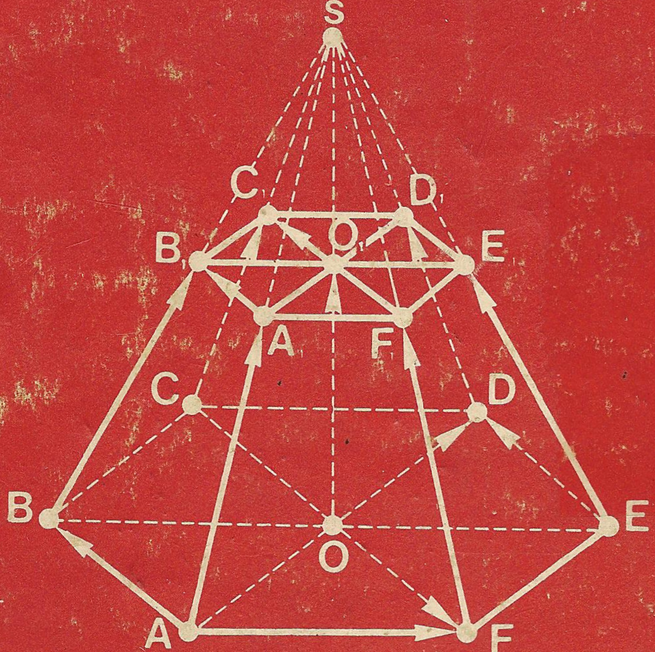
جبر برداری

تألیف پ. گوسیاتنیکوف / س. رِژنی چِنکو

ترجمهٔ پرویز شهریاری / ابراهیم عادل



انتشارات فاطمی

جبرداری

تألیف پ. گوسیاتنیکوف/ س. رِژنی چِنکو

ترجمهٔ پرویز شهریاری/ ابراهیم عادل

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

انتشارات فاطمی
جبر برداری
VECTOR ALGEBRA
مؤلف: پ. گوسیاتنیکوف P. Gusyatnikov
س. رزنی چنکو S. Reznichenko
مترجم: پرویز شهریاری / ابراهیم عادل
چاپ اول: اردیبهشت ماه ۱۳۶۹
تیراژ: ۵۵۰۰ نسخه
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ **کلینی**

نشانی: تهران، خیابان دکتر فاطمی، شماره ۱۵۹
تلفن: ۶۵۱۴۲۲

به نام خدا

پیش گفتار

این کتاب براساس تجربهٔ سال‌ها تدریس در انستیتوی فیزیك و تکنولوژی دانشگاه مسکو درزمینهٔ «جبر بـرداری» نوشته‌شده است و با برنامهٔ درسی دانشکده‌های فیزیك وریاضی دانشگاه‌ها ودانشکده‌های مهندسی وتربیت‌معلم تطبیق می کند.

کتاب به‌تفصیل دربارهٔ روش‌های گونـاگون از بردارها درحل‌مسأله‌هـای هندسی صحبت می کند، شیوهٔ نوشتن کتاب به گـونه‌ای است کـه هر دانشجویی بتواند به‌طورمستقیم و بـه‌صورت خودآموز ازآن استفاده کند و روش‌های آن را برای حل مسأله‌های هندسی به‌کاربرد.

فصل اول کتاب، شامل همهٔ نظریه‌هـای اساسی هندسهٔ مقدماتی است. درفصل دوم ازعمل‌های خطی روی بردارها و درفصل سوم از حاصل‌ضرب اسکالرصحبت شده است. سه‌فصل اول کتاب می‌تـواند مورد استفادهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی هم قـرار گیرد. فصل چهارم بـه‌حاصل‌ضرب برداری و حاصل‌ضرب مختلط سه‌بـردار اختصاص دارد و به حل مسأله‌هایی پرداخته است که در فضای بـرداری سه‌بعدی مطرح می‌شوند. به‌خصوص همین فصل چهارم است که می‌تواند برای درك بهتر «جبربرداری» به‌خواننده کمك کند. فصل‌پنجم درارتباط با عددهای مختلط و ویژگی‌های‌اصلی تبدیل‌های هندسی تنظیم شده است.

مسأله‌های‌هربخش ازآسان به‌مشکل مرتب‌شده‌اند ومسأله‌های دشوارتر را با علامت * مشخص کرده‌ایم.

پ. گوسیاتنیکف ـ س. رژنی چنکو

فهرست

صفحهٔ

فصل اول

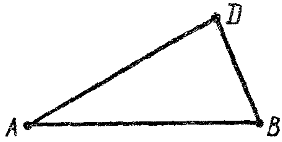
یادی از هندسهٔ مقدماتی

بخش ۱۰۱. برخی تعریف‌ها و نمادهای اساسی

هر پاره خط راست، بــه وسیلهٔ دو نقطه، یعنی دو انتهای آن، تعریف می‌شود. پاره خط راست بــا دو انتهــای A و B را، به یکی از دو صورت $[AB]$ یا $[BA]$ نشان می‌دهند. اگر دونقطهٔ A و B متمایز باشند $(A \neq B)$، آن وقت پاره‌خط راست $[AB]$، خط راست منحصر به‌فرد (AB) را تعریف می‌کنند. وقتی از پاره خط راست $[AB]$، به عنوان مجموعه‌ای از نقطه‌هــا صحبت می‌کنیم، به معنای آن است کــه، این پاره‌خط راست، شامل دو نقطهٔ A و B است و، به‌جز آن‌هــا، تنها نقطه‌هایی مثل C را در برمی‌گیرد کــه بــرخط راست (AB) و بین دو نقطهٔ A و B واقــع باشند. اگــر $A = B$، آن‌گاه پاره‌خط راست $[AA]$، شامل نقطهٔ منحصر به‌فرد A است.

اگر واحدی را برای اندازه‌گیری درنظربگیریم، هرپاره‌خط راست $[AB]$، متناظر با یك عدد حقیقی غیرمنفی $|AB|$ می‌شود، که طول پاره خط راست $[AB]$ است. وقتی کــه دربــارهٔ طول پاره خطهای راست صحبت می‌کنیم، به واحدی که بــرای بیان آن انتخاب کرده‌ایم، اشاره‌ای نخواهیم‌کرد. طول پاره خط راست $[AB]$، در ضمن، فاصلهٔ بین نقطه‌هــای A و B را هم بیان می‌کند.

شکل ۱۰۱



شکل ۲۰۱

ویژگی‌های فاصله

$1°$. $|AB| = |BA|$؛

$2°$. برای $A \neq B$ داریم: $|AB| > 0$، و برای $A = B$: $|AB| = 0$؛

$3°$. نقطهٔ C تنها وقتی بر پاره خط راست $[AB]$ قرار دارد که داشته باشیم: $|AC| + |CB| = |AB|$ (شکل ۱۰۱).

$4°$. برای هر نقطهٔ D، کــه بر پاره خط راست $[AB]$ واقــع نباشد، نابرابری

$$|AD| + |DB| > |AB|$$

برقرار است که، آن را، نابرابری مثلثی گویند (شکل ۲۰۱).

$A \neq B$ می‌گیریم. دراین‌صورت، هرنقطهٔ C ازپاره‌خط راست $[AB]$ را، که بریکی از دو انتهای آن منطبق نباشد، یك نقطهٔ درونی این پاره خط راست می‌نامند. موقعیت نقطهٔ C بر پاره‌خط راست $[AB]$، به وسیلهٔ طــول پاره خط راست $[AC]$ و یا نسبت $\lambda = \dfrac{|AC|}{|CB|}$ مشخص می‌شود و گویند، نقطهٔ C، پاره خط راست $[AB]$ را، با آغاز از A، به نسبت λ تقسیم کــرده است. اگر $\lambda = 1$، یعنی $|AC| = |CB|$، آن‌گاه، نقطهٔ C را وسط پاره‌خط راست $[AB]$ گویند. وسط پاره خط راست $[AA]$، خود نقطهٔ A است. اگر

O را نقطهٔ ثابتی فرض کنیم، نگاشت Z_O، که نقطهٔ A را به نقطهٔ متناظر آن $B=Z_O(A)$ تبدیل کند، به‌معنای آن است که O وسط پاره‌خط راست $[AB]$ قرار دارد و، در این صورت، نگاشت را، تقارن مرکزی به مرکز O گویند. O را مرکز تقارن و دو نقطهٔ A و $Z_O(A)$ را قرینهٔ یکدیگر، نسبت به مرکز تقارن O، می‌نامند.

شکل ۳۰۱

شکل ۴۰۱

هر نقطهٔ A، واقع برخط راست l، این خط راست را، به دو نیم خط راست l_+ و l_-، نسبت به مرکز A، تقسیم می‌کند. این نیم خط‌های راست را، مکمل یکدیگر گویند و می‌نویسند

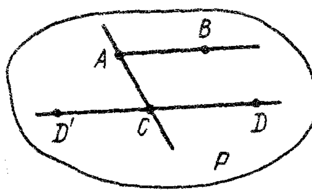
$$l_+=\bar{l}_-\ ,\ l_-=\bar{l}_+$$

نقطهٔ A به هرکدام از نیم خط‌های راست l_+ و l_- تعلق دارد. دو نقطهٔ $B\neq A$ و $C\neq A$ از خط راست l، تنها وقتی به‌یکی از نیم‌خط‌های راست به مبدأ $A\in l$ متعلق‌اند که پاره خط راست $[BC]$، شامل نقطهٔ A نباشد و، همچنین، تنها وقتی متعلق به دو نیم خط راست مکمل‌اند که، نقطهٔ A، نقطه‌ای درونی از پاره خط راست $[BC]$ باشد. نیم خط راست به مبدأ A، که نقطهٔ $B\neq A$، یکی از نقطه‌های آن باشد، با نماد $[AB)$ نشان داده می‌شود (شکل ۳۰۱).

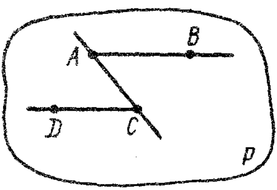
دو نیم خط راست واقع بر یك خط راست را در یك جهت گویند، وقتی که اشتراك آن‌ها یك نیم خط باشد؛ آن‌ها را در خلاف جهت یکدیگر گویند، وقتی که اشتراك آن‌ها یك نیم خط نباشد. مثلاً در شکل ۴۰۱، نیم خط‌های راست $[AB)$ و $[CB)$ هم جهت‌اند، درحالی‌که نیم خط‌های

راست $[BA)$ و $[CB)$ درخلاف جهت یکدیگرند.

هرخط راست l واقع درصفحهٔ P، آن صفحه را به دونیم صفحهٔ P_+ و P_- تقسیم می‌کندکه به‌وسیلهٔ خط راست l ازهم جدا شده‌اند. خط راست l، به هر دو نیم صفحه تعلق دارد. نقطه‌های $B\notin l$ و $C\notin l$ از صفحهٔ P، تنهـا وقتی دریکی از دو نیم صفحه‌ای کـه بـه وسیلهٔ خط راست $l\subset P$ مشخص شده‌اند، قرار داردکه پاره خط راست $[BC]$، برخوردی بـا خط راست l نداشته باشد.



شکل ۵.۱



شکل ۶.۱

هر دو نیم خط $[AB)$ و $[CD)$، کـه بـه دو خـط راست مـوازی غیرمنطبق برهم تعلق داشته‌باشند، بریک‌صفحهٔ مشخص P واقع‌اند. دونیم‌خط راست $[AB)$ و $[CD)$ را هم‌جهت‌گویند (و می‌نویسند: $([AB)\uparrow\uparrow[CD))$، وقتی کـه در یکی از دو نیم صفحه‌ای واقع باشندکـه به وسیلهٔ خط راست $(AC)\subset P$ مشخص‌شده‌اند (شکل ۵.۱). آن‌ها را درخلاف جهت هم گویند (و می‌نویسند: $([AB)\uparrow\downarrow[CD))$، وقتی کـه در دو نیم صفحهٔ مختلف باشند (شکل ۶.۱). این روشن است که

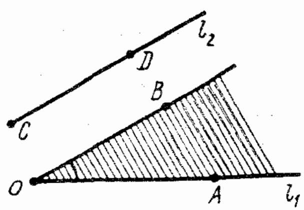
اگر $[AB)\uparrow\uparrow[CD)$، آن‌گاه $[\overline{AB})\uparrow\downarrow[CD)$

دو نیم‌خط راست $[AB)$ و $[CD)$، تنها وقتی در خلاف جهت یکدیگرندکه بتوان نقطه‌ای مانند O پیدا کرد، به نحوی‌که داشته باشیم:

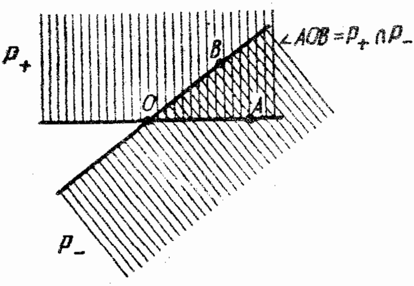
$$[CD)=Z_O([AB))$$

ویژگی زیر، یعنی ویژگی سرایت‌پذیری نیم‌خط‌های راست هم‌جهت، مهم است: اگر هر یك از دو نیم‌خط راست با نیم‌خط راست سوم هم‌جهت باشند، با یکدیگر هم جهت‌اند.

صفحهٔ P و سه‌نقطهٔ متمایز O، A و B واقع بر آن را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، این سه نقطه، روی یك خط راست نباشند. خط راست (OA)، صفحهٔ P را به دو نیم صفحه تقسیم می‌کند که، نقطهٔ B، در یکی از آن‌ها قرار دارد؛ این نیم صفحه را P_+ می‌نامیم. به همین ترتیب، نقطهٔ A، در نیم صفحهٔ P قرار دارد که به وسیلهٔ خط راست (OA) از صفحهٔ P جدا شده است. زاویهٔ محدب AOB، بین نیم خطهای راست $[OA)$ و $[OB)$، به‌عنوان اشتراك مجموعه‌های P_+ و P_- مشخص می‌شود (شکل ۷۰۱). مقدار زاویهٔ محدب AOB، به عنوان زاویهٔ بین دو نیم‌خط راست $[OA)$ و $[OB)$ معین می‌شود و می‌نویسند $\widehat{AOB}$.



شکل ۸۰۱



شکل ۷۰۱

مقدار این زاویه را می‌توان با درجه یا رادیان بیان کرد و داریم:

$$0^\circ < \widehat{AOB} < 180^\circ \quad \text{یا} \quad 0 < \widehat{AOB} < \pi$$

فرض می‌کنیم، نیم خطهای راست $l_1 = [OA)$ و $l_2 = [CD)$، بر یك خط راست نباشند. از نقطهٔ O، تنها یك نیم خط راست $[OB)$ را می‌توان رسم

کرد که با نیم خط راست l_2 هم جهت باشد. زاویـهٔ بین نیم خطهای راست l_1 و l_2 را، با زاویهٔ AOB مشخص می‌کنند (شکل ۸.۱).
طبق تعریف، زاویهٔ بین دو نیم‌خط راست هم جهت برابر 0° و زاویهٔ بین دو نیم خط راست با جهت‌های مختلف، برابر 180° است.

بخش ۲.۱. تبدیل متشابه. تغییر مکان

تبدیل p از فضا (یا صفحه) را تبدیل متشابه گـویند، وقتی کـه عدد $k>0$ وجود داشته باشد، به نحوی که برای هر دو نقطهٔ A و B از فضا (یا صفحه)، برابری

$$k|AB| = |p(A)p(B)|$$

برقرار باشد. k را نسبت تشابه گویند.

ویژگی‌های تبدیل متشابه، در ضمیمه‌ها آمده است.

O را نقطه‌ای ثابت و $k\neq 0$ را عددی حقیقی می‌گیریم. تجانس H_O^k، به مرکز O و نسبت k، به تبدیلی از فضا (یا صفحه) گفته می‌شود که، در آن، مبدل (یا تصویر) هر نقطهٔ A از فضا (یا صفحه)، متناظر با نقطه‌ای مثل B با ویژگی‌های زیر باشد:

(a) نقطه‌های A، O و B روی یك خط راست‌اند؛

(b) $|OB| = |k||OA|$؛

(c) اگر $A\neq 0$، آن‌گاه، برای $k>0$: $B\in[OA)$ و برای $k<0$: $B\in[\overline{OA})$.

ویژگی‌های تجانس را در ضمیمه‌ها آورده‌ایم.

تبدیل متشابه با نسبت $k=1$ را تغییرمکان (یا تبدیل‌تعامدی) گویند.

بخش ۳.۱. پاره‌خط راست جهت‌دار. انتقال

پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$، به وسیلهٔ زوج مرتب نقطه‌های A و B تعریف می‌شود. نقطهٔ A را ابتـدا و نقطهٔ B را انتهـای پـاره خط راست

جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ گویند. پاره‌خط‌های راست جهت‌دار را، در شکل‌های هندسی، به‌کمك پیکانی که از ابتدا به انتهای آن می‌رود، مشخص می‌کنند (شکل ۹.۱). پاره خط جهت‌دار $\overrightarrow{BA}$ را، متقابل پاره‌خط جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ گویند (و با نماد $\overleftarrow{AB}$ — نشان‌می‌دهند).

شکل ۹.۱

در حالتی که نقطه‌های A و B برهم منطبق باشند، پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$، یا دقیق‌تر، $\overrightarrow{AA}$ را، پاره خط صفر می‌نامند (و با نماد $\vec{\theta}_{\text{۱}}$ نشان می‌دهند). مقدار $|AB|$ را برای طول $|\overrightarrow{AB}|$، یعنی طول پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ به‌کار می‌برند.

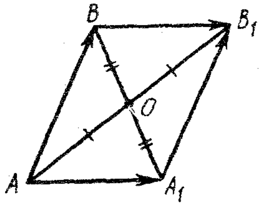
پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ را موازی با خط‌راست l (یا صفحهٔ P) گویند، وقتی‌که: یا برابر صفر باشد و یا خط راست (AB) با l (یا P) موازی باشد. پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ را، به شرطی که برابر صفر نباشد، عمود بر خط راست l (یا صفحهٔ P) گویند، وقتی که خط راست (AB) برخط راست l (یا صفحهٔ P) عمودباشد. پاره‌خط‌های راست‌جهت‌دار $\overrightarrow{A_1B_1}$، ...، $\overrightarrow{A_nB_n}$ را هم راستا گویند، وقتی‌که خط راستی مانند l وجود داشته باشدکه با هرکدام از این پاره‌خط‌های راست جهت‌دار موازی باشد. برای نشان دادن هم راستائی (توازی) از نماد $||$ و برای عمود بودن ازنماد $\perp$ استفاده می‌کنیم. اگر پاره خط‌های راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ بر صفحه‌ای مثل P عمود باشند، آن وقت هم راستا هستند: $\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}$.

دو پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را هم جهت گویند (و می‌نویسند: $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$)، وقتی که: یا یکی از آن‌ها برابر صفر باشد و یا $[AB)\uparrow\uparrow[CD)$، یعنی وقتی‌که $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ هم راستا و نیم خط‌های راست $[AB)$ و $[CD)$ در یك امتداد باشند. دو پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را، وقتی در خلاف جهت یکدیگر گویند (و می‌نویسند: $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$) که: یا یکی ازآن‌ها برابر صفر باشد و یا $[AB)\uparrow\downarrow[CD)$.

دو پاره‌خط راست جهت‌دار و هم جهت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A_1B_1}$ را برابر (یا هم سنگ) گویند، وقتی که وسط پاره خط‌های راست $[AB_1]$ و $[A_1B]$

برهم منطبق باشند (و می‌نویسند: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$). از این تعریف، نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1} \iff \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1} \qquad (۱۰۱)$$



شکل ۱۰.۱

روشن است که تنها وقتی $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$، که داشته باشیم: $-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A_1B_1}$. با استفاده از مفهوم تقارن مرکزی، می‌توان ثابت کرد که تنها وقتی $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$، که نقطه‌ای مانند O وجود داشته باشد (نقطهٔ وسط هر یك از دو پاره خط راست $[A_1B]$ و $[AB_1]$)، به نحوی که (شکل‌های ۱۰.۱ و ۱۱.۱):

$$A_1=Z_O(B),\ \ B_1=Z_O(A)$$

از ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع می‌توان نتیجه گرفت که: دو پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A_1B_1}$، به شرطی که بر یك خط راست نباشند، تنها وقتی باهم برابرند که چهارضلعی ABB_1A_1 متوازی‌الاضلاع باشد (شکل ۱۰.۱). پاره خط‌های راست جهت‌دار برابر $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A_1B_1}$، وقتی روی یك خط راست باشند، می‌توانند به یکی از چهار حالتی که در شکل ۱۱.۱ نشان داده شده است، درآیند.

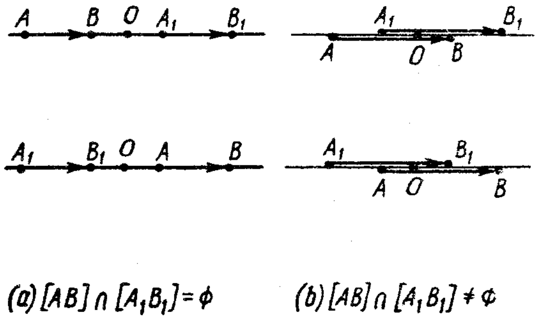
به این ترتیب، برابری $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$، تنها وقتی امکان‌پذیر است که:

(a) پاره خط‌های راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A_1B_1}$ هم راستا باشند؛

(b) $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{A_1B_1}$؛

(c) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A_1B_1}|$.

همان‌طور که از تعریف نتیجه می‌شود، هر پاره خط راست جهت‌دار صفر، با هر پاره خط راست جهت‌دار صفر دیگر، برابر است؛ هر پاره خط راست جهت‌دار، باخودش برابراست؛ اگر $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$، آن گاه $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$؛ از ویژگی سرایت پذیری خط‌های راست موازی و برای عددهای حقیقی،



شکل ۱۱۰۱

نتیجه می‌شود: اگر $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$، آن‌گاه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. بنابراین، رابطهٔ برابری پاره خط‌های راست جهت‌دار، دارای ویژگی سرایت پذیری است؛ این رابطه، یك رابطهٔ هم ارزی (یا هم سنگی) است؛ و سرانجام، این رابطه، مجموعهٔ پاره خط‌های راست جهت‌دار را افراز مـی‌کند، یعنی، هر کلاس هم ارزی، همهٔ زوج پـاره خط‌های راست جهت‌دار برابر را دربر-می‌گیرد.

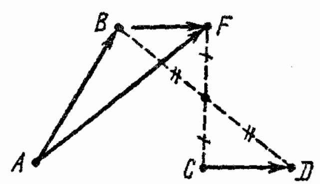
برای هر پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و هر نقطهٔ C، تنها یك نقطهٔ D وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (نقطهٔ D، قرینهٔ نقطهٔ A، نسبت به وسط پـاره خط راست $[BC]$ است). وقتی بخواهیم، نقطهٔ D را، با شرط $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$، پیدا کنیم، می‌گویند: از نقطهٔ C، پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{CD}$ را برابر بـا $\overrightarrow{AB}$ رسم می‌کنیم. در ایـن صورت می‌گویند: نقطهٔ D از انتقال نقطهٔ C به اندازهٔ پـاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ به دست آمده است و می‌نویسند:

$$D = T_{\overrightarrow{AB}}\ (C)$$

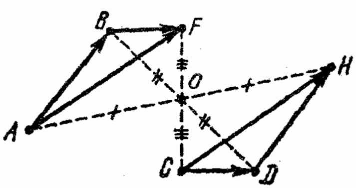
ویژگی‌های انتقال، در ضمیمه‌های کتاب آمده است.

بخش ۴.۱. جمع پاره خط‌های راست جهت‌دار. ترکیب انتقال‌ها

مجموع دو پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$، به صورت $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ نشان داده می‌شود و برابر است با پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AF}$ که، در آن، $F=T_{\overrightarrow{CD}}(B)$ (شکل ۱۲۰۱).



شکل ۱۳۰۱



شکل ۱۳۰۱

عمل پیدا کردن مجموع را، جمع پاره خط‌های راست جهت‌دار گویند. دستورهای مربوط به جمع را، برای پاره‌خط‌های راست جهت‌دار، در زیر آورده‌ایم:

I. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{\theta}_A=\overrightarrow{\theta}_C$؛ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\theta}_C=\overrightarrow{AB}$؛

II. اگر $\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{CD}$، آن‌گاه $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$؛

III. ویژگی جابه‌جائی در جمع. برای هر دو پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$، داریم: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$.

□ F و H را دو نقطه‌ای می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CD}\ ،\ \overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AB}$$

(شکل ۱۳۰۱). این، به معنای آن است که وسط پاره خط‌های راست $[BD]$ و $[CF]$ و، همچنین، وسط پاره خط‌های راست $[BD]$ و $[AH]$ برهم منطبق‌اند. درنتیجه، وسط پاره‌خط‌های راست $[CF]$ و $[AH]$ هم، بریکدیگر منطبق می‌شوند، یعنی $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CH}$. ولی بنابه‌تعریف، $\overrightarrow{AF}$ برابر $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

و $\overrightarrow{CH}$ برابر با $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$ است. ■

اگر نقطه‌های A و C برهم منطبق باشند، نقطه‌های F و H هم بریکدیگر منطبق می‌شوند (پاره خطهای راست جهت‌دار $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{CH}$ برابر و در ابتدای خود، با هم مشترك‌اند، بنابراین، در انتهای خود هم، با هم مشترك می‌شوند). اگر نقطه‌های $A=C$، B و $F=H$، D بر یك خط راست نباشند، چهار ضلعی $ABFD$ متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین، قانون متوازی‌الاضلاع برقرار است (شکل ۱۴.۱): مجموع دو پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$، که در ابتدای A مشترك‌اند، برابر پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AF}$ است که، در آن، $[AF]$، قطر متوازی‌الاضلاع $ABFD$ است که روی پاره خطهای راست $[AB]$ و $[AD]$، به عنوان دو ضلع، رسم شده است.

یادداشت. اگر $C \neq A$، بنا به تعریف مجموع پاره خطهای راست جهت‌دار

$$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$$

دو ابتدای مختلف دارند (به ترتیب A و C). پاره خطهای راست $[AF]$ و $[CH]$ متفاوت‌اند، ولی پاره‌خطهای راست جهت‌دار $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{CH}$ برابرند.

IV. اگر $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ و $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{C_1D_1}$، آن‌گاه

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{C_1D_1}$$

V. ویژگی شرکت‌پذیری جمع. برای هر سه پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{PQ}$، همیشه داریم:

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{PQ}) \qquad (۱.۲)$$

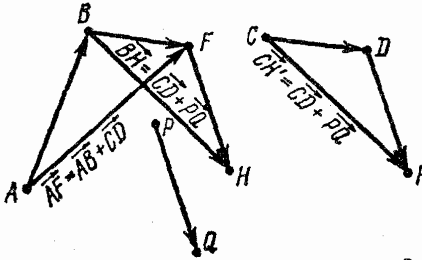
□ فرض کنید: $F=T_{\overrightarrow{CD}}(B)$ و $H=T_{\overrightarrow{PQ}}(F)$ (شکل ۱۵.۱). با توجه به تعریف جمع داریم:

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} , \quad \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{PQ}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{PQ}$$

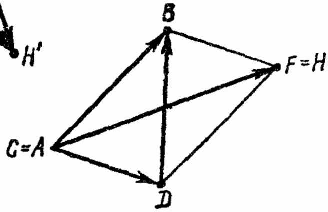
با توجه به IV: $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{PQ}$، پس بنا به‌تعریف جمع

$$\overrightarrow{AH} = AB + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ})$$

از این‌جا، با توجه به ویژگی سرایت‌پذیری در پاره خط‌های راست جهت‌دار، به برابری (۱.۲) می‌رسیم. ■



شکل ۱۵.۱



شکل ۱۴.۱

یادداشت. با روش استقرا، می‌توان از گزارهٔ V نتیجه گرفت که: جمع چند پاره‌خط راست جهت‌دار، مستقل از ترتیب پرانتزها در آن‌است. بنابراین، مجموع پاره خط‌های راست جهت‌دار $\overrightarrow{A_1B_1}$، $\overrightarrow{A_2B_2}$، ...، $\overrightarrow{A_nB_n}$ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n}$$

با توجه به گزارهٔ III، این مجموع، مستقل از ترتیب جمله‌هاست.

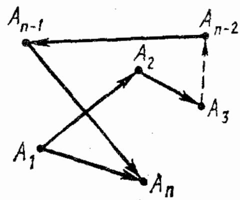
A_1، A_2، ...، A_n را، مجموعه‌ای متناهی از نقطه‌ها می‌گیریم. چندضلعی با رأس‌های متوالی این نقطه‌ها را، مسیر از نقطهٔ A_1 تا A_n گویند. برای هر مسیر، دستور خط بسته برقرار است (شکل ۱۶.۱ را ببینید):

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$$

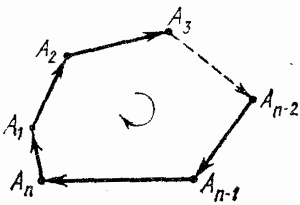
خط شکستهٔ بستهٔ $A_1A_2 \dots A_nA_1$ را یک‌دور (یا سیکل) گویند. برای هر دور، همیشه داریم (قاعدهٔ دور):

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\dots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{\theta}_{A_1} \qquad (۱۰۳)$$

درشکل ۱۷۰۱، قاعدهٔ دور، بـرای دور $A_1A_2\dots A_nA_1$ با پیکان نشان داده شده است.



شکل ۱۶۰۱



شکل ۱۷۰۱

با استفاده از ویژگی‌های ۶° و ۸° انتقال (ضمیمه‌ها را ببینید)، قاعدهٔ دور را می‌توان به این صورت نوشت: انتقال

$$T_{\overrightarrow{A_nA_1}}\circ T_{\overrightarrow{A_{n-1}A_n}}\circ\dots\circ T_{\overrightarrow{A_2A_3}}\circ T_{\overrightarrow{A_1A_2}}$$

یك انتقال همانی است.

تفاضل $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$، برای پاره خط‌های راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را، می‌توان به عنوان یك پاره خط راست جهت‌دار تعریف کرد:

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

تفریق، عکس عمل جمع است: اگـر بـرای پاره خط‌هـای راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{MN}$ داشتـه بـاشیـم: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CD}$، آن‌گـاه $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$. به زبان دیگر، پاره خط راست جهت‌دار را می‌توان، با تغییر علامت، از یك طرف برابری به‌طرف دیگر آن منتقل کرد.

□ درواقع، اگـر $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CD}$، آن وقت اگـر پاره خط

راست جهت‌دار $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}$ را به دو طرف برابری اضافه کنیم، به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CC} \qquad \blacksquare$$
$$=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{\theta_C}=\overrightarrow{MN}$$

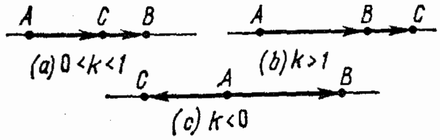
اگر $ABFD$، یك متوازی‌الاضلاع باشد (شکل ۱۴۰۱ را ببینید)، آن وقت، پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{DB}$، $[DB]$ قطر متوازی‌الاضلاع است، برابر است با تفاضل $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

برای برداشتن پرانتزها، می‌توان از قاعدهٔ زیر استفاده کرد:

$$(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{C_1D_1})+\dots+(\overrightarrow{A_nB_n}-\overrightarrow{C_nD_n})=$$
$$=(\overrightarrow{A_1B_1}+\dots+\overrightarrow{A_nB_n})-(\overrightarrow{C_1D_1}+\dots+\overrightarrow{C_nD_n})$$

بخش ۵.۱. ضرب پاره خط راست جهت‌دار در یك عدد

حاصل‌ضرب $\overrightarrow{AB}\times 0$، یعنی حاصل‌ضرب پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ درعدد صفر، بنا به‌تعریف، برابر است با پاره‌خط جهت‌دار صفر، که با θ_A نشان می‌دهیم. با شرط $k\neq 0$، حاصل‌ضرب $k\overrightarrow{AB}$، یعنی حاصل‌ضرب پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ درعدد k، پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AC}$ را مشخص می‌کند که، در آن، داریم: $C=H_A^k(B)$ (شکل ۱۸۰۱ a، b، c).



شکل ۱۸۰۱

پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AC}$، تنها وقتی برابر است با $k\overrightarrow{AB}$ که

(a) دو پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ هم راستا باشند؛

(b) $|\overrightarrow{AC}|=|k||\overrightarrow{AB}|$؛

(c) $\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$ برای $k\geqslant 0$ و $\overrightarrow{AC}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$ برای $k<0$.

قانون‌های ضرب را به‌صورت گزاره‌های زیر تنظیم می‌کنیم:

I. $1\times\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$، $(-1)\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}$؛

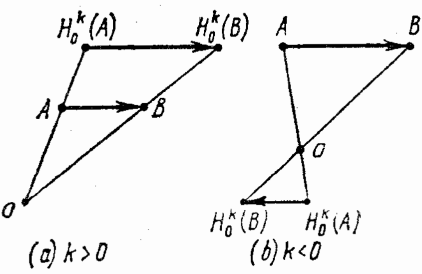
II. اگر $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$، آن‌گاه $k\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$؛

III. برای هر دو عدد حقیقی k_1 و k_2 داریم:

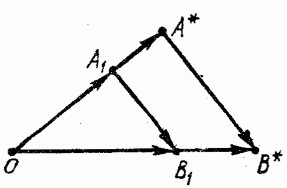
$$k_1(k_2\overrightarrow{AB})=k_2(k_1\overrightarrow{AB})=(k_1k_2)\overrightarrow{AB}$$

IV. اگر O نقطه‌ای دلخواه و $k\neq 0$، آن‌گاه (شکل ۱۹۰۱):

$$\overrightarrow{H_O^k(A)H_O^k(B)}=k\overrightarrow{AB}$$



شکل ۱۹۰۱



شکل ۲۰۰۱

□ تبدیل تجانسی H_O^k یک تبدیل تشابهی است با نسبت $|k|$. بنابراین

$$|\overrightarrow{H_O^k(A)H_O^k(B)}|=|k||\overrightarrow{AB}|$$

با توجه به ویژگی ۲° از تجانس (ضمیمهٔ کتاب را ببینید)، دو پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{H_O^k(A)H_O^k(B)}$ و $\overrightarrow{AB}$ هم راستا هستند و برای $k>0$

هم جهت و برای $k<0$، در خلاف جهت یکدیگر. در نتیجه
$\overrightarrow{H_O^k(A)H_O^k(B)}=k\overrightarrow{AB}$ ■

V. برای دو پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و عدد حقیقی k داریم:

$$k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{CD}$$

□ درستی برابری، برای $k=0$،روشن است. فرض می‌کنیم $k\neq 0$ نقطهٔ دلخواه O را درنظر می گیریم و قرار می گذاریم:

$$A_1=T_{\overrightarrow{AB}}(O)،\ B_1=T_{\overrightarrow{CD}}(A_1)،\ A^*=H_O^k(A_1)،\ B^*=H_O^k(B_1)$$

(شکل ۱.۰۲). با توجه به قاعدهٔ خط بسته:

$$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}،\ \overrightarrow{OB^*}=\overrightarrow{OA^*}+\overrightarrow{A^*B^*}$$

از برابری‌های $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{CD}$، نتیجه می‌شود:

$$k\overrightarrow{OA_1}=k\overrightarrow{AB}،\ k\overrightarrow{A_1B_1}=k\overrightarrow{CD}\ \text{(گزارهٔ II)}$$

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\ \text{(گزارهٔ IV بخش ۱.۴)}$$

بنا به تعریف تجانس $\overrightarrow{OA^*}=k\overrightarrow{OA_1}$، $\overrightarrow{OB^*}=k\overrightarrow{OB_1}$. سرانجام، با توجه به گزارهٔ IV: $\overrightarrow{A^*B^*}=k\overrightarrow{A_1B_1}$. درنتیجه:

$$\overrightarrow{OB^*}=k\overrightarrow{OB_1}=k(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1})=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})،$$
$$\overrightarrow{OB^*}=\overrightarrow{OA^*}+\overrightarrow{A^*B^*}=k\overrightarrow{OA_1}+k\overrightarrow{A_1B_1}=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{CD}$$

و بنابراین $k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{CD}$. ■

VI. برای پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و دوعدد حقیقی و دلخواه k_1 و k_2، داریم:

$$(k_1+k_2)\overrightarrow{AB}=k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AB}$$

□ درستی این گزاره، به سادگی و با محاسبهٔ طول پاره خطهای راست جهت‌دار، در دو طرف برابری، ثابت می‌شود؛ البته باید جهت آن‌ها را هم درنظر گرفت. ■

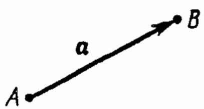
قانون‌های V و VI ضرب، قانون‌های توزیع‌پذیری ضرب‌اند.

فصل دوم

عمل‌های خطی با بردارها

بخش ۱.۲. تعریف‌های اصلی

یك بردار در فضا (یا درصفحه)، به عنوان مجموعه‌ای از پاره‌خط‌های راست جهت‌دار تعریف می‌شود که، ابتدا و انتهای هر یك از آن‌ها، متعلق به فضا (یا صفحه) باشد. بردارها را، معمولاً، با حرف‌های کوچك **a**، **b**، **c**، ... (و با قلم سیاه) نشان می‌دهند. اگر نقطه‌های A و B و بردار **a** طوری باشند که داشته باشیم: $\overrightarrow{AB}\in\mathbf{a}$، آن‌وقت آن را به‌همان طریق پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهند؛ یعنی می‌نویسند: $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ یا $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$. در این حالت، پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ را، نمایش بردار **a** گویند و، درآن، علامت پیکان، جهت بردار **a** را مشخص می‌کند (شکل ۱.۲). پاره‌خط‌های راست جهت‌دار



شکل ۱.۲

برابر (و فقط آن‌ها)، معرف یك بردار هستند؛ برعکس، اگر هم $\overrightarrow{AB}$ و هم $\overrightarrow{A'B'}$، معرف بردار **a** باشند، آن وقت

$$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB} \qquad (۲.۱)$$

بنا براین، برابری (۲.۱)، بسته به جای خود، دو معنا دارد: اگر هر یك از دوطرف برابری، معرف یك پاره‌خط راست جهت‌دار باشد، آن وقت به‌معنای

برابری این دو پاره خط راست جهت‌دار است (بخش ۳.۱ را ببینید)؛ ولی اگر هر طرف رابطهٔ (۲.۱) به معنای یك بردار باشد، آن‌وقت، رابطهٔ (۲.۱) نشان می‌دهد که، این دو بردار برهم منطبق‌اند، یعنی دو مجموعهٔ برابرند.

وقتی که بردار $\mathbf{a}$ را با پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم، پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$، بردارمتقابل (یا بردار قرینهٔ) بردار $\mathbf{a}$ را نشان می‌دهد (با نماد $-\mathbf{a}$). بردار صفر، به عنوان برداری تعریف می‌شود که متناظر با پاره‌خط راست جهت‌دار صفر باشد؛ روشن است که $-\mathbf{o} = \mathbf{o}$. طول بردار $\mathbf{a}$، یعنی $|\mathbf{a}|$، بنا به‌تعریف، همان طول پاره‌خط‌راست جهت‌دار نمایش بردار $\mathbf{a}$ است. به ویژه روشن است که $|\mathbf{o}| = \mathbf{o}$. بردارهای $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$، $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$، …، $\mathbf{a}_n = \overrightarrow{A_nB_n}$ را هم راستا گویند، وقتی که پاره‌خطهای راست جهت‌دار نمایش آن‌ها، یعنی $\overrightarrow{A_1B_1}$، $\overrightarrow{A_2B_2}$، …، $\overrightarrow{A_nB_n}$ هم راستا باشند؛ به همین ترتیب، بردارهای هم صفحه را هم می‌توان تعریف کرد. هم راستایی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را با نماد $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$ نشان می‌دهند؛ و اگر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم راستا نباشند، می‌نویسند: $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. طبق این تعریف، بردار $\mathbf{o}$ با هر برداری هم راستا و با هر دو برداری هم صفحه است.

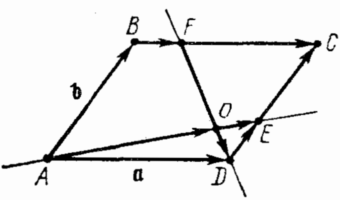
بردار $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ را موازی با خط راست l (یا صفحهٔ P) گویند، وقتی که خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$، نمایش بردار $\mathbf{a}$، موازی با l (یا P) باشد. با توجه به ویژگی سرایت‌پذیری توازی، در مجموعهٔ خطهای راست (در صفحه یا در فضا)، این تعریف، مستقل از انتخاب پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$، به عنوان نمایش بردار $\mathbf{a}$، است.

بردار غیر صفر $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ را عمود بر خط راست l (یا صفحهٔ P) گویند، وقتی که $\overrightarrow{AB}$، بر خط راست l (یا صفحهٔ P) عمود باشد. این تعریف هم، مستقل از انتخاب پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$، به عنوان نمایش بردار $\mathbf{a}$، است، زیرا اگر پاره‌خطهای راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ برابر باشند، آن وقت $(AB)\|(CD)$ و بنابراین $(CD) \perp l$ (یا $(CD) \perp P$). اگر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، بر صفحهٔ P عمود باشند، هم راستا می‌شوند. بردار غیر صفر $\mathbf{a}$ را، که برصفحهٔ P عمود باشد، بردار قائم (یا بردار نرمال) صفحهٔ P گویند.

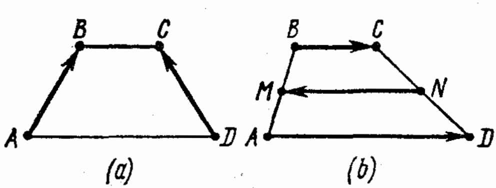
دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را هم‌جهت گویند (ومی نویسند: $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$). وقتی که پاره‌خط‌های راست جهت‌دار $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CD}$، هم جهت باشند؛ به همین ترتیب، دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ وقتی در دو جهت مخالف‌اند (و می‌نویسند: $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}$) که داشته باشیم: $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$.

معیار برابری بردارها. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابرند (دو مجموعهٔ منطبق)، تنها وقتی که: (a): $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$، (b): $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$.

نمونه‌هایی از برابری، هم‌راستایی و هم صفحه بودن بردارها، به وسیلهٔ پاره‌خط‌های راست جهت‌دار، در شکل‌های هندسی از ۲.۲ تا ۷.۲ نشان داده شده است. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ (شکل ۲.۲)، بردارهای مربوط به‌شکل‌های روبه‌روباهم برابرند: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ (شکل ۳.۲، a)، بردارهای ساق‌های $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ برابرنیستند (چون هم راستا نیستند)، اگرچه طولی برابر دارند: $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$. بردارهای $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}$ از ذوزنقهٔ $ABCD$ (شکل ۳.۲، b) با بردار خط میانهٔ $\overrightarrow{NM}$، هم راستا هستند، ولی برابر نیستند، چرا که طول‌های متفاوتی دارند. بردارهای $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}$ هم جهت‌اند، در حالی که، هر دوی آن‌ها، با بردار میانهٔ $\overrightarrow{NM}$ درجهت‌های مختلف‌اند. درشش‌ضلعی‌منتظم $ABCDEF$ (شکل ۴.۲)، بردارهای‌ضلع‌های

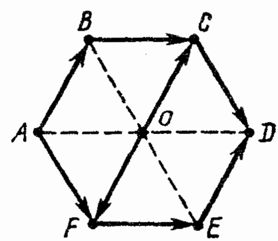


شکل ۲.۲

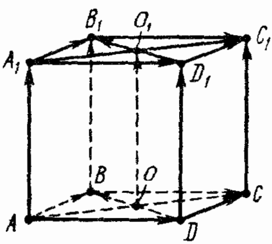


شکل ۳.۲

$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{ED}$ و، همچنین، بردار $\overrightarrow{OC}$ (O، مرکز شش‌ضلعی است، باهم برابرند، و $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{AB}$، همچنین $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$ و $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}$. در مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (شکل ۵.۲)، بردارهای یال‌های جانبی $\overrightarrow{AA_1}$، $\overrightarrow{BB_1}$، $\overrightarrow{CC_1}$، $\overrightarrow{DD_1}$، دوبه دو باهم برابرند و، همچنین، هرکدام از آن‌ها، با بردار $\overrightarrow{OO_1}$ هم برابر است (O و O_1، به ترتیب، مرکزهای وجه‌های $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ هستند). بردارهای قطرهای این دو وجه هم، باهم برابرند: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$. بردارهای $\overrightarrow{A_1B_1}$، $\overrightarrow{B_1C_1}$، $\overrightarrow{D_1C_1}$، $\overrightarrow{A_1D_1}$، $\overrightarrow{A_1C_1}$، $\overrightarrow{D_1B_1}$، $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{DC}$، $\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{DB}$، هم صفحه‌اند (زیرا با صفحهٔ



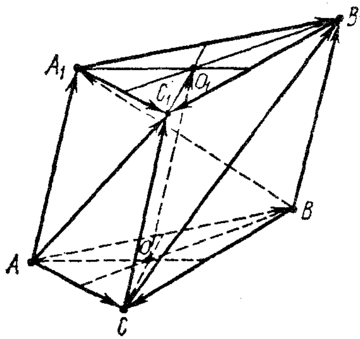
شکل ۴.۲



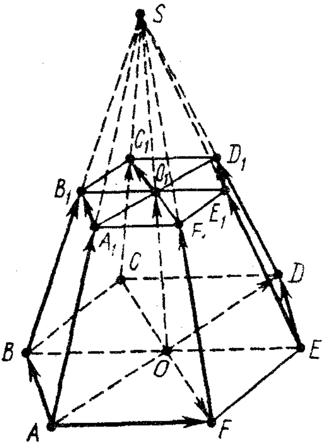
شکل ۵.۲

$(ABCD)$ موازی‌اند). درمنشور با قاعدهٔ مثلث $ABCA_1B_1C_1$ (شکل ۶.۲)، بردارهای یال‌های جانبی $\overrightarrow{AA_1}$، $\overrightarrow{BB_1}$، $\overrightarrow{CC_1}$، با بردار $\overrightarrow{OO_1}$ برابرند (O و O_1، به ترتیب، مرکز هندسی، یعنی محل برخورد میانه‌های وجه‌های ABC و $A_1B_1C_1$ هستند). بردارهای ضلع‌های متناظر دوقاعده نیز، باهم برابرند: $\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$. بردارهای $\overrightarrow{A_1B_1}$، $\overrightarrow{B_1C_1}$، $\overrightarrow{A_1C_1}$، $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{AC}$ هم صفحه‌اند (با صفحهٔ (ABC) موازی‌اند). در هرم ناقص با قاعده‌های شش‌ضلعی $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (شکل ۷.۲)، که در آن $\frac{|A_1B_1|}{|AB|}=\frac{1}{2}$، بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{ED}$، $\overrightarrow{F_1C_1}$ برابرند. بردارهای $\overrightarrow{A_1B}$ و $\overrightarrow{CF}$ هم راستا، ولی در دو جهت مختلف‌اند. بردارهای

$\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{A_1B_1}$، $\overrightarrow{DE}$، $\overrightarrow{D_1E_1}$، $\overrightarrow{CF}$، $\overrightarrow{C_1F_1}$، $\overrightarrow{CC_1}$، $\overrightarrow{FF_1}$، $\overrightarrow{OO_1}$ هم‌صفحه‌اند که، O و O_1 را، مرکزهای دو قاعدهٔ هرم گرفته‌ایم (زیرا با صفحهٔ (CC_1F_1F) موازی‌اند). بردارهای یال‌های جانبی $\overrightarrow{BB_1}$ و $\overrightarrow{AA_1}$ هم راستا نیستند، اگرچه طولی برابر دارند. بردارهای $\overrightarrow{BB_1}$، $\overrightarrow{CC_1}$، $\overrightarrow{DD_1}$، هم صفحه نیستند.



شکل ۶.۲



شکل ۷.۲

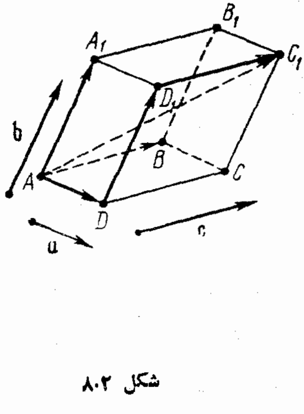
$\mathbf{a}$ را یك بردار و $\overrightarrow{AB}$ را، پاره‌خط راست جهت‌دار نمایش آن می‌گیریم. اگر $\overrightarrow{CD}$ پاره خط جهت‌داری باشد که بازهم بردار $\mathbf{a}$ را نمایش دهد، با توجه به تعریف برداردایم: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$، یعنی $D = T_{\overrightarrow{AB}}(C)$. بنابراین، $\mathbf{a}$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ پاره‌خطهای راست جهت‌دار $\overrightarrow{CD}$، که ابتدای آن‌ها از قبل در نظر گرفته شده و انتهای D آن‌ها، از تصویر نقطه‌های فضا (یا صفحه) در انتقال $T_{\overrightarrow{AB}}$ به‌دست آمده است. به‌همین‌مناسبت، بردار $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ را، بردار انتقال در امتداد پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ گویند؛ و انتقال $T_{\overrightarrow{AB}}$، معرف انتقال به اندازهٔ بردار $\mathbf{a}$ است. در این حالت، $\mathbf{a}$ را به عنوان انتقال در فضا (یا صفحه) می‌پذیریم. $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ را

یك بردار و M را نقطه‌ای مفروض می‌گیریم. اگر به جای $\overrightarrow{AB}$، پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$ با ابتدای M را به‌کار ببریم، آن وقت، برای بردار $\mathbf{a}$، نقطهٔ M ابتدا و نقطهٔ N انتها خواهد بود.

از آن جا که هر پاره خط راست جهت‌داری را می‌توان با پاره خط راست جهت‌دار دیگری که با آن برابر باشد، عوض کرد، همهٔ ویژگی‌های پاره‌خط‌های راست جهت‌دار و همهٔ قانون‌های عمل مربوط به آن‌ها را، می‌توان دربارهٔ بردارها هم، درست دانست.

بخش ۲.۲. جمع بردارها. تفاضل بردارها

اگر $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CD}$، بردارهایی باشند که، به ترتیب، با پاره‌خط‌های راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ نمایش داده شده‌اند، آن وقت، برداری را که نمایش آن پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ باشد، مجموع بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ گویند (و می‌نویسند: $\mathbf{a}+\mathbf{b}$). از گزارهٔ IV بخش ۴.۱، می‌توان نتیجه گرفت که: این تعریف برای جمع بردارها، مستقل از انتخاب پاره‌خط‌های راست جهت‌داری است که این بردارها را نمایش می‌دهند.



شکل ۸.۲

ویژگی‌های جمع بردارها

I. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (ویژگی جابه‌جائی)؛

II. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (ویژگی شرکت‌پذیری)؛

III. $\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$؛

IV. $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{o}$.

این ویژگی‌ها، از گزاره‌های III، V و I در بخش ۴.۱ نتیجه می‌شوند. با توجه به ویژگی شرکت‌پذیری، می‌توان مجموع سه بردار (یا بیشتر) را، بدون در نظر گرفتن پرانتزها نوشت. به عنوان مثال، در متوازی‌السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (شکل ۸.۲)، بردار $\overrightarrow{AC_1}$ را می‌توان به‌صورت مجموع بردارهای $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}$ نوشت. این حقیقت را، قاعدهٔ متوازی‌السطوح می‌گویند: اگر بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ روی یك صفحه نباشند، آن وقت، مجموع آن‌ها $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$، به‌وسیلهٔ قطر متوازی‌السطوحی نشان داده می‌شود که روی پاره‌خط‌های راست‌جهت‌دار نمایش این بردارها، با ابتدای مشترك، ساخته شده باشد (کوتاه‌تر: متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ ساخته شده باشد).

تفاضل $\mathbf{a}-\mathbf{b}$، بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، به عنوان بردار $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ تعریف می‌شود. اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، به ترتیب، با پاره‌خط‌های راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ نشان‌داده شده باشند، آن‌وقت، تفاضل $\mathbf{a}-\mathbf{b}$، با پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ نشان داده می‌شود (بخش ۴.۱ را ببینید). اگر $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$، آن‌گاه $\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$. این ویژگی، از ویژگی متناظر آن، درمورد تفاضل دو پاره‌خط راست جهت‌دار نتیجه می‌شود. در این جا، نشان می‌دهیم که چگونه، این ویژگی، از ویژگی‌های مربوط به جمع بردارها نتیجه می‌شود. اگر بردار $-\mathbf{b}$ را به دو طرف برابری $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ اضافه کنیم، به دست می‌آید:

$$\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{c}+(-\mathbf{b})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}$$
$$+(\mathbf{b}+(-\mathbf{b}))=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$$

بنابراین، در برابری‌های برداری، می‌توان جمله‌ها را، با تغییر علامت، از طرفی به طرف دیگر منتقل کرد.

مثال ۱۰.۲.۰. قاعدهٔ حذف پرانتزها را ثابت کنید:

$$(\mathbf{a}_1-\mathbf{b}_1)+(\mathbf{a}_2-\mathbf{b}_2)+\dots+(\mathbf{a}_n-\mathbf{b}_n)=$$
$$=(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\dots+\mathbf{a}_n)-(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\dots+\mathbf{b}_n)$$

حل. با توجه به تعریف تفاضل دو بردار

$$(\mathbf{a}_1-\mathbf{b}_1)+(\mathbf{a}_2-\mathbf{b}_2)+\cdots+(\mathbf{a}_n-\mathbf{b}_n)=$$
$$=(\mathbf{a}_1+(-\mathbf{b}_1))+(\mathbf{a}_2+(-\mathbf{b}_2))+\cdots+(\mathbf{a}_n+(-\mathbf{b}_n))$$

این عبارت را x می‌نامیم؛ با توجه به ویژگی شرکت‌پذیری جمع بردارها، می‌توان پرانتزها را حذف کرد:

$$x=\mathbf{a}_1+(-\mathbf{b}_1)+\mathbf{a}_2+(-\mathbf{b}_2)+\cdots+\mathbf{a}_n+(-\mathbf{b}_n)$$

و اگر چند بار، از قانون جابه جایی جمع بردارها استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$x=(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n)+(-\mathbf{b}_1)+(-\mathbf{b}_2)+\cdots+(-\mathbf{b}_n)$$

اکنون مجموع $(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\ldots+\mathbf{b}_n)$ را به x اضافه می‌کنیم، با استفاده از قانون‌های شرکت‌پذیری و جابه‌جایی جمع بردارها و با توجه به قانون‌های IV و III در جمع بردارها، خواهیم داشت:

$$x+(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\cdots+\mathbf{b}_n)=(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n)+$$
$$+(-\mathbf{b}_1)+(-\mathbf{b}_2)+\cdots+(-\mathbf{b}_n)+\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\cdots+\mathbf{b}_n=$$
$$=(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n)+(\mathbf{b}_1+(-\mathbf{b}_1))+(\mathbf{b}_2+(-\mathbf{b}_2))+\cdots+$$
$$+(\mathbf{b}_n+(-\mathbf{b}_n))=(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n)+0+0+\cdots+0=$$
$$=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n$$

که سرانجام، با توجه به قاعدهٔ انتقال جمله‌ها، از یك طرف به طرف دیگر برابری، نتیجه می‌شود:

$$x=(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n)-(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2+\cdots+\mathbf{b}_n)$$

مثال ۲.۲.۲. اگر O مرکز شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ باشد(شکل ۲.۴)، مجموع $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$ را پیدا کنید.

حل. قطرهای شش‌ضلعی منتظم، در نقطهٔ O به‌هم می‌رسند و، در آن‌جا،

یکدیگر را نصف می‌کنند. نیم‌خط‌های راست $(OA]$ و $[OD)$، در دو جهت مختلف‌اند، بنابراین $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OD}$. به همین ترتیب

$$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OE}, \quad \overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OF}$$

از آن‌جا

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=0, \quad \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=0, \quad \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}=0$$

و در نتیجه

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=(OA+\overrightarrow{OD})+$$
$$+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF})=0+0+0=0$$

در شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$، این برابری هم برقرار است:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}=0$$

در واقع، چون $ODEF$ متوازی‌الاضلاع است، داریم:

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}$$

و در نتیجه

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})-(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OF})=$$
$$=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OF}=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF})+$$
$$+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF})-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})=(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})=$$
$$=(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OE})=0+0=0$$

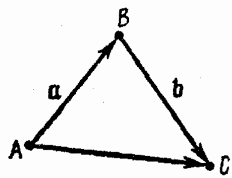
مثال ۳.۲.۲. ثابت کنید، در مثلث ABC، میانه‌های $[AK]$، $[CM]$ و $[BN]$، در یک نقطه به هم می‌رسند و اگر Q، نقطهٔ برخورد این میانه‌ها باشد، آن وقت

$$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=0$$

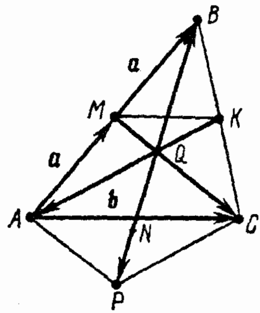
حل. Q را محل برخورد پاره‌خط‌های راست $[AK]$ و $[CM]$

می گیریم (شکل ۹.۲). بنابر ویژگی پاره‌خط راستی که وسط دو ضلع مثلث را به‌هم وصل می‌کند، داریم: $(MK)||(AC)$. از این‌رو، مثلث‌های QMK و QCA، به دلیل برابر بودن زاویه‌های متناظر، متشابه‌اند، یعنی

$$\frac{|QC|}{|MQ|}=\frac{|QA|}{|KQ|}=\frac{|AC|}{|MK|}=۲$$



شکل ۱۰.۲



شکل ۹.۲

به این ترتیب، نقطهٔ Q، پاره‌خط راست $[AK]$ را به‌نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کند. همین نقطهٔ Q، میانهٔ $[CM]$ را هم به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کند:

$$|CQ|:|QM|=۲$$

اکنون، اگر به جای میانه‌های $[AK]$ و $[CM]$، دو میانهٔ $[AK]$ و $[BN]$ را در نظر بگیریم، به طریق مشابهی ثـابت می‌شود کـه، نقطهٔ Q، بر میانهٔ $[BN]$ قرار دارد و آن را به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کند:

$$|BQ|:|QN|=۲$$

در نتیجه، سه میانهٔ مثلث، در نقطهٔ Q به‌هم می‌رسند.

برای نقطهٔ P، قرینهٔ نقطهٔ Q نسبت به نقطهٔ N (شکل ۹.۲)، داریم: $\overrightarrow{QB}=-\overrightarrow{QP}$. چون $P=Z_N(Q)$ و $A=Z_N(C)$، بنابراین، چهار ضلعی $AQCP$ متوازی‌الاضلاع است، یعنی

$$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QP}$$

و سرانجام، به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{QP}+(-\overrightarrow{QP})=0$$

مثال ۴.۲.۲. ثابت کنید، برای هردو بردار **a** و **b**، نابرابری‌های مثلثی زیر برقرارند:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leqslant|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|،\quad |\mathbf{a}-\mathbf{b}|\geqslant|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}| \qquad (۲.۲)$$

تحقیق کنید، برابری $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$؛ همچنین، برابری $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$ و $|\mathbf{a}|\geqslant|\mathbf{b}|$.

حل. در حالتی که یکی از دو بردار **a** یا **b** برابر صفر باشد، درستی نابرابری‌ها روشن است. اکنون، **a** و **b** را بردارهای غیر صفر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$، نمایش بردار **a** باشد. بردار $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$ را از نقطهٔ B در نظر می‌گیریم (شکل ۱۰.۲). پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AC}$، بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ را نمایش می‌دهد. با توجه به ویژگی‌های ۳° و ۴° برای فاصله (بخش ۱.۱ را ببینید)، داریم:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\overrightarrow{AC}|\leqslant|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|=|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$$

علامت برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم $B\in[AC]$، یعنی وقتی که بردارهای **a** و **b** در یک جهت باشند ($\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$).

اگر در نابرابری $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leqslant|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$، به‌جای بردار **a**، بردار $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$|(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\leqslant|\mathbf{a}-\mathbf{b}|+|\mathbf{b}|$$

و در نتیجه $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$. بنا بر آن چه در بالا گفتیم، در این جا، برابری $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$، تنهـا وقتی برقرار می‌شود که بردارهـای $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ و $\mathbf{b}$ هم‌جهت باشند، یعنی وقتی که بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{b}$ دارای یك جهت باشند که، در ضمن

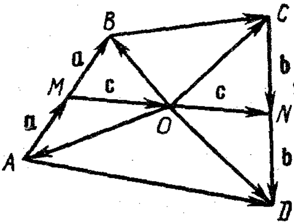
$$|\mathbf{a}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|+|\mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{b}|$$

مثال ۰.۵.۲.۲ A، B، C و D، چهار نقطه از فضا (یا صفحه)اند. M را وسط $[AB]$، N را وسط $[CD]$ و O را وسط $[MN]$ می گیریم. ثابت کنید:

۱) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=0$؛

۲) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$؛

۳) $|MN| \leqslant \frac{1}{2}(|BC|+|AD|)$.



شکل ۱۱.۲

حل. ۱) پـاره خطهـای راسـت جهت‌دار $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$، معرف یك بردارند که، آن را، با $\mathbf{a}$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب، فرض می کنیم:

$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{ND}=\mathbf{b}،\ \ \overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ON}=\mathbf{c}$$

(شکل ۱۱.۲). بنابراین

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}=(-\mathbf{c})+(-\mathbf{a})،\ \ \overrightarrow{OB}=\mathbf{a}-\mathbf{c}،$$
$$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}،\ \ \overrightarrow{OD}=\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

به این ترتیب، با توجه به مثال ۱.۲.۲، داریم:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=(-\mathbf{c})+(-\mathbf{a})+\mathbf{a}-\mathbf{c}+\mathbf{c}-\mathbf{b}+$$
$$+\mathbf{b}+\mathbf{c}=(\mathbf{a}-\mathbf{a})+(\mathbf{c}-\mathbf{c})+(\mathbf{b}-\mathbf{b})+(\mathbf{c}-\mathbf{c})=0+$$
$$+0+0+0=0$$

۲) بنابر قاعدهٔ دور بسته، داریم:

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}،\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}$$

از این‌رو:

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AM})+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}+(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND})=$$
$$=\circ+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}+\circ=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}$$

۳) با توجه به نابرابری مثلثی

$$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}|\leqslant|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{AD}|=|BC|+|AD|$$

و چون $\overrightarrow{MN}\uparrow\uparrow\overrightarrow{MN}$، خواهیم داشت:

$$|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{MN}|+|\overrightarrow{MN}|=۲|MN|$$

(مثال ۴.۲.۲ را ببینید).به این ترتیب، سرانجام، به دست می‌آید:

$$۲|MN|=|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}|\leqslant|BC|+|AD|$$

مثال ۶.۲.۲. برابری $-(-\mathbf{a})=\mathbf{a}$ را، برای هر بردار دلخواه $\mathbf{a}$، ثابت کنید.

حل. $\mathbf{x}=-(-\mathbf{a})$ می‌گیریم. بنا به‌قانون‌های IV و I جمع بردارها، داریم: $\mathbf{x}+(-\mathbf{a})=\circ$. بردار $\mathbf{a}$ را به هر دو طرف این برابری اضافه می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$\mathbf{a}=\circ+\mathbf{a}=\mathbf{x}+(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{x}+(\mathbf{a}+(-\mathbf{a}))=\mathbf{x}+\circ=\mathbf{x}$$

بخش ۳.۲. ضرب بردار در عدد. معیاری برای هم‌راستا بودن بردارها

پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ را نمایش بردار $\mathbf{a}$، و k را عدد حقیقی می‌گیریم. حاصل‌ضرب $k\mathbf{a}$ (حاصل‌ضرب بردار $\mathbf{a}$ در عدد حقیقی k)، به‌ نوان برداری تعریف می‌شود که، نمایش آن، پاره‌خط راست جهت‌دار $k\overrightarrow{AB}$ نند. ضرب $k\mathbf{a}$ را به صورت $\mathbf{a}k$ هم می‌توان نوشت. در حالت $k\neq\circ$،

ضرب $\frac{1}{k}\mathbf{a}$، به صورت $\frac{\mathbf{a}}{k}$ هم نوشته می‌شود.

قانون‌های ضرب بردار در یك عدد

I. $1.\mathbf{a}=\mathbf{a}$، $0.\mathbf{a}=0$، $k0=0$، $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$؛

II. $|k\mathbf{a}|=|k||\mathbf{a}|$؛

III. اگر $k\geqslant 0$ آن‌گاه $\mathbf{a}\uparrow\uparrow k\mathbf{a}$، و اگر $k\leqslant 0$ آن‌گاه $\mathbf{a}\uparrow\downarrow k\mathbf{a}$؛

اگر k و m دو عدد حقیقی و $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار دلخواه باشند، آن‌گاه:

IV. $k(m\mathbf{a})=(km)\mathbf{a}$ (جابه‌جائی ضرب در عدد)

V. $(k+m)\mathbf{a}=k\mathbf{a}+m\mathbf{a}$

VI. $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$

(شرکت‌پذیری ضرب در عدد)

این ویژگی‌ها، به طور مستقیم، از ویژگی‌های ضرب پاره خط راست جهت‌دار در یك عدد به دست می‌آیند (بخش ۵.۱ را ببینید).

مثال ۱.۳.۲. ثابت کنید: $-\mathbf{a}=(-1)\mathbf{a}$ (با استفاده از بقیهٔ قانون‌های ضرب بردار در یك عدد).

حل. داریم: $(1+(-1))\mathbf{a}=0.\mathbf{a}=0$. از این‌جا

$$-\mathbf{a}=(-\mathbf{a})+0=(-\mathbf{a})+(1+(-1))\mathbf{a}=(-\mathbf{a})+1.\mathbf{a}+$$
$$+(-1)\mathbf{a}=((-\mathbf{a})+\mathbf{a})+(-1)\mathbf{a}=0+(-1)\mathbf{a}=(-1)\mathbf{a}$$

مثال ۲.۳.۲. ثابت کنید، اگر $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}=k\mathbf{a}+l\mathbf{b}$، آن‌گاه

$$(m-k)\mathbf{a}+(n-l)\mathbf{b}=0$$

حل. بردارها را ازسمت راست به سمت چپ برابری منتقل می‌کنیم:

$$m\mathbf{a}+n\mathbf{b}=k\mathbf{a}+l\mathbf{b}\ \Rightarrow\ (m\mathbf{a}-k\mathbf{a})+(n\mathbf{b}-l\mathbf{b})=0$$

بنا بر قانون‌های I و IV از ضرب بردار در یك عدد، داریم:

$$-k\mathbf{a}=(-1).(k\mathbf{a})=(-k)\mathbf{a}$$

و بنا بر قانون V

$$m\mathbf{a}-k\mathbf{a}=m\mathbf{a}+(-k\mathbf{a})=m\mathbf{a}+(-k)\mathbf{a}=(m-k)\mathbf{a}$$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$n\mathbf{b}-l\mathbf{b}=(n-l)\mathbf{b}$$

در نتیجه

$$m\mathbf{a}+n\mathbf{b}=k\mathbf{a}+l\mathbf{b} \iff (m-k)\mathbf{a}+(n-l)\mathbf{b}=0$$

با توجه به قانون‌های II و III، می‌توان معیاری برای هم راستائی بردارها به دست آورد: بردار $\mathbf{b}$، تنها وقتی با بردار غیرصفر $\mathbf{a}$ هم راستاست که، عددی مانند k وجود داشته باشد، به نحوی که داشته باشیم: $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$. در ضمن، وقتی بردارهای $\mathbf{a}\neq 0$ و $\mathbf{b}$ مفروض باشند، k، عددی منحصر به فرد است، به نحوی که $|k|=\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$؛ یعنی، اگر $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{b}$، آن‌گاه $k=\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$ و اگر $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{b}$، آن‌گاه $k=-\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$.

مثال ۲.۳.۲. ثابت کنید، برابری $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}=0$، برای بردارهای ناهم‌راستای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $m=n=0$.

حل. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را بردارهای ناهم‌راستائی می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $m\mathbf{a}+n\mathbf{b}=0$ و $m\neq 0$؛ در این صورت، داریم:

$$0=\left(\frac{1}{m}\right)0=\left(\frac{1}{m}\right)(m\mathbf{a}+n\mathbf{b})=\left(\frac{1}{m}\right)(m\mathbf{a})+$$

$$+\left(\frac{1}{m}\right)(n\mathbf{b})=1\cdot\mathbf{a}+\left(\frac{n}{m}\right)\mathbf{b}=\mathbf{a}-\left(-\frac{n}{m}\right)\mathbf{b}$$

یعنی $\mathbf{a}=\left(-\frac{n}{m}\right)\mathbf{b}$. بنابراین، با توجه به معیار هم‌راستائی، باید بردارهای

a و **b** هم راستا باشند، که با فرض ناهم راستا بودن **a** و **b**، متناقض است. به‌همین طریق، می‌توان ثابت کرد که، فرض $n \neq ۰$ هم، به‌تناقض می‌انجامد.

مثال ۴.۳.۲. ثابت کنید، برای بردارهای ناهم‌راستای **a** و **b**، برابری

$$m_۱\mathbf{a}+n_۱\mathbf{b}=m_۲\mathbf{a}+n_۲\mathbf{b} \qquad (۲.۳)$$

با دستگاه معادله‌های زیر هم‌ارز است:

$$m_۱=m_۲،\ \ n_۱=n_۲ \qquad (۲.۴)$$

حل. در مثال ۲.۳.۲ دیدیم که برابری (۲.۳)، هم‌ارز است با برابری

$$(m_۱-m_۲)\mathbf{a}+(n_۱-n_۲)\mathbf{b}=۰ \qquad (*)$$

بردارهای **a** و **b** هم راستا نیستند، بنابراین، با توجه به مسألهٔ ۳.۳.۲، برابری (*) هم‌ارز است با برابری‌های $m_۱-m_۲=۰$ و $n_۱-n_۲=۰$.

مثال ۵.۳.۲. بردارهای **a** و **b**، هم‌راستا نیستند. به ازای چه مقداری از x، دو بردار زیر هم‌راستا می‌شوند:

$$\mathbf{c}=(x-۱)\mathbf{a}+\mathbf{b}\ \ ,\ \ \mathbf{d}=(۲+۳x)\mathbf{a}-۲\mathbf{b}$$

حل. بردار $\mathbf{c}=(x-۱)\mathbf{a}+\mathbf{b}$ غیرصفر است، زیرا اگر داشته باشیم:

$$۰=\mathbf{c}=(x-۱)\mathbf{a}+۱\cdot\mathbf{b}$$

آن وقت، با توجه به مثال ۳.۳.۲ برای بردارهای ناهم‌راستای **a** و **b**، باید برابری‌های $x-۱=۰$ و $۱=۰$ برقرار باشد که ممکن نیست.

بنابر معیار هم‌راستائی، دو بردار **c** و **d**، تنها وقتی هم راستا می‌شوند که عددی مثل y وجود داشته باشد، به نحوی که برای آن، داشته باشیم: $\mathbf{d}=y\mathbf{c}$، یعنی

$$(۲+۳x)\mathbf{a}-۲\mathbf{b}=y(x-۱)\mathbf{a}+y\mathbf{b}$$

بردارهای **a** و **b** هم راستا نیستند، بنابراین، با توجه به مثال ۴.۳.۲، باید داشته باشیم:

$$۲+۳x=y(x-۱)\ ،\ \ y=-۲$$

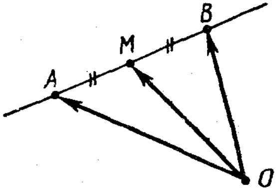
که از آن‌جا به دست می‌آید: $x=0$ و $y=-2$. به این ترتیب، بردارهای $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$، تنها وقتی هم‌راستا می‌شوند که $x=0$، یعنی

$$\mathbf{c}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}\ ,\ \ \mathbf{d}=2(\mathbf{a}-\mathbf{b})$$

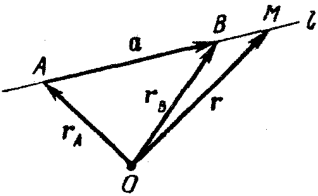
اگر O، نقطهٔ ثابتی از فضا یا صفحه باشد (که آن‌را قطب می‌نامیم)، آن وقت، بین نقطه‌های A (از فضا یا صفحه) و پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{OA}$، تناظر یك به یك برقرار است. بردار $\mathbf{r}_A$ را، که با پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{OA}$ نمایش داده می‌شود، شعاع حامل نقطهٔ A نسبت به قطب O گویند. برای شعاع حامل مفروض $\mathbf{r}_A$، نقطهٔ A، با انتهای بردار $\mathbf{r}_A$، که به قطب O وصل شده است، مشخص می‌شود.

مثال ۲.۳.۶. (معادلهٔ بردار پارامتری خط راست). نقطهٔ ثابت O را، به عنوان قطب، در فضا (یا صفحه) در نظر می‌گیریم. به جز آن، l را خط راستی فرض می‌کنیم که از دو نقطهٔ متمایز A و B گذشته باشد. مجموعهٔ همهٔ شعاع‌های حامل نقطه‌های واقع بر خط راست l را مشخص کنید.

حل. $\mathbf{r}_A$ و $\mathbf{r}_B$ را، به ترتیب، شعاع‌های حامل دو نقطهٔ A و B فرض می‌کنیم. برداری را که به وسیلهٔ پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ نمایش داده می‌شود، $\mathbf{a}$ می‌نامیم، یعنی $\mathbf{a}=\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A$ (شکل ۱۲.۲). شعاع حامل نقطهٔ دلخواه M از خط راست l را با $\mathbf{r}$ نشان می‌دهیم.



شکل ۱۳.۲



شکل ۱۲.۲

نقطهٔ M، تنها وقتی بر خط راست l واقع است که، بردارهای $\overrightarrow{AM}$ و $\mathbf{a}$ هم‌راستا باشند. با توجه به معیار هم‌راستائی، این وضع تنها وقتی امکان دارد که عددی مانند t (وابسته به M) وجود داشته باشد، به نحوی که برای آن، داشته باشیم: $\overrightarrow{AM} = t\mathbf{a}$. چون $\overrightarrow{AM} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A$، بنابراین، بردار $\mathbf{r}$، تنها وقتی می‌تواند شعاع حامل نقطهٔ $M \in l$ باشد که بتوان، آن را، به صورت $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + t\mathbf{a}$ نشان داد که، آن، $\mathbf{a} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$. به این ترتیب، مجموعهٔ همهٔ شعاع‌های حامل نقطه‌های متعلق به خط راست l، مجموعه‌ای است از بردارهای به صورت

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\circ + t\mathbf{a} \qquad (۲.۵)$$

که در آن $\mathbf{r}_\circ = \mathbf{r}_A$، $\mathbf{a} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ و t عددی حقیقی است. بردار $\mathbf{a}$ را، بردار هادی خط راست l، $\mathbf{r}_\circ$ را شعاع حامل نقطهٔ آغاز خط راست l، t را پارامتر و رابطهٔ (۲.۵) را، معادلهٔ بردار پارامتری خط راست گویند.

رابطهٔ (۲.۵) را می‌توان، به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_A + t\mathbf{r}_B \quad \text{یا} \quad \mathbf{r} = \tau\mathbf{r}_A + t\mathbf{r}_B$$

که در آن‌ها، t و τ دو عدد حقیقی دلخواهند که با برابری $t + \tau = 1$ به‌هم مربوط شده‌اند. در واقع، دستگاه معادله‌های

$$\mathbf{r} = \tau\mathbf{r}_A + t\mathbf{r}_B, \quad t + \tau = 1$$

معادلهٔ پارامتری خط راستی را می‌دهد که از دو نقطهٔ A و B گذشته است. عددهای $t = t(M)$ و $\tau = \tau(M)$ را، مختصات گرانیگاهی نقطهٔ M روی خط راست (AB) (در امتداد بردار $\mathbf{a}$) گویند.

مفهوم هندسی پارامتر t را، در رابطهٔ (۲.۵)، روشن می‌کنیم. چون $\overrightarrow{AM} = t\mathbf{a}$ و $t = t(M)$، بنابراین $|\overrightarrow{AM}| = |t||\mathbf{a}|$، یعنی $|t| = |\overrightarrow{AM}| : |\mathbf{a}|$.
عدد t وقتی مثبت است که، نقطهٔ $M \neq A$ بر $[AB]$ واقع باشد، و یا $B \in [AM]$؛ عدد t وقتی منفی است که $M \neq A$ و $A \in [MB]$؛ $t = \circ$ است، تنها وقتی که نقطهٔ M بر A منطبق باشد.

مثال ۰۷۰۳۰۲ (تقسیم پاره خط راست، به نسبت معلوم). A و B را دو نقطهٔ متمایز با شعاع‌های حامل $\mathbf{r}_A$ و $\mathbf{r}_B$ نسبت به قطب O، و λ را عددی مثبت فرض می کنیم. می‌خواهیم $\mathbf{r}_M$، شعاع حامل نقطهٔ M از پاره خط راست $[AB]$ را پیدا کنیم، به شرطی که بدانیم، نقطهٔ M، پاره‌خط راست $[AB]$ را (از طرف A) به نسبت λ تقسیم کرده است.

حل. نقطهٔ M ، روی خط راست (AB) و بین دو نقطهٔ A و B قرار دارد، بنابراین

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_A + t(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$$

که در آن $t = \frac{|AM|}{|AB|} > ۰$. با فرض $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$، به دست می‌آید:

$$|AB| = |AM| + |MB| = |AM| + \frac{۱}{\lambda}|AM| = \frac{\lambda + ۱}{\lambda}|AM|$$

بنابراین $t = \frac{\lambda}{\lambda + ۱}$ و

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_A + \frac{\lambda}{\lambda + ۱}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \frac{۱}{\lambda + ۱}\mathbf{r}_A + \frac{\lambda}{\lambda + ۱}\mathbf{r}_B$$

و رابطهٔ

$$\mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{\lambda + ۱} \qquad (۲۰۶)$$

دستور تقسیم یک پاره خط راست، به نسبت معلوم است.

به ازای $\lambda = ۱$، نقطهٔ M وسط پاره خط راست $[AB]$ و پاره خط راست $[OM]$، میانهٔ مثلث OAB می‌شود (شکل ۱۳۰۲). در این حالت، بردار $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM}$، برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\mathbf{r}_A + \frac{۱}{۲}\mathbf{r}_B = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{۲}$$

مثال ۸۰۳۰۲ با استفاده از بردارها وعمل بر روی آن‌ها، ثابت کنید، میانه‌های مثلث، در یك نقطه به‌هم می‌رسند و، این نقطه، به فاصلهٔ $\frac{۲}{۳}$ میانه از رأس و به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}$ میانه ازضلع مقابل است.

حل. M و K را، به‌ترتیب، وسط ضلع‌های $[BC]$ و $[AB]$، و Q را نقطهٔ برخورد میانه‌هـای $[AK]$ و $[CM]$ می‌گیریم (شکل ۹۰۲ را ببینید). فرض می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{|CQ|}{|QM|},\ \ \mu=\frac{|AQ|}{|QK|}$$

و ثابت مـی‌کنـیم: $\mu=\lambda=۲$. $\overrightarrow{AM}=\mathbf{a}$ (پس $\overrightarrow{AB}=۲\mathbf{a}$) و $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$ می‌گیریم. نقطهٔ Q، پاره خط راست $[CM]$ را به‌نسبت λ تقسیم‌کرده است، با استفاده از دستور تقسیم پاره خط راست، داریم:

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}}{\lambda+۱}$$

در نتیجه

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{AQ}+\frac{\overrightarrow{AQ}}{\mu}=\frac{\mu+۱}{\mu}\cdot\frac{\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}}{\lambda+۱}$$

نقطهٔ K پاره خط راست $[CB]$ را، به‌نسبت ۱:۱ تقسیم می‌کند، بنابراین

$$\overrightarrow{AK}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{۲}=\frac{\mathbf{b}+۲\mathbf{a}}{۲}$$

با مقایسهٔ دو مقدار $\overrightarrow{AK}$ به دست می‌آید:

$$\frac{\mu+۱}{\mu}\cdot\frac{\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}}{\lambda+۱}=\frac{\mathbf{b}+۲\mathbf{a}}{۲}$$

با توجه به این که، بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم راستا نیستند، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\mu+1}{\mu}\cdot\frac{1}{\lambda+1}=\frac{1}{2},\ \frac{\mu+1}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+1}=1$$

که از تقسیم آن‌ها بریکدیگر، به دست می‌آید: $\lambda=2$. سپس

$$\frac{\mu+1}{\mu}=\frac{3}{2}\Longrightarrow\mu=2$$

به این ترتیب، معلوم می‌شود که، نقطهٔ Q، برمیانهٔ $[CM]$ قرار دارد و آن را به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند؛ همچنین، نقطهٔ Q، روی میانهٔ $[AK]$ واقع است و آن را به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که نقطهٔ Q از میانهٔ $[CM]$، برمیانهٔ $[BN]$ هم قرار دارد و آن را به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند؛ یعنی، سه میانه در یك نقطه بـه هم می‌رسند و، این نقطه، هر یك از میانه‌ها را به‌نسبت ۱:۲، از طرف رأس به طرف ضلع، تقسیم می‌کند.

مثال ۰۹.۳.۲ عدد k را طوری پیدا کنید که اگر در بردار غیر صفر $\mathbf{a}$ ضرب شود، طول بردار $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$ برابر واحد باشد و در ضمن: a (بردار $\mathbf{b}$ هم جهت با بردار $\mathbf{a}$ باشد، b) بردار $\mathbf{b}$ درخلاف جهت بردار $\mathbf{a}$ باشد.

حل. (a) چون $k\operatorname{a}\uparrow\uparrow\mathbf{a}\Longleftrightarrow k\geqslant 0$ (III)، بنابراین

$$k=|k|=|\mathbf{b}|:|\mathbf{a}|=\frac{1}{|\mathbf{a}|}\quad(\mathrm{II})$$

(b) داریم: $k\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{a}\Longleftrightarrow k\leqslant 0$، درنتیجه

$$-k=|k|=|\mathbf{b}|:|\mathbf{a}|=\frac{1}{|\mathbf{a}|}\ \text{و}\ k=-\frac{1}{|\mathbf{a}|}$$

به‌این ترتیب، بردار $\mathbf{b}=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ با بردار $\mathbf{a}\neq 0$ هم‌جهت است و طولی برابـر واحد دارد. هـر بردار به طول واحد را، بردار یکه گویند. بردار $\frac{-\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ با بردار $\mathbf{a}$ در دوجهت مختلف‌اند وطولی برابر واحد دارد.

● **مثال ۱۰۰۳۰۲.** $[CD]$ را نیمساز داخلی زاویهٔ رأس C از مثلث ABC می‌گیریم. بردار $\overrightarrow{CD}$ را برحسب بردارهای $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ و طول‌های آن‌ها بنویسید.

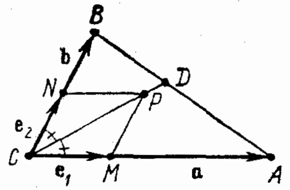
حل. ازنقطهٔ C، بردارهای یکهٔ

$$\overrightarrow{CM}=\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{CN}=\mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

را جدا می‌کنیم (نقطه‌های M و N، به‌ترتیب، بر نیم‌خط‌های راست $[CA)$ و $[CB)$ و به فاصلهٔ واحد از نقطهٔ C قرار دارند). متوازی‌الاضلاع $CNPM$ روی پاره‌خط‌های راست جهت‌دار $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CN}$ رسم شده است (شکل ۱۴۰۲). چون

$$|\overrightarrow{CM}|=|\overrightarrow{CN}|=1$$

این متوازی‌الاضلاع، یك لوزی است و، بنابراین، قطرهای آن، نیمسازهای زاویه‌های داخلی لوزی هستند: $[CP]$ نیمساز زاویهٔ رأس C است. بردارهای $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CP}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$، هم‌راستا هستند و $\overrightarrow{CP}\neq 0$. بنابراین، عدد x وجود دارد، به نحوی‌که برای آن داشته باشیم:



شکل ۱۴۰۲

$$\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{CP}=x\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+x\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

ازطرف دیگر، نقطهٔ D، پاره خط راست $[AB]$ را، به‌نسبت

$$\lambda=|AD|:|DB|$$

(که فعلاً برای ما معلوم نیست) تقسیم می‌کند. درنتیجه، بنابر رابطهٔ (۲۰۶):

$$\overrightarrow{CD}=\frac{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{\lambda+1}$$

دو عبارتی را که برای $\overrightarrow{CD}$ به‌دست آوردیم، با هم مقایسه می‌کنیم، با توجه به این‌که دو بردار **a** و **b** هم راستا نیستند، به دست می‌آید:

$$\frac{x}{|\mathbf{a}|}=\frac{۱}{\lambda+۱},\ \frac{x}{|\mathbf{b}|}=\frac{\lambda}{\lambda+۱}$$

و بنابراین $\lambda=|\mathbf{a}|:|\mathbf{b}|$ و

$$\overrightarrow{CD}=\frac{\mathbf{a}+\frac{|\mathbf{a}|\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}}{\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}+۱}=\frac{|\mathbf{a}|\mathbf{b}+|\mathbf{b}|\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|}$$

توجه کنیم که، برابری $\lambda=|\mathbf{a}|:|\mathbf{b}|$ به‌این معناست که، نیم‌ساز داخلی زاویهٔ C از مثلث ABC، ضلع مقابل $[AB]$ را به‌نسبت

$$|AD|:|DB|=|CA|:|CB|$$

تقسیم می‌کند: نیمساز داخلی‌هرزاویهٔ مثلث، ضلع روبه‌رو را نسبت به‌دوضلع دیگر، تقسیم می‌کند.

مثال ۱۱۰۳۰۲. نقطه‌های M، N و P را، روی خط‌های راست (AB)، (BC) و (CA)، ازمثلث ABC، طوری انتخاب کرده‌ایم که

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN}=\beta\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CP}=\gamma\overrightarrow{CA}$$

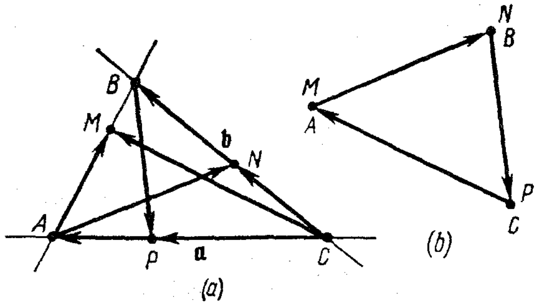
(α، β و γ، عددهای حقیقی اند). مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این‌که بردارهای $\overrightarrow{CM}$، $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{BP}$ یك مثلث بسازند، یعنی داشته‌باشیم:

$$\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}=۰$$

حل. $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ می‌گیریم (شکل ۱۵۰۲)؛ پس $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$؛ $\overrightarrow{AM}=\alpha(\mathbf{b}-\mathbf{a})$، $\overrightarrow{CN}=(۱-\beta)\mathbf{b}$، $\overrightarrow{CP}=\gamma\mathbf{a}$. از این‌جا

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=(۱-\alpha)\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=-\mathbf{a}+(۱-\beta)\mathbf{b},$$



شکل ۱۵.۲

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=-\mathbf{b}+\gamma\mathbf{a}$$

و بنا براین

$$\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}=(\gamma-\alpha)\mathbf{a}+(\alpha-\beta)\mathbf{b}$$

بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم راستا نیستند، یعنی تنها به‌شرطی داریم:

$$\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}=0$$

که داشته باشیم: $\gamma-\alpha=0$ و $\alpha-\beta=0$، یعنی $\alpha=\beta=\gamma$.

مثال ۱۲.۳.۲. پای نیمسازهای داخلی $[CM]$، $[AN]$ و $[BP]$ را درمثلث ABC، به‌ترتیب، M، N و P می‌گیریم. می‌دانیم:

$$\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}=0$$

ثابت‌کنید، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

حل. فرض می‌کنیم: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{BN}=\beta\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CP}=\gamma\overrightarrow{CA}$.
بنابر آن‌چه درمثال ۱۰.۳.۲ ثابت‌کردیم، داریم:

$$\alpha=\frac{|AC|}{|AC|+|BC|},\ \beta=\frac{|AB|}{|AB|+|AC|},\ \gamma=\frac{|BC|}{|BC|+|AB|}$$

درمثال ۱۱.۳.۲ دیدیم، برابری $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}=0$، وقتی برقرار است که داشته باشیم: $\alpha=\beta=\gamma$، یعنی

$$\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{1}{\alpha}-1=\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{1}{\beta}-1=\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{1}{\gamma}-1$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$|AB|^2=|AC|:|BC|،\quad |AC|^2=|AB|:|BC|$$

از تقسیم این دو برابری بریکدیگر، به برابری $|AC|^3=|AB|^3$، یعنی $|AC|=|AB|$ می‌رسیم و، در نتیجه، $|AC|^2=|AC|\cdot|BC|$ یا $|AC|=|BC|$.

مثال ۱۳.۳.۲. نقطه‌های F و E را بر ضلع‌های $[BC]$ و $[CD]$ از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|BF|:|FC|=\mu،\quad |DE|:|EC|=\lambda$$

(λ و μ، عددهای مثبت مفروض‌اند). خط‌های راست (FD) و (AE)، یکدیگر را درنقطهٔ O قطع کرده‌اند (شکل ۲.۲ را ببینید). نسبت $\frac{|FO|}{|OD|}$ را پیدا کنید.

حل. $\mathbf{a}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ می‌گیریم؛ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{BF}+\frac{1}{\mu}\overrightarrow{BF}=\frac{\mu+1}{\mu}\overrightarrow{BF}$$

یعنی، $\overrightarrow{BF}=\frac{\mu}{\mu+1}\mathbf{a}$ و به همین ترتیب $\overrightarrow{DE}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\mathbf{b}$. درنتیجه

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\mathbf{a}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\mathbf{b}،$$

$$\overrightarrow{FD}=-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\frac{\mu}{\mu+1}\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}}{\mu+1}-\mathbf{b}$$

دور $AODA$ را در نظر می‌گیریم. بنا به قانون دور

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}=0 \qquad (۲.۷)$$

بردارهای $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{OD}$ مجهول‌اند، ولی به ترتیب، با بردارهای $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{FD}$ هم‌راستا هستند. بنابراین، عددهای x و y وجود دارند، به نحوی که

$$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AE}=x\mathbf{a}+\frac{\lambda}{\lambda+1}x\mathbf{b},\quad \overrightarrow{OD}=y\overrightarrow{FD}=\frac{1}{\mu+1}y\mathbf{a}-y\mathbf{b}$$

عبارت‌های مربوط به $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{OD}$ را در رابطهٔ (۲.۷) قرار می‌دهیم:

$$\left(x\mathbf{a}+\frac{\lambda x\mathbf{b}}{\lambda+1}\right)+\left(\frac{y\mathbf{a}}{\mu+1}-y\mathbf{b}\right)-\mathbf{a}=0 \iff$$

$$\iff \left(x+\frac{y}{\mu+1}-1\right)\mathbf{a}+\left(\frac{\lambda x}{\lambda+1}-y\right)\mathbf{b}=0$$

چون بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا نیستند، به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$x+\frac{y}{\mu+1}=1,\quad \frac{\lambda x}{\lambda+1}=y$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$x=\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda+(1+\lambda)(1+\mu)},\quad y=\frac{\lambda(1+\mu)}{\lambda+(1+\lambda)(1+\mu)}$$

به این ترتیب، برای نسبت مطلوب داریم:

$$\frac{|FO|}{|OD|}=\frac{|FD|-|OD|}{|OD|}=\frac{|FD|}{|OD|}-1=\frac{1-y}{y}=\frac{1+\lambda+\mu}{\lambda(1+\mu)}$$

یادداشت. در این مثال، همچنین می‌توان به دست آورد:

$$\frac{|AO|}{|OE|}=\frac{x}{1-x}=\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda}$$

بخش ۴.۲. ماتریس‌ها. دترمینان‌ها. دستگاه معادله‌های خطی

آرایش مستطیلی $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$ را یک ماتریس مرتبهٔ دوم (ماتریس 2×2) گویند. α_1 و α_2 عنصرهای سطر اول و β_1 و β_2 عنصرهای سطر دوم را تشکیل می‌دهند. به همین ترتیب، α_1 و β_1 ستون اول و α_2 و β_2 ستون دوم ماتریس‌اند. آرایش مستطیلی

$$B=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix} \tag{۲.۸}$$

یک ماتریس مرتبهٔ سوم است: α_1، α_2 و α_3 سطر اول، α_1، β_1 و γ_1 ستون اول ماتریس را تشکیل می‌دهند و غیره.

دراین‌جا، تنها به‌ماتریس‌هایی می‌پردازیم که مربعی هستند (یعنی، تعداد سطرها و ستون‌های آن یکی است) و، در ضمن، عنصرهای آن، عددهایی حقیقی‌اند. برای‌چنین ماتریس‌هایی، می‌توان‌دترمینان را تعریف کرد. دترمینان ماتریس $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$، بنا به تعریف، برابر است با $\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2$ و به یکی از صورت‌های زیر نشان داده می‌شود:

$$\det A, \ \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix} \ \text{یا} \ \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$$

که آن را دترمینان مرتبهٔ دوم گویند. مثلاً

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\times 4-2\times 3=-2; \quad \begin{vmatrix}\mathbf{a} & -2\\ \mathbf{b} & 1\end{vmatrix}=\mathbf{a}.1-(-2)\mathbf{b}=$$
$$=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$$

دترمینان مرتبهٔ سوم B [(۲.۸) را ببینید]، باعبارت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)-\alpha_2(\beta_1\gamma_3-\gamma_1\beta_3)+\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)$$

و با یکی از صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\det B, \ \det\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{matrix} \quad \text{یا} \quad \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

وآن را، معمولاً، دترمینان مرتبهٔ سوم گویند. مثلاً

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -3\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 4 & -2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & -2\end{vmatrix}+1\times$$

$$\times\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=[(-1)(-2)-(-3)\cdot 4]+[2\cdot(-2)-(-3)\cdot(-3)]+$$

$$+[2\cdot 4-(-1)(-3)]=2+12-4-9+8-3=6;$$

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\\ -3 & 1 & 4\end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{c}\\ 1 & 4\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{c}\\ -3 & 4\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ -3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=2(4\mathbf{b}-\mathbf{c})-(4\mathbf{a}+3\mathbf{c})-(\mathbf{a}+3\mathbf{b})=-5\mathbf{a}+5\mathbf{b}-5\mathbf{c}$$

اگر همهٔ عنصرهای یک سطر (یا یک ستون) در یک ماتریس (یا دترمینان)، در عددی مثل λ ضرب شده باشند، گوییم، این سطر (یا ستون) ماتریس (یا دترمینان)، مضربی از λ است. عملی که جای سطرها وستون‌های یک ماتریس را باهم عوض کند، ترانهادهٔ ماتریس نام دارد. ترانهادهٔ ماتریس

B را، با B^T نشان می‌دهند. مثلاً، اگر B را با دستور (۲.۸) مشخص کرده باشیم، آن‌گاه

$$B^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

دو ماتریس $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ و $A' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \beta'_1 & \beta'_2 \end{pmatrix}$ را، که از مرتبهٔ دوم و، در ضمن، ماتریس‌های عددی‌اند (یعنی هر عنصر آن‌ها یك عدد است) در نظر می‌گیریم. در این صورت، حاصل‌ضرب این دو ماتریس، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$AA' = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha'_1 + \alpha_2\beta'_1 & \alpha_1\alpha'_2 + \alpha_2\beta'_2 \\ \beta_1\alpha'_1 + \beta_2\beta'_1 & \beta_1\alpha'_2 + \beta_2\beta'_2 \end{pmatrix}$$

و حاصل‌ضرب BB'، از ماتریس‌های عددی و مرتبهٔ سوم

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{pmatrix}$$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$BB' = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha'_1 + \alpha_2\beta'_1 + \alpha_3\gamma'_1 & \alpha_1\alpha'_2 + \alpha_2\beta'_2 + \alpha_3\gamma'_2 & \alpha_1\alpha'_3 + \alpha_2\beta'_3 + \alpha_3\gamma'_3 \\ \beta_1\alpha'_1 + \beta_2\beta'_1 + \beta_3\gamma'_1 & \beta_1\alpha'_2 + \beta_2\beta'_2 + \beta_3\gamma'_2 & \beta_1\alpha'_3 + \beta_2\beta'_3 + \beta_3\gamma'_3 \\ \gamma_1\alpha'_1 + \gamma_2\beta'_1 + \gamma_3\gamma'_1 & \gamma_1\alpha'_2 + \gamma_2\beta'_2 + \gamma_3\gamma'_2 & \gamma_1\alpha'_3 + \gamma_2\beta'_3 + \gamma_3\gamma'_3 \end{pmatrix} \tag{۲.۹}$$

به عنوان مثال، اگر $A=\begin{pmatrix}۰ & ۱\\ ۲ & ۱\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}$، آن‌گاه

$$AA'=\begin{pmatrix}۰ & ۱\\ ۲ & ۱\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰\times۱+۱\times۱ & ۰\times۰+۱\times۱\\ ۲\times۱+۱\times۱ & ۲\times۰+۱\times۱\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}۱ & ۱\\ ۳ & ۱\end{pmatrix},A'A=\begin{pmatrix}۱\times۰+۰\times۲ & ۱\times۱+۰\times۱\\ ۱\times۰+۱\times۲ & ۱\times۱+۱\times۱\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}۰ & ۱\\ ۲ & ۲\end{pmatrix}$$

ماتریس واحد (یا ماتریس یکه) E به ماتریسی عددی گفته می‌شود که همهٔ عنصرهای قطر اصلی آن (قطری که از سمت چپ بالا، به طرف سمت راست پایین امتداد دارد) برابر واحد و همهٔ بقیهٔ عنصرهای آن برابر صفر باشند. ماتریس یکهٔ مرتبهٔ دوم به صورت $\begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{pmatrix}$ و ماتریس یکهٔ مرتبهٔ سوم، به صورت $\begin{pmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{pmatrix}$ است. اگر S و E، ماتریس‌های هم‌مرتبه و E، ماتریس یکه باشد، آن وقت $SE=ES=S$ و (یعنی، ماتریس یکه، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌هاست). دو ماتریس مربعی هم‌مرتبهٔ X و Y را معکوس یکدیگر گویند، و با نماد $Y=X^{-۱}$ و $X=Y^{-۱}$ نشان می‌دهند، وقتی که داشته باشیم: $XY=YX=E$.

ویژگی‌های دترمینان‌ها

۱°. $\det S=\det S^T$.

□ اگر $S=\begin{pmatrix}\alpha_۱ & \alpha_۲\\ \beta_۱ & \beta_۲\end{pmatrix}$، آن وقت

$$\det S=\alpha_۱\beta_۲-\alpha_۲\beta_۱;\ S^T=\begin{pmatrix}\alpha_۱ & \beta_۱\\ \alpha_۲ & \beta_۲\end{pmatrix},$$

$$\det S^T=\alpha_۱\beta_۲-\beta_۱\alpha_۲=\det S$$

اگر $S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}$، آن وقت $S^T=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix}$ و

$$\det S=\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \gamma_2\\ \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\beta_1\gamma_3+\alpha_2\beta_3\gamma_1+\alpha_3\beta_1\gamma_2-\alpha_3\beta_2\gamma_1=$$

$$=\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \gamma_2\\ \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}-\beta_1\begin{vmatrix}\alpha_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \gamma_3\end{vmatrix}+\gamma_1\begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}=\det S^T \blacksquare$$

°۲. اگر جای دوسطر یك دترمینان را عوض کنیم، قدرمطلق آن تغییر نمی‌کند، ولی علامت آن عوض می‌شود.

□ اگر $S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$ و $S'=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{pmatrix}$، آن وقت

$$\det S=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1،\quad \det S'=\beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1=$$

$$=-(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)=-\det S$$

و اگر $S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}$ و $S'=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}$، آن وقت

$$\det S'=\beta_1(\alpha_2\gamma_3-\alpha_3\gamma_2)-\beta_2(\alpha_1\gamma_3-\alpha_3\gamma_1)+$$

$$+\beta_3(\alpha\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)=-\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)+\alpha_2(\beta_1\gamma_3-\beta_3\gamma_1)-$$

$$-\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)=-\det S$$

به همین ترتیب، می‌توان تحقیق کرد:

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{vmatrix}\blacksquare$$

°۳. اگر عنصرهای متناظر دو سطر، باهم برابر باشند، مقدار دترمینان برابر صفر است (بردار صفر).

□ در واقع، اگر جای دو سطر برابر را باهم عوض کنیم، بنا بر ویژگی °۲، مقدار آن، به قرینهٔ خودش تبدیل می‌شود. ولی تنها عددی (یا برداری) که با قرینهٔ خودش برابراست، عدد صفر (یا بردارصفر) است. ■

°۴. اگر جای دوستون دترمینان را باهم عوض کنیم، به قرینهٔ خودش تبدیل می‌شود. مقدار دترمینانی که دو ستون برابر داشته باشد، برابر صفر (بردار صفر) است.

□ این ویژگی، نتیجه‌ای از ویژگی‌های °۱ تا °۳ است. ■

°۵. اگر عنصرهای یك سطر یا یك ستون دترمینان، به‌صورت مجموع چند جمله باشد، دترمینان را می‌توان به‌صورت مجموع چند دترمینان نوشت؛ یعنی، برای عددهای λ و μ دلخواه داریم:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1+\mu\alpha'_1 & \lambda\alpha_2+\mu\alpha'_2 & \lambda\alpha_3+\mu\alpha'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

به شرطی که هر سه دترمینان معنی داشته باشند، یعنی وقتی که α_1 و α'_1، α_2 و α'_2، α_3 و α'_3، به طور هم‌زمان، عددهایی حقیقی یا بردار باشند.

□ دترمینان سمت چپ برابری را، به ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$(\lambda\alpha_1+\mu\alpha'_1)\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}-(\lambda\alpha_2+\mu\alpha'_2)\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}+$$

$$+(\lambda\alpha_3+\mu\alpha'_3)\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda\left(\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\right)+$$

$$+\mu\left(\alpha'_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha'_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha'_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix}\alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\blacksquare$$

به همین ترتیب، برای دترمینان مرتبهٔ دوم، داریم:

$$\begin{vmatrix}\lambda\alpha_1+\mu\alpha'_1 & \lambda\alpha_2+\mu\alpha'_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix}\alpha'_1 & \alpha'_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}$$

ویژگی °۵ را، ویژگی خطی دترمینان متناظر با سطر اول می‌نامند. با توجه به ویژگی °۲ می‌توان خطی بودن دترمینان را، نسبت به هر یك از سطرها، تحقیق کرد. از ویژگی °۵، به ازای $\mu=0$ نتیجه می‌شود که، اگر همهٔ عنصرهــای یك سطر را در عددی ضرب کنیم، مثل این است که دترمینان را در آن عدد ضرب کرده‌ایم:

$$\begin{vmatrix}\lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \lambda\alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix};\quad\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \lambda\beta_1 & \lambda\beta_2 & \lambda\beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix};\quad\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \lambda\gamma_1 & \lambda\gamma_2 & \lambda\gamma_3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

°۶. برای هر ماتریس عددی $S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}$ و عددهای دلخواه

λ و μ، برابری‌های زیر برقرارند:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+\lambda\beta_1+\mu\gamma_1 & \alpha_2+\lambda\beta_2+\mu\gamma_2 & \alpha_3+\lambda\beta_3+\mu\gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1+\lambda\alpha_1+\mu\gamma_1 & \beta_2+\lambda\alpha_2+\mu\gamma_2 & \beta_3+\lambda\alpha_3+\mu\gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1+\lambda\alpha_1+\mu\beta_1 & \gamma_2+\lambda\alpha_2+\mu\beta_2 & \gamma_3+\lambda\alpha_3+\mu\beta_3 \end{vmatrix} \qquad (۲.۱۰)$$

□ نخستین دترمینان بالا، بنا بر ویژگی °۵، برابر است با مجموع

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

که درآن، دترمینان‌های دوم و سوم برابر صفرند (بنابر ویژگی °۲). دترمینان‌های اول و سوم و چهارم را، در (۲.۱۰) می‌توان، از دترمینان S، با اضافه‌کردن مضربی از یك یا چند سطر به سطرهای دیگر به دست آورد. به طور کلی، اگر در یك دترمینان، مضربی از یك یا چند سطر (یاستون) را به‌یك سطر (یا ستون) اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند. ■

برابری‌های مشابه (۲.۱۰)، برای دترمینان‌های عددی مرتبهٔ دوم، چنین است:

$$\begin{vmatrix}\alpha_1+\lambda\beta_1 & \alpha_2+\lambda\beta_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1+\lambda\alpha_1 & \beta_2+\lambda\alpha_2\end{vmatrix}$$

7°. اگر یك ستون دترمینان را در عددی ضرب کنیم، مقدار دترمینان در آن عدد ضرب می‌شود. اگر ترکیبی خطی از ستون‌هـای دیگر را، به یك ستون اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

□ با توجه به ویژگی 1°، این ویژگی را می‌توان از ویژگی‌هـای 5° و 6° نتیجه گرفت. ■

8°. اگر S و S' دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، آن وقت

$$\det(SS')=\det S\det S'$$

□ اگر $S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$ و $S'=\begin{pmatrix}\alpha'_1 & \alpha'_2\\ \beta'_1 & \beta'_2\end{pmatrix}$ ماتریس‌هایی از مرتبهٔ دوم باشند، آن گاه

$$\det(SS')=(\alpha_1\alpha'_1+\alpha_2\beta'_1)(\beta_1\alpha'_2+\beta_2\beta'_2)-$$

$$-(\alpha_1\alpha'_2+\alpha_2\beta'_2)(\beta_1\alpha'_1+\beta_2\beta'_1)=\alpha_1(\alpha'_1\beta_1\alpha'_2+\alpha'_1\beta_2\beta'_2-$$

$$-\alpha'_2\beta_1\alpha'_1-\alpha'_2\beta_2\beta'_1)-\alpha_2(\beta'_2\beta_1\alpha'_1+\beta'_2\beta_2\beta'_1-\beta'_1\beta_1\alpha'_2-$$

$$-\beta'_1\beta_2\beta'_2)=\alpha_1\beta_2(\alpha'_1\beta'_2-\alpha'_2\beta'_1)-\alpha_2\beta_1(\alpha'_1\beta'_2-\alpha'_2\beta'_1)=$$

$$=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(\alpha'_1\beta'_2-\alpha'_2\beta'_1)=\det S\det S'$$

اکنون فرض می کنیم:

$$S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix},\quad S'=\begin{pmatrix}\alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3\\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3\\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & \gamma'_3\end{pmatrix}$$

S و S' را، ماتریس‌های عددی مرتبهٔ سوم گرفته‌ایم. بنا به دستور (۲.۹) و با توجه به‌ویژگی 5°، داریم: $\det(SS')=\alpha_1a+\alpha_2b+\alpha_3c$، که در آن

$$a=\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta_1\alpha'_1+\beta_2\beta'_1+\beta_3\gamma'_1 & \beta_1\alpha'_2+\beta_2\beta'_2+\beta_3\gamma'_2 & \beta_1\alpha'_3+\beta_2\beta'_3+\beta_3\gamma'_3 \\ \gamma_1\alpha'_1+\gamma_2\beta'_1+\gamma_3\gamma'_1 & \gamma_1\alpha'_2+\gamma_2\beta'_2+\gamma_3\gamma'_2 & \gamma_1\alpha'_3+\gamma_2\beta'_3+\gamma_3\gamma'_3 \end{vmatrix}$$

دترمینان‌هـای b و c، به ترتیب، با قرار دادن β'_1، β'_2، β'_3 و γ'_1، γ'_2، γ'_3 به جای سطر اول دترمینان a، به دست می‌آیند. اگر در دترمینـان a، سطر اول را در $-\beta_1$ (و یا $-\gamma_1$) ضرب و نتیجه را بـا سطر دوم (یا با سطر سوم) جمع کنیم، بنا به تعریف دترمینان مرتبهٔ سوم و با توجه به‌آن‌چه قبلاً در ۸°، برای دترمینان‌های مرتبهٔ دوم ثابت کردیم، داریم:

$$a=\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ \beta_2\beta'_1+\beta_3\gamma'_1 & \beta_2\beta'_2+\beta_3\gamma'_2 & \beta_2\beta'_3+\beta_3\gamma'_3 \\ \gamma_2\beta'_1+\gamma_3\gamma'_1 & \gamma_2\beta'_2+\gamma_3\gamma'_2 & \gamma_2\beta'_3+\gamma_3\gamma'_3 \end{vmatrix}$$

$$=\alpha'_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \beta'_2 & \beta'_3 \\ \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{vmatrix}-\alpha'_2\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \beta'_1 & \beta'_3 \\ \gamma'_1 & \gamma'_3 \end{vmatrix}+$$

$$+\alpha'_3\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\det S'$$

به همین ترتیب $b=-\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}\det S'$ و $c=\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}\det S'$. در نتیجه

$$\det(SS')=\left(\alpha_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}\right)\det S'=$$

$$=\det S\det S'$$

ویژگی ۸°، برای دترمینان‌های مرتبهٔ سوم هم ثابت شد. ■

مثال ۱۰۴۰۲. با استفاده از ویژگی ۶°، مقدار این دترمینان را پیدا کنید:

$$\Delta=\begin{vmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۲ & ۵ & ۸ \\ ۳ & ۶ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

حل. اگر دو برابر سطر اول را از سطر دوم کم کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$\Delta=\begin{vmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۰ & -۳ & -۶ \\ ۳ & ۶ & ۱۰ \end{vmatrix}$$

اکنون سه برابر سطر اول را ازسطر سوم کم می‌کنیم، به‌ترتیب داریم:

$$\Delta=\begin{vmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۰ & -۳ & -۶ \\ ۰ & -۶ & -۱۱ \end{vmatrix}=۱\times\begin{vmatrix} -۳ & -۶ \\ -۶ & -۱۱ \end{vmatrix}-$$

$$-۴\times\begin{vmatrix} ۰ & -۶ \\ ۰ & -۱۱ \end{vmatrix}+۷\times\begin{vmatrix} ۰ & -۳ \\ ۰ & -۶ \end{vmatrix}=-۳$$

اگر در محاسبهٔ اخیر، از ویژگی ۱° استفاده می‌کردیم، کار ساده‌تر می‌شد:

$$\Delta=\begin{vmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۰ & -۳ & -۶ \\ ۰ & -۶ & -۱۱ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & -۳ & -۶ \\ ۷ & -۶ & -۱۱ \end{vmatrix}=۱\times\begin{vmatrix} -۳ & -۶ \\ -۶ & -۱۱ \end{vmatrix}=-۳$$

مثال ۲۰۴۰۲. ثابت کنید، اگر همهٔ سطرها (یا ستون‌های) دترمینانی برابر صفر (یا بردار صفر) باشند، مقدار دترمینان برابر صفر (یا بردارصفر) است.

حل. مطلب روشن است: اگر سطر (یا ستون) صفر دترمینان را در صفر ضرب کنیم، از یک طرف مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند و، از طرف دیگر، مقدار دترمینان برابر صفر می‌شود (بنا بر ویژگی °۵ و °۷).

اگر $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$ و $\beta_۱$، $\beta_۲$، $\beta_۳$ عددهایی حقیقی باشند، آن‌گاه اتحاد زیر را، برای سه دترمینان خواهیم داشت:

$$(\alpha_۱^۲+\alpha_۲^۲+\alpha_۳^۲)(\beta_۱^۲+\beta_۲^۲+\beta_۳^۲)-(\alpha_۱\beta_۱+\alpha_۲\beta_۲+\alpha_۳\beta_۳)^۲=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}\alpha_۲ & \alpha_۳\\ \beta_۲ & \beta_۳\end{vmatrix}\right)^۲+\left(\begin{vmatrix}\alpha_۱ & \alpha_۳\\ \beta_۱ & \beta_۳\end{vmatrix}\right)^۲+\left(\begin{vmatrix}\alpha_۱ & \alpha_۲\\ \beta_۱ & \beta_۲\end{vmatrix}\right)^۲ \quad (۲.۱۱)$$

□ سمت راست برابری (۲.۱۱) چنین است:

$$(\alpha_۲\beta_۳-\alpha_۳\beta_۲)^۲+(\alpha_۱\beta_۳-\alpha_۳\beta_۱)^۲+(\alpha_۱\beta_۲-\alpha_۲\beta_۱)^۲=$$

$$=\alpha_۲^۲\beta_۳^۲+\alpha_۳^۲\beta_۲^۲+\alpha_۱^۲\beta_۳^۲+\alpha_۳^۲\beta_۱^۲+\alpha_۱^۲\beta_۲^۲+\alpha_۲^۲\beta_۱^۲-$$

$$-۲(\alpha_۲\beta_۳\alpha_۳\beta_۲+\alpha_۱\beta_۳\alpha_۳\beta_۱+\alpha_۱\beta_۲\alpha_۲\beta_۱)$$

و مقدار سمت چپ برابری (۲.۱۱):

$$\alpha_۱^۲\beta_۱^۲+\alpha_۲^۲\beta_۱^۲+\alpha_۳^۲\beta_۱^۲+\alpha_۱^۲\beta_۲^۲+\alpha_۲^۲\beta_۲^۲+\alpha_۳^۲\beta_۲^۲+\alpha_۱^۲\beta_۳^۲+$$

$$+\alpha_۲^۲\beta_۳^۲+\alpha_۳^۲\beta_۳^۲-(\alpha_۱^۲\beta_۱^۲+\alpha_۲^۲\beta_۲^۲+\alpha_۳^۲\beta_۳^۲+۲\alpha_۱\beta_۱\alpha_۲\beta_۲+$$

$$+۲\alpha_۱\beta_۱\alpha_۳\beta_۳+۲\alpha_۲\beta_۲\alpha_۳\beta_۳)=\alpha_۲^۲\beta_۳^۲+\alpha_۳^۲\beta_۲^۲+\alpha_۱^۲\beta_۳^۲+$$

$$+\alpha_۳^۲\beta_۱^۲+\alpha_۱^۲\beta_۲^۲+\alpha_۲^۲\beta_۱^۲-$$

$$-۲(\alpha_۲\beta_۳\alpha_۳\beta_۲+\alpha_۱\beta_۳\alpha_۳\beta_۱+\alpha_۱\beta_۲\alpha_۲\beta_۱)$$

دو طرف برابری (۲.۱۱) به یک نتیجه رسید. ■

پیش قضیهٔ زیر را برای سه دترمینان ثابت می‌کنیم. برابری‌های

$$\begin{vmatrix}\alpha_۲ & \alpha_۳\\ \beta_۲ & \beta_۳\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_۱ & \alpha_۳\\ \beta_۱ & \beta_۳\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_۱ & \alpha_۲\\ \beta_۱ & \beta_۲\end{vmatrix}=۰ \qquad (۲.۱۲)$$

وقتی و تنها وقتی برقرارند که، دو عدد λ و μ، که با هم برابر صفر نیستند،

بتوان پیدا کرد، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$\lambda\alpha_1+\mu\beta_1=0،\ \lambda\alpha_2+\mu\beta_2=0،\ \lambda\alpha_3+\mu\beta_3=0 \qquad (۲.۱۳)$$

در این جا، اگر $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2>0$، آن وقت $\mu\neq 0$، و اگر $\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2>0$، آن وقت $\lambda\neq 0$.

□ فرض کنید، رابطه‌های (۲.۱۳) برقرار باشند و، درضمن $\lambda\neq 0$. در این صورت

$$\alpha_1=-\nu\beta_1،\ \ \alpha_2=-\nu\beta_2،\ \ \alpha_3=-\nu\beta_3$$

که در آن $\nu=\frac{\mu}{\lambda}$؛ بنابراین

$$\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2=-\nu\beta_2\beta_3+\nu\beta_3\beta_2=0$$

و به همین ترتیب، تحقیق می‌شود:

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=0$$

برعکس، اگر برابری‌های (۲.۱۲) برقرار باشند، آن وقت، بنابر اتحاد (۲.۱۱) داریم: $AB-C^2=0$، که در آن

$$A=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\ ،\ \ B=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2،$$

$$C=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$$

حالت زیر ممکن است:

a) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ که، در این صورت، رابطه‌های (۲.۱۳)، برای $\lambda=1$ و $\mu=0$ برقرارند.

b) $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2>0$. این سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم را درنظر می‌گیریم:

$$p(t)=(t\alpha_1-\beta_1)^2+(t\alpha_2-\beta_2)^2+(t\alpha_3-\beta_3)^2=$$

$$=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)t^2-2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)t+$$

$$+(\beta_۱^۲+\beta_۲^۲+\beta_۳^۲)=At^۲-۲Ct+B=$$
$$=A\left(t-\frac{C}{A}\right)^۲+B-\frac{C^۲}{A}=A\left(t-\frac{C}{A}\right)^۲$$

سه جمله‌ای $p(t)$، به‌ازای $t=\frac{C}{A}$ بـرابـر صفـر می‌شود، یعنی رابطه‌هـای (۲.۱۳) $\lambda=\frac{C}{A}$ و $\mu=-۱$ برقرارند. ■

ویژگی‌های هم‌عامل‌ها (یا هم‌سازه‌ها)

زیر دترمینان یك عنصر، به دترمینانی گفته می‌شود که از حذف سطر و ستونی به دست آمده باشد که، این عنصر، در آن‌ها قـرار گرفته است. اگر زیر دترمینان یك‌عنصر را درنظربگیریم و، سپس، (-۱) را به‌توان مجموع شماره‌هـای سطر و ستون این عنصر برسانیم و نتیجه را در زیـر دترمینان ضرب کنیم، دترمینان حاصل را، زیـر دترمینان علامت دار یـا هم عامل آن عنصر گویند.

مثلاً، در دترمینان $\begin{vmatrix}\alpha_۱ & \alpha_۲ & \alpha_۳\\ \beta_۱ & \beta_۲ & \beta_۳\\ \gamma_۱ & \gamma_۲ & \gamma_۳\end{vmatrix}$، هم‌عامل عنصر $\beta_۳$ عبارت است‌از:

$$(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix}\alpha_۱ & \alpha_۲\\ \gamma_۱ & \gamma_۲\end{vmatrix}$$

زیرا $\beta_۳$ درسطر دوم و ستون سوم قرار دارد. فرض کنید:

$$S=\begin{pmatrix}\alpha_۱ & \alpha_۲ & \alpha_۳\\ \beta_۱ & \beta_۲ & \beta_۳\\ \gamma_۱ & \gamma_۲ & \gamma_۳\end{pmatrix} \qquad (۲.۱۴)$$

یك ماتریس دلخواه عـددی، و $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$، $C_۱$، $C_۲$، $C_۳$، به ترتیب، هم سازه‌های $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$، $\beta_۱$، $\beta_۲$، $\beta_۳$، $\gamma_۱$، $\gamma_۲$، $\gamma_۳$ در دترمینان $\det S$ باشند. ماتریس

$$S' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

را درنظر می‌گیریم که از ماتریس S، به طریق زیر به دست آمده است: به‌جای هرعنصر ماتریس S، هم سازهٔ همان عنصر را قرار می‌دهیم. سپس آن را برمی‌گردانیم (یعنی ترانهادهٔ آن را پیدا می‌کنیم: تعویض جای سطرها و ستون‌ها با یکدیگر). ثابت می‌کنیم:

$$SS' = S'S = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \qquad (\Delta = \det S)$$

با توجه به تعریف حاصل‌ضرب دو ماتریس، لازم و کافی است، درستی برابری‌های زیر را ثابت کنیم.

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \Delta, \ \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = 0,$$
$$\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 = 0; \qquad (2.16)$$

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 = 0, \ \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 = \Delta,$$
$$\gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3 = 0; \qquad (2.17)$$

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 = 0, \ \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3 = 0,$$
$$\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \gamma_3 C_3 = \Delta; \qquad (2.18)$$

$$\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1 = \Delta, \ \alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1 = 0,$$
$$\alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1 = 0; \qquad (2.19)$$

$$\alpha_1 A_2 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2 = 0, \ \alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2 + \gamma_2 C_2 = \Delta,$$
$$\alpha_3 A_2 + \beta_3 B_2 + \gamma_3 C_2 = 0; \qquad (2.20)$$

$$\alpha_1 A_3 + \beta_1 B_3 + \gamma_1 C_3 = 0, \ \alpha_2 A_3 + \beta_2 B_3 + \gamma_2 C_3 = 0,$$

$$\alpha_3 A_3+\beta_3 B_3+\gamma_3 C_3=\Delta \qquad (2.21)$$

□ همهٔ برابری‌های (۲.۱۶) تا (۲.۲۱) شبیه هم ثابت می‌شوند. برای نمونه، دو برابری اول (۲.۱۶) را ثابت می‌کنیم:

$$\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+\alpha_3 A_3=\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+$$

$$+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=\Delta,$$

$$\beta_1 A_1+\beta_2 A_2+\beta_3 A_3=\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=0$$

درستی بقیهٔ برابری‌ها هم، به همین ترتیب، ثابت می‌شود. ■

از گزارهٔ بالا، می‌توان نتیجه گرفت که، برای هر ماتریس عددی S (به صورت ۲.۱۴)، به شرطی که $\det S=\Delta$ مخالف صفر باشد، ماتریس معکوس S^{-1} وجود دارد و

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{A_1}{\Delta} & \frac{B_1}{\Delta} & \frac{C_1}{\Delta}\\ \frac{A_2}{\Delta} & \frac{B_2}{\Delta} & \frac{C_2}{\Delta}\\ \frac{A_3}{\Delta} & \frac{B_3}{\Delta} & \frac{C_3}{\Delta}\end{pmatrix},\quad \det S^{-1}=\frac{1}{\Delta}$$

در حالتی که با ماتریس مرتبهٔ دوم $S=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}$ سروکار داشته باشیم و، درضمن، شرط $\Delta=\det S=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$ برقرار باشد، S^{-1}، معکوس ماتریس S، چنین است:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{\beta_2}{\Delta} & -\frac{\alpha_2}{\Delta} \\ -\frac{\beta_1}{\Delta} & \frac{\alpha_1}{\Delta} \end{pmatrix},\ \det S^{-1}=\frac{1}{\Delta}$$

دستگاه معادله‌های خطی

دستگاه معادله‌های خطی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z=m,\ \beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z=n,$$

$$\gamma_1 x+\gamma_2 y+\gamma_3 z=p \qquad (2.22)$$

که در آن، α_1، α_2، α_3، β_1، β_2، β_3، γ_1، γ_2، γ_3 عدد، و m، n و p عدد یا بردارند. x، y و z متغیرند (عددند وقتی که m، n و p عدد باشند، و بردارند وقتی که m، n و p بردار باشند). ماتریس

$$S=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

را، ماتریس ضریب‌های دستگاه (۲.۲۲) گویند. S' را ماتریسی می‌گیریم که از هم‌سازه‌های عنصرهای ماتریس S به دست‌آمده باشد [(۲.۱۴) و (۲.۱۵) را ببینید]. فرض می‌کنیم: $\Delta=\det S$.

(x, y, z) را جواب دستگاه (۲.۲۲) فرض می‌کنیم. سپس، معادلهٔ اول دستگاه را در A_1، معادلهٔ دوم دستگاه را در B_1، معادلهٔ سوم دستگاه را در C_1 ضرب و، نتیجه‌های حاصل را باهم جمع می‌کنیم، باتوجه به (۲.۱۹) به دست می‌آید:

$$x\Delta=mA_1+nB_1+pC_1=\begin{vmatrix} m & \alpha_2 & \alpha_3 \\ n & \beta_2 & \beta_3 \\ p & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}=\Delta_x \qquad (2.23)$$

اکنون، اگرمعادله‌های دستگاه را، به‌ترتیب، در A_2، B_2 و C_2 ضرب

و، سپس، باهم جمع کنیم، با توجه به (۲۰۲۰) به دست می‌آید:

$$y\Delta = mA_2 + nB_2 + pC_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & m & \alpha_3 \\ \beta_1 & n & \beta_3 \\ \gamma_1 & p & \gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta_y \quad (2.24)$$

و به‌همین ترتیب:

$$z\Delta = mA_3 + nB_3 + pC_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & m \\ \beta_1 & \beta_2 & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & p \end{vmatrix} = \Delta_z \quad (2.25)$$

قضیهٔ ۲۰۴۰۱۰ (دستور کرامر). اگر Δ، دترمینان ماتریس ضریب‌های دستگاه معادله‌های (۲۰۲۲) مخالف صفر باشد، دستگاه دارای جواب (x, y, z) است که از دستورهای زیر به دست می‌آید:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad (2.26)$$

اثبات. منحصر به فرد بودن جواب، از این جا نتیجه می‌شود که: هر جواب (x, y, z) برای دستگاه معادله‌های (۲۰۲۲)، در برابری‌های (۲۰۲۳) تا (۲۰۲۵) صدق می‌کند و، بنابراین، به صورت (۲۰۲۶) است. اکنون، ثابت می‌کنیم، دستورهای (۲۰۲۶)، جواب دستگاه را به‌ما می‌دهد. مقدارهای x و y و z را، از دستورهای (۲۰۲۶)، در سمت چپ معادلهٔ اول دستگاه قرار می‌دهیم، با توجه به رابطه‌های (۲۰۱۶) تا (۲۰۱۸)، خواهیم داشت:

$$\alpha_1 \cdot \frac{\Delta_x}{\Delta} + \alpha_2 \cdot \frac{\Delta_y}{\Delta} + \alpha_3 \cdot \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_1 mA_1 + \alpha_1 nB_1 +$$

$$+ \alpha_1 pC_1 + \alpha_2 mA_2 + \alpha_2 nB_2 + \alpha_2 pC_2 + \alpha_3 mA_3 + \alpha_3 nB_3 +$$

$$+ \alpha_3 pC_3) = \frac{1}{\Delta}[(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)m +$$

$$+ (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3)n + (\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3)p] = m$$

به ایـن ترتیب، x، y و z، از دستورهـای (۲.۲۶)، در معادلهٔ اول دستگاه،صدق می کنند. به‌همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، این مقدارهای x، y و z، در معادله‌های دوم وسوم دستگاه هم صدق می کنند. پایان اثبات.

این قضیه به معنای آن است که، اگر m ، n و p (به کمك عنصرهای ماتریس S در (۲.۱۴) و دستورهای (۲.۲۲)) برحسب x، y و z داده شده باشند،آن وقت x، y و z هم (به کمك عنصرهای ماتریس S' در (۲.۱۵) و دستورهـای (۲.۲۶)) بر حسب m ، n و p قـابل بیان‌اند (به (۲.۲۳) تا (۲.۲۵) توجه کنید).

در حـالتی که داشته باشیم: $m=n=p=0$، دستگاه معادله‌هـای (۲.۲۲) راهمگن می گویند. دستگاه‌همگن، درحالت $\Delta\neq 0$، دارای‌جواب منحصر بـه فرد $x=y=z=0$ است،کـه به‌آن، جـواب بی‌مضمون هم می‌گویند. اگر یك دستگاه همگن، جواب دیگری مثل (x, y, z)، با شرط $x^2+y^2+z^2>0$ داشته باشد، این جواب را، جواب مضمون‌دار می‌نامند.

قضیهٔ ۲.۴.۲ (دربارهٔ جواب مضمون‌دار، برای دستگـاه معادله‌های همگن). دستگاه معادله‌های خطی

$$\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z=0,\ \ \beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z=0,$$

$$\gamma_1 x+\gamma_2 y+\gamma_3 z=0 \qquad (۲.۲۷)$$

تنها وقتی دارای جواب غیرصفر (جواب مضمون‌دار) است که داشته باشیم: $\Delta=0$.

اثبات. اگردستگاه معادله‌های (۲.۲۷)، دارای جواب غیرصفر باشد، آن وقت به نـاچار $\Delta=0$، زیرا در غیر این صورت، دستگاه معادله‌هـای (۲.۲۷)، دارای جواب منحصر به‌فرد بی‌مضمون خواهد بود (دستور کرامر).

اکنون، برعکس، فرض می کنیم $\Delta=0$. اگر A_1، A_2، A_3، B_1، B_2، B_3، C_1، C_2، C_3، به ترتیب، هم‌سازه‌های عنصرهای α_1، α_2، α_3، β_1، β_2، β_3، γ_1، γ_2، γ_3 از ماتریس S، مربوط به ضریب‌هـای دستگاه معادله‌های (۲.۲۷) باشند،آن وقت بنابر برابری‌های (۲.۱۶) تا (۲.۱۸)، سه‌تایی‌های

$$(A_1, A_2, A_3)، (B_1, B_2, B_3)، (C_1, C_2, C_3)$$

جواب‌های دستگاه (۲.۲۷) خواهند بود. اگر دست کم یکی از این جواب‌ها، مضمون‌دار باشد، قضیه ثابت شده است.

حالت $A_1 = A_2 = A_3 = B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$ را در نظر می‌گیریم. اگر همهٔ عنصرهای ماتریس S صفر باشند، دستگاه معادله‌های (۲.۲۷) جواب غیرصفر خواهد داشت (برای هر گروه از عددهای x، y و z برقرار است). اگر همهٔ عنصرهای ماتریس S، صفر نباشند، می‌توانیم، در صورت لزوم، معادله‌های دستگاه (۲.۲۷) را جابه‌جا کنیم و، بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، فرض کنیم: $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2>0$. چون

$$B_1 = -\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0، \quad B_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0،$$

$$B_3 = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

بنابراین، با توجه به قضیهٔ سه دترمینان، عدد $v \neq 0$ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $\gamma_1 = v\alpha_1$، $\gamma_2 = v\alpha_2$، $\gamma_3 = v\alpha_3$، یعنی معادلهٔ سوم دستگاه، از معادلهٔ اول و با ضرب دو طرف در v به دست آمده است. در نتیجه، معادلهٔ سوم، بیان دیگری از همان معادلهٔ اول است.

به همین ترتیب، از $C_1 = C_2 = C_3 = 0$، می‌توان نتیجه گرفت که، معادلهٔ دوم دستگاه (۲.۲۷) هم، بیان دیگری از همان معادلهٔ اول است. به این ترتیب، در حالت مورد بررسی ما، دستگاه معادله‌های (۲.۲۷) هم‌ارز با معادلهٔ اول دستگاه است (یا دقیق‌تر: هم‌ارز با یکی ازمعادله‌های دستگاه که همهٔ ضریب‌های آن صفر نباشند).

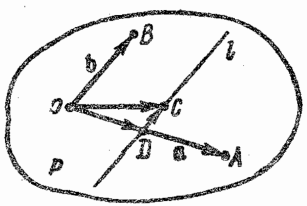
اکنون، تنها این می‌ماند که روشن شود، معادلهٔ

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$$

دارای جواب غیر صفر است. و این روشن است: اگر $0=\alpha_1$، آن وقت $(0, 0, 1)$ جوابی از معادله است؛ و اگر $\alpha_1\neq 0$، آن وقت جواب معادلهٔ مفروض، به صورت $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, -1, 0\right)$ است.

بخش ۵.۲. هم‌صفحه بودن بردارها. پایه در صفحه و فضا. تجزیهٔ (بسط) بردارها

a و **b** را دو بردار ناهم راستا می‌گیریم. $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ و $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$، هم‌سنگ‌های این دو بردار را از نقطهٔ O رسم می‌کنیم (شکل ۱۶.۲). صفحه‌ای را که از سه نقطهٔ O، A و B می‌گذرد، P می‌نامیم. بنا به تعریف، بردار **c** را با بردارهای **a** و **b** هم‌صفحه می‌گوییم، وقتی که با صفحهٔ P موازی باشد. اگر بردار $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ را رسم کنیم، نقطهٔ C، متعلق به صفحهٔ P خواهد بود. از نقطهٔ C، خط



شکل ۱۶.۲

راست l را موازی با خط راست (OB) رسم می‌کنیم؛ چون بردارهای **a** و **b** هم‌راستا نیستند، خط راست l، خط راست (OA) را در نقطه‌ای مثل D قطع می‌کند. بردارهای $\overrightarrow{OD}$ و $\overrightarrow{OA}$، دو بردار هم راستا هستند و $\overrightarrow{OA}\neq 0$. با توجه به معیار هم‌راستائی بردارها، عدد حقیقی x وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}$. به همین ترتیب، عدد حقیقی y وجود دارد، به نحوی که $\overrightarrow{DC}=y\overrightarrow{OB}$. بنابراین

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$$

یعنی

$$\mathbf{c}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b} \qquad (۲.۲۸)$$

هرزوج مرتب از بردارهای ناهم‌راستای $\mathbf{a}\|P$ و $\mathbf{b}\|P$ را، یک پایه در صفحهٔ P می‌نامند و می‌نویسند: $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}\}$. هر بردار $\mathbf{c}$ را، که با بردارهای پایهٔ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌صفحه باشد، می‌توان به صورت (۲.۲۸) نشان داد که، دراین صورت، عددهای x و y را، مختصات بردار $\mathbf{c}$ درپایهٔ $\{\mathbf{a}،\mathbf{b}\}$ گویند؛ درضمن، برابری (۲.۲۸)، معرف تجزیهٔ بردار $\mathbf{c}$ در رابطه با پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}\}$ است. این حقیقت را، که عددهای x و y، معرف مختصات بردار $\mathbf{c}$ در پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}\}$ هستند، به این صورت می‌نویسند: $\mathbf{c}=(x، y)$.

مثال ۱.۵.۲. ثابت کنید، تجزیهٔ بردار $\mathbf{c}$ در پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}\}$ منحصر به فرد است.

حل. $\mathbf{c}=x'\mathbf{a}+y'\mathbf{b}$ را تجزیهٔ بردار $\mathbf{c}$ در پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}\}$، متمایز از تجزیهٔ (۲.۲۸) فرض می‌کنیم. با توجه به ناهم‌راستائی بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، باید داشته باشیم (مثال ۴.۳.۲ را ببینید): $x=x'$ و $y=y'$ که فرض ما را، مبنی برمتمایز بودن x و x'، y و y' نقض می‌کند. تجزیهٔ $\mathbf{c}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$ منحصر به فرد است.

مثال ۲.۵.۲. (معیار هم صفحه بودن). $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ را سه برداری از فضا می‌گیریم که با رابطهٔ (۲.۲۸) به هم مربوط باشند (x و y، عددهایی حقیقی‌اند). ثابت کنید، بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه‌اند.

حل. اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا، یعنی با خط راست l موازی باشند، آن‌وقت، بردارهای $x\mathbf{a}$ و $y\mathbf{b}$، و همچنین مجموع آن‌ها یعنی بردار $\mathbf{c}$، باخط راست l موازی می‌شوند. بنابراین، بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، باهرصفحه‌ای که شامل l باشد، موازی‌اند.

اکنون، فرض می‌کنیم $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا نباشند، بردارهای $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ و $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ را، از نقطهٔ O رسم می‌کنیم (شکل ۱۶.۲) و صفحهٔ (OAB) را P می‌نامیم. نقطهٔ D را بر خط راست (OA) طوری درنظر می‌گیریم که داشته باشیم: $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}$ و از این نقطه، پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{DC}=y\overrightarrow{OB}$ را، که موازی با خط راست (OB) است، رسم می‌کنیم ($\overrightarrow{DC}$، با صفحهٔ P

هم‌موازی است). ابتدای این بردار، یعنی نقطهٔ D، بر صفحهٔ P قرار دارد، از این‌رو، نقطهٔ C، انتهای آن نیز بر صفحهٔ P واقع است. بنابراین، ابتدا و انتهای پاره‌خط راست جهت‌دار

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$$

متعلق به صفحهٔ P هستند. و این، به معنای آن است که بردار $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$، که به وسیلهٔ این پاره‌خط راست جهت‌دار نمایش داده شده است، یعنی بردار $\mathbf{c}$، با صفحهٔ P موازی است و، در نتیجه، بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه‌اند.

مثال ۳.۵.۲. بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه‌اند، ثابت کنید:

$$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=0 \iff x=y=z=0 \qquad (2.29)$$

حل. اگر دست‌کم یکی از عددهای x و y و z، و مثلاً z، در برابری $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=0$، مخالف صفر باشد، آن وقت، این برابری، با برابری

$$\mathbf{c}=x'\mathbf{a}+y'\mathbf{b}$$

هم‌ارز است که، در آن، $x'=-\frac{x}{z}$ و $y'=-\frac{y}{z}$. بنابرمعیار هم‌صفحه بودن (مسألهٔ قبل را ببینید)، بـاید بردار $\mathbf{c}$ با بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌صفحه باشد که فرض‌ما را نقض می‌کند. درنتیجه $x=y=z=0$. روشن است که برعکس، اگر داشته باشیم: $x=y=z=0$، آن وقت $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=0$.

مثال ۴.۵.۲. بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه نیستند. ثابت کنید برابری

$$m_1\mathbf{a}+n_1\mathbf{b}+k_1\mathbf{c}=m_2\mathbf{a}+n_2\mathbf{b}+k_2\mathbf{c} \qquad (2.30)$$

هم‌ارز است با دستگاه برابری‌های

$$m_1=m_2,\quad n_1=n_2,\quad k_1=k_2 \qquad (2.31)$$

حل. برای اثبات، کافی است برابری (۲.۳۰) را به‌صورت

$$(m_1-m_2)\mathbf{a}+(n_1-n_2)\mathbf{b}+(k_1-k_2)\mathbf{c}=0$$

بنویسیم و از نتیجهٔ مسألهٔ قبل استفاده کنیم.

مثال ۰۵۰۵۰۲ ثابت کنید، اگر بردارهای $\mathbf{a}\neq 0$ و $\mathbf{b}$ هم راستا باشند، آن‌گاه بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم صفحه‌اند ($\mathbf{c}$، برداری دلخواه است).

حل. اگر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ هم راستا باشند، آن وقت هر سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ با یك خط راست، و در نتیجه با صفحهٔ دلخواهی که از این خط راست بگذرد، موازی‌اند. اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ هم‌راستا نباشند، آن‌گاه درصفحهٔ P، یك‌پایه تشکیل می‌دهند و، بنابراین، عددی مانند k وجود دارد، به نحوی‌که داشته باشیم:

$$\mathbf{b}=k\mathbf{a}=k\mathbf{a}+0\cdot\mathbf{c}$$

و بنابراین، بنابرمعیار هم صفحه بودن (مثال ۲.۵.۲)، بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه‌اند (با صفحهٔ P موازی‌اند).

مثال ۰۶۰۵۰۲ ثابت کنید، اگر بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، هم صفحه نباشند:

a) هیچ کدام از آن‌ها، بردار صفر نیستند؛

b) بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم راستا نیستند.

حل. a) اگر مثلاً داشته باشیم: $\mathbf{a}=0$، آن وقت برابری

$$1\cdot\mathbf{a}+0\cdot\mathbf{b}+0\cdot\mathbf{c}=0$$

یك تناقض است (۲.۲۹).

b) اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم راستا باشند و $\mathbf{a}\neq 0$، آن‌وقت، هم‌صفحه نبودن بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ نقض می‌شود (نتیجهٔ مسألهٔ قبل)؛ و اگر $\mathbf{a}=0$، آن وقت به همان تناقضی می‌رسیم که در قسمت a) از همین مسأله، با آن مواجه شدیم.

مثال ۰۷۰۵۰۲ در هرم ناقص $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ با قاعده‌های شش‌ضلعی (شکل ۷.۲)، نقطه‌های O و O_1، مرکزهای دو قاعده‌اند. مطلوب است:

a) تجزیهٔ بردار $\overrightarrow{AD}$ در رابطه با پایهٔ $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\}$؛

b) تجزیهٔ بردار $\overrightarrow{OO_1}$ در رابطه با پایهٔ $\{\overrightarrow{EE_1}, \overrightarrow{BB_1}\}$.

حل. a) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}$.

b) نقطه‌های O و O_1، به ترتیب، وسط پاره خط‌های راست $[BE]$ و $[B_1E_1]$ هستند. بنابراین (مثال ۵.۲.۲ را ببینید):

$$2\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{EE_1}+\overrightarrow{BB_1}$$

یعنی

$$\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EE_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$$

مثال ۸.۵.۲. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$: $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{AD}$، $\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$، و E وسط ضلع $[CD]$. بردار $\overrightarrow{BE}$ را در رابطه با پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{c}\}$ تجزیه کنید. با سه روش مختلف، بردار $\overrightarrow{BE}$ را به صورت زیر نشان دهید:

$$\overrightarrow{BE}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c} \qquad (2.32)$$

حل. داریم: $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\mathbf{b}-\frac{1}{2}\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. پس

$$\overrightarrow{BE}=(\mathbf{c}-\mathbf{a})-\frac{1}{2}\mathbf{a}=-\frac{3}{2}\mathbf{a}+\mathbf{c}$$

بردار BE، به سادگی، با دو روش، به صورت (۲.۳۲) درمی‌آید:

$$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{2}\right)\mathbf{a}+1.\mathbf{b}+0.\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{3}{2}\right)\mathbf{a}+0.\mathbf{b}+1.\mathbf{c}$$

اگر t، عدد حقیقی دلخواهی باشد، آن وقت

$$t(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$$

از آن‌جا

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BE}+0=\left(-\frac{1}{2}\right)\mathbf{a}+\mathbf{b}+t(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c})=$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathbf{a}+(1+t)\,\mathbf{b}-t\mathbf{c}$$

که به ازای $t=0$ به همان نمایش اول $\overrightarrow{BE}$ و به ازای $t=-1$ به نمایش دوم آن می‌رسیم. به‌ازای $t=1$، نمایش زیر برای $\overrightarrow{BE}$ به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c}$$

بردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$، ...، $\mathbf{a}_n$ و عددهای حقیقی α_1، α_2، ...، α_n را درنظر می‌گیریم. بردار

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\cdots+\alpha_n\mathbf{a}_n$$

را، یك ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1$،...، $\mathbf{a}_n$ (با ضریب‌های α_1، ...، α_n) گویند. اگر داشته باشیم: $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$، ترکیب خطی را بی‌مضمون و، درغیراین‌صورت، مضمون‌دار می گویند. بیان بردار $\mathbf{a}$ به‌صورت یك ترکیب خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$، ...، $\mathbf{a}_n$ را، تجزیهٔ بردار $\mathbf{a}$ برحسب بردارهای $\mathbf{a}_1$، ...، $\mathbf{a}_n$ می‌نامند. ازحل مثال ۸.۵.۲ می‌توان نتیجه‌گرفت که، تجزیهٔ یك بردار، نسبت به سه بردار هم صفحه، منحصر به‌فرد نیست. درمثال ۲.۵.۲، روشن شد، اگر سه بردار هم صفحه نباشند، نمی‌توان یکی از آن‌ها را نسبت به دو بردار دیگر تجزیه کرد. بردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$، ...، $\mathbf{a}_n$ را مستقل خطی گویند، هرگاه

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n=0 \Longleftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0 \quad (2.33)$$

ازحل‌مثال‌های ۳.۳.۲ و ۳.۵.۲ می‌توان نتیجه‌گرفت: بردارهای هم راستای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مستقل خطی‌اند؛ همچنین، اگر بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم صفحه نباشند، مستقل خطی‌اند. بردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{a}_2$، ...، $\mathbf{a}_n$، وقتی‌دارای بستگی‌خطی‌هستند که مستقل خطی نباشند، یعنی عددهای α_1، α_2، ...، α_n وجود داشته باشند، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_n\mathbf{a}_n=0$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2>0 \quad (2.34)$$

مثال ۹.۵.۲. ثابت کنید:

a) دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بستگی خطی دارند، تنها اگر هم راستا باشند؛

b) سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بستگی خطی دارند، تنها اگر هم‌صفحه باشند.

حل. کافی است ثابت کنیم، بردارهای هم راستا (هم صفحه)، دارای بستگی خطی هستند.

a) فرض کنید $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$. اگر $\mathbf{a}=0$، آن‌گاه $1.\mathbf{a}+0.\mathbf{b}=0$، و هم‌راستائی بردارهای 0 و $\mathbf{b}$، متضمن وجود بستگی‌خطی بین آن‌هاست. اگر دو بردار $\mathbf{a}\neq 0$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا باشند، بنابرمعیار هم راستائی بردارها، عددی مانند k وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم: $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$، یعنی

$$1.\mathbf{b}+(-k)\mathbf{a}=0,\quad 1^2+(-k)^2>0$$

و وجود بستگی‌خطی بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ روشن می‌شود.

b) $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ را بردارهایی هم‌صفحه می گیریم. اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا باشند، همان‌طور که‌دیدیم، عددهای α و β وجود دارند، به‌نحوی که $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=0$ و $\alpha^2+\beta^2>0$. در این صورت، داریم:

$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+0.\mathbf{c}=0,\quad \alpha^2+\beta^2+0^2>0$$

یعنی، بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بستگی‌خطی دارند. اکنون فرض‌می کنیم، بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم راستا نباشند ($\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم صفحه‌اند). در این صورت، برای مقدارهایی از x و y داریم [(۲.۲۸) را ببینید]:

$$(-1)\mathbf{c}+x\mathbf{a}+y\mathbf{b}=0,\quad (-1)^2+x^2+y^2>0$$

یعنی $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ دارای بستگی خطی هستند.

یك پایه در فضا، به وسیلهٔ سه تایی مرتب از بردارهای غیر هم‌صفحهٔ $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ تعریف می‌شود. پایه‌ای که با سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ ساخته شده باشد، با نماد $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ نشان داده می‌شود.

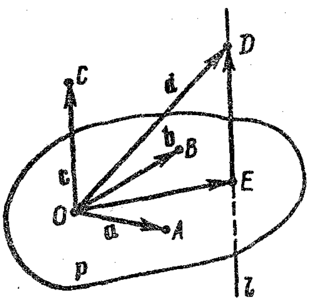
مثال ۱۰.۵.۲. (تجزیه نسبت به پایهٔ فضائی). $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ را یك پایهٔ فضائی و $\mathbf{d}$ را برداری دلخواه می گیریم. ثابت کنید، تجزیهٔ بردار $\mathbf{d}$ نسبت

به بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، منحصر به‌فرد است.

حل. از نقطهٔ O، بردارهایی هم‌سنگ بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ رسم می‌کنیم:

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}\ ,\ \overrightarrow{OB}=\mathbf{b}\ ,\ \overrightarrow{OC}=\mathbf{c}\ ,\ \overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$$

$\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا نیستند (مثال ۶.۵.۲ را ببینید)؛ صفحهٔ (OAB) را P می‌نامیم. از نقطهٔ D، خط راست l را، موازی (OC) رسم می‌کنیم (بردار $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}\neq 0$؛ مثال ۶.۵.۲ را ببینید؛ بنابراین، خط راست l، منحصر به فرد است). بردار $\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$، موازی با صفحهٔ P نیست، بنابراین، خط راست l در نقطه‌ای مثل E، از صفحهٔ P می‌گذرد (شکل ۱۷.۲). بردارهای $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{OC}\neq 0$ هم راستا هستند. بنابرمعیار هم‌راستائی، عددحقیقی z وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:



شکل ۱۷.۲

$$\overrightarrow{ED}=z\overrightarrow{OC}=z\mathbf{c}$$

پاره‌خط‌های راست جهت‌دار $\overrightarrow{OE}$، $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ هم صفحه‌اند؛ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}\}$، یك پایه درصفحهٔ P و، صفحهٔ P، شامل این پاره‌خط‌های راست است. درنتیجه، بردار $\overrightarrow{OE}$ نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}\}$، به صورت $\overrightarrow{OE}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$ تجزیه می‌شود. سرانجام، داریم:

$$\mathbf{d}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$$

منحصر به فرد بودن تجزیهٔ بردار $\mathbf{d}$ نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c}\}$، در مثال ۴.۵.۲ ثابت شده است. درواقع، اگر $\mathbf{d}=x'\mathbf{a}+y'\mathbf{b}+z'\mathbf{c}$ فرض کنیم، با توجه به این که بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم صفحه نیستند، نتیجه می‌شود: $x=x'$، $y=y'$ و $z=z'$.

ضریب‌های تجزیهٔ بردار $\mathbf{d}$ نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c}\}$ را، مختصات بردار $\mathbf{d}$ در پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c}\}$ گویند و به‌این‌صورت‌می‌نویسند: $\mathbf{d}=(x، y، z)$.

ویژگی‌های مختصات یك بردار. $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c}\}$ را یك پایه، $\mathbf{d}=(x، y، z)$ و $\mathbf{e}=(x'، y'، z')$ را دو بردار دلخواه و λ را عددی حقیقی می گیریم. در این صورت

1°. $\mathbf{d}=\mathbf{e}$ هم‌ارز است با: $x=x'$، $y=y'$، $z=z'$. دو بردار، تنها وقتی باهم برابرند که، مختصات آن‌ها، با هم برابر باشند.

2°. $\mathbf{d}+\mathbf{e}=(x+x'، y+y'، z+z')$. مختصات مجموع دو بردار، برابر است با مجموع مختصات متناظر آن‌ها.

3°. $\lambda\mathbf{d}=(\lambda x، \lambda y، \lambda z)$. اگر بردار را درعددی ضرب کنیم، مختصات بردار، در آن عدد ضرب می‌شود.

□ ویژگی 1° را درمثال ۴.۵.۲ ثابت کردیم. ویژگی‌های 2° و 3°، حالت‌های خاصی از ویژگی خطی مختصات، به صورت زیرند: برای هر دو عدد حقیقی α و β داریم:

$$\alpha\mathbf{d}+\beta\mathbf{e}=(\alpha x+\beta x'، \alpha y+\beta y'، \alpha z+\beta z')$$

درواقع داریم:

$$\alpha\mathbf{d}+\beta\mathbf{e}=\alpha(x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c})+\beta(x'\mathbf{a}+y'\mathbf{b}+z'\mathbf{c})=$$
$$=(\alpha x+\beta x')\,\mathbf{a}+(\alpha y+\beta y')\,\mathbf{b}+(\alpha z+\beta z')\,\mathbf{c}=$$
$$=(\alpha x+\beta x'، \alpha y+\beta y'، \alpha z+\beta z')$$

مختصات بردارها، درصفحه، ویژگی‌های‌مشابهی دارند. اگر $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}\}$ را پایه‌ای‌درصفحهٔ P، $\mathbf{d}=(x، y)$ و $\mathbf{e}=(x'، y')$ را بردارهای‌دلخواهی موازی صفحهٔ P، و α و β را عددهایی حقیقی فرض کنیم، آن وقت

1°. $\mathbf{d}=\mathbf{e} \Longleftrightarrow x=x'، y=y'$؛

2°. $\alpha\mathbf{d}+\beta\mathbf{e}=(\alpha x+\beta x'، \alpha y+\beta y')$.

مثال ۱۱.۵.۲. منشور $ABCA_1B_1C_1$، با قاعده‌های مثلثی مفروض

است (شکل ۶.۲). بردار $\overrightarrow{AA_1}$ را نسبت به پایهٔ $\{\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{BA_1}\}$ تجزیه کنید.

حل. داریم:

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}$$

از مجموع این برابری‌ها به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC_1}$$

چون $AB+BC+CA=0$ (دور $ABCA$) و $AA_1=BB_1=CC_1$، بنابراین

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1}$$

مثال ۱۲.۵.۲. در چهاروجهی $ABCD$، نقطه‌های K و L، به‌ترتیب، وسط یال‌های $[AC]$ و $[BD]$، و نقطهٔ O محل برخورد میانه‌های وجه ACD است (شکل ۱۸.۲):

a) بردار $\overrightarrow{BO}$ را نسبت به پایهٔ $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$ تجزیه کنید؛

b) بردار $\overrightarrow{KL}$ را، نسبت به هر یك از پایه‌های $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$، $\{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$ و $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}\}$ تجزیه کنید.

حل. a) داریم:

$$\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BD}$$

از مجموع این برابری‌ها، به دست می‌آید:

$$3\overrightarrow{BO}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$$

با توجه به حل مثال ۳.۲.۲ داریم: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=0$ و بنابراین

$$\overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$$

b) $\overrightarrow{AL}$، بردار میانهٔ مثلث ADB است، بنابراین

$$\overrightarrow{AL}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})$$

ازآن‌جا

$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC}=$$

$$=-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AD}$$

با روش دیگری هم می‌توان این تجزیه را پیدا کرد. با توجه به دستور میانه برای چهارضلعی فضائی (مثال ۵.۲.۲ را ببینید)، داریم:

$$\overrightarrow{KL}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})$$

و چون $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$، بنابراین:

$$\overrightarrow{KL}=-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AD}$$

$\overrightarrow{KL}$، بردار میانهٔ مثلث KDB است. در نتیجه

$$\overrightarrow{KL}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KB})$$

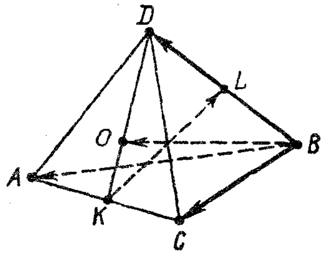
از طرف دیگر، $\overrightarrow{KO}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{OD}$ و $\overrightarrow{KD}=\frac{۳}{۲}\overrightarrow{OD}$؛ در نتیجه

$$\overrightarrow{KL}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KB})=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۳}{۲}\overrightarrow{OD}+(\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{OB})\right]=$$

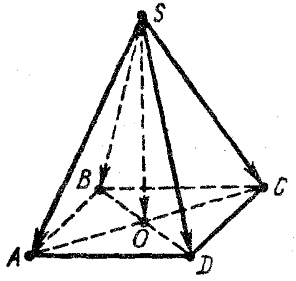
$$=\frac{۱}{۲}(۲\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB})=-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}+۰.\overrightarrow{AC}$$

سرانجام، همان‌طور که در بالا اشاره شد:

$$\overrightarrow{KL}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})=-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{DA}-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BC}+۰.\overrightarrow{BO}$$



شکل ۱۸.۲



شکل ۱۹.۲

مثال ۱۳.۵.۲. O را مرکز قاعدهٔ $ABCD$ از چهاروجهی منتظم $SABCD$ می‌گیریم. بردار $\overrightarrow{SO}$ را، نسبت به‌بردارهای $\overrightarrow{SA}$، $\overrightarrow{SB}$، $\overrightarrow{SC}$، $\overrightarrow{SD}$، به چند روش، تجزیه کنید.

حل. داریم (شکل ۱۹.۲):

$$\overrightarrow{SO}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}),\quad \overrightarrow{SO}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD})$$

که از مجموع آن‌ها، تجزیهٔ سوم به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{SO}=\frac{۱}{۴}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD})$$

مثال ۱۴.۵.۲. چند تجزیه از بردار $\overrightarrow{KL}$ را (مثال ۱۲.۵.۲ را ببینید)، نسبت به بردارهای OB، DB، CB، AB پیدا کنید.

حل. چون $\overrightarrow{KL}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AD}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}$، پس

$$\overrightarrow{KL}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB})=۰.\overrightarrow{OB}-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{DB}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{CB}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}$$

داریم: $\overrightarrow{KL}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ (مثال ۱۲.۵.۲ را ببینید)؛ و چون علاوه بر آن داریم: $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DB}$، به تجزیهٔ دوم می‌رسیم:

$$\overrightarrow{KL}=\frac{۳}{۲}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DB}+۰\cdot\overrightarrow{CB}+۰\cdot\overrightarrow{AB}$$

اکنون، اگر از برابری که در مثال ۱۲.۵.۲ به‌دست آوردیم، استفاده کنیم:

$$-\overrightarrow{OB}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{DB}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{CB}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{AB}=۰$$

آن وقت، برای هر $t\in R$ خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{KL}=\frac{۳}{۲}\overrightarrow{OB}+t\left(-\overrightarrow{OB}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{DB}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{CB}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{DB}=$$

$$=\left(\frac{۳}{۲}-t\right)\overrightarrow{OB}+\left(\frac{۱}{۳}t-۱\right)\overrightarrow{DB}+\frac{۱}{۳}t\overrightarrow{CB}+\frac{۱}{۳}t\overrightarrow{AB}$$

که به ازای $t=\frac{۳}{۲}$ و $t=۰$، به‌ترتیب، تجزیه‌های اول و دوم به‌دست می‌آید.

مثال ۱۵.۵.۲*. نقطهٔ K روی ضلع $[AB]$ از متوازی‌الاضلاع $ABCD$، و نقطهٔ L روی امتداد ضلع $[CD]$، از طرف D، قراردارند. خط‌های (KD) و (BL) در نقطهٔ N، و خط‌های راست (LA) و (CK) در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید پاره‌خط راست $[MN]$، با ضلع $[AD]$ موازی است.

حل. فرض می کنیم: $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$ و $\mathbf{d}=\overrightarrow{AD}$ (شکل ۲۰.۲). بردارهای $\overrightarrow{AK}$ و $AB\neq ۰$ هم‌راستا هستند. بنابراین، عدد $\lambda\in[۰،۱]$ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $\overrightarrow{AK}=\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda\mathbf{b}$ (λ، بستگی به جای نقطهٔ $K\in[AB]$ دارد). به همین ترتیب، با توجه به هم‌راستائی بردارهای $\overrightarrow{CL}$ و $\overrightarrow{CD}$، عدد $\mu>۱$ وجود دارد، به نحوی که $\overrightarrow{CL}=\mu\overrightarrow{CD}=-\mu\mathbf{b}$ (μ بستگی به‌جای نقطهٔ $L\in[CD]$ دارد). نقطهٔ N برخط راست (KD) واقع است.

بنابراین (با توجه به مثال ۶.۳.۲)، عدد τ (که فعلاً مجهول است) وجود دارد، به نحوی که

$$\overrightarrow{AN}=(1-\tau)\overrightarrow{AK}+\tau\overrightarrow{AD}=(\lambda-\lambda\tau)\mathbf{b}+\tau\mathbf{d}$$

نقطهٔ N، بر (BL) هم قرار دارد. بنابراین، عدد ξ (فعلاً مجهول) وجود دارد، به نحوی که

$$\overrightarrow{AN}=(1-\xi)\overrightarrow{AB}+\xi\overrightarrow{AL}=(1-\xi)\mathbf{b}+\xi(\mathbf{b}+\mathbf{d}-\mu\mathbf{b})=$$
$$=\xi\mathbf{d}+(1-\xi\mu)\mathbf{b}$$

به این ترتیب، به دو تجزیه از بردار $\overrightarrow{AN}$، نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ رسیدیم. با توجه به منحصر بودن تجزیهٔ یك بردار، نسبت به یك پایه، به دست می‌آید:

$$\lambda-\lambda\tau=1-\xi\mu,\quad \tau=\xi$$

و از آن‌جا

$$\tau=\xi=\frac{1-\lambda}{\mu-\lambda}$$

و بنابراین

$$\overrightarrow{AN}=\frac{\lambda(\mu-1)\mathbf{b}+(1-\lambda)\mathbf{d}}{\mu-\lambda}$$

بردار $\overrightarrow{AM}$ هم، به همین ترتیب، به دست می‌آید. چون $M\in(AL)$، عدد t وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{AM}=-t\overrightarrow{AL}=-t(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL})=-t[(1-\mu)\mathbf{b}+\mathbf{d}]$$

$M\in(KC)$، بنابراین

$$\overrightarrow{AM}=(1-\theta)\overrightarrow{AK}+\theta\overrightarrow{AC}=(1-\theta)\lambda\mathbf{b}+\theta(\mathbf{b}+\mathbf{d})=$$
$$=(\lambda+\theta-\lambda\theta)\mathbf{b}+\theta\mathbf{d},\quad (\theta\in R)$$

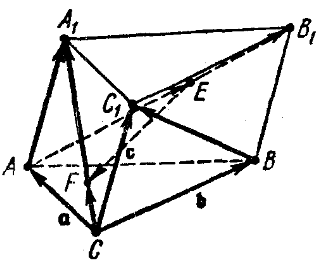
دو تجزیه‌ای را که برای $\overrightarrow{AM}$، نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{b}, \mathbf{d}\}$، به دست آمده است، باهم مقایسه می‌کنیم، به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$-t+t\mu=\lambda+\theta-\lambda\theta, \quad -t=\theta$$

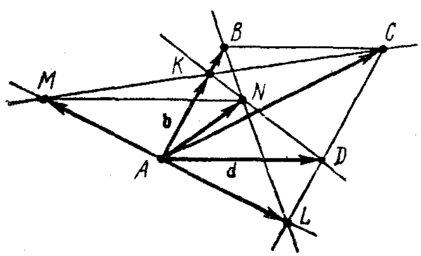
که از آن‌جا، به دست می‌آید: $t=-\theta=\dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$ و در نتیجه

$$\overrightarrow{AM}=-\frac{\lambda(1-\mu)\mathbf{b}+\lambda\mathbf{d}}{\mu-\lambda}, \quad \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{\mathbf{d}}{\mu-\lambda}$$

یعنی $\overrightarrow{MN}\|\mathbf{d}$ و بنابراین $(MN)\|(AD)$.



شکل ۲۱.۲



شکل ۲۰.۲

مثال ۱۶.۵.۲. نقطه‌های E و F، بر قطرهـای $[AB_1]$ و $[CA_1]$ از وجه‌های جانبی منشور $ABCA_1B_1C_1$ (با قاعده‌های مثلثی) قرار دارند، به نحوی که $(EF)\|(BC_1)$. نسبت $|EF|:|BC_1|$ را پیدا کنید.

حل. بردارهـای $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ و $\mathbf{c}=\overrightarrow{CC_1}$ هم‌صفحه نیستند. بردارها را، نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ تجزیه می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB_1}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

$$\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA_1}=\mathbf{a}+\mathbf{c}, \quad \overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=-\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

چون بردارهای $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AB_1}$ هم‌راستا هستند، عددی مانند μ وجود دارد، به نحوی که

$$\overrightarrow{AE}=u\overrightarrow{AB_1}=\mu(-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

به همین ترتیب، عدد ν وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم:

$$\overrightarrow{CF}=\nu\overrightarrow{CA_1}=\nu(\mathbf{a}+\mathbf{c})$$

بنا بر فرض $(EF)\|(BC_1)$؛ بنابراین، عدد λ وجود دارد، به نحوی که

$$\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{BC_1}=\lambda(-\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

دور $CAEFC$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۲۱۰۲). بنابر قانون دور داریم:

$$0=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{a}+\mu(-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})+\lambda(-\mathbf{b}+$$
$$+\mathbf{c})-\nu(\mathbf{a}+\mathbf{c})=(1-\mu-\nu)\mathbf{a}+(\mu-\lambda)\mathbf{b}+(\mu+\lambda-\nu)\mathbf{c}$$

بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه نیستند، بنابراین [(۲۰۲۹) را ببینید]

$$1-\mu-\nu=0,\ \mu-\lambda=0,\ \mu+\lambda-\nu=0$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $\lambda=\mu=\frac{1}{3}$، $\nu=\frac{2}{3}$ و در نتیجه

$$|EF|:|BC_1|=|\lambda|=\frac{1}{3}$$

تجزیه‌و تحلیل راه‌حل نشان می‌دهد که، درحل مسأله‌ها با روش برداری، رسم شکل، تنها برای درك بهتر شرط‌های مسألـه لازم است؛ همچنین، شکل را می‌توان به عنوان ابزاری به حساب آورد کـه به تنظیم مسأله، برحسب جبر برداری، کمك می‌کند. اگـر بتوان بعضی از شرط‌های مسأله را، بدون رسم شکل، از زبان هندسی به زبان تحلیلی ترجمه کرد، دیگر نیازی برای شرح هندسی این شرط‌هـا نداریم. مثلاً، در شکل ۲۱۰۲، خط‌های راست (EF) و (BC_1) غیر موازی نشان داده شده‌اند، ولی این وضع، اثری در حل مسأله ندارد، چرا که هم‌راستائی بردارهای $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BC_1}$، با روش کاملاً تحلیلی، به دست می‌آید. در این‌جا، بعد از آن‌که جواب مسأله مشخص شد، می‌توانیم شکل را هم، به‌طوردقیق رسم کنیم. ضمن حل مسأله، نه تنها مقدار

نسبت $|BC_1|:|EF|$ را پیدا کردیم، بلکه در ضمن، موقعیت نقطه‌های F و E را هم، روی پاره‌خط‌های راست متناظر خود به دست آوردیم:

$$|CF|=\frac{2}{3}|CA_1|,\quad |AE|=\frac{1}{3}|AB_1|$$

مثال ۱۷.۵.۲. نقطه‌های M، N و Q، به ترتیب، بر یال‌های $[AB]$، $[CD]$ و $[BC]$ از چهار وجهی $ABCD$ قرار دارند. صفحهٔ (MNQ)، خط راست (AD) را در نقطهٔ P قطع می‌کند. می‌دانیم:

$$|DN|=|CN|,\quad |AM|=|BM|,\quad |CQ|:|CB|=n$$

نسبت $|DP|:|DA|$ را پیدا کنید.

حل. پایهٔ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ را انتخاب می‌کنیم: $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$، $\mathbf{d}=\overrightarrow{CD}$ (شکل ۲۲.۲)؛ و بردارها را، نسبت به این پایه، تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\mathbf{d},\ \overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CQ}=-\frac{1}{2}\mathbf{d}+n\mathbf{b},\ AC=-\mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(1-n)\overrightarrow{BC}=$$

$$=\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})-(1-n)\mathbf{b}=-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\mathbf{b}$$

چون نقطهٔ P برخط راست (AD) واقع است، عدد λ وجود دارد، به‌نحوی که

$$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DA}=\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{d}),\ \overrightarrow{PA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DP}=(1-\lambda)(\mathbf{a}-\mathbf{d})$$

همچنین، نقطهٔ P، برصفحهٔ (MNQ) واقع است، بنابراین، بردارهای $\overrightarrow{NP}$، $\overrightarrow{NQ}$ و $\overrightarrow{MQ}$ هم‌صفحه‌اند. بردارهای $\overrightarrow{NQ}$ و $\overrightarrow{MQ}$ هم‌راستا نیستند و یك پایه را درصفحهٔ (MNQ) پدید می‌آورند. بردار $\overrightarrow{NP}$، نسبت به این پایه، با ضریب‌های مجهول μ و ν، تجزیه می‌شود:

$$\overrightarrow{NP}=\mu\overrightarrow{NQ}+\nu\overrightarrow{MQ}=\mu\left(-\frac{1}{2}\mathbf{d}+n\mathbf{b}\right)+$$

$$+\nu\left(-\frac{۱}{۲}\mathbf{a}+\left(n-\frac{۱}{۲}\right)\mathbf{b}\right)=-\frac{\nu}{۲}\mathbf{a}+$$

$$+\left(n(\mu+\nu)-\frac{\nu}{۲}\right)\mathbf{b}-\frac{\mu}{۲}\mathbf{d}$$

اکنون از قاعدهٔ دور استفاده می‌کنیم. در دور $CNPAC$ داریم:

$$۰=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}=\frac{۱}{۲}\mathbf{d}-\frac{\nu}{۲}\mathbf{a}+$$

$$+\left(n(\mu+\nu)-\frac{\nu}{۲}\right)\mathbf{b}-\frac{\mu}{۲}\mathbf{d}+(۱-\lambda)\,\mathbf{a}-(۱-\lambda)\,\mathbf{d}-\mathbf{a}$$

بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{d}$ هم صفحه نیستند. بنابراین

$$-\frac{\nu}{۲}+(۱-\lambda)-۱=۰ \text{،}\ n(\mu+\nu)-\frac{\nu}{۲}=۰ \text{،}$$

$$\frac{۱}{۲}-\frac{\mu}{۲}-(۱-\lambda)=۰$$

از آن‌جا

$$\nu=-۲\lambda \text{ ،}\ \mu=\frac{\nu}{۲n}-\nu=۲\lambda-\frac{\lambda}{n}\text{ ،}$$

$$\frac{۱}{۲}-\lambda+\frac{\lambda}{۲n}-۱+\lambda=۰$$

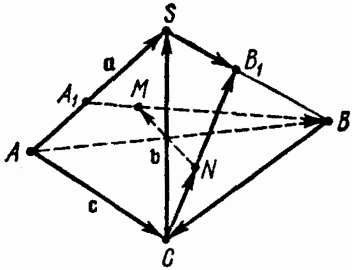
یعنی $\lambda=n$ و، سرانجام، به دست می‌آید:

$$|DP|:|DA|=|\lambda|=n$$

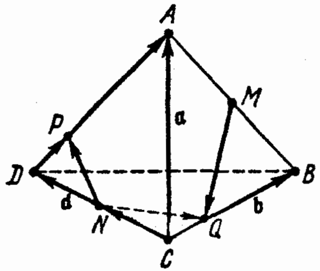
مثال ۲۰۵۰۱۸۰ نقطه‌هـای $A_۱$ و $B_۱$، به‌ترتیب، بر یال‌هـای $[SA]$ و $[SB]$ از چهاروجهی $SABC$ انتخاب شده‌اند و می‌دانیم:

$$|SA_۱|:|SA|=n \text{ ،}\ \ |SB_۱|:|SB|=m$$

نقطه‌هـای M و N، به ترتیب، بر پاره خط‌هـای راست $[A_۱B]$ و $[CB_۱]$



شکل ۲۳.۲



شکل ۲۲.۲

واقع‌اند و درضمن داریم: $|CN|:|CB_1|=p$ و پاره خط راست $[MN]$، با صفحهٔ (ASC) موازی است. نسبت $|BM|:|BA_1|$ را پیدا کنید.

حل. بردارهای $\mathbf{a}=\overrightarrow{AS}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$ و $\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$، یك پایه را می‌سازند (شکل ۲۳.۲). نسبت به این پایه داریم:

$$\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{CS}+m\overrightarrow{SB}=m\overrightarrow{CB}+(1-m)\overrightarrow{CS}=m(\mathbf{b}-\mathbf{c})+$$
$$+(1-m)(\mathbf{a}-\mathbf{c})=(1-m)\,\mathbf{a}+m\mathbf{b}-\mathbf{c}$$

[(۲.۵) را ببینید]. بنابراین

$$\overrightarrow{CN}=p\overrightarrow{CB_1}=p(1-m)\,\mathbf{a}+pm\mathbf{b}-p\mathbf{c}$$

بردار $\overrightarrow{NM}$ با صفحهٔ (ASC) موازی است و، درنتیجه، نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ قابل تجزیه است: $\overrightarrow{NM}=y\mathbf{a}+z\mathbf{c}$ (عددهای مجهول y و z را باید پیدا کنیم). به جز آن

$$\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}=-\mathbf{b}+(1-n)\,\mathbf{a}$$

بردارهای $\overrightarrow{BA_1}$ و $\overrightarrow{MB}$، دو جهت مختلف دارند، بنابراین عدد $x<0$ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{MB}=x\overrightarrow{BA_1}=-x\mathbf{b}+x(1-n)\,\mathbf{a}$$

سرانجام $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$. با توجه به دور $CNMBC$ داریم:

$$\circ=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}=p(۱-m)\mathbf{a}+pm\mathbf{b}-p\mathbf{c}+$$
$$+y\mathbf{a}+z\mathbf{c}-x\mathbf{b}+x(۱-n)\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}$$

که اگر آن را مرتب کنیم، به دست می‌آید:

$$[p(۱-m)+y+x(۱-n)]\mathbf{a}+(pm-x-۱)\mathbf{b}+$$
$$+(-p+z+۱)\mathbf{c}=\circ$$

به این ترتیب، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$p(۱-m)+y+x(۱-n)=\circ,\ pm-x-۱=\circ,$$
$$-p+z+۱=\circ$$

از معادلهٔ دوم این دستگاه به‌دست می‌آید: $x=pm-۱$؛ و درنتیجه

$$|BM|:|BA_۱|=|x|=|pm-۱|=۱-pm$$

مثال ۱۹.۵.۴. (شرط هم راستائی برای بردارها). $\{\mathbf{e}_۱,\mathbf{e}_۲,\mathbf{e}_۳\}$ را یك پایهٔ فضایی می‌گیریم. مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این‌که بردارهای

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{e}_۱+a_y\mathbf{e}_۲+a_z\mathbf{e}_۳,\ \mathbf{b}=b_x\mathbf{e}_۱+b_y\mathbf{e}_۲+b_z\mathbf{e}_۳$$

هم راستا باشند.

حل. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ تنها وقتی هم‌راستا هستند که بستگی خطی داشته باشند (مثال ۹.۵.۲ را ببینید)، یعنی وقتی که عددهای μ و λ (که باهم صفر نیستند) وجود داشته باشند، به‌نحوی که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}=\circ$$

بنابر ویژگی خطی مختصات، این برابری با دستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\lambda a_x+\mu b_x=\circ,\ \lambda a_y+\mu b_y=\circ,\ \lambda a_z+\mu b_z=\circ$$

که به معنای متناسب‌بودن مختصات هم‌نام دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دارد. بنابر پیش

قضیهٔ سه دترمینان [(۲.۱۲) و (۲.۱۳) را ببینید]، دستگاه معادله‌های بالا، تنها وقتی برقرارند که داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (۲.۳۵)$$

مثال ۲۰.۵.۲. (شرط هم صفحه بودن). $\{e_1, e_2, e_3\}$ را یك پایهٔ فضائی فرض می‌کنیم. ثابت کنید، بردارهای

$$\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z),\ \mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z),\ \mathbf{c}=(c_x, c_y, c_z)$$

تنها وقتی هم‌صفحه‌اند که داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (۲.۳۶)$$

حل. بردارهای

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{e}_1+a_y\mathbf{e}_2+a_z\mathbf{e}_3,\ \mathbf{b}=b_x\mathbf{e}_1+b_y\mathbf{e}_2+b_z\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{c}=c_x\mathbf{e}_1+c_y\mathbf{e}_2+c_z\mathbf{e}_3$$

وقتی هم‌صفحه‌اند که دارای بستگی خطی باشند (مثال ۹.۵.۲ را ببینید). بنابراین، عددهای x ، y و z، که با هم صفر نیستند $(x^2+y^2+z^2>0)$ وجود دارند، به‌نحوی که برابری

$$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}=0$$

برقرار باشد؛ یعنی

$$(a_xx+b_xy+c_xz)\mathbf{e}_1+(a_yx+b_yy+c_yz)\mathbf{e}_2+$$
$$+(a_zx+b_zy+c_zz)\mathbf{e}_3=0$$

چون $\{e_1, e_2, e_3\}$ یك پایه است، (x, y, z) جواب غیر صفر دستگاه زیر است:

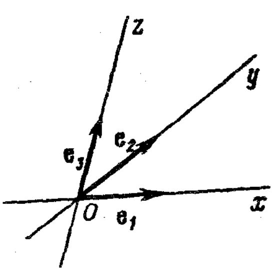
$$a_xx+b_xy+c_xz=0,\ a_yx+b_yy+c_yz=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0 \qquad (۲.۳۷)$$

ومی‌دانیم (قضیهٔ ۲ را درهمین فصل ببینید)، این دستگاه همگن، وقتی جواب غیرصفر داردکه برابری (۲.۳۶) برقرار باشد.

بخش ۲.۶. دستگاه مختصات. مختصات نقطه در دستگاه مختصات. دستورهای انتقال از یك دستگاه، به دستگاه دیگر مختصات

اگر قطب O و پایهٔ $\{e_1, e_2, e_3\}$ را درفضا تثبیت کرده‌باشیم، گوییم: دستگـاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ در فضا مشخص شده است. نقطهٔ O را، مبداء مختصات، یا به‌طور ساده مبداء گویند. خط‌های راستی کـه از مبداء موازی بردارهای e_1، e_2 و e_3 رسم شده باشند، محورهای مختصات نامیده می‌شوندکه، آن‌ها را، به‌ترتیب، با Ox (محور xها یا محور طول‌ها)، Oy (محور yها یا محور عرض‌ها) و Oz (محور zها) نشان می‌دهند. صفحه‌ای را کـه از محورهـای x و y گذشته باشد، صفحهٔ xy (یا صفحهٔ مختصات Oxy) گویند. به همین ترتیب، صفحه‌هـای مختصات Oyz و Oxz مشخص می‌شوند (شکل ۲۴.۲). اگـر M نقطهٔ دلخواهی ازفضا باشد، آن‌وقت، مختصات (x, y, z) این نقطهٔ در دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2, e_3\}$؛ به عنوان ضریب‌های تجزیهٔ شعاع حامل $\overrightarrow{OM}$ نقطهٔ M، نسبت به پایهٔ $\{e_1, e_2, e_3\}$ مشخص می‌شود، یعنی:



شکل ۲۴.۲

$$\overrightarrow{OM}=xe_1+ye_2+ze_3$$

اگر مفهوم دستگاه مختصات روشن باشد، می‌توانیم به طور ساده، دربارهٔ مختصات

نقطهٔ M صحبت کنیم. اگر $(x، y، z)$ مختصات نقطـهٔ M باشد، آن را به‌صورت $M(x، y، z)$ می‌نویسند. ازآن‌جاکه هر بردار $\overrightarrow{OM}$ را می‌توان، نسبت به پایهٔ $\{e_1، e_2، e_3\}$ تجزیه‌کرد، بنابراین، هرنقطهٔ M، در دستگاه مفروض $\{O، e_1، e_2، e_3\}$ دارای مختصاتی است. بنابر ویژگی ۱۰ دربارهٔ مختصات یک‌بردار، نقطهٔ M، به‌وسیلهٔ مختصات خود، کاملاً مشخص می‌شود: دونقطهٔ $M(x، y، z)$ و $M_1(x_1، y_1، z_1)$ وقتی، وتنهاوقتی، برهم منطبق‌اند که داشته باشیم: $x=x_1$، $y=y_1$، $z=z_1$. اگر نقطه‌های $A(x_1، y_1، z_1)$ و $B(x_2، y_2، z_2)$ بـه‌وسیلـهٔ مختصـات خـود، در دستگـاه مختصـات $\{O، e_1، e_2، e_3\}$ مشخص باشند، آن‌گاه در پایهٔ $\{e_1، e_2، e_3\}$ خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{OA}=(x_1، y_1، z_1)\ ،\ \overrightarrow{OB}=(x_2، y_2، z_2)$$

همچنین، بنابر ویژگی خطی مختصات بردار

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1، y_2-y_1، z_2-z_1)$$

یعنی، مختصات بردار AB، نسبت به پایهٔ $\{e_1، e_2، e_3\}$، ازتفاضل مختصات هم‌نام نقطهٔ انتهائی B و نقطهٔ ابتدائی A، در دستگاه مختصات $\{O، e_1، e_2، e_3\}$ به‌دست می‌آید (O، نقطهٔ دلخواهی از فضاست).

مثال ۲.۶.۱۰ با توجه به شرط‌های مثال ۲.۵.۱۲، مطلوب است:

a) مختصات نقطهٔ O در دستگاه مختصات $\{B، \overrightarrow{BA}، \overrightarrow{BC}، \overrightarrow{BD}\}$؛

b) مختصات نقطهٔ L در دستگاه مختصات $\{A، \overrightarrow{BO}، \overrightarrow{OD}، \overrightarrow{AC}\}$.

حل. a) چون $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$، بنابراین

$$O\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

b) داریم:

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}، \overrightarrow{KD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OD}، \overrightarrow{DL}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD})$$

از آن‌جا

$$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DL}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC}+\frac{۳}{۲}\overrightarrow{OD}-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BO}-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{OD}=$$

$$=-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC}$$

یعنی $L\left(\frac{۱}{۲}، ۱، -\frac{۱}{۲}\right)$.

مثال ۲.۶.۲. منشور $ABCA_۱B_۱C_۱$، بـا قاعده‌هـای مثلثی، مفروض است. مختصات نقطهٔ $A_۱$ را در دستگاه $\{B_۱، AC_۱، CB_۱، BA_۱\}$ پیدا کنید.

حل. داریم:

$$\overrightarrow{B_۱A_۱}=\overrightarrow{B_۱B}+\overrightarrow{BA_۱}=-\overrightarrow{AA_۱}+\overrightarrow{BA_۱}$$

و در مثال ۱۱.۵.۲ ثابت کردیم:

$$\overrightarrow{AA_۱}=\frac{۱}{۳}\overrightarrow{AC_۱}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{CB_۱}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{BA_۱}$$

از آن‌جا

$$\overrightarrow{B_۱A_۱}=-\frac{۱}{۳}\overrightarrow{AC_۱}-\frac{۱}{۳}\overrightarrow{CB_۱}-\frac{۱}{۳}\overrightarrow{BA_۱}+\overrightarrow{BA_۱}=$$

$$=-\frac{۱}{۳}\overrightarrow{AC_۱}-\frac{۱}{۳}\overrightarrow{CB_۱}+\frac{۲}{۳}\overrightarrow{BA_۱}$$

در نتیجه: $A_۱\left(\frac{۲}{۳}، -\frac{۱}{۳}، -\frac{۱}{۳}\right)$.

مثال ۳.۶.۲. در دستگـاه مختصـات $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲، \mathbf{e}_۳\}$، مختصات سه رأس از متوازی‌الاضلاع $ABCD$، چنین‌اند:

$$A(۰، ۱، -۱)، B(۱، ۰، ۲)، C(۲، ۳، ۰)$$

مختصات رأس D را پیدا کنید.

حل. $D(x_D، y_D، z_D)$ می‌گیریم. در پایهٔ $\{\mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲، \mathbf{e}_۳\}$ داریم:

$$\overrightarrow{BC}=(۱، ۳، -۲)، \quad \overrightarrow{AD}=(x_D، y_D-۱، z_D+۱)$$

از طرف دیگر، بردارهای $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}$، به عنوان ضلع‌های رو به رو در متوازی‌الاضلاع، با هم برابرند، بنابراین:

$$۱=x_D، \quad ۳=y_D-۱، \quad -۲=z_D+۱$$

از آن‌جا: $x_D=۱$، $y_D=۴$، $z_D=-۳$.

مثال ۴.۶.۴. در دستگاه مختصات $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲، \mathbf{e}_۳\}$ داریم:

$$A(۱، ۰، -۲)، \quad B(-۳، ۴، ۲)، \quad C(۰، ۱، ۳)، \quad D(۲، -۱، ۱)$$

ثابت کنید، نقطه‌های A، B، C و D، روی یک صفحه‌اند. همچنین، ثابت کنید، بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ هم‌راستا و در دو جهت مختلف‌اند، و بردارهای $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}$ هم‌راستا نیستند.

حل. در پایهٔ $\{\mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲، \mathbf{e}_۳\}$ داریم:

$$\overrightarrow{AB}=(-۴، ۴، ۴)، \quad \overrightarrow{AC}=(-۱، ۱، ۵)، \quad \overrightarrow{AD}=(۱، -۱، ۳)$$

نقطه‌های A، B، C و D، تنها وقتی در یک صفحه واقع‌اند که، بردارهای $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$، هم‌صفحه باشند. برای اثبات هم صفحه بودن این بردارها، کافی است تحقیق کنیم که دترمینان

$$\Delta=\begin{vmatrix} -۴ & ۴ & ۴ \\ -۱ & ۱ & ۵ \\ ۱ & -۱ & ۳ \end{vmatrix}$$

[(۲.۳۶) را ببینید]، برابر با صفر است. داریم:

$$\Delta=(-۴)\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix}-۴\begin{vmatrix} -۱ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}+۴\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}=$$

$$=(-۴)۸-۴(-۸)+۴.۰=۰$$

به این ترتیب، نقطه‌های A، B، C و D بر یک صفحه‌اند و به‌جز آن

$$\overrightarrow{CD}=(۲، -۲، -۲)، \quad \overrightarrow{AB}=(-۴، ۴، ۴)$$

بنا بر ویژگی خطی مختصات بردارها، $\overrightarrow{AB}=-۲\overrightarrow{CD}$، یعنی

$$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}\ ,\ \overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$$

(قانون سوم ضرب بردار دریك عدد). سرانجام داریم:

$$\overrightarrow{BC}=(۳,\ -۳,\ ۱),\ \ \overrightarrow{AD}=(۱,\ -۱,\ ۳)$$

از آن‌جاکه

$$\begin{vmatrix} ۳ & -۳ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}=۰,\ -\begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}\neq ۰,\begin{vmatrix} -۳ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix}\neq ۰$$

با توجه بـه شرط خطی بودن (مثال ۱۹.۵.۲ را ببینید)، روشن می‌شود کـه دو بردار $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}$ هم‌راستا نیستند.

مثال ۵.۶.۲. در دستگاه مختصات $\{O, \mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۲, \mathbf{e}_۳\}$ داریم:

$$A(x_A, y_A, z_A),\ \ B(x_B, y_B, z_B),\ \ C(x_C, y_C, z_C)$$

مختصات نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC را پیدا کنید.

حل. اگر K، نقطهٔ وسط $[BC]$ باشد، داریم:

$$\overrightarrow{AK}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{۱}{۲}[(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})]=$$

$$=-\overrightarrow{OA}+\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

اگر $N(x_N, y_N, z_N)$، نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد، آن وقت

$$\overrightarrow{AN}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{AK}=-\frac{۲}{۳}\overrightarrow{OA}+\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

که اگر شعاع‌های حامل بردارهای $\overrightarrow{ON}$، $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ را، نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۲, \mathbf{e}_۳\}$ قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$x_N\mathbf{e}_1+y_N\mathbf{e}_2+z_N\mathbf{e}_3=\frac{1}{3}[(x_A\mathbf{e}_1+y_A\mathbf{e}_2+z_A\mathbf{e}_3)+$$

$$+(x_B\mathbf{e}_1+y_B\mathbf{e}_2+z_B\mathbf{e}_3)+(x_C\mathbf{e}_1+y_C\mathbf{e}_2+z_C\mathbf{e}_3)=$$

$$=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)\mathbf{e}_1+\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)\mathbf{e}_2+\frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C)\mathbf{e}_3$$

بنابراین، با توجه به منحصر به فرد بودن تجزیه نسبت به یك پایه، خواهیم داشت:

$$x_N=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C),\quad y_N=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C),$$

$$z_N=\frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C) \qquad (2.38)$$

یعنی، مختصات نقطهٔ برخورد سه میانه (مرکزثقل مثلث)، برابراست با واسطهٔ حسابی مختصات سه رأس.

انتقال دستگاه مختصات

دستگاه مختصات فضائی $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ را مفروض می گیریم وآن را،دستگاه«قدیم» می‌نامیم. به‌جز آن، دستگاه‌مختصات دیگر $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ را، نسبت به پایهٔ دستگاه قدیم در نظر می گیریم و آن را دستگاه جدید می‌نامیم. فرض کنید، تجزیه‌های

$$\mathbf{e}'_1=a_{11}\mathbf{e}_1+a_{12}\mathbf{e}_2+a_{13}\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{e}'_2=a_{21}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+a_{23}\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}'_3=a_{31}\mathbf{e}_1+a_{32}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3 \qquad (2.39)$$

معرف بردارهای پایهٔ جدید، نسبت به پایهٔ قدیم باشند، و برای مختصات (α, β, γ) از نقطهٔ O' (مبداء دستگاه جدید) در دستگاه قدیم داشته باشیم:

$$\overrightarrow{OO'}=\alpha\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_2+\gamma\mathbf{e}_3 \qquad (2.40)$$

نقطهٔ دلخواه M را درنظر می گیریم و، مختصات آن را، به ترتیب در

دستگاه‌های مختصات قدیم وجدید $(x، y، z)$ و $(x'، y'، z')$ فرض می‌کنیم:

$$(۲.۴۱)\qquad \overrightarrow{OM}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3،\quad \overrightarrow{O'M}=x'\mathbf{e}'_1+y'\mathbf{e}'_2+z'\mathbf{e}'_3$$

دستورهایی که مختصات $(x، y، z)$ نقطهٔ M در دستگاه قدیم را، برحسب مختصات $(x'، y'، z')$ این نقطه در دستگاه جدید، بیان کنند، دستورهای انتقال دستگاه قدیم به دستگاه جدید نامیده می‌شود. این دستورها را پیدا می‌کنیم.

از برابری روشن $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$، با توجه به رابطه‌های (۲.۳۹) تا (۲.۴۱) به دست می‌آید:

$$x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3=\alpha\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_2+\gamma\mathbf{e}_3+x'(a_{11}\mathbf{e}_1+a_{12}\mathbf{e}_2+$$
$$+a_{13}\mathbf{e}_3)+y'(a_{21}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+a_{23}\mathbf{e}_3)+z'(a_{31}\mathbf{e}_1+a_{32}\mathbf{e}_2+$$
$$+a_{33}\mathbf{e}_3)=(a_{11}x'+a_{21}y'+a_{31}z'+\alpha)\mathbf{e}_1+(a_{12}x'+a_{22}y'+$$
$$+a_{32}z'+\beta)\mathbf{e}_2+(a_{13}x'+a_{23}y'+a_{33}z'+\gamma)\mathbf{e}_3$$

به این ترتیب، در پایهٔ $\{\mathbf{e}_1، \mathbf{e}_2، \mathbf{e}_3\}$، دو تجزیه برای بردار $\overrightarrow{OM}$ به دست آوردیم. با توجه به منحصر بودن تجزیهٔ بردار، نسبت به یك پایهٔ فضائی، باید ضریب‌های متناظر در این دو تجزیه، برهم منطبق باشند:

$$(۲.۴۲)\qquad \begin{aligned} x&=a_{11}x'+a_{21}y'+a_{31}z'+\alpha\\ y&=a_{12}x'+a_{22}y'+a_{32}z'+\beta\\ z&=a_{13}x'+a_{23}y'+a_{33}z'+\gamma\end{aligned}$$

که همان دستورهای انتقال ازیك دستگاه مختصات قدیم، به‌دستگاه جدیدند. در این دستورها، ضریب‌های x'، مختصات بردار $\mathbf{e}'_1$ در دستگاه قدیم [با (۲.۳۹) مقایسه‌کنید] و ضریب‌های y' و z'، به ترتیب، مختصات بردارهای $\mathbf{e}'_2$ و $\mathbf{e}'_3$ در دستگاه قدیم‌اند. جمله‌های آخر در دستورهای (۲.۴۲)، معرف مختصات مبداء جدید O' در دستگاه مختصات قدیم‌اند.

ماتریس

$$S=\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۲۱} & a_{۳۱} \\ a_{۱۲} & a_{۲۲} & a_{۳۲} \\ a_{۱۳} & a_{۲۳} & a_{۳۳} \end{pmatrix}$$

که از ضریب‌های x'، y' و z' در دستورهای (۲.۴۲) تشکیل شده است، معرف انتقال دستگاه قدیم به دستگاه جدید، یا ماتریس انتقال از پایهٔ قدیم به پایهٔ جدید است و ماتریس انتقال نام دارد.

ویژگی‌های ماتریس انتقال S

۱°. $\det S\neq ۰$.

□ بردارهای $\mathbf{e}'_۱$، $\mathbf{e}'_۲$ و $\mathbf{e}'_۳$ [(۲.۳۹) را ببینید]، هم صفحه نیستند و بنابراین (مثال ۲۰.۵.۲ را ببینید)، دترمینان

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

مخالف صفر است. ولی این دترمینان، برابر با $\det S^T$ است و چون

$$\det S=\det S^T$$ (ویژگی ۱° در دترمینان‌ها)

بنابراین $\det S=\Delta\neq ۰$. ■

۲°. اگر بردارهای پایهٔ قدیم و جدید برهم منطبق باشند، آن وقت S، ماتریس واحد است و $\det S=۱$. دراین حالت، انتقال ازدستگاه‌مختصات قدیم به دستگاه مختصات جدید را، انتقال مبداء گویند. دستورهای انتقال مبداء چنین است:

$$x=x'+\alpha،\ \ y=y'+\beta،\ \ z=z'+\gamma$$

۳°. ماتریس S'، معرف انتقال از دستگاه جدید به دستگاه قدیم، معکوس ماتریس S است:

$$S'=S^{-1},\ \det S'=\frac{1}{\det s}$$

□ با استفاده از دستور کرامر، دستگاه معادله‌های زیر را حل می‌کنیم:

$$a_{11}x'+a_{21}y'+a_{31}z'=x-\alpha,\ a_{12}x'+a_{22}y'+a_{32}z'=y-\beta,$$
$$a_{13}x'+a_{23}y'+a_{33}z'=z-\gamma$$

در این صورت [دستورهای (۲.۲۳) تا (۲.۲۵) و قضیهٔ ۱.۴.۲ را ببینید]، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x'&=b_{11}(x-\alpha)+b_{21}(y-\beta)+b_{31}(z-\gamma)=\\ &=b_{11}x+b_{21}y+b_{31}z+\alpha',\\ y'&=b_{12}(x-\alpha)+b_{22}(y-\beta)+b_{32}(z-\gamma)=\\ &=b_{12}x+b_{22}y+b_{32}z+\beta',\\ z'&=b_{13}(x-\alpha)+b_{23}(y-\beta)+b_{33}(z-\gamma)=\\ &=b_{13}x+b_{23}y+b_{33}z+\gamma' \end{aligned} \tag{۲.۴۳}$$

که در آن $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31}\\ b_{12} & b_{22} & b_{32}\\ b_{13} & b_{23} & b_{33}\end{pmatrix}=B$، معکوس ماتریس S است.

بنابر ویژگی ماتریس معکوس: $\det B=\frac{1}{\det S}$. چون ستون‌های ماتریس B، از ضریب‌های x، y و z در بیان مختصات جدید نقطه برحسب مختصات قدیم آن، تشکیل شده‌است[(۲.۴۳) را ببینید]، پس $B=S'$، ماتریس انتقال دستگاه‌جدید به دستگاه قدیم (ویا ازپایهٔ جدید به‌پایهٔ قدیم) است. ■

۴°. این سه دستگاه مختصات را تثبیت می‌کنیم:

$$\text{(I)}\ \{O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\},\ \text{(II)}\ \{O',\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\},$$
$$\text{(III)}\ \{O'',\mathbf{e}''_1,\mathbf{e}''_2,\mathbf{e}''_3\}$$

و فرض می کنیم، ماتریس‌های

$$S=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},\quad S_1=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{32} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix},$$

$$S_2=\begin{pmatrix} a''_{11} & a''_{21} & a''_{31} \\ a''_{12} & a''_{22} & a''_{32} \\ a''_{13} & a''_{23} & a''_{33} \end{pmatrix}$$

به ترتیب، ماتریس‌های انتقال از دستگاه مختصات (I) به دستگاه مختصات (II)، از دستگاه مختصات (II) به دستگاه مختصات (III) و از دستگاه مختصات (I) به دستگاه مختصات (III) باشند. ثابت می کنیم:

$$S_2=SS_1\quad (\det S_2=\det S\det S_1)$$

□ با توجه به دستورهای (۲.۳۹) و (۲.۴۲) داریم:

$$\mathbf{e}''_1=a'_{11}\mathbf{e}'_1+a'_{12}\mathbf{e}'_2+a'_{13}\mathbf{e}'_3,$$
$$\mathbf{e}''_2=a'_{21}\mathbf{e}'_1+a'_{22}\mathbf{e}'_2+a'_{23}\mathbf{e}'_3,$$
$$\mathbf{e}''_3=a'_{31}\mathbf{e}'_1+a'_{32}\mathbf{e}'_2+a'_{33}\mathbf{e}'_3,$$
$$\mathbf{e}'_1=a_{11}\mathbf{e}_1+a_{12}\mathbf{e}_2+a_{13}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}'_2=a_{21}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+a_{23}\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{e}'_3=a_{31}\mathbf{e}_1+a_{32}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3$$

از آن‌جا

$$\mathbf{e}''_1=a'_{11}(a_{11}\mathbf{e}_1+a_{12}\mathbf{e}_2+a_{13}\mathbf{e}_3)+a'_{12}(a_{21}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+$$
$$+a_{23}\mathbf{e}_3)+a'_{13}(a_{31}\mathbf{e}_1+a_{32}\mathbf{e}_2+a_{33}\mathbf{e}_3)=(a_{11}a'_{11}+a_{21}a'_{12}+$$
$$+a_{31}a'_{13})\mathbf{e}_1+(a_{12}a'_{11}+a_{22}a'_{12}+a_{32}a'_{13})\mathbf{e}_2+(a_{13}a'_{11}+$$
$$+a_{23}a'_{12}+a_{33}a'_{13})\mathbf{e}_3$$

به همین ترتیب:

$$\mathbf{e}''_2=(a_{11}a'_{21}+a_{21}a'_{22}+a_{31}a'_{23})\mathbf{e}_1+(a_{12}a'_{21}+a_{22}a'_{22}+ +a_{32}a'_{23})\mathbf{e}_2+(a_{13}a'_{21}+a_{23}a'_{22}+a_{33}a'_{23})\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}''_3=(a_{11}a'_{31}+a_{31}a'_{32}+a_{31}a'_{33})\mathbf{e}_1+(a_{12}a'_{31}+a_{22}a'_{32}+ +a_{32}a'_{33})\mathbf{e}_2+(a_{13}a'_{31}+a_{23}a'_{32}+a_{33}a'_{33})\mathbf{e}_3$$

بنا براین:

$$S_2=\begin{pmatrix} a_{11}a'_{11}+a_{21}a'_{12}+a_{31}a'_{13} & a_{11}a'_{21}+a_{21}a'_{22}+a_{31}a'_{23} & a_{11}a'_{31}+a_{21}a'_{32}+a_{31}a'_{33} \\ a_{12}a'_{11}+a_{22}a'_{12}+a_{32}a'_{13} & a_{12}a'_{21}+a_{22}a'_{22}+a_{32}a'_{23} & a_{12}a'_{31}+a_{22}a'_{32}+a_{32}a'_{33} \\ a_{13}a'_{11}+a_{23}a'_{12}+a_{33}a'_{13} & a_{13}a'_{21}+a_{23}a'_{22}+a_{33}a'_{23} & a_{13}a'_{31}+a_{23}a'_{32}+a_{33}a'_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{32} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}=SS_1,$$

و $\det S_2=\det S\det S_1$. ■

مثال ۶.۶.۰۲ $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ یك دستگـاه مختصات فضائی است. نقطه‌هـای $A(1, 0, 0)$، $B(0, 2, 0)$، $C(-1, 2, 0)$ و $D(0, 0, 2)$، چهار رأس چهاروجهی $ABCD$ را تشکیل داده‌اند. وسط یال‌های $[AC]$ و $[DB]$ را، به ترتیب، K و L می گیریم. مـاتریس S_2 را، برای انتقال از دستگاه‌مختصات $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$، به‌دستگاه مختصات $\{B, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$ پیدا کنید. دستورهای مربوط به انتقال از دستگاه مختصات اول به دستگاه مختصات دوم را بنویسید.

حل. در مثال ۱۲.۵.۰۲ دیدیم:

$$\overrightarrow{AC}=۰.\overrightarrow{AB}+۱.\overrightarrow{AC}+۰.\overrightarrow{AD}،$$

$$\overrightarrow{KL}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}-\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AC}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AD}،$$

$$\overrightarrow{DB}=۱.\overrightarrow{AB}+۰.\overrightarrow{AC}-۱.\overrightarrow{AD}،$$

$$\overrightarrow{AB}=۱.\overrightarrow{AB}+۰.\overrightarrow{AC}+۰.\overrightarrow{AD}$$

بنا بر این:

$$x=۰.x'+\frac{۱}{۲}y'+z'+۱،$$

$$y=x'-\frac{۱}{۲}y'+۰.z'+۰،$$

$$z=۰.x'+\frac{۱}{۲}y'-z'+۰$$

دستورهای انتقال از دستگاه مختصات اول $\{A، \overrightarrow{AB}، \overrightarrow{AC}، \overrightarrow{AD}\}$ به دستگاه مختصات دوم $\{B، \overrightarrow{AC}، \overrightarrow{KL}، \overrightarrow{DB}\}$ و

$$S_۲=\begin{pmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۲} & ۱ \\ ۱ & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & -۱ \end{pmatrix}$$

ماتریس انتقال است.

با توجه به‌ویژگی ۴° ماتریس انتقال، ماتریس $S_۲$ را به‌طریق دیگری هم می‌توان به‌دست آورد. می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{e}_۱،\ \overrightarrow{OB}=۲\mathbf{e}_۲،\ \overrightarrow{OC}=\mathbf{e}_۱+۲\mathbf{e}_۲،\ \overrightarrow{OD}=۲\mathbf{e}_۳،$$

$$\overrightarrow{AB}=-\mathbf{e}_۱+۲\mathbf{e}_۲،\ \overrightarrow{AC}=۲\mathbf{e}_۱+۲\mathbf{e}_۲،\ \overrightarrow{AD}=-\mathbf{e}_۱+۲\mathbf{e}_۳$$

یعنی

$$\mathbf{e}_1=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC},\ \ \mathbf{e}_2=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\mathbf{e}_3=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

درنتیجه، ماتریس انتقال از پایهٔ $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ به پایهٔ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ چنین است:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

از آن‌جا که داریم:

$$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=\mathbf{e}_2,\ \overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,$$

$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OK}$$

به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AC}=-2\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2,\ \overrightarrow{KL}=\mathbf{e}_3,\ \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=2\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3$$

بنابراین، ماتریس انتقال S_1، از پایهٔ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ به پایهٔ $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$، چنین است:

$$S_1=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

بنابر ویژگی ۴، داریم:

$$S_۲ = SS_۱ = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & \frac{۱}{۲} \\ -۱ & -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ & -۲ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} & ۱ \\ ۱ & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & -۱ \end{pmatrix}$$

(عمل ضرب دو ماتریس را، خودتان انجام دهید.)

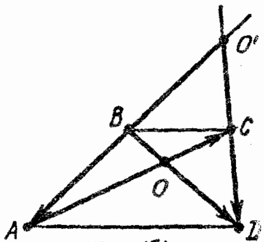
دستگاه مختصات $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$ در صفحهٔ P، به عنوان مجموعه‌ای شامل قطب O (نقطه‌ای ثابت O در صفحهٔ P) و پایهٔ $\{\mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$ از صفحهٔ P، تعریف می‌شود (شکل ۲۵.۲). مختصات نقطهٔ $M \in P$، در دستگاه مختصات $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$، عبارت است از ضریب‌های تجزیهٔ شعاع حامل بردار $\overrightarrow{OM}$، نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$: $\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_۱ + y\mathbf{e}_۲$. اگر $(x، y)$ مختصات نقطهٔ M باشد، می‌نویسیم: $M(x، y)$. اگر در صفحهٔ P، دو دستگاه مختصات داده شده‌باشد: دستگاه قدیم $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$ و دستگاه جدید $\{O'، \mathbf{e}'_۱، \mathbf{e}'_۲\}$، دستگاه مختصات جدید را می‌توان، با دستورهای زیر، از روی دستگاه مختصات قدیم، به دست آورد:

$$\mathbf{e}'_۱ = a_{۱۱}\mathbf{e}_۱ + a_{۱۲}\mathbf{e}_۲،$$

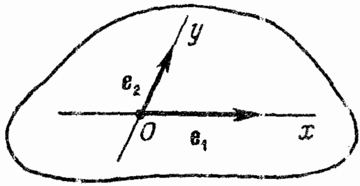
$$\mathbf{e}'_۲ = a_{۲۱}\mathbf{e}_۱ + a_{۲۲}\mathbf{e}_۲، \quad \overrightarrow{OO'} = \alpha\mathbf{e}_۱ + \beta\mathbf{e}_۲ \qquad (۲.۴۴)$$

همچنین، برای هر نقطهٔ $M \in P$، رابطهٔ بین مختصات $(x، y)$ در دستگاه قدیم و مختصات $(x'، y')$ در دستگاه جدید، با دستورهای زیر مشخص می‌شود:

$$x=a_{۱۱}x'+a_{۲۱}y'+\alpha، \quad y=a_{۱۲}x'+a_{۲۲}y'+\beta \qquad (۲.۴۵)$$



شکل ۲۶.۲



شکل ۲۵.۲

ماتریس $S=\begin{pmatrix}a_{۱۱} & a_{۲۱}\\ a_{۱۲} & a_{۲۲}\end{pmatrix}$ که ستون‌های آن، از ضریب‌های x' و y' در (۲.۴۵) تشکیل شده است. ماتریس انتقال از دستگاه مختصات قدیم (یا پایهٔ قدیم) به‌دستگاه مختصات جدید (یا پایهٔ جدید)، درصفحه، نام دارد. ستون‌های ماتریس S، ازمختصات بردارهای $\mathbf{e}'_۱$ و $\mathbf{e}'_۲$ درپایهٔ قدیم $\{\mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$ ساخته شده‌اند [با (۲.۴۴) مقایسه کنید]. برای ماتریس S، یعنی ماتریس انتقال از دستگاه مختصات قدیم به دستگاه مختصات جدید، ویژگی‌های ۱° تا ۴° برقرارند، تنها در این‌جا، به‌جای ماتریس ۳×۳، با ماتریس ۲×۲ سروکار داریم.

مثال ۷.۶.۲. در ذوزنقهٔ $ABCD$ $(AD\|BC)$، نسبت طول‌های دوقاعده $|AD|:|BC|=۲$، نقطهٔ O، محل برخورد قطرهای $[AC]$ و $[BD]$، ونقطهٔ O'، محل برخورد امتدادهای $[AB]$ و $[CD]$ است. دستورهای انتقال از دستگاه‌مختصات $\{O، \overrightarrow{BA}، \overrightarrow{CD}\}$ را به‌دستگاه مختصات $\{O'، \overrightarrow{OC}، \overrightarrow{OD}\}$ بنویسید.

حل. با توجه به‌این که، نسبت طول قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقه به‌طول قاعدهٔ کوچکتر آن، برابر است با ۲، پاره خط راست $[BC]$، وسط دو ضلع مثلث $O'AD$ را به‌هم وصل می‌کند (شکل ۲۶.۲) و $[AC]$ و $[DB]$، میانه‌های این مثلث‌اند. بنابراین

$$\overrightarrow{O'A}=۲\overrightarrow{BA}، \quad \overrightarrow{O'D}=۲\overrightarrow{CD}،$$

$$\overrightarrow{OC}=\frac{۱}{۳}\overrightarrow{AC}=\frac{۱}{۳}\left[\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AO'}+\overrightarrow{AD})\right]=\frac{۱}{۶}[\overrightarrow{AO'}+(\overrightarrow{AO'}+\overrightarrow{O'D})]=$$

$$=\frac{۱}{۳}\overrightarrow{AO'}+\frac{۱}{۶}\overrightarrow{O'D}=-\frac{۲}{۳}\overrightarrow{BA}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{CD}،$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=-\frac{۲}{۳}\overrightarrow{BA}+\frac{۴}{۳}\overrightarrow{CD}،$$

$$\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CO'}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{CD}=-\frac{۲}{۳}\overrightarrow{BA}-\frac{۲}{۳}\overrightarrow{CD}$$

به این ترتیب، دستورهـای انتقال از دستگـاه مختصات $\{O، \overrightarrow{BA}، \overrightarrow{CD}\}$ به دستگاه مختصات $\{O'، \overrightarrow{OC}، \overrightarrow{OD}\}$، چنین است:

$$x=-\frac{۲}{۳}x'-\frac{۲}{۳}y'-\frac{۲}{۳}$$

$$y=\frac{۱}{۳}x'+\frac{۴}{۳}y'-\frac{۲}{۳}$$

مثال ۸.۶.۲. دستگاه مختصات $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$ درصفحه داده‌شده است. نقطه‌هـای $A(۱، ۱)$، $B(۰، -۳)$ و $C(۲، ۲)$ را رأس‌هـای مثلث ABC می گیریم. مختصات نقطهٔ N، محل برخورد میانه‌هـای مثلث ABC را پیدا کنید. دستورهای انتقال از دستگاه مختصات $\{N، \overrightarrow{NO}، \overrightarrow{AC}\}$ را به دستگاه مختصات $\{O، \overrightarrow{AB}، \overrightarrow{BC}\}$ بنویسید.

حل. مختصات $(x_N، y_N)$، از دستورهای (۲.۳۸) به‌دست می آیند:

$$x_N=\frac{۱}{۳}(۱+۰+۲)=۱، \quad y_N=\frac{۱}{۳}(۱-۳+۲)=۰$$

صفحهٔ مثلث ABC را منطبق برصفحهٔ Oxy ازیك دستگـاه مختصات فضائی می گیریم، یعنی فرض می کنیم: $z_A=z_B=z_C=z_N=۰$.

اکنون، دستورهـای انتقال از دستگـاه مختصات $\{N، \overrightarrow{NO}، \overrightarrow{AC}\}$ درصفحهٔ (ABC) را، به‌دستگاه مختصات $\{O، \overrightarrow{AB}، \overrightarrow{BC}\}$ می نویسیم. مختصات

نقطه‌ای مثل M را در دستگاه $\{N، \overrightarrow{NO}، \overrightarrow{AC}\}$ برابر $(x^*، y^*)$ و در دستگاه مختصات $\{O، \overrightarrow{AB}، \overrightarrow{BC}\}$ برابر $(x'، y')$ فرض می‌کنیم؛ یعنی:

$$\overrightarrow{NM}=x^*\overrightarrow{NO}+y^*\overrightarrow{AC}، \quad \overrightarrow{OM}=x'\overrightarrow{AB}+y'\overrightarrow{BC}$$

اگر از رابطهٔ $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OM}$، برای به‌دست آوردن دستورهای انتقال، وتجزیهٔ همهٔ بردارها، نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$ استفاده کنیم، داریم:

$$x^*(-\overrightarrow{ON})+y^*(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=-\overrightarrow{ON}+x'(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+$$
$$+y'(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$

و یا

$$x^*(-\mathbf{e}_۱)+y^*[(۲\mathbf{e}_۱+۲\mathbf{e}_۲)-(\mathbf{e}_۱+\mathbf{e}_۲)]+\mathbf{e}_۱-$$
$$-x'[-۳\mathbf{e}_۲-(\mathbf{e}_۱+\mathbf{e}_۲)]-y'[(۲\mathbf{e}_۱+۲\mathbf{e}_۲)+۳\mathbf{e}_۲]=۰$$

ازآن‌جا که، بردارهای $\mathbf{e}_۱$ و $\mathbf{e}_۲$، مستقل خطی‌اند، به دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}-x^*+y^*+۱+x'-۲y'=۰\\ y^*+۴x'-۵y'=۰\end{cases}$$

می‌رسیم که اگر آن را، نسبت به x^* و y^*، حل کنیم، به دست می‌آید:

$$x^*=-۳x'+۳y'+۱، \quad y^*=-۴x'+۵y'$$

مثال ۹.۶.۲. (معادله‌های مختصاتی خط راست). دستگاه مختصات فضایی $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲، \mathbf{e}_۳\}$ و دو نقطهٔ $A(x_A، y_A، z_A)$ و $B(x_B، y_B، z_B)$ را درنظر می‌گیریم. معادله‌هایی را بنویسید که معرف خط راست (AB) باشند. درواقع، باید دستگاهی ازمعادله‌ها را به دست آوریم، به‌نحوی که، مختصات هرنقطهٔ $M(x، y، z)$ از خط راست (AB)، درآن‌ها صدق کند.

حل. معادلهٔ پارامتری خط راست $l=(AB)$ را در نظر می‌گیریم [مثال ۶.۳.۲ و دستور (۲.۵) را ببینید]. نقطهٔ $M(x، y، z)$ تنهاوقتی برخط راست l واقع است که، عدد t وجود داشته باشد، به نحوی که

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+t\mathbf{a}$، که در آن

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$$

چون، برابری برداری، با برابری سه مختص بردارها هم‌ارز است، تنها وقتی M متعلق به l است که داشته باشیم (برای $t\in\mathbb{R}$):

$$x=x_A+ta_x, \quad y=y_A+ta_y, \quad z=z_A+ta_z$$

$$(a_x=x_B-x_A, \quad a_y=y_B-y_A, \quad a_z=z_B-z_A) \qquad (۲.۴۶)$$

نقطه‌های A و B متمایزند، بنابراین، دست کم یکی از سه مختص a_x، a_y، a_z از بردار هادی $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ از خط راست l، مخالف صفر است. مثلاً، فرض می‌کنیم $a_x\neq 0$. اگر t را از معادلهٔ اول محاسبه کنیم و در دو معادلهٔ دیگر قرار دهیم، به دستگاه معادله‌هایی برحسب x، y و z می‌رسیم که، خط راست l را، درفضا، تعریف می‌کند:

$$y-y_A=\frac{x-x_A}{a_x}a_y, \quad z-z_A=\frac{x-x_A}{a_x}a_z$$

و یا

$$\begin{cases} a_x(y-y_A)=a_y(x-x_A), \\ a_x(z-z_A)=a_z(x-x_A) \end{cases} \qquad (۲.۴۷)$$

این دستگاه معادله‌ها را، اغلب به‌صورت متقارن زیر می‌نویسند:

$$\frac{x-x_A}{a_x}=\frac{y-y_A}{a_y}=\frac{z-z_A}{a_z} \qquad (۲.۴۸)$$

متوجه باشیم که، اگرمخرج یکی از کسرها، برابر صفر باشد، باید [(۲.۴۷) را ببینید] صورت آن نیز برابر صفر شود. مثلاً، اگر $a_y=0$ و $a_z\neq 0$، آن وقت، دستگاه (۲.۴۸) به‌این صورت نوشته می‌شود:

$$y=y_A, \quad a_x(z-z_A)=a_z(x-x_A)$$

اگر $a_y=y_B-y_A=0$ و $a_z=z_B-z_A=0$، آن‌وقت، دستگاه معادله‌های (۲.۴۸) به صورت

$$y=y_A,\ \ z=z_A$$

درمی‌آید، یعنی دراین حالت، خط راست $l=(AB)$، با محور xها موازی است و از نقطهٔ $A(x_A, y_A, z_A)$ می گذرد. معادله‌های پارامتری (۲.۴۶) این خط راست، دراین حالت، چنین‌اند:

$$x=x_A+a_xt,\ \ y=y_A,\ \ z=z_A,\ \ t\in\mathbf{R}(a_x\neq 0)$$

چون $a_x=x_B-x_A$، $a_y=y_B-y_A$ و $a_z=z_B-z_A$، دستگاه معادله‌های (۲.۴۸) را، که معرف خط راست l است و از دو نقطهٔ $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ می گذرد، می‌توان به این صورت نوشت:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A} \qquad (۲.۴۹)$$

معادله‌های دستگاه‌های (۲.۴۸) و (۲.۴۹) را، معادله‌های متعارف (یا معادله‌های کانونی) خط راست l درفضا گویند.

مثال ۱۰.۶.۲. خط راست l، در دستگاه مختصات، با معادله‌های

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-5}{0}$$

داده شده است. مختصات دو نقطه ازاین خط راست را، معین کنید.

حل. معادلهٔ پارامتری خط راست l را می‌نویسیم [با (۲.۴۸) و (۲.۴۶) مقایسه کنید]:

$$x=1-2t,\ \ y=-3+t,\ \ z=5+0t$$

به‌ازای $t=0$ و $t=1$، دو نقطه از خط راست l به‌دست می‌آید:

$$A(1, -3, 5),\ \ B(-1, -2, 5)$$

مختصات دو نقطهٔ A و B را، با روش زیر هم می‌توان به دست آورد:

مختصات نقطهٔ $A(x_A, y_A, z_A)$، بـا توجه بـه معادله‌هـای کانونی (۲.۴۸) چنین‌اند:

$$x_A = 1, \quad y_A = -3, \quad z_A = 5$$

برای مختصات نقطهٔ $B(x_B, y_B, z_B)$،توجه می‌کنیم که، برای بردار

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

داریم: $a_x = -2$، $a_y = 1$، $a_z = 0$، که اگر با بردار $\overrightarrow{AB}$ از خط راست $l = (AB)$ مقایسه کنیم [(۲.۴۸) و (۲.۴۹) را ببینید]، به دست می‌آید:

$$x_B - x_A = -2, \quad y_B - y_A = 1, \quad z_B - z_A = 0$$

و بنابراین

$$x_B = x_A - 2 = -1, \quad y_B = y_A + 1 = -2, \quad z_B = z_A = 5$$

مثال ۲.۶.۱۱. معادله‌های کانونی دو خط راست l_1 و l_2، در دستگاه مختصات، چنین‌اند:

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}, \quad l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$$

تحقیق کنید که، این دو خط راست، متقاطع‌اند یا نه؟

حل. دو خط راست l_1 و l_2 تنها وقتی متقاطع‌اند کـه نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد، به نحوی کـه مختصات (x^*, y^*, z^*) آن، در هر دو معادله صدق کند، یعنی دستگاه چهار معادلهٔ زیر، دارای جواب باشد:

$$x^* - 1 = 2(y^* - 2), \quad z^* - 3 = y^* - 2,$$

$$x^* = y^* - 3, \quad z^* = 2(y^* - 3) \tag{۲.۵۰}$$

برای این‌که، این دو خط راست متقاطع باشند، باید جوابی که از سه معادلهٔ اول به دست می‌آید، خود به خود در معادلهٔ چهارم صدق کند. از سه معادلهٔ اول، به‌دست می‌آید:

$$x^* = -۳،\ \ y^* = ۰،\ \ z^* = ۱$$

که اگر در معادلهٔ چهارم قرار دهیم، به رابطهٔ متناقض $۱ = ۲(۰ - ۳)$ می‌رسیم. دستگاه (۲.۵۰) جواب ندارد: دو خط راست $l_۱$ و $l_۲$، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

مثال ۱۲.۶.۲. (تقسیم یك پاره خط راست، به‌نسبت معلوم). دستگاه مختصات $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲، \mathbf{e}_۳\}$ و دو نقطهٔ متمایز $A(x_A، y_A، z_A)$ و $B(x_B، y_B، z_B)$ را درنظر می‌گیریم. نقطهٔ M بر پاره‌خط‌راست $[AB]$ واقع است و آن را به‌نسبت $\lambda = |AM|:|MB|$ تقسیم می‌کند. مختصات نقطهٔ M را پیدا کنید.

حل. با توجه به دستور (۲.۶) داریم:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{۱}{\lambda + ۱}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

به‌جای بردارها، دراین برابری، عبارت‌های برحسب پایهٔ $\{\mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲، \mathbf{e}_۳\}$ را قرار می‌دهیم. بنابر ویژگی خطی مختصات و ویژگی ۱° از مختصات بردارها، داریم:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda + ۱}،\ \ y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda + ۱}،\ \ z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{\lambda + ۱} \quad (۲.۵۱)$$

مثال ۱۳.۶.۲. در متوازی‌السطوح $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ داریم:

$$A(۱، ۱، ۱);\ \ B(۲، -۱، ۰);\ \ C(۱، ۱، ۲);\ \ D_۱(۳، ۳، ۲)$$

N را وسط $[AD]$ می‌گیریم و می‌دانیم نقطهٔ M، پاره‌خط راست $[CC_۱]$ را، به‌نسبت $|C_۱M|:|MC| = ۲$ تقسیم می‌کند. معادلهٔ کانونی خط‌راست $l = (MN)$ را، در دستگاهی که A، B، C و $D_۱$ درآن داده‌شده‌اند، بنویسید.

حل. $D(x_D، y_D، z_D)$ می‌گیریم (شکل ۲۷.۲). مختصات بردار $\overrightarrow{AD}$ چنین است: $(x_D - ۱، y_D - ۱، z_D - ۱)$. مختصات بردار $\overrightarrow{BC}$، به‌صورت

$$(۱ - ۲،\ ۱ - (-۱)،\ ۲ - ۰) = (-۱،\ ۲،\ ۲)$$

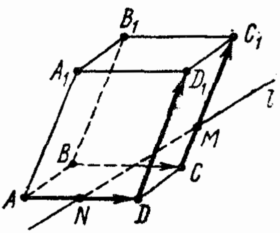
درمی‌آید. بردارهای $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$ برابرند، درنتیجه مختصات هم‌نام آن‌ها، باید برابر باشند، که از آن‌جا، به دست می‌آید:

$$x_D = ۰،\ y_D = ۳،\ z_D = ۳$$

نقطهٔ N وسط پاره‌خط راست $[AD]$ است و آن را به‌نسبت ۱:۱ تقسیم می‌کند، بنابراین:

$$x_N = \frac{x_A + x_D}{۲} = \frac{۱}{۲},$$

$$y_N = \frac{y_A + y_D}{۲} = ۲،\ z_N = ۲$$



شکل ۲۷.۲

$(\alpha، \beta، \gamma)$ را، مختصات نقطهٔ $C_۱$ می‌گیریم. از برابری بردارهای $\overrightarrow{CC_۱}$ و $\overrightarrow{DD_۱}$ به‌دست می‌آید:

$$\alpha - ۱ = ۳ - ۰،\ \beta - ۱ = ۳ - ۳،\ \gamma - ۲ = ۲ - ۳$$

یعنی $\alpha = ۴$، $\beta = ۱$، $\gamma = ۱$. با توجه به دستورهای (۲.۵۱)، برای تقسیم یك پاره‌خط راست به‌نسبت معلوم، داریم:

$$x_M = \frac{\alpha + ۲x_C}{۳} = ۲،\ y_M = \frac{\beta + ۲y_C}{۳} = ۱،\ z_M = \frac{\gamma + ۲z_C}{۳} = \frac{۵}{۳}$$

به این ترتیب، معادلهٔ کانونی خط راست (MN) چنین می‌شود:

$$\frac{x - \frac{۱}{۲}}{۲ - \frac{۱}{۲}} = \frac{y - ۲}{۱ - ۲} = \frac{z - ۲}{\frac{۵}{۳} - ۲}$$

و یا

$$\frac{x-\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z-۲}{-\frac{۱}{۳}}$$

اگر معادله‌های کانونی دو خط راست l و L، در یك دستگاه مختصات، چنین باشند:

$$l:\frac{x-\alpha}{a_x}=\frac{y-\beta}{a_y}=\frac{z-\gamma}{a_z};\ L:\frac{x-\lambda}{b_x}=\frac{y-\mu}{b_y}=\frac{z-\nu}{b_z}$$

آن‌وقت $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$ و $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$، بردارهای هادی این‌دوخط راست‌اند. دو خط راست l و L، تنها وقتی موازی‌اندکه، بردارهای آن‌ها، یعنی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، هم‌راستا باشند. به این ترتیب، شرط لازم وکافی، برای موازی بودن خط‌های راست l و L، بـا توجه به شرط هم‌راستائی دو بردار، چنین است:

$$\begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x a_z \\ b_x b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix}=۰$$

P را یـك صفحه، $\{O, \mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۲\}$ را دستگاه مختصاتی در صفحهٔ P و دو نقطهٔ متمـایـز $A(x_A, y_A)\in P$ و $B(x_B, y_B)\in P$، در نظر مـی‌گیریم. معادله‌های پارامتری خط راست $l=(AB)$ چنین است:

$$x=x_A+ta_x,$$

$$y=y_A+ta_y(a_x=x_B-x_A,\ a_y=y_B-y_A;\ t\in\mathbf{R}) \qquad (۲.۵۲)$$

و معادلهٔ کانونی خط راست $l=(AB)$ در صفحهٔ P:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A} \qquad (۲.۵۳)$$

$$\frac{x-x_A}{a_x}=\frac{y-y_A}{a_y} \qquad (۲.۵۴)$$

معادلهٔ (۲.۵۴)، هم‌ارز است با معادلهٔ

$$A^*x+B^*y+C^*=۰,\ (A^*)^۲+(B^*)^۲>۰ \qquad (۲.۵۵)$$

که درآن

$$A^*=y_B-y_A,\ B^*=x_A-x_B,\ C^*=y_Ax_B-x_Ay_B \quad (۲.۵۶)$$

بنا برمعادلهٔ (۲.۵۵)، بردارهادی $\mathbf{a}(a_x, a_y)$ ازخط راست l واقع درصفحهٔ P، از رابطه‌های $a_x=-B^*$ ،$a_y=A^*$ به دست می‌آید.

دستورهای تقسیم یك پاره‌خط راست به نسبت معلوم، درحالت مسطحه چنین‌اند:

$$M\in[AB],\ \lambda=|AM|:|MB| \iff$$

$$\iff x_M=\frac{x_A+\lambda x_B}{\lambda+۱},\ \ y_M=\frac{y_A+\lambda y_B}{\lambda+۱} \quad (۲.۵۷)$$

مثال ۱۴.۶.۲. دو نقطهٔ A و B را طوری پیدا کنید که، نقطهٔ $C(-۵, ۴)$ پاره‌خط راست $[AB]$ را به نسبت ۴ : ۳، و نقطهٔ $D(۶, -۵)$ آن را به نسبت ۳ : ۲ تقسیم کنید.

حل. فرض کنید: $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$. بنا بر دستور (۲.۵۷) داریم:

$$-۵=\frac{x_A+\frac{۳}{۴}x_B}{\frac{۳}{۴}+۱},\ ۴=\frac{y_A+\frac{۳}{۴}y_B}{\frac{۳}{۴}+۱},$$

$$۶=\frac{x_A+\frac{۲}{۳}x_B}{\frac{۲}{۳}+۱},\ -۵=\frac{y_A+\frac{۲}{۳}y_B}{\frac{۲}{۳}+۱}$$

که از آن‌ها به دست می‌آید:

$$x_A=۱۶۰،\ x_B=-۲۲۵،\ y_A=-۱۳۱،\ y_B=۱۸۴;$$

$$A(۱۶۰، -۱۳۱)،\ B(-۲۲۵، ۱۸۴)$$

مثال ۲.۶.۱۵. در مثلث ABC داریم: $A(-۵، ۴)$، $B(۳، ۱)$ و $C(۲، -۵)$. مطلوب است معادلهٔ میانهٔ AM از مثلث ABC.

حل. نقطهٔ M وسط پاره‌خط راست $[AB]$ است. بنابراین

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{۵}{۲},\ y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=-۲$$

و بنابر دستور (۲.۵۳)، برای معادلهٔ خط راست (AM)، داریم:

$$\frac{x-(-۵)}{\frac{۵}{۲}-(-۵)}=\frac{y-۴}{-۲-۴} \iff ۴x+۵y=۰$$

مثال ۲.۶.۱۶. معادلهٔ خط راست l را طوری پیدا کنید که از نقطهٔ $M(۷، ۴)$ بگذرد و با خط راست L به‌معادلهٔ $۳x-۲y=۴$ موازی باشد.

حل. بردار هادی $\mathbf{a}=(a_x، a_y)$ از خط راست L، عبارت است از $\mathbf{a}=(۲، ۳)$. چون l موازی L است، بنابراین، همین بردار $\mathbf{a}$، بردارهادی خط‌راست l هم هست. بنابردستور(۲.۵۴)، معادلهٔ خط راست l، چنین‌است:

$$\frac{x-۷}{۲}=\frac{y-۴}{۳} \iff ۳x-۲y-۱۳=۰$$

مثال ۲.۶.۱۷. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، می‌دانیم:

$$C(۳، -۱);\ (AB): x+y-۳=۰;\ (AD): y=۲$$

مختصات رأس‌های $A(x_A، y_A)$، $B(x_B، y_B)$ و $D(x_D، y_D)$ را پیدا کنید.

حل. دو خط راست (AB) و (AD)، درنقطهٔ A مشترک‌اند. بنابراین، مختصات $(x_A، y_A)$ باید در معادله‌های دستگاه

$$x_A+y_A-۳=۰،\ y_A=۲$$

صدق کنند. از حل این دستگاه به‌دست می‌آید: $x_A=۱$ و $y_A=۲$. $\mathbf{a}=(-۱،۱)$، بردارهادی خط راست (AB) است که، درضمن، بردارهادی خط راست (CD) هم هست. بنابراین، معادلهٔ (CD) چنین می‌شود:

$$\frac{x-۳}{-۱}=\frac{y+۱}{۱} \iff x+y-۲=۰$$

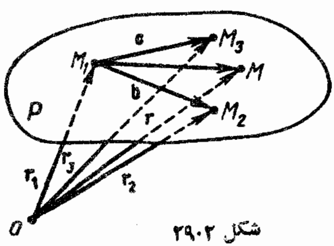
و به‌همین ترتیب، برای معادلهٔ خط راست (BC) به‌دست می‌آید: $y=-۱$. مختصات نقطه‌های B و D، به‌ترتیب، ازاین دستگاه‌ها، به‌دست‌می‌آیند:

$$\begin{cases}x_B+y_B-۳=۰\\ y_B=-۱\end{cases};\begin{cases}x_D+y_D-۲=۰\\ y_D=۲\end{cases}$$

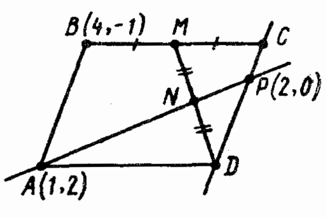
که از آن‌جا خواهیم داشت: $B(۴، -۱)$ و $D(۰، ۲)$.

مثال ۲.۶.۱۸۰ درمتوازی‌الاضلاع $ABCD$ (شکل ۲۸.۲)، M وسط ضلع $[BC]$، N وسط پاره‌خط راست $[MD]$ و P نقطهٔ برخورد دوخط راست (AN) و (CD) است. اگر بدانیم $A(۱، ۲)$، $B(۴، -۱)$ و $P(۲، ۰)$؛ مختصات دو نقطهٔ C و D را پیدا کنید. نقطهٔ P، پاره‌خط راست $[CD]$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

حل. $D(\alpha، \beta)$ می‌گیریم. از برابری $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$، مختصات نقطهٔ C



شکل ۲۹.۲



شکل ۲۸.۲

به دست می‌آید:

$$x_C=\alpha+(x_B-x_A)=\alpha+۳،\ \ y_C=\beta+(y_B-y_A)=\beta-۳$$

و برای نقطهٔ M، وسط ضلع $[BC]$، داریم:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{\alpha+۷}{۲},\quad y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{\beta-۴}{۲}$$

نقطهٔ $N\ (x_N, y_N)$ وسط پاره‌خط راست $[MD]$ است، بنابراین:

$$x_N=\frac{x_M+x_D}{۲}=\frac{۳\alpha+۷}{۴},\quad y_N=\frac{y_M+y_D}{۲}=\frac{۳\beta-۴}{۴}$$

معادلهٔ خط راست (AP) چنین است:

$$\frac{x-۱}{۲-۱}=\frac{y-۲}{۰-۲} \iff ۲x+y-۴=۰$$

نقطهٔ N متعلق به خط راست (AP) است و، بنابراین، مختصات آن درمعادلهٔ خط راست (AP) صدق می‌کند:

$$۲\frac{۳\alpha+۷}{۴}+\frac{۳\beta-۴}{۴}-۴=۰ \iff ۲\alpha+\beta-۲=۰$$

داریم: $P(۲, ۰)$. نقطهٔ P، در ضمن، به خط راست (DC) تعلق دارد، که معادلهٔ آن، به این صورت است:

$$\frac{x-\alpha}{(\alpha+۳)-\alpha}=\frac{y-\beta}{(\beta-۳)-\beta}$$

مختصات نقطهٔ P را در آن قرار می‌دهیم:

$$\frac{۲-\alpha}{۳}=\frac{۰-\beta}{-۳} \iff \alpha+\beta-۲=۰$$

واز حل دستگاه معادله‌های $۲\alpha+\beta-۲=۰$ و $\alpha+\beta-۲=۰$، به‌دست می‌آید: $\alpha=۰$، $\beta=۲$. سرانجام، نقطهٔ P، پاره خط راست $[CD]$ را، به نسبت $\lambda=|CP|:|PD|$ بخش می کند و می‌توانیم بنویسیم:

$$x_P=\frac{x_C+\lambda x_D}{\lambda+۱} \iff ۲(\lambda+۱)=۳+\lambda.۰$$

و از آن‌جا $\lambda=\frac{1}{2}$.

مثال ۲.۶.۹.۱ (معادلهٔ بردار پارامتری صفحه). قطب O را در فضا ثابت می‌گیریم و فرض می‌کنیم، نقطه‌های M_1، M_2 و M_3 بر یك خط راست نباشند. مجموعهٔ شعاع‌های حامل همهٔ نقطه‌های واقع بر صفحهٔ $P=(M_1M_2M_3)$ را مشخص کنید.

حل. $\mathbf{r}_1=\overrightarrow{OM}_1$، $\mathbf{r}_2=\overrightarrow{OM}_2$ و $\mathbf{r}_3=\overrightarrow{OM}_3$ می‌گیریم (شعاع‌های حامل نقطه‌های M_1، M_2 و M_3؛ شکل ۲.۹.۲). بردارهای $\mathbf{b}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{c}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1$، یك پایه را در صفحهٔ P تشکیل می‌دهند. فرض می‌کنیم، $\mathbf{r}$، شعاع حامل نقطهٔ دلخواه $M\in P$ باشد. نقطهٔ M، تنها وقتی بر صفحهٔ P واقع است که بردار $\overrightarrow{M_1M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$، نسبت به بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، قابل تجزیه باشد [دستور (۲.۲۸)]. بنابراین، با توجه به معیار هم صفحه بودن (مثال ۲.۵.۲ را ببینید)، عددهای t و τ (وابسته به M) وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم: $\overrightarrow{M_1M}=t\mathbf{b}+\tau\mathbf{c}$، یا

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=t(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)+\tau(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1) \qquad (۲.۵۸)$$

رابطهٔ

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+t\mathbf{b}+\tau\mathbf{c},\quad t\in\mathbf{R},\ \tau\in\mathbf{R} \qquad (۲.۵۹)$$

را معادلهٔ بردار پارامتری صفحهٔ P گویند، که از نقطهٔ $M_1(\mathbf{r}_1)$ موازی بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ رسم شده باشد. سمت راست رابطهٔ (۲.۵۹)، به ازای عددهای حقیقی ودلخواه t و τ، مجموعهٔ شعاع‌های حامل همهٔ نقطه‌های صفحهٔ P، و فقط آن‌ها را، مشخص می‌کند.

رابطهٔ (۲.۵۹) را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$\mathbf{r}=\theta\mathbf{r}_1+t\mathbf{r}_2+\tau\mathbf{r}_3,\quad \theta+t+\tau=1 \qquad (۲.۶۰)$$

اگر نقطه‌های $M_1(x_1, y_1, z_1)$، $M_2(x_2, y_2, z_2)$ و $M_3(x_3, y_3, z_3)$ در دستگاه مختصات $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ مفروض باشند، آن‌وقت، معادلهٔ بردار

پارامتری صفحهٔ $P=(M_1M_2M_3)$، با دستگاه معادله‌های

$$(۲.۶۱)\quad \begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1)+\tau(x_3-x_1), \\ y=y_1+t(y_2-y_1)+\tau(y_3-y_1), \\ z=z_1+t(z_2-z_1)+\tau(z_3-z_1) \end{cases}$$

هم‌ارز است، کــه بستگی بین مختصات نقطهٔ $M\in P$ را بــا عددهای t و τ مشخص می‌کند. معادله‌های دستگاه (۲.۶۱) را، معادله‌های پارامتری صفحهٔ P گویند.

مثال ۲۰.۶.۲. (معادلهٔ مختصاتی صفحه). دستگــاه مختصات فضائی $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، معادلهٔ صفحه‌ای که بر نقطه‌ای مثل $M_1(x_1, y_1, z_1)$ می‌گذرد، به صورت زیر است:

$$(۲.۶۲)\quad A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0,\quad A^2+B^2+C^2>0$$

حل. دو نقطهٔ ثــابت $M_2(x_2, y_2, z_2)$ و $M_3(x_3, y_3, z_3)$ را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم، به نحوی که سه نقطهٔ M_1، M_2 و M_3 واقع بر یك خط راست نباشند. قرار می‌دهیم:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z),\ b_x=x_2-x_1,\ b_y=y_2-y_1,$$

$$b_z=z_2-z_1;\ \overrightarrow{M_1M_3}=\mathbf{c}=(c_x, c_y, c_z),\ c_x=x_3-x_1,$$

$$c_y=y_3-y_1,\ c_z=z_3-z_1$$

نقطهٔ $M(x, y, z)$، تنها وقتی بر صفحهٔ P قرار دارد که بردارهای $\overrightarrow{M_1M}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه باشند؛ و این شرط تنها وقتی برقرار است که، مختصات نقطهٔ M، در معادلهٔ زیر صدق کند:

$$(۲.۶۳)\quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

و یا $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$، که در آن

$$A=\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix},\ B=-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$$

شرط $A^2+B^2+C^2>0$ را، هم‌راستا نبودن بردارهای **b** و **c** تأمین می‌کند (مثال ۱۹.۵.۲ را ببینید).

معادلهٔ (۲.۶۳) را، معادلهٔ مختصاتی صفحه‌ای گویند که از نقطهٔ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ می‌گذرد و با بردارهای $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$ و $\mathbf{c}=(c_x, c_y, c_z)$ موازی است. این معادله را، به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (2.64)$$

معادلهٔ (۲.۶۴)، معادلهٔ صفحهٔ $P=(M_1M_2M_3)$ است که از سه نقطهٔ مفروض M_1، M_2 و M_3 می‌گذرد. در ضمن، معادلهٔ (۲.۶۲) را به صورت

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2>0 \qquad (2.65)$$

هم می‌توان نوشت که، در آن، $D=-Ax_1-By_1-Cz_1$.

مثال ۲۱.۶.۲. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌های $M_1(2, 3, 1)$، $M_2(3, 1, 4)$ و $M_3(2, 1, 5)$ می‌گذرد.

حل. با توجه به دستور (۲.۶۴)، برای معادلهٔ صفحهٔ مطلوب داریم:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 3-2 & 1-3 & 4-1 \\ 2-2 & 1-3 & 5-1 \end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $x+2y+z-9=0$

مثال ۲۲.۶.۲. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $M_1(3, 7, 2)$ بگذرد و با خط‌های راست زیر موازی باشد:

$$l: \frac{x-۱}{۴} = \frac{y+۲}{۱} = \frac{z-۴}{۲}; \quad L: \frac{x-۳}{۵} = \frac{y-۲}{۳} = \frac{z+۱}{۱}$$

حل. چون صفحهٔ مطلوب، بـا خطهـای راست l و L موازی است، بنابراین باید با بردارهای هادی آن‌ها، یعنی $\mathbf{b}=(۴،۱،۲)$ و $\mathbf{c}=(۵،۳،۱)$ موازی باشد. با توجه به دستور (۲.۶۳)، معادلهٔ این صفحه، چنین می‌شود:

$$\begin{vmatrix} x-۳ & y-۷ & z-۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ ۵ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \iff ۵x-۶y-۷z+۴۱=۰$$

مثال ۲.۶.۲۳. معادلهٔ صفحه‌ای مانند P را بنویسید که از $M_۱(۱،۰،-۱)$ بگذرد و شامل خط راست $l: \frac{x}{۲} = \frac{y+۱}{۳} = \frac{z-۲}{۱}$ باشد.

حل. نقطهٔ $M_۲(۰،-۱،۲)$ از خط راست l، بر صفحهٔ P قرار دارد و، بنابراین، صفحهٔ P با بردار $\mathbf{b}=\overrightarrow{M_۱M_۲}$ و بردار $\mathbf{c}=(۲،۳،۱)$، بردار هادی خط راست l موازی است. با توجه به دستور (۲.۶۳)، معادلهٔ صفحهٔ P چنین می‌شود:

$$\begin{vmatrix} x-۱ & y-۰ & z-(-۱) \\ ۰-۱ & -۱-۰ & ۲-(-۱) \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \iff ۱۰x-۷y+z-۹=۰$$

مثال ۲.۶.۲۴*. (شرط موازی بودن دو صفحه). ثابت کنید، صفحه‌های

$$P_۱: A_۱x+B_۱y+C_۱z+D_۱=۰،\ A_۱^۲+B_۱^۲+C_۱^۲>۰;$$

$$P_۲: A_۲x+B_۲y+C_۲z+D_۲=۰،\ A_۲^۲+B_۲^۲+C_۲^۲>۰$$

تنها وقتی باهم موازی‌اند که بردارهای

$$\mathbf{N}_۱=(A_۱، B_۱، C_۱)\neq ۰ \ ،\ \mathbf{N}_۲=(A_۲، B_۲، C_۲)\neq ۰$$

هم‌راستا باشند، یعنی عدد $\lambda \neq 0$ وجود داشته باشد، به نحوی که

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1 \qquad (2.66)$$

حل. فرض می‌کنیم، بین ضریب‌های معادله‌های دو صفحهٔ P_1 و P_2، برابری‌های (۲.۶۶)، به‌ازای $\lambda \neq 0$، برقرار باشند. دراین صورت معادلهٔ صفحهٔ P_2 به صورت

$$\lambda A_1 x + \lambda B_1 y + \lambda C_1 z + D_2 = 0$$

و یا

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + \frac{D_2}{\lambda} = 0$$

درمی‌آید. در حالتی که داشته باشیم: $D_1 = \frac{D_2}{\lambda}$، دو صفحهٔ P_1 و P_2 برهم منطبق می‌شوند؛ و در حالت $D_1 \neq \frac{D_2}{\lambda}$، دستگاه معادله‌های

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad A_1 x + B_1 y + C_1 z + \frac{D_2}{\lambda} = 0$$

ناسازگارند، یعنی P_1 و P_2، نقطهٔ مشترکی ندارند و $P_1 \cap P_2 = \phi$ و، بنابراین، صفحه‌های P_1 و P_2 موازی‌اند.

به‌این ترتیب، با تغییر مقدار ثابت D_1 درمعادلهٔ صفحهٔ P_1، می‌توانیم معادله‌های همهٔ صفحه‌های موازی با P_1 را پیدا کنیم. درواقع، اگر صفحهٔ P^*، موازی با صفحهٔ P باشد، به معنای آن است که صفحهٔ P^* را می‌توان از صفحهٔ P_1، با انتقال به‌اندازهٔ برداری مثل $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ به‌دست آورد. دراین وضع، نقطهٔ M^* به‌مختصات (x, y, z)، تنها وقتی متعلق به‌صفحهٔ P^* است که نقطهٔ

$$M_1(x - a_x, y - a_y, z - a_z), \quad (\overrightarrow{M_1 M^*} = \mathbf{a}, \ M^* = T_{\overrightarrow{M_1 M^*}}(M_1))$$

متعلق به صفحهٔ P_1 باشد، یعنی

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D^* = 0, \quad D^* = D_1 - A_1 a_x - B_1 a_y - C_1 a_z$$

به این ترتیب، معادلهٔ صفحهٔ P^*، از معادلهٔ صفحهٔ P_1، با تغییر مقدار ثابت D_1 به D^*، به دست می‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم، صفحه‌های P_1 و P_2 موازی باشند، بنابرآن‌چه گفته شد، صفحه‌های

$$P_1^*: A_1x+B_1y+C_1z+1=0 \quad , \quad P_2^*: A_2x+B_2y+C_2z=0$$

نیز باهم موازی‌اند ($P_1^*\|P_1\|P_2\|P_2^*$)، ولی برهم منطبق نیستند (زیرا نقطهٔ $O(0, 0, 0)$ در صفحهٔ P_2^* قرار دارد، در حالی‌که بر صفحهٔ P_1^* واقع نیست). صفحه‌های P_1^* و P_2^*، نقطهٔ مشترکی ندارند و، بنابراین، دستگاه معادله‌های

$$A_1x+B_1y+C_1z=-1, \quad A_2x+B_2y+C_2z=0$$

دارای جواب نیست. به این ترتیب، هیچ کدام از دستگاه‌های زیر جواب ندارند:

$$(\mathrm{I})\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=-1\\A_2x+B_2y+C_2z=0\\0.x+0.y+1.z=0\end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=-1\\A_2x+B_2y+C_2z=0\\0.x+1.y+0.z=0\end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=-1\\A_2x+B_2y+C_2z=0\\1.x+0.y+0.z=0\end{cases}$$

و با توجه به‌دستور کرامر (بخش ۴.۲)، دترمینان ماتریس ضریب‌های هر کدام از این دستگاه‌ها (Δ_1، Δ_2، Δ_3)، برابر صفر است، یعنی

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

با توجه به‌شرط هم راستائی (مثال ۲.۵.۱۹ را ببینید)، بردارهای $\mathbf{N}_1 \neq \mathbf{0}$ و $\mathbf{N}_2 \neq \mathbf{0}$ هم‌راستا هستند، یعنی برای‌عددی‌مثل $\lambda \neq 0$ داریم: $\mathbf{N}_2 = \lambda \mathbf{N}_1$، که اگراین برابری را، به‌صورت مختصات بنویسیم، به‌همان رابطهٔ (۲.۶۶) می‌رسیم.

مثال ۲.۶.۲۵. $Ax+By+Cz+D=0$، $(A^2+B^2+C^2>0)$ را، معادلهٔ صفحهٔ P می گیریم. ثابت کنید، بردارهای غیر هم راستای $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$ و $\mathbf{c}=(c_x, c_y, c_z)$ وجود دارند، به‌نحوی که‌داشته‌باشیم:

$$A = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \qquad (۲.۶۷)$$

همچنین ثابت‌کنید، بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ با صفحهٔ P موازی‌اند.

حل. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ را نقطه‌ای ازصفحهٔ P می گیریم؛ یعنی

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

بردار $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$، تنها وقتی با صفحهٔ P موازی است‌که نقطهٔ

$$M_2(x_1+a_x, y_1+a_y, z_1+a_z)$$

برصفحهٔ P واقع باشد، یعنی داشته‌باشیم:

$$A(x_1+a_x)+B(y_1+a_y)+C(z_1+a_z)+D=0$$

یا

$$Aa_x+Ba_y+Ca_z=0 \qquad (2.68)$$

شرط (۲.۶۸)، شرط لازم و کافی است برای این‌که بردار $\mathbf{a}=(a_x، a_y، a_z)$، برصفحهٔ P به معادلهٔ $Ax+By+Cz+D=0$ موازی باشد.

فرض کنید $\mathbf{b}'=(b'_x، b'_y، b'_z)$ و $\mathbf{c}'=(c'_x، c'_y، c'_z)$، دوبردار دلخواه موازی بـا صفحهٔ P باشند. در این صورت، یکی از معادله‌هـای صفحهٔ P، به صورت

$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

نوشته می‌شود که در آن

$$A'=\begin{vmatrix} b'_y & b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix},\quad -B'=\begin{vmatrix} b'_x & b'_z \\ c'_x & c'_z \end{vmatrix},\quad C'=\begin{vmatrix} b'_x & b'_y \\ c'_x & c'_y \end{vmatrix},$$

$$D'=-A'x_1-B'y_1-C'z_1$$

صفحهٔ P با خودش موازی است. بـا توجه به نتیجهٔ مثال قبل، عـدد λ را طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$A=\lambda A'=\lambda\begin{vmatrix} b'_y & b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda b'_y & \lambda b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix},$$

$$B=-\begin{vmatrix} \lambda b'_x & \lambda b'_z \\ c'_x & c'_z \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} \lambda b'_x & \lambda b'_y \\ c'_x & c'_y \end{vmatrix}$$

و این به معنای آن است که بردارهای $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{b}'$ و $\mathbf{c}=\mathbf{c}'$ را می‌توان همان بردارهای مورد نظر دانست.

اکنون، فرض کنید، بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در (۲.۶۷) صدق کنند، بنا براین

$$Ab_x+Bb_y+Cb_z=b_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-b_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+$$

$$+b_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0,$$

$$Ac_x+Bc_y+Cc_z=c_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+$$

$$+c_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

و با توجه به (۲.۶۸)، هریك از دو بردار $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، با صفحهٔ P موازی‌است.

مثال ۲۶.۶.۲. ذوزنقهٔ $ABCD$، قاعدهٔ منشور $ABCDA_1B_1C_1D_1$ است: $AB\|CD$ و $|CD|:|AB|=\lambda<1$. ازنقطهٔ B، صفحه‌ای گذشته‌است که‌یال‌های $[AA_1]$ و $[CC_1]$ وخطراست (DD_1) را، به‌ترتیب، درنقطه‌های M، N و P قطع‌کرده است و می‌دانیم

$$|AM|:|AA_1|=m,\quad |CN|:|CC_1|=n$$

نسبت $|DP|:|DD_1|$ را پیدا کنید.

حل. $\mathbf{e}_1=\overrightarrow{DA}$، $\mathbf{e}_2=\overrightarrow{DC}$ و $\mathbf{e}_3=\overrightarrow{DD_1}$ می گیریم (شکل ۳۰.۲). رأس‌های منشور در دستگاه مختصات $\{D, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ چنین‌اند:

$$A(1, 0, 0);\ B(x_B, y_B, 0);\ C(0, 1, 0);\ D(0, 0, 0);$$

$$A_1(1, 0, 1);\ B_1(x_B, y_B, 1);\ C_1(0, 1, 1);\ D_1(0, 0, 1)$$

مختصات نقطهٔ $B(x_B, y_B, 0)$ را محاسبه می‌کنیم (این نقطه بر صفحهٔ (DAC) قرار دارد و به همین مناسبت، مختص سوم آن برابر صفـر است).
بنا برفرض $\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ و یا

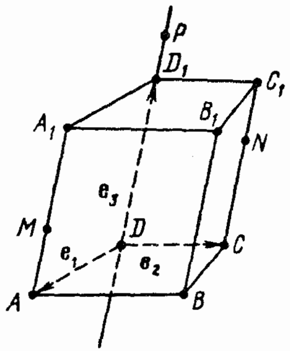
$$\mathbf{e}_۲=\lambda[(x_B-۱)\mathbf{e}_۱+y_B\mathbf{e}_۲+۰\mathbf{e}_۳]$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\lambda(x_B-۱)=۰،$$

$$\lambda y_B=۱ \Longleftrightarrow x_B=۱،$$

$$y_B=\frac{۱}{\lambda}$$



شکل ۳۰.۲

علاوه براین، بنابرفرض داریم:

$$\overrightarrow{AM}=(x_M-۱، y_M، z_M)$$

$$=m\overrightarrow{AA_۱}، \overrightarrow{AA_۱}=(۰، ۰، ۱)$$

بنابراین

$$x_M-۱=m\cdot۰=۰;\ y_M=m\cdot۰=۰;\ z_M=m\cdot۱=m$$

یعنی $M(۱، ۰، m)$. با روشی مشابه به دست می‌آید: $N(۰، ۱، n)$. معادلهٔ صفحهٔ (BMN) چنین است [(۲.۶۴) را ببینید]:

$$\begin{vmatrix} x-۱ & y-\frac{۱}{\lambda} & z-۰ \\ ۱-۱ & ۰-\frac{۱}{\lambda} & m-۰ \\ ۰-۱ & ۱-\frac{۱}{\lambda} & n-۰ \end{vmatrix}=۰ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{m-n-\lambda m}{\lambda}(x-۱)-m\left(y-\frac{۱}{\lambda}\right)-\frac{z}{\lambda}=۰$$

نقطهٔ $P(۰، ۰، z_P)$ برمحور zها قرار دارد و، بنابراین، دو مختص اول آن صفر است. با توجه به شرط: $P\in(BMN)$، و خواهیم داشت:

$$\frac{m-n-\lambda m}{\lambda}(\circ-\text{۱})-m\left(\circ-\frac{\text{۱}}{\lambda}\right)-\frac{z_P}{\lambda}=\circ$$

یعنی $z_P=n+\lambda m$ و سرانجام

$$|DP|:|DD_\text{۱}|=|z_P\mathbf{e}_\text{۳}|:|\mathbf{e}_\text{۳}|=|z_P|=n+\lambda m$$

مثال ۲۷.۶.۲ نقطهٔ K در درون چهار وجهی $ABCD$ واقع است. نقطه‌های A'، B'، C' و D'، به‌ترتیب، نقطه‌های برخورد خط‌های راست (AK)، (BK)، (CK) و (DK) با صفحه‌های BCD، ACD، ABD و ABC هستند. ثابت کنید:

$$\frac{|A'K|}{|AA'|}+\frac{|B'K|}{|BB'|}+\frac{|C'K|}{|CC'|}+\frac{|D'K|}{|DD'|}=\text{۱}$$

حل. دستگاه مختصات $\{A، AB، AC، AD\}$ را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه داریم:

$$A(\circ، \circ، \circ);\ \ B(\text{۱}، \circ، \circ);\ \ C(\circ، \text{۱}، \circ);\ \ D(\circ، \circ، \text{۱})$$

فرض می‌کنیم: $K(m، n، p)$، بنابراین

$$\overrightarrow{AK}=(m، n، p);\ \ \overrightarrow{BK}(m-\text{۱}، n، p);$$
$$\overrightarrow{CK}=(m، n-\text{۱}، p);\ \ \overrightarrow{DK}=(m، n، p-\text{۱})$$

معادله‌های خط‌های راست، چنین‌اند:

$$(AK):\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p};\ (BK):\frac{x-\text{۱}}{m-\text{۱}}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p};$$

$$(CK):\frac{x}{m}=\frac{y-\text{۱}}{n-\text{۱}}=\frac{z}{p};\ (DK):\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z-\text{۱}}{p-\text{۱}}$$

و معادله‌های صفحه‌ها:

$$(BCD):\begin{vmatrix} x-\text{۱} & y-\circ & z-\circ \\ \circ-\text{۱} & \text{۱}-\circ & \circ-\circ \\ \circ-\text{۱} & \circ-\circ & \text{۱}-\circ \end{vmatrix}=\circ \Longleftrightarrow x+y+z-\text{۱}=\circ;$$

$$(ACD):\begin{vmatrix} x & y & z \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۰ \iff x=۰;$$

$$(ABD):\ y=۰;\ (ABC):z=۰$$

مختصات نقطهٔ $A'=(AK)\bigcap(BCD)$، از دستگاه معادله‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x+y+z-۱=۰ \\ x=mt \\ y=nt \\ z=pt \end{cases} \iff$$

$$\iff A'\left(\frac{m}{m+n+p}, \frac{n}{m+n+p}, \frac{p}{m+n+p}\right)$$

و مختصات نقطهٔ B' از دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x=۰ \\ x=۱+(m-۱)t \\ y=nt \\ z=pt \end{cases} \iff B'\left(۰, \frac{n}{۱-m}, \frac{p}{۱-m}\right)$$

و به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

$$C'\left(\frac{m}{۱-n}, ۰, \frac{p}{۱-n}\right),\quad D'\left(\frac{m}{۱-p}, \frac{n}{۱-p}, ۰\right)$$

به جز این‌ها داریم:

$$\overrightarrow{A'A}=\left(\frac{-m}{m+n+p}, \frac{-n}{m+n+p}, \frac{-p}{m+n+p}\right),$$

$$\overrightarrow{A'K}=\left(m-\frac{m}{m+n+p},\ n-\frac{n}{m+n+p},\ p-\frac{p}{m+n+p}\right)=$$

$$=\left(\frac{-m(۱-(m+n+p))}{m+n+p},\ \frac{-n(۱-(m+n+p))}{m+n+p},\right.$$

$$\left.\frac{-p(۱-(m+n+p))}{m+n+p}\right)$$

یعنی $\overrightarrow{A'K}=[۱-(m+n+p)]\overrightarrow{A'A}$. بردارهای $\overrightarrow{A'K}$ و $\overrightarrow{A'A}$ هم‌جهت‌اند، بنابراین $۱-(m+n+p)>۰$ و

$$|A'K|:|AA'|=۱-(m+n+p)$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

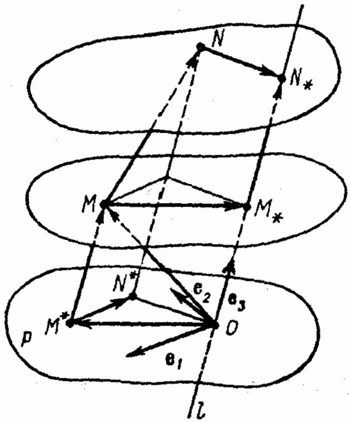
$$\frac{|B'K|}{|BB'|}=m،\ \ \frac{|C'K|}{|CC'|}=n،\ \frac{|D'K|}{|DD'|}=p$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{|A'K|}{|AA'|}+\frac{|B'K|}{|BB'|}+\frac{|C'K|}{|CC'|}+\frac{|D'K|}{|DD'|}=۱$$

بخش ۷.۲. تصویر موازی

صفحهٔ P، و خط راست l را که با صفحهٔ P موازی نیست، در نظر می‌گیریم (شکل ۳۱.۲). تصویر نقطهٔ M برصفحهٔ P و موازی با خط‌راست l، به نقطه‌ای مانند $M^*\in P$ گفته می‌شود، به نحوی که بردار $\overrightarrow{M^*M}$ با خط راست l موازی باشد و می‌نویسند: $M^*=\mathrm{Pr}_p^l(M)$. نقطهٔ M^*، تنها نقطه‌ای است که از برخورد صفحهٔ P با خط راستی که از M موازی با l رسم‌شود، به دست می‌آید. O را، نقطهٔ برخورد خط راست l با صفحهٔ P فرض می‌کنیم. دستگاه مختصات $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲، \mathbf{e}_۳\}$ را به نحوی در نظر می‌گیریم که $\{\mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$ پایه‌ای در صفحهٔ P و بردار $\mathbf{e}_۳$ موازی با خط راست l باشد.



شکل ۳۱.۲

مختصات نقطه‌های M و M^* را در این دستگاه مختصات، به ترتیب

$$(x_M, y_M, z_M) \quad , \quad (x^*_M, y^*_M, z^*_M)$$

می گیریم. چون بردارهای

$$\overrightarrow{M^*M} = (x_M - x^*_M, y_M - y^*_M, z_M - z^*_M) \quad , \quad \mathbf{e}_۳ = (۰, ۰, ۱)$$

هم‌راستا هستند، داریم:

$$\begin{vmatrix} x_M - x^*_M & y_M - y^*_M \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_M - x^*_M & z_M - z^*_M \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} y_M - y^*_M & z_M - z^*_M \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

بنابراین $x_M = x^*_M$ و $y_M = y^*_M$. نقطهٔ M^* بر صفحهٔ $P = Oxy$ قرار دارد؛ بنابراین z^*_M برابر صفر است. به این ترتیب، با معلوم بودن مختصات نقطهٔ M در یک دستگاه مختصات، می‌توان مختصات نقطهٔ $M^* = \mathrm{Pr}^l_P(M)$ را با این دستورها پیدا کرد:

$$x_M = x^*_M, \quad y_M = y^*_M, \quad z^*_M = ۰$$

تصویر پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$ بر صفحهٔ P و موازی خط راست l، یعنی $\Pr_P^l(MN)$، عبارت است از پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{M^*N^*}$، به نحوی که، برای آن، داشته باشیم:

$$M^*=\Pr_P^l(M)،\ \ N^*=\Pr_P^l(N)$$

اگر $M(x_M، y_M، z_M)$ و $N(x_N، y_N، z_N)$ و بنابراین

$$\overrightarrow{MN}=(x_N-x_M، y_N-y_M، z_N-z_M)$$

در پایهٔ $\{\mathbf{e}_1، \mathbf{e}_2، \mathbf{e}_3\}$ باشد، آن وقت خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{M^*N^*}=(x_N-x_M،\ \ y_N-y_M، 0)$$

$\mathbf{d}$ را یك بردار فرض می‌کنیم. تصویر آن بر صفحهٔ P و موازی خط راست l، یعنی $\mathbf{d}^*=\Pr_P^l(\mathbf{d})$، با برابری

$$\mathbf{d}^*=\Pr_P^l(\overrightarrow{MN})$$

تعریف می‌شود که، در آن، پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$، معرف بردار $\mathbf{d}$ در فضا باشد. این تعریف، مستقل از انتخاب پاره‌خط **راست** جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$ (که بردار $\mathbf{d}$ را مشخص می‌کند) می‌باشد.

□ در واقع، اگر $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{MN}=\mathbf{d}$، آن وقت

$$x_L-x_K=x_N-x_M\ ،\ y_L-y_K=y_N-y_M\ ،\ z_L-z_K=z_N-z_M$$

و بنابراین

$$\overrightarrow{K^*L^*}=(x_L-x_K\ ،\ y_L-y_K\ ،\ 0)=(x_N-x_M\ ،\ y_N-y_M\ ،\ 0)=\overrightarrow{M^*N^*}$$

چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم. ■

اگر $\mathbf{d}=(d_x، d_y، d_z)$، یعنی $\overrightarrow{MN}=(d_x، d_y، d_z)$، در پایهٔ انتخابی ما باشد، آن وقت

$$\mathbf{d}^*=\Pr_p^l(\mathbf{d})=(d_x، d_y، 0)$$

عمل ساختن تصویر یك بردار بر صفحهٔ P و موازی خط راست l،

یك عمل خطی است: برای بردارهای $\mathbf{d}$ و $\mathbf{f}$ و عددهای دلخواه α و β، همیشه داریم:

$$\mathrm{Pr}_P^l(\alpha\mathbf{d}+\beta\mathbf{f})=\alpha\mathrm{Pr}_P^l(\mathbf{d})+\beta\mathrm{Pz}_P^l(\mathbf{f}) \qquad (۲.۶۹)$$

□ اگر $\mathbf{d}=(d_x، d_y، d_z)$ و $\mathbf{f}=(f_x، f_y، f_z)$، آن‌گاه

$$\alpha\mathbf{d}+\beta\mathbf{f}=(\alpha d_x+\beta f_x، \alpha d_y+\beta f_y، \alpha d_z+\beta f_z)$$

بنا براین:

$$\mathrm{Pr}_P^l(\alpha\mathbf{d}+\beta\mathbf{f})=(\alpha d_x+\beta f_x، \alpha d_y+\beta f_y، ۰)$$

به جز آن

$$\mathrm{Pr}_P^l(\mathbf{d})=(d_x، d_y، ۰)، \ \alpha\mathrm{Pr}_P^l(\mathbf{d})=(\alpha d_x، \alpha d_y، ۰);$$
$$\mathrm{Pr}_P^l(\mathbf{f})=(f_x، f_y، ۰)، \ \beta\mathrm{Pr}_P^l(\mathbf{f})=(\beta f_x، \beta f_y، ۰)$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\alpha\mathrm{Pr}_P^l(\mathbf{d})+\beta\mathrm{Pr}_P^l(\mathbf{f})=(\alpha d_x+\beta f_x، \alpha d_y+\beta f_y، ۰)$$

و بنابراین، درستی برابری (۲.۶۹) ثابت می‌شود. ■

مثال ۱.۷.۲. (معیاری برای موازی بودن خط راست و صفحه). خط راست l، به معادلهٔ $\frac{x-x_۰}{a_x}=\frac{y-y_۰}{a_y}=\frac{z-z_۰}{a_z}$ و صفحهٔ P به معادلهٔ

$$Ax+By+Cz+D=۰، \ A^۲+B^۲+C^۲>۰$$

مفروض‌اند. مطلوب است شرط لازم وکافی، برای این‌که خط راست l با صفحهٔ P موازی باشد.

حل. خط راست l تنها وقتی با صفحهٔ P موازی است که، بردارهادی خط راست l، یعنی $\mathbf{a}=(a_x، a_y، a_z)$، با صفحهٔ P موازی باشد، یعنی

$$Aa_x+Ba_y+Ca_z=۰$$

[شرط (۲.۶۸) را ببینید].

مثال ۲.۷.۲. صفحهٔ P و خط راست l، در فضا داده شده‌اند:

$$P: Ax+By+Cz+D=0, \ A^2+B^2+C^2>0;$$

$$l: \frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}, \ a_x^2+a_y^2+a_z^2>0$$

رابطه‌هایی را پیدا کنید که مختصات نقطهٔ $M(x_M, y_M, z_M)$ را، با مختصات تصویر آن بر صفحهٔ P موازی خط راست l، $M^*(x^*, y^*, z^*)$، مربوط کنند.

حل. $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$، بردار هادی خط راست l است. بنا بر تعریف تصویر، عددی مانند $t=t_M$ (وابسته به M) وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $\overrightarrow{M^*M}=t\mathbf{a}$ و یا

$$x_M-x^*=ta_x, \ y_M-y^*=ta_y, \ z_M-z^*=ta_z$$

یعنی

$$x^*=x_M-ta_x, \ y^*=y_M-ta_y, \ z^*=z_M-ta_z$$

مختصات (x^*, y^*, z^*) نقطهٔ M، در صفحهٔ P صدق می‌کند:

$$A(x_M-ta_x)+B(y_M-ta_y)+C(z_M-ta_z)+D=0$$

که با توجه به $Aa_y+B\mathbf{a}_y+Ca_z\neq 0$ (مثال ۱.۷.۲ را ببینید)، به دست می‌آید:

$$t_M=\frac{Ax_M+By_M+Cz_M+D}{Aa_x+Ba_y+Ca_z},$$

$$x^*=\frac{x_M(Ba_y+Ca_z)-a_x(By_M+Cz_M+D)}{Aa_x+Ba_y+Ca_z},$$

$$y^*=\frac{y_M(Aa_x+Ca_z)-a_y(Ax_M+Cz_M+D)}{Aa_x+Ba_y+Ca_z}, \quad (2.70)$$

$$z^*=\frac{z_M(Aa_x+Ba_y)-a_z(Ax_M+By_M+D)}{Aa_x+Ba_y+Ca_z}$$

مثال ۳.۷.۲. تصویر بردار $\mathbf{b}=(1, 0, -2)$ را موازی با خط

راست l به معادلهٔ $\frac{x}{۲}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z+۵}{۱}$ بر صفحهٔ P به معادلهٔ

$$x-۲y+z-۴=\circ$$

به دست آورید.

حل. از رابطه‌های (۲.۷۰) استفاده می‌کنیم. نقطهٔ $N(\circ، \circ، ۴)$ بر صفحهٔ P قرار دارد، بنابراین $N^*=\mathrm{Pr}_P^l(N)=N$. اکنون، نقطهٔ $M(۱،\circ،۲)$ را در نظر می‌گیریم، به نحوی که $\overrightarrow{NM}=\mathbf{b}$. بنابه رابطه‌های (۲.۷۰)، مختصات نقطهٔ $M^*(x^*، y^*، z^*)$، تصویر نقطهٔ M، داریم:

$$x^*=\frac{۱[(-۲).۱+۱.۱]-۲[(-۲).\circ+۱.۲-۴]}{۱.۲+(-۲).۱+۱.۱}=۳،$$

$$y^*=۱،\ z^*=۳$$

در نتیجه

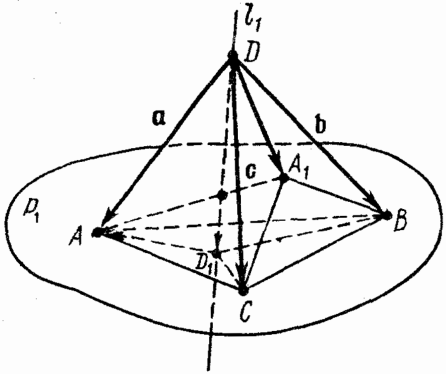
$$\mathrm{Pr}_P^l(\mathbf{b})=\overrightarrow{N^*M^*}(۳، ۱، -۱)$$

مثال ۴.۷.۲* در چهاروجهی $ABCD$، نقطهٔ برخورد میانه‌ها را در مثلث‌های ABC، BCD، CDA و DAB، به ترتیب، $D_۱$، $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ می‌نامیم. صفحه‌های (ABC)، (BCD)، (CDA) و (DAB) را، به‌ترتیب، با $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$ و $P_۴$ وخط‌های راست $(DD_۱)$، $(AA_۱)$، $(BB_۱)$ و $(CC_۱)$ را با $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$ و $l_۴$ نشان می‌دهیم. بردار زیر را، برای بردار دلخواه $\mathbf{d}$ مشخص کنید:

$$\Gamma(\mathbf{d})=\mathrm{Pr}_{P_۱}^{l_۱}(\mathbf{d})+\mathrm{Pr}_{P_۲}^{l_۲}(\mathbf{d})+\mathrm{Pr}_{P_۳}^{l_۳}(\mathbf{d})+\mathrm{Pr}_{P_۴}^{l_۴}(\mathbf{d})$$

حل. بردارهای $\mathbf{a}=\overrightarrow{DA}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{DB}$ و $\mathbf{c}=\overrightarrow{DC}$ هم صفحه نیستند و یك پایه را در فضا تشکیل می‌دهند. بردار $\mathbf{d}$ را در رابطه با این بردارها، می‌توان به‌صورت

$$\mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$$



شکل ۳۲.۲

نشان داد. با استفاده از خطی بودن عمل تصویر، داریم:

$$\Gamma(\mathbf{d})=\Gamma(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})=\mathrm{Pr}_{P_1}^{l_1}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})+$$
$$+\mathrm{Pr}_{P_2}^{l_2}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})+\mathrm{Pr}_{P_3}^{l_3}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})+$$
$$+\mathrm{Pr}_{P_4}^{l_4}(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})=\{\alpha\mathrm{Pr}_{P_1}^{l_1}(\mathbf{a})+\beta\mathrm{Pr}_{P_1}^{l_1}(\mathbf{b})+$$
$$+\gamma\mathrm{Pr}_{P_1}^{l_1}(\mathbf{c})\}+\cdots+\{\alpha\mathrm{Pr}_{P_4}^{l_4}(\mathbf{a})+\beta\mathrm{Pr}_{P_4}^{l_4}(\mathbf{b})+\gamma\mathrm{Pr}_{P_4}^{l_4}(\mathbf{c})\}=$$
$$=\alpha\{\mathrm{Pr}_{P_1}^{l_1}(\mathbf{a})+\mathrm{Pr}_{P_2}^{l_2}(\mathbf{a})+\mathrm{Pr}_{P_3}^{l_3}(\mathbf{a})+\mathrm{Pr}_{P_4}^{l_4}(\mathbf{a})\}+$$
$$+\beta\{\mathrm{Pr}_{P_1}^{l_1}(\mathbf{b})+\cdots+\mathrm{Pr}_{P_4}^{l_4}(\mathbf{b})\}+$$
$$+\gamma\{\mathrm{Pr}_{P_1}^{l_1}(\mathbf{c})+\cdots+\mathrm{Pr}_{P_4}^{l_4}(\mathbf{c})\}=\alpha\Gamma(\mathbf{a})+\beta\Gamma(\mathbf{b})+\gamma\Gamma(\mathbf{c})$$

بنابراین، برای پیدا کردن $\Gamma(\mathbf{d})$، کافی است $\Gamma(\mathbf{a})$، $\Gamma(\mathbf{b})$ و $\Gamma(\mathbf{c})$ را بشناسیم. چون بردار **a** با صفحه‌های P_3 و P_4 موازی‌است (پاره‌خط‌راست جهت‌دار $\overrightarrow{DA}$، معرف بردار **a**، درصفحه‌های P_3 و P_4 قرار دارد)، بنابراین

$$\mathrm{Pr}_{P_3}^{l_3}(\mathbf{a})=\mathrm{Pr}_{P_4}^{l_4}(\mathbf{a})=\mathbf{a}$$

با توجه به نتیجهٔ مثال ۱۲.۵: $\overrightarrow{DD_1}=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$. از این‌جا

$$\mathrm{Pr}_{P_1}^{l_1}(\mathbf{a}) = \overrightarrow{D_1A} = -\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{a} - \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

(شکل ۳۲.۲). با توجه به ویژگی میانه‌ها درمثلث BCD داریم:

$$\mathrm{Pr}_{P_2}^{l_2}(\mathbf{a}) = \overrightarrow{DA_1} = \frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

و بنابراین

$$\Gamma(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \mathbf{a} + \mathbf{a} = \frac{8}{3}\mathbf{a}$$

و به همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد:

$$\Gamma(\mathbf{b}) = \frac{8}{3}\mathbf{b} \quad , \quad \Gamma(\mathbf{c}) = \frac{8}{3}\mathbf{c}$$

که، از آن‌جا، سرانجام خواهیم داشت:

$$\Gamma(\mathbf{d}) = \alpha\Gamma(\mathbf{a}) + \beta\Gamma(\mathbf{b}) + \gamma\Gamma(\mathbf{c}) = \alpha\cdot\frac{8}{3}\mathbf{a} +$$

$$+\beta\cdot\frac{8}{3}\mathbf{b} + \gamma\cdot\frac{8}{3}\mathbf{c} = \frac{8}{3}\mathbf{d}$$

صفحهٔ P و خط‌راست l را، که با P موازی نیست، درفضا درنظر می‌گیریم (شکل ۳۱.۲ را ببینید). تصویر $\mathrm{Pr}_l^P(M)$، یعنی تصویر نقطهٔ M برخط راست l به موازات صفحهٔ P، به نقطه‌ای مانند $M_0 \in l$ گفته می‌شود که از برخورد خط راست l با صفحه‌ای که از M موازی صفحهٔ P شود، به دست آمده باشد. درواقع، بردار $\overrightarrow{MM_0}$ با صفحهٔ P موازی است.

در دستگاه مختصات $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (شکل ۳۱.۲) که، درآن، پایهٔ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ درصفحهٔ P، $\mathbf{e}_3 \| l$ و $O = l \bigcap P$، می‌توان مختصات نقطهٔ M_0، یعنی (x_{0M}, y_{0M}, z_{0M}) را، با استفاده از x_M، y_M، z_M (مختصات نقطهٔ M) و شرطهای $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$، $\overrightarrow{OM_0} \| \mathbf{e}_3$ و $\overrightarrow{MM_0} \| P$ به‌دست آورد. معادلهٔ صفحهٔ P، دراین دستگاه مختصات $z = 0$ است؛ درواقع، صفحهٔ P از

سه نقطهٔ $(0, 0, 0)$، $(1, 0, 0)$ و $(0, 1, 0)$ می‌گذرد و، بنا براین، معادلهٔ آن، چنین می‌شود:

$$0=\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} \Longleftrightarrow 0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Longleftrightarrow z=0$$

بردار $\overrightarrow{MM_*}=(x_{*M}-x_M,\ y_{*M}-y_M,\ z_{*M}-z_M)$ با صفحهٔ P موازی است. با توجه به رابطهٔ (۲.۶۸) خواهیم داشت:

$$0.(x_{*M}-x_M)+0.(y_{*M}-y_M)+1.(z_{*M}-z_M)=0$$

یعنی $z_M=z_{*M}$. چون نقطهٔ M_* برمحور zها قرار دارد، دو مختص اول آن برابر صفر می‌شود. بنا براین، با معلوم‌بودن مختصات نقطهٔ M، مختصات نقطهٔ $M_*=\mathrm{Pr}_l^P(M)$، چنین می‌شود: $M_*(0, 0, z_M)$.

تصویر $\mathrm{Pr}_l^P(\overrightarrow{MN})$، پاره خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$ بر خط راست l و موازی صفحهٔ P، عبارت است از پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{M_*N_*}$ که، درآن، $M_*=\mathrm{Pr}_l^P(M)$ و $N_*=\mathrm{Pr}_l^P(N)$. اگر

$$M(x_M, y_M, z_M)\ ,\ N(x_N, y_N, z_N)$$

آن‌گاه مختصات بردار $\overrightarrow{M_*N_*}$ به‌صورت $(0, 0, z_N-z_M)$ درمی‌آید.

$\mathbf{d}_*=\mathrm{Pr}_l^P(\mathbf{d})$، تصویر بردار $\mathbf{d}$ برخط راست l و موازی صفحهٔ P، بنا به تعریف، به بردار $\mathbf{d}_*=\mathrm{Pr}_l^P(MN)$ گفته می‌شود که، در آن، $\overrightarrow{MN}$، پاره‌خط راست جهت‌داری است که بردار $\mathbf{d}$ را معرفی می‌کند. این تعریف، برای هر پاره‌خط راست جهت‌داری که معرف $\mathbf{d}$ باشد، درست و مستقل از انتخاب $\overrightarrow{MN}$ است. اگر در دستگاه مختصاتی که انتخاب کرده‌ایم، داشته باشیم $\mathbf{d}(d_x, d_y, d_z)$، آن وقت

$$\mathrm{Pr}_l^P(\mathbf{d})=(0, 0, d_z)$$

و چون $\mathrm{Pr}_P^l(\mathbf{d})=(d_x, d_y, 0)$، بنا براین، برای هر بردار $\mathbf{d}$ داریم:

$$\mathrm{Pr}_l^P(\mathbf{d})+\mathrm{Pr}_P^l(\mathbf{d})=\mathbf{d} \qquad (۲.۷۱)$$

عمل تصویر بردار برخط راست l به موازات صفحهٔ l، دارای ویژگی خطی است و برای بردارهای دلخواه $\mathbf{d}$ و $\mathbf{f}$ و هر دو عدد α و β داریم:

$$\mathrm{Pr}_l^P(\alpha\mathbf{d}+\beta\mathbf{f})=\alpha\mathrm{Pr}_l^P(\mathbf{d})+\beta\mathrm{Pr}_l^P(\mathbf{f}) \qquad (۲.۷۲)$$

مثال ۵.۷.۲. نقطهٔ $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ و صفحهٔ P به معادلهٔ

$$Ax+By+Cz+D=\circ,\quad A^۲+B^۲+C^۲>\circ$$

در یك دستگاه مختصات داده شده‌اند. معادلهٔ صفحهٔ P^* را پیدا کنید که از نقطهٔ $M_\circ$ موازی صفحهٔ P رسم شده است.

حل. معادلهٔ هرصفحهٔ P^*، موازی با صفحهٔ P، به این صورت است:

$$Ax+By+Cz+D^*=\circ$$

مقدار ثابت D^* را می‌توانیم، از این شرط که، نقطهٔ $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ متعلق به صفحهٔ P^* است، به دست آوریم:

$$Ax_\circ+By_\circ+Cz_\circ+D^*=\circ \Longleftrightarrow D^*=-Ax_\circ-By_\circ-Cz_\circ$$

و بنابراین، برای معادلهٔ صفحهٔ P^*، داریم:

$$A(x-x_\circ)+B(y-y_\circ)+C(z-z_\circ)=\circ$$

مثال ۶.۷.۲. در دستگاه مختصات مفروضی، خط راست l و صفحهٔ P داده شده‌اند:

$$l:\frac{x-۱}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z+۱}{-۱};\quad P:۲x+y+z+۲=\circ$$

نقطهٔ $M(۱,۲,۳)$ را برخط راست l موازی صفحهٔ P تصویر کرده‌ایم؛ مختصات تصویر آن $M_*(x_*, y_*, z_*)$ را پیدا کنید.

حل. معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطهٔ M موازی با صفحهٔ P رسم شود، چنین است:

$$۲(x-۱)+۱(y-۲)+۱(z-۳)=\circ \Longleftrightarrow ۲x+y+z-۷=\circ$$

(مثال قبل‌را ببینید). $M_* = \mathrm{Pr}_l^P(M)$، نقطهٔ برخورد این‌صفحه باخط‌راست l است و، بنابراین، مختصات آن، از دستگاه زیر به‌دست می‌آید:

$$۲x_* + y_* + z_* - ۷ = ۰،$$

$$x_* - ۱ = \frac{۱}{۲} y_*، \ z_* + ۱ = -\frac{۱}{۲} y_*$$

و ازآن‌جا: $x_* = ۳$، $y_* = ۴$، $z_* = -۳$.

مثال ۷۰۷۰۲*. نقطه‌هـای M، N، Q، K، L و R، بـه ترتیب، وسط یال‌های $[AD]$، $[BD]$، $[CD]$، $[AC]$، $[AB]$ و $[BC]$ از چهـار وجهی $ABCD$ هستند. صفحه‌های (CMB)، (ANC)، (AQB)، (DKB)، (DLC) و (DRA) را، به ترتیب، $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، $P_۴$، $P_۵$ و $P_۶$، و خط‌های راست (AD)، (BD)، (CD)، (AC)، (AB) و (BC) را، به ترتیب، بـا $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$، $l_۴$، $l_۵$ و $l_۶$ نشان می‌دهیم. برای بردار دلخواه $\mathbf{d}$، بردار زیر را مشخص کنید:

$$\Gamma(\mathbf{d}) = \mathrm{Pr}_{l_۱}^{P_۱}(\mathbf{d}) + \mathrm{Pr}_{l_۲}^{P_۲}(\mathbf{d}) + \mathrm{Pr}_{l_۳}^{P_۳}(\mathbf{d}) +$$
$$+ \mathrm{Pr}_{l_۴}^{P_۴}(\mathbf{d}) + \mathrm{Pr}_{l_۵}^{P_۵}(\mathbf{d}) + \mathrm{Pr}_{l_۶}^{P_۶}(\mathbf{d})$$

حل. بردارهای $\mathbf{a} = \overrightarrow{DA}$، $\mathbf{b} = \overrightarrow{DB}$ و $\mathbf{c} = \overrightarrow{DC}$، یك پایه را در فضا تشکیل می‌دهند. بردار $\mathbf{d}$ را، در رابطه با این پایه، می‌توان به‌صورت

$$\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

نوشت. با توجه به ویژگی خطی عمل تصویر، داریم:

$$\Gamma(\mathbf{d}) = \Gamma(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \sum_{j=۱}^{۶} \mathrm{Pr}_{l_j}^{P_j}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) =$$

$$= \sum_{j=۱}^{۶} \left(\alpha \mathrm{Pr}_{l_j}^{P_j}(\mathbf{a}) + \beta \mathrm{Pr}_{l_j}^{P_j}(\mathbf{b}) + \gamma \mathrm{Pr}_{l_j}^{P_j}(\mathbf{c})\right) =$$

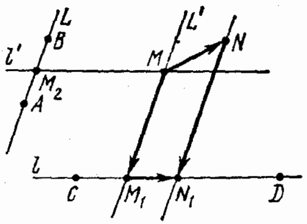
$$= \alpha \sum_{j=۱}^{۶} \mathrm{Pr}_{l_j}^{P_j}(\mathbf{a}) + \beta \sum_{j=۱}^{۶} \mathrm{Pr}_{l_j}^{P_j}(\mathbf{b}) + \gamma \sum_{j=۱}^{۶} \mathrm{Pr}_{l_j}^{P_j}(\mathbf{c}) =$$

$$=\alpha\Gamma(\mathbf{a})+\beta\Gamma(\mathbf{b})+\gamma\Gamma(\mathbf{c})$$

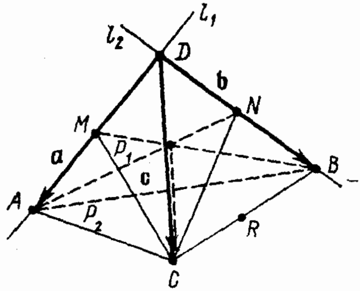
(مثال ۴.۷.۲ را ببینید). $\Gamma(\mathbf{a})$ را پیدا می‌کنیم. از آن‌جا که

$$\mathrm{Pr}_{l_1}^{P_1}(A)=A,\ \mathrm{Pr}_{l_1}^{P_1}(D)=D$$

بنابراین $\mathrm{Pr}_{l_1}^{P_1}(\mathbf{a})=\mathbf{a}$ (شکل ۳۳.۲). و چون



شکل ۳۴.۲



شکل ۳۳.۲

$$\mathrm{Pr}_{l_2}^{P_2}(A)=N\ ,\ \mathrm{Pr}_{l_2}^{P_2}(D)=D$$

بنابراین $\mathrm{Pr}_{l_2}^{P_2}(\mathbf{a})=\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\mathbf{b}$؛ و به همین ترتیب

$$\mathrm{Pr}_{l_3}^{P_3}(\mathbf{a})=\frac{1}{2}\mathbf{c},\ \mathrm{Pr}_{l_4}^{P_4}(\mathbf{a})=\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{c}),\ \mathrm{Pr}_{l_5}^{P_5}(\mathbf{a})=\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$$

چون $\mathrm{Pr}_{l_6}^{P_6}(A)=\mathrm{Pr}_{l_6}^{P_6}(D)=R$، بنابراین

$$\mathrm{Pr}_{l_6}^{P_6}(\mathbf{a})=RR=0$$

و در نتیجه

$$\Gamma(\mathbf{a})=\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}+\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{c})+\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\vec{0}=2\mathbf{a}$$

به همین ترتیب، می‌توان به دست آورد:

$$\Gamma(\mathbf{b})=۲\mathbf{b}،\ \ \Gamma(\mathbf{c})=۲\mathbf{c}$$

به این ترتیب، برای هر بردار $\mathbf{d}$ داریم:

$$\Gamma(\mathbf{d})=\alpha\Gamma(\mathbf{a})+\beta\Gamma(\mathbf{b})+\gamma\Gamma(\mathbf{c})=۲\alpha\mathbf{a}+۲\beta\mathbf{b}+۲\gamma\mathbf{c}=۲\mathbf{d}$$

دو خط راست غیر موازی l و L را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم (شکل ۳۴.۲). تصویر $\mathrm{Pr}_l^L(M)$ از نقطهٔ $M\in P$ بر خط راست l به موازات L را، به عنوان نقطه‌ای مانند $M_۱\in l$ تعریف می‌کنند، به شرطی که بردار $\overrightarrow{MM_۱}$ موازی L باشد. نقطهٔ $M_۱$، تنها نقطه‌ای است که از برخورد خط راست l با خط راستی که از M موازی L رسم می‌شود، به دست می‌آید.

M و N را متعلق به صفحهٔ P می‌گیریم. تصویر $\mathrm{Pr}_l^L(\overrightarrow{MN})$، یعنی تصویر پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$ بر خط راست l و موازی با L، به عنوان پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{M_۱N_۱}$ تعریف می‌شود که، در آن،

$$M_۱=\mathrm{Pr}_l^L(M)\ \ ,\ \ N_۱=\mathrm{Pr}_l^L(N)$$

اکنون، $\mathbf{d}$ را برداری موازی با صفحهٔ P می‌گیریم. تصویر $\mathbf{d}$ برخط راست l وموازی با خط راست L، به‌عنوان تصویرپاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$،که معرف بردار $\mathbf{d}$ است، تعریف می‌شود، به نحوی که دو نقطهٔ M و N، ابتدا و انتهای پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{MN}$، روی صفحهٔ P باشد:

$$d^*=\mathrm{Pr}_l^L(\mathbf{d})=\mathrm{Pr}_l^L(\overrightarrow{MN})$$

روشن است که، این تعریف، مستقل از انتخاب پاره‌خط راست جهت‌داری است که بردار $\mathbf{d}$ را مشخص می‌کند. عمل تصویرکردن یك بردار بریك خط راست l، موازی با خط راست L، در صفحه، عملی خطی است، یعنی، برای هر دو بردار $\mathbf{d}\|P$ و $\mathbf{f}\|P$ و هر دو عدد α و β داریم:

$$\mathrm{Pr}_l^L(\alpha\mathbf{d}+\beta\mathbf{f})=\alpha\mathrm{Pr}_l^L(\mathbf{d})+\beta\mathrm{Pr}_l^L(\mathbf{f})$$

اتحاد زیر هم، همیشه برقرار است:

$$\mathbf{d}=\mathrm{Pr}_l^L(\mathbf{d})+\mathrm{Pr}_L^l(\mathbf{d})$$

مثال ۸۰۷۰۲. تحقیق کنید، خط‌های راست

$$l: \frac{x-۲}{۱}=\frac{y+۲}{-۳}=\frac{z-۳}{۱}; \quad L: \frac{x}{۱}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z+۱}{۳}$$

در یك صفحه واقع‌اند و باهم موازی نیستند. تصویر نقطهٔ $M(۰, -۴, -۷)$ را بر خط راست l و موازی خط راست L را پیدا کنید.

حل. خط‌های راست l و L موازی نیستند، چون بردارهای هادی آن‌ها $\mathbf{b}=(۱, -۳, ۱)$ و $\mathbf{c}=(۱, -۱, ۳)$ هم‌راستا نیستند:

$$\begin{vmatrix} -۳ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix}\neq ۰, \ -\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}\neq ۰, \ \begin{vmatrix} ۱ & -۳ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}\neq ۰$$

ثابت می‌کنیم، این دو خط راست، یکدیگر را قطع می‌کنند (که در نتیجه، در صفحه قرار دارند). برای این منظور، ثابت می‌کنیم دستگاه معادله‌های

$$x-۲=\frac{y+۲}{-۳}, \quad z-۳=\frac{y+۲}{-۳},$$

$$x=-y+۲, \quad z=-۳(y-۲)-۱$$

دارای جواب است. از سه معادلهٔ اول به دست می‌آید: $x=۱$، $y=۱$، $z=۲$. و به سادگی روشن می‌شود که، این مقدارهای x و y و z، درمعادلهٔ چهارم دستگاه صدق می‌کنند. به این ترتیب، خط‌های راست l و L، در نقطهٔ $N(۱, ۱, ۲)$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

اکنون $\mathrm{Pr}_l^L(M)$ را پیدا می‌کنیم. برای این منظور، از نقطهٔ مفروض $M(۰, -۴, -۷)$، خط راستی موازی L رسم می‌کنیم. معادلهٔ این خط راست، چنین است:

$$\frac{x-۰}{۱}=\frac{y+۴}{-۱}=\frac{z+۷}{۳}$$

نقطهٔ $\mathrm{Pr}_l^L(M)$، در محل برخورد این خط راست با خط راست l قراردارد

و، بنابراین، مختصات آن از دستگاه معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$$x=-y-۴،\ z+۷=-۳(y+۴)،\ x-۲=-\frac{y+۲}{۳},$$

$$z-۳=-\frac{y+۲}{۳}$$

این دستگاه متوافق است و جواب دارد: $x=۴$، $y=-۸$، $z=۵$. در نتیجه، مختصات نقطهٔ $\mathrm{Pr}_l^L(M)$، عبارت است از $(۴، -۸، ۵)$.

مثال ۹.۷.۲. چهار نقطهٔ $A(۱، ۲)$، $B(۲، ۵)$، $C(۱، -۱)$ و $D(۳، -۷)$ در یک صفحه داده شده‌اند. $L=(AB)$ و $l=(CD)$ می‌گیریم. نقطهٔ M را طوری پیدا کنید که، نقطهٔ $M_۱=\mathrm{Pr}_l^L(M)$، پاره‌خط راست $[CD]$ را به نسبت ۳ : ۱ تقسیم کند، به شرطی که این نسبت را از طرف نقطهٔ C به حساب آوریم و، در ضمن، نقطهٔ $M_۲=\mathrm{Pr}_L^l(M)$، وسط پاره‌خط راست $[AB]$ باشد.

حل. با توجه به دستورهای تقسیم پاره‌خط راست به نسبت مفروض، مختصات نقطهٔ $M_۱$ چنین است:

$$x_۱=\frac{x_C+\frac{۱}{۳}x_D}{۱+\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۲}،\ y_۱=\frac{(-۱)+\frac{۱}{۳}(-۷)}{۱+\frac{۱}{۳}}=-\frac{۵}{۲}$$

مختصات نقطهٔ $M_۲$ هم، $x_۲=\frac{۳}{۲}$، $y_۲=\frac{۷}{۲}$ می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم: $L'=(\overrightarrow{MM_۱})$ و $l'=(MM_۲)$ (شکل ۳۴.۲). بنا بر تعریف تصویر $L'\|L$ و $l'\|l$. در نتیجه، $\overrightarrow{AB}=(۱، ۳)$، بردار هادی خط راست L' است که از نقطهٔ $M_۱\left(\frac{۳}{۲}، -\frac{۵}{۲}\right)$ می‌گذرد. بنا براین، معادلهٔ خط راست L' چنین است:

$$\frac{x-\frac{۳}{۲}}{۱}=\frac{y+\frac{۵}{۲}}{۳} \iff ۳x-y-۷=۰$$

بردار هادی خط راست l' عبارت است از $\overrightarrow{CD}=(۲، -۶)$، $M_۲\in l'$. به این ترتیب، معادلهٔ l' چنین می‌شود:

$$\frac{x-\frac{۳}{۲}}{۲}=\frac{y-\frac{۷}{۲}}{-۶} \iff ۳x+y-۸=۰$$

مختصات نقطهٔ M، از حل دستگاه معادله‌های

$$۳x-y-۷=۰،\quad ۳x+y-۸=۰$$

به دست می‌آید: $M\left(\frac{۵}{۲}، \frac{۱}{۲}\right)$ که همان نقطهٔ برخورد l' و L' است.

بخش ۸.۲. مثال‌های مختلف

مثال ۱.۸.۲. مثلث ABC مفروض است. نقطهٔ M را طوری پیدا کنید که، برای آن، داشته باشیم:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-۳\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$$

حل. از آن‌جا که

$$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}،\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}،\quad \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}$$

به دست می‌آید:

$$(-\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM})-۳(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{AB}$$

و یا $\overrightarrow{AM}=۳\overrightarrow{AC}$. نقطهٔ M درامتداد ضلع $[AC]$ (ازطرف نقطهٔ C) قرار دارد و $|AM|=۳|AC|$.

مثال ۲.۸.۲. ثابت کنید، برای هر مجموعهٔ متناهی از نقطه‌های $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n (در فضا یا در صفحه)، نقطهٔ منحصر به فردی مانند M

وجود دارد، به نحوی که

$$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\overrightarrow{MA_n}=0$$

جای نقطهٔ M را در هر یك از حالت‌های خاص زیر پیدا کنید:

۱) $A_1A_2A_3$، یك مثلث است؛

۲) $A_1A_2A_3A_4$، یك چهارضلعی در فضا یا در صفحه است؛

۳) $A_1A_2\ldots A_n$، یك n ضلعی منتظم در صفحه است.

حل. نقطه‌ای مثل O را به‌عنوان قطب در نظر می‌گیریم. برای هرنقطهٔ M داریم:

$$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\overrightarrow{MA_n}=(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OM})+(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OM})+$$
$$+\cdots+(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OM})=(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})-n\overrightarrow{OM}$$

از این‌جا روشن می‌شود که، نقطهٔ M، تنها وقتی با شرط مسأله سازگاراست که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}) \qquad (۲.۷۳)$$

یعنی، نقطهٔ M، انتهای بردار $\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})$ است، به‌شرطی که ابتدای آن را، نقطهٔ O به حساب آوریم. نقطهٔ M همواره وجود دارد و منحصر به فرد است.

۱) در حالت مثلث $A_1A_2A_3$ داریم:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3})$$

اگر نقطهٔ A_1 را به عنوان قطب در نظر بگیریم، به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{A_1M}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3})=\frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}}{2}$$

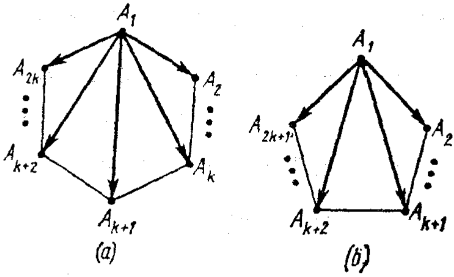
یعنی، نقطهٔ M، بر میانه‌ای از مثلث $A_1A_2A_3$ قرار دارد که از رأس A_1

رسم شده باشد و، آن را، از سمت A_1، به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می کند. اگر به‌جای A_1، یکی از دونقطهٔ A_2 یا A_3 را به عنوان قطب انتخاب می کردیم، آن وقت، نقطهٔ M، روی میانهٔ وارد از رأس A_2 یا A_3 قرار می گرفت و آن را به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کرد. از این‌جا نتیجه می‌شود که، میانه‌های هر مثلث، دریك نقطه (مرکز ثقل مثلث) به‌هم می‌رسند و مجموع سه برداری که مبداءآن‌ها، مرکز ثقل، و انتهای آن‌ها، سه رأس مثلث باشند، برابر صفر است. در ضمن، این نقطه، هر یك از میانه‌ها را به‌نسبت ۱ : ۲ تقسیم‌می کند. شعاع حامل مرکز ثقل M در مثلث $A_1A_2A_3$، متناظر با قطب O، به کمك دستور زیر محاسبه می‌شود:

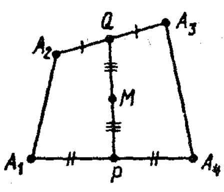
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_2+\overrightarrow{OA}_3)$$

۲) در حالت چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ داریم:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}_1+\overrightarrow{OA}_2+\overrightarrow{OA}_3+\overrightarrow{OA}_4)$$



شکل ۳۶.۲



شکل ۳۵.۲

P و Q را وسط ضلع‌های $[A_1A_4]$ و $[A_2A_3]$ می گیریم. (شکل ۳۵.۲). نقطهٔ A_1 را به جای قطب فرض می کنیم؛ داریم:

$$\overrightarrow{A_۱M}=\frac{۱}{۴}(\overrightarrow{A_۱A_۲}+\overrightarrow{A_۱A_۳}+\overrightarrow{A_۱A_۴})=$$

$$=\frac{۱}{۴}[\overrightarrow{A_۱A_۲}+(\overrightarrow{A_۱A_۴}+\overrightarrow{A_۴A_۳})+\overrightarrow{A_۱A_۴}]=$$

$$=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{A_۱A_۴}+\frac{۱}{۲}\left(\frac{\overrightarrow{A_۱A_۲}+\overrightarrow{A_۴A_۳}}{۲}\right)=\overrightarrow{A_۱P}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{PQ}$$

(در این جا، از برابری $\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{A_۱A_۲}+\overrightarrow{A_۴A_۳}}{۲}$ استفاده کرده‌ایم؛ مثال ۵.۲.۲ را ببینید). به این ترتیب، نقطهٔ M، بر پاره‌خط راستی قرار دارد که وسط دو پاره‌خط راست $[A_۲A_۳]$ و $[A_۱A_۴]$ را به‌هم وصل و، درضمن، آن را نصف می‌کند.

نتیجه. در هر چهاروجهی، پاره‌خط‌های راست واصل بین نقطه‌های وسط یال‌های متنافر، در نقطه‌ای مثل M مشترک‌اند و، درآن‌جا، یکدیگر را نصف می‌کنند. مجموع بردارهای به مبداء M و انتهای هر یک از رأس‌های چهاروجهی، برابر صفر است.

۳) در حالت n ضلعی منتظم $A_۱A_۲\cdots A_n$ داریم:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{۱}{n}(\overrightarrow{OA_۱}+\overrightarrow{OA_۲}+\dots+\overrightarrow{OA_n})$$

$A_۱$ را قطب می‌گیریم. اگر n عددی زوج باشد $(n=۲k)$، آن وقت، بردارهای

$$\overrightarrow{A_۱A_۲}+\overrightarrow{A_۱A_{۲k}},\ \overrightarrow{A_۱A_۳}+\overrightarrow{A_۱A_{۲k-۱}},\ \dots,\ \overrightarrow{A_۱A_k}+\overrightarrow{A_۱A_{k+۲}},\ \overrightarrow{A_۱A_{k+۱}}$$

با نیمساز زاویهٔ $A_۲A_۱A_{۲k}$ هم‌جهت‌اند (شکل ۳۶.۲ـa). اگر n عددی فرد باشد $(n=۲k+۱)$، آن وقت بردارهای

$$\overrightarrow{A_۱A_۲}+\overrightarrow{A_۱A_{۲k+۱}},\ \overrightarrow{A_۱A_۳}+\overrightarrow{A_۱A_{۲k}},\ \dots,\ \overrightarrow{A_۱A_{k+۱}}+\overrightarrow{A_۱A_{k+۲}}$$

با نیمساز زاویهٔ $A_۲A_۱A_{۲k+۱}$ هم‌جهت‌اند (شکل ۳۶.۲ـb). در هر دو

حالت، بردار

$$\overrightarrow{A_1M}=\frac{1}{n}[(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_n})+(\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_{n-1}})+\cdots$$

دارای همان جهت است (یعنی در جهت نیمساز زاویهٔ $A_2A_1A_n$ قراردارد). به این ترتیب، نقطهٔ M در امتداد نیمساز $A_2A_1A_n$ واقع است. اگر نقطهٔ A_2 به عنوان قطب انتخاب شود، در این صورت نقطهٔ M، بر نیمساز زاویهٔ $A_1A_2A_3$ هم قرار می‌گیرد و، در نتیجه، M بر مرکز چندضلعی منطبق می‌شود: مجموع بردارهای به مبداء M (مرکز چندضلعی منتظم) و انتهای هریك از رأس‌ها، برابر صفر است.

مثال ۳۰۸۰۲. ثابت کنید، در هر چهاروجهی، پاره‌خطهای راستی که رأس‌ها را به مرکز ثقل وجه‌های مقابل وصل می‌کنند، در یك نقطه به هم می‌رسند و، این نقطه، هر یك از این پاره‌خطهای راست را، از طرف رأس، به نسبت ۱ : ۳ تقسیم می‌کند.

حل. چهاررأس‌چهار وجهی‌را A، B، C و D می‌نامیم. فرض‌می‌کنیم:

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{DA},\ \mathbf{b}=\overrightarrow{DB},\ \mathbf{c}=\overrightarrow{DC}$$

Q را مرکز ثقل وجه ACD، و M را نقطه‌ای از پاره‌خط راست $[QB]$ می‌گیریم، به‌نحوی که آن را به نسبت ۱ : ۳ تقسیم‌کرده باشد (شکل ۳۷۰۲). بنابر دستور مثال قبل

$$\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{3}[(\mathbf{a}-\mathbf{b})+(-\mathbf{b})+(\mathbf{c}-\mathbf{b})]=$$

$$=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{3}-\mathbf{b}$$

و از آنجا

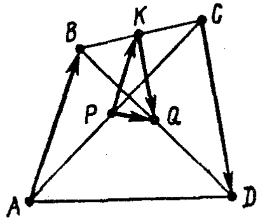
$$\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{3}-\mathbf{b}\right)=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{4}-\frac{3}{4}\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BM}=\mathbf{b}+\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{۴}-\frac{۳}{۴}\mathbf{b}\right)=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{۴}=$$

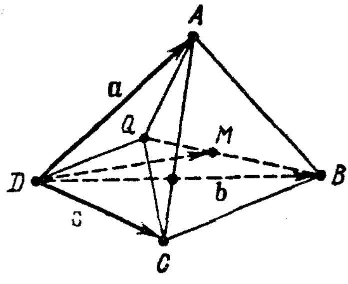
$$=\frac{۱}{۴}(\overrightarrow{DD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$$

یعنی برای نقطهٔ M داریم (مثال ۲۰۸۰۲، (بخش ۲) را ببینید):

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=0 \qquad (۲۰۷۴)$$



شکل ۳۸۰۲



شکل ۳۷۰۲

نقطهٔ M، در چهاروجهی $ABCD$، بر پاره‌خط راستی قرار دارد که رأس B را به مرکز ثقل Q از وجه مقابل وصل می‌کند و این پاره‌خط راست را به نسبت ۱ : ۳، از طرف رأس، تقسیم می‌کند. اگر در مورد رأس‌های C، D یا A هم، به همین ترتیب استدلال کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که نقطهٔ M [که در رابطهٔ (۲۰۷۴) صدق می‌کند]، روی هر یك از پاره‌خط‌های راستی قرار دارد که این رأس‌ها را به مرکز ثقل وجه روبه‌رو وصل می‌کنند و، در ضمن، هر کدام ازاین پاره‌خط‌های راست را، به نسبت ۱ : ۳ تقسیم می‌کند.

مثال ۴۰۸۰۲. چهار نقطهٔ متمایز A، B، C و D در فضا داده شده‌اند. وسط پاره‌خط‌های راست $[AC]$ و $[BD]$ را، به ترتیب، P و Q می‌نامیم.

ثابت کنید:

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$$

حل. K را وسط $[BC]$ می‌گیریم (شکل ۳۸.۲). $[PK]$ وسط دو ضلع مثلث ABC را به‌هم وصل کرده است، بنابراین $\overrightarrow{PK}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}$. به‌همین ترتیب: $\overrightarrow{KQ}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{CD}$. در نتیجه

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KQ}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$$

مثال ۵.۸.۲. A، B، C، D، E، F، G، H نقطه‌هایی از فضا یا صفحه، و نقطه‌های M، N، P، Q، M'، N'، P'، Q'، R، S، R'، S'، به ترتیب، وسط پاره‌خطهای راست $[AB]$، $[CD]$، $[BC]$، $[DE]$، $[AH]$، $[GF]$، $[HG]$، $[FE]$، $[MN]$، $[PQ]$، $[M'N']$، $[P'Q']$ هستند(شکل ۳۹.۲). ثابت کنید:

$$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{R'S'}$$

حل. با توجه به ویژگی خط میانه درچهارضلعی فضائی (مثال ۵.۲.۲ را ببینید)، داریم:

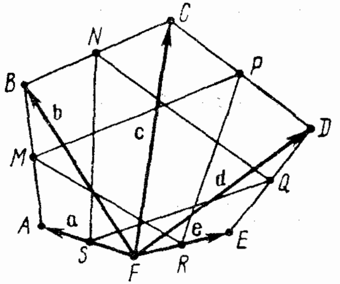
$$\overrightarrow{RS}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MQ}),\quad \overrightarrow{NP}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{DB},\quad \overrightarrow{MQ}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE})$$

بنابراین:

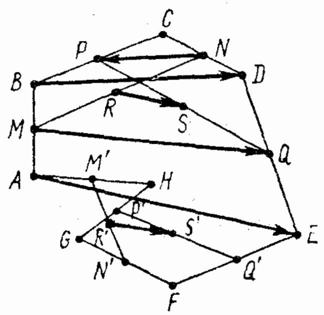
$$\overrightarrow{RS}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\overrightarrow{DB}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BD}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{AE}\right)=\frac{۱}{۴}\overrightarrow{AE}$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{R'S'}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{N'P'}+\overrightarrow{M'Q'})=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲}\overrightarrow{FH}+\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{AE})\right]=\frac{۱}{۴}\overrightarrow{AE}$$



شکل ۴۰.۲



شکل ۳۹.۲

مثال ۶.۸.۲. در شش‌ضلعی محدب $ABCDEF$، وسط ضلع‌ها را، یك درمیان، به‌هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطهٔ برخورد میانه‌ها، در دو مثلثی که به این ترتیب به دست می‌آیند، برهم منطبق‌اند.

حل. وسط ضلع‌های $[FA]$، $[AB]$، $[BC]$، $[CD]$، $[DE]$، $[EF]$ را به ترتیب S، M، N، P، Q، R می‌نامیم و قرار می‌گذاریم:

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{FA},\ \mathbf{b}=\overrightarrow{FB},\ \mathbf{c}=\overrightarrow{FC},\ \mathbf{d}=\overrightarrow{FD},\ \mathbf{e}=\overrightarrow{FE}$$

(شکل ۴۰.۲). نقطهٔ F، رأس شش‌ضلعی را، به‌عنوان قطب انتخاب می‌کنیم و مرکز ثقل مثلث‌های MPR و SRQ را، به ترتیب، K و L می‌نامیم و بردارهای حامل نقطه‌های K و L را نسبت به قطب پیدا می‌کنیم. داریم:

$$\overrightarrow{FM}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),\ \overrightarrow{FP}=\frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}),\ \overrightarrow{FR}=\frac{1}{2}\mathbf{e},\ \overrightarrow{FS}=\frac{1}{2}\mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{FN}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}),\ \overrightarrow{FQ}=\frac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{e})$$

و با توجه به مثال ۲.۸.۲ خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{FK}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FR})=\frac{۱}{۳}\Big[\frac{۱}{۲}(\mathbf{a}+\mathbf{b})+$$

$$+\frac{۱}{۲}(\mathbf{c}+\mathbf{d})+\frac{۱}{۲}\mathbf{e}\Big]=\frac{۱}{۶}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e});$$

$$\overrightarrow{FL}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{FQ})=\frac{۱}{۳}\Big[\frac{۱}{۲}\mathbf{a}+\frac{۱}{۲}(\mathbf{b}+\mathbf{c})+$$

$$+\frac{۱}{۲}(\mathbf{d}+\mathbf{e})\Big]=\frac{۱}{۶}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e})$$

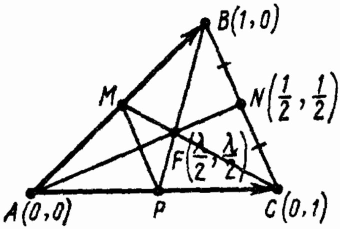
یعنی $\overrightarrow{FL}=\overrightarrow{FK}$.

مثال ۰۷۰۸۰۲ $[AN]$ میانهٔ وارد از رأس A در مثلث مفروض ABC است. از نقطهٔ دلخواه F واقع بر پاره‌خط راست $[AN]$، خط‌های راست (CF) و (BF) را رسم کرده‌ایم تا ضلع‌های $[AB]$ و $[AC]$ را، به‌ترتیب، در نقطه‌های M و P قطع کنند. ثابت کنید، چهارضلعی $CPMB$، تنها وقتی ذوزنقه است که داشته باشیم: $F\neq A$ و $F\neq N$.

حل. دستگاه‌مختصات $\{A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$ را درنظر می گیریم (شکل ۴۱۰۲). دراین دستگاه مختصات، داریم:

$$A(۰,۰),\ B(۱,۰),\ C(۰,۱),$$

$$N\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right),\ \overrightarrow{AN}=\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$$



شکل ۴۱۰۲

نقطهٔ F بر پاره‌خط‌راست $[AN]$ قرار دارد و $F\neq A$ و $F\neq N$. بنابراین، به ازای مقداری از $\lambda\in(۰,۱)$، داریم:

$$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AN}\ \text{و}\ F\left(\frac{\lambda}{۲},\frac{\lambda}{۲}\right).$$

معادلهٔ خط‌های راست (BF)، (CM)، (AC) و (AB) چنین است:

$$(BF): \frac{x-1}{\frac{\lambda}{2}-1}=\frac{y-0}{\frac{\lambda}{2}-0} \iff \lambda x-(\lambda-2)y-\lambda=0;$$

$$(CM): \frac{x-0}{\frac{\lambda}{2}-0}=\frac{y-1}{\frac{\lambda}{2}-1} \iff (\lambda-2)x-\lambda y+\lambda=0;$$

$$(AC): x=0;\ (AB): y=0$$

و مختصات نقطهٔ $P=(BF)\bigcap(AC)$ از دستگاه معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$$\lambda x-(\lambda-2)y-\lambda=0,\ \ x=0$$

که از آن‌جا به‌دست‌می‌آید: $P\left(0, \frac{\lambda}{2-\lambda}\right)$. به‌همین ترتیب $M\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}, 0\right)$.

بنابراین $\overrightarrow{MP}=\left(-\frac{\lambda}{2-\lambda}, \frac{\lambda}{2-\lambda}\right)$. چون $\overrightarrow{BC}=(-1, 1)$، بنابراین

$$\overrightarrow{MP}=\frac{\lambda}{2-\lambda}\overrightarrow{BC}, \Rightarrow (MP)\|(BC)\ ,\ |MP|\neq|BC|$$

یعنی چهارضلعی $CPMB$ ذوزنقه است.

مثال ۰۸۰۸۰۲* مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این‌که سه خط راست

$$l_i: A_i x+B_i y+C_i=0,\ \ A_i^2+B_i^2>0\ \ (i=1, 2, 3)$$

دارای نقطهٔ مشترکی در صفحه باشند.

حل. سه خط راست l_1، l_2 و l_3، تنها وقتی یك نقطهٔ مشترك دارند که عددهای x_0 و y_0 (مختصات نقطهٔ مشترك) وجود داشته باشند، به نحوی که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$C_1=-x_0A_1-y_0B_1,\ C_2=-x_0A_2-y_0B_2,$$

$$C_3=-x_0A_3-y_0B_3 \qquad (2.75)$$

اگر با در نظر گرفتن پایه‌ای در فضا، بردارهای

$$\mathbf{a}=(A_1, A_2, A_3),\ \mathbf{b}=(B_1, B_2, B_3),\ \mathbf{c}=(C_1, C_2, C_3)$$

را مشخص کنیم، آن وقت، شرط (۲.۷۵) به این معناست که می‌توان، بردار C را، برحسب بردارهای **a** و **b** بیان کرد. به این ترتیب، اگر خطهای راست l_1، l_2 و l_3 نقطهٔ مشترکی داشته باشند، آن‌وقت، بردارهای **a**، **b** و **c** هم‌صفحه‌اند:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (2.76)$$

شرط (۲.۷۶)، شرط لازم است برای آن‌که خطهای راست l_1، l_2 و l_3، در یك نقطه مشترك باشند.

ثابت می‌کنیم، همین شرط، کافی هم هست. اگر بردارهای

$$\mathbf{a}=(A_1, A_2, A_3) \quad , \quad \mathbf{b}=(B_1, B_2, B_3)$$

هم‌راستا نباشند، شرط (۲.۷۶) نشان می‌دهد که، بردارهای **a** و **b** و **c**، هم‌صفحه‌اند و بردار **c** موازی با صفحه‌ای است که بردارهای **a** و **b**، در آن، تشکیل پایه می‌دهند. با توجه به دستور (۲.۳۸)، شرط (۲.۷۵)، برای مقداری از x_0 و y_0 برقرار است. ولی اگر بردارهای **a** و **b** هم‌راستا باشند، آن وقت یا

$$b\neq 0,\ \mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}: A_1=\lambda B_1,\ A_2=\lambda B_2,\ A_3=\lambda B_3$$

و شرط (۲.۷۵) به این صورت درمی‌آید:

$$C_1=-(\lambda x_0+y_0)B_1,\ C_2=-(\lambda x_0+y_0)B_2,$$
$$C_3=-(\lambda x_0+y_0)B_3$$

یعنی $\mathbf{c}=-(\lambda x_0+y_0)\mathbf{b}$؛ و یا

$$\mathbf{a}\neq 0,\ \mathbf{b}=\mu\mathbf{a}: B_i=\mu A_i (i=1, 2, 3)$$

و شرط (۲.۷۵) به صورت $\mathbf{c}=-(x_\circ+\mu y_\circ)\mathbf{a}$ درمی آید.

بنابراین، شرط لازم و کافی، برای این‌که سه خط راست

$$l_i: A_i x+B_i y+C_i=\circ,\ A_i^{\text{۲}}+B_i^{\text{۲}}>\circ\quad (i=\text{۱،۲،۳})$$

نقطهٔ مشترکی داشته باشند، عبارت است از

$$\Delta=\circ \text{ و } \mathbf{a}\nparallel\mathbf{b} \text{ یا } \mathbf{a}\|\mathbf{b}\|\mathbf{c} \qquad (\text{۲.۷۷})$$

اگر $\Delta=\circ$ و $\mathbf{a}\nparallel\mathbf{b}$، آن‌وقت l_1، l_2 و l_3 تنها یك نقطهٔ مشترك دارند [بردار $\mathbf{c}$ (با ضریب‌های $-x_\circ$ و $-y_\circ$)، نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}\}$، به‌صورتی منحصر به‌فرد، قابل بیان است]. اگر $\Delta=\circ$ و $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌راستا باشند، آن وقت، بیان (۲.۷۵) منحصر به فرد نیست [اگر $\mathbf{b}\neq\circ$، $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}=\lambda'\mathbf{b}$، آن‌گاه رابطه‌های (۲.۷۵)، برای مقدارهای دلخواه $x_\circ$ و $y_\circ$ که در رابطهٔ $\lambda x_\circ+y_\circ=-\lambda'$ صدق کنند، برقرارند؛ و اگر $\mathbf{a}\neq\circ$، $\mathbf{b}=\mu\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}=\mu'\mathbf{a}$، آن وقت برابری‌های (۲.۷۵) برای همهٔ مقدارهایی از $x_\circ$ و $y_\circ$ برقرارند که با رابطهٔ $x_\circ+\mu y_\circ=-\mu'$ سازگار باشند].

به این ترتیب، اگر $\Delta=\circ$ و $\mathbf{a}\nparallel\mathbf{b}$، خط‌های راست l_1، l_2 و l_3، در یك نقطهٔ منحصر، مشترك‌اند؛ و اگر $\Delta=\circ$ و $\mathbf{a}\|\mathbf{b}\|\mathbf{c}$، سه خط راست l_1، l_2 و l_3 برهم منطبق‌اند.

مثال ۲.۸.۹.* نقطه‌های $M\in(AB)$، $N\in(BC)$ و $P\in(CA)$ روی ضلع‌ها، یا امتداد ضلع‌های مثلث ABC انتخاب شده‌اند، به نحوی که

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN}=\beta\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CP}=\gamma\overrightarrow{CA}$$

ثابت کنید، شرط لازم و کافی برای این‌که خط‌های راست (AN)، (BP) و (CM) در یك نقطه مشترك و یا دوبه‌دو موازی باشند، این است که

$$(\text{۱}-\alpha)(\text{۱}-\beta)(\text{۱}-\gamma)=\alpha\beta\gamma \qquad (\text{۲.۷۸})$$

حل. دستگاه مختصات $\{A، \overrightarrow{AC}، \overrightarrow{AB}\}$ را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه

$$A(\circ، \circ)،\ B(\circ، \text{۱})،\ C(\text{۱}، \circ)،\ M(\circ، \alpha)،$$

$$N(\beta, 1-\beta),\ \ P(1-\gamma, 0)$$

و معادلهٔ خط‌های راست چنین‌اند:

$$(AN): \frac{x-0}{\beta-0}=\frac{y-0}{(1-\beta)-0} \iff (1-\beta)x-\beta y=0;$$

$$(BP): \frac{z-0}{(1-\gamma)-0}=\frac{y-1}{0-1} \iff x+(1-\gamma)y-(1-\gamma)=0;$$

$$(CM): \frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{\alpha-0} \iff \alpha x+y-\alpha=0$$

شرط لازم، برای این‌که این سه خط راست نقطهٔ مشترك داشته باشند، چنین است [(۲.۷۶) را ببینید]:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1-\beta & -\beta & 0 \\ 1 & 1-\gamma & -(1-\gamma) \\ \alpha & 1 & -\alpha \end{vmatrix}=0 \iff$$

$$\iff 0=(1-\beta)\begin{vmatrix} 1-\gamma & -(1-\gamma) \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix}-(-\beta)\begin{vmatrix} 1 & -(1-\gamma) \\ \alpha & -\alpha \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\beta)(1-\gamma)(1-\alpha)-\alpha\beta\gamma$$

[(۲.۷۸) را ببینید]. اگر $(BP)\|(AN)$، آن وقت، بردارهای هادی

$$\mathbf{n}=(\beta, 1-\beta),\ \mathbf{p}=(1-\gamma, -1)$$

این خط‌های راست، هم‌راستا هستند؛ و بنابر ویژگی هم‌راستائی بردارها:

$$(AN)\|(BP) \iff \begin{vmatrix} \beta & 1-\beta \\ 1-\gamma & -1 \end{vmatrix}=0 \iff$$

$$\iff \beta=-(1-\beta)(1-\gamma) \qquad (2.79)$$

[$\mathbf{e}$ را برداری می‌گیریم که باصفحهٔ (ABC) موازی نباشد، در این‌صورت،

در پایهٔ $\{\overrightarrow{AC}، \overrightarrow{AB}، \mathbf{e}\}$ داریم:

$$\mathbf{n}=(\beta، ۱-\beta، ۰)، \ \mathbf{p}=(۱-\gamma، -۱، ۰)$$

و رابطهٔ (۲.۷۹)، به سادگی از رابطهٔ (۲.۳۵)]. بـه همین ترتیب، اگـر $(BP)\|(CM)$، آن وقت $\mathbf{p}\|\mathbf{m}$ و

$$\mathbf{p}=(۱-\gamma، -۱)، \ \mathbf{m}=(-۱، \alpha)$$

یعنی

$$(BP)\|(CM) \iff \begin{vmatrix} ۱-\gamma & -۱ \\ -۱ & \alpha \end{vmatrix}=۰ \iff \alpha\gamma=-(۱-\alpha) \qquad (۲.۸۰)$$

اکنون، اگرخطهای راست (AN)، (BP) و (CM) دو به‌دو موازی باشند، از رابطه‌های (۲.۷۹) و (۲.۸۰) به دست می‌آید:

$$\alpha\beta\gamma=(۱-\beta)(۱-\gamma)(۱-\alpha)$$

یعنی رابطهٔ (۲.۷۸)، شرط لازم برای موازی بودن خطهای راست (AN)، (BP) و (CM) است.

حالا ثابت می‌کنیم، شرط (۲.۷۸)،کافی است. اگر این شرط برقرار باشد، ولی بردارهای سه‌بعدی $\mathbf{a}=(۱-\beta، ۱، \alpha)$ و $\mathbf{b}=(-\beta، ۱-\gamma، ۱)$ هم‌راستا نباشند، آن‌گـاه بنابر نتیجهٔ مثال ۸.۸.۲، خطهای راست (AN)، (BP) و (CM)، نقطهٔ مشترك منحصر به فردی دارند.

فرض کنید، رابطهٔ (۲.۷۸) برقرار، و بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا باشند:

$$\begin{vmatrix} ۱-\beta & ۱ \\ -\beta & ۱-\gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱-\beta & \alpha \\ -\beta & ۱ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & \alpha \\ ۱-\gamma & ۱ \end{vmatrix}=۰$$

یعنی $\gamma(۱-\beta)=۱$، $\beta(۱-\alpha)=۱$، $\alpha(۱-\gamma)=۱$، یا

$$\alpha\neq ۰، \alpha\neq ۱، \beta=\frac{۱}{۱-\alpha}، \gamma=-\frac{۱-\alpha}{\alpha} \qquad (۲.۸۱)$$

مقدارهای β و γ را به جای ضریب، در معادله‌های خطهای راست قرار می‌دهیم، این معادله‌ها، به صورت زیر درمی‌آیند:

$$(AN): \alpha x+y=0;\ (BP): \alpha x+y=1;\ (CM): \alpha x+y=\alpha$$

که دو به‌دو ناسازگارند، یعنی خطهای راست (AN)، (BP) و (CM)، دو به‌دو موازی‌اند.

اگر خطهای راست مثال ۹.۸.۲ در نقطه‌ای متقاطع باشند، آن وقت، شعاع حامل $\mathbf{r}$ این نقطهٔ برخورد، نسبت به هر قطب O، برحسب شعاع‌های $\mathbf{r}_A=\overrightarrow{OA}$، $\mathbf{r}_B=\overrightarrow{OB}$، $\mathbf{r}_C=\overrightarrow{OC}$ از دستور زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{r}=\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}\mathbf{r}_A+\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)}\mathbf{r}_B+\frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)}\mathbf{r}_C \tag{۲.۸۲}$$

مثال ۱۰.۸.۲. دستور (۲.۸۲) را ثابت کنید.

حل. فرض می‌کنیم، خطهای‌راست (AN)، (BP) و (CM)، در نقطهٔ $Q(x, y)$ متقاطع باشند [که در نتیجه، برابری (۲.۷۸) برقرار است] و، درضمن $\alpha(1-\gamma)\neq 1$ [(۲.۸۱) را ببینید]. دراین‌صورت (x, y)، جواب دستگاه معادله‌های زیر است:

$$x+(1-\gamma)y=1-\gamma;\ \alpha x+y=\alpha$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)},\ y=\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)}$$

درنتیجه

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AB}=\mathbf{r}_A+x(\mathbf{r}_c-\mathbf{r}_A)+$$
$$+y(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A)=(1-x-y)\mathbf{r}_A+y\mathbf{r}_B+x\mathbf{r}_c$$

از طرف دیگر

$$1-x-y=\frac{1-\alpha(1-\gamma)-(1-\gamma)(1-\alpha)-\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)}=$$

$$=\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)};\quad x=\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}=\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{\alpha\gamma+(1-\alpha)}=$$

$$=\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{\frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta}+(1-\alpha)}=\frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)};$$

$$y=\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)}=\frac{\alpha\gamma}{(1-\alpha)(1-\gamma)+\gamma}=$$

$$=\frac{\alpha\gamma}{\frac{\alpha\beta\gamma}{1-\beta}+\gamma}=\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)}$$

که دستور (۲۰۸۲) را ثابت می‌کنند.

مثال ۲۰۸۰۱۱. با استفاده ازنتیجهٔ مثال۲۰۸۰۹، ثابت کنید درهرمثلث، خطهای راست زیر، دریك نقطه به هم می‌رسند: a) میانه‌ها؛ b) نیمسازها؛ c) ارتفاع‌ها؛ d) خطهای راستی که از رأس‌ها می‌گذرند و محیط مثلث را نصف می‌کنند؛ e) خطهای راستی که رأس‌ها را به نقطه‌های تماس‌ضلع‌های روبه‌رو با دایرهٔ محاطی داخلی وصل می‌کنند.

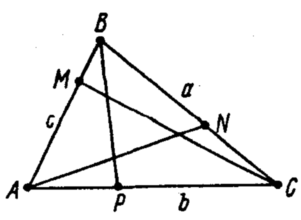
حل. $|AB|=c$، $|AC|=b$ و $|BC|=a$ می‌گیریم (شکل۲۰۴۲).

a) بنا به‌تعریف، نقطه‌های M، N و P تنها وقتی پای میانه‌های $[CM]$، $[AN]$ و $[BP]$ هستند که داشته باشیم: $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$.

دراین صورت داریم:

$$(1-\alpha)=(1-\beta)=$$

$$=(1-\gamma)=\frac{1}{2}$$



شکل ۲۰۴۲

و در نتیجه $\alpha\beta\gamma=\frac{۱}{۸}=(۱-\gamma)(۱-\beta)(۱-\alpha)$. شرط(۲.۷۸) برقرار است. رابطه‌های (۲.۸۱) برقرار نیستند، زیرا $۱\neq\frac{۱}{۴}=\beta(۱-\alpha)$.

بنابراین، میانه‌های مثلث، در یك نقطه به‌هم می‌رسند. بنا به دستور (۲.۸۲)، شعاع حامل $\mathbf{r}_۱$ این نقطه، برابراست با

$$\mathbf{r}_۱=\frac{\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۲}}\mathbf{r}_A+\frac{\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۲}}\mathbf{r}_B+\frac{\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۲}}\mathbf{r}_C=$$

$$=\frac{۱}{۳}(\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_C)$$

b) اگر $[AN]$، $[BP]$ و $[CM]$ نیمسازهای زاویه‌های مثلث ABC باشند، با توجه به ویژگی نیمسازها (مثال ۱۰.۳.۲ را ببینید)، باید داشته باشیم:

$$\alpha=\frac{b}{a+b},\ ۱-\alpha=\frac{a}{a+b},\ \beta=\frac{c}{b+c},\ ۱-\beta=\frac{b}{b+c},$$

$$\gamma=\frac{a}{a+c},\ ۱-\gamma=\frac{c}{a+c}$$

بنابراین:

$$\alpha\beta\gamma=\frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}=(۱-\alpha)(۱-\beta)(۱-\gamma)$$

یعنی شرط (۲.۷۸) برقرار است. رابطه‌های (۲.۸۱) برقرار نیستند، زیرا

$$\beta(۱-\alpha)=\frac{ac}{(a+b)(b+c)}<۱$$

درنتیجه، نیمسازهای زاویه‌های مثلث، دریك نقطه به‌هم می‌رسند. بنا به‌دستور

(۲.۸۲)، شعاع حامل $\mathbf{r}_۲$، برای این نقطه، چنین است:

$$\mathbf{r}_۲=\frac{\frac{a}{a+c}\cdot\frac{a}{a+b}}{۱-\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{a+c}}\mathbf{r}_A+\frac{\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{b+c}}{۱-\frac{c}{b+c}\cdot\frac{a}{a+b}}\mathbf{r}_B+$$

$$+\frac{\frac{c}{b+c}\cdot\frac{c}{a+c}}{۱-\frac{a}{a+c}\cdot\frac{b}{b+c}}\mathbf{r}_C=\frac{a\mathbf{r}_A+b\mathbf{r}_B+c\mathbf{r}_C}{a+b+c}$$

c) اگر $[AN]$، $[BP]$ و $[CM]$ ارتفاع‌های مثلث ABC باشند، به‌شرط حاده یا قائمه‌بودن زاویهٔ A داریم:

$$\alpha=\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{|AC|\cos\hat{A}}{|AB|}=\frac{b}{c}\cos\hat{A}=\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}}\cos\hat{A}$$

و اگر زاویهٔ A منفرجه باشد (شکل ۴۳.۲):

$$\alpha=-\frac{|AM|}{|AB|}=-\frac{|AC|}{|AB|}\cos(۱۸۰^\circ-\hat{A})=\frac{b}{c}\cos\hat{A}=$$

$$=\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}}\cos\hat{A}$$

یعنی درهمهٔ حالت‌ها: $\alpha=\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}}\cos\hat{A}$. به این ترتیب

$$۱-\alpha=\frac{a}{c}\cos\hat{B}=\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{C}}\cos\hat{B};\quad \beta=\frac{c}{a}\cos\hat{B}=\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}\cos\hat{B};$$

$$۱-\beta=\frac{b}{a}\cos\hat{C}=\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{A}}\cos\hat{C};\quad \gamma=\frac{a}{b}\cos\hat{C}=\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}\cos\hat{C};$$

$$۱-\gamma=\frac{c}{b}\cos\hat{A}=\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}}\cos\hat{A}$$

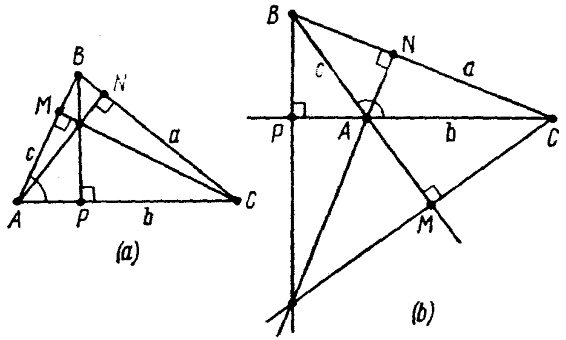
و از آن‌جا

$$(۱-\alpha)(۱-\beta)(۱-\gamma)=\frac{a}{c}\cos\hat{B}\cdot\frac{b}{a}\cos\hat{C}\cdot\frac{c}{b}\cos\hat{A}=$$

$$=\cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}=\alpha\beta\gamma$$

و شرط (۲۰۷۸) برقرار است. رابطه‌های (۲۰۸۱) برقرار نیستند، زیرا

$$\beta(۱-\alpha)=\cos^{۲}\hat{B}<۱$$



شکل ۴۳۰۲

به این ترتیب، ارتفاع‌های مثلث، در یك نقطه به‌هم می‌رسند. شعاع‌حامل $\mathbf{r}_{۳}$، برای این نقطه، با توجه به‌دستور (۲۰۸۲) چنین می‌شود:

$$\mathbf{r}_{۳}=\frac{\dfrac{\sin^{۲}\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}}{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}}{۱-\dfrac{b}{c}\cos\hat{A}\dfrac{c}{b}\cos\hat{A}}\mathbf{r}_{A}+\frac{\dfrac{\sin^{۲}\hat{B}\cos\hat{A}\cos\hat{C}}{\sin\hat{A}\sin\hat{C}}}{۱-\dfrac{c}{a}\cos\hat{B}\dfrac{a}{c}\cos\hat{B}}=\mathbf{r}_{B}+$$

$$+\frac{\dfrac{\sin^{۲}\hat{C}\cos\hat{B}\cos\hat{A}}{\sin\hat{B}\sin\hat{A}}}{۱-\dfrac{a}{b}\cos\hat{C}\dfrac{b}{a}\cos\hat{C}}\mathbf{r}_C=$$

$$=cotg\,\hat{B}\,cotg\,\hat{C}\cdot\mathbf{r}_A+cotg\,\hat{C}\,cotg\,\hat{A}\cdot\mathbf{r}_B+cotg\,\hat{A}\,cotg\,\hat{B}\cdot\mathbf{r}_C$$

d) اگر در مثال ۲.۸.۹، نقطه‌های M، N و P طوری باشند که هرکدام از خط‌های راست (AN)، (BP) و (CM)، محیط مثلث را نصف کنند، اگر فرض کنیم $۲p=a+b+c$، آن وقت

$$|AC|+|AM|=p,\quad \alpha=\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{p-b}{c}>۰$$

(نقطهٔ M بر پاره‌خط راست $[AB]$ قرار دارد) و به همین ترتیب

$$۱-\alpha=\frac{p-a}{c},\quad \beta=\frac{p-c}{a},\quad ۱-\beta=\frac{p-b}{a},$$

$$\gamma=\frac{p-a}{b},\quad ۱-\gamma=\frac{p-c}{b}$$

و بنابراین:

$$(۱-\alpha)(۱-\beta)(۱-\gamma)=\frac{p-a}{c}\cdot\frac{p-b}{a}\cdot\frac{p-c}{b}=\alpha\beta\gamma$$

و شرط (۲.۷۸) برقرار است. رابطه‌های (۲.۸۱) برقرار نیستند، زیرا:

$$\beta(۱-\alpha)=\frac{p-c}{a}\cdot\frac{p-a}{c}=\frac{ac-p(a+c-p)}{ac}=$$

$$=۱-\frac{p(p-b)}{ac}<۱$$

به این ترتیب، خط‌های راست مفروض، دریك نقطه به‌هم می‌رسند. با استفاده از اتحادهای

$$\frac{\gamma(۱-\alpha)}{۱-\alpha(۱-\gamma)}=\frac{(p-a)^۲}{bc-(p-b)(p-c)}=\frac{(p-a)^۲}{p(b+c-p)}=$$
$$=\frac{(p-a)^۲}{p(۲p-a-p)}=\frac{p-a}{p},$$
$$\frac{\alpha(۱-\beta)}{۱-\beta(۱-\alpha)}=\frac{(p-b)^۲}{ac-(p-c)(p-a)}=\frac{p-b}{p},$$
$$\frac{\beta(۱-\gamma)}{۱-\gamma(۱-\beta)}=\frac{p-c}{p}$$

می‌توان شعاع حامل $\mathbf{r}_۴$ را برای نقطهٔ مشترك خط‌های راست (AN)، (BP) و (CM)، با توجه به دستور (۲۰۸۲) به‌دست آورد:

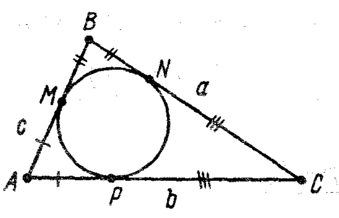
$$\mathbf{r}_۴=\frac{p-a}{p}\mathbf{r}_A+\frac{p-b}{p}\mathbf{r}_B+\frac{p-c}{p}\mathbf{r}_C=۳\mathbf{r}_۱-۲\mathbf{r}_۲$$

e) اگر درمثال ۹۰۸۰۲، نقطه‌های M، N و P، نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلع‌های‌مثلث ABC باشند، با توجه به ویژگی مماس‌های وارد ازیك نقطه بردایره، خواهیم داشت (شکل ۴۴۰۲):

$$\alpha c=|AM|=|AP|=(۱-\gamma)b،$$
$$(۱-\alpha)c=|BM|=|BN|=\beta a،$$
$$(۱-\beta)a=|CN|=|CP|=\gamma b$$

که از آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$\alpha=\frac{p-a}{c},\quad ۱-\alpha=\frac{p-b}{c},$$
$$\beta=\frac{p-b}{a},\quad ۱-\beta=\frac{p-c}{a},$$
$$\gamma=\frac{p-c}{b},\quad ۱-\gamma=\frac{p-a}{b}$$



شکل ۴۴۰۲

و بنا براین

$$(۱-\alpha)(۱-\beta)(۱-\gamma)=\frac{p-b}{c}\cdot\frac{p-c}{a}\cdot\frac{p-a}{b}=\alpha\beta\gamma$$

و رابطهٔ (۲.۷۸) برقرار است. رابطه‌های (۲.۸۱) برقرار نیستند، زیرا

$$\beta(۱-\alpha)=\frac{p-b}{a}\cdot\frac{p-b}{c}=$$

$$=۱-\frac{(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)+(p-c)(p-b)}{ac}<۱$$

به این ترتیب، خط‌های راست (AN)، (BP) و (CM) در یك نقطه به هم می‌رسند. با استفاده از اتحادهای

$$\frac{\gamma(۱-\alpha)}{۱-\alpha(۱-\gamma)}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc-(p-a)^۲}=$$

$$=\frac{(p-b)(p-c)}{(p-a+p-c)(p-a+p-b)-(p-a)^۲}=\frac{(p-b)(p-c)}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon=(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)+(p-c)(p-b),$$

$$\frac{\alpha(۱-\beta)}{۱-\beta(۱-\alpha)}=\frac{(p-a)(p-c)}{\varepsilon},$$

$$\frac{\beta(۱-\gamma)}{(۱-\gamma)(۱-\beta)}=\frac{(p-a)(p-b)}{\varepsilon}$$

می‌توان شعاع حامل $\mathbf{r}_۵$ را، برای نقطهٔ مشترك این خط‌های راست پیدا کرد:

$$\mathbf{r}_۵=\frac{(p-b)(p-c)\mathbf{r}_A+(p-c)(p-a)\mathbf{r}_B+(p-a)(p-b)\mathbf{r}_C}{(p-a)(p-b)+(p-a)(p-c)+(p-b)(p-c)}$$

مثال ۱۲.۸.۲*. مثلث‌های ABC و $A'B'C'$، درصفحه یا فضا، طوری قرار گرفته‌اند که خط‌های راست واصل بین رأس‌های A و $A_۱$، B و $B_۱$، C و $C_۱$، از نقطهٔ O می گذرند. می‌دانیم، هیچ دو ضلع متناظری از دومثلث موازی نیستند. ثابت کنید، نقطه‌های برخورد ضلع‌های متناظر این دو مثلث، بر یك خط راست قرار دارند.

حل. O را قطب می گیریم و فرض می کنیم: $\overrightarrow{OA_۱}=\mathbf{a}$، $\overrightarrow{OB_۱}=\mathbf{b}$ و

$\overrightarrow{OC_1}=\mathbf{c}$. چون A، B و C نقطه‌های مشخصی هستند، عددهای p، q و r وجود دارند، به نحوی که $\overrightarrow{OA}=-p\mathbf{a}$، $\overrightarrow{OB}=-q\mathbf{b}$ و $\overrightarrow{OC}=-r\mathbf{c}$.
خط‌های راست (A_1C_1) و (AC) درصفحهٔ (OAC) قرار دارند و باهم موازی نیستند و، بنابراین، متقاطع‌اند؛ نقطهٔ برخورد آن‌ها را M می‌گیریم. به‌همین ترتیب، N را نقطهٔ برخورد خط‌های راست (A_1B_1) و (AB) و Q را نقطهٔ برخورد خط‌های راست (B_1C_1) و (BC) فرض می‌کنیم. شعاع حامل‌های نقطه‌های M، N و Q را، به ترتیب، $\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_2$ و $\mathbf{r}_3$ می‌نامیم. بردار $\mathbf{r}_1=\overrightarrow{OM}$ را محاسبه می‌کنیم. نقطهٔ M بر خط راست (A_1C_1) قراردارد، بنابراین عدد t وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\mathbf{r}_1=t\mathbf{a}+(1-t)\mathbf{c}$$

چون $M\in(AC)$، برای مقداری از $\tau\in\mathbf{R}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{r}_1=\tau(-p\mathbf{a})+(1-\tau)(-r\mathbf{c})$$

که ازآن‌جا، به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{r}_1=t\mathbf{a}+(1-t)\mathbf{c},\quad \mathbf{r}_1=-\tau p\mathbf{a}-(1-\tau)r\mathbf{c}$$

سمت راست این معادله‌ها را برابرقرارمی‌دهیم، با توجه به‌این‌که بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$، مستقل خطی‌اند، به دست می‌آید:

$$t=-\tau p \quad , \quad 1-t=-(1-\tau)r$$

ازآن‌جا: $\tau=\dfrac{1+r}{r-p}$ و $t=-\dfrac{p(1+r)}{r-p}$. بنابراین

$$\mathbf{r}_1=\overrightarrow{OM}=\frac{p(1+r)}{p-r}\mathbf{a}+\frac{r(1+p)}{r-p}\mathbf{c}$$

و به همین ترتیب

$$\mathbf{r}_2=\overrightarrow{ON}=\frac{p(1+q)}{p-q}\mathbf{a}+\frac{q(1+p)}{q-p}\mathbf{b},$$

$$\mathbf{r}_۳=\overrightarrow{OQ}=\frac{q(۱+r)}{q-r}\mathbf{b}+\frac{r(۱+q)}{r-q}\mathbf{c}$$

برای بردارهای $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{MQ}$، به این عبارت‌ها می‌رسیم:

$$\overrightarrow{MN}=\mathbf{r}_۲-\mathbf{r}_۱=\frac{۱+p}{(p-r)(p-q)}[p(q-r)\mathbf{a}+q(r-p)\mathbf{b}+$$

$$+r(p-q)\mathbf{c}];$$

$$\overrightarrow{MQ}=\mathbf{r}_۳-\mathbf{r}_۱=\frac{۱+r}{(r-p)\,(q-r)}[p(q-r)\mathbf{a}+q(r-p)\mathbf{b}+$$

$$+r(p-q)\mathbf{c}]$$

یعنی بردارهای $\overrightarrow{MQ}$ و $\overrightarrow{MN}$ هم‌راستا هستند و، بنابراین، نقطه‌های M، N و Q به یك خط راست تعلق دارند.

مثال ۱۳۰۸۰۲. $ABCD$ را یك چهارضلعی و K، L، M و N را، به ترتیب، مرکز ثقل مثلث‌های ABC، BCD، CDA و DAB می‌گیریم. ثابت کنید، خط‌های راست واصل بین نقطه‌های وسط ضلع‌های رو به‌رو در چهارضلعی $ABCD$، یکدیگر را در همان نقطه‌ای قطع می‌کنند که خط‌های راست واصل بین نقطه‌های وسط ضلع‌های رو به‌رو درچهارضلعی $KLMN$ به هم می‌رسند.

حل. O را قطب ثابت می‌گیریم. با توجه به نتیجه‌های مثال ۲۰۸۰۲، اگر Q و Q' را نقطه‌های برخورد خط‌های راست واصل بین نقطه‌های وسط ضلع‌های رو به‌رو، به ترتیب، در چهارضلعی‌های $ABCD$ و $KLMN$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{۱}{۴}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),$$

$$\overrightarrow{OQ'}=\frac{۱}{۴}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})$$

در همان مثال ۲.۸.۲، ثابت کردیم:

$$\overrightarrow{OK}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})، \ \overrightarrow{OL}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})،$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA})، \ \overrightarrow{ON}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

بنا بر این

$$\overrightarrow{OQ'}=\frac{۱}{۴}\cdot\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+$$

$$+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{۱}{۴}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OQ}$$

یعنی $Q=Q'$. در ضمن، توجه کنیم که

$$\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OQ}=\frac{۱}{۱۲}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-۳\overrightarrow{OD})=$$

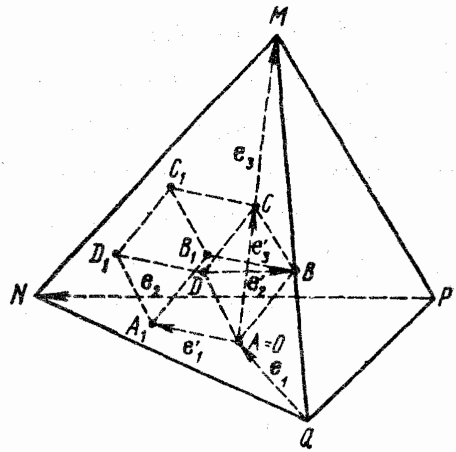
$$=-\frac{۱}{۳}\overrightarrow{QD}$$

$$\overrightarrow{QL}=-\frac{۱}{۳}\overrightarrow{QA}، \ \overrightarrow{QM}=-\frac{۱}{۳}\overrightarrow{QB}، \ \overrightarrow{QN}=-\frac{۱}{۳}\overrightarrow{QC}$$

یعنی چهارضلعی $KLMN$، مجانس چهارضلعی $ABCD$، در تجانسی به‌مرکز Q و با نسبت تجانسی برابر $-\frac{۱}{۳}$ است.

مثال ۱۴.۸.۲*. طول ضلع قاعدهٔ NPQ از هرم منتظم $MNPQ$ برابر با ۲ و ارتفاع آن برابر با ۳ است. رأس A درمکعب $ABCDA'B'C'D'$، بر نقطهٔ O مرکز قاعدهٔ هرم و رأس C بر ارتفاع $[OM]$ و پاره‌خط راست $[BC_۱]$ بر صفحهٔ (MNP) واقع است. طول یال مکعب را پیدا کنید.

حل. $|AB|=a$ می‌گیریم ودو دستگاه $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲، \mathbf{e}_۳\}$ (قدیم) و؛



شکل ۴۵.۲

$\{A, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (جدید) را در نظر می‌گیریم، که در آن‌ها

$$\mathbf{e}_1=\overrightarrow{QO},\ \mathbf{e}_2=\overrightarrow{PN},\ \mathbf{e}_3=\overrightarrow{OM},\ \mathbf{e}'_1=\overrightarrow{AA_1},\ \mathbf{e}'_2=\overrightarrow{DB},\ \mathbf{e}'_3=\overrightarrow{AC}$$

(شکل ۴۵.۲). دستگاه «قدیم» را برای هرم و دستگاه «جدید» را برای مکعب در نظر می‌گیریم.

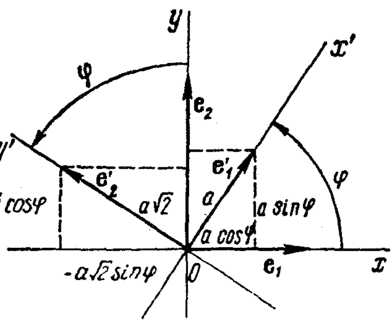
بنا بر فرض $C\in[OM]$ و $A=O$، بنا بر این بردارهای $\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{e}'_3$ در یك امتدادند و چون $|OM|=3$ و $|AC|=|AB|\sqrt{2}=a\sqrt{2}$، داریم:

$$\mathbf{e}'_3=\frac{1}{3}a\sqrt{2}\mathbf{e}_3$$

(مثال ۷.۳.۲ را ببینید). بردارهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}'_1$، $\mathbf{e}'_2$ هم‌صفحه‌اند؛ درصفحه‌ای موازی صفحهٔ (NPQ) قرار دارند. در نتیجه، دو دستگاه مختصات $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ و $\{O, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ در صفحهٔ (NPQ) واقع‌اند. این دو دستگاه مختصات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بردارهای $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$، به ترتیب، با خط‌های راست (QO) و (PN) موازی‌اند. چون (QO) بر (PN) عمود است، محورهای x و y در دستگاه مختصات $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ برهم عمودند. به همین ترتیب، بردارهای $\mathbf{e}'_1$ و $\mathbf{e}'_2$،

به‌ترتیب، با خط‌های راست (AA_1) و (DB)ـ که برهم‌عمودندـ موازی‌اند. در نتیجه، محورهای x' و y' دستگاه‌مختصات $\{O, e'_1, e'_2\}$ نیز برهم‌عمودند. به‌این ترتیب، دو دستگاه مختصات $\{O, e_1, e_2\}$ و $\{O, e'_1, e'_2\}$، در صفحهٔ (NPQ) دارای‌مبداء مشترك هستندو، هر کدام، محورهایی عمود برهم‌دارند. در این صورت، می‌توان‌دستگاه $\{O, e'_1, e'_2\}$ را از دستگاه $\{O, e_1, e_2\}$، با دوران به اندازهٔ زاویهٔ $\varphi(0° \leqslant \varphi < 360°)$، در جهت مثبت (خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) به‌دست‌آورد. (شکل ۴۶.۲) و یا به‌کمك دوران

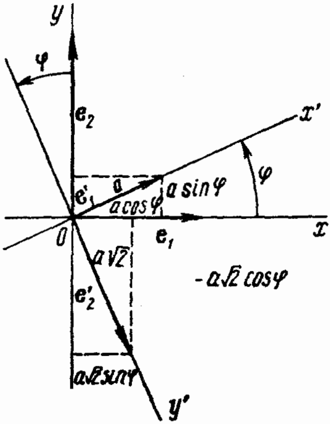


شکل ۴۶.۲

به اندازهٔ زاویهٔ φ و، سپس، تقارن (شکل ۴۷.۲). شکل ۴۵.۲، حالت دوم را نشان می‌دهد.

اکنون دستورهای عبور از دستگاه مختصات «قدیم» به‌دستگاه‌مختصات «جدید» را پیدا می‌کنیم. فرض کنید، دستگاه مختصات $\{O, e'_1, e'_2\}$ را از دوران دستگاه $\{O, e_1, e_2\}$، بـه اندازهٔ زاویهٔ φ، به دست آورده بـاشیم (شکل ۴۶.۲). چون $|e_1| = \frac{2}{\sqrt{3}}$، $|e_2| = 2$، $|e'_1| = a$ و $|e'_2| = a\sqrt{2}$،

بنابراین



شکل ۴۷.۲

$$e'_1=\frac{1}{2}a\sqrt{3}\cos\varphi\cdot e_1+\frac{1}{2}a\sin\varphi\cdot e_2,$$

$$e'_2=-\frac{1}{2}a\sqrt{6}\sin\varphi\cdot e_1+$$

$$+\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi\cdot e_2$$

و چون $e'_3=\frac{1}{3}a\sqrt{2}\,e_3$، دستورهای انتقال به این صورت درمی‌آیند:

$$x=\frac{1}{2}a\sqrt{3}\cos\varphi\cdot x'-$$

$$-\frac{1}{2}a\sqrt{6}\sin\varphi\cdot y',$$

$$y=\frac{1}{2}a\sin\varphi\cdot x'+\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi\cdot y', \qquad (۲.۸۳)$$

$$z=\frac{1}{3}a\sqrt{2}\cdot z'$$

و اگر برای عبور از دستگاه مختصات $\{O,e_1,e_2\}$ به دستگاه مختصات $\{O,e'_1,e'_2\}$ از تقارن هم استفاده کرده باشیم (شکل ۴۷.۲)، آن وقت

$$e'_1=\frac{1}{2}a\sqrt{3}\cos\varphi\cdot e_1+\frac{1}{2}a\sin\varphi\cdot e_2,$$

$$e'_2=\frac{1}{2}a\sqrt{6}\sin\varphi\cdot e_1-\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cos\varphi\cdot e_2,$$

$$e'_3=\frac{1}{3}a\sqrt{2}\,e_3$$

و خواهیم داشت:

$$x=\frac{۱}{۲}a\sqrt{۳}\cos\varphi\cdot x'+\frac{۱}{۲}a\sqrt{۶}\sin\varphi\cdot y',$$

$$y=\frac{۱}{۲}a\sin\varphi\cdot x'-\frac{۱}{۲}a\sqrt{۲}\cos\varphi\cdot y', \qquad (۲.۸۴)$$

$$z=\frac{۱}{۳}a\sqrt{۲}\,z'$$

در دستگاه مختصات «قدیم» داریم:

$$M(۰, ۰, ۱),\ N\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۰\right),\ P\left(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, ۰\right)$$

بنابراین، با توجه به‌دستورهای (۲.۶۴)، معادلهٔ صفحهٔ (MNP)، دردستگاه «قدیم» به این صورت است:

$$\begin{vmatrix} x-۰ & y-۰ & z-۱ \\ \frac{۱}{۲}-۰ & \frac{۱}{۲}-۰ & ۰-۱ \\ \frac{۱}{۲}-۰ & -\frac{۱}{۲}-۰ & ۰-۱ \end{vmatrix}=۰ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x\begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & -۱ \\ -\frac{۱}{۲} & -۱ \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & -۱ \\ \frac{۱}{۲} & -۱ \end{vmatrix}+$$

$$+(z-۱)\begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{vmatrix}=۰$$

از آن‌جا $۲x+z-۱=۰$.

در دستگاه مختصات «جدید»: $B\left(۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ و $C_۱(۱, ۰, ۱)$. اگر

از دستور (۲.۸۳) استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$B\left(-\frac{۱}{۴}a\sqrt{۶}\sin\varphi ، \frac{۱}{۴}a\sqrt{۲}\cos\varphi ، \frac{۱}{۶}a\sqrt{۲}\right)$$

$$C_۱\left(\frac{۱}{۲}a\sqrt{۳}\cos\varphi ، \frac{۱}{۲}a\sin\varphi ، \frac{۱}{۳}a\sqrt{۲}\right)$$

چون، بنا به فرض، نقطه‌های B و $C_۱$ متعلق به صفحهٔ (MNP) هستند، باید داشته باشیم:

$$۲\left(-\frac{۱}{۴}a\sqrt{۶}\sin\varphi\right)+\frac{۱}{۶}a\sqrt{۲}-۱=۰$$

$$۲\left(\frac{۱}{۲}a\sqrt{۳}\cos\varphi\right)+\frac{۱}{۳}a\sqrt{۲}-۱=۰$$

که از آن جا به دست می‌آید:

$$\sin\varphi=\frac{a-۳\sqrt{۲}}{۳a\sqrt{۳}} ، \cos\varphi=\frac{۳-a\sqrt{۲}}{۳a\sqrt{۳}}$$

که با توجه به اتحاد $\sin^۲\varphi+\cos^۲\varphi=۱$، خواهیم داشت:

$$\frac{(a-۳\sqrt{۲})^۲}{۲۷a^۲}+\frac{(۳-a\sqrt{۲})^۲}{۲۷a^۲}=۱ \Longleftrightarrow ۸a^۲+۴\sqrt{۲}\,a-۹=۰$$

با حل معادله، و با توجه به این‌که $a>۰$، به دست می‌آید:

$$a=\frac{۲\sqrt{۵}-\sqrt{۲}}{۴}$$

اگر از دستورهای (۲.۸۴) استفاده می‌کردیم، به دست می‌آمد:

$$B\left(\frac{۱}{۴}a\sqrt{۶}\sin\varphi ، -\frac{۱}{۴}a\sqrt{۲}\cos\varphi ، \frac{۱}{۶}a\sqrt{۲}\right) ،$$

$$C_۱\left(\frac{۱}{۲}a\sqrt{۳}\cos\varphi ، \frac{۱}{۲}a\sin\varphi ، \frac{۱}{۳}a\sqrt{۲}\right)$$

و چون $B\in(MNP)$ و $C_۱\in(MNP)$، بنابراین

$$sin\varphi=\frac{۳\sqrt{۲}-a}{۳a\sqrt{۳}},\ cos\varphi=\frac{۳-a\sqrt{۲}}{۳a\sqrt{۳}}$$

که بازهم، شبیه حالت قبل، به دست می‌آید $a=\frac{۲\sqrt{۵}-\sqrt{۲}}{۴}$.

فصل سوم

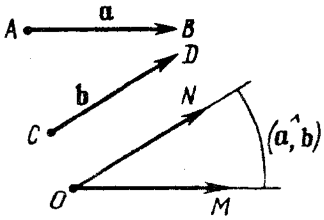
حاصل‌ضرب عددی (اسکالر) دو بردار

بخش ۱.۳. زاویه بین بردارها.

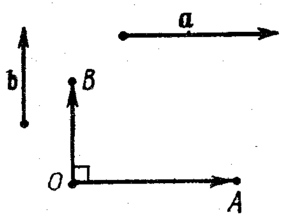
تعریف حاصل‌ضرب اسکالر. قانون کسینوس

زاویهٔ بین دو بردار غیرصفر $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CD}$، به زاویهٔ بین نیم‌خط‌های راست $[AB)$ و $[CD)$ گفته می‌شود. بنابراین، اگر بردارهای $\mathbf{a}=\overrightarrow{OM}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{ON}$ را، از نقطه‌ای مثل O رسم کنیم، (شکل ۱.۳)، اندازهٔ زاویهٔ محدب MON، بنا به‌تعریف، برابر با اندازهٔ زاویهٔ بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است و آن را، با نماد $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$ نشان می‌دهند.

اگر یکی از بردارهای $\mathbf{a}$ یا $\mathbf{b}$، بردار صفر باشد، آن‌وقت زاویهٔ بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نامعین می‌شود. زاویهٔ بین دو بردار، مقدارهای از ۰ درجه تا ۱۸۰ درجه را قبول می‌کنند. اگر دو بردار غیرصفر، هم راستا باشند،



شکل ۱.۳



شکل ۲.۳

زاویهٔ بین آن‌ها، درصورت هم‌جهت بودن بردارها برابر صفر، و درصورتی که در خلاف جهت یکدیگر باشند، برابر ۱۸۰ درجه است. اگر زاویهٔ بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابر ۹۰ درجه باشد، دو بردار را عمود برهم گویند (و می‌نویسند: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$؛ شکل ۲.۳). درحالتی هم که، یکی از دو بردار، برابر صفر باشد، آن‌ها را عمود برهم به‌حساب می‌آورند.

مثال ۳.۱.۱. $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را دو بردار غیر صفر و غیر هم‌راستا می‌گیریم. ثابت کنید، بردار

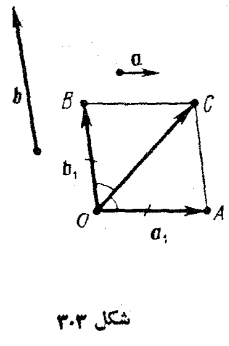
$$\mathbf{c}=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

با بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، زاویه‌های برابر تشکیل می‌دهد.

حل. بردارهای $\mathbf{a}_1=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ و $\mathbf{b}_1=\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$، بردارهای یکه‌اند:

$$|\mathbf{a}_1|=|\mathbf{b}_1|=1$$

دو بردار $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}_1$ و $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}_1$ را از نقطهٔ O رسم می‌کنیم متوازی‌الاضلاع $OACB$ را روی این دو بردار می‌سازیم (شکل ۳.۳). چون $|OA|=|OB|$، بنابراین چهارضلعی $OACB$ لوزی است و قطر (OC) نیمساز زاویهٔ AOB است. به این ترتیب، بردار قطر لوزی، یعنی



شکل ۳.۳

$$\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}=\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1$$

با بردارهای $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}_1$ و $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}_1$، و بنابراین با بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ که با $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{b}_1$ هم‌جهت‌اند، زاویه‌های برابر می‌سازد.

حاصل‌ضرب داخلی دوبردار غیرصفر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، که به‌آن حاصل اسکالر

دو بردار هم می‌گویند، بنا به‌تعریف، برابر است با عددی که از حاصل‌ضرب طول‌های دوبردار در کسینوس‌زاویهٔ بین‌دوبردار به‌دست‌می‌آید. حاصل‌ضرب عددی را با نماد $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ یا $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$$

اگر یکی از دو بردار صفر باشد، بنا به تعریف، حاصل‌ضرب اسکالر آن‌ها برابر صفر است:

$$(\mathbf{a}, \circ) = (\circ, \mathbf{b}) = \circ$$

اگر با دو بردار غیر صفر سروکار داشته باشیم، زاویهٔ بین دو بردار را از دستور زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \qquad (۳.۱)$$

حاصل‌ضرب اسکالر $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ برابر است با $|\mathbf{a}|^۲$ و به آن اسکالر مربع بردار $\mathbf{a}$ گویند و با نماد $(\mathbf{a})^۲$ یا $\mathbf{a}^۲$ نشان می‌دهند. طول بردار $\mathbf{a}$ و اسکالر مربع آن، با رابطهٔ زیر به‌هم مربوط‌اند:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \qquad (۳.۲)$$

اگر زاویهٔ بین دو بردار حاده باشد، حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها مثبت، و اگر زاویهٔ بین دو بردار منفرجه باشد، حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها منفی است.

مثال ۲.۱.۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B} = ۹۰^\circ)$، می‌دانیم: $|AC| = b$ و $\hat{A} = \alpha$. مطلوب است محاسبهٔ $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

حل. داریم: $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) = \hat{C} = ۹۰^\circ - \alpha$، $|\overrightarrow{CB}| = b \sin \alpha$ و $|CA| = b$. بنابراین

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = |\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) =$$

$$= b \sin \alpha \cdot b \cos(۹۰^\circ - \alpha) = b^۲ \sin^۲ \alpha$$

مثال ۳.۱.۳. ثابت کنید، تنها وقتی حاصل‌ضرب داخلی دو بردار برابر

صفر است که، این دو بردار، برهم عمود باشند.

حل. اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ غیر صفر باشند، آن‌وقت $|\mathbf{a}|\neq 0$ و $|\mathbf{b}|\neq 0$؛ بنابراین

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=0 \Longleftrightarrow |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=0$$

و از آنجا $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=0$ یا $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

اگر یکی از دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ صفر باشد، آن‌وقت، بنابه‌تعریف، برهم عمودند و داریم: $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=0$.

مثال ۴۰۱۰۳. (قانون کسینوس). ثابت کنید، برای هر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ داریم:

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \qquad (۳.۳)$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \qquad (۳.۴)$$

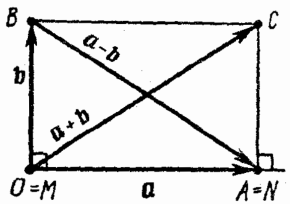
حل. فرض می‌کنیم: $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ و $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$.

حالت اول. بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، هم‌راستا نیستند. متوازی‌الاضلاع $OBCA$ را درنظر می‌گیریم (شکل‌های ۴.۳ و ۵.۳) وقرار می‌گذاریم:

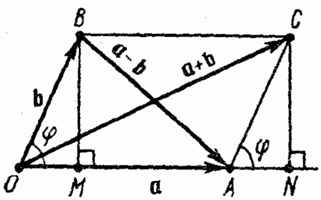
$$a=|\mathbf{a}|, b=|\mathbf{b}|, \varphi=(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$$

و M و N را، پای عمودهای وارد از نقطه‌های B و C برخط راست (OA) می‌گیریم.

با توجه به‌قضیهٔ فیثاغورث، درمثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AMB و ONC داریم:



شکل ۵.۳



شکل ۴.۳

$$|AB|^{۲}=|AM|^{۲}+|MB|^{۲},$$
$$|OC|^{۲}=|ON|^{۲}+|NC|^{۲} \qquad (۳.۵)$$

اگر φ، زاویه‌ای حاده باشد، (شکل ۴.۳)، آن‌گاه

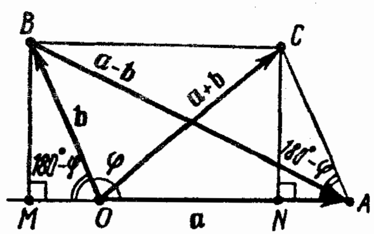
$$|AM|=|OA|-|OM|=a-b\cos\varphi,$$
$$|MB|=|NC|=b\sin\varphi,$$
$$|ON|=|OA|+|AN|=a+b\cos\varphi$$

و اگر $\varphi=۹۰^\circ$ (شکل ۵.۳)، آن‌گاه

$$|AM|=|OA|=a=a-b\cos\varphi,$$
$$|MB|=|NC|=b=b\sin\varphi,$$
$$|ON|=|OA|=a=a+b\cos\varphi$$

و سرانجام، اگر φ، زاویه‌ای منفرجه باشد، (شکل ۶.۳)، آن‌گاه

$$|AM|=|OA|+|OM|=a+b\cos(۱۸۰^\circ-\varphi)=a-b\cos\varphi,$$
$$|MB|=|NC|=b\sin(۱۸۰^\circ-\varphi)=b\sin\varphi,$$
$$|ON|=|OA|-|AN|=a+b\cos\varphi$$



شکل ۶.۳

به این ترتیب، φ هرچه باشد، داریم:

$$|AM|=a-b\cos\varphi,\ |MB|=|NC|=b\sin\varphi,$$
$$|ON|=a+b\cos\varphi$$

از آن‌جا، با توجه به رابطه‌های (۳.۵) به‌دست می‌آید:

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^{2}=|AB|^{2}=(a-b\cos\varphi)^{2}+(b\sin\varphi)^{2}=$$
$$=a^{2}+b^{2}-2ab\cos\varphi=\mathbf{a}^{2}+\mathbf{b}^{2}-2(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$
$$(a+b)^{2}=|OC|^{2}=(a+b\cos\varphi)^{2}+(b\sin\varphi)^{2}=$$
$$=a^{2}+b^{2}+2ab\cos\varphi=\mathbf{a}^{2}+\mathbf{b}^{2}+2(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

حالت دوم. بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا هستند. اگر $\mathbf{b}=0$، درستی برابری‌های (۳.۳) و (۳.۴) روشن است:

$$(\mathbf{a}\pm 0)^{2}=|a|^{2}=\mathbf{a}^{2}+0^{2}\pm 2(\mathbf{a},0)$$

و اگر $\mathbf{b}\neq 0$، آن وقت، عددی مانند k وجود دارد، به‌نحوی که، برای آن داشته باشیم: $\mathbf{a}=k\mathbf{b}$. بنابراین

$$(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})^{2}=|\mathbf{a}\pm\mathbf{b}|^{2}=|(k\pm 1)\mathbf{b}|^{2}=(|k\pm 1|\cdot|\mathbf{b}|)^{2}=$$
$$=(k\pm 1)^{2}|\mathbf{b}|^{2}=(k^{2}+1\pm 2k)|\mathbf{b}|^{2}=$$
$$=(|k|\cdot|\mathbf{b}|)^{2}+|\mathbf{b}|^{2}\pm 2k|\mathbf{b}|^{2}=\mathbf{a}^{2}+\mathbf{b}^{2}\pm 2k|\mathbf{b}|^{2}$$

اگر $k>0$، آن وقت بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌جهت‌اند و

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos 0^{\circ}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cdot 1=|k\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{b}|=|k|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{b}|=k|\mathbf{b}|^{2}$$

اگر $k=0$، یعنی $\mathbf{a}=0$ و

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=0=0\cdot|\mathbf{b}|^{2}=k|\mathbf{b}|^{2}$$

و اگر $k<0$، یعنی بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در دو جهت مختلف باشند، آن‌گاه

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot \cos ۱۸۰^\circ = |k\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{b}|.(-۱) =$$

$$= |k|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot(-۱) = k|\mathbf{b}|^۲$$

بنابراین، درهمهٔ حالت‌ها $۲(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ۲k|\mathbf{b}|^۲$، یعنی

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^۲ = \mathbf{a}^۲ + \mathbf{b}^۲ \pm ۲(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

مثال ۵۰۱۰۳. ثابت کنید، مجموع مجذورهای طول قطرهای متوازی‌الاضلاع، برابر است با مجموع مجذورهای طول چهار ضلع آن.

حل. $\mathbf{a} = OA$ و $\mathbf{b} = OB$ را بردار ضلع‌های متوازی‌الاضلاع $OACB$ می‌گیریم (شکل‌های ۴.۳ و ۶.۳). برای بردار قطرها داریم:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OC}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$$

ازمجموع برابری‌های (۳.۳) و (۳.۴) به‌دست می‌آید:

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^۲ + (\mathbf{a} + \mathbf{b})^۲ = ۲\mathbf{a}^۲ + ۲\mathbf{b}^۲ \qquad (۳.۶)$$

چون $|\mathbf{a}| = |OA| = |BC|$ و $|\mathbf{b}| = |OB| = |AC|$، با توجه به برابری (۳.۶) خواهیم داشت:

$$|AB|^۲ + |OC|^۲ = (|OA|^۲ + |BC|^۲) + (|OB|^۲ + |AC|^۲)$$

مثال ۶۰۱۰۳. می‌دانیم $|\mathbf{a}| = ۱۱$، $|\mathbf{b}| = ۲۳$ و $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = ۳۰$. مطلوب است محاسبهٔ $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ و زاویهٔ $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$.

حل. با توجه به برابری (۳.۶) داریم:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{۲|\mathbf{a}|^۲ + ۲|\mathbf{b}|^۲ - (\mathbf{a} - \mathbf{b})^۲} = ۲۰$$

و با توجه به قانون کسینوس [دستور (۳.۳) را ببینید]،

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{۱}{۲}[\mathbf{a}^۲ + \mathbf{b}^۲ - (\mathbf{a} - \mathbf{b})^۲] = -۱۲۵$$

و از آن‌جا

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=-\frac{۱۲۵}{۲۵۳}$$

یعنی

$$(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=۱۸۰^\circ-\operatorname{arc}\cos\frac{۱۲۵}{۲۵۳}$$

مثال ۳.۱.۷. مطلوب است طول قطرهای لوزی $OBCA$ (شکل ۳.۳)، به شرطی که طول ضلع آن برابر واحد و زاویهٔ AOB برابر $\operatorname{arc}\sin\frac{۲۴}{۲۵}$ باشد.

حل. بنابرقانون کسینوس داریم:

$$|\overrightarrow{AB}|^۲=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^۲=|\overrightarrow{OB}|^۲+|\overrightarrow{OA}|^۲-۲(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=$$
$$=۲-۲\cos\widehat{AOB}$$

و چون زاویهٔ AOB، حاده است، پس

$$\cos\widehat{AOB}=\sqrt{۱-\sin^۲ AOB}=\sqrt{۱-\left(\frac{۲۴}{۲۵}\right)^۲}=\frac{۷}{۲۵}$$

بنابراین $\frac{۶}{۵}=\sqrt{۲-۲\times\frac{۷}{۲۵}}=|AB|$. و به همین ترتیب

$$|OC|=\sqrt{۲+۲\cos\widehat{AOB}}=\frac{۸}{۵}$$

مثال ۳.۱.۸. ثابت کنید، دو بردار **a** و **b**، تنها وقتی برهم عمودند که داشته باشیم:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$$

حل. با توجه به رابطه‌های (۳.۳) و (۳.۴) داریم:

$$\frac{۱}{۴}(|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^۲-|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^۲)=$$

$$=\frac{۱}{۴}[\mathbf{a}^۲+\mathbf{b}^۲+۲(\mathbf{a}, \mathbf{b})-\mathbf{a}^۲-\mathbf{b}^۲+۲(\mathbf{a}, \mathbf{b})]=(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (۳.۷)$$

درنتیجه، برابری $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم: $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=۰$، یعنی وقتی که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برهم عمود باشند (مثال ۳.۱.۳ را ببینید).

مثال ۹.۱.۳. ثابت کنید: $(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^۲-\mathbf{b}^۲$.

حل. $\mathbf{x}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ و $\mathbf{y}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ می‌گیریم؛ یعنی

$$\mathbf{a}=\frac{۱}{۲}(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \quad \mathbf{b}=\frac{۱}{۲}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

در این صورت، با توجه به‌دستور (۳.۷) داریم:

$$\mathbf{a}^۲-\mathbf{b}^۲=\frac{۱}{۴}(|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^۲-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^۲)=(\mathbf{x}, \mathbf{y})=$$
$$=(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b})$$

مثال ۱۰.۱.۳. درمثلث ABC داریم:

$$|AB|=c, \quad |AC|=b, \quad |BC|=a$$

طول میانهٔ $[CM]$ را محاسبه کنید.

حل. $|CM|=m_c$ می‌گیریم. چون $\overrightarrow{CM}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$، با توجه به رابطهٔ (۳.۴) به‌دست می‌آید:

$$m_c^۲=\frac{۱}{۴}[b^۲+a^۲+۲(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})]$$

و از برابری

$$c^۲=|AB|^۲=|\overrightarrow{AB}|^۲=|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|^۲=a^۲+b^۲-۲(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$$

به‌دست می‌آید:

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})=\frac{۱}{۲}(a^۲+b^۲-c^۲) \quad (۳.۸)$$

در نتیجه $m_c^2=\frac{1}{4}(b^2+a^2+a^2+b^2-c^2)$، یعنی

$$m_c^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2) \qquad (3.9)$$

مثال ۳.۱.۱۱. درمثلث ABC، طول سه ضلع معلوم‌اند:

$$|AB|=c,\ |BC|=a,\ |AC|=b$$

درستی برابری زیر را تحقیق کنید:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})=$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \qquad (3.10)$$

حل. بنا بردستور (۳.۸) داریم:

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2);\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2);$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$$

از مجموع این سه برابری، به رابطهٔ (۳.۱۰) می‌رسیم.

مثال ۳.۱.۱۲. m_a، m_b و m_c، به‌ترتیب، میانه‌های وارد از رأس‌های A، B و C، درمثلث ABC هستند. ثابت‌کنید زاویهٔ C منفرجه است، وقتی و فقط وقتی که داشته باشیم:

$$m_c^2<\frac{m_a^2+m_b^2}{5}$$

حل. زاویهٔ C، تنها وقتی‌منفرجه‌است که داشته‌باشیم: $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})<0$، یعنی $x=a^2+b^2-c^2<0$ [(۳.۸) را ببینید]. با توجه به دستور (۳.۹) داریم:

$$4m_c^2=2a^2+2b^2-c^2;\ 4m_b^2=2a^2+2c^2-b^2;$$

$$۴m_a^۲=۲b^۲+۲c^۲-a^۲$$

از مجموع این سه برابری به‌دست می‌آید:

$$۴(m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲)=۳(a^۲+b^۲+c^۲)$$

بنابراین

$$۳c^۲=۲(a^۲+b^۲+c^۲)-۴m_c^۲$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $c^۲=\frac{۴}{۹}(۲m_a^۲+۲m_b^۲-m_c^۲)$ و به‌همین‌ترتیب:

$$a^۲=\frac{۴}{۹}(۲m_b^۲+۲m_c^۲-m_a^۲);\quad b^۲=\frac{۴}{۹}(۲m_c^۲+۲m_a^۲-m_b^۲)$$

به این ترتیب:

$$x=a^۲+b^۲-c^۲=\frac{۴}{۹}(۵m_c^۲-m_a^۲-m_b^۲)$$

یعنی:

$$x<۰ \iff ۵m_c^۲<m_a^۲+m_b^۲$$

مثال ۰۱۳۰۱۰۳ (دستور هرون). میان مساحت مثلث ABC، برحسب طول ضلع‌ها.

$$a=|BC|،\ b=|AC|،\ c=|AB|$$

حل. فرض می‌کنیم: $\mathbf{a}=\overrightarrow{CB}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{CA}$، $\varphi=(\widehat{\mathbf{a}،\mathbf{b}})$ و S، مساحت مثلث ABC. می‌دانیم $S=\frac{۱}{۲}ab\sin\varphi$، یعنی

$$S^۲=\frac{۱}{۴}a^۲b^۲(۱-\cos^۲\varphi)=\frac{۱}{۴}[a^۲b^۲-(\mathbf{a}،\mathbf{b})^۲]$$

ازطرف دیگر، بنابردستور (۳۰۸) داریم:

$$(\mathbf{a}،\mathbf{b})=\frac{۱}{۲}(a^۲+b^۲-c^۲)$$

و بنابراین

$$S^{2}=\frac{1}{4}\left[a^{2}b^{2}-\left(\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2}\right)^{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left(ab+\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2}\right)\left(ab-\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{16}[(a+b)^{2}-c^{2}][c^{2}-(a-b)^{2}]=$$

$$=\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

اکنون، اگر $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ فرض کنیم، به‌دست می‌آید:

$$a+b-c=2(p-c),\ \ a+c-b=2(p-b),$$
$$c-a+b=2(p-a)$$

و از آن‌جا

$$S^{2}=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

و سرانجام

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

بخش ۲.۳. ویژگی‌های حاصل‌ضرب داخلی

برای هر سه بردار دلخواه **a**، **b** و **c** و عدد حقیقی دلخواه λ، همیشه داریم:

°۱. $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{a})$ (ویژگی جابه‌جائی)؛

°۲. $(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$؛

°۳. $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{c})$ (ویژگی پخشی).

□ ویژگی °۱، به‌طور مستقیم از تعریف حاصل‌ضرب‌داخلی دو بردار

و، در ضمن، با توجه به این‌که برای بردارهای غیر صفر **a** و **b** داریم $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = (\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}})$، نتیجه می‌شود.

اگر $\mathbf{a} = 0$ یا $\mathbf{b} = 0$، آن وقت، برای هر عدد حقیقی λ، ویژگی °۲، به طور مستقیم و از ضرب داخلی دو بردار نتیجه می‌شود. همچنین، برای‌هر دو بردار دلخواه **a** و **b** و عدد $\lambda = 0$، درستی ویژگی °۲ روشن است. در حالت کلـی $\lambda \neq 0$، $\mathbf{a} \neq 0$ و $\mathbf{b} \neq 0$، فرض می کنیم: $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$. برای $\lambda > 0$ داریم: $(\widehat{\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ (شکل ۷.۳)، بنابراین

$$(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\lambda\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}}) =$$

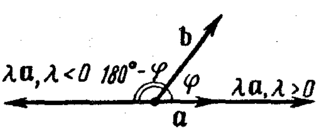
$$= \lambda|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

و اگر $\lambda < 0$ (شکل ۷.۳)، آن‌گاه $(\widehat{\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 180^\circ - \varphi$ و

$$(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\lambda\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \times$$

$$\times \cos(180^\circ - \varphi) = (-\lambda)|a| \cdot |b| \cdot (-\cos\varphi) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

به این ترتیب، ویژگی °۲، در هر حالتی درست است.



شکل ۷.۳

برای اثبات ویژگی °۳، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$0 = (\mathbf{m}+\mathbf{n})^2 + (\mathbf{m}-\mathbf{n})^2 - 2(\mathbf{m}^2+\mathbf{n}^2) \qquad (3.11)$$

[(۳.۶) را ببینید.] اگر فرض‌کنیم:

$$m=\frac{a+b}{2}+c\,,\quad n=\frac{a-b}{2}$$

به‌دست می‌آید: $m+n=a+c$ و $m-n=b+c$، و بنا بر قانون کسینوس

$$(m+n)^2=(a+c)^2+a^2+c^2+2(a,c),$$

$$(m-n)^2=(b+c)^2=b^2+c^2+2(b,c),$$

$$m^2=\left(\frac{a+b}{2}+c\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+c^2+2\left(\frac{a+b}{2},c\right)$$

با توجه به ویژگی °۲، داریم:

$$2\left(\frac{a+b}{2},c\right)=2\times\frac{1}{2}(a+b,c)=(a+b,c)$$

و به جز آن

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left|\frac{a+b}{2}\right|^2=\frac{1}{4}|a+b|^2=\frac{1}{4}[a^2+b^2+2(a,b)]$$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$n^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}[a^2+b^2-2(a,b)]$$

[(۳.۳) را ببینید.] آن‌چه را به دست آورده‌ایم، در (۳.۱۱) قرار می‌دهیم:

$$0=a^2+c^2+2(a,c)+b^2+c^2+2(b,c)-$$

$$-2\left\{\left[\frac{1}{4}(a^2+b^2)+2(a,b)+c^2+(a+b,c)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left[a^2+b^2-2(a,b)\right]\right\}=2((a,c)+(b,c)-$$

$$-(a+b,c)),\ (a+b,c)=(a,c)+(b,c)$$

ویژگی °۳ ثابت شد. ■

مثال ۳.۲.۱۰. ثابت کنید برای بردارهـای دلخواه **a**، **b**، **c**، **p**، **q** و عددهای دلخواه x_1، y_1، z_1، x_2، y_2، z_2، همیشه داریم:

$$(x_1\mathbf{a}+y_1\mathbf{b}+z_1\mathbf{c},\ \mathbf{q})=x_1(\mathbf{a},\ \mathbf{q})+y_1(\mathbf{b},\ \mathbf{q})+z_1(\mathbf{c},\ \mathbf{q}),\quad (۳.۱۲)$$

$$(\mathbf{p},\ x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b},\ +z_2\mathbf{c})=x_2(\mathbf{p},\ \mathbf{a})+y_2(\mathbf{p},\ \mathbf{b})+z_2(\mathbf{p},\ \mathbf{c}),\quad (۳.۱۳)$$

$$(x_1\mathbf{a}+y_1\mathbf{b}+z_1\mathbf{c},\ x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}+z_2\mathbf{c})=$$

$$=x_1x_2\mathbf{a}^2+y_1y_2\mathbf{b}^2+(x_1y_2+x_2y_1)(\mathbf{a},\ \mathbf{b})+z_1z_2\mathbf{c}^2+$$

$$+(x_1z_2+x_2z_1)(\mathbf{a},\ \mathbf{c})+(y_1z_2+y_2z_1)(\mathbf{b},\ \mathbf{c})\quad (۳.۱۴)$$

[دستورهای (۳.۱۲) و (۳.۱۳) نشان می‌دهند که، حاصل‌ضرب اسکالر، در رابطه با هر کدام از عامل‌هـا، دارای ویژگی خطی است. دستور (۳.۱۴)، روش کلی را برای ضرب اسکالر بردارها، با مختصات در پایهٔ $\{\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}\}$ مشخص می‌کند.]

حل. بنابر ویژگی °۳ داریم:

$$(x_1\mathbf{a}+y_1\mathbf{b}+z_1\mathbf{c},\ \mathbf{q})=[x_1\mathbf{a}+(y_1\mathbf{b}+z_1\mathbf{c}),\ \mathbf{q}]=$$

$$=(x_1\mathbf{a},\ \mathbf{q})+(y_1\mathbf{b}+z_1\mathbf{c},\ \mathbf{q})=x_1(\mathbf{a},\ \mathbf{q})+(y_1\mathbf{b},\ \mathbf{q})+$$

$$+(z_1\mathbf{c},\ \mathbf{q})=x_1(\mathbf{a},\ \mathbf{q})+y_1(\mathbf{b},\ \mathbf{q})+z_1(\mathbf{c},\ \mathbf{q})$$

(در این‌جا، از ویژگی °۲ استفاده کرده‌ایم.) به این ترتیب، برابری (۳.۱۲) ثابت شد.

بنابر ویژگی °۱ و دستور (۳.۱۲) داریم:

$$(\mathbf{p},\ x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}+z_2\mathbf{c})=(x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}+z_2\mathbf{c},\ \mathbf{p})=$$

$$=x_2(\mathbf{a},\ \mathbf{p})+y_2(\mathbf{b},\ \mathbf{p})+z_2(\mathbf{c},\ \mathbf{p})=$$

$$=x_2(\mathbf{p},\ \mathbf{a})+y_2(\mathbf{p},\ \mathbf{b})+z_2(\mathbf{p},\ \mathbf{c})$$

برابری (۳.۱۳) ثابت شد.

اکنون، فرض می‌کنیم:

$$\mathbf{p}=x_1\mathbf{a}+y_1\mathbf{b}+z_1\mathbf{c},\ \ \mathbf{q}=x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}+z_2\mathbf{c}$$

با توجه به دستورهای (۳.۱۲) و (۳.۱۳)، به دست می‌آید:

$$(\mathbf{p},\mathbf{q})=(x_1\mathbf{a}+y_1\mathbf{b}+z_1\mathbf{c},\mathbf{q})=x_1(\mathbf{a},\mathbf{q})+$$
$$+y_1(\mathbf{b},\mathbf{q})+z_1(\mathbf{c},\mathbf{q})=x_1(\mathbf{a},x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}+z_2\mathbf{c})+$$
$$+y_1(\mathbf{b},x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}+z_2\mathbf{c})+z_1(\mathbf{c},x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b}+z_2\mathbf{c})=$$
$$=x_1[x_2(\mathbf{a},\mathbf{a})+y_2(\mathbf{a},\mathbf{b})+z_2(\mathbf{a},\mathbf{c})]+y_1[x_2(\mathbf{a},\mathbf{b})+$$
$$+y_2(\mathbf{b},\mathbf{b})+z_2(\mathbf{b},\mathbf{c})]+z_1[x_2(\mathbf{a},\mathbf{c})+y_2(\mathbf{b},\mathbf{c})+$$
$$+z_2(\mathbf{c},\mathbf{c})]=x_1x_2\mathbf{a}^2+y_1y_2\mathbf{b}^2+(x_1y_2+x_2y_1)(\mathbf{a},\mathbf{b})+$$
$$+z_1z_2\mathbf{c}^2+(x_1z_2+x_2z_1)(\mathbf{a},\mathbf{c})+(y_1z_2+y_2z_1)(\mathbf{b},\mathbf{c})$$

دستور (۳.۱۴) هم ثابت شد. این برابری، به ازای $\mathbf{c}=0$، به این صورت درمی‌آید:

$$(x_1\mathbf{a}+y_1\mathbf{b},x_2\mathbf{a}+y_2\mathbf{b})=x_1x_2\mathbf{a}^2+y_1y_2\mathbf{b}^2+$$
$$+(x_1y_2+x_2y_1)(\mathbf{a},\mathbf{b}) \qquad (۳.۱۵)$$

مثال ۳.۲.۳. برای بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ داریم:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c}=0$$

اگر داشته باشیم: $|\mathbf{a}|=1$، $|\mathbf{b}|=4$ و $|\mathbf{c}|=2$، محاسبه کنید:

$$\mu=(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{b},\mathbf{c})+(\mathbf{c},\mathbf{a})$$

حل. چون $-\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$، بنابراین

$$4=\mathbf{c}^2=(-\mathbf{c},-\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c},\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+$$
$$+\mathbf{c}^2+2(\mathbf{a},\mathbf{b})+2(\mathbf{b},\mathbf{c})+2(\mathbf{c},\mathbf{a})=1+16+4+2\mu$$

و از آن‌جا $\mu=-\frac{17}{2}$.

مثال ۳.۲.۴. a و b، بردارهای واحدند و می‌دانیم $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{۳}$. حاصل $(۳\mathbf{a}-۴\mathbf{b}, ۲\mathbf{a}+۵\mathbf{b})$ را محاسبه کنید.

حل. داریم:

$$۳=|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^۲=\mathbf{a}^۲+\mathbf{b}^۲+۲(\mathbf{a}, \mathbf{b})=۱+۱+۲(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

و بنابراین $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=\frac{۱}{۲}$. اکنون، با توجه به‌دستور (۳.۱۵) به‌دست می‌آید:

$$(۳\mathbf{a}-۴\mathbf{b}, ۲\mathbf{a}+۵\mathbf{b})=۶\mathbf{a}^۲-۲۰\mathbf{b}^۲+۷(\mathbf{a}, \mathbf{b})=$$

$$=۶-۲۰+\frac{۷}{۲}=-\frac{۲۱}{۲}$$

مثال ۳.۲.۴. می‌دانیم: $|\mathbf{a}|=۳$، $|\mathbf{b}|=۲$ و $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})=۱۲۰^\circ$. طول بردارهای $\mathbf{p}=\mathbf{a}+۲\mathbf{b}$ و $\mathbf{q}=۲\mathbf{a}-\mathbf{b}$ و حاصل‌ضرب داخلی این دو بردار و مقدار زاویهٔ بین آن‌ها را پیدا کنید.

حل. $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=۳\times۲\times\cos۱۲۰^\circ=-۳$. بنا بر دستور (۳.۱۵)

$$|\mathbf{p}|^۲=|\mathbf{p}, \mathbf{p}|=|\mathbf{a}+۲\mathbf{b}, \mathbf{a}+۲\mathbf{b}|=$$

$$=\mathbf{a}^۲+۴(\mathbf{a}, \mathbf{b})+۴\mathbf{b}^۲=۹+(-۱۲)+۱۶=۱۳;\ |p|=\sqrt{۱۳};$$

$$|\mathbf{q}|^۲=|\mathbf{q}, \mathbf{q}|=|۲\mathbf{a}-\mathbf{b}, ۲\mathbf{a}-\mathbf{b}|=۴\mathbf{a}^۲-۴(\mathbf{a}, \mathbf{b})+$$

$$+\mathbf{b}^۲=۵۲;\ |\mathbf{q}|=۲\sqrt{۱۳};$$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q})=(\mathbf{a}+۲\mathbf{b}, ۲\mathbf{a}-\mathbf{b})=۲\mathbf{a}^۲+۳(\mathbf{a}, \mathbf{b})-۲\mathbf{b}^۲=$$

$$=۱۸+(-۹)-۸=۱;$$

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{p}|\cdot|\mathbf{q}|}=\frac{۱}{\sqrt{۱۳}\cdot۲\sqrt{۱۳}}=\frac{۱}{۲۶};\ \varphi=\arccos\frac{۱}{۲۶}$$

مثال ۳.۲.۵. دو بردار غیر صفر a و b طول‌هایی برابر دارند. اگر بدانیم، دو بردار $\mathbf{p}=\mathbf{a}+۳\mathbf{b}$ و $\mathbf{q}=۵\mathbf{a}+۳\mathbf{b}$ برهم عمودند، زاویهٔ φ، بین دو بردار a و b را پیدا کنید.

حل. چون $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ برهم عمودند، داریم:

$$\circ=(\mathbf{p}، \mathbf{q})=(\mathbf{a}+۳\mathbf{b}، ۵\mathbf{a}+۳\mathbf{b})=۵\mathbf{a}^۲+۱۸(\mathbf{a}، \mathbf{b})+$$
$$+۹\mathbf{b}^۲=۵|\mathbf{a}|^۲+۱۸|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot cos\varphi+۹|\mathbf{b}|^۲$$

و چون $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|\neq\circ$، بنابراین $cos\varphi=-\frac{۷}{۹}$، یعنی

$$\varphi=۱۸\circ^\circ-\arccos\frac{۷}{۹}$$

مثال ۶.۲.۳. $[AD]$، $[BE]$ و $[CF]$، میانه‌های مثلث ABC هستند. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lambda=(\overrightarrow{BC}، \overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CA}، \overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{AB}، \overrightarrow{CF})$$

حل. $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ می‌گیریم. بنابراین

$$\overrightarrow{BC}=-\mathbf{b}، \overrightarrow{AD}=-\mathbf{a}+\frac{۱}{۲}\mathbf{b}، \overrightarrow{BE}=\frac{۱}{۲}\mathbf{a}-\mathbf{b}،$$

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}، \overrightarrow{CF}=\frac{۱}{۲}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

و بنابر دستور (۳.۱۵) داریم:

$$\lambda=\left(-\mathbf{b}، -\mathbf{a}+\frac{۱}{۲}\mathbf{b}\right)+\left(\mathbf{a}، \frac{۱}{۲}\mathbf{a}-\mathbf{b}\right)+\left(\mathbf{b}-\mathbf{a}، \frac{۱}{۲}\mathbf{a}+\frac{۱}{۲}\mathbf{b}\right)=$$

$$=(\mathbf{a}، \mathbf{b})-\frac{۱}{۲}\mathbf{b}^۲+\frac{۱}{۲}\mathbf{a}^۲-(\mathbf{a}، \mathbf{b})-\frac{۱}{۲}\mathbf{a}^۲+\frac{۱}{۲}\mathbf{b}^۲=\circ$$

مثال ۷.۲.۳. ثابت کنید، برای هر ترتیبی از نقطه‌های A، B، C و D در صفحه (یا در فضا)، داریم $\mu=\circ$، به شرطی که

$$\mu=(\overrightarrow{BC}، \overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CA}، \overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{AB}، \overrightarrow{CD})$$

حل. $\mathbf{a}=\overrightarrow{DA}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{DB}$ و $\mathbf{c}=\overrightarrow{DC}$ می‌گیریم. داریم:

$$\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b},\ \overrightarrow{AD}=-\mathbf{a},\ \overrightarrow{CA}=\mathbf{a}-\mathbf{c},\ \overrightarrow{BD}=-\mathbf{b},$$
$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a},\ \overrightarrow{CD}=-\mathbf{c}$$

ازآن جا

$$\mu=(\mathbf{c}-\mathbf{b},\ -\mathbf{a})+(\mathbf{a}-\mathbf{c},\ -\mathbf{b})+(\mathbf{b}-\mathbf{a},\ -\mathbf{c})=$$
$$=-(\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{a},\mathbf{b})-(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{b},\mathbf{c})-(\mathbf{b},\mathbf{c})+$$
$$+(\mathbf{a},\mathbf{c})=0$$

مثال ۸۰۳۰۳. در منشور $ABCA_1B_1C_1$ داریم (شکل ۸۰۳):

$$|AB|=c,\ |BC|=a,\ |CA|=b,\ \widehat{BAA_1}=\alpha,\ \widehat{CAA_1}=\beta$$

مطلوب است محاسبهٔ زاویهٔ BCC_1.

حل. داریم:

$$\cos\widehat{BCC_1}=\frac{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1})}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CC_1}|}=\frac{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1})}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|}=$$
$$=\frac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA_1})-(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1})}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|}=$$
$$=\frac{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AA_1}|\cos\alpha-|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AA_1}|\cos\beta}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{AA_1}|}=\frac{c\cos\alpha-b\cos\beta}{a}$$

و درحالت خاصی که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد:

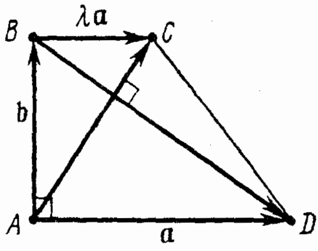
$$\cos\widehat{BCC_1}=\cos\alpha-\cos\beta$$

مثال ۹۰۳۰۳. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$، قطرها برهم عمودند. اگر نسبت طول‌های دو قاعده: $|BC|:|AD|=\lambda$، نسبت طول‌های دو قطر را پیدا کنید.

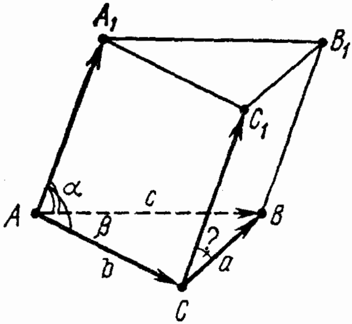
حل. $\mathbf{a}=\overrightarrow{AD}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$ می‌گیریم (شکل ۹۰۳). بنابراین

$$\overrightarrow{BC}=\lambda\mathbf{a},\ \ \overrightarrow{AC}=\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a},\ \ \overrightarrow{BD}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$$

بنابه‌فرض: $(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$ و $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD})=0$، یعنی



شکل ۹.۳



شکل ۸.۳

$$\circ=(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}، \mathbf{a}-\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}^{۲}+(۱-\lambda)(\mathbf{a}، \mathbf{b})-\mathbf{b}^{۲}=\lambda\mathbf{a}^{۲}-\mathbf{b}^{۲}$$

بنابراین $\mathbf{b}^{۲}=\lambda\mathbf{a}^{۲}$ و

$$\frac{|AC|}{|BD|}=\sqrt{\frac{(\overrightarrow{AC}، \overrightarrow{AC})}{(\overrightarrow{BD}، \overrightarrow{BD})}}=\sqrt{\frac{(\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}، \mathbf{b}+\lambda\mathbf{a})}{(\mathbf{a}-\mathbf{b}، \mathbf{a}-\mathbf{b})}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\mathbf{b}^{۲}+۲\lambda(\mathbf{a}، \mathbf{b})+\lambda^{۲}\mathbf{a}^{۲}}{\mathbf{a}^{۲}+\mathbf{b}^{۲}-۲(\mathbf{a}، \mathbf{b})}}=\sqrt{\frac{\mathbf{b}^{۲}+\lambda^{۲}\mathbf{a}^{۲}}{\mathbf{a}^{۲}+\mathbf{b}^{۲}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\lambda\mathbf{a}^{۲}+\lambda^{۲}\mathbf{a}^{۲}}{\mathbf{a}^{۲}+\lambda\mathbf{a}^{۲}}}=\sqrt{\lambda}$$

مثال ۱۰.۲.۳. زاویهٔ بین دو قطر $[AC]$ و $[BD]$ را، در چهارضلعی محدب $ABCD$ پیدا کنید، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$|AB|^{۲}+|CD|^{۲}=|BC|^{۲}+|AD|^{۲}$$

حل. فرض می کنیم: $\mathbf{a}=\overrightarrow{DA}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{DB}$، $\mathbf{c}=\overrightarrow{DC}$. بنابراین

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}، \quad \overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$$

طبق فرض $(\mathbf{b}-\mathbf{a})^{۲}+\mathbf{c}^{۲}=(\mathbf{c}-\mathbf{b})^{۲}+\mathbf{a}^{۲}$، یعنی

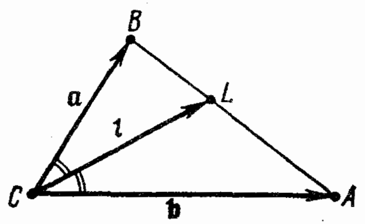
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=(\mathbf{c}, \mathbf{b})$$

و از آن‌جا

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})=(\mathbf{c}-\mathbf{a}, -\mathbf{b})=(\mathbf{a}, \mathbf{b})-(\mathbf{c}, \mathbf{b})=0$$

یعنی قطرهای $[AC]$ و $[BD]$ برهم عمودند.

مثال ۱۱.۲.۳. بردار $\mathbf{l}=\overrightarrow{CL}$، نیمساز زاویهٔ C در مثلث ABC را، برحسب بردارهای $\mathbf{a}=\overrightarrow{CB}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CA}$ و طول آن‌ها $a=|\mathbf{a}|$ و $b=|\mathbf{b}|$ بیان کنید.



شکل ۱۰.۳

حل. زاویه‌های ACL و LCB باهم برابرند (شکل ۱۰.۳)، بنابراین کسینوس‌های آن‌ها نیز برابر می‌شوند:

$$\frac{(\mathbf{b}, \mathbf{l})}{|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{l}|}=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{l})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{l}|} \Longrightarrow 0=(a\mathbf{b}-b\mathbf{a}, \mathbf{l})$$

نقطهٔ L، $|AB|$ را به نسبت $\lambda=|AL|:|AB|$ تقسیم می‌کند. بنابراین $\mathbf{l}=\dfrac{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{\lambda+1}$ و از آن‌جا

$$0=a(\mathbf{a}, \mathbf{b})-ba^2+\lambda ab^2-\lambda b(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

یعنی $\frac{a}{b} = \frac{a[ab-(\mathbf{a}, \mathbf{b})]}{b[ab-(\mathbf{a}, \mathbf{b})]} = \lambda$. سپس

$$ab-(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ab(1-\cos\hat{C}) > 0$$

و سرانجام

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{a}+\frac{a}{b}\mathbf{b}}{1+\frac{a}{b}} = \frac{a\mathbf{b}-b\mathbf{a}}{a+b}$$

مثال ۱۲.۳.۰۳. مطلوب است محاسبهٔ طـول نیمساز $[CL]$ در مثلث ABC، برحسب طول ضلع‌های $a=|BC|$، $b=|AC|$ و $c=|AB|$.

حل. فرض می‌کنیم $\mathbf{a}=\overrightarrow{CB}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CA}$، یعنی $a=|\mathbf{a}|$ و $b=|\mathbf{b}|$.
با توجه به‌نتیجهٔ مثال ۱۱.۲.۰۳، داریم:

$$\overrightarrow{CL} = \frac{a\mathbf{b}+b\mathbf{a}}{a+b}$$

بنابراین

$$|\overrightarrow{CL}|^2 = \frac{1}{(a+b)^2}(a\mathbf{b}+b\mathbf{a})^2 = \frac{1}{(a+b)^2}[(a\mathbf{b})^2+(b\mathbf{a})^2+$$

$$+2(a\mathbf{b}, b\mathbf{a})] = \frac{1}{(a+b)^2}[2a^2b^2+2ab(\mathbf{a}, \mathbf{b})] =$$

$$= \frac{2ab}{(a+b)^2}[ab+(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$$

با توجه به دستور (۳.۰۸): $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$ و درنتیجه

$$|\overrightarrow{CL}|^2 = \frac{2ab}{(a+b)^2}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2} = ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}$$

مثال ۱۳.۲.۳. ثابت کنید، اگر در مثلث ABC، دو نیمساز داخلی، طولی برابر داشته باشند، مثلث متساوی‌الساقین است.

حل. $[CL]$ و $[AM]$ را، نیمسازهای زاویه‌های C و A می‌گیریم. با توجه به نتیجهٔ مثال قبل، داریم:

$$|CL|^۲=\frac{ab-abc^۲}{(a+b)^۲}, |AM|^۲=\frac{bc-bca^۲}{(b+c)^۲}$$

بنابراین، به شرط $|AM|=|CL|$، باید داشته باشیم:

$$\frac{a-ac^۲}{(a+b)^۲}=\frac{C-ca^۲}{(b+c)^۲}\Longrightarrow a-c=$$

$$=\frac{ac[c(b+c)^۲-a(a+b)^۲]}{(a+b)^۲(b+c)^۲}=$$

$$=\frac{ac[c^۳-a^۳+۲b(c^۲-a^۲)+b^۲(c-a)]}{(a+b)^۲(b+c)^۲}=$$

$$=ac(c-a)\frac{c^۲+ac+a^۲+۲b(c+a)+b^۲}{(a+b)^۲(b+c)^۲}$$

از آن‌جا

$$(a-c)\left[۱+\frac{ac(c^۲+ac+a^۲+۲bc+۲ab+b^۲)}{(a+b)^۲(b+c)^۲}\right]=۰$$

و بنابراین $a=c$.

مثال ۱۴.۲.۳. در مثلث ABC، میانهٔ $[CM]$ بر نیمساز $[AL]$ عمود است و $|CM|:|AL|=n$. زاویهٔ A را محاسبه کنید.

حل. فرض می‌کنیم: $\overrightarrow{AB}=۲\mathbf{b}$، $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}$، $b=|\mathbf{b}|$، $c=|\mathbf{c}|$ و $A=(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}})$. در این صورت

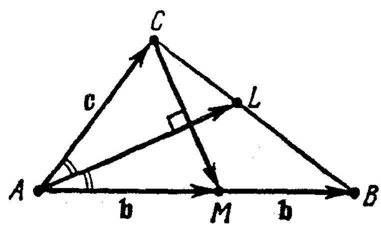
$$\overrightarrow{CM}=\mathbf{b}-\mathbf{c}, \overrightarrow{AL}=\frac{۲b\mathbf{c}+C.۲\mathbf{b}}{۲b+c}$$

(نتیجهٔ مثال ۱۱.۲.۳ را ببینید). بنابر فرض $\circ=(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{CM})$، یعنی

$$\circ=(۲b\mathbf{c}+۲c\mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{c})=۲[cb^۲-bc^۲+(b-c)(\mathbf{b}, \mathbf{c})]=$$

$$=۲(b-c)bc(۱+\cos\hat{A})$$

و چون $۱۸۰^\circ>\hat{A}>\circ^\circ$، خواهیم داشت: $bc(۱+\cos\hat{A})\neq\circ$ و بنابراین $b=c$.



شکل ۱۱.۳

[درضمن، این نتیجه را، از اینجا هم می‌توانستیم به‌دست آوریم که، چون در مثلث ACM، نیمساز وارتفاع وارد از رأس A برهم منطبق‌اند(شکل ۱۱.۳)، بنابراین مثلث ACM متساوی‌الساقین است و $|AC|=|AM|$.]

به این ترتیب

$$\overrightarrow{AL}=\frac{۲}{۳}(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \ |AL|^۲=\frac{۴}{۹}[\mathbf{b}^۲+\mathbf{c}^۲+۲(\mathbf{b}, \mathbf{c})]=$$

$$=\frac{۴}{۹}(۲b^۲+۲b^۲\cos\hat{A})=\frac{۸}{۹}b^۲(۱+\cos\hat{A}),$$

$$|CM|^۲=(\mathbf{b}-\mathbf{c})^۲=\mathbf{b}^۲+\mathbf{c}^۲-۲(\mathbf{b}, \mathbf{c})=$$

$$=۲b^۲-۲b^۲\cos\hat{A}=۲b^۲(۱-\cos\hat{A})$$

از آن‌جا

$$n^۲=|CM|^۲:|AL|^۲=\frac{۹(۱-cos\hat{A})}{۴(۱+cos\hat{A})}$$

و سرانجام

$$cos\hat{A}=\frac{۹-۴n^۲}{۹+۴n^۲}$$

مثال ۱۵۰۳۰۳. در مثلث ABC داریم:

$$|AC|=۱،\ |BC|=۲،\ \hat{C}=\arccos\frac{۳}{۴}$$

بردارهای ارتفاع‌های $\overrightarrow{CD}=\mathbf{h}$ و $\overrightarrow{AE}=\mathbf{H}$ را، برحسب بردارهای $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ بیان کنید (شکل ۱۲۰۳).

حل. بردارهای $\mathbf{h}-\mathbf{a}=\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}\neq ۰$ و $\mathbf{b}-\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$، هم‌راستا هستند. بنابراین، عددی مانند t وجود دارد، به‌نحوی که $\mathbf{h}-\mathbf{a}=t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$، مقدار t را با توجه به شرط عمود بودن بردارهای $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ پیدا می‌کنیم:

$$۰=(\overrightarrow{CD}،\overrightarrow{AB})=(\mathbf{h}،\mathbf{b}-\mathbf{a})=(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})،\mathbf{b}-\mathbf{a})=$$

$$=(\mathbf{a}،\mathbf{b})-\mathbf{a}^۲+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})^۲$$

از آن‌جا

$$t=\frac{\mathbf{a}^۲-(\mathbf{a}،\mathbf{b})}{\mathbf{a}^۲+\mathbf{b}^۲-۲(\mathbf{a}،\mathbf{b})}=\frac{a(a-b\,cos\hat{C})}{a^۲+b^۲-۲ab\,cos\hat{C}}=$$

$$=\frac{۱-۱\times۲\times\frac{۳}{۴}}{۱+۴-۲\times۱\times۲\times\frac{۳}{۴}}=-\frac{۱}{۴}،$$

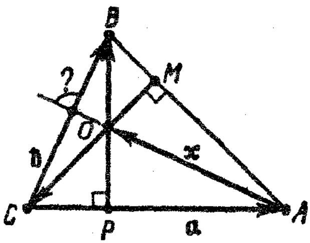
چون $a=|\mathbf{a}|=۱$ و $b=|\mathbf{b}|=۲$، بنابراین

$$\mathbf{h}=\mathbf{a}-\frac{۱}{۴}(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\frac{۵\mathbf{a}-\mathbf{b}}{۴}$$

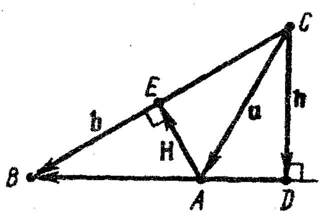
بـه همین ترتیب، بردار $\mathbf{H}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$ را می‌توان بـه صورت $\mathbf{H}=-\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ نشان داد. عدد λ از شرط $(\mathbf{H}, \mathbf{b})=۰$ به‌دست می‌آید:

$$-(\mathbf{a}, \mathbf{b})+\lambda\mathbf{b}^۲=۰ \Rightarrow \lambda=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{b^۲}=\frac{a\cos\hat{C}}{b}=\frac{۳}{۸}$$

و به این ترتیب: $\mathbf{H}=-\mathbf{a}+\frac{۳}{۸}\mathbf{b}$.



شکل ۱۳.۳



شکل ۱۲.۳

مثال ۱۶.۲.۳. ثابت کنید، ارتفاع‌هـای مثلث، در یـك نقطه به هم می‌رسند.

حل. ارتفاع‌هـای $[CM]$ و $[BP]$ را در مثلث ABC رسم می‌کنیم (شکل ۱۳.۳) و نقطهٔ برخورد آن‌ها را O می‌نامیم. برای اثبات قضیه، لازم وکافی است ثـابت‌کنیم، خط راست (AO) بـر خط راست (BC) عمـود است؛ یعنی

$$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC})=۰$$

فرض می‌کنیم: $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ و $\mathbf{x}=\overrightarrow{AO}$. از آن‌جا

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a},\ \overrightarrow{OC}=-\mathbf{x}-\mathbf{a},\ \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}-\mathbf{x}-\mathbf{a}$$

بنـا به تعریف ارتفاع $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB})=۰$، یعنی $(-\mathbf{x}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a})=۰$.

بنا بر این

$$(\mathbf{x}، \mathbf{a})-(\mathbf{x}، \mathbf{b})=(\mathbf{a}، \mathbf{b})-\mathbf{a}^۲$$

به همین ترتیب $(\overrightarrow{OB}، \overrightarrow{CA})=۰$، یعنی

$$(\mathbf{b}-\mathbf{x}-\mathbf{a}، \mathbf{a})=۰$$

به این ترتیب $(\mathbf{x}، \mathbf{a})=(\mathbf{a}، \mathbf{b})-\mathbf{a}^۲$؛ از آن‌جا

$$(\mathbf{x}، \mathbf{a})=(\mathbf{x}، \mathbf{a})-(\mathbf{x}، \mathbf{b})$$

بنا بر این $(\mathbf{x}، \mathbf{b})=۰$، یعنی $(\overrightarrow{AO}، \overrightarrow{BC})=۰$.

مثال ۰۱۷۰۲۰۳ E و F را، به ترتیب، وسط یال‌های $[AD]$ و $[CB]$، در چهاروجهی $ABCD$ می‌گیریم. ثابت کنید، بردارهای $\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{FE}$ و $\overrightarrow{CB}$، دو به‌دو برهم عمودند و $\sqrt{۲}:|AD|=|FE|$.

حل. قرار می‌گذاریم: $\mathbf{a}=\overrightarrow{DA}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{DB}$، $\mathbf{c}=\overrightarrow{DC}$ و

$$a=|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|$$

از آن‌جا که $(\widehat{\mathbf{a}، \mathbf{b}})=(\widehat{\mathbf{a}، \mathbf{c}})=(\widehat{\mathbf{b}، \mathbf{c}})=۶۰^\circ$، بنا بر این

$$(\mathbf{a}، \mathbf{b})=(\mathbf{a}، \mathbf{c})=(\mathbf{b}، \mathbf{c})=\frac{۱}{۲}a^۲$$

و در نتیجه

$$(\overrightarrow{AD}، \overrightarrow{CB})=(-\mathbf{a}، \mathbf{b}-\mathbf{c})=-(\mathbf{a}، \mathbf{b})+(\mathbf{a}، \mathbf{c})=۰$$

یعنی $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{CB}$، و به جز آن

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{DA}=$$

$$=\frac{۱}{۲}(\mathbf{b}-\mathbf{c})-\mathbf{b}+\frac{۱}{۲}\mathbf{a}=\frac{۱}{۲}(\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c})$$

از آن‌جا

$$|FE|=\frac{۱}{۲}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}, \mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c})}=$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{\mathbf{a}^۲+\mathbf{b}^۲+\mathbf{c}^۲-۲(\mathbf{a}, \mathbf{b})-۲(\mathbf{a}, \mathbf{c})+۲(\mathbf{b}, \mathbf{c})}=$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳a^۲-۲(\mathbf{a}, \mathbf{b})}=\frac{a}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}|AD|$$

و سرانجام

$$(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{AD})=\frac{۱}{۲}(\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}, -\mathbf{a})=\frac{۱}{۲}[-\mathbf{a}^۲+(\mathbf{a}, \mathbf{b})+(\mathbf{a}, \mathbf{c})]=۰,$$

$$(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{CB})=\frac{۱}{۲}(\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}, \mathbf{b}-\mathbf{c})=$$

$$=\frac{۱}{۲}[(\mathbf{a}, \mathbf{b})-(\mathbf{a}, \mathbf{c})-\mathbf{b}^۲+\mathbf{c}^۲]=۰$$

یعنی $\overrightarrow{FE}\perp\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{FE}\perp\overrightarrow{CB}$.

مثال ۱۸.۲۰۳. E و F را وسط یال‌های $[AD]$ و $[BC]$ از هرم $ABCD$ می‌گیریم. ثابت کنید، برابری‌های

$$|BD|=|AC| \quad , \quad |AB|=|CD|$$

تنها وقتی به طور هم‌زمان برقرارند که پاره‌خط راست $[EF]$، بر هر دو یال $[BC]$ و $[AD]$ عمود باشد.

حل. $\mathbf{a}=\overrightarrow{ED}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{EF}$ و $\mathbf{c}=\overrightarrow{FC}$ را، به عنوان بردارهای پایه در نظر می‌گیریم. در این صورت، داریم:

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}=\mathbf{c}-\mathbf{b}+\mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

بنابراین، تنها وقتی برابری $|BD|=|AC|$ برقرار است که داشته باشیم:

$$(\mathbf{c}-\mathbf{b}+\mathbf{a})^۲=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^۲$$

(مثال ۸.۱.۳ را ببینید) و یا $(\mathbf{b}، \mathbf{a}+\mathbf{c})=0$. به همین ترتیب

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}،\ \overrightarrow{CD}=-\mathbf{c}-\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

و برابری $|CD|=|AB|$، هم‌ارز است با $(\mathbf{b}، \mathbf{a}-\mathbf{c})=0$. بنابراین

$$\begin{cases}|BD|=|AC|,\\ |AB|=|CD|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\mathbf{a}، \mathbf{b})+(\mathbf{b}، \mathbf{c})=0\\ (\mathbf{a}، \mathbf{b})-(\mathbf{b}، \mathbf{c})=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(\mathbf{a}، \mathbf{b})=0\\ (\mathbf{b}، \mathbf{c})=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbf{b}\perp\mathbf{a},\\ \mathbf{b}\perp\mathbf{c}\end{cases}$$

مثال ۱۹.۲.۳. M و E را وسط یال‌های $[AC]$ و $[AB]$ در چهاروجهی منتظم $ABCD$ و N را محل برخورد میانه‌های وجه BCD می‌گیریم. زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{DE}$ را پیدا کنید.

حل. $\mathbf{a}=\overrightarrow{DA}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{DB}$، $\mathbf{c}=\overrightarrow{DC}$ و $a=|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|$ می‌گیریم. در این صورت

$$(\mathbf{a}، \mathbf{b})=(\mathbf{a}، \mathbf{c})=(\mathbf{b}، \mathbf{c})=\frac{1}{2}a^2،\ \ \overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})،$$

$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c})،\ \ \overrightarrow{DN}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

و از آن‌جا

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DM}=-\frac{1}{6}(3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c})،$$

$$(6|\overrightarrow{MN}|)^2=(3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}، 3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c})=9\mathbf{a}^2+4\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-$$
$$-12(\mathbf{a}، \mathbf{b})+6(\mathbf{a}، \mathbf{c})-4(\mathbf{b}، \mathbf{c})=14a^2-10(\mathbf{a}، \mathbf{b})=9a^2،$$

$$|\overrightarrow{MN}|=\frac{a}{2}،\ \ |\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+2(\mathbf{a}، \mathbf{b})}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

و با توجه به دستور (۳.۱۴)

$$(\overrightarrow{DE}، \overrightarrow{MN}) = -\frac{۱}{۱۲}(\mathbf{a}+\mathbf{b}، ۳\mathbf{a}-۲\mathbf{b}+\mathbf{c}) =$$

$$= -\frac{۱}{۱۲}(۳\mathbf{a}^۲+(\mathbf{a}، \mathbf{b})+(\mathbf{a}، \mathbf{c})-۲\mathbf{b}^۲+(\mathbf{b}،\mathbf{c})) = -\frac{۵a^۲}{۲۴}$$

به این ترتیب، اگر فرض کنیم $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{DE}، \overrightarrow{MN}})$، آن وقت

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{DE}، \overrightarrow{MN})}{|\overrightarrow{DE}|\cdot|\overrightarrow{MN}|} = \frac{-\frac{۵a^۲}{۲۴}}{\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\cdot\frac{a}{۲}} = -\frac{۵}{۶\sqrt{۳}}$$

یعنی $\varphi = ۱۸۰^\circ - \arccos\frac{۵}{۶\sqrt{۳}}$.

مثال ۳۰.۲.۳*. در چهاروجهی منتظم $ABCD$، نقطه‌های E و F را وسط یال‌های $[AD]$ و $[BC]$، و نقطه‌های M و N را روی پاره‌خط‌های راست $[EF]$ و $[CD]$ در نظر گرفته‌ایم و می‌دانیم:

$$\alpha = \widehat{MNC} = ۴۵^\circ، \quad \beta = \widehat{NME} = ۶۰^\circ$$

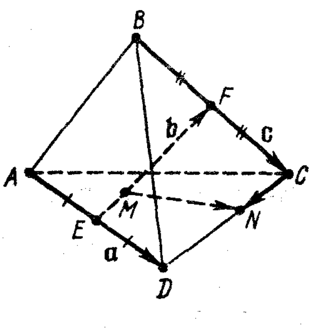
نسبت‌های $|ND|:|CN|$ و $|ME|:|FM|$ را پیدا کنید.

حل. $\mathbf{a} = \overrightarrow{ED}$، $\mathbf{b} = \overrightarrow{EF}$، $\mathbf{c} = \overrightarrow{FC}$ را بردارهای پایه می‌گیریم (شکل ۱۴.۳). فرض کنید $d = |\mathbf{a}|$. بنابر نتیجهٔ مثال ۱۷.۲.۳، بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، دو به دو برهم عمودند. پس

$$(\mathbf{a}، \mathbf{b}) = (\mathbf{a}، \mathbf{c}) = (\mathbf{b}، \mathbf{c}) = ۰،$$

$$|\mathbf{c}| = d، \ |\mathbf{b}| = d\sqrt{۲}$$

با توجه به فرض، عددهای λ و μ وجود دارند، به نحوی که



شکل ۱۴.۳

$$\overrightarrow{CN}=\lambda\overrightarrow{CD}=\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}),\quad \overrightarrow{MF}=\mu\overrightarrow{EF}=\mu\mathbf{b}$$

بنا بر این

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CN}=\lambda\mathbf{a}+(\mu-\lambda)\mathbf{b}+(1-\lambda)\mathbf{c},$$

$$|\overrightarrow{MN}|^2=(\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{MN})=\lambda^2\mathbf{a}^2+(\mu-\lambda)^2\mathbf{b}^2+(1-\lambda)^2\mathbf{c}^2+$$

$$+2\lambda(\mu-\lambda)(\mathbf{a},\mathbf{b})+2\lambda(1-\lambda)(\mathbf{a},\mathbf{c})+2(\mu-\lambda)(1-\lambda)(\mathbf{b},\mathbf{c})=$$

$$=\lambda^2d^2+(\mu-\lambda)^2 2d^2+(1-\lambda)^2d^2=d^2[(\lambda-1)^2+$$

$$+2(\mu-\lambda)^2+\lambda^2],$$

$$\overrightarrow{CD}=\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c},\quad |\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|=2|\mathbf{a}|=2d$$

به جز این‌ها

$$(\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{CD})=(\lambda\mathbf{a}+(\mu-\lambda)\mathbf{b}+(1-\lambda)\mathbf{c},\ \mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c})=$$

$$=\lambda\mathbf{a}^2-(\mu-\lambda)\mathbf{b}^2-(1-\lambda)\mathbf{c}^2=(4\lambda-2\mu-1)d^2,$$

$$|\overrightarrow{EF}|=|\mathbf{b}|+d\sqrt{2},\ (\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{EF})=(\lambda\mathbf{a}+(\mu-\lambda)\mathbf{b}+$$

$$+(1-\lambda)\mathbf{c},\ \mathbf{b})=(\mu-\lambda)\mathbf{b}^2=2(\mu-\lambda)d^2$$

با توجه به فرض داریم:

$$\cos\alpha=\cos\widehat{MNC}=\cos(\widehat{\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{CN}})=\cos(\widehat{\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{CD}})=$$

$$=\frac{(\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{CD})}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{CD}|}=\frac{4\lambda-2\mu-1}{2\sqrt{\lambda^2+2(\mu-\lambda)^2+(\lambda-1)^2}},$$

$$\cos\beta=\cos\widehat{NME}=-\cos\widehat{NMF}=-\cos(\widehat{\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{EF}})=$$

$$=-\frac{(\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{EF})}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\frac{2(\lambda-\mu)}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+2(\mu-\lambda)^2+(\lambda-1)^2}} \tag{3.16}$$

از این دو رابطه به دست می‌آید:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{4\lambda-2\mu-1}{2\sqrt{2}(\lambda-\mu)};$$

$$\mu = \frac{\lambda(۴\cos\beta - ۲\sqrt{۲}\cos\alpha) - \cos\beta}{۲\cos\beta - ۲\sqrt{۲}\cos\alpha};$$

$$\lambda - \mu = \frac{(۱ - ۲\lambda)\cos\beta}{۲\cos\beta - ۲\sqrt{۲}\cos\alpha}$$

اکنون می‌توان مجهول λ را از معادلهٔ (۳.۱۶) محاسبه کرد:

$$\cos\beta = \frac{\dfrac{(۱ - ۲\lambda)\cos\beta}{\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha}}{\sqrt{۲\lambda^۲ + \dfrac{(۱ - ۲\lambda)^۲\cos^۲\beta}{(\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha)^۲} + ۲(\lambda - ۱)^۲}} \qquad (۳.۱۷)$$

با مجذور کردن دو طرف رابطهٔ (۳.۱۷) و با توجه به $\cos^۲\beta \neq ۰$، به‌دست می‌آید:

$$۴\lambda^۲ - ۴\lambda + ۲ = \frac{(۱ - ۲\lambda)^۲\sin^۲\beta}{(\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha)^۲}$$

یعنی

$$(۱ - ۲\lambda)^۲ = ۴\lambda^۲ - ۴\lambda + ۱ = \left(\frac{\sin^۲\beta}{(\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha)^۲} - ۱\right)^{-۱} =$$

$$= \frac{(\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha)^۲}{\sin^۲\beta - (\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha)^۲}$$

عددهای $۲\lambda - ۱$ و $\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha$ هم‌علامت‌اند، بنابراین

$$۱ - ۲\lambda = \frac{\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha}{\sqrt{\sin^۲\beta - (\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha)^۲}}$$

و نسبت‌هایی که به دنبال آن‌ها برویم، برابرند با

$$\frac{|CN|}{|ND|} = \frac{\lambda}{۱ - \lambda} = \frac{۱ - (۱ - ۲\lambda)}{۱ + (۱ - ۲\lambda)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^۲\beta - (\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha)^۲} - (\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha)}{\sqrt{\sin^۲\beta - (\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha)^۲} + (\cos\beta - \sqrt{۲}\cos\alpha)};$$

$$\frac{|FM|}{|ME|}=\frac{\mu}{1-\mu}=$$

$$=\frac{\sqrt{\sin^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}-(2\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{\sin^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}+(2\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)}$$

و به ازای $\alpha=45^\circ$ و $\beta=60^\circ$، به دست می‌آید:

$$|CN|:|ND|=3+2\sqrt{2}\ ،\ |FM|:|ME|=1$$

مثال ۲۱۰۲۰۳*. طول یال چهاروجهی منتظم $ABCD$ برابر است با $2d$. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که از رأس‌های A و D، نقطهٔ F وسط یال $[BC]$ و نقطهٔ K مرکز وجه ADC می‌گذرد.

حل. همان پایهٔ مسألهٔ قبل را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۴۰۳). فرض کنید O مرکز کره باشد:

$$\overrightarrow{OF}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$$

(x، y، z، نامعلوم‌اند). اگر R شعاع کرهٔ موردنظر باشد، داریم:

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FA}=(x-1)\mathbf{a}+(y-1)\mathbf{b}+z\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FD}=(x+1)\mathbf{a}+(y-1)\mathbf{b}+z\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{CK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}(-\mathbf{b}-\mathbf{c}),$$

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CK}=x\mathbf{a}+\left(y-\frac{2}{3}\right)\mathbf{b}+\left(z+\frac{1}{3}\right)\mathbf{c}$$

بنا به فرض $|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OD}|^2=|\overrightarrow{OK}|^2=|\overrightarrow{OF}|^2=R^2$، و به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$(x-1)^2+2(y-1)^2+z^2=w^2,$$

$$(x+1)^2+2(y-1)^2+z^2=w^2,$$

$$x^۲+۲\left(y-\frac{۲}{۳}\right)^۲+\left(z+\frac{۱}{۳}\right)^۲=w^۲,$$

$$x^۲+۲y^۲+z^۲=w^۲$$

که درآن‌ها $w=\frac{R}{d}$. اگر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم کنیم، به دست می‌آید: $x=۰$. معادلهٔ چهارم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم، به معادلهٔ $۰=۴y-۲x-۱$ می‌رسیم، که از آن نتیجه می‌شود: $y=\frac{۳}{۴}$. با توجه به مقدارهای x و y، معادله‌های دوم و سوم، به صورت

$$\frac{۹}{۸}+z^۲=w^۲,\quad \frac{۱}{۷۲}+\left(z+\frac{۱}{۳}\right)^۲=w^۲$$

درمی‌آیند که، ازآن‌ها، به دست می‌آید: $z=\frac{۳}{۲}$. در نتیجه

$$R=dw=d\sqrt{\frac{۹}{۸}+\frac{۹}{۴}}=\frac{۳\sqrt{۶}}{۴}d$$

مثال ۲۲.۲.۳. مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویهٔ ABC، قاعدهٔ منشور $ABCA_۱B_۱C_۱$ است و داریم: $|AC|=|BC|=a$ و $\hat{C}=۹۰^\circ$. رأس‌های M و N از چهاروجهی $MNPQ$ روی خط راست $(CA)_۱$ و رأس‌های P و Q از آن، روی خط راست $(AB_۱)$ قراردارند. مطلوب است:

الف) حجم منشور؛ ب) حجم چهاروجهی.

حل. فرض می‌کنیم: $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$، $\mathbf{c}=\overrightarrow{CC_۱}$ (شکل ۱۵.۳)، $r=|PQ|$ و $h=|\mathbf{c}|$. بنا به فرض

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=(\mathbf{a}, \mathbf{c})=(\mathbf{b}, \mathbf{c})=۰,\quad |\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=a$$

E و F را وسط پاره‌خط‌های راست $[MN]$ و $[PQ]$ می‌گیریم. در مثال ۱۷.۲.۳ ثابت کردیم:

$$|MN|=r=|PQ| \quad , \quad |FE|=\frac{r}{\sqrt{۲}},$$
$$۰=(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{MN})=(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{MN})=(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{PQ})$$

بنا براین

$$(\overrightarrow{AB_۱}, \overrightarrow{CA_۱})=(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{A_۱C})=(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB_۱})=۰ \qquad (۳.۱۸)$$

الف) ازشرط $(\overrightarrow{AB_۱}, \overrightarrow{CA_۱})=(-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a}+\mathbf{c})=۰$ داریم: $-\mathbf{a}^۲+\mathbf{c}^۲=۰$، یعنی $-a^۲+h^۲=۰$ و $h=a$؛ و $V_۱$، حجم منشور چنین می‌شود:

$$V_۱=hS_{ABC}=h\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{a^۳\sqrt{۳}}{۴}$$

ب) λ و μ را عددهایی می‌گیریم که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$\overrightarrow{CE}=\lambda CA_۱=\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{c})$ (هم‌راستائی $\overrightarrow{CA_۱}$ و $\overrightarrow{CE}$)

$\overrightarrow{AF}=\mu AB_۱=\mu(-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (هم‌راستائی $\overrightarrow{AB_۱}$ و $\overrightarrow{AF}$)

بنا براین

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=(۱-\lambda-\mu)\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+(\mu-\lambda)\mathbf{c}$$

و از رابطهٔ (۳.۱۸) به‌دست می‌آید:

$$۰=(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CA_۱})=[(۱-\lambda-\mu)\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+(\mu-\lambda)\mathbf{c}, \mathbf{a}+\mathbf{c}]=$$
$$=(۱-\lambda-\mu)\mathbf{a}^۲-(\mu-\lambda)\mathbf{c}^۲=(۱-۲\lambda)a^۲,$$
$$۰=(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB_۱})=[(۱-\lambda-\mu)\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+$$
$$+(\mu-\lambda)\mathbf{c}, -\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}]=(\lambda+\mu-۱)\mathbf{a}^۲+\mu\mathbf{b}^۲+$$
$$+(\mu-\lambda)\mathbf{c}^۲=(۳\mu-۱)a^۲$$

یعنی $\lambda=\frac{۱}{۲}$ و $\mu=\frac{۱}{۳}$. بنابراین $\overrightarrow{EF}=\frac{۱}{۶}(\mathbf{a}+۲\mathbf{b}-\mathbf{c})$ و

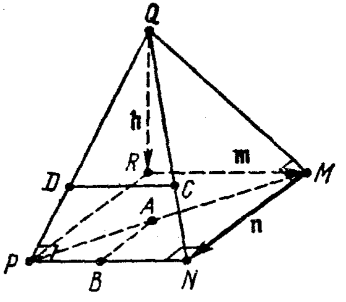
$$|\overrightarrow{EF}|=\frac{۱}{۶}|\mathbf{a}+۲\mathbf{b}-\mathbf{c}|=\frac{۱}{۶}\sqrt{(\mathbf{a}+۲\mathbf{b}-\mathbf{c}, \mathbf{a}+۲\mathbf{b}-\mathbf{c})}=$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\mathbf{a}^2+4\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$$

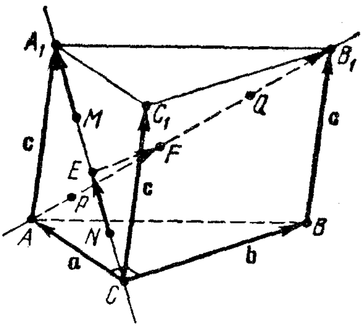
از آن‌جا

$r=\sqrt{2}|EF|=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ و V_2، حجم چهاروجهی چنین است:

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot r\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot r^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{r^3\sqrt{2}}{12}=\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$$



شکل ۱۶.۳



شکل ۱۵.۳

مثال ۲۳.۲.۳*. زاویه‌های QMN، MNP و NPQ در هرم $MNPQ$ قائمه‌اند. رأس‌های A، B، C و D ازچهاروجهی منتظم، بریال‌های $[MP]$، $[NP]$، $[NQ]$ و $[PQ]$ قرار گرفته‌اند. خط‌های راست (AB) و (MN) موازی‌اند. نسبت حجم‌های چهاروجهی وهرم را پیدا کنید.

حل. R را پای عمود وارد از رأس Q برصفحهٔ MNP می‌گیریم (شکل ۱۶.۳). فرض می کنیم: $\mathbf{h}=\overrightarrow{QR}$، $\mathbf{m}=\overrightarrow{RM}$، $\mathbf{n}=\overrightarrow{MN}$؛ بنابراین

$$(\mathbf{h},\mathbf{m})=(\mathbf{h},\mathbf{n})=0;\ (\mathbf{m},\mathbf{n})=(\overrightarrow{MQ}+\mathbf{h},\mathbf{n})=$$
$$=(\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MN})=0$$

(زیرا $\widehat{QMN}=90^\circ$). بنابراین، بردارهای $\mathbf{h}$ و $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$، دو به دو برهم عمودند. بنابه‌فرض داریم: $(\overrightarrow{PN},\overrightarrow{PQ})=0$. چون $(\overrightarrow{PN},\mathbf{h})=0$، خواهیم داشت:

$$(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PR})=(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PQ}+\mathbf{h})=0$$

همچنین، بنا به‌فرض $(PN, \mathbf{n})=0$. بنا بر این، در چهارضلعی $PRMN$، سه زاویهٔ RMN، MNP و NPR قائمه‌اند؛ یعنی $PRMN$، یک‌مستطیل است:

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{RM}=\mathbf{m}, \ \overrightarrow{RP}=\overrightarrow{MN}=\mathbf{n}$$

چون $(MN)\|(AB)$، عددی مانند x وجود دارد، به‌نحوی که

$$\overrightarrow{PB}=x\overrightarrow{PN}=x\mathbf{m}, \ \overrightarrow{PA}=x\overrightarrow{PM}=x(\mathbf{m}-\mathbf{n}), \ \overrightarrow{AB}=x\mathbf{n}$$

نقطه‌های C و D، به‌ترتیب، بریال‌های $[QN]$ و $[QP]$ قرار دارند، بنا بر این، عددهای y و z وجود دارند، به‌نحوی‌که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{QC}=y\overrightarrow{QN}=y(\mathbf{h}+\mathbf{m}+\mathbf{n}), \ \overrightarrow{QD}=z\overrightarrow{QP}=z(\mathbf{h}+\mathbf{n})$$

بنا بر ویژگی یال‌های متنافر در چهاروجهی منتظم: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})=0$ (مثال ۱۷.۲.۳) بنا بر این

$$[x\mathbf{n}, (z-y)\mathbf{h}-y\mathbf{m}+(z-y)\mathbf{n}]=x(z-y)|\mathbf{n}|^2=0$$

چون $|AB|=x|\mathbf{n}|\neq 0$، بنا بر این (شکل ۱۶.۳)، $y=z$، که به معنای موازی‌بودن خط‌های راست (CD) و (NP) است.

اکنون، بردارهای یال‌های چهاروجهی $ABCD$ را، برحسب بردارهای پایهٔ $\{\mathbf{h}, \mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ مشخص می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AB}=x\mathbf{n}, \overrightarrow{CD}=-y\mathbf{m}, \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QC}=$$

$$=(y-1)\mathbf{h}+(y-x)\mathbf{m}+(x+y-1)\mathbf{n},$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QD}=(z-1)\mathbf{h}-x\mathbf{m}+(z-1)\mathbf{n}=$$

$$=(y-1)\mathbf{h}-x\mathbf{m}+(y-1)\mathbf{n},$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=(y-1)\mathbf{h}-x\mathbf{m}+(x+y-1)\mathbf{n},$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(y-1)\mathbf{h}+(y-x)\mathbf{m}+(y-1)\mathbf{n}$$

چون $ABCD$، چهاروجهی منتظم است، بنا بر این، یال‌های آن، طولی برابر

دارند و، در نتیجه، با فرض $|\mathbf{h}|=h$، $|\mathbf{m}|=m$، $|\mathbf{n}|=n$ و $|\overrightarrow{AB}|=a$، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$a^2=x^2n^2,\ a^2=y^2m^2,$$

$$a^2=(y-1)^2h^2+(y-x)^2m^2+(x+y-1)^2n^2,$$

$$a^2=(y-1)^2h^2+x^2m^2+(y-1)^2n^2,$$

$$a^2=(y-1)^2h^2+x^2m^2+(x+y-1)^2n^2$$

اگر معادلهٔ پنجم را از معادلهٔ سوم کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(y-x)^2=x^2 \Longleftrightarrow y(y-2x)=0$$

چون $|CD|=|y\mathbf{m}|\neq 0$، بنابراین $y\neq 0$ و در نتیجه $y=2x$. معادلهٔ چهارم را از معادلهٔ سوم کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید: $x(x+2y-2)=0$؛ چون $x\neq 0$، بنابراین داریم:

$$x+2y-2=0 \Longleftrightarrow 5x-2=0 \Longleftrightarrow x=\frac{2}{5},\ y=\frac{4}{5}$$

به‌این ترتیب، برای a، h، m و n، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$a^2=\frac{4n^2}{25},\quad a^2=\frac{16m^2}{25},\quad a^2=\frac{h^2}{25}+\frac{4m^2}{25}+\frac{n^2}{25}$$

از آن‌جا: $n=\frac{5}{2}a$، $m=\frac{5}{4}a$ و $h=\frac{5}{\sqrt{2}}a$؛ و خواهیم داشت:

$$V_{ABCD}=\frac{a^3}{6\sqrt{2}},\ V_{MNPQ}=\frac{1}{3}\ h\left(\frac{1}{2}mn\right)=\frac{125}{48\sqrt{2}}a^3$$

و نسبت حجم‌ها، چنین می‌شود:

$$V_{ABCD}:V_{MNPQ}=8:125$$

مثال ۰۲۴۰۳۰۳ مستطیل $ABCD$ و نقطهٔ M مفروض‌اند. ثابت کنید:

الف) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})=(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$؛

ب) $|MA|^۲+|MC|^۲=|MB|^۲+|MD|^۲$.

حل. الف) فرض کنید: $\mathbf{a}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$، $\mathbf{x}=\overrightarrow{AM}$.

بنابراین $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=۰$ و

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})-(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})=(-\mathbf{x}, -\mathbf{x}+\mathbf{a}+\mathbf{b})-$$

$$-(-\mathbf{x}+\mathbf{a}, -\mathbf{x}+\mathbf{b})=\mathbf{x}^۲-(\mathbf{x}, \mathbf{a})-(\mathbf{x}, \mathbf{b})-$$

$$-[\mathbf{x}^۲-(\mathbf{a}, \mathbf{x})-(\mathbf{x}, \mathbf{b})+(\mathbf{a}, \mathbf{b})]=-(\mathbf{a}, \mathbf{b})=۰$$

ب) با توجه به نتیجهٔ الف) داریم:

$$|\overrightarrow{MA}|^۲+|\overrightarrow{MC}|^۲-|\overrightarrow{MB}|^۲-|\overrightarrow{MD}|^۲=[|\overrightarrow{MA}|^۲-$$

$$-۲(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})+|\overrightarrow{MC}|^۲]-[|\overrightarrow{MB}|^۲-۲(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})+$$

$$+|\overrightarrow{MD}|^۲]=\overrightarrow{AC}^۲-\overrightarrow{BD}^۲=(\mathbf{a}+\mathbf{b})^۲-(\mathbf{b}-\mathbf{a})^۲=۴(\mathbf{a}, \mathbf{b})=۰$$

مثال ۳.۲.۲۵. نقطه‌های A، B، C و D، طوری در فضا (یا صفحه) قرار گرفته‌اند که، برای هر نقطهٔ M از فضا (یا صفحه) داریم:

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM})\neq(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{DM})$$

ثابت کنید $ABCD$، متوازی‌الاضلاع است.

حل. قرار می‌گذاریم: $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$، $\mathbf{c}=AC$، $\mathbf{d}=\overrightarrow{AD}$، $\mathbf{r}=\overrightarrow{AM}$.
پس $\overrightarrow{CM}=\mathbf{r}-\mathbf{c}$، $\overrightarrow{BM}=\mathbf{r}-\mathbf{b}$، $DM=\mathbf{r}-\mathbf{d}$. بنا به‌فرض، برای هر بردار $\mathbf{r}$ (ازصفحه یا فضا) داریم: $(\mathbf{r}, \mathbf{r}-\mathbf{c})\neq(\mathbf{r}-\mathbf{b}, \mathbf{r}-\mathbf{d})$، یعنی

$$(\mathbf{r}, \mathbf{d}+\mathbf{b}-\mathbf{c})\neq(\mathbf{b}, \mathbf{d}) \qquad (۳.۱۹)$$

اکنون ثابت می‌کنیم، بردار $\mathbf{a}=\mathbf{d}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$، برابر صفر است. برعکس، فرض می‌کنیم $\mathbf{a}\neq۰$. بنابراین، بردار $\mathbf{r}=\frac{(\mathbf{b}, \mathbf{d})}{|\mathbf{a}|^۲}\mathbf{a}$، باید در برابری

$$(\mathbf{r}, \mathbf{a})=(\mathbf{b}, \mathbf{d})$$

صدق کند که با (۳.۱۹) متناقض است. به‌این‌ترتیب $\mathbf{a}=\circ$؛ یعنی

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}=\mathbf{c}-\mathbf{d}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$$

که به‌معنای متوازی‌الاضلاع بودن $ABCD$ است. اگر در (۳.۱۹) قرار دهیم $\mathbf{r}=\circ$، به‌دست می‌آید: $(\mathbf{b}،\mathbf{d})\neq\circ$، یعنی $ABCD$، مستطیل نیست (با مثال قبل مقایسه کنید).

مثال ۰۲۶.۲.۳ O را مرکز n ضلعی منتظم $A_۱A_۲\ \dots\ A_{n-۱}A_n$ و M را نقطه‌ای دلخواه می گیریم. اگر $|OM|=l$ و $|OA_۱|=R$ باشد، مقدار زیر را محاسبه کنید:

$$f(M)=f(A_۱، A_۲، \dots، A_n; M)=$$
$$=|A_۱M|^۲+|A_۲M|^۲+\dots+|A_{n-۱}M|^۲+|A_nM|^۲$$

حل. $\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}$ و $\mathbf{r}_i=\overrightarrow{OA_i}\ (i=۱، ۲، \dots، n)$ می گیریم. درنتیجه $|\mathbf{r}|=l$، $|\mathbf{r}_i|=R$ و

$$|\overrightarrow{A_iM}|^۲=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA_i}|^۲=\mathbf{r}^۲+\mathbf{r}_i^۲-۲(\mathbf{r}، \mathbf{r}_i)=$$
$$=l^۲+R^۲-۲(\mathbf{r}، \mathbf{r}_i)، \ (i=۱، ۲، \dots، n)$$

از آن‌جا

$$f(M)=n(l^۲+R^۲)-۲(\mathbf{r}، \mathbf{r}_۱+\mathbf{r}_۲+\dots+\mathbf{r}_n)=n(l^۲+R^۲)$$

زیرا، مجموع $\mathbf{r}_۱+\mathbf{r}_۲+\dots+\mathbf{r}_n$، شعاع حامل‌های رأس‌های n ضلعی‌منتظم، ازمرکز آن، برابر صفر است.

مثال ۰۲۷.۲.۳ یك m ضلعی منتظم و یك n ضلعی منتظم، طوری قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ بین مرکزهای آن‌ها، برابر d شده است. شعاع دایره‌های محیطی این دو چندضلعی، به ترتیب، برابر است با r و R. همهٔ رأس‌های m ضلعی را به همهٔ رأس‌های n ضلعی وصل کرده‌ایم. مجموع مجذورهای پاره‌خط‌های راست حاصل را پیدا کنید.

حل. O و O' را مرکز دایره‌های محیطی و $A_i\ (i=۱، ۲، \dots، n)$ و $B_j\ (j=۱، ۲، \dots، m)$ را، به‌ترتیب، رأس‌های nضلعی وmضلعی‌می گیریم.

با توجه به نتیجهٔ مثال قبل، برای هر m ،... ،۲ ،۱ = j، داریم:

$$f(B_j)=|B_jA_1|^2+|B_jA_2|^2+\cdots+|B_jA_n|^2=n(|OB_j|^2+R^2)$$

و مجموع مورد نظر، چنین می‌شود:

$$\sigma=f(B_1)+f(B_2)+\cdots+f(B_m)=$$
$$=mnR^2+n(|B_1O|^2+|B_2O|^2+\cdots+|B_mO|^2)=$$
$$=mnR^2+nf(B_1+B_2, \ldots, B_m; O)$$

که با توجه به نتیجهٔ مثال قبل، برای m ضلعی $B_1B_2\ldots B_{m-1}B_m$ خواهیم داشت:

$$f(B_1, B_2, \ldots, B_m; O)=m(|OO'|^2+r^2)$$

به این ترتیب، سرانجام به‌دست می‌آید:

$$\sigma=mn(R^2+d^2+r^2)$$

مثال ۲۸۰۳۰۳*. اگر $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را، زاویه‌هـای مثلث ABC فرض کنیم، درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

$$1) \qquad \cos 2\hat{A}+\cos 2\hat{B}+\cos 2\hat{C}\geqslant -\frac{3}{2};$$

$$2) \qquad \cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}\leqslant\frac{3}{2};$$

$$3) \qquad \sin\frac{\hat{A}}{2}+\sin\frac{\hat{B}}{2}+\sin\frac{\hat{C}}{2}\leqslant\frac{3}{2}$$

حل. $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ را بردارهای یکه می‌گیریم وفرض می‌کنیم:

$$\alpha=(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}), \beta=(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}), \gamma=(\widehat{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1})$$

ازتبدیل نابرابری روشن $(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)^2\geqslant 0$ به‌دست می‌آید:

$$3+2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\geqslant 0$$

و یا

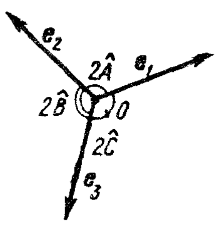
$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \geqslant -\frac{۳}{۲} \qquad (۳.۲۰)$$

۱) اگر $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$، زاویه‌های یك مثلث باشند، آن‌وقت

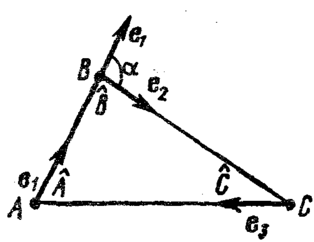
$$\hat{A}>۰^\circ,\ \hat{B}>۰^\circ,\ \hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{A}-\hat{B}>۰^\circ$$

بدون آن‌که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان $\hat{A}\leqslant\hat{B}\leqslant ۹۰^\circ$ گرفت. بردارهای $\mathbf{e}_۱$، $\mathbf{e}_۲$ و $\mathbf{e}_۳$ را طوری درنظر می‌گیریم که $\mathbf{e}_۲$ از دوران $\mathbf{e}_۱$ به‌اندازهٔ زاویهٔ $۲\hat{A}$ و $\mathbf{e}_۳$ از دوران $\mathbf{e}_۲$ به اندازهٔ زاویـهٔ $۲\hat{B}$ (در همان جهت دوران قبلی) به‌دست آید (شکل ۱۷.۳). بنابراین $\alpha=۲\hat{A}$، $\beta=۲\hat{B}$ و به‌شرط $۲\hat{C}\leqslant ۱۸۰^\circ$، $\gamma=۲\hat{C}$ و به‌شرط $\hat{C}>۹۰^\circ$، $\gamma=۳۶۰^\circ-۲\hat{C}$.
به‌این‌ترتیب [(۳.۲۰) را ببینید]:

$$\cos ۲\hat{A}+\cos ۲\hat{B}+\cos ۲\hat{C}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqslant-\frac{۳}{۲}$$



شکل ۱۷.۳



شکل ۱۸.۳

۲) ABC را مثلث مفروض می‌گیریم. قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{e}_۱=\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|},\ \mathbf{e}_۲=\frac{\overrightarrow{BC}}{|BC|},\ \mathbf{e}_۳=\frac{\overrightarrow{CA}}{|CA|}$$

بنابراین (شکل ۱۸.۳):

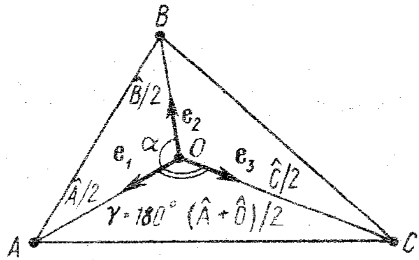
$$\alpha=۱۸۰^\circ-\hat{B},\ \beta=۱۸۰^\circ-\hat{C},\ \gamma=۱۸۰^\circ-\hat{A}$$

که اگر در برابری (۳.۲۰) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$-\cos\hat{C}-\cos\hat{B}-\cos\hat{A}\geqslant-\frac{۳}{۲}\Longleftrightarrow\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}\leqslant\frac{۳}{۲}$$

۳) O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$\mathbf{e}_۱=\frac{\overrightarrow{OA}}{|OA|},\ \mathbf{e}_۲=\frac{\overrightarrow{OB}}{|OB|},\ \mathbf{e}_۳=\frac{\overrightarrow{OC}}{|OC|}$$



شکل ۱۹.۳

به‌این‌ترتیب داریم (شکل ۱۹.۳):

$$\alpha=۱۸۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}-\frac{\hat{B}}{۲}=۹۰^\circ+\frac{\hat{C}}{۲},\ \beta=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲},\ \gamma=۹۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲},$$

$$\cos\alpha=-\sin\frac{\hat{C}}{۲},\ \cos\beta=-\sin\frac{\hat{A}}{۲},\ \cos\gamma=-\sin\frac{\hat{B}}{۲}$$

و بنابراین، با توجه به (۳.۲۰) خواهیم داشت:

$$\sin\frac{\hat{A}}{۲}+\sin\frac{\hat{B}}{۲}+\sin\frac{\hat{C}}{۲}\leqslant\frac{۳}{۲}$$

مثال ۲۹.۲.۳*. نقطهٔ O را در درون چهاروجهی $ABCD$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$\alpha_1 = \widehat{AOB},\ \alpha_2 = \widehat{AOC},\ \alpha_3 = \widehat{AOD},\ \alpha_4 = \widehat{BOC},$$
$$\alpha_5 = \widehat{BOD},\ \alpha_6 = \widehat{COD}$$

ثابت کنید، بین زاویه‌های α_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$، دست‌کم یك زاویه وجود دارد، به‌نحوی که

الف) بزرگتر از $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ نباشد؛

ب) کوچکتر از $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ نباشد.

حل. الف) $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{e}_4$ را بردارهایی یکه و، به‌ترتیب، درجهت $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ می‌گیریم: پس $0 \leqslant (\mathbf{e}_1^2 + \mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_3^2 + \mathbf{e}_4^2)$ و یا

$$4 + 2(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_6) \geqslant 0$$

اگر همهٔ زاویه‌های α_i از $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ بزرگتر باشند، آن‌وقت، به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, 6$، خواهیم داشت $\cos\alpha_i < -\frac{1}{3}$ که منجر به‌تناقض می‌شود:

$$0 \leqslant 4 + 2(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_6) <$$
$$< 4 + 2 \times 6 \times -\frac{1}{3} = 0$$

بنابراین، در بین زاویه‌های α_i، زاویه‌ای وجود داردکه از $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ بزرگتر نیست.

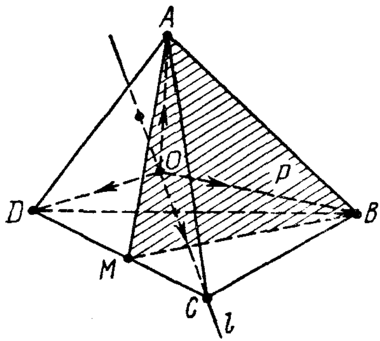
ب) بردارهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{e}_4$، بستگی خطی دارند، بنابراین عددهای x، y، z و t وجود دارند، به‌نحوی که $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 0$ و

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + t\mathbf{e}_4 = 0 \qquad (3.21)$$

ثابت می‌کنیم، همهٔ عددهای x، y، z و t هم علامت‌اند. نقطهٔ O در درون چهار وجهی قرار دارد، بنابراین، صفحهٔ P که از نقطه‌های O، A و B

می گذرد، یــال $[CD]$ را در نقطهٔ درونی M قطع می کند (شکل ۲۰.۳) و اگر بردارهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{e}_4$ از نقطهٔ O رسم شده باشند، دوانتهای هریك از دو بردار $\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{e}_4$، در دو طرف صفحهٔ P قــرار می گیرند. خط راست (OC) را l می‌نامیم و بردار $\mathrm{Pr}_l^P\mathbf{e}_4=\mathbf{a}$ را، که مخالف صفراست، درجهت مخالف با $\mathbf{e}_3$، از نقطهٔ O رسم می کنیم. ازطرف دیگر، از برابری (۳.۲۱)، با درنظر گرفتن برابری‌های $\mathrm{Pr}_l^P\mathbf{e}_2=\mathrm{Pr}_l^P\mathbf{e}_1=0$، بعد از تصویر کردن l به موازات P، به‌دست می آید:

$$z\mathbf{e}_3+t\mathbf{a}=0 \qquad (۳.۲۲)$$



شکل ۲۰.۳

عددهای z و t صفر نیستند: اگر $z=0$ $(t=0)$، از رابطهٔ (۳.۲۲) به‌دست می‌آید $t=0$ $(z=0)$ و درنتیجه [باتوجه به (۳.۲۱)]:

$$x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2=0,\ \ x^2+y^2>0$$

یعنی بردارهای $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ هم راستا می‌شوند، که ممکن نیست. بردارهای $\mathbf{e}_3$ و $\mathbf{a}$ در خلاف جهت یکدیگرند، بنا بــراین z و t هم علامت‌اند [(۳.۲۲) را ببینید]. به همین ترتیب ثابت مــی‌شود کــه x و t (y و t) هم علامت‌اند. بنابراین، هرشش عدد xy، xz، xt، yz، yt و zt مثبت‌اند.

اکنون، اگرهمهٔ زاویه‌های α_i را کوچکتر از $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$، یعنی

$\cos\alpha_i > -\frac{1}{3}$ فرض کنیم، به‌دست می‌آید:

$$2xy(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 2xy\cos\alpha_1 > -\frac{2}{3}xy$$

و به همین ترتیب

$$2xz(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}) = 2xz\cos\alpha_2 > -\frac{2}{3}xz,$$

$$2xt(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4) > -\frac{2}{3}xt, \quad 2yz(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) > -\frac{2}{3}yz,$$

$$2yt(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4) > -\frac{2}{3}yt, \; 2zt(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) > -\frac{2}{3}zt$$

و بنا بر دستور (۳.۲۱) خواهیم داشت:

$$0 = (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + t\mathbf{e}_4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 +$$

$$+ 2[xy(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + xz(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + xt(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4) + yz(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) +$$

$$+ yt(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4) + zt(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)] > x^2 + y^2 + z^2 + t^2 -$$

$$-\frac{2}{3}(xy + xz + xt + yz + yt + zt) = \frac{1}{3}[(x-y)^2 +$$

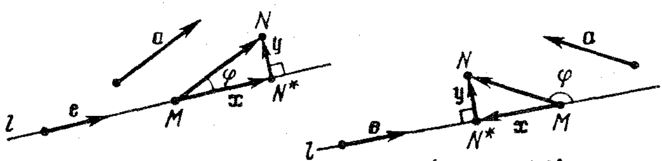
$$+ (x-z)^2 + (x-t)^2 + (y-z)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2] \geqslant 0$$

که یک تناقض است.

بخش ۳.۳. تصویر عمودی در فضا. معادلهٔ متعارف برداری صفحه

l را خط راستی در فضا می‌گیریم. تصویر قائم نقطهٔ M بر خط راست l، یعنی $\mathrm{Pr}_l M$ را، به عنوان نقطه‌ای مثل $M^* = \mathrm{Pr}_l^P(M)$ تعریف می‌کنیم که، در آن، P صفحهٔ عمود بر l است. اگر $M \in l$، آن‌وقت $M^* = M$ و اگر

$M \notin l$، آن‌وقت، M^* پای عمودی است که از نقطهٔ M برخط راست l فرود آمده باشد.



(a) $0 \leqslant \varphi < 90°$ (b) $90° < \varphi \leqslant 180°$

شکل ۳-۲۱

a را یك بردار می‌گیریم. بنا به تعریف، تصویر قائم بردار **a** بر خط راست l، عبارت است از $\mathrm{Pr}_l\mathbf{a} = \mathrm{Pr}_l^P(\mathbf{a})$. اکنون سعی می‌کنیم، عبارتی برای بیان $\mathrm{Pr}_l\mathbf{a}$ پیدا کنیم. نقطه‌ای مانند M را بر خط راست l انتخاب می‌کنیم و $\overrightarrow{MN}$ را برابر **a** می‌گیریم (شکل ۳-۲۱، a و b). اگر $N^* = \mathrm{Pr}_l N$، آن وقت

$$\mathrm{Pr}_l\mathbf{a} = \overrightarrow{MN^*}$$

اگر فرض کنیم $\mathbf{x} = \overrightarrow{MN^*}$ و $\mathbf{y} = \overrightarrow{N^*N}$، داریم:

$$\mathbf{a} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \qquad (۳-۲۳)$$

اگر **e**، بردار هادی خط راست l باشد، داریم: $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{e}$. برای پیدا کردن λ، دو طرف (۳-۲۳) را در **e**، به صورت اسکالر، ضرب می‌کنیم و به یاد می‌آوریم که، بنا به‌تعریف تصویر قائم‌نقطهٔ N، $(\mathbf{y}, \mathbf{e}) = 0$. به دست می‌آید:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{e}) = \lambda(\mathbf{e}, \mathbf{e})$$

یعنی

$$\mathrm{Pr}_l\mathbf{a} = \mathbf{x} = \lambda\mathbf{e} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{(\mathbf{e}, \mathbf{e})}\mathbf{e} \qquad (۳-۲۴)$$

$$|\mathrm{Pr}_l\mathbf{a}| = \left| \frac{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{e}|\cos\varphi}{|\mathbf{e}|\cdot|\mathbf{e}|}\mathbf{e} \right| = |\mathbf{a}|\cdot|\cos\varphi| = \frac{(\mathbf{a}، \mathbf{e})}{|\mathbf{e}|} \qquad (۳.۲۵)$$

P را صفحه‌ای از فضا می‌گیریم. تصویر قائم نقطهٔ M بر صفحهٔ P، به عنوان نقطهٔ $M^* = \mathrm{Pr}^l{}_P(M)$ تعریف می‌شود که، در آن، خط راست l، برصفحهٔ P عمود است. بنابراین، اگر $M \in P$، آن وقت $M^* = M$؛ و اگر $m \notin P$، آن وقت، M^*، پای عمود وارد از نقطهٔ M بر صفحهٔ P است. اگر $\mathbf{n} \neq ۰$، بردار عمود برصفحهٔ P باشد (یعنی بردار هادی خط راست l)، با توجه به برابری معلوم

$$\mathbf{a} = \mathrm{Pr}^l{}_P(\mathbf{a}) + \mathrm{Pr}^P_l(\mathbf{a})$$

و دستور (۳.۲۴)، می‌توان نوشت:

$$\mathrm{Pr}_P\mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}، \mathbf{n})}{(\mathbf{n}، \mathbf{n})}\mathbf{n} \qquad (۳.۲۶)$$

که در آن، $\mathrm{Pr}_P\mathbf{a}$، به معنای تصویر قائم بردار $\mathbf{a}$ برصفحهٔ P است، یعنی

$$\mathrm{Pr}_P\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathrm{Pr}_P M \mathrm{Pr}_P N}، \quad \overrightarrow{MN} = \mathbf{a}$$

مثال ۱.۳.۳. طول ضلع مثلث ABC، قاعدهٔ منشور منتظم $ABCA_۱B_۱C_۱$، برابر a است. نقطه‌های M، N، P و Q را، وسط یال‌های $[AB]$، $[AC]$، $[A_۱C_۱]$ و $[C_۱B_۱]$ گرفته‌ایم و می‌دانیم، طول تصویر بردار $\overrightarrow{MP}$ روی خط راست (NQ)، برابر $\frac{a}{۴}$ شده است. طول ارتفاع منشور را پیدا کنید.

حل. بنابه‌فرض داریم [(۳.۲۵) را ببینید]:

$$|\mathrm{Pr}_{(NQ)}\overrightarrow{MP}|^۲ = \frac{(\overrightarrow{MP}، \overrightarrow{NQ})^۲}{|\overrightarrow{NQ}|^۲} = \frac{a^۲}{۱۶}$$

$\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$، $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ و $\mathbf{c} = \overrightarrow{BB_۱}$ را، بردارهای پایه می‌گیریم. بنابراین

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = a، \; (\mathbf{a}، \mathbf{b}) = \frac{a^۲}{۲}، (\mathbf{a}، \mathbf{c}) = (\mathbf{b}، \mathbf{c}) = ۰$$

(منشور، منتظم است). باید $h=|\mathbf{c}|$ را پیدا کنیم. چون

$$\overrightarrow{MP}=\frac{۱}{۲}\mathbf{b}+\mathbf{c}،\ \overrightarrow{NQ}=-\frac{۱}{۲}\mathbf{a}+\mathbf{c}$$

خواهیم داشت:

$$(\overrightarrow{MP}،\ \overrightarrow{NQ})=-\frac{۱}{۴}(\mathbf{a}،\ \mathbf{b})+\mathbf{c}^۲=h^۲-\frac{a^۲}{۸}،$$

$$|\overrightarrow{NQ}|^۲=\frac{۱}{۴}\mathbf{a}^۲+\mathbf{c}^۲=h^۲+\frac{a^۲}{۴}$$

و برای مقدار $x=h^۲$، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$(\overrightarrow{MP}،\ \overrightarrow{NQ})^۲=\left(x-\frac{a^۲}{۸}\right)^۲=\frac{a^۲}{۱۶}\left(x+\frac{a^۲}{۴}\right)=\frac{a^۲}{۱۶}|\overrightarrow{NQ}|^۲$$

و یا $x^۲-\frac{۵}{۱۶}a^۲x=۰$. و چون $x\neq ۰$، بنابراین

$$h^۲=\frac{۵}{۱۶}a^۲ \iff h=\sqrt{\frac{۵}{۴}}a$$

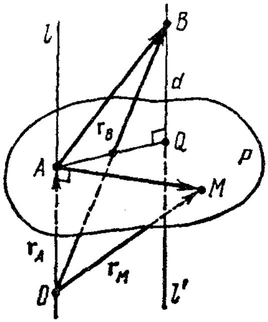
مثال ۲۰۳۰۳. (معادلهٔ برداری متعارف صفحه). قطب ثابت O، عدد D و بردار غیر صفر $\mathbf{N}$ را در فضا در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، مجموعهٔ P، همهٔ نقطه‌هایی که، شعاع حامل آن‌ها $\mathbf{r}$، در معادلهٔ

$$(\mathbf{r}،\ \mathbf{N})=D \qquad (۳۰۲۷)$$

صدق کنند، یك صفحه است.

حل. $\mathbf{r}_A=\dfrac{D\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|^۲}$ راشعاع حامل نقطهٔ A می‌گیریم (شکل ۲۲۰۳). چون

$$(\mathbf{r}_A،\ \mathbf{N})=\frac{D(\mathbf{N}،\ \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^۲}=D$$



شکل ۲۲.۳

بنابراین $A \in P$. خط راستی را که از نقطهٔ A، درامتداد بردار $\mathbf{N}$ رسم شود، l می‌نامیم. M را نقطه‌ای از صفحهٔ P، با شعاع حامل $\mathbf{r}_M$ می‌گیریم. برابری $D = (\mathbf{r}_M, \mathbf{N})$، هم‌ارز است با

$$(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A, \mathbf{N}) = 0$$

که تنها وقتی برقراراست که داشته باشیم:

$$\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A = \overrightarrow{AM} \perp \mathbf{N}$$

به‌این ترتیب، نقطهٔ M، وقتی وتنها وقتی به‌مجموعهٔ P تعلق دارد که برخط راستی که از نقطهٔ A می گذرد و بر خط راست l عمود است، واقع باشد. ولی، مجموعهٔ P، شامل چنین خط‌های راست، صفحه‌ای را تشکیل می‌دهد که از نقطهٔ A عمود بر خط راست l رسم شده باشد.

بنابراین، معادلهٔ (۳.۲۷)، معرف صفحه‌ای مانند P از فضاست. این معادله را معادلهٔ متعارف (برداری) صفحهٔ P گویند. بردار $\mathbf{N}$ را نرمال صفحهٔ P می نامند. این بردار بر صفحهٔ P عمود است (یا صفحهٔ P بر بردار $\mathbf{N}$ عمود است).

می‌خواهیم یکبار دیگر تأکید کنیم که وقتی، صفحهٔ P، به وسیلهٔ معادلهٔ (۳.۲۷) داده شده باشد، به این معناست که (با آن که تصریح نشده است)، قطب را در فضا ثابت گرفته‌ایم و شعاع‌های حامل $\mathbf{r}$، از نقطه‌های واقع بر صفحهٔ P، در معادلهٔ (۳.۲۷) صدق می کنند.

هر صفحهٔ P را می‌توان با معادلهٔ متعارف برداری (که به آن معادلهٔ صفحه نسبت به بردارقائم هم می گویند)، مشخص کرد. برای این منظور، لازم است قطب O را ثابت فرض کنیم و نقطهٔ مشخص $M_0(\mathbf{r}_0)$ از صفحهٔ P، و بردار هادی $\mathbf{N} \neq 0$ از خط راست l عمود بر صفحهٔ P را در نظر بگیریم. ازآن‌جا که، نقطهٔ $M(\mathbf{r})$، تنها وقتی بر صفحهٔ P قرار دارد که (بنا به‌ویژگی

عمود بودن l بر صفحهٔ P)، بردارهای $\overrightarrow{M_\circ M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_\circ$ و $\mathbf{N}$ برهم عمود باشند، بنابراین، تنها وقتی نقطهٔ M بر صفحهٔ P واقع است که داشته باشیم:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\circ, \mathbf{N})=\circ \qquad (۳.۲۸)$$

روشن است که اگر $D=(\mathbf{r}_\circ, \mathbf{N})$ فرض کنیم، معادلهٔ (۳.۲۸) به همان معادلهٔ (۳.۲۷) تبدیل می‌شود.

معادلهٔ $D=(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ را، که در آن $|\mathbf{n}|=۱$، معادلهٔ نرمال‌شدهٔ (برداری) صفحه گویند.

مثال ۳.۳.۳. مطلوب است فاصلهٔ نقطهٔ B، با شعاع حامل $\mathbf{r}_B$، از صفحهٔ P به معادلهٔ $D=(\mathbf{r}, \mathbf{N})$.

حل. خط راست l' را از نقطهٔ B بر صفحهٔ P عمود می‌کنیم و پای آن را Q می‌نامیم (شکل ۲۲.۳)؛ A را نقطه‌ای با شعاع حامل $\mathbf{r}_A=\frac{D\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|^۲}$ می‌گیریم. بنابراین، $\mathbf{N}$ بردارهادی‌خط‌راست l' است وبنابر(۳.۲۵) داریم:

$$d=|\mathrm{Pr}_{l'}\overrightarrow{AB}|=\frac{|(\overrightarrow{AB}, \mathbf{N})|}{|\mathbf{N}|}=\frac{|(\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A, \mathbf{N})|}{|\mathbf{N}|}$$

و سرانجام

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_B, \mathbf{N})-D|}{|\mathbf{N}|} \qquad (۳.۲۹)$$

مثال ۴.۳.۳. تصویرقائم نقطهٔ $B(\mathbf{r}_B)$ را، بر صفحهٔ $P: (\mathbf{r}, \mathbf{N})=D$ پیدا کنید.

حل. بنابر آن چه در مثال قبل دیدیم، نقطه‌های $Q=\mathrm{Pr}_P B$ و $A\left(\frac{D\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|^۲}\right)$، به این ترتیب، به‌هم مربوط‌اند:

$$\overrightarrow{BQ}=\mathrm{Pr}_{l'}\overrightarrow{BA}=\frac{(\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_B, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^۲}\mathbf{N}=\frac{D-(\mathbf{r}_B, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^۲}\mathbf{N}$$

و از آن‌جا

$$\mathbf{r}_Q=\mathbf{r}_B+\overrightarrow{BQ}=\mathbf{r}_B+\frac{D-(\mathbf{r}_B,\mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^{۲}}\mathbf{N}$$

مثال ۵.۳.۳. مطلوب است فاصلهٔ δ از نقطهٔ M، با شعاع حامل $\mathbf{r}_M$، از خط راست l به معادلهٔ پارامتری $\mathbf{r}=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{a}t$.

حل. $M^*=\mathrm{Pr}_l M$، و $M_\circ$ را نقطه‌ای از خط راست l با شعاع حامل $\mathbf{r}_\circ$ می‌گیریم (شکل ۲۳.۳). بنابراین

$$\overrightarrow{M_\circ M^*}=\mathrm{Pr}_l\overrightarrow{M_\circ M}=(\overrightarrow{M_\circ M},\mathbf{a})\frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{a},\mathbf{a})},$$

$$\overrightarrow{M^*M}=\overrightarrow{M_\circ M}-\overrightarrow{M_\circ M^*}=\mathbf{b}-(\mathbf{a},\mathbf{b})\frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{a},\mathbf{a})}$$

که در آن $\mathbf{b}=\overrightarrow{M_\circ M}=\mathbf{r}_M-\mathbf{r}_\circ$. به‌این‌ترتیب

$$\delta=|\overrightarrow{M^*M}|=\left|\mathbf{b}-\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{(\mathbf{a},\mathbf{a})}\mathbf{a}\right|=$$

$$=\sqrt{\mathbf{b}^{۲}-۲\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})^{۲}}{\mathbf{a}^{۲}}+\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})^{۲}}{(\mathbf{a}^{۲})^{۲}}\mathbf{a}^{۲}}=\frac{۱}{|\mathbf{a}|}\sqrt{\mathbf{a}^{۲}\mathbf{b}^{۲}-(\mathbf{a},\mathbf{b})^{۲}}=$$

$$=\frac{۱}{|\mathbf{a}|}\sqrt{|\mathbf{a}|^{۲}|\mathbf{r}_M-\mathbf{r}_\circ|^{۲}-(\mathbf{a},\mathbf{r}_M-\mathbf{r}_\circ)^{۲}}$$

مثال ۶.۳.۳. معادلهٔ پارامتری خط راست l^*، تصویر قائم خط راست l به معادلهٔ $\mathbf{r}=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{a}t$ را بر صفحهٔ P به معادلهٔ $(\mathbf{r},\mathbf{N})=D$ پیدا کنید.

حل. M را نقطه‌ای واقع بر خط راست l با شعاع حامل $\mathbf{r}_M=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{a}t$، و Q را تصویر قائم نقطهٔ M بر صفحهٔ P فرض می‌کنیم. با توجه به نتیجه‌ای که در مثال ۴.۳.۳ به دست آوردیم، داریم:

$$\mathbf{r}_Q=\mathbf{r}_M+\frac{D-(\mathbf{r}_M,\mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^{۲}}\mathbf{N}=\left(\mathbf{r}_\circ+\frac{D-(\mathbf{r}_\circ,\mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^{۲}}\mathbf{N}\right)+$$

$$+\left(\mathbf{a}-\frac{(\mathbf{a},\mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^{۲}}\mathbf{N}\right)t$$

وقتی t همهٔ مقدارهای حقیقی را قبول کند، نقطهٔ M سراسر خط راست l را می‌پیماید (متناظر با نقطهٔ Q که خط راست l^* را طی می‌کند). در نتیجه

$$\mathbf{r}=\left(\mathbf{r}_\circ+\frac{D-(\mathbf{r}_\circ, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^{۲}}\mathbf{N}\right)+\mathbf{b}t$$

$\left[t\in\mathbf{R} \text{ و } \mathbf{b}=\mathbf{a}-\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|^{۲}}\mathbf{N}\right.$ که در آن $\left.\right]$، معـادلهٔ پارامتری خط راست l^* است.

مثال ۷۰۳۰۳. تصویر قائم نقطهٔ $M(\mathbf{r}_M)$ را برخط راست l به معادلهٔ $\mathbf{r}=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{a}t$ پیدا کنید.

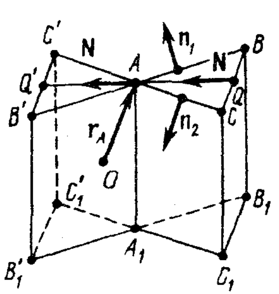
حل. از همان نمادهای مثال ۵۰۳۰۳ استفاده می‌کنیم (شکل ۲۳۰۳). داریم:

$$\mathbf{r}_{M^*}=\mathbf{r}_{M_\circ}+\overrightarrow{M_\circ M^*}=\mathbf{r}_\circ+\frac{(\overrightarrow{M_\circ M}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^{۲}}\mathbf{a}=$$

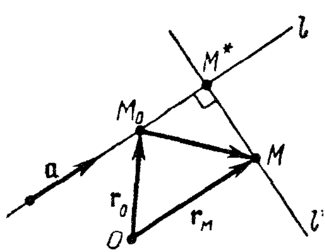
$$=\mathbf{r}_\circ+\frac{(\mathbf{r}_M-\mathbf{r}_\circ, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^{۲}}\mathbf{a}$$

مثال ۸۰۳۰۳. معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از نقطهٔ $M(\mathbf{r}_M)$ بگذرد و برخط راست l به معادلهٔ $\mathbf{r}=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{a}t$ در نقطهٔ M عمود باشد.

حل. معادلهٔ خط راست l^* عبارت است از $\mathbf{r}=\mathbf{r}_M+\mathbf{b}t$، که در آن، $\mathbf{b}=\overrightarrow{MN^*}$ و $M^*=\mathrm{Pr}_l M$ (شکل ۲۳۰۳). با توجه به نتیجهٔ مثال قبل داریم:



شکل ۲۴۰۳



شکل ۲۳۰۳

$$\mathbf{b}=\mathbf{r}_{M*}-\mathbf{r}_M=-\mathbf{r}_M+\mathbf{r}_0+\frac{(\mathbf{r}_M-\mathbf{r}_0, a)}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$$

مثال ۹.۳.۳. طول یال منشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ (با قاعدهٔ مثلثی) برابر است با a. معادلهٔ صفحه‌های (AA_1B_1B) و (AA_1C_1C)، به ترتیب، چنین‌اند: $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1)=D_1$ و $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2)=D_2$، که در آن‌ها

$$|\mathbf{n}_1|=|\mathbf{n}_2|=1, \ (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)=-\frac{1}{2}$$

معادلهٔ متعارف صفحهٔ (BB_1C_1C) را پیدا کنید.

حل. بردار قائم $\mathbf{N}$ از صفحهٔ (BB_1C_1C) بـا $[AQ]$، نیمساز زاویهٔ BACهم راستاست (شکل ۲۴.۳). بنابراین، با فرض $\mathbf{N}=\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2$، داریم:

$$|\mathbf{N}|=\sqrt{(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1-\mathbf{n}_2)}=\sqrt{1+2(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)+1}=1$$

درنتیجه، معادلهٔ صفحهٔ (BB_1C_1C)، به این صورت است:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)=D$$

که باید، درآن، D را پیدا کنیم.

فاصلهٔ $d=|AQ|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$، از نقطهٔ A تـا صفحهٔ (BB_1C_1C)، از دستور (۳.۲۹) محاسبه می‌شود:

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)-D|}{|\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2|}=|(\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)-D|$$

و بنابراین $D=(\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_1)+(\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_2)\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}$؛ و چـون نقطهٔ A درصفحهٔ (AA_1B_1B) قـرار دارد، داریـم: $(\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_1)=D_1$ و بـه همین تـرتیب $(\mathbf{r}_A, \mathbf{n}_2)=D_2$. مسأله دارای دو جواب است:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)=D_1+D_2+\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)=D_1+D_2-\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

که با دومنشور $ABCA_1B_1C_1$ و $AB'C'A_1B'_1C'_1$ متناظرند (شکل ۲۴.۳).

مثال ۱۰.۳.۳. معادلهٔ خط راستی را پیدا کنید که با دو خط راست غیرموازی l و L، به‌ترتیب، به‌معادله‌های $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}\tau$ و $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{b}\tau$ را به‌طور قائم قطع کند.

حل. این مسأله، با مسألهٔ زیر هم‌ارز است:

نقطه‌های $M_0\in l$ و $M_1\in L$ را طوری مشخص کنید که بردار $\overrightarrow{M_0M_1}$، بر هر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود باشد. خط راستی که از نقطهٔ M_0 بگذرد و بردار هادی آن $\overrightarrow{M_0M_1}$ باشد، جواب مسأله است.

باید مقدارهای t_1 و τ_1 را طوری پیدا کنیم که بردارهای $\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t_0$ و $\mathbf{r}_1+\mathbf{a}\tau_1$، به‌ترتیب، شعاع حامل‌های نقطه‌های موردنظر M_0 و M_1 هستند. این عددها، از شرط عمود بودن بردارها به دست می‌آیند:

$$(\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{a})=(\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{b})=0$$

از آن‌جا

$$(\mathbf{r}_1+\mathbf{b}\tau_1-\mathbf{r}_0-\mathbf{a}t_0, \mathbf{a})=0,$$

$$(\mathbf{r}_1+\mathbf{b}\tau_1-\mathbf{r}_0-\mathbf{a}t_0, \mathbf{b})=0$$

این دستگاه معادله‌ها را، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$t_0\mathbf{a}^2-\tau_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})=\alpha, \quad t_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})-\tau_1\mathbf{b}^2=\beta \qquad (۳.۳۰)$$

که‌در آن $\alpha=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0, \mathbf{a})$ و $\beta=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0, \mathbf{b})$. جواب دستگاه (۳.۳۰) چنین است:

$$t_0=\frac{-\beta(\mathbf{a}, \mathbf{b})+\alpha\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}, \quad \tau_1=\frac{\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})-\beta\mathbf{a}^2}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}$$

بنا بر این، معادلهٔ خط راست مطلوب، چنین است:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a})\mathbf{b}^2-(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{b})(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a},\ \mathbf{b})^2}\mathbf{a}+$$

$$+\Big(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0+\frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a})(\mathbf{a},\ \mathbf{b})-(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{b})\mathbf{a}^2}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a},\ \mathbf{b})^2}\mathbf{b}-$$

$$-\frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a})\mathbf{b}^2-(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{b})(\mathbf{a},\ \mathbf{b})}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a},\ \mathbf{b})^2}\mathbf{a}\Big)t,\ t\in\mathbf{R}$$

بخش ۴.۳. دستگاه مختصات قائم. خط راست در صفحه. خط راست و صفحه در فضا

سه بردار واحد، که دو به‌دو برهم عمود باشند، یك پایهٔ متعامد (یا قائم) را درفضا مشخص می‌کنند. بردارهای یکهٔ پایهٔ قائم را، طبق قرار داد، با $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ نشان می‌دهند. هر بردار دلخواه $\mathbf{a}$، نمایش منحصر به فردی به صورت

$$\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

دارد. عددهای x، y، z را، مختصات بردار $\mathbf{a}$ در پایهٔ $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ گویند و می‌نویسند:

$$\mathbf{a}=(x,\ y,\ z)$$

مثلاً $\mathbf{i}=(1,\ 0,\ 0)$، $\mathbf{j}=(0,\ 1,\ 0)$، $\mathbf{k}=(0,\ 0,\ 1)$ و $\mathbf{O}=(0,\ 0,\ 0)$.

مختصات بردارها در پایهٔ قائم، از ویژگی خطی پیروی می‌کنند: برای بردارهای $\mathbf{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ و $\mathbf{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ وعددهای α و β داریم:

$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=(\alpha x_1+\beta x_2,\ \alpha y_1+\beta y_2,\ \alpha z_1+\beta z_2)$$

از منحصر به فرد بودن تجزیهٔ یك بردار، نسبت به یك پـایه، نتیجه می‌شود که برابری برداری $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ هم‌ارز است با دستگاه معادله‌های عددی $x_۱=x_۲$، $y_۱=y_۲$، $z_۱=z_۲$. حاصل‌ضرب داخلی (اسکالر) بردارهای

$$\mathbf{a}=(x_۱, y_۱, z_۱) \quad , \quad \mathbf{b}=(x_۲, y_۲, z_۲)$$

برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های مختصات هم‌نام:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=x_۱x_۲+y_۱y_۲+z_۱z_۲ \qquad (۳.۳۱)$$

طول بردار $\mathbf{a}$ برابر است با $|\mathbf{a}|=\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲+z_۱^۲}$.

□ ازآن‌جا که

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j})=(\mathbf{i}, \mathbf{k})=(\mathbf{j}, \mathbf{k})=۰ \quad , \quad |\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=۱$$

بنابر دستور (۳.۱۴) داریم:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=(x_۱\mathbf{i}+y_۱\mathbf{j}+z_۱\mathbf{k}, x_۲\mathbf{i}+y_۲\mathbf{j}+z_۲\mathbf{k})=$$

$$=x_۱x_۲\mathbf{i}^۲+y_۱y_۲\mathbf{j}^۲+z_۱z_۲\mathbf{k}^۲+(x_۱y_۲+x_۲y_۱)(\mathbf{i}, \mathbf{j})+$$

$$+(x_۱z_۲+x_۲z_۱)(\mathbf{i}, \mathbf{k})+(y_۱z_۲+y_۲z_۱)(\mathbf{j}, \mathbf{k})=$$

$$=x_۱x_۲+y_۱y_۲+z_۱z_۲$$

همچنین از رابطهٔ (۳.۳۱) به دست می‌آید:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a})=x_۱^۲+y_۱^۲+z_۱^۲ \iff |\mathbf{a}|=\sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}=\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲+z_۱^۲}$$

در تمامی این بخش، فرض را براین گرفته‌ایم که، مختصات بردارها، در پایهٔ قائم داده شده‌اند.

مثال ۳.۴.۱۰. مطلوب است مختصـات و طول بردار $۳\mathbf{a}+۲\mathbf{b}$، به شرطی که

$$\mathbf{a}=(۰, -۲, -۳), \quad \mathbf{b}=(۳, ۲, ۳)$$

حل. بنابر ویژگی خطی مختصات

$$3\mathbf{a}+2\mathbf{b}=(3\times 0+2\times 3,\ 3(-2)+2\times 2,$$
$$3(-3)+2\times 3)=(6,-2,-3)$$

و از آن‌جا

$$|3\mathbf{a}+2\mathbf{b}|=\sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2}=7$$

مثال ۲.۴.۳. مقدار m را طوری پیدا کنید که، بردارهای $\mathbf{a}=(m,-2,1)$ و $\mathbf{b}=(m,m,-3)$ برهم عمود باشند.

حل. داریم:

$$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\iff 0=(\mathbf{a},\mathbf{b})=m^2-2m-3\iff m=-1\ \text{یا}\ 3$$

مثال ۳.۴.۳. مختصات بردار واحد $\mathbf{e}$ را، که جهتی مخالف با جهت بردار $\mathbf{a}=(2,-2,1)$ دارد، پیدا کنید.

حل. داریم: $|\mathbf{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$ و

$$\mathbf{e}=-\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

مثال ۴.۴.۳. زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}=(1,2,2)$ و $\mathbf{b}=(-1,0,-1)$ را پیدا کنید.

حل. به ترتیب، داریم:

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{1(-1)+2\times 0+2(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\times\sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}}=$$

$$=-\frac{3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad (\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})=135^\circ$$

اگر $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ پایه‌ای قائم باشد، دستگاه‌مختصات $\{O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ را، دستگاه‌قائم (یا راست‌گوشه) گویند. اگر $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ دو نقطهٔ مفروض باشند، آن‌گاه

$$\overrightarrow{AB} = (x_۲ - x_۱،\ y_۲ - y_۱،\ z_۲ - z_۱)،$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲ + (z_۲ - z_۱)^۲}$$

مثال ۵.۴.۳. $A(۳، ۲، -۳)$، $B(۴، ۳، -۳)$ و $C(۳، ۱، -۴)$ رأس‌های یك مثلث‌اند. مقدار زاویهٔ $\hat{A}$ و طول میانهٔ $[AN]$ را پیدا کنید.

حل. زاویهٔ $\hat{A}$ بین بردارهای

$$\overrightarrow{AB} = (۴ - ۳، ۳ - ۲، -۳ - (-۳)) =$$
$$= (۱، ۱، ۰)،\ \overrightarrow{AC} = (۰، -۱، -۱)$$

قرار دارد و بنابراین

$$\cos\hat{A} = \frac{(\overrightarrow{AB}، \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}} = -\frac{۱}{۲}،\ \hat{A} = ۱۲۰^\circ$$

و برای بردار AN داریم:

$$\overrightarrow{AN} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \left(\frac{۱}{۲}، ۰، -\frac{۱}{۲}\right);$$

$$|AN| = \sqrt{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

دو بردار واحد عمود برهم را، که با صفحهٔ P موازی و به ترتیب معینی قرار گرفته باشند، پایهٔ متعامد یکه (یا پایهٔ قائم) در صفحهٔ P گویند. بردارهای یکهٔ پایهٔ قائم را در صفحه، به طور قراردادی، با $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ نشان می‌دهند. هر بردار $\mathbf{a}$، موازی با صفحهٔ P، به صورتی منحصر به فرد به‌شکل $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ نشان داده می‌شود. عددهای x و y را، مختصات بردار $\mathbf{a}$ در پایهٔ $\{\mathbf{i}، \mathbf{j}\}$ گویند و می‌نویسند:

$$\mathbf{a} = (x، y)$$

اگر $\mathbf{a} = (x_۱، y_۱)$ و $\mathbf{b} = (x_۲، y_۲)$، آن‌وقت، برای هردوعدد دلخواه α و β داریم:

$$\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=(\alpha x_1+\beta x_2,\ \alpha y_1+\beta y_2),$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=x_1x_2+y_1y_2,\ |\mathbf{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

برابری برداری $\mathbf{a}=\mathbf{b}$، هم‌ارز است با دستگاه برابری‌های $x_1=x_2$، $y_1=y_2$.
اگر O متعلق به P و $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ پایهٔ قائمی در صفحهٔ P باشد، آن وقت، دستگاه مختصات $\{O,\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ در صفحهٔ P را، دستگاه مختصات قائم گویند. اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$، نقطه‌هایی از صفحهٔ P باشند، آن‌گاه

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1);\ |\overrightarrow{AB}|=$$
$$=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مثال ۶.۴.۳. نقطهٔ $A(-1,2)$ و بردار $\mathbf{a}=(3,-4)$ مفروض‌اند. مختصات نقطه‌های B و C را پیدا کنید، به نحوی که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{AC}\perp\mathbf{a},\ |\overrightarrow{AC}|=|\mathbf{a}|$$

حل. اگر (x,y) مختصات B باشند، داریم: $\overrightarrow{AB}=(x+1,y-2)$؛ و اگر $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$، آن‌گاه $x+1=3$ و $y-2=-4$، یعنی $x=2$ و $y=-2$. مختصات نقطهٔ B عبارت است از $(2,-2)$.

اکنون مختصات نقطهٔ C را (x',y') می‌گیریم، یعنی

$$\overrightarrow{AC}=(x'+1,\ y'-2)$$

چون $(\overrightarrow{AC},\mathbf{a})=3(x'+1)-4(y'-2)=0$، بنابراین

$$x'=\frac{4}{3}y'-\frac{11}{3}$$

به‌جز این $|\mathbf{a}|=|\overrightarrow{AC}|$، یعنی $3^2+(-4)^2=(x'+1)^2+(y'-2)^2$ و یا

$$\left(\frac{4}{3}y'-\frac{8}{3}\right)^2+(y'-2)^2=25\ \Rightarrow\ y'_1=-1,\ y'_2=5$$

برای نقطهٔ C، دو جواب به دست می‌آید: $C_1(-5,-1)$ و $C_2(3,5)$.

مثال ۷.۴.۳: (معادلهٔ متعارف خط راست در صفحه). ثابت کنید، در

هر دستگاه مختصاتی، معادلهٔ

$$Ax+By+C=0, \quad A^2+B^2>0 \qquad (۳.۳۲)$$

معرف خط راستی درآن صفحه است. مفهوم هندسی ضریب‌های A و B را پیدا کنید (دستگاه مختصات را قائم می‌گیریم).

حل. اگر $M_1(x_1, y_1)$ و $M_2(x_2, y_2)$، دو نقطهٔ مفروض متمایز باشند (لازم نیست، دستگاه مختصات، قائم باشد)،آن وقت، معادلهٔخط راست $l=(M_1M_2)$، در این دستگاه مختصات، چنین است [(۲.۵۳)را ببینید]:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \text{و یا} \quad Ax+By+C=0$$

که در آن

$A=y_2-y_1$، $B=-(x_2-x_1)$، $C=-Ax_1-By_1$و $A^2+B^2>0$.
بردار

$$\mathbf{a}=(-B, A)=(x_2-x_1, y_2-y_1) \qquad (۳.۳۳)$$

بردار هادی خط راست l است که با معادلهٔ (۳.۳۲) مشخص می‌شود.

هر معادلهٔ به صورت (۳.۳۲)، معادلهٔ خط راستی از صفحه است.این خط راست، از نقطه‌های $\left(-\frac{C}{B}, 0\right)$ و $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ می‌گذرد (به شرط $A\neq 0$ و $B\neq 0$). اگر $A=0$، معادلهٔ $By+C=0$،($B\neq 0$)معرف خط راستی است که از نقطه‌های $\left(-\frac{C}{B}, 0\right)$ و $\left(-\frac{C}{B}, 1\right)$ می‌گذرد وموازی بامحورطول است. معادلهٔ $Ax+C=0$،($A\neq 0$)، معرف‌خط راستی‌موازی محورعرض است [این خط راست‌ازنقطه‌های $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ و $\left(-\frac{C}{A}, 1\right)$ عبور می‌کند].

اگر نقطهٔ M به مختصات (x_1, y_1) متعلق به خط راست l به معادلهٔ

(۳.۳۲) باشد، خواهیم داشت $Ax_1+By_1+C=0$؛ و معادلهٔ (۳.۳۲) به این صورت درمی‌آید:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \qquad (۳.۳۴)$$

اگر با دستگاه مختصات قائم سروکار داشته باشیم، آن وقت، برای بردار $\mathbf{N}=(A, B)$ خواهیم داشت:

$$(\mathbf{N}, \mathbf{a})=A(-B)+BA=0$$

یعنی، بردار $\mathbf{N}$، بر بردار $\mathbf{a}$ عمود است (شکل ۲۵.۳). بردار $\mathbf{N}$ را، بردار قائم (یا بردار نرمال) خط راست l، به معادلهٔ (۳.۳۲) گویند. به این ترتیب، برای خط راست l، به معادلهٔ (۳.۳۲)، در دستگاه مختصات قائم، مختصات بردار نرمال $\mathbf{N}$، همان‌ضریب‌های متغیرهای x و y درمعادلهٔ (۳.۳۲) است. معادلهٔ (۳.۳۲) را، به‌این صورت هم می‌توان نوشت:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{N})=D \qquad (۳.۳۵)$$

که در آن، $\mathbf{r}=(x, y)$، شعاع حامل نقطهٔ دلخواه $M(x, y)$ از خط راست l، $\mathbf{N}=(A, B)$ بردار نرمال آن و $D=-C$ است. اگر با دستگاه محورهای مختصات قائم سروکار داشته باشیم، (۳.۳۵) را، که هم‌ارز با (۳.۳۲) است، معادلهٔ متعارف (یا معادلهٔ نرمال) خط راست l گویند.

مثال ۸.۴.۳. شعاع حامل $\mathbf{x}$ را، برای نقطهٔ مشترك خط‌های راست زیر پیدا کنید:

$$l: (\mathbf{r}, \mathbf{N})=D, \ L: \mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{b}t, \ t\in\mathbf{R}, \ (\mathbf{N}, \mathbf{b})\neq 0$$

حل. برای مقدار مشخصی از $t\in\mathbf{R}$ داریم:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{N})=D \ \cdot \ \mathbf{x}=\mathbf{r}_0+\mathbf{b}t$$

اگر مقدار $\mathbf{x}$ را درمعادلهٔ اول قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{N})+t(\mathbf{b}, \mathbf{N})=D \Longleftrightarrow t=\frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{N})}{(\mathbf{b}, \mathbf{N})}$$

و از آن‌جا

$$\mathbf{x}=\mathbf{r}_{\circ}+\frac{D-(\mathbf{r}_{\circ}, \mathbf{N})}{(\mathbf{b}, \mathbf{N})}\mathbf{b}$$

وقتی از زاویهٔ بین دو خط راست متقاطع صحبت می‌کنیم، منظورمان زاویهٔ کوچکتر بین آن‌هاست (زاویهٔ حاده). زاویهٔ بین دو خط راست عمود برهم، برابر ۹۰ درجه است. اگر دو خط راست با هم موازی باشند، زاویهٔ بین آن‌ها را، صفر درجه به‌حساب می‌آورند. زاویهٔ بین دوخط‌راست متنافر، عبارت است از زاویهٔ بین دوخط راست متقاطعی که موازی با آن‌ها رسم شده باشند. اگر **a** و **b**، بردارهای هادی دوخط راست باشند، زاویهٔ φ بین این دو خط راست، با دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos\varphi=\left|\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}\right|$$

مثال ۹.۴.۳. زاویهٔ φ، بین دوخط راست زیر را پیدا کنید:

$$-x+۲y+۳=\circ, \quad ۳x-y-۱=\circ$$

حل. بردارهای هادی این دو خط راست، چنین‌اند:

$$\mathbf{a}=(-۲, -۱), \quad \mathbf{b}=(۱, ۳)$$

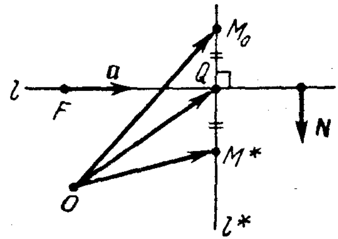
[(۳.۳۳) را ببینید]. از آن‌جا

$$\cos\varphi=\left|\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}\right|=\left|\frac{(-۲)۱+(-۱)۳}{\sqrt{۵}\cdot\sqrt{۱\circ}}\right|=\frac{۱}{\sqrt{۲}}, \quad \varphi=۴۵^{\circ}$$

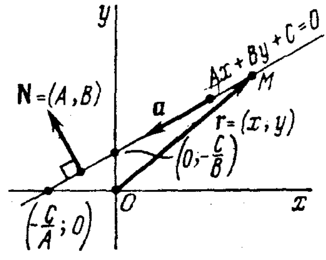
مثال ۱۰.۴.۳. نقطهٔ $M^{*}(x^{*}, y^{*})$، قرینهٔ نقطهٔ $M_{\circ}(۱, ۳)$، نسبت به‌خط راست l به معادلهٔ $x-۲y+۳=\circ$ را پیدا کنید.

حل. بنا به‌تعریف نقطهٔ قرینه

a) بردار $\overrightarrow{M_{\circ}M^{*}}=(x^{*}-۱, y^{*}-۳)$ برخط‌راست l و، بنابراین، بر بردار هادی آن $\mathbf{a}=(۲, ۱)$ عمود است، یعنی



شکل ۳.۲۶



شکل ۳.۲۵

$$\circ=(\overrightarrow{M_\circ M^*}، \mathbf{a})=۲(x^*-۱)+(y^*-۳)=$$

$$=۲x^*+y^*-۵ \qquad (۳.۳۶)$$

b) نقطهٔ وسط پاره خط راست $[M_\circ M^*]$ (شکل ۳.۲۶)، یعنی نقطهٔ $Q\left(\frac{۱+x^*}{۲}، \frac{۳+y^*}{۲}\right)$ برخط راست l واقع است و، بنا براین، مختصات نقطهٔ Q، درمعادلهٔ خط راست l صدق می کند، یعنی

$$\circ=\frac{۱+x^*}{۲}-۲\frac{۳+y^*}{۲}+۳=\frac{۱}{۲}x^*-y^*+\frac{۱}{۲} \qquad (۳.۳۷)$$

و از معادله‌های (۳.۳۶) و (۳.۳۷) به‌دست می آید:

$$x^*=\frac{۹}{۵}،\quad y^*=\frac{۷}{۵}$$

مثال ۳.۴.۱۱. معادلهٔ خط راست l^* را پیدا کنید که از نقطهٔ $M_\circ(۳،۷)$ بگذرد و برخط راست l به‌معادلهٔ $x-y+۳=\circ$ عمود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ $M_\circ$ ازخط راست l را به‌دست آورید.

حل. بردار نرمال $\mathbf{N}=(۱،-۱)$ از خط راست l، در ضمن، بردارهای خط راست l^* هم‌هست. چون l^* از نقطهٔ $M_\circ$ عبور می کند، معادلهٔ

آن چنین است:

$$\frac{x-۳}{۱}=\frac{y-۷}{-۱}\Longleftrightarrow x+y-۱۰=۰$$

نقطهٔ برخورد خط‌های راست l و l^* (یعنی، پای عمود وارد از نقطهٔ $M_۰$ برخط راست l) را Q ومختصات آن را (x_Q, y_Q) می‌نامیم. این مختصات، از دستگاه $x_Q-y_Q+۳=۰$ و $x_Q+y_Q-۱۰=۰$ به‌دست می‌آید:

$$x_Q=\frac{۷}{۲},\ \ y_Q=\frac{۱۳}{۲}$$

و فاصلهٔ نقطهٔ $M_۰$ ازخط راست l چنین می‌شود:

$$d=|M_۰Q|=\sqrt{\left(\frac{۷}{۲}-۳\right)^۲+\left(\frac{۱۳}{۲}-۷\right)^۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

عمل تصویر قائم برخط راست را، در صفحه، شبیه آن چه در مورد حالت فضایی گفته‌ایم، تعریف می‌کنیم: اگر $M_۰$ نقطه‌ای واقع برصفحهٔ P باشد، آن‌گاه، تصویر قائم $\mathrm{Pr}_l M_۰$ روی خط راست $l\subset P$، عبارت است از نقطهٔ Q، پای عمود l^*، که از نقطهٔ $M_۰$ بر خط راست l رسم شده است. اگر $M_۰\in l$، آن وقت $Q=M_۰$ (شکل ۲۶.۳). اگر خط راست $l_۰\in P$ را عمود بر l درنظر بگیریم، چون $l_۰\|L^*$، بنابراین

$$\mathrm{Pr}_l M_۰=\mathrm{Pr}_l^{l_۰}(M_۰)=\mathrm{Pr}_l^{l^*}(M_۰)$$

بنا به‌تعریف، برای هر بردار $\mathbf{b}$ از صفحهٔ P؛ $\mathrm{Pr}_l\mathbf{b}=\mathrm{Pr}_l^{l_۰}(\mathbf{b})$. شبیه حالت فضائی، برای تصویر قائم درصفحه هم، این برابری‌ها، برقرارند:

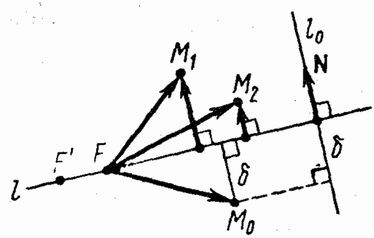
$$\mathrm{Pr}_l\mathbf{b}+\mathrm{Pr}_{l_۰}\mathbf{b}=\mathbf{b},\ (l\perp l_۰) \tag{۳.۳۸}$$

$$\mathrm{Pr}_l\mathbf{b}=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\mathbf{a} \tag{۳.۳۹}$$

$$|\mathrm{Pr}_l\mathbf{b}|=\frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|}{|\mathbf{a}|} \tag{۳.۴۰}$$

(a، بردار هادی خط راست l است).

خط راست $l \in P$، صفحهٔ P را بــه دو نیم‌صفحه تقسیم می‌کند. اگــر خط راست $l_\circ \perp l$ و بردار نرمال $\mathbf{N}$ ازخط راست l را، درصفحه P، ثابت بگیریم، آن‌وقت، نقطه‌های $M_\text{۱} \notin l$ و $M_\text{۲} \notin l$، وقتی و تنها وقتی بر یك نیم‌صفحه قرار دارند کــه، بردارهــای $\mathrm{Pr}_{l_\circ}\overrightarrow{FM}_\text{۱}$ و $\mathrm{Pr}_{l_\circ}\overrightarrow{FM}_\text{۲}$ در یك جهت باشند (شکل ۲۷.۳)، یعنی عددهــای $d_\text{۱} = \dfrac{(\overrightarrow{FM}_\text{۱}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|}$ و $d_\text{۲} = \dfrac{(\overrightarrow{FM}_\text{۲}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|}$ هم‌علامت باشند [(۳.۳۹) را ببینید]. در این رابطه، برای هر نقطهٔ $M \in P$،



شکل ۲۷.۳

عدد

$$d = d_l(M) = \frac{(\overrightarrow{FM}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|} \qquad (\text{۳.۴۱})$$

را فاصلهٔ جهت‌دار نقطهٔ M از خط راست l می‌نامیم. عددهای $d_l(M_\text{۱})$ و $d_l(M_\text{۲})$، تنها وقتی دارای یك علامت‌اند کــه، نقطه‌های $M_\text{۱}$ و $M_\text{۲}$ نسبت به‌خط راست l، در یك نیم‌صفحه باشند. اگر ابتدای بردار $\mathbf{N}$ روی خط راست l باشد، آن وقت، تنها وقتی $d_l(M) > \circ$، کــه نقطهٔ M و انتهــای بردار $\mathbf{N}$ در یك نیم‌صفحه واقع باشند.

مثال ۱۲.۴.۳. (فاصلهٔ یك نقطه تا خط راست، درصفحه). ثابت کنید، عدد $d_l(M)$ در دستور (۳.۴۱)، مستقل از انتخاب $F \in l$ و طول بردار $\mathbf{N}$ است. $|d_l(M_\circ)|$ را، فاصلهٔ معمولی نقطهٔ $M_\circ$ تا خط راست l در نظر می‌گیریم.

ثابت کنید، اگر داشته باشیم:

$$l: Ax+By+C=0,\ \mathbf{N}=(A, B)$$

آن وقت، برای نقطهٔ $M_0(x_0, y_0)$ داریم:

$$d_l(M_0)=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (۳.۴۲)$$

حل. F' را نقطهٔ دیگری واقع برخط راست l می‌گیریم، دراین‌صورت $\overrightarrow{F'F}\perp\mathbf{N}$، یعنی $(\overrightarrow{F'F}, \mathbf{N})=0$. بنابراین

$$\frac{(\overrightarrow{F'M}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|}=\frac{(\overrightarrow{F'F}, \mathbf{N})+(\overrightarrow{FM}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|}=\frac{(\overrightarrow{FM}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|}$$

اگر $\mathbf{N}'=k\mathbf{N}$ و $k>0$، آن‌گاه $|\mathbf{N}'|=k|\mathbf{N}|$ و

$$\frac{(\overrightarrow{FM}, \mathbf{N}')}{|\mathbf{N}'|}=\frac{(\overrightarrow{FM}, k\mathbf{N})}{k|\mathbf{N}|}=\frac{(\overrightarrow{FM}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|}$$

فاصلهٔ نقطهٔ M_0 از خط راست l، برابر است با (شکل ۳.۲۷):

$$\delta=|\mathrm{Pr}_{l_0}\overrightarrow{FM_0}|=\frac{|(\overrightarrow{FM_0}, \mathbf{N})|}{|\mathbf{N}|}=|d_l(M_0)|$$

[(۳.۴۰) را ببینید]. سرانجام، اگر

$$l: Ax+By+C=0,\ \mathbf{N}=(A, B),\ M_0(x_0, y_0)$$

آن وقت، اگر مختصات نقطهٔ F را (x_F, y_F) بنامیم، با توجه به‌این‌که F متعلق به l است، یعنی $C=-(Ax_F+By_F)$، خواهیم داشت:

$$d_l(M_0)=\frac{(\overrightarrow{FM_0}, \mathbf{N})}{|\mathbf{N}|}=\frac{(x_0-x_F)A+(y_0-y_F)B}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

$$\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

مثال ۱۳.۴.۳. مطلوب‌است طول h، ارتفاع وارد از رأس A برضلع BC درمثلث ABC، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$A(۴، ۴)، B(-۶، -۱)، C(-۲، -۴)$$

حل. معادلهٔ خط‌راست $l=(BC)$، چنین است:

$$\frac{x+۶}{-۲+۶}=\frac{x+۱}{-۴+۱}\Longleftrightarrow ۳x+۴y+۲۲=۰$$

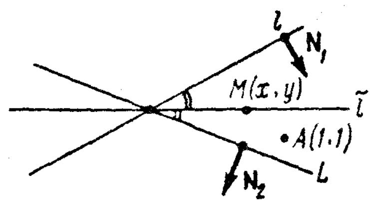
و بنابراین

$$h=|d_l(A)|=\left|\frac{۳\times۴+۴\times۴+۲۲}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}\right|=۱۰$$

مثال ۱۴.۴.۳. نقطهٔ $A(۱، ۱)$ در درون زاویهٔ بین دوخط راست

$$l: x+۷y=۰،\quad L: x-y-۴=۰$$

قرار دارد. مطلوب‌است معادلهٔ خط راست $\bar{l}$، نیمساز بین این دوخط راست.



شکل ۲۸.۳

حل. اگر نقطهٔ $M(x، y)\in\bar{l}$ در درون زاویهٔ مفروض باشد (شکل ۲۸.۳)، آن وقت باید عددهای

$$d_l(M)=\frac{x+۷y}{\sqrt{۵۰}} \quad و \quad d_l(A)=\frac{۱+۷\times۱}{\sqrt{۵۰}}>۰$$

هم‌علامت باشند، یعنی باید داشته باشیم: $d_l(M)>۰$. همچنین، عددهای

$$d_L(M)=\frac{x-y-۴}{\sqrt{۲}} \text{ ، } d_L(A)=\frac{۱-۱-۴}{\sqrt{۲}}<۰$$

نیز هم‌علامت‌اند، یعنی $d_L(M)<۰$. بنا به‌تعریف نیمساز، نقطهٔ $M(x، y)$ از دو ضلع زاویه به یك فاصله است و چون $|d_l(M)|=d_l(M)$ و $|d_L(M)|=-d_L(M)$، بنابراین

$$\frac{x+۷y}{۵\sqrt{۲}}=-\frac{x-y-۴}{\sqrt{۲}} \iff ۶x+۲y-۲۰=۰$$

معادلهٔ نیمساز موردنظر، به صورت $۳x+y-۱۰=۰$ درمی‌آید.

مثال ۱۵.۴.۳. $A(۴،۴)$، $B(-۶، -۱)$ و $C(-۲، -۴)$، رأس‌های مثلث ABC را تشکیل می‌دهند. معادلهٔ نیمساز داخلی رأس C را پیدا کنید.

حل. داریم:

$$\overrightarrow{CA}=(۶، ۸)، \ \overrightarrow{CB}=(-۴، ۳)، \ |\overrightarrow{CA}|=۱۰، \ |\overrightarrow{CB}|=۵$$

با توجه به دستوری که در مثال ۱۱.۲.۳ به دست آوردیم، بردار هادی نیمساز زاویهٔ C، چنین است:

$$\frac{|\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{CB}+|\overrightarrow{CB}|\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|+|\overrightarrow{CB}|}=\frac{۱۰\overrightarrow{CB}+۵\overrightarrow{CA}}{۱۵}=\frac{۲\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}}{۳}=$$

$$=\left(-\frac{۲}{۳}، \frac{۱۴}{۳}\right)$$

در نتیجه، معادلهٔ نیمساز موردنظر، چنین است:

$$\frac{x+۲}{-\frac{۲}{۳}}=\frac{y+۴}{\frac{۱۴}{۳}} \iff ۷x+y+۱۸=۰$$

مثال ۱۶.۴.۳. رأس $A(۳، -۴)$ و معادلهٔ دو ارتفاع

$$(BM):۷x-۲y-۱=۰، \ (CN):۲x-۷y-۶=۰$$

از مثلث ABC مفروض‌اند. معادلهٔ ضلع BC را پیدا کنید.

حل. بردار نرمال $(۷، -۲)$ از خط راست (BM)، با خط راست (AC) موازی است. بنابراین، معادلهٔ خط راست (AC)، چنین است:

$$\frac{x-۳}{۷}=\frac{y+۴}{-۲} \iff (AC):۲x+۷y+۲۲=۰$$

مختصات نقطهٔ $C(x_C، y_C)=(AC)\bigcap(CN)$، از دستگاه معادله‌های

$$۲x_C+۷y_C+۲۲=۰،\quad ۲x_C-۷y_C-۶=۰$$

به دست می‌آید، یعنی $x_C=-۴$ و $y_C=-۲$.

به همین ترتیب، $(۲، -۷)$، بردار هادی (AB) است و معادلهٔ خط راست (AB)، چنین است:

$$\frac{x-۳}{۲}=\frac{y+۴}{-۷} \iff (AB):۷x+۲y-۱۳=۰$$

و مختصات نقطهٔ B، از دستگاه معادله‌های

$$۷x_B+۲y_B-۱۳=۰،\quad ۷x_B-۲y_B-۱=۰$$

به‌دست می‌آید، یعنی $x_B=۱$ و $y_B=۳$. به این ترتیب، معادله خط راست (BC) عبارت است از:

$$\frac{x-۱}{۴-۱}=\frac{y-۳}{-۲-۳} \iff x-y+۲=۰$$

مثال ۱۷.۴.۳. از نقطهٔ $M_{\circ}(-۳، ۱۳، ۷)$، عمودی بر خط راست

$$l:\frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۲}{-۴}=\frac{z-۳}{۱}$$

فرود آورده‌ایم. معادلهٔ این عمود و طول آن را پیدا کنید.

حل. پای عمود وارد از $M_{\circ}$ بر l را $Q(x_Q، y_Q، z_Q)$ می گیریم. (شکل ۲۶.۳ را ببینید). چون $Q\in l$، پس

$$\frac{x_Q-۱}{۳}=\frac{z_Q-۳}{۱} \iff x_Q=۳z_Q-۸،$$

$$\frac{y_Q-۲}{-۴}=\frac{z_Q-۳}{۱} \iff y_Q=-۴z_Q+۱۴$$

بردار $\overrightarrow{M_\circ Q}=(x_Q+۳، y_Q-۱۳، z_Q-۷)$، بر بردارهای خط راست l، یعنی بر $\mathbf{a}=(۳، -۴، ۱)$ عمود است، بنا براین

$$\circ=(\mathbf{a}، \overrightarrow{M_\circ Q})=۳(x_Q+۳)-۴(y_Q-۱۳)+(z_Q-۷)=$$
$$=۳(۳z_Q-۵)-۴(-۴z_Q+۱)+(z_Q-۷)=۲۶z_Q-۲۶$$

و ازآن‌جا: $z_Q=۱$، $x_Q=-۵$، و $y_Q=۱۰$

$$\delta=|M_\circ Q|=\sqrt{(-۵+۳)^۲+(۱۰-۱۳)^۲+(۱-۷)^۲}=۷$$

و معادلهٔ خط راست $(M_\circ Q)$، چنین است:

$$\frac{x+۳}{-۵+۳}=\frac{y-۱۳}{۱۰-۱۳}=\frac{z-۷}{۱-۷} \iff$$
$$\iff \frac{x+۳}{۲}=\frac{y-۱۳}{۳}=\frac{z-۷}{۶}$$

مثال ۱۸.۴.۳. نقطهٔ $M^*(x^*، y^*، z^*)$، قرینهٔ نقطهٔ $M_\circ(۱، ۲، ۳)$ را، نسبت به خط راست l: $\frac{x-۸}{۱}=\frac{y-۱۱}{۳}=\frac{z-۴}{-۱}$ پیدا کنید.

حل. بردارهای

$$\overrightarrow{M_\circ M^*}=(x^*-۱، y^*-۲، z^*-۳) \text{ و } \mathbf{a}=(۱، ۳، -۱)$$

برهم عمودند (با مثال ۱۰.۴.۳، شکل ۲۶.۳ مقایسه کنید). بنا براین

$$(x^*-۱)+۳(y^*-۲)-(z^*-۳)=\circ$$

وسط پاره‌خط راست $[M_\circ M^*]$، یعنی $Q\left(\frac{۱+x^*}{۲}، \frac{۲+y^*}{۲}، \frac{۳+z^*}{۲}\right)$، بر

خط راست l قرار دارد، یعنی

$$\frac{\frac{۱+x^*}{۲}-۸}{۱}=\frac{\frac{۲+y^*}{۲}-۱۱}{۳},\ \frac{\frac{۱+x^*}{۲}-۸}{۱}=\frac{\frac{۳+z^*}{۲}-۴}{-۱}$$

از حل دستگاه شامل سه معادله، که به دست آورده‌ایم، نتیجه می‌شود:

$$x^*=۹،\ y^*=۲،\ z^*=۱۱$$

مثال ۱۹.۴.۳. معادله‌های عمود مشترک این دو خط راست را پیدا کنید:

$$l:\frac{x-۲}{۱}=\frac{y-۲}{۲}=\frac{z+۱}{-۳},\ L:\frac{x}{-۲}=\frac{y-۲}{۱}=\frac{z-۴}{۱}$$

حل. $\mathbf{a}=(۱،۲،-۳)$ و $\mathbf{b}=(-۲،۱،۱)$، بردارهای هادی دو خط راست هستند. $M_۱(x_۱، y_۱، z_۱)\in l$ و $M_۲(x_۲، y_۲، z_۲)\in L$ را، نقطه‌های برخورد عمود مطلوب با خط‌های راست l و L می‌گیریم. برای پیدا کردن $x_۱$، $y_۱$، $z_۱$، $x_۲$، $y_۲$ و $z_۲$، شش معادله به دست می‌آید.

$M_۱\in l$، بنابراین

$$\frac{x_۱-۲}{۱}=\frac{y_۱-۲}{۲},\ \frac{x_۱-۲}{۱}=\frac{z_۱+۱}{-۳};$$

$$y_۱=۲x_۱-۲،\ z_۱=-۳x_۱+۵$$

$M_۲\in L$، یعنی

$$\frac{x_۲}{-۲}=\frac{y_۲-۲}{۱}=\frac{z_۲-۴}{۱}\Longleftrightarrow x_۲=-۲y_۲+۴،\ z_۲=y_۲+۲$$

$(\overrightarrow{M_۱M_۲}، \mathbf{a})=۰$، بنابراین

$$x_۲-x_۱+۲(y_۲-y_۱)-۳(z_۲-z_۱)=۰\Longleftrightarrow ۱۴x_۱+$$

$$+۳y_۲-۱۷=۰$$

$(\overrightarrow{M_۱M_۲}، \mathbf{b})=۰$، یعنی

$$-2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)+(z_2-z_1)=0 \Longleftrightarrow x_1+2y_2-3=0$$

که از آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$x_1=y_2=1,\ \ y_1=0,\ \ z_1=x_2=2,\ \ z_2=3$$

به این ترتیب: $M_1(1, 0, 2)$ و $M_2(2, 1, 3)$، و معادله‌های عمود مشترک چنین‌اند:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-2}{3-2} \Longleftrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$$

و فاصلهٔ $|M_1M_2|$، بین این دو خط راست متنافر، برابر است با

$$|M_1M_2|=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{3}$$

مثال ۳۰.۴.۳. ثابت کنید، خط راست $\bar{l}$، که از نقطهٔ $M_0(1, 2, 3)$ می‌گذرد و دوخط راست

$$l: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2},\ \ L: \frac{x-2}{2}=\frac{y-8}{-9}=\frac{z+3}{6}$$

را قطع می‌کند، با این دو خط راست، زاویه‌های برابر می‌سازد.

حل. فرض می‌کنیم:

$$M_1(x_1, y_1, z_1)=l\cap\bar{l};\ \ M_2(x_2, y_2, z_2)=L\cap\bar{l}$$

دراین صورت، عددهای t و τ وجود دارند، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$x_1=1+2t,\ \ y_1=1-t,\ \ z_1=1+2t,$$

$$x_2=2+2\tau,\ \ y_2=8-9\tau,\ \ z_2=-3+6\tau$$

نقطه‌های M_0، M_1 و M_2 روی یک‌خط‌راست قرار دارند، بنابراین‌بردارهای

$$\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-1, y_1-2, z_1-3)=(2t, -t-1, 2t-2),$$

$$\overrightarrow{M_0M_2}=(x_2-1, y_2-2, z_2-3)=(2\tau+1, -9\tau+6, 6\tau-6)$$

هم راستا هستند. بنابرشرط هم راستایی داریم:

$$\circ = \begin{vmatrix} ۲t & -t-۱ \\ ۲\tau+۱ & -۹\tau+۶ \end{vmatrix} = -۱۶t\tau + ۱۳t + ۲\tau + ۱،$$

$$\circ = \begin{vmatrix} ۲t & ۲t-۲ \\ ۲\tau+۱ & ۶\tau-۶ \end{vmatrix} = ۸t\tau - ۱۴t + ۴\tau + ۲،$$

$$\circ = \begin{vmatrix} -t-۱ & ۲t-۲ \\ -۹\tau+۶ & ۶t-۶ \end{vmatrix} = ۱۲t\tau - ۶t - ۲۴\tau + ۱۸$$

اگر $t\tau$ را از دو معادلهٔ اول حذف کنیم، به دست می‌آید: $\tau = \frac{۳}{۲}t - \frac{۱}{۲}$.

$t\tau$ را از دو معادلهٔ آخر حذف می‌کنیم، به دست می‌آید: $\tau = \frac{t+۱}{۲}$. از آن جا

$$۳t - ۱ = t + ۱ \iff t = ۱،\ \tau = ۱$$

به این ترتیب، مختصات نقطه‌های $M_۱$ و $M_۲$ مشخص می‌شود:

$$M_۱(۳، \circ، ۳)،\ M_۲(۴، -۱، ۳)$$

و برای معادلهٔ خط راست $\bar{l}$ داریم:

$$\frac{x-۱}{۴-۳} = \frac{y-۲}{-۱-\circ} = \frac{z-۳}{۳-۳} \iff \frac{x-۱}{۱} = \frac{y-۲}{-۱} = \frac{z-۳}{\circ}$$

بردارهای هادی خطهای راست $\bar{l}$، l و L، به ترتیب، چنین‌اند:

$$\mathbf{c} = (۱، -۱، \circ)،\ \mathbf{a} = (۲، -۱، ۲)؛\ \mathbf{b} = (۲، -۹، ۶)$$

بنابراین، برای زاویهٔ φ، بین خطهای راست l و $\bar{l}$ داریم:

$$\cos\varphi = \left|\frac{(\mathbf{a}، \mathbf{c})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{c}|}\right| = \frac{۲\times۱ + (-۱)(-۱) + ۲\times\circ}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲ + ۲^۲}\cdot\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}}$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲}}،\quad \varphi = ۴۵^\circ$$

و برای زاویه ψ، بین خطهای راست $\bar{l}$ و L:

$$cos\psi = \left|\frac{(\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|}\right| = \frac{۲\times۱+(-۹)(-۱)+۶\times۰}{\sqrt{۲}.\sqrt{۲^۲+(-۹)^۲+۶^۲}} =$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۲}}; \quad \psi = ۴۵^\circ = \varphi$$

دستگاه مختصات قائم $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ را، در فضا، ثابت می‌گیریم و P را، صفحهٔ مفروضی با بردار نرمال به معادلهٔ

$$(\mathbf{r}, \mathbf{N}) = -D \qquad (۳.۴۳)$$

درنظر می‌گیریم که، در آن، $\mathbf{r} = (x, y, z)$ نقطهٔ دلخواه $M(x, y, z) \in P$، و $\mathbf{N} = (A, B, C)$، $A^۲+B^۲+C^۲ = |\mathbf{N}|^۲ > ۰$، بردار نرمال صفحهٔ P است. سمت چپ (۳.۴۳) را، با توجه به دستور (۳.۳۱) بسط می‌دهیم، به معادلهٔ متعارف صفحهٔ P می‌رسیم:

$$Ax+By+Cz+D = ۰, \quad A^۲+B^۲+C^۲ > ۰ \qquad (۳.۴۴)$$

صفحهٔ P، با معادلهٔ متعارف در دستگاه مختصات قائم، بر بردار $\mathbf{N} = (A, B, C)$ عمود است که، مختصات آن، ضریب‌های x و y و z، در معادلهٔ (۳.۴۴) است.

اگر $A \neq ۰$، آن‌گاه صفحهٔ P، محور x را در نقطهٔ $M_۱$ با مختصات $\left(-\frac{D}{A}, ۰, ۰\right)$ قطع می‌کند؛ و اگر $B \neq ۰$، آن‌گاه صفحهٔ P محور y را در نقطهٔ $M_۲\left(۰, -\frac{D}{B}, ۰\right)$ قطع می‌کند و، سرانجام، اگر $C \neq ۰$، صفحهٔ P محور z را، در نقطهٔ $M_۳\left(۰, ۰, -\frac{D}{C}\right)$ قطع می‌کند.

اگر $M_۱(a, ۰, ۰)$، $M_۲(۰, b, ۰)$ و $M_۳(۰, ۰, c)$ را، نقطه‌های برخورد صفحهٔ P با محورهای مختصات بگیریم، معادلهٔ صفحهٔ P چنین می‌شود:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱ \qquad (۳.۴۵)$$

و این، معادلهٔ صفحه‌ای است که با محورهای مختصات برخورد دارد.

اگر در معادلهٔ (۳.۴۴) داشته باشیم: $A=\circ$، یعنی $(\mathbf{i}, \mathbf{N})=\circ$، صفحهٔ P با محور x موازی می‌شود. این صفحه، صفحهٔ Oyz را در امتداد خط راستی قطع می‌کند که معادله‌های آن چنین است:

$$x=\circ, \; By+Cz+D=\circ$$

اگر $B=\circ$، ($C=\circ$)، آن گاه صفحهٔ P بامحور y (محور z) موازی خواهد بود.

شبیه آن‌چه درحالت خط راست در صفحه دیده‌ایم، درمورد صفحه‌هم، فاصلهٔ $d_p(M_\circ)$، از نقطهٔ $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ تا صفحهٔ P، داریم:

$$d_P(M_\circ)=\frac{Ax_\circ+By_\circ+Cz_\circ+D}{\sqrt{A^۲+B^۲+C^۲}} \qquad (۳.۴۶)$$

برای دو نقطهٔ $M_۱ \notin P$ و $M_۲ \notin P$، عددهای $d_P(M_۱)$ و $d_P(M_۲)$، تنها وقتی هم‌علامت‌اند که $M_۱$ و $M_۲$ در یك طرف صفحهٔ P واقع باشند. $d_P(M)$ تنها وقتی مثبت است که با انتهای بردار $\mathbf{N}=(A, B, C)$ (که ابتدای آن در صفحهٔ P است) در یك نیم‌فضا نسبت به صفحهٔ P قرار گیرد. وقتی که معادلهٔ صفحهٔ P به صورت (۳.۴۴) داده شده باشد، فاصلهٔ d، از نقطهٔ $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ تا صفحهٔ P، با این دستور مشخص می‌شود:

$$d=\frac{|Ax_\circ+By_\circ+Cz_\circ+D|}{\sqrt{A^۲+B^۲+C^۲}} \qquad (۳.۴۷)$$

مثال ۳.۴.۲۱. دستور (۳.۴۷) را ثابت کنید.

حل. معادلهٔ (۳.۴۴) را به صورت (۳.۴۳) می‌نویسیم که، در آن، $\mathbf{N}=(A,B,C)$. با استفاده از نماد $\mathbf{r}_\circ=(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ و دستورهای (۳.۲۷) و (۳.۲۹) به دست می‌آید:

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_{\circ}, \mathbf{N})+D|}{|\mathbf{N}|}=\frac{|Ax_{\circ}+By_{\circ}+Cz_{\circ}+D|}{\sqrt{A^{۲}+B^{۲}+C^{۲}}}$$

مثال ۲۲.۴.۳. معادلهٔ متعارف مختصاتی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌های $M_۱(۱, ۰, -۱)$، $M_۲(-۱, ۱, ۰)$ و $M_۳(۰, ۲, ۱)$ می‌گذرد.

حل. (۳.۴۴) را صفحهٔ مطلوب می‌گیریم. مختصات نقطه‌های $M_۱$ و $M_۲$ و $M_۳$ در این معادله صدق می‌کنند، بنابراین

$$A-C+D=\circ, \quad -A+B+D=\circ, \quad ۲B+C+D=\circ$$

ازآن جا $B=-D$، $A=\circ$ و $C=D$. معادلهٔ مطلوب، به این صورت درمی‌آید: $D(\circ\times x-۱\times y+۱\times z+۱)=\circ$؛ و یا

$$-y+z+۱=\circ$$

($D\neq\circ$، زیرا $۲D^{۲}=A^{۲}+B^{۲}+C^{۲}>\circ$).

اگر نقطهٔ $M_{\circ}(x_{\circ}, y_{\circ}, z_{\circ})$، نقطهٔ مفروضی واقع بر صفحهٔ P باشد، آن‌گاه $D=-Ax_{\circ}-By_{\circ}-Cz_{\circ}$ و معادلهٔ (۳.۴۴) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$A(x-x_{\circ})+B(y-y_{\circ})+C(z-z_{\circ})=\circ \qquad (۳.۴۸)$$

مثال ۲۳.۴.۳. معادلهٔ مختصاتی متعارف صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $M_{\circ}(-۱, ۲, ۱)$ بگذرد و بر بردار $\mathbf{N}=(۲, ۰, -۲)$ عمود باشد.

حل. معادلهٔ صفحهٔ مطلوب، به این صورت است [با (۳.۴۸) مقایسه کنید]:

$$۲[x-(-۱)]+\circ(y-۲)+(-۲)(z-۱)=\circ;$$

$$x-z+۲=\circ$$

مثال ۲۴.۴.۳. $D(۲, ۲, -\sqrt{۳})$ رأس و مثلث ABC قاعدهٔ هرم $DABC$ را تشکیل می‌دهند. و می‌دانیم: $A(\circ, \circ, \circ)$، $B(\circ, ۱, ۱)$ و $C(۱, ۱, \circ)$. مطلوب است محاسبهٔ طول h، ارتفاع این هرم.

حل. با استفاده از دستور (۲.۶۴)، معادلهٔ صفحه‌ای را می‌نویسیم که از سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد:

$$\circ=\begin{vmatrix} x-\circ & y-\circ & z-\circ \\ \circ-\circ & ۱-\circ & ۱-\circ \\ ۱-\circ & ۱-\circ & ۱-\circ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ \circ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & \circ \end{vmatrix}=$$

$$=x\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=-x+y-z$$

فاصلهٔ نقطهٔ D از صفحهٔ مثلث ABC، ارتفاع h هرم را به ما می‌دهد:

$$h=\frac{|-۲+۲-\sqrt{۳}|}{\sqrt{(-۱)^۲+۱^۲+(-۱)^۲}}=۱$$

صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$، با معادلهٔ متعارف مختصاتی را درنظرمی‌گیریم:

$$\begin{aligned} P_۱:\ & A_۱x+B_۱y+C_۱z+D_۱=\circ،\ A_۱^۲+B_۱^۲+C_۱^۲>\circ \\ P_۲:\ & A_۲x+B_۲y+C_۲z+D_۲=\circ،\ A_۲^۲+B_۲^۲+C_۲^۲>\circ \end{aligned} \qquad (۳.۴۹)$$

صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$، تنها وقتی موازی‌اندکه، بردارهای نرمال آن‌ها

$$\mathbf{N}_۱=(A_۱، B_۱، C_۱) \quad ، \quad \mathbf{N}_۲=(A_۲، B_۲، C_۲)$$

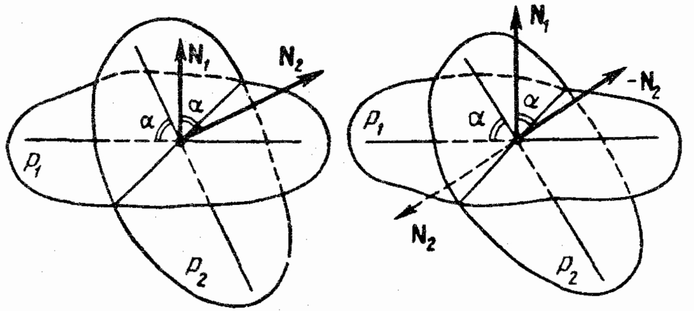
هم‌راستا باشند؛ یعنی وقتی‌که عدد $\lambda\neq\circ$ وجود داشته باشد، به نحوی‌که

$$A_۱=\lambda A_۲،\ B_۱=\lambda B_۲،\ C_۱=\lambda C_۲ \qquad (۳.۵\circ)$$

صفحه‌های $P_۱$ و$P_۲$، تنها وقتی برهم عمودندکه، بردارهای نرمال آن‌ها، برهم عمود باشند، یعنی

$$A_۱A_۲+B_۱B_۲+C_۱C_۲=\circ \qquad (۳.۵۱)$$

وقتی دوصفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ موازی نباشند، دوجفت فرجه باهم می‌سازند



(a) $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°,\ \alpha=\varphi$

(b) $90° \leqslant \varphi \leqslant 180°,\ \alpha=180°-\varphi$

شکل ۲۹.۳

که، در آن، دو فرجهٔ هر جفت باهم برابرند. زاویهٔ بین دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$، بنا به تعریف، کوچکترین فرجهٔ بین آن‌هاست. زاویهٔ بین دوصفحهٔ موازی را، صفر به حساب می‌آورند. $\mathbf{N}_۱$ و $\mathbf{N}_۲$ را، به ترتیب، بردارهـای نرمـال دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\varphi=(\widehat{\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲})$. اگر زاویهٔ بین دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ را α بنامیم، به‌ازای $۰° \leqslant \varphi \leqslant ۹۰°$ داریم: $\alpha=\varphi$، و به‌ازای $۹۰° \leqslant \varphi \leqslant ۱۸۰°$ داریم: $\alpha=۱۸۰°-\varphi$ (شکل ۲۹.۳ — a و b).
در هر حالت

$$\cos\alpha=|\cos\varphi|=\frac{|(\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲)|}{|\mathbf{N}_۱|\cdot|\mathbf{N}_۲|} \qquad (۳.۵۲)$$

مثال ۲۵.۴.۳. اگر معادله‌های دوصفحهٔ موازی $P_۱$ و $P_۲$، با (۳.۴۹) داده شده باشند، فاصلهٔ بین آن‌ها را پیدا کنید.

حل. فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی $P_۱$ و $P_۲$، عبارت است از فـاصلهٔ نقطهٔ دلخواه $M_۰(x_۰ ، y_۰ ، z_۰)\in P_۲$ از صفحهٔ $P_۱$؛ یعنی

$$d=\frac{|A_۱x_۰+B_۱y_۰+C_۱z_۰+D_۱|}{\sqrt{A_۱^۲+B_۱^۲+C_۱^۲}}$$

چون صفحه‌هـای $P_۱$ و $P_۲$ موازی‌اند، عدد λ وجـود دارد، به نحوی که

برابری‌های (۳.۵۰) برقرار باشند. به این ترتیب

$$A_۱x_۰+B_۱y_۰+C_۱z_۰+D_۱=\lambda(A_۲x_۰+B_۲y_۰+C_۲z_۰)+$$
$$+D_۱=D_۱-\lambda D_۲$$

بنابراین $d=\dfrac{|D_۱-\lambda D_۲|}{\sqrt{A_۱^۲+B_۱^۲+C_۱^۲}}$ که، در آن، λ در برابری‌های (۳.۵۰) صدق می‌کند. اگر مثلاً $A_۲\neq ۰$، آن وقت

$$d=\frac{|A_۲D_۱-A_۱D_۲|}{|A_۲|\sqrt{A_۱^۲+B_۱^۲+C_۱^۲}}$$

مثال ۳.۴.۲۶. نقطهٔ $M_۰(۱،۱،۱)$ در داخل یکی از چهار فرجه‌ای قرار دارد که دو صفحهٔ

$$P_۱: ۸x+۴y+z+۱=۰،\quad P_۲: ۲x-۲y+z+۱=۰$$

باهم تشکیل می‌دهند. مقدار این فرجه را پیدا کنید.

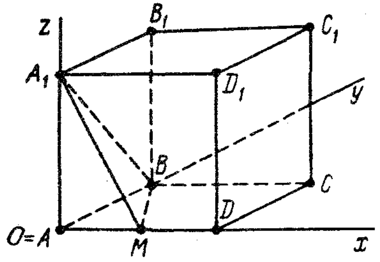
حل. بردارهای نرمال دوصفحه، $\mathbf{N}_۱=(۸،۴،۱)$ و $\mathbf{N}_۲=(۲،-۲،۱)$ را در نظر می‌گیریم. اگر زاویه‌های دووجهی را، شبیه شکل ۳.۳۰ شماره‌گذاری کنیم، با توجه به نابرابری‌های

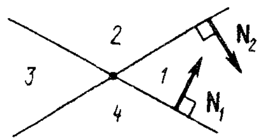
$$d_{P_۱}(M_۰)=\frac{۸\times۱+۴\times۱+۱+۱}{\sqrt{۶۴+۱۶+۱}}>۰،$$

$$d_{P_۲}(M_۰)=\frac{۲\times۱-۲\times۱+۱+۱}{\sqrt{۴+۴+۱}}>۰$$

نقطهٔ $M_۰$ در درون زاویهٔ ۱ قراردارد که مقدار آن، با توجه به قضیهٔ مربوط به زاویه‌های با ضلع‌های عمود برهم، برابر است با

$$۱۸۰^\circ-(\widehat{\mathbf{N}_۱،\mathbf{N}_۲})=۱۸۰^\circ-\arccos\frac{(\mathbf{N}_۱،\mathbf{N}_۲)}{|\mathbf{N}_۱|\cdot|\mathbf{N}_۲|}=$$





شکل ۳۱.۳

شکل ۳۰.۳

$$= ۱۸۰^\circ - arc\cos\frac{۱}{۳}$$

مثال ۲۷.۴.۳. مطلوب است زاویهٔ α، بین صفحه‌های

$$P_۱: ۴x + ۲y - ۲z + ۵ = ۰, \quad P_۲: -x + y + ۲z - ۳ = ۰$$

حل. داریم: $\mathbf{N}_۱ = (۴ , ۲ , -۲)$ ، $\mathbf{N}_۲ = (-۱ , ۱ , ۲)$ ، $|\mathbf{N}_۱| = ۲\sqrt{۶}$ ، $|\mathbf{N}_۲| = \sqrt{۶}$ ، $(\mathbf{N}_۱ , \mathbf{N}_۲) = -۶$. با توجه به دستور (۳.۵۲) به دست می‌آید:

$$\cos\alpha = \left|\frac{-۶}{۲\sqrt{۶}\cdot\sqrt{۶}}\right| = \frac{۱}{۲} , \quad \alpha = ۶۰^\circ$$

مثال ۲۸.۴.۳. در مکعب $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$، صفحه‌ای را درنظر بگیرید که از رأس‌های $A_۱$ و B ونقطهٔ M وسط یال $[AD]$ گذشته است. زاویهٔ بین این صفحه و وجه $A_۱B_۱C_۱D_۱$ را پیدا کنید.

حل. طول یال مکعب را واحد ودستگاه مختصات $\{A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_۱}\}$ را درنظر می‌گیریم. دراین دستگاه مختصات قائم داریم (شکل ۳۱.۳):

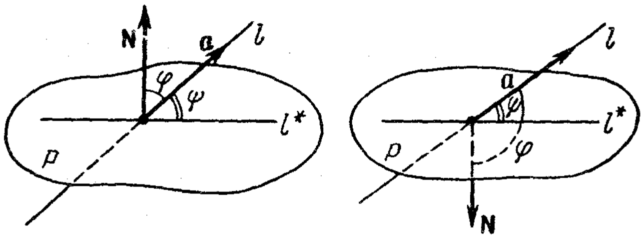
$$A_۱(۰, ۰, ۱), \quad B(۰, ۱, ۰), \quad M\left(\frac{۱}{۲}, ۰, ۰\right)$$

با توجه به دستور (۳.۴۵)، معادلهٔ صفحهٔ (A_1BM) به‌صورت

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \Longleftrightarrow 2x+y+z=1$$

درمی‌آید، که بردار نرمال آن $\mathbf{N}_1=(2, 1, 1)$ است. صفحهٔ $(A_1B_1C_1D_1)$ با صفحهٔ Oxy موازی و، معادلهٔ آن، $z=1$ است که، درنتیجه، بردار نرمال آن، $\mathbf{N}_2=(0, 0, 1)$ می‌شود. به‌این ترتیب

$$\cos\alpha=\left|\frac{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}{|\mathbf{N}_1|\cdot|\mathbf{N}_2|}\right|=\frac{1}{\sqrt{6}},\ \ \alpha=\operatorname{arc}\cos\frac{1}{\sqrt{6}}$$



(a) $0°\leqslant\varphi\leqslant 90°;\ \psi=90°-\varphi$ (b) $90°\leqslant\varphi\leqslant 180°;\ \psi=\varphi-90°$

شکل ۳۲.۳

زاویهٔ بین خط راست l و صفحهٔ P، به زاویهٔ ψ بین خط راست l و تصویر قائم آن l^*، برصفحهٔ P، گویند. اگر $\mathbf{a}$ برداز هادی l و $\mathbf{N}$ بردار نرمال صفحهٔ P باشد، آن وقت $\varphi=(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{N}})$ و زاویه‌های ψ و φ به ترتیب زیر به‌هم مربوطاند (شکل ۳۲.۳):

اگر $0°\leqslant\varphi\leqslant 90°$، آن‌گاه $\psi=90°-\varphi$؛

اگر $90°\leqslant\varphi\leqslant 180°$، آن‌گاه $\psi=\varphi-90°$.

بنابراین، زاویهٔ ψ، از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$\sin\psi=|\cos\varphi|=\frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{N})|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{N}|} \qquad (۳.۵۳)$$

مثال ۰۲۹.۴.۳ به‌ازای چه مقداری از m، زاویهٔ بین خط راست به معادله‌های $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۲}{-۱}=\frac{z}{۱}$ وصفحهٔ به‌معادلهٔ $mx+y+z+۴=۰$ برابر ۴۵ درجه می‌شود؟

حل. بنابردستور (۳.۵۳) داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\sin\psi=\frac{|(\mathbf{a},\mathbf{N})|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{N}|}$$

که‌درآن $\mathbf{a}=(۲,-۱,۱)$، $|\mathbf{a}|=\sqrt{۶}$، $\mathbf{N}=(m,۱,۱)$، $|\mathbf{N}|=\sqrt{m^۲+۲}$ و $(\mathbf{a},\mathbf{N})=۲m$. بنابراین

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{|۲m|}{\sqrt{۶}\cdot\sqrt{m^۲+۲}}\Longleftrightarrow m=\pm\sqrt{۶}$$

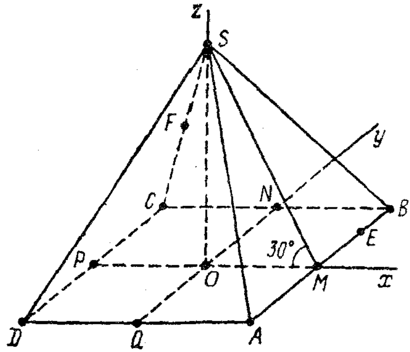
مثال ۰۳۰.۴.۳* درهرم منتظم $SABCD$ (به رأس S)، اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ هریك از فرجه‌های مجاور قاعده، برابر است با ۳۰ درجه. نقطه‌های M، N، P و Q را، به ترتیب، وسط ضلع‌های $[AB]$، $[BC]$، $[CD]$ و $[DA]$، گرفته‌ایم. نقطهٔ E برضلع $[AB]$ ونقطهٔ F بر یال $[SC]$ واقع‌است. می‌دانیم، زاویهٔ بین خط راست (EF) با صفحهٔ (SMP)، زاویهٔ بین خط راست (EF) با صفحهٔ (SBA) و زاویهٔ بین خط راست (DF) و صفحهٔ (SNQ)، هرسه باهم برابرند. اندازهٔ α، هریك‌ازاین سه‌زاویه را پیداکنید.

حل. مرکزمربع $ABCD$ را O می‌نامیم. نصف‌پاره‌خط‌راست $[AB]$ را به‌عنوان‌واحدطول و $\left\{O,\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OS}\,\frac{\overrightarrow{OS}}{|\overrightarrow{SO}|}\right\}$ را به‌عنوان دستگاه مختصات قائم در نظر می‌گیریم (شکل ۳۳.۳)، در این دستگاه مختصات داریم:

$$M(۱,۰,۰),\ P(-۱,۰,۰),\ N(۰,۱,۰),\ Q(۰,-۱,۰),$$

$$A(۱,-۱,۰),B(۱,۱,۰),C(-۱,۱,۰),D(-۱,-۱,۰),$$

$$S(۰,۰,h),\ E(۱,m,۰),\ F(-\lambda,\lambda,(۱-\lambda)h)$$



شکل ۳۳۰۳

که در آن‌ها، h، λ و m نامعلوم‌اند و، درضمن، داریم:

$$h = \frac{|OS|}{|OM|},\ \lambda = \frac{|FS|}{|SC|} \in [\text{۰}, \text{۱}]$$

معادلهٔ صفحه‌ها، چنین‌اند:

$$P_\text{۱} = (ABCD) : z = \text{۰};\ \ P_\text{۲} = (SMP) : y = \text{۰};$$

$$P_\text{۳} = (SNQ) : x = \text{۰};$$

$$P_\text{۴} = (SBA) : \text{۰} = \begin{vmatrix} x - \text{۰} & y - \text{۰} & z - h \\ \text{۱} - \text{۰} & \text{۱} - \text{۰} & \text{۰} - h \\ \text{۱} - \text{۰} & -\text{۱} - \text{۰} & \text{۰} - h \end{vmatrix} =$$

$$= -\text{۲}hx - \text{۲}(z - h) \Longleftrightarrow hx + z - h = \text{۰}$$

و بردارهای نرمال این صفحه‌ها، به‌ترتیب:

$$\mathbf{N}_\text{۱} = (\text{۰}, \text{۰}, \text{۱}),\ \mathbf{N}_\text{۲} = (\text{۰}, \text{۱}, \text{۰}),\ \mathbf{N}_\text{۳} = (\text{۱}, \text{۰}, \text{۰}),\ \mathbf{N}_\text{۴} = (h, \text{۰}, \text{۱})$$

و بردارهای هادی خط‌های راست:

$$(EF) : \mathbf{a} = \overrightarrow{EF} = (-\lambda - \text{۱}, \lambda - m, (\text{۱} - \lambda)h);$$

$$(DF) : \mathbf{b} = \overrightarrow{DF} = (-\lambda + \text{۱}, \lambda + \text{۱}, (\text{۱} - \lambda)h)$$

با توجه به فرض‌ها و بنا به‌دستورهای (۳۰۵۲) و (۳۰۵۳) داریم:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ=\frac{|(\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_4)|}{|\mathbf{N}_1|\cdot|\mathbf{N}_4|}=\frac{1}{\sqrt{h^2+1}}\Longleftrightarrow h=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{|(\mathbf{a},\mathbf{N}_2)|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{N}_2|}=\frac{|(\mathbf{a},\mathbf{N}_4)|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{N}_4|}=\frac{|(\mathbf{b},\mathbf{N}_3)|}{|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{N}_3|}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\frac{|\lambda-m|}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-m)^2+(1-\lambda)^2h^2}}=$$

$$=\frac{|2h\lambda|}{\sqrt{h^2+1}\cdot\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-m)^2+(1-\lambda)^2h^2}}=$$

$$=\frac{|1-\lambda|}{\sqrt{(1-\lambda)^2+(\lambda+1)^2+(1-\lambda)^2h^2}}$$

که با توجه به مقدار $h=\frac{1}{\sqrt{3}}$، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases}|\lambda-m|=\lambda,\\[4pt] \dfrac{\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2+\lambda\ ,\ (1-\lambda)^{\frac{2}{3}}}}=\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2+4(1-\lambda)^{\frac{2}{3}}}}\end{cases}$$

ازمعادلهٔ اول دستگاه، به‌دست می‌آید: $m=0$ یا $m=2\lambda$؛ و λ را می‌توان ازمعادلهٔ دوم به‌دست آورد: $\lambda=\frac{1}{2}$. به‌این ترتیب، مسأله دو جواب دارد:

$$m=0,\ \lambda=\frac{1}{2},\ h=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\text{و}\quad m=1,\ \lambda=\frac{1}{2},\ h=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

و در هر دوحالت

$$\sin\alpha=\frac{(1-\lambda)}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(1-\lambda)^2(h^2+1)}}=\sqrt{\frac{3}{31}},$$

$$\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{3}{31}}$$

مثال ۳۱.۴.۳. معادله‌هـای پارامتـری فصل مشترك این دو صفحه را پیدا کنید:

$$4x+y-6z-2=0\quad,\quad y-3z+2=0$$

حل. t را پارامتر و $z=4t$ می‌گیریم. از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید: $y=12t-2$ و، سپس ازمعادلهٔ اول $x=1+3t$. بنابراین، معادله‌های خط راست فصل مشترك، چنین‌اند:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{12}=\frac{z}{4}=t$$

مثال ۳۲.۴.۳. زاویهٔ بین دو خط راست l و L را پیدا کنید:

$$l:\begin{cases}3x+y-z+1=0\\3x-y+z=0\end{cases},\quad L:\begin{cases}x-y+1=0\\2x+2y-5z+1=0\end{cases}$$

حل. معادلهٔ پارامتری خط راست l را پیدا می‌کنیم. بـا فرض $z=t$ به‌عنوان پارامتر، ازحل دستگاه

$$3x+y=t-1,\quad 3x-y=-t$$

به دست می‌آید: $x=-\frac{1}{6}$، $y=t-\frac{1}{2}$. بنابراین، معـادلهٔ پارامتری خط راست l، چنین است:

$$x=-\frac{1}{6}+0.t,\ y=-\frac{1}{2}+1.t,\ z=0+1.t$$

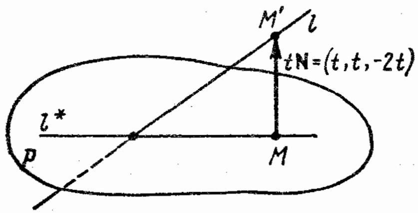
و بردار هادی آن $\mathbf{a}=(0,1,1)$ است.

برای خط‌راست L، τ را پارامتر می‌گیریم وفرض می‌کنیم $y=5\tau$؛

که از آن‌جا به دست می‌آید: $x=-1+5\tau$ و $z=-\frac{1}{5}+4\tau$؛ و بردار هادی خط راست L، به‌صورت $\mathbf{b}=(5, 5, 4)$ درمی‌آید. به این ترتیب

$$\cos\varphi=\frac{|(\mathbf{a},\mathbf{b})|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{9}{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{66})}=\frac{3\sqrt{3}}{(2\sqrt{11})};\quad \varphi=\arccos\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{11}}$$

مثال ۰۳۳.۴.۳ l^* را تصویر قائم خط راست $l:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ بر صفحهٔ $P: x+y-2z+4=0$ می‌گیریم. معادله‌های l^* را پیدا کنید.



شکل ۳۴.۳

حل. نقطهٔ $M(x, y, z)$ تنها وقتی بر خط راست l^* قرار دارد که (شکل ۳۴.۳): a) $M\in P$، یعنی $x+y-2z+4=0$؛ b) به‌ازای مقداری مثل t، نقطهٔ $M'(x+t, y+t, z-2t)$ برخط راست l واقع باشد، یعنی $\frac{x+t-1}{1}=\frac{y+t+1}{-1}=\frac{z-2t}{2}$. به‌این‌ترتیب، به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$x+y-2z+4=0,\quad x+y=-2t,\quad 2y+z+2=0$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x=2-\frac{5}{2}t,\quad y=-2+\frac{1}{2}t,\quad z=2-t$$

که همان معادلهٔ پارامتری خط راست l^* است. معادلهٔ متعارف l^* چنین است:

$$\frac{x-۲}{۵}=\frac{y+۲}{-۱}=\frac{z-۲}{۲}$$

مثال ۳۴.۴.۳. مختصات Q، تصویر نقطهٔ $M_۰(x_۰, y_۰, z_۰)$ را بر صفحهٔ P به معادلهٔ

$$P: Ax+By+Cz+D=۰,\quad A^۲+B^۲+C^۲>۰$$

و بردار $\overrightarrow{M_۰Q}$ را پیدا کنید. معادله‌های خط راست $(M_۰Q)$ را بنویسید.

حل. بردار $\mathbf{N}=(A, B, C)$ بر صفحهٔ P عمود است، بنابراین، معادله‌های خط راست $l=(M_۰Q)$، که بر صفحهٔ P عمود است، به این صورت درمی‌آید:

$$x=x_۰+At,\quad y=y_۰+Bt,\quad z=z_۰+Ct,\quad t\in\mathbf{R} \qquad (۳.۵۴)$$

نقطهٔ $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ روی این عمود قرار دارد، یعنی عدد t_Q وجود دارد به نحوی که داشته باشیم:

$$x_Q=x_۰+At_Q,\quad y_Q=y_۰+Bt_Q,\quad z_Q=z_۰+Ct_Q$$

چون $Q\in P$، بنابراین $Ax_Q+By_Q+Cz_Q+D=۰$. از آن جا، با توجه به مقدارهای x_Q، y_Q و z_Q، به دست می‌آید:

$$t_Q=-\frac{Ax_۰+By_۰+Cz_۰+D}{A^۲+B^۲+C^۲}$$

و در نتیجه

$$x_Q=\frac{(B^۲+C^۲)x_۰-ABy_۰+ACz_۰-AD}{A^۲+B^۲+C^۲},$$

$$y_Q=\frac{-ABx_۰+(A^۲+C^۲)y_۰-BCz_۰-BD}{A^۲+B^۲+C^۲},$$

$$z_Q=\frac{-ACx_۰-BCy_۰+(A^۲+B^۲)z_۰-CD}{A^۲+B^۲+C^۲},$$

$$\overrightarrow{M_\circ Q} = -\frac{Ax_\circ + By_\circ + Cz_\circ + D}{A^۲ + B^۲ + C^۲}\mathbf{N}$$

و بنابر (۳.۵۴)، معادله‌های خط راست $(M_\circ Q)$ چنین‌اند:

$$(M_\circ Q): \frac{x - x_\circ}{A} = \frac{y - y_\circ}{B} = \frac{z - z_\circ}{C}$$

مثال ۳۵.۴.۳. مطلوب است مختصات نقطهٔ M^*، قرینهٔ $M_\circ(۱، ۲، ۳)$ نسبت به صفحهٔ P به معادلهٔ $۲x - ۳y + ۵z - ۶۸ = \circ$.

حل. نقطهٔ $M^*(x^*، y^*، z^*)$، برخط‌راست l قراردارد که ازنقطهٔ $M_\circ$ بر صفحهٔ P عمود شده باشد. معادله‌های خط راست l، چنین‌اند:

$$\frac{x - ۱}{۲} = \frac{y - ۲}{-۳} = \frac{z - ۳}{۵}$$

و در نتیجه: $x^* = ۱ + ۲t$، $y^* = ۲ - ۳t$ و $z^* = ۳ + ۵t$ (برای مقداری از t). نقطهٔ $Q\left(\frac{۱ + x^*}{۲}, \frac{۲ + y^*}{۲}, \frac{۳ + z^*}{۲}\right)$، وسط پاره‌خط راست $[M_\circ M^*]$، بر صفحهٔ P قرار دارد، بنابراین

$$\circ = ۲ \times \frac{۱ + x^*}{۲} - ۳ \times \frac{۲ + y^*}{۲} + ۵ \times \frac{۳ + z^*}{۲} - ۶۸ = ۱۹t - ۵۷$$

ازآن‌جا $t = ۳$، $x^* = ۷$، $y^* = -۷$، $z^* = ۱۸$.

مثال ۳۶.۴.۳. در مکعب $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$، نقطهٔ M وسط یال $[AD]$ است. زاویهٔ بین فصل مشترك صفحه‌های $(AB_۱D_۱)$ و $(A_۱MC_۱)$ را با وجه $ABCD$ پیدا کنید.

حل. طول یال مکعب را، واحد و دستگاه مختصات قائم

$$\{A_۱؛ \overrightarrow{A_۱B_۱}، \overrightarrow{A_۱D_۱}، \overrightarrow{A_۱A}\}$$

را در نظر می گیریم. در این دستگاه مختصات، داریم:

$$A_۱(\circ، \circ، \circ)، \ B_۱(۱، \circ، \circ)، \ C_۱(۱، ۱، \circ)، \ D_۱(\circ، ۱، \circ)،$$

$$A(0, 0, 1),\ M\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

و برای معادلهٔ صفحه‌ها، به دست می‌آید:

$$(AB_1D_1): \frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1;$$

$$(A_1MC_1):\ 0=\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & \frac{1}{2}-0 & 1-0 \\ 1-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix}=-x+y-\frac{1}{2}z;$$

$$(ABCD): z=1;\ \mathbf{N}=(0, 0, 1)$$

اگر $\frac{1}{4}z=t$ را، پارامتر بگیریم، معادله‌های پارامتری خط راست l، فصل مشترک صفحه‌های (AB_1D_1) و (A_1MC_1) به دست می‌آیند:

$$x=1-4t-y,\ x=y-2t \iff 1-4t-y=y-2t$$

و از آن‌جا: $y=\frac{1}{2}-t$ و $(z=4t)$ $x=\frac{1}{2}-3t$. به این ترتیب، بردار هادی خط راست l: $\mathbf{a}=(-3, -1, 4)$؛ و زاویهٔ موردنظر Φ، با توجه به دستور (۳.۵۳)، چنین می‌شود:

$$\sin\Phi=\frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{N})|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{N}|}=\frac{4}{\sqrt{26}};\ \Phi=\arcsin 2\sqrt{\frac{2}{13}}$$

مثال ۳.۴.۳۷. درهرم $SABC$، همهٔ زاویه‌های رأس S، قائمه وطول یال‌های جانبی $[SA]$، $[SB]$ و $[SC]$، به ترتیب، برابرند با a، b و c. طول ارتفاع $h=|SH|$ از هرم را پیدا کنید.

حل. دستگاه مختصات قائم $\left\{S, \frac{\overrightarrow{SA}}{a}, \frac{\overrightarrow{SB}}{b}, \frac{\overrightarrow{SC}}{c}\right\}$ رادرنظرمی گیریم.

در این دستگاه مختصات، داریم:

$$A(a, \circ, \circ),\ B(\circ, b, \circ),\ C(\circ, \circ, c)$$

با توجه به دستور (۳۰۴۵)، معادلهٔ صفحهٔ (ABC)، چنین است:

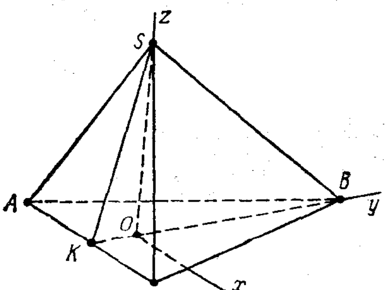
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$$

طول ارتفاع h، برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ $S(\circ, \circ, \circ)$ از صفحهٔ (ABC):

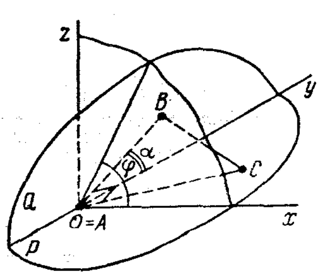
$$h=|SH|=\frac{\left|\frac{\circ}{a}+\frac{\circ}{b}+\frac{\circ}{c}-۱\right|}{\sqrt{\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}}}$$

و از آن‌جا: $\frac{۱}{h^۲}=\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}$.

مثال ۳۸۰۴۰۳. ضلع‌های $[AB]$ و $[AC]$ از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، به ترتیب، بروجه‌های P و Q از فرجهٔ حادهٔ با زاویهٔ مسطحهٔ φ قرار دارند. خط راست (AB) بـا یال این فرجه، زاویه‌ای برابر α می‌سازد. زاویهٔ Φ، بین این یال و خط راست (AC) را پیدا کنید.



شکل ۳۶۰۳



شکل ۳۵۰۳

حل. مبداء O ازدستگاه مختصات‌قائم را، منطبق بر A می گیریم. محور y را بر فصل مشترك دو وجه فرجه (شکل ۳۵.۳) و محور x را بر وجه P از این فرجه می گیریم. جهت محور z را طوری انتخاب می کنیم که، مختص z، برای نقطه‌های نیم صفحهٔ Q، مثبت باشد. در این صورت، معادلهٔ صفحهٔ شامل Q، چنین است:

$$-xtg\varphi+z=0$$

اگر فرض کنیم $B(x_B, y_B, z_B)$، از شرط $B\in Q$ نتیجه می‌شود: $z_B=x_Btg\varphi$. زاویهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{OB}$ و $\mathbf{j}$ برابر α است:

$$cos\alpha=\frac{y_B}{\sqrt{x_B^2+y_B^2+z_B^2}}$$

بنا براین

$$y_B^2(1-cos^2\alpha)=(x_B^2+z_B^2)cos^2\alpha=\frac{x_B^2cos^2\alpha}{cos^2\varphi}$$

یعنی $|y_B|=\frac{|x_B|cotg\alpha}{cos\varphi}$. نقطهٔ $C(x_C, y_C, 0)$ در شرط $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})=0$ صدق می کند، یعنی $x_Bx_C+y_By_C=0$. درنتیجه $\frac{|x_C|}{|y_C|}=\frac{|y_B|}{|x_B|}=\frac{cotg\alpha}{cos\varphi}$.

بنا براین

$$cos\psi=\left|\frac{(\overrightarrow{OC}, \mathbf{j})}{|\overrightarrow{OC}|.|\mathbf{j}|}\right|=\frac{|y_C|}{\sqrt{x_C^2+y_C^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_C}{y_C}\right)^2+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{cotg\alpha}{cos\varphi}\right)^2+1}};$$

$$tg\Phi=\frac{cotg\alpha}{cos\varphi}\ ;\quad \Phi=arc\ tg\frac{cotg\alpha}{cos\varphi}$$

مثال ۳۹.۴۰۳. در هرم منتظم $SABC$، طول ضلع قاعدهٔ ABC برابر a، وزاویهٔ α بین سهم هرم و وجه جانبی آن برابر ۴۵ درجه است. طول h، ارتفاع هرم را پیدا کنید.

حل. مرکز قاعده ABC را O می‌نامیم و به‌عنوان مبداء مختصات قائم در نظر می‌گیریم (شکل ۳۶.۳). محورهای Ox، Oy و Oz را، به‌ترتیب، درجهت بردارهای $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OS}$ انتخاب می‌کنیم. دراین صورت، داریم:

$$S(0, 0, h),\ A\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}}, 0\right),$$

$$B\left(0, \frac{a}{\sqrt{3}}, 0\right),\ C\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2\sqrt{3}}, 0\right)$$

و معادلهٔ صفحهٔ (BSC) چنین می‌شود:

$$0=\begin{vmatrix} x-0 & y-\frac{a}{\sqrt{3}} & z-0 \\ 0-0 & 0-\frac{a}{\sqrt{3}} & h-0 \\ \frac{a}{2}-0 & -\frac{a}{2\sqrt{3}}-\frac{a}{\sqrt{3}} & 0-0 \end{vmatrix}=$$

$$=a\left[\frac{h\sqrt{3}}{2}x-\frac{h}{2}\left(y-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{a}{2\sqrt{3}}z\right]$$

بردار نرمال این‌صفحه $\mathbf{N}=\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$ و $|\mathbf{N}|=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$.
بنابر دستور (۳.۵۳) داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\alpha=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{N}|}=\frac{ah\frac{\sqrt{3}}{4}}{h^2+\frac{a^2}{12}}$$

به معادلهٔ $h^۲-h\frac{a\sqrt{۶}}{۴}+\frac{a^۲}{۱۲}=۰$ می‌رسیم که دو جواب دارد:

$$h_۱=\frac{a}{\sqrt{۶}},\quad h_۲=\frac{a\sqrt{۶}}{۱۲}$$

مثال ۴۰.۴.۳*. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، قاعدهٔ هرم $SABC$ را تشکیل می‌دهد. می‌دانیم وجه SAB بر صفحهٔ قاعده عمود است و، درضمن، داریم: $\widehat{ASB}=\widehat{ASC}=۴۵^\circ$. زاویه‌های مثلث SAC را پیدا کنید.

حل. O را وسط $[AB]$ و M را پای عمود وارد از نقطهٔ S بر صفحهٔ ABC می‌گیریم [چون صفحه‌های (ABC) و (ASB) برهم عمودند، $M\in(AB)$]. طول پاره‌خط راست $[OB]$ را، به‌عنوان واحد طول انتخاب می‌کنیم و دستگاه مختصات قائم

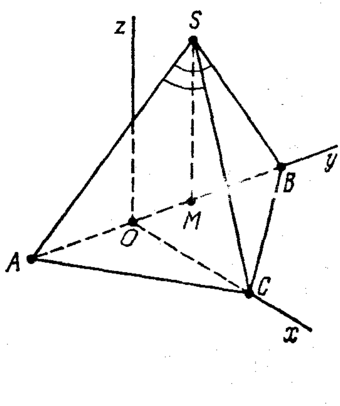
$$\left\{O, \frac{\overrightarrow{OC}}{\sqrt{۳}}, \overrightarrow{OB}, \frac{\overrightarrow{MS}}{|MS|}\right\}$$

را در نظر می‌گیریم (شکل ۳۷.۳). در این دستگاه مختصات داریم:

$$A(۰, -۱, ۰),\ B(۰, ۱, ۰),$$

$$C(\sqrt{۳}, ۰, ۰),\ S(۰, m, h)$$

m و h نامعلوم‌اند و در رابطه‌های $|MS|=h|OB|$ و $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OB}$ صدق می‌کنند. بنابراین



شکل ۳۷.۳

$$\overrightarrow{SA}=(۰, -۱, -m, -h),$$

$$\overrightarrow{SB}=(۰, ۱, -m, -h),\ \overrightarrow{SC}=(\sqrt{۳}, -m, -h)$$

بنا به‌فرض داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\cos\widehat{ASB}=\frac{(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB})}{|\overrightarrow{SA}|\cdot|\overrightarrow{SB}|}=\frac{m^۲-۱+h^۲}{\sqrt{(m+۱)^۲+h^۲}.\sqrt{(m-۱)^۲+h^۲}},$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\cos\widehat{ASC}=\frac{(\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC})}{|SA|\cdot|SC|}=\frac{m^۲+m+h^۲}{\sqrt{(m+۱)^۲+h^۲}\cdot\sqrt{۳+m^۲+h^۲}}$$

اگر $w=m^۲+h^۲$ بگیریم، به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$۲(w-۱)^۲=(w+۲m+۱)(w-۲m+۱),\ \ w>۱$$

$$۲(w+m)^۲=(w+۲m+۱)(w+۳),\ \ w+m>۰$$

با ساده‌کردن معادله‌ها، به دست می‌آید:

$$w^۲-۶w+۱+۴m^۲=۰,$$

$$w^۲-۴w+۲mw+۲m^۲-۶m-۳=۰$$

و اگر دو معادله را از هم کم کنیم:

$$m^۲-m(w-۳)+(۲-w)=۰$$

$$m=\frac{۱}{۲}[w-۳\pm(w-۱)]/۲$$

یعنی با دو حالت روبه‌رو می‌شویم: a) $m=-۱$، b) $m=w-۲$.

اگر $m=-۱$، آن‌گاه $w^۲-۶w+۵=۰$ و $w=۵$ ($w=۱$ قابل قبول نیست، زیرا $w>۱$). در این حالت داریم:

$$m=-۱,\ \ w=۵,\ \ h=\sqrt{w-m^۲}=۲ \qquad (a$$

در حالت b) داریم:

$$۵w^۲-۲۲w+۱۷=۰$$

یعنی $w=\frac{۱۷}{۵}$، $m=\frac{۷}{۵}$، $h=\sqrt{w-m^۲}=\frac{۶}{۵}$.

اکنون به محاسبهٔ زاویه‌های مثلث SAC می‌پردازیم.

a) داریم:

$$\overrightarrow{AS}=(۰,m+۱,h)=(۰,۰,۲),\ \overrightarrow{AC}=(\sqrt{۳},۱,۰),$$

$$(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}) = ۰، \ \widehat{SAC} = ۹۰^\circ$$

و چون $\widehat{ASC} = ۴۵^\circ$، پس $\widehat{SCA} = ۴۵^\circ$.

b) داریم:

$$\overrightarrow{AS} = \left(۰، \frac{۱۲}{۵}، \frac{۶}{۵}\right) = \frac{۶}{۵}(۰، ۲، ۱)، \ \overrightarrow{AC} = (\sqrt{۳}، ۱، ۰)،$$

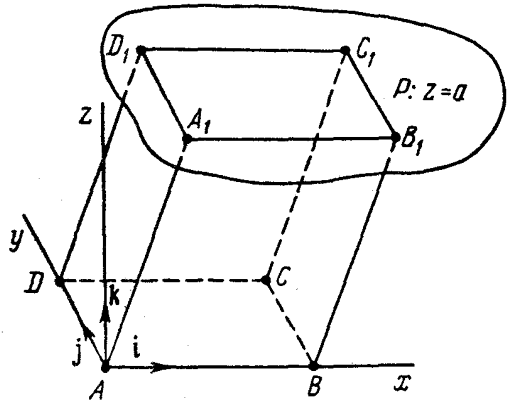
$$cos\widehat{SAC} = \frac{(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AS}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\frac{۶}{۵}(۰\times\sqrt{۳}+۲\times۱+۱\times۰)}{\frac{۶}{۵}\sqrt{۰^۲+۲^۲+۱^۲}\cdot\sqrt{۳+۱^۲+۰^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}،$$

$$\widehat{SAC} = \mathrm{arc}\, cos\frac{۱}{\sqrt{۵}} = arc\, tg ۲،$$

$$\widehat{SCA} = ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ - arc\, tg ۲ = arc\, tg ۳$$

مثال ۴۱.۴.۳*. مستطیل $ABCD$، قاعدهٔ متوازی‌السطوح مایل را تشکیل می‌دهد. $[AA_۱]$، $[BB_۱]$، $[CC_۱]$ و $[DD_۱]$ یال‌های جانبی آن هستند. طول ضلع $[AB]$، برابر است با طول ارتفاع متوازی‌السطوح. کرهٔ به‌مرکز O، از رأس B می‌گذرد و بر یال‌های $(A_۱B_۱)$ و $(DD_۱)$، به‌ترتیب، در نقطه‌های $A_۱$ و $D_۱$ مماس است. مطلوب است نسبت حجم متوازی‌السطوح به حجم کره، به شرطی که $\widehat{A_۱OB} = \widehat{D_۱OB} = ۱۲۰^\circ$.

حل. فرض می کنیم: $|AB| = a$ و $|AD| = b$، دستگاه مختصات قائم را، به مبدأ A می گیریم و قرار می‌دهیم: $\mathbf{i} = \frac{AB}{|AB|}$، $\mathbf{j} = \frac{AD}{|AD|}$ (شکل ۳۸۰). سپس، جهت بردار $\mathbf{k}$ را طوری مشخص می کنیم که اگر، ابتدای آن، A باشد، انتهای آن در همان طرف از صفحهٔ $(ABCD)$ قرار گیرد که نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$ و $D_۱$ قرار دارند. چون طول ارتفاع متوازی‌السطوح برابر a است، هرچهار نقطهٔ $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$ و $D_۱$ روی صفحهٔ $z = a$ واقع‌اند. اگر $(m، n، a)$ را مختصات $A_۱$ و $(۰، b، ۰)$ را مختصات D بگیریم، آن وقت $B(a، ۰، ۰)$ و $D_۱(m، n+b، a)$ خواهد بود. فرض کنید



شکل ۳۸۰۳

(z، y، x) مختصات نقطهٔ O، و R شعاع مجهول کره باشد. شرط‌های مسأله را می‌نویسیم:

$$|OB|^۲=(x-a)^۲+y^۲+z^۲=R^۲, \qquad (۳۰۵۵)$$

$$|OA_۱|^۲=(x-m)^۲+(y-n)^۲+(z-a)^۲=R^۲, \qquad (۳۰۵۶)$$

$$|OD_۱|^۲=(x-m)^۲+(y-n-b)^۲+(z-a)^۲=R^۲ \qquad (۳۰۵۷)$$

کره در نقطه‌های $A_۱$ و $D_۱$، بر $(A_۱B_۱)$ و $(DD_۱)$ مماس است، بنابراین

$$\circ=(\overrightarrow{OA_۱}, \overrightarrow{A_۱B_۱})=(\overrightarrow{OA_۱}, \overrightarrow{AB})=(m-x)a \qquad (۳۰۵۸)$$

$$\circ=(\overrightarrow{OD_۱}, \overrightarrow{DD_۱})=(\overrightarrow{OD_۱}, \overrightarrow{AA_۱})=$$
$$=(m-x)m+(n+b-y)n+(a-z)a \qquad (۳۰۵۹)$$

و سرانجام

$$-\frac{۱}{۲}=\cos ۱۲۰^\circ=\frac{(\overrightarrow{OA_۱}, \overrightarrow{OB})}{|OA_۱|\cdot|OB|}=\frac{(\overrightarrow{OA_۱}, \overrightarrow{OB})}{R^۲}=$$

$$=\frac{۱}{R^{۲}}[(m-x)(a-x)+(y-n)y+(z-a)z] \qquad (۳.۶۰)$$

$$-\frac{۱}{۲}=\frac{(\overrightarrow{OD}_{۱}, \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OD}_{۱}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=$$

$$=\frac{۱}{R^{۲}}[(m-x)(a-x)+(y-n-b)y+(z-a)z] \qquad (۳.۶۱)$$

از(۳.۵۸)داریم: $m=x$.(۳.۶۱) را از(۳.۶۰) کم می‌کنیم، به‌دست‌می‌آید: $y=۰$. (۳.۵۷) را از (۳.۵۶) کم می‌کنیم، نتیجه می‌شود: $n=-\frac{b}{۲}$.

اکنون، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$(x-a)^{۲}+z^{۲}=R^{۲},\ \frac{b^{۲}}{۴}+(z-a)^{۲}=R^{۲},$$

$$-\frac{b^{۲}}{۴}+a(a-z)=۰,\ z(z-a)=-\frac{۱}{۲}R^{۲}$$

از مجموع سه معادلهٔ آخر، به دست می‌آید: $۲(z-a)^{۲}=\frac{R^{۲}}{۲}$، یعنی $z-a=\pm\frac{R}{۲}$. سپس $\frac{b^{۲}}{۴}=\frac{۳R^{۲}}{۴}$، $b=R\sqrt{۳}$ و

$$\frac{b^{۲}}{۴}=a(a-z)=\pm\frac{۱}{۲}aR$$

در این برابری، علامت منفی ممکن نیست، بنابراین $a=\frac{b^{۲}}{۲R}=\frac{۳R}{۲}$. به‌این ترتیب، اگر حجم متوازی‌السطوح را $V_{۱}$ و حجم کره را $V_{۲}$ بنامیم، داریم:

$$\frac{V_{۱}}{V_{۲}}=\frac{a^{۲}b}{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}}=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۱۶}$$

مثال ۴۲.۴.۳. طول یال چهاروجهی منتظم $ABCD$ برابر a است.

E را وسط $[CD]$ و F را وسط ارتفاع (BL) در وجه ABD گرفته‌ایم. پاره‌خط راست $[MN]$، که دو انتهای آن روی خط‌های راست (AD) و (BC) قرار دارد، خط راست (EF) را قطع می‌کند و بر آن عمود است. طول این پاره‌خط راست را پیدا کنید.

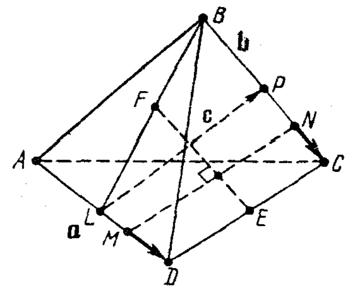
حل. P را وسط $[BC]$ می‌گیریم و پایهٔ متعامد $\overrightarrow{AD}=\mathbf{a}$، $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$ و $\overrightarrow{LP}=\mathbf{c}$ را درنظر می‌گیریم (شکل ۳۹.۳). بنابراین

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=(\mathbf{a}, \mathbf{c})=(\mathbf{b}, \mathbf{c})=0, \ |\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=a, \ |\mathbf{c}|=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

با توجه به دستور خط میانه برای چهارضلعی فضائی، داریم:

$$\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{LD})=\frac{\mathbf{a}}{4}+\frac{\mathbf{b}}{2}$$

نقطه‌های M و N، برخط‌های راست (AD) و (BC) قرار دارند، بنابراین عددهای x و y وجود دارند، به‌نحوی که $\overrightarrow{PN}=x\mathbf{b}$ و $\overrightarrow{LM}=y\mathbf{a}$.



شکل ۳۹.۳

درنتیجه

$$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{LP}+\overrightarrow{PN}=$$
$$=-y\mathbf{a}+x\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

دو خط راست (FE) و (MN) برهم عمودند، بنابراین

$$0=(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{MN})=-\frac{1}{4}y\mathbf{a}^2+\frac{1}{2}x\mathbf{b}^2=\frac{a^2}{4}(2x-y)$$

یعنی $2x=y$. خط‌های‌راست (FE) و (MN) متقاطع‌اند، یعنی بردارهای

$$\overrightarrow{FE}=\frac{1}{4}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}, \ \overrightarrow{MN}=-2x\mathbf{a}+x\mathbf{b}+\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MD}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{DC}=\left(\frac{۱}{۲}-y\right)\mathbf{a}+\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}\mathbf{a}+\mathbf{c}+\frac{۱}{۲}\mathbf{b}\right)=$$

$$=\left(\frac{۱}{۴}-۲x\right)\mathbf{a}+\frac{۱}{۴}\mathbf{b}+\frac{۱}{۲}\mathbf{c}$$

هم‌راستا هستند و، بنا برمعیار هم‌راستایی، داریم:

$$\circ=\begin{vmatrix}\frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} & \circ\\ -۲x & x & ۱\\ \frac{۱}{۴}-۲x & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲}\end{vmatrix}=\frac{۱}{۴}\begin{vmatrix}x & ۱\\ \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲}\end{vmatrix}-$$

$$-\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix}-۲x & ۱\\ \frac{۱}{۴}-۲x & \frac{۱}{۲}\end{vmatrix}=\frac{۱-۶x}{۱۶}$$

بنا براین $x=\frac{۱}{۶}$، $\overrightarrow{MN}=\frac{۱}{۶}(-۲\mathbf{a}+\mathbf{b}+۶\mathbf{c})$ و

$$|\overrightarrow{MN}|=\frac{۱}{۶}\sqrt{۴\mathbf{a}^۲+\mathbf{b}^۲+۳۶\mathbf{c}^۲}=\frac{\sqrt{۲۳}}{۶}a$$

مثال ۴۳.۴۰۳. همهٔ ویژگی‌های ضرب اسکالر را، با استفاده از قانون کسینوس و این‌که، در پایهٔ متعامد $\{\mathbf{i}، \mathbf{j}، \mathbf{k}\}$، برای $|\mathbf{a}|$، طول بردار $\mathbf{a}=(x، y، z)$ برابر است با $\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$، نتیجه بگیرید (هم قانون کسینوس و هم رابطهٔ طول بردار $\mathbf{a}$، در هندسه، بدون استفاده از اندیشهٔ ضرب اسکالر و ویژگی‌های آن، به‌دست می‌آید).

حل. $\mathbf{a}=(x_۱، y_۱، z_۱)$ و $\mathbf{b}=(x_۲، y_۲، z_۲)$ می‌گیریم، بنا براین

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x_۱+x_۲، y_۱+y_۲، z_۱+z_۲)$$

و بنا برقانون کسینوس

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=\frac{1}{2}(|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2)=\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2+$$
$$+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2-(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-$$
$$-(x_2^2+y_2^2+z_2^2)]=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

و ازآن نتیجه می‌شود: $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. چون $\lambda\mathbf{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$، بنا بر این

$$(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b})=(\lambda x_1)x_2+(\lambda y_1)y_2+(\lambda z_1)z_2=\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

سر انجام، اگر $\mathbf{c}=(x_1', y_1', z_1')$، آن‌گاه

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}=(x_1+x_1', y_1+y_1', z_1+z_1'),$$
$$(\mathbf{a}+\mathbf{c}, \mathbf{b})=(x_1+x_1')x_2+(y_1+y_1')y_2+(z_1+z_1')z_2=$$
$$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+x_1'x_2+y_1'y_2+z_1'z_2=(\mathbf{a}, \mathbf{b})+(\mathbf{c}, \mathbf{b})$$

مثال ۴۴.۴.۳. ثابت کنید، اگــر $\mathbf{a}=(x, y, z)$، بردارمفروضی در پایهٔ متعامد باشد، آن‌گاه $|\mathbf{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

حل. دستگاه‌مختصات‌قائم $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ونقطهٔ A را؛ باشرط $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$، یعنی $A(x, y, z)$ درنظر می‌گیریم. خط راستی را درنظرمی‌گیریم‌که از A بگذرد و با محور z موازی باشد ونقطهٔ برخورد آن را با صفحهٔ Oxy، M می‌نامیم. به همین ترتیب، N را محل برخورد محور y با خط راستی‌که از M موازی محور x رسم شود (شکل ۴۰.۳) و P را نقطهٔ مشترك محور x با خط راستی‌کــه از نقطهٔ M موازی محور y رسم شود، فــرض می‌کنیم. بنا به‌تعریف مختصات، داریم:

$$M(x, y, 0), N(0, y, 0), P(x, 0, 0), \overrightarrow{MA}=z\mathbf{k},$$
$$|MA|=|z|, \overrightarrow{ON}=y\mathbf{j}, |ON|=|PM|=|y|, \overrightarrow{OP}=x\mathbf{i},$$
$$|OP|=|MN|=|x|$$

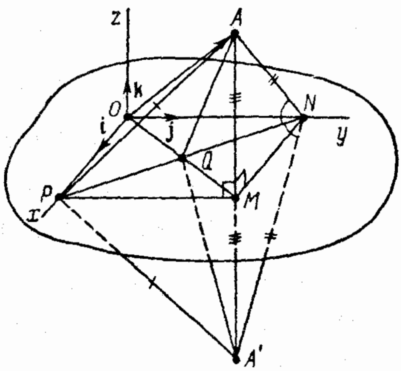
بردارهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ برهم عمودند، بنابراین یــا $M=N$ و یا $\widehat{OMN}=90^\circ$.

درهر دوحالت، بنا برقضیهٔ فیثاغورث، داریم:

$$|OM|=\sqrt{|ON|^{2}+|MN|^{2}}=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$$

بنا براین، اگر $A=M$، آن‌وقت $z=0$ و درستی‌قضیه روشن است. اگر A درصفحهٔ Oyz یا Oxz باشد، می‌توان درستی‌حکم قضیه را با روش‌مشابهی ثابت کرد.

حالتی را درنظر می‌گیریم که A، درهیچ کدام ازصفحه‌های مختصات نباشد. دراین صورت $PONM$ مستطیل است. پاره‌خط راست $[AM]$ را از طرف نقطهٔ M امتداد می‌دهیم و بردار $\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{AM}$ را مشخص می‌کنیم. $[NM]$ میانهٔ مثلث $A'NA$ است.



شکل ۴۰.۳

چون بردارهــای $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{NM}$، به ترتیب، با $\mathbf{k}$ و $\mathbf{i}$ هم‌راستا هستند، برهم عمودند و $[NM]$، ارتفــاع مثلث $A'NA$ است. به این ترتیب، مثلث $A'NA$ متساوی‌الساقین است، یعنــی $|AN|=|A'N|$. بــه همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد $|AP|=|A'P|$. در دو مثلث PAN و $PA'N$، ضلع‌ها دو به دو بــا هم برابرند: $|AN|=|A'N|$، $|PA|=|PA'|$. بنا بــراین، به‌خصوص $\widehat{ANQ}=\widehat{A'NQ}$. اکنون، مثلث‌های ANQ و $A'NQ$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$|AN|=|A'N|،\ \widehat{ANQ}=\widehat{A'NQ}،\ |NQ|=|NQ|$$

دو مثلث ANQ و $A'NQ$ برابرند، یعنی مثلث AQA' متساوی‌الساقین و $[QM]$، میانهٔ آن، ارتفاع مثلث هم می‌شود و زاویهٔ QMA قائمه است. قضیهٔ فیثاغورث را در مثلث OMA به‌کار می‌بریم:

$$|OA|=|\mathbf{a}|=\sqrt{|OM|^{۲}+|MA|^{۲}}=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}$$

قضیه، به‌طور کامل ثابت شد.

اندیشهٔ اصلی که در این اثبات، مورد استفاده قرار گرفت، این بود که: اگر خط راست (AM) برخط‌های راست (MN) و (MP) واقع درصفحهٔ xOy و غیر موازی با هم، عمود باشد، آن وقت برخط راست سوم (OM) واقع بر این صفحه هم عمود خواهد بود، یعنی ازمعیار عمودبودن خط‌راست برصفحه، بدون استفاده از ویژگی‌های ضرب اسکالر.

فصل چهارم

حاصل‌ضرب برداری دو بردار
حاصل‌ضرب سه‌گانه عددی

بخش ۱.۴. جهت در صفحه و در فضا

$\{e_1, e_2, e_3\}$ و $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ را، دو پایه در فضا، S را ماتریس انتقال از پایهٔ اول به‌پایهٔ دوم و S' را ماتریس انتقال از پایهٔ دوم به‌پایهٔ اول می‌گیریم (بخش ۶.۲ را ببینید). پایهٔ $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ را وقتی‌هم‌جهت با پایهٔ $\{e_1, e_2, e_3\}$ گویند که داشته‌باشیم: $\det S > 0$ و می‌نویسند:

$$\{e'_1, e'_2, e'_3\} \sim \{e_1, e_2, e_3\}$$

از ویژگی‌های ماتریس انتقال (بخش ۶.۲)، نتیجه می‌شود:

۱) $\{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e_1, e_2, e_3\}$؛

۲) اگر $\{e'_1, e'_2, e'_3\} \sim \{e_1, e_2, e_3\}$، آن‌گاه

$$\{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e'_1, e'_2, e'_3\}$$

در حالتی که، این دو پایه، هم‌جهت نباشند، آن‌ها را مختلف‌الجهت گویند و می‌نویسند:

$$\{e_1, e_2, e_3\} \nsim \{e'_1, e'_2, e'_3\}$$

از همان ویژگی‌های ماتریس انتقال یك پایه به پایهٔ دیگر، همچنین، نتیجه می‌شود:

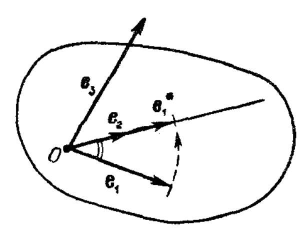
۳) اگر $\{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ و $\{e'_1, e'_2, e'_3\} \sim \{e''_1, e''_2, e''_3\}$، آن‌گاه $\{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e''_1, e''_2, e''_3\}$.

به این ترتیب، رابطهٔ $\sim$، یک رابطهٔ هم ارزی [ویژگی‌های ۱) تا ۳) را ببینید]، برای مجموعهٔ همهٔ پایه‌ها در فضا است. روشن است که اگر داشته باشیم:

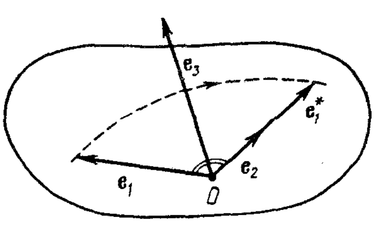
$$\{e_1, e_2, e_3\} \eqsim \{e'_1, e'_2, e'_3\} \quad \text{و} \quad \{e''_1, e''_2, e''_3\} \eqsim \{e'_1, e'_2, e'_3\}$$

آن گاه داریم: $\{e_1, e_2, e_3\} \sim \{e''_1, e''_2, e''_3\}$. بنابراین، مجموعهٔ پایه‌ها در فضا، به دو مجموعهٔ غیر متقاطع (دو دستهٔ هم‌ارز)، به نحوی تقسیم می‌شوند که، هر پایه، تنها به یکی از دسته‌ها متعلق است. اگر دو پایه، به یک دستهٔ هم‌ارزی تعلق داشته باشند، هم‌جهت؛ و اگر به‌دو دستهٔ مختلف هم‌ارزی تعلق داشته باشند، مختلف‌الجهت‌اند. یکی از این دسته‌ها را راست‌گرد (و هر پایهٔ متعلق به آن را، پایهٔ راست‌گرد) و پایه‌های متعلق به دستهٔ هم‌ارزی دیگر را، چپ‌گرد گوییم. دستهٔ راست‌گرد را طوری انتخاب می‌کنند که، هر پایهٔ $\{e_1, e_2, e_3\}$ متعلق به‌آن، دارای این شرط‌ها باشد:

اگر بردارهای پایه، از یک نقطه رسم شوند، و در ضمن فرض کنیم $e_1^* = \frac{|e_1|}{|e_2|} e_2$، آن وقت، کمترین مقدار دورانی که برای انطباق e_1 بر e_1^* لازم است (دوران دور نقطهٔ مبداء بردارهای پایه و در صفحهٔ e_1 و e_2)، در جهت‌خلاف حرکت عقربه‌های ساعت (یعنی درجهت مثلثاتی) باشد، به‌شرطی که از انتهای بردار e_3، به این جهت نگاه کنیم (شکل ۱.۴ و ۲.۴).



شکل ۱.۴



شکل ۲.۴

مثال ۴.۱۰.۱۰. $\{a, b, c\}$ یك پایه است. ثابت کنید:

$$۱)\qquad \{a, b, -c\} \approx \{a, b, c\};$$

$$۲)\quad \{a, b, c\} \sim \{c, a, b\} \sim \{b, c, a\} \approx \{b, a, c\};$$

$$\{b, a, c\} \sim \{c, b, a\} \sim \{a, c, b\}$$

حل. ۱) ماتریس S، برای انتقال از پایهٔ $\{a, b, c\}$، به‌پایهٔ $\{a, b, -c\}$، چنین است:

$$S = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{pmatrix}, \quad \det S = ۱ \times \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix} = -۱ < ۰,$$

$$\{a, b, -c\} \approx \{a, b, c\}$$

۲) ماتریس‌های $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$، $S_۴$ و $S_۵$ را، برای انتقال از پایهٔ $\{a, b, c\}$، به ترتیب، به پایه‌های $\{c, a, b\}$، $\{b, c, a\}$، $\{b, a, c\}$، $\{c, b, a\}$ و $\{a, c, b\}$ تشکیل می‌دهیم:

$$S_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \det S_۱ = -۱ \times \begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{vmatrix} = ۱,$$

$$\{a, b, c\} \sim \{c, a, b\};$$

$$S_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad \det S_۱ = ۱ \times \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱,$$

$$\{a, b, c\} \sim \{b, c, a\};$$

$$S_۳ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad \det S_۳ = -۱ \times \begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۱,$$

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \approx \{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\};$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det S_4 = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\} \sim \{\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\};$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det S_5 = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\} \sim \{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}\}$$

دو پایهٔ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ و $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ واقع بر یك صفحه را هم‌جهت گویند، وقتی که داشته باشیم: $\det S > 0$ ویا هم‌ارز آن $\det S' > 0$ که، در آن‌ها، S و S' عبارتند از ماتریس‌های انتقال از پایهٔ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ به پایهٔ $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ و برعکس. وقتی که دو پایه هم‌جهت باشند، می‌نویسند:

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \sim \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$$

شبیه حالت سه‌بعدی، رابطهٔ $\sim$، یك رابطهٔ هم ارزی در مجموعهٔ پایه‌ها در صفحه است. این رابطه، مجموعهٔ همهٔ پایه‌های صفحه را، به دو دستهٔ هم‌ارزی تقسیم می‌کند: دستهٔ پایه‌های راست‌گرد و دستهٔ پایه‌های چپ‌گرد. در دوران راست‌گرد، کوچکترین زاویهٔ دوران، برای انطباق $\mathbf{e}_1$ بر $\mathbf{e}_2$ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و درحالت چپ‌گرد درجهت حرکت عقربه‌های ساعت است. از این به‌بعد، پایهٔ متعامد راست‌گرد را در فضا (یا در صفحه)، با $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (یا $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$) نشان خواهیم داد.

دسته پایه‌های راست‌گر و متعامد در صفحه (یا در فضا)، به وسیلهٔ یکی از نمایندگان خود که، در ضمن، جهت مثبت را در صفحه (یا در فضا) تعریف می‌کند، معرفی می‌شود. وقتی پایهٔ راست‌گرد $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ (در صفحه) یا $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (در فضا) مفروض باشد، به معنای این است که جهت مثبت در

صفحه (یا در فضا)، به کمك این پایه، مشخص شده است. در این حالت، صفحه (یا فضا) را، جهت‌دار، یا توجیه شده گویند. پایهٔ چپ گرد، جهت‌منفی را در صفحه (یا در فضا) معین می‌کند.

بخش ۴.۲. تعریف و ویژگی‌های حاصل‌ضرب برداری. شرط هم‌راستائی. مساحت مثلث و چهارضلعی

پایهٔ متعامدیکه وراستگرد ثابت $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$ و $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$ دو بردار دلخواه باشند. حاصل‌ضرب برداری دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، یعنی $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (با رعایت ترتیب)، بنا به تعریف، عبارت است از بردار

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+$$

$$+\mathbf{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right) \qquad (۴.۱)$$

با توجه به ویژگی‌های دترمینان‌ها، می‌توان این ویژگی‌ها را، برای حاصل‌ضرب برداری، نتیجه‌گرفت:

°۱. (ویژگی غیر جابه‌جایی):

$$[\mathbf{b}, \mathbf{a}]=-[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \qquad (۴.۲)$$

□ در واقع داریم:

$$[\mathbf{b}, \mathbf{a}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=-[a, b] \blacksquare$$

۲°. برای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}'=(a'_x, a'_y, a'_z)$، $\mathbf{a}''=(a''_x, a''_y, a''_z)$ و $\mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z)$، و عددهای دلخواه α و β داریم:

$$[\alpha\mathbf{a}'+\beta\mathbf{a}'', \mathbf{b}]=\alpha[\mathbf{a}', \mathbf{b}]+\beta[\mathbf{a}'', \mathbf{b}],$$
$$[\mathbf{b}, \alpha\mathbf{a}'+\beta\mathbf{a}'']=\alpha[\mathbf{b}, \mathbf{a}']+\beta[\mathbf{b}, \mathbf{a}''] \qquad (۴.۳)$$

□ بنابر ویژگی دترمینان‌ها داریم:

$$[\alpha\mathbf{a}'+\beta\mathbf{a}'', \mathbf{b}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha a'_x+\beta a''_x & \alpha a'_y+\beta a''_y & \alpha a'_z+\beta a''_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}+\beta\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a''_x & a''_y & a''_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\alpha[\mathbf{a}', \mathbf{b}]+\beta[\mathbf{a}'', \mathbf{b}];$$

$$[\mathbf{b}, \alpha\mathbf{a}'+\beta\mathbf{a}'']=-[\alpha\mathbf{a}'+\beta\mathbf{a}'', \mathbf{b}]=$$
$$=-(\alpha[\mathbf{a}', \mathbf{b}]+\beta[\mathbf{a}'', \mathbf{b}])=$$
$$=-(-\alpha[\mathbf{b}, \mathbf{a}']-\beta[\mathbf{b}, \mathbf{a}''])=\alpha[\mathbf{b}, \mathbf{a}']+\beta[\mathbf{b}, \mathbf{a}'']$$

دراین‌جا، بارها از ویژگی ۱° استفاده کرده‌ایم. ■

مثال ۱.۲.۴. ثابت کنید: $[\mathbf{a}, \mathbf{a}]=0$.

حل. بنابر ویژگی ۱°: $[\mathbf{a}, \mathbf{a}]=-[\mathbf{a}, \mathbf{a}]$؛ از آن‌جا

$$2[\mathbf{a}, \mathbf{a}]=0 \Longleftrightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{a}]=0$$

ویژگی‌های هندسی حاصل‌ضرب برداری

I. بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ بر هر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود است.

□ بنابر دستورهای (۳.۳۱) و (۴.۱۱) و بنابر ویژگی ۳° دترمینان‌ها داریم:

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = a_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

و به همین ترتیب، برای دو بردار $\mathbf{b}$ و $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. ■

II. طول بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ برابر است با عدد مساحت S از متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ساخته می‌شود، یعنی

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$$

□ $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ می گیریم. بنا براین

$$S^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2\varphi = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2\varphi =$$

$$= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)^2 = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2$$

یعنی $S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$. ■

III. از تعریف حاصل‌ضرب برداری دو بردار (که به‌آن، حاصل‌ضرب بیرونی دو بردار هم می‌گویند) می‌توان نتیجه گرفت که: بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ تنها وقتی هم راستا هستند که داشته باشیم: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$.

IV. اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا نباشند، آن‌وقت $\{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\}$، پایه‌ای راست‌گرد است.

□ کافی است ثابت کنیم، دترمینان ماتریس انتقال از پایهٔ $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ به پایهٔ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\}$، مثبت است. فرض می‌کنیم

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad c_y = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \quad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

مختصات بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ باشند. بنابراین

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 > 0$$

بنابراین، بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم‌راستا نیستند. ■

با توجه به ویژگی‌های I تا IV، برای بردارهای مفروض $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$، به‌عنوان برداری منحصر به‌فرد تعریف می‌شود:

اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ موازی باشند، بنابر ویژگی III: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$؛

اگر $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$، آن‌گاه، بنابر ویژگی I، بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ برصفحهٔ P، که دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ پایه‌ای را در آن تشکیل می‌دهند، عمود است و، بنابراین، خط راست منحصری را مشخص می‌کند که بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ موازی آن است؛

طول بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$، بنابر ویژگی II، برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ساخته می‌شود، و امتداد بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$، بنابر ویژگی IV، با این شرط معین می‌شود که پایهٔ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\}$، پایه‌ای راست‌گرد است.

به این ترتیب، I تا IV را می‌توان به عنوان تعریف حاصل‌ضرب برداری (یا حاصل‌ضرب بیرونی) دو بردار درنظر گرفت. این تعریف، تنها بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ را معین می‌کند که با دستور (۴.۱) سازگار است. تأکید می‌کنیم که، به‌طور معمول، حاصل‌ضرب برداری را به‌کمک ویژگی‌های I تا IV تعریف می‌کنند و، سپس، دستور (۴.۱) را از آن نتیجه می‌گیرند تا در محاسبه‌ها مورد استفاده قرارگیرد.

مثال ۴.۲.۲. اگر $\mathbf{a} = (-1, 0, 1)$ و $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ در پایهٔ

فضائی $\{\mathbf{i}، \mathbf{j}، \mathbf{k}\}$ مفروض باشند، $[\mathbf{a}، \mathbf{b}]$ را پیدا کنید.

حل. بنا بردستور (۴۰۱) داریم:

$$[\mathbf{a}، \mathbf{b}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -۱ & ۰ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۳\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۳\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ ۲ & ۳\end{vmatrix}+$$

$$+\mathbf{k}\begin{vmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۱\end{vmatrix}=(-۱، ۵، -۱)$$

مثال ۰۳۰۲۰۴ $\{\mathbf{i}'، \mathbf{j}'، \mathbf{k}'\}$ را، پایه‌ای متعامد وراست‌گرد می‌گیریم. اگر مختصات بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نسبت به‌این پایه را

$$\mathbf{a}=(a'_x، a'_y، a'_z)،\ \ \mathbf{b}=(b'_x، b'_y، b'_z)$$

فرض کنیم، ثابت کنید:

$$[\mathbf{a}، \mathbf{b}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}'\\ a'_x & a'_y & a'_z\\ b'_x & b'_y & b'_z\end{vmatrix}$$

یعنی، شکل عبارت سمت‌راست دستور (۴۰۱)، مستقل از انتخاب پایه است.

حل. بردار $[\mathbf{i}'، \mathbf{j}']$ طولی برابر واحد دارد (ویژگی II) و بر هر دو بردار $\mathbf{i}'$ و $\mathbf{j}'$ عمود است (ویژگی I)؛ در ضمن، $\{\mathbf{i}'، \mathbf{j}'، [\mathbf{i}'، \mathbf{j}']\}$ پایه‌ای راست‌گرد است (ویژگی IV). بنابراین، بردار $[\mathbf{i}'، \mathbf{j}']$، همان بردار $\mathbf{k}'$ است: $[\mathbf{i}'، \mathbf{j}']=\mathbf{k}'$. به‌همین ترتیب

$$[\mathbf{j}'، \mathbf{k}']=\mathbf{i}'،\ \ [\mathbf{k}'، \mathbf{i}']=\mathbf{j}'$$

چون $\mathbf{a}=a'_x\mathbf{i}'+\mathbf{a}''$ که در آن $\mathbf{a}''=a'_y\mathbf{j}'+a'_z\mathbf{k}'$، بنا بر ویژگی °۲ داریم:

$$[\mathbf{a}، \mathbf{b}]=a'_x[\mathbf{i}'، \mathbf{b}]+[\mathbf{a}''، \mathbf{b}]=$$
$$=a'_x[\mathbf{i}'، \mathbf{b}]+a'_y[\mathbf{j}'، \mathbf{b}]+a'_z[\mathbf{k}'، \mathbf{b}]$$

به‌جز این، درنظر می‌گیریم: $\mathbf{b}''=b'_y\mathbf{j}'+b'_z\mathbf{k}'$، با توجه به ویژگی °۲،

به دست می‌آید:

$$[\mathbf{i}', \mathbf{b}] = [\mathbf{i}', b'_x\mathbf{i}'] + [\mathbf{i}', \mathbf{b}''] = b'_x[\mathbf{i}', \mathbf{i}'] +$$
$$+ b'_y[\mathbf{i}', \mathbf{j}'] + b'_z[\mathbf{i}', \mathbf{k}'] = b'_y[\mathbf{i}', \mathbf{j}'] - b'_z(\mathbf{k}', \mathbf{i}'] =$$
$$= b'_y\mathbf{k}' - b'_z\mathbf{j}'$$

و به همین ترتیب

$$[\mathbf{j}', \mathbf{b}] = -b'_x\mathbf{k}' + b'_z\mathbf{i}', [\mathbf{k}', \mathbf{b}] = b'_x\mathbf{j}' - b'_y\mathbf{i}'$$

به این ترتیب

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = a'_x(b'_y\mathbf{k}' - b'_z\mathbf{j}') + a'_y(-b'_x\mathbf{k}' + b'_z\mathbf{i}') +$$
$$+ a'_z(b'_x\mathbf{j}' - b'_y\mathbf{i}') = \mathbf{i}'(a'_yb'_z - a'_zb'_y) -$$
$$- \mathbf{j}'(a'_xb'_z - a'_zb'_x) + \mathbf{k}'(a'_xb'_y - a'_yb'_x) =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & k' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix}$$

P را صفحه‌ای ثابت و $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ را پایهٔ متعامد یکه در صفحهٔ P فرض می‌کنیم و $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}' + a_y\mathbf{j}'$ و $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i}' + b_y\mathbf{j}'$ را، بـردارهایی موازی صفحهٔ P می‌گیریم. اگر قرار دهیم: $k' = [\mathbf{i}', \mathbf{j}']$، آن وقت $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', k'\}$، پایه‌ای راست‌گرد در فضا می‌شود (ویژگی IV). در این پایه داریم:

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0), \ \mathbf{b} = (b_x, b_y, 0),$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & k' \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, a_xb_y - b_xa_y)$$

بنا بر این، مساحت S از متوازی‌الاضلاعی که در صفحهٔ P قرار دارد و روی

بردارهای $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}'+a_y\mathbf{j}'$ و $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}'+b_y\mathbf{j}'$ ساخته شده، برابر است با

$$S=|a_xb_y-a_yb_x| \qquad (۴.۴)$$

در این بخش همه‌جا، به جز در موردهای خاصی که مورد تأکید قرار گیرد، مختصات بردارها را نسبت به پایهٔ متعامد راست‌گرد $\{\mathbf{i}، \mathbf{j}، k\}$ (و برای صفحه، نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{i}، \mathbf{j}\}$) ومختصات نقطه‌ها را در دستگاه مختصات متناظر با آن $\{O، \mathbf{i}، \mathbf{j}، k\}$ (و در صفحه، $\{O، \mathbf{i}، \mathbf{j}\}$) در نظر می‌گیریم.

مثال ۴.۲.۴. تحقیق کنید، بردارهای

$$\mathbf{a}=(۱، ۰، -۱)، \ \mathbf{b}=(-۱، ۱، ۰)، \mathbf{c}=(۲، ۰، -۳)$$

هم‌صفحه نیستند. بردار واحد $\mathbf{d}$ را طوری پیدا کنید که بر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود باشد و، درضمن، داشته باشیم:

$$\{\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{d}\}=\{\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c}\}$$

حل. داریم:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & -۳ \end{vmatrix}=$$

$$=۱\times\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{vmatrix}-(-۱)\begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ -۱ & -۳ \end{vmatrix}+۲\begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix}=-۱<۰$$

بنابراین، بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه نیستند و پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c}\}$ چپ‌گرد است. بردار موردنظر $\mathbf{d}$ بر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود است، بنابراین $\mathbf{d}$ با بردار $[\mathbf{a}، \mathbf{b}]$ موازی است. چون $|\mathbf{d}|=۱$، تنها دو حالت ممکن است:

$$\mathbf{d}_۱=\frac{[\mathbf{a}، \mathbf{b}]}{|[\mathbf{a}، \mathbf{b}]|} \ \text{یا} \ \mathbf{d}_۲=-\mathbf{d}_۱=-\frac{[\mathbf{a}، \mathbf{b}]}{|[\mathbf{a}، \mathbf{b}]|}$$

بنابر ویژگی IV، پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}، [\mathbf{a}، \mathbf{b}]\}$ و، بنابراین، پایهٔ جهت‌دار هم‌ارز با آن $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{d}_۱\}$، راست‌گرد هستند. از آن‌جا که

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{d}_1\} \approx \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}_1\}$$

بنابراین $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}_2\}$ پایه‌ای چپ‌گرد است، یعنی

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}_2\} \sim \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$$

به این ترتیب، بردار موردنظر $\mathbf{d}$، همان بردار $\mathbf{d}_2$ است و داریم:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & k \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+k\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1), \quad |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \sqrt{3}$$

و از آن‌جا: $\mathbf{d} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

مثال ۵.۲.۴. مساحت‌متوازی‌الاضلاعی را پیدا کنید که‌روی بردارهای $\mathbf{a} = (-1, 3)$ و $\mathbf{b} = (1, 2)$ ساخته شده است.

حل. با توجه به دستور (۴.۴) داریم:

$$S = |(-1) \times 2 - 3 \times 1| = 5$$

مثال ۶.۲.۴. مساحت مثلثی را پیدا کنید که، رأس‌های آن، در نقطه‌های $A(-1, 0, -1)$، $B(0, 2, -3)$ و $C(4, 4, 1)$ واقع باشند.

حل. مساحت‌مثلث ABC، برابر است با نصف مساحت‌متوازی‌اضلاعی که روی بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ساخته شده است:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)^2} \quad (4.5)$$

که در آن $a_x = 1$، $a_y = 2$، $a_z = -2$ و $b_x = 5$، $b_y = 4$، $b_z = 2$، به ترتیب، مختصات بردارهای $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ و $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$ هستند. از این‌جا

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۲^۲+(-۱۲)^۲+(-۶)^۲}=۹$$

مثال ۰۷۰۲۰۴ بردارهای **a** و **b** مفروض‌اند. بردارهای

$$۱)\quad [\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}],\quad ۲)\quad \left[\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{۲}, \mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}}{۲}\right]$$

را برحسب بردار $\mathbf{c}=[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ پیدا کنید.

حل. بنابر ویژگی خطی حاصل‌ضرب برداری، داریم:

$$۱)\quad [\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}]=[\mathbf{a}, \mathbf{a}-\mathbf{b}]+[\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}]=$$

$$=[\mathbf{a}, \mathbf{a}]-[\mathbf{a}, \mathbf{b}]+[\mathbf{b}, \mathbf{a}]-[\mathbf{b}, \mathbf{b}]=$$

$$=\circ-[\mathbf{a}, \mathbf{b}]-[\mathbf{a}, \mathbf{b}]-\circ=-۲\mathbf{c}$$

که درآن، از رابطهٔ (۴۰۲) و نتیجهٔ مثال ۱.۲.۴ استفاده‌کرده‌ایم.

۲) به همین ترتیب، می‌توان نوشت:

$$\left[\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{۲}, \mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}}{۲}\right]=\frac{۱}{۲}\left[\mathbf{a}, \mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}}{۲}\right]+\frac{۱}{۲}\left[\mathbf{b}, \mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}}{۲}\right]=$$

$$=\frac{۱}{۲}\left[\mathbf{a}, \mathbf{b}\right]-\frac{۱}{۴}[\mathbf{a}, \mathbf{a}]+\frac{۱}{۲}[\mathbf{b}, \mathbf{b}]-\frac{۱}{۴}[\mathbf{b}, \mathbf{a}]=$$

$$=\frac{۱}{۲}\mathbf{c}-\frac{۱}{۴}(-\mathbf{c})=\frac{۳}{۴}\mathbf{c}$$

مثال ۰۸۰۲۰۴ برای سه بردار غیر صفر **a**، **b** و **c** می‌دانیم:

$$\mathbf{a}=[\mathbf{b}, \mathbf{c}],\quad \mathbf{b}=[\mathbf{c}, \mathbf{a}],\quad \mathbf{c}=[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

طول این سه بردار و، همچنین، زاویه‌های بین‌آن‌ها را پیدا کنید.

حل. چون $\mathbf{a}=[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$، پس $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}\perp\mathbf{c}$ و، جز آن، چون $\mathbf{b}=[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$، پس $\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$؛ یعنی این سه بردار دو به‌دو برهم عمودند. درضمن داریم:

$$|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\sin(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{c}})=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|,$$

$$|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{a}|، \quad |\mathbf{c}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$$

از ضرب این سه رابطه درهم، به دست می‌آید:

$$|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|=۱$$

و چون $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|$، بنابراین $|\mathbf{a}|^۲=۱$ و $|\mathbf{a}|=۱$. به همین ترتیب، به‌دست می‌آید: $|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=۱$. چون $\mathbf{c}=[\mathbf{a}، \mathbf{b}]$، بنابراین پایهٔ $\{\mathbf{a}،\mathbf{b}،\mathbf{c}\}$، پایه‌ای متعامد، یکه و راست‌گرد است.

مثال ۹۰۲۰۴. ثابت کنید، اگر سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، دو به دو هم‌راستا نباشند، آن‌گاه دو شرط زیر هم‌ارزند:

$$[\mathbf{a}، \mathbf{b}]=[\mathbf{b}، \mathbf{c}]=[\mathbf{c}، \mathbf{a}] \quad \text{و} \quad \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=۰$$

حل. ابتدا فرض می‌کنیم $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=۰$. اگر حاصل‌ضرب برداری این برابری را در بردار $\mathbf{a}$ پیدا کنیم، به دست می‌آید:

$$[\mathbf{a}، \mathbf{a}]+[\mathbf{a}، \mathbf{b}]-[\mathbf{c}، \mathbf{a}]=۰ \iff [\mathbf{a}، \mathbf{b}]=[\mathbf{c}، \mathbf{a}]$$

و اگر برابری $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=۰$ را در بردار $\mathbf{b}$، ضرب برداری کنیم، به‌دست می‌آید:

$$[\mathbf{a}، \mathbf{b}]=[\mathbf{b}، \mathbf{c}]$$

اکنون برعکس، فرض می‌کنیم: $[\mathbf{a}، \mathbf{b}]=[\mathbf{b}، \mathbf{c}]$، که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $[\mathbf{a}+\mathbf{c}، \mathbf{b}]=۰$؛ و بنا بر ویژگی III ضرب برداری، $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ موازی بردار $\mathbf{b}$ است، یعنی عددی مانند λ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}+\lambda\mathbf{b}=۰ \iff \mathbf{a}=-\mathbf{c}-\lambda\mathbf{b}$$

که اگر این مقدار $\mathbf{a}$ را در برابری $[\mathbf{b}، \mathbf{c}]=[\mathbf{c}، \mathbf{a}]$ قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$[\mathbf{b}، \mathbf{c}]=\lambda[\mathbf{b}، \mathbf{c}] \iff (۱-\lambda)[\mathbf{b}، \mathbf{c}]=۰$$

بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم راستا نیستند، یعنی $[\mathbf{b}، \mathbf{c}]\neq۰$؛ درنتیجه $\lambda=۱$ و سرانجام $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=۰$.

مثال ۱۰.۲.۴. تجزیهٔ بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در پایهٔ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$، به‌صورت

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{e}_1+a_y\mathbf{e}_2+a_z\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{b}=b_x\mathbf{e}_1+b_y\mathbf{e}_2+b_z\mathbf{e}_3$$

داده شده‌اند. بردار $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ را در رابطه با بردارهای $\mathbf{f}_1=\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$، $\mathbf{f}_2=\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ و $\mathbf{f}_3=\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ تجزیه کنید.

حل. بنابر ویژگی خطی ضرب برداری داریم:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=[a_x\mathbf{e}_1+a_y\mathbf{e}_2+a_z\mathbf{e}_3, \mathbf{b}]=a_x[\mathbf{e}_1, \mathbf{b}]+a_y[\mathbf{e}_2, \mathbf{b}]+$$
$$+a_z[\mathbf{e}_3, \mathbf{b}]$$

به همین ترتیب

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{b}]=[\mathbf{e}_1, b_x\mathbf{e}_1+b_y\mathbf{e}_2+b_z\mathbf{e}_3]=b_x(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)+$$
$$+b_y[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]+b_z[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3]=b_y\mathbf{f}_3-b_z\mathbf{f}_2$$

($[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1]=0$ گرفته‌ایم). با روشی مشابه

$$[\mathbf{e}_2, \mathbf{b}]=b_z\mathbf{f}_1-b_x\mathbf{f}_3,\quad [\mathbf{e}_3, \mathbf{b}]=b_x\mathbf{f}_2-b_y\mathbf{f}_1$$

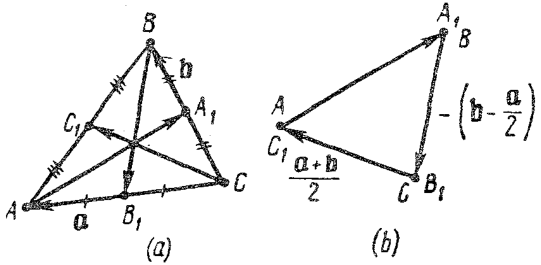
در نتیجه، به‌دست می‌آید:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=a_x(b_y\mathbf{f}_3-b_z\mathbf{f}_2)+a_y(b_z\mathbf{f}_1-b_x\mathbf{f}_3)+a_z(b_x\mathbf{f}_2-b_y\mathbf{f}_1)=$$
$$=\mathbf{f}_1\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\mathbf{f}_2\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\mathbf{f}_3\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\qquad (۴.۶)$$

مثال ۱۱.۲.۴. ثابت کنید، مساحت S از مثلثی که بردارهای ضلع‌های آن، برابر با بردارهای میانه‌های مثلث ABC باشند (شکل ۳.۴)، برابر است با $\frac{3}{4}$ مساحت مثلث ABC.

حل. $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ می‌گیریم. بنابراین

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),\quad \overrightarrow{B_1B}=\mathbf{b}-\frac{1}{2}\mathbf{a},$$



شکل ۳.۴

$$[\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}]=\left[\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \mathbf{b}-\frac{1}{2}\mathbf{a}\right]=\frac{3}{4}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

(مثال ۷.۲.۴ را ببینید). بنابراین

$$S=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}]|=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\frac{3}{4}\sigma$$

مثال ۱۲.۳.۴. مثلث ABC مفروض است. روی خط‌های راست (AB)، (BC) و (CA)، به ترتیب، نقطه‌های M، N و P را انتخاب کرده‌ایم و می‌دانیم:

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN}=\alpha\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP}=\alpha\overrightarrow{CA}$$

به‌ازای چه مقداری از α، مساحت $S(\alpha)$ از مثلثی که، بردارهای ضلع‌های آن عبارتند از $\overrightarrow{CM}$، $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{BP}$، حداقل مقدار ممکن است؟

حل. $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ می‌گیریم. با توجه به‌نتیجهٔ مثال ۱۱.۳.۲، می‌دانیم که بردارهای $\overrightarrow{CM}$، $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{BP}$ وقتی یك مثلث می‌سازند که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{CM}=(1-\alpha)\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}; \quad \overrightarrow{AN}=-\mathbf{a}+(1-\alpha)\mathbf{b}$$

به این ترتیب،

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AN}]|=$$

$$=\frac{۱}{۲}|[(۱-\alpha)\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}, -\mathbf{a}+(۱-\alpha)\mathbf{b}]|=$$

$$=\frac{۱}{۲}|-\alpha[\mathbf{b}, \mathbf{a}]+(۱-\alpha)^{۲}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|=$$

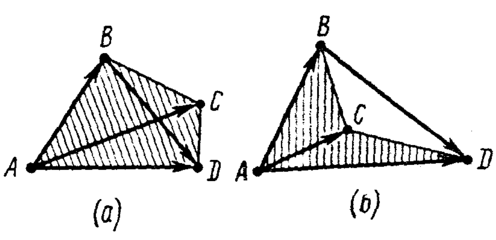
$$=\frac{۱}{۲}(۱-\alpha+\alpha^{۲})|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|=(۱-\alpha+\alpha^{۲})S_{ABC}$$

حداقل مقدار این عبارت، به ازای حداقل عبارت $\alpha^{۲}-\alpha+۱$ به دست می‌آید، یعنی به‌ازای $\alpha=\frac{۱}{۲}$؛ و این، وقتی پیش می‌آید که $\overrightarrow{AN}$، $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{BP}$، میانه‌های مثلث ABC باشند (مثال ۱۱.۲.۴ را ببینید). این مقدار حداقل، برابر است با $\frac{۳}{۴}S_{ABC}$.

مثال ۱۳.۲.۴. دو مثلث ABC و ACD بر یک صفحه قرار دارند و می‌دانیم، نقطه‌های B و D در دوطرف ضلع (AC) قرار دارند (شکل ۴.۴). ثابت کنید S، مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر است با

$$S=\frac{۱}{۲}|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]| \qquad (۴.۷)$$

حل. بنا به‌فرض $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}\sim\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\}$. بنابراین بردارهای $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]$ و $[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}]$



شکل ۴.۴

دریک‌جهت‌اند و، درنتیجه، طول‌مجموع این بردارها، برابر است بامجموع طول‌های آن دو بردار:

$$|[\overrightarrow{AD}، \overrightarrow{AC}]|+|[\overrightarrow{AC}، \overrightarrow{AB}]|=|[\overrightarrow{AD}، \overrightarrow{AC}]+[\overrightarrow{AC}، \overrightarrow{AB}]|=$$

$$=|[\overrightarrow{AD}، \overrightarrow{AC}]-[\overrightarrow{AB}، \overrightarrow{AC}]|=|[\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}، \overrightarrow{AC}]|=$$

$$=|[\overrightarrow{BD}، \overrightarrow{AC}]|$$

و چون

$$|[\overrightarrow{AD}، \overrightarrow{AC}]|=۲S_{ADC}، |[\overrightarrow{AC}، \overrightarrow{AB}]|=۲S_{ABC}، S=S_{ADC}+S_{ABC}$$

به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{۱}{۲}|[\overrightarrow{BD}، \overrightarrow{AC}]|=\frac{۱}{۲}|[\overrightarrow{AC}، \overrightarrow{BD}]|$$

مثال ۱۴۰۲۰۴°. مثلث ABC بـا مساحت S مفروض است. نقطه‌های M، N و P را، به‌ترتیب، برخط‌های راست (AB)، (BC) و (CA) طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}، \ \overrightarrow{BN}=\beta\overrightarrow{BC}،$$

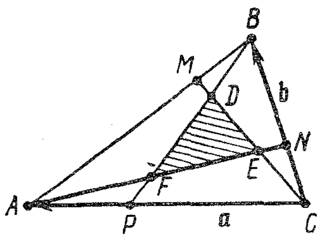
$$\overrightarrow{CP}=\gamma\overrightarrow{CA}، \ \alpha\beta\gamma\neq(۱-\alpha)(۱-\beta)(۱-\gamma)$$

خط‌های راست (CM)، (BP) و (AN) یکدیگر را درنقطه‌های

$$D=(CM)\bigcap(BP)، \ E=(CM)\bigcap(AN)، \ F=(BP)\bigcap(AN)$$

قطع کرده‌اند. مساحت σ مثلث DEF را پیدا کنید.

حل. چون $\alpha\beta\gamma\neq(۱-\alpha)(۱-\beta)(۱-\gamma)$، بنابراین، نقطه‌های D، E و F متمایزند (شکل ۵۰۴) (مثال ۹۰۸۰۲ را ببینید). اگر بردارهـای $\mathbf{a}=\overrightarrow{CA}$ و $\mathbf{b}=\overrightarrow{CB}$ را به عنوان پایه در نظر بگیریم، خواهیم داشت:



شکل ۵.۴

$\overrightarrow{CM}=\alpha\mathbf{b}+(1-\alpha)\mathbf{a}$، $\overrightarrow{AN}=$
$=-\mathbf{a}+(1-\beta)\mathbf{b}$، $\overrightarrow{BP}=$
$=\gamma\mathbf{a}-\mathbf{b}$

اکنون فرض می‌کنیم:

$\overrightarrow{CE}=x\overrightarrow{CM}$، $\overrightarrow{CD}=y\overrightarrow{CM}$،
$\overrightarrow{BD}=z\overrightarrow{BP}$،$\overrightarrow{BF}=v\overrightarrow{BP}$،
$\overrightarrow{AF}=v\overrightarrow{AN}$، $\overrightarrow{AE}=w\overrightarrow{AN}$

(عددهای x،y، z، u، v، w، با تبدیل دوری به‌دست می‌آیند؛ درواقع، می‌خواهیم از منحصر بودن تجزیهٔ بردارها در رابطه با پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}\}$ استفاده کنیم). از دور $AECA$ داریم:

$$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow w[-\mathbf{a}+(1-\beta)\mathbf{b}-x(\alpha\mathbf{b}+(1-\alpha)\mathbf{a}]+\mathbf{a}=$$

$$=0.\mathbf{a}+0.\mathbf{b}\Longleftrightarrow\begin{cases}-w-x(1-\alpha)+1=0،\\ w(1-\beta)-x\alpha=0\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow w=\frac{\alpha}{1-\beta+\alpha\beta},\ x=\frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha\beta}$$

در اینجا از فرض $1-\beta+\alpha\beta\neq 0$ استفاده کرده‌ایم. درواقع عددهای x و w وجود دارند: خط‌های راست (AN) و (CM) متقاطع‌اند و، درضمن، داریم:

$$w(1-\beta+\alpha\beta)=\alpha،\ x(1-\beta+\alpha\beta)=1-\beta$$

در این صورت، اگر $1-\beta+\alpha\beta=0$، آن‌گاه باید داشته باشیم:

$$\alpha=0، 1-\beta=0 \text{ و } (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=0=\alpha\beta\gamma$$

که فرض را نقض می‌کند. به‌همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد:

$$y=\frac{\gamma}{۱-\alpha+\alpha\gamma},\ z=\frac{۱-\alpha}{۱-\alpha+\alpha\gamma},\ u=\frac{\beta}{۱-\gamma+\beta\gamma},$$

$$v=\frac{۱-\gamma}{۱-\gamma+\beta\gamma}$$

و برای مساحت σ داریم:

$$\sigma=\frac{۱}{۲}|[\overrightarrow{ED}، \overrightarrow{EF}]|=\frac{۱}{۲}|[(y-x)\overrightarrow{CM}، (v-w)\overrightarrow{AN}]|=$$

$$=\frac{۱}{۲}|y-x|\cdot|v-w|\cdot|[\overrightarrow{CM}، \overrightarrow{AN}]|=$$

$$=\frac{۱}{۲}|y-x|\cdot|v-w|\cdot|[\alpha\mathbf{b}+(۱-\alpha)\mathbf{a}، -\mathbf{a}+(۱-\beta)\mathbf{b}]|=$$

$$=\frac{۱}{۲}|y-x|\cdot|v-w|\cdot|\alpha[\mathbf{a}، \mathbf{b}]+(۱-\alpha)(۱-\beta)[\mathbf{a}، \mathbf{b}]|=$$

$$=|y-x|\cdot|v-w|\cdot|۱-\beta+\alpha\beta|S$$

از طرف دیگر داریم:

$$y-x=\frac{\gamma(۱-\beta+\alpha\beta)-(۱-\beta)(۱-\alpha+\alpha\gamma)}{(۱-\beta+\alpha\beta)(۱-\alpha+\alpha\gamma)}=$$

$$=\frac{\alpha\beta\gamma-(۱-\alpha)(۱-\beta)(۱-\gamma)}{(۱-\beta+\alpha\beta)(۱-\alpha+\alpha\gamma)},$$

$$v-w=-\frac{\alpha\beta\gamma-(۱-\alpha)(۱-\beta)(۱-\gamma)}{(۱-\beta+\alpha\beta)(۱-\gamma+\alpha\gamma)}$$

بنابراین، سرانجام به دست می‌آید:

$$\sigma=\frac{[\alpha\beta\gamma-(۱-\alpha)(۱-\beta)(۱-\gamma)]^{۲}}{|(۱-\beta+\alpha\beta)(۱-\gamma+\beta\gamma)||(۱-\alpha+\alpha\gamma)|}S$$

توجه داریم که، اگر $\alpha=\beta=\gamma=k\neq\frac{۱}{۲}$، آن وقت

$$0<\sigma=S_{DEF}=\frac{(2k-1)^2}{k^2-k+1}S=\frac{4\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}S<4S_{ABC}$$

مثال ۱۵.۲.۴ نقطه‌های M، N، P، Q را، به‌ترتیب، روی ضلع‌های $[AB]$، $[BC]$، $[CD]$ و $[DA]$ از چهارضلعی محدب $ABCD$ به‌مساحت S (شکل ۶.۴) طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{|BN|}{|BC|}=\frac{|CP|}{|CD|}=\frac{|DQ|}{|DA|}=\alpha$$

مساحت $\sigma(\alpha)$ چهارضلعی $MNPQ$ را پیدا کنید. به‌ازای چه مقداری از α، این مساحت به حداقل خود می‌رسد؟

حل. با توجه به دستور (۴.۷)، $\sigma(\alpha)=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{MP},\overrightarrow{NQ}]|$، که در آن

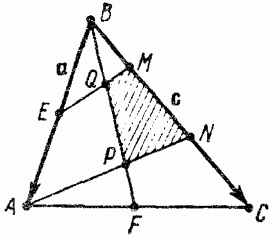
$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=-\alpha\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-(1-\alpha)\overrightarrow{CD}=$$
$$=-\alpha\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{AD}+(1-\alpha)\overrightarrow{AD}-(1-\alpha)\overrightarrow{CD}=$$
$$=\alpha\overrightarrow{BD}-(1-\alpha)\overrightarrow{AC};\ \ \overrightarrow{NQ}=(1-\alpha)\overrightarrow{BD}-\alpha\overrightarrow{AC};$$
$$[\overrightarrow{MP},\overrightarrow{NQ}]=[\alpha\overrightarrow{BD}+(1-\alpha)\overrightarrow{AC},\ (1-\alpha)\overrightarrow{BD}-\alpha\overrightarrow{AC}]=$$
$$=(2\alpha^2-2\alpha+1)[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}]$$

و بنابراین

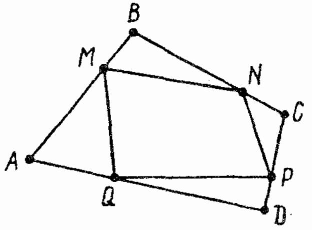
$$\sigma(\alpha)=\frac{1}{2}(2\alpha^2-2\alpha+1)|[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}]|=(2\alpha^2-2\alpha+1)S$$

کمترین مقدار $\sigma(\alpha)$، به ازای $\alpha=\frac{1}{2}$ به دست می‌آید و برابر است با $\frac{1}{2}S$.

مثال ۱۶.۲.۴ *. مساحت مثلث ABC برابر است با S. نقطه‌های E و F را، به ترتیب، وسط ضلع‌های $[AB]$ و $[AC]$ و نقطه‌های $M\neq C$ و N



شکل ۷.۴



شکل ۶.۴

را روی ضلع $[BC]$ گرفته‌ایم و می‌دانیم $|MN|=|NC|$ (شکل ۷.۴). خط‌های راست (EM) و (AN)، میانهٔ $[BF]$ را در نقطه‌های P و Qقطع کرده‌اند. ثابت کنید، مساحت σ چهارضلعی $MNPQ$ در نابرابری

$$\frac{1}{6}S\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{5}S$$

صدق می‌کند. در چه حالتی: a) $\sigma=\frac{1}{5}S$؛ b) $\sigma=\frac{1}{5}S$؟

حل. فرض می‌کنیم: $\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}$، $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}$، $\overrightarrow{NC}=\frac{1}{2}x\mathbf{c}$ (بنابر فرض $1\geqslant x>0$). بردارهای $\overrightarrow{BP}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c})$ هم‌جهت‌اند. بنابراین، عدد λ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم: $\overrightarrow{BP}=\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{c})$. به همین ترتیب، عدد α وجود دارد، به نحوی که برای‌آن، داشته باشیم:

$$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AN}=\alpha\left[-\mathbf{a}+\left(1-\frac{x}{2}\right)\mathbf{c}\right]$$

برای دور $ABPA$ داریم:

$$-\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{c})-\alpha\left[-\mathbf{a}+\left(1-\frac{x}{2}\right)\mathbf{c}\right]=0$$

یعنی $\alpha+\lambda=1$ و $\lambda=\alpha\left(1-\frac{x}{2}\right)$. از این‌جا به دست می‌آید:

$$\lambda = (۲-x):(۴-x)$$

به این ترتیب، مساحت مثلث BPN چنین است:

$$S_{BPN} = \frac{۱}{۲}|[\overrightarrow{BP}، \overrightarrow{BN}]| = \frac{۱}{۲}\left|\left[\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{c})، \left(۱-\frac{x}{۲}\right)\mathbf{c}\right]\right| =$$

$$= \frac{۱}{۲}\lambda\left(۱-\frac{x}{۲}\right).|[\mathbf{a}، \mathbf{c}]| = \frac{[(۲-x)^۲ S]}{[۲(۴-x)]}$$

به همین ترتیب، روی دور $EBQE$ به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{۱-x}{۳-۲x}(\mathbf{a}+\mathbf{c})،\ \ S_{BQN} = \frac{(۱-x)^۲}{۳-۲x}S$$

بنابراین

$$\frac{S_{MNPQ}}{S} = \frac{S_{BPN}-S_{BQM}}{S} = \frac{(۲-x)^۲}{۲(۴-x)} - \frac{(۱-x)^۲}{۳-۲x} = f(x)$$

تابع $f(x)$، دربازهٔ $[۰، ۱]$، پیوسته و مشتق‌پذیر است و

$$f'(x) = \frac{۵(۲-x)(۲-۳x)}{|۲(۴-x)^۲(۳-۲x)^۲|}$$

بنابراین، $f'(x) > ۰$ دربازهٔ $\left(۰، \frac{۲}{۳}\right)$ مثبت است، یعنی $f(x)$ در این بازه، یکنوا وصعودی‌است.وچون $f'(x) < ۰$ دربازهٔ $\left(\frac{۲}{۳}، ۱\right]$ منفی‌است، بنابراین $f(x)$، در نقطهٔ $x = \frac{۲}{۳}$ ماکزیمم دارد و $f\left(\frac{۲}{۳}\right) = \frac{۱}{۵}$. از آن جا که $f(۰) = f(۱) = \frac{۱}{۶}$، بنابراین، کمترین‌مقدار $f(x)$ دربازهٔ $[۰، ۱)$، درنقطهٔ $x = ۱$ به دست می‌آید.

به‌این ترتیب، اگرداشته باشیم: $|BM| = |MN| = |NC|$، آن‌وقت $\sigma = \frac{۱}{۵}S$ [در این حالت (EM) با (AN) موازی است]؛ و اگر داشته باشیم: $M = B$، آن وقت $\sigma = \frac{۱}{۶}S$.

مثال ۴.۲.۰.۱۷. ثابت کنید، مساحت ذوزنقه $ABCD$ که در آن، (AD) با (BC) موازی‌است، برابر است با $\frac{1+k}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]|$، به شرطی که $k=\frac{|BC|}{|AD|}$.

حل. $\mathbf{a}=\overrightarrow{AD}$ ، $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$ می‌گیریم. در نتیجه

$$\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{AD}=k\mathbf{a},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}+k\mathbf{a},$$
$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}-\mathbf{b},$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]|=\frac{1}{2}|[\mathbf{b}+k\mathbf{a}, \mathbf{a}-\mathbf{b}]|=$$

$$=\frac{1}{2}|[\mathbf{b}, \mathbf{a}]-k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|=\frac{k+1}{2}|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$$

مثال ۴.۲.۰.۱۸°. مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ برابر S و نسبت طول‌های دو قاعدهٔ آن، برابر $\frac{|AD|}{|BC|}=\frac{1}{k}=3$ است. نقطهٔ K بر امتداد قاعدهٔ $[AD]$ از طرف D قرار دارد و پاره‌خط راست $[EF]$ طوری است که

$$(AE)\|(DF),\ (BE)\|(CF),\ \frac{|AE|}{|DF|}=m=2,\ \ \frac{|CF|}{|BE|}=n=2$$

(شکل ۸.۴). مطلوب است محاسبهٔ مساحت مثلث EFB.

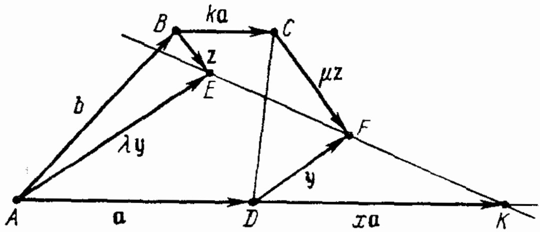
حل. فرض می‌کنیم: $\overrightarrow{AD}=\mathbf{a}$، $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$، $DK=x\mathbf{a}$ $(x>0)$، $\overrightarrow{DF}=\mathbf{y}$ و $\overrightarrow{BE}=\mathbf{z}$. بنابراین $AE=\lambda\mathbf{y}$، $|\lambda|=m$، $\overrightarrow{CF}=\mu\mathbf{z}$، $|\mu|=n$، $\overrightarrow{BC}=k\mathbf{a}$. در دور $ABEA$ داریم:

$$\mathbf{b}+\mathbf{z}-\lambda\mathbf{y}=0$$

و در دور $ABCFDA$:

$$\mathbf{b}+(k-1)\mathbf{a}+\mu\mathbf{z}-\mathbf{y}=0$$

و از دستگاه شامل این دو معادله، به دست می‌آید:



شکل ۸۰۴

$$\mathbf{y}=\frac{[(۱-\mu)\mathbf{b}+(k-۱)\mathbf{a}]}{(۱-\lambda\mu)}$$

بنا براین

$$\sigma=\frac{۱}{۲}|[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}]|=\frac{۱}{۲}|[\lambda\mathbf{y}-\mathbf{a},\mathbf{y}]|=\frac{۱}{۲}|[\mathbf{a}, \mathbf{y}]|=$$

$$=\frac{۱}{۲|۱-\lambda\mu|}|[\mathbf{a},(۱-\mu)\mathbf{b}+(k-۱)\mathbf{a}]|=\frac{|۱-\mu|}{۲|۱-\lambda\mu|}|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|=$$

$$=\frac{|۱-\mu|}{|۱-\lambda\mu|}\frac{S}{k+۱}$$

(مثال ۱۷۰۲۰۴ را ببینید).

تنها این می‌ماندکه از شرط $x>۰$ استفاده‌کنیم. بردارهای

$$\overrightarrow{KF}=\mathbf{y}-x\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{KE}=\lambda\mathbf{y}-(۱+x)\mathbf{a}$$

هم‌راستا هستند، یعنی مقدار t وجود داردکه $KE=tKF$، یعنی:

$$\lambda\mathbf{y}-(۱+x)\mathbf{a}=t\mathbf{y}-tx\mathbf{a}$$

بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{y}$ هم‌راستا نیستند. بنا براین

$$\lambda=t، \ 1+x=tx، \ \lambda=\frac{(1+x)}{x}>0$$

و در نتیجه $\lambda=m$. پس دوحالت ممکن است: ۱) $\mu=n$ که در این صورت

$$\sigma=\frac{|1-n|}{|1-mn|}\cdot\frac{S}{k+1}=\frac{1}{4}S$$

۲) $\mu=-n$ که در این صورت

$$\sigma=\frac{1+n}{1+mn}\cdot\frac{S}{k+1}=\frac{9}{20}S$$

مثال ۱۹۰۲۰۴*. ثابت کنید، وجه‌هـای چهاروجهی $ABCD$ وقتی، و تنها وقتی هم‌ارزندکه از مثلث‌های برابر تشکیل شده باشند.

حل. ازشکل ۱۴۰۳ ونمادهای مسألهٔ ۱۸۰۲۰۳ استفاده می‌کنیم؛ بنا براین

$$\overrightarrow{BC}=2\mathbf{c}،\ \overrightarrow{AD}=2\mathbf{a}،\ \overrightarrow{BD}=\mathbf{c}-\mathbf{b}+\mathbf{a}،\ \overrightarrow{AB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}،$$
$$\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

ازآن‌جا

$$S_{BCD}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{BC}، \overrightarrow{BD}]|=|[\mathbf{c}،\mathbf{c}-\mathbf{b}+\mathbf{a}]|=|[\mathbf{c}، \mathbf{a}-\mathbf{b}]|،$$

$$S_{BAD}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AD}، \overrightarrow{AB}]|=|[\mathbf{a}، \mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}]|=|[\mathbf{a}، \mathbf{b}-\mathbf{c}]|،$$

$$S_{BAC}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{BC}، \overrightarrow{AB}]|=|[\mathbf{c}، \mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}]|=|[\mathbf{c}، \mathbf{a}+\mathbf{b}]|،$$

$$S_{ADC}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AD}، \overrightarrow{AC}]|=|[\mathbf{a}، \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}]|=|[\mathbf{a}، \mathbf{b}+\mathbf{c}]|$$

بـا توجه به‌اتحاد $|[\mathbf{m}،\mathbf{n}]|^2=\mathbf{m}^2\mathbf{n}^2-(\mathbf{m}، \mathbf{n})^2$، هـم‌ارزی وجه‌هـای چهاروجهی $ABCD$، منجر به دستگاه معادله‌های زیر می‌شود:

$$\mathbf{c}^2[\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2(\mathbf{a}، \mathbf{b})]-[(\mathbf{a}، \mathbf{c})-(\mathbf{b}، \mathbf{c})]^2=$$

$$=\mathbf{c}^2[\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+2(\mathbf{a},\mathbf{b})]-[(\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{c})]^2,$$

$$\mathbf{a}^2[\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2(\mathbf{b},\mathbf{c})]-[(\mathbf{a},\mathbf{b})-(\mathbf{a},\mathbf{c})]^2=$$

$$=\mathbf{a}^2[\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2(\mathbf{b},\mathbf{c})]-[(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{a},\mathbf{c})]^2,$$

$$\mathbf{c}^2[\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+2(\mathbf{a},\mathbf{b})]-[(\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{c})]^2=$$

$$=\mathbf{a}^2[\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2(\mathbf{b},\mathbf{c})]-[(\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{a},\mathbf{c})]^2 \qquad (4.8)$$

از دو معادلهٔ اول به دست می‌آید:

$$\mathbf{c}^2(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{c}),\quad \mathbf{a}^2(\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

و از ضرب این دو رابطه، خواهیم داشت:

$$\mathbf{a}^2\mathbf{c}^2-(\mathbf{a},\mathbf{c})^2(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{b},\mathbf{c})=0$$

چون $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ هم‌راستا نیستند، پس $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{c}|>|(\mathbf{a},\mathbf{c})|$. بنابراین

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{b},\mathbf{c})=0$$

بنابراین $\mathbf{a}^2(\mathbf{b},\mathbf{c})^2=(\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{b},\mathbf{c})=0$، یعنی $(\mathbf{b},\mathbf{c})=0$. و چون $\mathbf{c}^2(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{c})=0$، پس $(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$.

این ضرب‌های اسکالر را در (۴.۸) قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{b}^2(\mathbf{a}^2-\mathbf{c}^2)=0;\ \ |\mathbf{a}|=|\mathbf{c}|;\ \ |AD|=|BC|$$

بردار $\mathbf{b}=\overrightarrow{EF}$ بر هر بردار $\overrightarrow{AD}=2\mathbf{a}$ و $\overrightarrow{BC}=2\mathbf{c}$ عمود است. همچنین با استفاده از نتیجهٔ مثال ۱۸.۲.۳، داریم:

$$|AB|=|CD| \quad \text{و} \quad |BD|=|AC|$$

بنابراین، طول یال‌های متنافر چهار وجهی $ABCD$، دوبه‌دو با هم برابرند. و این، به‌معنای آن است که، وجه‌های چهار وجهی، مثلث‌هایی برابرند.

بخش ۳.۴. حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ برداری. معادلهٔ برداری خط راست درفضا. بردار نرمال صفحه

مثال ۱.۳.۴. (دستور حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ برداری). ثابت کنید، برای هر سه بردار دلخواه $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ درفضا، داریم:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \qquad (۴.۹)$$

حل. پایهٔ راست‌گرد قائم و یکهٔ $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ را در فضا طوری انتخاب می‌کنیم که، پایهٔ $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ در صفحه‌ای موازی بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ و بردار $\mathbf{i}$ هم‌راستا با بردار $\mathbf{b}$ باشد و داشته باشیم: $\mathbf{k} = [\mathbf{i}, \mathbf{j}]$. دراین پایه

$$\mathbf{b} = b\mathbf{i} = (b, 0, 0), \ \mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} = (c_x, c_y, 0),$$

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b & 0 & 0 \\ c_x & c_y & 0 \end{vmatrix} = bc_y\mathbf{k} = (0, 0, bc_y),$$

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & bc_y \end{vmatrix} = a_ybc_y\mathbf{i} - a_xbc_y\mathbf{j}$$

اگر درسمت راست برابری بالا، بردار $a_xbc_x\mathbf{i}$ را یکبارکم و یکبار اضافه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = b\mathbf{i}(a_xc_x + a_yc_y + a_z \cdot 0) -$$
$$-(c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j})(a_xb + a_y \cdot 0 + a_z \cdot 0) = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

مثال ۲.۳.۴. مطلوبست شرط لازم وکافی، برای برقراری برابری

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] \qquad (۴.۱۰)$$

حل. طبق دستور (۴.۹) داریم:

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = -[\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

به این ترتیب، برابری (۴.۱۰) تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$0 = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

ولی، بنا به‌دستور (۴.۹):

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]]$$

بنابراین، برابری (۴.۱۰)، وقتی و تنها وقتی برقرار است که

$$[\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]] = 0$$

یعنی وقتی که بردارهای $\mathbf{b}$ و $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$ هم‌راستا باشند؛ و این، وقتی ممکن است که $\mathbf{a} \| \mathbf{c}$ یا $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{c}$ و بردار $\mathbf{b}$ بریکی از دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ عمود باشد.

مثال ۴.۳.۳.۰ (معادلهٔ برداری خط راست در فضا). قطب ثابت O را درنظر می‌گیریم و بردارهای $\mathbf{a} \neq 0$ و $\mathbf{M}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $(\mathbf{M}, \mathbf{a}) = 0$. ثابت کنید، مجموعهٔ l، از همهٔ نقطه‌های فضا که شعاع حامل آن‌ها، $\mathbf{r}$، در معادلهٔ

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M} \qquad (۴.۱۱)$$

صدق می‌کنند، یك خط راست است. موقعیت این خط راست را در فضا معین کنید.

حل. راه‌حل اول. دستگاه‌مختصات $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ را درنظرمی‌گیریم، به‌نحوی که $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{a}}{a}$ و $a = |\mathbf{a}| \neq 0$، یعنی $\mathbf{a} = (0, 0, a)$. چون $(\mathbf{M}, \mathbf{a}) = 0$، دستگاه مختصات را می‌توان طوری انتخاب کرد که بردار $\mathbf{M}$ با بردار $\mathbf{j}$ هم راستا باشد، یعنی $\mathbf{M} = m\mathbf{j} = (0, m, 0)$.

$A(x, y, z)$ را نقطه‌ای از l می‌گیریم. بنا برمعادلهٔ (۴.۱۱) داریم:

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = ay\mathbf{i} - ax\mathbf{j} = \mathbf{M} = m\mathbf{j}$$

به‌این‌ترتیب، نقطهٔ $A(x, y, z)$، وقتی‌وتنها وقتی به l تعلق دارد که مختصات آن، در دستگاه معادله‌های زیر صدق کنند:

$$y=0, \quad x=-\frac{m}{a} \qquad (۴.۱۲)$$

معادلهٔ اول این دستگاه، معادلهٔ صفحهٔ xz است و معادلهٔ دوم، صفحه‌ای را موازی با صفحهٔ yz مشخص می‌کند. بنابراین، l عبارت است از مجموعهٔ نقطه‌های مشترك این دو صفحه، یعنی خط راستی موازی با محور z (برای بردار $\mathbf{a}$). این خط راست، از نقطهٔ با شعاع حامل $\mathbf{r}_0=\left(-\frac{m}{a}, 0, 0\right)$ می‌گذرد. $\mathbf{r}_0$ را می‌توان برحسب $\mathbf{a}$ و $\mathbf{M}$ محاسبه‌کرد:

$$\mathbf{r}_0=-\frac{m}{a}\mathbf{i}=-\frac{m}{a}[\mathbf{j}, \mathbf{k}]=\left[\mathbf{k}, \frac{m}{a}\mathbf{j}\right]=$$

$$=\left[\mathbf{k}, \frac{\mathbf{M}}{a}\right]=\left[\frac{\mathbf{a}}{a}, \frac{\mathbf{M}}{a}\right]=\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{a^2}$$

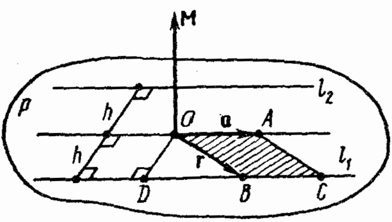
معادلهٔ پارامتری خط راست l، چنین است:

$$\mathbf{r}=\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2}+\mathbf{a}t, \quad t\in\mathbf{R} \qquad (۴.۱۳)$$

راه‌حل دوم (هندسی). اگر $\mathbf{M}=0$، آن‌وقت، l مجموعه‌ای‌از نقطه‌های فضا است که $\mathbf{r}$، شعاع حامل آن‌ها، با بردار $\mathbf{a}$ هم‌راستا می‌شود (زیرا $[\mathbf{r}, \mathbf{a}]=0$)؛ یعنی l، خط راستی است (با بردار هادی $\mathbf{a}$) که از قطب O می‌گذرد.

اکنون فرض می‌کنیم: $\mathbf{M}\neq 0$. صفحهٔ P را درنظر می‌گیریم که از نقطهٔ O بگذرد و بر بردار $\mathbf{M}$ عمود باشد. بردار $OA=\mathbf{a}$ را از نقطهٔ O رسم می‌کنیم. چون $(\mathbf{a}, \mathbf{M})=0$، بنابراین نقطهٔ A، به صفحهٔ P تعلق دارد و، درنتیجه، (OA) متعلق به P است. $B(\mathbf{r})$ را نقطه‌ای از l می‌گیریم. بنابر ویژگی I ازحاصل‌ضرب‌برداری و با توجه به‌دستور (۴.۱۱) خواهیم‌داشت:

$0 = (\mathbf{r}, \mathbf{M})$، یعنی $B \in P$. بنابراین l، زیـرمجموعه‌ای از صفحهٔ P است. به جز آن $|\mathbf{M}| = |[\mathbf{r}, \mathbf{a}]|$؛ یعنی مساحت متوازی‌الاضلاع $BOAC$، کـه روی دو بردار $\mathbf{r}$ و $\mathbf{a}$ ساخته شده است، برابر بـا $|\mathbf{M}|$ (بنابر ویژگی II حاصل‌ضرب برداری) و ارتفاعی از این متوازی‌الاضلاع کـه از رأس B برخط راست (OA) عمود شده است، برابر با $|h| = \dfrac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{a}|}$ می‌شود؛ کـه برای همهٔ نقطه‌های $B \in l$ مشترك است. به این ترتیب، l زیرمجموعه‌ای است ازصفحهٔ P که، همهٔ نقطه‌های آن، به‌فاصله‌ای یکسان وبرابر h ازخط‌راست (OA). این مجموعه، دو خط راست l_1 و l_2 را تشکیل می‌دهند که با (OA) موازی‌اند (شکل ۹.۴).



شکل ۹.۴

برای یکی از این دو خط راست (خط راست l_1 در شکل ۹.۴)، $\mathbf{r}$، شعاع حامل نقطه‌های واقع برآن، با دو بردار $\mathbf{M}$ و $\mathbf{a}$، پایه‌ای راست‌گرد و، برای خط‌راست دیگر (l_2)، پایه‌ای‌چپ‌گرد تشکیل می‌دهند. بنابرویژگی IV ازحاصل‌ضرب برداری، خط راست l_2 متعلق به مجموعهٔ l، که با معادلهٔ (۴.۱۱) مشخص شده است، نیست، درحالی کـه l_1 به مجموعهٔ l تعلق دارد (همهٔ نقطه‌های l_1، با توجه به شرطهای I، II و IV، معرف معادلهٔ (۴.۱۱) هستند). به این ترتیب، l خط راستی است با بردار هادی $\mathbf{a}$ که از نقطهٔ D

(پای عمود وارد از O بر l_1) می‌گذرد. شعاع حامل $\mathbf{r}_\circ = OD$، به سادگی به دست می‌آید: چـون $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OD} \perp \mathbf{M}$ و پایهٔ $\{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}, \mathbf{M}\}$ راست‌گرد است، بنابراین $OD \uparrow\uparrow [\mathbf{a}, \mathbf{M}]$، یعنی $\mathbf{r}_\circ = \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{M}]$ که، در آن $\lambda > \circ$. برای پیدا کردن λ، فرض می‌کنیم:

$$|\mathbf{r}_\circ| = |\overrightarrow{OD}| = h = \frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{a}|}$$

که در آن

$$\frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{a}|} = |\lambda[\mathbf{a}, \mathbf{M}]| = \lambda|[\mathbf{a}, \mathbf{M}]| = \lambda|\mathbf{a}||\mathbf{M}|$$

($\mathbf{a}$ و $\mathbf{M}$ برهم عمودند). درنتیجه $\lambda = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2}$، یعنی

$$\mathbf{r}_\circ = [\mathbf{a}, \mathbf{M}] : |\mathbf{a}|^2$$

راه‌حل سوم. $\mathbf{r}_\circ = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2}$ می‌گیـریـم. بنابر دستور حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ برداری

$$[\mathbf{r}_\circ, \mathbf{a}] = -\frac{1}{|\mathbf{a}|^2}[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{M}]] =$$

$$= -\frac{1}{|\mathbf{a}|^2}[\mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{M}) - \mathbf{M}(\mathbf{a}, \mathbf{a})] = \mathbf{M}$$

[چون $(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = \circ$]. از این رو، $\mathbf{r}_\circ$ شعاع حامل نقطه‌ای مثل $D \in l$ است و معادلهٔ (۴.۱۱)، با توجه به برابری $[\mathbf{r}_\circ, \mathbf{a}] = \mathbf{M}$، هم‌ارز است با معادلهٔ

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_\circ, \mathbf{a}] = \circ \qquad (۴.۱۴)$$

بنابه ویژگی III حاصل‌ضرب برداری، برابری (۴.۱۴)، تنها وقتی برقرار است که $\mathbf{r} - \mathbf{r}_\circ$ موازی $\mathbf{a}$ باشد، یعنی بتوان عدد $t \in \mathbf{R}$ را طوری پیدا کرد که داشته باشیم: $\mathbf{r} - \mathbf{r}_\circ = \mathbf{a}t$، یعنی

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{a}t,\ t\in\mathbf{R} \tag{۴.۱۵}$$

به این ترتیب، معادلهٔ (۴.۱۱) بـا معادلهٔ پارامتر ـ برداری (۴.۱۵) هم‌ارز است و، درنتیجه، مجموعهٔ l، عبارت است ازخط راستی با معادلهٔ پارامتری (۴.۱۵).

مثال ۴.۳.۴. معادلهٔ برداری،ازنوع (۴.۱۱)،خط‌راست l را بنویسید:

$$l:\frac{x+۱}{-۳}=\frac{y-۳}{۴}=\frac{z}{۳}$$

حل. خط راست l، از نقطه‌ای بـا شعاع حامل $\mathbf{r}_\circ=(-۱,۳,\circ)$ می‌گذرد و بردار هادی آن $\mathbf{a}=(-۳,۴,۳)$ است. چون

$$\mathbf{M}=[\mathbf{r}_\circ,\mathbf{a}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-۱&۳&\circ\\-۳&۴&۳\end{vmatrix}=۹\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$$

معادلهٔ برداری خط راست l، به این صورت درمی‌آید:

$$[\mathbf{r},-۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۳\mathbf{k}]=۹\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$$

مثال ۵.۳.۴. شعاع حامل $\mathbf{x}$، نقطهٔ برخورد خط راست

$$l:[\mathbf{r},\mathbf{a}]=\mathbf{M},\ |\mathbf{a}|\neq\circ,\ (\mathbf{a},\mathbf{M})=\circ$$

و صفحهٔ به معادلهٔ زیر را پیدا کنید:

$$P:(\mathbf{r},\mathbf{N})=D,\ \mathbf{N}\neq\circ,\ (\mathbf{N},\mathbf{a})\neq\circ$$

حل. معادلهٔ خط راست l را، به‌صورت پارامتری (۴.۱۳) می‌نویسیم. مسأله به این‌جا برمی‌گردد که، عدد t را طوری پیدا کنیم که بردار

$$\mathbf{x}=\frac{[\mathbf{a},\mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^۲}+\mathbf{a}t$$

در برابری $(\mathbf{x},\mathbf{N})=D$ هم صدق کند. یعنی

$$t(\mathbf{a}, \mathbf{N})+\frac{([\mathbf{a}, \mathbf{M}], \mathbf{N})}{|\mathbf{a}|^{2}}=D$$

بنا راین

$$t=\frac{D|\mathbf{a}|^{2}-([\mathbf{a}, \mathbf{M}], \mathbf{N})}{|\mathbf{a}|^{2}(\mathbf{a}, \mathbf{N})},$$

$$\mathbf{x}=\frac{1}{|\mathbf{a}|^{2}}\left([\mathbf{a}, \mathbf{M}]+\frac{D|\mathbf{a}|^{2}-([\mathbf{a}, \mathbf{M}], \mathbf{N})}{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}\mathbf{a}\right)$$

مثال ۶.۳.۴. مطلوب است معادلهٔ نرمال صفحهٔ P، به‌شرطی‌که معادلهٔ پارامتری صفحهٔ P، چنین باشد:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}u+\mathbf{b}v, \quad u, v\in\mathbf{R}$$

حل. بردارهـای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مستقل خطی و موازی بـا صفحهٔ P هستند. بنابراین، به عنوان بردار نرمال، می‌توان فرض کرد:

$$\mathbf{N}=[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \qquad (۴.۱۶)$$

بردار $\mathbf{r}_0$، شعاع حامل نقطه‌ای ازصفحهٔ P است. باتوجه به‌دستور (۳.۲۸)، معادلهٔ نرمال صفحه، چنین است:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])=0$$

مثال ۷.۳.۴. در چهـار وجهی $ABCD$، صفحهٔ نیمساز فرجهٔ مربوط به‌یال $[CD]$، یال $[AB]$ را درنقطهٔ F قطع‌می‌کند(شکل۴.۱۰). ثابت‌کنید:

$$[AF]:[FB]=S_{ACD}:S_{BCD}$$

حل. فرض می‌کنیم: $\mathbf{a}=\overrightarrow{DA}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{DB}$، $\mathbf{c}=\overrightarrow{DC}$، $\mathbf{c}'=[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$، $\mathbf{a}'=[\mathbf{c}, \mathbf{b}]$، $\varphi=(\widehat{\mathbf{a}', \mathbf{b}'})$ و $|AF|=\mu|AB|$. درنتیجه

$$S_{ACD}=\frac{1}{2}|\mathbf{b}'|, \quad S_{BCD}=\frac{1}{2}|\mathbf{a}'|$$

بنا به دستور (۴.۱۶)، بردارهای $\mathbf{N}_1=\mathbf{a}'$،

$$\mathbf{N}_۲=[\mathbf{c}، \overrightarrow{DF}]=[\mathbf{c}، \overrightarrow{DA}+\mu\overrightarrow{AB}]=$$

$$=[\mathbf{c}، \mathbf{a}+\mu(\mathbf{b}-\mathbf{a})]=\mu\mathbf{a}'+(۱-\mu)\mathbf{b}'$$

و $\mathbf{N}_۳=\mathbf{b}'$، به ترتیب، بردارهای نرمال صفحه‌های (BCD)، (FCD) و (ACD) هستند. از آن جا که (FCD)، صفحهٔ نیمساز است، $\widehat{(\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲)}=\widehat{(\mathbf{N}_۲، \mathbf{N}_۳)}$، بنابراین

$$\frac{(\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲)}{|\mathbf{N}_۱||\mathbf{N}_۲|}=\frac{(\mathbf{N}_۲، \mathbf{N}_۳)}{|\mathbf{N}_۲||\mathbf{N}_۳|},$$

یعنی

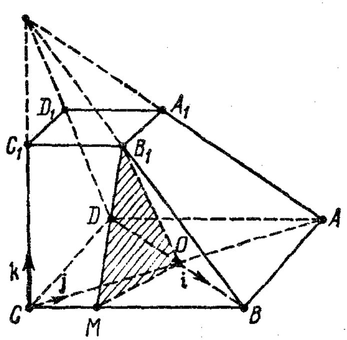
$$\frac{\mu\mathbf{a}'^۲+(۱-\mu)(\mathbf{a}'،\mathbf{b}')}{|\mathbf{a}'|}=\frac{(۱-\mu)\mathbf{b}'^۲+\mu(\mathbf{a}'، \mathbf{b}')}{|\mathbf{b}'|}،$$

و یا

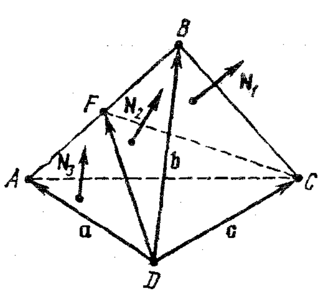
$$(۱-\cos\varphi)[(۱-\mu)|\mathbf{b}'|-\mu|\mathbf{a}'|]=۰$$

چون $۰^\circ<\varphi<۱۸۰^\circ$، بنابراین

$$S_{ACD}:S_{BCD}=|\mathbf{b}'|:|\mathbf{a}'|=\frac{\mu}{۱-\mu}=|AF|:|FB|$$



شکل ۱۱.۴



شکل ۱۰.۴

مثال ۰۸۰۳۰۴ $[AA_۱]$، $[BB_۱]$، $[CC_۱]$ و $[DD_۱]$، یال‌های جانبی هرم ناقص $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ را تشکیل می‌دهند. قاعدهٔ پایین هرم ناقص، لوزی $ABCD$ است. یال $[CC_۱]$، برصفحهٔ $(ABCD)$ عمود است و داریم:

$$|CC_۱|=|A_۱B_۱|=۲،\ \ |AB|=۴،\ \ \widehat{BAD}=۶۰^\circ$$

درضمن، نقطهٔ M را روی یال $[BC]$ طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته‌باشیم: $|BM|=۳$. صفحه‌ای بر سه نقطهٔ $B_۱$، M و O (مرکز لوزی $ABCD$) می‌گذرانیم. زاویهٔ بین این صفحه و صفحهٔ وجه $AA_۱C_۱C$ را پیدا کنید.

حل. پایهٔ متعامد، یکه و راست گرد

$$\mathbf{i}=\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|},\ \mathbf{j}=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|},\mathbf{k}=\frac{\overrightarrow{CC_۱}}{|\overrightarrow{CC_۱}|}$$

را انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۱۰۴). در این پایه داریم:

$$\overrightarrow{OB}=(۲،\ ۰،\ ۰)،\ \overrightarrow{CO}=(۰،\ ۲\sqrt{۳}،\ ۰)،\ \overrightarrow{CC_۱}=(۰،\ ۰،\ ۲)،$$

$$\overrightarrow{CB}=(۲،\ ۲\sqrt{۳}،\ ۰)،\ \overrightarrow{CM}=\frac{۱}{۴}\overrightarrow{CB}=\left(\frac{۱}{۲}،\frac{\sqrt{۳}}{۲}،\ ۰\right)،\ \overrightarrow{C_۱B_۱}=$$

$$=\frac{۱}{۲}\overrightarrow{CB}=(۱،\sqrt{۳}،\ ۰)،\ \overrightarrow{MO}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CM}=\left(-\frac{۱}{۲}،\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}،\ ۰\right)،$$

$$\overrightarrow{MB_۱}=-\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CC_۱}+\overrightarrow{C_۱B_۱}=\left(\frac{۱}{۲}،\frac{\sqrt{۳}}{۲}،\ ۲\right)$$

بنابر دستور (۴۰۱۶)، بردار نرمال $\mathbf{N}_۱$، از صفحهٔ $(B_۱MO)$ چنین است:

$$\mathbf{N}_۱=[\overrightarrow{MO}،\ \overrightarrow{MB_۱}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} & ۰\\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} & ۲\end{vmatrix}=(۳\sqrt{۳}،\ ۱،\ -\sqrt{۳})$$

بردار نرمال $\mathbf{N}_۲$ از صفحهٔ $(AA_۱C_۱C)$، موازی با $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ است و، به‌روشنی، برابر $\mathbf{i}$ است. بنابراین، برای زاویهٔ φ، بین صفحه‌های $(B_۱MO)$ و $(AA_۱C_۱C)$، داریم:

$$\cos\varphi = |(\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲)| : (|\mathbf{N}_۱||\mathbf{N}_۲|) =$$

$$= \frac{۳\sqrt{۳}}{\sqrt{(۳\sqrt{۳})^۲ + ۱^۲ + (\sqrt{۳})^۲}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۳۱}},$$

$$\varphi = \arccos ۳\sqrt{\frac{۳}{۳۱}} = \operatorname{arctg} \frac{۲}{۳\sqrt{۳}}$$

مثال ۹.۳.۴. بردار هادی خط راست l، فصل مشترك دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ را پیدا کنید، به شرطی که:

$$P_۱ : (\mathbf{r} ، \mathbf{N}_۱) = D_۱ ، \; P_۲ : (\mathbf{r} ، \mathbf{N}_۲) = D_۲$$

حل. بردار هادی $\mathbf{a}$ (بردار هادی خط راست l) موازی صفحهٔ $P_۱$ و عمود بر بردارنرمال $\mathbf{N}_۱$ است. $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{N}_۲$ هم عمود است. بنابراین، می‌توانیم، بردار $[\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲]$ را به عنوان $\mathbf{a}$ در نظر بگیریم.

مثال ۱۰.۳.۴. مطلوب است محاسبهٔ زاویهٔ بین خط راست l وصفحهٔ P، به شرطی که:

$$l : \begin{cases} ۳x + ۵y + ۴z - ۱ = ۰ \\ x + y - ۴ = ۰ \end{cases} \quad ; \quad P : x + z + ۲ = ۰$$

حل. بردار هادی خط راست l از دستور

$$\mathbf{a} = [\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲] \qquad (۴.۱۷)$$

به دست می‌آید کـه درآن: $\mathbf{N}_۱ = (۳ ، ۵ ، ۴)$ و $\mathbf{N}_۲ = (۱ ، ۱ ، ۰)$ (مسألهٔ ۹.۳.۴ را ببینید). زاویهٔ φ بین خط راست l و صفحهٔ P، با توجه به‌دستور (۳.۵۴) به دست می‌آید:

$$\varphi = \arcsin \frac{|(\mathbf{N} ، \mathbf{a})|}{|\mathbf{N}||\mathbf{a}|}$$

که در آن

$$\mathbf{N}=(۱, ۰, ۱), \quad \mathbf{a}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۳ & ۵ & ۴ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}=(-۴, ۴, -۲)$$

یعنی $\varphi = arc\ sin\frac{۱}{\sqrt{۲}}=۴۵^\circ$.

مثال ۱۱.۳.۴. زاویهٔ بین این دو خط راست را پیدا کنید:

$$l:\begin{cases} x+۲y+۲z=۰ \\ x+y+۲=۰ \end{cases}; \quad L:\begin{cases} x-y+۳z+۲=۰ \\ ۲x-۲y+z=۰ \end{cases}$$

حل. بردارهای هادی **a** و **b**، به‌ترتیب، برای خط‌های راست l و L، چنین‌اند (دستور (۴.۱۷) را ببینید):

$$\mathbf{a}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix}=(-۲, ۲, -۱), \quad \mathbf{b}=(۵, ۵, ۰)$$

از آن‌جا

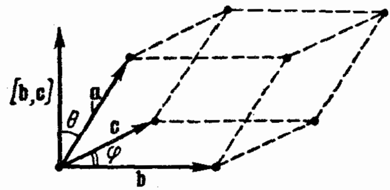
$$cos\varphi=\frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{b})|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=۰, \quad \varphi=۹۰^\circ$$

بخش ۴.۴. حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر. معیار هم‌صفحه بودن بردارها. حجم چهاروجهی

عدد $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$ را، به‌عنوان حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر از بردارهای **a** و **b** و **c** (یك سه‌تایی مرتب) تعریف می‌کنیم و، آن را، به‌صورت $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ می‌نویسیم.

ویژگی‌های حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر (یا عددی) بردارها.

1°. حاصل‌ضرب سه گانهٔ اسکالر بردارها، وقتی و تنها وقتی برابر صفر است که، سه بردار، هم صفحه باشند.



شکل ۱۲.۴

□ φ را زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، و θ را زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ می گیریم (شکل ۱۲.۴). در این صورت

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = \begin{cases} 0, & (\text{اگر } \mathbf{a}=0 \text{ یا } [\mathbf{b}, \mathbf{c}]=0) \\ |\mathbf{a}|\,|[\mathbf{b}, \mathbf{c}]|\cos\theta = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\sin\varphi\cos\theta & \\ (\text{اگر } \mathbf{a}\neq 0 \text{ و } [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\neq 0) & \end{cases} \qquad (۴.۱۸)$$

بنابراین، برابری $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$، تنها درحالت‌های زیر ممکن‌است:

a) $\mathbf{a}=0$. در این حالت، بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، به روشنی، روی یك صفحه‌اند (سه بردار هم‌صفحه)؛

b) $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]=0$. در این حالت، بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌راستا می‌شوند و، بنابراین، سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه‌اند؛

c) $\mathbf{a}\neq 0$ و $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]\neq 0$ (یعنی $\mathbf{b}\neq 0$، $\mathbf{c}\neq 0$ و $\sin\varphi\neq 0$)، $\cos\theta=0$ (دستور (۴.۱۸) را ببینید). در ایــن حالت، بردار $\mathbf{a}$ بر بردار $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ عمود است، یعنی $\mathbf{a}$ موازی صفحه‌ای است که $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ تشکیل یك‌پایه را درآن می‌دهند.

از طرف دیگر، اگر $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\neq 0$، آن وقت بنابر دستور (۴.۱۸)، $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{c}$ ، بردارهایی غیر صفرند، زیرا $\sin\varphi\neq 0$، یعنی $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم راستا نیستند؛ همچنین $\cos\theta\neq 0$، یعنی بردارهای $\mathbf{a}$ و $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ عمود برهم نیستند؛ بنابراین $\mathbf{a}$، با صفحه‌ای که بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در آن تشکیل یك پایه می‌دهند، موازی نیست و، به زبان دیگر، $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، هم‌صفحه نیستند. ■

۲°. اگر در پایهٔ متعامد، یکه و راستگرد $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ فرض کنیم:

$$\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z),\quad \mathbf{b}=(b_x, b_y, b_z),\quad \mathbf{c}=(c_x, c_y, c_z)$$

آن وقت داریم:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (۴.۱۹)$$

□ بردار $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$، بنابه دستور (۴.۱) برابر است با

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\right)$$

بنابراین

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])=a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}. \blacksquare$$

توجه کنیم که از دستور (۴.۱۹) و معیـار هم‌صفحه بودن بردارهـا (مثال ۲۰.۵.۲ را ببینید)، می‌توان به سادگی ویژگی ۱° را به دست آورد. همچنین، از دستور (۴.۱۹)، ویژگی زیرهم نتیجه می‌شود.

۳°. پایهٔ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$، تنها با شرط $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$، راست‌گرد است.

□ بنا به دستور (۴.۱۹):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det S^{\mathrm{T}} = \det S$$

که در آن، S عبارت است از ماتریس انتقال از پایهٔ راست‌گرد $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ به پایهٔ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. ■

۴°. همیشه داریم:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) =$$
$$= -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) \qquad (۴.۲۰)$$

در حالت خاص، وقتی که دست‌کم با دو عامل برابر سروکار داشته باشیم، حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر، برابر صفر است.

□ برابری‌های (۴.۲۰) را می‌توان از دستور (۴.۱۹) و ویژگی ۲° دترمینان‌ها (بخش ۴.۲ را ببینید) نتیجه گرفت.

برابری $(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0$ (و سایر ضرب‌های سه‌گانهٔ اسکالری که دو عامل برابر دارند)، از برابری‌های (۴.۲۰) به دست می‌آید: برای $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ داریم:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) \quad \text{یا} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0 \quad ■$$

۵°. اگر بدانیم: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_1 + a_y\mathbf{e}_2 + a_z\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{e}_1 + b_y\mathbf{e}_2 + b_z\mathbf{e}_3 \quad , \quad \mathbf{c} = c_x\mathbf{e}_1 + c_y\mathbf{e}_2 + c_z\mathbf{e}_3$$

آن وقت

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \qquad (۴.۲۱)$$

□ با توجه به دستور (۴.۶) داریم:

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \mathbf{f}_1 - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \mathbf{f}_2 + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \mathbf{f}_3$$

که در آن $\mathbf{f}_1=[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$، $\mathbf{f}_2=[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$ و $\mathbf{f}_3=[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$.
چون $(\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1)=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$، $(\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1)=(\mathbf{e}_3, \mathbf{f}_1)=0$ (بردار $\mathbf{f}_1$ بر هر دو بردار $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ عمود است)،

$$(\mathbf{a}, \mathbf{f}_1)=(a_x\mathbf{e}_1+a_y\mathbf{e}_2+a_z\mathbf{e}_3, \mathbf{f}_1)=a_x(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

و به همین ترتیب:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{f}_2)=a_y(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3),\quad (\mathbf{a}, \mathbf{f}_3)=a_z(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

بنابراین

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\left(a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y\end{vmatrix}\right)=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix} \blacksquare$$

°۶. اگر بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه نباشند، حجم متوازی‌السطوحی که روی این سه بردار ساخته شود، برابر است با قدرمطلق حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر این بردارها.

☐ با توجه به دستور (۴.۱۸) داریم:

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|\times sin\varphi|cos\theta|$$

از طرف دیگر، حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ ساخته شده باشد، برابر است با حاصل‌ضرب S، مساحت قاعده، در h، ارتفاع آن، و

$$S=|\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}|sin\varphi,\quad h=|\mathbf{a}|cos\theta$$

به این ترتیب، اگر $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه نباشند، حجم متوازی‌السطوحی که روی آن‌ها ساخته می‌شود (شکل ۱۲۰۴)، برابر است با $|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$. ■

°۷. حاصل‌ضرب اسکالر سه بردار، در رابطه با هر یک از بردارها، خطی است:

$$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{d}، \mathbf{b}، \mathbf{c})=\lambda(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c})+\mu(\mathbf{d}، \mathbf{b}، \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a}، \lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{d}، \mathbf{c})=\lambda(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c})+\mu(\mathbf{a}، \mathbf{d}، \mathbf{c}) \quad (۴.۲۲)$$

$$(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \lambda\mathbf{c}+\mu\mathbf{d})=\lambda(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c})+\mu(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{d})$$

برای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$، $\mathbf{d}$ و عددهای دلخواه λ و μ.

□ برابری‌های (۴.۲۲) را می‌توان، به سادگی، از ویژگی خطی حاصل‌ضرب‌های اسکالر و برداری دو بردار نتیجه گرفت. ■

مثال ۱.۴.۴. حجم V متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم:

$$A(۱، ۲، ۳)، \quad B(۹، ۶، ۴)، \quad D(۳، ۰، ۴)، \quad A'(۵، ۲، ۶)$$

حل. داریم:

$$V=|(\overrightarrow{AB}، \overrightarrow{AD}، \overrightarrow{AA'})|=\left|\begin{vmatrix} ۸ & ۴ & ۱ \\ ۲ & -۲ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۳ \end{vmatrix}\right|=۴۸$$

مثال ۲.۴.۴. با همان شرط‌های مسألهٔ قبل، طول ارتفاع h، وارد از رأس A' بر قاعدهٔ $ABCD$ را پیدا کنید.

حل. مساحت قاعدهٔ $ABCD$، چنین است: $S=|[\overrightarrow{AB}، \overrightarrow{AD}]|$.

$$|\overrightarrow{AB}، \overrightarrow{AD}|=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۸ & ۴ & ۱ \\ ۲ & -۲ & ۱ \end{vmatrix}=(۶، -۶، -۲۴)$$

بنابراین

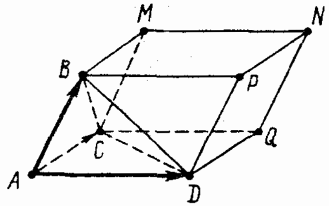
$$S=۶\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲+(-۴)^۲}=۶\sqrt{۱۸}=۱۸\sqrt{۲}$$

و از آن‌جا $h=\frac{V}{S}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$.

مثال ۳.۴.۴. ثابت کنید، حجم هر چهاروجهی برابر است با $\frac{۱}{۶}$

قدر مطلق حاصل‌ضرب اسکالر هر سه بردار ناهم صفحه‌ای که یال‌های چهاروجهی را تشکیل می‌دهند.

حل. متوازی السطوح $ACQDBMNP$ داروی چهاروجهی $ABCD$ می‌سازیم (شکل ۱۳۰۴). داریم:



شکل ۱۳۰۴

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}h\cdot S_{ACD}$$

که در آن، h، طول ارتفاع وارد از رأس B بر صفحهٔ (ACD) است و، در ضمن، مساحت مثلث ACD برابر با نصف مساحت متوازی‌الاضلاع $ACQD$ است. بنابراین

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}hS_{ACQD}=\frac{1}{6}V_{ACQDBMNP}=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$$

علاوه بر آن

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$$

درواقع

$$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=$$
$$=(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})-(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$$

(بردارهای $\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ هم صفحه‌اند و، بنابراین، حاصل‌ضرب اسکالر آن‌ها، برابر صفر است). به همین ترتیب:

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=$$
$$=(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})-(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$$

مثال ۴۰۴۰۴. رأس‌های چهار وجهی $ABCD$ داده شده‌اند:

$$A(0,0,2),\ B(3,0,5),\ C(1,1,0),\ D(4,1,2)$$

حجم چهار وجهی و طول ارتفاع وارد از رأس D را، در آن، پیدا کنید.

حل. داریم:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|,\ h=\frac{\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|}{\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|}$$

چون $\overrightarrow{AB}=(3,0,3)$ و $\overrightarrow{AC}=(1,1,-2)$، پس

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 0 & 3\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=(-3,9,3),$$

$$\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|=3\sqrt{11}$$

به‌جز این

$$\overrightarrow{AD}=(4,1,0),\ (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AD},[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}])=$$

$$=4(-3)+1\times 9+0\times 3=-3$$

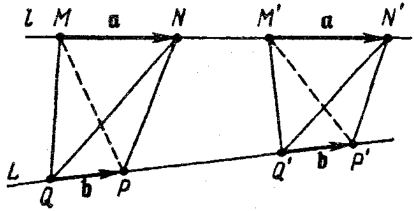
درنتیجه $V_{ABCD}=\frac{1}{2}$ و $h=\frac{1}{\sqrt{11}}$.

مثال ۵.۴.۴. یك چهار وجهی را درنظر می‌گیریم که به وسیلهٔ دو پاره‌خط متعلق به دو خط راست متنافر، مشخص شده است. ثابت کنید، اگر این دو پاره‌خط راست، روی همان دو خط راست متنافر جابه‌جا شوند (و البته، طول آن‌ها تغییر نکند)، حجم چهار وجهی تغییر نمی‌کند.

حل. l و L را دو خط راست متنافر، M، N، M' و N' را نقطه‌هائی از l و P، Q، P' و Q' را نقطه‌هایی از L می‌گیریم، به نحوی که (شکل ۱۴.۴):

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{QP}=\overrightarrow{Q'P'}=\mathbf{b}$$

دراین‌صورت داریم (مثال ۳.۴.۴ را ببینید):



شکل ۴-۱۴

$$V_{MNPQ}=\frac{۱}{۶}|(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \overrightarrow{QN})|، V_{M'N'P'Q'}=\frac{۱}{۶}|(\mathbf{a}، \mathbf{b}، Q'،N')|$$

چون $\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{QQ'}+\overrightarrow{Q'N'}+\overrightarrow{N'N}=\lambda\mathbf{b}+\overrightarrow{Q'N'}+\mu\mathbf{a}$ (بردارهای $\overrightarrow{QQ'}$ و $\overrightarrow{QP}=b$ هم‌راستا هستند، بنابراین عدد λ وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم $\overrightarrow{QQ'}=\lambda\mathbf{b}$؛ و به‌همین ترتیب، عدد μ وجود دارد، به‌نحوی که برای آن داشته باشیم $\overrightarrow{N'N}=\mu\mathbf{a}$).

$$(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \overrightarrow{QN})=\lambda(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{b})+(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \overrightarrow{Q'N'})+\mu(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{a})$$

جمله‌های اول و سوم، در سمت راست برابری فوق، صفرند (ویژگی °۴) و بنابراین

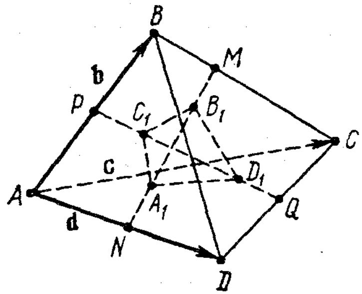
$$(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \overrightarrow{QN})=(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \overrightarrow{Q'N'})\Rightarrow V_{MNPQ}=V_{M'N'P'Q'}$$

مثال ۴.۴.۶. درچهار وجهی $ABCD$، نقطه‌های M، N، P و Q را، به‌ترتیب، روی یال‌های $[BC]$، $[AD]$، $[AB]$ و $[CD]$ انتخاب کرده‌ایم و داریم:

$$|AP|=|PB|، |AN|=|ND|، |CQ|=|QD|، |MC|=۲|BM|$$

جفت نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$، $D_۱$ را بر پاره‌خط‌های راست $[NM]$ و $[PQ]$ طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$|NA_۱|=|A_۱B_۱|=|B_۱M|،\ \ |PC_۱|=|C_۱D_۱|=|D_۱Q|$$



شکل ۱۵.۴

نسبت حجم دو چهار وجهی $ABCD$ و $A_۱B_۱C_۱D_۱$ را پیدا کنید.

حل. پایهٔ $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$، $\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$، $\mathbf{d}=\overrightarrow{AD}$ را درنظر می‌گیریم (شکل ۱۵.۴). دراین پایه داریم:

$$\overrightarrow{C_۱D_۱}=\frac{۱}{۳}\overrightarrow{PQ}=\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ})=\frac{۱}{۳}\left(-\frac{۱}{۲}\mathbf{b}+\frac{۱}{۲}(\mathbf{c}+\mathbf{d})\right)=$$

$$=\frac{۱}{۶}(-\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}),$$

$$\overrightarrow{A_۱B_۱}=\frac{۱}{۳}\overrightarrow{NM}=\frac{۱}{۳}\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}+\frac{۱}{۳}\overrightarrow{BC}\right)=$$

$$=\frac{۱}{۳}\left(-\frac{۱}{۲}\mathbf{d}+\mathbf{b}+\frac{۱}{۳}(\mathbf{c}-\mathbf{b})\right)=\frac{۲}{۹}\mathbf{b}+\frac{۱}{۹}\mathbf{c}-\frac{۱}{۶}\mathbf{d}$$

به‌جز آن

$$\overrightarrow{AC_۱}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{C_۱D_۱}=\frac{۱}{۳}\mathbf{b}+\frac{۱}{۶}\mathbf{c}+\frac{۱}{۶}\mathbf{d},$$

$$\overrightarrow{AA_۱}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{A_۱B_۱}=\frac{۲}{۹}\mathbf{b}+\frac{۱}{۹}\mathbf{c}+\frac{۱}{۳}\mathbf{d}$$

درنتیجه: $\overrightarrow{C_1A_1}=-\frac{1}{9}\mathbf{b}-\frac{1}{18}\mathbf{c}+\frac{1}{6}\mathbf{d}$؛ وحجم چهاروجهی $A_1B_1C_1D_1$ چنین می‌شود:

$$\frac{1}{6}|(\overrightarrow{A_1B_1},\overrightarrow{C_1D_1},\overrightarrow{C_1A_1})|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{6}\end{vmatrix}\times(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\right|=$$

$$=\frac{1}{216}\times\frac{1}{6}|(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})|=\frac{1}{216}V_{ABCD}$$

مثال ۷.۴.۴. ثابت کنید، اگر داشته باشیم:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]+[\mathbf{b},\mathbf{c}]+[\mathbf{c},\mathbf{a}]=0$$

آن وقت، بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم‌صفحه‌اند.

حل. اگر دوطرف رابطهٔ فرض را در $\mathbf{a}$، ضرب اسکالر کنیم، به‌دست می‌آید:

$$0=(\mathbf{a},[\mathbf{a},\mathbf{b}])+(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}])+(\mathbf{a},[\mathbf{c},\mathbf{a}])$$

و چون دو جملهٔ اول و سوم، درسمت راست برابری، برابرصفرند، بنابراین

$$(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}])=0$$

و در نتیجه، بنابر ویژگی °۱ حاصل‌ضرب اسکالر سه بردار، بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، هم صفحه‌اند.

مثال ۸.۴.۴. ثابت کنید، اگر بردارهای $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$، $[\mathbf{b},\mathbf{c}]$ و $[\mathbf{c},\mathbf{a}]$ هم‌صفحه باشند، هم‌راستا هم هستند.

حل. بردارهای $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$، $[\mathbf{b},\mathbf{c}]$ و $[\mathbf{c},\mathbf{a}]$ را هم‌صفحه فرض‌می‌کنیم. دراین‌صورت، این بردارها باهم، بستگی خطی دارند، یعنی عددهای x، y و z (که هرسه باهم صفر نیستند) وجود دارند، به‌نحوی‌که داشته باشیم:

$$x[\mathbf{a}, \mathbf{b}]+y[\mathbf{b}, \mathbf{c}]+z[\mathbf{c}, \mathbf{a}]=0$$

این برابری‌را در بردارهای **a**، **b** و **c** ضرب اسکالر می‌کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$y(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=0, \quad z(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=0, \quad x(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=0$$

از آن‌جا $(x^2+y^2+z^2)(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2=0$؛ در نتیجه $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=0$. بردارهای **a**، **b** و **c** هم‌صفحه‌اند (درواقع، با صفحه‌ای مثل P موازی‌اند). هر يك از بردارهای $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$، $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ و $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ (بنابر ویژگی‌های I و III از ضرب برداری) یا صفراند و یا با خط راستی عمود بر صفحهٔ P موازی‌اند. به این ترتیب، این سه بردار هم‌راستا می‌شوند.

مثال ۹.۴.۴. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]]=\mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})-\mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \qquad (۴.۲۳)$$

حل. باتوجه به‌دستور (۴.۹) مربوط به ضرب سه‌گانهٔ برداری و با توجه به ویژگی ۴° مربوط به حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ (از اسکالر) بردارها، داریم:

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]]=\mathbf{c}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{d})-\mathbf{d}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})=$$
$$=\mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b})-\mathbf{d}(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})=\mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})-\mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

مثال ۱۰.۴.۴. ثابت کنید:

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}])=(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2 \qquad (۴.۲۴)$$

حل. با توجه به‌اتحاد (۴.۲۳) داریم:

$$[[\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]]=\mathbf{c}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})-\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{c})=$$
$$=\mathbf{c}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})=(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{c}$$

بنابراین

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}])=([\mathbf{a}, \mathbf{b}], (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{c})=$$
$$=(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})=(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})=$$
$$=(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$$

دستورهای (۴.۲۴) و (۴.۲۳)، به ما کمك می‌کنند تا راه‌حل دومی را برای مسألهٔ ۸.۴.۴ به دست آوریم: اگــر بردارهای $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$، $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ و $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ هم‌صفحه باشند، آن وقت حاصل‌ضرب اسکالر سه‌گانهٔ آن‌هـا برابر صفر است. درنتیجه، بـا توجه به دستور (۴.۲۴)، $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. سپس، با توجه به دستور (۴.۲۳) داریم:

$$[(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{c}, \mathbf{a})] = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$$

یعنی بردارهـای $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ و $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ هم‌راستا هستند. به همین ترتیب، تحقیق می‌شود:

$$[(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{b}, \mathbf{c})] = [(\mathbf{b}, \mathbf{c}), (\mathbf{c}, \mathbf{a})] = 0$$

مثال ۱۱.۴.۴. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d} = (\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c})\mathbf{b} + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c}$$

حل. بردار $\mathbf{m} = [(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{c}, \mathbf{d})]$ را درنظرمی گیریم. بنا بردستور (۴.۲۳)

$$\mathbf{m} = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

بردار $\mathbf{m}$ را به این صورت هم می‌توان نوشت:

$$\mathbf{m} = -[(\mathbf{c}, \mathbf{d}), (\mathbf{a}, \mathbf{b})] = [(\mathbf{c}, \mathbf{d}), (\mathbf{b}, \mathbf{a})] =$$
$$= \mathbf{b}(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{b})$$

[دوباره از دستور (۴.۲۳) استفاده کرده‌ایم]. بنابراین

$$\mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{m} = -\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

که از آن‌جا به‌اتحاد مورد نظر می‌رسیم.

مثال ۱۲.۴.۴. $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ را شعاع‌های حامل چهار نقطهٔ A، B، C و D ازفضا، نسبت به‌یك قطب O، می‌گیریم. ثابت کنید، این چهار نقطه، تنها وقتی بریك صفحه واقع‌اندکه داشته باشیم:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{a})$$

حل. چهار نقطهٔ A و B و C و D، وقتی و تنها وقتی در یك صفحه‌اند که

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})=0 \Longleftrightarrow (\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{d}-\mathbf{a})=0$$

با توجه به ویژگی خطی حاصل‌ضرب اسکالر سه بردار و با توجه به ویژگی ۴°، داریم:

$$0=(\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{d}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{d}-\mathbf{a})-$$
$$-(\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{d}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}-\mathbf{a})-(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{d}-\mathbf{a})-$$
$$-(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}-\mathbf{a})+(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{d}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})-(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a})-$$
$$-(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{d})+(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{a})-(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})+(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{a})+$$
$$+(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{d})-(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a})=(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})+(\mathbf{b}, \mathbf{d}, \mathbf{a})-$$
$$-[(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})+(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})]$$

مثال ۰۱۳.۴.۴ بردارهای $\mathbf{a}=\overrightarrow{DA}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{DB}$ و $\mathbf{c}=\overrightarrow{DC}$ را، سه یالی از چهار وجهی $ABCD$ می‌گیریم که از رأس D خارج شده‌اند. بردار ارتفاع $\overrightarrow{DH}$ از چهار وجهی را، که از رأس D برصفحهٔ (ABC) رسم شده است پیدا کنید.

حل. بردار $\overrightarrow{BH}$ با بردارهای ناهم‌راستای $\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ و $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$، هم‌صفحه است. بنابراین، عددهای λ و μ وجود دارند، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{BH}=\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mu(\mathbf{c}-\mathbf{b})$$

بردار $\overrightarrow{DH}$ برصفحهٔ (ABC) عمود است، یعنی با بردار

$$\mathbf{d}=[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}]=[\mathbf{c}-\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}]=[\mathbf{c}, \mathbf{a}]+[\mathbf{a}, \mathbf{b}]+[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$$

هم‌راستا است. بنابراین عدد ν وجود دارد، به‌نحوی که $\overrightarrow{DH}=\nu\mathbf{d}$. با توجه به دور $DHBD$ داریم: $\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{DB}=0$، یعنی

$$\nu[(\mathbf{c}, \mathbf{a})+(\mathbf{a}, \mathbf{b})+(\mathbf{b}, \mathbf{c})]=\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda-\mu)\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$$

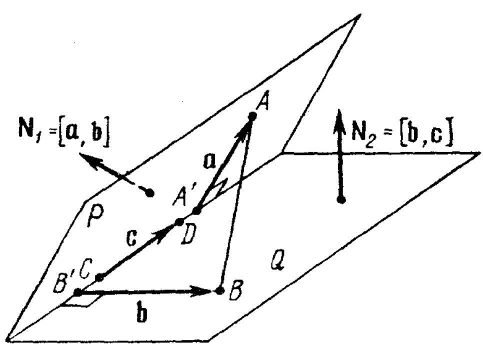
اگر دو طرف رابطهٔ بالا را، در $\mathbf{d}$، ضرب اسکالر کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\nu|\mathbf{d}|^{2}=(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \Rightarrow \nu=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{d}|^{2}}$$

به این ترتیب

$$DH=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{|[\mathbf{c}, \mathbf{a}]+[\mathbf{a}, \mathbf{b}]+[\mathbf{b}, \mathbf{c}]|^{2}}([\mathbf{c}, \mathbf{a}], [\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$$

مثال ۱۴.۴.۴. نقطه‌هــای A و B روی دو وجه مختلف فرجه‌ای داده شده‌اند و می‌دانیم، پاره‌خط راست $[AB]$، با دو وجه فرجه، زاویه‌های برابر می‌سازد. ثابت کنید، این وضع، وقتی و تنها وقتی پیش می‌آید کــه دو نقطهٔ A و B از یال فرجه (فصل مشترك دو صفحه)، به‌یك فاصله باشد.



شکل ۱۶.۴

حل. P و Q را وجه‌های این فرجه می‌گیریم (شکل ۱۶.۴). $\mathbf{N}_1$ و $\mathbf{N}_2$ را، به ترتیب، بردارهای نرمال صفحه‌های P و Q، $A\in P$ و $B\in Q$؛ C و D را دو نقطهٔ متمایز از یال فرجه و، بالاخره، A' و B' را پای عمودهای وارد از نقطه‌های A و B برخط راست (CD) فرض می‌کنیم. بردارهــای

$\mathbf{a}=\overrightarrow{A'A}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{B'B}$ و $\mathbf{c}=\overrightarrow{CD}$، تشکیل یك پایه مـی‌دهند و $\mathbf{a}\perp\mathbf{c}$، $\mathbf{b}\perp\mathbf{c}$. بردارهای $\mathbf{N}_1$ و $\mathbf{N}_2$ را می‌توانیم، این‌طور انتخاب کنیم:

$$\mathbf{N}_1=[\mathbf{a},\mathbf{c}],\ |\mathbf{N}_1|=|\mathbf{a}||\mathbf{c}|,\ \mathbf{N}_2=[\mathbf{b},\mathbf{c}],\ |\mathbf{N}_2|=|\mathbf{b}||\mathbf{c}|$$

با توجه به دستور (۳.۵۳)، پاره‌خط راست $[AB]$، وقتی و تنها وقتی، بـا صفحه‌های P و Q، زاویه‌های برابر می‌سازد که داشته باشیم:

$$\frac{|(\mathbf{N}_1,\overrightarrow{AB})|}{|\mathbf{N}_1||\overrightarrow{AB}|}=\frac{|(\mathbf{N}_2,\overrightarrow{AB})|}{|\mathbf{N}_2||\overrightarrow{AB}|}\ \text{یا}\ \frac{|(\overrightarrow{AB},\mathbf{a},\mathbf{c})|}{|\mathbf{a}|}=\frac{|(\overrightarrow{AB},\mathbf{b},\mathbf{c})|}{|\mathbf{b}|}$$

بردار $\overrightarrow{AB}$ را، نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ تجزیه می‌کنیم:

$$\overrightarrow{AB}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\lambda\mathbf{c}$$

(λ، معلوم نیست). بـا توجه به ویژگی‌هـای 7° و 4° حاصل‌ضرب اسکالر سه بردار، داریم:

$$(\overrightarrow{AB},\mathbf{a},\mathbf{c})=-(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c})+\lambda(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{c})=$$
$$=(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}),\ (\overrightarrow{AB},\mathbf{b},\mathbf{c})=-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c})$$

به این ترتیب، پاره‌خط راست $[AB]$، تنهـا وقتی بـا صفحه‌هـای P و Q، زاویه‌های برابرمی‌سازد که داشته باشیم: $\frac{1}{|\mathbf{a}|}=\frac{1}{|\mathbf{b}|}$، یعنی $|AA'|=|BB'|$.

مثال ۱۵.۴.۴. بردارهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ هم‌صفحه نیستند. ثابت کنید، بردارهـای $\mathbf{f}_1=[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]$، $\mathbf{f}_2=[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1]$ و $\mathbf{f}_3=[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]$، بـا ترتیب مشخصی، یك پایهٔ راست‌گرد می‌سازند.

حل. بنا به دستور (۴.۲۴) داریم:

$$(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)^2$$

چون $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ یك پـایـه است، پس $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)^2>0$. بنابراین، با توجه بـه ویژگی 3° از حاصل‌ضرب اسکالر سه بـردار، $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3\}$، پایه‌ای راست‌گرد است.

اگر پایهٔ $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ را از روی پایهٔ $\{e_1, e_2, e_3\}$ طوری بسازیم که داشته باشیم:

$$e'_1 = \frac{[e_2, e_3]}{(e_1, e_2, e_3)}, \quad e'_2 = \frac{[e_3, e_1]}{(e_1, e_2, e_3)}, \quad e'_3 = \frac{[e_1, e_2]}{(e_1, e_2, e_3)} \qquad (۴.۲۵)$$

آن وقت، پایهٔ $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ را، معکوس (یا متقابل) پایهٔ $\{e_1, e_2, e_3\}$ گویند. از ویژگی‌های حاصل‌ضرب اسکالر سه بردار، می‌توان نتیجه گرفت که، برای همه مقدارهای ۳، ۲، ۱ $= i, j$ داریم:

$$(e_i, e'_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \qquad (۴.۲۶)$$

و با توجه به‌دستور (۴.۲۴):

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = \frac{1}{(e_1, e_2, e_3)} \qquad (۴.۲۷)$$

مثال ۱۶.۴.۴. مطلوب است شعاع حامل $\mathbf{x}$، مربوط به نقطهٔ M، نقطهٔ مشترک سه صفحهٔ

$$P_1 : (\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) = D_1, \; P_2 : (\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) = D_2, \; P_3 : (\mathbf{r}, \mathbf{N}_3) = D_3$$

به‌شرطی که بدانیم: $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3) \neq 0$.

حل. بردار مطلوب $\mathbf{x}$، در این دستگاه معادله‌ها صدق می‌کند:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{N}_1) = D_1, \; (\mathbf{x}, \mathbf{N}_2) = D_2, \; (\mathbf{x}, \mathbf{N}_3) = D_3 \qquad (۴.۲۸)$$

تجزیهٔ بردار $\mathbf{x}$ را در پایهٔ $\{\mathbf{N}'_1, \mathbf{N}'_2, \mathbf{N}'_3\}$، عکس پایهٔ $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$ جست وجو می‌کنیم:

$$\mathbf{x} = y\mathbf{N}'_1 + z\mathbf{N}'_2 + t\mathbf{N}'_3$$

بنابراین

$$(\mathbf{x}, \mathbf{N}_1) = y(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}'_1) + z(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}'_2) + t(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}'_3) = y$$

[(۴.۲۶) را ببینید]. به همین ترتیب

$$(\mathbf{x}، \mathbf{N}_۲)=z، \ (\mathbf{x}، \mathbf{N}_۳)=t$$

یعنی، دستگاه معادله‌های (۴.۲۸)، به این صورت درمی‌آیند:

$$y=D_۱، z=D_۲، t=D_۳$$

به این ترتیب

$$\mathbf{x}=D_۱\mathbf{N}'_۱+D_۲\mathbf{N}'_۲+D_۳\mathbf{N}'_۳=$$

$$=\frac{D_۱[\mathbf{N}_۲، \mathbf{N}_۳]+D_۲[\mathbf{N}_۳، \mathbf{N}_۱]+D_۳[\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲]}{(\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲، \mathbf{N}_۳)} \qquad (۴.۲۹)$$

مثال ۱۷.۴.۴. بردار $\mathbf{x}$ را طوری پیدا کنید که با سه‌بردار ناهم‌صفحهٔ $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$، زاویه‌های برابر بسازد.

حل. پیدا کردن $\mathbf{x}$، به معنای حل این دستگاه است:

$$(\mathbf{x}، \mathbf{a})=\alpha، \ (\mathbf{x}، \mathbf{b})=\beta، \ (\mathbf{x}، \mathbf{c})=\gamma$$

که در آن $\alpha=|\mathbf{x}||\mathbf{a}|cos\varphi$، $\beta=|\mathbf{x}||\mathbf{b}|cos\varphi$، $\gamma=|\mathbf{x}||\mathbf{c}|cos\varphi$؛ و φ عبارت است از زاویه‌ای که $\mathbf{x}$ با هریك از بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ می‌سازد. با توجه به دستور (۴.۲۹)، برای دستگاه (۴.۲۸) داریم:

$$\mathbf{x}=\frac{\alpha[\mathbf{b}، \mathbf{c}]+\beta[\mathbf{c}، \mathbf{a}]+\gamma[\mathbf{a}، \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c})}=$$

$$=|\mathbf{x}|cos\varphi\frac{|\mathbf{a}|[\mathbf{b}، \mathbf{c}]+|\mathbf{b}|[\mathbf{c}، \mathbf{a}]+|\mathbf{c}|[\mathbf{a}، \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c})}$$

ازآن جا که، بنا به فرض، طول بردار $\mathbf{x}$ می‌تواند دلخواه باشد، می‌توانیم بردار زیر را، به عنوان جواب، در نظر بگیریم:

$$\mathbf{x}=\frac{|\mathbf{a}|[\mathbf{b}، \mathbf{c}]+|\mathbf{b}|[\mathbf{c}، \mathbf{a}]+|\mathbf{c}|[\mathbf{a}، \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c})}t$$

که در آن، t، می‌تواند هر عدد حقیقی مخالف صفر باشد.

مثال ۱۸.۴.۴*. ثابت کنید، برای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، $\mathbf{c}$، $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ داریم:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) & (\mathbf{x}, \mathbf{b}) & (\mathbf{x}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{a}) & (\mathbf{y}, \mathbf{b}) & (\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}) & (\mathbf{z}, \mathbf{b}) & (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{vmatrix} \qquad (۴.۳۰)$$

حل. اگر داشته باشیم: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ۰$، به‌معنای آن است که، بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ هم صفحه‌اند. در این صورت، می‌توان یکی از این سه بردار، و مثلاً بردار $\mathbf{a}$ را، نسبت به دو تای دیگر تجزیه کرد:

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$$

بنابراین

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{b}) + \beta(\mathbf{x}, \mathbf{c}),$$
$$(\mathbf{y}, \mathbf{a}) = \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{b}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{c}),$$
$$(\mathbf{z}, \mathbf{a}) = \alpha(\mathbf{z}, \mathbf{b}) + \beta(\mathbf{z}, \mathbf{c})$$

به این ترتیب، در دترمینان (۴.۳۰)، ستون اول، یک ترکیب خطی از ستون‌های دوم و سوم است؛ یعنی این دترمینان برابر صفر است. پس، در حالت $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ۰$، برابری (۴.۳۰) برقرار است: هر دو طرف رابطه، برابر صفر می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq ۰$، یعنی $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ یک پایه است. بردارهای $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ را، نسبت به پایهٔ $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'\}$، عکس پایهٔ $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$، تجزیه می‌کنیم:

$$\mathbf{x} = \alpha_۱\mathbf{a}' + \alpha_۲\mathbf{b}' + \alpha_۳\mathbf{c}',$$
$$\mathbf{y} = \beta_۱\mathbf{a}' + \beta_۲\mathbf{b}' + \beta_۳\mathbf{c}',$$
$$\mathbf{z} = \gamma_۱\mathbf{a}' + \gamma_۲\mathbf{b}' + \gamma_۳\mathbf{c}'$$

بنابر دستور (۴.۲۱): $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \Delta(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}')$، که در آن

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_۱ & \alpha_۲ & \alpha_۳ \\ \beta_۱ & \beta_۲ & \beta_۳ \\ \gamma_۱ & \gamma_۲ & \gamma_۳ \end{vmatrix}$$

اگردستور(۴.۲۷) را به‌یادآوریم، سمت چپ برابری (۴.۳۰) را، می‌توان این طور نوشت:

$$(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c})(\mathbf{x}، \mathbf{y}، \mathbf{z})=(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c})(\mathbf{a}'، \mathbf{b}'، \mathbf{c}').\Delta=\Delta$$

از طرف دیگر، با توجه به (۴.۲۶):

$$(\mathbf{x}، \mathbf{a})=(\mathbf{a}، \mathbf{x})=(\mathbf{a}، \alpha_۱\mathbf{a}'+\alpha_۲\mathbf{b}'+\alpha_۳\mathbf{c}')=\alpha_۱،$$

$$(\mathbf{x}، \mathbf{b})=\alpha_۲، \ (\mathbf{x}، \mathbf{c})=\alpha_۳، \ (\mathbf{y}، \mathbf{a})=\beta_۱، \ (\mathbf{y}، \mathbf{b})=\beta_۲،$$

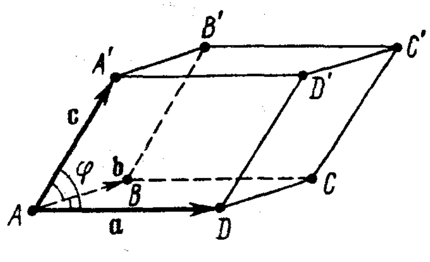
$$(\mathbf{y}،\mathbf{c})=\beta_۳، \ (\mathbf{z}، \mathbf{a})=\gamma_۱، \ (\mathbf{z}، \mathbf{b})=\gamma_۲، \ (\mathbf{z}-\mathbf{c})=\gamma_۳$$

یعنی، عبارت سمت راست برابری (۴.۳۰)، برابر است با دترمینان Δ.

مثال ۱۹.۴.۴ °. در متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$، طول هریك از یال‌ها برابر واحد و $\widehat{DAB}=\widehat{DAA'}=\widehat{BAA'}$. مقدار هریك از این زاویه‌ها را پیدا کنید، به شرطی که حجم متوازی‌السطوح برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ باشد.

حل. با توجه به دستور (۴.۳۰) داریم:

$$(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c})^۲=\begin{vmatrix}(\mathbf{a}، \mathbf{a}) & (\mathbf{a}، \mathbf{b}) & (\mathbf{a}، \mathbf{c})\\(\mathbf{a}، \mathbf{b}) & (\mathbf{b}، \mathbf{b}) & (\mathbf{b}، \mathbf{c})\\(\mathbf{a}، \mathbf{c}) & (\mathbf{b}، \mathbf{c}) & (\mathbf{c}، \mathbf{c})\end{vmatrix} \qquad (۴.۳۱)$$



شکل ۱۷.۴

فرض می کنیم: $\mathbf{a}=\overrightarrow{AD}$، $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$ و $\mathbf{c}=\overrightarrow{AA'}$. حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AA'}$ بنا شود، چنین است:

$$V_{ABCDA'B'C'D'}=$$

$$=\sqrt{\begin{vmatrix} (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD}) & (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) & (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AA'}) \end{vmatrix}} \quad (۴.۳۲)$$

بنا به فرض $|AD|=|AB|=|AA'|=۱$، یعنی

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AA'})=۱,$$

$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})=(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'})=\cos\varphi,$$

که در آن $\varphi=\widehat{DAB}=\widehat{DAA'}=\widehat{BAA'}$ (شکل ۱۷.۴). با توجه به‌دستور (۴.۳۲) داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\sqrt{\begin{vmatrix} ۱ & w & w \\ w & ۱ & w \\ w & w & ۱ \end{vmatrix}}=\sqrt{۲w^۳-۳w^۲+۱}$$

که در آن $w=\cos\varphi$. از حل معادلهٔ $۲w^۳-۳w^۲+\frac{۱}{۲}=۰$ به‌دست‌می‌آید:

$$۰=۲w^۳-۳w^۲+\frac{۱}{۲}=۲w^۳-w^۲-\left(۲w^۲-\frac{۱}{۲}\right)=$$

$$=۲w^۲\left(w-\frac{۱}{۲}\right)-۲\left(w+\frac{۱}{۲}\right)\left(w-\frac{۱}{۲}\right)=$$

$$=۲\left(w-\frac{۱}{۲}\right)\left(w-\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}\right)\left(w+\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}\right)$$

که با در نظر گرفتن $|w|=|\cos\varphi|\leqslant ۱$، خواهیم داشت:

$$\varphi_۱=\arccos\frac{۱}{۲}=۶۰^\circ,$$

$$\varphi_2 = arc\cos\frac{1-\sqrt{3}}{2} = 180° - arc\cos\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

مثال ۲۰.۴.۴*. حجم چهاروجهی $ABCD$ را برحسب طول یال‌های $a=|AD|$، $b=|BD|$، $c=|CD|$ و زاویه‌های مسطحهٔ کنج به رأس D، یعنی $\alpha = ADB$، $\beta = BDC$ و $\gamma = CDA$ محاسبه کنید.

حل. از نتیجهٔ مثال ۳.۴.۴ و دستور (۴.۳۲) استفاده می‌کنیم:

$$V_{ABCD} =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DA}) & (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) & (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) \\ (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) & (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DB}) & (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) \\ (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) & (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) & (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DC}) \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\alpha & ac\cos\gamma \\ ab\cos\alpha & b^2 & bc\cos\beta \\ ac\cos\gamma & bc\cos\beta & c^2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma}$$

مثال ۲۱.۴.۴. ثابت کنید، حجم چهاروجهی $ABCD$ را می‌توان با دستور

$$V = \frac{1}{6}|AD|\cdot|BC|\cdot|d\sin\varphi|$$

به دست آورد که، در آن، φ زاویهٔ بین خط‌های راست (AD) و (BC)، و d فاصلهٔ بین این دو خط راست است.

حل. حجم V چهاروجهی $ABCD$ برابر است با

$$V = \frac{1}{6}|(AB, AD, BC)|$$

(مثال ۳.۴.۴ را ببینید). $M \in (AD)$ و $N \in (BC)$ را، نقطه‌های برخورد

عمود مشترك خطهای راست (AD) و (BC) با این دو خط می گیریم؛ پس $d=|\overrightarrow{MN}|$، و در ضمن، بردار $\overrightarrow{MN}$، که بر بردارهای $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}$ عمود است، با بردار $[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}]$ هم‌راستا است. λ و μ را عددهایی فرض‌می کنیم که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BN}=\mu\overrightarrow{BC}$. بنابراین

$$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MN}-\mu\overrightarrow{BC},$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})=\lambda(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})-$$

$$-\mu(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{MN}, [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}])$$

از آن‌جا

$$V=\frac{1}{6}|(MN, [AD, BC])|=\frac{1}{6}d|[AD, BC]|$$

(بردارهای $[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}]$ و $\overrightarrow{MN}$ هم‌راستا هستند). چون

$$|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}]|=|AD|\cdot|BC|\cdot\sin\varphi$$

بنابراین

$$V=\frac{1}{6}|AD|\cdot|BC|\cdot d\sin\varphi$$

مثال **۲۲.۴.۴** *. چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. نقطه‌های M، N و P را، به‌ترتیب، بر یال‌های $[AB]$، $[CD]$ و امتداد یال $[AC]$ (ازطرف C) انتخاب کرده‌ایم، به نحوی که

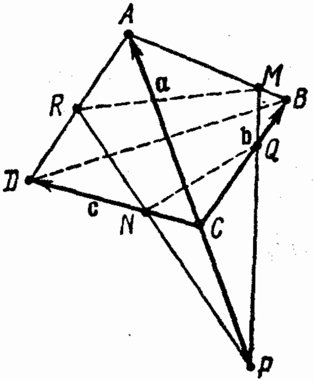
$$|AM|:|AB|=\lambda, \quad |CN|:|CD|=\mu, \quad |PC|:|CA|=\nu$$

مطلوب است حجم بخشی که به وسیلهٔ صفحهٔ (MNP) از چهاروجهی جدا می‌شود، به شرطی که حجم خود چهاروجهی برابر V باشد.

حل. R و Q را، نقطه‌های برخورد صفحهٔ (MNP) با خطهای‌راست (BC) و (DA) می گیریم (شکل ۱۸.۴). حجم چندوجهی $RAMQCN$ برابر است با V_1-V_2 که در آن

$$V_۱=\frac{۱}{۶}|(\overrightarrow{PA}، \overrightarrow{PM}، \overrightarrow{PR})|، V_۲=$$

$$=\frac{۱}{۶}|(\overrightarrow{PC}، \overrightarrow{PQ}، \overrightarrow{PN})|$$



شکل ۱۸۰۴

به ترتیب، عبارتند از حجم‌های چهاروجهی‌های $PRAM$ و $PNCQ$، به محاسبهٔ بردارهایی می‌پردازیم که در حجم این چهاروجهی‌ها دخالت دارند. فرض می‌کنیم: $\overrightarrow{CA}=\mathbf{a}$، $\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}$ و $\overrightarrow{CD}=\mathbf{c}$. داریم:

$$V=\frac{۱}{۶}|(\mathbf{a}، \mathbf{b}، \mathbf{c})|، \ \overrightarrow{PM}=$$

$$=(\nu+۱)\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

فرض می‌کنیم: $\overrightarrow{PQ}=x\overrightarrow{PM}$ و $\overrightarrow{CQ}=y\mathbf{b}$ و با استفاده از دور $PCQP$، x و y را محاسبه می‌کنیم:

$$\circ=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{PQ}=\nu\mathbf{a}+y\mathbf{b}-x[(\nu+۱-\lambda)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}]$$

که با توجه به منحصر بودن تجزیه و رابطهٔ با پایهٔ $\{\mathbf{a}، \mathbf{b}\}$ به دست می‌آید:

$$y=x\lambda، \ \ \nu=x(\nu+۱-\lambda)$$

بنابراین $x=\dfrac{\nu}{۱+\nu-\lambda}$.

اکنون فرض می‌کنیم: $\overrightarrow{PR}=z\overrightarrow{PN}$ و $\overrightarrow{RA}=w\overrightarrow{DA}$. مقدارهای مجهول z و w را، با استفاده از دور $PRAP$ پیدا می‌کنیم:

$$\circ=\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RA}-\overrightarrow{PA}=z(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CN})+w(\mathbf{a}-\mathbf{c})-\overrightarrow{PA}=$$

$$=(z\nu+w-\nu-۱)\mathbf{a}+(z\mu-w)\mathbf{c}$$

بنابراین $z\nu+w-\nu-۱=\circ$ و $z\mu-w=\circ$. ازمجموع این دو برابری،

به دست می‌آید: $z=\frac{\nu+1}{\mu+\nu}$ و سرانجام

$$V_1=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}\nu+1 & 0 & 0\\ \nu+1-\lambda & \lambda & 0\\ z\nu & 0 & z\mu\end{vmatrix}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\right|=$$

$$=(\nu+1)\lambda z\mu V=\frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V;$$

$$V_2=\frac{1}{6}\left|\left(\frac{\nu}{1+\nu}PA, xPM, \frac{1}{z}PR\right)\right|=\frac{\nu x}{z(\nu+1)}V_1;$$

$$V_1-V_2=\left(1-\frac{\nu x}{z(\nu+1)}\right)\frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V=$$

$$=\left(1-\frac{\nu^2(\mu+\nu)}{(\nu+1)^2(1+\nu-\lambda)}\right)\frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V$$

حالت خاصی از این‌جواب جالب است. اگر فرض کنیم $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$، یعنی صفحهٔ (MNP) از وسط یال‌های متنافر چهاروجهی بگذرد. در این حالت (مستقل ازمقدار ν) داریم: $V_1-V_2=\frac{1}{2}V$؛ یعنی صفحه‌ای که از وسط یال‌های متنافر چهاروجهی عبور کند، چهاروجهی را به‌دو بخش هم‌ارز تقسیم می‌کند.

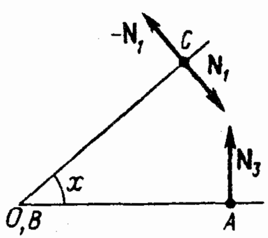
مثال ۲۳.۴.۴*. (قانون کسینوس، برای کنج سه وجهی). زاویه‌های مسطحهٔ $\widehat{AOB}$، $\widehat{BOC}$ و $\widehat{COA}$ از کنج سه‌وجهی $OABC$ (شکل ۱۹.۴)، به ترتیب، برابرند با α، β و γ. ثابت کنید، زاویهٔ مسطحهٔ B از فرجهٔ به‌یال $[OB)$، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\cos B=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \qquad (۴.۳۳)$$

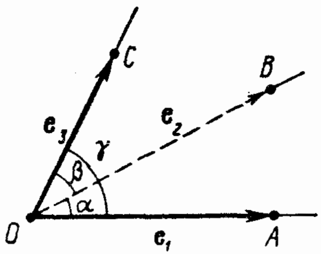
حل. بردارهای واحد $\mathbf{e}_1 = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$، $\mathbf{e}_2 = \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$ و $\mathbf{e}_3 = \frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$\mathbf{N}_1 = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3]}{|\mathbf{N}_1|} = |\mathbf{e}_1|\cdot|\mathbf{e}_2| sin\beta = sin\beta, \ \mathbf{N}_2 = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{|\mathbf{N}_2|} = sin\alpha$$

بردارهای نرمال صفحه‌های (COB) و (AOB) هستند (شکل ۲۰.۴). این شکل، تصویر زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ یـال $[OB)$ را بر صفحهٔ عمود بر (OB) نشان می‌دهد.



شکل ۲۰.۴



شکل ۱۹.۴

بنابر ویژگی زاویه‌هایی که ضلع‌های متناظر عمود برهم دارند:

$$cosB = cos(180^\circ - (\widehat{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2})) = -\frac{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}{|\mathbf{N}_1|\cdot|\mathbf{N}_2|} = -\frac{(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)}{sin\alpha sin\beta}$$

برای محـاسبهٔ $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$، از دستور مربوط بـه ضرب برداری سه بردار استفاده می‌کنیم:

$$[\mathbf{e}_2, \mathbf{N}_1] = [\mathbf{e}_2, (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)] = \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$$

و در نتیجه

$$(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)=(\mathbf{N}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{N}_1)=(\mathbf{e}_1, [\mathbf{e}_2, \mathbf{N}_1])=$$
$$=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)-(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)|\mathbf{e}_2|^2=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma$$

بنا براین

$$\cos\hat{B}=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

مثال ۲۴.۴.۴*. ثابت کنید: a) هر زاویهٔ مسطحهٔ کنج سه وجهی، از مجموع دو زاویهٔ دیگر کمتر است؛ b) مجموع زاویه‌های هر کنج سه‌وجهی از ۳۶۰ درجه کمتر است.

حل. a) از نمادهای مسألهٔ قبل استفاده می‌کنیم. چون

$$0^\circ<\alpha<180^\circ,\quad 0^\circ<\beta<180^\circ,\quad 0^\circ<\hat{B}<180^\circ$$

اگر از دستور (۴.۳۳) استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\cos\gamma=\cos(\alpha+\beta)+(1+\cos\hat{B})\sin\alpha\sin\beta>\cos(\alpha+\beta)$$

چون کسینوس، در بازهٔ $[0^\circ, 180^\circ]$ نزولی یکنوا (مونوتون) است، از نابرابری $\cos\gamma>\cos(\alpha+\beta)$ می‌توان نتیجه گرفت که، با شرط $0^\circ<\alpha+\beta\leqslant 180^\circ$، داریم $\gamma<\alpha+\beta$. در حالتی که داشته باشیم: $\alpha+\beta>180^\circ$، آن وقت نابرابری $\alpha+\beta>\gamma$ روشن است، زیرا $\gamma<180^\circ$.

b) نابرابری بالا را به این صورت می‌نویسیم:

$$0<\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

با استفاده ازهمان نابرابری بخش a) می‌توان نوشت:

$$0^\circ<\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}<\frac{\alpha+\beta}{2}<180^\circ$$

یعنی $\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{۲}>۰$ و به‌دست می‌آید: $\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۲}>۰$. و چون $۰°<\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta+\gamma)<۲۷۰°$، بنا بر این

$$۰<\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta+\gamma)<۱۸۰° \Longleftrightarrow \alpha+\beta+\gamma<۳۶۰°$$

بخش ۵.۴. مسأله‌هایی در بارهٔ خط راست و صفحه

مثال ۱.۵.۴ • معادلهٔ بردار پارامتری خط راست l، فصل مشترك دو صفحهٔ غیرموازی $P_۱$ و $P_۲$ را بنویسید، به شرطی‌که

$$P_۱:(\mathbf{r}, \mathbf{N}_۱)=D_۱ \;,\; P_۲:(\mathbf{r}, \mathbf{N}_۲)=D_۲$$

حل. روش اول. بردار $\mathbf{r}$، وقتی و تنها وقتی، شعاع حامل نقطه‌ای از خط راست l است که داشته باشیم:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{N}_۱)=D_۱,\;(\mathbf{r}, \mathbf{N}_۲)=D_۲,$$

$$\mathbf{N}_۱(\mathbf{r}, \mathbf{N}_۲)-\mathbf{N}_۲(\mathbf{r}, \mathbf{N}_۱)=D_۲\mathbf{N}_۱-D_۱\mathbf{N}_۲$$

(معادلهٔ سوم دستگاه معادله‌های فوق، نتیجهٔ آشکار دو معادلهٔ اول است). از دستور حاصل‌ضرب‌سه‌گانهٔ برداری استفاده می‌کنیم ومعادلهٔ سوم این‌دستگاه را، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}]=\mathbf{M} \qquad (۴.۳۴)$$

که در آن $\mathbf{a}=[\mathbf{N}_۱, \mathbf{N}_۲]$ و $\mathbf{M}=D_۲\mathbf{N}_۱-D_۱\mathbf{N}_۲$. معادلهٔ (۴.۳۴)، معادلهٔ برداری خط راستی مانند l^* است (مثال ۳.۳.۴ را ببینید) و آن را به‌طور کامل تعریف می‌کند. این معادلهٔ (۴.۳۴)، برای همهٔ شعاع‌های حامل نقطه‌های واقع برخط‌راست l، صادق است؛ بنابراین $l\subset l^*$، یعنی (۴.۳۴). معادلهٔ برداری خط راست l است. این معادله را به صورت پارامتری می‌نویسیم. طبق دستور (۴.۱۳) داریم:

$$\mathbf{r}=\frac{[(\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲)، D_۲\mathbf{N}_۱-D_۱\mathbf{N}_۲]}{|[\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲]|^۲}+[\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲]t، t\in\mathbf{R} \quad (۴.۳۵)$$

روش دوم. خط راست l، روی هر دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ قرار دارد و بر هر دو بردار $\mathbf{N}_۱$ و $\mathbf{N}_۲$ عمود است. درنتیجه (مثال ۹.۳.۴ را ببینید)، $\mathbf{a}=[\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲]$، بردار هادی خط راست l است. بردار $\mathbf{r}_۰$ (شعاع حامل نقطهٔ اولیهٔ خط راست l)، به عنوان شعاع حامل پای عمود وارد از قطب برخط راست l به‌دست می‌آید، یعنی به‌عنوان جواب دستگاه معادله‌های

$$(\mathbf{r}_۰ ، \mathbf{N}_۱)=D_۱ ، \quad (\mathbf{r}_۰ ، \mathbf{N}_۲)=D_۲ ، \quad (\mathbf{r}_۰ ، \mathbf{a})=۰$$

($\mathbf{a}=[\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲]$). این دستگاه معادله‌ها، از نوع (۴.۲۸) است؛ وبنا بر دستور (۴.۲۹)، جواب آن به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{r}_۰=\frac{D_۱[\mathbf{N}_۲ ، \mathbf{a}]+D_۲[\mathbf{a} ، \mathbf{N}_۱]+۰.[\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲]}{(\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲ ، \mathbf{a})}=$$

$$=\frac{[\mathbf{a} ، D_۲\mathbf{N}_۱-D_۱\mathbf{N}_۲]}{(\mathbf{a} ، [\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲])}=\frac{[(\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲)، D_۲\mathbf{N}_۱-D_۱\mathbf{N}_۲]}{|[\mathbf{N}_۱ ، \mathbf{N}_۲]|^۲}$$

و معادلهٔ پارامتری l، به این صورت است:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_۰+\mathbf{a}t ، \quad t\in\mathbf{R}$$

که همان معادلهٔ (۴.۳۵) است.

مثال ۴.۵.۲. معادلهٔ خط راست l، به‌این‌صورت، داده شده است:

$$l: x+y-z+۱=۰ ، \quad x+۲y+z-۴=۰$$

معادلهٔ پارامتری آن را پیدا کنید.

حل. ازهمان نمادهای مسألهٔ قبل استفاده می کنیم:

$$\mathbf{N}_۱=(۱ ، ۱ ، -۱) ، \quad D_۱=-۱ ، \quad \mathbf{N}_۲=(۱ ، ۲ ، ۱) ، \quad D_۲=۴ ،$$

$$D_۲\mathbf{N}_۱-D_۱\mathbf{N}_۲=(۵ ، ۶ ، -۳) ،$$

$$\mathbf{a}=[\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۱ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۱\end{vmatrix}=(۳، -۲، ۱)،$$

$$\mathbf{r}_\circ=\frac{۱}{۹+۴+۱}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ ۳ & -۲ & ۱\\ ۵ & ۶ & -۳\end{vmatrix}=\frac{۱}{۱۴}(\circ، ۱۴، ۲۸)=(\circ، ۱، ۲)$$

درنتیجه، معادلهٔ خط راست l به‌این‌صورت است:

$$x=\circ+۳t، \ y=۱-۲t، \ z=۲+t$$

و یا $\frac{x}{۳}=\frac{y-۱}{-۲}=\frac{z-۲}{۱}$.

مثال ۳۰۵۰۴. تصویر قائم $M_*(\mathbf{r}_*)$ نقطهٔ $M_\circ(\mathbf{r}_\circ)$ را روی خط‌راست l پیدا کنید، به‌شرطی‌که خط راست l، فصل مشترك این دو صفحه باشد:

$$P_۱:(\mathbf{r}_۱، \mathbf{N}_۱)=D_۱; \ \ P_۲:(\mathbf{r}_۲، \mathbf{N}_۲)=D_۲$$

حل. بردار $\mathbf{a}=[\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲]$، بردار هادی خط راست l است. بنا به فرض $M_*\in l$ و $\mathbf{a}\perp\overrightarrow{M_\circ M_*}$، یعنی $(\mathbf{r}_*-\mathbf{r}_\circ، \mathbf{a})=\circ$. به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم که، از آن، شعاع حامل نقطهٔ M_* یعنی $\mathbf{r}_*$ به دست می‌آید:

$$(\mathbf{r}_*، \mathbf{N}_۱)=D_۱، \ (\mathbf{r}_*، \mathbf{N}_۲)=D_۲، \ (\mathbf{r}_*، \mathbf{a})=D_۳$$

که در آن $\mathbf{a}=[\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲]$ و $D_۳=(\mathbf{r}_\circ، \mathbf{a})=(\mathbf{r}_\circ، \mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲)$. با توجه به‌دستور (۴۰۲۹) داریم:

$$\mathbf{r}_*=\frac{D_۱[\mathbf{N}_۲، \mathbf{a}]+D_۲[\mathbf{a}، \mathbf{N}_۱]+D_۳\mathbf{a}}{(\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲، \mathbf{a})}=$$

$$=\frac{[(\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲)، D_۲\mathbf{N}_۱-D_۱\mathbf{N}_۲]+(\mathbf{r}_\circ، \mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲)[\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲]}{|[\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲]|^۲}$$

مثال ۴.۵.۴ (دسته صفحه‌هایی که از خط راست مفروضی می‌گذرند).
معادلهٔ صفحه‌هایی را بنویسید که برخط راست l، فصل مشترك دوصفحهٔ زیر، می گذرند:

$$P_1 : (\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) + D_1 = 0,$$

$$P_2 : (\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) + D_2 = 0, \quad [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2] \neq 0$$

حل. $\mathbf{a}$، بردار هادی خط راست l به صورت $\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$ است. P^* را صفحهٔ دلخواهی‌می گیریم که‌از l گذشته باشد. بردار نرمال‌این صفحه، $\mathbf{N}^* \neq 0$، بر بردار $\mathbf{a}$ عمود است، یعنی با صفحه‌ای‌که $\mathbf{N}_1$ و $\mathbf{N}_2$ یك پایه را در آن تشکیل می‌دهند، موازی است. بنابراین، عددهای α و β وابسته به $\mathbf{N}^*$ وجود دارند، به‌نحوی‌که داشته باشیم:

$$\mathbf{N}^* = \alpha \mathbf{N}_1 + \beta \mathbf{N}_2, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0$$

بنابراین، معادلهٔ P^*، به‌صورت زیر است:

$$(\mathbf{r}, \alpha \mathbf{N}_1 + \beta \mathbf{N}_2) = D^*$$

عدد D^* هم به وسیلهٔ صفحهٔ P^* معین می‌شود: می‌توان آن را برحسب α و β بیان‌کرد. برای‌پیداکردن رابطهٔ بین α و β و D^*، و نقطهٔ دلخواه $M_0 \in l$ را، باشعاع‌حامل $\mathbf{r}_0$ درنظرمی گیریم. چون $M_0 \in P_1$، پس $(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1) = -D_1$؛ و چون $M_0 \in P_2$، بنابراین $(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_2) = -D_2$. سرانجام

$$D^* = (\mathbf{r}_0, \alpha \mathbf{N}_1 + \beta \mathbf{N}_2) = -\alpha D_1 - \beta D_2$$

(چون $M_0 \in P^*$). به‌این‌ترتیب، معادلهٔ هرصفحه‌ای مثل P^* که از خط‌راست l بگذرد، چنین است:

$$(\mathbf{r}_1, \alpha \mathbf{N}_1 + \beta \mathbf{N}_2) = -\alpha D_1 - \beta D_2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \alpha\{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) + D_2\} = 0 \qquad (۴.۳۶)$$

که درآن، α و β عددهایی هستند‌که با صفحهٔ P^* مشخص می‌شوند و هر دو باهم، برابر صفر نیستند. برعکس، اگر α و β را عددهایی دلخواه بگیریم،

به‌نحوی که با هم برابر صفر نباشند، آن‌وقت، معادلهٔ (۴.۳۶)، معادلهٔ صفحهٔ مشخصی است کـه ز l عبور می‌کند. [اگـر $\mathbf{r}_0$ شعاع حامل نقطهٔ دلخواه $M_0 \in l$ باشد، آن وقت

$$M_0 \in P_1 : (\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1) + D_1 = 0;\ M_0 \in P_2 : (\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_2) + D_2 = 0$$

و از آن‌جا

$$\alpha\{(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_2) + D_2\} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

یعنی M_0 برصفحه‌ای قرار دارد که با معادلهٔ (۴.۳۶) مشخص شده است.]

معادلهٔ (۴.۳۶)، معادلهٔ دسته صفحه‌هایی است کـه بر فصل مشترك دو صفحهٔ P_1 و P_2 می‌گذرند. اگـر معادلهٔ صفحه‌هـای P_1 و P_2، به صورت مختصاتی داده شده باشند:

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

آن‌گاه، با مشخص کردن بردارهای نرمال

$$\mathbf{N}_1 = (A_1, B_1, C_1),\ \mathbf{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

به دست می‌آید:

$$P_1 : (\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) + D_1 = 0;\ P_2 : (\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) + D_2 = 0$$

در این حالت، معادلهٔ صفحه‌هایی که برخط راست $l = P_1 \bigcap P_2$ می‌گذرند، به این صورت درمی‌آید:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \qquad (۴.۳۷)$$

مثال ۴.۵.۵. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از فصل مشترك دو صفحهٔ P_1 و P_2 بگذرد و برصفحهٔ P_3 عمود باشد، به‌شرطی که

$$P_1 : (\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) = -D_1,\ P_2 : (\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) = -D_2,$$
$$P_3 : (\mathbf{r}, \mathbf{N}_3) = -D_3,\ (\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_3) \neq 0$$

حل. بنا به‌دستور (۴.۳۶)، معادلهٔ صفحهٔ موردنظر به‌این‌صورت است:

$$\alpha\{(\mathbf{r}، \mathbf{N}_۱)+D_۱\}+\beta\{(\mathbf{r}، \mathbf{N}_۲)+D_۲\}=۰$$

و یا

$$(\mathbf{r}، \alpha\mathbf{N}_۱+\beta\mathbf{N}_۲)=-(\alpha D_۱+\beta D_۲)$$

که بردار نرمال آن، به‌صورت $\mathbf{N}=\alpha\mathbf{N}_۱+\beta\mathbf{N}_۲$ است. بنا به‌فرض، این بردار بر $\mathbf{N}_۳$ عمود است، یعنی $\alpha(\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۳)+\beta(\mathbf{N}_۲، \mathbf{N}_۳)=۰$ وچون، بنا به‌فرض $(\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۳)\neq ۰$، بنا براین

$$\alpha=-\frac{\beta(\mathbf{N}_۲، \mathbf{N}_۳)}{(\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۳)}، \ \beta\neq ۰$$

اگر α و β را در معادلهٔ (۴.۳۶) قرار دهیم، بعد از اندکی ساده کردن، به‌دست می‌آید:

$$[\mathbf{r}، -\mathbf{N}_۱(\mathbf{N}_۳، \mathbf{N}_۲)+\mathbf{N}_۲(\mathbf{N}_۳، \mathbf{N}_۱)]=$$

$$=D_۱(\mathbf{N}_۲، \mathbf{N}_۳)-D_۲(\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۳)$$

و یا

$$(\mathbf{r}، \mathbf{N}_۳، [\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲])=(D_۲\mathbf{N}_۱-D_۱\mathbf{N}_۲، \mathbf{N}_۳)$$

مثال ۶.۵.۴. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که ازنقطهٔ $M(-۳، ۱، ۰)$ و فصل مشترك صفحه‌های

$$P_۱: x+۲y+z+۴=۰ \text{ و } P_۲: ۳x-y+۲z-۱=۰$$

بگذرد.

حل. معادلهٔ صفحهٔ مطلوب، به این صورت است [(۴.۳۷) را ببینید]:

$$P: \alpha(x+۲y-z+۴)+\beta(۳x-y+۲z-۱)=۰،$$

$$\alpha^۲+\beta^۲>۰$$

رابطهٔ بین α و β از شرط $M\in P$ به‌دست می‌آید، یعنی

$$\alpha(-۳+۲\times ۱-۰+۴)+\beta(۳\times -۳-۱+۲\times ۰-۱)=۰$$

که از آن‌جا معلوم می‌شود $\alpha=\frac{۱۱}{۳}\beta$ یا $۳\alpha-۱۱\beta=۰$، که اگر درمعادله قرار دهیم ، بعد از تقسیم دو طرف بر $\frac{۱}{۳}\beta\neq ۰$ به دست می‌آید :

$$۲۰x+۱۹y-۵z+۴۱=۰$$

مثال ۴۰۵۰۷۰ معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که با خط راست L موازی باشد و بر فصل مشترک صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$ بگذرد، به شرطی که

$$L: \frac{x-۲}{-۱}=\frac{y+۷}{۳}=\frac{z}{-۲};P_۱:x-y+۲=۰;P_۲:y+z-۴=۰$$

حل. معادلهٔ صفحهٔ مطلوب، به این صورت است:

$$\alpha(x-y+۲)+\beta(y+z-۴)=۰ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \alpha x+(\beta-\alpha)y+\beta z+(۲\alpha-۴\beta)=۰$$

بردار نرمال صفحه به‌صورت $\mathbf{N}=(\alpha، \beta-\alpha، \beta)$ است که باید بر بردارهای خط راست L، یعنی $\mathbf{a}=(-۱، ۳، -۲)$ عمود باشد، پس $\beta=۴\alpha$ و معادلهٔ صفحهٔ مورد نظر، چنین می‌شود:

$$x+۳y+۴z-۱۴=۰$$

مثال ۴۰۵۰۸۰ معادلهٔ صفحهٔ دلخواهی را بنویسید که بر نقطهٔ مشترک این سه صفحه می‌گذرد:

$$P_۱:(\mathbf{r}، \mathbf{N}_۱)=-D_۱; P_۲:(\mathbf{r}، \mathbf{N}_۲)=-D_۲; P_۳:(\mathbf{r}، \mathbf{N}_۳)=-D_۳،$$

$$(\mathbf{N}_۱، \mathbf{N}_۲، \mathbf{N}_۳)\neq ۰$$

حل. نقطهٔ مشترک سه صفحهٔ $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ را $M_۰$ می‌نامیم و شعاع حامل آن را $\mathbf{r}_۰$ می‌گیریم. بنابراین

$$(\mathbf{r}_۰، \mathbf{N}_۱)=-D_۱، (\mathbf{r}_۰، \mathbf{N}_۲)=-D_۲، (\mathbf{r}_۰، \mathbf{N}_۳)=-D_۳$$

اگر P^*، یکی از صفحه‌های مورد نظر باشد، $\mathbf{N}\neq 0$، بردار نرمال آن، در رابطه با بردارهای ناهم‌صفحهٔ $\mathbf{N}_1$، $\mathbf{N}_2$ و $\mathbf{N}_3$ به این صورت است:

$$\mathbf{N}=\alpha\mathbf{N}_1+\beta\mathbf{N}_2+\gamma\mathbf{N}_3$$

(بردارهای α، β و γ؛ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$، به وسیلهٔ بردار $\mathbf{N}$ مشخص می‌شوند، یعنی به وسیلهٔ صفحهٔ P^*). نقطهٔ M_0، تنها وقتی متعلق به صفحهٔ P^* است که $\mathbf{r}_0$ در معادلهٔ P^*،

$$(\mathbf{r}, \alpha\mathbf{N}_1+\beta\mathbf{N}_2+\gamma\mathbf{N}_3)+D^*=0$$

صدق کند، یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$D^*=-(\mathbf{r}_0, \alpha\mathbf{N}_1+\beta\mathbf{N}_2+\gamma\mathbf{N}_3)=\alpha D_1+\beta D_2+\gamma D_3$$

و معادلهٔ صفحهٔ P^* به این صورت است:

$$\alpha\{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_1)+D_1\}+\beta\{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_2)+D_2\}+$$
$$+\gamma\{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_3)+D_3\}=0 \qquad (4.38)$$

که به آن، معادلهٔ دستهٔ صفحه‌ای می‌گویند که از نقطهٔ مشترک صفحه‌های P_1، P_2 و P_3 گذشته است (با متغیرهای α، β و γ؛ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$). این معادله، مجموعهٔ صفحه‌هایی را مشخص می‌کند که از نقطهٔ M_0 گذشته‌اند.

مثال ۹.۵.۴. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $M_1(\mathbf{r}_1)$ و خط راست l به معادلهٔ $[\mathbf{r}, \mathbf{a}]=\mathbf{M}$ بگذرد: $\mathbf{a}\neq 0$ و $(\mathbf{a}, \mathbf{M})=0$.

حل. معادلهٔ خط راست l را، به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t, \quad t\in\mathbf{R}, \quad \mathbf{r}_0=\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2}$$

نقطهٔ M با شعاع حامل $\mathbf{r}$، وقتی و تنها وقتی بر صفحهٔ مورد نظر P قرار دارد که بردارهای $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1$، $\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{a}$ هم‌صفحه باشند، یعنی داشته باشیم:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1, \mathbf{a})=0$$

اگر توجه کنیم که $[\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}]=\mathbf{M}-[\mathbf{r}_1, \mathbf{a}]$، آن وقت، به‌معادلهٔ صفحهٔ

P می‌رسیم:

$$P:(\mathbf{r}, \mathbf{N})=D, \quad \mathbf{N}=\mathbf{M}-[\mathbf{r}_1, \mathbf{a}], \quad D=(\mathbf{r}_1, \mathbf{N})=(\mathbf{r}_1, \mathbf{M})$$

مثال ۴.۵.۱۰. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $M_0(\mathbf{r}_0)$ و فصل مشترک دو صفحهٔ $P_1:(\mathbf{r}, \mathbf{N}_1)+D_1=0$ و $P_2:(\mathbf{r}, \mathbf{N}_2)+D_2=0$ می‌گذرد، به شرطی که $[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]\neq 0$ و $M_0\notin P_1$.

حل. معادلهٔ‌صفحهٔ مطلوب P [(۴.۳۶) را ببینید]، به‌این صورت‌است:

$$\alpha\{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_1)+D_1\}+\beta\{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_2)+D_2\}=0, \quad \alpha^2+\beta^2>0$$

عددهای α و β در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\alpha\{(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1)+D_1\}+\beta\{(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_2)+D_2\}=0,$$
$$\{(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1)+D_1\}\neq 0$$

از این شرط α را به‌دست می‌آوریم و درمعادلهٔ صفحهٔ P قرار می‌دهیم، اگر دو طرف معادله را بر $-\dfrac{\beta}{\{(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1)+D_1\}}\neq 0$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\{(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_2)+D_2\}\{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_1)+D_1\}-$$
$$-\{(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}_1)+D_1\}\{(\mathbf{r}, \mathbf{N}_2)+D_2\}=0$$

مثال ۴.۵.۱۱. خط راست $l:[\mathbf{r}, \mathbf{a}]=\mathbf{M}$، $\mathbf{a}\neq 0$، $(\mathbf{a}, \mathbf{M})=0$ و صفحهٔ P به معادلهٔ $(\mathbf{r}, \mathbf{N})=D$، $\mathbf{N}\neq 0$ مفروض‌اند. با چه شرطی: a) l و P تنها در یك نقطه مشترك‌اند؛ b) $l\cap P=\varnothing$؛ c) $l\subset P$؟

حل. a) معادلهٔ خط راست l را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t, \quad t\in\mathbf{R}, \quad \mathbf{r}_0=\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2}$$

خط راست l، تنها وقتی با صفحهٔ P در یك نقطه مشترك است که معادلهٔ

$$(\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t, \mathbf{N})=D \iff t(\mathbf{a}, \mathbf{N})=D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{N}) \quad (۴.۳۹)$$

دارای جوابی منحصر به فرد برای t باشد؛ و این، تنها وقتی ممکن است که $(\mathbf{a}, \mathbf{N})\neq 0$. در این حالت

$$t=\frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{N})}{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}=\frac{D\mathbf{a}^2-(\mathbf{a}, \mathbf{M}, \mathbf{N})}{\mathbf{a}^2(\mathbf{a}, \mathbf{N})}$$

و $\mathbf{r}$، شعاع حامل نقطهٔ مشترك از دستور زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}\frac{D-(\mathbf{r}_0, \mathbf{N})}{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}=\frac{D\mathbf{a}+\mathbf{r}_0(\mathbf{N}, \mathbf{a})-\mathbf{a}(\mathbf{N}, \mathbf{r}_0)}{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}=$$

$$=\frac{D\mathbf{a}+[\mathbf{N}, (\mathbf{r}_0, \mathbf{a})]}{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}=\frac{D\mathbf{a}+[\mathbf{N}, \mathbf{M}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{N})} \tag{۴.۴۰}$$

b) اگر $(\mathbf{a}, \mathbf{N})=0$ و $D\neq\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{M}, \mathbf{N})}{|\mathbf{a}|^2}$، آن وقت معادلهٔ (۴.۳۹) به این صورت درمی‌آید:

$$t.0=D-\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{M}, \mathbf{N})}{|\mathbf{a}|^2}$$

که جواب ندارد؛ یعنی خط راست l و صفحهٔ P، دارای نقطهٔ مشترك نیستند.

c) اگر $(\mathbf{a}, \mathbf{N})=0$ و $(\mathbf{a}, \mathbf{M}, \mathbf{N})=D|\mathbf{a}|^2$، آن وقت معادلهٔ (۴.۳۹) به‌صورت $t.0=0$ درمی‌آید که هرمقداری از t در آن صدق می‌کند. بنا براین، هر نقطهٔ خط راست l بر صفحهٔ P قرار دارد، یعنی $l\subset P$.

مثال ۱۲.۵.۴. تصویر قائم $M_0(\mathbf{r}_0)$ ازنقطهٔ $M_1(\mathbf{r}_1)$ را برخط‌راست l پیدا کنید، به شرطی که

$$l:[\mathbf{r}, \mathbf{a}]=\mathbf{M},\ \ \mathbf{a}\neq 0,\ \ (\mathbf{a}, \mathbf{M})=0$$

حل. بنابه فرض $M_0\in l$، یعنی $[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]=\mathbf{M}$ و $\overrightarrow{M_0M_1}\perp\mathbf{a}$ یا $(\mathbf{r}_1, \mathbf{a})=(\mathbf{r}_0, \mathbf{a})$. بنا براین مسأله به این جا منجر می‌شود که، شعاع حامل $\mathbf{r}_0$ مربوط به نقطهٔ مشترك خط راست l و صفحهٔ

$$P:(\mathbf{r}, \mathbf{N})=D,\ \ \mathbf{N}=\mathbf{a},\ \ D=(\mathbf{r}_1, \mathbf{a})$$

را پیدا کنیم. بنا بر دستور (۴۰۴۰) داریم:

$$\mathbf{r}_\circ = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{a})a + [\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

مثال ۱۳۰۵۰۴. معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از نقطهٔ $M_1(\mathbf{r}_1)$ و خط راست l را به طور عمودی قطع کند، به شرطی که

$$l: (\mathbf{r}, \mathbf{N}_i) = D_i (i = 1, 2), \quad [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2] \neq 0$$

حل. $M_\circ(\mathbf{r}_\circ)$ را پای عمود وارد از نقطهٔ M_1 بر خط راست l می‌گیریم. از شرط‌های $M_\circ \in l$ و $(M_1, M_\circ) \perp l$ به دست می‌آید: $(\mathbf{r}_\circ - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}) = 0$، که در آن، $\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$، بردار هادی خط راست l است. داریم:

$$(\mathbf{r}_\circ, \mathbf{N}_1) = D_1, \quad (\mathbf{r}_\circ, \mathbf{N}_2) = D_2, \quad (\mathbf{r}_\circ, \mathbf{a}) = D_3, \quad D_3 = (\mathbf{r}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$$

دستگاه معادله‌هایی از نوع (۴۰۲۸) به دست می‌آید که، جواب آن [(۴۰۲۹) را ببینید]، چنین است:

$$\mathbf{r}_\circ = \frac{[(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2), D_2\mathbf{N}_1 - D_1\mathbf{N}_2] + (\mathbf{r}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]}{|[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]|^2}$$

و معادلهٔ عمود عبارت است از:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_\circ - \mathbf{r}_1)t, \quad t \in \mathbf{R}$$

مثال ۱۴۰۵۰۴. صفحه‌های $P_1: (\mathbf{r}, \mathbf{N}_1) = D_1$، $P_2: (\mathbf{r}, \mathbf{N}_2) = D_2$، $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) \neq 0$ مفروض‌اند. معادلهٔ صفحهٔ P را بنویسید که از خط راست l، فصل مشترک صفحه‌های P_1 و P_2 و نقطهٔ $M_1(\mathbf{r}_1)$ بگذرد.

حل. بردار $\mathbf{a} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$، بردار هادی خط راست l، بردار نرمال صفحهٔ مطلوب است، بنابراین $D = (\mathbf{r}, \mathbf{a})$. عدد D از شرط‌های $D = (\mathbf{r}, \mathbf{a})$ و $M_1 \in P$ به دست می‌آید. معادلهٔ صفحهٔ P، چنین است:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = 0$$

مثال ۱۵.۵.۴. معادلهٔ خط راستی را بنویسید که بر صفحهٔ $P:(\mathbf{r}, \mathbf{N})=D$، $\mathbf{N}\neq 0$ واقع باشد و خط راست $l:\mathbf{r}=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{a}t$ را به زاویهٔ قائمه قطع کند، $(\mathbf{a}, \mathbf{N})\neq 0$ و $[\mathbf{a}, \mathbf{N}]\neq 0$.

حل. M_* را نقطهٔ مشترك صفحهٔ P و خط راست l فرض می‌کنیم. $\mathbf{r}_*$، شعاع حامل این نقطه، از رابطه‌های

$$\mathbf{r}_*=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{a}t, \quad (\mathbf{r}_\circ+\mathbf{a}t, \mathbf{N})=D$$

به دست می‌آید، یعنی

$$\mathbf{r}_*=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{a}\frac{D-(\mathbf{r}_\circ, \mathbf{N})}{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}$$

خط راست موردنظر، باید از این نقطه بگذرد. چون خط راست مطلوب L، در صفحهٔ P قرار دارد، بردار هادی $\mathbf{b}$ از خط راست L، بر $\mathbf{N}$ عمود است و، همچنین، بنا به فرض $\mathbf{b}\perp\mathbf{a}$. درنتیجه، می‌توانیم بردار $\mathbf{b}=[\mathbf{a}, \mathbf{N}]$ را، به عنوان بردار هادی خط راست L در نظر بگیریم. به این ترتیب، معادلهٔ خط راست L، به این صورت درمی‌آید:

$$\mathbf{r}=\left(\mathbf{r}_\circ+\frac{D-(\mathbf{r}_\circ, \mathbf{N})}{(\mathbf{a}, \mathbf{N})}\mathbf{a}\right)+[\mathbf{a}, \mathbf{N}], \quad t\in\mathbf{R}$$

مثال ۱۶.۵.۴. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که ازخط راست l بگذرد و بر صفحهٔ P عمود باشد. معادله‌های l و P چنین‌اند:

$$l:\mathbf{r}=\mathbf{r}_\circ+\mathbf{a}t, \quad P:(\mathbf{r}, \mathbf{N})=D, \quad [\mathbf{a}, \mathbf{N}]\neq 0$$

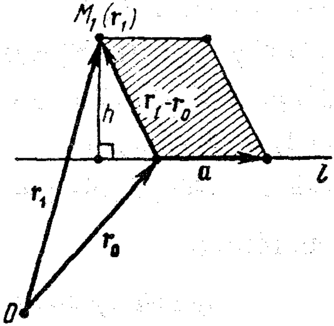
حل. نقطهٔ $M_\circ(\mathbf{r}_\circ)$ ویکی ازبردارهای هادی صفحهٔ موردنظر (بردار $\mathbf{a}$) معلوم‌اند. به‌عنوان بردارهادی دوم می‌توانیم، مثلاً، $\mathbf{N}$ را درنظر بگیریم، زیرا بنا به فرض، صفحهٔ مورد نظر بر صفحهٔ P عمود است و، بنابراین، با بردار نرمال $\mathbf{N}$ موازی است. بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{N}$ هم‌راستا نیستند و صفحهٔ مطلوب، موازی با آن‌هاست. بنابراین، بردار $\mathbf{N}^*=[\mathbf{a}, \mathbf{N}]$ را می‌توان، به عنوان بردار نرمال صفحهٔ مطلوب در نظر گرفت. معادلهٔ صفحهٔ مورد نظر،

به این صورت است:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{0}, \mathbf{a}, \mathbf{N})=0$$

مثال ۱۷.۵.۴. مطلوب است فاصلهٔ نقطهٔ $M_{1}(\mathbf{r}_{1})$ از خط راست l به معادلهٔ $\mathbf{r}=\mathbf{r}_{0}+\mathbf{a}t$.

حل. فاصلهٔ مطلوب h، عبارت است از طول ارتفاع متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای $\mathbf{r}_{1}-\mathbf{r}_{0}$ و $\mathbf{a}$ ساخته شده باشد (شکل ۲۱.۴).



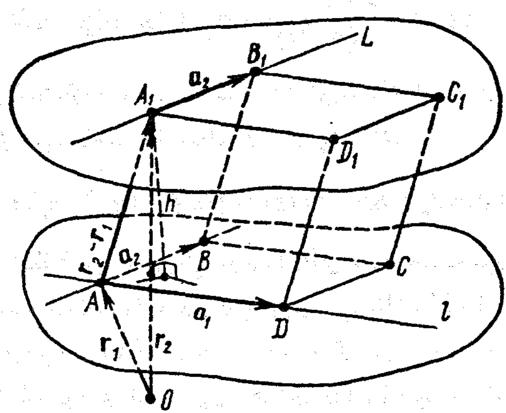
شکل ۲۱.۴

بنابراین

$$h=\frac{|[\mathbf{r}_{1}-\mathbf{r}_{0}, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}$$

مثال ۱۸.۵.۴. مطلوب است فاصلهٔ بین دو خط متنافر

$$l:\mathbf{r}=\mathbf{r}_{1}+\mathbf{a}_{1}t, \quad L:\mathbf{r}=\mathbf{r}_{2}+\mathbf{a}_{2}\tau$$



شکل ۲۲.۴

حل. فاصلهٔ موردنظر h، برابر است با طول عمود مشترک دوخط‌راست l و L، یعنی فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی‌که یکی ازآن‌ها شامل l و دیگری شامل L باشد. به‌این ترتیب، h برابر است با طول ارتفاع متوازی‌السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (شکل ۲۲.۴) که روی بردارهای $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$، $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ ساخته شده است:

$$h=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}$$

فصل پنجم

عددهای مختلط

بخش ۱.۵. عددهای مختلط وعمل روی آن‌ها

مجموعهٔ C را درنظر می‌گیریم کــه، عضوهای آن، زوج‌های مرتب ممکن $(a، b)$ ازعددهای حقیقی a و b هستند. اندیشهٔ برابری عضوهای این مجموعه و عمل‌های حسابی مربوط به عضوهای مجموعه را، به این ترتیب، تعریف می‌کنیم.

$z_۱$ را زوج‌مرتب $(a_۱، b_۱)$ و $z_۲$ را زوج مرتب $(a_۲، b_۲)$ می‌گیریم. دو زوج مرتب $z_۱$ و $z_۲$ را برابر گویند (و می‌نویسند $z_۱ = z_۲$)، وقتی وتنها وقتی که داشته باشیم: $a_۱ = a_۲$ و $b_۱ = b_۲$. به‌زبان دیگر، تنهاوقتی $z_۱ = z_۲$ که $z_۱$ و $z_۲$، زوج‌های مرتب یکسانی ازعددهای حقیقی را تشکیل دهند:

مجموع $z_۱$و$z_۲$، از زوج‌های‌مرتب $z_۱ = (a_۱، b_۱)$ و $z_۲ = (a_۲، b_۲)$، با زوج مرتب $(a_۱ + a_۲، b_۱ + b_۲)$، و حاصل‌ضرب $z_۱ z_۲$ آن‌ها، بـا زوج مرتب $(a_۱ a_۲ - b_۱ b_۲، a_۱ b_۲ + b_۱ a_۲)$ تعریف می‌شود.

مثلاً، اگر داشته باشیم: $z_۱ = (۱، ۲)$ و $z_۲ = (۵، -۳)$، آن‌وقت

$$z_۱ + z_۲ = (۱ + ۵، ۲ + (-۳)) = (۶، -۱)،$$

$$z_۱ z_۲ = (۱ \times ۵ - ۲(-۳)، ۱(-۳) + ۲ \times ۵) = (۱۱، ۷)$$

تفاضل $z_۱ - z_۲$ از دو زوج مـرتب $z_۱$ و $z_۲$ را، بـا زوج مرتب $(a_۱ - a_۲، b_۱ - b_۲)$ تعریف می‌کنند و، سرانجام، با شرط $a_۲^۲ + b_۲^۲ > ۰$، نسبت $\frac{z_۱}{z_۲}$ را، برای دو زوج‌مرتب $z_۱$ و $z_۲$، بازوج‌مرتب زیر تعریف می‌کنند:

$$\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\ \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$$

مثلاً، اگر داشته باشیم: $z_1=(0, 5)$ و $z_2=(1, -2)$، آن‌وقت

$$z_1-z_2=(0-1, 5-(-2))=(-1, 7),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(0, 5)}{(1, -2)}=\left(\frac{0\times 1+5(-2)}{1^2+(-2)^2},\ \frac{-0(-2)+5\times 1}{1^2+(-2)^2}\right)=$$

$$=(-2, 1)$$

مجموعهٔ C از زوج‌های مرتب $z=(a, b)$ از عددهای حقیقی a و b را، که اندیشهٔ برابری و عمل‌های حسابی را درمورد آن‌ها تعریف کردیم، مجموعهٔ عددهای‌مختلط می‌نامند. هرعضو $z=(a, b)\in C$، یك عدد مختلط است.

عدد مختلط $(a, 0)$ را، کـه در آن $a\in \mathbf{R}$ وتنها معرف عدد حقیقی a است، بـا همان حرف a نشان می‌دهند، یعنی $a\in\mathbf{R}=(a, 0)$. برای چنین عددهائی، عمل‌های روی عددهای حقیقی، متناظر با عمل‌های روی عددهای مختلط می‌شود:

$$(a_1, 0)\pm(a_2, 0)=(a_1\pm a_2, 0)=a_1\pm a_2,$$

$$(a_1, 0).(a_2, 0)=(a_1a_2-0, a_1.0+0.a_2)=(a_1a_2, 0)=a_1a_2,$$

$$\frac{(a_1, 0)}{(a_2, 0)}=\left(\frac{a_1a_2+0}{a_2^2+0^2}\ ,\ \frac{-a_1.0+0.a_2}{a_2^2+0^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{a_1}{a_2}, 0\right)=\frac{a_1}{a_2}(a_2\neq 0)$$

عددمختلط $(0, 1)$ را، واحد موهومی گویند و با نماد زیرنشان‌می‌دهند:

$$i=(0, 1)$$

عدد مختلط $(0, 0)$ را صفر گویند.

عضوهای مجموعهٔ C را، اغلب، به‌طور ساده، عددگویند (اگر روشن باشد که، عددهای مختلط، معنی دارند).

نتیجهٔ عمل‌های مربوط به جمع و تفریق عددهای مختلط z_1 و z_2 را، مجموع و تفاضل عددهای z_1 و z_2 می‌نامند و، به‌همین‌ترتیب، نتیجهٔ عمل‌های ضرب و تقسیم دو عدد مختلط z_1 و z_2 را، حاصل‌ضرب و خارج قسمت آن‌ها گویند. تقسیم عدد مختلط z، بر عدد مختلط 0، معین نیست. حاصل‌ضرب عددهای مختلط z_1 و z_2 را به‌صورت $z_1 \cdot z_2$ نشان می‌دهند. برای هر عدد طبیعی n، توان nام عدد مختلط z، یعنی z^n را، می‌توان با روش استقرا و براساس $z^1 = z$ ، $z^n = z \cdot z^{n-1}$ ، $n \geqslant 2$ پیدا کرد.

اگر $z = (a, b)$ عددی مختلط باشد، عدد $(-a, -b)$ را متقابل عدد مختلط z گویند و با نماد $-z$ نشان می‌دهند. عدد مختلط $(a, -b)$، مزدوج عدد مختلط z نامیده می‌شود و نماد آن $\bar{z}$ است. عدد غیر منفی $\sqrt{a^2+b^2}$ را قدر مطلق عدد مختلط $z = (a, b)$ گویند و با نماد $|z|$ نشان می‌دهند. قدر مطلق را کالبد و مدول هم گفته‌اند. به این ترتیب:

$$z = (a, b) \Rightarrow -z = (-a, -b), \ \bar{z} = (a, -b),$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

اگر $z = (a, 0) = a \in \mathbf{R}$، آن‌گاه $|z| = \sqrt{a^2+0^2} = |a|$، یعنی قدر مطلق عدد مختلطی که با عدد حقیقی a بیان شده باشد، برابر است با قدر مطلق عدد حقیقی a.

مثال ۰۱۰۱۰۵. ثابت کنید: اگر $z = -z$، آن‌گاه $z = 0$؛ و اگر $z = \bar{z}$، آن‌گاه $z \in \mathbf{R}$.

حل. فرض می‌کنیم: $z = (a, b)$ و $z = -z$. دراین صورت

$$(a, b) = (-a, -b)$$

و بنا به‌تعریف برابری دو عدد مختلط: $a = -a$ و $b = -b$ که، از آن‌جا، به‌دست می‌آید: $a = b = 0$ و $z = (a, b) = (0, 0) = 0$.

برای حالت $z = \bar{z}$ باید داشته باشیم: $(a, b) = (a, -b)$، یعنی

$b=-b$ و $b=0$. بنابراین $z=(a, b)=(a, 0)=a\in\mathbf{R}$.

مثال ۲.۱.۵. ثابت کنید، برای هر دو عدد حقیقی c و d $(d\neq 0)$ و هرعدد مختلط $z=(a, b)$، داریم:

$$cz=(ca, cb), \quad \frac{z}{d}=\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) \tag{۵.۱}$$

[عددهای c و d درسمت راست برابری‌های بالا، به‌عنوان عددهای حقیقی، و در سمت چپ، به عنوان عددهای مختلط $(c, 0)$ و $(d, 0)$ درنظر گرفته می‌شوند.]

حل. داریم:

$$c\cdot z=(c, 0)(a, b)=(ca-0.b, cb+0\cdot a)=(ca, cb),$$

$$\frac{z}{d}=\frac{(a, b)}{(d, 0)}=\left(\frac{ad+b\cdot 0}{d^2+0^2}, \frac{-a\cdot 0+bd}{d^2+0^2}\right)=\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$$

از دستور (۵.۱) درحالت خاص می‌توان نتیجه گرفت:

$$1\cdot z=(1\cdot a, 1\cdot b)=(a, b)=z,$$

$$(-1)\cdot z=[(-1)\cdot a, (-1)\cdot b]=(-a, -b)=-z,$$

$$\frac{z}{1}=\left(\frac{a}{1}, \frac{b}{1}\right)=(a, b)=z,$$

$$\frac{z}{-1}=\left(\frac{a}{-1}, \frac{b}{-1}\right)=(-a, -b)=-z \tag{۵.۲}$$

مثال ۳.۱.۵. برای عددهای مختلط $z_1=(a_1, b_1)$ و $z_2=(a_2, b_2)$، رابطه‌های زیر برقرارند (از این‌جا به‌بعد، عمل‌های داخل پرانتزها، حق تقدم دارند):

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2); \tag{۵.۳}$$

$$z_2\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z_2}=\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2} \tag{۵.۴}$$

حل. داریم:

$$z_1+(-z_2)=(a_1, b_1)+(-a_2, -b_2)=$$

$$=[a_1+(-a_2), b_1+(-b_2)]=(a_1-a_2, b_1-b_2)=z_1-z_2;$$

$$\frac{1}{z_2}=\frac{(1, 0)}{(a_2, b_2)}=\left(\frac{1\cdot a_2+0\cdot b_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{-1\cdot b_2+0\cdot a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{-b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=\left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right)$$

ازطرف دیگر، با توجه به دستور (۵.۱):

$$\frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_2, -b_2)}{|z_2|^2}=\left(\frac{a_2}{|z_2|^2}, \frac{-b_2}{|z_2|^2}\right)=\frac{1}{z_2}$$

به همین ترتیب

$$\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a_1, b_1)\cdot(a_2, -b_2)}{|z_2|^2}=$$

$$=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{|z_2|^2}, \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{|z_2|^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=\frac{z_1}{z_2}$$

مثال ۴.۱.۵. ثابت کنید، برای هرعدد مختلط $z=(a, b)$ داریم:

$$z=a+bi \qquad (۵.۵)$$

برعکس، اگر a و b عددهایی حقیقی باشند و $z=a+bi$، آن‌گاه $z=(a, b)$.

حل. اگر $a\in\mathbf{R}$ و $b\in\mathbf{R}$، بنا بردستور (۵.۱) داریم:

$$bi=b\cdot(0, 1)=(b\cdot 0, b\cdot 1)=(0, b)$$

و بنابراین

$$a+bi=(a, 0)+(0, b)=(a+0, 0+b)=(a, b)$$

نماد به‌صورت (۵.۵) را، برای عددمختلط $z=(a, b)$، صورت جبری نماد عدد z گویند. درنماد جبری (۵.۵)، برای عددمختلط z، عددهای $a\in\mathbf{R}$ و $b\in\mathbf{R}$، نام‌های ویژه‌ای دارند: a را بخش حقیقی عدد z گویند ومی‌نویسند $a=\operatorname{Re} z$؛ b بخش موهومی عدد z است ومی‌نویسند $b=\operatorname{Im} z$. به‌سادگی قابل تحقیق است که:

$$\operatorname{Re}(z_1\pm z_2)=\operatorname{Re} z_1\pm\operatorname{Re} z_2,$$
$$\operatorname{Im}(z_1\pm z_2)=\operatorname{Im} z_1\pm\operatorname{Im} z_2$$

اگر $\operatorname{Im} z=0$، آن‌وقت $z=a+0\times i=(a, 0)$، همان‌عددحقیقی a است. عدد مختلط $z=(0, b)=0+bi=bi$ را (که بخش حقیقی آن برابرصفر است)، عددموهومی‌خالص گویند. عدد $0i+0=0$ را، می‌توان حقیقی یاموهومی خالص به حساب آورد. درضمن روشن است که اگر $z=a+bi$، آن‌گاه $\bar{z}=a-bi$.

مثال ۵.۱.۵. ثابت کنید:

$$i^2=-1 \qquad (5.6)$$

حل. داریم:

$$i^2=i.i=(0, 1).(0, 1)=(0.0-1.1, 0.1+1.0)=$$
$$=(-1, 0)=-1$$

دربخش ۵.۲، از نماد $\mathbf{c}=(a, b)$، برای نشان دادن بردار $\mathbf{c}$ استفاده کردیم؛ این بردار با صفحه‌ای مثل P موازی بود و اگرپایهٔ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ رادر صفحهٔ P در نظر می‌گرفتیم، a و b، مختصات بردار $\mathbf{c}$ را نشان می‌داد:

$$\mathbf{c}=a\mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2$$

مطابقت نمـاد $\mathbf{c}=(a, b)$ (برای نشان دادن بردار $\mathbf{c}$ در صفحهٔ P) با نماد $z=(a, b)$ (برای نشان دادن عددهای مختلط)، تصادفی نیست. در

بخش‌های ۴.۵ و ۵.۵، به تفصیل دربارهٔ ارتباط بین بردارها و عددهای مختلط، صحبت خواهیم کرد.

بخش ۲.۵. ویژگی‌های عمل‌ها روی عددهای مختلط

قانون‌های جمع و تفریق

I_1. $z_1+z_2=z_2+z_1$ (جابه‌جائی در عمل جمع).

II_1. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (شرکت‌پذیری در عمل جمع).

III_1. $z+0=z$.

IV_1. $z+(-z)=0$.

V_1. $z=z_1+(-z_2) \Longleftrightarrow z+z_2=z_1 \Longleftrightarrow z=z_1-z_2$.

قانون‌های ضرب و تقسیم

I_2. $z_1z_2=z_2z_1$ (جابه‌جائی در عمل ضرب).

II_2. $(z_1z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2z_3)$ (شرکت‌پذیری درعمل ضرب).

III_2. $1\cdot z=z$، $(-1)\cdot z=-z$، $0\cdot z=0$، $\frac{z}{1}=z$، $\frac{z}{-1}=-z$.

IV_2. برای $z\neq 0 \Rightarrow z\cdot\left(\frac{1}{z}\right)=1$.

V_2. $z_2\neq 0 \Rightarrow \left(z=z_1\frac{1}{z_2} \Longleftrightarrow z\cdot z_2=z_1 \Longleftrightarrow z=\frac{z_1}{z_2}\right)$.

رابطه‌های I_1 تا V_1 و I_2 تا V_2 را می‌توان، به سادگی و با تکیه بر تعریف‌های قبلی ثابت کرد. ویژگی II_1 (II_2) به ما امکان می‌دهد که، ضمن جمع (ضرب) سه جمله یا بیشتر، پرانتزها را حذف کنیم. ویژگی V_1 به‌این معناست که، تفریق، عکس عمل جمع است و، شبیه‌آن، V_2 به معنای آن است که، تقسیم، عکس عمل ضرب است.

به خواننده سفارش می‌کنیم که سیاههٔ این ویژگی‌ها را با قانون‌های جمع بردارها (بخش ۲.۲) مقایسه کند و، به طور مستقل، قاعدهٔ مربوط

به حذف پرانتزها را ثابت کند:

$$(z_1-z_2)+(z_3-z_4)+\dots+(z_{2n-1}-z_{2n})=$$

$$=(z_1+z_3+\dots+z_{2n-1})-(z_2+z_4+\dots+z_{2n}); \quad (۵.۷)$$

$$z_2\neq 0, \dots, z_{2n}\neq 0 \Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{z_3}{z_4}\right)\times\dots\times\left(\frac{z_{2n-1}}{z_{2n}}\right)=$$

$$=\frac{(z_1\cdot z_3\times\dots\times z_{2n-1})}{(z_2\cdot z_4\times\dots\times z_{2n})}$$

مثال ۵.۲.۱۰. ویژگی V_2 را ثابت کنید.

حل. فرض می‌کنیم: $z_2=(a_2, b_2)\neq 0$، $z_1=(a_1, b_1)$ و $z=(a, b)$.

اگر $z=\frac{z_1}{z_2}$، آن‌گاه بنا به تعریف نسبت داریم:

$$a=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \quad b=\frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}$$

بنابراین

$$z\cdot z_2=(aa_2-bb_2, ab_2+ba_2)=$$

$$=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\cdot a_2-\frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\cdot b_2,\right.$$

$$\left.\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\cdot b_2+\frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\cdot a_2\right)=(a_1, b_1)=z_1$$

برعکس، اگر $z_1=z\cdot z_2$، آن‌گاه بنا به‌تعریف ضرب

$$a_1=aa_2-bb_2, \quad b_1=ab_2+ba_2$$

در نتیجه

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{(aa_2-bb_2)a_2+(ab_2+ba_2)b_2}{a_2^2+b_2^2},\right.$$

$$\left.\frac{-(aa_2-bb_2)b_2+(ab_2+ba_2)a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)=$$

$$=(a, b)=z$$

در ضمن، اگر $z\cdot z_2=z_1$، آن گاه بنابر II_2، IV_2، I_2 و III_2 داریم

$$z_1\cdot\frac{1}{z_2}=(z\cdot z_2)\cdot\frac{1}{z_2}=z\cdot\left(z_2\cdot\frac{1}{z_2}\right)=z\cdot 1=1\cdot z=z$$

برعکس، اگر $z=z_1\cdot\frac{1}{z_2}$، آن گاه

$$z\cdot z_2=\left(z_1\cdot\frac{1}{z_2}\right)\cdot z_2=z_1\cdot\left(\frac{1}{z_2}\cdot z_2\right)=$$

$$=z_1\cdot\left(z_2\cdot\frac{1}{z_2}\right)=z_1\cdot 1=1\cdot z_1=z_1$$

قانون‌های توزیع‌پذیری (پخشی)

VI. $z\cdot(z_1\pm z_2)=(z_1\pm z_2)\cdot z=z\cdot z_1\pm z\cdot z_2$

$$z\neq 0 \Rightarrow \frac{z_1\pm z_2}{z}=\frac{z_1}{z}\pm\frac{z_2}{z}$$

(در حالتی که، ضمن نوشتن عبارت‌ها، از پرانتز استفاده نشود، همیشه، عمل‌های ضرب و تقسیم را باید قبل از عمل‌های جمع و تفریق انجام داد).

□ فرض کنید: $z=(a, b)$، $z_1=(a_1, b_1)$ و $z_2=(a_2, b_2)$. در این صورت داریم:

$$z\cdot z_1=(aa_1-bb_1, ab_1+ba_1),$$

$$z\cdot z_2=(aa_2-bb_2, ab_2+ba_2), z_1-z_2=(a_1-a_2, b_1-b_2),$$

$$z\cdot(z_1-z_2)=(a, b)\cdot(a_1-a_2, b_1-b_2)=$$

$$=[a(a_1-a_2)-b(b_1-b_2),\ a(b_1-b_2)+b(a_1-a_2)]=$$
$$=[aa_1-bb_1-(aa_2-bb_2);\ ab_1+ba_1-(ab_2+ba_2)]=$$
$$=(aa_1-bb_1, ab_1+ba_1)-(aa_2-bb_2, ab_2+ba_2)=$$
$$=z\cdot z_1-z\cdot z_2$$

به‌همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد:

$$z\cdot(z_1+z_2)=z\cdot z_1+z\cdot z_2$$

بنابر ویژگی V_2 و برابری‌هایی که هم‌اکنون ثابت کردیم:

$$\frac{z_1\pm z_2}{z}=(z_1\pm z_2)\cdot\frac{1}{z}=z_1\cdot\frac{1}{z}\pm z_2\cdot\frac{1}{z}=\frac{z_1}{z}\pm\frac{z_2}{z}\ \blacksquare$$

قانون‌های ساده کردن

$$\text{VII. } z_1=z_2 \iff z_1+z=z_2+z،$$

$$z\neq 0,\ z_2\neq 0 \Rightarrow \frac{z_1\cdot z}{z_2\cdot z}=\frac{z\cdot z_1}{z\cdot z_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

□ با توجه به (۵.۷) داریم:

$$\frac{z_1\cdot z}{z_2\cdot z}=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\cdot\left(\frac{z}{z}\right)=\left(z\cdot\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=$$

$$=1\cdot\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{z_1}{z_2}\ \blacksquare$$

از قاعدهٔ بالا، می‌توان به‌خصوص به این نتیجه رسید که اگر $z_j\neq 0$، $(j=1, 2)$، آن‌گاه

$$\frac{1}{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{1\cdot z_2}{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\cdot z_2}=\frac{z_2}{z_1}$$

از تعریف جمع و تفریق عددهای مختلط، می‌توان نتیجه گرفت که، اگر دو عدد مختلط $z_1=a_1+b_1i$ و $z_2=a_2+b_2i$ را به‌صورت جبری در نظر بگیریم، برای این که مجموع یا تفاضل آن‌ها را به دست آوریم، کافی است، این دو عدد را، به‌عنوان چندجمله‌ای‌های درجه اول از متغیر i و ضریب‌های

حقیقی به حساب آوریم و جمله‌های متشابه را باهم جمع و یا از هم کم کنیم:

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i$$

مثال ۲.۲.۵. ثابت کنید، برای ضرب عددهای مختلط $z_1=a_1+b_1i$ و $z_2=a_2+b_2i$ (که به‌صورت جبری نوشته شده‌اند)، می‌توان آن‌ها را، به عنوان ضرب دو چندجمله‌ای درجه اول با متغیر i و ضریب‌های حقیقی درنظر گرفت. در ضمن، به یاد داشته باشیم که، بنابر (۵.۶)، می‌توان i^2 را برابر ۱− گرفت.

حل. با توجه به قانون‌های ضرب و برابری (۵.۶) داریم:

$$(b_1i)\cdot(b_2i)=(b_1i)\cdot(ib_2)=$$

$$=b_1\cdot[i\cdot(ib_2)]=b_1\cdot[(ii)\cdot b_2]=b_1\cdot(b_2i^2)=(b_1b_2)\cdot i^2=$$

$$=(b_1b_2)(-1)=(-1)\cdot(b_1b_2)=-(b_1b_2)$$

علاوه‌بر آن: $(b_1i)\cdot a_2=a_2\cdot(b_1i)=(a_2b_1)\cdot i$. بنابراین، باتوجه به‌قانون پخشی، داریم:

$$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1\cdot(a_2+b_2i)+(b_1i)(a_2+b_2i)=$$

$$=a_1a_2+a_1\cdot(b_2i)+(b_1i)\cdot a_2+(b_1i)(b_2i)=$$

$$=a_1a_2+(a_1b_2)\cdot i+(a_2b_1)\cdot i+(b_1b_2)\cdot i^2=$$

$$=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot i+b_1b_2i^2 \qquad (۵.۸)$$

رابطهٔ (۵.۸) نشان می‌دهد که، ضرب عددهای مختلط را، می‌توان به‌صورت ضرب چندجمله‌ای‌ها انجام داد. سرانجام

$$z_1\cdot z_2=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot i+(-b_1b_2)=$$

$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot i=$$

$$=(a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2)$$

که متناظر است با تعریف ضرب عددهای مختلط.

مثال ۳۰۲۰۵. دستوری برای نسبت دو عدد مختلط $z_1=a_1+b_1i$ و $z_2=a_2+b_2i$، به‌صورت جبری، بنویسید.

حل. با توجه به نتیجهٔ مسألهٔ ۲۰۲۰۵ داریم:

$$z_1\cdot\bar{z}_2=z_1\cdot(a_2-b_2i)=(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)=$$
$$=a_1a_2+(b_1a_2-a_1b_2)i-b_1b_2i^2=$$
$$=a_1a_2+b_1b_2+(-a_1b_2+b_1a_2)i,$$
$$z_2\cdot\bar{z}_2=(a_2+b_2i)\cdot(a_2-b_2i)=$$
$$=a_2a_2+(b_2a_2-a_2b_2)i-b_2^2i^2=a_2^2+b_2^2$$

بنابراین، باتوجه به قانون‌های ساده‌کردن، به‌دست می‌آید:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2+(-a_1b_2+b_1a_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

از خواننده می‌خواهیم، ملاحظه‌هایی را که در اینجا آورده‌ایم، با (۵۰۴) مقایسه کند.

مثال ۴۰۲۰۵. این عبارت را ساده کنید:

$$A=\frac{1-i}{1+i}-(2-4i)(1+5i)+\frac{1}{i}$$

حل. داریم:

$$A=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}-(2-4i+10i-20i^2)+\frac{1.(-i)}{i.(-i)}=$$
$$=\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}-(22+6i)-\frac{i}{1}=-\frac{2i}{2}-22-7i=-22-8i$$

برای هر دو عدد مختلط $z_1=(a_1, b_1)$ و $z_2=(a_2, b_2)$، داریم:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$$

$$z_2 \neq 0 \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \tag{۵.۹}$$

در این‌جا، تنها برابری آخر را ثابت می‌کنیم و اثبات دوبرابری اول را، به خواننده وامی‌گذاریم. با توجه به تعریف نسبت داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$$

بنابراین

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, -\frac{-a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{a_1 a_2 + (-b_1)(-b_2)}{a_2^2 + (-b_2)^2}; \frac{-a_1(-b_2) + (-b_1) a_2}{a_2^2 + (-b_2)^2}\right)$$

از طرف دیگر $\bar{z}_1 = (a_1, -b_1)$ و $\bar{z}_2 = (a_2, -b_2)$، بنابراین

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \left(\frac{a_1 a_2 + (-b_1)(-b_2)}{a_2^2 + (-b_2)^2}; \frac{-a_1(-b_2) + (-b_1) a_2}{a_2^2 + (-b_2)^2}\right) = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

مثال ۵.۲.۵. برای هردو عدد مختلط $z_1 = (a_1, b_1)$ و $z_2 = (a_2, b_2)$ داریم:

$$|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

$$z_2 \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{۵.۱۰}$$

حل. طبق تعریف عدد مختلط داریم:

$$|z_1 \pm z_2|^2 = (a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2 =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 \pm 2a_1 a_2 + b_1^2 + b_2^2 \pm 2b_1 b_2 =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\gamma$$

که در آن $\gamma=|a_1a_2+b_1b_2|$ را، قـدرمطلق عدد حقیقی $a_1a_2+b_1b_2$ گرفته‌ایم. با توجه به اتحاد (۲۰۱۱)،

$$\gamma=\sqrt{(a_1a_2+b_1b_2)^2}=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}=|z_1|\cdot|z_2|$$

در نتیجه

$$|z_1\pm z_2|^2\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2$$

و بنابراین $|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

سپس $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2)$، یعنی

$$|z_1\cdot z_2|^2=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2=$$

$$=a_1^2a_2^2-2a_1a_2b_1b_2+b_1^2b_2^2+a_1^2b_2^2+2a_1b_2a_2b_1+a_2^2b_1^2=$$

$$=a_1^2(a_2^2+b_2^2)+b_1^2(b_2^2+a_2^2)=|z_1|^2\cdot|z_2|^2$$

به این ترتیب

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2| \qquad (5\cdot11)$$

بنا بر V_2 داریم: $z_1=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\cdot z_2$. بنابراین، با توجه به (۵۰۱۱)

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|\cdot|z_2|=|z_1| \;\Rightarrow\; \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

بخش ۳۰۵. عددهای مختلط به صورت مثلثاتی و نمائی

$z=(a,b)$ را عددمختلطی مخالف‌صفرمی گیریم وقدرمطلق آن را با r نشان می‌دهیم: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=r$. پس $r>0$ و

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{۲}+\left(\frac{b}{r}\right)^{۲}=۱ \qquad (۵.۱۲)$$

این برابری به معنای آن است که، عدد حقیقی φ وجود دارد، به نحوی که

$$\begin{cases} \dfrac{a}{r}=\dfrac{a}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\cos\varphi, \\ \dfrac{b}{r}=\dfrac{b}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\sin\varphi \end{cases} \qquad (۵.۱۳)$$

عدد حقیقی φ را، آرگومان (یا آوند) عدد مختلط z گویند.

مجموعهٔ همهٔ جواب‌های دستگاه معادله‌های (۵.۱۳)، یعنی مجموعهٔ همهٔ آرگومان‌های عدد مختلط z را با $\operatorname{Arg} z$ نشان می‌دهند. روشن است که برای جواب‌های φ، می‌توان کمترین مقدار مثبت $\varphi_{\circ}$ را پیدا کرد، به‌نحوی که با شرط $\circ \leqslant \varphi_{\circ} \leqslant ۲\pi$ سازگار باشد. این جواب به کمک دستور زیر به دست می‌آید:

$$\varphi_{\circ}=\begin{cases} ۲\pi-\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}} & (b<\circ) \\ \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}} & (b\geqslant\circ) \end{cases} \qquad (۵.۱۴)$$

$\varphi_{\circ}$ را مقدار اصلی آرگومان عدد مختلط z گویند و با $\arg z$ نشان می‌دهند. دستور زیر همیشه برقرار است:

$$\operatorname{Arg} z=\{\varphi:\varphi=\arg z+۲\pi k، k\in\mathbf{Z}\} \qquad (۵.۱۵)$$

($\mathbf{Z}$ به معنای مجموعهٔ عددهای درست است).

□ اگر $\varphi=\varphi_{\circ}+۲\pi k$، $\varphi_{\circ}=\arg z$ و $k\in\mathbf{Z}$ باشد، آن‌وقت، داریم:

$$r\cos\varphi=r\cos(\varphi_{\circ}+۲\pi k)=r\cos\varphi_{\circ}=a،$$

$$r\sin\varphi=r\sin(\varphi_{\circ}+۲\pi k)=r\sin\varphi_{\circ}=b$$

یعنی $\varphi\in \mathrm{Arg}\, z$. برعکس، اگر $\varphi\in \mathrm{Arg}\, z$، بنا بر (۵.۱۳):

$$\cos\varphi=\frac{a}{r}=\cos\varphi_{\circ}, \quad \sin\varphi=\frac{b}{r}=\sin\varphi_{\circ}$$

بنا براین

$$\circ=(\cos\varphi-\cos\varphi_{\circ})^{۲}+(\sin\varphi-\sin\varphi_{\circ})^{۲}=۲[۱-\cos(\varphi-\varphi_{\circ})]$$

وازآن‌جا $\cos(\varphi-\varphi_{\circ})=۱$، یعنی $\varphi-\varphi_{\circ}=۲\pi k$، $k\in\mathbf{Z}$. ■

از معادله‌های (۵.۱۳) به دست می‌آید:

$$z=a+bi=r\cos\varphi+r\sin\varphi\cdot i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

وقتی‌که عدد مختلط $z\neq\circ$ را، به صورت

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), \; r\in\mathbf{R}, \; r>\circ, \; \varphi\in\mathbf{R} \qquad (۵.۱۶)$$

بنویسیم،آن را شکل مثلثاتی عدد مختلط z گویند. برای عدد مختلط $z=\circ$، هم آرگومان و هم شکل مثلثاتی آن، نامعین است.

مثال ۱۰۳۰۵. از رابطهٔ (۵.۱۶) نتیجه می‌شود:

$$r=|z|, \quad \varphi\in\mathrm{Arg}\, z$$

حل. چون r، $\cos\varphi$ و $\sin\varphi$، عددهای حقیقی‌اند، بنا به نتیجهٔ مثال ۴.۱.۵، از (۵.۱۶) نتیجه می‌شود:

$$|z|=\sqrt{(r\cos\varphi)^{۲}+(r\sin\varphi)^{۲}}=r$$

اکنون، اگر فرض کنیم: $a=r\cos\varphi$ و $b=r\sin\varphi$، به دست می‌آید:

$$z=(a, b), \quad \frac{a}{r}=\cos\varphi, \quad \frac{b}{r}=\sin\varphi$$

و بنابراین $\varphi\in\mathrm{Arg}\, z$.

ازحل این مثال، به‌خصوص نتیجه می‌شود که، اگر $t>\circ$ عددی حقیقی

باشد، آن گاه $\arg(tz)=\arg z$، $|tz|=t|z|$.

اگر $t<0$ و $t\in\mathbf{R}$، آن وقت از معادله‌های

$$tz=(-1)|t|\cdot z=-|t|r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$=|t|r[\cos(\varphi\pm\pi)+i\sin(\varphi\pm\pi)]$$

می‌توان نتیجه گرفت که، در حالت $0\leqslant\arg z<\pi$ داریم:

$$|tz|=|t|\cdot|z|,\ \arg(tz)=\arg z\pm\pi$$

و در حالت $\pi\leqslant\arg z<2\pi$:

$$\arg(tz)=\arg z-\pi$$

در آنالیز ریاضی، برای هر عدد مختلط z، عدد مختلط e^z را، به این ترتیب، تعریف می‌کنند:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}S_n, \tag{5.17}$$

که در آن $s_n=1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots+\frac{z^n}{n!}$؛ در ضمن، حدی که در رابطهٔ (۵.۱۷) داده شده است، به معنای عادی آن است: برای هر عدد حقیقی $\varepsilon>0$، عدد N وجود دارد، به‌نحوی که برای همهٔ عددهای $n>N$، نابرابری $|e^z-s_n|<\varepsilon$ برقرار باشد.

می‌توان ثابت کرد که، برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2، داریم:

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2},\quad e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} \tag{5.18}$$

همچنین، می‌توان ثابت کرد که، برای هر عدد حقیقی φ، دستور اولر برقرار است:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \tag{5.19}$$

با توجه به‌دستورهای (۵.۱۶) و (۵.۱۹)، می‌توان عدد مختلط z را،

به‌این صورت نشان داد:

$$z=r\cdot e^{i\varphi},r\in\mathbf{R},r>0,\ \varphi\in\mathbf{R} \qquad (5.20)$$

که‌آن را، دستور نمائی عدد مختلط z گویند. شکل نمائی عدد $z=0$ نامعین است.

توجه داریم‌که عدد e^z،$(z\in\mathbf{C})$ را می‌توان طور دیگری تعریف کرد: برابری (۵.۱۹) را به عنوان تعریف مقدار $e^{i\varphi}$،$(\varphi\in\mathbf{R})$ می‌پذیریم و، سپس، برای عدد مختلط ، e^z،به‌شرط $z=(a,b)$، نوشت:

$$e^z=e^{a+bi}=\exp(a)\cdot e^{ib}=\exp(a)(\cos b+i\sin b) \qquad (5.21)$$

در ایـــن صورت، دستورهـــای (۵.۱۷) و (۵.۱۸) را می‌توان نتیجه‌ای از دستور (۵.۲۱) دانست.

مثال ۵.۳.۲۰. بـــا استفاده از دستور (۵.۱۹)، به عنوان تعریف، ثابت کنید، برای عددهای حقیقی φ_1 و φ_2، داریم:

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2},$$

$$e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} \qquad (5.22)$$

حل. داریم:

$$e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$

$$=\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\times\sin\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2=$$

$$=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\ (\sin\varphi_1\times\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=$$

$$=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

و بنا به تعریف نسبت

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=\frac{\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2}=$$

$$=\left(\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2},\ \frac{-\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}\right)=$$

$$=[\cos(\varphi_1-\varphi_2),\ \sin(\varphi_1-\varphi_2)]=$$

$$=\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

مثال ۳.۳.۵. برابری‌های (۵.۱۸) را از تعریف (۵.۲۱) نتیجه بگیرید.

حل. $z_1=(a_1, b_1)$ و $z_2=(a_2, b_2)$ می گیریم. در این صورت

$$z_1\pm z_2=(a_1\pm a_2, b_1\pm b_2)$$

و بنا به‌تعریف (۵.۲۱):

$$e^{z_1}=\exp(a_1)\cdot e^{ib_1},\ \ e^{z_2}=\exp(a_2)\cdot e^{ib_2},$$

$$e^{z_1\pm z_2}=\exp(a_1\pm a_2)\cdot e^{i(b_1\pm b_2)}$$

با در نظر گرفتن (۵.۲۲) وبا توجه به این که برای عددهای حقیقی a_1 و a_2 داریم:

$$\exp(a_1+a_2)=\exp(a_1)\cdot\exp(a_2),$$

$$\exp(a_1-a_2)=\frac{\exp(a_1)}{\exp(a_2)}$$

به دست می آید:

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=\exp(a_1)\cdot e^{ib_1}\cdot\exp(a_2)\cdot e^{ib_2}=$$

$$=\exp(a_1)\cdot\exp(a_2)\cdot e^{ib_1}\cdot e^{ib_2}=$$

$$=\exp(a_1+a_2)\cdot e^{i(b_1+b_2)}=e^{z_1+z_2};$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=\frac{\exp(a_1)\cdot e^{ib_1}}{\exp(a_2)\cdot e^{ib_2}}=\frac{\exp(a_1)}{\exp(a_2)}\cdot\frac{e^{ib_1}}{e^{ib_2}}=$$

$$=\exp(a_1-a_2)\cdot e^{i(b_1-b_2)}=e^{z_1-z_2}$$

مثال ۴.۳.۵. $|z|$ و $\arg z$ را پیدا کنید وعدد z را به‌صورت نمائی

بنویسید، به شرطی که:

a) $z=a>0$ و $a\in\mathbf{R}$؛

b) $z=a<0$ و $a\in\mathbf{R}$؛

c) $z=i$؛ d) $z=1+i$؛

e) $z=\sin\alpha-i\cos\alpha$، $0\leqslant\alpha<2\pi$، $\alpha\in\mathbf{R}$؛

f) $z=1-e^{i\varphi}$، $0<\psi<2\pi$، $\psi\in\mathbf{R}$.

حل. a) اگر $z=a=(a, 0)$ و $a>0$، آن وقت

$$|z|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|=a$$

و بنا بر دستور (۵.۱۴)

$$\arg z=arc\cos\times\frac{a}{|z|}=arc\cos 1=0$$

در نتیجه $a=a\cdot e^{i0}=(a, 0)$، $a>0$. ودر حالت خاص $1=e^{i0}$.

b) اگر $z=a=(a, 0)$ و $a<0$، آن گاه

$$|z|=|a|=-a$$

و با توجه به دستور (۵.۱۴)

$$\arg z=arc\ \cos\frac{a}{|z|}=arc\cos\times(-1)=\pi$$

یعنی $(a, 0)=a=(-a)e^{i\pi}$، $a<0$. و به‌خصوص $-1=e^{i\pi}$.

c) اگر $z=i=(0, 1)$، آن گاه $|z|=1$. بنا بر دستور (۵.۱۴)

$$\arg z=arc\cos\frac{0}{|z|}=\frac{\pi}{2},\quad i=1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

d) $z=1+i=(1, 1)$، $|z|=\sqrt{2}$ و

$$\arg z=arc\cos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4},\quad 1+i=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

e) $z=\sin\alpha-i\cos\alpha$، $0\leqslant\alpha<2\pi$ و $|z|=1$. عدد z را به این صورت می‌نویسیم:

$$z=1\cdot\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

با توجه به‌نتیجهٔ مثال ۱.۳.۵، $\alpha-\frac{\pi}{2}\in\operatorname{Arg} z$. به این ترتیب، اگر داشته باشیم: $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<2\pi$، آن وقت $0\leqslant\alpha-\frac{\pi}{2}<2\pi$ و

$$\arg z=\alpha-\frac{\pi}{2},$$

و اگر $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$، آن وقت $\alpha-\frac{\pi}{2}+2\pi\in\operatorname{Arg} z$ و

$$0\leqslant\alpha+\frac{3\pi}{2}<2\pi,\quad \arg z=\alpha+\frac{3\pi}{2}$$

و در نتیجه $z=1\cdot e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$.

f) عدد $z=1-e^{i\psi}$ را به این صورت می‌نویسیم:

$$z=1-(\cos\psi+i\sin\psi)=(1-\cos\psi)-i\sin\psi=$$

$$=2\sin^2\frac{\psi}{2}-i\cdot 2\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}=2\sin\frac{\psi}{2}\left(\sin\frac{\psi}{2}-i\cos\frac{\psi}{2}\right)$$

چون $2\sin\frac{\psi}{2}>0$ $\left(0<\frac{\psi}{2}<\pi\right)$، بنابر نتیجهٔ مثال ۱.۳.۵ و بخش e) مثال حاضر، خواهیم داشت: $|z|=2\sin\frac{\psi}{2}$ و بـه شرط $\pi\leqslant\psi<2\pi$ داریـم: $\arg z=\frac{\psi-\pi}{2}$ و به شرط $0<\psi<\pi$: $\arg z=\frac{\psi+3\pi}{2}$. شکل نمائی عدد z به صورت $z=2\sin\frac{\psi}{2}e^{i\frac{\psi-\pi}{2}}$ است.

مثال ۵.۳.۵. ثابت کنید، برای هر دو عدد مختلط $z_1 \neq 0$ و $z_2 \neq 0$ داریم [(۵.۱۰) را ببینید]:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \tag{۵.۲۳}$$

$$\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \tag{۵.۲۴}$$

(به‌یاد بیاوریم که جمع مجموعه‌های $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$، به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \{\varphi : \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \ \varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \ \varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}$$

و به همین ترتیب

$$\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \{\psi : \psi = \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \ \varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}).$$

حل. فرض می‌کنیم: $r_1 = |z_1|$، $r_2 = |z_2|$ ($r_1 > 0$، $r_2 > 0$)، $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ و $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$. عددهای z_1 و z_2 را به‌صورت نمائی می‌نویسیم:

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$$

در این صورت داریم:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

[(۵.۲۲) را ببینید]. چون $r_1 r_2 \in \mathbf{R}$، $r_1 r_2 > 0$ و $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathbf{R}$، بـا توجه به مثال ۱.۳.۵ داریم: $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$ و

$$\varphi_1 + \varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) \tag{۵.۲۵}$$

با توجه به اختیاری نبودن عضوهـای مجموعه‌های $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ و $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$، به دست می‌آید:

$$\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \subset \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) \tag{۵.۲۶}$$

به همین ترتیب $\frac{z_۱}{z_۲}=\frac{r_۱e^{i\varphi_۱}}{r_۲e^{i\varphi_۲}}=\frac{r_۱}{r_۲}.e^{i(\varphi_۱-\varphi_۲)}$ و بنابراین

$$\left|\frac{z_۱}{z_۲}\right|=\frac{r_۱}{r_۲}=\frac{|z_۱|}{|z_۲|},\ \varphi_۱-\varphi_۲\in \operatorname{Arg}\frac{z_۱}{z_۲}$$

از آن‌جا

$$\operatorname{Arg} z_۱-\operatorname{Arg} z_۲\subset \operatorname{Arg}\frac{z_۱}{z_۲} \qquad (۵.۲۷)$$

اکنون، φ را آرگومان دلخواهی از عدد $z_۱\cdot z_۲$ می‌گیریم. مثل قبل، فرض می‌کنیم:

$$\varphi_۱\in \operatorname{Arg} z_۱،\ \varphi_۲\in \operatorname{Arg} z_۲$$

با توجه به دستورهای (۵.۱۵) و (۵.۲۵)، عددهای درست $k_۱$ و $k_۲$ وجود دارند، به نحوی که داشته باشیم:

$$\varphi=\varphi_۰+۲k_۱\pi،\ \varphi_۱+\varphi_۲=\varphi_۰+۲k_۲\pi،$$
$$\varphi_۰=\operatorname{Arg}(z_۱\cdot z_۲)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود: $\varphi=\varphi_۱+\varphi_۲^*$ که، در آن، $\varphi_۱\in \operatorname{Arg} z_۱$ و

$$\varphi_۲^*=\varphi_۲+۲(k_۱-k_۲)\pi\in \operatorname{Arg} z_۲$$

یعنی $\varphi\in \operatorname{Arg} z_۱+\operatorname{Arg} z_۲$. به این ترتیب، بنابر اختیـاری نبودن عضو $\varphi\in \operatorname{Arg}(z_۱\cdot z_۲)$ خواهیم داشت:

$$\operatorname{Arg}(z_۱\cdot z_۲)\subset \operatorname{Arg} z_۱+\operatorname{Arg} z_۲$$

و با توجه به (۵.۲۷)، به (۵.۲۳) می‌رسیم. با همین روش می‌توان رابطهٔ

$$\operatorname{Arg}\frac{z_۱}{z_۲}\subset \operatorname{Arg} z_۱-\operatorname{Arg} z_۲$$

را به دست آورد و به (۵.۲۴) رسید.

برای عدد مختلط $z\neq ۰$، نماد زیر را معرفی می‌کنیم:

$$|\operatorname{Arg} z| = \min_{\varphi \in \operatorname{Arg} z} |\varphi| \qquad (۵.۲۸)$$

مثال ۶.۳.۵. ثابت کنید، اگر $z\neq ۰$ و $\varphi_۰ = \arg z$، آن‌گاه

$$|\operatorname{Arg} z| = \min\{\varphi_۰، ۲\pi - \varphi_۰\} \qquad (۵.۲۹)$$

$$\arg\frac{۱}{z} = \begin{cases} \arg z = ۰ \quad ، \ (z\in\mathbf{R}، \ z>۰) \\ ۲\pi - \arg z، \ (\text{در بقیه حالت‌ها}) \end{cases} \qquad (۵.۳۰)$$

حل. اگر $k\in\mathbf{Z}$ و $k>۰$، آن وقت

$$|\varphi_۰| = \varphi_۰ < \varphi_۰ + ۲k\pi = |\varphi_۰ + ۲k\pi|$$

اگر $k\in\mathbf{Z}$ و $k<-۱$، آن وقت

$$|\varphi_۰ - ۲\pi| = ۲\pi - \varphi_۰ < ۲\pi\cdot(-k) - \varphi_۰ = |\varphi_۰ + ۲k\pi|$$

از این‌جا معلوم می‌شود که، از بین آرگومان‌های عدد مختلط z، کمترین قدرمطلق را تنها می‌توان با مقدارهای $\varphi_۰$ و $\varphi_۰ - ۲\pi$ بیان کرد؛ که منجر به همان دستور (۵.۲۹) می‌شود.

به‌جز این $\arg ۱ = ۰$ [مثال ۴.۳.۵(a)]؛ در نتیجه، بنا بر دستور (۵.۲۳)، از برابری $z.\frac{۱}{z} = ۱$، به دست می‌آید:

$$\arg z + \arg\frac{۱}{z} \in \operatorname{Arg} ۱ = \{\varphi : \varphi = ۲k\pi، \ k\in\mathbf{Z}\}$$

و این به معنای آن است که $\arg z + \arg\frac{۱}{z} = ۲k_۰\pi$ (برای بعضی از مقدارهای $k_۰\in\mathbf{Z}$). اگر z، عدد حقیقی مثبت نباشد، آن‌گاه $\arg z\neq ۰$ و از نابرابری‌های $۰<\arg z<۲\pi$ و $۰\leqslant\arg\frac{۱}{z}<۴\pi$، به دست می‌آید:

$۰<۲k_۰\pi<۴\pi$. بنابراین $k_۰ = ۱$، یعنی

$$\arg\frac{1}{z}=2k_0\pi-\arg z=2\pi-\arg z$$

و اگر z عددی حقیقی و مثبت باشد، بنا به مثال ۵.۳.۴.(a):

$$\arg z=\arg\frac{1}{z}=0$$

در این حالت $\left|\operatorname{Arg}\frac{1}{z}\right|=|\operatorname{Arg} z|=0$.

اگر z، عددی حقیقی و مثبت نباشد، بنابر دستور (۵.۳۰)

$$\left|\operatorname{Arg}\frac{1}{z}\right|=\min\left\{\arg\frac{1}{z}, 2\pi-\arg\frac{1}{z}\right\}=$$
$$=\min\{2\pi-\arg z, \arg z\}=|\operatorname{Arg} z|$$

یادآوری می‌کنیم که از دستور (۵.۲۹) به دست می‌آید:

$$|\operatorname{Arg} z|=\begin{cases}\arg z & (0\leqslant\arg z\leqslant\pi)\\ 2\pi-\arg z & (\pi<\arg z<2\pi)\end{cases} \qquad (5.31)$$

و در همهٔ حالت‌ها

$$0\leqslant|\operatorname{Arg} z|\leqslant\pi$$

مثال ۵.۳.۷. ثابت کنید، اگر $z=it$، $t\in\mathbf{R}$ و $t\neq 0$، آن‌گاه

$$|\operatorname{Arg}(it)|=\frac{\pi}{2} \qquad (5.32)$$

حل. در حالت $t>0$ داریم:

$$it=t\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=|t|\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

و در حالت $t<0$:

$$it=-t\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=|t|\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

بنابراین، با توجه به دستور (۵.۳۱) به دست می‌آید:

$$|\mathrm{Arg}(it)| = \arg(it) = \frac{\pi}{۲},\ t > ۰;$$

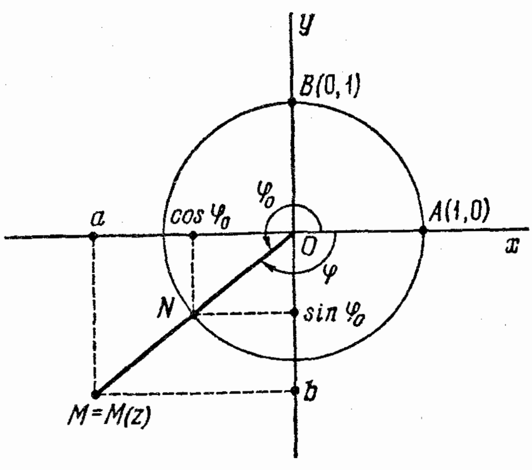
$$|\mathrm{Arg}(it)| = ۲\pi - \arg(it) = ۲\pi - \frac{۳\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲},\ t < ۰$$

بخش ۴.۵. تعبیر هندسی عددهای مختلط.

تعبیر I

P را صفحه‌ای جهت‌دار فرض می‌کنیم. دستگاه مختصات قائم و ثابت $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$ را در نظر می‌گیریم که، در آن، نقطهٔ ثابت O از صفحهٔ P به‌عنوان مبداء و پایهٔ راست‌گرد دلخواه $\mathbf{e}_۱ = \overrightarrow{OA}$، $\mathbf{e}_۲ = \overrightarrow{OB}$، یعنی $\{\mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$، در صفحهٔ P انتخاب شده است (شکل ۱.۵).

عدد مختلط $z = (a، b) \in C$ را متناظر با نقطهٔ $M(z)$ از صفحهٔ P



شکل ۱.۵

می‌گیریم که، مختصات آن، در این دستگاه ثابت، (a,b) است (در شکل ۱۰.۵، هر دو مختص نقطهٔ M منفی‌اند: $a<0$ و $b<0$). می‌گوییم، نقطهٔ M معرف عدد مختلط $z=a+bi=(a, b)$، یا عدد z معرف نقطهٔ M است. به‌این ترتیب، بین مجموعهٔ نقطه‌های صفحهٔ P و مجموعهٔ عددهای مختلط C، تناظری برقرار می‌شود (که به وضوح، تناظری یك به یك است). عددهای حقیقی $(a, 0)$ متناظر با نقطه‌های واقع بر محور xها، و عددهای موهومی خالص $(0, b)$ متناظر با نقطه‌های محور yها می‌شوند. محورهای x و y را، به ترتیب، محورهای حقیقی و موهومی می‌نامیم. همچون قبل، از نماد C، برای نشان دادن مجموعهٔ همهٔ عددهای مختلط، استفاده می‌کنیم. روشن است که $0=(0, 0)=M(0)$.

اگر $z=a+bi$، آن وقت نقطهٔ $M(z)$، که معرف عدد مختلط z است، مختصاتی برابر (a, b) خواهد داشت. بنابراین، با توجه به دستور مربوط به فاصلهٔ دو نقطه، وقتی که مختصات معلومی دارند،

$$|OM(z)|=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z| \quad (5.33)$$

اگر عدد مختلط z، برابر صفر نباشد، آن وقت $\arg z$، کمترین مقدار غیرمنفی زاویهٔ φ_0 است، به نحوی که، اگر نیم‌خط راست $[OA)$ بـه اندازهٔ φ_0 در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند، بر نیم‌خط راست $[OM(z))$ قرار گیرد.

□ اکنون به اثبات این مطلب می‌پردازیم. فرض می‌کنیم: $r=|z|$، $M=M(z)$؛ در ضمن، نقطهٔ N را روی نیم خط راست $[OM)$ طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $|ON|=1$. دراین صورت $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{r}\overrightarrow{OM}$ و نقطهٔ N به مختصات $N\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ می‌شود. نقطهٔ N، بر محیط دایرهٔ به‌شعاع واحد و مرکز مبداء مختصات قرار دارد. بنابراین، زاویه‌ای مانند $\varphi_0\in[0, 2\pi)$ وجود دارد، به نحوی که دوران به اندازهٔ φ_0، نقطهٔ A را بر نقطهٔ N منطبق کند (نیم‌خط راست $[OA)$، بعد از دوران، بر نیم‌خط راست $[OM)$ منطبق

می‌شود). بنا بر تعریف سینوس و کسینوس، $cos\varphi_\circ$ و $sin\varphi_\circ$، به‌ترتیب، برابر با طول و عرض نقطهٔ N هستند. با توجه به منحصر بودن مختصات هر نقطه، داریم:

$$\frac{a}{r}=cos\varphi_\circ, \ \frac{b}{r}=sin\varphi_\circ$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود [(۵.۱۳) را ببینید]: $\varphi_\circ\in \mathrm{Arg}\, z$ و از آن جا که $\circ\leqslant\varphi_\circ<2\pi$، بنابراین $\varphi_\circ=\arg z$. ■

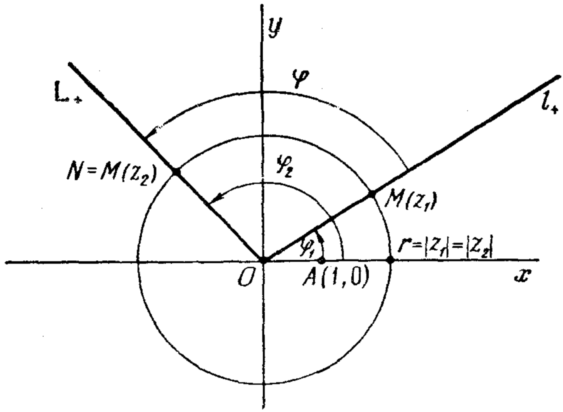
چون در دوران دور مبدأ و بـه انـدازهٔ مضربی از 2π، هر نیم‌خط راست بر خودش منطبق می‌شود و وقتی دوران به اندازهٔ زاویـه‌ای غیر از مضرب 2π انجام گیرد، نیم‌خط راست برخودش منطبق نمی‌شود، بنا براین، با توجه به (۵.۱۵)، $\varphi\in\mathrm{Arg}\, z$ تنها وقتی درست است که در دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ φ، دور نقطهٔ O، نیم‌خط‌راست $[OA)$ بر نیم‌خط‌راست $[OM(z))$ قرار گیرد. درشکل ۱.۵، زاویهٔ منفی $\varphi=\varphi_\circ-2\pi\in\mathrm{Arg}\, z$ هم نشان داده شده است؛ دوران به اندازهٔ این زاویه هم (دور نقطهٔ O)، نیم‌خط راست $[OA)$ را بر نیم‌خط راست $[OM)$ منطبق می‌کند.

مثال ۱.۴.۵. ثابت‌کنید، اگر z_1 و z_2 عددهای مختلطی باشند، به‌نحوی که $|z_1|=|z_2|\neq\circ$، آن وقت

$$M(z_2)=R_o^\varphi(M(z_1)) \qquad (۵.۳۴)$$

که در آن، φ، آرگومان دلخواهی از عدد $\frac{z_2}{z_1}$ و R_o^φ، دورانی در صفحهٔ P، دور نقطهٔ O و به اندازهٔ زاویهٔ φ است.

حل. $\varphi_1\in\mathrm{Arg}\, z_1$، $\varphi_2\in\mathrm{Arg}\, z_2$ و $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ می‌گیریـم. بنا بر آن‌چه دیدیم، نیم خط راست $l_+=[OM(z_1))$ از دوران $[OA)$ دور نقطهٔ O و به اندازهٔ زاویهٔ φ_1 به دست می‌آید. اکنون، اگر نیم‌خط راست l_+ را به اندازهٔ زاویهٔ φ دور مبداء دوران دهیم (شکل ۲.۵)، بـه نیم خط راستی می‌رسیم که از دوران نیم خط راست $[OA)$ به انـدازهٔ $\varphi_1+\varphi$، یعنی φ_2،



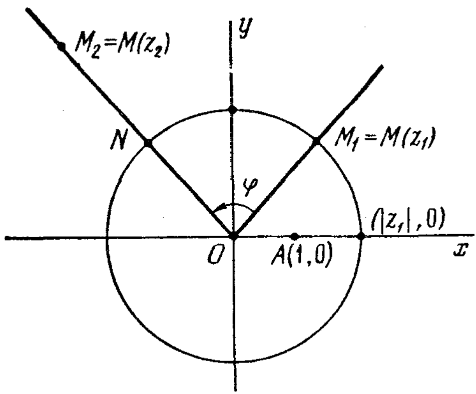
شکل ۲.۵

به دست می‌آید. ولی، وقتی دوران به اندازهٔ زاویهٔ $\varphi_۲$ باشد، نیم‌خط راست $[OA)$ بر نیم‌خط راست $L_+ = [OM(z_۲))$ منطبق می‌شود. و این، به معنای آن است که، دوران دور نقطهٔ O به‌اندازهٔ زاویهٔ φ، نیم خط راست l_+ را بر نیم‌خط‌راست L_+ منطبق می‌کندو، به‌خصوص، نقطهٔ $M(z_۱)\in l_+$ بر نقطهٔ $N = R_o^\varphi(M(z_۱))\in L_+$ قرار می‌گیرد. در این صورت

$$|ON| = |OR_o^\varphi(M(z_۱))| = |OM(z_۱)| =$$
$$= |z_۱| = |z_۲| = |OM(z_۲)|$$

بنابراین، نقطه‌های N و $M(z_۲)$ که بر نیم خط راست L_+ قرار دارند، از مبداء به‌یك فاصله‌اند، یعنی $N = M(z_۲)$. درضمن روشن است که باانتخاب آرگومان‌های $\varphi_۱\in \operatorname{Arg} z_۱$ و $\varphi_۲\in \operatorname{Arg} z_۲$، عدد $\varphi = \varphi_۲ - \varphi_۱$، آرگومان دلخواهی از عدد $\dfrac{z_۲}{z_۱}$ خواهد بود [با توجه به‌دستور (۵.۲۴)].

مثال ۵.۴.۲. $z_۱ \neq ۰$ و $z_۲ \neq ۰$ را عددهایی مختلط و $M(z_۱) = M_۱$،



شکل ۳.۵

$M(z_۲)=M_۲$ فرض می‌کنیم. ثابت کنید

$$M_۲=H_o^r\circ R_o^\varphi(M_۱) \qquad (۵.۳۵)$$

که در آن $r=\dfrac{|z_۲|}{|z_۱|}$ و φ، آرگومان دلخواهی از عدد $\dfrac{z_۲}{z_۱}$ است. برعکس، ثابت کنید، اگر برابری (۵.۳۵)، برای مقدارهایی از $r\in\mathbf{R}$، $r>\circ$، $\varphi\in\mathbf{R}$ برقرار باشد، آن وقت $z_۲=z_۱\cdot re^{i\varphi}$.

حل. ضمن حل مسألهٔ قبل، معلوم شد که نقطهٔ $N=R_o^\varphi(M_۱)$ بر نیم‌خط راست $L_+=[OM_۲)$ قرار دارد (شکل ۳.۵). نقطهٔ $M_۲$ هم، بر نیم‌خط راست L_+، به ابتدای نقطهٔ O، واقع است. چون

$$|ON|=|OM_۱|=|z_۱|,\quad |OM_۲|=|z_۲|=r|z_۱|$$

بنا بر تعریف تجانس، خواهیم داشت: $M_۲=H_o^r(N)$.

برعکس، اگر برابری (۵.۳۵) برقرار باشد، با توجه به دستور (۵.۳۳) و تعریف تجانس داریم:

$$|z_2| = |OM_2| = r|OR_o^{\varphi}(M_1)| = r|OM_1| = r|z_1|،$$

$$r = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \left|\frac{z_2}{z_1}\right|$$

سپس، ازدستور (۵.۳۵) نتیجه می‌شود که نیم‌خط راست $[OM_2)$ را می‌توان از نیم‌خط راست $[OM_1)$، ضمن دوران آن دور نقطهٔ O و به‌اندازهٔ زاویـه‌ای مثل φ به دست آورد. خود نیم‌خط راست $[OM_1)$ هم، از دوران نیم‌خط راست $[OA)$ دور نقطهٔ O و به اندازهٔ زاویهٔ $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ به دست می‌آید. بنابراین، نیم خط راست $[OM_2)$، نتیجه‌ای است از دوران $[OA)$ دورنقطهٔ O و به‌اندازهٔ زاویهٔ $\varphi + \varphi_1$. واین‌می‌رساند که $\varphi + \varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_2$ و

$$\varphi = (\varphi + \varphi_1) - \varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_2 - \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}$$

و بنا به تعریف شکل نهائی عدد مختلط داریم:

$$\frac{z_2}{z_1} = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{i\varphi}$$

مثال ۳.۴.۵. $z_1 \neq 0$ و $z_2 \neq 0$ راعددهایی مختلط و $M_1 = M(z_1)$، $M_2 = M(z_2)$ فرض می‌کنیم. ثابت کنید زاویهٔ $\widehat{M_1OM_2}$، بین بردارهای $\overrightarrow{OM_1}$ و $\overrightarrow{OM_2}$ را می‌توان از این دستور به دست آورد:

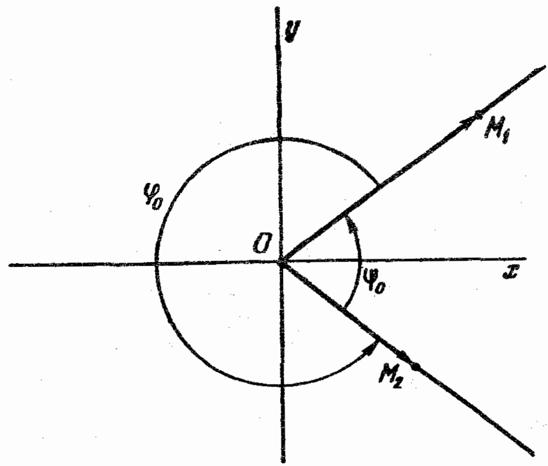
$$\widehat{M_1OM_2} = \left|\operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}\right| \qquad (۵.۳۶)$$

حل. اگر بردارهای $\overrightarrow{OM_1}$ و $\overrightarrow{OM_2}$ در یک جهت باشند،آن وقت

$$\widehat{M_1OM_2} = 0،\ \ M_2 = H_o^r \circ R_o^0(M_1)،\ \ r = \frac{|OM_2|}{|OM_1|}$$

در این صورت، همان‌طور که درمسالهٔ قبل دیدیم، در این حالت $0 \in \operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}$

و بنا بر دستور (۵.۳۱)



شکل ۴.۵

$$\left|\operatorname{Arg}\frac{z_۲}{z_۱}\right| = ۰ = \widehat{M_۱OM_۲}$$

حالتی را درنظر می‌گیریم که بردارهای $\overrightarrow{OM_۱}$ و $\overrightarrow{OM_۲}$ در یک جهت نباشند $\left(۰\notin\operatorname{Arg}\frac{z_۲}{z_۱}\right)$. فرض می‌کنیم: $\varphi_۰=\arg\frac{z_۲}{z_۱}$ و $\psi_۰=\arg\frac{z_۱}{z_۲}$.
از آن‌جا که $\frac{z_۱}{z_۲}=\frac{۱}{\left(\frac{z_۲}{z_۱}\right)}$، بنابر دستور (۵.۳۰): $\varphi_۰+\psi_۰=۲\pi$. بنابر تعریف زاویهٔ بین دو بردار، $\widehat{M_۱OM_۲}$ برابر است با کوچکترین زاویه از بین دو زاویهٔ $\varphi_۰$ و $\psi_۰$ (شکل ۴.۵):

$$\widehat{M_۱OM_۲}=\min\{\varphi_۰, \psi_۰\}=\min\{\varphi_۰, ۲\pi-\varphi_۰\}=\left|\operatorname{Arg}\frac{z_۲}{z_۱}\right|$$

مثال ۴.۴.۵. فرض می‌کنیم: $z_۱\neq۰$، $z_۲\neq۰$ عددهایی مختلط، و درضمن

$M_1=M(z_1)$، $M_2=M(z_2)$، $\frac{|OM_2|}{|OM_1|}=r$، $\widehat{M_1OM_2}=\varphi$. ثابت کنید،
در این صورت

$$z_2=rz_1\cdot e^{i\varepsilon\varphi} \qquad (5.37)$$

که در آن، به‌شرط $\varphi\neq 0$ ، $\varphi\neq\pi$ و راست‌گرد بودن پایهٔ $\{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\}$ داریم $\varepsilon=1$؛ به‌شرط $\varphi\neq\pi$ ، $\varphi\neq 0$ وچپ‌گردبودن پایهٔ $\{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\}$ داریم $\varepsilon=-1$ و، بالاخره، به شرط $\varphi=0$ یا $\varphi=\pi$ داریم $\varepsilon=1$.

حل. اگر پایهٔ $\{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\}$ راست‌گرد باشد، آن وقت، کمترین دوران (یعنی، دوران به اندازهٔ زاویه‌ای که قدرمطلق آن برابر φ باشد)، نیم‌خط راست $[OM_1)$ را، درجهت مثلثاتی (خلاف جهت حرکت‌عقربه‌های ساعت)، به نیم‌خط راست $[OM_2)$ می‌رساند. بنابراین

$$[OM_2)=R_o^{\varphi}([OM_1)),\quad M_2=H_o^{r}\circ R_o^{\varphi}(M_1)$$

و با توجه به نتیجهٔ مثال ۹.۴.۵، برابری (۵.۳۷) برقرار است؛ در این حالت: $\varepsilon=1$.

اگر پایهٔ $\{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}\}$ چپ‌گرد باشد، آن وقت، کمترین دوران از $[OM_1)$ به $[OM_2)$، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت خواهد بود بنابراین $[OM_2)=R_o^{-\varphi}([OM_1))$ که همان برابری (۵.۳۷)، به ازای $\varepsilon=-1$ است. حالت‌های $\varphi=0$ و $\varphi=\pi$ روشن است.

بخش ۵.۵. تعبیر هندسی عددهای مختلط. تعبیر II

مثل بخش قبل، P را صفحه‌ای جهت‌دار و $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ را دستگاه مختصات قائم و ثابتی در آن، فرض می‌کنیم.

عدد مختلط $z=(a, b)\in C$ را، متناظر با بردار

$$\mathbf{V}(z)=a\mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2=(a, b)$$

می‌گیریم. این تناظر، یك به یك است: هر بردار $\mathbf{c}$ از صفحهٔ P، تنها و تنها با یك عدد مختلط z متناظر است.

□ درواقع، با توجه به‌آن‌چه دربخش ۵.۲ دیده‌ایم، عددهای‌حقیقی منحصر به فردی مانند x و y وجود دارند، به نحوی‌که $\mathbf{c}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2$ و این، به معنای آن است‌که $\mathbf{c}=\mathbf{V}(z)$ که، درآن

$$z=(x, y)=x+yi \in C \blacksquare$$

عدد مختلط متناظر با بردار $\mathbf{c}$ را با $K(\mathbf{c})$ نشان می‌دهیم. در رابطه‌با این نمادگذاری، داریم:

$$K(\mathbf{V}(a+bi))=a+bi;$$

$$\mathbf{V}(K(x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2))=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2 \qquad (۵.۳۸)$$

ویژگی بسیارمهم تناظر یك‌به‌یك بین مجموعهٔ C ومجموعهٔ بردارهای واقع درصفحهٔ P، خطی‌بودن آن است: عددهای حقیقی λ و μ و بردارهای $\mathbf{c}_1$ و $\mathbf{c}_2$ واقع برصفحهٔ P، داریم:

$$K(\lambda\mathbf{c}_1+\mu\mathbf{c}_2)=\lambda K(\mathbf{c}_1)+\mu K(\mathbf{c}_2) \qquad (۵.۳۹)$$

برای عددهای حقیقی λ و μ و عددهای مختلط z_1 و z_2، داریم:

$$\mathbf{V}(\lambda z_1+\mu z_2)=\lambda\mathbf{V}(z_1)+\mu\mathbf{V}(z_2) \qquad (۵.۴۰)$$

□ اگر $\mathbf{c}_1=x_1\mathbf{e}_1+y_1\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{c}_2=x_2\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2$، آن وقت

$$\lambda\mathbf{c}_1+\mu\mathbf{c}_2=(\lambda x_1+\mu x_2)\mathbf{e}_1+(\lambda y_1+\mu y_2)\mathbf{e}_2$$

و بنابراین

$$K(\mathbf{c}_1)=(x_1, y_1), K(\mathbf{c}_2)=(x_2, y_2),$$

$$K(\lambda\mathbf{c}_1+\mu\mathbf{c}_2)=(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2)=(\lambda x_1, \lambda y_1)+$$

$$+(\mu x_2+\mu y_2)=\lambda\cdot(x_1, y_1)+\mu\cdot(x_2, y_2)=$$

$$=\lambda\cdot K(\mathbf{c}_1)+\mu\cdot K(\mathbf{c}_2)$$

[در این‌جا، از نخستین برابری (۵.۱) استفاده کرده‌ایم]. دستور (۵.۳۹) ثابت شد. دستور (۵.۴۰) هم، به‌طریق مشابهی، ثابت می‌شود. ■

اگر $M(z)$، $z\in C$، تناظر بین عددهای مختلط را با نقطه‌های صفحهٔ P بیان کنند، (به‌نحوی که در بخش ۴.۵ تعریف کردیم)، آن‌گاه

$$\overrightarrow{OM}(z)=\mathbf{V}(z) \tag{۵.۴۱}$$

از دستورهای (۵.۴۱) و (۵.۳۳) نتیجه می‌شود:

$$|z|=|\mathbf{V}(z)| \tag{۵.۴۲}$$

□ (۵.۴۱) را ثابت می‌کنیم. اگر $z=(a, b)$، آن وقت نقطهٔ $M(z)$ در دستگاه‌مختصات $\{O, \mathbf{e}_۱, \mathbf{e}_۲\}$، به‌مختصات (a, b) است. بنابراین $\overrightarrow{OM}(z)=a\mathbf{e}_۱+b\mathbf{e}_۲=\mathbf{V}(z)$. ■

مثال ۰۱.۵.۵ فرض کنید: $\mathbf{c}_۱=\mathbf{V}(z_۱)$، $\mathbf{c}_۲=\mathbf{V}(z_۲)$، $z_۱\in C$، $z_۲\in C$، $z_۱\neq ۰$، $z_۲\neq ۰$. مطلوب است زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{c}_۱$ و $\mathbf{c}_۲$، به‌شرطی که:

a) $z_۱=۱+i$، $z_۲=۱-i$؛ b) $z_۱=۳-i$، $z_۲=۲+i$.

حل. بنابر (۵.۴۱)، زاویهٔ φ بین بردارهای $\mathbf{c}_۱$ و $\mathbf{c}_۲$، برابر است با زاویهٔ بین $\overrightarrow{OM}(z_۱)$ و $\overrightarrow{OM}(z_۲)$؛ و با توجه به‌دستور (۵.۳۶)، این زاویه برابر $\left|\operatorname{Arg}\frac{z_۲}{z_۱}\right|$ می‌شود، یعنی

$$(\mathbf{V}(z_۱), \mathbf{V}(z_۲))=\left|\operatorname{Arg}\frac{z_۲}{z_۱}\right| \tag{۵.۴۳}$$

درحالت a)

$$\frac{z_۲}{z_۱}=\frac{۱+i}{۱-i}=\frac{(۱+i)(۱+i)}{(۱-i)(۱+i)}=\frac{۱+۲i+i^۲}{۱-i^۲}=\frac{۲i}{۲}=$$

$$=i=۱\cdot e^{i\frac{\pi}{۲}}; \left|\operatorname{Arg}\frac{z_۲}{z_۱}\right|=\frac{\pi}{۲}$$

و درحالت b)

$$\frac{z_۲}{z_۱}=\frac{۲+i}{۳-i}=\frac{(۲+i)(۳+i)}{(۳-i)(۳+i)}=\frac{۶+۵i+i^۲}{۹-i^۲}=$$

$$=\frac{۱}{۲}(۱+i)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}e^{i\frac{\pi}{۴}};\ \left|\operatorname{Arg}\frac{z_۲}{z_۱}\right|=\frac{\pi}{۴}$$

در این‌جا، از نتیجهٔ مثال ۴.۳.۵ و دستور (۵.۳۱) استفاده کرده‌ایم.

مثال ۵.۵.۲. $A(۱،۱)$، $B(۴،۰)$ و $C(۳،۲)$ را رأس‌های یک مثلث بگیرید. مطلوب است محاسبهٔ زاویهٔ به‌رأس A در این مثلث (از این‌جا به‌بعد، مختصات نقطه‌ها را در دستگاه مختصات $\{O، \mathbf{e}_۱، \mathbf{e}_۲\}$، به نحوی که در بخش ۴.۵ آورده‌ایم، درنظر می‌گیریم).

حل. داریم:

$$\overrightarrow{AB}=(۴-۱، ۰-۱)=۳\mathbf{e}_۱-\mathbf{e}_۲=\mathbf{V}(z_۱)،\ z_۱=۳-i؛$$

$$\overrightarrow{AC}=(۳-۱، ۲-۱)=\mathbf{V}(z_۲)،\ z_۲=۲+i$$

و بنا بر دستور (۵.۴۳) [مثال ۵.۵.۱، b) را ببینید]:

$$\hat{A}=\left|\operatorname{Arg}\frac{z_۲}{z_۱}\right|=\frac{\pi}{۴}$$

مثال ۵.۵.۳. $\mathbf{c}_۱=\mathbf{V}(z_۱)$، $z_۱\in C$، $z_۱\neq ۰$ مفروض است. همهٔ عددهای مختلط $z_۲=K(\mathbf{c}_۲)$ را پیدا کنید، به نحوی که داشته باشیم: $\mathbf{c}_۱\perp\mathbf{c}_۲$.

حل. روشن است که $z_۲=۰$، یعنی اگر $\mathbf{c}_۲=\mathbf{o}$، آن‌گاه $\mathbf{c}_۱\perp\mathbf{c}_۲$. اکنون فرض می‌کنیم $z_۲\neq ۰$، عدد مختلط مطلوب باشد: $M_۱=M(z_۱)$ و $M_۲=M(z_۲)$. بنا بر این $\mathbf{c}_۱=\overrightarrow{OM_۱}$ و $\mathbf{c}_۲=\overrightarrow{OM_۲}$؛ با توجه به شرط عمودبودن بردارهای $\mathbf{c}_۱$ و $\mathbf{c}_۲$ نتیجه می‌شود $\widehat{M_۱OM_۲}=\frac{\pi}{۲}$؛ و بنا بر دستور (۵.۳۷):

$$z_۲=rz_۱e^{\pm i\frac{\pi}{۲}}=rz_۱\left(cos\left(\pm\frac{\pi}{۲}\right)+isin\left(\pm\frac{\pi}{۲}\right)\right)=\pm riz_۱$$

بنابراین، درهرحالت، جواب مسأله به این صورت است:

$$z_2 = itz_1, \quad t\in\mathbf{R} \qquad (5.44)$$

برعکس، اگر $z_2 = itz_1$، آن وقت برای $t=0$ داریم: $z_2 = 0$ و $\mathbf{c}_2 = 0$ و $\mathbf{c}_1 \perp \mathbf{c}_2$. اگر $t\neq 0$، بنابردستور (۵.۳۲) داریم:

$$(\widehat{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2}) = \left|\operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}\right| = |\operatorname{Arg}(it)| = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۴.۵.۵. در همان مثلث مثال ۲.۵.۵، طول ارتفاع $CH = h$ از مثلث ABC را پیدا کنید.

حل. فرض می‌کنیم (شکل ۵.۵):

$$\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{AB} = (3, -1), \ \mathbf{c}_2 = \overrightarrow{HC}, \ \mathbf{c}_3 = \overrightarrow{CA} = (-2, -1),$$

$$z_1 = K(\mathbf{c}_1) = 3 - i, \ z_2 = K(\mathbf{c}_2), \ z_3 = K(\mathbf{c}_3) = -2 - i$$

چون $\mathbf{c}_1 \perp \mathbf{c}_2$، بنابراین بـا توجه به دستور (۵.۴۴)، عدد حقیقی t وجود دارد، به‌نحوی کـه داشته باشیم: $z_2 = itz_1$. به‌جز این، بردارهـای $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AB}$ هم راستا هستند. بنابراین، عدد حقیقی τ وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم: $\overrightarrow{AH} = \tau\overrightarrow{AB} = \tau\mathbf{c}_1$. چون

$$0 = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$$

بنابراین، با توجه به دستور (۵.۳۹) داریم:

$$0 = K(0) = K(\mathbf{c}_3 + \tau\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) = K(\mathbf{c}_3) + \tau K(\mathbf{c}_1) +$$
$$+ K(\mathbf{c}_2) = z_3 + \tau z_1 + itz_1;$$

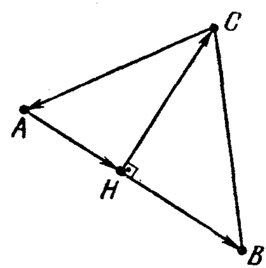
$$(\tau + it)z_1 = -z_3; \ \tau + it = \frac{-z_3}{z_1} = \frac{2+i}{3-i}$$

از اینجا (با توجه به مثال ۱.۵.۵، (b)): $\tau + it = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. عددهای t و τ حقیقی‌اند و، بنابراین، با توجه به تعریف عددهای مختلط برابر، به دست می‌آید:

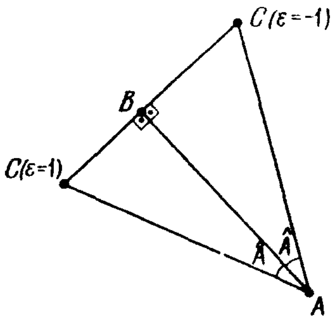
$$\tau=\frac{۱}{۲} \text{ ، } t=\frac{۱}{۲}$$

و با تکیه بر (۵.۴۲) داریم:

$$h=|\overrightarrow{CH}|=|\mathbf{c}_۲|=|z_۲|=$$
$$=|itz_۱|=|i|\cdot|t|\cdot|z_۱|=۱\times\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۳^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{\frac{۵}{۲}}$$



شکل ۵.۵



شکل ۶.۵

مثال ۵.۵.۵. مطلوب است مختصات رأس C از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $\left(\hat{B}=\frac{\pi}{۲}\right)$ ، به‌شرطی که

$$A(۲,-۱۱), B(-۱۰,-۲), \hat{A}=\text{arc}tg\frac{۴}{۳}$$

حل. بنا به‌شرط مسأله $tg\hat{A}=\frac{۴}{۳}$. اکنون فرض کنید:

$$\mathbf{c}_۱=\overrightarrow{AB}=(-۱۲,۹),\ z_۱=k(\mathbf{c}_۱)=-۱۲+۹i$$
$$\mathbf{c}_۲=\overrightarrow{AC},\ z_۲=K(\mathbf{c}_۲),\ r=\frac{|\mathbf{c}_۲|}{|\mathbf{c}_۱|}=\frac{|z_۲|}{|z_۱|}=\frac{۱}{cos A}=\frac{۵}{۳}$$

چون زاویهٔ φ، بین بردارهای $\mathbf{c}_۱$ و $\mathbf{c}_۲$ برابر $\hat{A}$ است، بنا به دستورهای (۵.۴۱) و (۵.۳۷) خواهیم داشت:

$$z_۲ = r\cdot z_۱ \cdot e^{i\varepsilon\varphi} = \frac{۱}{cos\varphi}\cdot z_۱\cdot(cos(\varepsilon\varphi) + i sin(\varepsilon\varphi)) =$$

$$= z_۱\cdot(۱ + \varepsilon i tg\varphi)، \qquad (۵.۴۵)$$

$$z_۲ = (-۱۲ + ۹i)\left(۱ + \varepsilon i\frac{۴}{۳}\right) = -۱۲ + ۹i - ۱۶\varepsilon i +$$

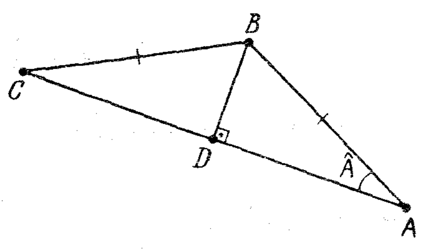
$$+ ۱۲\varepsilon i^۲ = (-۱۲ - ۱۲\varepsilon، ۹ - ۱۶\varepsilon)،$$

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}_۲ = (-۱۲ - ۱۲\varepsilon، ۹ - ۱۶\varepsilon)،$$

$$C(-۱۰ - ۱۲\varepsilon، -۲ - ۱۶\varepsilon)، \ \varepsilon = \pm ۱$$

به‌این ترتیب، مسأله دوجواب دارد(شکل ۶.۵): $C(۲،۱۴)$ (برای $\varepsilon = -۱$) و $C(-۲۲، -۱۸)$ (برای $\varepsilon = ۱$).

مثال ۶.۵.۵. مطلوب است مختصات رأس B ازمثلث متساوی‌الساقین ABC، ($|AB| = |BC|$)، به شرطی که $A(۷، -۶)$، $C(-۱۷، ۱۲)$ و $tg A = \frac{۴}{۳}$.

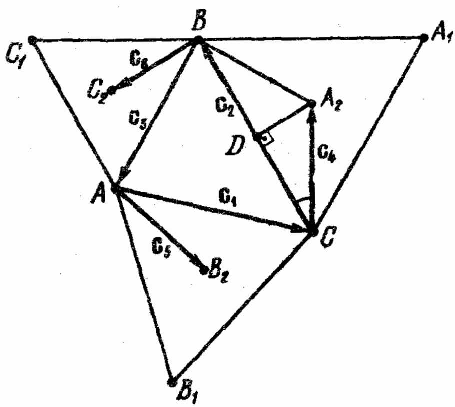


شکل ۷.۵

حل. وسط پاره‌خط راست $[AC]$ را D می‌نامیم (شکل ۷.۵). داریم:
$\widehat{ADB}=\frac{\pi}{2}$ و $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=(-12, 9)$. فرض می‌کنیم: $\mathbf{c}_1=\overrightarrow{AD}$، $\mathbf{c}_2=\overrightarrow{AB}$، $z_1=K(\mathbf{c}_1)=-12+9i$، $z_2=K(\mathbf{c}_2)$ (مثال ۵.۵.۵ را ببینید). شبیه مثال ۵.۵.۵ به دست می‌آید:

$$z_2=(-12-12\varepsilon, 9-16\varepsilon),\ B(-5-12\varepsilon, 3-16\varepsilon),\ \varepsilon=\pm 1$$

مثال ۷.۵.۵. روی ضلع‌های مثلث ABC و در بیرون آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع BCA_1، ACB_1 و ABC_1 را ساخته‌ایم، A_2، B_2 و C_2 را مرکزهای سه مثلث اخیر می‌گیریم (شکل ۸.۵). ثابت کنید، مثلث $A_2B_2C_2$ متساوی‌الاضلاع است.



شکل ۸.۵

حل. فرض می‌کنیم:

$$\mathbf{c}_1=\overrightarrow{AC},\ \mathbf{c}_2=\overrightarrow{CB},\ \mathbf{c}_3=\overrightarrow{BA},\ \mathbf{c}_4=\overrightarrow{CA_2},\ \mathbf{c}_5=\overrightarrow{AB_2},$$
$$\mathbf{c}_6=\overrightarrow{BC_2},\ z_j=K(\mathbf{c}_j),\ j=1, 2, \ldots, 6$$

اگر D وسط پاره‌خط راست $[BC]$ باشد، داریم:

$$\widehat{CDA_۲}=\frac{\pi}{۲},\ \widehat{DCA_۲}=\frac{\pi}{۶},\ \overrightarrow{CD}=\frac{۱}{۲}\mathbf{c}_۲,\ |\mathbf{c}_۴|=\frac{|\overrightarrow{CD}|}{\cos\frac{\pi}{۶}}$$

و [مثال ۵.۵.۵ و دستور (۵.۴۵) را ببینید]

$$z_۴=\frac{۱}{۲}\cdot z_۲\cdot\frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۶}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{۶}}=z_۲\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}i\right)$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود:

$$z_۵=z_۱\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}i\right),\ z_۶=z_۳\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}i\right)$$

چون $\mathbf{c}_۱+\mathbf{c}_۲+\mathbf{c}_۳=\circ$، بنابر ویژگی (۵.۳۹) داریم:

$$z_۱+z_۲+z_۳=K(\mathbf{c}_۱+\mathbf{c}_۲+\mathbf{c}_۳)=K(\circ)=\circ$$

چون $\overrightarrow{B_۲A_۲}=-\mathbf{c}_۵+\mathbf{c}_۱+\mathbf{c}_۴$ و $\overrightarrow{B_۲C_۲}=-\mathbf{c}_۵-\mathbf{c}_۳+\mathbf{c}_۶$، بنابراین، برای عددهای مختلط $z_۷=K(\overrightarrow{B_۲A_۲})$ و $z_۸=K(\overrightarrow{B_۲C_۲})$ خواهیم داشت:

$$z_۷=-z_۵+z_۱+z_۴=z_۱\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}i\right)+z_۲\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}i\right)=$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\cdot z_۱\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}i\right)+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\cdot z_۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}i\right)=$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\cdot z_۱\cdot e^{i\frac{\pi}{۶}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\cdot z_۲\cdot e^{-i\frac{\pi}{۶}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}e^{-i\frac{\pi}{۶}}(z_۱\cdot e^{i\frac{\pi}{۳}}+z_۲);$$

$$z_۸=-z_۵-z_۳+z_۶=-z_۱\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}i\right)-z_۳\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}i\right)=$$

$$=-z_۱\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}i\right)+(z_۱+z_۲)\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}i\right)=$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۳}}z_۱\cdot i+z_۲\cdot\frac{۱}{\sqrt{۳}}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}i\right)=\frac{۱}{\sqrt{۳}}z_۱\cdot e^{i\frac{\pi}{۲}}+$$

$$+\frac{۱}{\sqrt{۳}}z_۲\cdot e^{i\frac{\pi}{۶}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\cdot e^{i\frac{\pi}{۶}}(z_۱\cdot e^{i\frac{\pi}{۳}}+z_۲);$$

$$\frac{z_۸}{z_۷}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۳}}\cdot e^{i\frac{\pi}{۶}}(z_۱\cdot e^{i\frac{\pi}{۳}}+z_۲)}{\frac{۱}{\sqrt{۳}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{۶}}(z_۱\cdot e^{i\frac{\pi}{۳}}+z_۲)}=e^{i\frac{\pi}{۳}}$$

چون $\overrightarrow{B_۲A_۲}=\mathbf{V}(z_۷)$ و $\overrightarrow{B_۲C_۲}=\mathbf{V}(z_۸)$، بنابر دستورهای (۵.۴.۲) و (۵.۴.۳)خواهیم داشت:

$$\frac{|B_۲C_۲|}{|B_۲A_۲|}=\frac{|\overrightarrow{B_۲C_۲}|}{|\overrightarrow{B_۲A_۲}|}=\frac{|z_۸|}{|z_۷|}=\left|\frac{z_۸}{z_۷}\right|=۱،$$

$$\widehat{A_۲B_۲C_۲}=\left|\operatorname{Arg}\frac{z_۸}{z_۷}\right|=\frac{\pi}{۳}$$

به این ترتیب، $A_۲B_۲C_۲$، مثلثی متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس برابر $\frac{\pi}{۳}$ می‌شود، یعنی این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

ضمیمه

۱. ویژگی‌های تبدیل درتشابه به p

°۱. تشابه p، با نسبت برابر k، یك تبدیل یك به یك است. دراین‌حالت، فضا (صفحه)، به‌یك فضای کامل (صفحهٔ کامل) تبدیل می‌شود. برای p، تبدیل معکوس وجود دارد که باز هم یك تبدیل متشابه (با نسبت $\dfrac{1}{k}$) است.

°۲. اگر A، B و C نقطه‌های واقع بریك خط راست باشند، $C\in[AB]$، آن‌گاه تصویر آن‌ها در تشابه p، یعنی $p(A)$، $p(B)$ و $p(C)$ هم، بر یك خط راست قرار دارند: $p(C)\in[p(A)\,p(B)]$.

°۳. در تبدیل p، تصویر خط‌راست (AB)، خط راست $(p(A)p(B))$؛ تصویر پاره‌خط راست $[AB]$، پاره‌خط راست $[p(A)p(B)]$؛ تصویر نیم‌خط راست $[AB)$، نیم‌خط‌راست $[p(A)p(B))$ و تصویر صفحهٔ (ABC)، صفحهٔ $(p(A)p(B)p(C))$ است.

°۴. در تبدیل‌متشابه، تصویر دوخط‌راست‌موازی، دوخط راست‌موازی، تصویر نیم‌خط‌های‌راست هم‌جهت (یا باجهت‌های‌مخالف)، نیم‌خط‌های‌راست هم‌جهت (یا باجهت‌های‌مخالف) وتصویر صفحه‌های‌موازی، صفحه‌های‌موازی است.

°۵. اگر O، A و B، سه نقطهٔ غیر واقع بر یك خط راست باشند، آن وقت زاویهٔ $\widehat{AOB}$ با زاویهٔ $\widehat{p(A)p(O)p(B)}$ برابر است. اگر برای دو مثلث OAB و $O^*A^*B^*$ داشته باشیم:

$$\widehat{AOB}=\widehat{A^*O^*B^*},\quad \widehat{ABO}=\widehat{A^*B^*O^*}$$

آن وقت، تبدیل تشابهی p وجود دارد، به‌نحوی که برای آن داشته باشیم:

$$A^* = P(A)، B^* = p(B)، O^* = p(O)$$

۶°. ترکیب تبدیل‌های تشابهی با نسبت‌های $k_۱$ و $k_۲$، تبدیلی است تشابهی با نسبت $k_۱ k_۲$.

۲. ویژگی‌های تبدیل، در تجانس $\mathbf{H}_O^k$

۱°. تبدیل تجانسی H_O^k، همان تبدیل تشابهی با نسبت $\frac{۱}{k}$ است.

۲°. در تجانس H_O^k، تصویر هر صفحه، صفحه‌ای موازی با آن و تصویر هرخط راست (AB)، خط راست $(H_O^k(A)H_O^k(B))$ موازی با آن است. دو نیم‌خط راست $[AB)$ و $H_O^k([AB))=[H_O^k(A)H_O^k(B))$ بر یک امتدادند و در حالت $k>۰$ هم‌جهت و در حالت $k<۰$ در خلاف جهت یکدیگرند.

۳°. ترکیب دوتجانس $H_O^{k_۱}$ و $H_O^{k_۲}$، تجانس $H_O^{k_۱k_۲}$ است.

۴°. اگر $O_۱ \neq O_۲$ و $k_۱k_۲ \neq ۱$، آن‌وقت، ترکیب دو تجانس $H_{O_۱}^{k_۱}$ و $H_{O_۲}^{k_۲}$، تبدیل تجانسی $H_O^{k_۱k_۲}$ است که، مرکز تجانس آن، برخط راست $(O_۱O_۲)$ قرار دارد. مرکزهای دو تبدیل تجانسی $H_{O_۱}^{k_۱} \circ H_{O_۲}^{k_۲}$ و $H_{O_۲}^{k_۲} \circ H_{O_۱}^{k_۱}$، تنها وقتی برهم منطبق‌اند که داشته باشیم: $(k_۱ - ۱)(k_۲ - ۱) = ۰$.

۵°. ترکیب $H_{O_۲}^{k_۲} \circ H_{O_۱}^{k_۱}$، به شرط $k_۲ = \frac{۱}{k_۱}$، یک انتقال است:

$T_{(۱-k_۲)\overrightarrow{O_۱O_۲}}$.

۶°. معکوس تبدیل تجانسی H_O^k، یك تبدیل تجانسی با نسبت $\frac{۱}{k}$ است، یعنی $H_O^{\frac{۱}{k}}$.

۳. ویژگی‌های تقارن مرکزی $\mathbf{Z}_O$

۱°. تقارن مرکزی Z_O، یك تبدیل تجانسی است: $Z_O = H_O^{(-۱)}$.

ترکیب یک تبدیل تقارن مرکزی با معکوس آن، برخود شکل منطبق می‌شود.

۲°. تقارن مرکزی یک انتقال است.

۳°. ترکیب $Z_{O_2} \circ Z_{O_1}$، انتقال $T_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$ است.

۴°. ترکیب $Z_{O_3} \circ Z_{O_2} \circ Z_{O_1}$ (از تقارن‌های مرکزی Z_{O_1}، Z_{O_2} و Z_{O_3})، تقارن مرکزی Z_O است که، مرکز آن، عبارت است از تصویر نقطهٔ O_2، در تقارن مرکزی به مرکز وسط پاره‌خط راست $[O_1O_3]$. اگر نقطه‌های O_1، O_2 و O_3 روی یک خط راست نباشند، آن وقت چهارضلعی $O_1O_2O_3O$ متوازی‌الاضلاع است.

۴. ویژگی‌های انتقال $\mathrm{T}_{\overrightarrow{AB}}$

۱°. اگر $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$، آن گاه $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{A_1B_1}}$، یعنی برای هر نقطهٔ C داریم: $T_{\overrightarrow{AB}}(C) = T_{\overrightarrow{A_1B_1}}(C)$. برعکس، اگر دست‌کم برای یک نقطهٔ C، برابری $T_{\overrightarrow{AB}}(C) = T_{\overrightarrow{A_1B_1}}(C)$ برقرار باشد، آن وقت $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

۲°. انتقال یک تغییر مکان است.

۳°. تنها وقتی $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ که $[AB] = T_{\overrightarrow{CA}}([CD])$.

۴°. تنها وقتی $[AB)\uparrow\uparrow[A_1B_1)$ که $[AB) = T_{\overrightarrow{A_1A}}([A_1B_1))$.

۵°. هر تبدیل $T_{\overrightarrow{AB}}$ یک تبدیل معکوس دارد که تبدیلی است در جهت پاره‌خط راست جهت‌دار $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

۶°. انتقال در جهت پاره‌خط راست جهت‌دار صفر، یک تبدیل همانی است.

۷°. در انتقال، تصویر یک صفحه، صفحه‌ای موازی با آن؛ تصویر یک خط راست، خط راستی است موازی با آن و تصویر یک نیم‌خط راست، نیم‌خط راستی است هم‌جهت با آن.

۸°. برای پاره‌خط‌های راست جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ داریم:

$$T_{\overrightarrow{AB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{CD}} \circ T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}}$$

۹°. برای هر تعداد نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_n، تبدیل دوری زیر برقرار است:

$$T_{\overrightarrow{A_nA_1}} \circ T_{\overrightarrow{A_{n-1}A_n}} \circ \dots \circ T_{\overrightarrow{A_2A_3}} \circ T_{\overrightarrow{A_1A_2}} = T_{\overrightarrow{A_1A_1}}$$

پایان