مهارت در ریاضیات

مسائل حل شده در

هندسهٔ مختصاتی در دو بعد

۶

تألیف آنتونی نیکلایدس

ترجمهٔ علی ساوجی

انتشارات فاطمی

مهارت در ریاضیات

مسائل حل شده در

هندسهٔ مختصاتی در دوبعد

۶

تألیف آنتونی نیکلایدس

ترجمهٔ علی ساوجی

انتشارات فاطمی

Success In Pure Mathematics
Coordinate Geometry in Two Dimensions
Anthony Nicolaides
Pass Publications

مهارت در ریاضیات

مسائل حل شده در

هندسهٔ مختصاتی در دوبُعد

مؤلف: آنتونی نیکلایدس
مترجم: علی ساوجی
ویراستار: مهران اخباریفر
ناشر: مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
چاپ اول، ۱۳۷۸
شابک X_۲۴۱_۳۱۸_۹۶۴
ISBN 964-318-241-X

طرح جلد: آتلیه انتشارات فاطمی
آماده‌سازی پیش از چاپ: تولید انتشارات فاطمی
لیتوگرافی: گرافیک گستر
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ بهرام
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۶۵۱۴۲۲ ـ ۶۵۴۷۷۰ نمابر: ۸۸۶۶۲۵۸
Fatemi@sina.sharif.ac.Ir

Nicolaides, Anthony
نیکلایدس، آنتونی، ۱۹۳۲ـ
مسائل حل شده در هندسهٔ مختصاتی در دوبعد / تألیف آنتونی نیکلایدس؛ ترجمهٔ علی ساوجی.ــ تهران: فاطمی، ۱۳۷۸.
پنج، ۱۶۹ ص.: مصور، نمودار.ــ (مهارت در ریاضیات؛ ج. ۶)
ISBN 964-318-241-X
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی:
Pure mathematics: vol. 6,
Coordinate geometry in two dimensions.
۱. ریاضیات ــ آزمونها و تمرینها. ۲. دستگاه مختصات. ۳. مقاطع مخروطی. ۴. هذلولی. الف. ساوجی، علی، ۱۳۴۶ ـ ، مترجم. ب. عنوان. ج. فروست.
QA۱۳۹/ن۹۶م۹ ۵۱۶/۱۶
ج.۶
۱۳۷۸
کتابخانهٔ ملی ایران م۷۸_۱۰۰۴۷

فهرست

به‌نام خدا

پیشگفتار

مهارت در ریاضیات مجموعه‌ای است شامل ۱۰ جلد کتاب که در انگلستان برای کمک به دانش‌آموزانی تألیف شده است که قصد شرکت در امتحانات ورودی GCE را دارند و نمی‌خواهند در کلاسهای حضوری شرکت کنند. رهیافت گام‌به‌گام این کتابها و وجود حل کامل همهٔ مسأله‌ها دانش‌آموزان را قادر می‌سازد که با کمترین نیاز به کمک و راهنمایی معلم، مستقلاً به مطالعهٔ این کتابها بپردازند.

در ترجمهٔ فارسی کتابها کوشش شده است که با اِعمال تغییراتی در محتوای آنها، این مجموعه هرچه بیشتر برای دانش‌آموزان نظام جدید آموزش متوسطه و دورهٔ پیش‌دانشگاهی قابل‌استفاده باشد.

هریک از کتابهای این مجموعه سه بخش دارد. در بخش اول، هر فصل شامل خلاصه‌ای از درس و تعدادی مثال حل‌شده است و در انتهای هر فصل نیز مسائلی به‌عنوان تمرین داده شده است؛ بخش دوم شامل راه‌حل و پاسخ همهٔ تمرینهای انتهای فصلهای بخش اول است؛ بخش سوم با عنوان مسائل گوناگون، شامل مسأله‌هایی است که حل آنها کم‌و بیش نیاز به تسلط بر همهٔ مفاهیم عرضه‌شده در کتاب دارد. بیشتر این مسأله‌ها از امتحانات دبیرستانی کشور انگلستان، مانند GCE و امتحانات دبیرستانی دانشگاه لندن انتخاب شده است.

بهترین راه استفاده از این کتاب، مانند هر کتاب دیگر ریاضیات، این است که دانش‌آموز خود به حل مسائل بپردازد و سپس راه‌حل خود را با راه‌حل عرضه‌شده در کتاب مقایسه کند. مطالعهٔ راه‌حلها پیش از تفکر مستقل در مورد مسأله ارزش چندانی ندارد.

۱

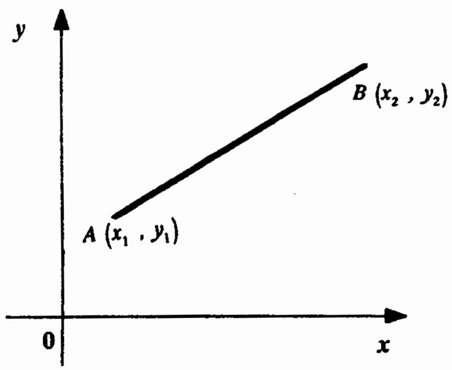
نمودار خط راست

شکل کلی معادلهٔ خط راست به‌صورت $ax+by+c=0$ است که در آن a، b و c مقادیر ثابت و x و y متغیرند.

۱-۱ شیب خط راست

شکل ۱ خطی را نشان می‌دهد که از دو نقطهٔ (x_1,y_1) و (x_2,y_2) می‌گذرد. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس درمی‌یابیم که

$$AB \text{ طول } = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



شکل۱

شیب این خط، که آن‌را با m نشان می‌دهیم، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

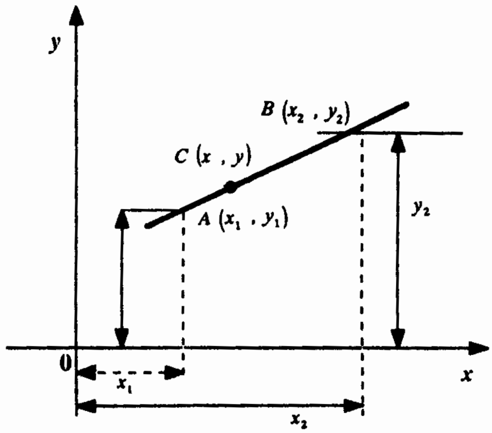
در نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2)، مقدارهای x_1 و x_2 طول نقاط و مقدارهای y_1 و y_2 عرض نقاط هستند. مختصات مبدأ، O، عبارت است از $(0, 0)$.

اگر پاره‌خط AB را از دو طرف امتداد دهیم و نقطهٔ C به مختصات (x, y) روی این خط راست باشد (شکل ۲) می‌توانیم شیب خط را به‌صورت $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ بنویسیم. در نتیجه معادلهٔ خط راست به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; (= m)$$

یا

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



شکل۲

مثال حل شدهٔ ۱

خط راستی از نقاط $(2, 3)$ و $(-1, -4)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط را تعیین کنید.

حل.

روش اول: داریم $m = \frac{-4 - 3}{-1 - 2} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$. اگر معادلهٔ خط را به‌صورت $y = mx + c$ بنویسیم، داریم $y = \frac{7}{3}x + c$. چون این خط از نقطهٔ $(2, 3)$ می‌گذرد، باید مختصات آن در معادلهٔ خط صدق کند. بنابراین،

$$3 = \frac{7}{3} \times 2 + c \Rightarrow c = 3 - \frac{14}{3} = -\frac{5}{3}$$

پس معادلهٔ خط به‌صورت $y = \frac{7}{3}x - \frac{5}{3}$ است که می‌توانیم آن‌را به شکل زیر نیز بنویسیم:

$$3y - 7x + 5 = 0$$

روش دوم: روش دیگر آن است که بنویسیم

$$\frac{y-۳}{x-۲}=\frac{-۴-۳}{-۱-۲}\Rightarrow\frac{y-۳}{x-۲}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow ۳y-۹=۷x-۱۴\Rightarrow ۳y-۷x+۵=۰$$

توجه کنید که در راه‌حل اول مثال بالا، از معادلهٔ خط به‌صورت

$$y=mx+c$$

استفاده کردیم که در آن m شیب خط و c عرض از مبدأ خط است. این شکل را صورت شیب ـ عرض از مبدئی معادلهٔ خط می‌نامیم.

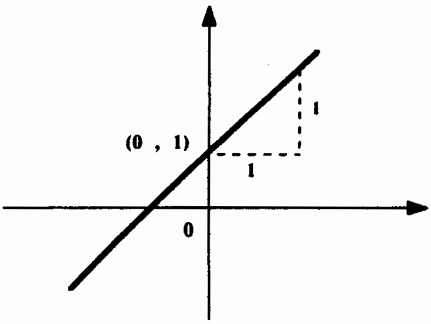
مثال حل شدهٔ ۲

خطهای زیر را رسم کنید:

الف) $y=x+۱$ ب) $y=-x+۲$ ج) $y=۲x-۳$

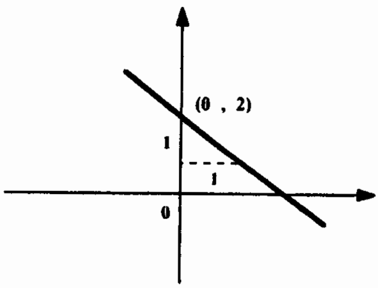
حل.

الف) در معادلهٔ $y=x+۱$، وقتی که $x=۰$، $y=۱$. پس خط از نقطهٔ $(۰,۱)$ می‌گذرد و شیب آن $m=۱$ است. شکل ۳ را ببینید.



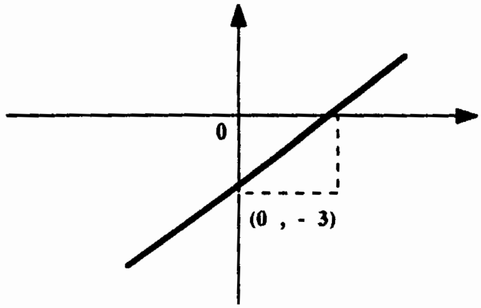
شکل۳

ب) در معادلهٔ $y=-x+۲$، وقتی که $x=۰$، $y=۲$. پس خط از نقطهٔ $(۰,۲)$ می‌گذرد و شیب آن $m=-۱$ است. شکل ۴ را ببینید.



شکل۴

ج) در معادلهٔ $y = ۲x - ۳$، وقتی‌که $x = ۰$، $y = -۳$. پس خط از نقطهٔ $(۰, -۳)$ می‌گذرد و شیب آن $m = ۲$ است. شکل ۵ را ببینید.



شکل۵

اگر $m = ۰$، آنگاه شکل شیب-عرض از مبدئی خط راست به‌صورت زیر است:

$$y = c$$

که در آن c مقداری ثابت است. این نوع خطها با محور x موازی‌اند.

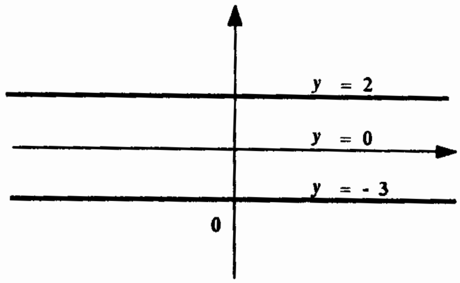
مثال حل شدهٔ ۳

خطهای زیر را رسم کنید:

الف) $y = ۲$ ب) $y = ۰$ ج) $y = -۳$

حل.

این خطها در شکل ۶ رسم شده‌اند.



شکل۶

هرگاه مقدار m تعریف‌نشده باشد، صورت شیب-عرض از مبدئی خط به‌صورت زیر است:

$$x = k$$

که در آن k عددی ثابت است. این نوع خطها با محور y موازی‌اند.

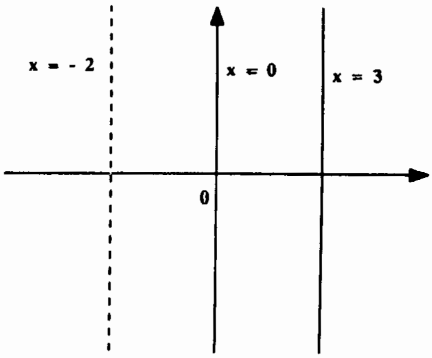
مثال حل شدهٔ ۴

خطهای زیر را رسم کنید:

الف) $x = -۲$ ب) $x = ۰$ ج) $x = ۳$

حل.

این خطها در شکل ۷ رسم شده‌اند.



شکل۷

اگر عرض از مبدأ خط برابر با صفر باشد، خط از مبدأ می‌گذرد و معادله‌اش به‌صورت زیر است:

$$y = mx$$

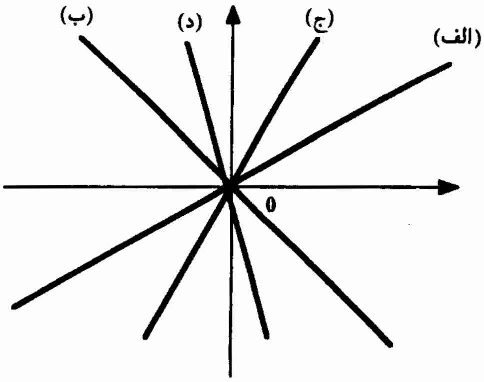
مثال حل شدهٔ ۵

خطهای زیر را رسم کنید:

الف) $y = x$ ب) $y = -x$ ج) $y = ۲x$ د) $y = -۳x$

حل.

این خطها در شکل ۸ رسم شده‌اند.



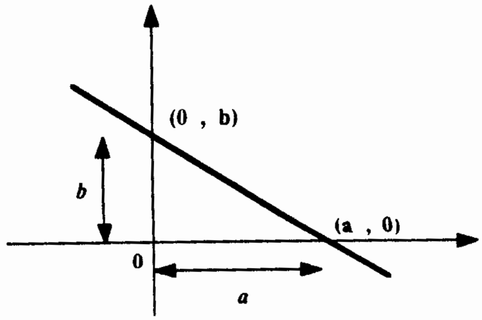
شکل۸

۱-۲ صورت طول و عرض از مبدئی خط راست

صورت طول و عرض از مبدئی خط راست به‌شکل زیر است:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

اگر $y=0$، آنگاه $x=a$ و اگر $x=0$، آنگاه $y=b$. مقدار a را طول از مبدأ و مقدار b را عرض از مبدأ خط می‌نامند (شکل ۹).



شکل۹

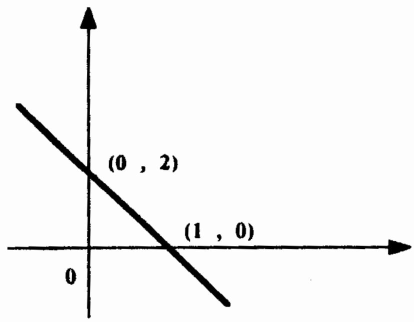
مثال حل شدهٔ ۶

خطهای زیر را رسم کنید:

الف) $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$ ب) $\frac{x}{-2}+y=1$ ج) $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$

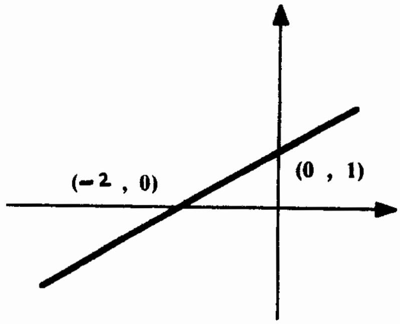
حل.

الف) نمودار خط $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1$ در شکل ۱۰ رسم شده است.



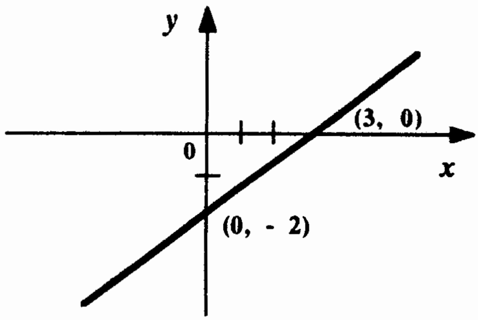
شکل۱۰

ب) نمودار خط $\frac{x}{-2}+y=1$ در شکل ۱۱ رسم شده است.



شکل۱۱

ج) نمودار خط $\frac{x}{۳} + \frac{y}{-۲} = ۱$ در شکل ۱۲ رسم شده است.



شکل۱۲

مثال حل شدهٔ ۷

معادلهٔ خطهای زیر به‌شکل کلی نوشته شده‌اند:

یک) $۳x + ۲y - ۱ = ۰$ دو) $x - y + ۴ = ۰$ سه) $-۲x + ۵y - ۴ = ۰$

صورت (الف) شیب‌ـعرض از مبدئی، و (ب) طول و عرض از مبدئی این خطها را بنویسید.

حل.

الف) (یک) $۳x + ۲y - ۱ = ۰$

$$۲y = -۳x + ۱ \implies y = -\frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۲}$$

(دو) $x - y + ۴ = ۰ \implies y = x + ۴$

(سه) $-۲x + ۵y - ۴ = ۰$

$$۵y = ۲x + ۴ \implies y = \frac{۲}{۵}x + \frac{۴}{۵}$$

ب) (یک) $۳x + ۲y - ۱ = ۰$

$$۳x + ۲y = ۱ \implies \frac{x}{\frac{۱}{۳}} + \frac{y}{\frac{۱}{۲}} = ۱$$

(دو) $x - y + ۴ = ۰$

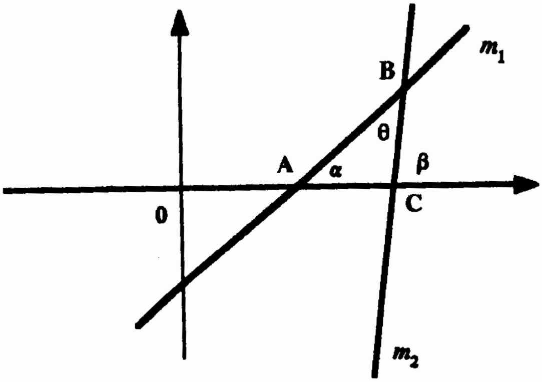
$$x - y = -۴ \implies \frac{x}{-۴} + \frac{y}{۴} = ۱$$

(سه) $-۲x + ۵y - ۴ = ۰$

$$-۲x + ۵y = ۴ \implies \frac{x}{-۲} + \frac{y}{\frac{۴}{۵}} = ۱$$

۱-۳ زاویهٔ بین دو خط راست

فرض کنید θ زاویهٔ بین دو خط راست با شیبهای $m_۱$ و $m_۲$ باشد (شکل ۱۳ را ببینید).



شکل۱۳

اگر α زاویهٔ خط اول با قسمت مثبت محور xها و β زاویهٔ خط دوم با قسمت مثبت محور xها باشد، آنگاه

$$\tan\alpha = m_۱ \quad , \quad \tan\beta = m_۲$$

در شکل ۱۳ با توجه به مثلث ABC، داریم $\theta + \alpha + (۱۸۰^\circ - \beta) = ۱۸۰^\circ$. بنابراین

$$\theta = \beta - \alpha$$

اگر از دو طرف این برابری تانژانت بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\tan\theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{۱ + \tan\beta\tan\alpha}$$

$$\implies \tan\theta = \frac{m_۲ - m_۱}{۱ + m_۲ m_۱}$$

اگر $\theta = 0$، آنگاه دو خط راست با هم موازی‌اند و در نتیجه، $\tan\theta = 0$. از فرمول بالا نتیجه می‌شود

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = 0 \implies m_2 - m_1 = 0 \implies m_1 = m_2$$

برعکس، اگر داشته باشیم $m_1 = m_2$، آنگاه $\tan\theta = 0$ و درنتیجه $\theta = 0$ (توجه کنید که $0 \leqslant \theta < 180^\circ$). پس دو خط موازی‌اند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که دو خط با شیبهای m_1 و m_2 موازی‌اند اگر و فقط اگر $m_1 = m_2$.

اگر $\theta = 90^\circ$، آنگاه دو خط برهم عمودند و درنتیجه، $\tan\theta$ تعریف‌نشده است و داریم

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \text{تعریف‌نشده}$$

پس $1 + m_1 m_2 = 0$ یا

$$m_1 m_2 = -1$$

برعکس، اگر $m_1 m_2 = -1$، آنگاه $m_1 m_2 + 1 = 0$ و درنتیجه، $\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ تعریف‌نشده است. بنابراین، $\theta = 90^\circ$.

به‌طورکلی، زاویهٔ بین دو خط راست از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$$

درصورتی‌که $1 + m_1 m_2$ مثبت باشد، اگر θ حاده باشد، m_2 بزرگتر از m_1 است و اگر θ منفرجه باشد، m_2 کوچکتر از m_1 است.

مثال حل شدهٔ ۸

زاویهٔ بین خطهای زیر را بیابید.

الف) $3x - 5y = 2$ و $x + 4y = 5$؛ ب) $x + y = 1$ و $2x - 3y = 4$.

حل.

الف)

$$3x - 5y = 2 \implies 5y = 3x - 2 \implies y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$$

$$x + 4y = 5 \implies 4y = -x + 5 \implies y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

شیب این خطها به‌ترتیب، $\frac{3}{5}$ و $-\frac{1}{4}$ است. اگر $m_1 = -\frac{1}{4}$ و $m_2 = \frac{3}{5}$، آنگاه

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{5} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{5}\right)} = \tan^{-1}\frac{17/20}{17/20}$$

$$= \tan^{-1} 1 = 45^\circ$$

اگر $m_۱ = \frac{۳}{۵}$ و $m_۲ = -\frac{۱}{۴}$، آنگاه

$$\theta = \tan^{-۱} \frac{\left(-\frac{۱}{۴}\right) - \left(\frac{۳}{۵}\right)}{۱ - \frac{۳}{۲۰}} = \tan^{-۱}\left(-\frac{۱۷/۲۰}{۱۷/۲۰}\right) = ۱۳۵^\circ$$

همان‌طورکه می‌بینید، این دو زاویه مکمل‌اند.

ب)
$$x + y = ۱ \Longrightarrow y = -x + ۱$$

$$۲x - ۳y = ۴ \Longrightarrow ۳y = ۲x - ۴ \Longrightarrow y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۴}{۳}$$

شیب این خطها به‌ترتیب ۱− و $\frac{۲}{۳}$ است. اگر $m_۲ = \frac{۲}{۳}$ و $m_۱ = -۱$، آنگاه

$$\theta = \tan^{-۱} \frac{m_۲ - m_۱}{۱ + m_۱ m_۲} = \tan^{-۱} \frac{۲/۳ - (-۱)}{۱ - ۲/۳}$$

$$= \tan^{-۱} \frac{۵/۳}{۱/۳} = \tan^{-۱} ۵$$

$$= ۷۸{,}۶۹^\circ$$

که زاویه‌ای حاده است. اگر $m_۱ = \frac{۲}{۳}$ و $m_۲ = -۱$، آنگاه

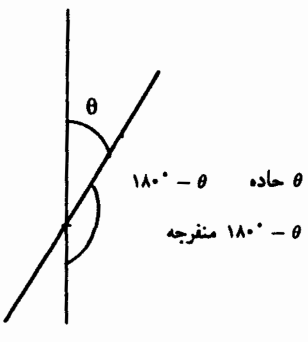
$$\theta = \tan^{-۱} \frac{-۱ - ۲/۳}{۱ - ۲/۳} = \tan^{-۱} \frac{-۵/۳}{۱/۳}$$

$$= \tan^{-۱} -۵$$

$$= ۱۰۱{,}۳۱^\circ$$

که زاویه‌ای منفرجه است.

بین هر دو خط متقاطع که برهم عمود نباشند، یک زاویهٔ حاده و یک زاویهٔ منفرجه وجود دارد (شکل ۱۴ را ببینید).



شکل۱۴

مثال حل شدهٔ ۹

تانژانت هر یک از زاویه‌های مثلث ABC با رأسهای $A(۲,۳)$، $B(-۲,۵)$ و $C(۳,-۴)$ را بیابید.

حل.

$$AB \text{ شیب } = \frac{۵-۳}{-۲-۲} = -\frac{۱}{۲} \Longrightarrow m_۱ = -\frac{۱}{۲}$$

$$AC \text{ شیب } = \frac{۳-(-۴)}{۲-۳} = -۷ \Longrightarrow m_۲ = -۷$$

$$BC \text{ شیب } = \frac{۵-(-۴)}{-۲-۳} = -\frac{۹}{۵} \Longrightarrow m_۳ = -\frac{۹}{۵}$$

تانژانت زاویهٔ بین AB و AC برابر است با

$$\tan A = \frac{-۷-(-۱/۲)}{۱+(-۷)(-۱/۲)} = \frac{-۱۳/۱۲}{۹/۲} = -\frac{۱۳}{۹} \qquad \text{(منفرجه)}$$

تانژانت زاویهٔ بین AB و BC برابر است با

$$\tan B = \frac{-۱/۲-(-۹/۵)}{۱+(-۱/۲)(-۹/۵)} = \frac{۹/۵-۱/۲}{۱+۹/۱۰} = \frac{۱۳}{۱۹} \qquad \text{(حاده)}$$

تانژانت زاویهٔ بین BC و AC برابر است با

$$\tan C = \frac{-۹/۵-(-۷)}{۱+(-۹/۵)(-۷)} = \frac{۷-۹/۵}{۱+۶۳/۵} = \frac{۱۳}{۳۴} \qquad \text{(حاده)}$$

۱-۴ تقاطع دو خط راست

مثال حل شدهٔ ۱۰

نقطهٔ تقاطع دو خط $x+y=۳$ و $-x+۲y=۰$ را بیابید.

حل.

دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+y=۳ \\ -x+۲y=۰ \end{cases}$$

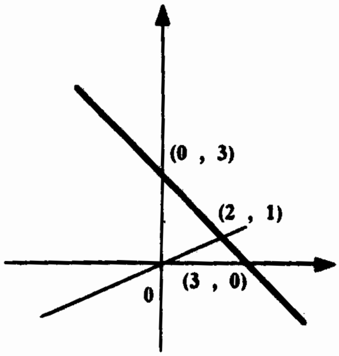
دو معادله را با هم جمع می‌کنیم:

$$۳y=۳ \quad \Longrightarrow y=۱$$

اگر این مقدار را در معادلهٔ اول دستگاه بگذاریم، حاصل می‌شود

$$x+۱=۳ \quad \Longrightarrow x=۲$$

پس نقطهٔ تقاطع، $P(۲,۱)$ است (شکل ۱۵).

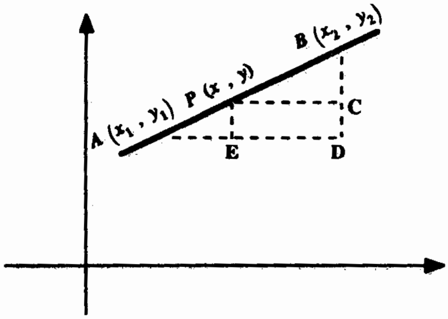


شکل۱۵

به‌طور کلی، برای یافتن نقطهٔ تقاطع دو خط راست، دستگاه معادلات حاصل از معادله‌های آنها را حل می‌کنیم.

۱-۵ تقسیم یک پاره‌خط به نسبت معلوم

فرض کنید $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطهٔ متمایز روی یک خط راست باشند (شکل ۱۶).



شکل۱۶

فرض کنید که نقطهٔ $P(x,y)$، پاره‌خط AB را به نسبت $\mu : \lambda$ تقسیم کند. چون مثلثهای APE و PBC متشابه‌اند، داریم

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AE}{PC} = \frac{PE}{BC} = \frac{\lambda}{\mu}$$

بنابراین، $\frac{AE}{PC} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{\lambda}{\mu}$ و در نتیجه،

$$\mu(x - x_1) = \lambda(x_2 - x) \implies x\mu + \lambda x = \lambda x_2 + \mu x_1$$

$$\implies x = \frac{\lambda x_2 + \mu x_1}{\lambda + \mu}$$

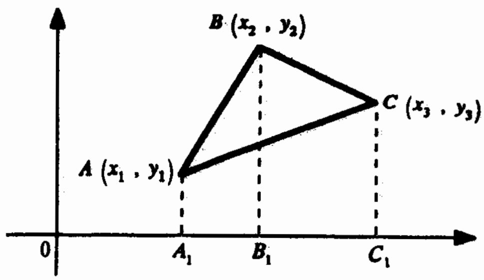
همچنین، $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{y - y_۱}{y_۲ - y} = \frac{PE}{BC}$. بنابراین،

$$\mu y + \lambda y = \lambda y_۲ + \mu y_۱ \implies y = \frac{\lambda y_۲ + \mu y_۱}{\lambda + \mu}$$

این فرمولها، هنگامی‌که P بیرون پاره‌خط AB قرار دارد و نسبتهای $\frac{AP}{BP}$ یا $\frac{BP}{AP}$ برابر با $\frac{\lambda}{\mu}$ هستند، نیز برقرار است.

۱-۶ مساحت مثلث

به شکل ۱۷ توجه کنید. با توجه به این شکل می‌توانیم رابطه‌های زیر را بنویسیم:



شکل۱۷

$$ABC \text{ مساحت مثلث} = A_۱ABB_۱ \text{ مساحت ذوزنقهٔ} + B_۱BCC_۱ \text{ مساحت ذوزنقهٔ} - A_۱ACC_۱ \text{ مساحت ذوزنقهٔ}$$

$$A_۱ABB_۱ \text{ مساحت ذوزنقهٔ} = \frac{۱}{۲}(A_۱A + B_۱B)A_۱B_۱ = \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲)(x_۲ - x_۱)$$

$$B_۱BCC_۱ \text{ مساحت ذوزنقهٔ} = \frac{۱}{۲}(BB_۱ + CC_۱)B_۱C_۱ = \frac{۱}{۲}(y_۲ + y_۳)(x_۳ - x_۲)$$

$$A_۱ACC_۱ \text{ مساحت ذوزنقهٔ} = \frac{۱}{۲}(A_۱A + CC_۱)A_۱C_۱ = \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۳)(x_۳ - x_۱)$$

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned}ABC \text{ مساحت مثلث} &= \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲)(x_۲ - x_۱) + \frac{۱}{۲}(y_۲ + y_۳)(x_۳ - x_۲) - \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۳)(x_۳ - x_۱)\\
&= \frac{۱}{۲}y_۱x_۲ + \frac{۱}{۲}y_۲x_۲ - \frac{۱}{۲}x_۱y_۱ - \frac{۱}{۲}x_۱y_۲ + \frac{۱}{۲}y_۲x_۳ + \frac{۱}{۲}x_۳y_۳ - \frac{۱}{۲}x_۲y_۲\\
&\quad - \frac{۱}{۲}x_۲y_۳ - \frac{۱}{۲}y_۱x_۳ - \frac{۱}{۲}y_۳x_۳ + \frac{۱}{۲}x_۱y_۱ + \frac{۱}{۲}x_۱y_۳\\
&= \left(\frac{۱}{۲}y_۱x_۲ - \frac{۱}{۲}x_۱y_۲ + \frac{۱}{۲}x_۱y_۳ + \frac{۱}{۲}y_۲x_۳ - \frac{۱}{۲}x_۲y_۳ - \frac{۱}{۲}y_۱x_۳\right)\\
&= \frac{۱}{۲}(x_۱y_۲ - y_۱x_۲ + x_۲y_۳ - x_۳y_۲ + x_۳y_۱ - x_۱y_۳)\end{aligned}$$

بنابراین،

$$ABC \text{ مساحت مثلث } = \frac{۱}{۲}(x_۱y_۲ - y_۱x_۲ + x_۲y_۳ - x_۳y_۲ + x_۳y_۱ - x_۱y_۳)$$

به‌خاطر سپردن این فرمول بسیار دشوار است. ولی توجه کنید که این فرمول را می‌توان چنین نوشت:

$$ABC \text{ مساحت مثلث } = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \end{vmatrix}$$

زیرا

$$\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۲ & x_۳ \\ y_۲ & y_۳ \end{vmatrix} - \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & x_۳ \\ y_۱ & y_۳ \end{vmatrix} + \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{۱}{۲}(x_۲y_۳ - y_۲x_۳) - \frac{۱}{۲}(x_۱y_۳ - x_۳y_۱) + \frac{۱}{۲}(x_۱y_۲ - x_۲y_۱)$$

$$= \frac{۱}{۲}(x_۱y_۲ - y_۱x_۲ + x_۲y_۳ - x_۳y_۲ + x_۳y_۱ - x_۱y_۳)$$

۱-۷ وسط پاره‌خط AB

اگر $P(x,y)$ وسط پاره‌خط AB باشد که در آن $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$، آنگاه P پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{۱}{۱}$ تقسیم می‌کند. پس $\lambda = \mu$. اگر در فرمولهای بخش ۱-۵، قرار دهیم $\lambda = \mu$، خواهیم داشت

$$x = \frac{x_۱ + x_۲}{۲} \quad , \quad y = \frac{y_۱ + y_۲}{۲}$$

مثال حل شدهٔ ۱۱

مختصات رأسهای مثلث ABC عبارت‌اند از $A(۶,-۱)$، $B(۲,۵)$ و $C(-۳,۳)$. مختصات نقاط P، Q و R را که به‌ترتیب وسط ضلعهای AB، BC و AC هستند، به‌دست آورید. سپس مساحت مثلث PQR را بیابید.

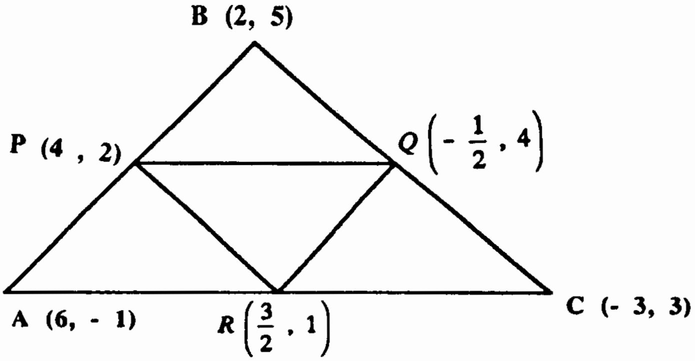
حل.

فرض کنید $P(x_۱,y_۱)$، $Q(x_۲,y_۲)$ و $R(x_۳,y_۳)$ (شکل ۱۸). داریم

$$x_۱ = \frac{۶+۲}{۲} = ۴\,,\quad y_۱ = \frac{-۱+۵}{۲} = ۲ \implies P(۴,۲)$$

$$x_۲ = \frac{۲+(-۳)}{۲} = -\frac{۱}{۲}\,,\quad y_۲ = \frac{۵+۳}{۲} = ۴ \implies Q(-\frac{۱}{۲},۴)$$

$$x_۳ = \frac{۶-۳}{۲} = \frac{۳}{۲}\,,\quad y_۳ = \frac{-۱+۳}{۲} = ۱ \implies R(\frac{۳}{۲},۱)$$



شکل۱۸

بنابر فرمول مساحت مثلث، داریم

$$PQR \text{ مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲}\left(\begin{vmatrix} x_۲ & x_۳ \\ y_۲ & y_۳ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_۱ & x_۳ \\ y_۱ & y_۳ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ y_۱ & y_۲ \end{vmatrix}\right)$$

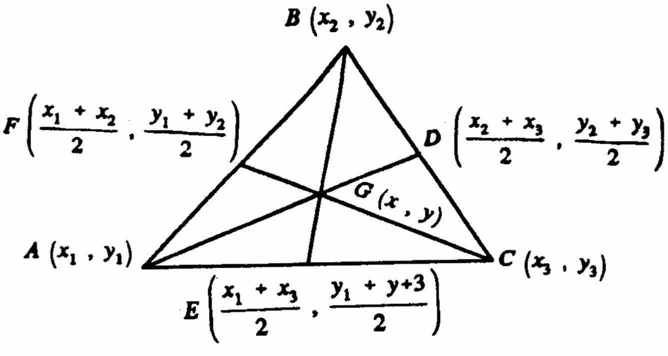
$$= \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۴ & -\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ ۲ & ۴ & ۱ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲}\left(\begin{vmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۴ & \frac{۳}{۲} \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۴ & -\frac{۱}{۲} \\ ۲ & ۴ \end{vmatrix}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}\left[\left(-\frac{۱}{۲} - ۶\right) - (۴ - ۳) + (۱۶ + ۱)\right] = ۴/۷۵$$

نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث، مرکز ثقل مثلث نام دارد. این نقطه، میانه‌ها را به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کند.

با توجه به شکل ۱۹، داریم

$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{۲}{۱}$$



شکل۱۹

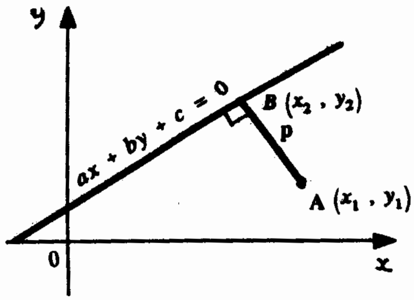
بنابراین،

$$\frac{AG}{GD}=\frac{۲}{۱} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{۲\left(\frac{x_۲+x_۳}{۲}\right)+x_۱}{۳} \\ y=\dfrac{۲\left(\frac{y_۲+y_۳}{۲}\right)+y_۱}{۳} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow G=\left(\frac{۱}{۳}(x_۱+x_۲+x_۳), \frac{۱}{۳}(y_۱+y_۲+y_۳)\right)$$

۱-۸ فاصلهٔ یک نقطه از خط معلوم

خط $ax+by+c=۰$ و نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ را درنظر بگیرید (شکل ۲۰). شیب این خط برابر است با $m_۱=-\frac{a}{b}$ و شیب خط AB برابر است با $m_۲=\frac{b}{a}$ زیرا $m_۱m_۲=-۱$ (دو خط بر هم عمودند).



شکل ۲۰

معادلهٔ خط AB به‌صورت $y=\frac{b}{a}x+k$ است. برای یافتن مقدار ثابت k، مختصات نقطهٔ A را در معادله قرار می‌دهیم:

$$y_۱=\frac{b}{a}x_۱+k \Longrightarrow k=y_۱-\frac{b}{a}x_۱$$

بنابراین، معادلهٔ AB به‌شکل زیر است:

$$y=\frac{b}{a}x+y_۱-\frac{b}{a}x_۱$$

خطهای $ax+by+c=۰$ و $y=\frac{b}{a}x+y_۱-\frac{b}{a}x_۱$ در نقطهٔ $B(x_۲,y_۲)$ متقاطع‌اند. پس مختصات این نقطه در هر دو معادله صدق می‌کند. داریم

$$\frac{b}{a}x_۲+y_۱-\frac{b}{a}x_۱=y_۲=-\frac{a}{b}x_۲-\frac{c}{b}$$

$$\Longrightarrow \frac{b}{a}x_۲+\frac{a}{b}x_۲=-y_۱+\frac{b}{a}x_۱-\frac{c}{b} \Longrightarrow \left(\frac{b^۲+a^۲}{ab}\right)x_۲=\frac{-aby_۱+b^۲x_۱-ac}{ab}$$

$$\Longrightarrow x_۲=\frac{b^۲x_۱-aby_۱-ac}{a^۲+b^۲}$$

و
$$y_۲ = \frac{b}{a}\frac{(b^۲x_۱ - aby_۱ - ac)}{(a^۲+b^۲)} + y_۱ - \frac{b}{a}x_۱$$

برای یافتن p، از فرمول فاصلهٔ دو نقطه استفاده می‌کنیم:

$$p = \sqrt{(y_۲ - y_۱)^۲ + (x_۲ - x_۱)^۲}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\frac{b^۳x_۱}{a} - \frac{ab^۲y_۱}{a} - \frac{abc}{a} + a^۲y_۱ + b^۲y_۱ - \frac{a^۲bx_۱}{a} - \frac{b^۲bx_۱}{a}}{a^۲+b^۲} - y_۱\right)^۲ + \left(\frac{b^۲x_۱ - aby_۱ - ac}{a^۲+b^۲} - x_۱\right)^۲}$$
$$\Rightarrow p^۲ = \frac{(-bc + a^۲y_۱ - abx_۱ - a^۲y_۱ - b^۲y_۱)^۲}{(a^۲+b^۲)^۲} + \frac{(b^۲x_۱ - a^۲x_۱ - b^۲x_۱ - aby_۱ - ac)^۲}{(a^۲+b^۲)^۲}$$
$$= \frac{(bc + abx_۱ + y_۱b^۲)^۲ + (a^۲x_۱ + aby_۱ + ac)^۲}{(a^۲+b^۲)^۲}$$
$$= \frac{b^۲(c + ax_۱ + by_۱)^۲ + a^۲(ax_۱ + by_۱ + c)^۲}{(a^۲+b^۲)^۲}$$
$$= \frac{(ax_۱ + by_۱ + c)^۲(a^۲+b^۲)}{(a^۲+b^۲)^۲} \Longrightarrow p = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

اگر معادلهٔ خط به‌صورت $y = mx + c$ باشد، برای یافتن فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ از این خط به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$y = mx + c \Longrightarrow -mx + y + c = ۰$$

اکنون معادلهٔ خط به‌صورت $ax + by + c = ۰$ درآمده است که در آن، $a = m$ و $b = -۱$. پس با توجه به فرمول بالا، فاصلهٔ A از خط $y = mx + c$ برابر است با

$$p = \pm\frac{mx_۱ - y_۱ + c}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|mx_۱ - y_۱ + c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

اینک، فرمولهای این فصل را به اختصار بیان می‌کنیم.

۱. فاصلهٔ بین نقاط $P(x_۱, y_۱)$ و $Q(x_۲, y_۲)$

$$\boxed{PQ = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}}$$

۲. شیب خط PQ

$$\boxed{m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}}$$

۳. معادلهٔ خطی با شیب m و عرض از مبدأ c

$$\boxed{y = mx + c}$$

۴. معادلهٔ کلی خط راست (a و b هر دو صفر نیستند)

$$\boxed{ax+by+c=۰}$$

۵. صورت طول و عرض از مبدئی خط راست ($a,b\neq ۰$)

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱}$$

۶. معادلهٔ خطی با شیب m که از نقطهٔ $P(x_۱,y_۱)$ می‌گذرد

$$\boxed{\frac{y-y_۱}{x-x_۱}=m}$$

۷. معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ $P(x_۱,y_۱)$ و $Q(x_۲,y_۲)$ می‌گذرد

$$\boxed{\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{y-y_۱}{x-x_۱}}$$

۸. معادلهٔ خطی با طول از مبدأ a و موازی با محور x

$$\boxed{x=a}$$

۹. معادلهٔ خطی با عرض از مبدأ b و موازی با محور y

$$\boxed{y=b}$$

۱۰. فاصلهٔ قائم نقطهٔ $P(x_۱,y_۱)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$

$$\boxed{p=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

۱۱. دو خط با شیبهای $m_۱$ و $m_۲$، موازی‌اند اگر و فقط اگر

$$\boxed{m_۱=m_۲}$$

۱۲. دو خط با شیبهای $m_۱$ و $m_۲$، برهم عمودند اگر و فقط اگر

$$\boxed{m_۱m_۲=-۱}$$

۱۳. زاویهٔ بین دو خط با شیبهای $m_۱$ و $m_۲$ ($m_۱m_۲\neq -۱$)

$$\boxed{\theta=\tan^{-۱}\frac{m_۲-m_۱}{۱+m_۱m_۲}}$$

۱۴. مختصات وسط پاره‌خط PQ ($P(x_۱,y_۱)$ و $Q(x_۲,y_۲)$)

$$\boxed{M\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲}\right)}$$

۱۵. نقطهٔ همرسی میانه‌ها (یا مرکز ثقل) در مثلثی با رأسهای $A(x_۱, y_۱)$، $B(x_۲, y_۲)$، $C(x_۳, y_۳)$

$$\boxed{G\left(\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳}, \frac{y_۱+y_۲+y_۳}{۳}\right)}$$

۱۶. مساحت مثلثی با رأسهای $A(x_۱, y_۱)$، $B(x_۲, y_۲)$، $C(x_۳, y_۳)$

$$\boxed{\triangle ABC \text{ مساحت} = \frac{۱}{۲}\left|\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x_۱ & x_۲ & x_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ \end{vmatrix}\right|}$$

یا

$$\boxed{\triangle ABC \text{ مساحت} = \frac{۱}{۲}\left|(x_۲y_۳ - x_۳y_۲) - (x_۱y_۳ - y_۱x_۳) + (x_۱y_۲ - y_۱x_۲)\right|}$$

۱۷. مختصات نقطه‌ای که پاره‌خط AB را به نسبت $\mu : \lambda$ تقسیم می‌کند ($A(x_۱, y_۱)$، $B(x_۲, y_۲)$)

$$\boxed{x = \frac{\lambda x_۲ + x_۱\mu}{\lambda+\mu}} \qquad \boxed{y = \frac{\lambda y_۲ + y_۱\mu}{\lambda+\mu}}$$

مثال حل شدهٔ ۱۲

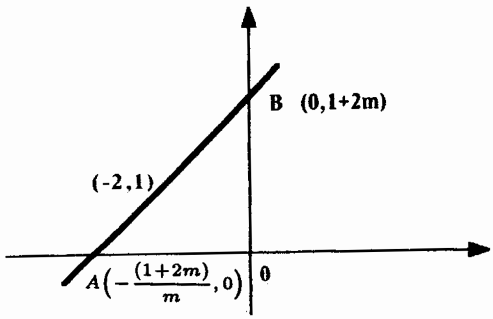
خط متغیری از نقطهٔ $(-۲, ۱)$ می‌گذرد و محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. معادلهٔ مکان هندسی وسط AB را بیابید.

حل.

فرض کنید $y = mx + c$ معادلهٔ خط متغیر باشد. چون این خط از نقطهٔ $(-۲, ۱)$ می‌گذرد، مختصات این نقطه در معادله صدق می‌کند:

$$۱ = -۲m + c \implies c = ۱ + ۲m$$

پس معادلهٔ این خط به‌شکل $y = mx + ۱ + ۲m$ است. اگر قرار دهیم $x = ۰$، آنگاه $y = ۱ + ۲m$ و اگر $y = ۰$، آنگاه $x = -\frac{۱+۲m}{m}$. پس $A\left(\frac{-(۱+۲m)}{m}, ۰\right)$ و $B(۰, ۱+۲m)$ (شکل ۲۱ را ببینید).



شکل۲۱

بنابراین، مختصات وسط پاره‌خط AB به‌صورت $\left[-\frac{1}{2m}(1+2m), \frac{1}{2}(1+2m)\right]$ M است.
پارامتر m را بین معادله‌های

$$x = -\frac{1}{2m}(1+2m) = -\frac{1}{2m} - 1\,, \quad y = \frac{1}{2}(1+2m)$$

حذف می‌کنیم:

$$2y = 1 + 2m \implies 2m = 2y - 1$$

$$\implies x = -\frac{1}{2y-1} - 1 \implies x(2y-1) + 2y - 1 + 1 = 0$$

$$\implies x(2y-1) + 2y = 0$$

تمرین ۱

۱. اگر $P(3,4)$ و $Q(-1,2)$، فاصلهٔ P از Q را بیابید.

۲. اگر $A(-1,-2)$ و $B(-2,-5)$، فاصلهٔ A از B را بیابید.

۳. اگر $R(2,6)$ و $S(3,5)$، فاصلهٔ R از S را بیابید.

۴. اگر $A(-3,-2)$، $B(1,3)$ و $C(5,-1)$، محیط مثلث ABC را بیابید.

۵. مساحت مثلث ABC در مسألهٔ ۴ را بیابید.

۶. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(2,3)$ بگذرد و شیب آن -1 باشد.

۷. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-1,-2)$ بگذرد و شیب آن $\frac{2}{3}$ باشد.

۸. معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $(1,2)$ و $(0,5)$ بگذرد.

۹. معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $(-2,-3)$ و $(-4,-5)$ بگذرد.

۱۰. شیب خطی را بیابید که از دو نقطهٔ $(1,3)$ و $(-2,5)$ بگذرد.

۱۱. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-2,4)$ بگذرد و با خط $3x + 4y - 1 = 0$ موازی باشد.

۱۲. معادلهٔ خطی را بنویسید که با خط $-2x - y + 5 = 0$ موازی باشد و از مبدأ بگذرد.

۱۳. صورت کلی خطهای زیر را بنویسید.

الف) $y = -3x - 5$　　　ب) $x + \frac{y}{2} = 1$

۱۴. صورت شیب-عرض از مبدئی خطهای زیر را بنویسید.

الف) $3x - 2y - 7 = 0$　　　ب) $\frac{x}{(-5)} + \frac{y}{2} = 1$

۱۵. صورت طول و عرض از مبدئی خطهای زیر را بنویسید.

الف) $y = 3x - 1$　　　ب) $3x + 4y + 5 = 0$

۱۶. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-5,0)$ بگذرد و بر خط $2x - y - 3 = 0$ عمود باشد.

۱۷. شرط توازی دو خط راست را بیان کنید.

۱۸. شرط تعامد دو خط راست را بیان کنید.

۱۹. سه خط $3x+4y-1=0$، $2x-3y+5=0$ و $x-y+6=0$ متقاطع‌اند. محیط مثلث حاصل را به‌دست آورید.

۲۰. زاویهٔ بین هر جفت از خطهای زیر را بیابید.

الف) $3x+4y-7=0$ و $-x+2y+5=0$.

ب) $-x+3y-2=0$ و $2x+y+1=0$.

ج) $4x-y-1=0$ و $2x+4y+7=0$.

۲۱. اگر $A(3,0)$، $B(3,4)$ و $O(0,0)$، نشان دهید که مثلث OAB قائم‌الزاویه است.

۲۲. خطهای زیر را رسم کنید.

الف) $y=0$ ب) $x=0$ ج) $x=-1$ د) $x=4$

ه) $y=3x$ و) $y=2x-1$ ز) $y=x+4$

۲۳. فاصلهٔ قائم نقطهٔ $(2,3)$ را از خط $3x-4y-5=0$ بیابید.

۲۴. فاصلهٔ قائم نقطهٔ $(-1,-4)$ را از خط $x+y=1$ بیابید.

۲۵. فاصلهٔ قائم نقطهٔ $(0,0)$ را از خط $x+y=5$ بیابید.

۲۶. خطهای زیر را رسم کنید.

الف) $y=2x-3$ ب) $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}=1$ ج) $2x+3y+4=0$

۲۷. خطهای زیر را رسم کنید.

الف) $y=-2x$ ب) $y=3x$ ج) $y=x$

۲۸. خطهای زیر را رسم کنید.

الف) $3y=2x$ ب) $y=-x+5$ ج) $y=2x+1$ د) $y=0$

ه) $x=0$ و) $y=3$ ز) $y=-2$ ح) $y=-x$

ط) $y=5x$ ی) $y=3x$

۲۹. نشان دهید که خطهای $y=x$ و $y+x=0$ برهم عمودند.

۳۰. اگر M وسط AB و N وسط DC باشد و داشته باشیم $A(-5,5)$، $B(3,7)$، $C(7,7)$، $D(-1,5)$، مختصات M، N و وسط MN را بیابید.

۳۱. نشان دهید که نقاط $A(3,1)$، $B(3,7)$، $C(20,7)$ و $D(20,1)$، رأسهای یک مستطیل‌اند.

۳۲. نشان دهید که نقاط $A(-5,5)$، $B(3,7)$، $C(7,7)$ و $D(-1,5)$، رأسهای یک متوازی‌الاضلاع‌اند.

۳۳. مختصات وسط پاره‌خطهایی را که هر جفت از نقاط زیر تشکیل می‌دهند، بیابید.

الف) $(-3,-4)$، $(3,4)$ ب) $(1,3)$، $(-1,-3)$

ج) $(3,-4)$، $(-2,5)$ د) $(4,0)$، $(0,5)$

ه) $(7,9)$، $(3,4)$

۳۴. فاصلهٔ بین هر جفت از نقاط مسألهٔ ۳۳ را بیابید.

۳۵. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(1,2)$ بگذرد و شیب آن -1 باشد.
۳۶. معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $P_1(-2,3)$ و $P_2(3,5)$ بگذرد.
۳۷. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-2,-3)$ بگذرد و شیب آن $\frac{1}{2}$ باشد.
۳۸. معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $P_1(-2,1)$ و $P_2(-3,-4)$ بگذرد.
۳۹. فاصلهٔ قائم نقطهٔ $(3,4)$ را از خط $y=-x$ بیابید.
۴۰. فاصلهٔ قائم نقطهٔ $(-2,0)$ را از خطهای $x+y=3$ و $x+y+5=0$ بیابید.
۴۱. نشان دهید که زاویهٔ حادهٔ بین خطهای $3x+y-7=0$ و $2x-y+5=0$ برابر با 45° است.
۴۲. نشان دهید که زاویهٔ منفرجهٔ بین خطهای $y=3x-7$ و $y=2x+5$ برابر با 135° است.
۴۳. دو خط $ax-y+5=0$ و $2ax+y+8=0$ در نقطهٔ تقاطع زاویهٔ حاده‌ای می‌سازند که تانژانت آن برابر با $\frac{1}{2}$ است. مقدار a را بیابید.
۴۴. دو خط $2x+4y=3$ و $ax-y-5=0$ با یکدیگر زاویهٔ 75° می‌سازند. مقدار a را بیابید.
۴۵. مختصات رأسهای مثلث ABC عبارت‌اند از $A(2,-3)$، $B(-2,5)$ و $C(2,6)$. شیب خطهای AB، BC و AC را بیابید. سپس زاویه‌های مثلث، مختصات M وسط AB، شیب CM و زاویهٔ آن‌را با AB بیابید.
۴۶. زاویهٔ حادهٔ بین هر جفت از خطهای زیر را (برحسب درجه و دقیقه) بیابید.

الف) $2x+y=1$، $3x+4y=5$ — ب) $x+2y=3$، $3x+2y=1$

ج) $-x+5y=7$، $2x+3y=4$ — د) $5x+4y=3$، $-2x+3y=-4$

۴۷. ثابت کنید که حاصلضرب شیبهای دو خط عمود برهم -1 است.
۴۸. نشان دهید که ψ، زاویهٔ بین دو خط $y=m_1x+c_1$ و $y=m_2x+c_2$، از فرمول $\tan\psi=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ به‌دست می‌آید.
۴۹. نشان دهید که تانژانت زاویهٔ بین خطهای $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ و $y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ برابر با $\frac{7}{4}$ است.
۵۰. معادله‌های خطهایی را بنویسید که از نقطهٔ $(-2,1)$ می‌گذرند و به‌ترتیب با خط $\frac{x}{1}+\frac{y}{-2}=1$ موازی یا بر آن عمودند.
۵۱. معادله‌های خطهایی را بنویسید که از نقطهٔ $(3,2)$ می‌گذرند و به‌ترتیب با خط $\frac{x}{-1}+\frac{y}{3}=1$ موازی یا بر آن عمودند.
۵۲. فاصلهٔ قائم نقطهٔ $(-1,5)$ را از خط $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ بیابید.
۵۳. فاصلهٔ قائم نقطهٔ $(-3,2)$ را از خط $3x-y-3=0$ بیابید.
۵۴. زاویهٔ حادهٔ بین خطهای $2x+5y=1$ و $x-3y-4=0$ را بیابید.
۵۵. زاویهٔ حادهٔ بین خطهای $x+y-5=0$ و $3x-5y+2=0$ را بیابید.
۵۶. معادلهٔ خطی را بنویسید که مبدأ مختصات را به نقطهٔ تقاطع خطهای $2x+5y=1$ و $3x-5y+2=0$ وصل می‌کند.

۵۷. معادلهٔ خطی را بنویسید که نقطهٔ $(-۱,۲)$ را به نقطهٔ تقاطع خطهای $x - ۳y - ۴ = ۰$ و $۳x - ۵y + ۲ = ۰$ وصل می‌کند.

۵۸. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ تقاطع خطهای $۳x - y - ۳ = ۰$ و $x - ۳y - ۴ = ۰$ بگذرد و با خط $y + ۳x + ۷ = ۰$ موازی باشد.

۵۹. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ تقاطع دو خط $۳x - y - ۳ = ۰$ و $۳x - ۵y + ۲ = ۰$ بگذرد و بر خط $-۲x + y + ۲ = ۰$ عمود باشد.

۶۰. در مثلث ABC، مختصات رأس A برابر است با $(۱,-۳)$ و معادلهٔ ضلع BC عبارت است از $x - ۳y + ۱۱ = ۰$. طول نقطهٔ وسط BC برابر با ۱ و مساحت مثلث ABC برابر با ۲۱ است. مختصات B و C را بیابید.

۶۱. طول ضلعهای مثلث ABC عبارت است از $\sqrt{۴۵}$، $\sqrt{۷۳}$ و $\sqrt{۴۰}$. زاویه‌های مثلث و مساحت آن‌را بیابید.

۶۲. رأسهای ABC عبارت‌اند از $A(۱,-۳)$، $B(-۲,۳)$ و $C(۴,۵)$. شیب خطهای AB، BC و AC و زاویه‌های مثلث ABC را بیابید.

۶۳. طول ارتفاعهای مثلثی با رأسهای $A(۱,-۳)$، $B(-۲,۳)$ و $C(۴,۵)$ را بیابید و سپس مساحت مثلث را به‌دست آورید.

۶۴. مختصات رأسهای مثلث PQR عبارت‌اند از $(۱,-۳)$، $(-۲,۳)$، $(۲,۵)$. نقاط وسط ضلعهای این مثلث و مختصات نقطهٔ تقاطع میانه‌های آن‌را بیابید. همچنین، مختصات نقطهٔ تقاطع ارتفاعهای آن‌را به‌دست آورید.

۶۵. فاصلهٔ قائم نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ را از خط $ax + by + c = ۰$ به‌دست آورید.

۶۶. معادلهٔ نیمسازهای زاویه‌های بین خطهای $y = ۰$ و $x = ۰$ را بیابید.

۶۷. معادلهٔ نیمسازهای زاویه‌های بین خطهای $y = x$ و $y = -x$ را بیابید.

۶۸. معادلهٔ نیمسازهای زاویه‌های بین خطهای $۳x - ۴y - ۲ = ۰$ و $۵x + ۱۲y - ۱ = ۰$ را بیابید.

۶۹. معادلهٔ نیمسازهای زاویه‌های بین خطهای $l_۱ : a_۱x + b_۱y + c_۱ = ۰$ و $l_۲ : a_۲x + b_۲y + c_۲ = ۰$ را بیابید.

۷۰. معادلهٔ خطی را بیابید که از نقطهٔ تقاطع دو خط $a_۱x + b_۱y + c_۱ = ۰$ و $a_۲x + b_۲y + c_۲ = ۰$ بگذرد.

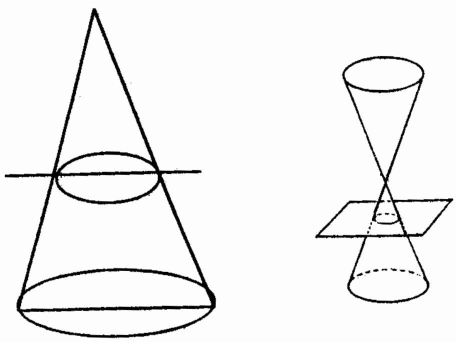
۷۱. معادلهٔ خطی را بیابید که از نقطهٔ تقاطع دو خط $x + y = -۳$ و $۲x - y = ۶$ بگذرد.

۲

مقاطع مخروطی

۲-۱ دایره

مقطع هر صفحهٔ افقی با یک مخروط دوار قائم، دایره است (شکل ۲۲).



شکل۲۲

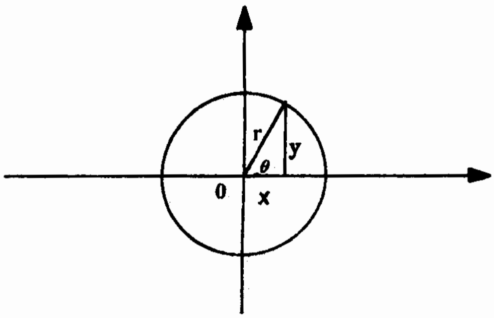
معادلهٔ دکارتی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r عبارت است از

$$x^2 + y^2 = r^2$$

با توجه به شکل ۲۳، داریم

$$\begin{matrix} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{matrix} \implies \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

معادلهٔ بالا را، معادلهٔ پارامتری دایره (به مرکز مبدأ و شعاع r) می‌نامند. اگر بین این دو معادله θ را حذف



شکل۲۳

کنیم، حاصل می‌شود

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Longrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

که همان معادلهٔ دکارتی دایره است.

اگر مختصات مرکز دایره $(-g, -f)$ و شعاع آن r باشد، معادلهٔ دایره به‌شکل زیر است

$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = r^2 \Longrightarrow x^2 + 2gx + g^2 + y^2 + 2fy + f^2 - r^2 = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 + 2gx + y^2 + 2fy + g^2 + f^2 - r^2 = 0$$

اگر قرار دهیم $c = g^2 + f^2 - r^2$، آنگاه معادله به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$x^2 + 2gx + y^2 + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

این معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(-g, -f)$ و به شعاع $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ است.

مثال حل شدهٔ ۱۳

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطهٔ $(-2, -3)$، $(1, 3)$ و $(2, 1)$ بگذرد. سپس، مختصات مرکز و نیز شعاع این دایره را بیابید.

حل.

با استفاده از شکل کلی معادلهٔ دایره و با توجه به اینکه مختصات هرسه نقطه باید در معادله صدق کنند، داریم

$$x = -2, y = -3 \quad \Longrightarrow (-2)^2 + 2g(-2) + (-3)^2 + 2f(-3) + c = 0$$

$$\Longrightarrow 4g + 6f - c = 13 \qquad (2)$$

$$x = 1, y = 3 \quad \Longrightarrow 1^2 + 2g(1) + 3^2 + 2f(3) + c = 0$$

$$\Longrightarrow 2g + 6f + c = -10 \qquad (3)$$

$$x = ۲, y = ۱ \implies ۲^۲ + ۲g(۲) + ۱^۲ + ۲f(۱) + c = ۰$$

$$\implies ۴g + ۲f + c = -۵ \qquad (۴)$$

معادلهٔ (۲) را از (۴) کم می‌کنیم:

$$-۴f + ۲c = -۱۸ \qquad (۵)$$

دو برابر (۳) را از (۴) کم می‌کنیم:

$$-۱۰f - c = ۱۵ \qquad (۶)$$

دو برابر (۶) را با (۵) جمع می‌کنیم:

$$-۲۴f = ۱۲ \implies f = -\frac{۱}{۲}$$

مقدار f را در (۵) می‌گذاریم:

$$۲c = -۱۸ + ۴\left(-\frac{۱}{۲}\right) \implies c = -۱۰$$

مقدارهای f و c را در (۲) می‌گذاریم:

$$۴g + ۶\left(-\frac{۱}{۲}\right) + ۱۰ = ۱۳ \implies g = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین، معادلهٔ دایره به‌شکل زیر است

$$x^۲ + ۲\left(\frac{۳}{۲}\right)x + y^۲ + ۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)y - ۱۰ = ۰ \implies x^۲ + ۳x + y^۲ - y - ۱۰ = ۰$$

برای یافتن مرکز و شعاع این دایره، عبارتهای درجهٔ دوم برحسب x و y را به‌شکل مربع کامل می‌نویسیم:

$$\left(x + \frac{۳}{۲}\right)^۲ - \frac{۹}{۴} + \left(y - \frac{۱}{۲}\right)^۲ - \frac{۱}{۴} - ۱۰ = ۰$$

$$\implies \left(x + \frac{۳}{۲}\right)^۲ + \left(y - \frac{۱}{۲}\right)^۲ = ۱۰ + \frac{۱}{۴} + \frac{۹}{۴} = \frac{۵۰}{۴} = \frac{۲۵}{۲}$$

در نتیجه، مرکز دایره نقطهٔ $C\left(-\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ و شعاع آن $r = \frac{۵}{\sqrt{۲}}$ است.

مثال حل شدهٔ ۱۴

معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $C(-۱, -۲)$ و به شعاع $r = ۲$ را بنویسید.

حل.

$$(x + ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۲^۲ \implies x^۲ + ۲x + ۱ + y^۲ + ۴y + ۴ - ۴ = ۰$$

$$\implies x^۲ + ۲x + y^۲ + ۴y + ۱ = ۰$$

مثال حل شدهٔ ۱۵

مرکز و شعاع دایرهٔ $x^2 - 18x + y^2 - 6y + 65 = 0$ را بیابید.

حل.

$$[x^2 - 18x] + [y^2 - 6y] + 65 = 0$$

$$[(x-9)^2 - 81] + [(y-3)^2 - 9] + 65 = 0 \implies (x-9)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

پس مرکز دایره نقطهٔ $C(9,3)$ و شعاع آن ۵ است.

مثال حل شدهٔ ۱۶

شرطی را تعیین کنید که خط $y = mx + 2$ بر دایرهٔ $x^2 + x + y^2 + 2y + 1 = 0$ مماس شود. سپس، مختصات نقطهٔ تماس را بیابید.

حل.

شرط آنکه این خط بر دایره مماس باشد، آن است که مبین معادله‌ای که از تقاطع معادله‌های دایره و خط به‌دست می‌آید برابر با صفر شود. داریم

$$\begin{aligned} & x^2 + x + (mx+2)^2 + 2(mx+2) + 1 = 0 \\ & \qquad \implies x^2 + x + m^2x^2 + 4mx + 4 + 2mx + 4 + 1 = 0 \\ & \qquad \implies (m^2+1)x^2 + x(1+6m) + 9 = 0 \end{aligned}$$

مبین این معادله را برابر با صفر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} D = (1+6m)^2 - 36(m^2+1) = 0 & \implies 1 + 12m + 36m^2 - 36m^2 - 36 = 0 \\ & \implies 12m = 35 \implies m = \frac{35}{12} \end{aligned}$$

بنابراین، معادلهٔ خط موردنظر $y = \frac{35}{12}x + 2$ یا $12y - 35x - 24 = 0$ است.

برای یافتن نقطهٔ تقاطع، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$x = \frac{-(1+6m) \pm \sqrt{(1+6m)^2 - 36(m^2+1)}}{2(m^2+1)}$$

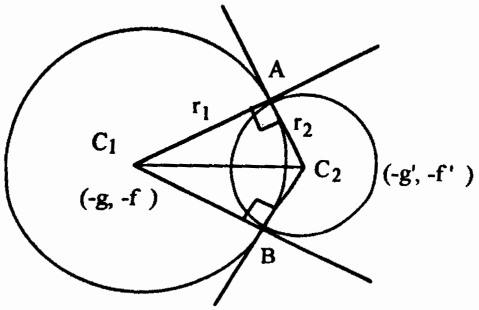
$$\implies x = \frac{-(1+6m)}{2(1+m^2)} = -\frac{1 + 6 \times \frac{35}{12}}{2\left(1 + \frac{35^2}{12^2}\right)} = -\frac{18{,}5}{19{,}014} = -0{,}973$$

$$y = \frac{35}{12}x + 2 = \frac{35}{12}(-0{,}973) + 2 = -0{,}84$$

بنابراین، مختصات نقطهٔ تقاطع $(-0{,}973, -0{,}84)$ است.

۲-۲ دایره‌های متعامد

دو دایره را متعامد می‌نامیم، هرگاه مماسهایی که در نقاط تقاطع بر این دایره‌ها رسم می‌شوند، برهم عمود باشند (شکل ۲۴).



شکل۲۴

با توجه به شکل ۲۴، معلوم می‌شود که دو دایره به معادله‌های $x^۲ + y^۲ + ۲gx + ۲fy + c = ۰$ و $x^۲ + y^۲ + ۲g'x + ۲f'y + c' = ۰$ متعامدند اگر داشته باشیم

$$(C_۱C_۲)^۲ = (C_۱A)^۲ + (C_۲A)^۲ \qquad (۱)$$

مرکز این دایره‌ها به‌ترتیب $C_۱(-g, -f)$ و $C_۲(-g', -f')$ و شعاعهای آنها به‌ترتیب $\sqrt{g^۲ + f^۲ - c}$ و $\sqrt{g'^۲ + f'^۲ - c'}$ هستند. بنابراین، با توجه به معادلهٔ (۱) داریم

$$[-g - (-g')]^۲ + [-f - (-f')]^۲ = g^۲ + f^۲ - c + g'^۲ + f'^۲ - c'$$

$$g^۲ + g'^۲ - ۲gg' + f^۲ + f'^۲ - ۲ff' = g^۲ + f^۲ - c + g'^۲ + f'^۲ - c'$$

$$\Longrightarrow ۲gg' + ۲ff' = c + c'$$

این شرط تعامد دو دایره است.

مثال حل شدهٔ ۱۷

آیا دو دایرهٔ

الف) $(x - ۲)^۲ + (y + ۴)^۲ = ۹$ و ب) $(x + ۳)^۲ + (y - ۲)^۲ = (۳\sqrt{۵})^۲$

متعامدند؟

حل.

در دایرهٔ (الف)، $g = ۲$ و $f = -۴$ و در دایرهٔ (ب)، $g' = -۳$ و $f' = ۲$. بنابراین،

$$۲gg' + ۲ff' = ۲ \times ۲(-۳) + ۲(-۴) \times ۲ = -۲۸$$

همچنین، داریم

$$r_۱ = \sqrt{g^۲ + f^۲ - c} = ۳ \Longrightarrow (-۲)^۲ + (-۴)^۲ - c = ۳^۲ \Longrightarrow c = ۱۱$$

$$r_۲ = \sqrt{g'^۲ + f'^۲ - c} = ۳\sqrt{۵} \Longrightarrow (-۳)^۲ + ۲^۲ - c' = (۳\sqrt{۵})^۲ \Longrightarrow c = -۲۱$$

پس دو دایره متعامد نیستند، زیرا

$$c+c' = -10 \neq -28 = 2gg' + 2ff'$$

مثال حل شدهٔ ۱۸

کدام جفت از دایره‌های زیر متعامدند؟

الف) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 20$ و $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 20$؛

ب) $x^2 + y^2 = 1$ و $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 24$.

حل.

الف)

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 20 = 0 \implies x^2 + 6x + y^2 - 8y + 5 = 0$$
$$\implies g = -3,\ f = 4,\ c = 5$$

و

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 - 20 = 0 \implies x^2 + 8x + y^2 + 6y + 5 = 0$$
$$\implies g' = -4,\ f' = -3,\ c' = 5$$

بنابراین،

$$2gg' + 2ff' = 2(-3)(-4) + 2(4)(-3) = 0$$
$$c + c' = 10$$

پس دو دایره متعامد نیستند.

ب)

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \implies x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 - 24 = 0$$
$$\implies g = 0,\ f = 0,\ c = -1$$

و

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 - 24 = 0 \implies x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 - 24 = 0$$
$$\implies g' = 3,\ f' = -4,\ c' = 1$$

بنابراین،

$$2gg' + 2ff' = 0 = c + c'$$

پس دو دایره متعامدند.

مثال حل شدهٔ ۱۹

نشان دهید که دایرهٔ $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 2 = 0$ بر دو دایرهٔ

$$x^2 + y^2 + 10x + 3y + 17 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 - 7x - 5y + 6 = 0$$

عمود است.

حل.

$$x^۲+y^۲+۶x-۱۰y-۲=۰ \implies (x+۳)^۲-۹+(y-۵)^۲-۲۵-۲=۰$$
$$\implies (x+۳)^۲-۹+(y-۵)^۲=۳۶$$
$$\implies g=-۳,\ f=۵,\ c=-۲$$

به‌همین ترتیب، داریم

$$x^۲+y^۲+۱۰x+۳y+۱۷=۰ \implies (x+۵)^۲-۲۵+\left(y+\frac{۳}{۲}\right)^۲-\frac{۹}{۴}+۱۷=۰$$
$$\implies g'=-۵,\ f'=-\frac{۳}{۲},\ c'=۱۷$$

اینک، شرط تعامد را بررسی می‌کنیم:

$$۲gg'+۲ff'=۲(-۳)(-۵)+۲(۵)\left(-\frac{۳}{۲}\right)=۱۵$$
$$c+c'=-۲+۱۷=۱۵$$

پس $۲gg'+۲ff'=c+c'$ و در نتیجه، دو دایره متعامدند.

اکنون، داریم

$$x^۲+y^۲-۷x-۵y+۶=۰$$
$$\implies \left(x-\frac{۷}{۲}\right)^۲-\frac{۴۹}{۴}+\left(y-\frac{۵}{۲}\right)^۲-\frac{۲۵}{۴}+۶=۰$$
$$\implies g''=\frac{۷}{۲},\ f''=\frac{۵}{۲},\ c''=۶$$
$$\implies ۲gg''+۲ff''=۲(-۳)\left(\frac{۷}{۲}\right)+۲(۵)\left(\frac{۵}{۲}\right)=-۲۱+۲۵=۴=c+c''=-۲+۶=۴$$

پس، دو دایره متعامدند.

۲-۳ معادلهٔ پارامتری دایره

همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، معادلهٔ پارامتری دایره‌ای به مرکز $(۰,۰)$ و به شعاع r به‌صورت زیر است:

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta$$

اگر مرکز دایره نقطهٔ (a,b) و شعاع آن برابر با r باشد، معادلهٔ پارامتری دایره به شکل زیر است:

$$x=a+r\cos\theta \quad , \quad y=b+r\sin\theta$$

اگر در این معادلات، پارامتر θ را حذف کنیم، حاصل می‌شود

$$\cos\theta=\frac{x-a}{r} \quad , \quad \sin\theta=\frac{y-b}{r}$$
$$\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱ \implies \left(\frac{x-a}{r}\right)^۲+\left(\frac{y-b}{r}\right)^۲=۱$$
$$\implies (x-a)^۲+(y-b)^۲=r^۲$$

این معادلهٔ دکارتی دایره‌ای به مرکز (a,b) و به شعاع r است.

مثال حل شدهٔ ۲۰

معادله‌های دکارتی دایره‌های زیر را بیابید.

الف) $x = ۳\cos\theta\,,\ \ y = ۳\sin\theta$ ب) $x = \cos\theta\,,\ \ y = \sin\theta$

ج) $x = ۱ + ۲\cos\theta\,,\ \ y = ۳ + ۲\sin\theta$ د) $x = -۲ + ۵\cos\theta\,,\ \ y = ۵ + ۵\sin\theta$

حل.

الف)
$$x = ۳\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{۳}\ ,\quad y = ۳\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{۳}$$

با استفاده از رابطهٔ $\cos^۲\theta + \sin^۲\theta = ۱$، پارامتر θ را در معادله‌های بالا حذف می‌کنیم:

$$\cos^۲\theta + \sin^۲\theta = ۱ = \left(\frac{x}{۳}\right)^۲ + \left(\frac{y}{۳}\right)^۲ \Longrightarrow x^۲ + y^۲ = ۳^۲$$

ب)
$$\cos\theta = x\ ,\quad \sin\theta = y \Longrightarrow x^۲ + y^۲ = ۱$$

ج)
$$x = ۱ + ۲\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{x-۱}{۲}$$
$$y = ۳ + ۲\sin\theta \Longrightarrow \sin\theta = \frac{y-۳}{۲}$$
$$\Longrightarrow \left(\frac{x-۱}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{y-۳}{۲}\right)^۲ = ۱ \Longrightarrow (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲^۲$$

د)
$$x = -۲ + ۵\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{x+۲}{۵}$$
$$y = ۵ + ۵\sin\theta \Longrightarrow \sin\theta = \frac{y-۵}{۵}$$
$$\Longrightarrow \left(\frac{x+۲}{۵}\right)^۲ + \left(\frac{y-۵}{۵}\right)^۲ = ۱ \Longrightarrow (x+۲)^۲ + (y-۵)^۲ = ۵^۲$$

مثال حل شدهٔ ۲۱

معادله‌های پارامتری دایره‌های زیر را بیابید.

الف) $x^۲ + y^۲ = ۲$

ب) $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y - ۱۲ = ۰$

ج) $x^۲ + y^۲ + ۲gx + ۲fy + c = ۰$

حل.

الف)
$$x^۲ + y^۲ = (\sqrt{۲})^۲ \Longrightarrow x = \sqrt{۲}\cos\theta\,,\quad y = \sqrt{۲}\sin\theta$$

ب)
$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y - ۱۲ = ۰ \Longrightarrow (x-۲)^۲ - ۴ + (y-۳)^۲ - ۹ - ۱۲ = ۰$$
$$\Longrightarrow (x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۵^۲$$
$$\Longrightarrow x = ۲ + ۵\cos\theta,\ y = ۳ + ۵\sin\theta$$

ج)

$$x^۲+y^۲+۲gx+۲fy+c=۰$$
$$\Longrightarrow (x+g)^۲-g^۲+(y+f)^۲-f^۲+c=۰$$
$$\Longrightarrow (x+g)^۲+(y+f)^۲=(\sqrt{g^۲+f^۲-c})^۲$$
$$\Longrightarrow x=-g+\sqrt{g^۲+f^۲-c}\,\cos\theta,\ y=-f+\sqrt{g^۲+f^۲-c}\,\sin\theta$$

تمرین ۲

۱. معادلهٔ دکارتی دایرهٔ به معادلهٔ $x=۲\cos\theta$، $y=۲\sin\theta$ را بنویسید.

۲. معادلهٔ دکارتی دایرهٔ به معادلهٔ $x=۵\cos\theta$، $y=۵\sin\theta$ را بنویسید.

۳. مرکز دایره‌ای نقطهٔ $(۰,۰)$ و شعاع آن ۷ است. معادلهٔ دایره را بنویسید.

۴. معادلهٔ دایره‌ای به‌شکل $x^۲+y^۲=۲^۲$ است. مرکز و شعاع این دایره را تعیین کنید.

۵. اگر مرکز دایره‌ای نقطهٔ $C(-g,-f)$ و شعاع آن $\sqrt{g^۲+f^۲-c}$ باشد، معادلهٔ دکارتی دایره را بنویسید.

۶. دایره‌ای از سه نقطهٔ $(۰,۰)$، $(-۱,۵)$ و $(۳,۴)$ می‌گذرد. معادلهٔ این دایره را بنویسید.

۷. دایره‌ای از سه نقطهٔ $(۰,۵)$، $(۷,۰)$ و $(-۴,-۵)$ می‌گذرد. معادلهٔ این دایره را بنویسید.

۸. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(۰,۶)$ و شعاع ۴ را بنویسید.

۹. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(۳,۲)$ را بنویسید که از نقطهٔ $(۰,۵)$ بگذرد.

۱۰. در هر یک از موارد زیر، معادلهٔ دایرهٔ موردنظر را بنویسید.

الف) $C(۰,۳)$، $r=۳$ ب) $C(-۱,۲)$، $r=۲$ ج) $C(۲,-۳)$، $r=۱$

۱۱. مرکز و شعاع دایرهٔ $x^۲+x+y^۲+۲y+۱=۰$ را تعیین کنید.

۱۲. مرکز و شعاع دایرهٔ $۴x^۲+۵x+۴y^۲+۳y-\frac{۱۱۱}{۸}=۰$ را بیابید.

۱۳. نقاط تقاطع دو دایرهٔ $x^۲-۴x+y^۲-۶y+۱۲=۰$ و $x^۲-۲x+y^۲-۲y-۲=۰$ را بیابید.

۱۴. مختصات مرکز و شعاع دایره‌ای را بیابید که از سه نقطهٔ $A(۱,۵)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۳)$ می‌گذرد.

۱۵. نشان دهید که نقطهٔ $(۳\cos\theta,۳\sin\theta)$ به‌ازای همهٔ مقادیر θ روی دایره $x^۲+y^۲=۹$ قرار دارد.

۱۶. نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر θ، نقطهٔ $(۲+۵\cos\theta,-۳+۵\sin\theta)$ روی دایرهٔ

$$x^۲+y^۲+۶y-۴x-۱۲=۰$$

قرار دارد.

۱۷. نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر θ، نقطهٔ $(-۵+\cos\theta,-۱+\sin\theta)$ روی دایرهٔ

$$x^۲+۱۰x+y^۲+۲y+۲۵=۰$$

قرار دارد.

۱۸. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(-۳,-۴)$ را بنویسید که از نقطهٔ $(۲,-۳)$ بگذرد.

۱۹. در هر یک از موارد زیر، معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز و شعاع آن داده شده است.

الف) $(-۲,۳)$، ۵ ب) $(-۲,-۲)$، ۲ ج) $(\sqrt{۵},\sqrt{۳})$، $\sqrt{۲}$

۲۰. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $(-g,-f)$ و شعاع آن $r=\sqrt{g^۲+f^۲-c}$ باشد.

۲۱. شرطی برای مماس بودن خط $y = mx + k$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲gx + ۲fy + c = ۰$ بنویسید.

۲۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(۱,۲)$، $(-۲,۳)$ و $(-۱,۵)$ بگذرد.

۲۳. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(۲,۳)$، $(-۳,۲)$ و $(۰,۰)$ بگذرد.

۲۴. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاع آن ۵ است.

۲۵. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-۳,۴)$ و شعاع آن ۳ است.

۲۶. معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $C(۲,۳)$ و شعاع ۱ را بنویسید.

۲۷. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که در نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲gx + ۲fy + c = ۰$ مماس است.

۲۸. نشان دهید که معادلهٔ خطهای مماس بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = r^۲$ با شیب m، به‌صورت $y = mx \pm r\sqrt{۱ + m^۲}$ است.

۲۹. نشان دهید که مربع طول پاره‌خط مماس از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲gx + ۲fy + c = ۰$ برابر است با $x_۱^{\,۲} + y_۱^{\,۲} + ۲gx_۱ + ۲fy_۱ + c$.

۳۰. در هر یک از موارد زیر، معادلهٔ مماس در نقطهٔ داده شده بر دایرهٔ مفروض را بنویسید.

الف) $x^۲ + y^۲ - ۳x + ۴y + ۶ = ۰$، $(۲, -۲)$

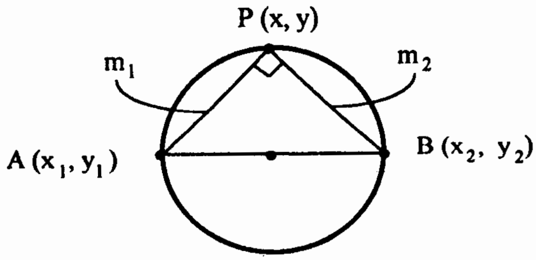
ب) $x^۲ + y^۲ + x + y = ۰$، $(-۱, -۱)$

۳۱. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از مبدأ مختصات و نقاط $(۲,۸)$ و $(۴,-۲)$ بگذرد.

۳۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقاط $(-۳,۴)$ و $(۲,-۳)$ دو سر قطری از آن هستند.

۳۳. مختصات سه نقطهٔ A، B و C به‌ترتیب عبارت‌اند از $(۲,۴)$، $(۸,-۲)$ و $(۶,۲)$. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از این سه نقطه بگذرد و سپس، مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

۳۴. با در دست داشتن مختصات دو سر قطری از یک دایره، معادلهٔ آن را بنویسید (شکل ۲۵).



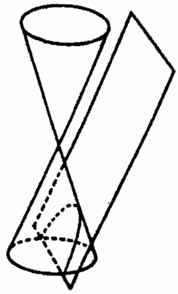
شکل۲۵

۳۵. مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲y - ۴x - ۴ = ۰$ را بیابید.

۳

سهمی‌ها و معادلهٔ آنها

مخروط دواری مانند شکل ۲۶ را در نظر بگیرید. اگر صفحه‌ای موازی با مولد این مخروط آن‌را قطع کند، شکل حاصل سهمی است. از نظر هندسی، سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط راست و یک نقطهٔ ثابت غیرواقع بر آن خط به یک فاصله هستند. نقطهٔ ثابت را کانون سهمی و خط راست را خط هادی سهمی می‌نامند. خطی که از کانون سهمی می‌گذرد و بر خط هادی آن عمود است، محور سهمی نام دارد. نقطه‌ای واقع بر سهمی که فاصله‌اش تا کانون سهمی (و نیز خط هادی) کمترین مقدار ممکن است، رأس سهمی نامیده می‌شود. هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ سهمی را به‌هم وصل کند، وتر سهمی نامیده می‌شود.



شکل ۲۶

در این کتاب فقط با سهمی افقی و سهمی قائم سروکار داریم. هرگاه محور سهمی موازی با محور x باشد، سهمی را افقی و اگر محور آن موازی با محور y باشد، سهمی را قائم می‌نامیم. (توجه کنید که در سهمی افقی، خط هادی موازی محور y و در سهمی قائم، خط هادی موازی محور x است.) در اینجا تنها دربارهٔ سهمیهایی گفتگو می‌کنیم که رأس آنها مبدأ مختصات باشد.

معادلهٔ سهمیهای افقی به دو صورت است ($a > ۰$):

$$y^۲ = -۴ax \quad \text{و} \quad y^۲ = ۴ax$$

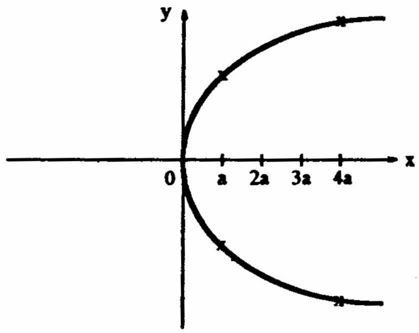
در معادلهٔ $y^۲ = ۴ax$، مقدار x همواره نامنفی است ($x \geqslant ۰$). داریم

$$x = ۰ \implies y^۲ = ۴a \times ۰ = ۰ \implies y = ۰$$

$$x = a \implies y^۲ = ۴a \times a \implies y = \pm ۲a$$

$$x = ۴a \implies y^۲ = ۴a \times ۴a \implies y = \pm ۴a$$

(شکل ۲۷ را ببینید.)



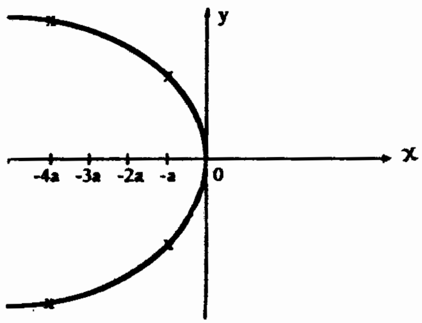
شکل۲۷

در معادلهٔ $y^۲ = -۴ax$، مقدار x همواره نامثبت است ($x \leqslant ۰$). داریم

$$x = ۰ \implies y = ۰ \quad , \quad x = -a \implies y = \pm ۲a$$

$$x = -۴a \implies y = \pm ۴a$$

(شکل ۲۸ را ببینید.)



شکل۲۸

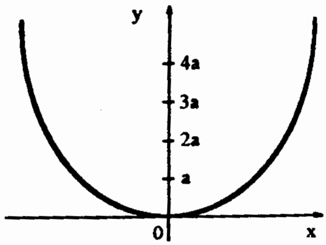
معادلهٔ سهمیهای قائم نیز به دو صورت است ($a > 0$):

$$x^2 = -4ay \quad \text{و} \quad x^2 = 4ay$$

در معادلهٔ $x^2 = 4ay$، مقدار y همواره نامنفی است ($y \geqslant 0$). داریم

$$y = 0 \implies x = 0 \quad , \qquad y = a \implies x = \pm 2a$$
$$y = 4a \implies x = \pm 4a$$

(شکل ۲۹ را ببینید.)

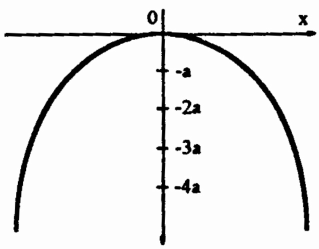


شکل۲۹

در معادلهٔ $x^2 = -4ay$، مقدار y همواره نامثبت است ($y \leqslant 0$). داریم

$$y = 0 \implies x = 0 \quad , \qquad y = -a \implies x = \pm 2a$$
$$y = -4a \implies x = \pm 4a$$

(شکل ۳۰ را ببینید.)

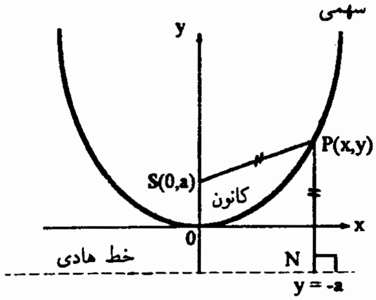


شکل۳۰

اینک فرض کنید نقطهٔ $P(x,y)$ طوری حرکت کند که همواره فاصله‌اش از نقطهٔ $S(a,0)$ (کانون سهمی) و خط ثابت $y = -a$ (خط هادی) برابر باشد. نشان می‌دهیم که معادلهٔ مکان هندسی $P(x,y)$

به‌صورت $x^۲ = ۴ay$ است. با توجه به شکل ۳۱، داریم

$$PS = PN \Longrightarrow PN^۲ = (y+a)^۲\ ,\ \ PS^۲ = (y-a)^۲ + x^۲$$
$$\Longrightarrow (y-a)^۲ + x^۲ = (y+a)^۲ \Longrightarrow y^۲ - ۲ay + a^۲ + x^۲ = y^۲ + ۲ay + a^۲$$
$$\Longrightarrow x^۲ = ۴ay$$



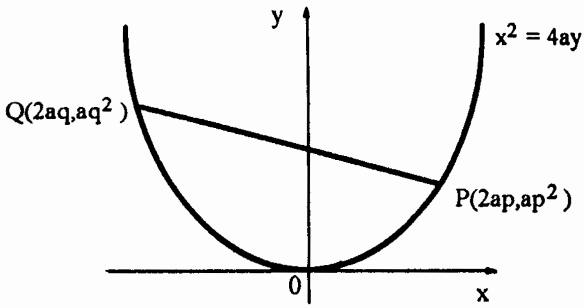
شکل۳۱

۳-۱ معادلهٔ پارامتری سهمی

فرض کنید که مختصات x و y نقطهٔ P در رابطه‌های $x = ۲at$ و $y = at^۲$ صدق کنند. در این رابطه‌ها، t را پارامتر می‌نامند. اگر پارامتر t را بین برابریهای بالا حذف کنیم، خواهیم داشت

$$x = ۲at \Longrightarrow t = \frac{x}{۲a}$$
$$\Longrightarrow y = at^۲ = a\left(\frac{x}{۲a}\right)^۲ = \frac{ax^۲}{۴a^۲} \Longrightarrow x^۲ = ۴ay$$

بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ P سهمی قائم $x^۲ = ۴ay$ است. دستگاه معادلات $x = ۲at$ و $y = at^۲$ را معادلات پارامتری سهمی قائم می‌نامیم. به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد که دستگاه $x = at^۲$ و $y = ۲at$، معادلات پارامتری سهمی افقی هستند. در شکل ۳۲، مکان دو نقطهٔ P و Q که با انتخاب دو مقدار برای پارامتر t به‌دست آمده‌اند روی سهمی مشخص شده است.



شکل۳۲

شیب وتر PQ برابر است با

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{aq^2 - ap^2}{2aq - 2ap} = \frac{a(q-p)(q+p)}{2a(q-p)} = \frac{q+p}{2}$$

پس معادلهٔ وتر PQ به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{p+q}{2} \implies y - ap^2 = \frac{p+q}{2}(x - 2ap)$$
$$\implies 2y - 2ap^2 = (p+q)x - 2ap(p+q)$$
$$\implies 2y - 2ap^2 = px + qx - 2ap^2 - 2apq$$
$$\implies 2y - (p+q)x + 2apq = 0$$

۲-۳ معادلهٔ خط مماس بر سهمی

برای یافتن معادلهٔ خط مماس بر سهمی قائم $x^2 = 4ay$ در نقطهٔ $P(2ap, ap^2)$ واقع بر آن (شکل ۳۳)، ابتدا مقدار $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه می‌کنیم:

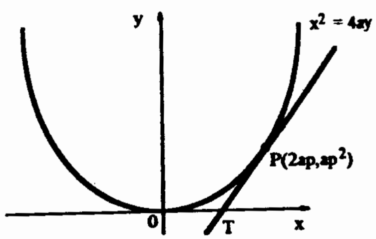
$$x^2 = 4ay \implies y = \frac{1}{4a}x^2 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2a}$$

پس شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ P برابر است با

$$m = \frac{2ap}{2a} = p$$

بنابراین، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ P به‌شکل $y = mx + c$ یا $y = px + c$ است. چون این خط از نقطهٔ P می‌گذرد، مختصات آن در معادلهٔ خط صدق می‌کنند:

$$ap^2 = p(2ap) + c \implies c = ap^2 - 2ap^2 = -ap^2$$
$$\implies y = px - ap^2$$



شکل۳۳

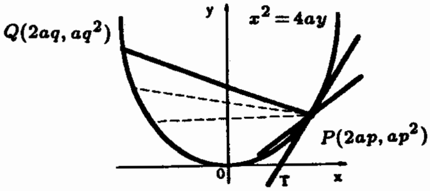
می‌توانستیم این معادله را به‌وسیلهٔ معادلهٔ وتر PQ و این فرض که q به p میل کند نیز به‌دست آوریم (شکل ۳۴):

$$y - \frac{1}{2}(p+q)x + apq = 0 \qquad \text{(معادلهٔ وتر } PQ\text{)}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{2}(p+q)x - apq$$

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{2}(p+p)x - ap \times p \qquad (q \to p \text{ اگر})$$

$$\Longrightarrow y = px - ap^2$$



شکل۳۴

به‌همین ترتیب، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $P(ap^2, 2ap)$ بر سهمی افقی $y^2 = 4ax$ به‌شکل زیر است:

$$x = py - ap^2$$

به روش مشابهی می‌توان نشان داد که اگر نقطهٔ $P(x_1, y_1)$ بر سهمی قائم $x^2 = 4ay$ قرار داشته باشد، معادلهٔ خط مماس بر سهمی در این نقطه به‌شکل زیر است:

$$xx_1 = 2ay + 2ay_1$$

همچنین اگر نقطهٔ $P(x_1, y_1)$ روی سهمی افقی $y^2 = 4ax$ قرار داشته باشد، معادلهٔ مشابهی برای خط مماس در این نقطه بر سهمی وجود دارد:

$$yy_1 = 2ax + 2ax_1$$

۳-۳ معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ P واقع بر سهمی

فرض کنید که نقطهٔ $P(2ap, ap^2)$ بر سهمی قائم $x^2 = 4ay$ قرار داشته باشد. همان‌طورکه دیدیم، شیب خط مماس در نقطهٔ P بر سهمی برابر است با p. بنابراین، شیب خط قائم در نقطهٔ P بر سهمی $-\frac{1}{p}$ است زیرا $p \times \left(-\frac{1}{p}\right) = -1$. در نتیجه، معادلهٔ خط قائم به‌شکل زیر خواهد بود:

$$y = -\frac{1}{p}x + c$$

چون نقطهٔ P روی این خط قرار دارد، داریم

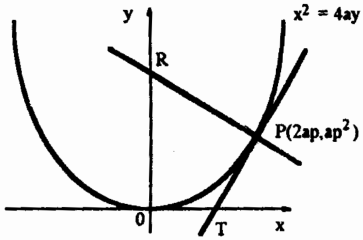
$$ap^2 = -\frac{1}{p} \times 2ap + c \Longrightarrow c = ap^2 + 2a$$

$$\Longrightarrow y = -\frac{1}{p}x + ap^2 + 2a \Longrightarrow py + x = ap^3 + 2ap$$

(شکل ۳۵ را ببینید.)

به‌همین ترتیب، می‌توان نشان داد که معادلهٔ خط قائم بر سهمی افقی $y^2 = 4ax$ در نقطهٔ $P(ap^2, 2ap)$ به‌شکل زیر است:

$$px + y = 2ap + ap^3$$



شکل۳۵

۴-۳ نقطهٔ برخورد دو مماس بر سهمی

معادلهٔ مماسها در نقاط $P(2ap, ap^2)$ و $P(2aq, aq^2)$ بر سهمی قائم $x^2 = 4ay$ به‌ترتیب عبارت‌اند از $y = px - ap^2$ و $y = qx - aq^2$. اگر این معادلات را به‌صورت یک دستگاه حل کنیم، حاصل می‌شود

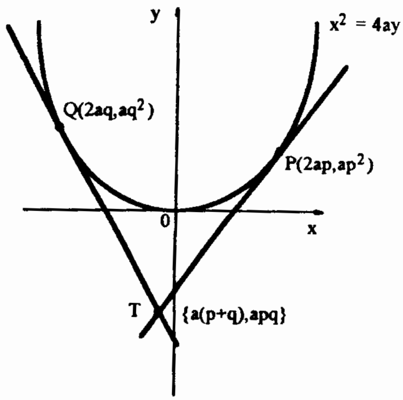
$$px - ap^2 = qx - aq^2 \implies (p - q)x = a(p - q)(p + q)$$

$$\implies x = a(p + q) \qquad (p \neq q)$$

اگر این مقدار را به‌جای x در یکی از معادله‌های بالا قرار دهیم، حاصل می‌شود

$$y = p[a(p + q)] - ap^2 = ap^2 + apq - ap^2 = apq \implies y = apq$$

بنابراین، خطهای مماس بر سهمی در نقاط $P(2ap, ap^2)$ و $Q(2aq, aq^2)$ با یکدیگر در نقطهٔ $T(a(p + q), apq)$ برخورد می‌کنند (شکل ۳۶ را ببینید).



شکل۳۶

به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد که خطهای مماس بر سهمی $y^۲ = ۴ax$ در نقاط $P(ap^۲, ۲ap)$ و $Q(aq^۲, ۲aq)$ در نقطهٔ $T(apq, a(p+q))$ برخورد می‌کنند.

۵-۳ نقطهٔ برخورد دو خط قائم بر سهمی

معادلهٔ خطهای قائم بر سهمی $x^۲ = ۴ay$ در نقاط $P(۲ap, ap^۲)$ و $Q(۲aq, aq^۲)$ به‌ترتیب عبارت‌اند از $py + x = ap^۳ + ۲ap$ و $qy + x = aq^۳ - ۲aq$. اگر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم کنیم، حاصل می‌شود

$$py - qy = ap^۳ + ۲ap - aq^۳ - ۲aq \implies y(p-q) = a(p^۳ - q^۳) + ۲a(p-q)$$

$$\implies y = a(p^۲ + pq + q^۲) + ۲a \qquad (p \neq q)$$

اگر مقدار بالا را به‌جای y در معادلهٔ خط قائم اول قرار دهیم، حاصل می‌شود

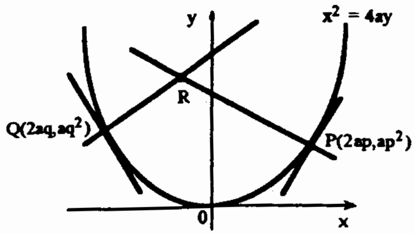
$$pa(p^۲ + pq + q^۲) + ۲ap + x = ap^۳ + ۲ap$$

$$\implies x = ap^۳ + ۲ap - ap^۳ - ap^۲q - apq^۲ - ۲ap \implies x = -apq(p+q)$$

پس خطهای قائم در نقاط $P(۲ap, ap^۲)$ و $Q(۲aq, aq^۲)$ با یکدیگر در نقطهٔ

$$R(-apq(p+q)\ ,\ a(p^۲ + pq + q^۲ + ۲))$$

برخورد می‌کنند (شکل ۳۷ را ببینید.)



شکل۳۷

به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد که خطهای قائم در نقاط $P(ap^۲, ۲ap)$ و $Q(aq^۲, ۲aq)$ بر سهمی $y^۲ = ۴ax$ در نقطهٔ

$$R(a(p^۲ + pq + q^۲ + ۲)\ ,\ -apq(p+q))$$

برخورد می‌کنند.

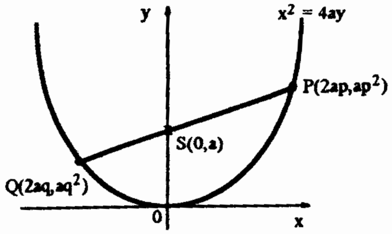
۶-۳ وتر کانونی

وتری از سهمی را که از کانون آن بگذرد وتر کانونی می‌نامیم. فرض کنید $S(۰, a)$ مختصات کانون سهمی $x^۲ = ۴ay$ و $۲y = (p+q)x - ۲apq$ معادلهٔ وتر PQ باشد. اگر مختصات S در معادلهٔ PQ صدق

کند، داریم

$$x = 0,\ y = a \implies 2a = -2apq \implies pq = -1$$

پس شرط آنکه وتر PQ وتر کانونی باشد آن است که $pq = -1$ (شکل ۳۸ را ببینید.)

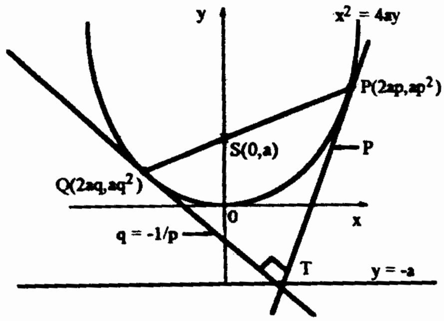


شکل۳۸

همین شرط در سهمی افقی $y^2 = 4ax$ نیز درست است.

همان‌طورکه می‌دانید، مماسها در نقطه‌های P و Q بر سهمی $x^2 = 4ax$ در نقطهٔ $T(a(p+q), apq)$ برخورد می‌کنند. اگر وتر PQ کانونی باشد، آنگاه $pq = -1$ و در نتیجه $T(a(p+q), -a)$. چون معادلهٔ خط هادی $y = -a$ است، پس نقطهٔ T روی خط هادی سهمی قرار دارد.

همچنین اگر $P(2ap, ap^2)$، $Q(2aq, aq^2)$ و وتر PQ کانونی باشد، خطهای مماس بر سهمی در نقاط P و Q برهم عمودند زیرا $pq = -1$ و p و q به‌ترتیب شیب خطهای مماس در P و Q بر سهمی هستند (شکل ۳۹ را ببینید.)



شکل۳۹

نتایج مشابهی در سهمیهای افقی نیز برقرار است.

۷-۳ شرط آنکه خط $y = mx + c$ بر سهمی مماس باشد

در چه صورتی خط $y = mx + c$ بر سهمی $x^2 = 4ay$ مماس می‌شود؟ اگر مقدار $y = mx + c$ را در معادلهٔ $x^2 = 4ay$ بگذاریم، خواهیم داشت

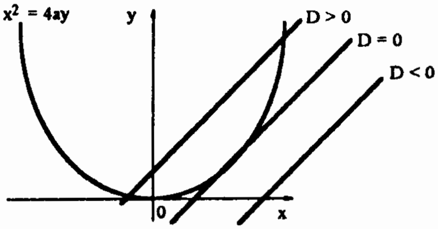
$$x^2 = 4a(mx+c) \implies x^2 - 4amx - 4ac = 0$$

شرط مماس بودن آن است که مبین این معادله، یعنی $D = (-4am)^2 - 4(-4ac)$ برابر با صفر شود. در نتیجه

$$D = 16a^2m^2 + 16ac = 0 \implies c = -am^2$$

پس خط $y = mx - am^2$ به‌ازای همهٔ مقادیر m بر سهمی $x^2 = 4ay$ مماس است.

اگر $D > 0$، آنگاه خط $y = mx + c$ سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند و اگر $D < 0$، آنگاه خط و سهمی نقطهٔ برخوردی ندارند (شکل ۴۰ را ببینید).



شکل ۴۰

به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد که شرط آنکه خط $y = mx + c$ بر سهمی افقی $y^2 = 4ax$ مماس باشد، آن است که

$$c = \frac{a}{m}$$

۳-۸ معادلهٔ وتر نقاط تماس

به شکل ۴۱ توجه کنید. از نقطهٔ $T(1,-4)$، دو مماس بر سهمی $x^2 = 4ay$ در نقاط P و Q رسم شده‌اند. معادلهٔ وتر PQ عبارت است از

$$2y - (p+q)x + 2apq = 0$$

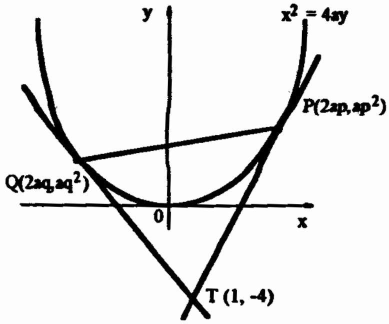
این مماسها در نقطهٔ $T(a(p+q), apq)$ برخورد می‌کنند و چون مختصات T عبارت است از $(1,-4)$، داریم

$$1 = a(p+q) \quad , \quad -4 = apq$$

$$\implies p+q = \frac{1}{a} \quad , \quad apq = -4$$

بنابراین، معادلهٔ وتر PQ به‌شکل زیر است:

$$2y - \frac{1}{a}x + 2(-4) = 0 \implies 2ay - x - 8a = 0$$



شکل۴۱

مثال حل شدهٔ ۲۲

در هر یک از موارد زیر، معادلهٔ دکارتی سهمی داده شده را بنویسید و آن‌را رسم کنید.

الف) $x = ۵p\ ,\ \ y = ۶p^۲$ ب) $x = ۵t^۲\ ,\ \ y = ۳t$

ج) $x = -۳q\ ,\ \ y = ۴q^۲$ د) $x = -۳p^۲\ ,\ \ y = ۵p$

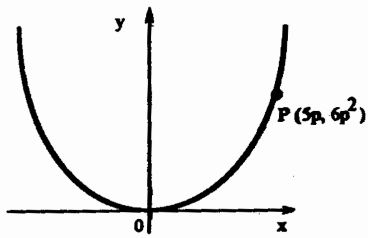
هـ) $x = -۲t\ ,\ \ y = -۳t^۲$ و) $x = ۳t^۲\ ,\ \ y = ۶t$

حل.

الف) اگر پارامتر p را بین معادلات $x = ۵p$ و $y = ۶p^۲$ حذف کنیم، خواهیم داشت

$$x = ۵p \implies p = \frac{x}{۵} \implies y = ۶\left(\frac{x}{۵}\right)^۲ \implies y = \frac{۶}{۲۵}x^۲ \text{ یا } ۶x^۲ = ۲۵y$$

(شکل ۴۲ را ببینید.)

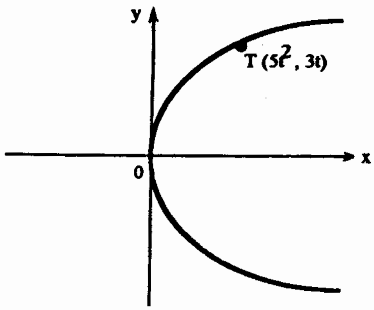


شکل۴۲

ب) اگر پارامتر t را بین دو معادلهٔ $x = ۵t^۲$ و $y = ۳t$ حذف کنیم، حاصل می‌شود

$$x = ۵t^۲ = ۵\left(\frac{y}{۳}\right)^۲ = \frac{۵y^۲}{۹} \implies ۵y^۲ = ۹x$$

(شکل ۴۳ را ببینید.)

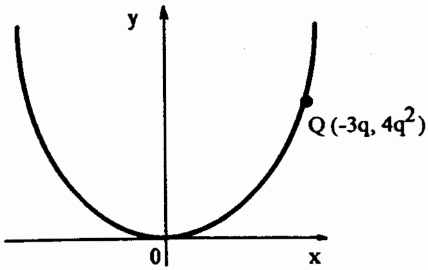


شکل۴۳

ج) با حذف پارامتر q بین معادلات $x = -۳q$ و $y = ۴q^۲$، خواهیم داشت

$$y = ۴q^۲ = ۴\left(-\frac{x}{۳}\right)^۲ = \frac{۴}{۹}x^۲ \implies ۴x^۲ = ۹y$$

(شکل ۴۴ را ببینید.)

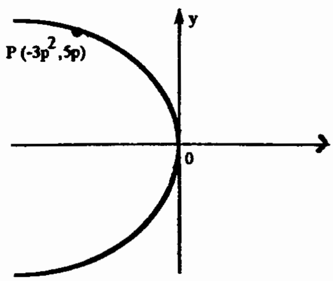


شکل۴۴

د) با حذف پارامتر p بین معادلات $x = -۳p^۲$ و $y = ۵p$، حاصل می‌شود

$$x = -۳p^۲ = -۳\left(\frac{y}{۵}\right)^۲ = -\frac{۳y^۲}{۲۵} \implies ۳y^۲ = -۲۵x$$

(شکل ۴۵ را ببینید.)

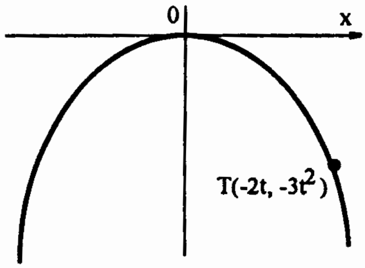


شکل۴۵

هـ) با حذف پارامتر t بین معادلات $x = -۲t$ و $y = -۳t^۲$، خواهیم داشت

$$y = -۳\left(-\frac{x}{۲}\right)^۲ = -\frac{۳x^۲}{۴} \Longrightarrow ۳x^۲ = -۴y$$

(شکل ۴۶ را ببینید.)

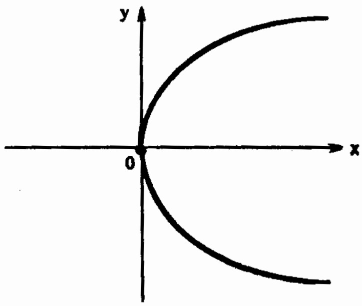


شکل۴۶

و) با حذف پارامتر t بین معادلات $x = ۳t^۲$ و $y = ۶t$، حاصل می‌شود

$$x = ۳t^۲ = ۳\left(\frac{y}{۶}\right)^۲ \Longrightarrow ۳۶x = ۳y^۲ \Longrightarrow y^۲ = ۱۲x$$

(شکل ۴۷ را ببینید.)



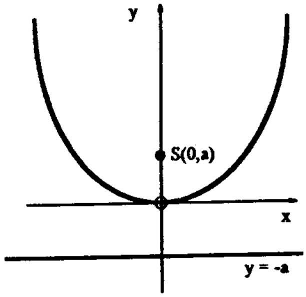
شکل۴۷

ویژگیهای سهمی

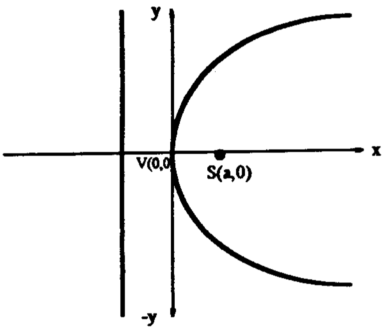
نمودار یک سهمی قائم به معادلهٔ $x^۲ = ۴ay$ نسبت به محور y متقارن است و مختصات کانون این سهمی $(۰, a)$ و معادلهٔ خط هادی آن $y = -a$ است (شکل ۴۸ را ببینید).

نمودار یک سهمی افقی به معادلهٔ $y^۲ = ۴ax$ نسبت به محور x متقارن است و مختصات کانون این سهمی $(a, ۰)$ و معادلهٔ خط هادی آن $x = -a$ است (شکل ۴۹ را ببینید).

نقطهٔ (x, y) طوری در صفحه حرکت می‌کند که همواره فاصله‌اش از نقطهٔ $(۰, ۲)$ برابر با فاصلهٔ



شکل ۴۸



شکل ۴۹

آن از خط $y=-2$ است. مسیر حرکت این نقطه سهمی زیر است:

$$x^2 = 8y$$

نقطهٔ (x,y) طوری در صفحه حرکت می‌کند که همواره فاصله‌اش از نقطهٔ $(1,0)$ برابر با فاصلهٔ آن از خط $x=-1$ است. مسیر حرکت این نقطه سهمی زیر است:

$$y^2 = 4x$$

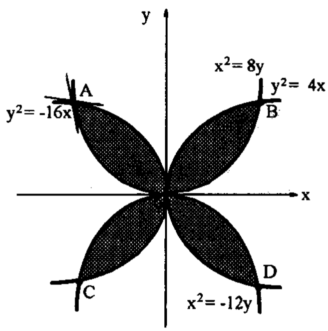
نقطهٔ (x,y) طوری در صفحه حرکت می‌کند که همواره فاصله‌اش از نقطهٔ $(0,-3)$ برابر با فاصلهٔ آن از خط $y=3$ است. مسیر حرکت این نقطه سهمی زیر است:

$$x^2 = -12y$$

نقطهٔ (x,y) طوری در صفحه حرکت می‌کند که همواره فاصله‌اش از نقطهٔ $(-4,0)$ برابر با فاصلهٔ آن از خط $x=4$ است. مسیر حرکت این نقطه سهمی زیر است:

$$y^2 = -16x$$

در شکل ۵۰ نمودار این چهار معادله را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و ناحیه‌های بین آنها را سایه زده‌ایم.



شکل ۵۰

تمرین ۳

۱. در هر یک از موارد زیر، نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر پارامتر، نقاط داده شده روی سهمیهای مفروض قرار دارند.

الف) $6x^2 = 25y$، $P(5p, 6p^2)$

ب) $5y^2 = 9x$، $T(5t^2, 3t)$

ج) $4x^2 = 9y$، $Q(-3q, 4q^2)$

د) $3y^2 = -25x$، $P(-3p^2, 5p)$

هـ) $3x^2 = -4y$، $T(-2t, -3t^2)$

و) $y^2 = 12x$، $T(3t^2, 6t)$

۲. نشان دهید که خط $y = mx - 5m^2$ بر سهمی $x^2 = 20y$ مماس است.

۳. نشان دهید که خط $y = mx - 7m^2$ بر سهمی $x^2 = 28y$ مماس است.

۴. نشان دهید که خط $y = mx - 3m^2$ بر سهمی $x^2 = 12y$ مماس است.

۵. مماسهایی که در نقاط $P(2ap, ap^2)$ و $Q(2aq, aq^2)$ بر سهمی $x^2 = 4ay$ رسم شده‌اند در نقطهٔ T با یکدیگر برخورد می‌کنند. اگر M وسط وتر PQ باشد، نشان دهید که TM موازی با محور y است.

۶. اگر T به مختصات $(2at, at^2)$ بر سهمی $x^2 = 4ay$ قرار داشته باشد، ثابت کنید که معادلهٔ خط قائم بر سهمی در T به‌شکل $x + ty = at^3 + 2at$ است. سپس معادلهٔ مماس در T را بیابید.

۷. نشان دهید که شیب خط مماس بر سهمی $y^2 = 4ax$ در نقطهٔ $P(ap^2, 2ap)$ برابر با $-p$ است. سپس معادلهٔ این خط مماس را بیابید.

۸. معادلهٔ خط هادی و مختصات کانون سهمی $y^2 = 4ax$ را بیابید.

۹. معادلهٔ خط هادی و مختصات کانون سهمی $y^2 = -4ax$ را بیابید.

۱۰. معادلهٔ خط هادی و مختصات کانون سهمی $x^2 = 4ay$ را بیابید.

۱۱. معادلهٔ خط هادی و مختصات کانون سهمی $x^2 = -4ay$ را بیابید.

۱۲. معادلهٔ سهمیهای زیر را بیابید.

الف) کانون $(-2, 0)$، خط هادی $x = 2$،

ب) کانون $(3, 0)$، خط هادی $x = -3$،

ج) کانون $(0, 1)$، خط هادی $y = -1$،

د) کانون $(0, -4)$، خط هادی $y = 4$.

۱۳. مقدار c در معادلهٔ $y = mx + c$ را برحسب a و m طوری تعیین کنید که این خط بر سهمی $x^2 = 4ay$ مماس شود. سپس مختصات نقطهٔ تماس را بیابید.

۱۴. مقدار m را طوری تعیین کنید که خط $y = mx + 1$ بر سهمی $(y - 1)^2 = 4(x - 2)$ مماس شود. سپس مختصات نقاط تماس P و Q را بیابید. این مماسها را رسم کنید. نشان دهید که طول PQ برابر با ۲ است.

۱۵. معادلهٔ خط مماس بر سهمی $x^2 = 4ay$ را در نقطهٔ (x_1, y_1) تعیین کنید.

۱۶. معادلهٔ وتری را بیابید که نقاط $T(2at, at^2)$ و $P(2ap, ap^2)$ از سهمی $x^2 = 4ay$ را به هم وصل می‌کند.

۱۷. مختصات T، نقطهٔ برخورد خطهای قائم بر سهمی $x^2 = -4ay$ در نقاط $P(2ap, -ap^2)$ و $Q(2aq, -aq^2)$ را بیابید. سپس مکان هندسی T را در صورتی که $pq = -1$، بیابید.

۱۸. معادلهٔ وتری را بیابید که نقاط $P(ap^2, 2ap)$ و $Q(aq^2, 2aq)$ واقع بر سهمی $y^2 = 4ax$ را به‌هم وصل می‌کند. سپس نشان دهید که وقتی این وتر از کانون سهمی می‌گذرد، شرط $pq = -1$ برقرار است.

۱۹. مختصات نقاط برخورد مماسهایی را که در نقاط $P(-ap^2, 2ap)$ و $Q(-aq^2, 2aq)$ واقع بر سهمی $y^2 = -4ax$ رسم می‌شوند، بیابید.

۲۰. معادلهٔ مماسهایی را که از نقطهٔ $(3a, -5a)$ بر سهمی $x^2 = 4ay$ رسم می‌شوند، بیابید.

۲۱. مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی $x^2 = 4(y-4)$ و نیز طول ضلع قائم آن‌را بیابید. (ضلع قائم سهمی وتری از آن است که از کانون سهمی می‌گذرد و بر محور آن عمود است.)

۲۲. طول ضلع قائم سهمیهای زیر را بیابید.

الف) $x^2 = 8y$ ب) $y^2 = 4x$

ج) $(x-1)^2 = 8(y-3)$ د) $(y+2)^2 = 4(x-1)$

۲۳. معادلهٔ خط مماس در رأس سهمی $x^2 = 8y - 8$ را بیابید.

۲۴. تحقیق کنید که معادلهٔ پارامتری سهمی $(2y-1)^2 = 3(x-1)$ به شکل $x = 3t^2 + 1$ و $y = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$ است.

۲۵. مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی $y = x^2 + 2x + 3$ را بیابید.

۲۶. معادلهٔ سهمی با کانون $(0, 3)$ و خط هادی $y = -3$ را بیابید.

۲۷. مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی $x = y^2 + 2y - 4$ را بیابید.

۲۸. نقطهٔ برخورد خطهای قائم بر سهمی $y^2 = 8x$ در نقاط $P(2p^2, 4p)$ و $Q(2q^2, 4q)$ را بیابید.

۲۹. در هر یک از موارد زیر، معادلهٔ سهمی را بیابید.

الف) خط هادی $x = -2$ و کانون $S(2, 0)$.

ب) خط هادی $y = -3$ و کانون $S(0, 3)$.

ج) خط هادی $x = 5$ و رأس $V(3, 2)$.

د) خط هادی $y = 5$ و کانون $S(0, -5)$.

هـ) خط هادی $x = 0$ و کانون $S(4, 4)$.

و) رأس $V(-3, -4)$ و کانون $V(-3, -6)$.

۳۰. در هر یک از موارد زیر، معادلهٔ خط هادی و کانون سهمی را بیابید و سپس آن‌را رسم کنید.

الف) $y^2 = 4x$ ب) $y^2 = -5x$ ج) $x^2 = -4y$ د) $x^2 = 9y$

هـ) $5y^2 = 2x$ و) $7x^2 = -3y$

۳۱. نقطهٔ برخورد خطهای قائم بر سهمی $y^2 = 4ax$ را در نقاط $(ap^2, 2ap)$ و $(aq^2, 2aq)$ بیابید.

۴

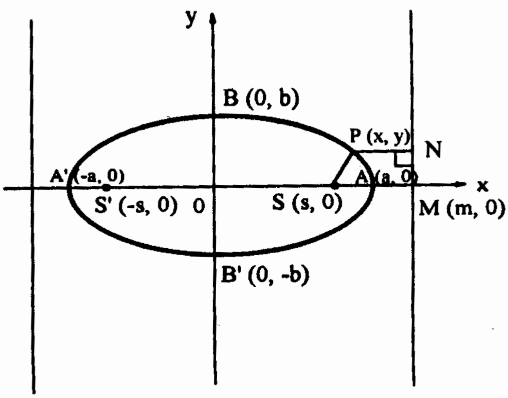
بیضی

هرگاه صفحه‌ای که موازی با مولد یا محور مخروط دواری نباشد و نیز بر محور آن عمود نباشد مخروط دوار را قطع کند، مقطع حاصل شکلی مسطح است که آن‌را بیضی می‌نامیم (شکل ۵۱ را ببینید). از نظر هندسی، بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ ثابت به‌نام کانونهای بیضی برابر با مقدار ثابتی باشد. همچنین می‌توانیم بیضی را به‌عنوان مکان هندسی نقاطی از صفحه در نظر بگیریم که نسبت فاصله‌های آنها از یک خط به‌نام خط هادی و یک نقطه به‌نام کانون برابر با عدد ثابتی کوچکتر از ۱ به‌نام خروج از مرکز بیضی است (شکل ۵۲ را ببینید). خروج از مرکز بیضی را با حرف e نشان می‌دهیم و داریم $e < 1$. با توجه به شکل ۵۲ داریم $\frac{SP}{PN} = e$.

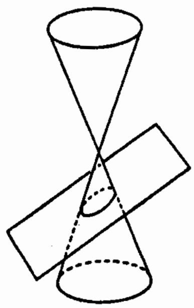
لازم به ذکر است که خروج از مرکز سهمی برابر با ۱ و خروج از مرکز دایره برابر با صفر است.

با توجه به شکل ۵۲، اگر معادلهٔ خط هادی را $x = m$ بگیریم، داریم

$$\frac{SA}{AM} = e \implies SA = AM \cdot e \implies a - s = (m - a)e \qquad (۱)$$



شکل ۵۲



شکل ۵۱

به‌همین ترتیب داریم

$$\frac{SA'}{A'M} = e \implies SA' = A'M \cdot e \implies a + s = (m+a)e \qquad (۲)$$

معادله‌های (۱) و (۲) را باهم جمع می‌کنیم:

$$۲a = ۲em \implies m = \frac{a}{e}$$

معادلهٔ (۱) را از (۲) کم می‌کنیم:

$$۲s = ۲ae \implies s = ae$$

مختصات کانون S عبارت است از $(ae, ۰)$ و معادلهٔ خط هادی $x = \frac{a}{e}$ است.

فرض کنید $P(x, y)$ نقطه‌ای از بیضی باشد. در این صورت $\frac{SP}{PN} = e$. در نتیجه $SP^۲ = e^۲PN^۲$. ولی با توجه به دستور فاصلهٔ دو نقطه داریم

$$SP^۲ = (x - ae)^۲ + y^۲$$

همچنین $PN = \frac{a}{e} - x$. بنابراین

$$(x-ae)^۲ + y^۲ = e^۲\left(\frac{a}{e} - x\right)^۲ \implies x^۲ - ۲aex + a^۲e^۲ + y^۲ = \frac{e^۲a^۲}{e^۲} - e^۲\frac{۲a}{e}x + e^۲x^۲$$
$$\implies x^۲(۱ - e^۲) + y^۲ = a^۲(۱ - e^۲)$$

اگر دو طرف تساوی آخر را بر $a^۲(۱ - e^۲)$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{a^۲(۱ - e^۲)} = ۱$$

و در نتیجه با فرض $b^۲ = a^۲(۱ - e^۲)$ حاصل می‌شود

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

این معادله را معادلهٔ دکارتی بیضی می‌نامیم.

در شکل ۵۲، نقاط $A(a, ۰)$ و $A'(-a, ۰)$ را رأسهای کانونی و نقاط $B(۰, b)$ و $B'(۰, -b)$ را رأسهای غیرکانونی بیضی می‌نامیم. هر بیضی مانند بیضی شکل ۵۲ دارای دو کانون به مختصات $S(ae, ۰)$ و $S'(-ae, ۰)$ و دو خط هادی به معادله‌های $x = \frac{a}{e}$ و $x = \frac{-a}{e}$ است. در بیضی همواره داریم $a > b$. پاره‌خط AA' به‌طول $۲a$ را قطر بزرگ بیضی و پاره‌خط BB' به‌طول $۲b$ را قطر کوچک بیضی می‌نامیم. هرگاه AA' موازی محور x باشد بیضی را افقی و اگر موازی محور y باشد، بیضی را قائم می‌نامیم. بنابراین معادلهٔ بیضیهای افقی و قائم چنین است:

بیضی افقی: $$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

بیضی قائم: $$\frac{y^۲}{a^۲} + \frac{x^۲}{b^۲} = ۱$$

محل برخورد دو قطر بیضی را مرکز بیضی می‌نامیم. دایره‌ای را که مرکز آن مرکز بیضی و قطرش AA' است، دایرهٔ اصلی بیضی می‌نامیم. هر پاره‌خطی که دو سر آن روی بیضی قرار داشته باشد و از یکی از کانونهای بیضی بگذرد، وتر بیضی، و هر پاره‌خطی که دو سر آن روی بیضی قرار داشته باشد و از مرکز بیضی بگذرد، قطر بیضی نام دارد. دایره‌ای را که مرکز آن مرکز بیضی و شعاعش $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است، دایرهٔ هادی بیضی می‌نامیم.

مثال حل شدهٔ ۲۳

در یک بیضی، خروج از مرکز برابر با $\frac{۲}{۳}$ است و $a=۵$. مقدار b را بیابید و سپس معادلهٔ بیضی را بنویسید.

حل.

$$b^۲ = a^۲(۱-e^۲) = ۵^۲\left[۱-\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲\right] = ۲۵\left(۱-\frac{۴}{۹}\right) = ۲۵\times\frac{۵}{۹}$$

$$\Longrightarrow b^۲ = \frac{۱۲۵}{۹},\ b = \pm\frac{۵}{۳}\sqrt{۵}$$

$$\Longrightarrow \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲} = ۱,\ \frac{x^۲}{۵^۲}+\frac{y^۲}{\frac{۱۲۵}{۹}} = ۱ \Longrightarrow ۵x^۲+۹y^۲ = ۱۲۵$$

مثال حل شدهٔ ۲۴

مختصات کانونها و معادلات خطهای هادی بیضی $۵x^۲+۹y^۲=۱۲۵$ را بیابید.

حل.

کانونها عبارت‌اند از $S(ae,۰)$ و $S'(-ae,۰)$. از طرفی $a=۵$ و $e=\frac{۲}{۳}$. بنابراین

$$S'\left(-\frac{۱۰}{۳},۰\right) \text{ و } S\left(\frac{۱۰}{۳},۰\right)$$

معادلات خطهای هادی عبارت‌اند از

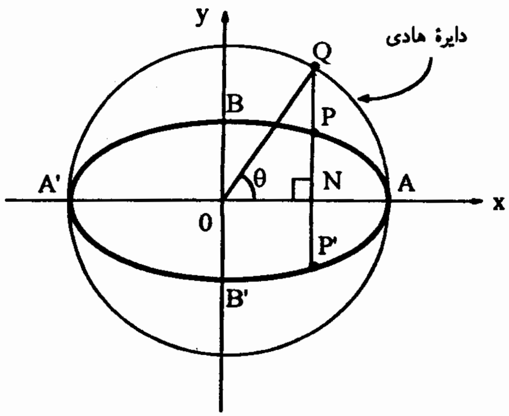
$$x = \frac{-a}{e} = \frac{-۵}{\frac{۲}{۳}} = \frac{-۱۵}{۲}\ ,\quad x = \frac{a}{e} = \frac{۵}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۱۵}{۲}$$

۴-۱ معادلهٔ پارامتری بیضی

به شکل ۵۳ توجه کنید. نقطهٔ P روی بیضی قرار دارد، امتداد PP' بر قطر کانونی AA' عمود است و دایرهٔ هادی بیضی را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. با توجه به اینکه $OQ=OA=a$، داریم

$$NO = a\cos\theta$$

$$NQ = a\sin\theta \Longrightarrow NP = \frac{b}{a}NQ = b\sin\theta$$



شکل۵۳

بنابراین مختصات نقاط Q و P به‌ترتیب $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ و $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ هستند. در نتیجه معادلهٔ پارامتری بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{aligned} \qquad (a > b > ۰)$$

مثال حل شدهٔ ۲۵

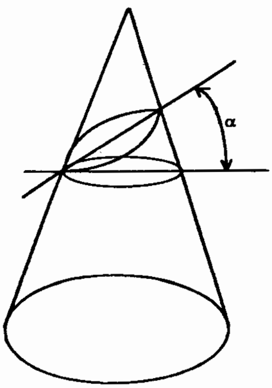
مطابق شکل ۵۴، اگر α زاویهٔ بین بیضی و دایره باشد، مساحت بیضی را بیابید.

حل.

$$\cos\alpha = \frac{\text{مساحت بیضی}}{\text{مساحت دایره}} = \frac{\text{مساحت بیضی}}{\pi a^۲}$$

از طرفی $\cos\alpha = \frac{b}{a}$. بنابراین

$$\text{مساحت بیضی} = \pi a^۲ \frac{b}{a} = \pi ab$$



شکل۵۴

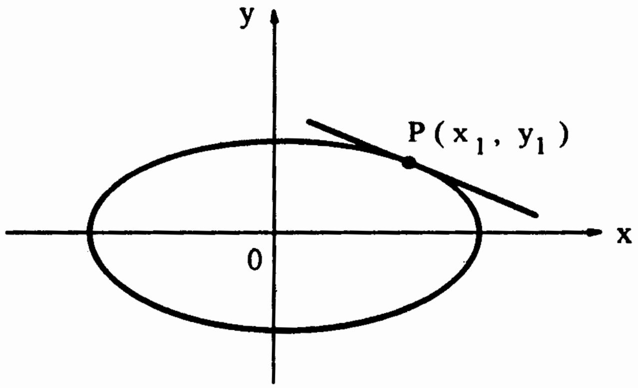
۴-۲ معادلهٔ مماس بر بیضی

برای یافتن معادلهٔ مماس بر بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ در نقطهٔ $P(x_1,y_1)$ توجه کنید که شیب مماس در این نقطه برابر است با $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$. بنابراین خط مماس خطی است به معادلهٔ $y=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}x+c$ که از نقطهٔ $P(x_1,y_1)$ می‌گذرد. در نتیجه مختصات P باید در این معادله صدق کند (شکل ۵۵):

$$y_1=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}x_1+c \Longrightarrow c=\frac{y_1^2a^2+b^2x_1^2}{a^2y_1} \Longrightarrow y=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}x+\frac{y_1^2a^2+b^2x_1^2}{a^2y_1}$$

$$ya^2y_1+b^2x_1x=y_1^2a^2+b^2x_1^2 \Longrightarrow \frac{yy_1a^2}{a^2b^2}+\frac{xx_1b^2}{a^2b^2}=\frac{y_1^2a^2}{a^2b^2}+\frac{b^2x_1^2}{a^2b^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{yy_1}{b^2}+\frac{xx_1}{a^2}=\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{a^2}=1 \Longrightarrow \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$



شکل۵۵

اکنون فرض کنید معادلات پارامتری بیضی، یعنی $x=a\cos\theta$ و $y=b\sin\theta$ در دست باشد. می‌خواهیم معادلهٔ خط مماس بر بیضی در نقطهٔ $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$ را بیابیم. در این‌صورت $\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$ و $\frac{dy}{d\theta}=b\cos\theta$. در نتیجه

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}=-\frac{b}{a}\cot\theta$$

این شیب خط مماس است. بنابراین معادلهٔ مماس به‌شکل $y=\frac{-b}{a}\cot\theta\, x+c$ است که از نقطهٔ P می‌گذرد. بنابراین

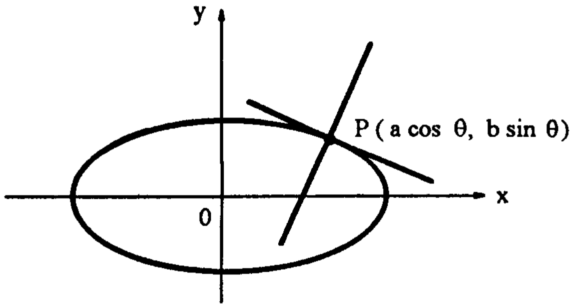
$$b\sin\theta=-\frac{b}{a}\cot\theta(a\cos\theta)+c$$
$$\Longrightarrow c=b\sin\theta+b\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=\frac{b(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin\theta}$$

$$\Longrightarrow c=\frac{b}{\sin\theta}\ \Longrightarrow y=\frac{-b}{a}\cot\theta\, x+\frac{b}{\sin\theta}$$
$$\Longrightarrow ay\sin\theta+bx\cos\theta=ab$$

۳-۴ معادلهٔ خط قائم بر بیضی

از آنجا که شیب مماس در هر نقطه از بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ برابر است با $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$ و با توجه به رابطهٔ $m_1m_2=-1$، نتیجه می‌گیریم که شیب خط قائم برابر است با $\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y}{x}$. بنابراین $\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta}=\frac{a}{b}\tan\theta$. در نتیجه خط قائم خطی است به‌شکل $y=\frac{a}{b}\tan\theta\, x+c$ که از نقطهٔ $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ می‌گذرد (شکل ۵۶). بنابراین

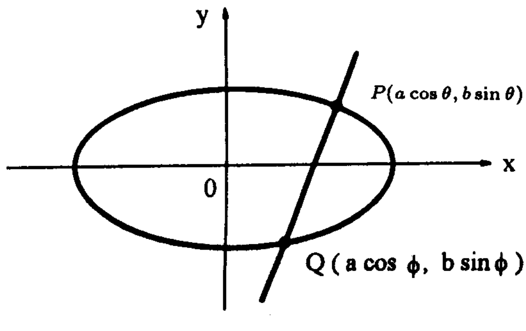
$$b\sin\theta=\frac{a}{b}\tan\theta\cdot a\cos\theta+c\ \Longrightarrow c=\frac{b^2\sin\theta-a^2\sin\theta}{b}=\frac{\sin\theta}{b}(b^2-a^2)$$
$$y=\frac{a}{b}x\tan\theta+\frac{\sin\theta}{b}(b^2-a^2)\ \Longrightarrow yb=ax\tan\theta+\sin\theta(b^2-a^2)$$
$$\Longrightarrow yb\cos\theta=ax\sin\theta+\sin\theta\cos\theta(b^2-a^2)$$



شکل۵۶

۴-۴ معادلهٔ وتر بیضی

به‌شکل ۵۷ توجه کنید.



شکل۵۷

شیب خط PQ برابر است با

$$m = \frac{b\sin\theta - b\sin\phi}{a\cos\theta - a\cos\phi} = \frac{b}{a}\cdot\frac{(\sin\theta - \sin\phi)}{(\cos\theta - \cos\phi)} = \frac{۲\cos\frac{\theta+\phi}{۲}\sin\frac{\theta-\phi}{۲}}{-۲\sin\frac{\theta+\phi}{۲}\sin\frac{\theta-\phi}{۲}}\cdot\frac{b}{a}$$
$$= -\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\theta+\phi}{۲}}{\sin\frac{\theta+\phi}{۲}}$$

بنابراین معادلهٔ وتر PQ به‌شکل زیر است:

$$y = -\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\theta+\phi}{۲}}{\sin\frac{\theta+\phi}{۲}}x + c$$

این خط باید از P و Q بگذرد؛ بنابراین

$$b\sin\theta = -\frac{b}{a}\frac{\cos\frac{\theta+\phi}{۲}}{\sin\frac{\theta+\phi}{۲}}a\cos\theta + c$$
$$\Longrightarrow c = \frac{۱}{\sin\frac{\theta+\phi}{۲}}\left(b\sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{۲} + b\cos\frac{\theta+\phi}{۲}\cos\theta\right)$$
$$\Longrightarrow y = -\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\frac{\theta+\phi}{۲}}{\sin\frac{\theta+\phi}{۲}}x + \left(b\sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{۲} + b\cos\frac{\theta+\phi}{۲}\cos\theta\right)\frac{a}{a\sin\frac{\theta+\phi}{۲}}$$

پس معادلهٔ وتر PQ عبارت است از

$$bx\cos\frac{\theta+\phi}{۲} + ay\sin\frac{\theta+\phi}{۲} - ab\cos\frac{\theta-\phi}{۲} = ۰$$

که در آن از برابری زیر استفاده کرده‌ایم:

$$ab\cos\frac{\theta+\phi}{۲}\cos\theta + ab\sin\frac{\theta+\phi}{۲}\sin\theta = ab\cos\left(\frac{\theta+\phi}{۲} - \theta\right) = ab\cos\frac{\phi-\theta}{۲}$$

توجه کنید که اگر $\phi \to \theta$، معادلهٔ وتر PQ به معادلهٔ مماس در نقطهٔ P تبدیل می‌شود.

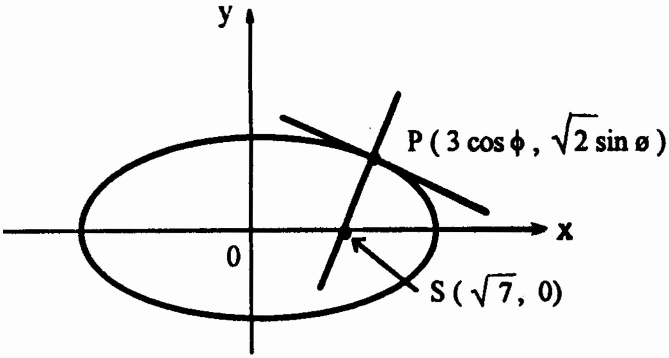
مثال حل شدهٔ ۲۶

معادلهٔ خط عمود بر بیضی را در نقطهٔ $P(۳\cos\phi, \sqrt{۲}\sin\phi)$ به‌دست آورید. اگر خط قائم از کانون $S(\sqrt{۷}, ۰)$ بگذرد، نشان دهید که $\cos\phi = \frac{۳}{\sqrt{۷}}$.

حل.

با توجه به شکل ۵۸ داریم

$$x = ۳\cos\phi \Longrightarrow \frac{dx}{d\phi} = -۳\sin\phi$$
$$y = \sqrt{۲}\sin\phi \Longrightarrow \frac{dy}{d\phi} = \sqrt{۲}\cos\phi$$



شکل۵۸

همچنین $a = ۳$ و $b = \sqrt{۲}$. بنابراین

$$ae = \sqrt{۷} \implies e = \frac{\sqrt{۷}}{۳}$$

توجه کنید که شیب مماس برابر است با $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{۲}}{۳}\cot\phi$ و شیب قائم برابر است با $\frac{۳}{\sqrt{۲}}\tan\phi$. پس معادلهٔ خط قائم به‌شکل زیر است:

$$y = \frac{۳}{\sqrt{۲}}(\tan\phi)x + c \implies \sqrt{۲}\sin\phi = \frac{۳}{\sqrt{۲}}\tan\phi(۳\cos\phi) + c$$

$$\implies c = \sqrt{۲}\sin\phi - \frac{۹}{\sqrt{۲}}\sin\phi$$

$$\implies y = \frac{۳}{\sqrt{۲}}(\tan\phi)x + \left(\sqrt{۲} - \frac{۹}{\sqrt{۲}}\right)\sin\phi$$

$$\implies \sqrt{۲}y = ۳(\tan\phi)x + (۲ - ۹)\sin\phi$$

با توجه به اینکه $x = \sqrt{۷}$ و $y = ۰$، داریم

$$۰ = ۳(\tan\phi)\sqrt{۷} - ۷\sin\phi \implies ۳\sqrt{۷}\tan\phi = ۷\sin\phi$$

$$\implies ۳\sqrt{۷} = ۷\cos\phi \implies \cos\phi = \frac{۳\sqrt{۷}}{۷} \times \frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۷}} = \frac{۳}{\sqrt{۷}}$$

تمرین ۴

۱. اگر $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ نقطهٔ دلخواهی روی بیضی $b^۲x^۲ + a^۲y^۲ = a^۲b^۲$ باشد،

الف) تحقیق کنید که مختصات این نقطه در معادلهٔ بیضی صدق می‌کند.

ب) معادلهٔ مماس بر بیضی را در این نقطه به‌دست آورید.

ج) معادلهٔ خط قائم را در این نقطه به‌دست آورید.

د) معادلهٔ خطی را بیابید که از مرکز بیضی می‌گذرد و با خط مماس در (ب) موازی است.

هـ) معادلهٔ خطی را بیابید که از مرکز بیضی می‌گذرد و با خط قائم در (ج) موازی است.

۲. معادلهٔ مماسهایی را که از نقطهٔ (x_1, y_1) بر بیضی $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ رسم می‌شوند، بنویسید.

۳. مختصات نقطهٔ برخورد مماسهای رسم شده بر بیضی $16x^2 + 9y^2 = 144$ را در نقاط $P(3\cos\alpha, 4\sin\alpha)$ و $Q(3\cos\beta, 4\sin\beta)$ بیابید.

۴. ثابت کنید در صورتی که $m = \pm 1$، خط $y = mx + 5$ بر بیضی به معادلهٔ $9x^2 + 16y^2 = 144$ مماس است.

۵. معادلهٔ مماسهایی را که از نقطهٔ $P(6, 8)$ بر بیضی به معادلهٔ $9x^2 + 25y^2 = 225$ رسم می‌شوند، بنویسید.

۶. بیضیهایی به معادلات زیر مفروض‌اند:

یک) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ دو) $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$

سه) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ چهار) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

پنج) $4x^2 + 8y^2 = 32$

الف) مختصات کانونهای آنها را بیابید.

ب) خروج از مرکز آنها را به‌دست آورید.

ج) معادلهٔ خطهای هادی آنها را بنویسید.

۷. کانونها و خطهای هادی بیضیهای زیر را بیابید.

الف) $8x^2 + 12y^2 = 96$ ب) $2x^2 + 16y^2 = 32$

ج) $4x^2 + y^2 = 4$

۸. معادلهٔ مماس بر هر یک از منحنیهای زیر را در نقطهٔ مفروض بیابید.

الف) $5x^2 + y^2 = 25$ در $(2, \sqrt{5})$ ب) $x^2 + 4y^2 = 8$ در $(-2, 1)$

۹. خط متغیری که قائم بر یک بیضی است محورها را در نقاط P و Q قطع می‌کند. مکان هندسی وسط PQ را بیابید.

۱۰. ثابت کنید که دو مماس عمود برهم بر بیضی یکدیگر را روی دایرهٔ هادی بیضی قطع می‌کنند. چه تفاوتی بین دایرهٔ اصلی و دایرهٔ هادی بیضی وجود دارد؟

۱۱. معادلهٔ خطی به شیب m را بیابید که از کانون بیضی $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ به مختصات $(-ae, 0)$ می‌گذرد.

۱۲. معادلهٔ مماس بر بیضی به معادلهٔ $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ در نقطهٔ (x_1, y_1) را بیابید.

۱۳. خط راستی به معادلهٔ $y = mx + c$، بیضی به معادلهٔ $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ را در نقاط $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ و $Q(a\cos\phi, b\sin\phi)$ قطع می‌کند. نشان دهید که $m = \frac{-b}{a}\cot\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$.
اگر $M(x, y)$ مختصات وسط پاره‌خط PQ باشد، عبارت $x^2 + y^2$ را برحسب a، b، θ و ϕ بیان کنید.

۱۴. خط $x+6=2y$ بیضی به معادلهٔ $25x^2+36y^2=900$ را قطع می‌کند. نشان دهید که طولهای نقاط تقاطع ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $17x^2+54x-288=0$ هستند.

۱۵. معادلهٔ مماس و قائم بر منحنیهای مفروض را در نقاط داده شده بیابید:

الف) $8x^2+12{,}5y^2=52$ در $(2,-2)$

ب) $9x^2+2y^2=54$ در $(-2,3)$

ج) $9x^2+4y^2=100$ در $(2,4)$

د) $3x^2+y^2=12$ در $(-1,3)$

ه) $9x^2+2y^2=9$ در $\left(\frac{1}{3},2\right)$

۱۶. ثابت کنید که خط $x+y=2$ بر بیضی به معادلهٔ $3x^2+y^2=12$ عمود است. مختصات نقاط تقاطع این خط با بیضی و نیز معادلهٔ دیگر خطهای قائم بر آن را بیابید.

۱۷. مختصات نقاط تماس مماسهای رسم شده بر بیضی به معادلهٔ $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ را که موازی با خط $y=-x$ هستند، بیابید (فرض کنید $a=3$ و $b=4$).

۱۸. معادلهٔ خطهای مماس بر بیضی به معادلهٔ $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ را که موازی با خط $3x+y+1=0$ هستند، بیابید (فرض کنید $a=9$ و $b=4$).

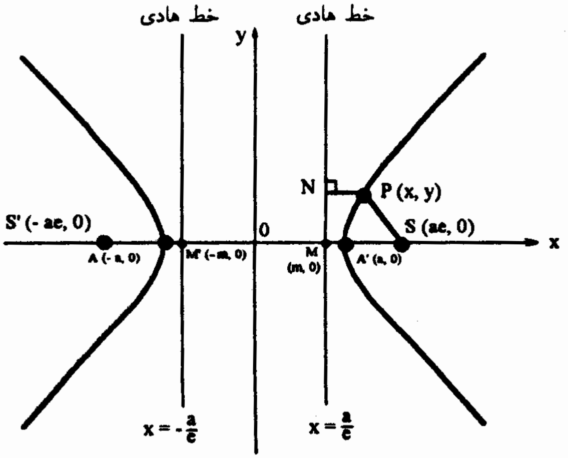
۱۹. معادلهٔ وتری از بیضی به معادلهٔ $9x^2+4y^2=36$ را تعیین کنید که از نقاط $P(2\cos\alpha,3\sin\alpha)$ و $Q(2\cos\beta,3\sin\beta)$ می‌گذرد.

۲۰. معادله‌های مماسهایی را که از نقطهٔ $T(-1,3)$ می‌گذرند و بر بیضی به معادلهٔ $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{22}=1$ مماس هستند تعیین کنید و مختصات نقاط تماس را بیابید.

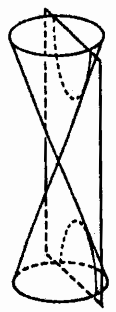
۵

هذلولی

هرگاه صفحه‌ای به موازات محور یک مخروط دوار آن‌را قطع کند، مقطع حاصل شکلی است که هذلولی نامیده می‌شود (شکل ۵۹ را ببینید). از نظر هندسی، هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که تفاضل فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ ثابت به‌نام کانونهای هذلولی برابر با مقدار ثابتی است. همچنین می‌توانیم هذلولی را به‌عنوان مکان هندسی نقاطی از صفحه تصور کنیم که نسبت فاصله‌های آنها از خطی به‌نام خط هادی و نقطه‌ای به‌نام کانون، برابر با عدد ثابتی بزرگتر از ۱ به‌نام خروج از مرکز هذلولی است (شکل ۶۰ را ببینید). خروج از مرکز هذلولی را با e نشان می‌دهیم. با توجه به شکل ۶۰ داریم $\frac{SP}{PN} = e$.



شکل ۶۰



شکل ۵۹

با توجه به شکل ۶۰ داریم

$$SA = eAM \Rightarrow s - a = e(a - m) \qquad (1)$$

$$SA' = eAM' \Rightarrow s + a = e(a + m) \qquad (2)$$

معادله‌های (۱) و (۲) را باهم جمع می‌کنیم:

$$2s = 2ea \Rightarrow s = ae$$

معادلهٔ (۱) را از (۲) کم می‌کنیم:

$$2a = 2em \Rightarrow m = \frac{a}{e}$$

بنابراین مختصات کانونها عبارت‌اند از $(ae,0)$ و $(-ae,0)$ و معادله‌های خطهای هادی $x = \frac{a}{e}$ و $x = \frac{-a}{e}$ هستند. داریم

$$\frac{SP}{PN} = e \Rightarrow \frac{(SP)^2}{(PN)^2} = e^2$$

از طرفی

$$(PN)^2 = \left(x - \frac{a}{e}\right)^2 \quad , \quad (SP)^2 = y^2 + (ae - x)^2$$

بنابراین

$$y^2 + (ae - x)^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

$$y^2 + a^2e^2 - 2aex + x^2 = e^2x^2 - 2axe + a^2$$

$$y^2 - e^2x^2 + x^2 = -a^2e^2 + a^2$$

$$y^2 - x^2(e^2 - 1) = a^2(1 - e^2)$$

$$\frac{y^2}{a^2(1-e^2)} - \frac{x^2(e^2-1)}{a^2(1-e^2)} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$$

قرار می‌دهیم $b^2 = a^2(e^2 - 1)$؛ در نتیجه معادلهٔ هذلولی به‌شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

این معادله را معادلهٔ دکارتی هذلولی می‌نامیم.

در شکل ۶۰، نقاط $A(a,0)$ و $A'(-a,0)$ را رأسهای هذلولی، و $O(0,0)$ را مرکز هذلولی می‌نامیم. خطی که از دوکانون هذلولی می‌گذرد محور کانونی هذلولی نامیده می‌شود. هرگاه محور کانونی هذلولی موازی محور x باشد، هذلولی را افقی و اگر موازی محور y باشد، هذلولی را قائم می‌نامیم. معادله‌های

هذلولیهای افقی و قائم عبارت‌اند از:

هذلولی افقی: $\dfrac{x^۲}{a^۲} - \dfrac{y^۲}{b^۲} = ۱$

هذلولی قائم: $\dfrac{y^۲}{a^۲} - \dfrac{x^۲}{b^۲} = ۱$

۱-۵ معادلات پارامتری هذلولی

معادلات پارامتری هذلولی افقی عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \end{cases}$$

توجه کنید که

$$\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = \frac{a^۲\sec^۲\theta}{a^۲} - \frac{b^۲\tan^۲\theta}{b^۲} = \sec^۲\theta - \tan^۲\theta = ۱$$

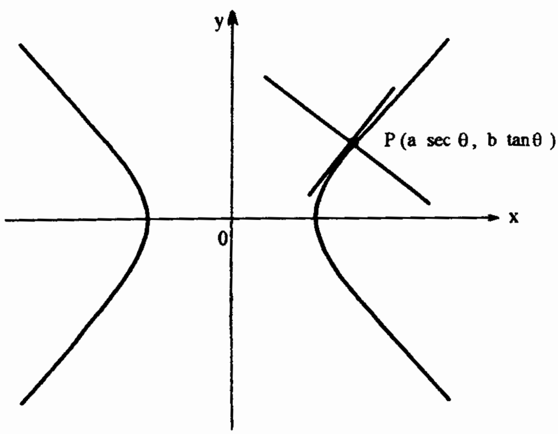
۲-۵ معادلهٔ مماس بر هذلولی

به شکل ۶۱ توجه کنید. با توجه به این شکل داریم

$$x = a\sec\theta \ \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta$$

$$y = b\tan\theta \ \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = b\sec^۲\theta \Rightarrow \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{dy}{dx} = \frac{b\sec^۲\theta}{a\sec\theta\tan\theta} = \frac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$$

این شیب مماس در نقطهٔ $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$ بر هذلولی است. معادلهٔ خط مماس در این ؛



شکل۶۱

$y = \frac{b}{a}x \operatorname{cosec}\theta + c$ است که از نقطهٔ P نیز می‌گذرد. پس مختصات نقطهٔ P در آن صدق می‌کند:

$$b\tan\theta = \frac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta a\sec\theta + c \Rightarrow c = b\tan\theta - b\operatorname{cosec}\theta\sec\theta$$

$$\Rightarrow y = \frac{b}{a}(\operatorname{cosec}\theta)x + b(\tan\theta - \operatorname{cosec}\theta\sec\theta)$$

دو طرف را در $a\sin\theta$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow ay\sin\theta = bx + ab\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \sec\theta\right)$$

$$\Rightarrow ay\sin\theta = bx + ab\left(\frac{\sin^2\theta - 1}{\cos\theta}\right) = bx + ab(-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow bx - ay\sin\theta - ab\cos\theta = 0$$

۳-۵ معادلهٔ خط قائم بر هذلولی

شیب خط قائم بر هذلولی در نقطهٔ $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$ برابر است با $\frac{-a}{b}\sin\theta$ و در نتیجه معادلهٔ قائم به شکل $y = \frac{-a}{b}(\sin\theta)x + c$ است و چون خط قائم از نقطهٔ P می‌گذرد، داریم

$$b\tan\theta = -\frac{a}{b}(\sin\theta)a\sec\theta + c \ \Rightarrow c = \left(b\tan\theta + \frac{a^2}{b}\sin\theta\sec\theta\right)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{b}(\sin\theta)x + b\tan\theta + \frac{a^2}{b}\sin\theta\sec\theta$$

$$\Rightarrow yb = -a(\sin\theta)x + b^2\tan\theta + a^2\sin\theta\sec\theta$$

$$\Rightarrow ax\sin\theta + yb - (a^2 + b^2)\tan\theta = 0$$

۴-۵ مجانبهای هذلولی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

برای یافتن معادلهٔ مجانبهای هذلولی $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$، نخست شرایطی را تعیین می‌کنیم که خط $y = mx + c$ بر هذلولی مماس شود:

$$b^2x^2 - a^2(mx + c)^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow b^2x^2 - a^2m^2x^2 - a^2c^2 - 2mxca^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(b^2 - a^2m^2) - 2mca^2x - (a^2c^2 + a^2b^2) = 0 \qquad (1)$$

خط $y = mx + c$ هنگامی بر هذلولی مماس است که مبین معادلهٔ درجهٔ دوم صفر باشد. پس

$$D = b^2 - 4ac = (-2mca^2)^2 + 4(a^2c^2 + a^2b^2)(b^2 - a^2m^2) = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2c^2a^4 + 4a^2c^2b^2 + 4a^2b^4 - 4a^4c^2m^2 - 4a^4b^2m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4a^2b^2(c^2 + b^2 - a^2m^2) = 0 \Rightarrow c^2 = a^2m^2 - b^2$$

اگر در معادلهٔ (۱) قرار دهیم $D = 0$، آنگاه

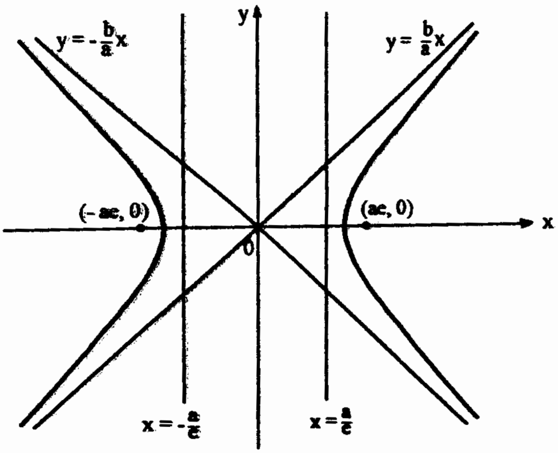
$$x = \frac{2a^2cm}{4(b^2 - a^2m^2)} = \frac{a^2cm}{b^2 - a^2m^2}$$

ولی $c = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$ و در نتیجه

$$x = \frac{a^2m}{-c} \Rightarrow x = \pm\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}$$

هرگاه $m \to \pm\frac{b}{a}$، آنگاه $c \to 0$ و در نتیجه $x \to \pm\infty$. بنابراین معادله‌های مجانبهای هذلولی عبارت‌اند از (شکل ۶۲)

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$



شکل۶۲

مثال حل شدهٔ ۲۷

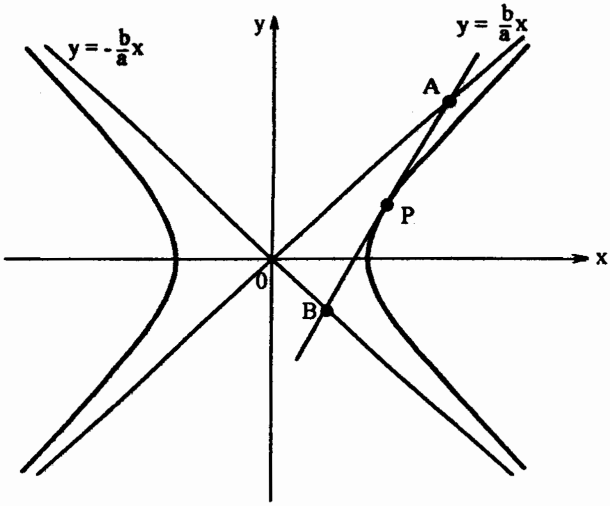
خط مماس در نقطهٔ $P\left[\frac{a}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right) \ , \ \frac{b}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)\right]$ بر هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$، مجانبهای هذلولی را در نقاط A و B قطع می‌کند (شکل ۶۳ را ببینید). مکان هندسی وسط پاره‌خط AB را بیابید.

حل.

داریم

$$x = \frac{a}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right) \ , \quad y = \frac{b}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a^2}{4}\left(p+\frac{1}{p}\right)^2}{a^2} - \frac{\frac{b^2}{4}\left(p-\frac{1}{p}\right)^2}{b^2} = \frac{1}{4}\left(p^2+2+\frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{4}\left(p^2-2+\frac{1}{p^2}\right) = 1$$



شکل۶۳

بنابراین $\left[\frac{a}{۲}\left(p+\frac{۱}{p}\right), \frac{b}{۲}\left(p-\frac{۱}{p}\right)\right]$ معادلات پارامتری هذلولی است. معادلهٔ مماس در P عبارت است از $\frac{xx_۱}{a^۲}-\frac{yy_۱}{b^۲}=۱$. در نتیجه

$$\frac{x\frac{a}{۲}\left(p+\frac{۱}{p}\right)}{a^۲}-\frac{y\frac{b}{۲}\left(p-\frac{۱}{p}\right)}{b^۲}=۱ \Rightarrow \frac{x(p^۲+۱)}{a}-\frac{y(p^۲-۱)}{b}=۲p$$

این خط، $y=\frac{b}{a}x$ را در A و $y=-\frac{b}{a}x$ را در B قطع می‌کند. داریم

$$\frac{x(p^۲+۱)}{a}-\frac{b}{a}x\frac{(p^۲-۱)}{b}=۲p \Rightarrow xp^۲+x-xp^۲+x=۲ap \Rightarrow x=ap$$

$$y=\frac{b}{a}ap=bp \Rightarrow y=bp$$

پس مختصات A عبارت است از (ap,bp). همچنین داریم

$$\frac{x(p^۲+۱)}{a}+\frac{b}{a}x\frac{(p^۲-۱)}{b}=۲p$$

$$\Rightarrow xp^۲+x+xp^۲-x=۲ap \Rightarrow ۲xp^۲=۲ap \Rightarrow x=\frac{a}{p}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{b}{a}x=-\frac{b}{a}\times\frac{a}{p}=-\frac{b}{p} \Rightarrow y=-\frac{b}{p}$$

پس $B\left(\frac{a}{p},-\frac{b}{p}\right)$. وسط پاره‌خط نقطه‌ای است به مختصات $\left[\frac{۱}{۲}\left(ap+\frac{a}{p}\right), \frac{۱}{۲}\left(bp-\frac{b}{p}\right)\right]$ که همان مختصات نقاط واقع بر هذلولی است. بنابراین مکان هندسی وسط پاره‌خط AB هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ است.

مثال حل شدهٔ ۲۸

هر یک از موارد زیر را برای هذلولیهای داده شده، به‌دست آورید:

یک) مختصات کانونها　　　دو) مختصات رأسها

سه) معادلات مجانبها　　　چهار) خروج از مرکز

سپس آنها را رسم کنید.

الف) $\frac{x^۲}{۲۵}-\frac{y^۲}{۱۶}=۱$　　ب) $\frac{x^۲}{۳}-\frac{y^۲}{۲}=۱$　　ج) $\frac{y^۲}{۴}-\frac{x^۲}{۳}=۱$

د) $\frac{y^۲}{۲}-\frac{x^۲}{۱}=۱$　　هـ) $x^۲-y^۲=۱$　　و) $y^۲-x^۲=۱$

ز) $x^۲-y^۲=۴$　　ح) $\frac{x^۲}{۴^۲}-\frac{y^۲}{۲^۲}=۱$　　ط) $\frac{y^۲}{\left(\frac{۵}{۳}\right)^۲}-\frac{x^۲}{\left(\frac{۵}{۴}\right)^۲}=۱$

حل.

الف) از معادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ نتیجه می‌شود $a^۲=۲۵$ و $b^۲=۱۶$. بنابراین $a=۵$ و $b=۴$.

یک) $b^۲=a^۲e^۲-a^۲ \Rightarrow a^۲e^۲=b^۲+a^۲=۱۶+۲۵=۴۱$

$$\Rightarrow ae=\pm\sqrt{۴۱}\Rightarrow S'(-\sqrt{۴۱},۰), S(\sqrt{۴۱},۰)$$

دو) $A(۵,۰),\ A'(-۵,۰)$

سه) $y=\pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y=\pm\frac{۴}{۵}x\Rightarrow y=\frac{۴}{۵}x,\ y=-\frac{۴}{۵}x$

چهار) $e=\pm\frac{\sqrt{۴۱}}{۵}$

ب) یک) $a=\sqrt{۳},\ b=\sqrt{۲} \Rightarrow (ae)^۲=b^۲+a^۲=۲+۳=۵\Rightarrow ae=\pm\sqrt{۵}$

$$\Rightarrow S'(-\sqrt{۵},۰),\ S(\sqrt{۵},۰)$$

دو) $A(\sqrt{۳},۰),\ A'(-\sqrt{۳},۰)$

سه) $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}x$

چهار) $e=\pm\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}}$

ج) هذلولی $\frac{y^۲}{۴}-\frac{x^۲}{۳}=۱$ قائم است و در نتیجه $a=۲$ و $b=\sqrt{۳}$.

یک) $b^۲=a^۲(e^۲-۱)\Rightarrow ۳=۴(e^۲-۱)\Rightarrow ۳=۴(e^۲-۱)\Rightarrow e^۲=\frac{۷}{۴}$

$$\Rightarrow e=\pm\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

کانونها عبارت‌اند از $\left(۰,\frac{۲\sqrt{۷}}{۲}\right)$ و $\left(۰,-\frac{۲\sqrt{۷}}{۲}\right)$.

دو) رأسها عبارت‌اند از $(۰,۲)$ و $(۰,-۲)$.

سه) $y = \frac{2x}{\sqrt{3}}$ و $y = -\frac{2x}{\sqrt{3}}$.

چهار) $e = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

د) یک) $(0, \pm\sqrt{3})$ دو) $(0, \pm\sqrt{2})$ سه) $y = \pm\sqrt{2}x$ چهار) $e = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

هـ) یک) $(\pm\sqrt{2}, 0)$ دو) $(\pm 1, 0)$ سه) $y = \pm x$ چهار) $e = \pm\sqrt{2}$

و) هذلولی $y^2 - x^2 = 1$ قائم است و داریم $a = 1$، $b = 1$.

یک) $b^2 = a^2(e^2 - 1) = e^2 - 1 = 1 \Rightarrow e = \pm\sqrt{2}$

پس کانونها عبارت‌اند از $(0, \sqrt{2})$ و $(0, -\sqrt{2})$.

دو) رأسها عبارت‌اند از $(0, 1)$ و $(0, -1)$.

سه) $y = x$ و $y = -x$.

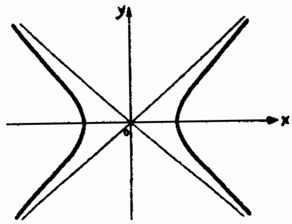
چهار) $e = \pm\sqrt{2}$.

ز) یک) $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ دو) $(\pm 2, 0)$ سه) $y = \pm x$ چهار) $e = \pm\sqrt{2}$

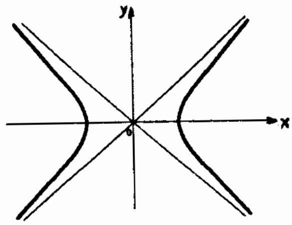
ح) یک) $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$ دو) $(\pm 4, 0)$ سه) $y = \pm\frac{x}{2}$ چهار) $e = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

ط) یک) $\left(0, \pm\frac{25}{12}\right)$ دو) $\left(0, \pm\frac{5}{3}\right)$ سه) $y = \pm\frac{4}{3}x$ چهار) $e = \pm\frac{5}{4}$

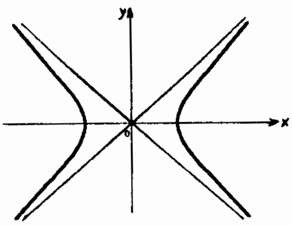
هذلولیهای (الف) تا (ط) به‌ترتیب در شکلهای ۶۴ تا ۷۲ رسم شده‌اند.



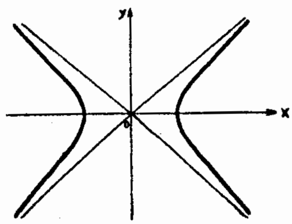
شکل ۶۴



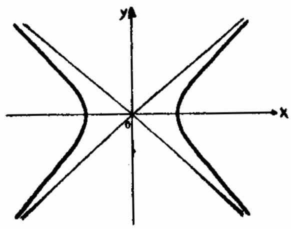
شکل ۶۵



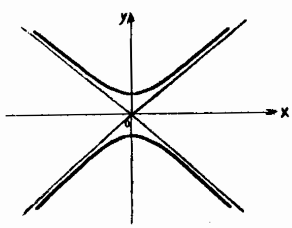
شکل ۶۶



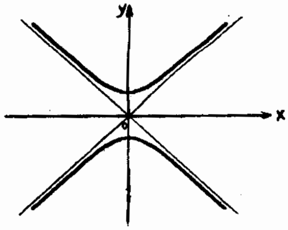
شکل ۶۷



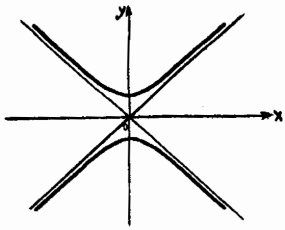
شکل ۶۸



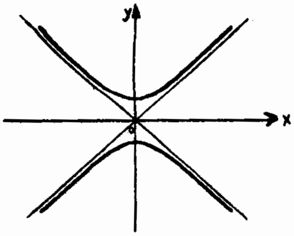
شکل ۶۹



شکل ۷۰



شکل ۷۱



شکل ۷۲

۵-۵ هذلولی متساوی‌الساقین

هرگاه در یک هذلولی مجانبها برهم عمود باشند، هذلولی را متساوی‌الساقین می‌نامیم. مجانبهای هذلولی وقتی برهم عمودند که داشته باشیم $m_۱m_۲ = -۱$، یعنی حاصلضرب شیبهایشان برابر با ۱− باشد. داریم

$$m_۱m_۲ = \left(\frac{-b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = -۱ \Rightarrow b^۲ = a^۲ \Rightarrow x^۲ - y^۲ = a^۲$$

مجانبهای این هذلولی عبارت‌اند از

$$y = x \quad , \quad y = -x$$

خروج از مرکز این هذلولی به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$a^۲ = a^۲(e^۲ - ۱) \Rightarrow ۱ = e^۲ - ۱ \Rightarrow e^۲ = ۲ \Rightarrow e = \pm\sqrt{۲}$$

مثال حل شدهٔ ۲۹

خروج از مرکز، معادلات مجانبها وکانونهای هر یک از هذلولیهای زیر را بیابید.

الف) $b^۲x^۲ - a^۲y^۲ = a^۲b^۲$ ب) $x^۲ - ۳y^۲ = ۹$

ج) $x^۲ - y^۲ = ۱۶$

حل.

الف) $b^۲ = a^۲(e^۲ - ۱) \Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} + ۱ = e^۲ \Rightarrow e = \pm\frac{\sqrt{b^۲ + a^۲}}{a}$

پس مجانبها عبارت‌اند از $y = \frac{b}{a}x$ و $y = -\frac{b}{a}x$. کانونهای این هذلولی نقاط $(\pm\sqrt{a^۲ + b^۲}, ۰)$ هستند.

ب) $$\frac{x^۲}{۳^۲} - \frac{y^۲}{(\sqrt{۳})^۲} = ۱ \Rightarrow a = ۳,\ b = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow b^۲ = a^۲(e^۲ - ۱) \Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} = e^۲ - ۱ \Rightarrow \frac{b^۲ + a^۲}{a^۲} = e^۲$$

$$\Rightarrow e = \pm\sqrt{\frac{۳ + ۹}{۹}} = \pm\sqrt{\frac{۴}{۳}} = \pm\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

مجانبها عبارت‌اند از $y = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}x$ وکانونها نقاط $(\pm ۲\sqrt{۳}, ۰) = \left(\pm ۳\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right), ۰\right)$ هستند.

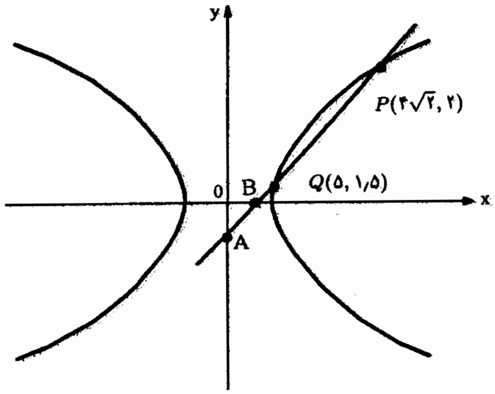
ج) $a^۲ = a^۲(e^۲ - ۱) \Rightarrow e^۲ = ۲ \Rightarrow e = \pm\sqrt{۲}$

مجانبها عبارت‌اند از $y = \pm x$ و کانونها نقاط $(\pm۴\sqrt{۲}, ۰)$ هستند.

مثال حل شدهٔ ۳۰

معادلهٔ وتری از هذلولی $x^۲ - ۴y^۲ = ۱۶$ را بیابید که نقاط $P(۴\sqrt{۲}, ۲)$ و $Q(۵, ۱/۵)$ را به‌هم وصل می‌کند. مختصات نقطهٔ برخورد خط PQ با محورها را بیابید.

حل.



شکل۷۳

با توجه به شکل ۷۳ داریم

$$\frac{۲ - ۱/۵}{۴\sqrt{۲} - ۵} = \frac{y - ۱/۵}{x - ۵} \Rightarrow ۰/۵(x - ۵) = (۴\sqrt{۲} - ۵)(y - ۱/۵)$$

اگر $x = ۰$ داریم

$$-۲/۵ = (۴\sqrt{۲} - ۵)(y - ۱/۵) = ۴\sqrt{۲}y - ۱/۵ \times ۴\sqrt{۲} - ۵y + ۷/۵$$

$$\Rightarrow y(۵ - ۴\sqrt{۲}) = ۱۰ - ۶\sqrt{۲} \Rightarrow y = \frac{۱۰ - ۶\sqrt{۲}}{۵ - ۴\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow y = -۲/۳۱ \Rightarrow A(۰, -۲/۳۱)$$

اگر $y = ۰$، داریم

$$۰/۵x - ۲/۵ = (۴\sqrt{۲} - ۵)(-۱/۵) = -۶\sqrt{۲} + ۷/۵$$

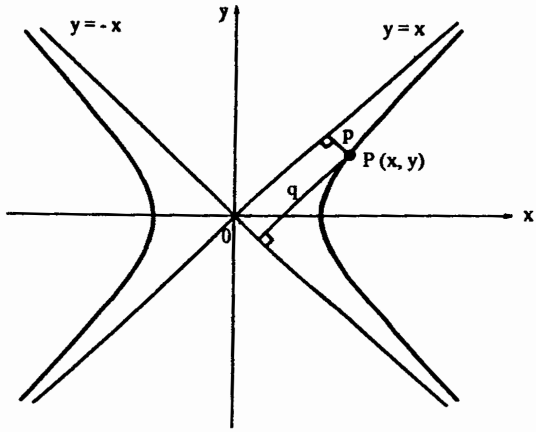
$$\Rightarrow ۰/۵x = -۶\sqrt{۲} + ۱۰ \Rightarrow x = -۱۲\sqrt{۲} + ۲۰$$

$$\Rightarrow x = ۳/۰۳ \Rightarrow B = (۳/۰۳, ۰)$$

معادلهٔ هذلولی متساوی‌الساقین

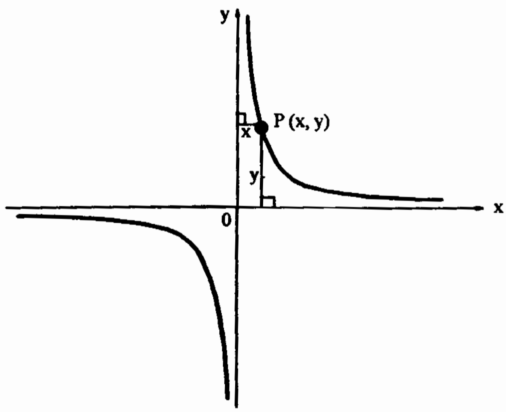
به شکل ۷۴ توجه کنید. فرض کنید p و q به‌ترتیب فاصلهٔ قائم نقطهٔ $P(x,y)$ واقع بر هذلولی از دو خط $y=x$ و $y=-x$ باشد. با استفاده از فرمول $p=\pm\frac{ax_۱+by_۱+c}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ مربوط به محاسبهٔ فاصلهٔ قائم نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ از خط $ax+by+c=۰$، به‌دست می‌آوریم

$$p=\pm\frac{x-y}{\sqrt{۲}}\ ,\quad q=\pm\frac{x+y}{\sqrt{۲}}$$



شکل۷۴

بنابراین $pq=\pm\frac{x^۲-y^۲}{۲}$ و چون $x^۲-y^۲=a^۲$ داریم $pq=\pm\frac{a^۲}{۲}$. در شکل ۷۵ محورهای مختصات مجانبهای هذلولی هستند و داریم $xy=c^۲$ که در آن c عددی مثبت است.

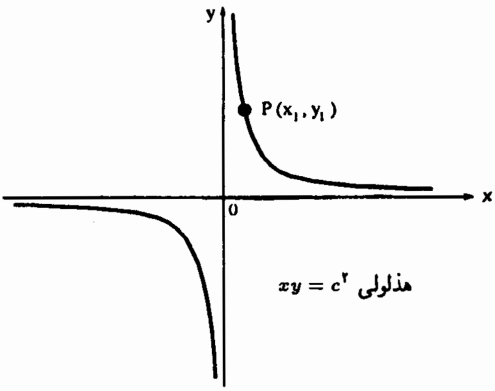


شکل۷۵

۶-۵ معادلهٔ مماس بر هذلولی $xy = c^۲$

می‌خواهیم در نقطهٔ $P(x_۱, y_۱)$ واقع بر هذلولی به معادلهٔ $xy = c^۲$ مماسی رسم کنیم (شکل ۷۶). از رابطهٔ $xy = c^۲$ نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$۱ \times y + x\frac{dy}{dx} = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$



شکل۷۶

پس شیب مماس بر هذلولی در نقطهٔ $P(x_۱, y_۱)$ برابر است با $\frac{dy}{dx} = -\frac{y_۱}{x_۱}$. بنابراین معادلهٔ مماس به شکل $y = -\frac{y_۱}{x_۱}x + k$ است که در آن k عرض از مبدأ خط است. مختصات P در این معادله صدق می‌کند. بنابراین

$$k = y_۱ + \frac{y_۱}{x_۱}x_۱ = ۲y_۱$$

$$y = -\frac{y_۱}{x_۱}x + ۲y_۱ \Rightarrow yx_۱ + xy_۱ = ۲x_۱y_۱ = ۲c^۲ \Rightarrow yx_۱ + xy_۱ = ۲c^۲$$

مثال حل شدهٔ ۳۱

با توجه به شکل ۷۷ مختصات نقاط Q و R را تعیین کنید.

حل.

معادلهٔ مماس بر هذلولی $xy = c^۲$ در نقطهٔ $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$x = ct \Rightarrow \frac{dx}{dt} = c$$

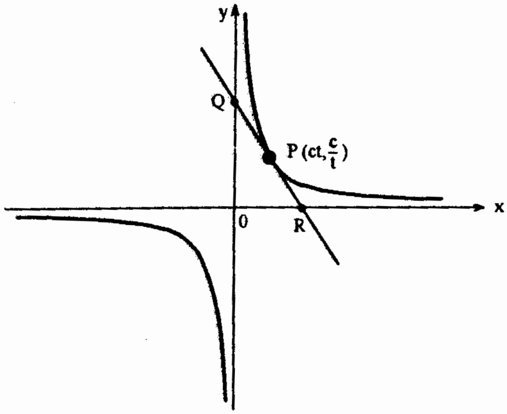
$$y = \frac{c}{t} = ct^{-۱} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -ct^{-۲} = -\frac{c}{t^۲}$$

بنابراین داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{c}{t^۲}}{c} = -\frac{۱}{t^۲}$$

این شیب مماس بر هذلولی در نقطهٔ $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ است. پس معادلهٔ مماس عبارت است از $y = -\frac{۱}{t^۲}x + k$. مختصات P در این معادله صدق می‌کند:

$$k = \frac{c}{t} + \frac{۱}{t^۲}ct = \frac{c}{t} + \frac{c}{t} = \frac{۲c}{t} \Rightarrow y = -\frac{۱}{t^۲}x + \frac{۲c}{t} \Rightarrow x + t^۲y - ۲ct = ۰ \qquad (۱)$$



شکل۷۷

از معادلهٔ (۱) حاصل می‌شود

$$x = ۰ \Rightarrow y = \frac{۲c}{t} \quad , \quad y = ۰ \Rightarrow x = ۲ct$$

بنابراین داریم $Q\left(۰, \frac{۲c}{t}\right)$ و $R(۲ct, ۰)$.

مثال حل شدهٔ ۳۲

مکان هندسی وسط مماس QR را در شکل ۷۷ بیابید.

حل.

مختصات وسط پاره‌خط QR عبارت است از $M\left(\frac{۰ + ۲ct}{۲}, \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲c}{t} + ۰\right)\right)$ یا $M\left(ct, \frac{c}{t}\right)$. اگر پارامتر t را بین برابریهای $x = ct$ و $y = \frac{c}{t}$ حذف کنیم، حاصل می‌شود

$$xy = ct \times \frac{c}{t} = c^۲ \Rightarrow xy = c^۲$$

پس مکان هندسی موردنظر هذلولی $xy = c^۲$ است.

۵-۷ معادلهٔ خط عمود بر هذلولی $xy = c^۲$

اگر از رابطهٔ $xy = c^۲$ نسبت به x مشتق بگیریم، حاصل می‌شود

$$۱ \times y + x\frac{dy}{dx} = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

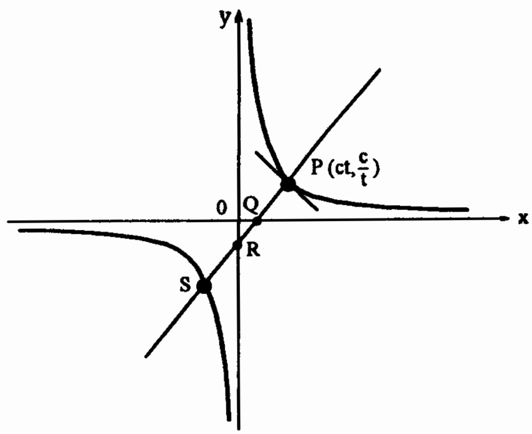
این شیب مماس در نقطه‌ای از هذلولی است. شیب قائم در این نقطه $\frac{x}{y}$ است. شیب قائم در نقطهٔ $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ برابر است با $\frac{ct}{\frac{c}{t}} = t^{۲}$. پس معادلهٔ خط قائم به شکل $y = t^{۲}x + k$ است که مختصات P در آن صدق می‌کند:

$$\frac{c}{t} = t^{۲}ct + k \Rightarrow k = \frac{c}{t} - ct^{۳} \Rightarrow y = t^{۲}x + \frac{c}{t} - ct^{۳}$$

$$\Rightarrow t^{۲}x - y - ct^{۳} + \frac{c}{t} = ۰ \qquad (۲)$$

مثال حل شدهٔ ۳۳

با توجه به شکل ۷۸، مختصات نقاط Q، R و S را بیابید.



شکل۷۸

حل.

اگر در (۲) قرار دهیم $x = ۰$، حاصل می‌شود $y = -ct^{۳} + \frac{c}{t}$.

اگر در (۲) قرار دهیم $y = ۰$، حاصل می‌شود $x = ct - \frac{c}{t^{۳}}$.

پس مختصات Q و R عبارت‌اند از $Q\left(ct - \frac{c}{t^{۳}}, ۰\right)$ و $R\left(۰, -ct^{۳} + \frac{c}{t}\right)$. با حل معادلات $xy = c^{۲}$ و $t^{۲}x - y - ct^{۳} + \frac{c}{t} = ۰$ در یک دستگاه، حاصل می‌شود

$$t^{۲}x - \frac{c^{۲}}{x} - ct^{۳} + \frac{c}{t} = ۰ \Rightarrow t^{۲}x^{۲} - xct^{۳} + x\frac{c}{t} - c^{۲} = ۰$$

با حل این معادلهٔ درجهٔ دوم، خواهیم داشت

$$x = \frac{\left(ct^{۳} - \frac{c}{t}\right) \pm \sqrt{\left(ct^{۳} - \frac{c}{t}\right)^{۲} + ۴c^{۲}t^{۲}}}{۲t^{۲}} \Rightarrow x = \frac{ct}{۲} - \frac{c}{۲t^{۳}} \pm \left(ct^{۳} + \frac{c}{t}\right)\frac{۱}{۲t^{۲}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{ct}{۲} - \frac{c}{۲t^{۳}} + \frac{ct}{۲} + \frac{c}{۲t^{۳}} = ct$$

$$\Rightarrow x = \frac{ct}{۲} - \frac{c}{۲t^{۳}} - \frac{ct}{۲} - \frac{c}{۲t^{۳}} = -\frac{c}{t^{۳}}$$

اگر مقدار حاصل را به‌جای x در معادلهٔ $xy = c^۲$ قرار دهیم، حاصل می‌شود

$$y = \frac{c^۲}{x} = \frac{c^۲}{ct} = \frac{c}{t} \quad \Rightarrow y = \frac{c^۲}{-\frac{c}{t^۳}} = -ct^۳$$

پس مختصات S عبارت است از $\left(\frac{-c}{t^۳}, -ct^۳\right)$.

مثال حل شدهٔ ۳۴

با فرض $pq = -۱$، مختصات R، نقطهٔ برخورد عمودهایی را که در نقاط $P\left(cp, \frac{c}{p}\right)$ و $Q\left(cq, \frac{c}{q}\right)$ بر هذلولی $xy = c^۲$ رسم می‌شوند، بیابید.

حل.

معادلهٔ خط قائم بر هذلولی در نقطهٔ $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ عبارت است از $t^۲x - y - ct^۳ + \frac{c}{t} = ۰$. بنابراین معادله‌های خطهای قائم بر هذلولی در نقاط P و Q به‌ترتیب عبارت‌اند از $p^۲x - y - cp^۳ + \frac{c}{p} = ۰$ و $q^۲x - y - cq^۳ - \frac{c}{q} = ۰$. با حل این معادلات در یک دستگاه، حاصل می‌شود:

$$p^۲x - q^۲x - cp^۳ + cq^۳ + \frac{c}{p} - \frac{c}{q} = ۰ \quad \Rightarrow x(p^۲ - q^۲) = c(p^۳ - q^۳) + c\left(\frac{۱}{q} - \frac{۱}{p}\right)$$
$$\Rightarrow x = c\,\frac{p^۳ - q^۳}{p^۲ - q^۲} + c\,\frac{p - q}{pq(p^۲ - q^۲)}$$
$$\Rightarrow x = c\,\frac{(p^۲ + q^۲ + pq)}{p + q} + \frac{c}{pq(p + q)}$$
$$\Rightarrow x = c\,\frac{[(p + q)^۲ - ۲pq + pq]}{p + q} + \frac{c}{pq(p + q)}$$

اگر قرار دهیم $pq = -۱$، نتیجه می‌شود

$$x = c(p + q) + \frac{c}{p + q} - \frac{c}{p + q} = c(p + q) \quad \Rightarrow x = c(p + q)$$

اگر مقدار x را در معادلهٔ $p^۲x - y - cp^۳ + \frac{c}{p} = ۰$ قرار دهیم، خواهیم داشت

$$y = p^۲x - cp^۳ + \frac{c}{p} = p^۲c(p + q) - cp^۳ + \frac{c}{p} = cp^۲q + \frac{c}{p}$$
$$\Rightarrow y = c\left(\frac{p^۳q + ۱}{p}\right) = c\left(\frac{pqp^۲ + ۱}{p}\right) = c\frac{(۱ - p^۲)}{p} \Rightarrow R\left[c(p + q), c\frac{(۱ - p^۲)}{p}\right]$$

با حذف p و q بین معادلات $x = c(p + q)$ و $y = c\frac{(۱ - p^۲)}{p}$ و با استفاده شرط $pq = -۱$، حاصل می‌شود

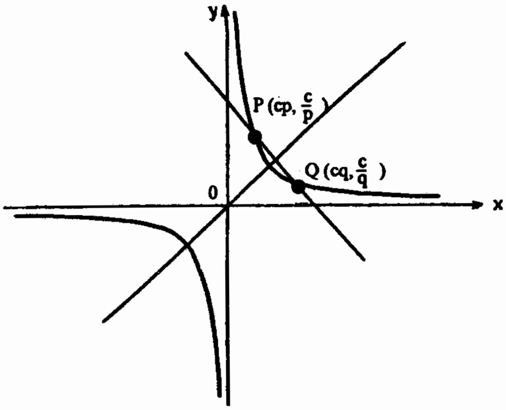
$$x = c(p + q) = c\left(p - \frac{۱}{p}\right) = \frac{c(p^۲ - ۱)}{p}\,, \quad y = \frac{c(۱ - p^۲)}{p}$$

پس مکان هندسی موردنظر خط $y = x$ است.

۵-۸ معادلهٔ وتر هذلولی

به شکل ۷۹ توجه کنید. معادلهٔ وتری که از نقاط P و Q می‌گذرد، عبارت است از

$$\frac{\frac{c}{p}-\frac{c}{q}}{cp-cq}=\frac{y-\frac{c}{p}}{x-cq}$$



شکل۷۹

بنابراین

$$\frac{\frac{(q-p)}{pq}}{p-q}=\frac{y-\frac{c}{p}}{x-cq} \Rightarrow \frac{-(x-cq)}{pq}=y-\frac{c}{p}$$

$$\Rightarrow -x+cq=pqy-cq \Rightarrow pqy+x-2cq=0$$

اگر Q به P میل کند، آنگاه $q \to p$ و نتیجه می‌شود که معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ P به شکل زیر است:

$$p^2y+x-2cp=0$$

مکان هندسی نقطهٔ به مختصات $x=ct$ و $y=\frac{c}{t}$ یک هذلولی متساوی‌الساقین است که معادلهٔ آن $xy=c^2$ است.

مثال حل شدهٔ ۳۵

نمودار $xy=1$ را درصورتی رسم کنید که (الف) $x>0$ و (ب) $x<0$.

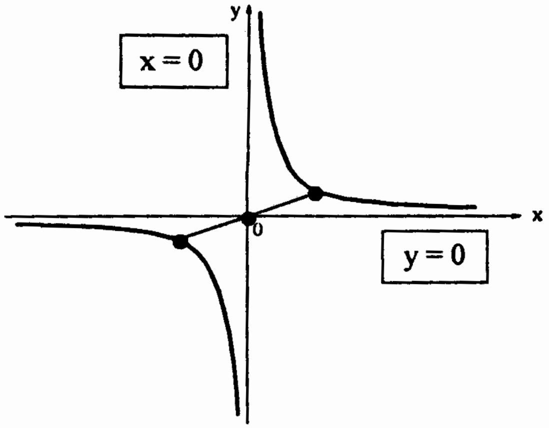
حل.

جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	۰٫۰۰۱	۰٫۰۱	۰٫۱	۱	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰
y	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	۱	۰٫۱	۰٫۰۱	۰٫۰۰۱

x	−۰٫۰۰۱	−۰٫۰۱	−۰٫۱	−۱	−۱۰	−۱۰۰	−۱۰۰۰
y	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	−۱	−۰٫۱	−۰٫۰۱	−۰٫۰۰۱

نمودار در شکل ۸۰ رسم شده است.



شکل ۸۰

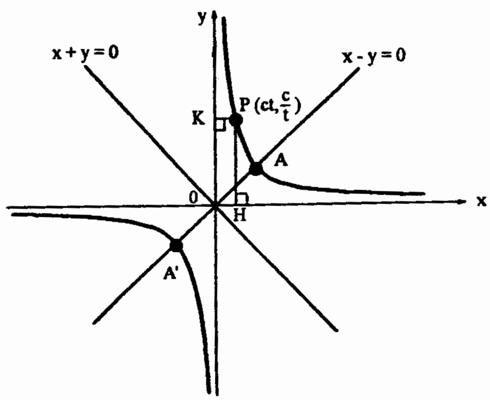
۹-۵ ویژگیهای هذلولی متساوی‌الساقین $xy = c^۲$

به شکل ۸۱ توجه کنید. نقطهٔ O مرکز هذلولی و وتری که از O می‌گذرد قطر هذلولی نامیده می‌شود. منحنی $xy = c^۲$ نسبت به مرکز آن تقارن دارد و O محل برخورد خطوط $x = ۰$ و $y = ۰$ است که مجانبهای هذلولی نامیده می‌شوند. خطهای $x + y = ۰$ و $x - y = ۰$ محورهای تقارن یا محورهای هذلولی متساوی‌الساقین $xy = c^۲$ هستند. نقاط A و A' رأسها و خط AA' محور قاطع هذلولی نام دارد. داریم

$$AA' = ۲a \quad , \quad a^۲ = OA^۲ = ۲c^۲$$

مساحت مستطیل $OKPH$ برابر است با

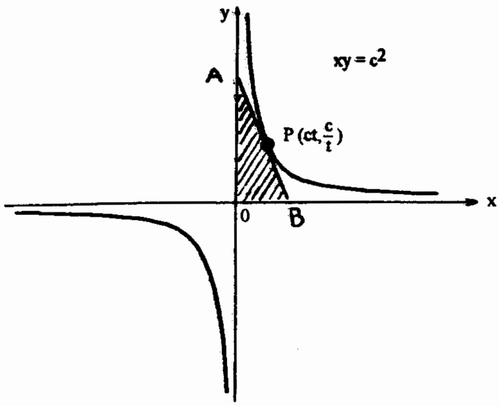
$$PK \times PH = ct \cdot \frac{c}{t} = c^۲$$



شکل ۸۱

مثال حل شدهٔ ۳۶

خط مماس در نقطهٔ $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ بر هذلولی، محورهای x و y را در نقاط A و B قطع می‌کند (شکل ۸۲ را ببینید). مختصات نقاط A و B و مساحت مثلث APB را بیابید.



شکل۸۲

حل.

معادلهٔ خط مماس در P عبارت است از $yt^۲ + x = ۲ct$. اگر $x = ۰$، آنگاه $y = \frac{۲c}{t}$ و اگر $y = ۰$ آنگاه $x = ۲ct$. بنابراین مختصات A و B عبارت‌اند از $A\left(۰, \frac{۲c}{t}\right)$ و $B(۲ct, ۰)$. مساحت مثلث APB برابر است با

$$\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۲c}{t} \cdot ۲ct = ۲c^۲$$

۵-۱۰ معادلهٔ وتر هذلولی

برای یافتن معادلهٔ وتری از هذلولی که از نقاط $P_۱\left(ct_۱, \frac{c}{t_۱}\right)$ و $P_۲\left(ct_۲, \frac{c}{t_۲}\right)$ می‌گذرد (شکل ۸۳)، ابتدا شیب آن‌را محاسبه می‌کنیم:

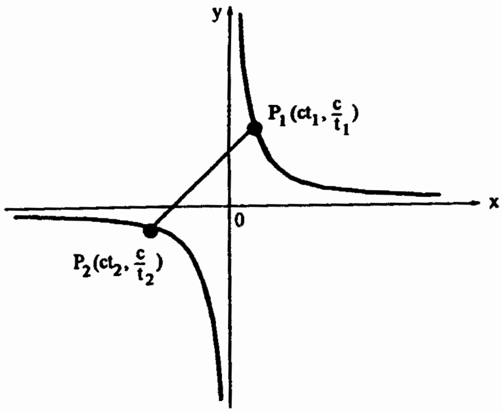
$$m = \frac{\frac{c}{t_۱} - \frac{c}{t_۲}}{ct_۱ - ct_۲} = \frac{c\frac{(t_۲ - t_۱)}{t_۱ t_۲}}{c(t_۱ - t_۲)} = -\frac{۱}{t_۱ t_۲} \qquad (t_۱ \neq t_۲)$$

$$\Rightarrow y = mx + b = -\frac{۱}{t_۱ t_۲}x + b$$

این خط باید از $P_۱$ و $P_۲$ بگذرد. پس با قرار دادن مختصات $P_۱$، داریم

$$\frac{c}{t_۱} = -\frac{۱}{t_۱ t_۲} \cdot ct_۱ + b \,, \quad b = \frac{c}{t_۱} + \frac{c}{t_۲} \;\Rightarrow y = -\frac{۱}{t_۱ t_۲}x + \frac{c}{t_۱} + \frac{c}{t_۲}$$

$$\Rightarrow yt_۱ t_۲ + x = ct_۲ + ct_۱ \;\Rightarrow x + t_۱ t_۲ y = c(t_۱ + t_۲)$$



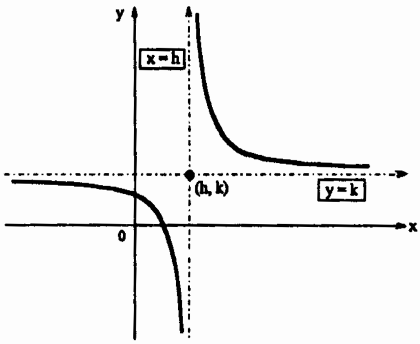
شکل۸۳

۵-۱۱ معادلهٔ هذلولی با مجانبهای موازی با محورها

معادلهٔ هذلولی متساوی‌الساقینی که مجانبهایش موازی با محورهای مختصات هستند و یکدیگر را در نقطهٔ (h, k) قطع می‌کنند به شکل زیر است (شکل ۸۴):

$$(x-h)(y-k)=c^{۲}$$

نقطهٔ $\left(cp+h, \frac{c}{p}+k\right)$ روی منحنی $(x-h)(y-k)=c^{۲}$ واقع است زیرا مختصات آن در معادله صدق می‌کنند.



شکل۸۴

مثال حل شدهٔ ۳۷

نشان دهید که نقطهٔ $\left(۲p+۱, \frac{۲}{p}-۲\right)$ به‌ازای همهٔ مقادیر p روی منحنی $(x-۱)(y+۲)=۲^{۲}$ قرار دارد.

حل.
هرگاه در معادلهٔ $(x-1)(y+2)=2^2$ قرار دهیم $x=2p+1$ و $y=\frac{2}{p}-2$، داریم

$$(2p+1-1)(2p-2+2)=2p\left(\frac{2}{p}\right)=2^2$$

مثال حل شدهٔ ۳۸

نشان دهید که نقطهٔ $\left(2p-5,\frac{2}{p}+3\right)$ روی منحنی $(x+5)(y-3)=4$ قرار دارد.

حل.
هرگاه در معادلهٔ $(x+5)(y-3)=4$ قرار دهیم $x=2p-5$ و $y=\frac{2}{p}+3$، حاصل می‌شود

$$(2p-5+5)\left(\frac{2}{p}+3-3\right)=4$$

مثال حل شدهٔ ۳۹

نشان دهید که معادلهٔ قائم بر منحنی $xy=c^2$ در نقطهٔ $P(x_1,y_1)$ به شکل $xx_1-yy_1=x_1^2-y_1^2$ است.

حل.
شیب خط قائم در نقطهٔ $P_1(x_1,y_1)$ برابر است با $\frac{dy}{dx}=\frac{x_1}{y_1}$. بنابراین

$$y=\frac{x_1}{y_1}x+b$$

اگر مختصات P را در این معادله قرار دهیم، حاصل می‌شود

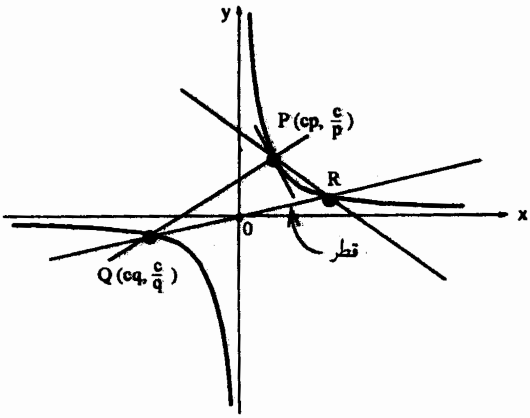
$$y_1=\frac{x_1}{y_1}x_1+b\Rightarrow b=\frac{y_1^2-x_1^2}{y_1}\Rightarrow y=\frac{x_1}{y_1}x+\frac{y_1^2-x_1^2}{y_1}$$

$$\Rightarrow yy_1=xx_1+y_1^2-x_1^2\Rightarrow xx_1-yy_1=x_1^2-y_1^2$$

مثال حل شدهٔ ۴۰

خط قائم بر هذلولی $xy=c^2$ در نقطهٔ $P\left(cp,\frac{c}{p}\right)$، منحنی را بار دیگر در نقطهٔ $Q\left(cq,\frac{c}{q}\right)$ قطع می‌کند (شکل ۸۵). مختصات Q را برحسب p بیان کنید. هرگاه QR قطری از هذلولی باشد، مکان هندسی وسط پاره‌خط PR را وقتی‌که p تغییر می‌کند، تعیین کنید.

حل.
معادلهٔ خط قائم در $T\left(ct,\frac{c}{t}\right)$ عبارت است از $t^2x-y-ct^3+\frac{c}{t}=0$. پس معادلهٔ خط قائم در $P\left(cp,\frac{c}{p}\right)$ به شکل $p^2x-y-cp^3+\frac{c}{p}=0$ است. هرگاه این معادله را با معادلهٔ $xy=c^2$ در یک دستگاه حل کنیم، حاصل می‌شود $Q\left(\frac{-c}{p^3},-cp^3\right)$. بنابراین $q=-\frac{1}{p^3}$.



شکل۸۵

معادلهٔ قطر QR به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{-cp^{3}}{-\frac{c}{p^{3}}}=p^{6}x \quad \Rightarrow y=p^{6}x$$

هرگاه معادلهٔ $y=p^{6}x$ و $xy=c^{2}$ را در یک دستگاه حل کنیم، مختصات R به‌دست می‌آید:

$$y=p^{6}x=\frac{c^{2}}{x} \Rightarrow \frac{c^{2}}{p^{6}} \Rightarrow x=\pm\frac{c}{p^{3}}\ ,\quad y=p^{6}\left(\pm\frac{c}{p^{3}}\right)=\pm cp^{3}$$

بنابراین اگر $Q\left(\frac{-c}{p^{3}},-cp^{3}\right)$ آنگاه $R\left(\frac{c}{p^{3}},cp^{3}\right)$. مختصات وسط PR یعنی نقطهٔ M، عبارت است از $M\left[\frac{1}{2}\left(cp+\frac{c}{p^{3}}\right),\frac{1}{2}\left(\frac{c}{p}+cp^{3}\right)\right]$. پس

$$x=\frac{1}{2}\left(cp+\frac{c}{p^{3}}\right)\quad,\quad y=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{p}+cp^{3}\right)$$

$$\Rightarrow 2x=cp+\frac{c}{p^{3}}\ ,\quad 2y=\frac{c}{p}+cp^{3} \Rightarrow 2x=\frac{c(p^{4}+1)}{p^{3}}\ ,\quad 2y=\frac{c(1+p^{4})}{p}$$

$$\Rightarrow 2xp^{3}=2yp \Rightarrow p^{2}=\frac{y}{x} \Rightarrow 2xp^{3}=c(p^{4}+1)$$

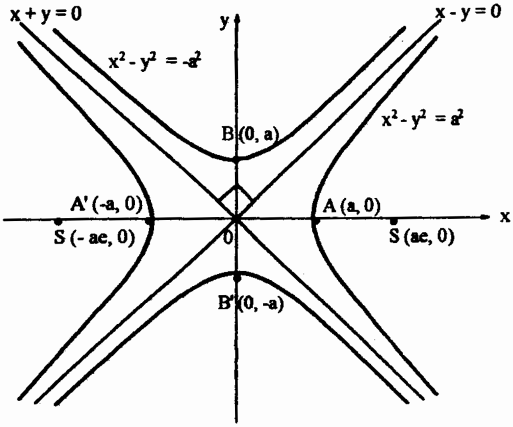
$$\Rightarrow \pm 2x\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{\frac{y}{x}}=c\left(\frac{y^{2}}{x^{2}}+1\right)$$

اگر دو طرف تساوی آخر را به‌توان ۲ برسانیم، حاصل می‌شود:

$$4x^{2}\frac{y^{2}}{x^{2}}\frac{y}{x}=\frac{c^{2}(x^{2}+y^{2})^{2}}{x^{4}} \Rightarrow 4x^{3}y^{3}=c^{2}(x^{2}+y^{2})^{2}$$

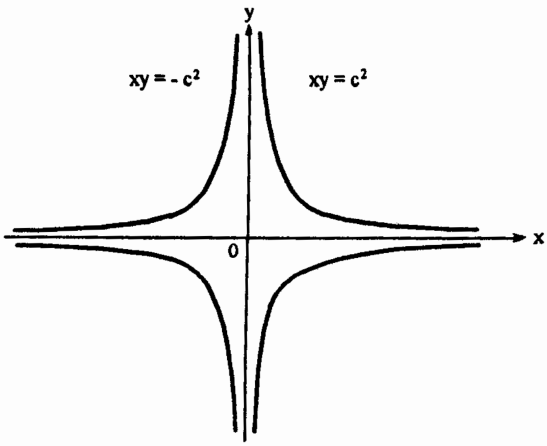
۵-۱۲ هذلولیهای مزدوج

در شکل ۸۶، هذلولیهای متساوی‌الساقین $x^۲ - y^۲ = a^۲$ و $x^۲ - y^۲ = -a^۲$ با مجانبهای $x + y = ۰$ و $x - y = ۰$ رسم شده‌اند. این دو هذلولی را هذلولیهای مزدوج می‌نامند.



شکل۸۶

در این هذلولیها $A'OA$ محور قاطع و $B'OB$ محور غیرقاطع است که به‌ترتیب محور x و محور y هستند. رأسهای هذلولی $x^۲ - y^۲ = a^۲$ نقاط $A(a, ۰)$، $A'(-a, ۰)$ و رأسهای هذلولی $x^۲ - y^۲ = -a^۲$ نقاط $B(۰, a)$ و $B'(۰, -a)$ هستند. معادلات هذلولیهای مزدوجی که مجانبهایشان محورهای مختصات هستند (شکل ۸۷) عبارت‌اند از $xy = c^۲$ و $xy = -c^۲$.



شکل۸۷

مثال حل شدهٔ ۴۱

مختصات مرکز و معادله‌های مجانبهای هذلولیهای متساوی‌الساقین زیر را بیابید و سپس هریک را رسم کنید:

الف) $xy = ۹$ ب) $xy = ۵^۲$

ج) $(x-۱)(y-۲) = ۴$ د) $(x+۲)(y-۵) = ۲۵$

ه) $(x-h)(y-k) = k^۲$

حل.

الف) مرکز نقطهٔ $C(۰,۰)$ و خطهای $x = ۰$ و $y = ۰$ مجانبهای هذلولی هستند.

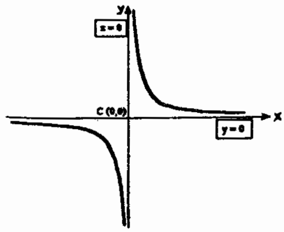
ب) مرکز نقطهٔ $C(۰,۰)$ و خطهای $x = ۰$ و $y = ۰$ مجانبهای هذلولی هستند.

ج) مرکز نقطهٔ $C(۱,۲)$ و خطهای $x = ۱$ و $y = ۲$ مجانبهای هذلولی هستند.

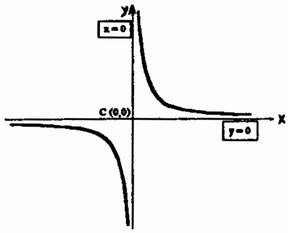
د) مرکز نقطهٔ $C(-۲,۵)$ و خطهای $x = -۲$ و $y = ۵$ مجانبهای هذلولی هستند.

ه) مرکز نقطهٔ $C(h,k)$ و خطهای $x = h$ و $y = k$ مجانبهای هذلولی هستند.

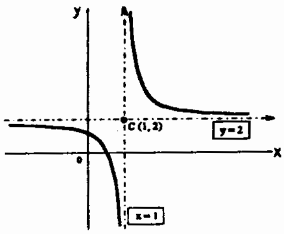
نمودار هذلولیهای (الف) تا (ه) در شکلهای ۸۸ تا ۹۲ رسم شده است.



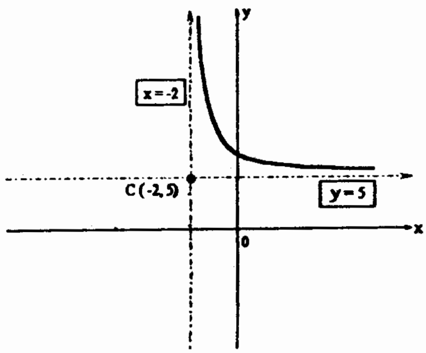
شکل ۸۸



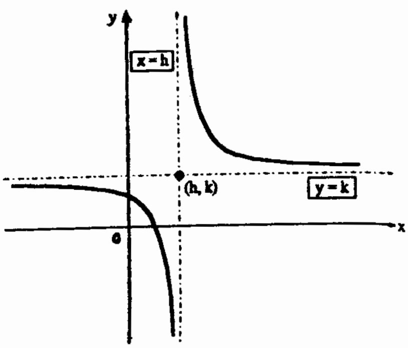
شکل ۸۹



شکل ۹۰



شکل ۹۱



شکل ۹۲

مثال حل شدهٔ ۴۲

هذلولیهای $xy = ۱$ و $(x + ۱)(y - ۲) = ۱$ را رسم و مختصات نقاط برخورد آنها را مشخص کنید.

حل.

با حل معادلات $xy = ۱$ و $(x + ۱)(y - ۲) = ۱$ در یک دستگاه خواهیم داشت

$$\begin{cases} xy = ۱ \\ xy + y - ۲x - ۲ = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(۲x + ۲) = ۱ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۸}}{۴}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

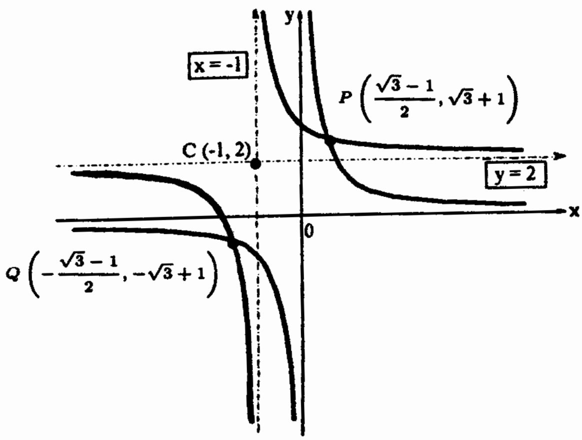
مقادیر متناظر برای y عبارت‌اند از

$$y = ۲\left(-\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + ۲ = \sqrt{۳} + ۱ \Rightarrow y = ۲\left(-\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + ۲ = -\sqrt{۳} + ۱$$

مختصات نقاط P و Q چنین است:

$$P\left(\frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲}, \sqrt{۳} + ۱\right) \text{ و } Q\left(-\frac{\sqrt{۳} + ۱}{۲}, -\sqrt{۳} + ۱\right)$$

نمودار هذلولیها در شکل ۹۳ رسم شده است.



شکل۹۳

مثال حل شدهٔ ۴۳

معادلهٔ خط قائم بر هذلولی $xy = c^۲$ را در نقطهٔ $P\left(cp, \frac{c}{p}\right)$ بنویسید و نشان دهید که مساحت مثلثی که به‌وسیلهٔ این خط و محورهای مختصات تشکیل می‌شود برابر است با $c^۲\left(۱ - \frac{۱}{۲}p^۴ - \frac{۱}{۲p^۴}\right)$.
مختصات مرکزثقل این مثلث و مکان هندسی آن‌را به‌دست آورید.

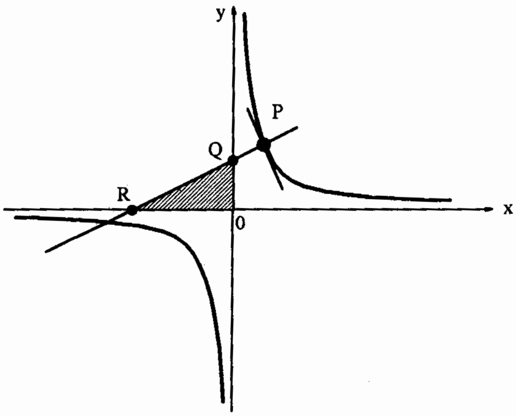
حل.

معادلهٔ خط قائم به شکل $p^2x - y - cp^3 + \frac{c}{p} = ۰$ است.

خط قائم محور y را در نقطهٔ Q به مختصات $x = ۰$ و $y = \frac{c}{p} - cp^3$ و محور x را در نقطهٔ R به مختصات $x = cp - \frac{c}{p^3}$ و $y = ۰$ قطع می‌کنند (شکل ۹۴). مساحت مثلث OQR برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{c}{p} - cp^3\right)\left(cp - \frac{c}{p^3}\right) = \frac{۱}{۲}c^2 - \frac{۱}{۲}\frac{c^2}{p^4} - \frac{۱}{۲}c^2p^4 + \frac{۱}{۲}c^2 = c^2 - \frac{۱}{۲}c^2\left(p^4 + \frac{۱}{p^4}\right)$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = c^2\left(۱ - \frac{۱}{۲}p^4 - \frac{۱}{۲p^4}\right)$$



شکل۹۴

مختصات مرکزثقل این مثلث عبارت است از $\left[\frac{cp}{۳}\left(۱ - \frac{۱}{p^4}\right), \frac{c}{۳p}(۱ - p^4)\right]$. هرگاه پارامتر p را بین مختصات مرکزثقل حذف کنیم، حاصل می‌شود

$$\Rightarrow x = \frac{cp}{۳}\left(۱ - \frac{۱}{p^4}\right) \quad , \quad y = \frac{c}{۳p}(۱ - p^4)$$

$$\Rightarrow x = \frac{c}{۳}\left[p - \frac{۱}{p^3}\right] \quad , \quad y = \frac{c}{۳}\left[\frac{۱}{p} - p^3\right]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{(p^4 - ۱) \times p}{(۱ - p^4) \times p^3} = -\frac{۱}{p^2} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{۱}{p^4} \Rightarrow p^4 = \frac{y^2}{x^2}$$

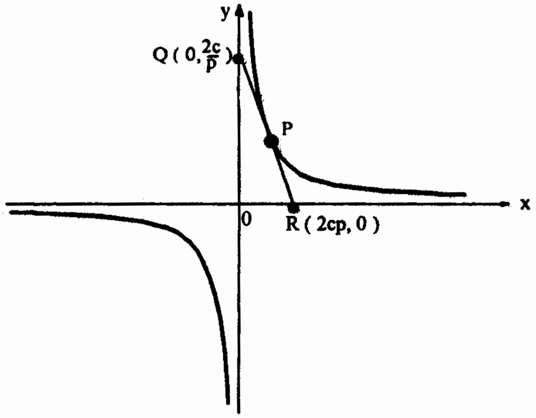
$$\Rightarrow y^2 = \frac{c^2}{۹}\frac{(۱ - p^4)^2}{p^2} = \frac{c^2}{۹}\frac{\left(۱ - \frac{y^2}{x^2}\right)^2}{\left(-\frac{y}{x}\right)} \Rightarrow -y^3 = \frac{c^2x}{۹}\left(۱ - \frac{y^2}{x^2}\right)^2$$

مثال حل شدهٔ ۴۴

معادلهٔ مماس بر هذلولی متساوی‌الساقین $xy = c^2$ را در نقطهٔ $P\left(cp, \frac{c}{p}\right)$ بیابید و مساحت مثلثی را که خط مماس در این نقطه با محورهای مختصات می‌سازد، به‌دست آورید. همچنین مختصات مرکزثقل این مثلث و مکان هندسی آن را بیابید.

حل.

معادلهٔ خط مماس عبارت است از $x + p^2y - 2cp = 0$. این خط محورهای مختصات را در نقاط $R(2cp, 0)$ و $Q\left(0, \frac{2c}{p}\right)$ قطع می‌کند (شکل ۹۵ را ببینید).



شکل۹۵

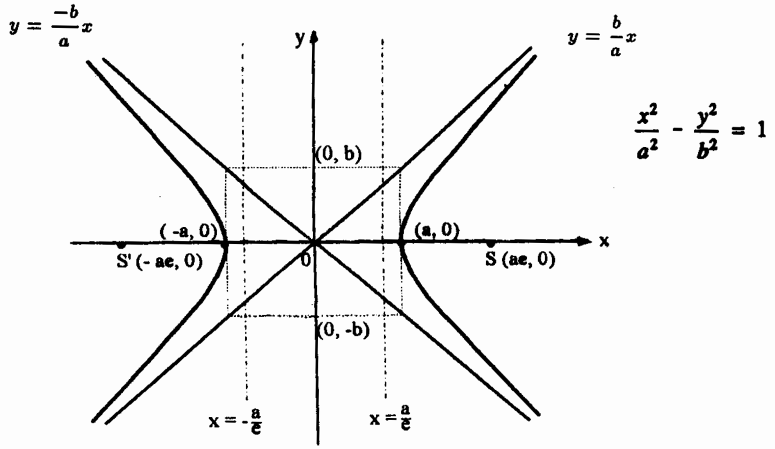
مساحت مثلث OQR برابر است با $\frac{1}{2} \times 2cp\frac{2c}{p} = 2c^2$ و مختصات مرکزثقل عبارت است از $\left(\frac{2}{3}cp, \frac{2}{3}\frac{c}{p}\right)$. با حذف p بین مختصات مرکزثقل، مکان هندسی آن به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{2}{3}cp \ , \quad y = \frac{2}{3} \times \frac{c}{p} \ \Rightarrow xy = \frac{4}{9}c^2$$

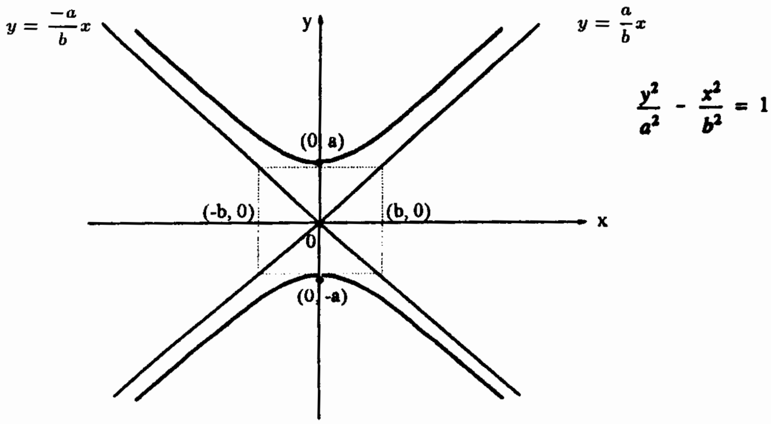
این معادلهٔ یک هذلولی متساوی‌الساقین است.

۵-۱۳ مستطیل مرکزی هذلولی

به شکل ۹۶ توجه کنید. مستطیلی را که رأسهایش روی مجانبهای هذلولی واقع‌اند و دو ضلع مقابل آن در رأسهای هذلولی بر هذلولی مماس‌اند، مستطیل مرکزی می‌نامیم. در حقیقت قطرهای مستطیل اصلی، مجانبهای هذلولی هستند. شکل ۹۷ مستطیل مرکزی یک هذلولی قائم را نشان می‌دهد.



شکل۹۶



شکل۹۷

مثال حل شدهٔ ۴۵

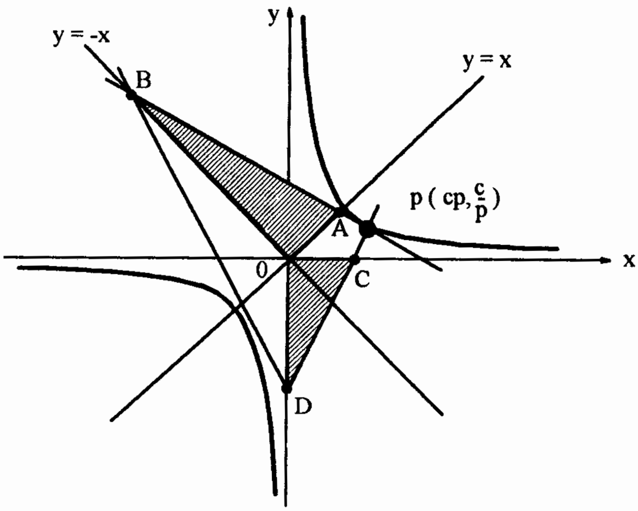
مماسی که در نقطهٔ $P\left(cp, \frac{c}{p}\right)$ بر هذلولی متساوی‌الساقین $xy = c^{۲}$ رسم شده است خطهای $y=x$ و $y=-x$ را به‌ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث $OAB(\Delta_۱)$ را بیابید (شکل۹۸ را ببینید).

خط قائم در نقطهٔ P بر هذلولی، محور x و محور y را به‌ترتیب در نقاط C و D قطع می‌کند. مساحت مثلثهای $OCD(\Delta_۲)$ و $BPD(\Delta_۳)$ و نیز حاصلضرب $\Delta_۱\Delta_۲\Delta_۳$ را تعیین کنید.

حل.

$$x = cp \Rightarrow \frac{dx}{dp} = c\,,\;\; y = \frac{c}{p} = cp^{-۱} \Rightarrow \frac{dy}{dp} = -cp^{-۲} = -\frac{c}{p^{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dp}}{\frac{dx}{dp}} = \frac{-\frac{c}{p^{۲}}}{c} = -\frac{۱}{p^{۲}}$$



شکل۹۸

معادلهٔ مماس در P به شکل $y = mx + k$ است، پس

$$y = -\frac{1}{p^2}x + k \Rightarrow \frac{c}{p} = \frac{-1}{p^2}cp + k \Rightarrow k = \frac{c}{p} + \frac{c}{p} = \frac{2c}{p}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{p^2}x + \frac{2c}{p} \Rightarrow yp^2 + x = 2cp$$

این خط مماس، خطهای $y = x$ و $y = -x$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. می‌توانیم مختصات A را با حل معادلات $yp^2 + x = 2cp$ و $y = x$ در یک دستگاه به‌دست آوریم:

$$yp^2 + x = 2cp \Rightarrow y = \frac{2cp}{p^2+1} = x \Rightarrow A\left(\frac{2cp}{p^2+1}, \frac{2cp}{p^2+1}\right)$$

مختصات B نیز با حل معادلات $yp^2 + x = 2cp$ و $y = -x$ در یک دستگاه به‌دست می‌آید:

$$yp^2 + x = 2cp \Rightarrow y = \frac{2cp}{p^2-1} \Rightarrow x = -\frac{2cp}{p^2-1} \Rightarrow B\left(-\frac{2cp}{p^2-1}, \frac{2cp}{p^2-1}\right)$$

مساحت مثلث OAB به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{-2cp}{p^2-1} & \frac{2cp}{p^2+1} \\ 0 & \frac{2cp}{p^2-1} & \frac{2cp}{p^2+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{-2cp}{p^2-1} & \frac{2cp}{p^2+1} \\ \frac{2cp}{p^2-1} & \frac{2cp}{p^2+1} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{-2cp(2cp)}{(p^2-1)(p^2+1)} - \frac{2cp}{p^2-1}\cdot\frac{2cp}{p^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = \left(\frac{2c^2p^2}{(p^2-1)(p^2+1)} + \frac{2c^2p^2}{(p^2-1)(p^2+1)}\right) \Rightarrow \Delta_1 = \frac{4c^2p^2}{p^4-1}$$

معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ P به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$y = p^۲x + k \Rightarrow \frac{c}{p} = p^۲cp + k \Rightarrow k = \frac{c}{p} - cp^۳$$
$$\Rightarrow y = p^۲x + \frac{c}{p} - cp^۳ \Rightarrow py = p^۳x + c - cp^۴$$

هرگاه قرار دهیم $y = ۰$، حاصل می‌شود

$$x = \frac{cp^۴ - c}{p^۳} = cp - \frac{c}{p^۳} \Rightarrow C\left(cp - \frac{c}{p^۳}, ۰\right)$$

هرگاه قرار دهیم $x = ۰$، حاصل می‌شود

$$y = \frac{c}{p} - cp^۳ \Rightarrow D\left(۰, \frac{c}{p} - cp^۳\right)$$

پس مساحت مثلث OCD برابر می‌شود با

$$\Delta_۲ = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & cp - \frac{c}{p^۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{c}{p} - cp^۳ \end{vmatrix}$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(cp - \frac{c}{p^۳}\right)\left(\frac{c}{p} - cp^۳\right) = \frac{۱}{۲}c^۲\left(\frac{p^۴ - ۱}{p^۳}\right)\left(\frac{۱ - p^۴}{p}\right) = \frac{۱}{۲}\frac{c^۲(p^۴ - ۱)^۲}{p^۴}$$

به‌همین ترتیب مساحت مثلث BPD برابر است با

$$\Delta_۳ = \frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ \frac{-۲cp}{p^۲ - ۱} & cp & ۰ \\ \frac{۲cp}{p^۲ - ۱} & \frac{c}{p} & \frac{c}{p} - cp^۳ \end{vmatrix}$$
$$= \frac{۱}{۲}cp\left(\frac{c}{p} - cp^۳\right) - \frac{۱}{۲}\left(-\frac{۲cp}{p^۲ - ۱}\left(\frac{c}{p} - cp^۳\right)\right) + \frac{۱}{۲}\left(-\frac{۲cp}{p^۲ - ۱} \times \frac{c}{p} - cp\left(\frac{۲cp}{p^۲ - ۱}\right)\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\left[c^۲p\left(\frac{۱ - p^۴}{p}\right) + \frac{۲c^۲p}{p(p^۲ - ۱)} - \frac{۲c^۲p^۵}{(p^۲ - ۱)p} - \frac{۲c^۲p}{p(p^۲ - ۱)} - \frac{۲c^۲p^۲}{p^۲ - ۱}\right]$$
$$= \frac{۱}{۲}c^۲\left[(۱ - p^۴) + \frac{۲}{p^۲ - ۱} - \frac{۲p^۴}{p^۲ - ۱} - \frac{۲}{p^۲ - ۱} - \frac{۲p^۲}{p^۲ - ۱}\right]$$
$$= \frac{۱}{۲}c^۲\left(\frac{(۱ - p^۴)(p^۲ - ۱) + ۲ - ۲p^۴ - ۲ - ۲p^۲}{p^۲ - ۱}\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\frac{c^۲}{(p^۲ - ۱)}(p^۲ - ۱ - p^۶ + p^۴ - ۲p^۴ - ۲p^۲)$$
$$= \frac{۱}{۲}\frac{c^۲}{(p^۲ - ۱)}(p^۶ + p^۴ + p^۲ + ۱)$$

بنابراین داریم

$$\Delta_1\Delta_2\Delta_3 = \frac{4c^2p^2}{p^2-1}\cdot\frac{1}{2}\frac{c^2(p^4-1)^2}{p^4}\cdot\frac{1}{2}\frac{c^2}{p^2-1}(p^6+p^4+p^2+1)$$
$$= \frac{c^6}{p^2}(p^2+1)(p^6+p^4+p^2+1)$$

تمرین ۵

۱. هذلولیهای زیر را رسم کنید:

الف) $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{1^2}=1$ ب) $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$ ج) $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$

۲. در تمرین ۱، (یک) مختصات کانونها؛ (دو) مختصات رأسها؛ (سه) معادلهٔ محورها و (چهار) خروج از مرکز هر یک از هذلولیها را بیابید.

۳. هذلولیهای متساوی‌الساقین (الف) $x^2-y^2=1$ و (ب) $x^2-y^2=9$ را رسم کنید. معادلهٔ محورهای آنها و مقادیر خروج از مرکز آنها را بیابید.

۴. تحقیق کنید که معادلهٔ پارامتری $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ به شکل $x=a\sec t$ و $y=a\tan t$ است و سپس مختصات کانونها و معادلات مجانبهای آنها را بیابید. اگر $a=b$، معادلات مجانبها به چه صورتی هستند؟

۵. نشان دهید که معادلهٔ دکارتی هذلولی متساوی‌الساقین (به مرکز مبدأ مختصات) $xy=c^2$ است و معادلات مجانبهای آن‌را بنویسید. سپس بررسی کنید که معادلات پارامتری آن به شکل $x=ct$ و $y=\frac{c}{t}$ است.

۶. نشان دهید که معادلهٔ مماس در نقطهٔ (x_1,y_1) بر هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ به شکل $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$ است.

۷. نشان دهید که معادلهٔ مماس در نقطهٔ $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ بر هذلولی به معادلهٔ $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ به شکل $bx\sec\theta-ay\tan\theta=ab$ است.

۸. نشان دهید که مختصات کانونهای هذلولی متساوی‌الساقین $xy=c^2$ عبارت‌اند از $(\pm\sqrt{2}c,\pm\sqrt{2}c)$ و معادلهٔ محورها به شکل $x+y=\pm c\sqrt{2}$ است.

۹. نشان دهید که معادلهٔ مماس در نقطهٔ (x_1,y_1) بر هذلولی $xy=c^2$ به شکل $xy_1+yx_1=2c^2$ است.

۱۰. نشان دهید که معادلهٔ مماس در نقطهٔ $\left(ct,\frac{c}{t}\right)$ بر هذلولی $xy=c^2$ به شکل $x+t^2y=2ct$ است.

۱۱. ثابت کنید معادلهٔ وتری که نقاط $R\left(cr,\frac{c}{r}\right)$ و $S\left(cs,\frac{c}{s}\right)$ از هذلولی متساوی‌الساقین $xy=c^2$ را به‌هم وصل می‌کند عبارت است از $rsy+x=c(r+s)$. هرگاه بدانیم که خط RS و نقطهٔ $P\left(cp,\frac{c}{p}\right)$ طوری قرار گرفته‌اند که زاویهٔ RSP قائمه است، نشان دهید که خط RS با خط قائم بر هذلولی در نقطهٔ P موازی است.

۱۲. مختصات کانونها، خروج از مرکز و طول ضلع قائم هذلولی $\frac{x^۲}{۱۶} - \frac{y^۲}{۹} = ۱$ را بیابید.

۱۳. معادلات مماسهایی بر هذلولی $x^۲ - ۴y^۲ = ۴$ را بیابید که بر خط $۴x - ۵y + ۳ = ۰$ عمود باشند.

۱۴. نشان دهید که قطرهای $y = m_۱ x$ و $y = m_۲ x$ از هذلولی $b^۲x^۲ - a^۲y^۲ = a^۲b^۲$ مزدوج‌اند هرگاه $m_۱ m_۲ = \frac{b^۲}{a^۲}$ (دو قطر هذلولی مزدوج نامیده می‌شوند هرگاه هر یک از آنها همهٔ وترهای موازی با دیگری را نصف کند).

۱۵. نشان دهید معادلهٔ وتری که نقاط $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ از هذلولی متساوی‌الساقین $xy = c^۲$ را به‌هم وصل می‌کند، به شکل زیر است:

$$x(y_۱ + y_۲) + y(x_۱ + x_۲) = (x_۱ + x_۲)(y_۱ + y_۲)$$

به‌این ترتیب نشان دهید که وقتی $x_۲ \to x_۱$ و $y_۲ \to y_۱$، آنگاه معادلهٔ وتر به معادلهٔ مماس $xx_۱ + yy_۱ = c^۲$ در نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ میل می‌کند.

۱۶. مرکز یک هذلولی مبدأ مختصات است و محور قاطع آن روی محور x قرار دارد. هرگاه فاصلهٔ کانونی هذلولی $۱۸\sqrt{۳}$ و خروج از مرکز آن $\sqrt{۳}$ باشد، معادلهٔ هذلولی را بنویسید.

۱۷. خط قائمی که در نقطهٔ $Q\left(q, \frac{۱}{q}\right)$ بر هذلولی $xy = ۱$ رسم شده است، منحنی را در نقطهٔ R قطع می‌کند. طول پاره‌خط QR را برحسب q به‌دست آورید.

۱۸. مختصات کانونهای هذلولی به معادلهٔ $b^۲x^۲ - a^۲y^۲ = a^۲b^۲$ عبارت‌اند از $S(۵, ۰)$ و $S'(-۵, ۰)$ و فاصلهٔ بین دو رأس آن ۸ است. معادلهٔ هذلولی را بنویسید.

۱۹. اگر معادلهٔ یک هذلولی $۲۵x^۲ - ۱۶y^۲ = ۴۰۰$ باشد، مختصات کانونهای آن‌را بیابید.

۲۰. اگر معادلهٔ یک هذلولی $۳۶x^۲ - ۴۹y^۲ = ۱۷۶۴$ باشد، مختصات کانونهای آن‌را بیابید.

۲۱. معادلات پارامتری یک منحنی به‌صورت $x = ۴t$ و $y = \frac{۴}{t}$ است. معادلات خطهای مماس و قائم بر منحنی را در نقطهٔ $T\left(۴t, \frac{۴}{t}\right)$ بیابید. از نقطهٔ $A(-۱۶, ۸)$ دو مماس بر هذلولی رسم شده‌اند و نقاط تماس B و C هستند. طول وتر BC، محیط مثلث ABC و مساحت آن‌را بیابید. خطهای قائم در نقاط B و C بر منحنی یکدیگر را در D قطع می‌کنند. مختصات D و مساحت مثلث BCD را تعیین کنید.

پاسخ تمرینها

حل تمرین فصل ۱

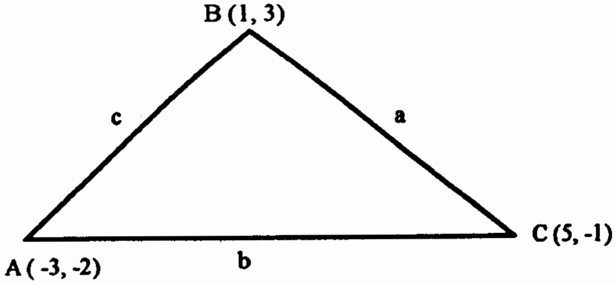
۱.
$$PQ = \sqrt{(y_۲ - y_۱)^۲ + (x_۲ - x_۱)^۲} = \sqrt{(۲ - ۴)^۲ + (-۱ - ۳)^۲}$$
$$= \sqrt{۴ + ۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۴{,}۴۷$$

۲.
$$AB = \sqrt{(y_۲ - y_۱)^۲ + (x_۲ - x_۱)^۲} = \sqrt{(-۵ - (-۲))^۲ + (-۲ - (-۱))^۲}$$
$$= \sqrt{۹ + ۱} = \sqrt{۱۰} = ۳{,}۱۶$$

۳.
$$RS = \sqrt{(y_۲ - y_۱)^۲ + (x_۲ - x_۱)^۲} = \sqrt{(۵ - ۶)^۲ + (۳ - ۲)^۲} = \sqrt{۱ + ۱} = \sqrt{۲}$$
$$= ۱{,}۴۱۴$$

۴. با توجه به شکل ۹۹ می‌توانیم بنویسیم

$$AB = \sqrt{(۳ - (-۲))^۲ + (۱ - (-۳))^۲} = \sqrt{۲۵ + ۱۶} = \sqrt{۴۱} = ۶{,}۴۰$$
$$BC = \sqrt{(۳ - (-۱))^۲ + (۱ - ۵)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۱۶} = \sqrt{۳۲} = ۵{,}۶۶$$



شکل۹۹

$$AC = \sqrt{(-۲-(-۱))^۲ + (-۳-۵)^۲} = \sqrt{۱+۶۴} = \sqrt{۶۵} = ۸/۰۶$$

$$\text{محیط} = AB + BC + AC = ۶/۴ + ۵/۶۶ + ۸/۰۶ = ۲۰/۱۲$$

۵. اگر $s = \frac{a+b+c}{۲}$ آنگاه $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. داریم

$$s = \frac{۲۰/۱۲}{۲} = ۱۰/۰۶$$

$$A = \sqrt{۱۰/۰۶(۱۰/۰۶-۵/۶۶)(۱۰/۰۶-۸/۰۶)(۱۰/۰۶-۶/۴)}$$

$$= \sqrt{۱۰/۰۶ \times ۴/۴۰ \times ۲ \times ۳/۶۶} = ۱۸/۰$$

۶. خط $y = mx + c$ دارای شیب $m = -۱$ است و از نقطهٔ $(۲,۳)$ می‌گذرد، پس

$$۳ = -۲ + c \Rightarrow c = ۵ \Rightarrow y = -x + ۵$$

۷. خط $y = mx + c$ دارای شیب $m = \frac{۲}{۳}$ است و از نقطهٔ $(-۱,-۲)$ می‌گذرد، پس

$$-۲ = -\frac{۲}{۳} + c \Rightarrow c = -۲ + \frac{۲}{۳} = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow y = \frac{۲}{۳}x - \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳y - ۲x + ۴ = ۰$$

۸. $m = \frac{۵-۲}{۰-۱} = -\frac{۳}{۱} = -۳$

خط $y = -۳x + c$ از نقطهٔ $(۱,۲)$ می‌گذرد، پس

$$۲ = -۳ + c \Rightarrow c = ۵ \Rightarrow y = -۳x + ۵$$

۹.

$$\frac{y-y_۱}{x-x_۱} = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

$$\Rightarrow \frac{y-(-۳)}{x-(-۲)} = \frac{-۵-(-۳)}{-۴-(-۲)} \Rightarrow (y+۳)(-۲) = (-۲)(x+۲)$$

$$\Rightarrow y + ۳ = x + ۲ \Rightarrow y - x + ۱ = ۰$$

۱۰. $m = \frac{۵-۳}{-۲-۱} = \frac{۲}{-۳} = -\frac{۲}{۳}$

۱۱. شیب خط $۳x + ۴y - ۱ = ۰$ برابر است با $-\frac{۳}{۴}$ و از نقطهٔ $(-۲,۴)$ می‌گذرد، پس

$$۴ = -\frac{۳}{۴}(-۲) + c \Rightarrow c = ۴ - \frac{۳}{۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴y + ۳x - ۱۰ = ۰$$

۱۲. شیب خط $-۲x - y + ۵ = ۰$ برابر است با -۲ و از نقطهٔ $(۰,۰)$ می‌گذرد، پس

$$y = -۲x$$

۱۳. الف) $y = -۳x - ۵ \Rightarrow y + ۳x + ۵ = ۰$

ب) $x + \frac{y}{۲} = ۱ \Rightarrow ۲x + y - ۲ = ۰$

۱۴. الف) $۳x - ۲y - ۷ = ۰ \Rightarrow ۲y = ۳x - ۷ \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - \frac{۷}{۲}$

ب) $\frac{x}{-۵} + \frac{y}{۲} = ۱ \Rightarrow -۲x + ۵y = ۱۰ \Rightarrow y = \frac{۲}{۵}x + ۲$

۱۵. الف) $y = ۳x - ۱ \Rightarrow y - ۳x = -۱ \Rightarrow ۳x - y = ۱ \Rightarrow \frac{x}{\frac{۱}{۳}} + \frac{y}{-۱} = ۱$

ب) $۳x + ۴y + ۵ = ۰ \Rightarrow ۳x + ۴y = -۵ \Rightarrow \frac{x}{-\frac{۵}{۳}} + \frac{y}{-\frac{۵}{۴}} = ۱$

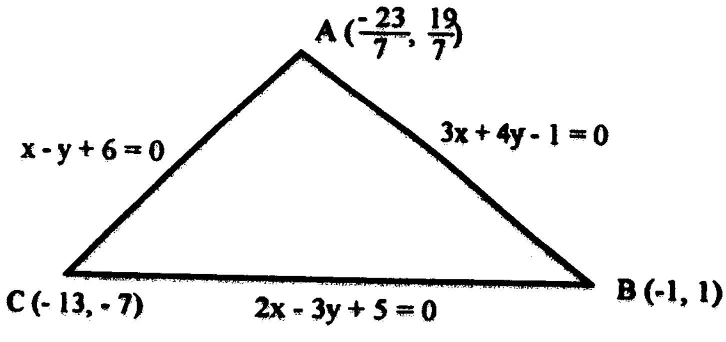
۱۶. شیب خط $۲x - y - ۳ = ۰$ برابر است با ۲ و شیب خط قائم $-\frac{۱}{۲}$ است. پس معادلهٔ مفروض به شکل $y = -\frac{۱}{۲}x + c$ است که از نقطهٔ $(۰, -۵)$ می‌گذرد.

$$c = -۵ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x - ۵ \Rightarrow ۲y + x + ۱۰ = ۰$$

۱۷. $m_۱ = m_۲$

۱۸. $m_۱ m_۲ = -۱$

۱۹.



شکل ۱۰۰

با توجه به شکل ۱۰۰، برای یافتن نقطهٔ تقاطع دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x - y + ۶ = ۰ \\ ۳x + ۴y - ۱ = ۰ \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} ۴x - ۴y + ۲۴ = ۰ \\ ۳x + ۴y - ۱ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۷x = -۲۳ \Rightarrow x = -\frac{۲۳}{۷} \Rightarrow y = x + ۶ = -\frac{۲۳}{۷} + ۶ = \frac{۱۹}{۷}$$

برای یافتن مختصات نقطهٔ B، دستگاه حاصل از دو معادلهٔ $۳x+۴y-۱=۰$ و $۲x-۳y+۵=۰$ را حل می‌کنیم. معادلهٔ اول را در ۳ و معادلهٔ دوم را در ۴ ضرب می‌کنیم و معادله‌های حاصل را باهم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} ۹x+۱۲y-۳=۰ \\ \underline{۸x-۱۲y+۲۰=۰} \\ ۱۷x=-۱۷ \Rightarrow x=-۱ \\ \Rightarrow ۴y=-۳x+۱=۳+۱=۴ \Rightarrow y=۱ \end{array}$$

با حل دستگاه حاصل از دو معادلهٔ $x-y+۶=۰$ و $۲x-۳y+۵=۰$، مختصات نقطهٔ C به‌دست می‌آید. معادلهٔ اول را در ۳- ضرب و با معادلهٔ دوم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} -۳x+۳y-۱۸=۰ \\ \underline{۲x-۳y+۵=۰} \\ -x-۱۳=۰ \Rightarrow x=-۱۳ \\ \Rightarrow -۱۳-y+۶=۰ \Rightarrow -y=۷ \Rightarrow y=-۷ \end{array}$$

بنابراین،

$$AB=\sqrt{\left(\frac{۱۹}{۷}-۱\right)^۲+\left(-\frac{۲۳}{۷}+۱\right)^۲}=\sqrt{۲/۹۴+۵/۲۲}=۲/۸۶$$

$$BC=\sqrt{(-۷-۱)^۲+(-۱۳+۱)^۲}=\sqrt{۶۴+۱۴۴}=۱۴/۴$$

$$AC=\sqrt{\left(\frac{۱۹}{۷}+۷\right)^۲+\left(-\frac{۲۳}{۷}+۱۳\right)^۲}=\sqrt{۹۴/۴+۹۴/۴}=۱۳/۷$$

در نتیجه محیط برابر است با

$$۲/۸۶+۱۴/۴+۱۳/۷=۳۰/۹۶\approx ۳۱$$

۲۰. الف)

$$۳x+۴y-۷=۰ \Rightarrow ۴y=-۳x+۷ \Rightarrow y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۷}{۴}$$

$$-x+۲y+۵=۰ \Rightarrow ۲y=x-۵ \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow m_۱=-\frac{۳}{۴},\ m_۲=\frac{۱}{۲}$$

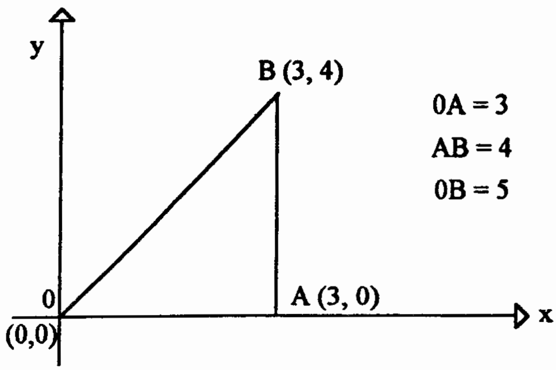
$$\theta=\tan^{-۱}\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۴}}{۱-\frac{۳}{۸}}=\tan^{-۱}\frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{۵}{۸}}=\tan^{-۱}۲=۶۳/۴^\circ$$

ب)
$$-x+3y-2=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$
$$2x+y+1=0 \Rightarrow y=-2x-1$$
$$\theta=\tan^{-1}\frac{(\frac{1}{3})+2}{1-(\frac{2}{3})}=\tan^{-1}\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}}=\tan^{-1}7 \Rightarrow \theta=81{,}9^\circ$$

ج)
$$4x-y-1=0 \Rightarrow y=4x-1 \Rightarrow m_2=4$$
$$2x+4y+7=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{4}x-\frac{7}{4} \Rightarrow m_1=-\frac{1}{2}$$
$$\theta=\tan^{-1}\frac{4+\frac{1}{2}}{1-2}=\tan^{-1}\frac{\frac{9}{2}}{-1}=\tan^{-1}-\frac{9}{2}=102{,}5^\circ$$

توجه کنید که اگر قرار دهیم
$$m_1=4\,,\ \ m_2=-\frac{1}{2}$$
آنگاه
$$\theta=\tan^{-1}\frac{-\frac{1}{2}-4}{1-2}=\tan^{-1}\frac{-\frac{9}{2}}{-1}=\tan^{-1}4{,}5=77{,}5^\circ$$

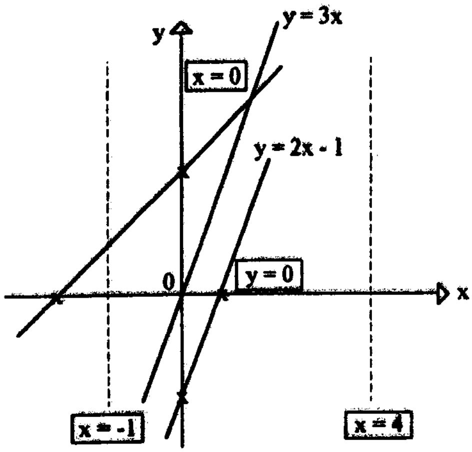
۲۱.



شکل۱۰۱

با توجه به شکل ۱۰۱، شیب OA برابر است با
$$\frac{0-0}{3-0}=0$$
و شیب AB برابر است با
$$\frac{4-0}{3-3}=\infty$$
بنابراین
$$OAB=90^\circ$$

۲۲. (شکل ۱۰۲ را ببینید.)



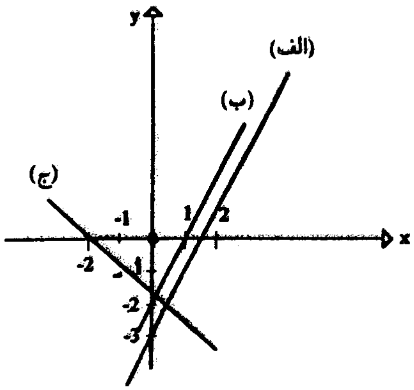
شکل۱۰۲

۲۳. $p = \pm\frac{۳(۲) - ۴(۳) - ۵}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \pm\frac{۶ - ۱۲ - ۵}{۵} \Rightarrow p = \frac{۱۱}{۵}$

۲۴. $p = \pm\frac{-۱ - ۴ - ۱}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \pm\left(-\frac{۶}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{۶\sqrt{۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲}$

۲۵. $p = \pm\frac{۰ + ۰ - ۵}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} \Rightarrow p = \frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

۲۶. الف) $x = ۰ \Rightarrow y = -۳$ و $y = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$



شکل۱۰۳

شیب خط برابر است با

$$m = \frac{۰ - (-۳)}{-۰ + \frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{\frac{۳}{۲}} = ۲$$

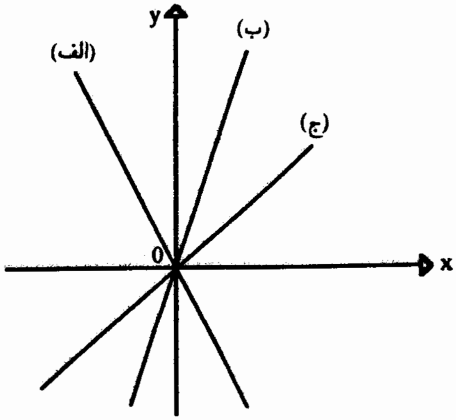
عرض از مبدأ ۳− است.

ب) $x = 0 \Rightarrow y = -2$ و $y = 0 \Rightarrow x = 1$

ج) $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$ و $y = 0 \Rightarrow x = -2$

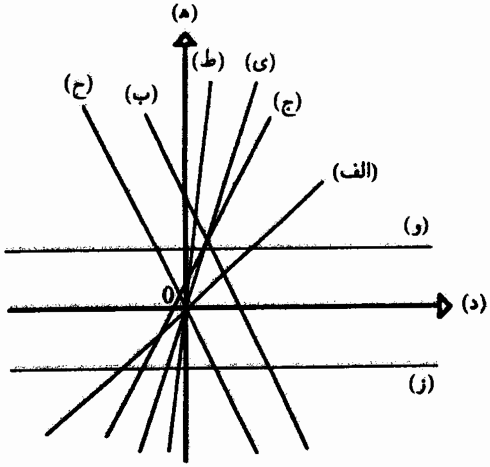
خطها در شکل ۱۰۳ رسم شده‌اند.

۲۷. (شکل ۱۰۴ را ببینید.)



شکل۱۰۴

۲۸. (شکل ۱۰۵ را ببینید.)



شکل۱۰۵

۲۹. شیب خط $y = x$ برابر با $m_1 = 1$ و شیب $y + x = 0$ برابر با $m_2 = -1$ است. بنابراین $m_1 m_2 = -1$، پس دو خط برهم عمودند.

۳۰. مختصات M، وسط پاره‌خط بین $A(-۵,۵)$ و $B(۳,۷)$ عبارت است از

$$M\left(\frac{-۵+۳}{۲},\frac{۵+۷}{۲}\right) \Rightarrow M(-۱,۶)$$

و مختصات N، وسط پاره‌خط بین $D(-۱,۵)$ و $C(۷,۷)$ عبارت است از

$$N\left(\frac{-۱+۷}{۲},\frac{۵+۷}{۲}\right) \Rightarrow N(۱,۶)$$

۳۱. داریم $A(۳,۱)$، $B(۳,۷)$، $C(۲۰,۷)$ و $D(۲۰,۱)$. شیب AB و شیب CD تعریف نشده‌اند. AB و CD قائم و با یکدیگر موازی‌اند. شیب AD برابر است با $\frac{۰}{۱۷}=۰$ و شیب BC برابر است با $۰=\frac{۰}{۱۷}=\frac{۷-۷}{۲۰-۳}$. AD با BC موازی است و هر دو افقی‌اند.

۳۲. شیب AB برابر است با $\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{۸}=\frac{۷-۵}{۳-(-۵)}$.

شیب CD برابر است با $\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{۸}=\frac{۷-۵}{۷-(-۱)}$.

بنابراین AB با CD موازی است.

شیب AD برابر است با $۰=\frac{۰}{۴}=\frac{۵-۵}{-۱-(-۵)}$.

شیب BC برابر است با $۰=\frac{۰}{۴}=\frac{۷-۷}{۷-۳}$.

پس AD و BC موازی‌اند. بنابراین چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

۳۳. الف) $(۰,۰)$ ب) $(۰,۰)$ ج) $\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ د) $(۲,۲/۵)$ هـ) $(۵,۶/۵)$

۳۴. الف) $\sqrt{(۳+۳)^۲+(۴+۴)^۲}=\sqrt{۳۶+۶۴}=۱۰$

ب) $\sqrt{(۱+۱)^۲+(۳+۳)^۲}=\sqrt{۴۰}$

ج) $\sqrt{(۳+۲)^۲+(-۴-۵)^۲}=\sqrt{۱۰۶}$

د) $\sqrt{۴^۲+۵^۲}=\sqrt{۴۱}$

هـ) $\sqrt{(۷-۳)^۲+(۹-۴)^۲}=\sqrt{۱۶+۲۵}=\sqrt{۴۱}$

۳۵. هرگاه خط $y=mx+c$ از نقطهٔ $(۱,۲)$ بگذرد، آنگاه

$$۲=(-۱)(۱)+c \Rightarrow c=۳ \Rightarrow y=-x+۳$$

۳۶. $$\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۵-۳}{۳-(-۲)}=\frac{۲}{۵}=m=\frac{y-y_۱}{x-x_۱}=\frac{y-۳}{x-(-۲)}$$

$$\Rightarrow \frac{y-۳}{x+۲}=\frac{۲}{۵},\ ۵y-۱۵=۲x+۴ \Rightarrow ۵y-۲x-۱۹=۰$$

۳۷. $$y=\frac{۱}{۲}x+c \Rightarrow -۳=\frac{۱}{۲}(-۲)+c \Rightarrow c=-۳+۱=-۲$$

$$\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-۲ \Rightarrow ۲y-x+۴=۰$$

۳۸. $\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=m=\frac{-۴(-۲)}{-۳-(۱)}=\frac{-۲}{-۴}=\frac{۱}{۲}$

خط $y=\frac{۱}{۲}x+c$ از نقطهٔ $(۱,-۲)$ می‌گذرد.

$$-۲=\frac{۱}{۲}+c\Rightarrow c=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۲y-x+۵=۰$$

۳۹. $p=\frac{y_۱+x_۱}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۴+۳}{\sqrt{۲}}=\frac{۷}{\sqrt{۲}}$

۴۰. $p_۱=\left|\frac{x_۱+y_۱-۳}{\sqrt{۲}}\right|=\left|\frac{-۲-۳}{\sqrt{۲}}\right|=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

$$p_۲=\frac{x_۱+y_۱+۵}{\sqrt{۲}}=\frac{-۲+۵}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۱. شیب خطهای $۳x+y-۷=۰$ و $۲x-y+۵=۰$ به‌ترتیب عبارت‌اند از ۳− و ۲. پس

$$\tan\theta=\frac{۲-(-۳)}{۱+(۲)(-۳)}=-\frac{۵}{۵}=-۱$$

پس زاویهٔ حادهٔ بین دو خط برابر است با ۴۵° و زاویهٔ منفرجهٔ بین آنها ۱۳۵° است.

۴۲. شیب خط $y=-۳x+۷$ برابر است با $m_۱=-۳$ و شیب خط $y=۲x+۵$ برابر است با $m_۲=۲$.

پس زاویهٔ حادهٔ بین دو خط برابر می‌شود با

$$\theta=\tan^{-۱}\frac{۲-(-۳)}{۱+۲(-۳)}=\tan^{-۱}(-۱)=۱۳۵^\circ$$

۴۳. $ax-y+۵=۰\Rightarrow y=ax+۵\Rightarrow m_۱=a$

$$۲ax+y+۸=۰\Rightarrow y=-۲ax-۸\Rightarrow m_۲=-۲a\Rightarrow\tan\theta=\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}$$

$$\Rightarrow\tan\theta=\frac{۱}{۲}=\frac{a-(-۲a)}{۱+a(-۲a)}=\frac{۳a}{۱-۲a^۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$۶a=۱-۲a^۲\Rightarrow ۲a^۲+۶a-۱=۰$$

$$\Rightarrow a=\frac{-۶\pm\sqrt{۳۶+۸}}{۴}=\frac{-۶\pm\sqrt{۴۴}}{۴}=\frac{-۳\pm\sqrt{۱۱}}{۲}$$

$$\Rightarrow a=۰/۱۵۸ \text{ یا } a=-۳/۱۵۸$$

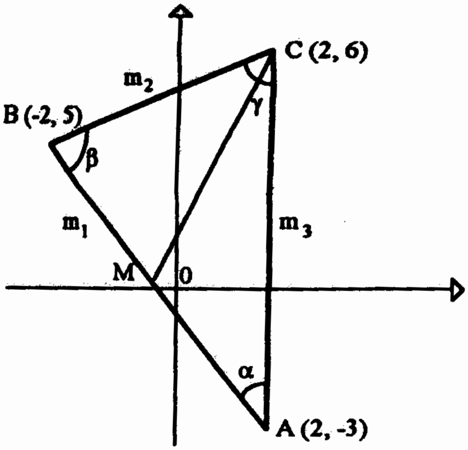
۴۴. $۲x+۴y=۳\Rightarrow ۴y=-۲x+۳\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۴}\Rightarrow m_۱=-\frac{۱}{۲}$

$$ax-y-۵=۰\Rightarrow y=ax-۵\Rightarrow m_۲=a$$

$$\Rightarrow\frac{m_۲-m_۱}{۱+m_۱m_۲}=\tan۷۵^\circ=۳/۷۳۲\Rightarrow\frac{a+۰/۵}{۱-۰/۵a}=۳/۷۳۲$$

$$\Rightarrow a+۰/۵=۳/۷۳۲-۱/۸۶۶a\Rightarrow ۲/۸۶۶a=۳/۲۳۲\Rightarrow a=\frac{۳/۲۳۲}{۲/۸۶۶}=۱/۱۲۸$$

.۴۵



شکل۱۰۶

با توجه به شکل ۱۰۶ داریم

$$AB : m_۱ = \frac{-۳-۵}{۲+۲} = -\frac{۸}{۴} = -۲$$

$$BC : m_۲ = \frac{۵-۶}{-۲-۲} = \frac{-۱}{-۴} = \frac{۱}{۴}$$

$$AC : m_۳ = \frac{۶-(-۳)}{۲-۲} \quad \text{(تعریف نشده)}$$

$$\tan\alpha = \frac{m_۱ - m_۳}{۱+m_۱m_۳} = \frac{\frac{m_۱}{m_۳} - ۱}{\frac{۱}{m_۳} + m_۱} = -\frac{۱}{m_۱} = \frac{-۱}{-۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha = ۲۶/۶^\circ$$

$$\tan\beta = \frac{m_۲ - m_۱}{۱+m_۱m_۲} = \frac{\frac{۱}{۴}-(-۲)}{۱+\frac{۱}{۴}(-۲)} = \frac{\frac{۹}{۴}}{\frac{۱}{۲}} = ۴/۵$$

$$\Rightarrow \beta = ۷۷/۵^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma = ۱۸۰^\circ - (۷۷/۵^\circ + ۲۶/۶^\circ) = ۷۵/۹^\circ$$

توجه کنید که

$$\tan\gamma = \frac{m_۳ - m_۲}{۱+m_۲m_۳} = \frac{۱ - \frac{m_۲}{m_۳}}{\frac{۱}{m_۳} + m_۲} = \frac{۱}{m_۲} = \frac{۱}{\frac{۱}{۴}} = ۴$$

$$\Rightarrow \gamma = ۷۵/۹^\circ$$

داریم

$$M\left(\frac{-۲+۲}{۲}, \frac{۵-۳}{۲}\right) = M(۰, ۱)$$

شیب CM برابر است با

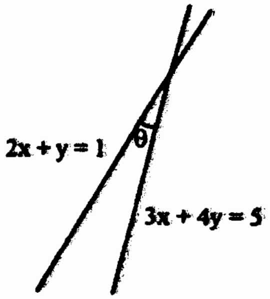
$$m = \frac{6-1}{2-0} = \frac{5}{2}$$

تانژانت زاویهٔ بین CM و AB عبارت است از

$$\tan \angle BMC = \frac{m_1 - \frac{5}{2}}{1 + m_1 \frac{5}{2}} \quad \text{یا} \quad \frac{-\frac{5}{2} - m_1}{1 + m_1 \frac{5}{2}} = \frac{-2 - \frac{5}{2}}{1 - 5} = \frac{-\frac{9}{2}}{-4} = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \angle BMC = 48/4^\circ$$

۴۶. الف) (شکل ۱۰۷ را ببینید).



شکل ۱۰۷

$$4y = -3x + 5 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{4}$$

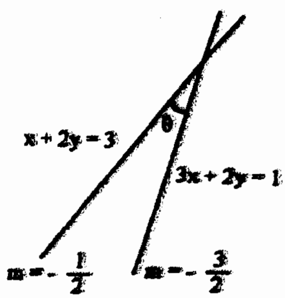
$$2x + y = 1 \Rightarrow y = -2x + 1 \Rightarrow m_2 = -2$$

بنابراین

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{3}{4} - (-2)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)(-2)} = \frac{\frac{5}{4}}{2/5} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 26/5650\,5118 = 26^\circ 34'$$

ب) (شکل ۱۰۸ را ببینید).



شکل ۱۰۸

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow \theta = 29^\circ 45'$$

ج)

$$-x + 5y = 7 \Rightarrow 5y = x + 7 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{5}$$

$$2x + 3y = 4 \Rightarrow 3y = -2x + 4 y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{1}{5} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 - \frac{2}{15}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = 1$$

$$\Rightarrow \theta = 45^\circ 0'$$

د)

$$5x + 4y = 3 \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow m_1 = -\frac{5}{4}$$

$$-2x + 3y = -4 \Rightarrow 3y = 2x - 4 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow m_2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{5}{4}\right)}{1 - \frac{10}{12}} = \frac{\frac{23}{12}}{\frac{2}{12}} = 11/5$$

$$\Rightarrow \theta = 85^\circ 2'$$

۴۷. هرگاه $\theta = 90^\circ$، مقدار $\tan\theta$ تعریف نشده است، پس در کسر $\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$، مخرج برابر با صفر است:

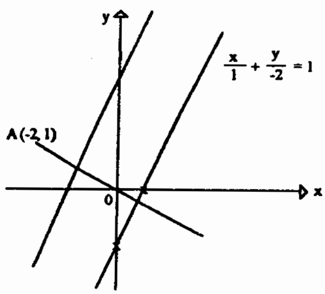
$$1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

۴۹.

$$m_1 = -\frac{1}{2},\ m_2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{4}$$

۵۰. (شکل ۱۰۹ را ببینید.)



شکل۱۰۹

$$x + \frac{y}{-۲} = ۱ \Rightarrow -۲x + y + ۲ = ۰ \Rightarrow y = ۲x - ۲$$

شیب خط مورد نظر با شیب خط $y = ۲x - ۲$ برابر است، پس $y = ۲x + c$ و چون از نقطهٔ $A(-۲, ۱)$ می‌گذرد، داریم $۱ = ۲(-۲) + c$ در نتیجه $c = ۵$، پس

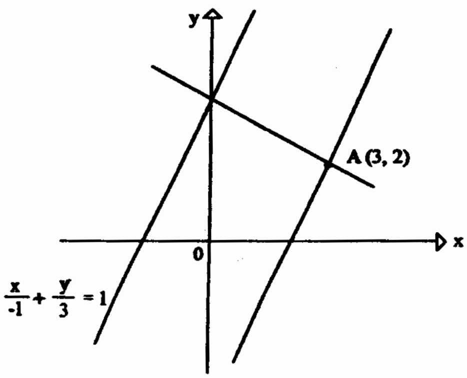
$$y = ۲x + ۵$$

شیب خط عمود بر این خط، $-\frac{۱}{۲}$ است.

در نتیجه، معادلهٔ این خط $y = -\frac{۱}{۲}x + c$ است و از نقطهٔ $A(-۲, ۱)$ می‌گذرد:

$$۱ = -\frac{۱}{۲}(-۲) + c \Rightarrow c = ۰ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x$$

۵۱. (شکل ۱۱۰ را ببینید.)



شکل ۱۱۰

$$\frac{x}{-۱} + \frac{y}{۳} = ۱ \Rightarrow -۳x + y - ۳ = ۰ \Rightarrow y = ۳x + ۳$$

معادلهٔ خط مورد نظر $y = ۳x + c$ است، و از نقطهٔ $A(۳, ۲)$ می‌گذرد:

$$۲ = ۹ + c \Rightarrow c = -۷ \Rightarrow y = ۳x - ۷$$

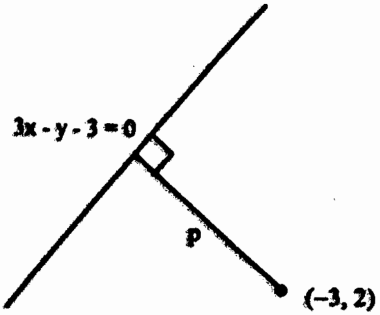
معادلهٔ خط عمود بر این خط $y = -\frac{۱}{۳}x + c$ است و از نقطهٔ $A(۳, ۲)$ می‌گذرد:

$$۲ = -۱ + c \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + ۳ \Rightarrow ۳y + x = ۹$$

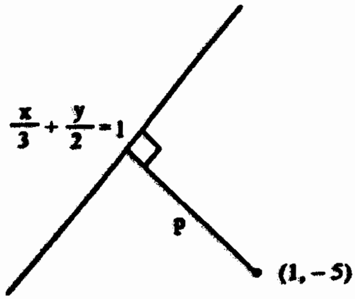
۵۲. (شکل ۱۱۱ را ببینید.)

$$\frac{x}{۳} + \frac{y}{۲} = ۱ \Rightarrow ۲x + ۳y - ۶ = ۰ \Rightarrow p = \left|\frac{۲x_۱ + ۳y_۱ - ۶}{\sqrt{۲^۲ + ۳^۲}}\right|$$

$$\Rightarrow p = \left|\frac{۲(۱) + ۳(-۵) - ۶}{\sqrt{۱۳}}\right| = \frac{۱۹}{\sqrt{۱۳}} = ۵/۲۷$$



شکل ۱۱۲

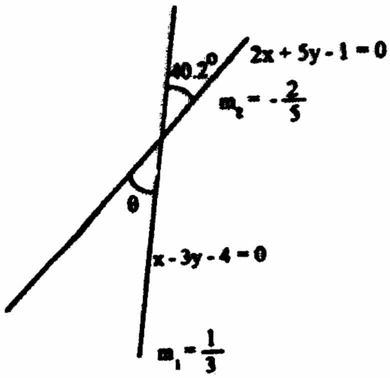


شکل ۱۱۱

۵۳. (شکل ۱۱۲ را ببینید.)

$$p = \left|\frac{۳(-۳) - ۲ - ۳}{\sqrt{۳^۲ + ۱^۲}}\right| = \frac{۱۴}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow p = ۴,۴۳$$

۵۴. (شکل ۱۱۳ را ببینید.)



شکل۱۱۳

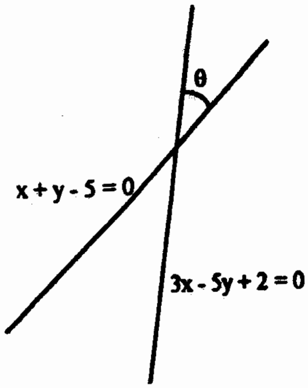
$$\theta = \tan^{-۱} \frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲} = \tan^{-۱} \frac{\frac{۱}{۳} - \left(-\frac{۲}{۵}\right)}{۱ + \frac{۱}{۳}\left(-\frac{۲}{۵}\right)} = \tan^{-۱} \frac{\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۵}}{۱ - \frac{۲}{۱۵}}$$

$$= \tan^{-۱} \frac{\frac{۱۱}{۱۵}}{\frac{۱۳}{۱۵}} = \tan^{-۱} \frac{۱۱}{۱۳} = ۴۰,۲^{\circ}$$

بنابراین

$$۵y = -۲x + ۱ \Rightarrow y = -\frac{۲}{۵}x + \frac{۱}{۵} \Rightarrow ۳y = x - ۴ \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x - \frac{۴}{۳}$$

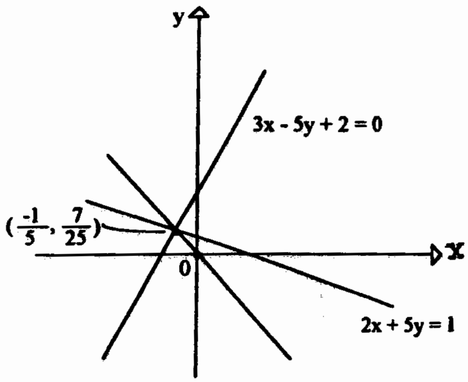
۵۵. (شکل ۱۱۴ را ببینید.)



شکل۱۱۴

$$x+y-۵=۰ \Rightarrow y=-x+۵ \Rightarrow m_۱=-۱$$
$$۳x-۵y+۲=۰ \Rightarrow ۵y=۳x+۲ \Rightarrow y=\frac{۳}{۵}x+\frac{۲}{۵} \Rightarrow m_۲=\frac{۳}{۵}$$
$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{\frac{۳}{۵}-(-۱)}{۱+\frac{۳}{۵}(-۱)}=\frac{\frac{۳}{۵}+۱}{\frac{۲}{۵}}=\frac{\frac{۸}{۵}}{\frac{۲}{۵}}=۴$$
$$\Rightarrow \theta=\tan^{-۱}۴=۷۶^\circ$$

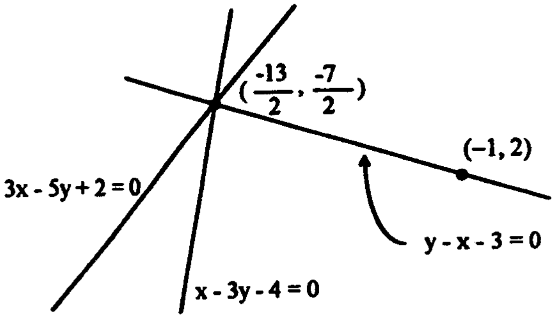
۵۶. (شکل ۱۱۵ را ببینید.)



شکل۱۱۵

$$\begin{cases} ۳x-۵y=-۲ \\ ۲x+۵y=۱ \end{cases} \Rightarrow ۵x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۵}$$
$$\Rightarrow ۳\left(-\frac{۱}{۵}\right)-۵y=-۲ \Rightarrow -\frac{۳}{۵}+۲=۵y$$
$$\Rightarrow y=\frac{\frac{۷}{۵}}{۵}=\frac{۷}{۲۵} \Rightarrow y=\frac{\frac{۷}{۲۵}x}{-\frac{۱}{۵}}=-\frac{۷}{۵}x \Rightarrow y=-\frac{۷}{۵}x$$

۵۷. (شکل ۱۱۶ را ببینید.)



شکل۱۱۶

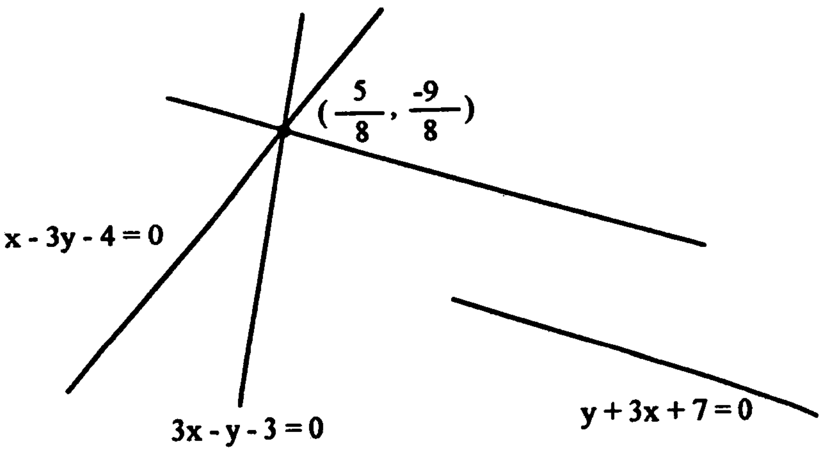
$$\begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ 3x - 5y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 9y - 12 = 0 \\ 3x - 5y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4y + 14 = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow x = 3\left(-\frac{7}{2}\right) + 4 = -\frac{21}{2} + 4 = -\frac{13}{2} \Rightarrow \frac{2 - \left(-\frac{7}{2}\right)}{-1 - \left(-\frac{13}{2}\right)} = \frac{y - \left(-\frac{7}{2}\right)}{x - \left(-\frac{13}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{2}} = \frac{y + \frac{7}{2}}{x + \frac{13}{2}} = 1 \Rightarrow y + \frac{7}{2} = x + \frac{13}{2} \Rightarrow y - x - 3 = 0$$

۵۸. (شکل ۱۱۷ را ببینید.)



شکل۱۱۷

$$\begin{cases} x-۳y-۴=۰ \\ ۳x-y-۳=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x-۹y-۱۲=۰ \\ -۳x+y+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow ۸y+۹=۰ \Rightarrow y=-\frac{۹}{۸}$$

$$\Rightarrow x=۳y+۴=-\frac{۲۷}{۸}+۴=\frac{۵}{۸}$$

اکنون می‌خواهیم معادلهٔ خطی را بنویسیم که با $y=-۳x-۷$ موازی باشد و از نقطهٔ $\left(\frac{۵}{۸}, \frac{-۹}{۸}\right)$ بگذرد:

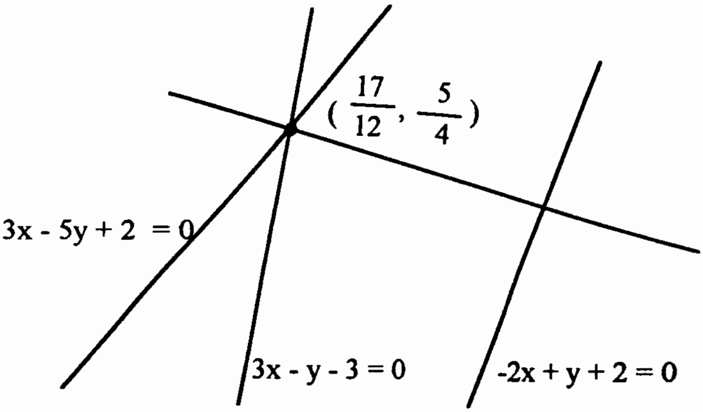
$$y=-۳x+c$$

$$\frac{-۹}{۸}=-۳\left(\frac{۵}{۸}\right)+c \Rightarrow c=\frac{-۹}{۸}+\frac{۱۵}{۸}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$$

پس معادلهٔ خط مطلوب عبارت است از

$$y=-۳x+\frac{۳}{۴} \Rightarrow ۴y+۱۲x=۳$$

۵۹. (شکل ۱۱۸ را ببینید.)



شکل۱۱۸

$$\begin{cases} ۳x-y-۳=۰ \\ ۳x-۵y+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow ۴y=۵ \Rightarrow y=\frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow ۳x=\frac{۵}{۴}+۳=\frac{۱۷}{۴} \Rightarrow x=\frac{۱۷}{۱۲}$$

اکنون می‌خواهیم معادلهٔ خطی را بنویسیم که بر خط $y=۲x-۲$ عمود باشد و از نقطهٔ $\left(\frac{۱۷}{۱۲}, \frac{۵}{۴}\right)$ بگذرد. شیب این خط $-\frac{۱}{۲}$ است:

$$y=-\frac{۱}{۲}x+c$$

$$\frac{۵}{۴}=-\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۷}{۱۲}\right)+c \Rightarrow c=\frac{۵}{۴}+\frac{۱۷}{۲۴}=\frac{۴۷}{۲۴}$$

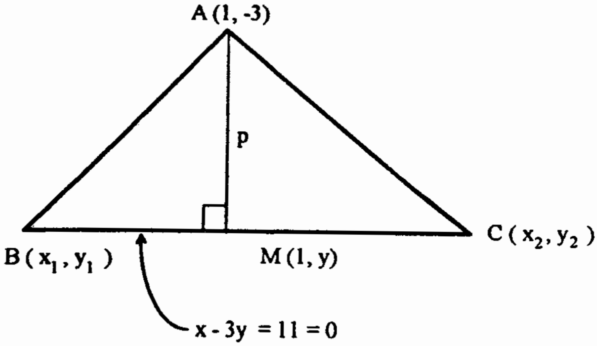
پس معادلهٔ خط مطلوب عبارت است از

$$y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۴۷}{۲۴}$$

یا

$$۲۴y + ۱۲x = ۴۷$$

۶۰. (شکل ۱۱۹ را ببینید.)



شکل۱۱۹

خط $x - ۳y + ۱۱ = ۰$ از نقطهٔ M می‌گذرد. پس

$$۱ - ۳y + ۱۱ = ۰ \Rightarrow y = ۴$$

پس مختصات M، عبارت است از $(۱, ۴)$. چون M وسط BC است، داریم

$$\frac{x_۱ + x_۲}{۲} = ۱ \ , \quad \frac{y_۱ + y_۲}{۲} = ۴ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۲ \ , \quad y_۱ + y_۲ = ۸$$

برای محاسبهٔ شیب خط $x - ۳y + ۱۱ = ۰$، می‌نویسیم

$$y = \frac{۱}{۳}x + \frac{۱۱}{۳} \Rightarrow m = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow (y_۲ - y_۱)^۲ = \frac{۱}{۳^۲}(x_۲ - x_۱)^۲ \Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}p(BC) = ۲۱$$

معادلهٔ عمودی که از $A(۱, -۳)$ بر BC رسم می‌شود، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$p = \pm\frac{x_۱ - ۳y_۱ + ۱۱}{\sqrt{۱^۲ + ۳^۲}} = \pm\frac{۱ - ۳(-۳) + ۱۱}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow p = \pm\frac{۱ + ۹ + ۱۱}{\sqrt{۱۰}} = \pm\frac{۲۱}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow p = \frac{۲۱}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲۱}{\sqrt{۱۰}} \times BC = ۲۱ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۰}$$

$$(y_۲ - y_۱)^۲ + (x_۲ - x_۱)^۲ = (۲\sqrt{۱۰})^۲ \Rightarrow (y_۲ - y_۱)^۲ + (x_۲ - x_۱)^۲ = ۴۰$$

ولی داریم

$$(y_۲ - y_۱)^۲ = \frac{۱}{۹}(x_۲ - x_۱)^۲$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۹}(x_۲ - x_۱)^۲ + (x_۲ - x_۱)^۲ = ۴۰ \Rightarrow (x_۲ - x_۱)^۲ = \frac{۴۰}{\frac{۱۰}{۹}} = ۳۶ \Rightarrow x_۲ - x_۱ = \pm ۶$$

اگر $۶ = x_۲ - x_۱$ و $۲ = x_۱ + x_۲$، آنگاه

$$\Rightarrow ۲x_۲ = ۸ \Rightarrow x_۲ = ۴ \Rightarrow x_۲ - x_۱ = ۴ - x_۱ = ۶ \Rightarrow x_۱ = -۲$$

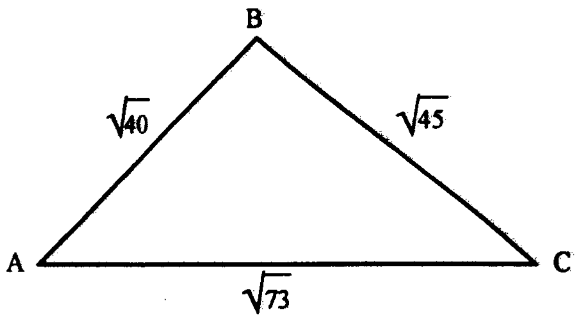
$$\Rightarrow (y_۲ - y_۱)^۲ = \frac{۱}{۹} \times ۳۶,\ y_۲ - y_۱ = \frac{۶}{۳} = ۲$$

از آنجا که $y_۱ + y_۲ = ۸$ نتیجه می‌شود:

$$y_۲ = ۵ \Rightarrow y_۱ + ۵ = ۸ \Rightarrow y_۱ = ۳$$

بنابراین، $B(-۲,۳)$ و $C(۴,۵)$.

۶۱. (شکل ۱۲۰ را ببینید.)



شکل ۱۲۰

از قانون کسینوسها استفاده می‌کنیم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$$

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲bc\cos B$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C$$

$$\cos A = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc} = \frac{۷۳ + ۴۰ - ۴۵}{۲\sqrt{۷۳} \times \sqrt{۴۰}} \Rightarrow A = ۵۱^\circ$$

$$\cos B = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac} = \frac{۴۵ + ۴۰ - ۷۳}{۲\sqrt{۴۵} \times \sqrt{۴۰}} \Rightarrow B = ۸۱{,}۹^\circ$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود

$$C = ۱۸۰^\circ - (۵۱^\circ + ۸۱{,}۹^\circ) = ۴۷{,}۱^\circ$$

$$\text{مساحت} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \Delta$$

$$s = \frac{a+b+c}{۲} = \frac{\sqrt{۴۵}+\sqrt{۴۰}+\sqrt{۷۳}}{۲} = ۱۰{,}۸$$

$$s-a = ۱۰{,}۸ - \sqrt{۴۵} = ۴۰{,}۰۹$$

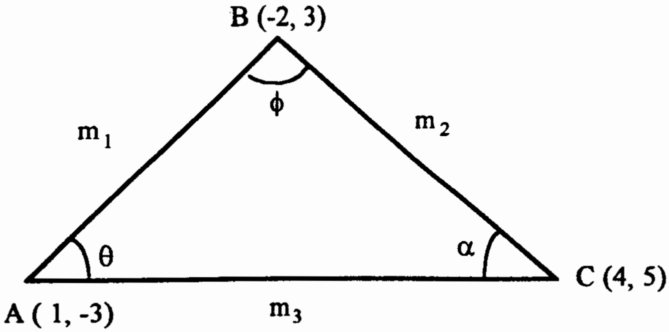
$$s-b = ۱۰{,}۸ - \sqrt{۷۳} = ۲{,}۲۶$$

$$s-c = ۱۰{,}۸ - \sqrt{۴۰} = ۴{,}۴۸$$

بنابراین،

$$\Delta = \sqrt{۱۰{,}۸ \times ۴{,}۰۹ \times ۲{,}۲۶ \times ۴{,}۴۸} = ۲۱{,}۱۵ \Rightarrow \Delta \approx ۲۱$$

۶۲. (شکل ۱۲۱ را ببینید.)



شکل۱۲۱

شیب AB برابر است با

$$m_۱ = \frac{۳-(-۳)}{-۲-۱} = -\frac{۶}{۳} = -۲$$

شیب BC برابر است با

$$m_۲ = \frac{۳-۵}{-۲-۴} = \frac{-۲}{-۴} = \frac{۱}{۳}$$

شیب AC برابر است با

$$m_۳ = \frac{۵-(-۳)}{۴-۱} = \frac{۸}{۳}$$

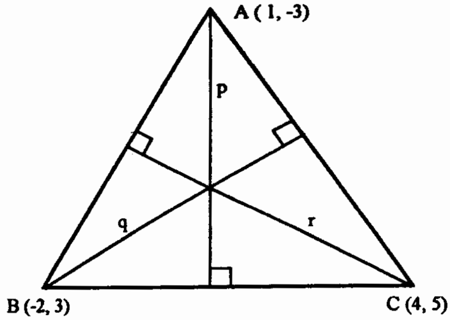
بنابراین

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{m_۱ - m_۳}{۱+m_۱ m_۳} = \tan^{-۱}\frac{-۲-\frac{۸}{۳}}{۱+\frac{۸}{۳}(-۲)} = \tan^{-۱}\frac{-\frac{۱۴}{۳}}{-\frac{۱۳}{۳}} = \tan^{-۱}\frac{۱۴}{۱۳} = ۴۷{,}۱^\circ$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{3} - (-2)}{1 + \frac{1}{3}(-2)} = \tan^{-1} \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} = \tan^{-1} 7 = 81{,}9^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - (81{,}9^\circ + 47{,}1^\circ) = 51^\circ$$

۶۳. (شکل ۱۲۲ را ببینید.)



شکل۱۲۲

معادلهٔ BC عبارت است از

$$\frac{y-5}{x-4} = \frac{3-5}{-2-4}, \quad -6y + 30 = -2x + 8 \Rightarrow x - 3y + 11 = 0$$

$$p = \pm \frac{x_1 - 3y_1 + 11}{\sqrt{1 + 3^2}} = \pm \frac{1 - 3(-3) + 11}{\sqrt{10}} \Rightarrow p = \frac{21}{\sqrt{10}}$$

معادلهٔ AC عبارت است از

$$\frac{y-5}{x-4} = \frac{-3-5}{1-4}, \quad -3y + 15 = -8x + 32 \Rightarrow 8x - 3y - 17 = 0$$

$$q = \pm \frac{8x_1 - 3y_1 - 17}{\sqrt{8^2 + 3^2}} = \pm \frac{8(-2) - 3(3) - 17}{\sqrt{73}} \Rightarrow q = \frac{42}{\sqrt{73}}$$

معادلهٔ AB عبارت است از

$$\frac{y-3}{x+2} = \frac{-3-3}{1-(-2)} = -\frac{6}{3} = -2 \Rightarrow y - 3 = -2x - 4 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0$$

$$r = \pm \frac{2x_1 + y_1 + 1}{\sqrt{2^2 + 1}} = \pm \frac{2(4) + 5 + 1}{\sqrt{5}} \Rightarrow r = \frac{14}{\sqrt{5}}$$

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}p(BC) = \frac{1}{2}q(AC) = \frac{1}{2}r(AB) = \frac{1}{2} \times \frac{21}{\sqrt{10}}\sqrt{40} = \frac{1}{2}\frac{42}{\sqrt{73}}\sqrt{73}$$

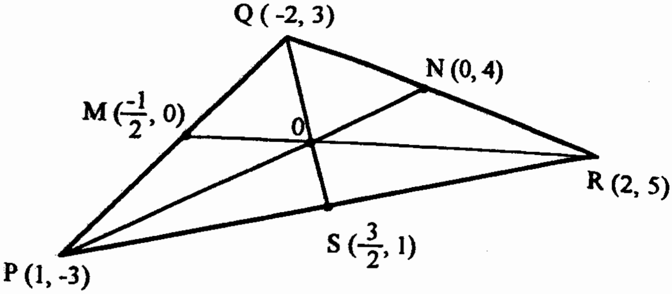
$$= \frac{1}{2}\frac{14}{\sqrt{5}}\sqrt{45} = 21$$

$$BC = \sqrt{(4+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{40}$$

$$AC = \sqrt{(5+3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$$

$$AB = \sqrt{(3+3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45}$$

۶۴. (شکل ۱۲۳ را ببینید.)



شکل۱۲۳

$$M\left(\frac{۱-۲}{۲}, \frac{-۳+۳}{۲}\right) \equiv M\left(-\frac{۱}{۲}, ۰\right)$$

$$N\left(\frac{-۲+۲}{۲}, \frac{۳+۵}{۲}\right) \equiv N(۰, ۴)$$

$$S\left(\frac{۱+۲}{۲}, \frac{-۳+۵}{۲}\right) \equiv S\left(\frac{۳}{۲}, ۱\right)$$

میانه‌های RM، PN و QS در O همرس‌اند. معادلهٔ RM عبارت است از

$$\frac{y-۵}{x-۲} = \frac{۰-۵}{-\frac{۱}{۲}-۲} \Rightarrow (y-۵)\left(-\frac{۵}{۲}\right) = -۵(x-۲)$$

$$\Rightarrow -\frac{۵}{۲}y + \frac{۲۵}{۲} = -۵x + ۱۰ \quad \text{یا} \quad -۵y + ۲۵ = -۱۰x + ۲۰$$

$$\Rightarrow ۵y - ۱۰x - ۵ = ۰ \Rightarrow y - ۲x - ۱ = ۰ \qquad (۱)$$

معادلهٔ PN عبارت است از

$$\frac{y-(-۳)}{x-۱} = \frac{۴-(-۳)}{۰-۱} \Rightarrow (y+۳)(-۱) = ۷(x-۱)$$

$$\Rightarrow -y - ۳ - ۷x + ۷ = ۰ \Rightarrow y + ۷x - ۴ = ۰ \qquad (۲)$$

معادلهٔ QS عبارت است از

$$\frac{y-۱}{x-\frac{۳}{۲}} = \frac{۳-۱}{-۲-\frac{۳}{۲}} \Rightarrow (y-۱)\left(-\frac{۷}{۲}\right) = ۲\left(x-\frac{۳}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow -۷y + ۷ = ۴x - ۶ \Rightarrow ۴x + ۷y - ۱۳ = ۰ \qquad (۳)$$

معادله‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$۹x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$$

$$y - \frac{۷}{۳} - ۴ = ۰ \Rightarrow y = \frac{۵}{۳}$$

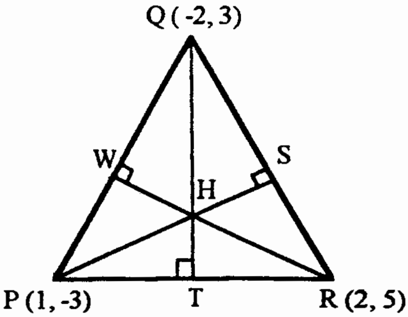
معادله‌های (۲) و (۳) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$۴۵x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳} \quad , \quad y = \frac{۵}{۳}$$

مختصات نقطهٔ برخورد O عبارت است از $O\left(\frac{۱}{۳}, \frac{۵}{۳}\right)$. توجه کنید که O مرکزثقل مثلث است و مختصات O را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$O\left(\frac{۱-۲+۲}{۳}, \frac{-۳+۳+۵}{۳}\right)$$

اکنون با توجه به شکل ۱۲۴ معادلهٔ ارتفاعهای مثلث را به‌دست می‌آوریم.



شکل۱۲۴

شیب QR عبارت است از

$$\frac{۳-۵}{-۲-۲} = \frac{-۲}{-۴} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین شیب PS برابر با ۲− است زیرا بر QR عمود است. پس معادلهٔ PS به شکل $y = -۲x + c$ است و داریم

$$P(۱, -۳) \Rightarrow -۳ = -۲(۱) + c \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow y = -۲x - ۱$$

شیب PQ عبارت است از

$$\frac{-۳-۳}{۱+۲} = \frac{-۶}{۳} - ۲$$

بنابراین شیب RW برابر با $\frac{۱}{۲}$ است. پس معادلهٔ RW به شکل زیر است:

$$y = \frac{۱}{۲}x + c$$

$$\Rightarrow R(۲, ۵) \Rightarrow ۵ = ۱ + c \Rightarrow c = ۴ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x + ۴$$

شیب PR عبارت است از

$$\frac{-۳-۵}{۱-۲}=\frac{-۸}{-۱}=۸$$

بنابراین شیب QT برابر با $-\frac{۱}{۸}$ است. معادلهٔ QT به شکل زیر است:

$$y=-\frac{۱}{۸}x+c$$

$$\Rightarrow Q(-۲,۳)\Rightarrow ۳=-\frac{۱}{۸}(-۲)+c\Rightarrow c=\frac{۱۱}{۴}\Rightarrow y=-\frac{۱}{۸}x+\frac{۱۱}{۴}$$

بنابراین معادلات ارتفاعهای PS، RW و QT به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$۲x+y+۱=۰ \qquad (۱)$$

$$x-۲y+۸=۰ \qquad (۲)$$

$$x+۸y-۲۲=۰ \qquad (۳)$$

معادله‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}۴x+۲y+۲=۰\\ x-۲y+۸=۰\end{cases}\Rightarrow ۵x=-۱۰\Rightarrow x=-۲\Rightarrow y=۳$$

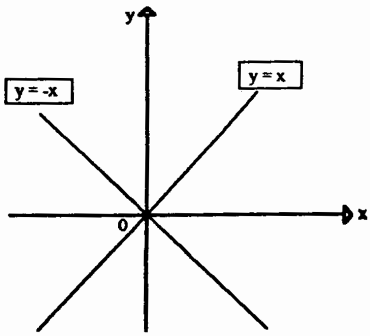
معادله‌های (۲) و (۳) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}۴x-۸y+۳۲=۰\\ x+۸y-۲۲=۰\end{cases}\Rightarrow ۵x+۱۰=۰\Rightarrow x=-۲\Rightarrow y=۳$$

بنابراین محل برخورد ارتفاعها یا مرکز ارتفاعی، $H(-۲,۳)$ است.

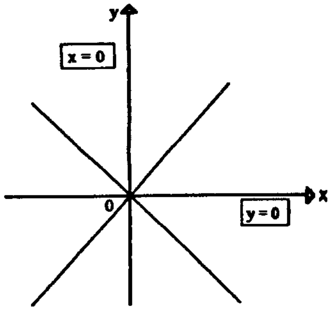
۶۵. $p=\pm\frac{ax_۱+by_۱+c}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

۶۶. (شکل ۱۲۵ را ببینید.)



شکل۱۲۵

۶۷. (شکل ۱۲۶ را ببینید.)



شکل۱۲۶

$$x - y = \pm(y + x) \Rightarrow x - y = y + x \Rightarrow y = ۰$$

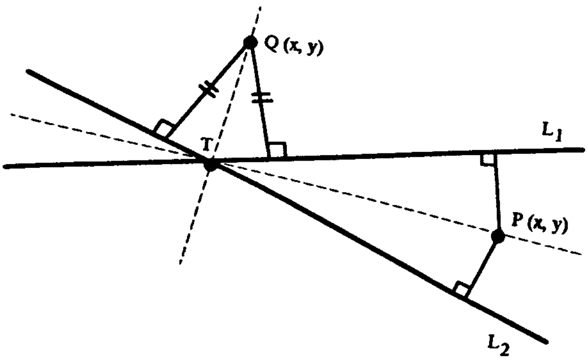
$$x - y = -(y + x) \Rightarrow x = ۰$$

۶۸. $\frac{۳x - ۴y - ۲}{\sqrt{(۳)^۲ + (-۴)^۲}} = \pm\frac{۵x + ۱۲y - ۱}{\sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲}} \Rightarrow ۱۳(۳x - ۴y - ۲) = \pm۵(۵x + ۱۲y - ۱)$

$$۳۹x - ۵۲y - ۲۶ = ۲۵x + ۶۰y - ۵ \Rightarrow ۱۴x - ۱۱۲y - ۲۱ = ۰$$

$$۳۹x - ۵۲y - ۲۶ = -۲۵x - ۶۰y + ۵ \Rightarrow ۶۴x + ۸y - ۳۱ = ۰$$

۶۹.



شکل۱۲۷

به شکل ۱۲۷ توجه کنید. هرگاه $Q(x,y)$ نقطه‌ای روی نیمساز خطوط $L_۱$ و $L_۲$ باشد، فاصلهٔ آن تا هر دو خط باهم برابر است. پس معادلهٔ نیمسازهای خطهای $L_۱$ و $L_۲$ عبارت‌اند از

$$\frac{a_۱x + b_۱y + c_۱}{\sqrt{a_۱^۲ + b_۱^۲}} = \pm\frac{a_۲x + b_۲y + c_۲}{\sqrt{a_۲^۲ + b_۲^۲}}$$

۷۰. هرگاه T نقطهٔ برخورد خطها باشد، معادلهٔ مطلوب عبارت است از

$$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

در اینجا k مقدار ثابتی است.

۷۱. $x+y+3=k(2x-y-6)=0 \Rightarrow x(1-2k)+y(1+k)+3+6k=0$

حل تمرین فصل ۲

۱. $x=2\cos\theta \ , \ y=2\sin\theta \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1=\cos^2\theta+\sin^2\theta \Rightarrow x^2+y^2=4$

۲. $x=5\cos\theta \ , \ y=5\sin\theta \Rightarrow \left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{5}\right)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \Rightarrow x^2+y^2=25$

۳. $x^2+y^2=49$

۴. $r=2$ و $C(0,0)$

۵.
$$C(-g,-f) \quad , \quad r=\sqrt{g^2+f^2-c}$$
$$\Rightarrow (x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c \Rightarrow x^2+2gx+g^2+y^2+2yf+f^2=g^2+f^2-c$$
$$\Rightarrow x^2+2gx+y^2+2yf+c=0$$

۶.
$$x=0\ ,\ y=0\ ,\ c=0$$
$$x=-1\ ,\ y=5 \Rightarrow 1-2g+25+10f=0 \Rightarrow -2g+10f=-26 \qquad (1)$$
$$x=3\ ,\ y=4 \Rightarrow 9+6g+16+8f=0$$
$$\Rightarrow 6g+8f=-25 \qquad (2)$$

۳ برابر معادلهٔ (۱) را با معادلهٔ (۲) در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}-6g+30f=-78\\ 6g+8f=-25\end{cases} \Rightarrow 38f=-103 \Rightarrow f=-\frac{103}{38}$$
$$\Rightarrow -2g=-10\left(-\frac{103}{38}\right)-26=\frac{1030}{38}-26=\frac{42}{38} \Rightarrow g=-\frac{21}{38}$$
$$\Rightarrow x^2-\frac{42}{38}x+y^2-\frac{206}{38}y=0 \Rightarrow 38x^2-42x+38y^2-206y=0$$
$$\Rightarrow 19x^2-21x+19y^2-103y=0$$

۷.
$$x^2+2gx+y^2+2fy+c=0$$
$$(0,5)\ :\ 25+10f+c=0 \qquad (1)$$
$$(7,0)\ :\ 49+14g+c=0 \qquad (2)$$

$$(-۴,-۵)\ :\ ۱۶-۸g+۲۵-۱۰f+c=۰ \qquad (۳)$$

$$(۲)-(۱)\ :\ ۲۴+۱۴g-۱۰f=۰ \qquad (۴)$$

$$(۲)-(۳)\ :\ ۸+۲۲g+۱۰f=۰ \qquad (۵)$$

$$(۴)+(۵)\ :\ ۳۶=-۳۲\Rightarrow g=-\frac{۸}{۹}$$

با جایگذاری این مقدار در (۵) حاصل می‌شود:

$$۸-\frac{۸}{۹}\times ۲۲+۱۰f=۰\Rightarrow ۱۰f=-۸+\frac{۱۷۶}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱۰f=\frac{-۷۲+۱۷۶}{۹}=\frac{۱۰۴}{۹}\Rightarrow f=\frac{۱۰٫۴}{۰}=۱٫۱۶$$

$$\Rightarrow ۲۵+۱۰(۱٫۱۶)+c=۰\Rightarrow c=-۲۵-۱۱٫۶ \quad \text{یا} \quad c=-۳۶٫۶$$

$$\Rightarrow x^۲-\frac{۱۶}{۹}x+y^۲+۲٫۳۲y-۳۶٫۶=۰\Rightarrow x^۲-۱٫۷۸x+y^۲+۲٫۳۲-۳۶٫۶=۰$$

۸. $x^۲+(y-۶)^۲=۴^۲$

۹. $(x-۳)^۲+(y-۲)^۲=r^۲$

این منحنی از نقطهٔ $(۰,۵)$ می‌گذرد.

$$(۰-۳)^۲+(۵-۲)^۲=r^۲=۹+۹=۱۸\Rightarrow r=۳\sqrt{۲}$$

$$x^۲-۶x+۹+y^۲-۴y+۴=۱۸\Rightarrow x^۲-۶x+y^۲-۴y-۵=۰$$

۱۰. الف) $x^۲+(y-۳)^۲=۳^۲$ ب) $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۲^۲$

ج) $(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۱^۲$

۱۱. $x^۲+x+y^۲+۲y+۱=۰$

این عبارت را به شکل مربع کامل می‌نویسیم:

$$\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲-\frac{۱}{۴}+(y+۱)^۲-۱+۱=۰$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+(y+۱)^۲=\frac{۱}{۲^۲}\Rightarrow C\left(-\frac{۱}{۲},-۱\right),\ r=\frac{۱}{۲}$$

۱۲. $۴x^۲+۵x+۴y^۲+۳y-\frac{۱۱۱}{۸}=۰\Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۴}x+y^۲+\frac{۳}{۴}y-\frac{۱۱۱}{۳۲}=۰$

این عبارت را به شکل مربع کامل می‌نویسیم:

$$\left(x+\frac{۵}{۸}\right)^۲-\frac{۲۵}{۶۴}+\left(y+\frac{۳}{۸}\right)^۲-\frac{۹}{۶۴}-\frac{۱۱۱}{۳۲}=۰$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{۵}{۸}\right)^۲+\left(y+\frac{۳}{۸}\right)^۲=۲^۲\Rightarrow C\left(-\frac{۵}{۸},-\frac{۳}{۸}\right),\ r=۲$$

.۱۳

$$x^{۲}+y^{۲}-۴x-۶y+۱۲=۰ \qquad (۱)$$

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y-۲=۰ \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۱) را از (۲) کم می‌کنیم:

$$۲x+۴y=۱۴ \Rightarrow x+۲y=۷ \Rightarrow x=۷-۲y \Rightarrow (۷-۲y)^{۲}+y^{۲}-۴(۷-۲y)-۶y+۱۲=۰$$

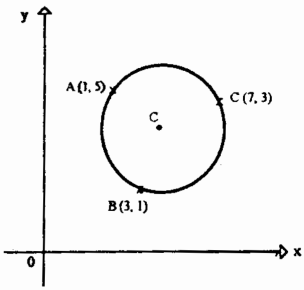
$$\Rightarrow ۴۹-۲۸y+۴y^{۲}+y^{۲}-۲۸+۸y-۶y+۱۲=۰ \Rightarrow ۵y^{۲}-۲۶y+۳۳=۰$$

$$\Rightarrow y=\frac{۲۶\pm\sqrt{۲۶^{۲}-۴\times۵\times۳۳}}{۱۰}=\frac{۲۶\pm۴}{۱۰} \Rightarrow y=۳ \quad \text{یا} \quad y=۲/۲$$

$$\Rightarrow x=۷-۶=۱ \quad \text{یا} \quad x=۷-۴/۴=۲/۶$$

پس مختصات نقاط برخورد عبارت‌اند از (۱,۳) و (۲/۶,۲/۲).

۱۴. (شکل ۱۲۸ را ببینید.)



شکل۱۲۸

$$x^{۲}+y^{۲}+۲gx+۲fy+c=۰$$

$$A(۱,۵)\ :\ ۱+۲۵+۲g+۱۰f+c=۰ \qquad (۱)$$

$$B(۳,۱)\ :\ ۹+۱+۶g+۲f+c=۰ \qquad (۲)$$

$$C(۷,۳)\ :\ ۴۹+۹+۱۴g+۶f+c=۰ \qquad (۳)$$

معادلهٔ (۱) را از (۲) کم می‌کنیم:

$$۴g-۸f=۱۶ \Rightarrow g-۲f=۴ \qquad (۴)$$

معادلهٔ (۲) را از (۳) کم می‌کنیم:

$$۸g+۴f=-۴۸ \quad \text{یا} \quad ۲g+f=-۱۲ \qquad (۵)$$

حاصل را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲g - ۴f = ۸ \\ ۲g + f = -۱۲ \end{cases} \Rightarrow ۵f = -۲۰ \Rightarrow f = -۴$$

$$g - ۲f = ۴ \Rightarrow g + ۸ = ۴ \Rightarrow g = -۴$$

$$۲g + ۱۰f + c = -۲۶ \Rightarrow -۸ - ۴۰ + c = -۲۶ \Rightarrow c = ۲۲$$

$$C(۴, ۴),\ r = \sqrt{g^۲ + f^۲ - c} = \sqrt{۱۶ + ۱۶ - ۲۲} = \sqrt{۱۰}$$

.۱۵
$$x^۲ + y^۲ = ۹$$

$$(۳\cos\theta)^۲ + (۳\sin\theta)^۲ = ۹\cos^۲\theta + ۹\sin^۲\theta = ۹$$

.۱۶
$$(۲ + ۵\cos\theta)^۲ + (-۳ + ۵\sin\theta)^۲ + ۶(-۳ + ۵\sin\theta) - ۴(۲ + ۵\cos\theta) - ۱۲$$

$$= ۴ + ۲۰\cos\theta + ۲۵\cos^۲\theta + ۹ - ۳۰\sin\theta + ۲۵\sin^۲\theta - ۱۸ + ۳۰\sin\theta$$

$$- ۸ - ۲۰\cos\theta - ۱۲$$

$$= ۴ + ۲۵ + ۹ - ۱۸ - ۸ - ۱۲ = ۰$$

.۱۷
$$(-۵ + \cos\theta)^۲ + ۱۰(-۵ + \cos\theta) + (-۱ + \sin\theta)^۲ + ۲(-۱ + \sin\theta) + ۲۵ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲۵ - ۱۰\cos\theta + \cos^۲\theta - ۵۰ + ۱۰\cos\theta + ۱ - ۲\sin\theta + \sin^۲\theta - ۲ + ۲\sin\theta + ۲۵$$

$$= ۲۵ + ۱ - ۵۰ + ۱ - ۲ + ۲۵ = ۰$$

.۱۸
$$x^۲ + y^۲ + ۲gx + ۲fy + c = ۰ \Rightarrow g = ۳,\ f = ۴$$

$$x^۲ + y^۲ + ۶x + ۸y + c = ۰$$

این دایره از نقطهٔ $(۲, -۳)$ می‌گذرد:

$$x = ۲,\ y = -۳ \Rightarrow ۴ + ۹ + ۱۲ - ۲۴ + c = ۰ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۶x + ۸y - ۱ = ۰$$

.۱۹ الف)
$$(x + ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۵^۲ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ + y^۲ - ۶y + ۹ - ۲۵ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y - ۱۲ = ۰$$

ب)
$$(x + ۲)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۲^۲ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ + y^۲ + ۴y + ۴ - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۴x + ۴y + ۴ = ۰$$

ج)
$$(x - \sqrt{۵})^۲ + (y - \sqrt{۳})^۲ = (\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x^۲ - ۲\sqrt{۵}x + ۵ + y^۲ - ۲\sqrt{۳}y + ۳ - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲\sqrt{۵}x - ۲\sqrt{۳}y + ۶ = ۰$$

.۲۰
$$(x + g)^۲ + (y + f)^۲ = g^۲ + f^۲ - c \Rightarrow x^۲ + ۲gx + g^۲ + y^۲ + ۲yf + f^۲ = g^۲ + f^۲ - c$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲gx + y^۲ + ۲yf + c = ۰$$

.۲۱
$$x^2+y^2+2xg+2yf+c=0$$
$$y=mx+k$$
$$\Rightarrow x^2+(mx+k)^2+2xg+2(mx+k)f+c=0$$
$$\Rightarrow x^2+m^2x^2+k^2+2mxk+2xg+2mxf+2kf+c=0$$
$$\Rightarrow (1+m^2)x^2+2x(mk+g+mf)+k^2+2kf+c=0$$

شرط آنکه خط راست مفروض بر دایره مماس باشد آن است که $b^2-4ac=0$:

$$4(mk+g+mf)^2-4(1+m^2)(k^2+2kf+c)=0$$
$$\Rightarrow (mk+g+mf)^2=(1+m^2)(k^2+2kf+c)$$
$$\Rightarrow m^2k^2+g^2+m^2f^2+2mkg+2m^2kf+2gmf=k^2+2kf+c+m^2k^2$$
$$+2km^2f+cm^2$$
$$\Rightarrow m^2(f^2-c)+2gm(k+f)+g^2-k^2-2kf-c=0$$

.۲۲
$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$
$$(1,2)\quad :1^2+2^2+2g+4f+c=0 \qquad (1)$$
$$(-2,3)\ :(-2)^2+3^2+2g(-2)+2f(3)+c=0 \qquad (2)$$
$$(1,-5)\ :1^2+(-5)^2+2g(1)+2f(-5)+c=0 \qquad (3)$$
$$(1)\Rightarrow 2g+4f+c=-5 \qquad (4)$$
$$(2)\Rightarrow -4g+6f+c=-13 \qquad (5)$$
$$(3)\Rightarrow 2g-10f+c=-26 \qquad (6)$$

معادلهٔ (۵) را از (۴) و معادلهٔ (۶) را از (۵) کم می‌کنیم:

$$6g-2f=8 \qquad (7)$$
$$-6g+16f=13 \qquad (8)$$

معادلات (۷) و (۸) را باهم جمع می‌کنیم:

$$14f=21\Rightarrow f=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}\Rightarrow 6g=8+2\left(\frac{21}{14}\right)=8+3=11$$
$$\Rightarrow g=\frac{11}{6}\Rightarrow 2g+4f+c=-5\Rightarrow 2\left(\frac{11}{6}\right)+4\left(\frac{3}{2}\right)+c=-5$$
$$\Rightarrow c=-5-6-\frac{11}{3}\Rightarrow c=\frac{-33-11}{3}=-\frac{44}{3}$$

$$x^۲+y^۲+۲\left(\frac{۱۱}{۶}\right)x+۲\left(\frac{۳}{۲}\right)y-\frac{۴۴}{۳}=۰$$
$$\Rightarrow x^۲+y^۲+\frac{۱۱}{۳}x+۳y-\frac{۴۴}{۳}=۰$$
$$\Rightarrow ۳x^۲+۳y^۲+۱۱x+۹y-۴۴=۰$$

.۲۳

$$x^۲+y^۲+۲gx+۲fy+c=۰$$
$$(۳,۲)\quad :۹+۴+۶g+۴f+c=۰ \qquad (۱)$$
$$(-۳,۲)\ :۹+۴-۶g+۴f+c=۰ \qquad (۲)$$
$$(۰,۰)\quad : \qquad c=۰$$
$$(۱)\Rightarrow\ ۶g+۴f=-۱۳$$
$$(۲)\Rightarrow -۶g+۴f=-۱۳\Rightarrow ۸f=-۲۶\Rightarrow f=-\frac{۱۳}{۴}$$
$$\Rightarrow ۶g=۰,\ g=۰\Rightarrow x^۲+y^۲-\frac{۱۳}{۲}y=۰\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲-۱۳y=۰$$

.۲۴ $x^۲+y^۲=۵^۲$

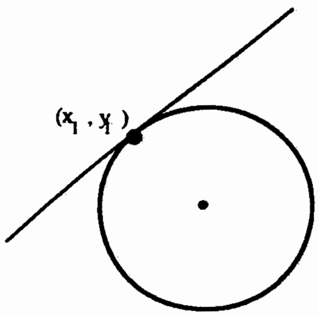
.۲۵ $(x+۳)^۲+(y-۴)^۲=۳^۲\Rightarrow x^۲+۶x+۹+y^۲-۸y+۱۶-۹=۰$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۶x-۸y+۱۶=۰$$

.۲۶

$$(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱$$
$$x^۲-۴x+۴+y^۲-۶y+۹=۱,\ x^۲+y^۲-۴x-۶y+۱۲=۰$$

.۲۷ (شکل ۱۲۹ را ببینید.)



شکل۱۲۹

$$x^۲+۲gx+y^۲+۲fy+c=۰$$
$$\Rightarrow ۲x+۲g+۲y\frac{dy}{dx}+۲f\frac{dy}{dx}=۰\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-(۲x+۲g)}{۲y+۲f}=\frac{-(x+g)}{(y+f)}$$

شیب در نقطهٔ (x_1, y_1) برابر است با $\frac{dy}{dx} = \frac{-(x_1+g)}{(y_1+f)}$

$$\Rightarrow y = -\left(\frac{x_1+g}{y_1+f}\right)x + k$$

این خط از نقطهٔ (x_1, y_1) می‌گذرد:

$$k = y_1 + \left(\frac{x_1+g}{y_1+f}\right)x_1 \Rightarrow y = -\frac{(x_1+g)}{(y_1+f)}x + y_1 + \frac{(x_1+g)}{(y_1+f)}x_1$$

$$\Rightarrow yy_1 + yf + xx_1 + gx - y_1^2 - y_1 f - x_1^2 - x_1 g = 0$$

ولی داریم $c = -x_1^2 - y_1^2 - 2gx_1 - 2fy_1$. پس

$$c + gx_1 + fy_1 = -x_1^2 - y_1^2 - gx_1 - fy_1 \Rightarrow xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y-y_1) + c = 0$$

۲۸. $x^2 + y^2 + r^2$

نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

در هر نقطهٔ به شکل $(r\cos\theta, r\sin\theta)$، شیب برابر است با

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} = m$$

پس معادلهٔ خط مماس به شکل $y = -\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta}x + k$ است که از نقطهٔ $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ می‌گذرد:

$$r\sin\theta = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot r\cos\theta + k$$

$$\Rightarrow k = r\sin\theta + r\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \frac{r(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\sin\theta} \Rightarrow k = \frac{r}{\sin\theta} = r\operatorname{cosec}\theta$$

$$\Rightarrow y = -\cot\theta x + r\operatorname{cosec}\theta \Rightarrow y = mx + r\operatorname{cosec}\theta$$

$$\Rightarrow m = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \pm\sqrt{1+m^2}$$

پس معادلهٔ مماس با شیب m عبارت است از

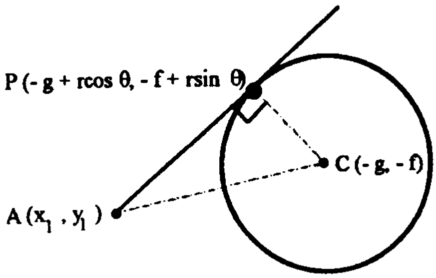
$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$$

۲۹. (شکل ۱۳۰ را ببینید.)

معادلات پارامتری دایرهٔ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ عبارت‌اند از

$$x = -g + r\cos\theta \quad \text{و} \quad y = -f + r\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{x+g}{r} = \cos\theta, \ \frac{y+f}{r} = \sin\theta$$



شکل۱۳۰

$$\Rightarrow \frac{(x+g)^۲}{r^۲}+\frac{(y+f)^۲}{r^۲}=۱ \Rightarrow (x+g)^۲+(y+f)^۲=r^۲$$

$$\Rightarrow x^۲+g^۲+۲xg+y^۲+۲fy+f^۲-r^۲=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+g^۲+f^۲-r^۲+۲xg+۲fy=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲gx+۲fy+c=۰ \Rightarrow c=g^۲+f^۲-r^۲$$

بنابراین

$$(AP)^۲=(x_۱+g-r\cos\theta)^۲+(y_۱+f-r\sin\theta)^۲$$

$$\Rightarrow (AP)^۲=(AC)^۲-r^۲=(x_۱+g)^۲+(y_۱+f)^۲-r^۲$$

$$=(x_۱^۲+۲gx_۱+g^۲+y_۱^۲+۲y_۱f+f^۲-r^۲=x_۱^۲+y_۱^۲+۲gx_۱+۲fy_۱+c$$

۳۰. الف)

$$x^۲+y^۲-۳x+۴y+۶=۰ \qquad (۱)$$

از معادلهٔ (۱) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$۲x+۲y\frac{dy}{dx}-۳+۴\frac{dy}{dx}=۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx}(۲y+۴)=۳-۲x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{۳-۲x}{۲y+۴}$$

شیب در نقطهٔ $(۲,-۲)$ تعریف نشده است زیرا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۳-۲(۲)}{۲(-۲)+۴}=\frac{-۱}{۰}$$

پس معادلهٔ مماس در $(۲,-۲)$ عبارت است از $x=۲$. معادلهٔ (۱) را مربع کامل می‌کنیم:

$$\left(x-\frac{۳}{۲}\right)^۲+(y+۲)^۲-\frac{۹}{۴}-۴+۶=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱/۵)^۲+(y+۲)^۲=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ \Rightarrow r=\frac{۱}{۲},\ \ C(۱/۵,-۲)$$

ب)

(۲) $$x^۲+y^۲+x+y=۰$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲-\frac{۱}{۴}+\left(y+\frac{۱}{۲}\right)^۲-\frac{۱}{۴}=۰ \Rightarrow \left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\left(y+\frac{۱}{۲}\right)^۲=\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^۲$$

$$\Rightarrow C\left(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)\ ,\quad r=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

از معادلهٔ (۲) نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$۲x+۲y\frac{dy}{dx}+۱+\frac{dy}{dx}=۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx}(۲y+۱)=-(۱+۲x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{(۱+۲x)}{(۲y+۱)}$$

شیب مماس در نقطهٔ $(-۱,-۱)$ برابر است با

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(۱-۲)}{(-۲+۱)}=-۱$$

خط $y=-x+k$ از نقطهٔ $(-۱,-۱)$ می‌گذرد:

$$-۱=-(-۱)+k \Rightarrow k=-۲$$

پس معادلهٔ خط به شکل زیر است:

$$y=-x-۲$$

.۳۱

$$x^۲+y^۲+۲gx+۲fy+c=۰$$

$$O(۰,۰)\quad : \quad c=۰$$

$$(۲,۸)\quad : \quad ۴+۶۴+۴g+۱۶f=۰ \Rightarrow ۴g+۱۶f=-۶۸ \Rightarrow g+۴f=-۱۷$$

$$(۴,-۲): \quad ۱۶+۴+۸g-۴f=۰ \Rightarrow ۸g-۴f=-۲۰ \Rightarrow ۲g-f=-۵$$

$$۲g+۸f=-۳۴$$

$$۲g-f=-۵$$

$$\Rightarrow ۹f=-۲۹ \Rightarrow f=-\frac{۲۹}{۹}$$

$$\Rightarrow g=-۱۷-۴\left(-\frac{۲۹}{۹}\right)=-۱۷+\frac{۱۱۶}{۹}=\frac{-۱۵۳+۱۱۶}{۹} \Rightarrow g=-\frac{۳۷}{۹}$$

$$x^۲+y^۲+۲\left(-\frac{۳۷}{۹}\right)x+۲\left(-\frac{۲۹}{۹}\right)y=۰ \Rightarrow ۹x^۲+۹y^۲-۷۴x-۵۸y=۰$$

.۳۲ AB قطر و C وسط آن است:

$$C\left(\frac{-۳+۲}{۲},\frac{۴-۳}{۲}\right)\equiv C\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\text{شعاع}=\sqrt{\left(\frac{۱}{۲}+۳\right)^۲+\left(-\frac{۱}{۲}-۲\right)^۲}=\sqrt{\left(\frac{۷}{۲}\right)^۲+\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴۹+۲۵}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۷۴}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{74}\right)^2 \Rightarrow x^2+x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}=\frac{74}{4}$$

$$\Rightarrow x^2+x+y^2-y+\frac{1}{2}=\frac{37}{2} \Rightarrow x^2+y^2+x-y-18=0$$

.۳۳

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$(2,4)\ :\ 4+16+4g+8f+c=0 \qquad (1)$$

$$(8,-2)\ :\ 64+4+16g-4f+c=0 \qquad (2)$$

$$(6,2)\ :\ 36+4+12g+4f+c=0 \qquad (3)$$

$$(1) \Rightarrow 4g+8f+c=-20 \qquad (4)$$

$$(2) \Rightarrow 16g-4f+c=-68 \qquad (5)$$

$$(3) \Rightarrow 12g+4f+c=-40 \qquad (6)$$

با حذف C بین معادلات (۴) و (۵) و نیز (۵) و (۶) حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} 12g-12f=-48 & (7) \\ 4g-8f=-28 & (8) \end{cases}$$

هرگاه (۸) را در ۳ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{cases} 12g-12f=-48 \\ 12g-24f=-84 \end{cases} \Rightarrow 12f=36 \Rightarrow f=3$$

$$\Rightarrow 12g-12(3)=-48 \Rightarrow 12g=-48+36 \Rightarrow 12g=-12 \Rightarrow g=-1$$

$$4g+8f+c=-20 \Rightarrow 4(-1)+8(3)+c=-20 \Rightarrow c=-40$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2x+6y-40=0$$

با مربع کامل کردن، حاصل می‌شود

$$(x-1)^2+(y+3)^2=1+9+40 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=50 \Rightarrow C(1,-3),\ r=\sqrt{50}$$

۳۴. مختصات دو سر قطر عبارت‌اند از $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$. فرض کنید P نقطهٔ متغیری باشد. داریم

$$\angle APB=90^\circ \text{ و } m_1m_2=-1$$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1 \Rightarrow (y-y_1)(y-y_2)+(x-x_1)(x-x_2)=0$$

۳۵. $x^2+y^2-2y-4x-4=0$

با مربع کامل کردن، حاصل می‌شود

$$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1-4=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=3^2$$

$$\Rightarrow C(2,1),\ r=3$$

حل تمرین فصل ۳

۱. الف) $6x^2=25y \Rightarrow 6(5p)^2=25(6p^2)=150p^2$

ب) $5y^2=9x \Rightarrow 5(3t)^2=9(5t^2)=45t^2$

ج) $4x^2=9y \Rightarrow 4(-3q)^2=9(4q^2)=36q^2$

د) $3y^2=-25x \Rightarrow 3(5p)^2=-25(-3p^2)=75p^2$

ه) $3x^2=-4y \Rightarrow 3(-2t)^2=-4(-3t^2)=12t^2$

و) $y^2=12x \Rightarrow (6t)^2=12(3t^2)=36t^2$

۲. $x^2=20(mx-5m^2),\ x^2-20mx+100m^2=0$

$D=0,\ 400m^2-400m^2=0$

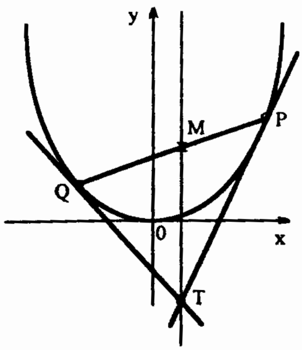
۳. $x^2=28(mx-7m^2),\ x^2-28mx+196m^2=0$

$D=0,\ (28m)^2-4\times 196m^2=0$

۴. $x^2=12(mx-3m^2),\ x^2-12mx+36m^2=0$

$D=0,\ (-12m)^2-4\times 36m^2=0$

۵. (شکل ۱۳۱ را ببینید.)



شکل۱۳۱

$$x^2=4ay \Rightarrow 2x=4a\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{2a}=\frac{2ap}{2a}=p$$

معادلهٔ خط مماس در P عبارت است از

$$y = px + c\,,\ \ ap^۲ = p(۲ap) + c \Rightarrow c = -ap^۲ \Rightarrow y = px - ap^۲$$

معادلهٔ خط مماس در Q عبارت است از

$$y = qx - aq^۲$$

دو مماس وقتی یکدیگر را قطع می‌کنند که داشته باشیم

$$px - ap^۲ = qx - aq^۲ \Rightarrow (p-q)x = a(p^۲ - q^۲)\,,$$

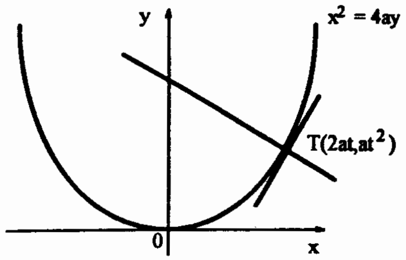
$$x = a(p+q)\,,\ \ y = pa(p+q) - ap^۲ = apq$$

مختصات نقطهٔ T عبارت است از $a((p+q), apq)$. مختصات M، وسط PQ عبارت است از

$$M\left[a(p+q), \frac{۱}{۲}a(p^۲+q^۲)\right]$$

بنابراین طولهای نقاط M و T برابرند با $a(p+q)$ و در نتیجه TM موازی با محور y است.

۶. (شکل ۱۳۲ را ببینید.)



شکل۱۳۲

داریم $x^۲ = ۴ay$. نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$۲x = ۴a\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{۲a}$$

شیب قائم در نقطهٔ T برابر است با $-\frac{۱}{t} = -\frac{۲a}{۲at}$.

معادلهٔ خط قائم $y = -\frac{۱}{t}x + c$ است که از نقطهٔ T می‌گذرد:

$$at^۲ = -\frac{۱}{t}۲at + c \Rightarrow c = at^۲ + ۲a$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۱}{t}x + at^۲ + ۲a \Rightarrow yt + x = at^۳ + ۲at$$

معادلهٔ مماس در نقطهٔ T عبارت است از

$$y = tx + c \Rightarrow at^2 = t(2at) + c \Rightarrow c = -at^2$$
$$\Rightarrow y = tx - at^2$$

۷. $x = ap^2 \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} = 2ap \quad , \quad y = 2ap \Rightarrow \dfrac{dy}{dp} = 2a$

$$\text{شیب مماس} = \frac{\frac{dx}{dp}}{\frac{dy}{dp}} = \frac{2a}{2ap} = \frac{1}{p}$$

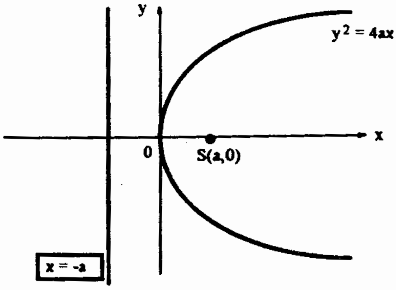
$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{p} m_2 = -1$$

پس شیب قائم در P برابر است با $m_2 = -p$.

معادلهٔ خط قائم در $P(ap^2, 2ap)$ عبارت است از $y = -px + c$. این خط از نقطهٔ $P(ap^2, 2ap)$ می‌گذرد. پس $2ap = -p(ap^2) + c$. پس

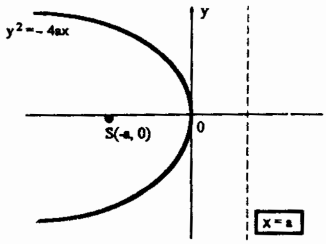
$$c = 2ap + ap^3 \Rightarrow y = -px + 2ap + ap^3$$

۸. (شکل ۱۳۳ را ببینید.) کانون نقطهٔ $S(a, 0)$ و خط هادی $x = -a$ است.

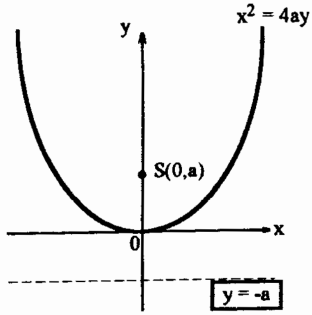


شکل۱۳۳

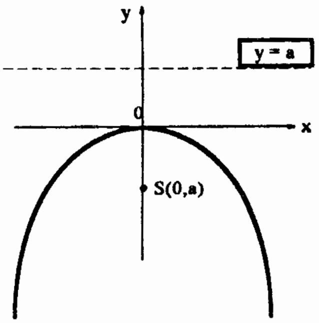
۹. (شکل ۱۳۴ را ببینید.) کانون نقطهٔ $S(-a, 0)$ و خط هادی $x = a$ است.



شکل۱۳۴



شکل ۱۳۵

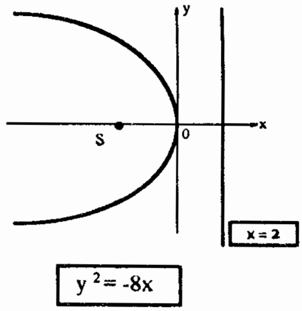


شکل ۱۳۶

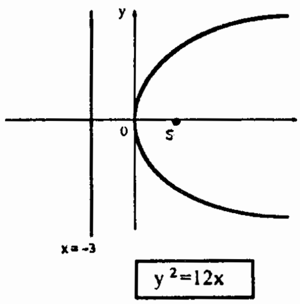
۱۰. (شکل ۱۳۵ را ببینید.) کانون نقطهٔ $S(\circ,a)$ و خط هادی $y=-a$ است.

۱۱. (شکل ۱۳۶ را ببینید.) کانون نقطهٔ $S(\circ,-a)$ و خط هادی $y=a$ است.

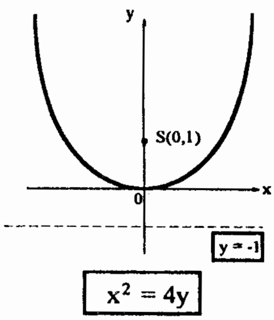
۱۲. شکلهای ۱۳۷ تا ۱۴۰ را ببینید.



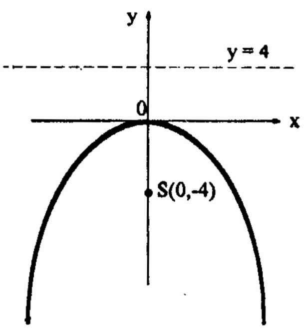
شکل ۱۳۷



شکل ۱۳۸



شکل ۱۳۹



شکل ۱۴۰

۱۳. (شکل ۱۴۱ را ببینید.)

$$y = mx + c,\ x^2 = 4a(mx + c)\ \Rightarrow x^2 = -4amx - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{4am \pm \sqrt{16a^2m^2 + 16ac}}{2}$$

شرط مماس شدن خط بر سهمی $x^2 = ay$ آن است که مبین معادلهٔ تقاطع برابر با صفر باشد.

بنابراین

$$16a^2m^2 + 16ac = 0 \Rightarrow a^2m^2 + ac = 0 \Rightarrow c = \frac{-a^2m^2}{a} = -am^2$$

$x = 2am$ و $y = mx - am^2 = m(2am) - am^2 = am^2$

۱۴.

$$(y - 1)^2 = 4(x - 2)$$

$$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 4x - 8 \Rightarrow (mx + 1)^2 - 2(mx + 1) + 1 - 4x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow m^2x^2 + 2mx + 1 - 2mx - 2 + 1 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow m^2x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$D = 16 - 32m^2 = 0 \Rightarrow 32m^2 = 16 \Rightarrow 2m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

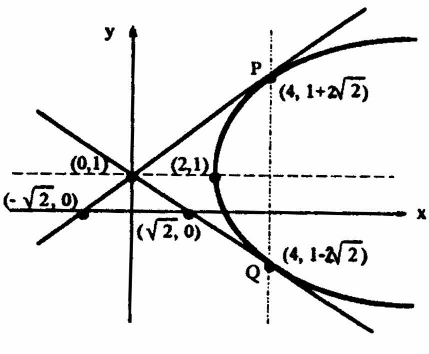
$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$ یا $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$

شکل ۱۴۲ را ببینید.

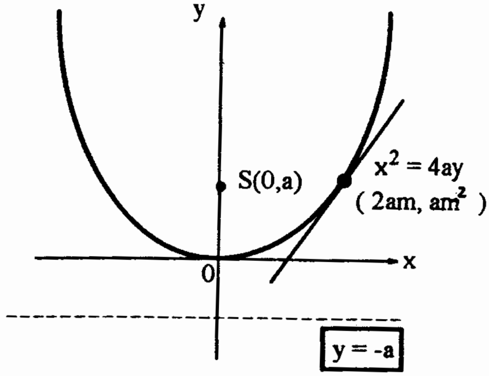
$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

$$(y - 1)^2 = 4(4 - 2) = 8 \Rightarrow y - 1 = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow y = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

$$PQ = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$$



شکل ۱۴۲



شکل ۱۴۱

۱۵. $۲x\frac{dx}{dy}=۴a \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{۲x}{۴a}=\frac{x_۱}{۲a}$

شیب در P عبارت است از

$$y=\frac{x_۱}{۲a}x+c \Rightarrow y_۱=\frac{x_۱x_۱}{۲a}+c \Rightarrow y=\frac{x_۱}{۲a}x+y_۱-\frac{x_۱^۲}{۲a}$$

۱۶. $\frac{y-at^۲}{x-۲at}=\frac{ap^۲-at^۲}{۲ap-۲at}$

$$\Rightarrow (y-at^۲)(p-t)۲a=a(p^۲-t^۲)(x-۲at) \Rightarrow ۲(y-at^۲)(p-t)=(p^۲-t^۲)(x-۲at)$$

$$\Rightarrow ۲(y-at^۲)=(p+x)(x-۲at) \Rightarrow ۲y-۲at^۲=(p+t)x-۲apt-۲at^۲$$

$$\Rightarrow ۲y-(p+۱)x+۲apt=۰$$

۱۷. $x^۲=-۴ay \Rightarrow ۲x=-۴a\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{۲x}{-۴a}=-\frac{x}{۲a}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-۲ap}{۲a}=-p$$

این شیب مماس در P است. شیب قائم در P برابر است با $\frac{۱}{p}$. معادلهٔ خط قائم در P عبارت است از

$$y=\frac{۱}{p}x+c \Rightarrow -ap^۲=\frac{۱}{p}۲ap+c \Rightarrow c=-ap^۲-۲a \Rightarrow y=\frac{۱}{p}x-ap^۲-۲a \quad (۱)$$

معادلهٔ خط قائم در Q عبارت است از

$$y=\frac{۱}{q}x-aq^۲-۲a \quad (۲)$$

معادلات (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\frac{۱}{p}x-ap^۲-۲a=\frac{۱}{q}x-aq^۲-۲a \Rightarrow \left(\frac{۱}{p}-\frac{۱}{q}\right)x=ap^۲-aq^۲=a(p-q)(p+q)$$

$$\Rightarrow \frac{(q-p)x}{pq}=a(p-q)(p+q) \Rightarrow x=-apq(p+q)$$

$$\Rightarrow y=\frac{۱}{q}[-apq(p+q)]-aq^۲-۲a=-ap^۲-apq-aq^۲-۲a$$

$$\Rightarrow y=-a(p^۲+q^۲)-apq-۲a$$

$$\Rightarrow T[-apq(p+q)\ ,\ \ -a(p^۲+q^۲)-apq-۲a]$$

هرگاه $pq=-۱$، داریم

$$x=-apq(p+q) \Rightarrow x=a(p+q)$$

همچنین

$$\Rightarrow y=-a(p^۲+q^۲)-apq-۲a \Rightarrow y=-a[(p+q)^۲-۲pq]-a=-a\left[\left(\frac{x}{۲}\right)^۲+۲\right]-a$$

$$\Rightarrow y+a=-\frac{ax^۲}{a^۲}-۲a \Rightarrow -\frac{x^۲}{a}=y+۳a \Rightarrow x^۲=-a(y+۳a)$$

۱۸. معادلهٔ PQ عبارت است از

$$\frac{2ap-2aq}{ap^2-aq^2}=\frac{y-2aq}{x-aq^2}\Rightarrow\frac{2(p-q)}{(p-q)(p+q)}=\frac{y-2aq}{x-aq^2}\Rightarrow 2(x-aq^2)=(y-2aq)(p+q)$$

این خط ازکانون به مختصات $(a,0)$ می‌گذرد.

$$2(a-aq^2)=(0-2aq)(p+q)\Rightarrow 2a(1-q^2)=-2apq-2aq^2$$

$$\Rightarrow 2a-2aq^2=-2apq-2aq^2\Rightarrow pq=-1$$

۱۹. هرگاه $y=2at$ و $x=-at^2$، داریم

$$(2at)^2=4a^2t^2\Rightarrow -4ax=-4a(-at^2)=4a^2t^2\Rightarrow y^2=-4ax$$

معادلات پارامتری P و Q عبارت‌اند از

$$P(-ap^2,2ap),\quad Q(-aq^2,2aq)$$

$$\Rightarrow y=2ap\Rightarrow\frac{dy}{dp}=2a$$

$$\Rightarrow x=-ap^2\Rightarrow\frac{dx}{dp}=-2ap$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{1}{p}x+c$$

$$\Rightarrow 2ap=-\frac{1}{p}(-ap^2)+c\Rightarrow c=2ap-ap=ap$$

پس معادلهٔ خط مماس در P عبارت است از

$$y=-\frac{1}{p}x+ap$$

به‌همین ترتیب، معادلهٔ خط مماس در Q عبارت است از

$$y=-\frac{1}{q}x+aq$$

هرگاه معادلات $y=-\frac{1}{q}x+aq$ و $y=-\frac{1}{p}x+ap$ را در یک دستگاه حل کنیم، حاصل می‌شود:

$$-\frac{1}{p}x+ap=-\frac{1}{q}x+aq\Rightarrow\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)x=a(q-p)$$

$$\Rightarrow x=\frac{a(q-p)}{(p-q)}pq=-apq\ \text{ و }\ y=-\frac{1}{p}(-apq)+pq=a(p+q)$$

$$\Rightarrow T\big(-apq,a(p+q)\big)$$

۲۰. هرگاه $y=mx+c$ معادلهٔ خطی باشد که از $(3a,-5a)$ می‌گذرد، داریم

$$-5a=m3a+c\Rightarrow c=-5a-3am$$

بنابراین معادلهٔ خطی که از T می‌گذرد عبارت است از

$$y = mx - 5a - 3am$$

معادلات $x^2 = 4ay$ و $y = mx - 5a - 3am$ را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$x^2 = 4a(mx - 5a - 3am) \Rightarrow x^2 - 4amx + 20a^2 + 12a^2m = 0 \qquad (1)$$

اگر خط راستی که از نقطهٔ $T(3a, -5a)$ می‌گذرد بر سهمی مماس باشد، مبین معادلهٔ (۱) صفر است:

$$(-4am)^2 - 4(20a^2 + 12a^2m) = 0 \Rightarrow 16a^2m^2 = 80a^2 + 48a^2m$$

$$\Rightarrow 16m^2 - 48m - 80 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 3m - 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2}$$

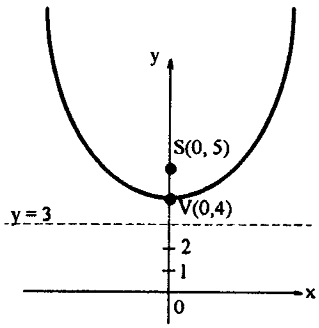
$$\Rightarrow m_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{2} = 4{,}19 \text{ یا } m_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{2} = -1{,}19$$

پس معادله‌های خطوط مماس عبارت‌اند از

$$y = 4{,}19x - 5a - 3a(4{,}19) \Rightarrow y = 4{,}19x - 17{,}6a$$

$$y = -1{,}19x - 5a - 3a(-1{,}19) \Rightarrow y = -1{,}19x - 1{,}43a$$

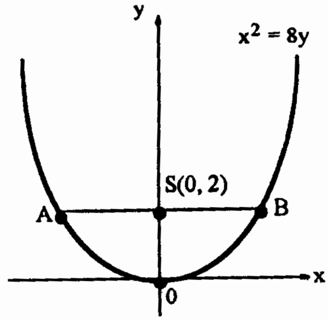
۲۱. (شکل ۱۴۳ را ببینید.)



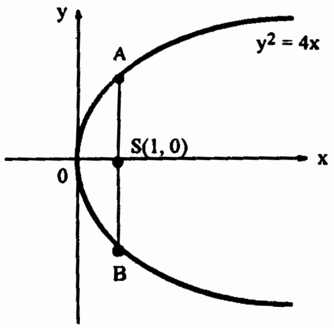
شکل۱۴۳

$$x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow V(0, 4)$$

هرگاه معادلهٔ $x^2 = 4(y - 4)$ را با $x^2 = 4ay$ مقایسه کنیم، معلوم می‌شود $a = 1$. پس $S(0, 5)$ و خط هادی $y = 3$ است.



شکل ۱۴۴



شکل ۱۴۵

۲۲. الف) (شکل ۱۴۴ را ببینید.)

$$x^۲ = ۸y \Rightarrow a = ۲\,,\quad S(۰,۲)$$
$$y = ۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x = \pm ۴ \Rightarrow AB = ۸$$

ب) (شکل ۱۴۵ را ببینید.)

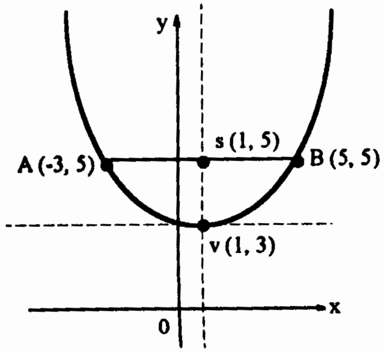
$$y^۲ = ۴x \Rightarrow a = ۱\,,\quad S(۱,۰)$$
$$x = ۱ \Rightarrow y = \pm ۲ \Rightarrow AB = ۴$$

ج) (شکل ۱۴۶ را ببینید.)

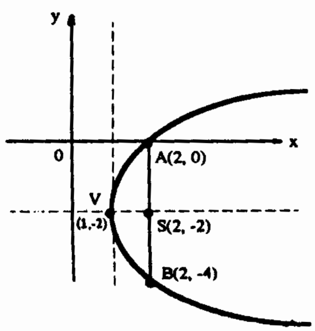
$$(x-۱)^۲ = ۸(y-۳) \Rightarrow a = ۲\,,\quad S(۱,۵)$$
$$y = ۵ \Rightarrow x = ۵ \text{ یا } x = -۳ \Rightarrow AB = ۸$$

د) (شکل ۱۴۷ را ببینید.)

$$(y+۲)^۲ = ۴(x-۱) \Rightarrow a = ۱\,,\quad S(۲,-۲)$$
$$x = ۲ \Rightarrow y = ۰ \text{ یا } y = ۴ \Rightarrow AB = ۴$$



شکل ۱۴۶



شکل ۱۴۷

.۲۳ $x^{2} = 8y - 8 \Rightarrow x^{2} = 8(y-1) \Rightarrow a = 2$

$y = 1 \Rightarrow x = 0$

معادلهٔ خط مماس در $V(0,1)$ عبارت است از $y = 1$.

.۲۴ $(2y-1)^{2} = 3(x-1) \cdots (1)$

$$\text{L.H.S } (2y-1)^{2} = \left[2\left(\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)-1\right]^{2} = (3t+1-1)^{2} = 9t^{2}$$

$$\text{R.H.S } 3(x-1) = 3(3t^{2}+1-1) = 9t^{2}$$

پس معادلات پارامتری عبارت‌اند از

$$\left(3t^{2}+1, \frac{3}{2}t+\frac{1}{2}\right)$$

.۲۵ $y = x^{2}+2x+3 \Rightarrow x^{2}+2x = y-3 \Rightarrow (x+1)^{2}-1 = y-3$

$$\Rightarrow (x+1)^{2} = y-2$$

$$\Rightarrow 4a = 1,\ a = \frac{1}{4} \Rightarrow S\left(-1, \frac{9}{4}\right)$$:کانون

معادلهٔ خط هادی عبارت است از

$$y = \frac{7}{4}$$

.۲۶ $x^{2} = 4ay,\ a = 3 \Rightarrow x^{2} = 12y$

.۲۷ $x = y^{2}+2y-4 \Rightarrow (y+1)^{2}-1-4 = x \Rightarrow (y+1)^{2} = x+5$

$x = 0 \Rightarrow y+1 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow y = \sqrt{5}-1$ یا $y = -\sqrt{5}-1$

$4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow S\left(-\frac{3}{4}, -5\right)$:کانون

$x = -\frac{5}{4}$:خط هادی

.۲۸ $y^{2} = 8x \Rightarrow 2y\,\frac{dy}{dx} = 8 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4}{y}$

در نقطهٔ P، $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p}$ و در نقطهٔ Q، $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{q}$. شیب خطوط قائم به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$\frac{dy}{dx} = -p \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = -q$$

معادلهٔ خط مورد نظر $y = -px + c$ است که از P می‌گذرد:

$$4p = -2p^{3}+c \Rightarrow c = 4p+2p^{3} \Rightarrow y = -px+4p+2p^{3} \qquad (1)$$

در نقطهٔ Q داریم

$$y = -qx+4q+2q^{3} \qquad (2)$$

معادلات (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$-px+4p+2p^3=-qx+4q+2q^3$$

$$\Rightarrow 2(p^3-q^3)+4(p-q)=x(p-q)\Rightarrow 2(p^2+pq+q^2)(p-q)+4(p-q)=x(p-q)$$

$$\Rightarrow x=2(p^2+pq+q^2)+4$$

$$\Rightarrow y=-px+4p+2p^3\Rightarrow y=-p[2(p^2+pq+q^2)+4]+4p+2p^3$$

$$\Rightarrow y=-2p^3-2p^2q-pq^2-4p+4p+2p^3\Rightarrow y=-2p^2q-pq^2\Rightarrow y=-pq(2p+q)$$

مختصات نقطهٔ برخورد عبارت است از

$$T\,[2(p^2+pq+q^2)+4,\ -pq(2p+q)]$$

۲۹. الف) $y^2=4ax\Rightarrow a=2\Rightarrow y^2=8x$

ب) $x^2=12y$

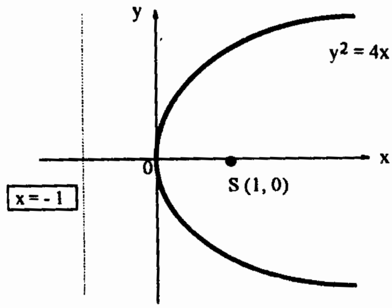
ج) $(y-2)^2=4a(x-3)\Rightarrow a=2\Rightarrow (y-2)^2=-8(x-3)$

د) $x^2=-4ay\Rightarrow a=5\Rightarrow x^2=-20y$

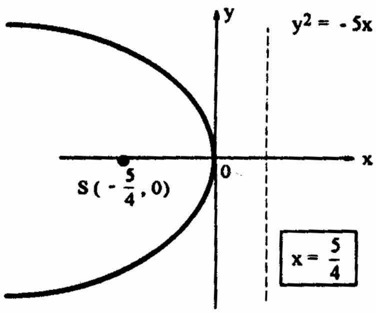
هـ) $(y-4)^2=4a(x-4)\Rightarrow a=2\Rightarrow (y-4)^2=8(x-4)$

و) $(x+3)^2=-4a(y+4)\Rightarrow (x+3)^2=-8(y+4)$

۳۰. به‌ترتیب، شکلهای ۱۴۸ تا ۱۵۳ را ببینید.



شکل ۱۴۸



شکل ۱۴۹

۳۱.
$$y^2=4ax\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=4a\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{4a}{2y}=\frac{2a}{y}=\frac{2a}{2ap}=\frac{1}{p}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-p$$

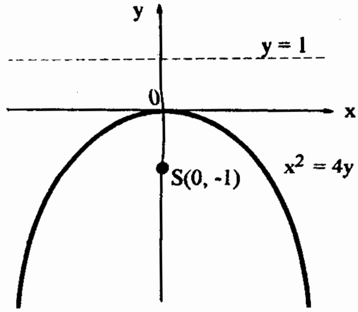
$$y=-px+c\Rightarrow 2ap=-px+c\Rightarrow c=2ap+ap^3\Rightarrow y=-px+2ap+ap^3$$

$$\Rightarrow y=-qx+2aq+aq^3\Rightarrow -px+2ap+ap^3=-qx+2aq+aq^3$$

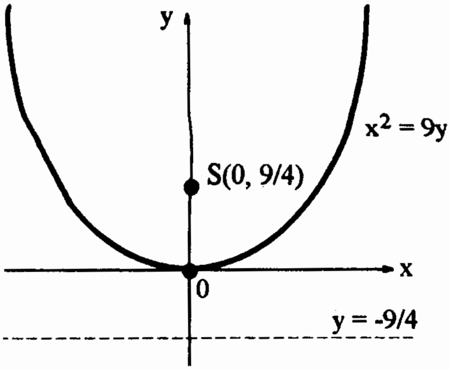
$$\Rightarrow x(q-p)=2a(q-p)+a(q^3-p^3)\Rightarrow x=2a+a(q^2+p^2+pq)$$

$$\Rightarrow y=-p[2a+a(q^2+p^2+pq)]+2ap+ap^3$$

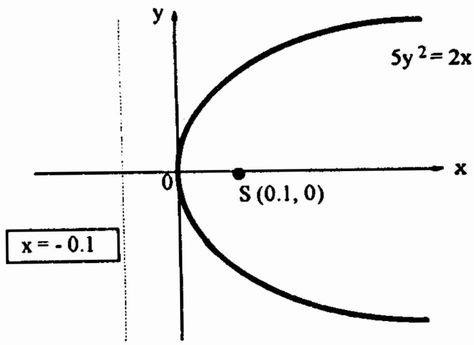
$$\Rightarrow y=-2ap-apq^2-ap^3-ap^2q+2ap+ap^3\Rightarrow y=-apq(q+p)$$



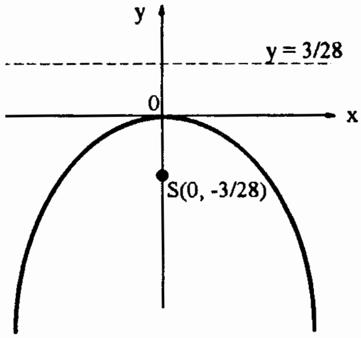
شکل ۱۵۰



شکل ۱۵۱



شکل ۱۵۲



شکل ۱۵۳

حل تمرین فصل ۴

۱. الف) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow b^2(a^2\cos^2\theta) + a^2b^2\sin^2\theta = a^2b^2$

$$\Rightarrow a^2b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2b^2$$

ب) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow 2b^2x + 2a^2y\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$

شیب مماس در نقطهٔ $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ برابر است با

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{a\cos\theta}{b\sin\theta} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot\theta \Rightarrow y = -\frac{b}{a}(\cot\theta)x + c$$

این خط از نقطهٔ P می‌گذرد:

$$b\sin\theta = -b\cot\theta\cos\theta + c$$

$$\Rightarrow c = b\sin\theta + b\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \frac{b\sin^2\theta + b\cos^2\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{b}{a}(\cot\theta)x + \frac{b\sin^2\theta + b\cos^2\theta}{\sin\theta} \Rightarrow a(\sin\theta)y + b(\cos\theta)x = ab$$

ج) شیب خط قائم $\frac{a}{b}\tan\theta$ است و معادلهٔ خط قائم که از نقطهٔ $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ می‌گذرد عبارت است از $y = \frac{a}{b}(\tan\theta)x + c$. پس

$$b\sin\theta = \frac{a}{b}(\tan\theta)a\cos\theta + c \Rightarrow c = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin\theta$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{b}\tan\theta x + \frac{(b^2 - a^2)}{b}\sin\theta$$

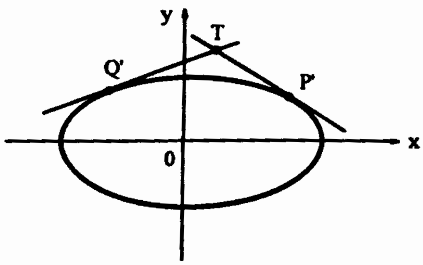
$$\Rightarrow by\cos\theta = a(\sin\theta)x + (b^2 - a^2)\sin\theta\cos\theta$$

د) معادلهٔ خطی که از مبدأ می‌گذرد و با خط مماس موازی است به شکل زیر است:

$$y = -\frac{b}{a}(\cot\theta)x$$

ه) $y = \frac{b}{a}(\tan\theta)x$

۲. (شکل ۱۵۴ را ببینید.)



شکل۱۵۴

فرض کنید خط $y = mx + c$ بر بیضی $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ مماس باشد.

$$y = mx + c \qquad (1)$$

$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (2)$$

معادلات (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$b^2x^2 + a^2(mx+c)^2 = a^2b^2 \Rightarrow b^2x^2 + a^2m^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2mcx - a^2b^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(b^2 + a^2m^2) + 2a^2mcx + a^2(c^2 - b^2) = 0$$

شرط مماس شدن خط بر بیضی را می‌نویسیم:

$$(2a^2mc)^2 = 4(b^2 + a^2m^2)a^2(c^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow 4a^4m^2c^2 = 4a^2(b^2 + a^2m^2)(c^2 - b^2) \Rightarrow a^2m^2c^2 = b^2c^2 - b^4 + a^2c^2m^2 - a^2b^2m^2$$

$$\Rightarrow b^4 = b^2(c^2 - a^2m^2) \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2m^2 \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2m^2$$

بنابراین

$$x=\frac{-2a^2mc}{2(b^2+a^2m^2)}=-\frac{2a^2mc}{2c^2}\Rightarrow x=-\frac{a^2m}{c}$$

$$y=m\left(-\frac{a^2m}{c}\right)+c\Rightarrow y=\frac{c^2-a^2m^2}{c}$$

مختصات نقطهٔ تماس خط بر بیضی عبارت است از

$$P\left(-\frac{a^2m}{c},\frac{c^2-a^2m^2}{c}\right)$$

خط از نقطهٔ $T(x_1,y_1)$ می‌گذرد:

$$y_1=mx_1+c\Rightarrow c=y_1-mx_1\Rightarrow c^2=b^2+a^2m^2\Rightarrow (y_1-mx_1)^2=b^2+a^2m^2$$

$$\Rightarrow y_1{}^2-2mx_1y_1+m^2x_1^2=b^2+a^2m^2$$

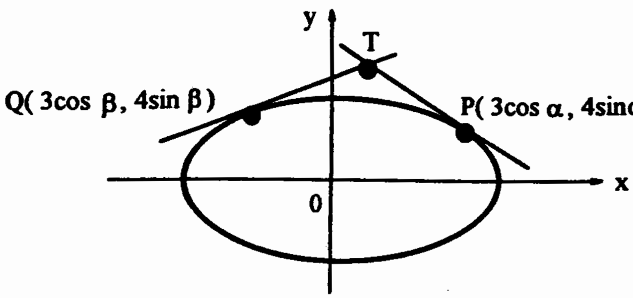
$$\Rightarrow m^2(x_1{}^2-a^2)-2mx_1y_1+y_1{}^2-b^2=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{2x_1y_1\pm\sqrt{4x_1{}^2y_1{}^2-4(x_1{}^2-a^2)(y_1{}^2-b^2)}}{2(x_1{}^2-a^2)}$$

از اینجا دو مقدار m_1 و m_2 به‌دست می‌آید. پس مختصات نقاط تماس عبارت‌اند از

$$P\left(-\frac{a^2m_1}{c},\frac{c^2-a^2m_1{}^2}{c}\right) \text{ و } Q\left(-\frac{a^2m_2}{c},\frac{c^2-a^2m_2{}^2}{c}\right)$$

۳. (شکل ۱۵۵ را ببینید.)



شکل۱۵۵

خط مماس $P(3\cos\alpha,4\sin\alpha)$ عبارت است از

$$4x\cos\alpha+3y\sin\alpha=12 \qquad (1)$$

خط مماس در $Q(3\cos\beta,4\sin\beta)$ عبارت است از

$$4x\cos\beta+3y\sin\beta=12 \qquad (2)$$

معادله‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$-۴x\cos\alpha\cos\beta - ۳y\sin\alpha\cos\beta = -۱۲\cos\beta \qquad (۳)$$

$$۴x\cos\alpha\cos\beta + ۳y\cos\alpha\sin\beta = ۱۲\cos\alpha \qquad (۴)$$

از جمع کردن معادله‌های (۳) و (۴) حاصل می‌شود:

$$۳y(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta) = ۱۲(\cos\alpha - \cos\beta)$$

$$y = \frac{۴(\cos\alpha - \cos\beta)}{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta} = \frac{۴\left[-۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}\right]}{-\sin(\alpha-\beta)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۸\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}}{۲\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}} = ۴\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{۲}}{\cos\frac{(\alpha-\beta)}{۲}}$$

$$\Rightarrow ۴x\cos\alpha + ۳\times ۴\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{۲}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}\sin\alpha = ۱۲$$

$$\Rightarrow ۴x\cos\alpha = ۱۲ - ۱۲\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{۲}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}\cdot\sin\alpha$$

$$\Rightarrow x = ۳\sec\alpha - ۳\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{۲}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}\tan\alpha$$

مختصات نقطهٔ T عبارت است از

$$T\left(۳\sec\alpha - ۳\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{۲}}{\cos\frac{(\alpha-\beta)}{۲}}\tan\alpha, ۴\frac{\sin\frac{(\alpha+\beta)}{۲}}{\cos\frac{(\alpha-\beta)}{۲}}\right)$$

.۴

$$۹x^۲ + ۱۶y^۲ = ۱۴۴ \qquad (۱)$$

$$y = mx + ۵ \qquad (۲)$$

معادله‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$۹x^۲ + ۱۶(mx+۵)^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow ۹x^۲ + ۱۶m^۲x^۲ + ۴۰۰ + ۱۶۰mx - ۱۴۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲(۹ + ۱۶m^۲) + ۱۶۰mx + ۲۵۶ = ۰$$

شرط مماس شدن خط $y = mx + ۵$ را می‌نویسیم:

$$D = ۱۶۰^۲m^۲ - ۴(۹+۱۶m^۲)\times ۲۵۶ = ۰ \Rightarrow ۱۶۰^۲m^۲ = ۴\times ۹\times ۲۵۶ + ۴\times ۱۶m^۲ ۲۵۶$$

$$\Rightarrow ۹۲۱۶m^۲ = ۹۲۱۶ \Rightarrow m^۲ = ۱ \Rightarrow m = \pm ۱$$

۵. شرط مماس شدن خط $y = mx + c$ بر بیضی عبارت است از

$$c^۲ = b^۲ + a^۲m^۲$$

$$۹x^۲ + ۲۵y^۲ = ۲۲۵ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۲۲۵}{۹}} + \frac{y^۲}{\frac{۲۲۵}{۲۵}} = ۱$$

$$a = \frac{۱۵}{۳} = ۵; \quad b = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

$$c^۲ = ۹ + ۲۵m^۲ \qquad (۱)$$

خط $y = mx + c$ از نقطهٔ $P(۶, ۸)$ می‌گذرد، پس

$$۸ = ۶m + c \Rightarrow c = ۸ - ۶m$$

با جایگذاری در (۱) حاصل می‌شود:

$$(۸ - ۶m)^۲ = ۹ + ۲۵m^۲$$

$$\Rightarrow ۶۴ - ۹۶m + ۳۶m^۲ = ۹ + ۲۵m^۲ \Rightarrow ۱۱m^۲ - ۹۶m + ۵۵ = ۰$$

$$\Rightarrow m = \frac{۹۶ \pm \sqrt{۹۶^۲ - ۴ \times ۱۱ \times ۵۵}}{۱۱ \times ۲} = \frac{۹۶ \pm ۸۲/۴}{۲۲}$$

$$\Rightarrow m_۱ = ۸/۱۱ \quad \text{یا} \quad m_۲ = ۰/۶۲$$

بنابراین معادلات مماسها در $P(۶, ۸)$ عبارت‌اند از

$$y = ۸/۱۱x + ۸ - ۶ \times ۸/۱۱ \Rightarrow y = ۸/۱۱x - ۴۰/۷$$

$$y = ۰/۶۲x + ۸ - ۶ \times ۰/۶۲ \Rightarrow y = ۰/۶۲x + ۴/۲۸$$

۶.(یک)

$$\frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۳} = ۱ \Rightarrow a^۲ = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

$$b^۲ = ۳ \Rightarrow b = \sqrt{۳}$$

$$b^۲ = a^۲(۱ - e^۲) \Rightarrow e^۲ = ۱ - \frac{b^۲}{a^۲} = ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow e = \pm\frac{۱}{۲}$$

الف) کانونها: $(\pm ae, ۰) \equiv (\pm ۱, ۰)$ ب) $e = \pm\frac{۱}{۲}$

ج) $x = \pm\frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = \pm ۴$

(دو)

$$x^۲ + \frac{y^۲}{۲} = ۱ \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

$$b^۲ = ۲ \Rightarrow b = \sqrt{۲}$$

$$b^۲ = a^۲(۱ - e^۲) \Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} = ۱ - e^۲ \Rightarrow e^۲ = ۱ - \frac{b^۲}{a^۲}$$

چون b از a بزرگتر است، باید جای a و b را عوض کنیم:

$$a^۲ = b^۲(۱-e^۲) \Rightarrow e^۲ = ۱ - \frac{a^۲}{b^۲} = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow e = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

الف) کانونها: $\left(\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰\right)$ ب) $e = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ج) $x = \pm\frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \pm\sqrt{۲}$

سه) $\frac{x^۲}{۳^۲} + \frac{y^۲}{۴^۲} = ۱ \Rightarrow a^۲ = ۳^۲ \Rightarrow a = ۳$

$b^۲ = ۴^۲ \Rightarrow b = ۴$

$b^۲ = a^۲(۱-e^۲)$ یا $a^۲ = b^۲(۱-e^۲)$

در اینجا داریم

$$e^۲ = ۱ - \frac{a^۲}{b^۲} = ۱ - \left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ = \frac{۷}{۱۶} \Rightarrow e = \pm\frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

الف) کانونها: $\left(\pm\frac{۳\sqrt{۷}}{۴}, ۰\right)$ ب) $e = \pm\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ ج) $x = \pm\frac{۱۲}{\sqrt{۷}}$

چهار) $\frac{x^۲}{۵^۲} + \frac{y^۲}{۳^۲} = ۱ \Rightarrow a^۲ = ۵^۲ \Rightarrow a = ۵$

$b^۲ = ۳^۲ \Rightarrow b = ۳$

$$\Rightarrow b^۲ = a^۲(۱-e^۲) \Rightarrow e^۲ = ۱ - \frac{b^۲}{a^۲} = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow e = \pm\frac{۴}{۵}$$

الف) کانونها: $(\pm۴, ۰)$ ب) $e = \pm\frac{۴}{۵}$

ج) $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{۵}{\frac{۴}{۵}} = \pm\frac{۲۵}{۴}$

پنج) $۴x^۲ + ۸y^۲ = ۳۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۳۲}{۴}} + \frac{y^۲}{\frac{۳۲}{۸}} = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{(۲\sqrt{۲})^۲} + \frac{y^۲}{۲^۲} = ۱$

$\Rightarrow a = ۲\sqrt{۲},\ \ b = ۲$

$$b^۲ = a^۲(۱-e^۲) \Rightarrow e^۲ = ۱ - \frac{b^۲}{a^۲} = ۱ - \frac{۴}{۸} = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow e = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

الف) کانونها: $(\pm۲, ۰) = \left(\pm۲\sqrt{۲}\frac{۱}{\sqrt{۲}}, ۰\right)$ ب) $e = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

ج) $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{۲\sqrt{۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \pm۴$

۷. الف) $۸x^۲ + ۱۲y^۲ = ۹۶ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۹۶}{۸}} + \frac{y^۲}{\frac{۹۶}{۱۲}} = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{(\sqrt{۱۲})^۲} + \frac{y^۲}{(\sqrt{۸})^۲} = ۱$

$$\Rightarrow b^۲ = a^۲(۱-e^۲) \Rightarrow e^۲ = ۱ - \frac{b^۲}{a^۲} = ۱ - \frac{۸}{۱۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow e = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

کانونها عبارت‌اند از $(\pm ۲, ۰)$

$$e = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

خطهای هادی عبارت‌اند از $x = \pm\frac{\sqrt{۱۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}} = \pm ۶$

ب)
$$۲x^۲ + ۱۶y^۲ = ۳۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴^۲} + \frac{y^۲}{(\sqrt{۲})^۲} = ۱ \Rightarrow a = ۴,\ b = \sqrt{۲}$$

$$b^۲ = a^۲(۱ - e^۲) \Rightarrow e^۲ = ۱ - \frac{b^۲}{a^۲} = ۱ - \frac{۲}{۱۶} = \frac{۷}{۸} \Rightarrow e = \pm\sqrt{\frac{۷}{۸}}$$

کانونها عبارت‌اند از $\left(\pm\frac{۴\sqrt{۷}}{\sqrt{۸}}, ۰\right)$

$$e = \pm\frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۸}}$$

خطهای هادی عبارت‌اند از $x = \pm\frac{۴}{\frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۸}}} = \pm\frac{۸\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}$

ج)
$$۴x^۲ + y^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{x^۲}{\frac{۴}{۴}} + \frac{y^۲}{۴} = ۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۱^۲} + \frac{y^۲}{۲^۲} = ۱$$

داریم $b^۲ = a^۲(۱ - e^۲)$. چون b کوچکتر از a است، جای a و b را عوض می‌کنیم:

$$a^۲ = b^۲(۱ - e^۲),\ \ a = ۱,\ b = ۲$$

$$۱ = ۴(۱ - e^۲) \Rightarrow e^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow e = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

کانونها عبارت‌اند از $S\left(\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰\right)$

$$e = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

خطهای هادی عبارت‌اند از $x = \pm\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

۸. معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبارت است از

$$\frac{xx_۱}{a^۲} + \frac{yy_۱}{b^۲} = ۱$$

الف) معادلهٔ خط مماس بر بیضی $\frac{x^۲}{(\sqrt{۵})^۲} + \frac{y^۲}{۵^۲} = ۱$ در نقطهٔ $(۲, \sqrt{۵})$ عبارت است از

$$\frac{x^۲}{(\sqrt{۵})^۲} + \frac{y\sqrt{۵}}{۵^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۲x}{۵} + \frac{\sqrt{۵}y}{۲۵} = ۱$$

ب) $x^۲+۴y^۲=۸ \Rightarrow \frac{x^۲}{۸}+\frac{y^۲}{۲}=۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{(۲\sqrt{۲})^۲}+\frac{y^۲}{(\sqrt{۲})^۲}=۱$

معادلهٔ مماس در نقطهٔ $(-۲,۱)$ عبارت است از

$$\frac{x(-۲)}{(۲\sqrt{۲})^۲}+\frac{y(۱)}{(\sqrt{۲})^۲}=۱ \Rightarrow \frac{-۲x}{۸}+\frac{y}{۲}=۱$$

۹.

$$x=a\cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$$

$$y=b\sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta}=b\cos\theta$$

شیب مماس: $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\cot\theta$

شیب قائم: $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{b}\tan\theta$

معادلهٔ خط قائم: $y=\frac{a}{b}\tan\theta x+c$

این خط از نقطهٔ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ می‌گذرد.

$$b\sin\theta=\frac{a}{b}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}a\cos\theta+c \Rightarrow c=b\sin\theta-\frac{a^۲}{b}\sin\theta$$

$$\Rightarrow y=\frac{a}{b}\tan\theta x+b\sin\theta-\frac{a^۲}{b}\sin\theta$$

خط قائم محورهای x و y را به‌ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کند:

$$x=\frac{\frac{a^۲}{b}\sin\theta-b\sin\theta}{\frac{a}{b}\tan\theta}$$

$$\Rightarrow x=a\cos\theta-\frac{b^۲}{a}\cos\theta=\frac{\cos\theta}{a}(a^۲-b^۲) \Rightarrow P\left(\frac{\cos\theta}{a}(a^۲-b^۲),۰\right)$$

$$x=۰ \Rightarrow y=b\sin\theta-\frac{a^۲}{b}\sin\theta$$

$$\Rightarrow Q\left(۰,(b^۲-a^۲)\frac{\sin\theta}{b}\right)$$

$$\Rightarrow M=\left(\frac{\cos\theta}{۲a}(a^۲-b^۲),\frac{(b^۲-a^۲)}{۲b}\sin\theta\right)$$

$$\Rightarrow x=\frac{\cos\theta}{۲a}(a^۲-b^۲) \text{ و } y=\frac{(b^۲-a^۲)}{۲b}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱=\left(\frac{۲ax}{a^۲-b^۲}\right)^۲+\left(\frac{۲by}{b^۲-a^۲}\right)^۲$$

پس مکان هندسی مطلوب عبارت است از

$$۴a^۲x^۲+۴b^۲y^۲=(a^۲-b^۲)^۲$$

۱۰. شرط آنکه خط راستی بر بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ مماس شود آن است که $c^۲=a^۲m^۲+b^۲$. بنابراین

$$y=mx+\sqrt{a^۲m^۲+b^۲}$$

معادلهٔ خط قائم در همین نقطه عبارت است از

$$y=-\frac{x}{m}+\sqrt{\frac{a^۲}{m^۲}+b^۲}$$

$$y-mx=\sqrt{a^۲m^۲+b^۲} \qquad (۱)$$

$$my+x=\sqrt{a^۲+b^۲m^۲} \qquad (۲)$$

معادلات (۱) و (۲) را به توان ۲ می‌رسانیم و باهم جمع می‌کنیم:

$$y^۲-۲mxy+m^۲x^۲=a^۲m^۲+b^۲$$

$$\Rightarrow m^۲y^۲+۲mxy+x^۲=a^۲+b^۲m^۲$$

$$\Rightarrow (۱+m^۲)(x^۲+y^۲)=a^۲(۱+m^۲)+b^۲(۱+m^۲)$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲=a^۲+b^۲$$

مرکز این دایره، مرکز بیضی است و شعاع آن $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است. این دایرهٔ هادی بیضی است.

۱۱. خط $y=mx+c$ از کانون $(-ae,\circ)$ می‌گذرد، در نتیجه

$$\circ=m(-ae)+c\Rightarrow c=mae\Rightarrow y=mx+mae$$

فرض کنید $(a\cos\theta,b\sin\theta)$ نقطهٔ دلخواهی روی بیضی باشد.

$$m=\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+ae}\Rightarrow y=\frac{b(\sin\theta)x}{a\cos\theta+ae}+\frac{b\sin\theta}{a\cos\theta+ae}\cdot ae$$

$$\Rightarrow y(a\cos\theta+ae)=b(\sin\theta)x+abe\sin\theta$$

$$\Rightarrow y(a\cos\theta+ae)=b\sin\theta(x+ae)$$

۱۳. شیب خط $y=mx+c$ ثابت و مقدار c متغیر است.

$$m=\frac{b\sin\theta-b\sin\Phi}{a\cos\theta-a\cos\Phi}=\frac{b}{a}\cdot\frac{(\sin\theta-\sin\Phi)}{(\cos\theta-\cos\Phi)}$$

$$=\frac{b}{a}\frac{۲\cos\frac{\theta+\Phi}{۲}\sin\frac{\theta-\Phi}{۲}}{-۲\sin\frac{\theta+\Phi}{۲}\sin\frac{\theta-\Phi}{۲}}=-\frac{b}{a}\cot\frac{\theta+\Phi}{۲}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{a\cos\Phi+a\cos\theta}{۲}\ ,\ \frac{b\sin\Phi+b\sin\theta}{۲}\right)$$

$$x=\frac{a}{۲}(\cos\Phi+\cos\theta)\ ,\ y=\frac{b}{۲}(\sin\Phi+\sin\theta)$$

$$\Rightarrow x=\frac{a}{۲}۲\cos\frac{\Phi+\theta}{۲}\cos\frac{\Phi-\theta}{۲}\ ,\ y=\frac{b}{۲}۲\sin\frac{\Phi+\theta}{۲}\cos\frac{\Phi-\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow x = a\cos\frac{\Phi+\theta}{۲}\cos\frac{\Phi-\theta}{۲}\ ,\ \ y = b\sin\frac{\Phi+\theta}{۲}\cos\frac{\Phi-\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲ = a^۲\cos^۲\frac{\Phi+\theta}{۲}\cos^۲\frac{\Phi-\theta}{۲} + b^۲\sin^۲\frac{\Phi+\theta}{۲}\cos^۲\frac{\Phi-\theta}{۲}$$

$$= \cos^۲\frac{\Phi-\theta}{۲}\left(a^۲\cos^۲\frac{\Phi+\theta}{۲} + b^۲\sin^۲\frac{\Phi+\theta}{۲}\right)$$

.۱۴

$$۲۵x^۲ + ۳۶y^۲ = ۹۰۰ \Rightarrow ۲۵x^۲ + ۳۶\left(\frac{x+۶}{۲}\right)^۲ = ۹۰۰$$

$$\Rightarrow ۲۵x^۲ + ۹x^۲ + ۱۰۸x + ۳۲۴ - ۹۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow ۳۴x^۲ + ۱۰۸x - ۵۷۶ = ۰ \Rightarrow ۱۷x^۲ + ۵۴x - ۲۸۸ = ۰$$

.۱۵ الف)

$$۸x^۲ + ۱۲/۵y^۲ = ۵۲ \Rightarrow ۱۶x + ۲۵y\frac{dy}{dx} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{۱۶x}{۲۵y} = \frac{-۱۶(۲)}{۲۵(-۲)} = \frac{۱۶}{۲۵}$$

مقدار $\frac{dy}{dx} = \frac{۱۶}{۲۵}$ شیب مماس است و خط $y = \frac{۱۶}{۲۵}x + c$ از نقطهٔ $(۲,-۲)$ می‌گذرد:

$$-۲ = \frac{۳۲}{۲۵} + c,\ c = -۲ - \frac{۳۲}{۲۵} = -\frac{۸۲}{۲۵} \Rightarrow y = \frac{۱۶}{۲۵}x - \frac{۸۲}{۲۵}$$

شیب خط قائم $\frac{-۲۵}{۱۶}$ است و معادلهٔ آن به‌صورت $y = -\frac{۲۵}{۱۶}x + c$ است و چون از نقطهٔ $(۲,-۲)$ می‌گذرد، داریم

$$-۲ = -\frac{۵۰}{۱۶} + c \Rightarrow c = -۲ + \frac{۵۰}{۱۶} = \frac{۱۸}{۱۶} = \frac{۹}{۸} \Rightarrow y = -\frac{۲۵}{۱۶}x + \frac{۹}{۸}$$

ب)

$$۹x^۲ + ۲y^۲ = ۵۴ \Rightarrow ۱۸x + ۴y\frac{dy}{dx} = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{۱۸x}{۴y} = -\frac{۹x}{۲y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-۹(-۲)}{۲(۳)} = ۳$$

معادلهٔ خط مماس به‌صورت $y = ۳x + c$ است و از نقطهٔ $(-۲,۳)$ می‌گذرد. بنابراین

$$۳ = -۶ + c \Rightarrow c = ۹ \Rightarrow y = ۳x + ۹$$

شیب خط قائم $-\frac{۱}{۳}$ و معادلهٔ آن به شکل $y = -\frac{۱}{۳}x + c$ است و چون از نقطهٔ $(-۲,۳)$ می‌گذرد، داریم

$$۳ = \frac{۲}{۳} + c \Rightarrow c = ۳ - \frac{۲}{۳} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow ۳y + x = ۷$$

ج)

$$۹x^۲ + ۴y^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow ۱۸x + ۸y\frac{dy}{dx} = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{۹x}{۴y}$$

در نقطهٔ $(۲,۴)$ داریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{۱۸}{۱۶} = -\frac{۹}{۸} \Rightarrow y = -\frac{۹}{۸}x + c$$

این خط از نقطهٔ $(2,4)$ می‌گذرد:

$$4=-\frac{9}{4}+c\Rightarrow c=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}\Rightarrow c=\frac{25}{4}\Rightarrow y=-\frac{9}{8}x+\frac{25}{4}$$

شیب خط قائم $\frac{8}{9}$ و معادلهٔ آن به شکل $y=\frac{8}{9}x+c$ است و چون از نقطهٔ $(2,4)$ می‌گذرد، داریم

$$4=\frac{16}{9}+c\Rightarrow c=4-\frac{16}{9}=\frac{20}{9}\Rightarrow y=\frac{8}{9}x+\frac{20}{9}$$

د) $$3x^2+y^2=12\Rightarrow 6x+2y\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{y}$$

در نقطهٔ $(-1,3)$ داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{3}=1\Rightarrow y=x+c$$

این خط از نقطهٔ $(-1,3)$ می‌گذرد:

$$3=-1+c\ ,\ \ c=4\Rightarrow y=x+4$$

شیب خط قائم -1 و معادلهٔ آن $y=-x+c$ است که از نقطهٔ $(-1,3)$ می‌گذرد:

$$3=1+c\ ,\ \ c=2\Rightarrow y=-x+2$$

هـ) $$9x^2+2y^2=9\Rightarrow 18x+4y\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{2y}$$

شیب خط مماس در نقطهٔ $\left(\frac{1}{3},2\right)$ برابر است با

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4}\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+c$$

این خط از نقطهٔ $\left(\frac{1}{3},2\right)$ می‌گذرد:

$$2=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)+c\Rightarrow c=\frac{9}{4}\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}\Rightarrow 4y+3x=9$$

شیب خط قائم $\frac{4}{3}$ و معادلهٔ آن $y=\frac{4}{3}x+c$ است. این خط از نقطهٔ $\left(\frac{1}{3},2\right)$ می‌گذرد:

$$2=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)+c\Rightarrow c=2-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}\Rightarrow y=\frac{4}{3}x+\frac{14}{9}\Rightarrow 9y-12x=14$$

۱۶. چون خط قائم $x+y=2$ است، می‌توانیم نقاط برخورد خط و منحنی را بیابیم. دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x+y=2 & (1)\\ 3x^2+y^2=12 & (2)\end{cases}$$

با جایگزینی (۱) در (۲) حاصل می‌شود:

$$۳x^۲ + (-x + ۲)^۲ = ۱۲ \Rightarrow ۳x^۲ + x^۲ - ۴x + ۴ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ - ۴x - ۸ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۸}}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱ \pm ۳}{۲} \Rightarrow x_۲ = ۲ \text{ یا } x_۱ = -۱ \Rightarrow y_۲ = ۰ \text{ یا } y_۱ = ۳$$

$$\Rightarrow A(x_۱, y_۱) = A(-۱, ۳),\ B(x_۲, y_۲) = (۲, ۰)$$

با مشتق‌گیری نسبت به x، شیب خط مماس در نقطه‌ای دلخواه به‌دست می‌آید:

$$۶x + ۲y\frac{dy}{dx} = ۰ \Rightarrow ۲y\frac{dy}{dx} = -۶x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{۳x}{y}$$

شیب خط قائم در نقطهٔ $(-۱, ۳)$ برابر است با

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{۳x} = \frac{۳}{-۳} = -۱$$

بنابراین معادلهٔ خط قائم به‌صورت $y = -x + c$ است و چون از نقطهٔ $(-۱, ۳)$ می‌گذرد، داریم

$$۳ = ۱ + c \Rightarrow c = ۲ \Rightarrow y = -x + ۲ \text{ یا } y + x = ۲$$

در نقطهٔ $B(۲, ۰)$ معادلهٔ خط مماس به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{۳x} = ۰ \Rightarrow y = ۰$$

از حل دو معادلهٔ $y = ۰$ و $y = -x + ۲$ در یک دستگاه حاصل می‌شود $x = ۲$. بنابراین نقطهٔ برخورد $B(۲, ۰)$ است.

۱۷. اگر $y = mx + c$ معادلهٔ خط مماس بر بیضی باشد، چون مماسها با خط $y = -x$ موازی‌اند، شیب آنها $m = -۱$ است. فرض کنید A و B نقاط تماس باشند. در این‌صورت شرط مماس بودن $c^۲ = b^۲ + a^۲m^۲$ است که در آن $m = -۱$. در نتیجه

$$c = \pm\sqrt{b^۲ + a^۲} \Rightarrow y = -x \pm \sqrt{b^۲ + a^۲}$$

اینها معادلات خطهای مماس هستند.

اگر داشته باشیم $a = ۳$ و $b = ۴$، آنگاه

$$y = -x \pm ۵\ ,\quad ۱۶x^۲ + ۹y^۲ = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow ۱۶x^۲ + ۹(-x \pm ۵)^۲ = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow ۱۶x^۲ + ۹(x^۲ + ۱۰x + ۲۵) = ۱۴۴ \text{ یا } ۱۶x^۲ + ۹(x^۲ - ۱۰x + ۲۵) = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow ۲۵x^۲ - ۹۰x + ۲۲۵ - ۱۴۴ = ۰ \text{ یا } ۲۵x^۲ + ۹۰x + ۸۱ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲۵x^۲ - ۹۰x + ۸۱ = ۰ \text{ یا } ۲۵x^۲ + ۹۰x + ۸۱ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۹۰ \pm \sqrt{۹۰^۲ - ۴ \times ۲۵ \times ۸۱}}{۵۰} = \frac{۹}{۵} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{۹}{۵} \Rightarrow x_۱ = \frac{۹}{۵} \quad \text{یا} \quad x_۲ = -\frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow y_۱ = -x_۱ + ۵ = -\frac{۹}{۵} + ۵ = \frac{۱۶}{۵} \quad \text{یا} \quad y_۲ = -x_۲ - ۵ = \frac{۹}{۵} - ۵ = -\frac{۱۶}{۵}$$

$$\Rightarrow A(x_۱, y_۱) = A\left(\frac{۹}{۵}, \frac{۱۶}{۵}\right) \quad \text{یا} \quad B(x_۲, y_۲) = B\left(-\frac{۹}{۵}, -\frac{۱۶}{۵}\right)$$

۱۸. شیب خط $۳x + y + ۱ = ۰$ برابر با -۳ است و معادلات خطهای قائم به شکل $y = -۳x + k$ هستند. شیب خطهای مماس برابر است با $\frac{۱}{۳}$ $\left(y = \frac{۱}{۳}x + c\right)$. بنابراین شرط مماس شدن عبارت است از

$$c^۲ = b^۲ + a^۲m^۲ \Rightarrow c^۲ = b^۲ + a^۲\frac{۱}{۹} = ۱۶ + \frac{۸۱}{۹} = ۲۵ \Rightarrow c = \pm ۵$$

بنابراین معادلات مماسها عبارت‌اند از $y = \frac{۱}{۳}x \pm ۵$ و نقاط تماس آنها از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$x = -\frac{a^۲m}{c} \quad , \quad y = \frac{c^۲ - a^۲m^۲}{c}$$

اگر مقادیر $a = ۹$، $b = ۴$، $c = ۵$ و $m = \frac{۱}{۵}$ را در این دو رابطه قرار دهیم، حاصل می‌شود

$$x = -\frac{۲۷}{۵}, \quad y = \frac{۱۶}{۵}$$

یا

$$x = \frac{۲۷}{۵}, \quad y = -\frac{۱۶}{۵}$$

معادلات خطهای قائم عبارت‌اند از:

$$y = -۳x + k \Rightarrow \frac{۱۶}{۵} = \frac{۸۱}{۵} + k \Rightarrow k = -۱۳ \Rightarrow y = -۳x - ۱۳$$

$$y = -۳x + k \Rightarrow -\frac{۱۶}{۵} = -\frac{۸۱}{۵} + k \Rightarrow k = ۱۳ \Rightarrow y = -۳x + ۱۳$$

۲۰. شرط آنکه خط $y = mx + c$ بر بیضی به معادلهٔ $b^۲x^۲ + a^۲y^۲ = a^۲b^۲$ مماس شود آن است که

$$c^۲ = b^۲ + a^۲m^۲$$

در بیضی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{۳^۲} + \frac{y^۲}{۲^۲} = ۱$ داریم

$$c^۲ = ۴ + ۹m^۲ \qquad (۱)$$

خط $y = mx + c$ از نقطهٔ $T(-۱, ۳)$ می‌گذرد، پس

$$۳ = -m + c \Rightarrow c = ۳ + m \qquad (۲)$$

اگر معادلهٔ (۲) را در (۱) قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$(3+m)^2 = 4 + 9m^2 \Rightarrow 9 + 6m + m^2 = 4 + 9m^2 \Rightarrow 8m^2 - 6m - 5 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{16} \Rightarrow m = \frac{6 \pm 14}{16}$$

$$\Rightarrow m_1 = 1{,}25 \text{ یا } m_2 = -0{,}5$$

بنابراین خواهیم داشت

$$y = -0{,}5x + 3 - 0{,}5 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow 2y + x = 5$$

$$y = 1{,}25x + 3 + 1{,}25 \Rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{17}{4} \Rightarrow 4y = 5x + 17$$

با حل معادلات $2y + x = 5$ و $4x^2 + 9y^2 = 36$ در یک دستگاه حاصل می‌شود:

$$4(5 - 2y)^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow 4(25 - 20y + 4y^2) + 9y^2 = 36$$

$$\Rightarrow 100 - 80y + 16y^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow 25y^2 - 80y + 64 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \times 25 \times 64}}{25 \times 2} \Rightarrow y = \frac{80}{50} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\Rightarrow x = 5 - 2y = 5 - 2(1{,}6) = 5 - 3{,}2 = 1{,}8$$

پس مختصات P عبارت است از $(1{,}8, 1{,}6)$. اگر دو معادلهٔ $4y = 5x + 17$ و $4x^2 + 9y^2 = 36$ را در یک دستگاه حل کنیم، خواهیم داشت

$$4y = 5x + 17 \Rightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow 4y = 5x + 17$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 9\left(\frac{5}{4}x + \frac{17}{4}\right)^2 = 36$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 9\left(\frac{25}{16}x^2 + \frac{289}{16} + \frac{85}{8}x\right) = 36$$

$$\Rightarrow \frac{225}{16}x^2 + \frac{2601}{16} + \frac{765}{8}x + 4x^2 - 36 = 0$$

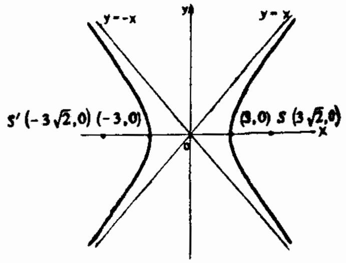
$$\Rightarrow 289x^2 + 1530x + 2025 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1530 \pm \sqrt{0}}{2 \times 289} = -2{,}65$$

$$\Rightarrow 4y = 5(-2{,}65) + 17 = 3{,}75 \Rightarrow y = 0{,}9375 \approx 0{,}94$$

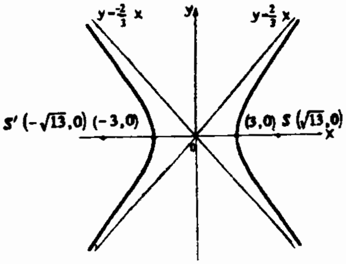
پس مختصات Q عبارت است از $(-2{,}65, 0{,}94)$.

حل تمرین فصل ۵

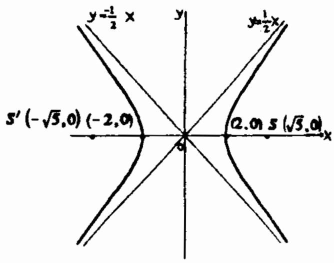
۱. هذلولیها به‌ترتیب در ۱۵۶ تا ۱۵۸ رسم شده‌اند.



شکل ۱۵۸



شکل ۱۵۷



شکل ۱۵۶

۲.(یک) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$:

الف) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1,\ S\left(\pm\frac{2\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ ب) $(\pm 2, 0)$ ج) $\pm\frac{4}{\sqrt{5}}$

د) $b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow 1 = 4(e^2 - 1) \Rightarrow \frac{1}{4} = e^2 - 1 \Rightarrow e^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow e = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

(دو) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

الف) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1,\ S\left(\pm\frac{3\sqrt{13}}{3}, 0\right)$ ب) $(\pm 3, 0)$ ج) $\pm\frac{9}{\sqrt{13}}$

د) $b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow 2^2 = 3^2(e^2 - 1) \Rightarrow \frac{9}{4} = (e^2 - 1)$

$$\Rightarrow e^2 = \frac{13}{9} \Rightarrow e = \pm\frac{\sqrt{13}}{3}$$

(سه) الف) $b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow S(\pm 3\sqrt{2}, 0)$

ب) $3^2 = 3^2(e^2 - 1) \Rightarrow (\pm 3, 0)$

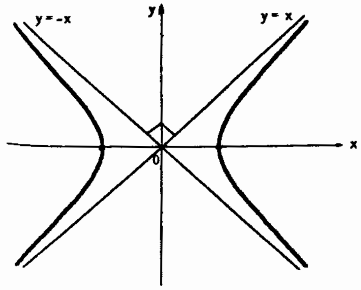
ج) $1 + 1 = e^2 \Rightarrow \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

د) $e = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \pm\sqrt{2}$

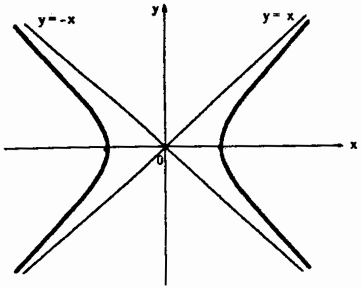
۳. الف) $x = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow 1 = e^2 - 1 \Rightarrow e = \pm\sqrt{2}$$

هذلولی در شکل ۱۵۹ رسم شده است.



شکل ۱۵۹



شکل ۱۶۰

ب) $x = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

همانند (الف) نتیجه می‌شود $e = \pm\sqrt{2}$. هذلولی در شکل ۱۶۰ رسم شده است.

۴. $x = a\sec t,\ y = b\tan t \Rightarrow \frac{a^2\sec^2 t}{a^2} - \frac{b^2\tan^2 t}{b^2} = 1$

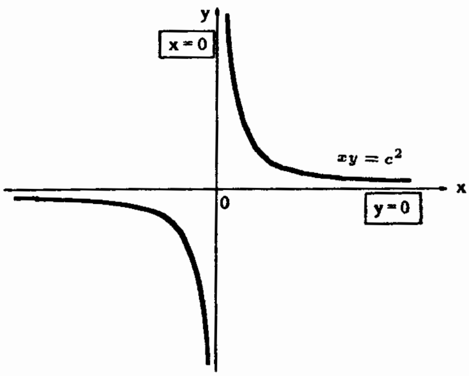
$$\Rightarrow \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \text{ hence } \sec^2 t = 1 + \tan^2 t \Rightarrow S(\pm ae, 0)$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}x$$

اگر $a = b$، داریم

$$y = \pm x$$

۵. مجانبها عبارت‌اند از $x = 0$ و $y = 0$ (شکل ۱۶۱).



شکل۱۶۱

$$x = ct\ ,\quad y = \frac{c}{t} \Rightarrow xy = ct \cdot \frac{c}{t} = c^2$$

۷. از رابطهٔ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{b^2}{a^2}$$

در نقطهٔ (x_1, y_1) داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x_1}{y_1}\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow y = \frac{x_1}{y_1}\frac{b^2}{a^2}x + k$$

این خط از نقطهٔ (x_1, y_1) می‌گذرد:

$$y_1 = \frac{x_1 b^2}{a^2 y_1}x_1 + k \Rightarrow k = y_1 - \frac{x_1^2}{y_1}\frac{b^2}{a^2} = \frac{y_1^2 a^2 - x_1^2 b^2}{a^2 y_1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x_1}{y_1}\frac{b^2}{a^2}\,x + \frac{y_1^2 a^2 - x_1^2 b^2}{a^2 y_1}$$

$$\Rightarrow y_1 y a^2 = x_1 x b^2 + y_1^2 a^2 - x_1^2 b^2$$

$$\Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

۱۱. معادلهٔ وتر RS عبارت است از

$$rsy + x = c(r+s)$$

معادلهٔ وتر PR عبارت است از

$$pry + x = c(cp + r)$$

معادلهٔ وتر PS عبارت است از

$$spy + x = c(s+p)$$

شیب PR برابر است با $m_1 = -\frac{1}{pr}$ و شیب SP برابر است با $m_2 = -\frac{1}{sp}$. بنابراین RP بر PS عمود است، زیرا

$$m_1 m_2 = \left(-\frac{1}{pr}\right)\left(-\frac{1}{sp}\right) = -1 \Rightarrow prsp = rsp^2 = -1$$

شیب RS برابر است با $-\frac{1}{rs}$. معادلهٔ خط مماس در P عبارت است از

$$x + p^2 y - 2cp = 0$$

و معادلهٔ خط قائم در P به شکل زیر است:

$$p^2 x - y - cp^3 + \frac{c}{p} = 0$$

بنابراین شیب خط قائم در P برابر است با $p^{۲}$ و شیب خط مماس در P برابر است با $-\frac{۱}{p^{۲}}$.
شیب RS عبارت است از $-\frac{۱}{rs}$. ولی $rsp^{۲} = -۱$. بنابراین شیب RS برابر با $p^{۲}$ است. بنابراین RS با خط قائم در P موازی است.

۱۲. $a = ۴,\ b = ۳,\ b^{۲} = a^{۲}(e^{۲} - ۱) \Rightarrow ۹ = ۱۶(e^{۲} - ۱) \Rightarrow \frac{۹}{۱۶} = e^{۲} - ۱$

$$\Rightarrow e^{۲} = \frac{۹}{۱۶} + ۱ = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow e = \pm\frac{۵}{۴}$$

کانونها عبارت‌اند از $(\pm ae, ۰)$ و معادلات خطهای هادی به شکل $x = \pm\frac{a}{e}$ هستند. بنابراین

$$S\left(\pm ۴ \times \frac{۵}{۴}, ۰\right) \text{ و } x = \pm\frac{۴ \times ۴}{۵} \Rightarrow S(\pm ۵, ۰) \text{ و } x = \pm\frac{۱۶}{۵}$$

$$\frac{x^{۲}}{۱۶} - \frac{y^{۲}}{۹} = ۱$$

$$x = ۵ \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶} - \frac{y^{۲}}{۹} = ۱ \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶} - ۱ = \frac{y^{۲}}{۹} \Rightarrow \frac{۹}{۱۶} = \frac{y^{۲}}{۹}$$

$$\Rightarrow y^{۲} = \frac{۸۱}{۱۶} \Rightarrow y = \pm\frac{۹}{۴}$$

$$\text{ضلع قائم} = AB = \frac{۱۸}{۴} = ۴/۵$$

۱۳. $-۵y = -۴x - ۳ \Rightarrow y = \frac{۴}{۵}x + \frac{۳}{۵}$

شیب این خط $\frac{۴}{۵}$ است، پس شیب خط مماس $-\frac{۵}{۴}$ است. بنابراین

$$y = -\frac{۵}{۴}x + c \Rightarrow x^{۲} - ۴y^{۲} = ۴ \Rightarrow \frac{x^{۲}}{۴} - y^{۲} = ۱ \Rightarrow a = ۲,\ b = ۱$$

شرط مماس شدن خط $y = -\frac{۵}{۴}x + c$ بر $x^{۲} - ۴y^{۲} = ۴$ آن است که

$$x^{۲} - ۴\left(-\frac{۵}{۴}x + c\right)^{۲} = ۴$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۴\left(\frac{۲۵}{۱۶}x^{۲} + c^{۲} - \frac{۱۰c}{۴}x\right) = ۴ \Rightarrow x^{۲} - \frac{۲۵}{۴}x^{۲} - ۴c^{۲} + \frac{۴۰c}{۴}x - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}\left(\frac{۴ - ۲۵}{۴}\right) + \frac{۴۰c}{۴}x - ۴c^{۲} - ۴ = ۰ \Rightarrow -۲۱x^{۲} + ۴۰cx - ۱۶c^{۲} - ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow D = ۰ \Rightarrow (۴۰c)^{۲} + ۴ \times ۱۶(c^{۲} + ۱)(-۲۱) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۶۰۰c^{۲} = ۸۴ \times ۱۶(c^{۲} + ۱) \Rightarrow \frac{۱۶۰۰}{۸۴ \times ۱۶}c^{۲} = c^{۲} + ۱$$

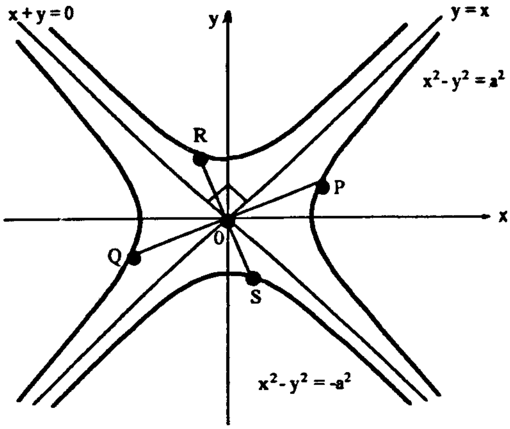
$$\Rightarrow c^{۲} = ۵/۲۵ \Rightarrow c = \pm ۲/۲۹$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۵}{۴}x + ۲/۲۹ \quad \text{یا} \quad y = -\frac{۵}{۴}x - ۲/۲۹$$

$$۴y + ۵x = ۹/۱۶ \quad \text{یا} \quad ۴y + ۵x = -۹/۱۶$$

اینها معادلات خطهای مماسی هستند که بر خط $۴x - ۵y + ۳ = ۰$ عمودند.

۱۴. (شکل ۱۶۲ را ببینید.)



شکل۱۶۲

قطر وتری است که از مرکز هذلولی می‌گذرد. وتر PQ، قطری از هذلولی $x^۲ - y^۲ = a^۲$ و RS قطری از هذلولی $x^۲ - y^۲ = -a^۲$ است. قطرهای PQ و RS مزدوج‌اند در صورتی‌که هر یک از آنها، تمام قطرهایی را که با دیگری موازی باشد نصف کند.

$$P(x_۱ + r\cos\theta\ ,\ y_۱ + r\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ \Rightarrow \frac{(x_۱ + r\cos\theta)^۲}{a^۲} - \frac{(y_۱ + r\sin\theta)^۲}{b^۲} = ۱$$

$$\Rightarrow b^۲(x_۱{}^۲ + r^۲\cos^۲\theta + ۲rx_۱\cos\theta) - a^۲(y_۱{}^۲ + ۲y_۱ r\sin\theta + r^۲\sin^۲\theta) = a^۲b^۲$$

$$\Rightarrow r^۲\cos^۲\theta b^۲ - a^۲r^۲\sin^۲\theta + ۲x_۱ rb^۲\cos\theta - ۲y_۱ a^۲ r\sin\theta + b^۲x_۱{}^۲ - a^۲y_۱{}^۲ - a^۲b^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow r^۲(\cos^۲\theta b^۲ - a^۲\sin^۲\theta) + r(۲x_۱ b^۲\cos\theta - ۲y_۱ a^۲\sin\theta) + b^۲x_۱{}^۲ - a^۲y_۱{}^۲ - a^۲b^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x_۱ b^۲\cos\theta - ۲y_۱ a^۲\sin\theta = ۰ \Rightarrow x_۱ b^۲\cos\theta = y_۱ a^۲\sin\theta$$

$$\Rightarrow y = +\frac{b^۲}{a^۲}\frac{x}{m}$$

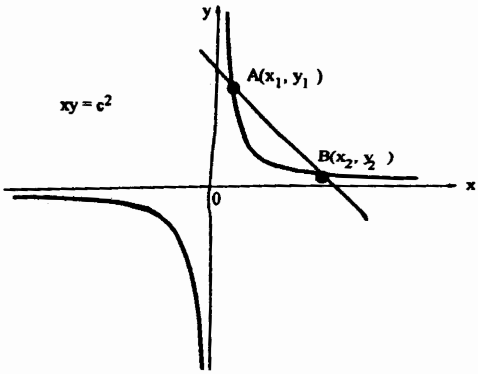
این معادلهٔ مجموعهٔ نقاط وسط وترهای به شیب m است.

۱۵. (شکل ۱۶۳ را ببینید.)

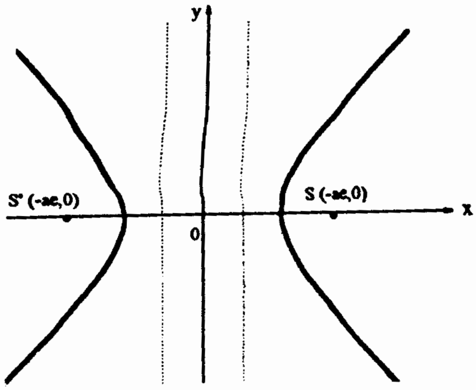
$$x(y_۱ + y_۲) + y(x_۱ + x_۲) = (x_۱ + x_۲)(y_۱ + y_۲)$$

اگر این وتر از نقطهٔ A بگذرد، آنگاه طرف چپ برابر است با

$$x_۱(y_۱ + y_۲) + y_۱(x_۱ + x_۲) = x_۱y_۱ + x_۱y_۲ + y_۱x_۱ + y_۱x_۲$$



شکل ۱۶۳



شکل ۱۶۴

طرف راست برابر است با

$$x_۱y_۱+x_۱y_۲+y_۱x_۲+x_۲y_۲$$

چون $x_۲y_۲=x_۱y_۱=c^۲$ پس طرف چپ با طرف راست برابر است.

اگر این وتر از نقطهٔ B بگذرد، آنگاه طرف چپ برابر است با

$$x_۲(y_۱+y_۲)+y_۲(x_۱+x_۲)=x_۲y_۱+x_۲y_۲+y_۲x_۱+x_۲y_۲$$

طرف راست برابر است با

$$x_۱y_۱+x_۱y_۲+y_۱x_۲+x_۲y_۱$$

چون $x_۲y_۲=x_۱y_۱=c^۲$ پس طرف چپ با طرف راست برابر است.

در صورتی‌که $x_۲\to x_۱$ و $y_۲\to y_۱$، خواهیم داشت

$$x(y_۱+y_۱)+y(x_۱+x_۱)=(x_۱+x_۱)(y_۱+y_۱)\Rightarrow ۲y_۱x+۲x_۱y=۴x_۱y_۱$$

$$\Rightarrow xy_۱+x_۱y=۲x_۱y_۱=۲c^۲$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس در $(x_۱,y_۱)$ عبارت است از

$$xy_۱+x_۱y=۲c^۲$$

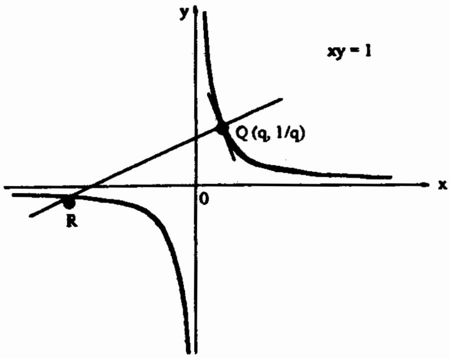
۱۶. (شکل ۱۶۴ را ببینید.)

$$۲ae=۱۸\sqrt{۳}\Rightarrow e=\sqrt{۳}\Rightarrow ۲a\sqrt{۳}=۱۸\sqrt{۳}\Rightarrow a=۹$$

$$a^۲=b^۲(e^۲-۱)\Rightarrow a^۲=b^۲(۳-۱)\Rightarrow b^۲=\frac{a^۲}{۲}\Rightarrow b=\pm\frac{۹}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱\Rightarrow \frac{x^۲}{۹^۲}-\frac{y^۲}{\frac{۸۱}{۲}}=۱$$

۱۷. (شکل ۱۶۵ را ببینید.)



شکل۱۶۵

اگر از رابطهٔ $xy = ۱$ مشتق بگیریم، حاصل می‌شود:

$$y + x\frac{dy}{dx} = ۰ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = \frac{-\frac{۱}{q}}{q} = -\frac{۱}{q^۲}$$

شیب خط قائم برابر است با $q^۲$. در نتیجه

$$y = q^۲x + k \Rightarrow \frac{۱}{q} = q^۲ \cdot q + k \Rightarrow k = \frac{۱}{q} - q^۳$$

$$y = q^۲x + \frac{۱}{q} - q^۳ \quad \text{یا} \quad yq + q^۴ = q^۳x + ۱$$

همچنین داریم $xy = ۱$. بنابراین

$$yq + q^۴ = q^۳\frac{۱}{y} + ۱ \Rightarrow y^۲q + q^۴y - y - q^۳ = ۰ \Rightarrow y^۲q + (q^۴ - ۱)y - q^۳ = ۰$$

$$\Rightarrow y = \frac{۱ - q^۴ \pm \sqrt{(q^۴ - ۱)^۲ + ۴q^۴}}{۲q} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲q} - \frac{q^۳}{۲} \pm \frac{۱}{۲q}(q^۴ + ۱)$$

$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲q} - \frac{q^۳}{۲} + \frac{q^۳}{۲} + \frac{۱}{۲q} = \frac{۱}{q}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲q} - \frac{q^۳}{۲} - \frac{q^۳}{۲} - \frac{۱}{۲q} = -q^۳$$

$$\Rightarrow y = \frac{۱}{q} \quad \text{یا} \quad y = -q^۳$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱}{y} = \frac{۱}{\frac{۱}{q}} = q \quad \text{یا} \quad x = -\frac{۱}{q^۳}$$

$$RQ=\sqrt{\left(q+\frac{۱}{q^{۳}}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{q}+q^{۳}\right)^{۲}}=\frac{۱}{q^{۴}}\sqrt{(q^{۴}+۱)^{۲}q^{۲}+(۱+q^{۴})^{۲}q^{۶}}$$

$$=\frac{q^{۴}+۱}{q^{۴}}\sqrt{q^{۲}+q^{۶}}=\frac{(q^{۴}+۱)^{\frac{۳}{۲}}}{q^{۳}}$$

$$\Rightarrow RQ=\frac{(q^{۴}+۱)^{\frac{۳}{۲}}}{q^{۳}}$$

.۱۸ $۲a=۸\Rightarrow a=۴$

$$a^{۲}+b^{۲}=a^{۲}e^{۲}=۵^{۲}\Rightarrow b^{۲}=۹\Rightarrow b=\pm۳$$

$$\Rightarrow\frac{x^{۲}}{۱۶}-\frac{y^{۲}}{۹}=۱$$

.۱۹ $\frac{x^{۲}}{۴^{۲}}-\frac{y^{۲}}{۵^{۲}}=۱\Rightarrow ۲۵x^{۲}-۱۶y^{۲}=۴۰۰$

$$a=۴,\ b=۵\Rightarrow a^{۲}e^{۲}=a^{۲}+b^{۲}=۱۶+۲۵\Rightarrow ae=\pm\sqrt{۴۱}$$

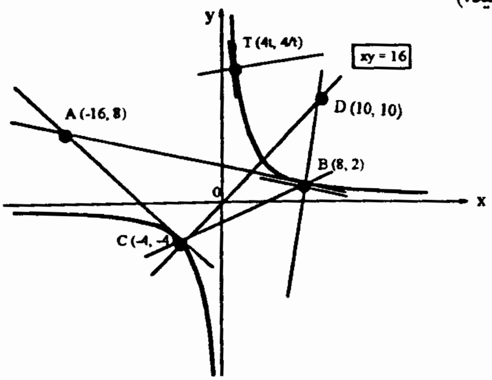
$$\Rightarrow S(\sqrt{۴۱},۰)\ \text{و}\ S'(-\sqrt{۴۱},۰)$$

.۲۰ $۳۶x^{۲}-۴۹y^{۲}=۱۷۶۴\Rightarrow\frac{x^{۲}}{\frac{۱۷۶۴}{۳۶}}-\frac{y^{۲}}{\frac{۱۷۶۴}{۴۹}}=۱\Rightarrow\frac{x^{۲}}{۷^{۲}}-\frac{y^{۲}}{۶^{۲}}=۱$

$$a=۷,\ b=۶\Rightarrow a^{۲}e^{۲}=a^{۲}+b^{۲}=۴۹+۳۶=۸۵$$

$$\Rightarrow ae=\pm\sqrt{۸۵}\Rightarrow S(\sqrt{۸۵},۰)\ \text{و}\ S'(-\sqrt{۸۵},۰)$$

.۲۱ (شکل ۱۶۶ را ببینید.)



شکل۱۶۶

$$x=۴t\Rightarrow\frac{dx}{dt}=۴\ ,\quad y=\frac{۴}{t}=۴t^{-۱}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=-۴t^{-۲}=-\frac{۴}{t^{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{۴}{t^{۲}}}{۴}=-\frac{۱}{t^{۲}}$$

معادلهٔ خط مماس عبارت است از

$$y=-\frac{۱}{t^{۲}}x+k \Rightarrow \frac{۴}{t}=-\frac{۱}{t^{۲}}\cdot ۴t+k \Rightarrow k=\frac{۸}{t} \Rightarrow y=-\frac{۱}{t^{۲}}x+\frac{۸}{t}$$

شیب خط قائم $t^{۲}$ است و معادلهٔ خط قائم $y=t^{۲}x+k$ است. بنابراین

$$\frac{۴}{t}=t^{۲}۴t+k \Rightarrow k=\frac{۴}{t}-۴t^{۳} \Rightarrow y=t^{۲}x+\frac{۴}{t}-۴t^{۳}$$

معادلهٔ خط مماس $y=-\frac{۱}{t^{۲}}x+\frac{۸}{t}$ است که چون از نقطهٔ $A(-۱۶,۸)$ می‌گذرد، داریم

$$۸=-\frac{۱}{t^{۲}}(-۱۶)+\frac{۸}{t} \Rightarrow ۸t^{۲}=۱۶+۸t \Rightarrow ۸t^{۲}-۸t-۱۶=۰$$

$$\Rightarrow t^{۲}-t-۲=۰ \Rightarrow t=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۸}}{۲}=\frac{۱\pm۳}{۲}$$

$$\Rightarrow t=۲ \quad \text{یا} \quad t=-۱$$

مختصات نقاط B و C عبارت‌اند از

$$\left(۴\times۲,\frac{۴}{۲}\right) \text{ و } \left(۴(-۱),\frac{۴}{(-۱)}\right) \Rightarrow B(۸,۲) \text{ و } C(-۴,-۴)$$

$$BC=\sqrt{(۲+۴)^{۲}+(۸+۴)^{۲}}=\sqrt{۳۶+۱۴۴}=۱۳/۴$$

$$AB=\sqrt{(۸-۲)^{۲}+(-۱۶-۸)^{۲}}=\sqrt{۳۶+۵۷۶}=۲۴/۷$$

$$AC=\sqrt{(-۱۶+۴)^{۲}+(۸+۴)^{۲}}=\sqrt{۱۴۴+۱۴۴}=۱۷/۰$$

پس محیط مثلث ABC برابر است با

$$۲s=۱۳/۴+۲۴/۷+۱۷=۵۵/۱ \Rightarrow s=\frac{۵۵/۱}{۲}=۲۷/۶$$

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{۲۷/۶\times(۲۷/۶-۱۳/۴)\times(۲۷/۶-۲۴/۷)\times(۲۷/۶-۱۷)}$$

$$=\sqrt{۲۷/۶\times۱۴/۲\times۲/۹\times۱۰/۶}=۱۱۰$$

معادلهٔ خط قائم عبارت است از

$$y=t^{۲}x+\frac{۴}{t}-۴t^{۳}$$

بنابراین در نقطهٔ B داریم $t=۲$ که در نتیجه

$$y=۴x+۲-۳۲ \Rightarrow y=۴x-۳۰$$

در نقطهٔ C داریم $t=-۱$، پس $y=x-۴+۴$ که نتیجه می‌دهد $y=x$.

برای یافتن نقطهٔ برخورد D، معادله‌های دو خط $y=x$ و $y=۴x-۳۰$ را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$x=۴x-۳۰ \Rightarrow ۳x=۳۰ \Rightarrow x=۱۰ \text{ و } y=۱۰ \Rightarrow D(۱۰,۱۰)$$

$$\Rightarrow BD=\sqrt{(۸-۱۰)^۲+(۲-۱۰)^۲}=\sqrt{۴+۶۴}=\sqrt{۶۸}=۸/۲۵$$

$$\Rightarrow BC=۱۳/۴$$

$$\Rightarrow CD=\sqrt{(۱۰+۴)^۲+(۱۰+۴)^۲}=\sqrt{۱۹۶+۱۹۶}=۱۹/۸$$

$$\Rightarrow ۲s=۸/۲۵+۱۳/۴+۱۹/۸=۴۱/۴۵ \Rightarrow s=۲۰/۸$$

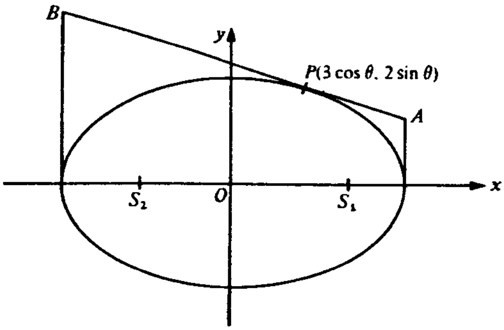
$$\triangle BCD \text{ مساحت} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{۲۰/۸\times(۲۰/۸-۸/۲۵)\times(۲۰/۸-۱۳/۴)\times(۲۰/۸-۱۹/۸)}$$

$$=\sqrt{۲۰/۸\times ۱۲/۵۵\times ۷/۴\times ۱}=۴۴$$

مسائل گوناگون

۱. نشان دهید که معادلهٔ خط مماس بر بیضی به معادلهٔ $۴x^۲ + ۹y^۲ = ۳۶$ در نقطهٔ $P(۳\cos\theta, ۲\sin\theta)$ عبارت است از $۲x\cos\theta + ۳y\sin\theta = ۶$. خروج از مرکز بیضی را بیابید و نشان دهید که فاصلهٔ کانونهای $S_۱$ و $S_۲$ برابر است با $۲\sqrt{۵}$. خط مماس در نقطهٔ P، مماسهایی را که در دو انتهای قطر بزرگ بیضی رسم شده‌اند، در نقاط A و B قطع می‌کند (شکل ۱۶۷ را ببینید).



شکل۱۶۷

نشان دهید دایره‌ای که به قطر AB رسم می‌شود، مساحتی برابر با $\pi(۵ + ۴\operatorname{cosec}^۲\theta)$ دارد و تحقیق کنید که این دایره از نقاط $S_۱$ و $S_۲$ می‌گذرد.

۲. دو نقطهٔ P و Q واقع بر سهمی $y^۲ = ۴ax$ به‌ترتیب مختصات $(ap^۲, ۲ap)$ و $(aq^۲, ۲aq)$ دارند. مقادیر زیر را بیابید:

الف) شیب وتر PQ؛

ب) شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ P؛

ج) معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ P بر سهمی؛

د) خطهای قائم در نقاط P و Q یکدیگر را در نقطهٔ R قطع می‌کنند. مختصات R را بیابید.

اگر وتر PQ از نقطه‌ای به مختصات $(-۲a, ۰)$ بگذرد، نشان دهید که R روی سهمی واقع است.

۳. معادلهٔ مماس بر هذلولی متساوی‌الساقین $xy = c^۲$ در نقطهٔ $T\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ را بیابید. اگر مماس محورهای x و y را به‌ترتیب در نقاط P و Q قطع کند، نشان دهید که T وسط PQ است.

۴. نشان دهید که مکان هندسی نقطه‌ای به مختصات $x = -ct$ و $y = \frac{c}{t}$ معادله‌ای به شکل $xy + c^۲ = ۰$ دارد. این مکان هندسی را رسم کنید.

خط مماس در نقطهٔ $P\left(-cp, \frac{c}{p}\right)$ محورهای x و y را در نقاط A و B قطع می‌کند. مختصات نقاط A و B و مساحت مثلث APB را به‌دست آورید.

۵. معادلهٔ دایرهٔ C را بیابید که قطر آن پاره‌خط بین دو نقطهٔ $(۲, ۲)$ و $(۴, ۶)$ باشد. فاصلهٔ مرکز دایرهٔ C را از خط $y + ۲x = ۵$ به‌دست آورید و نشان دهید که این خط بر دایره مماس است.

معادلهٔ خط L به شیب m را که از مبدأ مختصات می‌گذرد، بنویسید. نشان دهید که طول نقاط برخورد L و C در معادلهٔ $(۱ + m^۲)x^۲ - ۲(۳ + ۴m)x + ۲۰ = ۰$ صدق می‌کند. شرط برابری ریشه‌های این معادله را بنویسید و به این‌ترتیب مقادیر زیر را به‌دست آورید:

الف) شیب خطهایی که از مبدأ بر دایرهٔ C مماس رسم می‌شوند؛

ب) زاویهٔ بین مماسهای رسم‌شده.

(جواب. $(x - ۳)^۲ + (y - ۴)^۲ = ۵$؛ $\sqrt{۵}$؛ $y = mx$؛ (الف) $\frac{۱}{۲}$، $۵\frac{۱}{۲}$؛ (ب) $\tan^{-۱}\frac{۴}{۳}$.)

۶. نقطهٔ (x, y) طوری حرکت می‌کند که فاصله‌اش از نقطهٔ $(۰, ۱)$ برابر است با فاصلهٔ آن از خط $y = -۱$. نشان دهید که معادلهٔ سهمی پدیدآمده $x^۲ = ۴y$ است. نشان دهید معادلهٔ خط قائم بر سهمی در نقطهٔ $P(۲p, p^۲)$ عبارت است از $x + yp = ۲p + p^۳$.

خطی که از نقاط P و $Q(۰, -۲)$ می‌گذرد سهمی را در نقطهٔ R قطع می‌کند. نشان دهید که

الف) مختصات R عبارت‌اند از $\left(\frac{۴}{p}, \frac{۴}{p^۲}\right)$.

ب) خطهای قائم در نقاط P و R در نقطه‌ای واقع بر سهمی برخورد می‌کنند.

۷. منحنی پارامتری $x = ۲ + t^۲$، $y = ۴t$ را رسم کنید. معادلهٔ خط راستی به شیب m را که از نقطهٔ $(۱, ۰)$ می‌گذرد بنویسید. نشان دهید این خط سهمی را در صورتی قطع می‌کند که $mt^۲ - ۴t + m = ۰$. مقادیر m را طوری بیابید که این معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه داشته باشد. به این ترتیب معادلهٔ مماسهایی را که در نقطهٔ $(۱, ۰)$ بر منحنی رسم می‌شود، تعیین کنید.

(جواب. $m = \pm ۲$؛ $y - ۲x + ۲ = ۰$؛ $y + ۲x - ۲ = ۰$)

۸. مختصات نقاط P، Q و R به‌ترتیب عبارت‌اند از $(۲, ۴)$، $(۸, -۲)$ و $(۶, ۲)$.

الف) معادلهٔ خط راست l را که از وسط PR بر PQ عمود رسم می‌شود، بیابید.

ب) خط l پاره‌خط PQ را در S قطع می‌کند. نسبت PS به SQ را به‌دست آورید.

ج) نقطهٔ C مرکز دایره‌ای است که از سه نقطهٔ P، Q و R می‌گذرد. مختصات C و شعاع دایره را به‌دست آورید.

د) اندازهٔ زاویهٔ PCQ برابر با θ رادیان است. نشان دهید که $\tan\theta = \frac{۲۴}{۷}$. ثابت کنید کوچکترین قطعه‌ای از دایره که به‌وسیلهٔ وتر PQ جدا می‌شود مساحتی برابر با $۲۴ - ۲۵\theta$ دارد.

(جواب. $y = x - ۱$؛ $\frac{PS}{SQ} = \frac{۱}{۳}$؛ $C(۱, -۳)$، $۵\sqrt{۲}$)

۹. اگر a مقدار ثابت مثبتی باشد، نمودار منحنی $ay = x^۲$ را رسم کنید. نشان دهید معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ $T(at, at^۲)$ عبارت است از $x + ۲ty = at + ۲at^۳$. از اینجا نتیجه بگیرید که خطهای قائم در نقاط $A(a,a)$، $B(۲a, ۴a)$ و $C(-۳a, ۹a)$ همه از نقطه‌ای مانند D می‌گذرند. مختصات D را بیابید.

نشان دهید که خط مماس بر منحنی در نقطهٔ T محور y را در نقطهٔ $V(۰, -at^۲)$ قطع می‌کند. ناحیهٔ R محدود به بخشی از منحنی از O تا T، خط OV و خط VT را در نظر بگیرید. این ناحیه را به‌طور کامل حول محور y دوران می‌دهیم. حجم جسم پدید آمده را برحسب π، t و a به‌دست آورید.

(جواب. $D\left(-۱۲a, \frac{۱۵}{۲}a\right)$، $V = \frac{۱}{۶}\pi a^۳ t^۴$)

۱۰. نشان دهید معادلهٔ خط قائم بر سهمی به معادلهٔ $y^۲ = ۴ax$ در نقطهٔ $P(ap^۲, ۲ap)$ عبارت است از $y + px = ۲ap + ap^۳$. خطهای قائم در نقاط $P(ap^۲, ۲ap)$ و $Q(aq^۲, ۲aq)$ در نقطهٔ N یکدیگر را قطع می‌کنند. مختصات نقطهٔ N را برحسب p، q و a به‌دست آورید.

نقاط P و Q طوری تغییر می‌کنند که $pq = -۱$. معادلهٔ دکارتی مکان هندسی نقطهٔ N را بیابید. هرگاه $P = ۲$، طول کمان PQ از سهمی را تا دو رقم اعشار به‌دست آورید.

۱۱. الف) خروج از مرکز بیضی به معادلهٔ $۳x^۲ + ۴y^۲ = ۱۲$ را بیابید.

ب) معادلهٔ خط مماس بر بیضی به معادلهٔ $۳x^۲ + ۴y^۲ = ۱۲$ در نقطه‌ای به مختصات $\left(۱, \frac{۳}{۲}\right)$ را بیابید. این خط محور y را در نقطهٔ G قطع می‌کند.

ج) اگر S و S' کانونهای بیضی باشند، مساحت مثلث $SS'G$ را به‌دست آورید.

۱۲. نشان دهید که معادلهٔ خط مماس بر بیضی $\frac{x^۲}{۹} + \frac{y^۲}{۴} = ۱$ در نقطهٔ $P(۳\cos\theta, ۲\sin\theta)$ عبارت است از $۲x\cos\theta + ۳y\sin\theta = ۶$. همچنین معادلهٔ خط قائم در نقطهٔ P را بیابید. خط مماس و قائم محور x را به‌ترتیب در نقاط T و N قطع می‌کنند، مختصات مرکز دایره‌ای را بیابید که از سه نقطهٔ P، T و N می‌گذرد. هرگاه داشته باشیم $\frac{OC}{ON} = \frac{۳}{۲}$ که در آن O مرکز دایره است و P در ربع اول قرار دارد، نشان دهید که مختصات P عبارت است از $\left(\frac{۹}{\sqrt{۱۰}}, \frac{۲}{\sqrt{۱۰}}\right)$.

۱۳. مختصات نقاط A و B به‌ترتیب $(-۴, ۰)$ و $(۱۲, ۱۲)$ هستند. وسط AB را M می‌نامیم. معادلهٔ خطی را در صفحهٔ محورهای مختصات بیابید که از M بگذرد و بر AB عمود باشد. از اینجا یا به روشی دیگر، معادلهٔ دکارتی دایره‌ای را که از نقاط O، A و B می‌گذرد، بیابید.

۱۴. معادلات پارامتری یک منحنی عبارت‌اند از $x = \cos t$ و $y = ۲\sin t$. نشان دهید که معادلهٔ خط قائم بر منحنی در نقطهٔ $P(\cos t, ۲\sin t)$ به شکل زیر است:

$$\frac{۲y}{\sin t} - \frac{x}{\cos t} = ۳$$

خط قائم بر منحنی در نقطهٔ P محور x را در نقطهٔ G قطع می‌کند. وسط PG را M می‌نامیم. هرگاه t تغییر کند، مکان هندسی M را بیابید.

۱۵. نشان دهید که خروج از مرکز هذلولی $x^۲ - y^۲ = a^۲$، $a > ۰$، برابر با $\sqrt{۲}$ است. به این طریق مختصات کانون S و معادلهٔ خط هادی L را بیابید که در آن S و L هر دو در ناحیهٔ $x > ۰$ واقع‌اند.

خط عمودی که از S بر خط $y = x$ رسم می‌شود آن‌را در نقطهٔ P و خط عمودی که از S بر خط $y = -x$ رسم می‌شود، آن‌را در Q قطع می‌کند. نشان دهید که نقاط P و Q هر دو روی خط هادی L واقع‌اند و مختصات P و Q را به‌دست آورید. اگر خط SP هذلولی را در نقطهٔ R قطع کند، نشان دهید که خط مماس در R از نقطهٔ Q می‌گذرد.

۱۶. هذلولی به معادلهٔ $x^۲ - y^۲ = ۴$ مفروض است. نشان دهید نقطه‌ای به مختصات $x = t + \frac{۱}{t}$ و $y = t - \frac{۱}{t}$ روی هذلولی واقع است. ثابت کنید معادلهٔ خط قائم بر منحنی در نقطهٔ P به شکل زیر است:

$$t(t^۲ + ۱)y + t(t^۲ - ۱)x = ۲(t^۴ - ۱)$$

خط قائم در نقطهٔ P محور x را در X و محور y را در Y قطع می‌کند.

الف) ثابت کنید P وسط XY است؛

ب) هرگاه M وسط PX باشد، ثابت کنید مکان هندسی M یک هذلولی است و خروج از مرکز آن‌را تعیین کنید.

(جواب. (ب) $\frac{x^۲}{۹} - y^۲ = ۱$؛ $\frac{۱}{۳}\sqrt{۱۰}$)

۱۷. معادلهٔ پارامتری یک منحنی به‌صورت $x = \frac{۲t}{۱+t}$ و $y = \frac{t^۲}{۱+t}$ است. ثابت کنید معادلهٔ خط قائم بر منحنی در نقطهٔ $\left(۱, \frac{۱}{۲}\right)$ به شکل $۴x + ۶y = ۷$ است. مختصات نقطهٔ برخورد دیگر این خط با منحنی را بیابید.

(جواب. $\left(۱۴, \frac{-۴۹}{۶}\right)$)

۱۸. هرگاه t پارامتری ناصفر باشد، نشان دهید که نقطهٔ $P\left[۲\left(t + \frac{۱}{t}\right), \left(t - \frac{۱}{t}\right)\right]$ همواره روی هذلولی $x^۲ - ۴y^۲ = ۱۶$ قرار دارد. نشان دهید که معادلهٔ خط مماس در P به شکل زیر است:

$$x(t^۲ + ۱) - ۲y(t^۲ - ۱) = ۸t$$

خط مماس در P مجانبهای هذلولی را که معادلهٔ آنها $۲y - x = ۰$ و $۲y + x = ۰$ است به‌ترتیب در نقاط L و M قطع می‌کند. مختصات L و M را برحسب t به‌دست آورید. نشان دهید که با

تغییر t، مرکز دایره‌ای که از L، M و مبدأ مختصات، O، می‌گذرد روی هذلولی $4x^2 - y^2 = 25$ واقع است.

(جواب. $L(4t, 2t)$، $M\left(\frac{4}{t}, -\frac{2}{t}\right)$)

۱۹. ناحیهٔ مثلثی شکل R به رأسهای A، B و C را که به‌وسیلهٔ رابطه‌های $x \geqslant 0$، $y + 2 \geqslant 0$ و $2y + x - 2 \leqslant 0$ تعریف می‌شود، در نظر بگیرید.

الف) ناحیهٔ R را با رسم خطهای مناسب و نام‌گذاری نقاط، مشخص کنید.

ب) مختصات نقاط A، B و C را بیابید.

ج) نقطهٔ P در ناحیهٔ R در مکانی واقع است که داریم $PA=PB=PC$. مختصات P را بیابید.

د) شعاع دایره‌ای به مرکز P را که از نقاط A، B و C می‌گذرد، به‌دست آورید.

۲۰. نشان دهید که معادلهٔ خط قائم بر سهمی $y^2 = 4ax$ در نقطهٔ $P(at^2, 2at)$ عبارت است از $y + tx = 2at + at^3$. این خط قائم سهمی را در نقطهٔ دیگری مانند $Q(as^2, 2as)$ قطع می‌کند. نشان دهید که

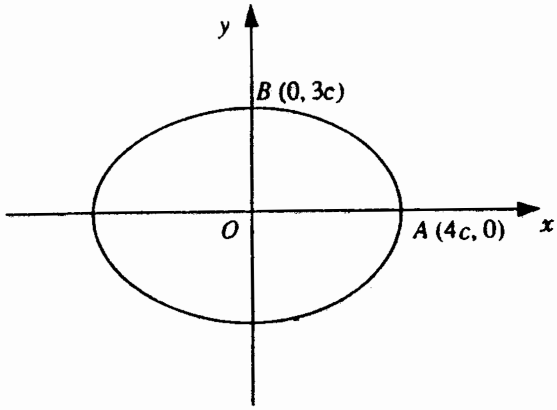
الف) $s + t + \frac{2}{t} = 0$، $t \neq 0$؛

ب) $PQ^2 = \frac{16a^2(t^2+1)^3}{t^4}$، $t \neq 0$.

۲۱. شکل ۱۶۸ نمودار بیضی به معادلات پارامتری

$$x = 4c\cos t\,, \quad y = 3c\sin t\,, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

است که در آن c عدد ثابت مثبتی است.



شکل۱۶۸

الف) مقدار t را در نقاط $A(4c, 0)$ و $B(0, 3c)$ به‌دست آورید.

ب) با توجه به انتگرال $\int y\frac{dx}{dt}$، مساحت ناحیهٔ محدود به بیضی را برحسب c به‌دست آورید.

۲۲. مختصات نقاط A و B به‌ترتیب عبارت‌اند از $(-4,6)$ و $(2,8)$. خط p که از نقطهٔ B عمود بر AB رسم می‌شود، محور y را در نقطهٔ C قطع می‌کند.

الف) معادلهٔ خط p را بیابید.

ب) مختصات نقطهٔ C را به‌دست آورید.

ج) با محاسبه نشان دهید که $AB = BC$.

هرگاه $ABCD$ مربعی باشد که قطرهایش یکدیگر را در M قطع می‌کنند، مختصات نقاط زیر را بیابید:

د) نقطهٔ M هـ) نقطهٔ D

(جواب. (الف) $y+3x-14=0$؛ (ب) $(0,14)$؛ (د) $(-2,10)$؛ (هـ) $(-6,12)$)

۲۳. بیضی به معادلهٔ

$$x = a\cos\theta\,, \quad y = b\sin\theta\,, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\,, \quad a > b$$

را در نظر بگیرید که در آن $b^2 = a^2(1-e^2)$. نشان دهید طول کمانی از بیضی که از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ امتداد دارد از رابطهٔ $s = a\int_0^\pi \sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta$ به‌دست می‌آید.

۲۴. نشان دهید که معادلهٔ خط مماس بر سهمی به معادلهٔ $y^2 = 4ax$ در نقطهٔ $P(ap^2, 2ap)$ به شکل $x - py + ap^2 = 0$ است. نقطهٔ $Q(aq^2, 2aq)$ واقع بر سهمی به گونه‌ای است که OP بر OQ عمود است. خطهای مماس بر سهمی در نقاط P و Q یکدیگر را در R قطع می‌کنند. ثابت کنید با تغییر مکان نقطهٔ P، مکان هندسی R یک خط راست است و معادلهٔ آن‌را بیابید.

۲۵. نشان دهید که خط قائم بر سهمی به معادلهٔ $y^2 = 4ax$ در نقطهٔ $P(ap^2, 2ap)$ عبارت است از

$$y + px = 2ap + ap^3$$

این خط قائم بار دیگر منحنی را در نقطهٔ $Q(aq^2, 2aq)$ قطع می‌کند. نشان دهید که $q = -\left(p + \frac{2}{p}\right)$. خطهای مماس بر سهمی در نقاط P و Q یکدیگر را در R قطع می‌کنند. مختصات R را برحسب a و p بیابید. به این ترتیب نشان دهید که R روی یک منحنی به معادلهٔ زیر قرار دارد:

$$xy^2 + 4a^3 + 2ay^2 = 0$$

معادلات مجانبهای این منحنی را بنویسید.

(جواب. $\left[-a(2+p^2), \frac{-2a}{p}\right]$؛ $x = -2a$، $y = 0$)

۲۶. مختصات مرکز و شعاع دایره‌ای به معادلهٔ زیر را بیابید:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 26 = 0$$

فاصلهٔ نقطهٔ $P(7,9)$ را از مرکز این دایره به‌دست آورید. سپس طول مماسهایی را که از P بر دایره رسم می‌شود، به‌دست آورید.

(جواب. $(-1,3)$، $r = 6$)

۲۷. نشان دهید که معادلهٔ خط مماس بر بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ در نقطهٔ $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ به شکل زیر است:

$$ay\sin\theta+bx\cos\theta=ab$$

خط مماس در نقطهٔ P محور x را در A و محور y را در B قطع می‌کند و Q وسط AB است. مختصات A، B و Q را به‌دست آورید.

الف) نشان دهید که طول PQ از رابطهٔ

$$PQ^2=\cot^2 2\theta(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)$$

به‌دست می‌آید.

ب) مختصات چهار مکان P را که در آنها P وسط AB است، برحسب a و b به‌دست آورید.

ج) معادلهٔ مکان هندسی Q را وقتی‌که θ تغییر می‌کند، به‌دست آورید.

(جواب. (ب) $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$؛ (ج) $b^2x^2+a^2y^2=4x^2y^2$)

۲۸. مختصات مرکز C و شعاع دایره‌ای به معادلهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$x^2+y^2+4x-6y=12$$

این دایره محور x را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث ABC را بیابید. مساحت قطعهٔ کوچکتری را که وتر AB از دایره جدا می‌کند تا سه رقم بامعنا محاسبه کنید.

۲۹. معادلهٔ وتری را که دو نقطهٔ $P\left(cp, \frac{c}{p}\right)$ و $Q\left(cq, \frac{c}{q}\right)$ واقع بر هذلولی $xy=c^2$ را به‌هم وصل می‌کند، به‌دست آورید. با محاسبهٔ یک حد مناسب، نتیجه بگیرید که معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $T\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ عبارت است از $t^2y+x=2ct$.

الف) نقطهٔ $R\left(cr, \frac{c}{r}\right)$ نیز روی هذلولی قرار دارد.

(یک) ثابت کنید نقاط P، Q و R نمی‌توانند روی یک خط راست قرار داشته باشند.

(دو) نشان دهید که وقتی $\angle PQR=90^\circ$، آنگاه $pq^2r=-1$ و نتیجه بگیرید که مماس در نقطهٔ Q بر خط PR عمود است.

ب) خط مماس در T محور y را در Y قطع می‌کند و M وسط TY است. معادلهٔ دکارتی مکان هندسی M را وقتی‌که t تغییر می‌کند به‌دست آورید.

۳۰. ثابت کنید که خط مماس بر هذلولی متساوی‌الساقین $xy=c^2$ در نقطهٔ $P\left(cp, \frac{c}{p}\right)$ معادله‌ای به شکل $x+yp^2=2cp$ دارد. معادلهٔ خط قائم در P را بیابید و نشان دهید که این خط قائم منحنی را در نقطهٔ $Q(-cp^3, -cp^3)$ قطع می‌کند. خطهای مماس در نقاط P و Q یکدیگر را در R قطع می‌کنند. مختصات R را برحسب c و p به‌دست آورید. سپس نشان دهید که وقتی p

تغییر می‌کند، معادلهٔ مکان هندسی R عبارت است از

$$(x^2-y^2)^2+4c^2xy=0$$

(جواب. $p^2x-py=c(p^2-1)$؛ $x_R=-\frac{2cp}{p^2-1}$؛ $y_R=\frac{2cp^3}{p^2-1}$)

۳۱. معادلهٔ خط مماس بر بیضی $\frac{x^2}{16}+y^2=1$ را در نقطه‌ای به مختصات $(4\cos t,\sin t)$ بیابید. خط مماسی که در این نقطه بر بیضی رسم می‌شود، محورهای مختصات را در نقاط R و S قطع می‌کند. نشان دهید که به‌ازای همهٔ مماسهایی از این نوع، وسط QR روی منحنی $\frac{16}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4$ واقع است. این منحنی را رسم کنید و معادلات چهار مجانب آن‌را به‌دست آورید. نشان دهید که معادلهٔ این منحنی در مختصات قطبی به شکل

$$r^2=4\sec^2\theta+\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\theta$$

است. کمترین فاصلهٔ این منحنی تا مبدأ O را بیابید.

(جواب. $4y\sin t+x\cot t=4$؛ $x=\pm2$، $y=\pm\frac{1}{2}$؛ ۲٫۵)

۳۲. بیضی به معادلهٔ $16x^2+25y^2=400$ مفروض است. خروج از مرکز این بیضی را به‌دست آورید و نشان دهید که معادلهٔ خط قائم بر بیضی در نقطهٔ $P(5\cos\theta,4\sin\theta)$ به شکل زیر است:

$$4y\cos\theta-5x\sin\theta+9\sin\theta\cos\theta=0$$

الف) خط قائم در P محورهای مختصات را در نقاط Q و R قطع می‌کند. وسط QR را M می‌نامیم. مختصات M را بیابید و سپس نتیجه بگیرید که مکان هندسی M یک بیضی است که خروج از مرکز آن با بیضی اولیه برابر است.

ب) اگر خط قائم در نقطهٔ P از نقطهٔ $(5,4)$ بگذرد، نشان دهید که θ در معادلهٔ $32\cos\theta-50\sin\theta+9\sin2\theta=0$ صدق می‌کند.

(جواب. $c=0/6$؛ (الف) $M\left(\frac{9}{10}\cos\theta-\frac{9}{8}\sin\theta\right)$)

۳۳. دایره‌ای به معادلهٔ $(x-5)^2+(y-7)^2=25$ دارای مرکز C است و نقطهٔ $P(2,3)$ بر دایره واقع است. شیب خط PC را بیابید و از اینجا یا به روشی دیگر معادلهٔ خط مماس بر دایره را در نقطهٔ P به‌دست آورید. همچنین معادلهٔ خط راستی را که از C و نقطهٔ $Q(-1,4)$ می‌گذرد، بیابید. خط مماس و خط CQ یکدیگر را در R قطع می‌کنند. اندازهٔ زاویهٔ PRC را تا نزدیکترین $0/1^\circ$ به‌دست آورید.

(جواب. $y-3=-\frac{3}{4}(x-2)$؛ $63/4^\circ$)

۳۴. نشان دهید که معادلهٔ خط قائم بر سهمی $y^2=4ax$ در نقطهٔ $P(ap^2,2ap)$ عبارت است از

$$y+px=2ap+ap^3$$

الف) نقطهٔ تقاطع خطهای قائم بر منحنی در P و $Q(aq^۲, ۲aq)$ را R می‌نامیم. هرگاه خط راستی که از P و Q می‌گذرد از نقطه‌ای به مختصات $(-۲a, ۰)$ نیز بگذرد، نشان دهید که $pq = ۲$ و نتیجه بگیرید که R روی سهمی قرار دارد.

ب) فرض کنید S نقطه‌ای واقع بر سهمی به مختصات $(as^۲, ۲as)$ باشد. اگر $s^۲ > ۸$، نشان دهید که سه خط قائم بر سهمی وجود دارند که از S می‌گذرند.

(جواب. (الف) $[a(۲ + p^۲ + q^۲ + pq), -apq(p + q)]$)

۳۵. اگر c عدد ثابت و مثبتی باشد، نمودار بیضی به معادلهٔ $۱۶x^۲ + ۲۵y^۲ = ۳۰۰c^۲$ را رسم کنید. روی نموداری که رسم کرده‌اید، نقاطی را مشخص کنید که بیضی محورهای Ox و Oy را قطع می‌کند. نشان دهید که کانونهای بیضی در نقاط $S(۳c, ۰)$ و $F(-۳c, ۰)$ واقع‌اند. خط مماس بر بیضی در نقطهٔ $P\left(۳c, \frac{۱۶c}{۵}\right)$ محور x را در نقطهٔ A و محور y را در نقطهٔ B قطع می‌کند. خط قائم بر بیضی در نقطهٔ P محور x را در C و محور y را در D قطع می‌کند. مختصات نقاط A، B، C و D را برحسب c به‌دست آورید. ثابت کنید

$$\frac{OAB \text{ مساحت مثلث}}{OCD \text{ مساحت مثلث}} = \frac{۵^۶}{۳^۶}$$

وسط پاره‌خط FP را M می‌نامیم. نشان دهید که M مرکز دایره‌ای است که از نقاط D، F، P و S می‌گذرد.

(جواب. $A\left(\frac{۲۵c}{۳}, ۰\right)$، $B(۰, ۵c)$، $C\left(\frac{۲۷c}{۲۵}, ۰\right)$ و $D\left(۰, -\frac{۹c}{۵}\right)$)

۳۶. خطهای $۳x + ۴y = ۱۴$ و $x - ۷y = ۱۳$ یکدیگر را در نقطهٔ A و خط $۴x - ۳y + ۲۳ = ۰$ دو خط دیگر را به‌ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کند.

الف) نشان دهید که طول BC برابر ۱۰ است.

ب) اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ BAC را به‌دست آورید.

ج) مختصات A و نیز فاصلهٔ قائم نقطهٔ A را تا BC به‌دست آورید. به‌این‌ترتیب معادلهٔ دایرهٔ به مرکز A را که بر خط BC مماس است، بیابید.

د) مساحت بخشی از مثلث ABC را که بیرون دایره واقع است، برحسب π به‌دست آورید.

(جواب. (ب) ۴۵°؛ (ج) $(۶, -۱)$، ۱۰، $(x - ۶)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۱۰۰$؛ (د) $۵۰ - \frac{۲۵\pi}{۲}$)

هر یک از کتابهای مجموعهٔ مهارت در ریاضیات ، تعداد زیادی مسأله را در یکی از موضوعهای ریاضیات دبیرستانی به همراه حل کامل آنها در بردارد. رهیافت گام به‌گام این مساله‌ها و حل کامل همهٔ آنها دانش‌آموز را قادر می‌سازد که با کمترین نیاز به کمک و راهنمایی معلم مستقلاً به مطالعهٔ کتابهای این مجموعه بپردازد.
کتابهای این مجموعه برای همهٔ دانش‌آموزان دبیرستان و دورهٔ پیش دانشگاهی مناسب است.

مجموعهٔ مهارت در ریاضیات شامل ۱۰ کتاب زیر است:

۱ - جبر
۲ - مثلثات
۳ - اعداد مختلط
۴ - حساب دیفرانسیل و کاربردهای آن
۵ - رسم منحنیهای دکارتی و قطبی
۶ - هندسهٔ مختصاتی در دو بعد
۷ - حساب انتگرال و کاربردهای آن
۸ - بردارها در دو و سه‌بُعد
۹ - ماتریسها و دترمینانها
۱۰ - ترکیبها ، جایگشتها ، و احتمالات

شابک X-۲۴۱-۳۱۸-۹۶۴
ISBN 964-318-241-X

بها ۷۳۰۰ ریال