مهارت در ریاضیات

مسائل حل شده در

بردارها در دو و سه بعد

۸

تألیف آنتونی نیکلایدس

ترجمهٔ مهدی امیریان

انتشارات فاطمی

مهارت در ریاضیات

مسائل حل شده در

بردارها در دو و سه بعد

۸

تألیف آنتونی نیکلایدس

ترجمهٔ مهدی امیریان

انتشارات فاطمی

Success In Pure Mathematics
Vectors In Two And Three Dimensions
Anthony Nicolaides
Pass Publications

مهارت در ریاضیات

مسائل حل شده در

بردارها در دو و سه بُعد

مؤلف: آنتونی نیکلایدس
مترجم: مهدی امیریان
ویراستار: مهران اخباریفر

ناشر: مؤسسهٔ انتشارات فاطمی
چاپ اول، ۱۳۷۸
شابک ۱ـ۲۴۰ـ۳۱۸ـ۹۶۴
ISBN 964-318-240-1

طرح جلد: آتلیه انتشارات فاطمی
آماده‌سازی پیش از چاپ: تولید انتشارات فاطمی
لیتوگرافی: گرافیک گستر
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ بهرام
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۶۵۱۴۲۲ ـ ۶۵۴۷۷۰ نمابر: ۸۹۵۶۲۵۸
Fatemi@sina.sharif.ac.Ir

Nicolaides, Anthony — نیکلایدس، آنتونی، ۱۹۳۲ـ
مسائل حل شده در بردارها در دو و سه بُعد / تألیف آنتونی نیکلایدس؛ ترجمهٔ مهدی امیریان. ــ تهران: فاطمی، ۱۳۷۸.
پنج، ۱۷۸ ص.: مصور، نمودار. ــ (مهارت در ریاضیات؛ [ج] ۸)
ISBN 964-318-244-4 (دوره).
ـ ISBN 964-318-240-1 (ج.۸)
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Vectors in two and three dimensions.
۱. ریاضیات ــ آزمونها و تمرینها. ۲. بردارهای مختلط. ۳. بردارها. الف. امیریان، مهدی، ۱۳۵۲ ـ ، مترجم. ب. عنوان.
QA۱۳۹/ن۹۶م۹ ۵۱۵/۶۳
ج.۸
۱۳۷۸
کتابخانهٔ ملی ایران ۱۷۱۱۳ـ۷۸م

فهرست

به‌نام خدا

پیشگفتار

مهارت در ریاضیات مجموعه‌ای است شامل ۱۰ جلد کتاب که در انگلستان برای کمک به دانش‌آموزانی تألیف شده است که قصد شرکت در امتحانات ورودی GCE را دارند و نمی‌خواهند در کلاسهای حضوری شرکت کنند. رهیافت گام‌به‌گام این کتابها و وجود حل کامل همهٔ مسأله‌ها دانش‌آموزان را قادر می‌سازد که با کمترین نیاز به کمک و راهنمایی معلم، مستقلاً به مطالعهٔ این کتابها بپردازند.

در ترجمهٔ فارسی کتابها کوشش شده است که با اِعمال تغییراتی در محتوای آنها، این مجموعه هرچه بیشتر برای دانش‌آموزان نظام‌جدید آموزش متوسطه و دورهٔ پیش‌دانشگاهی قابل‌استفاده باشد.

هریک ازکتابهای این مجموعه سه بخش دارد. در بخش اول، هر فصل شامل خلاصه‌ای از درس و تعدادی مثال حل‌شده است و در انتهای هر فصل نیز مسائلی به‌عنوان تمرین داده شده است؛ بخش دوم شامل راه‌حل و پاسخ همهٔ تمرینهای انتهای فصلهای بخش اول است؛ بخش سوم با عنوان مسائل گوناگون، شامل مسأله‌هایی است که حل آنها کم‌و بیش نیاز به تسلط بر همهٔ مفاهیم عرضه‌شده درکتاب دارد. بیشتر این مسأله‌ها از امتحانات دبیرستانی کشور انگلستان، مانند GCE و امتحانات دبیرستانی دانشگاه لندن انتخاب شده است.

بهترین راه استفاده از این کتاب، مانند هرکتاب دیگر ریاضیات، این است که دانش‌آموز خود به حل مسائل بپردازد و سپس راه‌حل خود را با راه‌حل عرضه‌شده درکتاب مقایسه کند. مطالعهٔ راه‌حلها پیش از تفکر مستقل در مورد مسأله ارزش چندانی ندارد.

۱

آشنایی مقدماتی با بردارها

۱-۱ اسکالرها

هر اسکالر، در واقع کمیتی فیزیکی است که فقط اندازه یا مقدار دارد. طول، مساحت، حجم، کار انجام‌شده، مقاومت الکتریکی، توان، انرژی، جرم، جرم حجمی، دما و انرژی پتانسیل مثالهایی از کمیتهای اسکالرند. همان‌طور که می‌دانید همهٔ کمیتهایی که ذکرکردیم مقدار دارند. مثلاً طول پاره‌خطی ۱۵ cm است، مقاومت الکتریکی جسمی ۵ Ω، جرم جسمی ۱٫۵ kg یا دمای جسمی [illegible] °C است.

۲-۱ بردارها

بردار کمیّتی است فیزیکی که هم اندازه و هم جهت دارد. جابه‌جایی، سرعت، نیرو، شدت میدان مغناطیسی، جریان و شتاب مثالهایی از کمیتهایی هستند که اندازه و جهت دارند. سیمون استیون، مهندس و ریاضیدان در سال ۱۵۸۶ برای اوّلین بار نشان داد که نیرو را به عنوان یک بردار می‌توان به‌صورت خطی راست نمایش داد. او همچنین مجموع نیروها را با استفاده از خاصیت مثلثی نیروها به‌دست آورد.

۳-۱ بردارهای مساوی

دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را مساوی می‌نامیم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

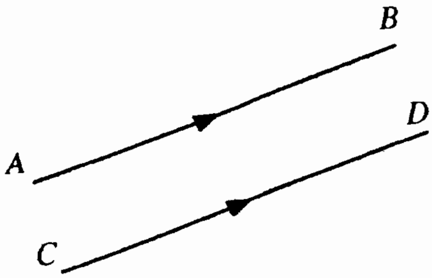
۱) بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$، موازی باشند.

۲) دو بردار همراستا و همجهت باشند،

۳) اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ که آن‌را با $|\overrightarrow{AB}|$ نشان می‌دهیم با اندازهٔ بردار $\overrightarrow{CD}$، یعنی $|\overrightarrow{CD}|$، مساوی باشد. یعنی

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$$

در شکل ۱ دو بردار مساوی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$، نشان داده شده است.



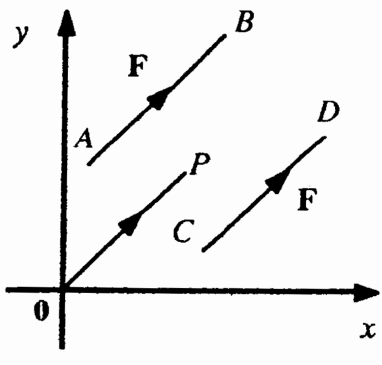
شکل۱ دو بردار مساوی

جهت بردار $\overrightarrow{AB}$، از A به B است؛ اگر جهت بردار از B به‌سمت A باشد، آن‌را به‌صورت $\overrightarrow{BA}$ نمایش می‌دهیم.

سه بردار مساوی و همصفحهٔ $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{CD}$ را در نظر بگیرید (شکل ۲). چون این سه بردار مساوی‌اند، می‌توانیم به‌جای این سه بردار، نماد جبری $\mathbf{F}$ را جایگزین کنیم و بنویسیم، $\mathbf{F}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AB}$. با توجه به این تساویها، در مورد اندازهٔ سه بردار می‌توان چنین نتیجه گرفت:

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{CD}|=|\mathbf{F}|$$

توجه کنید که اندازهٔ بردار عددی مثبت است.

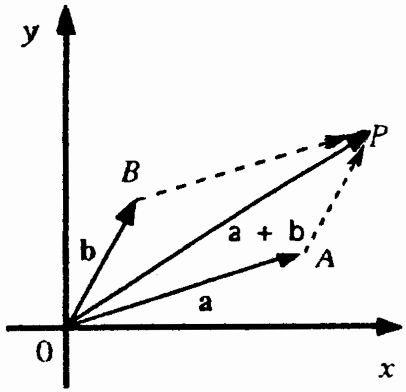


شکل۲ نمایش هندسی و جبری بردارها

۱-۴ مجموع دو بردار

اگر دو بردار، به‌گونه‌ای باشند که ابتدای یکی از آنها بر انتهای دیگری واقع باشد، برای به‌دست آوردن مجموع این دو بردار، ابتدای بردار اوّل را به انتهای بردار دوّم، وصل می‌کنیم. بردار حاصل را مجموع آن دو بردار و این روش را برای یافتن مجموع دو بردار متوالی، روش مثلثی می‌نامیم. دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و

$\overrightarrow{OB}$ را که از مبدأ مختصات شروع شده‌اند، مطابق شکل ۳، در نظر بگیرید. می‌خواهیم این دو بردار را پیدا کنیم ولی چون هر دو بردار از یک نقطه، شروع شده‌اند، روش مثلثی مفید نخواهد بود.



شکل۳ مجموع دو بردار، با ابتدای مشترک

برای یافتن مجموع دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$، از نقطهٔ B، خطی موازی و مساوی $\overrightarrow{OA}$ رسم می‌کنیم و آن‌را $\overrightarrow{BP}$ می‌نامیم. همچنین از نقطهٔ A، خطی موازی و مساوی $\overrightarrow{OB}$ رسم می‌کنیم؛ واضح است که انتهای این پاره‌خط، نقطهٔ P خواهد بود. چون چهارضلعی $OBPA$، متوازی‌الاضلاع است. قطر این متوازی‌الاضلاع، یعنی $\overrightarrow{OP}$، مساوی مجموع دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است. اما چون $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ و $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BP}=\mathbf{a}$. بنابراین، $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}$، و این هم همان روش مثلثی است، که برای پیدا کردن مجموع بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AP}$ $(=\overrightarrow{OB})$، در مثلث OAP، نوشته شده است. پس اگر $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$، $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ و $\overrightarrow{OP}=\mathbf{c}$، آنگاه

$$\boxed{\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}}$$

اما اگر در مثلث OBP، روش مثلثی را برای پیدا کردن مجموع بردارهای $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{BP}$ $(=\overrightarrow{OA})$، بنویسیم، خواهیم داشت

$$\boxed{\mathbf{b}+\mathbf{a}=\mathbf{c}}$$

بنابراین از این دو رابطه نتیجه می‌شود که $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$. پس مجموع دو بردار که ابتدای آنها، مشترک است، خاصیت تعویض‌پذیری دارد.

۱-۵ بردارهای آزاد و بردارهای مکان

برداری را آزاد می‌نامیم که از نقطهٔ مشخصی شروع نشده باشد، یا به نقطهٔ خاصی اثر نکند. در شکل ۳، بردارهای $\overrightarrow{BP}$ و $\overrightarrow{AP}$، نمونه‌هایی از دو بردار آزادند. برداری را که از مبدأ مختصات شروع شده باشد

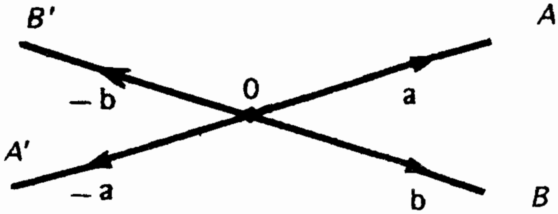
بردار مکان می‌نامیم. علت این نامگذاری این است که چنین برداری مکان، وضعیت و مختصات یک نقطه را مشخص می‌نماید. در شکل ۳، بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$، نمونه‌هایی از دو بردار مکان هستند که جای نقاط A و B را در صفحه، معین می‌کنند. یکی از مطالب مهمی که دربارهٔ مجموع دو بردار باید به آن توجه شود، این است که *مجموع اندازهٔ بردارهای* $\mathbf{a}$ *و* $\mathbf{b}$ *با اندازهٔ* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، مساوی نیست. جهت $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ نیز با جهت بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، متفاوت است. در واقع هیچ‌گاه نباید انتظار داشته باشیم که اگر اندازه‌های دو بردار را با هم جمع کنیم، مساوی اندازهٔ بردار مجموع آنها شود. اگر بار دیگر به شکل ۳، برگردیم، می‌توانیم ببینیم که در مثلثهای OAP و OBP، می‌توان نوشت،

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}, \qquad \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}$$

اگر $\overrightarrow{OP}$ را مجموع بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AP}$ در نظر بگیریم، باید در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کرد تا $\overrightarrow{OP}$ به‌دست آید ولی هرگاه $\overrightarrow{OP}$ را مجموع بردارهای $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{BP}$ بدانیم، باید در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم تا مجموع دو بردار به‌دست آید.

۱-۶ تفاضل دو بردار

فرض کنید $\overrightarrow{OA}$ با جهتی که در شکل ۴ مشخص شده است، در صفحه داده شده باشد و ضمناً بدانیم $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$. آنگاه بردار $\overrightarrow{OA'}$ را که از نظر اندازه مساوی بردار $\overrightarrow{OA}$ ولی جهت آن عکس جهت بردار $\overrightarrow{OA}$ است، بردار قرینهٔ $\overrightarrow{OA}$ می‌نامیم. بنابراین $\overrightarrow{OA'}=-\mathbf{a}$.



شکل۴ بردارهای قرینه

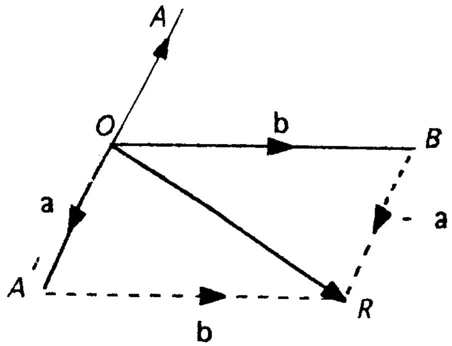
برای پیدا کردن تفاضل دو بردار $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$، که در شکل ۴، داده شده‌اند، کافی است $\mathbf{b}$ را با $-\mathbf{a}$ جمع کنیم. همان‌طور که در شکل ۵ می‌بینید. با رسم $-\mathbf{a}$ از روی $\mathbf{a}$، با تعریفی که ارائه کردیم، و ایجاد یک متوازی‌الاضلاع، می‌توان $\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$، یعنی $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ را به‌دست آورد. این بردار تفاضل، $\overrightarrow{OR}$ است که مساوی $-\mathbf{a}+\mathbf{b}$ و یا $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ است.

یعنی،

$$\mathbf{b}-\mathbf{a}=\overrightarrow{OR}$$

$$-\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{OR}$$

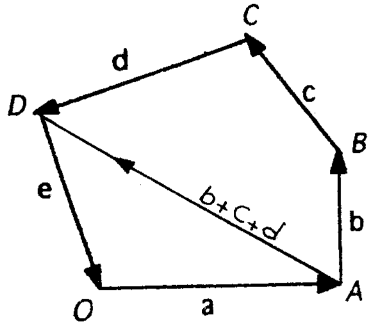
$$\boxed{\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA'}}$$



شکل۵ بردار تفاضل

۱-۷ چندضلعی نیروها

اگر تعداد بردارها بیشتر از دو تا باشد، برای پیدا کردن بردار مجموع (یا برایند بردارها)، از چندضلعی نیروها استفاده می‌کنیم.



شکل۶ چندضلعی نیروها

همان‌طورکه در شکل ۶ می‌بینید، مجموع بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CD}$، مساوی بردار $\overrightarrow{AD}$ است و در این چندضلعی، می‌توان نوشت $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}=\mathbf{o}$ یا $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{O}$.

۱-۸ ضرب اسکالر در بردار

اگر n عددی صحیح باشد، حاصلضرب عدد n در بردار a، یعنی na، مجموع n بردار مساوی a است، یعنی، $\underbrace{\mathbf{a}+\mathbf{a}+\cdots+\mathbf{a}}_{\text{n مرتبه}}=n\mathbf{a}$. بنابراین مفهوم ۴a که حاصلضرب اسکالر در بردار است، مجموع چهار بردار مساوی a است. به دو مثال زیر برای درک بهتر حاصلضرب اسکالر در بردار، توجه کنید:

$$\mathbf{a}+\mathbf{a}+2\mathbf{a}=4\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{3}{4}\mathbf{a}=\frac{4}{4}\mathbf{a}+\frac{2}{4}\mathbf{a}+\frac{3}{4}\mathbf{a}=\frac{9}{4}\mathbf{a}$$

مثال حل شدهٔ ۱

به‌طور مشخص و واضح، و با ارائهٔ چند مثال، دو مفهوم بردار و اسکالر را توضیح دهید.

حل.

بردار، کمیتی است فیزیکی که دو مشخصهٔ اندازه و جهت دارد؛ مانند سرعت، شتاب، نیرو، گشتاور، جریان الکتریکی، نیروی مغناطیسی و نیروی الکتریکی.

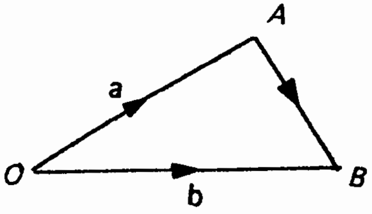
اسکالر، کمیتی است فیزیکی که فقط اندازه دارد؛ مثل جرم، دما و وزن.

مثال حل شدهٔ ۲

مفاهیم بردار آزاد و بردار مکان را کاملاً توضیح دهید.

حل.

بردار مکان، برداری است که ابتدای آن نقطهٔ ثابتی در صفحه است. این نقطه، معمولاً مبدأ مختصات در نظر گرفته می‌شود. بردار مکان مقدار فاصلهٔ یک نقطه را تا مبدأ مختصات نشان می‌دهد. بردار مکان می‌تواند جای قرارگرفتن یک نقطه (مختصات نقطه) را در صفحه مشخص کند. اما بردار آزاد، برداری است که ابتدای آن نقطهٔ ثابت و مشخص در صفحه نیست. در شکل ۷ هم بردار آزاد و هم بردار مکان وجود دارد:



شکل ۷

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} =$ بردار مکان

$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} =$ بردار مکان

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} =$ بردار آزاد $=$ تغییر مکان نقطهٔ B، نسبت به نقطهٔ غیر ثابت A

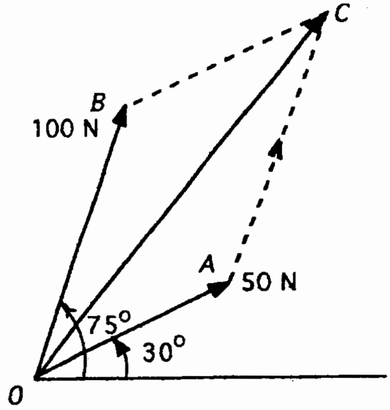
بردار $\overrightarrow{AB}$، برخلاف $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$، از مبدأ مختصات شروع نشده است.

مثال حل شدهٔ ۳

دو نیروی ۵۰N و ۱۰۰ N، به‌ترتیب با زوایای °۳۰ و °۷۵ نسبت به افق، به نقطهٔ O، مطابق شکل ۸، اعمال شده‌اند. برایند این دو نیرو را در شکل مشخص کنید و اندازهٔ آن‌را به‌دست آورید. همچنین تعیین کنید که نیروی برایند با افق چه زاویه‌ای می‌سازد.

حل.

این مسأله را می‌توان با روش ترسیمی حل کرد. با نقاله، پاره‌خط OA را چنان رسم می‌کنیم که زاویهٔ آن با افق، °۳۰ باشد. هر ۱ cm را معادل ۱۰ N در نظر می‌گیریم و روی OA پاره‌خطی به‌اندازهٔ ۵ cm



شکل۸

جدا می‌کنیم. از نقطهٔ A، خط AC را طوری رسم می‌کنیم که با افق، زاویهٔ ۷۵° بسازد و روی AC پاره‌خطی به‌اندازهٔ ۱۰cm جدا می‌کنیم تا AC معرف ۱۰۰ N شود. اگر از O به C وصل کنیم، بردار $\overrightarrow{OC}$، برایند دو نیروی داده شده است. حال کافی است زاویهٔ $\overrightarrow{OC}$ با افق را به‌وسیلهٔ نقاله اندازه‌گیری کنیم و همچنین طول $\overrightarrow{OC}$ را با خط‌کش، به‌دست آوریم. اگر نقاله و خط‌کش در دسترس ندارید، به‌صورت زیر از روش محاسباتی استفاده کنید. $\angle OAC = ۱۳۵^\circ$، پس با استفاده از قضیهٔ کسینوسها، می‌توانیم بنویسیم

$$O\overset{\triangle}{A}C : OC^{۲} = OA^{۲} + AC^{۲} - ۲OA \cdot AC \cdot \cos ۱۳۵^\circ$$

$$OC^{۲} = ۵۰^{۲} + ۱۰۰^{۲} - ۲ \times ۵۰ \times ۱۰۰ \times ۰/۷۰۷۱$$

پس،

$$OC^{۲} = ۲۵۰۰ + ۱۰۰۰۰ + ۷۰۷۱$$

$$OC = ۱۳۹/۹ \approx ۱۴۰\ \mathrm{N} = (\text{مقدار نیروی برایند})$$

از طرفی، طبق قضیهٔ سینوسها، در مثلث OAC می‌توان نوشت

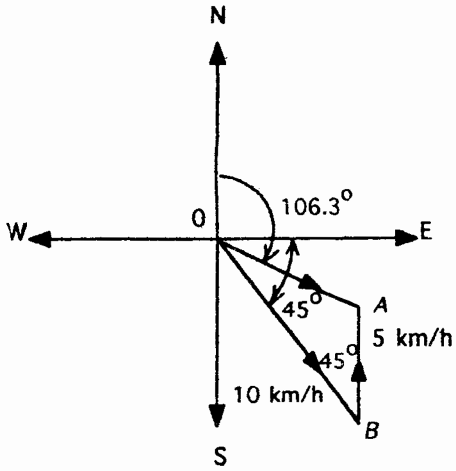
$$\frac{AC}{\sin \angle COA} = \frac{۱۴۰}{\sin ۱۳۵^\circ} \Rightarrow \frac{۱۰۰}{\sin \angle COA} = \frac{۱۴۰}{۰/۷۰۷۱}$$

$$\sin \angle COA = \frac{۷۰/۷۱}{۱۴۰} = ۰/۵۰۵ \Rightarrow \angle COA = ۳۰/۳۳^\circ$$

بنابراین زاویه‌ای که نیروی برایند، با افق می‌سازد $۳۰^\circ + ۳۰/۳۳^\circ = ۶۰/۳^\circ$ است.

مثال حل شدهٔ ۴

قایقرانی از نقطهٔ O شروع به حرکت می‌کند (شکل ۹). ابتدا با سرعت ۱۰ km/h، در جهت جنوب‌شرقی و با زاویهٔ ۴۵° نسبت به افق، پارو می‌زند و سپس با سرعت ۵ km/h در جهت شمال حرکت می‌کند. در حقیقت این قایق با چه سرعتی حرکت کرده و مجموعاً چه جهتی را طی کرده است؟



شکل۹

حل.

برایند حرکت قایق در جهت جنوب‌شرقی ($\overrightarrow{OB}$) و سپس به‌طرف شمال ($\overrightarrow{BA}$) بردار $\overrightarrow{OA}$ است و هدف از حل این مسأله، پیدا کردن اندازه و زاویهٔ $\overrightarrow{OA}$ با افق است. با نوشتن قضیهٔ کسینوسها در مثلث $\overset{\triangle}{OAB}$، خواهیم داشت

$$OA^۲ = ۵^۲ + ۱۰^۲ - ۲ \times ۵ \times ۱۰ \cos ۴۵^\circ$$

$$= ۲۵ + ۱۰۰ - ۱۰۰ \times ۰/۷۰۷$$

$$\overrightarrow{OA}^۲ = ۱۲۵ - ۷۰/۷ = ۵۴/۳ \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = ۷/۳۷ \text{ km/h} \quad (\text{اندازهٔ حرکت معادل})$$

با کمک قضیهٔ سینوسها، می‌توان زاویهٔ AOB، را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\frac{۵}{\sin \angle AOB} = \frac{۷/۳۷}{\sin ۴۵^\circ}$$

در نتیجه،

$$\sin \angle AOB = \frac{۵ \times \sin ۴۵^\circ}{۷/۳۷} = ۰/۴۷۹۶۴۷۲$$

و بنابراین،

$$\angle AOB = ۲۸/۶۶^\circ$$

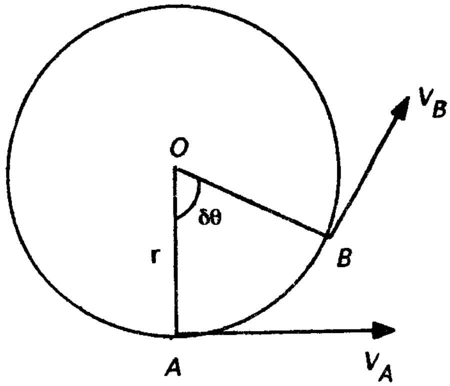
پس زاویه‌ای که $\overrightarrow{OA}$ با افق می‌سازد، مساوی است با $۱۶/۳۹^\circ = ۲۸/۶۶ - ۴۵^\circ$ و $\angle NOA = ۱۰۶/۳^\circ$.

مثال حل شدهٔ ۵

مورچه‌ای دور مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند. اندازه و جهت شتاب حرکت این مورچه را با استفاده از بردارها پیدا کنید.

حل.

مورچه‌ای را که دور مسیری دایره‌ای شکل به شعاع r، با سرعت ثابت v، حرکت می‌کند، درنظر بگیرید (شکل ۱۰).



شکل۱۰

فرض کنید مورچه، مسیر بین دو نقطهٔ A و B روی این دایره را در زمان بسیارکوتاه Δt طی کند و OA و OB با هم زاویهٔ کوچک $\Delta\theta$ را تشکیل دهند. در این صورت با توجه به اینکه $\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}} =$ سرعت، داریم

$$v = \frac{\text{طول } AB}{\Delta t}$$

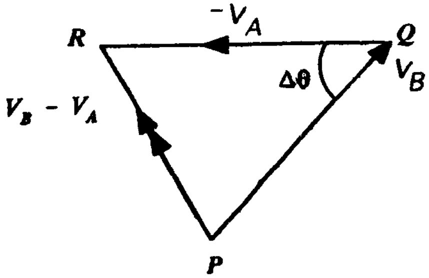
و در نتیجه،

$$v = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t}$$

فرض کنید v_A و v_B، به‌ترتیب بردارهای سرعت مورچه در نقاط A و B باشند. این دو بردار در نقاط A و B بر دایره مماس‌اند.

$$a = \text{شتاب} = \text{تغییرات سرعت} = v_B - v_A = v_B + (-v_A)$$

بردار $\overrightarrow{PQ}$ را موازی و همجهت با $\overrightarrow{v_B}$ و بردار $\overrightarrow{QR}$ را مساوی $\overrightarrow{v_A}$ اما در خلاف جهت آن، رسم می‌کنیم (شکل ۱۱).



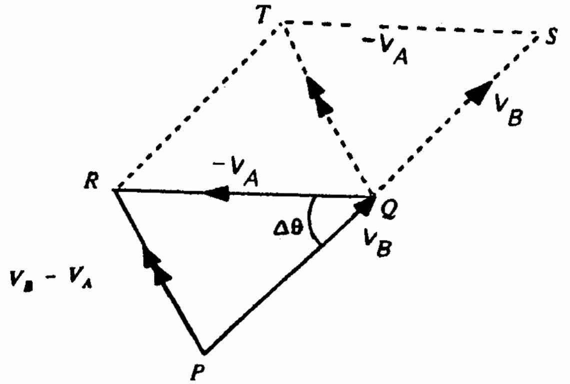
شکل۱۱

$\overrightarrow{PR}$، نمایش‌دهندهٔ $v_B - v_A$ یا تغییرات سرعت و $\Delta\theta$ تغییرات زاویه بین v_B و v_A است. متوازی‌الاضلاع $OSTR$ را تشکیل می‌دهیم و می‌دانیم PR، نشانگر مقدار و جهت شتاب حرکت است (شکل ۱۲).

$$PR = v \cdot \Delta\theta, \quad \Delta\theta = \frac{v\Delta t}{r} \Rightarrow PR = v^2 \cdot \frac{\Delta t}{r}$$

$$a = \text{شتاب} = \frac{\text{تغییرات سرعت}}{\text{فاصلهٔ زمان}} = \frac{PR}{\Delta t} = \frac{v^2 \cdot \Delta t}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

و چون $v = r\omega$، پس $a = \omega^2 r$.



شکل۱۲

جهت بردار PR، به‌سمت مرکز دایرهٔ مفروض، یعنی نقطهٔ O است و این شتاب را جانب مرکز می‌نامند. بنابراین مقدار شتاب عبارت است از $\frac{v^2}{r}$ یا $\omega^2 r$ و جهت آن به‌طرف مرکز دایره است. و این مطلب مجدداً یادآوری می‌کند که سرعت و شتاب، کمیتهایی برداری‌اند.

تمرین ۱

۱. فرق بین اسکالر و بردار چیست؟ سه شرطی که دو بردار مساوی باید داشته باشند کدام‌اند؟ چرا مجموع دو بردار که از یک نقطهٔ مشترک شروع شده‌اند، خاصیت تعویض‌پذیری دارد؟

۲. فرق بین بردار آزاد و بردار مکان چیست؟ با رسم شکل توضیح دهید.

۳. دو نیروی ۱۰۰ N و ۲۵۰ N بر نقطهٔ O اعمال شده‌اند. اگر این دو نیرو به‌ترتیب زوایای °۴۵ و °۶۰ با افق بسازند، اندازهٔ نیروی برایند (مجموع) این دو نیرو و زاویه‌ای را که با افق می‌سازد با استفاده از قضیهٔ سینوسها و کسینوسها، به‌دست آورید.

۴. قایقی با سرعت ۲۵ km/h در جهت شمال‌شرقی و با زاویهٔ °۴۵ نسبت به خط قائم، حرکت می‌کند. سپس تغییر مسیر می‌دهد و با سرعت ۵ km/h به‌سمت شرق می‌رود. سرعت و زاویهٔ حرکت قایق را تعیین کنید.

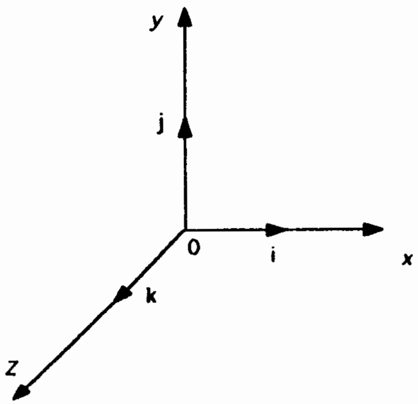
۵. نقطهٔ P، پاره‌خط AB را به نسبت ۳ : ۲، تقسیم می‌کند. بردار مکان نقطهٔ P را به‌دست آورید.

۲

بردارها در فضای دوبُعدی و سه‌بُعدی

۱-۲ بردارهای متعامد

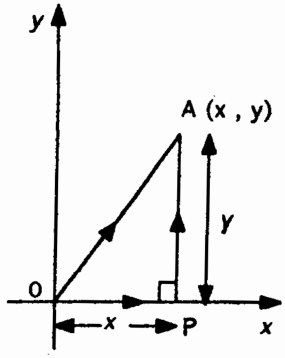
فرض کنید $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$، به‌ترتیب بردارهای واحد روی محور xها، محور yها و محور zها باشند. می‌دانید که این بردارها، دوبه‌دو، برهم عمودند (شکل ۱۳).



شکل۱۳

سه محور x، y و z که دوبه‌دو بر یکدیگر عمودند، یک فضای سه‌بعدی را تشکیل می‌دهند و هر نقطه، با سه مؤلفه (یا مختص)، در این فضا مشخص می‌شود. برای راحتی کار ابتدا حالت دوبعدی را در نظر می‌گیریم.

اگر A به مختصات (x, y)، نقطه‌ای از صفحه باشد، بردار مکان $\overrightarrow{OA}$ برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$، یعنی بردارهای یکهٔ محور xها و yها، به‌صورت $\overrightarrow{OA} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ نوشته می‌شود (شکل ۱۴) و چون $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بردار دارای جهت‌اند، بنابراین این عبارت به‌معنای آن است که x واحد روی محور xها و y واحد روی محور yها



شکل۱۴

جدا می‌کنیم تا نقطهٔ A حاصل شود. وضعیت نقطهٔ A را در صفحه می‌توانیم با ماتریسی ستونی به‌صورت $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$، نیز بیان کنیم. دلیل این مطلب هم این است که

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}\Rightarrow \overrightarrow{OA}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$$

$x\mathbf{i}$ و $y\mathbf{j}$ هر دو حاصلضرب یک اسکالر (y,x) در یک بردار (j,i) هستند.

۲-۲ طول بردار مکان

اگر نقطهٔ A، به مختصات (x,y) نقطه‌ای در صفحه باشد، آنگاه

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x^2+y^2}$$

مشابه آنچه در فضای دوبعدی دیدید، برای نقطهٔ $A(x,y,z)$ داریم $\overrightarrow{OA}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ که $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ به‌ترتیب بردارهای یکه روی محور xها، yها و zها هستند. $\overrightarrow{OA}$ نمایشی ماتریسی به‌صورت زیر نیز دارد:

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

طول این بردار در فضای سه‌بعدی عبارت است از

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

فرض کنید $\mathbf{a}$ بردار باشد. در این صورت بردار $\hat{\mathbf{a}}$ را که طول آن واحد و همراستا و همجهت با a است، بردار یکهٔ متناظر $\mathbf{a}$ می‌نامیم و آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{\hat{\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}}$$

مثال حل شدهٔ ۶

بردارهای زیر را در نظر بگیرید:

الف) $\mathbf{a} = ۳\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ب) $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$

ج) $\mathbf{c} = ۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}$ د) $\mathbf{d} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

ه) $\mathbf{e} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

اندازهٔ هر یک از بردارهای بالا را تعیین کنید و بردار یکهٔ متناظر با هر کدام را به‌دست آورید.

حل.

الف)

$$\mathbf{a} = ۳\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a}| = (\text{اندازهٔ بردار } \mathbf{a}) = \sqrt{(۳)^۲ + (۵)^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۹ + ۲۵ + ۱} = \sqrt{۳۵}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = (\text{بردار یکهٔ همجهت و متناظر با بردار } \mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{a}} = \frac{۱}{\sqrt{۳۵}}\ (۳\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

ب)

$$\mathbf{b} = -\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(-۱)^۲ + (-۲)^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۴}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\ (-\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) = (\text{بردار یکهٔ متناظر با بردار } \mathbf{b})$$

ج)

$$\mathbf{c} = ۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{۲^۲ + ۳^۲ + (-۴)^۲} = \sqrt{۲۹}$$

$$\hat{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{۱}{\sqrt{۲۹}}\ (۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}) = (\text{بردار یکهٔ متناظر با بردار } \mathbf{c})$$

د)

$$\mathbf{d} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{d}| = \sqrt{(-۱)^۲ + (-۱)^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۳}$$

$$\hat{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = (\text{بردار یکهٔ متناظر با بردار } \mathbf{d})$$

ه)

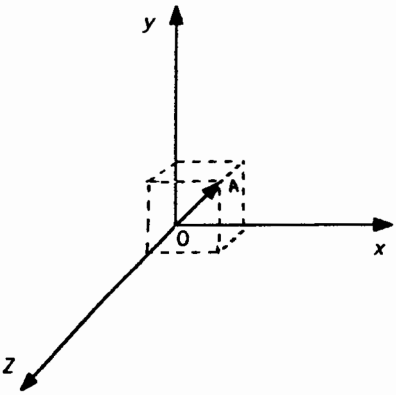
$$\mathbf{e} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{e}| = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۳}$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{e}}{|\mathbf{e}|} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\ (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = (\text{بردار یکهٔ متناظر با بردار } \mathbf{e})$$

۲-۳ مؤلفه‌های یک بردار در فضای دو یا سه‌بُعدی

بردار را می‌توان در فضای دوبعدی و یا سه‌بعدی، نشان داد. اگر $\overrightarrow{OA}$ بردار مکان نقطهٔ A در فضا به مختصات (x,y,z) باشد و $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ به‌ترتیب بردارهای یکه روی محور xها، yها و zها باشند، خواهیم داشت، $\overrightarrow{OA}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و در این رابطه، $x\mathbf{i}$، $y\mathbf{j}$ و $z\mathbf{k}$ را به‌ترتیب، مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{OA}$، روی محور Ox، Oy و Oz می‌نامیم.



شکل۱۵ مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{OA}$ در فضا

مثال حل شدهٔ ۷

مجموع بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند بیابید:

$$\mathbf{a}=۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k},\qquad \mathbf{b}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$$

حل.

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})+(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})=۳\mathbf{i}+۵\mathbf{j}+۸\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{pmatrix}۲\\۳\\۵\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}۱\\۲\\۳\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۲+۱\\۳+۲\\۵+۳\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۳\\۵\\۸\end{pmatrix}$$

مثال حل شدهٔ ۸

فرض کنید $\mathbf{a}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$، $\mathbf{b}=-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=-۴\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$ سه بردار در فضا باشند. هر یک از بردارهای زیر را مشخص کنید،

الف) $\mathbf{a}+۲\mathbf{b}+۳\mathbf{c}$ ب) $۳\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$ ج) $-\mathbf{a}+۴\mathbf{b}-۲\mathbf{c}$

حل.

الف) $\mathbf{a}+۲\mathbf{b}+۳\mathbf{c}=(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k})+۲(-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})+۳(-۴\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$

$$=-۱۱\mathbf{i}-۷\mathbf{j}+۱۳\mathbf{k}$$

ب) $۳\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}=۳(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k})-(-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})+(-۴\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$

$$=-\mathbf{i}+۸\mathbf{j}-۱۲\mathbf{k}$$

ج) $-\mathbf{a}+۴\mathbf{b}-۲\mathbf{c}=-(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k})+۴(-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})-۲(-۴\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$

$$=۷\mathbf{i}-۱۲\mathbf{j}+۱۹\mathbf{k}$$

مثال حل شدهٔ ۹

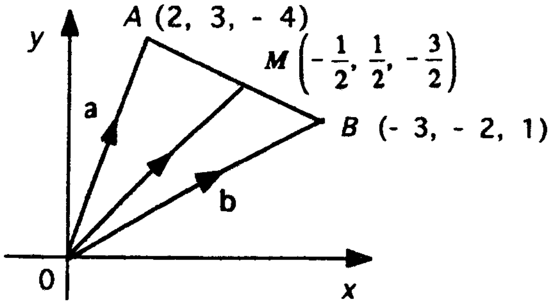
دو نقطهٔ A و B در فضا به‌صورت $\mathbf{a}=۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-۴\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=-۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+\mathbf{k}$ معرفی شده‌اند. مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را بیابید و اندازهٔ بردار مکان $\overrightarrow{AB}$ را به‌دست آورید.

حل.

با توجه به بردارهای مکان، مختصات نقاط A و B به‌ترتیب عبارت‌اند از $(۲,۳,-۴)$ و $(-۳,-۲,+۱)$.
اگر M وسط AB باشد، آنگاه

$$M\left(\frac{۲-۳}{۲},\ \frac{۳-۲}{۲},\ \frac{-۴+۱}{۲}\right)\equiv M\left(-\frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۲},\ -\frac{۳}{۲}\right)$$

و بنابراین بردار مکان وسط AB، یعنی $\overrightarrow{OM}$، مساوی می‌شود با، $\overrightarrow{OM}=-\frac{۱}{۲}\mathbf{i}+\frac{۱}{۲}\mathbf{j}-\frac{۳}{۲}\mathbf{k}$ (شکل ۱۶).



شکل ۱۶

برای یافتن اندازهٔ $\overrightarrow{AB}$ کافی است توجه کنیم که

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=-۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+\mathbf{k}-۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}=-۵\mathbf{i}-۵\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$$

بنابراین،

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-۵)^۲+(-۵)^۲+۵^۲}=\sqrt{۷۵}=۵\sqrt{۳}$$

مثال حل شدهٔ ۱۰

در هر یک از قسمتهای زیر، بردارهای مکان با مختصات معرفی شده‌اند،

الف) $A(۱,۲,۳)$ ب) $B(-۱,۲,-۳)$ ج) $C(۰,۳,۵)$

د) $D(-۴,۲,۱)$ هـ) $E(۳,۰,۴)$

در هر قسمت، بردار مکان را به شکل $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ بنویسید.

حل.

الف) $\overrightarrow{OA}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$ ب) $\overrightarrow{OB}=-\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$ ج) $\overrightarrow{OC}=۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$

د) $\overrightarrow{OD}=-۴\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+\mathbf{k}$ هـ) $\overrightarrow{OE}=۳\mathbf{i}+۴\mathbf{k}$

مثال حل شدهٔ ۱۱

در هر قسمت اندازهٔ بردار داده شده را به‌دست آورید.

الف) $\mathbf{u}=\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+\sqrt{۲۰}\mathbf{k}$ ب) $\mathbf{v}=-۳\mathbf{i}+۷\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$

حل.

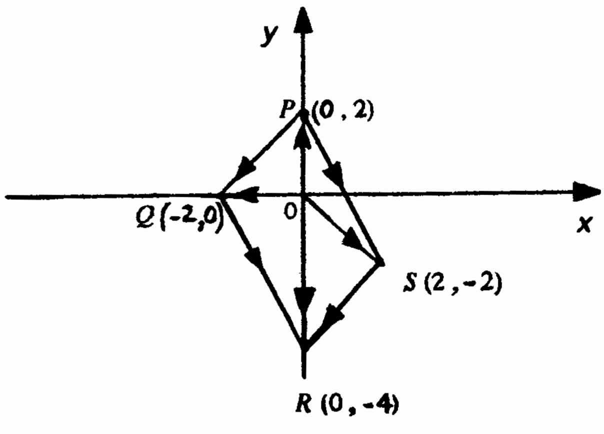
الف) $|\mathbf{u}|=\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲+\left(\sqrt{۲۰}\right)^۲}=\sqrt{۱+۴+۲۰}=۵$

ب) $|\mathbf{v}|=\sqrt{(-۳)^۲+۷^۲+۴^۲}=\sqrt{۹+۴۹+۱۶}=\sqrt{۷۴}=۸{,}۶$

مثال حل شدهٔ ۱۲

نشان دهید نقاط P، Q، R و S، به‌ترتیب با بردارهای مکان $۲\mathbf{j}$، $-۲\mathbf{i}$، $-۴\mathbf{j}$ و $۲\mathbf{i}-۲\mathbf{j}$، رأسهای یک متوازی‌الاضلاع‌اند.

حل.



شکل۱۷

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -۲\mathbf{j} - ۲\mathbf{i}\,, \quad \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} = -۴\mathbf{j} - ۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} = -۲\mathbf{j} - ۲\mathbf{i}$$

پس،

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = -۲\mathbf{j} - ۲\mathbf{i}$$

از طرف دیگر،

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = -۴\mathbf{j} + ۲\mathbf{i}\,, \quad \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} = ۲\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۲\mathbf{j} = ۲\mathbf{i} - ۴\mathbf{j}$$

بنابراین

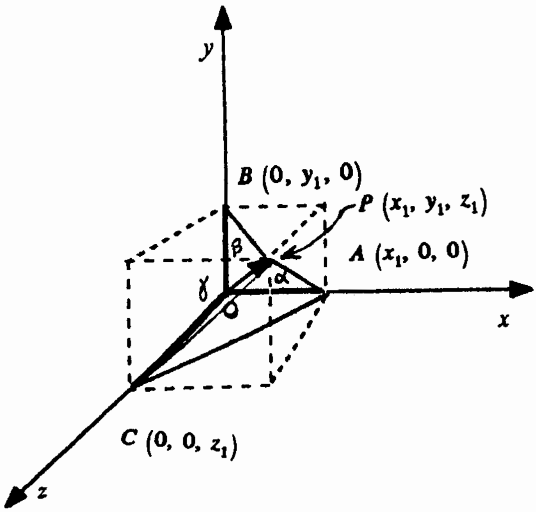
$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = ۲\mathbf{i} - ۴\mathbf{j}$$

پس بنا به تعریف، چهارضلعی $PQRS$، متوازی‌الاضلاع است (شکل ۱۷).

۲-۴ نسبتهای هادی بردار

بردار مکان $\overrightarrow{OP}$ را در فضا که به‌صورت زیر معرفی شده است در نظر بگیرید (شکل ۱۸):

$$\overrightarrow{OP} = x_۱\mathbf{i} + y_۱\mathbf{j} + z_۱\mathbf{k}$$

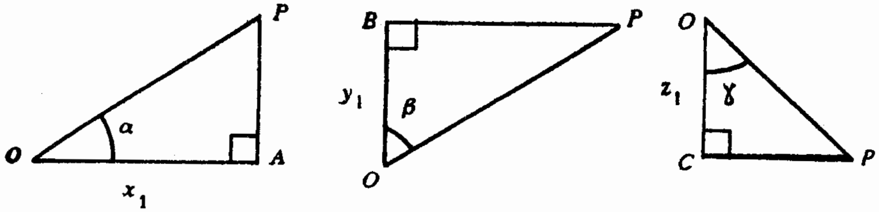


شکل۱۸

نسبتهای $x_۱ : y_۱ : z_۱$، را نسبتهای هادی بردار $\overrightarrow{OP}$ می‌نامیم.

۲-۵ کسینوسهای هادی بردار

بردار $\overrightarrow{OP}$ را در نظر بگیرید به‌طوری که مانند شکل ۱۸، با محور xها، yها و zها به‌ترتیب زوایای α، β و γ بسازد. اگر نقطهٔ P را به نقاط A، B و C وصل کنیم، سه مثلث قائم‌الزاویه، در رأسهای A، B و C، مانند شکل ۱۹ به‌وجود خواهد آمد.



شکل۱۹

کسینوس زاویه‌های α، β و γ را در این مثلثهای قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$\cos\alpha = \frac{x_۱}{|\overrightarrow{OP}|} = l, \quad \cos\beta = \frac{y_۱}{|\overrightarrow{OP}|} = m, \quad \cos\gamma = \frac{z_۱}{|\overrightarrow{OP}|} = n$$

مقادیر m، n و l را کسینوسهای هادی بردار $\overrightarrow{OP}$ می‌نامیم.

فرض کنید $\quad |\overrightarrow{OP}| = d$

پس، $\quad \cos\alpha = \frac{x_۱}{d} = l, \ \cos\beta = \frac{y_۱}{d} = m, \ \cos\gamma = \frac{z_۱}{d} = n$

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = \frac{x_۱^۲}{d^۲} + \frac{y_۱^۲}{d^۲} + \frac{z_۱^۲}{d^۲} = \frac{x_۱^۲ + y_۱^۲ + z_۱^۲}{d^۲}$$

اما $\quad |\overrightarrow{OP}| = d = \sqrt{x_۱^۲ - y_۱^۲ + z_۱^۲}$

پس، $\quad \cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = \frac{d^۲}{d^۲} = ۱$

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$$

اگر $x_۱$، $y_۱$ و $z_۱$، نسبتهای هادی بردار $\overrightarrow{OP}$ باشند، در این صورت $l = \frac{x_۱}{|\overrightarrow{OP}|}$، $m = \frac{y_۱}{|\overrightarrow{OP}|}$ و $n = \frac{z_۱}{|\overrightarrow{OP}|}$، کسینوسهای هادی این بردارند و

$$\boxed{l^۲ + m^۲ + n^۲ = ۱}$$

فرض کنید $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}$؛ در این صورت

$$\overrightarrow{OP} = x_۱\mathbf{i} + y_۱\mathbf{j} + z_۱\mathbf{k}$$

بنابراین $\quad \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \ \hat{\mathbf{a}}$

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{x_۱\mathbf{i} + y_۱\mathbf{j} + z_۱\mathbf{k}}{\sqrt{x_۱^۲ + y_۱^۲ + z_۱^۲}} = \frac{x_۱}{d}\mathbf{i} + \frac{y_۱}{d}\mathbf{j} + \frac{z_۱}{d}\mathbf{k} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OP} = x_۱\mathbf{i} + y_۱\mathbf{j} + z_۱\mathbf{k} = dl\mathbf{i} + dm\mathbf{j} + dn\mathbf{k} = d(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})$$

چون d اسکالر است، پس بردار $l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$، همان‌طور که دیدید، بردار واحد است.

مثال حل شدهٔ ۱۳

بردارهای مکان زیر با مختصاتشان معرفی شده‌اند:

$$P(-۱, ۲, ۴), \quad Q(-۲, -۳, -۵), \quad R(۷, ۸, ۹)$$

این بردارها را به شکل $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بنویسید و نسبتهای هادی و کسینوسهای هادی هر بردار، را پیدا کنید.

حل.

$$\overrightarrow{OP} = -\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{OQ} = -۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{OR} = ۷\mathbf{i} + ۸\mathbf{j} + ۹\mathbf{k}$$

نسبتهای هادی بردارهای $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{OR}$، به‌ترتیب عبارت‌اند از ۴ : ۲ : ۱−، ۵− : ۳− : ۲− و ۹ : ۸ : ۷. اندازه‌های این سه بردار برابرند با

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(-۱)^۲ + ۲^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۱}$$

$$|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{(-۲)^۲ + (-۳)^۲ + (-۵)^۲} = \sqrt{۳۸}$$

$$|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{۷^۲ + ۸^۲ + ۹^۲} = \sqrt{۱۹۴}$$

کسینوسهای هادی بردار $\overrightarrow{OP}$ عبارت است از $\frac{۴}{\sqrt{۲۱}} : \frac{۲}{\sqrt{۲۱}} : \frac{-۱}{\sqrt{۲۱}}$.

کسینوسهای هادی بردار $\overrightarrow{OQ}$ عبارت است از $\frac{-۵}{\sqrt{۳۸}} : \frac{-۳}{\sqrt{۳۸}} : \frac{-۲}{\sqrt{۳۸}}$.

کسینوسهای هادی بردار $\overrightarrow{OR}$ عبارت است از $\frac{۹}{\sqrt{۱۹۴}} : \frac{۸}{\sqrt{۱۹۴}} : \frac{۷}{\sqrt{۱۹۴}}$.

مثال حل شدهٔ ۱۴

کسینوسهای هادی بردار $\overrightarrow{OP} = \mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ را تعیین کنید و زوایایی را که $\overrightarrow{OP}$ با محورهای مختصات می‌سازد به‌دست آورید.

حل.

۳ : ۲ : ۱ نسبتهای هادی این بردار هستند.

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(۱)^۲ + (۲)^۲ + (۳)^۲} = \sqrt{۱ + ۴ + ۹} = \sqrt{۱۴}$$

پس $\frac{۳}{\sqrt{۱۴}} : \frac{۲}{\sqrt{۱۴}} : \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}$ کسینوسهای هادی این بردارند، پس اگر α، β و γ زاویه‌های بردار با محورها باشند،

$$\frac{۱}{\sqrt{۱۴}} : \frac{۲}{\sqrt{۱۴}} : \frac{۳}{\sqrt{۱۴}} = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۱۴}} \Rightarrow \alpha = ۷۴/۵^\circ, \qquad \cos\beta = \frac{۲}{\sqrt{۱۴}} \Rightarrow \beta = ۵۷/۷^\circ, \qquad \cos\gamma = \frac{۳}{\sqrt{۱۴}} \Rightarrow \gamma = ۳۶/۷^\circ$$

مثال حل شدهٔ ۱۵

بردار مکانی با محور xها و zها به‌ترتیب زوایای ۳۰° و ۶۰° ساخته است. تعیین کنید این بردار با محور yها چه زاویه‌ای می‌سازد.

حل.

می‌دانیم که رابطهٔ زیر بین کسینوسهای هادی بردار برقرار است:

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱$$

پس

$$\cos^۲ ۳۰^\circ+\cos^۲\beta+\cos^۲ ۶۰^\circ=۱$$

$$\cos^۲\beta=۱-۰{,}۷۵-۰{,}۲۵$$

$$\cos^۲\beta=۰$$

بنابراین، $\beta=۹۰^\circ$.

مثال حل شدهٔ ۱۶

ابتدای بردارهای $\overrightarrow{OP}=۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-\mathbf{k}$ و $\overrightarrow{OQ}$ مبدأ مختصات است. اگر بدانیم $\overrightarrow{PQ}=-۲\mathbf{i}+\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$، ابتدا بردار $\overrightarrow{OQ}$ را تعیین کنید و سپس،

الف) اندازهٔ بردارهای $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{PQ}$ را به‌دست آورید.

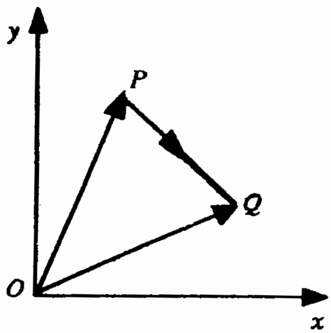
ب) بردارهای یکهٔ متناظر با $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{PQ}$ را مشخص کنید.

ج) نسبتهای هادی بردارهای $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{PQ}$ را به‌دست آورید.

د) کسینوسهای هادی هریک از این سه بردار را به‌دست آورید و با کمک آنها، زوایایی را که هر یک از این بردارها با محور مختصات، می‌سازند مشخص کنید.

حل.

چون (شکل ۲۰ را ببینید)



شکل ۲۰

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}$$

نتیجه می‌گیریم

$$۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-\mathbf{k}+(-۲\mathbf{i}+\mathbf{j}+۴\mathbf{k})=\overrightarrow{OQ}$$

بنابراین

$$\overrightarrow{OQ}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$$

الف)

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{۳^۲+(-۲)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۱۴}$$

$$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۱}$$

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-۲)^۲+۱^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۱}$$

ب)
$$\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OP}|\ \hat{OP} \Rightarrow \hat{OP}=\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{i}-\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{j}-\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OQ}|\ \hat{OQ} \Rightarrow \hat{OQ}=\frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}=\frac{۱}{\sqrt{۱۱}}\mathbf{i}-\frac{۱}{\sqrt{۱۱}}\mathbf{j}-\frac{۳}{\sqrt{۱۱}}\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{PQ}=|\overrightarrow{PQ}|\ \hat{PQ} \Rightarrow \hat{PQ}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}=-\frac{۲}{\sqrt{۲۱}}\mathbf{i}+\frac{۱}{\sqrt{۲۱}}\mathbf{j}+\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}\mathbf{k}$$

ج) نسبتهای هادی هر بردار، یعنی $l:m:n$، عبارت‌اند از

برای بردار $\overrightarrow{OP}$، $۳:-۲:-۱$

برای بردار $\overrightarrow{OQ}$، $۱:-۱:۳$

برای بردار $\overrightarrow{PQ}$، $-۲:۱:۴$

د) کسینوسهای هادی هر بردار عبارت‌اند از حاصل تقسیم l، m و n بر اندازهٔ بردار. پس، برای بردار $\overrightarrow{OP}$، کسینوسهای هادی عبارت‌اند از

$$\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}:-\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}:-\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}$$
$$\cos\alpha=\frac{۳}{\sqrt{۱۴}},\quad \cos\beta=-\frac{۲}{\sqrt{۱۴}},\quad \cos\gamma=-\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}$$

در نتیجه، زوایایی که بردار $\overrightarrow{OP}$ با محورهای مختصات می‌سازد به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$\alpha=۳۶/۷^\circ,\quad \beta=۱۲۲/۳^\circ,\quad \gamma=۱۰۵/۵^\circ$$

برای بردار $\overrightarrow{OQ}$، کسینوسهای هادی عبارت‌اند از

$$\frac{۱}{\sqrt{۱۱}}:-\frac{۱}{\sqrt{۱۱}}:\frac{۳}{\sqrt{۱۱}}$$
$$\cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱۱}},\quad \cos\beta=-\frac{۱}{\sqrt{۱۱}},\quad \cos\gamma=\frac{۳}{\sqrt{۱۱}}$$

زوایای بردار $\overrightarrow{OQ}$ با محورهای مختصات عبارت‌اند از

$$\alpha=۷۲/۵^\circ,\quad \beta=۱۰۷/۶^\circ,\quad \gamma=۲۵/۲^\circ$$

و برای بردار $\overrightarrow{PQ}$ کسینوسهای هادی عبارت‌اند از

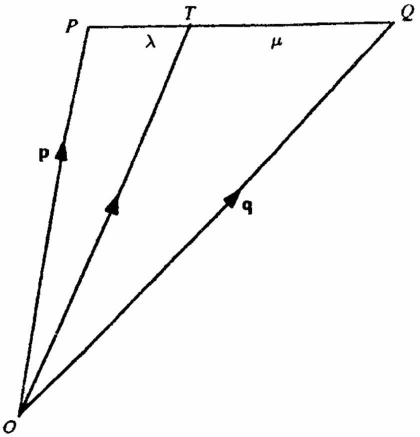
$$\frac{-۲}{\sqrt{۲۱}}:\frac{۱}{\sqrt{۲۱}}:\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}$$
$$\cos\alpha=-\frac{۲}{\sqrt{۲۱}},\quad \cos\beta=\frac{۱}{\sqrt{۲۱}},\quad \cos\gamma=\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}$$

و در نتیجه زاویه‌های بردار $\overrightarrow{PQ}$ با محورهای مختصات عبارت‌اند از

$$\alpha=۱۱۵/۹^\circ,\quad \beta=۷۷/۴^\circ,\quad \gamma=۲۹/۲^\circ$$

۲-۶ تقسیم پاره‌خط به نسبت دلخواه

فرض کنید نقاط P و Q در صفحهٔ مختصات با بردارهای مکان $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$، **مشخص شده باشند.**
می‌خواهیم بردار مکان نقطهٔ T را روی پاره‌خط PQ بیابیم به‌طوری که $\frac{\overrightarrow{PT}}{\overrightarrow{TQ}} = \frac{\lambda}{\mu}$.



شکل۲۱

در شکل ۲۱ بردارهای مکان نقاط P و Q را به‌ترتیب با $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$، نشان داده‌ایم.

برای یافتن بردار مکان نقطهٔ T، کافی است توجه کنیم که

$$\frac{\overrightarrow{PT}}{\overrightarrow{TQ}} = \frac{\lambda}{\mu}$$

با انجام عملیات ترکیب در مخرج، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\overrightarrow{PT}}{\overrightarrow{TQ}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

یا

$$\overrightarrow{PT} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\,\overrightarrow{PQ}$$

از طرفی، بنابر قانون جمع مثلثی بردارها داریم

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PT}$$

پس،

$$\overrightarrow{OT} = \mathbf{p} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}(\lambda+\mu) + \lambda(\mathbf{q} - \mathbf{p})}{\lambda+\mu}$$

$$= \frac{\mathbf{p}\lambda + \mathbf{p}\mu + \mathbf{q}\lambda - \mathbf{p}\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\mathbf{p}\mu + \mathbf{q}\lambda}{\lambda+\mu}$$

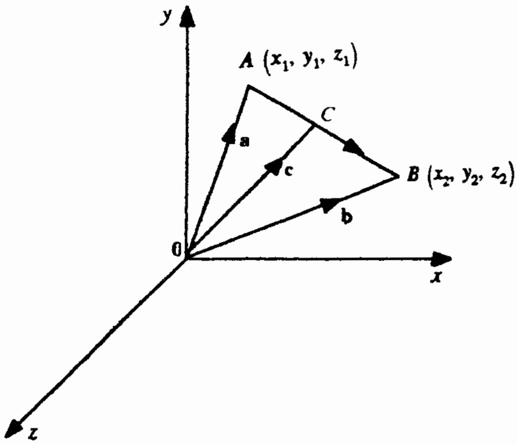
اگر $\overrightarrow{OP}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$ و $\overrightarrow{OQ}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$،

$$\overrightarrow{OT}=\frac{\mu(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k})+\lambda(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k})}{\lambda+\mu}$$

۲-۷ تعبیر هندسی مختصات در فضای سه‌بُعدی

در این قسمت اندازهٔ بردار، نسبتهای هادی و کسینوسهای هادی بردار، مختصات وسط بردار و ... را که قبلاً در فضای دوبعدی بررسی کردیم برای بردارهای آزاد در فضای سه‌بعدی مطالعه می‌کنیم.

نقاط دلخواه A و B را که مختصات آنها، به‌ترتیب (x_1,y_1,z_1) و (x_2,y_2,z_2) است در نظر بگیرید (شکل ۲۲).



شکل۲۲

بردارهای مکان نقاط A و B عبارت‌اند از:

$$\overrightarrow{OA}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OB}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$$

از طرفی، برای بردار آزاد $\overrightarrow{AB}$ می‌توانیم بنویسیم

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

پس،

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$$

اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$،

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

نسبتهای هادی بردار $\overrightarrow{AB}$،

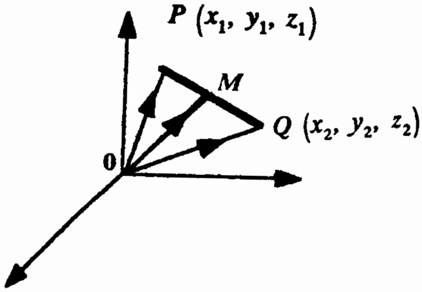
$$(x_۲ - x_۱) : (y_۲ - y_۱) : (z_۲ - z_۱)$$

کسینوسهای هادی بردار $\overrightarrow{AB}$،

$$\frac{x_۲ - x_۱}{|\overrightarrow{AB}|} : \frac{y_۲ - y_۱}{|\overrightarrow{AB}|} : \frac{z_۲ - z_۱}{|\overrightarrow{AB}|}$$

مختصات وسط پاره‌خط

فرض کنید P و Q دو نقطه در فضا، به‌ترتیب با مختصات $(x_۱, y_۱, z_۱)$ و $(x_۲, y_۲, z_۲)$ باشند (شکل۲۳). می‌خواهیم مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خط PQ را به‌دست آوریم.



شکل۲۳

بردار مکان نقطهٔ M، یعنی $\overrightarrow{OM}$ عبارت است از

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

نقطهٔ M وسط PQ است؛ پس

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{۱}{۲}\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\overrightarrow{OP} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{OQ}$$

بنابراین،

$$\overrightarrow{OM} = \frac{۱}{۲}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right)$$

با توجه به بردارهای مکان نقاط P و Q می‌توانیم بنویسیم

$$\overrightarrow{OM} = \frac{۱}{۲}\left[(x_۱ + x_۲)\mathbf{i} + (y_۱ + y_۲)\mathbf{j} + (z_۱ + z_۲)\mathbf{k}\right]$$

پس مختصات نقطهٔ M عبارت است از

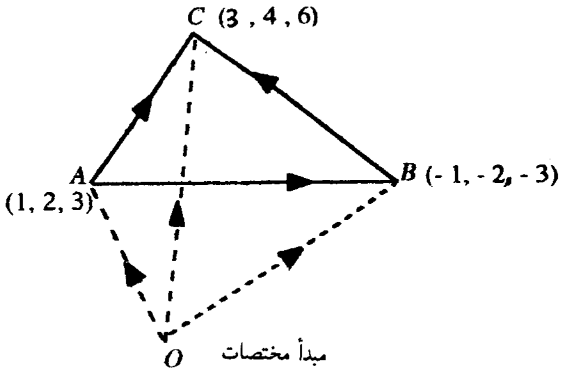
$$M\ \left[\frac{۱}{۲}(x_۱ + x_۲),\ \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲),\ \frac{۱}{۲}(z_۱ + z_۲)\right]$$

مثال حل شدهٔ ۱۷

مختصات رأسهای مثلث ABC عبارت‌اند از $A(۱,۲,۳)$، $B(-۱,-۲,-۳)$ و $C(۳,۴,۶)$. بردارهای مکان متناظر با این نقاط را به شکل $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ بنویسید و بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AC}$، را مشخص کنید. محیط و مساحت این مثلث را به‌دست آورید.

حل.

با توجه به مختصاتهای داده شده، ابتدا مثلث، و بردارهای مکان متناظر با رأسهای آن‌را رسم می‌کنیم (شکل ۲۴).



شکل۲۴

بنابر تعریف داریم،

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k})-(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})$$
$$=-۲\mathbf{i}-۴\mathbf{j}-۶\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۶\mathbf{k})-(-\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k})$$
$$=۴\mathbf{i}+۶\mathbf{j}+۹\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۶\mathbf{k})-(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})$$
$$=۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$$

بنابر قانون جمع مثلثی بردارها، می‌دانیم که

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

پس

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(-۲\mathbf{i}-۴\mathbf{j}-۶\mathbf{k})+(۴\mathbf{i}+۶\mathbf{j}+۹\mathbf{k})$$

$$=۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$$

همچنین،

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-۲)^۲ + (-۴)^۲ + (-۶)^۲} = \sqrt{۴ + ۱۶ + ۳۶} = \sqrt{۵۶} = ۷/۴۸$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{۴^۲ + ۶^۲ + ۹^۲} = \sqrt{۱۶ + ۳۶ + ۸۱} = \sqrt{۱۳۳} = ۱۱/۵$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۷} = ۴/۱۲$$

بنابراین، $۲P = (ABC \text{ محیط مثلث}) = ۷/۴۸ + ۱۱/۵ + ۴/۱۲ = ۲۳/۱$ پس نصفِ محیط برابر است با، $P = \frac{\text{محیط } \overset{\triangle}{ABC}}{۲} = \frac{۲۳/۱}{۲} = ۱۱/۶$. با توجه به رابطهٔ هرون،

$$(\text{مساحت}) = S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

پس،

$$S = \sqrt{۱۱/۶ \times (۱۱/۶ - ۷/۴۸)(۱۱/۶ - ۱۱/۵)(۱۱/۶ - ۴/۱۲)}$$

$$= \sqrt{۱۱/۶ \times ۴/۱۲ \times ۰/۱ \times ۷/۴۸} = ۵/۹۸$$

مثال حل شدهٔ ۱۸

مثلث PQR، با بردارهای مکان رأسهایش به‌صورت زیر داده شده است:

$$\overrightarrow{OP} = ۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۷\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OQ} = -۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OR} = -\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۶\mathbf{k}$$

بردارهای $\overrightarrow{PQ}$، $\overrightarrow{QR}$ و $\overrightarrow{PR}$ را مشخص کنید.محیط و مساحت این مثلث را به‌دست آورید.

حل.

ابتدا مثلث PQR و بردارهای مکان رأسهای آن‌را رسم می‌کنیم (شکل ۲۵).

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

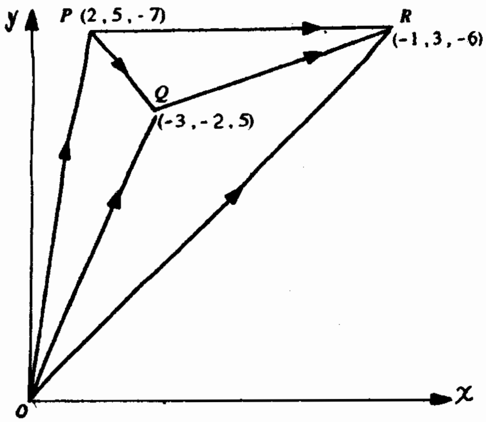
$$= (-۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}) - (۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۷\mathbf{k}) = -۵\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} + ۱۲\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ}$$

$$= (-\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۶\mathbf{k}) - (-۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}) = ۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۱۱\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$$

$$= (-\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۶\mathbf{k}) - (۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۷\mathbf{k}) = -۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}$$



شکل۲۵

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-۵)^۲ + (-۷)^۲ + (۱۲)^۲} = \sqrt{۲۵ + ۴۹ + ۱۴۴} = \sqrt{۱۲۸} = ۱۴/۸$$

$$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{۲^۲ + ۵^۲ + (-۱۱)^۲} = \sqrt{۴ + ۲۵ + ۱۲۱} = \sqrt{۱۵۰} = ۱۲/۳$$

$$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-۳)^۲ + (-۲)^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۹ + ۴ + ۱} = \sqrt{۱۴} = ۳/۷۴$$

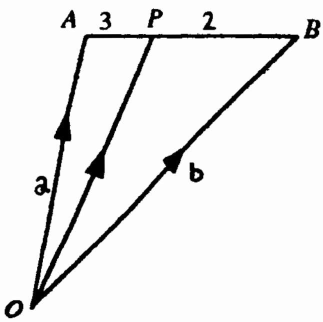
$$P = \frac{۱۴/۸ + ۱۲/۳ + ۳/۷۴}{۲} = ۱۵/۴ \qquad ۲P = ۳۰/۸$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۱۵/۴ \times ۰/۶ \times ۳/۱ \times ۱۱/۶۶} = ۱۸/۳$$

مثال حل شدهٔ ۱۹

بردارهای مکان نقاط A و B، به‌ترتیب عبارت‌اند از $-۲\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$ و $۳\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$. بردار مکان نقطهٔ P را چنان پیدا کنید که $\frac{PA}{PB} = \frac{۳}{۲}$.

حل.



شکل۲۶

با توجه به آنچه دربارهٔ تقسیم پاره‌خط به نسبت معلوم آموختیم می‌توانیم بنویسیم (شکل ۲۶).

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\mathbf{a}\mu + \mathbf{b}\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mathbf{a}۲ + \mathbf{b}۳}{۳ + ۲} = \frac{۲(-۲\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}) + ۳(۳\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} + ۲\mathbf{k})}{۵}$$

$$= \frac{-۴\mathbf{i} + ۸\mathbf{j} + -۶\mathbf{k} + ۹\mathbf{i} - ۱۵\mathbf{j} + ۶\mathbf{k}}{۵} = \frac{۵\mathbf{i} - ۷\mathbf{j}}{۵} = \mathbf{i} - \frac{۷}{۵}\mathbf{j}$$

تمرین ۲

۱. مختصات پنج نقطهٔ A، B، C، D و E، در فضا، به‌صورت زیر داده شده است:

الف) $A(۱, ۲, ۳)$ ب) $B(-۱, -۲, -۳)$ ج) $C(۰, ۳, ۵)$

د) $D(-۴, ۲, ۱)$ هـ) $E(۳, ۰, ۴)$

بردار مکان هر یک از این نقاط را به شکل $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ بنویسید.

۲. بردارهای مکان نقاط A، B و C به‌ترتیب به‌صورت $۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - \mathbf{k}$، $-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $-۳\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$، داده شده‌اند. مختصات نقاط A، B و C را تعیین کنید.

۳. اندازهٔ هر یک از بردارهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + \sqrt{۲۰}\mathbf{k}$ ب) $\mathbf{v} = -۳\mathbf{i} + ۷\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$

۴. فرض کنید $P(۳, ۴, ۵)$، $Q(-۶, -۱, ۱)$ و $R(۲, -۳, ۵)$ سه نقطه در فضا باشند. اندازهٔ هر یک از بردارهای $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{OR}$ را به‌دست آورید.

۵. اگر $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{pmatrix}$، $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۲ \end{pmatrix}$ و $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۵ \end{pmatrix}$، در این صورت، هریک از مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $|\mathbf{a}|$ ب) $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ ج) $\left|۲\mathbf{c} - \frac{۱}{۲}\mathbf{a}\right|$

۶. بردارهای مکان $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{OR}$، به‌وسیلهٔ مختصات نقاط P، Q و R به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$P(-۱, -۲, -۳), \quad Q(۱, ۴, ۷), \quad R(۳, -۵, ۸)$$

بردارهای $\overrightarrow{PQ}$، $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{QR}$ را تعیین کنید و سپس اندازهٔ هر یک از این بردارها را به‌دست آورید.

۷. نسبتهای هادی وکسینوسهای هادی هر یک از بردارهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$ ب) $\mathbf{v} = -۲\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۶\mathbf{k}$

ج) $\mathbf{w} = ۳\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} + ۱۱\mathbf{k}$

۸. کسینوسهای هادی برداری عبارت‌اند از $\frac{۲\sqrt{۲}}{۷} : \frac{۴}{۷} : \frac{۵}{۷}$. زوایایی راکه این بردار به‌ترتیب با محورهای xها، yها و zها، می‌سازد، به‌دست آورید و درستی رابطهٔ $\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$ را در این مسأله مجدداً تحقیق کنید.

۹. برداری در فضا، با محور xها و yها، به‌ترتیب زوایای ۴۵° و $۶۷/۵^\circ$، می‌سازد. زاویه‌ای را که این بردار با محور zها می‌سازد به‌دست آورید.

۱۰. نشان دهید اگر برداری با محور xها، yها و zها، به‌ترتیب زوایای α، β و γ بسازد، آنگاه $\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$.

۱۱. کسینوسهای هادی برداری عبارت‌اند از $\frac{۴}{۹} : \frac{۵}{۹} : \frac{۲\sqrt{۱۰}}{۹}$. زوایایی را که این بردار به‌ترتیب با محور xها، yها و zها می‌سازد به‌دست آورید.

۱۲. نشان دهید انتهای سه بردار مکان $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}\mu + \mathbf{b}\lambda$، که در آن $\lambda + \mu$ برابر با ۱ است، سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت‌اند.

۱۳. کسینوسهای هادی برداری را که نقطهٔ (a, b, a) را به (l, m, n) وصل می‌کند به‌دست آورید.

۱۴. کسینوسهای هادی برداری را که نقطهٔ $(۱, ۲, ۳)$ را به $(۳, -۴, ۵)$ وصل می‌کند به‌دست آورید.

۱۵. کسینوسهای هادی برداری به نسبت $۱۱ : ۷ : ۳$ هستند. کسینوسهای هادی حقیقی این بردار را به‌دست آورید.

۱۶. برداری با قسمت مثبت محور xها و zها، به‌ترتیب زوایای ۷۰° و ۸۰°، می‌سازد. اندازهٔ زاویه‌ای را که این بردار با قسمت مثبت محور yها می‌سازد به‌دست آورید.

۱۷. کسینوسهای هادی برداری را که با سه محور مختصات زوایای مساوی می‌سازد به‌دست آورید.

۱۸. اگر α، β و γ زوایایی باشند که بردار a به‌ترتیب با محورهای xها، yها و zها می‌سازد و بدانیم که $\beta = \alpha$ و $\gamma = ۲\alpha$، کسینوسهای هادی این بردار را به‌دست آورید.

۱۹. مثلث ABC، به‌وسیلهٔ بردارهای مکان رأسهایش به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\overrightarrow{OA} = ۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{i} + ۵\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = -\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}$$

بردارهای $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، را تعیین کنید و اندازهٔ این سه بردار، محیط مثلث و سپس مساحت آن‌را به‌کمک دستور هرون، به‌دست آورید.

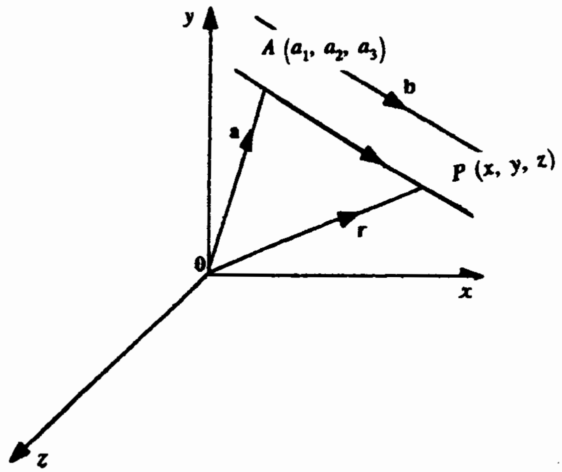
۳

معادلهٔ برداری خط راست

در این فصل می‌خواهیم معادلهٔ خط راستی را که بعضی از مشخصات آن داده شده است به‌کمک بردارها بنویسیم. همچنین صورتهای مختلف نمایش خط در فضا را معرفی خواهیم کرد.

۳-۱ معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ معلوم A و موازی بردار $\mathbf{b}$

فرض کنید نقطهٔ $A(a_۱, a_۲, a_۳)$، که بردار مکان آن به‌صورت $\mathbf{a} = a_۱\mathbf{i} + a_۲\mathbf{j} + a_۳\mathbf{k}$، است و بردار $\mathbf{b} = b_۱\mathbf{i} + b_۲\mathbf{j} + b_۳\mathbf{k}$ در فضا داده شده باشند. می‌خواهیم معادلهٔ خط راستی را بنویسیم که از نقطهٔ A بگذرد و با بردار $\mathbf{b}$ موازی باشد. نقطهٔ $P(x, y, z)$ را روی خطی که می‌خواهیم معادلهٔ آن‌را بنویسیم در نظر می‌گیریم (شکل ۲۷). بردار $\overrightarrow{AP}$، باید موازی با $\mathbf{b}$ باشد. پس $\overrightarrow{AP} = \lambda\mathbf{b}$ که در آن λ پارامتری اسکالر است.



شکل۲۷

حال در مثلث OAP بنابر قانون جمع مثلثی بردارها داریم $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}$. و چون $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ و $\overrightarrow{AP}=\lambda\mathbf{b}$، بنابراین $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}=\overrightarrow{OP}$. چون P نقطهٔ دلخواهی روی خط است. پس بردار مکان نقطهٔ دلخواه P در واقع نشانگر مجموعهٔ نقاط روی خط، یعنی بیانگر معادلهٔ خط راست است. پس اگر $\mathbf{r}$ بردار مکان نقطهٔ دلخواه P روی خط مطلوب باشد، خواهیم داشت

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$$

و این رابطه، معادلهٔ برداری خط گذرنده از نقطهٔ A با بردار مکان $\mathbf{a}$ و همراستا با بردار $\mathbf{b}$ است.

مثال حل شدهٔ ۲۰

معادلهٔ برداری خطی را که از نقطهٔ $A(-۳,۲,۴)$ می‌گذرد و با بردار $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$ موازی است بنویسید.

حل.

خط مطلوب باید از نقطهٔ $A(-۳,۲,۴)$ بگذرد. ابتدای بردار مکان نقطهٔ A را به‌صورت $\mathbf{a}=-۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$، تعیین می‌کنیم. معادلهٔ برداری خطی که از نقطه‌ای با بردار مکان $\mathbf{a}=-۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$ بگذرد و همراستا با بردار $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$ باشد $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ است. پس

$$\mathbf{r}=(-۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k})+\lambda(\mathbf{i}-\mathbf{j}+۳\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r}=(-۳+\lambda)\mathbf{i}+(۲-\lambda)\mathbf{j}+(۴+۳\lambda)\mathbf{k}$$

این معادله در واقع بردار مکان نقطهٔ دلخواه $P(x,y,z)$ روی خط مطلوب است.

۳-۲ معادلات پارامتری خط راست

منظور از معادلات پارامتری خط راست مشخص کردن x، y و z برای نقطهٔ دلخواه $P(x,y,z)$ روی خط است. فرض کنید $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ معادلهٔ برداری خط گذرنده از نقطه‌ای با بردار مکان $\mathbf{a}=a_۱\mathbf{i}+a_۲\mathbf{j}+a_۳\mathbf{k}$ و همراستا با $\mathbf{b}=b_۱\mathbf{i}+b_۲\mathbf{j}+b_۳\mathbf{k}$ باشد. می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=\left(a_۱\mathbf{i}+a_۲\mathbf{j}+a_۳\mathbf{k}\right)+\lambda\left(b_۱\mathbf{i}+b_۲\mathbf{j}+b_۳\mathbf{k}\right)$$

$$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=\left(a_۱+b_۱\lambda\right)\mathbf{i}+\left(a_۲+b_۲\lambda\right)\mathbf{j}+\left(a_۳+b_۳\lambda\right)\mathbf{k}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$، در دو طرف تساوی به‌دست می‌آوریم

$$x=a_۱+b_۱\lambda,\quad y=a_۲+b_۲\lambda,\quad z=a_۳+b_۳\lambda$$

این رابطه‌ها را معادلات پارامتری خط می‌نامیم.

مثال حل شدهٔ ۲۱

معادلات پارامتری خطی را که معادلهٔ برداری آن به‌صورت $\mathbf{r} = (-۳+\lambda)\mathbf{i} + (۲-\lambda)\mathbf{j} + (۴+۳\lambda)\mathbf{k}$، داده شده است بنویسید.

حل.

قرار می‌دهیم

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (-۳+\lambda)\mathbf{i} + (۲-\lambda)\mathbf{j} + (۴+۳\lambda)\mathbf{k}$$

و با مساوی قرار دادن ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ در دو طرف، به‌دست می‌آوریم

$$x = -۳ + \lambda$$

$$y = ۲ - \lambda$$

$$z = ۴ + ۳\lambda$$

۳-۳ معادلات متقارن خط راست

هرگاه در معادلات پارامتری خط، پارامتر را حذف کنیم، معادلات متقارن خط به‌دست می‌آید. معادله‌های پارامتری خط راست عبارت‌اند از

$$x = a_۱ + b_۱\lambda, \quad y = a_۲ + b_۲\lambda, \quad z = a_۳ + b_۳\lambda$$

پارامتر λ را از هر یک از این سه رابطه به‌دست می‌آوریم:

$$x = a_۱ + b_۱\lambda \Rightarrow \frac{x-a_۱}{b_۱} = \lambda$$

$$y = a_۲ + b_۲\lambda \Rightarrow \frac{y-a_۲}{b_۲} = \lambda$$

$$z = a_۳ + b_۳\lambda \Rightarrow \frac{z-a_۳}{b_۳} = \lambda$$

با مساوی قرار دادن مقادیر λ، معادله‌های متقارن خط به‌صورت زیر به‌دست خواهند آمد:

$$\frac{x-a_۱}{b_۱} = \frac{y-a_۲}{b_۲} = \frac{z-a_۳}{b_۳} = \lambda$$

نسبتهای $b_۱ : b_۲ : b_۳$، را در این رابطه، نسبتهای هادی خط، می‌نامیم.

مثال حل شدهٔ ۲۲

معادله‌های پارامتری خطی به‌صورت $x = -۳ + \lambda$، $y = ۲ - \lambda$ و $z = ۴ + ۳\lambda$ داده شده‌اند. معادله‌های متقارن این خط را بنویسید.نسبتهای هادی خط را به‌دست آورید.

حل.

از معادلات پارامتری خط، پارامتر λ را به این صورت حذف می‌کنیم:

$$x = -۳ + \lambda \;\Rightarrow\; \frac{x+۳}{۱} = \lambda$$
$$y = ۲ - \lambda \;\Rightarrow\; \frac{-۲+y}{-۱} = \lambda$$
$$z = ۴ + ۳\lambda \;\Rightarrow\; \frac{z-۴}{۳} = \lambda$$

پس معادله‌های متقارن خط عبارت‌اند از

$$\lambda = \frac{x+۳}{۱} = \frac{-۲+y}{-۱} = \frac{z-۴}{۳}$$

نسبتهای هادی این خط عبارت‌اند از ۳ : ۱− : ۱.

مثال حل شدهٔ ۲۳

خط راستی از نقطهٔ $A(۴,۵,-۷)$ می‌گذرد و با بردار $۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$ موازی است،

الف) معادلهٔ برداری این خط را بنویسید.

ب) معادله‌های پارامتری این خط راست را بنویسید.

ج) معادله‌های متقارن خط را به‌دست آورید.

حل.

الف) معادلهٔ برداری خطی که همراستا با بردار $\mathbf{b}$ باشد و از نقطه‌ای با بردار مکان $\mathbf{a}$ بگذرد عبارت است از $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$،

پس،
$$\mathbf{r} = (۴\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۷\mathbf{k}) + \lambda(۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k})$$

یا
$$\mathbf{r} = (۴ + ۲\lambda)\mathbf{i} + (۵ - ۳\lambda)\mathbf{j} + (-۷ + ۵\lambda)\mathbf{k}$$

ب) برای یافتن معادله‌های پارامتری خط، فرض می‌کنیم که $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ معادلهٔ برداری خط باشد. با توجه به آنچه که از قسمت قبل به‌دست آوردیم می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (۴ + ۲\lambda)\mathbf{i} + (۵ - ۳\lambda)\mathbf{j} + (-۷ + ۵\lambda)\mathbf{k}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$، در دو طرف این رابطه، معادله‌های پارامتری خط به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

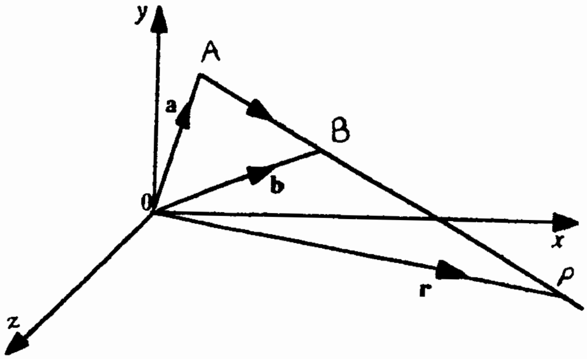
$$x = ۴ + ۲\lambda$$
$$y = ۵ - ۳\lambda$$
$$z = -۷ + ۵\lambda$$

ج) با مساوی قرار دادن مقادیر λ که از هر یک از سه رابطهٔ پارامتری خط به‌دست می‌آید می‌توانیم معادله‌های متقارن خط را به‌دست آوریم:

$$\lambda = \frac{x-۴}{۲} = \frac{y-۵}{-۳} = \frac{z+۷}{۵}$$

۳-۴ معادلهٔ خطی که دو نقطهٔ آن معلوم‌اند

فرض کنید $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ دو نقطه در فضا باشند. بردارهای مکان این نقطه‌ها را به‌ترتیب با $\overrightarrow{OA} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} = \mathbf{a}$ و $\overrightarrow{OB} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} = \mathbf{b}$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم معادلهٔ خط راستی را بنویسیم که از این دو نقطه بگذرد. برای پیدا کردن معادلهٔ این خط، نقطهٔ دلخواه P را روی خط در نظر می‌گیریم و بردار مکان آن‌را با $\mathbf{r}$ نشان می‌دهیم (شکل ۲۸).



شکل۲۸

با توجه به قانون جمع مثلثی، در مثلث OAB می‌توانیم بنویسیم $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{AB}$ را از این رابطه به‌دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

یا

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

چون نقطهٔ P بر امتداد پاره‌خط AB واقع است، داریم

$$\overrightarrow{AP} = t\ \overrightarrow{AB} = t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

از طرفی، در مثلث OAP می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

بنابراین،

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

این رابطه معادلهٔ برداری خطی است که از دو نقطهٔ $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ با بردارهای مکان متناظر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ می‌گذرد. این معادلهٔ برداری خط را می‌توانیم با استفاده از ماتریسهای ستونی، چنین بنویسیم:

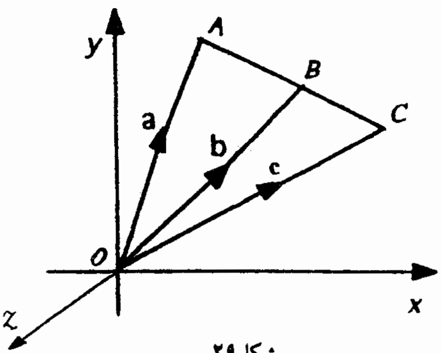
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

این معادله را به‌صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\\ &= (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) + t\left[(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}\right]\end{aligned}$$

۵-۳ شرطِ بر یک استقامت بودن سه نقطه در فضا

سه نقطهٔ A، B و C را که بردارهای مکان متناظر با آنها را به‌ترتیب با $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ نشان می‌دهیم در نظر بگیرید. اگر این سه نقطه بر یک استقامت باشند، باید چه شرطی برقرار باشد؟ یعنی چه رابطه‌ای باید بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ برقرار باشد تا سه نقطهٔ A و B و C بر یک استقامت باشند؟ برای یافتن این شرط، فرض کنید A، B و C مانند شکل ۲۹ بر یک استقامت باشند. در این صورت، مثلاً A باید بر خط گذرنده از B و C واقع باشد.



شکل۲۹

معادلهٔ خط گذرنده از B و C عبارت است از $\mathbf{r} = \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{c} - \mathbf{b})$ که در آن λ پارامتری اسکالر است. حال کافی است بردار مکان نقطهٔ A، یعنی $\mathbf{a}$، در معادلهٔ بالا صدق کند، پس $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ در رابطهٔ بالا صدق می‌کند. در این صورت

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{c} - \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} - \mathbf{b} - \lambda\mathbf{c} = 0$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}(\lambda - 1) - \lambda\mathbf{c} = 0$$

با جایگزین کردن $\lambda - 1$، با s و $-\lambda$، با t، می‌توان شرط بر یک استقامت بودن سه نقطهٔ A، B و C با بردارهای مکان $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = 0$$

دقت کنید که $s + t = -1$.

مثال حل شدهٔ ۲۴

ثابت کنید سه نقطهٔ $A(۱,-۱,۰)$، $B(۲,۰,۳)$ و $C(۰,-۲,-۳)$، بر یک استقامت‌اند.

حل.

بردارهای مکان نقاط B و C به‌ترتیب، عبارت‌اند از $\overrightarrow{OB}=۲\mathbf{i}+۳\mathbf{k}$ و $\overrightarrow{OC}=-۲\mathbf{i}-۳\mathbf{k}$. پس معادلهٔ برداری خط BC عبارت است از

$$\mathbf{r}=\mathbf{b}+\lambda(\mathbf{c}-\mathbf{b})$$

با در نظر گرفتن بردارهای $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ و $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$ خواهیم داشت

$$\mathbf{r}=۲\mathbf{i}+۳\mathbf{k}+\lambda(-۲\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۶\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r}=(۲-۲\lambda)\mathbf{i}-۲\lambda\mathbf{j}+(۳-۶\lambda)\mathbf{k}$$

بردار مکان نقطهٔ A عبارت است از $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$. حال اگر A نقطه‌ای روی خط BC باشد، باید در معادلهٔ آن صدق کند، یعنی باید داشته باشیم

$$\mathbf{i}-\mathbf{j}=(۲-۲\lambda)\mathbf{i}-۲\lambda\mathbf{j}+(۳-۶\lambda)\mathbf{k}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ در دو طرف این تساوی خواهیم داشت

$$۲-۲\lambda=۱ \Rightarrow \lambda=\frac{۱}{۲}$$

$$-۲\lambda=-۱ \Rightarrow \lambda=\frac{۱}{۲}$$

$$۳-۶\lambda=۰ \Rightarrow \lambda=\frac{۱}{۲}$$

و چون فقط یک مقدار برای λ، وجود دارد تا این تساوی برقرار شود، پس حتماً سه نقطهٔ A، B و C، بر یک استقامت‌اند.

مثال حل شدهٔ ۲۵

نقاط A و C، در فضا با بردارهای مکان $\overrightarrow{OA}=۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$ و $\overrightarrow{OC}=-۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$ داده شده‌اند. اگر بدانیم A، C و B بر یک استقامت‌اند، بردار مکان نقطهٔ B را برای $\lambda=-۱$، مشخص کنید.

حل.

معادلهٔ برداری خط گذرنده از نقاط A و C عبارت است از $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{c}-\mathbf{a})$. با در نظر گرفتن بردارهای مکان نقاط A و C، این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}&=\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{c}-\mathbf{a})\\&=(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})+\lambda(-۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۵\mathbf{k}-۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-۴\mathbf{k})\end{aligned}$$

$$= (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) + \lambda(-۵\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$= (۲ - ۵\lambda)\mathbf{i} + (۵\lambda - ۳)\mathbf{j} + (۴ + \lambda)\mathbf{k}$$

حال فرض کنید، بردار مکان نقطهٔ B به‌صورت $\overrightarrow{OB} = x_۱\mathbf{i} + y_۱\mathbf{j} + z_۱\mathbf{k}$ باشد. چون نقطهٔ B روی خط AC واقع است، پس باید بردار $\overrightarrow{OB}$ در معادلهٔ برداری AC صدق کند، یعنی

$$x_۱\mathbf{i} + y_۱\mathbf{j} + z_۱\mathbf{k} = (۲ - ۵\lambda)\mathbf{i} + (۵\lambda - ۳)\mathbf{j} + (۴ + \lambda)\mathbf{k}$$

و چون $\lambda = -۱$، پس

$$x_۱ = ۲ - ۵\lambda = ۲ - ۵(-۱) = ۷$$
$$y_۱ = ۵\lambda - ۳ = ۵(-۱) - ۳ = -۸$$
$$z_۱ = ۴ + \lambda = ۴ + (-۱) = ۳$$

پس بردار مکان نقطهٔ B عبارت است از $\overrightarrow{OB} = ۷\mathbf{i} - ۸\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$.

تمرین ۳

۱. برای هر یک از خطهای زیر، ابتدا معادله‌های برداری و پارامترهای متناظر را بنویسید و سپس بردار مکان و بردار هادی هر یک را مشخص کنید.

الف) $\dfrac{x+۱}{۱} = \dfrac{y+۲}{۲} = \dfrac{z+۳}{۳} = \lambda$

ب) $\dfrac{x-۱}{۲} = \dfrac{y-۲}{-۳} = \dfrac{z-۳}{۴} = t$

ج) $\dfrac{x}{۳} = \dfrac{y+۳}{-۴} = \dfrac{z-۱}{۲} = \mu$

د) $\dfrac{x+a}{p} = \dfrac{y+b}{q} = \dfrac{z+c}{r} = s$

۲. نسبتهای هادی و کسینوسهای هادی هر یک از خطهای داده شده در تمرین ۱ را به‌دست آورید.

۳. خط $\dfrac{x+a}{l} = \dfrac{y+b}{m} = \dfrac{z+c}{n}$ از نقطهٔ $(-۵, -۴, -۳)$ می‌گذرد و با خط به معادلهٔ $\dfrac{x+۱}{۱} = \dfrac{y+۲}{۲} = \dfrac{z+۳}{۳}$ موازی است. هر یک از مقادیر a، b، c، l، m و n را به‌دست آورید.

۴. خط $\dfrac{x+a}{-۳} = \dfrac{y+b}{-۴} = \dfrac{z+c}{-۵}$ از نقطهٔ $(۲, ۲, ۲)$ می‌گذرد و با خط به معادلهٔ متقارن $\dfrac{x-۱}{l} = \dfrac{y-۲}{m} = \dfrac{z-۳}{n}$ موازی است. هر یک از مقادیر a، b، c، l، m و n را به‌دست آورید.

۵. بردارهای یکهٔ متناظر با هر یک از خطهای داده شده در تمرین ۱ را به‌دست آورید.

۶. معادلهٔ برداری خط گذرنده از نقطهٔ $A(-۱, ۲, ۵)$ و همراستا با بردار $۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}$ را به‌دست آورید.

۷. معادلهٔ برداری خطی را به‌دست آورید که همراستا با بردار $\mathbf{b} = ۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$ باشد و از نقطه‌ای با بردار مکان $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ نیز بگذرد.

۸. معادلهٔ برداری خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A(۱,-۲,۳)$ و $B(-۲,۴,۷)$ بگذرد.

۹. معادلهٔ برداری خطی را بنویسید که از دو نقطه با بردارهای مکان $\mathbf{w}$ و $\mathbf{v}$، بگذرد.

۱۰. معادلهٔ برداری خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ A و B با بردارهای مکان $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = ۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ و $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = ۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ بگذرد.

۱۱. تفاوت بین معادله‌های برداری خطی را که در زیر داده شده‌اند توضیح دهید.

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \quad , \qquad \mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

۱۲. معادله‌های برداری زیر را با استفاده از ماتریسهای ستونی بنویسید.

الف) $\mathbf{r}_۱ = (\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}) + \lambda(-۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۴\mathbf{k})$

ب) $\mathbf{r}_۲ = (۲\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) + \mu(\mathbf{i} + ۷\mathbf{j} - \mathbf{k})$

ج) $\mathbf{r}_۳ = (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) + \nu(۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k})$

۱۳. معادله‌های برداری سه خط به‌صورت زیر، داده شده است:

$$\mathbf{r}_۱ = (۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}) + t\,(۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۷\mathbf{k})$$
$$\mathbf{r}_۲ = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۷\mathbf{k}) + \mu\,(\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$$
$$\mathbf{r}_۳ = (-۲\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۴\mathbf{k}) + \lambda\,(-۳\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

در هر یک از قسمتهای زیر، با استفاده از پارامترهای داده شده سه نقطهٔ هر خط را مشخص کنید.

الف) $t = ۱, ۲, -۳$ ب) $\mu = ۰, -۲, ۱$ ج) $\lambda = -۲, -۱, ۴$

۱۴. نشان دهید نقطه‌ای که بردار مکان آن $\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۱۳\mathbf{k}$ باشد، روی خط l به معادلهٔ

$$l : \mathbf{r} = (۵\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۷\mathbf{k}) + \lambda(-۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۳\mathbf{k})$$

قرار دارد.

۱۵. نشان دهید نقطه‌ای با بردار مکان $۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$، روی خط l، با معادلهٔ برداری زیر، قرار دارد:

$$l : \mathbf{r} = (۵\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}) + \mu(۳\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} - ۳\mathbf{k})$$

۱۶. خط l در فضا از نقطهٔ $A(-۲,۴,-۵)$ می‌گذرد و با بردار $۳\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + \mathbf{k}$ موازی است. معادلهٔ برداری این خط را با پارامتر λ بنویسید. حال فرض کنید $A(-۲,۴,-۵)$، $B(-۵,-۱,-۶)$ و $C(۴,۱۴,-۳)$ سه نقطه از خط l باشند. مقدار λ را برای هر یک از این نقاط، به‌دست آورید.

۴

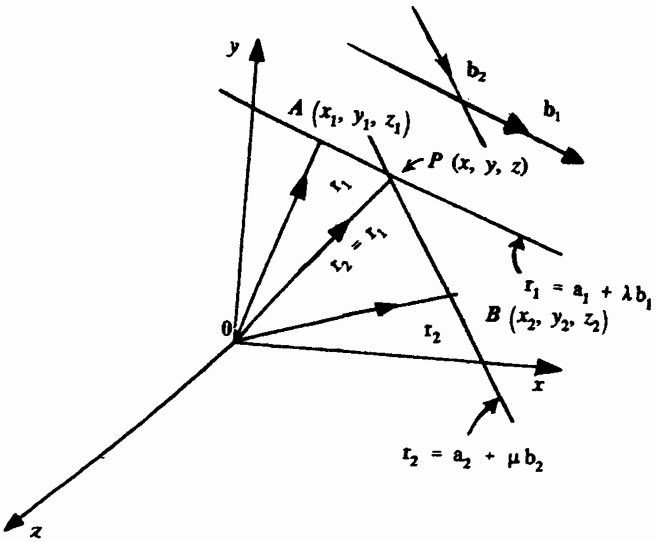
وضعیت نسبی دو خط در فضا

دو خط l_1 و l_2 را در نظر بگیرید که اولی از نقطهٔ $A(x_1, y_1, z_1)$ می‌گذرد و با بردار $\mathbf{b}_1$ موازی است و دومی از نقطهٔ $B(x_2, y_2, z_2)$، می‌گذرد و با بردار $\mathbf{b}_2$ موازی است (شکل ۳۰). بنابر آنچه در فصل قبل دیدیم، معادله‌های برداری این دو خط عبارت‌اند از

$$l_1 : \mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{b}_1 \quad \text{و} \quad \mathbf{a}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} = \overrightarrow{OA}$$

$$l_2 : \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}_2 + \lambda \mathbf{b}_2 \quad \text{و} \quad \mathbf{a}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} = \overrightarrow{OB}$$

بردار $\mathbf{b}_1 = x'_1\mathbf{i} + y'_1\mathbf{j} + z'_1\mathbf{k}$ بردار هادی خط l_1 و بردار $\mathbf{b}_2 = x'_2\mathbf{i} + y'_2\mathbf{j} + z'_2\mathbf{k}$ بردارهادی خط l_2 است.



شکل ۳۰

دو خط $l_۱$ و $l_۲$ بسته به وضعیت بردارهای هادی آنها، یعنی $\mathbf{b}_۱$ و $\mathbf{b}_۲$، ممکن است سه حالت مختلف نسبت به هم داشته باشند. اگر بردارهای هادی دو خط، یعنی $\mathbf{b}_۱$ و $\mathbf{b}_۲$، موازی باشند $l_۱$ و $l_۲$، نیز موازی‌اند. اگر بردارهای هادی دو خط در یک نقطه متقاطع باشند، $l_۱$ و $l_۲$ نیز در نقطه‌ای مانند P متقاطع خواهند بود. اگر $\mathbf{b}_۱$ و $\mathbf{b}_۲$، نه موازی باشند و نه متقاطع، که در این حالت $\mathbf{b}_۱$ و $\mathbf{b}_۲$، را دو بردار متنافر می‌نامیم، خطهای $l_۱$ و $l_۲$ نیز متنافر خواهند بود. دو خط را متنافر می‌نامیم هرگاه نقطهٔ مشترکی نداشته باشند و ضمناً هر دو در یک صفحه واقع نباشند. معمولاً حالتی که بیش از دیگر حالات، مهم و کاربردی است، حالت تقاطع دو خط یا تقاطع بردارهای هادی آنهاست.

۴-۱ دو خط متقاطع

شکل ۳۰، حالت تقاطع دو خط $l_۱$ و $l_۲$ را در نقطهٔ $P(x,y,z)$ نشان می‌دهد. نقطهٔ P، یعنی نقطهٔ تلاقی دو خط، نقطه‌ای است که در معادلهٔ هر دو خط صدق می‌کند، یعنی معادله‌های برداری دو خط $l_۱$ و $l_۲$ در این نقطه با هم مساوی می‌شوند. برای نقطهٔ تلاقی دو خط $l_۱$ و $l_۲$، داریم، $\mathbf{r}_۱ = \mathbf{r}_۲$. پس به‌ازای دو پارامتر λ و μ خواهیم داشت

$$\mathbf{a}_۱ + \lambda \mathbf{b}_۱ = \mathbf{a}_۲ + \mu \mathbf{b}_۲$$

۴-۲ دو خط موازی

همان‌طور که گفتیم دو خط $l_۱$ و $l_۲$ در صورتی موازی‌اند که بردارهای هادی آنها، یعنی $\mathbf{b}_۱$ و $\mathbf{b}_۲$، موازی باشند. پس دو خط $\mathbf{r}_۱ = \mathbf{a}_۱ + \lambda \mathbf{b}_۱$ و $\mathbf{r}_۲ = \mathbf{a}_۲ + \lambda \mathbf{b}_۲$ در صورتی با یکدیگر موازی‌اند که $\mathbf{b}_۱$ و $\mathbf{b}_۲$ همراستا باشند، یعنی $\alpha \neq ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mathbf{b}_۱ = \alpha \mathbf{b}_۲$. یا اگر $\mathbf{b}_۱ = x_۱\mathbf{i} + y_۱\mathbf{j} + z_۱\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}_۲ = x_۲\mathbf{i} + y_۲\mathbf{j} + z_۲\mathbf{k}$ آنگاه داشته باشیم

$$\frac{x_۱}{x_۲} = \frac{y_۱}{y_۲} = \frac{z_۱}{z_۲} = \alpha \quad \text{و یا} \quad z_۱ = \alpha z_۲ \quad \text{و} \quad y_۱ = \alpha y_۲ \quad \text{و} \quad x_۱ = \alpha x_۲$$

۴-۳ دو خط متنافر

دو خط $l_۱$ و $l_۲$ در صورتی متنافرند که بردارهای هادی آنها نه موازی باشند و نه متقاطع. برای نشان دادن متنافر بودن دو خط کافی است ثابت کنیم که دو خط متقاطع و موازی نیستند.

مثال حل شدهٔ ۲۶

در هر قسمت از این مثال دو خط داده شده است، در هر قسمت تعیین کنید که آیا دو خط متقاطع، موازی یا متنافرند و در صورتی‌که متقاطع باشند، بردار مکان نقطهٔ تلاقی را به‌دست آورید.

الف) $l_۱:\ r_۱ = (۳\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۴\mathbf{k}) + \lambda(۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k})$

$l_۲:\ r_۲ = (-۲\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mu(-\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۷\mathbf{k})$

ب) $l_۱ :\ r_۱ = (-۲\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}) + \lambda(-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k})$

$l_۲ :\ r_۲ = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mu(\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$

ج) $l_۱ :\ r_۱ = (۸\mathbf{i} - ۸\mathbf{j} + ۱۸\mathbf{k}) + \lambda(۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۶\mathbf{k})$

$l_۲ :\ r_۲ = (۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}) + \mu(۲\mathbf{i} - ۱۴\mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$

د) $l_۱ :\ r_۱ = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \lambda(۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۵\mathbf{k})$

$l_۲ :\ r_۲ = (۴\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} + ۹\mathbf{k}) + \mu(۶\mathbf{i} + ۸\mathbf{j} + ۱۰\mathbf{k})$

ه) $l_۱ :\ r_۱ = (۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}) + \lambda(-\mathbf{i} + ۷\mathbf{j} + ۹\mathbf{k})$

$l_۲ :\ r_۲ = (۸\mathbf{i} - ۸\mathbf{j} + ۹\mathbf{k}) + \mu(۴\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$

حل.

الف) نسبتهای هادی خط $l_۱$ عبارت‌اند از ۱ : ۳- : ۲ و نسبتهای هادی خط $l_۲$ عبارت‌اند از ۷- : ۴ : ۱-. چون $\frac{۱}{-۷} = \frac{-۳}{۴} = \frac{۲}{-۱}$ برقرار نیست، پس دو خط $l_۱$ و $l_۲$ موازی نیستند. اگر $l_۱$ و $l_۲$ متقاطع باشند، باید نقطهٔ مشترکی داشته باشند. برای یافتن این نقطهٔ مشترک، ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ را در دو خط مساوی قرار می‌دهیم:

$$۳ + ۲\lambda = -۲ - \mu \ \Rightarrow\ ۲\lambda = -۵ - \mu \qquad (۱)$$

$$۱ - ۳\lambda = ۴ + ۴\mu \ \Rightarrow\ ۳\lambda = -۳ - ۴\mu \qquad (۲)$$

$$-۴ + \lambda = ۱ - ۷\mu \ \Rightarrow\ \lambda = ۵ - ۷\mu \qquad (۳)$$

برای پیدا کردن مقادیر λ و μ، معادله‌های (۱) و (۳) را با هم حل می‌کنیم. از معادلهٔ (۳) داریم

$$۲\lambda = ۲(۵ - ۷\lambda) \ \Rightarrow\ ۲\lambda = ۱۰ - ۱۴\lambda$$

و با توجه به معادلهٔ (۲) داریم

$$۱۰ - ۱۴\lambda = -۵ - \lambda \Rightarrow ۱۳\lambda = ۱۵$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{۱۵}{۳}$$

با جایگذاری مقداری λ در رابطهٔ (۳) به‌دست می‌آوریم

$$\lambda = ۵ - ۷\left(\frac{۱۵}{۳}\right) = \frac{-۴۰}{۱۳}$$

کافی است مقادیر λ و μ را در رابطهٔ (۲) قرار دهیم. اندکی محاسبه نشان می‌دهد که این مقادیر λ و μ که از روابط (۱) و (۳) به‌دست آمده‌اند در رابطهٔ (۲) صدق نمی‌کنند. پس $l_۱$ و $l_۲$، متقاطع نیستند. پس $l_۱$ و $l_۲$ که متقاطع و موازی نیستند، متنافرند.

ب) نسبتهای هادی دو خط l_1 و l_2 به‌ترتیب، عبارت‌اند از ۳ : ۲ : ۱− و ۲ : ۷− : ۱. واضح است که این دو خط موازی نیستند. در صورت تقاطع، برای یافتن نقطهٔ تلاقی ضرایب **i**، **j** و **k** را مساوی قرار می‌دهیم:

$$-۲ - \lambda = ۱ + \mu \Rightarrow \lambda = -۳ - \mu \qquad (۱)$$

$$-۲ + ۲\lambda = ۱ - ۷\mu \Rightarrow ۲\lambda = ۳ - ۷\mu \qquad (۲)$$

$$-۴ + ۳\lambda = ۱ + ۲\mu \Rightarrow ۳\lambda = ۵ + ۲\mu \qquad (۳)$$

با ضرب کردن طرفین رابطهٔ (۱) در عدد ۲ خواهیم داشت

$$۲\lambda = -۶ - ۲\mu$$

حال این معادلهٔ جدید را با معادلهٔ (۲) در نظر می‌گیریم:

$$۲\lambda = ۳ - ۷\mu$$

پس،

$$-۶ - ۲\mu = ۳ - ۷\mu \Rightarrow ۵\mu = ۹ \Rightarrow \mu = \frac{۹}{۵}$$

$$\lambda = -۳ - \mu \Rightarrow \lambda = -۳ - \frac{۹}{۵} = \frac{-۲۴}{۵}$$

اگر مقادیر λ و μ را در رابطهٔ (۳) قرار دهیم به‌دست می‌آوریم

$$۳\left(-\frac{۲۴}{۵}\right) \neq ۵ + ۲\left(\frac{۹}{۵}\right)$$

پس این دو خط نه موازی‌اند و نه متقاطع؛ پس متنافرند.

ج) نسبتهای هادی این دو خط به‌ترتیب عبارت‌اند از ۶ : ۲ : ۲ و ۴ : ۱۴− : ۲. پس از ساده کردن، ۳ : ۱ : ۱ و ۲ : ۷− : ۱. چون نسبتهای هادی این دو خط مساوی نیست، پس این دو خط موازی نیستند. اگر ضرایب **i**، **j** و **k** را در دو خط مساوی با هم قرار دهیم، خواهیم داشت

$$۸ + ۲\lambda = ۲ + ۲\mu \Rightarrow ۲\lambda = -۶ + ۲\mu \Rightarrow \lambda = -۳ + \mu \qquad (۱)$$

$$-۸ + ۲\lambda = ۲ - ۱۴\mu \Rightarrow ۲\lambda = ۱۰ - ۱۴\mu \Rightarrow \lambda = ۵ - ۷\mu \qquad (۲)$$

$$۱۸ + ۶\lambda = ۲ + ۴\mu \Rightarrow ۶\lambda = -۱۶ + ۴\mu \Rightarrow ۳\lambda = -۸ + ۲\mu \qquad (۳)$$

از حل رابطه‌های (۱) و (۲) با هم خواهیم داشت

$$-۳ + \mu = ۵ - ۷\mu \Rightarrow ۸\mu = ۸ \Rightarrow \mu = ۱$$

با قرار دادن مقدار μ در رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آوریم

$$\lambda = -۳ + ۱ \Rightarrow \lambda = -۲$$

اگر این مقادیر λ و μ در رابطهٔ (۳) صدق کنند، l_1 و l_2 متقاطع خواهند بود، طبق رابطهٔ (۳) داریم

$$۳\lambda = -۸ + ۲\mu \Rightarrow ۳(-۲) = -۸ + ۲(\mu) \Rightarrow -۶ = -۶$$

بنابراین l_1 و l_2 متقاطع‌اند. حال بردار مکان نقطهٔ تلاقی را به‌دست می‌آوریم. مقادیر λ و μ را در معادلهٔ بردارهای خطهای l_1 و l_2 قرار می‌دهیم:

$$l_1:\ \mathbf{r}_1 = (8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 18\mathbf{k}) - 2(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

$$l_2:\ \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + 2\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

همان‌طور که مشخص است، $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ و بنابراین اگر نقطهٔ تلاقی این دو خط را P بنامیم،

$$\overrightarrow{OP} = 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

د) نسبتهای هادی این دو خط به‌ترتیب عبارت‌اند از $5:4:3$ و $10:8:6$ و چون $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{4}{8} = \frac{3}{6}$، پس این دو خط موازی‌اند.

هـ) ابتدا وضعیت نسبتهای هادی دو خط را بررسی می‌کنیم:

$$l_1 : -1 : 7 : 9$$

$$l_2 : 4 : -2 : 2$$

و چون $\frac{9}{2} \neq \frac{7}{-2} \neq \frac{-1}{4}$، پس دو خط موازی نیستند.

با مساوی قرار دادن ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ در دو خط وضعیت تقاطع این دو خط را بررسی می‌کنیم:

$$2 - \lambda = 8 + 4\mu \ \Rightarrow\ 4\mu + \lambda = -6 \qquad (1)$$

$$2 + 7\lambda = -8 - 2\mu \ \Rightarrow\ 2\mu + 7\lambda = -10 \qquad (2)$$

$$2 + 9\lambda = 9 + 2\mu \ \Rightarrow\ 2\mu - 9\lambda = -7 \qquad (3)$$

با ضرب کردن طرفین معادلهٔ (۲) در عدد ۲ و در نظر گرفتن معادلهٔ حاصل با معادلهٔ (۱)، خواهیم داشت

$$\begin{cases} 4\mu + 14\lambda = -20 \\ 4\mu + \lambda = -6 \end{cases} \Rightarrow -14\lambda - 20 = -\lambda - 6 \Rightarrow 13\lambda = -14 \Rightarrow \lambda = \frac{-14}{13}$$

از رابطهٔ (۲) با جایگذاری λ، مقدار μ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mu = \frac{-10 + 7\lambda}{2} = \frac{10 + 7\left(\frac{-14}{13}\right)}{2} = \frac{-16}{13}$$

با قرار دادن مقادیر λ و μ در رابطهٔ (۳) به‌دست می‌آوریم

$$2 - \frac{126}{13} \neq 9 - \frac{32}{13} \quad \text{و یا} \quad -\frac{100}{13} \neq \frac{85}{13}$$

پس این دو خط متقاطع نیز نیستند؛ پس متنافرند.

۴-۴ زاویهٔ بین دو خط در فضا

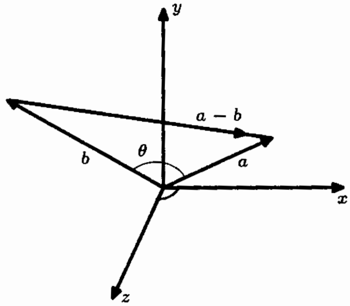
منظور از زاویهٔ بین دو خط، زاویهٔ کوچکتر یا مساوی 180°یی است که بردارهای هادی دو خط، با هم می‌سازند. برای پیدا کردن زاویهٔ بین دو خط، ابتدا مفهوم ضرب داخلی (ضرب اسکالر) دو بردار را تعریف می‌کنیم.

حاصلضرب داخلی (حاصلضرب اسکالر) دو بردار

اگر $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ دو بردار باشند که زاویهٔ بین آنها θ است، آنگاه حاصلضرب داخلی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، ($\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار غیرصفرند) که به‌صورت $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ نوشته می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

حال ارتباط بین حاصلضرب داخلی دو بردار و زاویهٔ بین دو بردار را بررسی می‌کنیم (شکل ۳۱).



شکل۳۱

بنابر قانون کسینوسها داریم

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos\theta$$

منظور از نماد | |، اندازهٔ بردار است. از طرف دیگر و بنا به بردارهای مکان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، داریم

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = (a_1-b_1)\mathbf{i} + (a_2-b_2)\mathbf{j} + (a_3-b_3)\mathbf{k}$$

پس از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2$$

بنابراین،

$$(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos\theta$$

و چون $|\mathbf{a}| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ و $|\mathbf{b}| = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$، پس،

$$a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\cos\theta$$

با ساده کردن عبارتهای مساوی از طرفین خواهیم داشت

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3 = -2|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\theta$$

بنابراین،

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\theta$$

پس تعریف حاصلضرب داخلی دو بردار را می‌توان به‌صورت زیر کامل نمود:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\theta$$

با در نظر گرفتن اندازه‌های بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ می‌توان نوشت

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\cdot\cos\theta$$

از این رابطه برای پیدا کردن زاویهٔ بین دو خط، یعنی θ، استفاده می‌شود.

به حاصلضرب داخلی بردارهای یکهٔ محورهای مختصات توجه کنید:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{i}|\cdot|\mathbf{j}|\cdot\cos 90^\circ = 1\times 1\times 0 = 0$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{i}|\cdot|\mathbf{k}|\cdot\cos 90^\circ = 1\times 1\times 0 = 0$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{k}|\cdot|\mathbf{j}|\cdot\cos 90^\circ = 1\times 1\times 0 = 0$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1\times 1\times\cos 0 = 1$$

اگر حاصلضرب دو بردار غیرصفر مساوی صفر شود، این دو بردار عمود برهم هستند.

مثال حل شدهٔ ۲۷

در هر یک از قسمتهای زیر، زاویهٔ حادهٔ بین دو خط داده شده را تا یک رقم بعد از اعشار، به‌دست آورید.

الف) $l_1: \mathbf{r} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}+\lambda(-2\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k})$

$l_2: \mathbf{r} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}+\mu(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})$

ب) $l_1: \mathbf{r} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}+s\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k})$

$l_2: \mathbf{r} = 4\mathbf{j}+6\mathbf{k}+t\,(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$

ج) $l_1: \mathbf{r} = -3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

$l_2: \mathbf{r} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-4\mathbf{k}+\mu(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})$

حل.

الف) بردارهای هادی این دو خط، را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k}$$

بنابر تعریف حاصلضرب داخلی دو بردار داریم

$$\mathbf{v}_۱ \cdot \mathbf{v}_۲ = (-۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۵\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۷\mathbf{k})$$

$$= \sqrt{(-۲)^۲ + (۱)^۲ + (۵)^۲}\ \sqrt{۱^۲ + ۲^۲ + (-۷)^۲} \cdot \cos\theta$$

پس،

$$-۲ + ۲ - ۳۵ = \sqrt{۳۰}\ \sqrt{۵۴}\ \cos\theta$$

$$\cos\theta = -۰/۸۶۹۵۸۱۹۹۱ \Rightarrow \theta = ۱۵۰/۴^\circ$$

$$\theta = ۲۹/۶^\circ$$

ب) برای این دو خط، بردارهای هادی عبارت‌اند از

$$\mathbf{v}_۱ = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$$

$$\mathbf{v}_۲ = (-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k})$$

بنابر تعریف داریم،

$$\mathbf{v}_۱ \cdot \mathbf{v}_۲ = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k})$$

$$= \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲}\ \sqrt{۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲}\ \cos\theta$$

$$-۱ + ۲ + ۶ = \sqrt{۶}\ \sqrt{۱۴}\ \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{۷}{\sqrt{۶}\ \sqrt{۱۴}}$$

$$\theta = ۴۰/۲^\circ$$

ج) بردارهای هادی دو خط عبارت‌اند از

$$\mathbf{v}_۱ = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_۲ = ۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

بنابر تعریف داریم

$$\mathbf{v}_۱ \cdot \mathbf{v}_۲ = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$= \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲}\ \sqrt{۲^۲ + ۳^۲ + ۱^۲}\ \cos\theta$$

$$۲ - ۳ + ۱ = \sqrt{۳}\sqrt{۱۴}\ \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{۰}{\sqrt{۳}\sqrt{۱۴}}$$

$$\theta = ۹۰^\circ$$

یعنی این دو خط، بر یکدیگر عمودند.

تمرین ۴

۱. خط l_1 از نقطهٔ A با بردار مکان $-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ می‌گذرد و با بردار $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ موازی است. همچنین خط l_2 از نقطهٔ B با بردار مکان $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ می‌گذرد و با بردار $-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ موازی است. معادله‌های برداری دو خط l_1 و l_2 را بنویسید و سپس مشخص کنید که دو خط l_1 و l_2 متقاطع‌اند یا نه.

۲. فرض کنید سه بردار $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$، که بردارهای متناظر آنها را به‌ترتیب، $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ می‌نامیم، به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c}=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$$

بردارهای $\mathbf{b}+\mathbf{c}$، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ و $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$، را مشخص کنید. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳. مختصات رأسهای مثلث ABC چنین داده شده است:

$$A(1,2,3)\ ,\quad B(3,4,6)\ ,\quad C(-1,-2,-3)$$

بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AC}$ را تعیین کنید و اندازهٔ آنها را به‌دست آورید. با استفاده از دستور هرون، $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(-p-c)}$، مساحت مثلث را به‌دست آورید.

۴. بردار $\mathbf{v}$، در فضا، با محور xها زاویهٔ 30° و با محور yها زاویهٔ 60° ساخته است. این بردارها با محور zها، چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۵. بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند در نظر بگیرید:

$$\mathbf{a}=t\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}=-2\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$

الف) اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر یکدیگر عمود باشند، چه رابطه‌ای بین پارامترهای t و λ، برقرار خواهد بود؟

ب) مقدار هر یک از پارامترهای t و λ را چنان پیدا کنید که بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، با هم موازی باشند.

۶. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را که به‌صورت زیر تعریف شده‌اند در نظر بگیرید:

$$\mathbf{a}=7\mathbf{i}+2\lambda\mathbf{j}-9\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}=7\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mu\mathbf{k}$$

الف) اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر یکدیگر عمود باشند، چه رابطه‌ای باید بین پارامترهای λ و μ برقرار باشد؟

ب) هرگاه $\lambda=-1$ و $\mu=2$، زاویهٔ حادهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را به‌دست آورید.

ج) هرگاه بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ موازی باشند، مقدار پارامترهای μ و λ را به‌دست آورید.

۷. A، B و C سه نقطهٔ دلخواه هستند. فرض کنید بردارهای مکان این سه نقطه، به‌صورت زیر داده شده باشند:

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}=۲\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۷\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}=-۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}=\mathbf{i}+۶\mathbf{j}+۱۱\mathbf{k}$$

الف) بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AC}$ را مشخص کنید.

ب) با دو روش خواسته شده در زیر، اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ $\angle ABC$، را به‌دست آورید.

یک) با استفاده از قضیهٔ کسینوسها در مثلث،

دو) با استفاده از حاصلضرب داخلی دو بردار.

۸. بردارهای مکان سه نقطهٔ P، Q و R به‌صورت زیر داده شده است:

$$\mathbf{p}=\overrightarrow{OP}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}=\overrightarrow{OQ}=۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OR}=-۵\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$$

الف) بردارهای $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$، را مشخص کنید.

ب) اندازهٔ زاویهٔ $\widehat{RPQ}$ را به‌دست آورید:

یک) با استفاده از قضیهٔ کسینوسها در مثلث،

دو) با استفاده از حاصلضرب داخلی دو بردار.

۹. بردارهای مکان $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{OR}$، به‌وسیلهٔ مختصات نقاط P، Q و R، به‌صورت زیر، داده شده‌اند:

$$P(-۳,۰,۴)\ ,\quad Q(۱,۳,۰)\ ,\quad R(-۳,۰,۰)$$

الف) بردارهای $\overrightarrow{PQ}$، $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{QR}$ را مشخص کنید و اندازهٔ هریک از آنها را به‌دست آورید.

ب) اندازهٔ هریک از بردارهای داده شده در زیر را به‌دست آورید و سپس بردار یکهٔ متناظر با هر کدام را مشخص کنید.

یک) $\mathbf{a}=۳\mathbf{i}-۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$ دو) $\mathbf{b}=-۳\mathbf{i}+۵\mathbf{k}$ سه) $\mathbf{r}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

چهار) $\mathbf{r}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ پنج) $\mathbf{p}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

۱۰. در هر قسمت زاویهٔ حاده‌ای را که بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ باهم می‌سازند به‌دست آورید.

الف) $\mathbf{u}=۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$

ب) $\mathbf{u}(۱,۲,۳)$ و $\mathbf{v}(-۱,-۲,-۳)$

۱۱. بردار مکان هریک از نقاط زیر را به‌صورت $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ بنویسید.

الف) $A(۰,۳)$ ب) $B(-۱,۲,۳)$ ج) $C(-۱,-۴,-۹)$

د) $D(۰,۰,۴)$ ه) $E(-۴,۰,۵)$

۱۲. بردارهای مکان نقاط A، B و C به‌ترتیب عبارت‌اند از $-\mathbf{7i}+\mathbf{7k}$، $-\mathbf{2j}-\mathbf{3k}$ و $-\mathbf{k}$. مختصات هریک از نقاط A، B و C را به‌دست آورید.

۱۳. اندازهٔ هریک از بردارهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\mathbf{u}=\mathbf{2i}-\mathbf{2j}+\mathbf{k}$ ب) $\mathbf{v}=\mathbf{5i}+\mathbf{5j}-\mathbf{6k}$

ج) $\mathbf{w}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{2k}$

۱۴. فرض کنید $P(-1,4,-5)$، $Q(1,2,5)$ و $R(-2,-4,-6)$ سه نقطه در فضا باشند. اندازهٔ بردارهای $\overrightarrow{OP}$، $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{OR}$ را به‌دست آورید (O مبدأ مختصات است).

۱۵. هرگاه سه بردار a، b و c به‌شکل ماتریسهای ستونی به‌صورت زیر داده شده باشند:

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}4\\-5\\6\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$$

مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $|\mathbf{a}|$ ب) $|\mathbf{a}-\mathbf{c}|$ ج) $|\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c}|$

۱۶. در هریک از قسمتهای زیر حاصلضرب داخلی دو بردار داده شده را به‌دست آورید و سپس زاویهٔ حادهٔ بین آنها را تعیین کنید.

الف) $\mathbf{u}=\mathbf{3i}-\mathbf{j}-\mathbf{5k}$ ، $\mathbf{v}=-\mathbf{2i}+\mathbf{5j}+\mathbf{4k}$

ب) $\mathbf{a}=\mathbf{3j}+\mathbf{k}$ ، $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{k}$

ج) $\mathbf{w}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{7k}$ ، $\mathbf{z}=-\mathbf{2i}+\mathbf{2j}+\mathbf{k}$

۱۷. زاویهٔ بین دو بردار مساوی 30° و اندازهٔ آنها به‌ترتیب ۱ و ۲ است. حاصلضرب داخلی این دو بردار را تعیین کنید.

۱۸. حاصل هریک از حاصل‌ضربهای داخلی زیر را به‌دست آورید.

الف) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}$ ب) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$

ج) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}$ د) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}$

۱۹. در هریک از قسمتهای زیر حاصلضرب داخلی بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را به‌دست آورید.

الف) $\mathbf{a}=\mathbf{2i}-\mathbf{3j}-\mathbf{5k}\,,\ \mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{2j}+\mathbf{k}$

ب) $\mathbf{a}=-\mathbf{j}-\mathbf{k}\,,\ \mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

ج) $\mathbf{a}=(3,4,5)\,,\ \mathbf{b}=(-1,-1,-1)$

د) $\mathbf{a}=(2,2,2)\,,\ \mathbf{b}=(2,2,2)$

۲۰. بردارهای $\mathbf{u}=3t\mathbf{i}+2t^2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}=(1-t)\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ را که در آنها t متغیر است درنظر بگیرید.

الف) مقدار t را چنان تعیین کنید که بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بر یکدیگر عمود باشند.

ب) هرگاه $t=-2$، زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را به‌دست آورید.

۲۱. فرض کنید

$$\mathbf{a} = ۲t^{۲}\mathbf{i} + (۱ - ۲t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = ۲t\mathbf{i} - ۲t\mathbf{j} - ۴t^{۲}\mathbf{k}$$

متغیر t را چنان به‌دست آورید که زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ قائمه باشد.

۲۲. بردارهای $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ به‌ترتیب به‌صورت $۳\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $-۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ داده شده‌اند. حاصلضرب داخلی بردارهای $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ را به‌دست آورید و با استفاده از آن، زاویهٔ حادهٔ بین این دو بردار را تعیین کنید.

۲۳. بردارهای مکان متناظر با نقاط A و B به‌صورت زیر داده شده است:

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = \mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = ۲\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$$

حاصلضرب داخلی بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$، را تعیین کنید و با استفاده از آن، تانژانت زاویهٔ بین این دو بردار را بیابید.

۲۴. پنج نقطهٔ A، B، C، D و E با بردارهای مکان خود به‌ترتیب، به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = \mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{c} = -۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OD} = \mathbf{d} = ۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OE} = \mathbf{e} = ۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$$

هریک از مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) یک) $۲\mathbf{a} - ۳\mathbf{e}$ دو) $\mathbf{b} + ۳\mathbf{d} + \mathbf{e}$ سه) $۲\mathbf{b} - ۴\mathbf{d} + ۲\mathbf{e}$

ب) یک) $|\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}|$ دو) $|\mathbf{a} - \mathbf{e}|$ سه) $|\mathbf{d} - \mathbf{a}|$

چهار) $|\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}|$ پنج) $|(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|$

ج) کسینوسهای هادی هر بردار.

د) زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{e}$.

ه) زاویهٔ بین بردارهای $۲\mathbf{a}$ و $\mathbf{d}$.

و) زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{c}$ و $۲\mathbf{e}$.

۲۵. معادلهٔ برداری سه خط $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ به‌صورت زیر داده شده است:

$$l_۱:\ \mathbf{r} = ۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k} + \lambda(۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k})$$

$$l_۲:\ \mathbf{r} = ۲\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} + \mathbf{k} + \mu(۴\mathbf{i} - ۶\mathbf{j} + ۱۰\mathbf{k})$$

$$l_۳:\ \mathbf{r} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۳\mathbf{k} + \nu(\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$$

تعیین کنید کدام دو خط از سه خط فوق موازی، کدامها متنافر و کدام متقاطع‌اند؟

۲۶. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۳,۴)$ را از خطی با معادلهٔ برداری $\mathbf{r}=-\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k}+\lambda(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})$، به‌دست آورید. (منظور از فاصلهٔ نقطه از خط، طول عمودی است که از آن نقطه، به خط وارد می‌شود)

۲۷. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۲,۳)$ را از خطی با معادلهٔ نموداری $\mathbf{r}=\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}+\mu(۴\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۲۰\mathbf{k})$ به‌دست آورید.

۲۸. معادلهٔ برداری هریک از خطهای زیر را که با معادله‌های متقارن داده شده‌اند به‌دست آورید.

الف) $\dfrac{x+۱}{۱}=\dfrac{y-۲}{۲}=\dfrac{z+۳}{۳}$ ب) $\dfrac{x-۳}{-۳}=\dfrac{y+۱}{۵}=\dfrac{z-۵}{۷}$

ج) $\dfrac{x-۲}{-۱}=\dfrac{y-۱}{-۲}=\dfrac{z-۴}{-۳}$ د) $\dfrac{x-۱}{۰}=\dfrac{y-۲}{۰}=\dfrac{z}{۲}$

۲۹. معادلهٔ برداری دو خط $l_۱$ و $l_۲$ به‌صورت زیر داده شده است:

$$l_۱:\ \mathbf{r}=(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})+\lambda(-\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$$

$$l_۲:\ \mathbf{r}=(۳\mathbf{i}+۲\mathbf{k})+\mu(\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k})$$

نشان دهید که دو خط $l_۱$ و $l_۲$ متقاطع‌اند و سپس بردار مکان متناظر با نقطهٔ تلاقی این دو خط را به‌دست آورید.

۳۰. معادله‌های متقارن دو خط $l_۱$ و $l_۲$، به‌صورت $l_۱: y=m_۱x+c_۱$ و $l_۲: y=m_۲x+c_۲$ داده شده‌اند. ابتدا معادلات برداری دو خط را بنویسید و سپس نشان دهید اگر این دو خط متقاطع باشند، زاویهٔ بین آنها مساوی است با $\tan^{-۱}\left|\dfrac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}\right|$.

۳۱. با استفاده از بردارها، فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ را از خط $ax+by+c=۰$ به‌دست آورید.

۳۲. فاصلهٔ بین دو خط موازی $l_۱$ و $l_۲$ را که معادلهٔ برداری آنها به‌صورت زیر داده شده است به‌دست آورید:

$$l_۱:\ \mathbf{r}=(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})+\lambda(-۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۴\mathbf{k})$$

$$l_۲:\ \mathbf{r}=(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-\mathbf{k})+\mu(-۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۴\mathbf{k})$$

۳۳. فاصلهٔ بین دو خط موازی زیر را که معادله‌های متقارن آنها داده شده است به‌دست آورید:

$$l_۱:\ \frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۲}{۳}=\frac{z-۳}{۱}\ ,\quad l_۲:\ \frac{x+۳}{۲}=\frac{y-۳}{۳}=\frac{z+۱}{۱}$$

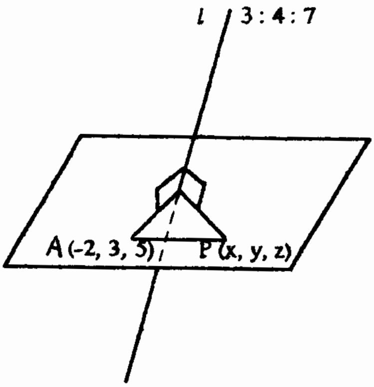
۵

هندسهٔ تحلیلی در فضای سه‌بُعدی

۵-۱ معادلهٔ صفحه

هر صفحه با یک نقطه از آن و برداری که بر صفحه عمود است مشخص می‌شود. صفحه‌ای که از یک نقطهٔ معلوم بگذرد و بر بردار مفروضی عمود باشد یکتاست.

فرض کنید $A(-۲,۳,۵)$ نقطه‌ای از یک صفحه باشد و این صفحه بر خطی با نسبتهای هادی ۷ : ۴ : ۳ عمود باشد. می‌خواهیم معادلهٔ این صفحه را پیدا کنیم (شکل ۳۲).



شکل۳۲

چون خط l با نسبتهای هادی ۷ : ۴ : ۳ بر صفحه عمود است، پس بنابر تعریف، بر تمامی خطهای این صفحه عمود است. حال اگر نقطهٔ $P(x,y,z)$ را نقطهٔ دلخواهی از صفحه بگیریم، خواهیم داشت $l\perp AP$.

از طرفی نسبتهای هادی خط AP عبارت‌اند از $(z-۵) : (y-۳) : (x+۲)$ و چون AP بر l عمود

است پس حاصلضرب داخلی این دو بردار مساوی صفر است. یعنی

$$۳(x+۲)+۴(y-۳)+۷(z-۵)=۰$$
$$۳x+۶+۴y-۱۲+۷z-۳۵=۰$$

بنابراین،
$$۳x+۴y+۷z=۴۱$$

و چون $P(x,y,z)$، نقطهٔ دلخواهی، از این صفحه است، پس همهٔ نقاط این صفحه، در معادلهٔ $۳x+۴y+۷z=۴۱$ صدق می‌کنند و بنابراین، این معادله را معادلهٔ صفحهٔ شامل نقطهٔ $A(-۲,۳,۵)$ و عمود بر خط l می‌نامیم.

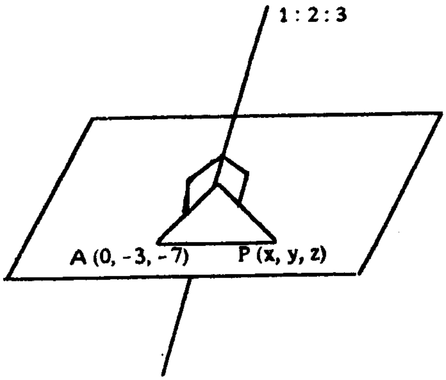
اگر بردار عمود بر صفحه را بردار نرمال صفحه بنامیم و نسبتهای هادی این بردار نرمال را با $a:b:c$، نشان دهیم، در حالت کلی معادلهٔ صفحه به شکل $ax+by+cz=d$ است. اگر بدانیم که نقطهٔ $(x_۱,y_۱,z_۱)$ روی صفحه است معادلهٔ صفحه را به‌صورت $ax+by+cz=ax_۱+by_۱+cz_۱$ می‌نویسیم.

مثال حل شدهٔ ۲۸

معادلهٔ صفحه‌ای را که شامل نقطهٔ $A(۰,-۳,-۷)$ باشد و نسبتهای هادی بردار نرمال آن به‌صورت $۳:۲:۱$ باشند بنویسید.

حل.

فرض کنید $P(x,y,z)$، نقطهٔ دلخواهی روی صفحه باشد (شکل ۳۳).



شکل۳۳

نسبتهای هادی خط AP عبارت‌اند از $x:(y+۳):(z+۷)$ و چون AP بر بردار نرمال صفحه، عمود است، پس حاصلضرب داخلی AP و بردار نرمال صفحه مساوی صفر است بنابراین

$$۱(x)+۲(y+۳)+۳(z+۷)=۰$$
$$x+۲y+۶+۳z+۲۱=۰$$

پس،
$$x+۲y+۳z=-۲۷$$

مثال حل شدهٔ ۲۹

معادلهٔ صفحه‌ای را که شامل سه نقطهٔ $A(1,2,3)$؛ $B(-2,3,-1)$ و $C(-1,4,2)$ است بنویسید.

حل.

همان‌طورکه می‌دانید صفحه‌ای که شامل سه نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت باشد یکتاست. معادلهٔ این صفحه که نسبتهای هادی بردار نرمال آن عبارت‌اند از $a:b:c$، مساوی است با $ax+by+cz=d$.
چون $A(1,2,3)$، نقطه‌ای از این صفحه است، پس در معادلهٔ آن، صدق می‌کند. یعنی،

$$a+2b+3c=d \qquad (1)$$

و به دلیل تعلق نقاط $B(-2,3,-1)$ و $C(-1,4,2)$ به این صفحه، خواهیم داشت

$$-2a+3b-c=d \qquad (2)$$

$$-a+4b+2c=d \qquad (3)$$

معادله‌های (۱)، (۲) و (۳)، را برحسب d حل می‌کنیم:

$$a+2b+3c=d \qquad (1)$$

$$-2a+3b-c=d \qquad (2)$$

$$-a+4b+2c=d \qquad (3)$$

با جمع‌کردن طرفین رابطه‌های (۱) و (۳) خواهیم داشت

$$6b+5c=2d \qquad (4)$$

حال طرفین رابطهٔ (۱) را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم و معادلهٔ حاصل را با رابطهٔ (۲) درنظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{r} 2a+4b+6c=2d \\ \underline{-2a+3b-c=d} \\ 7b+5c=3d \end{array} \qquad (5)$$

اگر طرفین رابطهٔ (۴) را نظیربه‌نظیر از رابطهٔ (۵) کم کنیم، به‌دست می‌آید $b=d$. اگر در رابطهٔ (۴)، به‌جای b، d را قرار دهیم، آنگاه

$$6d+5c=2d \Rightarrow 5c=-4d \Rightarrow c=\frac{-4}{5}d$$

مقادیر c و b، که آنها را برحسب d به‌دست آورده‌ایم در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم:

$$a+2b+3c=d \Rightarrow a+2(d)+3\left(\frac{-4}{5}d\right)=d \Rightarrow a=d-2d+\frac{12}{5}d$$

$$\Rightarrow a=\frac{7}{5}d$$

حال مقادیر a، b و c را در معادلهٔ صفحه قرار می‌دهیم:

$$ax + by + cz = d \Rightarrow \left(\frac{۷}{۵}d\right) x + (d)y + \left(-\frac{۴}{۵}d\right) z = d \Rightarrow ۷x + ۵y - ۴z = ۵$$

اگر صفحه‌ای شامل مبدأ مختصات باشد، نقطهٔ $O(۰,۰,۰)$ در معادلهٔ آن صدق می‌کند. اگر معادلهٔ صفحه را $ax + by + cz = d$، بگیریم، آنگاه $ax(۰) + b(۰) + c(۰) = d$، یعنی $d = ۰$. پس معادلهٔ صفحه‌ای که شامل مبدأ مختصات باشد، عبارت است از

$$ax + by + cz = ۰$$

مثال حل شدهٔ ۳۰

معادلهٔ صفحه‌ای را که شامل دو خط $l_۱$ و $l_۲$، با معادله‌های متقارن داده شده در زیر است بنویسید.

$$l_۱ : \frac{x+۲}{۴} = \frac{y+۶}{۳} = \frac{z-۲}{۲}$$
$$l_۲ : \frac{x-۳}{۱} = \frac{y+۱}{۲} = \frac{z-۷}{۳}$$

حل.

می‌دانیم صفحه‌ای که شامل دو خط متنافر باشد وجود ندارد. پس $l_۱$ و $l_۲$، باید موازی یا متقاطع باشند. چون $\frac{۲}{۳} \neq \frac{۳}{۲} \neq \frac{۴}{۱}$، پس $l_۱ \nparallel l_۲$. حال مختصات نقطهٔ تلاقی دو خط را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید

$$l_۱ : \frac{x+۲}{۴} = \frac{y+۶}{۳} = \frac{z-۲}{۲} = t \qquad (۱)$$
$$l_۲ : \frac{x-۳}{۱} = \frac{y+۱}{۲} = \frac{z-۷}{۳} = s \qquad (۲)$$

از رابطهٔ (۱) و با در نظر گرفتن دو نسبت اول، داریم

$$\begin{array}{l} ۳(x+۲) = ۴(y+۶) \\ ۳x - ۴y = ۲۴ - ۶ \end{array} \Rightarrow ۳x - ۴y = ۱۸ \qquad (۳)$$

همچنین از رابطهٔ (۲)، می‌توان نوشت

$$\begin{array}{l} ۲(x-۳) = y+۱ \\ ۲x - y = ۶ + ۱ \end{array} \Rightarrow ۲x - y = ۷ \qquad (۴)$$

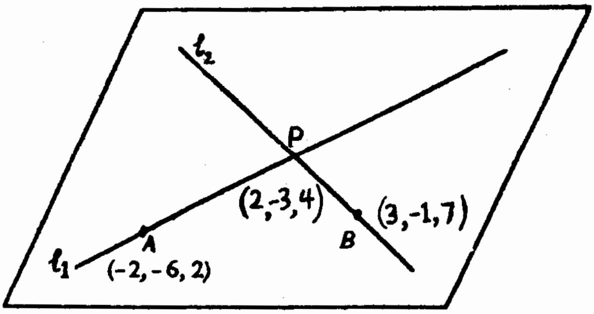
با ضرب طرفین رابطهٔ (۴)، در عدد ۴ خواهیم داشت $۸x - ۴y = ۲۸$ و بنابر رابطهٔ (۳)، $۳x - ۴y = ۱۸$. پس

$$۵x = ۱۰ \Rightarrow x = ۲ \;,\quad y = -۳$$

با قرار دادن مقادیر x و y در رابطهٔ (۱)، معلوم می‌شود که $t = ۱$. پس

$$\frac{z-۲}{۲} = ۱ \Rightarrow z = ۴$$

بنابراین، $P(۲, -۳, ۴)$، نقطهٔ تلاقی دو خط $l_۱$ و $l_۲$ است (شکل ۳۴).



شکل۳۴

با توجه به مقادیری که برای نقطهٔ تلاقی این دو خط یعنی نقطهٔ P به‌دست آوردیم می‌توانیم بنویسیم

$$l_۱ : \frac{x+۲}{۴} = \frac{y+۶}{۳} = \frac{z-۲}{۲} = t = ۱$$

$$l_۲ : \frac{x-۳}{۱} = \frac{y+۱}{۲} = \frac{z-۷}{۳} = s = -۱$$

حال دو نقطهٔ A و B را به‌ترتیب روی $l_۱$ و $l_۲$ به‌صورت دلخواه تعیین می‌کنیم. قرار می‌دهیم $t = ۰$. پس

$$x = -۲ , \quad y = -۶ , \quad z = ۲ \Rightarrow A(-۲, -۶, ۲)$$

همچنین اگر $s = ۰$، آنگاه

$$x = ۳ , \quad y = -۱ , \quad z = ۷ \Rightarrow B(۳, -۱, ۷)$$

همان‌طور که می‌دانید به‌ازای هر مقدار t نقطه‌ای یکتا روی $l_۱$ و به‌ازای هر مقدار s نقطه‌ای یکتا، روی $l_۲$ به دست می‌آید. حال کافی است معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسیم که شامل سه نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت P، A و B، باشد. فرض کنید $ax + by + cz = d$ معادلهٔ صفحهٔ مطلوب باشد. چون این صفحه شامل نقاط P، A و B است، پس مختصات این سه نقطه، در معادلهٔ صفحه صدق می‌کند:

$$-۲a - ۶b + ۲c = d \qquad (۱)$$

$$۳a - b + ۷c = d \qquad (۲)$$

$$۲a - ۳b + ۴c = d \qquad (۳)$$

با جمع کردن طرفین رابطه‌های (۱) و (۳)، به‌دست می‌آید

$$-۹b + ۶c = ۲d \qquad (۴)$$

حال طرفین رابطهٔ (۱) را در عدد ۳ و طرفین رابطهٔ (۲) را در عدد ۲ ضرب و معادله‌های حاصل را باهم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} -6a-18b+6c=3d \\ \underline{\;\;6a-2b+14c=2d\;\;} \\ -20b+20c=5d \end{array}$$

$$-4b+4c=d \tag{5}$$

رابطهٔ (۲) را در ۲ و رابطهٔ (۵) را در ۳− ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} -18b+12c=4d \\ \underline{+12b-12c=-3d} \\ -6b=d \end{array}$$

$$b=-\frac{d}{6} \tag{6}$$

با قرار دادن این مقادیر، در رابطهٔ (۵)، به‌دست می‌آید

$$4c=d+4b=d-\frac{4d}{6}=\frac{2d}{6}=\frac{d}{3}$$

$$c=\frac{d}{12} \tag{7}$$

و از رابطهٔ (۱)، با نتایجی که گرفتیم، می‌توان مقدار a را نیز برحسب d، محاسبه کرد:

$$-2a-6\left(-\frac{d}{6}\right)+2\left(\frac{d}{12}\right)=d$$

$$-2a=d-d-\frac{1}{6}d$$

$$a=\frac{1}{12}d \tag{8}$$

اگر مقادیر a، b و c را برحسب d از رابطه‌های (۶)، (۷) و (۸) در معادلهٔ صفحه، قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{12}dx-\frac{1}{6}dy+\frac{1}{12}dx=d$$

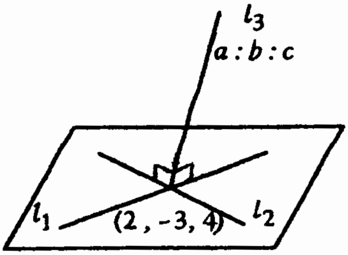
بنابراین، معادلهٔ صفحهٔ مطلوب، عبارت است از $x-2y+z=12$.

این مثال را می‌توان با روش دیگری نیز حل کرد. ایدهٔ این روش، یافتن نسبتهای هادی بردار نرمال صفحه است.

$$l_1:\ \frac{x+2}{4}=\frac{y+6}{3}=\frac{z-2}{2}$$

$$l_2:\ \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-7}{3}$$

و خط l_3، خطی است که بر صفحه و در نتیجه بر l_1 و l_2 عمود است (شکل ۳۵).



شکل۳۵

کافی است مقادیر a، b و c، یعنی نسبتهای هادی خط l_3 را بیابیم. چون $l_3 \perp l_1$، پس، $l_3 \cdot l_1 = 0$، یعن

$$4a + 3b + 2c = 0 \qquad (1)$$

و به دلیل اینکه $l_3 \perp l_2$، خواهیم داشت $l_3 \cdot l_2 = 0$. پس

$$a + 2b + 3c = 0 \qquad (2)$$

با ضرب طرفین رابطهٔ (۲)، در عدد ۴−، خواهیم داشت

$$\begin{array}{r} -4a - 8b - 12c = 0 \\ \underline{4a + 3b + 2c = 0} \\ -5b - 10c = 0 \Rightarrow \dfrac{b}{c} = -\dfrac{2}{1} \end{array}$$

و با استفاده از رابطهٔ (۲)،

$$a - 4c + 3c = 0 \Rightarrow a = c \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{1}$$

در نتیجه، $\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = -\dfrac{1}{2}$ یا $\dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{2}$. پس $a : b : c = 1 : -2 : 1$. و چون $P(2, -3, 4)$، نقطهٔ تلاقی دو خط l_1 و l_2 است. برای نوشتن معادلهٔ صفحه همهٔ اطلاعات لازم را در اختیار داریم. پس کافی است توجه کنیم که،

$$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$$

$$x - 2y + z = (1)(2) + (-2)(-3) + (1)(4) = 12$$

بنابراین،

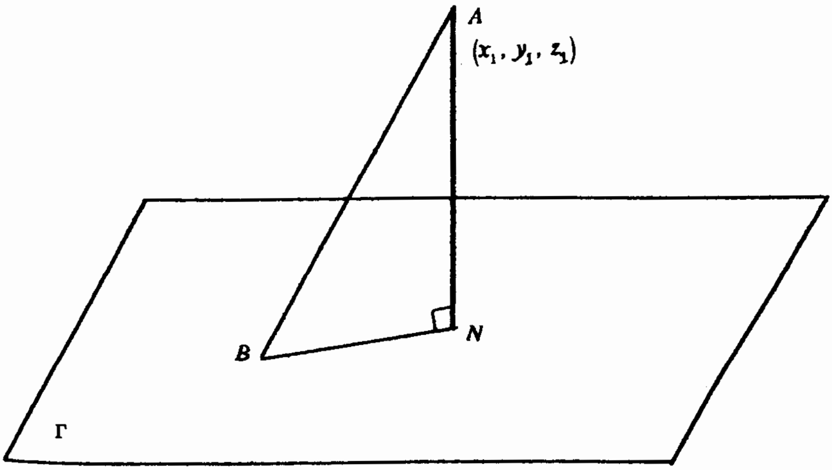
$$x - 2y + z = 12$$

۵-۲ فاصلهٔ نقطه از صفحه

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1, y_1, z_1)$، از صفحهٔ Γ به معادلهٔ $ax + by + cz = d$ عبارت است از

$$AN = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

نقطهٔ ON پای عمود وارد از نقطهٔ A بر صفحهٔ Γ است (شکل ۳۶). بنابر تعریف، AN را فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحه می‌نامیم.

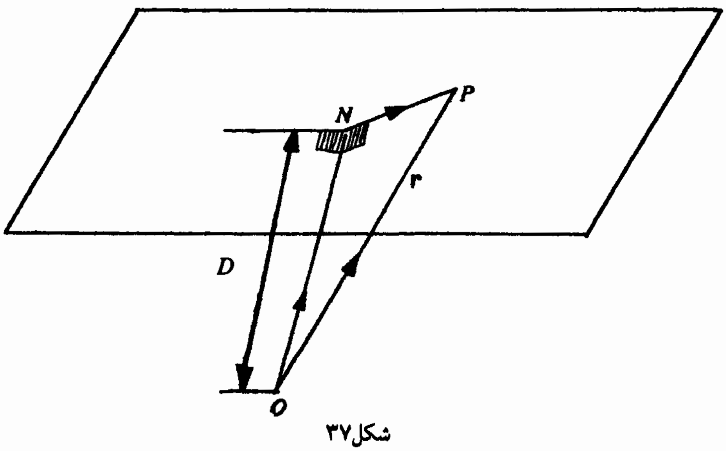


شکل۳۶

همان‌طور که می‌دانید اگر B نقطهٔ دلخواهی از صفحه باشد، به‌علت عمود بودن AN بر صفحه، خواهیم داشت $AN \perp BN$. نسبتهای هادی AN عبارت‌اند از $a : b : c$ و همچنین کسینوسهای هادی متناظر آنها، مقدارهای $l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$، $m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ و $n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ خواهند بود.

۳-۵ معادلهٔ برداری صفحه

همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، معادلهٔ صفحه را با استفاده از بردار نرمال صفحه و یک نقطهٔ صفحه، به‌صورت $ax + by + cz = d$ می‌نویسیم. در این قسمت می‌خواهیم معادلهٔ برداری صفحه را مشخص کنیم. فرض کنید صفحهٔ Γ مفروض باشد. از نقطهٔ O، مبدأ مختصات، عمودی بر این صفحه رسم می‌کنیم و پای عمود را N می‌نامیم، پس $ON \perp \Gamma$ (شکل ۳۷).



شکل۳۷

اگر $\hat{\mathbf{n}}$، بردار یکهٔ عمود بر صفحه و P نقطهٔ دلخواهی از صفحه باشد، خواهیم داشت $NP\perp ON$ و $\overrightarrow{ON}=\hat{\mathbf{n}}D$. به دلیل تعامد ON و NP، می‌توان گفت که حاصلضرب داخلی بردارهای $\overrightarrow{ON}$ و $\overrightarrow{NP}$ مساوی صفر است، یعنی

$$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{ON}=O \qquad (۱)$$

اگر بردار مکان نقطهٔ P، یعنی $\overrightarrow{OP}$، را با $\mathbf{r}$ نشان دهیم، بنابر قانون جمع مثلثی، داریم $\overrightarrow{NP}=\mathbf{r}-\hat{\mathbf{n}}D$.

با قرار دادن مقدار بردار $\overrightarrow{NP}$ در رابطهٔ (۱)، به‌دست می‌آوریم

$$(\mathbf{r}-\hat{\mathbf{n}}D)\cdot\hat{\mathbf{n}}D=۰$$

یا

$$\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}-\hat{\mathbf{n}}D=۰$$

اما می‌دانیم که

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}=۱$$

پس،

$$\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}=D$$

و این رابطه، را معادلهٔ برداری یک صفحه می‌نامیم.

فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی

فرض کنید دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ به‌ترتیب با معادله‌های $ax+by+cz=d_۱$ و $ax+by+cz=d_۲$، داده شده باشند. می‌خواهیم فاصلهٔ بین این دو صفحه را پیدا کنیم. برای این منظور ابتدا فاصلهٔ مبدأ مختصات را تا صفحهٔ $\Gamma_۱$ تعیین می‌کنیم. همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ از صفحه‌ای به معادلهٔ $ax+by+cz=d$ مساوی است با $\left|\dfrac{ax_۱+by_۱+cz_۱-d}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}\right|$. پس فاصلهٔ مبدأ مختصات، $O(۰,۰,۰)$ از صفحهٔ $\Gamma_۱: ax+by+cz=d_۱$، مساوی است با $l=\dfrac{|d_۱|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$.
همچنین با استدلال مشابه می‌توان دریافت که فاصلهٔ مبدأ مختصات تا صفحهٔ $\Gamma_۲$، برابر است با $l'=\dfrac{|d_۲|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$، بنابراین فاصلهٔ این دو صفحهٔ موازی، برابر است با $l-l'$، یا

$$(\text{فاصلهٔ دو صفحهٔ موازی}) = \frac{|d_۲-d_۱|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

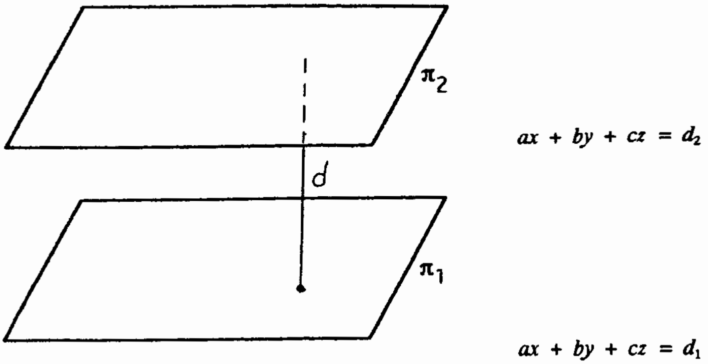
مثال حل شدهٔ ۳۱

فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی، با معادله‌های $x+۳y-\sqrt{۱۵}z=۱$ و $x+۳y-\sqrt{۱۵}z=۶$ را پیدا کنید.

حل.

بنابر آنچه برای فاصلهٔ دو صفحهٔ موازی گفتیم خواهیم داشت (شکل ۳۸).

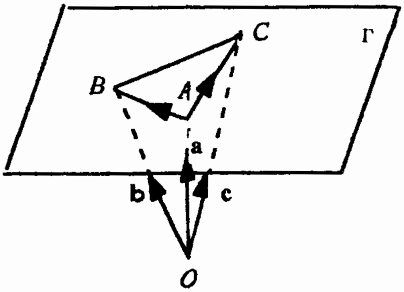
$$d=\frac{d_۲-d_۱}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}=\frac{۶-۱}{\sqrt{۱^۲+۳^۲+۱۵}}=\frac{۵}{۵}=۱$$



شکل۳۸

۴-۵ معادلهٔ پارامتری صفحه

صفحهٔ Γ و سه نقطهٔ A، B و C روی آن‌را درنظر بگیرید. همچنین فرض‌کنید بردارهای مکان نقطه‌های A، B و C را به‌ترتیب با $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۳۹). می‌خواهیم معادلهٔ پارامتری صفحهٔ Γ را بیابیم:



شکل۳۹

با توجه به قانون جمع مثلثی بردارها، داریم، $\mathbf{a}+\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$ و همچنین، $\mathbf{a}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}$. پس

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a} \quad , \quad \overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$$

از طرفی، معادلهٔ برداری صفحهٔ Γ، که شامل نقطهٔ A، با بردار مکان $\mathbf{a}$ موازی با بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ باشد، به‌صورت $\mathbf{r}=\mathbf{a}+s\,\overrightarrow{AB}+t\,\overrightarrow{AC}$ است. توجه کنید که s و t، متغیرهای مستقل‌اند. با توجه به مقدارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، که در بالا، به‌دست آوردیم، این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+s(\mathbf{b}-\mathbf{a})+t(\mathbf{c}-\mathbf{a})$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}(۱-s-t)+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}$$

و با فرض $\lambda=۱-s-t$، خواهیم داشت

$$\mathbf{r}=\lambda\mathbf{a}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}$$

با توجه به مقدار λ، که در بالا معرفی کردیم، واضح است که در رابطهٔ (۱)، $\lambda + s + t = ۱$، رابطهٔ (۱)، معادلهٔ پارامتری صفحه‌ای شامل سه نقطهٔ A، B و C است که به‌ترتیب دارای بردارهای مکان $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هستند.

مثال حل شدهٔ ۳۲

نقاط $A(۲,۱,۰)$، $B(۳,-۱,۱)$ و $C(۰,-۲,-۱)$ مفروض‌اند، معادلهٔ صفحهٔ شامل این سه نقطه را، الف) به‌صورت پارامتری، ب) به‌صورت دکارتی بنویسید.

حل.

بردارهای مکان نقطه‌های A، B و C به‌ترتیب عبارت‌اند از $\mathbf{a}=۲\mathbf{i}+\mathbf{j}$، $\mathbf{b}=۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=-۲\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

الف) معادلهٔ پارامتری صفحه‌ای شامل سه نقطه با بردارهای مکان $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ عبارت است از $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$ که در آن $\lambda + \mu + \nu = ۱$ است. پس،

$$\mathbf{r} = \lambda(۲\mathbf{i}+\mathbf{j}) + \mu(۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}) + \nu(-۲\mathbf{j}-\mathbf{k})$$

اگر قرار دهیم

$$\nu = ۱ - \lambda - \mu$$

آنگاه

$$\mathbf{r} = \lambda(۲\mathbf{i}+\mathbf{j}) + \mu(۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}) + (۱-\lambda-\mu)(-۲\mathbf{j}-\mathbf{k})$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = (۲\lambda + ۳\mu)\mathbf{i} + (\lambda - \mu + ۲\lambda + ۲\mu - ۲)\mathbf{j} + (\mu - ۱ + \lambda + \mu)\mathbf{k}$$

بنابراین معادلهٔ پارامتری صفحهٔ مطلوب عبارت است از

$$\mathbf{r} = (۲\lambda + ۳\mu)\mathbf{i} + (۳\lambda + \mu - ۲)\mathbf{j} + (۲\mu + \lambda - ۱)\mathbf{k}$$

ب) با توجه به معادلهٔ پارامتری صفحه که در قسمت قبلی، به‌دست آوردیم داریم

$$x = ۲\lambda + ۳\mu$$

$$y = ۳\lambda + \mu - ۲$$

$$z = ۲\mu + \lambda - ۱$$

از این سه رابطه λ و μ را حذف می‌کنیم. ابتدا طرفین رابطهٔ دوم را در عدد ۳- ضرب می‌کنیم:

$$-۳y = -۹\lambda - ۳\mu + ۶$$

می‌دانیم $x = ۲\lambda + ۳\mu$. پس

$$x - ۳y = -۷\lambda + ۶ \qquad (۱)$$

حال طرفین رابطهٔ دوم را در عدد ۲-، ضرب و معادلهٔ حاصل را با رابطهٔ سوم جمع می‌کنیم. پس

$$-۲y = -۶\lambda - ۲\mu + ۴ \quad , \quad z = ۲\mu + \lambda - ۱ \Rightarrow -۲y + z = -۵\lambda + ۳$$

یا $\lambda = \frac{-۲y + z - ۳}{-۵}$. با قرار دادن مقدار λ در رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آوریم

$$x - ۳y = -\frac{۷(-۲y + z - ۳)}{-۵} + ۶$$

با ضرب طرفین این رابطه در عدد ۵ و ساده کردن رابطهٔ حاصل، معادلهٔ صفحه را به‌دست می‌آوریم:

$$5x - 15y = 7(-2y + z - 3) + 30$$

$$5x - 15y + 14y - 7z + 21 - 30 = 0$$

بنابراین، معادلهٔ دکارتی صفحهٔ مطلوب، عبارت است از

$$5x - y - 7z = 9$$

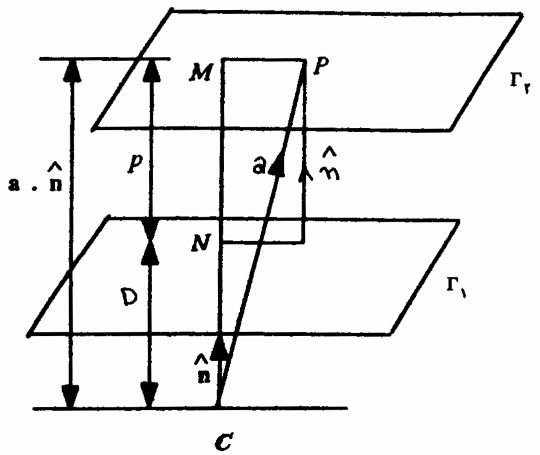
توجه کنید که با در دست داشتن معادلهٔ دکارتی صفحه می‌توان معادلهٔ اسکالر آن‌را به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r} \cdot (5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 7\mathbf{k}) = 9$$

این رابطه معادلهٔ اسکالر صفحه‌ای است که در این مثال خواسته شده بود.

۵-۵ فاصلهٔ نقطه از صفحه‌ای با معادلهٔ برداری

فرض کنید صفحهٔ Γ_1 با معادلهٔ برداری $\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} = D$ مفروض باشد؛ D فاصلهٔ مبدأ مختصات تا این صفحه است. می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ P را از این صفحه به‌دست آوریم. برای این منظور، ابتدا صفحه‌ای را که شامل نقطهٔ P و با صفحهٔ Γ_1 موازی است رسم می‌کنیم و آن‌را Γ_2 می‌نامیم (شکل ۴۰). معادلهٔ برداری این صفحه به‌صورت $\Gamma_2 = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} = D'$ است. $D' = OM$، فاصلهٔ مبدأ مختصات تا صفحهٔ Γ_2، و $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکهٔ عمود بر صفحه است.



شکل ۴۰

اگر فاصلهٔ این دو صفحهٔ موازی را با p، نشان دهیم، p در واقع همان فاصلهٔ نقطهٔ P تا صفحهٔ Γ_1 است. از طرفی،

$$p = OM - ON = D' - D \Rightarrow \boxed{p = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} - D}$$

توجه کنید که اگر این فاصله مثبت باشد می‌توان گفت نقاط P و O، در دو طرف صفحه واقع‌اند و اگر این فاصله منفی باشد، P و O در یک طرف صفحه قرار دارند.

مثال حل شدهٔ ۳۳

نقطه‌ای با بردار مکان $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ در فضا داده شده است. فاصلهٔ این نقطه را تا صفحه‌ای به معادلهٔ $\mathbf{r}\cdot(۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})=۵$ پیدا کنید.

حل.

اگر فاصلهٔ این نقطه را تا صفحه p بنامیم، بنابر آنچه گفته شد خواهیم داشت

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}} - D \\ &= (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\frac{(۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})}{\sqrt{۲^۲+۳^۲+۴^۲}} - \frac{۵}{\sqrt{۲^۲+۳^۲+۴^۲}} \\ &= (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\frac{(۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})}{\sqrt{۲۹}} - \frac{۵}{\sqrt{۲۹}} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲۹}}(۲+۳+۴) - \frac{۵}{\sqrt{۲۹}} = \frac{۴}{\sqrt{۲۹}} = \frac{۴\sqrt{۲۹}}{۲۹} \end{aligned}$$

پس مبدأ مختصات و نقطهٔ داده شده در دو طرف صفحه قرار دارند نه در یک طرف آن.

مثال حل شدهٔ ۳۴

الف) فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۲,۳)$ را از صفحه‌ای به معادلهٔ $\mathbf{r}\cdot(-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})=۲$، پیدا کنید.

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $B(۱,۱,۱)$ را از هریک از صفحه‌های زیر به‌دست آورید.

یک) $\mathbf{r}\cdot(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})=۱۰$ دو) $\mathbf{r}\cdot(۳\mathbf{i}+۴+۷\mathbf{k})=۵$

حل.

الف) اگر فاصلهٔ نقطهٔ A را تا صفحهٔ داده شده $p_۱$ بنامیم، داریم

$$\begin{aligned} p_۱ &= \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}} - D \\ &= (\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})\cdot\frac{(-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{۳}} - \frac{۲}{\sqrt{۳}} \\ &= -\frac{۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۲}{\sqrt{۳}} - \frac{۳}{\sqrt{۳}} - \frac{۲}{\sqrt{۳}} = -\frac{۸}{\sqrt{۳}} \end{aligned}$$

علامت منفی، نشان می‌دهد که مبدأ مختصات و نقطهٔ A، در یک طرف این صفحه قرار دارند.

ب) یک) فاصلهٔ نقطهٔ B از این صفحه را $p_۲$ می‌نامیم. پس

$$\begin{aligned} p_۲ &= \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}} - D \\ &= (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\frac{(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})}{\sqrt{۳۸}} - \frac{۱۰}{\sqrt{۳۸}} \\ &= \frac{۲}{\sqrt{۳۸}} - \frac{۳}{\sqrt{۳۸}} + \frac{۵}{\sqrt{۳۸}} - \frac{۱۰}{\sqrt{۳۸}} = -\frac{۶}{\sqrt{۳۸}} \end{aligned}$$

یعنی نقطه‌های B و O (مبدأ مختصات) در یک طرف صفحه قرار دارند.

دو) فاصلهٔ نقطهٔ B از این صفحه را $p_۲$ می‌نامیم. داریم

$$\begin{aligned} p_۲ &= \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}} - D \\ &= (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\left(\frac{۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۷\mathbf{k}}{\sqrt{۷۴}}\right) - \frac{۵}{\sqrt{۷۴}} \\ &= \frac{۳}{\sqrt{۷۴}} + \frac{۴}{\sqrt{۷۴}} + \frac{۷}{\sqrt{۷۴}} - \frac{۵}{\sqrt{۷۴}} = \frac{۹}{\sqrt{۷۴}} \end{aligned}$$

یعنی نقاط B و O در دو طرف این صفحه، قرار دارند.

مثال حل شدهٔ ۳۵

الف) فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,-۱,-۱)$ را از صفحه‌ای به معادلهٔ $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = ۱$، پیدا کنید.

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $B(-۱,۲,-۳)$ را از صفحه‌ای به معادلهٔ $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) = ۲$، به‌دست آورید.

حل.

الف)

$$\begin{aligned} p = \text{فاصلهٔ نقطهٔ } A \text{ تا صفحه} &= \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}} - D \\ &= (\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot\frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{\sqrt{۳}} = -\frac{۲}{\sqrt{۳}} \end{aligned}$$

یعنی نقاط A و مبدأ مختصات در یک طرف این صفحه، واقع‌اند.

ب)

$$\begin{aligned} p = \text{فاصلهٔ نقطهٔ } B \text{ تا صفحه} &= \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}} - D \\ &= (-\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k})\cdot\frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{۳}} - \frac{۲}{\sqrt{۳}} \\ &= -\frac{۱}{\sqrt{۳}} + \frac{۲}{\sqrt{۳}} + \frac{۳}{\sqrt{۳}} - \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \end{aligned}$$

یعنی نقطه‌های B و مبدأ مختصات در دو طرف این صفحه قرار دارند نه در یک طرف آن.

مثال حل شدهٔ ۳۶

صفحه‌ای به معادلهٔ $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-\mathbf{k}) = ۱$ مفروض است. تعیین کنید نقطه‌های $A(۱,-۲,۱)$ و $B(-۲,۱,۳)$، در یک طرف این صفحه قرار دارند یا در دو طرف آن.

حل.

فاصلهٔ نقطهٔ A تا صفحهٔ مفروض:

$$\begin{aligned} p_۱ &= \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}} - D \\ &= (\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\frac{(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{۶}} - \frac{۱}{\sqrt{۶}} \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۶}} - \frac{۴}{\sqrt{۶}} - \frac{۱}{\sqrt{۶}} - \frac{۱}{\sqrt{۶}} = -\frac{۵}{\sqrt{۶}} \end{aligned}$$

یعنی نقطه‌های A و مبدأ مختصات، در یک طرف این صفحه واقع‌اند.

فاصلهٔ نقطهٔ B تا صفحهٔ مفروض:

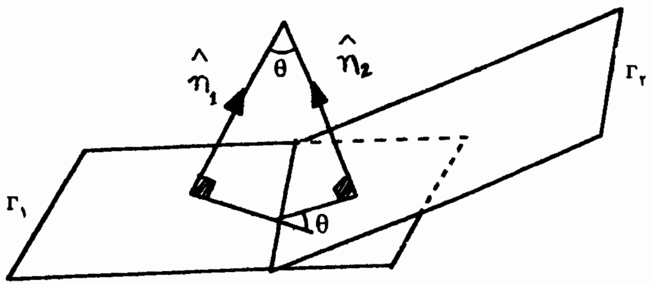
$$\begin{aligned} p_2 &= \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}} - D \\ &= (-2\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot\frac{(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

یعنی نقطه‌های B و مبدأ مختصات نیز، در یک طرف صفحه قرار دارند.

چون A و مبدأ و همچنین B و مبدأ در یک طرف صفحه واقع‌اند، پس نقطه‌های A و B نیز در یک طرف این صفحه قرار دارند. به عبارت دیگر سه نقطهٔ A، B و مبدأ مختصات در یک طرف این صفحه قرار دارند.

۶-۵ زاویهٔ بین دو صفحه

صفحه‌های Γ_1 و Γ_2، به‌ترتیب با معادله‌های برداری $\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}_1 = D_1$ و $\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 = D_2$، مفروض‌اند. اگر این دو صفحه موازی نباشند در خط l متقاطع‌اند. منظور از زاویهٔ بین دو صفحه، زاویه‌ای است که بردارهای عمود بر صفحه، باهم می‌سازند (شکل ۴۱).



شکل۴۱

برای به‌دست آوردن زاویهٔ بین دو بردار $\hat{\mathbf{n}}_1$ و $\hat{\mathbf{n}}_2$، از ضرب داخلی آنها استفاده می‌کنیم:

$$\hat{\mathbf{n}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_2 = |\hat{\mathbf{n}}_1|\cdot|\hat{\mathbf{n}}_2|\cdot\cos\theta$$

و چون $\hat{\mathbf{n}}_1$ و $\hat{\mathbf{n}}_2$، بردار یکه‌اند، پس $|\hat{\mathbf{n}}_1| = |\hat{\mathbf{n}}_2| = 1$. بنابراین،

$$\cos\theta = \hat{\mathbf{n}}_1\cdot\hat{\mathbf{n}}_2$$

مثال حل شدهٔ ۳۷

زاویهٔ بین دو صفحه با معادله‌های برداری $\mathbf{r}\cdot(+\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}) = 7$ و $\mathbf{r}\cdot(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}) = 5$ را به‌دست آورید.

حل.

کسینوس زاویهٔ بین دو صفحه حاصلضرب داخلی بردارهای یکهٔ عمود بر صفحه‌هاست، پس،

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{۲i}+\mathbf{۳j}+\mathbf{۴k})}{\sqrt{۲^۲+۳^۲+۴^۲}}\cdot\frac{(+\mathbf{i}+\mathbf{۲j}+\mathbf{۳k})}{\sqrt{۱^۲+۲^۲+۳^۲}}$$
$$= \frac{+۲+۶+۱۲}{\sqrt{۲۹}\sqrt{۱۴}} = \frac{۲۰}{\sqrt{۲۹}\sqrt{۱۴}} = \frac{۲۰}{\sqrt{۴۰۶}} = \frac{۲۰}{۲۰/۱۵} = ۰/۹۹۲۶$$
$$\Rightarrow \theta = ۷^\circ$$

مثال حل شدهٔ ۳۸

رابطه‌ای بین بردارهای یکهٔ عمود بر صفحه پیدا کنید تا،

الف) دو صفحه موازی باشند.

ب) دو صفحه بر همدیگر عمود باشند.

حل.

الف) اگر دو صفحه با هم موازی باشند، آنگاه زاویهٔ بین آن دو صفحه صفر خواهد بود. یعنی $\cos\theta = \cos ۰^\circ = ۱$. می‌دانیم $\hat{\mathbf{n}}_۱\cdot\hat{\mathbf{n}}_۲ = \cos\theta$. پس $\hat{\mathbf{n}}_۱\cdot\hat{\mathbf{n}}_۲ = ۱$، یعنی بردارهای یکهٔ عمود بر صفحه باید باهم مساوی باشند:

$$\boxed{\hat{\mathbf{n}}_۱ = \hat{\mathbf{n}}_۲}$$

ب) اگر دو صفحه، بر یکدیگر عمود باشند، زاویهٔ بین آنها ۹۰° است. پس $\cos\theta = \cos ۹۰^\circ = ۰$ و از آنجا که $\hat{\mathbf{n}}_۱\cdot\hat{\mathbf{n}}_۲ = \cos\theta$ باید داشته باشیم $\hat{\mathbf{n}}_۱\cdot\hat{\mathbf{n}}_۲ = ۰$. پس اگر دو صفحه برهم عمود باشند،

$$\boxed{\hat{\mathbf{n}}_۱\cdot\hat{\mathbf{n}}_۲ = ۰}$$

مثال حل شدهٔ ۳۹

در هر یک از قسمتهای این مثال، زاویهٔ حادهٔ بین دو صفحه را که معادلهٔ برداری آنها داده شده است به‌دست آورید.

الف) $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{۲k}) = ۲$ و $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{۲i}-\mathbf{۳j}+\mathbf{۷k}) = ۱$

ب) $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{۲i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) = ۳$ و $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{۳k}) = ۵$

حل.

الف) حاصلضرب داخلی بردارهای یکهٔ عمود بر دو صفحه، را محاسبه می‌کنیم:

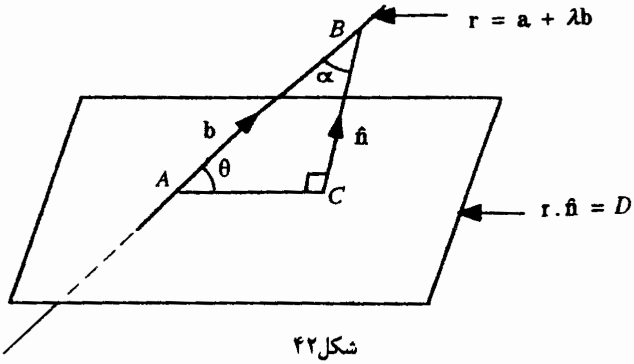
$$\cos\theta = \hat{\mathbf{n}}_۱\cdot\hat{\mathbf{n}}_۲$$
$$= \frac{(\mathbf{۲i}-\mathbf{۳j}+\mathbf{۷k})}{\sqrt{۲^۲+۳^۲+۷^۲}}\cdot\frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{۲k})}{\sqrt{۱+۱+۴}}$$
$$= \frac{۲-۳+۱۴}{\sqrt{۶۲}\sqrt{۶}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۳۷۲}} = ۰/۶۷۴ \Rightarrow \theta = ۷۴/۶۳^\circ$$

ب)

$$\cos\varphi = \hat{\mathbf{n}}_۱ \cdot \hat{\mathbf{n}}_۲$$
$$= \frac{\mathbf{i}-۳\mathbf{k}}{\sqrt{۱+۳^۲}} \cdot \frac{(۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})}{\sqrt{۲^۲+۱^۲+۱^۲}}$$
$$= \frac{۲+۳}{\sqrt{۱۰}\sqrt{۶}} = \frac{۵}{\sqrt{۶۰}} = ۰/۶۵ \Rightarrow \varphi = ۴۹/۴۶^\circ$$

۷-۵ زاویهٔ بین خط و صفحه

خط l به معادلهٔ $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ و صفحهٔ Γ با معادلهٔ برداری $\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}=D$ را درنظر بگیرید و فرض کنید که فصل مشترک آنها نقطهٔ A باشد (شکل ۴۲).



شکل۴۲

اگر خط l و بردار عمود بر صفحه باهم زاویهٔ α بسازند، آنگاه

$$\overrightarrow{AB}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot|\hat{\mathbf{n}}|\cdot\cos\alpha$$

و چون $|\hat{\mathbf{n}}| = ۱$، با فرض $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$، داریم

$$\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}} = |\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha$$

پس $\frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|} = \cos\alpha$. اما منظور از زاویهٔ بین خط l و صفحه، زاویهٔ θ است، که خط l با AC می‌سازد. برای یافتن زاویهٔ θ کافی است توجه کنیم که مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ قائم‌الزاویه است. پس $\theta+\alpha=\frac{\pi}{۲}$. و این به‌معنای آن است که $\sin\theta=\cos\alpha$. پس

$$\sin\theta = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|}$$

پس برای یافتن زاویهٔ بین خط و صفحه، از رابطهٔ $\theta=\sin^{-۱}\frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|}$، استفاده می‌کنیم.

مثال حل شدهٔ ۴۰

زاویهٔ بین خط $l:\mathbf{r}=(۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})+\lambda(۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+\mathbf{k})$ و صفحهٔ $\Gamma:\mathbf{r}\cdot(۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k})=۷$، را به‌دست آورید.

حل.
دستور محاسبهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه عبارت است از

$$\sin\theta = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|}$$

اما بردار هادی خط l مساوی است با

$$\mathbf{b} = ۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

بنابراین، اندازهٔ بردار $\mathbf{b}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{۴+۹+۱} = \sqrt{۱۴}$$

پس برای محاسبهٔ $\sin\theta$ باید بردار یکه عمود بر صفحه، یعنی $\hat{\mathbf{n}}$، را به‌دست آوریم. بنابر تعریف،

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k}}{\sqrt{۳^۲+۴^۲+۵^۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۵۰}}\mathbf{i} + \frac{۴}{\sqrt{۵۰}}\mathbf{j} + \frac{۵}{\sqrt{۵۰}}\mathbf{k}$$

بردارهای $\hat{\mathbf{n}}$ و $\mathbf{b}$ را که به‌دست آوردیم، در رابطهٔ محاسبهٔ زاویه، قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{\sqrt{۱۴}}\\ &= \frac{(۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot\left(\frac{۳}{\sqrt{۵۰}}\mathbf{i}+\frac{۴}{\sqrt{۵۰}}\mathbf{j}+\frac{۵}{\sqrt{۵۰}}\mathbf{k}\right)}{\sqrt{۱۴}}\\ &= \frac{۱}{\sqrt{۵۰}\sqrt{۱۴}}(۶+۱۲+۵) = \frac{۲۳}{\sqrt{۷۰۰}} = ۰٫۸۶۹۳ \Rightarrow \theta = ۶۰٫۴^{\circ}\end{aligned}$$

مثال حل شدهٔ ۴۱

در هر یک از قسمتهای این مثال، سینوس زاویهٔ بین خط l و صفحهٔ Γ را که معادله‌های برداری آنها داده شده است به‌دست آورید.

الف) $l:\ \mathbf{r} = (\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۵\mathbf{k}) + \lambda(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})$ و $\Gamma:\ \mathbf{r}\cdot(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}) = ۱$

ب) $l:\ \mathbf{r} = (-۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۷\mathbf{k}) + \lambda(+۴\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ و $\Gamma:\ \mathbf{r}\cdot(۳\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = ۵$

حل.
الف) اگر θ زاویهٔ بین خط l و صفحهٔ Γ باشد، آنگاه

$$\sin\theta = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|}\ ,\qquad \mathbf{b} = ۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{۲^۲+۳^۲+۴^۲} = \sqrt{۲۹}$$

و

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}}{\sqrt{۲^۲+۳^۲+۵^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳۸}}(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})$$

پس
$$\sin\theta = \frac{(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})\cdot(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})}{\sqrt{۲۹}\sqrt{۳۸}} = \frac{۴+۹+۲۰}{\sqrt{۲۹}\sqrt{۳۸}}$$
$$\Rightarrow \sin\theta = ۰/۹۹۴$$

ب)
$$\sin\theta = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(+۴\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{۱۸}}\cdot\frac{(۳\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{۱۱}}$$
$$= \frac{۱۲+۱+۱}{\sqrt{۱۹۸}} = \frac{۱۴}{\sqrt{۱۹۸}} = ۰/۹۹۵$$

مثال حل شدهٔ ۴۲

اگر l فصل مشترک دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ باشد که معادله‌های آنها داده شده است، معادلهٔ خط l را به‌دست آورید.

$$\Gamma_۱ \;:\; \mathbf{r}\cdot(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k}) = ۳$$
$$\Gamma_۲ \;:\; \mathbf{r}\cdot(-۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-\mathbf{k}) = ۵$$

حل.

فرض کنید $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. در این‌صورت با توجه به معادله‌های دو صفحه خواهیم داشت

$$(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k}) = ۳$$
$$۲x - y + ۲z = ۳ \qquad (۱)$$
$$(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot(-۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-\mathbf{k}) = ۵$$
$$-۳x + ۲y - z = ۵ \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲)، متغیر y را حذف می‌کنیم. طرفین رابطهٔ (۱) را در عدد ۲ ضرب و معادلهٔ حاصل را با معادلهٔ (۲) جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۴x - ۲y + ۴z = ۶ \\ \underline{-۳x + ۲y - z = ۵} \\ x + ۳z = ۱۱ \\ x = ۱۱ - ۳z \end{array}$$

حالا با ضرب طرفین رابطهٔ (۲) در عدد ۲، متغیر z را از رابطه‌های (۱) و (۲)، حذف می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۲x - y + ۲z = ۳ \\ \underline{-۶x + ۴y - ۲z = ۱۰} \\ -۴x + ۳y = ۱۳ \\ x = \frac{۳}{۴}y - \frac{۱۳}{۴} \end{array}$$

با مقایسهٔ دو مقداری که برای x به‌دست آوردیم، می‌توان نتیجه گرفت که

$$x = ۱۱ - ۳z = \frac{۳}{۴}y - \frac{۱۳}{۴} = \lambda \Rightarrow x = \lambda\,,\quad \frac{۱۱-\lambda}{۳} = z\,,\quad y = \frac{۴}{۳}\lambda + \frac{۱۳}{۳}$$

پس مختصات هر نقطه روی خط تلاقی این دو صفحه به‌صورت $\left(\lambda, \frac{۴}{۳}\lambda + \frac{۱۳}{۳}, \frac{۱۱-\lambda}{۳}\right)$ است.
اگر فرض کنیم $\lambda = ۳\mu$، مختصات نقطه‌های خط فصل مشترک، $\left(۳\mu, ۴\mu + \frac{۱۳}{۳}, \frac{۱۱}{۳} - \mu\right)$ خواهد بود. بنابراین، معادلهٔ خط مطلوب عبارت است از

$$\mathbf{r} = \frac{۱۳}{۳}\mathbf{j} + \frac{۱۱}{۳}\mathbf{k} + \mu(۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۱\mathbf{k})$$

مثال حل شدهٔ ۴۳

دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$، که معادله‌های پارامتری آنها داده شده است مفروض‌اند:

$$\Gamma_۱ \;:\; \mathbf{r} = (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k}) + s(-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}) + t(۳\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$$

$$\Gamma_۲ \;:\; \mathbf{r} = (-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}) + \lambda(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mu(-۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$$

معادلهٔ برداری خط l، فصل مشترک این دو صفحه، را به‌دست آورید.

حل.

معادله‌های پارامتری این دو صفحه را، برحسب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ مرتب می‌کنیم.

$$\Gamma_۱ \;: \mathbf{r} = (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k}) + s(-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}) + t(۳\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r} = (۲ - s + ۳t)\mathbf{i} + (-۳ + ۲s + t)\mathbf{j} + (۱ + ۳s + ۴t)\mathbf{k} \qquad (۱)$$

$$\Gamma_۲ \;: \mathbf{r} = (-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}) + \lambda(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mu(-۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r} = (-۱ + \lambda - ۳\mu)\mathbf{i} + (۲ + \lambda + ۳\mu)\mathbf{j} + (-۴ + \lambda + ۲\mu)\mathbf{k} \qquad (۲)$$

برای اینکه دو صفحه متقاطع باشند باید داشته باشیم

$$۲ - s + ۳t = -۱ + \lambda - ۳\mu \qquad (۳)$$

$$-۳ + ۲s + t = ۲ + \lambda + ۳\mu \qquad (۴)$$

$$۱ + ۳s + ۴t = -۴ + \lambda + ۲\mu \qquad (۵)$$

از سه رابطهٔ اخیر، ابتدا متغیر s و سپس t را حذف می‌کنیم. طرفین رابطهٔ (۳) را در عدد ۲، ضرب و رابطهٔ حاصل را با رابطهٔ (۴) جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۴ - ۲s + ۶t = -۲ + ۲\lambda - ۶\mu \\ \underline{-۳ + ۲s + t = ۲ + \lambda + ۳\mu} \\ ۱ + ۷t = ۳\lambda - ۳\mu \end{array} \qquad (۶)$$

طرفین رابطهٔ (۳) را در عدد ۳ ضرب و رابطهٔ حاصل را با رابطهٔ (۵) جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۶ - ۳s + ۹t = -۳ + ۳\lambda - ۹\mu \\ \underline{۱ + ۳s + ۴t = -۴ + \lambda + ۲\mu} \\ ۷ + ۱۳t = -۷ + ۴\lambda - ۷\mu \end{array} \qquad (۷)$$

طرفین رابطهٔ (۶) را در عدد ۱۳ و طرفین رابطهٔ (۷) را در ۷−، ضرب و دو رابطهٔ حاصل را باهم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۱۳ + ۹۱t = ۳۹\lambda - ۳۹\mu \\ \underline{-۴۹ - ۹۱t = ۴۹ - ۲۸\lambda + ۴۹\mu} \\ -۳۶ = ۴۹ + ۱۱\lambda + ۱۰\mu \end{array}$$

از این رابطه، نتیجه می‌گیریم که $-۸۵ = ۱۰\mu + ۱۱\lambda$ و یا $\lambda = -\frac{۱۰}{۱۱}\mu - \frac{۸۵}{۱۱}$. اگر مقدار λ را در معادلهٔ صفحهٔ $\Gamma_۲$، قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{r} = (-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}) + \left(-\frac{۱۰}{۱۱}\mu - \frac{۸۵}{۱۱}\right)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mu(-۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = (-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}) - \frac{۱۰}{۱۱}\mu(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) - \frac{۸۵}{۱۱}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mu(-۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$$

پس، معادلهٔ خطی که از تقاطع دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ به‌دست می‌آید، عبارت است از

$$\mathbf{r} = \left(-\frac{۹۶}{۱۱}\mathbf{i} - \frac{۶۳}{۱۱}\mathbf{j} - \frac{۱۲۹}{۱۱}\mathbf{k}\right) + \mu\left(-\frac{۴۳}{۱۱}\mathbf{i} + \frac{۲۳}{۱۱}\mathbf{j} + \frac{۱۲}{۱۱}\mathbf{k}\right)$$

تمرین ۵

۱. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که شامل نقطهٔ $A(-۱, -۲, -۳)$ باشد و نسبتهای هادی بردار عمود بر آن، ۴ : ۳ : ۲ باشند.

۲. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که شامل نقطهٔ $A(۲, -۳, ۴)$ باشد و نسبتهای هادی بردار عمود بر آن، $l : m : n$ باشند.

۳. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که شامل سه نقطهٔ $A(-۳, ۴, ۷)$، $B(۰, -۲, ۵)$ و $C(۲, ۰, -۳)$ باشد.

۴. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که شامل نقطه‌های $O(۰, ۰, ۰)$، $B(۱, -۲, -۳)$ و $C(-۲, ۱, ۲)$ باشد.

۵. در هر یک از قسمتهای این تمرین، معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که شامل نقطهٔ داده شده باشد و نسبتهای هادی بردار عمود بر آن، نسبتهای داده شده باشند.

الف) $A(۰, ۰, ۱)$؛ نسبتهای هادی بردار عمود، ۳ : ۲− : ۱

ب) $B(۱, ۰, ۰)$؛ نسبتهای هادی بردار عمود، ۶ : ۵− : ۴

ج) $C(۱, ۳, ۰)$؛ نسبتهای هادی بردار عمود، ۴ : ۲ : ۱−

۶. در هر یک از قسمتهای این تمرین، معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که شامل سه نقطهٔ داده شده باشد.

الف) $A(۱,۱,۰)$ و $B(۲,-۲,۳)$ و $C(۰,۰,۲)$

ب) $P(۰,۱,۰)$ و $Q(-۱,۳,-۴)$ و $R(۱,۰,۲)$

ج) $D(-۱,-۲,-۳)$ و $E(۰,۳,۰)$ و $F(۱,۲,۴)$

۷. مختصات نقطهٔ تلاقی خط l و صفحهٔ Γ را که معادلهٔ برداری آنها داده شده است به‌دست آورید.

$$l \ : \ \mathbf{r} = (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \lambda(-۳\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۳\mathbf{k})$$

$$\Gamma \ : \ \mathbf{r} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = ۳$$

۸. مختصات نقطهٔ تلاقی خط l و صفحهٔ Γ را که معادله‌های آنها داده شده است محاسبه کنید.

$$l \ : \ \mathbf{r} = (-\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}) + t(۲\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$\Gamma \ : \ \mathbf{r} \cdot (۲\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = ۵$$

۹. نقطهٔ تلاقی خط l و صفحهٔ Γ را که معادله‌های آنها داده شده است مشخص کنید.

$$l \ : \ \mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \mu(۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$$

$$\Gamma \ : \ \mathbf{r} \cdot (۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۷\mathbf{k}) = ۲$$

۱۰. مختصات نقطهٔ برخورد خط با معادلهٔ $\lambda = \frac{z+۲}{۴} = \frac{y-۳}{۳} = \frac{x+۱}{۲}$ و صفحهٔ Γ، با معادلهٔ $Dx + y + ۲z = ۴$ را به‌دست آورید.

۱۱. نقطهٔ برخورد خط $x = y = z = \lambda$ را با صفحه‌ای به معادلهٔ $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) = ۷$ مشخص کنید.

۱۲. خط l و صفحهٔ Γ را که معادله‌های برداری آنها داده شده است درنظر بگیرید.

$$l \ : \ \mathbf{r} = ۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k} + \lambda(-۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\Gamma \ : \ \mathbf{r} \cdot (-۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = ۲$$

نشان دهید که خط l با صفحهٔ Γ موازی است.

۱۳. فرض کنید معادله‌های خط l و صفحهٔ Γ به‌صورت زیر داده شده باشد:

$$l \ : \ \mathbf{r} = (-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}) + \mu(\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$$

$$\Gamma \ : \ \mathbf{r} \cdot (۳\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = ۵$$

نشان دهید که خط l با صفحهٔ Γ موازی است.

۱۴. ابتدا نشان دهید خطی با معادلهٔ $l : \mathbf{r} = (\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) + t(-۵\mathbf{i} + ۷\mathbf{j} - ۸\mathbf{k})$، با صفحه‌ای به معادلهٔ $\Gamma : \mathbf{r} \cdot (-۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) = ۱$، موازی است و سپس فاصلهٔ بین خط و صفحه را پیدا کنید.

۱۵. سه خط l ، l' و l'' را که معادله‌های آنها داده شده است درنظر بگیرید:

$$l \;:\; \mathbf{r} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}+\lambda(-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۵\mathbf{k})$$

$$l' \;:\; \mathbf{r} = \mathbf{j}+۲\mathbf{k}+t(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

$$l'' \;:\; \mathbf{r} = ۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۷\mathbf{k}+\mu(۳\mathbf{i}+۵\mathbf{j}+۹\mathbf{k})$$

تعیین کنید کدام‌یک از این خطها با صفحه‌ای به معادلهٔ $\mathbf{r}\cdot(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k}) = d$ موازی است. در صورت متقاطع بودن هر خط با این صفحه، زاویهٔ حادهٔ بین خط و صفحه را به‌دست آورید.

۱۶. معادله‌های برداری هریک از صفحه‌های زیر را به شکل $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = d$، بنویسید. در قسمت (ج) از بردارهای مکان $\mathbf{a} = ۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-\mathbf{k}$، $\mathbf{b} = -۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{c} = ۳\mathbf{j}-۵\mathbf{k}$ استفاده شده است.

الف) $\mathbf{r} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}+\lambda(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+۳\mathbf{k})+s(-۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-۷\mathbf{k})$

ب) $\mathbf{r} = ۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}+\mu(-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-\mathbf{k})+\nu(۲\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۵\mathbf{k})$

ج) $\mathbf{r} = (۱-t-s)\mathbf{a}+t\mathbf{b}+s\mathbf{c}$

۱۷. معادلهٔ دکارتی هریک از صفحه‌هایی را که معادله‌های برداری آنها داده شده است بنویسید.

الف) $\mathbf{r}\cdot(۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}) = ۳$ ب) $\mathbf{r}\cdot(-۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-\mathbf{k}) = ۱$

ج) $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}) = ۰$

۱۸. در هر یک از قسمتهای این تمرین، معادلهٔ دو خط داده شده است. معادلهٔ برداری صفحه‌ای را بنویسید که شامل این دو خط باشد.

الف) $\mathbf{r} = (۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})+\mu(\mathbf{i}+۳\mathbf{k})$ و $\mathbf{r} = (۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})+\lambda(۳\mathbf{j}-۴\mathbf{k})$

ب) $\mathbf{r} = (۲\mathbf{i}-۳\mathbf{k})+\mu(۳\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})$ و $\mathbf{r} = (۲\mathbf{i}-۳\mathbf{k})+\lambda(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j})$

ج) $\mathbf{r} = (۲\mathbf{i}+۷\mathbf{k})+\mu(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k})$ و $\mathbf{r} = (۲\mathbf{i}+۷\mathbf{k})+\lambda(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$

۱۹. معادلهٔ برداری صفحه‌ای را بنویسید که شامل سه بردار مکان داده شده باشد.

$$\mathbf{a} = ۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}\,,\quad \mathbf{b} = -۲\mathbf{i}+۷\mathbf{j}\,,\quad \mathbf{c} = (\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

۲۰. معادلهٔ برداری صفحه‌ای را بنویسید که شامل سه نقطهٔ A، B و C با مختصات زیر باشد:

$$A(-۱,-۲,-۳)\,,\quad B(۳,۴,۵)\,,\quad C(-۶,-۷,۸)$$

۲۱. فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی زیر را به‌دست آورید:

$$\Gamma_۱ \;:\; \mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = ۱$$

$$\Gamma_۲ \;:\; \mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = ۲$$

۲۲. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۲,۳)$ را از هریک از صفحه‌هایی که معادلهٔ آنها داده شده است مشخص کنید.

الف) $\mathbf{r}\cdot(۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k}) = ۱۲$ ب) $\mathbf{r}\cdot(۶\mathbf{i}+۷\mathbf{j}+۸\mathbf{k}) = ۵$

ج) $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = ۱$

۲۳. قاعده‌های دو مخروط قائم، متعلق به دو صفحه به معادله‌های $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}) = ۷$ و $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}) = ۴$، است. فاصلهٔ بین قاعده‌های دو مخروط را از یکدیگر به‌دست آورید.

۲۴. نشان دهید نقطهٔ $A(-۳,۴,-۵)$ متعلق به صفحهٔ Γ با معادلهٔ زیر است:

$$\Gamma\ :\ \mathbf{r}\cdot(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۱۲\mathbf{k}) = ۴۲$$

۲۵. در هر یک از قسمتهای این تمرین، سینوس زاویهٔ حاصل از برخورد خط l با صفحهٔ Γ را به‌دست آورید.

الف) $\Gamma\ :\ \mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = ۸$ و $l\ :\ \mathbf{r} = ۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}+\lambda(۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-۳\mathbf{k})$

ب) $\Gamma\ :\ x+y+z=۳$ و $l\ :\ \dfrac{x+۱}{۳} = \dfrac{y-۱}{۴} = \dfrac{z+۲}{۵} = \lambda$

۲۶. از نقطه‌ای به مختصات $(۱,۱,۱)$ عمودی بر صفحه‌ای به معادلهٔ $\mathbf{r}\cdot(-۳\mathbf{i}+\mathbf{j}-۲\mathbf{k}) = ۲۵$ رسم کرده‌ایم. معادلهٔ برداری این خط عمود را پیدا کنید و سپس مختصات پای عمود را به‌دست آورید.

۲۷. بردار مکان نقطهٔ A به‌صورت $-۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$ داده شده است. از نقطهٔ A عمودی بر صفحه‌ای به معادلهٔ $۳x-۵y-z=۵$ رسم کرده‌ایم و پای عمود را B نامیده‌ایم. مختصات نقطهٔ B و همچنین قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به این صفحه را به‌دست آورید.

۲۸. بردارهای مکان سه نقطهٔ A، B و C به‌صورت زیر داده شده است:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}\ ,\quad \mathbf{b} = ۲\mathbf{i}+۵\mathbf{j}+۷\mathbf{k}\ ,\quad \mathbf{c} = -\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$$

بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را مشخص کنید و با استفاده از آنها معادلهٔ صفحهٔ مثلث ABC را بنویسید. بار دیگر معادلهٔ صفحهٔ مثلث $A\hat{B}C$ را با استفاده از بردارهای $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA}$، و به شکل $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = d$ به‌دست آورید.

۲۹. بردارهای مکان دو نقطهٔ A و B، به‌ترتیب عبارت‌اند از $\mathbf{a} = ۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = -۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-\mathbf{k}$، معادلهٔ برداری خط AB را به‌دست آورید. سپس سینوس زاویهٔ حاده‌ای را که بین خط AB و صفحه‌ای به معادلهٔ $\mathbf{r}\cdot(-۴\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۷\mathbf{k}) = ۲۷$ به‌وجود می‌آید مشخص کنید.

۳۰. زاویهٔ بین خط و صفحه‌ای را که معادله‌های آنها داده شده است به‌دست آورید.

$$\mathbf{r} = (۲\mathbf{i}-۵\mathbf{j}-۹\mathbf{k})+\lambda(-۷\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}) = ۳۳$$

۳۱. خط l از نقطه‌ای به مختصات $(۲,۲,۲)$ می‌گذرد و با بردار $۳\mathbf{i}-۵\mathbf{j}+۷\mathbf{k}$ موازی است. اندازهٔ کسینوس زاویه‌ای را که خط l و با صفحه‌ای به معادلهٔ برداری $\mathbf{r}\cdot(-\mathbf{j}+۵\mathbf{k}) = ۵$ می‌سازد به‌دست آورید.

۳۲. در هر یک از قسمتهای این تمرین معادلهٔ دو خط داده شده است. معادلهٔ پارامتری صفحهٔ شامل این دو خط را مشخص کنید.

الف) $\mathbf{r} = ۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۷\mathbf{k})$
$\mathbf{r} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+۹\mathbf{k}+\mu(-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۸\mathbf{k})$

ب) $\mathbf{r} = \mathbf{i}+۵\mathbf{j}+۹\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-۲\mathbf{k})$
$\mathbf{r} = ۲\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-\mathbf{k}+\mu(۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})$

۶

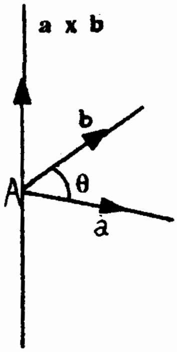
ضرب بردارها

۱-۶ ضرب خارجی دو بردار

اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، دو بردار دلخواه باشند، حاصلضرب خارجی این دو بردار را با $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

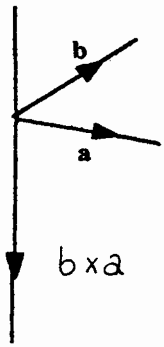
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، برداری است عمود بر صفحهٔ شامل بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و اندازهٔ آن برابر است با $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\theta$ که در این رابطه θ زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است.

توجه کنید که $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، برخلاف $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ عدد نیست، بلکه بردار است و چون هر بردار دارای سه مشخصهٔ راستا، مقدار و جهت است این پرسش پیش می‌آید که جهت بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ چگونه به‌دست می‌آید؟ در تعریف ضرب خارجی دو بردار، به راستا و اندازهٔ آن اشاره کردیم، حال به روش زیر برای مشخص کردن $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ دقت کنید (شکل ۴۳).



شکل ۴۳

فرض کنید دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، دارای مبدأ A باشند. چهار انگشت دست راست خود را طوری روی بردار $\mathbf{a}$، قرار دهید که مچ دستتان روی نقطهٔ A و جهت انگشتانتان، در جهت بردار $\mathbf{a}$ باشد. حال چهار انگشت خود را بچرخانید تا انگشتانتان بر بردار $\mathbf{b}$ قرارگیرد. در این حالت جهت شست شما جهت بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را نشان می‌دهد. این روش را که برای پیدا کردن جهت بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، به‌کار می‌رود، روش دست راست می‌نامند. حالا بردار $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$، را بررسی می‌کنیم. اولاً راستای بردار $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$، دقیقاً مانند $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، عمود بر صفحهٔ بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است. ثانیاً اندازهٔ آن بنابر تعریف برابر است با $|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \sin\theta$. یعنی $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ و $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ هم‌اندازه‌اند. ولی اگر با روش دست راست، جهت بردار $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ را مشخص کنید، متوجه خواهید شد که، جهت بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ است (شکل ۴۴). برای روشن شدن این موضوع انگشتان دست راست خود را روی بردار $\mathbf{b}$ قرار دهید و آنها



را بچرخانید تا بر بردار a واقع شوند، حال می‌بینید که شست شما رو به پایین قرار گرفته است! این موضوع، به معنای آن است که بردارهای $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ و $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$، مساوی نیستند ولی هم‌راستا و هم‌اندازه‌اند. بنابراین، برای دو بردار دلخواه a و b می‌توان گفت

$$\boxed{\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}}$$

اگر بردارهای a و b موازی باشند، واضح است که زاویهٔ بین آنها صفر است. بنابراین،

شکل ۴۴

$$\mathbf{a} \| \mathbf{b} \Rightarrow \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} = ۰ \Rightarrow \sin\theta = ۰\ , \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\theta \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = ۰$$

بنابراین حاصلضرب خارجی دو بردار موازی بردار صفر است. در حالت خاص برای بردارهای یکهٔ محورهای مختصات، داریم

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = (۱)(۱)\sin ۰ = ۰$$

$$\boxed{\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = ۰}$$

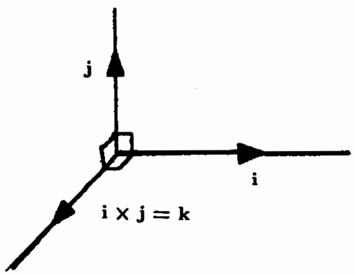
اگر دو بردار a و b بر همدیگر عمود باشند، زاویهٔ θ برابر ۹۰° خواهد بود و بنابراین، $\sin\theta = \sin ۹۰^\circ = ۱$. پس

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$$

در حالت خاص و برای بردارهای یکهٔ روی محورهای مختصات داریم

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{j}| = ۱$$

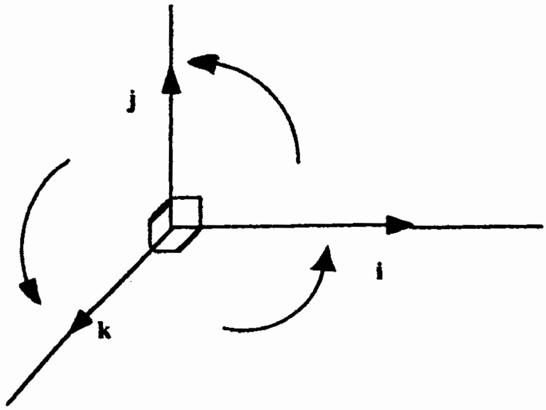
یعنی اندازهٔ بردار $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ مساوی واحد است. از طرفی بردار $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ برداری است عمود بر صفحهٔ i و j و جهت آن نیز با توجه به دستور دست راست به‌طرف بالاست. از این سه مطلب می‌توان نتیجه گرفت که $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$، چون بردار k، اولاً یکه است (طول واحد دارد) ثانیاً بر صفحهٔ i و j عمود است و ثالثاً جهت آن به‌طرف بالاست (شکل ۴۵).



شکل ۴۵

پس $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ همراستا و هم‌اندازه با $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ است ولی جهت آن، به‌سمت پایین است. یعنی $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$، با استدلال مشابه، برای بردارهای یکهٔ محورهای دیگر داریم (شکل ۴۶).

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$



شکل۴۶

حال ببینیم اگر بردارهای مکان متناظر با بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ داده شده باشند، چگونه می‌توان اندازهٔ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ یا $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ را تعیین کرد. فرض کنید $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} = z_1\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} = z_2\mathbf{k}$. بنابراین، با توجه به خاصیت پخشی ضرب بردارها، روی عمل جمع، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} = z_1\mathbf{k}) \times (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} = z_2\mathbf{k}) \\ &= x_1x_2(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + x_1y_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + x_1z_2(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + y_1x_2(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + y_1y_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \\ &\quad + y_1z_2(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + z_2x_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + z_1y_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + z_1z_2(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \end{aligned}$$

پس بنابر آنچه دربارهٔ ضرب خارجی بردارهای یکهٔ محورهای مختصات بیان کردیم،

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = x_1y_2\mathbf{k} - x_1z_2\mathbf{j} - y_1x_2\mathbf{k} + y_1z_2\mathbf{i} + z_1x_2\mathbf{j} - z_1y_2\mathbf{i}$$
$$\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{k}$$
$$\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{k}$$

برای به‌خاطر سپردن این بردار، به دترمینان زیر و حاصل آن توجه کنید:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(y_1z_2 - y_2z_1) - \mathbf{j}(x_1z_2 - x_2z_1) + \mathbf{k}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

بنابراین، از مقایسهٔ این دو رابطه، می‌توان نوشت

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

مثال حل شدهٔ ۴۴

بردارهای a، b و c به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$\mathbf{a}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

هریک از بردارهای زیر را مشخص کنید.

الف) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ب) $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ ج) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$

حل.

الف)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 2 & -3\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}[2\times 4-(3)(-3)]-\mathbf{j}[(-1)(4)-(2)(-3)]+\mathbf{k}[(-1)(3)-2\times 2]$$

$$=17\mathbf{i}-2\mathbf{j}-7\mathbf{k}$$

ب)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=\mathbf{i}(4-3)-\mathbf{j}(-2+9)+\mathbf{k}(1-6)=\mathbf{i}-7\mathbf{j}-5\mathbf{k}$$

ج)

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=\mathbf{i}(6+4)-\mathbf{j}(4-12)+\mathbf{k}(-2-9)=10\mathbf{i}+8\mathbf{j}-11\mathbf{k}$$

مثال حل شدهٔ ۴۵

هریک از ضربهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\mathbf{c}\times(\mathbf{c}+\mathbf{b})$ ب) $(\mathbf{a}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

ج) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ د) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}$

حل.

الف) از خاصیت پخشی ضرب برداری روی جمع استفاده می‌کنیم و توجه می‌کنیم که هر بردار با خودش موازی است و بنابراین، $\mathbf{c} \times \mathbf{c} = ۰$:

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{c} + \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{b}$$

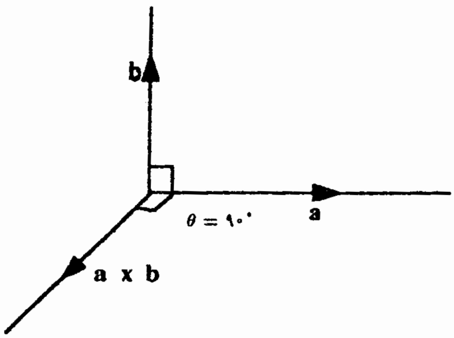
ب) چون بردار $\mathbf{a}$ با خودش موازی است $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = ۰$:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = ۰ \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = ۰$$

ج) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{b} = ۰$، و همچنین $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) \\ &= -\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} = ۲(\mathbf{b} \times \mathbf{a})\end{aligned}$$

د) چون بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، بر صفحهٔ بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود است، پس هم بر $\mathbf{a}$ و هم بر $\mathbf{b}$ عمود است (شکل ۴۷).



شکل۴۷

پس طبق تعریف ضرب داخلی،

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos ۹۰^\circ = ۰$$

مثال حل شدهٔ ۴۶

فرض کنید $\mathbf{a} = ۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$، $\mathbf{b} = -۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{k}$ و $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$، در این‌صورت حاصل هریک از ضربهای برداری زیر را به‌دست آورید.

الف) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ ب) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ج) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

د) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ ه) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

حل.

الف) ابتدا $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & -۳ & ۵ \\ -۳ & ۰ & -۲ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(۶) - \mathbf{j}(-۴ + ۱۵) + \mathbf{k}(-۹) = ۶\mathbf{i} - ۱۱\mathbf{j} - ۹\mathbf{k}$$

و حالا $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ را در $\mathbf{c}$ ضرب خارجی می‌کنیم:

$$(۶\mathbf{i}-۱۱\mathbf{j}-۹\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۶ & -۱۱ & -۹\\ ۱ & ۱ & ۱\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}(-۱۱+۹)-\mathbf{j}(۶+۹)+\mathbf{k}(۶+۱۱)$$

$$=-۲\mathbf{i}-۱۵\mathbf{j}+۱۷\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=-۲\mathbf{i}-۱۵\mathbf{j}+۱۷\mathbf{k}$$

ب) ابتدا حاصلضرب $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -۳ & ۰ & -۲\\ ۱ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=\mathbf{i}(۲)-\mathbf{j}(-۳+۲)+\mathbf{k}(-۳)=۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$$

حال بردار $\mathbf{a}$ را در $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$، ضرب خارجی می‌کنیم:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۲ & -۳ & ۵\\ ۲ & ۱ & -۳\end{vmatrix}=\mathbf{i}(۹-۵)-\mathbf{j}(-۶-۱۰)+\mathbf{k}(۲+۶)$$

$$=۴\mathbf{i}+۱۶\mathbf{j}+۸\mathbf{k}$$

ج) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot(۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-۳\mathbf{k})=(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})\cdot(۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-۳\mathbf{k})=۴-۳-۱۵=-۱۴$

د) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(۶\mathbf{i}-۱۱\mathbf{j}-۹\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=۶-۱۱-۹=-۱۴$

هـ) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=[(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})\cdot(-۳\mathbf{i}-۲\mathbf{k})]\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=(-۶-۱۰)\cdot(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})=-۱۶(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

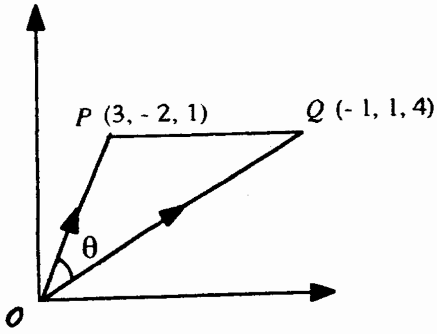
مثال حل شدهٔ ۴۷

بردارهای $\overrightarrow{OP}=۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\overrightarrow{OQ}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$ مفروض‌اند. زاویهٔ بین این دو بردار را با استفاده از حاصلضرب خارجی به‌دست آورید.

حل.

با استفاده از رابطهٔ حاصلضرب خارجی بردارهای $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$، می‌توان نوشت (شکل ۴۸)

$$\frac{|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|}=\sin\theta$$



شکل۴۸

از طرف دیگر،

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = (۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۳ & -۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۴ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۸ - ۱) - \mathbf{j}(۱۲ + ۱) + \mathbf{k}(۳ - ۲)$$

$$= -۹\mathbf{i} - ۱۳\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

بنابراین، اندازهٔ بردار $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ مساوی است با

$$|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = \sqrt{۹^۲ + ۱۳^۲ + ۱^۲} = ۱۵٫۸$$

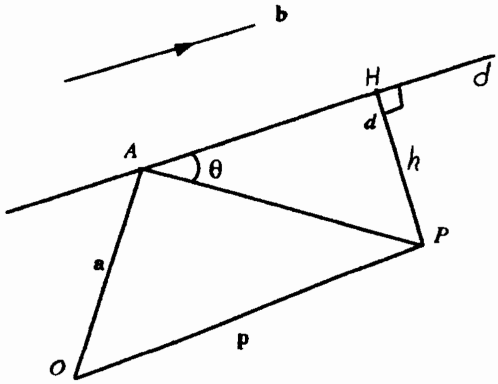
همچنین، $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + ۴^۲} = ۴٫۲$ و $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲} = ۳٫۷۴$

پس

$$\sin\theta = \frac{۱۵٫۸}{۳٫۷۴ \times ۴٫۲۴} = ۰٫۹۹۶۳۶۷۶۷۲ \Rightarrow \theta = ۸۵٫۱^\circ$$

۶-۲ محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه از خط با ضرب خارجی

فرض کنید خط d با معادلهٔ برداری $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ مفروض باشد. می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $P(x_۱, y_۱, z_۱)$ را از این خط، با استفاده از مفهوم حاصلضرب خارجی بردارها به‌دست آوریم. همانطورکه می‌دانید $\mathbf{b}$ در معادلهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$، بردار هادی خط d است. برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ P تا خط d، نقطهٔ A را روی این خط درنظر می‌گیریم و بردارهای مکان متناظر با نقطه‌های P و A را به‌ترتیب با $\mathbf{p}$ و $\mathbf{a}$ نشان می‌دهیم (شکل ۴۹).



شکل۴۹

حاصلضرب خارجی بردارهای $\overrightarrow{AP}$ و $\mathbf{b}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{b}\times \overrightarrow{AP} = |\mathbf{b}|\cdot|\overrightarrow{AP}|\cdot \sin\theta$$

$\mathbf{b}\times\overrightarrow{AP}$، برداری است عمود بر صفحهٔ بردارهای $\mathbf{b}$ و $\overrightarrow{AP}$، که اندازهٔ آن، یعنی $|\mathbf{b}\times\overrightarrow{AP}|$، مساوی است با

$$|\mathbf{b}\times \overrightarrow{AP}| = |\mathbf{b}|\,|\overrightarrow{AP}|\,\sin\theta$$

از رابطهٔ بالا مقدار $|\overrightarrow{AP}|\sin\theta$، را به‌دست می‌آوریم

$$|\overrightarrow{AP}|\,\sin\theta = \frac{|\mathbf{b}\times\overrightarrow{AP}|}{|\mathbf{b}|} \qquad (۱)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A\hat{P}H$، (H پای عمود است) می‌توان نوشت

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{h}{|\overrightarrow{AP}|}$$

که در این رابطه h فاصلهٔ نقطهٔ P تا خط مفروض d است. پس

$$h = |\overrightarrow{AP}|\cdot\sin\theta$$

از مقایسهٔ این رابطه و نتیجهٔ (۱) خواهیم داشت

$$h = \frac{|\mathbf{b}\times\overrightarrow{AP}|}{|\mathbf{b}|}$$

و چون $\overrightarrow{AP} = \mathbf{p} - \alpha$، این فاصله را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$h = \frac{|\mathbf{b}\times(\mathbf{p}-\mathbf{a})|}{|\mathbf{b}|}$$

مثال حل شدهٔ ۴۸

فاصلهٔ نقطهٔ $P(-۱,۲,-۴)$ را از خط l با معادلهٔ برداری $\mathbf{r} = (۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) + \lambda(-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۵\mathbf{k})$، به‌دست آورید.

حل.

ابتدا بردار هادی خط l و بردارهای مکان نقطه‌های P و A را مشخص می‌کنیم.

بردار هادی متناظر با خط l: $\mathbf{b} = -۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۵\mathbf{k}$

بردار مکان نقطهٔ P: $\mathbf{a} = ۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$

بردار مکان نقطهٔ A از خط l: $\mathbf{p} = -\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۴\mathbf{k}$

پس،

$$\mathbf{p}-\mathbf{a} = -۳\mathbf{i}+\mathbf{j}-۳\mathbf{k}\,,\ \ \mathbf{b} = \sqrt{(-۳)^۲+۴^۲+(-۵)^۲} = \sqrt{۵۰} = ۷/۰۷$$

$$\Rightarrow \mathbf{b}\times(\mathbf{p}-\mathbf{a}) = (-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۵\mathbf{k})\times(-۳\mathbf{i}+\mathbf{j}-۳\mathbf{k})$$

برای به‌دست آوردن حاصل این ضرب خارجی از دترمینان زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{b}\times(\mathbf{p}-\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۳ & ۴ & -۵ \\ -۳ & ۱ & -۳ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۱۲+۵) - \mathbf{j}(۹-۱۵) + \mathbf{k}(-۳+۱۲)$$

$$= -۷\mathbf{i}+۶\mathbf{j}+۹\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{b}\times(\mathbf{p}-\mathbf{a})| = \sqrt{۴۹+۳۶+۸۱}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{b}\times(\mathbf{p}-\mathbf{a})| = \sqrt{۱۶۶} = ۱۲/۹$$

پس،

$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ } P \text{ تا خط } l = h = \frac{|\mathbf{b}\times(\mathbf{p}-\mathbf{a})|}{|\mathbf{b}|} = \frac{۱۲/۹}{۷/۰۷} = ۱/۸۲$$

مثال حل شدهٔ ۴۹

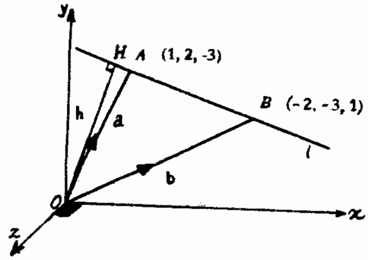
خط l از دو نقطهٔ $A(۱,۲,-۳)$ و $B(-۲,-۳,۱)$، می‌گذرد. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از این خط به‌دست آورید.

حل.

معادلهٔ برداری خط l، که از دو نقطهٔ $A(۱,۲,-۳)$ و $B(-۲,-۳,۱)$ می‌گذرد، به‌صورت زیر است (شکل ۵۰):

$$\mathbf{r} = (\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}) + \lambda(-۳\mathbf{i}-۵\mathbf{j}+۴\mathbf{k})$$

پس بردار هادی این خط $\mathbf{b} = -۳\mathbf{i}-۵\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$ و بردار مکان نقطهٔ A بردار $\mathbf{a} = \mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$ است. در



شکل۵۰

این مثال، فاصلهٔ مبدأ مختصات تا خط l، خواسته شده است. پس مختصات نقطهٔ P، عبارت است از $(\circ,\circ,\circ)$. بنابراین،

$$\mathbf{p}-\mathbf{a}=-\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{b}=-۳\mathbf{i}-۵\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$$

پس،

$$\mathbf{b}\times(\mathbf{p}-\mathbf{a})=(-۳\mathbf{i}-۵\mathbf{j}+۴\mathbf{k})\times(-\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -۳ & -۵ & ۴\\ -۱ & -۲ & ۳\end{vmatrix}=\mathbf{i}(-۱۵+۸)-\mathbf{j}(-۹+۴)+\mathbf{k}(۶-۵)=-۷\mathbf{i}+۵\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{b}\times(\mathbf{p}-\mathbf{a})|=\sqrt{(-۷)^۲+۵^۲+۱^۲}=\sqrt{۷۵}$$

از طرفی،

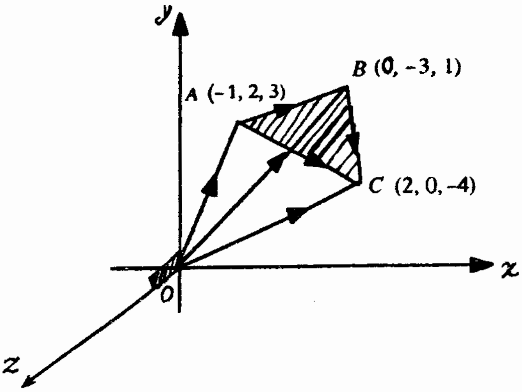
$$|\mathbf{b}|=\sqrt{(-۳)^۲+(-۵)^۲+۴^۲}=\sqrt{۹+۲۵+۱۶}=\sqrt{۵\circ}$$

بنابراین، طول OH، یعنی فاصلهٔ مبدأ مختصات تا خط l، مساوی خواهد بود با

$$OH=h=\frac{|\mathbf{b}\times(\mathbf{p}-\mathbf{a})|}{|\mathbf{b}|}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{۷۵}}{\sqrt{۵\circ}}=۱/۲۲$$

مثال حل شدهٔ ۵۰

مختصات رأسهای مثلث $A\hat{B}C$، عبارت‌اند از $A(-۱,۲,۳)$، $B(\circ,-۳,۱)$ و $C(۲,\circ,-۴)$ (شکل ۵۱).



شکل۵۱

الف) زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ را تعیین کنید.

ب) زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ را تعیین کنید.

ج) مساحت هریک از مثلثهای زیر را به‌دست آورید:

یک) $O\overset{\triangle}{A}B$ دو) $O\overset{\triangle}{B}C$ سه) $A\overset{\triangle}{B}C$

د) بردار یکهٔ عمود بر صفحهٔ مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ را به‌دست آورید.

حل.

الف) ابتدا بردارهای مکان نقطه‌های A، B و C را مشخص می‌کنیم:

$$\overrightarrow{OA} = -\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}\,, \quad \overrightarrow{OB} = -۳\mathbf{j} + \mathbf{k}\,, \quad \overrightarrow{OC} = ۲\mathbf{i} - ۴\mathbf{k}$$

پس،

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -۳\mathbf{j} + \mathbf{k} - (-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) = \mathbf{i} - ۵\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = ۲\mathbf{i} - ۴\mathbf{k} - (-۳\mathbf{j} + \mathbf{k}) = ۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$$

با استفاده از حاصلضرب خارجی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ زاویهٔ بین این دو بردار را به‌دست می‌آوریم:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}| \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{BC}|}$$

از طرفی،

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & -۵ & -۱ \\ ۲ & ۳ & -۵ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(۲۵ + ۶) - \mathbf{j}(-۵ + ۴) + \mathbf{k}(۳ + ۱۰)$$

$$= ۳۱\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۱۳\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{۳۱^۲ + ۱^۲ + ۱۳^۲} = ۳۳/۶$$

همچنین،

$$|\overrightarrow{AB}| = |\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}| = \sqrt{۱^۲ + ۵^۲ + ۲^۲} = ۵/۴۸$$

$$|\overrightarrow{BC}| = |۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}| = \sqrt{۲^۲ + ۳^۲ + ۵^۲} = ۶/۱۶$$

بنابراین،

$$\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{BC}|} = \frac{۳۳/۶}{۵/۴۸ \times ۶/۱۶} = ۰/۹۹۵۳۵۵۰۱ \Rightarrow \theta = ۸۴/۵^\circ$$

ب) بردار $\overrightarrow{AC}$ را مشخص می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=۲\mathbf{i}-۴\mathbf{k}-(-\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})=۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۷\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{i}-۵\mathbf{j}-۲\mathbf{k}$$

برای محاسبهٔ زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ حاصلضرب خارجی آنها را به‌دست می‌آوریم

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=(۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۷\mathbf{k})\times(\mathbf{i}-۵\mathbf{j}-۲\mathbf{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۳ & -۲ & -۷\\ ۱ & -۵ & -۲\end{vmatrix}=\mathbf{i}(۴-۳۵)-\mathbf{j}(-۶+۷)+\mathbf{k}(-۱۵+۲)$$

$$=-۳۱\mathbf{i}-\mathbf{j}-۱۳\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{۳۱^۲+۱^۲+۱۳^۲}=۳۳/۶$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=۲\mathbf{i}-۴\mathbf{k}-(-\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})=۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۷\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{۳^۲+۲^۲+۷^۲}=۷/۸۷$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{۱+۵^۲+۲^۲}=۵/۴۸$$

بنابراین،

$$\sin\phi=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\times\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{۳۳/۶}{(۷/۸۷)(۵/۴۸)}=۰/۷۷۹۱\Rightarrow\phi=۵۱/۲^\circ$$

ج) برای محاسبهٔ مساحت مثلثهای خواسته شده، از دستور هرون استفاده می‌کنیم (P نصف محیط مثلث و S مساحت مثلث است):

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

یک) $$\text{مساحت}\ \Delta OAB=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{۱^۲+۲^۲+۳^۲}=۳/۷۴\ ,\qquad \left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{(-۳)^۲+۱^۲}=۳/۱۶$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=۵/۴۸$$

$$\Rightarrow P=\frac{۳/۷۴+۳/۱۶+۵/۴۸}{۲}=۶/۱۹$$

بنابراین،

$$S\,\Delta\,OAB = \sqrt{۶/۱۹(۶/۱۹-۳/۷۴)(۶/۱۹-۳/۱۶)(۶/۱۹-۵/۴۸)}$$
$$= \sqrt{۶/۱۹ \times ۲/۴۵ \times ۳/۰۳ \times ۰/۷۱} = ۵/۷۱$$

دو) $\text{مساحت}\ \Delta\,OBC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = ۳/۱۶\ ,\quad \left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{۲^۲+۴^۲} = \sqrt{۲۰} = ۴/۴۷\ ,\quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = ۶/۱۶$$

$$P = \frac{۳/۱۶+۴/۴۷+۶/۱۶}{۲} = ۶/۹$$

$$S\,\Delta\,OBC = \sqrt{۶/۹ \times (۶/۹-۳/۱۶) \times (۶/۹-۴/۴۷) \times (۶/۹-۶/۱۶)}$$
$$= \sqrt{۶/۹ \times ۳/۷۴ \times ۲/۴۳ \times ۰/۷۵} = ۶/۸۶$$

سه) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = ۵/۴۸$ و $\left|\overrightarrow{BC}\right| = ۶/۱۶$ و $\left|\overrightarrow{AC}\right| = ۷/۸۷$

$$P = \frac{۵/۴۸+۶/۱۶+۷/۸۷}{۲} = ۹/۷۶$$

$$S\,\Delta\,ABC = \sqrt{۹/۷۶ \times (۹/۷۶-۵/۴۸) \times (۹/۷۶-۶/۱۶) \times (۹/۷۶-۷/۸۷)}$$
$$= \sqrt{۹/۷۶ \times ۴/۲۸ \times ۳/۶ \times ۱/۸۹} = ۱۶/۹$$

د) برای یافتن بردار یکهٔ عمود بر صفحهٔ شامل مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ کافی است دقت کنیم که بردار $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|$، بر هر دو بردار $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ و $\left|\overrightarrow{BC}\right|$ و در نتیجه بر صفحهٔ مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ عمود است. پس بردار یکهٔ متناظر با بردار $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|$ را به‌دست می‌آوریم که بردار یکهٔ عمود بر صفحهٔ مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ نیز خواهد بود. برای بردار $\mathbf{a}$، بردار یکهٔ عمود متناظر، مساوی است با، $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$. پس برای بردار $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|$، بردار یکهٔ متناظر برابر است با،

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|} = \frac{۳۱\mathbf{i}+\mathbf{j}+۱۳\mathbf{k}}{\sqrt{۳۱^۲+۱^۲+۱۳^۲}} = \frac{۱}{۳۳/۶}(۳۱\mathbf{i}+\mathbf{j}+۱۳\mathbf{k})$$

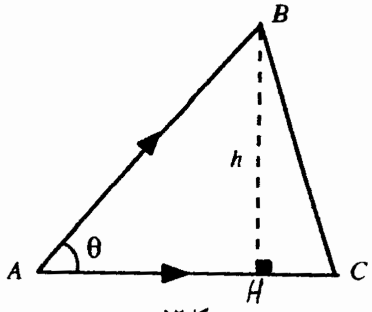
بردار یکهٔ متناظر با بردار $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|$، نیز بر صفحهٔ مثلث عمود است. پس می‌توان بردار یکهٔ خواسته شده را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|} = \frac{-۳۱\mathbf{i}-\mathbf{j}-۱۳\mathbf{k}}{۳۳/۶} = -\frac{۱}{۳۳/۶}(۳۱\mathbf{i}+\mathbf{j}+۱۳\mathbf{k})$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، این دو بردار از نظر اندازه و راستا یکسان‌اند ولی جهت آنها متفاوت است. هر دو بردار بر صفحهٔ مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ عمود و یکه‌اند ولی یکی در جهت بالا و دیگری در جهت پایین است.

۶-۳ مساحت مثلث با استفاده از ضرب خارجی

مثلث $A\hat{B}C$ مفروض است. مساحت هر مثلث را می‌توان با استفاده از اندازهٔ ارتفاع و قاعدهٔ نظیر آن و همچنین با استفاده از دستور هرون به‌دست آورد. در این قسمت می‌خواهیم با استفاده از مفهوم ضرب خارجی، مساحت مثلث را محاسبه کنیم. در مثلث $A\hat{B}C$ (شکل ۵۲) زاویهٔ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را θ و ارتفاع نظیر رأس B را BH می‌نامیم.



شکل۵۲

$$S = \text{مساحت}\ \Delta\ ABC = \frac{۱}{۲}\ \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

اگر AC را قاعده و BH را ارتفاع نظیر آن، بگیریم خواهیم داشت

$$S = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AC}| \times h = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AC}| \times \left(|\overrightarrow{AB}|\sin\theta\right) = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}|$$

یعنی مساحت هر مثلث، برابر است با نصف اندازهٔ حاصلضرب خارجی دو ضلع از اضلاع مثلث.

حالا مساحت مثلثهای $O\hat{A}B$، $O\hat{B}C$ و $A\hat{B}C$ را که در مثال حل‌شدهٔ ۵۰ مطرح کردیم با استفاده از این روش به‌دست می‌آوریم:

یک) $$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۳ & ۱ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(۲+۹) - \mathbf{j}(-۱) + \mathbf{k}(۳) = ۱۱\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{۱۱^۲ + ۱^۲ + ۳^۲} = ۱۱/۴۵$$

$$S\ \Delta\ OAB = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{۱}{۲}(۱۱/۴۵) = ۵/۷۱$$

دو) $$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۰ & -۳ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۴ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(۱۲) - \mathbf{j}(-۲) + \mathbf{k}(۶) = ۱۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۶\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| = \sqrt{۱۲^۲ + ۲^۲ + ۶^۲} = ۱۳/۵۶$$

$$S\ \Delta\ OBC = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| = \frac{۱}{۲}(۱۳/۵۶) = ۶/۷۸$$

سه) $S\,\Delta\,ABC = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{۱}{۲}\left|۳۱\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۱۳\mathbf{k}\right| = \frac{۱}{۲} \times ۳۳/۶ = ۱۶/۸$

مثال حل شدهٔ ۵۱

دو ضلع BC و AC، از مثلث ABC، به‌صورت $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC} = ۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = -\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ داده شده‌اند. مساحت مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ را بیابید.

حل.

برای یافتن مساحت این مثلث، ابتدا ضرب خارجی بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۴ & +۲ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(۶+۴) - \mathbf{j}(۴-۱) + \mathbf{k}(۸+۳) = ۱۰\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۱۱\mathbf{k}$$

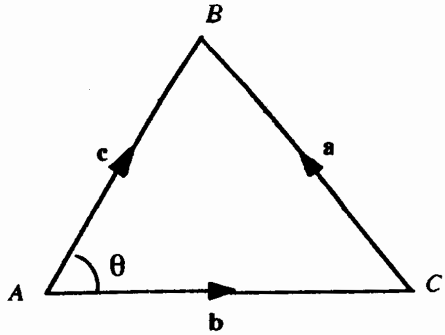
$$S_{A\overset{\Delta}{B}C} = \frac{۱}{۲}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{۱}{۲}|۱۰\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۱۱\mathbf{k}| = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰^۲ + ۳^۲ + ۱۱^۲} = \frac{۱۵/۲}{۲} = ۷/۶$$

مثال حل شدهٔ ۵۲

قانون سینوسها در مثلث عبارت است از $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. قانون سینوسها را با استفاده از ضرب خارجی، اثبات کنید.

حل.

مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ را با ضلعهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ که زاویهٔ بین $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ مساوی θ است درنظر می‌گیریم (شکل ۵۳).



شکل۵۳

با توجه به آنچه دربارهٔ مساحت مثلث گفته شد، مساحت مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ را می‌توان به یکی از سه صورت زیر نوشت،

$$\text{مساحت}\ \Delta\,ABC = \frac{۱}{۲}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{۱}{۲}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\hat{C}$$

$$\text{مساحت}\ \Delta\,ABC = \frac{۱}{۲}|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \frac{۱}{۲}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\hat{A}$$

$$\text{مساحت}\ \Delta\,ABC = \frac{۱}{۲}|\mathbf{a} \times \mathbf{c}| = \frac{۱}{۲}|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\sin\hat{B}$$

از مقایسهٔ این سه رابطه، خواهیم داشت

$$\frac{۱}{۲}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin C = \frac{۱}{۲}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin A = \frac{۱}{۲}|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\sin B$$

$$|\mathbf{a}|\sin C = |\mathbf{c}|\sin A \quad \text{و} \quad |\mathbf{b}|\sin A = |\mathbf{a}|\sin B$$

$$\Rightarrow \frac{|\mathbf{a}|}{\sin A} = \frac{|\mathbf{c}|}{\sin C} \quad \text{و} \quad \frac{|\mathbf{a}|}{\sin A} = \frac{|\mathbf{b}|}{\sin B} \Rightarrow \frac{|\mathbf{a}|}{\sin A} = \frac{|\mathbf{b}|}{\sin B} = \frac{|\mathbf{c}|}{\sin C}$$

مثال حل شدهٔ ۵۳

بردارهای مکان سه نقطهٔ A، B و C، به‌صورت زیر داده شده است (شکل ۵۴):

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = -۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = ۵\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{c} = ۳\mathbf{i} - \mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$$

مطلوب است

الف) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ب) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ج) $\sin \hat{A}$

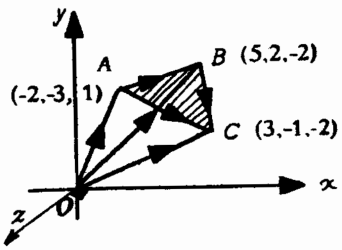
د) مساحت مثلث $A\hat{B}C$ هـ) $\cos \hat{A}$ و) بردار یکهٔ عمود بر دوبردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

حل.

الف)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (۵\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}) - (-۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$= ۷\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (۳\mathbf{i} - \mathbf{j} - ۲\mathbf{k}) - (-۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$= ۵\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$$



شکل ۵۴

بنابراین،

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۷ & ۵ & -۳ \\ ۵ & ۲ & -۳ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۱۵ + ۶) - \mathbf{j}(-۲۱ + ۱۵) + \mathbf{k}(۱۴ - ۲۵)$$
$$= -۹\mathbf{i} + ۶\mathbf{j} - ۱۱\mathbf{k}$$

ب) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (۷\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}) \cdot (۵\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}) = ۳۵ + ۱۰ + ۹ = ۵۴$

ج) با درنظر گرفتن راستای بردار $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، که بر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود است، داریم

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=|۷\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۳\mathbf{k}|\cdot|=|۵\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}|\sin\hat{A}$$

و با توجه به بردار $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$، که در قسمت الف، به‌دست آوردیم،

$$|-۹\mathbf{i}+۶\mathbf{j}-۱۱\mathbf{k}|=\sqrt{۷^۲+۵^۲+۳^۲}\sqrt{۵^۲+۲^۲+۳^۲}\sin\hat{A}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۹^۲+۶^۲+۱۱^۲}=\sqrt{۸۳}\sqrt{۳۸}\sin A=\sqrt{۲۳۸}=۱۵/۴۳$$

$$\Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{۱۵/۴۳}{۹/۱۱\times ۶/۱۶}=۰/۲۷۵$$

د) S مساحت $\overset{\triangle}{ABC}=\frac{۱}{۲}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\right|=\frac{۱}{۲}(۱۵/۴۳)=۷/۷۲$

ه) برای محاسبهٔ $\cos\hat{A}$، از ضرب داخلی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، استفاده می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A\Rightarrow ۵۴=\sqrt{۸۳}\sqrt{۳۸}\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow \cos\hat{A}=\frac{۵۴}{۵۶}=۰/۹۶۲$$

و) می‌دانیم، $\hat{\mathbf{n}}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}$. پس،

$$\hat{\mathbf{n}}=\frac{-۹\mathbf{i}+۶\mathbf{j}-۱۱\mathbf{k}}{۱۵/۴۳}=-\frac{۹}{۱۵/۴۳}\mathbf{i}+\frac{۶}{۱۵/۴۳}\mathbf{j}-\frac{۱۱}{۱۵/۴۳}\mathbf{k}$$

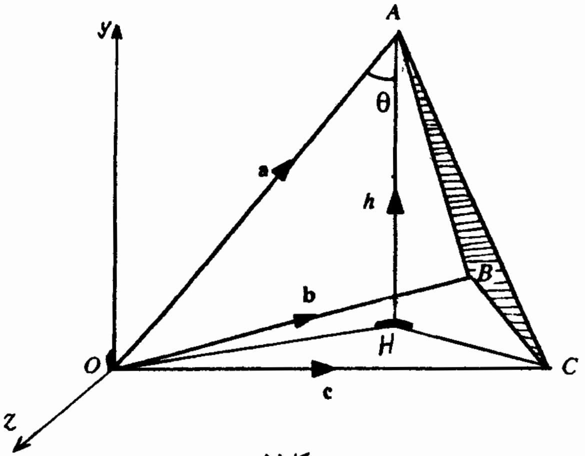
$$\Rightarrow \hat{\mathbf{n}}=-۰/۵۸۳\mathbf{i}+۰/۳۸۹\mathbf{j}-۰/۷۱۳\mathbf{k}$$

۶-۴ حجم چهاروجهی

چهاروجهی $OABC$، به رأس A را که یکی از رأسهای آن بر مبدأ مختصات واقع است درنظر بگیرید. می‌خواهیم حجم این چهاروجهی را با استفاده از ضرب بردارها به‌دست آوریم. همان‌طور که می‌دانید،

$$(\text{حجم چهاروجهی})\ V_{OABC}=\frac{۱}{۳}\,(\text{مساحت قاعده})\times(\text{ارتفاع})$$

منظور از ارتفاع چهاروجهی خطی است که از رأس چهاروجهی، نقطهٔ A، بر صفحهٔ قاعدهٔ چهاروجهی، عمود می‌شود (شکل ۵۵). اگر پای عمود را H بنامیم، واضح است که $AH\perp OH$ و $AH\perp HC$.



شکل۵۵

برای پیدا کردن حجم، نیاز به محاسبهٔ مساحت قاعده، یعنی مثلث $O\overset{\triangle}{B}C$ داریم. می‌دانیم که

$$S_{O\overset{\triangle}{B}C} = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| = \frac{۱}{۲}|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$$

پس،

$$V_{OABC} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲}|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\right)|\mathbf{h}| = \frac{۱}{۶}|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{h}|$$

اگر زاویهٔ بین ارتفاع چهاروجهی و $\mathbf{a}$ را θ بنامیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O\overset{\triangle}{A}H$ خواهیم داشت

$$\cos\theta = \frac{AH}{AO} = \frac{|\mathbf{h}|}{|\mathbf{a}|} \Rightarrow |\mathbf{h}| = |\mathbf{a}|\cos\theta$$

بنابراین،

$$V_{OABC} = \frac{۱}{۶}|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}|\cos\theta \qquad (۱)$$

واضح است که بردار $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$، بر صفحهٔ بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ و در نتیجه بر صفحهٔ قاعدهٔ چهاروجهی عمود است، پس راستای بردارهای $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ و $\mathbf{h}$ یکی است. یعنی اگر زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{h}$، مساوی θ باشد، قطعاً زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$، نیز همان θ است، پس رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$V_{OABC} = \frac{۱}{۶}|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}})$$

و بنا به تعریف ضرب داخلی،

$$V_{OABC} = \frac{۱}{۶}|(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}|$$

مثال حل شدهٔ ۵۴

بردارهای مکان نقطه‌های A، B و C، به‌ترتیب $\mathbf{a} = -۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-۵\mathbf{k}$، $\mathbf{b} = \mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۷\mathbf{k}$ و $\mathbf{c} = ۳\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$ هستند. حجم چهاروجهی $OABC$، با رأس A، را به‌دست آورید.

حل.

از آنجاکه حجم این چهاروجهی، از دستور $V = \frac{۱}{۶}|(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}|$ به‌دست می‌آید، لازم است که ابتدا ضرب خارجی بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ را بیابیم و سپس بردار حاصل را در $\mathbf{a}$ ضرب داخلی کنیم.

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۴ & ۷ \\ ۳ & -۲ & ۲ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(۸+۱۴) - \mathbf{j}(۲-۲۱) + \mathbf{k}(-۲-۱۲)$$

$$= ۲۲\mathbf{i} + ۱۹\mathbf{j} - ۱۴\mathbf{k}$$

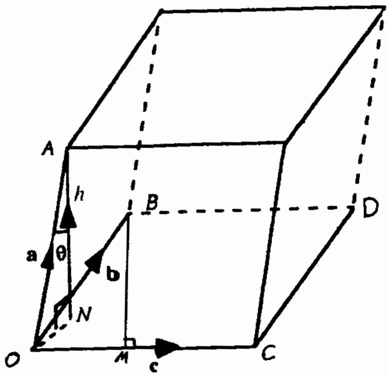
$$V = \frac{۱}{۶}\left|(۲۲\mathbf{i} + ۱۹\mathbf{j} - ۱۴\mathbf{k}) \cdot (-۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k})\right|$$

$$\Rightarrow V = \frac{۱}{۶}\left| -۴۴ + ۵۷ + ۷۰ \right| \Rightarrow V = \frac{۱}{۶}(۸۳) = ۱۳{,}۸$$

۶-۵ حجم متوازی‌السطوح

متوازی‌السطوح، یک چندوجهی است که همهٔ وجه‌های آن متوازی‌الاضلاع باشد. متوازی‌السطوحی را که یکی از رأسهایش بر مبدأ مختصات واقع باشد و A، B و C سه رأس مجاور آن با بردارهای مکان $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ باشند درنظر بگیرید (شکل ۵۶).

ارتفاع × مساحت قاعده = V متوازی‌السطوح



شکل ۵۶

قاعدهٔ این متوازی‌السطوح، متوازی‌الاضلاع است. پس ابتدا لازم است که مساحت متوازی‌الاضلاع $OBCD$ را بیابیم. اگر BM، ارتفاع نظیر رأس B در متوازی‌الاضلاع $OBCD$ باشد، خواهیم داشت

$$S_{OBCD} = OC \times BM$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O\hat{B}M$، داریم

$$\sin(\widehat{\mathbf{b},\mathbf{c}}) = \frac{BM}{OB} = \frac{BM}{|\mathbf{b}|}$$

و یا $BM = |\mathbf{b}|\sin(\hat{\mathbf{b},\mathbf{c}})$. با جایگذاری BM، در دستور محاسبهٔ مساحت متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید

$$S_{OBCD} = OC \times |\mathbf{b}|\sin(\hat{\mathbf{b},\mathbf{c}}) = |\mathbf{c}| \times |\mathbf{b}| \times \sin(\hat{\mathbf{b},\mathbf{c}}) = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$$

بنابراین،

$$\text{متوازی‌السطوح } V = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}| \times |\mathbf{h}|$$

که $\mathbf{h}$ ارتفاع متوازی‌السطوح است (یعنی خطی است که از رأس A بر صفحهٔ قاعده عمود شده است). اگر از N، پای عمود، به O وصل کنیم، $AN \perp ON$. زاویهٔ بین ارتفاع متوازی‌السطوح و $\mathbf{a}$ را θ می‌نامیم. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O\overset{\triangle}{A}N$، داریم

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{h}|}{|\mathbf{a}|}$$

در نتیجه، $|\mathbf{h}| = |\mathbf{a}|\cos\theta$، با قرار دادن مقدار $|\mathbf{h}|$ در رابطهٔ حجم متوازی‌السطوح خواهیم داشت

$$\text{متوازی‌السطوح } V = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{a}|\cos\theta$$

بنابر تعریف ضرب داخلی بردارها، می‌توان نوشت

$$V = |(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}|$$

مثال حل شدهٔ ۵۵

حجم متوازی‌السطوحی را که مبدأ مختصات و $A(-۳,۲,۴)$، $B(۲,-۳,-۱)$ و $C(۳,-۱,۲)$، چهار رأس مجاور آن هستند پیدا کنید.

حل.

بردارهای مکان نقطه‌های A، B و C را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{a} = -۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = ۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{c} = ۳\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$$

برای محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح، باید ابتدا ضرب خارجی بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، یعنی $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ را بیابیم و سپس بردار حاصل را در $\mathbf{a}$ ضرب داخلی کنیم:

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & -۳ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۶-۱) - \mathbf{j}(۴+۳) + \mathbf{k}(-۲+۹)$$

$$= -۷\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (-۷\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} + ۷\mathbf{k})\cdot(-۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = ۲۱ - ۱۴ + ۲۸ = ۳۵$$

$$\text{متوازی‌السطوح } V = |(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}| = ۳۵$$

اکنون فرض کنید حجم متوازی‌السطوح را از دستور زیر محاسبه کنیم:

$$V = \left|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\right|$$

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۳ & ۲ & ۴ \\ ۲ & -۳ & -۱ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۲+۱۲) - \mathbf{j}(۳-۸) + \mathbf{k}(۹-۴)$$

$$= ۱۰\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (۱۰\mathbf{i}+۵\mathbf{j}+۵\mathbf{k})\cdot(۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k}) = ۳۰ - ۵ + ۱۰ = ۳۵$$

می‌بینید که جواب نهایی، در هر دو مورد، یکسان است. بنابراین، $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$، $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ یا $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}$ را حاصلضرب سه‌گانهٔ عددی، می‌نامیم. اگر پرانتز گذاشته نشود، توجه کنید که ابتدا ضرب خارجی انجام می‌شود و سپس ضرب داخلی، پس

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

مثال حل شدهٔ ۵۶

فاصلهٔ نقطهٔ $C(۱,۲,۳)$ را از خط با معادلهٔ $\mathbf{r} = (۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}) + t(-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-\mathbf{k})$، به‌دست آورید.

حل.

اگر فاصلهٔ نقطهٔ C، از این خط را d بنامیم، آنگاه

$$d = \frac{\left|\mathbf{b}\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})\right|}{|\mathbf{b}|}$$

بردار هادی خط، $\mathbf{b} = -۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-\mathbf{k}$

بردار مکان نقطهٔ A روی خط، $\mathbf{a} = ۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$

بردار مکان متناظر با نقطهٔ C، خارج از خط، $\mathbf{c} = \mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$

بنابراین،

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{۳^۲+۴^۲+۱^۲} = \sqrt{۲۶}$$

$$(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}-۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۴\mathbf{k} = -\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = (-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۳ & ۴ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۴-۱) - \mathbf{j}(۳-۱) + \mathbf{k}(۳+۴)$$

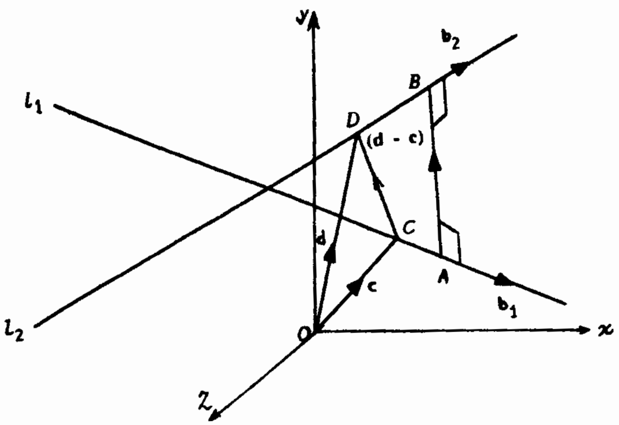
$$= -۵\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}$$

$$d = \frac{\left|-۵\,i - ۲\mathbf{j}+۷\mathbf{k}\right|}{\sqrt{۲۶}} = \frac{\sqrt{۲۵+۴+۴۹}}{\sqrt{۲۶}} = \sqrt{۳}$$

۶-۶ طول عمود مشترک دو خط متنافر

دو خط $l_1 : \mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{b}_1$ و $l_2 : \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}_2 + \lambda \mathbf{b}_2$ متنافرند. پاره‌خطی را که محصور بین l_1 و l_2 و بر هر دوی آنها عمود باشد عمود مشترک دو خط متنافر می‌نامیم (شکل ۵۷).

اگر حاصلضرب خارجی بردارهای $\mathbf{b}_1$ و $\mathbf{b}_2$، بردارهای هادی دو خط متنافر، را بررسی کنیم، متوجه خواهیم شد که بردار $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$، چون هم بر $\mathbf{b}_1$ و هم بر $\mathbf{b}_2$، عمود است، با عمود مشترک دو خط موازی است. یعنی اگر AB، عمود مشترک دو خط متنافر l_1 و l_2 باشد، آنگاه $AB \| (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)$.



شکل۵۷

با توجه به آنچه گفته شد، اگر $\hat{\mathbf{n}}$ بردار یکهٔ متناظر $\overrightarrow{AB}$ باشد، آنگاه

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|}$$

حال فرض کنید C نقطه‌ای روی l_1 و D نقطه‌ای روی l_2 و بردارهای مکان این دو نقطه به‌ترتیب $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ باشند. در این‌صورت و با فرض $(AB,\hat{}CD) = \theta$ می‌توان نوشت

$$\overrightarrow{CD} \cdot \hat{\mathbf{n}} = |\overrightarrow{CD}| \cdot |\hat{\mathbf{n}}| \cdot \cos\theta$$

و چون $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$، پس

$$|\overrightarrow{CD} \cdot \hat{\mathbf{n}}| = |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos\theta \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD} \cdot \hat{\mathbf{n}}| = |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos\theta$$

با قرار دادن مقادیر $\overrightarrow{CD} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$ و $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|}$، طول عمود مشترک، AB، مساوی خواهد شد با

$$d = \left|(\mathbf{d} - \mathbf{c}) \cdot \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|}\right|$$

واضح است که دو خط متقاطع، عمود مشترک ندارند، به‌عبارت دیگر اگر l_1 و l_2، متقاطع باشند، $d = 0$.

از این مطلب شرطی را برای تقاطع دو خط، به‌دست می‌آوریم:

$$l_1 \cap l_2 = \{p\} \Rightarrow d = 0 \Rightarrow \left|(\mathbf{d}-\mathbf{c}) \cdot \frac{\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|}\right| = 0$$

$$\Rightarrow (\mathbf{d}-\mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = 0$$

و این رابطه، شرط لازم و کافی برای تقاطع دو خط، با بردارهای هادی $\mathbf{b}_1$ و $\mathbf{b}_2$ است.

مثال حل شدهٔ ۵۷

در هر یک از قسمتهای این مثال، معادلهٔ دو خط داده شده است. نشان دهید این دو خط متنافرند.

الف) $\mathbf{r} = \mathbf{i}+\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})$ ، $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mu(4\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$

ب) $\mathbf{r} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\lambda(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$ ، $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}+\mu(3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k})$

حل.

الف) چون $\frac{4}{1} \neq \frac{3}{-1} \neq \frac{1}{4}$، نسبتهای هادی این دو خط متفاوت‌اند، پس این دو خط موازی نیستند.

اگر این دو خط متقاطع باشند، باید $(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2$، مساوی صفر شود:

$$\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = (\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}) \times (4\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(3+4) - \mathbf{j}(1-16) + \mathbf{k}(-1-12) = 7\mathbf{i}+15\mathbf{j}-13\mathbf{k}$$

پس،

$$(a_1-a_2)\cdot b_1 \times b_2 = (\mathbf{i}+\mathbf{k}-2\mathbf{i}-3\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})\times(4\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

$$= (-\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(7\mathbf{i}+15\mathbf{j}-13\mathbf{k})$$

$$= -7-45-13 = -65$$

یعنی $(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2 \neq 0$. پس این دو خط، متقاطع هم نیستند. پس متنافرند.

ب) با توجه به متفاوت بودن نسبتهای هادی این دو خط، معلوم می‌شود که موازی نیستند. برای بررسی متقاطع بودن آنها، به حاصلضرب $(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2$، توجه می‌کنیم. اگر اندازهٔ آن مساوی صفر نباشد، دو خط متقاطع نیستند:

$$(a_1-a_2)\cdot b_1 \times b_2 = (\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot b_1\times b_2 = (-\mathbf{i}+\mathbf{k})\cdot b_1 \times b_2$$

از طرفی،

$$b_1 \times b_2 = (2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k})$$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & -۵ & ۲ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۲+۵)-\mathbf{j}(۴-۳)+\mathbf{k}(-۱۰+۳)$$

$$= ۳\mathbf{i}-\mathbf{j}-۷\mathbf{k}$$

$$(a_۱-a_۲)\cdot b_۱\times b_۲ = (-\mathbf{i}+\mathbf{k})\cdot(۳\mathbf{i}-\mathbf{j}-۷\mathbf{k}) = -۳-۷ = -۱۰$$

یعنی دو خط موازی و متقاطع نیستند، بنابراین متنافرند. توجه کنید که معادلهٔ دو خط را می‌توانیم به‌صورت زیر نیز بنویسیم:

$$\left.\begin{aligned} x &= ۱+۲\lambda \\ y &= ۱-\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۱}{۱} = \frac{z}{۱} = \lambda$$

$$\left.\begin{aligned} x &= ۲+۳\mu \\ y &= ۱-۵\mu \\ z &= -۱+۲\mu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x-۲}{۳} = \frac{y-۱}{-۵} = \frac{z+۱}{۲} = \mu$$

مثال حل شدهٔ ۵۸

در هر یک از قسمتهای این مثال، معادلهٔ دو خط متنافر داده شده است، طول عمود مشترک آنها را به‌دست آورید.

الف) $l_۱ : \mathbf{r} = \mathbf{i}+\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})\ ,\quad l_۲ : \mathbf{r} = ۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+\mu(۴\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$

ب) $l_۱ : \mathbf{r} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\lambda(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\ ,\quad l_۲ : \mathbf{r} = ۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}+\mu(۳\mathbf{i}-۵\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$

ج) $l_۱ : \mathbf{r} = \mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}+\lambda(-\mathbf{i}+\mathbf{j}-۲\mathbf{k})\ ,\quad l_۲ : \mathbf{r} = \mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}+\mu(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۲\mathbf{k})$

د) $l_۱ : \mathbf{r} = -۳\mathbf{i}+\mathbf{j}+\lambda(۲\mathbf{i}+\mathbf{j}+۲\mathbf{k})\ ,\quad l_۲ : \mathbf{r} = ۸\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۱۵\mathbf{k}+\mu(۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۵\mathbf{k})$

حل.

الف) بردار هادی خط $l_۱$، $\mathbf{b}_۲ = \mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$، بردار هادی خط $l_۲$، $\mathbf{b}_۱ = ۴\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$، و $\mathbf{c} = ۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}$ و $\mathbf{d} = \mathbf{i}+\mathbf{k}$، دو نقطه از خط $l_۱$ و $l_۲$ هستند.

$$\text{طول عمود مشترک} = |\mathbf{h}| = \left|(\mathbf{d}-\mathbf{c})\cdot\frac{\mathbf{b}_۱\times\mathbf{b}_۲}{|\mathbf{b}_۱\times\mathbf{b}_۲|}\right|$$

$$\Rightarrow |\mathbf{h}| = \left|(\mathbf{i}+\mathbf{k}-۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j})\cdot\frac{(۴\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})}{|(۴\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})|}\right|$$

اما،

$$(۴\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۴ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۴-۳)-\mathbf{j}(۱۶-۱)+\mathbf{k}(۱۲+۱)$$

$$= -۷\mathbf{i}-۱۵\mathbf{j}+۱۳\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \left|(۴i - j + k) \times (i + ۳j + ۴k)\right| = \left|-۷i - ۱۵j + ۱۳k\right|$$

$$= \sqrt{۴۹ + ۲۲۵ + ۱۶۹} = ۲۱/۱$$

$$\Rightarrow |h| = \left|\frac{(-i - ۳j + k) \cdot (-۷i - ۱۵j + ۱۳k)}{۲۱/۱}\right| = \frac{۷ + ۴۵ + ۱۳}{۲۱/۱} = ۳/۰۸$$

ب) $d = i + j$ ، $c = ۲i + j - k$ ، $b_۲ = ۲i - j + k$ ، $b_۱ = (۳i - ۵j + ۲k)$

$$|d| = \left|(d - c) \cdot \frac{b_۱ \times b_۲}{\left|b_۱ \times b_۲\right|}\right|$$

$$b_۱ \times b_۲ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & -۵ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{vmatrix} = i(-۵ + ۲) - j(۳ - ۴) + k(-۳ + ۱۰)$$

$$= -۳i + j + ۷k$$

$$\left|b_۱ \times b_۲\right| = \left|-۳i + j + ۷k\right| = \sqrt{۹ + ۱ + ۴۹} = \sqrt{۵۹} = ۷/۶۸$$

$$d = \left|\frac{(-i + k) \cdot (-۳i + j + ۷k)}{۷/۵۸}\right| = \frac{۳ + ۷}{۷/۵۸} = \frac{۱۰}{۷/۵۸} = ۱/۳۰$$

ج) $d = i - ۲j + ۳k$ ، $c = i - j - k$ ، $b_۲ = -i + j - ۲k$ ، $b_۱ = i + ۲j - ۲k$

$$d - c = i - ۲j + ۳k - i + j + k = -j + ۴k$$

پس،

$$b_۱ \times b_۲ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = i(-۴ + ۲) - j(-۲ - ۲) + k(۱ + ۲)$$

$$= -۲i + ۴j + ۳k.$$

$$\left|b_۱ \times b_۲\right| = \left|-۲i + ۴j + ۳k\right| = \sqrt{۴ + ۱۶ + ۹} = \sqrt{۲۹}$$

$$|d| = \left|\frac{(-j + ۴k) \cdot (-۲i + ۴j + ۳k)}{\sqrt{۲۹}}\right| = \frac{-۴ + ۱۲}{\sqrt{۲۹}} = \frac{۸}{\sqrt{۲۹}} = ۱/۴۹$$

د) $d = -۳i + j$ ، $c = ۸i + ۳j + ۱۵k$ ، $b_۲ = ۲i + j + ۲k$ ، $b_۱ = ۳i + ۲j + ۵k$

$$d - c = -۳i + j - ۸i - ۳j - ۱۵k = -۱۱i - ۲j - ۱۵k$$

$$b_۱ \times b_۲ = \begin{bmatrix} i & j & k \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} = i(۴ - ۵) - j(۶ - ۱۰) + k(۳ - ۴)$$

$$= -i + ۴j - k$$

$$|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2| = |-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}| = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 4.24$$

$$|\mathbf{d}| = \left|\frac{(-11\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 15\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})}{4.24}\right| = \frac{11 - 8 + 15}{4.24} = \frac{8}{4.24} = 4.24$$

تمرین ۶

۱. فرض کنید $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. با محاسبهٔ،

الف) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ب) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

نشان دهید که ضرب خارجی، دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

۲. در هر یک از قسمتهای این تمرین، دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$، داده شده است. با محاسبهٔ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ و $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ نشان دهید که ضرب خارجی، دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

الف) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

ب) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ج) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ +5 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

۳. الف) با محاسبهٔ حاصلضرب $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$، نشان دهید دو بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ و $\mathbf{a}$، برهم عمودند.

ب) با محاسبهٔ حاصلضرب $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$، نشان دهید دو بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ و $\mathbf{b}$، برهم عمودند.

۴. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای موازی بودن دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ این است که $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = O$.

۵. در هر یک از قسمتهای این تمرین، حاصلضرب $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ را به‌دست آورید:

الف) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

ب) $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

ج) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

۶. درستی هریک از تساویهای زیر را نشان دهید:

الف) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ب) $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ ج) $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ د) $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

ه) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} \times \mathbf{j}$

۷. سه نقطهٔ P، Q و R به‌ترتیب، با بردارهای مکان $\mathbf{p} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$، $\mathbf{q} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{r} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$، داده شده‌اند. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که شامل این سه نقطه باشد.

۸. معادلهٔ صفحه‌ای را پیدا کنید که شامل سه نقطهٔ P، Q و R، با بردارهای مکان، $\mathbf{p} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$، $\mathbf{q} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{r} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ باشد.

۹. فاصلهٔ نقطهٔ $A(4,5,6)$ را از خط l، با معادلهٔ برداری $l : \mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + \lambda(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$، به‌دست آورید.

۱۰. فاصلهٔ نقطهٔ $A(2,-1,3)$ را از خط l، با معادلهٔ برداری $l : \mathbf{r} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} + \lambda(5\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$، به‌دست آورید.

۱۱. بردارهای مکان رأسهای چهاروجهی $ABCD$، به‌صورت زیر داده شده است:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۶\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{b} = ۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - \mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = ۵\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} - ۳\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{d} = -۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$$

الف) زاویهٔ بین وجه‌های ABC و BCD، را به‌دست آورید.

ب) زاویهٔ بین وجه‌های ACD و ABD، را به‌دست آورید.

۱۲. بردارهای مکان سه نقطهٔ P، Q و R، به‌ترتیب عبارت‌اند از $\mathbf{p} = ۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$، $\mathbf{q} = -۳\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$ و $\mathbf{r} = ۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$.

الف) حاصلضرب $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$، را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از قسمت قبل، مساحت مثلث $P\overset{\triangle}{Q}R$، را محاسبه کنید.

ج) معادلهٔ برداری صفحهٔ شامل سه نقطهٔ P، Q و R را پیدا کنید.

۱۳. بردارهای مکان سه نقطهٔ A، B و C به‌ترتیب عبارت‌اند از $\mathbf{a} = ۴\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$، $\mathbf{b} = ۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{c} = -۳\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۷\mathbf{k}$.

الف) حاصلضرب $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$، را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از قسمت قبل، مساحت مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$، را محاسبه کنید.

ج) معادلهٔ برداری صفحهٔ شامل سه نقطهٔ A، B و C را پیدا کنید.

۱۴. فاصلهٔ نقطهٔ $P(۱, ۱, ۱)$، را از هریک از خطهای زیر به‌دست آورید.

الف) $\mathbf{r} = (۲ + ۳\lambda)\mathbf{i} + (۱ - ۲\lambda)\mathbf{j} + (۳ + \lambda)\mathbf{k}$

ب) $\mathbf{r} = (۱ - t)\mathbf{i} + (۱ + t)\mathbf{j} + (۱ - ۲t)\mathbf{k}$

ج) $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - ۳\mathbf{k} + t(-۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$

۱۵. فاصلهٔ نقطهٔ $P(-۱, -۲, -۴)$ را از خط l، که معادلهٔ برداری آن داده شده است به‌دست آورید.

$$l: \ \mathbf{r} = -\mathbf{i} + ۷\mathbf{k} + \mu(\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k})$$

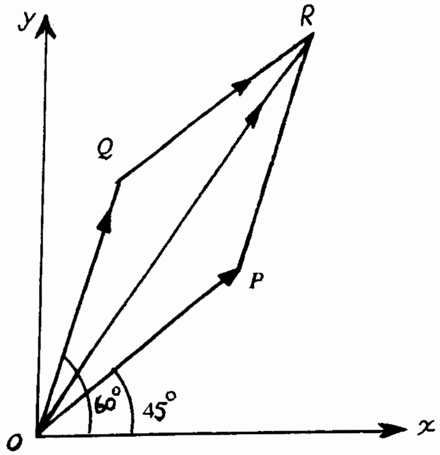
۱۶. فاصلهٔ نقطهٔ $P(۵, ۸, ۹)$ را از خط d با معادلهٔ $\mathbf{r} = ۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{k} + V(۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۸\mathbf{k})$ به‌دست آورید.

۱۷. معادلهٔ برداری صفحه‌ای را به‌دست آورید که شامل دو بردار $\mathbf{v}(۱, -۱, ۱)$ و $\mathbf{w}(۲, ۱, ۳)$، باشد و نقطهٔ $P(۱, ۲, -۱)$ نیز روی آن باشد.

پاسخ تمرینها

حل تمرین فصل ۱

۳. فرض کنید این دو نیرو را با $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$، نشان دهیم (شکل ۵۸) در این‌صورت، $|\overrightarrow{OQ}| = ۲۵۰\mathrm{N}$ و $|\overrightarrow{OP}| = ۱۰۰\mathrm{N}$.



شکل۵۸

PR را موازی و مساوی OQ رسم و از Q به R وصل می‌کنیم. چهارضلعی $OPRQ$ متوازی‌الاضلاع و OR، برایند دو نیروی $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ است. با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور در متوازی‌الاضلاع مکمل‌اند و همچنین، $\angle QOP = ۶۰^\circ - ۴۵^\circ = ۱۵^\circ$، داریم

$$O\hat{P}R = ۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ = ۱۶۵^\circ$$

از قانون کسینوسها داریم،

$$(OR)^{۲} = (OP)^{۲} + (PR)^{۲} - ۲(OP)(PR)\cos O\hat{P}R$$

$$= ۱۰۰^{۲} + ۲۵۰^{۲} - ۲(۱۰۰)(۲۵۰)\cos ۱۶۵^{\circ} = ۷۲۵۰۰ + ۴۸۲۹۶/۲۹۱$$

$$\Rightarrow OR = ۳۴۸\mathrm{N}$$

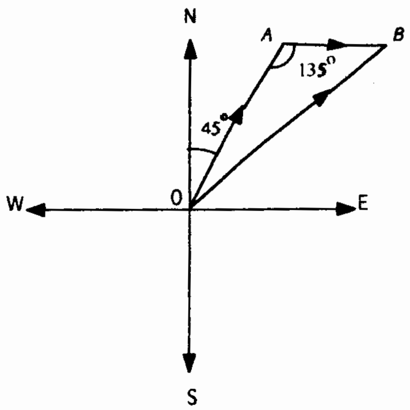
با استفاده از قضیهٔ سینوسها، خواهیم داشت

$$\frac{PR}{\sin\ R\hat{O}P} = \frac{OR}{\sin ۱۶۵^{\circ}}$$

$$\sin\ R\hat{O}P = \frac{(PR)\sin ۱۶۵^{\circ}}{OR} = \frac{۲۵۰ \sin ۱۶۵^{\circ}}{۳۴۸} = ۰/۱۸۵۹۳۳۲ \Rightarrow R\hat{O}P = ۱۰/۷^{\circ}$$

بنابراین، زاویهٔ نیروی $\overrightarrow{OR}$ با افق، برابر است با $۴۵^{\circ} + ۱۰/۷^{\circ} = ۵۵/۷^{\circ}$.

۴.



شکل۵۹

با استفاده از قضیهٔ کسینوسها، در مثلث $O\overset{\triangle}{A}B$ خواهیم داشت (شکل ۵۹)

$$(OB)^{۲} = (OA)^{۲} + (AB)^{۲} - ۲(OA)(AB)\cos ۱۳۵^{\circ}$$

$$= ۲۵^{۲} + ۵^{۲} - ۲(۲۵)(۵)(-۰/۷۰۷) = ۶۲۵ + ۲۵ + ۱۷۶/۷۵ = ۸۲۶/۷۵$$

$$\Rightarrow OB = ۲۸/۸\mathrm{km/h}$$

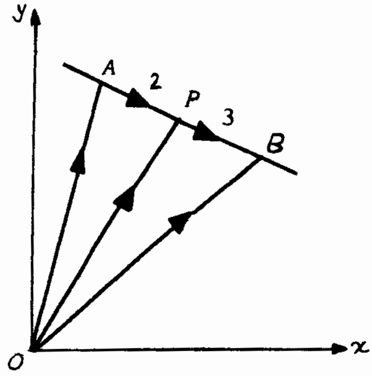
برای پیدا کردن زاویهٔ $A\hat{O}B$، از قضیهٔ سینوسها در مثلث $O\overset{\triangle}{A}B$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AB}{\sin\ B\hat{O}A} = \frac{OB}{\sin ۱۳۵^{\circ}}$$

$$\sin\ B\hat{O}A = \frac{AB\sin ۱۳۵^{\circ}}{OB} = \frac{۵ \times ۰/۷۰۷}{۲۸/۸} = ۰/۱۲۲۷۴۳ \Rightarrow B\hat{O}A = ۷/۰۵^{\circ}$$

بنابراین زاویهٔ قایق با افق مساوی است با $۴۵^{\circ} + ۷/۰۵^{\circ} = ۵۲/۰۵^{\circ}$.

۵. پاره‌خط AB و نقطهٔ P روی آن، به‌گونه‌ای مفروض‌اند که $\frac{AP}{PB} = \frac{۲}{۳}$. از مبدأ مختصات به A، B و P وصل می‌کنیم (شکل ۶۰).



شکل ۶۰

داریم

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{۲}{۵}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{۲}{۵}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{۲}{۵}\overrightarrow{OB} - \frac{۲}{۵}\overrightarrow{OA} = \frac{۳}{۵}\overrightarrow{OA} + \frac{۲}{۵}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{۳}{۵}\overrightarrow{OA} + \frac{۲}{۵}\overrightarrow{OB}$$

حل تمرین فصل ۲

۱. الف) $\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ ب) $-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$ ج) $۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$ د) $-۴\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}$
ه) $۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{k}$

۲. $C(-۳, ۱, ۱)$ و $B(-۱, ۲, -۴)$ و $A(۲, ۳, -۱)$

۳. الف) $|\mathbf{u}| = \sqrt{(۱)^۲ + (-۲)^۲ + (\sqrt{۲۰})^۲} = \sqrt{۱ + ۴ + ۲۰} = ۵$

ب) $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-۳)^۲ + ۷^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۹ + ۴۹ + ۱۶} = \sqrt{۷۴} = ۸/۶۰$

۴.

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲} = ۷/۰۷$$

$$|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{(-۲)^۲ + (-۱)^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۶} = ۲/۴۵$$

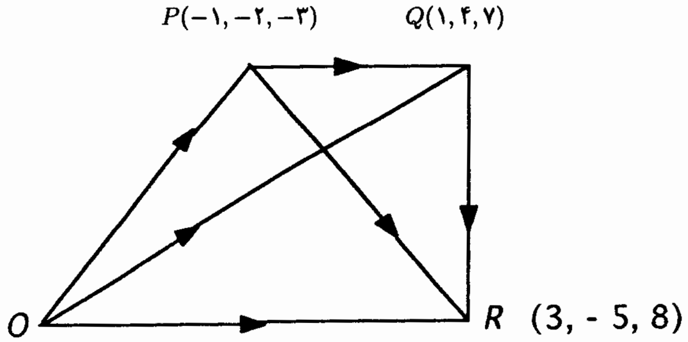
$$|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{۲^۲ + (-۳)^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۴ + ۹ + ۲۵} = \sqrt{۳۸} = ۶/۱۶$$

۵. الف) $|\mathbf{a}| = \sqrt{۱^۲+۲^۲+۳^۲} = ۳/۷۴$

ب) $|\mathbf{b}-\mathbf{a}| = \sqrt{(۲-۱)^۲+(۲-۲)^۲+(۲-۳)^۲} = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲} = ۱/۴۱۴$

ج) $\left|۲\mathbf{c}-\frac{۱}{۲}\mathbf{a}\right| = \left|۶\mathbf{i}+۱۰\mathbf{k}-\frac{۱}{۲}\mathbf{i}-\mathbf{j}-\frac{۳}{۲}\mathbf{k}\right| = |۵/۵\mathbf{i}-\mathbf{j}+۸/۵\mathbf{k}|$

۶. شکل ۶۱ را ببینید.



شکل۶۱

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=[۱-(-۱)]\mathbf{i}+[۴-(-۲)]\mathbf{j}+[۷-(-۳)]\mathbf{k}=۲\mathbf{i}+۶\mathbf{j}+۱۰\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR}=[۳-(-۱)]\mathbf{i}+[-۵-(-۲)]\mathbf{j}+[۸-(-۳)]\mathbf{k}=۴\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۱۱\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=(۳-۱)\mathbf{i}+(-۵-۴)\mathbf{j}+(۸-۷)\mathbf{k}=۲\mathbf{i}-۹\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{۲^۲+۶^۲+۱۰^۲}=۱۱/۸$$

$$|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲+۱۱^۲}=۱۲/۱$$

$$|\overrightarrow{QR}|=\sqrt{۲^۲+(-۹)^۲+۱^۲}=۹/۲۷$$

۷. الف) نسبتهای هادی بردار $\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$ عبارت‌اند از ۵ : ۳− : ۱ و کسینوسهای هادی آن مساوی‌اند با،

$$\frac{۱}{\sqrt{۱^۲+(-۳)^۲+۵^۲}} : -\frac{۳}{\sqrt{۱^۲+(-۳)^۲+۵^۲}} : \frac{۵}{\sqrt{۱^۲+(-۳)^۲+۵^۲}}$$

و یا

$$\frac{۱}{\sqrt{۳۵}} : -\frac{۳}{\sqrt{۳۵}} : \frac{۵}{\sqrt{۳۵}}$$

ب) نسبتهای هادی این بردار، برابرند با ۶− : ۴ : ۲− و کسینوسهای هادی آن عبارت‌اند از

$$\frac{-۲}{\sqrt{(-۲)^۲+(۴)^۲+(-۶)^۲}} : \frac{۴}{\sqrt{۵۶}} : \frac{-۶}{\sqrt{۵۶}}$$

ج) ۱۱ : ۷− : ۳، نسبتهای هادی این بردارند و کسینوسهای هادی این بردار، عبارت‌اند از

$$\frac{۳}{\sqrt{۳^۲+(-۷)^۲+۱۱^۲}} : \frac{-۷}{\sqrt{۳^۲+(-۷)^۲+۱۱^۲}} : \frac{۱۱}{\sqrt{۳^۲+(-۷)^۲+۱۱^۲}}$$

و یا

$$\frac{۳}{\sqrt{۱۷۹}} : -\frac{۷}{\sqrt{۱۷۹}} : \frac{۱۱}{\sqrt{۱۷۹}}$$

۸. فرض کنید α، β و γ زاویه‌هایی باشند که این بردار، به‌ترتیب با محور xها، yها و zها می‌سازد. کسینوسهای هادی این بردار، به‌صورت زیر داده شده است،

$$\cos\alpha = \frac{۵}{۷}\,,\quad \cos = \frac{۴}{۷}\,,\quad \cos\gamma = \frac{۲\sqrt{۲}}{۷}$$

پس،

$$\alpha = ۴۴/۴^\circ\,,\quad \beta = ۵۵/۲\,,\quad \gamma = ۶۶/۲^\circ$$

با استفاده از ماشین‌حساب، ملاحظه خواهید کرد که،

$$\cos^۲ ۴۴/۴^\circ + \cos^۲ ۵۵/۲^\circ + \cos^۲ ۶۶/۲^\circ = ۱$$

۹.
$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$$
$$\Rightarrow \cos^۲ ۴۵^\circ + \cos^۲ ۶۷/۵^\circ + \cos^۲\gamma = ۱$$

پس قرار می‌دهیم،

$$\Rightarrow \cos^۲\gamma = ۱ - \cos^۲ ۴۵^\circ - \cos^۲ ۶۷/۵^\circ = ۱ - ۰/۵ - ۰/۱۴۶ = ۰/۳۵۴$$
$$\Rightarrow \cos\gamma = ۰/۵۹۵ \Rightarrow \gamma = ۵۳/۵^\circ$$

۱۱. اگر α، β و γ زاویه‌هایی باشند که بردار داده شده با محورهای مختصات می‌سازد، خواهیم داشت

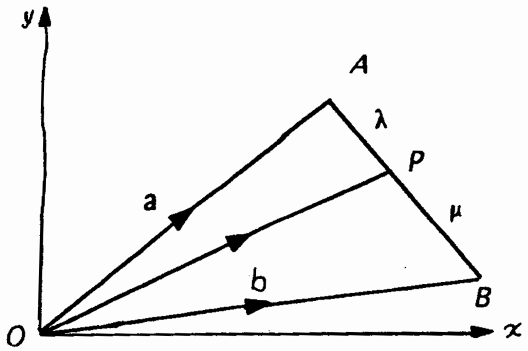
$$\cos\alpha = \frac{۲\sqrt{۱۰}}{۹} \Rightarrow \alpha = ۴۵/۴^\circ$$
$$\cos\beta = \frac{۵}{۹} \Rightarrow \beta = ۵۶/۳^\circ$$
$$\cos\gamma = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \gamma = ۶۳/۶^\circ$$

۱۲. فرض کنید انتهای بردار مکان $\mathbf{a}$ را A، و انتهای بردار مکان $\mathbf{b}$ را B و انتهای بردار مکان $\mathbf{a}\mu+\mathbf{b}\lambda$، را که در آن $\mu+\lambda=۱$، P بنامیم (شکل ۶۲).

در این‌صورت می‌توان بردار $\overrightarrow{OP}$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$(\mu+\lambda=۱)\,,\quad \overrightarrow{OP} = \frac{\mathbf{a}\mu+\mathbf{b}\lambda}{\mu+\lambda}$$

یعنی نقطهٔ P، پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{\lambda}{\mu}$ تقسیم کرده است و بنابراین، حتماً باید روی پاره‌خط AB، واقع باشد. پس A، B و P سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت‌اند.



شکل۶۲

۱۳. نسبتهای هادی این بردار متناسب با اعداد $n-c$ و $m-b$ و $l-a$ هستند. پس کسینوسهای هادی این بردار عبارت‌اند از،

$$\frac{l-a}{\sqrt{l-a)^{۲}+(m-b)^{۲}+(n-c)^{۲}}}:\frac{m-b}{\sqrt{(l-a)^{۲}+(m-b)^{۲}+(n-c)^{۲}}}$$
$$:\frac{n-c}{\sqrt{(l-a)^{۲}+(m-b)^{۲}+(n-c)^{۲}}}$$

۱۴. نسبتهای هادی این بردار با اعداد ۳ − ۵ و ۲ − ۴− و ۱ − ۳ متناسب‌اند. بنابراین کسینوسهای هادی این بردار عبارت‌اند از

$$\frac{۲}{\sqrt{۲^{۲}+(-۶)^{۲}+۲^{۲}}}:\frac{-۶}{\sqrt{۲^{۲}+(-۶)^{۲}+۲^{۲}}}:\frac{۲}{\sqrt{۲^{۲}+(-۶)^{۲}+۲^{۲}}}$$

و یا

$$\frac{۲}{\sqrt{۴۴}}:-\frac{۶}{\sqrt{۴۴}}:\frac{۲}{\sqrt{۴۴}}$$

۱۵. فرض کنید $۳m$، $۷m$ و $۱۱m$ کسینوسهای هادی این بردار باشند، بنابراین،

$$(۳m)^{۲}+(۷m)^{۲}+(۱۱m)^{۲}=۱$$

و با ساده‌کردن طرفین این رابطه، مقدار $m^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$m^{۲}=\frac{۱}{۳^{۲}+۷^{۲}+۱۱^{۲}}=\frac{۱}{۹+۴۹+۱۲۱}=\frac{۱}{۱۷۹}\Rightarrow m=\frac{۱}{\sqrt{۱۷۹}}$$

پس کسینوسهای هادی این بردار، عبارت‌اند از

$$\frac{۳}{\sqrt{۱۷۹}},\ \frac{۷}{\sqrt{۱۷۹}},\ \frac{۱۱}{\sqrt{۱۷۹}}$$

۱۶. اگر β زاویه‌ای باشد که بردار با محور yها، می‌سازد، داریم

$$\cos^{۲}\alpha+\cos^{۲}\beta+\cos^{۲}\gamma=۱$$

$$\Rightarrow \cos^2 70^\circ + \cos^2\beta + \cos^2 80^\circ = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\beta = 1 - \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ = 1 - 0/1169777 - 0/0301536 = 0/8528686$$

$$\Rightarrow \cos\beta = 0/9235088 \Rightarrow \beta = 22/6^\circ$$

۱۷. اگر α، β و γ زاویه‌هایی باشند که بردار با محورهای مختصات می‌سازد، داریم

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

حال فرض کنید، $\alpha = \beta = \gamma$

$$\Rightarrow 3\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

و کسینوسهای هادی چنین برداری، برابرند با

$$\frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} : -\frac{1}{\sqrt{3}} : -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۸.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$$

می‌دانیم که $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

بنابراین، $\Rightarrow \cos^2 2\alpha = 4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1$

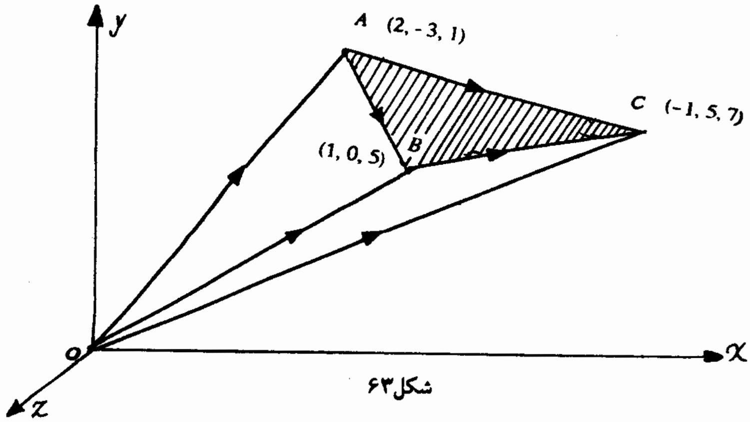
$$2\cos^2\alpha + 4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1 = 1 \Rightarrow 4\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha(2\cos^2\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \quad \text{یا} \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

بنابراین، کسینوسهای هادی این بردار برابرند با،

$$\frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}} : 0 \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} : -\frac{1}{\sqrt{2}} : 0$$

۱۹.



شکل۶۳

بردارهای متناظر با اضلاع این مثلث را به‌دست می‌آوریم (شکل ۶۳):

$$\overrightarrow{AB} = -\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = -۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = -۳\mathbf{i} + ۸\mathbf{j} + ۶\mathbf{k}$$

بنابراین،

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-۱)^۲ + ۳^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۲۶} = ۵/۱۰ = a$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-۲)^۲ + ۵^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۳۳} = ۵/۷۴ = b$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-۳)^۲ + ۸^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۱۰۹} = ۱۰/۴ = c$$

$$\text{محیط مثلث} = ۲P = ۵/۱ + ۵/۷۴ + ۱۰/۴ = ۲۱/۲۴$$

$$\text{نصف محیط} = P = ۱۰/۶۲$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{۱۰/۶۲ \times (۱۰/۶۲ - ۵/۱۰) \times (۱۰/۶۲ - ۵/۷۴) \times (۱۰/۶۲ - ۱۰/۴)} \\ &= \sqrt{۱۰/۶۲ \times ۵/۵۲ \times ۴/۸۸ \times ۰/۲۲} = ۷/۹۳ \end{aligned}$$

حل تمرین فصل ۳

۱. الف)
$$\frac{x+۱}{۱} = \frac{y+۲}{۲} = \frac{z+۳}{۳} = \lambda$$

قرار می‌دهیم

$$x = \lambda - ۱$$

$$y = ۲\lambda - ۲$$

$$z = ۳\lambda - ۳$$

بنابراین معادلهٔ برداری خط داده شده عبارت است از

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = -\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۳ + \lambda(\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r} = (-\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۳) + \lambda(\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k})$$

در این معادله، $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$، بردار مکان یکی از نقطه‌های خط $\mathbf{b} = \mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ بردار هادی متناظر خط است.

ب)
$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۲}{-۳}=\frac{z-۳}{۴}=t$$

از تساویهای فوق، مقدارهای x، y و z را برحسب t به‌دست می‌آوریم:

$$x=۲t+۱$$
$$y=-۳t+۲$$
$$z=۴t+۳$$

بنابراین، $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}+t(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})$ معادلهٔ برداری خط فوق است که در آن $\mathbf{a}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$، به‌ترتیب، بردار مکان یک نقطهٔ خط و بردار هادی خط هستند.

ج)
$$\frac{x}{۳}=\frac{y+۳}{-۴}=\frac{z-۱}{۲}=\mu$$

مقدارهای x، y و z را برحسب μ، به‌دست می‌آوریم:

$$x=۳\mu$$
$$y=-۴\mu-۳$$
$$z=۲\mu+۱$$

پس معادلهٔ برداری این خط عبارت است از $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=-۳\mathbf{i}+\mathbf{k}+\mu(۳\mathbf{i}-۴\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$، که در آن $\mathbf{a}=-۳\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=۳\mathbf{i}-۴\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$، به‌ترتیب، بردار مکان یک نقطه از خط و بردار هادی متناظر خط هستند.

د)
$$\frac{x+a}{p}=\frac{y+b}{q}=\frac{z+c}{r}=s$$

مقادیر x، y و z را برحسب s محاسبه می‌کنیم:

$$x=sp-a$$
$$y=qs-b$$
$$z=rs-c$$

معادلهٔ برداری این خط عبارت خواهد بود از

$$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=(-a\mathbf{i}-b\mathbf{j}-c\mathbf{k})+s(p\mathbf{i}+q\mathbf{j}+r\mathbf{k})$$

که در این معادله، $-a\mathbf{i}-b\mathbf{j}-c\mathbf{k}$ و $p\mathbf{i}+q\mathbf{j}+r\mathbf{k}$ به‌ترتیب بردار مکان و بردار هادی این خط هستند.

۲. الف) بردار هادی متناظر با خط: $\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$

نسبتهای هادی خط: $۱:۲:۳$

کسینوسهای هادی متناظر: $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}:\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}:\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}$

اندازهٔ بردار هادی: $|\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}|=\sqrt{۱۴}$

ب) بردار هادی متناظر: $\mathbf{2i}-\mathbf{3j}+\mathbf{4k}$

نسبتهای هادی خط: $2:-3:4$

کسینوسهای هادی متناظر: $\frac{2}{\sqrt{29}}:\frac{-3}{\sqrt{29}}:\frac{4}{\sqrt{29}}$

اندازهٔ بردار هادی: $|\mathbf{2i}-\mathbf{3j}+\mathbf{4k}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{29}$

ج) بردار هادی متناظر: $\mathbf{3i}-\mathbf{4j}+\mathbf{2k}$

نسبتهای هادی خط: $3:-4:2$

کسینوسهای هادی متناظر: $\frac{3}{\sqrt{29}}:\frac{-4}{\sqrt{29}}:\frac{2}{\sqrt{29}}$

اندازهٔ بردار هادی متناظر: $|\mathbf{3i}-\mathbf{4j}+\mathbf{2k}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{29}$

د) بردار هادی متناظر: $p\mathbf{i}+q\mathbf{j}+r\mathbf{k}$

نسبتهای هادی خط: $p:q:r$

کسینوسهای هادی متناظر: $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}:\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}:\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$

اندازهٔ بردار هادی خط: $|p\mathbf{i}+q\mathbf{j}+r\mathbf{k}|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$

۳. به‌دلیل موازی بودن دو خط، داریم $n=3$، $m=2$، $l=1$. چون نقطهٔ $(-3,-4,-5)$ باید روی خط $\frac{x+a}{1}=\frac{y+b}{2}=\frac{z+c}{3}$ قرارگیرد، مختصات این نقطه باید در معادلهٔ خط، صدق کند. پس $a=3$، $b=4$ و $c=5$.

۴. چون خط $\frac{x+a}{-3}=\frac{y+b}{-4}=\frac{z+c}{-5}$ با خط $\frac{x-1}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-3}{n}$ موازی است. پس نسبتهای هادی این دو خط، باید باهم برابر باشد. پس $l:m:n=-3:-4:-5$، یعنی $l=-3$، $m=-4$ و $n=-5$. اما چون خط $\frac{x+a}{-3}=\frac{y+b}{-4}=\frac{z+c}{-5}$ از نقطه‌ای به مختصات $(2,2,2)$ می‌گذرد، پس $a=b=c=-2$.

۵. بردارهای هادی هریک از خطهای داده شده، در تمرین ۱، به‌ترتیب عبارت‌اند از

الف) $\mathbf{i}+\mathbf{2j}+\mathbf{3k}$ ب) $\mathbf{2i}-\mathbf{3j}+\mathbf{4k}$ ج) $\mathbf{3i}-\mathbf{4j}+\mathbf{2k}$ د) $p\mathbf{i}+q\mathbf{j}+r\mathbf{k}$

بنابراین بردارهای یکهٔ متناظر هریک از آنها، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

الف) $\hat{\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{2j}+\mathbf{3k}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i}+\frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$

ب) $\hat{\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{2i}-\mathbf{3j}+\mathbf{4k}}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i}-\frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{j}+\frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{k}$

ج) $\hat{\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{3i}-\mathbf{4j}+\mathbf{2k}}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{i}-\frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{j}+\frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{k}$

د) $\hat{\mathbf{a}}=\frac{p\mathbf{i}+q\mathbf{j}+r\mathbf{k}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\mathbf{i}+\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\mathbf{j}+\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\mathbf{k}$

۶. $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$

$$\mathbf{r}=(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k})+\lambda(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+7\mathbf{k})$$

۷. $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$

$$\mathbf{r}=(\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})+\mu(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k})$$

۸. $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})$

$$\mathbf{r}=(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})+\lambda(-3\mathbf{i}+6\mathbf{j}+4\mathbf{k})$$

۹. $\mathbf{r}=\mathbf{w}+\lambda(\mathbf{u}-\mathbf{w})$

۱۰. $\mathbf{r}=(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})+\lambda(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

۱۱. $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$، معادلهٔ برداری خطی است که از نقطهٔ A، با بردار مکان $\mathbf{a}$ می‌گذرد و با بردار داده شدهٔ $\mathbf{b}$ که آن‌را بردار هادی این خط می‌نامیم، همراستاست. اما $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})$، معادلهٔ برداری خطی است که از دو نقطهٔ A و B، که بردارهای مکان آنها، را به‌ترتیب $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، نامیده‌ایم، می‌گذرد. در این معادله، $\mathbf{b}-\mathbf{a}$، بردار هادی است.

۱۲. الف) $\mathbf{r}_1=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}-2\\3\\-4\end{bmatrix}$ ب) $\mathbf{r}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}1\\7\\-1\end{bmatrix}$

ج) $\mathbf{r}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\nu\begin{bmatrix}2\\2\\-3\end{bmatrix}$

۱۳. الف) اگر $t=1$، داریم $3\mathbf{j}-5\mathbf{k}+2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+7\mathbf{k}=2\mathbf{i}+2\mathbf{k}$ و بنابراین، $A(2,0,2)$ یکی از نقطه‌های خط است.

اگر $t=2$، داریم $3\mathbf{j}-5\mathbf{k}+4\mathbf{i}-6\mathbf{j}+14\mathbf{k}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+9\mathbf{k}$ و $B(4,-3,9)$ نقطهٔ دیگر آن است.

و سرانجام به‌ازای $t=-3$، $3\mathbf{j}-5\mathbf{k}-6\mathbf{i}+9\mathbf{j}-21\mathbf{k}=-6\mathbf{i}+12\mathbf{j}-26\mathbf{k}$ و $C(-6,12,-26)$، نقطهٔ سوم این خط است.

ب) به‌ازای $\mu=0$، داریم $\mathbf{i}-\mathbf{j}+7\mathbf{k}$، و نقطهٔ $A'(1,-1,7)$ یکی از نقاط این خط است.

اگر $\mu=-2$، آنگاه، $\mathbf{i}-\mathbf{j}+7\mathbf{k}-2\mathbf{i}-6\mathbf{j}-8\mathbf{k}=-\mathbf{i}-7\mathbf{j}-\mathbf{k}$ و نقطهٔ $B'(-1,-7,-1)$، یک نقطهٔ خط است.

اگر $\mu=1$، آنگاه، $\mathbf{i}-\mathbf{j}+7\mathbf{k}+\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+11\mathbf{k}$ و نقطهٔ $C'(2,2,11)$، یک نقطهٔ خط است.

ج) به‌ازای $\lambda=-1$، $-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-4\mathbf{k}+6\mathbf{i}-10\mathbf{j}-2\mathbf{k}=4\mathbf{i}-9\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ و نقطهٔ $A''(4,-9,-6)$، یک نقطهٔ خط است.

به‌ازای $\lambda = -۱$، $-۲\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۴\mathbf{k} + ۳\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} - \mathbf{k} = \mathbf{i} - ۴\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$ و نقطهٔ $B''(+۱, -۴, -۵)$، یک نقطهٔ خط است.

و به‌ازای $\lambda = ۴$، $(-۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-۴\mathbf{k}) - ۱۲\mathbf{i}+۲۰\mathbf{j}+۴\mathbf{k} = -۱۴\mathbf{i}+۲$ و نقطهٔ $C''(-۱۴, ۲۱, ۰)$، یک نقطهٔ خط است.

۱۴. معادلهٔ خط l، به‌صورت زیر مفروض است:

فرض کنید $\mathbf{r} = ۵\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۷\mathbf{k} + \lambda(-۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۳\mathbf{k})$

پس، $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = ۵\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۷\mathbf{k} + \lambda(-۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۳\mathbf{k})$

$$x = ۵ - ۲\lambda\ ,\quad y = -۱ + ۳\lambda\ ,\quad z = ۷ + ۳\lambda$$

بنابراین، معادله‌های متقارن خط l، به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\lambda = \frac{۵ - x}{۲} = \frac{y + ۱}{۳} = \frac{z - ۷}{۳}$$

مختصات نقطه‌ای که بردار مکان آن داده شده است، عبارت‌اند از

$$x = ۱\quad ,\quad y = ۵\quad ,\quad z = ۱۳$$

با قرار دادن این مقادیر، در معادلهٔ متقارن خط l، خواهیم داشت

$$\lambda = \frac{۵ - ۱}{۲} = ۲\ ,\quad \lambda = \frac{۵ + ۱}{۳} = ۲\ ,\quad \lambda = \frac{۱۳ - ۷}{۳} = ۲$$

یعنی این نقطه، متعلق به خط l است.

۱۵. ابتدا با فرض $l : \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$، معادلهٔ برداری خط داده شده، را به‌صورت معادله‌های متقارن، می‌نویسیم:

$$\mathbf{r} = (۵\mathbf{i} + ۷\mathbf{k}) + \mu(۳\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} - ۳\mathbf{k})$$

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (۵\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}) + \mu(۳\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} - ۳\mathbf{k})$$

$$x = ۳\mu\quad ,\quad y = ۵ - ۷\mu\quad ,\quad z = ۷ - ۳\mu \Rightarrow \mu = \frac{x}{۳} = \frac{y - ۵}{-۷} = \frac{z - ۷}{-۳}$$

مختصات نقطهٔ داده شده، عبارت‌اند از $x = ۳\ ,\quad y = -۲\ ,\quad z = ۴$

که با قرار دادن آنها، در معادلهٔ متقارن خط، خواهیم داشت

$$\mu = \frac{۳}{۳} = \frac{-۲ - ۵}{-۷} = \frac{۴ - ۷}{-۳} = ۱$$

و چون برای هر سه مقدار x، y و z از این نقطه، یک μ، وجود دارد بنابراین این نقطه متعلق به خط است.

۱۶. چون این خط، از نقطه‌ای با بردار مکان $-۲\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$، گذشته و با بردار $۳\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + \mathbf{k}$، موازی

است، پس معادلهٔ برداری آن، به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{r} = (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) + \lambda(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$A(-2, 4, -5)$$

حال اگر نقطهٔ A، نقطه‌ای از خط باشد، باید مختصات آن در خط صدق کند، یعنی،

$$x = -2 + 3\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$y = 4 + 5\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$z = -5 + \lambda = -5 \Rightarrow \lambda = 0$$

پس اگر A، روی این خط باشد، باید داشته باشیم

$$\lambda = 0$$

حال نقطهٔ B را نقطه‌ای روی این خط، فرض می‌کنیم:

$$B(-5, -1, -6)$$

$$x = -2 + 3\lambda = -5 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$y = 4 + 5\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$z = -5 + \lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\Rightarrow \lambda = -1$$

و اگر نقطهٔ C، روی این خط قرار داشته باشد،

$$C(4, 14, -3)$$

$$x = -2 + 3\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$y = 4 + 5\lambda = 14 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$z = -5 + \lambda = -3 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\Rightarrow \lambda = 2$$

حل تمرین فصل ۴

۱. می‌دانید معادلهٔ برداری خطی که از نقطه‌ای با بردار مکان $\mathbf{a}$ بگذرد و با بردار هادی $\mathbf{b}$ موازی باشد، به‌صورت $\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$ است. پس معادلهٔ برداری دو خط مطلوب، عبارت‌اند از

$$\mathbf{r} = (-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) + s(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$l_1 : x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) + s(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \qquad (1)$$

$$l_2 : x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + \lambda(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \qquad (2)$$

از رابطهٔ (۱) داریم

$$x=-1+2s\,,\quad y=3+3s\,,\quad z=5-s$$

و یا،

$$s=\frac{x+1}{2}\,,\quad s=\frac{y-3}{3}\,,\quad z=5-z$$

و از رابطهٔ (۲) داریم

$$x=2-\lambda\,,\quad y=3+2\lambda\,,\quad z=4+5\lambda$$

یا،

$$\lambda=2-x\,,\quad \lambda=\frac{y-3}{2}\,,\quad \lambda=\frac{z-4}{5}$$

پس معادله‌های متقارن این دو خط، عبارت‌اند از

$$l_2:\ \frac{-2+x}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{5}=\lambda$$

$$l_1:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{5-z}{1}=s$$

یعنی نسبتهای هادی خط l_1، مساوی‌اند با ۱ : ۳ : ۲ ولی نسبتهای هادی خط l_2، ۵ : ۲ : ۱− هستند و بنابراین l_1 و l_2، موازی نیستند.

برای روشن شدن وضعیت تقاطع دو خط، ضرایب x، y و z را در دو خط مساوی هم قرارمی‌دهیم:

$$2-\lambda=-1+2s\Rightarrow\ \lambda=3-2s \qquad (3)$$

$$3+3s=3+2\lambda\Rightarrow\ \lambda=\frac{3}{2}s \qquad (4)$$

$$5-s=4+5\lambda\Rightarrow\ \lambda=\frac{1-s}{5} \qquad (5)$$

معادله‌های (۳) و (۴)، را باهم درنظر گرفته و از آنجا، مقدار s را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{3}{2}s=3-2s\Rightarrow\frac{7}{2}s=3\Rightarrow s=\frac{6}{7}$$

حالا، رابطه‌های (۴) و (۵) را باهم حل می‌کنیم و مجدداً مقدار s را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{3}{2}s=\frac{1-s}{5}\Rightarrow\frac{3}{2}s+\frac{s}{5}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{17}{10}s=\frac{1}{5}\Rightarrow s=\frac{2}{17}$$

و چون مقدار s، از این سه رابطه، یک مقدار مساوی، به‌دست نیامد، پس این دو خط، متقاطع نیز نیستند، پس متنافرند.

۲. بنابر تعریف، داریم

$$\mathbf{b}+\mathbf{a}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})=2-6+12=8$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=6+3-8=1$$

پس $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$، مساوی ۹ است از طرفی داریم

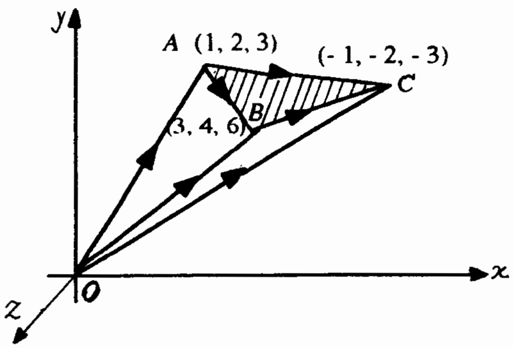
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})\cdot(۴\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}) = ۸-۳+۴ = ۹$$

از این تمرین، می‌توان نتیجه گرفت که ضرب داخلی روی جمع بردارها، توزیع‌پذیر است.

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

۳.

$$\overrightarrow{AB} = ۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{BC} = -۴\mathbf{i}-۶\mathbf{j}-۹\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{AC} = -۲\mathbf{i}-۴\mathbf{j}-۶\mathbf{k}$$



شکل۶۴

پس طول اضلاع این مثلث، مساوی خواهد بود با (شکل ۶۴)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{۲^۲+۲^۲+۳^۲} = \sqrt{۱۷} = ۴/۱۲۳$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{۱۶+۳۶+۸۱} = \sqrt{۱۳۳} = ۱۱/۵$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{۴+۱۶+۳۶} = \sqrt{۵۶} = ۷/۴۸$$

بنابراین،

$$\text{نصف محیط} = P = \frac{۴/۱۲۳+۱۱/۵+۷/۴۸}{۲} = ۱۱/۶$$

$$\text{مساحت} = S = \sqrt{۱۱/۶\times(۱۱/۶-۴/۱۲۳)(۱۱/۶-۱۱/۵)(۱۱/۶-۷/۴۸)}$$
$$= \sqrt{۱۱/۶\times ۷/۴۸\times ۰/۱\times ۴/۱۲} = ۵/۹۸$$

۴. اگر α، β و γ، به‌ترتیب زاویه‌هایی باشند که V، با محور xها، yها و zها می‌سازد، داریم

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma = ۱$$
$$\Rightarrow \cos^۲ ۳۰ + \cos^۲ ۶۰ + \cos^۲\gamma = ۱ \Rightarrow \cos^۲\gamma = ۱-۰/۷۵-۰/۲۵ = ۰$$
$$\Rightarrow \gamma = ۹۰^\circ$$

و بنابراین، بردار V بر محور zها، عمود است.

۵. الف) حاصلضرب داخلی بردارهای a و b، را تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

اگر دو بردار برهم عمود باشند زاویهٔ بین آنها 90° خواهد بود:

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$$

$$(t\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot(-2\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}+3\mathbf{k})=-2t+\lambda+9=0$$

بنابراین،

$$\lambda=2t-9$$

ب) اگر این دو بردار، موازی باشند، باید نسبتهای هادی آنها باهم برابر باشد. یعنی، $t=-2$ و $\lambda=1$.

۶. الف) برای دو بردار عمود برهم، حاصلضرب داخلی، مساوی صفر است، پس،

$$(7\mathbf{i}+2\lambda\mathbf{j}-9\mathbf{k})\cdot(7\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mu\mathbf{k})=0$$

$$\Rightarrow 49+8\lambda-9\mu=0\Rightarrow 8\lambda=-49+9\mu$$

ب) فرض کنید

$$\lambda=-1\,,\ \mu=2$$

از حاصلضرب داخلی دو بردار، داریم

$$(7\mathbf{i}-2\mathbf{j}-9\mathbf{k})\cdot(7\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k})=\sqrt{49+4+81}\sqrt{49+16+4}\cos\theta$$

$$\Rightarrow 49-8-18=\sqrt{7^2+4+81}\sqrt{49+16+4}\cos\theta$$

$$\Rightarrow 23=(11{,}6)(8{,}31)\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{23}{11{,}6\times 8{,}31}=0{,}238696$$

$$\Rightarrow\theta\approx 76{,}2^\circ$$

ج) در صورت توازی این دو بردار، نسبتهای هادی آنها را، مساوی قرار می‌دهیم:

$$2\lambda=4\Rightarrow\lambda=2 \quad \text{و} \quad \mu=-9$$

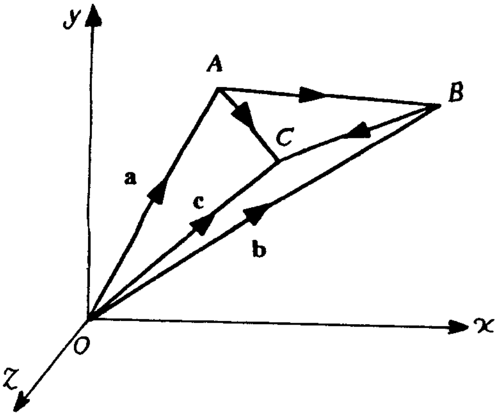
۷. سه نقطهٔ A، B و C با بردارهای مکان a، b و c داده شده‌اند (شکل ۶۵).

الف) با توجه به شکل و جمع مثلثی بردارها، خواهیم داشت

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}-2\mathbf{i}-5\mathbf{j}+7\mathbf{k}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=-5\mathbf{i}-7\mathbf{j}+11\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}=\mathbf{i}+6\mathbf{j}+11\mathbf{k}-2\mathbf{i}-5\mathbf{j}+7\mathbf{k}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+18\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{i}+6\mathbf{j}+11\mathbf{k}+3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=4\mathbf{i}+8\mathbf{j}+7\mathbf{k}$$



شکل۶۵

ب) ابتدا طول اضلاع AB، BC و AC از مثلث $A\hat{B}C$ را به‌دست می‌آوریم تا از قانون کسینوسها، در این مثلث، استفاده کنیم:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-۵)^۲ + (-۷)^۲ + ۱۱^۲} = ۱۳/۹۶$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-۱)^۲ + ۱^۲ + ۱۸^۲} = ۱۸/۰۶$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{۴^۲ + ۸^۲ + ۷^۲} = ۱۱/۳۶$$

یک)

$$(AC)^۲ = (AB)^۲ + (BC)^۲ - ۲ \times AB \times BC \cos \angle ABC$$

$$\Rightarrow ۳۲۶ = ۱۹۵ + ۱۲۹ - ۲ \times ۱۳/۹۶ \times ۱۱/۳۶ \cos \angle ABC$$

$$\Rightarrow \cos \angle ABC = \frac{۳۲۴ - ۳۲۶}{۲ \times ۱۳/۹۶ \times ۱۱/۳۶} = -\frac{۲}{۲ \times ۱۳/۹۶ \times ۱۱/۳۶}$$

$$\Rightarrow \angle ABC = ۹۰/۴^\circ \Rightarrow \angle ABC = ۸۹/۶^\circ$$

دو) با استفاده از حاصلضرب داخلی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$، داریم:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}| \cos \angle ABC$$

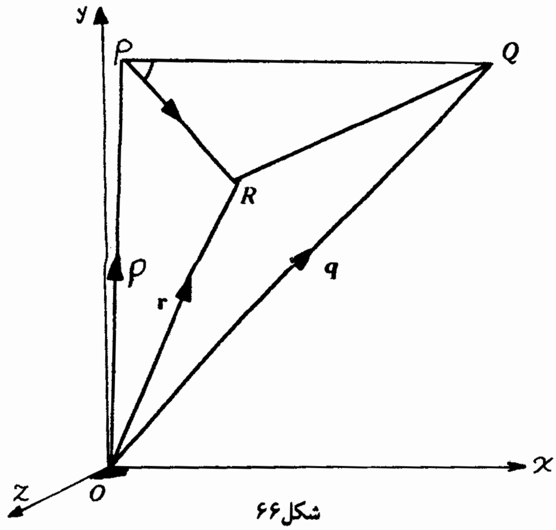
$$\Rightarrow (-۵\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} + ۱۱\mathbf{k}) \cdot (۴\mathbf{i} + ۸\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}) = ۱۳/۹۶ \times ۱۱/۳۶ \cos \angle ABC$$

$$\Rightarrow \cos \angle ABC = \frac{-۲۰ - ۵۶ + ۷۷}{۱۳/۹۶ \times ۱۱/۳۶} = \frac{۱}{۱۳/۹۶ \times ۱۱/۳۶}$$

$$\Rightarrow \angle ABC = ۸۹/۶^\circ$$

۸. الف) طول بردارهای $\overrightarrow{PQ}$، $\overrightarrow{QR}$ و $\overrightarrow{PR}$ را حساب می‌کنیم (شکل ۶۶):

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = \mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k} \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۴}$$



شکل۶۶

$$\overrightarrow{PR} = \mathbf{r} - \mathbf{p} = -۶\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۴\mathbf{k} \Rightarrow |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{۳۶ + ۹ + ۱۶} = \sqrt{۶۱}$$

$$\overrightarrow{RQ} = \mathbf{q} - \mathbf{r} = ۷\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۷\mathbf{k} \Rightarrow |\overrightarrow{RQ}| = \sqrt{۴۹ + ۱ + ۴۹} = \sqrt{۹۹}$$

ب) یک) با استفاده از قضیهٔ کسینوسها داریم

$$(RQ)^۲ = (PR)^۲ + (PQ)^۲ - ۲(PR)(PQ)\cos\angle RPQ$$

$$\Rightarrow \cos P\hat{R}Q = \frac{۶۱ + ۱۴ - ۹۹}{۲\sqrt{۶۱}\sqrt{۱۴}} = \frac{-۲۴}{۲\sqrt{۶۱}\sqrt{۱۴}} = -۰/۴۱۰۶۳۱۵$$

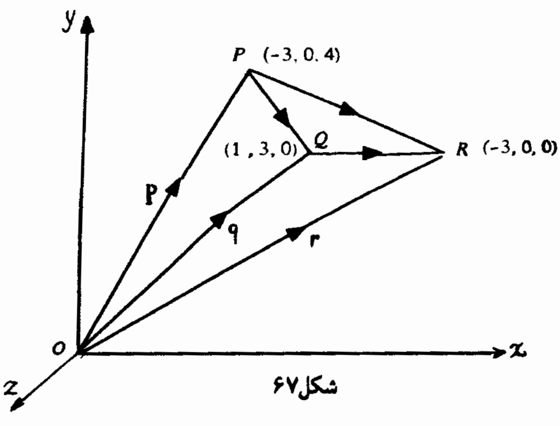
$$\Rightarrow \angle RPQ = ۱۱۴/۲۴^\circ \Rightarrow \angle RPQ = ۶۵/۷۶^\circ$$

دو) از ضرب داخلی بردارهای $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$، داریم

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} = (-۶\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) = -۶ + ۶ - ۱۲$$

$$= \sqrt{۳۶ + ۹ + ۱۶}\sqrt{۱ + ۴ + ۹}\cos\angle RPQ$$

$$\Rightarrow \cos\angle RPQ = \frac{-۱۲}{\sqrt{۶۱}\sqrt{۱۴}} = -۰/۴۱۰۶۳۱۵ \Rightarrow \angle RPQ = ۶۵/۷۶^\circ$$



شکل۶۷

الف)
$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = ۴\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{PR} = \mathbf{r} - \mathbf{p} = -۴\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{QR} = \mathbf{r} - \mathbf{q} = -۴\mathbf{i} - ۳\mathbf{j}$$

و طول این بردارها، برابر است با (شکل ۶۷)

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۴۱}$$
$$\left|\overrightarrow{PR}\right| = ۴$$
$$\left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵$$

ب) یک)
$$\mathbf{a} = ۳\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$$
$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{(۳)^۲ + (-۴)^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۵۰}$$

دو) $|\mathbf{b}| = b = \sqrt{(-۳)^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۳۴}$

سه) $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۳}$

چهار) $|\mathbf{r}| = r = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$

پنج) $|\mathbf{p}| = p = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$

برای به‌دست آوردن بردار یکهٔ متناظر با هر بردار، کافی است، توجه کنیم که،

$$\mathbf{a} = |a|\hat{\mathbf{a}}$$

یک) $\hat{\mathbf{a}} = \dfrac{\mathbf{a}}{|a|} = \dfrac{۳\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲ + ۵^۲}} = \dfrac{۳}{\sqrt{۵۰}}\mathbf{i} - \dfrac{۴}{\sqrt{۵۰}}\mathbf{j} + \dfrac{۵}{\sqrt{۵۰}}\mathbf{k}$

دو) $\hat{\mathbf{b}} = \dfrac{-۳\mathbf{i} + ۵\mathbf{k}}{\sqrt{۳۴}} = -\dfrac{۳}{\sqrt{۳۴}}\mathbf{i} + \dfrac{۵}{\sqrt{۳۴}}\mathbf{k}$

سه) $\hat{\mathbf{r}} = \dfrac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{۳}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۳}}\mathbf{i} + \dfrac{۱}{\sqrt{۳}}\mathbf{j} + \dfrac{۱}{\sqrt{۳}}\mathbf{k}$

چهار) $\hat{\mathbf{r}} = \dfrac{a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$

پنج) $\hat{\mathbf{p}} = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}}$

۱۰. الف)
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$$
$$\Rightarrow (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = \sqrt{۴ + ۹ + ۱۶}\sqrt{۱ + ۱ + ۱} \cdot \cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{-۲ - ۳ - ۴}{\sqrt{۲۹}\sqrt{۳}} = -\frac{۹}{\sqrt{۲۹}\sqrt{۳}} \Rightarrow \theta = ۱۵{,}۲^{\circ}$$

ب) بردارهای u و v با مختصات انتهایشان، معرفی شده‌اند:

$$\mathbf{u} = (۱, ۲, ۳) \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = (-۱, -۲, -۳)$$

پس

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}) = -۱ - ۴ - ۹$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{۱ + ۴ + ۹}\sqrt{۱ + ۴ + ۹}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱۴}{\sqrt{۱۴}\sqrt{۱۴}} \Rightarrow \theta = ۰^\circ$$

یعنی این دو بردار، موازی‌اند و باهم زاویه‌ای نمی‌سازند.

۱۱. الف) $۳\mathbf{j}$ ب) $-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ ج) $-\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} - ۹\mathbf{k}$

د) $۴\mathbf{k}$ ه) $-۴\mathbf{i} + ۵\mathbf{k}$

۱۲. $A(-۷, ۰, ۷)$، $B(۰, ۲, -۳)$ و $C(۰, ۰, -۱)$.

۱۳. الف) $|\mathbf{u}| = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲ + ۱} = ۳$ ب) $|\mathbf{v}| = \sqrt{۵^۲ + ۵^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۸۶}$

ج) $|\mathbf{w}| = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۶}$

۱۴.

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{۱^۲ + ۴^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۴۲}$$

$$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{۱^۲ + ۲^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۳۰}$$

$$\left|\overrightarrow{OR}\right| = \sqrt{۲^۲ + ۴^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۴ + ۱۶ + ۳۶} = \sqrt{۵۶}$$

۱۵. الف) $|\mathbf{a}| = \sqrt{۴^۲ + ۵^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۱۶ + ۲۵ + ۳۶} = \sqrt{۷۷} = ۸/۷۸$

ب) $|\mathbf{a} - \mathbf{c}| = |۳\mathbf{i} - ۸\mathbf{j} + ۶\mathbf{k}| = \sqrt{۹ + ۶۴ + ۳۶} = \sqrt{۱۰۹} = ۱۰/۴۴$

ج) $|\mathbf{b} + \mathbf{a} + \mathbf{c}| = |۷\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} + ۱۱\mathbf{k}| = \sqrt{۷^۲ + ۵^۲ + ۱۱^۲} = \sqrt{۱۹۵} = ۱۳/۹۶$

۱۶. الف)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (۳\mathbf{i} - \mathbf{j} - ۵\mathbf{k}) \cdot (-۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$$

$$= -۶ - ۵ - ۲۰ = \sqrt{۹ + ۱ + ۲۵}\sqrt{۴ + ۲۵ + ۱۶}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۳۱}{\sqrt{۳۵}\sqrt{۴۵}} = ۰/۷۸۱۱۲۶۵ \Rightarrow \theta = ۳۸/۶^\circ$$

ب) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (۳\mathbf{i} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{k}) = -۱ = \sqrt{۹ + ۱}\sqrt{۱ + ۱}\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}\sqrt{۲}} = ۰/۲۲۳۶۰۶۸ \Rightarrow \theta = ۷۷/۱^\circ$$

ج)

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = (\mathbf{i} - \mathbf{j} - ۷\mathbf{k}) \cdot (-۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$= -۲ - ۲ - ۷ = -۱۱ = \sqrt{۱ + ۱ + ۴۹}\sqrt{۴ + ۴ + ۱}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۱۱}{۳\sqrt{۵۱}} = ۰/۵۱۳۴۳۶ \Rightarrow \theta = ۵۹/۱^\circ$$

۱۷. فرض کنید این دو بردار را a و b بنامیم. در این‌صورت،

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$$

و چون $|\mathbf{a}| = ۱$ و $|\mathbf{b}| = ۲$ و نیز زاویهٔ بین این دو بردار ۳۰° است، خواهیم داشت

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ۱\times ۲\cdot\cos ۳۰^\circ = ۱\times ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳} \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ۱/۷۳۲$$

۱۸. الف) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = ۰$ ب) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = ۱$

ج) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}$ د) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = ۰$

۱۹. الف) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۵\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}) = ۲ - ۶ - ۵ = -۹$

ب) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (-\mathbf{j} - \mathbf{k})\cdot(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = -۱ - ۱ = -۲$

ج) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۵\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = -۳ - ۴ - ۵ = -۱۲$

د) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۲\mathbf{k})\cdot(۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}) = ۴ + ۴ + ۴ = ۱۲$

۲۰. الف) اگر دو بردار برهم عمود باشند، حاصلضرب داخلی آنها، باید مساوی صفر باشد:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ۰ \Rightarrow (۳t\mathbf{i} + ۲t^۲\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot[(۱ - t)\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - \mathbf{k}] = ۰$$

$$\Rightarrow ۳t(۱ - t) + ۲t^۲۳ - ۱ = ۰ \Rightarrow ۳t - ۳t^۲ + ۶t^۲ - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow ۳t^۲ + ۳t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = \frac{-۳\pm\sqrt{۹ + ۱۲}}{۶} = \frac{-۳\pm\sqrt{۲۱}}{۶}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲۱}}{۶} \quad \text{یا} \quad t = -\left(\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲۱}}{۶}\right)$$

ب) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = [۳(-۲)\mathbf{i} + ۲(۴)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\cdot[۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - \mathbf{k}] = (-۶\mathbf{i} + ۸\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot(۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - \mathbf{k})$

$$= -۱۸ + ۲۴ - ۱ = ۵ = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲ + ۱}\sqrt{۳^۲ + ۳^۲ + ۱}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۵}{\sqrt{۱۰۱}\sqrt{۱۹}} = ۰/۱۱۴۱۳۸۵ \Rightarrow \theta = ۸۳/۵^\circ$$

۲۱. حاصلضرب داخلی دو بردار را مساوی صفر، قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = [۲t^۲\mathbf{i} + (۱ - ۲t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}]\cdot[۲t\mathbf{i} - ۲t\mathbf{j} - ۴t^۲\mathbf{k}] = ۴t^۳ + (۱ - ۲t)(-۲t) + t(-۴t^۲)$$

$$= ۴t^۳ - ۲t + ۴t^۲ - ۴t^۳ = ۴t^۲ - ۲t = ۲t(۲t - ۱) = ۰$$

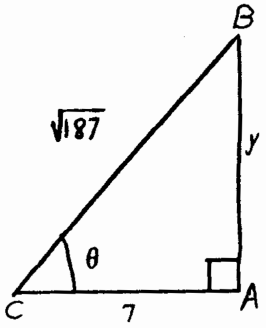
$$\Rightarrow t = ۰ \quad \text{یا} \quad t = \frac{۱}{۲}$$

۲۲.

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} = (۳\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot(-۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}) = -۶ + ۵ + ۲$$

$$= ۱ = \sqrt{۳^۲ + ۵^۲ + ۱}\sqrt{۲^۲ + ۱ + ۲^۲}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۳\sqrt{۳۵}} = ۰/۰۵۶۳۴۳۶ \Rightarrow \theta = ۸۶/۸^\circ$$



شکل ۶۸

.۲۳
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(۲\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k})$$
$$=۲-۶-۳=-۷$$
$$=\sqrt{۱+۹+۱}\sqrt{۴+۴+۹}\cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{-۷}{\sqrt{۱۷}\sqrt{۱۱}}$$
$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{۷}{\sqrt{۱۸۷}}$$

مثلث قائم‌الزاویهٔ $A\hat{B}C$، $(\angle A=۹۰^\circ)$ را که طول وتر آن مساوی $\sqrt{۱۸۷}$، و اندازهٔ ضلع AC در آن، برابر ۷ است، درنظر می‌گیریم (شکل ۶۸).با توجه به قضیهٔ فیثاغورس،

$$y=\sqrt{۱۸۷-۷^۲}=\sqrt{۱۳۸}=۱۱/۷۴۷۳۴\Rightarrow \tan\theta=\frac{\sqrt{۱۳۸}}{۷}=۱/۶۸$$

۲۴. الف) یک) $۲\mathbf{a}-۳\mathbf{e}=۶\mathbf{j}-۱۰\mathbf{k}-۹\mathbf{i}-۱۲\mathbf{j}-۱۵\mathbf{k}=-۹\mathbf{i}-۶\mathbf{j}-۲۵\mathbf{k}$

دو) $\mathbf{b}+۳\mathbf{d}+\mathbf{e}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}+۹\mathbf{i}+۶\mathbf{j}+۳\mathbf{k}+۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$
$$=۱۳\mathbf{i}+۱۲\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$$

سه) $۲\mathbf{b}-۴\mathbf{d}+۲\mathbf{e}=۲\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۶\mathbf{k}-۱۲\mathbf{i}-۸\mathbf{j}-۴\mathbf{k}+۶\mathbf{i}+۸\mathbf{j}+۱۰\mathbf{k}$
$$=-۴\mathbf{i}+۴\mathbf{j}$$

ب) یک) $|\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}|=\left|(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k})\cdot(۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k})\right|=\left|۳+۸-۱۵\right|=۴$

دو) $|\mathbf{a}-\mathbf{e}|=\left|۳\mathbf{j}-۵\mathbf{k}-۳\mathbf{i}-۴\mathbf{j}-۵\mathbf{k}\right|=\left|-۳\mathbf{i}-\mathbf{j}-۱۰\mathbf{k}\right|$
$$=\sqrt{۹+۱+۱۰۰}=\sqrt{۱۱۰}=۱۰/۵$$

سه) $|\mathbf{d}-\mathbf{a}|=\left|۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+\mathbf{k}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}\right|=\left|۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+۶\mathbf{k}\right|$
$$=\sqrt{۹+۱+۳۶}=\sqrt{۴۶}=۶/۷۸$$

چهار) $|\mathbf{d}\cdot\mathbf{e}|=\left|(۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k})\right|=۹+۸+۵=۲۲$

پنج) $|(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|=\left|[(۳\mathbf{j}-۵\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k})]\cdot(-۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\right|$
$$=\left|(۶+۱۵)(-۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\right|=\left|-۴۲\mathbf{i}-۲۱\mathbf{j}+۲۱\mathbf{k})\right|$$
$$=\sqrt{۴۲^۲+۲۱^۲+۲۱^۲}=\sqrt{۲۶۴۶}=۵۱/۴$$

ج) کسینوسهای هادی بردار $\mathbf{a}$ عبارت‌اند از

$$۰:\frac{۳}{\sqrt{۳^۲+۵^۲}}:\frac{-۵}{\sqrt{۳^۲+۵^۲}}$$ یا $۰:۰/۵۱۵:-۰/۸۵۸$

کسینوسهای هادی بردار $\mathbf{b}$ عبارت‌اند از
$$\frac{۱}{\sqrt{۱+۴+۹}}:\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}:-\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}$$

کسینوسهای هادی بردار $\mathbf{c}$ عبارت‌اند از
$$\frac{-۲}{\sqrt{۲^۲+۱+۱}}:\frac{-۱}{\sqrt{۶}}:\frac{۱}{\sqrt{۶}}$$

کسینوسهای هادی بردار d عبارت‌اند از $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}} : \frac{۲}{\sqrt{۱۴}} : \frac{۳}{\sqrt{۳^۲+۲^۲+۱^۲}}$

کسینوسهای هادی بردار e عبارت‌اند از $\frac{۵}{\sqrt{۵۰}} : \frac{۴}{\sqrt{۵۰}} : \frac{۳}{\sqrt{۳^۲+۴^۲+۵^۲}}$

د) یک
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e} = (۳\mathbf{j}-۵\mathbf{k})\cdot(۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k}) = ۱۲-۲۵ = -۱۳$$
$$= \sqrt{۳^۲+۵^۲}\sqrt{۳^۲+۴^۲+۵^۲}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{-۱۳}{\sqrt{۳۴}\sqrt{۵۰}} \Rightarrow \theta = ۷۱{,}۶^\circ$$

دو)
$$۲\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} = (۶\mathbf{j}-۱۰\mathbf{k})\cdot(۳\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+\mathbf{k}) = ۱۲-۱۰ = ۲$$
$$= \sqrt{۳۶+۱۰۰}\sqrt{۹+۴+۱}\cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۲}{\sqrt{۱۴}\sqrt{۱۳۶}} \Rightarrow \theta = ۸۷{,}۴^\circ$$

سه)
$$\mathbf{c}\cdot۲\mathbf{e} = (-۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(۶\mathbf{i}+۸\mathbf{j}+۱۰\mathbf{k}) = -۱۲-۸+۱۰ = -۱۰$$
$$= \sqrt{۴+۱+۱}\sqrt{۳۶+۶۴+۱۰۰}\cos\theta$$
$$= \cos\theta = \frac{۱۰}{\sqrt{۶}\sqrt{۲۰۰}} \Rightarrow \theta = ۷۳{,}۲^\circ$$

۲۵. ابتدا معادله‌های متقارن دو خط، را به‌دست می‌آوریم:
$$l_۱ :\ \mathbf{r} = ۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}+\lambda(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})$$
فرض کنید $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ معادلهٔ $l_۱$ باشد. در این‌صورت،
$$x = ۲+۲\lambda \text{ و } y = ۳-۳\lambda \text{ و } z = ۴+۵\lambda$$
درنتیجه،
$$l_۱ :\ \lambda = \frac{x-۲}{۲} = \frac{y-۳}{-۳} = \frac{z-۴}{۵}$$
و همچنین، با فرض $l_۲ : \mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، داریم
$$l_۲ :\ \mathbf{r} = ۲\mathbf{i}-۵\mathbf{j}+\mathbf{k}+\mu(۴\mathbf{i}-۶\mathbf{j}+۱۰\mathbf{k})$$
$$x = ۲+۴\mu \text{ و } y = -۵-۶\mu \text{ و } z = ۱+۱۰\mu$$
درنتیجه،
$$l_۲ :\ \mu = \frac{x-۲}{۴} = \frac{y+۵}{-۶} = \frac{z-۱}{۱۰}$$
و برای خط $l_۳$، نیز داریم،
$$l_۳ :\ \mathbf{r} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}+۳\mathbf{k}+\mathbf{v}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$$
$$x = -۱+\mathbf{v} \text{ و } y = ۱-\mathbf{v} \text{ و } z = ۳+۲\mathbf{v}$$
$$l_۳ :\ \frac{x+۱}{۱} = \mathbf{v} = \frac{y-۱}{-۱} = \frac{z-۳}{۲}$$

حالا نسبتهای هادی دو خط $l_۱$ و $l_۲$ را درنظر بگیرید. چون $\frac{۵}{۱۰} = \frac{-۳}{-۶} = \frac{۲}{۴}$، پس $l_۱ \| l_۲$. از نسبتهای هادی دو خط $l_۱$ و $l_۳$، واضح است که آنها موازی نیستند. این دو خط را باهم قطع

می‌دهیم تا ببینیم نقطهٔ تقاطع به‌دست خواهد آمد یا خیر؟ $\frac{y-۱}{-۱} = x+۱$ و $\frac{x-۲}{۲} = \frac{y-۳}{-۳}$.
از ساده کردن این دو رابطه، داریم

$$-۳x+۶ = ۲y-۶ \Rightarrow -۳x-۲y = -۱۲$$

$$x+۱ = -y+۱ \Rightarrow x+y = ۰ \Rightarrow x = -y$$

$$x = -y \quad \text{و} \quad -۳x+۲x = -۱۲ \Rightarrow x = ۱۲$$

با قرار دادن مقدار x، در رابطهٔ $y = -x$، خواهیم داشت،

$$y = -۱۲$$

از معادلهٔ خط $l_۱$، مقدار z را محاسبه می‌کنیم،

$$\lambda = \frac{۱۲-۲}{۲} = \frac{-۱۲-۳}{-۳} = ۵ = \frac{z-۴}{۵} \Rightarrow z = ۲۹$$

همچنین اگر مقدار z را با کمک معادلهٔ خط $l_۲$ بیابیم، خواهیم دید که

$$\mathbf{v} = \frac{۱۲+۱}{۱} = \frac{-۱۲-۱}{-۱} = ۱۳ = \frac{z-۳}{۲} \Rightarrow z = ۲۹$$

و این به‌معنای آن است که $l_۱$ و $l_۲$ متقاطع‌اند و مختصات نقطهٔ تلاقی آنها عبارت است از، $(۱۲,-۱۲,۲۹)$.

حالا وضعیت دو خط $l_۲$ و $l_۳$، را از جهت تقاطع بررسی می‌کنیم. این دو خط را باهم قطع می‌دهیم، یعنی معادلهٔ آنها را در یک دستگاه باهم حل می‌کنیم:

$$l_۲ : \mu = \frac{x-۲}{۴} = \frac{y+۵}{-۶} = \frac{z-۱}{۱۰}$$

$$l_۲ : \mathbf{v} = \frac{x+۱}{۱} = \frac{y-۱}{-۱} = \frac{z-۳}{۲}$$

$$\frac{x-۲}{۴} = \frac{y+۵}{-۶} \Rightarrow -۶x+۱۲ = ۴y+۲۰ \Rightarrow ۴y+۶x = -۸$$

$$\Rightarrow ۲y+۳x = -۴ \qquad (۱)$$

همچنین، با درنظرگرفتن دو نسبت اول، در معادلهٔ خط $l_۲$ داریم

$$x+۱ = -y+۱ \Rightarrow x+y = ۰ \Rightarrow x = -y$$

مقدار $x = -y$ را در رابطهٔ (۱)، قرار می‌دهیم:

$$۲y-۳y = -۴ \Rightarrow -y = -۴ \Rightarrow y = ۴ \quad \text{و} \quad x = -۴$$

از معادلهٔ خط $l_۲$ داریم

$$\mathbf{v} = \frac{-۴+۱}{۱} = \frac{۴-۱}{-۱} = -۳ = \frac{z-۳}{۲}$$

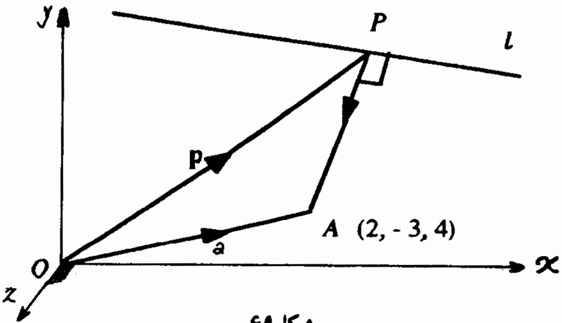
$$z = -۶+۳ = -۳$$

ولی از معادلهٔ خط $l_۲$ داریم

$$\mu = \frac{-۴-۲}{۴} = \frac{۴+۵}{-۶} \Rightarrow \mu = -\frac{۳}{۲} = \frac{z-۱}{۱۰} \Rightarrow -۱۵ = z-۱ \Rightarrow z = -۱۴$$

چون مقدار z، در دو خط، متفاوت است، نقطه‌ای که متعلق به این دو خط باشد وجود ندارد. پس $l_۱$ و $l_۲$، متنافرند.

.۲۶



شکل۶۹

از نقطهٔ A، به خط l، عمودی رسم می‌کنیم و پای عمود را p می‌نامیم (شکل ۶۹). چون p، نقطه‌ای متعلق به خط l است، در معادلهٔ آن، به‌ازای $\mu = \lambda$، صدق خواهد کرد. بنابراین،

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{p} = -\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k} + \mu(۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k})$$

$$= (-۱ + ۲\mu)\mathbf{i} + (۲ - ۳\mu)\mathbf{j} + (۴ + ۵\mu)\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PA} = \mathbf{a} - \mathbf{p} = (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) - [(-۱ + ۲\mu)\mathbf{i} + (۲ - ۳\mu)\mathbf{j} + (۴ + ۵\mu)\mathbf{k}]$$

$$= (۲ + ۱ - ۲\mu)\mathbf{i} + (-۳ - ۲ + ۳\mu)\mathbf{j} + (۴ - ۴ - ۵\mu)\mathbf{k}$$

$$= (۳ - ۲\mu)\mathbf{i} + (-۵ + ۳\mu)\mathbf{j} - ۵\mu\mathbf{k}$$

می‌خواهیم طول $\overrightarrow{PA}$ را محاسبه کنیم. بردار $\overrightarrow{PA}$ بر خط l عمود است، پس بر بردار هادی خط l عمود است. و این نیز به‌معنای آن است که، حاصلضرب داخلی بردارهای $\overrightarrow{PA}$ و $۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$ (بردار هادی خط l)، مساوی صفر است:

$$(۳ - ۲\mu)\cdot ۲ + (-۵ + ۳\mu)\cdot(۳) - ۵\mu(۵) = ۰$$

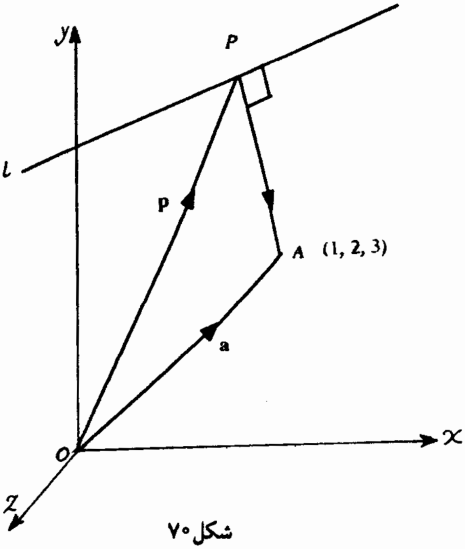
$$\Rightarrow ۶ - ۴\mu + ۱۵ - ۹\mu - ۲۵\mu = ۰ \Rightarrow -۳۸\mu = -۲۱ \Rightarrow \mu = \frac{۲۱}{۳۸}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PA} = \left(۳ - ۲\times\frac{۲۱}{۳۸}\right)\mathbf{i} + \left(-۵ + ۳\times\frac{۲۱}{۳۸}\right)\mathbf{j} - ۵\left(\frac{۲۱}{۳۸}\right)\mathbf{k}$$

$$= \frac{۱}{۳۸}(۷۲\mathbf{i} - ۱۲۷\mathbf{j} - ۱۰۵\mathbf{k})$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{PA}| = \frac{۱}{۳۸}\sqrt{۷۲^۲ + ۱۲۷^۲ + ۱۰۵^۲} = ۴/۷۳$$

.۲۷



شکل ۷۰

اگر p، پای عمود مرسوم از نقطهٔ A، بر خط l، باشد، با توجه به اینکه p روی خط l است (شکل ۷۰)،

$$\overrightarrow{OP}=\mathbf{p}=\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}+\mu(۴\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۲\mathbf{k})=\mathbf{i}(۱+۴\mu)+\mathbf{j}(۳+۳\mu)+\mathbf{k}(۵+۲\mu)$$

و همچنین،

$$\overrightarrow{PA}=\mathbf{a}-\mathbf{p}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}-[\mathbf{i}(۱+۴\mu)+\mathbf{j}(۳+۳\mu)+\mathbf{k}(۵+۲\mu)]$$
$$=[\mathbf{i}(۱-۱-۴\mu)+\mathbf{j}(۲-۳-۳\mu)+\mathbf{k}(۳-۵-۲\mu)]$$
$$=-۴\mu\mathbf{i}+\mathbf{j}(-۱-۳\mu)+\mathbf{k}(-۲-۲\mu)$$

چون $\overrightarrow{PA}$ بر l عمود است، پس بر بردار هادی خط l نیز عمود است. پس

$$\overrightarrow{PA}\cdot(۴\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۲\mathbf{k})=۰$$
$$\Rightarrow(۴\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۲\mathbf{k})\cdot[-۴\mu\mathbf{i}+\mathbf{j}(-۱-۳\mu)+\mathbf{k}(-۲-۲\mu)]=۰$$
$$\Rightarrow-۱۶\mu-۳(۱+۳\mu)+۲(-۲-۲\mu)=۰$$
$$\Rightarrow-۱۶\mu-۳-۹\mu-۴-۴\mu=۰\Rightarrow-۲۹\mu-۷=۰\Rightarrow\mu=-\frac{۷}{۲۹}$$

بنابراین،

$$\overrightarrow{PA}=-۴\left(-\frac{۷}{۲۹}\right)\mathbf{i}+\left(-۱+\frac{۳\times۷}{۲۹}\right)\mathbf{j}+\left(-۲+\frac{۱۴}{۲۹}\right)\mathbf{k}$$
$$=\frac{۲۸}{۲۹}\mathbf{i}-\frac{۸}{۲۹}\mathbf{j}-\frac{۴۴}{۲۹}\mathbf{k}$$
$$\Rightarrow|\overrightarrow{PA}|=\frac{\sqrt{۲۸^۲+۸^۲+۴۴^۲}}{۲۹}=۱{,}۸۲$$

۲۸. الف) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{3}$

$$\mathbf{r}=(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k})+\lambda(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$$

ب) $\frac{x-3}{-3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-5}{7}$

$$\mathbf{r}=(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k})+\lambda(-3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k})$$

ج) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-4}{3}$

$$\mathbf{r}=(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+4\mathbf{k})+\lambda(-\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$$

د) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{2}$

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\lambda 2\mathbf{k}$$

۲۹. ابتدا معادله‌های متقارن این دو خط، را به‌دست می‌آوریم:

$$l_1:\ \mathbf{r}=(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k})+\lambda(-\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}) \qquad (1)$$

$$l_2:\ \mathbf{r}=(3\mathbf{i}+2\mathbf{k})+\mu(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k}) \qquad (2)$$

با فرض $l_1:\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، از رابطهٔ (۱)، داریم

$$x=2-\lambda \text{ و } y=-3-3\lambda \text{ و } z=4+2\lambda$$

درنتیجه،

$$l_1:\ \lambda=\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-4}{2}$$

همچنین از رابطهٔ (۲) داریم

$$x=3+\mu \text{ و } y=-2\mu \text{ و } z=2-3\mu$$

$$l_2:\ \mu=\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{-3}$$

حالا معادله‌های متقارن دو خط l_1 و l_2 را باهم، در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{-3}\Rightarrow -3x+6=-y-3\Rightarrow -3x+y=-9$$

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-2}\Rightarrow -2x+6=y\Rightarrow 2x+y=6$$

$$\begin{cases}-3x+y=-9\\ 2x+y=6\end{cases}$$

اگر طرفین رابطهٔ دوم را از رابطهٔ اول، کم کنیم، خواهیم داشت

$$5x=15\Rightarrow x=3$$

با قرار دادن مقدار x، در رابطهٔ اول مقدار y را محاسبه می‌کنیم:

$$-9+y=-9\Rightarrow y=0$$

از معادلهٔ $l_۱$ و با استفاده از x و y، مقدار z را به‌دست می‌آوریم:

$$l_۱ :\ \lambda = \frac{۳-۲}{-۱} = \frac{y+۳}{-۳} = \frac{z-۴}{۲} = -۱ \Rightarrow z = ۲$$

این مقدار z در معادلهٔ $l_۲$ نیز صدق می‌کند:

$$l_۲ :\ \mu = \frac{۳-۳}{۱} = \frac{۰}{-۲} = \frac{۲-۲}{-۳} \Rightarrow \mu = ۰$$

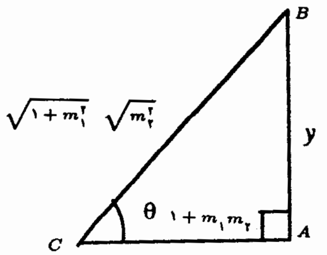
پس این دو خط، متقاطع‌اند و مختصات نقطهٔ تلاقی آنها عبارت است از $P(۳,۰,۲)$ یا $\overrightarrow{OP} = ۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{k}$.

۳۰. خط $y = m_۱x + c_۱$، از نقطهٔ $(۰, c_۱)$ می‌گذرد و با $m_۱$ موازی است. بنابراین معادلهٔ برداری این خط، عبارت است از $\mathbf{r} = \mathbf{j}c_۱ + \lambda(\mathbf{i} + m_۱\mathbf{j})$. همچنین خط $y = m_۱x + c_۱$ از نقطه‌ای به مختصات $(۰, c_۲)$ می‌گذرد و با $m_۲$ موازی است و بنابراین، معادلهٔ برداری آن به‌صورت $\mathbf{r} = \mathbf{j}c_۲ + \mu(\mathbf{i} + m_۲\mathbf{j})$ است. زاویهٔ بین این دو خط را می‌توان به کمک ضرب داخلی آنها به‌دست آورد:

$$(\mathbf{i} + m_۲\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + m_۱\mathbf{j}) = ۱ + m_۱m_۲ = \sqrt{۱ + m_۲^۲}\sqrt{۱ + m_۱^۲}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۱ + m_۱m_۲}{\sqrt{۱ + m_۲^۲}\sqrt{۱ + m_۱^۲}}$$

برای روشن شدن تعبیر θ، مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۷۱ را درنظر بگیرید.



شکل۷۱

بنابر قضیهٔ فیثاغورس، در این مثلث قائم‌الزاویه داریم

$$y^۲ = (۱ + m_۲^۲)(۱ + m_۱^۲) - (۱ + m_۱m_۲)^۲$$

$$y^۲ = ۱ + m_۲^۲ + m_۱^۲ + m_۱^۲m_۲^۲ - ۱ - m_۱^۲m_۲^۲ - ۲m_۱m_۲ = (m_۱ - m_۲)^۲$$

$$y = m_۱ - m_۲$$

در نتیجه،

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱m_۲} \Rightarrow \theta = \tan^{-۱}\frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱m_۲}$$

MATH75.IR

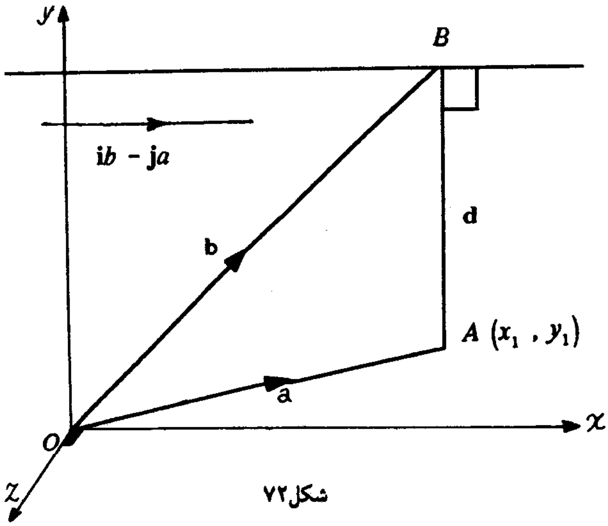
۳۱. برای نوشتن معادلهٔ برداری خط $ax + by + c = 0$، دو نقطه از این خط را به‌دست می‌آوریم و سپس با استفاده از شکل $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a})$، معادلهٔ برداری این خط را پیدا می‌کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow by + c = 0 \Rightarrow y = \frac{-c}{b} \Rightarrow \left(0, \frac{-c}{b}\right) \in ax + by + c = 0$$

$$x = b \Rightarrow ab + by + c = 0 \Rightarrow by = -c - ab \Rightarrow y = \frac{-c}{b} - a$$

$$\Rightarrow \left(b, \frac{-c}{b} - a\right) \in ax + by + c = 0$$

بردار هادی این خط، مساوی است با، $\mathbf{i}b - \mathbf{j}a$ و بردار مکان یک نقطه از خط را $-\mathbf{j}\frac{c}{b}$، درنظر می‌گیریم. در این‌صورت معادلهٔ برداری خط عبارت است از، $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = -\mathbf{j}\frac{c}{b} + \lambda(\mathbf{i}b - \mathbf{j}a)$ (شکل ۷۲).



شکل۷۲

می‌خواهیم طول d را بیابیم. توجه کنید که

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = -\mathbf{j}\frac{c}{b} + \lambda(+\mathbf{i}b - \mathbf{j}a) = \mathbf{i}b\lambda - \mathbf{j}\left(\frac{c}{b} + \lambda a\right)$$

$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 - \mathbf{i}b\lambda + \mathbf{j}\left(\frac{c}{b} + \lambda a\right) = \mathbf{i}(x_1 - b\lambda) + \mathbf{j}\left(y_1 + \frac{c}{b} + \lambda a\right)$$

بردار $\overrightarrow{BA}$ بر خط l و در نتیجه بر بردار هادی خط l عمود است، پس

$$\overrightarrow{BA} \cdot (\mathbf{i}b - \mathbf{j}a) = 0$$

$$(\mathbf{i}b - \mathbf{j}a) \cdot \left[\mathbf{i}(x_1 - b\lambda) + \mathbf{j}\left(y_1 + \frac{c}{b} + a\lambda\right)\right] = 0$$

$$b(x_1 - b\lambda) - a\left(y_1 + \frac{c}{b} + \lambda a\right) = 0$$

$$bx_1 - b^2\lambda - ay_1 - \frac{ac}{b} - \lambda a^2 = 0$$

$$(b^2 + a^2)\lambda = bx_1 - ay_1 - \frac{ac}{b} \Rightarrow \lambda = \frac{bx_1 - ay_1 - \frac{ac}{b}}{a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{i}\left[x_1 - b\cdot\frac{\left(bx_1 - ay_1 - \frac{ac}{b}\right)}{(a^2+b^2)}\right] + \mathbf{j}\left[y_1 + \frac{c}{b} + \frac{bx_1 - ay_1 - \frac{ac}{b}}{a^2+b^2}\cdot a\right]$$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{x_1(a^2+b^2) - b^2x_1 + aby_1 + ac}{a^2+b^2}\right]$$

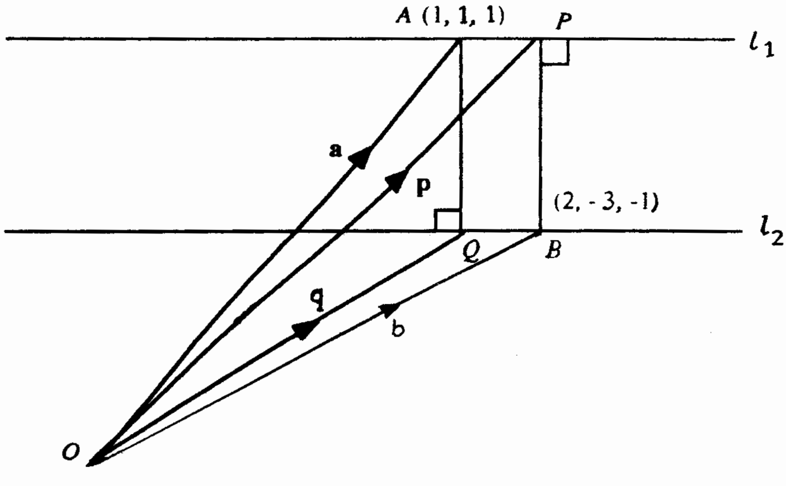
$$+ \mathbf{j}\left[\frac{(a^2+b^2)y_1 + \frac{c(a^2+b^2)}{b} + abx_1 - a^2y_1 - \frac{a^2c}{b}}{a^2+b^2}\right]$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = d = \frac{\sqrt{(a^2x_1 + aby_1 + ac)^2 + \left(b^2y_1 + \frac{c(a^2+b^2)}{b} + abx_1 - \frac{a^2c}{b}\right)^2}}{a^2+b^2}$$

$$= d = \frac{\sqrt{(a^2x_1 + aby_1 + ac)^2 + (b^2y_1 + cb + abx_1)^2}}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2(ax_1 + by_1 + c)^2 + b^2(by_1 + c + ax_1)^2}}{a^2+b^2} = \frac{|(ax_1 + by_1 + c)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۳۲. بردار مکان متناظر با نقطهٔ p، پای عمود مرسوم از نقطهٔ B بر خط l_1 و نیز بردار $\overrightarrow{PB}$، را مشخص می‌کنیم، (شکل ۷۳).



شکل۷۳

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{p} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}+\lambda(-2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-4\mathbf{k}) = (1-2\lambda)\mathbf{i} + (1-3\lambda)\mathbf{j} + (1-4\lambda)\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PB} = \mathbf{b} - \mathbf{p} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k} - [(1-2\lambda)\mathbf{i} + (1-3\lambda)\mathbf{j} + (1-4\lambda)\mathbf{k}]$$

$$= (2-1+2\lambda)\mathbf{i} + (-3-1+3\lambda)\mathbf{j} + (-1-1+4\lambda)\mathbf{k}$$

$$= (1+2\lambda)\mathbf{i} + (-4+3\lambda)\mathbf{j} + (-2+4\lambda)\mathbf{k}$$

بردار $\overrightarrow{PB}$ بر خط $l_۱$ عمود است و چون $l_۱$ با بردار هادی خود موازی است، پس $\overrightarrow{PB}$ بر بردار هادی دو خط، یعنی $-۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۴\mathbf{k}$، عمود است. بنابراین حاصلضرب داخلی بردارهای $\overrightarrow{PB}$ و بردار هادی دو خط $l_۱$ و $l_۲$ مساوی صفر است.

$$(-۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۴\mathbf{k})\cdot[(۱+۲\lambda)\mathbf{i}+(-۴+۳\lambda)\mathbf{j}+(-۲+۴\lambda)\mathbf{k}]=۰$$

$$-۲(۱+۲\lambda)-۳(-۴+۳\lambda)-۴(-۲+۴\lambda)=۰$$

$$-۲-۴\lambda+۱۲-۹\lambda+۸-۱۶\lambda=۰\Rightarrow -۲۹\lambda=-۱۸\Rightarrow \lambda=\frac{۱۸}{۲۹}$$

با معلوم شدن λ، بردار $\overrightarrow{PB}$، را مشخص می‌کنیم:

$$\overrightarrow{PB}=\left(۱+\frac{۳۶}{۲۹}\right)\mathbf{i}+\left(-۴+\frac{۵۴}{۲۹}\right)\mathbf{j}+\left(-۲+\frac{۷۲}{۲۹}\right)\mathbf{k}=\frac{۶۵}{۲۹}\mathbf{i}-\frac{۶۲}{۲۹}\mathbf{j}+\frac{۱۴}{۲۹}\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{PB}|=\frac{\sqrt{۶۵^۲+۶۲^۲+۱۴^۲}}{۲۹}=۳/۱۳$$

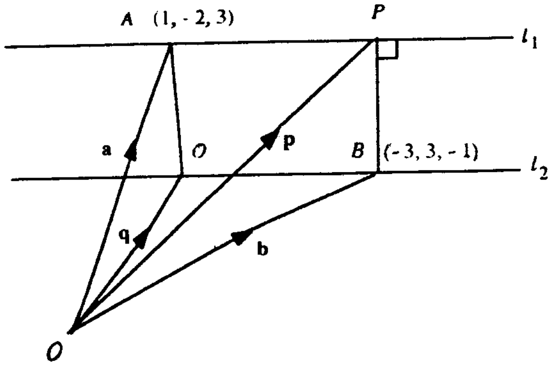
۳۳. ابتدا از روی معادله‌های متقارن دو خط، معادله‌های برداری آنها، را به‌دست می‌آوریم:

$$l_۱:\ \frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۲}{۳}=\frac{z-۳}{۱}$$

$$l_۱:\ \mathbf{r}=(\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})+\lambda(۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

$$l_۲:\ \frac{x+۳}{۲}=\frac{y-۳}{۳}=\frac{z+۱}{۱}$$

$$l_۲:\ \mathbf{r}=(-۳\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-\mathbf{k})+\mu(۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+\mathbf{k})$$



شکل۷۴

برای یافتن فاصلهٔ دو خط موازی $l_۱$ و $l_۲$، کافی است از نقطهٔ B عمودی بر $l_۱$، رسم کنیم و طول این عمود را به‌دست آوریم. اگر پای این عمود را p بنامیم (شکل ۷۴)،

$$\overrightarrow{OP}=\mathbf{p}=\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}+\lambda(۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+\mathbf{k})=(۱+۲\lambda)\mathbf{i}+(-۲+۳\lambda)\mathbf{j}+(۳+\lambda)\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PB} = \mathbf{b} - \mathbf{p} = -۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - \mathbf{k} - (۱ + ۲\lambda)\mathbf{i} - (-۲ + ۳\lambda)\mathbf{j} - (۳ + \lambda)$$

$$= (-۳ - ۱ - ۲\lambda)\mathbf{i} + (۳ + ۲ - ۳\lambda)\mathbf{j} + (-۱ - ۳ - \lambda)\mathbf{k}$$

$$= (-۴ - ۲\lambda)\mathbf{i} + (۵ - ۳\lambda)\mathbf{j} + (-۴ - \lambda)\mathbf{k}$$

چون $\overrightarrow{PB}$، بر $l_۱$ و $l_۲$، عمود است بنابراین بر بردار هادی آنها، عمود است. پس

$$\overrightarrow{PB} \cdot (۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + \mathbf{k}) = ۰$$

$$۲(-۴ - ۲\lambda) + ۳(۵ - ۳\lambda) + (-۴ - \lambda) = ۰$$

$$-۸ - ۴\lambda + ۱۵ - ۹\lambda - ۴ - \lambda = ۰ \Rightarrow -۱۴\lambda + ۳ = ۰ \Rightarrow \lambda = \frac{۳}{۱۴}$$

$$\overrightarrow{PB} = \left(-۴ - \frac{۳}{۴}\right)\mathbf{i} + \left(۵ - \frac{۹}{۱۴}\right)\mathbf{j} + \left(-۴ - \frac{۳}{۱۴}\right)\mathbf{k} = -۴/۴۳\mathbf{i} + ۴/۳۶\mathbf{j} - ۴/۲۱\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{(۴/۴۳)^۲ + (۴/۳۶)^۲ + (۴/۲۱)^۲} = ۷/۵۱$$

حل تمرین فصل ۵

۱. روش اول: معادلهٔ برداری این صفحه، به‌صورت $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d$ است که در آن، $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $\mathbf{n}$ بردار عمود بر صفحه است. چون نسبتهای هادی بردار عمود بر صفحه داده شده است، پس می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{r} \cdot (۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = d$$

و چون نقطهٔ $A(-۱, -۲, -۳)$، متعلق به صفحه است، داریم

$$(-\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}) \cdot (۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = -۲ - ۶ - ۱۲ = -۲۰ \Rightarrow d = -۲۰$$

یعنی معادلهٔ برداری صفحه، به‌صورت $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = -۲۰$ است. معادلهٔ دکارتی این صفحه را می‌توان، به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = -۲۰ \Rightarrow ۲x + ۳y + ۴z + ۲۰ = ۰$$

روش دوم: اگر $P(x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه روی صفحهٔ مطلوب باشد، در این‌صورت بردارهای $\overrightarrow{PA}$ و ۲i+۳j+۴k، برهم عمودند. یعنی حاصلضرب داخلی این دو بردار، مساوی صفر است. پس

$$[(x + ۱)(y + ۲)(z + ۳)] \cdot \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = ۰$$

$$۲x + ۲ + ۳y + ۶ + ۴z + ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۲x + ۳y + ۴z + ۲۰ = ۰$$

۲. اگر $P(x,y,z)$، نقطه‌ای دلخواه روی صفحه باشد، آنگاه بردارهای $\overrightarrow{PA}$ و $l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$، برهم عمودند. در نتیجه، حاصلضرب داخلی آنها، برابر صفر است:

$$[(x-۲)(y+۳)(z-۴)]\cdot\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}=۰$$

$$xl-۲l+ym+۳m+nz-۴n=۰ \Rightarrow lx+my+nz-۲l+۳m-۴n=۰$$

و معادلهٔ برداری صفحه عبارت است از

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=۲l-۳m+۴n$$

که در آن، $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و $\mathbf{n}$ بردار عمود بر صفحه است.

۳. روش اول: معادلهٔ این صفحه، را به‌صورت $ax+by+cz=d$، که $a:b:c$ نسبتهای هادی بردار عمود بر صفحه‌اند درنظر می‌گیریم. چون نقطه‌های $A(-۳,۴,۷)$، $B(۰,-۲,۵)$ و $C(۲,۰,-۳)$ متعلق به صفحه‌اند. پس در معادلهٔ آن صدق می‌کنند. بنابراین،

$$-۳a+۴b+۷c=d \qquad (۱)$$

$$-۲b+۵c=d \qquad (۲)$$

$$۲a-۳c=d \qquad (۳)$$

این سه معادله را برحسب d حل می‌کنیم. ابتدا رابطهٔ (۱) را با ۲ برابر رابطهٔ (۲) جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} -۳a+۴b+۷c=d \\ \underline{-۴b+۱۰c=۲d} \\ -۳a+۱۷c=۳d \end{array}$$

۲ برابر رابطهٔ حاصل را با ۳ برابر رابطهٔ (۳) جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} -۶a+۳۴c=۶d \\ \underline{۶a-۹c=۳d} \end{array}$$

$$۲۵c=۹d \Rightarrow c=\frac{۹d}{۲۵}$$

با قرار دادن مقدار c، در رابطهٔ (۳)، خواهیم داشت

$$۲a-\frac{۳\times ۹d}{۲۵}=d$$

$$۲a=d+\frac{۲۷}{۲۵}d=\frac{۵۲d}{۲۵} \Rightarrow a=\frac{۲۶}{۲۵}d$$

حال مقدارهای a و c، را که هرکدام از آنها را برحسب d به‌دست آورده‌ایم، در رابطهٔ (۱)، قرار می‌دهیم:

$$-۳a+۴b+۷c=d$$

$$-\frac{۷۸}{۲۵}d+۴b+\frac{۶۳}{۲۵}d=d$$

$$۴b=d-\frac{۶۳}{۲۵}d+\frac{۷۸}{۲۵}d \Rightarrow b=\frac{۱۰}{۲۵}d$$

با قرار دادن مقدارهای a، b و c، برحسب d، در معادلهٔ صفحه داریم

$$\frac{۲۶}{۲۵}dx+\frac{۱۰}{۲۵}dy+\frac{۹d}{۲۵}z=d \Rightarrow ۲۶x+۱۰y+۹z=۲۵$$

روش دوم: چون $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، دو بردار درون صفحه هستند، پس $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$، بردار عمود بر صفحه است (به فصل ۶ و خواص حاصلضرب خارجی، مراجعه کنید).

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}۳\\-۶\\-۲\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}۵\\-۴\\-۲۰\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۳&-۶&-۲\\ ۵&-۴&-۱۰\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}-۶&-۲\\-۴&-۱۰\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}۳&-۲\\۵&-۱۰\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}۳&-۶\\۵&-۴\end{vmatrix}$$

$$=۵۲\mathbf{i}+۲۰\mathbf{j}+۱۸\mathbf{k}=\begin{bmatrix}۵۲\\۲۰\\۱۸\end{bmatrix}$$

اگر $P(x,y,z)$، نقطه‌ای دلخواه روی صفحه باشد، بردار $\overrightarrow{AP}$ بر بردار عمود بر صفحه، یعنی $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$، عمود است، بنابراین،

$$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=۰$$

$$[(x+۳)(y-۴)(z-۷)]\begin{bmatrix}۵۲\\۲۰\\۱۸\end{bmatrix}=۰$$

$$۵۲x+۱۵۶+۲۰y-۸۰+۱۸z-۱۲۶=۰$$

$$۵۲x+۲۰y+۱۸z=۵۰ \Rightarrow ۲۶x+۱۰y+۹z=۲۵$$

۴. روش اول: معادلهٔ صفحهٔ مطلوب، را به‌صورت $ax+by+cz=d$، درنظر می‌گیریم. چون نقطهٔ $O(۰,۰,۰)$ متعلق به این صفحه است، پس $d=۰$. همچنین به دلیل تعلق نقطه‌های

$B(۱,-۲,-۳)$ و $C(-۲,۱,۲)$، به این صفحه، می‌توان نتیجه گرفت که

$$a-۲b-۳c=۰ \qquad (۱)$$

$$-۲a+b+۲c=۰ \qquad (۲)$$

حال دو طرف رابطهٔ (۲) را در عدد ۲، ضرب و معادلهٔ حاصل را با معادلهٔ (۱) جمع می‌کنیم

$$\begin{array}{l} a-۲b-۳c=۰ \\ \underline{-۴a+۲b+۴c=۰} \\ -۳a+c=۰ \Rightarrow c=۳a \end{array}$$

با قرار دادن مقدار c، در رابطهٔ (۲)، خواهیم داشت

$$b=۲a-۲c=۲a-۶a=-۴a$$

$$ax-۴ay+۳az=۰ \Rightarrow x-۴y+۳z=۰$$

روش دوم: چون $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، دو بردار، در این صفحه‌اند، بنابراین بردار $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$، بردار عمود بر صفحه است.

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}۱\\-۲\\-۳\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}-۲\\۱\\۲\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & -۲ & -۳\\ -۲ & ۱ & ۲\end{bmatrix}=\mathbf{i}(-۴+۳)-\mathbf{j}(۲-۶)+\mathbf{k}(۱-۴)$$

$$=-\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۳\mathbf{k}=\begin{bmatrix}-۱\\۴\\-۳\end{bmatrix}$$

اگر $P(x,y,z)$ نقطهٔ دلخواهی روی صفحه باشد، دو بردار $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ برهم عمودند. بنابراین،

$$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=۰$$

$$(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۳\mathbf{k})=۰$$

$$-x+۴y-۳z=۰ \Rightarrow x-۴y+۳z=۰$$

۵. الف) اگر $P(x,y,z)$، نقطهٔ دلخواهی روی صفحه باشد، آنگاه بردارهای $\overrightarrow{PA}$ و $(\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})$، برهم عمودند. پس، $\overrightarrow{PA}\cdot(\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})=۰$ و چون $\overrightarrow{PA}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z-۱)\mathbf{k}$، بنابراین،

$$[x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z-۱)\mathbf{k}]\cdot[\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}]=۰ \Rightarrow x-۲y+۳(z-۱)=۰$$

و معادلهٔ صفحهٔ خواسته شده، عبارت است از، $x - ۲y + ۳z = ۰$. معادلهٔ برداری صفحه به‌صورت $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) = ۳$ است.

ب) می‌دانیم که $\overrightarrow{PB} = (x - ۱)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و همچنین $\overrightarrow{PB}$ بر بردار عمود بر صفحه عمود است. پس،

$$\overrightarrow{PB} \cdot (۴\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} + ۶\mathbf{k}) = ۰ \Rightarrow [(x - ۱)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}] \cdot (۴\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} + ۶\mathbf{k})$$

$$\Rightarrow ۴(x - ۱) - ۵y + ۶z = ۰ \Rightarrow ۴x - ۵y + ۶z = ۴$$

معادلهٔ برداری صفحه به‌صورت زیر است که در آن، $\mathbf{n}$ بردار عمود بر صفحه است:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = ۴$$

$$\mathbf{n} = ۴\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} + ۶\mathbf{k}$$

ج)

$$\overrightarrow{PC} = (x - ۱)\mathbf{i} + (y - ۳)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PC} \cdot (-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = ۰$$

$$[(x - ۱)\mathbf{i} + (y - ۳)\mathbf{j} + z\mathbf{k}] \cdot (-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = ۰$$

$$-(x - ۱) + ۲(y - ۳) + ۴z = ۰ \Rightarrow -x + ۲y + ۴z + ۱ - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x - ۲y - ۴z = -۵$$

معادلهٔ برداری صفحه به‌صورت $\mathbf{r} \cdot (-\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = -۵$ است.

۶. در هر یک از قسمتهای این تمرین از این مطلب استفاده می‌کنیم که به‌دلیل تعلق این سه نقطه به صفحه، مختصات این نقطه‌ها، در معادلهٔ صفحه صدق می‌کند.

الف) معادلهٔ صفحه را به‌صورت $\Gamma: \ ax + by + cz = d$ درنظر می‌گیریم.

$$A(۱, ۱, ۰) \in \Gamma \Rightarrow a + b = d \qquad (۱)$$

$$B(۲, -۲, ۳) \in \Gamma \Rightarrow ۲a - ۲b + ۳c = d \qquad (۲)$$

$$C(۰, ۰, ۲) \in \Gamma \Rightarrow ۲c = d \qquad (۳)$$

از رابطهٔ (۳)، داریم $c = \frac{d}{۲}$. حال از معادله‌های (۱) و (۲)، متغیر b را حذف می‌کنیم:

$$۲a + ۲b = ۲d$$

$$\underline{۲a - ۲b + ۳c = d}$$

$$۴a + ۳c = ۳d$$

$$۴a + ۳\left(\frac{d}{۲}\right) = ۳d \Rightarrow ۴a = \frac{۳d}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳d}{۸}$$

با قرار دادن مقدارهای c و a، در رابطهٔ (۱) داریم

$$\frac{۳d}{۸}+b=d \Rightarrow b=\frac{۵d}{۸}$$

حال مقدارهای a، b و c را برحسب d، در معادلهٔ صفحه، قرار می‌دهیم:

$$\frac{۳d}{۸}x+\frac{۵d}{۸}y+\frac{d}{۲}z=d$$

$$\frac{۳}{۸}x+\frac{۵}{۸}y+\frac{۱}{۲}z=۱ \Rightarrow ۳x+۵y+۴z=۸$$

معادلهٔ برداری صفحه به‌صورت $\mathbf{r}\cdot(۳\mathbf{i}+۵\mathbf{j}+۴\mathbf{k})=۸$ است.

ب) معادلهٔ صفحه را $\Gamma:\ ax+by+cz=d$، درنظر می‌گیریم.

$$P(۰,۱,۰)\in\Gamma \Rightarrow b=d$$

$$Q(-۱,۳,-۴)\in\Gamma \Rightarrow -a+۳b-۴c=d \qquad (۱)$$

$$R(۱,۰,۲)\in\Gamma \Rightarrow a+۲c=d \qquad (۲)$$

متغیر a را از رابطه‌های (۱) و (۲)، حذف می‌کنیم.

$$۳b-۲c=۲d$$

$$۳d-۲c=۲d$$

$$-۲c=-d \Rightarrow c=\frac{d}{۲}$$

با قرار دادن مقدار $c=\frac{d}{۲}$، در رابطهٔ (۲)، خواهیم داشت

$$a=d-d=۰ \Rightarrow a=۰$$

مقدارهای a، c و b را برحسب d، در معادلهٔ صفحه قرار می‌دهیم:

$$dy+\frac{d}{۲}z=d$$

$$y+\frac{۱}{۲}z=۱ \Rightarrow ۲y+z=۲$$

ج) فرض کنید $\Gamma:\ ax+by+cz=d$ معادلهٔ صفحه باشد. نقطهٔ $D(-۱,-۲,-۳)$ یکی از نقطه‌های صفحه است. پس

$$-a-۲b-۳c=d \qquad (۱)$$

$$E(۰,۳,۰)\in\Gamma \Rightarrow ۳b=d \Rightarrow b=\frac{d}{۳}$$

$$F(۱,۲,۴)\in\Gamma \Rightarrow a+۲b+۴c=d \qquad (۲)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲)، را باهم جمع می‌کنیم:

$$c = ۲d$$

با قرار دادن مقدار $c = ۲d$، در رابطهٔ (۱)، خواهیم داشت

$$-a = s + ۲b + ۳c = d + \frac{۲d}{۳} + ۳(۲d)$$

$$-a = \frac{۳d + ۲d + ۱۸d}{۳} \Rightarrow a = \frac{-۲۳d}{۳}$$

با قرار دادن مقدارهای a، b و c برحسب d، در معادلهٔ صفحه، خواهیم داشت

$$\frac{-۲۳d}{۳}x + \frac{d}{۳}y + ۲dz = d$$

$$-۲۳x + y + ۶z = ۳$$

بنابراین $\Gamma:\ ۲۳x - y - ۶z = -۳$

۷. بردار مکان نقطهٔ تلاقی خط و صفحه، باید هم در معادلهٔ برداری خط l و هم در معادلهٔ برداری صفحهٔ Γ صدق کند. بنابراین، $\mathbf{r}_۱ = (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \lambda(-۳\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۳\mathbf{k}),\ \mathbf{r}_۱ \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = ۳$، و یا

$$[(۲ - ۳\lambda)\mathbf{i} + (-۳ + \lambda)\mathbf{j} + (۱ - ۳\lambda)\mathbf{k}] \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = ۳$$

$$۲ - ۳\lambda + (-۳ + \lambda) + (۱ - ۳\lambda) = ۳$$

$$۲ - ۳\lambda - ۳ + \lambda + ۱ - ۳\lambda = ۳$$

$$-۵\lambda = ۳ \Rightarrow \lambda = -\frac{۳}{۵}$$

پس، بردار مکان نقطهٔ تلاقی خط و صفحهٔ داده شده، عبارت است از

$$\mathbf{r}_۱ = \left[۲ - ۳\left(-\frac{۳}{۵}\right)\right]\mathbf{i} + \left(-۳ - \frac{۳}{۵}\right)\mathbf{j} + \left[۱ - ۳\left(-\frac{۳}{۵}\right)\right]\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_۱ = \frac{۱۹}{۵}\mathbf{i} - \frac{۱۸}{۵}\mathbf{j} + \frac{۱۴}{۵}\mathbf{k}$$

۸. به‌دلیل اینکه بردار مکان نقطهٔ تلاقی خط و صفحه، در معادله‌های خط و صفحه، صدق می‌کند، داریم

$$\mathbf{r}_۱ = (-۱ + ۲t)\mathbf{i} + (۴ - t)\mathbf{j} + (-۵ - t)\mathbf{k}$$

$$[(-۱ + ۲t)\mathbf{i} + (۴ - t)\mathbf{j} + (-۵ - t)\mathbf{k}] \cdot (۲\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = ۵$$

$$۲(-۱ + ۲t) + (۴ - t)(-۲) + (-۵ - t)۴ = ۵$$

$$-۲ + ۴t - ۸ + ۲t - ۲۰ - ۴t = ۵$$

$$۲t = ۳۵ \Rightarrow t = \frac{۳۵}{۲}$$

پس بردار مکان نقطهٔ تلاقی عبارت است از

$$\mathbf{r}_۱ = (-۱ + ۳۵)\mathbf{i} + (۴ - ۱۷/۵)\mathbf{j} + (-۵ - ۱۷/۵)\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_۱ = ۳۴\mathbf{i} - ۱۳/۵\mathbf{j} - ۲۲/۵\mathbf{k}$$

۹. چون این نقطه، متعلق به خط و صفحه است، پس

$$\mathbf{r}_۱ = (۱ + ۲\mu)\mathbf{i} + (۱ - ۳\mu)\mathbf{j} + (۱ + ۴\mu)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_۱ \cdot (۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۷\mathbf{k}) = ۲$$

$$۲(۱ + ۲\mu) + ۵(۱ - ۳\mu) - ۷(۱ + ۴\mu) = ۲$$

$$۲ + ۴\mu + ۵ - ۱۵\mu - ۷ - ۲۸\mu = ۲$$

$$-۳۹\mu = ۲ \Rightarrow \mu = -\frac{۲}{۳۹}$$

و بردار مکان نقطهٔ تلاقی، عبارت است از

$$\mathbf{r}_۱ = \left(۱ - \frac{۴}{۳۹}\right)\mathbf{i} + \left(۱ + \frac{۶}{۳۹}\right)\mathbf{j} + \left(۱ - \frac{۸}{۳۹}\right)\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_۱ = \frac{۳۵}{۳۹}\mathbf{i} + \frac{۴۵}{۳۹}\mathbf{j} + \frac{۳۱}{۳۹}\mathbf{k}$$

۱۰. ابتدا معادلهٔ برداری خط، را به‌دست می‌آوریم،

$$\frac{x + ۱}{۲} = \frac{y - ۳}{۳} = \frac{z + ۲}{۴} = \lambda$$

$$x = ۲\lambda - ۱$$

$$y = ۳\lambda + ۳$$

$$z = ۴\lambda - ۲$$

پس، معادلهٔ برداری خط، عبارت است از

$$\mathbf{r} = (\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}) + \lambda(۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$$

و چون نقطهٔ تلاقی، هم به خط و هم به صفحه، متعلق است، داریم

$$\mathbf{r}_۱ = (-۱ + ۲\lambda)\mathbf{i} + (۳\lambda + ۳)\mathbf{j} + (۴\lambda - ۲)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_۱ \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}) = ۴$$

$$-۱ + ۲\lambda + ۳\lambda + ۳ + ۸\lambda - ۴ = ۴$$

در نتیجه، $۱۳\lambda = ۶$، یا $\lambda = \frac{۶}{۱۳}$. پس بردار مکان نقطهٔ تلاقی عبارت است از

$$\mathbf{r}_۱ = \left(-۱ + \frac{۱۲}{۱۳}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{۱۸}{۱۳} + ۳\right)\mathbf{j} + \left(\frac{۲۴}{۱۳} - ۲\right)\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_۱ = -\frac{۱}{۱۳}\mathbf{i} + \frac{۵۷}{۱۳}\mathbf{j} - \frac{۲}{۱۳}\mathbf{k}$$

۱۱. معادلهٔ برداری خط داده شده، عبارت است از،

$$x = y = z = \lambda \Rightarrow \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}) = 7$$

$$\lambda + 2\lambda + 3\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = \frac{7}{6}$$

در نتیجه، بردار مکان نقطهٔ تلاقی، عبارت است از

$$\mathbf{r}_1 = \frac{7}{6}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

۱۲. اگر بردار عمود بر خط را $\mathbf{b}$، بنامیم،

$$\mathbf{b} = -2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{b}| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$$

و بردار یکهٔ متناظر با بردار $\mathbf{b}$ عبارت است از

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{-2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{30}}$$

پس،

$$\sin\theta = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(-2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(-2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{30}\sqrt{6}} = \frac{4-5+1}{\sqrt{30}\sqrt{6}} = 0$$

پس $\theta = 0^\circ$، و این به‌معنای آن است که خط و صفحه باهم موازی‌اند.

۱۳. اگر بردار هادی متناظر با خط را $\mathbf{b}$ و بردار یکهٔ متناظر با $\mathbf{b}$ را $\hat{\mathbf{n}}$ بنامیم، داریم

$$\frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(\mathbf{i}-7\mathbf{j}+4\mathbf{k})\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})}{\sqrt{1+7^2+4^2}\sqrt{3^2+1+1}} = 0 = \sin\theta$$

پس $\theta = 0^\circ$، یعنی خط و صفحه، باهم موازی‌اند.

۱۴. می‌دانیم که $\Gamma\perp(-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$ و $l\,||(-5\mathbf{i}+7\mathbf{j}-8\mathbf{k})$ و

$$(-5\mathbf{i}+7\mathbf{j}-8\mathbf{k})\cdot(-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}) = 10+14-24 = 0$$

یعنی، خط l و صفحهٔ Γ، هر دو بر بردار $-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$، عمودند و بنابراین باهم موازی‌اند. برای پیدا کردن فاصلهٔ این خط از صفحه، ابتدا یک نقطهٔ دلخواه از خط را تعیین می‌کنیم:

$$t = 1 \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}-5\mathbf{i}+7\mathbf{j}-8\mathbf{k}$$

و یا $\mathbf{r} = -4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-4\mathbf{k}$. یعنی نقطهٔ $M(-4,4,-4)$، نقطه‌ای از خط l است و کافی است فاصلهٔ نقطهٔ M را تا صفحهٔ Γ پیدا کنیم که این، همان فاصلهٔ خط و صفحه است. از قبل می‌دانیم که فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1,y_1,z_1)$ از صفحه‌ای با معادلهٔ $ax+by+cz=d$ مساوی است با $\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$. پس ابتدا معادلهٔ صفحه را به صورت $-2x+2y+3z=1$ می‌نویسیم.

حال فاصلهٔ نقطهٔ $M(-۴,۴,-۴)$ را از صفحهٔ Γ با معادلهٔ دکارتی $-۲x+۲y+۳z=۱$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\left|\frac{(-۲)(-۴)+۲(۴)+(۳)(-۴)-۱}{\sqrt{(-۲)^۲+۲^۲+۳^۲}}\right| = \frac{۳}{\sqrt{۱۷}}\cdot\frac{\sqrt{۱۷}}{\sqrt{۱۷}} = \frac{۳\sqrt{۱۷}}{۱۷}$$

۱۵. حاصلضرب داخلی بردار عمود بر صفحه، $۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k}$، را با هریک از بردارهای هادی سه خط، تشکیل می‌دهیم.

الف) برای خط l: $(-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۵\mathbf{k})\cdot(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k}) = -۶-۱۲-۵ = -۲۳$

ب) برای خط l': $(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k}) = ۴+۹+۱ = ۱۴$

ج) برای خط l'': $(۳\mathbf{i}+۵\mathbf{j}+۹\mathbf{k})\cdot(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k}) = ۶-۱۵+۹ = ۰$

پس خطهای l و l'، صفحه را قطع می‌کنند ولی خط l'' با صفحه، موازی است. حالا زاویهٔ بین خطهای l و l' با صفحه را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

اگر $\mathbf{b}$، بردار هادی خط l و $\hat{\mathbf{n}}$، بردار یکهٔ متناظر با آن باشد، می‌دانیم که

$$\sin\theta = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|}$$

و

$$\mathbf{b} = (-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۵\mathbf{k}),\quad |\mathbf{b}| = \sqrt{(-۳)^۲+۴^۲+(-۵)^۲} = \sqrt{۵۰}$$

$$\mathbf{n} = ۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{۲}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{i} - \frac{۳}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{j} + \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{(-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۵\mathbf{k})\cdot\left(\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{i}-\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{j}+\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{k}\right)}{\sqrt{۵۰}}$$

$$= \frac{-\frac{۳\times۲}{\sqrt{۱۴}} - \frac{۱۲}{\sqrt{۱۴}} - \frac{۵}{\sqrt{۱۴}}}{\sqrt{۵۰}} = -\frac{۲۳}{\sqrt{۱۴}\sqrt{۵۰}} \Rightarrow \theta = ۶۰{,}۴^\circ$$

حال $\mathbf{b}$ را بردار هادی خط l' و $\hat{\mathbf{n}}$ را بردار یکهٔ متناظر با آن درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که

$$\sin\theta = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|}$$

و

$$\mathbf{b} = ۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k},\quad |\mathbf{b}| = \sqrt{۴+۹+۱} = \sqrt{۱۴}$$

$$\mathbf{n} = ۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k},\quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{۲}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{i} - \frac{۳}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{j} + \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\frac{۴}{\sqrt{۱۴}} + \frac{۹}{\sqrt{۱۴}} + \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}}{\sqrt{۱۴}} = ۱ \Rightarrow \theta = ۹۰^\circ$$

یعنی خط l'، بر صفحه عمود است.

۱۶. الف) معادلهٔ صفحه را برحسب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ مرتب می‌کنیم:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}(1 + 2\lambda - 2s) + \mathbf{j}(1 - \lambda + 3s) + \mathbf{k}(1 + 3\lambda - 7s)$$

اگر $P(x, y, z)$، نقطهٔ دلخواهی روی این صفحه باشد، داریم

$$x = 1 + 2\lambda - 2s \qquad (1)$$

$$y = 1 - \lambda + 3s \qquad (2)$$

$$z = 1 + 3\lambda - 7s \qquad (3)$$

متغیرهای λ و s را از رابطه‌های بالا، حذف می‌کنیم. رابطهٔ (۱) را با ۲ برابر رابطهٔ (۲) جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda - 2s \\ \underline{2y = 2 - 2\lambda + 6s} \\ x + 2y = 3 + 4s \end{array} \qquad (4)$$

حالا طرفین رابطهٔ (۲) را در عدد ۳، ضرب و معادلهٔ حاصل را با معادلهٔ (۳) جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} 3y = 3 - 3\lambda + 9s \\ \underline{z = 1 + 3\lambda - 7s} \\ 3y + z = 4 + 2s \end{array} \qquad (5)$$

حال متغیر s را از رابطه‌های (۴) و (۵) حذف می‌کنیم، طرفین رابطهٔ (۴) را نظیربه‌نظیر از رابطهٔ (۵)، کم می‌کنیم:

$$-x + 4y + 2z = 5$$

پس، معادلهٔ برداری صفحهٔ مطلوب عبارت است از $\mathbf{r} \cdot (-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 5$

ب)

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + \mu(-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) + \nu(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}(-3\mu + 2\nu) + \mathbf{j}(2 + 4\mu + 5\nu) + \mathbf{k}(-3 - \mu - 5\nu)$$

اگر $P(x, y, z)$، نقطهٔ دلخواهی روی این صفحه باشد، آنگاه

$$x = -3\mu + 2\nu \qquad (1)$$

$$y = 2 + 4\mu + 5\nu \qquad (2)$$

$$z = -3 - \mu - 5\nu \qquad (3)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲)، متغیر ν، را حذف می‌کنیم. ۵ برابر رابطهٔ (۱) را با ۲− برابر رابطهٔ (۲) جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} 5x = -15\mu + 10\nu \\ \underline{-2y = -4 - 8\mu - 10\nu} \\ 5x - 2y = -4 - 23\mu \end{array}$$

حال از رابطه‌های (۲) و (۳)، ν را حذف می‌کنیم:

$$y + z = 3\mu - 1$$

از دو رابطهٔ اخیر، متغیر μ را حذف می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} 15x - 6y = -12 - 69\mu \\ \underline{23y + 23z = -23 + 69\mu} \\ 15x + 17y + 23z = -35 \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} \cdot (15\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 23\mathbf{k}) = -35$$

ج) با قرار دادن بردارهای a، b و c، در معادلهٔ صفحه، ابتدا معادلهٔ برداری این صفحه را، برحسب s و t، مشخص می‌کنیم:

$$\mathbf{r} = (1 - t - s)(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) + t(-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}) + s(3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}(2 - 2t - 2s - 3t) + \mathbf{j}(-3 + 3t + 3s + 4t - 3s) + \mathbf{k}(-1 + t + s + t - 5s)$$

اگر $P(x, y, z)$، نقطهٔ دلخواهی روی این صفحه باشد، خواهیم داشت

$$x = 2 - 5t - 2s \qquad (1)$$

$$y = -3 + 7t \qquad (2)$$

$$z = -1 + 2t - 4s \qquad (3)$$

متغیر t را از رابطه‌های (۱) و (۲)، حذف می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} 7x = 14 - 35t - 14s \\ \underline{5y = -15 + 35t} \\ 5y + 7x = -1 - 14s \end{array}$$

حال t را از رابطه‌های (۲) و (۳)، حذف می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} -2y = 6 - 14t \\ \underline{7z = -7 + 14t - 28s} \\ 7z - 2y = -1 - 28s \end{array}$$

حال s را از دو معادلهٔ اخیر، حذف می‌کنیم:

$$-۱۰y - ۱۴x = ۲ + ۲۸s$$

$$\underline{۷z - ۲y = -۱ - ۲۸s}$$

$$-۱۴x - ۱۲y + ۷z = ۱$$

$$۱۴x + ۱۲y - ۷z = -۱$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} \cdot (۱۴\mathbf{i} + ۱۲\mathbf{j} - ۷\mathbf{k} = -۱$$

۱۷. الف) معادلهٔ برداری صفحه: $\mathbf{r} \cdot (۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = ۳$

برای یافتن معادلهٔ دکارتی، قرار می‌دهیم، $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$:

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = ۳ \Rightarrow ۲x + ۳y + ۴z = ۳$$

ب) $\mathbf{r} \cdot (-۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - \mathbf{k}) = ۱$

قرار می‌دهیم $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (-۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - \mathbf{k}) = ۱$

$$-۳x + ۲y - z = ۱$$

پس، معادلهٔ دکارتی صفحه، عبارت است از

$$۳x - ۲y + z = -۱$$

ج) $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) = ۰$

معادلهٔ دکارتی صفحه، $x - ۲y + ۳z = ۰$

۱۸. الف) معادلهٔ برداری این صفحه با پارامترهای λ و μ، به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{r} = (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}) + \lambda(۳\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}) + \mu(\mathbf{i} + ۳\mathbf{k})$$

اگر فرض کنیم $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$، خواهیم داشت

$$x = ۲ + \mu \qquad (۱)$$

$$y = -۳ + ۳\mu \qquad (۲)$$

$$z = ۵ - ۴\lambda + ۳\mu \qquad (۳)$$

از رابطه‌های (۱) و (۳)، متغیر μ را حذف می‌کنیم:

$$z = ۵ - ۴\lambda + ۳(x - ۲) = ۵ - ۴\lambda + ۳x - ۶$$

$$z - ۳x + ۱ = -۴\lambda \qquad (۴)$$

حال λ را از دو رابطهٔ (۲) و (۴) حذف می‌کنیم:

$$z - ۳x + ۱ = -\frac{۴}{۳}(y + ۳)$$

$$z - ۳x + ۱ + \frac{۴}{۳}y + ۴ = ۰$$

$$-۳x + \frac{۴}{۳}y + z = -۵$$

با ضرب کردن طرفین این رابطه، در ۳-، معادلهٔ دکارتی صفحه را به‌دست می‌آوریم:

$$۹x - ۴y - ۳z = ۱۵$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} \cdot (۹\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}) = ۱۵$$

ب) معادلهٔ برداری این صفحه برحسب پارامترهای λ و μ به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{r} = (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{k}) + \lambda(۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j}) + \mu(۳\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

با فرض $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ داریم

$$x = ۲ + ۲\lambda + ۳\mu \qquad (۱)$$

$$y = -۳\lambda - \mu \qquad (۲)$$

$$z = -۳ - \mu \qquad (۳)$$

مقدار متغیر μ را از رابطهٔ (۳)، به‌دست می‌آوریم و در رابطه‌های (۱) و (۲) جایگزین می‌کنیم:

$$x = ۲ + ۲\lambda + ۳(-۳ - z) \qquad (۴)$$

$$y = -۳\lambda + z + ۳ \qquad (۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ۳z + ۷ = ۲\lambda \\ y - z - ۳ = -۳\lambda \end{cases}$$

از رابطهٔ اخیر، مقدار $\lambda = \dfrac{y - z - ۳}{-۳}$ را در رابطهٔ $x + ۳z + ۷ = ۲\lambda$، قرار می‌دهیم:

$$x + ۳z + ۷ = ۲\left(\frac{y - z - ۳}{-۳}\right)$$

$$x + ۳z + ۷ = -\frac{۲}{۳}y + \frac{۲}{۳}z + ۲$$

$$x + \frac{۲}{۳}y + \frac{۷}{۳}z = -۵$$

با ضرب کردن طرفین این رابطه، در عدد ۳، معادلهٔ دکارتی صفحه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$۳x + ۲y + ۷z = -۱۵$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} \cdot (۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}) = -۱۵$$

ج) معادلهٔ برداری این صفحه، برحسب متغیرهای λ و μ، به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{r} = (۲\mathbf{i} + ۷\mathbf{k}) + \lambda(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) + \mu(۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

با فرض $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$، خواهیم داشت

$$x = ۲ + \lambda + ۲\mu \qquad (۱)$$

$$y = \lambda - ۳\mu \qquad (۲)$$

$$z = ۷ - \lambda + \mu \qquad (۳)$$

با حذف متغیر λ، از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم

$$x - ۲ - y = ۵\mu$$

همچنین اگر λ را از رابطه‌های (۲) و (۳)، حذف کنیم داریم

$$y + z = ۷ - ۲\mu$$

حال از این دو معادلهٔ جدید μ را حذف می‌کنیم:

$$x - ۲ - y = \frac{۵(۷ - y - z)}{۲}$$

$$۲x - ۴ - ۲y = ۳۵ - ۵y - ۵z$$

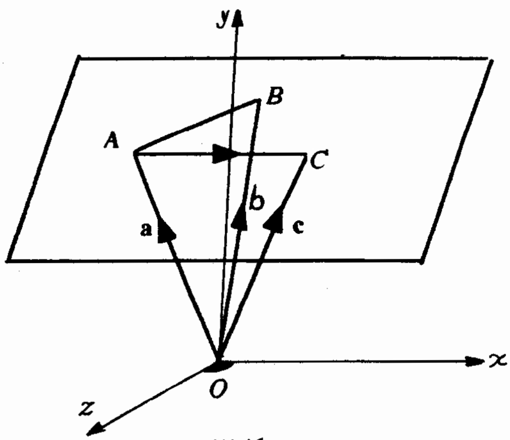
$$۲x - ۲y + ۵y + ۵z = ۳۵ + ۴$$

بنابراین معادلهٔ دکارتی صفحه، عبارت است از

$$۲x + ۳y + ۵z = ۳۹$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} \cdot (۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}) = ۳۹$$

.۱۹



شکل۷۵

با توجه به بردارهای a، b و c خواهیم داشت (شکل ۷۵)

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

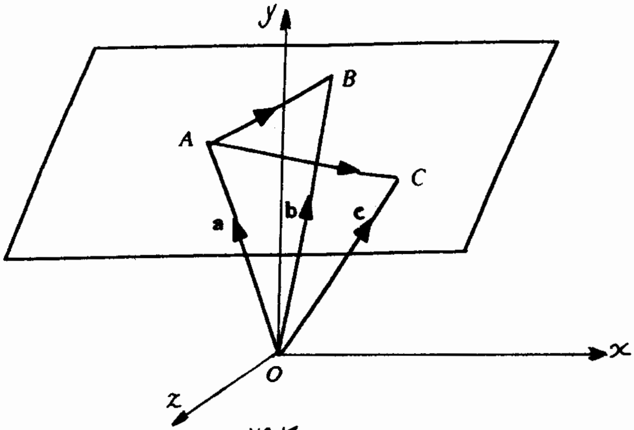
و چون

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$$

معادلهٔ برداری صفحه عبارت است از

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + \lambda(-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + \mu(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

۲۰. صفحه شامل سه نقطهٔ $A(-1,-2,-3)$، $B(3,4,5)$ و $C(-6,-7,8)$ است (شکل ۷۶).



شکل ۷۶

با توجه به مختصات سه نقطهٔ A، B و C داریم

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = -5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

پس معادلهٔ برداری صفحه عبارت است از

$$\mathbf{r} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + \lambda(4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + \mu(-5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k})$$

۲۱. فاصلهٔ مبدأ مختصات تا صفحهٔ Γ_2، برابر است با، $\frac{2}{\sqrt{1+1+1}}$ و فاصلهٔ مبدأ تا صفحهٔ Γ_1 برابر $\frac{1}{\sqrt{1+1+1}}$ است. بنابراین فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی Γ_1 و Γ_2، برابر خواهد بود با

$$\frac{2-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۲. می‌دانیم فاصلهٔ نقطه‌ای به مختصات $(x_۱, y_۱, z_۱)$ از صفحهٔ $ax + by + cz = d$ عبارت است از

$$\left|\frac{ax_۱ + by_۱ + cz_۱ - d}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}\right|$$

الف) $$\left|\frac{۱ \times ۳ + ۲ \times ۴ + ۳ \times ۵ - ۱۲}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲}}\right| = \frac{۱۴}{\sqrt{۵۰}} \times \frac{\sqrt{۵۰}}{\sqrt{۵۰}} = \frac{۱۴\sqrt{۵۰}}{۵۰} = \frac{۷}{۲۵}\sqrt{۵۰}$$

ب) $$\left|\frac{۱ \times ۶ + ۲ \times ۷ + ۳ \times ۸ - ۵}{\sqrt{۶^۲ + ۷^۲ + ۸^۲}}\right| = \frac{۳۹}{\sqrt{۱۴۹}} \times \frac{\sqrt{۱۴۹}}{\sqrt{۱۴۹}} = \frac{۳۹}{۱۴۹}\sqrt{۱۴۹}$$

ج) $$\left|\frac{۱ \times ۱ + ۱ \times ۲ + ۱ \times ۳ - ۱}{\sqrt{۳}}\right| = \frac{۵}{\sqrt{۳}}\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۵}{۳}\sqrt{۳}$$

۲۳. چون دو صفحهٔ داده شده دارای بردارهای عمود مساوی هستند، پس این دو صفحه، موازی‌اند و بنابراین، برای به‌دست آوردن فاصلهٔ دو قاعدهٔ مخروطها از هم، از دستور فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۷ - ۴}{\sqrt{۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۱ + ۴ + ۹}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۴}}\frac{\sqrt{۱۴}}{\sqrt{۱۴}} = \frac{۳}{۱۴}\sqrt{۱۴}$$

۲۴. بردار مکان متناظر با نقطهٔ $A(-۳, ۴, -۵)$، عبارت است از $-۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$. حال داریم

$$(-۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}) \cdot (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۱۲\mathbf{k}) = -۶ - ۱۲ + ۶۰ = ۴۲$$

و این به‌معنای واقع بودن نقطهٔ A بر صفحهٔ Γ است.

۲۵. الف) اگر بردار هادی خط l را $\mathbf{b}$ بنامیم، داریم

$$\mathbf{b} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۳\mathbf{k} \quad \text{و} \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{۴ + ۱ + ۹} = \sqrt{۱۴}$$

اگر $\mathbf{n}$، بردار عمود بر صفحهٔ Γ باشد، خواهیم داشت

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{و} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{۳}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{۳}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{۳}}$$

بنابراین

$$\sin\theta = \frac{\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|} = \frac{(۲\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۳\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{۳}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{۳}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{۳}}\right)}{\sqrt{۱۴}}$$

$$= \left(\frac{۲}{\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۳}{\sqrt{۳}}\right)\frac{۱}{\sqrt{۱۴}} \Rightarrow \sin\theta = ۰$$

ب) اگر $\mathbf{b}$، $\mathbf{n}$ و $\hat{\mathbf{n}}$ به‌ترتیب بردار هادی خط l، بردار عمود بر صفحهٔ Γ و بردار یکهٔ متناظر با $\mathbf{n}$ باشند، خواهیم داشت

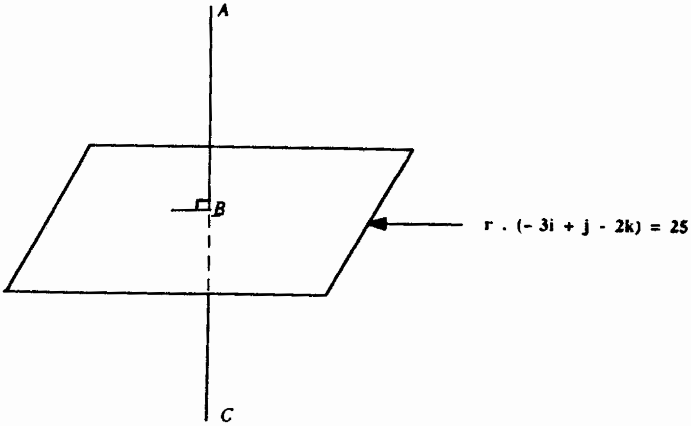
$$\mathbf{b} = ۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۵\mathbf{k} \quad \text{و} \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۵۰}$$

$$\mathbf{n}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \hat{\mathbf{n}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\mathbf{i}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\mathbf{j}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|}=\frac{(۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k})\cdot\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\mathbf{i}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\mathbf{j}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\mathbf{k}\right)}{\sqrt{۵۰}}$$

$$=\frac{\frac{۳}{\sqrt{۳}}+\frac{۴}{\sqrt{۳}}+\frac{۵}{\sqrt{۳}}}{\sqrt{۵۰}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۳}\sqrt{۵۰}}\Rightarrow \sin\theta=\frac{۶\sqrt{۱۵۰}}{۷۵}$$

۲۶. پای عمود مرسوم از نقطهٔ A بر صفحه را B می‌نامیم (شکل ۷۷).



شکل۷۷

بردار $-۳\mathbf{i}+\mathbf{j}-۲\mathbf{k}$، بردار عمود بر صفحه است. از طرفی AC نیز، بنابر فرض مسأله، بر صفحه عمود است. پس خط AC و بردار عمود بر صفحه، $-۳\mathbf{i}+\mathbf{j}-۲\mathbf{k}$، باهم موازی‌اند. پس معادلهٔ برداری این خط عبارت است از

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}+\lambda(-۳\mathbf{i}+\mathbf{j}-۲\mathbf{k})$$

یا

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}(۱-۳\lambda)+\mathbf{j}(۱+\lambda)+\mathbf{k}(۱-۲\lambda)$$

با فرض $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ خواهیم داشت، $x=۱-۳\lambda$، $y=۱+\lambda$، $z=۱-۲\lambda$. از طرفی معادلهٔ دکارتی صفحه $-۳x+y-۲z=۲۵$ است. با قرار دادن مقدارهای x، y و z، برحسب λ، در معادلهٔ صفحه، مقدار λ که متناظر با نقطهٔ تلاقی خط و صفحه، یعنی نقطهٔ B، است به‌دست می‌آید:

$$-۳(۱-۳\lambda)+(۱+\lambda)-۲(۱-۲\lambda)=۲۵$$

$$-۳+۹\lambda+۱+\lambda-۲+۴\lambda=۲۵$$

$$۱۴\lambda=۲۹\Rightarrow\lambda=\frac{۲۹}{۱۴}$$

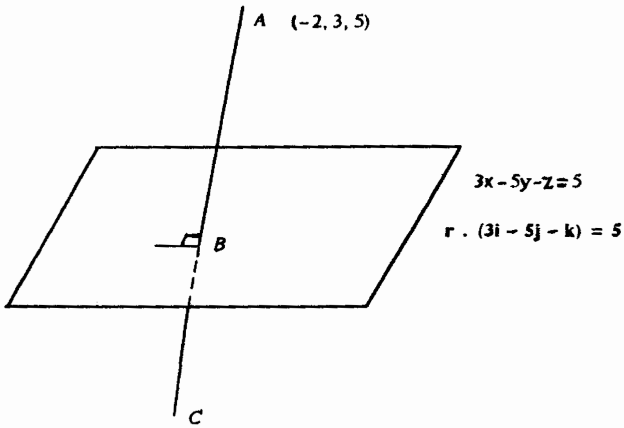
پس با معلوم شدن λ، مختصات نقطهٔ B را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$x_B = ۱ - ۳\left(\frac{۲۹}{۱۴}\right) = \frac{۴ - ۸۷}{۱۴} = -\frac{۷۳}{۱۴}$$
$$y_B = ۱ + \frac{۲۹}{۱۴} = \frac{۴۳}{۱۴}$$
$$z_B = ۱ - ۲\lambda = ۱ - \frac{۵۸}{۱۴} = \frac{۱۴ - ۵۸}{۱۴} = -\frac{۴۴}{۱۴}$$

بنابراین،

$$B\left(-\frac{۷۳}{۱۴}, \frac{۴۳}{۱۴}, -\frac{۴۴}{۱۴}\right)$$

۲۷. با توجه به داده‌های مسأله، مختصات نقطهٔ A، به‌صورت $(-۲,۳,۵)$ و معادلهٔ برداری صفحه نیز به‌صورت $\mathbf{r}\cdot(۳\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} - \mathbf{k}) = ۵$ است (شکل ۷۸).



شکل۷۸

خط AC، مانند بردار عمود بر صفحه، یعنی $۳\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} - \mathbf{k}$، بر صفحه عمود است. بنابراین $\overrightarrow{AC} \parallel ۳\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و معادلهٔ برداری خط AC. با توجه به معلوم بودن مختصات نقطهٔ A، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$AC:\ \mathbf{r} = (-۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}) + \lambda(۳\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

برای یافتن مختصات نقطهٔ تلاقی AC و صفحه، یعنی نقطهٔ B، باید خط و صفحه را باهم قطع دهیم. اگر فرض کنیم $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$، از معادلهٔ برداری خط AC نتیجه خواهیم گرفت

$$x = -۲ + ۳\lambda\ ,\quad y = ۳ - ۵\lambda\ ,\quad z = ۵ - \lambda$$

مقدارهای x، y و z را در معادلهٔ دکارتی صفحه قرار دهیم و مقدار λ را که متناظر با نقطهٔ B است به دست می‌آوریم:

$$۳(-۲ + ۳\lambda) - ۵(۳ - ۵\lambda) - (۵ - \lambda) = ۵$$
$$-۶ + ۹\lambda - ۱۵ + ۲۵\lambda - ۵ + \lambda = ۵$$
$$۳۵\lambda = ۳۱ \Rightarrow \lambda = \frac{۳۱}{۳۵}$$

پس مختصات نقطهٔ B، عبارت است از $۵-\frac{۳۱}{۳۵}$، $۳-\frac{۵(۳۱)}{۳۵}$، $-۲+\frac{۹۳}{۳۵}$ و یا $B\left(\frac{۲۳}{۳۵}, -\frac{۵۰}{۳۵}, \frac{۱۴۴}{۳۵}\right)$.
برای یافتن مختصات نقطهٔ C، کافی است توجه کنیم که B وسط پاره‌خط AC واقع شده است.
بنابراین، اگر مختصات نقطهٔ C را با $(x_۲, y_۲, z_۲)$، نشان دهیم، خواهیم داشت

$$-۲ + x_۲ = \frac{۴۶}{۳۵} \quad \text{و} \quad -\frac{۱۰۰}{۳۵} = ۳ + y_۲ \quad \text{و} \quad \frac{۲۸۸}{۳۵} = ۵ + z_۲$$
$$x_۲ = \frac{۴۶}{۳۵} + \frac{۷۰}{۳۵} = \frac{۱۱۶}{۳۵} \quad \text{و} \quad y_۲ = -۳ - \frac{۱۰۰}{۳۵} = -\frac{۲۰۵}{۳۵}$$
$$z_۲ = \frac{۲۸۸}{۳۵} - ۵ = \frac{۲۸۸ - ۱۷۵}{۳۵} = \frac{۱۱۳}{۳۵}$$

بنابراین،
$$C\left(\frac{۱۱۶}{۳۵}, \frac{-۲۰۵}{۳۵}, \frac{۱۱۳}{۳۵}\right)$$

۲۸. با توجه به بردارهای a، b و c، خواهیم داشت

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = ۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۷\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{c} = -\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{AB} = ۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۷\mathbf{k} - (\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = \mathbf{i} + ۶\mathbf{j} + ۸\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{AC} = (-\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = -۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$$

معادلهٔ برداری صفحهٔ مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$، عبارت است از (شکل ۷۹)

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} + \lambda\, \overrightarrow{AB} + \mu\, \overrightarrow{AC}$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + ۶\mathbf{j} + ۸\mathbf{k}) + \mu(-۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$$

از طرف دیگر،

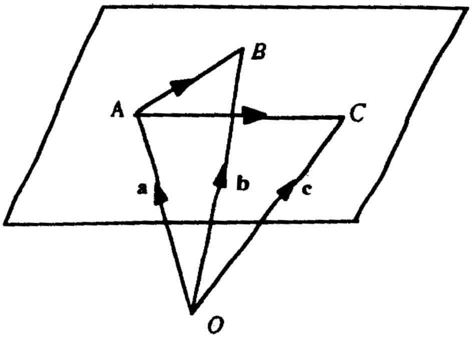
$$\overrightarrow{BC} = (-\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) - (۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}) = -۳\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} - (۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}) = -\mathbf{i} - ۶\mathbf{j} - ۸\mathbf{k}$$

معادلهٔ صفحهٔ مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ عبارت است از (شکل ۸۰)

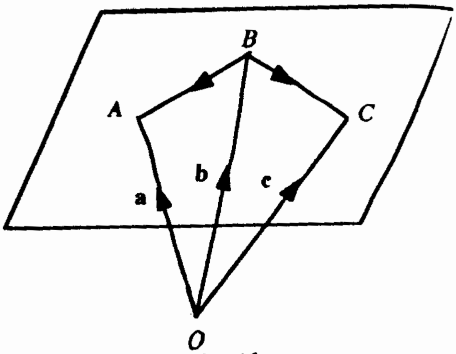
$$\mathbf{r} = ۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۷\mathbf{k} + \lambda(-۳\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}) + \mu(-\mathbf{i} - ۶\mathbf{j} - ۸\mathbf{k})$$

معادلهٔ پارامتری صفحهٔ شامل a، b و c، عبارت است از $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ که $\lambda + \mu + t = ۱$.
اگر قرار دهیم $t = ۱ - \lambda - \mu$، معادلهٔ این صفحه، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{r} = \lambda(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) + \mu(۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}) + (۱ - \lambda - \mu)(-\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k})$$



شکل ۷۹



شکل ۸۰

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}(\lambda + ۲\mu - ۱ + \lambda + \mu) + \mathbf{j}(-\lambda + ۵\mu - ۲ + ۲\lambda + ۲\mu)$$

$$+ \mathbf{k}(-\lambda + ۷\mu + ۳ - ۳\lambda - ۳\mu)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}(۲\lambda + ۳\mu - ۱) + \mathbf{j}(\lambda + ۷\mu - ۲) + \mathbf{k}(-۴\lambda + ۴\mu + ۳)$$

اگر $P(x, y, z)$، نقطهٔ دلخواهی روی این صفحه باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$x = ۲\lambda + ۳\mu - ۱ \quad , \quad y = \lambda + ۷\mu - ۲ \quad , \quad z = -۴\lambda + ۴\mu + ۳$$

از این سه معادله، λ و μ را حذف می‌کنیم. فرض کنید

$$x = ۲\lambda + ۳\mu - ۱ \qquad (۱)$$

$$y = \lambda + ۷\mu - ۲ \qquad (۲)$$

$$z = -۴\lambda + ۴\mu + ۳ \qquad (۳)$$

$$\begin{array}{l} -۲y = -۲\lambda - ۱۴\mu + ۴ \\ \underline{\quad x = ۲\lambda + ۳\mu - ۱ \quad} \\ x - ۲y = -۱۱\mu + ۳ \end{array} \qquad (۴)$$

$$\begin{array}{l} ۴y = ۴\lambda + ۲۸\mu - ۸ \\ \underline{\quad z = -۴\lambda + ۴\mu + ۳} \\ z + ۴y = ۳۲\mu - ۵ \end{array} \qquad (۵)$$

حال کافی است از رابطه‌های (۴) و (۵)، متغیر μ را حذف کنیم. برای این منظور، طرفین رابطهٔ (۴) را در ۳۲ و طرفین رابطهٔ (۵) را در ۱۱ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} ۳۲x - ۶۴y = -۳۵۲\mu + ۹۶ \\ \underline{۱۱z + ۴۴y = +۳۵۲\mu - ۵۵} \end{array}$$

معادلهٔ دکارتی صفحه: $\quad ۳۲x - ۲۰y + ۱۱z = ۴۱$

معادلهٔ برداری صفحه عبارت است از

$$\mathbf{r}\cdot(۳۲\mathbf{i}-۲۰\mathbf{j}+۱۱\mathbf{k})=۴۱$$

۲۹. همان‌طور که می‌دانید، معادلهٔ برداری خطی که از دو نقطهٔ A و B، با بردارهای مکان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بگذرد، به‌صورت $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})$، است و همچنین می‌دانید که در این معادله، $\mathbf{b}-\mathbf{a}$، بردار هادی خط است. پس معادلهٔ برداری خط AB، به‌صورت $\mathbf{r}=(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k})+\lambda(-۵\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۵\mathbf{k})$ است (شکل ۸۱). حال اگر $-۵\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۵\mathbf{k}$، یعنی بردار هادی خط AB، را $\mathbf{b}$ بنامیم، خواهیم داشت

$$\sin\theta=\frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|}$$

$$\mathbf{b}=-۵\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۵\mathbf{k} \quad \text{و} \quad |\mathbf{b}|=\sqrt{(-۵)^۲+۵^۲+(-۵)^۲}=۵\sqrt{۳}$$

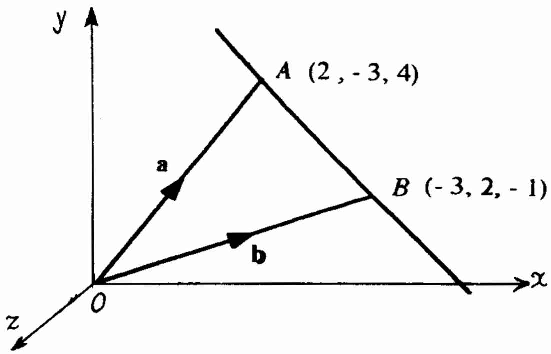
فرض کنید

$$\Gamma:\quad \mathbf{r}\cdot(-۴\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۷\mathbf{k})=۲۷$$

که در آن، $\mathbf{n}=-۴\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۷\mathbf{k}$، بردار عمود بر صفحه است و پس $\hat{\mathbf{n}}$، بردار یکهٔ متناظر با $\mathbf{n}$، برابر خواهد بود با، $\dfrac{-۴\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۷\mathbf{k}}{\sqrt{۴^۲+۵^۲+۷^۲}}$ و یا $\hat{\mathbf{n}}=\dfrac{-۴\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۷\mathbf{k}}{۳\sqrt{۱۰}}$. پس،

$$\sin\theta=\frac{(-۵\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۵\mathbf{k})\cdot(-۴\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۷\mathbf{k})}{۵\sqrt{۳}\sqrt{۹۰}}=\frac{۲۰+۲۵+۳۵}{۵\sqrt{۳}\sqrt{۹۰}}=۰/۹۷۴$$

$$\Rightarrow \sin\theta=۰/۹۷۴$$



شکل۸۱

۳۰.

$$\sin\theta=\frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|}=\frac{(-۷\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})}{\sqrt{(-۷)^۲+۲^۲+۳^۲}}\cdot\frac{(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})}{\sqrt{۱^۲+۲^۲+۳^۲}}$$

$$=\frac{-۷+۴+۹}{\sqrt{۶۲}\sqrt{۱۴}}=\frac{۶}{\sqrt{۶۲}\sqrt{۱۴}}=۰/۲۰۳۷\Rightarrow ۱۱/۸^\circ$$

۳۱. معادلهٔ برداری خط l، عبارت است از

$$\mathbf{r}=(۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۲\mathbf{k})+\lambda(۳\mathbf{i}-۵\mathbf{j}+۷\mathbf{k})$$

$$\sin\theta=\frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{b}|}=\frac{(۳\mathbf{i}-۵\mathbf{j}+۷\mathbf{k})}{\sqrt{۳^۲+۵^۲+۷^۲}}\cdot\frac{(-\mathbf{j}+۵\mathbf{k})}{\sqrt{۱^۲+۲۵}}=\frac{۵+۳۵}{\sqrt{۸۳}\sqrt{۲۶}}=\frac{۴۰}{\sqrt{۸۳}\sqrt{۲۶}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = ۰/۸۶۱$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{۱ - \sin^{۲}\theta} = \sqrt{۱ - ۰/۸۶۱^{۲}} = ۰/۵۰۹$$

۳۲. الف) $\mathbf{r} = ۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۷\mathbf{k}) + \mu(-۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۸\mathbf{k})$

$\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + ۹\mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۷\mathbf{k}) + \mu(-۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۸\mathbf{k})$

ب) $\mathbf{r} = \mathbf{i} + ۵\mathbf{j} + ۹\mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}) + \mu(۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k})$

$\mathbf{r} = ۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - \mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}) + \mu(۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k})$

حل تمرین فصل ۶

۱. الف)
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۳ & ۳ & ۵ \\ -۲ & ۴ & ۱ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(۳ - ۲۰) - \mathbf{j}(۳ + ۱۰) + \mathbf{k}(۱۲ + ۶)$$

$$= -۱۷\mathbf{i} - ۱۳\mathbf{j} + ۱۸\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -۱۷ \\ -۱۳ \\ ۱۸ \end{bmatrix}$$

ب)
$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۳ & ۵ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(۲۰ - ۳) - \mathbf{j}(-۱۰ - ۳) + \mathbf{k}(-۶ - ۱۲)$$

$$= ۱۷\mathbf{i} + ۱۳\mathbf{j} - ۱۸\mathbf{k} = \begin{bmatrix} ۱۷ \\ ۱۳ \\ -۱۸ \end{bmatrix}$$

واضح است که $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \times \mathbf{u}$، یعنی ضرب خارجی بردارها، دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

۲. الف)
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ & ۱ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(۱ + ۱) - \mathbf{j}(۱ + ۲) + \mathbf{k}(-۱ + ۲)$$

$$= ۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۱ - ۱) - \mathbf{j}(-۲ - ۱) + \mathbf{k}(-۲ + ۱)$$

$$= -۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - \mathbf{k} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

ب) $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۳ & -۵ & ۳ \\ -۵ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۵ - ۹) - \mathbf{j}(۳ + ۱۵) + \mathbf{k}(۹ - ۲۵)$$

$$= -۱۴\mathbf{i} - ۱۸\mathbf{j} - ۱۶\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -۱۴ \\ -۱۸ \\ -۱۶ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۵ & ۳ & ۱ \\ ۳ & -۵ & ۳ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(۹ + ۵) - \mathbf{j}(-۱۵ - ۳) + \mathbf{k}(۲۵ - ۹)$$

$$= ۱۴\mathbf{i} + ۱۸\mathbf{j} + ۱۶\mathbf{k} = \begin{bmatrix} ۱۴ \\ ۱۸ \\ ۱۶ \end{bmatrix}$$

ج) $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۳ & -۴ & ۵ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۴ - ۵) - \mathbf{j}(-۳ - ۵) + \mathbf{k}(-۳ + ۴)$$

$$= -۹\mathbf{i} + ۸\mathbf{j} + \mathbf{k} = \begin{bmatrix} -۹ \\ ۸ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ -۳ & -۴ & ۵ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(۵ + ۴) - \mathbf{j}(۵ + ۳) + \mathbf{k}(-۴ + ۳)$$

$$= ۹\mathbf{i} - ۸\mathbf{j} - \mathbf{k} = \begin{bmatrix} +۹ \\ -۸ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

۳. الف) می‌خواهیم با محاسبهٔ عبارت $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$ نشان دهیم که بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ برهم عمودند.

فرض کنید

$$\mathbf{a} = a_۱\mathbf{i} + a_۲\mathbf{j} + a_۳\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_۱\mathbf{i} + b_۲\mathbf{j} + b_۳\mathbf{k}$$

در این صورت،

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)-\mathbf{j}(a_1b_3-b_1a_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}&=[\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)-\mathbf{j}(a_1b_3-b_1a_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)]\cdot(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\\&=a_1(a_2b_3-a_3b_2)-a_2(a_1b_3-b_1a_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)\\&=a_1a_2b_3-a_1a_3b_2-a_1a_2b_3+a_2b_1a_3+a_3a_1b_2-a_3a_2b_1=0\end{aligned}$$

بنابراین، این دو بردار برهم عمودند.

ب)

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})$$

$$\begin{aligned}&=[\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)-\mathbf{j}(a_1b_3-b_1a_3)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)]\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})\\&=b_1(a_2b_3-a_3b_2)-b_2(a_1b_3-b_1a_3)+b_3(a_1b_2-a_2b_1)\\&=a_2b_1b_3-a_3b_1b_2-a_1b_2b_3+a_3b_1b_2+a_1b_2b_3-a_2b_1b_3=0\end{aligned}$$

بنابراین، بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، نیز برهم عمودند.

۴. اگر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باهم موازی باشند، نسبتهای هادی این دو بردار، باهم مساوی‌اند.

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}\qquad\text{و}\qquad \mathbf{a}\|\mathbf{b}\Rightarrow \mathbf{a}_1:\mathbf{a}_2:\mathbf{a}_3=\mathbf{b}_1:\mathbf{b}_2:\mathbf{b}_3$$
$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$$

حال ثابت می‌کنیم که اگر $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{o}$، نسبتهای هادی دو بردار باهم مساوی و دو بردار، مساوی خواهند بود.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2)-\mathbf{j}(a_1b_3-a_3b_1)+\mathbf{k}(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{o}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$a_2b_3-a_3b_2=0\Rightarrow\frac{a_2}{a_3}=\frac{b_2}{b_3}$$

$$a_1b_3-a_3b_1=0\Rightarrow\frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3}$$

$$a_1b_2-a_2b_1=0\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

و نسبتهای $\mathbf{a}_1:\mathbf{a}_2:\mathbf{a}_3$، همان $\mathbf{b}_1:\mathbf{b}_2:\mathbf{b}_3$ است. پس $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ موازی‌اند.

۵. الف)
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۱&۲&۳\\ -۱&۲&۱\end{vmatrix}=\mathbf{i}(۲-۶)-\mathbf{j}(۱+۳)+\mathbf{k}(۲+۲)$$
$$=-۴\mathbf{i}-۴\mathbf{j}+۴\mathbf{k}=\begin{bmatrix}-۴\\ -۴\\ ۴\end{bmatrix}$$

ب)
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۴&۰&۳\\ ۰&۳&-۱\end{vmatrix}=\mathbf{i}(-۹)-\mathbf{j}(-۴)+۱۲\mathbf{k}=-۹\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۱۲\mathbf{k}=\begin{bmatrix}-۹\\ ۴\\ ۱۲\end{bmatrix}$$

ج)
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۲&۱&۲\\ ۱&-۱&۲\end{vmatrix}=\mathbf{i}(۲+۲)-\mathbf{j}(۴-۲)+\mathbf{k}(-۲-۱)=۴\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}=\begin{bmatrix}۴\\ -۲\\ -۳\end{bmatrix}$$

۶. الف)
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\begin{bmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۱&۰&۰\\ ۰&۱&۰\end{bmatrix}=۰\mathbf{i}-۰\mathbf{j}+\mathbf{k}=\mathbf{k}$$

ب)
$$\mathbf{i}\times\mathbf{k}=\begin{bmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۱&۰&۰\\ ۰&۰&۱\end{bmatrix}=۰\mathbf{i}-(۱)\mathbf{j}+۰\mathbf{k}=-\mathbf{j}$$

ج)
$$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۰&۱&۰\\ ۰&۰&۱\end{vmatrix}=(۱)\mathbf{i}-۰\mathbf{j}+(۰)\mathbf{k}=\mathbf{i}$$

د)
$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۰&۰&۱\\ ۱&۰&۰\end{vmatrix}=۰\mathbf{i}+\mathbf{j}+(۰)\mathbf{k}=\mathbf{j}$$

ه)
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۱&۰&۰\\ ۰&۱&۰\end{vmatrix}\times\mathbf{k}=[(۰)\mathbf{i}-(۰)\mathbf{j}+\mathbf{k}]\times\mathbf{k}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}$$

و)
$$\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۰&۰&۱\\ ۰&۰&۱\end{vmatrix}=(۰)\mathbf{i}-(۰)\mathbf{j}+(۰)\mathbf{k}=۰$$

به‌طور مشابه، ثابت می‌شود که $\mathbf{k}\times\mathbf{i}\times\mathbf{j}=۰$ و $\mathbf{j}\times\mathbf{k}\times\mathbf{i}=۰$.

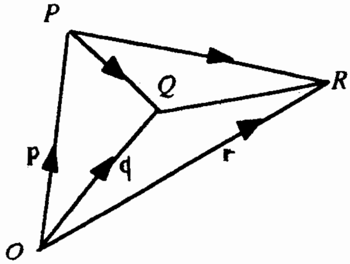
۷.

$$\overrightarrow{PQ}= (-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-\mathbf{k})-(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۵\mathbf{k})$$

$$\overrightarrow{PQ}= -۴\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR}= \mathbf{r}-\mathbf{p}=(۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k})-(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۵\mathbf{k})$$

$$\overrightarrow{PR}= -\mathbf{i}+\mathbf{j}+۱۰\mathbf{k}$$



شکل۸۲

از طرفی (شکل ۸۲)،

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(-۴\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k})\times(-\mathbf{i}+\mathbf{j}+۱۰\mathbf{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -۴ & ۲ & ۴\\ -۱ & ۱ & ۱۰\end{vmatrix}=۱۶\mathbf{i}+۳۶\mathbf{j}-۲\mathbf{k}$$

اگر $A(x,y,z)$، نقطه‌ای دلخواه روی این صفحه باشد، دو بردار $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$، برهم عمود خواهند بود. یعنی حاصلضرب داخلی این دو بردار، مساوی صفر است. پس قرار می‌دهیم،

$$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})=[(x-۱)\mathbf{i}+(y-۲)\mathbf{j}+(z+۵)\mathbf{k}]\cdot(۱۶\mathbf{i}+۳۶\mathbf{j}-۲\mathbf{k})=۰$$

$$۱۶(x-۱)+۳۶(y-۲)-۲(z+۵)=۰$$

$$۱۶x+۳۶y-۲z=۱۶+۷۲+۱۰=۹۸$$

پس معادلهٔ دکارتی صفحهٔ مطلوب، عبارت است از $۸x+۱۸y-z=۴۹$

و معادلهٔ برداری صفحه عبارت است از $\mathbf{r}\cdot(۸\mathbf{i}+۱۸\mathbf{j}-\mathbf{k})=۴۹$

۸.

$$\overrightarrow{PQ}= (-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-\mathbf{k})-(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۵\mathbf{k})=-۴\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR}= (۳\mathbf{i}+۵\mathbf{k})-(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۵\mathbf{k})=۲\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۱۰\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -۴ & ۲ & ۴\\ ۲ & -۲ & ۱۰\end{vmatrix}=۲۸\mathbf{i}+۴۸\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$$

اگر صفحهٔ شامل P، Q و R را Γ، بنامیم،

$$A(x,y,z)\in\Gamma\Rightarrow \overrightarrow{PA}\perp(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})\Rightarrow\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})=۰$$

پس،

$$[(x-۱)\mathbf{i}+(y-۲)\mathbf{j}+(z+۵)\mathbf{k}]\cdot(۲۸\mathbf{i}+۴۸\mathbf{j}+۴\mathbf{k})=۰$$

$$۲۸(x-۱)+۴۸(y-۲)+۴(z+۵)=۰$$

$$۲۸x-۲۸+۴۸y-۹۶+۴z+۲۰=۰$$

$$۲۸x+۴۸y+۴z=۹۶+۲۸-۲۰=۱۰۴$$

و معادلهٔ صفحهٔ مطلوب، به‌صورت زیر است:

$$۷x+۱۲y+z=۲۶$$

$$\mathbf{r}\cdot(۷\mathbf{i}+۱۲\mathbf{j}+\mathbf{k})=۲۶$$

.۹

$$d=\frac{|\mathbf{b}\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})|}{|\mathbf{b}|}$$

$$\mathbf{b}=-۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-\mathbf{k}\Rightarrow|\mathbf{b}|=\sqrt{(-۲)^۲+۳^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۱۴}$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c}=۴\mathbf{i}+۵\mathbf{j}+۶\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow d=\frac{|(-۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(۴\mathbf{i}+۵\mathbf{j}+۶\mathbf{k}-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})|}{\sqrt{۱۴}}$$

$$=\frac{|(-۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k})|}{\sqrt{۱۴}}$$

اما

$$(-۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۵\mathbf{k})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-۲&۳&-۱\\۳&۴&۵\end{vmatrix}=۱۹\mathbf{i}+۷\mathbf{j}-۱۷\mathbf{k}$$

بنابراین،

$$d=\frac{|۱۹\mathbf{i}+۷\mathbf{j}-۱۷\mathbf{k}|}{\sqrt{۱۴}}=\frac{\sqrt{۱۹^۲+۷^۲+(-۱۷)^۲}}{\sqrt{۱۴}}=\frac{\sqrt{۶۹۹}}{\sqrt{۱۴}}\Rightarrow d=۷/۰۷$$

.۱۰

$$d=\frac{|\mathbf{b}\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})|}{|\mathbf{b}|}$$

$$|\mathbf{b}|=|۵\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}|=\sqrt{۲۵+۱+۱}=\sqrt{۲۷}=۳\sqrt{۳}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}&=-۲\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}\\ \mathbf{c}&=۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+۳\mathbf{k}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \mathbf{c}-\mathbf{a}=۴\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow d=\frac{|(۵\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(۴\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k})|}{۳\sqrt{۳}}$$

اما

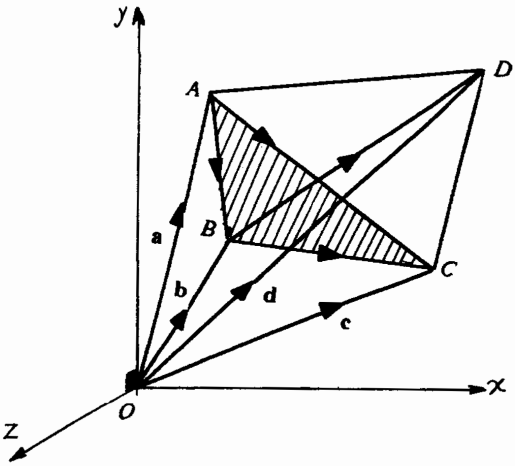
$$(۵\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\times(۴\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۵&-۱&-۱\\ ۴&-۲&۴\end{vmatrix}=-۶\mathbf{i}-۲۴\mathbf{j}-۶\mathbf{k}$$

پس،

$$d=\frac{|-۶\mathbf{i}-۲۴\mathbf{j}-۶\mathbf{k}|}{۳\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳۶+۵۷۶+۳۶}}{۳\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶۴۸}}{۳\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow d=\frac{۱۸\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۳}}\Rightarrow d=۶\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۱۱. شکل ۸۳ را ببینید.



شکل۸۳

الف) ابتدا معادله‌های برداری دو صفحهٔ ABC و BCD، را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

معادلهٔ صفحهٔ ABC: صفحه شامل سه نقطهٔ $A(۱,-۲,۶)$، $B(۲,۳,-۱)$ و $C(۵,-۴,-۳)$ است.

$$\overrightarrow{AB}=(۲-۱)\mathbf{i}+(۳+۲)\mathbf{j}+(-۱-۶)\mathbf{k}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۷\mathbf{k} \qquad (۱)$$

$$\overrightarrow{AC}=(۵-۱)\mathbf{i}+(-۴+۲)\mathbf{j}+(-۳-۶)\mathbf{k}\Rightarrow \overrightarrow{AC}=۴\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۹\mathbf{k} \qquad (۲)$$

در واقع، رابطه‌های (۱) و (۲)، یعنی $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، دو بردار در صفحهٔ ABC هستند. پس،

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۵ & -۷ \\ ۴ & -۲ & -۹ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۴۵-۱۴) - \mathbf{j}(-۹+۲۸) + \mathbf{k}(-۲-۲۰)$$

$$= -۵۹\mathbf{i} - ۱۹\mathbf{j} - ۲۲\mathbf{k}$$

اگر نقطهٔ $P(x,y,z)$، به‌طور دلخواه روی صفحهٔ ABC اختیار شود، دو بردار $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$، برهم عمودند، پس خواهیم داشت

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = ۰$$

$$[(x-۱)\mathbf{i} + (y+۲)\mathbf{j} + (z-۶)\mathbf{k}] \cdot (-۵۹\mathbf{i} - ۱۹\mathbf{j} - ۲۲\mathbf{k}) = ۰$$

$$-(x-۱)۵۹ + (y+۲)(-۱۹) + (z-۶)(-۲۲) = ۰$$

$$-۵۹x + ۵۹ - ۱۹y - ۳۸ - ۲۲z + ۱۳۲ = ۰$$

$$-۵۹x - ۱۹y - ۲۲z = -۱۵۳$$

معادلهٔ دکارتی صفحهٔ ABC: $\quad ۵۹x + ۱۹y + ۲۲z = ۱۵۳$

معادلهٔ برداری صفحهٔ ABC: $\quad \mathbf{r} \cdot (۵۹\mathbf{i} + ۱۹\mathbf{j} + ۲۲\mathbf{k}) = ۱۵۳$

معادلهٔ صفحهٔ BCD: صفحه شامل سه نقطهٔ $B(۲,۳,-۱)$، $C(۵,-۴,-۳)$ و $D(-۳,۲,۲)$ است.

$$\overrightarrow{BC} = (۵-۲)\mathbf{i} + (-۴-۳)\mathbf{j} + (-۳+۱)\mathbf{k} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = ۳\mathbf{i} - ۷\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{BD} = (-۳-۲)\mathbf{i} + (۲-۳)\mathbf{j} + (۲+۱)\mathbf{k} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = -۵\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$$

$\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$، دو بردار صفحهٔ BCD هستند. همچنین،

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۳ & -۷ & -۲ \\ -۵ & -۱ & ۳ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۲۱-۲) - \mathbf{j}(۹-۱۰) + \mathbf{k}(-۳-۳۵)$$

$$= -۲۳\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۳۸\mathbf{k}$$

اگر $P(x,y,z)$، نقطه‌ای دلخواه روی صفحهٔ BCD باشد، دو بردار $\overrightarrow{BP}$ و $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}$، برهم عمودند. پس،

$$\overrightarrow{BP} \cdot (\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}) = ۰$$

$$[(x-۲)\mathbf{i} + (y-۳)\mathbf{j} + (z+۱)\mathbf{k}] \cdot (-۲۳\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۳۸\mathbf{k}) = ۰$$

$$-۲۳(x-۲)+(y-۳)-۳۸(z+۱)=۰$$

$$-۲۳x+۴۶+y-۳-۳۸z-۳۸=۰$$

$$-۲۳x+y-۳۸z=۳۸+۳-۴۶$$

معادلهٔ دکارتی صفحهٔ BCD:
$$۲۳x-y+۳۸z=۵$$

معادلهٔ برداری صفحهٔ BCD:
$$\mathbf{r}\cdot(۲۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+۳۸\mathbf{k})=۵$$

اگر زاویهٔ بین دو صفحه را θ بنامیم، آنگاه برای یافتن θ، باید از دستور زیر استفاده کنیم،

$$\cos\theta=\hat{\mathbf{n}}_۱\cdot\hat{\mathbf{n}}_۲=\frac{۵۹\mathbf{i}+۱۹\mathbf{j}+۲۲\mathbf{k}}{\sqrt{۵۹^۲+۱۹^۲+۲۲^۲}}\cdot\frac{(۲۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+۳۸\mathbf{k})}{\sqrt{۲۳^۲+۱^۲+۳۸^۲}}$$

$$=\frac{۵۹\mathbf{i}+۱۹\mathbf{j}+۲۲\mathbf{k}}{۶۵{,}۸}\cdot\frac{۲۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+۳۸\mathbf{k}}{۴۴{,}۴}$$

$$=\frac{۵۹\times۲۳-۱۹\times۱+۲۲\times۳۸}{۲۹۲۱{,}۵۲}=۰{,}۷۴۴\Rightarrow\theta=۴۱{,}۹^\circ$$

ب) ابتدا معادلهٔ صفحهٔ ACD را به‌دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}=۴\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۹\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}-\mathbf{a}=-۴\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۴\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ ۴&-۲&-۹\\ -۴&۴&-۴\end{vmatrix}=\mathbf{i}(۸+۳۶)-\mathbf{j}(-۱۶-۳۶)+\mathbf{k}(۱۶-۸)$$

$$=۴۴\mathbf{i}+۵۲\mathbf{j}+۸\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AP}=(x-۱)\mathbf{i}+(y+۲)\mathbf{j}+(z-۶)\mathbf{k}$$

به‌دلیل عمود بودن بردارهای $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$ برهم، داریم

$$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=۰$$

$$[(x-۱)\mathbf{i}+(y+۲)\mathbf{j}+(z-۶)\mathbf{k}]\cdot(۴۴\mathbf{i}+۵۲\mathbf{j}+۸\mathbf{k})=۰$$

$$۴۴(x-۱)+۵۲(y+۲)+۸(z-۶)=۰$$

$$۴۴x+۵۲y+۸z-۴۴+۱۰۴-۴۸=۰$$

پس معادلهٔ صفحهٔ ACD عبارت است از

$$۴۴x+۵۲y+۸z=-۱۲$$

$$\mathbf{r}\cdot(۴۴\mathbf{i}+۵۲\mathbf{j}+۸\mathbf{k})=-۱۲$$

$$\mathbf{r}\cdot(۱۱\mathbf{i}+۱۳\mathbf{j}+۲\mathbf{k})=-۳$$

حالا معادلهٔ صفحهٔ ABD را به‌دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۷\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = -۴\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۵ & -۷ \\ -۴ & ۴ & -۴ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۲۰ + ۲۸) - \mathbf{j}(-۴ - ۲۸) + \mathbf{k}(۴ + ۲۰)$$

$$= ۸\mathbf{i} + ۳۲\mathbf{j} + ۲۴\mathbf{k}$$

اگر $P(x, y, z)$، نقطه‌ای دلخواه روی صفحه باشد، داریم

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) = ۰$$

$$[(x - ۱)\mathbf{i} + (y + ۲)\mathbf{j} + (z - ۶)\mathbf{k}] \cdot (۸\mathbf{i} + ۳۲\mathbf{j} + ۲۴\mathbf{k}) = ۰$$

$$۸(x - ۱) + ۳۲(y + ۲) + ۲۴(z - ۶) = ۰$$

$$۸x + ۳۲y + ۲۴z = ۸ - ۶۴ + ۱۴۴$$

$$۸x + ۳۲y + ۲۴z = ۸۸$$

بنابراین معادلهٔ صفحهٔ ABD، عبارت است از،

$$x + ۴y + ۳z = ۱۱ \quad \text{یا} \quad \mathbf{r} \cdot (\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) = ۱۱$$

اگر θ، زاویهٔ بین دو وجه ACD و ABD باشد داریم، $\cos\theta = \hat{\mathbf{n}}_۱ \cdot \hat{\mathbf{n}}_۲$،

$$\cos\theta = \frac{۱۱\mathbf{i} + ۱۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}}{\sqrt{۱۱^۲ + ۱۳^۲ + ۲^۲}} \cdot \frac{\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}}{\sqrt{۱ + ۴^۲ + ۹}}$$

$$= \frac{۱۱ + ۵۲ + ۶}{\sqrt{۱۲۱ + ۱۶۹ + ۴} \cdot \sqrt{۲۶}} = \frac{۶۹}{۱۷/۱۵ \times ۵/۱} = ۰/۷۸۹۰۳۹۶$$

$$\Rightarrow \theta = ۳۷/۹^\circ$$

۱۲. الف)

$$\overrightarrow{PQ} = (-۳\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) - (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}) = -۵\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = (۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}) - (۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}) = \mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۵ & ۴ & ۲ \\ ۱ & ۵ & -۵ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۲۰ - ۱۰) - \mathbf{j}(۲۵ - ۲) + \mathbf{k}(-۲۵ - ۴)$$

$$= -۳۰\mathbf{i} - ۲۳\mathbf{j} - ۲۹\mathbf{k}$$

ب)

$$S \,\Delta\, PQR = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{۱}{۲}|-۳۰\mathbf{i} - ۲۳\mathbf{j} - ۲۹\mathbf{k}|$$

$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۰^۲ + ۲۳^۲ + ۲۹^۲} = ۲۳/۸$$

ج) اگر $A(x,y,z)$، نقطه‌ای دلخواه روی این صفحه باشد، داریم $\overrightarrow{PA} \perp (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR})$. بنابراین،

$$\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) = ۰$$

$$[(x-۲)\mathbf{i} + (y+۳)\mathbf{j} + (z-۲)\mathbf{k}] \cdot (-۳۰\mathbf{i} - ۲۳\mathbf{j} - ۲۹\mathbf{k}) = ۰$$

$$-۳۰(x-۲) + (y+۳)(-۲۳) - ۲۹(z-۲) = ۰$$

$$-۳۰x + ۶۰ - ۲۳y - ۶۹ - ۲۹z + ۵۸ = ۰$$

$$۳۰x + ۲۳y + ۲۹z = ۵۸ + ۶۰ - ۶۹ = ۴۹$$

معادلهٔ دکارتی صفحهٔ شامل نقطه‌های P، Q و R: $\quad ۳۰x + ۲۳y + ۲۹z = ۴۹$

معادلهٔ برداری صفحه: $\quad \Rightarrow \mathbf{r} \cdot (۳۰\mathbf{i} + ۲۳\mathbf{j} + ۲۹\mathbf{k}) = ۴۹$

۱۳. با معلوم بودن بردارهای **a**، **b** و **c** داریم

الف)

$$\overrightarrow{AB} = (۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) - (۴\mathbf{j} - ۵\mathbf{k})$$

$$\overrightarrow{AB} = ۲\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} + ۶\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-۳\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۷\mathbf{k}) - (۴\mathbf{j} - ۵\mathbf{k}) = -۳\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۱۲\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۲ & -۵ & ۶ \\ -۳ & -۳ & ۱۲ \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-۶۰ + ۱۸) - \mathbf{j}(۲۴ + ۱۸) + \mathbf{k}(-۶ - ۱۵)$$

$$= -۴۲\mathbf{i} - ۴۲\mathbf{j} - ۲۱\mathbf{k}$$

ب) $$S\,\Delta\, ABC = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{۱}{۲}|-۴۲\mathbf{i} - ۴۲\mathbf{j} - ۲۱\mathbf{k}|$$

$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{۴۲^۲ + ۴۲^۲ + ۲۱^۲} = ۳۱{,}۵$$

ج) اگر نقطهٔ $P(x,y,z)$، به‌طور دلخواه روی این صفحه درنظر گرفته شود، داریم

$$[x\mathbf{i} + (y-۴)\mathbf{j} + (z+۵)\mathbf{k}] \cdot (-۴۲\mathbf{i} - ۴۲\mathbf{j} - ۲۱\mathbf{k}) = ۰$$

و یا،

$$-۴۲x - ۴۲(y-۴) - ۲۱(z+۵) = ۰$$

$$-۴۲x - ۴۲y + ۱۶۸ - ۲۱z - ۱۰۵ = ۰$$

$$-۴۲x - ۴۲y - ۲۱z = ۱۰۵ - ۱۶۸$$

$$۴۲x + ۴۲y + ۲۱z = ۶۳$$

$$۲x + ۲y + z = ۳$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} \cdot (۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}) = ۳$$

۱۴. الف)

$$d = \frac{|\mathbf{b} \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{b}|}$$

$$\mathbf{r} = (۲ + ۳\lambda)\mathbf{i} + (۱ - ۲\lambda)\mathbf{j} + (۳ + \lambda)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = (۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) + \lambda(۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{a} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۳\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = ۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{۳^۲ + ۲^۲ + ۱} = \sqrt{۱۴}$$

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = -\mathbf{i} - ۲\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-\mathbf{i} - ۲\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۳ & -۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ & -۲ \end{vmatrix} = ۴\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|\mathbf{b} \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{b}|} = \frac{|۴\mathbf{i} + ۵\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}|}{\sqrt{۱۴}} = \frac{\sqrt{۴^۲ + ۵^۲ + ۲^۲}}{\sqrt{۱۴}} = \frac{\sqrt{۴۵}}{\sqrt{۱۴}}$$

$$\Rightarrow d = ۱/۷۹$$

ب)

$$\mathbf{r} = (۱ - t)\mathbf{i} + (۱ + t)\mathbf{j} + (۱ - ۲t)\mathbf{k} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + t(-\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۲\mathbf{k})$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۲\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{b}| = \sqrt{۱ + ۱ + ۴} = \sqrt{۶}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} - (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = ۰ \Rightarrow d = ۰$$

ج)

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - ۳\mathbf{k} + t(-۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k})$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - ۳\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = -۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} - \mathbf{i} - \mathbf{j} + ۳\mathbf{k} = ۴\mathbf{k} \quad \text{و} \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{۴ + ۹ + ۱۶} = \sqrt{۲۹}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|(-۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) \times ۴\mathbf{k}|}{\sqrt{۲۹}}$$

$$(-۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) \times ۴\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{vmatrix} = ۱۲\mathbf{i} + ۸\mathbf{j}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|۱۲\mathbf{i} + ۸\mathbf{j}|}{\sqrt{۲۹}} = \frac{\sqrt{۱۴۴ + ۶۴}}{\sqrt{۲۹}} = ۲/۶۸$$

$$\Rightarrow d = ۲/۶۸$$

۱۵.
$$\mathbf{a} = -\mathbf{i} + ۷\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = -\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۴\mathbf{k} - (-\mathbf{i} + ۷\mathbf{k}) = -۲\mathbf{j} - ۱۱\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}) \times (-۲\mathbf{j} - ۱۱\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & -۲ & -۳ \\ ۰ & -۲ & -۱۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۱۶\mathbf{i} + ۱۱\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|۱۶\mathbf{i} + ۱۱\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}|}{|\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}|} = \sqrt{\frac{۲۵۶ + ۱۲۱ + ۴}{۱ + ۴ + ۹}} \Rightarrow d = ۵/۲۲$$

۱۶.
$$\mathbf{a} = ۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = ۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۸\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = ۵\mathbf{i} + ۸\mathbf{j} + ۹\mathbf{k} - ۲\mathbf{i} - ۵\mathbf{k} = ۳\mathbf{i} + ۸\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$$

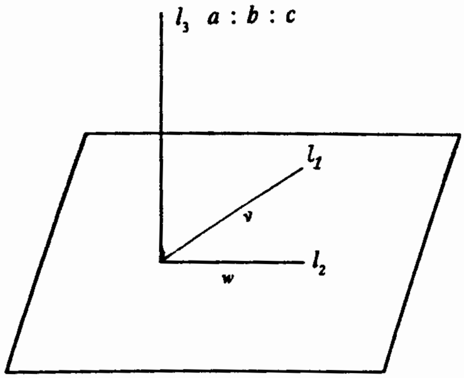
$$\mathbf{b} \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۸\mathbf{k}) \times (۳\mathbf{i} + ۸\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۳ & ۴ & ۸ \\ ۳ & ۸ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$= -۴۸\mathbf{i} + ۱۲\mathbf{j} + ۱۲\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|\mathbf{b} \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})|}{|\mathbf{b}|} = \frac{|-۴۸\mathbf{i} + ۱۲\mathbf{j} + ۱۲\mathbf{k}|}{|۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۸\mathbf{k}|} = \sqrt{\frac{۲۳۰۴ + ۱۴۴ + ۱۴۴}{۹ + ۱۶ + ۶۴}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲۵۹۲}{۸۹}} = ۵/۴ \Rightarrow d = ۵/۴$$

۱۷.



شکل۸۴

نسبتهای هادی دو خط l_1 و l_2، به‌ترتیب ۱ : ۱- : ۱ و ۳ : ۱ : ۲، است. خط l_3 بر دو خط l_1 و l_2، عمود است (شکل ۸۴). اگر نسبتهای هادی خط l_3 را $a : b : c$ فرض کنیم، خواهیم داشت

$$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = ۰ \Rightarrow a - b + c = ۰$$

$$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \cdot (۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۳\mathbf{k}) = ۰ \Rightarrow ۲a + b + ۳c = ۰ \qquad (۱)$$

اگر طرفین این دو رابطهٔ اخیر را باهم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$۳a + ۴c = ۰ \Rightarrow \frac{a}{c} = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow a = -\frac{۴}{۳}c$$

با قرار دادن مقدار a، در رابطهٔ (۱)، خواهیم داشت

$$۲\left(-\frac{۴}{۳}c\right) + b + ۳c = ۰$$

$$b = \frac{۸}{۳}c - \frac{۹}{۳} = -\frac{c}{۳}$$

$$\frac{b}{c} = -\frac{۱}{۳}$$

$$a : b : c = ۴ : ۱ : -۳$$

و معادلهٔ برداری صفحه عبارت است از، $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - \mathbf{k}) + t(۴\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۳\mathbf{k})$.

مسائل گوناگون

۱. دو صفحهٔ Γ_1 و Γ_2، که معادله‌های برداری آنها داده شده است مفروض‌اند:

$$\Gamma_1 = \mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = 1 \quad , \quad \Gamma_2 = \mathbf{r}\cdot(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}) = 3$$

الف) زاویهٔ حادهٔ بین این دو صفحه را، تا یک رقم بعد از اعشار، به‌دست آورید. (جواب: $63{,}6^\circ$)

ب) اگر فصل مشترک این دو صفحه را L بنامیم، با استفاده از ضرب بردارها و یا هر روش دیگری که می‌دانید، نشان دهید بردار $2\mathbf{i}-5\mathbf{j}-6\mathbf{k}$، با خط L موازی است.

ج) صفحهٔ Γ_3، شامل نقطه‌ای با بردار مکان $-3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ بر خط L، فصل مشترک دو صفحهٔ Γ_1 و Γ_2، عمود است. معادلهٔ برداری این صفحه را به‌دست آورید.
(جواب: $\mathbf{r}\cdot(2\mathbf{i}-5\mathbf{j}-6\mathbf{k}) = -9$)

د) نشان دهید فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی صفحه‌های Γ_1، Γ_2 و Γ_3 تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{3}$ است.

۲. خط l، با معادلهٔ برداری $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$، از نقطهٔ A، با بردار مکان $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}$، می‌گذرد و با بردار $\mathbf{b} = 5\mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ موازی است. نقطهٔ C در فضا، به مختصات $(2, 7, -4)$ و با بردار مکان $\mathbf{c}$، مفروض است.

الف) حاصلضرب $\mathbf{b}\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ را پیدا کنید. (جواب: $10\mathbf{i}+5\mathbf{j}+10\mathbf{k}$)

ب) با استفاده از قسمت قبل، و یا هر روش دیگری که می‌دانید، معادلهٔ برداری صفحهٔ Γ_1 را که شامل خط l و نقطهٔ C است به‌دست آورید. (جواب: $\mathbf{r}\cdot(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = 3$)

ج) اگر معادلهٔ برداری صفحهٔ Γ_2، به‌صورت $\mathbf{r}\cdot(5\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = -6$ باشد، نشان دهید زاویهٔ بین خط l و صفحهٔ Γ_2 مساوی است با، $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

د) مختصات نقطهٔ P، محل تلاقی خط l و صفحهٔ Γ_2 را به‌دست آورید. (جواب: $(-3, 7, 1)$)

هـ) طول پاره‌خط PA را به‌صورت یک عدد گنگ به‌دست آورید و به کمک آن، فاصلهٔ نقطهٔ A را تا صفحهٔ Γ_2 محاسبه کنید. (جواب: $PA = 3\sqrt{5}$ و فاصلهٔ A تا صفحه $= \frac{\sqrt{30}}{2}$)

۳. معادله‌های برداری سه خط $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ به‌صورت زیر داده شده است:

$$l_۱: \ \mathbf{r} = ۵\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۵\mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} - \mathbf{j} - ۲\mathbf{k})$$

$$l_۲: \ \mathbf{r} = \mathbf{i} - ۴\mathbf{j} - ۱۰\mathbf{k} + \mu(۲\mathbf{i} + ۷\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$l_۳: \ \mathbf{r} = \mathbf{i} + ۱۱\mathbf{j} + ۲\mathbf{k} + \nu(-۴\mathbf{i} - ۱۴\mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$$

الف) نشان دهید دو خط $l_۲$ و $l_۳$، باهم موازی‌اند.

ب) نشان دهید دو خط $l_۱$ و $l_۲$ متقاطع‌اند و سپس مختصات نقطهٔ تلاقی این دو خط را به‌دست آورید.

ج) زاویهٔ حادهٔ بین دو خط $l_۱$ و $l_۲$ را محاسبه کنید. (جواب: $\cos^{-۱}\left(\frac{۱}{۶}\right)$)

د) معادلهٔ دکارتی صفحهٔ $\Gamma_۱$ را که شامل دو خط $l_۱$ و $l_۲$ است به‌دست آورید.

ه) معادلهٔ دکارتی صفحهٔ $\Gamma_۲$ را که موازی صفحهٔ $\Gamma_۱$ و شامل مبدأ مختصات است پیدا کنید و نشان دهید که خط $l_۳$، متعلق به این صفحه است.

و) کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خط $l_۱$ و $l_۳$ را محاسبه کنید. (جواب: $\frac{۳۹\sqrt{۳}}{۳۵}$)

۴. سه خط $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ را که معادله‌های برداری آنها، در زیر داده شده است درنظر بگیرید:

$$l_۱: \ \mathbf{r} = ۴\mathbf{i} + ۷\mathbf{j} - ۳\mathbf{k} + t_۱(\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۴\mathbf{k})$$

$$l_۲: \ \mathbf{r} = ۳\mathbf{i} + ۱۰\mathbf{j} - \mathbf{k} + t_۲(-۳\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$l_۳: \ \mathbf{r} = ۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + \mathbf{k} + t_۳(۴\mathbf{i} - ۵\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$، سه پارامتر اسکالر هستند.

الف) نشان دهید سه خط $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ در نقطهٔ A با بردار مکان $\mathbf{a} = ۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + \mathbf{k}$، همرس‌اند.

ب) فاصلهٔ نقطهٔ A را از صفحهٔ Γ، با معادلهٔ برداری $\mathbf{r} \cdot (۶\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}) = ۲۵$ به‌دست آورید. (جواب: ۱)

ج) اگر خطهای $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ صفحهٔ Γ را به‌ترتیب در نقطه‌های B، C و D قطع کنند، بردارهای مکان نقطه‌های B، C و D را به‌دست آورید.

(جواب: $\mathbf{b} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$، $\mathbf{c} = ۳\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ و $\mathbf{d} = -\mathbf{i} + ۹\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$)

د) مساحت مثلث $B\hat{C}D$ را بیابید و به‌کمک آن حجم چهاروجهی $ABCD$ را محاسبه کنید

(جواب: مساحت مثلث $B\hat{C}D = ۱۴$ و حجم چهاروجهی $ABCD = \frac{۱۴}{۳}$)

۵. خطهای $l_۱$ و $l_۲$ و معادله‌های برداری آنها را درنظر بگیرید:

$$l_۱: \ \mathbf{r} = ۹\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} + ۵\mathbf{k} + t(۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$l_۲: \ \mathbf{r} = ۲\mathbf{i} - ۸\mathbf{j} + ۱۲\mathbf{k} + s(\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k})$$

الف) اگر نقطهٔ A، پای عمود مرسوم از مبدأ مختصات به خط l_1، باشد، بردار مکان نقطهٔ A را بیابید. (جواب: $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$)

ب) معادلهٔ برداری صفحهٔ Γ_1 را که شامل نقطهٔ A و بر خط OA عمود است به‌دست آورید. (جواب: $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 1$)

ج) ابتدا نشان دهید که دو خط l_1 و l_2 متقاطع‌اند و سپس بردار مکان نقطهٔ تلاقی این دو خط، B، را به‌دست آورید. (جواب: $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$)

د) ابتدا برداری را که به هر دو خط l_1 و l_2، عمود است، مشخص کنید و سپس به‌کمک آن، معادلهٔ برداری صفحهٔ Γ_2، را که شامل دو خط l_1 و l_2 است به‌دست آورید.
(جواب: بردار عمود: $\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$، معادلهٔ صفحه: $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = 6$)

هـ) زاویهٔ حادهٔ بین دو صفحهٔ Γ_1 و Γ_2 را تا یک‌رقم بعد از اعشار، به‌دست آورید. (جواب: $11/5^\circ$)

۶. سه نقطهٔ A، B و C را که بردارهای مکان آنها را به‌ترتیب $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ می‌نامیم، به‌صورت زیر معرفی شده‌اند.

$$A(4,1,3)\ ,\quad B(-2,7,6)\ ,\quad C(1,1,4)$$

الف) حاصلضرب خارجی $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})$ را بیابید و به‌کمک آن، یا با هر روش دیگری، معادلهٔ برداری صفحهٔ ABC را به‌دست آورید.

ب) اگر نقطهٔ D با بردار مکان $\mathbf{d} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$، نقطه‌ای روی صفحهٔ ABC باشد، مقدار λ را به‌دست آورید.

ج) ثابت کنید هیچ‌یک از اضلاع چهارضلعی $ABCD$ باهم موازی نیستند.

د) مساحت چهارضلعی $ABCD$ را محاسبه کنید.

۷. خط l، با معادلهٔ برداری $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + \lambda(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$، و همچنین، بردارهای مکان دو نقطهٔ P و Q به‌ترتیب، به‌صورت $\mathbf{p} = 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{q} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ مفروض‌اند. اگر بردار هادی خط l را $\mathbf{d}$ بنامیم و فرض کنیم $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$، آنگاه

الف) حاصلضرب برداری $\mathbf{d} \times (\mathbf{a} - \mathbf{p})$ را بیابید و با کمک آن، یا هر روش دیگری، معادلهٔ صفحهٔ Γ، را که شامل خط l و نقطهٔ p است، به‌شکل $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{k}$، به‌دست آورید.
(جواب: $\mathbf{d} \times (\mathbf{a} - \mathbf{p}) = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ و $\Gamma : \mathbf{r} \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 11$)

ب) معادلهٔ خط l'، را که از دو نقطهٔ P و Q می‌گذرد، بنویسید.

ج) زاویهٔ بین خط l' و صفحهٔ Γ را محاسبه کنید. (جواب: $\sin^{-1}\frac{7}{9}$)

د) ثابت کنید دو نقطهٔ P و Q از خط l به یک فاصله‌اند.

۸. بردارهای مکان چهار نقطهٔ A، B، C و D به‌صورت زیر داده شده است:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}\ ،\quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}\ ،\quad \mathbf{c} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\ ،\quad \mathbf{d} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

الف) شکل کلی برداری را که بر صفحهٔ ABC عمود است بنویسید.

(جواب: هر ضریبی از، $\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-\mathbf{k}$)

ب) نشان دهید فاصلهٔ نقطهٔ D، تا صفحهٔ ABC، برابر $۲\sqrt{۶}$ است.

ج) نشان دهید دو صفحهٔ ABC و BCD، برهم عمودند.

د) زاویهٔ حادهٔ بین خط BD و صفحهٔ ABC ، را محاسبه کنید. (جواب: ۵۶°)

۹. نقطه‌های A، B و C، به‌ترتیب دارای بردارهای مکان $\mathbf{a}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$، $\mathbf{b}=-۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$ هستند.

الف) نشان دهید نقطهٔ $P(۱-۳\lambda, ۲+\lambda, ۴+\lambda)$ روی خط واصل بین دو نقطهٔ A و B، قرار دارد.

ب) $PC^۲$ را برحسب λ، به‌دست آورید و سپس نشان دهید که به‌ازای مقادیر مختلف λ، کمترین مقدار $PC^۲$، مساوی ۶ است. در این حالت، ثابت کنید که PC بر خط AB عمود است.

ج) برداری را که بر هر دو خط AB و AC عمود است مشخص کنید و با کمک آن، یا هر روش دیگری، معادلهٔ برداری صفحهٔ ABC را به‌دست آورید.

(جواب: $\mathbf{n}=\mathbf{i}-۴\mathbf{j}+۷\mathbf{k}$ و $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=۲۱$)

د) معادلهٔ دکارتی صفحهٔ Γ را که شامل خط AB و بر صفحهٔ ABC عمود است به‌دست آورید. (جواب: $\Gamma: x+۲y+z=۹$)

ه) نشان دهید که نقطهٔ D با بردار مکان $\mathbf{d}=۲\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۱۱\mathbf{k}$، روی صفحهٔ Γ، به‌گونه‌ای قرار دارد که AD بر AB عمود است.

و) با کمک قسمت قبل، یا هر روش دیگری، حجم چهاروجهی $ABCD$، را محاسبه کنید.

۱۰. معادله‌های برداری دو خط $l_۱$ و $l_۲$، به‌صورت زیر داده شده است:

$$l_۱:\ \mathbf{r}=(۳\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})+\alpha(\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k})$$

$$l_۲:\ \mathbf{r}=(۲\mathbf{i}+۵\mathbf{j})+\beta(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

الف) ثابت کنید دو خط $l_۱$ و $l_۲$، متقاطع‌اند و سپس بردار مکان نقطهٔ P، محل تلاقی دو خط، را به‌دست آورید. (جواب: $\mathbf{p}=۴\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$)

ب) معادلهٔ برداری صفحهٔ Γ، را که شامل دو خط $l_۱$ و $l_۲$ است، به‌دست آورید.

ج) اگر بردار مکان نقطهٔ Q، به‌صورت $\mathbf{q}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$، و نقطهٔ R به‌گونه‌ای مفروض باشد که $QR=۲PQ$ و نیز $QR\perp\Gamma$، آنگاه

یک) بردارهای مکان ممکن متناظر با نقطهٔ R را محاسبه کنید.

(جواب: $\mathbf{r}=۱۱\mathbf{i}+۵\mathbf{j}-۹\mathbf{k}$ و یا $\mathbf{r}=-۹\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$)

دو) مساحت مثلث $P\hat{Q}R$ را تا سه رقم بامعنی به‌دست آورید. (جواب: $S_{P\hat{Q}R}=۳۷/۸۱$)

۱۱. سه نقطهٔ $A(۱,۴,۲)$، $B(۱,۰,۵)$ و $C(۰,۸,-۱)$، مفروض‌اند،

الف) معادلهٔ دکارتی صفحهٔ $\Gamma_۱$، شامل این سه نقطه را به‌دست آورید. (جواب: $۳y+۴z=۲۰$)

ب) صفحهٔ $\Gamma_۲$، شامل نقطهٔ $D(۲,۲,۳)$ و $\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$، بردار عمود بر آن است. معادلهٔ دکارتی صفحهٔ $\Gamma_۲$ را پیدا کنید. (جواب: $x+۲y+۲z=۱۲$)

ج) اگر نقطهٔ $E(p,۰,q)$، متعلق به هر دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ باشد، مقدارهای p و q را بیابید. (جواب: $p=۲$ و $q=۵$)

د) با استفاده از قسمت قبل، معادلهٔ برداری خطی را که دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ که در آن مشترک‌اند به‌دست آورید.

(جواب: $\mathbf{r}=۲\mathbf{i}+۵\mathbf{k}+\lambda(-۲\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۲\mathbf{k})$)

ه) نقطهٔ $F(۱,۱,\mu)$، از دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ به‌یک فاصله است. دو مقدار ممکن برای μ پیدا کنید. (جواب: $\frac{۴۸}{۱۱}$ و یا $\mu=۳$)

۱۲. دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$، را که معادله‌های برداری آنها، در زیر داده شده است، درنظر بگیرید:

$$\Gamma_۱:\ \mathbf{r}\cdot(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k})=۱ \quad \text{و} \quad \Gamma_۲:\ \mathbf{r}\cdot(۴\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۲\mathbf{k})=۱۱$$

اگر فصل مشترک این دو صفحه را خط l بنامیم، آنگاه

الف) حاصلضرب برداری $(۲\mathbf{i}-۳\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(۴\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$ را به‌دست آورید و سپس نشان دهید نقطهٔ $A(۳,۱,-۲)$، متعلق به هر دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ است. معادلهٔ برداری خط l را پیدا کنید.

ب) زاویهٔ حادهٔ بین دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ را به‌دست آورید. (جواب: ۸۷°)

ج) معادلهٔ برداری صفحهٔ $\Gamma_۳$ را که شامل نقطهٔ $(۰,۱,-۱)$ و بر هر دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ عمود است به‌دست آورید.

د) مختصات نقطهٔ تلاقی سه صفحهٔ $\Gamma_۱$، $\Gamma_۲$ و $\Gamma_۳$ را محاسبه کنید.

۱۳. دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ را با معادله‌های برداری زیر، درنظر بگیرید:

$$\Gamma_۱:\ \mathbf{r}\cdot(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=۰$$

$$\Gamma_۲:\ \mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+۵\mathbf{j}+۳\mathbf{k})=۱$$

الف) نشان دهید نقطهٔ $A(۲,-۲,۳)$، متعلق به صفحهٔ $\Gamma_۲$ است.

ب) نشان دهید دو صفحهٔ $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ بر همدیگر عمودند.

ج) معادلهٔ برداری خط l، گذرنده از نقطهٔ A و عمود بر صفحهٔ $\Gamma_۱$ را به‌دست آورید.

د) مختصات نقطهٔ تلاقی خط l و صفحهٔ $\Gamma_۱$، را پیدا کنید.

ه) فاصلهٔ نقطهٔ A را از صفحهٔ $\Gamma_۱$، به‌دست آورید.

و) معادلهٔ برداری صفحهٔ $\Gamma_۳$ را که شامل نقطهٔ A و با صفحهٔ $\Gamma_۱$، موازی است به‌دست آورید.

۱۴. فرض کنید بردار مکان نقطهٔ A، به‌صورت $a(۴\mathbf{i}+\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$ و نیز معادلهٔ برداری صفحهٔ Γ، به‌صورت $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}-۵\mathbf{j}+۳\mathbf{k})=a$، داده شده باشند. ($a$ عدد ثابتی است).

الف) نشان دهید نقطهٔ A متعلق به صفحهٔ Γ است.

ب) اگر بردار مکان نقطهٔ B به‌صورت $a(\mathbf{۲i}+\mathbf{۱۱j}-\mathbf{۴k})$ باشد، نشان دهید بردار $\overrightarrow{BA}$، بر صفحهٔ Γ عمود است.

ج) اندازهٔ زاویهٔ $\angle OBA$، را تا یک رقم بعد از اعشار، محاسبه کنید.

۱۵. دو خط $l_۱$ و $l_۲$، را که معادله‌های برداری آنها، در زیر داده شده است درنظر بگیرید:

$$l_۱:\ \mathbf{r}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\lambda(\mathbf{۲i}+\mathbf{j}-\mathbf{۲k})$$

$$l_۲:\ \mathbf{r}=\mathbf{i}+\mathbf{۲j}+\mathbf{۲k}+\mu(-\mathbf{۳i}+\mathbf{۴k})$$

الف) نشان دهید که دو خط $l_۱$ و $l_۲$ متقاطع‌اند.

ب) بردار مکان و مختصات نقطهٔ تلاقی دو خط $l_۱$ و $l_۲$ را به‌دست آورید.

ج) کسینوس زاویهٔ حادهٔ بین این دو خط را محاسبه کنید.

د) معادلهٔ برداری صفحه‌ای را که شامل دو خط $l_۱$ و $l_۲$ باشد، به‌دست آورید.

۱۶. بردارهای مکان سه نقطهٔ A ، B و C را که در زیر داده شده‌اند درنظر بگیرید:

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}=\mathbf{۳i}-\mathbf{j}+\mathbf{۲k}$$

$$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}=\mathbf{۷i}+\mathbf{۲j}+\mathbf{۷k}$$

$$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{۳k}$$

الف) حاصلضرب برداری $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}$، را به‌دست آورید و زاویه‌ای را که این بردار با صفحهٔ شامل سه نقطهٔ A، B و C می‌سازد مشخص کنید.

(جواب: $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=-\mathbf{۷i}-\mathbf{۱۴j}+\mathbf{۱۴k}$، این بردار بر صفحه عمود است)

ب) معادلهٔ بردار صفحهٔ شامل این سه نقطه را به‌دست آورید و سپس فاصلهٔ نقطهٔ O، مبدأ مختصات، تا این صفحه را به‌دست آورید.

(جواب: $\mathbf{r}\cdot(-\mathbf{i}-\mathbf{۲j}+\mathbf{۲k})=۳$ و فاصلهٔ مبدأ تا صفحهٔ ABC برابر ۱ است)

ج) نشان دهید معادلهٔ برداری صفحهٔ شامل سه نقطهٔ O، A و C به‌صورت $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{۵i}+\mathbf{۷j}-\mathbf{۴k})=۰$ است.

د) به‌کمک قسمتهای قبل، زاویهٔ حادهٔ بین دو صفحهٔ OCA و ABC را تا یک رقم بعد از اعشار، به‌دست آورید. (جواب: $(ABC\,\hat{,}\,OCA)=۱۸{,}۴^\circ$)

۱۷. سه نقطهٔ A، B و C، به‌وسیلهٔ بردارهای مکان خود، به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{۲j}+\mathbf{۲k}\,,\quad \overrightarrow{OB}=\mathbf{b}=\mathbf{۳i}-\mathbf{k}\,,\quad \overrightarrow{OC}=\mathbf{c}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{۴k}$$

الف) کسینوس زاویهٔ $B\hat{A}C$، را محاسبه کنید. (جواب: $-\frac{۴}{۱۷}$)

ب) با استفاده از قسمت قبل، یا روش دیگری، مساحت مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ را به‌دست آورید.

(جواب: ۸٫۲۶)

۱۸. سه نقطهٔ A، B و C، دارای بردارهای مکان زیر هستند:

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}\,,\quad \overrightarrow{OB}=\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}\,,\quad \overrightarrow{OC}=\mathbf{c}=s\mathbf{i}+t\mathbf{j}+u\mathbf{k}$$

(s، t و u، اعداد ثابتی هستند و $s>0$). اگر نقطهٔ C، روی خط l، با معادلهٔ برداری $\lambda\in\mathbf{R}$ و $\mathbf{r}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}+2\mathbf{k})$، واقع باشد.

الف) نشان دهید $u=2s-3$.

ب) حاصلضرب برداری $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}$ را برحسب s، به‌دست آورید.

ج) اگر مساحت مثلث $A\hat{B}C$، مساوی $\frac{\sqrt{57}}{2}$ باشد، مقدار s را به‌دست آورید.

د) معادلهٔ برداری صفحهٔ ABC را پیدا کنید.

ه) حجم چهاروجهی $OABC$ (O مبدأ مختصات است) را محاسبه کنید.

۱۹. سه نقطهٔ A، B و C، با بردارهای مکان خود، به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}+3\mathbf{k}\,,\quad \overrightarrow{OB}=\mathbf{b}=-\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}\,,\quad \overrightarrow{OC}=\mathbf{c}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$$

الف) مساحت مثلث $A\hat{B}C$، را به‌دست آورید.

ب) اگر O مبدأ مختصات باشد، حجم چهاروجهی $OABC$، را محاسبه کنید.

ج) اگر معادلهٔ برداری خط l، که دو نقطهٔ A و B، را به‌هم وصل می‌کند، به‌صورت $\mathbf{r}\times\mathbf{p}=\mathbf{q}$ باشد، بردارهای $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ را تعیین کنید.

د) فاصلهٔ نقطهٔ C از خط l را به‌دست آورید.

۲۰. معادلهٔ برداری دو خط l_1 و l_2 به صورت زیر داده شده‌اند:

$$l_1:\ \mathbf{r}=p\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}-\mathbf{k})$$ (p عددی ثابت است.)

$$l_2:\ \mathbf{r}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mu(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k})$$

اگر نقطهٔ تلاقی دو خط l_1 و l_2 را A بنامیم،

الف) مختصات نقطهٔ A را به‌دست آورید و سپس نشان دهید $p=2$.

ب) معادلهٔ دکارتی صفحهٔ Γ را، که شامل نقطهٔ A و بر خط l_2 عمود است، پیدا کنید.

ج) زاویهٔ حادهٔ بین خط l_1 و صفحهٔ Γ را تا یک رقم بعد از اعشار، به‌دست آورید.

۲۱. دو خط l_1 و l_2 را که معادله‌های برداری آنها در زیر داده شده است، درنظر بگیرید:

$$l_1:\ \mathbf{r}=3\mathbf{i}+6\mathbf{j}+\mathbf{k}+s(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})$$

$$l_2:\ \mathbf{r}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}+t(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

الف) نشان دهید دو خط l_1 و l_2 متقاطع‌اند و سپس مختصات و بردار مکان نقطهٔ تلاقی این دو خط، را به‌دست آورید.

ب) نشان دهید که بردار $-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+7\mathbf{k}$، بر هر دو خط l_1 و l_2، عمود است.

ج) معادلهٔ برداری صفحهٔ Γ را، که شامل دو خط l_1 و l_2 است پیدا کنید.

۲۲. چهار نقطهٔ A، B، C و D، در فضا به‌وسیلهٔ بردارهای مکان خود، به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}=(2\mathbf{i}+\mathbf{j})m \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OB}=\mathbf{b}=(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})m$$

$$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}=(-2\mathbf{i}-\mathbf{k})m \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OD}=\mathbf{d}=(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})m$$

الف) حاصلِ ضربهای برداری $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{BD}$ را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از قسمت قبل، یا هر روش دیگری،

یک) معادلهٔ برداری صفحهٔ شامل سه نقطهٔ A، B و C را به‌دست آورید.

دو) مساحت مثلث $A\hat{B}C$ را تعیین کنید.

سه) حجم چهاروجهی $ABCD$ را به‌دست آورید.

چهار) فاصلهٔ نقطهٔ A را تا صفحهٔ شامل سه نقطهٔ B، C و D به‌دست آورید.

۲۳. فرض کنید دو نقطهٔ A و B، دارای بردارهای مکان $\overrightarrow{OA}=a(5\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})$ و $\overrightarrow{OB}=a(\mathbf{i}-5\mathbf{j}+7\mathbf{k})$، باشند و a عدد ثابت مثبتی باشد.

الف) معادلهٔ خط واصل بین دو نقطهٔ A و B را به‌دست آورید.

ب) نشان دهید نقطهٔ C، با بردار مکان $a(4\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})$، روی خط AB قرار دارد.

ج) نشان دهید خط OC بر AB عمود است (O مبدأ مختصات است).

د) بردار مکان نقطهٔ A را که بر نقطهٔ A منطبق نیست، چنان پیدا کنید که اولاً D روی AB واقع باشد و ثانیاً $|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{OA}|$.

۲۴. بردارهای مکان دو نقطهٔ A و B به‌ترتیب عبارت‌اند از، $\mathbf{a}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=4\mathbf{i}+6\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

اگر معادلهٔ برداری خط l_1، به‌صورت $\mathbf{r}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}-3\mathbf{k}+s(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$، داده شده باشد، آنگاه

الف) یک) معادلهٔ برداری خط l_2 را که دو نقطهٔ A و B را به‌هم وصل می‌کند، برحسب اسکالر t بنویسید. (جواب: $\mathbf{r}=4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+6\mathbf{k}+t(\mathbf{i}-4\mathbf{k})$)

دو) نشان دهید دو خط l_1 و l_2 متقاطع‌اند و سپس بردار مکان و مختصات نقطهٔ تلاقی این دو خط را به‌دست آورید. (جواب: $4\mathbf{i}+8\mathbf{j}-6\mathbf{k}$، بردار مکان نقطهٔ تلاقی)

سه) زاویهٔ حادهٔ بین دو خط l_1 و l_2 را محاسبه کنید. (جواب: 45°)

ب) یک) فرض کنید P نقطهٔ دلخواهی روی l_1، با بردار مکان $\mathbf{r}$ باشد، بردار $\mathbf{r}-\mathbf{a}$ را بیابید و نشان دهید $AP^2=3[(s+2)^2+26]$.

دو) به‌ازای چه مقداری از s، AP^2 کمترین مقدار خود را اختیار می‌کند؟ (جواب: $s=-2$)

سه) با استفاده از قسمت قبل، یا هر روش دیگری، مختصات نزدیکترین نقطهٔ خط l_1 به نقطهٔ A را مشخص کنید. (جواب: نقطه‌ای با بردار مکان $-\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$)

۲۵. معادله‌های برداری دو خط l_1 و l_2، به‌صورت زیر داده شده است:

$$l_1:\ \mathbf{r}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}+\lambda(\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}),\quad l_2:\ \mathbf{r}=4\mathbf{j}+6\mathbf{k}+\mu(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$$

الف) نشان دهید دو خط l_1 و l_2 متقاطع‌اند و سپس بردار مکان نقطهٔ تلاقی دو خط را بیابید.
(جواب: $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$)

ب) زاویهٔ حادهٔ بین دو خط l_1 و l_2 را به‌دست آورید. (جواب: 40°)

۲۶. بردارهای مکان سه نقطهٔ A، B و C به‌ترتیب عبارت‌اند از $\mathbf{a}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$، $\mathbf{b}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}$ و $\mathbf{c}=5\mathbf{i}+6\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

الف) نشان دهید دو خط AB و BC، بر یکدیگر عمودند. سپس با استفاده از این مطلب، مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را به‌دست آورید. (جواب: $S_{\overset{\triangle}{ABC}}=9$)

ب) حاصلضرب برداری $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$ را بیابید و با کمک آن، معادلهٔ برداری صفحهٔ شامل سه نقطهٔ A، B و C را به‌دست آورید. (جواب: $-6\mathbf{i}+12\mathbf{j}-12\mathbf{k}$)

ج) اگر بردار مکان نقطهٔ D، به‌صورت $4\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ D تا صفحهٔ ABC را به‌دست آورید. (جواب: ۷)

۲۷. خط l_1، با معادلهٔ برداری $l_1:\mathbf{r}=(-7\mathbf{i}+5\mathbf{j})+\lambda(8\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})$ و صفحهٔ Γ_1 با معادلهٔ $\Gamma_1:\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k})=9$، مفروض‌اند.

الف) زاویهٔ حادهٔ بین خط l_1 و صفحهٔ Γ_1 را به‌دست آورید. (جواب: 38°)

ب) مختصات نقطهٔ تلاقی خط l_1 را با صفحهٔ Γ_1 پیدا کنید. (جواب: $(1,2,-9)$)

ج) حاصلضرب برداری $(8\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k})$ را به‌دست آورید و با استفاده از آن، یا روش دیگری، معادلهٔ صفحهٔ Γ_2 را که شامل خط l_1 و بر صفحهٔ Γ_1 عمود است، به‌دست آورید. (جواب: $5\mathbf{i}+9\mathbf{j}-13\mathbf{k}$ و $\Gamma_2:\mathbf{r}\cdot(5\mathbf{i}+9\mathbf{j}-13\mathbf{k})=1$)

د) معادلهٔ برداری خط l_2، فصل مشترک دو صفحهٔ Γ_1 و Γ_2، را به‌دست آورید.
(جواب: $\mathbf{r}=9\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}+\lambda(35\mathbf{i}+8\mathbf{j}+19\mathbf{k})$)

۲۸. بردارهای مکان سه نقطهٔ A، B و C به‌ترتیب عبارت‌اند از $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$، $\mathbf{b}=-2\mathbf{i}+5\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=-\mathbf{i}+4\mathbf{k}$.

الف) حاصلضرب داخلی $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$ را پیدا کنید و با استفاده از آن، اندازهٔ زاویهٔ $\angle ABC$ را بیابید.

ب) مختصات D را چنان پیدا کنید که چهار نقطهٔ A، B، C و D رأسهای یک متوازی‌الاضلاع باشند.

ج) نشان دهید خط AC بر BD عمود است.

د) مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$، را محاسبه کنید.

هـ) نقطهٔ E، روی خط BC، چنان قرار دارد که $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{BC}$. نشان دهید بردار مکان نقطهٔ E، عبارت است از، $\mathbf{e}=\mathbf{i}-10\mathbf{j}+20\mathbf{k}$.

و) اگر خط AE، CD را در نقطهٔ X قطع کند، بردار مکان نقطهٔ X را به‌دست آورید.

هر یک از کتابهای مجموعهٔ **مهارت در ریاضیات**، تعداد زیادی مساله را در یکی از موضوعهای ریاضیات دبیرستانی به همراه حل کامل آنها در بردارد.
رهیافت گام به‌گام این مساله‌ها و حل کامل همهٔ آنها دانش‌آموز را قادر می‌سازد که با کمترین نیاز به کمک و راهنمایی معلم مستقلاً به مطالعهٔ کتابهای این مجموعه بپردازد.
کتابهای این مجموعه برای همهٔ دانش‌آموزان دبیرستان و دورهٔ پیش دانشگاهی مناسب است.

مجموعهٔ مهارت در ریاضیات شامل ۱۰ کتاب زیر است:

۱- جبر
۲- مثلثات
۳- اعداد مختلط
۴- حساب دیفرانسیل و کاربردهای آن
۵- رسم منحنیهای دکارتی و قطبی
۶- هندسهٔ مختصاتی در دوبعد
۷- حساب انتگرال و کاربردهای آن
۸- بردارها در دو و سه‌بعد
۹- ماتریسها و دترمینانها
۱۰- ترکیبها، جایگشتها، و احتمالات

شابک ۱-۲۴۰-۳۱۸-۹۶۴
ISBN 964-318-240-1

بها ۷۹۰۰ ریال