نسبت به هزینه

1. Grant, Ireson and Leavenworth

2. Stark and Nicholls

3. Blank and Tarquin

مستقیم یک طرح حساسند. آنها باید هزینه نگر داری و عملکرد را پیش بینی کنند. در فرآیند تصمیم سازی، شرایط اقتصادی آینده نیز باید در نظر گرفته شود. ما راههایی برای اندازه گیری ارزش نقدینگی تشریح خواهیم کرد تا مقایسه طرحهای جایگزین میسر گردد. در این بحث علایم زیر به کار رفته است:

$n$  = تعداد بازه های زمانی سود، مثلاً چند ماه یا چند سال؛

$i$  = برگشتی به ازای هر دلار در بازه زمانی؛ دقت کنید که  $i$  نرخ سود سالانه نیست.

این مطلب در مثالها بیشتر تشریح خواهد شد؛

$P$  = ارزش یا سرجمع فعلی نقدینگی، بر حسب دلار؛

$S_n$  = جمع نهایی بعد از  $n$  بازه زمانی یا «پرداخت از زمان حال، بر حسب دلار؛

$R$  = یک سری از وصولیهای متوالی پول به صورت اقساط مساوی در آخر سر رسید؛

مثلاً دلار در ماه، دلار در سال و غیره.

فهم علایم و معنی آنها برای تجزیه و تحلیل و حل صحیح مثالها و تمرینها مهم است. به عنوان مثال،  $i$  باید به عنوان نرخ برگشت در هر دلار در هر بازه زمانی به کار رود و نه نرخ سود سالانه. و عبارت است از مقدار مربوط به آخر بازه زمانی و نه اول آن. توجه به این نکته مهم است که در مثالها و تمرینها نرخ سود سالانه را ذکر خواهیم کرد و با استفاده از آن می توان  $i$  را محاسبه کرد.

سرمایه گذاری  $P$  دلار را که  $i$  دلار به ازای هر دلار در هر بازه زمانی برگشت دارد، در نظر بگیرید. برگشت پس از اولین بازه زمانی عبارت است از  $iP$ ، و سرمایه گذاری اولیه به  $(1+i)P$  افزایش می یابد. این مبلغ دوباره سرمایه گذاری شده و در پایان بازه زمانی بعدی  $i(1+i)P$  برگشت دارد که ارزش مبلغ اولیه  $i^2P(1+i)$  می شود، و به همین ترتیب اگر این کار برای  $n$  بازه زمانی ادامه پیدا کند، سرمایه اولیه  $P$  به جمع نهایی  $S_n$  بالغ می شود که از رابطه زیر به دست می آید

$$S_n = (1+i)^n P = [\text{spcaf}(i, n)]P \quad (\text{A.1})$$

که  $\text{spcaf}(i, n)$  ضریب پرداخت یکجای مراحله مرکب<sup>۱</sup> است.

**مثال A.1** استفاده از ضریب پرداخت یکجای مراحله مرکب، سرمایه گذاری ۱۰۰۰ دلار را با نرخ

سود سالانه ۹٪ در نظر بگیرید که به طور ماهانه مرکب می شود. جمع کل را در پایان ۲ و ۴ سال محاسبه کنید.

حل. برای نرخ سود سالانه داده شده، نرخ برگشت به ازای هر دلار در ماه عبارت است از  $i = 0.09/12 = 0.0075$ . برگشت نهایی سرمایه گذاری ۱۰۰۰ دلاری در پایان ۲ سال ( $n = 24$ ) با استفاده از ضریب پرداخت یکجای مراحله مرکب معادله (A.1) برابر است با

$$\begin{aligned} S_{24} &= \text{scaf}(0.0075, 24)(1000) \\ &= (1 + 0.0075)^{24}(1000) = (1.19641)(1000) = \$1196.41 \end{aligned}$$

و در پایان ۴ سال ( $n = 48$ ) برابر است با

$$\begin{aligned} S_{48} &= (1 + 0.0075)^{48}(1000) \\ &= (1.43141)(1000) = \$1431.41 \end{aligned}$$

اگر  $P$  ارزش فعلی بازپرداخت  $S_n$  باشد که در پایان  $n$  امین بازه زمانی پرداخت شده می توان آن را از معادله (A.1) محاسبه کرد

$$P = (1 + i)^{-n} S_n = [\text{sppwf}(i, n)] S_n \quad (\text{A.2})$$

که  $\text{sppwf}(i, n)$  ضریب ارزش فعلی پرداخت یکجا<sup>۱</sup> نامیده می شود. دقت کنید که با توجه به معادله (A.1)  $\text{sppwf}(i, n)$  عکس  $\text{scaf}(i, n)$  است.

**مثال A.2 استفاده از ضریب ارزش فعلی پرداخت یکجا.** حالتی را در نظر بگیرید که یک نفر می خواهد از بانک وام بگیرد و در پایان دو سال می تواند ۱۰۰۰۰ دلار برگرداند. اگر نرخ سود سالانه متداول ۱۲٪ باشد که ماهانه مرکب شود بانک چقدر می تواند وام دهد؟

حل. با استفاده از نرخ سود داده شده، نرخ برگشت به ازای هر دلار در هر بازه زمانی برای این مثال عبارت است از  $i = 0.12/12 = 0.01$ . با استفاده از ضریب ارزش فعلی پرداخت یکجای معادله (A.2)، ارزش فعلی ۱۰۰۰۰ دلار که در پایان دو سال ( $n = 24$ ) پرداخت می شود عبارت است از

$$P = (1 + 0.01)^{-24}(10\,000) \\ = 0.787\,566(10\,000) = \$7876.66$$

پس بانک در حال حاضر می تواند \$7876.66 وام بدهد.

پرداخت اقساطی یکنواخت  $R$  را که در پایان هر بازه زمانی انجام می شود در نظر بگیرید. اولین بازپرداخت در انتهای اولین بازه زمانی در مدت  $(n - 1)$  بازه سودی خواهد داشت. بنابراین، از معادله (A.1)، بعد از  $n$  امین بازه به  $R(1 + i)^{n-1}$  بالغ خواهد شد. دومین قسط که در پایان دومین بازه زمانی پرداخت می شود در مدت  $(n - 2)$  بازه سود خواهد داشت و ارزش آن بعد از  $n$  امین بازه زمانی  $R(1 + i)^{n-2}$  خواهد بود؛ و به همین ترتیب. این پرداخت قسطی معادل حاصل جمع  $S_n$  خواهد بود که یک سری هندسی محدود و به شکل زیر است

$$S_n = (1 + i)^{n-1}R + \dots + (1 + i)R + R \\ = [(1 + i)^{n-1} + \dots + (1 + i) + 1]R \\ = \frac{1}{i}[(1 + i)^n - 1]R = [\text{uscaf}(i, n)]R \quad (\text{A.3})$$

که  $\text{uscaf}(i, n)$  عبارت است از ضریب مربجه مرکب سری یکنواخت<sup>۱</sup>. به طریق مشابه، حاصل جمع نهایی  $S_n$  می تواند بر حسب یک سری معادل از پرداختهای  $R$  با برگرداندن معادله (A.3) بیان شود:

$$R = \frac{iS_n}{[(1 + i)^n - 1]} = \text{sdfd}(i, n)S_n \quad (\text{A.4})$$

که  $\text{sdfd}(i, n)$  ضریب سپرده وجوه استهلاکی<sup>۲</sup> نامیده می شود.

بدنکته مهم معادله های (A.3) و (A.4) دقت کنید که

۱. عبارت است از تعداد بازه های سود و اولین بازپرداخت در پایان اولین بازه است.

۲. حاصل جمع نهایی  $S_n$  در پایان  $n$  امین بازه شامل  $n$  امین پرداخت نیز هست.

مثال A.3 استفاده از ضریب مربجه مرکب سری یکنواخت. حالتی را در نظر بگیرید که شخصی

تصمیم دارد ۵۰ دلار در پایان هر ماه و برای ۱۰ سال آینده سپرده گذاری کند. نرخ سود

1. uniform series compound amount factor

2. sinking fund deposit factor

سالانه مقدار ۹٪ است که ماهانه مرکب می شود. بعد از بازه زمانی ده سال چقدر جمع خواهد شد؟

حل. چون سود ماهانه است، مقدار  $i$  برای این مسأله عبارت است از  $0.09/12 = 0.0075$ . با استفاده از ضریب مرابحه مرکب سری یکنواخت معادله (A.3)، جمع نهایی  $S_{120}$  عبارت است از  $S_{120} = \text{uscaf}(0.0075, 120)(50)$ :

$$\begin{aligned} S_{120} &= \frac{[(1 + 0.0075)^{120} - 1]}{0.0075} (50) \\ &= (193.51428)(50) = \$9675.71 \end{aligned}$$

دقت کنید که جمع نهایی  $S_{120}$  شامل پرداخت نهایی که در پایان دهمین سال انجام می شود نیز هست.

مثال A.4 استفاده از ضریب سپرده وجوه استهلاکی. شخصی به بانک متعهد شده که در پایان دو سال ۱۰۰۰۰ دلار بپردازد. اگر نرخ سود سالانه ۱۲٪ باشد که ماهانه مرکب می شود، بانک هر ماه چقدر می تواند وام دهد؟

حل. چون نرخ سود سالیانه ۱۲ درصد است، نرخ برگشت هر دلار در هر بازه زمانی برای این مسأله عبارت است از  $i = 0.12/12 = 0.01$ . با استفاده از ضریب سپرده وجوه استهلاکی معادله (A.4)، مبلغی که در پایان هر ماه دریافت می شود عبارت است از  $R = \text{sldf}(0.01, 24) | (10\ 000)$ :

$$\begin{aligned} R &= \frac{0.01}{[(1 + 0.01)^{24} - 1]} (10\ 000) \\ &= (0.037\ 073)(10\ 000) = \$370.73 \end{aligned}$$

دقت کنید که پرداخت نهایی بانک در پایان دو سال انجام می شود و در آن زمان پرداخت ۱۰۰۰۰ دلار باید به بانک انجام شود.

|| قسط  $R$  که در پایان هر بازه زمانی پرداخت می شود می تواند معادل با ارزش فعلی  $P$  باشد. از ترکیب معادله های (A.2) و (A.3) داریم

$$P = \frac{1}{i} [1 - (1 + i)^{-n}] R = [\text{uspwf}(i, n)] R \quad (\text{A.5})$$

در حالی که  $uspwf(i, n)$  ضریب ارزش فعلی سری یکنواخت<sup>۱</sup> نامیده می شود. بالآخره، مبلغ فعلی  $P$  معادل است با  $n$  قسط یکنواخت که در پایان هر بازه زمانی پرداخت می شود، (از معادله A.5) داریم:

$$R = \frac{iP}{[1 - (1+i)^{-n}]} = [crf(i, n)]P \quad (A.6)$$

که در آن  $crf(i, n)$  ضریب برگشت سرمایه نامیده می شود. جدول A.1 همه ضرایب را خلاصه کرده است.

**مثال A.5** استفاده از ضریب ارزش فعلی پرداختهای سری یکنواخت. شخصی متعهد شده ماهی ۱۰۰ دلار و تا دو سال به بانک بپردازد. اگر نرخ سود سالانه ۱۵٪ باشد که ماهانه مرکب می شود، در حال حاضر بانک چقدر می تواند وام بدهد؟  
 حل. چون سود ماهانه مرکب می شود مقدار  $i$  برای این مثال عبارت است از  $0.15/12 = 0.0125$ . با استفاده از ضریب ارزش فعلی سری یکنواخت معادله (A.5)، ارزش فعلی  $100$  \$ که در پایان هر ماه پرداخت شود و ۲۴ بار باشد عبارت است از  $P = [uspwf(0.0125, 24)] (100)$

جدول A.1 روابط بهره

ضرب کنید در با داشتن برای یافتن		
$S_n$	$P$	$(1+i)^n$ ، ضریب پرداخت یکجای مرابحه مرکب <sup>۲</sup> (speaf)
$P$	$S_n$	$(1+i)^{-n}$ ، ضریب ارزش فعلی پرداخت یکجا
$S_n$	$R$	$\frac{1}{i}[(1+i)^n - 1]$ ، ضریب مرابحه مرکب سری یکنواخت
$R$	$S_n$	$\frac{i}{[(1+i)^n - 1]}$ ، ضریب سپرده وجوه استهلاکی
$P$	$R$	$\frac{1}{i}[1 - (1+i)^{-n}]$ ، ضریب ارزش فعلی سری یکنواخت
$R$	$P$	$\frac{i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$ ، ضریب برگشت سرمایه

<sup>۱</sup> که عبارت است از  $S_{||} = [speaf(i, n)]P = (1+i)^n P$

$$P = [1 - (1 + 0.0125)^{-24}](100)/0.0125 \\ = (20.6242)(100) = \$2062.42$$

**مثال A.6** استفاده از ضریب برگشت سرمایه. شخصی ۱۰۰۰۰ دلار در بانک می‌گذارد و می‌خواهد در پایان هر ماه و در عرض ۲ سال مقداری ثابت برداشت کند تا پولش تمام شود. با نرخ سود سالانه ۹٪ که ماهانه مرکب می‌شود، در هر ماه چقدر می‌تواند برداشت کند؟

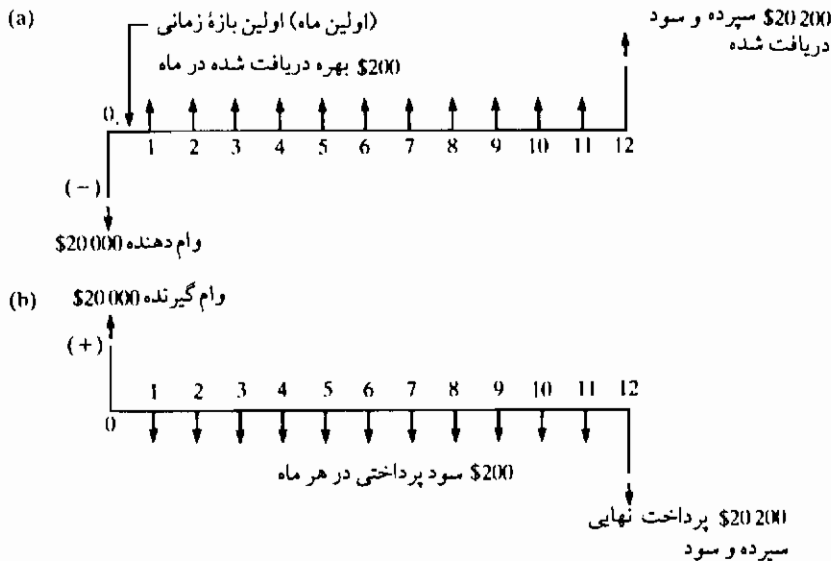
**حل.** چون سود ماهانه محاسبه می‌شود،  $i = 0.09/12 = 0.0075$ . با استفاده از ضریب برگشت سرمایه معادله (A.6)، می‌توانیم مبلغی را که هر ماه می‌تواند برداشت کند برای دو سال آینده به دست آوریم. داریم  $R = [\text{crf}(0.0075, 24)](10\,000)$ :

$$R = \frac{0.0075(10\,000)}{[1 - (1 + 0.0075)^{-24}]} \\ = (0.045\,685)(10\,000) = \$456.85$$

## A.2 نمودار جریان نقدینگی

نمودار جریان نقدینگی نمایشی تصویری از دریافت و پرداخت است. این نمودار برای حل مسائل تحلیل اقتصادی می‌تواند مفید باشد. اگر نمودار جریان نقدی را به طور صحیح بکشیم، موضوع استفاده از رابطه مناسب بهره برای انجام محاسبات کاری ساده است. در این بخش، ما نظریه نمودار جریان نقدی را بیان می‌کنیم.

**شکل A.1** یک نمودار جریان نقدینگی را از دو دیدگاه نشان می‌دهد. وام‌دهنده و وام‌گیرنده. در نمودار، شخص مبلغ ۲۰,۰۰۰ دلار وام گرفته و متعهد می‌شود که آن را در طول یک سال با سودی که ماهانه پرداخت می‌کند برگرداند. نرخ سود سالانه ۱۲٪ است. بنابراین، هر ماه ۲۰۰ دلار بابت سود می‌پردازد و در پایان دوازدهمین ماه مبلغ ۲۰,۰۰۰ دلار را می‌پردازد. دقت کنید که خطوط عمودی با فلشهای رو به پایین نشانگر پرداخت و با فلشهای رو به بالا نشانگر دریافت است. همچنین پرداختها زیر خط افقی (به عنوان منفی) و دریافتها (به عنوان مثبت) بالای خط افقی نشان داده شده‌اند.



شکل A.1 نمودار جریان - نقدینگی. (a) جریان نقدینگی وام دهنده؛ (b) جریان نقدینگی وام گیرنده

### A.3 مبناهای اقتصادی برای مقایسه

روابطی که در جدول A.1 ارائه شده می‌توانند برای مقایسه گزینه‌ها مورد استفاده قرار گیرند. دو روش معمول مقایسه عبارتند از: روش هزینه سالانه (AC) و روش ارزش فعلی (PW). هر دو روش را شرح خواهیم داد. باید به این نکته مهم توجه کرد که برای مقایسه گزینه‌های متفاوت باید شرایط یکسانی به کار رود. در هر حال، روش سال مبنای ما اجازه می‌دهد که به راحتی گزینه‌هایی را که بازه زمانی متفاوتی دارند با هم مقایسه کنیم. این مطلب با مثالی تشریح می‌شود. همچنین، هر دو روش به نتیجه یکسانی ختم می‌شود و لذا هر کدام می‌توانند برای مقایسه گزینه‌ها استفاده شود.

نکته‌ای درباره قرارداد علامت استفاده شده در مقایسه گزینه‌ها باید یادآور شد. وقتی بیشتر عملیات شامل پرداختها و هزینه‌هاست، در محاسبه هزینه سالانه یا ارزش فعلی برای پرداخت علامت مثبت و برای دریافت علامت منفی به کار می‌رود. در آن حالت، استهلاك به عنوان هزینه منفی و دیگر درآمدها نیز با علامت منفی در نظر گرفته می‌شوند. با این قرارداد علامت، ارزش فعلی بزرگتر از صفر نشانگر هزینه فعلی بوده و بنابراین گزینه با ارزش فعلی

کوچکتر باید ترجیح داده شود. اگر ارزش فعلی علامت منفی داشت، آن گاه در واقع نشانگر درآمد است. همچنین، در این حالت، گزینه با کمترین ارزش فعلی با در نظر داشتن علامت جبری برتری دارد. یعنی، گزینه ای که ارزش فعلی آن از نظر عددی بزرگتر است. انتخاب نهایی یک گزینه به قرارداد علامت جبری که در محاسبات استفاده می شود بستگی ندارد؛ بنابراین هر کدام از قراردادها می تواند استفاده شود. ماقاراداد بالا را در تمامی محاسبات به کار خواهیم برد.

## A.3.1 مقایسه سال مبنایی

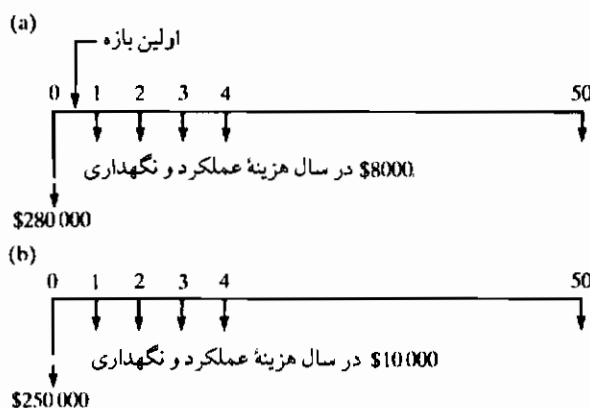
یک مقایسه سال مبنایی تمامی درآمدها و هزینه های بازه زمانی انتخاب شده را به یک مقدار معادل سالانه تبدیل می کند. یادآور می شود که علامت مثبت برای هزینه ها و علامت منفی برای درآمدها به کار می رود. بنابراین، گزینه با هزینه پایین تر باید ترجیح داده شود.

**مثال A.7 طرحهای جایگزین.** یک پروژه طراحی دو انتخاب A و B دارد. انتخاب A، ۲۸۰/۰۰۰ دلار و انتخاب B، ۲۵۰/۰۰۰ دلار هزینه خواهد داشت. هزینه کارکرد و نگه داری که در پایان هر سال پرداخت می شود برای A، ۸۰۰۰ دلار و برای B، ۱۰/۰۰۰ دلار خواهد بود. با استفاده از روش مقایسه هزینه سالانه (AC) با نرخ سود ۱۲٪ اگر هر دو یک عمر ۵۰ ساله بدون استهلاک داشته باشند مشخص کنید کدام انتخاب ترجیح دارد.

**حل.** نمودار جریان نقدینگی برای هر دو انتخاب در شکل A.2 نشان داده شده است. هزینه سالانه انتخاب A مجموع هزینه نگه داری سالیانه و پرداخت یکنواخت معادل هزینه اولیه (۲۸۰/۰۰۰ دلار) است. هزینه اولیه می تواند با استفاده از ضریب برگشت سرمایه به پرداخت سالانه معادل تبدیل شود. پس هزینه سالانه ( $AC_A$ ) انتخاب A عبارت است از

$$AC_A = 280\,000 \text{ crf}(0.12, 50) + 8000 \\ = \$41\,716.67$$

زیرا  $\text{crf}(0.12, 50) = 0.120\,42$  به طور مشابه، برای انتخاب B، هزینه سالانه عبارت است از



شکل A.2. نمودار جریان نقدینگی برای طرحهای جایگزین مثال 7. A. (a) انتخاب A؛ (b) انتخاب B

$$AC_B = 250\,000 \text{ crf}(0.12, 50) + 10\,000$$

$$= \$40\,104.17$$

براین اساس انتخاب B ارزانتر است.

**مثال 8.8 نیروگاههای جایگزین.** سه شرکت پیشنهاد مزایده خود را که در جدول زیر نشان داده شده، برای طراحی و عملکرد نیروگاه موقتی که برای چهار سال استفاده خواهد شد ارائه کرده‌اند. چه طرحی براساس مقایسه سال مبنای استفاده شود اگر ۱۵٪ برگشتی لازم باشد و تمام تجهیزات بتواند بعد از ۴ سال ۳۰٪ قیمت اولیه به فروش برسد؟

	A	B	C
هزینه اولیه (\$)	5000	6000	7500
هزینه سالانه (\$)	2500	2000	1800

**حل.** این مثال کمی با مثال A.7 متفاوت است که در آن مقدار استهلاک نیز باید در محاسبات هزینه سالانه لحاظ شود. استهلاک عبارت است از درآمدی که در پایان پروژه دریافت می‌شود. این حاصل جمع آینده باید به یک درآمد سالانه معادل تبدیل و از هزینه‌ها کم شود. حاصل جمع آینده با استفاده از ضریب سپرده وجوه استهلاکی (sfd) (sfd)

به مقدار سالانه معادل تبدیل می شود. بنابراین، هزینه سالانه مزایده A عبارت است از

$$AC_A = 5000 \text{ crf}(0.15, 4) + 2500 - 0.3(5000) \text{ sdf}(0.15, 4) \\ = \$3950.93$$

زیرا،  $\text{crf}(0.15, 4) = 0.35027$  و  $\text{sdf}(0.15, 4) = 0.20027$ . به طور مشابه، هزینه های سالانه مزایده B و C عبارتند از

$$AC_B = 6000 \text{ crf}(0.15, 4) + 2000 - 0.3(6000) \text{ sdf}(0.15, 4) \\ = \$3741.11$$

$$AC_C = 7500 \text{ crf}(0.15, 4) + 1800 - 0.3(7500) \text{ sdf}(0.15, 4) \\ = \$3976.39$$

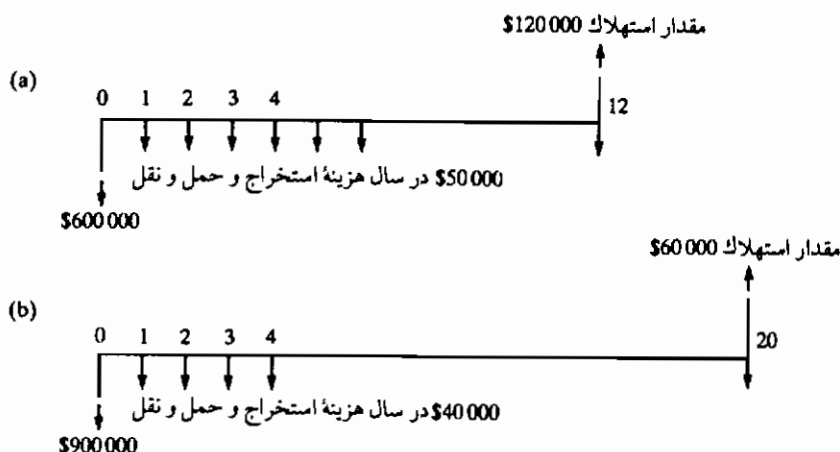
براساس این محاسبات، مزایده B ارزاترین گزینه است.

**مثال 9. A معادن سنگ جایگزین.** یک شرکت می تواند یکی از دو معدن سنگ A یا B را بخرد. معدن سنگ A، ۶۰۰/۰۰۰ دلار ارزش دارد و تخمین زده می شود که تا دوازده سال دوام بیاورد و مقدار استهلاک زمین در پایان دوازده سال عبارت است از ۱۲۰/۰۰۰ دلار. عملیات استخراج و حمل و نقل در هر سال عبارت است از ۵۰/۰۰۰ دلار. معدن سنگ B، ۹۰۰/۰۰۰ دلار ارزش دارد که تخمین زده می شود تا بیست سال دوام بیاورد و مقدار استهلاک ۶۰/۰۰۰ دلار داشته باشد. هزینه استخراج و حمل و نقل سالانه ۴۰/۰۰۰ دلار است. کدام معدن سنگ باید خریداری شود؟ از روش سال مبنایی با نرخ سود ۱۵٪ استفاده کنید. فرض کنید که معادن مشابهی در آینده در دسترس خواهند بود.

**حل.** دقت کنید که عمر معادن سنگهای A و B متفاوت است. این تفاوت وقتی از روش سال مبنایی استفاده شود مسأله ای ایجاد نمی کند. اما با روش ارزش فعلی بخش بعدی، ما باید دو گزینه با عمر یکسان را باهم مقایسه کنیم.

نمودار جریان نقدینگی برای معادن در شکل A.3 نشان داده شده است.

برای محاسبه Y هزینه سالانه معدن سنگ A، نیاز به یافتن هزینه سالانه سرمایه گذاری ۶۰۰/۰۰۰ دلاری که آن را با استفاده از ضریب برگشت سرمایه (crf) به دست می آوریم، و درآمد سالانه معادل به خاطر استهلاک ۱۲۰/۰۰۰ دلار بعد از دوازده سال، داریم. برای این درآمد، ضریب سپرده وجوه استهلاکی (sdf) استفاده



شکل A.3. نمودار جریان نقدینگی برای معدن سنگ مثال A.9. (a) معدن سنگ A: (b) معدن سنگ B

خواهد شد. بنابراین،

$$AC_A = 600\,000 \text{ crf}(0.15, 12) + 50\,000 - 120\,000 \text{ sdf}(0.15, 12) \\ = \$156\,550.77$$

زیرا،  $\text{crf}(0.15, 12) = 0.184\,48$  و  $\text{sdf}(0.15, 12) = 0.034\,481$  به طریق مشابه،

$$AC_B = 900\,000 \text{ crf}(0.15, 20) + 40\,000 - 60\,000 \text{ sdf}(0.15, 20) \\ = \$183\,199.64$$

زیرا،  $\text{crf}(0.15, 20) = 0.159\,76$  و  $\text{sdf}(0.15, 20) = 0.009\,761\,5$  براساس این محاسبات، معدن سنگ A یک سرمایه گذاری بهتر است.

### A.3.2 مقایسه ارزش فعلی

در مقایسه ارزش فعلی ( $PW$ )، تمامی پیش بینیهای درآمدها و هزینه ها با ارزش فعلی معادلشان بیان می شوند. برای یک مقایسه قابل قبول بازه عمر یکسانی برای گزینه ها باید استفاده شود. علامت قراردادی مشابه گذشته استفاده خواهد شد، یعنی علامت مثبت برای هزینه ها و علامت منفی برای دریافتها. همچنین دقت کنید که در بیشتر مسائل، ارزش فعلی یک پروژه در واقع ارزش فعلی کلی آن نیز هست. بنابراین، گزینه با ارزش فعلی پایین تر باید ترجیح داده

شود. ما مثالهای زیربخش گذشته را دوباره با استفاده از روش ارزش فعلی حل خواهیم کرد.

**مثال A.10 طرحهای جایگزین.** مسأله در مثال A.7 بیان شده است. نمودار جریان نقدینگی مسأله در شکل A.2 نشان داده شده است. ما ارزش فعلی دو طرح را محاسبه کرده و آنها را مقایسه می کنیم. برای محاسبه ارزش فعلی طرح A، نیاز داریم هزینه نگه داری سالانه ۸۰۰۰ دلار را به ارزش فعلی تبدیل کنیم. برای این کار از ضریب ارزش فعلی سری یکنواخت (uspwf) استفاده می کنیم. بنابراین، ارزش فعلی طرح A ( $PW_A$ ) به روش زیر محاسبه می گردد

$$PW_A = 280\,000 + 8000 \text{ uspwf}(0.12, 50) \\ = \$346\,435.99$$

زیرا،  $\text{uspwf}(0.12, 50) = 8.3045$ . به طریق مشابه،

$$PW_B = 250\,000 + 10\,000 \text{ uspwf}(0.12, 50) \\ = \$333\,044.99$$

براساس این محاسبات، طرح B گزینه ارزانتری است. این نتیجه با نتیجه ای که در مثال A.7 گرفتیم مطابقت دارد.

**مثال A.11 نیروگاههای جایگزین.** مسأله در مثال A.8 بیان شده است. برای مقایسه دو طرح با روش ارزش فعلی، نیاز به محاسبه ارزش فعلی هزینه سالانه و مقدار استهلاک داریم. برای تبدیل هزینه سالانه به ارزش فعلی آن از ضریب ارزش فعلی سری یکنواخت (uspwf) استفاده می کنیم. برای تبدیل مقدار استهلاک به ارزش فعلی، ضریب ارزش فعلی پرداخت یکجا (sppwf) استفاده می شود. بنابراین،

$$PW_A = 5000 + 2500 \text{ uspwf}(0.15, 4) - 0.3(5000) \text{ sppwf}(0.15, 4) \\ = \$11\,279.82$$

زیرا،  $\text{uspwf}(0.15, 4) = 2.855$  و  $\text{sppwf}(0.15, 4) = 0.57175$ . به طریق مشابه،

$$PW_B = 6000 + 2000 \text{ uspwf}(0.15, 4) - 0.3(6000) \text{ sppwf}(0.15, 4) \\ = \$10\,680.80$$

$$PW_C = 7500 + 1800 \text{ uspwf}(0.15, 4) - 0.3(7500) \text{ sppwf}(0.15, 4) \\ = \$11\,352.52$$

بنابراین، مزایده B براساس این محاسبات ارزانترین گزینه است. این نتیجه مشابه نتیجه

مثال ۸. A است.

**مثال ۱۲. A. معدنهای سنگ جایگزین.** مسأله در مثال ۹. A بیان شده است. نمودار جریان نقدینگی برای دو معدن سنگ در شکل ۳. A نشان داده شده است. بازه عمر دو گزینه متفاوت است. ما باید برای مقایسه گزینه‌ها به شکلی ارزش فعلی معادل را استفاده کنیم. روشهای مختلفی می‌تواند به کار رود. دو روش را در این جا توضیح خواهیم داد. روش ۱. پنداره اصلی در این جا محاسبه ارزش فعلی معدن سنگ B با استفاده از بازه عمر دوازده ساله است که عمر مربوط به معدن سنگ A است. این را ابتدا با محاسبه هزینه سالانه معدن سنگ B با استفاده از عمر بیست ساله انجام می‌دهیم. آنگاه ارزش فعلی هزینه سالانه را برای فقط دوازده سال محاسبه کرده و با ارزش فعلی معدن سنگ A مقایسه می‌کنیم:

$$PW_A = 600\,000 + 50\,000 \text{ uspwf}(0.15, 12) - 120\,000 \text{ sppwf}(0.15, 12) \\ = \$848\,602.09$$

زیرا،  $\text{uspwf}(0.15, 12) = 5.420\,62$  و  $\text{sppwf}(0.15, 12) = 0.186\,91$ . برای محاسبه هزینه سالانه B داریم

$$AC_B = 900\,000 \text{ crf}(0.15, 20) + 40\,000 - 60\,000 \text{ sdf}(0.15, 20) \\ = \$183\,199.64$$

زیرا،  $\text{sdf}(0.15, 20) = 0.009\,761\,5$  و  $\text{crf}(0.15, 20) = 0.159\,76$ . حال، ما می‌توانیم ارزش فعلی B را برای عمر ۱۲ سال محاسبه کنیم

$$PW_B = 183\,199.64 \text{ uspwf}(0.15, 12) \\ = \$993\,055.42$$

بنابراین، معدن سنگ A ارزاتر خواهد بود.

**روش ۲.** چون معدنهای سنگ مشابهی در آینده در دسترس خواهند بود، می‌توانیم معدنهایی به شکل A و B استفاده کنیم که برای هر دو معدن عمر ۶۰ ساله به دست می‌آید. تمامی سرمایه‌گذاریهای آینده، مخارج و زیانها باید به ارزش فعلی شان تبدیل شوند. با استفاده از این روش، ارزش فعلی معادن سنگ A و B به شکل زیر محاسبه می‌گردد

$$\begin{aligned}
 PW_A &= 600\,000 + 50\,000 \text{ uspwf}(0.15, 60) - 120\,000 \text{ sppwf}(0.15, 12) \\
 &\quad + 600\,000 \text{ sppwf}(0.15, 12) - 120\,000 \text{ sppwf}(0.15, 24) \\
 &\quad + 600\,000 \text{ sppwf}(0.15, 24) - 120\,000 \text{ sppwf}(0.15, 36) \\
 &\quad + 600\,000 \text{ sppwf}(0.15, 36) - 120\,000 \text{ sppwf}(0.15, 48) \\
 &\quad + 600\,000 \text{ sppwf}(0.15, 48) - 120\,000 \text{ sppwf}(0.15, 60) \\
 &= 600\,000 + 333\,257.30 + 89\,715.43 + 16\,768.46 + 3134.14 \\
 &\quad + 585.79 - 27.37 \\
 &= \$1\,043\,433.7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 PW_U &= 900\,000 + 40\,000 \text{ uspwf}(0.15, 60) - 60\,000 \text{ sppwf}(0.15, 20) \\
 &\quad + 900\,000 \text{ sppwf}(0.15, 20) - 60\,000 \text{ sppwf}(0.15, 40) \\
 &\quad + 900\,000 \text{ sppwf}(0.15, 40) - 60\,000 \text{ sppwf}(0.15, 60) \\
 &= 900\,000 + 266\,605.84 + 51\,324.23 + 3135.93 - 13.69 \\
 &= \$1\,221\,052.30
 \end{aligned}$$

بنابراین، با این روش نیز، معدن سنگ A گزینه‌ای ارزاتر است.

استفاده از مقایسه ارزش فعلی یا سال مبنایی به مسئله و اطلاعات در دسترس بستگی دارد. برای بعضی از مسائل، مقایسه سال مبنایی مناسب‌تر است، در حالی که برای بعضی دیگر روش ارزش فعلی بهتر است. برای هر مسئله یک روش مناسب باید انتخاب شود.

عوامل بسیار دیگری وجود دارند که در انتخاب مقایسه‌ها باید مورد توجه قرار گیرد. برای مثال، نرخ تورم، اثر پرداخت غیریکتوخت، و تغییرات نرخ سود باید در گزینش روشهای مقایسه مورد توجه قرار گیرند. در بیشتر مسائل روزمره به آن عوامل باید توجه کرد. بررسی این عوامل فراتر از اهداف این کتاب است. برای مطالعه جامع‌تر این عوامل کتاب آقایان بلنک و تارکوین<sup>۱</sup> [۱۹۸۳] و کتابهای اقتصاد مهندسی ممکن است مورد مراجعه قرار گیرند.

### تمرینهای پیوست A

A. ۱ شخصی تصمیم می‌گیرد ماهانه و برای هجده سال آینده ۵۰ دلار با نرخ سود ۸٪ که ماهانه مرکب می‌شود سپرده‌گذاری کند. در پایان هجده سال چقدر پول جمع می‌شود؟ بعد از هجدهمین سال و برای چهار سال بعد ماهانه چقدر می‌تواند برداشت کند؟

- A. 2 شخصی برای خرید ماشین ۴۰۰۰ دلار با نرخ سود ۱۳٪ که ماهانه مرکب می شود وام می گیرد و متعهد می شود که آن را به طور قسطی تا ۳۰ ماه پرداخت کند. قسطهای ماهانه چقدر خواهد بود؟ برای پرداخت وام بعد از چهاردهمین قسط چقدر باید بپردازد؟
- A. 3 شخصی می خواهد خانه ای بخرد که ۹۰/۰۰۰ دلار قیمت دارد. نرخ سود متداول ۱۳٪ است که ماهانه مرکب می شود. پول نقد اولیه باید ۲۰٪ قیمت خرید باشد (یعنی فقط ۸۰٪ قیمت خرید می تواند به صورت وام باشد). اگر وام ۲۰ ساله باشد اقساط ماهانه چقدر است؟ اگر بخواهد بعد از پنجمین سال (یعنی در زمان قسط ۶۰ ام) وام تسویه شود چقدر پول نیاز خواهد داشت؟
- A. 4 شخصی ۲۰۰۰ دلار با نرخ سود سالانه ۹٪ که ماهانه مرکب می شود سپرده گذاری کرده است. بعد از ۲ سال چقدر پول دریافت خواهد کرد؟ اگر سود روزانه مرکب شود چقدر پول دریافت خواهد شد؟
- A. 5 شخصی ۱۰/۰۰۰ دلار وام گرفته و متعهد می شود که ماهانه ۹۵۰ دلار و تا ۱۲ ماه آن را بازپرداخت نماید. اگر سود ماهانه مرکب شود، نرخ سود سالیانه چقدر است؟
- A. 6 از روزی که فرزند متولد شد والدین تصمیم گرفتند سالانه مقدار معینی برای تحصیلات او پس انداز کنند. آنها تصمیم گرفتند که در هر سالگرد تولد و تا هجدهمین سال که از اولین سالگرد شروع خواهد شد پس انداز را انجام دهند به طوری که فرزند بتواند در هجدهمین، نوزدهمین، بیستیم و بیست و یکمین سال هر دفعه ۱۰/۰۰۰ دلار برداشت کند. اگر نرخ بازپرداخت سالانه مورد انتظار ۹٪ باشد، هر سال چقدر باید پس انداز شود؟
- A. 7 شرکتی برای ساختن پلی دو طرح مختلف دارد. هزینه اولیه گزینه A، ۵۰۰/۰۰۰ دلار هزینه نگه داری سالانه ۱۰/۰۰۰ دلار و برای گزینه B، هزینه اولیه ۴۰۰/۰۰۰ دلار و هزینه نگه داری سالانه ۱۲/۰۰۰ دلار است. هر دو گزینه استهلاکی به میزان ۵٪ در پایان ۵۰ سال عمر دارند. شرکت باید کدام طرح را گزینش کند؛ نرخ بازپرداخت را ۱۰٪ در سال فرض کنید. هر دوروش مقایسه ارزش فعلی و هزینه سالانه را به کار ببرید.
- A. 8 یک شهر در منطقه ای کوهستانی نیاز به ۱۰۰ مگاوات برق اضافی برای اوج بار دارد. برای رفع این نیاز، برای یک دوره ۲۰ ساله گزینه های زیر را مورد بررسی قرار می دهد تا این که یک رآکتور قوی راه اندازی شود و مشکل برای همیشه برطرف گردد:

۱. ساختن یک نیروگاه جدید به قیمت ۱۰ میلیون دلار و هزینه کارکرد سالانه ۱ میلیون دلار. مقدار استهلاک در پایان ۲۰ سال، ۲ میلیون دلار است.
۲. ساختن یک ایستگاه پمپ/ژنراتور که آب را هنگام کم بار بودن شبکه به دریاچه ای در ارتفاع پمپ کند و هنگام پیک بار آب را برای تولید برق استفاده کند. هزینه اولیه ۵ میلیون دلار و هزینه عملکرد در سال ۱/۵ میلیون دلار است. استهلاکی در پایان ۲۰ سال وجود ندارد.
- کدام یک از دو گزینه براساس ارزش فعلی ترجیح دارد؟ نرخ سود در حال حاضر رابطه زیر را دارد:

$$S_{20} = 2P, \quad \text{یا} \quad P = 0.5S_{20}$$

$$S_{20} = 30R, \quad \text{یا} \quad R = \frac{1}{30}S_{20}$$

در حالی که  $S_{20}$  = ارزش در ۲۰ سال،  $P$  = ارزش فعلی و  $R$  = معامله در سال است.

- A. 9 یک شبکه لوله گذاری در عمق ۸۰ سانتی می تواند با ۱۵۰/۰۰۰ دلار ساخته شود. هزینه عملکرد و نگه داری سالانه ۳۰/۰۰۰ دلار تخمین زده می شود. یک شبکه در عمق ۵۰ سانتی جایگزین می تواند با ۱۲۰/۰۰۰ دلار ساخته شود. هزینه عملکرد و نگه داری سالانه آن ۳۵/۰۰۰ دلار تخمین زده می شود. انتظار می رود که هر شبکه ۲۵ سال کار کند و برای جایگزینی آن ۱۰٪ استهلاک خواهد بود. دو شبکه را براساس هزینه سالانه و ارزش فعلی مقایسه کنید. فرض کنید نرخ برگشتی ۱۵٪ است.
- A. 10 یک شرکت دو مزایده برای طراحی و نگه داری پروژه ای دریافت کرده است. دو طرح را براساس تحلیل ارزش فعلی مقایسه کنید. از داده های زیر استفاده کرده و نرخ سود را ۱۰٪ فرض کنید. هر دو طرح عمر ۴۰ ساله دارند و استهلاکی نخواهند داشت.

	A	B
هزینه اولیه (\$)	40 000	50 000
نگهداری سالانه (\$)	1500	500

- A. 11 شخصی می خواهد خانه ای به ارزش ۱۰۰/۰۰۰ دلار بخرد. بانک A می تواند وامی با ۱۲٪ سود که ماهانه مرکب می شود بدهد. بانک نیاز به پرداخت اولیه ۲۰٪ قیمت

خرید دارد و ۲٪ وام را برای کارمزد در نظر می گیرد. بانک B نیز نیاز به ۲۰٪ پرداخت اولیه دارد، کارمزدی ندارد ولی نرخ سود ۱۲/۵٪ دارد که ماهانه مرکب می شود. هر دو بانک بازپرداخت ماهانه وام را طلب می کنند و می توانند وام ۲۰ ساله بدهند. کدام بانک پیشنهاد ارزانتری برای خرید خانه می دهد؟ از دو روش مقایسه ارزش فعلی و سال مبنا استفاده کنید.

A. 12 دو منزل اجاره ای در معرض فروش گذاشته شده است :

	خانه I	خانه II
قیمت فروش (\$)	600 000	400 000
درآمد خالص سالانه (\$)	80 000	56 000
هزینه مدیریت سالانه (\$)	4000	3000
نگهداری سالانه (\$)	10 000	6000
مالیات مستقالات (\$)	12 000	8000

هر خانه به پرداخت اولیه ۱۰٪ نیاز دارد. نرخ سود سالیانه ۱۰٪ پیش بینی می شود و وام ۲۰ ساله می توان گرفت. به دلیل تقاضای زیاد پیش بینی می شود که مقدار اجاره در ۲۰ سال دو برابر شود. شخصی ۱۰۰/۰۰۰ دلار دارد که می تواند با سود ۶٪ به بانک بدهد و یا با خرید خانه سرمایه گذاری کند.

۱. گزینه های زیر را با استفاده از روش مقایسه سود سالیانه و ارزش فعلی و با فرض عمر ۲۰ ساله پروژه ارزیابی کنید :

گزینه A : خرید خانه I (۱۰۰/۰۰۰ دلار پیش پرداخت)

گزینه B : خرید خانه II (۱۰۰/۰۰۰ دلار پیش پرداخت)

گزینه C : خرید هر دو خانه (کل پیش پرداختی ۱۰۰/۰۰۰ دلار)

۲. اگر خانه ها پس از ۵ سال به قیمت ۱۱۰٪ قیمت اولیه به فروش برسند، از هر گزینه A، B و C چه مقدار پول به دست می آید.

A. 13 شرکتی برای انجام کاری دو گزینه دارد. هزینه های آنها عبارتند از :

	هزینه اولیه	هزینه نگهداری سالانه
گزینه A	80 000	4 000
گزینه B	110 000	2 000

با فرض عمر ۴۰ ساله و بدون استهلاک برای هر گزینه، با استفاده از مقایسه ارزش فعلی با نرخ ۱۵٪ گزینه بهتر را انتخاب کنید.

A.14 شرکتی برای حمل کالاهایش دو گزینه دارد: استفاده از مسیری طولانی تر و عبور از پل موجود، یا ساختن یک پل که راه را کوتاهتر کرده و تعداد رفت و آمدها را افزایش می دهد (که مطلوب است) و با هزینه یکسان. ساخت پل جدید هزینه ای برابر با ۱۰۰/۰۰۰ دلار دارد و مبلغ ۱۰۰ دلار در روز و برای ۲۴۰ روز کاری در سال صرفه جویی می شود. عمر اقتصادی پل ۴۰ سال و هزینه نگه داری سازه ۱۰۰۰ دلار در سال پیش بینی می شود. با در نظر گرفتن نرخ سالانه برگشت ۲۰٪ دو گزینه را براساس مقایسه هزینه سالانه و ارزش فعلی مقایسه کنید.

A.15 دانشگاهی قصد دارد که آزمایشگاهی برای دانشجویان بسازد. پیشنهادهای با هزینه ۵۰۰/۰۰۰ دلار رسیده که نیاز ۱۲ سال آینده را برآورده می کند. هزینه تأمین سالانه ۴۰/۰۰۰ دلار پیش بینی می شود. بعد از ۱۲ سال به توسعه ای در ساختمان آزمایشگاه نیاز خواهد بود به ارزش ۶۰۰/۰۰۰ دلار و با هزینه تأمین سالانه ۳۰/۰۰۰ دلار.

گزینه دیگر این است که یک آزمایشگاه بزرگ هم اکنون ساخته شود به قیمت ۶۵۰/۰۰۰ دلار. هزینه تأمین سالانه در ۱۲ سال اول ۴۲/۰۰۰ دلار است. در پایان ۱۲ سال، آزمایشگاه تعمیراتی به هزینه ۱۰۰/۰۰۰ دلار نیاز دارد و انتظار می رود که هزینه تأمین سالانه به ۶۰/۰۰۰ دلار افزایش یابد. دو طرح را با استفاده از سال مبنایی یا روش ارزش فعلی مقایسه کنید در صورتی که نرخ سود سالانه ۱۰٪ باشد.

A.16 شرکت سه گزینه برای حل مسأله ای در پیش رو دارد. هزینه گزینه ها عبارتند از (A) ۷۰/۰۰۰ دلار (B) ۱۰۰/۰۰۰ دلار و (C) ۵۰/۰۰۰ دلار. انتظار می رود که تمامی گزینه ها ۶۰ سال بدون هیچ استهلاکی در خدمت باشند. گزینه A در سال ۱۰۰۰ دلار هزینه دارد و گزینه C یک سرمایه گذاری اضافی به میزان ۸۰/۰۰۰ دلار در پایان ۲۰ سال نیاز دارد که بعد از ۶۰ سال استهلاکی معادل ۱۵۰۰۰ دلار خواهد داشت. کدام یک از گزینه ها باید انتخاب شود، در صورتی که نرخ سود ۱۵٪ باشد؟

A.17 شرکت شما تصمیم گرفته است که برای شرکت خودرو نوی بخرد. شما برای ارزیابی سه خودرو زیر مشخص شده اید تا توصیه جهت انتخاب را انجام دهید. برای تمامی خودروها فرضیات زیر را در نظر بگیرید:

۱. هر خودرو سالانه ۲۰۰۰۰ مایل راه خواهد رفت و انتظار عمری ۵ ساله برای آن می رود. ۹۰٪ از این مسافت در شاهراهها و اتوبانهاست و ۱۰٪ بقیه در شهر.
  ۲. قیمت بنزین در حال حاضر گالنی ۱/۲۵ دلار است که تا ۵ سال آینده هر سال ۱۰٪ به آن اضافه خواهد شد. هزینه بنزین در پایان هر ماه و براساس متوسط ماهانه پرداخت می شود.
  ۳. در پایان ۵ سال، شرکت خودرو را با ۱۵٪ قیمت استهلاک خواهد فروخت.
  ۴. هزینه بیمه در هر سال ۵٪ قیمت اولیه خودرو خواهد بود.
  ۵. نرخ بازده سالانه ۸٪ است.
- سه نوع خودرو عبارتند از:

خودرو A: قیمت ۶۲۵۰ دلار

سایر هزینه ها: ۱۵۰ دلار در سال هزینه نگه داری دو سال اولیه  
۳۰۰ دلار در سال هزینه نگه داری سه سال بعد

تخمین مسافت: ۳۵ مایل در اتوبان به ازای هر گالن بنزین  
۲۵ مایل در شهر به ازای هر گالن بنزین

نحوه پرداخت: ۱۰۰۰ دلار نقدی و بقیه در ۶۰ قسط ماهانه با نرخ سالانه ۱۱٪

خودرو B: قیمت ۶۹۰۰ دلار

سایر هزینه ها: ۱۲۵ دلار در سال هزینه نگه داری دو سال اولیه  
۲۵۰ دلار در ساله هزینه نگه داری سه سال بعد

تخمین مسافت: ۳۵ مایل در اتوبان به ازای هر گالن بنزین  
۲۲ مایل در شهر به ازای هر گالن بنزین

نحوه پرداخت: ۱۵۰۰ دلار نقدی و بقیه در ۶۰ قسط ماهانه با نرخ سالانه ۱۲٪

خودرو C: قیمت ۷۲۰۰ دلار

سایر هزینه ها: ۱۰۰ دلار در سال هزینه نگه داری در سال اولیه  
۲۰۰ دلار در سال هزینه نگه داری در سه سال بعد

تخمین مسافت : ۳۸ مایل در اتوبان به ازای هر گالن  
۲۸ مایل در شهر به ازای هر گالن  
نحوه پرداخت : ۱۱۰۰ دلار نقدی و بقیه در ۶۰ قسط ماهانه با نرخ سالانه ۱۰٪  
با استفاده از روش ارزش فعلی مقایسه را انجام دهید (طرح مسأله توسط  
جی - جکسون<sup>۱</sup>).



## جبر برداری و ماتریسی

### B.1 مقدمه

علامت بردار و ماتریس جمع و جور و کاربرد آن در تدوین و تشریح بسیاری از روشهای عددی مفید است. جبر برداری و ماتریسی یک ابزار اساسی مورد نیاز در تدوین روشهای طراحی بهین سیستمهاست. حل مسائل بهینه سازی خطی (برنامه ریزی خطی) در گرو فهم فرآیند حل سیستم معادلات خطی است. بنابراین، درک عملیات جبر برداری و ماتریسی و کاربرد راحت علایم آنها از اهمیت زیادی برخوردار است. این موضوع اغلب به عنوان جبر خطی مطرح می شود و در طول سالهای متمادی به خوبی تدوین شده است. تقریباً در همه کاربردهای علمی و مهندسی جبر خطی یک وسیله استاندارد بوده است. در این پیشگفت، چند خاصیت اساسی بردارها و ماتریسها مرور می شوند. برای مطالعه بیشتر موضوع، کتابهای مرجع بسیار خوبی در دسترس است که می توان به آنها مراجعه کرد [هاهن<sup>۱</sup>، ۱۹۶۴؛ فرانکلین<sup>۲</sup>، ۱۹۶۸؛ کوپر و اشتاینبرگ<sup>۳</sup>، ۱۹۷۰؛ استیوارت<sup>۴</sup>، ۱۹۷۳؛ بل<sup>۵</sup>، ۱۹۷۵؛ استرنج<sup>۶</sup>، ۱۹۷۶؛ جنینگز<sup>۷</sup>،

- |                         |             |
|-------------------------|-------------|
| 1. Hohn,                | 2. Franklin |
| 3. Cooper and Steinberg | 4. Stewart  |
| 5. Bell                 | 6. Strang   |
| 7. Jennings             |             |

۱۹۷۷؛ دیف<sup>۱</sup>، ۱۹۸۲؛ گر و ویور<sup>۱</sup>، ۱۹۸۳]. به علاوه بیشتر کتابخانه نرم افزارها برنامه های فرعی عملیات جبر خطی را دارند که می تواند مستقیماً مورد استفاده قرار گیرد.

بعد از مرور علایم ماتریس و بردار، ماتریسهای خاص، دترمینان و مرتبه ماتریس، موضوع حل سیستم معادلات خطی همزمان مورد بحث قرار می گیرد. ابتدا یک سیستم  $n \times n$ ، سپس یک سیستم مربع مستطیل  $m \times n$  به بحث گذاشته می شود. یک بخش به بیان استقلال خطی بردارها اختصاص یافته است. بالاخره، مسأله مقدار ویژه که در بسیاری از زمینه های مهندسی کاربرد دارد بحث می شود. مسائل مقدار ویژه در مسائل برنامه ریزی محدب و شرایط کافی بهینه سازی نقش برجسته ای دارند.

## B.2 تعریف ماتریسها

یک ماتریس به عنوان یک آرایه مستطیلی از مقادیری که می تواند اعداد حقیقی، اعداد مختلط، یا تابعی از چند متغیر باشد، تعریف می شود. این مقادیر در آرایه مستطیلی عناصر یک ماتریس نیز نامیده می شوند. چون حل دستگاه معادلات خطی همزمان بیشترین کاربرد مشترک ماتریسهاست، از آن مفهوم برای تعریف علایم ماتریسها استفاده می کنیم. سیستم دو معادله خطی همزمان زیر که سه مجهول دارد در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned} \quad (B.1)$$

متغیرهای  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  به منزله جوابهای سیستم معادلات هستند. دقت کنید که متغیرهای  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  می تواند با هر متغیری مثلاً  $w_1$ ،  $w_2$  و  $w_3$  جایگزین گردد بدون آن که در جواب تغییری به وجود آید. بنابراین آنها گاهی متغیرهای ساختگی نامیده می شوند و چون متغیرهای ساختگی هستند، می توان در نوشتن معادلات به شکل ماتریسی آنها را حذف کرد. به عنوان مثال، معادله های (B.1) می تواند در یک آرایه مستطیلی به شکل زیر نوشته شود

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & -2 & 3 \end{array} \right]$$

اعداد طرف چپ خط عمودی ضرایب متغیرهای  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  و اعداد طرف راست، طرف راست

معادله ها هستند. عموماً آرایه را با کروشه، مطابق آنچه نشان داده شده، می بندند. پس، می بینیم که سیستم معادلات (B. 1) می تواند با ماتریسی که دو سطر و چهار ستون دارد نمایش داده شود.

آرایه ای با  $m$  سطر و  $n$  ستون ماتریسی از مرتبه " $m$  در  $n$ " نامیده می شود که به شکل  $(m, n)$  و یا  $(m \times n)$  نوشته می شود. برای فرق گذاشتن بین ماتریسها و اسکالر ها، ما متغیرهایی را که نشان دهنده ماتریس هستند پررنگ تر می نویسیم. به علاوه، برای نمایش ماتریس حروف بزرگ به کار می رود. به عنوان مثال، ماتریس عمومی  $A$  از مرتبه  $m \times n$  می تواند به شکل زیر نمایش داده شود.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (B. 2)$$

ضرایب  $a_{ij}$  عناصر ماتریس  $A$  نامیده می شوند. اندیسهای  $i$  و  $j$  شماره سطر و ستون عنصر  $a_{ij}$  را مشخص می کنند (به عنوان مثال،  $a_{12}$  نشانگر عنصری در سطر سوم و ستون دوم است). اگرچه عناصر می توانند اعداد حقیقی، اعداد مختلط یا تابع باشند، در این کتاب ما ماتریسهای مختلط را بحث نمی کنیم. ماتریسهایی که عناصرشان تابعی از چند متغیر هستند، مانند ماتریس هسیان یک تابع که در فصل (۳) بحث شد، مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.

به کارگیری علائم اختصاری برای ماتریسها بسیار مفید است. به عنوان مثال، ماتریس  $A$  از مرتبه  $m \times n$  با  $a_{ij}$  ها به عنوان عناصرش می تواند به شکل خلاصه زیر نوشته شود

$$A = [a_{ij}]_{(m \times n)} \quad (B. 3)$$

اغلب، اندازه ماتریس نیز نشان داده نمی شود و  $A$  به شکل  $[a_{ij}]$  نوشته می شود.

اگر یک ماتریس تعداد سطرها و ستونهایش با هم مساوی باشند، آن گاه آن را یک ماتریس مربعی می نامند. در معادلات (B. 2) یا (B. 3)، اگر  $m = n$  باشد،  $A$  یک ماتریس مربعی است و ماتریسی از مرتبه  $n$  نامیده می شود.

فهم علائم ماتریسی برای مجموعه ای از معادله های خطی از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا چنین معادلاتی را در این کتاب زیاد به کار می بریم. به عنوان مثال، معادله های

(B.1) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & -2 & 3 \end{array}$$

آرایه فوق که همه ضرایب معادله و پارامترهای طرف راست را دارد ماتریس افزایش یافته نامیده می شود. دقت کنید هر ستون با یک متغیر مشخص شده، ستون اول مربوط به  $x_1$  است، زیرا ضرایب  $x_1$  را برای همه معادلات شامل می شود، دومین ستون مربوط به  $x_2$  و سومین مربوط به  $x_3$  و ستون آخر مربوط به بردار طرف راست که آن را  $b$  می نامیم. هنگامی که معادلات خطی همزمان (بعداً بحث می شود) یا مسائل برنامه ریزی خطی را (که در فصل ۴ بحث شد) حل می کنیم این تعابیر اهمیت ویژه ای پیدا می کنند.

### B.3 انواع ماتریسها و عملیات آنها

#### B.3.1 ماتریس صفر

ماتریسی که همه عناصرش صفرند ماتریس تهی (صفر) نامیده می شود و با حرف بزرگ O نشان داده می شود. اگر یک ماتریس صفر از مرتبه مناسب در ماتریسی (یا اسکالری) پیش ضرب یا پس ضرب شود، نتیجه آن ماتریس صفر خواهد بود.

#### B.3.2 بردار

ماتریسی از مرتبه  $1 \times n$  یک ماتریس سطری و یا بردار سطری نامیده می شود. به طور مشابه یک ماتریس از مرتبه  $n \times 1$  یک ماتریس ستونی و یا بردار ستونی نامیده می شود. یک بردار با  $n$  عنصر یک بردار  $n$  مؤلفه ای یا یک بردار  $n$  نامیده می شود. در این کتاب، تمامی بردارها بردارهای ستونی و با حروف کوچک پررنگ نشان داده می شوند.

#### B.3.3 جمع ماتریسها

اگر A و B دو ماتریس از مرتبه  $m \times n$  باشند، آن گاه جمع آنها نیز یک ماتریس  $m \times n$  است که به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{C}_{(m \times n)} = \mathbf{A} + \mathbf{B}; \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{برای همه } i \text{ و } j \text{ ها} \quad (\text{B.4})$$

جمع ماتریسها خاصیت زیر را دارد

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (\text{جابجایی}) \quad (\text{B.5})$$

اگر  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{C}$  سه ماتریس از مرتبه مشابهی باشند، آن گاه

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (\text{شرکت پذیری}) \quad (\text{B.6})$$

اگر  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{C}$  از مرتبه مشابهی باشند، آن گاه

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad \text{ايجاب می کند که } \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (\text{B.7})$$

در حالی که  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  یعنی دو ماتریس مساوی هستند. دو ماتریس  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  از مرتبه  $m \times n$  مساوی اند اگر  $a_{ij} = b_{ij}$  برای  $m$  تا  $i = 1$  و  $n$  تا  $j = 1$ .

## B.3.4 ضرب ماتریسها

ضرب ماتریس  $\mathbf{A}$  از مرتبه  $m \times n$  در یک عدد اسکالر به صورت زیر تعریف می شود

$$k\mathbf{A} = [ka_{ij}]_{(m \times n)} \quad (\text{B.8})$$

ضرب  $\mathbf{AB}$  دو ماتریس  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  فقط در صورتی تعریف می شود که  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  از مرتبه مناسبی باشند. تعداد ستونهای  $\mathbf{A}$  باید مساوی سطرهای  $\mathbf{B}$  باشد تا ضرب  $\mathbf{AB}$  تعریف شود. در آن حالت گفته می شود که دو ماتریس برای ضرب سازگاری<sup>۱</sup> دارند. اگر  $\mathbf{A}$ ،  $m \times n$  و  $\mathbf{B}$ ،  $r \times p$  باشد، آن گاه ضرب  $\mathbf{AB}$  فقط وقتی تعریف می شود که  $n = r$ ، و ضرب  $\mathbf{BA}$  فقط وقتی تعریف می شود که  $m = p$ . ضرب دو ماتریس از مرتبه مناسب ماتریس سومی را نتیجه می دهد. اگر  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  به ترتیب از مرتبه  $m \times n$  و  $n \times p$  باشند، آن گاه

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

که  $\mathbf{C}$  ماتریسی از مرتبه  $m \times p$  است. عناصر ماتریس  $\mathbf{C}$  از ضرب عناصر سطر  $\mathbf{A}$  در ستون  $\mathbf{B}$  و جمع آنها به دست می آید. پس

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix} \quad (B.9)$$

در صورتی که عناصر  $c_{ij}$  مانند زیر محاسبه می گردند

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (B.10)$$

دقت کنید که اگر  $B$  یک ماتریس  $n \times 1$  (یعنی یک بردار) باشد، آن گاه  $C$  یک ماتریس  $m \times 1$  خواهد بود. از این نوع ضرب ماتریسی در این کتاب زیاد استفاده خواهیم کرد. به عنوان مثال، یک سیستم معادلات خطی به شکل  $Ax = b$  نشان داده می شود، که  $x$  ها متغیرهای جواب و  $b$  پارامترهای طرف راست هستند. معادلات (B.1) می تواند به این شکل نوشته شود.

در ضرب  $AB$ ، می گوئیم ماتریس  $A$  در  $B$  پس ضرب شده یا  $B$  در  $A$  پیش ضرب شده. در حالی که در جمع ماتریسها قانون جابه جایی پذیری صادق است، در ضرب ماتریسی در حالت کلی این قاعده صادق نیست، یعنی  $AB \neq BA$ . همچنین، حتی اگر  $AB$  تعریف شده باشد،  $BA$  ممکن است تعریف نشود.

#### مثال B.1 ضرب ماتریسها

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{(4 \times 3)} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{(3 \times 2)} \\
 AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} (2 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 3) & (-2 \times 1 + 3 \times 0 - 1 \times 2) \\ (6 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 3) & (-6 \times 1 + 3 \times 0 - 2 \times 2) \\ (4 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 3) & (-4 \times 1 + 2 \times 0 - 0 \times 2) \\ (0 \times 2 + 3 \times 1 + 5 \times 3) & (-0 \times 1 + 3 \times 0 - 5 \times 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 21 & -10 \\ 10 & -4 \\ 18 & -10 \end{bmatrix}_{(4 \times 2)}$$

دقت کنید که ضرب  $BA$  تعریف نمی شود، زیرا تعداد ستونهای  $B$  برابر با تعداد سطرهای  $A$  نیست.

مثال 2. ضرب ماتریسها

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 8 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 8 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 35 & 23 \\ 6 & -16 & -12 \\ 0 & 73 & 45 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 6 \\ 8 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 18 & 5 \end{bmatrix}$$

دقت کنید که برای هم مرتبه بودن  $AB$  و  $BA$ ،  $A$  و  $B$  باید ماتریسهای مربعی باشند.

توجه کنید که اگر ماتریسهای  $A$ ،  $B$  و  $C$  طوری تعریف شده باشند که  $AB = AC$  باشد آن گاه این رابطه لزوماً ایجاب نمی کند که  $B = C$  باشد. همچنین اگر  $AB = 0$  باشد نمی توان گفت یا  $B = 0$  است یا  $A = 0$ . درعین حال ضرب ماتریسها دو قانون مهم را برآورده می کنند: قانون شرکت پذیری و قانون توزیع پذیری. فرض کنید ماتریسهای  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$  و  $F$  دارای ابعادی مناسب باشند؛ آن گاه

$$1. (AB)C = A(BC) \quad \text{قانون شرکت پذیری} \quad (B.11)$$

$$2a. B(C + D) = BC + BD$$

$$2b. (C + D)F = CF + DF$$

قوانین توزیع پذیری

$$2c. (A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD \quad (B.12)$$

می توانیم سطرهای یک ماتریس را به عنوان ستون نوشته و ماتریس دیگری به دست

آوریم. چنین عملی ترانهاده کردن یک ماتریس نامیده می شود. اگر  $A = [a_{ij}]$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد، آن گاه ترانهاده آن با  $A^T$  نشان داده می شود که یک ماتریس  $n \times m$  است و آن را با عوض کردن سطرها و ستونهای  $A$  به دست می آورند. اولین ستون  $A$  اولین سطر  $A^T$  است، دومین ستون  $A$ ، دومین سطر  $A^T$  است و به همین ترتیب. پس، اگر  $A = [a_{ij}]$ ، آن گاه  $A^T = [a_{ji}]$ . عمل ترانهاده یک ماتریس با یک ماتریس  $2 \times 3$  زیر تشریح می شود:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}; \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

بعضی از خواص ترانهاده عبارت است از

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
3.  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ ,  $\alpha$  = اسکالر
4.  $(AB)^T = B^T A^T$

### B.3.6 عملیات سطر و ستون مقدماتی

سه عمل ساده ولی بسیار مفید روی سطر و ستونهای ماتریس وجود دارد که چون در بحثهای بعدی استفاده می شوند در این جا به بیان آنها می پردازیم:

۱. تعویض هر دو سطر (ستون).
۲. ضرب هر سطر (ستون) در یک عدد اسکالر غیر صفر.
۳. اضافه کردن حاصل ضرب یک عدد اسکالر در یک سطر (ستون) به سطر (ستون) دیگر.

### B.3.7 ماتریسهای معادل

ماتریس  $A$  را معادل ماتریس دیگر  $B$  می گویند اگر  $A$  بتواند با یکی از سه عمل سطر و یا ستون مقدماتی تبدیل به  $B$  شود و به صورت  $A \sim B$  نوشته می شود. اگر فقط عملیات سطری (ستونی) استفاده شود، می گویم  $A$  معادل سطری (ستونی)  $B$  است.

## B.3.8 ضرب اسکالر - ضرب نقطه‌ای بردارها

حالت خاصی از ضرب ماتریسها که جایگاهی ویژه دارد ضرب یک بردار سطری در یک بردار ستونی است. اگر  $x$  و  $y$  دو بردار  $n$  مؤلفه‌ای باشند، آن‌گاه

$$x^T y = \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad (B.13)$$

که در آن

$$x^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \quad \text{و} \quad y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$$

ضرب معادله (B.13) یک ضرب اسکالر یا ضرب نقطه‌ای  $x$  و  $y$  نامیده می‌شود. آن را با  $x \cdot y$  نیز نشان می‌دهند. دقت کنید چون ضرب نقطه‌ای دو بردار یک اسکالر است،  $x^T y = y^T x$ . در ارتباط با هر بردار  $x$  یک اسکالری وجود دارد که نرم<sup>۱</sup> یا طول بردار نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(x^T x)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad (B.14)$$

اغلب نرم  $x$  را به شکل  $\|x\|$  نشان می‌دهند.

## B.3.9 ماتریس مربعی

ماتریسی که تعداد سطرها و ستونهای آن مساوی باشد ماتریس مربعی و در غیر این صورت ماتریس مستطیلی نامیده می‌شود. عناصر  $a_{ij}$  و  $i = 1$  to  $n$  را عناصر قطر اصلی و بقیه را عناصر غیرقطری می‌نامند. هر ماتریس مربعی که تمام عناصر غیرقطری اش صفر باشد ماتریس قطری نامیده می‌شود. اگر تمامی عناصر اصلی یک ماتریس قطری با هم مساوی باشند، آن را ماتریس اسکالر می‌نامند.

ماتریس مربعی  $A$  متقارن نامیده می‌شود اگر  $A^T = A$  و در غیر این صورت نامتقارن<sup>۲</sup> یا غیرمتقارن<sup>۳</sup> نامیده می‌شود. اگر  $A^T = -A$  باشد آن را پاد متقارن<sup>۴</sup> گویند.

اگر تمامی عناصر زیر قطر اصلی یک ماتریس مربعی صفر باشند ( $a_{ij} = 0$  for  $i > j$ ).

1. norm

3. unsymmetric

2. asymmetric

4. antisymmetric

آن را یک ماتریس مثلثی بالا می نامند. به طور مشابه، یک ماتریس مثلثی پایین تمامی عناصر بالای قطر اصلی اش ( $a_{ij} = 0$  for  $i < j$ ) صفر است. یک ماتریس را که تمامی عناصرش به جز در یک نوار اطراف قطر اصلی صفر هستند ماتریس نواری می نامند.

یک ماتریس مربعی که عناصر قطر اصلی اش یک و سایر عناصرش صفر هستند ماتریس واحد<sup>۱</sup> نامیده می شود. یک ماتریس واحد از مرتبه  $n$  با  $I_n$  نشان داده می شود. ماتریسهای واحد به خاطر این که پیش ضرب یا پس ضربشان در ماتریسی دیگر مقدار ماتریس را تغییر نمی دهد مفید هستند؛ به عنوان مثال اگر  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد، آن گاه

$$I_{(m)}A = A = AI_{(n)} \quad (B.15)$$

یک ماتریس اسکالر  $S_{(n)}$  را که عناصر قطری اش  $\alpha$  هستند می توان به شکل زیر نوشت

$$S_{(n)} = \alpha I_{(n)} \quad (B.16)$$

دقت کنید که پیش یا پس ضرب هر ماتریس در یک ماتریس اسکالر از مرتبه مناسب مساوی ضرب ماتریس اصلی در اسکالر است. این را می توان برای هر ماتریس  $A$ ،  $m \times n$  به صورت زیر ثابت کرد:

$$S_{(m)}A = \alpha I_{(m)}A = \alpha A = \alpha(AI_{(n)}) = A(\alpha I_{(n)}) = AS_{(n)} \quad (B.17)$$

### B.3.10 افراز بندی ماتریسها

تقسیم بردارها یا ماتریسها به گروههای کوچکتری از آرایه ها غالباً مفید است. این کار می تواند با افراز بندی ماتریسها به آرایه های مستطیلی کوچکتر که زیرماتریسها نامیده می شوند و یا تقسیم بردارها به آرایه های مستطیلی کوچکتر که زیربردارها نامیده می شوند انجام شود. به عنوان مثال، ماتریس  $A$  را در نظر بگیرید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & -1 & -3 \\ 1 & -6 & 2 & 3 & 8 \\ -3 & 0 & 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}_{(4 \times 5)}$$

یک نوع از افرازبندی A عبارت است از

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & -1 & -3 \\ \hline 1 & -6 & 2 & 3 & 8 \\ -3 & 0 & 5 & -2 & 7 \end{array} \right]_{(4 \times 5)}$$

بنابراین، زیرماتریسهای A عبارتند از

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{(2 \times 3)} & A_{12} &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{(2 \times 3)} & A_{22} &= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \end{aligned}$$

که در آن  $A_{ij}$  ماتریسهایی از مرتبه های مورد نظر هستند. پس، A می تواند برحسب زیرماتریسها به شکل زیر نوشته شود

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]$$

دقت کنید که افرازبندی بردارها و ماتریسها باید متناسب باشد تا عمل جمع یا ضرب آنها معنی دار باشد. برای این که بسینید چگونه دو ماتریس افراز شده ضرب می شوند، ماتریسهای A را  $m \times n$  و B را  $n \times p$  در نظر بگیرید. فرض کنید آنها به شکل زیر افراز شده باشند.

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]_{(m \times n)}; \quad B = \left[ \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right]_{(n \times p)}$$

آن گاه ضرب AB را می توان به شکل زیر نوشت

$$AB = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) & (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}) \\ \hline (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) & (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) \end{array} \right]_{(m \times p)}$$

دقت کنید که افرازبندی دو ماتریس A و B باید طوری باشد که ضربهای  $A_{11}B_{11}$ ،  $A_{12}B_{21}$ ،  $A_{11}B_{12}$ ،  $A_{12}B_{22}$ ، و ... درست باشند. به علاوه، باید زوجهای ماتریس  $A_{11}$ ،  $B_{11}$  و  $A_{12}$ ،  $B_{21}$ ،  $A_{21}$ ،  $B_{11}$  و  $A_{21}$ ،  $B_{12}$  و  $A_{22}$ ،  $B_{21}$  و  $A_{22}$ ،  $B_{22}$  نیز از مرتبه ای مشابه باشند.

B.4 حل  $n$  معادله خطی  $n$  مجهولی

## B.4.1 مقدمه

سیستم معادلات خطی در بسیاری از کاربردهای علوم و مهندسی وجود دارد. بنابراین، پژوهشها و پیشرفتهای قابل توجهی برای راه‌حلهای متفاوت انجام شده است. فهم نظریه‌های اصلی و مفاهیم مربوط به معادله‌های خطی بسیار مهم است، زیرا در این کتاب ما از آنها زیاد استفاده می‌کنیم. در این بخش یک روش اساسی را که روش حذفی گوسی<sup>۱</sup> نامیده می‌شود تشریح خواهیم کرد که برای حل یک دستگاه معادلات خطی  $n \times n$  (مربعی) است. روشهای عمومی‌تری که برای حل سیستمهای مستطیلی  $m \times n$  می‌باشد در بخش بعدی بحث می‌شوند.

پنداره دترمینان ارتباط نزدیکی به حل یک دستگاه معادلات خطی دارد و به همین دلیل ما ابتدا دترمینان و خواص آن را بحث می‌کنیم. همچنین از آن جا که حل یک دستگاه مربعی می‌تواند از راه وارون کردن ماتریس مربوط به آن دستگاه به دست آید، روشهای وارون کردن ماتریسها را نیز بیان می‌کنیم.

دستگاه  $n$  معادله  $n$  مجهولی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{B. 18})$$

که در آن  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  از اعداد مشخصی بوده و  $x$  یک بردار  $n$  بعدی متغیرهای جواب، و  $b$  یک بردار از اعداد ثابتی است که به عنوان بردار طرف راست شناخته می‌شود.  $A$  ماتریس ضرایب نامیده می‌شود و وقتی که بردار  $b$  به عنوان ستون  $(n+1)$  ام  $A$  یعنی مثل  $|A| \ b|$  اضافه شود، ماتریس حاصل ماتریس افزایش یافته دستگاه معادلات داده شده نامیده می‌شود. دقت کنید که طرف چپ معادله (B. 18) تشکیل شده از ضرب ماتریس  $n \times n$  در یک بردار  $n$  مؤلفه‌ای که حاصل یک بردار  $n$  مؤلفه‌ای دیگر است. اگر بردار طرف راست  $b$  صفر باشد، معادله (B. 18) یک دستگاه معادلات همگن و در غیر این صورت ناهمگن نامیده می‌شود. معادله  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  نیز می‌تواند به شکل علامت جمع زیر نوشته شود:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i; \quad i = 1 \text{ to } n \quad (\text{B. 19})$$

اگر هر سطر از ماتریس  $A$  به عنوان یک بردار سطری  $n$  بعدی  $\bar{a}^{(i)}$  در نظر گرفته شود، آن گاه طرف چپ معادله (B. 19) را می توان حاصل ضرب نقطه ای دو بردار و به شکل زیر در نظر گرفت

$$(\bar{a}^{(i)} \cdot \mathbf{x}) = b_i; \quad i = 1 \text{ to } n \quad (\text{B. 20})$$

اگر هر ستون  $A$  به عنوان یک بردار ستونی  $n$  بعدی  $a^{(i)}$  در نظر گرفته شود، آن گاه طرف چپ معادله (B. 18) را می توان به شکل جمع ستونهای مقیاس شده ماتریس  $A$  در نظر گرفت، یعنی

$$\sum_{i=1}^n a^{(i)} x_i = \mathbf{b} \quad (\text{B. 21})$$

این نوع تعبیر می تواند برای تدوین و پیاده سازی راههای حل دستگاه  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  مفید باشد. برای مثال، معادله (B. 21) نشان می دهد که متغیر جواب  $x_i$  برای  $i$  امین ستون  $A$  یک ضریب مقیاس است، یعنی متغیر  $x_i$  مربوط به  $i$  امین ستون است.

#### B.4.2 دترمینانها

برای تدوین راهبرد حل دستگاه خطی  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ، از معرفی مفهوم دترمینان و مطالعه خواص آن [هن، ۱۹۶۴] شروع می کنیم. روش محاسبه دترمینانها بسیار شبیه به راه حلهای معادلات خطی است، بدین سبب ما آنها را نیز بررسی خواهیم کرد.

هر ماتریس مربعی یک عدد اسکالر مربوط به خود دارد که دترمینان نامیده می شود و از روی درایه های آن محاسبه می شود. برای معرفی پنداره دترمینان، در معادله (B. 18)،  $n = 2$ ، قرار می دهیم و دستگاه معادلات همزمان زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

عدد  $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$  با استفاده از درایه ماتریس ضرایب محاسبه شده و دترمینان نامیده می شود. برای این که ببینید این عدد چگونه به وجود آمد، سیستم معادلات (a) را با فرآیند حذفی حل خواهیم کرد.

سطر اول معادلات (a) در  $a_{22}$  و سطر دوم را در  $a_{12}$  ضرب می کنیم، داریم

$$\begin{bmatrix} a_{11}a_{22} & a_{12}a_{22} \\ a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22}b_1 \\ a_{12}b_2 \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

در معادلات (b) اگر سطر دوم را از سطر اول کم کنیم،  $x_2$  از اولین معادله حذف می شود و داریم:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \quad (c)$$

حال روش گذشته را برای حذف  $x_1$  از سطر دوم معادلات (a) تکرار می کنیم. با ضرب اولین معادله در  $a_{21}$  و دومی در  $a_{11}$  و کم کردن آنها، داریم:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \quad (d)$$

برای این که سیستم جواب یگانه ای داشته باشد ضرایب  $x_1$  و  $x_2$  در معادلات (c) و (d) باید غیر صفر باشند، یعنی  $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$  و مقادیر  $x_1$  و  $x_2$  به شکل زیر محاسبه می شود

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (e)$$

مخرج کسرها یعنی  $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$  به عنوان دترمینان ماتریس A معادلات (a) شناخته می شود. آن را با  $\det(A)$ ، یا  $|A|$  نشان می دهند. پس برای هر ماتریس  $2 \times 2$ ، A،

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (f)$$

با استفاده از تعریف معادله (f)، معادله های (e) را می توان دوباره به شکل زیر نوشت

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|B_2|}{|A|} \quad (g)$$

که  $B_1$  با جایگزین اولین ستون A با طرف راست و  $B_2$  با جایگزینی ستون دوم A با طرف راست به دست می آید، یعنی

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

معادلات (g) به عنوان قاعده کرامر<sup>۱</sup> شناخته می شوند. طبق این قاعده، ما تنها نیاز به محاسبه سه دترمینان  $|A|$ ،  $|B_1|$  و  $|B_2|$  داریم تا جواب دستگاه معادلات  $2 \times 2$  را به دست آوریم. اگر  $|A| = 0$ ، حل یگانه ای برای معادلات (a) وجود ندارد. ممکن است تعداد بی نهایت جواب وجود داشته باشد و یا اصلاً جوابی وجود نداشته باشد. این حالتها در بخش بعدی

بحث می شوند.

مفاهیم گذشته دترمینان می تواند برای یک ماتریس  $n \times n$  تعمیم داده شود. برای هر ماتریس مربع  $A$  از هر مرتبه ای، می توانیم یک عدد اسکالر یگانه ای محاسبه کنیم که دترمینان  $A$  خوانده می شود. راههای مختلفی برای محاسبه دترمینان یک ماتریس وجود دارد. این راهها به راههای حل دستگاه معادلات خطی بسیار شبیه هستند که متعاقباً در این بخش آنها را بحث خواهیم کرد.

**B.4.2.1 خواص دترمینانها.** دترمینانها خواص متعددی دارند که برای به دست آوردن راههای محاسبه شان مفید هستند. بنابراین، خواص آنها باید کاملاً فهمیده شود.

۱. دترمینان هر ماتریس مربعی  $A$  مساوی دترمینان ترانزپوز ماتریس است، یعنی  $|A| = |A^T|$ .
۲. اگر ماتریس  $A$  دارای دو ستون (یا دو سطر) یکسان باشد، آن گاه دترمینانش صفر است، یعنی  $|A| = 0$ .
۳. اگر با تعویض هر دو ستون (یا دو سطر) ماتریس داده شده  $A$  (عملیات سطر ستون مقدماتی ۱) ماتریس جدیدی تشکیل شود، دترمینان ماتریس جدید منفی دترمینان ماتریس اصلی است.
۴. اگر با جمع کردن ضربی از یک ستون (سطر) با ستون (سطر) دیگر (عملیات سطر ستون مقدماتی ۳) ماتریس جدیدی تشکیل شود، دترمینان ماتریس حاصل مساوی دترمینان ماتریس اصلی است.
۵. اگر ماتریس مربع  $B$  مساوی ماتریس  $A$  باشد بجز بعضی از ستونها (سطرها) که  $c$  برابر ستون (سطر) مربوطه در  $A$  باشد (عملیات سطر ستون مقدماتی ۲)، آن گاه  $|B| = c |A|$ .
۶. اگر درایه های یک ستون (یا سطر) یک ماتریس مربعی  $A$  صفر باشند، آن گاه  $|A| = 0$ .
۷. اگر ماتریس مربعی  $A$  مثلثی پایین یا بالا باشد، آن گاه دترمینان  $A$  مساوی حاصل ضرب درایه های قطری آن است:

$$|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \quad (\text{B. 22})$$

۸. اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی از مرتبه ای یکسان باشند، آن گاه

$$|AB| = |A| |B|$$

۹. فرض کنید  $|A_{ij}|$  دترمینان ماتریس باشد که با حذف  $i$  امین سطر و  $j$  امین ستون  $A$  (که حاصل ماتریس مربعی از مرتبه  $n-1$  است) به دست آمده باشد، عدد اسکالر  $|A_{ij}|$ ، ماینر<sup>۱</sup> (کهاد) درایه  $a_{ij}$  ماتریس  $A$  نامیده می شود. هم عامل  $a_{ij}^T$  به شکل زیر تعریف می شود

$$\text{cofac}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} |A_{ij}| \quad (\text{B. 23})$$

دترمینان  $A$  برحسب هم عاملها به شکل زیر محاسبه می شود

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{cofac}(a_{ij}), \quad \text{برای هر } i \quad (\text{B. 24})$$

یا

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \text{cofac}(a_{ij}), \quad \text{برای هر } j \quad (\text{B. 25})$$

دقت کنید که  $\text{cofac}(a_{ij})$  نیز یک اسکالر است که از ماینر  $|A_{ij}|$  به دست می آید و علامت مثبت یا منفی دارد که با اندیسهای  $i$  و  $j$  از رابطه  $(-1)^{i+j}$  به دست می آید. معادله (B. 24) تعمیم هم عامل  $|A|$  با  $i$  امین سطر نامیده می شود. معادله (B. 25) تعمیم هم عامل  $|A|$  با  $j$  امین ستون نامیده می شود. معادلات (B. 24) و (B. 25) می تواند مستقیماً برای اثبات خواص ۲، ۵، ۶ و ۷ استفاده شود.

نکته مهمی که باید مورد توجه قرار گیرد این است که استفاده از معادله های (B. 24) یا (B. 25) برای محاسبه دترمینان  $A$  مشکل است. این معادله ها نیاز به محاسبه هم عاملهای درایه های  $a_{ij}$  دارد که خودشان دترمینان هستند. به هر حال، یک ماتریس مربعی می تواند با عملیات سطر ستون مقدماتی به شکل مثلث بالا یا پایین تبدیل شود. آن گاه دترمینان با استفاده از معادله (B. 22) محاسبه می شود. این روش را بعداً با مثالی در همین بخش تشریح خواهیم کرد.

ماتریسی که دترمینان صفر دارد یک ماتریس منفرد نامیده می شود؛ یک ماتریس با دترمینان غیر صفر، نامنفرد خوانده می شود. یک دستگاه معادلات  $n \times n$  ناهمگن جواب یگانه دارد اگر و تنها اگر ماتریس ضرایب آن نامنفرد باشد. این خواص در آینده بحث شده و برای تدوین راه حل دستگاه معادلات استفاده خواهند شد.

**B.4.2.2 ماینر اصلی.** هر ماتریس مربعی  $A$ ، اعداد اسکالر مربوط به خود دارد که ماینرهای

اصلی خوانده می شود. آنها دترمینان ماتریسهای جزء مشخصی از  $A$  می باشند و برای به دست آوردن نوع یک ماتریس که در آزمون شرایط کافی برای بهیگی مورد نیاز است و همچنین تحذب توابع که در فصل (۳) بحث شد، به کار می روند. بنابراین، ما پنداره ماینرهای اصلی را این جا بحث می کنیم.

فرض کنید  $M_k$ ,  $k = 1$  to  $n$  ماینرهای اصلی  $A$  باشند. آن گاه هر  $M_k$  به عنوان دترمینان زیرماتریس زیر تعریف می شود:

$$M_k = |A_{kk}| \quad (B. 26)$$

که  $A_{kk}$  یک زیرماتریس  $k \times k$  از  $A$  است که از حذف تمامی ستونهای  $n$  تا  $k$  و سطرهاى مربوطه به دست می آید. به عنوان مثال،  $M_1 = a_{11}$ ،  $M_2 =$  دترمینان یک ماتریس  $2 \times 2$  که از حذف تمامی سطرها و ستونهای  $A$  بجز دو سطر و ستون اول به دست می آید، و به همین ترتیب سایر ماینرهای اصلی ماتریس  $A$  به دست خواهند آمد.

#### B.4.3 روش حذفی گوسی

روش حذفی که قبلاً در بخش B.4.1 برای حل یک دستگاه معادلات  $2 \times 2$  تشریح شد می تواند برای یک دستگاه معادلات  $n \times n$  تعمیم داده شود. تمامی فرآیند می تواند با استفاده از علایم ماتریسی سازمان دهی و تشریح شود. این روش برای محاسبه دترمینان هر ماتریس نیز می تواند به کار رود. روش به عنوان روش حذفی گوسی شناخته شده است که آن را در زیر به طور مشروح بیان خواهیم کرد [فرانکلین<sup>۱</sup>، ۱۹۶۷؛ فرانکلین<sup>۲</sup>، ۱۹۶۸].

با استفاده از سه عمل سطر و ستون مقدماتی که در بخش B.3 تعریف شد، دستگاه  $Ax = b$  معادله (B. 18) را می توان به شکل زیر تبدیل کرد:

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \bar{a}_{23} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{bmatrix} \quad (B. 27)$$

یا، به شکل گسترش یافته، معادله (B. 27) عبارت است از

$$\begin{aligned}
 x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \bar{a}_{13}x_3 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n &= b_1 \\
 x_2 + \bar{a}_{23}x_3 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n &= \bar{b}_2 \\
 x_3 + \dots + \bar{a}_{3n}x_n &= \bar{b}_3 \\
 &\vdots \\
 x_n &= \bar{b}_n
 \end{aligned}
 \tag{B. 28}$$

دقت کنید ما  $\bar{a}_{ij}$  و  $\bar{b}_i$  را برای نشان دادن شکل تعمیم یافته درایه های  $a_{ij}$  و  $b_i$  سیستم اصلی به کار می بریم. از معادله  $n$  ام دستگاه (B. 28)، داریم  $x_n = \bar{b}_n$ . اگر این را در معادله  $(n-1)$  ام از معادله های (B. 28) قرار دهیم، می توانیم  $x_{n-1}$  را به دست آوریم:

$$\begin{aligned}
 x_{n-1} &= \bar{b}_{n-1} - \bar{a}_{n-1,n}x_n \\
 &= \bar{b}_{n-1} - \bar{a}_{n-1,n}\bar{b}_n
 \end{aligned}
 \tag{B. 29}$$

اکنون معادله (B. 29) می تواند در  $(n-2)$  امین معادله (B. 28) جایگزین شده و  $x_{n-2}$  محاسبه شود. اگر این روش را ادامه دهیم، تمامی مجهولها می تواند از آخر به اول به دست آید:  $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ . روش کاهش یک سیستم  $n$  معادله ای  $n$  مجهول و حل از آخر به اول  $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$  روش حذفی گوسی یا کاهش گوس<sup>۱</sup> نامیده می شود. قسمت آخر روش (حل از آخر به اول برای  $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ ) جایگذاری پس رو، یا مسیر پس رو نامیده می شود.

روش حذفی گوسی برای تبدیل درایه های قطری اصلی به ۱ و درایه های زیر قطر اصلی به صفر از عملیات سطر ستون مقدماتی استفاده می کند. برای انجام این کار از سطر و ستون اول ماتریس افزایش یافته با طرف راست دستگاه معادلات، شروع می کنیم. برای ۱ ساختن درایه قطری، اولین سطر به درایه قطری تقسیم می شود. برای تبدیل درایه های زیر قطر اصلی ستون اول به صفر، سطر اول را در درایه  $\bar{a}_{i1}$  از  $i$  امین سطر ( $i = 2$  to  $n$ ) ضرب می کنیم و حاصل را از  $i$  امین سطر کم کنیم. این کار درایه  $\bar{a}_{i1}$  را در  $i$  امین سطر صفر می سازد. برای هر سطر این کار با استفاده از سطر اول انجام می شود. وقتی تمام درایه های زیر قطر اصلی در ستون اول صفر شدند، عملیات برای ستون دوم و با استفاده از سطر دوم برای حذف تکرار می شود و ادامه می یابد. سطری که برای صفر کردن درایه های یک ستون استفاده می شود سطر لولا نام دارد، و ستونی که در آن عملیات حذف انجام می شود ستون لولا نامیده می شود. این عملیات

را در مثالی بعداً تشریح خواهیم کرد.

عملیات قبلی تبدیل درایه های زیرقطر اصلی به صفر می تواند از راه دیگری نیز توضیح داده شود. وقتی ما درایه زیرقطر اصلی اولین ستون را صفر می کنیم، متغیر  $x_1$  را از تمامی معادله ها بجز اولین معادله ( $x_1$  مربوط به ستون اول است) حذف می کنیم. برای این مرحله حذف معادله شماره ۱ را به کار می بریم. به طور کلی، وقتی درایه های زیرقطر اصلی را در  $i$  امین ستون به صفر کاهش می دهیم، از  $i$  امین سطر به عنوان سطر لولا استفاده می کنیم. پس  $i$  امین متغیر را از تمامی معادله های زیر  $i$  امین سطر حذف می کنیم. این توضیح وقتی توجه کنیم که هر ستون از ماتریس ضرایب، همان طور که قبلاً گفتیم، متغیر خاص خود را دارد کاملاً روشن است.

**مثال B.3 حل معادله ها با حذفی گوسی، دستگاه معادلات  $3 \times 3$  زیر را حل کنید**

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$

(a)

حل. مراحل روش حذفی گوسی را با استفاده از ماتریس افزایش یافته گام به گام شرح خواهیم داد. ماتریس افزایش یافته معادلات (a) با استفاده از ضرایب متغیرها و پارامترهای طرف راست به شکل زیر تعریف می شود

$$B = \left[ \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

برای تبدیل سیستم فوق به شکل معادله (B.27)، از عملیات سطر و ستون مقدماتی به شکل زیر استفاده می کنیم:

۱. ۱- برابر سطر ۱ را به سطر ۲ اضافه کرده و ۱- برابر سطر ۱ را به سطر ۳ اضافه می کنیم (حذف  $x_1$  از معادله دوم و سوم؛ عملیات سطری مقدماتی (۳):

$$B \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{(یادآور می شود که "}" \\ \text{به معنی معادل بودن} \\ \text{دو ماتریس است)} \end{array}$$

۲. چون درایه در محل (۲، ۲) صفر است، سطر ۲ و ۳ را با هم عوض می‌کنیم تا یک درایه غیر صفر در محل قرار گیرد (عملیات سطری مقدماتی ۱). آن گاه سطر دوم جدید را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، داریم

$$B \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

۳. چون درایه در موقعیت (۳، ۳) یک است و تمامی درایه‌های زیر قطر اصلی صفرند، ماتریس قبلی دستگاه معادلات (a) را به شک معادله (B. 27) در آورده، داریم

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با انجام جایگزینی پس‌رو، داریم

$$x_3 = 1 \quad (\text{از سطر سوم})$$

$$x_2 = 2.5 - 0.5x_3 = 2 \quad (\text{از سطر دوم})$$

$$x_1 = 0 - x_3 + x_2 = 1 \quad (\text{از سطر اول})$$

بنابراین، حل معادلات (a) عبارت است از

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1$$

روش حذفی گوسی به راحتی می‌تواند در قالب یک برنامه رایانه‌ای چندمنظوره نوشته شود که بتواند هر دستگاه معادلات را حل کند. ولی به خاطر این که محاسبات عددی در هر ماشین با تعداد ارقام اعشار مشخص، خطای گرد کردن<sup>۱</sup> تولید می‌کند باید تدابیر خاصی در روش اندیشیده شود. اگر احتیاطهای پیش‌گیرنده‌ای انجام نشود این خطاها می‌تواند قابل ملاحظه باشد. تدبیر مقدماتی عوض کردن ترتیب سطرها یا ستونها در ماتریس افزایش یافته است، طوری که خطای گرد کردن مینیمم شود. این تعویض در هر مرحله از حذف باید انجام شود به گونه‌ای که درایه‌های قطری سطر لولا در میان سایر درایه‌های ماتریس در طرف راست پایینی از نظر قدر مطلق بزرگترین باشد. این کار به عنوان عمل لولایی کلی شناخته می‌شود. وقتی فقط سطرها برای آوردن بزرگترین درایه از یک ستون به موقعیت قطری عوض می‌شوند،

این کار به عنوان عمل لولایی جزئی شناخته می شود. توجه کنید که برنامه های زیادی برای حل دستگاه معادلات در دسترس هستند. پس، قبل از این که شروع به نوشتن برنامه ای برای حذفی گوسی شود، باید کتابخانه های مرکز رایانه برای برنامه های موجود جست و جو گردد.

**مثال B.4** دترمینان یک ماتریس به وسیله روش حذفی گوسی. روش حذفی گوسی را نیز می توان برای محاسبه دترمینان یک ماتریس به کار برد. ما روش را برای ماتریس  $3 \times 3$  زیر توضیح می دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

حل. با استفاده از روش حذفی گوسی، درایه های زیر قطر اصلی را صفر می کنیم، ولی این بار درایه های قطری به یک تبدیل نمی شوند. وقتی ماتریس به آن شکل تبدیل شد، دترمینان با استفاده از معادله (B. 22) به دست می آید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{حذف در اولین ستون})$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{حذف در دومین ستون})$$

دستگاه به دست آمده شکل کانونی است و  $|A|$  با ضرب تمامی درایه های قطری به دست می آید، یعنی

$$|A| = (2)(0.5)(-2) = -2.$$

اگر حاصل ضرب دو ماتریس مربعی ماتریس واحد بشود، آن دو را وارون یکدیگر گویند. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی از مرتبه  $n$  باشند، آن گاه  $B$  وارون  $A$  نامیده می شود اگر

(B. 30)

وارون  $A$  معمولاً با  $A^{-1}$  نشان داده می شود. بعداً روشهای محاسبه وارون یک ماتریس را توضیح خواهیم داد. هر ماتریس مربعی ممکن است وارون نداشته باشند. یک ماتریسی که وارون ندارد ماتریس منفرد نامیده می شود. اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه معادلات  $n \times n$  وارون داشته باشد، آن گاه دستگاه می تواند برای به دست آوردن مجهولات حل شود. دستگاه معادلات  $n \times n$ ،  $Ax = b$  را در نظر بگیرید که  $A$  ماتریس ضرایب و  $b$  بردار طرف راست است. با پیش ضرب دو طرف در  $A^{-1}$  داریم

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

چون  $A^{-1}A = I$ ، معادله به شکل زیر در می آید

$$x = A^{-1}b$$

پس اگر، وارون ماتریس  $A$  را بدانیم، آن گاه معادله فوق را می توانیم برای به دست آوردن بردار مجهول  $x$  به کار ببریم. چند روش برای محاسبه وارون یک ماتریس غیر منفرد وجود دارد. اولین روش براساس استفاده از هم عاملها و دترمینان  $A$  است. اگر  $B$  وارون  $A$  باشد، آن گاه درایه های آن عبارت است از (می گویند وارون با استفاده از هم عاملها):

$$b_{ji} = \frac{\text{cofac}(a_{ij})}{|A|}; \quad i = 1 \text{ to } n; j = 1 \text{ to } n \quad (\text{B. 31})$$

دقت کنید که اندیسهای طرف چپ معادله  $ji$  هستند، درحالی که در طرف راست  $ij$  است. پس هم عاملهای سطر ماتریس  $A$  ستون مربوطه از ماتریس وارون  $B$  را تولید می کنند.

روش گذشته برای ماتریسهای کوچکتر مثلاً تا  $3 \times 3$  منطقی به نظر می رسد، ولی برای ماتریسهای بزرگتر، خسته کننده و ناکارآمد است.

یک سرنخ برای روش دوم محاسبه وارون یک ماتریس، معادله (B. 30) است. در آن معادله، درایه های  $B$  می تواند به عنوان مجهول دستگاه معادلات  $AB = I$  در نظر گرفته شود. پس دستگاه می تواند با استفاده از روش حذفی گوسی حل شود و وارون  $A$  به دست آید. این روش را با مثالی توضیح می دهیم.

**مثال B.5** وارون يك ماتریس به وسیله هم عاملها و کاهش گوس - جردن. وارون ماتریس  $3 \times 3$

زیر را محاسبه کنید :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حل.

وارون با استفاده از هم عاملها. فرض کنید  $\mathbf{B}$  یک ماتریس  $3 \times 3$  و وارون ماتریس  $\mathbf{A}$  باشد. برای استفاده از روش هم عاملها که در معادله (B.31) داده شده، ابتدا دترمینان  $\mathbf{A}$  را حساب می کنیم که عبارت است از  $|\mathbf{A}| = -1$ . با استفاده از معادله (B.23)، هم عاملهای اولین سطر  $\mathbf{A}$  عبارتند از

$$\text{cofac}(a_{11}) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{cofac}(a_{12}) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{cofac}(a_{13}) = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

به طور مشابه، هم عاملهای سطرهای دوم و سوم عبارتند از

$$-3, 1, -3; 0, 0, -1$$

پس، معادله (B.31) وارون  $\mathbf{A}$  را به شکل زیر می دهد

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

وارون با استفاده از حذفی گوسی. ابتدا روش حذفی گوسی را تشریح می کنیم و بعداً روش گوس-جوردن را بیان خواهیم کرد. چون  $\mathbf{B}$  وارون  $\mathbf{A}$  است،  $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ . یا به شکل گسترش یافته

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که  $b_{ij}$  ها درایه های  $\mathbf{B}$  هستند. معادله فوق می تواند به عنوان دستگاه معادلات همزمان که سه بردار مختلف طرف راست دارد در نظر گرفته شود. برای هر ستون از مجهولات

طرف چپ و بردار طرف راست مربوط می‌توان از روش حذفی گوسی استفاده کرد و مجهولات را به دست آورد. برای مثال، فقط اولین ستون B را در نظر بگیرید، داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش حذفی در ماتریس افزایش یافته داریم

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{(حذف در اولین} \\ \text{ستون)} \end{array} \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{(حذف در دومین} \\ \text{ستون)} \end{array} \end{aligned}$$

با استفاده از جایگذاری پس رو، اولین ستون B به دست می‌آید و داریم  $b_{11} = -3$ ،  
 $b_{11} = -2$ ،  $b_{21} = 1$ ،  $b_{12} = 3$ ،  $b_{22} = -1$ ،  $b_{13} = 0$ ،  $b_{23} = 0$  و  $b_{31} = 1$  را می‌یابیم. بنابراین، وارون A عبارت است از

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

**وارون با استفاده از حذف گوس - جردن.** می‌توانیم روش محاسبه وارون یک ماتریس را کمی تغییر دهیم. ماتریس افزایش یافته می‌تواند با تمامی سه ستون طرف راست تعریف شود. فرآیند حذفی گوسی می‌تواند هم برای زیرقطر اصلی و هم بالای قطر اصلی انجام شود. با این روش، ماتریس  $3 \times 3$  طرف چپ به یک ماتریس واحد تبدیل می‌شود، آن‌گاه ماتریس  $3 \times 3$  طرف راست ماتریس وارون است. وقتی حذف در زیر و بالای قطر اصلی انجام شود، روش حذفی گوس - جردن نامیده می‌شود. فرآیند برای محاسبه وارون A به شرح زیر است:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{(ماتریس افزایش یافته)}$$

$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{حذف در اولین ستون})$$

$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{حذف در دومین ستون})$$

نیازی به انجام عمل حذف در ستون سوم نیست، زیرا  $\bar{a}_{23} = \bar{a}_{13} = \bar{a}_{33} = 0$  و  $\bar{a}_{33} = 1$ .  
از ماتریس فوق مشاهده می‌کنیم که سه ستون آخر دقیقاً ماتریس  $B$  را که وارون  $A$  است می‌دهد.

روش گوس-جردن برای محاسبه وارون یک ماتریس  $3 \times 3$ ، را می‌توان برای هر ماتریس  $n \times n$  تعمیم داد. همچنین می‌توان آن را به طور نظام‌مندی در یک برنامه رایانه‌ای چندمنظوره تدوین و وارون هر ماتریس را محاسبه کرد.

### B.5 حل $m$ معادله خطی $n$ مجهولی: نظریه عمومی

در بخش گذشته، مفهوم دترمینان برای شرط وجود جواب یگانه یک دستگاه معادلات  $n \times n$  استفاده شد. موارد متعددی در کاربردهای مهندسی وجود دارد که تعداد معادلات مساوی تعداد مجهولات نیست، یعنی دستگاه‌های مستطیلی. در یک دستگاه  $m$  معادله ای  $n$  مجهولی ( $m \neq n$ )، ماتریس ضرایب مربعی نیست. بنابراین، دترمینانی برای آن وجود نخواهد داشت. پس، برای حل چنین دستگاهی، به مفهوم عمومی‌تری از دترمینان نیاز است. چنین مفهومی را در این بخش معرفی می‌کنیم.

#### B.5.1 رتبه يك ماتریس

مفهوم عمومی که برای تدوین راه حل یک دستگاه معادلات  $m \times n$  مورد نیاز است رتبه ماتریس است که به عنوان درجه بزرگترین زیرماتریس غیرمنفرد هر ماتریس تعریف می‌شود. با استفاده از پنداره رتبه یک ماتریس، ما می‌توانیم یک نظریه عمومی برای حل دستگاه معادلات خطی تدوین کنیم.

فرض کنید  $r$  رتبه ماتریس  $m \times n$ ،  $A$  باشد. آن‌گاه  $r$  شرایط زیر را برآورده می‌کند:  
۱. برای  $m < n$ ،  $m < n$ ،  $r \leq m$  (اگر  $r = m$  باشد، گفته می‌شود ماتریس رتبه سطری کامل دارد).

۲. برای  $n < m$ ،  $r \leq n < m$  (اگر  $r = n$  باشد، گفته می شود ماتریس رتبه ستونی کامل دارد).

۳. برای  $r \leq n$ ،  $m = n$  (اگر  $r = n$  باشد، ماتریس مربعی غیر منفرد نامیده می شود).

به منظور به دست آوردن رتبه یک ماتریس، باید دترمینان تمامی زیرماتریسها را مورد بررسی قرار دهیم. این فرآیندی پرهزحمت و وقت گیر است. از طرفی فرآیند حذفی گوس - جردن می تواند هم برای حل دستگاه خطی استفاده شود و هم برای به دست آوردن رتبه ماتریس. با استفاده از روش حذفی گوس - جردن هر ماتریس  $m \times n$ ،  $A$  می تواند به شکل معادلهای زیر تبدیل شود (برای  $m < n$ ):

$$A \sim \left[ \begin{array}{c|c} I_{(r)} & 0_{(r \times n-r)} \\ \hline 0_{(m-r \times r)} & 0_{(m-r \times n-r)} \end{array} \right] \quad (B.32)$$

در حالی که  $I_{(r)}$  یک ماتریس واحد  $r \times r$  است، آن گاه  $r$  رتبه ماتریس است و  $r$  یکی از سه شرط گذشته را برآورده می کند. دقت کنید که ماتریس واحد  $I_{(r)}$  برای هر ماتریس منحصر به فرد است.

**مثال B.6 تعیین رتبه با عملیات مقدماتی.** رتبه ماتریس زیر را تعیین کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

**حل.** عملیات مقدماتی ماتریسهای زیر را نتیجه می دهد:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{سطر 1 را } \frac{1}{2} \text{ ضرب کنید})$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(دو برابر سطر 1 را به سطر 2 و} \\ \text{و 1- برابر سطر 1 را به سطر 3 اضافه کنید)} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(3- برابر متون 1 را به متون 2 ؛} \\ \text{1- برابر متون 1 را به متون 3 ؛} \\ \text{2- برابر متون 1 را به متون 4 اضافه کنید)} \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(سطر 2 را در } \frac{1}{2} \text{ ضرب کرده و} \\ \text{به سطر 3 اضافه کنید)} \end{array}$$

$$\sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} (2) \text{ برابر ستون 2 را به ستون 3} \\ \text{و 3 برابر ستون 2 را به ستون 4 اضافه کنید} \end{array}$$

این ماتریس به شکل معادله (B.32) است. رتبه  $A$ ، ۲ است چون یک ماتریس واحد  $2 \times 2$  در گوشه چپ بالا به دست آمد.

## B.5.2 نظریه عمومی برای حل معادلات خطی

اکنون بیاییم یک سیستم  $m$  معادله همزمان  $n$  مجهولی را در نظر بگیریم. وجود جواب برای چنین سیستمی به رتبه ماتریس ضرایب سیستم و ماتریس افزایش یافته بستگی دارد. فرض کنید سیستم به شکل زیر بیان شود

$$Ax = b \quad (B.33)$$

که  $A$  یک ماتریس  $m \times n$ ،  $b$  یک بردار  $m$  بعدی و  $x$  یک بردار  $n$  بعدی از مجهولات باشد. توجه کنید که  $m$  ممکن است بزرگتر از  $n$  باشد، یعنی تعداد معادله‌ها بیشتر از مجهولات باشد. در آن حالت سیستم یا ناسازگار است (جوابی ندارد) یا بعضی از معادلات زیادی اند و می‌شود آنها را حذف کرد. فرآیند حلی که در زیر تشریح می‌شود جواب این سؤالات است.

دقت کنید که اگر یک معادله در یک عدد ثابت ضرب شود جواب سیستم بدون تغییر می‌ماند. اگر  $c$  برابر یک معادله‌ای به معادله دیگر اضافه شود، جواب سیستم حاصل مانند سیستم اولیه است. همچنین اگر دو ستون از ماتریس ضرایب جابه‌جا شوند (به عنوان مثال، ستون  $i$  و  $j$ )، مجموعه معادله‌های حاصل معادل سیستم اصلی است، ولی متغیرهای جواب  $x_i$  و  $x_j$  در بردار  $x$  جابه‌جا می‌شوند، مانند زیر:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \downarrow & & \downarrow & \\ x = [x_1 & x_2 & \dots & x_{i-1} & x_j & x_{i+1} & \dots & x_{j-1} & x_i & x_{j+1} & \dots & x_n]^T \end{array} \quad (B.34)$$

این ایجاب می‌کند که هر ستون از ماتریس ضرایب یک متغیر مربوط به خود داشته باشد که قبلاً نیز ذکر گردید، به عنوان مثال  $x_i$  و  $x_j$  به ترتیب مربوط  $i$  امین و  $j$  امین ستون هستند.

با استفاده از عملیات سطر و ستون مقدماتی همیشه این امکان وجود دارد که یک سیستم  $m$  معادله و  $n$  مجهول معادله (B.33) را به سیستم معادلی به شکل نشان داده شده در معادله

(B. 35) زیر تبدیل کرد. در معادله علامت "-" روی هر درایه مقدار جدید را مشخص می کند، که از انجام عملیات سطر ستون روی ماتریس افزایش یافته ماتریس اصلی به دست آمده است. مقدار اندیس  $r$  در معادله (B. 35) رتبه ماتریس ضرایب است.

$$\begin{bmatrix} 1 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \bar{a}_{14} & \dots & \bar{a}_{1r} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{24} & \dots & \bar{a}_{2r} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \bar{a}_{34} & \dots & \bar{a}_{3r} & \dots & \bar{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \bar{a}_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \bar{b}_{r+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} \quad (\text{B. 35})$$

دقت کنید اگر در معادله (B. 35)  $\bar{b}_{r+1} = \bar{b}_{r+2} = \dots = \bar{b}_m = 0$  باشد، آن گاه آخرین  $(m - r)$  معادله می شود

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$$

این سطرها را می توان در عملیات بعدی حذف کرد. اما اگر یکی از مؤلفه های آخرین  $(m - r)$  بردار  $\bar{b}$  صفر نباشد، آن گاه حداقل یکی از معادلات آخرین  $(m - r)$  ناسازگار است و سیستم جوابی ندارد. همچنین دقت کنید که رتبه ماتریس ضرایب برابر رتبه ماتریس افزایش یافته است اگر و تنها اگر  $\bar{b}_i = 0, i = (r + 1) \text{ to } m$ . پس یک سیستم  $m$  معادله  $n$  مجهول سازگار (یعنی جواب دارد) است اگر و تنها اگر رتبه ماتریس ضرایب برابر با رتبه ماتریس افزایش یافته باشد.

اگر عملیات مقدماتی برای حذف درایه های غیرقطری علاوه بر زیرقطر اصلی در بالای قطر اصلی نیز انجام شود، یک سیستم معادل به شکل زیر به دست می آید:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{I}_{(r)} & \mathbf{Q}_{(r \times n-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(m-r \times r)} & \mathbf{0}_{(m-r \times n-r)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{(r)} \\ \mathbf{x}_{(n-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{(r \times 1)} \\ \mathbf{p}_{(m-r \times 1)} \end{bmatrix} \quad (\text{B. 36})$$

این جا  $\mathbf{I}_{(r)}$  یک ماتریس واحد  $r \times r$  و  $\mathbf{x}_{(r)}$  و  $\mathbf{x}_{(n-r)}$  مؤلفه  $r$  ام و  $(n - r)$  ام زیر بردارهای بردار  $\mathbf{x}$

است. دقت کنید که بسته به مقادیر  $r$ ،  $n$  و  $m$ ، معادله می تواند شکلهای مختلفی داشته باشد. به عنوان مثال، اگر  $r = n$  باشد، ماتریسهای  $Q_{(r \times n - r)}$ ،  $0_{(n - r \times n - r)}$  و بردار  $x_{(n - r)}$  دیگر وجود نخواهند داشت. به طور مشابه، اگر  $r = m$  باشد، ماتریسهای  $0_{(m - r \times r)}$ ،  $0_{(m - r \times n - r)}$  و بردار  $p_{(m - r \times 1)}$  وجود نخواهند داشت. سیستم معادلات (B.33) فقط وقتی سازگار است که در معادله (B.36) بردار  $p = 0$  باشد. باید به خاطر سپرد که برای هر جابه جایی ستونی که برای تولید معادله (B.36) مورد نیاز باشد، مؤلفه مربوطه  $x$  نیز باید جابه جا شود.

وقتی سیستم سازگار است، اولین خط معادله (B.36) به ما معادله زیر را می دهد

$$I_{(r)}x_{(r)} + Qx_{(n-r)} = q \quad (B.37)$$

یا

$$x_{(r)} = q - Qx_{(n-r)} \quad (B.38)$$

معادله (B.38)،  $r$  مؤلفه  $x$  را بر حسب  $(n - r)$  مؤلفه باقی مانده می دهد. اگر سیستم سازگار باشد، معادله (B.38) بیان کننده جواب کلی سیستم معادلات  $Ax = b$  است. آخرین مؤلفه  $(n - r)$  از  $x$  می تواند مقداری دلخواه داشته باشد، هر مقداری که به  $x_1, \dots, x_{r+1}$  نسبت دهیم یک جواب است. پس دستگاه معادلات بی نهایت جواب دارد. اگر  $r = n$  باشد جواب یگانه است. معادله (B.36) به عنوان شکل کانونی سیستم معادلات  $Ax = b$  شناخته می شود. این شکل از معادلات در حل مسائل برنامه ریزی خطی فصل (۴) مفید است.

مثالهای زیر روش حذفی گوس - جردن را تشریح می کند.

**مثال B.7 جواب عمومی به وسیله کاهش گوس - جردن.** جواب عمومی مجموعه معادلات زیر را بیابید

$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 6$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

حل. ماتریس افزایش یافته مجموعه معادله های عبارت است از

$$A \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right], \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

مراحل حذف زیر برای تبدیل سیستم به شکل کانونی به کار رفته اند :

۱. سطر ۱ را از سطرهای ۲ و ۳ کم می کنیم، با این کار درایه های زیر قطر اصلی در اولین ستون  $(a_{21}, a_{31})$  را صفر می کنیم، در حقیقت  $x_1$  را از معادله های ۲ و ۳ حذف کرده ایم، داریم

$$A \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 \end{array} \right]$$

۲. اکنون چون  $a_{22}$  صفر است نمی توانیم از این بیشتر جلو برویم و عمل حذف را دنبال کنیم. ما باید سطرهای ستونها را جابه جا کنیم تا یک درایه غیر صفر در موقعیت  $a_{22}$  بیاوریم. می توانیم ستون ۳ یا ۴ را با ستون ۲ جابه جا کنیم تا یک درایه غیر صفر در موقعیت  $a_{22}$  جایگزین شود. (دقت کنید: ستون آخر هرگز نباید با ستون دیگری جابه جا شود، زیرا آن طرف راست سیستم  $Ax = b$  است و به متغیری مربوط نیست). با جابه جایی ستون ۲ با ۳ (عملیات ستون مقدماتی ۱) داریم

$$A \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right] \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که موقعیت متغیر  $x_2$  و  $x_3$  نیز در بردار  $x$  جابه جا شده است.

۳. اکنون، با تقسیم سطر ۲ به ۳- و ضرب آن در ۲ و جمع آن با سطر ۳ داریم

$$A \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & b \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (a)$$

پس درایه های زیر قطر اصلی در معادله (a) صفر هستند و فرآیند حذفی گوسی کامل شده است.

۴. برای تبدیل معادلات به شکل کانونی معادله (B.36)، نیاز به انجام عمل حذف در بالای قطر اصلی نیز داریم (حذف گوس-جردن). با کم کردن سطر ۲ از سطر ۱ داریم

$$A \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & b \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (b)$$

۵. با استفاده از ماتریس معادله (b)، سیستم معادلات داده شده به شکل کانونی معادله (B. 36) تبدیل می شود، مانند زیر

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یا

$$\left[ \begin{array}{c|c} I_{(2)} & Q_{(2 \times 2)} \\ \hline 0_{(1 \times 2)} & 0_{(1 \times 2)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{(2 \times 1)} \\ p_{(1 \times 1)} \end{bmatrix}$$

در حالی که

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad p = 0$$

$$x_{(r)} = (x_1, x_3), \quad x_{(n-r)} = (x_2, x_4)$$

۶. چون  $p = 0$ ، دستگاه معادلات داده شده سازگار است (یعنی جواب دارد). حل عمومی آن، به شکل معادله (B. 36) عبارت است از

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

یا، برحسب علایم گسترش یافته، جواب عمومی عبارت است از

$$x_1 = 4 - x_2 - 3x_4$$

$$x_3 = 2 - 2x_4$$

(c)

۷. می توان دید که حل عمومی معادلات (c)،  $x_1$  و  $x_3$  را برحسب  $x_2$  و  $x_4$  می دهد، یعنی  $x_2$  و  $x_4$  متغیرهای مستقل هستند و  $x_1$  و  $x_3$  متغیرهایی که به آنها وابسته اند. سیستم بی نهایت جواب دارد، زیرا هر مقداری که برای  $x_2$  و  $x_4$  مشخص کنیم جوابی را خواهد داد.

**B.5.2.1 جوابهای اصلی.** در جواب عمومی گذشته، می بینیم که  $x_2$  و  $x_3$  مقادیر اختیاری دارند و  $x_1$  و  $x_4$  مربوط به آنها از معادله (c) محاسبه می شود. پس سیستم بی نهایت جواب دارد. جواب خصوصی که در برنامه ریزی خطی (LP) مورد علاقه است با قرار دادن  $x_{n-r+1} = 0$  در حل عمومی معادله (B. 38) به دست می آید. چنین جوابی را جواب اصلی دستگاه معادلات  $Ax = b$  می نامند. برای مثال فعلی، یک جواب اصلی  $x_1 = 4$ ،  $x_2 = 0$ ،  $x_3 = 2$  و  $x_4 = 0$  است که از معادله (c) با قرار دادن  $x_2 = x_3 = 0$  به دست می آید.

دقت کنید که اگرچه معادلات (c) بی نهایت جواب برای دستگاه معادلات می دهد ولی جوابهای اصلی محدودند. برای مثال، جواب اصلی دیگر با قرار دادن  $x_2 = x_3 = 0$  و یافتن  $x_1$  و  $x_4$  به دست می آید. این جواب عبارت است از  $x_1 = 1$ ،  $x_2 = 0$ ،  $x_3 = 0$  و  $x_4 = 1$ . این که تعداد جوابهای اصلی محدود است، در مسائل برنامه ریزی خطی که در فصل (۴) بیان شده بسیار مهم است. دلیل آن این است که جواب بهین برای یک مسأله LP یکی از این جوابهای اصلی است.

**مثال B.8 فرآیند کاهش گوس - جردن در شکل جدولی.** یک جواب عمومی برای دستگاه معادله های زیر را با استفاده از شکل جدولی فرآیند کاهش گوس - جردن بیابید:

$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1$$

**حل.** توضیح چرخه های فرآیند کاهش گوس - جردن برای سیستم خطی در جدول B.1 آمده است. برای کاهش سیستم داده شده به شکل کانونی معادله (B. 36) سه گام لازم است برداشته شود. دقت شود که در گام دوم، درایه  $a_{33}$  صفر است، لذا آن درایه نمی تواند به عنوان درایه لولا استفاده شود. بنابراین ما از درایه  $a_{34}$  به عنوان درایه لولا استفاده می کنیم و عملیات حذف را در ستون  $x_4$  انجام می دهیم. این کار یعنی ما ستون ۳ را با ستون ۴ جابه جا کنیم (همچنان که در مثال B.7 انجام دادیم).

اگر نتایج را از سومین گام جدول B.1 به شکل معادله (B. 36) بنویسیم، داریم

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

جدول B.1 حل عمومی دستگاه معادلات خطی مثال B.8 باروش حذفی گوس - جردن

گام	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	b	
اولیه	-1	2	-3	1	-1	سطر 1 را بر 1- تقسیم کرده و از آن برای
	2	1	1	-2	2	حذف در ستون $x_1$ استفاده کنید، به عنوان
	1	-1	2	1	3	مثال سطر جدید 1 را در 2 ضرب کرده
	1	3	-2	-1	1	و از سطر 2 کم کنید، و غیره
اولین گام	1	-2	3	-1	1	سطر 2 را بر 5 تقسیم کرده و در ستون $x_2$ حذف را انجام دهید
	0	5	-5	0	0	
	0	1	-1	2	2	
	0	5	-5	0	0	
دومین گام	1	0	1	-1	1	سطر 3 را بر 2 تقسیم کرده و در ستون $x_4$ حذف را انجام دهید
	0	1	-1	0	0	
	0	0	0	2	2	
	0	0	0	0	0	
سومین گام	1	0	1	0	2	شکل کانونی با ستونهای $x_1$ ، $x_2$ و $x_3$ که حاوی ماتریس واحد است
	0	1	-1	0	0	
	0	0	0	1	1	
	0	0	0	0	0	

چون آخرین معادله لزوماً  $0 = 0$  را می دهد، سیستم معادلات داده شده سازگار است (یعنی جواب دارد). همچنین، چون رتبه ماتریس ضرایب ۳ است که از تعداد معادلات کمتر است، بی نهایت جواب برای سیستم خطی موجود است. از معادله قبلی جواب عمومی عبارت است از

$$x_1 = 2 - x_3$$

$$x_2 = 0 + x_3$$

$$x_4 = 1$$

یک جواب اصلی با صفر قرار دادن  $x_3$  به دست می آید که عبارت است از  $x_1 = 2$ ،

$$x_3 = 0, x_4 = 1, x_2 = 0$$

در جمع بندی نتایج این بخش توجه می کنیم که

۱. دستگاه معادلات  $m \times n$  (B.33) سازگار است اگر رتبه ماتریس ضرایب مانند رتبه ماتریس افزایش یافته باشد. یک سیستم سازگار یعنی این که دارای جواب است.

۲. اگر تعداد معادلات کمتر از تعداد متغیرها ( $m < n$ ) و سیستم سازگار باشد، داشتن رتبه کمتر یا مساوی  $m$  ( $r \leq m$ )، آن گاه دستگاه بی نهایت جواب دارد.
۳. اگر  $m = n = r$  باشد، آن گاه سیستم (B. 33) جواب یگانه دارد.

### B.6 مفاهیم مربوط به مجموعه بردارها

در کاربردهای مختلف به مجموعه ای از بردارها برخورد می کنیم. بحث در مورد بعضی مفاهیم مربوط به این مجموعه ها، مانند استقلال خطی بردارها، و فضاهای بردار مفید است. در این بخش، این مفاهیم را به طور خلاصه بحث کرده و روشی را برای بررسی استقلال خطی یک مجموعه بردار شرح می دهیم.

#### B.6.1 استقلال خطی يك مجموعه از بردارها

یک مجموعه برداری  $k$  را که هر یک  $n$  بعدی هستند در نظر بگیرید:

$$A = \{\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(k)}\}$$

در حالی که اندیس بالایی ( $i$ ) نشان دهنده  $i$  امین بردار است. یک ترکیب خطی از بردارها در مجموعه  $A$  بردار دیگری است که با مقیاس بندی هر بردار در  $A$  و جمع کردن آنها به دست می آید. در اصل، اگر  $\mathbf{b}$  یک ترکیب خطی از یک بردار در  $A$  باشد، آن گاه به شکل زیر تعریف می شود

$$\mathbf{b} = x_1 \mathbf{a}^{(1)} + x_2 \mathbf{a}^{(2)} + \dots + x_k \mathbf{a}^{(k)} = \sum_{i=1}^k x_i \mathbf{a}^{(i)} \quad (\text{B. 39a})$$

در حالی که  $x_1, x_2, \dots, x_k$  اعداد اسکالر هستند. معادله قبلی را می توان دقیقاً به شکل ماتریسی نوشت

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\text{B. 39b})$$

که در آن  $\mathbf{x}$  یک بردار  $k$  مؤلفه ای و  $\mathbf{A}$  یک ماتریس  $n \times k$  با بردارهای  $\mathbf{a}^{(i)}$  به عنوان ستونهای آن است. برای تشخیص استقلال خطی یا وابسته خطی بودن مجموعه بردارها، مجموعه ترکیب خطی معادله (B. 39) را مساوی صفر قرار می دهیم.

$$x_1 \mathbf{a}^{(1)} + x_2 \mathbf{a}^{(2)} + \dots + x_k \mathbf{a}^{(k)} = \mathbf{0}; \quad \text{یا} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{B. 40})$$

این یک دستگاه معادله همگن با  $x_i$  ها به عنوان مجهول را می دهد.  $n$  معادله و  $k$  مجهول وجود دارد. دقت کنید  $x = 0$  معادله (B.40) را برآورده می کند. اگر  $x = 0$  تنها جواب باشد آن گاه مجموعه بردارها به طور خطی مستقلند. در این حالت رتبه ماتریس  $A$  باید مساوی  $k$  (تعداد بردارها در مجموعه) باشد. اگر یک مجموعه از اعداد اسکالر  $x_i$  که تمامی آنها صفر نباشند و در معادله (B.40) صدق کنند، آن گاه بردارهای  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}$  را به طور خطی وابسته می گویند. در این حالت  $r$ ، رتبه  $A$ ، کمتر از  $k$  است.

اگر مجموعه ای از بردارها به طور خطی وابسته باشند، آن گاه یک یا چند تایی آنها با هم موازی اند، یا دست کم یک بردار وجود دارد که می تواند برحسب ترکیب خطی دیگر بردارها بیان شود. یعنی، حداقل یکی از اعداد اسکالر  $x_1, x_2, \dots, x_k$  باید غیر صفر باشند. اگر فرض کنیم  $x_j$  غیر صفر باشد، آن گاه معادله (B.40) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$-x_j a^{(j)} = x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_{j-1} a^{(j-1)} + x_{j+1} a^{(j+1)} + \dots + x_k a^{(k)} = \sum_{i=1}^k x_i a^{(i)}; \quad i \neq j$$

یا، چون  $x_j \neq 0$ ، می توانیم طرفین را بر آن تقسیم کرده و عبارت زیر را به دست آوریم

$$a^{(j)} = - \sum_{i=1}^k (x_i/x_j) a^{(i)}; \quad i \neq j \quad (\text{B.41})$$

در معادله (B.41)، ما  $a^{(j)}$  را برحسب یک ترکیب خطی از  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(j-1)}, a^{(j+1)}, \dots, a^{(k)}$  بیان کرده ایم. به طور کلی، می بینیم که اگر یک مجموعه از بردارها به طور خطی وابسته باشند، آن گاه دست کم یکی از آنها را می توان به عنوان ترکیب خطی بقیه نوشت.

**مثال B.9** آزمون استقلال خطی بردارها. استقلال خطی مجموعه برداری زیر را بررسی کنید.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a^{(1)} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, & a^{(2)} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & a^{(3)} &= \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \text{(ii)} \quad a^{(1)} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, & a^{(2)} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, & a^{(3)} &= \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حل. برای بررسی استقلال خطی، ترکیب خطی معادله (B. 39) را تشکیل می دهیم و آن را مساوی صفر قرار می دهیم، مانند معادله (B. 40). دستگاه معادلات همگن برای به دست آوردن اعداد اسکالر  $x_i$  حل می شوند. اگر تمامی اعداد اسکالر صفر باشند، آن گاه مجموعه بردارهای داده شده به طور خطی مستقلند؛ در غیر این صورت وابسته اند.

بردارهای مجموعه (i) به طور خطی وابسته اند، چون  $x_1 = 1$ ،  $x_2 = 2$  و  $x_3 = -1$  به ترکیب خطی معادله (B. 40) مقدار صفر می دهد، یعنی

$$a^{(1)} + 2a^{(2)} - a^{(3)} = 0$$

همچنین می توان بررسی کرد و دید رتبه ماتریس زیر که ستونهای آن بردارهای داده شده هستند فقط ۲ است؛ پس مجموعه بردارها از نظر خطی وابسته اند:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

برای مجموعه (ii)، بیایید یک ترکیب خطی از بردارهای داده شده تشکیل و آن را مساوی صفر قرار دهیم:

$$x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + x_3 a^{(3)} = 0 \quad (a)$$

این معادله ای برداری است که وقتی به شکل تعمیم یافته نوشته شود دستگاه زیر را می دهد:

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \quad (b)$$

$$6x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 0 \quad (c)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \quad (d)$$

$$-2x_1 + x_3 = 0 \quad (e)$$

به روش حذفی دستگاه معادلات قبلی را حل می کنیم.

از معادله (e)، داریم  $x_3 = 2x_1$ . معادله های (b) تا (d) به شکل زیر در می آیند

$$14x_1 + 4x_2 = 0 \quad (f)$$

$$24x_1 + 3x_2 = 0 \quad (g)$$

$$10x_1 + 2x_2 = 0 \quad (h)$$

از معادله (h)، داریم  $x_2 = -5x_1$ . با جایگزینی این نتیجه در معادله‌های (f) و (g) داریم

$$14x_1 + 4(-5x_1) = -6x_1 = 0 \quad (i)$$

$$24x_1 + 3(-5x_1) = 9x_1 = 0 \quad (j)$$

معادله‌های (i) و (j) ایجاب می‌کند که  $x_1 = 0$ ؛ بنابراین،  $x_2 = -5x_1 = 0$ ،  $x_3 = 2x_1 = 0$ . پس، تنها جواب معادله (a) جواب بدیهی  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  است. بنابراین بردارهای  $a^{(1)}$ ،  $a^{(2)}$  و  $a^{(3)}$  به طور خطی مستقلند.

معادله (B.40) ممکن است به عنوان مجموعه‌ای از  $n$  معادله همزمان  $k$  مجهولی در نظر گرفته شود. برای دیدن این،  $k$  بردار را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, a^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, a^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

همچنین، فرض کنید  $A_{n \times k} = [a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}]$ ، یعنی  $A$  ماتریسی است که  $i$  امین ستون آن  $i$  امین بردار  $a^{(i)}$  است. آن گاه معادله (B.40) می‌تواند به شکل زیر نوشته شود

$$Ax = 0 \quad (B.42)$$

نتیجه بخش B.5 نشان می‌دهد که یک جواب یگانه برای معادله (B.42) وجود دارد اگر و تنها اگر  $r$ ، رتبه  $A$ ، مساوی  $k$  ( $r = k < n$ )، تعداد ستونهای  $A$  باشد. در آن حالت، جواب یگانه عبارت است از  $x = 0$ . بنابراین، بردارهای  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}$  به طور خطی مستقلند اگر و تنها اگر رتبه ماتریس  $A$ ،  $k$  (تعداد بردارهای مجموعه) باشد.

دقت کنید اگر  $k > n$  باشد، آن گاه رتبه  $A$  نمی‌تواند از  $n$  بیشتر باشد. بنابراین، اگر

$k > n$  باشد،  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}$  همیشه به طور خطی وابسته است. پس، بیشترین تعداد از بردارهای  $n$  مؤلفه ای که به طور خطی وابسته باشند  $n$  است. هر مجموعه  $(n+1)$  برداری همیشه به طور خطی وابسته است. اگر مجموعه ای از بردارهای  $(n)$  مؤلفه ای به طور خطی مستقل  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$  داده شود، هر بردار  $(n)$  مؤلفه ای دیگر  $b$  می تواند برحسب ترکیب خطی یگانه ای از این بردارها بیان شود. مسأله عبارت است از انتخاب مجموعه ای از اعداد اسکالر  $x_1, x_2, \dots, x_n$  به طوری که

$$x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_n a^{(n)} = b; \quad \text{یا} \quad Ax = b \quad (B.43)$$

ما می خواهیم نشان دهیم که برای معادله (B.43) جوابی وجود دارد و آن جواب یگانه است. دقت کنید که  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$  به طور خطی مستقلند. بنابراین رتبه ماتریس ضرایب  $A$ ،  $n$  است، و رتبه ماتریس افزایش یافته  $[A, b]$  نیز  $n$  است. رتبه ماتریس افزایش یافته نمی تواند  $(n+1)$  باشد، زیرا ماتریس فقط  $n$  سطر دارد. پس، معادله (B.43) همیشه برای هر  $b$  داده شده یک جواب دارد. به علاوه،  $A$  غیر منفرد است، پس جواب یگانه است.

به طور خلاصه، نکات زیر را برای هر مجموعه  $k$  برداری که هر کدام  $n$  مؤلفه دارند بیان می کنیم:

۱. اگر  $k > n$  باشد، مجموعه بردارها همیشه به طور خطی وابسته اند، به عنوان مثال سه برداری که هر کدام دو مؤلفه دارند. یعنی تعداد بردارهایی که به طور خطی مستقلند همیشه کمتر یا مساوی  $n$  است، به عنوان مثال، برای بردارهای دو مؤلفه ای، حداکثر دو بردار خطی مستقل وجود دارد.

۲. اگر  $n$  بردار خطی مستقل  $n$  بعدی وجود داشته باشند، آن گاه هر بردار  $n$  مؤلفه ای می تواند به عنوان ترکیب خطی یگانه ای از آنها بیان شود، به عنوان مثال، اگر دو بردار خطی مستقل  $a^{(1)} = (1, 0)$  و  $a^{(2)} = (0, 1)$  دو بعدی داده شود، هر بردار مثل  $b = (b_1, b_2)$  می تواند به عنوان ترکیب خطی یگانه ای از  $a^{(1)}$  و  $a^{(2)}$  بیان شود.

۳. استقلال خطی هر مجموعه بردار می تواند به دو روش مشخص شود:

- (i) ماتریس  $A$  را به ابعاد  $n \times k$  تشکیل دهید که ستونهایش بردارهای داده شده باشند. آن گاه، اگر رتبه  $r$  مساوی  $k$  ( $r = k$ ) باشد، مجموعه داده شده به طور خطی مستقلند؛ در غیر این صورت وابسته است.

(ii) ترکیب خطی بردارهای داده شده را مساوی صفر قرار دهید، یعنی  $Ax = 0$ . اگر  $x = 0$  تنها جواب سیستم حاصل باشد، آن گاه مجموعه مستقل است؛ در غیر این صورت وابسته است.

### B.6.2 نشانه‌های برداری

قبل از تعریف مفهوم یک فضای برداری، لازم است بستر جمع<sup>۱</sup> و بستر ضرب اسکالر را تعریف کنیم:

**تعریف: بستر جمع.** یک مجموعه بردار را از نظر جمع بسته می‌گویند اگر جمع هر دو بردار مجموعه نیز در مجموعه باشد.

**تعریف: بستر ضرب اسکالر.** یک مجموعه بردار را از نظر ضرب اسکالر بسته می‌گویند اگر ضرب هر بردار با یک عدد اسکالر یک بردار از مجموعه را بدهد.

**تعریف: فضای برداری.** یک مجموعه غیرتهی  $S$  از عناصر (بردارهای)  $x, y, z, \dots$  فضای برداری نامیده می‌شود اگر دو عمل جبری (جمع بردار و ضرب در یک عدد اسکالر حقیقی) روی آنها خواص زیر را برآورده کند:

۱. بستر جمع: اگر  $x \in S$  و  $y \in S$  آن گاه  $x + y \in S$ .
۲. جابه‌جایی در جمع:  $x + y = y + x$ .
۳. شرکت پذیری در جمع:  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
۴. همانندی<sup>۲</sup> در جمع: یک بردار صفر  $0$  در مجموعه  $S$  وجود دارد طوری که برای همه  $x$  ها  $x + 0 = x$ .
۵. عکس در جمع: یک  $-x$  در مجموعه  $S$  وجود دارد طوری که برای همه  $x$  ها  $x + (-x) = 0$ .
۶. بستر ضرب اسکالر: برای اعداد اسکالر حقیقی  $\alpha, \beta, \dots$ ، اگر  $\alpha x \in S$ .
۷. توزیعی:  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ .
۸. توزیعی:  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .
۹. شرکت پذیری در ضرب اسکالر:  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ .

۱۰. همانندی در ضرب اسکالر:  $1x = x$ .

در بخش گذشته، به این نکته توجه داده شد که در یک مجموعه که همه بردارهای آن  $n$  مؤلفه ای هستند، ماکزیمم تعداد بردارهای به طور خطی مستقل  $n$  است. پس، برای هر زیرمجموعه از این مجموعه، یک تعداد ماکزیمم از بردارهای به طور خطی مستقل وجود دارد. به ویژه، هر فضای برداری تعداد ماکزیممی از بردارهای به طور خطی مستقل دارد. این عدد بعد فضای برداری نامیده می شود. اگر یک فضای بردار بعد  $k$  داشته باشد، آن گاه هر مجموعه از  $k$  بردار به طور خطی مستقل در فضای برداری یک پایه برای فضای برداری نامیده می شود. هر بردار دیگری در فضای برداری می تواند به عنوان یک ترکیب خطی یگانه از مجموعه بردارهای پایه داده شده بیان شود.

**مثال B.10** **آزمون برای فضای برداری.** بررسی کنید که آیا مجموعه  $S = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 0\}$  یک فضای برداری است.

**حل.** برای این بررسی دو بردار در  $S$  در نظر می گیریم

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

در حالی که اسکالرهایی  $a, b, c$  و  $d$  کاملاً اختیاری هستند. آن گاه،

$$x + y = \begin{bmatrix} 0 \\ a + c \\ b + d \end{bmatrix}$$

بنابراین  $x + y$  در مجموعه  $S$  است. همچنین، برای هر اسکالر  $\alpha$ ،

$$\alpha x = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$$

بنابراین  $\alpha x$  در مجموعه  $S$  است. پس  $S$  از نظر جمع و ضرب اسکالر بسته است. تمامی خواص دیگر تعریف یک فضای برداری به سادگی می تواند اثبات شود. برای نشان دادن خاصیت (۲)، داریم

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ a+c \\ b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c+a \\ d+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

«شرکت پذیری در جمع» به شکل زیر نشان داده می شود

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} &= \begin{bmatrix} 0 \\ a+c \\ b+d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a+c+e \\ b+d+f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c+e \\ d+f \end{bmatrix} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}). \end{aligned}$$

برای همانندی در جمع ما یک بردار صفر در مجموعه  $S$  داریم، مانند

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

طوری که

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ a+0 \\ b+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{x}$$

اگر  $-\mathbf{x}$  را به شکل زیر تعریف کنیم، در جمع وارون وجود دارد

$$-\mathbf{x} = -\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ -b \end{bmatrix}$$

طوری که

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ a+(-a) \\ b+(-b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

به روش مشابه، خواص ۷ تا ۱۰ می توانند به راحتی نشان داده شوند.

بنابراین، مجموعه  $S$  یک فضای برداری است. دقت کنید که مجموعه

$V = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 1\}$  یک فضای برداری نیست.

اکنون بیاییم بعد  $S$  را تعیین کنیم. دقت کنید اگر  $A$  ماتریسی باشد که ستونهایش بردارهایی در  $S$  باشند، آن گاه  $A$  سه سطر دارد و اولین سطر فقط صفرها هستند. پس، رتبه  $A$  باید کمترین مساوی ۲ باشد و بعد  $S$  یا ۱ یا ۲ است. برای این که نشان دهیم رتبه  $A$  در حقیقت ۲ است، ما فقط نیاز به یافتن دو بردار به طور خطی مستقل داریم. در زیر سه تا از چنین مجموعه‌هایی که دو بردار به طور خطی مستقل دارند از مجموعه  $S$  آمده است: رتبه

$$(i) \mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \mathbf{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \mathbf{a}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

هرکدام از این سه مجموعه یک پایه برای  $S$  است. هر برداری در  $S$  می‌تواند به عنوان ترکیب خطی از هریک از این سه مجموعه بیان شود. اگر  $\mathbf{x} = (0, c, d)$  یک عنصر از  $S$  باشد، آن گاه

$$\begin{bmatrix} 0 \\ c \\ d \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \mathbf{x} = \frac{c}{2} \mathbf{a}^{(3)} + \left(c - \frac{d}{2}\right) \mathbf{a}^{(4)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ c \\ d \end{bmatrix} = (c/2) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (c - d/2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \mathbf{x} = \left(\frac{c+d}{2}\right) \mathbf{a}^{(5)} + \left(\frac{c-d}{2}\right) \mathbf{a}^{(6)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ c \\ d \end{bmatrix} = (c+d)/2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (c-d)/2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

## B.7 مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

برای یک ماتریس  $n \times n$ ،  $A$ ، هر بردار غیر صفری که رابطه زیر را برآورده کند

$$Ax = \lambda x \quad (B.44)$$

در حالی که  $\lambda$  یک ضریب اسکالر است، یک بردار ویژه (بردار مشخصه یا مناسب) نامیده می شود. عدد اسکالر  $\lambda$  مقدار ویژه (مقدار مشخصه یا مناسب) نامیده می شود. چون  $x \neq 0$  است، از معادله (B.44) می بینیم که  $\lambda$  به عنوان ریشه های معادله مشخصه زیر خواهد بود

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (B.45)$$

معادله (B.45) یک چندجمله ای از درجه  $n$  ام بر حسب  $\lambda$  می دهد. ریشه های این چندجمله ای مقادیر ویژه مورد نیاز هستند. بعد از این که مقادیر ویژه مشخص شدند، بردارهای ویژه می تواند از معادله (B.44) به دست آید.

ماتریس ضرایب  $A$  ممکن است متقارن یا نامتقارن باشد. برای بسیاری از کاربردها،  $A$  یک ماتریس متقارن است، لذا ما این حالت را در این کتاب مورد توجه قرار می دهیم. بعضی از خواص مقادیر ویژه و بردارهای ویژه عبارتند از:

۱. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس حقیقی متقارن، حقیقی هستند. برای ماتریسهای غیر متقارن حقیقی ممکن است مختلط باشند.

۲. بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه متفاوت ماتریسهای متقارن حقیقی بر یکدیگر عمودند (یعنی، ضرب نقطه ای آنها صفر است).

**مثال B.11 محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه.** مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل. مقدار ویژه مسئله به شکل زیر تعریف می شود

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

چندجمله ای مشخصه از  $|A - \lambda I| = 0$  به دست می آید

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

یا

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

ریشه های این چندجمله ای عبارتند از :

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

بنابراین ، مقادیر ویژه ۳ و ۱ هستند .

برادرهای ویژه از معادله (B. 44) به دست می آیند . برای  $\lambda_1 = 3$  ، معادله

(B. 44) به شکل زیر خواهد بود

$$\begin{bmatrix} (2-3) & 1 \\ 1 & (2-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یا  $x_1 = x_2$  . بنابراین ، یک جواب معادله فوق عبارت است از (1, 1) . بعد از

نرمال سازی ، دومین بردار ویژه عبارت است از

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای  $\lambda_2 = 1$  ، معادله (B. 44) عبارت است از

$$\begin{bmatrix} (2-1) & 1 \\ 1 & (2-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یا  $x_1 = -x_2$  . بنابراین ، یک جواب معادله فوق عبارت است از (1, -1) . بعد از

نرمال سازی ، دومین بردار ویژه عبارت است از

$$\mathbf{x}^{(2)} = (1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

می توان نشان داد  $\mathbf{x}^{(1)}$  ،  $\mathbf{x}^{(2)}$  صفر است ، یعنی  $\mathbf{x}^{(1)}$  و  $\mathbf{x}^{(2)}$  برهم عمودند .

## B.8 نرم و عدد شرطی يك ماتریس

## B.8.1 نرم بردارها و ماتریسها

هر بردار  $\mathbf{x}$  بعدی  $\mathbf{x}$  ، یک تابع با مقدار اسکالر مربوط به خود دارد که با  $\|\mathbf{x}\|$  نشان دادهمی شود و اگر سه شرط زیر را برآورده کند آن را یک نرم  $\mathbf{x}$  می نامند :۱ .  $\|\mathbf{x}\| > 0$  برای  $\mathbf{x} \neq 0$  ، و  $\|\mathbf{x}\| = 0$  فقط وقتی که  $\mathbf{x} = 0$  است .۲ .  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  (نامعادله مثلث) .

۳.  $\|ax\| = |a| \|x\|$  در حالی که  $a$  یک عدد اسکالر است.

طول معمولی یک بردار برای  $n \leq 3$  سه شرط گذشته را برآورده می‌کند. بنابراین مفهوم نرم عمومیت دادن طول یک بردار در فضای یک، دو و سه بعدی اقلیدسی است. به عنوان مثال، می‌تواند نشان داده شود که فاصله اقلیدسی در فضای  $n$  بعدی عبارت است از

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x \cdot x} \quad (\text{B. 46})$$

که سه شرط نرم را برآورده می‌کند و بنابراین یک نرم است.

هر ماتریس  $n \times n$ ،  $A$ ، یک تابع اسکالر مربوط به خود دارد که نرم آن است. نرم با  $\|A\|$  نشان داده می‌شود و از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (\text{B. 47})$$

دقت کنید چون  $Ax$  یک بردار است، معادله (B. 47) می‌گوید که نرم  $A$  بردار  $x$  است که نسبت  $\|Ax\|/\|x\|$  را ماکزیمم می‌کند. سه شرط نرم می‌تواند به راحتی برای معادله (B. 47) نشان داده شود، مانند زیر

۱.  $\|A\| > 0$  مگر آن که ماتریس صفر باشد که در آن حالت نرم صفر است.

۲.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

۳.  $\|aA\| = |a| \|A\|$  در حالی که  $a$  یک عدد اسکالر است.

نرمهای بردار دیگری نیز می‌تواند تعریف شود. برای مثال، نرم جمع یا نرم ماکزیمم (که «نرم  $\infty$ » نامیده می‌شود) به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \text{یا} \quad \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (\text{B. 48})$$

آنها نیز سه شرط نرم بردار  $x$  را برآورده می‌کنند.

اگر  $\lambda_1^2$  بزرگترین مقدار ویژه  $A^T A$  باشد، آن گاه با استفاده از معادله (B. 47) می‌توان نشان داد که نرم  $A$  به شکل زیر نیز تعریف می‌شود

$$\|A\| = \lambda_1 > 0$$

به طور مشابه اگر  $\lambda_n^2$  کوچکترین مقدار ویژه  $A^T A$  باشد، آن گاه نرم  $A^{-1}$  به شکل زیر تعریف می شود

$$\|A^{-1}\| = \lambda_n > 0$$

## B.8.2 عدد شرطی يك ماتریس

عدد شرطی عدد اسکالر دیگری است که مربوط به یک ماتریس  $n \times n$  می شود. پنداره عدد شرطی در حل دستگاه معادله های خطی  $Ax = b$  مفید است. اغلب یک عدم اطمینانی در درایه های ماتریس ضرایب  $A$  یا در بردار طرف راست  $b$  وجود دارد. آن گاه سؤال این است که بردار جواب  $x$  نسبت به تغییرات کوچک در  $A$  و  $b$  چگونه تغییر می یابد؟ جواب این سؤال در عدد شرطی ماتریس  $A$  است.

می توان نشان داد که عدد شرطی ماتریس  $n \times n$ ،  $A$  که با  $\text{cond}(A)$  نشان داده می شود عبارت است از

$$\text{cond}(A) = \lambda_1 / \lambda_n \geq 0$$

در حالی که  $\lambda_1^2$  و  $\lambda_n^2$  بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه  $A^T A$  هستند. یک عدد شرطی بزرگتر نشانگر حساسیت زیاد جواب  $x$  به تغییرات درایه های  $A$  و  $b$  است. یعنی، تغییرات کوچکی در  $A$  و  $b$  تغییرات زیادی را در  $x$  به وجود می آورند.

یک عدد شرطی بسیار بزرگ برای  $A$  نشانگر این است که ماتریس تقریباً منفرد است. در این حالت سیستم معادلات مربوط  $Ax = b$  را بدخیم<sup>۱</sup> می نامند

## تمرینهای پیوست B

دترمینانهای زیر را به دست آورید:

$$\text{B.1} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{B.2} \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{B.3} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

برای دترمینانهای زیر، مقدار عدد اسکالر  $\lambda$  را طوری بیابید که دترمینان صفر شود:

$$\text{B.4} \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\text{B.5} \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

رتبه ماتریسهای زیر را به دست آورید

$$\text{B.6} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{B.7} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{B.8} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

جواب معادله‌های زیر را با استفاده از روش حذفی گوسی به دست آورید:

$$\begin{aligned} \text{B.9} \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B.10} \quad x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B.11} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 4x_2 - 5x_3 &= -7 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B.12} \quad 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 7 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B.13} \quad 3x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B.14} \quad x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{B.15} \quad & -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ & -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{B.16} \quad & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \\ & x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{B.17} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{B.18} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2\end{aligned}$$

بررسی کنید که آیا دستگاه معادلات زیر سازگارند یا خیر. اگر سازگارند، جواب عمومی آنها را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}\text{B.19} \quad & 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{B.20} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{B.21} \quad & x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ & x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{B.22} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ & 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{B.23} \quad & x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 9 \\ & -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_7 = 10 \\ & 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 3x_5 - 2x_8 = 17 \\ & 2x_1 - x_2 + x_4 + 5x_5 - 2x_8 = 5\end{aligned}$$

استقلال خطی مجموعه بردارهای زیر را بررسی کنید:

$$\text{B.24} \quad \mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}^{(4)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{B.25} \quad \mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریسهای زیر را بیابید:

$$\mathbf{B.26} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B.27} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B.28} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B.29} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B.30} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$



## يك روش عددی برای حل معادله های غیرخطی

بسیاری از کاربردهای مهندسی با معادله های غیرخطی سروکار دارند. در طراحی بهین، هنگامی که ما شرایط لازم بهینگی را برای مسائل مقید یا نامقید می نویسیم، که در فصل (۳) بحث شد، چنان معادله هایی به وجود می آیند. ریشه های آن مجموعه معادله های غیرخطی طرحهای نامزد مینیمم هستند. پس مسأله یافتن ریشه های معادله های غیرخطی باید مورد مطالعه قرار گیرند.

حل تحلیلی معادله های غیرخطی بجز در حالت های بسیار ساده ای که متغیرها بتواند حذف شود تقریباً ناممکن است. بنابراین، روشهای عددی و رایانه های رقمی باید برای یافتن جوابهای چنان سیستمهایی به کار گرفته شوند. در این پیوست، یک روش عددی اساسی را که به عنوان روش نیوتن - رافسون شناخته می شود، برای یافتن ریشه های معادله های غیرخطی تشریح می کنیم. در مقاله ها [آتکینسون<sup>۱</sup>، ۱۹۷۸] انواع مختلف این روش و همچنین روشهای دیگر در دسترس هستند. این روش می تواند هر دفعه تنها یک ریشه را با توجه به حدس اولیه پیدا کند. بنابراین، برای یافتن ریشه های مختلف باید نقاط شروع بسیاری که در پهنه بازتری گسترده هستند آزمایش شوند. روش ممکن است و اگرانیز باشد، مگر این که نقطه شروع در همسایگی جواب باشد. اگر واگرا باشد، نقطه شروع دیگری باید انتخاب و آزمایش شود.

ما یک الگوریتم اساسی را که می تواند در یک برنامه رایانه ای پیاده شود شرح خواهیم داد. از طرفی، بیشتر کتابخانه های مراکز رایانه ای برنامه های مختلفی برای حل دستگاه معادله های غیرخطی دارند. این برنامه ها می تواند مستقیماً مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین، باید قبل از نوشتن برنامه الگوریتم امکان استفاده از برنامه های موجود مورد بررسی قرار گیرد.

### C.1 یک معادله غیرخطی

برای تدوین روش، بیایم ابتدا مسأله یافتن ریشه های عمومی یک معادله غیرخطی

$$F(x) = 0 \quad (C.1)$$

را مورد توجه قرار دهیم که  $F(x)$  یک تابع غیرخطی از متغیر مستقل  $x$  است. یک روش ساده یافتن ریشه ها رسم تابع  $F(x)$  بر حسب  $x$  روی یک صفحه رسم است. آن گاه نقاطی که تابع محور  $x$  را قطع می کند ریشه های  $F(x) = 0$  هستند.

روش دومی که توسط نیوتن-رافسون<sup>۱</sup> تدوین شد روش عددی چرخه ای است که در آن از یک حدس اولیه برای ریشه شروع می کنیم. برای حدس مورد نظر عموماً تابع  $F(x)$  مقدار صفر نخواهد داشت، یعنی، حدس اولیه معمولاً ریشه  $F(x) = 0$  نیست. بنابراین، سعی می کنیم حدس را تا پیدا شدن یک ریشه بهبود ببخشیم. این فرآیند، به دورهای متعددی (یا، چرخه هایی) قبل از یافتن ریشه نیاز دارد که می تواند با معادله زیر بیان شود:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (C.2)$$

که اندیس  $k$  شماره چرخه،  $x^{(k)}$  حدس اولیه (نقطه شروع) و  $\Delta x^{(k)}$  تغییر در حدس در چرخه  $k$  ام است. فرآیند چرخه ای تا زمانی که  $F(x)$  به طرف صفر کاهش یابد یا به یک مقدار کوچک قابل قبول مثل  $\delta$  (یعنی معیار توقف عبارت است از  $|F| \leq \delta$ ) نزدیک شود ادامه پیدا می کند. پس روش نیوتن-رافسون به شکلی به مسأله محاسبه  $\Delta x^{(k)}$  در هر چرخه فرآیند بر می گردد. دقت کنید که مفهوم چرخه که در معادله (C.2) بیان شد عمومی است، زیرا اساس بسیاری از روشهای عددی دیگر همین رابطه است.

برای یافتن رابطه ای برای  $\Delta x^{(k)}$ ، ما یک بسط تیلور خطی (مرتبه اول) برای  $F(x)$  حول حدس فعلی  $x^{(k)}$  را استفاده می کنیم. بنابراین، از معادله (۳.۷) داریم

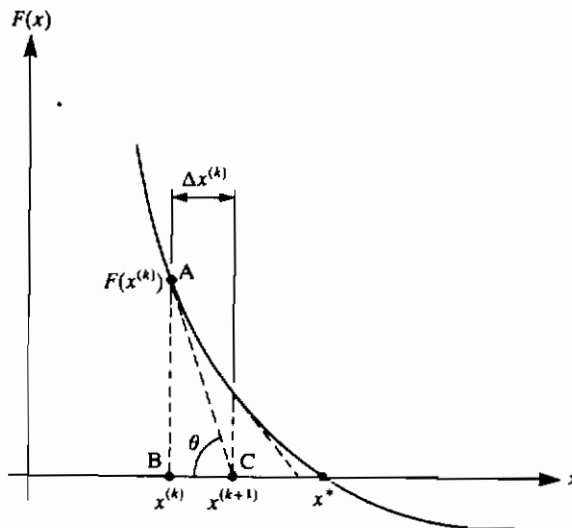
$$F(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) \approx F(x^{(k)}) + \frac{dF(x^{(k)})}{dx} \Delta x^{(k)} \quad (C.3)$$

در معادله (C.3)،  $x^{(k)}$  حد فعلی ریشه،  $F(x^{(k)})$  مقدار فعلی تابع  $F(x)$ ، و  $dF(x^{(k)})/dx$  مقدار فعلی شیب (گرادیان)  $F(x)$  است. هدف عبارت است از یافتن  $\Delta x^{(k)}$  (بهبودی در حدس فعلی) آن چنان که معادله  $F(x) = 0$  در حدس جدید برآورده شود یعنی،  $F(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) = 0$ . بنابراین با مساوی صفر قرار دادن معادله (C.3)،  $\Delta x^{(k)}$  به دست می آید. داریم

$$\Delta x^{(k)} = \frac{-F(x^{(k)})}{(dF/dx)} \quad (C.4)$$

برای هر  $k$ ،  $\Delta x^{(k)}$  از معادله (C.4) محاسبه می شود و یک حدس جدید برای ریشه از معادله (C.2) به دست می آید. فرآیند تازمانی که  $F(x)$  به سمت صفر برود تکرار می شود.

روش نیوتن - رافسون تعبیر هندسی ساده ای نیز دارد. برای دیدن آن به ترسیمه تابع  $F(x)$  بر حسب  $x$  که در شکل C.1 نشان داده شده توجه کنید. نقطه A روی منحنی مقدار فعلی تابع  $F(x)$  و نقطه B روی محور  $x$  حدس فعلی  $x^{(k)}$  برای ریشه  $F(x) = 0$  است. هدف روش رسیدن به نقطه  $x^*$  است. روش با دنبال کردن مماس بر منحنی  $F(x)$  در نقطه A به جلو می رود. تقاطع مماس با محور  $x$ ، نقطه C یعنی  $x^{(k+1)}$  را می دهد که از آن جا فرآیند تکرار می شود.



شکل C.1 تعبیر ترسیمی روش نیوتن - رافسون برای یافتن ریشه های  $F(x) = 0$

پیوست C- یک روش عددی برای حل معادله های غیرخطی

هندسه شکل C.1 می تواند برای به دست آوردن معادله (C.4) استفاده شود. برای انجام این کار، مثلث ABC را در نظر می گیریم:

$$\frac{F(x^{(k)})}{\Delta x^{(k)}} = \tan \theta = - \frac{dF(x^{(k)})}{dx}$$

یا

$$\Delta x^{(k)} = - \frac{F(x^{(k)})}{(dF/dx)}$$

که مانند معادله (C.4) است.

گامهای چرخه روش نیوتن-رافسون به شکل زیر خلاصه می شود:

گام ۱. یک نقطه شروع  $x^{(0)}$  انتخاب کرده و پارامتر  $\delta$  برای توقف فرآیند چرخه را تعیین کنید. شمارنده چرخه فعلی را  $k=0$  قرار دهید.

گام ۲. تابع  $F$  را در حدس فعلی  $x^{(k)}$  محاسبه کنید. همگرایی را بررسی کنید؛ اگر  $|F(x^{(k)})| \leq \delta$ ، آن گاه فرآیند چرخه را متوقف کرده و  $x^{(k)}$  را به عنوان ریشه  $F(x) = 0$  قبول کنید. در غیر این صورت ادامه دهید.

گام ۳. مشتق تابع  $dF/dx$  را در نقطه حدس  $x^{(k)}$  محاسبه کنید.

گام ۴. مقدار  $\Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})/(dF/dx)$  را محاسبه کنید.

گام ۵. حدس برای ریشه را با  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$  به هنگام کنید.

گام ۶.  $k = k + 1$  قرار داده و به گام ۲ بروید.

ما روش را در مثال زیر توضیح می دهیم.

مثال C.1 ریشه های يك معادله غیرخطی با روش نیوتن-رافسون. يك ریشه معادله زیر را با استفاده از روش نیوتن-رافسون که از نقطه  $x^{(0)} = 1.0$  شروع شود بیابید:

$$F(x) = \frac{2x}{3} - \sin x = 0$$

حل. مشتق  $F(x)$  برای استفاده در معادله (C.4) عبارت است از

$$\frac{dF}{dx} = \frac{2}{3} - \cos x$$

جدول C.1 چرخه های روش نیوتن - رافسون برای مثال C.1:  $F(x) = 2x/3 - \sin x$

$k$	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$dF(x^{(k)})/dx$	$\Delta x^{(k)}$
0	1.000	-0.175	0.1264	1.383
1	2.383	0.900	0.1393	-0.646
2	1.737	0.172	0.832	-0.207
3	1.530	0.021	0.626	-0.034
4	1.496	0.00013	—	—

گامهای الگوریتم گذشته را دنبال می کنیم :

1.  $x^{(0)} = 1.0$ ; فرض کنید  $\delta = 0.001$ ;  $k = 0$ .
2.  $F(x^{(0)}) = \frac{2}{3}(1) - \sin(1) = -0.1750$ .  
بنابراین  $x^{(0)} = 1.0$  یک ریشه نیست.  $|F| = 0.1750 > 0.001$ .
3.  $\frac{dF}{dx} = \frac{2}{3} - \cos(1) = 0.1264$ .
4.  $\Delta x^{(0)} = \frac{-F(x^{(0)})}{dF/dx} = -\frac{(-0.1750)}{(0.1264)} = 1.3830$ .
5.  $x^{(0+1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$ ; یا  $x^{(1)} = 1.0 + 1.3830 = 2.3830$ .
6.  $k = 0 + 1 = 1$ ; به گام ۲ بروید

نتایج چرخه های مختلف روش قبلی در جدول C.1 خلاصه شده است. در چهارمین چرخه  $|F(x^{(4)})| = 0.00013 < 0.001$  که معیار توقف مشخص شده را برآورده می کند. بنابراین  $x^{(4)} = 1.496$  به عنوان حدس ریشه تابع داده شده گرفته می شود. برای یافتن ریشه های دیگر، باید فرآیند قبلی را از یک نقطه شروع دیگر تکرار کنیم.

## C.2 معادله های غیرخطی چندگانه

روش نیوتن - رافسون قبلی می تواند برای حالت  $n$  معادله غیرخطی  $n$  مجهولی تعمیم داده شود. خوانندگانی که به نحوه به دست آوردن این روش علاقه مند نیستند می توانند مستقیماً به الگوریتم و مسأله نمونه مراجعه کنند.

یک مجموعه از معادلات غیرخطی می تواند به شکل برداری زیر نوشته شود

$$F(x) = 0 \quad (C.5)$$

که  $F$  و  $x$  هر دو بردارهای  $n$  بعدی اند. در روش چرخه ای، ما با حدس  $x^{(0)}$  برای ریشه معادله (C.5) شروع می کنیم. درست مانند گذشته، این حدس می تواند براساس شکل برداری (C.2) بهبود یابد، یعنی

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (C.6)$$

که در آن  $x^{(0)}$  یک حدس اولیه،  $k$  تعداد چرخه و  $\Delta x^{(k)}$  بردار تغییرات در  $x^{(k)}$  حدس زده شده است. روش چرخه تا  $x^{(k)}$  معادله (C.5) را برآورده کند ادامه می یابد. چون محاسبات عددی دقیق نیستند، به معیاری برای قضاوت در مورد ریشه های یافته شده نیاز داریم. یک روش معمول این است که طول بردار  $F(x)$  را از رابطه زیر محاسبه کنیم

$$\|F(x)\| = \left( \sum_{i=1}^n \{F_i(x)\}^2 \right)^{1/2} \quad (C.7)$$

و  $x^*$  را به عنوان ریشه  $F(x) = 0$  قبول کنیم، اگر

$$\|F(x^*)\| \leq \delta \quad (C.8)$$

در حالی که  $\delta > 0$  یک عدد کوچک مشخص است. معیار توقف دیگر ممکن است این باشد که بزرگترین مؤلفه  $F(x)$  معیار توقف را برآورده کند، یعنی  $\delta \leq |F_i|_{\max}$ .

اکنون کار ما این است که یک رابطه برای  $\Delta x^{(k)}$  تدوین کنیم طوری که معادله (C.6) برای بهبود بخشیدن به ریشه معادله (C.5) استفاده شود. برای این کار، همان کارهایی را که برای حالت یک معادله و یک مجهول کردیم دنبال می کنیم؛ یعنی بسط تیلور خطی را برای تابع می نویسیم. برای تدوین روش، حالت دو معادله و دو مجهول را در (C.5) در نظر می گیریم و آن گاه نتایج را به حالت  $n$  معادله  $n$  مجهولی تعمیم می دهیم. معادله (C.5) برای حالت  $n = 2$  عبارت است از

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

و معادله چرخه (C.6) به شکل زیر است

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} + \Delta x_2^{(k)} \end{aligned} \quad (b)$$

برای یافتن عبارتی برای  $\Delta x_1^{(k)}$ ، بسط تیلور خطی برای تابع  $F_1$  و  $F_2$  در معادلات (a) را حول حدس فعلی  $x^{(k)}$  نوشته و مانند گذشته آنها را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} F_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Delta x_2^{(k)} &= 0 \\ F_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta x_1^{(k)} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_2^{(k)} &= 0 \end{aligned} \quad (c)$$

در حالی که مشتقات جزئی  $\partial F_i / \partial x_j$  در حدس فعلی  $x_1^{(k)}$  و  $x_2^{(k)}$  محاسبه می شوند. معادلات (c) دو معادله خطی دو مجهولی از  $\Delta x_1^{(k)}$  و  $\Delta x_2^{(k)}$  است و بقیه مقادیر معلوم هستند. بنابراین، آنها را برای به دست آوردن  $\Delta x_1^{(k)}$  و  $\Delta x_2^{(k)}$  می توان حل کرد و معادلات (b) را برای به هنگام کردن حدس ریشه ها استفاده کرد. فرآیند تا رسیدن به همگرایی تکرار می شود.

معادلات (c) می تواند به شکل ماتریسی زیر نوشته شود

$$\begin{bmatrix} F_1^{(k)} \\ F_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta x_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (d)$$

در حالی که  $F_2^{(k)} = F_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$  و  $F_1^{(k)} = F_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$  عبارتند از مقادیر تابع در حدس فعلی  $x^{(k)}$ . یا، می توانیم معادله را به شکل خلاصه زیر بنویسیم

$$\mathbf{F}^{(k)} + \mathbf{J}[\Delta \mathbf{x}^{(k)}] = 0 \quad (C.9)$$

که در آن بردار  $\mathbf{F}^{(k)}$ ، ماتریس  $\mathbf{J}$  و بردار  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  از معادله (d) به راحتی مشخص می شوند. ماتریس  $\mathbf{J}$  در معادله (C.9) معمولاً جاکوبین دستگاه معادلات نامیده می شود.

معادله (C.9) ما را قادر می سازد که روش نیوتن-رافسون را برای  $n$  معادله  $n$  مجهول تعمیم دهیم. در آن حالت  $\mathbf{F}^{(k)}$  و  $\Delta \mathbf{x}^{(k)}$  بردارهای  $n$  بعدی بوده و  $\mathbf{J}$  ماتریس  $n \times n$  مشتقات جزئی است که به شکل زیر تعریف می شود

$$\mathbf{J} = \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]; \quad i = 1 \text{ to } n; j = 1 \text{ to } n \quad (C.10)$$

با استفاده از روش محاسبه جاکوبین برای دو معادله دو مجهولی که در معادلات (d) گفته شد،

مشاهده می کنیم که  $i$  امین سطر  $J$  در معادله (C. 10) با مشتق گیری از تابع  $F_i(x)$  نسبت به تمامی متغیرها به دست می آید. یعنی، اولین سطر با مشتق گیری از  $F_1$  نسبت به  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ، دومین سطر با مشتق گیری  $F_2$  و غیره به دست می آید. دقت کنید که  $i$  امین سطر جاکوبین در معادله (C. 10) نیز می تواند به عنوان ترانهاده بردار گرادیان  $F_i(x)$  یعنی  $\nabla F_i^T$  به حساب آید.

اگر وارون ماتریس  $J$  را بتوان محاسبه کرد، آن گاه یک بهبود در حدس برای ریشه از رابطه (C. 9) به دست می آید، یعنی

$$\Delta x^{(k)} = -J^{-1}F^{(k)} \quad (C. 11)$$

اما در محاسبات عددی وارون کردن ماتریسها مقرون به صرفه نیست. بنابراین، توصیه می شود  $\Delta x^{(k)}$  با حل دستگاه معادلات خطی زیر که از معادله (C. 9) به دست آمده محاسبه شود؛ یعنی

$$J[\Delta x^{(k)}] = -F^{(k)} \quad (C. 12)$$

پس الگوریتم نیوتن-رافسون به شکل زیر خلاصه می شود:

گام ۱. یک نقطه شروع  $x^{(0)}$  انتخاب کرده و پارامتر  $\delta$  را برای معیار توقف چرخه تعیین کنید. عدد شمارنده چرخه را مساوی صفر قرار دهید،  $k = 0$ .

گام ۲. توابع  $F$  را در حدس فعلی  $x^{(k)}$  محاسبه کنید. همگرایی را بررسی کنید؛ اگر  $\|F^{(k)}\| \leq \delta$ ، آن گاه فرایند چرخه را متوقف کرده و  $x^{(k)}$  را به عنوان ریشه معادله  $F^{(k)} = 0$  قبول کنید. در غیر این صورت ادامه دهید.

گام ۳. ماتریس جاکوبین  $J$  مشتقات جزئی در حدس فعلی  $x^{(k)}$  را از معادله (C. 10) محاسبه کنید؛ یعنی،  $[ \partial F_i / \partial x_j ]$ ؛  $i = 1$  to  $n$ ؛  $j = 1$  to  $n$  را محاسبه کنید.

گام ۴.  $\Delta x^{(k)}$  را از معادله (C. 12) محاسبه کنید.

گام ۵. حدس را برای ریشه با استفاده از معادله (C. 6) بهنگام کنید.

گام ۶.  $k = k + 1$  قرار دهید و به گام ۲ بروید.

دقت کنید چون دستگاه معادلات  $F(x) = 0$  غیرخطی است، در حالت عمومی ریشه های زیادی دارد. الگوریتم نیوتن-رافسون تنها یک ریشه را در هر بار پیدا می کند. روش، بسته به حدس اولیه  $x^{(0)}$ ، به سمت یک ریشه همگرا می شود. برای یافتن سایر ریشه ها باید الگوریتم را با انتخاب یک حدس اولیه  $x^{(0)}$  دیگر دوباره شروع کنیم. همچنین دقت کنید که اگر جاکوبین  $J$  در یکی از چرخه ها منفرد شود، این روش کار نمی کند، زیرا وارون  $J$  نمی تواند محاسبه

گردد. به علاوه، روش حتی اگر جاکوبین  $J$  در همه چرخه ها نامنفرد باشد ممکن است واگرا شود. برای پایا ساختن و همگرایی تکمله های متعددی از روش نیوتن - رافسون اصلی تدوین شده که بیان این قسمتها از هدف این کتاب فراتر است.

**مثال C.2 ریشه های معادلات غیرخطی به کمک روش نیوتن - رافسون.** یک ریشه از دستگاه  $2 \times 2$  غیرخطی زیر را با استفاده از روش نیوتن - رافسون پیدا کنید :

$$F_1(x_1, x_2) = 1.0 - \frac{(4.0E+06)}{x_1^2 x_2} = 0 \quad (e)$$

$$F_2(x_1, x_2) = 250.0 - \frac{(4.0E+06)}{x_1 x_2^2} = 0 \quad (f)$$

حل. برای استفاده از الگوریتم نیوتن - رافسون، به محاسبه جاکوبین سیستم معادلات (e) و (f) نیاز داریم. با استفاده از تعریف معادله (C.10)، جاکوبین عبارت است از

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = (4.0E+06) \begin{bmatrix} 2/x_1^3 x_2 & 1/x_2^2 x_1^2 \\ 1/x_1^2 x_2^2 & 2/x_1 x_2^3 \end{bmatrix} \quad (g)$$

گامهای الگوریتم را مانند زیر استفاده می کنیم :

۱. فرض می کنیم  $x^{(0)} = (500.0, 1.0)$  و  $\delta = 0.10$ ؛  $k$  را صفر قرار می دهیم؛  $k = 0$ .

۲. مقادیر تابع را از معادله های (e) و (f) محاسبه می کنیم

$$F_1 = 1.0 - (4.0E+06)/(500.0 \times 500.0 \times 1.0) = -15$$

$$F_2 = 250.0 - (4.0E+06)/(500.0 \times 1.0 \times 1.0) = -7750$$

$$\|F\| = \sqrt{15^2 + 7750^2} = 7750 > 0.10,$$

پس  $x^{(0)}$  یک ریشه نیست؛ فرآیند چرخه را ادامه می دهیم

۳. ماتریس جاکوبین با استفاده از معادله (g) محاسبه می شود :

$$J = (4.0E+06) \begin{bmatrix} \frac{2}{(500)^3(1.0)} & \frac{1}{(500)^2(1.0)^2} \\ \frac{1}{(500)^2(1.0)^2} & \frac{2}{(500)(1.0)^3} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{8}{125} & 16 \\ 16 & 16000 \end{bmatrix}$$

۴. معادله های (C.9) یا (C.12) سیستم معادلات خطی زیر را برای  $\Delta x_1^{(0)}$  و  $\Delta x_2^{(0)}$  تعریف می کند:

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{125} & 16 \\ 16 & 16000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7750 \end{bmatrix}$$

با حل دو معادله به کمک فرآیند حذفی داریم  $\Delta x_1^{(0)} = 151.0$ ،  $\Delta x_2^{(0)} = 0.330$ .  
برای این مسأله وارون کردن ماتریس J ممکن بوده و با استفاده از معادله (C.11)،  $\Delta x_1^{(0)}$  و  $\Delta x_2^{(0)}$  را محاسبه می کنیم.  $J^{-1}$  با استفاده از روش هم عاملها (پیوست B، بخش B.5) عبارت است از

$$\begin{aligned} J^{-1} &= \frac{1}{|J|} [\text{cofac}(J)]^T \\ &= \frac{1}{768} \begin{bmatrix} 16000 & -16 \\ -16 & \frac{8}{125} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (C.11)، مانند قبل مقادیر مشابهی برای  $\Delta x_1^{(0)}$  و  $\Delta x_2^{(0)}$  به دست می آوریم.

۵. حدس ریشه را با استفاده از معادله (C.6) یا معادلات (b) روز آمد می کنیم

$$x_1^{(0+1)} = x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)} = 500.0 + 151.0 = 651.0$$

$$x_2^{(0+1)} = x_2^{(0)} + \Delta x_2^{(0)} = 1.00 + 0.33 = 1.33$$

۶. به مقدار  $k$  یکی اضافه می کنیم،  $k = 0 + 1 = 1$ ، به گام ۲ می رویم.

جدول C.2 چرخه های نیوتن - رافسون برای مثال C.2

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\ F^{(k)}\ $
0	500.0	1.0000	7750.00
1	651.0	1.3300	3206.00
2	822.0	1.7700	1291.00
3	976.0	2.3500	489.20
4	1047.0	3.0490	161.30
5	1025.0	3.6770	38.50
6	1003.0	3.9630	3.98
7	1000.3	3.9995	0.05

نتایج چرخه های متعدد الگوریتم نیوتن - رافسون در جدول C.2 خلاصه شده است. جدول با شش بار تکرار گامهای الگوریتم تولید شده است. در چرخه هفتم  $\|F^{(7)}\| = 0.005 < 0.10$ . پس  $x^{(7)} = 1000.3, 3.9995$  به عنوان ریشه دستگاه معادلات (e) و (f) است که دقت دلخواه را برآورده می کند. ریشه دقیق عبارت است از  $x^* = (1000.0, 4.0)$ .

## تمرینهای پیوست C

ریشه های معادلات زیر را با استفاده از روش نیوتن - رافسون و  $\delta = 0.001$  پیدا کنید:

C.1  $F(x) = 3x - e^x = 0$  شروع از  $x = 0$

C.2  $F(x) = \sin x = 0$  شروع از  $x = 10$

C.3  $F(x) = \cos x = 0$  شروع از  $x = 2$

C.4  $F(x) = \frac{2x}{3} - \sin x = 0$  شروع از  $x = -4$

دو چرخه روش نیوتن - رافسون را برای دستگاه معادلات غیرخطی زیر کامل کنید:

C.5  $F_1(x) = 1 - \frac{10}{x_1^2 x_2} = 0$

$F_2(x) = 5 - \frac{10}{x_1 x_2^2} = 0;$  شروع از  $(4, 1)$

C.6  $F_1(x) = 5 - \frac{1}{8}x_1 x_2 - \frac{1}{4x_1^2}x_2^2 = 0$

$F_2(x) = -\frac{1}{16}x_1^2 + \frac{1}{2x_1}x_2 = 0;$  شروع از  $(10, 10)$

C.7  $F_1(x) = 3x_1^2 + 12x_2^2 + 10x_1 = 0$

$F_2(x) = 24x_1 x_2 + 4x_2 + 3 = 0;$  شروع از  $(-5, 0)$

تمامی ریشه های دستگاه معادلات غیرخطی زیر را با استفاده از یک برنامه رایانه ای پیدا کنید

C.8 تمرین C.5

C.9 تمرین C.6

C.10 تمرین C.7



## نمونه برنامه های رایانه ای

### D.1 مقدمه

این پیوست حاوی فهرست چند برنامه رایانه ای براساس الگوریتمهای عددی بهینه سازی نامقید است که در فصل (۵) ارائه شد. هدف این است که دانشجویان یاد بگیرند چگونه یک الگوریتم گام به گام را به برنامه رایانه ای تبدیل کنند. دقت کنید که ادعایی مبنی بر پربازده ترین بودن برای برنامه های رایانه ای داده شده نیست. پنداره کلیدی تأکید بر جنبه های عددی مورد نیاز الگوریتمها به طریق ساده و روان است. انتظار می رود کسی که در کاربرد روشهای عددی بهینه سازی مبتدی است برنامه های رایانه ای را تجربه کند و با حل مثالهای عددی احساسی از روشهای متعدد به دست آورد. پس، استفاده از برنامه های رایانه ای این پیوست به عنوان یک جعبه سیاه توصیه نمی شود. برنامه های رایانه ای که در زیر می آید در رایانه های آپولو<sup>۱</sup> تدوین شده است.

### D.2 جست و جوی بازه یکسان

همان طور که در فصل (۵) بحث شد، جست و جوی بازه یکسان ساده ترین روش مینیم سازی یک بعدی است. یک برنامه رایانه ای براساس آن در شکل D.1 داده شده است.

```

C      MAIN PROGRAM FOR EQUAL INTERVAL SEARCH
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)

      DELTA  = 5.0D-2
      EPSLON = 1.0D-3
      NCOUNT = 0
      F      = 0.0D0
      ALFA   = 0.0D0

C
C      TO PERFORM LINE SEARCH CALL SUBROUTINE EQUAL
C
      CALL EQUAL(ALFA,DELTA,EPSLON,F,NCOUNT)
      WRITE(*,10) ' MINIMUM = ', ALFA
      WRITE(*,10) ' MINIMUM FUNCTION VALUE = ', F
      WRITE(*,*) ' NO. OF FUNCTION EVALUATIONS = ', NCOUNT
10     FORMAT(A,1PE14.5)

      STOP
      END

      SUBROUTINE EQUAL(ALFA,DELTA,EPSLON,F,NCOUNT)
      .....
C      THIS SUBROUTINE IMPLEMENTS EQUAL INTERVAL SEARCH
C      ALFA   = OPTIMUM VALUE ON RETURN
C      DELTA   = INITIAL STEP LENGTH
C      EPSLON  = CONVERGENCE PARAMETER
C      F       = OPTIMUM VALUE OF THE FUNCTION ON RETURN
C      NCOUNT = NUMBER OF FUNCTION EVALUATIONS ON RETURN
      .....

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

C
C      ESTABLISH INITIAL DELTA
C
      AL = 0.0D0
      CALL FUNCT(AL,FL,NCOUNT)
10     CONTINUE
      AA = DELTA
      CALL FUNCT(AA,FA,NCOUNT)
      IF (FA .GT. FL) THEN
          DELTA = DELTA * 0.1D0
          GO TO 10
      END IF

C
C      ESTABLISH INITIAL INTERVAL OF UNCERTAINTY
C
C
20     CONTINUE
      AU = AA + DELTA
      CALL FUNCT(AU,FU,NCOUNT)
      IF (FA .GT. FU) THEN
          AL = AA

```

```

        AA = AU
        FL = FA
        FA = FU
        GO TO 20
    END IF
C
C    REFINE THE INTERVAL OF UNCERTAINTY FURTHER
C
30    CONTINUE
    IF ((AU - AL) .LE. EPSLON) GO TO 50
    DELTA = DELTA * 0.1D0
    AA = AL
    FA = FL
40    CONTINUE
    AU = AA + DELTA
    CALL FUNCT(AU,FU,NCOUNT)
    IF (FA .GT. FU) THEN
        AL = AA
        AA = AU
        FL = FA
        FA = FU
        GO TO 40
    END IF
    GO TO 30
C
C    MINIMUM IS FOUND
C
50    ALFA = (AU + AL) * 0.5D0
    CALL FUNCT(ALFA,F,NCOUNT)

    RETURN
    END

SUBROUTINE FUNCT(AL,F,NCOUNT)
.....
C    CALCULATES THE FUNCTION VALUE
C    AL      = VALUE OF ALPHA, INPUT
C    F       = FUNCTION VALUE ON RETURN
C    NCOUNT  = NUMBER OF CALLS FOR FUNCTION EVALUATION
C    .....

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

NCOUNT = NCOUNT + 1
F = 2.0D0 - 4.0D0 * AL + DEXP(AL)

RETURN
END

```

فرض شده است که تابع یک بعدی تک حالتی<sup>۱</sup> و پیوسته بوده و در بازه مورد مطالعه دارای شیب منفی است. طول گام اولیه ( $\delta$ ) و دقت جست و جوی خطی ( $\varepsilon$ ) باید در برنامه اصلی مشخص شوند. زیر برنامه اکوال (EQUAL) از برنامه اصلی فراخوانده می شود تا جست و جوی خطی را به وسیله جست و جوی بازه یکسان انجام دهد. سه وظیفه اصلی که در زیر برنامه اکوال انجام می شوند عبارتند از: (۱) مشخص کردن طول گام اولیه  $\delta$  طوری که  $f(0) > f(\delta)$ ، (۲) مشخص کردن بازه اولیه عدم اطمینان<sup>۲</sup>،  $(\alpha_l, \alpha_u)$ ، و (۳) کاهش بازه عدم اطمینان طوری که  $(\alpha_u - \alpha_l) \leq \varepsilon$ .

برنامه فرعی اکوال برنامه فرعی فانکت (FUNCT) را برای محاسبه مقدار تابع یک بعدی در گامهای آزمایشی مختلف فرا می خواند. برنامه فرعی فانکت توسط کاربر باید آماده گردد. برای مثال،  $f(\alpha) = 2 - 4\alpha + e^\alpha$  به عنوان تابع مینیمم شونده یک بعدی انتخاب شده است. فهرست برنامه در شکل D.۱ توضیحات لازم را دربر دارد. در برنامه فرعی اکوال، علایم زیر به کار می رود:

AL = حد پایینی  $\alpha$ ،  $\alpha_l$

AU = حد بالایی  $\alpha$ ،  $\alpha_u$

FL = مقدار تابع در  $\alpha_l$ ؛  $f(\alpha_l)$

FU = مقدار تابع در  $\alpha_u$ ؛  $f(\alpha_u)$

AA = نقطه میانی  $\alpha_u$

FA = مقدار تابع در  $\alpha_u$ ؛  $f(\alpha_u)$

### D.3 جست و جوی بخش طلایی

جست و جوی بخش طلایی به عنوان یک روش مؤثر که فقط به مقدار تابع نیاز دارد مورد توجه قرار می گیرد. برنامه فرعی گلد (GOLD)، که در شکل D.2 داده شده، الگوریتم جست و جوی بخش طلایی را که در فصل (۵) ارائه شد اجرا می کند و از برنامه اصلی که در شکل D.۱ داده شد فراخوانده می شود؛ به جای فراخواندن برنامه فرعی اکوال برنامه فرعی گلد فراخوانده می شود. طول گام اولیه و بازه اولیه عدم اطمینان در گلد مانند برنامه فرعی

اکوال تعیین می شود. بازه عدم اطمینان برای برآوردن دقت جست و جوی خطی با اعمال گامهای ۴، ۵ و ۶ الگوریتم داده شده در فصل (۵) به اندازه بیشتری کاهش می یابد. برنامه فرعی فانکت برای محاسبه مقدار تابع در گامهای آزمایشی استفاده می شود. علایم زیر در برنامه فرعی گلد به کار رفته است:  $AA = \alpha_0$ ،  $AB = \alpha_1$ ،  $AL = \alpha_2$ ،  $AU = \alpha_3$ ،  $FA = f(\alpha_0)$ ،  $FU = f(\alpha_3)$ ،  $FL = f(\alpha_2)$ ،  $FB = f(\alpha_1)$  و  $GR = \text{نسبت طلایی}$ ،  $(\sqrt{5} + 1) / 2$ .

#### SUBROUTINE GOLD(ALFA,DELTA,EPSLON,F,NCOUNT)

```

C .....
C THIS SUBROUTINE IMPLEMENTS GOLDEN SECTION SEARCH
C ALFA  = OPTIMUM VALUE OF ALPHA ON RETURN
C DELTA  = INITIAL STEP LENGTH
C EPSLON = CONVERGENCE PARAMETER
C F      = OPTIMUM VALUE OF THE FUNCTION ON RETURN
C NCOUNT = NUMBER OF FUNCTION EVALUATIONS ON RETURN
C .....

```

#### IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

```

GR = 0.5D0 * DSQRT(5.0D0) + 0.5D0

C
C ESTABLISH INITIAL DELTA
C
AL = 0.0D0
CALL FUNCT(AL,FL,NCOUNT)
10 CONTINUE
AA = DELTA
CALL FUNCT(AA,FA,NCOUNT)
IF (FA .GT. FL) THEN
    DELTA = DELTA * 0.1D0
    GO TO 10
END IF

C
C ESTABLISH INITIAL INTERVAL OF UNCERTAINTY
C
J = 0
20 CONTINUE
J = J + 1
AU = AA + DELTA * (GR ** J)
CALL FUNCT(AU,FU,NCOUNT)
IF (FA .GT. FU) THEN
    AL = AA
    AA = AU
    FL = FA
    FA = FU
    GO TO 20
END IF

```

شکل D.2 برنامه فرعی گلد برای جست و جوی بخش طلایی

```

C
C      REFINE THE INTERVAL OF UNCERTAINTY FURTHER
C
      AB = AL + (AU - AL)/GR
      CALL FUNCT(AB,FB,NCOUNT)
30    CONTINUE
      IF ((AU - AL) .LE. EPSLON) TO GO 80
C
C      IMPLEMENT STEPS 4, 5 OR 6 OF THE ALGORITHM
C
      IF (FA - FB) 40, 60, 50
C
C      FA IS LESS THAN FB (STEP 4)
C
40    AU = AB
      FU = FB
      AB = AA
      FB = FA
      AA = AL + (AU - AL) * (1.0D0 - 1.0D0 / GR)
      CALL FUNCT(AA,FA,NCOUNT)
      GO TO 30
C
C      FA IS GREATER THAN FB (STEP 5)
C
50    AL = AA
      FL = FA
      AA = AB
      FA = FB
      AB = AL + (AU - AL) / GR
      CALL FUNCT(AB,FB,NCOUNT)
      GO TO 30
C
C      FA IS EQUAL TO FB (STEP 6)
C
60    AL = AA
      FL = FA
      AU = AB
      FU = FB
      AA = AL - (1.0D0 - 1.0D0 / GR) * (AU - AL)
      CALL FUNCT (AA,FA, NCOUNT)
      AB = AL + (AU - AL) / GR
      CALL FUNCT (AB,FB,NCOUNT)
      GO TO 30
C
C      MINIMUM IS FOUND
C
80    ALFA = (AU + AL) * 0.5D0
      CALL FUNCT(ALFA,F,NCOUNT)

      RETURN
      END

```

## D.4 روش تندترین کاهش

تندترین کاهش ساده ترین روش بهینه سازی نامقید براساس مشتق<sup>۱</sup> است. یک برنامه رایانه ای برای روش در شکل D.3 ارائه شده است. گامهای اساسی در الگوریتم عبارتند از:

(۱) محاسبه مشتق (گرادیان) تابع هزینه در نقطه فعلی، (۲) به دست آوردن طول گام بهین در امتداد مخالف جهت گرادیان، و (۳) به هنگام کردن طرح، بررسی معیار همگرایی و در صورت نیاز تکرار گامهای گذشته. برنامه اصلی در حقیقت این گامها را دنبال می کند. آرایه ای که در برنامه معرفی شده باید بعد بردار متغیر طراحی را داشته باشد. همچنین، داده های اولیه و نقطه شروع باید توسط کاربر فراهم گردد. تابع هزینه و مشتق آن به ترتیب باید در برنامه فرعی فانکت و گراد (GRAD) آماده گردند. برای یک مسأله چندمتغیره جست و جوی خطی به روش جست و جوی بخش طلایی در برنامه فرعی گلدام (GOLDM) انجام می شود. برای مثال،  $x = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$  (x) فیه عنوان تابع هزینه انتخاب شده است.

```

C      THE MAIN PROGRAM FOR STEEPEST DESCENT METHOD
C      .....
C      DELTA  = INITIAL STEP LENGTH FOR LINE SEARCH
C      EPSLON = LINE SEARCH ACCURACY
C      EPSL   = STOPPING CRITERION FOR STEEPEST DESCENT METHOD
C      NCOUNT = NO. OF FUNCTION EVALUATIONS
C      NDV    = NO. OF DESIGN VARIABLES
C      NOC    = NO. OF CYCLES OF THE METHOD
C      X      = DESIGN VARIABLE VECTOR
C      D      = DIRECTION VECTOR
C      G      = GRADIENT VECTOR
C      WK     = WORK ARRAY USED FOR TEMPORARY STORAGE
C      .....
C
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
C      DIMENSION X(3), D(3), G(3), WK(3)
C
C      DEFINE INITIAL DATA
C
C      DELTA  = 5.0D-2
C      EPSLON = 1.0D-4
C      EPSL   = 5.0D-3
C      NCOUNT = 0
C      NDV    = 3
C      NOC    = 100

```

شکل D.3 برنامه رایانه ای روش تندترین کاهش

```

C
C   STARTING VALUES OF THE DESIGN VARIABLES
C
      X(1) = 2.0D0
      X(2) = 4.0D0
      X(3) = 10.0D0

      CALL GRAD(X,G,NDV)
      WRITE(*,10)
10    FORMAT(' NO.    COST FUNCT' STEP SIZE',
&      ' NORM OF GRAD  ')
      DO 20 K = 1, NOC
        CALL SCALE (G,D,-1.0D0,NDV)
        CALL GOLDM(X,D,WK,ALFA,DELTA,EPSLON,F,NCOUNT,NDV)
        CALL SCALE (D,D,ALFA,NDV)
        CALL PRINT(K,X,ALFA,G,F,NDV)
        CALL ADD(X,D,X,NDV)
        CALL GRAD(X,G,NDV)
        IF(TNORM(G,NDV) .LE. EPSL) GO TO 30
20    CONTINUE
      WRITE (*,*)
      WRITE(*,*) ' LIMIT ON NO. OF CYCLES HAS EXCEEDED'
      WRITE(*,*) ' THE CURRENT DESIGN VARIABLES ARE:'
      WRITE(*,*) X
      CALL EXIT

30    WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) 'THE OPTIMAL DESIGN VARIABLES ARE:'
      WRITE (*,40) X
40    FORMAT(3F15.6)
      CALL FUNCT(X,F,NCOUNT,NDV)
      WRITE(*,50) ' THE OPTIMUM COST FUNCTION VALUE IS :', F
50    FORMAT(A, F13.6)
      WRITE (*,*) 'TOTAL NO. OF FUNCTION EVALUATIONS ARE', NCOUNT

      STOP
      END

      SUBROUTINE GRAD(X,G,NDV)
C
C   CALCULATES THE GRADIENT OF F(X) IN VECTOR G
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
      DIMENSION X(NDV),G(NDV)

      G(1) = 2.0D0 * X(1) + 2.0D0 * X(2)
      G(2) = 2.0D0 * X(1) + 4.0D0 * X(2) + 2.0D0 * X(3)
      G(3) = 2.0D0 * X(2) + 4.0D0 * X(3)

      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE SCALE (A,X,S,M)
C
C  MULTIPLES VECTOR A(M) BY SCALAR S AND STORES IN X(M)
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
  DIMENSION A(M),X(M)

  DO 10 I = 1, M
    X(I) = S * A(I)
10  CONTINUE

  RETURN
  END

DOUBLE PRECISION FUNCTION TNORM(X,N)
C
C  CALCULATES NORM OF VECTOR X(N)
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
  DIMENSION X(N)

  SUM = 0.0D0
  DO 10 I = 1, N
    SUM = SUM + X(I) * X(I)
10  CONTINUE
  TNORM = DSQRT(SUM)

  RETURN
  END
SUBROUTINE ADD(A,X,C,M)
C
C  ADDS VECTORS A(M) AND X(M) AND STORES IN C(M)
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
  DIMENSION A(M), X(M), C(M)

  DO 10 I = 1, M
    C(I) = A(I) + X(I)
10  CONTINUE

  RETURN
  END

SUBROUTINE PRINT(I,X,ALFA,G,F,M)
C
C  PRINTS THE OUTPUT
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
  DIMENSION X(M),G(M)

  WRITE (*,10) I, F, ALFA, TNORM(G,M)
10  FORMAT(I4, 3F15.6)

  RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE FUNCT(X,F,NCOUNT,NDV)
C
C   CALCULATES THE FUNCTION VALUE
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
  DIMENSION X(NDV)

  NCOUNT = NCOUNT + 1
  F = X(1) ** 2 + 2.D0 * (X(2) ** 2) + 2.D0 * (X(3) ** 2)
&    + 2.0D0 * X(1) * X(2) + 2.D0 * X(2) * X(3)

  RETURN
  END

SUBROUTINE UPDATE (XN,X,D,AL,NDV)
C
C   UPDATES THE DESIGN VARIABLE VECTOR
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
  DIMENSION XN(NDV), X(NDV), D(NDV)

  DO 10 I = 1, NDV
    XN(I) = X(I) + AL * D(I)
10  CONTINUE

  RETURN
  END

SUBROUTINE GOLDM(X,D,XN,ALFA,DELTA,EPSLON,F,NCOUNT,NDV)
C
C   IMPLEMENTS GOLDEN SECTION SEARCH FOR MULTIVARIATE PROBLEMS
C
C   X      = CURRENT DESIGN POINT
C   D      = DIRECTION VECTOR
C   XN     = CURRENT DESIGN + TRIAL STEP * SEARCH DIRECTION
C   ALFA   = OPTIMUM VALUE OF ALPHA ON RETURN
C   DELTA  = INITIAL STEP LENGTH
C   EPSLON = CONVERGENCE PARAMETER
C   F      = OPTIMUM VALUE OF THE FUNCTION
C   NCOUNT = NUMBER OF FUNCTION EVALUATIONS ON RETURN
C
C   .....

  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
  DIMENSION X(NDV), D(NDV), XN(NDV)

  GR = 0.5D0 * DSORT(5.0D0) + 0.5D0
  DELTA1 = DELTA

C
C   ESTABLISH INITIAL DELTA
C
  AL = 0.D0
  CALL UPDATE(XN,X,D,AL,NDV)
  CALL FUNCT(XN,FL,NCOUNT,NDV)

```

```

F = FL.
10  CONTINUE
    AA = DELTA1
    CALL UPDATE(XN,X,D,AA,NDV)
    CALL FUNCT(XN,FA,NCOUNT,NDV)
    IF (FA .GT. FL) THEN
        DELTA1 = DELTA1 * 0.1D0
        GO TO 10
    END IF

C
C  ESTABLISH INITIAL INTERVAL OF UNCERTAINTY
C
    J = 0
20  CONTINUE
    J = J + 1
    AU = AA + DELTA1 * (GR ** J)
    CALL UPDATE(XN,X,D,AU,NDV)
    CALL FUNCT(XN,FU,NCOUNT,NDV)
    IF (FA .GT. FU) THEN
        AL = AA
        AA = AU
        FL = FA
        FA = FU
        GO TO 20
    END IF

C
C  REFINES THE INTERVAL OF UNCERTAINTY FURTHER
C
    AB = AL + (AU - AL) / GR
    CALL UPDATE(XN,X,D,AB,NDV)
    CALL FUNCT(XN,FB,NCOUNT,NDV)
30  CONTINUE
    IF((AU-AL) .LE. EPSLON) GO TO 80

C
C  IMPLEMENT STEPS 4, 5 OR 6 OF THE ALGORITHM
C
    IF (FA-FB) 40, 60, 50

C
C  FA IS LESS THAN FB (STEP 4)
C
40  AU = AB
    FU = FB
    AB = AA
    FB = FA
    AA = AL + (1.0D0 - 1.0D0 / GR) * (AU - AL)
    CALL UPDATE(XN,X,D,AA,NDV)
    CALL FUNCT(XN,FA,NCOUNT,NDV)
    GO TO 30

C
C  FA IS GREATER THAN FB (STEP 5)
C
50  AL = AA

```

```

FL = FA
AA = AB
FA = FB
AB = AL + (AU - AL) / GR
CALL UPDATE(XN,X,D,AB,NDV)
CALL FUNCT(XN,FB,NCOUNT,NDV)
GO TO 30

C
C   FA IS EQUAL TO FB (STEP 6)
C
60  AL = AA
    FL = FA
    AU = AB
    FU = FB
    AA = AL + (1.0D0 - 1.0D0 / GR) * (AU - AL)
    CALL UPDATE(XN,X,D,AA,NDV)
    CALL FUNCT(XN,FA,NCOUNT,NDV)
    AB = AL + (AU - AL) / GR
    CALL UPDATE(XN,X,D,AB,NDV)
    CALL FUNCT(XN,FB,NCOUNT,NDV)
    GO TO 30

C
C   MINIMUM IS FOUND
C
80  ALFA = (AU + AL) * 0.5D0

    RETURN
    END

```

شکل D.3 ادامه

## D.5 روش نیوتن بهبود یافته

روش نیوتن بهبود یافته نرخ همگرایی درجه دو دارد، زیرا گرادیان و هسیان تابع را محاسبه می کند. دقت کنید که اگر چه روش یک نرخ همگرایی فوق العاده دارد ولی ممکن است به خاطر منفرد بودن یا نامعین بودن ماتریس هسیان تابع هزینه، واگرا شود. یک برنامه برای این روش در شکل D.4 ارائه شده است. تابع هزینه، بردار گرادیان و ماتریس هسیان به ترتیب در برنامه فرعی فانکت، گراد (GRAD) و هسن (HASN) محاسبه می گردند. برای مثال،  $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$  به عنوان تابع هزینه انتخاب شده است. جهت نیوتن با حل دستگاه معادلات خطی در برنامه فرعی سبس اک (SYSEQ) به دست می آید. امید می رود که جهت نیوتن یک جهت کاهشی که در آن جست و جوی خطی از محاسبه یک طول گام مناسب ناتوان است نباشد. در آن حالت، چرخه تکرار متوقف شده و یک پیغام مناسب چاپ می شود. برنامه اصلی برای روش نیوتن بهبود یافته و برنامه های فرعی مربوط در شکل D.4 ارائه شده است.

```

C      THE MAIN PROGRAM FOR MODIFIED NEWTON'S METHOD
C      .....
C      DELTA  = INITIAL STEP LENGTH FOR LINE SEARCH
C      EPSLON = LINE SEARCH ACCURACY
C      EPSL   = STOPPING CRITERION FOR MODIFIED NEWTON'S METHOD
C      NCOUNT = NO. OF FUNCTION EVALUATIONS
C      NDV    = NO. OF DESIGN VARIABLES
C      NOC    = NO. OF CYCLES OF THE METHOD
C      X      = DESIGN VARIABLE VECTOR
C      D      = DIRECTION VECTOR
C      G      = GRADIENT VECTOR
C      H      = HESSIAN MATRIX
C      WK     = WORK ARRAY USED FOR TEMPORARY STORAGE
C      .....

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
DIMENSION X(3), D(3), G(3), H(3,3), WK(3)

C
C      DEFINE INITIAL DATA
C
      DELTA  = 5.0D-2
      EPSLON = 1.0D-4
      EPSL   = 5.0D-3
      NCOUNT = 0
      NDV    = 3
      NOC    = 100

C
C      STARTING VALUES OF THE DESIGN VARIABLES
C
      X(1) = 2.0D0
      X(2) = 4.0D0
      X(3) = 10.0D0

      CALL GRAD(X,G,NDV)
      WRITE(*,10)
10  FORMAT(' NO.    COST FUNCT    STEP SIZE',
&        '      NORM OF GRAD  ')
      DO 20 K = 1, NOC
          CALL HASN(X,H,NDV)
          CALL SCALE(G,D,-1.0D0,NDV)
          CALL SYSEQ(H,NDV,D)

C
C      CHECK FOR THE DESCENT CONDITION
C
      IF (DOT(G,D,NDV) .GE. 1.0E-8) GO TO 60
      CALL GOLDM(X,D,WK,ALFA,DELTA,EPSLON,F,NCOUNT,NDV)
      CALL SCALE(D,D,ALFA,NDV)
      CALL PRINT(K,X,ALFA,G,F,NDV)
      CALL ADD(X,D,X,NDV)
      CALL GRAD(X,G,NDV)
      IF(TNORM(G,NDV) .LE. EPSL) TO TO 30

```

```

20  CONTINUE
    WRITE(*,*)
    WRITE(*,*) ' LIMIT ON NO. OF CYCLES HAS EXCEEDED'
    WRITE(*,*) ' THE CURRENT DESIGN VARIABLES ARE:'
    WRITE(*,*) X
    CALL EXIT

30  WRITE(*,*)
    WRITE(*,*) ' THE OPTIMAL DESIGN VARIABLES ARE :'
    WRITE(*,40) X
40  FORMAT(4X,3F15.6)
    CALL FUNCT(X,F,NCOUNT,NDV)
    WRITE(*,50) ' OPTIMUM COST FUNCTION VALUE IS :', F
50  FORMAT(A, F13.6)
    WRITE(*,*) ' NO. OF FUNCTION EVALUATIONS ARE : ', NCOUNT
    CALL EXIT

60  WRITE(*,*)
    WRITE(*,*) ' DESCENT DIRECTION CANNOT BE FOUND'
    WRITE(*,*) ' THE CURRENT DESIGN VARIABLES ARE:'
    WRITE(*,40) X

    STOP
    END

```

#### **DOUBLE PRECISION FUNCTION DOT(X,Y,N)**

```

C
C  CALCULATES DOT PRODUCT OF VECTORS X AND Y
C
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
    DIMENSION X(N), Y(N)

    SUM = 0.0D0
    DO 10 I = 1, N
    SUM = SUM + X(I) * Y(I)
10  CONTINUE
    DOT = SUM

    RETURN
    END

```

#### **SUBROUTINE HASN(X,H,N)**

```

C
C  CALCULATES THE HESSIAN MATRIX H AT X
C
    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
    DIMENSION X(N), H(N,N)

    H(1,1) = 2.0D0
    H(2,2) = 4.0D0
    H(3,3) = 4.0D0
    H(1,2) = 2.0D0
    H(1,3) = 0.0D0

```

```

      H(2,3) = 2.0D0
      H(2,1) = H(1,2)
      H(3,1) = H(1,3)
      H(3,2) = H(2,3)

```

```

      RETURN
      END

```

# SUBROUTINE SYSEQ(A,N,B)

```

C
C   SOLVES AN N × N SYMMETRIC SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS AX = B
C   A IS THE COEFFICIENT MATRIX: B IS THE RIGHT HAND SIDE: THESE ARE
C   INPUT
C   B CONTAINS SOLUTION ON RETURN
C
C   IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C   DIMENSION A(N,N), B(N)
C
C   REDUCTION OF EQUATIONS
C
      M = 0
50    M = M + 1
      MM = M + 1
      B(M) = B(M) / A(M,M)
      IF (M - N) 70, 130, 70
70    DO 80 J = MM, N
          A(M,J) = A(M,J) / A(M,M)
80    CONTINUE
C
C   SUBSTITUTION INTO REMAINING EQUATIONS
C
      DO 120 I = MM, N
          IF(A(I,M)) 90, 120, 90
90      DO 100 J = I, N
          A(I,J) = A(I,J) - A(I,M) * A(M,J)
          A(J,I) = A(I,J)
100     CONTINUE
          B(I) = B(I) - A(I,M) * B(M)
120    CONTINUE
      GO TO 50
C
C   BACK SUBSTITUTION
C
130   M = M - 1
      MM = M + 1
      DO 140 J = MM, N
          B(M) = B(M) - A(M,J) * B(J)
140    CONTINUE
      GO TO 130
150   RETURN
      END

```



- Abadie, J. (Ed.) (1970). *Nonlinear Programming*, North-Holland, Amsterdam, Chapter 6.
- Abadie, J. and Carpenter, J. (1969). Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints. In *Optimization*, R. Fletcher (Ed.), Academic Press, New York, pp. 37-47.
- Ackoff, R. L. and Sasieni, M. W. (1968). *Fundamentals of Operations Research*, John Wiley and Sons, New York.
- Adelman, H. and Haftka, R. T. (1986). Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems. *AIAA J.*, Vol. 24, No. 5, pp. 823-832.
- Aoki, M. (1971). *Introduction to Optimization Techniques*, Macmillan, New York.
- Arora, J. S. (1984). An Algorithm for Optimum Structural Design Without Line Search. In *New Directions in Optimum Structural Design*, E. Atrek, R. H. Gallagher, K. M. Ragsdell and O. C. Zienkiewicz (Eds), John Wiley and Sons, New York, pp. 429-441.
- Arora, J. S. and Baenziger, G. (1986). Uses of Artificial Intelligence in Design Optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 54, pp. 303-323.
- Arora, J. S. and Baenziger, G. (1987). A Nonlinear Optimization Expert System. *Proceedings of the ASCE Structures Congress '87, Computer Applications in Structural Engineering*, D. R. Jenkins (Ed.), pp. 113-125.
- Arora, J. S. and Haug, E. J. (1979). Methods of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization. *AIAA J.*, Vol. 17, No. 9, pp. 970-974.
- Arora, J. S. and Thanedar, P. B. (1986). Computational Methods for Optimum Design of Large Complex Systems. *Computational Mechanics*, Vol. 1, No. 2, pp. 221-242.
- Arora, J. S. and Tseng, C. H. (1987a). *User's Manual for IDESIGN: Version 3.5*, Optimal Design Laboratory, College of Engineering, The University of Iowa, Iowa City, IA 52242, U.S.A. (the program can be acquired by contacting the author).
- Arora, J. S. and Tseng, C. H. (1987b). An Investigation of Pshenichnyi's Recursive Quadratic Programming Method for Engineering Optimization - A Discussion. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Transactions of the ASME, Vol. 109, No. 6, pp. 254-256.
- Arora, J. S. and Tseng, C. H. (1988). Interactive Design Optimization. *Engineering Optimization*, Vol. 13, pp. 173-188.

- ASTM (1980). *Standard Metric Practice*, No. E380-79, American Society for Testing and Material, 1916 Race St., Philadelphia, Pa 19103.
- Atkinson, K. E. (1978). *An Introduction to Numerical Analysis*, John Wiley and Sons, New York.
- Bartel, D. L. (1969). *Optimum Design of Spatial Structures*. Ph.D. Dissertation, College of Engineering, The University of Iowa, Iowa City.
- Belegundu, A. D. and Arora, J. S. (1984a). A Recursive Quadratic Programming Algorithm with Active Set Strategy for Optimal Design. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, No. 5, pp. 803-816.
- Belegundu, A. D. and Arora, J. S. (1984b). A Computational Study of Transformation Methods for Optimal Design. *AIAA J.*, Vol. 22, No. 4, pp. 535-542.
- Belegundu, A. D. and Arora, J. S. (1985). A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, No. 9, pp. 1583-1624.
- Bell, W. W. (1975). *Matrices for Scientists and Engineers*, Van Nostrand Reinhold, New York.
- Blank, L. and Tarquin, A. (1983). *Engineering Economy*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
- Cauchy, A. (1847). Method Generale Pour La Resolution des Systemes d'Equations Simultanees. *Compt. Rend. Aca. Sci.*, Vol. 25, pp. 536-538.
- Clough, R. W. and Penzien, J. (1975). *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York.
- Cook, R. D. (1981). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley and Sons, New York.
- Cooper, L. and Steinberg, D. (1970). *Introduction to Methods of Optimization*, W. B. Saunders, Philadelphia.
- Corcoran, P. J. (1970). Configuration Optimization of Structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 12, pp. 459-462.
- Crandall, S. H., Dahl, H. C. and Lardner, T. J. (1978). *Introduction to Mechanics of Solids*, McGraw-Hill, New York.
- Dano, S. (1974). *Linear Programming in Industry*, 4th ed., Springer-Verlag, New York.
- Day, H. J. and Dolbear, F. (1965). Regional Water Quality Management. *Proceedings of the 1st Annual Meeting of the American Water Resources Association*, University of Chicago, pp. 283-309.
- De Boor, C. (1978). *A Practical Guide to Splines*, Vol. 27, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York.
- Deif, A. S. (1982). *Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers*, Halsted Press, New York.
- Deiningner, R. A. (1975). Water Quality Management-The Planning of Economically Optimal Pollution Control Systems. *Proceedings of the 1st Annual Meeting of the American Water Resources Association*, University of Chicago, pp. 254-282.
- Drew, D. (1968). *Traffic Flow Theory and Control*, McGraw-Hill, New York.
- Fletcher, R. and Powell, M. J. D. (1963). A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization. *The Computer Journal*, Vol. 6, pp. 163-180.
- Fletcher, R. and Reeves, R. M. (1964). Function Minimization by Conjugate Gradients. *The Computer Journal*, Vol. 7, pp. 149-160.
- Forsythe, G. E. Moler, C. B. (1967). *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Franklin, J. N. (1968). *Matrix Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Gabrielle, G. A. and Beltracchi, T. J. (1987). An Investigation of Pschenichnyi's Recursive Quadratic Programming Method for Engineering Optimization. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Transactions of the ASME, Vol. 109, No. 6, pp. 248-253.

- Gere, J. M. and Weaver, W. (1983). *Matrix Algebra for Engineers*, Brooks/Cole Engineering Division, Monterey.
- Gill, P. E., Murray, W. and Wright, M. H. (1981). *Practical Optimization*, Academic Press, New York.
- Gill, P. E., Murray, W., Saunders, M. A. and Wright, M. H. (1984). *User's Guide for QPSOL: Version 3.2*, Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California 94305, USA.
- Grandin, H. (1986). *Fundamentals of The Finite Element Method*, Macmillan, New York.
- Grant, E. L., Ireson, W. G. and Leavenworth, R. S. (1982). *Principles of Engineering Economy*, 7th ed., John Wiley and Sons, New York.
- Hadley, G. (1961). *Linear Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Hadley, G. (1964). *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Haftka, R. T. and Kamat, M. P. (1985). *Elements of Structural Optimization*, Martinus Nijhoff, Dordrecht.
- Han, S. P. (1976). Superlinearly Convergent Variable Metric Algorithms for General Nohlinear Programming. *Math. Programming*, Vol. 11, pp. 263-282.
- Han, S. P. (1977). A Globally Convergent Method for Nonlinear Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 22, pp. 297-309.
- Haug, E. J. and Arora, J. S. (1979). *Applied Optimal Design*, Wiley Interscience, New York.
- Hock, W. and Schittkowski, K. (1980). *Test Examples for Nonlinear Programming Codes*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 187, Springer-Verlag, New York.
- Hock, W. and Schittkowski, K. (1983). A Comparative Performance Evaluation of 27 Nonlinear Programming Codes. *Computing* 30, Springer-Verlag, New York, pp. 335-358.
- Hohn, F. E. (1964). *Elementary Matrix Algebra*, Macmillan, New York.
- Hopper, M. J. (1981). *Harwell Subroutine Library*, Computer Science and Systems Division, AERE Harwell, Oxfordshire.
- Hsieh, C. C. and Arora, J. S. (1984). Design Sensitivity Analysis and Optimization of Dynamic Response. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 43, pp. 195-219.
- Huebner, K. H. and Thornton, E. A. (1982). *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley and Sons, New York.
- Iyengar, N. G. R. and Gupta, S. K. (1980). *Programming Methods in Structural Design*, John Wiley and Sons, New York.
- Jennings, A. (1977). *Matrix Computations for Engineers*, John Wiley and Sons, New York.
- Kunzi, H. P. and Krelle, W. (1966). *Nonlinear Programming*, Blaisdell Publishing Co., Waltham, MA.
- Lemke, C. E. (1965). Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming. *Management Science*, Vol. 11, pp. 651-689.
- Lim, O. K. and Arora, J. S. (1986). An Active Set RQP Algorithm for Optimal Design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp. 51-65.
- Lim, O. K. and Arora, J. S. (1987). Dynamic Response Optimization Using an Active Set RQP Algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, No. 10, pp. 1827-1840.
- Luenberger, D. G. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Lynn, W. R. (1964). State Development of Wastewater Treatment Works. *J. Water Pollution Control Federation*, pp. 722-751.

- Marquardt, D. W. (1963). An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *SIAM J.*, Vol. 11, pp. 431-441.
- McCormick, G. P. (1967). Second Order Conditions for Constrained Optima. *SIAM J. Applied Mathematics*, Vol. 15, pp. 641-652.
- Meirovitch, L. (1985). *Introduction to Dynamics and Controls*, John Wiley and Sons, New York.
- NAG (1984). "FORTRAN Library Manual". Numerical Algorithms Group, 1101 31st Street, Suite 100, Downers Grove, Illinois 60515, USA.
- Osman, M. O. M., Sankar, S. and Dukkupati, R. V. (1978). Design Synthesis of a Multi-speed Machine Tool Gear Transmission Using Multiparameter Optimization. *Journal of Mechanical Design*, Transactions of ASME, Vol. 100, April, pp. 303-310.
- Pederson, D. R., Brand, R. A., Cheng, C. and Arora, J. S. (1987). Direct Comparison of Muscle Force Predictions Using Linear and Nonlinear Programming. *Journal of Biomechanical Engineering*, Transactions of the ASME, Vol. 109, No. 3, pp. 192-199.
- Powell, M. J. D. (1978a). A Fast Algorithm for Nonlinearity Constrained Optimization Calculations. *Lecture Notes in Mathematics*, G. A. Watson et al. (Eds), Springer Verlag, Berlin. (Also in *Numerical Analysis*, Proceedings of the Biennial Conference held at Dundee, June 1977.)
- Powell, M. J. D. (1978b). The Convergence of Variable Metric Methods for Nonlinearity Constrained Optimization Calculations. In *Nonlinear Programming 3*, O. L. Mangasarian, R. R. Meyer and S. M. Robinson (Eds), Academic Press, New York.
- Powell, M. J. D. (1978c). Algorithms for Nonlinear Functions that Use Lagrange Functions. *Mathematical Programming*, Vol. 14, pp. 224-248.
- Pshenichny, B. N. (1978). Algorithms for the General Problem of Mathematical Programming. *Kibernetika*, No. 5.
- Randolph, P. H. and Meeks, H. D. (1978). *Applied Linear Optimization*, Grid Inc., 4666 Indianola Avenue, Columbus, OH.
- Ravindran, A. and Lee, H. (1981). Computer Experiments on Quadratic Programming Algorithms. *European Journal of Operations Research*, Vol. 8, No. 2, pp. 166-174.
- Reklaitis, G. V., Ravindran, A. and Ragsdell, K. M. (1983). *Engineering Optimization: Methods and Applications*, John Wiley and Sons, New York.
- Roark, R. J. and Young, W. C. (1975). *Formulas for Stress and Strain*, 5th ed., McGraw-Hill, New York.
- Rosen, J. B. (1961). The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 9, pp. 514-532.
- Rubinstein, M. F. and Karagozian, J. (1966). Building Design Under Linear Programming. *Proc. ASCE*, Vol. 92, No. ST6, pp. 223-245.
- Sargeant, R. W. H. (1974). Reduced-gradient and Projection Methods for Nonlinear Programming. In *Numerical Methods for Constrained Optimization*, P. E. Gill and W. Murray (Eds), Academic Press, New York. pp. 149-174.
- Sasieni, M., Yaspan, A. and Friedman, L. (1960). *Operations-Methods and Problems*, John Wiley and Sons, New York.
- Schittkowski, K. (1981). The Nonlinear Programming Method of Wilson, Han and Powell with an Augmented Lagrangian Type Line Search Function, Part I: Convergence Analysis, Part 2: An Efficient Implementation with Linear Least Squares Subproblems. *Numerische Mathematik*, Vol. 38, pp. 83-127.

- Schmit, L. A. (1960). Structural Design by Systematic Synthesis. *Proceedings of the Second ASCE Conference on Electronic Computations*, Pittsburgh, pp. 105-122.
- Schrage, L. (1981). *User's Manual for LINDO*, The Scientific Press, Palo Alto, CA.
- Shampine, L. F. and Gordon, M. K. (1975). *Computer Simulation of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem*. W. H. Freeman, San Francisco.
- Shigley, J. E. (1977). *Mechanical Engineering Design*, McGraw-Hill, New York.
- Siddall, J. N. (1972). *Analytical Decision-Making In Engineering Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Spotts, M. F. (1953). *Design of Machine Elements*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Stark, R. M. and Nicholls, R. L. (1972). *Mathematical Foundations for Design: Civil Engineering Systems*, McGraw-Hill, New York.
- Stewart, G. (1973). *Introduction to Matrix Computations*, Academic Press, New York.
- Stoecker, W. F. (1971). *Design of Thermal Systems*, McGraw-Hill, New York.
- Strang, G. (1976). *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, New York.
- Sun, P. F., Arora, J. S. and Haug, E. J. (1975). *Fail-Safe Optimal Design of Structures*, Technical Report No. 19 (also Ph.D. Dissertation of P. F. Sun), Department of Civil and Environmental Engineering, The University of Iowa, Iowa City.
- Thanedar, P. B., Arora, J. S. and Tseng, C. H. (1986). A Hybrid Optimization Method and Its Role in Computer Aided Design. *Computers and Structures*, Vol. 23, No. 3, pp. 305-314.
- Thanedar, P. B., Arora, J. S., Tseng, C. H., Lim, O. K. and Park, G. J. (1987). Performance of Some SQP Algorithms on Structural Design Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, No. 12, pp. 2187-2203.
- Tseng, C. H. and Arora, J. S. (1987). Optimal Design for Dynamics and Control Using a Sequential Quadratic Programming Algorithm. Technical Report No. ODL-87.10, Optimal Design Laboratory, College of Engineering, The University of Iowa, Iowa City.
- Tseng, C. H. and Arora, J. S. (1988). On Implementation of Computational Algorithms for Optimal Design 1: Preliminary Investigation; 2: Extensive Numerical Investigation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, No. 6, pp. 1365-1402.
- Vanderplaats, G. N. (1984). *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications*, McGraw-Hill, New York.
- Vanderplaats, G. N. and Yoshida, N. (1985). Efficient Calculation of Optimum Design Sensitivity. *AIAA J.*, Vol. 23, No. 11, pp. 1798-1803.
- Wahl, A. M. (1963). *Mechanical Springs*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
- Wilson, R. B. (1963). *A Simplicial Algorithm for Concave Programming*, Ph.D. Dissertation, Graduate School of Business Administration, Harvard University, Boston.
- Wohl, M. and Martin, B. V. (1967). *Traffic Systems Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- Wolfe, P. (1959). The Simplex Method for Quadratic Programming. *Econometrica*, Vol. 27, No. 3, pp. 382-398.
- Wu, N. and Coppins, R. (1981). *Linear Programming and Extensions*, McGraw-Hill, New York.
- Zoutendijk, G. (1960) *Methods of Feasible Directions*, Elsevier, Amsterdam.



## پاسخهای تمرینهای انتگرالی

### فصل دوم

#### رابطه سازی مسائل طراحی بهین

**2.25**  $\mathbf{x}^* = (2, 2)$ ,  $f^* = 2$ . **2.26**  $\mathbf{x}^* = (0, 4)$ ,  $f^* = -8$ . **2.27**  $\mathbf{x}^* = (8, 10)$ ,  $f^* = 38$ .  
**2.28**  $\mathbf{x}^* = (4, 3.333, 2)$ ,  $f^* = -11.33$ . **2.29**  $\mathbf{x}^* = (10, 10)$ ,  $f^* = -400$ . **2.30**  $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ ,  $f^* = 0$ . **2.31**  $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ ,  $f^* = 0$ . **2.32**  $\mathbf{x}^* = (2, 3)$ ,  $f^* = -22$ .  
**2.33**  $\mathbf{x}^* = (-2.5, 1.58)$ ,  $f^* = -3.95$ . **2.34**  $\mathbf{x}^* = (-0.5, 0.167)$ ,  $f^* = -0.5$ .  
**2.35**  $b^* = 24.66$  cm,  $d^* = 49.32$  cm,  $f^* = 1216$  cm<sup>3</sup>. **2.36**  $R_o^* = 20$  cm,  $R_i^* = 19.84$  cm,  $f^* = 79.1$  kg. **2.37**  $R^* = 53.6$  mm,  $t^* = 5.0$  mm,  $f^* = 66$  kg.  
**2.38**  $R_o^* = 56$  mm,  $R_i^* = 51$  mm,  $f^* = 66$  kg. **2.39**  $w^* = 93$  mm,  $t^* = 5$  mm,  $f^* = 70$  kg. **2.40** Infinite optimum points,  $f^* = 0.812$  kg. **2.41**  $A^* = 5000$ ,  $h^* = 14$ ,  $f^* = 13.4$  mil. dollars. **2.42**  $R^* = 1.0077$  m,  $t^* = 0.0168$  m,  $f^* = 1.0424$  m<sup>3</sup>.  
**2.43**  $A_1^* = 6.1$  cm<sup>2</sup>,  $A_2^* = 2.0$  cm<sup>2</sup>,  $f^* = 5.39$  kg. **2.45**  $t^* = 8.45$ ,  $f^* = 1.91 \times 10^5$ . **2.46**  $R^* = 7.8$ ,  $H^* = 15.6$ ,  $f^* = 1.75 \times 10^6$ . **2.47** Infinite optimum points; one point:  $R^* = 0.4$  m,  $t^* = 1.59 \times 10^{-3}$ ,  $f^* = 15.7$  kg. **2.48** For  $l = 0.5$  m,  $T_0 = 10$  kN · m,  $T_{\max} = 20$  kN · m,  $x_1^* = 103$  mm,  $x_2^* = 0.955$ ,  $f^* = 2.9$  kg.  
**2.49** For  $l = 0.5$ ,  $T_0 = 10$  kN · m,  $T_{\max} = 20$  kN · m,  $d_o^* = 103$  mm,  $d_i^* = 98.36$  mm,  $f^* = 2.9$  kg. **2.50**  $R^* = 50.3$  mm,  $t^* = 2.35$  mm,  $f^* = 2.9$  kg.  
**2.51**  $R^* = 20$  cm,  $H^* = 7.2$  cm,  $f^* = -9000$  cm<sup>3</sup>. **2.52**  $R^* = 0.5$  cm,  $N^* = 2550$ ,  $f^* = -8000$  ( $l = 10$ ). **2.53** (a)  $R^* = 33.7$  mm,  $t^* = 5.0$ ,  $f^* = 41$  kg. (b)  $R_o^* = 36$  mm,  $R_i^* = 31$  mm,  $f^* = 41$  kg. **2.54** (a)  $R^* = 21.5$  mm,  $t^* = 5.0$  mm,  $f^* = 26$  kg. (b)  $R_o^* = 24.0$  mm,  $R_i^* = 19.0$  mm,  $f^* = 26$  kg. **2.55** (a)  $R^* = 27$ ,  $t^* = 5$  mm,  $f^* = 33$  kg. (b)  $R_o^* = 29.5$  mm,  $R_i^* = 24.5$  mm,  $f^* = 33$  kg.  
**2.56**  $D^* = 8.0$  cm,  $H^* = 8.0$  cm,  $f^* = 301.6$  cm<sup>2</sup>. **2.57**  $A_1^* = 413.68$  mm,  $A_2^* = 163.7$  mm,  $f^* = 5.7$  kg. **2.58** Infinite optimum points; one point:  $R^* = 20$  mm,

$t^* = 3.3 \text{ mm}$ ,  $f^* = 8.1 \text{ kg}$ . **2.59**  $A^* = 390 \text{ mm}^2$ ,  $h^* = 500 \text{ mm}$ ,  $f^* = 5.5 \text{ kg}$ .  
**2.60**  $A^* = 410 \text{ mm}^2$ ,  $s^* = 1500 \text{ mm}$ ,  $f^* = 8 \text{ kg}$ . **2.61**  $A_1^* = 293.7 \text{ mm}^2$ ,  $A_2^* = 65.6 \text{ mm}^2$ ,  $f^* = 7 \text{ kg}$ . **2.62**  $R^* = 130 \text{ cm}$ ,  $t^* = 2.86 \text{ cm}$ ,  $f^* = 57\,000 \text{ kg}$ .  
**2.63**  $d_o^* = 41.56 \text{ cm}$ ,  $d_i^* = 40.19 \text{ cm}$ ,  $f^* = 680 \text{ kg}$ . **2.64**  $d_o^* = 1310 \text{ mm}$ ,  $t^* = 14.2 \text{ mm}$ ,  $f^* = 92\,500 \text{ N}$ . **2.65**  $H^* = 50.0 \text{ cm}$ ,  $D^* = 3.42 \text{ cm}$ ,  $f^* = 6.6 \text{ kg}$ .

## فصل سوم

### مفاهیم طراحی پهن

**3.2**  $\cos x = 1.044 - 0.1575x - 0.353\,55x^2$  at  $x = \pi/4$ . **3.3**  $\cos x = 1.1327 - 0.342\,43x - 0.25x^2$  at  $x = \pi/3$ . **3.4**  $\sin x = -0.021\,99 + 1.2783x - 0.25x^2$  at  $x = \pi/6$ . **3.5**  $\sin x = -0.066\,34 + 1.2625x - 0.353\,55x^2$  at  $x = \pi/4$ . **3.6**  $e^x = 1 + x + 0.5x^2$  at  $x = 0$ . **3.7**  $e^x = 7.389 - 7.389x + 3.6945x^2$  at  $x = 2$ . **3.8**  $\tilde{f}(x) = 41x_1^2 - 42x_1 - 40x_1x_2 + 20x_2 + 10x_2^2 + 15$ ;  $\tilde{f}(1.2, 0.8) = 7.64$ ,  $f(1.2, 0.8) = 8.136$ ,  $\text{Error} = f - \tilde{f} = 0.496$ . **3.9** Indefinite. **3.10** Indefinite. **3.11** Indefinite. **3.12** Positive definite. **3.13** Indefinite. **3.14** Indefinite. **3.15** Positive definite. **3.16** Indefinite. **3.18**  $\mathbf{x} = (0, 0)$  - local minimum,  $f = 7$ . **3.19**  $\mathbf{x} = (0, 0)$  - inflection point. **3.20**  $\mathbf{x}^{*1} = (-3.332, 0.0395)$  - local maximum,  $f = 18.58$ ;  $\mathbf{x}^{*2} = (-0.398, 0.5404)$  - inflection point. **3.21**  $\mathbf{x}^{*1} = (4, 8)$  - inflection point;  $\mathbf{x}^{*2} = (-4, -8)$  - inflection point. **3.22**  $x^* = (2n + 1)\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  local minima,  $f = -1$ ;  $x^* = 2n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  local maxima,  $f = 1$ . **3.23**  $\mathbf{x}^* = (0, 0)$  - local minimum,  $f = 0$ . **3.24**  $x^* = 0$  - local minimum,  $f = 0$ ;  $x^* = 2$  - local maximum,  $f = 0.541$ . **3.25**  $\mathbf{x}^* = (3.684, 0.7368)$  - local minimum,  $f = 11.0521$ . **3.26**  $\mathbf{x}^* = (1, 1)$  - local minimum,  $f = 1$ . **3.27**  $\mathbf{x}^* = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$  - local minimum,  $f = -\frac{24}{25}$ . **3.28**  $\mathbf{x}^{*1} = (241.7643, 0.030\,995\,42)$  - local minimum,  $U = 483\,528.6$ ;  $\mathbf{x}^{*2} = (-241.7643, -0.030\,995\,42)$  - local maximum. **3.30**  $\mathbf{x}^* = (2.166\,667, 1.833\,33)$ ,  $v = -0.166\,667$ ,  $f = -8.333\,33$ . **3.31**  $\mathbf{x}^{*1} = (1.5088, 3.272)$ ,  $v = -17.1503$ ,  $f = 244.528$ ;  $\mathbf{x}^{*2} = (2.5945, -2.0198)$ ,  $v = -1.4390$ ,  $f = 15.291$ ;  $\mathbf{x}^{*3} = (-3.630, -3.1754)$ ,  $v = -23.2885$ ,  $f = 453.154$ ;  $\mathbf{x}^{*4} = (-3.7322, 3.0879)$ ,  $v = -2.1222$ ,  $f = 37.877$ . **3.32**  $\mathbf{x} = (2, 2)$ ,  $v = -2$ ,  $f = 2$ . **3.33** (i) No, (ii) Solution of equalities,  $\mathbf{x} = (3, 1)$ ,  $f = 4$ . **3.34**  $\mathbf{x}^{*1} = (0.816, 0.75)$ ,  $\mathbf{u} = (0, 0, 0, 0)$ ,  $f = 2.214$ ;  $\mathbf{x}^{*2} = (0.816, 0)$ ,  $\mathbf{u} = (0, 0, 0, 3)$ ,  $f = 1.0887$ ;  $\mathbf{x}^{*3} = (0, 0.75)$ ,  $\mathbf{u} = (0, 0, 2, 0)$ ,  $f = 1.125$ ;  $\mathbf{x}^{*4} = (1.5073, 1.2317)$ ,  $\mathbf{u} = (0, 0.9632, 0, 0)$ ,  $f = 0.251$ ;  $\mathbf{x}^{*5} = (1.0339, 1.655)$ ,  $\mathbf{u} = (1.2067, 0, 0, 0)$ ,  $f = 0.4496$ ;  $\mathbf{x}^{*6} = (0, 0)$ ,  $\mathbf{u} = (0, 0, 2, 3)$ ,  $f = 0$ ;  $\mathbf{x}^{*7} = (2, 0)$ ,  $\mathbf{u} = (0, 2, 0, 7)$ ,  $f = -4$ ;  $\mathbf{x}^{*8} = (0, 2)$ ,  $\mathbf{u} = (\frac{5}{3}, 0, \frac{11}{3}, 0)$ ,  $f = -2$ ;  $\mathbf{x}^{*9} = (1.386, 1.538)$ ,  $\mathbf{u} = (0.633, 0.626, 0, 0)$ ,  $f = -0.007\,388$ . **3.35**  $\mathbf{x}^* = (\frac{48}{23}, \frac{40}{23})$ ,  $u = 0$ ,  $f(\mathbf{x}^*) = -\frac{192}{23}$ . **3.36**  $\mathbf{x}^* = (2.5, 1.5)$ ,  $u = 1$ ,  $f = 1.5$ . **3.37**  $\mathbf{x}^* = (6.3, 1.733)$ ,  $\mathbf{u} = (0, 0.8, 0, 0)$ ,  $f = -56.901$ . **3.38**  $\mathbf{x}^* = (1, 1)$ ,  $u = 0$ ,  $f = 0$ . **3.39**  $\mathbf{x}^* = (1, 1)$ ,  $\mathbf{u} = (0, 0)$ ,  $f = 0$ . **3.40**  $\mathbf{x}^* = (2, 1)$ ,  $\mathbf{u} = (0, 2)$ ,  $f = 1$ . **3.41**  $\mathbf{x}^{*1} = (2.5945, 2.0198)$ ,  $u_1 = 1.439$ ,  $f = 15.291$ ;  $\mathbf{x}^{*2} = (-3.63, 3.1754)$ ,  $u_1 = 23.2885$ ,  $f = 453.154$ ;  $\mathbf{x}^{*3} = (1.5088, -3.2720)$ ,  $u_1 = 17.1503$ ,

$f = 244.53$ ;  $\mathbf{x}^* = (-3.7322, -3.0879)$ ,  $u_1 = 2.1222$ ,  $f = 37.877$ . **3.42**  $\mathbf{x}^* = (3.25, 0.75)$ ,  $v = -1.25$ ,  $u = 0.75$ ,  $f = 5.125$ . **3.43**  $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $u = 0$ ,  $f = -24.3$ ;  $\mathbf{x}^* = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $u = 0$ ,  $f = 24.967$ ;  $\mathbf{x}^* = (0, 3)$ ,  $u = 16$ ,  $f = -21$ ;  $\mathbf{x}^* = (2, 1)$ ,  $u = 4$ ,  $f = -25$ . **3.44**  $\mathbf{x}^* = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ ,  $u = 0$ ,  $f = -\frac{24}{5}$ . **3.45**  $D = 7.98$ ,  $H = 8$ ,  $\mathbf{u} = (0.5, 0, 0, 0.063, 0)$ ,  $f = 300.6 \text{ cm}^2$ . **3.46**  $R = 7.871686 \times 10^{-2}$ ,  $t = 1.574337 \times 10^{-3}$ ,  $u_2 = 15.28$ ,  $u_3 = 192.97$ ,  $u_1 = u_4 = u_5 = 0$ ;  $f = 30.56 \text{ kg}$ . **3.47**  $R_0 = 7.950204 \times 10^{-2}$ ,  $R_i = 7.792774 \times 10^{-2}$ ,  $u_2 = 15.28$ ,  $u_3 = 97.04$ ,  $u_1 = u_4 = u_5 = 0$ ;  $f = 30.56 \text{ kg}$ . **3.48**  $x_1 = 60.50634$ ,  $x_2 = 1.008439$ ,  $u_1 = 19918$ ,  $u_2 = 23186$ ,  $u_3 = u_4 = 0$ ,  $f = 23186.4$ . **3.49**  $h = 14$ ,  $A = 5000$ ,  $u_1 = 5.9 \times 10^{-4}$ ,  $u_2 = 6.8 \times 10^{-4}$ ,  $u_3 = u_4 = u_5 = 0$ ,  $f = 13.4$ . **3.50**  $A = 20,000$ ,  $B = 10,000$ ,  $u_1 = 35$ ,  $u_3 = 27$  (or,  $u_1 = 8$ ,  $u_2 = 108$ ),  $f = -1240000$ . **3.51**  $R = 20$ ,  $H = 7.161973$ ,  $u_1 = 10$ ,  $u_3 = 450$ ,  $f = -9000$ . **3.52**  $R = 0.5$ ,  $N = 2546.5$ ,  $u_1 = 16000$ ,  $u_2 = 4$ ,  $f = 8000$ . **3.53**  $W = 70.7107$ ,  $D = 141.4214$ ,  $u_3 = 1.41421$ ,  $u_4 = 0$ ,  $f = 28284.28$ . **3.54**  $A = 70$ ,  $B = 76$ ,  $u_1 = 0.4$ ,  $u_4 = 16$ ,  $f = -1308$ . **3.55**  $B = 0$ ,  $M = 2.5$ ,  $u_1 = 0.5$ ,  $u_3 = 1.5$ ,  $f = 2.5$ . **3.56**  $x_1 = 316.667$ ,  $x_2 = 483.33$ ,  $u_1 = \frac{2}{3}$ ,  $u_2 = \frac{10}{3}$ ,  $f = -1283.333$ . **3.57**  $r = 4.57078$ ,  $h = 9.14156$ ,  $v_1 = -0.364365$ ,  $u_1 = 43.7562$ ,  $f = 328.17$ . **3.58**  $b = 10$ ,  $h = 18$ ,  $u_1 = 0.04267$ ,  $u_2 = 0.00658$ ,  $f = 0.545185$ . **3.59**  $D = 5.758823$ ,  $H = 5.758826$ ,  $v_1 = -277.834$ ,  $f = 62512.75$ . **3.60**  $P_1 = 30.4$ ,  $P_2 = 29.6$ ,  $u_1 = 59.8$ ,  $f = 1789.68$ . **3.63** (i)  $\pi \leq x \leq 2\pi$  (ii)  $\pi/32 \leq x \leq 3\pi/2$ . **3.64** Convex everywhere. **3.65** Not convex. **3.66**  $S_1 = \{\mathbf{x} \mid x_1 \geq -\frac{1}{2}, |x_2| \leq (\frac{1}{2})\sqrt{((x_1 + \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2)}\}$ ;  $S_2 = \{\mathbf{x} \mid x_1 \leq -\frac{1}{2}, |x_2| \leq (\frac{1}{2})\sqrt{((x_1 + \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2)}\}$ . **3.67** Not convex. **3.68** Convex everywhere. **3.69** Fails convexity check. **3.70** Convex if  $C \geq 0$ . **3.71** Fails convexity check. **3.72** Fails convexity check. **3.73** Fails convexity check. **3.74** Fails convexity check. **3.75** Fails convexity check. **3.76** Convex. **3.77** Fails convexity check. **3.78** Fails convexity check. **3.79** Convex. **3.80**  $18.43^\circ \leq \theta \leq 71.57^\circ$ . **3.81**  $\theta \geq 71.57^\circ$ . **3.82** No solution. **3.83**  $\theta \leq 18.43^\circ$ . **3.85**  $x_1^* = 2.1667$ ,  $x_2^* = 1.8333$ ,  $v^* = -0.1667$ ; isolated minimum. **3.86**  $(1.5088, 3.2720)$ ,  $v^* = -17.15$ ; not a minimum point;  $(2.5945, -2.0198)$ ,  $v^* = -1.439$ ; isolated local minimum;  $(-3.6300, -3.1754)$ ,  $v^* = -23.288$ ; not a minimum point;  $(-3.7322, 3.0879)$ ,  $v^* = -2.122$ ; isolated local minimum. **3.87**  $(0.816, 0.75)$ ,  $\mathbf{u}^* = (0, 0, 0, 0)$ ; not a minimum point;  $(0.816, 0)$ ,  $\mathbf{u}^* = (0, 0, 0, 3)$ ; not a minimum point;  $(0, 0.75)$ ,  $\mathbf{u}^* = (0, 0, 2, 0)$ ; not a minimum point;  $(1.5073, 1.2317)$ ,  $\mathbf{u}^* = (0, 0.9632, 0, 0)$ ; not a minimum point;  $(1.0339, 1.6550)$ ,  $\mathbf{u}^* = (1.2067, 0, 0, 0)$ ; not a minimum point;  $(0, 0)$ ,  $\mathbf{u}^* = (0, 0, 2, 3)$ ; isolated local minimum;  $(2, 0)$ ,  $\mathbf{u}^* = (0, 2, 0, 7)$ ; isolated local minimum;  $(0, 2)$ ,  $\mathbf{u}^* = (1.667, 0, 3.667, 0)$ ; isolated local minimum;  $(1.386, 1.538)$ ,  $\mathbf{u}^* = (0.633, 0.626, 0, 0)$ ; isolated local minimum. **3.88**  $(2.0870, 1.7391)$ ,  $u^* = 0$ ; isolated global minimum. **3.89**  $(2.5945, 2.0198)$ ,  $u^* = 1.4390$ ; isolated local minimum;  $(-3.6300, 3.1754)$ ,  $u^* = 23.288$ ; not a minimum;  $(1.5088, -3.2720)$ ,  $u^* = 17.150$ ; not a minimum;  $(-3.7322, -3.0879)$ ,  $u^* = 2.122$ ; isolated local minimum. **3.90**  $(3.25, 0.75)$ ,  $u^* = 0.75$ ,  $v^* = -1.25$ ; isolated global minimum. **3.91**  $(2.3094, 0.3333)$ ,  $u^* = 0$ ; not a minimum;  $(-2.3094, 0.3333)$ ,

$u^* = 0$ ; not a minimum;  $(0, 3)$ ,  $u^* = 16$ ; not a minimum;  $(2, 1)$ ,  $u^* = 4$ ; isolated local minimum. **3.92**  $(-0.2857, -0.8571)$ ,  $u^* = 0$ ; isolated local minimum. **3.93**  $R_o^* = 20$  cm,  $R_i^* = 19.84$  cm,  $f^* = 79.1$  kg. **3.94** Multiple optima between  $(31.83, 1.0)$  and  $(25.23, 1.26)$  mm,  $f^* = 45.9$  kg. **3.95**  $R^* = 1.0$  m,  $t^* = 0.0167$  m,  $f^* = 7850$  kg. **3.96**  $R^* = 0.0787$  m,  $t^* = 0.00157$  m,  $f^* = 30.5$  kg. **3.97**  $R_o^* = 0.0795$  m,  $R_i^* = 0.0779$  m,  $f^* = 30.5$  kg. **3.98**  $H^* = 8$  cm,  $D^* = 7.98$  cm,  $f^* = 300.6$  cm<sup>2</sup>. **3.99**  $A^* = 5000$  m<sup>2</sup>,  $h^* = 14$  m,  $f^* = 13.4$  million dollars. **3.100**  $x_1^* = 102.98$  mm,  $x_2^* = 0.9546$ ,  $f^* = 2.9$  kg. **3.101**  $d_o^* = 103$  mm,  $d_i^* = 98.36$  mm,  $f^* = 2.9$  kg. **3.102**  $R^* = 50.3$  mm,  $t^* = 2.34$ ,  $f^* = 2.9$  kg. **3.103**  $H^* = 50$  cm,  $D^* = 3.2$  cm,  $f^* = 6.6$  kg. **3.113** Not a convex programming problem;  $D^* = 10$  m,  $H^* = 10$  m,  $f^* = 60,000\pi$  m<sup>3</sup>;  $\Delta f = 800\pi$  m<sup>3</sup>. **3.114** Convex;  $A_1^* = 2.937 \times 10^{-4}$  m,  $A_2^* = 6.556 \times 10^{-5}$  m,  $f^* = 7.0$  kg.

## فصل چهارم

### روشهای برنامه ریزی خطی برای طراحی بهین

**4.21**  $(0, 4, -3, -5)$ ;  $(2, 0, 3, 1)$ ;  $(1, 2, 0, -2)$ ;  $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 2, 0)$ . **4.22**  $(0, 0, -3, -5)$ ;  $(0, 1, 0, -3)$ ;  $(0, 2.5, 4.5, 0)$ ;  $(-3, 0, 0, -11)$ ;  $(2.5, 0, -5.5, 0)$ ;  $(\frac{9}{8}, \frac{11}{8}, 0, 0)$ . **4.23** Decompose  $x_2$  into two variables;  $(0, 0, 0, 12, -3)$ ;  $(0, 0, -3, 0, 6)$ ;  $(0, 0, -1, 8, 0)$ ;  $(0, 3, 0, 0, 6)$ ;  $(0, 1, 0, 8, 0)$ ;  $(4, 0, 0, 0, 1)$ ;  $(3, 0, 0, -3, 0)$ ;  $(4.8, 0, 0.6, 0, 0)$ ;  $(4.8, -0.6, 0, 0, 0)$ . **4.24**  $(0, -\frac{8}{3}, -\frac{1}{3})$ ;  $(2, 0, 3)$ ;  $(0.2, -2.4, 0)$ . **4.25**  $(0, 0, 9, 2, 3)$ ;  $(0, 9, 0, 20, -15)$ ;  $(0, -1, 10, 0, 5)$ ;  $(0, 1.5, 7.5, 5, 0)$ ;  $(4.5, 0, 0, -2.5, 16.5)$ ;  $(2, 0, 5, 0, 9)$ ;  $(-1, 0, 11, 3, 0)$ ;  $(4, 1, 0, 0, 13)$ ;  $(\frac{15}{7}, \frac{32}{7}, 0, \frac{65}{7}, 0)$ ;  $(-2.5, -2.25, 16.25, 0, 0)$ . **4.26**  $(0, 4, -3, -7)$ ;  $(4, 0, 1, 1)$ ;  $(3, 1, 0, -1)$ ;  $(3.5, 0.5, 0.5, 0)$ . **4.27** Decompose  $x_2$  into two variables; 15 basic solutions; basic feasible solutions are  $(0, 4, 0, 0, 7, 0)$ ;  $(0, \frac{5}{3}, 0, \frac{7}{3}, 0, 0)$ ;  $(2, 0, 0, 0, 1, 0)$ ;  $(\frac{5}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}, 0, 0)$ ;  $(\frac{7}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0, 0, 0)$ . **4.28** Ten basic solutions; basic feasible solutions are  $(2.5, 0, 0, 0, 4.5)$ ;  $(1.6, 1.8, 0, 0, 0)$ . **4.29**  $(0, 0, 4, -2)$ ;  $(0, 4, 0, 6)$ ;  $(0, 1, 3, 0)$ ;  $(-2, 0, 0, -4)$ ;  $(2, 0, 8, 0)$ ;  $(-1.2, 1.6, 0, 0)$ . **4.30**  $(0, 0, 0, -2)$ ;  $(0, 2, -2, 0)$ ;  $(0, 0, 0, -2)$ ;  $(2, 0, 2, 0)$ ;  $(0, 0, 0, 2)$ ;  $(1, 1, 0, 0)$ . **4.31**  $(0, 0, 10, 18)$ ;  $(0, 5, 0, 8)$ ;  $(0, 9, -8, 0)$ ;  $(-10, 0, 0, 48)$ ;  $(6, 0, 16, 0)$ ;  $(2, 6, 0, 0)$ . **4.32**  $x^* = (\frac{10}{3}, 2)$ ;  $f^* = -\frac{13}{3}$ . **4.433** Infinite solutions between  $x^* = (0, 3)$  and  $x^* = (2, 0)$ ;  $f^* = 6$ . **4.34**  $x^* = (2, 4)$ ;  $f^* = 10$ . **4.35**  $x^* = (6, 0)$ ;  $z^* = 12$ . **4.36**  $x^* = (3.667, 1.667)$ ;  $z^* = 15$ . **4.37**  $x^* = (0, 5)$ ;  $f^* = -5$ . **4.39**  $x^* = (2, 4)$ ;  $z^* = 10$ . **4.40** Unbounded. **4.41**  $x^* = (3.5, 0.5)$ ;  $z^* = 5.5$ . **4.42**  $x^* = (1.667, 0.667)$ ;  $z^* = 4.333$ . **4.43**  $x^* = (1.6, 1.8, 0)$ ;  $f^* = 18$ . **4.44**  $x^* = (0, 1.667, 2.333)$ ;  $f^* = 4.333$ . **4.45**  $x^* = (1.125, 1.375)$ ;  $z^* = 36$ . **4.46**  $x^* = (2, 0)$ ;  $f^* = 40$ . **4.47**  $x^* = (1.3357, 0.4406, 0, 3.2392)$ ;  $z^* = 9.7329$ . **4.48**  $x^* = (0.6541, 0.0756, 0.3151)$ ;  $f^* = 9.7329$ . **4.49**  $x^* = (0, 25)$ ;  $z^* = 150$ . **4.50**  $x^* = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$ ;  $z^* = \frac{16}{3}$ . **4.51**  $x^* = (\frac{7}{3}, -\frac{2}{3})$ ;  $z^* =$

- 4.52  $x^* = (1, 1)$ ;  $f^* = 1$ . 4.53  $x^* = (2, 2)$ ;  $f^* = 10$ . 4.54  $x^* = (4.8, -0.6)$ ;  $z^* = 3.6$ . 4.55  $x^* = (2, 4)$ ;  $z^* = 10$ . 4.56  $x^* = (0, 5)$ ;  $z^* = 40$ .  
 4.57 Infeasible problem. 4.58 Infinite solutions;  $f^* = 0$ . 4.59  $A^* = 20\,000$ ,  $B^* = 10\,000$ , Profit = \$1 240 000. 4.60  $A^* = 70$ ,  $B^* = 76$ ; Profit = \$1308.  
 4.61 Bread = 0, Milk = 2.5 kg; cost = \$2.5. 4.62 Bottles of wine = 316.67, Bottles of whiskey = 483.33; Profit = \$1283.3. 4.63 Shortening produced = 149 499.2 kg, salad oil produced = 50 000 kg, margarine produced = 10 000 kg; profit = \$19 499.2. 4.64  $A^* = 10$ ,  $B^* = 0$ ,  $C^* = 20$ ; capacity = 477 000.  
 4.65  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 0$ ,  $x_3^* = 200$ ,  $x_4^* = 100$ ;  $f^* = 786$ . 4.66  $f^* = 1\,333\,679$  tonnes. 4.67  $x^* = (0, 800, 0, 500, 1500, 0)$ ;  $f^* = 7500$ ;  $x^* = (0, 0, 4500, 4000, 3000, 0)$ ;  $f^* = 7500$ ;  $x^* = (0, 8, 0, 5, 15, 0)$ ,  $f^* = 7500$ .  
 4.68 (a) no effect (b) cost decreases by 120 000. 4.69 1. no effect; 2. out of range, re-solve the problem;  $A^* = 70$ ,  $B^* = 110$ ; Profit = \$1580; 3. profit reduces by \$4; 4. out of range, re-solve the problem;  $A^* = 41.667$ ,  $B^* = 110$ ; profit = \$1213.33. 4.70  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 0$ . 4.71  $y_1 = 0.25$ ,  $y_2 = 1.25$ ,  $y_3 = 0$ ,  $y_4 = 0$ . 4.72 Unbounded. 4.73  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 2.5$ ,  $y_3 = -1.5$ . 4.74  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = \frac{5}{3}$ ,  $y_3 = -\frac{7}{3}$ . 4.75  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = -1$ . 4.76  $y_1 = -\frac{5}{3}$ ,  $y_2 = -\frac{2}{3}$ . 4.77  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = -6$ . 4.78  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 5$ . 4.79  $y_1 = 0.654$ ,  $y_2 = -0.076$ ,  $y_3 = 0.315$ . 4.80  $y_1 = -1.336$ ,  $y_2 = -0.441$ ,  $y_3 = 0$ ,  $y_4 = -3.239$ . 4.81  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 0$ ,  $y_4 = 6$ . 4.82  $y_1 = -1.556$ ,  $y_2 = 0.556$ . 4.83  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = \frac{5}{3}$ ,  $y_3 = -\frac{7}{3}$ . 4.84  $y_1 = -0.5$ ,  $y_2 = -2.5$ . 4.85  $y_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = \frac{5}{3}$ . 4.86  $y_1 = 0.2$ ,  $y_2 = 0.4$ . 4.87  $y_1 = 0.25$ ,  $y_2 = 1.25$ ,  $y_3 = 0$ ,  $y_4 = 0$ . 4.88  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 0$ . 4.89 Infeasible problem. 4.90  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = 0$ . 4.91 For  $b_1 = 20\,000$ :  $-8000 \leq \Delta_1 \leq 0$ ; for  $b_2 = 10\,000$ :  $0 \leq \Delta_2 \leq \infty$ ; for  $b_3 = 20\,000$ :  $-20\,000 \leq \Delta_3 \leq 0$ ; for  $b_4 = 30\,000$ :  $-20\,000 \leq \Delta_4 \leq \infty$ . 4.92 For  $b_1 = 100$ :  $-34 \leq \Delta_1 \leq \infty$ ; for  $b_2 = 80$ :  $-38 \leq \Delta_2 \leq 17$ ; for  $b_3 = 70$ :  $-28.333 \leq \Delta_3 \leq 63.333$ ; for  $b_4 = 110$ :  $-34 \leq \Delta_4 \leq \infty$ . 4.93 For  $b_1 = 12$ :  $-8 \leq \Delta_1 \leq \infty$ ; for  $b_2 = 6$ :  $-\infty \leq \Delta_2 \leq 12$ . 4.94 For  $b_1 = 10$ :  $-8 \leq \Delta_1 \leq 8$ ; for  $b_2 = 6$ :  $-2.6667 \leq \Delta_2 \leq 8$ ; for  $b_3 = 2$ :  $-4 \leq \Delta_3 \leq \infty$ ; for  $b_4 = 6$ :  $-\infty \leq \Delta_4 \leq 8$ . 4.95 Unbounded problem. 4.96 For  $b_1 = 5$ :  $-0.5 \leq \Delta_1 \leq \infty$ ; for  $b_2 = 4$ :  $-1 \leq \Delta_2 \leq 0.333$ ; for  $b_3 = 3$ :  $-1 \leq \Delta_3 \leq 1$ . 4.97 For  $b_1 = 5$ :  $-2 \leq \Delta_1 \leq \infty$ ; for  $b_2 = -4$ :  $-2 \leq \Delta_2 \leq 2$ ; for  $b_3 = 1$ :  $-2 \leq \Delta_3 \leq 1$ . 4.98 For  $b_1 = -5$ :  $-\infty \leq \Delta_1 \leq 4$ ; for  $b_2 = -2$ :  $-8 \leq \Delta_2 \leq 4.5$ . 4.99 For  $b_1 = 1$ :  $-5 \leq \Delta_1 \leq 7$ ; for  $b_2 = 4$ :  $-3.5 \leq \Delta_2 \leq \infty$ . 4.100 For  $b_1 = -3$ :  $-4.5 \leq \Delta_1 \leq 5.5$ ; for  $b_2 = 5$ :  $-3 \leq \Delta_2 \leq \infty$ . 4.101 For  $b_1 = 3$ :  $-\infty \leq \Delta_1 \leq 3$ ; for  $b_2 = -8$ :  $-\infty \leq \Delta_2 \leq 4$ . 4.102 For  $b_1 = 8$ :  $-8 \leq \Delta_1 \leq \infty$ ; for  $b_2 = 3$ :  $-14.307 \leq \Delta_2 \leq 4.032$ ; for  $b_3 = 15$ :  $-20.16 \leq \Delta_3 \leq 101.867$ . 4.103 For  $b_1 = 2$ :  $-3.9178 \leq \Delta_1 \leq 1.1533$ ; for  $b_2 = 5$ :  $-0.692 \leq \Delta_2 \leq 39.579$ ; for  $b_3 = -4.5$ :  $-\infty \leq \Delta_3 \leq 7.542$ ; for  $b_4 = 1.5$ :  $-2.0367 \leq \Delta_4 \leq 0.334$ . 4.104 For  $b_1 = 90$ :  $-15 \leq \Delta_1 \leq \infty$ ; for  $b_2 = 80$ :  $-30 \leq \Delta_2 \leq \infty$ ; for  $b_3 = 15$ :  $-\infty \leq \Delta_3 \leq 100$ ; for  $b_4 = 25$ :  $-10 \leq \Delta_4 \leq 5$ . 4.105 For  $b_1 = 3$ :  $-1.2 \leq \Delta_1 \leq 15$ ; for  $b_2 = 18$ :  $-15 \leq \Delta_2 \leq 12$ . 4.106 For  $b_1 = 5$ :  $-4 \leq \Delta_1 \leq \infty$ ; for  $b_2 = 4$ :  $-7 \leq \Delta_2 \leq 2$ ; for  $b_3 = 3$ :  $-1 \leq \Delta_3 \leq \infty$ . 4.107 For  $b_1 = 0$ :  $-2 \leq \Delta_1 \leq 2$ ; for  $b_2 = 2$ :  $-2 \leq \Delta_2 \leq \infty$ . 4.108 For  $b_1 = 0$ :  $-6 \leq \Delta_1 \leq 3$ ; for  $b_2 = 2$ :  $-\infty \leq \Delta_2 \leq 2$ ; for  $b_3 = 6$ :  $-3 \leq \Delta_3 \leq \infty$ . 4.109 For  $b_1 = 12$ :  $-3 \leq \Delta_1 \leq \infty$ ; for  $b_2 = 3$ :

$-\infty \leq \Delta_2 \leq 1$ . **4.110** For  $b_1 = 10$ :  $-8 \leq \Delta_1 \leq 8$ ; for  $b_2 = 6$ :  $-2.6667 \leq \Delta_2 \leq 8$ ; for  $b_3 = 2$ :  $-4 \leq \Delta_3 \leq \infty$ ; for  $b_4 = 6$ :  $-\infty \leq \Delta_4 \leq 8$ . **4.111** For  $b_1 = 20$ :  $-12 \leq \Delta_1 \leq \infty$ ; for  $b_2 = 6$ :  $-\infty \leq \Delta_2 \leq 9$ . **4.112** Infeasible problem. **4.113** For  $b_1 = 0$ :  $-2 \leq \Delta_1 \leq 2$ ; for  $b_2 = 2$ :  $-2 \leq \Delta_2 \leq \infty$ . **4.114** For  $c_1 = -48$ :  $-\infty \leq \Delta c_1 \leq 27$ ; for  $c_2 = -28$ :  $-36 \leq \Delta c_2 \leq 28$ . **4.115** For  $c_1 = -10$ :  $-\infty \leq \Delta c_1 \leq 0.4$ ; for  $c_2 = -8$ :  $-0.3333 \leq \Delta c_2 \leq 8$ . **4.116** For  $c_1 = -1$ :  $-2 \leq \Delta c_1 \leq \infty$ ; for  $c_2 = -2$ :  $0 \leq \Delta c_2 \leq 1.333$ ; for  $c_3 = 2$ :  $0 \leq \Delta c_3 \leq \infty$ . **4.117** For  $c_1 = -1$ :  $-1 \leq \Delta c_1 \leq 1.6667$ ; for  $c_2 = -2$ :  $-\infty \leq \Delta c_2 \leq 1$ . **4.118** Unbounded problem. **4.119** For  $c_1 = 1$ :  $-\infty \leq \Delta c_1 \leq 3$ ; for  $c_2 = 4$ :  $-3 \leq \Delta c_2 \leq \infty$ . **4.120** For  $c_1 = 1$ :  $-\infty \leq \Delta c_1 \leq 7$ ; for  $c_2 = 4$ :  $-3.5 \leq \Delta c_2 \leq \infty$ . **4.121** For  $c_1 = 9$ :  $-5 \leq \Delta c_1 \leq \infty$ ; for  $c_2 = 2$ :  $-9.286 \leq \Delta c_2 \leq 2.5$ ; for  $c_3 = 3$ :  $-\infty \leq \Delta c_3 \leq 13$ . **4.122** For  $c_1 = 5$ :  $-2 \leq \Delta c_1 \leq \infty$ ; for  $c_2 = 4$ :  $-2 \leq \Delta c_2 \leq 2$ ; for  $c_3 = -1$ :  $0 \leq \Delta c_3 \leq 2$ ; for  $c_4 = 1$ :  $0 \leq \Delta c_4 \leq \infty$ . **4.123** For  $c_1 = -10$ :  $-8 \leq \Delta c_1 \leq 16$ ; for  $c_2 = -18$ :  $-\infty \leq \Delta c_2 \leq 8$ . **4.124** For  $c_1 = 20$ :  $-12 \leq \Delta c_1 \leq \infty$ ; for  $c_2 = -6$ :  $-9 \leq \Delta c_2 \leq \infty$ . **4.125** For  $c_1 = 2$ :  $-3.918 \leq \Delta c_2 \leq 1.153$ ; for  $c_2 = 5$ :  $-0.692 \leq \Delta c_2 \leq 39.579$ ; for  $c_3 = -4.5$ :  $-\infty \leq \Delta c_3 \leq 7.542$ ; for  $c_4 = 1.5$ :  $-3.573 \leq \Delta c_4 \leq 0.334$ . **4.126** For  $c_1 = 8$ :  $-8 \leq \Delta c_1 \leq \infty$ ; for  $c_2 = -3$ :  $-4.032 \leq \Delta c_2 \leq 14.307$ ; for  $c_3 = 15$ :  $0 \leq \Delta c_3 \leq 101.8667$ ; for  $c_4 = -15$ :  $0 \leq \Delta c_4 \leq \infty$ . **4.127** For  $c_1 = 10$ :  $-\infty \leq \Delta c_1 \leq 20$ ; for  $c_2 = 6$ :  $-4 \leq \Delta c_2 \leq \infty$ . **4.128** For  $c_1 = -2$ :  $-\infty \leq \Delta c_1 \leq 2.8$ ; for  $c_2 = 4$ :  $-5 \leq \Delta c_2 \leq \infty$ . **4.129** For  $c_1 = 1$ :  $-\infty \leq \Delta c_1 \leq 7$ ; for  $c_2 = 4$ :  $-\infty \leq \Delta c_2 \leq 0$ ; for  $c_3 = -4$ :  $-\infty \leq \Delta c_3 \leq 0$ . **4.130** For  $c_1 = 3$ :  $-1 \leq \Delta c_1 \leq \infty$ ; for  $c_2 = 2$ :  $-5 \leq \Delta c_2 \leq 1$ . **4.131** For  $c_1 = 3$ :  $-5 \leq \Delta c_1 \leq 1$ ; for  $c_2 = 2$ :  $-0.5 \leq \Delta c_2 \leq \infty$ . **4.132** For  $c_1 = 1$ :  $-0.3333 \leq \Delta c_1 \leq 0.5$ ; for  $c_2 = 2$ :  $-\infty \leq \Delta c_2 \leq 0$ ; for  $c_3 = -2$ :  $-1 \leq \Delta c_3 \leq 0$ . **4.133** For  $c_1 = 1$ :  $-1.667 \leq \Delta c_1 \leq 1$ ; for  $c_2 = 2$ :  $-1 \leq \Delta c_2 \leq \infty$ . **4.134** For  $c_1 = 3$ :  $-\infty \leq \Delta c_1 \leq 3$ ; for  $c_2 = 8$ :  $-4 \leq \Delta c_2 \leq 0$ ; for  $c_3 = -8$ :  $-\infty \leq \Delta c_3 \leq 0$ . **4.135** Infeasible problem. **4.136** For  $c_1 = 3$ :  $0 \leq \Delta c_1 \leq \infty$ ; for  $c_2 = -3$ :  $0 \leq \Delta c_2 \leq 6$ . **4.137** 1.  $\Delta f = 05$ ; 2.  $\Delta f = 0.5$  (Bread = 0, milk = 3;  $f^* = 3$ ); 3.  $\Delta f = 0$ . **4.138** 1.  $\Delta f = 33.33$  (wine bottles = 250, whiskey bottles = 500, profit = 1250); 2.  $\Delta f = 63.33$ , 3.  $\Delta f = 83.33$  (wine bottles = 400, whiskey bottles = 400, profit = 1200). **4.139** 1. re-solve **4.140** 1. cost function increases by \$52.40; 2. no change; 3. cost function increases by \$11.25,  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 30$ ,  $x_3^* = 200$ ,  $x_4^* = 70$ . **4.141** 1.  $\Delta f = 0$ ; 2. no change; 3.  $\Delta f = 1800$  ( $A^* = 6$ ,  $B^* = 0$ ,  $C^* = 22$ ,  $f^* = -475$  200). **4.142** 1.  $\Delta f = 0$ ; 2.  $\Delta f = 2485.65$ ; 3.  $\Delta f = 0$ ; 4.  $\Delta f = 14$  033.59; 5.  $\Delta f = -162$  232.3. **4.143** 1.  $\Delta f = 0$ ; 2.  $\Delta f = 400$ ; 3.  $\Delta f = -375$ . **4.144** 1.  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 3$ ,  $f^* = -12$ ; 2.  $y_1 = \frac{2}{3}$ ,  $y_2 = 0$ ; 3.  $-15 \leq \Delta_1 \leq 3$ ,  $-6 \leq \Delta_2 \leq \infty$ ; 4.  $f^* = -14.4$ ,  $b_1 = 18$ . **4.145**  $y_1^* = \frac{1}{4}$ ,  $y_2^* = \frac{5}{4}$ ,  $y_3^* = 0$ ,  $y_4^* = 0$ ,  $f_d^* = 10$ . **4.146** Dual problem is infeasible. **4.147**  $y_1^* = 0$ ,  $y_2^* = 2.5$ ,  $y_3^* = 1.5$ ,  $f_d^* = 5.5$ . **4.148**  $y_1^* = 0$ ,  $y_2^* = 1.6667$ ,  $y_3^* = 2.3333$ ,  $f_d^* = 4.3333$ . **4.149**  $y_1^* = 4$ ,  $y_2^* = 1$ ,  $f_d^* = -18$ . **4.150**  $y_1^* = 1.6667$ ,  $y_2^* = 0.6667$ ,  $f_d^* = -4.3333$ . **4.151**  $y_1^* = 2$ ,  $y_2^* = 6$ ,  $f_d^* = -36$ . **4.152**  $y_1^* = 0$ ,  $y_2^* = 5$ ,  $f_d^* = -40$ . **4.153**  $y_1^* = 0.65411$ ,  $y_2^* = 0.075$  612,  $f_d^* = 9.732$  867. **4.154**  $y_1^* = 1.335$  66,  $y_2^* = 0.44056$ ,  $y_3^* = 0$ ,  $y_4^* = 3.2392$ ,  $f_d^* = -9.732$  867. **4.155**  $y_1^* = 8$ ,  $y_2^* = 108$ ,  $y_3^* = 0$ ,  $y_4^* = 0$ ,  $f_d^* = 1$  240 000. **4.156**  $y_1^* = 0$ ,  $y_2^* = 16$ ,  $y_3^* = 0.4$ ,  $y_4^* = 0$ ,  $f_d^* = 1308$ .

## فصل پنجم

## روشهای عددی برای طراحی بهین نامقید

5.2 yes. 5.3 no. 5.4 yes. 5.5 no. 5.6 no. 5.7 no. 5.8 no. 5.9 yes.  
 5.10 no. 5.11 no. 5.12 no. 5.13 no. 5.14 no. 5.16  $\alpha^* = 1.42850$ ,  $f^* = 7.713\ 29$ . 5.17  $\alpha^* = 1.427\ 58$ ,  $f^* = 7.714\ 29$ . 5.18  $\alpha^* = 1.386\ 29$ ,  $f^* = 0.454\ 823$ . 5.19  $d$  is descent direction; slope =  $-4048$ ;  $\alpha^* = 0.158\ 72$ .  
 5.20  $\alpha^* = 0$ . 5.21  $f(\alpha) = 4.1\alpha^2 - 5\alpha - 6.5$ . 5.22  $f(\alpha) = 52\alpha^2 - 52\alpha + 13$ .  
 5.23  $f(\alpha) = (6.887\ 47 \times 10^9)\alpha^4 - (3.6\ 111\ 744 \times 10^8)\alpha^3 + (5.809\ 444 \times 10^6)\alpha^2 - 27\ 844\alpha + 41$ . 5.24  $f(\alpha) = 8\alpha^2 - 8\alpha + 2$ . 5.25  $f(\alpha) = 18.5\alpha^2 - 85\alpha - 13.5$ .  
 5.26  $f(\alpha) = 288\alpha^2 - 96\alpha + 8$ . 5.27  $f(\alpha) = 24\alpha^2 - 24\alpha + 6$ . 5.28  $f(\alpha) = 137\alpha^2 - 110\alpha + 25$ . 5.29  $f(\alpha) = 8\alpha^2 - 8\alpha$ . 5.30  $f(\alpha) = 16\alpha^2 - 16\alpha + 4$ .  
 5.31  $\alpha^* = 0.61$ . 5.32  $\alpha^* = 0.5$ . 5.33  $\alpha^* = 3.35E-03$ . 5.34  $\alpha^* = 0.5$ .  
 5.35  $\alpha^* = 2.2973$ . 5.36  $\alpha^* = 0.16\ 665$ . 5.37  $\alpha^* = 0.5$ . 5.38  $\alpha^* = 0.40\ 145$ .  
 5.39  $\alpha^* = 0.5$ . 5.40  $\alpha^* = 0.5$ . 5.41  $\alpha^* = 0.6097$ . 5.42  $\alpha^* = 0.4999$ .  
 5.43  $\alpha^* = 3.45\ 492E-03$ . 5.44  $\alpha^* = 0.4999$ . 5.45  $\alpha^* = 2.2974$ . 5.46  $\alpha^* = 0.1667$ . 5.47  $\alpha^* = 0.4999$ . 5.48  $\alpha^* = 0.4016$ . 5.49  $\alpha^* = 0.4999$ . 5.50  $\alpha^* = 0.4999$ . 5.51  $\alpha^* = 1.42857$ ,  $f^* = 7.71429$ . 5.52  $\alpha^* = \frac{10}{9}$ ,  $f^* = 7.71\ 429$ , one iteration. 5.54 1.  $\alpha^* = \frac{13}{4}$ . 2.  $\alpha = 1.81\ 386$  or  $4.68\ 614$ . 5.56  $\mathbf{x}^{(2)} = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ . 5.57  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.1231, 0.0775)$ . 5.58  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.222, 0.0778)$ . 5.59  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.0230, 0.0688)$ . 5.60  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.0490, 0.0280)$ . 5.61  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.259, -0.225, 0.145)$ . 5.62  $\mathbf{x}^{(2)} = (4.2680, 0.2244)$ . 5.63  $\mathbf{x}^{(2)} = (3.8415, 0.48087)$ . 5.64  $\mathbf{x}^{(2)} = (-1.590, 2.592)$ . 5.65  $\mathbf{x}^{(2)} = (2.93529, 0.339\ 76, 1.42\ 879, 2.29\ 679)$ . 5.66 (5.56)  $\mathbf{x}^* = (3.996\ 096, 1.997\ 073)$ ,  $f^* = -7.99\ 999$ ; (5.57)  $\mathbf{x}^* = (0.071\ 659, 0.023\ 233)$ ,  $f^* = -0.073\ 633$ ; (5.58)  $\mathbf{x}^* = (0.071\ 844, -0.000\ 147)$ ,  $f^* = -0.035\ 801$ ; (5.59)  $\mathbf{x}^* = (0.000\ 011, 0.023\ 273)$ ,  $f^* = -0.011\ 626$ ; (5.60)  $\mathbf{x}^* = (0.040\ 028, 0.02\ 501)$ ,  $f^* = -0.0525$ ; (5.61)  $\mathbf{x}^* = (0.006\ 044, -0.005348, 0.002\ 467)$ ,  $f^* = 0.000\ 015$ ; (5.62)  $\mathbf{x}^* = (4.1453, 0.361\ 605)$ ,  $f^* = -1616.183\ 529$ ; (5.63)  $\mathbf{x}^* = (3.733563, 0.341\ 142)$ ,  $f^* = -1526.556\ 493$ ; (5.64)  $\mathbf{x}^* = (0.9\ 087\ 422, 0.8\ 256\ 927)$ ,  $f^* = 0.008\ 348$ , 1000 iterations; (5.65)  $\mathbf{x}^* = (0.13\ 189, 0.013\ 188, 0.070\ 738, 0.072\ 022)$ ,  $f^* = 0.000\ 409$ , 1000 iterations. 5.67  $\mathbf{x}^* = (0.000\ 023, 0.000\ 023, 0.000\ 045)$ ,  $f_1^* = 0$ , 1 iteration;  $\mathbf{x}^* = (0.002\ 353, 0.0, 0.000\ 007)$ ,  $f_2^* = 0.000\ 006$ , 99 iterations;  $\mathbf{x}^* = (0.000\ 003, 0.0, 0.023\ 598)$ ,  $f_3^* = (0.000\ 056, 135\ \text{iterations})$ . 5.68 Exact gradients are: 1.  $\nabla f = (119.2, 258.0)$ , 2.  $\nabla f = (-202, 100)$ , 3.  $\nabla f = (6, 16, 16)$ . 5.69  $\mathbf{u} = \mathbf{c}/(2v)$ ,  $v$  = Lagrange multiplier for the equality constraint. 5.71  $\mathbf{x}^{(2)} = (4, 2)$ . 5.72  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.07\ 175, 0.02\ 318)$ . 5.73  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.072, 0.0)$ . 5.74  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.0, 0.0233)$ . 5.75  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.040, 0.025)$ . 5.76  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.257, -0.229, 0.143)$ . 5.77  $\mathbf{x}^{(2)} = (4.3682, 0.1742)$ . 5.78  $\mathbf{x}^{(2)} = (3.7365, 0.2865)$ . 5.79  $\mathbf{x}^{(2)} = (-1.592, 2.592)$ . 5.80  $\mathbf{x}^{(2)} = (3.1134, 0.32\ 224, 1.34\ 991, 2.12\ 286)$ . 5.83  $\mathbf{x}^{(1)} = (4, 2)$ . 5.84  $\mathbf{x}^{(1)} = (0.071\ 598, 0.023\ 251)$ . 5.85  $\mathbf{x}^{(1)} = (0.071\ 604, 0.0)$ . 5.86  $\mathbf{x}^{(1)} = (0.0, 0.0232\ 515)$ . 5.87  $\mathbf{x}^{(1)} = (0.04, 0.025)$ .

5.88  $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 0)$ . 5.89  $\mathbf{x}^{(1)} = (-2.7068, 0.88168)$ . 5.90  $\mathbf{x}^{(1)} = (3.771567, 0.335589)$ . 5.91  $\mathbf{x}^{(1)} = (4.99913, 24.99085)$ . 5.92  $\mathbf{x}^{(1)} = (-1.26859, -0.75973, 0.73141, 0.39833)$ . 5.95  $\mathbf{x}^{(2)} = (4, 2)$ . 5.96  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.0716, 0.02325)$ . 5.97  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.0716, 0.0)$ . 5.98  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.0, 0.02325)$ . 5.99  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.04, 0.025)$ . 5.100 DFP:  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.2571, -0.2286, 0.1428)$ ; BFGS:  $\mathbf{x}^{(2)} = (0.2571, -0.2286, 0.1429)$ . 5.101 DFP:  $\mathbf{x}^{(2)} = (4.37045, 0.173575)$ ; BFGS:  $\mathbf{x}^{(2)} = (4.37046, 0.173574)$ . 5.102  $\mathbf{x}^{(2)} = (3.73707, 0.28550)$ . 5.103  $\mathbf{x}^{(2)} = (-1.9103, -1.9078)$ . 5.104 DFP:  $\mathbf{x}^{(2)} = (3.11339, 0.32226, 1.34991, 2.12286)$ ; BFGS:  $\mathbf{x}^{(2)} = (3.11339, 0.32224, 1.34991, 2.12286)$ . 5.107  $x_1 = 3.7754$  mm,  $x_2 = 2.2835$ . 5.108  $x_1 = 2.2213$  mm,  $x_2 = 1.8978$ . 5.109  $x^* = 0.619084$ . 5.110  $x^* = 9.424753$ . 5.111  $x^* = 1.570807$ . 5.112  $x^* = 1.496045$ . 5.113  $\mathbf{x}^* = (3.667328, 0.739571)$ . 5.114  $\mathbf{x}^* = (4.000142, 7.999771)$ .

## فصل ششم

### روشهای عددی برای طراحی بهینه مقید

6.29  $\mathbf{x}^* = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ ,  $u^* = 1$ ,  $F^* = 0.5$ . 6.30  $\mathbf{x}^* = (1, 1)$ ,  $u^* = 0$ ,  $f^* = 0$ . 6.31  $\mathbf{x}^* = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ ,  $u^* = \frac{2}{3}$ ,  $f^* = \frac{1}{3}$ . 6.32  $\mathbf{x}^* = (2, 1)$ ,  $u^* = 0$ ,  $f^* = -3$ . 6.33  $\mathbf{x}^* = (1, 2)$ ,  $u^* = 0$ ,  $f^* = -1$ . 6.34  $\mathbf{x}^* = (\frac{13}{6}, \frac{11}{6})$ ,  $v^* = -\frac{1}{6}$ ,  $f^* = -\frac{25}{3}$ . 6.35  $\mathbf{x}^* = (3, 1)$ ,  $v_1 = -2$ ,  $v_2 = -2$ ,  $f^* = 2$ . 6.36  $\mathbf{x}^* = (\frac{48}{23}, \frac{40}{23})$ ,  $u^* = 0$ ,  $f^* = -\frac{192}{23}$ . 6.37  $\mathbf{x}^* = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ ,  $u^* = 1$ ,  $f^* = -\frac{9}{2}$ . 6.38  $\mathbf{x}^* = (\frac{63}{10}, \frac{26}{10})$ ,  $u_1^* = 0$ ,  $u_2^* = \frac{4}{5}$ ,  $f^* = -\frac{3547}{50}$ . 6.39  $\mathbf{x}^* = (2, 1)$ ,  $u_1^* = 0$ ,  $u_2^* = 2$ ,  $f^* = -1$ . 6.40  $\mathbf{x}^* = (0.241507, 0.184076, 0.574317)$ ;  $\mathbf{u}^* = (0, 0, 0, 0)$ ,  $v_1^* = -0.7599$ ,  $f^* = 0.3799$ .

## فصل هفتم

### بهینه سازی طراحی تعاملی

7.1 Several local minima:  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1.386, 1.538)$ . 7.2  $\mathbf{d} = (0, 0)$ . 7.3  $\mathbf{d} = (-\frac{21}{13}, -\frac{19}{13})$ ,  $f(\mathbf{x}^{(1)}) = -0.00364$ . 7.4 Subproblem is infeasible. 7.5  $\mathbf{d} = (-0.01347, -0.7663)$ . 7.6  $\mathbf{x}^* = (0.76471, 1.05882)$ ,  $f(\mathbf{x}^*) = -4.05882$ . 7.7  $\mathbf{d} = (1.5294, -0.38235)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(1)}) = -3.73362$ . 7.8  $\mathbf{d} = (-1.2308, -1.8462)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(1)}) = 1.53846$ . 7.9  $\mathbf{d} = (-0.2353, -0.9412)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(1)}) = -4.05822$ . 7.10  $\mathbf{d} = (-0.29412, -1.1765)$ ;  $f(\mathbf{x}^{(1)}) = -3.11765$ .

## فصل هشتم

### بهینه سازی طراحی عملی

8.1 For  $l = 500$  mm,  $d_o^* = 102.985$  mm,  $d_o^*/d_i^* = 0.954614$ ,  $f^* = 2.900453$  kg;

active constraints: shear stress and critical torque. **8.2** For  $l = 500$  mm,  $d_o^* = 102.974$  mm,  $d_i^* = 98.2999$  mm,  $f^* = 2.90017$  kg; active constraints: shear stress and critical torque. **8.3** For  $l = 500$  mm,  $R^* = 50.3202$  mm,  $t^* = 2.33723$  mm,  $f^* = 2.90044$  kg; active constraints: shear stress and critical torque. **8.4**  $R^* = 129.184$  cm,  $t^* = 2.83921$  cm,  $f^* = 56380.61$  kg; active constraints: combined stress and diameter/thickness ratio. **8.5**  $d_o^* = 41.5442$  cm,  $d_i^* = 40.1821$  cm,  $f^* = 681.957$  kg; active constraints: deflection and diameter/thickness ratio. **8.6**  $d_o^* = 1308.36$  mm,  $t^* = 14.2213$  mm,  $f^* = 92510.7$  N; active constraints: diameter/thickness ratio and deflection. **8.7**  $H^* = 50$  cm,  $D^* = 3.4228$  cm,  $f^* = 6.603738$  kg; active constraints: buckling load and minimum height. **8.8**  $b^* = 0.5$ ,  $h^* = 0.28107$ ,  $f^* = 0.140536$ ; active constraints: fundamental vibration frequency and lower limit on  $b$ . **8.9**  $b^* = 50.4437$ ,  $h^* = 15.0$ ,  $t_1^* = 1.0$ ,  $t_2^* = 0.5218$  cm,  $f^* = 16307.2$  cm<sup>3</sup>; active constraints: axial stress, shear stress, upper limit on  $t_1$  and upper limit on  $h$ . **8.10**  $A_1^* = 1.4187$ ,  $A_2^* = 2.0458$ ,  $A_3^* = 2.9271$  in<sup>2</sup>,  $x_1^* = -4.6716$ ,  $x_2^* = 8.9181$ ,  $x_3^* = 4.6716$  in,  $f^* = 75.3782$  in<sup>3</sup>; active stress constraints: member 1-loading condition 3, member 2-loading condition 1, member 3-loading conditions 1 and 3. **8.11** For  $\phi = \sqrt{2}$ :  $x_1^* = 2.4138$ ,  $x_2^* = 3.4138$ ,  $x_3^* = 3.4141$ ,  $f^* = 1.2877 \times 10^{-7}$ ; For  $\phi = 2$ :  $x_1^* = 2.2606$ ,  $x_2^* = 2.8481$ ,  $x_3^* = 2.8472$ ,  $f^* = 8.03 \times 10^{-7}$ . **8.13**  $d_o^*$  at base = 48.6727,  $d_o^*$  at top = 16.7117,  $t^* = 0.797914$  cm,  $f^* = 623.611$  kg. **8.13**  $d_o^*$  at base = 1419,  $d_o^*$  at top = 956.5,  $t^* = 15.42$  mm,  $f^* = 90894$  kg. **8.14** Outer dimension at base = 42.6407, outer dimension at top = 14.6403,  $t^* = 0.699028$  cm,  $f^* = 609.396$  kg. **8.15** Outer dimension at base = 1243.2, outer dimension at top = 837.97,  $t^* = 13.513$  mm,  $f^* = 88822.2$  kg. **8.16**  $u_a = 25$ :  $f_1 = 1.07301E-06$ ,  $f_2 = 1.83359E-02$ ,  $f_3 = 24.9977$ ;  $u_a = 35$ :  $f_1 = 6.88503E-07$ ,  $f_2 = 1.55413E-02$ ,  $f_3 = 37.8253$ . **8.17**  $u_a = 25$ :  $f_1 = 2.31697E-06$ ,  $f_2 = 2.74712E-02$ ,  $f_3 = 7.54602$ ;  $u_a = 35$ :  $f_1 = 2.31097E-06$ ,  $f_2 = 2.72567E-02$ ,  $f_3 = 7.48359$ . **8.18**  $u_a = 25$ :  $f_1 = 1.117707E-06$ ,  $f_2 = 1.52134E-02$ ,  $f_3 = 19.815$ ,  $f_4 = 3.3052E-02$ ;  $u_a = 35$ :  $f_1 = 6.90972E-07$ ,  $f_2 = 1.36872E-02$ ,  $f_3 = 31.479$ ,  $f_4 = 2.3974E-02$ . **8.19**  $f_1 = 1.12618E-06$ ,  $f_2 = 1.798E-02$ ,  $f_3 = 33.5871$ ,  $f_4 = 0.10$ . **8.20**  $f_1 = 2.34615E-06$ ,  $f_2 = 2.60131E-02$ ,  $f_3 = 10.6663$ ,  $f_4 = 0.10$ . **8.21**  $f_1 = 1.15097E-06$ ,  $f_2 = 1.56229E-02$ ,  $f_3 = 28.7509$ ,  $f_4 = 3.2547E-02$ . **8.22**  $f_1 = 8.53536E-07$ ,  $f_2 = 1.68835E-02$ ,  $f_3 = 31.7081$ ,  $f_4 = 0.10$ . **8.23**  $f_1 = 2.32229E-06$ ,  $f_2 = 2.73706E-02$ ,  $f_3 = 7.48085$ ,  $f_4 = 0.10$ . **8.24**  $f_1 = 8.65157E-07$ ,  $f_2 = 1.4556E-02$ ,  $f_3 = 25.9761$ ,  $f_4 = 2.9336E-02$ . **8.25**  $f_1 = 8.27815E-07$ ,  $f_2 = 1.65336E-02$ ,  $f_3 = 28.2732$ ,  $f_4 = 0.10$ . **8.26**  $f_1 = 2.313E-06$ ,  $f_2 = 2.723E-02$ ,  $f_3 = 6.86705$ ,  $f_4 = 0.10$ . **8.27**  $f_1 = 8.39032E-07$ ,  $f_2 = 1.43298E-02$ ,  $f_3 = 25.5695$ ,  $f_4 = 2.9073E-02$ . **8.28**  $k^* = 2084.08$ ,  $c^* = 300$  (upper limit),  $f^* = 1.64153$ .

پیوست A

تحلیل اقتصادی

**A.1** (a)  $S_{216} = \$24004.31$ , (b)  $R = \$586.02$ . **A.2** (a)  $R = \$156.89$ , (b)  $P =$

\$2 293.37. **A.3** (a)  $R = \$843.53$ , (b)  $P = \$67512.98$ . **A.4** (a)  $S_{24} = \$2 392.83$ , (b)  $S_{730} = \$2 394.38$ . **A.5**  $i = 0.02 075$  (24.9% annual). **A.6** \$855.01. **A.7**  $PW_A = \$598 935.18$ ,  $PW_B = \$518 807.4$ ;  $AC_A = \$60 408.07$ ,  $AC_B = \$52 326.46$ . **A.8**  $PW_A = \$24 \times 10^6$ ,  $PW_B = \$27.5 \times 10^6$ . **A.9**  $AC_{80} = \$53 134.42$ ,  $AC_{50} = \$53 507.54$ ;  $PW_{80} = \$343 468.81$ ,  $PW_{50} = \$345 880.69$ . **A.10**  $PW_A = \$54 668.58$ ,  $PW_B = \$54 889.53$ . **A.11**  $PW_A = \$101 600.00$ ,  $PW_B = \$102 546.86$ ;  $AC_A = \$14 187.96$  ( $MC_A = \$1 118.70$ ),  $AC_B = \$14 409.08$  ( $MC_B = \$1 136.14$ ). **A.12** (a)  $AC_A = -\$4 475.76$ ,  $AC_B = -\$5 983.84$ ,  $AC_C = -\$10 459.63$ ;  $PW_A = -\$38 104.76$ ,  $PW_B = -\$50 943.86$ ,  $PW_C = -\$89 048.62$ ; (b)  $A = \$213 296.47$ ,  $B = \$171 977.88$ ,  $C = \$295 933.65$ . **A.13**  $PW_A = \$106 567.11$ ,  $PW_B = \$123 283.56$ . **A.14**  $AC_A = \$21 013.62$ ,  $AC_B = \$24 000.00$ ;  $PW_A = \$104 996.60$ ,  $PW_B = \$119 918.35$ . **A.15**  $PW_A = \$1 186 767.70$ ,  $PW_B = \$1 159 216.60$ ;  $AC_A = \$118 676.77$ ,  $AC_B = \$115 921.66$ . **A.16**  $PW_A = \$76 665.15$ ,  $PW_B = \$100 000.00$ ,  $PW_C = \$54 884.60$ . **A.17**  $PW_A = \$11 928.68$ ,  $PW_B = \$12 708.79$ ,  $PW_C = \$12 392.64$ .

## پیوست B

### جبر برداری و ماتریسی

**B.1**  $|A| = 1$ . **B.2**  $|A| = 14$ . **B.3**  $|A| = -20$ . **B.4**  $\lambda_1 = (5 - \sqrt{5})/2$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = (5 + \sqrt{5})/2$ . **B.5**  $\lambda_1 = (2 - \sqrt{2})$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = (2 + \sqrt{2})$ . **B.6**  $r = 4$ . **B.7**  $r = 4$ . **B.8**  $r = 4$ . **B.9**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ . **B.10**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ . **B.11**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . **B.12**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 1$ . **B.13**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . **B.14**  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ . **B.15**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . **B.16**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ . **B.17**  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = -2$ . **B.18**  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = -15$ ,  $x_3 = -1$ ,  $x_4 = 9$ . **B.19**  $x_1 = (3 - 7x_3 - 2x_4)/4$ ,  $x_2 = (-1 + x_3 - 2x_4)/4$ . **B.20**  $x_1 = (4 - x_3)$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_4 = 4$ . **B.21**  $x_1 = (-3 - 4x_4)$ ,  $x_2 = (-2 - 3x_4)$ ,  $x_3 = x_4$ . **B.22**  $x_1 = -x_4$ ,  $x_2 = (2 + x_4)$ ,  $x_3 = (-2 - x_4)$ . **B.23**  $x_1 = 4 + (2x_2 - 8x_3 - 5x_4 + 2x_5)/3$ ;  $x_6 = (9 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5)/2$ ;  $x_7 = 14 - (13x_2 + 14x_3 + 8x_4 + 4x_5)/3$ ;  $x_8 = (9 + x_2 - 16x_3 - 7x_4 + 19x_5)/6$ . **B.24** Linearly dependent. **B.25** Linearly independent. **B.26**  $\lambda_1 = (3 - 2\sqrt{2})$ ,  $\lambda_2 = (3 + 2\sqrt{2})$ . **B.27**  $\lambda_1 = (3 - \sqrt{5})$ ,  $\lambda_2 = (3 + \sqrt{5})$ . **B.28**  $\lambda_1 = (5 - \sqrt{13})/2$ ,  $\lambda_2 = (5 + \sqrt{13})/2$ ,  $\lambda_3 = 5$ . **B.29**  $\lambda_1 = (1 - \sqrt{2})$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = (1 + \sqrt{2})$ . **B.30**  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = (3 - \sqrt{5})$ ,  $\lambda_3 = (3 + \sqrt{5})$ .

## پیوست C

### يك روش عددی برای حل معادله‌های غیرخطی

**C.1**  $x^{(3)} = 0.6190$ . **C.2**  $x^{(2)} = 9.4249$ . **C.3**  $x^{(2)} = 1.5708$ . **C.4**  $x^{(3)} = -1.4958$ . **C.5**  $x^{(2)} = (3.788 42, 0.6545)$ . **C.6**  $x^{(2)} = (4.10321, 8.14637)$ . **C.7**  $x^{(2)} = (-3.3738, 0.0360)$ . **C.8**  $x = (3.6840, 0.7368)$ . **C.9**  $x = (-4, -8)$ ;  $z = (4, 8)$ . **C.10**  $x = (-3.3315, 0.03949)$ ;  $\underline{x} = (-0.3980, 0.5404)$ .

## واژه نامه انگلیسی - فارسی

absurd	بی معنی - محال
adaptive	تطبیقی
algorithm	الگوریتم
argument	شناسه
attributes	شاخصها
augmented	افزوده
backward difference	تفاضل پس رو
batch	اجرای یک سره
block diagram	نمودار جعبه ای
bounded	کراندار
bracket	آویز
candidate	نامزد
canonical	کانونی
central difference	تفاضل مرکزی
colactor	هم عامل
compiler	مترجم برنامه - تلفیق گر
condition number	عدد شرطی
controller	تنظیم کننده

conventional	قراردادی
cubic splines	منحنی برازش درجه ۳
data processing	پردازش داده ها
degenerate	تباهیده
descent step	گام کاهشی
disbursement	پرداخت، خرج
discrete	گسته
distortion	اعوجاج
divident	سودبخش، سود سهام
domain	دامنه
down payment	پیش پرداخت
dual	دوگان
durable	دوام، پایداری
element (of marix)	درایه
encounter	مواجه شدن
equal interval	بازه یکسان
equality constraint	قید مساوی
expenditure	مخارج
extreme	رأس
feasibe	قابل قبول (امکان پذیر - در دسترس)
forward difference	تعامل پیش رو
frequency	بسامد
Gaussian quadrature	تربیع گوسی
global	فراگیر
gradient-based	شیب اساس
graphbical	ترسیمی
heuristics	بر اساس تجربه و راههای عملی

icon	نماد
ideal	ایده‌آل - مطلوب
ill-condition	بدخیم - ناجور
implication	ضرورت
implicit	ضمنی
inconsistent	ناجور - متناقض
inequality constraint	قید نامساوی
inflection point	نقطه عطف
interactive	تعاملی
interface	فصل مشترک
interpretation	تفسیر
interval	محدوده (فاصله - بازه)
intractable	بهبودناپذیر - ناعلاج
intrinsic	ذاتی - باطنی
isocost	تراز هزینه
isolated	منحصر به فرد
iterative	تکراری - چرخه‌ای
local	محلی
loosening constraint	تسهیل قید
mass density	چگالی
mechanism	ساز و کار
minor	مایر - کهاد
mode	حالت
model	مدل - الگو
monitor	بازبینی و کنترل
move limits	حدود حرکت
multivariable	چندمتغیره

optimal	بهین
order of magnitude	مرتبه بزرگی
overdetermined	فرامعین
pace	تندی - سرعت
pivot	لولا
post-optimality	پس بهینگی
quadratic	درجه دو
quasi-Newton	شبه نیوتن
rank	رتبه
rate of return	نرخ برگشت سرمایه
redundant	اضافی
regular point	نقطه منظم
resource	منبع
revenue	درآمد
rigorous	سخت
saddle point	نقطه زین اسبی
salvage value	ارزش در پایان مدت استهلاك
saw mill	کارخانه چوب بری
scaling	مقیاس بندی
sequential	دنباله ای - ترتیبی
simplex	سیمپلکس
simulation	شبیه سازی
single real valued	تک مقداری حقیقی
singular point	نقطه منفرد
sinking fund	وجوه استهلاکی
smooth	هموار
sophisticated	هوشمند

stationary	ایستا
steepest descent	تندترین کاهش
strict global minimum	مینیمم فراگیر قطعی (اکید)
surge	تموّج
surplus	زیادتی
switching condition	شرایط سوئیچی
symbol	نماد - رمز
systematic	نظام مند
tableau	جدول
threshold value	مقدار حدی
tightening constraint	محدود و محکم کردن قید
time value of money	ارزش زمانی نقدینگی
tolerance	مقدار خطا
treat	تجزیه و تحلیل
treatment	برخورد با (رفتار - طرز عمل)
trend	تمایل - گرایش
uncertainty	عدم اطمینان
underlying	زیربنایی
unimodal	تک حالتی
update	بهنگام (روزآمد)
versatile	کارآمد
violate	نقض کردن



## واژه نامه فارسی - انگلیسی

batch	اجرای یک سره
salvage value	ارزش در پایان مدت استهلاك
time value of money	ارزش زمانی
redundant	اضافی
distortion	اعوجاج
augmented	افزوده
algorithm	الگوریتم
bracket	آویز
ideal	ایده آل - مطلوب
stationary	ایستا
monitor	بازبینی و کنترل
equal interval	بازه یکسان
ill-condition	بدخیم - ناجور
heuristics	براساس تجربه و راههای عملی
treatment	برخورد با (رفتار - طرز عمل)
frequency	بسامد
intractable	بهبودناپذیر - ناعلاج
update	بهنگام (روزآمد)

optimal	بهین
degenerate	بی ثمر
absurd	بی معنی - محال
disbursements	پرداخت ، خرج
data processing	پردازش داده ها
post-optimality	پس بهینگی
down payment	پیش پرداخت
treat	تجزیه تحلیل
Gaussian quadrature	تریع گوسی
graphical	ترسیمی
loosening constraint	تسهیل قید
adaptive	تطبیقی
interactive	تعاملی
backward difference	تفاضل پس رو
forward difference	تفاضل پیش رو
central difference	تفاضل مرکزی
interpretation	تفسیر
unimodal	تک حالتی
single real valued	تک مقداری حقیقی
trend	تمایل - گرایش
surge	تموج
steepest descent	تندترین کاهش
controller	تنظیم کننده
tableau	جدول
mass density	چگالی
mode	حالت
move limits	حدود حرکت

۷۹۷	واژه نامه فارسی - انگلیسی
multivariable	چندمتغیره
domain	دامنه
revenue	درآمد
element (of matrix)	درایه
quadratic	درجه دو
sequential	دنباله ای - ترتیبی
durable	دوام، پایداری
dual	دوگان
intrinsic	ذاتی - باطنی
rank	رتبه
surplus	زیادتی
underlying	زیربنایی
mechanism	ساز و کار
rigorous	سخت
divident	سودبخش، سود سهام
simplex	سیمپلکس
attributes	شاخصها
quasi-Newton	شبه نیوتن
simulation	شبیه سازی
switching condition	شرایط سوئیچی
argument	شناسه
gradient-based	شیب اساس
implication	ضرورت
implicit	ضمنی
condition number	عدد شرطی
uncertainty	عدم اطمینان
global	فراگیر

overdetermined	فرامعین
interface	فصل مشترك
feasible	قابل قبول (امكان پذیر - در دسترس)
conventional	قراردادی
equality constraint	قيد مساوی
inequality constraint	قيد نامساوی
versatile	کارآمد
saw mill	کارخانه چوب بری
canonical	کانونی
bounded	کراندار
descent step	گام کاهشی
discrete	گسته
minor	مایر - کهاد
compiler	مترجم برنامه - تلفیق گر
lightening constraint	محدود و محکم کردن قید
interval	محدوده (فاصله - بازه)
local	محلی
pivot	محور قرار دادن
expenditure	مخارج
model	مدل - الگو
order of magnitude	مرتبه بزرگی
threshold value	مقدار حدی
tolerance	مقدار خطا
scaling	مقیاس بندی
resource	منبع
isolated	منحصر به فرد
cubic splines	منحنی برازش درجه ۳

encounter	مواجهه شدن
strict global minimum	مینیمم فراگیر قطعی (اکید)
inconsistent	ناجور - متناقض
candidae	نامزد
rate of return	نرخ بازده سرمایه
systematic	نظام مند
violate	نقض کردن
saddle point	نقطه زین اسبی
inflection point	نقطه عطف
regular point	نقطه منظم
singular point	نقطه منفرد
icon	نماد
symbol	نماد - رمز
block diagram	نمودار جعبه ای
extreme	نهایت - رأس
sinking fund	وجوه استهلاکی
cofactor	هم عامل
isocost	هم هزینه
smooth	هموار
sophisticated	هوشمند



## نمایه

۱

- اثرات تغییر در حدود قيود ۱۹۸
- اثر پارامتر جریمه R روی الگوریتم CSD ۵۱۶
- اثر مقیاس بندی تابع هزینه ۲۰۱
- اثر مقیاس بندی یک قید ۲۰۲
- آحاد امریکایی - انگلیسی ۱۴
- احیای سنگ آهن ۸۲
- ارتباط بین ابتدایی و دوگان ۳۲۹
- ارتباط دادن متغیرهای طراحی ۶۰۶
- ارتباط متقابل کاربرد برنامه IDESIGN ۵۸۲
- ارزش زمانی نقدینگی ۶۷۳
- ارزیابی عددی گرادیانها ۳۷۰
- ارزیابی گرادیان ۵۸۶ ، ۶۱۵
- ارزیابی گرادیانها برای قاب دو عضوی ۶۱۶
- آزمون برای فضای برداری ۷۳۴
- آزمون تحذب یک مسأله ۱۸۹
- اس ال پی (SLP) ۴۷۳
- استفاده از ترسیم تعاملی ۵۹۵
- استفاده از جدول آخر ابتدایی ۳۳۵
- استفاده از جدول دوگان ۳۳۳
- استفاده از شکل جایگزین شرایط K-T ۱۷۵
- استقلال خطی ۷۲۸
- اصطلاحات LP ۲۵۱
- اصل ایستایی انرژی پتانسیل ۴۳۲
- افزایندی ماتریسها ۷۰۴
- الگوریتم بهینه سازی ۴۵۵
- الگوریتم تصحیح قید (CC) ۵۶۷
- الگوریتم تصحیح قید در هزینه مشخص ۵۷۳ (CCS)
- الگوریتم تندترین کاهش ۴۰۱
- الگوریتم تندترین کاهش مقید بهبود یافته ۵۲۹
- الگوریتم جست و جوی یک بعدی با روش بخش طلایی ۳۸۷
- الگوریتم سیمپلکس ۲۷۷

- الگوریتم کاهش هزینه (CR) ۵۶۱، ۵۶۲  
 الگوریتم گام I ۲۸۴  
 الگوریتم گام II ۲۸۵  
 الگوریتمهای قابل اعتماد ۴۶۳  
 الگوریتمهای بهینه‌سازی طراحی تعاملی ۵۶۰  
 الگوهای بسیار مطلوب ۷  
 الگوی بهینه‌سازی طراحی ۵۶  
 الگوی بهینه‌سازی طراحی استاندارد ۵۶  
 الگوی بهینه‌سازی طراحی برنامه ریزی  
 غیرخطی استاندارد ۶۰۵  
 الگوی تکامل سیستم ۵  
 آماده‌سازی داده‌های تعاملی ۵۷۷  
 انتخاب یک الگوریتم ۶۲۱  
 انتگرال دو هامل ۶۵۰
- ب**  
 بار کمناش ۴۸  
 بار ناگهانی ۶۴۸  
 بازه عدم اطمینان ۳۷۸  
 بخش طلایی ۳۸۴  
 برآوردن منحنی درجه دوم ۳۹۱  
 بردار ۱۷، ۲۲، ۶۹۸  
 بردار تغییر طراحی ۴۶۶  
 بردار ستونی ۶۹۸  
 بردار سطری ۶۹۸  
 بردار گرادینان ۱۰۸  
 بردارهای ویژه ۷۳۷
- بررسی تحذب یک تابع ۱۸۰  
 بررسی تحذب یک مجموعه ۱۷۸  
 بررسی تحذب یک مسأله ۱۸۳  
 بررسی مقادیر ویژه برای تشخیص شکل  
 یک ماتریس ۱۲۲  
 برنامه رایانه ای ۷۵۷  
 برنامه ریزی پارامتریک ۲۹۸  
 برنامه ریزی خطی ۲۳۷  
 برنامه ریزی درجه دو برگشتی (RQP) ۵۲۴  
 برنامه‌ریزی درجه دو دنباله ای (SQP) ۴۹۸،  
 ۵۲۴  
 برنامه ریزی غیرخطی ۳۶۱  
 برنامه فرعی ارزیابی تابع مینیمم شونده ۵۸۲  
 برنامه فرعی ارزیابی توابع قیود ۵۸۲  
 برنامه فرعی ارزیابی گرادینان تابع  
 مینیمم شونده ۵۸۲  
 برنامه فرعی ارزیابی گرادینان توابع قیود ۵۸۲  
 برنامه های خطی ۲۳۷  
 بسامد موج امواج ۵۹۰  
 بسامدهای طبیعی اصلی ۵۲  
 بستار جمع ۷۳۳  
 بستار ضرب اسکالر ۷۳۳  
 بسط تیلور ۱۱۲  
 بهبود جواب قابل قبول اصلی ۲۷۲  
 بهبود مارکوارت ۴۲۳  
 به دست آوردن روش سیمپلکس ۲۶۸  
 به دست آوردن شرایط بهینگی ۱۲۷

پنداره‌های اصلی و — مراحل روش  
سیمپلکس ۲۶۷  
پیش ضرب ۷۰۰

## ت

تابع افت درجه دو ۴۳۹  
تابع پیوسته ۲۳  
تابع ضمنی ۶۰۹  
تابع کاهشی ۴۹۹، ۴۶۳  
تابع کاهشی شنیچنی ۴۹۹  
تابع مانع لگاریتمی ۴۳۹  
تابع مانع وارون ۴۳۹  
تابع محدب قطعی ۱۸۰  
تابع هزینه ۲۷، ۳۳، ۶۰۶  
تابع هزینه مصنوعی ۲۸۲  
تاریخچه بیشترین نقض قید ۵۹۶  
تاریخچه پارامتر همگرایی ۵۹۷  
تاریخچه تابع قید ۵۸۰  
تاریخچه تابع هزینه ۵۹۶  
تاریخچه توابع قیود ۵۹۸  
تاریخچه متغیرهای طراحی ۵۸۰  
تبدیل قید ۱۸۶  
تحلیل اقتصادی ۶۷۳  
تحلیل پس بهینگی ۱۹۷، ۲۹۸  
تحلیل حساسیت ۲۹۸  
تحلیل حساسیت طراحی ۶۱۶  
ترانزاده یک ماتریس ۷۰۱

بهین دیگر ۲۷۲

بهین فراگیر ۲۷۲

بهینگی فراگیر ۱۷۶، ۶۰۵

بهینه سازی ترسیمی ۲۸، ۶۲

بهینه سازی شکلی یک سازه ۶۶۶

بهینه سازی طراحی تعاملی ۵۵۵

بهینه سازی طراحی تعاملی سیستمهای

مهندسی ۵۸۱

بهینه سازی طراحی عملی ۶۰۳

بهینه سازی متغیر پیوسته ۶۴۱

بهینه سازی متغیر گسسته ۶۴۲

بهینه سازی یک بعدی با درون یابی درجه

دوی جایگزین ۳۹۴

بهینه سازی یک کانال آب ۸۳

بیشترین مقدار نقض قید ۴۹۹

بی کران ۲۷۰

بیگ ام ۲۹۶

## پ

پارامتر جریمه ۴۹۹

پاسکال ۳۷

پایه ۲۵۲

پذیرفتنی ۳۵

پس ضرب ۷۰۰

پنداره اصلی روش سیمپلکس ۲۵۵

پنداره اصلی روشهای عددی ۳۶۶

- ترسیم تعاملی ۵۸۰  
 ترسیمه آزاد ۳۰  
 ترکیب خطی از بردارها ۷۲۸  
 تصحیح قید با حداقل افزایش در هزینه ۵۷۳  
 تصحیح قید برای افزایش مشخصی در هزینه ۵۷۲  
 تصحیح قید در هزینه ثابت ۵۶۹، ۵۷۰  
 تصمیم سازی تعاملی ۵۷۹  
 تعامل در بهینه سازی طراحی ۵۵۷  
 تعبیر فیزیکی ضرایب لاگرانژ ۱۶۶  
 تعبیر هندسی شرایط لازم برای مسائل با قید نامساوی فعال ۱۵۶  
 تعریف LP استاندارد ۲۴۳  
 تعریف مسأله QP ۴۸۹  
 تعمیم روش گرادیان کاهش یافته ۵۴۰  
 تغییرات محدوده منابع ۲۹۹  
 تغییر حدود قید ۲۰۰  
 تغییر ماتریس ضرایب ۳۲۰  
 تفاضل پس رو ۳۷۱  
 تفاضل پیش رو ۳۷۱  
 تفاضل مرکزی ۳۷۱  
 تفاضلهای محدود ۳۷۰  
 تقریب هسیان شبه نیوتن ۵۲۷  
 تنش ۳۷  
 تنش شکست مصالح ۳۷  
 تنش کارکرد ۴۵۹  
 تنش مجاز ۳۷، ۴۹  
 توابع کاهش ۵۳۳  
 توابع مانع تعمیم یافته ۴۴۰  
 توابع محدب ۱۷۹، ۱۸۲  
 توابع هدف ۳۳  
 توانمندی ۶۲۱  
 تیر ۷۹  
 تیر ستون استوانه ای توخالی ۸۵  
 تیر مکعب مستطیلی ۵۱۹  
 تیر یک سر گیردار ۸۵  
 ث  
 ثابت فنر ۶۴۶  
 ج  
 جاکوبین ۷۵۱  
 جایگذاری پس رو ۷۱۲  
 جایگزین جست و جوی بازه یکسان ۳۸۳  
 جبر برداری و ماتریسی ۶۹۵  
 جبر خطی ۶۹۵  
 جداسازی متغیرها ۶۴۶  
 جدول ۲۵۷، ۲۵۸  
 جرم ۶۴۶  
 جریمه (خارجی) ۴۳۸  
 جست و جوی بازه یکسان ۳۷۹، ۳۸۱، ۷۶۷  
 جست و جوی خطی ۳۷۳  
 جست و جوی خطی غیردقیق ۵۰۱

- جست و جوی فیبوناچی ۳۸۴
- جست و جوی یک بعدی ۳۷۳
- جمع ماتریسها ۶۹۸
- جواب ابتدایی از جدول دوگان ۳۳۳
- جواب ابتدایی از جواب دوگان ۳۲۸
- جواب اصلی ۲۴۹، ۲۵۱
- جواب اصلی بهین ۲۵۱
- جواب اصلی تباهیده ۲۵۱
- جواب بهین ۲۶۸، ۲۷۷
- جواب بهین مسائل LP ۲۵۴، ۲۷۲
- جواب بی کران ۶۶
- جواب عمومی به وسیله کاهش
- گوس - جردن ۷۲۳
- جواب قابل قبول ۲۵۱
- جواب قابل قبول اصلی ۲۵۱، ۲۷۰
- جواب قابل قبول اصلی اولیه ۲۸۱
- جواب قابل قبول اصلی تباهیده ۲۵۱
- جواب کلی سیستم معادلات ۷۲۳
- جوابهای ابتدایی و دوگان ۳۲۹، ۳۳۰
- جوابهای اصلی ۷۲۶
- جهت "پایین تپه" ۳۶۹
- جهت تندترین کاهش ۴۰۱
- جهت قابل قبول بهبود یافته ۵۳۵، ۵۳۶
- جهت کاهش ۳۹۵
- جهتهای کاهش ۳۶۹
- جهتهای گرادیان مزدوج ۴۱۱
- چگالی مصالح ۴۹
- چگونگی کار با قیود مساوی ۳۲۵
- چندضلعی قیود ۲۵۰
- چندضلعی محدب ۲۵۱
- حد بالا و پایینی متغیرهای طراحی ۴۱
- حدود منابع ۲۴۱
- حدود حرکت ۴۷۳
- حذفی گوس ۷۱۶، ۷۱۱، ۷۱۲
- حذفی گوس - جردن ۲۵۵، ۲۶۰، ۲۷۸
- حساسیت متغیرهای طراحی ۵۹۹
- حساسیت نسبی ۵۷۹
- حل بهین مسأله طراحی فتر ۵۹۱
- حل تعاملی برای مسأله طراحی فتر ۵۹۳
- حل زیر مسأله برنامه ریزی درجه دو ۴۸۹
- حل شرایط لازم کان - تاکر ۱۶۷
- خطوط تابع هزینه ۶۴
- خطوط هزینه ثابت ۶۴
- خطی سازی زیر مسأله ۴۶۴
- خطی سازی مسأله ۴۵۳
- خطی سازی مسأله مقید ۴۶۴
- خواص بردار گرادیان ۳۹۶
- خواص دترمینانها ۷۰۹

- ۵  
دترمینانها ۷۱۷  
۴۹۸، ۴۵۳  
روش تندترین کاهش مقید (CSD) ۴۵۲،  
درون یابی چندجمله ای ۳۹۱  
روش توانمند ۴۶۳  
درون یابی درجه دو ۳۹۳  
روش دی اف پی ۴۲۵  
دستگاه معادلات خطی ۷۰۶  
روش دیگر برای کار با قیود مساوی ۳۲۶  
دستگاه معادلات همگن ۷۰۶  
روش دیویدان فلتچر پاول ۴۲۵  
دستورهای تعاملی ۵۸۴  
روش سیمپلکس ۲۵۵  
دنباله فیبوناچی ۳۸۴  
روش سیمپلکس جایگزین ۲۹۶  
دوگانی در برنامه ریزی خطی ۳۲۲  
روش سیمپلکس دوگامی ۲۸۱  
روش شبه نیوتن مقید ۵۳۰  
روش کاهشی ۳۶۹  
رابطه بهنگام کردن بی اف جی اس ۴۳۰  
روش گرادیان کاهش یافته عمومی (GRG) ۵۴۰  
رابطه سازی صحیح ۲۵  
روش گرادیان مزدوج ۳۶۴، ۴۱۱  
رابطه سازی کامل ۳۱  
روش لولایی مکمل ۴۹۴  
رابطه سازی مسائل ۲۵  
روش مرتبه اول ۳۹۵  
رابطه سازی مسائل بهینه سازی طراحی  
روش مرتبه صفر ۳۷۹  
عملی ۶۰۴  
روش مقایسه هزینه سالانه (AC) ۶۸۱  
رابطه سازی مسأله ۳۹  
روش نیوتن ۷۶۹  
راهبرد قید پتانسیل ۴۶۱، ۵۱۸، ۶۲۲  
روشهای ابتدایی ۴۵۱  
رتبه یک ماتریس ۷۱۹  
روشهای اجزای محدود ۶۰۷  
روابط بهره ۶۷۸  
روشهای بهنگام مستقیم ۴۲۹  
روش ارزش فعلی ۶۸۵  
روشهای تبدیل برای طراحی بهین ۴۳۷  
روش تابع جریمه ۴۳۸  
روشهای خارجی ۴۳۹  
روش تابع مانع ۴۳۸  
روشهای شبه نیوتن ۳۶۴، ۴۲۴  
روش تحلیلی محاسبه اندازه گام ۳۷۵  
روشهای شبه نیوتن مقید ۵۲۳، ۵۲۴  
روش تصویر گرادیان ۵۳۸، ۵۳۹  
روشهای عددی برای طراحی بهین مقید ۴۵۱  
روش تندترین کاهش ۷۶۳

## س

- روشهای عددی برای طراحی بهین نامقید ۳۶۱  
 روشهای عددی محاسبه اندازه گام ۳۷۶  
 روشهای عددی مسائل بهینه سازی  
 غیرخطی ۳۶۱  
 روشهای عددی مستقیم (جست و جو) ۴۵۴  
 روشهای غیرمستقیم ۱۰۲  
 روشهای کاهش بازه ۳۷۸  
 روشهای لاگرانژین افزایش یافته ۴۴۰، ۴۴۱  
 روشهای مرتبه دو ۳۹۵  
 روشهای مستقیم ۱۰۲  
 روشهای مستقیم بهینه سازی ۳۶۷  
 روشهای مینیم سازی نامقید دنباله ای ۴۳۷  
 روند تغییر اطلاعات ۵۷۹  
 ریشه های دستگاه معادلات غیرخطی ۷۵۵  
 ریشه های معادلات، غیر خطی با مینیم سازی  
 نامقید ۴۳۶  
 ریشه های معادله های غیرخطی ۷۴۵

## ز

- زیر ماتریسها ۷۰۴  
 زیر مجموعه ۱۸  
 زیرمسأله QP ۴۹۸  
 زیرمسأله برنامه ریزی درجه دو (QP) ۴۵۳،  
 ۴۸۲، ۴۸۴  
 زیرمسأله تقریبی ۴۶۴  
 زیگزگ ۴۶۴  
 زین اسی ۱۲۹

## ش

- شرایط بهینگی ۱۲۷  
 شرایط بهینگی برای توابع یک متغیره ۱۲۸  
 شرایط بهینگی توابع چند متغیره ۱۳۴  
 شرایط بین رشته ای ۲۵  
 شرایط سوپچی یا شرایط کمبود مکمل ۱۵۸  
 شرایط کافی برای مسائل مقید کلی ۱۹۱  
 شرایط کافی قوی ۱۹۲

- شرایط لازم درجه اول کان- تاکر ۱۷۵  
 شرایط لازم : قیود مساوی ۱۴۵  
 شرایط لازم : قیود نامساوی ۱۵۴  
 شرایط لازم کان- تاکر ۱۵۷، ۱۶۶  
 شرایط لازم مرتبه اول ۱۲۸، ۱۵۸  
 شرایط لازم و کافی برای تحدب توابع ۱۸۰  
 شرایط لازم و کافی مرتبه دو ۱۸۸  
 شرایط مرتبه دو برای بهینه سازی مقید ۱۸۸  
 شرایط مرتبه دو برای مسائل کلی ۱۹۰  
 شرط تسلیم ۶۱۰  
 شرط کافی برای مسائل محدب ۱۸۸  
 شرط کافی مرتبه دو ۱۳۵  
 شرط کاهش ۳۶۹  
 شرط کاهش ۵۰۲، ۵۰۳  
 شرط لازم مرتبه دو ۱۳۰، ۱۳۵  
 شرط لازم مرتبه دو برای مسائل مقید  
 کلی ۱۹۱  
 شکل جایگزین شرایط کان تاکر ۱۷۴  
 شکل درجه دو ۱۱۶  
 شکل کانونی ۲۵۵  
 شکل کانونی اولیه ۲۸۱  
 شکل کانونی سیستم معادلات ۷۲۳  
 شکل یک ماتریس ۱۲۱، ۱۲۲  
 ض  
 ضرایب تبدیل ۱۵  
 ضرایب حساسیت ۵۸۰
- ضرایب "سوق دادن" ۵۳۶  
 ضرایب لاگرانژ ۱۴۶، ۲۴۰  
 ضرایب هزینه کاهش یافته ۲۷۱  
 ضرایب هزینه نسبی ۲۷۱  
 ضرب اسکالر ۷۰۳  
 ضرب ماتریسها ۶۹۹  
 ضرب نقطه ای ۲۲، ۷۰۳  
 ضریب ارزش فعلی پرداختهای سری  
 یکنواخت ۶۷۸  
 ضریب ارزش فعلی پرداخت یکجا ۶۷۵  
 ضریب برگشت سرمایه ۶۷۸  
 ضریب پرداخت یکجای مراحله مرکب ۶۷۴  
 ضریب تمرکز تنش وهل ۵۸۹  
 ضریب سپرده وجوه استهلاکی ۶۷۷  
 ضریب لاگرانژ ۱۵۱، ۱۶۰  
 ضریب مراحله مرکب سری یکنواخت ۶۷۶  
 ضریب یانگ ۴۸
- ط  
 طراحی اولیه ۷  
 طراحی بهین متغیرهای گسسته ۶۳۹  
 طراحی بهین یک سازه سه میله ای برای  
 ارضای شرایط عملکرد چندگانه ۶۲۹  
 طراحی بهین یک قاب دو عضوی ۶۲۷  
 طراحی پایه تابلو ۶۷۰  
 طراحی تیر ۶۹  
 طراحی تیر مکعب مستطیل ۲۰۸

- طراحی جزئیات سیستم ۶۰۵  
 طراحی ستون استوانه ای توخالی ۴۸  
 طراحی ستون یک منبع آب ۹۳  
 طراحی قوطی نوشابه ۴۰  
 طراحی کابینت ۴۳  
 طراحی مجموعه یک جعبه دنده  
 نه سرعت ۶۶۸  
 طراحی مخزن استوانه ای ۱۳۸  
 طراحی مخزن کروی عایق شده ۴۶  
 طراحی مهندسی و تحلیل ۸  
 طراحی میله پرچم ۹۵  
 طراحی یک آویز دیواری ۲۰۴  
 طراحی یک خریای دو میله ای ۲۷  
 طراحی یک سه پایه ۹۸  
 طراحی یک قاب دو عضوی ۶۰۹  
 طراحی یک میله پله ای پرچم ۶۶۹  
 طرح قابل قبول ۳۵، ۳۶  
 طرحهای بهین چندگانه ۶۶  
 طرحهای قابل قبول ۶۴
- ع  
 عدد شرطی یک ماتریس ۷۴۰  
 علامت جمع ۲۱  
 علامت خلاصه شده ۴۶۵  
 علامت مشتق ۱۰۸  
 علایم ۱۴  
 علایم اختصاری برای ماتریسها ۶۹۷
- غ  
 علایم ماتریسی ۱۱۳  
 علایم نشان دادن قیود ۲۰  
 عملکرد عددی ۳۶۳  
 عمل لولایی جزئی ۷۱۵  
 عمل لولایی کلی ۷۱۴  
 عملیات سطر و ستون مقدماتی ۷۰۲  
 عناصر ۱۸  
 عناصر غیر قطری ۷۰۳  
 عناصر قطر اصلی ۷۰۳  
 عنصر لولا ۲۷۷
- ف  
 فرآیند تکراری ۵  
 فرآیند حد ۵۵۹  
 فرآیند حذفی ۷۰۷  
 فرآیند طراحی ۵  
 فرآیند طراحی چرخه ای ۵۶۰  
 فرآیند طراحی قراردادی ۱۰  
 فرآیند طراحی قراردادی در مقابل بهین ۹

- فرآیند کاهش گوس - جردن در شکل  
جدولی ۷۲۶
- فضاهای برداری ۷۳۳
- فعال (محکم) ۱۵۴
- فنون جست و جو ۳۶۷
- فوق مجموعه ۱۹
- ق
- قابل اطمینان بودن یک الگوریتم ۶۲۲
- قابل قبول ۳۰، ۳۵
- قابل کارکرد ۳۰، ۳۵
- قابلیتهای برنامه آی دی زاین (IDESIGN)  
۵۸۵
- قابلیتهای تعاملی ۵۷۶، ۵۷۷، ۵۸۷
- قاعده کرامر ۷۰۸
- قضیه اصلی برنامه ریزی خطی ۲۵۴
- قضیه حساسیت تغییر قید ۱۹۸
- قضیه ویرستراس ۱۰۶
- قطاع خط ۱۷۷
- قید E فعال ۴۵۷
- قید اندازه گام درجه دو ۴۸۲
- قید غیر فعال ۱۵۴، ۴۵۷
- قید فعال ۴۵۷
- قید محکم یا سفت ۶۰
- قید مساوی ۶۰، ۱۵۱، ۱۵۳
- قید نامساوی ۱۵۴
- قید نقض شده ۶۰
- قیدهای اندازه ای ۴۱
- قیدهای خطی ۲۴۱
- قیمتهای دوگانی ۳۰۴
- قیود تنش ۳۸
- قیود جانبی ۴۱
- قیود خطی ۳۵
- قیود ضمنی ۳۵، ۶۰۷
- قیود طراحی ۲۷، ۳۵
- قیود غیر خطی ۳۵
- قیود فعال ۶۰
- قیود فن آورانه ۴۱
- قیود محدوده صریح متغیرهای طراحی ۴۵۲
- قیود نامساوی ۱۵۱
- قیود "نوع بزرگتری" ۵۹
- قیود وابسته ۶۰۶
- ک
- کاربردهای بزرگ ۵۲۳
- کارخانه تولید روغن گیاهی ۸۰
- کاهش به تابع یک متغیره ۳۷۳
- کاهش گوس ۷۱۲
- کاهشی بازه عدم اطمینان ۳۸۶
- کرانه‌های ساده ۴۱
- کلی بودن الگوریتم ۶۲۲
- کنترل بهین ۱۳
- کنترل بهین سیستمها با برنامه ریزی  
غیر خطی ۶۴۳

## ک

- گام کاهشی ۳۶۸، ۳۶۹  
گام لولایی ۲۵۹، ۲۶۰  
گامهای تصحیح قید ۵۳۹  
گامهای مفهومی الگوریتمهای بهینه سازی  
مقید ۴۵۵  
گرادیان  $f(x)$  ۳۶۸  
گرادیان تابع اسکالر  $f(x)$  ۳۹۶  
گرادیانهای طراحی ۶۱۶  
گرایش متغیرهای طراحی ۵۹۵

## ل

- لاگرانژین افزایش یافته ۴۳۸

## م

- ماتریس مثلثی پایین ۷۰۴  
ماتریس مربعی ۶۹۷، ۷۰۳  
ماتریس منفرد ۷۱۰  
ماتریس واحد ۷۰۴  
ماتریس هسیان ۱۱۰  
ماتریسهای معادل ۷۰۲  
ماتریسهای معین ۱۱۶  
ماکزیمم محلی ۱۰۶  
مانع (داخلی) ۴۳۸  
مایزر ۷۱۰  
مایزر اصلی ۷۱۰  
مباحثی چند در بهینه سازی طراحی عملی  
۶۲۱  
مبناهای اقتصادی برای مقایسه ۶۸۰  
متریک (SI) ۱۴  
متغیر اصلی ۲۵۱، ۲۶۰  
متغیر اصلی که باید غیر اصلی شود ۲۶۸  
متغیر غیر اصلی که باید اصلی شود ۲۷۰  
متغیر کمبود ۱۵۴  
متغیرهای دو گان به عنوان ضرایب لاگرانژ  
۳۳۹  
متغیرهای دو گانی ۳۰۳  
متغیرهای ساختگی ۶۹۶  
متغیرهای طراحی ۲۷، ۳۰  
متغیرهای طراحی صحیح ۶۱  
متغیرهای غیر اصلی ۲۵۸  
متغیرهای متریک مقید (CVM) ۵۲۴  
ماتریس ۶۹۶  
ماتریس اسکالر ۷۰۴  
ماتریس افزایش یافته ۷۰۶  
ماتریس پادمقارن ۷۰۳  
ماتریس ستونی ۶۹۸  
ماتریس سختی ۶۰۸  
ماتریس سطری ۶۹۸  
ماتریس شکل درجه دو تابع ۱۱۹  
ماتریس صفر ۶۹۸  
ماتریس ضرایب ۷۰۶  
ماتریس قطری ۷۰۳  
ماتریس مثلثی بالا ۷۰۴

- متغیرهای نامحدود ۲۴۲
- مثالهایی از بهینه سازی طراحی تعاملی ۵۸۷
- مثالی از یک مسأله بهینه سازی طراحی  
عملی ۶۰۷
- مجموعه ۱۷
- مجموعه بسته و کراندار ۱۰۶
- مجموعه طراحیهای قابل قبول ۶۰
- مجموعه قید ۶۰، ۱۰۵، ۱۸۲، ۱۸۸،  
۲۵۱
- مجموعه قید پتانسیل ۶۲۲
- مجموعه های محدب ۱۷۶، ۱۸۲
- محاسبات عددی ۶۰۵
- محدوده تغییرات منابع ۳۰۸
- محدوده تغییر پارامترهای طرف راست ۳۰۷
- محدوده ضرایب هزینه ۳۱۵
- محصور کردن اولیه مینیمم ۳۸۴
- مخزن استوانه ای ۴۷
- مخزن تحت فشار استوانه ای ۸۸
- مخزن کروی ۱۳۶
- مسائل برنامه ریزی صحیح ۴۲، ۴۶
- مسائل برنامه ریزی محدب ۱۸۲
- مسائل بهینه سازی نامقید ۳۶۳
- مسائل چند هدفه ۶۰۶
- مسائل طراحی بهین مقید ۱۴۲
- مسائل طراحی بهین نامقید ۱۲۷
- مسأله LP استاندارد ۲۴۱
- مسأله LP با جوابهای چندگانه ۲۷۸
- مسأله LP دوگان ۳۲۳
- مسأله QP اصلی ۴۹۲
- مسأله برنامه ریزی خطی ۴۲
- مسأله برنامه ریزی محدب ۱۸۸
- مسأله بی کران ۲۸۰
- مسأله حمل و نقل ۷۸
- مسأله طراحی فتر ۵۸۸
- مسأله غیر قابل قبول ۷۱، ۲۸۳، ۲۸۹
- مسأله کنترل حداقل زمان ۶۶۰
- مسأله ماکزیمم سازی سود ۶۲
- مسأله مقادیر ویژه ۵۳
- مسأله مینیمم سازی تلاش کنترل ۶۵۷
- مشتق پذیر پیوسته ۲۳
- مشتق گیری عددی ۳۷۱
- مشتق گیری یک شکل درجه دو ۱۲۴
- مشتقات جابه جایها ۶۲۰
- مشتقات جزئی تنش برشی ۶۱۶
- مشتقات جزئی تنش خمشی ۶۱۸
- مشخصات سیستم ۵
- معادله تعادل ۶۰۸
- معادله های غیرخطی چندگانه ۷۴۹
- معنی هندسی ضرایب لاگرانژ ۱۵۰
- معیار توقف ۳۷۸
- معیار توقف جست و جوی خطی ۴۰۳
- معیارهای بهینگی ۱۰۲
- معین مثبت ۱۲۱، ۱۲۲

- مفاهیم اساسی مربوط به مسائل برنامه ریزی  
خطی ۲۴۶
- مفاهیم مربوط به مجموعه بردارها ۷۲۸
- مفهوم چرخه ۷۴۶
- مفهوم فیزیکی ضرایب لاگرانژ ۱۹۷
- مقادیر ویژه ۷۳۷
- مقایسه ارزش فعلی ۶۸۴
- مقایسه سه رابطه سازی برای کنترل بهین ۶۶۳
- مقایسه سال مبنایی ۶۸۱
- مقعر ۱۸۱
- مقیاس بندی قید ۲۰۳
- مقیاس بندی متغیرهای طراحی ۴۰۷
- میلۀ توخالی تحت پیچش ۸۹
- مینیم ۱۰۵
- مینیم سازی انرژی پتانسیل کل ۴۳۲
- مینیم سازی یک بعدی ۳۶۴، ۳۷۳
- مینیم فراگیر (مطلق) ۱۰۵، ۱۸۲
- مینیم فراگیر قطعی (اکید) ۱۰۵، ۱۰۶
- مینیم محلی (نسبی) ۱۰۵
- مینیم محلی قطعی (اکید) ۱۰۵
- مینیم محلی منحصر به فرد ۱۹۱
- ن
- ناحیه قابل قبول ۶۴، ۱۰۵، ۲۵۴
- ناحیه قابل قبول بی کران ۲۷۳
- ناحیه قابل قبول خطی شده ۴۷۱
- ناسازگار ۷۲۱
- ناهمگن ۷۰۶
- نرخ همگرایی ۳۷۰
- نرم ۲۲
- نرم افزار بهینه سازی طراحی تعاملی ۵۸۱
- نرمال سازی ۴۷۲
- نرمال سازی قید ۴۵۸
- نرم بردارها ۷۳۸
- نرم جمع ۷۳۹
- نسبت طلایی ۳۸۴
- نصب رایانه ای ۵۵۹
- نصب و راه اندازی عددی ۵۳۳
- نقاط رأس ۲۵۴
- نقاط ضعف روش نیوتن ۴۱۹
- نقاط عطف ۱۲۹
- نقاط کان-تاکر ۱۶۰
- نقاط نامنظم ۱۷۱
- نقش رایانه در بهینه سازی طراحی تعاملی ۵۵۸
- نقطه رأس فرین ۲۵۱
- نقش رایانه در طراحی بهین ۱۲
- نقطه منظم ۱۴۶
- نقطه نامزد بهینگی ۱۲۶
- نگرشی بر الگوریتم SLP ۴۸۱
- نگرشی بر الگوریتم CSD ۵۱۷
- نگرشی بر الگوریتمهای تعاملی ۵۷۵
- نگرشی بر روشهای شبه نیوتن مقید ۵۳۲
- نماد علمی ۱۶
- نمایش پارامتری یک قطاع خط ۱۷۸

## هـ

- نمودار جریان نقدینگی ۶۷۹  
 نمودار حساسیت تابع هزینه ۵۹۸  
 نمودار حساسیت قیود ۶۰۰  
 نیمه معین مثبت ۱۲۱، ۱۲۲  
 همپایان شکل درجه دو ۱۲۵  
 هم عامل ۷۱۰  
 همگرایی الگوریتمها ۳۷۰  
 همگرایی فراگیر ۳۷۰  
 همگرایی یک الگوریتم ۴۶۳

## و

## ی

- وارون با استفاده از حذف گوس-جردن ۷۱۸  
 وارون با استفاده از حذف گوسی ۷۱۷  
 وارون تقریبی همپایان ۴۲۵  
 وارون یک ماتریس به وسیله هم عاملها ۷۱۶  
 وجود جواب ۷۲۱  
 وجود مینیمم فراگیر ۱۰۷  
 وجود یک جواب بهین ۶۰۵  
 وضعیت قید در یک نقطه طراحی ۴۵۷  
 یک تابع هدف معتبر ۲۶  
 یک شکل استاندارد الگو ۵۶  
 یک فرآیند بهینه سازی عددی سازگار ۶۲  
 یک نقطه و یا بردار در فضای « بعدی ۱۷  
 BFGS استاندارد ۵۲۸  
 LP ابتدایی ۳۲۲  
 (CADO) ۹