ویرایش دوازدهم

جلد دوم

حساب دیفرانسیل و انتگرال توماس

حسین صالحی

رضا هاشم پور

فهرست

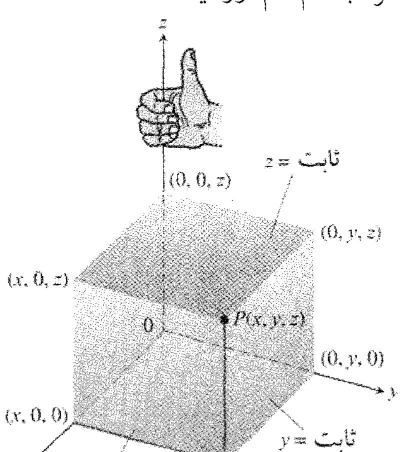
فصل ۱۲

بردارها و هندسه فضایی

شم انداز: برای کاربرد حساب دیفرانسیل و انتگرال در ـعیت های واقعی و در ریاضیات سطوح بالا به توصیفی ـی از فضای سه بعدی نیاز داریم. در این فصل دستگاههای ـصات سه بعدی و بردارها را معرفی می کنیم. برپایه آنچه ه از گذشته در مورد مختصات در صفحه xy می دانیم ختصات فضا را با اضافه کردن محور سومی که فاصله از ـفحه xy را در بالا و پایین آن می سنجد بنا می کنیم. بردارها برای مطالعه هندسه تحلیلی فضا بکار می روند. بردارها روش های ساده ای برای توصیف خطوط، صفحات، سطوح (رویه ها) و منحنی ها (خم ها) در فضا در اختیار ما قرار می دهند. از این مفاهیم و ابزارهای هندسی بعداً در این کتاب برای مطالعه حرکت در فضا و حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چند متغیره بهره می گیریم که کاربردهای مهم زیادی در علوم، مهندسی، اقتصاد و ریاضیات سطح بالا دارند.

۱-۱- دستگاههای مختصات سه بعدی

ـای تعیین مکان یک نقطه در فضا از سه محور مختصات دو ـ دو عمود برهم استفاده می کنیم که مطابق شکل **۱۲-۱** نسبت ـ هم قرار گرفته اند. محورهایی که در این شکل نشان داده ـده اند یک دستگاه مختصات راستگرد تشکیل می دهند. وقتی ـت راست خود را چنان قرار دهید که انگشتان دست از جهت مثبت محور x به سمت جهت مثبت محور y بچرخند گشت شست شما در جهت مثبت محور z قرار می گیرد. ـنابراین وقتی از سمت جهت مثبت محور z به صفحه xy نگاه ـد زوایای مثبت در صفحه به صورت پاد ساعتگرد از قسمت ـبت محور x و حول قسمت مثبت محور z اندازه گیری می ـوند. (در دستگاه مختصات چپگرد، محور z به سمت پایین ـکل**۱۲-۱** قرار می گیرد و زوایا در صفحه زمانی مثبت در نظر گرفته می شوند که نسبت به قسمت مثبت محور x به صورت ـاعتگرد اندازه گیری می شوند. دستگاه های مختصات راستگرد و چپگرد با هم هم ارز نیستند).

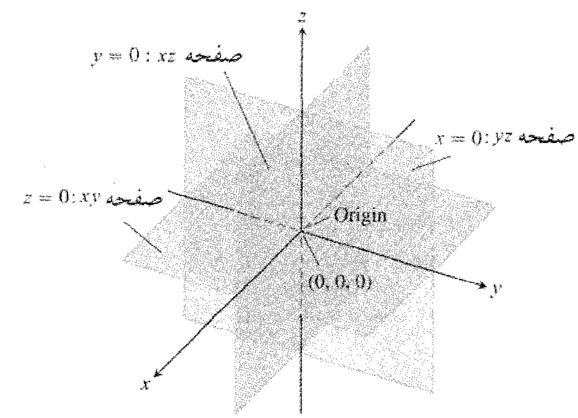


شکل ۱۲-۱: دستگاه مختصات دکارتی راستگرد است.

مختصات دکارتی (x, y, z) یک نقطه P از فضا مقادیری هستند که در آنها صفحات گذرنده از P و عمود بر محورها، محورهای مختصات را قطع می کنند. مختصات دکارتی فضا **مختصات قائم**(متعامد) هم نامیده می شوند زیرا محورهایی که

آنها را تعریف می کنند بر یکدیگر عمودند. نقاط روی محور x مختصات y و z برابر با صفر دارند. یعنی این نقاط مختصاتی به شکل $(x,0,0)$ دارند. به همین ترتیب نقاط روی محور y مختصاتی به شکل $(0,y,0)$ و نقاط روی محور z مختصاتی به شکل $(0,0,z)$ دارند.

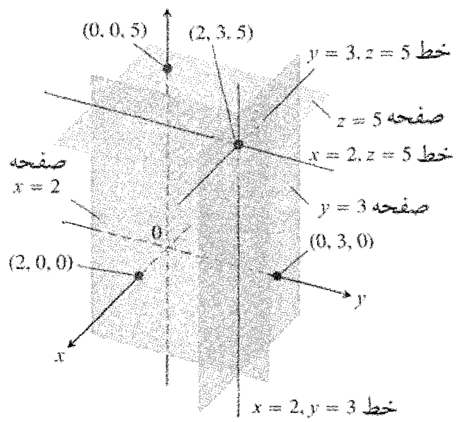
صفحاتی که با محورهای مختصات معین می شوند عبارتند از **صفحه** xy، که معادله متعارف(استاندارد) آن $z=0$ است، **صفحه** yz که معادله متعارف آن $x=0$ است؛ و **صفحه** xz که معادله متعارف آن $y=0$ است. این صفحات در مبداء $(0,0,0)$ یکدیگر را قطع می کنند(شکل۱۲-۲). مبداء مختصات با عدد 0 و گاهی با حرف انگلیسی O نیز مشخص می شود.



شکل ۱۲-۲: صفحات $x=0$، $y=0$ و $z=0$ فضا را به هشت قسمت تقسیم می کنند.

سه **صفحه مختصات** $x=0$، $y=0$ و $z=0$ فضا را به هشت قسمت تقسیم می کنند که هر قسمت **یک- هشتم** نام دارد. یک- هشتمی که در آن مختصات نقاط همگی مثبت اند **یک – هشتم اول** نامیده می شود؛ برای نامگذاری یا شماره گذاری هفت یک- هشتم دیگر هیچ قراردادی وجود ندارد.

نقاط واقع در یک صفحه عمود بر محور x همگی مختص x یکسان دارند و این مختص همان عددی است که در آن صفحه محور x را قطع می کند. مختصات y و z این نقاط هر عددی می توانند باشند. به همین ترتیب نقاط واقع در یک صفحه عمود بر محور y مختص y مشترک و نقاط واقع در یک صفحه عمود بر محور z مختص z مشترک دارند. برای نوشتن معادلات این صفحات کافیست آنها را با مقدار مختص مشترکشان نامگذاری کنیم. صفحه $x=2$ صفحه عمود بر محور x در $x=2$ است. صفحه $y=3$ صفحه عمود بر محور y در $y=3$ است. صفحه $z=5$ صفحه عمود بر محور z در $z=5$ است. شکل **۱۲-۳** صفحات $x=2$، $y=3$ و $z=5$ را به همراه نقطه تلاقی آنها یعنی (۵ , ۳ , ۲) نشان می دهد.



شکل۱۲-۳: صفحات $x=2$، $y=3$ و $z=5$ سه خط گذرنده از نقطه (۵ , ۳ , ۲) را مشخص می کنند.

صفحات $x=2$ و $y=3$ در شکل **۱۲-۳** یکدیگر را در خطی موازی با محور z قطع می کنند. این خط با جفت معادلات $x=2$ و $y=3$ توصیف می شود. نقطه ای چون (x,y,z) روی این خط قرار دارد اگر و تنها اگر $x=2$ و $y=3$ باشد. به همین ترتیب، خط تقاطع صفحات $y=3$ و $z=5$ با جفت معادلات $y=3$ و $z=5$ توصیف می شود. این خط موازی با محور x است. خط تقاطع صفحات $x=2$ و $z=5$، که موازی محور y است با جفت معادلات $x=2$ و $z=5$ توصیف می شود.

در مثال های زیر چند معادله و نامعادله مختصاتی را همراه با مجموعه نقاطی که در فضا تعریف می کنند ارائه کرده ایم.

مثال ۱: این معادلات را به صورت هندسی تعبیر می کنیم.

(الف)- $z\geq 0$: نیمی از فضا که شامل نقاط روی صفحه xy و بالای آن است.

(ب) - $x=-3$: صفحه عمود بر محور x در $x=-3$. این صفحه موازی با صفحه yz قرار دارد و **۳** واحد پشت سر آن

ست.

(پ)- $z=0$ ، $X \le 0$ و $y \ge 0$: ربع دوم صفحه xy.

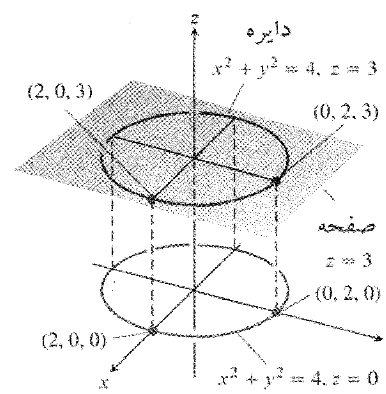
(ت)- $x \ge 0$ ، $y \ge 0$ و $z \ge 0$: یک هشتم اول

(ث)- $-1 \le y \le 1$: تیغه ای (بره ای) بین صفحات $y=-1$ و $y=1$ (شامل خود صفحات).

(ج)- $z=2, y=-2$: فصل مشترک صفحات $y=-2$ و $z=2$. به بیان دیگر، خطی که از نقطه $(0,-2,2)$ می گذرد و با محور x موازی است.

مثال ۲ : نقاط $P(x,y,z)$ که در معادلات زیر صدق می کنند کدامند

$$x^2+y^2=4 \ , \ z=3$$



شکل۱۲-۴: دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه $z=3$ (مثال ۲).

حل: این نقاط در صفحه افقی $z=3$ قرار دارند و در این صفحه دایره $x^2+y^2=4$ را تشکیل می دهند. این مجموعه نقاط را "دایره $x^2+y^2=4$ در صفحه $z=3$" یا بصورت ساده تر " دایره $x^2+y^2=4$، $z=3$" می نامیم (شکل۱۲-۴).

فاصله و کره ها در فضا

فرمول فاصله بین دو نقطه در صفحه xy را می توان به نقاط فضا تعمیم داد.

فاصله بین نقاط $P_1(x_1,y_1,z_1)$ و $P_2(x_2,y_2,z_2)$ عبارت است از

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

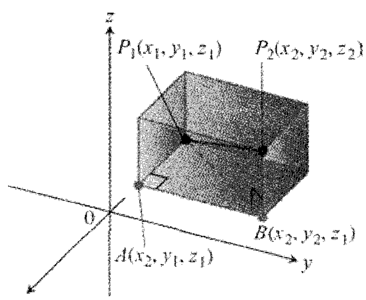
اثبات: جعبه ای مستطیلی می سازیم که وجوه آن موازی با صفحات مختصات بوده و نقاط P_1 و P_2 در گوشه های مقابل به هم جعبه قرار داشته باشند (شکل ۱۲-۵). اگر $A(x_2,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_1)$ رئوس جعبه نشان داده شده در شکل باشند آنگاه طول های سه یال P_1A، AB و BP_2 جعبه عبارتند از

$$|P_1A|=|x_2-x_1|, \quad |AB|=|y_2-y_1|, \quad |BP_2|=|z_2-z_1|$$

چون مثلث های P_1BP_2 و P_1AB هر دو قائم الزاویه اند با دو بار کاربرد قضیه فیثاغورث بدست می آوریم:

$$|P_1P_2|^2=|P_1B|^2+|BP_2|^2 \quad , \quad |P_1B|^2=|P_1A|^2+|AB|^2$$

(شکل ۱۲-۵ را ببینید).



شکل۱۲-۵: فاصله بین نقاط P_1 و P_2 را با کاربرد قضیه فیثاغورث برای مثلث های قائم الزاویه P_1AB و P_1BP_2 بدست می آوریم.

بنابراین

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2&=|P_1B|^2+|BP_2|^2\\&=|P_1A|^2+|AB|^2+|BP_2|^2\\&=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+|z_2-z_1|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\end{aligned}$$

و درنتیجه

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

مثال۳: فاصله بین نقاط $P_1(2,1,5)$ و $P_2(-2,3,0)$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}|P_1P_2|&=\sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2+(0-5)^2}\\&=\sqrt{16+4+25}\\&=\sqrt{45}\approx 6.708\end{aligned}$$

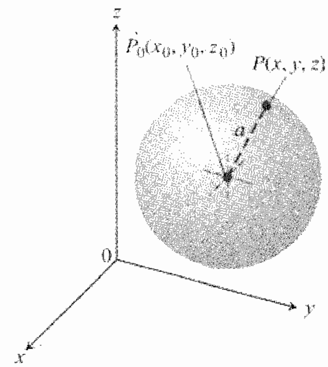
می توانیم با استفاده از فرمول فاصله معادلات کره های واقع در فضا را بنویسیم (شکل ۱۲-۶). نقطه ای چون $P(x,y,z)$ روی کره ای به شعاع a و به مرکز $P_0(x_0,y_0,z_0)$ واقع است

دقیقاً وقتی که $|P_0P| = a$ باشد یا

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$$

معادله متعارف کره ای به شعاع a و به مرکز (x_0,y_0,z_0):

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$$



شکل۱۲-۶: کره ای به شعاع a که مرکز آن در نقطه (x_0,y_0,z_0) واقع است.

مثال ۴: مرکز و شعاع کره ای با معادله زیر را بیابید:

$$x^2+y^2+z^2+3x-4z+1=0$$

حل: مرکز و شعاع یک کره را به همان شیوه ای که مرکز و شعاع یک دایره را بدست آوردیم بدست می آوریم: مربعات روی جملات x، y و z را کامل می کنیم و هر عبارت درجه دو را به صورت مربع یک عبارت خطی می نویسیم. سپس از این معادله که شکل متعارف دارد مرکز و شعاع کره را استنباط می کنیم. برای کره موجود داریم

$$x^2+y^2+z^2+3x-4z+1=0$$

$$\left(x^2+3x\right)+y^2+\left(z^2-4z\right)=-1$$

$$\left(x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+y^2$$

$$+\left(z^2-4z+\left(\frac{-4}{2}\right)^2\right)=-1+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{-4}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=-1+\frac{9}{4}+4=\frac{21}{4}$$

از این شکل متعارف نتیجه می گیریم که $x_0=-3/2$، $y_0=0$، $z_0=2$ و $a=\sqrt{21}/2$. مرکز کره نقطه $(-3/2,0,2)$ و شعاع آن $\sqrt{21}/2$ است.

مثال ۵: در اینجا برخی تعابیر هندسی معادلات و نامعادلات مرتبط با معادله کره را ارائه می کنیم.

(الف)- $x^2+y^2+z^2<4$: درون کره $x^2+y^2+z^2=4$

(ب)- $x^2+y^2+z^2\le 4$: گوی توپری که به کره

$$x^2+y^2+z^2=4$$

محدود است. یعنی کره $x^2+y^2+z^2=4$ به همراه درون آن.

(پ)- $x^2+y^2+z^2<4$: خارج کره $x^2+y^2+z^2=4$

(ت)- $x^2+y^2+z^2=4, z\le 0$: نیمکره پایینی کره

$$x^2+y^2+z^2=4$$

که صفحه xy (صفحه $z=0$) آن را از کره جدا کرده است.

درست همانطور که مختصات قطبی روش دیگری برای مشخص کردن مکان نقاط در صفحه xy است (بخش۱۱-۳)، دستگاههای مختصات دیگری، متفاوت از دستگاه مختصات دکارتی که در اینجا معرفی کردیم، برای فضای سه بعدی وجود دارند. دو نمونه از این دستگاههای مختصات را در بخش۱۵-۷ بررسی می کنیم.

تمرین های ۱۲-۱

توصیف هندسی معادلات

در تمرین های۱ -۱۶ توصیف هندسی مجموعه نقاط فضا را که مختصات آنها در جفت معادلات داده شده صدق می کنند بیان کنید:

۱- $x=2,\ y=3$

۲- $x=-1,\ z=0$

۳- $y=0,\ z=0$

۴- $x=1,\ y=0$

۵- $x^2+y^2=4,\ z=0$

۶- $x^2+y^2=4,\ z=-2$

۷- $x^2+z^2=4,\ y=0$

۸- $y^2+z^2=1,\ x=0$

$x^2+y^2+z^2=1,\ \ x=0$ -

۱۰- $x^2+y^2+z^2=25,\ \ y=-4$

۱۱- $x^2+y^2+(z+3)^2=25,\ \ z=0$

۱۲- $x^2+(y-1)^2+z^2=4,\ \ y=0$

۱۳- $x^2+y^2=4,\ \ z=y$

۱۴- $x^2+y^2+z^2=4,\ \ y=x$

۱۵- $y=x^2,\ \ z=0$

۱۶- $z=y^2,\ \ x=1$

توصیف هندسی معادلات و نامعادلات

در تمرین های ۱۷ - ۲۴ مجموعه نقاطی از فضا را که مختصات آنها در نامعادلات یا ترکیبهایی از معادلات و نامعادلات صدق می کنند توصیف کنید:

۱۷- الف- $x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ z=0$

ب- $x\geq 0,\ \ y\leq 0,\ \ z=0$

۱۸- الف- $0\leq x\leq 1$ ب- $0\leq x\leq 1,\ \ 0\leq y\leq 1$

پ- $0\leq x\leq 1,\ \ 0\leq y\leq 1,\ \ 0\leq z\leq 1$

۱۹-الف- $x^2+y^2+z^2\leq 1$ ب- $x^2+y^2+z^2>1$

۲۰- الف- $x^2+y^2\leq 1,\ \ z=0$

ب- $x^2+y^2\leq 1,\ \ z=3$

پ- $x^2+y^2\leq 1$، بدون قیدی روی z

۲۱- الف- $1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4$

ب- $x^2+y^2+z^2\leq 1,\ \ z\geq 0$

۲۲- الف- $x=y,\ \ z=0$ ب- $x=y$، بدون قیدی روی z

۲۳- الف- $y\geq x^2,\ \ z\geq 0$ ب- $x\leq y^2,\ \ 0\leq z\leq 2$

۲۴- الف- $z=1-y$، بدون قیدی روی x

ب- $z=y^3, x=2$

در تمرین های ۲۵ - ۳۴ مجموعه مفروض را با یک معادله یا با یک جفت معادله توصیف کنید.

۲۵- صفحه عمود بر

(الف)- محور x در $(3,0,0)$ (ب)- محور y در $(0,-1,0.)$ و

(پ)- محور z در $(0,0,-2)$

۲۶- صفحه گذرنده از نقطه $(3,-1,2)$ و عمود بر

(الف)- محور x (ب)- محور y (پ)- محور z

۲۷- صفحه گذرنده از نقطه (۱و۱-و۳) و موازی با

(الف)- صفحه xy (ب)- صفحه yz (پ)- صفحه xz.

۲۸- دایره ای به شعاع ۲ و به مرکز $(0,0,0)$ واقع در

(الف)- صفحه xy (ب)- صفحه yz (پ)- صفحه xz.

۲۹- دایره ای به شعاع ۲ و به مرکز $(0,2,0)$ واقع در

(الف)- صفحه xy (ب)- صفحه yz (پ)- صفحه $y=2$.

۳۰- دایره ای به شعاع ۱ و به مرکز (۱و۴و۳-) واقع در صفحه ای موازی با

(الف)- صفحه xy (ب)- صفحه yz (پ)- صفحه xz.

۳۱- خط گذرنده از نقطه (۱-و۳و۱) و موازی با

(الف)- محور x (ب)- محور y (پ)- محور z

۳۲- مجموعه ای از نقاط فضا که از مبداء و نقطه $(0,2,0)$ به یک فاصله اند.

۳۳- دایره ای که مقطع صفحه گذرنده از نقطه (۳و۱و۱) و عمود بر محور z با کره به شعاع ۵ و به مرکزیت مبداء است.

۳۴- مجموعه ای از نقاط فضا که از نقطه $(0,0,1)$ به اندازه ۲ واحد و همزمان از نقطه $(0,0,-1)$ به اندازه ۲ واحد فاصله دارند.

نامعادلات برای توصیف مجموعه نقاط

در تمرین های ۳۵ - ۴۰ نامعادلات توصیف کننده مجموعه ها را بنویسید.

۳۵- تیغه ای که به صفحات $z=1,z=0$ محدود است (شامل خود صفحات).

۳۶- مکعب توپری واقع در یک- هشتم اول که به صفحات مختصات و صفحات $x=2$، $y=2$ و $z=2$ محدود است.

۳۷- نیمی از فضا شامل نقاط واقع بر صفحه xy و زیر آن.

۳۸- نیمکره بالایی کره به شعاع ۱ و به مرکز مبداء.

۳۹- (الف)- درون و (ب)- بیرون کره به شعاع ۱ و به مرکز نقطه (۱و۱و۱).

۴۰- ناحیه بسته محدود به کره های به شعاع ۱ و۲ و به مرکز مبداء. (بسته به این معناست که خود کره ها هم جزء ناحیه

هستند. اگر می خواستیم خود کره ها جزء ناحیه نباشند باید سؤال را به صورت «ناحیه باز محدود به کره ها» مطرح می کردیم. در اینجا وضعیت شبیه نحوه کاربرد باز و بسته برای توصیف بازه هاست: بازه بسته به این معناست که نقاط انتهایی جزء بازه محسوب می شوند و بازه باز بدین معناست که بازه شامل نقاط انتهایی نیست. مجموعه های بسته شامل مرزها هستند ولی مجموعه های باز مرزها را دربر ندارند).

فاصله

در تمرین های ۴۱ - ۴۶ فاصله بین نقاط P_1 و P_2 را بدست آورید.

۴۱- $P_1(1,1,1), \quad P_2(3,3,0)$

۴۲- $P_1(-1,1,5), \quad P_2(2,5,0)$

۴۳- $P_1(1,4,5), \quad P_2(4,-2,7)$

۴۴- $P_1(3,4,5), \quad P_2(2,3,4)$

۴۵- $P_1(0,0,0), \quad P_2(2,-2,-2)$

۴۶- $P_1(5,3,-2), \quad P_2(0,0,0)$

کره ها

در تمرین های ۴۷ - ۵۰ مرکز و شعاع کره را بدست آورید.

۴۷- $(x+2)^2+y^2+(z-2)^2=8$

۴۸- $(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z+3)^2=25$

۴۹- $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2=2$

۵۰- $x^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

در تمرین های ۵۱ - ۵۴ معادلات کره هایی را که مراکز و شعاع هایشان داده شده اند بدست آورید.

۵۱- $\sqrt{14}$ $\quad (1,2,3)$

۵۲- 2 $\quad (0,-1,5)$

۵۳- $\frac{4}{9}$ $\quad \left(-1,\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$

۵۴- 7 $\quad (0,-7,0)$

در تمرین های ۵۵ - ۵۸ مرکز و شعاع کره را بیابید.

۵۵- $x^2+y^2+z^2+4x-4z=0$

۵۶- $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$

۵۷- $2x^2+2y^2+2z^2+x+y+z=9$

۵۸- $3x^2+3y^2+3z^2+2y-2z=9$

نظریه و مثال ها

۵۹- فرمولی برای فاصله نقطه $P(x,y,z)$ تا (الف)- محور x (ب)- محور y و (پ)- محور z بیابید.

۶۰- فرمولی برای فاصله نقطه $P(x,y,z)$ تا (الف)- صفحه xy (ب)- صفحه yz و (پ)- صفحه xz بیابید.

۶۱- محیط مثلثی با رئوس $A(-1,2,1)$، $B(1,-1,3)$ و $C(3,4,5)$ را بیابید.

۶۲- نشان دهید که نقطه $P(3,1,2)$ از نقاط $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,1)$ به یک فاصله است.

۶۳- معادله ای برای مجموعه تمام نقاطی بیابید که از صفحات $y=3$ و $y=-1$ به یک فاصله اند.

۶۴- معادله ای برای مجموعه تمام نقاطی بیابید که از نقطه $(0,0,2)$ و صفحه xy به یک فاصله اند.

۶۵- نقطه ای روی کره $x^2+(y-3)^2+(z+5)^2=4$ بیابید که از (الف)- صفحه xy و (ب)- نقطه $(0,7,-5)$ کمترین فاصله را دارد.

۶۶- نقطه ای را بیابید که از نقاط $(0,0,0)$، $(0,4,0)$، $(3,0,0)$ و $(2,2,-3)$ به یک فاصله است.

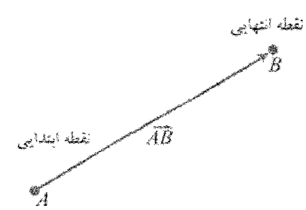
۱۲-۲- بردارها

بعضی از کمیت هایی که اندازه می گیریم فقط با اندازه خود مشخص می شوند. مثلاً برای ثبت جرم، طول یا زمان فقط کافیست یک عدد و یک یکا (واحد) اندازه گیری مناسب بنویسیم. برای توصیف نیرو، جابجایی یا سرعت به اطلاعات بیشتری نیاز داریم. برای توصیف یک نیرو باید علاوه بر بزرگی یا اندازه، جهت اثر آن را نیز مشخص کنیم. برای توصیف

ابجایی یک جسم باید علاوه بر میزان جابجایی جهت حرکت ن را نیز مشخص کنیم. برای توصیف سرعت یک جسم باید علاوه بر مقدار سرعت یا تندی جسم جهت حرکت آن را نیز مشخص کنیم. در این بخش نشان می دهیم که کمیت هایی را که در صفحه یا در فضا هم اندازه و هم جهت دارند چگونه نمایش می دهیم.

شکل مؤلفه ای

کمیتی نظیر نیرو، جابجایی یا سرعت را **بردار** نامیده و بوسیله یک **پاره خط جهت دار** نمایش می دهیم (شکل ۱۲-۷). جهت پیکان نشان دهنده جهت اثر بوده و طول آن اندازه اثر را برحسب واحد مناسبی مشخص می کند. برای مثال یک بردار نیرو در جهتی قرار می گیرد که نیرو اثر می کند و طول آن معیاری از شدت یا اندازه نیروست؛ یک بردار سرعت در جهت حرکت قرار گرفته و طول آن تندی جسم متحرک است. شکل ۱۲-۸ بردار سرعت **v** ذره ای را در مکانی خاص نمایش می دهد. این ذره در صفحه یا در فضا در امتداد یک مسیر حرکت می کند (این کاربرد بردارها را در فصل **۱۳** مطالعه می کنیم).

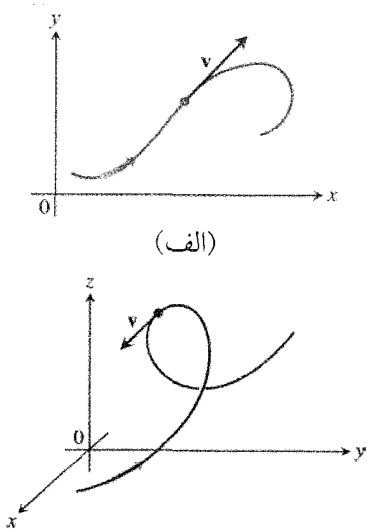


شکل۱۲-۷: پاره خط جهتدار $\overrightarrow{AB}$ یک بردار نامیده می شود.

تعریف: برداری که با پاره خط جهتدار $\overrightarrow{AB}$ نمایش داده می شود دارای **نقطه ابتدایی** A و **نقطه انتهایی** B بوده و **طول** آن با $|\overrightarrow{AB}|$ نشان داده می شود. دو بردار با هم **برابرند** در صورتیکه طول و جهت یکسان داشته باشند.

پیکان هایی که در رسم بردارها استفاده می کنیم بردار یکسانی را نمایش می دهند هرگاه قطع نظر از نقطه ابتدایی، طول یکسان داشته، موازی و هم جهت باشند (شکل ۱۲-۹).

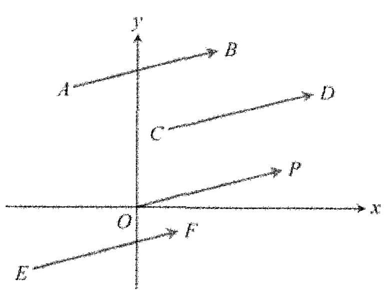
در کتاب های درسی، بردارها را معمولاً به صورت حروف کوچک سیاه می نویسند، مثل **u**، **v** و **w**. گاهی برای نشان دادن یک بردار نیرو از حروف بزرگ سیاه، مثل **F**، استفاده می کنیم. در دست نوشته ها رسم بر این است که یک پیکان کوچک در بالای حروف رسم می کنند مثل $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ و $\vec{F}$.



(الف)

(ب)

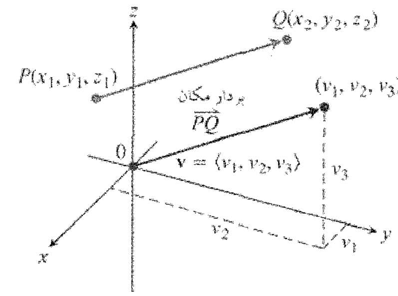
شکل۱۲-۸: بردار سرعت ذره ای که در امتداد یک مسیر (الف)- در صفحه و (ب)- در فضا حرکت می کند. نوک پیکان روی مسیر جهت حرکت ذره را نشان می دهد.



شکل۱۲-۹: چهار پیکانی که در اینجا در صفحه نشان داده شده اند (پاره خط های جهت دار) طول و جهت یکسان دارند. بنابراین همهٔ آنها یک بردار را نشان می دهند و می نویسیم: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{EF}$.

باید به طریقی بردارها را به صورت جبری نمایش دهیم تا بتوانیم جهت آنها را به صورت دقیق تر مشخص کنیم. فرض کنید $\mathbf{v}=\overrightarrow{PQ}$. یک پاره خط جهت دار برابر با $\overrightarrow{PQ}$ وجود دارد که نقطه ابتدایی آن مبداء است (شکل ۱۲-۱۰). این پاره خط نماینده **v** در **مکان استاندارد**(متعارف) بوده و همان برداری

است که معمولاً برای نمایش $\mathbf{v}$ استفاده می کنیم. وقتی $\mathbf{v}$ در مکان متعارف خود است می توانیم آن را با نوشتن مختصات نقطه انتهایی (v_1,v_2,v_3) معین کنیم. اگر $\mathbf{v}$ برداری واقع در صفحه باشد نقطه انتهایی آن (v_1,v_2) دو مختص دارد.



شکل ۱۲- ۱۰: نقطه ابتدایی بردار $\overrightarrow{PQ}$ در مکان متعارف در مبداء واقع است. پاره خط های جهتدار $\overrightarrow{PQ}$ و $\mathbf{v}$ موازی بوده و طول یکسان دارند.

تعریف

اگر $\mathbf{v}$ برداری **دو بعدی** در صفحه باشد که با برداری که نقطه ابتدایی آن در مبداء و نقطه انتهایی آن (v_1,v_2) است برابر باشد آنگاه **شکل مؤلفه ای** $\mathbf{v}$ عبارت است از

$$\mathbf{v}=\langle v_1,v_2\rangle$$

اگر $\mathbf{v}$ برداری **سه بعدی** باشد که با برداری که نقطه ابتدایی آن در مبداء و نقطه انتهایی آن (v_1,v_2,v_3) است برابر باشد آنگاه **شکل مؤلفه ای** $\mathbf{v}$ عبارت است از

$$\mathbf{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$$

بنابراین یک بردار دو بعدی یک زوج مرتب $\mathbf{v}=\langle v_1,v_2\rangle$ از اعداد حقیقی و یک بردار سه بعدی یک سه تایی مرتب $\mathbf{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ از اعداد حقیقی است. اعداد v_1، v_2 و v_3 **مؤلفه های** $\mathbf{v}$ هستند.

اگر $\mathbf{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ با پاره خط جهتدار $\overrightarrow{PQ}$ نمایش داده شود که نقطه ابتدایی آن $P(x_1,y_1,z_1)$ و نقطه انتهایی آن $Q(x_2,y_2,z_2)$است، آنگاه داریم

$$x_1+v_1=x_2 ،\ y_1+v_2=y_2 \text{ و } z_1+v_3=z_2$$

(شکل ۱۲-۱۰). بنابراین $v_1=x_2-x_1$، $v_2=y_2-y_1$ و $v_3=z_2-z_1$ مؤلفه های $\overrightarrow{PQ}$ هستند.

بطور خلاصه، اگر نقاط $P(x_1,y_1,z_1)$ و $Q(x_2,y_2,z_2)$ مفروض باشند، بردار مکان متعارف $\mathbf{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ برابر با $\overrightarrow{PQ}$ عبارت است از

$$\mathbf{v}=\langle x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\rangle$$

اگر $\mathbf{v}$ برداری دو بعدی با $P(x_1,y_1)$ و $P(x_2,y_2)$ به عنوان نقاط ابتدایی و انتهایی در صفحه باشد آنگاه

$$\mathbf{v}=\langle x_2-x_1,y_2-y_1\rangle$$

بردارهای واقع در صفحه مؤلفه سوم ندارند. با این درک، جبر بردارهای سه بعدی را ارائه می کنیم و هر وقت بردار دو بعدی باشد (بردار صفحه ای) فقط مؤلفه سوم را حذف می کنیم.

دو بردار برابرند اگر و تنها اگر بردارهای مکان متعارف آنها یکسان باشند. بنابراین $\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ و $\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ برابرند اگر و تنها اگر $u_1=v_1$، $u_2=v_2$ و $u_3=v_3$ باشد.

اندازه و **طول** بردار $\overrightarrow{PQ}$ طول هر یک از نمایش های پاره خط جهتدار معادل آن است. در حالت خاص اگر $\mathbf{v}=\langle x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\rangle$ بردار مکان متعارف $\overrightarrow{PQ}$ باشد آنگاه فرمول فاصله، اندازه یا طول $\mathbf{v}$ را، که با نماد $|\mathbf{v}|$ یا $\|\mathbf{v}\|$ نشان داده می شود، بدست می دهد.

اندازه یا **طول** بردار $\mathbf{v}=\overrightarrow{PQ}$ عبارت است از عدد نامنفی زیر

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(شکل **۱۲-۱۰** را ببینید).

تنها بردار با طول 0 عبارت است از **بردار صفر** $\mathbf{0}=\langle 0,0\rangle$ یا $\langle 0,0,0\rangle=\mathbf{0}$. همچنین این بردار تنها برداری است که جهت مشخصی ندارد.

مثال ۱: (الف)- شکل مؤلفه ای و (ب)- طول برداری با نقطه ابتدایی $P(-3,4,1)$ و نقطه انتهایی $(-5,2,2)$ را بیابید.

حل:

(الف)- مؤلفه های بردار مکان متعارف $\mathbf{v}$ نمایشگر $\overrightarrow{PQ}$ عبارتند از

$$v_1 = x_2 - x_1 = -5 - (-3) = -2$$
$$v_2 = y_2 - y_1 = 2 - 4 = -2$$
$$v_3 = z_2 - z_1 = 2 - 1 = 1$$

شکل مؤلفه ای $\overrightarrow{PQ}$ عبارت است از

$$\mathbf{v} = \langle -2, -2, 1 \rangle$$

(ب)- طول یا اندازه $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ برابر است با:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

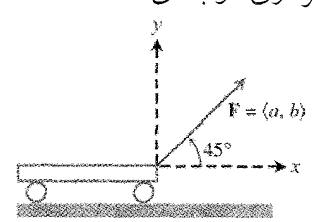
مثال ۲: ارابه کوچکی بر روی یک سطح افقی صاف با نیروی **۲۰** پوندی **F** که با سطح زمین زاویه 45° می سازد کشیده می شود (شکل ۱۲-۱۱). نیروی مؤثری که ارابه را به سمت جلو حرکت می دهد کدام است؟

حل:

نیروی مؤثر، مؤلفه افقی $\mathbf{F} = \langle a, b \rangle$ بوده و برابر است با

$$a = |\mathbf{F}|\cos 45^\circ = (20)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 14.14 lb$$

توجه کنید که **F** برداری دو بعدی است.



شکل ۱۲-۱۱: نیرویی که ارابه را به سمت جلو می کشد با بردار F نمایش داده می شود که مؤلفه افقی آن نیروی مؤثر است (مثال ۲).

عمل های جبری برداری

دو عمل اصلی با بردارها عبارتند از جمع *برداری* و *ضرب اسکالر در بردار*. **اسکالر** همان عدد حقیقی است و هر وقت بخواهیم بر تفاوت آن با بردارها تأکید داشته باشیم از چنین نامی استفاده می کنیم. اسکالرها می توانند مثبت ، منفی یا صفر باشند و با ضرب شدن در بردار آن را «مقیاس» می کنند.

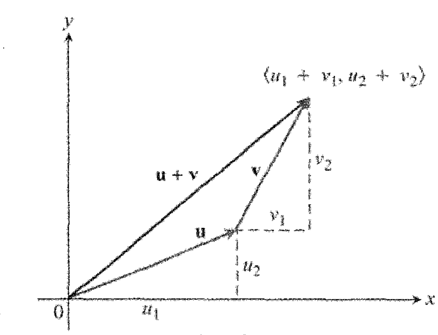
تعاریف: فرض کنید $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ دو بردار و k یک اسکالر باشد.

جمع: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$

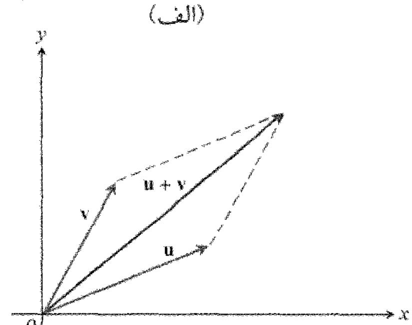
ضرب اسکالر در بردار: $k\mathbf{u} = \langle ku_1, ku_2, ku_3 \rangle$

برای جمع کردن بردارها، مؤلفه های متناظر آن ها را با هم جمع می کنیم. برای ضرب یک بردار در یک اسکالر هر یک از مؤلفه های آن را در اسکالر ضرب می کنیم. تعاریف فوق در مورد بردارهای صفحه ای (دو بعدی) نیز کاربرد دارند جز اینکه در این حالت فقط دو مؤلفه وجود دارد، $\langle u_1, u_2 \rangle$ و $\langle v_1, v_2 \rangle$.

تعریف جمع برداری در شکل ۱۲-۱۲- الف برای بردارهای صفحه ای به صورت هندسی نشان داده شده است. در جمع برداری هندسی، نقطه ابتدایی یک بردار را در نقطه انتهایی بردار دیگر قرار می دهیم. در شکل ۱۲-۱۲- ب تعبیر دیگری از جمع برداری هندسی نشان داده شده است (که قانون جمع متوازی الاضلاع نامیده می شود). در اینجا بردار مجموع، که بردار برایند نامیده می شود، قطر متوازی الاضلاع است. در فیزیک، نیروها، سرعت ها، شتاب ها و غیره به صورت برداری جمع می شوند. بنابراین مثلاً نیروی وارد بر ذره ای که تحت تأثیر دو نیروی گرانشی قرار دارد با جمع کردن دو بردار نیرو بدست می آید.



(الف)



(ب)

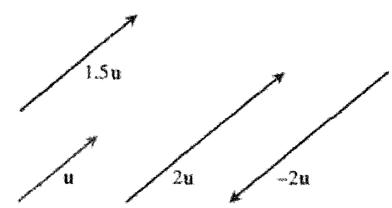
شکل ۱۲-۱۲: (الف)- تعبیر هندسی جمع برداری.
(ب)- قانون متوازی الاضلاع در مورد جمع برداری.

شکل ۱۲-۱۳ تعبیر هندسی حاصلضرب اسکالر k و بردار **u** ، $k\mathbf{u}$، را نمایش می دهد. اگر $k > 0$ باشد $k\mathbf{u}$ هم جهت با

و اگر $k<0$ باشد $k\mathbf{u}$ در خلاف جهت $\mathbf{u}$ است. با مقایسه طول های $\mathbf{u}$ و $k\mathbf{u}$ پی می بریم که

$$\begin{aligned}|k\mathbf{u}| &= \sqrt{(ku_1)^2+(ku_2)^2+(ku_3)^2}\\ &= \sqrt{k^2\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)}\\ &= \sqrt{k^2}\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} = |k||\mathbf{u}|\end{aligned}$$

طول $k\mathbf{u}$ برابر قدر مطلق اسکالر k ضربدر طول $\mathbf{u}$ است. طول بردار $\mathbf{-u}=(-1)\mathbf{u}$ با طول $\mathbf{u}$ برابر اما جهت آنها مخالف یکدیگر است.



شکل ۱۲-۱۳: ضرب $\mathbf{u}$ در اسکالرها.

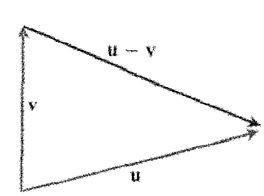
تفریق (تفاضل) $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ دو بردار طبق تعریف عبارت است از

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$$

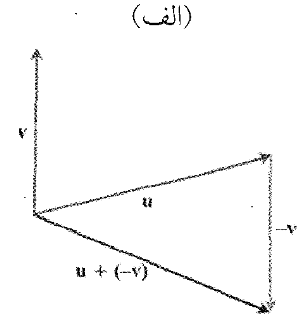
اگر $\mathbf{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ و $\mathbf{u}=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ باشد آنگاه داریم

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=\langle u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3\rangle$$

توجه کنید که $(\mathbf{u}-\mathbf{v})+\mathbf{v}=\mathbf{u}$، لذا جمع کردن بردار $(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ با $\mathbf{v}$ بردار $\mathbf{u}$ را بدست می دهد (شکل ۱۲-۱۴- الف). شکل ۱۲-۱۴-ب تفاضل $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ را به صورت جمع $\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$ نشان می دهد.



(الف)



(ب)

شکل۱۲-۱۴: (الف)- وقتی بردار $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ را با $\mathbf{v}$ جمع کنیم $\mathbf{u}$ بدست می آید. (ب)- $\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$.

مثـال ۳: بردارهای $\mathbf{u}=\langle -1,3,1\rangle$ و $\mathbf{v}=\langle 4,7,0\rangle$ را در نظر بگیرید. مؤلفه های (الف)- $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}$، (ب)- $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ و (پ)- $|(1/2)\mathbf{u}|$ را بیابید.

حل:

(الف)-

$$\begin{aligned}2\mathbf{u}+3\mathbf{v} &= 2\langle -1,3,1\rangle+3\langle 4,7,0\rangle\\ &= \langle -2,6,2\rangle+\langle 12,21,0\rangle=\langle 10,27,2\rangle\end{aligned}$$

(ب)-

$$\begin{aligned}\mathbf{u}-\mathbf{v} &= \langle -1,3,1\rangle-\langle 4,7,0\rangle\\ &= \langle -1-4,3-7,1-0\rangle=\langle -5,-4,1\rangle\end{aligned}$$

(پ)-

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\mathbf{u}\right| &= \left|\left\langle -\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right|\\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{11}\end{aligned}$$

عمل های برداری بسیاری از ویژگی های علم حساب معمولی را دارا هستند.

ویژگی های عمل های برداری

فرض کنید $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردار و a و b اسکالر باشند. در این صورت داریم

۱- $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

۲- $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

۳- $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$

۴- $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

۵- $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$

۶- $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

۷- $a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$

۸- $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$

۹- $(a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$

این ویژگی ها را می توان با بهره گیری از تعاریف جمع برداری و ضرب اسکالر در بردار به آسانی تحقیق کرد. برای نمونه برای اثبات ویژگی ۱ داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= \langle u_1,u_2,u_3\rangle+\langle v_1,v_2,v_3\rangle\\ &= \langle u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3\rangle\\ &= \langle v_1+u_1,v_2+u_2,v_3+u_3\rangle\\ &= \langle v_1,v_2,v_3\rangle+\langle u_1,u_2,u_3\rangle\\ &= \mathbf{v}+\mathbf{u}\end{aligned}$$

وقتی سه یا چند بردار فضایی در یک صفحه قرار داشته باشند می گوییم بردارها **هم صفحه اند**. برای مثال بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ همواره هم صفحه اند.

بردارهای واحد

بردار v به طول ۱ **بردار واحد** نامیده می شود. **بردارهای واحد متعارف** عبارتند از

$$\mathbf{i}=\langle 1,0,0\rangle,\qquad \mathbf{j}=\langle 0,1,0\rangle,\qquad \mathbf{k}=\langle 0,0,1\rangle$$

هر بردار $\mathbf{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ را می توان به شرح زیر به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای واحد متعارف نوشت

$$\begin{aligned}\mathbf{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle &=\langle v_1,0,0\rangle+\langle 0,v_2,0\rangle+\langle 0,0,v_3\rangle\\ &=v_1\langle 1,0,0\rangle+v_2\langle 0,1,0\rangle+v_3\langle 0,0,1\rangle\\ &=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

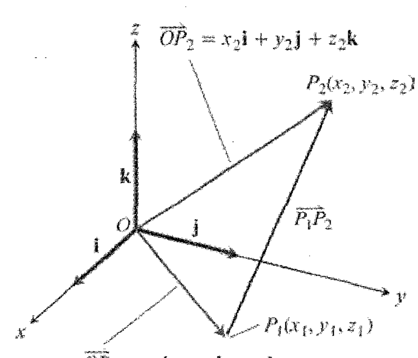
اسکالر (یا عدد) v_1 را **مؤلفه i**، v_2 را **مؤلفه j** و v_3 را **مؤلفه k** بردار $\mathbf{v}$ می نامیم. برداری که از نقطه $P_1=\langle x_1,y_1,z_1\rangle$ به $P_2=\langle x_2,y_2,z_2\rangle$ رسم می شود در شکل مؤلفه ای عبارت است از(شکل ۱۲-۱۵)

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$$

هرگاه $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ باشد طول آن $|\mathbf{v}|$ صفر نیست و داریم

$$\left|\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}\right|=\frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{v}|=1$$

یعنی $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ بردار واحد در جهت $\mathbf{v}$ است و **جهت** بردار غیر صفر $\mathbf{v}$ نامیده می شود.



شکل۱۲-۱۵: برداری که از P_1 به P_2 رسم می شود عبارت است از $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$.

مثال ۴: بردار واحد $\mathbf{u}$ را که در جهت برداری قرار دارد که از $P_1(1,0,1)$ به $P_2(3,2,0)$ رسم می شود بیابید.

حل:

بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ را بر طولش تقسیم می کنیم:

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(3-1)\mathbf{i}+(2-0)\mathbf{j}+(0-1)\mathbf{k}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|&=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}\\ &=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3\end{aligned}$$

$$\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|}=\frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}}{3}=\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}-\frac{1}{3}\mathbf{k}$$

بردار واحد $\mathbf{u}$ جهت بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ است.

مثال ۵: اگر $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ بردار سرعت باشد، $\mathbf{v}$ را به صورت حاصلضرب تندی آن در یک بردار واحد در جهت حرکت بیان کنید.

حل:

تندی، اندازه (طول) $\mathbf{v}$ است:

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

بردار واحد $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ هم جهت با $\mathbf{v}$ است:

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{3\mathbf{i}-4\mathbf{j}}{5}=\frac{3}{5}\mathbf{i}-\frac{4}{5}\mathbf{j}$$

بنابراین

$$\mathbf{v}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}=5\left(\frac{3}{5}\mathbf{i}-\frac{4}{5}\mathbf{j}\right)$$

بطور خلاصه هر بردار ناصفر $\mathbf{v}$ را می توان با نوشتن آن به صورت $\mathbf{v}=|\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ برحسب دو ویژگی مهم آن یعنی طول و جهت نوشت.

اگر $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ باشد آنگاه

۱- $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ بردار واحدی در جهت $\mathbf{v}$ است.

۲- معادله $\mathbf{v}=|\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ بردار $\mathbf{v}$ را به صورت طول آن ضربدر جهت آن بیان می کند.

مثال ۶: نیرویی۶ نیوتنی در جهت بردار $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ اعمال می شود. نیروی $\mathbf{F}$ را به صورت حاصلضرب اندازه و جهت آن بیان کنید.

حل:

اندازه بردار نیرو ۶ و جهت آن $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ است لذا

$$\mathbf{F}=6\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=6\frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=6\frac{2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}}{3}$$
$$=6\left(\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}-\frac{1}{3}\mathbf{k}\right)$$

وسط پاره خط

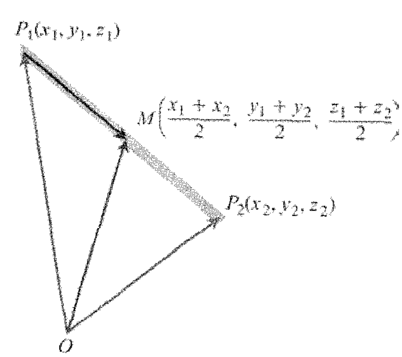
بردارها غالباً در هندسه ابزارهایی مفید هستند. مثلاً مختصات نقطه وسط یک پاره خط بوسیله متوسط گیری بدست می آیند.

نقطه وسط M پاره خط واصل نقاط $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ و $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ نقطه ای با مختصات زیر است

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

برای پی بردن به علت این امر، مشاهده می کنیم که(شکل ۱۲-۱۶)

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)=\overrightarrow{OP_1}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}\right)$$
$$=\frac{x_1+x_2}{2}\mathbf{i}+\frac{y_1+y_2}{2}\mathbf{j}+\frac{z_1+z_2}{2}\mathbf{k}$$



شکل ۱۲-۱۶: مختصات نقطه وسط عبارتند از متوسط های مختصات نقاط P_1 و P_2.

مثال ۷: نقطه وسط پاره خط واصل نقاط $P_1(3,-2,0)$ و $P_2(7,4,4)$ عبارت است از

$$\left(\frac{3+7}{2},\frac{-2+4}{2},\frac{0+4}{2}\right)=(5,1,2)$$

کاربردها

یکی از کاربردهای مهم بردارها در ناوبری است.

مثال ۸: یک هواپیمای جت که در هوای آرام با سرعت $500mph$ مستقیماً به سمت شرق پرواز می کند با باد دمی مواجه می شود که با سرعت $70mph$ در جهت 60° شمال شرقی می وزد. هواپیما عقربه قطب نمای خود را در جهت شرق نگه می دارد و به دلیل وزش باد دم جهت و تندی زمینی جدیدی بدست می آورد. این دو را مشخص کنید.

حل:

اگر

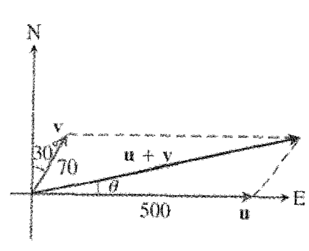
$\mathbf{u}=$ سرعت هواپیما به تنهایی

و

$\mathbf{v}=$ سرعت باد دم

باشد آنگاه $|\mathbf{u}|=500$ و $|\mathbf{v}|=70$ (شکل۱۲-۱۷). سرعت هواپیما نسبت به زمین بوسیله اندازه و جهت بردار براینـد $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ بدست می آید. اگر قسمت مثبت محور x نشان دهنده شرق و قسمت مثبت محور y نشان دهنده شمال باشد شکل های مؤلفه ای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$ عبارتند از

$$\mathbf{u}=\langle 500,0\rangle$$
$$\mathbf{v}=\langle 70\cos 60^\circ,70\sin 60^\circ\rangle=\langle 35,35\sqrt{3}\rangle$$



شکل۱۲-۱۷: بردارهای نمایش دهنده سرعت های هواپیما $\mathbf{u}$ و باد دم $\mathbf{v}$ مثال ۸.

بنابراین

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\langle 535,35\sqrt{3}\rangle=535\mathbf{i}+35\sqrt{3}\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|=\sqrt{535^2+\left(35\sqrt{3}\right)^2}\approx 538.4$$

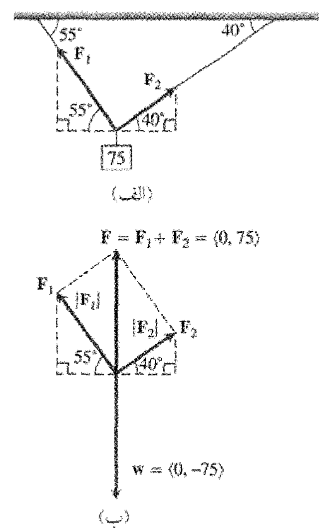
و

$$\theta=\tan^{-1}\frac{35\sqrt{3}}{535}\approx 6.5^\circ$$ (شکل ۱۲-۱۷)

تندی زمینی جدید هواپیما حدود $538.4mph$ و جهت جدید آن حدود 6.5° شمال شرق است.

کاربرد مهم دیگر بردارها در فیزیک و مهندسی زمانیست که چندین نیرو بر جسمی واحد وارد می شوند.

مثال ۹: وزنه ای $75N$ مطابق شکل ۱۲-۱۸- الف بوسیله دو سیم آویزان شده است. نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ را که دو سیم وارد می کنند بیابید.



شکل۱۲-۱۸: وزنه آویخته شده مربوط به مثال ۹.

حل: بردارهای نیروی $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ اندازه های $|\mathbf{F}_1|$ و $|\mathbf{F}_2|$ داشته و مؤلفه هایی دارند که برحسب نیوتن اندازه گیری می شوند. نیروی برایند، مجموع $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$ است و از نظر اندازه باید با بردار وزن $\mathbf{w}$ برابر و از نظر جهت مخالف آن (به سمت بالا) باشد (شکل۱۲-۱۸- ب را ببینید). از روی شکل می توان نتیجه گرفت که

$$\mathbf{F}_1=\left\langle -|\mathbf{F}_1|\cos 55^\circ,|\mathbf{F}_1|\sin 55^\circ\right\rangle$$
$$\mathbf{F}_2=\left\langle |\mathbf{F}_2|\cos 40^\circ,|\mathbf{F}_2|\sin 40^\circ\right\rangle$$

چون $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=\langle 0,75\rangle$، بردار برایند به دستگاه معادلات زیر منجر می شود

$$-|\mathbf{F}_1|\cos 55^\circ+|\mathbf{F}_2|\cos 40^\circ=0$$
$$|\mathbf{F}_1|\sin 55^\circ+|\mathbf{F}_2|\sin 40^\circ=75$$

اگر از معادله اول $|\mathbf{F}_2|$ را بدست آورده و نتیجه را در معادله دوم جاگذاری کنیم خواهیم داشت

$$|\mathbf{F}_1|\sin 55^\circ+\frac{|\mathbf{F}_1|\cos 55^\circ}{\cos 40^\circ}\sin 40^\circ=75$$
$$|\mathbf{F}_2|=\frac{|\mathbf{F}_1|\cos 55^\circ}{\cos 40^\circ}$$

در نتیجه

$$|\mathbf{F}_1|=\frac{75}{\sin 55^\circ+\cos 55^\circ\tan 40^\circ}\approx 57.67N$$
$$|\mathbf{F}_2|=\frac{75\cos 55^\circ}{\sin 55^\circ\cos 40^\circ+\cos 55^\circ\sin 40^\circ}$$
$$=\frac{75\cos 55^\circ}{\sin\left(55^\circ+40^\circ\right)}\approx 43.18N$$

پس بردارهای نیرو عبارتند از

$$\mathbf{F}_2=\langle 33.08,27.76\rangle\ ,\ \mathbf{F}_1=\langle -33.8,47.24\rangle$$

تمرین ها ۱۲-۲

بردارهای واقع در صفحه

در تمرین های ۱-۸ فرض کنید $\mathbf{u}=\langle 3,-2\rangle$ و $\mathbf{v}=\langle -2,5\rangle$ است. (الف)- شکل مؤلفه ای و (ب)- اندازه (طول) بردار را بیابید.

۱- $3\mathbf{u}$ ‏ ‏ ‏ ۲- $-2\mathbf{v}$

۳- $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ ‏ ‏ ‏ ۴- $\mathbf{u}-\mathbf{v}$

۵- $2\mathbf{u}-3\mathbf{v}$ ‏ ‏ ‏ ۶- $-2\mathbf{u}+5\mathbf{v}$

۷- $\frac{3}{5}\mathbf{u}+\frac{4}{5}\mathbf{v}$ ‏ ‏ ‏ ۸- $-\frac{5}{13}\mathbf{u}+\frac{12}{13}\mathbf{v}$

در تمرین های ۹-۱۶ شکل مؤلفه ای بردار را بیابید.

۹- بردار $\overrightarrow{PQ}$ با $P=(1,3)$ و $Q=(2,-1)$

۱۰- بردار $\overrightarrow{OP}$ که در آن O مبداء و P نقطه وسط پاره خط

RS است. مختصات دو انتهای این پاره خط $R=(2,-1)$ و $S=(-4,3)$ است.

۱۱- برداری از نقطه $A=(2,3)$ تا مبداء.

۱۲- مجموع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$، که $A=(1,-1)$، $B=(2,0)$، $C=(-1,3)$ و $D=(-2,2)$ است.

۱۳- بردار واحدی که با قسمت مثبت محور x زاویه $\theta=2\pi/3$ می سازد.

۱۴- بردار واحدی که با قسمت مثبت محور x زاویه $\theta=-3\pi/4$ می سازد.

۱۵- بردار واحدی که از چرخاندن پاد ساعتگرد بردار $\langle 0,1\rangle$ به اندازه 120° حول مبداء بدست می آید.

۱۶- بردار واحدی که از چرخاندن ساعتگرد بردار $\langle 1,0\rangle$ به اندازه 135° حول مبداء بدست می آید.

بردارهای واقع در فضا

در تمرین های **۱۷-۲۲** هر بردار را به شکل $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$ بیان کنید.

۱۷- بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$، در صوتیکه P_1 نقطه $(5,-7,1)$ و P_2 نقطه $(2,9,-2)$ باشد.

۱۸- بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ در صورتیکه P_1 نقطه $(1,2,0)$ و P_2 نقطه $(-3,0,5)$ باشد.

۱۹- بردار $\overrightarrow{AB}$ در صورتیکه A نقطه $(-7,-8,1)$ و B نقطه $(-10,8,1)$باشد.

۲۰- بردار $\overrightarrow{AB}$ در صورتیکه A نقطه $(1,0,3)$ و B نقطه $(-1,4,5)$ باشد.

۲۱- $5\mathbf{u}-\mathbf{v}$ هرگاه $\mathbf{u}=\langle 1,1,-1\rangle$ و $\mathbf{v}=\langle 2,0,3\rangle$ باشد.

۲۲- $-2\mathbf{u}+3\mathbf{v}$ هرگاه $\mathbf{u}=\langle -1,0,2\rangle$ و $\mathbf{v}=\langle 1,1,1\rangle$ باشد.

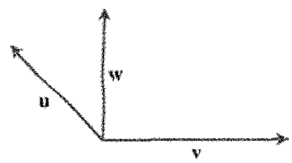
نمایش های هندسی

در تمرین های **۲۳** و **۲۴** با مرتب کردن بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بگونه ای که انتهای یکی بر ابتدای دیگری قرار داشته باشد، بردار خواسته شده را بکشید.

۲۳-

(الف)- $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ (ب)- $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$

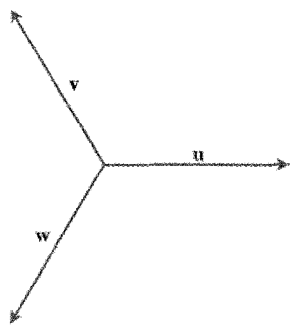
(پ)- $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ (ت)- $\mathbf{u}-\mathbf{w}$



۲۴-

(الف)- $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ (ب)- $\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{w}$

(پ)- $2\mathbf{u}-\mathbf{v}$ (ت)- $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$



طول و جهت

در تمرین های **۲۵ – ۳۰** هر بردار را به صورت حاصلضرب طول و جهت آن بیان کنید.

۲۵- $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

۲۶- $9\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$

۲۷- $5\mathbf{k}$

۲۸- $\frac{3}{5}\mathbf{i}+\frac{4}{5}\mathbf{k}$

۲۹- $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$

۳۰- $\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}}+\frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}}+\frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

۳۱- بردارهایی را که طول و جهتشان داده شده است بیابید. سعی کنید محاسبات را بدون نوشتن انجام دهید.

الف- 2، $\mathbf{i}$

ب- $\sqrt{3}$، $-\mathbf{k}$

پ- $\frac{1}{2}$، $\frac{3}{5}\mathbf{j}+\frac{4}{5}\mathbf{k}$

ت- 7، $\frac{6}{7}\mathbf{i}-\frac{2}{7}\mathbf{j}+\frac{3}{7}\mathbf{k}$

۳۲- بردارهایی را که طول و جهتشان داده شده است، بیابید. سعی کنید محاسبات را بدون نوشتن انجام دهید.

الف- 7، $-\mathbf{j}$

ب- $\sqrt{2}$، $-\frac{3}{5}\mathbf{i}-\frac{4}{5}\mathbf{k}$

پ- $\frac{13}{12}$، $\frac{3}{13}\mathbf{i}-\frac{4}{13}\mathbf{j}-\frac{12}{13}\mathbf{k}$

ت- $a>0$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$

۳۳- برداری با اندازه ۷ در جهت $\mathbf{v}=12\mathbf{i}-5\mathbf{k}$ بیابید.

۳۴- برداری با اندازه ۳ در خلاف جهت بردار $\mathbf{v}=\frac{1}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}-\frac{1}{2}\mathbf{k}$ بیابید.

جهت و نقطه وسط

در تمرین های ۳۵-۳۸ مطلوب است

(الف)- جهت $\overrightarrow{P_1P_2}$ (ب)- نقطه وسط پاره خط P_1P_2.

۳۵- $P_1(-1,1,5)$ $P_2(2,5,0)$

۳۶- $P_1(1,4,5)$ $P_2(4,-2,7)$

۳۷- $P_1(3,4,5)$ $P_2(2,3,4)$

۳۸- $P_1(0,0,0)$ $P_2(2,-2,-2)$

۳۹- اگر $\overrightarrow{AB}=\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ و B نقطه $(5,1,3)$ باشد A را بیابید.

۴۰- اگر $\overrightarrow{AB}=-7\mathbf{i}+3\mathbf{j}+8\mathbf{k}$ و A نقطه $(-2,-3,6)$ باشد B را بیابید.

نظریه و کاربرد

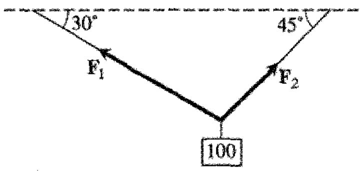
۴۱- **ترکیب خطی.** فرض کنید $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ، $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ و $\mathbf{w}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$ باشد اسکالرهای a و b را چنان بیابید که $\mathbf{u}=a\mathbf{v}+b\mathbf{w}$ باشد.

۴۲- **ترکیب خطی.** فرض کنید $\mathbf{u}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ ، $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ و $\mathbf{w}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ باشد. $\mathbf{u}$ را به صورت $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$ بنویسید، که $\mathbf{u}_1$ موازی $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}_2$ موازی $\mathbf{w}$ است (تمرین ۴۱ را ببینید).

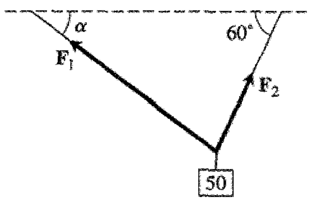
۴۳- **سرعت.** هواپیمایی در جهت 25° غرب محور شمالی با تندی $800km/h$ پرواز می کند. شکل مؤلفه ای سرعت هواپیما را بدست آورید. فرض کنید قسمت مثبت محور x نشان دهنده شرق و قسمت مثبت محور y نشان دهنده شمال است.

۴۴- (ادامه مثال ۸). هواپیمای جت مثال ۸ چه تندی و جهتی باید داشته باشد تا سرعت برایند آن $500mph$ به سمت شرق باشد.

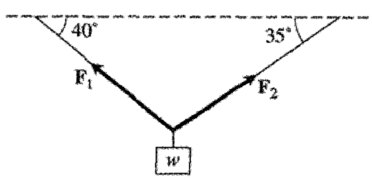
۴۵- وزنه ای $100N$ را در نظر بگیرید که مطابق شکل زیر بوسیله دو سیم آویزان شده است. اندازه ها و مؤلفه های بردارهای نیروی $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ را بدست آورید.



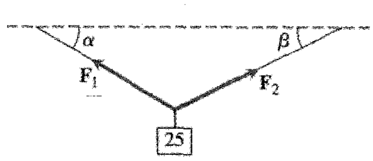
۴۶- وزنه ای $50N$ را در نظر بگیرید که مطابق شکل زیر بوسیله دو سیم آویزان شده است. اگر اندازه بردار $\mathbf{F}_1$ برابر $35N$ باشد زاویه α و اندازهٔ بردار $\mathbf{F}_2$ را بیابید.



۴۷- وزنه ای به وزن wN را در نظر بگیرید که مطابق شکل زیر بوسیله دو سیم آویزان شده است. اگر اندازه بردار $\mathbf{F}_2$ برابر $100N$ باشد w و اندازه بردار $\mathbf{F}_1$ را بیابید.



۴۸- وزنه ای $25N$ را در نظر بگیرید که مطابق شکل زیر بوسیله دو سیم آویزان شده است. اگر اندازه های بردارهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ هر دو $75N$ باشند زوایای α و β با هم برابرند. α را بیابید.



۴۹- **مکان.** پرنده ای از آشیانه خود پرواز کرده $5km$ در جهت 60° شمال شرق حرکت می کند و در آنجا برای استراحت روی درختی می نشیند. سپس $10km$ در جهت جنوب شرقی پرواز کرده و بر بالای یک دکل مخابراتی فرود می آید. یک دستگاه مختصات xy در نظر بگیرید که مبداء آن در آشیانه پرنده، محور x به سمت شرق و محور y به سمت شمال باشد.

(الف)- درخت در چه نقطه ای واقع است؟

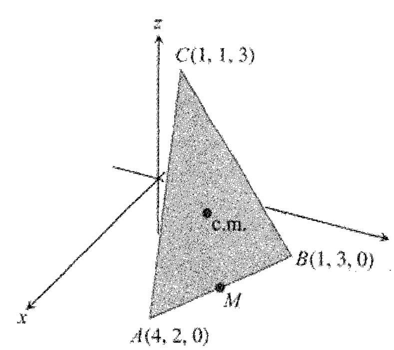
(ب)- دکل مخابراتی در چه نقطه ای واقع است؟

۵۰- با بهره گیری از مثلث های مشابه مختصات نقطه Q را بیابید که پاره خط بین نقاط $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ و $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ را به دو قسمت با نسبت $\frac{p}{q}=r$ تقسیم می کند.

۵۱- **میانه های مثلث.** فرض کنید A، B و C گوشه های صفحه مثلثی نازک با چگالی ثابت اند که در شکل زیر نشان داده شده است. (الف)- برداری را بیابید که از C به M، وسط ضلع AB، رسم می شود.

(ب)- برداری را بیابید که از C تا نقطه ای رسم می شود که روی میانه CM واقع بوده و فاصله آن از C دو - سوم طول میانه است.

(پ)- مختصات نقطه تلاقی میانه های ΔABC را بیابید. با توجه به تمرین ۱۴ بخش ۶-۶ این نقطه مرکز جرم صفحه است.



۵۲- برداری را بیابید که از مبداء به نقطه تلاقی میانه های مثلثی با رئوس زیر رسم می شود.

$$A(1,-1,2)\,,\,B(2,1,3)\,,\,C(-1,2,-1)$$

۵۳- فرض کنید $ABCD$ یک چهار ضلعی نامشخص، نه لزوماً واقع در یک صفحه، باشد. نشان دهید که دو پاره خطی که وسطهای اضلاع روبرو را به هم وصل می کنند یکدیگر را نصف می کنند (راهنمایی: نشان دهید که وسط های دوپاره خط بر هم منطبق اند).

۵۴- از مرکز یک n ضلعی منتظم واقع در صفحه بردارهایی را به رئوس چند ضلعی رسم می کنیم. نشان دهید که مجموع این بردارها صفر است. (راهنمایی: اگر چند ضلعی را حول مرکزش دوران دهید جمع چه تغییر می کند؟)

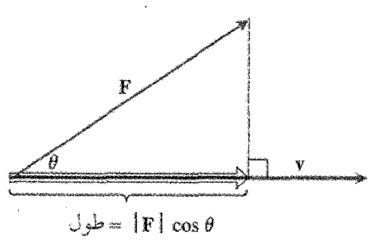
۵۵- فرض کنید A، B و C رئوس یک مثلث و a، b و c به ترتیب وسط های اضلاع رو به رو هستند. نشان دهید که

$$\overrightarrow{Aa}+\overrightarrow{Bb}+\overrightarrow{Cc}=0$$

۵۶- **بردارهای واحد در صفحه.** نشان دهید که یک بردار واحد واقع در صفحه را می توان به صورت $\mathbf{u}=(\cos\theta)\mathbf{i}+(\sin\theta)\mathbf{j}$ بیان کرد که از دوران $\mathbf{i}$ به اندازه زاویه θ در جهت پاد ساعتگرد بدست می آید. توضیح دهید که چرا این شکل بردار واحد، هر بردار واحد واقع در صفحه را بدست می دهد.

۱۲-۳- ضرب عددی (نقطه ای)

اگر بر ذره ای که در امتداد یک مسیر حرکت می کند نیروی $\mathbf{F}$ وارد شود اغلب نیاز داریم اندازه نیرو در جهت حرکت را بدانیم. اگر در نقطه ای که $\mathbf{F}$ اعمال می شود $\mathbf{v}$ موازی با خط مماس بر مسیر باشد در این صورت اندازه $\mathbf{F}$ در جهت $\mathbf{v}$ مطلوب ماست. شکل۱۲-۱۹ نشان می دهد که طول کمیت اسکالری که به دنبالش هستیم $|\mathbf{F}|\cos\theta$ است که θ زاویه بین دو بردار $\mathbf{F}$ و $\mathbf{v}$ است.



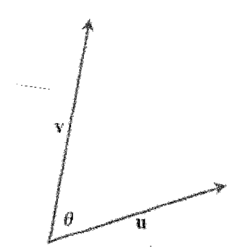
شکل۱۲-۱۹: اندازه نیروی $\mathbf{F}$ در جهت بردار $\mathbf{v}$، طول $|\mathbf{F}|\cos\theta$ تصویر $\mathbf{F}$ بر روی $\mathbf{v}$ است.

در این بخش نشان می دهیم که چگونه زاویه بین دو بردار

را مستقیماً از مؤلفه های آنها به راحتی محاسبه می کنیم. قسمت کلیدی محاسبه عبارتی موسوم بر *ضرب عددی* است. ضرب عددی ضرب داخلی یا اسکالر هم نامیده می شود زیرا حاصل این نوع ضرب یک اسکالر است نه یک بردار. بعد از مطالعه ضرب عددی آن را برای یافتن تصویر یک بردار بر روی بردار دیگر (همانطور که در شکل **۱۲-۱۹** نشان داده ایم) و برای یافتن کار انجام شده توسط نیروی ثابتی که در طی یک جابجایی اثر می کند بکار می بریم.

زاویه بین بردارها

وقتی دو بردار ناصفر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ طوری قرار داده شوند که نقاط ابتدایی آنها برهم منطبق باشند بین آنها یک زاویه θ تشکیل می شود که مقدار آن در بازه $0 \le \theta \le \pi$ قرار دارد (شکل **۱۲-۲۰**). اگر بردارها بر روی یک خط قرار نداشته باشند زاویه θ در صفحه شامل هر دو بردار اندازه گیری می شود. اگر بردارها بر روی یک خط قرار داشته باشند زاویه بین آنها 0 یا π خواهد بود بسته به اینکه به ترتیب هم جهت یا در خلاف جهت هم باشند. زاویه θ، زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است. قضیه ۱ فرمول تعیین این زاویه را بدست می دهد.



شکل ۱۲-۲۰: زاویه بین u و v.

> **قضیه ۱: زاویه بین دو بردار**
>
> زاویه θ بین دو بردار ناصفر
>
> $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$
>
> از رابطه زیر بدست می آید
>
> $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

قبل از اثبات قضیه ۱ توجه خود را روی عبارت $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ در محاسبه زاویه θ متمرکز می کنیم. این عبارت مجموع حاصلضرب های مؤلفه های متناظر بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است.

> **تعریف: ضرب عددی u.v** ("u نقطه v") بردارهای
>
> $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$
>
> عبارت است از
>
> $$\mathbf{u}.\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

مثال ۱ :

(الف)-

$$\langle 1,-2,-1\rangle.\langle -6,2,-3\rangle = (1)(-6) + +(-2)(2) + (-1)(-3)$$
$$= -6 - 4 + 3 = -7$$

(ب)-

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}\right).(4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2}\right)(4) + (3)(-1) + (1)(2)$$
$$= 1$$

ضرب عددی هر دو بردار دو بعدی به شیوه ای مشابه تعریف می شود:

$$\langle u_1, u_2\rangle.\langle v_1, v_2\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$$

در ادامه کتاب خواهیم دید که ضرب عددی ابزاری کلیدی برای بسیاری از محاسبات هندسی و فیزیکی مهم در فضا (و در صفحه) است، نه فقط برای محاسبه زاویه بین دو بردار.

اثبات قضیه ۱: با کاربرد قانون کسینوس ها (معادله (۸) بخش **۱-۳**) برای مثلث شکل **۱۲-۲۱** خواهیم داشت

$$|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta \quad \text{(قانون کسینوس ها)}$$

$$2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2$$

چون $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$، شکل مؤلفه ای $\mathbf{w}$ عبارت است از

$$\langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3\rangle$$

بنابراین

$$|\mathbf{u}|^2 = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\right)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

$$|\mathbf{v}|^2 = \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\right)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

$$|\mathbf{w}|^2 = \left(\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}\right)^2$$

$$=(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+(u_3-v_3)^2$$
$$=u_1^2-2u_1v_1+v_1^2+u_2^2-2u_2v_2+v_2^2+u_3^2-2u_3v_3+v_3^2$$

و

$$|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-|\mathbf{w}|^2=2(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$$

بنابراین

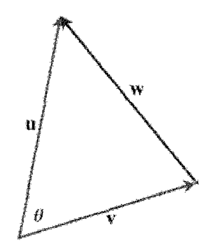
$$2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta=|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2-|\mathbf{w}|^3$$
$$=2(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$$
$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$
$$\cos\theta=\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

از آنجا که $0\le\theta\le\pi$ است داریم

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

در نمادگذاری ضرب عددی زاویه بین دو بردار **u** و **v** عبارت است از

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$



شکل۱۲-۲۱: طبق قانون متوازی الاضلاع جمع بردارها، $\mathbf{w}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$.

مثال ۲: زاویه بین بردارهای

$$\mathbf{u}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{v}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

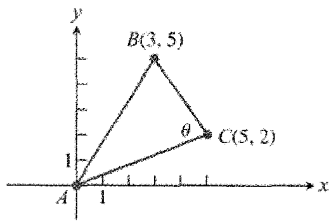
را بیابید.

حل: از فرمول بالا استفاده می کنیم

$$\mathbf{u}.\mathbf{v}=(1)(6)+(-2)(3)+(-2)(2)=6-6-4=-4$$
$$|\mathbf{u}|=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$
$$|\mathbf{v}|=\sqrt{(6)^2+(3)^2+(2)^2}=\sqrt{49}=7$$
$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-4}{(3)(7)}\right)\approx 1.76\,\text{radians}$$

فرمول زاویه فوق برای بردارهای دو بعدی نیز کاربرد دارد.

مثال ۳: زاویه θ را در مثلث ABC که با رئوس $A=(0,0)$، $B=(3,5)$ و $C=(5,2)$ مشخص می شود بیابید (شکل ۱۲-۲۲).



شکل۱۲-۲۲: مثلث مذکور در مثال ۳.

حل: زاویه θ زاویه بین بردارهای $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ است. شکل های مؤلفه ای این دو بردار عبارتند از

$$\overrightarrow{CA}=\langle -5,-2\rangle \quad , \quad \overrightarrow{CB}=\langle -2,3\rangle$$

ابتدا حاصلضرب عددی و اندازه های این دو بردار را محاسبه می کنیم

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=(-5)(-2)+(-2)(3)=4$$
$$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$$
$$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{13}$$

سپس با کاربرد فرمول زاویه داریم

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}\right)$$
$$=\cos^{-1}\left(\frac{4}{(\sqrt{29})(\sqrt{13})}\right)$$
$$\approx 78.1^\circ \quad or \quad 1.36 \text{ radians}$$

بردارهای عمود بر هم (متعامد)

دو بردار ناصفر **u** و **v** برهم عمودند (متعامدند) هرگاه زاویه بین آنها $\pi/2$ باشد. برای چنین بردارهایی $\mathbf{u}.\mathbf{v}=0$ است زیرا $\cos(\pi/2)=0$ عکس این مطلب نیز درست است. اگر **u** و **v** بردارهای ناصفر و $\mathbf{u}.\mathbf{v}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta=0$ باشد آنگاه $\cos\theta=0$ و $\theta=\cos^{-1}0=\pi/2$.

تعریف: بردارهای **u** و **v** متعامدند (یا برهم عمودند) اگر و تنها اگر $\mathbf{u}.\mathbf{v}=0$ باشد.

مثال ۴: برای تعیین متعامد بودن یا نبودن دو بردار، ضرب عددی آنها را محاسبه کنید.

(الف)- $\mathbf{u}=\langle 3,-2\rangle$ و $\mathbf{v}=\langle 4,6\rangle$ برهم عمودند زیرا

$$\mathbf{u.v}=(3)(4)+(-2)(6)=0$$

(ب)- $\mathbf{u}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}=2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ برهم عمودند زیرا

$$\mathbf{u.v}=(3)(0)+(-2)(2)+(1)(4)=0$$

(پ)- بردار $\mathbf{0}$ برهر بردار $\mathbf{u}$ عمود است زیرا

$$\begin{aligned}\mathbf{0.u}&=\langle 0,0,0\rangle.\langle u_1,u_2,u_3\rangle\\&=(0)(u_1)+(0)(u_2)+(0)(u_3)\\&=0\end{aligned}$$

ویژگی های ضرب عددی و تصاویر بردار

ضرب عددی از بسیاری از قوانینی که برای حاصلضرب های معمولی اعداد حقیقی (اسکالرها) صادق اند پیروی می کند.

ویژگی های ضرب عددی

اگر $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ بردارهای دلخواه و c یک اسکالر باشد آنگاه

۱- $\mathbf{u.v}=\mathbf{v.u}$

۲- $(c\mathbf{u}).\mathbf{v}=\mathbf{u}.(c\mathbf{v})=c(\mathbf{u.v})$

۳- $\mathbf{u}.(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u.v}+\mathbf{u.w}$

۴- $\mathbf{u.u}=|\mathbf{u}|^2$

۵- $\mathbf{0.u}=0$

اثبات ویژگی های ۱ و ۳: ویژگی های فوق با بهره گیری از تعریف ضرب عددی به آسانی قابل اثبات هستند. برای نمونه اثبات ویژگی های ۱ و ۳ را در اینجا ارائه می کنیم.

۱-

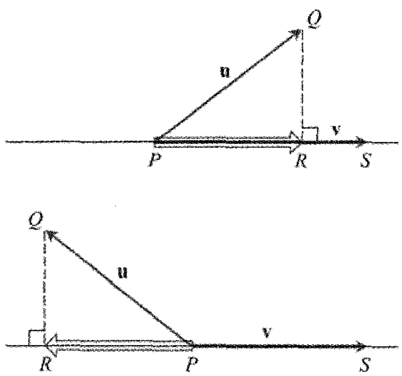
$$\begin{aligned}\mathbf{u.v}&=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3\\&=v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3=\mathbf{v.u}\end{aligned}$$

۳-

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}.(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\\&=\langle u_1,u_2,u_3\rangle.\langle v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3\rangle\\&=u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2)+u_3(v_3+w_3)\\&=u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2+u_3v_3+u_3w_3\\&=(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)+(u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)\\&=\mathbf{u.v}+\mathbf{u.w}\end{aligned}$$

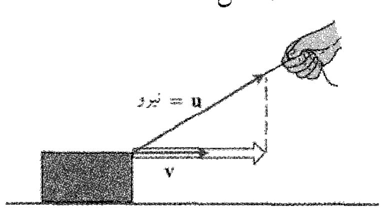
اکنون به مسئله تصویر کردن یک بردار بر روی دیگری که در ابتدای این بخش مطرح کردیم می پردازیم. **تصویر برداری** $\mathbf{u}=\overrightarrow{PQ}$ بر روی بردار ناصفر $\mathbf{v}=\overrightarrow{PS}$ (شکل۱۲-۲۳) بردار $\overrightarrow{PR}$ است که با رسم یک خط عمود از Q به خط PS مشخص می شود. نمادگذاری مربوط به این بردار به صورت زیر است

$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ ("تصویر برداری $\mathbf{u}$ بر روی $\mathbf{v}$")



شکل۱۲-۲۳: تصویر برداری $\mathbf{u}$ بر روی $\mathbf{v}$.

اگر $\mathbf{u}$ نمایش یک نیرو باشد آنگاه $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ نشان دهنده نیروی مؤثر در جهت $\mathbf{v}$ است (شکل۱۲-۲۴).



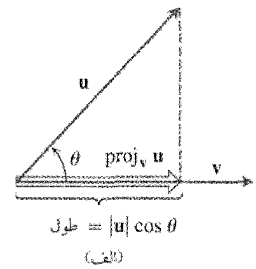
شکل ۱۲-۲۴: اگر جعبه را با نیروی $\mathbf{u}$ بکشیم نیروی مؤثری که جعبه را در جهت $\mathbf{v}$ پیش می برد تصویر $\mathbf{u}$ بر روی $\mathbf{v}$ است.

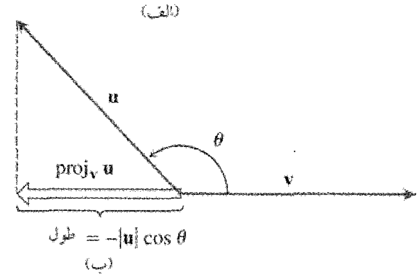
اگر زاویه θ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ حاده باشد، طول $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ برابر $|\mathbf{u}|\cos\theta$ و جهت آن عبارت است از $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ (شکل۱۲-۲۵). اگر θ منفرجه باشد، $\cos\theta<0$ بوده، طول $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ برابر $-|\mathbf{u}|\cos\theta$ و جهت آن عبارت است از $-\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. درهر دو حالت،

$$\begin{aligned}\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}&=(|\mathbf{u}|\cos\theta)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\\&=\left(\frac{\mathbf{u.v}}{|\mathbf{v}|}\right)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\qquad\left(|\mathbf{u}|\cos\theta=\frac{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta}{|\mathbf{v}|}=\frac{\mathbf{u.v}}{|\mathbf{v}|}\right)\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

عدد $|\mathbf{u}|\cos\theta$ را **مؤلفه اسکالر u در جهت v** (یا مؤلفه u بر روی v) می نامند. بطور خلاصه،





شکل۱۲-۲۵: طول $\text{proj}_\mathbf{v}\mathbf{u}$ برابر است با (الف)- $|\mathbf{u}|\cos\theta$ اگر $\cos\theta \ge 0$ باشد و (ب)- $-|\mathbf{u}|\cos\theta$ اگر $\cos\theta<0$ باشد.

تصویر برداری u برروی v عبارت است از بردار زیر

$$\text{proj}_\mathbf{v}\mathbf{u}=\left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \qquad (۱)$$

مؤلفه اسکالر u در جهت v عبارت است از اسکالر زیر

$$|\mathbf{u}|\cos\theta=\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\mathbf{u}.\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad (۲)$$

توجه کنید که هم تصویر برداری u بر روی v و هم مؤلفه اسکالر u بر روی v فقط به جهت بردار v بستگی دارند و نه به طول آن (چون u را در $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ ضرب عددی می کنیم که جهت v است).

مثال۵: تصویر برداری $\mathbf{u}=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ را بر روی $\mathbf{v}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ و مؤلفه اسکالر u را در جهت v بدست آورید.

حل:

$\text{proj}_\mathbf{v}\mathbf{u}$ را از معادله (۱) بدست می آوریم

$$\text{proj}_\mathbf{v}\mathbf{u}=\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\mathbf{v}.\mathbf{v}}\mathbf{v}=\frac{6-6-4}{1+4+4}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k})$$

$$=\frac{4}{9}(\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k})=-\frac{4}{9}\mathbf{i}+\frac{8}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}$$

مؤلفه اسکالر u در جهت v را از معادله (۲) بدست می آوریم:

$$|\mathbf{u}|\cos\theta=\mathbf{u}.\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=(6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}).\left(\frac{1}{3}\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$$

$$=2-2-\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}$$

معادلات (۱) و (۲) برای بردارهای دو بعدی هم کاربرد دارند. در مثال بعدی این موضوع را نشان می دهیم.

مثال ۶: تصویر برداری نیروی $\mathbf{F}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ را بر روی $\mathbf{v}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ و مؤلفه اسکالر F را در جهت v بدست آورید.

حل:

تصویر برداری عبارت است از

$$\text{proj}_\mathbf{v}\mathbf{F}=\left(\frac{\mathbf{F}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

$$=\frac{5-6}{1+9}(\mathbf{i}-3\mathbf{j})=-\frac{1}{10}(\mathbf{i}-3\mathbf{j})$$

$$=-\frac{1}{10}\mathbf{i}+\frac{3}{10}\mathbf{j}$$

مؤلفه اسکالر F در جهت v عبارت است از

$$|\mathbf{F}|\cos\theta=\frac{\mathbf{F}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{5-6}{\sqrt{1+9}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

محاسبه ای سرراست (تمرین ۲۹ را ببینید) نشان می دهد که بردار $\mathbf{u}-\text{proj}_\mathbf{v}\mathbf{u}$ بر بردار تصویری $\text{proj}_\mathbf{v}\mathbf{u}$ (که با v هم جهت است) عمود است. بنابراین معادله زیر u را به صورت مجموع بردارهای متعامد بیان می کند

$$\mathbf{u}=\text{proj}_\mathbf{v}\mathbf{u}+(\mathbf{u}-\text{proj}_\mathbf{v}\mathbf{u})$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}}_{\text{موازی v}}+\underbrace{\left(\mathbf{u}-\left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}\right)}_{\text{عمود بر v}}$$

کار

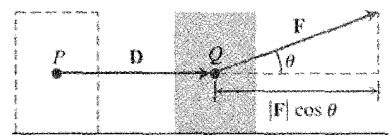
در فصل ۶ کار انجام شده توسط یک نیروی ثابت به اندازه F در حرکت یک جسم به اندازه d را به صورت $W=Fd$ محاسبه کردیم. این فرمول فقط در صورتی معتبر است که نیرو

در امتداد خط حرکت باشد. اگر نیروی $\mathbf{F}$ که در طی جابجایی $\mathbf{D}=\overrightarrow{PQ}$ برجسم وارد می شود جهت دیگری داشته باشد، کار توسط مؤلفه ای از $\mathbf{F}$ که در جهت $\mathbf{D}$ قرار دارد انجام می شود. اگر θ زاویه بین $\mathbf{F}$ و $\mathbf{D}$ باشد (شکل ۱۲-۲۶)، آنگاه

(طول $\mathbf{D}$) (مؤلفه اسکالر $\mathbf{F}$ در جهت $\mathbf{D}$) = کار

$$=\left(|\mathbf{F}|\cos\theta\right)|\mathbf{D}|$$

$$=\mathbf{F}.\mathbf{D}$$



شکل۱۲-۲۶: کار انجام شده توسط نیروی ثابت $\mathbf{F}$ در طــی جابجــایی $\mathbf{D}$ عبــارت اســت از $\left(|\mathbf{F}|\cos\theta\right)|\mathbf{D}|$،که همـان ضـرب عـددی $\mathbf{F}.\mathbf{D}$ است.

تعریف: کار انجام شده توسط نیروی ثابت $\mathbf{F}$ که در طی جابجایی $\mathbf{D}=\overrightarrow{PQ}$ اثر می کند عبارت است از

$$W=\mathbf{F}.\mathbf{D}$$

مثال۷: اگر $|\mathbf{F}|=40N$(نیوتن)، $|\mathbf{D}|=3m$ و $\theta=60^\circ$ باشد کار انجام شده توسط $\mathbf{F}$ که در فاصله P تا Q اثر می کند عبارت است از:

(تعریف) $\quad$ کار $=\mathbf{F}.\mathbf{D}$

$$=|\mathbf{F}||\mathbf{D}|\cos\theta$$

$$=(40)(3)\cos60^\circ$$

$$=(120)(1/2)=60\text{J}(\text{joules})$$

در فصل۱۶ هنگام مطالعه کار انجام شـده توسط نیروهـای متغیر در امتداد مسیرهای دلخواه در فضا با مسائل چالشی تر کار مواجه می شویم.

تمرین های ۱۲-۳

ضرب عددی و تصاویر

در تمرین های ۱ – ۸ مطلوبست

(الف)- $\mathbf{v}.\mathbf{u}$ ، $|\mathbf{v}|$، $|\mathbf{u}|$

(ب)- کسینوس زاویه بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$

(پ)- مؤلفه اسکالر (عددی) $\mathbf{u}$ در جهت $\mathbf{v}$

(ت)- بردار $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

۱- $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\sqrt{5}\mathbf{k},\quad \mathbf{u}=-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\sqrt{5}\mathbf{k}$

۲- $\mathbf{v}=(3/5)\mathbf{i}+(4/5)\mathbf{k},\quad \mathbf{u}=5\mathbf{i}+12\mathbf{j}$

۳- $\mathbf{v}=10\mathbf{i}+11\mathbf{j}-2\mathbf{k},\quad \mathbf{u}=3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

۴- $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+10\mathbf{j}-11\mathbf{k},\quad \mathbf{u}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۵- $\mathbf{v}=5\mathbf{j}-3\mathbf{k},\quad \mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۶- $\mathbf{v}=-\mathbf{i}+\mathbf{j},\quad \mathbf{u}=\sqrt{2}\mathbf{i}+\sqrt{3}\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

۷- $\mathbf{v}=5\mathbf{i}+\mathbf{j},\quad \mathbf{u}=2\mathbf{i}+\sqrt{17}\mathbf{j}$

۸- $\mathbf{v}=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle,\quad \mathbf{u}=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle$

زاویه بین بردارها

در تمرین های ۹-۱۲ زاویه بین بردارها را تا یک صدم رادیان محاسبه کنید.

۹- $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+\mathbf{j},\quad \mathbf{v}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$

۱۰- $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k},\quad \mathbf{v}=3\mathbf{i}+4\mathbf{k}$

۱۱- $\mathbf{u}=\sqrt{3}\mathbf{i}-7\mathbf{j},\quad \mathbf{v}=\sqrt{3}\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

۱۲- $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}-\sqrt{2}\mathbf{k},\quad \mathbf{v}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۱۳- **مثلث.** مقادیر زوایای مثلثی با رئوس

$A=(-1,0)$، $B=(2,1)$ و $C=(1,-2)$

را بیابید.

۱۴- **مستطیل.** مقادیر زوایای بین قطرهای مستطیلی را بیابید که رئوس آن عبارتند از

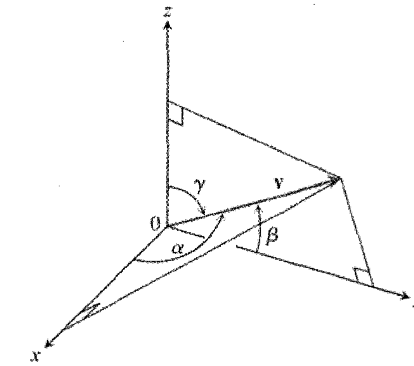
$A=(1,0)$، $B=(0,3)$، $C=(3,4)$ و $D=(4,1)$

۱۵- **زوایای هادی و کسینوس های هادی.** زوایای هـادی α، β و γ بردار $\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ بـه صـورت زیـر تعریـف مـی شوند:

α زاویه بین $\mathbf{v}$ قسمت مثبت محور x $(0\le\alpha\le\pi)$

βزاویه بین $\mathbf{v}$ و قسمت مثبت محور y $(0\le\beta\le\pi)$

γزاویه بین $\mathbf{v}$ و قسمت مثبت محور z $(0\le\gamma\le\pi)$



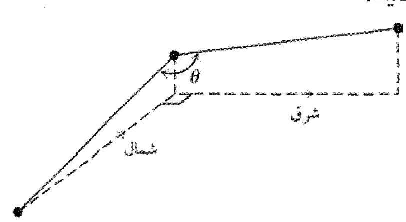
(الف)- نشان دهید که

$$\cos\alpha=\frac{a}{|\mathbf{v}|},\quad \cos\beta=\frac{b}{|\mathbf{v}|},\quad \cos\gamma=\frac{c}{|\mathbf{v}|}$$

و $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. این کسینوس ها را کسینوس های هادی $\mathbf{v}$ می نامند.

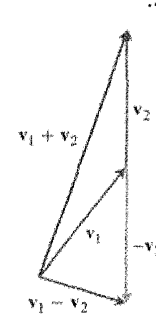
(ب)- **بردارهای واحد از کسینوس های هادی ساخته می شوند.** نشان دهید که اگر $\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ برداری واحد باشد، a، b و c کسینوس های هادی $\mathbf{v}$ هستند.

۱۶- **ساختمان لوله آب.** می خواهیم یک لوله آب احداث کنیم که شیب آن در جهت شمال ۲۰٪ و در جهت شرق ۱۰٪ باشد. زاویه θ را که باید لوله آب در محل پیچ شمال به شرق داشته باشد تعیین کنید.

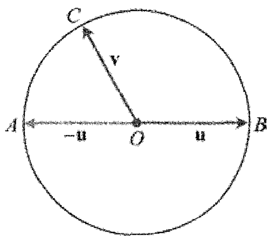


نظریه و مثال ها

۱۷- **مجموع و تفاضل.** در شکل زیر به نظر می رسد که $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ متعامدند. آیا این امر صرفاً یک تصادف است یا اینکه شرایطی وجود دارد که تحت آن می توان انتظار داشت که مجموع دو بردار بر تفاضل آنها عمود باشد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.



۱۸- **تعامد برروی یک دایره.** فرض کنید AB قطر دایره ای به مرکز O و C نقطه ای بر روی یکی از دو کمانی باشد که A و B را به هم وصل می کنند. نشان دهید که $\overline{CA}$ و $\overline{CB}$ برهم عمودند.

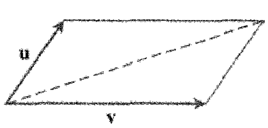


۱۹- **قطرهای لوزی.** نشان دهید که قطرهای یک لوزی (متوازی الاضلاعی با اضلاع هم طول) برهم عمودند.

۲۰- **قطرهای عمود برهم.** نشان دهید که مربع تنها مستطیلی است که قطرهای آن برهم عمودند.

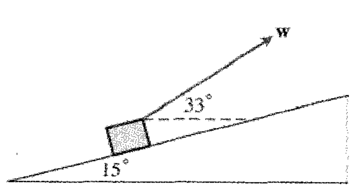
۲۱- **وقتی متوازی الاضلاع مستطیل است.** ثابت کنید که متوازی الاضلاع مستطیل است اگر و تنها اگر طول قطرهای آن برابر باشند (این حقیقت غالباً مورد استفاده نجاران قرار می گیرد).

۲۲- **قطر متوازی الاضلاع.** در شکل زیر که متوازی الاضلاعی است که با بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ تشکیل شده است نشان دهید که قطر نشان داده شده نیمساز زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است هرگاه $|\mathbf{u}|=|\mathbf{v}|$ باشد.



۲۳- **حرکت پرتابی.** تفنگی با سرعت دهانه $1200 ft/\sec$ تحت زاویه 8° بالای افق شلیک می شود. مؤلفه های افقی و قائم سرعت را بیابید.

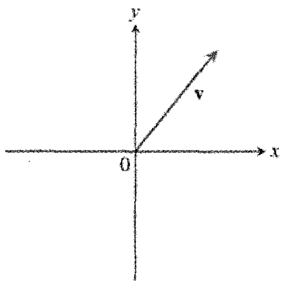
۲۴- **سطح شیبدار.** فرض کنید جعبه ای مطابق شکل زیر از یک سطح شیبدار به طرف بالا کشیده می شود. نیروی $\mathbf{w}$ باید چقدر باشد تا مؤلفه موازی با سطح شیبدار نیرو برابر با 2.5lb باشد؟



۲۵- نامساوی کوشی- شوارتز. (الف)- با توجه به اینکه $\mathbf{u.v}=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$، نشان دهید که برای هر دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ نامساوی $|\mathbf{u.v}|\le|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ برقرار است.

(ب)- تحت چه شرایطی، در صورت وجود، $|\mathbf{u.v}|$ با $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ برابر است؟

۲۶- محورها و بردار نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. نقاط (x,y) را که در نامعادله $(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}).\mathbf{v}\le 0$ صدق می کنند سایه بزنید. پاسخ خود را توجیه کنید.



۲۷- بردارهای واحد متعامد. اگر $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ بردارهای واحد متعامد و $\mathbf{v}=a\mathbf{u}_1+b\mathbf{u}_2$ باشد $\mathbf{v.u}_1$ را بیابید.

۲۸- حذف در ضرب های عددی. در ضرب اعداد حقیقی اگر $uv_1=uv_2$ و $u\neq 0$ باشد می توانیم u را از طرفین حذف کرده و نتیجه بگیریم که $v_1=v_2$ است. آیا برای ضرب عددی هم این قاعده برقرار است؟ یعنی اگر $\mathbf{u.v}_1=\mathbf{u.v}_2$ و $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ باشد می توان نتیجه گرفت که $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2$ است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲۹- با استفاده از تعریف تصویر $\mathbf{u}$ بر روی $\mathbf{v}$ و با محاسبه مستقیم نشان دهید که $(\mathbf{u}-\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}).\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=0$.

۳۰- نیروی $\mathbf{F}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ بر فضاپیمایی با بردار سرعت $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}$ وارد می شود. $\mathbf{F}$ را به صورت مجموع برداری موازی با $\mathbf{v}$ و برداری عمود بر $\mathbf{v}$ بیان کنید.

معادلات خطوط واقع در صفحه

۳۱- خط عمود بر بردار. نشان دهید که $\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ بر خط $ax+by=c$ عمود است. برای این کار ثابت کنید که شیب بردار $\mathbf{v}$ منفی وارون شیب خط داده شده است.

۳۲- خط موازی با بردار. نشان دهید که بردار $\mathbf{v}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ با خط $bx-ay=c$ موازی است. برای این کار ثابت کنید که شیب پاره خط نمایش دهنده $\mathbf{v}$ با شیب خط داده شده یکسان است.

در تمرینهای **۳۳-۳۶** با بهره گیری از نتیجه تمرین **۳۱** معادله خط گذرنده از P و عمود بر $\mathbf{v}$ را بیابید. سپس خط را رسم کنید. بردار $\mathbf{v}$ را نیز به عنوان برداری که از مبداء شروع می شود بر روی شکل خود لحاظ کنید.

۳۳- $P(2,1),\ \mathbf{v}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$

۳۴- $P(-1,2),\ \mathbf{v}=-2\mathbf{i}-\mathbf{j}$

۳۵- $P(-2,-7),\ \mathbf{v}=-2\mathbf{i}+\mathbf{j}$

۳۶- $P(11,10),\ \mathbf{v}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$

در تمرین های **۳۷-۴۰** با بهره گیری از نتیجه تمرین **۳۲** معادله خط گذرنده از P و موازی با $\mathbf{v}$ را بیابید. سپس خط را رسم کنید. بر روی شکل خود بردار $\mathbf{v}$ را نیز به عنوان برداری که از مبداء شروع می شود رسم کنید.

۳۷- $P(-2,1),\ \mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$ ۳۸- $P(0,-2),\ \mathbf{v}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

۳۹- $P(1,2),\ \mathbf{v}=-\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ ۴۰- $P(1,3),\ \mathbf{v}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$

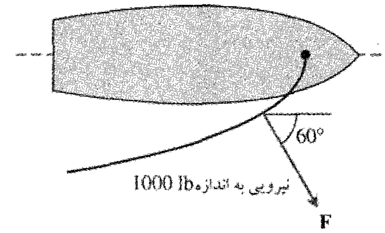
کار

۴۱- کار در امتداد یک خط. کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F}=5\mathbf{i}$ (اندازه $5N$) را در حرکت یک جسم در امتداد خطی که از مبداء به نقطه (۱و۱) رسم می شود (فاصله برحسب متر است) محاسبه کنید.

۴۲- لکوموتیو. لکوموتیوی می تواند واگن های ۶۰۰۰ تنی خود را با نیروی $602148N$ ($135375lb$) بکشد. این قطار با این نیرو در مسیر تقریباً مستقیم **۶۰۵** کیلومتری سانفرانسیسکو به لوس آنجلس چقدر کار انجام می دهد؟

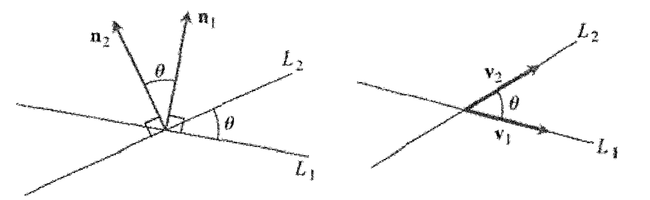
۴۳- سطح شیبدار. صندوقی را با وارد کردن یک نیروی $200N$ با زاویه 30° نسبت به افق بر روی یک اسکله بارگیری به اندازه $20m$ جابجا می کنیم. کار انجام شده چقدر است؟

۴۴- قایق بادبانی. بادی که به بادبان یک قایق برخورد می کند مطابق شکل زیر نیروی $\mathbf{F}$ به اندازه $1000lb$ بر آن وارد می کند. کاری که باد در $1mi$ حرکت قایق به سمت جلو انجام می دهد چقدر است؟ پاسخ را برحسب فوت – پوند بیان کنید.



زوایای بین خطوط و صفحه

زاویه حاده بین خطوط متقاطعی که برهم عمود نیستند با زاویه ای که با بردارهای عمود بر خطوط یا بردارهای موازی با خطوط مشخص می شود یکسان است.



با کمک این نکته و نتایج تمرین **۳۱** یا **۳۲** زوایای حاده بین خطوط تمرین های **۴۵- ۵۰** را بیابید.

۴۵- $3x+y=5,\ 2x-y=4$

۴۶- $y=\sqrt{3}x-1,\ y=-\sqrt{3}x+2$

۴۷- $\sqrt{3}x-y=-2,\ x-\sqrt{3}y=1$

۴۸- $x+\sqrt{3}y=1,\ \left(1-\sqrt{3}\right)x+\left(1+\sqrt{3}\right)y=8$

۴۹- $3x-4y=3,\ x-y=7$

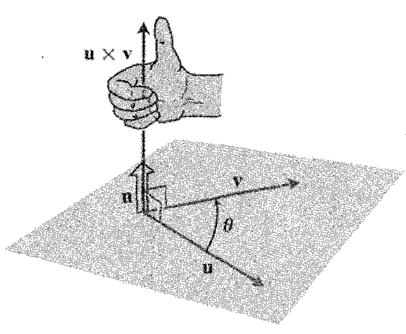
۵۰- $12x+5y=1,\ 2x-2y=3$

۱۲-۴- ضرب برداری دو بردار

در مطالعه خطوط واقع در صفحه، وقتی می خواستیم میزان مورب بودن یک خط را توصیف کنیم از مفاهیم شیب و زاویه شیب استفاده کردیم. در فضا هم به دنبال روشی برای توصیف میزان مورب بودن یک صفحه هستیم. برای انجام این کار دو بردار واقع در صفحه را در هم ضرب می کنیم تا به بردار سومی عمود بر صفحه دست یابیم. جهت این بردار سوم «میزان مورب بودن» صفحه را مشخص می کند. ضربی که برای این نوع ضرب کردن بردارها در هم بکار می بریم ضرب برداری یا ضربدری است که دومین روش ضرب دو بردار در هم محسوب می شود. ضرب برداری را در این بخش مطالعه می کنیم.

ضرب برداری دو بردار واقع در فضا

با دو بردار ناصفر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ در فضا شروع می کنیم. اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ موازی نباشند یک صفحه را مشخص می کنند. به کمک **قاعده دست راست** بردار واحد $\mathbf{n}$ را عمود بر صفحه انتخاب می کنیم، به این ترتیب که $\mathbf{n}$ را بردار (عمود) واحدی انتخاب می کنیم که وقتی انگشتان دست راست خود را از طریق زاویه θ از $\mathbf{u}$ به سمت $\mathbf{v}$ بچرخانیم در جهت انگشت شست قرار می گیرد (شکل۱۲-۲۷). در این صورت **ضرب برداری** $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ("$\mathbf{u}$ ضربدر $\mathbf{v}$") برداری است که به صورت زیر تعریف می شود.



شکل ۱۲-۲۷: رسم $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

تعریف:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta\right)\mathbf{n}$$

برخلاف ضرب عددی، حاصل ضرب برداری یک بردار است. به همین دلیل است که آن را ضرب برداری $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ نیز می نامند و فقط برای بردارها در فضا کاربرد دارد. بردار $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ بر هر دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ عمود است زیرا مضربی عددی از $\mathbf{n}$ است.

روش سرراستی برای محاسبه ضرب برداری دو بردار از روی مؤلفه های آنها وجود دارد. در این روش نیازی به دانستن

زاویه بین دو بردار نیست (چیزی که تعریف بالا بیان می کند)، اما فعلاً آن محاسبه را به تعویق می اندازیم، لذا می توانیم روی ویژگی های ضرب برداری متمرکز شویم.

از آنجا که سینوس 0 و π هر دو صفرند منطقی است که ضرب برداری دو بردار ناصفر موازی را برابر $\mathbf{0}$ تعریف کنیم. اگر یکی از دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ یا هر دو صفر باشند باز هم $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ را برابر با $\mathbf{0}$ تعریف می کنیم. بدین ترتیب ضرب برداری دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ صفر است اگر و تنها اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ با هم موازی یا یکی از دو بردار یا هر دو صفر باشند.

بردارهای موازی

بردارهای ناصفر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ با هم موازی اند اگر و تنها اگر

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

ضرب برداری از قوانین زیر پیروی می کند:

ویژگی های ضرب برداری

اگر $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ هر سه بردار دلخواه و r و s دو اسکالر (عدد) باشند آنگاه

۱- $(r\mathbf{u})\times(s\mathbf{v})=(rs)(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

۲- $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

۳- $\mathbf{v}\times\mathbf{u}=-(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

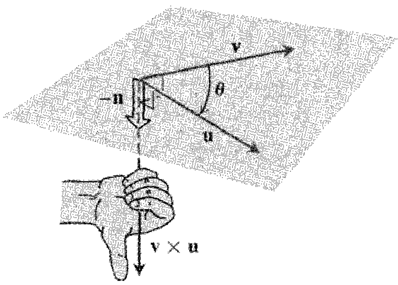
۴- $(\mathbf{v}+\mathbf{w})\times\mathbf{u}=\mathbf{v}\times\mathbf{u}+\mathbf{w}\times\mathbf{u}$

۵- $\mathbf{0}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$

۶- $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}.\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}.\mathbf{v})\mathbf{w}$

مثلاً برای تجسم ویژگی ۳، توجه کنید که وقتی انگشتان دست راستتان را از طریق زاویه θ از $\mathbf{v}$ به سمت $\mathbf{u}$ بچرخانید انگشت شست شما در سوی مخالف قرار می گیرد. بردار واحدی که در تشکیل $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ انتخاب می کنیم منفی بردار واحدیست که در تشکیل $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ برمی گزینیم (شکل ۱۲-۲۸).

ویژگی ۱ را می توان با کاربرد تعریف ضرب برداری برای دو طرف معادله و مقایسه نتایج حاصل تحقیق کرد. ویژگی ۲ را در پیوست ۸ اثبات می کنیم. ویژگی ۴ با ضرب طرفین معادله ۲ در ۱- و عوض کردن ترتیب ضرب ها با استفاده از ویژگی ۳ بدست می آید. ویژگی ۵ یک تعریف است. به عنوان یک قاعده، ضرب برداری خاصیت شرکت پذیری ندارد لذا $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ در حالت کلی با $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ برابر نیست (تمرین اضافی ۱۷ را ببینید).



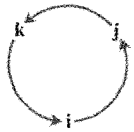
شکل ۱۲-۲۸: رسم $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$.

اگر تعریف ضرب برداری را برای محاسبه ضرب های برداری دو بدو بردارهای $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ بکار ببریم خواهیم دید که (شکل ۱۲-۲۹):

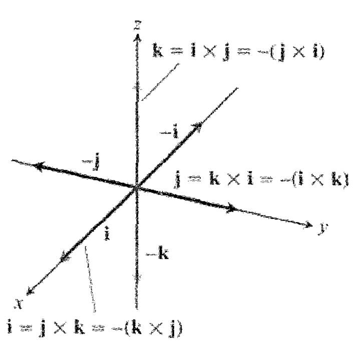
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-(\mathbf{j}\times\mathbf{i})=\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=-(\mathbf{k}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=-(\mathbf{i}\times\mathbf{k})=\mathbf{j}$$

و

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$$



نموداری برای به خاطر سپردن این حاصلضرب ها



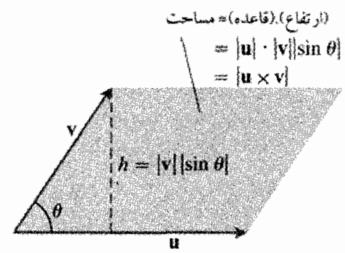
شکل ۱۲- ۲۹: ضرب های برداری دو بدو بردارهای واحد $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$.

$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ مساحت یک متوازی الاضلاع است

چون $\mathbf{n}$ یک بردار واحد است اندازه $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ برابر است با

$$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=|\mathbf{u}||\mathbf{v}||\sin\theta||\mathbf{n}|=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$$

این عبارت مساحت متوازی الاضلاعی است که با بردارهـای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ تشکیل می شود (شکل۱۲-۳۰)، $|\mathbf{u}|$ قاعده متوازی الاضلاع و $|\mathbf{v}|\sin\theta$ ارتفاع آن است.



شکل۱۲-۳۰: متوازی الاضلاعی کـه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ آن را می سازند.

فرمول دترمینانی $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$

هدف بعدی ما محاسبه $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ با اسـتفاده از مؤلفـه هـای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ نسبت به یک دستگاه مختصات دکارتی است.

فرض کنید

$$\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$$

طبق قوانین توزیع پذیری و قواعد ضرب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k})\times(v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k})\\ &= u_1v_1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+u_1v_2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+u_1v_3\mathbf{i}\times\mathbf{k}\\ &\quad +u_2v_1\mathbf{j}\times\mathbf{i}+u_2v_2\mathbf{j}\times\mathbf{j}+u_2v_3\mathbf{j}\times\mathbf{k}\\ &\quad +u_3v_1\mathbf{k}\times\mathbf{i}+u_3v_2\mathbf{k}\times\mathbf{j}+u_3v_3\mathbf{k}\times\mathbf{k}\\ &=(u_2v_3-u_3v_2)\mathbf{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\mathbf{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

به خاطر سپردن جملات مؤلفه ها در خط آخر دشوار است اما آنها جملات بسط دترمینان[1] نمادین زیر هستند:

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

بنابراین محاسبه ضرب برداری را به شکل زیر بیان می کنیم که به خاطر سپردن آن آسان است.

محاسبه ضرب برداری به صورت دترمینان

اگر $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$، آنگاه

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

مثال ۱: اگر

$$\mathbf{u}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} \text{ و } \mathbf{v}=-4\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

باشد $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 1 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$=-2\mathbf{i}-6\mathbf{j}+10\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{u}=-(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=-2\mathbf{i}-6\mathbf{j}+10\mathbf{k}$$

مثال ۲: برداری عمود بر صفحه متشکل از نقاط

$$P(1,-1,0) \text{ ، } Q(2,1,-1) \text{ و } R(-1,1,2)$$

بیابید (شکل ۱۲-۳۱).

حل: بردار $\overline{PQ}\times PR$ بر این صفحه عمود است زیرا این بـردار بر هر دو بردار عمود است. برحسب مؤلفه ها،

---

[1]- **دترمینان ها**

روش محاسبه دترمینان های 2×2 و 3×3 به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال:

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix}=(2)(3)-(1)(-4)$$
$$=6+4=10$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}$$
$$-a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$$

مثال :

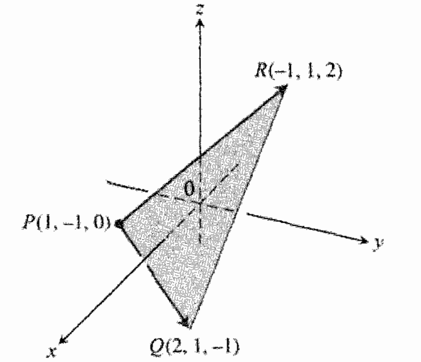
$$\begin{vmatrix}-5 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{vmatrix}=(-5)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}$$
$$-(3)\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix}$$
$$=-5(1-3)-3(2+4)$$
$$+1(6+4)$$
$$=10-18+10=2$$

برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به وب سایت

www.aw.com/thomas

مراجعه کنید.

$$\overrightarrow{PQ}=(2-1)\mathbf{i}+(1+1)\mathbf{j}+(-1-0)\mathbf{k}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{PR}=(-1-1)\mathbf{i}+(1+1)\mathbf{j}+(2-0)\mathbf{k}=-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$



شکل۱۲-۳۱: بردار $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ بر صفحه مثلث PQR عمود است (مثال۲). مساحت مثلث PQR نصف $\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|$ است (مثال ۳).

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$=6\mathbf{i}+6\mathbf{k}$$

مثال۳: مساحت مثلثی را بیابید که رئوس آن نقاط

$P(1,-1,0)$ ،$Q(2,1,-1)$ و $R(-1,1,2)$

هستند (شکل ۱۲-۳۱).

حل:

مساحت متوازی الاضلاعی که با نقاط P، Q و R معین می شود عبارت است از

$$\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\left|6\mathbf{i}+6\mathbf{k}\right|$$
$$=\sqrt{(6)^2+(6)^2}=\sqrt{2.36}=6\sqrt{2}$$

(طبق مثال ۲)

مساحت مثلث نصف این مقدار یعنی $3\sqrt{2}$ است.

مثال۴: بردار واحدی را بیابید که بر صفحه نقاط

$P(1,-1,0)$ ،$Q(2,1,-1)$ و $R(-1,1,2)$

عمود است.

حل:

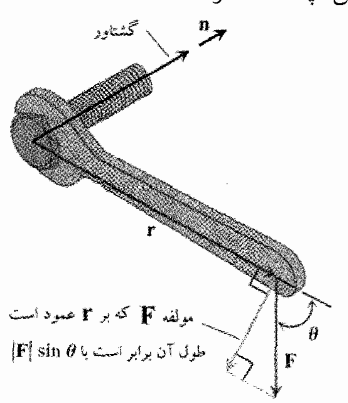
چون $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ بر صفحه عمود است جهت آن یعنی $\mathbf{n}$، بردار واحدی عمود بر صفحه است. با بهره گیری از مقادیر داده شده در مثال های ۲ و ۳ داریم

$$\mathbf{n}=\frac{\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}}{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|}=\frac{6\mathbf{i}+6\mathbf{k}}{6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

برای سهولت در محاسبه ضرب برداری با استفاده از مؤلفه ها، معمولاً بردارها را به جای سه تایی های مرتب $v=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ به صورت $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$ می نویسیم.

گشتاور

وقتی با اعمال نیروی $\mathbf{F}$ به آچار فرانسه پیچی را می چرخانیم (شکل **۱۲-۳۲**) گشتاوری ایجاد می کنیم که باعث چرخش پیچ می شود. طبق قاعده دست راست جهت **بردار گشتاور** در جهت محور پیچ قرار می گیرد (بنابراین وقتی از نوک بردار نگاه کنیم چرخش، پادساعتگرد است).



شکل۱۲-۳۲: بردار گشتاور تمایل نیروی $\mathbf{F}$ در چرخاندن پیچ را توصیف می کند.

اندازه گشتاور به محل اعمال نیرو روی دسته آچار و به میزان عمود بودن نیرو بر آچار در نقطه اعمال نیرو بستگی دارد. عددی که برای اندازه گیری اندازه گشتاور بکار می بریم حاصلضرب طول بازوی گشتاور یعنی $\mathbf{r}$ و مؤلفه اسکالر (عددی) $\mathbf{F}$ عمود بر $\mathbf{r}$ است. با توجه به نمادگذاری شکل ۱۲-۳۲،

$$\text{اندازه بردار گشتاور} = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta$$

که همان $|\mathbf{r}\times\mathbf{F}|$ است. اگر $\mathbf{n}$ را بردار واحد در امتداد محور پیچ و در جهت گشتاور در نظر بگیریم، آنگاه توصیف کامل بردار گشتاور عبارت است از $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ یا

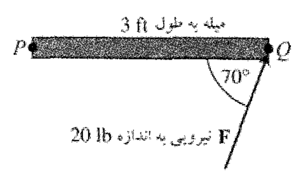
$$\text{بردار گشتاور} = \left(|\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta\right)\mathbf{n}$$

به یاد بیاورید که وقتی **u** و **v** موازی باشند $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ را برابر صفر تعریف می کنیم. این موضوع با تعبیر گشتاور هم سازگار است. اگر نیروی **F** در شکل **۱۲-۳۲** موازی با آچار باشد، یعنی تلاش کنیم پیچ را با کشیدن یا هل دادن در امتداد خط دسته آچار بچرخانیم، گشتاور ایجاد شده صفر است.

مثال ۵: در شکل**۱۲-۳۳** اندازه گشتاوری که نیروی **F** در نقطه اتکاء P ایجاد می کند برابر است

$$\left|\overrightarrow{PQ}\times\mathbf{F}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right||\mathbf{F}|\sin 70^\circ$$
$$\approx (3)(20)(0.94)$$
$$\approx 56.4\text{ft-lb}$$

در این مثال جهت بردار گشتاور به سمت خارج صفحه کاغذ و به سمت شماست.



شکل۱۲-۳۳: اندازه گشتاور وارد شده توسط F در نقطه P حدود $56.4ft-lb$ است (مثال ۵). میله به صورت پادساعتگرد حول P می چرخد.

ضرب عددی سه گانه یا جعبه ای

حاصلضرب $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}$ را **حاصلضرب عددی سه گانه u، v و w** (به ترتیب) می نامند. همچنانکه از فرمول

$$|(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}| = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}||\mathbf{w}||\cos\theta|$$

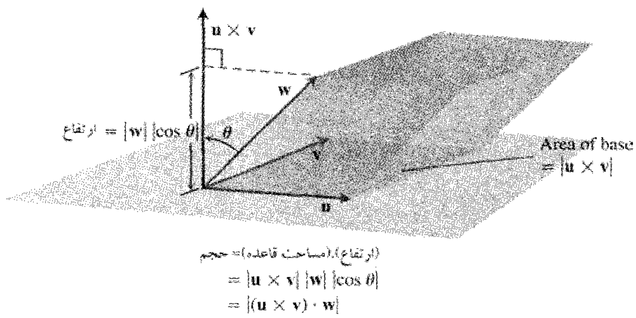
دیده می شود قدر مطلق این حاصلضرب برابر حجم متوازی السطوحی (جعبه ای با وجوه متوازی الاضلاع) است که با بردارهای **u**، **v** و **w** مشخص می شود (شکل ۱۲- **۳۴**). مقدار $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ مساحت متوازی الاضلاع قاعده و مقدار $|\mathbf{w}||\cos\theta|$ ارتفاع متوازی السطوح است. به دلیل همین تعبیر هندسی است که $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}$ حاصلضرب جعبه ای **u**، **v** و **w** نیز نامیده می شود.

با در نظر گرفتن صفحات متشکل از **v** و **w** و نیز متشکل از **w** و **u** به عنوان صفحات قاعده متوازی السطوحی که با **u**، **v** و **w** مشخص می شود در می یابیم که

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w} = (\mathbf{v}\times\mathbf{w}).\mathbf{u} = (\mathbf{w}\times\mathbf{u}).\mathbf{v}$$

چون ضرب عددی خاصیت جابجایی (تعویض پذیری) دارد رابطه زیر را نیز داریم[2]:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w} = \mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$



شکل۱۲-۳۴: مقدار $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}|$ برابر حجم یک متوازی السطوح است.

ضرب عددی سه گانه را می توان به صورت یک دترمینان محاسبه کرد:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w} = \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right].\mathbf{w}$$
$$= w_1\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

محاسبه ضرب عددی سه گانه به صورت یک دترمینان

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

مثال۶: حجم جعبه ای (متوازی السطوحی) را بیابید که با بردارهای

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}\text{ ،}\ \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}\ \text{و}\ \mathbf{w} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

مشخص می شود.

[2]- در ضرب عددی سه گانه می توان جای علامت های × و . را عوض کرد بدون اینکه مقدار آن تغییر کند.

حل:

با استفاده از قاعده محاسبه دترمینان ها داریم:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 3\\ 0 & 7 & -4\end{vmatrix}=-23$$

حجم جعبه $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}|=23$ واحد مکعب است.

تمرین های ۱۲-۴

محاسبه ضرب برداری

در تمرین های ۱-۸ طول و جهت (در صورتی که تعریف شده باشد) بردارهای $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ را بیابید.

۱- $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k},\ \mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{k}$

۲- $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j},\ \mathbf{v}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$

۳- $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k},\ \mathbf{v}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

۴- $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k},\ \mathbf{v}=\mathbf{0}$

۵- $\mathbf{u}=2\mathbf{i},\ \mathbf{v}=-3\mathbf{j}$

۶- $\mathbf{u}=\mathbf{i}\times\mathbf{j},\ \mathbf{v}=\mathbf{j}\times\mathbf{k}$

۷- $\mathbf{u}=-8\mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k},\ \mathbf{v}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۸- $\mathbf{u}=\frac{3}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

در تمرین های ۹-۱۴ محورهای مختصات را رسم کرده و بعد بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ را به عنوان بردارهایی که از مبداء شروع می شوند روی دستگاه مختصات رسم نمایید.

۹- $\mathbf{u}=\mathbf{i},\ \mathbf{v}=\mathbf{j}$

۱۰- $\mathbf{u}=\mathbf{i}-\mathbf{k},\ \mathbf{v}=\mathbf{j}$

۱۱- $\mathbf{u}=\mathbf{i}-\mathbf{k},\ \mathbf{v}=\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۱۲- $\mathbf{u}=2\mathbf{i}-\mathbf{j},\ \mathbf{v}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$

۱۳- $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j},\ \mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$

۱۴- $\mathbf{u}=\mathbf{j}+2\mathbf{k},\ \mathbf{v}=\mathbf{i}$

مثلث ها در فضا

در تمرین های ۱۵-۱۸،

(الف)- مساحت مثلثی را که با نقاط P، Q و R مشخص می شود بیابید.

(ب)- بردار واحدی عمود بر صفحه PQR بیابید.

۱۵- $P(1,-1,2),\ \ Q(2,0,-1),\ \ R(0,2,1)$

۱۶- $P(1,1,1),\ \ Q(2,1,3),\ \ R(3,-1,1)$

۱۷- $P(2,-2,1),\ \ Q(3,-1,2),\ \ R(3,-1,1)$

۱۸- $P(-2,2,0),\ \ Q(0,1,-1),\ \ R(-1,2,-2)$

ضرب های عددی سه گانه

در تمرین های ۱۹-۲۲ تحقیق کنید که

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}=(\mathbf{v}\times\mathbf{w}).\mathbf{u}=(\mathbf{w}\times\mathbf{u}).\mathbf{v}$$

و حجم متوازی السطوحی (جعبه ای) را که با $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ مشخص می شود بدست آورید. در هر مورد بردارها را از چپ به راست به ترتیب $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ در نظر بگیرید.

۱۹- $2\mathbf{k}\qquad 2\mathbf{j}\qquad 2\mathbf{i}$

۲۰- $-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}\qquad 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}\qquad \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۲۱- $\mathbf{i}+2\mathbf{k}\qquad 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}\qquad 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$

۲۲- $2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}\qquad -\mathbf{i}-\mathbf{k}\qquad \mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

نظریه و مثال ها

۲۳- **بردارهای موازی و عمود برهم.** فرض کنید

$\mathbf{u}=5\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$، $\mathbf{v}=\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ و $\mathbf{w}=-15\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$

کدام بردارها، در صورت وجود، (الف)- برهم عمودند؟ (ب)- با هم موازی اند؟ برای پاسخ های خود دلیل ارائه کنید.

۲۴- **بردارهای موازی و عمود برهم.** فرض کنید

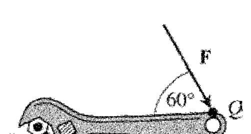
$\mathbf{u}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$، $\mathbf{v}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$، $\mathbf{w}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}=-(\pi/2)\mathbf{i}-\pi\mathbf{j}+(\pi/2)\mathbf{k}$$

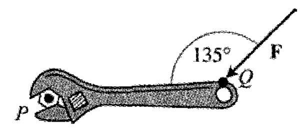
کدام بردارها، در صورت وجود، (الف)- برهم عمودند؟ (ب)- با هم موازی اند؟ برای پاسخ های خود دلیل ارائه کنید.

در تمرین های ۲۵ و ۳۶ اگر $|\overrightarrow{PQ}|=8\text{in.}$ و $|\mathbf{F}|=30\text{lb}$ باشد اندازه گشتاوری را که نیروی $\mathbf{F}$ در نقطه P بر پیچ وارد می کند محاسبه کنید. پاسخ را برحسب فوت – پوند بیان کنید.

۲۵-



۲۶-



۲۷- کدام یک از روابط زیر همواره درست اند و کدامیک همواره درست نیستند؟ برای پاسخ های خود دلیل بیاورید.

الف- $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}.\mathbf{u}}$

ب- $\mathbf{u}.\mathbf{u} = |\mathbf{u}|$

پ- $\mathbf{u}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$

ت- $\mathbf{u}\times(-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

ث- $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{v}\times\mathbf{u}$

ج- $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

چ- $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{v} = 0$

ح- $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w} = \mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$

۲۸- کدام یک از روابط زیر همواره درست اند و کدامیک همواره درست نیستند؟ برای پاسخ های خود دلیل بیاورید

الف- $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$ ب- $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$

پ- $(-\mathbf{u})\times\mathbf{v} = -(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

ت- $(c\mathbf{u}).\mathbf{v} = \mathbf{u}.(c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}.\mathbf{v})$ (هر عدد دلخواه c)

ث- $c(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (c\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(c\mathbf{v})$ (هر عدد دلخواه c)

ج- $\mathbf{u}.\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

چ- $(\mathbf{u}\times\mathbf{u}).\mathbf{u} = 0$

ح- $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{u} = \mathbf{v}.(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

۲۹- بردار های ناصفر $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ مفروض اند. با استفاده مناسب از نمادگذاری ضرب برداری و ضرب عددی عبارت های زیر را توصیف کنید.

(الف)- تصویر برداری $\mathbf{u}$ بر روی $\mathbf{v}$.

(ب)- برداری عمود بر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

(پ)- برداری عمود بر $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$.

(ت)- حجم متوازی السطوحی که با $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ مشخص می شود.

(ث)- برداری عمود بر $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}\times\mathbf{w}$.

(ج)- برداری به طول $|\mathbf{u}|$ در جهت $\mathbf{v}$.

۳۰- حاصل $\mathbf{j}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j})$و $(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times\mathbf{j}$ و $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{j})$ را محاسبه کنید. در مورد شرکت پذیری ضرب برداری چه نتیجه ای می گیرید؟

۳۱- بردارهای $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ را در نظر بگیرید. کدامیک از عبارت های زیر بی معنی اند؟ برای پاسخ های خود دلیل ارائه کنید.

الف- $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}$

ب- $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}.\mathbf{w})$

پ- $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$

ت- $\mathbf{u}.(\mathbf{v}.\mathbf{w})$

۳۲- **ضرب برداری سه بردار.** نشان دهید که به جز در حالت های تبهگن، $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ در صفحه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ قرار دارد در حالیکه $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ در صفحه $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ قرار دارد. حالت های تبهگن کدامند؟

۳۳- **حذف در ضرب های برداری.** اگر

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times\mathbf{w} \text{ و } \mathbf{u}\neq 0$$

باشد آیا می توان نتیجه گرفت که $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۳۴- **حذف دوگانه.** اگر

$$\mathbf{u}\neq 0\text{، }\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times\mathbf{w} \text{ و } \mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{u}.\mathbf{w}$$

باشد آیا می توان نتیجه گرفت که $\mathbf{v} = \mathbf{w}$؟ دلیل بیاورید.

مساحت متوازی الاضلاع

مساحت متوازی الاضلاع هایی را که رئوسشان در تمرین های ۳۵ -۴۰ داده شده اند بدست آورید.

۳۵- $A(1,0),\quad B(0,1),\quad C(-1,0),\quad D(0,-1)$

۳۶- $A(0,0),\quad B(7,3),\quad C(9,8),\quad D(2,5)$

۳۷- $A(-1,2),\quad B(2,0),\quad C(7,1),\quad D(4,3)$

۳۸- $A(-6,0),\quad B(1,-4),\quad C(3,1),\quad D(-4,5)$

۳۹- $A(0,0,0),\ B(3,2,4),\ C(5,1,4),\ D(2,-1,0)$

۴۰- $A(1,0,-1),\ B(1,7,2),\ C(2,4,-1),\ D(0,3,2)$

مساحت مثلث

مساحت مثلث هایی را که رئوسشان در تمرین های ۴۱-۴۷ داده شده اند بیابید.

۴۱- $A(0,0),\quad B(-2,3)\quad C(3,1)$

۴۲- $A(-1,-1),\quad B(3,3)\quad C(2,1)$

۴۳- $A(-5,3),\quad B(1,-2)\quad C(6,-2)$

۴۴- $A(-6,0),\quad B(10,-5)\quad C(-2,4)$

۴۵- $A(1,0,0),\quad B(0,2,0)\quad C(0,0,-1)$

۴۶- $A(0,0,0),\quad B(-1,1,-1)\quad C(3,0,3)$

۴۷- $A(1,-1,1),\quad B(0,1,1)\quad C(1,0,-1)$

۴۸- اگر چهار رأس از هشت رأس یک متوازی السطوح عبارت باشند از

$A(0,0,0)$، $B(1,2,0)$، $C(0,-3,2)$ و $D(3,-4,5)$

حجم آن را بیابید.

۴۹- **مساحت مثلث.** فرمولی برای مساحت مثلث واقع در صفحه xy با رئوس $(0,0)$، (a_1,a_2) و (b_1,b_2) بدست آورید. در مورد کار خود توضیح دهید.

۵۰- **مساحت مثلث.** فرمول مختصری برای مساحت مثلث واقع در صفحه xy با رئوس

(a_1,a_2)، (b_1,b_2) و (c_1,c_2)

بدست آورید.

۱۲-۵- خطوط و صفحات در فضا

در این بخش خواهیم دید که چگونه می توانیم با استفاده از ضرب های عددی و برداری معادلات خطوط، پاره خط ها و صفحات واقع در فضا را بنویسیم. در ادامه این کتاب از این نمایش ها استفاده خواهیم کرد.

خطوط و پاره خط ها در فضا

در صفحه، خط با یک نقطه و یک عدد که بیانگر شیب خط است مشخص می شود. در فضا، خط با یک نقطه و یک بردار که بیانگر جهت خط است، مشخص می شود.

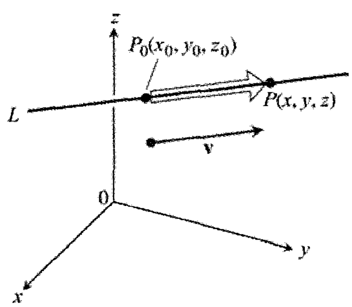
فرض کنید L خطی در فضا باشد که از نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ گذشته و با بردار $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$ موازی است. در این صورت L مجموعه تمام نقاطی است مانند $P(x,y,z)$ به قسمی که بردار $\overrightarrow{P_0P}$ با $\mathbf{v}$ موازی است (شکل ۱۲-۳۵). بنابراین به ازای یک پارامتر عددی مانند t، $\overrightarrow{P_0P}=t\mathbf{v}$. مقدار t به مکان نقطه P در امتداد خط بستگی دارد و دامنه t عبارت است از $(-\infty,\infty)$. شکل بسط داده شده معادله $\overrightarrow{P_0P}=t\mathbf{v}$ به صورت زیر است

$$(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}=t(v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k})$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}+t(v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}) \qquad (۱)$$

اگر $\mathbf{r}(t)$ بردار مکان نقطه ای چون $P(x,y,z)$ روی خط و $\mathbf{r}_0$ بردار مکان نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ باشد معادله (۱) شکل برداری زیر را برای معادله خط در فضا بدست می دهد.



شکل۱۲-۳۵: نقطه P روی خط L گذرنده از P_0 و موازی با $\mathbf{v}$ قرار دارد اگر و تنها اگر $\overrightarrow{P_0P}$ مضربی عددی از $\mathbf{v}$ باشد.

معادله برداری یک خط

معادله برداری خط L که از $P_0(x_0,y_0,z_0)$ می گذرد و با $\mathbf{v}$ موازی است عبارت است از

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v},\quad -\infty<t<\infty \qquad (۲)$$

که $\mathbf{r}$ بردار مکان نقطه ای چون $P(x,y,z)$ بر روی L و $\mathbf{r}_0$ بردار مکان نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ است.

با برابر قرار دادن مؤلفه های متناظر در دو طرف معادله (۱) سه معادله عددی برحسب پارامتر t بدست می آوریم:

$$x=x_0+tv_1,\quad y=y_0+tv_2,\quad z=z_0+tv_3$$

این معادلات، معادلات پارامتری متعارف خط را برای بازه پارامتری $-\infty<t<\infty$ بدست می دهند.

معادلات پارامتری یک خط

معادلات پارامتری متعارف خط گذرنده از نقطه

$$P_0(x_0, y_0, z_0)$$

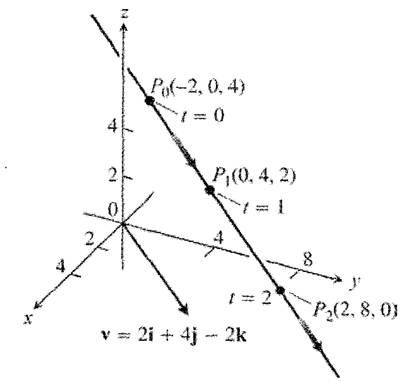
و موازی با

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

عبارتند از:

$$x = x_0 + tv_1,\ y = y_0 + tv_2,\quad z = z_0 + tv_3,\quad -\infty < t < \infty \qquad (۳)$$

مثال ۱: معادلات پارامتری خط گذرنده از نقطه $(-2,0,4)$ و موازی با بردار $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ را بیابید (شکل۱۲-۳۶).



شکل۱۲-۳۶: چند نقطه و چند مقدار پارامتر روی خط مثال ۱. پیکانها جهت افزایش t را نشان می دهند.

حل: به ازای

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (-2,0,4)$$

و

$$v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

معادلات (۳) به صورت زیر درمی آیند

$$x = -2 + 2t,\quad y = 4t,\quad z = 4 - 2t$$

مثال۲: معادلات پارامتری خط گذرنده از نقاط $P(-3,2,-3)$ و $Q(1,-1,4)$ را بیابید.

حل:

بردار

$$\overrightarrow{PQ} = (1-(-3))\mathbf{i} + (-1-2)\mathbf{j} + (4-(-3))\mathbf{k}$$
$$= 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

موازی با خط است و از معادلات (۳) به ازای

$$(x_0, y_0, z_0) = (-3,2,-3)$$

داریم

$$x = -3 + 4t,\quad y = 2 - 3t,\quad z = -3 + 7t$$

می توانستیم نقطه $Q(1,-1,4)$ را به عنوان " نقطه پایه" گرفته و بنویسیم:

$$x = 1 + 4t,\quad y = -1 - 3t,\quad z = 4 + 7t$$

به جای معادلات قبلی این معادلات نیز بکار می روند؛ این معادلات فقط به ازای مقدار معینی از t نقطه متفاوتی از خط را مشخص می کنند.

توجه کنید که معادلات پارامتری منحصر بفرد نیستند. نه تنها "نقطه پایه" بلکه پارامتر هم می تواند تغییر کند. معادلات

$$z = -3 + 7t^3 \text{ ، } y = 2 - 3t^3 \text{ ، } x = -3 + 4t^3$$

هم خط مثال ۲ را پارامتری می کنند.

برای پارامتری کردن پاره خطی که دو نقطه را به هم وصل می کند ابتدا خط گذرنده از این نقاط را پارامتری می کنیم. سپس مقادیر t را برای نقاط انتهایی یافته و t را مقید می کنیم تا در بازه بسته ای محدود به این مقادیر قرار گیرد. معادلات خط همراه با این قید اضافی، پاره خط را پارامتری می کنند.

مثال۳: معادلات پارامتری پاره خطی را بنویسید که نقاط

$$P(-3,2,-3) \text{ و } Q(1,-1,4)$$

را به هم وصل می کند (شکل۱۲-۳۷).

حل:

با معادلات خط گذرنده از P و Q شروع می کنیم. در این مورد این معادلات را در مثال ۲ بدست آوردیم:

$$x = -3 + 4t,\quad y = 2 - 3t,\quad z = -3 + 7t$$

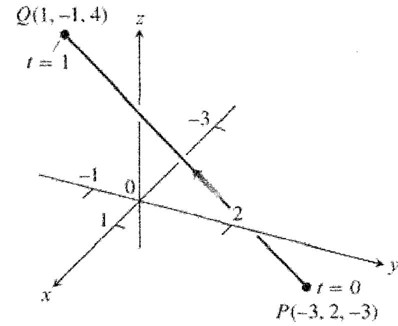
مشاهده می کنیم که نقطه

$$(x, y, z) = (-3 + 4t, 2 - 3t, -3 + 7t)$$

واقع برروی خط، به ازای $t = 0$ بر نقطه $P(-3,2,-3)$ و به ازای $t = 1$ بر نقطه $Q(1,-1,4)$ منطبق است. شرط $0 \le t \le 1$ را به این معادلات اضافه می کنیم تا معادلات پارامتری پاره خط

بدست آیند:

$$x=-3+4t,\quad y=2-3t,\quad z=-3+7t,\quad 0\le t\le 1$$



شکل۱۲-۳۷: در مثال ۳ معادلات پارامتری پاره خط PQ بدست آمده اند. پیکان جهت افزایش t را نشان می دهد.

اگر خط را مسیر ذره ای بدانیم که از مکان $P_0(x_0,y_0,z_0)$ شروع به حرکت کرده و در جهت بردار v حرکت می کند شکل برداری (معادله (۲)) معادله خط در فضا مفیدتر و شفاف تر است. با بازنویسی معادله (۲) داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t)&=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}\\ &=\mathbf{r}_0+t\left|\mathbf{v}\right|\frac{\mathbf{v}}{\left|\mathbf{v}\right|}\end{aligned} \tag{۴}$$

به عبارت دیگر، مکان ذره در لحظه t عبارت است از مکان اولیه آن بعلاوه مسافتی (تندی ضربدر زمان) که در جهت $\mathbf{v}/\left|\mathbf{v}\right|$ حرکت راست -- خط خود پیموده است.

مثال ۴: بالگردی می خواهد از مکان خود در مبداء با تندی $60ft/\sec$ در جهت نقطه $(1,1,1)$ پرواز کند. مکان بالگرد را بعد از $10\sec$ پرواز تعیین کنید.

حل:

مبداء را در مکان شروع بالگرد در نظر می گیریم. در این صورت بردار واحد

$$\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

جهت پرواز بالگرد را مشخص می کند. بنابه معادله (۴) مکان بالگرد در هر لحظه t عبارت است از

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t)&=\mathbf{r}_0+t\,(\text{تندی})\,\mathbf{u}\\ &=\mathbf{0}+t\,(60)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)\\ &=20\sqrt{3}t\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\end{aligned}$$

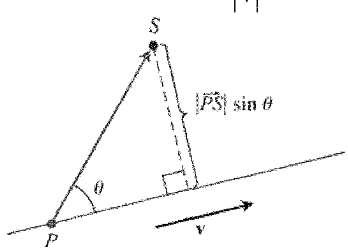
در $t=10\sec$ داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(10)&=200\sqrt{3}\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\\ &=\left\langle 200\sqrt{3},200\sqrt{3},200\sqrt{3}\right\rangle\end{aligned}$$

بعد از $10\sec$ پرواز از مبداء به سمت $(1,1,1)$ بالگرد در نقطه $\left(200\sqrt{3},200\sqrt{3},200\sqrt{3}\right)$ از فضا قرار دارد. در این مدت بالگرد مسافت $(60ft/\sec)(10\sec)=600ft$ را پیموده است که همان طول بردار $\mathbf{r}(10)$ است.

فاصله یک نقطه از یک خط در فضا

برای یافتن فاصله نقطه S از خطی که از نقطه P گذشته و با بردار $\mathbf{v}$ موازی است، قدر مطلق مؤلفه عددی بردار $\overrightarrow{PS}$ را در جهت برداری عمود بر خط بدست می آوریم (شکل۱۲-۳۸). در نمادگذاری شکل، قدر مطلق مؤلفه عددی بردار فوق $\left|\overrightarrow{PS}\right|\sin\theta$ است که با $\dfrac{\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}}{\left|\mathbf{v}\right|}$ برابر است.



شکل۱۲-۳۸: فاصله نقطه S تا خطی که از P گذشته و با $\mathbf{v}$ موازی است برابر $\left|\overrightarrow{PS}\right|\sin\theta$ است که θ زاویه بین $\overrightarrow{PS}$ و $\mathbf{v}$ است.

فاصله نقطه S تا خطی که از P گذشته و با $\mathbf{v}$ موازی است:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}\right|}{\left|\mathbf{v}\right|} \tag{۵}$$

مثال ۵: فاصله نقطه $S(1,1,5)$ تا خطی با معادله زیر را بیابید:

$$L:\quad x=1+t,\quad y=3-t,\quad z=2t$$

حل:

از معادله خط L می بینیم که L از نقطه $P(1,3,0)$ می گذرد و با بردار $\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ موازی است. بردار $\overrightarrow{PS}$ عبارت است از

$$\overrightarrow{PS}=(1-1)\mathbf{i}+(1-3)\mathbf{j}+(5-0)\mathbf{k}=-2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

و

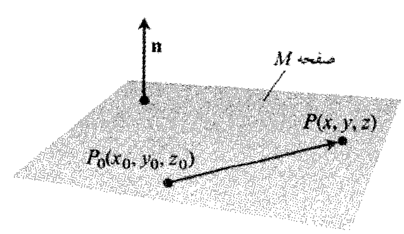
$$\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & -2 & 5\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\mathbf{i}+5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

در نتیجه از معادله (۵) داریم

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{PS}\times\mathbf{v}\right|}{|\mathbf{v}|}=\frac{\sqrt{1+25+4}}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}$$

معادله صفحه در فضا

هر صفحه در فضا با دانستن نقطه ای بر روی صفحه و "میزان مورب بودن" یا سمتگیری آن مشخص می شود. این "مورب بودن" با مشخص کردن برداری که بر صفحه عمود یا قائم است تعریف می شود.



شکل۱۲-۳۹: معادله متعارف یک صفحه در فضا برحسب بردار قائم بر صفحه تعریف می شود: نقطه P در صفحه گذرنده از P_0 و عمود بر $\mathbf{n}$ واقع است اگر و تنها اگر $\mathbf{n}.\overrightarrow{P_0P}=0$.

فرض کنید صفحه M از نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ می گذرد و بر بردار ناصفر $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ عمود است. در این صورت M مجموعه تمام نقاط $P(x,y,z)$ است که به ازای آنها بردار $\overrightarrow{P_0P}$ بر $\mathbf{n}$ عمود است (شکل ۱۲-۳۹). بنابراین ضرب عددی $\mathbf{n}.\overrightarrow{P_0P}=0$. این معادله با معادله زیر هم ارز است

$$(A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}).\left[(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}\right]=0$$

یا

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

معادله صفحه

معادله صفحه ای که از نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ می گذرد و بر بردار $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ عمود است عبارت است از

معادله برداری: $\mathbf{n}.\overrightarrow{P_0P}=0$

معادله مؤلفه ای:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

معادله مؤلفه ای ساده شده:

$$Ax+By+Cz=D$$

که در آن

$$D=Ax_0+By_0+Cz_0$$

مثال۶: مطلوبست معادله صفحه ای که از نقطه $P_0(-3,0,7)$ می گذرد و بر بردار $\mathbf{n}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ عمود است.

حل:

معادله مؤلفه ای عبارت است از

$$5(x-(-3))+2(y-0)+(-1)(z-7)=0$$

بعد از ساده کردن بدست می آوریم

$$5x+15+2y-z+7=0$$
$$5x+2y-z=-22$$

توجه کنید که در مثال ۶ چگونه مؤلفه های

$$\mathbf{n}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

ضرایب x، yو z در معادله $5x+2y-z=-22$ می شوند. بردار $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ بر صفحه

$$Ax+By+Cz=D$$

عمود است.

مثال۷: معادله صفحه ای را بیابید که از نقاط $A(0,0,1)$، $B(2,0,0)$ و $C(0,3,0)$ می گذرد.

حل:

برداری عمود بر صفحه یافته و از آن و از یکی از نقاط استفاده می کنیم (مهم نیست کدام نقطه) و معادله صفحه را بدست می آوریم.

حاصلضرب برداری

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$$

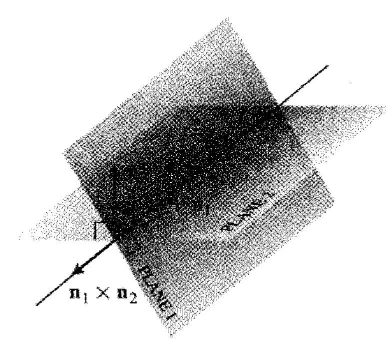
بر صفحه عمود است. مؤلفه های این بردار و مختصات $A(0,0,1)$ را در شکل مؤلفه ای معادله صفحه قرار داده و بدست می آوریم

$$3(x-0)+2(y-0)+6(z-1)=0$$
$$3x+2y+6z=6$$

خطوط تقاطع (فصل مشترک) دو صفحه

درست همانطور که خطوط موازی اند اگر و تنها اگر جهت یکسان داشته باشند، دو صفحه با هم موازی اند اگر و تنها اگر بردارهای قائم آنها با هم موازی باشند یعنی به ازای عددی چون k، $\mathbf{n}_1=k\mathbf{n}_2$ باشد. دو صفحه ای که موازی نباشند در یک خط همدیگر را قطع می کنند.

مثال ۸: برداری موازی با خط تقاطع (فصل مشترک) صفحات $3x-6y-2z=15$ و $2x+y-2z=5$ بیابید.



شکل۱۲-۴۰: ارتباط فصل مشترک دو صفحه با بردارهای قائم صفحات (مثال ۸).

حل:

فصل مشترک دو صفحه بر هر دو بردار قائم صفحات، $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$، عمود بوده و لذا با $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$ موازی است (شکل۱۲-۴۰). متقابلاً، $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$ برداری موازی با فصل مشترک صفحات است. در شرایط موجود،

$$\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & -6 & -2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=14\mathbf{i}+2\mathbf{j}+15\mathbf{k}$$

هر مضرب عددی ناصفر از $\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$ نیز همین شرایط را دارد.

مثال۹: معادلات پارامتری فصل مشترک صفحات

$$3x-6y-2z=15 \text{ و } 2x+y-2z=5$$

را بیابید.

حل: برداری موازی با خط و نقطه ای روی خط می یابیم و از معادلات (۳) استفاده می کنیم.

طبق مثال ۸، بردار $\mathbf{v}=14\mathbf{i}+2\mathbf{j}+15\mathbf{k}$ موازی با خط است. برای یافتن نقطه ای روی خط می توانیم هر نقطه مشترک برای دو صفحه را انتخاب کنیم. با قرار دادن $z=0$ در معادلات صفحه و حل همزمان معادلات نسبت به x و y، نقطه $(3,-1,0)$ را به عنون یکی از این نقاط بدست می آوریم. معادلات فصل مشترک عبارت است از

$$x=3+14t,\quad y=-1+2t,\quad z=15t$$

انتخاب $z=0$ اختیاری است و می توانستیم $z=1$ یا $z=-1$ هم انتخاب کنیم. همینطور می توانستیم $x=0$ قرار داده و معادلات را نسبت به y و z حل کنیم. انتخاب های مختلف فقط معادلات پارامتری مختلفی را برای خطی واحد بدست می دهند.

گاهی می خواهیم محل تقاطع یک خط و یک صفحه را بدانیم. مثلاً اگر به یک صفحه تخت و یک پاره خط گذرنده از آن نگه می کنیم ممکن است بخواهیم بدانیم کدام بخش از پاره خط در پشت صفحه قرار گرفته و از چشم ما پنهان است. این موضوع در تصاویر رایانه ای کاربرد فراوان دارد (تمرین ۷۴).

مثال ۱۰: نقطه تقاطع خط

$$x=\frac{8}{3}+2t,\quad y=-2t,\quad z=1+t$$

و صفحه $3x+2y+6=6$ را بیابید.

حل: نقطه

$$\left(\frac{8}{3}+2t,-2t,1+t\right)$$

در صفحه مذکور واقع است اگر مختصات آن در معادله صفحه صدق کنند یعنی اگر

$$3\left(\frac{8}{3}+2t\right)+2(-2t)+6(1+t)=6$$

$$8+6t-4t+6+6t=6$$
$$8t=-8$$
$$t=-1$$

نقطه تقاطع عبارت است از

$$(x,y,z)\big|_{t=-1}=\left(\frac{8}{3}-2,2,1-1\right)=\left(\frac{2}{3},2,0\right)$$

فاصله یک نقطه از یک صفحه

اگر P نقطه ای بر روی یک صفحه با بردار قائم $\mathbf{n}$ باشد آنگاه فاصله هر نقطه S تا صفحه برابر طول تصویر برداری $\overrightarrow{PS}$ بر روی $\mathbf{n}$ است. یعنی فاصله نقطه S تا صفحه برابر است با

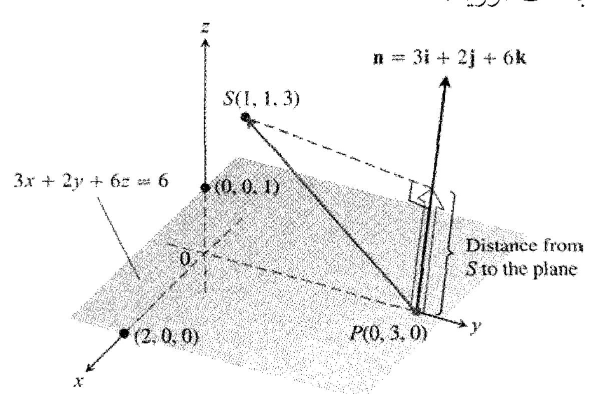
$$d=\left|\overrightarrow{PS}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right| \qquad (۶)$$

که $\mathbf{n}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ بردار قائم بر صفحه است.

مثال ۱۱: فاصله نقطه $S(1,1,3)$ از صفحه

$$3x+2y+6z=6$$

را بدست آورید.



شکل۱۲-۴۱: فاصله نقطه S تا صفحه برابر است با طول تصویر برداری $\overrightarrow{PS}$ برروی $\mathbf{n}$ (مثال ۱۱).

حل:

یک نقطه P در صفحه یافته و طول تصویر بردار $\overrightarrow{PS}$ بر روی بردار $\mathbf{n}$ قائم بر صفحه را محاسبه می کنیم (شکل۱۲-۴۱). از ضرایب معادله $3x+2y+6z=6$ بدست می آوریم

$$\mathbf{n}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$$

آسانترین راه برای یافتن نقاط روی صفحه از معادله صفحه یافتن نقاط تقاطع با محورهای مختصات است. اگر P را محل تقاطع صفحه با محور y یعنی نقطه $(0,3,0)$ بگیریم، آنگاه

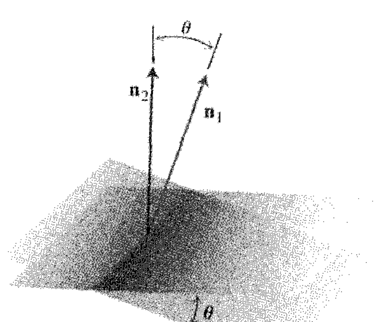
$$\overrightarrow{PS}=(1-0)\mathbf{i}+(1-3)\mathbf{j}+(3-0)\mathbf{k}$$
$$=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$
$$|\mathbf{n}|=\sqrt{(3)^2+(2)^2+(6)^2}=\sqrt{49}=7$$

فاصله S از صفحه برابر است با

$$d=\left|\overrightarrow{PS}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right| \qquad (\text{طول } \operatorname{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PS})$$
$$=\left|(\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot\left(\frac{3}{7}\mathbf{i}+\frac{2}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}\right)\right|$$
$$=\left|\frac{3}{7}-\frac{4}{7}+\frac{18}{7}\right|=\frac{17}{7}$$

زاویه بین صفحات

بنا به تعریف زاویه بین دو صفحه متقاطع، زاویه حاده بین بردارهای قائم آنهاست (شکل ۱۲-۴۲).



شکل۱۲-۴۲: زاویه بین دو صفحه با زاویه بین بردارهای قائم آنها برابر است.

مثال۱۲: زاویه بین صفحات

$$3x-6y-2z=15 \text{ و } 2x+y-2z=5$$

را بیابید.

حل:

بردارهای

$$\mathbf{n}_1=3\mathbf{i}-6\mathbf{j}-2\mathbf{k},\qquad \mathbf{n}_2=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$$

بردارهای قائم بر صفحات اند. زاویه بین آنها برابر است با

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}\right)$$
$$=\cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$$
$$\approx 1.38\,\text{radians} \qquad (\text{حدود ۷۹ درجه})$$

تمرین های ۱۲-۵

خط ها و پاره خط ها

در تمرین های ۱-۱۲ معادلات پارامتری خطوط را بیابید.

۱- خط گذرنده از نقطه $P(3,-4,-1)$ و موازی با بردار

$$\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

۲- خطی که از نقاط $P(1,2,-1)$ و $Q(-1,0,1)$ می گذرد.

۳- خطی که از نقاط $P(-2,0,3)$ و $Q(3,5,-2)$ می گذرد.

۴- خطی که از نقاط $P(1,2,0)$ و $Q(1,1,-1)$ می گذرد.

۵- خطی که از مبداء می گذرد و با بردار $2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ موازی است.

۶- خطی که از نقطه $(3,-2,1)$ می گذرد و با خط $x=1+2t$، $y=2-t$ و $z=3t$ موازی است.

۷- خطی که از $(1,1,1)$ می گذرد و با محور z موازی است.

۸- خطی که از نقطه $(2,4,5)$ می گذرد و بر صفحه

$$3x+7y-5z=21$$

عمود است.

۹- خطی که از نقطه $(0,-7,0)$ می گذرد و بر صفحه

$$x+2y+2z=13$$

عمود است.

۱۰- خطی که از نقطه $(2,3,0)$ می گذرد و بر بردارهای

$$\mathbf{u}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k} \text{ و } \mathbf{v}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

عمود است.

۱۱-محور x

۱۲- محور z

در تمرین های ۱۳-۲۰ معادلات پارامتری پاره خط های واصل نقاط را بیابید. محورهای مختصات را رسم کرده و هر پاره خط را روی آنها رسم کنید. جهت افزایش t را برای هر پاره خط مشخص کنید.

۱۳- $(0,0,0),\ (1,1,3/2)$

۱۴- $(0,0,0),\ (1,0,0)$

۱۵- $(1,0,0),\ (1,1,0)$

۱۶- $(1,1,0),\ (1,1,1)$

۱۷- $(0,1,1),\ (0,-1,1)$

۱۸- $(0,2,0),\ (3,0,0)$

۱۹- $(2,0,2),\ (0,2,0)$

۲۰- $(1,0,-1),\ (0,3,0)$

صفحات

در تمرین های ۲۱-۲۶ معادله صفحات را بیابید.

۲۱- صفحه گذرنده از نقطه $P_0(0,2,-1)$ و قائم بر

$$\mathbf{n}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

۲۲- صفحه گذرنده از نقطه $(1,-1,3)$ و موازی با صفحه

$$3x+y+z=7$$

۲۳- صفحه ای که از نقاط $(1,1,-1)$، $(2,0,2)$ و $(0,-2,1)$ می گذرد.

۲۴- صفحه ای که از نقاط $(2,4,5)$، $(1,5,7)$ و $(-1,6,8)$ می گذرد.

۲۵- صفحه ای که از نقطه $P_0(2,4,5)$ می گذرد و بر خط

$$x=5+t,\quad y=1+3t,\quad z=4t$$

عمود است.

۲۶- صفحه ای که از نقطه $A(1,-2,1)$ می گذرد و بر برداری که از مبداء به A رسم می شود عمود است.

۲۷- نقطه تقاطع خطوط

$$x=2t+1،\ y=3t+2،\ z=4t+3$$

و

$$x=s+2،\ y=2s+4 \text{ و } z=-4s-1$$

را یافته و بعد صفحه ای را که با این خطوط مشخص می شود بیابید.

در تمرین های ۲۹ و ۳۰ صفحه ای را که با خطوط تلاقی کننده مشخص می شود بیابید.

۲۹- $L1: x=-1+t,\ y=2+t,\ z=1-t,\ -\infty<t<\infty$

$L2: x=1-4s,\ y=1+2s,\ z=2-2s,\ -\infty<s<\infty$

۳۰- $L1: x=t,\ y=3-3t,\ z=-2-t,\ -\infty<t<\infty$

$L2: x=1+s,\ y=4+s,\ z=-1+s,\ -\infty<s<\infty$

۳۱- صفحه ای را بیابید که از نقطه $P_0(2,1,-1)$ می گذرد و بر فصل مشترک صفحات

$$2x+y-z=3 \text{ و } x+2y+z=2$$

عمود است.

۳۲- صفحه ای را بیابید که از نقاط $P_1(1,2,3)$ و $P_2(3,2,1)$ می گذرد و بر صفحه $4x - y + 2z = 7$ عمود است.

فاصله ها

در تمرین های ۳۳- ۳۸، فاصله نقطه از خط را بدست آورید.

۳۳- $(0,0,12);\ x=4t,\ \ y=-2t,\ \ z=2t$

۳۴- $(0,0,0);\ x=5+3t,\ \ y=5+4t,\ \ z=-3-5t$

۳۵- $(2,1,3);\ x=2+2t,\ \ y=1+6t,\ \ z=3$

۳۶- $(2,1,-1);\ x=2t,\ \ y=1+2t,\ \ z=2t$

۳۷- $(3,-1,4);\ x=4-t,\ \ y=3+2t,\ \ z=-5+3t$

۳۸- $(-1,4,3);\ x=10+4t,\ \ y=-3,\ \ z=4t$

در تمرین های ۳۹-۴۴ فاصله نقطه از صفحه را بدست آورید.

۳۹- $(2,-3,4),\ \ x+2y+2z=13$

۴۰- $(0,0,0),\ \ 3x+2y+6z=6$

۴۱- $(0,1,1),\ \ 4y+3z=-12$

۴۲- $(2,2,3),\ \ 2x+y+2z=4$

۴۳- $(0,-1,0),\ \ 2x+y+2z=4$

۴۴- $(1,0,-1),\ \ -4x+y+z=4$

۴۵- فاصله صفحه

$$x+2y+6z=1$$

تا صفحه $x+2y+6z=10$ را بیابید.

۴۶- مطلوبست فاصله خط

$$x=2+t\ ،\ y=1+t\ ،\ z=-(1/2)-(1/2)t$$

تا صفحه $x+2y+6z=10$.

زوایا

در تمرین های ۴۷ و۴۸ زاویه بین دو صفحه را بیابید.

۴۷- $x+y=1,\ \ 2x+y-2z=2$

۴۸- $5x+y-z=10,\ \ x-2y+3z=-1$

در تمرین های ۴۹- ۵۲ به کمک ماشین حساب زاویه حاده بین صفحات را تا یک صدم رادیان بیابید.

۴۹- $2x+2y+2z=3,\ \ 2x-2y-z=5$

۵۰- $x+y+z=1,\ \ z=0$ (صفحه xy)

۵۱- $2x+2y-z=3,\ \ x+2y+z=2$

۵۲- $4y+3z=-12,\ 3x+2y+6z=6$

تقاطع خط و صفحه

در تمرین های ۵۳- ۵۶، نقطه تلاقی خط با صفحه را بیابید.

۵۳- $x=1-t,\ \ y=3t,\ \ z=1+t;\ \ 2x-y+3z=6$

۵۴- $x=2,\ y=3+2t,\ z=-2-2t;\ 6x+3y-4z=-12$

۵۵- $x=1+2t,\ \ y=1+5t,\ \ z=3t;\ \ x+y+z=2$

۵۶- $x=-1+3t,\ \ y=-2,\ \ z=5t;\ \ 2x-3z=7$

در تمرین های ۵۷- ۶۰ معادلات پارامتری فصل مشترک دو صفحه مفروض را بدست آورید.

۵۷- $x+y+z=1,\ \ x+y=2$

۵۸- $3x-6y-2z=3,\ \ 2x+y-2z=2$

۵۹- $x-2y+4z=2,\ \ x+y-2z=5$

۶۰- $5x-2y=11,\ \ 4y-5z=-17$

اگر دو خط در فضا داشته باشیم یا موازی اند، یا همدیگر را قطع می کنند یا متنافرند (مثلاً مسیرهای پرواز دو هواپیما در آسمان را تصور کنید). در هر یک از تمرین های ۶۱ و ۶۲ سه خط داده شده اند. در هر تمرین خطوط را دو به دو در نظر گرفته و موازی، متقاطع یا متنافر بودن آنها را مشخص کنید. اگر متقاطع بودند نقطه تقاطع را بیابید.

۶۱- $L1: x=3+2t,\ y=-1+4t,\ z=2-t;\ -\infty<t<\infty$

$L2: x=1+4s,\ y=1+2s,\ z=-3+4s;\ -\infty<s<\infty$

$L3: x=3+2r,\ y=2+r,\ z=-2+2r;\ -\infty<r<\infty$

۶۲- $L1: x=1+2t,\ y=-1-t,\ z=3t;\ -\infty<t<\infty$

$L2: x=2-s,\ y=3s,\ z=1+s;\ -\infty<s<\infty$

$L3: x=5+2r,\ y=1-r,\ z=8+3r;\ -\infty<r<\infty$

نظریه و مثال ها

۶۳- با استفاده از معادلات (۳)، معادلات پارامتری خط گذرنده از $P(2,-4,7)$ و موازی با $\mathbf{v}_1=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ را بدست آورید. سپس با استفاده از نقطه $P_2(-2,-2,1)$ و بردار

$$\mathbf{v}_2=-\mathbf{i}+\tfrac{1}{2}\mathbf{j}-\tfrac{3}{2}\mathbf{k}$$

معادلات پارامتری دیگری برای این خط بدست آورید.

۶۴- با استفاده از شکل مؤلفه ای معادله ای برای صفحه

گذرنده از $P_1(4,1,5)$ و قائم بر $\mathbf{n}_1=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ بدست آورید. سپس با استفاده از نقطه $P_2(3,-2,0)$ و بردار قائم

$$\mathbf{n}_2=-\sqrt{2}\mathbf{i}+2\sqrt{2}\mathbf{j}-\sqrt{2}\mathbf{k}$$

معادله دیگری برای همین صفحه بدست آورید.

۶۵- نقاط تلاقی خط $x=1+2t$، $y=-1-t$، $z=3t$ با صفحات مختصات را بیابید. استدلال خود را بیان کنید.

۶۶- معادلات خطی را بیابید که در صفحه $z=3$ واقع است و با محور $\mathbf{i}$ زاویه $\pi/6rad$ و با محور $\mathbf{j}$ زاویه $\pi/3rad$ می سازد. استدلال خود را بیان کنید.

۶۷- آیا خط $x=1-2t$، $y=2+5t$، $z=-3t$ با صفحه

$$2x+y-z=8$$

موازی است؟ دلایل خود را بیان کنید.

۶۸- چه زمانی می توان گفت که دو صفحه

$$A_1x+B_1y+C_1z=D_1\,,\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2$$

با هم موازی اند؟ برهم عمودند؟ دلایل خود را بیان کنید.

۶۹- دو صفحه متفاوت بیابید که فصل مشترک آنها خط

$$x=1+t\ ،\ y=2-t\,,\ z=3+2t$$

است. معادلات هر صفحه را به شکل

$$Ax+By+Cz=D$$

بنویسید.

۷۰- معادلات صفحه ای را بیابید که از مبداء می گذرد و بر صفحه M با معادله $2x+3y+z=12$ عمود است. از کجا می دانید که صفحه شما بر صفحه M عمود است؟

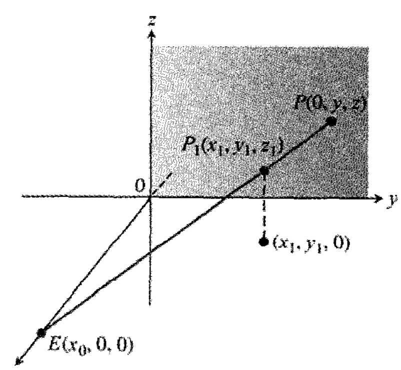
۷۱- نمودار $(x/a)+(y/b)+(z/c)=1$ به ازای هر مجموعه از اعداد ناصفر a، b و c یک صفحه است. کدام صفحات معادله ای به این شکل دارند؟

۷۲- فرض کنید L_1 و L_2 خطوط ناموازی نامتقاطع هستند. آیا ممکن است بردار ناصفری هم بر L_1 و هم بر L_2 عمود باشد؟ دلایل خود را بیان کنید.

۷۳- **تصاویر سه بعدی در رایانه.** در تصاویر رایانه ای و نقاشی سه بعدی لازم است اشیایی را که بوسیله چشم در فضا دیده می شوند به صورت تصویری در صفحه دو بعدی نمایش دهیم. فرض کنید همانطور که شکل زیر نشان می دهد چشم در $E(x_0,0,0)$ قرار دارد و می خواهیم نقطه $P_1(x_1,y_1,z_1)$ را به صورت یک نقطه روی صفحه yz نمایش دهیم. این کار را با تصویر کردن P_1 بر صفحه بوسیله یک پرتو از E انجام می دهیم. نقطه P_1 به صورت نقطه $P(0,y,z)$ تصویر خواهد شد. مسئله ما به عنوان طراح گرافیکی یافتن y و z با فرض معلوم بودن E و P_1 است.

(الف)- معادله ای برداری بنویسید که بین $\overrightarrow{EP}$ و $\overrightarrow{EP_1}$ برقرار است. با استفاده از این معادله y و z را برحسب x_0، x_1، y_1 و z_1 بیان کنید.

(ب)- برای آزمودن فرمول های بدست آمده برای y و z در قسمت (الف)، رفتار آنها را در $x_1=0$ و $x_1=x_0$ بررسی کرده، ببینید در حد $x_0\to\infty$ چه اتفاقی می افتد. چه نتیجه ای می گیرید؟



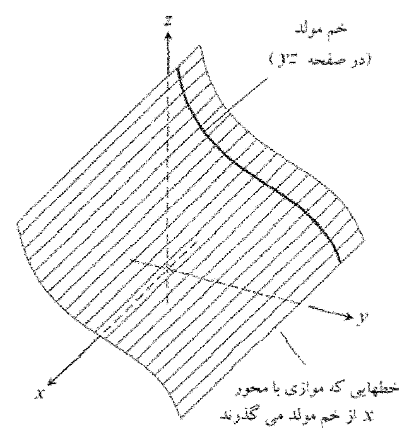
۷۴- **خطوط پنهان در تصاویر رایانه ای.** در اینجا مسئله دیگری را مطرح می کنیم که در تصاویر رایانه ای با آن مواجه می شویم. چشم شما در $(4,0,0)$ واقع است و به یک صفحه مثلثی نگاه می کنید که رئوس آن در $(1,0,1)$، $(1,1,0)$ و $(-2,2,2)$ قرار دارند. پاره خطی که از $(1,0,0)$ به $(0,2,2)$ رسم می شود از صفحه عبور کرده است. کدام بخش از پاره خط بوسیله صفحه از دید شما پنهان می ماند؟ (این مسئله تمرینی در یافتن نقاط تلاقی خطوط و صفحات است).

۱۲-۶- استوانه ها و رویه های درجه دوم

تا اینجا دو نوع خاص از رویه ها یعنی کره ها و صفحات را مطالعه کرده ایم. در این بخش فهرست خود را گسترش می دهیم تا انواع استوانه ها و رویه های درجه دوم را شامل شود. رویه های درجه دوم رویه هایی هستند که با معادلات درجه دوم برحسب x، y و z تعریف می شوند. کره ها رویه های درجه دوم هستند اما رویه های دیگری با همین درجه اهمیت نیز وجود دارند که در فصل های ۱۴ تا ۱۶ به آنها نیاز خواهیم داشت.

استوانه

استوانه رویه ای است که با حرکت یک خط راست در امتداد یک خم واقع در صفحه معین تولید می شود در حالیکه خط با خط ثابت معینی موازی باقی بماند. این خم را **خم مولد** استوانه می نامند(شکل ۱۲- ۴۳).



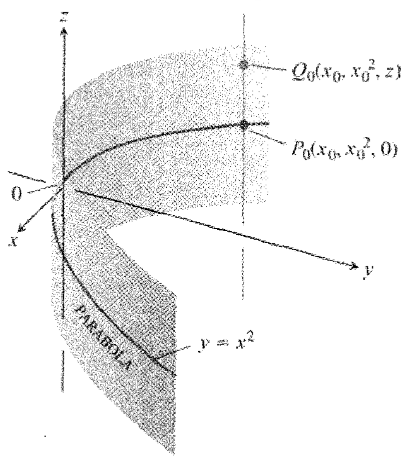
شکل ۱۲- ۴۳: یک استوانه و خم مولد آن.

در هندسه فضایی که در آن استوانه به معنی استوانه دایره ای (مستدیر) است خم های مولد، به شکل دایره هستند اما در اینجا خم های مولد از هر نوع ممکن هستند. استوانه مثال اول ما بوسیله یک سهمی تولید می شود.

مثال ۱: معادله ای برای استوانه ای که با خطوط موازی با محور z ساخته می شود و از سهمی $y=x^2$ و $z=0$ می گذرد، بیابید (شکل ۱۲- ۴۴).

حل:

نقطه $P_0\left(x_0,x_0^2,0\right)$ روی سهمی $y=x^2$ واقع در صفحه xy قرار دارد. پس به ازای هر مقدار z، نقطه $Q\left(x_0,x_0^2,z\right)$ روی استوانه واقع است زیرا این نقطه روی خط $x=x_0$، $y=x_0^2$ قرار دارد که از P_0 می گذرد و با محور z موازی است. بالعکس، هر نقطه $Q\left(x_0,x_0^2,z\right)$ که مختص y آن مربع مختص x آن است روی استوانه قرار دارد چون چنین نقطه ای روی خط $x=x_0$، $y=x_0^2$ واقع است که از P_0 می گذرد و با محور z موازی است (شکل ۱۲- ۴۴).



شکل۱۲-۴۴: هر نقطه استوانه مثال ۱ مختصاتی به شکل $\left(x_0,x_0^2,z\right)$ دارد. این استوانه را "استوانه $y=x^2$" می نامیم

بنابراین قطع نظر از مقدار z، نقاط روی رویه نقاطی هستندکه مختصاتشان در معادله $y=x^2$ صدق می کند. یعنی $y=x^2$ معادله این استوانه است. به همین دلیل این استوانه را "استوانه $y=x^2$" می نامند.

همانطور که از مثال ۱ برمی آید هر خم $f\left(x,y\right)=c$ واقع در صفحه xy استوانه ای موازی با محور z را مشخص می کند که معادله آن هم $f\left(x,y\right)=c$ است. برای مثال، معادله $x^2+y^2=1$ معرف استوانه مستدیری است که از خطوط موازی با محور z و گذرنده از دایره $x^2+y^2=1$ واقع دز صفحه xy تشکیل شده است.

به همین ترتیب هر خم $g\left(x,z\right)=c$ واقع در صفحه xz

مشخص کننده استوانه ای موازی با محور y است که معادله فضایی آن هم $g(x,z)=c$ است. هر خم $h(y,z)=c$ مشخص کننده استوانه ای موازی با محور x است که معادله فضایی آن هم $h(y,z)=c$ است. اما لزومی ندارد محور استوانه با یک محور مختصات موازی باشد.

رویه های درجه دوم

هر **رویه درجه دوم** نمودار یک معادله درجه دوم برحسب x، y و z در فضاست. ما روی معادله خاص زیر متمرکز می شویم:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dz=E$$

که در آن A، B، C، D و E ثابت اند. رویه های درجه دوم اصلی عبارتند از، **بیضیوارها**، **سهمیوارها**، **مخروطهای بیضوی** و **هذلولیوارها**. کره ها حالت های خاصی از بیضیوارها هستند. در اینجا چند مثال ارائه می کنیم که چگونگی رسم رویه های درجه دوم را نشان می دهند و بعد نمودارهای انواع اصلی رویه ها را در جدولی خلاصه می کنیم.

مثال ۲: بیضیوار

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(شکل**۱۲-۴۵**) محورهای مختصات را در نقاط $(\pm a,0,0)$، $(0,\pm b,0)$ و $(0,0,\pm c)$ قطع می کند. این بیضیوار درون جعبه ای مستطیلی قرار دارد که با نامعادلات $|x|\le a$، $|y|\le b$ و $|z|\le c$ مشخص می شود. این رویه نسبت به هر یک از صفحات مختصات متقارن است زیرا هر متغیر در معادله معرف آن توان دو دارد.

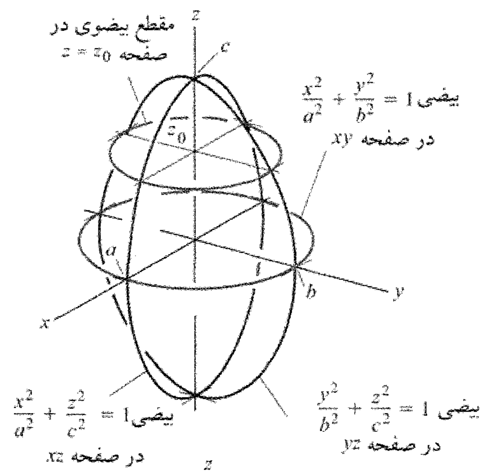
خم های مقطع این رویه با سه صفحه مختصات به شکل بیضی هستند. برای مثال

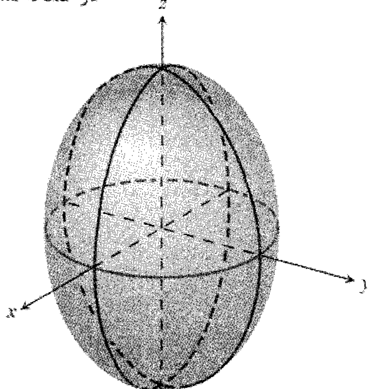
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{وقتی } z=0$$

مقطع این رویه با صفحه $z=z_0$ ، $|z_0|<c$ بیضی زیر است:

$$\frac{x^2}{a^2(1-(z_0/c)^2)}+\frac{y^2}{b^2(1-(z_0/c)^2)}=1$$

اگر هر دو نیم قطر از سه نیم قطر a، b و c برابر باشند رویه یک **بیضیوار دورانی** است. اگر هر سه نیم قطر برابر باشند رویه یک کره است.





شکل۱۲-۴۵: بیضیوار $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **مثال۲ در هر یک از سه صفحه مختصات مقطع بیضوی دارد.**

مثال ۳: سهمیوار هذلولوی

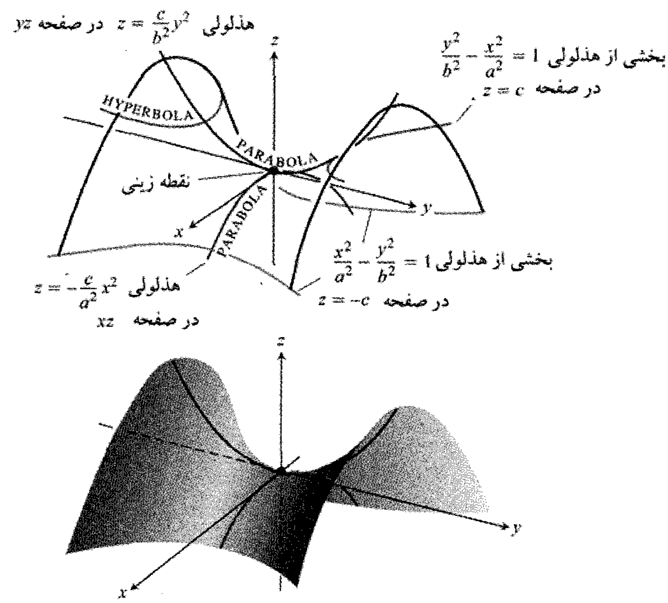
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}, \qquad c>0$$

نسبت به صفحات $x=0$ و $y=0$ تقارن دارد (شکل**۱۲-۴۶**). مقاطع این رویه با صفحات مختصات عبارتند از

$$z=\frac{c}{b^2}y^2 \quad \text{سهمی} \qquad : x=0 \qquad (۱)$$

$$z=\frac{-c}{a^2}x^2 \quad \text{سهمی} \qquad : y=0 \qquad (۲)$$

در صفحه $x=0$ سهمی از مبداء رو به بالا باز می شود. سهمی در صفحه $y=0$ رو به پایین باز می شود.



شکل ۱۲-۴۶: سهمیوار هذلولوی

$(y^2/b^2)-(x^2/a^2)=z/c$، $c>0$.

مقاطع در صفحات عمود بر محور z در بالا و پایین صفحه xy به شکل هذلولی هستند. مقاطع در صفحات عمود بر محورهای دیگر به شکل سهمی هستند.

اگر این رویه را با صفحه $z=z_0>0$ قطع کنیم مقطع، یک هذلولی با معادله زیر است

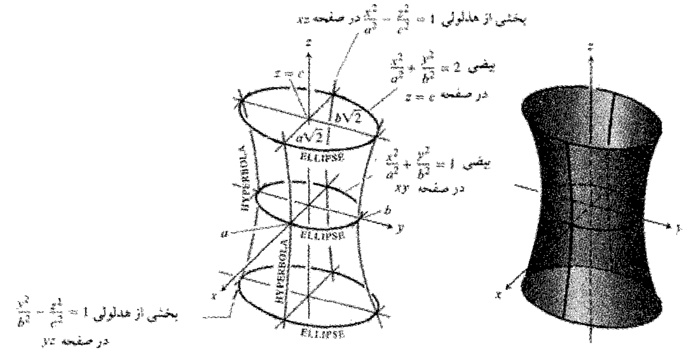
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z_0}{c}$$

که محور کانونی آن موازی با محور y و رئوس آن روی سهمی معادله (۱) است. اگر z_0 منفی باشد محور کانونی موازی با محور x است و رئوس روی سهمی معادله (۲) قرار می گیرند.

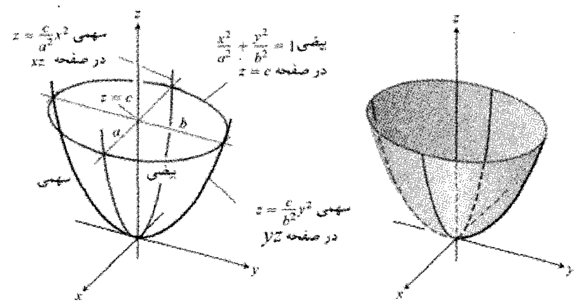
در نزدیکی مبداء، رویه شکلی شبیه زین یا گذرگاه کوهستانی دارد. از نظر شخصی که روی این رویه در صفحه yz حرکت می کند مبداء یک نقطه مینیمم است. از نظر شخصی که در صفحه xzحرکت می کند مبداء یک ماکسیمم است. چنین نقطه ای را **نقطه زینی** رویه می نامند. در بخش **۱۴-۷** در مورد نقاط زینی بیشتر بحث خواهیم کرد.

جدول **۱۲-۱** نمودارهای شش نوع اصلی از رویه های درجه دوم را نشان می دهد. هر رویه نشان داده شده نسبت به محور z متقارن است اما محورهای مختصات دیگر می توانند (با تغییرات مناسب در معادله) نگه داشته شوند.

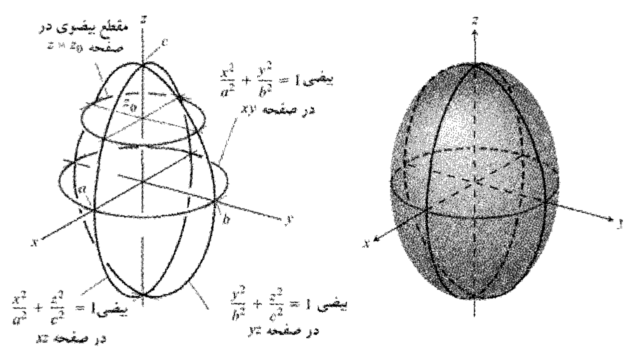
جدول ۱۲-۱: نمودارهای رویه های درجه دوم



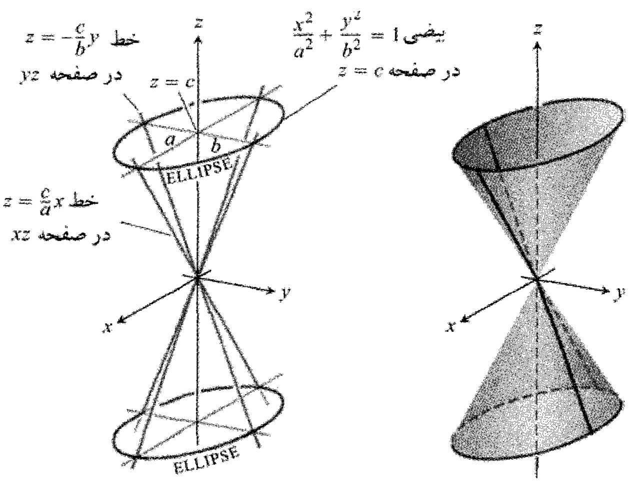
هذلولیوار یک پارچه $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



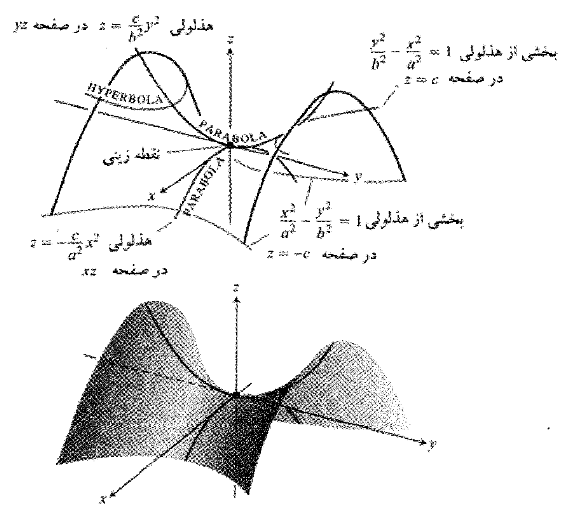
سهمیوار بیضوی $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$



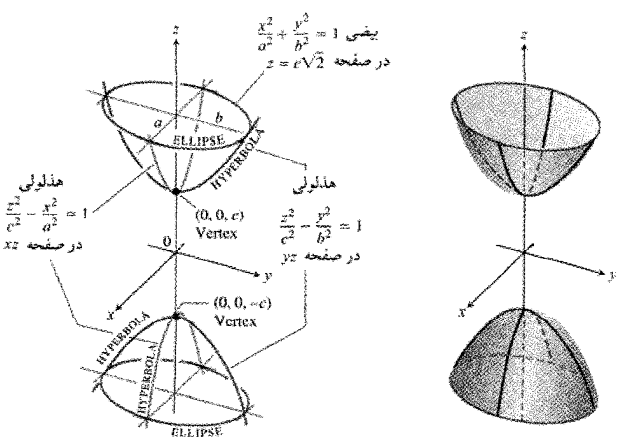
بیضیوار $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$



مخروط بیضوی $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$



سهمیوار هذلولوی $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{z}{c}$ ، $c>0$



هذلولیوار دو پارچه $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

تمرین های ۱۲-۶

تطبیق معادلات با رویه ها

در تمرین های ۱-۱۲ مشخص کنید که هر معادله مربوط به کدام رویه است. همینطور نوع هر رویه (سهمیوار، بیضیوار و غیره) را مشخص کنید. رویه ها با حروف (الف) تا (ر) نامگذاری شده اند.

۱- $x^2+y^2+4z^2=10$ ۲- $z^2+4y^2-4x^2=4$

۳- $9y^2+z^2=16$ ۴- $y^2+z^2=x^2$

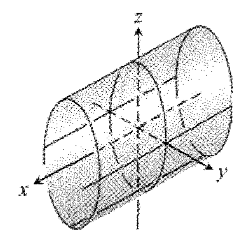
۵- $x=y^2-z^2$ ۶- $x=-y^2-z^2$

۷- $x^2+2z^2=8$ ۸- $z^2+x^2-y^2=1$

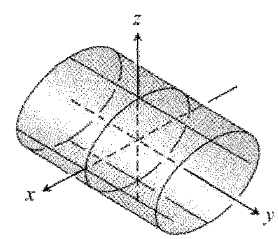
۹- $x=z^2-y^2$ ۱۰- $z=-4x^2-y^2$

۱۱- $x^2+4z^2=y^2$ ۱۲- $9x^2+4y^2+2z^2=36$

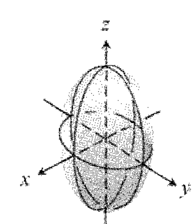
الف –



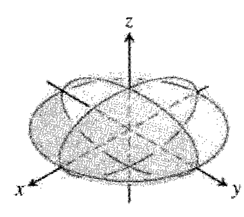
ب-



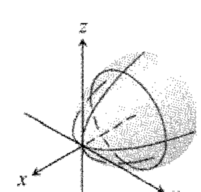
پ-



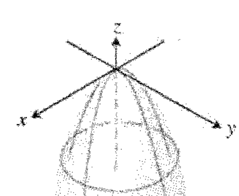
ت-



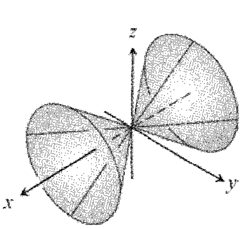
ث-



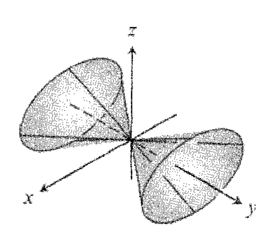
ج-



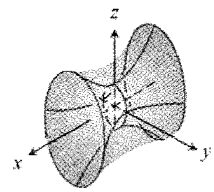
چ-



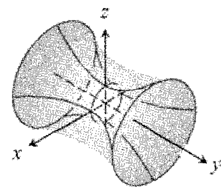
ح-



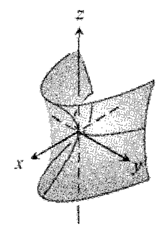
خ-



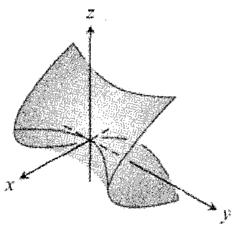
د-



ذ-



ر-



رسم رویه

در تمرین های ۱۳- ۴۴ رویه ها را رسم کنید.

استوانه ها

۱۳- $x^2+y^2=4$ ۱۴- $z=y^2-1$

۱۵- $x^2+4z^2=16$ ۱۶- $4x^2+y^2=36$

بیضیوارها

۱۷- $9x^2+y^2+z^2=9$

۱۸- $4x^2+4y^2+z^2=16$

۱۹- $4x^2+9y^2+4z^2=36$

۲۰- $9x^2+4y^2+36z^2=36$

سهمیوارها و مخروطها

۲۱- $z=x^2+4y^2$ ۲۲- $z=8-x^2-y^2$

۲۳- $x=4-4y^2-z^2$ ۲۴- $y=1-x^2-z^2$

۲۵- $x^2+y^2=z^2$ ۲۶- $4x^2+9z^2=9y^2$

هذلولیوارها

۲۷- $x^2+y^2-z^2=1$ ۲۸- $y^2+z^2-x^2=1$

۲۹- $z^2-x^2-y^2=1$

۳۰- $(y^2/4)-(x^2/4)-z^2=1$

سهمیوارهای هذلولوی

۳۱- $y^2-x^2=z$

۳۲- $x^2-y^2=z$

رویه های گوناگون

۳۳- $z=1+y^2-x^2$

۳۴- $4x^2+4y^2=z^2$

۳۵- $y=-\left(x^2+z^2\right)$

۳۶- $16x^2+4y^2=1$

۳۷- $x^2+y^2-z^2=4$

۳۸- $x^2+z^2=y$

۳۹- $x^2+z^2=1$

۴۰- $16y^2+9z^2=4x^2$

۴۱- $z=-\left(x^2+y^2\right)$

۴۲- $y^2-x^2-z^2=1$

۴۳- $4y^2+z^2-4x^2=4$

۴۴- $x^2+y^2=z$

نظریه و مثال ها

۴۵- (الف)- مساحت A مقطع بیضیوار

$$x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{a}=1$$

با صفحه $z=c$ را به صورت تابعی از c بیان کنید.(مساحت بیضیی که نصف طول قطرهای آن (نیم قطرهای آن) a و b باشد برابر πab است).

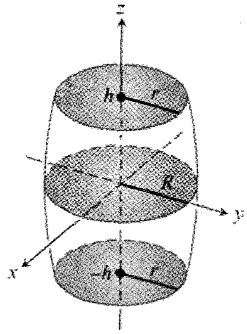
(ب)- با استفاده از برش های عمود بر محور z حجم بیضیوار قسمت (الف) را بیابید.

(پ)- اکنون حجم بیضیوار زیر را بدست آورید

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

آیا وقتی $a=b=c$ باشد فرمول شما حجم کره ای به شعاع a را بدست می دهد؟

۴۶- بشکه ای که در شکل زیر نشان داده شده است شبیه بیضیواری است که دو صفحه عمود بر محور z قطعاتی برابر را از دو انتهای آن بریده اند. مقاطع عمود بر محور z به شکل دایره هستند. ارتفاع بشکه $2h$ واحد، شعاع مقطع وسطی آن R و شعاع های دو مقطع انتهایی آن هر دو r هستند. فرمولی برای حجم بشکه بدست آورید و سپس دو وضعیت را بررسی کنید. اول اینکه فرض کنید دیواره های جانبی بشکه به صورت خط راست هستند و بشکه به شکل استوانه ای به شعاع R و ارتفاع $2h$ است.



آیا فرمول شما حجم استوانه را بدست می دهد؟ دوم اینکه فرض کنید $r=0$ و $h=R$ و لذا بشکه به شکل کره است. آیا فرمول شما حجم کره را بدست می دهد؟

۴۷- نشان دهید که حجم قسمتی که از تقاطع سهمیوار

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

با صفحه $z=h$ بدست می آید برابر نصف قاعده آن قسمت ضربدر ارتفاع آن است.

۴۸- (الف)- حجم جسم محدود به هذلولیوار

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

و صفحات $z=0$ و $z=h$ ، $h>0$، را بدست آورید.

(ب)- پاسخ قسمت (الف) خود را برحسب h و مساحت های A_0 و A_h بیان کنید که A_0 و A_h مساحت های نواحی حاصل از تقاطع صفحات $z=0$ و $z=h$ با هذلولیوار هستند.

(پ)- نشان دهید که حجم مذکور در قسمت (الف) از فرمول زیر نیز بدست می آید

$$V=\frac{h}{6}\left(A_0+4A_m+A_h\right)$$

که A_m مساحت ناحیه حاصل از تقاطع صفحه $z=h/2$ با هذلولیوار است.

نمایش رویه ها

رویه های تمرین های **۴۹ -۵۲** را روی دامنه های خواسته شده رسم کنید. در صورت امکان رویه ها را چرخانده و از نماهای مختلف نشان دهید.

۴۹- $z=y^2,\quad -2\le x\le 2,\quad -0.5\le y\le 2$

۵۰- $-2 \le y \le 2$ و $-2 \le x \le 2$ و $z = 1 - y^2$

۵۱- $-3 \le y \le 3$ و $-3 \le x \le 3$ و $z = x^2 + y^2$

۵۲- $z = x^2 + 2y^2$ روی

(الف)- $-3 \le y \le 3$ و $-3 \le x \le 3$

(ب)- $-2 \le y \le 3$ و $-1 \le x \le 1$

(پ)- $-2 \le y \le 2$ و $-2 \le x \le 2$

(ت)- $-1 \le y \le 1$ و $-2 \le x \le 2$

تمرین های رایانه ای

در تمرین های **۵۳-۵۸** با استفاده از یک نرم افزار ریاضی رویه ها را رسم کنید. از روی نمودار حاصل نوع رویه های درجه دوم را مشخص کنید.

۵۳- $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 - \frac{z^2}{25}$

۵۴- $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{y^2}{16}$

۵۵- $5x^2 = z^2 - 3y^2$

۵۶- $\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{9} + z$

۵۷- $\frac{x^2}{9} - 1 = \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2}$

۵۸- $y - \sqrt{4 - z^2} = 0$

فصل ۱۲: پرسش های مروری

۱- چه زمانی پاره خط های جهت دار واقع در صفحه بردار واحدی را نمایش می دهند؟

۲- جمع و تفریق هندسی بردارها چگونه است؟ جمع و تفریق جبری آنها چطور؟

۳- اندازه و جهت بردار چگونه محاسبه می شود؟

۴- اگر برداری در یک عدد مثبت ضرب شود حاصل آن با بردار اصلی چه رابطه ای دارد؟ اگر عدد برابر با صفر باشد چه؟ منفی باشد چطور؟

۵- ضرب عددی دو بردار را تعریف کنید. کدام قوانین جبری در مورد ضرب های عددی بردارها برقرارند؟ چند مثال بزنید. در چه صورت ضرب عددی دو بردار برابر با صفر است؟

۶- تعبیر هندسی ضرب عددی چیست؟ مثال بزنید.

۷- تصویر برداری بردار **u** بر روی بردار **v** چیست؟ مثالی از کاربرد مفید تصویر برداری ارائه کنید.

۸- ضرب برداری دو بردار را تعریف کنید. کدام قوانین جبری در مورد ضرب های برداری برقرارند و کدام برقرار نیستند؟ مثال بزنید. در چه صورت ضرب برداری دو بردار برابر صفر است؟

۹- تعابیر هندسی و فیزیکی ضرب برداری کدامند؟ مثال بزنید.

۱۰-فرمول دترمینانی محاسبه ضرب برداری دو بردار نسبت به دستگاه مختصات دکارتی **i,j,k** را بیان کنید و کاربرد آن را با یک مثال نشان دهید.

۱۱-چگونه معادلات خطوط، پاره خط ها و صفحات واقع در فضا را بدست می آورید؟ مثال بزنید. آیا یک خط واقع در فضا را می توان بوسیله یک معادله واحد بیان کرد؟ یک صفحه را چطور؟

۱۲-چگونه فاصله یک نقطه از یک خط را در فضا محاسبه می کنید؟ یک نقطه از یک صفحه را چطور؟ مثال بزنید.

۱۳-ضرب های جعبه ای چیستند؟ چه اهمیتی دارند؟ چگونه آنها را محاسبه می کنید؟ یک مثال بزنید.

۱۴- چگونه معادله های کره ها را در فضا بدست می آورید؟ مثال بزنید.

۱۵- چگونه نقطه تلاقی دو خط واقع در فضا را بدست می آورید؟ یک خط و یک صفحه را چطور؟ دو صفحه را چطور؟ مثال بزنید.

۱۶-استوانه چیست؟ مثال هایی از معادلاتی بزنید که معرف استوانه هایی در مختصات دکارتی هستند.

۱۷-رویه های درجه دوم چه چیزی هستند؟ مثال هایی از انواع مختلف بیضیوارها، سهمیوارها، مخروطها و هذلولیوارها ارائه کنید (معادلات و شکل آنها).

فصل ۱۲: تمرین های عملی

محاسبات برداری در دو بعد

در تمرین های ۱-۴ فرض کنید $\mathbf{u}=\langle -3,4\rangle$ و $\mathbf{v}=\langle 2,-5\rangle$. مطلوبست (الف)- شکل مؤلفه ای بردار و (ب)- اندازه آن

۱- $3\mathbf{u}-4\mathbf{v}$ ۲- $\mathbf{u}+\mathbf{v}$

۳- $-2\mathbf{u}$ ۴- $5\mathbf{v}$

در تمرین های ۵-۸ شکل مؤلفه ای بردار را بیابید.

۵- برداری که از چرخاندن $\langle 0,1\rangle$ به اندازه $2\pi/3$ رادیان بدست می آید.

۶- بردار واحدی که با قسمت مثبت محور x زاویه $\pi/6$ می سازد.

۷- برداری به طول ۲ واحد در جهت $4\mathbf{i}-\mathbf{j}$.

۸- برداری به طول ۵ واحد در خلاف جهت بردار

$$(3/5)\mathbf{i}+(4/5)\mathbf{j}$$

بردارهای تمرین های ۹-۱۲ را برحسب طول ها و جهت هایشان بیان کنید.

۹- $\sqrt{2}\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}$ ۱۰- $-\mathbf{i}-\mathbf{j}$

۱۱- بردار سرعت

$$\mathbf{v}=(-2\sin t)\mathbf{i}+(2\cos t)\mathbf{j}$$

در لحظه $t=\pi/2$.

۱۲- بردار سرعت

$$\mathbf{v}=\left(e^t\cos t-e^t\sin t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\sin t+e^t\cos t\right)\mathbf{j}$$

در لحظه $t=\ln 2$.

محاسبات برداری در سه بعد

در تمرین های ۱۳ و ۱۴ بردارها را بر حسب طول ها و جهت هایشان بیان کنید.

۱۳- $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ ۱۴- $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$

۱۵- مطلوبست برداری به طول ۲ واحد در جهت

$$\mathbf{v}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$$

۱۶- مطلوبست برداری به طول ۵ واحد در خلاف جهت

$$\mathbf{v}=(3/5)\mathbf{i}+(4/5)\mathbf{j}$$

در تمرین های ۱۷ و ۱۸، $|\mathbf{v}|$، $|\mathbf{u}|$، $\mathbf{u.v}$، $\mathbf{v.u}$، $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$، $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$، $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|$، زاویه بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$، مؤلفه عددی $\mathbf{u}$ در جهت $\mathbf{v}$ و تصویر برداری $\mathbf{u}$ بر روی $\mathbf{v}$ را بیابید.

۱۷- $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$,

۱۸- $\mathbf{u}=-\mathbf{i}-\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$,

در تمرین های ۱۹ و ۲۰، $\text{proj}_\mathbf{v}\mathbf{u}$ را بدست آورید.

۱۹- $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$,

۲۰- $\mathbf{u}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$, $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$,

در تمرین های ۲۱ و ۲۲ محورهای مختصات را رسم کرده و بعد $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ را، به عنوان بردارهایی که از مبداء شروع می شوند رسم کنید.

۲۱- $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{u}=\mathbf{i}$, ۲۲- $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{u}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$,

۲۳- اگر $|\mathbf{v}|=2$، $|\mathbf{w}|=3$ و زاویه بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ برابر $\pi/3$ باشد $|\mathbf{v}-2\mathbf{w}|$ را بیابید.

۲۴- به ازای چه مقدار یا مقادیر از a بردارهای

$$\mathbf{u}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k} \text{ و } \mathbf{v}=-4\mathbf{i}-8\mathbf{j}+a\mathbf{k}$$

با هم موازی خواهند بود؟

در تمرین های ۲۵ و ۲۶ مطلوبست (الف)- مساحت متوازی الاضلاعی که با بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ مشخص می شود و (ب)- حجم متوازی السطوحی که با بردارهای $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ مشخص می شود.

۲۵- $\mathbf{w}=-\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$

۲۶- $\mathbf{w}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}=\mathbf{j}$ و $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$

خطوط، صفحات و فاصله ها

۲۷- فرض کنید $\mathbf{n}$ بر یک صفحه قائم و $\mathbf{v}$ موازی با آن صفحه است. توضیح دهید که چگونه می توانید یک بردار $\mathbf{n}$ بیابید که هم بر $\mathbf{v}$ عمود باشد و هم موازی با صفحه باشد.

۲۸- برداری در صفحه بیابید که با خط $ax+by=c$ موازی باشد.

در تمرین های ۲۹ و ۳۰ فاصله نقطه از خط را بیابید.

۲۹- $z=-1+t$ و $y=t$ و $x=-t$؛ $(2,2,0)$

۳۰- $z=t$ و $y=2+t$ و $x=2+t$؛ $(0,4,1)$

۳۱- معادلات پارامتری خطی را بنویسید که از نقطه (۳و۲و۱) می گذرد و با بردار $\mathbf{v}=-3\mathbf{i}+7\mathbf{k}$ موازی است.

۳۲- معادلات پارامتری پاره خطی را بنویسید که نقاط $P(1,2,0)$ و $Q(1,3,-1)$ را به هم وصل می کند.

در تمرین های ۳۳ و ۳۴ فاصله نقطه از صفحه را بدست آورید.

۳۳- $x-y=4$ و $(6,0,-6)$

۳۴- $2x+3y+z=2$ و $(3,0,10)$

۳۵- معادله صفحه ای را بیابید که از نقطه $(3,-2,1)$ می گذرد و بر بردار $\mathbf{n}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ عمود است.

۳۶- معادله صفحه ای را بیابید که از نقطه $(-1,6,0)$ می گذرد و بر خط $x=-1+t$، $y=6-2t$ و $z=3t$ عمود است.

در تمرین های ۳۷ و ۳۸ معادله صفحه گذرنده از نقاط P، Q و R را بیابید.

۳۷- $R(-1,2,-1)$ و $Q(2,1,3)$ و $P(1,-1,2)$

۳۸- $R(0,0,1)$ و $Q(0,1,0)$ و $P(1,0,0)$

۳۹- نقطه تلاقی خط $x=1+2t$، $y=-1-t$، $z=3t$ با سه صفحه مختصات را بیابید.

۴۰- نقطه تقاطع خط گذرنده از مبداء و عمود بر صفحه

$$2x-y-z=4$$

با صفحه $3x-5y+2z=6$ را بیابید.

۴۱- زاویه حاده بین صفحات $x=7$ و $x+y+\sqrt{2}z=-3$ را پیدا کنید.

۴۲- زاویه حاده بین صفحات $x+y=1$ و $y+z=1$ را بیابید.

۴۳- معادلات پارامتری خط تقاطع (فصل مشترک) صفحات $x+2y+z=1$ و $x-y+2z=-8$ را بدست آورید.

۴۴- نشان دهید که فصل مشترک صفحات

$$5x-2y-z=0 \quad \text{و} \quad x+2y-2z=5$$

با خط

$$x=-3+2t \quad \text{و} \quad y=3t \quad \text{و} \quad z=1+4t$$

موازی است.

۴۵- فصل مشترک صفحات

$$2x+2y-z=3 \quad \text{و} \quad 3x+6z=1$$

یک خط است.

(الف)- نشان دهید که این صفحات متعامدند.

(ب)- معادلات فصل مشترک دوصفحه را بیابید.

۴۶- معادله صفحه ای را بیابید که از نقطه (۳و۲و۱) می گذرد و با بردارهای

$$\mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{u}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

موازی است.

۴۷- آیا بردار

$$\mathbf{v}=2\mathbf{i}-4\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

رابطه خاصی با صفحه $2x+y=5$ دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۴۸- معادله $\mathbf{n}.\overrightarrow{P_0P}=0$ نشان دهنده صفحه ای است که از P_0 می گذرد و بر $\mathbf{n}$ عمود است. نامعادله $\mathbf{n}.\overrightarrow{P_0P}>0$ چه مجموعه ای را نمایش می دهد؟

۴۹- فاصله نقطه $P(1,4,0)$ از صفحه گذرنده از نقاط

$$A(0,0,0)\text{،} \quad B(2,0,-1) \quad \text{و} \quad C(2,-1,0)$$

چقدر است؟

۵۰- فاصله نقطه (۳و ۲و ۲) تا صفحه

$$2x+3y+5z=0$$

چقدر است؟

۵۱- برداری را بیابیدکه با صفحه $2x-y-z=4$ موازی و بر بردار $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ عمود است.

۵۲- اگر

$$\mathbf{A}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k} \text{ ،} \quad \mathbf{B}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{C}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$$

باشد بردار واحدی در صفحه B و C بیابید که بر A عمود باشد.

۵۳- برداری با اندازه ۲ بیابید که با فصل مشترک صفحات

$$x+2y+z-1=0 \quad \text{و} \quad x-y+2z+7=0$$

موازی باشد.

۵۴- نقطه تقاطع خط گذرنده از مبداء و عمود بر صفحه

$$2x - y - z = 4$$

با صفحه $3x - 5y + 2z = 6$ را بیابید.

۵۵- نقطه تقاطع خط گذرنده از $P(3,2,1)$ و عمود بر صفحه $2x - y + 2z = -2$ را با صفحه مذکور بیابید.

۵۶- زاویه بین فصل مشترک صفحات

$$x + y + 2z = 0 \quad \text{و} \quad 2x + y - z = 0$$

و قسمت مثبت محور x چقدر است؟

۵۷- خط

$$L: x = 3 + 2t \quad \text{و} \quad y = 2t \quad \text{و} \quad z = t$$

صفحه $x + 3y - z = -4$ را در نقطه ای چون P قطع می کند. مختصات P را یافته و معادلات خطی واقع در صفحه را بدست آورید که از P می گذرد و بر L عمود است.

۵۸- نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی k صفحه

$$x - 2y + z + 3 + k(2x - y - z + 1) = 0$$

شامل فصل مشترک صفحات زیر است

$$x - 2y + z + 3 = 0 \quad \text{و} \quad 2x - y - z + 1 = 0$$

۵۹- معادله صفحه ای را بیابید که از نقاط

$$B(1,-2,1) \text{ و } A(-2,0,-3)$$

می گذرد و با خط گذرنده از نقاط

$$D(16/5,-13/5,0) \text{ و } C(-2,-13/5,26/5)$$

موازی است.

۶۰- چه رابطه خاصی بین خط

$$z = -5t \text{ ،} y = -2 + 3t \text{ ،} x = 1 + 2t$$

و صفحه $-4x - 6y + 10z = 9$ وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۶۱- کدامیک از معادلات زیر مربوط به صفحه ای است که از نقاط $P(1,1,-1)$، $Q(3,0,2)$ و $R(-2,1,0)$ می گذرد؟

(الف)- $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}).((x+2)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 0$

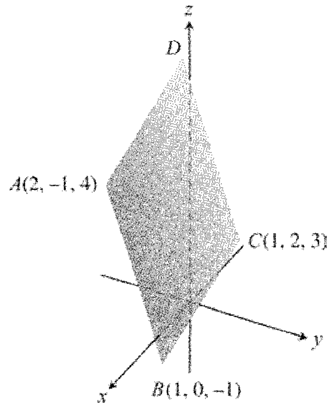
(ب)- $x = 3 - t$ و $y = -11t$ و $z = 2 - 3t$

(پ)- $(x+2) + 11(y-1) = 3z$

(ت)- $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times ((x+2)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \mathbf{0}$

(ث)- $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (-3\mathbf{i} + \mathbf{k}).((x+2)\mathbf{i} + (y-1)\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

۶۲- رئوس متوازی الاضلاع نشان داده شده در شکل زیر عبارتند از $A(2,-1,4)$، $B(1,0,-1)$، $C(1,2,3)$ و D.



مطلوبست

(الف)- مختصات D.

(ب)-کسینوس زاویه داخلی B.

(پ)- تصویر برداری $\overrightarrow{BA}$ بر روی $\overrightarrow{BC}$

(ت)- مساحت متوازی الاضلاع

(ث)- معادله صفحه متوازی الاضلاع

(ج)- مساحت های تصاویر عمودی متوازی الاضلاع بر سه صفحه مختصات.

۶۳- **فاصله بین خطوط.** فاصله بین خط L_1 گذرنده از نقاط $A(1,0,-1)$ و $B(-1,1,0)$ و خط L_2 گذرنده از نقاط $C(3,1,-1)$ و $D(4,5,-2)$ چقدر است؟ فاصله باید در امتداد خط عمود بر دو خط اندازه گیری شود. ابتدا بردار $\mathbf{n}$ عمود بر هر دو خط را یافته و بعد $\overrightarrow{AC}$ را روی $\mathbf{n}$ تصویر کنید.

۶۴- (ادامه تمرین ۶۳). فاصله بین خط گذرنده از نقاط $A(4,0,2)$ و $B(2,4,1)$ و خط گذرنده از نقاط $C(1,3,2)$ و $D(2,2,4)$ را بدست آورید.

رویه های درجه دوم

در تمرین های ۶۵ تا ۷۶ نوع رویه ها را مشخص کرده و آنها را رسم کنید.

۶۵- $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

۶۶- $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$

۶۷- $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$

۶۸- $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

۶۹- $z=-\left(x^2+y^2\right)$

۷۰- $y=-\left(x^2+z^2\right)$

۷۱- $x^2+y^2=z^2$

۷۲- $x^2+z^2=y^2$

۷۳- $x^2+y^2-z^2=4$

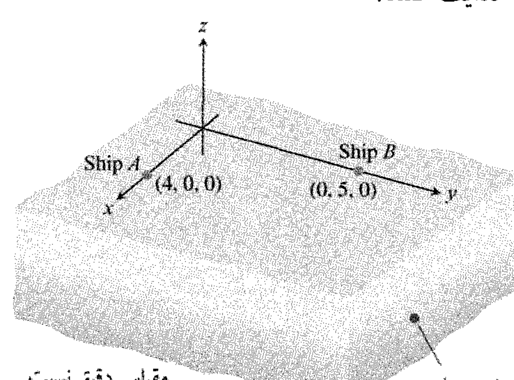
۷۴- $4y^2+z^2-4x^2=4$

۷۵- $y^2-x^2-z^2=1$

۷۶- $z^2-x^2-y^2=1$

فصل ۱۲: تمرین های اضافی و پیشرفته

۱- **شکار زیر دریایی.** در یک مانور نظامی دو کشتی تلاش می کنند مسیر و تندی یک زیردریایی را تعیین کرده و برای یک هواپیما ارسال کنند تا از حرکت زیر دریایی جلوگیری کند. همانطور که شکل زیر نشان می دهد کشتی A در $(4,0,0)$ و کشتی B در $(0,5,0)$ است. تمام مختصات برحسب هزار فوت است. کشتی A محل زیردریایی را در جهت بردار $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-(1/3)\mathbf{k}$ و کشتی B محل آن را در جهت بردار $18\mathbf{i}-6\mathbf{j}-\mathbf{k}$ تعیین می کند. چهار دقیقه قبل زیر دریایی در $(2,-1,-1/3)$ بوده است. قرار است هواپیما **۲۰** دقیقه بعد برسد. با فرض اینکه زیر دریایی با تندی ثابت بر روی خط راست حرکت می کند کشتی ها باید هواپیما را به سمت چه نقطه ای هدایت کنند؟



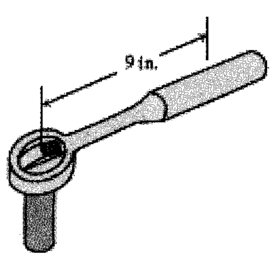
۲- **عملیات نجات هلیکوپتر.** دو هلیکوپتر H_1 و H_2 با هم پرواز می کنند. در لحظه $t=0$ از هم جدا شده و هر کدام روی مسیر مستقیمی با معادلات زیر به پرواز ادامه می دهند:

$$H_1:\ x=6+40t \quad \text{و} \quad y=-3+10t \quad \text{و} \quad z=-3+2t$$

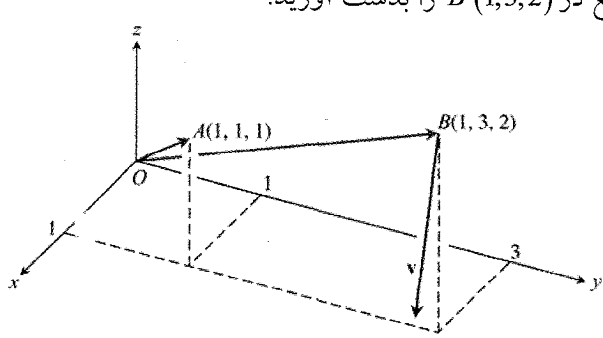
$$H_2:\ x=6+110t \quad \text{و} \quad y=-3+4t \quad \text{و} \quad z=-3+t$$

زمان t برحسب ساعت و تمام مختص ها برحسب مایل سنجیده می شوند. هلیکوپتر H_2 در نقطه $(446,13,1)$ دچار نقص فنی شده و بلافاصله در نقطه $(446,13,0)$ فرود می آید. دو ساعت بعد H_1 از این رویداد مطلع شده و با سرعت $150mph$ به سمت H_2 می رود. چه مدت طول خواهد کشید تا H_1 به H_2 برسد.

۳- **گشتاور.** در دفترچه راهنمای یک ماشین چمن زنی گفته شده که "شمع ماشین را با گشتاور $15ft-lb$ $(20.4N.m)$ سفت کنید". اگر بخواهید شمع را با آچار شمعی به طول $10.5in$ ببندید و مرکز دست خود را در فاصله $9in$ از محور شمع قرار دهید حدوداً چه نیرویی را باید وارد کنید! پاسخ را برحسب پوند بیان کنید.



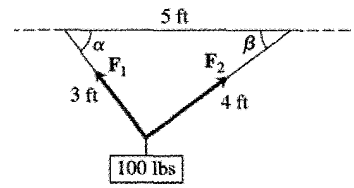
۴- **جسم چرخان.** خط گذرنده از مبداء و نقطه $A(1,1,1)$ محور چرخش جسم قائمی است که با تندی زاویه ای ثابت $3/2rad/\sec$ می چرخد. وقتی از A به سمت مبداء نگاه کنیم چرخش، ساعتگرد به نظر می رسد. سرعت $\mathbf{v}$ نقطه ای از جسم واقع در $B(1,3,2)$ را بدست آورید.



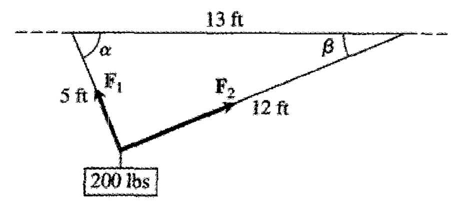
۵- وزنه آویخته شده بوسیله دو سیم را در هر یک از شکل

های زیر در نظر بگیرید. اندازه ها و مؤلفه های بردارهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ و زوایای α و β را بیابید.

(الف)-

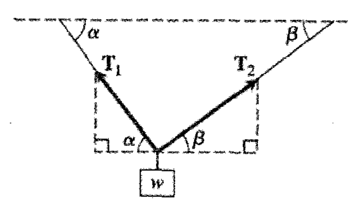


(ب)-



(راهنمایی: این مثلث، قائم الزاویه است).

۶- وزنه wN آویخته شده بوسیله دو سیم را در شکل زیر در نظر بگیرید. که $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{T}_2$ بردارهای نیرویی هستند که جهت آنها در امتداد سیم هاست.



(الف)- بردارهای $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{T}_2$ را یافته و نشان دهید که اندازه های آنها عبارتند از:

$$|\mathbf{T}_1| = \frac{w\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{و} \quad |\mathbf{T}_2| = \frac{w\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

(ب)- به ازای یک β ثابت مقدار α را چنان بیابید که به ازای آن اندازه $|\mathbf{T}_1|$ مینیمم شود.

(پ)- به ازای یک α ثابت مقدار β را چنان بیابید که به ازای آن اندازه $|\mathbf{T}_2|$ مینیمم شود.

۷- **دترمینان ها و صفحات.**

(الف)- نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ x_2-x & y_2-y & z_2-z \\ x_3-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix} = 0$$

معادله صفحه ای است که از سه نقطه ناهمخط

$P_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $P_2(x_2,y_2,z_2)$ و $P_3(x_3,y_3,z_3)$

می گذرد.

(ب)- کدام مجموعه از نقاط در فضا با معادله زیر توصیف می شود؟

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۸- **دترمینان ها و خطوط.** نشان دهید که خطوط

$$x = a_1 s + b_1, y = a_2 s + b_2, z = a_3 s + b_3, -\infty < s < \infty$$

و

$$x = c_1 t + d_1, y = c_2 t + d_2, z = a_3 t + d_3, -\infty < t < \infty$$

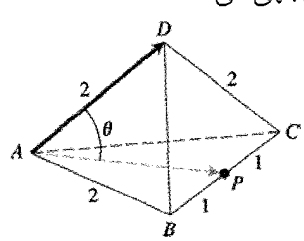
همدیگر را قطع کرده یا با هم موازی اند اگر و تنها اگر

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 - d_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 - d_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 - d_3 \end{vmatrix} = 0$$

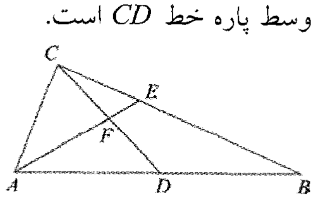
۹- چهار وجهی منتظمی به طول اضلاع **۲** را در نظر بگیرید.

(الف)- به کمک بردارها زاویه θ تشکیل شده بین قاعده چهار وجهی و هر یک از یال های دیگر آن را بیابید.

(ب)- به کمک بردارها زاویه θ تشکیل شده بین هر دو وجه مجاور چهار وجهی را بدست آورید. این زاویه را معمولاً به عنوان زاویه دو وجهی می شناسند.



۱۰- در شکل زیر D وسط ضلع AB مثلث ABC و E در یک – سوم طول بین C و B است. با بهره گیری از بردارها ثابت کنید که F وسط پاره خط CD است.



۱۱- با بهره گیری از بردارها نشان دهید که فاصله نقطه $P_1(x_1,y_1)$ تا خط $ax+by=c$ برابر است با

$$d=\frac{|ax_1+by_1-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۱۳-الف- به کمک بردارها نشان دهید که فاصله نقطه

$$P_1(x_1,y_1,z_1)$$

از صفحه $Ax+By+Cz=D$ برابر است با

$$d=\frac{|Ax_1+By_1-Cz_1-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(ب)- معادله کره ای را بیابید که بر صفحات

$$x+y+z=3 \text{ و } x+y+z=9$$

مماس است در صورتیکه صفحات $2x-y=0$ و $3x-z=0$ از مرکز کره گذشته باشند.

۱۴-(الف)- نشان دهید که فاصله بین صفحات موازی

$$Ax+By+Cz=D_1 \text{ و } Ax+By+Cz=D_2$$

برابر است با

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{|A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}|}$$

(ب)- فاصله بین صفحات

$$2x+3y-z=6 \text{ و } 2x+3y-z=12$$

را بیابید.

(پ)- معادله صفحه ای را بیابید که با صفحه

$$2x-y+2z=-4$$

موازی است، و نقطه $(3,2,-1)$ از دو صفحه به یک فاصله است.

(ت)- معادلات صفحاتی را بنویسید که با صفحه

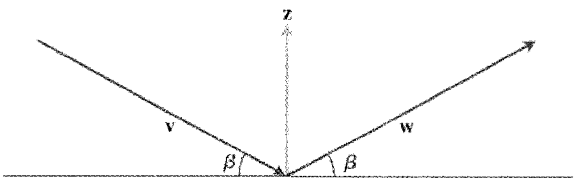
$$x-2y+z=3$$

موازی بوده و به فاصله ۵ واحد از آن قرار دارند.

۱۴- ثابت کنید که چهار نقطه A، B، C و D در یک صفحه قرار دارند اگر و تنها اگر $\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC})=0$.

۱۵- **تصویر بردار بر روی یک صفحه.** فرض کنید P یک صفحه در فضا و $\mathbf{v}$ یک بردار باشد. تصویر برداری $\mathbf{v}$ بر صفحه P، $\text{proj}_P\mathbf{v}$ را می توان به طور غیر رسمی به صورت زیر تعریف کرد. فرض کنید خورشید طوری می تابد که پرتوهای آن بر صفحه P عمودند. در این صورت $\text{proj}_P\mathbf{v}$ «سایه» $\mathbf{v}$ بر روی P است. اگر P صفحه $x+2y+6z=6$ و $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ باشد مطلوبست $\text{proj}_P\mathbf{v}$.

۱۶- شکل زیر بردارهای ناصفر $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ و $\mathbf{z}$ را نشان می دهد که $\mathbf{z}$ بر خط L عمود است و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ زوایای مساوی β با L می سازند. با فرض اینکه $|\mathbf{v}|=|\mathbf{w}|$، $\mathbf{w}$ را برحسب $\mathbf{v}$ و $\mathbf{z}$ بدست آورید.



۱۷- **ضرب های برداری سه گانه.** ضرب های برداری سه گانه $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ و $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ معمولاً برابر نیستند، گرچه فرمول های محاسبه آنها از روی مؤلفه ها شبیه هم هستند:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}.\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}.\mathbf{w})\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}.\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}.\mathbf{v})\mathbf{w}$$

درستی هر یک از فرمول های بالا را برای بردارهای زیر تحقیق کنید. برای این کار دو طرف هر فرمول را محاسبه کرده و نتایج را با هم مقایسه کنید. بردارهای داده شده را از چپ به راست به ترتیب $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ در نظر بگیرید.

الف- $2\mathbf{i}$ $2\mathbf{j}$ $2\mathbf{k}$

ب- $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ $-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$

پ- $2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ $\mathbf{i}+2\mathbf{k}$

ت- $\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ $-\mathbf{i}-\mathbf{k}$ $2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

۱۸- **ضرب های برداری و عددی.** نشان دهید که اگر $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$، $\mathbf{w}$ و $\mathbf{r}$ چهار بردار دلخواه باشند آنگاه

(الف)- $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{0}$

(ب)- $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(\mathbf{u}.\mathbf{v}\times\mathbf{i})\mathbf{i}+(\mathbf{u}.\mathbf{v}\times\mathbf{j})\mathbf{j}+(\mathbf{u}.\mathbf{v}\times\mathbf{k})\mathbf{k}$

(پ)- $(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).(\mathbf{w}\times\mathbf{r})=\begin{vmatrix}\mathbf{u}.\mathbf{w} & \mathbf{v}.\mathbf{w}\\ \mathbf{u}.\mathbf{r} & \mathbf{v}.\mathbf{r}\end{vmatrix}$

۱۹- **ضرب های برداری و عددی.** درستی یا نادرستی فرمول زیر را ثابت کنید.

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})).\mathbf{w}=-|\mathbf{u}|^2\,\mathbf{u}.\mathbf{v}\times\mathbf{w}$$

۲۰- با تشکیل دادن ضرب برداری دو بردار مناسب، اتحاد

مثلثاتی زیر را بدست آورید.

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

۲۱- با بهره گیری از بردارها ثابت کنید که برای هر چهار عدد a، b، c و d،

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq\left(ac+bd\right)^2$$

(راهنمایی: فرض کنید $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ و $\mathbf{v}=c\mathbf{i}+d\mathbf{j}$).

۲۲- **ضرب عددی، معین و مثبت است.** نشان دهید که ضرب عددی بردارها معین و مثبت است؛ یعنی نشان دهید که برای هر بردار $\mathbf{u}$، $\mathbf{u.u}\geq 0$ و $\mathbf{u.u}=0$ اگر و تنها اگر $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ باشد.

۲۳- نشان دهید که برای هر دو بردار $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$،

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|\leq|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|$$

۲۴- نشان دهید که بردار $\mathbf{w}=|\mathbf{v}|\mathbf{u}+|\mathbf{u}|\mathbf{v}$ نیمساز زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است.

۲۵- نشان دهید که بردارهای

$$|\mathbf{v}|\mathbf{u}+|\mathbf{u}|\mathbf{v} \text{ و } |\mathbf{v}|\mathbf{u}-|\mathbf{u}|\mathbf{v}$$

متعامدند.

فصل ۱۲: پروژه های کاربرد فن آوری

بخش متمتیکا / میپل:

استفاده از بردارها برای نمایش خطوط و یافتن فاصله ها

بخش های ۱ و ۲: مزیت های تعبیر خطوط به عنوان بردار را بیاموزید.

بخش۳: با استفاده از بردارها فاصله یک نقطه از یک خط را بدست آورید.

قراردادن یک منظره سه بعدی در یک بوم نقاشی دو بعدی

با استفاده از مفهوم صفحات در فضا یک تصویر دو بعدی بدست آورید.

شروع رسم در سه بعد

بخش۱: با استفاده از تعریف برداری خطوط و صفحات، نمودارها و معادلات آنها را بدست آورید و اشکال مختلف معادلات یک خط را با هم مقایسه کنید.

بخش۲: توابعی را که به صورت ضمنی تعریف می شوند رسم کنید.

فصل ۱۳

توابع برداری و حرکت در فضا

چشم انداز: اکنون که مفاهیم بردارها و هندسه فضایی را آموخته ایم می توانیم این مفاهیم را با مفاهیم توابع که قبلاً مطالعه کرده ایم تلفیق کنیم. در این فصل حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری را معرفی می کنیم. دامنه های این توابع همانند قبل اعداد حقیقی اند اما برد آنها بردارها هستند نه اعداد. از این نوع حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توصیف مسیرها و حرکات اجسامی که در صفحه یا فضا حرکت می کنند بهره می گیریم و خواهیم دید که سرعت ها و شتاب های این اجسام در امتداد مسیرهایشان به صورت بردار هستند. همینطور کمیت های جدیدی را معرفی می کنیم که چگونگی چرخش (Turn) یا پیچش(Twist) مسیر جسم در فضا را توصیف می کنند.

۱۳-۱- خم ها واقع در فضا و مماس های آنها

وقتی ذره ای طی بازه زمانی I در فضا حرکت می کند مختصات ذره به صورت توابعی هستند که روی I تعریف شده اند

$$x=f(t) \quad \text{و} \quad y=g(t) \quad \text{و} \quad z=h(t) \quad \text{و} \quad t\in I \qquad (۱)$$

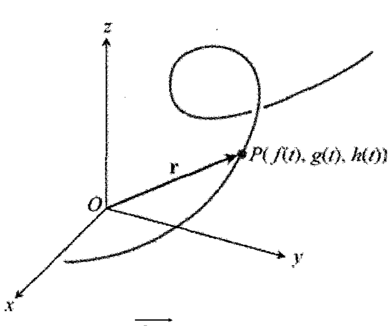
نقاط $(x,y,z)=\big(f(t),g(t),h(t)\big)$، $t\in I$، **خمی** را در فضا می سازند که آن را **مسیر** ذره می نامیم. معادلات و بازه زمانی مذکور در معادله (۱) **معادلات پارامتری** خم هستند.

یک خم واقع در فضا را می توان به شکل برداری هم نمایش داد. بردار

$$\mathbf{r}(t)=\overline{OP}=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k} \qquad (۲)$$

که از مبداء تا **مکان** ذره $P\big(f(t),g(t),h(t)\big)$ در لحظه t رسم می شود **بردار مکان** ذره است (شکل ۱۳-۱). مسیر ذره خمی است که طی بازه زمانی I **بوسیله نوک $\mathbf{r}$ طی می شود.** شکل**۱۳-۲** چندین خم فضایی را نشان می دهد که بوسیله یک برنامه گرافیکی کامپیوتری تولید شده اند. رسم دستی این خم ها کار آسانی نیست.

معادله (۲) $\mathbf{r}$ را به صورت تابعی برداری از متغیر حقیقی t روی بازه I تعریف می کند. بطور کلی تر یک **تابع برداری** روی مجموعه دامنه D قاعده ای است که به هر عنصر از D یک بردار در فضا اختصاص می دهد. در این فصل دامنه ها بازه های اعداد حقیقی خواهند بود که به یک خم فضایی منجر می شوند. بعداً در فصل ۱۶ دامنه ها نواحیی در صفحه خواهند بود. در آن صورت توابع برداری نمایشگر رویه ها در فضا خواهند بود.

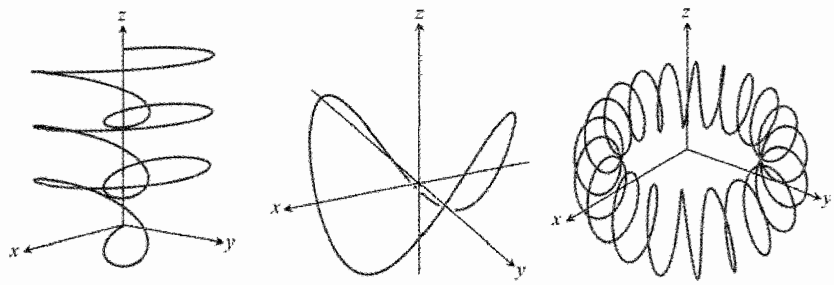


شکل۱۳-۱: بردار مکان $\mathbf{r}=\overline{OP}$ ذره ای که در فضا حرکت می کند تابعی از زمان است.

توابع برداری روی یک حوزه واقع در صفحه یا فضا به «میدانهای برداری» هم منجر می شوند، که در شارش شاره ها،

میدان های گرانشی و پدیده های الکترو مغناطیسی حائز اهمیت اند. میدان های برداری و کاربردهای آنها را در فصل ۱۶ بررسی خواهیم کرد.

توابع حقیقی(حقیقی-مقدار) را **توابع عددی**(اسکالر) می نامیم تا آنها را از توابع برداری متمایز کنیم. مؤلفه های $\mathbf{r}$ در معادله (۲) توابع عددی از t هستند. دامنه یک تابع برداری دامنه مشترک مؤلفه های آن است.



$\mathbf{r}(t) = (\sin 3t)(\cos t)\mathbf{i} + (\sin 3t)(\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

(الف)

$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}$

(ب)

$\mathbf{r}(t) = (4 + \sin 20t)(\cos t)\mathbf{i} + (4 + \sin 20t)(\sin t)\mathbf{j} + (\cos 20t)\mathbf{k}$

(پ)

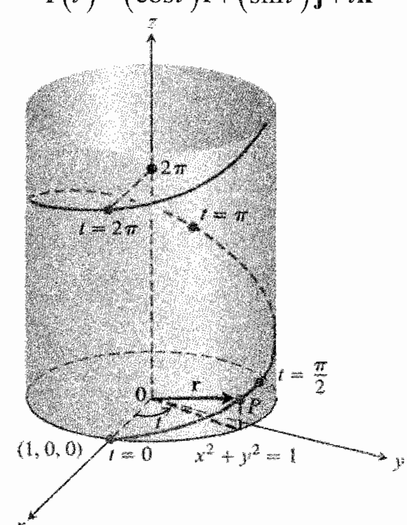
شکل۱۳-۲: خم های فضایی بوسیله بردارهای مکان $\mathbf{r}(t)$ تعریف می شوند

مثال ۱: تابع برداری زیر را رسم کنید:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

حل: تابع برداری

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$



شکل۱۳-۳: نیمه بالایی مارپیچ(پیچ)

$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ (مثال ۱)

به ازای تمام مقادیر حقیقی تعریف شده است. خمی که نوک $\mathbf{r}$ طی می کند حول استوانه مستدیر $x^2 + y^2 = 1$ می پیچد (شکل ۱۳-۳). خم، روی استوانه قرار می گیرد چون مؤلفه های $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بردار $\mathbf{r}$، که مختص های x و y نوک $\mathbf{r}$ هستند، در معادله استوانه صدق می کنند:

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

با افزایش مؤلفه k یعنی $z = t$ خم بالا می رود. هر وقت t به اندازه 2π افزایش یابد خم یک دور کامل را حول استوانه کامل می کند. این خم را مارپیچ(پیچ) می نامند (که از واژه یونانی قدیمی "مارپیچی" گرفته شده است). معادلات

$$x = \cos t \quad و \quad y = \sin t \quad و \quad z = 1$$

معادلات پارامتری مارپیچ هستند و بازه $-\infty < t < \infty$ بدیهی است. شکل۱۳-۴ مارپیچهای دیگری را نشان می دهد. توجه کنید که چگونه ضرایب ثابت پارامتر t می توانند تعداد دورها در واحد زمان را تغییر دهند.

حد و پیوستگی

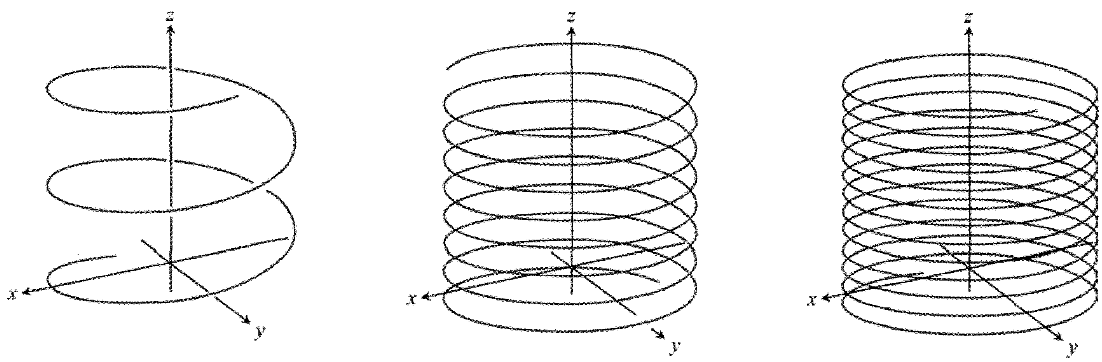
شیوه تعریف حدود توابع برداری مشابه شیوه تعریف حدود توابع حقیقی است.

تعریف: فرض کنید $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ تابعی برداری با دامنه D و $\mathbf{L}$ یک بردار باشد. می گوییم **حد** $\mathbf{r}$، وقتی t به t_0 میل می کند، برابر $\mathbf{L}$ است و می نویسیم:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$$

هرگاه به ازای هر عدد $\epsilon > 0$ ، عدد متناظر $\delta > 0$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $t \in D$ داشته باشیم:

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}| < \epsilon \qquad 0 < |t - t_0| < \delta$$



$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ — $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + 0.3t\mathbf{k}$ — $\mathbf{r}(t) = (\cos 5t)\mathbf{i} + (\sin 5t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

شکل۱۳-۴: مارپیچ ها مثل حلقه های فنر به دور استوانه پیچیده و بالا می روند.

اگر $\mathbf{L}=L_1\mathbf{i}+L_2\mathbf{j}+L_3\mathbf{k}$ باشد می توان نشان داد که $\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{L}$ دقیقاً در صورتیکه

$$\lim_{t\to t_0} h(t)=L_3 \quad \text{و} \quad \lim_{t\to t_0} g(t)=L_2 \quad \text{و} \quad \lim_{t\to t_0} f(t)=L_1$$

این موضوع را اثبات نمی کنیم. معادله

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right)\mathbf{i}+\left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right)\mathbf{j}+\left(\lim_{t\to t_0} h(t)\right)\mathbf{k} \tag{۳}$$

روش عملی محاسبه حدود توابع برداری است.

مثال ۲: اگر $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ باشد آنگاه

$$\lim_{t\to\pi/4}\mathbf{r}(t)=\left(\lim_{t\to\pi/4}\cos t\right)\mathbf{i}+\left(\lim_{t\to\pi/4}\sin t\right)\mathbf{j}+\left(\lim_{t\to\pi/4} t\right)\mathbf{k}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}+\frac{\pi}{4}\mathbf{k}$$

پیوستگی توابع برداری را نیز به همان شیوه ای تعریف می کنیم که پیوستگی توابع عددی را.

تعریف: تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ **در نقطه** $t=t_0$ **از دامنه تعریفش پیوسته است** اگر $\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)$. تابع **پیوسته** است هرگاه در هر نقطه از دامنه اش پیوسته باشد.

با توجه به معادله (۳)، درمی یابیم که $\mathbf{r}(t)$ در $t=t_0$ پیوسته است اگر و تنها اگر هر تابع مؤلفه در آنجا پیوسته باشد(تمرین ۳۱).

مثال ۳ :

(الف)- تمام خم های فضایی نشان داده شده در شکل های **۱۳- ۲** و **۱۳- ۴** پیوسته اند چون توابع مؤلفه آنها در هر مقدار t از بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته اند.

(ب)- تابع

$$\mathbf{g}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+[t]\mathbf{k}$$

در هر عدد صحیح ناپیوسته است چون تابع بزرگترین عدد صحیح $[t]$ ناپیوسته است.

مشتق و حرکت

فرض کنید $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$ بردار مکان ذره ای باشد که در امتداد یک خم در فضا حرکت می کند و f، g و h توابع مشتق پذیر از t باشند. در این صورت اختلاف بین مکان های ذره در لحظه t و لحظه $t+\Delta t$ عبارت است از

$$\Delta\mathbf{r}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$$

(شکل۱۳ – ۵-الف). بر حسب مؤلفه ها داریم

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r}&=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)\\&=\left[f(t+\Delta t)\mathbf{i}+g(t+\Delta t)\mathbf{j}+h(t+\Delta t)\mathbf{k}\right]\\&\quad-\left[f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}\right]\\&=\left[f(t+\Delta t)-f(t)\right]\mathbf{i}+\left[g(t+\Delta t)-g(t)\right]\mathbf{j}\\&\quad+\left[h(t+\Delta t)-h(t)\right]\mathbf{k}\end{aligned}$$

اگر Δt به صفر میل کند ظاهراً سه چیز بطور همزمان اتفاق می افتند. اول اینکه Q در امتداد خم به P میل می کند. دوم اینکه خط تقاطع PQ به وضعیت حدی مماس بر منحنی در P میل می کند. و سوم، خارج قسمت $\Delta r/\Delta t$ (شکل ۱۳- ۵- ب) به حد زیر میل می کند

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}&=\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{i}\\&\quad+\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{j}\end{aligned}$$

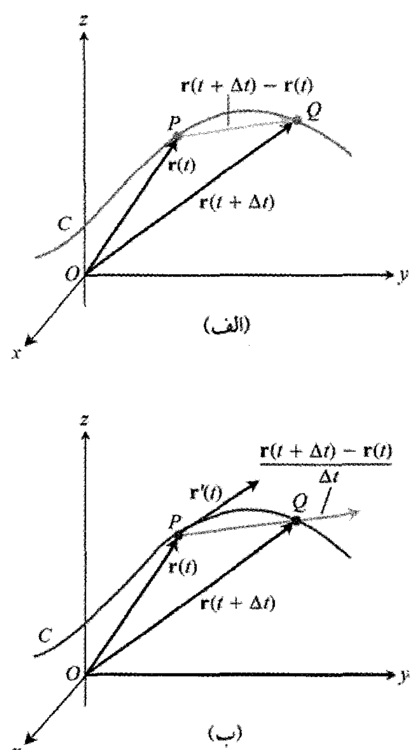
$$+\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{k}$$

$$=\left[\frac{df}{dt}\right]\mathbf{i}+\left[\frac{dg}{dt}\right]\mathbf{j}+\left[\frac{dh}{dt}\right]\mathbf{k}$$

بنابراین به تعریف زیر می رسیم.

> **تعریف:** تابع برداری $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$ در t **مشتق دارد (مشتق پذیر است)** اگر f، g و h در t مشتق داشته باشند. مشتق تابع فوق تابع برداری زیر است
>
> $$\mathbf{r}'(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$
>
> $$=\frac{df}{dt}\mathbf{i}+\frac{dg}{dt}\mathbf{j}+\frac{dh}{dt}\mathbf{k}$$

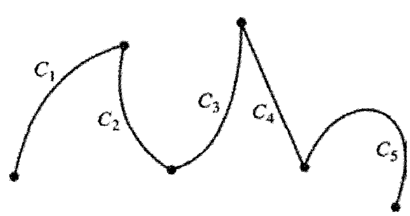
تابع برداری $\mathbf{r}$ مشتق پذیر است اگر در هر نقطه از دامنه اش مشتق پذیر باشد. خمی که $\mathbf{r}$ طی می کند هموار است هرگاه $d\mathbf{r}/dt$ پیوسته بوده و هرگز برابر $\mathbf{0}$ نباشد، یعنی هرگاه f، g و h مشتقات اول پیوسته ای داشته باشند که بطور همزمان صفر نیستند.



شکل ۱۳- ۵: وقتی $\Delta t\to 0$ میل می کند نقطه Q در امتداد خم C به نقطه P میل می کند. در حد، بردار $\overline{PQ}/\Delta t$ بردار مماس $\mathbf{r}'(t)$ می شود.

خمی که از تعدادی متناهی از خم های هموار متصل به هم تشکیل شده باشد خم **قطعه قطعه هموار** نامیده می شود (شکل ۱۳-۶).

اهمیت هندسی تعریف مشتق در شکل **۱۳-۵** نشان داده شده است. نقاط P و Q بردارهای مکان $\mathbf{r}(t)$ و $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ دارند و بردار $\overline{PQ}$ با $\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$ نمایش داده شده است. برای $\Delta t>0$، مضرب عددی بردار فوق یعنی $(1/\Delta t)(\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t))$ با بردار $\overline{PQ}$ هم جهت است. وقتی $\Delta t\to 0$ میل کند این بردار به برداری مماس بر خم در P میل می کند (شکل **۱۳-۵**-ب). بردار $\mathbf{r}'(t)$ را، وقتی متفاوت از $\mathbf{0}$ باشد، بردار **مماس** بر خم در P تعریف می کنیم. **خط مماس** بر خم در نقطه $(f(t_0)g(t_0),h(t_0))$ خطی تعریف می شود که از این نقطه گذشته و با $\mathbf{r}'(t_0)$ موازی باشد. برای یک خم هموار لازم است $d\mathbf{r}/dt\neq\mathbf{0}$ باشد تا تضمین کند که خم در تمام نقاط خود پیوسته مماس دارد. روی خم هموار گوشه های تیز یا نقاط نوک تیز وجود ندارد.



شکل ۱۳-۶: یک خم قطعه قطعه هموار متشکل از پنج خم هموار که به صورتی پیوسته به هم متصل شده اند. این خم در نقاط اتصال پنج خم هموار، هموار نیست.

یکبار دیگر به شکل **۱۳-۵** نگاه کنید. در اینجا شکل را برای Δt مثبت رسم کرده ایم لذا جهت $\Delta\mathbf{r}$ به سمت جلو و در جهت حرکت است. جهت بردار $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ نیز، که با $\Delta\mathbf{r}$ هم جهت است، به سمت جلوست. اگر Δt منفی بود جهت $\Delta\mathbf{r}$ به سمت عقب و در خلاف جهت حرکت می شد. اما جهت خارج قسمت $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$، که ضرب عددی منفی در $\Delta\mathbf{r}$ است، باز هم به سمت جلو می شد. جهت $\Delta\mathbf{r}$ هرچه باشد، جهت $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ به سمت جلو است و انتظار داریم جهت بردار $d\mathbf{r}/dt=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ ، وقتی مخالف $\mathbf{0}$ است، نیز به

سمت جلو باشد. یعنی مشتق $d\mathbf{r}/dt$، که آهنگ تغییر مکان نسبت به زمان است، همواره در جهت حرکت قرار می گیرد. برای یک خم هموار، $d\mathbf{r}/dt$ هرگز صفر نیست، یعنی ذره هرگز متوقف نشده یا تغییر جهت نمی دهد.

تعاریف: اگر $\mathbf{r}$ بردار مکان ذره ای باشد که در امتداد یک خم هموار در فضا حرکت می کند آنگاه

$$\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

بردار سرعت ذره است که مماس بر خم است. در هر لحظه t، جهت $\mathbf{v}$ همان **جهت حرکت** است، اندازه $\mathbf{v}$ تندی ذره و مشتق $\mathbf{a}=d\mathbf{v}/dt$، در صورت وجود، **بردار شتاب** ذره است.

بطور خلاصه

۱- سرعت، مشتق مکان است: $\mathbf{v}=\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

۲- تندی، اندازه سرعت است: $|\mathbf{v}|=$ تندی

۳- شتاب، مشتق سرعت است: $\mathbf{a}=\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}=\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$

۴- بردار $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ جهت حرکت در لحظه t است.

مثال ۴: سرعت، تندی و شتاب ذره ای را بیابید که حرکتش در فضا با بردار مکان

$$\mathbf{r}(t)=2\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}+5\cos^2 t\,\mathbf{k}$$

مشخص می شود. بردار سرعت $\mathbf{v}(7\pi/4)$ را رسم کنید.

حل: بردارهای سرعت و شتاب در لحظه t عبارتند از

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)=-2\sin t\mathbf{i}+2\cos t\mathbf{j}-10\cos t\sin t\mathbf{k}$$
$$=-2\sin t\mathbf{i}+2\cos t\mathbf{j}-5\sin 2t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t)=\mathbf{r}''(t)=-2\cos t\mathbf{i}-2\sin t\mathbf{j}-10\cos 2t\mathbf{k}$$

و تندی عبارت است از

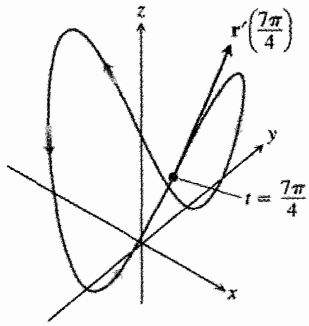
$$|\mathbf{v}(t)|=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2+(-5\sin 2t)^2}$$
$$=\sqrt{4+25\sin^2 2t}$$

در لحظه $t=7\pi/4$ داریم

$$|\mathbf{v}(7\pi/4)|=\sqrt{29} \quad \text{و} \quad \mathbf{a}(7\pi/4)=-\sqrt{2}\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}(7\pi/4)=\sqrt{2}\mathbf{i}+\sqrt{2}\mathbf{j}+5\mathbf{k}$$

شکل خم حرکت و بردار سرعت در لحظه $t=7\pi/4$ در شکل ۱۳-۷ نشان داده شده است.



شکل۱۳-۷: خم و بردار سرعت در لحظه $t=7\pi/4$ برای حرکت مذکور در مثال ۴.

سرعت یک ذره متحرک را می توانیم به صورت حاصلضرب تندی آن ر جهت حرکت بیان کنیم

$$\text{سرعت}=|\mathbf{v}|\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)=(\text{تندی})(\text{جهت})$$

قواعد مشتق گیری

چون مشتقات توابع برداری را می توان به صورت مؤلفه به مؤلفه حساب کرد قواعد مشتق گیری از توابع برداری با قواعد مشتق گیری از توابع عددی شکل یکسانی دارند.

قواعد مشتق گیری از توابع برداری

فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ توابع برداری مشتق پذیر از t، $\mathbf{C}$ برداری ثابت، c عددی دلخواه و f یک تابع عددی مشتق پذیر باشد.

۱- قاعده تابع ثابت: $\dfrac{d}{dt}\mathbf{C}=\mathbf{0}$

۲- قواعد مضرب عددی: $\dfrac{d}{dt}\left[c\mathbf{u}(t)\right]=c\mathbf{u}'(t)$

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\mathbf{u}(t)\right]=f'(t)\mathbf{u}(t)+f(t)\mathbf{u}'(t)$$

۳- قاعده مجموع: $\dfrac{d}{dt}\left[\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)\right]=\mathbf{u}'(t)+\mathbf{v}'(t)$

۴- قاعده تفاضل: $\dfrac{d}{dt}\left[\mathbf{u}(t)-\mathbf{v}(t)\right]=\mathbf{u}'(t)-\mathbf{v}'(t)$

۵- قاعده حاصلضرب عددی:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{u}(t).\mathbf{v}(t)\right]=\mathbf{u}'(t).\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t).\mathbf{v}'(t)$$

۶- قاعده حاصلضرب برداری[1]:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)\right]=\mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$$

۷- قاعده زنجیری: $\frac{d}{dt}\left[\mathbf{u}(f(t))\right]=f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$

قواعد مربوط به حاصلضرب های عددی و برداری و قاعده زنجیری را اثبات می کنیم اما قواعد مربوط به تابع ثابت، مضرب عددی، مجموع و تفاضل را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم.

اثبات قاعده حاصلضرب عددی: فرض کنید

$$\mathbf{u}=u_1(t)\mathbf{i}+u_2(t)\mathbf{j}+u_3(t)\mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{v}=v_1(t)\mathbf{i}+v_2(t)\mathbf{j}+v_3(t)\mathbf{k}$$

در این صورت

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}.\mathbf{v})=\frac{d}{dt}(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$$
$$=\underbrace{u_1'v_1+u_2'v_2+u_3'v_3}_{\mathbf{u}'.\mathbf{v}}+\underbrace{u_1v_1'+u_2v_2'+u_3v_3'}_{\mathbf{u}.\mathbf{v}'}$$

اثبات قاعده حاصلضرب برداری: برای اثبات این قاعده از اثبات قاعده حاصلضرب توابع عددی الگو می گیریم. طبق تعریف مشتق،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\lim_{h\to0}\frac{\mathbf{u}(t+h)\times\mathbf{v}(t+h)-\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)}{h}$$

برای تبدیل این کسر به کسری معادل که شامل خارج قسمت های تفاضل مشتقات $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ باشد $\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t+h)$ را به صورت و مخرج اضافه و کم می کنیم. در این صورت

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$$
$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{\mathbf{u}(t+h)\times\mathbf{v}(t+h)-\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t+h)}{h}+\frac{\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t+h)-\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)}{h}\right]$$
$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{\mathbf{u}(t+h)-\mathbf{u}(t)}{h}\times\mathbf{v}(t+h)+\mathbf{u}(t)\times\frac{\mathbf{v}(t+h)-\mathbf{v}(t)}{h}\right]$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\mathbf{u}(t+h)-\mathbf{u}(t)}{h}\times\lim_{h\to0}\mathbf{v}(t+h)+\lim_{h\to0}\mathbf{u}(t)\times\lim_{h\to0}\frac{\mathbf{v}(t+h)-\mathbf{v}(t)}{h}$$

آخرین مساوی به این دلیل برقرار است که حد حاصلضرب برداری دو تابع برداری حاصلضرب برداری حدهای آنهاست در صورتیکه این دو حد موجود باشند (تمرین **۳۲**). وقتی h به صفر میل می کند $\mathbf{v}(t+h)$ به $\mathbf{v}(t)$ میل می کند. چون $\mathbf{v}$، که در t مشتق پذیر است، در t پیوسته است (تمرین **۳۳**). پس دو کسر موجود به مقادیر $d\mathbf{u}/dt$ و $d\mathbf{v}/dt$ در t میل می کنند. بطور خلاصه،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\frac{d\mathbf{u}}{dt}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

اثبات قاعده زنجیری[2]: فرض کنید

$$\mathbf{u}(s)=a(s)\mathbf{i}+b(s)\mathbf{j}+c(s)\mathbf{k}$$

یک تابع برداری مشتق پذیر از s و $s=f(t)$ یک تابع عددی مشتق پذیر از t است. در این صورت، a، b و c توابع مشتق پذیر از t هستند و قاعده زنجیری مربوط به توابع حقیقی [حقیقی – مقدار] مشتق پذیر نتیجه می دهد:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{u}(s)\right]=\frac{da}{dt}\mathbf{i}+\frac{db}{dt}\mathbf{j}+\frac{dc}{dt}\mathbf{k}$$
$$=\frac{da}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{i}+\frac{db}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{j}+\frac{dc}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{k}$$
$$=\frac{ds}{dt}\left(\frac{da}{ds}\mathbf{i}+\frac{db}{ds}\mathbf{j}+\frac{dc}{ds}\mathbf{k}\right)$$
$$=\frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{u}}{ds}$$
$$=f'(t)\mathbf{u}'(f(t))\qquad(s=f(t))$$

---

[1]- وقتی از قاعده ضرب برداری استفاده می کنید بخاطر داشته باشید که ترتیب عامل ها را رعایت کنید. اگر در سمت چپ معادله $\mathbf{u}$ در اول قرار گرفته باشد در سمت راست معادله هم باید در اول قرار گیرد و گرنه علامت ها غلط خواهند شد.

[2]- گاهی برای سهولت عملیات جبری حاصلضرب عدد c و بردار $\mathbf{v}$ را به جای $c\mathbf{v}$ به صورت $\mathbf{v}c$ می نویسیم. با این کار مثلاً می توانیم قاعده زنجیری را به شکل آشنای زیر بنویسیم:

$$d\mathbf{u}/dt=(d\mathbf{u}/ds)(ds/dt)$$

که در آن $s=f(t)$.

توابع برداری با طول ثابت

وقتی ذره ای روی کره ای به مرکز مبداء حرکت می کند (شکل ۱۳-۸) بردار مکان طولی ثابت برابر با شعاع کره دارد. بردار سرعت $d\mathbf{r}/dt$، که مماس بر مسیر حرکت است، بر کره مماس بوده و در نتیجه بر $\mathbf{r}$ عمود است. این مطلب در مورد هر تابع برداری مشتق پذیر با طول ثابت صادق است: بردار و مشتق اول آن متعامدند. با محاسبه مستقیم داریم،

$$\mathbf{r}(t).\mathbf{r}(t)=c^2 \qquad (\left|\mathbf{r}(t)\right|=c \text{ ثابت است})$$

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}(t).\mathbf{r}(t)\right]=0 \qquad (\text{از طرفین مشتق می گیریم})$$

$$\mathbf{r}'(t).\mathbf{r}(t)+\mathbf{r}(t).\mathbf{r}'(t)=0$$

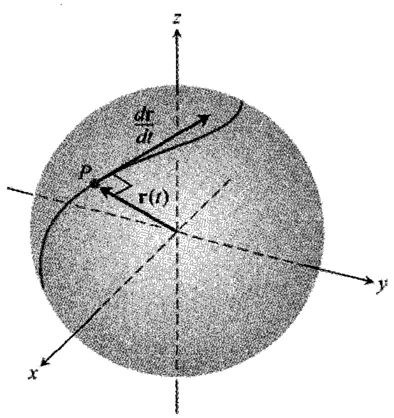
(قاعده ۵ به ازای $\mathbf{r}(t)=\mathbf{u}(t)=\mathbf{v}(t)$)

$$2\mathbf{r}'(t).\mathbf{r}(t)=0$$

بردارهای $\mathbf{r}'(t)$ و $\mathbf{r}(t)$ متعامدند، چون حاصلضرب عددی آنها صفر است. بطور خلاصه

اگر $\mathbf{r}$ یک تابع برداری مشتق پذیر از t با طول ثابت باشد آنگاه
$$\mathbf{r}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0 \qquad (۴)$$

در بخش ۱۳-۴ از این نکته بکرّات بهره خواهیم گرفت. عکس این مطلب نیز درست است (تمرین ۲۷ را ببینید).



شکل ۱۳-۸: اگر ذره ای روی یک کره چنان حرکت کند که مکان آن $\mathbf{r}$ تابعی مشتق پذیر از زمان باشد آنگاه $\mathbf{r}.(d\mathbf{r}/dt)=0$ است.

تمرین های ۱۳-۱

حرکت در صفحه

در تمرین های ۱-۴، $\mathbf{r}(t)$ مکان ذره ای در صفحه xy در لحظه t است. معادله ای بر حسب x و y بیابید که نمودار آن مسیر ذره باشد. سپس بردارهای سرعت و شتاب ذره را به ازای مقدار t داده شده بدست آورید.

۱- $\mathbf{r}(t)=(t+1)\mathbf{i}+(t^2-1)\mathbf{j}$ و $t=1$

۲- $\mathbf{r}(t)=\frac{t}{t+1}\mathbf{i}+\frac{1}{t}\mathbf{j}$ و $t=-1/2$

۳- $\mathbf{r}(t)=e^t\mathbf{i}+\frac{2}{9}e^{2t}\mathbf{j}$ و $t=ln3$

۴- $\mathbf{r}(t)=(\cos 2t)\mathbf{i}+(3\sin 2t)\mathbf{j}$ و $t=0$

در تمرین های ۵-۸ بردارهای مکان ذراتی که در امتداد خمهای مختلف در صفحه xy حرکت می کنند داده شده است. در هر مورد، بردارهای سرعت و شتاب را در لحظات خواسته شده بدست آورده و آنها را به صورت بردارهایی روی خم رسم کنید.

۵- **حرکت روی دایره** $x^2+y^2=1$

$$\mathbf{r}(t)=(\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}; \quad t=\pi/4\,,\pi/2$$

۶- **حرکت روی دایره** $x^2+y^2=16$

$$\mathbf{r}(t)=\left(4\cos\frac{t}{2}\right)\mathbf{i}+\left(4\sin\frac{t}{2}\right)\mathbf{j}; \quad t=\pi,\ 3\pi/2$$

۷- **حرکت روی چرخزاد** $x=t-\sin t$، $y=1-\cos t$.

$$\mathbf{r}(t)=(t-\sin t)\mathbf{i}+(1-\cos t)\mathbf{j}; \quad t=\pi,\ 3\pi/2$$

۸- **حرکت روی سهمی** $y=x^2+1$

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+(t^2+1)\mathbf{j}; \quad t=-1,0,1$$

حرکت در فضا

در تمرین های ۹-۱۴، $\mathbf{r}(t)$ مکان ذره ای در فضا در لحظه t

است. بردارهای سرعت و شتاب ذره را بیابید. سپس تندی و جهت حرکت ذره را در مقدار t داده شده بدست آورید. سرعت ذره را در آن لحظه به صورت حاصلضرب تندی آن در جهت حرکتش بنویسید.

۹- $t=1$ و $\mathbf{r}(t)=(t+1)\mathbf{i}+(t^2-1)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$

۱۰- $t=1$ و $\mathbf{r}(t)=(1+t)\mathbf{i}+\frac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j}+\frac{t^3}{3}\mathbf{k}$

۱۱- $t=\pi/2$ و $\mathbf{r}(t)=(2\cos t)\mathbf{i}+(3\sin t)\mathbf{j}+4t\mathbf{k}$

۱۲- $t=\pi/6$ و $\mathbf{r}(t)=(\sec t)\mathbf{i}+(\tan t)\mathbf{j}+\frac{4}{3}t\mathbf{k}$

۱۳- $t=1$ و $\mathbf{r}(t)=(2\ln(t+1))\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+\frac{t^2}{2}\mathbf{k}$

۱۴- $t=0$ و $\mathbf{r}(t)=(e^{-t})\mathbf{i}+(2\cos 3t)\mathbf{j}+(2\sin 3t)\mathbf{k}$

در تمرین های ۱۵-۱۸، $\mathbf{r}(t)$ مکان ذره ای در فضا در لحظه t است. زاویه بین بردارهای سرعت و شتاب را در لحظه $t=0$ بدست آورید.

۱۵- $\mathbf{r}(t)=(3t+1)\mathbf{i}+\sqrt{3t}\,\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$

۱۶- $\mathbf{r}(t)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-16t^2\right)\mathbf{j}$

۱۷- $\mathbf{r}(t)=\left(\ln(t^2+1)\right)\mathbf{i}+\left(\tan^{-1}t\right)\mathbf{j}+\sqrt{t^2+1}\,\mathbf{k}$

۱۸- $\mathbf{r}(t)=\frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\mathbf{i}+\frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\mathbf{j}+\frac{1}{3}t\mathbf{k}$

مماس بر خم

همانطور که در متن درس اشاره شد **خط مماس** بر خم هموراری چون $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$ در $t=t_0$ خطی است که از نقطه $(f(t_0),g(t_0),h(t_0))$ می گذرد و با $\mathbf{v}(t_0)$، بردار سرعت خم در t_0 ، موازی است. در تمرین های ۱۹- ۱۲ معادلات پارامتری خطی را بیابید که در مقدار پارامتر داده شده $t=t_0$ بر خم داده شده مماس است.

۱۹- $t_0=0$ و $\mathbf{r}(t)=(\sin t)\mathbf{i}+(t^2-\cos t)\mathbf{j}+e^t\mathbf{k}$

۲۰- $t_0=2$ و $\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i}+(2t-1)\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$

۲۱- $t_0=1$ و $\mathbf{r}(t)=\ln t\mathbf{i}+\frac{t-1}{t+2}\mathbf{j}+t\ln t\mathbf{k}$

۲۲- $t_0=\frac{\pi}{2}$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+(\sin 2t)\mathbf{k}$

نظریه و مثال ها

۲۳- **حرکت بر روی دایره.** هر یک از معادلات زیر در قسمت های (الف) تا (ث) حرکت ذراتی را توصیف می کنند که مسیر یکسانی دارند، یعنی دایره واحد $x^2+y^2=1$. با اینکه مسیر تمام ذرات در قسمت های (الف) تا (ث) یکی است اما رفتار یا «دینامیک» ذرات با هم متفاوت است. برای هر ذره به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱- آیا تندی ذره ثابت است؟ اگر چنین است تندی ثابت آن چقدر است؟

۲- آیا بردار شتاب ذره همواره بر بردار سرعت آن عمود است؟

۳- حرکت ذره حول دایره ساعتگرد است یا پاد ساعتگرد؟

۴- آیا ذره از نقطه $(1,0)$ شروع به حرکت می کند؟

(الف)- $t\ge 0$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}$

(ب)- $t\ge 0$ و $\mathbf{r}(t)=\cos(2t)\mathbf{i}+\sin(2t)\mathbf{j}$

(پ)- $t\ge 0$ و $\mathbf{r}(t)=\cos(t-\pi/2)\mathbf{i}+\sin(t-\pi/2)\mathbf{j}$

(ت)- $t\ge 0$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}-(\sin t)\mathbf{j}$

(ث)- $t\ge 0$ و $\mathbf{r}(t)=\cos(t^2)\mathbf{i}+\sin(t^2)\mathbf{j}$

۲۴- **حرکت بر روی دایره.** نشان دهید که تابع برداری

$$\mathbf{r}(t)=(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})+\cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right)+\sin t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$$

حرکت ذره ای را توصیف می کند که بر روی دایره ای به شعاع ۱ و به مرکز $(2,2,1)$ واقع در صفحه $x+y-2z=2$ حرکت می کند.

۲۵- **حرکت برروی سهمی.** ذره ای بر روی سهمی $y=2x$ از چپ به راست با تندی ثابت ۵ واحد بر ثانیه حرکت می کند. سرعت ذره را هنگام عبور از نقطه $(2,2)$ بدست آورید.

۲۶- **حرکت بر روی سیکلوئید (چرخزاد).** ذره ای در صفحه xy بگونه ای حرکت می کند که مکان آن در لحظه t عبارت است از

$$\mathbf{r}(t)=(t-\sin t)\mathbf{i}+(1-\cos t)\mathbf{j}$$

(الف)- $\mathbf{r}(t)$ را رسم کنید. خم حاصل یک چرخزاد است.

(ب)- مقادیر ماکسیمم و مینیمم $|\mathbf{v}|$ و $|\mathbf{a}|$ را بیابید (راهنمایی: ابتدا مقادیر اکسترمم (فرینه) $|\mathbf{v}|^2$ و $|\mathbf{a}|^2$ را یافته و بعد جذر بگیرید).

۲۷- فرض کنید $\mathbf{r}$ یک تابع برداری مشتق پذیر از t باشد. نشان دهید که اگر به ازای تمام مقادیر t، $\mathbf{r}.d\mathbf{r}/dt=0$ باشد، $|\mathbf{r}|$ ثابت است.

۲۸- **مشتقات حاصلضرب های عددی سه گانه.**

(الف)- نشان دهید که اگر $\mathbf{u}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ توابع برداری مشتق پذیر از t باشند آنگاه

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}.\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\frac{d\mathbf{u}}{dt}.\mathbf{v}\times\mathbf{w}+\mathbf{u}.\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{w}+\mathbf{u}.\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{w}}{dt}$$

(ب)- نشان دهید که

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)=\mathbf{r}.\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right)$$

(راهنمایی: از سمت چپ مشتق گرفته و به دنبال بردارهایی بگردید که حاصلضربشان صفر است).

۲۹- دو قاعده مضرب عددی را در مورد توابع برداری ثابت کنید.

۳۰- قواعد مجموع و تفاضل را در مورد توابع برداری ثابت کنید.

۳۱- **آزمون مؤلفه برای پیوستگی در یک نقطه.** نشان دهید که تابع برداری $\mathbf{r}$ که به صورت $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$ تعریف می شود در نقطه $t=t_0$ پیوسته است اگر و تنها اگر f، g و h در t_0 پیوسته باشند.

۳۲- **حد حاصلضرب های برداری توابع برداری.**

فرض کنید

$$\mathbf{r}_1(t)=f_1(t)\mathbf{i}+g_1(t)\mathbf{j}+h_1(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2(t)=f_2(t)\mathbf{i}+g_2(t)\mathbf{j}+h_2(t)\mathbf{k}$$

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{r}_1(t)=\mathbf{A} \quad \text{و} \quad \lim_{t\to t_0}\mathbf{r}_2(t)=\mathbf{B}$$

با بهره گیری از فرمول دترمینانی ضرب برداری و قاعده ضرب حدها برای توابع عددی نشان دهید که

$$\lim_{t\to t_0}\left(\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)\right)=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

۳۳- **توابع برداری مشتق پذیر پیوسته اند.** نشان دهید که اگر $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$ در $t=t_0$ مشتق پذیر باشد در t_0 پیوسته نیز هست.

۳۴- **قاعده تابع ثابت.** ثابت کنید که اگر $\mathbf{u}$ تابع برداری با مقدار ثابت $\mathbf{C}$ باشد آنگاه $d\mathbf{u}/dt=\mathbf{0}$.

مسائل رایانه ای

در تمرین های ۳۵-۳۸ به کمک یک نرم افزار ریاضی مراحل زیر را انجام دهید.

(الف)- خم فضایی را که با بردار مکان $\mathbf{r}$ تعریف می شود رسم کنید.

(ب)- مؤلفه های بردار سرعت $d\mathbf{r}/dt$ را بدست آورید.

(پ)- $d\mathbf{r}/dt$ را در نقطه مفروض t_0 محاسبه کرده و معادله خط مماس بر خم در $\mathbf{r}(t_0)$ را بدست آورید.

(ت)- خط مماس را به همراه خم روی بازه داده شده رسم کنید.

۳۵- $\mathbf{r}(t)=(\sin t-t\cos t)\mathbf{i}+(\cos t+t\sin t)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$

$t_0=3\pi/2$ و $0\le t\le 6\pi$

۳۶- $\mathbf{r}(t)=\sqrt{2}t\mathbf{i}+e^t\mathbf{j}+e^{-t}\mathbf{k}$

$t_0=1$ و $-2\le t\le 3$

۳۷- $\mathbf{r}(r)=(\sin 2t)\mathbf{i}+(\ln(1+t))\mathbf{j}+t\mathbf{k}$

$t_0=\pi/4$ و $0\le t\le 4\pi$

۳۸- $\mathbf{r}(r)=\left(\ln(t^2+2)\right)\mathbf{i}+\left(\tan^{-1}3t\right)\mathbf{j}+\sqrt{t^2+1}\mathbf{k}$

$t_0=3$ و $-3\le t\le 5$

در تمرین های ۳۹ و ۴۰ رفتار مارپیچ

$$\mathbf{r}(t)=(\cos at)\mathbf{i}+(\sin at)\mathbf{j}+bt\mathbf{k}$$

را با تغییر مقادیر a و b به صورت ترسیمی بررسی خواهید کرد. برای انجام مراحل مذکور در هر تمرین از یک نرم افزار ریاضی کمک بگیرید.

۳۹- b را برابر ۱ بگیرید. مارپیچ $\mathbf{r}(t)$ را به همراه خط مماس بر خم در $t=3\pi/2$ به ازای 4 و 2 و $\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{4}$ روی بازه $0\le t\le 4\pi$ رسم کنید. توضیح دهید که با افزایش b به

صورت فوق نمودار مارپیچ و مکان خط مماس چه تغییری می کند.

۴۰- a را برابر ۱ بگیرید. مارپیچ $\mathbf{r}(t)$ را به همراه خط مماس برخم در $t=3\pi/2$ به ازای 4 و 2 و $\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{4}$ روی بازه $0\le t\le 4\pi$ رسم کنید. توضیح دهید که با افزایش b به صورت فوق نمودار مارپیچ و مکان خط مماس چه تغییری می کند.

۱۳-۲- انتگرال توابع برداری؛ حرکت پرتابه

در این بخش به بررسی انتگرال توابع برداری و کاربرد آنها در حرکت بر روی مسیری در فضا یا صفحه می پردازیم.

انتگرال توابع برداری

تابع برداری مشتق پذیر $\mathbf{R}(t)$ **پادمشتق** (تابع اولیه) تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ روی بازه I است اگر در هر نقطه از I، $d\mathbf{R}/dt=\mathbf{r}$. اگر $\mathbf{R}$ پادمشتق $\mathbf{r}$ روی I باشد به صورت مؤلفه به مؤلفه می توان نشان داد که هر پادمشتق تابع r روی I به شکل $\mathbf{R}+\mathbf{C}$ است که $\mathbf{C}$ برداری ثابت است (تمرین ۴۱). مجموعه تمام پادمشتق های $\mathbf{r}$ روی I عبارت است از **انتگرال نامعین $\mathbf{r}$** روی I.

تعریف: انتگرال نامعین $\mathbf{r}$ نسبت به t عبارت است از مجموعه تمام توابع اولیه $\mathbf{r}$ که با $\int\mathbf{r}(t)dt$ نشان داده می شود. اگر $\mathbf{R}$ پادمشتقی برای $\mathbf{r}$ باشد آنگاه

$$\int\mathbf{r}(t)dt=\mathbf{R}(t)+\mathbf{C}$$

قواعد حسابی متداول انتگرال های نامعین در اینجا نیز کاربرد دارند.

مثال ۱: برای انتگرال گیری از یک تابع برداری از تک تک مؤلفه های آن انتگرال می گیریم.

$$\int\left((\cos t)\mathbf{i}+\mathbf{j}-2t\mathbf{k}\right)dt=\left(\int\cos t\,dt\right)\mathbf{i}+\left(\int dt\right)\mathbf{j}-\left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k} \quad (۱)$$

$$=(\sin t+C_1)\mathbf{i}+(t+C_2)\mathbf{j}-(t^2+C_3)\mathbf{k} \quad (۲)$$

$$=(\sin t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}-t^2\mathbf{k}+\mathbf{C} \qquad (\mathbf{C}=C_1\mathbf{i}+C_2\mathbf{j}-C_3\mathbf{k})$$

همانند انتگرالگیری از توابع عددی پیشنهاد می کنیم که مراحل معادلات (۱) و (۲) را کنار گذاشته و مستقیماً به سراغ شکل نهایی بروید. یعنی پادمشتق هر مؤلفه را یافته و در پایان یک بردار ثابت اضافه کنید.

انتگرال های معین توابع برداری بر حسب مؤلفه ها به بهترین نحو تعریف می شوند. این تعریف با نحوه محاسبه حدود و مشتقات توابع برداری سازگار است.

تعریف: اگر مؤلفه های $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$ روی بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر باشند آنگاه $\mathbf{r}$ نیز چنین است و انتگرال معین $\mathbf{r}$ از a تا b عبارت است از

$$\int_A^B\mathbf{r}(t)dt=\left(\int_a^b f(t)dt\right)\mathbf{i}+\left(\int_a^b g(t)dt\right)\mathbf{j}+\left(\int_a^b h(t)dt\right)\mathbf{k}$$

مثال ۲: مانند مثال ۱، از تک تک مؤلفه ها انتگرال می گیریم.

$$\int_0^\pi\mathbf{r}\left((\cos t)\mathbf{i}+\mathbf{j}-2t\mathbf{k}\right)dt$$
$$=\left(\int_0^\pi\cos t\,dt\right)\mathbf{i}+\left(\int_0^\pi dt\right)\mathbf{j}-\left(\int_0^\pi 2t\,dt\right)\mathbf{k}$$
$$=\left[\sin t\right]_0^\pi\mathbf{i}+\left[t\right]_0^\pi\mathbf{j}-\left[t^2\right]_0^\pi\mathbf{k}$$
$$=[0-0]\mathbf{i}+[\pi-0]\mathbf{j}-\left[\pi^2-0^2\right]\mathbf{k}$$
$$=\pi\mathbf{j}-\pi^2\mathbf{k}$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توابع برداری پیوسته بیان می کند که

$$\int_a^b\mathbf{r}(t)dt=\mathbf{R}(t)\Big]_a^b=\mathbf{R}(b)-\mathbf{R}(a)$$

که $\mathbf{R}$ هر پادمشتق $\mathbf{r}$ است به قسمتی که $\mathbf{R}'(t)=\mathbf{r}(t)$ (تمرین ۴۲).

مثال ۳: فرض کنید اطلاعی در مورد مسیر یک هواپیمای بی موتور (گلایدر) نداریم بلکه فقط می دانیم بردار شتاب

آن $\mathbf{a}(t)=-(3\cos t)\mathbf{i}-(3\sin t)\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ است. همینطور می دانیم که هواپیما در ابتدا (در لحظه $t=0$) با سرعت $\mathbf{v}(0)=3\mathbf{j}$ از نقطه $(3,0,0)$ عبور کرده است. مکان هواپیما را به صورت تابعی از t بدست آورید.

حل: هدف ما یافتن $\mathbf{r}(t)$ با دانستن اطلاعات زیر است

معادله دیفرانسیل:

$$\mathbf{a}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-(3\cos t)\mathbf{i}-(3\sin t)\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

شرایط اولیه: $\mathbf{v}(0)=3\mathbf{j}\ ,\quad \mathbf{r}(0)=3\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}$

با انتگرال گیری از دو طرف معادله دیفرانسیل نسبت به t خواهیم داشت

$$\mathbf{v}(t)=-(3\sin t)\mathbf{i}+(\cos 3t)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}+\mathbf{C}_1$$

با بهره گرفتن از $\mathbf{v}(0)=3\mathbf{j}$ بردار C_1 را می یابیم

$$3\mathbf{j}=-(3\sin 0)\mathbf{i}+(3\cos 0)\mathbf{j}+(0)\mathbf{k}+\mathbf{C}_1$$

$$3\mathbf{j}=3\mathbf{j}+\mathbf{C}_1$$

$$\mathbf{C}_1=\mathbf{0}$$

سرعت هواپیما به صورت تابعی از زمان عبارت است از

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}(t)=-(3\sin t)\mathbf{i}+(3\cos t)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$$

با انتگرال گیری از دو طرف این معادله دیفرانسیل بدست می آوریم

$$\mathbf{r}(t)=(3\cos t)\mathbf{i}+(3\sin t)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}+\mathbf{C}_2$$

اکنون با استفاده از شرط اولیه $\mathbf{r}(0)=3\mathbf{i}$ بردار $\mathbf{C}_2$ را بدست می آوریم

$$3\mathbf{i}=(3\cos 0)\mathbf{i}+(3\sin 0)\mathbf{j}+(0^2)\mathbf{k}+\mathbf{C}_2$$

$$3\mathbf{i}=3\mathbf{i}+(0)\mathbf{j}+(0)\mathbf{k}+\mathbf{C}_2$$

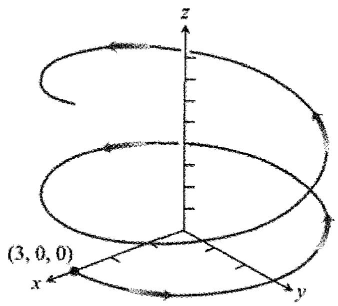
$$\mathbf{C}_2=\mathbf{0}$$

مکان هواپیما به صورت تابعی از t عبارت است از

$$\mathbf{r}(t)=(3\cos t)\mathbf{i}+(3\sin t)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$$

این معادله، معادله مسیر هواپیماست که در شکل ۱۳-۹ نشان داده شده است. با اینکه مسیر بواسطه ماهیت چرخشی آن حول محور z شبیه مارپیچ است اما به دلیل شیوه بالا رفتن آن، مارپیچ نیست. (در بخش ۱۳-۵ در این مورد بیشتر بحث می کنیم).

توجه کنید که همانطور که دیدیم در این مثال هر دو بردار ثابت انتگرال گیری یعنی $\mathbf{C}_1$ و $\mathbf{C}_2$، برابر $\mathbf{0}$ هستند. در تمرین های ۱۵ و ۱۶ مثال هایی ارائه کرده ایم که برای آنها بردارهای ثابت انتگرال گیری برابر $\mathbf{0}$ نیستند.



شکل۱۳-۹: با اینکه هواپیمای بی موتور مثال ۳ حول محور z می چرخد اما مسیر آن مارپیچی نیست.

معادلات برداری و پارامتری حرکت پرتابه ایده ال

مثال کلاسیکی انتگرال گیری از توابع برداری، بدست آوردن معادلات حرکت یک پرتابه است. در فیزیک حرکت پرتابی توصیف می کند که چگونه یک جسم تحت یک زاویه از یک مکان اولیه شلیک شده و فقط تحت تأثیر نیروی گرانی در یک صفحه مختصات قائم حرکت می کند. در این مثال کلاسیکی، اثرات هرگونه نیروی اصطکاکی بر روی جسم را نادیده می گیریم. چنین نیرویی با تندی و ارتفاع جسم تغییر می کند. همینطور از این واقعیت که نیروی گرانی با تغییر ارتفاع پرتابه اندکی تغییر می کند چشم پوشی می کنیم. علاوه بر اینها اثرات دور – برد زمین چرخان در زیر پرتابه را، که در مورد پرتاب موشک یا شلیک گلوله توپ وجود دارند، نادیده می گیریم. نادیده گرفتن این اثرات در اکثر موارد باعث می شود به تقریب معقولی از حرکت دست یابیم.

برای بدست آوردن معادلات حرکت پرتابه، فرض می کنیم پرتابه شبیه ذره ای رفتار می کند که در یک صفحه مختصات قائم حرکت می کند و فقط نیروی ثابت گرانی در طی پرواز پرتابه بر آن وارد می شود و جهت این نیرو همواره مستقیماً به سمت پایین است. فرض می کنیم پرتابه در لحظه $t=0$ با

سرعت اولیه $\mathbf{v}_0$ از مبداء به ربع اول پرتاب شده است (شکل ۱۳-۱۰). اگر $\mathbf{v}_0$ با راستای افق زاویه α بسازد داریم

$$\mathbf{v}_0=\left(|\mathbf{v}_0|\cos\alpha\right)\mathbf{i}+\left(|\mathbf{v}_0|\sin\alpha\right)\mathbf{j}$$

اگر برای تندی اولیه $|\mathbf{v}_0|$ از نماد ساده تر v_0 استفاده کنیم داریم

$$\mathbf{v}_0=\left(v_0\cos\alpha\right)\mathbf{i}+\left(v_0\sin\alpha\right)\mathbf{j} \qquad (۳)$$

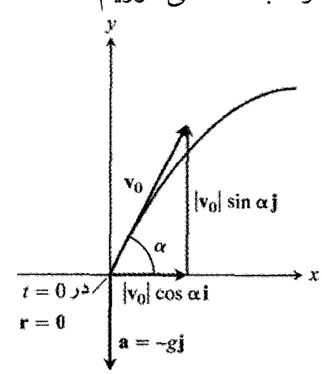
مکان اولیه پرتابه عبارت است از

$$\mathbf{r}_0=0\mathbf{i}+0\mathbf{j}=\mathbf{0} \qquad (۴)$$

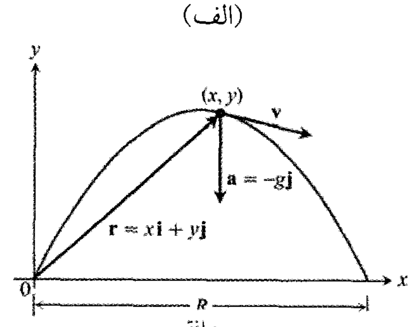
طبق قانون دوم نیوتن در حرکت، نیروی وارد بر پرتابه با حاصلضرب جرم پرتابه m در شتاب آن یعنی $m\left(d^2\mathbf{r}/dt^2\right)$ برابر است، که $\mathbf{r}$ بردار مکان پرتابه و t زمان است. اگر نیرو، فقط نیروی گرانشی $-mg\mathbf{j}$ باشد داریم

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-mg\mathbf{j} \qquad \text{و} \qquad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-g\mathbf{j}$$

که g شتاب گرانشی است، با حل مسئله مقدار اولیه زیر $\mathbf{r}$ را به صورت تابعی از t بدست می آوریم.



(الف)



(ب)

شکل ۱۳-۱۰: (الف)- مکان، سرعت، شتاب و زاویه پرتاب در لحظه $t=0$. (ب)- مکان، سرعت ، و شتاب در لحظه بعدی t.

معادله دیفرانسیل: $\quad \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-g\mathbf{j}$

شرایط اولیه: در $t=0$: $\quad \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}_0 \quad$ و $\quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_0$

با یک بار انتگرال گیری نتیجه می شود

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-(gt)\mathbf{j}+\mathbf{v}_0$$

و انتگرال گیری دوم نتیجه می دهد

$$\mathbf{r}=-\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}+\mathbf{v}_0t+\mathbf{r}_0$$

مقادیر $\mathbf{v}_0$ و $\mathbf{r}_0$ را از معادلات (۳) و (۴) جاگذاری می کنیم

$$\mathbf{r}=-\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}+\underbrace{\left(v_0\cos\alpha\right)t\mathbf{i}+\left(v_0\sin\alpha\right)t\mathbf{j}}_{\mathbf{v}_0t}+\mathbf{0}$$

با دسته بندی جملات خواهیم داشت

معادله حرکت پرتابه ایده ال

$$\mathbf{r}=\left(v_0\cos\alpha\right)t\mathbf{i}+\left(\left(v_0\sin\alpha\right)t-\frac{1}{2}at^2\right)\mathbf{j} \qquad (۵)$$

معادله (۵) معادله برداری حرکت پرتابه ایده ال است. زاویه α **زاویه پرتاب (زاویه شلیک، زاویه بلندی)** پرتابه و v_0 همانطور که قبلاً اشاره کردیم **تندی اولیه** پرتابه است. مؤلفه های $\mathbf{r}$ معادلات پارامتری حرکت را بدست می دهند

$$x=\left(v_0\cos\alpha\right)t \quad \text{و} \quad y=\left(v_0\sin\alpha\right)t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad (۶)$$

که x فاصله افقی طی شده و y ارتفاع پرتابه در لحظه $t\ge 0$ است.

مثال ۴: پرتابه ای از مبداء بر روی سطح زمین با تندی اولیه $500m/\sec$ و تحت زاویه پرتاب 60° شلیک می شود. مکان پرتابه را $10\sec$ بعد از شلیک تعیین کنید.

حل: معادله (۵) را به ازای $v_0=500$، $\alpha=60^\circ$، $g=9.8$ و $t=10$ بکار برده و مؤلفه های پرتابه را، $10\sec$ بعد از شلیک بدست می آوریم.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}&=\left(v_0\cos\alpha\right)t\mathbf{i}+\left((v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j}\\&=(500)(1/2)(10)\mathbf{i}\\&+\left((500)\left(\sqrt{3}/2\right)10-(1/2)(9.8)(100)\right)\mathbf{j}\\&\approx 2500\mathbf{i}+3840\mathbf{j}\end{aligned}$$

ده ثانیه بعد از شلیک، پرتابه حدوداً $3840m$ بالاتر از سطح زمین و به فاصله $2500m$ از مبداء قرار دارد.

همانطور که می توان از معادلات (۶) نتیجه گرفت پرتابه های ایده ال روی مسیرهای سهموی حرکت می کنند. اگر مقدار $t=x/(v_0\cos\alpha)$ را از معادله اول در معادله دوم جاگذاری کنیم معادله زیر در دستگاه مختصات دکارتی بدست می آید

$$y=-\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)x^2+(\tan\alpha)x$$

این معادله به شکل $y=ax^2+bx$ است و لذا نمودار آن به شکل سهمی می باشد.

پرتابه زمانی به بالاترین نقطه مسیرش می رسد که مؤلفه قائم سرعت آن صفر شود. وقتی پرتابه روی زمین افقی شلیک شود، زمانی فرود می آید که مؤلفه قائم آن در معادله (۵) صفر می شود و برد R فاصله مبداء تا نقطه برخورد به زمین است. در اینجا نتایج را بطور خلاصه ارائه می کنیم و در تمرین ۲۷ از شما می خواهیم درستی آنها را تحقیق کنید.

ارتفاع، زمان پرواز و برد حرکت پرتابه ایده ال

در حرکت پرتابه ایده ال، وقتی جسم روی سطحی افقی با تندی اولیه v_0 و زاویه پرتاب α از مبداء پرتاب شود داریم

ارتفاع اوج: $$y_{\max}=\frac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g}$$

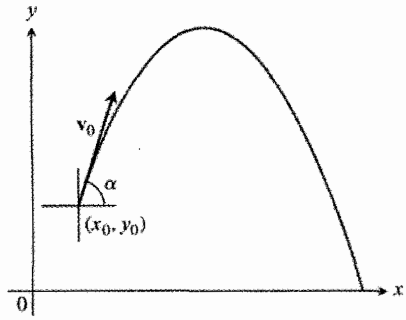
زمان پرواز: $$t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$$

برد: $$R=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

اگر پرتابه ایده ال خود را به جای مبداء از نقطه (x_0,y_0) شلیک کنیم (شکل ۱۳-۱۱) بردار مکان مسیر حرکت عبارت خواهد بود از

$$\mathbf{r}=\left(x_0+(v_0\cos\alpha)t\right)\mathbf{i}+\left(y_0+(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \tag{۷}$$

در تمرین ۲۹ از شما خواسته ایم درستی این موضوع را نشان دهید.



شکل۱۳-۱۱: مسیر پرتابه ای که از نقطه (x_0,y_0) با سرعت اولیه v_0 تحت زاویه α درجه نسبت به افق شلیک شده است.

حرکت پرتابه در معرض تندباد

مثال زیر نشان می دهد که چگونه نیروهای دیگر مؤثر بر یک پرتابه، مثل نیروی تندباد، را در محاسبه لحاظ می کنیم. همچنین فرض می کنیم مسیر توپ بیسبال در مثال ۵ در صفحه ای قائم قرار دارد.

مثال ۵: به یک توپ بیسبال وقتی در ارتفاع $3ft$ از زمین است ضربه ای زده می شود. توپ با تندی اولیه $152ft/\sec$ و تحت زاویه 20° نسبت به افق از چوگان جدا می شود. در لحظه ای که به توپ ضربه زده می شود تندبادی لحظه ای در جهت افقی و مخالف جهت حرکت توپ به سمت خارج میدان، می وزد و یک مؤلفه $-8.8\mathbf{i}(ft/\sec)$ به سرعت اولیه توپ می دهد. $(8.8ft/\sec=6mph)$.

(الف)- معادله برداری (بردار مکان) مسیر توپ را بیابید.

(ب)- توپ تا چه ارتفاعی بالا می رود و چه زمانی به ارتفاع اوج خود می رسد؟

(پ)- با فرض اینکه توپ در بین راه توسط کسی گرفته نشود برد و زمان پرواز آن را بدست آورید.

حل:

(الف)- با استفاده از معادله (۳) و با لحاظ کردن اثر تندباد، سرعت اولیه توپ عبارت است از

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0&=(v_0\cos\alpha)\mathbf{i}+(v_0\sin\alpha)\mathbf{j}-8.8\mathbf{i}\\&=\left(152\cos 20^\circ\right)\mathbf{i}+\left(152\sin 20^\circ\right)\mathbf{j}-(8.8)\mathbf{i}\\&=\left(152\cos 20^\circ-8.8\right)\mathbf{i}+\left(152\sin 20^\circ\right)\mathbf{j}\end{aligned}$$

مکان اولیه توپ $\mathbf{r}_0 = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ است. با انتگرال گیری از $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -g\mathbf{j}$ نتیجه می شود

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(gt)\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

انتگرال گیری دوم نتیجه می دهد

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

با جانشانی مقادیر $\mathbf{v}_0$ و $\mathbf{r}_0$ در این معادله بردار مکان توپ بدست می آید

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0\\ &= -16t^2\mathbf{j} + \left(152\cos 20^\circ - 8.8\right)t\mathbf{i} + \left(152\sin 20^\circ\right)t\mathbf{j} + 3\mathbf{j}\\ &= \left(152\cos 20^\circ - 8.8\right)t\mathbf{i} + \left(3 + \left(152\sin 20^\circ\right)t - 16t^2\right)\mathbf{j}\end{aligned}$$

(ب)- توپ زمانی به بالاترین نقطه مسیرش می رسد که مؤلفه قائم سرعت آن صفر می شود، یا

$$\frac{dy}{dt} = 152\sin 20^\circ - 32t = 0$$

با حل این معادله نسبت به t بدست می آوریم

$$t = \frac{152\sin 20^\circ}{32} \approx 1.62\,\text{sec}$$

این زمان را در مؤلفه قائم $\mathbf{r}$ جاگذاری می کنیم تا ماکسیمم ارتفاع (ارتفاع اوج) بدست آید

$$\begin{aligned}y_{\max} &= 3 + \left(152\sin 20^\circ\right)(1.62) - 16(1.62)^2\\ &\approx 45.2ft\end{aligned}$$

یعنی ارتفاع اوج توپ حدود $42.2ft$ است که حدود $1.6\,\text{sec}$ بعد از ضربه زدن به آنجا می رسد.

(پ)- برای یافتن لحظه فرود توپ به زمین مؤلفه قائم $\mathbf{r}$ را برابر با صفر قرار داده و معادله را نسبت به t حل می کنیم

$$3 + \left(152\sin 20^\circ\right)t - 16t^2 = 0$$

$$3 + (51.99)t - 16t^2 = 0$$

مقادیر جواب ها حدوداً عبارتند از $t = 3.3\,\text{sec}$ و $t = -0.06\,\text{sec}$. با جانشانی زمان مثبت در مؤلفه افقی $\mathbf{r}$ برد توپ بدست می آید

$$\begin{aligned}R &= \left(152\cos 20^\circ - 8.8\right)(3.3)\\ &\approx 442ft\end{aligned}$$

بنابراین برد افقی حدود $442ft$ و زمان پرواز حدود $3.3\,\text{sec}$ است.

در تمرین های ۳۷ و ۳۸ حرکت پرتابه را در حالتی بررسی می کنیم که مقاومت هوا وجود داشته و باعث کند شدن حرکت توپ می شود.

تمرین های ۱۳-۲

انتگرال گیری از توابع برداری

در تمرین های ۱-۱۰ انتگرال ها را محاسبه کنید.

۱- $\int_0^1 \left[t^3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}\right]dt$

۲- $\int_1^2 \left[(6-6t)\mathbf{i} + 3\sqrt{t}\,\mathbf{j} + \left(\frac{4}{t^2}\right)\mathbf{k}\right]dt$

۳- $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[(\sin t)\mathbf{i} + (1+\cos t)\mathbf{j} + \left(\sec^2 t\right)\mathbf{k}\right]dt$

۴- $\int_0^{\pi/3} \left[(\sec t\tan t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + (2\sin t\cos t)\mathbf{k}\right]dt$

۵- $\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{1}{5-t}\mathbf{j} + \frac{1}{2t}\mathbf{k}\right]dt$

۶- $\int_0^1 \left[\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\mathbf{k}\right]dt$

۷- $\int_0^1 \left[te^{t^2}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right]dt$

۸- $\int_1^{\ln 3} \left[te^t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}\right]dt$

۹- $\int_0^{\pi/2} \left[\cos t\mathbf{i} - \sin 2t\mathbf{j} + \sin^2 t\mathbf{k}\right]dt$

۱۰- $\int_0^{\pi} \left[\sec t\mathbf{i} + \tan^2 t\mathbf{j} - \sin t\mathbf{k}\right]dt$

مسائل مقدار اولیه

در تمرین های ۱۱-۱۶ مسائل مقدار اولیه را حل کرده و $\mathbf{r}$ را به صورت یک تابع برداری از t بدست آورید.

۱۱- معادله دیفرانسیل: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -t\mathbf{i} - t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

شرایط اولیه: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

۱۲- معادله دیفرانسیل: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (180t)\mathbf{i} + \left(180t - 16t^2\right)\mathbf{j}$

شرایط اولیه: $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{j}$

۱۳- معادله دیفرانسیل:
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\mathbf{i}+e^{-t}\mathbf{j}+\frac{1}{t+1}\mathbf{k}$$
شرایط اولیه: $\mathbf{r}(0)=\mathbf{k}$

۱۴- معادله دیفرانسیل: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=(t^3+4t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}+2t^2\mathbf{k}$

شرایط اولیه: $\mathbf{r}(0)=\mathbf{i}+\mathbf{j}$

۱۵- معادله دیفرانسیل: $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-32\mathbf{k}$

شرایط اولیه: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\big|_{t=0}=8\mathbf{i}+8\mathbf{j}$ و $\mathbf{r}(0)=100\mathbf{k}$

۱۶- معادله دیفرانسیل: $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

شرایط اولیه: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\big|_{t=0}=\mathbf{0}$ و $\mathbf{r}(0)=10\mathbf{i}+10\mathbf{j}+10\mathbf{k}$

حرکت بر روی خط راست

۱۷- در لحظه $t=0$ ذره ای در نقطه (۳و ۲ و ۱) واقع است این ذره که بر روی خطی راست به نقطه (۴و۱و۴) می رود در نقطه (۳و ۲ و ۱) تندی ۲ دارد و شتاب آن ثابت و برابر $3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ است. معادله ای برای بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ ذره در لحظه t بیابید.

۱۸- ذره ای که بر روی یک خط راست حرکت می کند در لحظه $t=0$ در نقطه (۲ و ۱- و۱) واقع است و تندی ۲ دارد. این ذره با شتاب ثابت $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ به سمت نقطه (۳و ۰ و ۳) می رود. بردار مکان آن در لحظه t، $\mathbf{r}(t)$ ، را بدست آورید.

حرکت پرتابه

پرتابه هایی را که در تمرین های زیر مورد بررسی قرار می گیرند به صورت ایده ال در نظر بگیرید مگر اینکه چیز دیگری گفته شده باشد. فرض کنید تمام زاویه های پرتاب نسبت به افق اندازه گیری می شوند. همینطور فرض کنید تمام پرتابه ها از مبداء و روی سطحی افقی پرتاب می شوند مگر اینکه چیز دیگری گفته شده باشد.

۱۹- **زمان حرکت.** پرتابه ای با تندی $840m/\sec$ تحت زاویه 60° پرتاب می شود. چه مدت طول می کشد تا فاصله افقی $21km$ را طی کند؟

۲۰- **یافتن تندی دهانه تفنگ.** تندی دهانه تفنگی را بدست آورید که ماکسیمم برد آن $24.5km$ است.

۲۱- **زمان و ارتفاع پرواز.** پرتابه ای با تندی اولیه $500m/\sec$ و تحت زاویه بلندی 45° شلیک می شود.

(الف)- پرتابه بعد از چه مدت و در چه فاصله ای به زمین خواهد خورد؟

(ب)- وقتی پرتابه فاصله افقی $5km$ را طی کرده است در چه ارتفاعی از زمین قرار دارد؟

(پ)- بیشترین ارتفاعی که پرتابه می رسد چقدر است؟

۲۲- **پرتاب توپ بیسبال.** توپ بیسبالی از روی سکویی که از زمین $32ft$ ارتفاع دارد تحت زاویه 30° نسبت به افق به بالا پرتاب می شود. اگر تندی اولیه توپ $32ft/\sec$ باشد بعد از چه مدت و در چه فاصله ای از محل پرتاب به زمین برخورد خواهد کرد؟

۲۳- **شلیک توپ گلف.** یک تفنگ فنری در سطح زمین توپ گلفی را تحت زاویه 45° شلیک می کند. توپ $10m$ آن طرف تر فرود می آید.

(الف)- تندی اولیه توپ چقدر بوده است؟

(ب)- برای همین تندی اولیه، دو زاویه شلیک بیابید که برد $6m$ بدست می دهند.

۲۴- **باریکه الکترونی.** الکترونی در لامپ تصویر تلویزیون با تندی $5\times10^6 m/\sec$ به سمت جلوی لامپ (صفحه تلویزیون) در فاصله $40cm$ به صورت افقی شلیک می شود. الکترون قبل از برخورد به صفحه حدوداً چه مقدار پایین می آید؟

۲۵- **زاویه های شلیک با برد یکسان.** تندی اولیه پرتابه ای $400m/\sec$ است. به ازای کدام دو زاویه پرتاب، پرتابه به هدفی در فاصله افقی $16km$ و هم سطح با تفنگ برخورد خواهد کرد؟

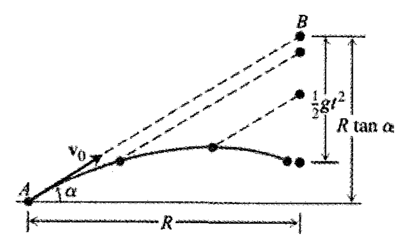
۲۶- **برد و ارتفاع برحسب تندی.**

(الف)- نشان دهید تحت یک زاویه پرتاب معین با دو برابر شدن تندی اولیه پرتابه، برد آن ۴ برابر می شود.

(ب)- تندی اولیه یک پرتابه را حدوداً چند درصد باید افزایش دهیم تا ارتفاع و برد آن دو برابر شود.

۲۷- درستی نتایج ارائه شده در متن (بعد از مثال ۴) برای، ارتفاع اوج، زمان پرواز و برد حرکت پرتابه ایده ال را تحقیق کنید.

۲۸- برخورد تیله ها. شکل زیر آزمایشی را با دو تیله نشان می دهد. تیله A با زاویه پرتاب α و تندی اولیه v_0 به سمت تیله B پرتاب شده است. در همان لحظه، تیله B از ارتفاع $R\tan\alpha$ واحد مستقیماً در بالای نقطه ای به فاصله R واحد از A از حالت سکون رها شده است، مشاهده می شود که مقدار v_0 هر چه باشد تیله ها به هم برخورد می کنند. آیا این یک تصادف محض است یا اینکه باید این اتفاق بیفتد؟ دلایل خود را ذکر کنید.



۲۹- شلیک از نقطه (x_0,y_0) . معادلات

$$x = x_0 + (v_0\cos\alpha)t$$

$$y = y_0 + (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

(معادله (۷) متن کتاب را ببینید) را با حل مسئله مقدار اولیه زیر و یافتن بردار $\mathbf{r}$ در صفحه بدست آورید.

معادله دیفرانسیل: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$

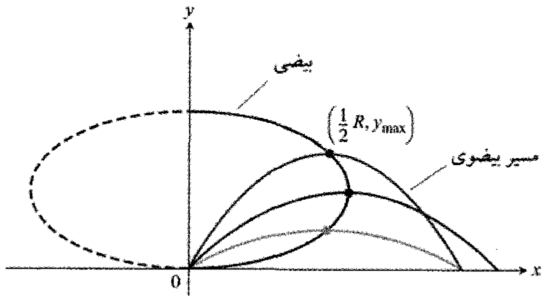
شرایط اولیه: $\mathbf{r}(0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = (v_0\cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0\sin\alpha)\mathbf{j}$$

۳۰- نقطه اوج مسیرها. برای پرتابه ای که از سطح زمین تحت زاویه پرتاب α و تندی اولیه v_0 پرتاب می شود α را به عنوان یک متغیر و v_0 را به عنوان یک ثابت معین در نظر بگیرید. برای هر α در بازه $0 < \alpha < \pi/2$ مطابق شکل زیر یک مسیر سهموی بدست می آوریم. نشان دهید که نقاط واقع در صفحه که ارتفاع های اوج این مسیرهای سهموی را نشان می دهند همگی روی یک بیضی با معادله زیر قرار دارند

$$x^2 + 4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$$

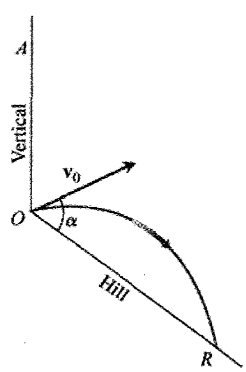
که $z \geq 0$ است.



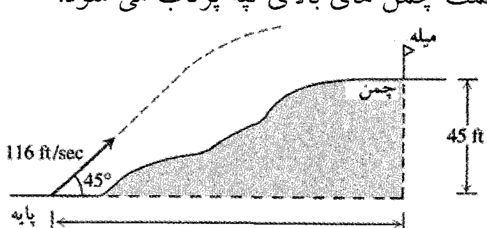
۳۱- پرتاب رو به پایین. پرتابه ایده الی مطابق شکل زیر مستقیماً به سمت پایین یک سطح شیبدار پرتاب می شود.

(الف)- نشان دهید که بیشترین برد روی سطح شیبدار زمانی بدست می آید که بردار سرعت اولیه به عنوان نیمساز زاویه AOR باشد.

(ب)- اگر پرتابه به جای اینکه به سمت پایین سطح شیبدار پرتاب شود به سمت بالای سطح پرتاب می شد به ازای چه زاویه پرتابی برد آن ماکسیمم می شد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.



۳۲- چمن مرتفع. توپ گلفی بعد از ضربه زدن با تندی اولیه $116ft/\sec$ و تحت زاویه بلندی 45° از روی پایه مطابق شکل زیر به سمت چمن های بالای تپه پرتاب می شود.



مقیاس رعایت نشده است

ارتفاع تپه نسبت به پایه $45ft$ است. با فرض اینکه توپ به میله

گلف که در فاصله افقی $369ft$ قرار دارد نمی رسد، نسبت به میله در چه نقطه ای فرود خواهد آمد؟

۳۳- والیبال. بازیکنی به یک توپ والیبال در ارتفاع $4ft$ از سطح زمین و در فاصله $12ft$ از تور ضربه می زند. ارتفاع تور $6ft$ است. توپ نقطه پرتاب را با سرعت اولیه $35ft/\sec$ و تحت زاویه 27° ترک می کند و بدون اینکه بازیکنان تیم مقابل با آن تماس پیدا کنند در سمت مقابل به زمین می نشیند.

(الف)- معادله برداری مسیر توپ را بدست آورید.

(ب)- توپ تا چه ارتفاعی بالا می رود و چه زمانی به ارتفاع اوج خود می رسد؟

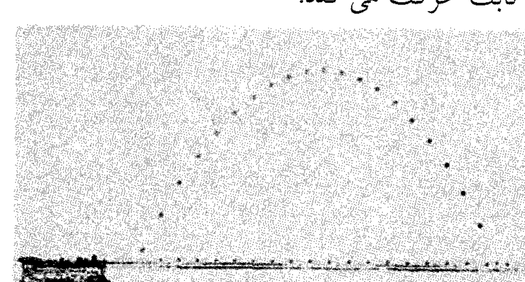
(پ)- برد و زمان پرواز توپ را بدست آورید.

(ت)- چه زمانی ارتفاع توپ از زمین $7ft$ است؟ در این لحظه فاصله (زمینی) توپ از محلی که فرود خواهد آمد چقدر است؟

(ث)- فرض کنید تور را تا ارتفاع $8ft$ بالا ببریم. آیا چیزی تغییر می کند؟ توضیح دهید.

۳۴- پرتاب وزنه. در سال ۱۹۸۷ در مسکو ناتالیا لیسوسکایا با پرتاب وزنه ۸ پوند و ۱۳ اونسی به اندازه ۷۳ فوت و ۱۰ اینچ رکود جدیدی را در پرتاب وزنه زنان به ثبت رساند. با فرض اینکه او وزنه را تحت زاویه 40° نسبت به افق و از ارتفاع $6.5ft$ نسبت به زمین، پرتاب کرده باشد تندی اولیه وزنه چقدر بوده است.

۳۵- قطار نمونه. شکل زیر که یک عکس چند فلشی است موتور قطار نمونه ای را نشان می دهد که روی مسیری راست با تندی ثابت حرکت می کند.



همچنانکه قطار پیش می رود تیله بوسیله یک فنر در دودکش موتور به هوا پرتاب می شود. تیله که با همان تندی رو به جلوی موتور به حرکت ادامه می دهد یک ثانیه بعد از پرتاب شدن مجدداً بر روی موتور می افتد. زاویه مسیر تیله با راستای افق را محاسبه کرده و با استفاده از این اطلاعات تعیین کنید که تیله تا چه ارتفاعی بالا رفته و موتور با چه سرعتی در حرکت است.

۳۶- ضربه به توپ بیسبال در تندباد. به توپ بیسبالی در ارتفاع $2.5ft$ از زمین ضربه زده می شود. توپ با سرعت اولیه $145ft/\sec$ و تحت زاویه پرتاب 23° از چوگان (چوب) جدا می شود. در لحظه ای که به توپ ضربه زده می شود. تندبادی لحظه ای در خلاف جهت حرکت توپ می وزد و مؤلفه $-14\mathbf{i}(ft/\sec)$ را به سرعت اولیه توپ می افزاید. حصاری به ارتفاع $15ft$ در فاصله $300ft$ از بیس خانه در جهت پرواز قرار دارد.

(الف)- معادله برداری مسیر توپ را بیابید.

(ب)- توپ تا چه ارتفاعی بالا می رود و چه زمانی به ارتفاع اوج می رسد؟

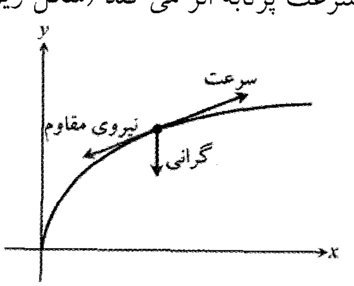
(پ)- برد و زمان پرواز توپ را بدست آورید. فرض کنید کسی توپ را در بین راه نمی گیرد.

(ت)- چه زمانی ارتفاع توپ $20ft$ است؟ وقتی توپ در این ارتفاع است فاصله افقی (زمینی) آن از بیس خانه چقدر است؟

(ث)- آیا بازیکن ضربه هوم ران (گل) زده است؟ توضیح دهید.

حرکت پرتابه در حضور مقاومت پس کشی خطی

نیروی اصلی مؤثر بر حرکت یک پرتابه، غیر از نیروی گرانش، مقاومت هواست. این نیروی کند کننده **نیروی مقاوم** است و در خلاف جهت سرعت پرتابه اثر می کند (شکل زیر را ببینید).



اما برای پرتابه هایی که با سرعت های نسبتاً کم در هوا حرکت می کنند نیروی مقاوم (با تقریب بسیار خوبی) متناسب با مقدار

سرعت (تندی) است (توان اول تندی) و لذا **نیروی مقاومت خطی** نامیده می شود.

۳۷- مقاومت خطی: معادلات

$$x = \frac{v_0}{k}\left(1-e^{-kt}\right)\cos\alpha$$

$$y = \frac{v_0}{k}\left(1-e^{-kt}\right)(\sin\alpha) + \frac{g}{k^2}\left(1-kt-e^{-kt}\right)$$

را با حل مسئله مقدار اولیه زیر نسبت به بردار $\mathbf{r}$ واقع در صفحه، بدست آورید.

معادله دیفرانسیل: $$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j} - k\mathbf{v} = -g\mathbf{j} - k\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

شرایط اولیه: $$\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$$

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{v}_0 = (v_0\cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0\sin\alpha)\mathbf{j}$$

ضریب مقاومت پس کشی k ثابتی مثبت، نشان دهنده مقاومت ناشی از چگالی هوا، v_0 و α تندی اولیه و زاویه پرتاب پرتابه و g شتاب گرانشی است.

۳۸- ضربه به توپ بیسبال در حضور مقاومت خطی. توپ بیسبال مثال **۵** را در حضور مقاومت خطی در نظر بگیرید (تمرین **۳۷** را ببینید). فرض کنید ضریب مقاومت پس کشی $k = 0.12$ است اما بادی نمی وزد.

(الف)- از تمرین **۳۷**، شکل برداری مسیر توپ را بیابید.

(ب)- توپ تا چه ارتفاعی بالا می رود و چه زمانی به ارتفاع اوج می رسد؟

(پ)- برد و زمان پرواز توپ را بدست آورید.

(ت)- چه زمانی ارتفاع توپ از زمین $30ft$ است؟ وقتی توپ در این ارتفاع است فاصله افقی از زمینی آن از بیس خانه چقدر است؟

(ث)- حصار دور زمین به ارتفاع $10ft$ در فاصله $240ft$ از بیس خانه در جهت پرواز توپ قرار دارد. بازیکن توپ گیر می تواند بالا پریده و هر توپی را که از ارتفاع تا $11ft$ از زمین عبور می کند بگیرد و مانع از عبور آن از بالای حصار شود. آیا بازیکن توپ زن ضربه هوم ران می زند (زمانیکه ضربه آنقدر قوی باشد که بازیکن توپ گیر نتواند توپ را بگیرد و توپ از حصار فراتر رود ضربه را هوم ران یا گل می گویند.)؟

نظریه و مثال ها

۳۹- ثابت کنید که توابع برداری انتگرال پذیر دارای خواص زیر هستند.

(الف)- قاعده مضرب عددی ثابت:

(هر مضرب عددی k) $$\int_a^b k\mathbf{r}(t)dt = k\int_a^b \mathbf{r}(t)dt$$

قاعده توابع برداری منفی با قرار دادن $k=-1$ به دست می آید

$$\int_a^b (-\mathbf{r}(t))dt = -\int_a^b \mathbf{r}(t)dt$$

(ب)- قواعد مجموع و تفاضل:

$$\int_a^b (\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)dt \pm \int_a^b \mathbf{r}_2(t)dt$$

(پ)- قواعد ضرب بردار ثابت:

(هر بردار ثابت $\mathbf{C}$) $$\int_a^b \mathbf{C}.\mathbf{r}(t)dt = \mathbf{C}.\int_a^b \mathbf{r}(t)dt$$

(هر بردار ثابت $\mathbf{C}$) $$\int_a^b \mathbf{C}\times\mathbf{r}(t)dt = \mathbf{C}\times\int_a^b \mathbf{r}(t)dt$$

۴۰- حاصلضرب توابع عددی و برداری. فرض کنید تابع عددی $u(t)$ و تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ هر دو در بازه $a \le t \le b$ تعریف شده اند.

(الف)- نشان دهید که اگر u و $\mathbf{r}$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند $u\mathbf{r}$ روی این بازه پیوسته است.

(ب)- اگر u و $\mathbf{r}$ هر دو روی بازه $[a,b]$ مشتق پذیر باشند نشان دهید که $u\mathbf{r}$ روی $[a,b]$ مشتق پذیر است و

$$\frac{d}{dt}(u\mathbf{r}) = u\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\frac{du}{dt}$$

۴۱-پاد مشتق های توابع برداری.

(الف)- با استفاده از نتیجه **۲** قضیه مقدار میانگین برای توابع عددی نشان دهید که اگر دو تابع برداری $\mathbf{R}_1(t)$ و $\mathbf{R}_2(t)$ روی بازه I مشتقات یکسان داشته باشند آنگاه این دو تابع در سراسر I به اندازه یک بردار ثابت با هم تفاوت دارند.

(ب)- با بهره گیری از نتیجه قسمت (الف) نشان دهید که اگر $\mathbf{R}(t)$ پادمشتقی برای $\mathbf{r}(t)$ روی I باشد آنگاه هر پادمشتق دیگر از $\mathbf{r}$ روی I برابر $\mathbf{R}(t)+\mathbf{C}$ است که $\mathbf{C}$ برداری ثابت است.

۴۲- **قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال.** قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع عددی با متغیر حقیقی در مورد توابع برداری با متغیر حقیقی نیز صادق است. این موضوع را ثابت کنید. برای این کار با بهره گیری از این قضیه برای توابع عددی ابتدا نشان دهید که اگر تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ در بازه $a \le t \le b$ پیوسته باشد آنگاه در هر نقطه t از (a,b) داریم

$$\frac{d}{dt}\int_a^t \mathbf{r}(\tau)d\tau=\mathbf{r}(t)$$

سپس با استفاده از نتیجه قسمت (ب) تمرین **۴۱** نشان دهید که اگر R پاد مشتقی از $\mathbf{r}$ روی بازه $[a,b]$ باشد آنگاه

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt=\mathbf{R}(b)-\mathbf{R}(a)$$

۴۳- **ضربه به توپ بیسبال در حضور مقاومت خطی و تحت تأثیر تندباد.** باز هم توپ بیسبال مثال **۵** را در نظر بگیرید. این بار فرض کنید ضریب مقاومت پس کشی ۰/۰۸ است و تندبادی لحظه ای در لحظه برخورد چوگان به توپ مؤلفه $-17.6\mathbf{i}(ft/\sec)$ را به سرعت اولیه آن می دهد.

(الف)- معادله برداری مسیر توپ را بیابید.

(ب)- توپ تا چه ارتفاعی بالا می رود و چه زمانی به ارتفاع اوج می رسد؟

(پ)_ برد و زمان پرواز توپ را بدست آورید.

(ت)- در چه لحظه ای توپ در ارتفاع $35ft$ است؟ وقتی توپ در این ارتفاع است فاصله افقی آن از بیس خانه چقدر است؟

(ث)- حصاری به ارتفاع $20ft$ به فاصله $380ft$ از بیس خانه در جهت پرواز توپ به دور زمین قرار دارد. آیا بازیکن ضربه هوم ران می زند؟ اگر پاسخ مثبت است چه تغییر در مؤلفه افقی سرعت اولیه توپ لازم است تا باعث شود توپ از زمین بازی خارج نشود؟ اگر پاسخ منفی است چه تغییری در مؤلفه افقی سرعت اولیه باید ایجاد شود تا هوم ران اتفاق بیفتد؟

۴۴- **ارتفاع بر حسب زمان.** نشان دهید که یک پرتابه در نصف زمانی که طول می کشد تا به ارتفاع اوج برسد به سه – چهارم ارتفاع اوجش می رسد.

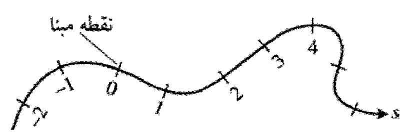
۱۳-۳- طول قوس در فضا

در این بخش و دو بخش بعدی جنبه های ریاضی شکل یک خم را مطالعه می کنیم که میزان تندی چرخش و پیچش آن را توصیف می کنند.

طول قوس درامتداد یک خم فضایی

یکی از ویژگی های خم های مسطح و فضایی هموار این است که آنها طولی قابل اندازه گیری دارند. این ویژگی باعث می شود بتوانیم محل نقاط روی این خم ها را با دادن فاصله جهت دار آنها، s، روی خم از یک نقطه مبنای دلخواه، مشخص کنیم. این همان روشی است که برای مشخص کردن محل نقاط روی محورهای مختصات با دادن فاصله جهتدار آنها از مبداء استفاده می کنیم (شکل **۱۳-۱۲**). در واقع همان کاری را می کنیم که در بخش **۱۱-۲** در مورد خم های مسطح انجام دادیم.

برای اندازه گیری فاصله روی یک خم هموار واقع در فضا، یک جمله z به فرمول مربوط به خم های واقع در صفحه اضافه می کنیم.



شکل۱۳-۱۲: خم های هموار را می توان مثل محورهای مختصات درجه بندی (مقیاس بندی) کرد، مختص هر نقطه فاصله جهتدار آن روی خم از یک نقطه مبنای از قبل انتخاب شده است.

تعریف: طول خم هموار

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},\quad a\le t\le b$$

که با افزایش t از $t=a$ به $t=b$ دقیقاً یک بار پیموده شده است برابر است با

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \qquad (1)$$

درست همانطور که در مورد خم های مسطح دیدیم، می توانیم طول یک خم واقع در فضا را با استفاده از معادلات پارامتری مناسب که شرایط بیان شده را برآورده می کنند، محاسبه کنیم.

در اینجا این مطلب را اثبات نمی کنیم.

جذر موجود در معادله (۱) همان $|\mathbf{v}|$، طول بردار سرعت $d\mathbf{r}/dt$، است. بنابراین می توانیم فرمول طول قوس را به شکل بسته تر بنویسیم.

فرمول طول قوس

$$L=\int_a^b |\mathbf{v}|dt \qquad (۲)$$

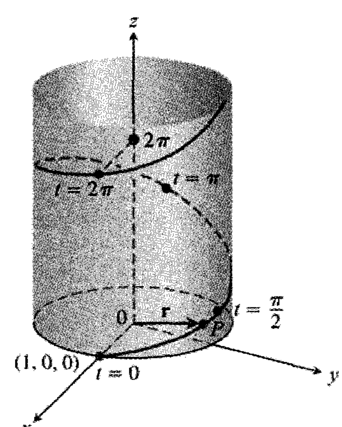
مثال ۱: هواپیمای بدون موتوری در امتداد پیچ (مارپیچ) $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ پرواز کرده و بالا می رود طول مسیر هواپیما از $t=0$ تا $t=2\pi$ چقدر است؟

حل: طول مسیری که طی این مدت پیموده می شود متناظر با یک دور کامل از پیچ است (شکل ۱۳-۱۳).

طول این بخش از خم برابر است با

$$L=\int_a^b |\mathbf{v}|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+(1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}dt=2\pi\sqrt{2} \qquad \text{(واحد طول)}$$

این طول $\sqrt{2}$ برابر محیط دایره ای در صفحه xy است که پیچ بر آن بنا شده است.



شکل ۱۳-۱۳: پیچ مثال ۱،
$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$.

اگر روی خم هموار C پارامتری شده با t نقطه مبنایی چون $P(t_0)$ انتخاب کنیم، هر مقدار t مشخص کننده نقطه ای چون $P(t)=(x(t),y(t),z(t))$ روی C و «فاصله جهتدار»

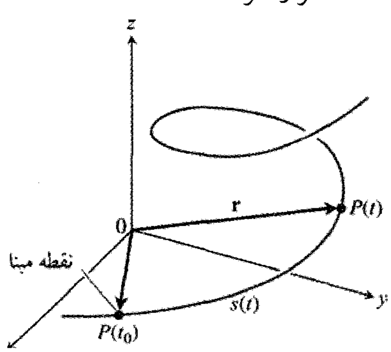
$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\mathbf{v}(\tau)|d\tau$$

است که بر روی C از نقطه مبنا اندازه گیری می شود (شکل ۱۳-۱۴). این همان تابع طول قوس است که در بخش **۱۱-۲** برای خمهای مسطح که مؤلفه z ندارند تعریف کردیم. اگر $t>t_0$ باشد $s(t)$ فاصله $P(t_0)$ تا $P(t)$ روی خم است. اگر $t<t_0$ باشد $s(t)$ منفی این فاصله است. هر مقدار s نقطه ای را روی C مشخص می کند و این، خم C را نسبت به s پارامتری می کند. s را **پارامتر طول قوس** خم می نامیم. مقدار این پارامتر در جهت افزایش t افزایش می یابد. خواهیم دید که پارامتر طول قوس در بررسی ماهیت چرخشی بودن و پیچشی بودن یک خم فضایی تأثیر ویژه ای دارد.

پارامتر طول قوس با نقطه مبنای $P(t_0)$

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{[x'(\tau)]^2+[y'(\tau)]^2+[z'(\tau)]^2}\,d\tau$$
$$=\int_{t_0}^{t}|\mathbf{v}(\tau)|d\tau \qquad (۳)$$

در معادله (۳) از حرف یونانی τ ("تو") به عنوان متغیر انتگرال گیری استفاده می کنیم زیرا حرف t قبلاً به عنوان حد بالایی مورد استفاده قرار گرفته است.



شکل۱۳-۱۴: فاصله جهتدار بر روی خم از $P(t_0)$ تا هر نقطه $P(t)$ برابر است با $s(t)=\int_{t_0}^{t}|\mathbf{v}(\tau)|d\tau$.

اگر خمی چون $r(t)$ قبلاً برحسب پارامتر t معلوم باشد و $s(t)$ تابع طول قوس باشد که از معادله (۳) بدست می آید ممکن است بتوانیم t را به صورت تابعی از s بدست آوریم: $t=t(s)$. در این صورت می توان خم را به جانشانی مقدار t مجدداً برحسب s پارامتری کرد: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t(s))$. در پارامتری سازی جدید هر نقطه واقع بر خم با فاصله جهتدار آن بر روی خم از نقطه مبنا مشخص می شود.

مثال۲: در این مثال واقعاً می توانیم خم را برحسب طول قوس پارامتری کنیم. اگر $t_0=0$ باشد پارامتر طول قوس در امتداد پیچ

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$$

از t_0 تا t عبارت است از

$$s(t)=\int_0^t|\mathbf{v}(\tau)|d\tau=\int_0^t\sqrt{2}\,d\tau=\sqrt{2}t$$

با حل این معادله نسبت به t داریم: $t=\frac{s}{\sqrt{2}}$. با جانشانی این مقدار در بردار مکان **r** معادله پارامتری زیر برحسب طول قوس برای پیچ بدست می آید

$$\mathbf{r}(t(s))=\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i}+\left(\sin\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}+\frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

برخلاف مثال ۲، دستیابی تحلیلی به معادله پارامتری برحسب طول قوس برای خمی که قبلاً بر حسب پارامتر دیگر t داده شده است عموماً کار مشکلی است. اما خوشبختانه به ندرت به فرمول دقیق $s(t)$ یا معکوس آن $t(s)$ نیاز پیدا می کنیم.

تندی(اندازه سرعت) روی یک خم هموار

از آنجا که مشتقات زیر رادیکال در معادله (۳) پیوسته اند (خم هموار است) طبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال s تابعی مشتق پذیر از t است و مشتق آن عبارت است از

$$\frac{ds}{dt}=|\mathbf{v}(t)| \qquad (۴)$$

معادله (۴) بیان می کند که تندی حرکت یک ذره روی مسیرش برابر است با اندازه **v**، و این با آنچه از قبل می دانیم سازگار است.

با اینکه نقطه مبنای $P(t_0)$ در تعریف s در معادله (۳) نقش دارد اما در معادله (۴) نقشی ندارد. آهنگ پیمودن فاصله روی مسیر توسط ذره به فاصله آن تا نقطه مبنا بستگی ندارد.

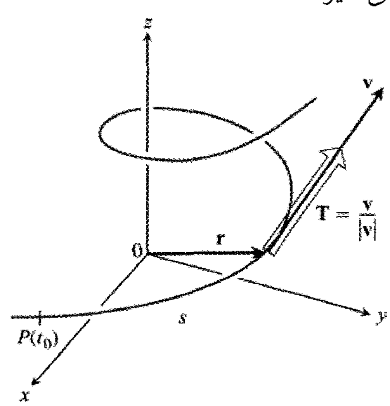
توجه کنید که $ds/dt>0$ ، زیرا طبق تعریف برای یک خم هموار $|\mathbf{v}|$ هرگز صفر نیست. یک بار دیگر می بینیم که s تابعی صعودی از t است.

بردار مماس واحد

از قبل می دانیم که بردار سرعت $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ بر خم $\mathbf{r}(t)$ مماس است و بنابراین بردار

$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

بردار واحدی مماس بر خم (هموار) است که **بردار مماس واحد** نامیده می شود(شکل۱۳-۱۵). مادامی که **v** تابعی مشتق پذیر از t است بردار مماس واحد **T** تابعی مشتق پذیر از t است. همانطور که در بخش **۱۳-۵** خواهیم دید **T** یکی از سه بردار واحدی است که در یک دستگاه مختصات (چارچوب مرجع) متحرک برای توصیف حرکت اجسام در سه بعد مورد استفاده قرار می گیرند.



شکل ۱۳-۱۵: بردار مماس واحد T با تقسیم v بر |v| بدست می آید.

مثال۳: بردار مماس واحد خم زیر را که نمایش دهنده مسیر هواپیمای مثال **۳** بخش **۱۳-۲** است بیابید.

$$\mathbf{r}(t)=(3\cos t)\mathbf{i}+(3\sin t)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$$

حل: در آن مثال بدست آوردیم

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-(3\sin t)\mathbf{i}+(3\cos t)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$$

و

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{9+4t^2}$$

بنابراین

$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=-\frac{3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}}\mathbf{i}+\frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}}\mathbf{j}+\frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}}\mathbf{k}$$

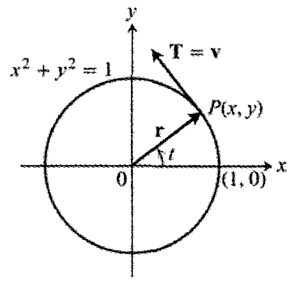
برای حرکت پادساعتگرد بردار

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}$$

حول دایره واحد می بینیم که بردار سرعت

$$\mathbf{v}=(-\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}$$

از قبل بردار واحد است و لذا $\mathbf{T}=\mathbf{v}$ (شکل ۱۳-۱۶).



شکل۱۳-۱۶: حرکت پاد ساعتگرد حول دایره واحد.

بردار سرعت، تغییر بردار مکان $\mathbf{r}$ نسبت به زمان t است اما بردار مکان چگونه نسبت به طول قوس تغییر می کند؟ به بیان دقیق تر مشتق $d\mathbf{r}/ds$ کدام است؟ چون برای خم هایی که در نظر می گیریم $ds/dt>0$ است، s یک به یک است و معکوسی دارد که t را به صورت تابعی مشتق پذیر از s بدست می دهد (بخش ۷-۱). مشتق این تابع معکوس برابر است با

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{ds/dt}=\frac{1}{|\mathbf{v}|}$$

این موضوع باعث می شود $\mathbf{r}$ تابعی مشتق پذیر از s باشد و مشتق آن را می توان با قاعده زنجیری به صورت زیر بدست آورد

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds}=\mathbf{v}\frac{1}{|\mathbf{v}|}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\mathbf{T} \qquad (۵)$$

این معادله بیانگر این است که $d\mathbf{r}/ds$ بردار مماس واحد در جهت بردار سرعت $\mathbf{v}$ است (شکل ۱۳-۱۵).

تمرین های ۱۳-۳

یافتن بردارهای مماس و طول ها

در تمرین های ۱-۸ بردار مماس واحد خم را بیابید. همچنین طول بخش مشخص شده از خم را بدست آورید.

۱- $0\le t\le \pi$ و $\mathbf{r}(t)=(2\cos t)\mathbf{i}+(2\sin t)\mathbf{j}+\sqrt{5}t\mathbf{k}$

۲- $0\le t\le \pi$ و $\mathbf{r}(t)=(6\sin 2t)\mathbf{i}+(6\cos 2t)\mathbf{j}+5t\mathbf{k}$

۳- $0\le t\le 8$ و $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+(2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$

۴- $0\le t\le 3$ و $\mathbf{r}(t)=(2+t)\mathbf{i}-(t+1)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$

۵- $0\le t\le \pi/2$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos^3 t)\mathbf{j}+(\sin^3 t)\mathbf{k}$

۶- $1\le t\le 2$ و $\mathbf{r}(t)=6t^3\mathbf{i}-2t^3\mathbf{j}-3t^3\mathbf{k}$

۷- $0\le t\le \pi$ و

$$\mathbf{r}(t)=(t\cos t)\mathbf{i}+(t\sin t)\mathbf{j}+\left(2\sqrt{2}/3\right)t^{3/2}\mathbf{k}$$

۸- $\sqrt{2}\le t\le 2$ و

$$\mathbf{r}(t)=(t\sin t+\cos t)\mathbf{i}+(t\cos t-\sin t)\mathbf{j}$$

۹- نقطه ای روی خم

$$\mathbf{r}(t)=(5\sin t)\mathbf{i}+(5\cos t)\mathbf{j}+12t\mathbf{k}$$

بیابید که بر روی خم از نقطه $(0,5,0)$ در جهت افزایش طول قوس 26π واحد فاصله داشته باشد.

۱۰- نقطه ای روی خم

$$\mathbf{r}(t)=(12\sin t)\mathbf{i}-(12\cos t)\mathbf{j}+5t\mathbf{k}$$

بیابید که بر روی خم از نقطه $(0,-12,0)$ در خلاف جهت افزایش طول قوس 13π واحد فاصله داشته باشد.

پارامتر طول قوس

در تمرین های ۱۱-۱۴ فرض کنید پارامتر طول قوس روی خم از نقطه ای که در آن $t=0$ است اندازه گیری می شود.

با محاسبه انتگرال زیر (معادله ۳) پارامتر طول قوس را بدست آورده و سپس طول بخش مشخص شده از خم را بدست آورید.

$$s=\int_0^t|\mathbf{v}(\tau)|d\tau$$

۱۱- $0\le t\le \pi/2$ و $\mathbf{r}(t)=(4\cos t)\mathbf{i}+(4\sin t)\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$

۱۲-

$\pi/2\le t\le \pi$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j}$

۱۳- $-\ln 4\le t\le 0$ و $\mathbf{r}(t)=(e^t\cos t)\mathbf{i}+(e^t\sin t)\mathbf{j}+e^t\mathbf{k}$

۱۴- $-1\le t\le 0$ و $\mathbf{r}(t)=(1+2t)\mathbf{i}+(1+3t)\mathbf{j}+(6-6t)\mathbf{k}$

نظریه و مثال ها

۱۵- طول قوس. طول خم

$$\mathbf{r}(t)=\left(\sqrt{2}t\right)\mathbf{i}+\left(\sqrt{2}t\right)\mathbf{j}+\left(1-t^2\right)\mathbf{k}$$

را از $(0,0,1)$ تا $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$ بیابید.

۱۶- طول پیچ. طول $2\pi\sqrt{2}$ یک دور از پیچ مثال ۱ طول قطر مربعی به اضلاع 2πواحد نیز هست. نشان دهید که چگونه می توان این مربع را با بریدن و پهن کردن بخشی از استوانه ای که مارپیچ حول آن می پیچد بدست آورد؟

۱۷- بیضی. (الف)- نشان دهید که خم

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+(1-\cos t)\mathbf{k},0\le t\le 2\pi$$

یک بیضی است. برای این کار نشان دهید که این خم مقطع یک استوانه مستدیر (دایره ای) قائم و یک صفحه است. معادلات استوانه و صفحه را بدست آورید.

(ب)- بیضی را روی استوانه رسم کنید. به شکل خود، بردارهای مماس واحد در $3\pi/2$ و π و $\pi/2$ و $t=0$ را اضافه کنید.

(پ)- نشان دهید که بردار شتاب همواره موازی با صفحه قرار دارد (عمود بر بردار قائم بر صفحه). بنابراین اگر شتاب را به صورت برداری متصل به بیضی رسم کنید در صفحه بیضی قرار خواهد گرفت. بردارهای شتاب را برای $3\pi/2$ و π و $\pi/2$ و $t=0$ به شکل خود اضافه کنید.

(ت)- انتگرالی برای طول بیضی بنویسید. سعی نکنید انتگرال را محاسبه کنید چون انتگرالی مقدماتی نیست.

(ث)- انتگرال گیر عددی. طول بیضی را تا دو رقم اعشار برآورد کنید.

۱۸- طول به پارامتری کردن بستگی ندارد. برای اثبات اینکه طول یک خم فضایی هموار به معادلات پارامتری آن که در محاسبه طول مورد استفاده قرار می گیرند بستگی ندارد طول یک دور از پیچ مثال ۱ را با معادلات پارامتری زیر محاسبه کنید.

(الف)- $0\le t\le \pi/2$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos 4t)\mathbf{i}+(\sin 4t)\mathbf{j}+4t\mathbf{k}$

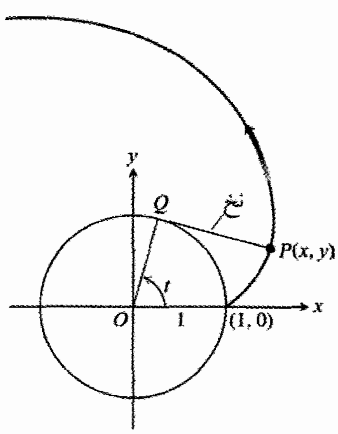
(ب)- $0\le t\le 4\pi$ و $\mathbf{r}(t)=\left[\cos(t/2)\right]\mathbf{i}+\left[\sin(t/2)\right]\mathbf{j}+(t/2)\mathbf{k}$

(پ)- $-2\pi\le t\le 0$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}-(\sin t)\mathbf{j}-t\mathbf{k}$

۱۹- گسترنده دایره. اگر ریسمانی را که به دور یک دایره ثابت پیچیده شده است چنان باز کنیم که ریسمان در صفحه دایره کشیده بماند انتهای آن، P، مسیری را می پیماید که گسترنده دایره نامیده می شود. در شکل زیر دایره مورد نظر، دایره $x^2+y^2=1$ است و نقطه انتهایی ریسمان از $(1,0)$ شروع به بازشدن می کند. بخش پیچیده نشده (باز) ریسمان در نقطه Q بر ریسمان مماس است و t اندازه زاویه بین قسمت مثبت محور x و پاره خط OQ برحسب رادیان است. معادلات پارامتری

$$x=\cos t+t\sin t \quad \text{و} \quad y=\sin t-t\cos t \quad \text{و} \quad t>0$$

نقطه $P(x,y)$ این گسترنده را بدست آورید.



۲۰- (ادامه تمرین۱۹). بردار مماس واحد گسترنده دایره را در نقطه $P(x,y)$ بدست آورید.

۲۱- فاصله در امتداد یک خط. نشان دهید که اگر $\mathbf{u}$ یک بردار واحد باشد آنگاه پارامتر طول قوس در امتداد خط $\mathbf{r}(t)=P_0+t\mathbf{u}$ از نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$، که در آن $t=0$ است، عبارتست از خود t.

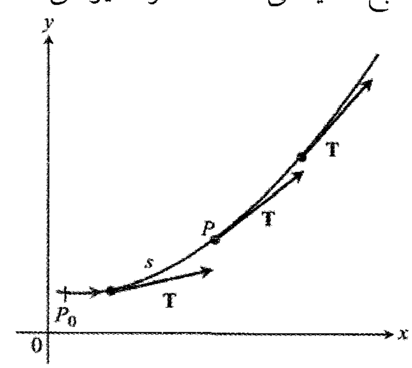
۲۲- با استفاده از قاعده سیمپسون به ازای $n=10$ طول قوس خم $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ را از مبداء تا نقطه $(2,4,8)$ تقریب بزنید.

۱۳-۴- خمیدگی و بردارهای قائم یک خم

در این بخش چگونگی چرخش یا خمیدن خم ها را بررسی می کنیم. ابتدا به خم های واقع در یک صفحه مختصات و بعد به خم های واقع در فضا می پردازیم.

خمیدگی یک خم مسطح (واقع در صفحه)

وقتی ذره ای در امتداد یک خم هموار در صفحه حرکت می کند، با خم شدن خم به طرفین جهت بردار $\mathbf{T}=d\mathbf{r}/ds$ تغییر می کند. چون $\mathbf{T}$ برداری واحد است با حرکت ذره بر روی خم طول آن ثابت باقی می ماند و فقط جهت آن تغییر می کند. آهنگ چرخش $\mathbf{T}$ به طرفین در واحد طول بر روی خم خمیدگی نامیده می شود (شکل ۱۳-۱۷). نماد سنتی مورد استفاده برای تابع خمیدگی (انحنا) حرف یونانی κ (کاپا) است.



شکل۱۳-۱۷: با حرکت P بر روی خم در جهت افزایش طول قوس، بردار مماس واحد می چرخد. مقدار $|d\mathbf{T}/ds|$ در P را خمیدگی خم در P می نامند.

تعریف: اگر $\mathbf{T}$ بردار مماس یک خم هموار باشد تابع **خمیدگی** خم عبارت است از

$$\mathbf{k}=\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$$

اگر $|d\mathbf{T}/ds|$ بزرگ باشد با عبور ذره از نقطه P بردار $\mathbf{T}$ به شدت می چرخد و خمیدگی در P بزرگ است. اگر $|d\mathbf{T}/ds|$ نزدیک به صفر باشد $\mathbf{T}$ آرامتر می چرخد و خمیدگی در P کوچکتر است.

اگر خم هموار $\mathbf{r}(t)$ از قبل برحسب پارامتری چون t غیر از پارامتر طول قوس s داده شده باشد می توانیم خمیدگی را به صورت زیر حساب کنیم

$$\mathbf{k}=\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|=\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| \qquad \text{(قاعده زنجیری)}$$

$$=\frac{1}{|ds/dt|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|$$

$$=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \qquad \left(\frac{ds}{dt}=\mathbf{v}\right)$$

فرمول محاسبه خمیدگی

اگر $\mathbf{r}(t)$ یک خم هموار باشد خمیدگی عبارت است از

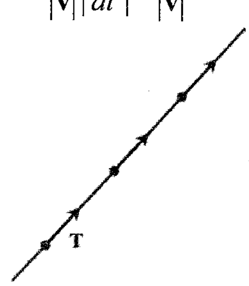
$$\kappa=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \qquad (1)$$

که $\mathbf{T}=\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ بردار مماس واحد است.

در مثال های ۱ و ۲ که به آزمودن تعریف می پردازیم، مشاهده می کنیم که برای خطوط راست و دایره ها خمیدگی ثابت است.

مثال۱: خط راستی با معادله $\mathbf{r}(t)=\mathbf{C}+t\mathbf{v}$ پارامتری می شود که $\mathbf{C}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای ثابت اند. بنابراین $\mathbf{r}'(t)=\mathbf{v}$ و بردار مماس واحد $\mathbf{T}=\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ برداری ثابت است که همواره متوجه یک سو است (جهت ثابتی دارد) و مشتق آن صفر است (شکل ۱۳-۱۸). در نتیجه به ازای هر مقدار پارامتر t ، خمیدگی خط راست برابر است با

$$\kappa=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|=\frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{0}|=0$$



شکل۱۳-۱۸: بر روی یک خط راست، $\mathbf{T}$ همواره جهت ثابتی دارد. خمیدگی، $|d\mathbf{T}/ds|$، برابر صفر است (مثال ۱).

مثال۲: در اینجا خمیدگی یک دایره رابدست می آوریم. با معادله پارامتری دایره ای به شعاع a شروع می کنیم، یعنی

$$\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j}$$

در این صورت،

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-(a\sin t)\mathbf{i}+(a\cos t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}=\sqrt{a^2}=|a|=a$$

از اینجا بدست می آوریم

$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=-(\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}=-(\cos t)\mathbf{i}-(\sin t)\mathbf{j}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}=1$$

از این رو به ازای هر مقدار پارامتر t، خمیدگی دایره برابر است با

$$\kappa=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|=\frac{1}{a}(1)=\frac{1}{a}=\frac{1}{\text{شعاع}}$$

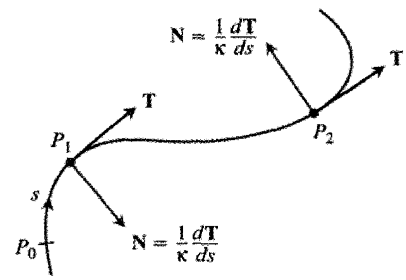
با اینکه فرمول محاسبه κ در معادله (۱) برای خم های فضایی نیز معتبر است اما در بخش بعدی یک فرمول محاسباتی بدست می آوریم که کاربرد آن معمولاً راحت تر است.

از میان بردارهای عمود بر بردار مماس واحد $\mathbf{T}$ ، یکی حائز اهمیت ویژه ای است زیرا جهت آن متوجه سمتی است که خم می چرخد. از آنجا که $\mathbf{T}$ طول ثابت (یعنی ۱) دارد مشتق $d\mathbf{T}/ds$ بر $\mathbf{T}$ عمود است (معادله ۴ بخش ۱۳-۱). بنابراین اگر $d\mathbf{T}/ds$ را بر طولش κ تقسیم کنیم بردار واحدی چون $\mathbf{N}$ بدست می آوریم که بر $\mathbf{T}$ عمود است (شکل ۱۳-۱۹).

تعریف: در نقطه ای که $\kappa\neq 0$ است بردار **قائم واحد اصلی** برای خم همواری واقع در صفحه عبارت است از

$$\mathbf{N}=\frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

با خم شدن خم به یک طرف بردار $d\mathbf{T}/ds$ متوجه جهتی است که $\mathbf{T}$ می چرخد (متوجه داخل) بنابراین اگر در جهت افزایش طول قوس حرکت کنیم و $\mathbf{T}$ به صورت ساعتگرد بچرخد جهت بردار $d\mathbf{T}/ds$ به سمت راست خواهد بود و وقتی $\mathbf{T}$ به صورت پاد ساعتگرد بچرخد جهت $d\mathbf{T}/ds$ به سمت چپ خواهد بود. به بیانی دیگر، جهت بردار قائم اصلی N به سمت طرف مقعر خم خواهد بود (شکل ۱۳-۱۹).



شکل ۱۳-۱۹: بردار $d\mathbf{T}/ds$، قائم بر خم، همواره متوجه جهتی است که T می چرخد. (متوجه داخل) بردار قائم واحد N همان جهت بردار $d\mathbf{T}/ds$ است.

اگر خم هموار $\mathbf{r}(t)$ از قبل برحسب پارامتری چون t غیر از پارامتر طول قوس s داده شده باشد می توانیم $\mathbf{N}$ را با استفاده از قاعده زنجیری مستقیماً محاسبه کنیم

$$\mathbf{N}=\frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|}$$

$$=\frac{(d\mathbf{T}/dt)(dt/ds)}{|d\mathbf{T}/dt||dt/ds|}$$

$$=\frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}\qquad \left(\frac{dt}{ds}=\frac{1}{ds/dt}>0 \text{ حذف می شود}\right)$$

این فرمول به ما امکان می دهد تا $\mathbf{N}$ را بدون یافتن κ و s بدست آوریم.

فرمول محاسبه N

اگر $\mathbf{r}(t)$ یک خم هموار باشد بردار قائم اصلی عبارت است از

$$\mathbf{N}=\frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}\qquad (۲)$$

که $\mathbf{T}=\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ بردار مماس واحد است.

مثال ۳: $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ را برای حرکت دایره ای زیر بدست آورید:

$$\mathbf{r}(t)=(\cos 2t)\mathbf{i}+(\sin 2t)\mathbf{j}$$

حل: ابتدا $\mathbf{T}$ را بدست می آوریم

$$\mathbf{v}=-(2\sin 2t)\mathbf{i}+(2\cos 2t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{4\sin^2 2t+4\cos^2 2t}=2$$

$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=-(\sin 2t)\mathbf{i}+(\cos 2t)\mathbf{j}$$

و از اینجا بدست می آوریم

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}=-(2\cos 2t)\mathbf{i}-(2\sin 2t)\mathbf{j}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|=\sqrt{4\cos^2 2t+4\sin^2 2t}=2$$

$$\mathbf{N}=\frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}$$

$$=-(\cos 2t)\mathbf{i}-(\sin 2t)\mathbf{j} \qquad \text{(معادله ۲)}$$

توجه کنید که $\mathbf{T.N}=0$ ، که عمود بودن $\mathbf{N}$ بر $\mathbf{T}$ را تأیید می کند. همچنین توجه کنید که برای حرکت دایره ای مذکور در این مثال، جهت $\mathbf{N}$ از $\mathbf{r}(t)$ به سمت مرکز دایره در مبداء است.

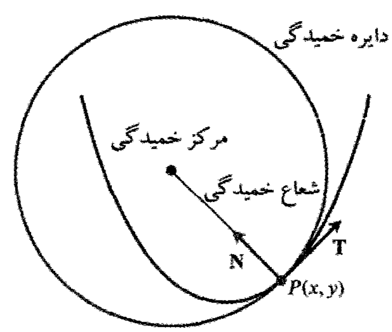
دایره خمیدگی در موردخم های واقع در صفحه (مسطح)

دایره خمیدگی یا **دایره بوسان** در نقطه ای چون P بر روی یک خم واقع در صفحه که در آن $\kappa\neq 0$ است دایره ای در صفحه خم است که:

۱- در نقطه P بر خم مماس است (همان خط مماسی را دارد که خم).

۲- در نقطه P خمیدگی اش با خمیدگی خم برابر است.

۳- در سمت مقعر یا سمت داخلی خم قرار دارد (مانند شکل ۱۳-۲۰).



شکل ۱۳-۲۰: دایره بوسان یا دایره خمیدگی در $P(x,y)$ در طرف داخل خم قرار دارد.

شعاع خمیدگی خم در P، شعاع دایره خمیدگی است که طبق مثال ۲ برابر است با

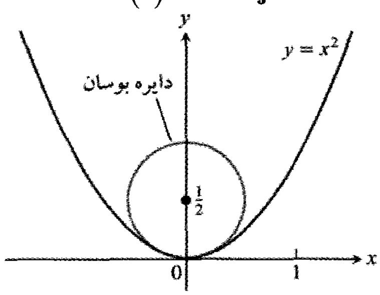
$$\text{شعاع خمیدگی}=\rho=\frac{1}{\kappa}$$

برای محاسبه ρ، κ را بدست آورده و عکس آن را محاسبه می کنیم. **مرکز خمیدگی** دایره در P مرکز دایره خمیدگی است.

مثال۴: دایره بوسان سهمی $y=x^2$ را در مبداء یافته و آن را رسم کنید.

حل: سهمی را با استفاده از پارامتر $t=x$ پارامتری می کنیم (بخش ۱۱-۱، مثال ۵)،

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}$$



شکل ۱۳-۲۱: دایره بوسان سهمی $y=x^2$ در مبداء (مثال ۴).

ابتدا خمیدگی سهمی در مبداء را می یابیم، با استفاده از معادله (۱)

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{1+4t^2}$$

بطوریکه

$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\left(1+4t^2\right)^{-1/2}\mathbf{i}+2t\left(1+4t^2\right)^{-1/2}\mathbf{j}$$

از اینجا داریم

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}=-4t\left(1+4t^2\right)^{-3/2}\mathbf{i}+\left[2\left(1+4t^2\right)^{-1/2}-8t^2\left(1+4t^2\right)^{-3/2}\right]\mathbf{j}$$

در مبداء $t=0$ است لذا خمیدگی برابر است با

$$\kappa(0)=\frac{1}{|\mathbf{v}(0)|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}(0)\right| \qquad \text{(معادله ۱)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}}|0\mathbf{i}+2\mathbf{j}|$$

$$=(1)\sqrt{0^2+2^2}=2$$

بنابراین شعاع خمیدگی برابر است با $1/\kappa=1/2$. در مبداء داریم: $t=0$ و $\mathbf{T}=\mathbf{i}$ ، لذا $\mathbf{N}=\mathbf{j}$. بدین ترتیب مرکز دایره $(0,1/2)$ است. پس معادله دایره بوسان عبارت است از

$$\left(x-0\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

از شکل **۱۳-۲۱** می توان دید که دایره بوسان نسبت به تقریب خط مماس $y=0$ تقریب بهتری برای سهمی در مبداء است.

خمیدگی و بردارهای قائم در مورد خم های فضایی

اگر یک خم هموار در فضا بوسیله بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ به صورت تابعی از یک پارامتر t مشخص باشد و اگر s پارامتر طول قوس خم باشد، بردار مماس واحد $\mathbf{T}$ عبارت است از $d\mathbf{r}/ds=\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. در این صورت **خمیدگی** در فضا به صورت زیر تعریف می شود

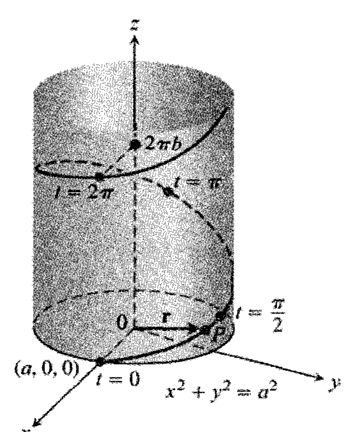
$$\kappa=\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \qquad (۳)$$

که درست مثل تعریف خمیدگی برای خم های واقع در صفحه است. بردار $d\mathbf{T}/ds$ بر $\mathbf{T}$ عمود است و بردار **قائم واحد اصلی** را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathbf{N}=\frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \qquad (۴)$$

مثال ۵: خمیدگی پیچ زیر را بدست آورید (شکل **۱۳-۲۲**).

$$\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j}+bt\mathbf{k},\ a,b\ge 0,\ a^2+b^2\ne 0$$



شکل۱۳-۲۲:پیچ $\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j}+bt\mathbf{k}$ **به ازای a و b مثبت و $t\ge 0$ رسم شده است(مثال۵).**

حل: $\mathbf{T}$ را از بردار سرعت $\mathbf{v}$ محاسبه می کنیم

$$\mathbf{v}=-(a\sin t)\mathbf{i}+(a\cos t)\mathbf{j}+b\mathbf{k}$$
$$|\mathbf{v}|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[-(a\sin t)\mathbf{i}+(a\cos t)\mathbf{j}+b\mathbf{k}\right]$$

حال با استفاده از معادله (۳) داریم

$$\begin{aligned}\kappa&=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|\\&=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left|\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[-(a\cos t)\mathbf{i}-(a\sin t)\mathbf{j}\right]\right|\\&=\frac{a}{a^2+b^2}\left|-(\cos t)\mathbf{i}-(\sin t)\mathbf{j}\right|\\&=\frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{(\cos t)^2+(\sin t)^2}=\frac{a}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

از این معادله درمی یابیم که اگر a ثابت باشد با افزایش b خمیدگی کاهش می یابد و اگر b ثابت باشد با کاهش a نهایتاً خمیدگی نیز کاهش می یابد.

اگر $b=0$ باشد پیچ به دایره ای به شعاع a تبدیل شده و خمیدگی آن ، همانطور که باید، به $1/a$ کاهش می یابد. اگر $a=0$ باشد پیچ محور z می شود و خمیدگی آن، باز هم همانطور که باید، به صفر کاهش می یابد.

مثال ۶: $\mathbf{N}$ را برای پیچ مثال **۵** بدست آورده و چگونگی جهت گیری این بردار را بیان کنید.

حل: داریم

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j}\right]$$
$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\begin{aligned}\mathbf{N}&=\frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}\\&=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j}\right]\\&=-(\cos t)\mathbf{i}-(\sin t)\mathbf{j}\end{aligned}$$

بنابراین $\mathbf{N}$ با صفحه xy موازی بوده و جهت آن همواره به سمت محور z است.

تمرین های ۱۳-۴

خم های مسطح (واقع در صفحه)

در تمرین های ۱-۴ $\mathbf{N}$، $\mathbf{T}$ و κ را برای خم های مسطح بدست آورید.

۱- $-\pi/2<t<\pi/2$ و $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+(\ln\cos t)\mathbf{j}$

۲- $-\pi/2<t<\pi/2$ و $\mathbf{r}(t)=(\ln\sec t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}$

۳- $\mathbf{r}(t)=(2t+3)\mathbf{i}+(5-t^2)\mathbf{j}$

۴- $t>0$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j}$

۵- فرمولی برای خمیدگی نمودار یک تابع در صفحه xy.

(الف)- نمودار $y=x$ در صفحه xy بطور خودکار دارای معادلات پارامتری $x=x$ و $y=f(x)$ و فرمول برداری $\mathbf{r}(x)=x\mathbf{i}+f(x)\mathbf{j}$ است. با استفاده از این فرمول نشان دهید که اگر f تابعی دو بار مشتق پذیر از x باشد آنگاه

$$\kappa(x)=\frac{|f''(x)|}{\left[1+(f'(x))^2\right]^{3/2}}$$

(ب)- با استفاده از فرمول κ در قسمت (الف) خمیدگی تابع $y=\ln(\cos x)$ ، $-\pi/2<x<\pi/2$ را بدست آورید. پاسخ خود را با پاسخ تمرین ۱ مقایسه کنید.

(پ)- نشان دهید که خمیدگی در نقطه عطف صفر است.

۶- فرمولی برای خمیدگی یک خم مسطح پارامتری شده.

(الف)- نشان دهید که خمیدگی خم هموار چون $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}$ که با توابع دو بار مشتق پذیر $x=f(t)$ و $y=g(t)$ تعریف شده است از فرمول زیر بدست می آید

$$\kappa=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$$

نقطه های بالای حروف در فرمول فوق نشان دهنده مشتق گیری نسبت به t هستند و هر نقطه نشان دهنده یک بار مشتق گیری است. با کاربرد فرمول فوق خمیدگی خم های زیر را بیابید.

(ب)- $0<t<\pi$ و $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+(\ln\sin t)\mathbf{j}$

(پ)- $\mathbf{r}(t)=\left[\tan^{-1}(\sinh t)\right]\mathbf{i}+(\ln\cosh t)\mathbf{j}$

۷- بردارهای قائم بر خم های مسطح.

(الف)- نشان دهید که بردارهای $\mathbf{n}(t)=-g'(t)\mathbf{i}+f'(t)\mathbf{j}$ و $-\mathbf{n}(t)=g'(t)\mathbf{i}-f'(t)\mathbf{j}$ هر دو در نقطه $(f(t),g(t))$ بر خم $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}$ عمودند.

برای بدست آوردن $\mathbf{N}$ برای یک خم مسطح خاص می توانیم یکی از دو بردار $\mathbf{n}$ یا $-\mathbf{n}$ قسمت (الف) را که جهت آن به سمت مقعر خم است انتخاب کنیم و آن را به بردار واحد تبدیل نماییم (شکل ۱۳- ۱۹ را ببینید) با کاربرد این روش $\mathbf{N}$ را برای خم های زیر بدست آورید.

(ب)- $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+e^{2t}\mathbf{j}$

(پ)- $-2\le t\le 2$ و $\mathbf{r}(t)=\sqrt{4-t^2}\mathbf{i}+t\mathbf{j}$

۸- (ادامه تمرین ۷).

(الف)- با استفاده از روش تمرین ۷، $\mathbf{N}$ را برای خم $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+(1/3)t^3\mathbf{j}$ در حالت های $t<0$ و $t>0$ بدست آورید.

(ب)- با استفاده از معادله (۴) برای خم قسمت (الف) $\mathbf{N}$ را برای $t\neq 0$ مستقیماً از $\mathbf{T}$ محاسبه کنید. آیا در $t=0$ بردار $\mathbf{N}$ موجود است؟ خم را رسم کرده و توضیح دهید که با عبور t از مقادیر منفی به مثبت چه اتفاقی برای $\mathbf{N}$ می افتد.

خم هایی فضایی

$\mathbf{N}$، $\mathbf{T}$ و κ را برای خمهای فضایی تمرین های ۹ – ۱۶ بدست آورید.

۹- $\mathbf{r}(t)=(3\sin t)\mathbf{i}+(3\cos t)\mathbf{j}+4t\mathbf{k}$

۱۰- $\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

۱۱- $\mathbf{r}(t)=(e^t\cos t)\mathbf{i}+(e^t\sin t)\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

۱۲- $\mathbf{r}(t)=(6\sin 2t)\mathbf{i}+(2\cos 2t)\mathbf{j}+5t\mathbf{k}$

۱۳- $t>0$ و $\mathbf{r}(t)=(t^3/3)\mathbf{i}+(t^2/2)\mathbf{j}$

۱۴- $0<t<\pi/2$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos^3 t)\mathbf{i}+(\sin^3 t)\mathbf{j}$

۱۵- $a>0$ و $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+(a\cosh(t/a))\mathbf{j}$

۱۶- $\mathbf{r}(t)=(\cosh t)\mathbf{i}-(\sinh t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$

تمرین های بیشتر در مورد خمیدگی

۱۷- نشان دهید که سهمی $y=ax^2$، $a\neq 0$، بیشترین خمیدگی خود را در رأس خود دارد و خمیدگی مینیممی ندارد (توجه: از آنجا که وقتی خم منتقل یا چرخانده شود خمیدگی آن تغییری نمی کند این نتیجه برای هر سهمی درست است).

۱۸- نشان دهید که بیضی $x=a\cos t$، $y=b\sin t$، $a>b>0$ بیشترین خمیدگی خود را بر روی قطر بزرگ خود و کمترین خمیدگی خود را برروی قطر کوچک خود دارد (مانند تمرین ۱۷، این مطلب در مورد هر بیضی صادق است).

۱۹- **ماکسیمم کردن خمیدگی یک پیچ.** در مثال ۵ دیدیم که خمیدگی پیچ $\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j}+bt\mathbf{k}$ $(a,b>0)$ برابر است با $\kappa=a/(a^2+b^2)$. بزرگترین مقداری که κ می تواند به ازای مقدار معینی از b داشته باشد چقدر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲۰- **خمیدگی کل.** خمیدگی کل بخشی از یک خم هموار را که از $s=s_0$ تا $s=s_1>s_0$ امتداد دارد با انتگرال گیری از κ از s_0 تا s_1 بدست می آوریم. اگر خم پارامتر دیگری، مثلاً t، داشته باشد آنگاه خمیدگی کل برابر است با

$$K=\int_{s_0}^{s_1}\kappa ds=\int_{t_0}^{t_1}\kappa\frac{ds}{dt}dt=\int_{t_0}^{t_1}\kappa|\mathbf{v}|dt$$

که t_0 و t_1 متناظر با s_0 و s_1 هستند. مطلوبست خمیدگی کل

(الف)- قطعه ای از پیچ

$$\mathbf{r}(t)=(3\cos t)\mathbf{i}+(3\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$$

در محدوده $0\le t\le 4\pi$.

(ب)- سهمی $y=x^2$، $-\infty<x<\infty$.

۲۱- معادله دایره خمیدگی خم $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}$ را در نقطه $(\pi/2,1)$ بدست آورید. (این خم صورت پارامتری نمودار $y=\sin x$ در صفحه xy است).

۲۲- مطلوبست معادله دایره خمیدگی خم

$$\mathbf{r}(t)=(2\ln t)\mathbf{i}-\left[t+\frac{1}{t}\right]\mathbf{j},\qquad e^{-2}\le t\le e^2$$

نقطه $(0,-2)$، که در آن $t=1$ است.

فرمول

$$\kappa(x)=\frac{|f''(x)|}{\left[1+(f'(x))^2\right]^{3/2}}$$

که در تمرین ۵ بدست آمد خمیدگی $\kappa(x)$ خم مسطح دو بار مشتق پذیر $y=f(x)$ را به صورت تابعی از x بیان می کند. تابع خمیدگی هر یک از خم های تمرین های ۲۳- ۲۶ را بدست آورید. سپس نمودار $f(x)$ را به همراه $\kappa(x)$ روی بازه داده شده رسم کنید. نکات جالبی را درخواهید یافت.

۲۳- $-2\le x\le 2$ و $y=x^2$

۲۴- $-2\le x\le 2$ و $y=x^4/4$

۲۵- $0\le x\le 2\pi$ و $y=\sin x$

۲۶- $-1\le x\le 2$ و $y=e^x$

تمرین های رایانه ای

در تمرین های ۲۷-۳۴ از یک نرم افزار ریاضی برای یافتن دایره بوسان در یک نقطه P بر یک خم مسطح که در آن $\kappa\neq 0$ است استفاده خواهید کرد. با استفاده از نرم افزار ریاضی مراحل زیر را انجام دهید:

(الف)- خم مسطح داده شده در شکل پارامتری یا تابعی را روی بازه تعیین شده رسم کرده و ببینید چه شکلی دارد.

(ب)- خمیدگی κ خم را به ازای مقدار داده شده محاسبه کنید. برای این کار از فرمول مناسب ارائه شده در تمرین ۵ یا ۶ بهره بگیرید. اگر خم به صورت تابع $y=f(x)$ داده شده است از معادلات پارامتری $x=t$ و $y=f(x)$ استفاده کنید.

(پ)- بردار قائم واحد $\mathbf{N}$ را در t_0 بیابید. توجه کنید که علامت های مؤلفه های $\mathbf{N}$ به این بستگی دارند که بردار مماس واحد $\mathbf{T}$ در $t=t_0$ چرخش ساعتگرد داشته باشد یا پاد ساعتگرد. (تمرین ۷ را ببینید).

(ت)- اگر $\mathbf{C}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ برداری از مبداء تا مرکز (a,b) دایره بوسان باشد مرکز $\mathbf{C}$ را از معادله برداری زیر بیابید

$$\mathbf{C}=\mathbf{r}(t_0)+\frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{N}(t_0)$$

نقطه $P(x_0,y_0)$ بر روی خم با بردار مکان $\mathbf{r}(t_0)$ مشخص می

شود.

(ث)- معادله $(x-a)^2+(y-b)^2=1/\kappa^2$ دایره بوسان را بطور ضمنی رسم کنید. سپس خم و دایره بوسان را با هم رسم کنید. ممکن است لازم داشته باشید اندازه پنجره نمایش را تغییر دهید اما مطمئن باشید که مربع است.

۲۷- $\mathbf{r}(t)=(3\cos t)\mathbf{i}+(5\sin t)\mathbf{j},\ 0\le t\le 2\pi,\ t_0=\pi/4$

۲۸- $\mathbf{r}(t)=(\cos^3 t)\mathbf{i}+(\sin^3 t)\mathbf{j},\ 0\le t\le 2\pi,\ t_0=\pi/4$

۲۹- $\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i}+(t^3-3t)\mathbf{j},\ -4\le t\le 4,\ t_0=3/5$

۳۰- $\mathbf{r}(t)=(t^3-2t^2-t)\mathbf{i}+\dfrac{3t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j},\ -2\le t\le 5,\ t_0=1$

۳۱- $\mathbf{r}(t)=(2t-\sin t)\mathbf{i}+(2-2\cos t)\mathbf{j},\ 0\le t\le 3\pi,\ t_0=3\pi/2$

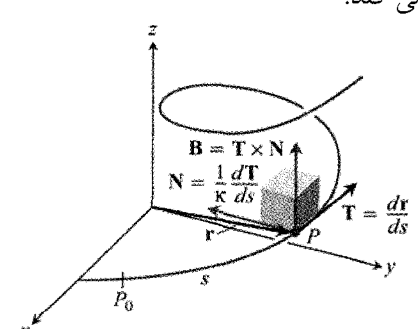
۳۲- $\mathbf{r}(t)=(e^{-t}\cos t)\mathbf{i}+(e^{-t}\sin t)\mathbf{j},\ 0\le t\le 6\pi,\ t_0=\pi/4$

۳۳- $x_0=1$ و $-2\le x\le 5$ و $y=x^2-x$

۳۴- $x_0=1/2$ و $-1\le x\le 2$ و $y=x(1-x)^{2/5}$

۱۳-۵- مؤلفه های مماس و قائم شتاب

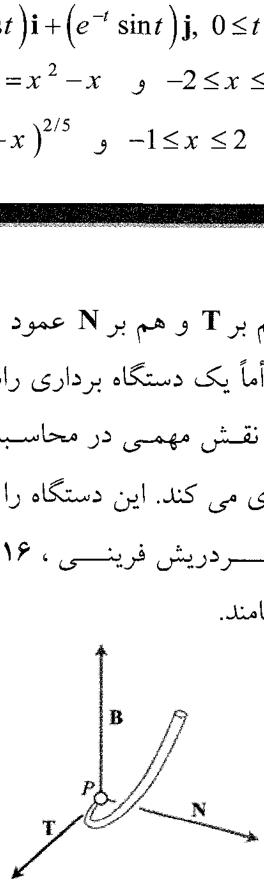
اگر بر روی یک خم فضایی حرکت کنید دستگاه مختصات دکارتی **i**، **j** و **k** برای نمایش بردارهای توصیف کننده حرکت شما خیلی مناسب نیستند. به جای اینها بهتر است از سه بردار دیگر استفاده کنید که یکی بیانگر حرکت رو به جلوی شما (بردار مماس واحد **T**)، دیگری بیانگر جهت چرخش مسیر(بردار قائم واحد **N**) و سومی بیانگر تمایل حرکت شما به "پیچش" از صفحه ایجاد شده بوسیله این بردارها در جهت عمود بر این صفحه (که بوسیله بردار قائم دوم $\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}$ تعریف می شود) است. بیان کردن بردار شتاب روی خم به صورت یک ترکیب خطی از این دستگاه **TNB** با بردارهای واحد دو به دو عمود بر هم که با حرکت جسم حرکت می کند (شکل ۱۳-۲۳) ماهیت مسیر و حرکت در امتداد آن را بسیار بهتر نمایان می کند.



شکل ۱۳-۲۳: دستگاه TNB متشکل از بردارهای واحد دو به دو عمود برهم برروی خم در فضا حرکت می کند.

دستگاه TNB

بردار قائم دوم یک خم واقع در فضا $\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}$ است که بردار واحدی است که هم بر **T** و هم بر **N** عمود است (شکل ۱۳-۲۴). **T**، **N** و **B** توأماً یک دستگاه برداری راستگرد متحرک را تعریف می کنند که نقش مهمی در محاسبه مسیرهای ذرات متحرک در فضا بازی می کند. این دستگاه را **دستگاه فرینی** (به احترام جیان فردریش فرینی، ۱۸۱۶ – ۱۹۰۰) یا **دستگاه TNB** می نامند.



شکل ۱۳- ۲۴: بردارهای T، N و B (با همین ترتیب) یک دستگاه راستگرد از بردارهای واحد دو به دو عمود برهم در فضا تشکیل می دهند.

مؤلفه های مماس و قائم شتاب

وقتی جسمی تحت تأثیر گرانش، نیروهای ترمزی یا ترکیبی از موتورهای موشک شتاب می گیرد معمولاً می خواهیم بدانیم چه مقدار از شتاب در جهت حرکت، در جهت مماسی **T**، اثر می کند. این کمیت را می توانیم به شرح زیر محاسبه کنیم. با بهره گیری از قاعده زنجیری **v** را به صورت زیر می نویسیم

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\mathbf{T}\frac{ds}{dt}$$

سپس از دو انتهای این سلسله تساوی ها مشتق گرفته و داریم

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{T}\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}+\frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt}$$
$$=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}+\frac{ds}{dt}\left(\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}\right)$$
$$=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}+\frac{ds}{dt}\left(\kappa\mathbf{N}\frac{ds}{dt}\right) \qquad \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\kappa\mathbf{N}\right)$$
$$=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}+\kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}$$

تعریف: اگر بردار شتاب به صورت زیر نوشته شود

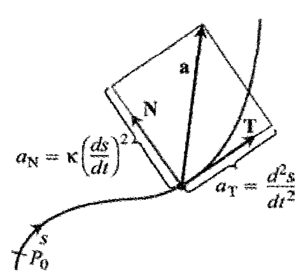
$$\mathbf{a}=a_T\,\mathbf{T}+a_N\,\mathbf{N} \tag{۱}$$

آنگاه

$$a_T=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d}{dt}|\mathbf{v}| \quad \text{و} \quad a_N=\kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\kappa|\mathbf{v}|^2 \tag{۲}$$

مؤلفه های عددی **مماس** و **قائم** شتاب هستند.

توجه کنید که بردار قائم دوم $\mathbf{B}$ در معادله (۱) ظاهر نمی شود. مهم نیست که چطور مسیر جسم متحرکی که مشاهده می کنیم در فضا می پیچد یا می چرخد، شتاب $\mathbf{a}$ همیشه در صفحه $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ و عمود بر $\mathbf{B}$ قرار می گیرد. این معادله همچنین بیان می کند که دقیقاً چه مقدار از شتاب در جهت مماس بر حرکت $\left(d^2s/dt^2\right)$ و چه مقدار از آن در جهت قائم بر حرکت $\left[\kappa\left(ds/dt\right)^2\right]$ قرار می گیرد (شکل ۱۳-۲۵).

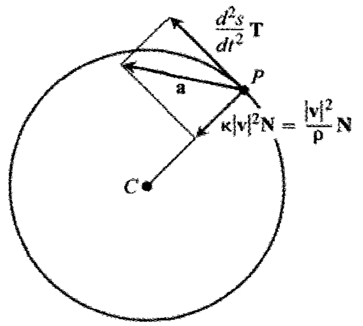


شکل۱۳-۲۵: مؤلفه های مماس و قائم شتاب. شتاب $\mathbf{a}$ همیشه در صفحه $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ و عمود بر $\mathbf{B}$ قرار می گیرد.

چه اطلاعاتی می توانیم از معادلات (۲) بدست آوریم؟ طبق تعریف، شتاب $\mathbf{a}$ آهنگ تغییر سرعت است و در حالت کلی وقتی جسمی در امتداد مسیرش حرکت می کند هم طول و هم جهت $\mathbf{v}$ تغییر می کند. مؤلفه مماس شتاب a_T نشان دهنده آهنگ تغییر طول $\mathbf{v}$ است (یعنی تغییر تندی). مؤلفه قائم شتاب a_N بیانگر آهنگ تغییر جهت $\mathbf{v}$ است.

توجه کنید که مؤلفه عددی قائم شتاب برابر خمیدگی ضربدر مربع تندی است. به همین علت است که وقتی با اتومبیل پیچ تندی (κ بزرگ) را با تندی زیاد ($|\mathbf{v}|$ بزرگ) دور می زنید باید خودتان را محکم نگه دارید. اگر تندی اتومبیل خود را دو برابر کنید به ازای همان خمیدگی مؤلفه قائم شتابی که احساس می کنید چهار برابر خواهد شد.

اگر جسمی با تندی ثابت روی یک دایره حرکت کند d^2s/dt^2 برابر صفر و تمام شتاب در جهت $\mathbf{N}$ و به سمت مرکز دایره است. اگر حرکت جسم تند شونده یا کند شونده باشد $\mathbf{a}$ مؤلفه مماس غیر صفر خواهد داشت (شکل ۱۳- ۲۶).



شکل۱۳-۲۶: مؤلفه های مماس و قائم شتاب جسمی با حرکت تند شونده هنگام حرکت پاد ساعتگرد حول دایره ای به شعاع ρ.

برای محاسبه a_N معمولاً فرمول $a_N=\sqrt{|\mathbf{a}|^2-a_T^2}$ را بکار می بریم که از حل معادله $|\mathbf{a}|^2=\mathbf{a}.\mathbf{a}=a_T^2+a_N^2$ نسبت به a_N بدست می آید. با این فرمول، می توانیم بدون اینکه مجبور به محاسبه κ باشیم a_N را محاسبه کنیم.

فرمول محاسبه مؤلفه قائم شتاب

$$a_N=\sqrt{|\mathbf{a}|^2-a_T{}^2} \tag{۳}$$

مثال ۱: بدون یافتن $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ شتاب حرکت

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j} \quad \text{و} \quad t>0$$

را به شکل $\mathbf{a}=a_T\,\mathbf{T}+a_N\,\mathbf{N}$ بنویسید. (مسیر حرکت، گسترنده دایره شکل ۱۳-۲۷ است. همچنین تمرین ۱۹ بخش ۱۳ -۳ را ببینید).

حل:

از معادله اول معادلات (۲) a_T را بدست می آوریم

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=(-\sin t+\sin t+t\cos t)\mathbf{i}+(\cos t-\cos t+t\sin t)\mathbf{j}=(t\cos t)\mathbf{i}+(t\sin t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}=\sqrt{t^2}=|t|=t \quad (t>0)$$

$$a_T=\frac{d}{dt}|\mathbf{v}|=\frac{d}{dt}(t)=1 \quad \text{(معادله ۲)}$$

با در دست داشتن a_T، با بهره گیری از معادله (۳) a_N را بدست می آوریم

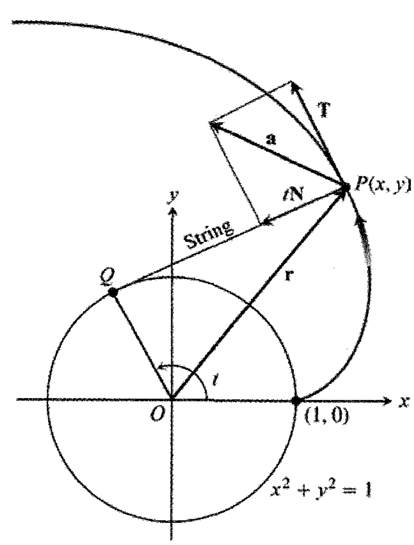
$$\mathbf{a}=(\cos t-t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t+t\cos t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{a}|^2=t^2+1$$

$$a_N=\sqrt{|\mathbf{a}|^2-a_T^2}=\sqrt{(t^2+1)-(1)}=\sqrt{t^2}=t$$

سپس از معادله (۱) $\mathbf{a}$ را بدست می آوریم

$$\mathbf{a}=a_T\mathbf{T}+a_N\mathbf{N}=(1)\mathbf{T}+(t)\mathbf{N}=\mathbf{T}+t\mathbf{N}$$



شکل۱۳-۲۷: مؤلفه های مماس و قائم شتاب حرکت برای $\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j}$ ، $t>0$. اگر ریسمانی را که حول دایره ای ثابت پیچیده شده چنان باز کنیم که ریسمان در صفحه دایره کشیده بماند انتهای آن P روی مسیری موسوم به گسترنده دایره حرکت می کند (مثال ۱).

تاب

کمیت $d\mathbf{B}/ds$ نسبت به $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ چگونه تغییر می کند؟ از قاعده مشتق گیری از ضرب برداری داریم

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds}=\frac{d(\mathbf{T}\times\mathbf{N})}{ds}=\frac{d\mathbf{T}}{ds}\times\mathbf{N}+\mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

چون جهت $\mathbf{N}$ همان جهت $d\mathbf{T}/ds$ است،

$$(d\mathbf{T}/ds)\times\mathbf{N}=\mathbf{0}$$

و

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds}=\mathbf{0}+\mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds}=\mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

از معادله فوق درمی یابیم که $d\mathbf{B}/ds$ بر $\mathbf{T}$ عمود است چون هر حاصلضرب برداری بر عاملهایش عمود است.

چون $d\mathbf{B}/ds$ بر $\mathbf{B}$ هم عمود است ($\mathbf{B}$ طول ثابت دارد) می توان نتیجه گرفت که $d\mathbf{B}/ds$ بر صفحه $\mathbf{B}$ و $\mathbf{T}$ عمود است. به عبارت دیگر $d\mathbf{B}/ds$ با $\mathbf{N}$ موازی است و در نتیجه $d\mathbf{B}/ds$ مضربی عددی از $\mathbf{N}$ است. به زبان نمادها داریم

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds}=-\tau\mathbf{N}$$

علامت منفی در این معادله قراردادی است. ضریب عددی τ تاب در امتداد خم نامیده می شود. توجه کنید که

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds}.\mathbf{N}=-\tau\mathbf{N}.\mathbf{N}=-\tau(1)=-\tau$$

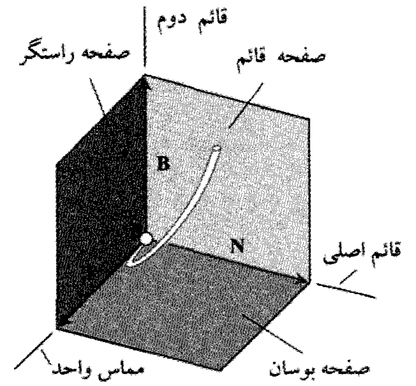
از این معادله در تعریف بعدی استفاده می کنیم.

> **تعریف:** فرض کنید $\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}$. تابع **تاب** یک خم هموار عبارت است از
>
> $$\tau=-\frac{d\mathbf{B}}{ds}.\mathbf{N} \quad (۴)$$

برخلاف خمیدگی κ، که هرگز منفی نیست، تاب τ ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد.

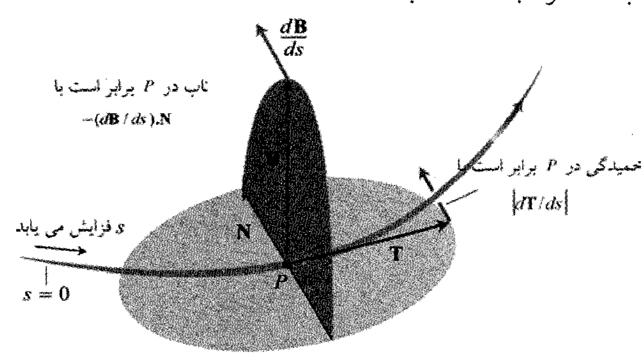
سه صفحه ای که با بردارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ مشخص می شوند در شکل ۱۳-۲۸ نامگذاری و نشان داده شده اند. خمیدگی $\kappa=|d\mathbf{T}/ds|$ را می توان به عنوان آهنگ چرخش صفحه قائم هنگام حرکت نقطه P روی مسیرش دانست. به همین نحو، تاب $\tau=-(d\mathbf{B}/ds).\mathbf{N}$ آهنگ چرخش صفحه بوسان حول $\mathbf{T}$ هنگام حرکت P روی خم است. تاب معیاری

از پیچش خم است.



شکل۱۳-۲۸: نامگذاری سه صفحه ای که با T، N و B مشخص می شوند.

به شکل**۱۳-۲۹** نگاه کنید. اگر P قطاری باشد که از مسیری خمیده بالا می آید آهنگ چرخیدن چراغ جلو به این طرف و آن طرف در واحد فاصله خمیدگی مسیر است و آهنگ تمایل به پیچیدن و خروج موتور قطار از صفحه متشکل از **T** و **N** تاب است. در متون پیشرفته تر نشان داده می شود که یک خم فضایی یک پیچ است اگر و تنها اگر خمیدگی ناصفر ثابت و تاب ناصفر ثابت داشته باشد.



شکل۱۳-۲۹: هر جسم متحرک با یک دستگاه TNB حرکت می کند که هندسه مسیر حرکت آن را مشخص می کند.

فرمول های محاسباتی

متداولترین فرمول برای محاسبه تاب، که در متون پیشرفته تر اثبات می شود، عبارت است از

$$\tau=\frac{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\end{vmatrix}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2} \qquad (\text{اگر } \mathbf{v}\times\mathbf{a}\neq\mathbf{0}) \quad (۵)$$

نقاط بالای حروف در معادله (۵) نشان دهنده مشتق نسبت به t هستند و هر نقطه نماینده یک بار مشتق گیری است. بنابراین $\dot{x}$ (" x نقطه") به معنی dx/dt، $\ddot{x}$ (" x دو نقطه") به معنی d^2x/dt^2 و $\dddot{x}$ (" x سه نقطه ") به معنی d^3x/dt^3 است. به همین ترتیب $\dot{y}=dy/dt$ و الی آخر.

برای خمیدگی هم فرمولی با کاربرد آسان وجود دارد که در جدول زیر آمده است (تمرین **۲۱** را ببینید).

فرمول های محاسباتی برای خم های واقع در فضا

بردار مماس واحد: $\mathbf{T}=\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

بردار قائم واحد اصلی: $\mathbf{N}=\dfrac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}$

بردار قائم دوم: $\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}$

خمیدگی: $\kappa=\left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right|=\dfrac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}$

تاب: $\tau=-\dfrac{d\mathbf{B}}{ds}.\mathbf{N}=\dfrac{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\end{vmatrix}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2}$

مؤلفه های مماس و قائم شتاب:

$$\mathbf{a}=a_T\mathbf{T}+a_N\mathbf{N}$$

$$a_T=\frac{d}{dt}|\mathbf{v}|$$

$$a_N=k|\mathbf{v}|^2=\sqrt{|\mathbf{a}|^2-a_T^{\,2}}$$

تمرین های۱۳-۵

یافتن مؤلفه های مماسی و قائم

در تمرین های ۱ و ۲ بدون یافتن **T**، **N** و **a** را به شکل $\mathbf{a}=a_T\mathbf{T}+a_N\mathbf{N}$ بنویسید.

۱- $\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j}+bt\mathbf{k}$

۲- $\mathbf{r}(t)=(1+3t)\mathbf{i}+(t-2)\mathbf{j}-3t\mathbf{k}$

در تمرین های ۳ -۶ بدون یافتن $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$، $\mathbf{a}$ را به ازای مقدار t داده شده به شکل $\mathbf{a}=a_T\mathbf{T}+a_N\mathbf{N}$ بنویسید.

۳- $t=1$ و $\mathbf{r}(t)=(t+1)\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$

۴- $t=0$ و $\mathbf{r}(t)=(t\cos t)\mathbf{i}+(t\sin t)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$

۵- $t=0$ و $\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i}+\left(t+(1/3)t^3\right)\mathbf{j}+\left(t-(1/3)t^3\right)\mathbf{k}$

۶- $t=0$ و $\mathbf{r}(t)=\left(e^t\cos t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\sin t\right)\mathbf{j}+\sqrt{2}e^t\mathbf{k}$

یافتن دستگاه TNB

در تمرین های ۷ و۸ بردارهای $\mathbf{r}$، $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$را به ازای مقدار t داده شده بدست آورید. سپس معادلات مربوط به صفحات بوسان، قائم و راستگر را به ازای آن مقدار t بیابید.

۷- $t=\pi/4$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}-\mathbf{k}$

۸- $t=0$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$

در تمرین های ۹- ۱۶ بخش ۱۳-۴ $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و κ را بدست آوردید. اکنون در تمرین های ۹-۱۶ $\mathbf{B}$ و τ را برای این خم های فضایی بدست آورید.

۹- $\mathbf{r}(t)=(3\sin t)\mathbf{i}+(3\cos t)\mathbf{j}+4t\mathbf{k}$

۱۰- $\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

۱۱- $\mathbf{r}(t)=\left(e^t\cos t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\sin t\right)\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

۱۲- $\mathbf{r}(t)=(6\sin 2t)\mathbf{i}+(6\cos 2t)\mathbf{j}+5t\mathbf{k}$

۱۳- $t>0$ و $\mathbf{r}(t)=\left(t^3/3\right)\mathbf{i}+\left(t^2/2\right)\mathbf{j}$

۱۴- $0<t<\pi/2$ و $\mathbf{r}(t)=\left(\cos^3 t\right)\mathbf{i}+\left(\sin^3 t\right)\mathbf{j}$

۱۵- $a>0$ و $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\left(a\cosh(t/a)\right)\mathbf{j}$

۱۶- $\mathbf{r}(t)=(\cosh t)\mathbf{i}-(\sinh t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$

کاربردهای فیزیکی

۱۷- سرعت سنج اتومبیل شما مقدار ثابت $35mph$ را نشان می دهد. آیا حرکت شما شتابدار است؟ توضیح دهید.

۱۸- آیا در مورد شتاب ذره ای که با تندی ثابت حرکت می کند می توان اظهار نظر کرد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۹- آیا در مورد تندی ذره ای که شتابش همواره بر سرعتش عمود است چیزی می توان گفت؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲۰- جسمی به جرم m با تندی ثابت $10units/\sec$ روی سهمی $y=x^2$ حرکت می کند. نیروی وارد بر این جسم بواسطه شتاب آن در نقطه $(0,0)$ چقدر است؟ در نقطه $\left(2^{1/2},2\right)$ چطور؟ پاسخ های خود را برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بیان کنید (قانون دوم نیوتن یعنی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را به خاطر بیاورید).

نظریه و مثال ها

۲۱- **فرمول برداری خمیدگی.** برای یک خم هموار با استفاده از معادله (۱) فرمول خمیدگی زیر را بدست آورید

$$\kappa=\frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}$$

۲۲- نشان دهید که اگر مؤلفه قائم شتاب ذره متحرکی صفر باشد آن ذره بر روی یک خط راست حرکت خواهد کرد.

۲۳- **فرمول میانبر برای خمیدگی.**

اگر از قبل $|a_N|$ و $|\mathbf{v}|$ را بدانیم فرمول $a_N=\kappa|\mathbf{v}|^2$ روش آسانی برای محاسبه خمیدگی در اختیار ما قرار می دهد. با استفاده از این فرمول خمیدگی و شعاع خمیدگی خم زیر را بدست آورید

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j} \quad \text{و} \quad t>0$$

(برای مقادیر a_N و $|\mathbf{v}|$ از مثال ۱ کمک بگیرید).

۲۴- نشان دهید که برای خطی با معادله زیر κ و τ هر دو صفراند

$$\mathbf{r}(t)=(x_0+At)\mathbf{i}+(y_0+Bt)\mathbf{j}+(z_0+Ct)\mathbf{k}$$

۲۵- در مورد تاب خم مسطح هموار

$$\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}$$

چه می توان گفت؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲۶- **تاب یک پیچ.** نشان دهید که تاب پیچ

$$\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j}+bt\mathbf{k} \quad a \text{ و } b\ge 0$$

برابر است با $\tau=b/\left(a^2+b^2\right)$. بزرگترین مقداری که τ می تواند به ازای مقدار معینی از a داشته باشد چقدر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲۷- **خم های مشتق پذیر با تاب صفر در یک صفحه قرار دارند.** اینکه خم مشتق پذیر با تاب صفر در یک صفحه قرار

دارد حالت خاصی از این مطلب است که ذره ای که سرعتش بر یک بردار ثابت چون $\mathbf{C}$ همواره عمود باقی بماند در صفحه ای عمود بر $\mathbf{C}$ حرکت می کند. این مطلب را به نوبه خود می توان معادل با نتیجه زیر دانست.

فرض کنید $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$ به ازای تمام مقادیر t در بازه $[a,b]$ دو بار مشتق پذیر و در $t=a$، $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ باشد. همینطور به ازای تمام مقادیر t در بازه $[a,b]$، $\mathbf{v.k}=0$. نشان دهید که به ازای تمام مقادیر t در بازه $[a,b]$، $h(t)=0$. (راهنمایی: با $\mathbf{a}=d^2\mathbf{r}/dt^2$ شروع کرده و شرایط اولیه را به ترتیب معکوس به کار ببرید).

۲۸- فرمول محاسبه τ از B و v. اگر با تعریف $\tau=-(d\mathbf{B}/ds).\mathbf{N}$ شروع کرده و با کاربرد قاعده زنجیری $d\mathbf{B}/ds$ را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds}=\frac{d\mathbf{B}}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{d\mathbf{B}}{dt}\frac{1}{|\mathbf{v}|}$$

به فرمول زیر می رسیم

$$\tau=-\frac{1}{|\mathbf{v}|}\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}.\mathbf{N}\right)$$

مزیت این فرمول نسبت به معادله (۵) این است که بدست آوردن آن و بیان آن آسانتر است. اما عیب آن این است که محاسبه تاب با این فرمول بدون کمک گرفتن از یک رایانه وقت گیر است. با استفاده از این فرمول جدید تاب پیچ تمرین ۲۶ را بدست آورید.

تمرین های رایانه ای

در تمرین های ۲۹- ۳۲ با استفاده از یک نرم افزار ریاضی رایانه ای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$، $\mathbf{B}$، κ، τ و مؤلفه های مماس و قائم شتاب خم ها را به ازای مقادیر t داده شده تا چهار رقم اعشار محاسبه کنید.

۲۹- $\mathbf{r}(t)=(t\cos t)\mathbf{i}+(t\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ و $t=\sqrt{3}$

۳۰- $\mathbf{r}(t)=(e^t\cos t)\mathbf{i}+(e^t\sin t)\mathbf{j}+e^t\mathbf{k}$ و $t=\ln 2$

۳۱- $\mathbf{r}(t)=(t-\sin t)\mathbf{i}+(1-\cos t)\mathbf{j}+\sqrt{-t}\,\mathbf{k}$ و $t=-3\pi$

۳۲- $\mathbf{r}(t)=(3t-t^2)\mathbf{i}+(3t^2)\mathbf{j}+(3t+t^3)\mathbf{k}$ و $t=1$

۱۳- ۶- سرعت و شتاب در مختصات قطبی

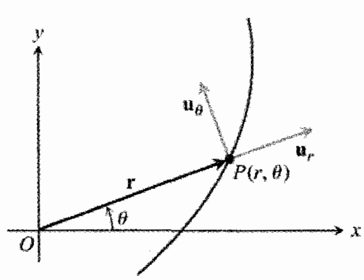
در این بخش معادلات سرعت و شتاب را در مختصات قطبی بدست می آوریم. این معادلات برای محاسبه مسیر سیارات و ماهواره ها در فضا مفیدند و آنها را برای بررسی سه قانون کپلر در مورد حرکت سیارات بکار می بریم.

حرکت در مختصات قطبی و استوانه ای

وقتی ذره ای در نقطه $P(r,\theta)$ روی خمی در صفحه مختصات قطبی حرکت می کند مکان، سرعت و شتاب آن را برحسب بردارهای واحد متحرک بیان می کنیم که در شکل ۱۳-۳۰ نشان داده شده اند.

$$\mathbf{u}_r=(\cos\theta)\mathbf{i}+(\sin\theta)\mathbf{j},\ \mathbf{u}_\theta=-(\sin\theta)\mathbf{i}+(\cos\theta)\mathbf{j} \quad (1)$$

بردار $\mathbf{u}_r$ در امتداد بردار مکان $\overline{OP}$ و هم جهت با آن است لذا $\mathbf{r}=r\mathbf{u}_r$. جهت بردار $\mathbf{u}_\theta$، که بر $\mathbf{u}_r$ عمود است، در جهت افزایش θ است.



شکل۱۳-۳۰: طول بردار r برابر است با مختص قطبی مثبت r نقطه P. بنابراین $\mathbf{u}_r$، که عبارت است از $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$، با $\mathbf{r}/r$ نیز برابر است. معادلات (۱) $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ را برحسب i و j بیان می کنند.

از معادلات (۱) داریم

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}=-(\sin\theta)\mathbf{i}+(\cos\theta)\mathbf{j}=\mathbf{u}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta}=-(\cos\theta)\mathbf{i}-(\sin\theta)\mathbf{j}=-\mathbf{u}_r$$

برای یافتن تغییرات $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ نسبت به زمان از آنها نسبت به t

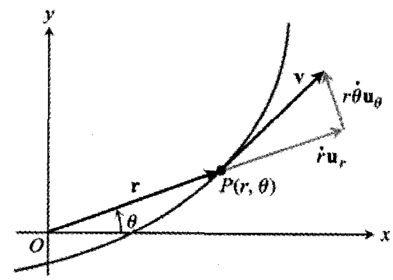
مشتق می گیریم. برای این کار با بهره گیری از قاعده زنجیری داریم

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \quad \text{و} \quad \dot{\mathbf{u}}_\theta = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r \tag{۲}$$

بنابراین می توانیم به صورت زیر بردار سرعت را برحسب $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ بیان کنیم

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r) = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

شکل **۱۳-۳۱** را ببینید. همانند بخش قبل از نمادگذاری نقطه ای نیوتن برای مشتقات زمانی استفاده می کنیم تا فرمول ها تا جایی که ممکن است شکل ساده ای به خود بگیرند: $\dot{\mathbf{u}}_r$ به معنی $d\mathbf{u}_r/dt$، $\dot{\theta}$ به معنی $d\theta/dt$ و به همین ترتیب الی آخر.



شکل۱۳-۳۱: در مختصات قطبی بردار سرعت عبارت است از: $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$.

شتاب برابر است با

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta)$$

وقتی از معادله(۲) برای محاسبه $\dot{\mathbf{u}}_r$ و $\dot{\mathbf{u}}_\theta$ استفاده کنیم و مولفه ها مجزا باشند معادله شتاب بر حسب $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ به صورت زیر در می آید

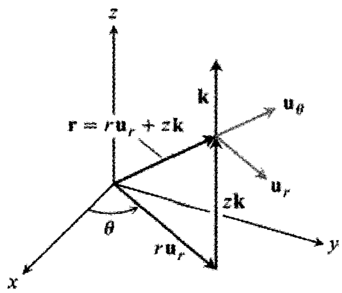
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

برای تعمیم این معادلات حرکت به فضا، به سمت راست معادله $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ عبارت $z\mathbf{k}$ را می افزاییم. در این صورت، در این مختصات استوانه ای، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k} \end{aligned} \tag{۳}$$

بردارهای $\mathbf{u}_r$، $\mathbf{u}_\theta$ و $\mathbf{k}$ یک دستگاه مختصات راستگرد تشکیل می دهند(شکل**۱۳-۳۲**) که در آن

$$\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = \mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{k} = \mathbf{u}_r \quad \text{و} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta$$



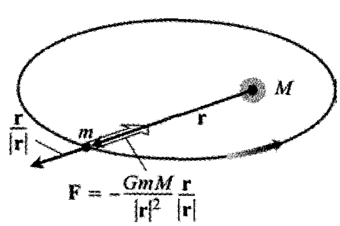
شکل۱۳-۳۲: بردار مکان و بردارهای واحد پایه در مختصات استوانه ای. توجه کنید که اگر $z \neq 0$ باشد $|\mathbf{r}| \neq r$.

هر سیاره در یک صفحه حرکت می کند

قانون گرانش نیوتن بیان می کند که اگر $\mathbf{r}$ بردار شعاعی از مرکز جرم خورشیدی به جرم M تا مرکز سیاره ای به جرم m باشد آنگاه نیروی $\mathbf{F}$، نیروی جاذبه گرانشی بین سیاره و خورشید، از رابطه زیر بدست می آید

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

(شکل**۱۳-۳۳**). عدد ثابت G در این رابطه **ثابت جهانی گرانش** نام دارد. اگر جرم بر حسب کیلوگرم، نیرو برحسب نیوتن و فاصله برحسب متر باشد G حدوداً برابر $6.6726\times10^{-11} N.m^2kg^{-2}$ است.



شکل۱۳-۳۳: جهت نیروی گرانش همواره در امتداد خط واصل مراکز دو جرم است.

با ترکیب قانون گرانش با قانون دوم نیوتن، $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$، برای نیروی وارد بر سیاره، چنین بدست می آوریم

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

سیاره در تمام لحظات شتابی رو به مرکز جرم خورشید دارد.

با توجه به اینکه $\ddot{\mathbf{r}}$ مضربی عددی از $\mathbf{r}$ است داریم

$$\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{0}$$

معادله فوق را می توان به صورت زیر نوشت

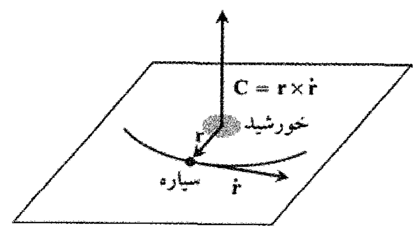
$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right)=\underbrace{\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}}_{0}+\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{0}$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{C}$$

که $\mathbf{C}$ برداری ثابت است.

معادله (۴) بیان می کند که $\mathbf{r}$ و $\dot{\mathbf{r}}$ همواره در صفحه ای عمود بر $\mathbf{C}$ واقع اند. بنابراین سیاره در صفحه ثابتی که از مرکز خورشیدش می گذرد حرکت می کند (شکل۱۳-۳۴). در ادامه می بینیم که چگونه قوانین کپلر حرکت را به شیوه ای دقیق توصیف می کنند.



شکل۱۳-۳۴: سیاره ای که از قوانین گرانش و حرکت نیوتن پیروی می کند در صفحه ای حرکت می کند که از مرکز جرم خورشید می گذرد و بر $\mathbf{C}=\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$ عمود است.

قانون اول کپلر (قانون بیضی)

بنابه قانون اول کپلر مسیر هر سیاره یک بیضی است که خورشید در یکی از کانونهای آن قرار دارد. خروج از مرکز این بیضی برابر است با

$$e=\frac{r_0v_0^2}{GM}-1 \qquad (۵)$$

و معادله قطبی بیضی (معادله (۵) بخش ۱۱ -۷ را ببینید) عبارت است از

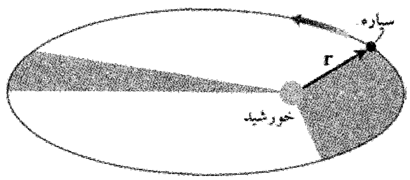
$$r=\frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta} \qquad (۶)$$

در اینجا v_0 تندی (مقدار سرعت) در لحظه ای است که سیاره در کمترین فاصله اش از مرکز خورشید، r_0، قرار دارد. در اینجا روابط فوق را اثبات نمی کنیم. جرم خورشید M برابر است با $1.99\times10^{30}kg$.

قانون دوم کپلر (قانون مساحت های مساوی)

طبق قانون دوم کپلر بردار شعاعی از خورشید تا سیاره (بردار $\mathbf{r}$ در مدل ما) در زمانهای مساوی مساحت های مساوی را جاروب می کند (شکل۱۳- ۳۵). برای بدست آوردن این قانون از معادله (۳) بهره گرفته و حاصلضرب برداری $\mathbf{C}=\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$ معادله (۴) را محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned}\mathbf{C}&=\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{r}\times\mathbf{v}\\&=r\mathbf{u}_r\times\left(\dot{r}\mathbf{u}_r+r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta\right) && (\dot{z}=0\text{ ، معادله۳})\\&=r\dot{r}\underbrace{\left(\mathbf{u}_r\times\mathbf{u}_r\right)}_{0}+r\left(r\dot{\theta}\right)\underbrace{\left(\mathbf{u}_r\times\mathbf{u}_\theta\right)}_{k}\\&=r\left(r\dot{\theta}\right)\mathbf{k} && (۷)\end{aligned}$$



شکل۱۳-۳۵: خطی که سیاره را به خورشیدش وصل می کند در زمان های مساوی مساحت های مساوی را جاروب می کند.

اگر t را برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت

$$\mathbf{C}=\left[r\left(r\dot{\theta}\right)\right]_{t=0}\mathbf{k}=r_0v_0\mathbf{k}$$

با جانشانی مقدار $\mathbf{C}$ در معادله (۷) داریم:

$$r_0v_0\mathbf{k}=r^2\dot{\theta}\mathbf{k} \qquad \text{یا} \qquad r^2\dot{\theta}=r_0v_0$$

در اینجا مساحت خودش را نشان می دهد. جزء مساحت در مختصات قطبی برابر است با

$$dA=\frac{1}{2}r^2d\theta$$

(بخش ۱۱-۵). از این رو dA/dt مقدار ثابتی دارد

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{1}{2}r_0v_0 \qquad (۸)$$

بنابراین dA/dt ثابت است و این همان قانون دوم کپلر می باشد.

قانون سوم کپلر (قانون زمان – فاصله)

مدت زمان T را که طول می کشد تا یک سیاره یک بار به دور خورشیدش بچرخد **دوره تناوب مداری** سیاره می نامند. قانون سوم کپلر بیان می کند که T و نصف قطر بزرگ مدار سیاره a

با معادله زیر به هم مربوط می شوند

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

چون سمت راست این معادله برای یک منظومه شمسی معین ثابت است نسبت T^2 به a^3 برای همه سیارات واقع در آن منظومه یکسان است.

دراینجا طریقه بدست آوردن قانون سوم کپلر را بطور خلاصه بیان می کنیم. مساحت محصور شده توسط مدار بیضوی سیاره به صورت زیر محاسبه می شود

$$\text{مساحت}=\int_0^T dA$$

$$=\int_0^T \frac{1}{2}r_0v_0dt \qquad \text{(معادله۸)}$$

$$=\frac{1}{2}Tr_0v_0$$

اگر b نصف طول قطر کوچک بیضی باشد مساحت بیضی برابر است با πab، بنابراین

$$T=\frac{2\pi ab}{r_0v_0}=\frac{2\pi a^2}{r_0v_0}\sqrt{1-e^2} \qquad (۹)$$

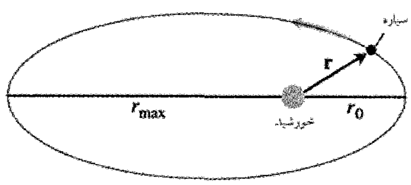
(برای هر بیضی $b=a\sqrt{1-e^2}$)

آنچه باقی مانده این است که a و e را برحسب r_0، v_0، G و M بیان کنیم. در مورد e از معادله (۵) بهره می گیریم و در مورد a، در معادله(۶) θ را مساوی با π قرار داده و بدست می آوریم

$$r_{\max}=r_0\frac{1+e}{1-e}$$

بنابراین با توجه به شکل ۱۳-۳۶ داریم

$$2a=r_0+r_{\max}=\frac{2r_0}{1-e}=\frac{2r_0GM}{2GM-r_0{v_0}^2} \qquad (۱۰)$$



شکل۱۳-۳۶: طول قطر بزرگ بیضی برابر است با $2a=r_0+r_{\max}$.

اگر طرفین معادله (۹) را به توان ۲ رسانده و نتایج معادلات (۵) و (۱۰) را در آن جاگذاری کنیم قانون سوم کپلر حاصل می شود (تمرین ۹).

تمرین های۱۳- ۶

در تمرین های۱- ۵ بردارهای سرعت و شتاب را بر حسب $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ بدست آورید.

۱- $r=a(1-\cos\theta),\quad \frac{d\theta}{dt}=3$

۲- $r=a\sin\theta,\quad \frac{d\theta}{dt}=2t$

۳- $r=e^{a\theta},\quad \frac{d\theta}{dt}=2$

۴- $r=a(1+\sin t),\quad \theta=1-e^{-t}$

۵- $r=2\cos 4t,\quad \theta=2t$

۶- **نوع مدار.** به ازای چه مقادیری از v_0 در معادله (۵) مدار معادله (۶) یک دایره است؟ بیضی است؟ سهمی است؟ هندلولی است؟

۷- **مدارهای دایره ای.** نشان دهید که یک سیاره در یک مدار دایره ای با تندی ثابتی حرکت می کند (راهنمایی: این مطلب پیامدی از یکی از قوانین کپلر است).

۸- فرض کنید $\mathbf{r}$ بردار مکان ذره ای است که روی یک خم مسطح حرکت می کند و dA/dt آهنگ جاروب مساحت توسط این بردار است. بدون استفاده از مختصات و با فرض اینکه مشتقات لازم موجودند بحثی هندسی مبتنی بر نموها و حدها برای اعتبار معادله زیر ارائه کنید

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}|$$

۹- **قانون سوم کپلر.** استنتاج قانون سوم کپلر را کامل کنید (بخشی از استنتاج را که زیر معادله ۱۰ آمده است).

۱۰- با استفاده از قانون سوم کپلر و با علم به اینکه دوره تناوب مداری زمین۳۶۵/۲۵۶ روز است طول قطر بزرگ مدار زمین را بدست آورید.

فصل۱۳: پرسش های مروری

۱- قواعد مشتق گیری و انتگرال گیری از توابع برداری را بیان کرده و مثال بزنید.

۲- سرعت، تندی و جهت حرکت و شتاب جسمی را که روی یک خم فضایی مشتق پذیر حرکت می کند چگونه تعریف کرده و محاسبه می کنید؟ یک مثال بیاورید.

۳- مشتقات توابع برداری با طول ثابت چه ویژگی خاصی دارند؟ مثال بیاورید.

۴- معادلات برداری و پارامتری حرکت پرتابه ایده ال کدامند؟ ارتفاع اوج، زمان پرواز و برد یک پرتابه را چگونه محاسبه می کنید؟ مثال هایی بیاورید.

۵- چگونه طول یک قطعه از یک خم فضایی هموار را تعریف و محاسبه می کنید؟ یک مثال بزنید. در این تعریف از کدام فرض های ریاضی استفاده می شود؟

۶- چگونه فاصله از یک نقطه مبنای از پیش برگزیده بر روی یک خم هموار واقع در فضا را اندازه گیری می کنید؟

۷- منظور از بردار مماس واحد یک خم مشتق پذیر چیست؟ یک مثال بزنید.

۸- خمیدگی، دایره خمیدگی (دایره بوسان)، مرکز خمیدگی و شعاع خمیدگی خمهای دوبار مشتق پذیر واقع در صفحه را تعریف کنید. مثال هایی ارائه کنید. چه نوع خم هایی خمیدگی صفر دارند؟ چه نوع خم هایی خمیدگی ثابت دارند؟

۹- منظور از بردار قائم اصلی یک خم مسطح چیست؟ این بردار چه زمانی تعریف می شود؟ جهت آن چگونه است؟ یک مثال ارائه کنید.

۱۰- $\mathbf{N}$ و κ را در مورد خم های واقع در فضا تعریف کنید. این کمیت ها چه رابطه ای با هم دارند؟ مثال هایی ارائه کنید.

۱۱- بردار قائم دوم یک خم چیست؟ مثال بزنید. این بردار چه ارتباطی با تاب خم دارد؟ مثال بزنید.

۱۲- فرمول های بیان شتاب یک جسم متحرک به صورت مجموع مؤلفه های مماس و قائم آن کدامند؟ مثال بزنید. نوشتن شتاب به این صورت چه مزیتی دارد؟ اگر جسم با تندی ثابت حرکت کند فرمول ها به چه صورتی در می آیند؟ با تندی ثابت حول یک دایره حرکت کند چطور؟

۱۳- قوانین کپلر را بیان کنید.

فصل۱۳: تمرین های عملی

حرکت در صفحه

در تمرین های ۱ و ۲ خم ها را رسم کرده و بردارهای سرعت و شتاب آنها را در مقادیر t داده شده رسم نمایید. سپس بدون یافتن $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$، $\mathbf{a}$ را به شکل $\mathbf{a}=a_T\mathbf{T}+a_N\mathbf{N}$ نوشته و مقدار κ را به ازای مقادیر t داده شده بدست آورید.

۱- $\mathbf{r}(t)=(4\cos t)\mathbf{i}+(\sqrt{2}\sin t)\mathbf{j}$ و $t=0,\ \pi/4$

۲- $\mathbf{r}(t)=(\sqrt{3}\sec t)\mathbf{i}+(\sqrt{3}\tan t)\mathbf{j}$ و $t=0$

۳- مکان ذره ای در صفحه در لحظه t عبارت است از

$$\mathbf{r}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i}+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}$$

بیشترین مقدار سرعت (تندی) ذره را بدست آورید.

۴- فرض کنید $\mathbf{r}(t)=(e^t\cos t)\mathbf{i}+(e^t\sin t)\mathbf{j}$. نشان دهید که زاویه بین $\mathbf{r}$ و $\mathbf{a}$ هرگز تغییر نمی کند (ثابت است). این زاویه چقدر است؟

۵- **محاسبه خمیدگی.** در نقطه P، سرعت و شتاب ذره ای که در صفحه حرکت می کند به ترتیب عبارتند از $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ و $\mathbf{a}=5\mathbf{i}+15\mathbf{j}$. خمیدگی مسیر ذره را در P محاسبه کنید.

۶- نقطه ای بر روی خم $y=e^x$ بیابید که در آن خمیدگی بیشترین مقدار را دارد.

۷- ذره ای در صفحه xy حول دایره واحد حرکت می کند. مکان ذره در لحظه t عبارت است از $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$، که x و y توابع مشتق پذیر از t هستند. اگر $\mathbf{v}.\mathbf{i}=y$ باشد dy/dt را بیابید حرکت ساعتگرد است یا پاد ساعتگرد؟

۸- شما از طریق یک لوله بادی پیامی ارسال می کنید که روی خم $9y=x^3$ حرکت می کند (فاصله بر حسب متر است). در نقطه $(3,3)$، $\mathbf{v}.\mathbf{i}=4$ و $\mathbf{a}.\mathbf{i}=-2$. مقادیر $\mathbf{v}.\mathbf{j}$ و $\mathbf{a}.\mathbf{j}$ را در نقطه $(3,3)$ بدست آورید.

۹- **مشخصات حرکت دایره ای.** ذره ای در صفحه چنان حرکت می کند که بردارهای سرعت و مکان آن همواره برهم عمودند. نشان دهید که ذره بر روی دایره ای به مرکز مبداء حرکت می کند.

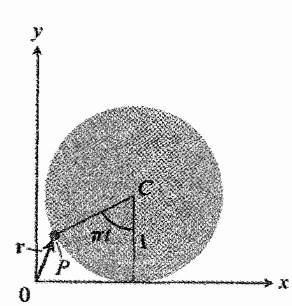
۱۰- **تندی حرکت بر روی یک چرخزاد.** چرخ مستدیری (دایره ای) به شعاع $1ft$ و به مرکز C روی محور x با سرعت نیم دور بر ثانیه به سمت راست می غلتد(شکل زیر را ببینید). در لحظه t، بردار مکان نقطه P روی محیط چرخ عبارت است از

$$\mathbf{r}=(\pi t-\sin\pi t)\mathbf{i}+(1-\cos\pi t)\mathbf{j}$$

(الف)- خمی را که نقطه P در بازه $0\le t\le 3$ طی می کند رسم نمایید.

(ب)- $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ را در لحظات $t=0,1,2,3$ بدست آورده و این بردارها را به شکل خود اضافه کنید.

(پ)- در هر لحظه معین، تندی رو به جلوی بالاترین نقطه چرخ چقدر است؟ نقطه C چطور؟



حرکت پرتابه

۱۱- **پرتاب وزنه.** وزنه ای در ارتفاع $6.5ft$ بالاتر از سطح زمین، تحت زاویه 45° و با سرعت $44ft/\sec$ از دست پرتابگر جدا می شود. مکان وزنه را $3\sec$ بعد از پرتاب مشخص کنید.

۱۲- **نیزه.** نیزه ای در ارتفاع $7ft$ از سطح زمین، تحت زاویه 45° و با سرعت $80ft/\sec$ از دست پرتابگر جدا می شود. نیزه تا چه ارتفاعی بالا می رود؟

۱۳- توپ گلفی در نقطه ای واقع در پای تپه مستقیمی با زاویه شیب ϕ نسبت به افق، با تندی اولیه v_0 و تحت زاویه α نسبت به افق پرتاب می شود بطوریکه

$$0<\phi<\alpha<\pi/2$$

نشان دهید که توپ فاصله زیر را روی تپه طی می کند

$$\frac{2v_0^2\cos\alpha}{g\cos^2\phi}\sin(\alpha-\phi)$$

و از اینجا نشان دهید که بیشترین برد توپ به ازای یک v_0 معین زمانی حاصل می شود که $\alpha=(\phi/2)+(\pi/4)$ باشد؛ یعنی وقتی بردار سرعت اولیه نیمساز زاویه بین تپه و امتداد قائم باشد.

۱۴- **نیزه.** در سال ۱۹۸۸ پترا فلکه از آلمان شرقی با پرتاب نیزه به طول $262\,\text{ft}\,5\text{in.}$ رکورد جهانی پرتاب نیزه زنان را به نام خود به ثبت رساند.

(الف)- با فرض اینکه فلکه نیزه را تحت زاویه 40° نسبت به افق و از ارتفاع ۶/۵ فوتی بالای زمین پرتاب کرده باشد تندی اولیه نیزه چقدر بوده است.

(ب)_ نیزه تا چه ارتفاعی بالا رفته است؟

حرکت در فضا

در تمرین های ۱۵ و ۱۶ طول خم ها را بدست آورید.

۱۵- $\mathbf{r}(t)=(2\cos t)\mathbf{i}+(2\sin t)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$ و $0\le t\le\pi/4$

۱۶- $\mathbf{r}(t)=(3\cos t)\mathbf{i}+(3\sin t)\mathbf{j}+2t^{3/2}\mathbf{k}$ و $0\le t\le 3$

در تمرین های ۱۷-۲۰، $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$، $\mathbf{B}$، κ و τ را به ازای مقدار t داده شده بدست آورید.

۱۷- $\mathbf{r}(t)=\frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\mathbf{i}+\frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\mathbf{j}+\frac{1}{3}t\mathbf{k}$ و $t=0$

۱۸- $t=0$ و $\mathbf{r}(t)=\left(e^t\sin 2t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\cos 2t\right)\mathbf{j}+2e^t\mathbf{k}$

۱۹- $t=\ln 2$ و $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\frac{1}{2}e^{2t}\mathbf{j}$

۲۰- $t=\ln 2$ و $\mathbf{r}(t)=(3\cosh 2t)\mathbf{i}+(3\sinh 2t)\mathbf{j}+6t\mathbf{k}$

در تمرین های ۲۱ و ۲۲ بدون یافتن $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$، $\mathbf{a}$ را در $t=0$ به شکل $\mathbf{a}=a_T\mathbf{T}+a_N\mathbf{N}$ بنویسید.

۲۱- $\mathbf{r}(t)=\left(2+3t+3t^2\right)\mathbf{i}+\left(4t+4t^2\right)\mathbf{j}-(6\cos t)\mathbf{k}$

۲۲- $\mathbf{r}(t)=(2+t)\mathbf{i}+\left(t+2t^2\right)\mathbf{j}+\left(1+t^2\right)\mathbf{k}$

۲۳- $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$، $\mathbf{B}$، κ و τ را برای خم زیر به صورت تابعی از t بدست آورید.

$$\mathbf{r}(t)=(\sin t)\mathbf{i}+\left(\sqrt{2}\cos t\right)\mathbf{j}+(\sin t)\mathbf{k}$$

۲۴- در چه لحظاتی از بازه زمانی $0\le t\le \pi$ بردارهای سرعت و شتاب حرکت

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}+(5\cos t)\mathbf{j}+(3\sin t)\mathbf{k}$$

بر هم عمودند؟

۲۵- مکان ذره ای که در فضا حرکت می کند در لحظه $t\ge 0$ با تابع زیر بیان می شود

$$\mathbf{r}(t)=2\mathbf{i}+\left(4\sin\frac{t}{2}\right)\mathbf{j}+\left(3-\frac{t}{\pi}\right)\mathbf{k}$$

مطلوبست اولین لحظه ای که در آن $\mathbf{r}$ بر $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ عمود است.

۲۶- معادلات صفحات بوسان، قائم و راستگر خم $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ را در نقطه (۱و۱و۱) بدست آورید.

۲۷- معادلات پارامتری خطی را بدست آورید که در $t=0$ بر خم $\mathbf{r}(t)=e^t\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+\ln(1-t)\mathbf{k}$ مماس است.

۲۸- مطلوبست معادلات پارامتری خط مماس بر پیچ $\mathbf{r}(t)=\left(\sqrt{2}\cos t\right)\mathbf{i}+\left(\sqrt{2}\sin t\right)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ در نقطه ای که در آن $t=\pi/4$ است.

نظریه و مثال ها

۲۹- **خمهای همزمان.** با حذف α از معادلات پرتابه ایده ال یعنی

$$x=(v_0\cos\alpha)t \quad \text{و} \quad y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2$$

نشان دهید که $x^2+\left(y+gt^2/2\right)^2=v_0^2t^2$. این معادله نشان می دهد که پرتابه هایی که با تندی اولیه یکسان بطور همزمان از مبداء پرتاب شوند زاویه پرتاب آنها هر چه باشد در هر لحظه معین همگی روی دایره ای به شعاع v_0t و به مرکز $\left(0,-gt^2/2\right)$ قرار دارند. این دایره ها را خم های همزمان پرتاب می نامند.

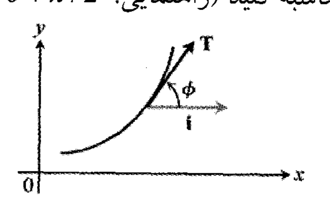
۳۰- **شعاع خمیدگی.** نشان دهید که شعاع خمیدگی یک خم مسطح دو بار مشتق پذیر $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}$ از فرمول زیر بدست می آید

$$\rho=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2-\ddot{s}^2}}$$

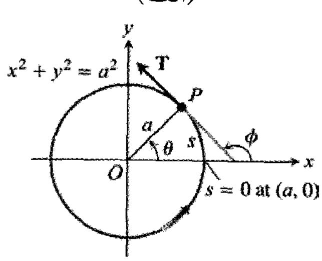
که در آن

$$\ddot{s}=\frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

۳۱- **تعریف دیگر خمیدگی در صفحه.** طبق تعریفی دیگر، خمیدگی یک خم مشتق پذیر واقع در صفحه عبارت است از $|d\phi/ds|$، که ϕ زاویه بین $\mathbf{T}$ و $\mathbf{i}$ است (شکل۱۳-۳۷- الف). شکل۱۳-۳۷- ب فاصله s را بر روی دایره $x^2+y^2=a^2$ نشان می دهد که بصورت پاد ساعتگرد از نقطه $(a,0)$ تا نقطه ای چون P اندازه گیری می شود. زاویه ϕ هم نشان داده شده است که زاویه خط مماس بر دایره در نقطه P با محور x است. خمیدگی دایره را با استفاده از تعریف فوق محاسبه کنید (راهنمایی: $\phi=\theta+\pi/2$).



(الف)



(ب)

شکل۱۳-۳۷: شکل های تمرین ۳۱.

۱- **نمای زمین از منظر اسکایلب۴.** وقتی اسکایلب۴ در ارتفاع

اوج خود، در فاصله $437km$ از سطح زمین، بوده چند درصد از مساحت سطح رو به زمین توسط فضا نوردان قابل رؤیت بوده است؟ برای یافتن این مساحت سطح قابل مشاهده را به صورت سطحی مدلسازی کنید که با چرخاندن قوس دایره ای GT نشان داده شده حول محور y بدست می آید. سپس مراحل زیر را انجام دهید: ۱- با استفاده از مثلث های مشابه موجود نشان دهید که

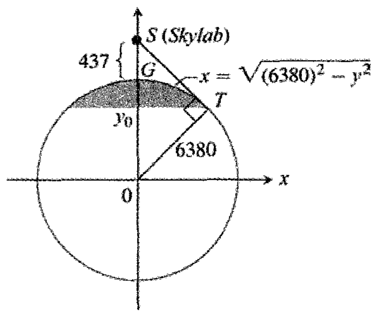
$$y_0/6380 = 6380/(6380+437)$$

y_0 را بدست آورید.

۲- مساحت قابل مشاهده را از رابطه زیر تا چهار رقم با معنی محاسبه کنید

$$VA = \int_{y_0}^{6380} 2\pi x \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

۴- نتیجه بدست آمده را به صورت درصدی از مساحت سطح زمین بیان کنید.



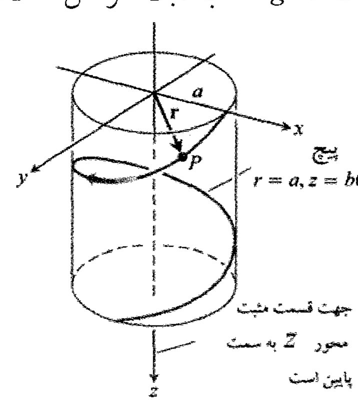
فصل ۱۳: تمرین های اضافی و پیشرفته

تمرینهای کاربردی

۱- ذره بدون اصطکاک P در لحظه $t=0$ از نقطه $(a,0,0)$ از حالت سکون شروع به حرکت کرده و از پیچی با معادله زیر تحت تأثیر گرانش به پایین می لغزد

$$\mathbf{r}(\theta) = (a\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\theta)\mathbf{j} + b\theta\mathbf{k} \qquad (a,b>0)$$

(شکل زیر). θ در این معادله مختص استوانه ای θ است. در مختصات استوانه ای پیچ فوق عبارت است از خم $r=a$، $z=b\theta$ و $\theta \geq 0$. فرض می کنیم برای این حرکت θ تابعی مشتق پذیر از t باشد. قانون پایستگی (بقای) انرژی بیان می کند که تندی ذره بعد از پیمودن فاصله عمودی z برابر $\sqrt{2gz}$ است که g شتاب ثابت گرانش است.



(الف)- سرعت زاویه ای $d\theta/dt$ را وقتی $\theta = 2\pi$ است بدست آورید.

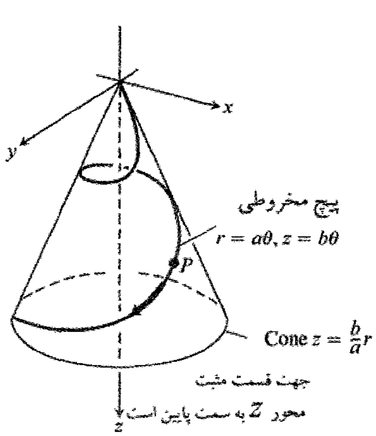
(ب)- مختصات θ و z ذره را به صورت توابعی از t بیان کنید.

(پ)- مؤلفه های مماس و قائم سرعت $d\mathbf{r}/dt$ و شتاب $d^2\mathbf{r}/dt^2$ را به صورت توابعی از t بیان کنید. آیا شتاب در جهت بردار قائم دوم $\mathbf{B}$ مؤلفه غیر صفری دارد؟

۲- فرض کنید خم تمرین ۱ با خم مخروطی $r=a\theta$، $z=b\theta$ که در شکل زیر نشان داده شده جایگزین شود.

(الف)- سرعت زاویه ای $d\theta/dt$ را به صورت تابعی از t بیان کنید.

(ب)- فاصله ای را که ذره برروی پیچ طی می کند به صورت تابعی از θ بیان کنید.



حرکت در مختصات قطبی و استوانه ای

۳- از معادله مدار

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta}$$

نتیجه بگیرید که یک سیاره زمانی در نزدیکترین فاصله از خورشیدش قرار دارد که $\theta = 0$ باشد و نشان دهید که در آن لحظه $r = r_0$.

۴- **معادله کپلر.** مسئله تعیین مکان یک سیاره در مدارش در یک لحظه معین نهایتاً به حل معادلات «کپلر» به شکل زیر منتهی می شود

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

(الف)- نشان دهید که این معادله خاص جوابی بین $x = 0$ و $x = 2$ دارد.

(ب)- به کمک رایانه یا ماشین حساب خود در وضعیت رادیان، با کاربرد روش نیوتن جواب معادله فوق را تا هر چند رقم اعشار که می توانید بدست آورید.

۵- در بخش ۱۳-۶ دیدیم که سرعت ذره ای که در صفحه حرکت می کند عبارت است از

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

(الف)- با محاسبه حاصلضرب های عددی $\mathbf{v.i}$ و $\mathbf{v.j}$، $\dot{x}$ و $\dot{y}$ را بر حسب $\dot{r}$ و $r\dot{\theta}$ بیان کنید.

(ب)- با محاسبه حاصلضرب های عددی $\mathbf{v.u}_r$، $\mathbf{v.u}_\theta$، $\dot{r}$ و $r\dot{\theta}$ را بر حسب $\dot{x}$ و $\dot{y}$ بیان کنید.

۶- خمیدگی یک خم دو بار مشتق پذیر چون $r = f(\theta)$ واقع در صفحه مختصات قطبی را برحسب f و مشتقات آن بیان کنید.

۷- میله نازکی که از مبداء صفحه مختصات قطبی گذشته است با آهنگ $3rad/\min$ حول مبداء (در صفحه) می چرخد. سوسکی از نقطه (۰و۲) شروع کرده و با آهنگ $1in./\min$ بر روی میله به سمت مبداء می خزد.

(الف)- شکل قطبی شتاب و سرعت سوسک را وقتی در نیمه راه مبداء (فاصله ۱ اینچی مبداء) قرار دارد بیابید.

(ب)- حشره در مدتی که طول می کشد تا به مبداء برسد چه مسافتی را خواهد پیمود. جواب را تا یک دهم اینچ بیان کنید.

۸- **طول قوس در مختصات استوانه ای.**

(الف)- نشان دهید که وقتی $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ را برحسب مختصات استوانه ای بیان کنید به

$$ds^2 = dr^2 + rd^2\theta^2 + dz^2$$

می رسید.

(ب)- تعبیر هندسی این نتیجه را برحسب یال ها و قطر یک جعبه بیان کنید. جعبه را رسم کنید.

(پ)- با استفاده از نتیجه قسمت (الف) طول خم

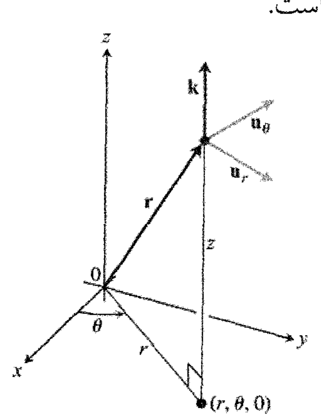
$$r = e^\theta ، z = e^\theta ، 0 \le \theta \le \theta\ln 8$$

را بدست آورید.

۹- **بردارهای واحد برای مکان و حرکت در مختصات استوانه ای.** وقتی مکان ذره ای که در فضا حرکت می کند در مختصات استوانه ای داده شده باشد بردارهای واحدی که برای توصیف حرکت و مکان آن بکار می بریم عبارتند از

$$\mathbf{u}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \mathbf{u}_\theta = -(\sin\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$$

و $\mathbf{k}$ (شکل زیر را ببینید). در این صورت بردار مکان ذره عبارت است از $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k}$ ، که r مختص فاصله قطبی مثبت مکان ذره است.



(الف)- نشان دهید که $\mathbf{u}_r$، $\mathbf{u}_\theta$ و $\mathbf{k}$، با همین ترتیب، یک دستگاه راستگرد از بردارهای واحد تشکیل می دهند.

(ب)- نشان دهید که

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r$$

(پ)- با فرض اینکه مشتقات لازم نسبت به t موجودند،

$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{a}=\ddot{\mathbf{r}}$ را بر حسب $\mathbf{u}_r$ ، $\mathbf{u}_\theta$ ، $\mathbf{k}$ ، $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ بیان کنید.

۱۰- **پایستگی(بقای) تکانه زاویه ای.** فرض کنید $\mathbf{r}(t)$ نشان دهنده مکان جسم متحرکی در فضا در لحظه t است و نیروی وارد بر جسم در لحظه t عبارت است از

$$\mathbf{F}(t)=-\frac{c}{\left|\mathbf{r}(t)\right|^3}\mathbf{r}(t)$$

که c یک ثابت است. در فیزیک تکانه (اندازه حرکت) زاویه ای یک جسم در لحظه t به صورت $\mathbf{L}(t)=\mathbf{r}(t)\times m\mathbf{v}(t)$ تعریف می شود که m جرم جسم و $\mathbf{v}(t)$ سرعت آن است. ثابت کنید که تکانه زاویه ای کمیتی پایسته (ثابت) است، یعنی ثابت کنید که $\mathbf{L}(t)$ برداری ثابت و مستقل از زمان است. قانون دوم نیوتن یعنی $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را به خاطر داشته باشید (در واقع این مسئله یک مسئله در حساب دیفرانسیل و انتگرال است نه مسئله فیزیکی).

فصل ۱۳: پروژه های کاربرد فن آوری

بخش متمتیکا / میپل:

ردیابی یک جسم متحرک باردار.

بردارهای مکان، سرعت و شتاب را تجسم کرده و حرکت را تحلیل کنید.

معادلات پارامتری و قطبی یک اسکیت باز ماهر

بردارهای مکان، سرعت و شتاب را تجسم کرده و حرکت را تحلیل کنید.

حرکت در سه بعد

کمیت های مسافت طی شده، تندی، خمیدگی و تاب را برای حرکت بر روی یک خم فضایی محاسبه کنید. بردارهای مماس، قائم و قائم دوم مربوط به حرکت برروی یک خم فضایی را تجسم کرده و محاسبه کنید.

فصل ۱۴
مشتقات جزئی

چشم انداز: بسیاری از توابع به بیش از یک متغیر مستقل بستگی دارند. برای مثال، حجم یک استوانه مستدیر قائم طبق رابطه $V=\pi r^2 h$ تابعی از شعاع و ارتفاع آن است، لذا حجم آن تابع $V\left(r,h\right)$ از دو متغیر r و h است. در این فصل مفاهیم اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره را به توابع چند متغیره تعمیم می دهیم. مشتقات این توابع به دلیل شیوه های مختلفی که متغیرها می توانند بر هم اثر کنند متنوع تر و جالب تر هستند. کاربردهای این مشتقات هم نسبت به حساب دیفرانسیل و انتگرال تک متغیره متنوع تر است و در فصل بعدی خواهیم دید که در مورد انتگرال های توابع چند متغیره هم همینطور است.

۱۴-۱- توابع چند متغیره

در این بخش توابع دارای بیش از یک متغیر مستقل را تعریف کرده و در مورد نحوه رسم آنها بحث می کنیم.

توابع حقیقی – مقدار (با مقدار حقیقی) دارای چند متغیر حقیقی مستقل، مشابه توابع یک متغیره تعریف می شوند. نقاط واقع در دامنه زوج های مرتب (سه تایی ها، چهارتایی ها، و n تایی ها) از اعداد حقیقی اند و مقادیر برد همان اعداد حقیقی هستند که تاکنون با آنها سروکار داشته ایم.

تعاریف: فرض کنید D مجموعه ای باشد از n تایی های اعداد حقیقی و بصورت(x_n و ... و x_2و x_1). یک **تابع حقیقی – مقدار** f با دامنه D قاعده ای است که به هر عضو از D (هر nتایی از اعداد) عدد حقیقی منحصر بفردی (یکتایی) چون

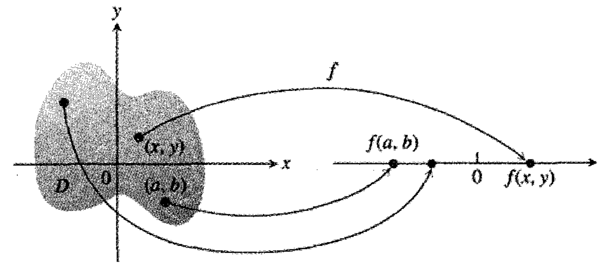
$$w=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$$

را نسبت می دهد. مجموعه D**دامنه** تابع است. مجموعه مقادیر w که f اختیار می کند **برد** تابع است. نماد w **متغیر وابسته** f است و گفته می شود f تابعی از n **متغیر مستقل** x_1 تا x_n است. x_j ها **متغیرهای ورودی** تابع و w **متغیر خروجی** تابع نیز نامیده می شود.

اگر f تابعی از دو متغیر مستقل باشد معمولاً متغیرهای مستقل را x و y و متغیر وابسته را z می نامیم و دامنه f را به صورت ناحیه ای در صفحه xy نشان می دهیم (شکل۱۴-۱). اگر f تابعی از سه متغیر مستقل باشد متغیرهای مستقل را x و y و z و متغیر وابسته را w می نامیم و دامنه را به صورت ناحیه ای در فضا نشان می دهیم.

در مسائل کاربردی، تمایل داریم از حروفی برای متغیرها استفاده کنیم که یادآور این باشند که هر متغیر نشان دهنده چه کمیتی است. مثلاً برای بیان اینکه حجم یک استوانه مستدیر قائم تابعی از شعاع و ارتفاع آن است از $V=f\left(r,h\right)$ استفاده می کنیم. برای بیان دقیق تر، می توانیم به جای نماد $f\left(r,h\right)$ فرمول محاسبه مقدار V از مقادیر r و h را قرار داده و بنویسیم:

$V = \pi r^2 h$. در هر دو حالت، r و h متغیرهای مستقل و V متغیر وابسته تابع است.



شکل۱۴-۱: نمودار پیکانی برای نمایش تابع $z = f(x,y)$.

طبق معمول، برای محاسبه توابعی که بوسیله فرمول ها تعریف می شوند مقادیر متغیرهای مستقل را در فرمول جاگذاری کرده و مقدار متناظر متغیر وابسته را محاسبه می کنیم. مثلاً مقدار $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ در نقطه $(3,0,4)$ برابر است با

$$f(3,0,4)=\sqrt{(3)^2+(0)^2+(4)^2}=\sqrt{25}=5$$

دامنه و برد

در تعریف تابعی که بیش از یک متغیر دارد طبق معمول داده هایی را که به اعداد مختلط یا به عمل تقسیم بر صفر منجر می شوند استثناء می کنیم. مثلاً اگر $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$، y نمی تواند کمتر از x^2 باشد. اگر $f(x,y)=1/(xy)$، xy نباید برابر صفر باشد. دامنه یک تابع بزرگترین مجموعه ای فرض می شود که قاعده معرف تابع به ازای عناصر آن اعداد حقیقی به دست می دهد، مگر اینکه دامنه چیز دیگری باشد که صریحاً مشخص شده است. برد، شامل مجموعه مقادیر خروجی متغیر وابسته است.

مثال۱: (الف) – توابع زیر دارای دو متغیر هستند. به قیدهایی (شرط هایی) که به دامنه های آنها اعمال شده است تا مقداری حقیقی برای متغیر وابسته z بدست آید توجه کنید.

تابع	دامنه	برد
$z=\sqrt{y-x^2}$	$y \ge x^2$	$[0,\infty)$
$z=\dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
$z=\sin xy$	کل صفحه	$[-1,1]$

(ب)- توابع زیر دارای سه متغیر هستند و روی بخشی از دامنه های آنها قیدهایی وجود دارد.

تابع	دامنه	برد
$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	کل فضا	$[0,\infty)$
$w=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$	$(x,y,z)\neq(0,0,0)$	$(0,\infty)$
$w=xy\ln z$	نیمی از فضا با $z>0$	$(-\infty,\infty)$

توابع دو متغیره

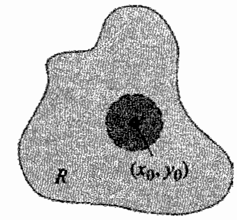
نواحی واقع در صفحه درست مثل بازه های روی محور حقیقی می توانند نقاط درونی (داخلی)و نقاط مرزی داشته باشند. بازه های بسته $[a,b]$ نقاط مرزی خود را دربردارند، بازه های باز (a,b) شامل نقاط مرزی خود نیستند و بازه هایی مثل $[a,b)$ نه بازند و نه بسته.

تعاریف: نقطه (x_0,y_0) در ناحیه(مجموعه) R در صفحه xy یک **نقطه درونی** R محسوب می شود اگر مرکز قرصی با شعاع مثبت باشد که تماماً داخل R قرار دارد (شکل**۱۴-۲**)، نقطه (x_0,y_0) یک **نقطه مرزی** R است اگر هر قرص به مرکز (x_0,y_0) هم شامل نقاطی باشد که خارج از R واقع اند و هم نقاطی که در Rواقع اند(خود نقطه مرزی لزوماً متعلق به R نیست).

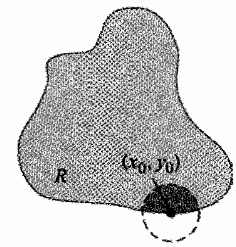
نقاط درونی یک ناحیه، به عنوان یک مجموعه، **درون** ناحیه را تشکیل می دهند. نقاط مرزی ناحیه، **مرز** آن را تشکیل می دهند. ناحیه ای را **باز** می گوییم که تماماً شامل نقاط درونی باشد. ناحیه **بسته** ناحیه ای است که شامل تمام نقاط مرزی اش باشد (شکل**۱۴-۳**).

مانند بازه نیمه باز اعداد حقیقی $[a,b)$، برخی نواحی واقع در صفحه نه بازند و نه بسته. اگر در شکل**۱۴-۳** با قرص باز شروع کرده و برخی نقاط مرزی آن، نه تمام نقاط مرزی، را به آن اضافه کنید مجموعه حاصل نه باز است و نه بسته. نقاط مرزی

اضافه شده مانع از این می شوند که مجموعه باز باشد. از طرفی فقدان بقیه نقاط مرزی مانع از بسته بودن مجموعه می شود.

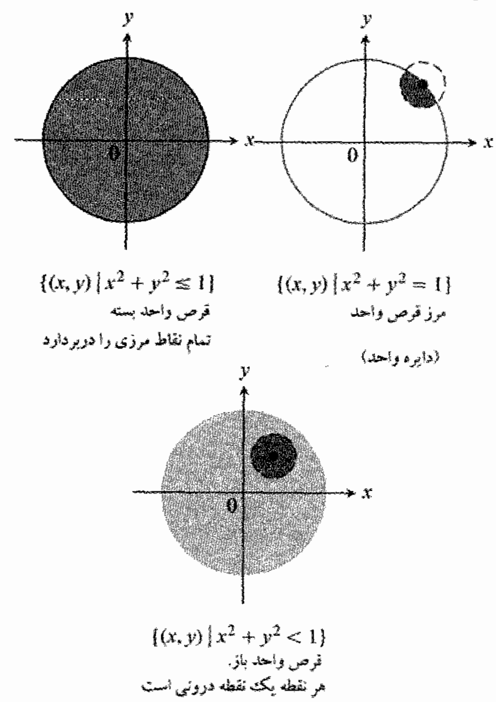


(الف)- نقطه درونی



(ب)- نقطه مرزی

شکل۱۴-۲: نقاط درونی و نقاط مرزی یک ناحیه مسطح (واقع در صفحه) چون R. یک نقطه درونی لزوماً نقطه ای از R است. یک نقطه مرزی R لزوماً متعلق به R نیست.



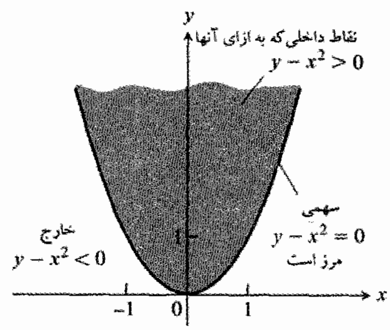
شکل۱۴-۳: نقاط درونی و نقاط مرزی قرص واحد در صفحه.

تعاریف: یک ناحیه واقع در صفحه **کرانـدار** است اگـر درون قرصی با شعاع ثابت واقع باشد. یک ناحیه **بی کران** است اگـر کراندار نباشد.

پاره خط ها، مثلث ها، داخل مثلث ها، مستطیل ها، دایره ها و قرص ها مثال هایی از مجموعه های کراندار واقع در صـفحه اند. خطوط، محورهای مختصات، نمودارهای توابع تعریف شده روی بازه های نامتناهی، یک – هشتم ها، نیم صفحه هـا و خـود صفحه مثال هایی از مجموعه های بی کران در صفحه اند.

مثال۲: دامنه تابع $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ را رسم کنید.

حل: چون f تنها جـایی تعریـف شـده اسـت کـه $y-x^2 \geq 0$ باشد دامنه تابع بسته است یعنی ناحیه بی کرانی که در شکل۱۴-۴ نشان داده شده است. سهمی $y=x^2$ مرز دامنه اسـت. نقـاط بالای سهمی نقاط درونی دامنه را تشکیل می دهند.



شکل۱۴-۴ : دامنه $f(x,y)$ در مثال ۲ شـامل ناحیـه سایه دار و سهمی مرزی آن است.

نمودارها، خم های تراز و مسیرهای توابع دو متغیره

دو روش متعارف بـرای تجسم مقـادیر تـابعی چـون $f(x,y)$ وجود دارد. یک روش این است که خم هایی در دامنـه تـابع را که f روی آنها مقدار ثابتی دارد رسم کـرده و نامگـذاری کنـیم. روش دیگر این است که رویـه $z=f(x,y)$ را در فـضا رسـم کنیم.

تعاریف: مجموعه نقاطی در صفحه کـه در آنهـا تـابع $f(x,y)$ مقدار ثابتی چون $f(x,y)=c$ دارد یک **خم تراز** f نامیده مـی شـود. مجموعـه تمـام نقـاط $(x,y,f(x,y))$ در فـضا، بـه ازای (x,y) در دامنه f، **نمودار** f نامیده می شود. نمودار f را **رویه** $z=f(x,y)$ نیز می نامند.

مثال۳: نمودار تابع $f(x,y)=100-x^2-y^2$ را رسم کـرده و خم هـای تـراز $f(x,y)=0$، $f(x,y)=51$ و $f(x,y)=75$

را در دامنه f در صفحه رسم کنید.

حل: دامنه f کل صفحه xy است و برد f مجموعه اعداد حقیقی کمتر یا مساوی 100 است. نمودار تابع سهمیوار $z=100-x^2-y^2$ است که بخش مثبت آن در شکل ۱۴-۵ نشان داده شده است.

خم تراز $f(x,y)=0$ مجموعه نقاطی از صفحه xy است که به ازای مختصات هر کدام از آنها

$$f(x,y)=100-x^2-y^2=0 \qquad \text{یا} \qquad x^2+y^2=100$$

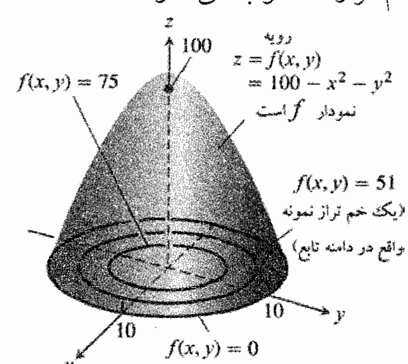
این معادله، معادله دایره ای به شعاع ۱۰ و به مرکز مبداء است.

به همین ترتیب خمهای تراز $f(x,y)=51$ و $f(x,y)=75$ (شکل ۱۴-۵) دایره هایی با معادلات زیرند

$$f(x,y)=100-x^2-y^2=51 \qquad \text{یا} \qquad x^2+y^2=49$$

$$f(x,y)=100-x^2-y^2=75 \qquad \text{یا} \qquad x^2+y^2=25$$

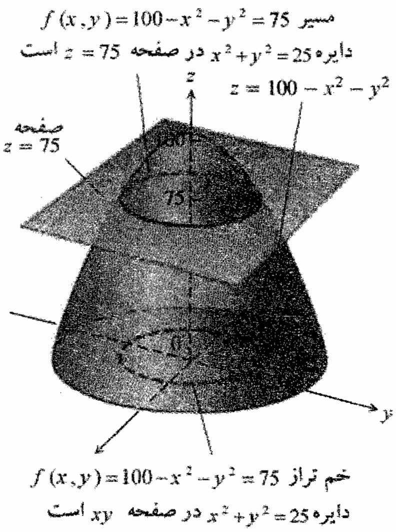
خم تراز $f(x,y)=100$ فقط شامل مبداء است (با این حال باز هم یک خم تراز محسوب می شود).



شکل ۱۴-۵: نمودار و چند خم تراز تابع مثال ۳.

اگر $x^2+y^2>100$ ، آنگاه مقادیر $f(x,y)$ منفی اند. مثلاً دایره $x^2+y^2=144$، که دایره ای به مرکز مبداء و شعاع ۱۲ است مقدار ثابت $f(x,y)=-44$ را بدست می دهد و یک خم تراز f است.

خم واقع در فضایی که مقطع صفحه $z=c$ با رویه $z=f(x,y)$ است متشکل از نقاطی است که نشان دهنده مقدار تابع $f(x,y)=c$ هستند. این خم، **مسیر**(خم پربندی) $f(x,y)=c$ نامیده می شود تا آن را از خم تراز $f(x,y)=c$ در دامنه f متمایز کند. شکل ۱۴-۶ مسیر $f(x,y)=75$ را روی رویه $z=100-x^2-y^2$ ، که با تابع $f(x,y)=100-x^2-y^2$ تعریف می شود، نشان می دهد. مسیر مستقیماً در بالای دایره $x^2+y^2=25$ قرار دارد که خم تراز $f(x,y)=75$ در دامنه تابع است.



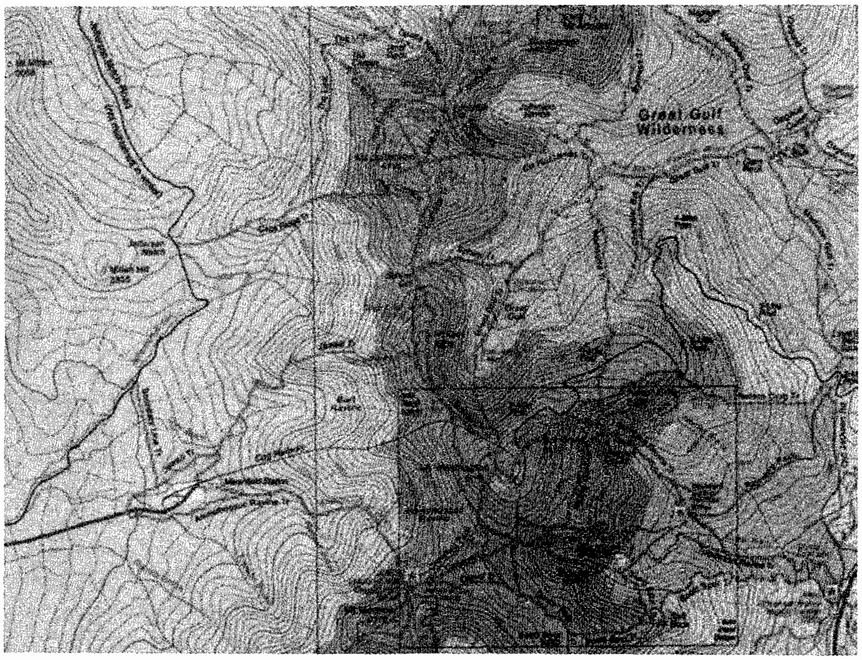
شکل ۱۴-۶: صفحه $z=c$ موازی با صفحه xy رویه ای چون $z=f(x,y)$ را قطع کرده و یک مسیر ایجاد شده است.

اما همه این تمایز را قائل نمی شوند و شما هم ممکن است بخواهید هر دو نوع خم را با نامی واحد نامگذاری کنید و برای درک اینکه کدام خم مدنظر است باید به مضمون بحث توجه نمود. مثلاً در اکثر نقشه ها خمهایی را که نشان دهنده ارتفاع ثابت هستند (ارتفاع از سطح دریا) مسیر (پربند) می نامند نه خم تراز (شکل ۱۴-۷).

توابع سه متغیره

در صفحه، نقاطی که تابعی با دو متغیر مستقل در آنها مقدار ثابتی چون $f(x,y)=c$ دارد یک خم در دامنه تابع تشکیل می دهند. در فضا، نقاطی که در آنها تابعی با سه متغیر مستقل مقدار ثابتی چون $f(x,y,z)=c$ دارد یک رویه در دامنه تابع تشکیل می دهند.

> **تعریف:** مجموعه نقاط (x,y,z) در فضا که در آنها یک تابع با سه متغیر مستقل مقدار ثابتی چون $f(x,y,z)=c$ دارد یک **رویه تراز** f نامیده می شود.



شکل۱۴-۷: مسیرهای کوههای واشنگتن در نیوهامپشیر.

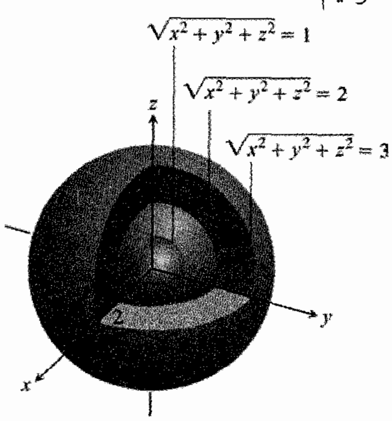
از آنجا که توابع سه متغیره شامل نقـاط $(x, y, f(x, y, z))$ هستند که در فضای چهار بعدی قرار دارند عمـلاً نمـی تـوانیم آنها را در دستگاه مختصات سه بعدی خودمان رسم کنیم. اما با بررسی رویه های تراز سه بعدی این نـوع توابـع مـی تـوان بـه چگونگی رفتار آنها پی برد.

مثال۴: رویه های تراز تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

حل: مقدار f فاصله مبداء تا نقطه (x, y, z) اسـت. هـر رویـه تراز $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c$، $c > 0$، کره ای بـه شـعاع c و بـه مرکز مبداء است. شکل**۱۴-۸** برشی از سه تا از این کـره هـا را نشان می دهد. رویـه تـراز $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ فقـط شـامل مبداء است.

در اینجا نمی خواهیم تابع را رسم کنیم بلکه به دنبال رویـه های تراز واقع در دامنه تابع هستیم. رویه های تـراز نـشان مـی دهند که وقتی در دامنه تابع حرکت می کنیم مقادیر تابع چگونه تغییر می کنند. اگر روی کره ای به شـعاع c و بـه مرکـز مبـداء بمانیم تابع مقداری ثابت، یعنی c، را خواهد داشت. اگر از نقطه ای روی یک کره به نقطه ای روی کره ای دیگـر بـرویم مقـدار تابع تغییر می کند. مقدار تابع افزایش می یابد، اگر از مبـداء دور شویم و کاهش می یابد اگر به سمت مبداء بـرویم. نحـوه تغییـر مقادیر تابع به انتخاب جهت حرکت بستگی دارد. وابستگی تغییر مقادیر به جهت حـائز اهمیـت اسـت. در بخـش**۱۴-۵** بـه ایـن موضوع برمی گردیم.



شکل۱۴-۸: رویه های تراز تابع

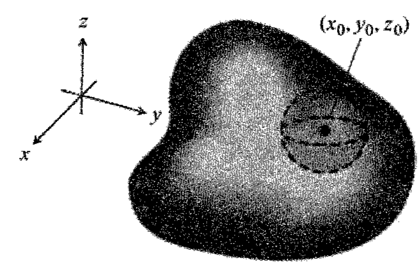
$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

کره های هم مرکزند (مثال۴).

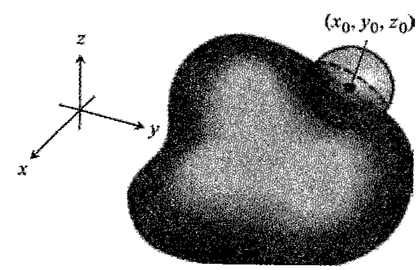
تعاریف درون، مرز، باز، بسته، کراندار، بی کران برای نواحی واقع در فضا شبیه همین تعاریف برای نـواحی واقـع در صـفحه است. برای لحاظ کردن بعد اضافی، به جای قرص هـا از گـوی های توپر(فضایی) با شعاع مثبت استفاده می کنیم.

تعاریف: نقطه ای چون (x_0,y_0,z_0) در ناحیه R واقع در فضا یک **نقطه درونی** R است اگر مرکز یک گوی توپر باشد که تماماً در R واقع است (شکل**۱۴-۹**- الف). نقطه (x_0,y_0,z_0) **نقطه مرزی** R است اگر هر گوی توپر به مرکز (x_0,y_0,z_0) هم شامل نقاط واقع در خارج R و هم شامل نقاط واقع در درون R باشد(شکل**۱۴-۹**- ب). **درون** R مجموعه تمام نقاط درونی R است. **مرز** R مجموعه نقاط مرزی R است.

یک ناحیه در صورتی **باز** است که تماماً شامل نقاط درونی باشد. یک ناحیه در صورتی **بسته** است که تمام مرزش را در بر داشته باشد.



(الف)-نقطه درونی



(ب)- نقطه مرزی

شکل۱۴-۹: نقاط درونی و نقاط مرزی یک ناحیه واقع در فضا. مثل نواحی واقع در صفحه، یک نقطه مرزی لزوماً متعلق به ناحیه فضایی R نیست.

درون یک کره، نیم فضای باز $z>0$، یک هشتم اول (که x، y و z همگی در آن مثبت اند) و خود فضا مثال هایی از مجموعه های باز در فضا هستند. از طرف دیگر خطوط، صفحات و نیم فضای بسته $z\geq 0$ نمونه هایی از مجموعه های بسته در فضا هستند. یک گوی توپر که بخشی از مرز آن برداشته شده است یا مکعب توپری که فاقد یک وجه، یک یال یا یک نقطه گوشه ای باشد نه مجموعه باز محسوب می شوند و نه بسته.

توابعی که بیش از سه متغیر مستقل دارند نیز حائز اهمیت اند. مثلاً دمای روی یک رویه در فضا ممکن است نه تنها به مکان نقطه $P(x,y,z)$ روی رویه بلکه به زمان t هم بستگی داشته باشد لذا باید آن را به صورت $T=f(x,y,z,t)$ بنویسیم.

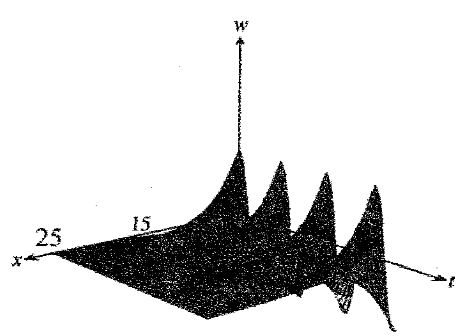
ترسیم رایانه ای

برنامه های رسم سه بعدی رایانه ها و ماشین حساب ها این امکان را فراهم ساخته است که فقط با فشردن چند دکمه نمودار توابع دو متغیره را رسم کنیم. غالباً از روی نمودار یک تابع سریعتر می توان اطلاعاتی در مورد آن بدست آورد تا از ضابطه و فرمول آن.

مثال۵: دمای w زیر سطح زمین تابعی از عمق x از سطح زمین و زمان t سال است. اگر x را برحسب فوت و t را به صورت مقدار روزهای سپری شده از روزی از سال که سطح بالاترین دما را داشته است اندازه بگیریم، می توانیم تغییر دما را با تابع زیر بیان کنیم

$$w=\cos\left(1.7\times 10^{-2}t-0.2x\right)e^{-0.2x}$$

(مقیاس طوری انتخاب شده است که دما در فاصله $0ft$ بین ۱+ تا ۱- تغییر می کند بطوریکه تغییر در x فوتی را می توان به صورت کسری از تغییر در سطح زمین تعبیر کرد).



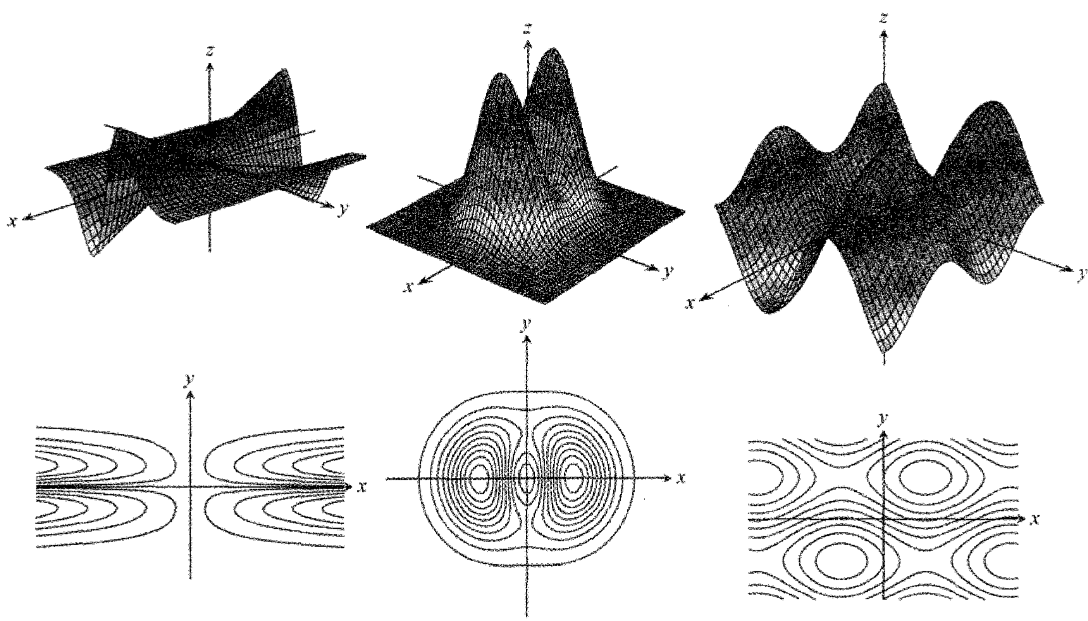
شکل۱۴-۱۰: این نمودار، تغییر فصلی دمای زیر زمین را به صورت کسری از دمای سطح نشان می دهد(مثال۵)

شکل**۱۴-۱۰** نمودار این تابع را نشان می دهد. در عمق $15ft$، تغییر (تغییر در دامنه عمودی در شکل) حدود **۵**

درصد تغییر سطح است. در $25ft$ تقریباً تغییری در طی سال وجود ندارد.

نمودار مذکور همچنین نشان می دهد که دما در فاصله ۱۵ فوتی زیر سطح زمین نسبت به دما در سطح زمین حدود نصف سال اختلاف فاز دارد. وقتی دمای سطح زمین کمترین مقدارش را دارد (مثلاً اواخر ژانویه)، در عمق ۱۵ متری دما بیشترین مقدارش را دارد. به عبارتی در عمق ۱۵ فوتی زیر زمین جای فصل ها عوض می شود.

در شکل۱۴-۱۱ نمودارهای رایانه ای چند تابع دو متغیره به همراه خم های تراز آنها نشان داده شده است.



(الف)- $z = \sin x + 2\sin y$ (ب)- $z = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ (پ)- $z = xye^{-y^2}$

شکل۱۴-۱۱: نمودارهای رایانه ای و خم های تراز چند تابع دو متغیره.

تمرین های ۱۴-۱

دامنه ، برد و خم های تراز

در تمرین های۱-۴ مقادیر خاص تابع داده شده را بیابید.

۱- $f(x,y) = x^2 + xy^3$

الف- $f(0,0)$ (ب)- $f(-1,1)$

(پ)- $f(2,3)$ (ت)- $f(-3,-2)$

۲- $f(x,y) = \sin(xy)$

الف- $f\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ ب- $f\left(-3,\frac{\pi}{12}\right)$

(پ)- $f\left(\pi,\frac{1}{4}\right)$ (ت)- $f\left(-\frac{\pi}{2},7\right)$

۳- $f(x,y,z) = \dfrac{x-y}{y^2+z^2}$

(الف)- $f(3,-1,2)$ (ب)- $f\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$

(پ)- $f\left(0,\frac{1}{3},0\right)$ (ت)- $f(2,2,100)$

۴- $f(x,y,z) = \sqrt{49-x^2-y^2-z^2}$

(الف)- $f(0,0,0)$ (ب)- $f(2,-3,6)$

(پ)- $f(-1,2,3)$ (ت)- $f\left(\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{6}{\sqrt{2}}\right)$

در تمرین های۵-۱۲ دامنه هر تابع را تعیین کرده و آن را رسم

کنید.

۵- $f(x,y)=\sqrt{y-x-2}$

۶- $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2-4\right)$

۷- $f(x,y)=\dfrac{(x-1)(y+2)}{(y-x)\left(y-x^3\right)}$

۸- $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2-25}$

۹- $f(x,y)=\cos^{-1}\left(y-x^2\right)$

۱۰- $f(x,y)=\ln(xy+x-y-1)$

۱۱- $f(x,y)=\sqrt{\left(x^2-4\right)\left(y^2-9\right)}$

۱۲- $f(x,y)=\dfrac{1}{\ln\left(4-x^2-y^2\right)}$

در تمرین های۱۳-۱۶، خمهای تراز $f(x,y)=c$ را به ازای مقادیر مفروض c یافته و روی یک مجموعه محورهای مختصات رسم کنید. این خم های تراز را نقشه مسیری می نامند.

۱۳- $f(x,y)=x+y-1$ و $c=-3,-2,-1,0,1,2,3$

۱۴- $f(x,y)=x^2+y^2$ و $c=0,1,4,9,16,25$

۱۵- $f(x,y)=xy$ و $c=-9,-4,-1,0,1,4,9$

۱۶- $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$ و $c=0,1,2,3,4$

در تمرین های۱۷-۳۰ مطلوبست (الف)- دامنه تابع، (ب)- برد تابع (پ)- رسم خم های تراز تابع، (ت)- مرز دامنه تابع (ث)- مشخص کنید که دامنه تابع یک ناحیه باز است یا بسته یا هیچکدام. و (ج)- دامنه کراندار است یا بی کران؟

۱۷- $f(x,y)=y-x$

۱۸- $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

۱۹- $f(x,y)=4x^2+9y^2$

۲۰- $f(x,y)=x^2-y^2$

۲۱- $f(x,y)=(xy)$ ۲۲- $f(x,y)=y/x^2$

۲۳- $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

۲۴- $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

۲۵- $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

۲۶- $f(x,y)=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

۲۷- $f(x,y)=\sin^{-1}(y-x)$ ۲۸- $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

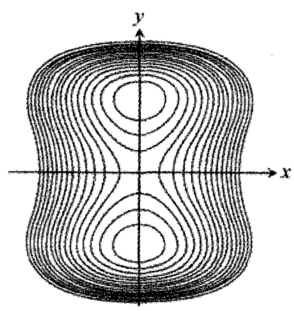
۲۹- $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2-1\right)$

۳۰- $f(x,y)=\ln\left(9-x^2-y^2\right)$

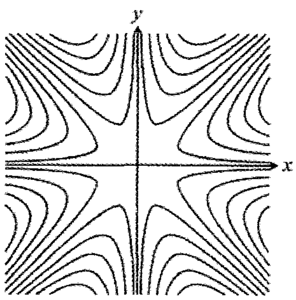
تطبیق رویه ها با خم های تراز

در تمرین های۳۱-۳۶ خمهای تراز مربوط به توابع رسم شده در قسمت های (الف) تا (ج) نشان داده شده است. مشخص کنید که هر مجموعه از خم ها مربوط به کدام تابع هستند.

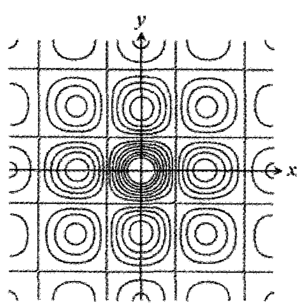
۳۱-



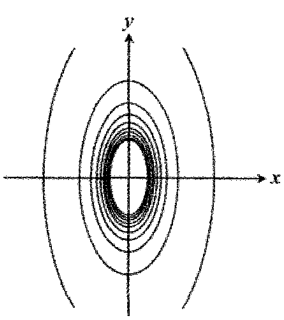
۳۲-



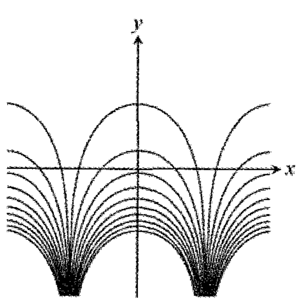
۳۳-



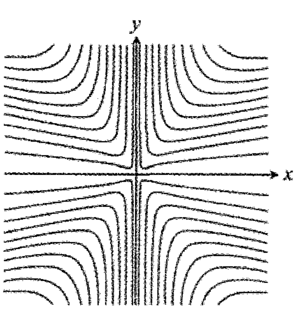
۳۴-



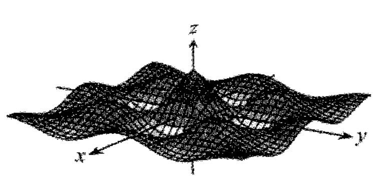
۳۵-



۳۶-

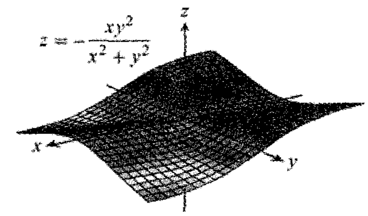


(الف) –

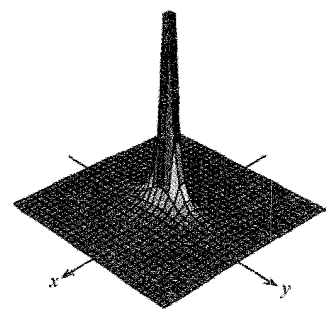


$z=(\cos x)(\cos y)\,e^{-\sqrt{x^2+y^2}/4}$

(ب)-

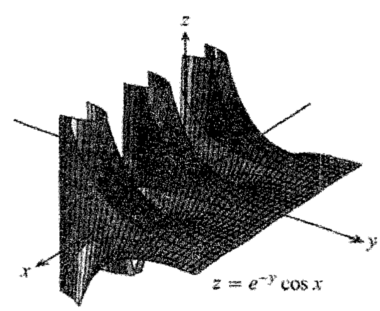


(پ)-

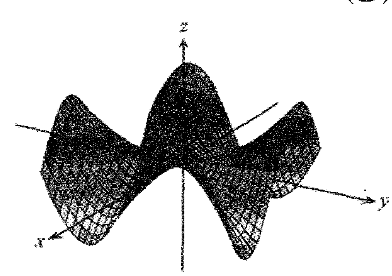


$z=\frac{1}{4x^2+y^2}$

(ت) -

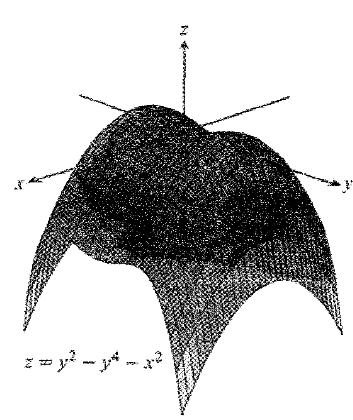


(ث) -



$z=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

(ج)-



توابع دو متغیره

در تمرین های۳۷-۴۸ مقادیر توابع را به دو روش نمایش دهید: (الف)- با رسم رویه $z=f(x,y)$ و (ب) - با رسم رویه های تراز واقع در دامنه تابع. هر خم تراز را با مقدار تابعش نامگذاری کنید.

۳۷- $f(x,y)=y^2$

۳۸- $f(x,y)=\sqrt{x}$

۳۹- $f(x,y)=x^2+y^2$

۴۰- $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

۴۱- $f(x,y)=x^2-y$

۴۲- $f(x,y)=4-x^2-y^2$

۴۳- $f(x,y)=4x^2+y^2$

۴۴- $f(x,y)=6-2x-3y$

۴۵- $f(x,y)=1-|y|$

۴۶- $f(x,y)=1-|x|-|y|$

۴۷- $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+4}$

۴۸- $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$

یافتن خمهای تراز

در تمرینهای۴۹-۵۲ معادله ای برای خم تراز تابع $f(x,y)$ بیابید که از نقطه مفروض می گذرد و نمودار آن را رسم کنید.

۴۹- $\left(2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ و $f(x,y)=16-x^2-y^2$

۵۰- $(1,0)$ و $f(x,y)=\sqrt{x^2-1}$

۵۱- $(3,-1)$ و $f(x,y)=\sqrt{x+y^2-3}$

۵۲- $(-1,1)$ و $f(x,y)=\frac{2y-x}{x+y+1}$

رسم رویه های تراز

در تمرین های ۵۳-۶۰ یک رویه تراز نمونه از تابع را رسم کنید.

۵۳- $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

۵۴- $f(x,y,z)=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$

۵۵- $f(x,y,z)=x+z$

۵۶- $f(x,y,z)=z$

۵۷- $f(x,y,z)=x^2+y^2$

۵۸- $f(x,y,z)=y^2+z^2$

۵۹- $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$

۶۰- $f(x,y,z)=(x^2/25)+(y^2/16)+(z^2/9)$

یافتن رویه های تراز

در تمرین های۶۱-۶۴ معادله ای برای رویه تراز تابع بیابید که از نقطه مفروض می گذرد.

۶۱- $(3,-1,1)$ و $f(x,y,z)=\sqrt{x-y}-\ln z$

۶۲- $(-1,2,1)$ و $f(x,y,z)=\ln(x^2+y+z^2)$

۶۳- $(1,-1,\sqrt{2})$ و $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

۶۴- $(1,0,-2)$ و $f(x,y,z)=\dfrac{x-y+z}{2x+y-z}$

در تمرین های۶۵-۶۸ دامنه f را یافته و رسم کنید. سپس معادله ای برای خم یا رویه تراز تابع بیابید که از نقطه مفروض می گذرد.

۶۵- $(1,2)$ و $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{y}\right)^n$

۶۶- $(\ln 4,\ln 9,2)$ و $g(x,y,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+y)^n}{n!z^n}$

۶۷- $(0,1)$ و $f(x,y)=\int_x^y \dfrac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}$

۶۸- $(0,1,\sqrt{3})$ و $g(x,y,z)=\int_x^y \dfrac{d\theta}{1+t^2}+\int_0^z \dfrac{d\theta}{\sqrt{4-\theta^2}}$

تمرین های رایانه ای

با بهره گیری از یک نرم افزار ریاضی برای هر یک از توابع تمرین های۶۹-۷۲ مراحل زیر را انجام دهید:

(الف)- رویه را روی مستطیل مفروض رسم کنید.

(ب)- چند خم تراز را در مستطیل رسم کنید.

(پ)- خم تراز f را که از نقطه مفروض می گذرد رسم کنید.

۶۹- $f(x,y)=x\sin\dfrac{y}{2}+y\sin 2x$

$0\le x\le 5\pi$ و $0\le y\le 5\pi$ و $P(3\pi,3\pi)$

۷۰- $f(x,y)=(\sin x)(\cos y)e^{\sqrt{x^2+y^2}/8}$

$0\le x\le 5\pi$ و $0\le y\le 5\pi$ و $P(4\pi,4\pi)$

۷۱- $f(x,y)=\sin(x+2\cos y)$ $P(\pi,\pi)$

$-2\pi\le x\le 2\pi$ و $-2\pi\le y\le 2\pi$

۷۲- $f(x,y)=e^{(x^{0.1}-y)}\sin(x^2+y^2)$

$0\le x\le 2\pi$ و $-2\pi\le y\le \pi$ و $P(\pi,-\pi)$

در تمرین های۷۳-۷۶ با استفاده از یک نرم افزار ریاضی رویه های تراز را که بصورت ضمنی تعریف شده اند رسم کنید.

۷۳- $4\ln(x^2+y^2+z^2)=1$

۷۴- $x^2+z^2=1$

۷۵- $x^2+y^2-3z^2=1$

۷۶- $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)-(\cos y)\sqrt{x^2+z^2}=2$

رویه های پارامتری: درست همانطور که با یک جفت معادله $x=f(t)$ و $y=g(t)$ تعریف شده روی یک بازه پارامتری I خم ها را به صورت پارامتری در صفحه رسم می کنید گاهی می توانید با سه معادله $x=f(u,v)$، $y=g(u,v)$ و $z=h(u,v)$ که روی یک مستطیل پارامتری $a\le u\le b$ و $c\le v<d$ تعریف شده اند رویه ها را در فضا رسم کنید. بسیاری از نرم افزارهای جبری رایانه ای امکان رسم چنین رویه هایی را در حالت پارامتری به شما می دهند (در بخش۱۶-۵ رویه های پارامتری را بطور مفصل مورد بحث قرار می دهیم). با استفاده از یک نرم افزار ریاضی رویه های تمرین های۷۷-۸۰ را رسم کنید. همچنین چند خم تراز را در صفحه xy رسم کنید.

۷۷- $x=u\cos v$ و $y=u\sin v$ و $z=u$

$0\le u\le 2$ و $0\le v\le 2\pi$

۷۸- $x=u\cos v$ و $y=u\sin v$ و $z=v$

$0\le u\le 2$ و $0\le v\le 2\pi$

۷۹- $x=(2+\cos u)\cos v$ و $y=(2+\cos u)\sin v$

$z=\sin u$، $0\le v\le 2\pi$ و $0\le u\le 2\pi$

۸۰- $x=2\cos u\cos v$ و $y=2\cos u\sin v$ و $z=2\sin u$

$0\le u\le 2\pi$ و $0\le v\le \pi$

۲-۱۴ - حد و پیوستگی در ابعاد بالاتر

در این بخش به بررسی حد و پیوستگی توابع چند متغیره می پردازیم. این مفاهیم مشابه مفاهیم حد و پیوستگی در مورد توابع یک متغیره هستند اما وجود متغیرهای مستقل بیشتر به پیچیدگی بیشتر و تفاوت های مهم منجر می شود که مستلزم تعریف برخی مفاهیم جدید است.

حد توابع دو متغیره

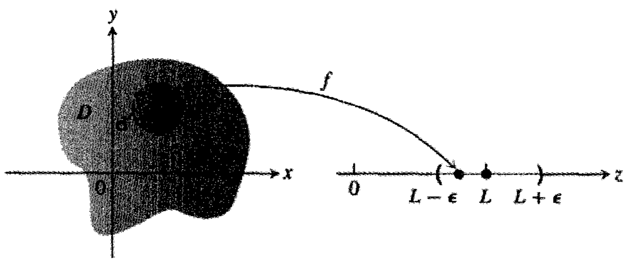
اگر مقادیر $f(x,y)$ به ازای تمام نقاط (x,y) به اندازه کافی نزدیک به نقطه (x_0,y_0) به اندازه دلخواه به عدد حقیقی ثابتی مانند L نزدیک شود می گوییم وقتی (x,y) به (x_0,y_0) میل می کند f به L میل می کند. این تعریف مشابه تعریف ساده حد توابع یک متغیره است. اما توجه کنید که اگر (x_0,y_0) در درون دامنه f قرار گیرد (x,y) می تواند از هر جهت به (x_0,y_0) میل کند. برای موجود بودن حد، جهت میل هر چه انتخاب شود باید مقدار حدی یکسانی بدست آید. در چند مثالی که بعد از تعریف زیر ارائه می کنیم این موضوع را نشان می دهیم.

تعریف: می گوییم تابع $f(x,y)$ وقتی (x,y) به (x_0,y_0) میل می کند به حد L میل می کند و می نویسیم

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

هرگاه به ازای هر عدد $\in>0$ عدد متناظری چون $\delta>0$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای تمام نقاط (x,y) واقع در دامنه f داشته باشیم: $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$

تعریف حد بیان می کند که هر وقت فاصله نقطه (x,y) تا (x_0,y_0) به اندازه کافی کوچک شود (اما نه صفر) فاصله بین $f(x,y)$ و L به دلخواه کوچک می شود. این تعریف برای نقاط درونی (x_0,y_0) و نیز نقاط مرزی دامنه f بکار می رود، هرچند که یک نقطه مرزی لزوماً درون دامنه قرار ندارد. نقاط (x,y) که به (x_0,y_0) میل می کنند همواره در دامنه f انتخاب می شوند. شکل۱۴-۱۲را ببینید.



شکل۱۴-۱۲: در تعریف حد، δ شعاع قرصی به مرکز (x_0,y_0) است. برای تمام نقاط (x,y) داخل این قرص مقادیر تابع $f(x,y)$ داخل بازه متناظر $(L-\in,L+\in)$ قرار می گیرند.

همانطور که در مورد توابع یک متغیره دیدیم می توان نشان داد که

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x=x_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y=y_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k=k \qquad (\text{هر عدد } k)$$

مثلاً در مورد حد اول، $f(x,y)=x$ و $L=x_0$. با استفاده از تعریف حد فرض کنید $\in>0$ انتخاب شده است. اگر δ را برابر با این $\in$ قرار دهیم داریم

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta=\in$$

که ایجاب می کند که

$$\sqrt{(x-x_0)^2}<\in \qquad ((x-x_0)^2\le(x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$$

$$|x-x_0|<\in \qquad (\sqrt{a^2}=|a|)$$

$$|f(x,y)-x_0|<\in \qquad (x=f(x,y))$$

یعنی

هر وقت $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ باشد آنگاه $|f(x,y)-x_0|<\in$. بنابراین δ یی یافت شده است که شرط تعریف حد را برآورده می کند و

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x=x_0$$

همانطور که در مورد توابع تک متغیره داشتیم، حد مجموع دو تابع، مجموع حدهای آنهاست (وقتی هر دو حد موجود باشند). برای حد تفاضل دو تابع، ضرب عدد در تابع،

حاصلضرب توابع، خارج قسمت، توان و ریشه هم احکام مشابهی برقرار است.

قضیه ۱- ویژگی های حدود توابع دو متغیره: اگر L، M و k اعداد حقیقی بوده و داشته باشیم

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L \quad \text{و} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=M$$

قواعد زیر برقرارند:

۱- قاعده جمع:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\big(f(x,y)+g(x,y)\big)=L+M$$

۲- قاعده تفاضل:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\big(f(x,y)-g(x,y)\big)=L-M$$

۳- قاعده مضرب ثابت:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y)=kL$$

۴- قاعده حاصلضرب:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\big(f(x,y).g(x,y)\big)=L.M$$

۵- قاعده خارج قسمت (تقسیم):

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{L}{M} \quad \text{و} \quad M\neq 0$$

۶- قاعده توان:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\big[f(x,y)\big]^n=L^n$$ و (n عدد صحیح مثبت)

۷- قاعده ریشه:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\sqrt[n]{f(x,y)}=\sqrt[n]{L}=L^{1/n}$$

(n عدد صحیح مثبت است و اگر n زوج باشد فرض می کنیم $L>0$)

با اینکه قضیه ۱ را در اینجا اثبات نمی کنیم بلکه بحثی غیر تفصیلی در مورد درستی آن ارائه می کنیم. اگر (x,y)به اندازه کافی به (x_0,y_0) نزدیک باشد آنگاه $f(x,y)$ به L و $g(x,y)$ به M نزدیک است (از تعبیر غیررسمی حدود). در این صورت معقول است که $f(x,y)+g(x,y)$ به $L+M$؛ $f(x,y)-g(x,y)$ به $L-M$، $kf(x,y)$ به kL، $f(x,y)g(x,y)$ به LM و اگر $M\neq 0$ باشد $f(x,y)/g(x,y)$ به L/M نزدیک است.

وقتی قضیه ۱ را برای چند جمله ای ها و توابع گویا به کار ببریم به این نتیجه مفید می رسیم که حد این توابع را وقتی $(x,y)\to(x_0,y_0)$ میل می کند می توان با محاسبه مقدار این توابع در نقطه (x_0,y_0) بدست آورد. تنها شرط لازم این است که توابع گویا در (x_0,y_0) تعریف شده باشند.

مثال ۱: در این مثال می توانیم سه نتیجه ساده بیان شده بعد از تعریف حد را با نتایج قضیه ۱ ترکیب کرده و حدها را محاسبه کنیم. فقط کافیست مقادیر x و y نقطه ای را که (x,y) به آن میل می کند در عبارت تابعی (ضابطه تابع) جاگذاری کرده و مقدار حد را بدست آوریم

(الف)-

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3}=\frac{0-(0)(1)+3}{(0)^2(1)+5(0)(1)-(1)^3}=-3$$

(ب)- $$\lim_{(x,y)\to(3,-4)}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

مثال ۲: مطلوبست

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

حل:

از آنجا که وقتی $(x,y)\to(0,0)$ میل می کند مخرج $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ به صفر میل می کند نمی توانیم از قاعده خارج قسمت قضیه ۱ استفاده کنیم. اما اگر صورت و مخرج را در $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ضرب کنیم کسر معادلی بدست می آید که حد آن قابل محاسبه است:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} \quad \text{(جبر)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \quad \text{(حذف عامل غیر صفر } (x-y)\text{)}$$

$$=0(\sqrt{0}+\sqrt{0})=0 \quad \text{(مقادیر معلوم حدها)}$$

عامل $(x-y)$ را می توانیم حذف کنیم زیرا مسیر $y=x$ (که

در امتداد آن $x-y=0$ است) در دامنه تابع

$$\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

نیست.

مثال ۳: حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4xy^2}{x^2+y^2}$$

حل:

ابتدا مشاهده می کنیم که در امتداد خط $x=0$، وقتی $y\neq 0$ است تابع همواره مقدار صفر دارد. همینطور در امتداد خط $y=0$ ، مقدار تابع صفر است به شرط اینکه $x\neq 0$ باشد. بنابراین اگر وقتی (x,y) به (x_0,y_0) میل می کند حد موجود باشد مقدار حد باید صفر باشد. برای پی بردن به صحت این موضوع تعریف حد را بکار می بریم.

فرض کنید $\in>0$ معلوم اما دلخواه است، می خواهیم یک $\delta>0$ بیابیم بطوریکه

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\in \qquad \text{وقتی } 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta،$$

یا

$$\frac{4|x|y^2}{x^2+y^2}<\in \qquad \text{وقتی } 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta،$$

چون $y^2\leq x^2+y^2$ ، داریم

$$\frac{4|x|y^2}{x^2+y^2}\leq 4|x|=4\sqrt{x^2}\leq 4\sqrt{x^2+y^2}$$

(زیرا $\frac{y^2}{x^2+y^2}\leq 1$)

بنابراین اگر $\delta=\in/4$ انتخاب کنیم و قرار دهیم

$$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$$

خواهیم داشت

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}-0\right|\leq 4\sqrt{x^2+y^2}<4\delta=4\left(\frac{\in}{4}\right)=\in$$

از تعریف حد چنین برمی آید که

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4xy^2}{x^2+y^2}=0$$

مثال ۴: اگر $f(x,y)=\frac{y}{x}$ باشد آیا $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ موجود است؟

حل: دامنه f شامل محور y نیست لذا در میل به سمت مبداء $(0,0)$ نقاط (x,y) را که در آنها $x=0$ است در نظر نمی گیریم. در امتداد محور x، مقدار تابع به ازای تمام مقادیر $x\neq 0$ برابر است با $f(x,0)=0$. بنابراین اگر وقتی $(x,y)\to(0,0)$ میل می کند حد موجود باشد مقدار حد باید $L=0$ باشد. از سوی دیگر، در امتداد خط $y=x$، مقدار تابع به ازای تمام مقادیر $x\neq 0$ برابر است با $f(x,0)=\frac{x}{x}=1$. یعنی تابع f در امتداد خط $y=x$ به مقدار ۱ میل می کند. مفهوم این گفته این است که برای هر قرص به شعاع δ به مرکز $(0,0)$، قرص شامل نقاط $(x,0)$ روی محور x خواهد بود که در آنها مقدار تابع صفر است و همچنین نقاط (x,x) در امتداد خط $y=x$ که در آنها مقدار تابع ۱ است. بنابراین قطع نظر از اینکه δ، شعاع قرص در شکل ۱۴-۱۲، را چقدر کوچک انتخاب کنیم نقاطی در داخل قرص وجود خواهد داشت که به ازای آنها مقادیر تابع اختلافی برابر با ۱ دارند. بنابراین حد نمی تواند وجود داشته باشد زیرا می توانیم $\in$ را در تعریف حد هر عدد کمتر از ۱ بگیریم و انکار کنیم که Lبرابر صفر یا یک یا هر عدد حقیقی دیگر است. حد وجود ندارد زیرا مقادیر حدی در امتداد مسیرهای مختلف میل به نقطه $(0,0)$ متفاوتند.

پیوستگی

همانطور که در مورد توابع یک متغیره دیدیم، پیوستگی برحسب حدها تعریف می شود.

تعریف: تابع $f(x,y)$ **در نقطه** (x_0,y_0) **پیوسته است** هرگاه

۱- f در (x_0,y_0) تعریف شده باشد.

۲- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ وجود داشته باشد.

۳- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$

یک تابع **پیوسته** است هرگاه در هر نقطه از دامنه اش پیوسته باشد.

همانند تعریف حد، تعریف پیوستگی در نقاط مرزی و نیز نقاط درونی دامنه f کاربرد دارد. تنها شرط این است که هر نقطه (x,y) نزدیک (x_0,y_0) در دامنه f باشد.

نتیجه ای از قضیه **۱** این است که ترکیبات جبری توابع پیوسته در تمام نقاطی که در آنها تمام توابع تشکیل دهنده ترکیب پیوسته اند پیوسته می باشند. یعنی مجموع، تفاضل، مضرب ثابت، حاصلضرب ، خارج قسمت و توان توابع پیوسته هر جا که تعریف شده باشند خود پیوسته اند. در حالت خاص، چند جمله ای ها و توابع گویای دو متغیره در هر نقطه ای که تعریف شده باشند پیوسته اند.

مثال ۵: نشان دهید که تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در هر نقطه به جز مبداء پیوسته است (شکل**۱۴-۱۳**).

حل: تابع f در هر نقطه $(x,y)\neq(0,0)$ پیوسته است زیرا مقادیر آن در این صورت با تابع گویایی از x و y معین می شوند و مقدار حدی با جاگذاری مقادیر x و y در ضابطه تابع بدست می آید.

در $(0,0)$ مقدار f تعریف شده است اما ادعا می کنیم که f وقتی $(x,y)\to(0,0)$ میل می کند حد ندارد. علت این است که همانطور که در ادامه می بینیم مسیرهای مختلف میل کردن به مبداء به نتایج متفاوتی منجر می شوند.

به ازای هر مقدار m تابع f روی خط فرضی $y=mx$، $x\neq0$ مقداری ثابت دارد، زیرا

$$f(x,y)\big|_{y=mx}=\frac{2xy}{x^2+y^2}\Big|_{y=mx}=\frac{2(mx)}{x^2+(mx)^2}$$

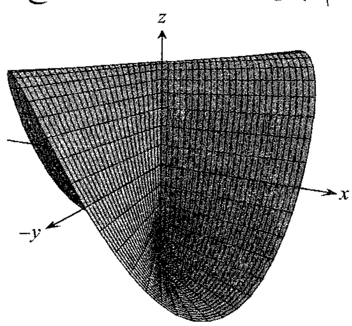
$$=\frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{2m}{1+m^2}$$

بنابراین f وقتی (x,y) به $(0,0)$ میل می کند این مقدار را به عنوان حد خود دارد:

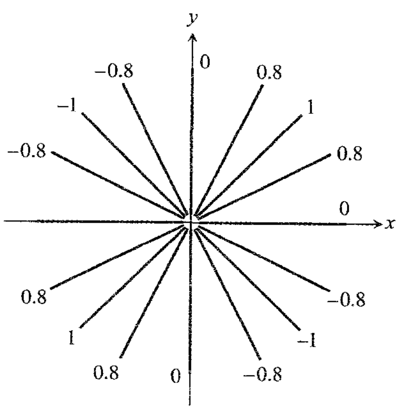
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{درامتداد } y=mx}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)\big|_{y=mx}\right]$$

$$=\frac{2m}{1+m^2}$$

این حد با هر مقدار شیب m تغییر می کند. پس عدد منحصر بفردی وجود ندارد که وقتی (x,y) به مبداء میل می کند بتوانیم آن را حد f بنامیم. پس حد وجود ندارد و تابع پیوسته نیست.



(الف)



(ب)

شکل۱۴-۱۳: (الف)- نمودار تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

این تابع در هر نقطه به جز مبداء پیوسته است. (ب)- مقادیر f در امتداد خطوط مختلف $y=mx$، $x\neq0$ متفاوتند (مثال ۵).

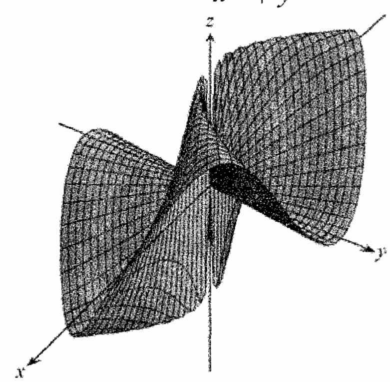
مثال های **۴**و **۵** نکته مهمی را در مورد حد توابع دو یا چند متغیره بیان می کنند. برای وجود حد در یک نقطه، باید حد در امتداد تمام مسیرهای میل یکسان باشد. این نتیجه مشابه مورد تک متغیره است که در آن حدود چپ و راست هر دو باید یکسان می بودند. در مورد توابع دو یا چند متغیره، اگر مسیرهایی با حدهای متفاوت بیابیم می دانیم که تابع در نقطه ای که متغیرها بدان میل می کنند حدی ندارد.

آزمون دو مسیر برای عدم وجود حد

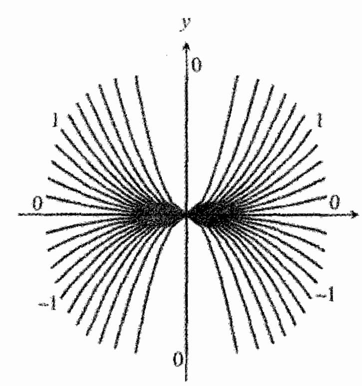
اگر تابعی چون $f(x,y)$ وقتی (x,y) در امتداد مسیر مختلف در دامنه f به (x_0,y_0) میل می کند حدهای متفاوت داشته باشد آنگاه $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

مثال ۶: نشان دهید که حد تابع زیر وقتی (x,y) به $(0,0)$ میل می کند وجود ندارد (شکل۱۴-۱۴)

$$f(x,y)=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$



(الف)



(ب)

شکل۱۴-۱۴: (الف) – نمودار
$$f(x,y)=2x^2y/(x^4+y^2)$$
(ب)- مقدار f در امتداد هر مسیر $y=kx^2$ ثابت است اما با k تغییر می کند (مثال۶).

حل: حد این تابع را نمی توان با جاگذاری مستقیم بدست آورد زیرا با این کار شکل نامعین $\frac{0}{0}$ بدست می آید. مقادیر f را در امتداد خمهایی که به $(0,0)$ ختم می شوند بررسی می کنیم. در امتداد خم $y=kx^2$، $x\neq 0$، تابع مقدار ثابت زیر را دارد

$$f(x,y)\Big|_{y=kx^2}=\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\Big|_{y=mx}=\frac{2x^2\left(kx^2\right)}{x^4+\left(kx^2\right)^2}$$
$$=\frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{2k}{1+k^2}$$

بنابراین

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{در امتداد } y=kx^2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)\Big|_{y=kx^2}\right]=\frac{2k}{1+k^2}$$

این حد به مسیر میل بستگی دارد و با آن تغییر می کند. مثلاً اگر (x,y) در امتداد سهمی $y=x^2$ به $(0,0)$ میل کند $k=1$ و حد برابر ۱ است. اگر (x,y) در امتداد محور x به $(0,0)$ میل کند، $k=0$ و حد برابر صفر است. طبق آزمون دو مسیر f وقتی (x,y) به $(0,0)$ میل می کند حد ندارد.

می توان نشان داد که تابع مثال ۶ در امتداد هر مسیر $y=mx$ حدی برابر با صفر دارد (تمرین۵۳) نتیجه ای که حاصل می شود این است که

داشتن حد یکسان در امتداد تمام خطوط راستی که به (x_0,y_0) میل می کنند بیانگر وجود حد در (x_0,y_0) نیست.

هرگاه ترکیب توابع پیوسته به درستی تعریف شده باشد آن هم پیوسته است. تنها شرط این است که هر یک از توابع تشکیل دهنده ترکیب در جایی که بکار می روند پیوسته باشند. در اینجا این مطلب را اثبات نمی کنیم اما اثبات آن شبیه اثبات در مورد توابع یک متغیره است (قضیه ۹ بخش۲-۵).

پیوستگی ترکیب توابع

اگر f در (x_0,y_0) پیوسته باشد و g تابع تک متغیره باشد که در $f(x_0,y_0)$ پیوسته است آنگاه تابع مرکب $h=f\circ g$ که به صورت $h(x,y)=g(f(x,y))$ تعریف می شود در (x_0,y_0) پیوسته است.

برای مثال توابع مرکب

$$e^{x-y} \quad \text{و} \quad \cos\frac{xy}{x^2+1} \quad \text{و} \quad \ln\left(1+x^2y^2\right)$$

در هر نقطه (x,y) پیوسته اند.

توابع با بیش از دو متغیر

تعاریف حد و پیوستگی مربوط به توابع دارای دو متغیر و نتایج

مربوط به حد و پیوستگی مجموع، حاصلضرب ، خارج قسمت، توان و ترکیب توابع همگی به توابع سه یا چند متغیره تعمیم می یابند. توابعی مثل

$$\frac{y \sin z}{x-1} \quad \text{و} \quad \ln(x+y+z)$$

در سراسر دامنه خود پیوسته اند و حدهایی مثل

$$\lim_{P\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0} = \frac{1}{2}$$

را، که P نشان دهنده نقطه (x,y,z) است، می توان با جاگذاری مستقیم بدست آورد.

مقادیر اکسترمم توابع پیوسته روی مجموعه های کراندار بسته

قضیه مقدار اکسترمم (قضیه۱ بخش۴-۱) بیان می کند که تابع یک متغیره ای که در سراسر یک بازه کراندار بسته چون $[a,b]$ پیوسته است در این بازه $[a,b]$ حداقل یک مقدار ماکسیمم مطلق و یک مقدار مینیمم مطلق اختیار می کند. همین مطلب برای تابعی مثل $z=f(x,y)$ که بر یک مجموعه کراندار بسته چون R واقع در صفحه (مثل یک پاره خط، قرص یا مثلث توپر) پیوسته است نیز صادق است. چنین تابعی در نقطه ای از R یک ماکسیمم مطلق و در نقطه ای از R یک مینیمم مطلق دارد.

نتایج مشابهی در مورد توابع سه یا چند متغیره برقرارند. مثلاً تابع پیوسته ای چون $w=f(x,y,z)$ باید روی هر مجموعه کراندار بسته ای (مانند گوی یا مکعب توپر، پوسته کروی یا ورقه مستطیلی شکل) که روی آن تعریف شده است مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلقی داشته باشد. روش یافتن این مقادیر اکسترمم را در بخش۱۴-۷ بیان می کنیم.

تمرین های ۱۴-۲

حد توابع دو متغیره

در تمرین های۱-۱۲ حد توابع را بیابید.

۱- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$

۲- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$

۳- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

۴- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

۵- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x \tan y$

۶- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\frac{x^2+y^3}{x+y+1}$

۷- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$

۸- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln\left|1+x^2y^2\right|$

۹- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

۱۰- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1/27,\pi^3)} \cos\sqrt[3]{xy}$

۱۱- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\pi/6)} \frac{x\sin y}{x^2+1}$

۱۲- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi/2,0)} \frac{\cos y+1}{y-\sin x}$

حد خارج قسمت

در تمرین های۱۳-۲۴ ابتدا کسرها را بازنویسی کرده و بعد حد آنها را بیابید.

۱۳- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

۱۴- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-y^2}{x-y}$

۱۵- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$

۱۶- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4,\, x\neq x^2}} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$

۱۷- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

۱۸- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$

۱۹- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ 2x-y\neq 4}} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

۲۰- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$

۲۱- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

۲۲- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{xy}$

۲۳- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^3+y^3}{x+y}$

۲۴- $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x-y}{x^4-y^4}$

حد توابع سه متغیره

در تمرین های ۲۵-۳۰ حدها را بیابید.

۲۵- $\lim\limits_{P\to(1,3,4)} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

۲۶- $\lim\limits_{P\to(1,-1,-1)} \dfrac{2xy+yz}{x^2+z^2}$

۲۷- $\lim\limits_{P\to(\pi,\pi,0)} \left(\sin^2 x+\cos^2 y+\sec^2 z\right)$

۲۸- $\lim\limits_{P\to(-1/4,\pi/2,2)} \tan^{-1} xyz$

۲۹- $\lim\limits_{P\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos 2x$

۳۰- $\lim\limits_{P\to(2,-3,6)} \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

پیوستگی در صفحه

در تمرین های ۳۱-۳۴ تعیین کنید که توابع در کدام نقاط (x,y) از صفحه پیوسته اند.

۳۱- (الف)- $f(x,y)=\sin(x+y)$

(ب)- $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

۳۲- (الف)- $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

(ب)- $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+1}$

۳۳- (الف)- $g(x,y)=\sin\dfrac{1}{xy}$

(ب)- $g(x,y)=\dfrac{x+y}{2+\cos x}$

۳۴- (الف)- $g(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$

(ب)- $g(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y}$

پیوستگی در فضا

در تمرین های ۳۵-۴۰ تعیین کنید که توابع در کدام نقاط (x,y,z) از فضا پیوسته اند.

۳۵- (الف)- $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$

(ب)- $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

۳۶- (الف)- $f(x,y,z)=\ln xyz$

(ب)- $f(x,y,z)=e^{x+y}\cos z$

۳۷- (الف)- $h(x,y,z)=xy\sin\dfrac{1}{z}$

(ب)- $h(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+z^2-1}$

۳۸- (الف)- $h(x,y,z)=\dfrac{1}{|y|+|z|}$

(ب)- $h(x,y,z)=\dfrac{1}{|xy|+|z|}$

۳۹- (الف)- $h(x,y,z)=\ln\left(z-x^2-y^2-1\right)$

(ب)- $h(x,y,z)=\dfrac{1}{z-\sqrt{x^2+y^2}}$

۴۰- (الف)- $h(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$

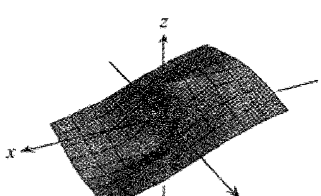
(ب)- $h(x,y,z)=\dfrac{1}{4-\sqrt{x^2+y^2+z^2-9}}$

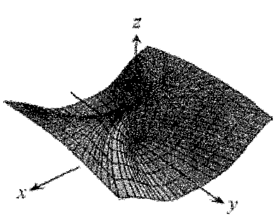
عدم وجود حد در یک نقطه

در تمرین های ۴۱-۴۸ با در نظر گرفتن مسیرهای میل مختلف نشان دهید که وقتی $(x,y)\to(0,0)$ میل می کند توابع مفروض حد ندارند.

۴۱- $f(x,y)=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

۴۲- $f(x,y)=\dfrac{x^4}{x^4+y^2}$





۴۳- $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

۴۴- $f(x,y)=\dfrac{xy}{|xy|}$

۴۵- $g(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

۴۶- $g(x,y)=\dfrac{x^2-y}{x-y}$

۴۷- $h(x,y)=\dfrac{x^2+y}{y}$

۴۸- $h(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

نظریه و مثال ها

در تمرین های ۴۹و ۵۰ نشان دهید که حد موجود نیست.

۴۹- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy^2-1}{y-1}$

۵۰- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{xy+1}{x^2-y^2}$

۵۱ – فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & y\ge x^4\\ 1, & y\ge 0\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

هر یک از حدهای زیر را بدست آورده یا توضیح دهید که حد وجود ندارد.

(الف)- $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$

(ب)- $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)$

(پ)- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

۵۲- فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & x\ge x\\ x^3, & x<0\end{cases}$$

حدهای زیر را بیابید

(الف)- $\lim_{(x,y)\to(3,-2)} f(x,y)$

(ب)- $\lim_{(x,y)\to(-2,1)} f(x,y)$

(پ)- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

۵۳- نشان دهید که تابع مثال ۶ در امتداد هر خط راستی که به $(0,0)$ میل می کند حدی برابر با صفر دارد.

۵۴- اگر $f(x_0,y_0)=3$ و f در (x_0,y_0) پیوسته باشد در مورد حد زیر چه می توان گفت؟

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

اگر f در (x_0,y_0) پیوسته نباشد چطور؟ برای پاسخ های خود دلیل بیاورید.

قضیه ساندویچ در مورد توابع دو متغیره بیان می کند که اگر به ازای تمام نقاط $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ در قرصی به مرکز (x_0,y_0)، $g(x,y)\le f(x,y)\le h(x,y)$ و اگر g و h وقتی $(x,y)\to(x_0,y_0)$ میل می کند حد متناهی یکسان L داشته باشند آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

در تمرین های**۵۵**-**۵۸** با بهره گیری از این نتیجه به پرسش ها پاسخ دهید.

۵۵- با دانستن اینکه

$$1-\frac{x^2y^2}{3}<\frac{\tan^{-1}xy}{xy}<1$$

در مورد حد زیر چه می توان گفت؟

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\tan^{-1}xy}{xy}$$

دلایل خود را ذکر کنید.

۵۶- با دانستن اینکه

$$2|xy|-\frac{x^2y^2}{6}<4-4\cos\sqrt{|xy|}<2|xy|$$

در مورد حد زیر چه می توان گفت؟

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$$

دلایل خود را ذکر کنید.

۵۷- با دانستن اینکه $|\sin(1/x)|\le 1$، در مورد حد زیر چه می توان گفت؟

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x}$$

در مورد پاسخ خود دلیل بیاورید.

۵۸- با دانستن اینکه $|\cos(1/y)|\le 1$، در مورد حد زیر چه می توان گفت؟

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\frac{1}{y}$$

دلایل خود را ذکر کنید.

۵۹- (ادامه مثال ۵).

(الف)- یک بار دیگر به مثال ۵ مراجعه کنید. در فرمول زیر، $m=tan\theta$ قرار داده، نتیجه را ساده کرده و نشان دهید که مقدار f چگونه با زاویه شیب خط تغییر می کند.

$$f(x,y)\Big|_{y=mx}=\frac{2m}{1+m^2}$$

(ب)- با استفاده از فرمولی که در قسمت (الف) بدست آورده اید نشان دهید که حد f وقتی (x,y) در امتداد خط $y=mx$ به $(0,0)$ میل می کند بسته به زاویه میل از ۱- تا ۱+ تغییر می کند.

۶۰- **تعمیم پیوسته**. مقدار $f(0,0)$ را چنان تعریف کنید که

$$f(x,y)=xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

در مبداء پیوسته باشد.

تبدیل مختصات به مختصات قطبی. اگر نتوانستید حد $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ را در مختصات قائم محاسبه کنید سعی کنید به مختصات قطبی بروید. جانشانی های $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ را انجام داده و حد عبارت حاصل را وقتی $r\to 0$ میل می کند جستجو کنید. به عبارت دیگر ببینید آیا عددی چون L وجود دارد که معیار زیر را برآورده کند:

$\in>0$ مفروض است، یک $\delta>0$ وجود دارد بطوریکه به ازای تمام مقادیر r و θ،

$$|r|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(r,\theta)-L|<\in \qquad (۱)$$

اگر چنین Lی وجود داشته باشد آنگاه

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=L$$

برای نمونه،

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0} r\cos^3\theta=0$$

برای تحقیق درستی تساوی های اخیر لازم است نشان دهیم که معادله (۱) به ازای $f(r,\theta)=r\cos^3\theta$ و $L=0$ برآورده می شود. یعنی لازم است نشان دهیم که به ازای هر $\in>0$ مفروض یک $\delta>0$ چنان وجود دارد که به ازای تمام مقادیر r و θ،

$$|r|<\delta \quad \Rightarrow \quad \left|r\cos^3\theta-0\right|<\in$$

از آنجا که

$$\left|r\cos^3\theta\right|=|r|\left|\cos^3\theta\right|\le |r|.1=|r|$$

اگر $\delta=\in$ بگیریم حکم برای تمام مقادیر r و θ برقرار است.

در مقابل عبارت

$$\frac{x^3}{x^2+y^2}=\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2}=\cos^2\theta$$

تمام مقادیر بین ۰ و ۱ را اختیار می کند قطع نظر از اینکه $|r|$ چقدر کوچک باشد و لذا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2/\left(x^2+y^2\right)$ وجود ندارد.

در هر یک از این نمونه ها، وجود یا عدم وجود حد وقتی $r\to 0$ میل می کند نسبتاً واضح است. اما رفتن به مختصات قطبی همیشه به ما کمک نمی کند و ممکن است حتی ما را به نتایج غلط برساند. برای مثال ممکن است حد در امتداد هر خط راست (یا پرتو) ثابت $=\theta$ وجود داشته باشد اما باز هم در مفهوم گسترده تر حد وجود نداشته باشد. مثال ۵ این نکته را روشن می کند. در مختصات قطبی تابع

$$f(x,y)=\left(2x^2y\right)/\left(x^4+y^2\right)$$

به صورت زیر درمی آید

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$$

که $r\neq 0$ است. اگر θرا ثابت نگه داشته و اجازه دهیم $r\to 0$ میل کند حد صفر است. اما روی مسیر $y=x^2$ داریم:

$$r\sin\theta=r^2\cos^2\theta$$

و

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta+\left(r\cos^2\theta\right)^2}$$

$$=\frac{2r\cos^2\theta\sin\theta}{2r^2\cos^4\theta}=\frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta}=1$$

در تمرین های ۶۱-۶۶ حد f را وقتی $(x,y)\to(0,0)$ میل می کند بیابید یا نشان دهید که حد وجود ندارد.

۶۱- $f(x,y)=\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$

۶۲- $f(x,y)=\cos\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)$

۶۳- $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

۶۴- $f(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+x+y^2}$

۶۵- $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$

۶۶- $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

در تمرین های ۶۷ و ۶۸، $f(0,0)$ را طوری تعریف کنید که f در مبداء پیوسته باشد.

۶۷- $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}\right)$

۶۸- $f(x,y)=\dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$

کاربرد تعریف حد

در هر یک از تمرین های ۶۹- ۷۴ یک تابع $f(x,y)$ و یک عدد مثبت $\in$ مفروض است. در هر تمرین نشان دهید که یک $\delta>0$ چنان وجود دارد که به ازای تمام نقاط (x,y)،

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(0,0)|<\in$$

۶۹- $\in=0.01$ و $f(x,y)=x^2+y^2$

۷۰- $\in=0.05$ و $f(x,y)=y/(x^2+1)$

۷۱- $\in=0.01$ و $f(x,y)=(x+y)/(x^2+1)$

۷۲- $\in=0.02$ و $f(x,y)=(x+y)/(2+\cos x)$

۷۳- $\in=0.04$ و $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ و $f(0,0)=0$

۷۴- $\in=0.02$ و $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$ و $f(0,0)=0$

در هر یک از تمرین های ۷۵-۷۸ یک تابع $f(x,y,z)$ و یک عدد مثبت $\in$ مفروض است. در هر تمرین نشان دهید که یک $\delta>0$ چنان وجود دارد که به ازای تمام نقاط (x,y,z)،

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y,z)-f(0,0,0)|<\in$$

۷۵- $\in=0.015$ و $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

۷۶- $\in=0.008$ و $f(x,y,z)=xyz$

۷۷- $\in=0.015$ و $f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+1}$

۷۸- $\in=0.03$ و $f(x,y,z)=\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z$

۷۹- نشان دهید که تابع $f(x,y,z)=x+y-z$ در هر نقطه (x_0,y_0,z_0) پیوسته است.

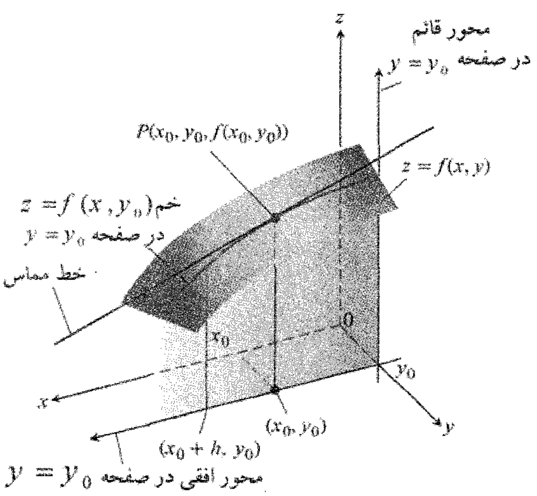
۸۰- نشان دهید که تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ در مبداء پیوسته است.

۱۴-۳ – مشتقات جزئی

حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چند متغیره مشابه حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک متغیره است که برای چند متغیر به صورت یکی یکی بکار می رود. وقتی تمام متغیرهای مستقل یک تابع را به جز یکی ثابت نگه داشته و نسبت به آن متغیر مشتق بگیریم به مشتق «جزئی» تابع نسبت به آن متغیر می رسیم. در این بخش نشان می دهیم که مشتقات جزئی چگونه تعریف می شوند و تعبیر هندسی آنها چیست و چگونه با کاربرد قواعد مربوط به مشتق گیری از توابع یک متغیره می توانیم آنها را محاسبه کنیم. مفهوم مشتق پذیری توابع چند متغیره مستلزم چیزی بیش از وجود مشتقات جزئی است اما خواهیم دید که توابع چند متغیره مشتق پذیر مشابه توابع یک متغیره مشتق پذیر رفتار می کنند.

مشتقات جزئی توابع دو متغیره

اگر (x_0,y_0) نقطه ای در دامنه تابع $f(x,y)$ باشد مقطع صفحه قائم $y=y_0$ با رویه $z=f(x,y)$ خم $z=f(x_0,y_0)$ خواهد بود (شکل۱۴-۱۵). این خم، نمودار تابع $z=f(x,y_0)$ در صفحه $y=y_0$ است. مختص افقی در این صفحه x و مختص قائم z است. مقدار y در y_0 ثابت نگه داشته می شود، لذا y یک متغیر نیست.



شکل۱۴-۱۵: محل تلاقی صفحه $y=y_0$ با رویه $z=f(x,y)$ وقتی از بالای ربع اول صفحه xy نگاه کنیم.

مشتق جزئی f نسبت به x در نقطه (x_0,y_0) را مانند مشتق معمولی $f(x,y_0)$ نسبت به x در نقطه $x=x_0$ تعریف می کنیم. برای متمایز کردن مشتقات جزئی از مشتقات معمولی به جای نماد d که قبلاً بکار می بردیم از نماد ∂ استفاده می کنیم.

در این تعریف، h نشان دهنده یک عدد حقیقی مثبت یا منفی است.

تعریف: مشتق جزئی $f(x,y)$ نسبت به x در نقطه (x_0,y_0) عبارت است از

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

عبارتی معادل برای مشتق جزئی عبارت است از

$$\left.\frac{d}{dx}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$$

شیب خم $z=f(x,y_0)$ در نقطه $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ واقع در صفحه $y=y_0$ مقدار مشتق جزئی f نسبت به x در نقطه (x_0,y_0) است (در شکل **۱۴-۱۵** این شیب منفی است). خط مماس بر خم در P خطی در صفحه $y=y_0$ است که با این شیب از نقطه P می گذرد. مشتق جزئی $\partial f/\partial x$ در (x_0,y_0) آهنگ تغییر f نسبت به x را، وقتی که y در مقدار y_0 ثابت نگه داشته شده است، مشخص می کند.

برای مشتق جزئی از نمادهای مختلفی استفاده می شود که عبارتند از

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ یا } z_x, \frac{\partial f}{\partial x}, f_x \quad \text{و} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

و

$$f_x(x_0,y_0) \text{ یا } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

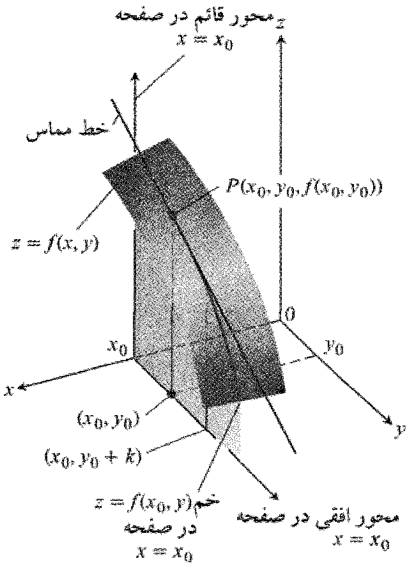
تعریف مشتق جزئی $f(x,y)$ نسبت به y در نقطه (x_0,y_0) مشابه تعریف مشتق جزئی f نسبت به x است. x را در مقدار x_0 ثابت نگه داشته و مشتق معمولی $f(x_0,y)$ نسبت به y در y_0 را محاسبه می کنیم.

تعریف: مشتق جزئی $f(x,y)$ نسبت به y در نقطه (x_0,y_0) عبارتست از

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{d}{dy}f(x_0,y)\right|_{y=y_0}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

شیب خم $z=f(x_0,y)$ در نقطه $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ واقع در صفحه قائم $x=x_0$ (شکل **۱۴-۱۶**) مشتق جزئی f نسبت به y در نقطه (x_0,y_0) است. خط مماس بر خم در P خطی در صفحه $x=x_0$ است که با این شیب از نقطه P می گذرد. این مشتق جزئی، آهنگ تغییر f نسبت به y در نقطه (x_0,y_0) را، وقتی x در مقدار x_0 ثابت نگه داشته شده است، بدست می دهد.

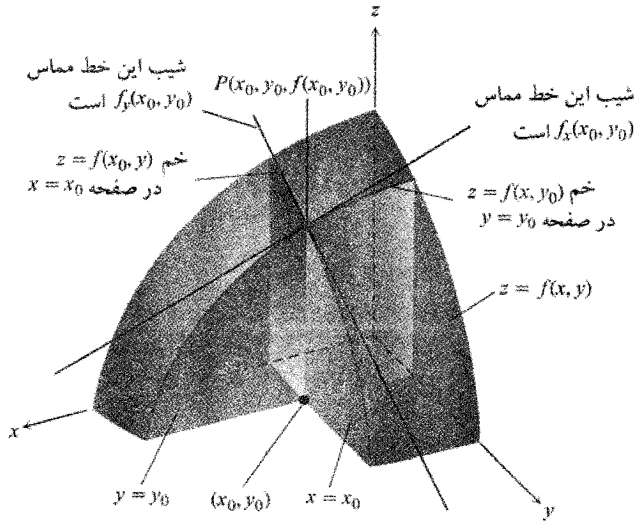


شکل ۱۴-۱۶: محل تقاطع صفحه $x=x_0$ با رویه $z=f(x,y)$ وقتی از بالای ربع اول صفحه xy به آن نگاه کنیم.

مشتق جزئی نسبت به y را هم مشابه مشتق جزئی نسبت به x نشان می دهیم

$$f_y \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{و} \quad f_y(x_0,y_0) \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

توجه کنید که اکنون دو خط مماس بر رویه $z=f(x,y)$ در نقطه $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ داریم (شکل **۱۴-۱۷**). آیا صفحه ای که این دو مماس مشخص می کنند در P بر رویه مماس است؟ خواهید دید که در مورد توابع مشتق پذیر که در انتهای این بخش آنها را تعریف می کنیم پاسخ مثبت است و در بخش **۱۴-۶** چگونگی یافتن این صفحه مماس را فرا می گیرید. ابتدا لازم است در مورد خود مشتقات جزئی مطالب بیشتری فرا بگیرید.



شکل۱۴-۱۷ : ترکیب شکل های۱۴-۱۵و ۱۴-۱۶ . خطوط مماس در نقطه $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ صفحه ای را مشخص می کنند که، حداقل در این تصویر، به نظر می رسد بر رویه مماس است.

محاسبات

تعاریف $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ دو راه متفاوت مشتق گیری از f در یک نقطه را در اختیار ما قرار می دهند: یکی مشتق معمولی نسبت به x در حالیکه y ثابت در نظر گرفته شود و دیگری مشتق معمولی نسبت به y در حالیکه x ثابت در نظر گرفته شود. همنطور که در مثال های زیر خواهید دید مقادیر این مشتقات جزئی در یک نقطه معین (x_0,y_0) معمولاً متفاوت از هم هستند.

مثال ۱: اگر

$$f(x,y)=x^2+3xy+y-1$$

مقادیر $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را در نقطه (۵ -و ۴) بیابید.

حل: برای یافتن $\partial f/\partial x$، y را ثابت در نظر گرفته و نسبت به x مشتق می گیریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+3xy+y-1\right)=2x+3.1.y+0-0=2x+3y$$

مقدار $\partial f/\partial x$ در نقطه (۵- و ۴) برابر است با $2(4)+3(-5)=-7$.

برای یافتن $\partial f/\partial y$، x را ثابت در نظر گرفته و نسبت به y مشتق می گیریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+3xy+y-1\right)$$
$$=0+3x.1+1-0=3x+1$$

مقدار $\partial f/\partial y$ در نقطه (۵- و ۴) برابر است با ۱۳ = ۱+ (۴)۳.

مثال ۲: اگر $f(x,y)=y\sin xy$، $\partial f/\partial y$ را به صورت یک تابع بدست آورید.

حل: x را ثابت و f را به صورت حاصلضرب y و $\sin xy$ در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y\sin xy)=y\frac{\partial}{\partial y}\sin xy+(\sin xy)\frac{\partial}{\partial y}(y)$$
$$=(y\cos xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy)+\sin xy=xy\cos xy+\sin xy$$

مثال ۳: اگر $f(x,y)=\dfrac{2y}{y+\cos x}$، f_x و f_y را بدست آورید.

حل: f را به صورت یک خارج قسمت در نظر می گیریم. اگر y را ثابت بگیریم داریم

$$f_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)$$
$$=\frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y)-2y\frac{\partial}{\partial x}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}$$
$$=\frac{(y+\cos x)(0)-2y(-\sin x)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}$$

اگر x را ثابت بگیریم داریم

$$f_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)$$
$$=\frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial y}(2y)-2y\frac{\partial}{\partial y}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}$$
$$=\frac{(y+\cos x)(2)-2y(1)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}$$

مشتق گیری ضمنی در مورد مشتقات جزئی به همان نحوی است که در مورد مشتقات معمولی داشتیم، در مثال بعدی این مطلب را خواهید دید.

مثال۴: اگر معادله

$$yz-\ln z=x+y$$

z را به صورت تابعی از دو متغیر مستقل xو y تعریف کند و مشتق جزئی موجود باشد $\partial f / \partial x$ را بیابید.

حل: y را ثابت نگه داشته و z را به صورت یک تابع مشتق پذیر از xدر نظر می گیریم و از طرفین معادله نسبت به x مشتق می گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz)-\frac{\partial}{\partial x}\ln z=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=1+0$$

(زیرا وقتی y ثابت است، $\frac{\partial}{\partial x}(yz)=y\frac{\partial z}{\partial x}$)

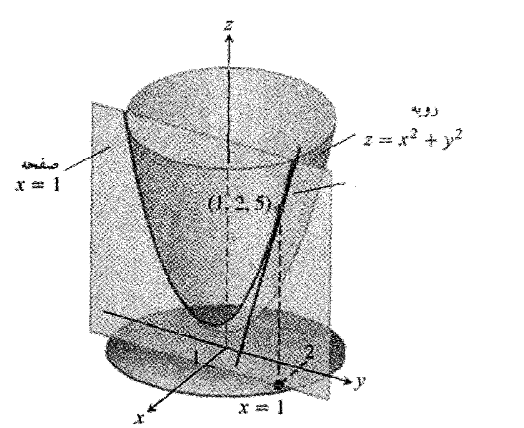
$$\left(y-\frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{yz-1}$$

مثال۵: مقطع صفحه $x=1$ با سهمیوار $z=x^2+y^2$ یک سهمی است. شیب مماس بر سهمی در نقطه (۵و۲و۱) را بیابید(شکل۱۴-۱۸).

حل: شیب، مقدار مشتق جزئی $\partial z / \partial y$ در نقطه (۲ و ۱) است:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)\right|_{(1,2)}=2y\left.\right|_{(1,2)}=2(2)=4$$



شکل۱۴-۱۸: مماس بر خم تقاطع صفحه $x=1$ و رویه $z=x^2+y^2$ در نقطه (۵و۲و۱) (مثال ۵).

برای بررسی درستی نتیجه، می توانیم سهمی را به عنوان نمودار تابع یک متغیره $z=(1)^2+y^2=1+y^2$ در صفحه $x=1$ در نظر گرفته و شیب را در $y=2$ محاسبه کنیم. این شیب، که حالا به صورت یک مشتق معمولی محاسبه می شود، برابر است

با

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{y=2}=\left.\frac{d}{dy}\left(1+y^2\right)\right|_{y=2}=2y\left.\right|_{y=2}=4$$

توابع با بیش از دو متغیر

تعاریف مشتقات جزئی توابع دارای بیش از دو متغیر مستقل شبیه تعاریف آنها در مورد توابع دو متغیره است. این مشتق ها، مشتقات معمولی نسبت به یک متغیرند به شرطی که سایر متغیرهای مستقل ثابت در نظر گرفته شوند.

مثال ۶: اگر x، y و z متغیرهای مستقل باشند و

$$f(x,y,z)=x\sin(y+3z)$$

آنگاه داریم

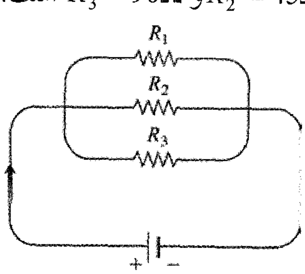
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}[x\sin(y+3z)]=x\frac{\partial}{\partial z}\sin(y+3z)$$

$$=x\cos(y+3z)\frac{\partial}{\partial z}(y+3z)=3x\cos(y+3z)$$

مثال ۷: اگر مقاومت های R_1، R_2و R_3 اهمی به صورت موازی به هم بسته شده و یک مقاومت R اهمی تشکیل دهند مقدار R را می توان از رابطه زیر بدست آورد

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

(شکل۱۴-۱۹). مطلوبست مقدار $\partial R / \partial R_2$ وقتی که $R_1=30\Omega$، $R_2=45\Omega$و $R_3=90\Omega$ است.



شکل۱۴- ۱۹: مقاومت هایی که به این ترتیب به هم وصل شده باشند مقاومت های موازی نامیده می شوند (مثال۷). هر مقاومت اجازه می دهد بخشی از جریان کل از آن بگذرد. مقاومت معادل آنها R از فرمول زیر محاسبه می شود: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$

حل: برای یافتن $\partial R / \partial R_2$، R_1 و R_3 را ثابت در نظر گرفته و با استفاده از مشتق گیری ضمنی از طرفین معادله نسبت به R_2

مشتق می گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$
$$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_2}=0-\frac{1}{R_2^2}+0$$
$$\frac{\partial R}{\partial R_2}=\frac{R^2}{R_2^2}=\left(\frac{R}{R_2}\right)^2$$

وقتی $R_1=30$، $R_2=45$ و $R_3=90$ اهم باشد،

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{30}+\frac{1}{45}+\frac{1}{90}=\frac{3+2+1}{90}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$$

بنابراین $R=15$ و

$$\frac{\partial R}{\partial R_2}=\left(\frac{15}{45}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

بنابراین به ازای مقادیر مفروض، تغییری کوچک در مقاومت R_2 به تغییری حدود $1/9$ برابر در R منجر می شود.

مشتقات جزئی و پیوستگی

تابعی چون $f(x,y)$ می تواند در یک نقطه مشتقات جزئی نسبت به x و همینطور y داشته باشد بدون اینکه تابع در آن نقطه پیوسته باشد. این وجه تمایز توابع چند متغیره با توابع یک متغیره است. در مورد توابع یک متغیره وجود مشتق، پیوستگی را ایجاد می کند. اما اگر مشتقات جزئی $f(x,y)$ وجود داشته و در سراسر قرصی به مرکز (x_0,y_0) پیوسته باشند آنگاه f در (x_0,y_0) پیوسته است. این مطلب را در پایان این بخش خواهید دید.

مثال ۸: فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$$

(شکل**۱۴-۲۰**).

(الف) – حد f را وقتی (x,y) در امتداد خط $y=x$ به $(0,0)$ میل می کند بیابید.

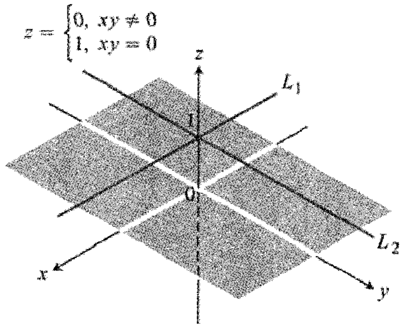
(ب)- ثابت کنید که f در مبداء پیوسته نیست.

(پ)- نشان دهید که هر دو مشتق جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ در مبداء موجودند.

حل:

(الف) – چون $f(x,y)$ در امتداد خط $y=x$ بصورت ثابت صفر است(به جز در مبداء) داریم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\Big|_{y=x}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0=0$$



شکل۱۴-۲۰: نمودار

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & xy\neq 0\\ 1, & xy=0\end{cases}$$

شامل خطوط L_1 و L_2 و چهار ربع باز صفحه xy است. این تابع در مبداء مشتقات جزئی دارد اما در آنجا پیوسته نیست (مثال۸).

(ب)- چون $f(0,0)=1$ ، با توجه به نتیجه قسمت (الف) ثابت می شود که f در $(0,0)$ پیوسته نیست.

(پ)- برای یافتن $\partial f/\partial x$ در $(0,0)$، y را در مقدار $y=0$ ثابت نگه می داریم. در این صورت به ازای تمام مقادیر x، $f(x,y)=1$ و نمودار f خط L_1 در شکل**۱۴-۲۰** است. شیب این خط در هر x برابر است با $\partial f/\partial x$. بویژه در $(0,0)$، $\partial f/\partial x=0$. به همین ترتیب، $\partial f/\partial y$ شیب خط L_2 در هر y است، لذا در $(0,0)$، $\partial f/\partial y=0$.

با وجود اثبات درمثال ۸، در ابعاد بالاتر نیز این مطلب درست است که مشتق پذیری در یک نقطه ایجاب می کند که تابع در آن نقطه پیوسته باشد. مثال ۸ حاکی از آن است که برای مشتق پذیری در ابعاد بالاتر به شرط قویتری نیاز داریم تا صرفاً وجود مشتقات جزئی. مشتق پذیری توابع دو متغیره را (که نسبت به مشتق پذیری توابع یک متغیره اندکی پیچیده تر است) در انتهای این بخش تعریف می کنیم و ارتباط آن با پیوستگی را مورد بازبینی قرار می دهیم.

مشتقات جزئی مرتبه دوم

وقتی از تابعی چون $f(x,y)$ دو مرتبه مشتق می گیرم مشتقات مرتبه دوم آن را بدست می آوریم. این مشتقات معمولاً با نمادهای زیر نشان داده می شوند

$$f_{yy} \text{ یا } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{و} \quad f_{xx} \text{ یا } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} \text{ یا } \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \quad \text{و} \quad f_{yx} \text{ یا } \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

معادلات معرف این مشتق ها عبارتند از

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

و الی آخر. به ترتیب گرفتن مشتقات جزئی آمیخته توجه کنید:

مشتق ابتدا نسبت به y و بعد نسبت به x $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$

همان معنی بالا را دارد. $\quad f_{yx}=(f_y)_x$

مثال ۹: اگر $f(x,y)=x\cos y+ye^x$، مطلوب است محاسبه مشتقات مرتبه دوم زیر

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

حل: گام اول محاسبه هر مشتق جزئی اول است

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\cos y+ye^x\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos y+ye^x\right)$$

$$=-x\sin y+e^x$$

$$=\cos y+ye^x$$

اکنون هر دو مشتق جزئی هر یک از دو مشتق جزئی اول فوق را می یابیم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-\sin y+e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-\sin y+e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=ye^x$$

قضیه مشتقهای آمیخته

ممکن است در مثال ۹ توجه کرده باشید که مشتقات جزئی مرتبه دوم «آمیخته»

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

با هم برابرند. این امر اتفاقی نیست. هرگاه f، f_x، f_y، f_{xy}و f_{yx} پیوسته باشند مشتقات جزئی فوق باید با هم برابر باشند. این موضوع را قضیه زیر بیان می کند.

> **قضیه ۲- قضیه مشتقهای آمیخته:** اگر $f(x,y)$ و مشتقات جزئی آن f_x، f_y، f_{xy}و f_{yx} در سراسر یک ناحیه باز شامل نقطه (a,b) پیوسته باشند آنگاه
>
> $$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

قضیه ۲ به قضیه کلرو نیز معروف است که به افتخار ریاضیدان فرانسوی آلکسیس کلرو کاشف آن نامگذاری شده است. اثبات این قضیه در ضمیمه ۹ آمده است. قضیه ۲ بیان می کند که برای محاسبه مشتق مرتبه دوم آمیخته می توان با هر ترتیبی مشتق گرفت به شرط آنکه معادلات پیوستگی برآورده شوند. این امکان مشتق گیری با ترتیبی متفاوت گاهاً محاسبات ما را ساده می کند.

مثال ۱۰: اگر

$$w=xy+\frac{e^y}{y^2+1}$$

مطلوبست محاسبه $\partial^2 w/\partial x\,\partial y$.

حل: نماد $\partial^2 w/\partial x\,\partial y$ بیانگر این است که ابتدا نسبت به y و بعد نسبت به x مشتق بگیریم. اما اگر ترتیب مشتق گیری را عوض کرده و ابتدا نسبت به x مشتق بگیریم سریعتر به جواب می رسیم. در دو مرحله داریم

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x}=1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=y$$

اگر ابتدا نسبت به y مشتق بگیریم باز هم به $\partial^2 w/\partial x\,\partial y=1$ می رسیم. می توانیم با هر یک از این دو ترتیب مشتق بگیریم زیرا شرایط قضیه ۲ در تمام نقاط (x_0,y_0) برای w برقرارند.

مشتقات جزئی مراتب بالاتر

با اینکه عمدتاً با مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم سروکار خواهیم داشت و این به دلیل ظهور فراوان آنها در مسائل کاربردی است، مادامی که مشتقات موجود باشند هیچ محدودیتی به لحاظ نظری برروی تعداد دفعات مشتق گیری از یک تابع وجود ندارد. بنابراین به مشتقات مرتبه سوم و چهارم که با نمادهایی مثل

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}=f_{yyxx} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}=f_{yyx}$$

نشان داده می شوند و غیره دست می یابیم. همانند مشتقات مرتبه دوم، ترتیب مشتق گیری، مادامی که تمام مشتقات تا مرتبه مورد نظر پیوسته باشند، مهم نیست.

مثال ۱۱: اگر $f(x,y,z)=1-2xy^2z+x^2y$ باشد f_{yxyz} را بیابید.

حل: ابتدا نسبت به متغیر y، بعد نسبت به x، بعد مجدداً نسبت به y و در پایان نسبت به z مشتق می گیریم:

$$f_y=-4xyz+x^2$$
$$f_{yx}=-4yz+2x$$
$$f_{yxy}=-4z$$
$$f_{yxyz}=-4$$

مشتق پذیری

نقطه شروع برای مشتق پذیری تفاضل تقسیم شده نیست که در مطالعه توابع یک متغیره دیدیم بلکه مفهوم نمو است. از بحث توابع یک متغیره در بخش ۳-۹ به یاد بیاورید که اگر $y=f(x)$ در $x=x_0$ مشتق پذیر باشد تغییر مقدار f ناشی از تغییر x از x_0 به $x_0+\Delta x$ از رابطه ای به شکل زیر بدست می آید

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\in \Delta x$$

که در آن وقتی $\Delta x \to 0$ میل کند، $\in \to 0$. برای توابع دو متغیره، ویژگی مشابه، تعریف مشتق پذیری است. قضیه نمو (که در ضمیمه ۹ اثبات شده است) بیان می کند که چه زمانی انتظار داریم این ویژگی برقرار باشد.

قضیه ۳- قضیه نمو در مورد توابع دو متغیره: فرض کنید مشتقات جزئی اول $f(x,y)$ در سراسر یک ناحیه باز چون R شامل نقطه (x_0,y_0) تعریف شده اند و f_x و f_y در (x_0,y_0) پیوسته اند. در این صورت تغییر

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

در مقدار f ناشی از حرکت از (x_0,y_0) به نقطه دیگر $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ واقع در R در معادله ای به شکل زیر صدق می کند

$$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\in_1 \Delta x+\in_2 \Delta y$$

که در آن وقتی Δx و Δy هر دو به صفر میل می کنند $\in_1$ و $\in_2$ هر یک به صفر میل می کنند.

با مراجعه به ضمیمه ۹ که اثبات این قضیه در آنجا ارائه شده است می توانید پی ببرید که اپسیلون ها از کجا آمده اند. برای توابعی که بیش از دو متغیر مستقل دارند قضایای مشابهی صادق اند.

تعریف: تابعی چون $z=f(x,y)$ **در** (x_0,y_0) **مشتق پذیر** است اگر $f_x(x_0,y_0)$ و $f_y(x_0,y_0)$ موجود باشند و Δz در معادله ای به شکل زیر صدق کند

$$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\in_1 \Delta x+\in_2 \Delta y$$

که در آن وقتی Δx و Δy هر دو به صفر میل می کنند $\in_1$ و $\in_2$ هر کدام به صفر میل می کنند. f را **مشتق پذیر** گوییم هرگاه در هر نقطه از دامنه اش مشتق پذیر باشد و می گوییم نمودار آن یک **رویه هموار** است.

بواسطه این تعریف، نتیجه فوری قضیه ۳ این است که یک تابع در (x_0,y_0) مشتق پذیر است اگر مشتقات جزئی اول آن در آنجا پیوسته باشند.

نتیجه قضیه ۳: اگر مشتقات جزئی f_x و f_y تابعی چون $f(x,y)$ در سراسر ناحیه بازی چون R پیوسته باشند آنگاه f در هر نقطه از R مشتق پذیر است.

اگر $z=f(x,y)$ مشتق پذیر باشد آنگاه تعریف مشتق پذیری اطمینان می دهد که وقتی Δx و Δy به صفر میل می

کنند $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$ به صفر میل می کند. بر این اساس یک تابع دو متغیره در هر نقطه ای که مشتق پذیر است، پیوسته است.

> **قضیه ۴: مشتق پذیری، پیوستگی را ایجاب می کند.** اگر تابعی چون $f(x,y)$ در (x_0,y_0) مشتق پذیر باشد آنگاه f در (x_0,y_0) پیوسته است.

همانطور که از نتیجه ۳ و قضیه ۴ پیداست، اگر f_x و f_y در سراسر یک ناحیه باز شامل (x_0,y_0) پیوسته باشند $f(x,y)$ باید در نقطه (x_0,y_0) پیوسته باشد. اما به خاطر داشته باشید که باز هم این امکان وجود دارد که یک تابع دو متغیره در نقطه ای که مشتقات جزئی اول آن موجودند ناپیوسته باشد. چنین چیزی را در مثال ۸ دیدیم. وجود مشتقات جزئی در آن نقطه به تنهایی کافی نیست بلکه پیوستگی مشتقات جزئی مشتق پذیری را تضمین می کند.

تمرین های ۱۴-۳

محاسبه مشتقات جزئی مرتبه اول

در تمرین های ۱-۲۲، $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را بدست آورید.

۱- $f(x,y) = 2x^2 - 3y - 4$

۲- $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

۳- $f(x,y) = (x^2-1)(y+2)$

۴- $f(x,y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$

۵- $f(x,y) = (xy-1)^2$

۶- $f(x,y) = (2x-3y)^3$

۷- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

۸- $f(x,y) = \left(x^3 + (y/2)\right)^{2/3}$

۹- $f(x,y) = 1/(x+y)$

۱۰- $f(x,y) = x/(x^2+y^2)$

۱۱- $f(x,y) = (x+y)/(xy-1)$

۱۲- $f(x,y) = \tan^{-1}(y/x)$

۱۳- $f(x,y) = e^{(x+y+1)}$

۱۴- $f(x,y) = e^{-x}\sin(x+y)$

۱۵- $f(x,y) = \ln(x+y)$

۱۶- $f(x,y) = e^{xy}\ln y$

۱۷- $f(x,y) = \sin^2(x-3y)$

۱۸- $f(x,y) = \cos^2(3x-y^2)$

۱۹- $f(x,y) = x^y$

۲۰- $f(x,y) = \log_y x$

۲۱- $f(x,y) = \int_x^y g(t)\,dt$ (به ازای تمام tها، g پیوسته)

۲۲- $f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n$، $(|xy|<1)$

در تمرین های ۲۳- ۲۴، f_x و f_yو f_z را بدست آورید.

۲۳- $f(x,y,z) = 1 + xy^2 - 2z^2$

۲۴- $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

۲۵- $f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2+z^2}$

۲۶- $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

۲۷- $f(x,y,z) = \sin^{-1}(xyz)$

۲۸- $f(x,y,z) = \sec^{-1}(x+yz)$

۲۹- $f(x,y,z) = \ln(x+2y+3z)$

۳۰- $f(x,y,z) = yz\ln(xy)$

۳۱- $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

۳۲- $f(x,y,z) = e^{-xyz}$

۳۳- $f(x,y,z) = \tanh(x+2y+3z)$

۳۴- $f(x,y,z) = \sinh(xy-z^2)$

در تمرین های ۳۵- ۴۰ مشتق جزئی تابع را نسبت به هر متغیر بدست آورید.

۳۵- $f(t,\alpha) = \cos(2\pi t - \alpha)$

۳۶- $g(u,v) = v^2 e^{(2u/v)}$

۳۷- $h(\rho,\phi,\theta) = \rho\sin\phi\cos\theta$

۳۸- $g(r,\theta,z)=r(1-\cos\theta)-z$

۳۹- **کار انجام شده توسط قلب** (بخش۳-۹، تمرین ۴۹).

$$W(P,V,\delta,v,g)=PV+\frac{V\delta v^2}{2g}$$

۴۰- فرمول ویلسون در مورد مقدار کالا (تمرین ۵۱ بخش۴-۵).

$$A(c,h,k,m,q)=\frac{km}{q}+cm+\frac{hq}{2}$$

محاسبه مشتقات جزئی مرتبه دوم

در تمرین های۴۱-۵۰ تمام مشتقات جزئی مرتبه دوم توابع مفروض را بیابید.

۴۱- $f(x,y)=x+y+xy$

۴۲- $f(x,y)=\sin xy$

۴۳- $g(x,y)=x^2y+\cos y+y\sin x$

۴۴- $h(x,y)=xe^y+y+1$

۴۵- $r(x,y)=\ln(x+y)$

۴۶- $s(x,y)=\tan^{-1}(y/x)$

۴۷- $w=x^2\tan(xy)$

۴۸- $w=ye^{x^2-y}$

۴۹- $w=x\sin(x^2y)$

۵۰- $w=\dfrac{x-y}{x^2+y}$

مشتقات جزئی آمیخته

در تمرین های ۵۱-۵۴ تحقیق کنید که $w_{xy}=w_{yx}$.

۵۱- $w=\ln(2x+3y)$

۵۲- $w=e^x+x\ln y+y\ln x$

۵۳- $w=xy^2+x^2y^3+x^3y^4$

۵۴- $w=x\sin y+y\sin x+xy$

۵۵- کدام ترتیب مشتق گیری برای محاسبه سریعتر f_{xy} بهتر است: اول نسبت به x یا اول نسبت به y ؟ سعی کنید بدون انجام محاسبات پاسخ دهید.

(الف)- $f(x,y)=x\sin y+e^y$

(ب)- $f(x,y)=1/x$

(پ)- $f(x,y)=y+(x/y)$

(ت)- $f(x,y)=y+x^2y+4y^3-\ln(y^2+1)$

(ث)- $f(x,y)=x^2+5xy+\sin x+7e^x$

(ج)- $f(x,y)=x\ln xy$

۵۶- برای هر یک از توابع زیر مشتق جزئی مرتبه پنجم $\partial^5 f/\partial x^2\partial y^3$ صفر است. برای نشان دادن هر چه سریعتر این مطلب، بهتر است ابتدا نسبت به x مشتق بگیرید یا y؟ سعی کنید بدون انجام محاسبات پاسخ دهید.

(الف)- $f(x,y)=y^2x^4e^x+2$

(ب)- $f(x,y)=y^2+y(\sin x-x^4)$

(پ)- $f(x,y)=x^2+5xy+\sin x+7e^x$

(ت)- $f(x,y)=xe^{y^2/2}$

استفاده از تعریف مشتق جزئی

در تمرین های۵۷-۶۰ با استفاده از تعریف حدی مشتق جزئی، مشتقات جزئی توابع داده شده را در نقاط مشخص شده محاسبه کنید.

۵۷- $f(x,y)=1-x+y-3x^2y$، $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ در (۲و۱)

۵۸- $f(x,y)=4+2x-3y-xy^2$، $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ در (۱و۲-)

۵۹- $f(x,y)=\sqrt{2x+3y-1}$، $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ در (۳و۲-)

۶۰- $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3+y^4)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ در (۰ و ۰).

۶۱- فرض کنید $f(x,y)=2x+3y-4$. مطلوب است شیب خط مماس بر این رویه در نقطه(۱- و ۲) و واقع در (الف)- صفحه $x=2$ و (ب)- صفحه $y=-1$.

۶۲- فرض کنید $f(x,y)=x^2+y^3$. مطلوب است شیب خط مماس بر این رویه در نقطه (۱ و ۱-) و واقع در (الف)- صفحه $x=-1$ و (ب)- صفحه $y=1$.

۶۳- **سه متغیر.** فرض کنید $w=f(x,y,z)$ تابعی از سه متغیر مستقل است و تعریف صوری مشتق جزئی $\partial f/\partial z$ در (x_0,y_0,z_0) را بنویسید. با استفاده از این تعریف برای

تابع $f(x,y,z)=x^2yz^2$ ، مقدار $\partial f/\partial z$ را در نقطه (۳و ۲و ۱) محاسبه کنید.

۶۴- سه متغیر. فرض کنید $w=f(x,y,z)$ تابعی از سه متغیر مستقل است و تعریف صوری مشتق جزئی $\partial f/\partial y$ در (x_0,y_0,z_0) را بنویسید. با استفاده از این تعریف برای تابع $f(x,y,z)=-2xy^2+yz^2$ مقدار $\partial f/\partial y$ را در نقطه(۳و ۰و ۱-) بدست آورید.

مشتق گیری ضمنی

۶۵- اگر معادله

$$xy+z^3x-2yz=0$$

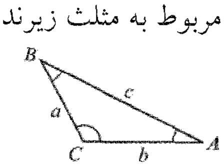
z را به صورت تابعی از دو متغیر مستقل x و y تعریف کند و مشتق جزئی موجود باشد مقدار $\partial z/\partial x$ را در نقطه (۱ و ۱و ۱) بدست آورید.

۶۶- اگر معادله

$$xz+y\ln x-x^2+4=0$$

x را به صورت تابعی از دو متغیر مستقل y و z تعریف کند و مشتق جزئی موجود باشد مقدار $\partial x/\partial z$ را در نقطه (۳- و۱-و۱) بدست آورید.

تمرین های ۶۷ و ۶۸ مربوط به مثلث زیرند:



۶۷- A را به صورت تابعی ضمنی از a، b و c بیان کرده و $\partial A/\partial a$ و $\partial A/\partial b$ را محاسبه کنید.

۶۸- a را به صورت تابعی ضمنی از A، b و B بیان کرده و $\partial a/\partial A$ و $\partial a/\partial B$ را محاسبه کنید.

۶۹- دو متغیر وابسته. اگر معادلات $x=v\ln u$ و $y=u\ln v$، u و v را به صورت توابعی از متغیرهای مستقل x و y تعریف کنند و v_x موجود باشد v_x را بر حسب u و v بیان کنید. (راهنمایی: از هر دو معادله نسبت به x مشتق گرفته و با حذف u_x از آنها v_x را بدست آورید).

۷۰- دو متغیر وابسته. فرض کنید معادلات $u=x^2-y^2$ و $v=x^2-y$، x و y را به صورت توابعی از متغیرهای مستقل u و v بیان می کنند و مشتقات جزئی موجودند. $\partial x/\partial u$ و $\partial y/\partial u$ را بیابید. (راهنمایی تمرین **۶۹** را ببینید). سپس فرض کنید $s=x^2+y^2$ و $\partial s/\partial u$ را بدست آورید.

۷۱- فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases} y^3, & y\ge 0 \\ -y^2, & y<0 \end{cases}$$

f_x، f_y، f_{xy} وf_{yx} را بدست آورده و دامنه هر مشتق جزئی را مشخص کنید.

۷۲- فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x\ge 0 \\ x^2, & x<0 \end{cases}$$

f_x، f_y، f_{xy} وf_{yx} را بدست آورده و دامنه هر مشتق جزئی را مشخص کنید.

نظریه و مثال ها

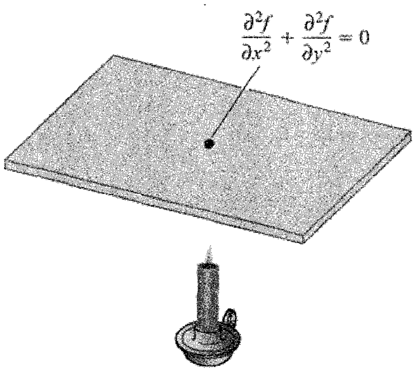
معادله لاپلاس سه بعدی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

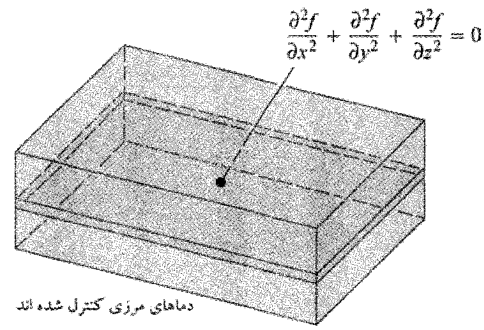
بوسیله توزیع های دمای حالت - پایای $T=f(x,y,z)$ در فضا، پتانسیل های گرانشی و پتانسیل های الکتروستاتیکی برآورده می شود. **معادله لاپلاس دو بعدی**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

که با حذف جمله $\partial^2 f/\partial z^2$ از معادله قبلی بدست می آید پتانسیل ها و توزیع های دمای حالت پایا را در صفحه توصیف می کند (شکل زیر را ببینید) .



(الف)



(ب)

صفحه(الف) را می توان به عنوان لایه نازکی از جامد (ب) در نظر گرفت که بر محور z عمود است.

نشان دهید که توابع مفروض در تمرین های ۷۳- ۸۰ در معادله لاپلاس صدق می کنند.

۷۳- $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$

۷۴- $f(x,y,z)=2z^3-3(x^2+y^2)z$

۷۵- $f(x,y)=e^{-2y}\cos 2x$

۷۶- $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

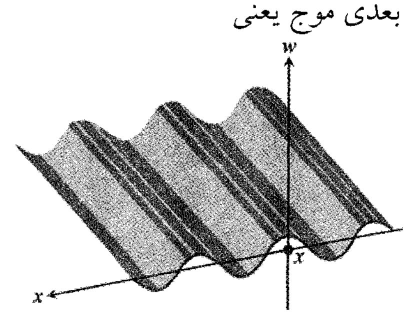
۷۷- $f(x,y)=3x+2y-4$

۷۸- $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$

۷۹- $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

۸۰- $f(x,y)=e^{3x+4y}\cos 5z$

معادله موج. اگر در ساحل اقیانوسی بایستیم و از امواج عکس بگیریم، عکس، در هر لحظه از زمان الگوی منظمی از قله ها و دره ها را نشان می دهد. در فضا حرکت قائم متناوب نسبت به فاصله را می بینیم. اگر داخل آب بایستیم می توانیم با عبور امواج بالا و پایین رفتن آب را احساس کنیم. در زمان، حرکت قائم متناوب را مشاهده می کنیم. در فیزیک این تقارن زیبا را با معادله یک بعدی موج یعنی



$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

بیان می کنند که w ارتفاع موج، x متغیر فاصله، t تغییر زمان و c سرعت انتشار موج است.

در مثال فوق، x فاصله بر روی سطح اقیانوس است اما در کاربردهای دیگر x ممکن است فاصله در امتداد ریسمان مرتعش، فاصله در هوا (امواج صوتی) یا فاصله در فضا (امواج نور) باشد. عدد c به محیط و نوع موج بستگی دارد.

نشان دهید که توابع مذکور در تمرین های ۸۱-۸۷ همگی جواب های معادله موج هستند.

۸۱- $w=\sin(x+ct)$

۸۲- $w=\cos(2x+2ct)$

۸۳- $w=\sin(x+ct)+\cos(2x+2ct)$

۸۴- $w=\ln(2x+2ct)$

۸۵- $w=\tan(2x-2ct)$

۸۶- $w=5\cos(3x+3ct)+e^{x+ct}$

۸۷- $w=f(u)$، که f تابعی مشتق پذیر از u است و $u=a(x+ct)$ ، که a یک ثابت است.

۸۸- آیا تابعی چون $f(x,y)$ که مشتقات جزئی اول آن در سراسر یک ناحیه باز چون R پیوسته اند باید روی R پیوسته باشد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۸۹- اگر تابعی چون $f(x,y)$ در سراسر یک ناحیه باز چون R دارای مشتقات جزئی دوم پیوسته باشد آیا مشتقات جزئی مرتبه اول f باید روی R پیوسته باشند؟ دلیل بیاورید.

۹۰- **معادله گرما.** معادله دیفرانسیل جزئی مهمی که توزیع گرما در یک ناحیه را در لحظه t توصیف می کند با معادله یک بعدی گرما یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

نمایش داده می شود. نشان دهید که $u(x,t)=\sin(\alpha x)e^{-\beta t}$ در معادله گرما صدق می کند. α و β دو ثابت هستند.

۹۱- فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

نشان دهید که $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ موجودند اما f در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست(راهنمایی: با بهره گیری از قضیه ۴ نشان دهید که f در $(0,0)$ پیوسته نیست).

۹۲- فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & x^2<y<2x^2\\ 1, & otherwise\end{cases}$$

نشان دهید که $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ موجودند اما f در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست.

۱۴-۴- قاعده زنجیری

قاعده زنجیری برای توابع یک متغیره که در بخش **۳-۶** مورد مطالعه قرار گرفت بیان می کند که وقتی $w=f(x)$ تابع مشتق پذیری از x و $x=g(t)$ تابع مشتق پذیری از t باشد، w تابع مشتق پذیری از t است و dw/dt را می توان با فرمول زیر محاسبه کرد

$$\frac{dw}{dt}=\frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}$$

در مورد توابع دو یا چند متغیره قاعده زنجیری چندین شکل دارد. شکل قاعده زنجیری به تعداد متغیرهای موجود بستگی دارد اما همینکه این موضوع لحاظ شود کاربرد آن مانند قاعده زنجیری بخش**۳-۶** است.

توابع دو متغیره

فرمول قاعده زنجیری برای تابع مشتق پذیری چون $w=f(x,y)$، وقتی $x=x(t)$ و $y=y(t)$ هر دو توابع مشتق پذیر از t هستند، با قضیه زیر بیان می شود.

قضیه ۵- قاعده زنجیری در مورد توابع دارای دو متغیر مستقل: اگر $w=f(x,y)$ مشتق پذیر و $x=x(t)$ و $y=y(t)$ توابع مشتق پذیر از t باشند آنگاه ترکیب $w=f((x),y(t))$ تابع مشتق پذیری از t است و داریم[1]

$$\frac{dw}{dt}=f_x(x(t),y(t)).x'(t)+f_y(x(t),y(t)).y'(t)$$

یا

$$\boxed{\frac{dw}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

اثبات: برای اثبات این قضیه نشان می دهیم که اگر x و y در $t=t_0$ مشتق پذیر باشند آنگاه w در t_0 مشتق پذیر است و

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}$$

که $P_0=(x(t_0),y(t_0))$. اندیس ها نشان می دهند که هر یک از مشتقات در کجا محاسبه می شوند.

فرض کنید Δx، Δy و Δw نموهای ناشی از تغییر t از t_0 به $t_0+\Delta t$ هستند. چون f مشتق پذیر است (تعریف بخش**۱۴-۳** را ببینید)،

$$\Delta w=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\Delta x+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\Delta y+\in_1\Delta x+\in_2\Delta y$$

که در آن وقتی Δx و $\Delta y\to 0$، $\in_1$ و $\in_2\to 0$. برای یافتن dw/dt این معادله را بر Δt تقسیم کرده و Δt را به صفر میل می دهیم. نتیجه تقسیم عبارت است از

$$\frac{\Delta w}{\Delta t}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\in_1\frac{\Delta x}{\Delta t}+\in_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

و اگر Δt را به صفر میل دهیم خواهیم داشت

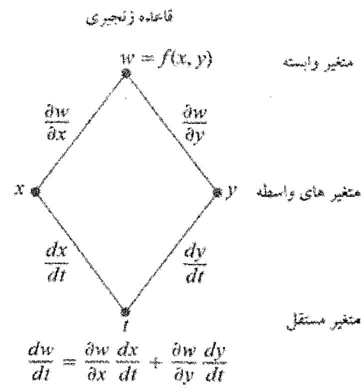
$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta t}$$
$$=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}$$
$$+0.\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0}+0.\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}$$

غالباً به جای مشتق جزئی $\partial f/\partial x$، $\partial w/\partial x$ می نویسیم لذا می توانیم قاعده زنجیری قضیه **۵** را به شکل زیر بنویسیم

[1]- هر یک از نمادهای $\partial f/\partial x$، $\partial w/\partial x$ و f_x نشان دهنده مشتق جزئی f نسبت به x هستند.

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dt}{dt}}$$

نکته: برای به خاط سپردن قاعده زنجیری نمودار زیر را تجسم کنید. برای یافتن $\partial w/\partial x$، از w شروع کرده و هر مسیر را تا t طی کرده و در طول راه مشتقات را در هم ضرب کنید. در نهایت حاصلضرب ها را با هم جمع کنید:



اما مفهوم متغیر وابسته w در دو طرف معادله فوق متفاوت است. در سمت چپ، w نشان دهنده تابع مرکب $w=f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$ به صورت تابعی از متغیر واحد t است. اما در سمت راست w نشان دهنده تابع $w=f\left(x,y\right)$ به صورت تابعی از دو متغیر x و y است. بعلاوه، مشتقات ساده dw/dt، dx/dt و dy/dt در نقطه t_0 محاسبه می شوند در حالیکه مشتقات جزئی $\partial w/\partial x$ و $\partial w/\partial y$ در نقطه $\left(x_0,y_0\right)$ محاسبه می شوند، که $x_0=x\left(t_0\right)$ و $y_0=y\left(t_0\right)$. با علم به این موضوع، در سراسر این کتاب هر وقت احتمال اشتباه وجود نداشته باشند هر دوی این شکل ها را به جای هم بکار خواهیم برد.

نمودار درختی (شاخه ای) مذکور در نکته فوق راه آسانی برای به خاطر سپردن قاعده زنجیری است. متغیر مستقل «واقعی» در تابع مرکب، t است در حالیکه x و y متغیرهای واسطه (که با t تغییر می کنند) و w متغیر وابسته است.

نمادگذاری دقیق تر زیر برای قاعده زنجیری نشان می دهد که مشتقات مختلف موجود در قضیه ۵ در کجاها محاسبه می شوند

$$\frac{dw}{dt}\left(t_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right).\frac{dx}{dt}\left(t_0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right).\frac{dy}{dt}\left(t_0\right)$$

مثال ۱: با استفاده از قاعده زنجیری مشتق

$$w=xy$$

را در امتداد مسیر $x=\cos t$ و $y=\sin t$ نسبت به t بدست آورید. مقدار مشتق در $t=\pi/2$ چقدر است؟

حل: با کاربرد قاعده زنجیری dw/dt را به ترتیب زیر بدست می آوریم

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\&=\frac{\partial\left(xy\right)}{\partial x}.\frac{d}{dt}\left(\cos t\right)+\frac{\partial\left(xy\right)}{\partial y}.\frac{d}{dt}\left(\sin t\right)\\&=\left(y\right)\left(-\sin t\right)+\left(x\right)\left(\cos t\right)\\&=\left(\sin t\right)\left(-\sin t\right)+\left(\cos t\right)\left(\cos t\right)\\&=-\sin^2 t+\cos^2 t\\&=\cos 2t\end{aligned}$$

در این مثال درستی نتیجه را می توان با محاسبه مستقیم تری بررسی کرد. w به صورت تابعی از t عبارت است از

$$w=xy=\cos t\sin t=\frac{1}{2}\sin 2t$$

بنابراین

$$\frac{dw}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{2}.2\cos 2t=\cos 2t$$

در هر حال مقدار مشتق به ازای مقدار t داده شده برابر است با

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=\pi/2}=\cos\left(2.\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi=-1$$

توابع سه متغیره

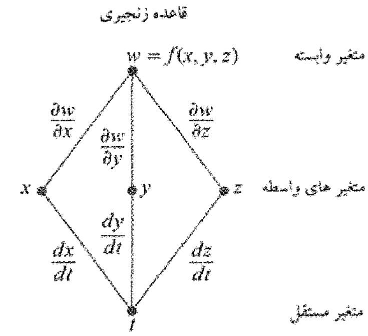
احتمالاً می توانید پیش بینی کنید که قاعده زنجیری برای توابع سه متغیره تنها با افزودن یک جمله سوم به فرمول دو متغیره بدست می آید.

قضیه ۶- قاعده زنجیری در مورد توابع دارای سه متغیر مستقل: اگر $w=f\left(x,y,z\right)$ مشتق پذیر و x، y و z توابع مشتق پذیر از t باشند آنگاه w تابعی مشتق پذیر از t است و

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

نکته : در اینجا به جای دو مسیر سه مسیر از w به t داریم اما

یافتن dw/dt همانند قبل است. هر مسیر را طی کرده و در طول راه مشتقات را در هم ضرب می کنیم و در نهایت حاصلضرب ها را با هم جمع می کنیم



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

اثبات این قضیه با اثبات قضیه ۵ یکی است جز اینکه در اینجا به جای دو متغیر واسطه سه متغیر واسطه در کارند. نمودار درختی (شاخه ای) هم که برای به خاطر سپردن این معادله جدید بکار می بریم مشابه نمودار قبلی است فقط سه مسیر از w به t رسم می شود

مثال ۲: اگر $w = xy + z$، $x = \cos t$، $y = \sin t$ و $z = t$ باشد dw/dt را بدست آورید.

در این مثال با تغییر t مقادیر $w(t)$ در امتداد مسیر یک پیچ تغییر می کنند (بخش ۱۳-۱) . مقدار مشتق در $t = 0$ چقدر است؟

حل: با استفاده از قاعده زنجیری برای متغیرهای مستقل داریم

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (1)(1)$$

(به جای متغیرهای واسطه معادلشان را قرار می دهیم)

$$= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1$$

$$= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t$$

بنابراین

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} = 1 + \cos(0) = 2$$

برای تعبیر فیزیکی تغییر در امتداد یک خم، جسمی را تصور کنید که مکان آن با زمان t تغییر می کند. اگر $w = T(x, y, z)$ دما در هر نقطه (x, y, z) در امتداد خمی چون C با معادلات پارامتری $x = x(t)$، $y = y(t)$ و $z = z(t)$ باشد تابع مرکب $w = T(x(t), y(t), z(t))$ دما را در امتداد خم نسبت به t نشان می دهد. در این صورت مشتق dw/dt آهنگ لحظه ای تغییر دما بواسطه حرکت در امتداد خم است که به ترتیبی که قضیه ۶ بیان می کند محاسبه می گردد.

توابعی که بر رویه ها تعریف می شوند

اگر دمای $w = f(x, y, z)$ در نقاط (x, y, z) واقع بر روی سطح زمین مورد نظر ما باشد ممکن است ترجیح دهیم x، y و z را به صورت توابعی از متغیرهای r و s در نظر بگیریم که طول و عرض جغرافیایی نقاط را بدست می دهند. اگر $x = g(r,s)$، $y = h(r,s)$ و $z = k(r,s)$ باشد آنگاه می توانیم با تابع مرکب زیر دما را به صورت تابعی از r و s بیان کنیم

$$w = f\left(g(r,s), h(r,s), k(r,s)\right)$$

تحت شرایطی که در زیر بیان می شود w نسبت به r و s مشتقات جزئی دارد که می توان آنها را به صورت زیر محاسبه کرد:

قضیه ۷- قاعده زنجیری در مورد دو متغیر مستقل و سه متغیر واسطه: فرض کنید

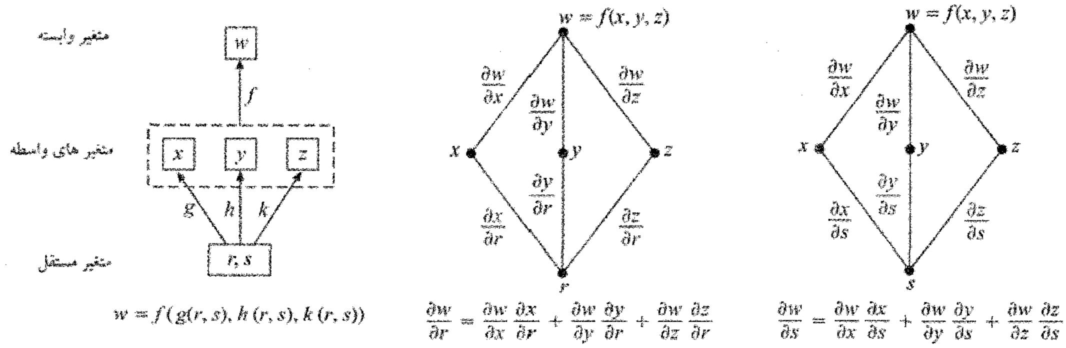
$w = f(x, y, z)$، $x = g(r,s)$، $y = h(r,s)$ و $z = k(r,s)$

اگر هر چهار تابع مشتق پذیر باشند آنگاه w نسبت به r و s مشتقات جزئی دارد که از فرمول های زیر بدست می آیند

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

فرمول اول را می توان با بهره گیری از قاعده زنجیری قضیه ۶ و ثابت نگه داشتن s و در نظر گرفتن r به عنوان t بدست آورد. فرمول دوم هم به همین روش بدست می آید اما r را ثابت نگه داشته و s را به عنوان t در نظر می گیریم. نمودارهای درختی مربوط به هر دو فرمول در شکل ۱۴-۲۱ نشان داده شده اند.



شکل۱۴-۲۱: تابع مرکب و نمودارهای شاخه ای مربوط به قضیه ۷.

مثال ۳: اگر

$$z = 2r \text{ و } y = r^2 + \ln s \text{ ،} x = \frac{r}{s} \text{ ،} w = x + 2y + z^2$$

باشد $\partial w / \partial r$ و $\partial w / \partial s$ را بر حسب r و s بیان کنید.

حل: با استفاده از فرمول های قضیه ۷ داریم

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= (1)\left(\frac{1}{s}\right) + (2)(2r) + (2z)(2)$$

(به جای متغیر واسطه z معادل آن را قرار می دهیم)

$$= \frac{1}{s} + 4r + (4r)(2) = \frac{1}{s} + 12r$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (1)\left(-\frac{r}{s^2}\right) + (2)\left(\frac{1}{s}\right) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}$$

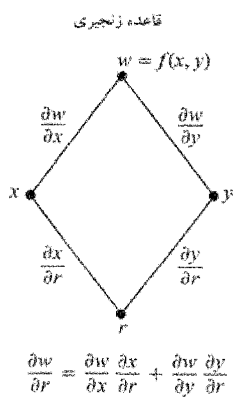
اگر f به جای سه متغیره تابعی دو متغیره باشد هر یک از فرمول های قضیه ۷ یک جمله کمتر خواهند داشت.

اگر $w = f(x, y)$ ،$x = g(r, s)$ ،$y = h(r, s)$ باشد آنگاه

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{و}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

شکل**۱۴-۲۲** نمودار درختی اولین معادله از معادلات فوق را نشان می دهد. نمودار درختی معادله دوم مشابه همین است فقط به جای r، s قرار می گیرد.



شکل۱۴-۲۲: نمودار درختی برای معادله

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

مثال ۴: اگر

$$y = r + s \text{ و } x = r - s \text{ ،} w = x^2 + y^2$$

باشد $\partial w / \partial r$ و $\partial w / \partial s$ را بیابید.

حل: طبق بحث فوق داریم

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= (2x)(-1) + (2y)(1)$$

$$= -2(r - s) + 2(r + s)$$

$$= 4s$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= (2x)(1) + (2y)(1)$$

$$= 2(r-s)+2(r+s)$$

$$= 4r$$

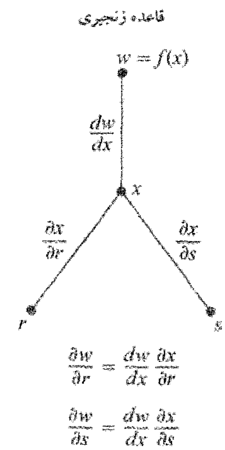
(به جای متغیرهای واسطه معادل آنها را قرار می دهیم)

اگر f تابعی از فقط x باشد معادلات ما ساده تر هم می شوند.

اگر $w=f(x)$ و $x=g(r,s)$، آنگاه

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}$$

در این حالت از مشتق معمولی (یک متغیره) dw/dx استفاده می کنیم. نمودار درختی در شکل ۱۴-۲۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۴-۲۳: نمودار درختی برای مشتق گیری از f به عنوان تابع مرکبی از r و s با یک متغیر واسطه.

بازبینی مشتق گیری ضمنی

قاعده زنجیری دو متغیره مذکور در قضیه ۵ به فرمولی منجر می شود که بسیاری از عملیات جبری مشتق گیری ضمنی را می کاهد. فرض کنید

۱- تابع $F(x,y)$ مشتق پذیر است و

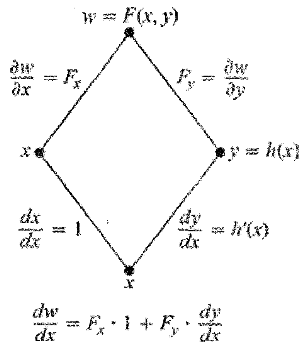
۲- معادله $F(x,y)=0$، y را بطور ضمنی به صورت تابع مشتق پذیری از x تعریف می کند مثلاً $y=h(x)$.

از آنجا که $w=F(x,y)=0$، مشتق dw/dx باید صفر باشد. با محاسبه این مشتق از قاعده زنجیری (نمودار درختی شکل ۱۴-۲۴) داریم

$$0=\frac{dw}{\partial x}=F_x\frac{dx}{dx}+F_y\frac{dy}{dx}$$

(قضیه ۵ به ازای $t=x$ و $f=F$)

$$=F_x.1+F_y.\frac{dy}{dx}$$



شکل ۱۴-۲۴: نمودار درختی برای مشتق گیری از $w=F(x,y)$ نسبت به x. قرار دادن $dw/dx=0$ به فرمول محاسباتی ساده ای برای مشتق گیری ضمنی منجر می شود (قضیه ۸).

اگر $F_y=\partial w/\partial y\neq 0$ باشد می توانیم این معادله را نسبت به dy/dx حل کرده و بدست آوریم

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

این نتیجه را رسماً با قضیه زیر بیان می کنیم.

قضیه ۸- فرمولی برای مشتق ضمنی: فرض کنید $F(x,y)$ مشتق پذیر باشد و معادله $F(x,y)=0$، y را به صورت تابعی مشتق پذیر از x تعریف کند. در این صورت در هر نقطه ای که $F_y\neq 0$ است داریم

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y} \qquad (1)$$

مثال ۵: اگر $y^2-x^2-\sin xy=0$ باشد با استفاده از قضیه ۸ dy/dx را بدست آورید.

حل: فرض کنید $F(x,y)=y^2-x^2-\sin xy$. در این صورت،

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{-2x-y\cos xy}{2y-x\cos xy}$$

$$=\frac{2x+y\cos xy}{2y-x\cos xy}$$

این محاسبه بسیار کوتاهتر از محاسبه ای یک متغیره با استفاده

از مشتق گیری ضمنی است.

نتیجه قضیه ۸ به راحتی به حالت سه متغیره قابل تعمیم است. فرض کنید معادله $F(x,y,z)=0$ متغیر z را بطور ضمنی به صورت تابعی چون $z=f(x,y)$ تعریف می کند. در این صورت برای تمام نقاط (x,y) واقع در دامنه f داریم $F(x,y,f(x,y))=0$. با فرض اینکه F و f توابعی مشتق پذیرند می توانیم با استفاده از قاعده زنجیری از معادله $F(x,y,z)=0$ نسبت به متغیر مستقل x مشتق بگیریم:

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

(هنگام مشتق گیری نسبت به x، y ثابت است)

$$=F_x.1+F_y.0+F_z.\frac{\partial z}{\partial x}$$

بنابراین

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

محاسبه ای مشابه این برای مشتق گیری نسبت به متغیر مستقل y نتیجه می دهد:

$$F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

هر وقت $F_z\neq 0$ باشد می توانیم دو معادله اخیر را نسبت به مشتقات جزئی $z=f(x,y)$ حل کرده و بدست آوریم

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\quad \text{و}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}\qquad (۲)}$$

نتیجه ای مهم از حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته موسوم به **قضیه تابع ضمنی** شرایطی را که تحت آنها نتایج مذکور در معادلات (۲) معتبرند بیان می کند. اگر مشتقات جزئی F_x، F_y و F_z در سراسر ناحیه بازی چون R در فضا شامل نقطه (x_0,y_0,z_0) پیوسته باشند و اگر به ازای یک ثابت c، $F(x_0,y_0,z_0)=c$ و $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ باشد آنگاه معادله $F(x,y,z)=c$ متغیر z را در نزدیکی (x_0,y_0,z_0) بطور ضمنی به صورت تابع مشتق پذیری از x و y تعریف می کند و مشتقات جزئی z از معادلات (۲) بدست می آیند.

مثال ۶: اگر $x^3+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0$، مطلوب است محاسبه $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ در $(0,0,0)$.

حل: فرض کنید $F(x,y,z)=x^3+z^2+ye^{xz}+z\cos y$. در این صورت،

$$F_y=e^{xz}-z\sin y \quad \text{و}\quad F_z=2z+xye^{xz}+\cos y$$

$$F_x=3x^2+zye^{xz}$$

چون $F(0,0,0)=0$ و $F_z(0,0,0)=1\neq 0$ و تمام مشتقات جزئی اول پیوسته اند طبق قضیه تابع ضمنی $F(x,y,z)=0$ متغیر z را در نزدیکی نقطه $(0,0,0)$ به صورت تابع مشتق پذیری از x و y تعریف می کند. از معادلات (۲) داریم

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{e^{xz}-z\sin y}{2z+xye^{xz}+\cos y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3x^2+zye^{xz}}{2z+xye^{xz}+\cos y}$$

در $(0,0,0)$ داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{0}{1}=0 \qquad \text{و}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{1}=-1$$

توابع با متغیرهای زیاد (چند متغیره)

در این بخش چندین شکل مختلف از قاعده زنجیری را دیده ایم اما هر کدام فقط حالت خاصی از یک فرمول کلی اند. وقتی مسائل خاص را حل می کنیم ممکن است رسم نمودار درختی مناسب، با قرار دادن متغیر وابسته در بالا، متغیرهای واسطه در وسط و متغیر مستقل انتخابی در پایین نمودار، به شما کمک کند. برای یافتن مشتق متغیر وابسته نسبت به متغیر مستقل و انتخابی، از متغیر وابسته شروع کرده و هر مسیر نمودار درختی را تا متغیر مستقل طی کرده و در طول هر مسیر مشتقات را محاسبه و در هم ضرب می کنیم. در نهایت حاصلضرب های بدست آمده برای مسیرهای مختلف را با هم جمع می کنیم.

در حال کلی، فرض کنید $w=f(x,y,\ldots,v)$ تابع مشتق پذیری از متغیرهای x، y، ... و v (یک مجموعه متناهی) باشد و x، y، ... و v توابع مشتق پذیری از p، q و ... و t (یک مجموعه متناهی دیگر) باشند. در این صورت w تابع مشتق پذیری از متغیرهای p تا t است و مشتقات جزئی w نسبت به

این متغیرها از معادلاتی به شکل زیر بدست می آیند

$$\frac{\partial w}{\partial p}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}+\cdots+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}$$

معادلات دیگر با قرار دادن q، ... و t یکی یکی به جای p بدست می آیند.

یکی از راههای به خاطر سپردن این رابطه این است که فکر کنیم سمت راست حاصلضرب عددی دو بردار با مؤلفه های زیر است

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\ldots,\frac{\partial w}{\partial v}\right) \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial p},\frac{\partial y}{\partial p},\ldots,\frac{\partial v}{\partial p}\right)$$

مجموعه سمت چپ مشتقات w نسبت به متغیرهای میانی و مجموعه سمت راست مشتقات متغیرهای میانی نسبت به متغیر مستقل انتخابی است.

تمرین های ۱۴-۴

قاعده زنجیری: یک متغیر مستقل

در تمرین های ۱-۶، (الف)- هم با استفاده از قاعده زنجیری و هم از طریق بیان w بر حسب t و مشتق گیری مستقیم نسبت به t، dw/dt را به صورت تابعی از t بیان کنید. سپس (ب)- dw/dt را به ازای مقدار t داده شده محاسبه کنید.

۱- $w=x^2+y^2, x=\cos t, y=\sin t, t=\pi$

۲- $w=x^2+y^2, x=\cos t+\sin t,$
$y=\cos t-\sin t, t=0$

۳- $w=\frac{x}{z}+\frac{y}{z}, x=\cos^2 t, y=\sin^2 t, z=1/t, t=3$

۴- $w=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right), x=\cos t,$
$y=\sin t, z=4\sqrt{t}, t=3$

۵- $w=2ye^x-\ln z, x=\ln\left(t^2+1\right),$
$y=\tan^{-1}t, z=e^t, t=1$

۶- $w=z-\sin xy, x=t, y=\ln t, z=e^{t-1}, t=1$

قاعده زنجیری: دو و سه متغیر مستقل

در تمرین های ۷ و ۸ (الف)- هم با استفاده از قاعده زنجیری و هم با بیان مستقیم z برحسب u و v قبل از مشتق گیری، $\partial z/\partial u$ و $\partial z/\partial v$ را به صورت تابعی از u و v بیان کنید. سپس (ب)- $\partial z/\partial u$ و $\partial z/\partial v$ را در نقطه مفروض (u,v) محاسبه کنید.

۷- $z=4e^x\ln y$ ، $y=u\sin v$ و $x=\ln(u\cos v)$
$(u,v)=(2,\pi/4)$

۸- $z=\tan^{-1}(x/y)$ ، $y=u\sin v$ و $x=u\cos v$
$(u,v)=(1.3,\pi/6)$

در تمرین های ۹ و ۱۰ (الف)- هم با استفاده از قاعده زنجیری و هم با بیان مستقیم w برحسب u و v قبل از مشتق گیری، $\partial w/\partial u$ و $\partial w/\partial v$ را به صورت تابعی از u و v بیان کنید. سپس(ب)- $\partial w/\partial u$ و $\partial w/\partial v$ را در نقطه مفروض (u,v) محاسبه کنید.

۹- $w=xy+yz+xz$ ، $z=uv$ ، $y=u-v$ ، $x=u+v$
و $(u,v)=(1/2,1)$

۱۰- $w=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ ، $z=ue^v$ ، $y=ue^v\cos u$ ،
$x=ue^v\sin u$ و $(u,v)=(-2,0)$

در تمرین های ۱۱ و ۱۲، (الف)- هم با استفاده از قاعده زنجیری و هم با بیان مستقیم u برحسب x، y و z قبل از مشتق گیری، $\partial u/\partial x$، $\partial u/\partial y$ و $\partial u/\partial z$ را به صورت تابعی از x، y و z بیان کنید. سپس (ب)- $\partial u/\partial x$، $\partial u/\partial y$ و $\partial u/\partial z$ را در نقطه مفروض (x,y,z) محاسبه کنید.

۱۱- $u=\frac{p-q}{q-r}$ ، $p=x+y+z$ ، $q=x-y+z$ ،
$r=x+y-z$ و $(x,y,z)=\left(\sqrt{3},2,1\right)$

۱۲- $u=e^{qr}\sin^{-1}p$ ، $p=\sin x$ ، $q=z^2\ln y$ ، $r=1/z$ و
$(x,y,z)=(\pi/4,1/2,-1/2)$

استفاده از نمودار درختی

در تمرین های ۱۳-۲۴ یک نمودار درختی رسم کرده و فرمول قاعده زنجیری را برای هر مشتق بنویسید.

۱۳- $\frac{dz}{dt}$ برای $x=g(t)$، $y=h(t)$ و $z=f(x,y)$

۱۴- $\frac{dz}{dt}$ برای
$u=g(t)$، $v=h(t)$، $w=k(t)$ و $z=f(u,v,w)$

۱۵- $\frac{\partial w}{\partial v}$ و $\frac{\partial w}{\partial u}$ برای $w=h(x,y,z)$،
$x=f(u,v)$ و $y=g(u,v)$، $z=k(u,v)$

۱۶- $\frac{\partial w}{\partial y}$ و $\frac{\partial w}{\partial x}$ برای $t=k(x,y)$،
$w=f(r,s,t)$ و $r=g(x,y)$، $s=h(x,y)$

۱۷- $\frac{\partial w}{\partial v}$ و $\frac{\partial w}{\partial u}$ برای
$w=g(x,y)$ و $x=h(u,v)$، $y=k(u,v)$

۱۸- $\frac{\partial w}{\partial y}$ و $\frac{\partial w}{\partial x}$ برای
$w=g(u,v)$ و $u=h(x,y)$، $v=k(x,y)$

۱۹- $\frac{\partial z}{\partial s}$ و $\frac{\partial z}{\partial t}$ برای
$z=f(x,y)$ و $x=g(t,s)$، $t=h(t,s)$

۲۰- $\frac{\partial y}{\partial r}$ برای $u=g(r,s)$ و $y=f(u)$

۲۱- $\frac{\partial w}{\partial s}$ و $\frac{\partial w}{\partial t}$ برای $u=h(s,t)$ و $w=g(u)$

۲۲- $\frac{\partial w}{\partial p}$ برای $v=k(p,q)$، $z=j(p,q)$،
$w=f(x,y,z,v)$ و $x=g(p,q)$، $y=h(p,q)$

۲۳- $\frac{\partial w}{\partial s}$ و $\frac{\partial w}{\partial r}$ برای
$w=f(x,y)$ و $x=g(r)$، $y=h(s)$

۲۴- $\frac{\partial w}{\partial s}$ برای
$w=g(x,y)$ و $x=h(r,s,t)$، $y=k(r,s,t)$

مشتق ضمنی

با فرض اینکه در تمرین های ۲۵-۲۸ معادلات، y را به صورت تابع مشتق پذیری از x تعریف می کنند به کمک قضیه ۸ مقدار dy/dx را در نقطه مفروض بدست آورید.

۲۵- $x^3-2y^2+xy=0$ و $(1,1)$

۲۶- $xy+y^2-3x-3=0$ و $(-1,1)$

۲۷- $x^2+xy+y^2-7=0$ و $(1,2)$

۲۸- $xe^y+\sin xy+y-\ln 2=0$ و $(0,\ln 2)$

در تمرین های ۲۹-۳۲ مقادیر $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ را در نقاط داده شده بدست آورید.

۲۹- $z^3-xy+yz+y^3-2=0$، $(1,1,1)$

۳۰- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1=0$، $(2,3,6)$

۳۱- $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(x+z)=0$،
(π,π,π)

۳۲- $xe^y+ye^z+2\ln x-2-3\ln 2=0$، $(1,\ln 2,\ln 3)$

یافتن مشتقات جزئی در نقاط معین شده

۳۳- اگر $w=(x+y+z)^2$، $x=r-s$، $y=\cos(r+s)$ و $z=\sin(r+s)$، مطلوب است $\partial w/\partial r$ وقتی که $r=1$، $s=-1$.

۳۴- اگر

$w=xy+\ln z$، $x=v^2/u$، $y=u+v$ و $z=\cos u$

مطلوب است $\partial w/\partial v$ وقتی $u=-1$ و $v=2$.

۳۵- اگر

$w=x^2+(y/x)$، $x=u-2v+1$ و $y=2u+v-2$

مطلوبست $\partial w/\partial v$ وقتی که $u=0$ و $v=0$.

۳۶- اگر

$z=\sin xy+x\sin y$، $x=u^2+v^2$ و $y=uv$

مطلوبست $\partial z/\partial u$ وقتی که $u=0$ و $v=1$.

۳۷- اگر

$z=5\tan^{-1}x$ و $x=e^u+\ln v$

مطلوب است $\partial z/\partial u$ و $\partial z/\partial v$ وقتی که $u=\ln 2$ و $v=1$.

۳۸- اگر

$z=\ln q$ و $q=\sqrt{v+3}\tan^{-1}u$

مطلوب است $\partial z/\partial u$ و $\partial z/\partial v$ وقتی که $u=1$ و $v=-2$.

نظریه و مثال ها

۳۹- فرض کنید $w=f(s^3+t^2)$ و $f'(x)=e^x$. $\partial w/\partial t$ و $\partial w/\partial s$ را بدست آورید.

۴۰- فرض کنید

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2}{2} \text{ و } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=xy \ \text{،} w=f\left(ts^3,\frac{s}{t}\right)$$

$\frac{\partial w}{\partial t}$ و $\frac{\partial w}{\partial s}$ را بیابید.

۴۱- **تغییر ولتاژ در مدار.** ولتاژ V در مداری که از قانون $V=IR$ پیروی می کند با فرسوده شدن باتری به آرامی افت می کند. ضمناً مقدار مقاومت R با گرم شدن مقاومت افزایش می یابد. با استفاده از معادله

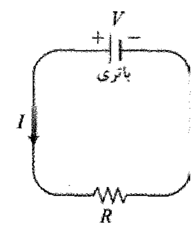
$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial I}\frac{dI}{dt}+\frac{\partial V}{\partial R}\frac{dR}{dt}$$

محاسبه کنید که در لحظه ای که

$$dR/dt=0.5ohms/\sec \text{،} I=0.04A \text{،} R=600\Omega$$

$$dV/dt=-0.01volt/\sec$$

است جریان چگونه تغییر می کند.



۴۲- **تغییر ابعاد جعبه.** طول های a، b و c یال های یک جعبه مستطیلی با زمان تغییر می کنند. در لحظه مورد نظر،

$$da/dt=db/dt=1m/\sec \text{،} c=3m \text{،} b=2m \text{،} a=1m$$

$$\text{و } dc/dt=-3m/\sec$$

است. در آن لحظه حجم جعبه V و مساحت مسطح جعبه S با چه آهنگهایی تغییر می کنند؟ طول قطرهای داخلی جعبه افزایش می یابد یا کاهش؟

۴۳- اگر $f(u,v,w)$ مشتق پذیر باشد و

$$w=z-x \text{ و } v=y-z \text{،} u=x-y$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

۴۴- **مختصات قطبی.** فرض کنید مختصات قطبی

$$y=r\sin\theta \text{ و } x=r\cos\theta$$

را در تابع مشتق پذیری چون $w=f(x,y)$ جاگذاری کنیم.

(الف)- نشان دهید که

$$\frac{\partial w}{\partial r}=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta$$

و

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}=-f_x\sin\theta+f_y\cos\theta$$

(ب)- با حل معادلات قسمت (الف) f_x و f_y را برحسب $\partial w/\partial r$ و $\partial w/\partial\theta$ بیان کنید.

(پ)- نشان دهید که

$$(f_x)^2+(f_y)^2=\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2$$

۴۵- **معادلات لاپلاس.** نشان دهید که اگر $w=f(u,v)$ در معادله لاپلاس $f_{uu}+f_{vv}=0$ صدق کند و اگر $u=(x^2-y^2)/2$ و $v=xy$ باشد آنگاه w در معادله لاپلاس $w_{xx}+w_{yy}=0$ صدق می کند.

۴۶- **معادلات لاپلاس.** فرض کنید $w=f(u)+g(v)$، که در آن $u=x+iy$، $v=x-iy$ و $i=\sqrt{-1}$. نشان دهید که اگر تمام توابع لازم مشتق پذیر باشند w در معادله لاپلاس $w_{xx}+w_{yy}=0$ صدق می کند.

۴۷- **مقادیر اکسترمم بر روی یک پیچ.** فرض کنید مشتقات جزئی تابعی چون $f(x,y,z)$ در نقاط روی پیچ

$$z=t \text{ و } y=\sin t \text{،} x=\cos t$$

عبارتند از

$$f_x=\cos t \quad \text{و} \quad f_y=\sin t \quad \text{و} \quad f_z=t^2+t-2$$

در چه نقاطی از این خم، در صورت وجود چنین نقاطی، f می تواند مقادیر اکسترمم اختیار کند؟

۴۸- **خم فضایی.** فرض کنید

$$w=x^2e^{2y}\cos 3z$$

مقدار dw/dt را در نقطه $(1,\ln 2,0)$ واقع بر خم

$$z=t \text{ و } y=\ln(t+2) \text{،} x=\cos t$$

بدست آورید.

۴۹- **دما روی یک دایره.** فرض کنید $T=f(x,y)$ دما در نقطه (x,y) از دایره $x=\cos t$، $y=\sin t$، $0\le t\le 2\pi$ باشد

و فرض کنید

$$\frac{\partial T}{\partial x}=8x-4y \quad و \quad \frac{\partial T}{\partial y}=8y-4x$$

(الف)- با بررسی مشتقات dT/dt و d^2T/dt^2 نقاطی را روی دایره بیابید که در آنها دما ماکسیمم و مینیمم است.

(ب)- فرض کنید $T=4x^2-4xy+4y^2$. مقادیر ماکسیمم و مینیمم T را روی دایره بیابید.

۵۰- دمای روی یک بیضی. فرض کنید $T=g(x,y)$ دما در نقطه (x,y) از بیضی با معادله زیر باشد

$$x=2\sqrt{2}\cos t \quad و \quad y=\sqrt{2}\sin t \quad و \quad 0\le t\le 2\pi$$

فرض کنید

$$\frac{\partial T}{\partial x}=y \quad و \quad \frac{\partial T}{\partial y}=x$$

(الف)- با بررسی dT/dt و d^2T/dt^2 تعیین کنید که در چه نقاطی از بیضی دما ماکسیمم و مینیمم است.

(ب)- فرض کنید $T=xy-2$. مقادیر ماکسیمم و مینیمم T را روی بیضی بیابید.

مشتق گیری از انتگرال ها: تحت قیود پیوستگی ملایم می توان گفت که اگر

$$F(x)=\int_a^b g(t,x)dt$$

آنگاه $F'(x)=\int_a^b g_x(t,x)dt$. با بهره گیری از این مطلب و قاعده زنجیری می توانیم مشتق

$$F(x)=\int_a^{f(x)} g(t,x)dt$$

را با قرار دادن

$$G(u,x)=\int_a^u g(t,x)dt$$

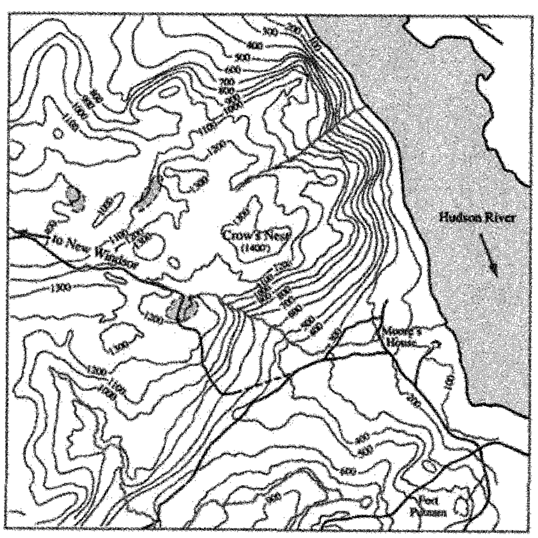
بدست آوریم، که $u=f(x)$. مشتقات توابع مذکور در تمرین های **۵۱** و **۵۲** را بیابید.

۵۱- $F(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{t^4+x^3}\,dt$

۵۲- $F(x)=\int_{x^3}^{1}\sqrt{t^3+x^2}\,dt$

۱۴-۵ – مشتقات جهتی و بردارهای گرادیان

اگر به نقشه زیر (شکل۱۴-۲۵) نگاه کنید که مسیرها (پربندها) را در امتداد رودخانه هادسن در نیویورک نشان می دهد متوجه خواهید شد که جریان های رودهای فرعی عمود بر این مسیرها شارش می کنند. این جریان ها مسیرهای با تندترین سراشیبی را طی می کنند تا آب ها تا جایی که ممکن است سریعتر به هادسن برسند بنابراین تندترین آهنگ لحظه ای تغییر ارتفاع جریان از سطح دریا جهت خاصی دارد. در این بخش خواهیم دید که چرا این جهت، موسوم به جهت «سراشیبی»، بر مسیرها عمود است.



شکل۱۴-۲۵: مسیرها (پربندها) در امتداد رودخانه هادسن در نیویورک جریان هایی را نشان می دهند که مسیرهایی با بیشترین شیب رو به پایین را در جهت عمود بر مسیرها طی می کنند.

مشتقات جهتی در صفحه

از بخش۱۴-۴ می دانیم که اگر $f(x,y)$ مشتق پذیر باشد آهنگ تغییر f نسبت به t در امتداد خم مشتق پذیر $x=g(t)$، $y=h(t)$ برابر است با

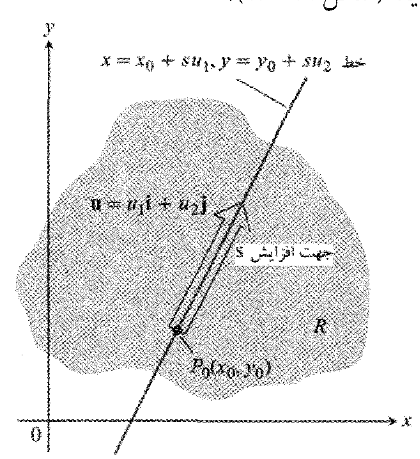
$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

در هر نقطه $P_0(x_0,y_0)=P_0(g(t_0),h(t_0))$، این معادله آهنگ تغییر f نسبت به افزایش t را مشخص می کند و لذا، علاوه بر چیزهای دیگر، به جهت حرکت در امتداد خم بستگی دارد. اگر خم یک خط راست و t پارامتر طول قوس در امتداد خط باشد که از P_0 در جهت بردار واحد معین **u** اندازه گیری می شود، آنگاه df/dt آهنگ تغییر f نسبت به فاصله در دامنه اش در جهت **u** است. با تغییر دادن **u**، وقتی از P_0 در جهت های مختلف عبور کنیم آهنگ تغییر f نسبت به فاصله را بدست می آوریم. اکنون این مفاهیم را به شکل دقیق تر تعریف می کنیم.

فرض کنید تابع $f(x,y)$ در سراسر ناحیه R در صفحه xy تعریف شده باشد و $P_0(x_0,y_0)$ نقطه ای در R و $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}$ یک بردار واحد باشد. در این صورت معادلات زیر معادلات پارامتری خط گذرنده از P_0 و موازی با **u** هستند

$$x=x_0+su_1 \quad \text{و} \quad y=y_0+su_2$$

اگر پارامتر s طول قوس را از P_0 در جهت **u** اندازه گیری کند با محاسبه df/ds در P_0 آهنگ تغییر f در P_0 در جهت **u** بدست می آید (شکل۱۴-۲۶).



شکل۱۴-۲۶: آهنگ تغییر f در جهت u در نقطه ای چون P_0 عبارت است از آهنگ تغییر f در امتداد این خط در P_0 .

تعریف: مشتق f در $P_0(x_0,y_0)$ در جهت بردار واحد $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}$ مقداریست که از حد زیر بدست می آید

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0}=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s} \qquad (۱)$$

به شرطی که حد وجود داشته باشد.

مشتق جهتی که با معادله (۱) تعریف شد با نماد زیر هم نمایش داده می شود

$$\text{«مشتق } f \text{ در } P_0 \text{ در جهت } \mathbf{u}\text{»} \qquad (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}$$

مشتقات جزئی $f_x(x_0,y_0)$ و $f_y(x_0,y_0)$ مشتقات جهتی f در P_0 در جهت های **i** و **j** هستند. با مقایسه معادله (۱) با تعاریف دو مشتق جزئی ارائه شده در بخش۱۴-۳ می توان به این مطلب پی برد.

مثال ۱: با استفاده از تعریف، مشتق

$$f(x,y)=x^2+xy$$

را در $P_0(1,2)$ در جهت بردار واحد $\mathbf{u}=(1/\sqrt{2})\mathbf{i}+(1/\sqrt{2})\mathbf{j}$ بیابید.

حل: با بکارگیری تعریف بیان شده در معادله (۱) خواهیم داشت

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0}=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}$$

(معادله ۱)

$$=\lim_{s\to 0}\frac{f\left(1+s.\frac{1}{\sqrt{2}},2+s.\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f(1,2)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)-\left(1^2+1\cdot 2\right)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{2s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)+\left(2+\frac{3s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)-3}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\frac{5s}{\sqrt{2}}+s^2}{s}=\lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+s\right)=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

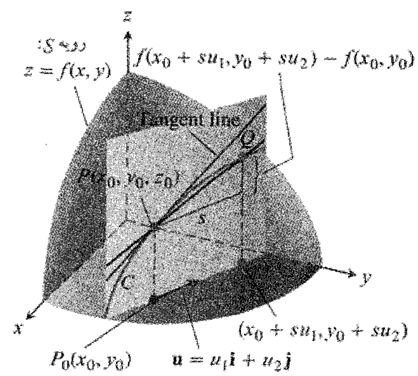
آهنگ تغییر $f(x,y)=x^2+xy$ در $P_0(1,2)$ در جهت **u** برابر است با $5/\sqrt{2}$.

تعبیر مشتق جهتی

معادله $z=f(x,y)$ رویه ای چون S را در فضا نمایش می دهد. اگر $z_0=f(x_0,y_0)$ باشد آنگاه نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ بر روی S قرار دارد. مقطع صفحه قائمی که از P و $P_0(x_0,y_0,)$ می گذرد و با **u** موازی است با رویه Sخمی چون C است

(شکل۱۴-۲۷). آهنگ تغییر f در جهت $\mathbf{u}$ عبارت است از شیب مماس بر C در P در دستگاه راستگرد متشکل از بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{k}$.

وقتی $\mathbf{u}=\mathbf{i}$ باشد، مشتق جهتی در P_0 مقدار $\partial f/\partial x$ در (x_0,y_0) است. وقتی $\mathbf{u}=\mathbf{j}$ باشد مشتق جهتی در P_0 مقدار $\partial f/\partial y$ در (x_0,y_0) است. مشتق جهتی دو مشتق جزئی را تعمیم می دهد. اکنون می توان به دنبال آهنگ تغییر f در هر جهت دلخواه $\mathbf{u}$ بود نه فقط جهت های $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$.



شکل۱۴-۲۷: شیب خم C در P_0 برابر است با $\lim_{Q\to P}$ (شیب (PQ))؛ این همان مشتق جهتی است یعنی $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0}=\left(D_{\mathbf{u}}f\right)_{P_0}$.

برای پی بردن به تعبیر فیزیکی مشتق جهتی، فرض کنید $T=f(x,y)$ دما در هر نقطه (x,y) از یک ناحیه واقع در صفحه است. در این صورت $f(x_0,y_0)$ دما در نقطه $P_0(x_0,y_0)$، و $\left(D_{\mathbf{u}}f\right)_{P_0}$ آهنگ لحظه ای تغییر دما در P_0 در حرکت در جهت $\mathbf{u}$ است.

محاسبه و گرادیان ها

اکنون فرمولی کاربردی برای محاسبه مشتق جهتی تابع مشتق پذیری چون f بدست می آوریم. با خط

$$x=x_0+su_1 \quad \text{و} \quad y=y_0+su_2 \qquad (۲)$$

شروع می کنیم که از $P_0(x_0,y_0)$ می گذرد و پارامتر طول قوس آن s است که در جهت بردار واحد $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}$ افزایش می یابد. در این صورت از قاعده زنجیری داریم

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{dx}{ds}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{dy}{ds}$$

(قاعده زنجیری برای f مشتق پذیر)

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}u_1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}u_2$$

(از معادله (۲)، $dx/ds=u_1$ و $dy/ds=u_2$)

$$=\underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\mathbf{i}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\mathbf{j}\right]}_{\text{گرادیان } f \text{ در } P_0}\cdot\underbrace{\left[u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}\right]}_{\text{جهت } \mathbf{u}} \qquad (۳)$$

معادله (۳) بیان می کند که مشتق تابع مشتق پذیری چون f در جهت $\mathbf{u}$ در P_0، برابر است با ضرب عددی $\mathbf{u}$ با بردار خاصی موسوم به گرادیان f در P_0.

> **تعریف: بردار گرادیان (گرادیان)** $f(x,y)$ در نقطه ای چون $P_0(x_0,y_0)$ بردار زیر است که با محاسبه مشتقات جزئی f در P_0 بدست می آید
>
> $$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

نماد ∇f «گراد f»، «گرادیان f» و «دل f» نیز نامیده می شود. نماد ∇ به تنهایی «دل» خوانده می شود. نماد دیگر گرادیان $\operatorname{grad} f$ است.

> **قضیه۹- مشتق جهتی یک ضرب عددی است.** اگر $f(x,y)$ در ناحیه بازی شامل $P_0(x_0,y_0)$ مشتق پذیر باشد آنگاه
>
> $$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0}=\left(\nabla f\right)_{P_0}\cdot\mathbf{u} \qquad (۴)$$
>
> که ضرب عددی گرادیان ∇f در P_0 و $\mathbf{u}$ است.

مثال ۲: مشتق $f(x,y)=xe^{y}+\cos(xy)$ را در نقطه(۰ و ۲) در جهت $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ بدست آورید.

حل: جهت $\mathbf{v}$ جهت بردار واحدی است که از تقسیم $\mathbf{v}$ بر طولش بدست می آید

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{\mathbf{v}}{5}=\frac{3}{5}\mathbf{i}-\frac{4}{5}\mathbf{j}$$

مشتقات جزئی f در همه جا پیوسته اند و در (۰و۲) عبارتند از

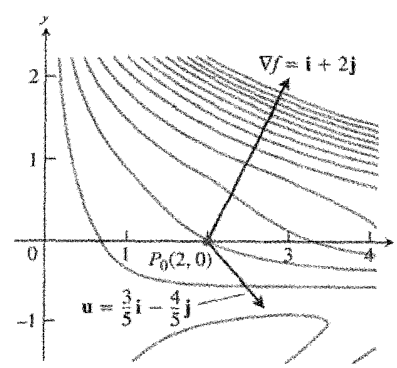
$$f_x(2,0)=\left(e^y-y\sin(xy)\right)_{(2,0)}=e^0-0=1$$
$$f_y(2,0)=\left(xe^y-x\sin(xy)\right)_{(2,0)}=2e^0-2\cdot0=2$$

گرادیان f در (۰ و۲) برابر است با

$$\nabla f\Big|_{(2,0)}=f_x(2,0)\mathbf{i}+f_y(2,0)\mathbf{j}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$$

(شکل۱۴-۲۸). بنابراین مشتق f در(۰و۲) در جهت $\mathbf{v}$ برابر است با

$$(D_{\mathbf{u}}f)\Big|_{(2,0)}=\nabla f\Big|_{(2,0)}.\mathbf{u} \qquad \text{(معادله۴)}$$
$$=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}).\left(\frac{3}{5}\mathbf{i}-\frac{4}{5}\mathbf{j}\right)=\frac{3}{5}-\frac{8}{5}=-1$$



شکل۱۴-۲۸: ∇f را برداری در دامنه f تجسم کنید. شکل فوق تعدادی از خمهای تراز f را نشان می دهد. آهنگ تغییر f در (۰ و ۲) در جهت

$$\mathbf{u}=(3/5)\mathbf{i}-(4/5)\mathbf{j}$$

برابر است با $\nabla f.\mathbf{u}=-1$ (مثال ۲).

اگر حاصلضرب عددی موجود در فرمول مشتق جهتی را محاسبه کنیم رابطه

$$D_{\mathbf{u}}f=\nabla f.\mathbf{u}=|\nabla f||\mathbf{u}|\cos\theta=|\nabla f|\cos\theta$$

بدست می آید، که θ زاویه بین بردارهای $\mathbf{u}$ و ∇f است، ویژگی های زیر آشکار می شوند.

ویژگی های مشتق جهتی $D_{\mathbf{u}}f=\nabla f.\mathbf{u}=|\nabla f|\cos\theta$

۱- تابع f زمانی سریعترین افزایش را دارد که $\cos\theta=1$ یا وقتی $\theta=0$ باشد و $\mathbf{u}$ جهت گرادیان باشد. یعنی f در هر نقطه P واقع در دامنه اش سریعترین افزایش را در جهت بردار گرادیان ∇f در P دارد. مشتق در این جهت برابر است با

$$D_{\mathbf{u}}f=\nabla f\cos(0)=|\nabla f|$$

۲- به همین ترتیب f در جهت $-\nabla f$ سریعترین کاهش را دارد. مشتق در این جهت عبارت است از

$$D_{\mathbf{u}}f=|\nabla f|\cos(\pi)=-|\nabla f|$$

۳- هر جهت $\mathbf{u}$ ی عمود بر گرادیان $\nabla f\neq0$ جهتی است با تغییر صفر در f زیرا در این صورت θ برابر $\pi/2$ است و

$$D_{\mathbf{u}}f=|\nabla f|\cos(\pi/2)=|\nabla f|\cdot0=0$$

همانطور که بعداً خواهیم دید این ویژگی ها در سه بعد هم همانند دو بعد برقرارند.

مثال۳: جهت هایی را بیابید که در آنها تابع

$$f(x,y)=\left(x^2/2\right)+\left(y^2/2\right)$$

(الف)- در نقطه (۱و۱) سریعترین افزایش را دارد.

(ب)- در نقطه (۱و۱) سریعترین کاهش را دارد.

(پ)- جهت هایی را بیابید که در آنها تغییر f در (۱و۱) صفر است.

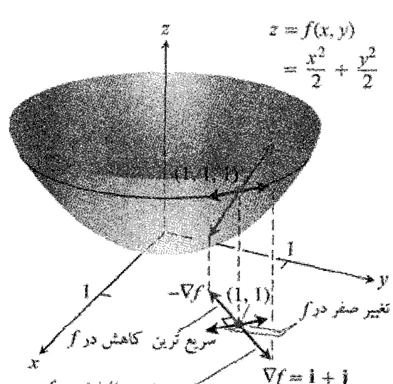
حل:

(الف)- تابع در(۱و۱) در جهت ∇f در این نقطه سریعترین افزایش را دارد. گرادیان در این نقطه عبارت است از

$$(\nabla f)_{(1,1)}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})_{(1,1)}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$$

جهت گرادیان f در نقطه مذکور عبارت است از

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{|\mathbf{i}+\mathbf{j}|}=\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt2}\mathbf{j}$$



شکل۱۴-۲۹: جهتی که در آن $f(x,y)$ در(۱و۱) سریعترین افزایش را دارد جهت $\nabla f\Big|_{(1,1)}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ است. این جهت با جهت سریعترین افزایش برروی رویه در (۱و۱و۱) متناظر است. (مثال۳).

(ب)- تابع در (۱و۱) در جهت $-\nabla f$ در این نقطه سریعترین کاهش را دارد، یعنی در جهت

$$-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

(پ)- جهت هایی در(۱و۱) که در آنها تغییر f صفر است جهت های عمود بر ∇f هستند

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \quad \text{و} \quad -\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

شکل **۱۴-۲۹** را ببینید.

گرادیان ها و خطوط مماس بر خم های تراز

اگر تابع مشتق پذیری چون $f(x,y)$ در امتداد خم همواری چون $\mathbf{r} = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$ مقدار ثابتی چون c داشته باشد (که باعث می شود خم، یک خم تراز f شود) آنگاه $f(g(t),h(t)) = 0$. با مشتق گیری از دو طرف این معادله نسبت به t به معادلات زیر می رسیم

$$\frac{d}{dt}f(g(t),h(t)) = \frac{d}{dt}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} = 0 \qquad \text{(قاعده زنجیری)}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{dg}{dt}\mathbf{i} + \frac{dh}{dt}\mathbf{j}\right)}_{\frac{d\mathbf{r}}{dt}} = 0 \qquad (۵)$$

معادله (۵) گویای این مطلب است که ∇f بر بردار مماس $d\mathbf{r}/dt$ قائم (عمود) و لذا بر خم عمود است.

> در هر نقطه (x_0,y_0) واقع در دامنه تابع مشتق پذیری چون $f(x,y)$، گرادیان f بر خم تراز گذرنده از (x_0,y_0) قائم (عمود) است (شکل۱۴-۳۰) .

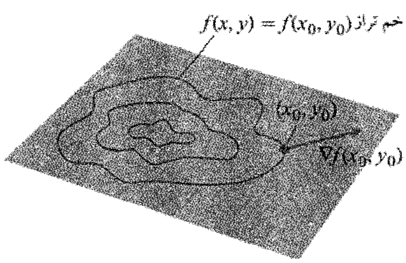
معادله (۵) دلیلی بر اعتبار این مشاهده است که جریان ها در نقشه های توپوگرافیکی عمود بر مسیرها (پربندها) شارش می کنند (شکل**۱۴-۲۵** را ببینید). از آنجا که جریان پایین سو به سریعترین شیوه به مقصدش خواهد رسید طبق ویژگی **۲** مشتق جهتی باید در جهت منفی بردارهای گرادیان شارش کند. طبق معادله (۵) این جهت ها بر خم های تراز عمودند.

با این مشاهده می توانیم معادلات خطوط مماس بر خم های تراز را هم بدست آوریم. این خطوط، خطوط عمود بر گرادیان ها هستند. معادله خطی که از نقطه ای چون $P_0(x_0,y_0)$ می گذرد و بر بردار $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ عمود است عبارت است از

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

(تمرین**۳۹**). اگر N عبارت باشد از گرادیان $(\nabla f)_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0,y_0)\mathbf{j}$، معادله فوق معادله خط مماس است یعنی

$$f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) = 0 \qquad (۶)$$

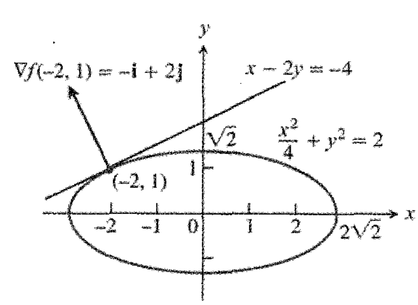


شکل۱۴-۳۰: گرادیان یک تابع مشتق پذیر دو متغیره در هر نقطه بر خم تراز تابع که از آن نقطه می گذرد همواره عمود است.

مثال۴: معادله خط مماس بر بیضی

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

(شکل**۱۴-۳۱**) در نقطه (۱و ۲-) را بیابید.



شکل۱۴-۳۱: معادله مماس بر بیضی $(x^2/4) + y^2 = 2$ را می توان با در نظر گرفتن بیضی به عنوان یک خم تراز تابع $f(x,y) = (x^2/4) + y^2$ بدست آورد (مثال ۴).

حل: بیضی فوق یک خم تراز تابع زیر است

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$

گرادیان f در (۱و۲−) عبارت است از

$$\nabla f\Big|_{(-2,1)}=\left(\frac{x}{2}\mathbf{i}+2y\mathbf{j}\right)_{(-2,1)}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$$

معادله خط مماس عبارت است از

(معادله ۶) $$(-1)(x+2)+(2)(y-1)=0$$

$$x-2y=-4$$

اگر گرادیان های دو تابع f و g را بدانیم بطور خودکار گرادیان های مجموع، تفاضل، مضارب ثابت، حاصلضرب و خارج قسمت آنها را می دانیم. در تمرین ۴۰ از شما خواسته ایم تا قواعد زیر را ثابت کنید. توجه کنید که این قواعد با قواعد متناظر در مورد مشتقات توابع یک متغیره شکل یکسانی دارند.

قواعد جبری حاکم بر گرادیان ها

۱- قاعده جمع: $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$

۲- قاعده تفریق: $\nabla(f-g)=\nabla f-\nabla g$

۳- قاعده مضرب ثابت: $\nabla(kf)=k\nabla f$ (هر عدد k)

۴- قاعده حاصلضرب: $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

۵- قاعده خارج قسمت: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

مثال ۵: برای توابع زیر درستی دو مورد از قواعد فوق را نشان می دهیم

$$f(x,y)=x-y \qquad g(x,y)=3y$$
$$\nabla f=\mathbf{j}-\mathbf{j} \qquad \nabla g=3\mathbf{j}$$

داریم

۱- $\nabla(f-g)=\nabla(x-4y)=\mathbf{i}-4\mathbf{j}=\nabla f-\nabla g$ (قاعده ۲)

۲- $$\nabla(fg)=\nabla(3xy-3y^2)=3y\mathbf{i}+(3x-6y)\mathbf{j}$$
$$=3y(\mathbf{i}-\mathbf{j})+3y\mathbf{j}+(3x-6y)\mathbf{j}$$
$$=3y(\mathbf{i}-\mathbf{j})+(3x-3y)\mathbf{j}$$
$$=3y(\mathbf{i}-\mathbf{j})+(x-y)3\mathbf{j}=g\nabla f+f\nabla g$$ (قاعده ۴)

توابع سه متغیره

برای تابع مشتق پذیری چون $f(x,y,z)$ و بردار واحدی چون $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$ در فضا، داریم

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

و

$$D_{\mathbf{u}}f=\nabla f.\mathbf{u}=\frac{\partial f}{\partial x}u_1+\frac{\partial f}{\partial y}u_2+\frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

مشتق جهتی را باز هم می توان به شکل زیر نوشت

$$D_{\mathbf{u}}f=\nabla f.\mathbf{u}=|\nabla f||\mathbf{u}|\cos\theta=|\nabla f|\cos\theta$$

بنابراین ویژگی هایی که قبلاً برای توابع دو متغیره بیان کردیم به توابع سه متغیره تعمیم می یابند. در هر نقطه مفروض، f در جهت ∇f سریعترین افزایش را و در جهت $-\nabla f$ سریعترین کاهش را دارد. در هر جهت عمود بر ∇f، مشتق صفر است.

مثال ۶: (الف)- مشتق $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ را در نقطه $P_0(1,1,0)$ در جهت $\mathbf{v}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ بیابید.

(ب)- f در چه جهت هایی در P_0 سریعترین تغییر را دارد و آهنگ تغییر در این جهت ها چقدر است؟

حل: (الف)- جهت $\mathbf{v}$ با تقسیم $\mathbf{v}$ بر طولش بدست می آید

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(6)^2}=\sqrt{49}=7$$
$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\frac{2}{7}\mathbf{i}-\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}$$

مشتقات جزئی f در P_0 عبارتند از

$$f_y=-2xy\Big|_{(1,1,0)}=-2 \ \text{،}\ f_z=-1\Big|_{(1,1,0)}=-1$$
$$f_x=\left(3x^2-y^2\right)_{(1,1,0)}=2$$

گرادیان f در P_0 عبارت است از

$$\nabla f\Big|_{(1,1,0)}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

بنابراین مشتق f در P_0 در جهت $\mathbf{v}$ برابر است با

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{(1,1,0)}=\nabla f\Big|_{(1,1,0)}.\mathbf{u}$$
$$=(2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}).\left(\frac{2}{7}\mathbf{i}-\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$$
$$=\frac{4}{7}+\frac{6}{7}-\frac{6}{7}=\frac{4}{7}$$

(ب)- تابع در جهت $\nabla f=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ سریعترین افزایش را

و در جهت $-\nabla f$ سریعترین کاهش را دارد. آهنگ های تغییر در این جهت ها به ترتیب عبارت است از

$$|\nabla f|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{9}=3$$

$$-|\nabla f|=-3$$

تمرین های ۱۴-۵

محاسبه گرادیان

در تمرین های ۱-۶ گرادیان تابع را در نقطه مفروض بیابید. سپس گرادیان را همراه با خم ترازی که از آن نقطه می گذرد رسم کنید.

۱- $f(x,y)=y-x$ ، $(2,1)$

۲- $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ ، $(1,1)$

۳- $g(x,y)=xy^2$ ، $(2,-1)$

۴- $g(x,y)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}$ ، $(\sqrt{2},1)$

۵- $f(x,y)=\sqrt{2x+3y}$ ، $(-1,2)$

۶- $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x}}{y}$ ، $(4,-2)$

در تمرین های۷-۱۰، ∇f را در نقطه مفروض بیابید.

۷- $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2+z\ln x$ ، $(1,1,1)$

۸- $f(x,y,z)=2z^3-3(x^2+y^2)z+\tan^{-1}xz$ ، $(1,1,1)$

۹- $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}+\ln(xyz)$ ، $(-1,2,-2)$

۱۰- $f(x,y,z)=e^{x+y}\cos z+(y+1)\sin^{-1}x$ ، $(0,0,\pi/6)$

محاسبه مشتق

در تمرین های۱۱-۱۸ مشتق تابع را در P_0 در جهت $\mathbf{u}$ بدست آورید.

۱۱- $f(x,y)=2xy-3y^2$ ، $P_0(5,5)$ ، $\mathbf{u}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

۱۲- $f(x,y)=2x^2+y^2$ ، $P_0(-1,1)$ ، $\mathbf{u}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$

۱۳- $g(x,y)=\dfrac{x-y}{xy+2}$ ، $P_0(1,-1)$ ، $\mathbf{u}=12\mathbf{i}+5\mathbf{j}$

۱۴- $h(x,y)=\tan^{-1}(y/x)+\sqrt{3}\sin^{-1}(xy/2)$ ، $P_0(1,1)$ و $\mathbf{u}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$

۱۵- $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ ، $P_0(1,-1,2)$ ، $\mathbf{u}=3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

۱۶- $f(x,y,z)=x^2+2y^2-3z^2$ ، $P_0(1,1,1)$ ، $\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۱۷- $g(x,y,z)=3e^x\cos yz$ ، $P_0(0,0,0)$ ، $\mathbf{u}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

۱۸- $h(x,y,z)=\cos xy+e^{yz}+\ln zx$ ، $P_0(1,0,1/2)$ ، $\mathbf{u}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

در تمرین های ۱۹-۲۴ ، جهت هایی را بیابید که در آنها توابع در P_0 سریعترین افزایش و کاهش رادارند. سپس مشتقات توابع را در این جهت ها بدست آورید.

۱۹- $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ ، $P_0(-1,1)$

۲۰- $f(x,y)=x^2y+e^{xy}\sin y$ ، $P_0(1,0)$

۲۱- $f(x,y,z)=(x/y)-yz$ ، $P_0(4,1,1)$

۲۲- $g(x,y,z)=xe^y+z^2$ ، $P_0(1,\ln 2,1/2)$

۲۳- $f(x,y,z)=\ln xy+\ln yz+\ln xz$ ، $P_0(1,1,1)$

۲۴- $h(x,y,z)=\ln(x^2+y^2-1)+y+6z$ ، $P_0(1,1,0)$

خطوط مماس بر خمهای تراز

در تمرین های ۲۵-۲۸ خم $f(x,y)=c$ را همراه با ∇f و خط مماس در نقطه مفروض رسم کنید. سپس معادله خط مماس را بنویسید.

۲۵- $x^2+y^2=4$ ، $(\sqrt{2},\sqrt{2})$

۲۶- $x^2-y=1$ ، $(\sqrt{2},1)$

۲۷- $xy=-4$ ، $(2,-2)$

۲۸- $x^2-xy+y^2=7$ ، $(-1,2)$

نظریه و مثال ها

۲۹- فرض کنید $f(x,y)=x^2-xy+y^2-y$. مطلوب

است جهت های $\mathbf{u}$ و مقادیر $D_{\mathbf{u}}f\ (1,-1)$ که به ازای آنها

(الف)- $D_{\mathbf{u}}f\ (1,-1)$ بزرگترین مقدار است.

(ب)- $D_{\mathbf{u}}f\ (1,-1)$ کوچکترین مقدار است.

(پ)- $D_{\mathbf{u}}f\ (1,-1)=0$

(ت)- $D_{\mathbf{u}}f\ (1,-1)=4$

(ث)- $D_{\mathbf{u}}f\ (1,-1)=-3$

۳۰- فرض کنید $f\ (x,y)=\dfrac{(x-y)}{(x+y)}$. مطلوب است جهت های $\mathbf{u}$ و مقادیر $D_{\mathbf{u}}f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ که به ازای آنها

(الف)- $D_{\mathbf{u}}f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ بزرگترین مقدار را دارد.

(ب)- $D_{\mathbf{u}}f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ کوچکترین مقدار را دارد.

(پ)- $D_{\mathbf{u}}f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)=0$

(ت)- $D_{\mathbf{u}}f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)=-2$

(ث)- $D_{\mathbf{u}}f\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)=1$

۳۱- مشتق جهتی صفر. در چه جهتی مشتق تابع

$$f\ (x,y)=xy+y^2$$

در $P\ (3,2)$ برابر صفر است؟

۳۲- مشتق جهتی صفر. در چه جهتی مشتق تابع

$$f\ (x,y)=\left(x^2-y^2\right)/\left(x^2+y^2\right)$$

در $P\ (1,1)$ برابر صفر است؟

۳۳- آیا جهتی چون $\mathbf{u}$ وجود دارد که در آهنگ تغییر

$$f\ (x,y)=x^2-3xy+4y^2$$

در $P\ (1,2)$ برابر ۱۴ باشد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۳۴- تغییر دما در امتداد یک دایره. آیا جهتی چون $\mathbf{u}$ وجود دارد که در آن آهنگ تغییر تابع دمای

$$T\ (x,y,z)=2xy-yz$$

(دما برحسب درجه سلسیوس، فاصله برحسب فوت) در $P\ (1,-1,1)$ برابر $-3^{\circ}C\ /ft$ باشد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۳۵- مشتق $f\ (x,y)$ در $P_0\ (1,2)$ در جهت $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ برابر $2\sqrt{2}$ و در جهت $-2\mathbf{j}$ برابر ۳- است. مشتق f در جهت $-\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ چقدر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۳۶- مشتق $f\ (x,y,z)$ در نقطه P در جهت $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ بیشترین مقدار را دارد. در این جهت مقدار مشتق $2\sqrt{3}$ است.

(الف)- ∇f در P چقدر است؟ دلیل بیاورید.

(ب)- مشتق f در P در جهت $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ چقدر است؟

۳۷- مشتقات جهتی و مؤلفه های عددی. مشتق تابع مشتق پذیری چون $f\ (x,y,z)$ در نقطه P_0 در جهت بردار واحد $\mathbf{u}$ چه رابطه ای با مؤلفه عددی $\left(\nabla f\right)_{P_0}$ در جهت $\mathbf{u}$ دارد؟ دلایل خود را ارائه کنید.

۳۸- مشتقات جهتی و مشتقات جزئی. با فرض اینکه مشتقات لازم $f\ (x,y,z)$ تعریف شده اند، $D_{\mathbf{i}}f$ ،$D_{\mathbf{j}}f$ و $D_{\mathbf{k}}f$ چه رابطه ای با f_x، f_y و f_z دارند؟ دلایل خود را ارائه کنید.

۳۹- خطوط واقع در صفحه. نشان دهید که

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$$

معادله خطی در صفحه xy است که از نقطه $\left(x_0,y_0\right)$ می گذرد و بر بردار $\mathbf{N}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}$ عمود است.

۴۰- قواعد جبری در مورد گرادیان ها. عدد ثابت k و گرادیان های زیر مفروضند.

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\nabla g=\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k}$$

قواعد جبری گرادیان ها را ثابت کنید.

۱۴-۶- صفحات مماس و مشتق ها

در این بخش صفحه مماس در یک نقطه واقع برروی یک رویه هموار واقع در فضا را تعریف می کنیم. سپس نشان می دهیم که چگونه معادله صفحه مماس را از روی مشتقات جزئی تابع معرف رویه بدست می آوریم. این کار شبیه تعریف خط مماس

در یک نقطه واقع بر یک خم در صفحه مختصات برای توابع یک متغیره است (بخش ۳-۱). در ادامه دیفرانسیل کامل و خطی سازی توابع چند متغیره را مورد مطالعه قرار می دهیم.

صفحات مماس و خطوط قائم

اگر $\mathbf{r}=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}$ خم همواری برروی رویه تراز $f(x,y,z)=c$ تابع مشتق پذیری چون f باشد آنگاه $f(g(t),h(t),k(t))=c$. با مشتق گیری از دو طرف این معادله نسبت به t خواهیم داشت

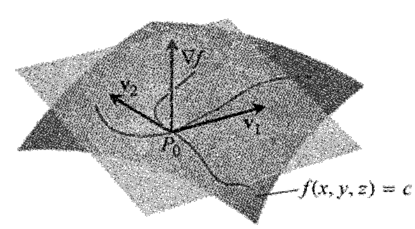
$$\frac{d}{dt}f(g(t),h(t),k(t))=\frac{d}{dt}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt}=0 \qquad \text{(قاعده زنجیری)}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)}_{\nabla f}\cdot\underbrace{\left(\frac{dg}{dt}\mathbf{i}+\frac{dh}{dt}\mathbf{j}+\frac{dk}{dt}\mathbf{k}\right)}_{d\mathbf{r}/dt}=0 \qquad (۱)$$

در هر نقطه در امتداد خم، ∇f بر بردار سرعت خم عمود است.

حال بیایید توجه خود را به خم هایی محدود کنیم که از P_0 می گذرند (شکل۱۴-۳۲). تمام بردارهای سرعت در P_0 بر ∇f در P_0 عمودند، لذا خطوط مماس خم همگی در صفحه گذرنده از P_0 و قائم بر ∇f قرار دارند. اکنون این صفحه را تعریف می کنیم.



شکل۱۴-۳۲: گرادیان ∇f بر بردار سرعت هر خم هموار واقع در رویه گذرنده از P_0 عمود است. بنابراین بردارهای سرعت در P_0 در یک صفحه مشترک قرار دارند که آن را صفحه مماس در P_0 می نامیم.

> **تعاریف: صفحه مماس** در نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ واقع بر رویه تراز $f(x,y,z)=c$ تابع مشتق پذیر f صفحه مار بر P_0 و قائم بر $\nabla f\big|_{P_0}$ است.

> **خط قائم** بر رویه در P_0 خطی است که از P_0 می گذرد و با $\nabla f\big|_{P_0}$ موازی است.

بنا به بخش۱۲-۵ معادلات صفحه مماس و خط قائم عبارتند از:

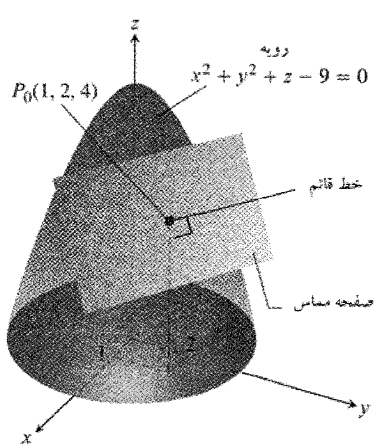
> **صفحه مماس بر** $f(x,y,z)=c$ **در** $P_0(x_0,y_0,z_0)$:
>
> $$f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)+f_z(P_0)(z-z_0)=0 \qquad (۲)$$
>
> **خط قائم بر** $f(x,y,z)=c$ **در** $P_0(x_0,y_0,z_0)$:
>
> $x=x_0+f_x(P_0)t$ ، $y=y_0+f_y(P_0)t$ و
>
> $$z=z_0+f_z(P_0)t \qquad (۳)$$

مثال ۱: مطلوب است معادلات صفحه مماس و خط قائم بر رویه

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0 \qquad \text{(سهمیوار مستدیر)}$$

در نقطه $P_0(1,2,4)$.

حل: این رویه در شکل۱۴-۳۳ نشان داده شده است.



شکل۱۴-۳۳: صفحه مماس و خط قائم بر این رویه در P_0 (مثال ۱).

صفحه مماس، صفحه گذرنده از P_0 و عمود بر گرادیان f در P_0 است. این گرادیان عبارت است از

$$\nabla f\big|_{P_0}=(2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+\mathbf{k})_{(1,2,4)}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

بنابراین معادله صفحه مماس عبارت است از

$$2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0$$

یا

$$2x+4y+z=14$$

خط قائم بر رویه در P_0 عبارت است از

$$x=1+2t \quad \text{و} \quad y=2+4t \quad \text{و} \quad z=4+t$$

برای یافتن معادله صفحه مماس بر رویه هموار چون $z=f(x,y)$ در نقطه ای چون $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ، که در آن $z_0=f_0(x_0,y_0)$، ابتدا ملاحظه می کنیم که معادله $z=f(x,y)$ با $f(x,y)-z=0$ معادل است بنابراین رویه $z=f(x,y)$ رویه تراز صفر تابع $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ است. مشتقات جزئی f عبارتند از

$$F_x=\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)-z)=f_x-0=f_x$$
$$F_y=\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)-z)=f_y-0=f_y$$
$$F_z=\frac{\partial}{\partial z}(f(x,y)-z)=0-1=-1$$

بنابراین فرمول

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$$

که مربوط به صفحه مماس بر رویه تراز در P_0 است به شکل زیر درمی آید

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

صفحه مماس بر رویه $z=f(x,y)$ در $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

صفحه مماس بر رویه $z=f(x,y)$ تابع مشتق پذیر f در نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ عبارت است از

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0 \quad (۴)$$

مثال ۲: مطلوب است صفحه مماس بر رویه

$$z=x\cos y-ye^x$$

در $(0,0,0)$.

حل: مشتقات جزئی $f(x,y)=x\cos y-ye^x$ را محاسبه کرده و از معادله (۴) استفاده می کنیم:

$$f_x(0,0)=\left(\cos y-ye^x\right)_{(0,0)}=1-0.1=1$$
$$f_y(0,0)=\left(-x\sin y-e^x\right)_{(0,0)}=0-1=-1$$

بنابراین صفحه مماس عبارت است از

$$1.(x-0)-1.(y-0)-(z-0)=0 \qquad \text{(معادله (۴))}$$

یا

$$x-y-z=0$$

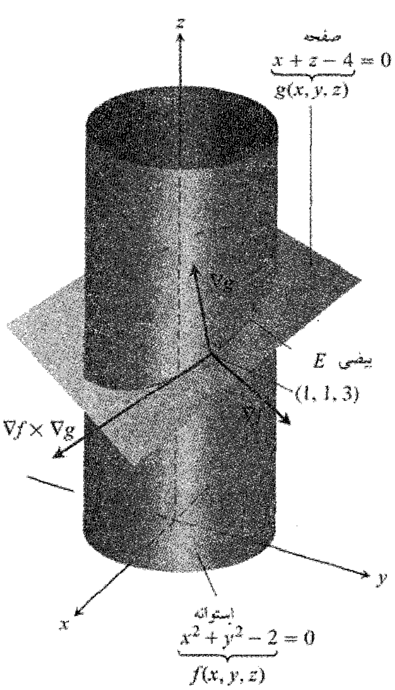
مثال۳: مقطع رویه های

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0 \qquad \text{(یک استوانه)}$$

و

$$g(x,y,z)=x+z-4=0 \qquad \text{(یک صفحه)}$$

یک بیضی چون E است (شکل۱۴-۳۴). معادلات پارامتری خط مماس بر E در نقطه $P_0(1,1,3)$ را بیابید.



شکل۱۴-۳۴: مقطع این استوانه و این صفحه بیضی E است (مثال ۳).

حل: خط مماس در P_0 هم بر ∇f و هم بر ∇g عمود است پس با $\mathbf{v}=\nabla f\times\nabla g$ موازی است. مؤلفه های $\mathbf{v}$ و مختصات P_0 معادلات خط را بدست می دهند. داریم

$$\nabla f\Big|_{(1,1,3)}=(2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j})_{(1,1,3)}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}$$

$$\nabla g\Big|_{(1,1,3)}=(\mathbf{i}+\mathbf{k})_{(1,1,3)}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}=(2\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times(\mathbf{i}+\mathbf{k})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&2&0\\1&0&1\end{vmatrix}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$$

خط مماس عبارت است از

$$x=1+2t \quad \text{و} \quad y=1-2t \quad \text{و} \quad z=3-2t$$

برآورد تغییر در یک جهت خاص

وقتی بخواهیم مقدار تغییر f را در اثر حرکتی کوچک به اندازه ds از یک نقطه P_0 به یک نقطه نزدیک دیگر برآورد کنیم مشتق جهتی همان نقش مشتق معمولی را ایفا می کند. اگر f یک تابع یک متغیره باشد داریم

$$df=f'(P_0)ds \qquad \text{(نمو × مشتق معمولی)}$$

در مورد توابع دو یا چند متغیره از فرمول زیر استفاده می کنیم

$$df=\left(\nabla f\Big|_{P_0}.\mathbf{u}\right)ds \qquad \text{(نمو × مشتق جهتی)}$$

که $\mathbf{u}$ جهت حرکت و دور شدن از P_0 را نشان می دهد.

برآورد تغییر f در جهت $\mathbf{u}$

برای برآورد تغییر مقدار تابع مشتق پذیری چون f در اثر حرکتی به اندازه کوچک ds از یک نقطه P_0 در یک جهت خاص $\mathbf{u}$ از فرمول زیر استفاده می کنیم

$$df=\underbrace{\left(\nabla f\Big|_{P_0}.\mathbf{u}\right)}\underbrace{ds}$$

که جمله اول مشتق جهتی و جمله دوم نموی فاصله است.

مثال ۴: اگر نقطه $P(x,y,z)$ از نقطه $P_0(0,1,0)$ مستقیماً به سمت نقطه $P_1(2,2,-2)$ برود و به اندازه 0.1 واحد از آن دور شود مطلوب است برآورد تغییر مقدار تابع

$$f(x,y,z)=y\sin x+2yz$$

حل: ابتدا مشتق f را در P_0 در جهت بردار

$$\overrightarrow{P_0P_1}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$$

بدست می آوریم. جهت این بردار عبارت است از

$$\mathbf{u}=\frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|}=\frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{3}=\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}$$

گرادیان f در P_0 عبارت است

$$\nabla f\Big|_{(0,1,0)}=\big((y\cos x)\mathbf{i}+(\sin x+2z)\mathbf{j}+2y\mathbf{k}\big)_{(0,1,0)}$$
$$=\mathbf{i}+2\mathbf{k}$$

بنابراین

$$\nabla f\Big|_{P_0}.\mathbf{u}=(\mathbf{i}+2\mathbf{k}).\left(\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$$

تغییر df در مقدار f ناشی از دور شدن P از P_0 به اندازه $ds=0.1$ واحد در جهت $\mathbf{u}$ تقریباً برابر است با

$$df=\left(\nabla f\Big|_{P_0}.\mathbf{u}\right)(ds)=\left(-\frac{2}{3}\right)(0.1)\approx-0.067\text{unit}$$

چگونگی خطی سازی توابع دو متغیره (صورت خطی توابع دو متغیره)

توابع دو متغیره ممکن است پیچیده باشند و گاهی لازم است آنها را با توابع ساده تری تقریب بزنیم که با استفاده از آنها دقت لازم برای کاربردهای خاص حاصل شود بدون اینکه کارکردن با آنها دشوار باشد. در این مورد هم کاری مشابه با آنچه که برای یافتن جایگزین های خطی توابع یک متغیره انجام دادیم (بخش**۳-۹**) در پیش می گیریم.

فرض کنید تابعی که می خواهیم تقریب بزنیم تابع $z=f(x,y)$ در نزدیکی نقطه (x_0,y_0) است و مقادیر f، f_x، f_y را در این نقطه می دانیم و نیز f در این نقطه مشتق پذیر است. اگر از نقطه (x_0,y_0) به اندازه نموهای $\Delta x=x-x_0$ و $\Delta y=y-y_0$ به نقطه نزدیک دلخواه (x,y) برویم (شکل**۱۴-۳۵** را ببینید) طبق تعریف مشتق پذیری از بخش **۱۴-۳** تغییر f چنین بدست می آید

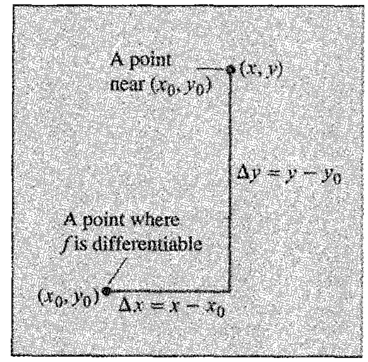
$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+$$
$$+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y$$

که در آن وقتی $\Delta y\to 0$ و Δx میل می کنند، $\epsilon_2\to 0$ و ϵ_1. اگر نموهای Δx و Δy کوچک باشند حاصلضرب های $\epsilon_1\Delta x$ و $\epsilon_2\Delta y$ به مراتب کوچکتر خواهند بود و تقریب زیر را داریم

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+$$
$$+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

سمت راست این معادله $L(x,y)$ است. به عبارتی دیگر، مادامی

که Δx و Δy کوچک باشند، مقدار f با مقدار تابع خطی L تقریباً یکسان خواهد بود.



شکل۱۴-۳۵: اگر f در (x_0,y_0) مشتق پذیر باشد مقدار f در هر نقطه (x,y) واقع در نزدیک نقطه مذکور تقریباً برابر است با

$$f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

تعاریف: صورت خطی تابع مشتق پذیری چون $f(x,y)$ در یک نقطه چون (x_0,y_0) تابع زیر است

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y \quad (۵)$$

تقریب

$$f(x,y)\approx L(x,y)$$

تقریب خطی متعارف(استاندارد) f در (x_0,y_0) است.

از معادله (۴) در می یابیم که صفحه $z=L(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) بر رویه $z=f(x,y)$ مماس است. بنابراین صورت خطی یک تابع دو متغیره، تقریب مبتنی بر صفحه مماس است به همان نحوی که صورت خطی یک تابع یک متغیره تقریب مبتنی بر خط مماس است. (تمرین **۶۳** را ببینید).

مثال ۵: صورت خطی تابع زیر را در نقطه (**۲**و**۳**) بیابید

$$f(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3$$

حل: ابتدا مقادیر f، f_x، f_y را در نقطه $(x_0,y_0)=(3,2)$ بدست می آوریم

$$f(3,2)=\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3\right)_{(3,2)}=8$$

$$f_x(3,2)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3\right)_{(3,2)}$$
$$=(2x-y)_{(3,2)}=4$$

$$f_y(3,2)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3\right)_{(3,2)}$$
$$=(-x+y)_{(3,2)}=-1$$

و از اینجا داریم

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+$$
$$+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$=8+(4)(x-3)+(-i)(y-2)$$
$$=4x-y-2$$

صورت خطی f در (**۲**و**۳**) عبارت است از

$$L(x,y)=4x-y-2$$

وقتی تابع مشتق پذیری چون $f(x,y)$ را با صورت خطی آن $L(x,y)$ در (x_0,y_0) تقریب می زنیم سؤال مهمی که پیش می آید این است که دقت تقریب چقدر ا ست؟

اگر بتوانیم یک کران بالای مشترک M برای $|f_{xx}|$، $|f_{yy}|$ و $|f_{xy}|$ در یک ناحیه مستطیلی R که مرکزش (x_0,y_0) است بیابیم (شکل**۱۴-۳۶**)، آنگاه می توانیم خطای E در سراسر R را با استفاده از یک فرمول ساده محدود کنیم (این فرمول در بخش **۱۴-۹** بدست می آید). خطا با تابع

$$E(x,y)=f(x,y)-L(x,y)$$

تعریف می شود.

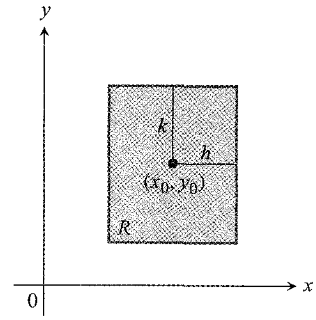
خطا در تقریب خطی متعارف

اگر f در سراسر یک مجموعه باز شامل مستطیل R به مرکز (x_0,y_0) مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته داشته باشد و اگر M کران بالایی برای مقادیر $|f_{xx}|$، $|f_{yy}|$ و $|f_{xy}|$ بر R باشد خطای $E(x,y)$ حاصل از جایگزینی $f(x,y)$ بر R با صورت خطی آن یعنی

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+$$
$$+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

در نامساوی زیر صدق می کند

$$|E(x,y)|\le\frac{1}{2}M(|x-x_0|+|y-y_0|)^2$$



شکل۱۴-۳۶: ناحیه مستطیلی شکل $|x - x_0| \leq h$ و $|y - y_0| \leq k$:R **در صفحه** xy.

برای کوچک کردن $|E(x,y)|$ برای یک M معین، صرفاً $|x - x_0|$ و $|y - y_0|$ را کوچک می کنیم.

مثال ۶: مطلوب است کران بالایی برای خطا در تقریب

$$f(x,y) \approx L(x,y)$$

در مثال **۵** بر مستطیل

$$R: |x-3| \leq 0.1, \qquad |y-3| \leq 0.1$$

کران بالا را به صورت درصدی از $f(3,2)$، مقدار f در مرکز مستطیل، بیان کنید.

حل: از نامساوی زیر استفاده می کنیم

$$|E(x,y)| \leq \frac{1}{2} M (|x - x_0| + |y - y_0|)^2$$

برای یافتن مقداری مناسب برای M، مقادیر f_{xx}، f_{yy} و f_{xy} را محاسبه می کنیم و بعد از یک مشتق گیری سرراست ملاحظه می کنیم که هر سه مشتق ثابت اند و مقادیرشان برابر است با

$$|f_{xx}| = |2| = 2, \quad |f_{xy}| = |-1| = 1, \quad |f_{yy}| = |1| = 1$$

بزرگترین عدد در بین اینها **۲** است لذا با اطمینان می توانیم M را**۲** بگیریم. در این صورت به ازای $(x_0, y_0) = (3,2)$ در سراسر R داریم

$$|E(x,y)| \leq \frac{1}{2}(2)(|x-3| + |y-2|)^2 = (|x-3| + |y-2|)^2$$

سرانجام چون روی R $|x-3| \leq 0.1$ و $|y-2| \leq 0.1$، داریم

$$|E(x,y)| \leq (0.1 + 0.1)^2 = 0.04$$

خطا به صورت درصدی از $f(3,2) = 8$ بزرگتر از

$$\frac{0.04}{8} \times 100 = 0.5\%$$

نخواهد بود.

دیفرانسیل ها

از بخش**۳-۹** به یاد بیاورید که برای تابع یک متغیره ای چون $y = f(x)$ تغییر f در اثر تغییر x از a به $a + \Delta x$ را به صورت زیر تعریف کردیم

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$

و دیفرانسیل f را به صورت زیر

$$df = f'(a)\Delta x$$

اکنون دیفرانسیل یک تابع دومتغیره را در نظر می گیریم.

فرض کنید $f(x,y)$ تابعی مشتق پذیر است و مشتقات جزئی آن در نقطه ای چون (x_0, y_0) وجود دارند. اگر به یک نقطه مجاور $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ برویم تغییر f برابر است با

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

محاسبه ای سرراست با استفاده از تعریف $L(x,y)$ و نمادگذاری $x - x_0 = \Delta x$ و $y - y_0 = \Delta y$ نشان می دهد که تغییر متناظر در L برابر است با

$$\Delta L = L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0)$$
$$= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

دیفرانسیل های dx و dy متغیرهای مستقل اند، لذا می توانند هر مقداری را اختیار کنند. غالباً $dx = \Delta x = x - x_0$ و $dy = \Delta y = y - y_0$ اختیار می کنیم. در این صورت تعریف دیفرانسیل یا دیفرانسیل کامل f به صورت زیر خواهد بود.

تعریف: اگر از نقطه (x_0, y_0) به یک نقطه مجاور $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ برویم تغییر حاصل در صورت خطی f یعنی

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

دیفرانسیل کامل f نامیده می شود.

مثال۷: فرض کنید یک قوطی استوانه ای طوری طراحی شده است که شعاع آن $1in.$ و ارتفاع آن $5in.$ است اما شعاع و

ارتفاع به اندازه های $dr=+0.03$ و $dh=-0.1$ خطا دارند. تغییر مطلق حاصل در حجم قوطی را برآورد کنید.

حل: برای برآورد تغییر مطلق در $V=\pi r^2 h$ از رابطه زیر استفاده می کنیم

$$\Delta V \approx dV = V_r(r_0,h_0)dr + V_h(r_0,h_0)dh$$

به ازای $V_r = 2\pi rh$ و $V_h=\pi r^2$ داریم

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi r_0 h_0 dr + \pi r_0^2 dh \\ &= 2\pi(1)(5)(0.03)+\pi(1)^2(-0.1) \\ &= 0.3\pi - 0.1\pi = 0.2\pi \approx 0.63 in^3 \end{aligned}$$

مثال۸: شرکتی مخازن ذخیره ملاس می سازد که به شکل استوانه مستدیر قائم به ارتفاع $25ft$ و شعاع $5ft$ هستند. حساسیت حجم مخازن به تغییرات کوچک در ارتفاع و شعاع آنها چقدر است؟

حل: حجم استوانه $V=\pi r^2 h$ است، دیفرانسیل کامل حجم تغییر در حجم را به صورت زیر بدست می دهد

$$\begin{aligned} dV &= V_r(5,25)dr + V_h(5,25)dh \\ &= (2\pi rh)_{(5,25)}dr + (\pi r^2)_{(5,25)}dh \\ &= 250\pi dr + 25\pi dh \end{aligned}$$

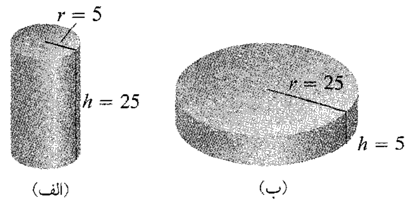
بنابراین ۱ واحد تغییر در r، V را حدود 250π واحد تغییر خواهد داد. ۱ واحد تغییر در h، V را حدود 25π واحد تغییر خواهد داد. حجم مخزن نسبت به تغییری کوچک در r ده برابر حساس تر است تا تغییری کوچک به همان اندازه در h. مهندسی که مسئول کنترل کیفیت است برای اطمینان از اینکه مخازن حجم درست داشته باشند باید توجه ویژه ای به شعاع آنها داشته باشد.

در مقابل، اگر مقادیر r و h با هم عوض شوند و $r=25$ و $h=5$ باشد دیفرانسیل کامل V به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} dV &= (2\pi rh)_{(25,5)}dr + (\pi r^2)_{(25,5)}dh \\ &= 250\pi dr + 625\pi dh \end{aligned}$$

اکنون حجم به تغییرات h حساس تر است تا تغیرات r (شکل۱۴ –۳۷).

قاعده کلی این است که توابع بیشترین حساسیت را نسبت به تغییرات کوچک در متغیرهایی دارند که بزرگترین مشتقات جزئی را بدست می دهند.



شکل۱۴ – ۳۷ : حجم استوانه (الف) نسبت به تغییرات کوچک در r حساس تر است تا تغییرات کوچک به همان اندازه در h. حجم استوانه (ب) نسبت به تغییرات کوچک در h حساس تر است تا تغییرات کوچک در r (مثال ۸).

مثال ۹: می خواهیم حجم $V=\pi r^2 h$ استوانه مستدیر قائمی را از روی مقادیر اندازه گیری شده r و h محاسبه کنیم. فرض کنید r را با خطایی که از ۲٪ بیشتر نیست و h را با خطایی که از ۰/۵ ٪ بیشتر نیست اندازه گرفته باشیم. خطای درصدی ممکن حاصل در محاسبه V چقدر خواهد بود؟

حل: فرض های مسئله عبارتند از

$$\left|\frac{dr}{r}\times 100\right| \le 2 \quad \text{و} \quad \left|\frac{dh}{h}\times 100\right| \le 0.5$$

چون

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\pi rh\,dr + \pi r^2 dh}{\pi r^2 h} = \frac{2dr}{r} + \frac{dh}{h}$$

داریم

$$\begin{aligned} \left|\frac{dV}{V}\right| &= \left|2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}\right| \\ &\le \left|2\frac{dr}{r}\right| + \left|\frac{dh}{h}\right| \\ &\le 2(0.02)+0.005 = 0.045 \end{aligned}$$

برآورد می کنیم که خطا در محاسبه حجم حداکثر ۴/۵٪ است.

توابع با بیش از دو متغیر

برای توابع مشتق پذیر دارای بیش از دو متغیر احکام مشابهی برقرارند.

۱- **صورت خطی** $f(x,y,z)$ در نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ عبارت است از

$$\begin{aligned} L(x,y,z) &= f(P_0) + f_x(P_0)(x-x_0) \\ &+ f_y(P_0)(y-y_0) + f_z(P_0)(z-z_0) \end{aligned}$$

فرض کنید R یک ناحیه مکعب مستطیلی بسته به مرکز P_0 است و در ناحیه بازی واقع است که مشتقات جزئی دوم f در آن پیوسته اند. همچنین فرض کنید $|f_{xx}|$، $|f_{yy}|$ ، $|f_{zz}|$، $|f_{xy}|$، $|f_{xz}|$ و $|f_{yz}|$ در سراسر R کمتر یا مساوی M هستند. در این صورت کران بالای **خطای**

$$E(x,y,z)=f(x,y,z)-L(x,y,z)$$

در تقریب زدن f با L در سراسر R از نامساوی (نابرابری) زیر بدست می آید

$$|E|\le\frac{1}{2}M\left(|x-x_0|+|y-y_0|+|z-z_0|\right)^2$$

۳- اگر مشتقات جزئی دوم f پیوسته باشند و اگر x، y و z از x_0، y_0 و z_0 به اندازه مقادیر کوچک dx و dy و dz تغییر کنند **دیفرانسیل کامل**

$$df=f_x(P_0)dx+f_y(P_0)dy+f_z(P_0)dz$$

تقریب خوبی از تغییر حاصل در f بدست می دهد.

مثال ۱۰: صورت خطی $L(x,y,z)$ تابع

$$f(x,y,z)=x^2-xy+3\sin z$$

را در نقطه $(x_0,y_0,z_0)=(2,1,0)$ بدست آورید. یک کران بالا برای خطای حاصل از تقریب زدن f با L در مکعب مستطیل زیر بیابید

$$R:\ |x-2|\le 0.01 \quad \text{و} \quad |y-1|\le 0.02 \quad \text{و} \quad |z|\le 0.01$$

حل: با محاسبات سرراست داریم

$$f_y(2,1,0)=-2 \text{ و } f_z(2,1,0)=3$$

$$f(2,1,0)=2 \text{ و } f_x(2,1,0)=3$$

بنابراین

$$L(x,y,z)=2+3(x-2)+(-2)(y-1)+3(z-0)$$
$$=3x-2y+3z-2$$

چون

$$f_{xy}=-1 \ ، \ f_{xz}=0 \ ، \ f_{yz}=0$$

$$f_{xx}=2 \text{ و } f_{yy}=0 \ ، \ f_{zz}=-3\sin z$$

و $|-3\sin z|\le 3\sin 0.01\approx 0.03$، می توانیم $M=2$ را به عنوان کرانی برای مشتقات جزئی دوم بگیریم. از این رو خطای حاصل از تقریب زدن f با L در R در نامساوی زیر صدق می کند

$$|E|\le\frac{1}{2}(2)(0.01+0.02+0.01)^2=0.0016$$

تمرین های ۱۴-۶

صفحات مماس و خطوط قائم بر رویه ها

در تمرین های ۱-۸ مطلوب است معادلات

(الف)- صفحه مماس و

(ب)- خط قائم در نقطه P_0 بر روی رویه مفروض.

۱- $x^2+y^2+z^2=3$ و $P_0(1,1,1)$

۲- $x^2+y^2-z^2=18$ و $P_0(3,5,-4)$

۳- $2z-x^2=0$ و $P_0(2,0,2)$

۴- $x^2+2xy-y^2+z^2=7$ و $P_0(1,-1,3)$

۵- $\cos\pi x-x^2y+e^{xz}+yz=4$ و $P_0(0,1,2)$

۶- $x^2-xy-y^2-z=0$ و $P_0(1,1,-1)$

۷- $x+y+z=1$ و $P_0(0,1,0)$

۸- $x^2+y^2-2xy-x+3y-z=-4$ و $P_0(2,-3,18)$

در تمرین های ۹-۱۲ معادله صفحه مماس بر رویه مفروض در نقطه داده شده را بیابید.

۹- $z=\ln(x^2+y^2)$ و $(1,0,0)$

۱۰- $z=e^{-(x^2+y^2)}$ و $(0,0,1)$

۱۱- $z=\sqrt{y-x}$ و $(1,2,1)$

۱۲- $z=4x^2+y^2$ و $(1,1,5)$

خطوط مماس بر خم های فضایی

در تمرین های ۱۳-۱۸ معادلات پارامتری خط مماس بر خم تقاطع رویه ها در نقطه مفروض را بیابید.

۱۳- رویه ها: $x+y^2+2z=4$ و $x=1$؛ نقطه: $(1,1,1)$

۱۴- رویه ها: $xyz=1$ و $x^2+2y^2+3z^2=6$

نقطه: $(1,1,1)$

۱۵- رویه ها: $x^2+2y+2z=4$ و $y=1$

نقطه: $(1,1,1/2)$

۱۶- رویه ها: $x+y^2+z=2$ و $y=1$

نقطه: $(1/2,1,1/2)$

۱۷- رویه ها : $x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2=0$

و $x^2+y^2+z^2=11$، نقطه: $(1,1,3)$

۱۸- رویه ها: $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2-z=0$

نقطه: $(\sqrt{2},\sqrt{2},4)$

برآورد تغییر

۱۹- اگر نقطه $P(x,y,z)$ از $P_0(3,4,12)$ به اندازه $ds=0.1$ واحد در جهت $3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ تغییر کند تابع زیر تقریباً چقدر تغییر خواهد کرد؟

$$f(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

۲۰- اگر نقطه $P(x,y,z)$ از مبداء به اندازه $ds=0.1$ واحد در جهت $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ تغییر کند تابع زیر تقریباً چقدر تغییر خواهد کرد؟

$$f(x,y,z)=e^x\cos yz$$

۲۱- اگر نقطه $P(x,y,z)$ از $P_0(2,-1,0)$ به اندازه $ds=0.2$ به سمت نقطه $P_1(0,1,2)$ برود تابع زیر تقریباً چقدر تغییر خواهد کرد؟

$$g(x,y,z)=x+x\cos z-y\sin z+y$$

۲۲- اگر نقطه $P(x,y,z)$ از $P_0(-1,-1,-1)$ به اندازه $ds=0.1$ واحد به سمت مبداء حرکت کند تابع زیر تقریباً چقدر تغییر خواهد کرد؟

$$h(x,y,z)=\cos(\pi xy)+xz^2$$

۲۳- **تغییر دما در امتداد یک دایره.** فرض کنید دمای سلیسیوس در نقطه (x,y) از صفحه xy،

$$T(x,y)=x\sin 2y$$

است و فاصله در صفحه xy برحسب متر اندازه گیری می شود. ذره ای با آهنگ ثابت $2m/\sec$ حول دایره ای به شعاع $1m$ و به مرکز مبداء به صورت ساعتگرد حرکت می کند.

(الف)- دمایی که ذره احساس می کند در نقطه $P(1/2,\sqrt{3}/2)$ با چه سرعتی برحسب درجه سلیسیوس بر متر تغییر می کند؟

(ب)- دمایی که ذره احساس می کند در P با چه سرعتی برحسب درجه سلیسیوس بر ثانیه تغییر می کند.

۲۴- **دمای متغیر در امتداد یک خم فضایی.** دمای سلیسیوس در ناحیه ای از فضا با تابع $T(x,y,z)=2x^2-xyz$ مشخص می شود. ذره ای در این ناحیه حرکت می کند و مکان آن در لحظه t با معادلات $x=2t^2$، $y=3t$ و $z=-t^2$ مشخص می شود که زمان برحسب ثانیه و فاصله برحسب متر است.

(الف)- وقتی ذره در نقطه $P(8,6,-4)$ است دمایی که احساس می کند با چه سرعت برحسب درجه سلیسیوس بر متر تغییر می کند؟

(ب)- دمایی که ذره احساس می کند در P با چه سرعتی برحسب درجه سلیسیوس بر ثانیه تغییر می کند؟

یافتن صورت خطی توابع

در تمرین های۲۵-۳۰، صورت خطی تابع $L(x,y)$ را در هر یک از نقاط مفروض بیابید.

۲۵- $f(x,y)=x^2+y^2+1$

(الف)- $(0,0)$ و (ب)- $(1,1)$

۲۶- $f(x,y)=(x+y+2)^2$

(الف)- $(0,0)$ و (ب)- $(1,2)$

۲۷- $f(x,y)=3x-4y+5$

(الف)- $(0,0)$ و (ب)- $(1,1)$

۲۸- $f(x,y)=x^3y^4$ (الف)- $(1,1)$ و (ب)- $(0,0)$

۲۹- $f(x,y)=e^x\cos y$ (الف)- $(0,0)$ و (ب)- $(0,\pi/2)$

۳۰- $f(x,y)=e^{2y-x}$

(الف)- $(0,0)$ و (ب)- $(1,2)$

۳۱- **ضریب خنکی باد.** خنکی باد، که معیاری از دمای ظاهری است که توسط پوست بدن احساس می شود، تابعی از دمای هوا و سرعت باد است. فرمول دقیق، که توسط سازمان هواشناسی ملی در سال ۲۰۰۱ به روز شده و بر نظریه نوین انتقال گرما، مدل صورت انسان و مقاومت بافت پوست مبتنی است عبارت است از

$$W = W(v,T) = 35.74 + 0.6215T - 35.75v^{0.16} + 0.4275T \cdot v^{0.16}$$

که T دمای هوا برحسب $^{\circ}F$ و v سرعت باد برحسب متر بر ساعت است. در زیر جدول خنکی نسبی بادی ارائه شده است.

v (mph) \ T(°F)	30	25	20	15	10	5	0	−5	−10
5	25	19	13	7	1	−5	−11	−16	−22
10	21	15	9	3	−4	−10	−16	−22	−28
15	19	13	6	0	−7	−13	−19	−26	−32
20	17	11	4	−2	−9	−15	−22	−29	−35
25	16	9	3	−4	−11	−17	−24	−31	−37
30	15	8	1	−5	−12	−19	−26	−33	−39
35	14	7	0	−7	−14	−21	−27	−34	−41

(الف)- با استفاده از جدول $W(20,25)$، $W(30,-10)$ و $W(15,15)$ را بیابید.

(ب)- با استفاده از فرمول مقادیر $W(10,-40)$، $W(50,-40)$ و $W(60,30)$ را بدست آورید.

(پ)- صورت خطی، $L(v,T)$، تابع $W(v,T)$ را در نقطه $(25,5)$ بیابید.

(ت)- با استفاده از $L(v,T)$ قسمت (پ) مقادیر زیر را بدست آورید

(۱)- $W(24,6)$، (۲)- $W(27,2)$

(۳)- $W(5,-10)$ (توضیح دهید که چرا این مقدار با مقدار جدول تفاوت زیادی دارد).

۳۲- صورت خطی $L(v,T)$ تابع $W(v,T)$ تمرین ۳۱ را در نقطه $(50,-20)$ بیابید و با استفاده از آن مقادیر زیر را برآورد کنید

(الف)- $W(49,-22)$ (ب)- $W(53,-19)$

(پ)- $W(60,-30)$

محدود کردن خطا در تقریب های خطی

در تمرین های ۳۳-۳۸ صورت خطی $L(x,y)$ تابع $f(x,y)$ را در P_0 بیابید. سپس حد بالایی برای اندازه خطا، $|E|$، در تقریب $f(x,y) \approx L(x,y)$ روی مستطیل R بدست آورید.

۳۳- $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5$ در $P_0(2,1)$

$R: |x-2| \le 0.1$ و $|y-1| \le 0.1$

۳۴- $f(x,y) = (1/2)x^2 + xy + (1/4)y^2 + 3x - 3y + 4$ در $P_0(2,2)$

$R: |x-2| \le 0.1$ و $|y-2| \le 0.1$

۳۵- $f(x,y) = 1 + y + x\cos y$ در $P_0(0,0)$

$R: |x| \le 0.2$ و $|y| \le 0.2$

(در برآورد E از $|\cos y| \le 1$ و $|\sin y| \le 1$ استفاده کنید)

۳۶- $f(x,y) = xy^2 + y\cos(x-1)$ در $P_0(1,2)$

$R: |x-1| \le 0.1$ و $|y-2| \le 0.1$

۳۷- $f(x,y) = e^x \cos y$ در $P_0(0,0)$

$R: |x| \le 0.1$ و $|y| \le 0.1$

(در برآورد E از $|\cos y| \le 1$ و $e^x \le 1.11$ استفاده کنید)

۳۸- $f(x,y) = \ln x + \ln y$ در $P_0(1,1)$

$R: |x-1| \le 0.2$ و $|y-1| \le 0.2$

صورت خطی توابع سه متغیره

صورت خطی $L(x,y,z)$ توابع ارائه شده در تمرین های ۳۹ - ۳۴ را در نقاط مفروض بیابید.

۳۹- $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

(الف)- $(1,1,1)$ (ب)- $(1,0,0)$ (پ)- $(0,0,0)$

۴۰- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

(الف)- $(1,1,1)$ (ب)- $(0,1,0)$ (پ)- $(1,0,0)$

۴۱- $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(الف)- $(1,0,0)$ (ب)- $(1,1,0)$ (پ)- $(1,2,2)$

۴۲- $f(x,y,z) = (\sin xy)/z$

(الف)- $(\pi/2,1,1)$ (ب)- $(2,0,1)$

۴۳- $f(x,y,z) = e^x + \cos(y+z)$

(الف)- $(0,0,0)$ (ب)- $\left(0,\frac{\pi}{2},0\right)$ (پ)- $\left(0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

۴۴- $f(x,y,z) = \tan^{-1}(xyz)$

(الف)- $(1,0,0)$ (ب)- $(1,1,0)$ (پ)- $(1,1,1)$

در تمرین های ۴۵-۴۸ صورت خطی $L(x,y,z)$ تابع $f(x,y,z)$ را در P_0 بیابید. سپس کران بالایی برای اندازه

خطای E در تقریب $f(x,y,z) \approx L(x,y,z)$ روی ناحیه R بدست آورید.

۴۵- $f(x,y,z) = xz - 3yz + 2$ در $P_0(1,1,2)$

$R: |x-1| \le 0.01$ و $|y-1| \le 0.01$ و $|z-2| \le 0.02$

۴۶- $f(x,y,z) = x^2 + xy + yz + (1/4)z^2$ در $P_0(1,1,2)$

$R: |x-1| \le 0.01$ و $|y-1| \le 0.01$ و $|z-2| \le 0.08$

۴۷- $f(x,y,z) = xy + 2yz - 3xz$ در $P_0(1,1,0)$

$R: |x-1| \le 0.01$ و $|y-1| \le 0.01$ و $|z| \le 0.01$

۴۸- $f(x,y,z) = \sqrt{2}\cos x \sin(y+z)$ در $P_0(0,0,\pi/4)$

$R: |x| \le 0.01$ و $|y| \le 0.01$ و $|z-\pi/4| \le 0.01$

برآورد خطا، حساسیت به تغییر

۴۹- **برآورد خطای ماکسیمم.** فرض کنید T از فرمول $T = x(e^y + e^{-y})$ بدست می آید. می دانیم که $x = 2$ و $y = \ln 2$ و ماکسیمم خطاهای ممکن آنها عبارتند از $|dx| = 0.1$ و $|dy| = 0.02$. ماکسیمم خطای ممکن در مقدار T محاسبه شده از این فرمول را برآورد کنید.

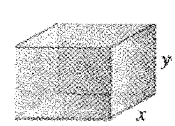
۵۰- **برآورد حجم یک استوانه.** اگر r و h با خطای ۱٪ اندازه گیری شده باشند، $V = \pi r^2 h$ را با چه دقتی می توان محاسبه کرد؟

۵۱- جعبه مستطیلی بسته ای با قاعده مربع مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. اگر حداکثر خطا در اندازه گیری x، ۲٪ و حداکثر خطا در اندازه گیری y، ۳٪ باشد با استفاده از دیفرانسیل خطای درصدی متناظر در محاسبه

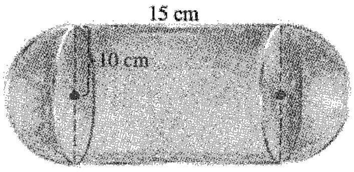
(الف)- مساحت سطح جعبه

(ب)- حجم جعبه

را برآورد کنید.



۵۲- مخزن بسته ای را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید که به صورت استوانه ای به شعاع $10cm$ و ارتفاع $15cm$ است که در دو انتهای خود دو نمیکره دارد.



این مخزن با لایه ای از یخ به ضخامت $1/2cm$ پوشیده شده است. با استفاده از دیفرانسیل حجم کل یخ را برآورد کنید. (راهنمایی: فرض کنید r شعاع با خطای $dr = 1/2$ و h ارتفاع با خطای $dh = 0$ است).

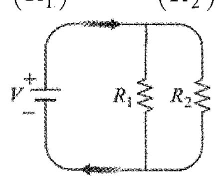
۵۳- **ماکسیمم خطای درصدی.** اگر با خطای کمتر از یک میلیمتر $r = 5.0cm$ و $h = 12.0cm$ باشد ماکسیمم درصد خطا در محاسبه $V = \pi r^2 h$ چقدر است؟

۵۴- **تغییر مقاومت الکتریکی.** مقاومت R حاصل از موازی بستن مقاومت های R_1 و R_2 (شکل زیر را ببینید) از فرمول زیر محاسبه می شود

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

(الف)- نشان دهید که

$$dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2$$



(ب)- فرض کنید مداری دو مقاومتی شبیه مدار فوق طراحی کرده اید که باید مقاومت های آن $R_1 = 100ohms$ و $R_2 = 400ohms$ باشند اما در ساختن مقاومت ها همیشه شرایط یکسان نیست و مقاومت هایی که شرکت شما خریداری کرده احتمالاً این مقادیر دقیق را نخواهند داشت. مقدار R به تغییر در R_1 حساستر است یا تغییر در R_2؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

(پ)- در مدار دیگری شبیه مدار بالا تصمیم می گیرید R_1 را از ۲۰ به ۲۰/۱ اهم و R_2 را از ۲۵ به ۲۴/۹ اهم تغییر دهید. مقدار R چند درصد تغییر خواهد کرد؟

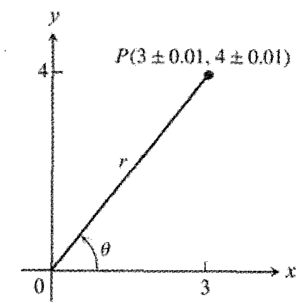
۵۵- می خواهیم مساحت یک مستطیل نازک دراز را با اندازه گیری طول و عرض آن محاسبه کنیم. کدام بعد مستطیل را باید

با دقت بیشتری اندازه بگیریم؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۵۶- (الف)- تابع $f(x,y)=x^2(y+1)$ در اطراف $(1,0)$ به تغییرات x حساستر است یا تغییرات y؟ چرا؟

(ب)- نسبت dx به dy چقدر باشد تا df در $(1,0)$ برابر صفر باشد؟

۵۷- **خطای حاصل از تغییر مختصات.**



(الف)- اگر مطابق شکل فوق $x=3\pm0.01$ و $y=4\pm0.01$ باشد تقریباً با چه دقتی می توانید مختصات قطبی r و θ نقطه $P(x,y)$ را از فرمول های $r=x^2+y^2$ و $\theta=\tan^{-1}(y/x)$ حساب کنید؟ برآوردهای خود را به صورت درصدی از مقادیر r و θ در نقطه $(x_0,y_0)=(3,4)$ بیان کنید.

(ب)- در نقطه $(x_0,y_0)=(3,4)$ مقادیر r و θ به تغییرات x حساس ترند یا به تغییرات y ؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۵۸- **طراحی یک قوطی سود.** یک قوطی 12floz سود اساساً استوانه ای به شعاع $r=1in.$ و ارتفاع $h=5in.$ است.

(الف)- با این ابعاد، نسبت حساسیت حجم قوطی به تغییرات کوچک در شعاع به حساسیت آن به تغییرات کوچک در ارتفاع چقدر است؟

(ب)- آیا می توانستید قوطیی طراحی کنید که به نظر برسد سود بیشتری می گیرد اما در حقیقت همان 12floz سود را بگیرد؟ ابعاد آن چقدر می شد؟ (بیش از یک جواب صحیح وجود دارد).

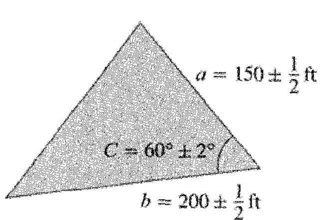
۵۹- **مقدار دترمینان 2×2.** اگر $|a|$ خیلی بزرگتر از $|b|$، $|c|$ و $|d|$ باشد مقدار دترمینان زیر نسبت به کدامیک از مقادیر a، b، c و d حساستر است؟ چرا؟

$$f(a,b,c,d)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

۶۰- **برآورد ماکسیمم خطا.** فرض کنید $u=xe^y+y\sin z$ و u، y و z را می توان به ترتیب با ماکسیمم خطای ممکن ±0.2، ±0.6 و $\pm\pi/180$ اندازه گیری کرد. ماکسیمم خطای ممکن در محاسبه u از مقادیر اندازه گیری شده $x=2$، $y=\ln3$ و $z=\pi/2$ چقدر است؟

۶۰- **فرمول ویلسون درباره مقدار کالا.** در علم اقتصاد فرمول ویلسون درباره مقدار کالا بیان می کند که مقرون به صرفه ترین مقدار کالا، Q، که یک فروشگاه می تواند سفارش دهد (از جمله کفش ، رادیو و...) از فرمول $Q=\sqrt{2KM/h}$ بدست می آید که K هزینه سفارش، M تعداد فروش در هفته و h هزینه نگهداری هر واحد کالا در هفته (هزینه فضا، آب، برق، نگهبانی و غیره) است. Q در نزدیکی نقطه $(K_0,M_0,h_0)=(2,20,0.05)$ به کدامیک از متغیرهای K، M و h حساستر است؟ چرا؟

۶۲- **مساحت یک زمین مثلثی شکل.** مساحت مثلث $(1/2)ab\sin C$ است که a و b طول های دو ضلع مثلث و C اندازه زاویه بین آنهاست. در مساحی یک زمین مثلثی، a، b و C را به ترتیب $150ft$، $200ft$ و 60° اندازه گرفته ایم. اگر مقادیر a و b هر کدام نیم فوت و اندازه گیری C، 2° خطا داشته باشد محاسبه مساحت چقدر خطا خواهد داشت؟ شکل زیر را ببینید. فراموش نکنید که برای زاویه از رادیان استفاده کنید.



نظریه و مثال ها

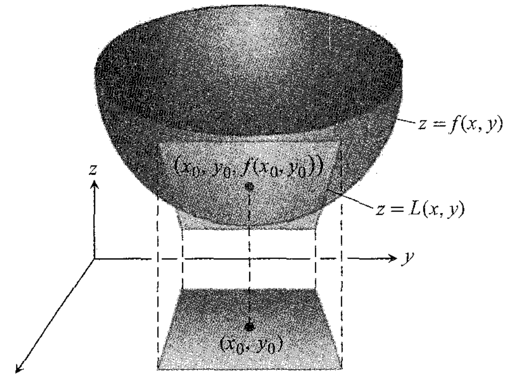
۶۳- **صورت خطی تابع $f(x,y)$ تقریبی مبتنی بر صفحه مماس است.** نشان دهید که معادله صفحه مماس در نقطه $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ واقع بر رویه $z=f(x,y)$ که با تابع مشتق پذیر f تعریف می شود عبارت است از

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-$$
$$-\left(z-f(x_0,y_0)\right)=0$$

یا

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+$$
$$+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

بنابراین صفحه مماس در P_0، نمودار صورت خطی f در P_0 است (شکل زیر را ببینید).



۶۴- تغییر در امتداد گسترنده یک دایره. مشتق تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ را در جهت بردار مماس واحد خم زیر محاسبه کنید

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j},\qquad t>0$$

۶۵- تغییر در امتداد یک پیچ. مطلوب است مشتق تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ در جهت بردار مماس واحد پیچ زیر

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$$

در نقاطی که در آنها $t=-\pi/4$، $t=0$ و $t=\pi/4$ است. تابع f مربع فاصله نقطه ای چون $P(x,y,z)$ واقع بر پیچ را تا مبداء بدست می دهد. مشتقات محاسبه شده در اینجا آهنگ تغییر مربع فاصله نسبت به t را بدست می دهند هنگامی که P از نقاطی می گذرد که در آنها $t=-\pi/4$، $t=0$ و $t=\pi/4$ است.

۶۶- خم های قائم. یک خم هموار بر رویه $f(x,y,z)=c$ در یک نقطه تقاطع قائم است هرگاه بردار سرعت خم در آن نقطه مضرب عددی ناصفری از ∇f باشد.

نشان دهید که خم

$$\mathbf{r}(t)=\sqrt{t}\,\mathbf{i}+\sqrt{t}\,\mathbf{j}-\frac{1}{4}(t+3)\mathbf{k}$$

در $t=1$ بر رویه $x^2-y^2-z=3$ قائم (عمود) است.

۶۷- خم های مماس. یک خم هموار در یک نقطه تقاطع بر رویه مماس است هرگاه بردار سرعت آن در آنجا بر ∇f عمود باشد.

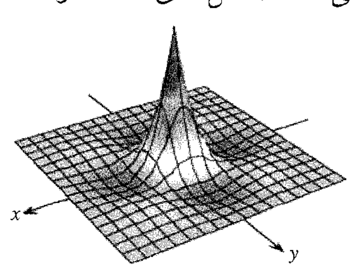
نشان دهید که خم

$$\mathbf{r}(t)=\sqrt{t}\,\mathbf{i}+\sqrt{t}\,\mathbf{j}+(2t-1)\mathbf{k}$$

در $t=0$ بر رویه $x^2+y^2-z=1$ مماس است.

۱۴-۷- مقادیر اکسترمم و نقاط زینی

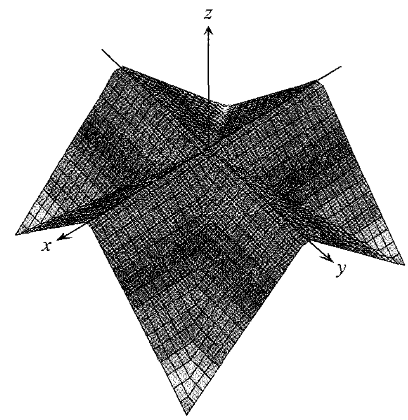
توابع دو متغیره پیوسته مقادیر اکسترمم را بر دامنه های کراندار و بسته اختیار می کنند (شکل های۱۴-۳۸ و۱۴-۳۹ را ببینید).



شکل۱۴-۳۸: تابع $z=(\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ بر ناحیه مربعی $|x|\le 3\pi/2$ و $|y|\le 3\pi/2$ مقدار ماکسیممی برابر ۱ و مقدار مینیممی حدود -0.067 دارد.

در این بخش خواهیم دید که می توانیم با بررسی مشتقات جزئی اول توابع جستجوی این مقادیر اکسترمم را محدودتر کنیم. یک تابع دو متغیره مقادیر اکسترمم را فقط در نقاط مرزی دامنه یا در نقاط درونی دامنه، جاهایی که هر دو مشتق جزئی اول صفرند یا جاهایی که یکی یا هر دو مشتق جزئی اول موجود نیستند، اختیار می کند. اما صفر بودن مشتقات در یک نقطه درونی چون (a,b) همیشه به معنی وجود یک مقدار اکسترمم نیست. رویه، که نمودار تابع است ممکن است درست در بالای (a,b) شبیه زین باشد و صفحه مماسش را در آنجا

قطع کند.



شکل ۱۴-۳۹: «رویه بامی»

$$z=\frac{1}{2}\left(\left||x|-|y|\right|-|x|-|y|\right)$$

بر ناحیه مربعی $|x|\le a$ و $|y|\le a$ مقدار ماکسیممی برابر 0 و مینیممی برابر با $-a$ دارد.

آزمون های مشتق برای مقادیر اکسترمم موضعی

برای یافتن مقادیر اکسترمم موضعی یک تابع یک متغیره نقاطی را جستجو می کنیم که در آنها نمودار تابع یک خط مماس افقی دارد. در چنین نقاطی به دنبال ماکسیمم های موضعی، مینیمم های موضعی و نقاط عطف می گردیم. در مورد تابع دو متغیره ای چون $f(x,y)$، به دنبال نقاطی می گردیم که در آنها رویه $z=f(x,y)$ یک صفحه مماس افقی دارد. سپس در چنین نقاطی به دنبال ماکسیمم های موضعی، مینیمم های موضعی و نقاط زینی می گردیم. کار خود را با تعریف ماکسیمم ها و مینیمم ها شروع می کنیم.

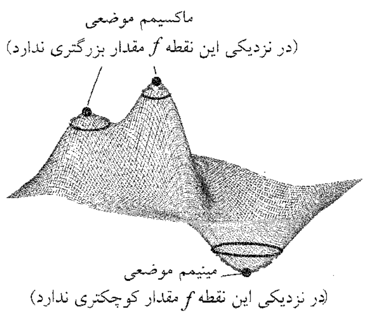
تعاریف: فرض کنید $f(x,y)$ روی ناحیه R شامل نقطه (a,b) تعریف شده است. در این صورت

1- $f(a,b)$ یک مقدار **ماکسیمم موضعی** f است اگر به ازای تمام نقاط (x,y) دامنه واقع در یک قرص باز به مرکز (a,b) داشته باشیم: $f(a,b)\ge f(x,y)$.

۲- $f(a,b)$ یک مقدار **مینیمم موضعی** f است اگر به ازای تمام نقاط (x,y) دامنه واقع در یک قرص باز به مرکز (a,b) داشته باشیم: $f(a,b)\le f(x,y)$.

ماکسیمم های موضعی با نوک قله های رویه $z=f(x,y)$ و مینیمم های موضعی با ته دره های رویه متناظرند(شکل۱۴-۴۰). در چنین نقاطی صفحات مماس، اگر موجود باشند، افقی اند. ماکسیمم های موضعی **ماکسیمم های نسبی** هم نامیده می شوند.

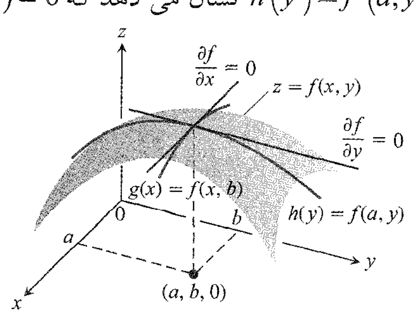
همانند توابع یک متغیره کلید تعیین هویت اکسترمم های موضعی آزمون مشتق اول است.



شکل۱۴-۴۰: ماکسیمم های موضعی در نوک قله ها و مینیمم های موضعی در ته دره های رویه واقع اند.

قضیه ۱۰- آزمون مشتق اول برای مقادیر اکسترمم موضعی: اگر $f(x,y)$ در یک نقطه درونی چون (a,b) از دامنه اش یک مقدار ماکسیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد و اگر مشتقات جزئی اول در آن نقطه موجود باشند آنگاه $f_x(a,b)=0$ و $f_y(a,b)=0$.

اثبات: اگر f در (a,b) یک اکسترمم موضعی داشته باشد آنگاه تابع $g(x)=f(x,b)$ در $x=a$ یک اکسترمم موضعی دارد (شکل۱۴-۴۱). بنابراین $g'(a)=0$ (فصل ۴، قضیه ۲). حال $g'(x)=f_x(a,b)$، لذا $f_x(a,b)=0$. استدلالی مشابه در مورد تابع $h(y)=f(a,y)$ نشان می دهد که $f_y(a,b)=0$.



شکل۱۴-۴۱: اگر f در $x=a, y=b$ یک ماکسیمم موضعی داشته باشد آنگاه مشتقات جزئی اول $f_x(a,b)$ و $f_y(a,b)$ هر دو صفرند.

اگر مقادیر $f_x(a,b)=0$ و $f_y(a,b)=0$ را در معادله صفحه مماس بر رویه $z=f(x,y)$ در (a,b) یعنی

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$$

جاگذاری کنیم به معادله زیر می رسیم

$$0\cdot(x-a)+0\cdot(y-b)-z+f(a,b)=0$$

یا

$$z=f(a,b)$$

بنابراین قضیه ۱۰ حاکی است که رویه در یک اکسترمم موضعی واقعاً یک صفحه مماس افقی دارد به شرط اینکه صفحه مماسی در آنجا وجود داشته باشد.

تعریف: نقطه ای درونی از دامنه تابع $f(x,y)$ که در آن f_x و f_y هر دو صفرند یا یکی از f_x و f_y یا هر دو موجود نیستند یک **نقطه بحرانی** f است.

قضیه ۱۰ بیان می کند که تنها نقاطی که در آنها تابع $f(x,y)$ می توانند مقادیر اکسترمم داشته باشد نقاط بحرانی و نقاط مرزی هستند. همانطور که در مورد توابع مشتق پذیر یک متغیره داشتیم، هر نقطه بحرانی یک اکسترمم موضعی نیست. یک تابع مشتق پذیر یک متغیره ممکن است نقطه عطف داشته باشد. در مقابل یک تابع مشتق پذیر دو متغیره ممکن است نقطه زینی داشته باشد.

تعریف: تابع مشتق پذیر $f(x,y)$ در نقطه بحرانی (a,b) **نقطه زینی** دارد هرگاه در هر قرص باز به مرکز (a,b) نقاط دامنه (x,y)یی وجود داشته باشند که در آنها $f(x,y)>f(a,b)$ باشد و نقاط دامنه (x,y)یی وجود داشته باشند که در آنها $f(x,y)<f(a,b)$. نقطه متناظر $(a,b,f(a,b))$ بر رویه $z=f(x,y)$ نقطه زینی رویه نامیده می شود (شکل ۱۴-۴۲).

مثال ۱: مقادیر اکسترمم موضعی تابع

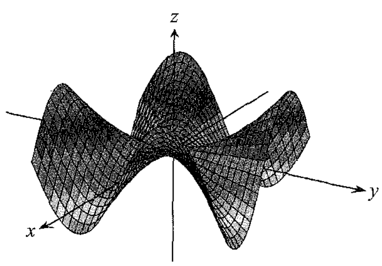
$$f(x,y)=x^2+y^2-4y+9$$

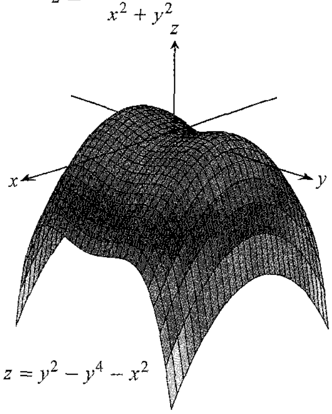
را بیابید.

حل: دامنه f کل صفحه است (لذا هیچ نقطه مرزی وجود ندارد) و مشتقات جزئی $f_x=2x$ و $f_y=2y-4$ در همه جا موجودند. بنابراین مقادیر اکسترمم موضعی در نقاطی وجود دارند که در آنها

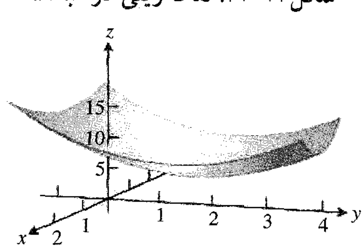
$$f_x=2x=0 \quad \text{و} \quad f_y=2y-4=0$$

تنها امکان نقطه $(0,2)$ است. در این نقطه مقدار f برابر ۵ است. چون $f(x,y)=x^2+(y-2)^2+5$ هرگز کمتر از ۵ نیست پی می بریم که نقطه بحرانی $(0,2)$ یک مینیمم موضعی است (شکل ۱۴-۴۳).





شکل ۱۴-۴۲: نقاط زینی در مبداء.



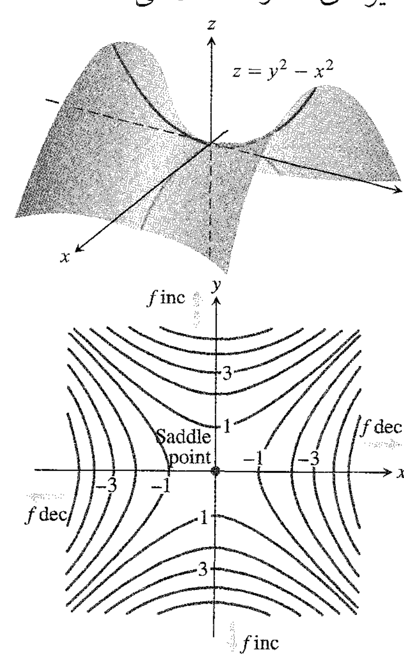
شکل ۱۴-۴۳: نمودار تابع

$$f(x,y)=x^2+y^2-4y+9$$

یک سهمیوار است که یک مقدار مینیمم موضعی برابر با ۵ در نقطه $(0,2)$ دارد (مثال ۱).

مثال ۲: مقادیر اکسترمم موضعی تابع $f(x,y)=y^2-x^2$ را در صورت وجود بیابید.

حل: دامنه f کل صفحه است (لذا هیچ نقطه مرزی وجود ندارد) و مشتقات جزئی $f_x=-2x$ و $f_y=2y$ در همه جا موجودند. بنابراین اکسترمم های موضعی فقط در مبداء $(0,0)$، که در آن $f_x=0$ و $f_y=0$ است، می توانند وجود داشته باشند. اما در امتداد قسمت مثبت محور x مقدار f عبارت است از $f(x,0)=-x^2<0$؛ در امتداد قسمت مثبت محور y مقدار f عبارت است از $f(0,y)=y^2>0$. بنابراین هر قرص باز واقع در صفحه xy به مرکز $(0,0)$ شامل نقاطی است که در آنها تابع مثبت است و نقاطی دارد که در آنها تابع منفی است. این تابع در مبداء یک نقطه زینی دارد و مقادیر اکسترمم موضعی ندارد(شکل ۱۴-۴۴- الف). شکل ۱۴-۴۴- ب خمهای تراز f را نشان می دهد (که به شکل هذلولی هستند). این شکل همچنین صعود و نزول تابع را در بین چهار گروه هذلولی ها به شیوه ای متفاوت نشان می دهد.



(ب)

شکل ۱۴-۴۴: (الف)- مبداء، نقطه زینی تابع $f(x,y)=y^2-x^2$ است. هیچ مقدار اکسترمم موضعی وجود ندارد(مثال ۲). (ب)- خمهای تراز تابع f مثال ۲.

اگر در نقطه درونی (a,b) از R، $f_x=f_y=0$ باشد تضمینی وجود ندارد که f در آنجا یک مقدار اکسترمم موضعی داشته باشد. اما اگر f و مشتقات جزئی اول و دوم آن روی R پیوسته باشند ممکن است از قضیه زیر که در بخش**۱۴-۹** اثبات می شود مطالب بیشتری بیاموزیم.

قضیه ۱۱- آزمون مشتق دوم برای مقادیر اکسترمم موضعی: فرض کنید $f(x,y)$ و مشتقات جزئی اول و دوم آن در سراسر قرصی به مرکز (a,b) پیوسته باشند و $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ باشد. در این صورت

۱- f در (a,b) یک **ماکسیمم موضعی** دارد هرگاه در (a,b)، $f_{xx}<0$ و $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ باشد.

۲- f در (a,b) یک **مینیمم موضعی** دارد هرگاه در (a,b)، $f_{xx}>0$ و $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ باشد.

۳- f در (a,b) یک **نقطه زینی** دارد هرگاه در (a,b)، $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$ باشد.

۴- این آزمون در (a,b) نتیجه بخش نیست هرگاه در (a,b)، $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$ باشد در این حالت باید راه دیگری برای تعیین رفتار f در (a,b) بیابیم.

عبارت $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ را **مبین** f می نامند. گاه به خاطر سپردن آن به شکل دترمینانی زیر آسانتر است

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

قضیه ۱۱ حاکی از آن است که اگر مبین در نقطه (a,b) مثبت باشد آنگاه خمیدگی (تقعر) رویه در تمام جهت ها یکسان است: اگر $f_{xx}>0$ باشد خمیدگی(تقعر) به سمت بالا بوده و یک مینیمم موضعی وجود خواهد داشت. از سوی دیگر اگر مبین در (a,b) منفی باشد خمیدگی(تقعر) رویه در بعضی جهت ها به سمت بالا و در جهت های دیگر به سمت پایین خواهد بود و لذا یک نقطه زینی داریم.

مثال ۳: مقادیر اکسترمم موضعی تابع زیر را بیابید

$$f(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$$

حل: تابع به ازای تمام مقادیر x و y تعریف شده و مشتق پذیر است و دامنه اش هیچ نقطه مرزی ندارد. بنابراین این تابع فقط در نقاطی که f_x و f_y بطور همزمان صفرند مقادیر اکسترمم دارد. بر این اساس داریم

$$f_y = x - 2y - 2 = 0 \quad \text{و} \quad f_x = y - 2x - 2 = 0$$

یا

$$x = y = -2$$

بنابراین نقطه $(-2,-2)$ تنها نقطه ای است که در آن f یک مقدار اکسترمم دارد. برای پی بردن به صحت این موضوع مشتق های زیر را محاسبه می کنیم

$$f_{xy} = 1 \quad \text{و} \quad f_{yy} = -2 \quad \text{و} \quad f_{xx} = -2$$

مبین f در $(a,b) = (-2,-2)$ برابر است با

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

ترکیب

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \text{و} \quad f_{xx} < 0$$

بیان می کند که f در $(-2,-2)$ یک ماکسیمم موضعی دارد. مقدار f در این نقطه برابر است با $f(-2,-2) = 8$.

مثال ۴: مقادیر اکسترمم موضعی تابع

$$f(x,y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$$

را بیابید.

حل: چون f در همه جا مشتق پذیر است فقط در نقاطی می تواند مقادیر اکسترمم داشته باشد که در آنها

$$f_y = 6y - 6y^2 + 6x = 0 \quad \text{و} \quad f_x = 6y - 6x = 0$$

از معادله اول، $x = y$ بدست می آید و با جانشانی مقدار y در معادله دوم خواهیم داشت

$$6x(2-x) = 0 \quad \text{یا} \quad 6x - 6x^2 + 6x = 0$$

بنابراین دو نقطه بحرانی عبارتند از $(0,0)$ و $(2,2)$.

برای دسته بندی نقاط بحرانی مشتق های دوم را محاسبه می کنیم

$$f_{xy} = 6 \qquad f_{yy} = 6 - 12y \qquad f_{xx} = -6$$

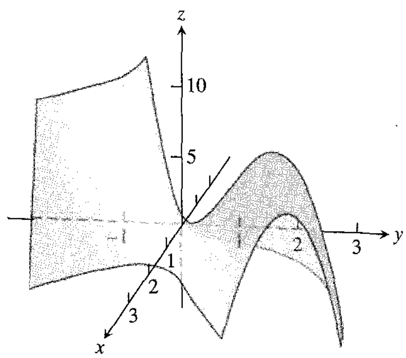
مبین عبارت است از

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-36 + 72y) - 36 = 72(y-1)$$

در نقطه بحرانی $(0,0)$ می بینیم که مقدار مبین عدد منفی -72 است لذا تابع در مبداء یک نقطه زینی دارد. در نقطه بحرانی $(2,2)$ مبین مقدار مثبت ۷۲ دارد. با ترکیب این نتیجه با مقدار منفی مشتق جزئی دوم $f_{xx} = -6$ طبق قضیه ۱۱ نتیجه می شود که نقطه بحرانی $(2,2)$ یک مقدار ماکسیمم موضعی برابر با

$$f(2,2) = 12 - 16 - 12 + 24 = 8$$

بدست می دهد. نمودار این رویه در شکل ۱۴-۴۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۴-۴۵: رویه $z = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$ یک نقطه زینی در مبداء و یک ماکسیمم موضعی در نقطه $(2,2)$ دارد (مثال ۴).

ماکسیمم و مینیمم های مطلق بر نواحی کراندار بسته

جستجو برای اکسترمم های مطلق یک تابع پیوسته چون $f(x,y)$ بر ناحیه بسته و کراندار R را در سه مرحله زیر سازماندهی می کنیم:

۱- فهرستی از نقاط درونی R تنظیم می کنیم که در آنها f ماکسیمم ها یا مینیمم های موضعی دارد و مقادیر f را به ازای این نقاط می یابیم. اینها نقاطی بحرانی f هستند.

۲- فهرستی از نقاط مرزی R تنظیم می کنیم که در آنها f ماکسیمم ها یا مینیمم های موضعی دارد و مقادیر f را در این نقاط محاسبه می کنیم. به زودی چگونگی انجام این کار را نشان می دهیم.

۳- در فهرست ها به دنبال مقادیر ماکسیمم و مینیمم f می گردیم. این مقادیر، مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق f بر R خواهند بود. چون ماکسیمم ها و مینیمم های مطلق ماکسیمم ها

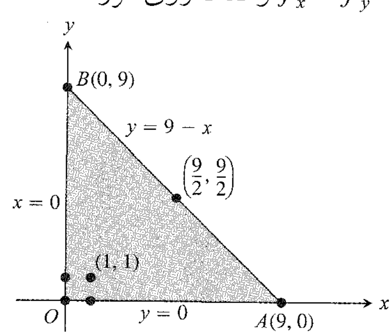
و مینیمم های موضعی هم هستند مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق f در نقاطی از فهرست های تنظیم شده در مراحل ۱ و ۲ قرار دارند.

مثال ۵: مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع

$$f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$$

را بر ناحیه مثلثی شکل واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x=0$، $y=0$ و $y=9-x$ بیابید.

حل: چون f مشتق پذیر است تنها جاهایی که f در آنها می تواند این مقادیر را اختیار کند عبارتند از نقاطی در داخل مثلث که در آنها $f_x=f_y=0$ و نقاط روی مرز.



شکل۱۴-۴۶: این ناحیه مثلثی شکل دامنه تابع مثال ۵ است.

(الف)- نقاط درونی. برای این نقاط داریم

$$f_x=2-2x=0 \quad \text{و} \quad f_y=2-2y=0$$

که نقطه منفرد $(x,y)=(1,1)$ را بدست می دهند. مقدار f در این نقطه برابر است با

$$f(1,1)=4$$

(ب)- نقاط مرزی. تک تک اضلاع مثلث را در نظر می گیریم:

۱)- روی ضلع OA، $y=0$ است. حال تابع

$$f(x,y)=f(x,0)=2+2x-x^2$$

را می توان به صورت تابعی از x در نظر گرفت که روی بازه بسته $0\le x\le 9$ تعریف شده است. مقادیر اکسترمم آن (که از فصل ۴ می دانیم) به ازای نقاط انتهایی بازه بدست می آیند

$x=0$ که در آن $f(0,0)=2$

$x=9$ که در آن $f(9,0)=2+18-81=-61$

و به ازای نقاط درونی که در آنها $f'(x,0)=2-2x=0$. تنها نقطه درونی که در آن $f'(x,0)=0$ است $x=1$ است و به ازای آن داریم

$$f(x,0)=f(1,0)=3$$

۲)- روی ضلع OB، $x=0$ و

$$f(x,y)=f(0,y)=2+2y-y^2$$

از تقارن f نسبت به x و y و از تحلیل فوق می دانیم که مقادیر اکسترمم احتمالی بر روی این ضلع عبارتند از

$$f(0,0)=2 \quad \text{و} \quad f(0,9)=-61 \qquad f(0,1)=3$$

۳)- مقادیر f در نقاط انتهایی AB را قبلاً در نظر گرفته ایم، لذا فقط لازم است به نقاط درونی AB توجه کنیم. با جاگذاری $y=9-x$ در ضابطه تابع داریم

$$f(x,y)=2+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2$$
$$=-61+18x-2x^2$$

با قرار دادن $f'(x,9-x)=18-4x=0$ نتیجه می شود

$$x=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$$

به ازای این مقدار x،

$$y=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2} \quad \text{و} \quad f(x,y)=f\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)=-\frac{41}{2}$$

خلاصه: تمام مقایر اکسترمم احتمالی را فهرست می کنیم: ۴ ، ۲، ۶۱- ، ۳ و $(41/2)$-. ماکسیمم، ۴ است که f در $(1,1)$ اختیار می کند. مینیمم،۶۱- است که f در $(0,9)$ و $(9,0)$ اختیار می کند.

حل مسائل مقدار اکسترمم با قیود جبری بر روی متغیرها معمولاً مستلزم استفاده از روش ضرایب لاگرانژ است که در بخش بعدی معرفی می کنیم. اما گاه، مانند مثال بعد، چنین مسائلی را بصورت مستقیم حل می کنیم.

مثال ۶: یک شرکت پستی فقط جعبه های مکعب مستطیلی را قبول که مجموع طول و محیط مقطع آن بیشتر از $108in$ نباشد. ابعاد و جعبه مورد قبول با بیشترین حجم را بدست آورید.

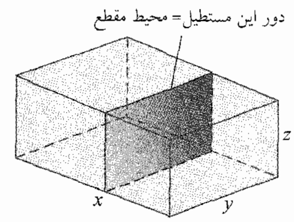
حل: فرض کنید x، y و z به ترتیب طول، عرض و ارتفاع جعبه مستطیلی باشند. در این صورت محیط مقطع آن $2y+2z$ است. می خواهیم حجم $V=xyz$ جعبه را ماکسیمم کنیم و در عین حال قید $x+2y+2z=108$

(بزرگترین جعبه مورد قبول شرکت) برآورده شود (شکل ۱۴-۴۷). بنابراین حجم جعبه را می توان به صورت تابعی از دو متغیر نوشت

$$V(y,z)=(108-2y-2z)yz$$
$$(V=xyz\,,\,x=108-2y-2z\,)$$
$$=108yz-2y^2z-2yz^2$$

مشتقات جزئی اول را برابر صفر قرار می دهیم،

$$V_y(y,z)=108z-4yz-2z^2=(108-4y-2z)z=0$$
$$V_z(y,z)=108y-2y^2-4yz=(108-2y-4z)y=0$$



شکل ۱۴-۴۷: جعبه مثال ۶ .

از این معادلات نقاط بحرانی $(0,0)$، $(0,54)$، $(54,0)$ و $(18,18)$ بدست می آیند. حجم به ازای نقاط $(0,0)$، $(0,54)$، $(54,0)$ صفر است که مقادیر ماکسیمم نیستند. در نقطه $(18,18)$ آزمون مشتق دوم (قضیه ۱۱) را بکار می بریم

$$V_{yz}=108-4y-4z \qquad V_{zz}=-4y \qquad V_{yy}=-4z$$

در این صورت

$$V_{yy}V_{zz}-V_{yz}^2=16yz-16(27-y-z)^2$$

بنابراین

$$V_{yy}(18,18)=-4(18)<0$$

و

$$\left[V_{yy}V_{zz}-V_{yz}^2\right]_{(18,18)}=16(18)(18)-16(-9)^2>0$$

دلالت بر این دارند که $(18,18)$ ماکسیمم حجم را بدست می دهد. ابعاد بسته عبارتند از

$y=18in.$ ،$x=108-2(18)-2(18)=36in.$ و $z=18in.$

ماکسیمم حجم برابر است با $V=(36)(18)(18)=11664in^3$ یا $6.75ft^3$.

علی رغم قدرتمند بودن قضیه ۱۱، اصرار بر این است که محدودیت های آن را به خاطر داشته باشید. این قضیه در مورد نقاط مرزی دامنه تابع کاربرد ندارد. در این نقاط ممکن است تابع مقادیر اکسترمم و مشتقات ناصفر داشته باشد. همچنین این قضیه در مورد نقاطی که در آنها f_x یا f_y موجود نباشند کاربرد ندارد.

خلاصه آزمون های ماکسیمم – مینیمم

مقادیر اکسترمم $f(x,y)$ فقط می توانند در نقاط زیر واقع باشند

۱- **نقاط مرزی** دامنه f

۲- **نقاط بحرانی** (نقاط درونی که در آنها $f_x=f_y=0$ یا نقاطی که در آنها f_x یا f_y موجود نیست)

اگر مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم f در سراسر قرصی به مرکز نقطه ای چون (a,b) پیوسته باشند و داشته باشیم $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ ، ماهیت $f(a,b)$ را می توان با **آزمون مشتق دوم** سنجید:

۱- در (a,b)،

$f_{xx}<0$ ،$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0 \Leftarrow$ **ماکسیمم موضعی**

۲- در (a,b)،

$f_{xx}>0$ ،$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0 \Leftarrow$ **مینیمم موضعی**

۳- در (a,b)، $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0 \Leftarrow$ **نقطه زینی**

۴- در (a,b)، $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0 \Leftarrow$ **آزمون نتیجه بخش نیست.**

تمرین های ۱۴-۷

یافتن اکسترمم های موضعی

در تمرین های ۱-۳۰ تمام ماکسیمم های موضعی، مینیمم های موضعی و نقاط زینی توابع مفروض را بیابید.

۱- $f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x-3y+4$

۲- $f(x,y)=2xy-5x^2-2y^2+4x+4y-4$

۳- $f(x,y)=x^2+xy+3x+2y+5$

۴- $f(x,y)=5xy-7x^2+3x-6y+2$

۵- $f(x,y)=2xy-x^2-2y^2+3x+4$

۶- $f(x,y)=x^2-4xy+y^2+6y+2$

۷- $f(x,y)=2x^2+3xy+4y^2-5x+2y$

۸- $f(x,y)=x^2-2xy+2y^2-2x+2y+1$

۹- $f(x,y)=x^2-y^2-2x+4y+6$

۱۰- $f(x,y)=x^2+2xy$

۱۱- $f(x,y)=\sqrt{56x^2-8y^2-16x-31}+1-8x$

۱۲- $f(x,y)=1-\sqrt[3]{x^2+y^2}$

۱۳- $f(x,y)=x^3-y^3-2xy+6$

۱۴- $f(x,y)=x^3+3xy+y^3$

۱۵- $f(x,y)=6x^2-2x^3+3y^2+6xy$

۱۶- $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3y^2-8$

۱۷- $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x+y^3-15y$

۱۸- $f(x,y)=2x^3+2y^3-9x^2+3y^2-12y$

۱۹- $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$

۲۰- $f(x,y)=x^4+y^4+4xy$

۲۱- $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

۲۲- $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+xy+\dfrac{1}{y}$

۲۳- $f(x,y)=y\sin x$

۲۴- $f(x,y)=e^{2x}\cos y$

۲۵- $f(x,y)=e^{x^2+y^2-4x}$

۲۶- $f(x,y)=e^y-ye^x$

۲۷- $f(x,y)=e^{-y}\left(x^2+y^2\right)$

۲۸- $f(x,y)=e^x\left(x^2-y^2\right)$

۲۹- $f(x,y)=2\ln x+\ln y-4x-y$

۳۰- $f(x,y)=\ln(x+y)+x^2-y$

یافتن اکسترمم های مطلق

در تمرین های **۳۱-۳۸** ماکسیمم ها و مینیمم های مطلق توابع مفروض را روی دامنه های داده شده بیابید.

۳۱- تابع $f(x,y)=2x^2-4x+y^2-4y+1$ روی صفحه مثلثی شکل بسته واقع در ربع اول، محدود به خطوط $x=0$، $y=2$ و $y=2x$.

۳۲- تابع $D(x,y)=x^2-xy+y^2+1$ روی ناحیه مثلثی بسته واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x=0$، $y=4$ و $y=x$.

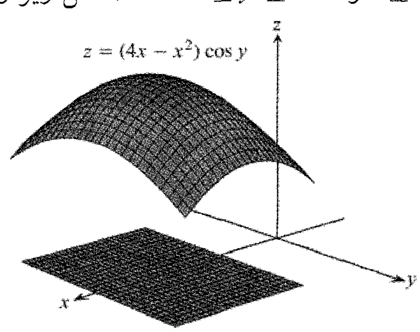
۳۳- تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ روی ناحیه مثلثی بسته واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x=0$، $y=0$ و $y+2x=2$.

۳۴- تابع $T(x,y)=x^2+xy+y^2-6x$ بر روی ناحیه مستطیلی شکل $0\le x\le 5$ و $-3\le y\le 3$.

۳۵- تابع $T(x,y)=x^2+xy+y^2-6x+2$ بر روی ناحیه مستطیلی شکل $0\le x\le 5$ و $-3\le y\le 0$.

۳۶- تابع $f(x,y)=48xy-32x^3-24y^2$ روی ناحیه مستطیلی شکل $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$.

۳۷- تابع $f(x,y)=\left(4x-x^2\right)\cos y$ روی ناحیه مستطیلی شکل $1\le x\le 3$ و $-\pi/4\le y\le\pi/4$ (شکل زیر را ببینید).



۳۸- تابع $f(x,y)=4x-8xy+2y+1$ روی ناحیه مثلثی شکل واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x=0$، $y=0$ و $x+y=1$.

۳۹- دو عدد a و b، با شرط $a\le b$، را چنان بیابید که انتگرال

$$\int_a^b\left(6-x-x^2\right)dx$$

بزرگترین مقدار خود را داشته باشد.

۴۰- دو عدد a و b، با شرط $a\le b$، را چنان بیابید که انتگرال

$$\int_a^b\left(24-2x-x^2\right)^{1/3}dx$$

بزرگترین مقدار خود را داشته باشد.

۴۱- **دما.** ورق دایره ای تختی به شکل ناحیه $x^2+y^2\le 1$ است. این ورق و مرز آن را که معادله آن $x^2+y^2=1$ است طوری حرارت می دهیم که دما در هر نقطه (x,y) برابر باشد با

$$T(x,y)=x^2+2y^2-x$$

دمای داغ ترین و سردترین نقاط ورق را بیابید.

۴۲- نقطه بحرانی

$$f(x,y)=xy+2x-\ln x^2y$$

را در ربع اول باز $(x>0, y>0)$ بیابید و نشان دهید که f در آنجا یک مینیمم دارد.

نظریه و مثال ها

۴۳- ماکسیمم ها، مینیمم ها و نقاط زینی $f(x,y)$ را، در صورت وجود، با فرضهای زیر بیابید:

(الف)- $f_x=2x-4y$ و $f_y=2y-4x$

(ب)- $f_x=2x-2$ و $f_y=2y-4$

(پ)- $f_x=9x^2-9$ و $f_y=2y+4$

در هر مورد دلایل خود را بیان کنید.

۴۴- برای هر یک از توابع زیر مبین $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ در مبداء صفر است لذا آزمون مشتق دوم در آنجا با شکست مواجه می شود. با تجسم شکل رویه $z=f(x,y)$ در هر مورد، تعیین کنید که تابع در مبداء ماکسیمم دارد، مینیمم دارد یا هیچکدام. در هر مورد دلایل خود را بیان کنید.

(الف)- $f(x,y)=x^2y^2$ (ب)- $f(x,y)=1-x^2y^2$

(پ)- $f(x,y)=xy^2$ (ت)- $f(x,y)=x^3y^2$

(ث)- $f(x,y)=x^3y^3$ (ج)- $f(x,y)=x^4y^4$

۴۵- نشان دهید که مقدار ثابت k هر چه باشد $(0,0)$ یک نقطه بحرانی تابع $f(x,y)=x^2+kxy+y^2$ است. (راهنمایی: دو حالت $k=0$ و $k\neq 0$ را در نظر بگیرید).

۴۶-به ازای چه مقادیری از ثابت k، آزمون مشتق دوم تضمین می کند که $f(x,y)=x^2+kxy+y^2$ در $(0,0)$ یک نقطه زینی داشته باشد؟ در $(0,0)$ یک مینیمم موضعی داشته باشد؟ به ازای چه مقادیری از k آزمون مشتق دوم نتیجه بخش نخواهد بود؟ دلایل خود را بیان کنید.

۴۷- اگر $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ باشد آیا f باید در (a,b) یک مقدار ماکسیمم موضعی داشته باشد یا مینیمم موضعی؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۴۸- اگر f و مشتقات جزئی اول و دوم آن در سراسر قرصی به مرکز نقطه بحرانی (a,b) پیوسته باشند و $f_{yy}(a,b)$ و $f_{xx}(a,b)$ مختلف العلامه باشند آیا می توان در مورد $f(a,b)$ اظهار نظری کرد؟ دلایل خود را بیان کنید.

۴۹- از بین تمام نقاط روی نمودار $z=10-x^2-y^2$ که بالاتر از صفحه $x+2y+3z=0$ قرار دارند نقطه ای را بیابید که بیشترین فاصله را از صفحه دارد.

۵۰- نقطه ای روی نمودار $z=x^2+y^2+10$ بیابید که از صفحه $x+2y-z=0$ کمترین فاصله را داشته باشد.

۵۱- نقطه ای روی صفحه $3x+2y+z=6$ بیابید که کمترین فاصله را از مبداء داشته باشد.

۵۲- کمترین فاصله نقطه $(2,-1,1)$ از صفحه $x+y-z=2$ چقدر است؟

۵۳- سه عدد بیابید که مجموعشان ۹ و مجموع مربعاتشان مینیمم باشد.

۵۴- سه عدد مثبت بیابید که مجموعشان ۳ و حاصلضربشان ماکسیمم باشد.

۵۵- مقدار ماکسیمم

$$s=xy+yz+zx$$

را با قید $x+y+z=6$ بیابید.

۵۶- مطلوب است کمترین فاصله مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از نقطه $(-6,4,0)$.

۵۷- ابعاد جعبه مستطیلی با حجم ماکسیمم را بیابید که می تواند درون کره $x^2+y^2+z^2=4$ محاط شود.

۵۸- مکعب مستطیل بسته ای با حجم $27cm^3$ که کوچکترین مساحت سطح را دارد کدام است؟

۵۹- می خواهیم با $12ft^2$ مقوا یک جعبه مستطیلی باز با ماکسیمم حجم بسازیم. ابعاد جعبه باید چقدر باشد؟

۶۰- تابع $f(x,y)=x^2+y^2+2xy-x-y+1$ را روی ناحیه مربعی $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ در نظر بگیرید.

(الف)- نشان دهید که f در امتداد پاره خط $2x+2y=1$ واقع در این مربع یک مینیمم مطلق دارد. این مقدار مینیمم چقدر است؟

(ب)- مقدار ماکسیمم مطلق f روی مربع چقدر است؟

مقادیر اکسترمم روی خم های پارامتری: برای یافتن مقادیر اکسترمم تابعی چون $f(x,y)$ روی خمی چون $x=x(t)$ و $y=y(t)$، f را به صورت تابعی از تک متغیر t در نظر گرفته و با استفاده از قاعده زنجیری جایی را که df/dt در آن صفر است می یابیم. در این صورت مثل هر تابع یک متغیره دیگر، مقادیر اکسترمم f در بین مقادیر تابع در

(الف) – نقاط بحرانی (نقاطی که در آنها df/dt صفر است یا موجود نیست) و

(ب)- نقاط انتهایی دامنه پارامتر

واقع اند.

مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق توابع زیر را روی خم های مفروض بیابید.

۶۱- توابع:

(الف)- $f(x,y)=x+y$ (ب)- $g(x,y)=xy$

(پ)- $h(x,y)=2x^2+y^2$

خم ها:

۱- نیمدایره $x^2+y^2=4$، $y\ge 0$.

۲- ربع دایره $x^2+y^2=4$، $x\ge 0$، $y\ge 0$.

از معادلات پارامتری $x=2\cos t$ و $y=2\sin t$ استفاده کنید.

۶۲- توابع: (الف)- $f(x,y)=2x+3y$

(ب)- $g(x,y)=xy$ (پ)- $h(x,y)=x^2+3y^2$

خم ها:

۱- نیم بیضی $(x^2/9)+(y^2/4)=1$، $y\ge 0$.

۲- ربع بیضی $(x^2/9)+(y^2/4)=1$، $x\ge 0$ و $y\ge 0$

از معادلات پارامتری $x=3\cos t$ و $y=2\sin t$ استفاده کنید.

۶۳- تابع: $f(x,y)=xy$

خم ها:

۱-خط $x=2t$، $y=t+1$

۲- پاره خط $x=2t$، $y=t+1$، $-1\le t\le 0$

۳- پاره خط $x=2t$، $y=t+1$، $0\le t\le 1$

۶۴- توابع: (الف)- $f(x,y)=x^2+y^2$

(ب)- $g(x,y)=1/(x^2+y^2)$

خم ها:

۱- خط $x=t$ و $y=2-2t$

۲- پاره خط $x=t$ و $y=2-2t$ و $0\le t\le 1$

۶۵- **خط کمترین مربعات و خط رگرسیون.** وقتی می خواهیم خط $y=mx+b$ را به مجموعه ای از نقاط داده عددی (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، ... و (x_n,y_n) تطبیق (برازش) دهیم (شکل۱۴- ۴۸) معمولاً خطی را انتخاب می کنیم که مجموع مربعات فاصله های عمودی نقاط تا خط را مینیمم می کند. به لحاظ نظری، این به معنای یافتن مقادیری از m و b است که مقدار تابع زیر را مینیمم می کنند

$$w=(mx_1+b-y_1)^2+\dots+(mx_n+b-y_n)^2 \qquad (۱)$$

نشان دهید که مقادیر m و b که تابع فوق را مینیمم می کنند عبارتند از

$$m=\frac{\left(\sum x_k\right)\left(\sum y_k\right)-n\sum x_k y_k}{\left(\sum x_k\right)^2-n\sum x_k^2} \qquad (۲)$$

$$b=\frac{1}{n}\left(\sum y_k-m\sum x_k\right) \qquad (۳)$$

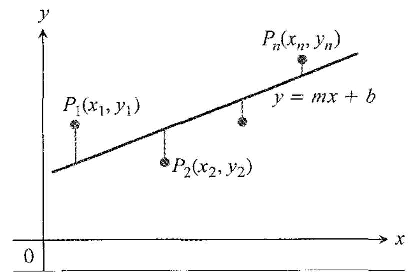
که تمامی جمع ها از $k=1$ تا $k=n$ هستند. اکثر ماشین حساب های علمی این فرمول ها را در خود دارند و می توانید بعد از وارد کردن داده ها فقط با فشردن چند دکمه m و b را بدست آورید.

خط $y=mx+b$ که با این مقادیر m و b مشخص می شود خط کمترین مربعات، خط رگرسیون یا خط روند مربوط به داده های مورد مطالعه نامیده می شود. یافتن خط کمترین مربعات به شما امکان می دهد تا

۱- داده ها را در یک عبارت ساده خلاصه کنید.

۲- مقادیر y را به ازای سایر مقادیر x، که به صورت تجربی آزموده نشده اند، پیش بینی کنید.

۳- داده ها را به صورت تحلیلی بررسی کنید.



شکل۱۴-۴۸: برای تطبیق (برازش) یک خط به نقاط ناهم خط، خطی را انتخاب می کنیم که مجموع مربعات انحراف ها را مینیمم می کند.

در تمرین های ۶۶-۶۷ با استفاده از معادلات (۲) و (۳) برای هر مجموعه از نقاط داده، خط کمترین مربعات را بیابید. سپس با استفاده از معادله خطی که بدست آورده اید مقدار y متناظر با $x = 4$ را پیش بینی کنید.

۶۶- $(-2,0)$ و $(0,2)$ و $(2,3)$

۶۷- $(-1,2)$ و $(0,1)$ و $(3,-4)$

۶۸- $(0,0)$ و $(1,2)$ و $(2,3)$

مسائل رایانه ای

در تمرین های۶۹ -۷۴ با بررسی توابع مفروض، اکسترمم های موضعی آنها را مشخص کنید. با استفاده از یک نرم افزار ریاضی مراحل زیر را طی کنید:

(الف)- تابع را روی مستطیل مفروض رسم کنید.

(ب)- برخی از خم های تراز را در مستطیل رسم کنید.

(پ)- مشتقات جزئی اول تابع را محاسبه کرده و با استفاده از حل کننده معادله نرم افزار نقاط بحرانی را بیابید. نقاط بحرانی با خم های تراز رسم شده در قسمت (ب) چه رابطه ای دارند؟ کدام نقاط بحرانی، در صورت وجود، به نظر می رسد یک نقطه زینی باشند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

(ت)- مشتقات جزئی دوم تابع را محاسبه کرده و مبین $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ را بدست آورید.

(ث)- با استفاده از آزمونهای ماکسیمم – مینیمم نقاط بحرانی یافت شده در قسمت (پ) را دسته بندی کنید. آیا یافته های شما با بحث قسمت (پ) سازگاری دارند؟

۶۹- $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$،
$-5 \le y \le 5$ ،$-5 \le x \le 5$

۷۰- $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$،
$-2 \le y \le 2$ ،$-2 \le x \le 2$

۷۱- $f(x,y) = x^4 + y^2 - 8x^2 - 6y + 16$،
$-6 \le y \le 6$ ،$-3 \le x \le 3$

۷۲- $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 3$،
$-3/2 \le y \le 3/2$ ، $-3/2 \le x \le 3/2$

۷۳- $f(x,y) = 5x^6 + 18x^5 - 30x^4 + 30xy^2 - 120x^3$،
$-2 \le y \le 2$ ،$-4 \le x \le 3$

۷۴- $f(x,y) = \begin{cases} x^5 \ln(x^2 + y^2), & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$،
$-2 \le y \le 2$ ،$-2 \le x \le 2$

۱۴-۸- ضرایب لاگرانژ

گاهی لازم است مقادیر اکسترمم تابعی را بیابیم که دامنه اش مقید است درون زیر مجموعه خاصی از صفحه مثلاً یک قرص، یک ناحیه مثلثی شکل بسته یا در امتداد یک خم قرار گیرد. در این بخش به بررسی روش قدرتمندی برای یافتن مقادیر اکسترمم توابع مقید یعنی روش ضرایب لاگرانژ می پردازیم.

ماکسیمم ها و مینیمم های مقید

ابتدا مسئله ای را در نظر می گیریم که در آن مینیمم مقید را می توان با حذف یک متغیر بدست آورد.

مثال ۱: بر صفحه

$$2x + y - z - 5 = 0$$

نقطه ای چون $P(x,y,z)$ بیابید که نزدیکترین نقطه به مبداء

باشد.

حل: این مسئله از ما می خواهد مقدار مینیمم تابع

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

را با این قید بیابیم که

$$2x+y-z-5=0$$

چون $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ مقدار مینیمم خود را در جایی دارد که تابع

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

در آنجا یک مقدار مینیمم داشته باشد، این مسئله را با یافتن مقدار مینیمم $f(x,y,z)$ تحت قید $2x+y-z-5=0$ حل می کنیم (و بدین ترتیب از ریشه های دوم اجتناب می کنیم). اگر در این معادله x و y را متغیرهای مستقل در نظر گرفته و z را به صورت زیر بنویسیم

$$z=2x+y-5$$

مسئله تبدیل می شود به یافتن نقاط (x,y) که در آنها تابع زیر مقدار یا مقادیر مینیمم خود را دارد

$$h(x,y)=f(x,y,2x+y-5) = x^2+y^2+(2x+y-5)^2$$

چون دامنه f کل صفحه xy است، آزمون مشتق اول از بخش **۱۴-۷** بیان می کند که مینیمم هایی که h ممکن است داشته باشد در نقاطی به دست می آیند که

$$h_x=2x+2(2x+y-5)(2)=0$$
$$h_y=2y+2(2x+y-5)=0$$

از اینجا داریم

$$4x+4y=10 \quad \text{و} \quad 10x+4y=20$$

و جواب دو معادله عبارت است از

$$y=\frac{5}{6} \quad \text{و} \quad x=\frac{5}{3}$$

با استفاده از یک استدلال هندسی به همراه آزمون مشتق دوم می توان نشان داد که این مقادیر h را مینیمم می کنند. مختص z نقطه متناظر بر صفحه $z=2x+y-5$ عبارت است از

$$z=2\left(\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{6}-5=-\frac{5}{6}$$

بنابراین نقطه مورد نظر عبارت است از

$$P\left(\frac{5}{3},\frac{5}{6},-\frac{5}{6}\right) \qquad \text{نزدیکترین نقطه:}$$

فاصله نقطه P تا مبداء برابر است با $5/\sqrt{6}\approx 2.04$.

حل مسائل ماکسیمم یا مینیمم مقید از طریق جانشانی، که می توانیم آن را روش مثال **۱** بنامیم، همیشه سرراست نیست. یکی از دلایلی که در این بخش روش جدیدی ارائه می کنیم همین است.

مثال ۲: نقاطی بر استوانه هذلولوی $x^2-z^2-1=0$ بیابید که نزدیکترین فاصله را تا مبداء دارند.

حل: استوانه مذکور در شکل**۱۴-۴۹** نشان داده شده است. ما به دنبال نقاطی از استوانه هستیم که نزدیکترین نقاط به مبداء هستند. اینها نقاطی هستند که مختصاتشان مقدار تابع

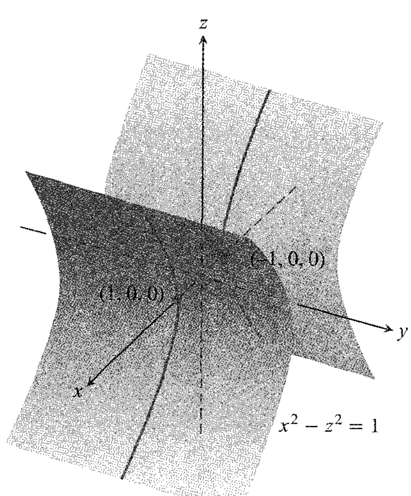
$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \qquad \text{(مربع فاصله)}$$

را با قید $x^2-z^2-1=0$ مینیمم می کنند. اگر در معادله مقید کننده x و y را به عنوان متغیرهای مستقل در نظر بگیریم آنگاه

$$z^2=x^2-1$$

و مقادیر $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ بر روی استوانه از تابع زیر بدست می آیند

$$h(x,y)=x^2+y^2+(x^2-1)=2x^2+y^2-1$$



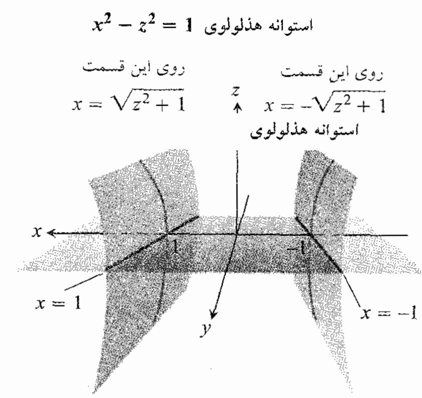
شکل۱۴-۴۹: استوانه هذلولوی $x^2-y^2-1=0$ مثال ۲.

برای یافتن نقاطی روی استوانه که مختصاتشان f را مینیمم می کنند به دنبال نقاطی در صفحه xy می گردیم که مختصاتشان h را مینیمم می کنند. تنها مقدار اکسترمم h در جایی بدست می آید که

$$h_x = 4x = 0 \quad \text{و} \quad h_y = 2y = 0$$

یعنی در نقطه $(0,0)$. اما نقطه ای روی استوانه وجود ندارد که در آن x و y هر دو صفر باشند پس اشتباه در کجاست؟

داستان این است که آزمون مشتق اول (چنانکه باید) نقطه ای از دامنه h را به ما داده است که در آن h یک مقدار مینیمم دارد. از سوی دیگر ما نقاطی از استوانه را می خواهیم که در آنها h یک مقدار مینیمم دارد. با اینکه دامنه h تمام صفحه xy است محدوده ای که می توانیم از آن دو مختص اول نقاط (x,y,z) بر استوانه را انتخاب کنیم محدود است به «سایه» استوانه بر صفحه xy که نوار بین خطوط $x=-1$ و $x=1$ را شامل نمی شود (شکل ۱۴-۵۰).



شکل۱۴-۵۰: ناحیه ای در صفحه xy که دو مختص اول نقاط (x,y,z) از استوانه هذلولوی $x^2 - z^2 = 1$ از آن انتخاب می شوند نوار $-1 < x < 1$ واقع در صفحه xy را شامل نمی شود (مثال ۲).

اگر y و z را به عنوان متغیرهای مستقل در نظر بگیریم (به جای x و y) و x را به صورت زیر برحسب y و z بیان کنیم با این مشکل مواجه نمی شویم

$$x^2 = z^2 + 1$$

با این جانشانی، $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ به صورت زیر درمی آید

$$k(y,z) = (z^2+1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

و به دنبال نقاطی می گردیم که در آنها k کوچکترین مقدار خود را اختیار می کند. اکنون دامنه k در صفحه yz بر محدوده ای که از آن مختصات y و z نقاط (x,y,z) از استوانه را انتخاب می کنیم منطبق می شود. از این رو نقاطی که k را در صفحه مینیمم می کنند نقاط متناظری بر روی استوانه خواهند داشت. کوچکترین مقادیر k در جایی بدست می آیند که

$$k_y = 2y = 0 \quad \text{و} \quad k_z = 4z = 0$$

یا جایی که $y = z = 0$ است. از اینجا داریم

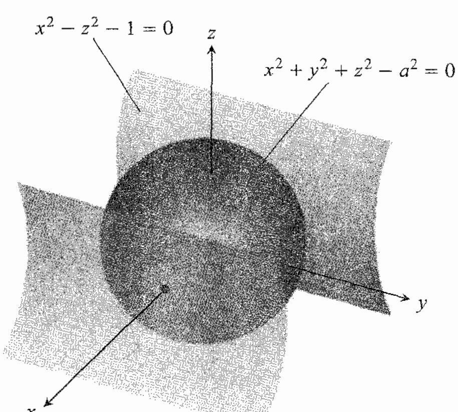
$$x^2 = z^2 + 1 = 1 \quad \text{و} \quad x = \pm 1$$

نقاط متناظر بر روی استوانه عبارتند از $(\pm 1,0,0)$. از نابرابری

$$k(y,z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1$$

می توان پی برد که نقاط $(\pm 1,0,0)$ مقدار مینیممی برای k بدست می دهند. همینطور می توان مشاهده کرد که مینیمم فاصله از مبداء تا نقطه ای از استوانه ۱ واحد است.

حل ۲: روش دیگر برای یافتن نقاطی از استوانه که کمترین فاصله را تا مبداء دارند این است که تصور کنیم کره کوچکی به مرکز مبداء مثل یک حباب صابون منبسط می شود تا به استوانه برسد (شکل۱۴-۵۱).



شکل۱۴-۵۱: کره ای که مثل یک حباب صابون به مرکز مبداء منبسط می شود تا درست به استوانه هذلولوی $x^2 - z^2 - 1 = 0$ برسد (مثال ۲).

در هر یک از نقاط تماس، استوانه و کره دارای صفحه مماس و خط قائم مشترک هستند. بنابراین اگر کره و استوانه را رویه

های ترازی در نظر بگیریم که با برابر صفر قرار دادن توابع زیر بدست می آیند

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$$
$$g(x,y,z)=x^2-z^2-1$$

آنگاه گرادیان های ∇f و ∇y در محل تماس رویه ها موازی خواهند بود. بنابراین در هر یک از نقاط تماس باید بتوانیم عددی چون λ (لاندا) بیابیم که

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

یا

$$2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}=\lambda(2x\mathbf{i}-2z\mathbf{k})$$

پس مختصات x، y و z هر نقطه تماس باید در سه معادله عددی زیر صدق کنند

$$2z=-2\lambda z \quad \text{و} \quad 2y=0 \quad \text{و} \quad 2x=2\lambda x$$

به ازای چه مقادیری از λ نقطه ای چون (x,y,z) که مختصاتش در این معادلات عددی صدق می کنند روی رویه $x^2-z^2-1=0$ هم قرار می گیرد؟ برای پاسخ به این سؤال، از این نکته که هیچ نقطه ای از رویه مختص x صفر ندارد استفاده کرده و نتیجه می گیریم که $x\neq 0$.

پس $2x=2\lambda x$ فقط وقتی برقرار است که

$$2=2\lambda \quad \text{یا} \quad \lambda=1$$

به ازای $\lambda=1$، معادله $2z=-2\lambda z$ به صورت $2z=-2z$ در می آید. برای اینکه این معادله هم برقرار باشد z باید صفر باشد. همچنین چون $y=0$ (از معادله $2y=0$)، نتیجه می گیریم که نقاطی که به دنبالشان هستیم همگی مختصاتی به صورت زیر دارند

$$(x,0,0)$$

چه نقاطی از رویه $x^2-z^2=1$ مختصاتی به این شکل دارند؟ پاسخ عبارت است از نقاط $(x,0,0)$ که در شرایط زیر صدق می کنند

$$x^2-(0)^2=1 \quad , \quad x^2=1 \quad , \quad x=\pm 1$$

پس نزدیکترین نقاط استوانه به مبداء عبارتند از نقاط $(\pm 1,0,0)$.

روش ضرایب لاگرانژ

در راه حل **۲** مثال **۲** از **روش ضرایب لاگرانژ** استفاده کردیم. براساس این روش مقادیر اکسترمم تابعی چون $f(x,y,z)$ که متغیرهایش تحت قید $g(x,y,z)=0$ قرار دارند در نقاطی از رویه $g=0$ به دست می آیند که در آن نقاط به ازای عددی چون λ (موسوم به **ضریب لاگرانژ**) داشته باشیم

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

برای بررسی بیشتر این روش و پی بردن به کارساز بودن آن، ابتدا توجه شما را به مطلبی جلب می کنیم که به صورت یک قضیه بیان می شود.

قضیه ۱۲- قضیه گرادیان متعامد: فرض کنید $f(x,y,z)$ در ناحیه ای که خم هموار زیر را دربر دارد مشتق پذیر است

$$C:\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}$$

اگر P_0 نقطه ای از خم C باشد که در آن f نسبت به مقادیرش بر روی C یک ماکسیمم یا یک مینیمم موضعی دارد آنگاه در نقطه P_0، ∇f بر C عمود است.

اثبات: نشان می دهیم که در نقطه P_0، ∇f بر بردار سرعت خم عمود است. مقادیر f روی C از تابع مرکب $f(g(t),h(t),k(t))$ بدست می آیند که مشتق آن نسبت به t عبارت است از

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt}=\nabla f\,.\mathbf{v}$$

در هر نقطه P_0 که در آن f نسبت به مقادیرش بر روی خم یک ماکسیمم یا مینیمم موضعی دارد، $df/dt=0$ است، لذا

$$\nabla f\,.\mathbf{v}=0$$

با حذف جملات شامل z در قضیه **۱۲** نتیجه مشابهی برای توابع دو متغیره بدست می آوریم.

نتیجه قضیه ۱۲: در نقاطی از خم هموار $\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}$ که در آنها تابع مشتق پذیر $f(x,y)$ نسبت به مقادیرش بر روی خم مقادیر ماکسیمم و مینیمم موضعی خود را اختیار می کند، داریم $\nabla f\,.\mathbf{v}=0$، که در آن $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$.

قضیه ۱۲ اساس روش ضرایب لاگرانژ است. فرض کنید $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ مشتق پذیرند و P_0 نقطه ای روی رویه $g(x,y,z)=0$ است که در آن f نسبت به سایر مقادیرش بر روی رویه یک مقدار ماکسیمم یا مینیمم موضعی دارد. همچنین فرض می کنیم در نقاط روی رویه $g(x,y,z)=0$، $\nabla g \neq 0$ است. در این صورت f در P_0 نسبت به مقادیرش بر روی هر خم مشتق پذیر گذرنده از P_0 واقع بر روی رویه $g(x,y,z)=0$ یک مقدار ماکسیمم یا مینیمم موضعی دارد. بنابراین ∇f بر بردار سرعت هر چنین خم مشتق پذیری که از P_0 می گذرد عمود است. بعلاوه ∇g نیز چنین است(چون همانطور که در بخش ۱۴-۵ دیدیم ∇g بر رویه تراز $g=0$ عمود است). بنابراین در P_0، ∇f مضربی عددی چون λ از ∇g است.

روش ضرایب لاگرانژ

فرض کنید $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ مشتق پذیرند و وقتی $g(x,y,z)=0$، $\nabla g \neq 0$ است. برای یافتن مقادیر ماکسیمم و مینیمم موضعی f با قید $g(x,y,z)=0$ (اگر موجود باشند)، مقادیر x، y و z را چنان می یابیم که بطور همزمان در معادلات زیر صدق کنند

$$g(x,y,z)=0 \quad \text{و} \quad \nabla f=\lambda \nabla g$$

برای توابع دارای دو متغیر مستقل، شرط همین است منتها بدون متغیر z.

در کاربرد این روش باید کمی احتیاط کرد. ممکن است عملاً مقدار اکسترممی وجود نداشته باشد (تمرین ۴۱).

مثال ۳: مطلوب است بزرگترین و کوچکترین مقادیری که تابع

$$f(x,y)=xy$$

بر روی بیضی زیر اختیار می کند (شکل ۱۴-۵۲):

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

حل: می خواهیم مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y)=xy$ را با قید زیر بیابیم

$$g(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0$$

برای این کار ابتدا مقادیر x، y و λ را چنان می یابیم که

$$g(x,y)=0 \quad \text{و} \quad \nabla f=\lambda \nabla g$$

از معادله گرادیان معادله (۱) داریم

$$y\mathbf{i}+x\mathbf{j}=\frac{\lambda}{4}x\mathbf{i}+\lambda y\mathbf{j}$$

که از اینجا بدست می آوریم

$$y=\frac{\lambda}{4}x \quad \text{و} \quad x=\lambda y \quad \text{و} \quad y=\frac{\lambda}{4}(\lambda y)=\frac{\lambda^2}{4}y$$

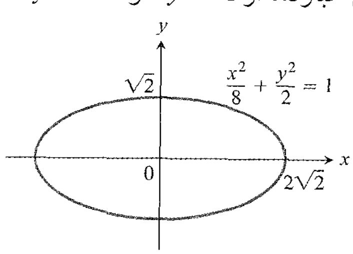
بطوریکه $y=0$ یا $\lambda=\pm 2$. اکنون این دو حالت را بررسی می کنیم.

حالت ۱: اگر $y=0$ باشد آنگاه $x=y=0$ اما $(0,0)$ روی بیضی نیست. پس $y\neq 0$.

حالت ۲: اگر $y\neq 0$ باشد آنگاه $\lambda=\pm 2$ و $x=\pm 2y$. با جانشانی این در معادله $g(x,y)$ خواهیم داشت

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \quad \text{و} \quad 4y^2+4y^2=8 \quad \text{و} \quad y=\pm 1$$

بنابراین تابع $f(x,y)=xy$ مقادیر اکسترمم خود را روی بیضی در چهار نقطه $(\pm 2,1)$ و $(\pm 2,-1)$ بدست می آورد. مقادیر اکسترمم عبارتند از $xy=2$ و $xy=-2$.



شکل ۱۴-۵۲: مثال ۳ چگونگی یافتن بزرگترین و کوچکترین مقادیر حاصلضرب xy بر روی این بیضی را نشان می دهد.

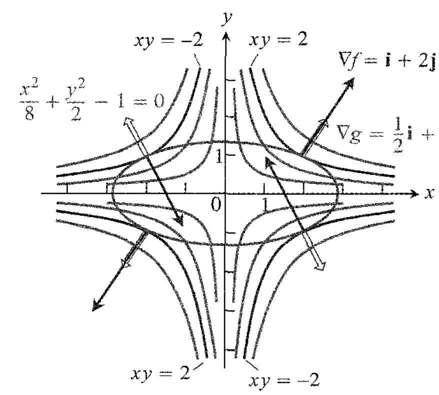
تبیین هندسی راه حل: خم های تراز تابع $f(x,y)=xy$ عبارتند از هذلولی های $xy=c$. (شکل ۱۴-۵۳). هرچه هذلولی ها از مبداء دورتر شوند قدر مطلق f بزرگتر می شود. می خواهیم مقادیر اکسترمم $f(x,y)$ را بیابیم با این فرض که نقطه (x,y) بر روی بیضی $x^2+4y^2=8$ نیز قرار داشته باشد. از بین هذلولی هایی که بیضی را قطع می کنند کدامیک از مبداء دورتر است؟ هذلولی هایی که بر بیضی مماس اند

دورترین ها هستند. در این نقاط هر بردار قائم بر هذلولی بر بیضی هم قائم است، لذا $\nabla f = y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ مضربی $(\lambda=\pm 2)$ از $\nabla g=(x/4)\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ است. مثلاً در نقطه $(2,1)$،

$$\nabla f=\mathbf{i}+2\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \nabla g=\frac{1}{2}\mathbf{i}+\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \nabla f=2\nabla g$$

در نقطه $(-2,1)$،

$$\nabla f=\mathbf{i}-2\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \nabla g=-\frac{1}{2}\mathbf{i}+\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \nabla f=-2\nabla g$$



شکل۱۴-۵۳: تابع $f(x,y)=xy$ با قید

$$g(x,y)=(x^2/8)+(y^2/2)-1=0$$

مقادیر اکسترمم را در چهار نقطه $(\pm 2,\pm 1)$ بدست می آورید. وقتی ∇f مضربی عددی از ∇g است این نقاط، نقاط روی بیضی هستند.

مثال ۴: مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=3x+4y$ را روی دایره $x^2+y^2=1$ بیابید.

حل: این مسئله را به صورت یک مسئله مربوط به ضرایب لاگرانژ در نظر می گیریم که در آن

$$f(x,y)=3x+4y \quad \text{و} \quad g(x,y)=x^2+y^2-1$$

و مقادیری از x، y و λ را جستجو می کنیم که در معادلات زیر صدق می کنند

$$\nabla f=\lambda\nabla g:\ 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}=2x\lambda\mathbf{i}+2y\lambda\mathbf{j}$$

$$g(x,y)=0:\ x^2+y^2-1=0$$

از معادله گرادیان معادلات (۱) نتیجه می شود که $\lambda\neq 0$ و داریم

$$x=3/(2\lambda) \quad \text{و} \quad y=2/\lambda$$

این معادلات علاوه بر اطلاعات دیگر بیانگر این مطلب اند که x و y هم علامت اند. به ازای این مقادیر x و y از معادله $g(x,y)=0$ نتیجه می شود

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2-1=0$$

در نتیجه

$$\frac{9}{4\lambda^2}+\frac{4}{\lambda^2}=1$$

$$9+16=4\lambda^2$$

$$4\lambda^2=25 \quad \text{و} \quad \lambda=\pm\frac{5}{2}$$

بنابراین

$$x=\frac{3}{2\lambda}=\pm\frac{3}{5} \quad \text{و} \quad y=\frac{2}{\lambda}=\pm\frac{4}{5}$$

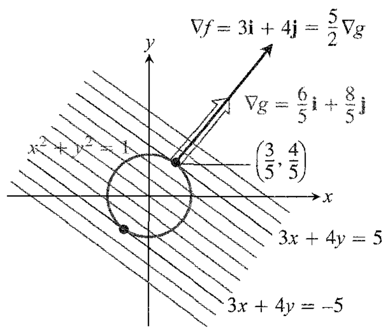
و تابع $f(x,y)=3x+4y$ در نقاط $(x,y)=\pm(3/5,4/5)$ مقادیر اکسترمم دارد.

با محاسبه مقدار $3x+4y$ در نقاط $\pm(3/5,4/5)$ مشاهده می کنیم که مقادیر ماکسیمم و مینیمم آن بر روی دایره $x^2+y^2=1$ عبارت اند از

$$3\left(\frac{3}{5}\right)+4\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{25}{5}=5$$

$$3\left(-\frac{3}{5}\right)+4\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{25}{5}=-5$$

تبیین هندسی راه حل: خم های تراز $f(x,y)=3x+4y$ عبارتند از خطوط $3x+4y=c$ (شکل **۱۴-۵۴**).



شکل۱۴-۵۴: تابع $f(x,y)=3x+4y$ بزرگترین مقدار خود بر روی دایره واحد $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ را در نقطه $(3/5,4/5)$ و کوچکترین مقدارش را در نقطه $(-3/5,-4/5)$ اختیار می کند (مثال ۴). در هر یک از این نقاط، ∇f مضربی عددی از ∇g است. شکل فوق گرادیان ها را فقط در نقطه اول نشان می دهد و نه در نقطه دوم.

هر چه خطوط از مبداء دورتر می شوند قدر مطلق f بزرگتر می شود. می خواهیم مقادیر اکسترمم $f(x,y)$ را بیابیم با این شرط که نقطه (x,y) روی دایره $x^2+y^2=1$ نیز واقع باشد. از بین خطوطی که دایره را قطع می کنند کدامیک از مبداء دورتر است؟ خطوط مماس بر دایره دورترین خطوط هستند. در نقاط تماس، هر بردار قائم بر خط بر دایره نیز قائم است، لذا گرادیان $\nabla f = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ مضربی $(\lambda=\pm 5/2)$ از گرادیان $\nabla g = 2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}$ است. مثلاً در نقطه $(3/5,4/5)$،

$$\nabla f = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \nabla g = \frac{6}{5}\mathbf{i}+\frac{8}{5}\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \nabla f = \frac{5}{2}\nabla g$$

ضرایب لاگرانژ با دو قید

در بسیاری از مسائل لازم است مقادیر اکسترمم تابع مشتق پذیری چون $f(x,y,z)$ را بیابیم که متغیرهایش دو قید دارند. اگر قیود عبارت باشند از

$$g_1(x,y,z)=0 \quad \text{و} \quad g_2(x,y,z)=0$$

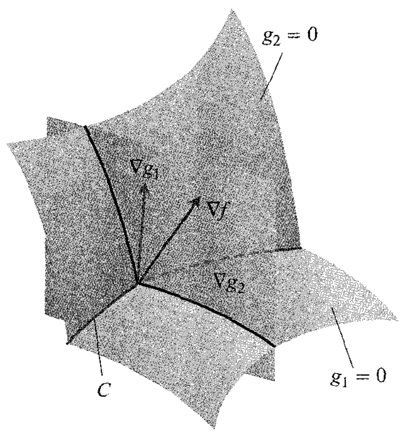
و g_1 و g_2 مشتق پذیر و ∇g_1 با ∇g_2 ناموازی باشد ماکسیمم ها و مینیمم های موضعی مقید f را با معرفی دو ضریب لاگرانژ λ و μ (با تلفظ میو) بدست می آوریم. یعنی برای تعیین نقاط $P(x,y,z)$ که در آنها f مقادیر اکسترمم مقید خود را بدست می آورد، مقادیر x، y، z، λ و μ را چنان می یابیم که بطور همزمان در معادلات زیر صدق کنند

$$\boxed{\begin{array}{c} g_1(x,y,z)=0 \quad \text{و} \quad g_2(x,y,z)=0 \\ \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \qquad (۲) \end{array}}$$

معادلات (۲) تعبیر هندسی جالبی دارند. مقطع رویه های $g_1=0$ و $g_2=0$ (معمولاً) یک خم هموار چون C است (شکل۱۴-۵۵). در امتداد این خم به دنبال نقاطی می گردیم که در آنها f نسبت به سایر مقادیرش بر روی خم مقادیر ماکسیمم و مینیمم موضعی دارد. در چنین نقاطی طبق قضیه ۱۲ ∇f بر C عمود است. اما در این نقاط ∇g_1 و ∇g_2 هم بر C عمودند زیرا C بر رویه های $g_1=0$ و $g_2=0$ قرار دارد. بنابراین ∇f در صفحه ای قرار دارد که با ∇g_1 و ∇g_2 مشخص می شود که بدین معناست که به ازای مقادیری λ و μ داریم

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$$

چون نقاطی که به دنبالشان می گردیم روی هر دو رویه هم قرار دارند مختصات آنها باید در معادلات $g_1(x,y,z)=0$ و $g_2(x,y,z)=0$ صدق کنند که همان دو شرط باقیمانده در معادلات (۲) هستند.



شکل۱۴-۵۵: بردارهای ∇g_1 و ∇g_2 در صفحه ای عمود بر خم C قرار دارند زیرا ∇g_1 بر رویه $g_1=0$ و ∇g_2 بر رویه $g_2=0$ قائم است.

مثال ۵: مقطع صفحه $x+y+z=1$ و استوانه $x^2+y^2=1$ یک بیضی است (شکل۱۴-۵۶). نقاطی بر روی بیضی بیابید که در کمترین و بیشترین فاصله از مبداء قرار دارند.

حل: مقادیر اکسترمم تابع

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

(مربع فاصله نقطه (x,y,z) از مبداء) را با قیود زیر می یابیم

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2-1=0 \qquad (۳)$$

$$g_2(x,y,z)=x+y+z-1=0 \qquad (۴)$$

از معادله گرادیان معادلات (۲) داریم

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$$

$$2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}=\lambda(2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j})+\mu(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

$$2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}=(2\lambda x+\mu)\mathbf{i}+(2\lambda y+\mu)\mathbf{j}+\mu\mathbf{k}$$

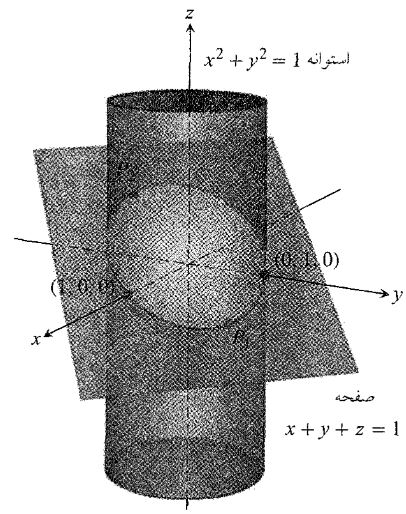
یا

$$2x=2\lambda x+\mu \quad \text{و} \quad 2y=2\lambda y+\mu \quad \text{و} \quad 2z=\mu \qquad (۵)$$

از معادلات عددی معادلات (۵) نتیجه می شود

$$2x = 2\lambda x + 2z \Rightarrow (1-\lambda)x = z$$
$$2y = 2\lambda y + 2z \Rightarrow (1-\lambda)y = z \qquad (۶)$$

معادلات (۶) در صورتی بطور همزمان برقرارند که یا $\lambda = 1$ و $z = 0$ باشد یا $\lambda \neq 1$ و $x = y = z/(1-\lambda)$.



شکل۱۴-۵۶: بر روی بیضیی که محل تلاقی صفحه و استوانه است نزدیکترین و دورترین نقاط از مبداء را می یابیم(مثال ۵).

اگر $z = 0$ باشد، با حل همزمان معادلات (۳) و(۴) برای یافتن نقاط متناظر بر روی بیضی، دو نقطه $(1,0,0)$ و $(0,1,0)$ بدست می آید. با نگاهی به شکل۱۴-۵۶ به منطقی بودن این مطلب پی می برید.

اگر $x = y$ باشد از معادلات (۳) و (۴) نتیجه می شود

$$x^2 + x^2 - 1 = 0 \qquad x + x + z - 1 = 0$$
$$2x^2 = 1 \qquad z = 1 - 2x$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad z = 1 \mp \sqrt{2}$$

نقاط متناظر بر روی بیضی عبارتند از

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2}\right) \quad \text{و} \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right)$$

اما در اینجا لازم است کمی احتیاط کنیم. با اینکه P_1 و P_2 هر دو ماکسیمم های موضعی f بر روی بیضی را بدست می دهند P_2 نسبت به P_1 از مبداء دورتر ا ست.

نزدیکترین نقاط بیضی به مبداء عبارتند از $(1,0,0)$و $(1,1,0)$.

دورترین نقطه بیضی از مبداء نقطه P_2 است.

تمرین های ۱۴-۸

دو متغیر مستقل با یک قید

۱- **اکسترمم ها بر روی بیضی.** مطلوب است نقاطی واقع بر بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ که در آنها $f(x,y) = xy$ مقادیر اکسترممش را دارد.

۲- **اکسترمم ها بر روی دایره.** مقادیر اکسترمم تابع

$$f(x,y) = xy$$

را با قید $x^2 + y^2 - 10 = 0$ $f(x,y) =$ بیابید.

۳- **ماکسیمم بر روی خط.** مقدار ماکسیمم تابع

$$f(x,y) = 49 - x^2 - y^2$$

را بر روی خط $x + 3y = 10$ بیابید.

۴- **اکسترمم ها بر روی خط.** مقادیر اکسترمم موضعی تابع

$$f(x,y) = x^2 y$$

را بر روی خط $x + y = 3$ بیابید.

۵- **مینیمم مقید.** نقاطی بر خم $xy^2 = 54$ بیابید که نزدکترین فاصله را از مبداء دارند.

۶- **مینیمم مقید.** نقاطی بر خم $x^2y = 2$ بیابید که نزدیکترین فاصله را از مبداء دارند.

۷- مطلوب است محاسبه موارد زیر با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ

(الف)- مینیمم بر روی هذلولی. مقدار مینیمم $x + y$ را با قیود $xy = 16$، $x > 0$ و $y > 0$ بیابید.

(ب)- ماکسیمم بر روی خط. مقدار ماکسیمم xy را با قید $x + y = 16$ بیابید.

در هر مورد راه حل را به صورت هندسی هم تببین کنید.

۸- **اکسترمم ها بر روی خم.** مطلوب است نقاطی بر خم

$$x^2+xy+y^2=1$$

واقع در صفحه xy که نزدیکترین و دورترین فاصله را از مبداء دارند.

۹- **مینیمم مساحت رویه با حجم ثابت.** مطلوب است ابعاد قوطی استوانه ای مستدیر قائم بسته ای که حجمش $16\pi cm^3$ و مساحت سطحش مینیمم است.

۱۰- **استوانه در کره.** مطلوب است شعاع و ارتفاع استوانه مستدیر قائم بازی که مساحت سطحش ماکسیمم است و می تواند در کره ای به شعاع a محاط شود. مقدار مساحت ماکسیمم سطح چقدر است؟

۱۱- **مستطیلی با مساحت ماکسیمم در بیضی.** با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ ابعاد مستطیلی را بیابید که بیشترین مساحت را داشته و اضلاعش موازی محورهای مختصات هستند و می تواند درون بیضی $x^2/16+y^2/9=1$ محاط شود.

۱۲- **مستطیلی با قطر ماکسیمم در بیضی.** مطلوب است ابعاد مستطیلی با قطر ماکسیمم که اضلاعش با محورهای مختصات موازی اند و می تواند درون بیض $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ محاط شود. طول این قطر ماکسیمم چقدر است؟

۱۳- **اکسترمم ها بر روی دایره.** مطلوب است مقادیر ماکسیمم و مینیمم x^2+y^2 با قید $x^2-2x+y^2-4y=0$.

۱۴- **اکسترمم ها بر روی دایره.** مطلوب است مقادیر ماکسیمم و مینیمم $3x-y+6$ با قید $x^2+y^2=4$.

۱۵- **مورچه بر روی ورقه فلزی.** در نقطه (x,y) از یک ورقه فلزی دما برابر است با $T(x,y)=4x^2-4xy+y^2$. مورچه ای بر روی این ورقه حول دایره ای به شعاع ۵ و به مرکز مبداء راه می رود. بالاترین و پایین ترین دمایی که مورچه با آن مواجه می شود چقدر است؟

۱۶- **ارزانترین مخزن ذخیره.** شرکت شما از شما می خواهد یک مخزن ذخیره برای گاز مایع طراحی کنید. مشتری می خواهد مخزن به شکل استوانه و دو انتهای آن به صورت نیمکره بوده و گنجایش $8000in^3$ گاز را داشته باشد. مشتری همچنین می خواهد در ساختن این مخزن از حداقل ورق ممکن استفاده شود. شعاع و ارتفاع بخش استوانه ای مخزن باید چقدر باشد؟

سه متغیر مستقل با یک قید

۱۷- **مینیمم فاصله تا یک نقطه.** مطلوب است نقطه ای بر صفحه $x+2y+3z=13$ که نزدیکترین فاصله را تا نقطه $(1,1,1)$ دارد.

۱۸- **ماکسیمم فاصله تا یک نقطه.** مطلوب است نقطه ای بر کره $x^2+y^2+z^2=4$ که بیشترین فاصله را تا نقطه $(1,-1,1)$ دارد.

۱۹- **مینیمم فاصله تا مبداء.** کمترین فاصله رویه

$$x^2-y^2-z^2=1$$

تا مبداء چقدر است؟

۲۰- **مینیمم فاصله تا مبداء.** نقطه ای بر روی $z=xy+1$ بیابید که کمترین فاصله را تا مبداء داشته باشد.

۲۱- **مینیمم فاصله تا مبداء.** نقاطی بر رویه $z^2=xy+4$ بیابید که نزدیکترین فاصله را تا مبداء داشته باشند.

۲۲- **مینیمم فاصله تا مبداء.** نقطه (نقاطی) بر رویه $xyz=1$ بیابید که نزدیکترین فاصله را تا مبداء داشته باشند.

۲۳- **اکسترمم ها بر روی کره.** مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع

$$f(x,y,z)=x-2y+5z$$

را بر روی کره $x^2+y^2+z^2=30$ بیابید.

۲۴- **اکسترمم ها بر روی کره.** نقاطی بر روی کره

$$x^2+y^2+z^2=25$$

بیابید که در آنها تابع $f(x,y,z)=x+2y+3z$ مقادیر ماکسیمم و مینیمم خود را دارد.

۲۵- **مینیمم کردن مجموع مربعات.** سه عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها ۹ و مجموع مربعات آنها تا حد امکان کوچک باشد.

۲۶- **ماکسیمم کردن حاصلضرب.** اگر $x+y+z^2=16$ باشد بزرگترین حاصلضربی که اعداد مثبت x، y و z می توانند داشته باشند چقدر است؟

۲۷- **جعبه مستطیلی با بیشترین حجم در کره.** ابعاد جعبه مستطیلی بسته ای را بیابید که حجم آن ماکسیمم باشد و بتواند در کره واحد محاط شود.

۲۸- **جعبه ای با یک رأس واقع بر یک صفحه.** مطلوب است حجم بزرگترین جعبه مستطیلی بسته ای که در یک هشتم اول واقع بوده، سه وجه آن در صفحات مختصات واقع اند و یک گوشه آن بر روی صفحه $x/a+y/b+z/c=1$ قرار دارد. $a>0$، $b>0$ و $c>0$ است.

۲۹- **داغ ترین نقطه بر روی یک کاوشگر فضایی.** یک کاوشگر فضایی به شکل بیضیوار

$$4x^2+y^2+4z^2=16$$

وارد جو زمین می شود و سطح آن شروع به گرم شدن می کند. بعد از یک ساعت دما در نقطه (x,y,z) از سطح کاوشگر عبارت است از

$$T(x,y,z)=8x^2+4yz-16z+600$$

مطلوب است داغ ترین نقطه بر روی سطح کاوشگر.

۳۰- **دماهای اکسترمم بر روی یک کره.** فرض کنید دمای سلسیوس در نقطه (x,y,z) بر روی کره $x^2+y^2+z^2=1$ برابر است با $T=400xyz^2$. مطلوب است تعیین نقاطی بر روی کره که بالاترین و پایین ترین دما را دارند.

۳۱- **ماکسیمم کردن تابع سود: مثالی از اقتصاد.** در اقتصاد، مفید بودن یا مطلوبیت مقادیر xو y دو کالای سرمایه ای G_1 و G_2 از تابعی چون $U(x,y)$ بدست می آید. مثلاً G_1 و G_2 ممکن است دو ماده شیمیایی مورد نیاز یک شرکت داروسازی باشند و $U(x,y)$ سود حاصل از ساخت محصولی باشد که برای تولید آن، بسته به فرایند بکار رفته، به مقادیر مختلفی از این دو ماده نیاز است. اگر بهای هر کیلوگرم G_1، a دلار و بهای هر کیلوگرم G_2، b دلار و کل بودجه تخصیص یافته برای خرید G_1 و G_2، c دلار باشد مدیران شرکت تمایل دارند $U(x,y)$ را با شرط $ax+by=c$ ماکسیمم کنند. بنابراین آنها باید یک مسئله از نوع مسائل ضرایب لاگرانژ را حل کنند.

فرض کنید

$$U(x,y)=xy+2x$$

و معادله $ax+by=c$ به صورت ساده زیر باشد

$$2x+y=30$$

ماکسیمم مقدار U و مقادیر متناظر x و y را با این قید اخیر بدست آورید.

۳۲- **تعیین مکان رادیوتلسکوپ.** فرض کنید مسئول نصب یک تلسکوپ رادیویی بر روی یک سیاره تازه کشف شده هستید. برای مینیمم کردن تداخل، می خواهید آن را در جایی قرار دهید که میدان مغناطیسی سیاره از سایر جاها ضعیف تر است. سیاره، کروی و شعاع آن ۶ واحد است. بر مبنای دستگاه مختصاتی که مبداء آن در مرکز سیاره است شدت میدان مغناطیسی از رابطه $M(x,y,z)=6x-y^2+xz+60$ بدست می آید. تلسکوپ رادیویی را باید در چه نقطه ای قرار دهید؟

مقادیر اکسترمم با دو قید

۳۳- تابع

$$f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$$

را با قیدهای $2x-y=0$ و $y+z=0$ ماکسیمم کنید.

۳۴- تابع

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

را با قیدهای $x+2y+3z=6$ و $x+3y+9z=9$ مینیمم کنید.

۳۵- **کمترین فاصله تا مبداء.** مطلوب است نقطه ای بر روی فصل مشترک صفحات $y+2z=12$ و $x+y=6$ که نزدیکترین فاصله را تا مبداء دارد.

۳۶- **مقدار ماکسیمم بر روی فصل مشترک.** مطلوب است مقدار ماکسیممی که تابع

$$f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$$

مـی توانـد روی فـصل مـشترک صـفحات $2x-y=0$ و $y+z=0$ داشته باشد.

۳۷- اکسترمم ها بر روی خم تلاقی. مطلوب است مقـادیر اکـسترمم $f(x,y,z)=x^2yz+1$ بـر روی خـم تقـاطع صفحه $z=1$ با کره $x^2+y^2+z^2=10$.

۳۸-(الف)- ماکسیمم بر روی فصل مشترک. مقدار ماکسیمم $w=xyz$ را بر روی فصل مشترک دو صفحه

$$x+y+z=40 \quad \text{و} \quad x+y-z=0$$

بیابید.

۳۹- اکسترمم ها بر روی دایره تقاطع. مقـادیر اکـسترمم تـابع $f(x,y,z)=xy+z^2$ را بـر روی دایـره مقطـع صـفحه $y-x=0$ و کره $x^2+y^2+z^2=4$ بیابید.

۴۰- کمترین فاصله تا مبداء. مطلوب است نقطـه ای بـر روی خم تقاطع صفحه $2y+4z=5$ و مخروط $z^2=4x^2+4y^2$ که کمترین فاصله را تا مبداء دارد.

نظریه و مثال ها

۴۱- شرط $\nabla f=\lambda\nabla g$ کافی نیست. بـا اینکـه $\nabla f=\lambda\nabla g$ شـرط لازم بـرای ایـن اسـت کـه تـابع $f(x,y)$ بـا قیود $g(x,y)=0$ و $\nabla g\neq 0$ یک مقدار اکسترمم داشته باشد اما این شرط به تنهایی وجود مقدار اکـسترمم را تـضمین نمـی کند. به عنوان مثـال، سعی کنیـد بـا استفاده از روش ضـرایب لاگرانــژ مقــدار ماکــسیمم تــابع $f(x,y)=x+y$ را بــا قید $xy=16$ بیابید. با این روش دو نقطه $(4,4)$ و $(-4,-4)$ به عنوان مکان های احتمالی مقادیر اکسترمم بدست می آینـد. امـا مجمــوع $(x+y)$ بــر روی هــذلولی $xy=16$ هــیچ مقــدار ماکسیممی ندارد. هر چه در ربع اول بـر روی ایـن هـذلولی از مبداء دور شوید مجموع $f(x,y)=x+y$ بزرگتر می شود.

۴۲- صفحه کمترین مربعات. می خواهیم صفحه

$$z=Ax+By+C$$

از نقاط (x_k,y_k,z_k) زیر «بگذرد»:

$$(0,0,0) \quad \text{و} \quad (0,1,1) \quad \text{و} \quad (1,1,1) \quad \text{و} \quad (1,0,-1)$$

مقادیر A، B و C را چنان بیابید که مجموع مربعـات انحـراف ها یعنی

$$\sum_{k=1}^{4}\left(Ax_k+By_k+C-z_k\right)^2$$

مینیمم شود.

۴۳- (الف)- ماکسیمم بر روی یک کره. نشان دهید که مقدار ماکسیمم $a^2b^2c^2$ بر روی کره ای به شعاع r و به مرکـز مبـداء دستگاه مختصات دکارتی abc برابر است با $\left(r^2/3\right)^3$.

(ب)- میانگین های هندسی و حسابی. با اسـتفاده از قـسمت (الف) نشان دهید که برای اعداد نامنفی a، b و c،

$$(abc)^{1/3}\leq\frac{a+b+c}{3}$$

یعنی میانگین هندسی سه عدد نامنفی کمتر یا برابر بـا میـانگین حسابی آنهاست.

۴۴- مجموع حاصلضرب ها. فـرض کنیـد a_1، a_2،...، و a_n، n عدد مثبت اند. مطلوب است مقـدار ماکـسیمم $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ بـا قید $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$.

مسائل رایانه ای

در تمرین های ۴۵-۵۰ بـا اسـتفاده از یـک نـرم افـزار ریاضـی مراحل زیر را انجام دهید که همان روش ضرایب لاگرانژ بـرای یافتن اکسترمم های مقید است.

(الـف)- تـابع $h=f-\lambda_1g_1-\lambda_2g_2$ را تـشکیل دهیـد کـه f تابعی است که باید با قیدهای $g_1=0$ و $g_2=0$ اپتیمم(بهینـه) شود.

(ب)- تمام مشتقات جزئی اول h، از جمله مشتقات جزئـی آن نسبت به λ_1 و λ_2 را تعیین کرده و آنهـا را برابـر بـا صـفر قـرار دهید.

(پ)- دستگاه معـادلات بدسـت آمـده در قـسمت (ب) را بـر حسب تمام مجهول ها، از جمله λ_1 و λ_2، حل کنید.

(ت)- f را به ازای هر یک از نقـاط جـواب بدسـت آمـده در قسمت (پ) محاسبه کرده و مقدار اکسترمم را با قیود خواسـته شده در مسئله انتخاب کنید.

۴۵- تابع $f(x,y,z)=xy+yz$ را با قیود

$$x^2+z^2-2=0 \text{ و } x^2+y^2-2=0$$

مینیمم کنید.

۴۶- تابع $f(x,y,z)=xyz$ را با قیود $x^2+y^2-1=0$ و $x-z=0$ مینیمم کنید.

۴۷- تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را با قیود

$$4x^2+4y^2-z^2=0 \text{ و } 2y+4z-5=0$$

ماکسیمم کنید.

۴۸- تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را با قیود

$$x^2+y^2-1=0 \text{ و } x^2-xy+y^2-z^2-1=0$$

مینیمم کنید.

۴۹- تابع $f(x,y,z,w)=x^2+y^2+z^2+w^2$ را با قیود

$$x+y-z+w-1=0 \text{ و } 2x-y+z-w-1=0$$

مینیمم کنید.

۵۰- مطلوب است فاصله خط $y=x+1$ تا سهمی $y^2=x$. (راهنمایی: فرض کنید (x,y) نقطه ای بر روی خط و (w,z) نقطه ای بر روی سهمی باشد. باید $(x-w)^2+(y-z)^2$ را مینیمم کنید).

۱۴-۹- فرمول تیلر برای توابع دو متغیره

در این بخش با استفاده از فرمول تیلر آزمون مشتق دوم برای مقادیر اکسترمم موضعی (بخش۱۴-۷) و فرمول خطا برای خطی سازی (تقریب خطی) توابع دارای دو متغیر مستقل (بخش۱۴-۶) را بدست می آوریم. استفاده از فرمول تیلر در این استنتاج ها به تعمیم فرمول تیلر می انجامد که خود امکان تقریب های چند جمله ای از هر مرتبه را برای توابع دارای دو متغیر مستقل فراهم می کند.

استنتاج آزمون مشتق دوم

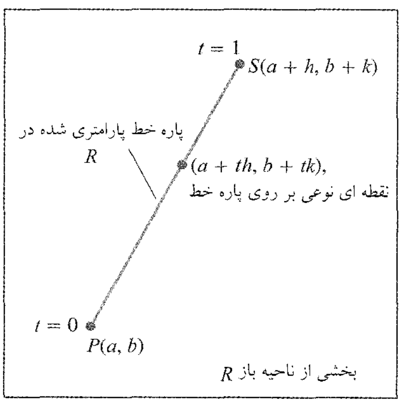
فرض کنید $f(x,y)$ در ناحیه باز R شامل نقطه $P(a,b)$، که در آن $f_x=f_y=0$، مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد (شکل۱۴-۵۷). فرض کنید h و k نموهایی به اندازه کافی کوچک باشند که نقطه $S(a+h,b+k)$ و پاره خطی که آن را به P وصل می کند درون R قرار گیرند. PS را با معادلات پارامتری زیر توصیف می کنیم

$$x=a+th \quad \text{و} \quad y=b+tk \quad \text{و} \quad 0\le t\le 1$$

اگر $F(t)=f(a+th,b+tk)$ باشد قاعده زنجیری نتیجه می دهد

$$F'(t)=f_x\frac{dx}{dt}+f_y\frac{dy}{dt}=hf_x+kf_y$$

چون f_x و f_y مشتق پذیرند (مشتقات جزئی پیوسته دارند)، F' تابع مشتق پذیری از t است و



شکل۱۴-۵۷: استنتاج آزمون مشتق دوم در $P(a,b)$ را با پارامتری کردن (نوشتن معادلات پارامتری) یک پاره خط نوعی که از P به نقطه نزدیک S رسم می شود، آغاز می کنیم.

$$\begin{aligned}F''&=\frac{\partial F'}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F'}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(hf_x+kf_y\right).h+\frac{\partial}{\partial y}\left(hf_x+kf_y\right).k\\&=h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}\end{aligned}$$

چون F و F' بر[۱ و۰] پیوسته اند و F' بر(۱ و۰) مشتق پذیر است، می توانیم فرمول تیلر را به ازای $n=2$ و $a=0$ بکار برده و به روابط زیر برسیم

$$F(1)=F(0)+F'(0)(1-0)+F''(c)(1-0)^2/2$$

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2}F''(c) \qquad (1)$$

که c عددی بین 0 و 1 است. اگر معادله (۱) را بر حسب f بیان کنیم داریم

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+ hf_x(a,b)+kf_y(a,b)+ \frac{1}{2}\left(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,b+ck)} \quad (۲)$$

از آنجا که $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$، این معادله به صورت زیر درمی آید

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)= =\frac{1}{2}\left(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,b+ck)} \quad (۳)$$

وجود یک اکسترمم برای f در (a,b) با علامت $f(a+b,b+k)-f(a,b)$ مشخص می شود. بنابه معادله (۳) علامت این عبارت با علامت عبارت زیر یکی است

$$Q(c)=\left(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

حال اگر $Q(0)\neq 0$ باشد علامت $Q(c)$ به ازای مقادیر بقدر کافی کوچک b و k با علامت $Q(0)$ یکی خواهد بود. علامت

$$Q(0)=h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b) \quad (۴)$$

را می توانیم از علامت های f_{xx} و $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ در (a,b) پیش بینی کنیم. طرفین معادله (۴) را در f_{xx} ضرب کرده و سمت راست را مرتب می کنیم تا به رابطه زیر برسیم

$$f_{xx}Q(0)=\left(hf_{xx}+kf_{xy}\right)^2+\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}{}^2\right)k^2 \quad (۵)$$

از معادله (۵) می توان پی برد که:

۱- اگر در (a,b)، $f_{xx}<0$ و $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ باشد آنگاه به ازای تمام مقادیر ناصفر و بقدر کافی کوچک h و k، $Q(0)<0$ و f در (a,b) یک مقدار ماکسیمم موضعی دارد.

۲- اگر در (a,b)، $f_{xx}>0$ و $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ باشد آنگاه به ازای تمام مقادیر ناصفر و بقدر کافی کوچک h و k، $Q(0)>0$ و f در (a,b) یک مقدار مینیمم موضعی دارد.

۳- اگر در (a,b)، $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$ باشد ترکیب هایی از مقادیر ناصفر و به دلخواه کوچک h و k وجود دارند که به ازای آنها $Q(0)>0$ و مقادیر دیگری که به ازای آنها $Q(0)<0$. در فواصل به دلخواه نزدیک به نقطه $P_0(a,b,f(a,b))$ بر رویه $z=f(x,y)$ نقاطی بالای P_0 و نقاطی پایین P_0 وجود دارند، لذا f در (a,b) یک نقطه زینی دارد.

۴- اگر $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$ باشد به آزمون دیگری نیاز داریم. امکان اینکه $Q(0)$ برابر صفر باشد مانع از نتیجه گیری در مورد علامت $Q(c)$ می شود.

فرمول خطا برای تقریب های خطی

می خواهیم نشان دهیم که $E(x,y)$، اختلاف بین مقادیر تابعی چون $f(x,y)$ و تقریب خطی آن $L(x,y)$ در (x_0,y_0)، در نامساوی زیر صدق می کند

$$|E(x,y)|\leq\frac{1}{2}M\left(|x-x_0|+|y-y_0|\right)^2$$

فرض می کنیم تابع f در سراسر مجموعه بازی شامل ناحیه مستطیلی بسته R به مرکز (x_0,y_0) دارای مشتقات جزئی دوم پیوسته باشد. عدد M یک کران بالا برای $|f_{xx}|$، $|f_{yy}|$ و $|f_{xy}|$ بر R است.

نامساوی مورد نظر از معادله (۲) بدست می آید. به جای a و b به ترتیب x_0 و y_0 و به جای h و k، به ترتیب $x-x_0$ و $y-y_0$ قرار می دهیم و نتیجه را به صورت زیر مرتب می کنیم

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)\\&+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\&+\frac{1}{2}((x-x_0)^2f_{xx}+2(x-x_0)(y-y_0)f_{xy}\\&+(y-y_0)^2f_{yy})\Big|_{(x_0+c(x-x_0),y_0+c(y-y_0))}\end{aligned}$$

سه جمله اول صورت خطی $L(x,y)$ و بقیه خطای $E(x,y)$ است. از این معادله چنین برمی آید که

$$|E|\leq\frac{1}{2}(|x-x_0|^2|f_{xx}|+2|x-x_0||y-y_0||f_{xy}| +|y-y_0|^2|f_{yy}|)$$

از این رو اگر M یک کران بالا برای مقادیر $|f_{xx}|$، $|f_{yy}|$ و $|f_{xy}|$ بر R باشد،

$$|E| \le \frac{1}{2}(|x-x_0|^2 M + 2|x-x_0||y-y_0|M + |y-y_0|^2 M) = \frac{1}{2}M\left(|x-x_0|+|y-y_0|\right)^2$$

فرمول تیلر برای توابع دو متغیره

فرمول هایی را که قبلاً برای F' و F'' بدست آوردیم را می توان با اعمال عملگرهای زیر بر $f(x,y)$ بدست آورد

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

و

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

اینها دو نمونه اول از فرمول کلی تر زیر هستند

$$F^{(n)}(t)=\frac{d^n}{dt^n}F(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y) \qquad (۶)$$

که حاکی از آن است که اعمال d^n/dt^n به $F(t)$ همان نتیجه ای را بدست می دهد که اعمال عملگر

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

بعد از بسط آن به کمک قضیه دو جمله ای به $f(x,y)$.

اگر مشتقات جزئی f تا مرتبه $n+1$ در سراسر یک ناحیه مستطیلی به مرکز نقطه ای چون (a,b) پیوسته باشند می توانیم فرمول تیلر $F(t)$ را به صورت زیر با جملات بیشتری بنویسیم

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^{(n)}+ \text{باقیمانده}$$

و اگر $t=1$ بگیریم،

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\text{باقیمانده}$$

اگر به جای n مشتق اول واقع در سمت راست این سری عبارت های معادلشان را که از معادله (۶) به ازای $t=0$ محاسبه می شوند، قرار دهیم و جمله باقیمانده مناسب را به آن بیفزاییم به فرمول زیر می رسیم.

فرمول تیلر $f(x,y)$ در نقطه (a,b)

فرض کنید $f(x,y)$ و مشتقات جزئی آن تا مرتبه $n+1$ در سراسر ناحیه مستطیلی باز R به مرکز نقطه ای چون (a,b) پیوسته باشند. در این صورت در سراسر R داریم

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(hf_x+kf_y\right)\Big|_{(a,b)}+\frac{1}{2!}\left(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy}\right)\Big|_{(a,b)}$$
$$+\frac{1}{3!}\left(h^3f_{xxx}+3h^2kf_{xxy}+3hk^2f_{xyy}+k^3f_{yyy}\right)\Big|_{(a,b)}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(a,b)}$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(a+ch,b+ck)} \qquad (۷)$$

n جمله مشتقی اول در (a,b) محاسبه می شوند. جمله آخر در نقطه $(a+ch,b+ck)$ بر پاره خطی که (a,b) و $(a+h,b+h)$ را به هم وصل می کند محاسبه می شود.

اگر $(a,b)=(0,0)$ باشد و h و k را به صورت متغیرهای مستقل در نظر بگیریم (که حالا با x و y نشان می دهیم) معادله (۷) به شکل ساده تر زیر درمی آید.

فرمول تیلر $f\left(x,y\right)$ در مبداء

$$f\left(x,y\right)=f\left(0,0\right)+xf_x+yf_y+\frac{1}{2!}\left(x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}\right)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(x^3f_{xxx}+3x^2yf_{xxy}+3xy^2f_{xyy}+y^3f_{yyy}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Bigg|_{(cx,cy)} \qquad (۸)$$

n جمله مشتقی اول در $(0,0)$ محاسبه می شوند. جمله آخر در نقطه ای بر روی پاره خط واصل مبداء و نقطه (x,y) محاسبه می شود.

به کمک فرمول تیلر می توان به تقریب های چند جمله ای توابع دو متغیره دست یافت. n جمله مشتقی اول چند جمله ای را بدست می دهند و جمله آخر خطای تقریب را بدست می دهد. سه جمله اول فرمول تیلر صورت خطی تابع است. برای بهبود صورت خطی، جملات با توان بالاتر را به آن می افزاییم.

مثال ۱: مطلوب است یک تقریب درجه دوم برای

$$f\left(x,y\right)=\sin x\,\sin y$$

در نزدیکی مبداء. اگر $|x|\le 0.1$ و $|y|\le 0.1$ باشد دقت تقریب چقدر است؟

حل: در معادله (۸)، $n=2$ قرار می دهیم

$$f\left(x,y\right)=f\left(0,0\right)+\left(xf_x+yf_y\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}\right)$$
$$+\frac{1}{6}(x^3f_{xxx}+3x^2yf_{xxy}+3xy^2f_{xyy}$$
$$+y^3f_{xyy}+y^3f_{yyy})_{(cx,cy)}$$

مقادیر مشتقات جزئی را محاسبه می کنیم

$$f_{xx}\left(0,0\right)=-\sin x\,\sin y\Big|_{(0,0)}=0$$
$$f\left(0,0\right)=\sin x\,\sin y\Big|_{(0,0)}=0$$
$$f_{xy}\left(0,0\right)=\cos x\,\cos y\Big|_{(0,0)}=1$$
$$f_x\left(0,0\right)=\cos x\,\sin y\Big|_{(0,0)}=0$$
$$f_{yy}\left(0,0\right)=-\sin x\sin y\Big|_{(0,0)}=0$$
$$f_y\left(0,0\right)=\sin x\,\cos y\Big|_{(0,0)}=0$$

نتیجه عبارت است از

$$\sin x\,\sin y\approx xy$$

یا

$$\sin x\,\sin y\approx 0+0+0+\frac{1}{2}\left(x^2\left(0\right)+2xy\left(1\right)+y^2\left(0\right)\right)$$

خطای تقریب برابر است با

$$E\left(x,y\right)=\frac{1}{6}(x^3f_{xxx}+3x^2yf_{xxy}$$
$$+3xy^2f_{xyy}+y^3f_{yyy})|_{(cx,cy)}$$

قدر مطلق مشتقات مرتبه سوم هرگز بیشتر از ۱ نمی شوند زیرا حاصلضرب های توابع سینوسی و کسینوسی هستند و همچنین $|x|\le 0.1$ و $|y|\le 0.1$. بنابراین

$$\left|E\left(x,y\right)\right|\le\frac{1}{6}\left((0.1)^3+3(0.1)^3+3(0.1)^3+(0.1)^3\right)$$
$$=\frac{8}{6}(0.1)^3\le 0.00134$$

(گرد شده است) مادامی که $|x|\le 0.1$ و $|y|\le 0.1$ باشد خطا از ۰/۰۰۱۳۴ تجاوز نخواهد کرد.

تمرین های ۱۴-۹

یافتن تقریب های درجه دوم و سوم

در تمرین های ۱-۱۰ با استفاده از فرمول تیلر $f(x,y)$ در مبداء تقریب های درجه دوم و سوم f را در نزدیکی مبداء بیابید.

۱- $f(x,y)=xe^{y}$

۲- $f(x,y)=e^{x}\cos y$

۳- $f(x,y)=y\sin x$

۴- $f(x,y)=\sin x\cos y$

۵- $f(x,y)=e^{x}\ln(1+y)$

۶- $f(x,y)=\ln(2x+y+1)$

۷- $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$

۸- $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$

۹- $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y}$

۱۰- $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$

۱۱- با استفاده از فرمول تیلر یک تقریب درجه دوم برای $f(x,y)=\cos x\cos y$ در مبداء بیابید. اگر $|x|\le 0.1$ و $|y|\le 0.1$ باشد خطای تقریب را برآورد کنید.

۱۲- با استفاده از فرمول تیلر یک تقریب درجه دوم برای $e^{x}\sin y$ در مبداء بیابید. اگر $|x|\le 0.1$ و $|y|\le 0.1$ باشد خطای تقریب را برآورد کنید.

۱۴-۱۰- مشتقات جزئی با متغیرهای مقید

تاکنون در یافتن مشتقات جزئی توابعی نظیر $w=f(x,y)$ فرض کرده ایم x و y مستقل اند. اما در بسیاری از مسائل اینگونه نیست. مثلاً انرژی درونی U یک گاز را می توان به صورت تابعی چون $U=f(P,V,T)$ از فشار P، حجم V و دمای T گاز بیان کرد. اما اگر تک تک مولکول های گاز با هم برهمکنش نداشته باشند، P، V و T از قانون گازهای ایده ال پیروی می کنند (و بوسیله آن مقید می شوند)

$$PV=nRT \qquad (n \text{ و } R \text{ ثابت})$$

و لذا نمی توانند مستقل باشند. در این بخش خواهیم آموخت که در وضعیت هایی شبیه این که در اقتصاد، مهندسی و فیزیک با آنها مواجه می شویم، چگونه مشتقات جزئی را محاسبه می کنیم.

کدام متغیرها مستقل و کدام متغیرها وابسته اند؟

اگر متغیرهای x، y و z تابعی چون $w=f(x,y,z)$ با رابطه ای مانند $z=x^2+y^2$ به هم مقید باشند، مفاهیم هندسی و مقادیر عددی مشتقات جزئی f بستگی به این خواهند داشت که کدام متغیرها وابسته و کدام متغیرها مستقل انتخاب می شوند. برای پی بردن به اینکه چگونه این انتخاب می توانند بر نتیجه تأثیر بگذارد $\partial w/\partial x$ را با فرض $w=x^2+y^2+z^2$ و $z=x^2+y^2$ محاسبه می کنیم.

مثال ۱: اگر

$$w=x^2+y^2+z^2 \text{ و } z=x^2+y^2$$

باشد $\partial w/\partial x$ را بیابید.

حل: دو معادله برحسب چهار متغیر x، y، z و w داده شده است. مثل بسیاری از دستگاه های معادلات، می توان این دستگاه را حل کرده و دو مجهول آن (متغیرهای وابسته) را برحسب دو مجهول دیگر (متغیرهای مستقل) بدست آورد. وقتی محاسبه $\partial w/\partial x$ مورد نظر است w متغیر وابسته و x متغیر مستقل است. پس برای متغیرهای دیگر دو انتخاب وجود دارد:

مستقل	وابسته
x و y	z و w
x و z	y و w

در هر حالت می توان w را بطور صریح برحسب متغیرهای

مستقل انتخابی بدست آورد. برای این کار، با استفاده از معادله دوم $z=x^2+y^2$ متغیر وابسته باقیمانده را در معادله اول حذف می کنیم.

در حالت اول، متغیر وابسته باقیمانده z است که با قرار دادن x^2+y^2 به جای آن، آن را از معادله اول حذف می کنیم. عبارت حاصل برای w عبارت است از

$$w=x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)^2$$
$$=x^2+y^2+x^4+2x^2y^2+y^4$$

و

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x+4x^3+4xy^2 \qquad (۱)$$

این، فرمول $\partial w/\partial x$ است وقتی که x و y متغیرهای مستقل باشند.

در حالت دوم، که x و z متغیرهای مستقل و y متغیر باقیمانده است متغیر وابسته y را در عبارت مربوط به w با قرار دادن $z-x^2$ به جای y^2 در معادله دوم، حذف می کنیم. نتیجه عبارت است از

$$w=x^2+y^2+z^2=x^2+z^2=z+z^2$$

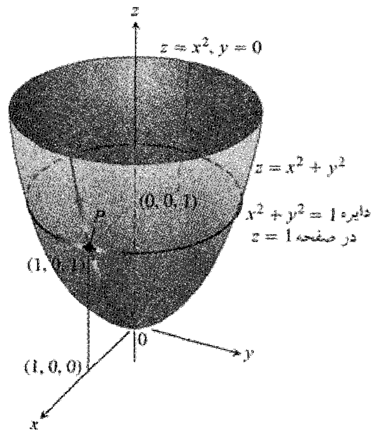
و

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad (۲)$$

این، فرمول $\partial w/\partial x$ است وقتی که x و z متغیرهای مستقل اند.

فرمول های مربوط به $\partial w/\partial x$ در معادلات (۱) و (۲) کاملاً متفاوت اند. با استفاده از رابطهٔ $z=x^2+y^2$ نمی توانیم یکی از فرمول ها را به دیگری تبدیل کنیم. فقط یک $\partial w/\partial x$ وجود ندارد بلکه دو تا وجود دارد و ملاحظه می کنیم که صورت مسئله برای یافتن $\partial w/\partial x$ کامل نبوده است. باید مشخص شود که کدام $\partial w/\partial x$ مورد نظر است.

تعابیر هندسی معادلات (۱) و (۲) به ما کمک می کنند تا توضیح دهیم که چرا این دو معادله با هم تفاوت دارند. تابع $w=x^2+y^2+z^2$ مربع فاصله نقطه (x,y,z) از مبدا است. شرط $z=x^2+y^2$ بیانگر این است که نقطه (x,y,z) بر روی سهمیوار دورانی شکل ۱۴-۵۸ قرار دارد. محاسبه $\partial w/\partial x$ در نقطه ای چون $P(x,y,z)$ که فقط می تواند برروی این رویه حرکت کند چه معنایی دارد؟ وقتی مختصات P مثلاً $(1,0,1)$ است مقدار $\partial w/\partial x$ چقدر است؟



شکل۱۴-۵۸ : اگر P مقید باشد روی سهمیوار $z=x^2+y^2$ قرار گیرد مقدار مشتق جزئی $w=x^2+y^2+z^2$ نسبت به x در P به جهت حرکت بستگی دارد (مثال۱). (۱)- وقتی x تغییر می کند و $y=0$، P بر سهمیوار $z=x^2$ واقع در صفحه xz با سرعت $\partial w/\partial x=2x+4x^2$ برروی رویه به بالا یا پایین می رود. (۲)- وقتی x تغییر می کند و $z=1$، P برروی دایره $x^2+y^2=1, z=1$ حرکت می کند و $\partial w/\partial x=0$.

اگر x و y را مستقل بگیریم برای محاسبه $\partial w/\partial x$، y را ثابت نگه داشته (در این حالت در $y=0$) و اجازه می دهیم x تغییر کند. از این رو P در امتداد سهمی $z=x^2$ واقع در صفحه xz حرکت می کند. وقتی P بر روی این سهمی حرکت می کند، w که مربع فاصله P تا مبداء است، تغییر می کند. در این حالت (جواب اول مذکور در بالا) $\partial w/\partial x$ به صورت زیر بدست می آید

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x+4x^3+4xy^2$$

در نقطه $P(1,0,1)$، مقدار این مشتق برابر است با

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2+4+0=6$$

اگر x و z را متغیرهای مستقل بگیریم، برای محاسبه

$\partial w / \partial x$، z را ثابت نگه داشته و x را تغییر می دهیم. چون مختص z نقطه P برابر ۱ است، با تغییر x، P بر روی یک دایره در صفحه $z=1$ حرکت می کند. وقتی P بر روی این دایره حرکت می کند فاصله آن از مبداء ثابت باقی می ماند و w، که مربع این فاصله است، تغییر نمی کند. یعنی

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

که همان پاسخ دوم ماست.

چگونگی یافتن $\partial w / \partial x$ وقتی متغیرهای تابع $w=f(x,y,z)$ با معادله دیگری مقیدند

همانطور که در مثال ۱ دیدیم روش یافتن $\partial w / \partial x$ وقتی که متغیرهای موجود در تابع $w=f(x,y,z)$ با معادله دیگری به هم مربوط می شوند شامل سه مرحله است. این مراحل در یافتن $\partial w / \partial y$ و $\partial w / \partial z$ هم بکار می روند.

۱- تصمیم بگیرید که کدام متغیرها وابسته و کدام متغیرها مستقل باشند. (در عمل این تصمیم به محتوای فیزیکی یا نظری مسئله بستگی دارد. در تمرینهای انتهای این بخش، گفته شده است که کدام متغیرها از چه نوعی هستند).

۲- در عبارت مربوط به w متغیر (های) وابسته دیگر را حذف کنید.

۳- طبق معمول مشتق بگیرید.

اگر بعد از تصمیم گیری در مورد اینکه کدام متغیرها وابسته اند نتوانستید مرحله ۲ را اجرا کنید از معادلات به همان صورتی که هستند مشتق بگیرید و بعد از آن سعی کنید $\partial w / \partial x$ را بدست آورید. مثال زیر چگونگی انجام این کار را نشان می دهد.

مثال ۲: اگر x و y متغیرهای مستقل باشند و

$$w=x^2+y^2+z^2 \quad \text{و} \quad z^3-xy+yz+y^3=1$$

$\partial w / \partial x$ را در نقطه $(x,y,z)=(2,-1,1)$ بیابید.

حل: حذف z در عبارت مربوط به w راحت نیست. بنابراین از دو طرف معادلات نسبت به x مشتق ضمنی گرفته، x و y را به عنوان متغیرهای مستقل و w و z را به عنوان متغیرهای وابسته در نظر می گیریم. نتیجه عبارت است از

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (۳)$$

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-y+y\frac{\partial z}{\partial x}+0=0 \qquad (۴)$$

اکنون می توان این معادلات را ترکیب کرده و $\partial w / \partial x$ را بر حسب x، y و z بدست آورد. معادله (۴) را برحسب $\partial z / \partial x$ حل کرده و بدست می آوریم

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{y+3z^2}$$

این مقدار را در معادله (۳) قرار داده و به معادله زیر می رسیم

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x+\frac{2yz}{y+3z^2}$$

مقدار این مشتق در $(x,y,z)=(2,-1,1)$ برابر است با

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(2,-1,1)}=2(2)+\frac{2(-1)(1)}{-1+3(1)^2}=4+\frac{-2}{2}=3$$

نمادگذاری

در محاسبه مشتق برای نشان دادن اینکه چه متغیرهایی را مستقل فرض کرده ایم می توانیم از نمادگذاری زیر استفاده کنیم

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y \qquad \partial w / \partial x \text{ با } x \text{ و } y \text{ مستقل}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,t} \qquad \partial f / \partial y \text{ با } y\text{، } x \text{ و } t \text{ مستقل}$$

مثال ۳: اگر $w=x^3+y-z+\sin t$ و $x+y=t$ باشد مطلوب است محاسبه $(\partial w / \partial x)_{y,z}$.

حل: اگر x، y و z مستقل باشند داریم

$$w=x^2+y-z+\sin(x+y) \quad \text{و} \quad t=x+y$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z}=2x+0-0+\cos(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y)$$

$$=2x+\cos(x+y)$$

نمودارهای پیکانی

در حل مسائلی مثل مثال ۳، غالباً بهتر است با یک نمودار پیکانی شروع کنیم که نشان می دهد متغیرها و توابع چگونه به

هم مربوط می شوند. اگر

$$w = x^2 + y - z + \sin t \quad \text{و} \quad x + y = t$$

و از ما خواسته شده باشد $\partial w/\partial x$ را وقتی x، y و z مستقل اند محاسبه کنیم، نمودار مناسب به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \to w \qquad (۵)$$

متغیر وابسته   متغیرهای واسطه   متغیرهای مستقل

برای اجتناب از بروز اشتباه بین متغیرهای مستقل و وابسته با نام های نمادی یکسان در نمودار، بهتر است نامهای دیگری برای متغیرهای واسطه انتخاب کنیم (لذا این متغیرها به صورت توابعی از متغیرهای مستقل به نظر می رسند). بنابراین فرض کنید $u = x$، $v = y$ و $s = z$ متغیرهای واسطه با نام جدید باشند. با این نمادگذاری نمودار پیکانی به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \\ t \end{pmatrix} \to w \qquad (۶)$$

متغیر وابسته   متغیرهای واسطه و روابط   متغیرهای مستقل

$$u = x$$
$$v = y$$
$$s = z$$
$$t = x + y$$

این نمودار، متغیرهای مستقل را در سمت چپ، متغیرهای واسطه و رابطه آنها با متغیرهای مستقل را در وسط و متغیر وابسته را در سمت راست نشان می دهد. تابع w اکنون به صورت زیر درمی آید

$$w = u^2 + v - s + \sin t$$

که در آن

$$u = x \quad \text{و} \quad v = y \quad \text{و} \quad s = z \quad \text{و} \quad t = x + y$$

برای محاسبه $\partial w/\partial x$ با کمک گرفتن از نمودار پیکانی معادله (۶) شکل چهار متغیری قاعده زنجیری را برای w بکار می بریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \\ &= (2u)(1) + (1)(0) + (-1)(0) + (\cos t)(1) \\ &= 2u + \cos t \end{aligned}$$

(متغیرهای مستقل اصلی $u = x$ و $t = x + y$ را جانشانی می کنیم)

$$= 2x + \cos(x + y)$$

تمرین های ۱۴–۱۰

محاسبه مشتقات جزئی با متغیرهای مقید

در تمرین های ۱–۳ ابتدا نموداری رسم کنید که روبط بین متغیرها را نشان دهد.

۱- اگر $w = x^2 + y^2 + z^2$ و $z = x^2 + y^2$ باشد مطلوب است

(الف)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ (ب)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ (پ)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

۲- اگر $w = x^2 + y - z + \sin t$ و $x + y = t$ باشد مطلوب است

(الف)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z}$ (ب)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_{z,t}$ (پ)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$

(ت)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_{y,t}$ (ث)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z}$ (ج)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)_{y,z}$

۳- فرض کنید $U = f(P, V, T)$ انرژی درونی گازی باشد که از قانون گازهای ایده ال یعنی $PV = nRT$ پیروی می کند (که n و R ثابت اند). مطلوب است

(الف)- $\left(\dfrac{\partial U}{\partial P}\right)_V$ (ب)- $\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$

۴- اگر $w=x^2+y^2+z^2$ و $y\sin z+z\sin x=0$ باشد مطلوب است محاسبه

(الف)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ (ب)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

در نقطه $(x,y,z)=(0,1,\pi)$.

۵- اگر $w=x^2y^2+yz-z^3$ و $x^2+y^2+z^2=6$ باشد مطلوب است محاسبه مشتقات زیر در نقطه

$$(w,x,y,z)=(4,2,1,-1)$$

(الف)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_x$ (ب)- $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_z$

۶- اگر $x=u^2+v^2$ و $y=uv$ باشد $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_x$ را در نقطه

$$(u,v)=\left(\sqrt{2},1\right)$$

بیابید.

۷- فرض کنید همانطور که در مختصات قطبی داریم،

$$x^2+y^2=r^2 \text{ و } x=r\cos\theta$$

مطلوب است

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y \text{ و } \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta$$

۸- فرض کنید

$$w=x^2-y^2+4z+t \quad \text{و} \quad x+2z+t=25$$

نشان دهید که معادلات

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x-1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=2x-2$$

هر کدام $\partial w/\partial x$ را به دست می دهند بسته به اینکه کدام متغیرها را مستقل و کدام متغیرها را وابسته انتخاب کنیم. در هر مورد متغیرهای مستقل را مشخص کنید.

نظریه و مثال ها

۹- با فرض $f(x,y,z)=0$، رابطه زیر را که در هیدرودینامیک کاربرد زیادی دارد ثابت کنید

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1$$

(راهنمایی: تمام مشتقات را بر حسب مشتقات جزئی صوری $\partial f/\partial x$، $\partial f/\partial y$ و $\partial f/\partial z$ بیان کنید).

۱۰- اگر $z=x+f(u)$ و $u=xy$ باشد نشان دهید که

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x$$

۱۱- فرض کنید معادله $g(x,y,z)=0$، z را به صورت تابع مشتق پذیری از متغیرهای مستقل x و y مشخص می کند و نیز $g_z\neq 0$. نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x=-\frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z}$$

۱۲- فرض کنید $f(x,y,z,w)=0$ و $g(x,y,z,w)=0$، z و w را به صورت توابع مشتق پذیری از متغیرهای مستقل x و y مشخص می کنند و فرض کنید

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w}-\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z}\neq 0$$

نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial w}-\dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial w}-\dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial g}{\partial z}}$$

و

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial w}-\dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial g}{\partial z}}$$

فصل ۱۴: پرسش های مروری

۱- منظور از یک تابع حقیقی - مقدار با دو متغیر مستقل چیست؟ با سه متغیر مستقل چطور؟ مثال بزنید.

۲- مفهوم باز بودن مجموعه ها در صفحه و در فضا چیست؟ مفهوم بسته بودن آنها چطور؟ مثال بزنید. چند مثال از مجموعه هایی بزنید که نه بازند و نه بسته.

۳- چگونه می توانید مقادیر تابعی چون $f(x,y)$ با دو متغیر

مستقل را به صورت ترسیمی (گرافیکی) نمایش دهید. چگونه همین کار را برای تابعی چون $f(x,y,z)$ با سه متغیر مستقل انجام می دهید.

۴- مفهوم اینکه حد تابعی چون $f(x,y)$ وقتی $(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)$ میل می کند L است چیست؟ ویژگی های اساسی حدود توابع دو متغیره کدامند؟

۵- چه زمانی یک تابع دو (سه) متغیره در نقطه ای از دامنه اش پیوسته است؟ توابعی مثال بزنید که در نقاطی از دامنه خود پیوسته و در سایر نقاط ناپیوسته اند.

۶- در مورد ترکیبهای جبری توابع پیوسته چه می توان گفت؟

۷- آزمون دو مسیر را برای عدم وجود حدود توضیح دهید.

۸- مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ تابعی چون $f(x,y)$ چگونه تعریف می شوند؟ این کمیت ها چه تعبیری دارند و چگونه محاسبه می شوند؟

۹- رابطه بین مشتقات جزئی اول و پیوستگی توابع دارای دو متغیر مستقل چه تفاوتی با رابطه بین مشتقات اول و پیوستگی توابع حقیقی – مقدار دارای یک متغیر مستقل دارد؟ مثالی بزنید.

۱۰- قضیه مشتق آمیخته برای مشتقات جزئی مرتبه دوم آمیخته چیست؟ این قضیه در محاسبه مشتقات جزئی مرتبه دوم و بالاتر چه کمکی می تواند بکند؟ مثال هایی بیاورید.

۱۱- مفهوم مشتق پذیر بودن تابعی چون $f(x,y)$ چیست؟ قضیه نمو در مورد مشتق پذیری چه چیزی بیان می کند؟

۱۲- چگونه می توان گاهی با بررسی f_x و f_y پی برد که تابعی چون $f(x,y)$ مشتق پذیر است؟ بین مشتق پذیری f وپیوستگی f در یک نقطه چه رابطه ای وجود دارد؟

۱۳- قاعده زنجیری کلی چیست؟ این قاعده برای توابع دارای دو متغیر مستقل به چه صورتی در می آید؟ برای توابع دارای سه متغیر مستقل چطور؟ برای توابعی که بر رویه ها تعریف می شوند چطور؟ نمودار این شکل های مختلف را رسم کنید. چند مثال بزنید. با چه الگویی می توانید تمام این شکل های مختلف را به خاطر بسپارید؟

فصل ۱۴: تمرین های عملی

دامنه، برد و خم های تراز

در تمرین های۱-۴ دامنه و برد تابع مفروض را یافته و خم های تراز آن را مشخص کنید. یک خم تراز نوعی آن را رسم کنید.

۱- $f(x,y)=9x^2+y^2$

۲- $f(x,y)=e^{x+y}$

۳- $g(x,y)=1/xy$

۴- $g(x,y)=\sqrt{x^2-y}$

در تمرین های۵-۸ دامنه و برد تابع مفروض را یافته و رویه های تراز آن را مشخص کنید. یک رویه تراز نوعی آن را رسم کنید.

۵- $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$

۶- $g(x,y,z)=x^2+y^2+9z^2$

۷- $h(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

۸- $k(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+1}$

محاسبه حدود

در تمرین های۹- ۱۴ حد توابع را بیابید.

۹- $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(\pi,\ln 2)} e^y\cos x$

۱۰- $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \dfrac{2+y}{x+\cos y}$

۱۱- $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(1,1)} \dfrac{x-y}{x^2-y^2}$

۱۲- $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(1,1)} \dfrac{x^3y^3-1}{xy-1}$

۱۳- $\lim\limits_{P\rightarrow(1,-1,e)} \ln|x+y+z|$

۱۴- $\lim\limits_{P\rightarrow(1,-1,-1)} \tan^{-1}(x+y+z)$

در تمرین های ۱۵ و ۱۶ با در نظر گرفتن مسیرهای میل مختلف نشان دهید که حد وجود ندارد.

۱۵- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq x^2}} \dfrac{y}{x^2-y}$

۱۶- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \dfrac{x^2+y^2}{xy}$

۱۷- **تعمیم پیوسته.** فرض کنید به ازای $(x,y)\neq(0,0)$،

$$f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$$

آیا ممکن است $f(0,0)$ را طوری تعریف کنیم که f در مبداء پیوسته باشد؟ چرا؟

۱۸- **تعمیم پیوسته.** فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-y)}{|x|+|y|} & |x|+|y|\neq 0\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

آیا f در مبداء پیوسته است؟ چرا؟

مشتقات جزئی

در تمرین های ۱۹- ۲۴ مشتق جزئی تابع مفروض را نسبت به هر یک از متغیرها بدست آورید.

۱۹- $g(r,\theta)=r\cos\theta+r\sin\theta$

۲۰- $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

۲۱- $f(R_1,R_2,R_3)=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}$

۲۲- $h(x,y,z)=\sin(2\pi x+y-3z)$

۲۳- $P(n,R,T,V)=\dfrac{nRT}{V}$ (قانون گازهای ایده ال)

۲۴- $R(r,l,T,w)=\dfrac{1}{2rl}\sqrt{\dfrac{T}{\pi w}}$

مشتقات جزئی مرتبه دوم

در تمرین های ۲۵- ۲۸ مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع مفروض را بیابید.

۲۵- $g(x,y)=y+\dfrac{x}{y}$

۲۶- $g(x,y)=e^x+y\sin x$

۲۷- $f(x,y)=x+xy-5x^3+\ln(x^2+1)$

۲۸- $f(x,y)=y^2-3xy+\cos y+7e^y$

محاسبات با قاعده زنجیری

۲۹- مطلوب است محاسبه dw/dt در $t=0$ در صورتیکه

$$w=\sin(xy+\pi) \text{ ، } x=e^t \text{ و } y=\ln(t+1)$$

۳۰- مطلوب است محاسبه dw/dt در $t=1$ در صورتیکه

$$w=xe^y+y\sin z-\cos z \text{ ، } x=2\sqrt{t}$$

$$y=t-1+\ln t \text{ ، } z=\pi t.$$

۳۱- مطلوب است محاسبه $\partial w/\partial r$ و $\partial w/\partial s$ در $r=\pi$ و $s=0$ در صورتیکه

$$w=\sin(2x-y) \text{ و } x=r+\sin s \text{ و } y=rs$$

۳۲- اگر

$$w=\ln\sqrt{1+x^2}-\tan^{-1}x \text{ و } x=2e^u\cos v$$

مطلوب است محاسبه $\partial w/\partial u$ و $\partial w/\partial v$ وقتی $u=v=0$.

۳۳- مقدار مشتق $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ را نسبت به t بر روی خم $x=\cos t$، $y=\sin t$ و $z=\cos 2t$ در $t=1$ بدست آورید.

۳۴- نشان دهید که اگر $w=f(s)$ تابع مشتق پذیر دلخواهی از s باشد و اگر $s=y+5x$ آنگاه

$$\frac{\partial w}{\partial x}-5\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

مشتق گیری ضمنی

فرض کنید معادلات تمرین های ۳۵ و ۳۶ y را به صورت تابع مشتق پذیری از x تعریف می کنند مقدار dy/dx را در نقطه P بیابید.

۳۵- $1-x-y^2-\sin xy=0$ و $P(0,1)$

۳۶- $2xy+e^{x+y}-2=0$ و $P(0,\ln 2)$

مشتقات جهتی

در تمرین های ۳۷ -۴۰ جهت هایی را بیابید که در آنها f در P_0 سریعترین افزایش و کاهش را دارد و مشتق f را در هر یک از این جهت ها بیابید. همچنین مشتق f را در P_0 در جهت بردار $\mathbf{r}$ بیابید.

۳۷- $f(x,y)=\cos x\cos y$، $P_0(\pi/4,\pi/4)$ و $\mathbf{v}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$

۳۸- $f(x,y)=x^2e^{-2y}$، $P_0(1,0)$ و $\mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$

۳۹- $f(x,y,z)=\ln(2x+3y+6z)$، $P_0(-1,-1,1)$

$$\mathbf{v}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$$

۴۰- $f(x,y,z)=x^2+3xy-z^2+2y+z+4$،

$$P_0(0,0,0) \quad \text{و} \quad \mathbf{v}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

۴۱- **مشتق در جهت سرعت.** مشتق $f(x,y,z)=xyz$ را در جهت بردار سرعت پیچ زیر در $t=\pi/3$ بیابید

$$\mathbf{r}(t)=(\cos 3t)\mathbf{i}+(\sin 3t)\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$$

۴۲- **ماکسیمم مشتق جهتی.** بزرگترین مقداری که مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=xyz$ می تواند در نقطه $(1,1,1)$ داشته باشد چقدر است؟

۴۳- **مشتقات جهتی با مقادیر مفروض.** در نقطه $(1,2)$ تابع $f(x,y)$ در جهت به سمت $(2,2)$ مشتقی برابر ۲ و در جهت به سمت $(1,1)$ مشتقی برابر ۲- دارد.

(الف)- $f_x(1,2)$ و $f_y(1,2)$ را بیابید.

(ب)- مشتق f را در نقطه $(1,2)$ در جهت به سمت نقطه $(4,6)$ بیابید.

۴۴- اگر $f(x,y)$ در (x_0,y_0) مشتق پذیر باشد کدامیک از گزاره های زیر درست است؟ برای پاسخ های خود دلیل بیاورید.

(الف)- اگر $\mathbf{u}$ یک بردار واحد باشد مشتق f در (x_0,y_0) در جهت $\mathbf{u}$ عبارت است از $(f_x(x_0,y_0)\mathbf{i}+f_y(x_0,y_0)\mathbf{j}).\mathbf{u}$

(ب)- مشتق f در (x_0,y_0) در جهت $\mathbf{u}$ یک بردار است.

(پ)- مشتق جهتی f در (x_0,y_0) بزرگترین مقدارش را در جهت ∇f دارد.

(ت)- در (x_0,y_0) بردار ∇f بر خم $f(x,y)=f(x_0,y_0)$ قائم است.

گرادیان ها، صفحات مماس و خطوط قائم

در تمرین های ۴۵ و ۴۶ رویه $f(x,y,z)=c$ را همراه با ∇f در نقاط مفروض رسم کنید.

۴۵- $x^2+y+z^2=0$ ، $(0,-1,\pm1)$ و $(0,0,0)$

۴۶- $y^2+z^2=4$ ، $(2,\pm2,0)$ و $(2,0,\pm2)$

در تمرین های ۴۷ و ۴۸ معادله ای برای صفحه مماس بر رویه تراز $f(x,y,z)=c$ در نقطه P_0 بیابید. همینطور معادلات پارامتری خط قائم بر رویه در P_0 را بیابید.

۴۷- $x^2-y-5z=0$ ، $P_0(2,-1,1)$

۴۸- $x^2+y^2+z=4$ ، $P_0(1,1,2)$

در تمرین های ۴۹ و ۵۰ معادله ای برای صفحه مماس بر رویه $z=f(x,y)$ در نقطه مفروض بیابید.

۴۹- $z=\ln(x^2+y^2)$ ، $(0,1,0)$

۵۰- $z=1/(x^2+y^2)$ ، $(1,1,1/2)$

در تمرین های ۵۱ و ۵۲ معادلات خطوط مماس و قائم بر خم تراز $f(x,y)=c$ در نقطه P_0 را بیابید. سپس این خطوط و خم تراز را همراه با ∇f در P_0 رسم کنید.

۵۱- $y-\sin x=1$ ، $P_0(\pi,1)$

۵۲- $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=\frac{3}{2}$ ، $P_0(1,2)$

خطوط مماس بر خم ها

در تمرین های ۵۳ و ۵۴ معادلات پارامتری خطی را بیابید که بر خم تقاطع رویه ها در نقطه مفروض مماس است.

۵۳-رویه ها: $x^2+2y+2z=4$ و $y=1$

نقطه: $(1,1,1/2)$

۵۴- رویه ها: $x+y^2+z=2$ و $y=1$

نقطه: $(1/2,1,1/2)$

خطی سازی

در تمرین های ۵۵ و ۵۶ صورت خطی $L(x,y)$ تابع $f(x,y)$ را در نقطه P_0 بیابید. سپس کران بالایی برای اندازه خطای E در تقریب $f(x,y)\approx L(x,y)$ روی مستطیل R بدست آورید.

۵۵- $f(x,y)=\sin x\cos y$ ، $P_0(\pi/4,\pi/4)$

$$R:\left|x-\frac{\pi}{4}\right|\le 0.1,\ \left|y-\frac{\pi}{4}\right|\le 0.1$$

۵۶- $f(x,y)=xy-3y^2+2$ ، $P_0(1,1)$

$$R:|x-1|\le 0.1,\ |y-1|\le 0.2$$

در تمرین های ۵۷ و ۵۸ صورت خطی توابع را در نقاط مفروض بیابید.

۵۷- $f(x,y,z)=xy+2yz-3xz$ در $(1,0,0)$ و $(1,1,0)$

۵۸- $f(x,y,z)=\sqrt{2}\cos x\sin(y+z)$ در $(0,0,\pi/4)$ و $(\pi/4,\pi/4,0)$

برآوردها و حساسیت به تغییر

۵۹- **اندازه گیری حجم یک خط لوله.** می خواهیم حجم داخل خط لوله ای به قطر حدود $36in$ و طول ۱ مایل را محاسبه کنیم. در اندازه گیری طول باید بیشتر دقت کنیم یا قطر؟ چرا؟

۶۰- **حساسیت به تغییر.** تابع $f(x,y)=x^2-xy+y^2-3$ در نزدیکی نقطه $(1,2)$ به تغییرات x حساس تر است یا تغییرات y؟ چرا؟

۶۱- **تغییر در مدار الکتریکی.** فرض کنید جریان I (برحسب آمپر) در یک مدار الکتریکی با معادله $I=V/R$ به ولتاژ V (ولت) و مقاومت R (اهم) مدار مربوط می شود. اگر ولتاژ از ۲۴ به ۲۳ ولت و مقاومت از ۱۰۰ به ۸۰ اهم افت کند I افزایش خواهد یافت یا کاهش ؟ حدوداً به چه میزان؟ تغییر I به تغییر ولتاژ حساس تر است یا تغییر مقاومت؟ چرا؟

۶۲- **ماکسیمم خطا در برآورد مساحت بیضی.** اگر با دقت یک میلیمتر $a=10cm$ و $b=16cm$ باشد انتظار دارید ماکسیمم خطای درصدی در محاسبه مساحت $A=\pi ab$ بیضی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ چقدر باشد؟

۶۳- **خطا در برآورد حاصلضرب.** فرض کنید

$$y=uv \quad \text{و} \quad z=u+v$$

که u و v متغیرهای مستقل مثبت اند.

(الف)- اگر u با خطای ۲٪ و v با خطای ۳٪ اندازه گیری شود خطای درصدی در محاسبه مقدار y تقریباً چقدر است؟

(ب)- نشان دهید که خطای درصدی در محاسبه مقدار z کمتر از خطای درصدی در مقدار y است.

۶۴- **شاخص قلبی.** پژوهشگران برای قابل مقایسه کردن افراد در مطالعات بازده قلبی، بازده قلبی اندازه گیری شده را بر مساحت سطح بدن تقسیم می کنند تا شاخص قلبی C بدست آید:

$$C=\text{(بازده قلبی)}/\text{(مساحت سطح بدن)}$$

مساحت سطح بدن شخصی با وزن w و قد h تقریباً از فرمول زیر بدست می آید

$$B=71.84w^{0.625}h^{0.725}$$

که وقتی w برحسب کیلو گرم و h بر حسب سانتی متر باشد B برحسب سانتی متر مربع بدست می آید. می خواهیم شاخص قلبی شخصی با قد $180cm$، وزن $70kg$ و بازده قلبی $7L/\min$ را محاسبه کنیم. کدامیک از خطاهای زیر تأثیر بیشتری بر محاسبه ما دارد: $1kg$ خطا در اندازه گیری وزن یا $1cm$ خطا در اندازه گیری قد؟

اکسترمم های موضعی

تابع تمرین های ۶۵ -۷۰ را از لحاظ داشتن ماکسیمم ها و مینیمم های موضعی و نقاط زینی بیازمایید. در هر یک از این نقاط مقدار تابع را بیابید.

۶۵- $f(x,y)=x^2-xy+y^2+2x+2y-4$

۶۶- $f(x,y)=5x^2+4xy-2y^2+4x-4y$

۶۷- $f(x,y)=2x^3+3xy+2y^3$

۶۸- $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+15$

۶۹- $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3y^2$

۷۰- $f(x,y)=x^4-8x^2+3y^2-6y$

اکسترمم های مطلق

در تمرین های ۷۱ – ۷۸ مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق f را بر ناحیه R بیابید.

۷۱- $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x+3y$

R: ناحیه مثلثی شکل که بوسیله خط $x+y=4$ در ربع اول ایجاد می شود.

۷۲- $f(x,y)=x^2-y^2-2x+4y+1$

R: ناحیه مستطیلی شکل واقع در ربع اول و محدود به محورهای مختصات و خطوط $x=4$ و $y=2$.

۷۳- $f(x,y)=y^2-xy-3y+2x$

R: ناحیه مربعی شکل محصور شده با خطوط $x=\pm 2$ و $y=\pm 2$.

۷۴- $f(x,y)=2x+2y-x^2-y^2$

R: ناحیه مربعی شکل محدود به محورهای مختصات و خطوط $x=2$ و $y=2$ واقع در ربع اول.

۷۵- $f(x,y)=x^2-y^2-2x+4y$

R: ناحیه مثلثی شکلی که از زیر بوسیله محور x، از بالا بوسیله خط $y=x+2$ و از راست بوسیله خط $x=2$ محدود شده است.

۷۶- $f(x,y)=4xy-x^4-y^4+16$

R: ناحیه مثلثی شکل که از زیر توسط خط $y=-2$، از بالا توسط خط $y=x$ و از راست توسط خط $x=2$ محدود شده است.

۷۷- $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3y^2$

R: ناحیه مربعی شکلی که بوسیله خطوط $x=\pm 1$ و $y=\pm 1$ محصور شده است.

۷۸- $f(x,y)=x^3+3xy+y^3+1$

R: ناحیه مربعی شکلی که بوسیله خطوط $x=\pm 1$ و $y=\pm 1$ محصور شده ا ست.

ضرایب لاگرانژ

۷۹- **اکسترمم ها بر روی دایره.** مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y)=x^3+y^2$ را بر دایره $x^2+y^2=1$ بیابید.

۸۰- **اکسترمم ها بر روی دایره.** مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y)=xy$ را بر دایره $x^2+y^2=1$ بیابید.

۸۱- **اکسترمم ها بر روی قرص.** مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y)=x^2+3y^2+2y$ را بر روی قرص واحد $x^2+y^2\le 1$ بیابید.

۸۲- **اکسترمم ها بر روی قرص.** مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y)=x^2+y^2-3x-xy$ را بر روی قرص $x^2+y^2\le 9$ بیابید.

۸۳- **اکسترمم ها بر روی کره.** مقادیر اکسترمم تابع

$$f(x,y,z)=x-y+z$$

را بر روی کره واحد $x^2+y^2+z^2=1$ بیابید.

۸۴- **مینیمم فاصله تا مبداء.** مطلوب است نقاطی بر رویه $x^2-zy=4$ که در نزدیکترین فاصله از مبداء قرار دارند.

۸۵- **مینیمم کردن بهای جعبه.** می خواهیم حجم جعبه مستطیلی بسته ای برابر $V cm^3$ باشد. بهای ورقه بکار رفته در ساختن جعبه برای وجوه بالایی و پایینی a cents/cm^2، برای وجوه جلویی و عقبی b cents/cm^2 و برای بقیه وجوه c cents/cm^2 است. ابعاد جعبه چقدر باشد تا بهای کل ورقه های بکار رفته مینیمم شود؟

۸۶- **کمترین حجم.** مطلوب است یافتن صفحه

$$x/a+y/b+z/c=1$$

که از نقطه $(2,1,2)$ می گذرد و فضایی با کمترین حجم را از یک هشتم اول جدا می کند.

۸۷- **اکسترمم ها بر روی خم تقاطع رویه ها.** مطلوب است مقادیر اکسترمم تابع $f(x,y,z)=x(y+z)$ بر روی خم تقاطع استوانه مستدیر قائم $x^2+y^2=1$ و استوانه هذلولوی $xz=1$.

۸۸- **مینیمم فاصله تا مبداء بر روی خم تقاطع صفحه و مخروط.** مطلوب است نقطه ای بر روی خم تقاطع صفحه $x+y+z=1$ و مخروط $z^2=2x^2+2y^2$ که نزدیکترین فاصله را تا مبداء دارد.

مشتقات جزئی با متغیرهای مقید

در تمرین های ۸۹ و ۹۰ ابتدا نموداری رسم کنید که روابط بین متغیرها را نشان دهد.

۸۹- اگر $w=x^2e^{yz}$ و $z=x^2-y^2$، مطلوب است

(الف)- $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ (ب)- $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ (پ)- $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

۹۰- اگر $U=f(P,V,T)$ انرژی درونی گازی باشد که از قانون گازهای ایده ال، $PV=nRT$، (n و R ثابت) تبعیت

می کند، مطلوب است

(الف)- $\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ (ب)- $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T$

نظریه و مثال ها

۹۱- فرض کنید

$$\theta=\tan^{-1}(y/x) \text{ ،} r=\sqrt{x^2+y^2} \text{ ،} w=f(r,\theta)$$

$\partial w/\partial x$ و $\partial w/\partial y$ را یافته و پاسخ های خود را برحسب r و θ بیان کنید.

۹۲- فرض کنید

$$v=ax-by \text{ و } u=ax+by \text{ ،} z=f(u,v)$$

z_x و z_y را برحسب f_u، f_v و ثابت های a و b بیان کنید.

۹۳- اگر a و b ثابت باشند و

$$u=ax+by \text{ و } w=u^3+\tanh u+\cos u$$

نشان دهید که

$$a\frac{\partial w}{\partial y}=b\frac{\partial w}{\partial x}$$

۹۴- **استفاده از قاعده زنجیری.** اگر

$$x=r+s \text{ ،} w=\ln\left(x^2+y^2+2z\right)$$

$$z=2rs \text{ و } y=r-s$$

w_r و w_s را به کمک قاعده زنجیری بدست آورید. سپس درستی پاسخ خود را با روش دیگری بررسی کنید.

۹۵- **زاویه بین بردارها.** معادلات

$$e^u\sin v-y=0 \text{ و } e^u\cos v-x=0$$

u و v را به صورت توابع مشتق پذیری از x و y تعریف می کنند. نشان دهید که زاویه بین بردارهای زیر ثابت است

$$\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}$$

۹۶- **مختصات قطبی و مشتقات دوم.** وارد کردن مختصات قطبی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ تابع $f(x,y)$ را به $g(r,\theta)$ تبدیل می کند. مطلوب است مقدار $\partial^2 g/\partial\theta^2$ در نقطه $(r,\theta)=(2,\pi/2)$ با فرض اینکه در آن نقطه

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=1$$

۹۷- **خط قائم موازی با یک صفحه.** مطلوب است نقاطی بر رویه زیر که در آنها خط قائم با صفحه yz موازی است.

$$(y+z)^2+(z-x)^2=16$$

۹۸- **صفحه مماس موازی با صفحه xy.** نقاطی بر رویه زیر بیابید که در آنها صفحه مماس با صفحه xy موازی است.

$$xy+yz+zx-x-z^2=0$$

۹۹- **وقتی گرادیان با بردار مکان موازی است.** فرض کنید $\nabla f(x,y,z)$ همواره با بردار مکان $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ موازی است. نشان دهید که به ازای هر a، $f(0,0,a)=f(0,0,-a)$.

۱۰۰- **مشتق جهتی یک طرفه در تمام جهت ها اما بدون گرادیان.** مشتق جهتی یک طرفه f در نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ در جهت $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$ مقدار حد زیر است

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2,z_0+su_3)-f(x_0,y_0,z_0)}{s}$$

نشان دهید که مشتق جهتی یک طرفه تابع

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

در مبداء در هر جهت برابر ۱ است اما f در مبداء بردار گرادیانی ندارد.

۱۰۱- **خط قائم گذرنده از مبداء.** نشان دهید که خط قائم بر رویه $xy+z=2$ در نقطه $(1,1,1)$، از مبداء می گذرد.

۱۰۲- **صفحه مماس و خط قائم.**

(الف)- رویه $x^2-y^2+z^2=4$ را رسم کنید.

(ب)- برداری را بیابید که در نقطه $(2,-3,3)$ بر رویه قائم است. این بردار را به شکل خود اضافه کنید.

(پ)- مطلوب است معادلات صفحه مماس و خط قائم در نقطه $(2,-3,3)$.

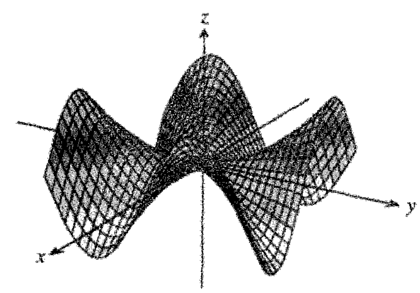
فصل ۱۴: تمرین های اضافی و پیشرفته

مشتقات جزئی

۱- تابعی با نقطه زینی در مبداء. اگر تمرین ۶۰ بخش۱۴ -۲ را حل کرده باشید می دانید که تابع زیـر در $(0,0)$ پیوسـته است (شکل زیر را ببینید)

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$f_{xy}(0,0)$ و $f_{yx}(0,0)$ را بدست آورید.



۲- یافتن تابع از روی مشتقات جزئـی مرتبـه دوم. مطلـوب است تابع $w=f(x,y)$ که مـشتقات جزئـی اول آن عبارتنـد از $\partial w/\partial x=1+e^x\cos y$ و $\partial w/\partial y=2y-e^x\sin y$ و مقدار آن در نقطه $(\ln 2,0)$ برابر $\ln 2$ است.

۳- اثبات قاعده لایب نیتس. قضیه لایب نیتس حاکی است که اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و اگر $u(x)$ و $v(x)$ توابع مـشتق پذیر از x باشند که مقادیرشان در $[a,b]$ قرار دارد آنگاه

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt=f(v(x))\frac{dv}{dx}-f(u(x))\frac{du}{dx}$$

این قاعده را با قرار دادن

$$g(u,v)=\int_u^v f(t)dt \quad \text{و} \quad u=u(x) \quad \text{و} \quad v=v(x)$$

و محاسبه dg/dx از طریق قاعده زنجیری، اثبات کنید.

۴- یافتنن تابع با مشتقات جزئی مرتبه دوم مقید. فرض کنیـد f تابعی دو بار مشتق پذیر از r است که

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

و نیز

$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$$

نشان دهید

$$f(r)=\frac{a}{r}+b$$

که a و b دو ثابت هستند.

۵- توابع همگن. تابع $f(x,y)$ تابع همگن از درجـه n اسـت (n عدد صحیح نامنفی) اگر به ازای هر t، xو y،

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

برای چنین تابعی (که به اندازه کافی مشتق پذیر اسـت) ثابـت کنید که

(الف)- $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$

(ب)-

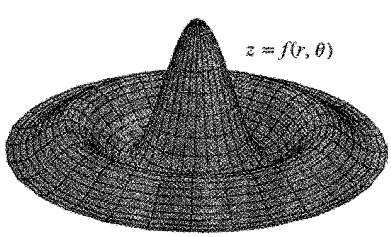
$$x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)+2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)+y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=n(n-1)f$$

۶- رویه در مختصات قطبی. فرض کنید

$$f(r,\theta)=\begin{cases} \dfrac{\sin 6r}{6r} & r\neq 0 \\ 1, & r=0 \end{cases}$$

که r و θ مختصات قطبی اند. مطلوب است

(الف)- $\lim\limits_{r\to 0} f(r,\theta)$ (ب)- $f_r(0,0)$ (پ)- $f_\theta(r,\theta), r\neq 0$



گرادیان ها و مماس ها

۷- ویژگی های بردارهای مکان. فرض کنید

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \quad \text{و} \quad r=|\mathbf{r}|$$

(الف)- نشان دهید که $\nabla r=\mathbf{r}/r$

(ب)- نشان دهید که $\nabla(r^n)=nr^{n-2}\mathbf{r}$

(پ)- تابعی بیابید که گرادیانش برابر $\mathbf{r}$ است.

(ت)- نشان دهید که $\mathbf{r}.d\mathbf{r}=rdr$

(ث)- نشان دهید که برای هر بردار ثابت $\mathbf{A}$، $\nabla(\mathbf{A.r})=\mathbf{A}$.

۸- گرادیان عمود بر مماس. فرض کنید تابع مشتق پذیر $f(x,y)$ در امتداد خم مشتق پذیر $x=g(t)$، $y=h(t)$ مقدار ثابت c دارد؛ یعنی به ازای تمام مقادیر t

$$f\left(g(t),h(t)\right)=c$$

از دو طرف این معادله نسبت به t مشتق گرفته و نشان دهید که ∇f در هر نقطه از خم بر بردار مماس خم عمود است.

۹- خم مماس بر رویه. نشان دهید که خم

$$\mathbf{r}(t)=(\ln t)\mathbf{i}+(t\ln t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$$

در نقطه $(0,0,1)$ بر رویه زیر مماس است

$$xz^2-yz+\cos xy=1$$

۱۰- خم مماس بر رویه. نشان دهید که خم

$$\mathbf{r}(t)=\left(\frac{t^3}{4}-2\right)\mathbf{i}+\left(\frac{4}{t}-3\right)\mathbf{j}+\cos(t-2)\mathbf{k}$$

در $(0,-1,1)$ بر رویه زیر مماس است

$$x^3+y^3+z^3-xyz=0$$

مقادیر اکسترمم

۱۱- اکسترمم ها بر روی یک رویه. نشان دهید که تنها ماکسیمم ها و مینیمم های ممکن z بر روی رویه $z=x^3+y^3-9xy+27$ در نقاط $(0,0)$ و $(3,3)$ بدست می آیند. نشان دهید که در $(0,0)$ نه ماکسیممی و نه مینیممی بدست می آید. تعیین کنید که z در $(3,3)$ ماکسیمم دارد یا مینیمم.

۱۲- ماکسیمم در ربع اول بسته. مقدار ماکسیمم تابع

$$f(x,y)=6xye^{-(2x+3y)}$$

را در ربع اول بسته (شامل محورهای نامنفی) بیابید.

۱۳- مینیمم حجم بریده شده از یک هشتم اول. مطلوب است مینیمم حجم ناحیه محدود شده با صفحات

$$x=0 ،y=0 ،z=0$$

و صفحه ای که در نقطه ای در یک هشتم اول بر بیضی زیر مماس است

$$(x^2/a^2)+(y^2/b^2)+(z^2/c^2)=1$$

۱۴- مینیمم فاصله یک خط از یک سهمی در صفحه xy. با مینیمم کردن تابع $f(x,y,u,v)=(x-u)^2+(y-v)^2$ با قیدهای $y=x+1$ و $u=v^2$ مینیمم فاصله خط $y=x+1$ از سهمی $y^2=x^2$ واقع در صفحه xy را بیابید؟

نظریه و مثال ها

۱۵- کران دار بودن مشتقات جزئی اول بیانگر پیوستگی است. قضیه زیر را ثابت کنید: اگر $f(x,y)$ در ناحیه بازی چون R از صفحه xy تعریف شده باشد و اگر f_x و f_y در R کراندار باشند آنگاه $f(x,y)$ بر R پیوسته است (فرض کراندار بودن ضروریست).

۱۶- فرض کنید $\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}$ خم همواری در دامنه تابع مشتق پذیری چون $f(x,y,z)$ است. رابطه بین df/dt، ∇f و $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ را بیان کنید. در نقاط درونی خم که در آنها f نسبت به مقادیر دیگرش بر روی خم مقادیر اکسترمم دارد در مورد ∇f و $\mathbf{v}$ چه می توان گفت؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۷- یافتن توابع از روی مشتقات جزئی. فرض کنید f و g توابعی از x و y باشند بطوریکه

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$$

و فرض کنید که

$$f(0,0)=4 \text{ ، } f(1,2)=g(1,2)=5 \text{ ، } \frac{\partial f}{\partial x}=0$$

$f(x,y)$ و $g(x,y)$ را بیابید.

۱۸- آهنگ تغییر آهنگ تغییر. می دانیم که اگر $f(x,y)$ تابعی از دو متغیر باشد و اگر $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ یک بردار واحد باشد آنگاه

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=f_x(x,y)a+f_y(x,y)b$$

آهنگ تغییر $f(x,y)$ در (x,y) در جهت $\mathbf{u}$ است. فرمول مشابهی برای آهنگ تغییر آهنگ تغییر $f(x,y)$ در (x,y) در جهت $\mathbf{u}$ ارائه کنید.

۱۹- مسیر ذره جستجوگر گرما. ذره جستجوگر گرما این ویژگی را دارد که در هر نقطه (x,y) در صفحه در جهت ماکسیمم افزایش دما حرکت می کند. اگر دما در (x,y) عبارت

باشد از

$$T(x,y) = -e^{-2y}\cos x$$

معادله ای چون $y = f(x)$ برای مسیر ذره جستجوگر گرما در نقطه $(\pi/4,0)$ بیابید.

۲۰- سرعت بعد از کمانه کردن. ذره ای که با سرعت ثابت $\mathbf{i}+\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ بر روی یک خط راست حرکت می کند از نقطه $(0,0,30)$ گذشته و به رویه $z = 2x^2 + 3y^2$ برخورد می کند. ذره از رویه کمانه می کند و زاویه بازتاب آن با زاویه فرود برابر است. با فرض اینکه تندی (اندازه سرعت) ذره تغییری نمی کند سرعت ذره بعد از کمانه کردن چقدر است؟پاسخ خود را ساده کنید.

۲۱- مشتقات جهتی مماس بر رویه. فرض کنید S رویه ای باشد که نمودار تابع $f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$ است. فرض کنید دما در فضا در هر نقطه (x,y,z) برابر است با $T(x,y,z) = x^2y + y^2z + 4x + 14y + z$.

(الف)- در بین تمام جهت های ممکن مماس بر رویه S در نقطه $(0,0,10)$، آهنگ تغییر دما در $(0,0,10)$ در کدام جهت ماکسیمم خواهد بود؟

(ب)- در کدام جهت مماس بر S در نقطه $(1,1,8)$ آهنگ تغییر دما ماکسیمم خواهد شد؟

۲۲- حفر چاهی دیگر. بر روی سطح تخت زمین، زمین شناسان چاهی مستقیماً به سمت پایین زمین حفره کرده و در عمق $1000ft$ به یک ذخیره معدنی رسیده اند. آنها چاه دیگری در ۱۰۰ فوتی شمال چاه اول کنده و در عمق $950ft$ به ذخیره معدنی رسیده اند. چاه دیگری هم در **۱۰۰** فوتی شرق چاه اولی کنده و در عمق **۱۰۲۵** فوتی به ذخیره معدنی رسیده اند. زمین شناسان بنابه دلایلی معتقدند که ذخیره معدنی به شکل گنبد است و به دلایل اقتصادی می خواهند جایی را بیابند که در آن ذخیره معدنی به سطح زمین نزدیکتر است. با فرض اینکه سطح زمین صفحه xy است پیشنهاد می کنید چاه چهارم در چه جهتی نسبت به چاه اول کنده شود؟

معادله یک بعدی گرما: اگر $w(x,t)$ نشان دهنده دما در مکان x در لحظه t از یک سیم یکنواخت باشد که اطراف آن بطور کامل عایق بندی شده اند، مشتقات جزئی w_{xx} و w_t در معادله ای به شکل زیر صدق می کنند

$$w_{xx} = \frac{1}{c^2} w_t$$

این معادله را *معادله یک بعدی گرما* می نامند. مقدار ثابت مثبت c^2 به ماده سازنده سیم بستگی دارد.

۲۳- تمام جواب های معادله یک بعدی گرما به شکل $w = e^{rt}\sin \pi x$ را بیابید، که در آن r یک ثابت است.

۲۴- تمام جواب های معادله یک بعدی گرما به شکل $w = e^{rt}\sin kx$ را بیابید که در شرایط $w(0,t)$ و $w(L,t)$ صدق می کنند. در حد $t \to \infty$ این جواب ها چه وضعیتی پیدا می کنند؟

فصل ۱۴: پروژه های کاربرد فناوری

بخش متمتیکا/ میپل :

رسم رویه ها

نمودار رویه ها، مسیرها و خم های تراز را بطور تقریبی رسم کنید.

بررسی مبانی ریاضی اسکیت بازی: تحلیل مشتق جهتی

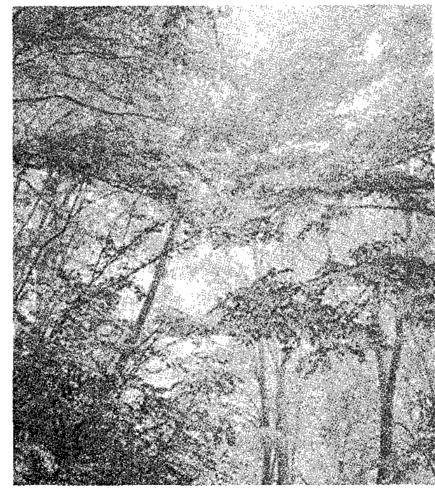
مسیر یک اسکیت باز در ابتدا یک صفحه مسطح، سپس یک سراشیبی و در پایان یک سهمیوار است. مشتق جهتی را از نظر اسکیت باز محاسبه، رسم و تحلیل کنید.

جستجوی الگوها و کاربرد روش کمترین مربعات برای داده های حقیقی

خطی را به مجموعه ای از نقاط داده عددی برازش کنید، برای این کار خطی را انتخاب کنید که مجموع مربعات فواصل عمودی نقاط تا خط را مینیمم می کند.

اسکیت سواری لاگرانژ: او تا چه ارتفاعی بالا می رود؟

با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ مخاطرات اسکیت بازان از نظر ماکسیمم و مینیمم ارتفاع را از منظر تحلیلی و هندسی مورد بـازبینی و تحلیل قرار دهید.



فصل ۱۵

انتگرال های چندگانه

چشم انداز: در این فصل محاسبه انتگرال توابع دو متغیره ای چون $f(x,y)$ را روی ناحیه ای واقع در صفحه و انتگرال توابع سه متغیره ای چون $f(x,y,z)$ را روی ناحیه ای واقع در فضا بررسی می کنیم. این انتگرال های چندگانه به عنوان حد جمع های تقریبی ریمان و بسیار شبیه به انتگرال های تک متغیره معرفی شده در فصل **۵** تعریف می شوند. چندین کاربرد انتگرال های چندگانه از جمله محاسبه حجم ها، مساحت ها در صفحه، گشتاورها (ممان ها) و مراکز جرم را به تفصیل نشان می دهیم.

۱۵-۱- انتگرال های دوگانه و مکرر روی نواحی مستطیلی

در فصل **۵** انتگرال معین تابع پیوسته ای چون $f(x)$ را روی بازه ای چون $[a,b]$ به صورت حد جمع های ریمان تعریف کردیم. در این بخش این نظریه را تعمیم می دهیم تا انتگرال دوگانه توابع پیوسته دو متغیره چون $f(x,y)$ را روی ناحیه مستطیلی محدودی چون R واقع در صفحه تعریف کنیم. در هر دو حالت انتگرال ها حدود جمع های تقریبی ریمان هستند. جمع های ریمان در مورد انتگرال یک تابع یک متغیره مثل $f(x)$ با تقسیم یک بازه متناهی به زیر بازه های کم عرض، ضرب پهنای هر زیر بازه در مقدار f در یک نقطه چون c_k واقع در داخل آن زیر بازه و بعد جمع کردن تمام این حاصلضرب ها بدست آمدند. روش مشابهی به لحاظ تقسیم بندی، ضرب و جمع کردن برای ساختن انتگرال های دوگانه بکار می رود.

انتگرال دوگانه

بررسی انتگرال های دوگانه را با در نظر گرفتن ساده ترین نوع ناحیه مسطح، یعنی ناحیه مستطیلی، آغاز می کنیم. تابعی چون $f(x,y)$ را در نظر می گیریم که روی ناحیه مستطیلی R تعریف شده است:

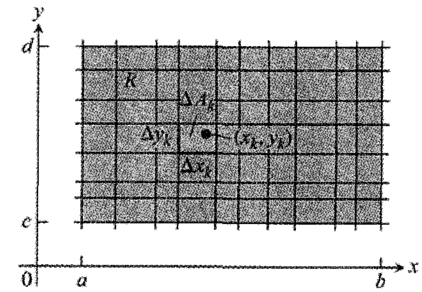
$$R: a \le x \le b \quad \text{و} \quad c \le y \le d$$

با استفاده از یک شبکه از خطوط موازی با محورهای x و y، R را به مستطیل های کوچک تقسیم می کنیم (شکل ۱۵-۱). این خطوط R را به n قطعه مستطیلی تقسیم می کنند. با کوچکتر شدن عرض و ارتفاع هر قطعه، تعداد چنین قطعاتی، n، بیشتر می شود. این مستطیل ها شبکه ای(تقسیم) چون R را تشکیل می دهند. مساحت یک قطعه مستطیلی کوچک به عرض Δx و ارتفاع Δy برابر $\Delta A = \Delta x\,\Delta y$ است. اگر این قطعات کوچک تقسیم کننده R را به ترتیبی شماره گذاری کنیم مساحت های آنها با مقادیر ΔA_1 ، ΔA_2 ، ... و ΔA_n مشخص می شوند که ΔA_k مساحت مستطیل کوچک k ام است.

برای تشکیل دادن یک جمع ریمان روی R، نقطه ای چون (x_k, y_k) را در مستطیل کوچک k ام برمی گزینیم، مقدار f در آن نقطه را در مساحت ΔA_k ضرب کرده و حاصلضرب ها را با هم جمع می کنیم:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

بسته به چگونگی انتخاب (x_k, y_k) در مستطیل کوچک k ام، ممکن است به مقادیر مختلفی برای S_n دست یابیم.



شکل 15- 1: شبکه مستطیل، ناحیه R را به مستطیل های کوچکی با مساحت $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ تقسیم می کند.

می خواهیم بدانیم وقتی عرض ها و ارتفاع های تمام مستطیل های کوچک موجود در شبکه R به صفر میل کنند چه اتفاقی برای این جمع های ریمان می افتد؟ **نرم** یک شبکه چون P، که به صورت $\|P\|$نوشته می شود، بزرگترین عرض یا ارتفاع هر مستطیل موجود در شبکه است. اگر $\|P\| = 0.1$ باشد تمام مستطیل های موجود در شبکه R حداکثر عرض ۰/۱ و حداکثر ارتفاع ۰/۱ دارند. گاهی وقتی نرم P به صفر میل می کند، که به صورت $\|P\| \to 0$ نوشته می شود، جمع های ریمان همگرا می شوند. در این صورت حد حاصل به صورت زیر نوشته می شود

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

وقتی $\|P\| \to 0$ و مستطیل ها باریکتر و کوتاهتر می شوند تعداد آنها، n، افزایش می یابد، لذا می توانیم این حد را به صورت زیر بنویسیم

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

با علم به اینکه وقتی $n \to \infty$ میل می کند $\|P\| \to 0$ و در نتیجه $\Delta A_k \to 0$.

در حدی از این نوع انتخاب های زیادی وجود دارد. مجموعه مستطیل های کوچک با شبکه خطوط قائم و افقی مشخص می شود که شبکه ای مستطیلی چون R را مشخص می کنند. در هر یک از مستطیل های کوچک حاصل، انتخاب نقطه دلخواه (x_k, y_k) را داریم که f در آن محاسبه می شود. این انتخاب ها مجموعاً یک جمع ریمان را مشخص می کنند. برای تشکیل یک حد، کل این فرایند را بارها و بارها تکرار می کنیم ضمن اینکه شبکه هایی را انتخاب می کنیم که عرض ها و ارتفاع های مستطیل هایشان هر دو به صفر میل می کنند و تعداد خانه هایشان به بینهایت.

وقتی حد مجموع های S_n موجود باشد، یعنی قطع نظر از اینکه چه انتخاب هایی صورت می گیرد مقدار حدی واحدی بدست آید، می گوییم تابع f **انتگرال پذیر** است و این حد، **انتگرال دوگانه** f روی R نامیده شده و به صورت زیر نوشته می شود

$$\iint_R f(x,y)\,dA \quad \text{یا} \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

می توان نشان داد که اگر $f(x,y)$ در سراسر R تابعی پیوسته باشد f انتگرال پذیر است. این همان چیزیست که در مورد توابع یک متغیره داشتیم و در فصل ۵ مورد بررسی قرار دادیم. بسیاری از توابع ناپیوسته انتگرال پذیر هم هستند. توابعی که فقط در تعداد محدودی از نقاط ناپیوسته اند یا خم های هموار از آن جمله اند. اثبات این مسائل در کتاب های پیشرفته تر آمده است.

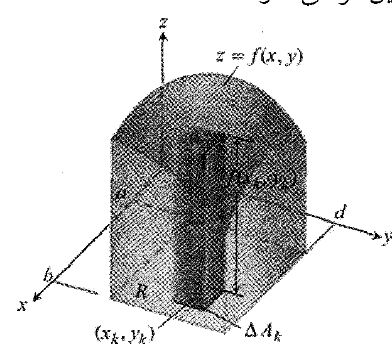
تعبیر انتگرال های دوگانه به صورت حجم

وقتی $f(x,y)$ روی یک ناحیه مستطیلی چون R واقع در صفحه xy تابعی مثبت باشد انتگرال دوگانه f روی R را می توان به صورت حجم ناحیه توپر سه بعدی واقع بر بالای صفحه xy تعبیر کرد که از پایین به R و از بالا به رویه $z = f(x,y)$ محدود است (شکل۱۵-۲). هر جمله $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ در جمع $S_n = \sum f(x_k, y_k)\Delta A_k$ حجم یک جعبه مستطیلی قائم است که حجم بخشی از ناحیه توپری را که مستقیماً بالای قاعده ΔA_k قرار دارد تقریب می زند. بنابراین مجموع S_n آنچه را که حجم کل ناحیه توپر (جسم) می نامیم تقریب می زند. این حجم را چنین تعریف می کنیم

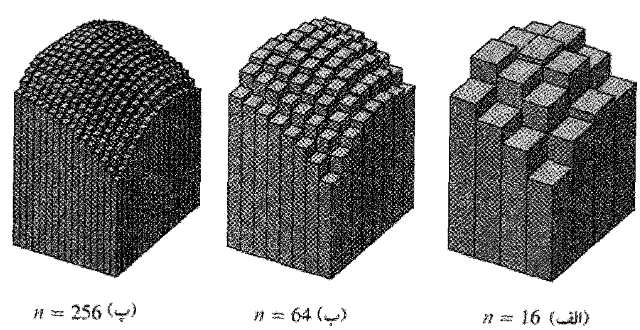
$$\text{حجم} = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f\left(x,y\right)dA$$

که در آن وقتی $n\to\infty$، $\Delta A_k \to 0$.

همانطور که انتظار می رود این روش کلی تر محاسبه حجم با روش های فصل ۶ توافق دارد، اما این مطلب را در اینجا اثبات نمی کنیم. شکل۱۵-۳ نشان می دهد که تقریب های جمع های ریمان برای حجم ناحیه توپر با زیاد شدن تعداد جعبه ها، n، دقیق تر می شوند.



شکل۱۵-۲: تقریب زدن اجسام با جعبه های مستطیلی ما را به تعریف حجم اجسام با شکل دلخواه به صورت انتگرال های دوگانه رهنمون می کند. حجم جسمی که در این شکل دیده می شود انتگرال دوگانه $f\left(x,y\right)$ روی ناحیه قاعده R است.



شکل۱۵-۳: وقتی n زیاد می شود تقریب های جمع های ریمان به حجم کل جسم نشان داده شده در شکل۱۵-۲ میل می کنند.

قضیه فوبینی در مورد محاسبه انتگرال های دوگانه

فرض کنید می خواهیم حجم زیر صفحه $z=4-x-y$ را روی ناحیه مستطیلی $0\le y\le 1$ و $R: 0\le x\le 2$ واقع در صفحه xy بیابیم. اگر روش برش دادن مذکور در بخش ۶-۱ را بکار برده و برشهایی عمود بر محور x در نظر بگیریم(شکل۱۵-۴) حجم برابر می شود با

$$\int_{x=0}^{x=2} A\left(x\right)dx \qquad (۱)$$

که $A\left(x\right)$مساحت سطح مقطع در x است. $A\left(x\right)$ را می توان به ازای هر مقدار x با انتگرال زیر محاسبه کرد

$$A\left(x\right)=\int_{y=0}^{y=1}\left(4-x-y\right)dy \qquad (۲)$$

که برابر است با مساحت زیر خم $z=4-x-y$ در صفحه ای که در x حجم را قطع می کند. در محاسبه $A\left(x\right)$، xرا ثابت نگه داشته و نسبت به y انتگرال می گیریم. حجم کل جسم از ترکیب معادلات (۱) و (۲) بدست می آید

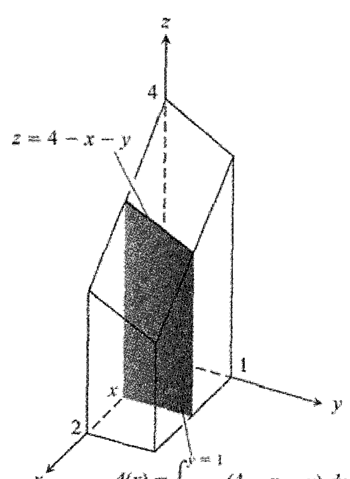
$$\text{حجم}=\int_{x=0}^{x=2} A\left(x\right)dx=\int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=0}^{y=1}\left(4-x-y\right)dy\right)dx$$

$$=\int_{y=0}^{y=1}\left[4y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int_{x=0}^{x=2}\left(\frac{7}{2}-x\right)dx \qquad (۳)$$

$$=\left[\frac{7}{2}x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2=5$$

اگر فقط بخواهیم فرمولی برای حجم بنویسیم بدون اینکه انتگرالی بگیریم می توانیم چنین بنویسیم

$$\text{حجم}=\int_0^2\int_0^1\left(4-x-y\right)dydx.$$



شکل۱۵-۴: برای بدست آوردن مساحت سطح مقطع $A\left(x\right)$، x را ثابت نگه داشته و نسبت به y انتگرال می گیریم.

عبارت سمت راست که انتگرال مکرر نام دارد حاکی از آن است که حجم، با ثابت نگه داشتن z و انتگرال گیری از $4-x-y$ نسبت به y از $y=0$ تا $y=1$ و بعد انتگرال

گیری از عبارت حاصل بر حسب x نسبت به x از $x=0$ تا $x=2$ بدست می آید. حدود انتگرال گیری 0 و 1 مربوط به y بوده و لذا روی نزدیکترین انتگرال به dy قرار گرفته اند. حدود دیگر انتگرال گیری، یعنی 0 و 2، مربوط به متغیر x بوده و لذا روی نماد انتگرال بیرونی قرار گرفته اند که به dx مربوط است.

اگر حجم را به کمک برش های عمود بر صفحه y محاسبه می کردیم(شکل ۱۵-۵) چه می شد؟ در این حالت مساحت سطح مقطع نمونه به صورت تابعی از y برابر است با

$$A(y)=\int_{x=0}^{x=2}(4-x-y)dx$$

$$=\left[4x-\frac{x^2}{2}-xy\right]_{x=0}^{x=2}=6-2y \quad (۴)$$

بنابراین حجم کل جسم برابر است با

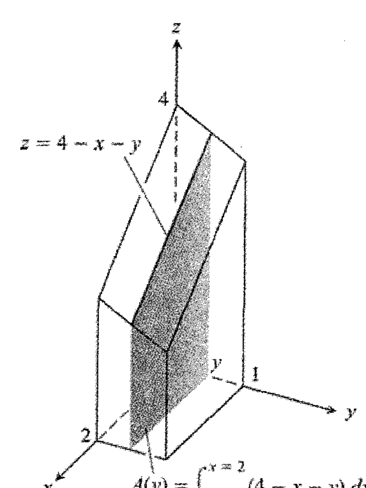
$$\text{حجم}=\int_{y=0}^{y=1}A(y)dy=\int_{y=0}^{y=1}(6-2y)dy$$

$$=\left[6y-y^2\right]_0^1=5$$

که با محاسبه قبلی ما سازگار است.

باز هم می توانیم فرمولی برای حجم به صورت یک انتگرال مکرر به صورت زیر ارائه کنیم

$$\text{حجم}=\int_0^1\int_0^2(4-x-y)dxdy$$



شکل۱۵-۵ : برای بدست آوردن مساحت سطح مقطع $A(x)$، y را ثابت نگه داشته و نسبت به x انتگرال می گیریم.

عبارت سمت راست بیان می کند که حجم را می توان با انتگرال گیری از $4-x-y$ نسبت به x از $x=0$ تا $x=2$ مطابق معادله (۴) و انتگرال گیری از عبارت حاصل نسبت به y از $y=0$ تا $y=1$ بدست آورد. در این انتگرال مکرر ترتیب انتگرال گیری ابتدا x است و بعد y، یعنی برعکس ترتیب انتگرال گیری از معادله (۳).

این دو روش محاسبه حجم به کمک انتگرال های مکرر چه ارتباطی با انتگرال دوگانه

$$\iint_R(4-x-y)dA$$

روی مستطیل $R: 0\le x\le 2$ و $0\le y\le 1$ دارند؟ پاسخ این است که هر دو انتگرال مکرر مقدار این انتگرال دوگانه را بدست می دهند. این همان چیزیست که بصورت منطقی انتظار داریم، چون انتگرال دوگانه حجم همان ناحیه ای را بدست می دهد که دو انتگرال مکرر بدست می دهند. قضیه ای که در سال ۱۹۰۷ توسط گویدو فوبینی منتشر شد حاکی است که انتگرال دوگانه هر تابع پیوسته روی یک مستطیل را می توان به صورت یک انتگرال مکرر با هر ترتیب انتگرال گیری دلخواه محاسبه کرد (فوبینی این قضیه را در حالت کلی تر ثابت کرد اما این چیزیست که این قضیه در ارتباط با کار ما در اینجا بیان می کند).

قضیه ۱: قضیه فوبینی (صورت اول): اگر $f(x,y)$ در سراسر ناحیه مستطیلی

$$R: a\le x\le b \quad \text{و} \quad c\le y\le d$$

پیوسته باشد آنگاه داریم

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

$$=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

قضیه فوبینی بیان می کند که انتگرال های دوگانه روی مستطیل ها را می توان به صورت انتگرال های مکرر محاسبه کرد. بنابراین می توان یک انتگرال دوگانه را با انتگرال گیری نسبت به یک متغیر در هر بار، محاسبه کرد.

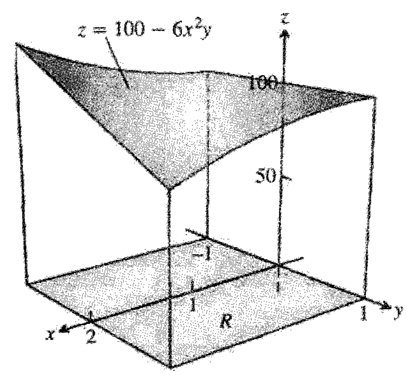
قضیه فوبینی همچنین بیان می کند که برای محاسبه انتگرال

دوگانه می توان هر ترتیب انتگرال گیری را برگزید. این امر باعث سهولت محاسبه این نوع انتگرال ها می شود. وقتی حجمی را با روش برش زنی محاسبه می کنیم می توانیم از صفحات عمود بر محور x یا صفحات عمود بر محور y استفاده کنیم.

مثال ۱: مطلوب است محاسبه $\iint_R R(x,y)dA$ به ازای

$R:\ 0\le x\le 2, -1\le y\le 1$ و $f(x,y)=100-6x^2y$

حل: شکل۱۵-۶ حجم زیر رویه را نشان می دهد.



شکل۱۵-۶: انتگرال دو گانه $\iint_R R(x,y)dA$ حجم زیر این رویه و بالای ناحیه مستطیلی R را بدست می دهد (مثال ۱) .

طبق قضیه فوبینی

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_{-1}^{1}\int_0^2\left(100-6x^2y\right)dxdy$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[100x-2x^3y\right]_{x=0}^{x=2}dy$$

$$=\int_{-1}^{1}(200-16y)dy=\left[200y-8y^2\right]_{-1}^{1}=400$$

با معکوس کردن ترتیب انتگرال گیری همین نتیجه بدست می آید

$$\int_0^2\int_{-1}^{1}\left(100-6x^2y\right)dydx=\int_0^2\left[100y-3x^2y^2\right]_{y=-1}^{y=1}dx$$

$$=\int_0^2\left[\left(100-3x^2\right)-\left(-100-3x^2\right)\right]dx$$

$$=\int_0^2 200dx=400$$

مثال ۲: مطلوب است حجم ناحیه ای که از بالا بوسیله سهمیوار بیضوی $z=10+x^2+3y^2$ و از پایین بوسیله مستطیل $R:\ 0\le x\le 1$ و $0\le y\le 2$ محدود شده است.

حل: رویه و حجم مورد نظر در شکل۱۵-۷ نشان داده شده اند. حجم مورد نظر به کمک انتگرال دوگانه زیر بدست می آید

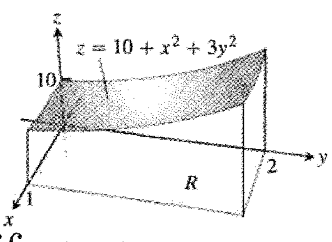
$$V=\iint_R\left(10+x^2+3y^2\right)dA$$

$$=\int_0^1\int_0^2\left(10+x^2+3y^2\right)dydx$$

$$=\int_0^1\left[10y+x^2y+y^3\right]_{y=0}^{y=2}dx$$

$$=\int_0^1\left(20+2x^2+8\right)dx$$

$$=\left[20x+\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^1=\frac{86}{3}$$



شکل۱۵-۷ : انتگرال دوگانه $\iint_R R(x,y)dA$ حجم زیر این رویه و بالای ناحیه مستطیلی R را بدست می دهد (مثال ۲)

تمرین های ۱۵-۱

محاسبه انتگرال های مکرر

در تمرین های ۱-۱۲ انتگرال های مکرر را محاسبه کنید.

۱- $\int_1^2\int_0^4 2xydydx$

۲- $\int_0^2\int_{-1}^{1}(x-y)dydx$

۳- $\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{1}(x+y+1)dxdy$

۴- $\int_0^1\int_0^1(1-\frac{x^2+y^2}{2})dxdy$

۵- $\int_0^3\int_0^2\left(4-y^2\right)dydx$

۶- $\int_0^3\int_{-2}^0 (x^2y-2xy)dydx$

۷- $\int_0^1\int_0^1 \frac{y}{1+xy}dxdy$

۸- $\int_1^4\int_0^4 \left(\frac{x}{2}+\sqrt{y}\right)dxdy$

۹- $\int_0^{\ln 2}\int_1^{\ln 5} e^{2x+y}dydx$

۱۰- $\int_0^1\int_1^2 xye^x dydx$

۱۱- $\int_{-1}^2\int_0^{\pi/2} y\sin x dxdy$

۱۲- $\int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi (\sin x+\cos y)dxdy$

محاسبه انتگرال های دوگانه روی نواحی مستطیلی

در تمرین های۱۳-۲۰ انتگرال دوگانه را روی ناحیه R مفروض محاسبه کنید.

۱۳- $\iint_R (6y^2-2x)dA$ و $R: 0\le x\le 1, 0\le y\le 2$

۱۴- $\iint_R \left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)dA$ و $R: 0\le x\le 4, 1\le y\le 2$

۱۵- $\iint_R xy\cos y dA$ و $R: -1\le x\le 1,\ 0\le y\le \pi$

۱۶- $\iint_R y\sin(x+y)dA$ و $R: -\pi\le x\le 0,\ 0\le y\le \pi$

۱۷- $\iint_R e^{x-y}dA$ و $R:\ 0\le x\le \ln 2, 0\le y\le \ln 2$

۱۸- $\iint_R xye^{xy^2}dA$ و $R:\ 0\le x\le 2, 0\le y\le 1$

۱۹- $\iint_R \frac{xy^3}{x^2+1}dA$ و $R:\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 2$

۲۰- $\iint_R \frac{y}{x^2y^2+1}dA$ و $R:\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$

در تمرین های۲۱ و ۲۲، از f روی ناحیه مفروض انتگرال بگیرید.

۲۱- **مربع.** $f(x,y)=1/(xy)$

روی مربع $1\le x\le 2$ و $1\le y\le 2$

۲۲- **مستطیل.** $f(x,y)=y\cos xy$

روی مستطیل $0\le x\le \pi$ و $0\le y\le 1$

حجم زیر رویه $z=f(x,y)$

۲۳- حجم ناحیه ای را بیابید که از بالا به سهمیوار $z=x^2+y^2$ و از پایین به مربع

$R: -1\le x\le 1$ و $-1\le y\le 1$

محدود است.

۲۴- حجم ناحیه ای را بیابید که از بالا به سهمیوار بیضوی $z=16-x^2-y^2$ و از پایین به مربع

$R: 0\le x\le 2$ و $0\le y\le 2$

محدود است.

۲۵- حجم ناحیه ای را بیابید که از بالا به صفحه

$$z=2-x-y$$

و از پایین به مربع $R: 0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ محدود است.

۲۶- حجم ناحیه ای را بیابید که از بالا به صفحه $z=y/2$ و از پایین به مستطیل $R: 0\le x\le 4$ و $0\le y\le 2$ محدود است.

۲۷- حجم ناحیه ای را بیابید که از بالا به رویه

$$z=2\sin x\cos y$$

و از پایین به مستطیل $R: 0\le x\le \frac{\pi}{2}$ و $0\le y\le \frac{\pi}{4}$ محدود است.

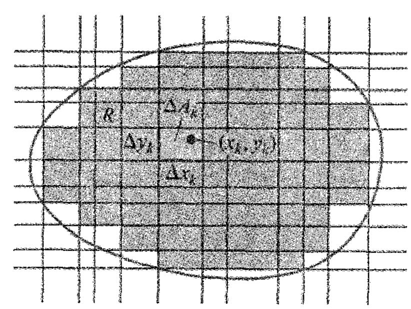
۲۸- حجم ناحیه ای را بیابید که از بالا به رویه $z=4-y^2$ و از پایین به مستطیل $R: 0\le x\le 1$ و $0\le y\le 2$ محدود است.

۱۵-۲- انتگرال های دوگانه روی نواحی دلخواه

در این بخش به تعریف و محاسبه انتگرال های دوگانه روی نواحی محصور واقع در صفحه عمومی تر از نواحی مستطیلی (دلخواه) می پردازیم. این انتگرال های دوگانه به صورت انتگرال های مکرر هم محاسبه می شوند اما مسئله عملی اصلی تعیین حدود انتگرال گیری است. از آنجا که ناحیه انتگرال گیری می تواند مرزهایی غیر از پاره خط های موازی با محورهای مختصات داشته باشد حدود انتگرال گیری غالباً فقط اعداد نیستند بلکه شامل متغیرها می باشند.

انتگرال های دوگانه روی نواحی غیر مستطیلی محصور (کران دار)

برای تعریف انتگرال دوگانه تابعی چون $f(x,y)$ روی ناحیه غیر مستطیلی محصور R، مثل ناحیه ای که در شکل ۱۵-۸ نشان داده شده، باز هم فرض می کنیم R با شبکه ای از خانه های مستطیلی کوچک پوشانده شده است که مجموعه آنها تمام نقاط R را شامل می شود. اما این بار نمی توانیم R را با تعدادی متناهی از مستطیل های واقع در داخل R بطور کامل پر کنیم زیرا مرز R به صورت خمیده است و تعدادی از مستطیل های کوچک شبکه بطور کامل درون R قرار نمی گیرند. یک شبکه چون R را می توان با در نظر گرفتن مستطیل هایی که کاملاً درون ناحیه قرار می گیرند تشکیل داد نه با استفاده از هر مستطیلی که بخشی از آن یا تمام آن بیرون R است. برای نواحی که غالباً با آنها سروکار داریم وقتی نرم شبکه (بزرگترین عرض یا ارتفاع هر مستطیل بکار رفته) به صفر میل می کند بخش های بیشتر و بیشتری از R جزء شبکه قرار می گیرند.



شکل۱۵-۸: یک شبکه مستطیلی یک ناحیه غیر مستطیلی محصور را به تعدادی خانه مستطیلی تقسیم می کند.

همینکه شبکه ای چون R داشته باشیم مستطیل ها را با یک ترتیبی از ۱ تا n شماره گذاری می کنیم و فرض می کنیم ΔA_k مساحت مستطیل k ام باشد. سپس نقطه ای چون (x_k, y_k) در مستطیل k ام انتخاب کرده و جمع ریمان زیر را تشکیل می دهیم:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

وقتی نرم شبکه تشکیل دهنده S_n به صفر میل می کند، $\|P\| \to 0$، عرض و ارتفاع هر مستطیل محصور شده به صفر میل کرده و تعداد آنها به بینهایت میل می کند. اگر $f(x,y)$ تابعی پیوسته باشد این مجموع های ریمان به یک مقدار حدی همگرا می شوند که به هیچ یک از انتخاب های صورت گرفته بستگی ندارد. این حد، **انتگرال دوگانه** $f(x,y)$ روی R نامیده می شود:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \iint_R f(x,y)\,dA$$

ماهیت مرز R باعث طرح مسائلی می شود که در مورد انتگرال های روی یک بازه مطرح نبودند. وقتی R مرز خمیده ای دارد، n مستطیل شبکه درون R قرار می گیرند اما تمام R را پوشش نمی دهند. برای اینکه شبکه ای R را به خوبی تقریب بزند باید وقتی نرم شبکه به صفر میل می کند قسمت هایی از R که بوسیله مستطیل های کوچکی پوشانده شده اند که بخشی از آنها بیرون R قرار دارند، ناچیز شوند. این ویژگی تقریباً پر شدن بوسیله یک شبکه با نرم کوچک، بوسیله تمام نواحی که ما با آنها مواجه خواهیم شد برآورده می شود. در مورد مرزهای متشکل از چند ضلعی ها، دایره ها، بیضی ها و نمودارهای پیوسته روی یک بازه که انتها به انتها به یکدیگر وصل شده اند هیچ مشکلی وجود ندارد. خمی که شکلی از نوع «فراکتالی» دارد می تواند مشکل ساز باشد اما در مسائل کاربردی به ندرت با چنین خم هایی مواجه می شویم. بحث دقیقی در مورد اینکه از چه نوع نواحی R می توان برای محاسبه انتگرال های دوگانه استفاده کرد در کتاب های پیشرفته تر یافت می شود.

حجم ها

اگر $f(x,y)$ روی R ثابت و پیوسته باشد همانند قبل حجم ناحیه توپر بین R و رویه $z=f(x,y)$ را به صورت انتگرال دوگانه $\iint_R f(x,y)\,dA$ تعریف می کنیم (شکل۱۵-۹).

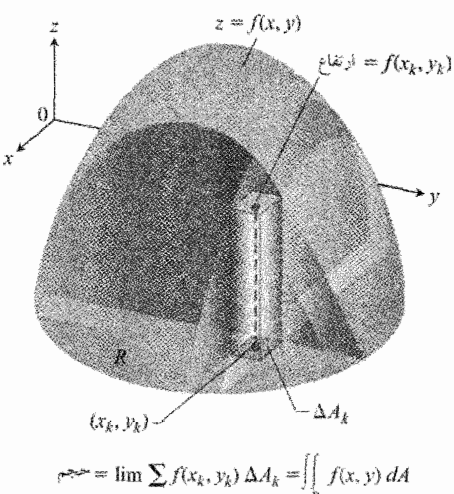
اگر R ناحیه ای شبیه ناحیه نشان داده شده در صفحه xy در شکل۱۵-۱۰ باشد که از «بالا» و «پایین» به خمهای $y=g_1(x)$ و $y=g_2(x)$ و از طرفین به خطوط

$x=a$ و $x=b$ محدود شده است باز هم می توانیم حجم را به کمک روش برش زنی محاسبه کنیم. ابتدا مساحت سطح مقطع را می یابیم

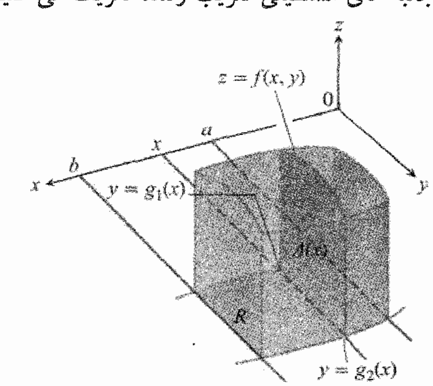
$$A(x)=\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)dy$$

و بعد از $A(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ انتگرال می گیریم و حجم را به صورت یک انتگرال مکرر بدست می آوریم

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx \qquad (۱)$$



شکل۱۵-۹: حجم اجسام با قاعده های خمیده را به صورت حد جعبه های مستطیلی تقریب زننده تعریف می کنیم.



شکل۱۵-۱۰: مساحت برش قائمی که در اینجا دیده می شود $A(x)$ است. برای محاسبه حجم جسم از این مساحت از $x=a$ تا $x=b$ انتگرال می گیریم:

$$\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx.$$

به همین ترتیب اگر R ناحیه ای شبیه ناحیه نشان داده شده در شکل۱۵-۱۱ باشد که به خمهای $x=h_2(y)$، $x=h_1(y)$ و خطوط $y=c$ و $y=d$ محدود است، حجم محاسبه شده به کمک برش زنی با انتگرال مکرر زیر بیان می شود

$$\text{حجم}=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy \qquad (۲)$$

اینکه انتگرال های مکرر معادلات (۱) و (۲) حجمی را که انتگرال دوگانه f روی R تعریف کردیم بدست می دهند پیامدی از صورت قویتر قضیه فوبینی است که در زیر بیان می شود.

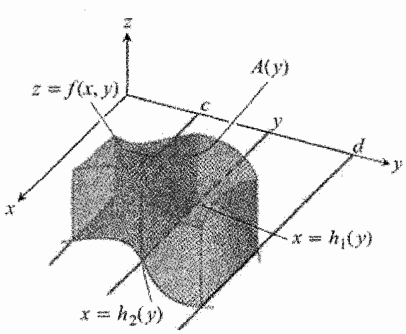
قضیه ۲: قضیه فوبینی (صورت قویتر): فرض کنید $f(x,y)$ روی ناحیه R پیوسته است.

۱- اگر R بوسیله $a\le x\le b$ و $g_1(x)\le y\le g_2(x)$ تعریف شده باشد که g_1 و g_2 روی $[a,b]$ پیوسته اند، آنگاه

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

۲- اگر R بوسیله $c\le y\le d$ و $h_1(y)\le x\le h_2(y)$ تعریف شده باشد که h_1 و h_2 روی $[c,d]$ پیوسته اند، آنگاه

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$



شکل۱۵-۱۱: حجم جسمی که در اینجا دیده می شود برابر است با $\int_c^d A(y)dy=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$.

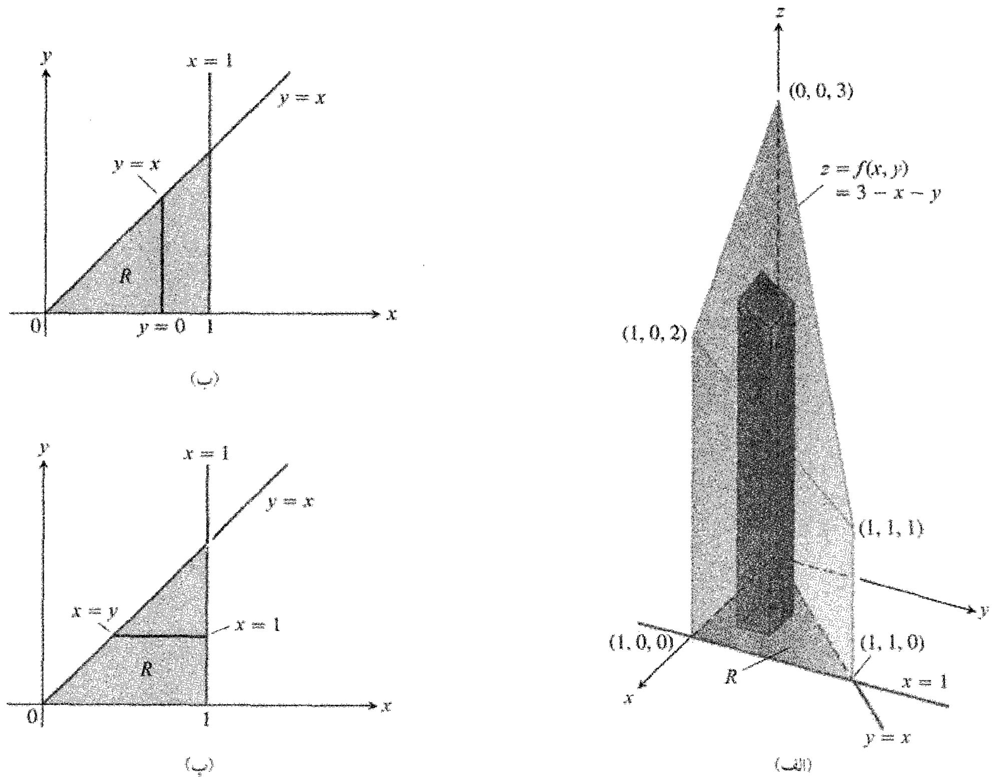
برای یک جسم معین قضیه ۲ حاکی از آن است که می توانیم حجم را همانند شکل۱۵-۱۰ یا به روشی که در اینجا نشان داده شده محاسبه کنیم. هر دو محاسبه نتیجه یکسانی بدست می دهند.

مثال ۱: مطلوب است حجم منشوری که قاعده اش مثلثی در صفحه xy است که بوسیله محور x و خطوط $y=x$

و $x=1$ محدود شده است و قاعده بـالایی اش در صـفحه ای با معادله زیر واقع است

$$z=f\left(x,y\right)=3-x-y$$

حل: شکل**۱۵-۱۲** را ببینید. به ازای هـر x بـین 0 و 1، y می تواند از $y=0$ تا $y=x$ تغییر کند (شکل**۱۵-۱۲**- ب).



شکل۱۵-۱۲: (الف)- منشوری با قاعده مثلثی شکل واقع در صفحه xy. حجم این منشور بـه صـورت یـک انتگرال دوگانه روی R تعریف می شود. برای محاسبه آن به صورت یک انتگرال مکرر، می توانیم ابتدا نسبت به y و بعد نسبت به x یا برعکس انتگرال بگیریم(مثال ۱). (ب)- حدود انتگرال گیری

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x}f\left(x,y\right)dydx$$

اگر ابتدا نسبت به y انتگرال بگیریم، در امتداد یک خط قائم واقع در R انتگرال گرفتـه و بعـد از چـپ بـه راست انتگرال می گیریم تا تمام خطوط قائم واقع در R لحاظ شوند. (پ)- حدود انتگرال گیری

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1}f\left(x,y\right)dxdy$$

اگر ابتدا نسبت به x انتگرال بگیریم، در امتداد یک خط افقی واقع در R انتگرال گرفته و بعد از پایین به بـالا انتگـرال می گیریم تا تمام خطوط افقی واقع در R لحاظ شوند.

بنابراین

$$V=\int_0^1\int_0^x\left(3-x-y\right)dydx$$

$$=\int_0^1\left[3y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x}dx$$

$$=\int_0^1\left(3x-\frac{3x^2}{2}\right)dx=\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=1}=1$$

وقتی ترتیب انتگرال گیری معکوس شود (شکل **۱۵-۱۲** – پ) انتگرال حجم به صورت زیر خواهد بود

$$V=\int_0^1\int_y^1(3-x-y)\,dx\,dy$$
$$=\int_0^1\left[3x-\frac{x^2}{2}-xy\right]_{x=y}^{x=1}dy$$
$$=\int_0^1\left(3-\frac{1}{2}-y-3y+\frac{y^2}{2}+y^2\right)dy$$
$$=\int_0^1\left(\frac{5}{2}-4y+\frac{3}{2}y^2\right)dy$$
$$=\left[\frac{5}{2}y-2y^2+\frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1}=1$$

هر دو انتگرال، همچنانکه باید، با هم برابرند.

با اینکه قضیه فوبینی اطمینان می دهد که یک انتگرال دو گانه را می توان به صورت یک انتگرال مکرر با هر ترتیب انتگرال گیری دلخواه محاسبه کرد، ممکن است یافتن مقدار یک انتگرال نسبت به مقدار انتگرال دیگر آسانتر باشد. مثال زیر نشان می دهد که چطور چنین چیزی ممکن است.

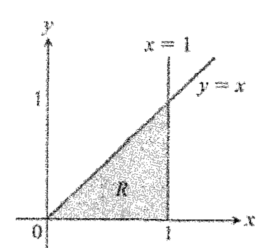
مثال ۲: مطلوب است محاسبه

$$\iint_R \frac{\sin x}{x}\,dA$$

که در آن R مثلثی واقع در صفحه xy است که به محور x، خط $y=x$ و خط $x=1$ محدود است.

حل: ناحیه انتگرال گیری در شکل**۱۵-۱۳** نشان داده شده است. اگر ابتدا نسبت به y و بعد نسبت به x انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$\int_0^1\left(\int_0^x\frac{\sin x}{x}dy\right)dx=\int_0^1\left(y\,\frac{\sin x}{x}\right]_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1\sin x\,dx$$
$$=-\cos(1)+1\approx 0.46$$



شکل ۱۵-۱۳: ناحیه انتگرال گیری در مثال ۲.

اگر ترتیب انتگرال گیری را معکوس کنیم و بخواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$\int_0^1\int_y^1\frac{\sin x}{x}dx\,dy$$

با یک مشکل مواجه می شویم زیرا $\int((\sin x)/x)dx$ را نمی توان برحسب توابع مقدماتی بیان کرد (پاد مشتق ساده ای وجود ندارد).

هیچ قاعده کلی وجود ندارد که بوسیله آن بتوان پیش بینی کرد که در مواردی مثل این مسئله کدام ترتیب انتگرال گیری بهتر است. اگر ترتیبی که اول انتخاب می کنید به بن بست انجامید ترتیب دیگر را امتحان کنید. گاهی هیچ کدام از دو ترتیب کارساز نیست و در این صورت باید از تقریب های عددی استفاده کنید.

تعیین حدود انتگرال گیری

اکنون روشی برای یافتن حدود انتگرال گیری ارائه می کنیم که برای بسیاری از نواحی واقع در صفحه کاربرد دارد. در مورد نواحی پیچیده تر، که برای آنها این روش با شکست مواجه می شود، غالباً می توان ناحیه را به قطعات کوچکتری تقسیم کرد که روی آنها این روش قابل کاربرد است.

استفاده از مقطع های قائم: اگر بخواهیم انتگرال

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

را به این ترتیب محاسبه کنیم که ابتدا نسبت به y و بعد نسبت به x انتگرال بگیریم سه مرحله زیر را طی می کنیم:

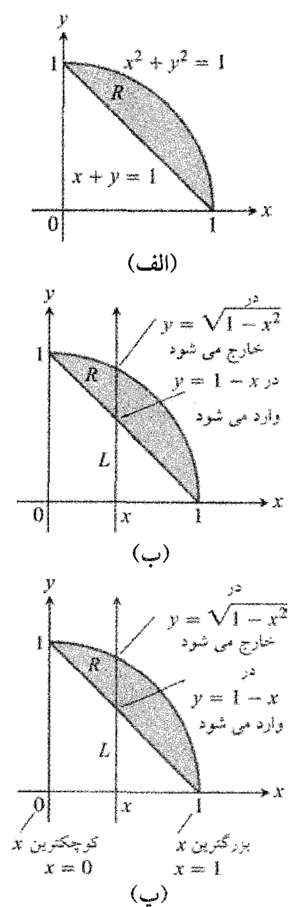
۱- **رسم.** ناحیه انتگرال گیری را رسم کرده و خم های محدود کننده آن را نامگذاری می کنیم (شکل**۱۵-۱۴**- الف).

۲- **یافتن حدود y انتگرال گیری.** خط قائمی چون L را تصور کنید که در جهت افزایش y ناحیه R را قطع می کند. مقادیر y را که در آنها L وارد ناحیه و از آن خارج می شود، مشخص نمایید. اینها حدود y انتگرال گیری بوده و معمولاً توابعی از x هستند (نه ثابت) (شکل **۱۵ -۱۴**- ب).

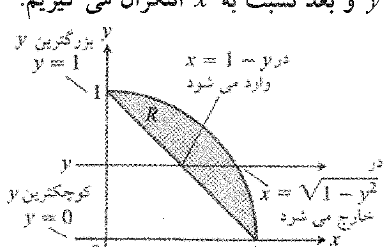
۳- **یافتن حدود x انتگرال گیری.** حدود x را چنان انتخاب می کنیم که تمام خطوط قائمی را که از R می گذرند در بر

بگیرند. انتگرالی که در اینجا نشان داده شده (شکل **۱۵-۱۴**-پ را ببینید) عبارت است از

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$



شکل۱۵-۱۴: تعیین حدود انتگرال گیری، وقتی ابتدا نسبت به y و بعد نسبت به x انتگرال می گیریم.



شکل۱۵-۱۵: تعیین حدود انتگرال گیری، وقتی ابتدا نسبت به x و بعد نسبت به y انتگرال می گیریم.

استفاده از مقطع های افقی: برای محاسبه همین انتگرال دوگانه به صورت یک انتگرال مکرر با ترتیب انتگرال گیری معکوس، در مراحل **۲** و **۳** به جای خطوط قائم از خطوط افقی استفاده می کنیم (شکل **۱۵-۱۵**را ببینید). انتگرال عبارت است از

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^1\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثال ۳: برای انتگرال زیر ناحیه انتگرال گیری را رسم کرده و انتگرال معادلی، با ترتیب انتگرال گیری معکوس بیابید:

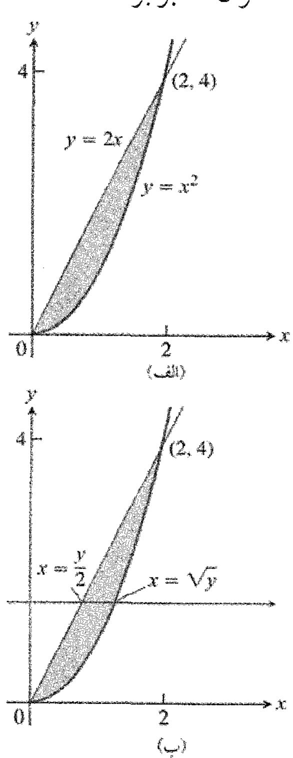
$$\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(4x+2)\,dy\,dx$$

حل: ناحیه انتگرال گیری با نامساوی های $x^2 \le y \le 2x$ و $0 \le x \le 2$ مشخص می شود. بنابراین این ناحیه محدود است به خمهای $y=x^2$ و $y=2x$ بین $x=0$ و $x=2$ (شکل **۱۵-۱۶**- الف).

برای یافتن حدود انتگرال گیری با ترتیب معکوس، خطی افقی تصور می کنیم که از چپ به راست از ناحیه می گذرد. این خط در $x=y/2$ وارد ناحیه و در $x=\sqrt{y}$ از آن خارج می شود. برای لحاظ کردن تمام این خطوط باید y از $y=0$ تا $y=4$ تغییر کند (شکل **۱۵-۱۶**- ب). انتگرال عبارت است از

$$\int_0^4\int_{y/2}^{\sqrt{y}}(4x+2)\,dx\,dy$$

مقدار مشترک این انتگرال ها برابر ۸ است.



شکل ۱۵-۱۶: ناحیه انتگرال گیری برای مثال ۳.

ویژگی های انتگرال های دوگانه

انتگرال های دوگانه توابع پیوسته هم مثل انتگرال های یگانه دارای ویژگی های جبری هستند که در محاسبات و کاربردها مفیدند.

اگر $f(x,y)$ و $g(x,y)$ بر ناحیه کراندار R پیوسته باشند ویژگی های زیر برقرارند:

۱- مضرب ثابت:

$$\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA \qquad (\text{هر عدد } c)$$

۲- مجموع و تفاضل:

$$\iint_R \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right)dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$$

۳- تسلط :

(الف)- (اگر بر ناحیه R داشته باشیم $f(x,y) \geq 0$)

$$\iint_R f(x,y)dA \geq 0$$

(ب)- (اگر بر ناحیه R داشته باشیم $f(x,y) \geq g(x,y)$)

$$\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$$

۴- جمع پذیری دامنه ها: اگر R اجتماعی باشد از دو ناحیه R_1 و R_2 که تداخلی (همپوشانی) با هم ندارند.

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

در ویژگی ۴ فرض بر این است که ناحیه انتگرال گیری R به نواحی غیر همپوشانی کننده R_1 و R_2 تجزیه می شود و مرزهای آنها شامل تعدادی متناهی از پاره خط ها یا خمهای هموار است. شکل ۱۵-۱۷ مثالی از این ویژگی را نشان می دهد.

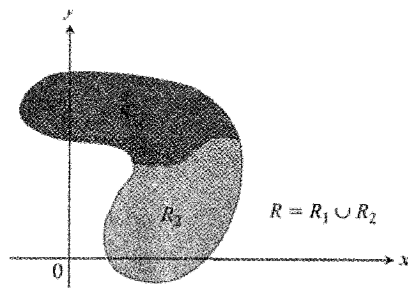
ایده ای که پشت این ویژگی هاست این است که انتگرال ها شبیه جمع ها رفتار می کنند. اگر تابع $f(x,y)$ با مضرب ثابتی از خودش $cf(x,y)$ جایگزین شود آنگاه جمع ریمان مربوط به f یعنی

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

با جمع ریمان مربوط به cf یعنی

$$\sum_{k=1}^{n} cf(x_k, y_k)\Delta A_k = c\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = cS_n$$

جایگزین می شود. اگر وقتی $n \to \infty$ میل می کند حد بگیریم معلوم می شود که $c\lim_{n\to\infty} S_n = c\iint_R fdA$ و $\lim_{n\to\infty} cS_n = c\iint_R cfdA$ با هم برابرند. نتیجه می گیریم که ویژگی مضرب ثابت از جمع ها به انتگرال های دوگانه منتقل می شود.



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

شکل۱۵-۱۷: ویژگی جمع پذیری دامنه ها مربوط به نواحی مستطیلی در مورد نواحی محدود شده بوسیله خم های پیوسته برقرار است.

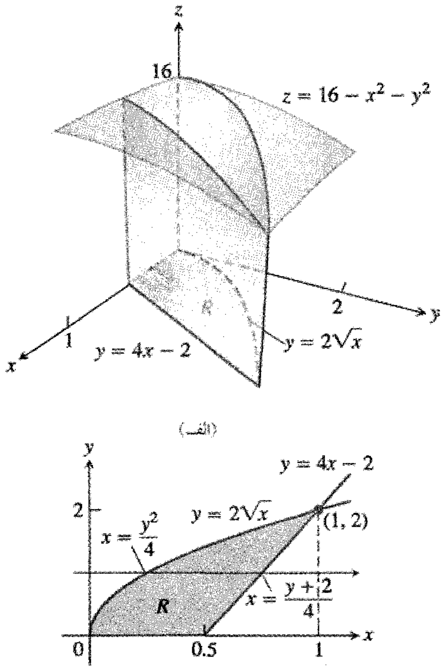
اثبات ویژگی های دیگر برای جمع های ریمان نیز آسان است و به همین دلیل این ویژگی ها هم به انتگرال های دوگانه منتقل می شوند. در حالیکه این بحث این ایده را به ما می دهد که ویژگی ها از جمع ها به انتگرال های دوگانه منتقل می شوند اثبات واقعی برقرار بودن این ویژگی ها مستلزم تحلیل محتاطانه تر چگونگی همگرا شدن جمع های ریمان است.

مثال ۴: مطلوب است حجم جسم گوه مانندی که زیر رویه $z = 16 - x^2 - y^2$ و بالای ناحیه R محدود به خم $y = \sqrt[2]{x}$، خط $y = 4x - 2$ و محور x قرار دارد.

حل: شکل**۱۵-۱۸**- الف رویه مذکور و جسم «گوه مانند» را که محاسبه حجمش مورد نظر ماست نشان می دهد. شکل۱۵-۱۸- ب ناحیه انتگرال گیری را در صفحه xy نشان می دهد. اگر با ترتیب $dydx$ انتگرال بگیریم (ابتدا نسبت به y و بعد نسبت به x) دو بار انتگرال گیری مورد نیاز خواهد بود زیرا برای $0 \leq x \leq 0.5$، y از $y = 0$ تا $y = 2\sqrt{x}$ تغییر می کند و بعد برای $0.5 \leq x \leq 1$، y از $y = 4x - 2$ تا $y = 2\sqrt{x}$ تغییر

می کند. بنابراین تصمیم می گیریم با ترتیب $dxdy$ انتگرال بگیریم که مستلزم فقط یک انتگرال دوگانه است که حدود انتگرال گیری آن در شکل ۱۵-۱۸- ب نشان داده شده اند. در این صورت حجم به صورت انتگرال مکرر محاسبه می شود

$$\iint_R \left(16-x^2-y^2\right)dA$$
$$=\int_0^2\int_{y^2/4}^{(y+2)/4}\left(16-x^2-y^2\right)dxdy$$
$$=\int_0^2\left[16x-\frac{x^3}{3}-xy^2\right]_{x=y^2/4}^{x=(y+2)/4}dx$$
$$=\int_0^2\left[4(y+2)-\frac{(y+2)^3}{3.64}-\frac{(y+2)y^2}{4}\right.$$
$$\left.-4y^2+\frac{y^6}{3.64}+\frac{y^4}{4}\right]dy$$
$$=\left[\frac{191y}{24}+\frac{63y^2}{32}-\frac{145y^3}{96}-\frac{49y^4}{768}+\frac{y^5}{20}+\frac{y^2}{1344}\right]_0^2$$
$$=\frac{20803}{1680}\approx 12.4$$



شکل۱۵-۱۸: (الف)- ناحیه «گوه مانند» توپری که حجمش در مثال ۴ محاسبه شده است. (پ)- ناحیه انتگرال گیری R که ترتیب $dxdy$ را نشان می دهد.

تمرین های ۱۵-۲

رسم نواحی انتگرال گیری

در تمرین های ۱-۸ نواحی انتگرال گیری توصیف شده را رسم کنید.

۱- $0\le x\le 3$ و $0\le y\le 2x$

۲- $-1\le x\le 2$ و $x-1\le y\le x^2$

۳- $-2\le y\le 2$ و $y^2\le x\le 4$

۴- $0\le y\le 1$ و $y\le x\le 2y$

۵- $0\le x\le 1$ و $e^x\le y\le e$

۶- $1\le x\le e^2$ و $0\le y\le \ln x$

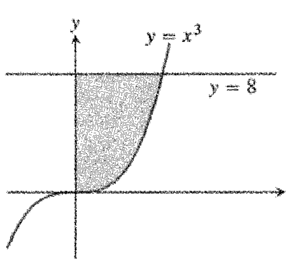
۷- $0\le y\le 1$ و $0\le x\le \sin^{-1}y$

۸- $0\le y\le 8$ و $\frac{1}{4}y\le x\le y^{1/3}$

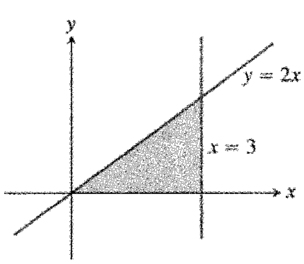
تعیین حدود انتگرال گیری

در تمرین های ۹-۱۸ با استفاده از (الف)- مقاطع قائم و (ب)- مقاطع افقی یک انتگرال مکرر برای $\iint_R dA$ روی ناحیه R توصیف شده بنویسید.

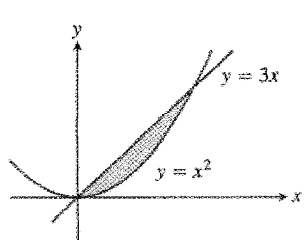
۹-



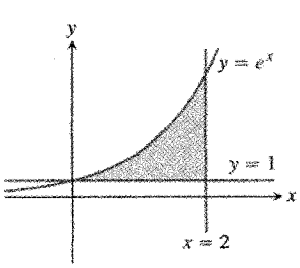
۱۰-



۱۱-



۱۲-



۱۳- ناحیه محدود شده بوسیله $y=\sqrt{x}$، $y=0$ و $x=9$.

۱۴- ناحیه محدود به $y=\tan x$ ، $x=0$ و $y=1$.

۱۵- ناحیه محدود به $y=e^{-x}$، $y=1$ و $x=\ln 3$.

۱۶- ناحیه محدود به $y=0$، $x=0$، $y=1$ و $y=\ln x$.

۱۷- ناحیه محدود به $y=3-2x$ ، $y=x$ و $x=0$.

۱۸- ناحیه محدود به $y=x^2$ و $y=x+2$.

تعیین نواحی انتگرال گیری و انتگرال های دوگانه

در تمرین های ۱۹-۲۴ ناحیه انتگرال گیری را رسم کرده و انتگرال را محاسبه کنید.

۱۹- $\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y\,dydx$

۲۰- $\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} y\,dydx$

۲۱- $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}dxdy$

۲۲- $\int_1^{2}\int_y^{y^2} dxdy$

۲۳- $\int_0^{1}\int_0^{y^2} 3y^3e^{xy}dxdy$

۲۴- $\int_1^{4}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2}e^{y/\sqrt{x}}dydx$

در تمرین های ۲۵-۲۸ از f روی ناحیه مفروض انتگرال بگیرید.

۲۵- **چهار ضلعی.** $f(x,y)=x/y$ روی ناحیه ای در ربع اول محدود به خطوط $y=x$ ، $y=2x$، $x=1$ و $x=2$.

۲۶- **مثلث.** $f(x,y)=x^2+y^2$ روی ناحیه مثلثی شکل با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(0,1)$.

۲۷- **مثلث.** $f(u,v)=v-\sqrt{u}$ روی ناحیه مثلثی شکلی که بوسیله خط $u+v=1$ از ربع اول صفحه uv جدا می شود.

۲۸- **ناحیه خمیده.** $f(s,t)=e^s\ln t$ روی ناحیه ای در ربع اول صفحه st که بالای خم $s=\ln t$ از $t=1$ تا $t=2$ قرار دارد.

در هر یک از تمرین های ۲۹- ۳۲ انتگرالی روی یک ناحیه واقع در صفحه مختصات دکارتی داده شده است. ناحیه را رسم کرده و انتگرال را محاسبه کنید.

۲۹- $\int_{-2}^{0}\int_v^{-v} 2dpdv$ (صفحه pv)

۳۰- $\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8tdtds$ (صفحه st)

۳۱- $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_0^{\sec t} 3\cos t\,dudt$ (صفحه tu)

۳۲- $\int_0^{3/2}\int_1^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2}dvdu$ (صفحه uv)

معکوس کردن ترتیب انتگرال گیری

در تمرین های ۳۳- ۴۶ ناحیه انتگرال گیری را رسم کرده و انتگرال دوگانه معادلی با ترتیب انتگرال گیری معکوس بنویسید.

۳۳- $\int_0^{1}\int_2^{4-2x} dydx$

۳۴- $\int_0^{2}\int_{y-2}^{0} dxdy$

۳۵- $\int_0^{1}\int_y^{\sqrt{y}} dxdy$

۳۶- $\int_0^{1}\int_{1-x}^{1-x^2} dydx$

۳۷- $\int_0^{1}\int_1^{e^x} dydx$

۳۸- $\int_0^{\ln 2}\int_{e^y}^{2} dxdy$

۳۹- $\int_0^{3/2}\int_0^{9-4x^2} 16x\,dydx$

۴۰- $\int_0^{2}\int_0^{4-y^2} y\,dxdy$

۴۱- $\int_0^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y\,dxdy$

۴۲- $\int_0^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x\,dydx$

۴۳- $\int_1^{e}\int_0^{\ln x} xy\,dydx$

۴۴- $\int_0^{\pi/6}\int_{\sin x}^{1/2} xy^2dydx$

۴۵- $\int_0^{3}\int_1^{e^y} (x+y)dxdy$

۴۶- $\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\tan^{-1}y} \sqrt{xy}\,dxdy$

در تمرین های ۴۷- ۵۶ ناحیه انتگرال گیری را رسم کرده، ترتیب انتگرال گیری را معکوس کنید و انتگرال را محاسبه نمایید.

۴۷- $\int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}dydx$

۴۸- $\int_0^{2}\int_x^{2} 2y^2\sin xy\,dydx$

۴۹- $\int_0^{1}\int_y^{1} x^2e^{xy}dxdy$

۵۰- $\int_0^{2}\int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y}dydx$

۵۱- $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}dxdy$

۵۲- $\int_0^{3}\int_{\sqrt{x/3}}^{1} e^{y^3}dydx$

۵۳- $\int_0^{1/16}\int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos\left(16\pi x^5\right)dxdy$

۵۴- $\int_0^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dydx}{y^4+1}$

۵۵- **ناحیه مربعی شکل.** $\iint_R\left(y-2x^2\right)dA$، که R ناحیه ای است که با مربع $|x|+|y|=1$ محدود می شود.

۵۶- **ناحیه مثلثی شکل.** $\iint_R xy\,dA$، که R ناحیه محدود به خطوط $y=x$ ، $y=2x$ و $x+y=2$ است.

حجم زیر رویه $z=f(x,y)$

۵۷- مطلوب است حجم ناحیه ای که از بالا به سهمیوار $z=x^2+y^2$ و از پایین به مثلث محصور شده

بوسیله خطوط $y=x$، $x=0$ و $x+y=2$ واقع در صفحه xy محدود است.

۵۸- حجم جسمی را بیابید که از بالا به استوانه $z=x^2$ و از پایین به ناحیه ای محدود است که بوسیله سهمی $y=2-x^2$ و خط $y=x$ واقع در صفحه xy محصور شده است.

۵۹- حجم جسمی را بیابید که قاعده اش ناحیه ای در صفحه xy محدود به سهمی $y=4-x^2$ و خط $y=3x$ و قاعده بالایی اش به صفحه $z=x+4$ محدود است.

۶۰- حجم جسمی را بیابید که در یک هشتم اول واقع و به صفحات مختصات، استوانه $x^2+y^2=4$ و صفحه $z+y=3$ محدود است.

۶۱- حجم جسمی را بیابید که در یک هشتم اول واقع و به صفحات مختصات، صفحه $x=3$ و استوانه سهموی $z=4-y^2$ محدود است.

۶۲- حجم جسمی را بیابید که بوسیله رویه $z=4-x^2-y$ از یک هشتم اول جدا می شود.

۶۳- حجم گوه ای را بیابید که بوسیله استوانه $z=12-3y^2$ و صفحه $x+y=2$ از یک هشتم اول جدا می شود.

۶۴- حجم جسمی را بیابید که بوسیله صفحات $z=0$ و $3x+z=3$ از ستون مربعی $|x|+|y|\le 1$ جدا می شود.

۶۵- حجم جسمی را بیابید که از جلو و عقب به صفحات $x=2$ و $x=1$ و از طرفین به استوانه های $y=\pm 1/x$ و از بالا و پایین به صفحات $z=x+1$ و $z=0$ محدود است.

۶۶- حجم جسمی را بیابید که از جلو و عقب به صفحات $x=\pm\pi/3$، از طرفین به استوانه های $y=\pm\sec x$، از بالا به استوانه $z=1+y^2$ و از پایین به صفحه xy محدود است.

در تمرین های ۶۷ و ۶۸ ناحیه انتگرال گیری و جسمی را که در حجمش با انتگرال دوگانه داده شده مشخص می شود رسم کنید.

۶۷- $\displaystyle\int_0^3\int_0^{2-2x/3}\left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)dydx$

۶۸- $\displaystyle\int_0^4\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}}\sqrt{25-x^2-y^2}\,dxdy$

انتگرال روی نواحی بی کران (نامحدود)

انتگرال های دوگانه ناسره را غالباً می توان مشابه انتگرال های ناسره یک متغیره محاسبه کرد. انتگرال های اول انتگرال های ناسره زیر چنان محاسبه می شوند که گویی انتگرال های سره هستند. سپس همانند بخش۸-۷ انتگرال ناسره یک متغیره با گرفتن حد مناسب محاسبه می شود. در تمرین های ۶۹-۷۲ انتگرال های ناسره را به صورت انتگرال های مکرر محاسبه کنید.

۶۹- $\displaystyle\int_1^\infty\int_{e^{-x}}^1\frac{1}{x^3y}dydx$

۷۰- $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}}(2y+1)dydx$

۷۱- $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}dxdy$

۷۲- $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty xe^{-(x+2y)}dxdy$

تقریب زدن انتگرال ها با جمع های متناهی

در تمرین های ۷۳ و ۷۴ انتگرال دوگانه $f(x,y)$ روی ناحیه R تقسیم بندی شده بوسیله خطوط قائم $x=a$ و خطوط افقی $y=c$ مفروض را تقریب بزنید. در هر مستطیل کوچک از آن (x_k,y_k) استفاده کنید که برای تقریبتان مشخص شده است.

$$\iint_R f(x,y)dA\approx\sum_{k=1}^n f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

۷۳- $f(x,y)=x+y$ روی ناحیه R که از بالا به نیمدایره $y=\sqrt{1-x^2}$ و از پایین به محور x محدود است. برای تقسیم بندی ناحیه از خطوط 1 و $1/2$ و $1/4$ و 0 و $-1/2$ و $x=-1$ و $y=0$ و $1/2$ و 1 استفاده کنید. (x_k,y_k) را گوشه سمت چپ پایینی مستطیل kام در نظر بگیرید (به شرطی که مستطیل درون R قرار داشته باشد).

۷۴- $f(x,y)=x+2y$ روی ناحیه R داخل دایره

$$\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=1$$

برای تقسیم بندی ناحیه از خطوط 3و $1/2$ و 2 و $3/2$ و $x=1$ و ۴ و $7/2$ و ۳ و $5/2$ و 2 و $y=2$ استفاده کنید. (x_k, y_k) را مرکز مستطیل k ام در نظر بگیرید (به شرطی که مستطیل داخل R قرار داشته باشد).

نظریه و مثال ها

۷۵- **قطاع دایره ای.** مطلوب است محاسبه انتگرال

$$f\left(x,y\right)=\sqrt{4-x^2}$$

روی قطاع کوچکتری که بوسیله خطوط شعاعی $\theta=\pi/6$ و $\theta=\pi/2$ از قرص $x^2+y^2\le 4$ جدا می شود.

۷۶- **ناحیه بی کران.** مطلوب است محاسبه انتگرال $f\left(x,y\right)=1/[(x^2-x)(y-1)^{2/3}]$ روی مستطیل بینهایت $2\le x\le\infty$ و $0\le y\le 2$.

۷۷- **استوانه غیر دایره ای (نامستدیر):** قاعده R استوانه قائم توپری (غیر دایره ای) در صفحه xy واقع است. این استوانه از بالا به سهمیوار $z=x^2+y^2$ محدود است. حجم استوانه برابر است با

$$V=\int_0^1\int_0^y\left(x^2+y^2\right)dxdy+\int_1^2\int_0^{2-y}\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

ناحیه قاعده R را رسم کرده و حجم استوانه را به صورت یک انتگرال مکرر منفرد با ترتیب انتگرال گیری معکوس بیان کنید. سپس انتگرال را محاسبه کرده و حجم را بیابید.

۷۸- **تبدیل به انتگرال دوگانه.** انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^2\left(\tan^{-1}\pi x-\tan^{-1}x\right)dx$$

(راهنمایی: انتگرالده را به صورت یک انتگرال بنویسید).

۷۹- **ماکسیمم کردن انتگرال دوگانه.** مطلوب است تعیین ناحیه R واقع در صفحه xy که مقدار انتگرال زیر در آن ماکسیمم می شود

$$\iint_R\left(4-x^2-2y^2\right)dA$$

برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۸۰- **مینیمم کردن انتگرال دوگانه.** مطلوب است تعیین ناحیه R واقع در صفحه xy که مقدار انتگرال زیر در آن مینیمم می شود

$$\iint_R\left(x^2+y^2-9\right)dA$$

برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۸۱- آیا ممکن است انتگرال تابع پیوسته ای چون $f\left(x,y\right)$ را روی ناحیه ای مستطیلی شکل در صفحه xy محاسبه کنیم و بسته به ترتیب انتگرال گیری به جواب های متفاوتی برسیم؟ چرا؟

۸۲- چگونه انتگرال دوگانه تابع پیوسته ای چون $f\left(x,y\right)$ را روی ناحیه R واقع در صفحه xy که با مثلثی با رئوس $(0,1)$، $(2,0)$ و $(1,2)$ محصور شده است محاسبه می کنید. برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۸۳- **ناحیه بی کران.** ثابت کنید که

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-y^2}dxdy=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b}e^{-x^2-y^2}dxdy=4\left(\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\right)^2$$

۸۴- **انتگرال دوگانه ناسره.** انتگرال ناسره زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^1\int_0^3\frac{x^2}{(y-1)^{2/3}}dydx$$

مسائل رایانه ای

با استفاده از یک نرم افزار ریاضی با قابلیت محاسبه انتگرال دوگانه مقادیر انتگرال های تمرین های ۸۵-۸۸ را برآورد کنید.

۸۵- $\displaystyle\int_1^3\int_1^x\frac{1}{xy}dydx$

۸۶- $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 e^{-\left(x^2+y^2\right)}dydx$

۸۷- $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\tan^{-1}xy\,dydx$

۸۸- $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}3\sqrt{1-x^2-y^2}\,dydx$

با استفاده از یک نرم افزار ریاضی با قابلیت محاسبه انتگرال دوگانه انتگرال های تمرین های ۸۹- ۹۴ را بیابید. سپس ترتیب انتگرال گیری را معکوس کرده و انتگرال را مجدداً با استفاده از

همان نرم افزار محاسبه کنید.

۸۹- $\int_0^1\int_{2y}^4 e^{x^2}dxdy$ ۹۰- $\int_0^3\int_{x^2}^9 x\cos(y^2)dydx$

۹۱- $\int_0^2\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}}(x^2y-xy^2)dxdy$

۹۲- $\int_0^2\int_0^{4-y^2} e^{xy}dxdy$

۹۳- $\int_1^2\int_0^{x^2}\frac{1}{x+y}dydx$ ۹۴- $\int_1^2\int_{y^3}^8\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

۱۵-۳- تعیین مساحت به کمک انتگرال دوگانه

در این بخش نشان می دهیم که چگونه با استفاده از انتگرال های دوگانه مساحت نواحی محصور [کراندار] واقع در صفحه و نیز مقدار متوسط توابع دو متغیره را محاسبه می کنیم.

مساحت نواحی محصور واقع در صفحه

اگر در تعریف انتگرال دوگانه روی ناحیه ای چون R در بخش قبل، $f(x,y)=1$ اختیار کنیم جمع های ریمان به صورت زیر درمی آیند

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\Delta A_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k \qquad (۱)$$

این همان مجموع مساحت های مستطیل های کوچک موجود در شبکه Rاست و آنچه را که می خواهیم مینیمم مساحت R بنامیم تقریب می زند. وقتی نرم شبکه R به صفر میل می کند ارتفاع و عرض تمام مستطیل های موجود در شبکه به صفر میل می کنند و ΔA_kها بطور فزاینده ای R را می پوشانند (شکل۱۵-۸). مساحت R را حد زیر تعریف می کنیم

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k=\iint_R dA \qquad (۲)$$

تعریف: مساحت یک ناحیه محصور بسته واقع در صفحه چون R از فرمول زیر بدست می آید

$$A=\iint_R dA$$

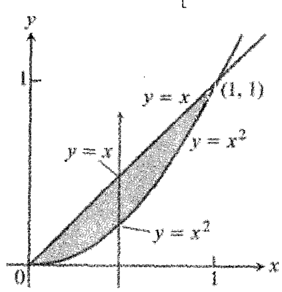
این تعریف، همانند تعاریف دیگر این فصل، نسبت به تعریف یک متغیره مساحت، در مورد نواحی بسیار متنوع تری کاربرد دارد. اما در مورد نواحیی که هر دو تعریف قابل کاربرد هستند این تعریف با تعریف قبلی سازگار است. برای محاسبه انتگرال موجود در تعریف مساحت از تابع ثابت $f(x,y)=1$ روی R انتگرال می گیریم.

مثال۱: مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه R واقع در ربع اول که به $y=x$ و $y=x^2$ محدود است.

حل: ناحیه مذکور را با توجه به اینکه دو خم همدیگر را در مبداء و در $(1,1)$ قطع می کنند رسم می کنیم (شکل۱۵-۱۹) و مساحت را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$A=\int_0^1\int_{x^2}^{x}dydx=\int_0^1[y]_{x^2}^{x}dx$$

$$A=\int_0^1(x-x^2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$



شکل۱۵-۱۹: ناحیه مذکور در مثال ۱.

توجه کنید که انتگرال یک متغیره $\int_0^1(x-x^2)dx$، که از محاسبه انتگرال مکرر داخلی بدست می آید، انتگرال مربوط به مساحت بین این دو خم با استفاده از روش بخش۵-۶ است.

مثال۲: مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه R که بوسیله سهمی $y=x^2$ و خط $y=x+2$ محصور شده است.

حل: اگر مطابق شکل۱۵-۲۰- الف R را به نواحی R_1 و R_2 تقسیم کنیم می توانیم مساحت را به صورت زیر محاسبه کنیم

$$A=\iint_{R_1}dA+\iint_{R_2}dA$$

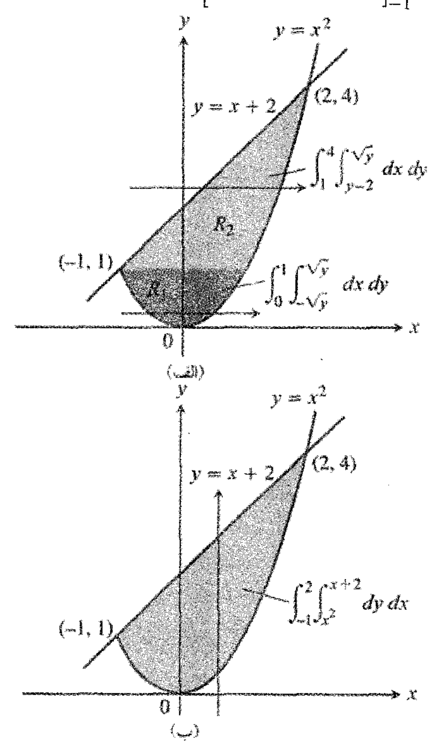
$$=\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dxdy+\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}}dxdy$$

از سوی دیگر، با معکوس کردن ترتیب انتگرال گیری داریم (شکل۱۵-۲۰- ب)

$$A=\int_{-1}^2\int_{x^2}^{x+2}dydx$$

این نتیجه، که فقط یک انتگرال دوگانه نیاز دارد، ساده تر است و در عمل برای محاسبه مساحت از آن استفاده می شود. مساحت برابر است با

$$A=\int_{-1}^{2}\left[y\right]_{x^2}^{x+2}dx=\int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$



شکل۱۵-۲۰: محاسبه این مساحت (الف)- به دو انتگرال دوگانه نیاز دارد، اگرانتگرال گیری اول نسبت به x باشد اما (ب)- فقط به یک انتگرال نیاز دارد، اگر انتگرال اول نسبت به y باشد (مثال۲).

مقدار متوسط

مقدار متوسط یک تابع انتگرال پذیر یک متغیره روی یک بازه بسته برابر است با انتگرال آن تابع روی آن بازه تقسیم بر طول بازه. در مورد یک تابع انتگرال پذیر دو متغیره تعریف شده بر روی یک ناحیه کراندار واقع در صفحه، مقدار متوسط تابع برابر است با انتگرال تابع روی ناحیه تقسیم بر مساحت ناحیه. برای تجسم این مسئله مخزن محتوی آبی را تصور کنید که دیواره های قائم آن روی مرز ناحیه قرار دارد و تابع، ارتفاع آب را در یک لحظه نشان می دهد. برای یافتن ارتفاع متوسط آب داخل مخزن می توان اجازه داد آب تا ارتفاع ثابتی پایین بیاید. در این صورت ارتفاع برابر است با حجم آب داخل مخزن تقسیم بر مساحت R، بدین ترتیب به تعریف مقدار متوسط تابع انتگرال پذیری چون f روی ناحیه ای چون R رهنمون می شویم، یعنی

$$\text{(۳)}\qquad \int\!\!\int_R f\,dA\ \frac{1}{R\ \text{مساحت}} = \textbf{مقدار متوسط}\ f\ \text{روی}\ R$$

اگر f دمای ورقه نازکی باشد که R را پوشانده است انتگرال دوگانه f روی R تقسیم بر مساحت R دمای متوسط ورقه را بدست می دهد. اگر $f(x,y)$ فاصله نقطه (x,y) تا نقطه ای ثابت چون P باشد مقدار متوسط f روی R برابر فاصله متوسط نقاط واقع در R از نقطه P خواهد بود.

مثال ۳: مقدار متوسط

$$f(x,y)=x\cos xy$$

را روی مستطیل $R: 0\le x\le\pi$ و $0\le y\le 1$ بیابید.

حل: مقدار انتگرال f روی R برابر است با

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 x\cos xy\,dy\,dx=\int_0^{\pi}\left[\sin xy\right]_{y=0}^{y=1}dx$$
$$\left(\int x\cos xy\,dy=\sin xy+C\right)$$
$$=\int_0^{\pi}(\sin x-0)dx=-\cos x\Big]_0^{\pi}=1+1=2$$

مساحت R برابر π است. مقدار متوسط f روی R برابر $2/\pi$ است.

تمرین های ۱۵-۳

محاسبه مساحت به کمک انتگرال های دوگانه

در تمرین های ۱-۱۲ ناحیه محصور شده بوسیله خطوط و خمهای مفروض را رسم کنید. سپس مساحت ناحیه را به صورت یک انتگرال دوگانه مکرر بیان کرده و انتگرال را محاسبه کنید.

۱- محورهای مختصات و خط $x+y=2$

۲- خطوط $x=0$، $y=2x$ و $y=4$

۳- سهمی $x=-y^2$ و خط $y=x+2$

۴- سهمی $x=y-y^2$ و خط $y=-x$.

۵- خم $y=e^x$ و خطوط $y=0$، $x=0$ و $x=\ln 2$

۶- خمهای $y=\ln x$ و $y=2\ln x$ و خط $x=e$ در ربع اول

۷- سهمی های $x=y^2$ و $x=2y-y^2$

۸- سهمی های $x=y^2-1$ و $x=2y^2-2$

۹- خطوط $y=x$ و $y=\dfrac{x}{3}$ و $y=2$.

۱۰- خطوط $y=1-x$ و $y=2$ و خم $y=e^x$

۱۱- خطوط $y=2x$، $y=\dfrac{x}{2}$ و $y=3-x$.

۱۲- خطوط $y=x-2$ و $y=-x$ و خم $y=\sqrt{x}$.

تعیین ناحیه انتگرال گیری

انتگرال ها و مجموع انتگرال ها در تمرین های ۱۳-۱۸ مساحت های نواحیی واقع در صفحه xy را بدست می دهند. هر ناحیه را رسم کرده، هر خم محدود کننده ناحیه را با معادله اش نامگذاری کرده و مختصات نقاط تلاقی خم ها را مشخص کنید. مساحت ناحیه را بدست آورید.

۱۳- $\int_0^6\int_{y^2/3}^{2y} dx\,dy$

۱۴- $\int_0^3\int_{-x}^{x(2-x)} dy\,dx$

۱۵- $\int_0^{\pi/4}\int_{\sin x}^{\cos x} dy\,dx$

۱۶- $\int_{-1}^2\int_{y^2}^{y+2} dx\,dy$

۱۷- $\int_{-1}^0\int_{-2x}^{1-x} dy\,dx+\int_0^2\int_{-x/2}^{1-x} dy\,dx$

۱۸- $\int_0^2\int_{x^2-4}^0 dy\,dx+\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx$

یافتن مقادیر متوسط

۱۹- مطلوب است مقدار متوسط $f(x,y)=\sin(x+y)$ روی

(الف)- مستطیل $0\le y\le\pi$ و $0\le x\le\pi$

(ب)- مستطیل $0\le y\le\pi/2$ و $0\le x\le\pi$

۲۰- به نظر شما مقدار کدامیک بزرگتر است، مقدار متوسط $f(x,y)=xy$ روی مربع $0\le y\le 1$ و $0\le x\le 1$ یا مقدار متوسط f روی ربع دایره $x^2+y^2\le 1$ واقع در ربع اول؟ آنها را محاسبه کرده و پاسخ دهید.

۲۱- ارتفاع متوسط سهمیوار $z=x^2+y^2$ را روی مربع $0\le y\le 2$ و $0\le x\le 2$ بیابید.

۲۲- مقدار متوسط $f(x,y)=1/(xy)$ را روی مربع $\ln 2\le x\le 2\ln 2$ و $\ln 2\le y\le 2\ln 2$ بیابید.

نظریه و مثال ها

۲۳- **جمعیت باکتری ها.** اگر

$$f(x,y)=\left(10000e^y\right)/\left(1+|x|/2\right)$$

نشان دهنده «چگالی جمعیت» یک باکتری خاص روی صفحه xy باشد که x و y برحسب سانتی مترند، جمعیت کل باکتریها را در درون مستطیل

$$-5\le x\le 5 \text{ و } -2\le y\le 0$$

بیابید.

۲۴- **جمعیت منطقه ای.** اگر $f(x,y)=100(y+1)$ نشان دهنده چگالی جمعیت یک منطقه مسطح برروی زمین باشد که x و y برحسب مایل اند، تعداد مردم ساکن در منطقه محدود به خمهای $x=y^2$ و $x=2y-y^2$ را بیابید.

۲۵- **دمای متوسط در تگزاس.** براساس تقویم نجومی تگزاس، تگزاس دارای ۲۵۴ استان و هر استان دارای یک ایستگاه هواشناسی ملی است. فرض کنید در لحظه t_0 هر یک از ۲۵۴ ایستگاه هواشناسی دمای محلی را ثبت کرده اند. فرمولی بیابید که تقریب معقولی از دمای متوسط تگزاس در لحظه t_0 بدست می دهد. پاسخ شما باید شامل اطلاعاتی باشد که انتظار دارید در تقویم نجومی تگزاس به آسانی قابل دستیابی اند.

۲۶- اگر $y=f(x)$ تابعی پیوسته و نامنفی روی بازه بسته $a\le x\le b$ باشد نشان دهید که تعریف انتگرال دوگانه مساحت برای ناحیه بسته واقع در صفحه محدود به نمودار f، خطوط قائم $x=a$ و $x=b$ و محور x با تعریف مساحت زیر خم ارائه شده در بخش ۵-۳ سازگار است.

۱۵-۴- انتگرال های دوگانه به صورت قطبی

گاهی اگر مختصات قائم را به مختصات قطبی تبدیل کنیم محاسبه انتگرال ها ساده تر می شود. در این بخش چگونگی تبدیل مختصات قائم به قطبی و چگونگی محاسبه انتگرال ها روی نواحی که مرزهایشان با معادلات قطبی مشخص شده را نشان می دهیم.

انتگرال ها در مختصات قطبی

وقتی انتگرال دوگانه یک تابع را روی ناحیه R واقع در صفحه xy تعریف می کردیم ابتدا R را به مستطیل هایی که اضلاعشان موازی محورهای مختصات بودند تقسیم کردیم. این مستطیل ها طبیعی ترین شکل هایی بودند که می توانستیم استفاده کنیم زیرا اضلاع آنها یا مقادیر x ثابت یا مقادیر y ثابت داشتند. در مختصات قطبی طبیعی ترین شکل «مستطیل قطبی» است که اضلاعش مقادیر r و θ ثابت دارند.

فرض کنید تابعی چون $f(r,\theta)$ روی ناحیه ای چون R تعریف شده باشد که به پرتوهای $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ و خمهای پیوسته $r=g_1(\theta)$ و $r=g_2(\theta)$ محدود است. همینطور فرض کنید به ازای هر مقدار θ بین α و β، $0\le g_1(\theta)\le g_2(\theta)\le a$. در این صورت R در ناحیه بادبزنی شکلی به نام Q قرار می گیرد که با نامساویهای $0\le r\le a$ و $\alpha\le\theta\le\beta$ تعریف می شود. شکل ۱-۲۱ را ببینید.

ناحیه Q را با شبکه ای از قوسهای مستدیر و پرتوها می پوشانیم. قوسها قطعاتی هستند از دایره هایی به مرکز مبداء و با شعاع های زیر

$$\Delta r \text{ و } 2\Delta r \text{ و ... و } m\Delta r$$

که $\Delta r=a/m$. پرتوها به صورت زیر مشخص می شوند:

$$\theta=\alpha \text{ و } \theta=\alpha+\Delta\theta \text{ و } \theta=\alpha+2\Delta\theta \text{ و } \cdots \text{ و } \theta=\alpha+m'\Delta\theta=\beta$$

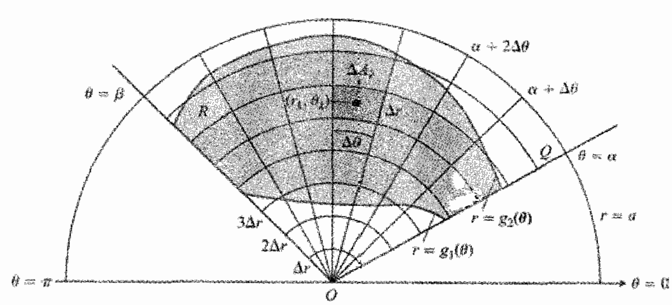
که $\Delta\theta=(\beta-\alpha)/m'$. قوس ها و پرتوها Q را به تکه های کوچکی به نام «مستطیل های قطبی» تقسیم می کنند.

مستطیل های قطبی واقع در درون R را شماره گذاری می کنیم (ترتیب مهم نیست) و مساحت های آنها را به صورت زیر نامگذاری می کنیم

$$\Delta A_1 \text{ و } \Delta A_2 \text{ و ... و } \Delta A_n$$

فرض می کنیم (r_k,θ_k) نقطه ای در مستطیل قطبی با مساحت ΔA_k باشد. حال مجموع زیر را تشکیل می دهیم

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k)\Delta A_k$$



شکل۱۵-۲۱: ناحیه $R: g_1(\theta)\le r\le g_2(\theta)$ و $\alpha\le\theta\le\beta$ در ناحیه بادبزنی شکل $Q: 0\le r\le a$ و $\alpha\le\theta\le\beta$ قرار دارد. تقسیم بندی Q بوسیله قوس های مستدیر و پرتوها باعث تشکیل شبکه ای چون R می شود.

اگر f در سراسر R پیوسته باشد این مجموع، وقتی شبکه را تغییر دهیم تا Δr و $\Delta\theta$ به صفر میل کنند، به یک حد میل خواهد کرد. این حد را انتگرال دوگانه f روی R می نامیم. به صورت نمادی داریم

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\iint_R f(r,\theta)\,dA$$

برای محاسبه این حد، نخست باید مجموع S_n را طوری

بنویسیم که ΔA_k را برحسب Δr و $\Delta\theta$ بیان کند. برای راحتی r_k را متوسط شعاع های قوس های داخلی و بیرونی محدود کننده مستطیل قطبی kام با مساحت ΔA_k برمی گزینیم. در این صورت شعاع قوس داخلی محدود کننده ΔA_k برابر است با $r_k-(\Delta r/2)$(شکل ۱۵-۲۲). شعاع قوس بیرونی $r_k+(\Delta r/2)$ است.

مساحت یک قطاع گوه ای شکل از یک دایره به شعاع r و زاویه θ برابر است با

$$A=\frac{1}{2}\theta.r^2$$

که با ضرب πr^2، مساحت دایره، در $\theta/2\pi$، کسری از مساحت دایره که در گوه قرار دارد، بدست می آید. بنابراین مساحت های قطاهای مستدیر رو به رو به این قوس ها در مبداء عبارتند از

$$\text{شعاع داخلی :}\quad \frac{1}{2}\left(r_k-\frac{\Delta r}{2}\right)^2\Delta\theta$$

$$\text{شعاع بیرونی :}\quad \frac{1}{2}\left(r_k+\frac{\Delta r}{2}\right)^2\Delta\theta$$

بنابراین

$$\Delta A_k = \text{مساحت قطاع کوچک} - \text{مساحت قطاع بزرگ}$$

$$=\frac{\Delta\theta}{2}\left[\left(r_k+\frac{\Delta r}{2}\right)^2-\left(r_k-\frac{\Delta r}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{\Delta\theta}{2}(2r_k\Delta r)=r_k\Delta r\Delta\theta$$

با ترکیب این نتیجه با مجموع تعریف کننده S_n داریم

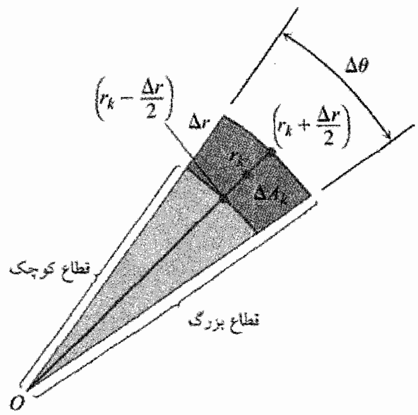
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(r_k,\theta_k)r_k\Delta r\Delta\theta$$

وقتی $n\to\infty$ و مقادیر Δr و $\Delta\theta$ به صفر میل می کنند این مجموع ها به انتگرال دوگانه زیر همگرا می شوند

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\iint_R f(r,\theta)rdrd\theta$$

صورتی از قضیه فوبینی حاکی است که حدی را که این مجموع ها به آن میل می کنند می توان با انتگرال گیری های منفرد مکرر نسبت به r و θ به صورت زیر بدست آورد

$$\iint_R f(r,\theta)dA=\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)}f(r,\theta)rdrd\theta.$$



شکل ۱۵-۲۲: با ملاحظه
(مساحت قطاع کوچک)-(مساحت قطاع بزرگ)= ΔA_k
فرمول $\Delta A_k=r_k\Delta r\Delta\theta$ بدست می آید.

تعیین حدود انتگرال گیری

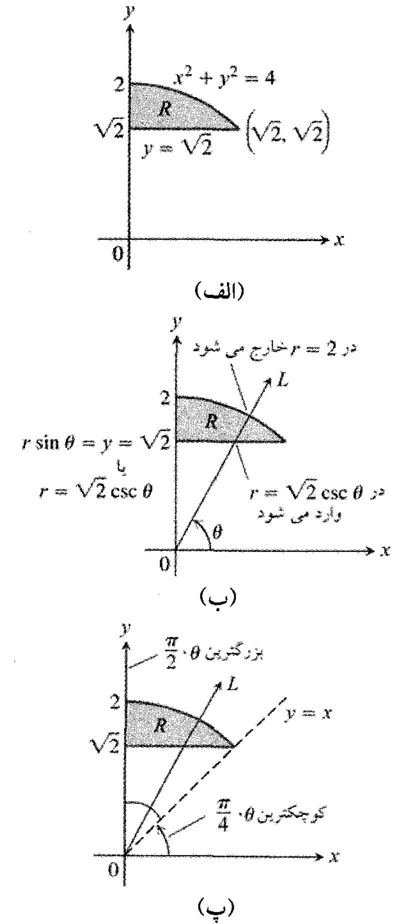
روش یافتن حدود انتگرال گیری در مختصات قائم در مختصات قطبی هم بکار می رود. برای محاسبه $\iint_R f(r,\theta)dA$ روی ناحیه R در مختصات قطبی، در صورتی که ابتدا نسبت به r و بعد نسبت به θ انتگرال بگیریم، مراحل زیر را طی می کنیم:

۱- **رسم.** ناحیه انتگرال گیری را رسم کرده و خمهای محدود کننده آن را نامگذاری می کنیم.

۲- حدود r انتگرال گیری را می یابیم. پرتوی چون L تصور کنید که از مبداء رسم می شود و در جهت افزایش r از R می گذرد. مقادیر r را که در آنها L وارد R و از آن خارج می شود مشخص کنید. این مقادیر حدود r انتگرال گیری هستند و معمولاً به زاویه θ یی بستگی دارند که L با قسمت مثبت محور x می سازد (شکل۱۵-۲۳- ب).

۳- حدود θ انتگرال گیری را بیابید. کوچکترین و بزرگترین مقادیر θ را که R را محدود می کنند بیابید. این مقادیر حدود θ انتگرال گیری هستند (شکل۱۵-۲۳-ب). انتگرال مکرر قطبی عبارت است از

$$\iint_R f(r,\theta)dA=\int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2}\int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2}f(r,\theta)rdrd\theta$$



شکل۱۵-۲۳ : یافتن حدود انتگرال گیری در مختصات قطبی.

مثال۱: مطلوب است حدود انتگرال گیری برای انتگرال گرفتن از تابعی چون $f(r,\theta)$ روی ناحیه R که درون دلوار $r=1+\cos\theta$ و بیرون دایره $r=1$ قرار دارد.

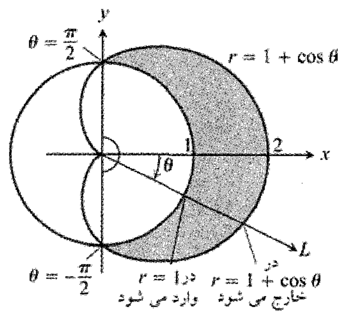
حل:

۱- ابتدا ناحیه را رسم کرده و خمهای محدود کننده را نامگذاری می کنیم (شکل**۱۵ -۲۴**).

۲- حدود r انتگرال گیری را تعیین می کنیم. یک پرتو نمونه که از مبداء رسم شود در $r=1$ وارد R و در $r=1+\cos\theta$ از آن خارج می شود.

۳- سرانجام حدود θ را می یابیم. پرتوهایی که از مبداء رسم می شوند و R را قطع می کنند از $\theta=-\pi/2$ تا $\theta=\pi/2$ گسترده شده اند. انتگرال عبارت است از

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{1+\cos\theta} f(r,\theta) r dr d\theta$$



شکل۱۵-۲۴: یافتن حدود انتگرال گیری در مختصات قطبی برای ناحیه مذکور در مثال ۱.

اگر $f(r,\theta)$ تابع ثابت با مقدار **۱** باشد مقدار انتگرال f روی R مساحت R را بدست می دهد.

> **مساحت در مختصات قطبی**[1]
>
> مساحت یک ناحیه بسته و محصور R واقع در صفحه مختصات قطبی از فرمول زیر بدست می آید
>
> $$A=\iint_R r dr d\theta$$

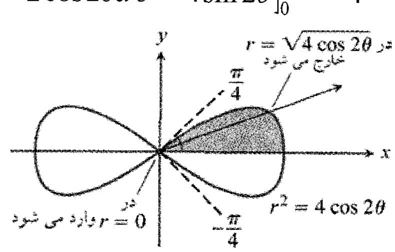
این فرمول مساحت با تمام فرمول های قبلی سازگار است ولی این مطلب را در اینجا اثبات نمی کنیم.

مثال۲: مساحت ناحیه محصور شده در پروانه $r^2=4\cos 2\theta$ را بیابید.

حل: پروانه را رسم می کنیم تا حدود انتگرال گیری را تعیین کنیم (شکل**۱۵-۲۵**) و از تقارن ناحیه پی ببریم که مساحت کل ۴ برابر بخشی از آن است که در ربع اول قرار دارد.

$$A=4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r dr d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}} d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta d\theta = 4\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4}=4$$



شکل۱۵-۲۵: برای انتگرال گیری روی ناحیه سایه دار، r را از 0 تا $\sqrt{4\cos 2\theta}$ و θ را از 0 تا $\pi/4$ تغییر می دهیم (مثال ۲).

[1]- دیفرانسیل مساحت در مختصات قطبی عبارت است از

$$dA = r dr d\theta$$

تبدیل انتگرال های دکارتی به انتگرال های قطبی

عمل تبدیل یک انتگرال دکارتی چون $\iint_R f(x,y)dxdy$ به یک انتگرال قطبی دو مرحله دارد. ابتدا در انتگرال دکارتی جانشانی های $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ را انجام داده و به جای $dxdy$، $rdrd\theta$ قرار می دهیم. سپس حدود قطبی انتگرال گیری را برای مرز R تعیین می کنیم. بدین ترتیب انتگرال دکارتی به صورت زیر درمی آید

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\iint_G f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

که G نشان دهنده همان ناحیه انتگرال گیری است که اکنون در مختصات قطبی توصیف می شود. این روش شبیه روش جانشانی در فصل ۵ است جز اینکه به جای یک متغیر دو متغیر برای جانشانی وجود دارد. توجه کنید که دیفرانسیل مساحت یعنی $dxdy$ با $drd\theta$ جایگزین نمی شود بلکه $rdrd\theta$ به جای آن قرار می گیرد. بحث کلی تر در مورد تغییر متغیرها (جانشانی ها) در انتگرال های چندگانه در بخش ۱۵-۸ ارائه می شود.

مثال۳: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\iint_R e^{x^2+y^2}dydx$$

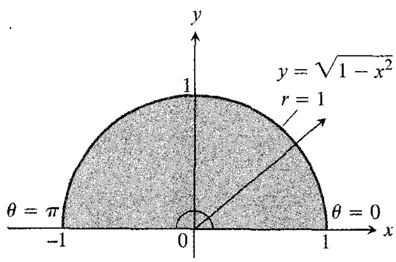
که در آن R ناحیه نیمدایره ای محدود به محور x و خم $y=\sqrt{1-x^2}$ است (شکل۱۵-۲۶).

حل: این انتگرال در مختصات دکارتی یک انتگرال غیر مقدماتی است و هیچ راه مستقیمی برای انتگرال گیری از $e^{x^2+y^2}$ نسبت به x یا y وجود ندارد. با این حال این انتگرال و انتگرال های مشابه این در ریاضیات مثلاً آمار حائز اهمیت اند و باید راهی برای محاسبه آنها بیابیم. مختصات قطبی راه حل این مشکل است. با جانشانی

$$x=r\cos\theta،\ y=r\sin\theta \text{ و } dxdy=rdrd\theta$$

می توانیم انتگرال را به صورت زیر محاسبه کنیم

$$\iint_R e^{x^2+y^2}dydx=\int_0^\pi\int_0^1 e^{r^2}rdrd\theta=\int_0^\pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 d\theta$$
$$=\int_0^\pi\frac{1}{2}(e-1)d\theta=\frac{\pi}{2}(e-1)$$



شکل۱۵-۲۶: ناحیه نیمدایره ای مثال۳ با نابرابریهای زیر توصیف می شود $0\le\theta\le\pi$ و $0\le r\le 1$

r در $rdrd\theta$ درست همان چیزی بود که برای انتگرال گیری از e^{r^2} نیاز داشتیم. بدون آن نمی توانستیم پاد مشتقی برای انتگرال مکرر اول (داخلی ترین انتگرال) بیابیم.

مثال۴: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dydx$$

حل: با انتگرال گیری نسبت به y نتیجه می شود

$$\int_0^1\left(x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{\left(1-x^2\right)^{3/2}}{3}\right)dx$$

که انتگرالی است که محاسبه آن بدون استفاده از جدول انتگرال ها مشکل است.

اگر انتگرال اولیه (دکارتی) را به مختصات قطبی تبدیل کنیم محاسبات ساده تر می شوند. ناحیه انتگرال گیری در مختصات دکارتی با نابرابری های $0\le y\le\sqrt{1-x^2}$ و $0\le x\le 1$ مشخص می شود که با داخل ربع دایره واحد $x^2+y^2=1$ در ربع اول متناظر است(شکل ۱۵-۲۶، ربع اول را ببینید). با جانشانی مختصات قطبی

$$x=r\cos\theta،\ y=r\sin\theta،\ 0\le\theta\le\pi/2 \text{ و } 0\le r\le 1$$

و قرار دادن $rdrd\theta$ به جای $dxdy$ در انتگرال دوگانه خواهیم داشت

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dydx=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\left(r^2\right)rdrd\theta$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1}d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}d\theta=\frac{\pi}{8}$$

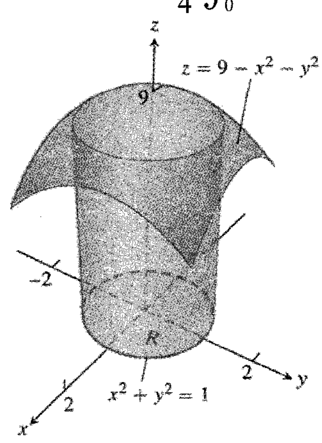
چرا تبدیل مختصات قطبی در اینجا تا این حد مؤثر بود؟ یکی

چرا تبدیل مختصات قطبی در اینجا تا این حد مؤثر بود؟ یکی از دلایل این است که x^2+y^2 به صورت ساده r^2 درمی آید. دلیل دیگر این است که حدود انتگرال گیری به اعداد ثابت تبدیل می شوند.

مثال۵: مطلوب است حجم ناحیه توپری که از بالا به سهمیوار $z=9-x^2-y^2$ و از پایین به دایره واحد واقع در صفحه xy محدود است.

حل: ناحیه انتگرال گیری R عبارت است از دایره واحد $x^2+y^2=1$ که در مختصات قطبی با معادلات $r=1$ و $0\le\theta\le 2\pi$ توصیف می شود. ناحیه توپر مذکور در شکل۱۵-۲۷ نشان داده شده است حجم این ناحیه به کمک انتگرال دوگانه زیر محاسبه می شود

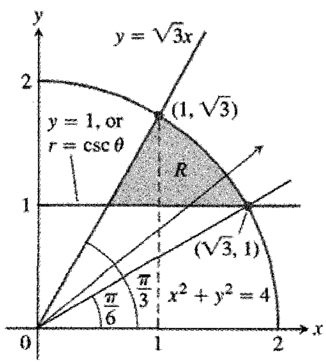
$$\iint_R \left(9-x^2-y^2\right)dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(9-r^2\right)r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(9r-r^3\right)dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{9}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1}d\theta$$
$$=\frac{17}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{17\pi}{2}$$



شکل۱۵-۲۷: ناحیه توپر توصیف شده در مثال ۵.

مثال۶: با استفاده از انتگرال گیری قطبی مساحت ناحیه R واقع در صفحه xy را که توسط دایره $x^2+y^2=4$ محصور شده، بالای خط $y=1$ و پایین خط $y=\sqrt{3}x$ قرار دارد محاسبه کنید.

حل: ناحیه R در شکل ۱۵-۲۸ رسم شده است. ابتدا توجه کنید که شیب خط $y=\sqrt{3}x$ عبارت است از $\sqrt{3}=\tan\theta$، لذا $\theta=\pi/3$. از طرفی مشاهده می کنیم که خط $y=1$ دایره $x^2+y^2=4$ را زمانی قطع می کند که داشته باشیم: $x^2+1=4$ یا $x=\sqrt{3}$. بعلاوه خط شعاعی که از مبداء رسم شده و از نقطه $\left(\sqrt{3},1\right)$ می گذرد شیبی برابر با $1/\sqrt{3}=\tan\theta$ دارد که از اینجا زاویه شیب آن برابر با $\theta=\pi/6$ بدست می آید. این اطلاعات در (شکل۱۵-۸) نشان داده شده اند.



شکل۱۵- ۲۸: ناحیه R مذکور در مثال ۶.

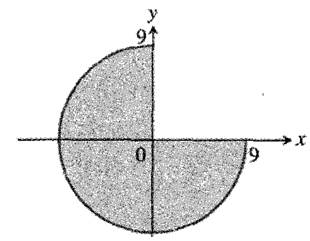
حال در مورد ناحیه R، وقتی θ از $\pi/6$ تا $\pi/3$ تغییر می کند مختص قطبی r از خط افقی $y=1$ تا دایره $x^2+y^2=4$ تغییر می کند. با جانشانی $r\sin\theta$ به جای y در معادله مربوط به خط افقی داریم: $r\sin\theta=1$ یا $r=\csc\theta$، که معادله قطبی خط است. معادله قطبی دایره عبارت است از $r=2$. بنابراین در مختصات قطبی، برای $\pi/6\le\theta\le\pi/3$، r از $r=\csc\theta$ تا $r=2$ تغییر می کند. پس نتیجه می گیریم که انتگرال مکرر مربوط به مساحت به صورت زیر درمی آید

$$\iint_R dA=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\theta}^{2}r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=\csc\theta}^{r=2}d\theta$$
$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{2}\left[4-\csc^2\theta\right]d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[4\theta+\cot\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{6}+\sqrt{3}\right)=\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$$

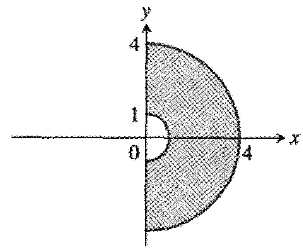
تمرین های ۱۵-۴

در تمرین هـای ۱-۸ ناحیـه مفـروض را در مختـصات قطبـی توصیف کنید.

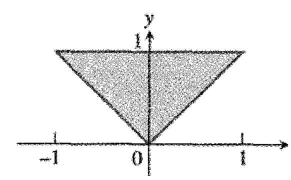
-۱



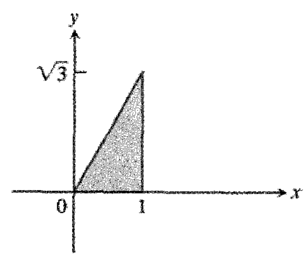
-۲



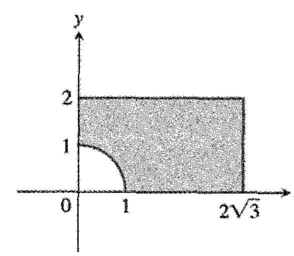
-۳



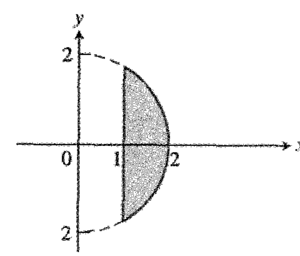
-۴



-۵



-۶



۷- ناحیه محصور شده توسط دایره $x^2+y^2=2x$.

۸- ناحیـه محـصور شـده توسـط نیمـدایره $x^2+y^2=2y$، $y\ge 0$.

محاسبه انتگرال های قطبی

در تمرین های ۹-۲۲ انتگرال دکارتی را به یک انتگـرال قطبـی معادل تبدیل کنید. سپس انتگرال قطبی را محاسبه کنید.

۹- $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

۱۰- $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \left(x^2+y^2\right)dxdy$

۱۱- $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} \left(x^2+y^2\right)dxdy$

۱۲- $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

۱۳- $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} xdxdy$

۱۴- $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$

۱۵- $\int_{1}^{\sqrt{3}}\int_{1}^{x} dydx$

۱۶- $\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{\sqrt{4-y^2}}^{y} dxdy$

۱۷- $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

۱۸- $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}dydx$

۱۹- $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

۲۰- $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln\left(x^2+y^2+1\right)dxdy$

۲۱- $\int_{0}^{1}\int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} (x+2y)dydx$

۲۲- $\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}dydx$

در تمرین های۲۳-۲۶، ناحیه انتگرال گیری را رسم کرده و هـر انتگرال یا مجموع انتگرال هـای قطبـی را بـه یـک انتگـرال یـا مجموع انتگرال های دکارتی تبدیل کنید. انتگرال ها را محاسـبه نکنید.

۲۳- $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1} r^3\sin\theta\cos\theta dr\,d\theta$

۲۴- $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{1}^{\csc\theta} r^2\cos\theta dr\,d\theta$

۲۵- $\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{2\sec\theta} r^5\sin^2\theta dr\,d\theta$

۲۶- $\int_{0}^{\tan^{-1}\frac{4}{3}}\int_{0}^{3\sec\theta} r^7dr\,d\theta+\int_{\tan^{-1}\frac{4}{3}}^{\pi/2}\int_{0}^{4\csc\theta} r^7dr\,d\theta$

محاسبه مساحت در مختصات قطبی

۲۷- مطلـوب اسـت مـساحت ناحیـه ای کـه بوسـیله خم $r=2(2-\sin 2\theta)^{\frac{1}{2}}$ از ربع اول جدا می شود.

۲۸- **همپوشانی دلوار و دایره.** مطلوب است مساحت ناحیه ای که داخل دلوار $r=1+\cos\theta$ و خارج دایره $r=1$ قرار دارد.

۲۹- یک برگ گل. مطلوب است مساحت محصور شده بوسیله یک برگ از گل $r=12\cos 3\theta$.

۳۰- پوسته حلزون. مطلوب است مساحت ناحیه محصور شده بوسیله قسمت مثبت محور x و مارپیچ $r=\frac{4\theta}{3}$، $0\le\theta\le 2\pi$. این ناحیه شبیه پوسته حلزون است.

۳۱- دلوار در ربع اول. مساحت ناحیه ای را حساب کنید که بوسیله دلوار $r=1+\cos\theta$ از ربع اول جدا می شود.

۳۲- دلوارهای همپوشان. مطلوب است مساحت ناحیه ای که بین نواحی داخلی دلوارهای $r=1+\cos\theta$ و $r=1-\cos\theta$ مشترک است.

مقادیر متوسط

در مختصات قطبی مقدار متوسط یک تابع روی ناحیه ای چون R (بخش۱۵-۳) از رابطه زیر بدست می آید

$$\frac{1}{(R)\text{مساحت}}\iint_R f(r,\theta)r\,dr\,d\theta$$

۳۳- ارتفاع متوسط نیمکره. مطلوب است ارتفاع متوسط رویه نیمکروی $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ بالای قرص $x^2+y^2\le a^2$ واقع در صفحه xy.

۳۴- ارتفاع متوسط مخروط. مطلوب است ارتفاع متوسط مخروط (منفرد) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بالای قرص $x^2+y^2\le a^2$ واقع در صفحه xy.

۳۵- فاصله **متوسط از درون قرص تا مرکز آن.** مطلوب است فاصله متوسط نقطه ای چون $P(x,y)$ واقع در قرص $x^2+y^2\le a^2$ تا مبداء.

۳۶- مربع فاصله متوسط یک نقطه از قرص تا نقطه ای در مرز آن. مطلوب است مقدار متوسط مربع فاصله نقطه ای چون $P(x,y)$ از قرص $x^2+y^2\le 1$ تا نقطه مرزی $A(1,0)$.

نظریه و مثال ها

۳۷- تبدیل به انتگرال قطبی. انتگرال

$$f(x,y)=\left[\ln\left(x^2+y^2\right)\right]/\sqrt{x^2+y^2}$$

را روی ناحیه $1\le x^2+y^2\le e$ حساب کنید.

۳۸- تبدیل به انتگرال قطبی. انتگرال

$$f(x,y)=\left[\ln\left(x^2+y^2\right)\right]/\left(x^2+y^2\right)$$

را روی ناحیه $1\le x^2+y^2\le e^2$ حساب کنید.

۳۹- حجم استوانه قائم نامستدیر. ناحیه واقع در داخل دلوار $r=1+\cos\theta$ و خارج دایره $r=1$ قاعده یک استوانه قائم توپر است. بالای استوانه در صفحه $z=x$ قرار دارد. حجم استوانه را بیابید.

۴۰- حجم استوانه قائم نامستدیر. ناحیه محصور شده بوسیله پروانه $r^2=2\cos 2\theta$ قاعده استوانه قائم توپری است که قاعده بالایی آن به کره $z=\sqrt{2-r^2}$ محدود است. حجم استوانه را بیابید.

۴۱- تبدیل به انتگرال های قطبی.

(الف)- روش معمول برای محاسبه انتگرال ناسره $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ این است که نخست مربع آن را محاسبه کنیم یعنی

$$I^2=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}dx\,dy$$

انتگرال آخر را با استفاده از مختصات قطبی حل کرده و از معادله حاصل I را بدست آورید.

(ب)- مطلوب است

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{erf}(x)=\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}dt$$

۴۲- تبدیل به انتگرال قطبی. انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}dx\,dy$$

۴۳- وجود انتگرال. از تابع

$$f(x,y)=1/\left(1-x^2-y^2\right)$$

روی قرص $x^2+y^2\le 3/4$ انتگرال بگیرید. آیا انتگرال $f(x,y)$ روی قرص $x^2+y^2\le 1$ موجود است؟ دلیل بیاورید.

۴۴- فرمول مساحت در مختصات قطبی. با استفاده از انتگرال

دوگانه در مختصات قطبی فرمول زیر را برای مساحت ناحیه بادبزنی بین مبداء و خم قطبی $r=f(\theta)$، $\alpha \leq \theta \leq \beta$ بدست آورید

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2 d\theta$$

۴۵- فاصله متوسط تا نقطه ای مفروض در داخل قرص. فرض کنید P_0 نقطه ای در داخل دایره ای به شعاع a و h نشان دهنده فاصله P_0 تا مرکز دایره باشد. d را فاصله نقطه دلخواهی چون P از P_0 بگیرید. مقدار متوسط d^2 را روی ناحیه محصور شده توسط دایره بیابید. (راهنمایی: با قرار دادن مرکز دایره در مبداء و P_0 بر روی محور x کار را ساده کنید).

۴۶- مساحت. فرض کنید مساحت ناحیه ای در صفحه مختصات قطبی عبارت است از

$$A=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{\csc\theta}^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta$$

این ناحیه را رسم کرده و مساحت آن را بیابید.

مسائل رایانه ای

در تمرین های ۴۷-۵۰ با استفاده از یک نرم افزار ریاضی انتگرال های دکارتی را به انتگرال قطبی معادل تبدیل کرده و انتگرال قطبی را محاسبه کنید. در هر تمرین مراحل زیر را طی کنید.

(الف)- ناحیه دکارتی انتگرال گیری را در صفحه xy رسم کنید.

(ب)- هر خم مرزی ناحیه دکارتی قسمت (الف) را به نمایش قطبی آن تبدیل کنید. برای این کار معادله دکارتی آن را برحسب r و θ حل کنید.

(پ)- با استفاده از نتایج قسمت (ب) ناحیه قطبی انتگرال گیری را در صفحه $r\theta$ رسم کنید.

(ت)- انتگرالده را از مختصات دکارتی به قطبی تبدیل کنید. از روی نمودار قسمت (پ) حدود انتگرال گیری را تعیین کرده و با استفاده از قابلیت انتگرال گیری نرم افزار محاسباتی انتگرال قطبی را محاسبه کنید.

۴۷- $\int_0^1\int_x^1 \frac{y}{x^2+y^2}dy\,dx$

۴۸- $\int_0^1\int_0^{x/2} \frac{x}{x^2+y^2}dy\,dx$

۴۹- $\int_0^1\int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$

۵۰- $\int_0^1\int_y^{2-y} \sqrt{x+y}\,dx\,dy$

۱۵-۵- انتگرال های سه گانه در مختصات قائم

درست همانطور که انتگرال های دوگانه به ما امکان می دهند تا نسبت به انتگرال های یگانه بتوانیم به وضعیت های کلی تری بپردازیم، انتگرال های سه گانه هم ما را قادر می سازند تا نسبت به انتگرال های دوگانه مسائل کلی تری را حل کنیم. از انتگرال های سه گانه برای محاسبه حجم شکل های سه بعدی و مقدار متوسط توابع روی نواحی سه بعدی استفاده می کنیم. انتگرال های سه گانه در مطالعه میدان های برداری و شارش شاره ها (جریان سیالات) در سه بعد هم ظاهر می شوند که در فصل ۱۶ به این مفاهیم خواهیم پرداخت.

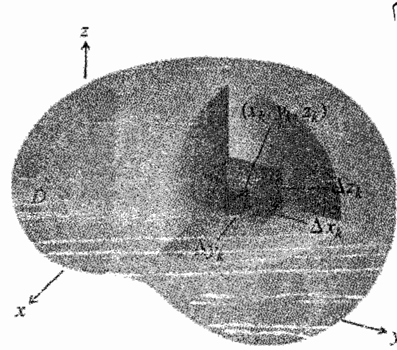
انتگرال های سه گانه

اگر $F(x,y,z)$ تابعی باشد که روی ناحیه بسته و کراندار چون D واقع در فضا، مثل ناحیه ای که بوسیله یک گوی توپر یا یک توده گل اشغال می شود، تعریف شده باشد. انتگرال F روی D را می توان به صورت زیر تعریف کرد. ناحیه ای به شکل مکعب مستطیل شامل D را با صفحات موازی محورهای مختصات به خانه های مکعب مستطیلی کوچک تقسیم می کنیم (شکل**۱۵-۲۹**). خانه هایی را که بطور کامل داخل D قرار گرفته اند با یک ترتیبی از 1 تا n شماره گذاری می کنیم. ابعاد خانه kام عبارت است از Δx_k در Δy_k در Δz_k و حجم

آن $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$. در هر خانه نقطه ای چون (x_k, y_k, z_k) برمی گزینیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k \qquad (1)$$

می خواهیم بدانیم وقتی D به خانه های کوچکتر و کوچکتر تقسیم بندی شود بطوریکه Δx_k، Δy_k و Δz_k و نرم شبکه $\|P\|$، بزرگترین مقدار بین Δx_k، Δy_k و Δz_k، همگی به صفر میل کنند چه اتفاقی می افتد. وقتی مقدار حدی واحدی بدست آید قطع نظر از اینکه کدام شبکه و کدام نقاط (x_k, y_k, z_k) انتخاب می شوند، می گوییم F روی D **انتگرال پذیر** است. همانند قبل می توان نشان داد که وقتی F پیوسته باشد و رویه محدود کننده D از تعداد زیادی رویه هموار، که با تعداد زیادی خم هموار به هم وصل می شوند، تشکیل شده باشد آنگاه F انتگرال پذیر است. وقتی $\|P\| \to 0$ و تعداد خانه ها n به بینهایت میل می کند مجموع های S_n به یک حد میل می کنند که این حد را **انتگرال سه گانه F روی D** نامیده و به صورت زیر می نوسیم



شکل۱۵-۲۹: تقسیم یک جسم به خانه های مکعب مستطیلی با حجم ΔV_k.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(x, y, z)dV$$

یا

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_n = \iiint_D F(x, y, z)dx\, dy\, dz$$

نواحی D یی که توابع پیوسته روی آنها انتگرال پذیرند نواحیی هستند که مرزهایشان بطور معقولی هموارند.

حجم یک ناحیه در فضا

اگر F تابعی پیوسته با مقدار ۱ باشد مجموع های معادله (۱) به صورت زیر درمی آیند

$$S_n = \sum F(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \sum 1.\Delta V_k = \sum \Delta V_k$$

وقتی Δx_k، Δy_k و Δz_k به صفر میل کنند خانه های ΔV_k کوچکتر و بیشتر می شوند و بیشتر و بیشتر D را می پوشانند. بنابراین حجم D را به صورت انتگرال سه گانه زیر تعریف می کنیم

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \iiint_D dV$$

تعریف: حجم ناحیه محصور و بسته ای چون D در فضا از فرمول زیر بدست می آید

$$V = \iiint_D dV$$

این تعریف با تعاریف قبلی حجم سازگار است هر چند که از اثبات این مطلب صرف نظر می کنیم. همانطور که به زودی خواهیم دید این انتگرال ما را قادر می سازد تا حجم اجسام محصور شده بوسیله رویه های خمیده را محاسبه کنیم.

تعیین حدود انتگرال گیری با ترتیب $dzdydx$

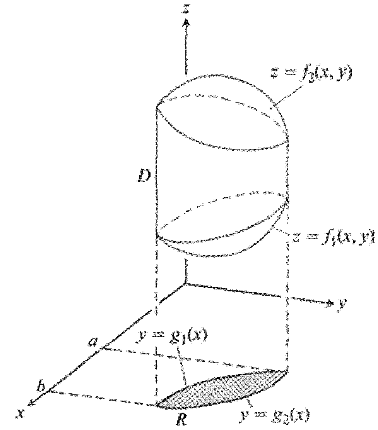
برای محاسبه انتگرال های سه گانه صورت سه بعدی قضیه فوبینی را بکار می بریم (بخش۱۵-۲) تا آنها را به کمک سه انتگرال گیری یگانه مکرر محاسبه کنیم. همانطور که در مورد انتگرال های دوگانه دیدیم برای یافتن حدود انتگرال گیری این انتگرال های یگانه یک روش هندسی وجود دارد.

برای محاسبه

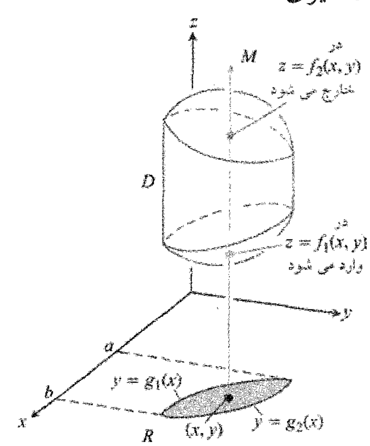
$$\iiint_D F(x, y, z)dV$$

روی ناحیه D ابتدا نسبت به z، بعد نسبت به y و در نهایت نسبت به x انتگرال می گیریم (ممکن است ترتیب دیگری برای انتگرال گیری برگزینید اما روش کار یکی است. این مطلب را در مثال ۲ نشان می دهیم).

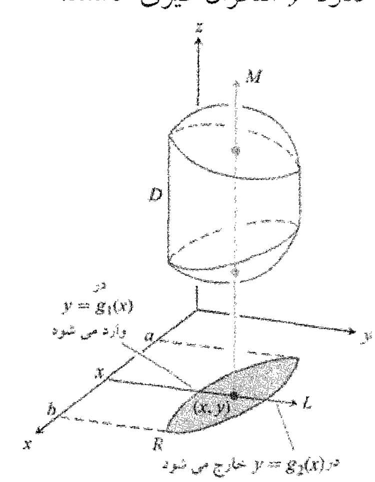
۱- رسم. ناحیه D و «سایه» (تصویر قائم) آن روی صفحه xy، R، را رسم می کنیم. رویه های محدود کننده بالایی و پایینی D و خمهای محدود کننده بالایی و پایینی R را نامگذاری می کنیم.



۲- تعیین حدود z انتگرال گیری. خطی مثل M رسم می کنیم که از یک نقطه نمونه چون (x,y) واقع در R گذشته و موازی با محور z باشد. با افزایش z، M در $z=f_1(x,y)$ وارد D شده و در $z=f_2(x,y)$ از آن خارج می شود. اینها حدود z انتگرال گیری هستند.



۳- تعیین حدود y انتگرال گیری. خطی مثل L رسم می کنیم که از نقطه (x,y) موازی با محور y بگذرد. با افزایش y، L در $y=g_1(x)$ وارد R شده و در $y=g_2(x)$ از آن خارج می شود. اینها حدود y انتگرال گیری هستند.



۴- تعیین حدود x انتگرال گیری. حدود x را طوری انتخاب می کنیم که تمام خطوطی را که از R موازی با محور y می گذرد در بر بگیرد. ($x=a$ و $x=b$ در شکل قبل). اینها حدود x انتگرال گیری اند. انتگرال عبارت است از

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)}F(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

اگر ترتیب انتگرال گیری را عوض کردید همین روش را دنبال کنید. «سایه» ناحیه D، در صفحه دو متغیر آخری قرار می گیرد که انتگرال گیری مکرر نسبت به آنها گرفته می شود.

هرگاه ناحیه توپری چون D از بالا و پایین بوسیله یک رویه محدود شده باشد و وقتی ناحیه «سایه» R با یک خم پایینی و بالایی محدود شده باشد می توان از روش فوق استفاده کرد. اما در مورد نواحی که دارای حفره های پیچیده باشند روش فوق کاربرد ندارد، هر چند گاهی می توان چنین نواحی را به نواحی ساده تری تقسیم کرد که برای هر ناحیه کوچک روش فوق قابل کاربرد است.

مثال ۱: مطلوب است حجم ناحیه D که بوسیله رویه های $z=x^2+3y^2$ و $z=8-x^2-y^2$ محصور شده است.

حل: حجم برابر است با

$$V=\iiint_D dz\,dy\,dx$$

یعنی انتگرال $F(x,y,z)=1$ روی D. برای یافتن حدود انتگرال گیری برای محاسبه انتگرال، ابتدا ناحیه را رسم می کنیم. رویه ها (شکل۱۵-۳۰) یکدیگر را در استوانه بیضوی $x^2+3y^2=8-x^2-y^2$ یا $x^2+2y^2=4, z>0$ قطع می کنند. مرز ناحیه R، تصویر D روی صفحه xy، یک بیضی با همین معادله است یعنی $x^2+2y^2=4$. مرز «بالایی» R خم $z=\sqrt{(4-x^2)/2}$ و مرز پایینی آن خم $y=-\sqrt{(4-x^2)/2}$ است.

اکنون حدود z انتگرال گیری را می یابیم. خط M که از نقطه نمونه (x,y) واقع در R می گذرد و موازی محور z است در $z=x^2+3y^2$ وارد D و در $z=8-x^2-y^2$ از

آن خارج می شود.

در این مرحله حدود y انتگرال گیری را می یابیم. خط L که از نقطه (x,y) موازی با محور y می گذرد در $y = -\sqrt{(4-x^2)/2}$ وارد R شده و در $y = \sqrt{(4-x^2)/2}$ از آن خارج می شود.

سرانجام حدود x انتگرال گیری را می یابیم. وقتی L عرض R را جاروب می کند مقدار x از $x=-2$ در $(-2,0,0)$ تا $x=2$ در $(2,0,0)$ تغییر می کند. حجم D برابر است با

$$V = \iiint_D dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \left(8-2x^2-4y^2\right) dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[\left(8-2x^2\right)y - \frac{4}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} dx$$

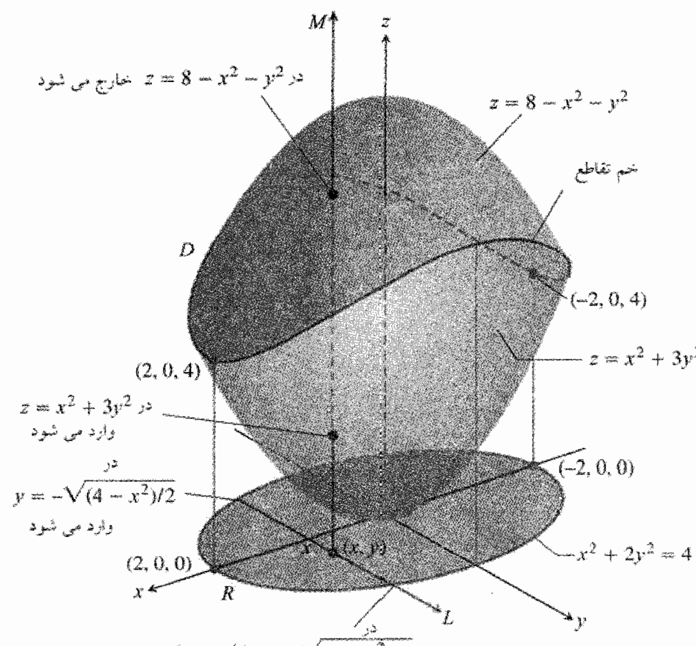
$$= \int_{-2}^{2} \left(2\left(8-2x^2\right)\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} - \frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[8\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2} - \frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right] dx$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^{2} \left(4-x^2\right)^{3/2} dx = 8\pi\sqrt{2}$$

در مثال بعد D را به جای صفحه xy روی صفحه xy تصویر می کنیم تا نشان دهیم که چگونه از ترتیب متفاوت انتگرال گیری استفاده می کنیم.

مثال ۲: مطلوب است تعیین حدود انتگرال گیری برای محاسبه انتگرال سه گانه تابعی چون $F(x,y,z)$ روی چهاروجهی D با رئوس $(0,0,0)$، $(1,1,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,1,1)$. از ترتیب انتگرال گیری $dydzdx$ استفاده کنید.



شکل ۱۵-۳۰: حجم ناحیه محصور شده بوسیله دو سهمیوار که در مثال ۱ محاسبه شده است.

حل: D و «سایه» آن در صفحه xz، R، را رسم می کنیم(شکل ۱۵-۳۱). رویه محدود کننده بالایی(سمت راستی) D در صفحه $y=1$ قرار دارد. رویه محدود کننده پایینی (سمت چپی) در صفحه $y=x+z$ قرار دارد. مرز بالایی R عبارت است از خط $z=1-x$ و مرز پایینی آن خط $z=0$ است.

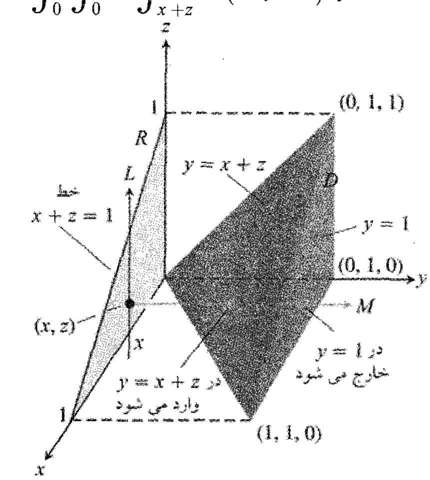
ابتدا حدود y انتگرال گیری را می یابیم. خطی که از نقطه نمونه (x,z) واقع در R موازی با محور y می گذرد در $y=x+z$ وارد D و در $y=1$ از آن خارج می شود.

اکنون حدود z انتگرال گیری را تعیین می کنیم. خط L که

از (x,z) موازی با محور z می گذرد در $z=0$ وارد R و در $z=1-x$ از آن خارج می شود.

سرانجام حدود x انتگرال گیری را تعیین می کنیم. وقتی L عرض R را جاروب می کند مقدار x از $x=0$ تا $x=1$ تغییر می کند. انتگرال عبارت است از

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_{x+z}^1 F(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$$



شکل۱۵-۳۱: تعیین حدود انتگرال گیری برای محاسبه انتگرال سه گانه تابعی که روی چهار وجهی D تعریف شده است (مثال های۲ و۳).

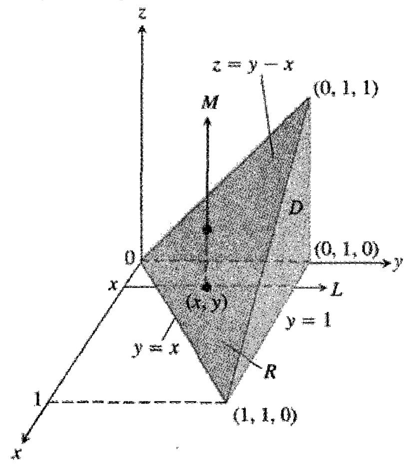
مثال۳: انتگرال $F(x,y,z)=1$ را روی چهار وجهی D مثال۲ با ترتیب $dzdydz$ محاسبه کرده و بعد با ترتیب $dydzdx$ انتگرال بگیرید.

حل: ابتدا حدود z انتگرال گیری را تعیین می کنیم، خطی چون M که از نقطه نمونه (x,y) واقع در سایهٔ صفحه xy موازی با محور z می گذرد در $z=0$ وارد چهار وجهی شده و در $z=y-x$ از صفحه بالایی خارج می شود (شکل۱۵-۳۲).

حالا حدود y انتگرال گیری را می یابیم. بر روی صفحه xy، که در آن $z=0$ است، وجه شیبدار چهار وجهی صفحه را در خط $y=x$ قطع می کند. خط L که از (x,y) موازی با محور y می گذرد در $y=x$ وارد سایه واقع در صفحه xy شده و در $y=1$ از آن خارج می شود (شکل۱۵-۳۲).

سرانجام حدود x انتگرال گیری را می یابیم. وقتی خط L موازی با محور y مرحله قبلی سایه را جاروب می کند مقدار x از $x=0$ تا $x=1$ در نقطه $(1,1,0)$ تغییر می کند (شکل**۱۵-۳۲** را ببینید). انتگرال عبارت است از

$$\int_0^1\int_x^1\int_0^{y-x} F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$



شکل۱۵-۳۲: چهار وجهی مذکور در مثال ۳ نشان می دهد که چگونه حدود انتگرال گیری را برای ترتیب $dzdydz$ می یابیم.

مثلاً اگر $F(x,y,z)=1$ باشد حجم چهار وجهی را چنین بدست می آوریم

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1\int_x^1\int_0^{y-x} dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1\int_x^1 (y-x)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2-xy\right]_{y=x}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1\left(\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right]_0^1=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

اگر ترتیب انتگرال گیری $dydzdx$ باشد باز هم همین نتیجه بدست می آید. از مثال **۲** داریم

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_{x+z}^1 dy\,dz\,dx \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-z)\,dz\,dx \\
&= \int_0^1\left[(1-x)z-\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1-x} dx \\
&= \int_0^1\left[(1-x)^2-\frac{1}{2}(1-x)^2\right]dx
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2dx$$

$$=-\frac{1}{6}(1-x)^3\Big]_0^1=\frac{1}{6}$$

مقدار متوسط یک تابع در فضا

مقدار متوسط تابع F روی ناحیه D واقع در فضا با فرمول زیر تعریف می شود

$$\text{مقدار متوسط } F \text{ روی } D=\frac{1}{D \text{ حجم}}\iiint_D F\,dV \qquad (۲)$$

مثلاً اگر $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ باشد مقدار متوسط F روی D عبارت است از فاصله متوسط نقاط واقع در D از مبداء. اگر $F(x,y,z)$ دما در نقطه (x,y,z) از جسمی باشد که ناحیه D از فضا را اشغال کرده است مقدار متوسط F روی D دمای متوسط جسم خواهد بود.

مثال۴: مطلوب است مقدار متوسط $F(x,y,z)=xyz$ در سراسر ناحیه مکعبی D واقع در یک هشتم اول و محصور شده بوسیله صفحات مختصات و صفحات $x=2$، $y=2$ و $z=2$.

حل: مکعب را با جزئیات کافی رسم می کنیم تا حدود انتگرال گیری نشان داده شود (شکل۱۵-۳۳). سپس با استفاده از معادله (۲) مقدار متوسط F را روی مکعب محاسبه می کنیم.

حجم ناحیه D برابر است با $(2)(2)(2)=8$. مقدار انتگرال F روی مکعب برابر است با

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 xyz\,dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^2\left[\frac{x^2}{2}yz\right]_{x=0}^{x=2}dy\,dz$$

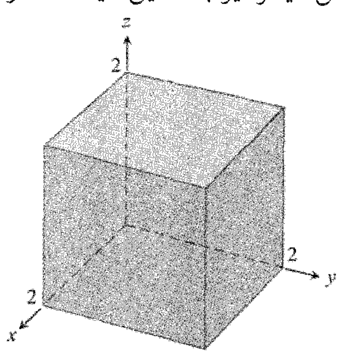
$$=\int_0^2\int_0^2 2yz\,dy\,dz$$

$$=\int_0^2\left[y^2z\right]_{y=0}^{y=2}dz=\int_0^2 4z\,dz=\left[2z^2\right]_0^2=8$$

با استفاده از این مقادیر معادله (۲) نتیجه می دهد

$$\text{مقدار متوسط } xyz \text{ روی مکعب}=\frac{1}{\text{حجم}}\iiint_{cube} xyz\,dV=\left(\frac{1}{8}\right)(8)=1$$

در محاسبه انتگرال ترتیب $dxdydz$ را برگزیده ایم اما هر یک از ۵ ترتیب ممکن دیگر نیز به همین نتیجه منجر می شوند.



شکل۱۵-۳۳: ناحیه انتگرال گیری مذکور در مثال ۴.

ویژگی های انتگرال های سه گانه

انتگرال های سه گانه همان ویژگی های جبری انتگرال های دوگانه و یگانه را دارند. فقط کافیست در چهار ویژگی ارائه شده در بخش ۱۵-۲ به جای انتگرال های دوگانه انتگرال های سه گانه قرار دهید.

تمرین های ۱۵-۵

انتگرال های سه گانه با ترتیب تکرار متفاوت

۱- انتگرال مثال ۲ را با فرض $F(x,y,z)=1$ محاسبه کنید تا حجم چهار وجهی را باترتیب $dzdxdy$ بدست آورید.

۲- **حجم جسم مکعب مستطیلی.** شش انتگرال سه گانه مکرر مختلف برای حجم جسم مکعب مستطیلی واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=1$، $y=2$ و $z=3$ نوشته و یکی از انتگرال ها را محاسبه کنید.

۳- **حجم چهار وجهی.** شش انتگرال سه گانه مکرر مختلف برای حجم چهار وجهی بنویسید که بوسیله صفحه $6x+3y+2z=6$ از یک هشتم اول جدا می شود. یکی از انتگرال ها را محاسبه کنید.

۴- **حجم جسم.** شش انتگرال سه گانه مکرر مختلف برای حجم ناحیه ای در یک هشتم اول بنویسید که بوسیله استوانه $x^2+z^2=4$ و صفحه $y=3$ محصور شده است. یکی از انتگرال ها را محاسبه کنید.

۵- **حجم محصور شده بوسیله سهمیوارها.** فرض کنید D

ناحیه محصور شده بوسیله سهمیوارهای $z=8-x^2-y^2$ و $z=x^2+y^2$ است. شش انتگرال مکرر سه گانه مختلف برای حجم D بنویسید. یکی از انتگرال ها را محاسبه کنید.

۶- **حجم داخل سهمیوار زیر یک صفحه.** فرض کنید D ناحیه محصور شده بوسیله سهمیوار $z=x^2+y^2$ و صفحه $z=2y$ است. انتگرال های مکرر سه گانه ای با ترتیب $dz\,dx\,dy$ و $dz\,dy\,dx$ بنویسید که حجم D را بدست می دهند. نیازی به محاسبه انتگرال ها نیست.

محاسبه انتگرال های مکرر سه گانه

در تمرین های ۷-۲۰ انتگرال ها را محاسبه کنید.

۷- $\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(x^2+y^2+z^2\right)dz\,dy\,dx$

۸- $\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3y}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$

۹- $\int_1^e\int_1^{e^2}\int_1^{e^2}\frac{1}{xyz}dx\,dy\,dz$

۱۰- $\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{3-3x-y} dz\,dy\,dx$

۱۱- $\int_0^{\pi/6}\int_0^1\int_{-2}^3 y\sin z\,dx\,dy\,dz$

۱۲- $\int_{-1}^1\int_0^1\int_0^2(x+y+z)dy\,dx\,dz$

۱۳- $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz\,dy\,dx$

۱۴- $\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{2x+y} dz\,dx\,dy$

۱۵- $\int_0^1\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} dz\,dy\,dx$

۱۶- $\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_3^{4-x^2-y} x\,dz\,dy\,dx$

۱۷- $\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi\cos(u+v+w)du\,dv\,dw$ (فضای uvw)

۱۸- $\int_0^1\int_1^{\sqrt{e}}\int_1^e se^s\ln r\frac{(\ln t)^2}{t}dt\,dr\,ds$ (فضای rst)

۱۹- $\int_9^{\pi/4}\int_0^{\ln\sec v}\int_{-\infty}^{2t} e^x\,dx\,dt\,dv$ (فضای tvx)

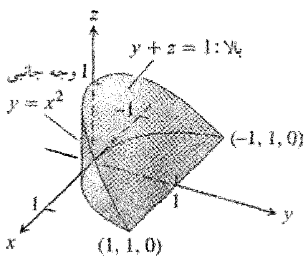
۲۰- $\int_0^7\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-q^2}}\frac{q}{r+1}dp\,dq\,dr$ (فضای pqr)

یافتن انتگرال های مکرر معادل

۲۱- شکل زیر ناحیه انتگرال گیری انتگرال

$$\int_{-1}^1\int_{x^2}^1\int_0^{1-y} dz\,dy\,dx$$

را نشان می دهد.



این انتگرال را به صورت یک انتگرال مکرر معادل با ترتیب های زیر بنویسید.

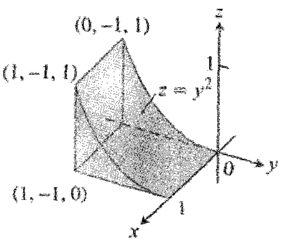
(الف)- $dy\,dz\,dx$ (ب)- $dy\,dx\,dz$ (پ)- $dx\,dy\,dz$

(ت)- $dx\,dz\,dy$ (ث)- $dz\,dx\,dy$

۲۲- شکل زیر ناحیه انتگرال گیری انتگرال

$$\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^{y^2} dz\,dy\,dx$$

را نشان می دهد.



این انتگرال را به صورت یک انتگرال مکرر معادل با ترتیب های زیر بنویسید:

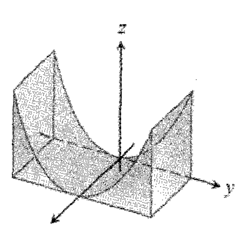
(الف)- $dy\,dz\,dx$ (ب)- $dy\,dx\,dz$ (پ)- $dx\,dy\,dz$

(ت)- $dx\,dz\,dy$ (ث)- $dz\,dx\,dy$

یافتن حجم به کمک انتگرال های سه گانه

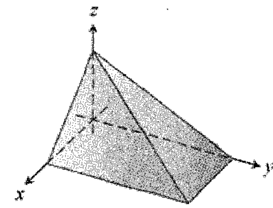
در تمرین های ۲۳-۲۶ حجم نواحی را بیابید.

۲۳- ناحیه بین استوانه $z=y^2$ و صفحه xy که بوسیله صفحات $x=0$، $x=1$ و $y=-1$ و $y=1$ محصور شده است.

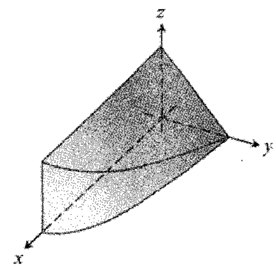


۲۴- ناحیه ای در یک هشتم اول که بوسیله صفحات مختصات

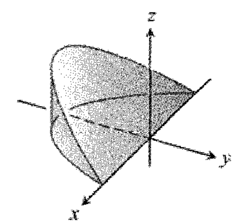
و صفحات $x+z=1$ و $y+2z=2$ محصور شده است.



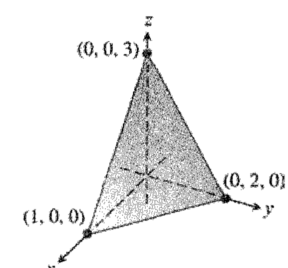
۲۵- ناحیه ای در یک هشتم اول که بوسیله صفحات مختصات، صفحه $y+z=2$ و استوانه $x=4-y^2$ محصور شده است.



۲۶- گوه ای که بوسیله صفحات $z=-y$ و $z=0$ از استوانه $x^2+y^2=1$ جدا می شود.

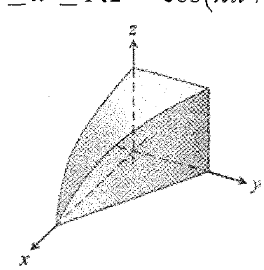


۲۷- چهار وجهی واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات و صفحه ای که از نقاط $(1,0,0)$، $(0,2,0)$ و $(0,0,3)$ می گذرد.

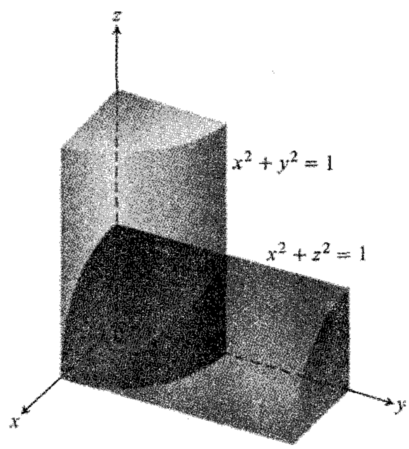


۲۸- ناحیه ای واقع در یک هشتم اول محدود به صفحات مختصات، صفحه $y=1-x$ و رویه

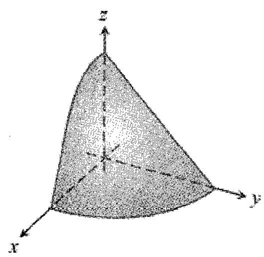
$$z=\cos(\pi x/2),\ 0\le x\le 1$$



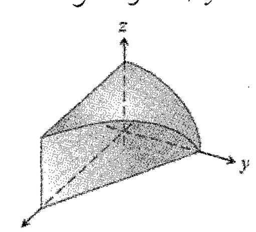
۲۹- ناحیه فصل مشترک نواحی داخلی استوانه های $x^2+y^2=1$ و $x^2+z^2=1$ که یک هشتم آن در شکل زیر نشان داده شده است.



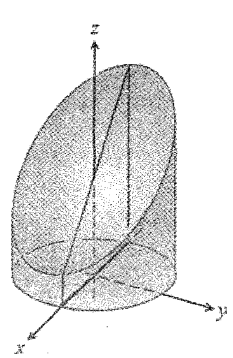
۳۰- ناحیه ای در یک هشتم اول، محدود به صفحات مختصات و رویه $z=4-x^2-y$.



۳۱- ناحیه ای در یک هشتم اول، محدود به صفحات مختصات، صفحه $x+y=4$ و استوانه $y^2+4z^2=16$.



۳۲- ناحیه ای که بوسیله صفحه $z=0$ و صفحه $x+z=3$ از استوانه $x^2+y^2=4$ جدا می شود.



۳۳- ناحیه بین صفحات

$$2x+2y+z=4 \text{ و } x+y+2z=2$$

واقع در یک هشتم اول.

۳۴- ناحیه متناهی محصور شده بوسیله صفحات

$$z=x \text{، } x+z=8 \text{، } z=y \text{، } y=8 \text{ و } z=0$$

۳۵- ناحیه ای که بوسیله صفحه xy و صفحه $z=x+2$ از استوانه بیضوی توپر $x^2+4y^2\le 4$ جدا می شود.

۳۶- ناحیه ای که از پشت به صفحه $x=0$، از جلو و کناره ها بـه اسـتوانه سـهموی $x=1-y^2$، از بـالا بـه سهمیوار $z=x^2+y^2$ و از پایین به صفحه xy محدود است.

مقادیر متوسط

در تمرین های ۳۷-۴۰ مقدار متوسط $F(x,y,z)$ را روی ناحیه مفروض بیابید.

۳۷- $F(x,y,z)=x^2+9$ روی مکعبی در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=2$، $y=2$ و $z=2$.

۳۸- $F(x,y,z)=x+y+z$ روی جسم مکعب مستطیلی واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=1$، $y=1$ و $z=2$.

۳۹- $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ روی مکعبی در یک هشتم اول محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=1$، $y=1$ و $z=1$.

۴۰- $F(x,y,z)=xyz$ روی مکعبی در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=2$، $y=2$ و $z=2$.

تغییر ترتیب انتگرال گیری

انتگرال های تمرین های ۴۱-۴۴ را با تغییر مناسب ترتیب انتگرال گیری محاسبه کنید.

۴۱- $$\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$$

۴۲- $$\int_0^1\int_0^1\int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\,dy\,dx\,dz$$

۴۳- $$\int_0^1\int_{\sqrt[3]{z}}^1\int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin \pi y^2}{y^2}\,dx\,dy\,dz$$

۴۴- $$\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\,dy\,dz\,dx$$

نظریه و مثال ها

۴۵- **یافتن حد بالای یک انتگرال مکرر.** مطلوب است محاسبه a:

$$\int_0^1\int_0^{4-a-x^2}\int_a^{4-x^2-y} dz\,dy\,dx=\frac{4}{15}$$

۴۶- **بیضیوار.** به ازای چه مقدار از c حجم بیضیوار $x^2+(y/c)^2+(z/c)^2=1$ برابر 8π است؟

۴۷- **مینیمم کردن انتگرال سه گانه.** مطلوب است دامنه D واقع در فضا که مقدار انتگرال زیر در آن مینیمم می شود

$$\iiint_D \left(4x^2+4y^2+z^2-4\right)dV$$

برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۴۸- **ماکسیمم کردن انتگرال سه گانه.** مطلوب است دامنه D واقع در فضا که مقدار انتگرال زیر در آن ماکسیمم می شود

$$\iiint_D \left(1-x^2-y^2-z^2\right)dV$$

برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

مسائل رایانه ای

در تمرین های۴۹-۵۲ با استفاده از قابلیت انتگرال گیری یک نرم افزار ریاضی انتگرال سه گانه تابع مفروض را روی ناحیه توپر مشخص شده محاسبه کنید.

۴۹- $F(x,y,z)=x^2y^2z$ روی استوانه توپر محدود به $x^2+y^2=1$ و صفحات $z=0$ و $z=1$.

۵۰- $F(x,y,z)=|xyz|$ روی جسمی که از پایین به سهمیوار $z=x^2+y^2$ و از بالا به صفحه $z=1$ محدود است.

۵۲- $F(x,y,z)=x^4+y^2+z^2$ ،

روی کره توپر $x^2+y^2+z^2\le 1$

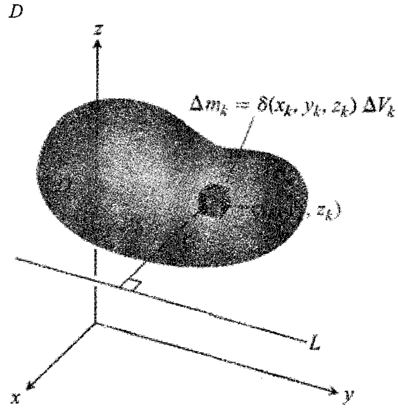
۱۵-۶- گشتاورها و مراکز جرم

در این بخش چگونگی محاسبه جرم ها و گشتاورهای اجسام دو و سه بعدی را در دستگاه مختصات دکارتی نشان می دهیم. در بخش ۱۵-۷ این نوع محاسبات در مختصات استوانه ای و کروی انجام می شوند. تعاریف و مفاهیم مشابه حالت یک متغیره بخش ۶-۶ هستند اما در اینجا می توانیم وضعیت های واقعی تر را در نظر گرفته و بررسی کنیم.

جرم ها و گشتاورهای اول

اگر $\delta(x,y,z)$ چگالی (جرم واحد حجم) جسمی باشد که ناحیه ای چون D از فضا را اشغال کرده است انتگرال δ روی D **جرم** جسم را بدست می دهد. برای پی بردن به علت این امر، تصور کنید که جسم را به n عنصر(جزء) جرم شبیه آنچه در شکل۱۵-۳۴ نشان داده شده تقسیم کنیم. جرم جسم عبارت است از حد زیر

$$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k$$
$$=\iiint_D \delta(x,y,z)dV$$



شکل۱۵-۳۴: برای تعریف جرم یک جسم، ابتدا تصور می کنیم که جسم به تعدادی متناهی از عناصر جرم Δm_k تقسیم شده است.

گشتاور اول یک ناحیه توپر چون D حول یک صفحه مختصات به صورت انتگرال سه گانه فاصله نقطه ای چون (x,y,z) از D تا صفحه ضربدر چگالی جسم در آن نقطه روی D تعریف می شود. برای نمونه، گشتاور اول حول صفحه yz به کمک انتگرال زیر محاسبه می شود

$$M_{yz}=\iiint_D x\,\delta(x,y,z)dV$$

مرکز جرم از گشتاورهای اول بدست می آید. مثلاً مختص x مرکز جرم عبارت است از $\bar{x}=M_{yz}/M$.

برای یک جسم دو بعدی، نظیر یک ورقه تخت نازک، گشتاورهای اول حول محورهای مختصات را فقط با حذف مختص z محاسبه می کنیم. بنابراین گشتاور اول حول محور y عبارت است از انتگرال دوگانه فاصله از محور ضربدر چگالی روی ناحیه R تشکیل دهنده ورقه، یا

$$M_y=\iint_R x\,\delta(x,y)dA$$

در جدول۱۵-۱: این فرمول ها بطور خلاصه وار ارائه شده اند.

مثال ۱: مطلوب است مرکز جرم جسمی با چگالی ثابت δ که از پایین به قرص $R: x^2+y^2\le 4$ واقع در صفحه $z=0$ و از بالا به سهمیوار $z=4-x^2-y^2$ محدود است (شکل۱۵-۳۵).

حل: بنابه تقارن $\bar{x}=\bar{y}=0$. برای یافتن $\bar{z}$ ابتدا انتگرال M_{xy} را محاسبه می کنیم

$$M_{xy}=\iint_R\int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z\,\delta dz\,dy\,dx$$
$$=\iint_R\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2}\delta dy\,dx$$

جدول ۱۵-۱: فرمولهای جرم و گشتاور اول

اجسام سه بعدی

جرم: $M=\iiint_D \delta dV$

($\delta=\delta(x,y,z)$ چگالی در نقطه (x,y,z) است)

گشتاورهای اول حول صفحات مختصات:

$$M_{yz}=\iiint_D x\,\delta dV \quad \text{و} \quad M_{xz}=\iiint_D y\,\delta dV$$
$$\text{و} \quad M_{xy}=\iiint_D z\,\delta dV$$

مرکز جرم:

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M} \quad \text{و} \quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{M} \quad \text{و} \quad \bar{x}=\frac{M_{yz}}{M}$$

ورقه دو بعدی:

جرم:
$$M=\iint_R \delta dA$$

($\delta=\delta(x,y)$ چگالی (x,y) است)

گشتاورهای اول:

$$M_x=\iint_R y\,\delta dA \quad \text{و} \quad M_y=\iint_R x\,\delta dA$$

مرکز جرم:

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M} \quad \text{و} \quad \bar{x}=\frac{M_y}{M}$$

$$=\frac{\delta}{2}\iint_R\left(4-x^2-y^2\right)^2 dy\,dx$$

$$=\frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(4-r^2\right)^2 r\,dr\,d\theta$$

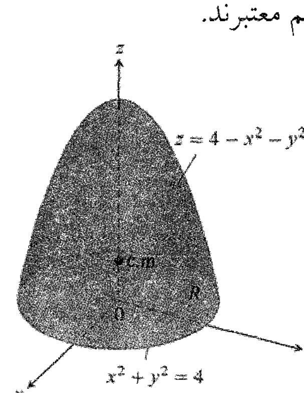
$$=\frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{6}\left(4-r^2\right)^3\right]_{r=0}^{r=2} d\theta=\frac{16\delta}{3}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{32\pi\delta}{3}$$

محاسبه ای مشابه، جرم را بدست می دهد

$$M=\iint_R\int_0^{4-x^2-y^2}\delta dz\,dy\,dx=8\pi\delta$$

بنابراین $\bar{z}=\left(M_{xy}/M\right)=4/3$ و مرکز جرم عبارت است از $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,4/3)$.

وقتی چگالی جسم یا ورقه صلبی ثابت باشد (مانند مثال ۱)، مرکز جرم را **مرکزوار** جسم می نامند. برای یافتن مرکزوار، δ را برابر۱ قرار داده و همانند قبل با تقسیم گشتاورهای اول بر جرم ها $\bar{x}$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ را بدست می آوریم. این محاسبات برای اجسام دو بعدی هم معتبرند.



شکل۱۵-۳۵: تعیین مرکز جرم یک جسم (مثال ۱).

مثال۲: مطلوب است مرکزوار ناحیه ای در ربع اول که از بالا به خط $y=x$ و از پایین به سهمی $y=x^2$ محدود است.

حل: ناحیه را با جزئیات کافی رسم می کنیم تا حدود انتگرال گیری را تعیین کنیم (شکل **۱۵-۳۶**). سپس δ را برابر با **۱** قرار داده و فرمول های مربوطه را از جدول **۱۵-۱** محاسبه می کنیم:

$$M=\int_0^1\int_{x^2}^{x}1dy\,dx=\int_0^1\left[y\right]_{y=x^2}^{y=x}dx$$

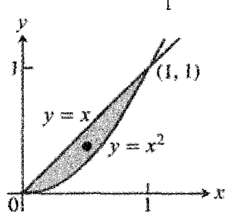
$$=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

$$M_x=\int_0^1\int_{x^2}^{x}y\,dy\,dx=\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x}dx$$

$$=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{10}\right]=\frac{1}{15}$$

$$M_y=\int_0^1\int_{x^2}^{x}x\,dy\,dx=\int_0^1\left[xy\right]_{y=x^2}^{y=x}dx$$

$$=\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$



شکل۱۵-۳۶: مرکزوار این ناحیه در مثال ۲ محاسبه شده است.

از این مقادیر M، M_x و M_y داریم

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{1/15}{1/6}=\frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{1/12}{1/6}=\frac{1}{2}$$

مرکزوار عبارت است از نقطه $(1/2,2/5)$.

گشتاورهای لختی

گشتاورهای اول یک جسم (جدول**۱۵-۱**) گویای تعادل و نیز گشتاوری است که جسم در یک میدان گرانشی حول محورهای مختلف احساس می کند. اما اگر جسم، یک میله چرخان باشد احتمالاً بیشتر علاقمندیم بدانیم چه مقدار انرژی در میله ذخیره می شود یا حدوداً چه مقدار انرژی بوسیله میله ای که با سرعت زاویه ای خاصی می چرخد تولید می شود. این همان جاییست که گشتاور یا گشتاور لختی دوم وارد عمل

می شود.

تصور کنید که میله را به قطعات کوچکی به جرم Δm_k تقسیم کرده ایم و فرض کنید r_k نشان دهنده فاصله مرکز جرم قطعه kام تا محور چرخش باشد (شکل۱۵-۳۷). اگر میله با سرعت زاویه ای ثابت $\omega = d\theta/dt$ رادیان بر ثانیه بچرخد مرکز جرم قطعه مدارش را با تندی (اندازه سرعت) خطی زیر طی خواهد کرد

$$v_k = \frac{d}{dt}(r_k\theta) = r_k\frac{d\theta}{dt} = r_k\omega$$

انرژی جنبشی قطعه تقریباً برابر خواهد بود با

$$\frac{1}{2}\Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\Delta m_k\,(r_k\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \Delta m_k$$

انرژی جنبشی میله تقریباً برابر خواهد بود با

$$\sum \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \Delta m_k$$

وقتی میله به قطعات کوچکتر و کوچکتر تقسیم شود انتگرالی که این جمع ها به آن میل می کنند انرژی جنبشی میله را بدست می دهد:

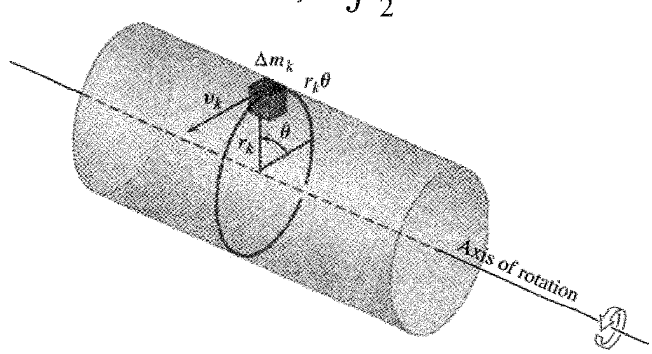
$$KE_{\text{میله}} = \int \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 dm \qquad (۱)$$

ضریب

$$I = \int r^2 dm$$

گشتاور لختی میله حول محور چرخش آن است و از معادله (۱) مشاهده می کنیم که انرژی جنبشی میله برابر است با

$$KE_{\text{میله}} = \int \frac{1}{2} I\omega^2$$



شکل۱۵-۳۷: برای یافتن یک انتگرال برای مقدار انرژی ذخیره شده در یک میله چرخان، ابتدا تصور می کنیم که میله به قطعات کوچک تقسیم شده است. هر قطعه انرژی جنبشی خودش را دارد. سهمهای تک تک قطعات را جمع می کنیم تا انرژی جنبشی میله را بدست آوریم.

گشتاور لختی یک میله از جهاتی شبیه جرم لختی یک لوکوموتیو است. برای اینکه لوکوموتیوی به جرم m را با سرعت خطی v به حرکت درآوریم باید انرژی جنبشی برابر با $KE = \left(\frac{1}{2}\right)mv^2$ فراهم کنیم. برای متوقف کردن لوکوموتیو باید این مقدار انرژی از آن بگیریم. برای اینکه میله ای با گشتاور لختی I را با سرعت زاویه ای ω به چرخش درآوریم باید انرژی جنبشی برابر با $KE = \frac{1}{2}I\omega^2$ برای آن فراهم کنیم. برای نگه داشتن میله باید همین مقدار انرژی را از آن بگیریم. گشتاور لختی میله مشابه جرم لوکوموتیو است. آنچه که به حرکت درآوردن یا متوقف کردن لوکوموتیو را مشکل می کند جرم آن است و آنچه که چرخاندن یا متوقف کردن میله را مشکل می کند گشتاور لختی آن است. گشتاور لختی نه تنها به جرم میله بلکه به توزیع جرم آن هم بستگی دارد. جرمی که در فاصله دورتری از محور چرخش قرار دارد سهم بیشتری در گشتاور لختی دارد.

اکنون فرمولی برای گشتاور لختی یک جسم جامد واقع در فضا بدست می آوریم. اگر $r(x,y,z)$ فاصله نقطه (x,y,z) واقع در D تا خطی چون L باشد آنگاه گشتاور لختی جرم $\Delta m_k = \delta(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k$ حول خط L (که در شکل۱۵-۳۷ دیده می شود) تقریباً برابر است با $\Delta I_k = r^2(x_k,y_k,z_k)\Delta m_k$. **گشتاور لختی کل جسم حول** L برابر است با

$$\begin{aligned} I_L &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta I_k \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r^2(x_k,y_k,z_z)\,\delta(x_k,y_k,z_z)\,\Delta V_k \\ &= \iiint_D r^2 \delta\, dV \end{aligned}$$

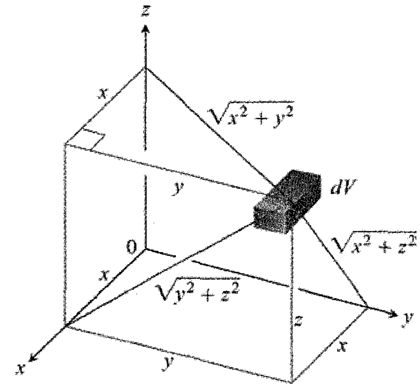
اگر L محور x باشد آنگاه $r^2 = y^2 + z^2$ (شکل۱۵-۳۸) و

$$I_x = \iiint_D \left(y^2+z^2\right)\delta(x,y,z)\,dV$$

به همین ترتیب اگر L محور y یا محور z باشد داریم

$$I_y = \iiint_D \left(x^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)\,dV$$

$$I_z = \iiint_D \left(x^2 + y^2\right)\delta(x,y,z)\,dV$$



شکل۱۵-۳۸: فاصله dV تا صفحات مختصات و محورها.

در جدول**۱۵-۲** فرمول های این گشتاورهای لختی ارائه شده اند(منظور گشتاورهای دوم است زیرا مربعات فاصله ها در آنها ظاهر می شوند). این جدول تعریف گشتاور قطبی حول مبداء را هم نشان می دهد.

مثال۳: مطلوب است محاسبه I_x، I_y و I_z برای مکعب مستطیل توپر شکل**۱۵-۳۹** که چگالی آن، δ، ثابت است.

حل: از فرمول I_x داریم

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(y^2+z^2\right)\delta\,dx\,dy\,dz$$

جدول ۱۵-۲: فرمول های گشتاورهای لختی (گشتاورهای دوم)

جسم سه بعدی

حول محور x:

$$I_x = \iiint \left(y^2+z^2\right)\delta\,dV \qquad \left(\delta=\delta(x,y,z)\right)$$

حول محور y:

$$I_y = \iiint \left(x^2+z^2\right)\delta\,dV$$

حول محور z:

$$I_z = \iiint \left(x^2+y^2\right)\delta\,dV$$

حول خطی چون L:

$$I_L = \iiint r^2\,\delta\,dV$$

($r(x,y,z)$ = فاصله نقطه (x,y,z) تا خط L)

ورقه دو بعدی

حول محور x:

$$I_x = \iint y^2\delta\,dA \qquad \left(\delta=\delta(x,y)\right)$$

حول محور y:

$$I_y = \iint x^2\delta\,dA$$

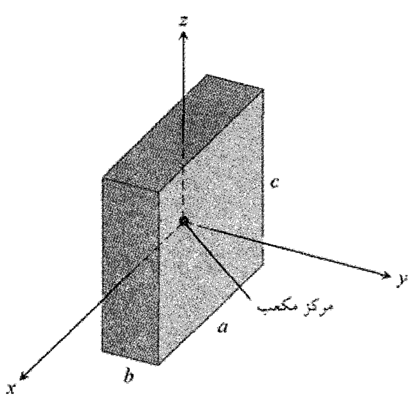
حول خطی چون L:

$$I_L = \iint r^2(x,y)\,\delta\,dA$$

($r(x,y)=$ فاصله نقطه (x,y) تا خط L)

حول مبداء (گشتاور قطبی):

$$I_0 = \iint \left(x^2+y^2\right)\delta\,dA = I_x + I_y$$



شکل۱۵-۳۹: یافتن I_x، I_y و I_z برای این مکعب مستطیلی. مبداء در مرکز مکعب قرار دارد (مثال۳).

با توجه به اینکه $\delta\left(y^2+z^2\right)$ تابعی زوج از x، y و z و δ ثابت است می توانیم از برخی محاسبات انتگرال گیری اجتناب کنیم. جسم مکعب مستطیلی شکل شامل هشت قطعه متقارن، هر کدام در یکی از یک هشتم ها، است. می توانیم انتگرال را روی یکی از این قطعه ها محاسبه کرده و بعد در ۸ ضرب کنیم تا مقدار کل بدست آید.

$$\begin{aligned}
I_x &= 8\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2}\left(y^2+z^2\right)\delta\,dx\,dy\,dz \\
&= 4a\delta\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\left(y^2+z^2\right)dy\,dz \\
&= 4a\delta\int_0^{c/2}\left[\frac{y^3}{3}+z^2y\right]_{y=0}^{y=b/2}dz \\
&= 4a\delta\int_0^{c/2}\left(\frac{b^3}{24}+\frac{z^2b}{2}\right)dz \\
&= 4a\delta\left(\frac{b^3c}{48}+\frac{c^3b}{48}\right)=\frac{abc\delta}{12}\left(b^2+c^2\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{M}{12}\left(b^2 + c^2\right) \qquad (M = abc\delta)$$

به همین ترتیب

$$I_z = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right) \quad \text{و} \quad I_y = \frac{M}{12}\left(a^2 + c^2\right)$$

مثال۴: ورقه نازکی ناحیه ای مثلثی شکل واقع در ربع اول و محدود به محور x و خطوط $x = 1$ و $y = 2x$ را پوشانده است. چگالی ورقه در نقطه (x, y) عبارت است از $\delta(x,y) = 6x + 6y + 6$. گشتاورهای لختی ورقه را حول محورهای مختصات و مبداء بدست آورید.

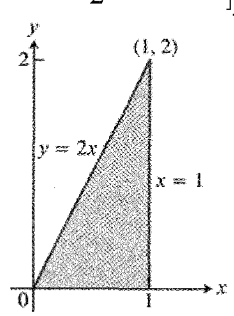
حل: ورقه را با جزئیات کافی رسم می کنیم تا حدود انتگرال گیری را برای انتگرالهایی که مجبوریم محاسبه کنیم تعیین نماییم.

(شکل۱۵-۴۰). گشتاور لختی حول محور x برابر است با

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 \delta(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2x} \left(6xy^2 + 6y^3 + 6y^2\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3\right]_{y=0}^{y=2x} dx$$



شکل۱۵-۴۰: ناحیه مثلثی شکلی که بوسیله ورقه مثال ۴ پوشانده شده است.

$$= \int_0^1 \left(40x^4 + 16x^3\right) dx$$

$$= \left[8x^5 + 4x^4\right]_0^1 = 12$$

به همین ترتیب، گشتاور لختی حول محور y برابر است با

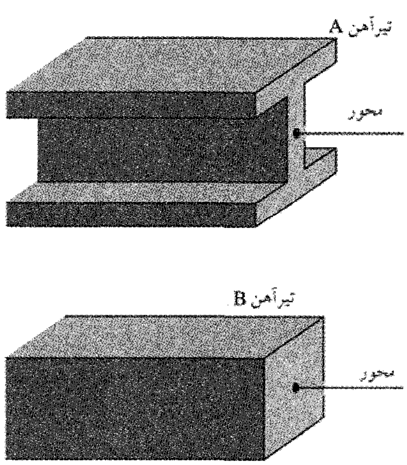
$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \delta(x,y)\, dy\, dx = \frac{39}{5}$$

توجه کنید که در محاسبه I_x انتگرال y^2 ضربدر چگالی را و در محاسبه I_y انتگرال x^2 ضربدر چگالی را محاسبه می کنیم.

چون I_x و I_y را می دانیم برای یافتن I_0 نیازی به محاسبه یک انتگرال نیست، به جای این کار از معادله $I_0 = I_x + I_y$ جدول **۱۵-۲** استفاده می کنیم

$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60 + 39}{5} = \frac{99}{5}$$

گشتاور لختی در تعیین اینکه یک تیر فلزی افقی تحت یک بار چقدر خم خواهد شد نیز نقش دارد. میزان استحکام تیر عبارت است از یک ثابت ضربدر I، گشتاور لختی یک مقطع نوعی از تیر حول محور طولی تیر. هر چه مقدار I بزرگتر باشد تیر محکم تر بوده و تحت یک بار معین کمتر خم خواهد شد. به همین دلیل است که به جای تیرهای با مقطع مربعی از تیرهای با مقطع I - شکل استفاده می کنیم. دو لبه بیرون آمده تیر آهن در بالا و پایین آن باعث می شوند بیشتر جرم تیر آهن دور از محور طولی قرار گیرد و سبب افزایش مقدار I شود (شکل۱۵-۴۱).



شکل۱۵-۴۱: هر چه گشتاور لختی قطبی مقطع تیر حول محور طولی تیر بیشتر باشد تیر مقاومت تر است. تیرهای A و B مساحت سطح مقطع یکسان دارند اما A مقاومتر است.

تمرین های ۱۵-۶

ورقه های با چگالی ثابت

۱- **یافتن مرکز جرم.** مرکز جرم ورقه نازکی با چگالی $\delta=3$ را بیابید که در ربع اول واقع بوده و به خطوط $x=0$، $y=x$ و سهمی $y=2-x^2$ محدود است.

۲- **یافتن گشتاورهای لختی.** گشتاورهای لختی یک ورقه مستطیلی شکل نازک با چگالی ثابت ρ را که در ربع اول واقع بوده و به خطوط $x=3$ و $y=3$ محدود است بیابید.

۳- **یافتن مرکزوار.** مطلوب است مرکزوار ناحیه ای در ربع اول که به محور x، سهمی $y^2=2x$ و خط $x+y=4$ محدود است.

۴- **یافتن مرکزوار.** مطلوب است مرکزوار ناحیه مثلثی شکلی که بوسیله خط $x+y=3$ از ربع اول جدا می شود.

۵- **یافتن مرکزوار.** مرکزوار ناحیه ای را بیابید که بوسیله دایره $x^2+y^2=a^2$ از ربع اول جدا می شود.

۶- **یافتن مرکزوار.** مطلوب است مرکزوار ناحیه بین محور x و قوس $y=\sin x$ ، $0\le x\le\pi$.

۷- **یافتن گشتاورهای لختی.** ورقه نازکی با چگالی $\delta=1$ به دایره $x^2+y^2=4$ محدود است. مطلوب است گشتاور لختی این جسم حول محور x . با استفاده از نتیجه بدست آمده I_y و I_0 را برای این ورقه بدست آورید.

۸- **یافتن گشتاور لختی.** ورقه نازکی با چگالی $\delta=1$ به خم $y=(\sin^2 x)/x^2$ و بازه $\pi\le x\le 2\pi$ از محور x محدود است. مطلوب است گشتاور لختی این جسم نسبت به محور y.

۹- **مرکزوار یک ناحیه نامتناهی.** مطلوب است مرکزوار ناحیه نامتناهی واقع در ربع دوم که بوسیله محورهای مختصات و خم $y=e^x$ محصور شده است (در فرمول های جرم - گشتاور از انتگرال های ناسره استفاده کنید).

۱۰- **گشتاور اول یک ورقه نامتناهی.** یک ورقه نازک با چگالی $\delta(x,y)=1$ ناحیه نامتناهی زیر خم $y=e^{\frac{-x^2}{2}}$ را در ربع اول می پوشاند. مطلوب است گشتاور اول این جسم حول محور y.

ورقه های با چگالی متغیر

۱۱- **یافتن گشتاور لختی.** یک ورقه نازک به سهمی $x=y-y^2$ و خط $x+y=0$ محدود است مطلوب است گشتاور لختی این جسم حول محور x در حالتی که $\delta(x,y)=x+y$.

۱۲- **یافتن جرم.** ورقه نازکی ناحیه کوچکتری را که بوسیله سهمی $x=4y^2$ از بیضی $x^2+4y^2=12$ جدا می شود می پوشاند. مطلوب است جرم این جسم در صورتیکه $\delta(x,y)=5x$ باشد.

۱۳- **یافتن مرکز جرم.** ورقه مثلثی شکل نازکی به محور y و خطوط $y=x$ و $y=2-x$ محدود است. اگر $\delta(x,y)=6x+3y+3$ باشد مرکز جرم این جسم را بیابید.

۱۴- **یافتن مرکز و گشتاور لختی.** ورقه نازکی به خمهای $x=y^2$ و $x=2y-y^2$ محدود است. اگر چگالی در نقطه (x,y) عبارت باشد از $\delta(x,y)=y+1$، مرکز جرم و گشتاور لختی این جسم حول محور x را بیابید.

۱۵- **مرکز جرم، گشتاور لختی.** ورقه مستطیلی شکل نازکی بوسیله خطوط $y=x$ و $y=1$ از ربع اول جدا می شود. اگر $\delta(x,y)=x+y+1$ باشد مرکز جرم و گشتاور لختی این جسم حول محور y را بیابید.

۱۶- **مرکز جرم، گشتاور لختی.** ورقه نازکی به خط $y=1$ و سهمی $y=x^2$ محدود است. اگر چگالی ورقه $\delta(x,y)=y+1$ باشد مطلوب است مرکز جرم و گشتاور لختی این جسم حول محور y.

۱۷- **مرکز جرم، گشتاور لختی.** ورقه نازکی به محور x،

خطـوط $x=\pm 1$ و سـهمی $y=x^2$ محـدود اسـت. اگـر $\delta(x,y)=7y+1$ باشد مطلوب است مرکز جـرم و گـشتاور لختی این جسم حول محور y.

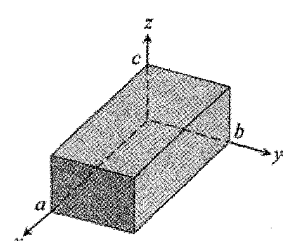
۱۸- مرکز جرم، گشتاور لختی. ورقه مستطیلی شکل نازکی به خطوط $x=0$، $x=20$، $y=-1$ و $y=1$ محدود است. اگر $\delta(x,y)=1+(x/20)$ باشـد مطلـوب اسـت مرکـز جـرم و گشتاور لختی این جسم حول محور x.

۱۹- مرکز جرم، گشتاور لختی. ورقه مثلثی شـکل نـازکی بـه خطــوط $y=x$، $y=-x$ و $y=1$ محـــدود اســـت. اگــر $\delta(x,y)=y+1$ باشـد مرکـز جـرم، گـشتاور لختـی حـول محورهای مختصات و گشتاور لختی قطبی این جسم را بیابید.

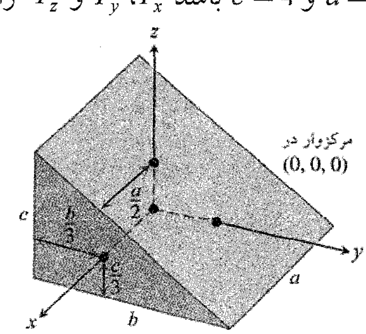
۲۰- مرکــز جــرم، گــشتاور لختــی. تمـرین **۱۹** را در حـالتی که $\delta(x;y)=3x^2+1$ باشد حل کنید.

اجسام با چگالی ثابت

۲۱- گشتاورهای لختی. با محاسبه I_x، I_y و I_z گـشتاورهای لختی جسم مکعب مستطیلی شکل زیر را نـسبت بـه یالهـایش بیابید.

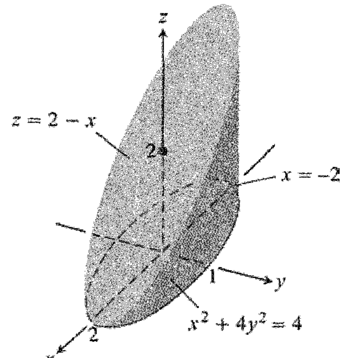


۲۲- گشتاورهای لختی. در شکل زیر محورهای مختـصات از مرکزوار گوه توپر گذشته و با یالهای نامگذاری شده آن مـوازی اند. اگر $a=b=6$ و $c=4$ باشد I_x، I_y و I_z را بیابید.



۲۳- مرکز جرم و گشتاورهای لختی. یـک آبـشخور تـوپر بـا چگـالی ثابــت از پــایین بــه رویــه $z=4y^2$، از بــالا بــه صـفحه $z=4$ و از طـرفین بـه صـفحات $x=1$ و $x=-1$ محدود است. مرکز جـرم و گـشتاورهای لختـی ایـن جـسم را نسبت به سه محور بیابید.

۲۴- مرکــز جــرم. جـسمی بـا چگـالی ثابـت از پـایین بـه صفحه $z=0$، از طرفین به استوانه بیـضوی $x^2+4y^2=4$ و از بالا به صفحه $z=2-x$ محدود است (شکل زیر را ببینید).



(الف)- $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را بیابید.

(ب)- انتگرال زیر را محاسبه کنید، برای محاسبه انتگـرال آخـر نسبت به x از جدول انتگرال ها استفاده کنید.

$$M_{xy}=\int_{-2}^{2}\int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{2-x} z\,dz\,dy\,dx$$

سپس M_{xy} را بر M تقسیم کرده و نشان دهید که $\bar{z}=5/4$.

۲۵- (الف) – **مرکز جرم.** مطلوب است مرکز جرم جـسمی بـا چگالی ثابت که از پایین به سهمیوار $z=x^2+y^2$ و از بالا به صفحه $z=4$ محدود است.

(ب)- صفحه ای چون $z=c$ بیابید که جسم را به دو قـسمت با حجم های مساوی تقسیم می کند. این صفحه از مرکـز جـرم نمی گذرد.

۲۶- گــشتاورها. مکعـب تـوپری بـه اضـلاع ۲ واحـد بـه صـفحات $x=\pm 1$، $z=\pm 1$، $y=3$ و $y=5$ محـدود اسـت. مرکز جرم و گشتاورهای لختی این جـسم را حـول محورهـای مختصات بیابید.

۲۷- گشتاور لختی حول یـک خـط. در گـوه ای شـبیه گـوه تمرین **۲۲** داریم $a=4$، $b=6$ و $c=3$. شکلی رسـم کـرده و نشان دهید که مربع فاصله یک نقطه نمونـه چـون (x,y,z) از گـــوه تـــا خـــط $L: z=0, y=6$ برابـــر اســـت

با $r^2=(y-6)^2+z^2$. سپس گشتاور لختی گوه را حول L محاسبه کنید.

۲۸- گشتاور لختی حول یک خط. در گوه ای نظیر گوه تمرین **۲۲** داریم: $a=4$، $b=6$ و $c=6$. شکلی رسم کرده و نشان دهید که مربع فاصله یک نقطه نوعی چون (x,y,z) از گوه تا خط $L: x=4, y=0$ برابر است با $r^2=(x-4)^2+y^2$. سپس گشتاور لختی گوه را حول L محاسبه کنید.

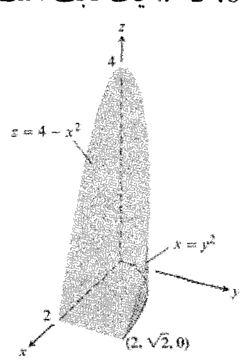
اجسام با چگالی متغیر

در تمرین های **۲۹** و **۳۰** مطلوب است

(الف)- جرم جسم (ب)- مرکز جرم

۲۹- ناحیه ای توپر در یک هشتم اول که به صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=2$ محدود است. چگالی جسم عبارت است از $\delta(x,y,z)=2x$.

۳۰- جسمی در یک هشتم اول که به صفحات $y=0$ و $z=0$ و رویه های $z=4-x^2$ و $x=y^2$ محدود است (شکل زیر). تابع چگالی این جسم عبارت است از $\delta(x,y,z)=kxy$، که k یک ثابت است.



در تمرین های **۳۱** و **۳۲** مطلوب است

(الف)- جرم جسم (ب)- مرکز جرم (پ)- گشتاورهای لختی حول محورهای مختصات

۳۱- مکعب توپری در یک هشتم اول که به صفحات مختصات و صفحات $x=1$، $y=1$ و $z=1$ محدود است. چگالی مکعب عبارت است از $\delta(x,y,z)=x+y+z+1$.

۳۲- گوه ای شبیه گوه تمرین **۲۲** که دارای ابعاد $a=2$، $b=6$ و $c=3$ است. چگالی عبارت است از $\delta(x,y,z)=x+1$.

توجه کنید که اگر چگالی ثابت باشد مرکز جرم نقطه $(0,0,0)$ خواهد بود.

۳۳- جرم. جرم جسمی را بیابید که به صفحات $x+z=1$، $x-z=-1$، $y=0$ و رویه $y=\sqrt{x}$ محدود است. چگالی جسم عبارت است از $\delta(x,y,z)=2y+5$.

۳۴- جرم. جرم ناحیه توپری را بیابید که به رویه های سهموی $z=16-2x^2-2y^2$ و $z=2x^2+2y^2$ محدود است. چگالی جسم را $\delta(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ در نظر بگیرید.

نظریه و مثال ها

قضیه محورهای موازی: فرض کنید $L_{c.m.}$ خطی است که از مرکز جرم جسمی به جرم m می گذرد و L خطی موازی $L_{c.m.}$ و در فاصله h واحد از آن. قضیه محورهای موازی حاکی است که گشتاورهای لختی $I_{c.m.}$ و I_L جسم حول $L_{c.m.}$ و L در معادله زیر صدق می کنند

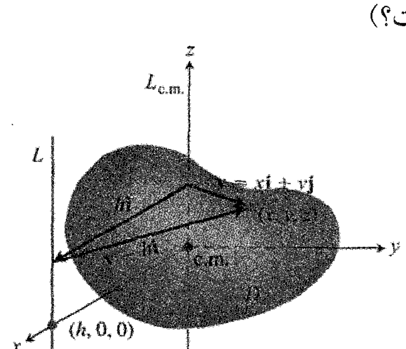
$$I_L=I_{c.m.}+mh^2 \qquad (۲)$$

مانند حالت دو بعدی، این قضیه راهی سریع برای محاسبه یک گشتاور با معلوم بودن گشتاور دیگر و جرم در اختیار ما قرار می دهد.

۳۵- **اثبات قضیه محورهای موازی.**

(الف)- نشان دهید که گشتاور اول یک جسم واقع در فضا حول هر صفحه ای که از مرکز جرم جسم می گذرد صفر است.

(راهنمایی: مرکز جرم جسم را در مبداء قرار دهید و صفحه را صفحه yz بگیرید. در این صورت فرمول $\bar{z}=M_{yz}/M$ بیانگر چیست؟)



(ب)- برای اثبات قضیه محورهای موازی، جسم را طوری قرار

دهید که مرکز جرمش در مبداء، خط $L_{c.m.}$ در امتداد محور z و خط L در نقطه $(h,0,0)$ بر صفحه xy عمود باشد. D را ناحیه ای از فضا بگیرید که توسط جسم اشغال شده است. در این صورت با توجه به نمادگذاری شکل داریم

$$I_L = \iiint_D |\mathbf{v} - h\mathbf{i}|^2 dm$$

انتگرالده این انتگرال را بسط داده و اثبات را کامل کنید.

۳۶- گشتاور لختی کره توپری با چگالی ثابت و شعاع a حول یک قطرش $(2/5)ma^2$ است که m جرم کره است. گشتاور لختی را حول خطی مماس بر کره بدست آورید.

۳۷- گشتاور لختی جسم تمرین **۲۱** حول محور z برابر است با $I_z = abc\left(a^2+b^2\right)/3$.

(الف)- با استفاده از معادله (۲) گشتاور لختی جسم را حول خطی که با محور z موازی است و از مرکز جرم جسم می گذرد بدست آورید.

(ب)- با استفاده از معادله (۲) و نتیجه قسمت (الف) گشتاور لختی جسم را حول خط $x=0$، $y=2b$ بدست آورید.

۳۸- اگر $a=b=6$ و $c=4$ باشد گشتاور لختی گوه توپر تمرین **۲۲** حول محور x برابر می شود با $I_x = 208$.
گشتاور لختی این گوه را حول خط $y=4$، $z=-4/3$ بدست آورید (یعنی حول یال انتهای باریک گوه).

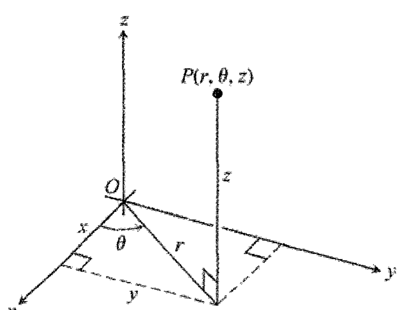
۱۵-۷- انتگرال های سه گانه در مختصات استوانه ای و کروی

وقتی در فیزیک، مهندسی یا هندسه محاسبه ای در ارتباط با استوانه، مخروط یا کره انجام می دهیم غالباً می توانیم با بهره گیری از مختصات استوانه ای یا کروی محاسبه خود را ساده تر کنیم. این مختصات را در این بخش معرفی می کنیم. طرز تبدیل به این مختصات و محاسبه انتگرالهای سه گانه حاصل شبیه تبدیل به مختصات قطبی در صفحه است که در بخش **۱۵-۴** مورد مطالعه قرار دادیم.

انتگرال گیری در مختصات استوانه ای

مختصات استوانه ای در فضا را با ترکیب مختصات قطبی در صفحه xy با محور z معمولی بدست می آوریم. بدین ترتیب که مطابق شکل**۱۵-۴۲** به هر نقطه فضا یک یا چند مختص سه تایی به صورت (r,θ,z) اختصاص داده می شود.

تعریف: در مختصات استوانه ای نقطه ای چون P از فضا با سه تایی های مرتب (r,θ,z) نمایش داده می شود که در آن
۱- r و θ مختصات قطبی مربوط به تصویر قائم P برروی صفحه xy هستند.
۲- z مختص قائم دکارتی است.



شکل۱۵-۴۲: مختصات استوانه ای یک نقطه از فضا عبارتند از r، θ و z.

مقادیر x، y، r و θ در مختصات های قائم و استوانه ای با معادلات معمولی به هم مربوط می شوند.

معادلاتی که مختصات قائم (x,y,z) و استوانه ای (r,θ,z) را به هم مربوط می کنند:

$$x = r\cos\theta \quad \text{و} \quad y = r\sin\theta \quad \text{و} \quad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{و} \quad \tan\theta = y/x$$

در مختصات استوانه ای معادله $r=a$ نه فقط یک دایره در صفحه xy را بلکه یک استوانه کامل حول محور z را توصیف می کند (شکل**۱۵-۴۳**). محور z با معادله $r=0$ مشخص می

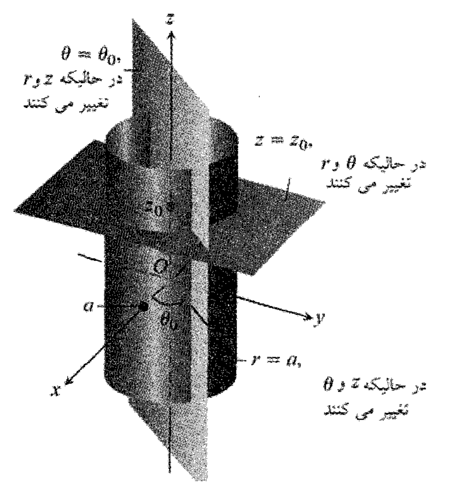
شود. معادله $\theta=\theta_0$ صفحه ای را توصیف می کنند که شامل محور z بوده و با قسمت مثبت محور x زاویه θ_0 می سازد. و بالاخره درست همانطور که در مختصات قائم داشتیم، معادله $z=z_0$ صفحه ای عمود بر محور z را توصیف می کند.

مختصات استوانه ای برای توصیف استوانه هایی که محورشان در امتداد محور z قرار دارد و صفحاتی که یا محور z را در بر دارند یا عمود بر محور z قرار دارند مناسب است. رویه هایی نظیر اینها معادلاتی به صورت برابری یک مختص با یک مقدار ثابت دارند:

$r=4$ (استوانه ای با شعاع ۴ که محورش بر محور z منطبق است)

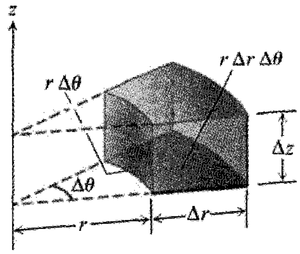
$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ (صفحه شامل محور z)

$z=2$ (صفحه عمود بر محور z)



شکل۱۵-۴۳: معادلات مختص – ثابت در مختصات استوانه ای معادلات استوانه ها و صفحه ها هستند.

هنگام محاسبه انتگرال های سه گانه روی ناحیه ای چون D در مختصات استوانه ای، ناحیه را به جای جعبه های مکعب مستطیلی شکل به n گوه استوانه ای کوچک تقسیم می کنیم. در گوه استوانه ای kام، r و θ و z به اندازه Δr_k، $\Delta\theta_k$ و Δz_k تغییر می کنند و بزرگترین مقدار این اعداد در بین تمام گوه های استوانه ای نرم شبکه نامیده می شود. انتگرال سه گانه را به کمک این گوه ها به صورت حد جمع های ریمان تعریف می کنیم. حجم چنین گوه استوانه ای، ΔV_k، با ضرب مساحت قاعده آن در صفحه $r\theta$ ، ΔA_k، در ارتفاع Δz بدست می آید (شکل۱۵-۴۴).



شکل۱۵-۴۴: در مختصات استوانه ای حجم گوه با حاصلضرب $\Delta V=\Delta z r\Delta r\Delta\theta$ تقریب زده می شود.

برای نقطه ای چون (r_k,θ_k,z_k) در مرکز گوه kام، در مختصات قطبی داریم: $\Delta A_k=r_k\Delta r_k\Delta\theta_k$. بنابراین $\Delta V_k=\Delta z_k r_k\Delta r_k\Delta\theta_k$ و یک جمع ریمان برای f روی D به صورت زیر است

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(r_k,\theta_k,z_k\right)\Delta z_k r_k\Delta r_k\Delta\theta_k$$

انتگرال سه گانه تابعی چون f روی D با گرفتن حد چنین جمع های ریمانی وقتی نرم های شبکه ها به صفر میل می کنند بدست می آید:[1]

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\iiint_D f\,dV=\iiint_D f\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

به این ترتیب انتگرال های سه گانه در مختصات استوانه ای چنانکه در مثال بعدی خواهید دید به صورت انتگرال های مکرر محاسبه می شوند.

مثال ۱: مطلوب است حدود انتگرال گیری در مختصات استوانه ای برای انتگرال گیری از تابعی چون $f(r,\theta,z)$ روی ناحیه D که از پایین به صفحه $z=0$، از اطراف به استوانه مستدیر $x^2+(y-1)^2=1$ و از بالا به سهمیوار $z=x^2+y^2$ محدود است.

حل: قاعده D تصویر R ناحیه مذکور برروی صفحه xy نیز

---

[1]– دیفرانسیل (جزء) حجم در مختصات استوانه ای عبارت است از

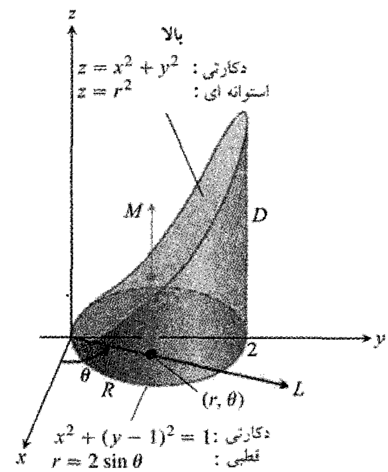
$$dV=dzrdrd\theta$$

هست. مرز R عبارت است از دایره $x^2+(y-1)^2=1$. معادله آن در مختصات قطبی عبارت است از

$$x^2+(y-1)^2=1 \quad و \quad x^2+y^2-2y+1=1$$

$$r^2-2r\sin\theta=0 \quad و \quad r=2\sin\theta$$

ناحیه مذکور در شکل **۱۵-۴۵** نشان داده شده است.



شکل۱۵-۴۵: یافتن حدود انتگرال گیری برای محاسبه یک انتگرال در مختصات استوانه ای (مثال۱)

حدود انتگرال گیری را با شروع از حدود z می یابیم. خطی چون M که از نقطه نمونه (r,θ) واقع در R می گذرد و با محور z موازی است در $z=0$ وارد D و در $z=x^2+y^2=r^2$ از آن خارج می شود.

اکنون حدود r انتگرال گیری را پیدا می کنیم. پرتوی چون L که از مبداء شروع شده و از (r,θ) می گذرد در $r=0$ وارد R و در $r=2\sin\theta$ از آن خارج می شود.

سرانجام حدود θ انتگرال گیری را می یابیم. وقتی L کل R را جاروب می کند زاویه θ یی که با قسمت مثبت محور x می سازد از $\theta=0$ تا $\theta=\pi$ تغییر می کند. انتگرال چنین می شود

$$\iiint_D f(r,\theta,z)\,dV$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{r^2} f(r,\theta,z)\,dz\, r\,dr\,d\theta$$

مثال۱ روش خوبی برای یافتن حدود انتگرال گیری در مختصات استوانه ای ارائه می کند. این روش را به صورت زیر خلاصه می کنیم.

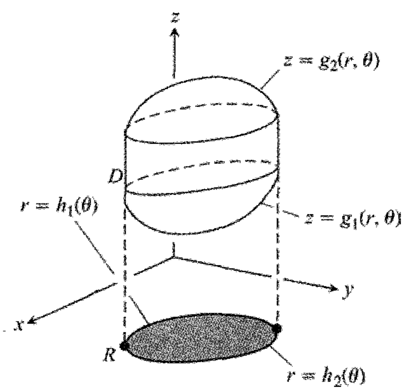
چگونگی انتگرال گیری در مختصات استوانه ای

برای محاسبه

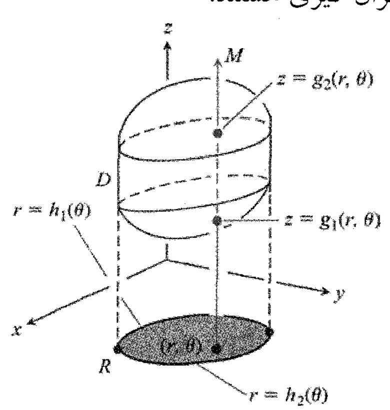
$$\iiint_D f(r,\theta,z)\,dV$$

روی ناحیه D واقع در فضا در مختصات استوانه ای بطوریکه ابتدا نسبت به z، بعد نسبت به r و در آخر نسبت به θ انتگرال بگیریم مراحل زیر را طی می کنیم.

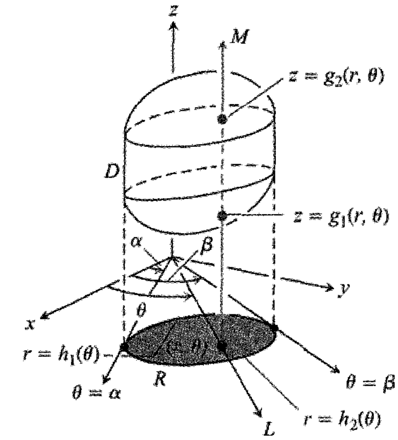
۱- رسم شکل. ناحیه D را به همراه تصویرش بر روی صفحه xy، R، رسم کنید. رویه ها و خم های محدود کننده D و R را نامگذاری کنید.



۲- یافتن حدود z انتگرال گیری. خطی چون M رسم کنید که از نقطه نمونه چون (r,θ) از R می گذرد و با محور z موازی است. وقتی z افزایش می یابد M در $z=g_1(r,\theta)$ وارد D و در $z=g_2(r,\theta)$ از آن خارج می شود. اینها حدود z انتگرال گیری هستند.



۳- یافتن حدود r انتگرال گیری. پرتوی چون L رسم کنید که از مبداء شروع شده و از (r,θ) بگذرد. این پرتو در $r=h_1(\theta)$ وارد R و در $r=h_2(\theta)$ از آن خارج می شود. اینها حدود r انتگرال گیری هستند.



۴- **یافتن حدود θ انتگرال گیری.** وقتی L کل R را جاروب می کند زاویه θیی که این پرتو با قسمت مثبت محور x می سازد از $\theta=\alpha$ تا $\theta=\beta$ تغییر می کند. اینها حدود θ انتگرال گیری هستند. بدین ترتیب انتگرال چنین می شود

$$\iiint_D f(r,\theta,z)\,dV$$
$$=\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)}\int_{z=g_1(r,\theta)}^{z=g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

مثال۲: مطلوب است مرکزوار $(\delta=1)$ جسمی که بوسیله استوانه $x^2+y^2=4$ محصور شده و از بالا به سهمیوار $z=x^2+y^2$ و از پایین به صفحه xy محدود است.

حل: جسم را رسم می کنیم که از بالا به سهمیوار $z=r^2$ و از پایین به صفحه $z=0$ محدود است (شکل۱۵-۴۶). قاعده این جسم، R، قرص $0 \le r \le 2$ در صفحه xy است.

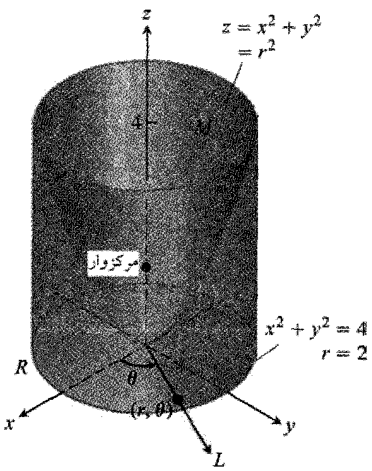
مرکزوار این جسم $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ روی محور تقارن آن، در اینجا محور z، قرار دارد. از اینجا داریم $\bar{x}=\bar{y}=0$.

برای یافتن $\bar{z}$ گشتاور اول M_{xy} را بر جرم M تقسیم می کنیم.

برای یافتن حدود انتگرال گیری برای جرم و انتگرال های گشتاور، چهار مرحله اصلی را دنبال می کنیم. شکل اولیه را کامل کرده ایم. مراحل باقی مانده حدود انتگرال گیری را بدست می دهند.

حدود z: خط M که از نقطه نمونه (r,θ) واقع در قاعده موازی با محور z می گذرد در $z=0$ وارد جسم و در $z=r^2$ از آن خارج می شود.

حدود r: پرتو L که از مبداء شروع شده و از (r,θ) می گذرد در $r=0$ وارد R و در $r=2$ از آن خارج می شود.



شکل۱۵-۴۶: مثال ۲ چگونگی یافتن مرکزوار این جسم را نشان می دهد.

حدود θ: وقتی L مثل یک عقربه ساعت قاعده را جاروب می کند زاویه θ آن با قسمت مثبت محور x از $\theta=0$ تا $\theta=2\pi$ تغییر می کند. مقدار M_{xy} برابر است با

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{r^2} z\,dz\,r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{r^2} r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\frac{r^2}{2}dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^6}{12}\right]_0^{2}d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{16}{3}d\theta=\frac{32\pi}{3}$$

مقدار M برابر است با

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{r^2} dz\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left[z\right]_0^{r^2} r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^3 dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2}d\theta=\int_0^{2\pi}4\,d\theta=8\pi$$

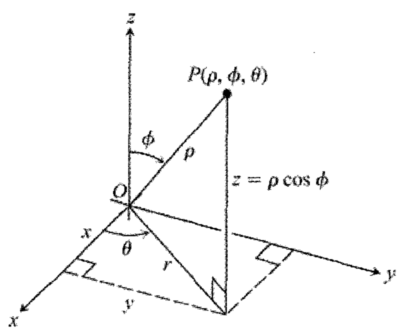
بنابراین

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{32\pi}{3}\frac{1}{8\pi}=\frac{4}{3}$$

و مرکزوار عبارت است از نقطه $(0,0,4/3)$. توجه کنید که مرکزوار خارج از جسم قرار دارد.

مختصات کروی و انتگرال گیری

مختصات استوانه مطابق شکل **۱۵-۴۷** نقاط فضا را با دو زاویه و یک فاصله مشخص می کنند. مختص اول، $\rho=\left|\overrightarrow{OP}\right|$، فاصله نقطه از مبداء است. برخلاف r، متغیر ρ هرگز منفی نیست. مختص دوم، ϕ، زاویه $\overrightarrow{OP}$ با قسمت مثبت محور z است و باید در بازه $[0,\pi]$ قرار گیرد. مختص سوم زاویه θ یی است که در مختصات استوانه ای داشتیم.



شکل ۱۵-۴۷: مختصات کروی ρ، ϕ، θ و رابطه آنها با x، y، z و r.

تعریف: مختصات کروی نقطه ای چون P از فضا را با سه تایی مرتب (ρ,ϕ,θ) نمایش می دهند که در آن

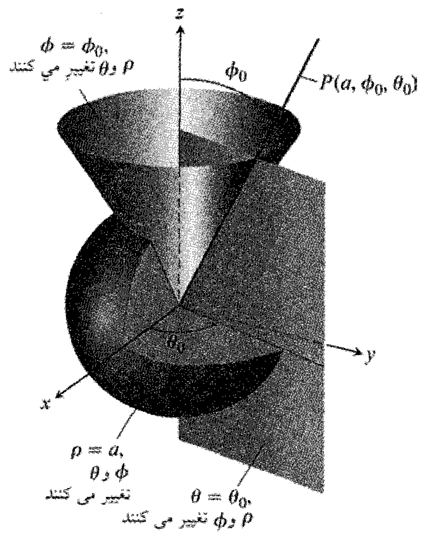
۱- ρ **فاصله** P **تا مبداء است.**

۲- ϕ **زاویه** $\overrightarrow{OP}$ **با قسمت مثبت محور** z **است** $(0\le\phi\le\pi)$.

۳- θ **زاویه معرفی شده در مختصات استوانه ای است** $(0\le\theta\le\pi)$.

روی نقشه های زمین، θ به نصف النهار یک نقطه برروی زمین و ϕ به عرض جغرافی آن مربوط می شود در حالیکه ρ به ارتفاع از سطح زمین مربوط است.

معادله $\rho=a$ کره ای به شعاع a و به مرکز مبداء را توصیف می کند (شکل **۱۵-۴۸**). معادله $\phi=\phi_0$ مخروط منفردی را توصیف می کند که رأسش در مبداء و محورش در امتداد محور z قرار دارد.(ما تعبیر خود را گسترش داده ایم تا صفحه xy را به عنوان مخروط $\phi=\pi/2$ در بر بگیرد). اگر ϕ_0 بزرگتر از $\pi/2$ باشد مخروط $\phi=\phi_0$ رو به پایین باز می شود. معادله $\theta=\theta_0$ نیم صفحه ای را توصیف می کند که شامل محور z بوده و با قسمت مثبت محور x زاویه θ_0 می سازد.



شکل ۱۵-۴۸: معادلات مختص – ثابت در مختصات کروی معادلات کره ها، مخروط های منفرد و نیم صفحه ها هستند.

معادلات رابط مختصات کروی به مختصات دکارتی و استوانه ای:

$$r=\rho\sin\phi \quad \text{و} \quad x=r\cos\theta=\rho\sin\phi\cos\theta$$

(۱)

$$z=\rho\cos\phi \quad \text{و} \quad y=r\sin\theta=\rho\sin\phi\sin\theta$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{r^2+z^2}$$

مثال ۳: مطلوب است معادله کره $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ در مختصات کروی.

حل: با استفاده از معادلات (۱) به جای x، y و z معادلشان در مختصات کروی را قرار می دهیم

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

$$\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta+(\rho\cos\phi-1)^2=1$$

$$\rho^2\sin^2\phi\underbrace{\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}_{1}+\rho^2\cos^2\phi-2\rho\cos\phi+1=1$$

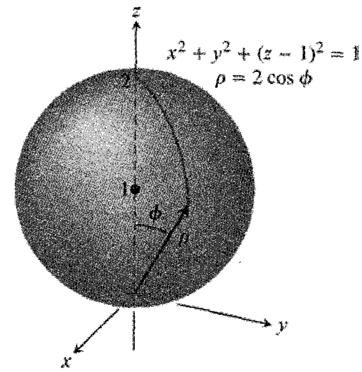
(معادلات ۱)

$$\rho^2\underbrace{\left(\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)}_{1}=2\rho\cos\phi$$

$$\rho^2 = 2\rho\cos\phi \qquad (\rho > 0)$$

$$\rho = 2\cos\phi$$

زاویه ϕ از 0 در قطب شمال کره تا $\pi/2$ در قطب جنوب آن تغییر می کند؛ زاویه θ در عبارت مربوط به ρ ظاهر نمی شود که نشان دهنده وجود تقارن حول محور z است (شکل ۱۵-۴۹ را ببینید).



شکل ۱۵-۴۹: کره مثال ۳.

مثال۴: مطلوب است معادله مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ در مختصات کروی.

حل ۱: روش هندسی: این مخروط نسبت به محور z متقارن است و ربع اول صفحه yz را در امتداد خط $z=y$ قطع می کند. بنابراین زاویه بین مخروط و قسمت مثبت محور z برابر $\pi/4$ است. این مخروط شامل نقاطی است که مختصات کروی آنها دارای ϕ برابر با $\pi/4$ است لذا معادله آن عبارت است از $\phi=\pi/4$. (شکل ۱۵-۵۰ را ببینید).

حل ۲: روش جبری. اگر با استفاده از معادلات (۱) به جای x، y و z معادلشان را قرار دهیم همین نتیجه را بدست می آوریم

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\rho\cos\phi=\sqrt{\rho^2\sin^2\phi} \qquad \text{(مثال۳)}$$

$$\rho\cos\phi=\rho\sin\phi \qquad (\rho>0 \text{ و } \sin\phi\geq 0)$$

$$\cos\phi=\sin\phi$$

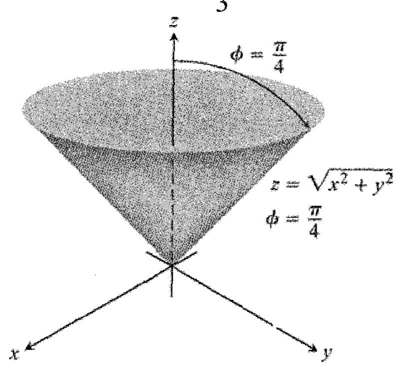
$$\phi=\frac{\pi}{4} \qquad (0\leq\phi\leq\pi)$$

مختصات کروی برای توصیف کره های به مرکز مبداء، نیم صفحه هایی که از یک طرف به محور z لولا شده اند (محدودند) و مخروط هایی که رأسشان در مبداء و محورشان در امتداد محور z قرار دارد مناسب است. رویه هایی شبیه اینها معادلاتی به صورت برابری مختصه با یک مقدار ثابت دارند:

(کره ای به شعاع a و به مرکز مبداء) $\qquad \rho=4$

(مخروطی که از مبداء به سمت بالا باز می شود و با قسمت مثبت محور z زاویه $\frac{\pi}{3}$ رادیان می سازد) $\qquad \phi=\frac{\pi}{3}$

(نیم صفحه ای که از یک طرف به محور z محدود است و با قسمت مثبت محور x زاویه $\frac{\pi}{3}$ رادیان می سازد) $\qquad \theta=\frac{\pi}{3}$



شکل ۱۵-۵۰: مخروط مثال ۴.

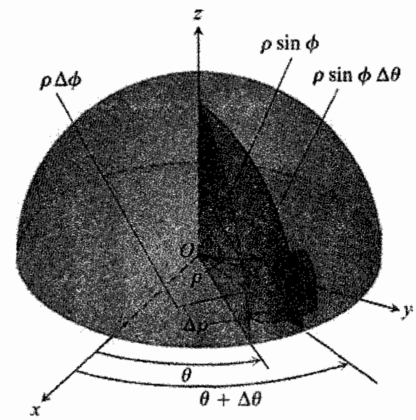
وقتی بخواهیم انتگرال های سه گانه را روی ناحیه ای چون D در مختصات کروی محاسبه کنیم ناحیه را به n گوه کروی تقسیم می کنیم. اندازه گوه کروی k ام، که شامل نقطه ای چون (ρ_k,ϕ_k,θ_k) است، با تغییرات $\Delta\rho_k$، $\Delta\phi_k$ و $\Delta\theta_k$ در مقادیر ρ، ϕ و θ مشخص می شود. یک یال چنین گوه کروی قوسی دایره ای به طول $\rho_k\Delta\phi_k$، یال دیگر آن قوسی دایره ای به طول $\rho_k\sin\phi_k\Delta\theta_k$ و ضخامت آن $\Delta\rho_k$ است. وقتی $\Delta\rho_k$، $\Delta\theta_k$ و $\Delta\phi_k$ کوچک باشند این گوه کروی مکعبی با همین ابعاد را به خوبی تقریب می زند (شکل ۱۵-۵۱). می توان نشان داد که حجم این گوه کروی ΔV_k برابر است با $\Delta V_k=\rho_k^2\sin\phi_k\Delta\rho_k\Delta\phi_k\Delta\theta_k$، که (ρ_k,ϕ_k,θ_k) نقطه ای است که داخل گوه انتخاب می شود.[1]

جمع ریمان متناظر برای تابعی چون $f(r,\phi,\theta)$ به صورت زیر است

---

[1] - دیفرانسیل (جزء) حجم در مختصات کروی عبارت است از:

$$dV=\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$



شکل ۱۵-۵۱: در مختصات کروی داریم:

$$dV = d\rho . \rho d\phi . \rho \sin\phi d\theta = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\rho_k, \phi_k, \theta_k\right) \rho_k^2 \sin\phi_k \Delta\rho_k \Delta\phi_k \Delta\theta_k$$

وقتی نرم شبکه به صفر میل می کند و گوه های کروی کوچکتر می شوند و وقتی f پیوسته باشد جمع های ریمان به یک حد میل می کنند

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f\left(\rho,\phi,\theta\right) dV$$
$$= \iiint_D f\left(\rho,\phi,\theta\right) \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

در مختصات کروی داریم

$$dV = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

برای محاسبه انتگرال ها در مختصات کروی، معمولاً نخست نسبت به ρ انتگرال می گیریم. مراحل یافتن حدود انتگرال گیری به شرح زیر است. توجه خود را به انتگرال گیری روی دامنه هایی محدود می کنیم که اجسام حاصل از چرخش حول محور z (اجسام دوار) هستند (یا بخش هایی از آنها) و برای آنها حدود θ و ϕ ثابت اند.

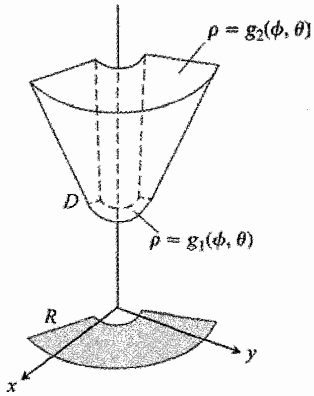
چگونگی انتگرال گیری در مختصات کروی

برای محاسبه

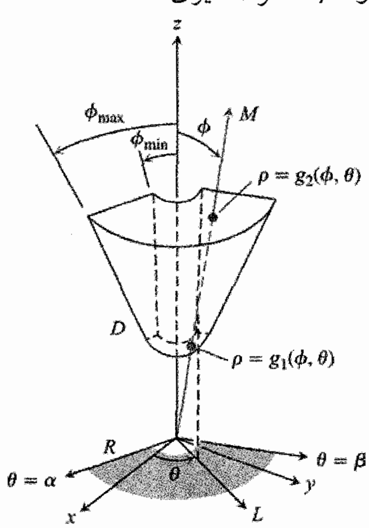
$$\iiint_D f\left(\rho,\phi,\theta\right) dV$$

روی ناحیه ای چون D از فضا در مختصات کروی، بطوریکه ابتدا نسبت به ρ بعد نسبت به ϕ و در آخر نسبت به θ انتگرال بگیریم، مراحل زیر را طی می کنیم:

۱- **رسم شکل:** ناحیه D را به همراه تصویر آن برروی صفحه xy، R، رسم می کنیم. رویه های محدود کننده D را نامگذاری می کنیم.



۲- **یافتن حدود ρ انتگرال گیری.** پرتوی چون M از مبداء رسم می کنیم که از D بگذرد و با قسمت مثبت محور z زاویه ϕ بسازد. همینطور تصویر M را برروی صفحه xy رسم می کنیم (و آن را تصویر L می نامیم). پرتو L با قسمت مثبت محور x زاویه θ می سازد. وقتی ρ افزایش می یابد M در $\rho = g_1\left(\phi,\theta\right)$ وارد D و در $\rho = g_2\left(\phi,\theta\right)$ از آن خارج می شود. اینها حدود ρ انتگرال گیری هستند.



۳- **یافتن حدود ϕ انتگرال گیری.** به ازای هر θ معین، زاویه ϕ که M با محور z می سازد از $\phi = \phi_{\min}$ تا $\phi = \phi_{\max}$ تغییر می کند. اینها حدود ϕ انتگرال گیری هستند.

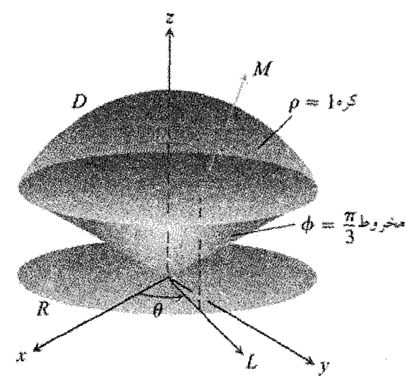
۴- **یافتن حدود θ انتگرال گیری.** وقتی θ از α تا β تغییر می کند L ناحیه R را جاروب می کند. اینها حدود θ انتگرال گیری هستند. انتگرال چنین می شود:

$$\iiint_D f(\rho,\phi,\theta)dV$$
$$= \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{\phi=\phi_{\min}}^{\phi=\phi_{\max}}\int_{\rho=g_1(\phi,\theta)}^{\rho=g_2(\phi,\theta)} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

مثال ۵: مطلوب است حجم ناحیه D که مخروط $\phi=\pi/3$ از کره توپر $\rho\le 1$ جدا می کند.

حل: حجم برابر است با $V=\iiint_D \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$، یعنی انتگرال $f(\rho,\phi,\theta)=1$ روی D.

برای یافتن حدود انتگرال گیری جهت محاسبه این انتگرال با رسم ناحیه D و تصویر آن R برروی صفحه xy شروع می کنیم (شکل ۱۵-۵۲).



شکل ۱۵-۵۲: ناحیه مخروطی(مخروط بستنی) مثال ۵.

حدود ρ انتگرال گیری: پرتوی چون M از مبداء رسم می کنیم که از D بگذرد و با قسمت مثبت محور z زاویه ϕ بسازد. L، تصویر M برروی صفحه xy، را هم به همراه زاویه θ که L با قسمت مثبت محور x می سازد رسم می کنیم. پرتو M در $\rho=0$ وارد D و در $\rho=1$ از آن خارج می شود.

حدود ϕ انتگرال گیری: مخروط $\phi=\pi/3$ با قسمت مثبت محور z زاویه $\pi/3$ می سازد. به ازای هر θ معین زاویه ϕ می تواند از $\phi=0$ تا $\phi=\pi/3$ تغییر کند.

حدود θ انتگرال گیری: با تغییر θ از 0 تا 2π پرتو L ناحیه R را جاروب می کند. حجم برابر است با

$$V=\iiint_D \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\frac{1}{3}\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos\phi\right]_0^{\pi/3}d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)d\theta=\frac{1}{6}(2\pi)=\frac{\pi}{3}$$

مثال ۶: جسمی با چگالی ثابت $\delta=1$ ناحیه D مذکور در مثال ۵ را اشغال کرده است. گشتاور لختی این جسم را حول محور z بدست آورید.

حل: در مختصات قائم، گشتاور عبارت است از

$$I_z=\iiint\left(x^2+y^2\right)dV$$

در مختصات کروی،

$$x^2+y^2=(\rho\sin\phi\cos\theta)^2+(\rho\sin\phi\sin\theta)^2=\rho^2\sin^2\phi$$

در نتیجه

$$I_z=\iiint\left(\rho^2\sin^2\phi\right)\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$=\iiint \rho^4\sin^3\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

برای ناحیه مذکور در مثال ۵ این انتگرال به صورت زیر درمی آید

$$I_z=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^4\sin^3\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1\sin^3\phi\, d\phi\, d\theta$$
$$=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\left(1-\cos^2\phi\right)\sin\phi\, d\phi\, d\theta$$
$$=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi+\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/3}d\theta$$
$$=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{24}-\frac{1}{3}\right)d\theta$$
$$=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\frac{5}{25}d\theta=\frac{1}{24}(2\pi)=\frac{\pi}{12}$$

فرمول های تبدیل مختصات		
استوانه ای به قائم	کروی به قائم	کروی به استوانه ای
$x = r\cos\theta$	$x = \rho\sin\phi\cos\theta$	$r = \rho\sin\phi$
$y = r\sin\theta$	$y = \rho\sin\phi\sin\theta$	$z = \rho\cos\phi$
$z = z$	$z = \rho\cos\phi$	$\theta = \theta$

فرمول های متناظر برای dV در انتگرال های سه گانه:

$$dV = dx\,dy\,dz = dz\,r\,dr\,d\theta = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

در بخش بعدی روش کلی تری برای تعیین dV در مختصات استوانه ای و کروی ارائه می کنیم. نتایج البته یکسان خواهند بود.

تمرین های ۱۵-۷

محاسبه انتگرال ها در مختصات استوانه ای

در تمرین های ۱-۶ انتگرال ها را که در مختصات استوانه ای اند محاسبه کنید.

۱- $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz\,r\,dr\,d\theta$

۲- $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dz\,r\,dr\,d\theta$

۳- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta/2\pi}\int_0^{3+24r^2} dz\,r\,dr\,d\theta$

۴- $\int_0^{\pi}\int_0^{\theta/\pi}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} z\,dz\,r\,dr\,d\theta$

۵- $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3dz\,r\,dr\,d\theta$

۶- $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}\left(r^2\sin^2\theta+z^2\right)dz\,r\,dr\,d\theta$

تغییر ترتیب انتگرال گیری در مختصات استوانه ای

انتگرال هایی که تاکنون با آنها مواجه شده ایم نشان می دهند که در مختصات استوانه ای یک ترتیب انتگرال گیری مرجح وجود دارد، اما معمولاً ترتیب های دیگر هم کارایی خوبی داشته و گاهی محاسبه آنها آسانتر است. در تمرین های ۷-۱۰ انتگرال ها را محاسبه کنید.

۷- $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{z/3} r^3\,dr\,dz\,d\theta$

۸- $\int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 4r\,dr\,d\theta\,dz$

۹- $\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi}\left(r^2\cos^2\theta+z^2\right)r\,d\theta\,dr\,dz$

۱۰- $\int_0^2\int_{r-2}^{\sqrt{4-r^2}}\int_0^{2\pi}\left(r\sin\theta+1\right)r\,d\theta\,dz\,dr$

۱۱- فرض کنید D ناحیه ای است که از پایین به صفحه $z=0$، از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=4$ و از اطراف به استوانه $x^2+y^2=1$ محدود است. مطلوب است انتگرال های سه گانه در مختصات استوانه ای با ترتیب های انتگرال گیری زیر که حجم D را بدست می دهند.

(الف)- $dz\,dr\,d\theta$ (ب)- $dr\,dz\,d\theta$ (پ)- $d\theta\,dz\,dr$

۱۲- فرض کنید D ناحیه ای است که از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و از بالا به سهمیوار

$$z = 2-x^2-y^2$$

محدود است. مطلوب است انتگرال های سه گانه در مختصات استوانه ای با ترتیب های زیر که حجم D را بدست می دهند.

(الف)- $dz\,dr\,d\theta$ (ب)- $dr\,dz\,d\theta$ (پ)- $d\theta\,dz\,dr$

یافتن انتگرال های مکرر در مختصات استوانه ای

۱۳- مطلوب است حدود انتگرال گیری برای محاسبه انتگرال

$$\iiint f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

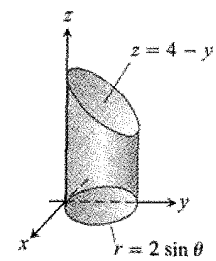
به صورت یک انتگرال مکرر روی ناحیه ای که از پایین به صفحه $z=0$، از اطراف به استوانه $r=\cos\theta$ و از بالا به سهمیوار $z=3r^2$ محدود است.

۱۴- انتگرال زیر را به انتگرالی معادل در مختصات استوانه ای تبدیل کرده و حاصل آن را محاسبه کنید.

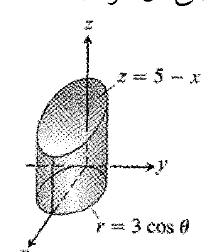
$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{x}\left(x^2+y^2\right)dz\,dx\,dy$$

در تمرین های **۱۵-۲۰** مطلوب است انتگرال مکرر برای محاسبه $\iiint_D f\left(r,\theta,z\right)dz\,r\,dr\,d\theta$ روی ناحیه D مفروض.

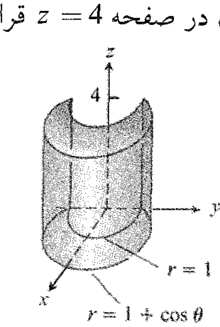
۱۵- D استوانه مستدیر قائمی است که قاعده اش دایره $r=2\sin\theta$ واقع در صفحه xy و بالای آن در صفحه $z=4-y$ قرار دارد.



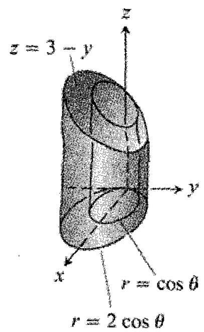
۱۶- D استوانه مستدیر قائمی است که قاعده اش دایره $r=3\cos\theta$ و بالای آن در صفحه $z=5-x$ قرار دارد.



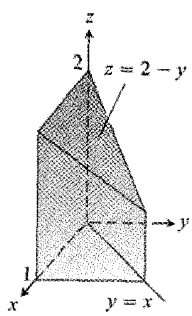
۱۷- D استوانه قائم توپری است که قاعده اش ناحیه ای در صفحه xy واقع در داخل دلوار $r=1+\cos\theta$ و خارج دایره $r=1$ است و بالای آن در صفحه $z=4$ قرار دارد.



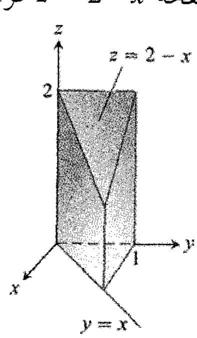
۱۸- D استوانه قائم پرتوی است که قاعده اش ناحیه بین دایره های $r=\cos\theta$ و $r=2\cos\theta$ بوده و بالای آن در صفحه $z=3-y$ قرار دارد.



۱۹- D منشوری است که قاعده اش مثلثی واقع در صفحه xy و محدود به محور x و خطوط $y=x$ و $x=1$ بوده و بالای آن در صفحه $z=2-y$ قرار دارد.



۲۰- D منشوری است که قاعده اش مثلثی واقع در صفحه xy و محدود به محور y و خطوط $y=x$ و $y=1$ است و بالای آن در صفحه $z=2-x$ قرار دارد.



محاسبه انتگرال ها در مختصات کروی

در تمرین های **۲۱-۲۶** انتگرال ها را که در مختصات کروی اند محاسبه کنید.

۲۱- $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

۲۲- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2}\left(\rho\cos\phi\right)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

۲۳- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\phi)/2}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

۲۴- $\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 5\rho^3 \sin^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

۲۵- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2} 3\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

۲۶- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi} (\rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

تغییر ترتیب انتگرال گیری در مختصات کروی

انتگرال های قبلی نشان می دهند که در مختصات کروی یکی از ترتیب های انتگرال گیری مرجح است اما ترتیب های دیگر هم همان مقدار را بدست می دهند و گاهی از نظر محاسبه آسانتر هستند. انتگرال های تمرین های ۲۷- ۳۰ را محاسبه کنید.

۲۷- $\int_0^{2}\int_{-\pi}^{0}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^3 \sin 2\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho$

۲۸- $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\phi}^{2\csc\phi}\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\rho \, d\phi$

۲۹- $\int_0^{1}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} 12\rho \sin^3\phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho$

۳۰- $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\csc\phi}^{2} 5\rho^4 \sin^3\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

۳۱- D را ناحیه مذکور در تمرین ۱۱ فرض کنید. مطلوب است انتگرال های سه گانه در مختصات کروی با استفاده از ترتیب های انتگرال گیری زیر که حجم D را بدست می دهند

(الف)- $d\rho \, d\phi \, d\theta$ (ب)- $d\phi \, d\rho \, d\theta$

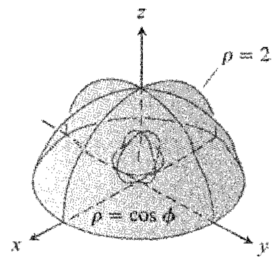
۳۲- D را ناحیه ای فرض کنید که از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و از بالا به صفحه $z=1$ محدود است. مطلوب است انتگرال های سه گانه در مختصات کروی با استفاده از ترتیب های انتگرال گیری زیر که حجم D را بدست می دهند

(الف)- $d\rho \, d\phi \, d\theta$ (ب)- $d\phi \, d\rho \, d\theta$

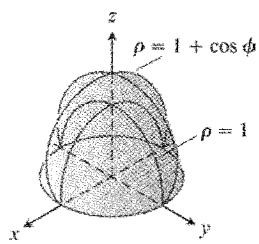
یافتن انتگرال های مکرر در مختصات قطبی

در تمرین های۳۳- ۳۸ مطلوب است (الف)- حدود مختصات کروی برای انتگرالی که حجم جسم مفروض را بدست می دهد و (ب)- محاسبه انتگرال.

۳۳- جسمی که بین کره $\rho=\cos\phi$ و نیمکره $\rho=2$، $z\geq 0$ قرار دارد.



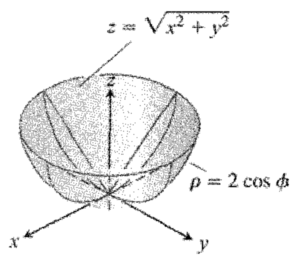
۳۴- جسمی که از پایین به نیمکره $\rho=1$، $z\geq 0$ و از بالا به دلوار دورانی $\rho=1+\cos\theta$ محدود است.



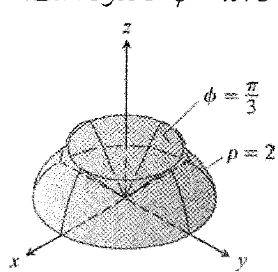
۳۵- جسمی که بوسیله دلوار دورانی $\rho=1-\cos\phi$ محصور شده است.

۳۶- قسمت بالایی جسم مذکور در تمرین ۳۵ که بوسیله صفحه xy از آن جدا می شود.

۳۷- جسمی که از پایین به کره $\rho=2\cos\phi$ و از بالا به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محدود است.



۳۸- جسمی که از پایین به صفحه xy، از اطراف به کره $\rho=2$ و از بالا به مخروط $\phi=\pi/3$ محدود است.



یافتن انتگرال های سه گانه

۳۹- مطلوب است نوشتن انتگرال های سه گانه برای حجم کره $\rho=2$ در مختصات (الف)- کروی (ب)- استوانه ای و (پ)- قائم.

۴۰- فرض کنید D ناحیه ای در یک هشتم اول است که از پایین به مخروط $\phi=\pi/4$ و از بالا به کره $\rho=3$ محدود است. مطلوب است حجم D به صورت یک انتگرال سه گانه مکرر در مختصات (الف)- استوانه ای (ب)- کروی (پ)- محاسبه V.

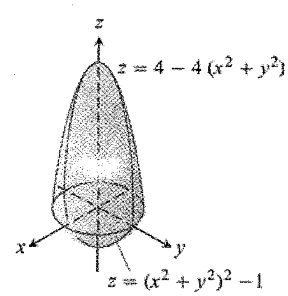
۴۱- گوی توپری به شعاع ۲ واحد بوسیله صفحه ای که از مرکز کره ۱ واحد فاصله دارد به دو قسمت تقسیم شده است. ناحیه کوچکتر این گوی را D در نظر بگیرید. سپس (ت)- حجم D را با محاسبه یکی از سه انتگرال سه گانه محاسبه کنید.

۴۲- گشتاور لختی I_z نیمکره توپر $x^2+y^2+z^2\leq 1$، $z\geq 0$ را به صورت یک انتگرال مکرر در مختصات (الف)- استوانه ای (ب)- کروی بیان کنید. سپس (پ)- I_z را بدست آورید.

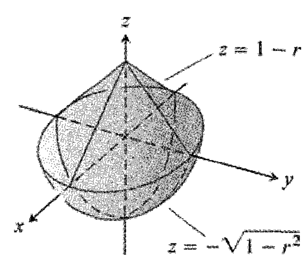
حجم ها

در تمرین های ۴۳ – ۴۸ حجم اجسام را محاسبه کنید.

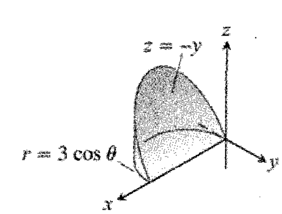
-۴۳



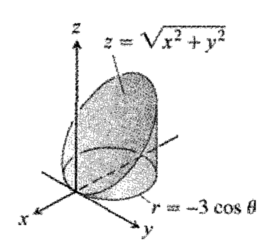
-۴۴



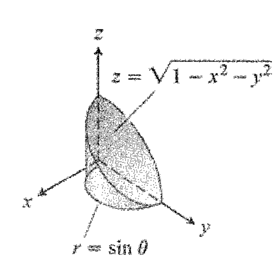
-۴۵



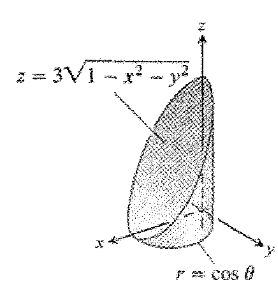
-۴۶



-۴۷



-۴۸



۴۹- **کره و مخروط ها.** مطلوب است حجم بخشی از کره توپر $\rho\leq a$ که بین مخروط های $\phi=\pi/3$ و $\phi=2\pi/3$ قرار دارد.

۵۰- **کره و نیم صفحه ها.** حجم ناحیه ای را بیابید که بوسیله نیم صفحه های $\theta=0$ و $\theta=\pi/6$ در یک هشتم اول از کره توپر $\rho\leq a$ جدا می شود.

۵۱- **کره و صفحه.** مطلوب است حجم ناحیه کوچکتری که صفحه $z=1$ از کره توپر $\rho\leq 2$ جدا می کند.

۵۲- **مخروط و صفحات.** حجم جسمی را بیابید که بوسیله مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محصور شده و بین صفحات $z=1$ و $z=2$ قرار دارد.

۵۳- **استوانه و سهمیوار.** مطلوب است حجم ناحیه ای که از پایین به صفحه $z=0$، از اطراف به استوانه $x^2+y^2=1$ و از بالا به سهمیوار $z=x^2+y^2$ محدود است.

۵۴- **استوانه و سهمیوارها.** مطلوب است حجم ناحیه ای که از پایین به سهمیوار $z=x^2+y^2$، از اطراف به استوانه $x^2+y^2=1$ و از بالا به سهمیوار $z=x^2+y^2+1$ محدود است.

۵۵- **استوانه و مخروط ها.** مطلوب است حجم جسمی که بوسیله مخروط های $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ از استوانه دیواره – ضخیم $1\leq x^2+y^2\leq 2$ جدا می شود.

۵۶- **کره و استوانه.** حجم ناحیه ای را بیابید که داخل کره $x^2+y^2+z^2=2$ و خارج استوانه $x^2+y^2=1$ قرار دارد.

۵۷- **استوانه و صفحات.** حجم ناحیه ای را بیابید که بوسیله استوانه $x^2+y^2=4$ و صفحات $z=0$ و $y+z=4$ محصور شده است.

۵۸- **استوانه و صفحات.** حجم ناحیه ای را بیابید که بوسیله استوانه $x^2+y^2=4$ و صفحات $z=0$ و $x+y+z=4$ محصور شده است.

۵۹- **ناحیه بین دو سهمیوار.** مطلوب است حجم ناحیه ای که

از بالا به سهمیوار $z=5-x^2-y^2$ و از پایین به سهمیوار $z=4x^2+4y^2$ محدود است.

۶۰- **سهمیوار و استوانه.** مطلوب است حجم ناحیه ای که از بالا به سهمیوار $z=9-x^2-y^2$ و از پایین به صفحه xy محدود بوده و خارج از استوانه $x^2+y^2=1$ قرار دارد.

۶۱- **استوانه و کره.** حجم ناحیه ای را بیابید که بوسیله کره $x^2+y^2+z^2=4$ از استوانه توپر $x^2+y^2\leq 1$ جدا می شود.

۶۲- **کره و سهمیوار.** حجم ناحیه ای را بیابید که از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=2$ و از پایین به سهمیوار $z=x^2+y^2$ محدود است.

مقادیر متوسط

۶۳- مقدار متوسط تابع $f(r,\theta,z)=r$ را روی ناحیه ای بیابید که بوسیله استوانه $r=1$ محصور شده و بین صفحات $z=-1$ و $z=1$ قرار دارد.

۶۴- مقدار متوسط تابع $f(r,\theta,z)=r$ را روی گوی توپر محدود به کره $r^2+z^2=1$ بیابید (این ناحیه همان کره $x^2+y^2+z^2=1$ است).

۶۵- مطلوب است مقدار متوسط تابع $f(\rho,\phi,\theta)=\rho$ روی گوی توپر $\rho\leq 1$.

۶۶- مطلوب است مقدار متوسط تابع $f(\rho,\phi,\theta)=\rho\cos\phi$ روی نیمکره توپر $\rho\leq 1$، $0\leq\phi\leq\pi/2$.

جرم، گشتاور و مرکزوار

۶۷- **مرکز جرم.** جسمی با چگالی ثابت از پایین به صفحه $z=0$، از بالا به مخروط $z=r$، $r\geq 0$ و از اطراف به استوانه $r=1$ محدود است. مرکز جرم جسم را بیابید.

۶۸- **مرکزوار.** مطلوب است مرکزوار ناحیه ای در یک هشتم اول که از بالا به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$، از پایین به صفحه $z=0$ و از اطراف به استوانه $x^2+y^2=4$ و صفحات $x=0$ و $y=0$ محدود است.

۶۹- **مرکزوار.** مرکزوار جسم مذکور در تمرین ۳۸ را بیابید.

۷۰- **مرکزوا.** مطلوب است مرکزوار جسمی که از بالا به کره $\rho=a$ و از پایین به مخروط $\phi=\pi/4$ محدود است.

۷۱- **مرکزوار.** مطلوب است مرکزوار ناحیه ای که از بالا به رویه $z=\sqrt{r}$، از اطراف به استوانه $r=4$ و از پایین به صفحه xy محدود است.

۷۲- **مرکزوار.** مطلوب است مرکزوار ناحیه ای که بوسیله نیم صفحه های $\theta=-\pi/3$، $r\geq 0$ و $\theta=\pi/3$، $r\geq 0$ از گوی توپر $r^2+z^2\leq 1$ جدا می شود.

۷۳- **گشتاور لختی مخروط توپر.** مطلوب است گشتاور لختی مخروط مستدیر قائمی با شعاع قاعده ۱ و ارتفاع ۱ حول محوری که از رأس آن موازی با قاعده می گذرد ($\delta=1$ فرض کنید).

۷۴- **گشتاور لختی کره توپر.** مطلوب است گشتاور لختی یک کره توپر به شعاع a حول یکی از اقطارش (فرض کنید $\delta=1$).

۷۵- **گشتاور لختی مخروط توپر.** مطلوب است گشتاور لختی مخروط مستدیر قائمی با شعاع قاعده a و ارتفاع h حول محور آن (راهنمایی: رأس مخروط را در مبداء و محور آن را در امتداد محور z بگیرید).

۷۶- **چگالی متغیر.** جسمی از بالا به سهمیوار $z=r^2$، از پایین به صفحه $z=0$ و از اطراف به استوانه $r=1$ محدود است. مطلوب است مرکز جرم و گشتاور لختی حول محور z در صورتیکه چگالی برابر باشد با (الف)- $\delta(r,\theta,z)=z$ و (ب)- $\delta(r,\theta,z)=r$.

۷۷- **چگالی متغیر.** جسمی از پایین به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و از بالا به صفحه $z=1$ محدود است. مطلوب است مرکز جرم و گشتاور لختی حول محور z در صورتیکه چگالی برابر باشد با (الف)- $\delta(r,\theta,z)=z$ (ب)- $\delta(r,\theta,z)=z^2$.

۷۸- **چگالی متغیر.** گوی توپری به کره $\rho=a$ محدود است. مطلوب است گشتاور لختی حول محور z در صورتیکه چگالی

برابر باشد با

(الف)- $\delta(\rho,\phi,\theta)=\rho^2$ (ب)- $\delta(\rho,\phi,\theta)=r=\rho\sin\phi$

۷۹- مرکزوار نیم بیضیوار توپر. نشان دهید که مرکزوار جسم نیم بیضیوار دورانی $(r^2/a^2)+(z^2/h^2)\le 1$، $z\ge 0$ روی محور z واقع بوده و در فاصله سه هشتم از قاعده آن قرار دارد. حالت خاص $h=a$ یک نیمکره توپر بدست می دهد. بنابراین مرکزوار یک نیمکره توپر روی محور تقارن بوده و در فاصله سه – هشتم از قاعده آن قرار دارد.

۸۰- مرکزوار مخروط توپر. نشان دهید که مرکزوار یک مخروط مستدیر قائم توپر در فاصله یک – چهارم از قاعده آن قرار دارد. (بطور کلی مرکزوار یک مخروط یا هرم توپر در فاصله یک – چهارم از مرکزوار قاعده تا رأس قرار دارد).

۸۱- چگالی مرکز سیاره. سیاره ای به شکل کره ای به شعاع R است و جرم کل آن M می باشد. توزیع چگالی این سیاره دارای تقارن کرویست و با حرکت به سمت مرکز آن به صورت خطی افزایش می یابد. اگر چگالی را در لبه (سطح) آن صفر بگیریم چگالی در مرکز سیاره چقدر است؟

۸۲- جرم جو سیاره. سیاره ای کروی به شعاع R جوی با چگالی $\mu=\mu_0 e^{-ch}$ دارد که h ارتفاع از سطح سیاره، μ_0 چگالی در سطح تراز دریا و c ثابتی مثبت است. جرم جو سیاره را بیابید.

نظریه و مثال ها

۸۳- صفحات قائم در مختصات استوانه ای

(الف)- نشان دهید که صفحات عمود بر محور x در مختصات استوانه ای معادلاتی به صورت $r=a\sec\theta$ دارند.

(ب)- نشان دهید که صفحات عمود بر محور y معادلاتی به شکل $r=b\csc\theta$ دارند.

۸۴- (ادامه تمرین**۸۳**). مطلوب است معادله ای به صورت $r=f(\theta)$ در مختصات استوانه ای برای صفحه $ax+by=c$، $c\neq 0$.

۸۵- تقارن. رویه ای که در مختصات استوانه ای معادله ای به شکل $r=f(z)$ دارد چه تقارنی دارد؟ دلیل بیاورید.

۸۶- تقارن. رویه ای که در مختصات کروی معادله ای به صورت $\rho=f(\phi)$ دارد چه نوع تقارنی دارد؟ دلیل بیاورید.

۱۵-۸- جانشانی در انتگرال های سه گانه

هدف این بخش معرفی مفاهیم مرتبط با تبدیلات مختصات به خواننده است. خواهید دید که چگونه به کمک جانشانی انتگرال های پیچیده با انتگرال های ساده تر به لحاظ محاسباتی جایگزین شده و انتگرال های چندگانه محاسبه می شوند. جانشانی ها این کار را با ساده کردن انتگرالده، حدود انتگرال گیری یا هر دو انجام می دهند. بحث کامل تبدیلات و جانشانی های چند متغیره و ژاکوبی به دوره ای پیشرفته تر بعد از مطالعه جبر خطی محول می شود.

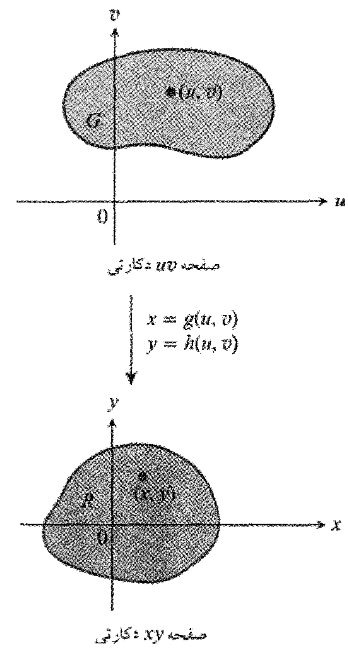
جانشانی در انتگرال های دوگانه

جانشانی مختصات قطبی مورد بحث در بخش **۱۵-۴** حالت خاصی است از روش عامتر جانشانی در انتگرال های دوگانه، روشی که تغییر متغیرها را به صورت تبدیل نواحی مجسم می کند.

فرض کنید ناحیه G در صفحه uv با معادلاتی به شکل زیر بصورت یک به یک به ناحیه R در صفحه xy تبدیل می شود

$$x=g(u,v) \quad \text{و} \quad y=h(u,v)$$

این تبدیل در شکل**۱۵-۵۳** نشان داده شده است. R را **تصویر** G تحت این تبدیل و G را **پیش تصویر** R می نامیم. هر تابعی چون $f(x,y)$ را که روی R تعریف می شود می توان تابعی چون $f(g(u,v),h(u,v))$ دانست که روی G هم تعریف می شود. انتگرال $f(x,y)$ روی R چه ارتباطی با انتگرال $f(g(u,v),h(u,v))$ روی G دارد؟



شکل ۱۵-۵۳: معادلات $x=g(u,v)$، $y=h(u,v)$ به ما امکان می دهند تا با استفاده از معادله (۱) انتگرال روی ناحیه R در صفحه xy را به انتگرالی روی ناحیه G در صفحه uv تبدیل کنیم.

پاسخ این است: اگر g، h و f مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند و $J(u,v)$ (که به زودی در مورد آن بحث می کنیم) فقط در نقاط منزوی صفر باشد، اگر اصلاً صفر باشد، آنگاه

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f\big(g(u,v),h(u,v)\big)\left|J(u,v)\right|du\,dv \qquad (۱)$$

عامل $J(u,r)$، که قدر مطلقش در معادله (۱) ظاهر می شود، *ژاکوبی* تبدیل مختصات است که به احترام ریاضیدان آلمانی کارل ژاکوبی نامگذاری شده است. ژاکوبی معیاری از میزان انبساط یا انقباض مساحت حول یک نقطه از G در تبدیل G به R توسط تبدیل است.

تعریف: دترمینان ژاکوبی یا ژاکوبی تبدیل مختصات $x=g(u,v)$ و $y=h(u,v)$ عبارت است از

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \qquad (۲)$$

ژاکوبی را می توان به صورت زیر هم نشان داد

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

تا در به خاطر سپردن اینکه دترمینان معادله (۲) چگونه از مشتقات جزئی x و y تشکیل می شود به شما کمک کند. استنتاج معادله (۱) پیچیده است و در کتاب های حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ارائه می شود. در اینجا از استنتاج این رابطه صرفنظر می کنیم.

مثال ۱: ژاکوبی را برای تبدیل مختصات قطبی $x=r\cos\theta$، $y=r\sin\theta$ بدست آورده و با استفاده از معادله (۱) انتگرال دکارتی $\iint_R f(x,y)dxdy$ را به صورت یک انتگرال قطبی بنویسید.

حل: شکل ۱۵- ۵۴ نشان می دهد که چگونه معادلات

$$x=r\cos\theta \text{ و } y=r\sin\theta$$

مستطیل $G: 0\le r\le 1$ و $0\le\theta\le\pi/2$ را به ربع دایره R محصور شده توسط $x^2+y^2=1$ در ربع اول صفحه xy تبدیل می کنند.

در مختصات قطبی به جای u و v، r و θ داریم. به ازای $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ ژاکوبی برابر است با

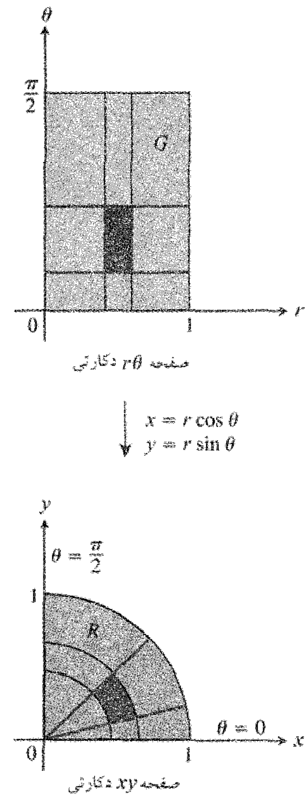
$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=r$$

چون هنگام انتگرال گیری در مختصات قطبی فرض می کنیم $r\ge 0$ است، $\left|J(r,\theta)\right|=|r|=r$، بطوریکه از معادله (۱) داریم

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=\iint_G f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad (۳)$$

این همان فرمولی است که در بخش ۱۵-۴ بطور مستقل با استفاده از بحثی هندسی برای مساحت قطبی بدست آوردیم.



شکل ۱۵-۵۴: معادلات $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ ناحیه G را به R تبدیل می کنند.

توجه کنید که انتگرال سمت راست معادله (۳) انتگرال $f\,(r\cos\theta, r\sin\theta)$ روی ناحیه ای در صفحه مختصات قطبی نیست بلکه انتگرال حاصلرب $f\,(r\cos\theta, r\sin\theta)$ و r روی ناحیه G در صفحه $r\theta$ ی دکارتی است.

در اینجا مثالی از جانشانی ارائه می کنیم که در آن تصویر یک مستطیل تحت تبدیل مختصات یک ذوزنقه است. تبدیلاتی نظیر این را **تبدیلات خطی** می نامند.

مثال ۲: انتگرال

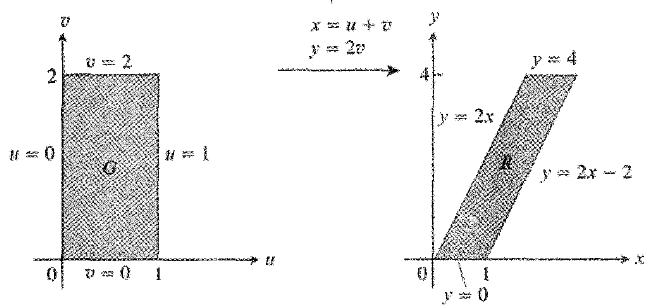
$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx\, dy$$

را با استفاده از تبدیل

$$v = \frac{y}{2} \quad \text{و} \quad u = \frac{2x-y}{2} \qquad (۴)$$

و انتگرال گیری روی ناحیه مناسبی در صفحه uv محاسبه کنید.

حل: ناحیه انتگرال گیری R در صفحه xy را رسم کرده و مرزهای آن را مشخص می کنیم (شکل۱۵- ۵۵).



شکل۱۵- ۵۵: معادلات $x = u + v$ و $y = 2v$ ناحیه G را به R تبدیل می کنند. با معکوس کردن تبدیل به کمک معادلات $u = (2x-y)/2$ و $v = y/2$ ناحیه R به G تبدیل می شود (مثال ۲).

برای کاربرد معادله (۱) باید ناحیه G متناظر در صفحه uv و ژاکوبی تبدیل را بیابیم. برای یافتن آنها ابتدا با حل معادلات (۴) x و y را برحسب u و v بدست می آوریم. از آن معادلات به راحتی می توان پی برد که

$$y = 2v \quad \text{و} \quad x = u + v \qquad (۵)$$

اکنون با جانشانی این عبارت ها در معادلات مربوط به مرزهای R مرزهای G را بدست می آوریم (شکل۱۵-۵۵). معادلات مرزها در جدول زیر خلاصه شده اند.

ژاکوبی تبدیل (باز هم از معادلات (۵)) برابر است با

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

اکنون همه چیز برای استفاده از معادله (۱) در دست است

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx\, dy$$

$$= \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u \left|J(u,v)\right| du\, dv$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 (u)(2) du\, dv$$

$$= \int_0^2 \left[u^2\right]_0^1 dv = \int_0^2 dv = 2$$

معـــــادلات xyمربــوط بــه مرز R	معادلات uv متناظر مربوط به مرز G	معــــادلات uv ساده شده
$x=y/2$	$u+v=2v/2=v$	$u=0$
$x=(y/2)+1$	$u+v=(2v/2)+1$ $=v+1$	$u=1$
$y=0$	$2v=0$	$v=0$
$y=4$	$2v=4$	$v=2$

مثال ۳: مطلوب است

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx$$

حل: ناحیه انتگرال گیـری R در صـفحه xy را رسـم کـرده و مرزهای آن را مشخص می کنـیم (شـکل۱۵-۵۶). از انتگرالـده تبـدیل $u=x+y$ و $v=y-2x$ برمـی آیـد. بـا محاسـبات جبری ساده x و y به صـورت تـوابعی از u و v بدسـت مـی آیند

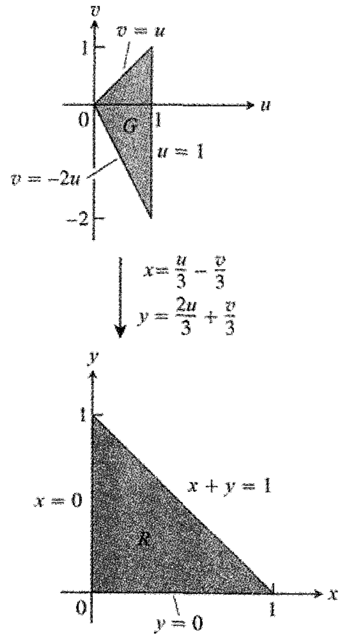
$$y=\frac{2u}{3}+\frac{v}{3} \quad \text{و} \quad x=\frac{u}{3}-\frac{v}{3} \qquad (۶)$$

بـه کمـک معـادلات (۶) مـی تـوانیم مرزهـای ناحیـه G در صفحه uv را بدست آوریم (شکل۱۵-۵۶).

معادلات xyمربوط به مرز R	معادلات uv متناظر مربوط به مرز G	معادلات uv ساده شده
$x+y=1$	$\left(\frac{u}{3}-\frac{v}{3}\right)+\left(\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}\right)=1$	$u=1$
$x=0$	$\frac{u}{3}-\frac{v}{3}=0$	$v=u$
$y=0$	$\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}=0$	$v=-2u$

ژاکوبی تبدیل در معادلات (۶) برابر است با

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$



شکل ۱۵-۵۶: معادلات

$y=(2u/3)+(v/3)$ و $x=(u/3)-(v/3)$

ناحیه G را به R تبدیل می کنند. با معکـوس کـردن تبدیل با معادلات

$v=y-2x$ و $u=x+y$

R به G تبدیل می شود (مثال ۳).

با کاربرد معادله (۱) انتگرال را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx\\
&=\int_{u=0}^{u=1}\int_{v=-2u}^{v=u}u^{1/2}v^2\left|J(u,v)\right|dv\,du\\
&=\int_0^1\int_{-2u}^{u}u^{1/2}v^2\left(\frac{1}{3}\right)dv\,du\\
&=\frac{1}{3}\int_0^1 u^{1/2}\left[\frac{1}{3}v^3\right]_{v=-2u}^{v=u}du\\
&=\frac{1}{9}\int_0^1 u^{1/2}\left(u^3+8u^3\right)du\\
&=\int_0^1 u^{7/2}du=\frac{2}{9}u^{9/2}\Big]_0^1=\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

در مثال بعدی یک تبدیل مختصات غیر خطی را ارائـه مـی کنیم که حاصل از ساده کردن شکل انتگرالـده اسـت. تبـدیلات غیر خطی، مثل تبدیل مختصات قطبی، می تواند یک مرز خـط راست از یک ناحیه را به مرزی خمیده بنگارد (یا برعکس ایـن با تبدیل معکوس). بطور کلی تحلیل تبدیلات غیر خطی نسبت به تبدیلات خطی پیچیده تر است و بحثی کامل در این بـاره را

می توانید در کتب پیشرفته تر بیابید.

مثال ۴: انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_1^2 \int_{1/y}^{y} \sqrt{\frac{y}{x}} e^{\sqrt{xy}}\, dx\, dy$$

حل: از جملات رادیکالی در انتگرالده چنین برمی آید که می توانیم انتگرال گیری را با جانشانی $u = \sqrt{xy}$ و $v = \sqrt{y/x}$ ساده کنیم. با مجذور کردن این معادلات به آسانی داریم: $u^2 = xy$ و $v^2 = y/x$ و از آنجا، $u^2v^2 = y^2$ و $u^2/v^2 = x^2$. بنابراین تبدیل زیر را بدست می آوریم (با همان ترتیب متغیرهایی که قبلاً بحث کردیم)

$$y = uv \quad \text{و} \quad x = \frac{u}{v}$$

ابتدا ببینیم خود انتگرالده تحت این تبدیل چه تغییری می کند. ژاکوبی تبدیل برابر است با

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v} & \dfrac{-u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{2u}{v}$$

اگر G ناحیه انتگرال گیری در صفحه uv باشد، بنابه معادله (۱) انتگرال دوگانه تبدیل یافته تحت این جانشانی عبارت است از

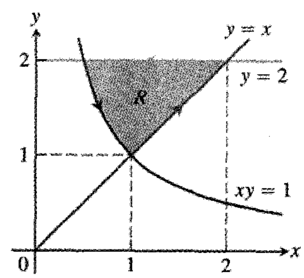
$$\iint_R \sqrt{\frac{y}{x}} e^{\sqrt{xy}}\, dx\, dy = \iint_G ve^u \frac{2u}{v} du\, dv$$
$$= \iint_G 2ue^u du\, dv$$

انتگرال گیری از تابع انتگرالده تبدیل یافته نسبت به تابع اصلی آسانتر است، لذا به کار خود ادامه داده و حدود انتگرال گیری را برای انتگرال تبدیل یافته تعیین می کنیم.

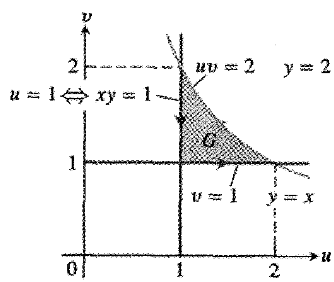
ناحیه انتگرال گیری R انتگرالده اصلی در صفحه xy در شکل۱۵-۵۷ نشان داده شده است. از معادلات جانشانی $u = \sqrt{xy}$ و $v = \sqrt{y/x}$ پی می بریم که تصویر مرز سمت چپ $xy = 1$ مربوط به R پاره خط قائم $u = 1$، $2 \geq v \geq 1$ در G است (شکل۱۵-۵۸ را ببینید). به همین ترتیب مرز سمت راست $y = x$ ناحیه R به پاره خط افقی $v = 1$ ، $1 \leq u \leq 2$ در G نگاشته می شود. سرانجام مرز افقی بالایی $y = 2$ ناحیه R به $uv = 2$، $1 \leq v \leq 2$ در G نگاشته می شود. وقتی به صورت پاد ساعتگرد حول مرز ناحیه R حرکت کنیم مطابق شکل ۱۵-۵۸ حول مرز G هم پاد ساعتگرد حرکت می کنیم. با دانستن ناحیه انتگرال گیری G در صفحه uv اکنون می توانیم انتگرال های مکرر معادل را بنویسیم:

$$\int_1^2 \int_{1/y}^{y} \sqrt{\frac{y}{x}} e^{\sqrt{xy}}\, dx\, dy = \int_1^2 \int_1^{2/u} 2ue^u dv\, du$$

(به ترتیب انتگرال گیری توجه کنید)



شکل۱۵-۵۷: ناحیه انتگرال گیری R در مثال ۴.



شکل ۱۵-۵۸: مرزهای ناحیه G با مرزهای ناحیه R در شکل ۱۵-۵۷ متناظرند. توجه کنید که وقتی بصورت پاد ساعتگرد حول ناحیه R حرکت کنیم حول ناحیه G هم بصورت پاد ساعتگرد حرکت می کنیم. معادلات تبدیل معکوس $u = \sqrt{xy}$ و $v = \sqrt{y/x}$ ناحیه R را به ناحیه G تبدیل می کنند.

اکنون انتگرال تبدیل یافته سمت راست را محاسبه می کنیم

$$\int_1^2 \int_1^{2/u} 2ue^u dv\, du = 2\int_1^2 vue^u \Big]_{v=1}^{v=2/u} du$$
$$= 2\int_1^2 \left(2e^u - ue^u\right) du$$
$$= 2\int_1^2 (2-u) e^u du$$

(انتگرال گیری جزء به جزء)

$$= 2\Big[(2-u)e^u + e^u\Big]_{u=1}^{u=2}$$
$$= 2\left(e^2 - (e+e)\right) = 2e(e-2)$$

جانشانی در انتگرال های سه گانه

جانشانی های مختصات استوانه ای و کروی بخش ۱۵-۷ حالت های خاصی از یک روش جانشانی هستند که تغییر متغیرها در انتگرال های سه گانه را به صورت تبدیلات نواحی سه بعدی مجسم می کند. این روش شبیه روش مربوط به انتگرال های دوگانه است جز اینکه اکنون به جای دو بعد از سه بعد صحبت می کنیم.

فرض کنید ناحیه G در فضای uvw با معادلات مشتق پذیری به شکل زیر به صورت یک به یک به ناحیه D در فضای xyz تبدیل شود

$$x=g(u,v,w) \quad \text{و} \quad y=h(u,v,w) \quad \text{و} \quad z=k(u,v,w)$$

این تبدیل در شکل ۱۵-۵۹ نشان داده شده است. در این صورت هر تابع $F(x,y,z)$ تعریف شده روی D را می توان به صورت تابعی چون

$$F\big(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w)\big)=H(u,v,w)$$

تصور کرد که روی G تعریف شده است. اگر g، h و k مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشند آنگاه انتگرال $F(x,y,z)$ روی D با رابطه زیر به انتگرال $H(u,v,w)$ روی G مربوط می شود

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(u,v,w)\left|J(u,v,w)\right|du\,dv\,dw \qquad (۷)$$

عامل $J(u,v,w)$ که قدر مطلقش در این رابطه ظاهر می شود **دترمینان ژاکوبی** است

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

این دترمینان نشان می دهد که حجم نزدیک یک نقطه واقع در G با تبدیل از مختصات (u,v,w) به (x,y,z) به چه میزان منبسط یا منقبض می شود. همانند حالت دوبعدی، از استنتاج فرمول تغییر (تعویض) متغیر مذکور در معادله (۷) صرفنظر می کنیم.

در مختصات استوانه ای، r، θ و z جای u، v و w را می گیرند. تبدیل از فضای $r\theta z$ دکارتی به فضای xyz دکارتی با روابط زیر مشخص می شود (شکل ۱۵-۶۰)

$$x=r\cos\theta \quad \text{و} \quad y=r\sin\theta \quad \text{و} \quad z=z$$

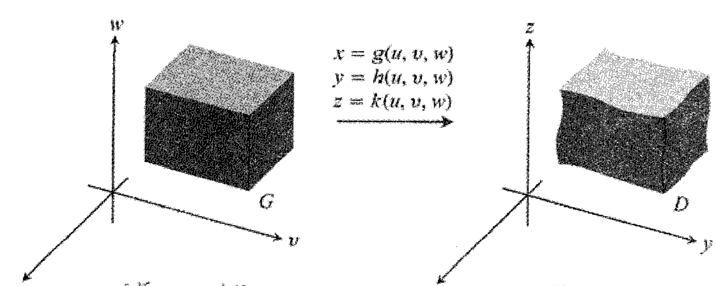
ژاکوبی این تبدیل عبارت است از

$$J(r,\theta,z)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

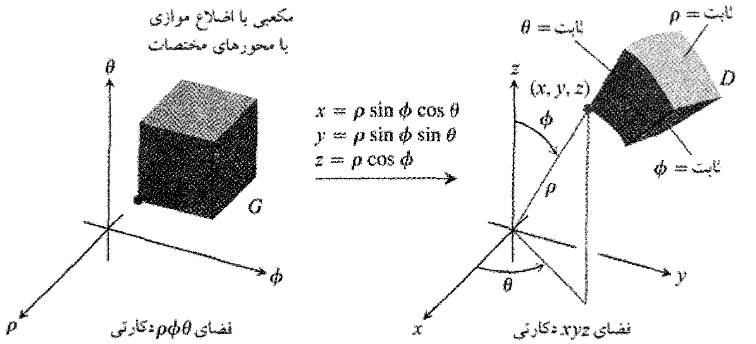
$$=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

صورت متناظر معادله (۷) عبارت است از

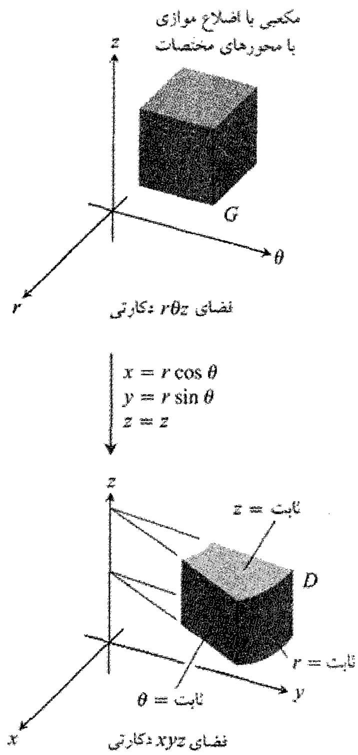
$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(r,\theta,z)\left|r\right|dr\,d\theta\,dz\,.$$



شکل ۱۵-۵۹: معادلات $x=g(u,v,w)$ و $y=h(u,v,w)$ و $z=k(u,v,w)$ این امکان را به ما می دهند که با استفاده از معادله (۷) یک انتگرال روی ناحیه ای چون D در فضای xyz دکارتی را به انتگرالی روی ناحیه ای چون G در صفحه uvw دکارتی تبدیل کنیم.



شکل۱۵-۶۱: معادلات $x = \rho\sin\phi\cos\theta$، $y = \rho\sin\phi\sin\theta$ و $z = \rho\cos\phi$ مکعب G را به گوه کروی D تبدیل می کنند.



شکل۱۵-۶۰: معادلات $x = r\cos\theta$، $y = r\sin\theta$ و $z = 0$ مکعب G را به گوه استوانه ای D تبدیل می کنند.

هر وقت $r \geq 0$ باشد می توانیم علامت های قدر مطلق را حذف کنیم.

در مختصات کروی، ρ، ϕ و θ جای u، v و w را می گیرند. روابط زیر فضای $\rho\phi\theta$ دکارتی را به فضای xyz دکارتی تبدیل می کنند (شکل۱۵- ۶۱)

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta \quad \text{و} \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta \quad \text{و}$$

$$z = \rho\cos\phi$$

ژاکوبی این تبدیل (تمرین ۱۹ را ببینید) عبارت است از

$$J(\rho,\phi,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\phi$$

صورت متناظر معادله (۷) عبارت است از

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_G H(\rho,\phi,\theta)\left|\rho^2\sin\phi\right| d\rho\, d\phi\, d\theta$$

چون به ازای $0 \leq \phi \leq \pi$، $\sin\phi$ هرگز منفی نیست می توانیم علائم قدر مطلق را حذف کنیم. توجه کنید که این همان نتیجه ای است که در بخش ۱۵-۷ بدست آوردیم.

در اینجا مثالی از یک جانشانی دیگر ارائه می کنیم. با اینکه می توانیم انتگرال را در این مثال بطور مستقیم محاسبه کنیم آن را انتخاب کرده ایم تا روش جانشانی را در شرایطی ساده (و نسبتاً شهودی) نشان دهیم.

مثال۵: انتگرال

$$\int_0^3\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dx\,dy\,dz$$

را با استفاده از تبدیل

$$(۸) \quad u = (2x-y)/2 \quad \text{و} \quad v = y/2 \quad \text{و} \quad w = z/3$$

و انتگرال گیری روی ناحیه مناسبی از فضای uvw محاسبه کنید.

حل: ناحیه انتگرال گیری D در فضای xyz را رسم کرده و مرزهای آن را مشخص می کنیم (شکل۱۵-۶۲). در این مورد،

رویه های محدود کننده به صورت صفحه هستند.

برای کاربرد معادله (۷) لازم است ناحیه متناظر در فضای uvw و ژاکوبی تبدیل را بیابیم. برای یافتن آنها ابتدا معادلات (۸) را حل کرده و x، y و z را برحسب u، v و w بدست می آوریم. با محاسبات جبری ساده داریم

(۹) $\quad x=u+v \quad$ و $\quad y=2v \quad$ و $\quad z=3w$

سپس با جانشانی این عبارت ها در معادلات مربوط به مرزهای D مرزهای G را می یابیم:

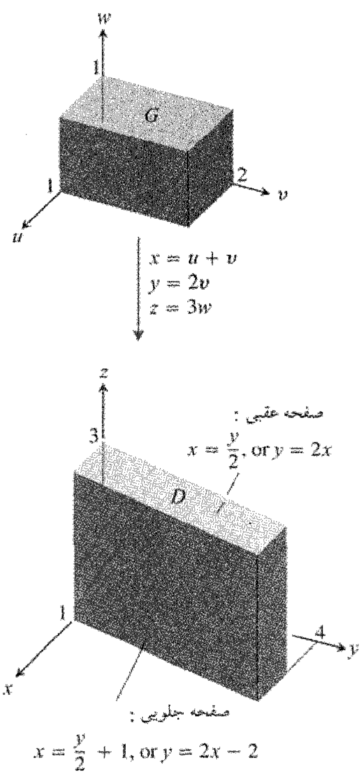
معادلات xyz مربوط به مرز D	معادلات uvw متناظر مربوط به مرز G	معادلات uvw ساده شده
$x=y/2$	$u+v=2v/2=v$	$u=0$
$x=(y/2)+1$	$u+v=(2v/2)+1=v+1$	$u=1$
$y=0$	$2v=0$	$v=0$
$y=4$	$2v=4$	$v=2$
$z=0$	$3w=0$	$w=0$
$z=3$	$3w=3$	$w=1$

ژاکوبی تبدیل باز هم از معادلات (۹) برابر است با

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=6$$

اکنون همه چیز برای کاربرد معادله (۷) در دست است

$$\int_0^3\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1}\left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right)dx\,dy\,dz$$
$$=\int_0^1\int_0^2\int_0^1 (u+w)\left|J(u,v,w)\right|du\,dv\,dw$$
$$=\int_0^1\int_0^2\int_0^1 (u+w)(6)du\,dv\,dw$$
$$=6\int_0^1\int_0^2\left[\frac{u^2}{2}+uw\right]_0^1 dv\,dw$$
$$=6\int_0^1\int_0^2\left(\frac{1}{2}+w\right)dv\,dw$$
$$=6\int_0^1\left[\frac{v}{2}+vw\right]_0^2 dw=6\int_0^1(1+2w)dw$$
$$=6\left[w+w^2\right]_0^1=6(2)=12$$



شکل ۱۵-۶۲: معادلات $x=u+v$، $y=2v$ و $z=3w$ ناحیه G را به D تبدیل می کنند. با معکوس کردن تبدیل با معادلات $u=(2x-y)/2$ ، $v=y/2$ و $w=z/3$ ناحیه D به G تبدیل می شود (مثال ۵).

تمرین های ۱۵-۸

ژاکوبی و نواحی تبدیل یافته در صفحه

۱- (الف)- دستگاه معادلات

$$u=x-y \quad \text{و} \quad v=2x+y$$

را حل کرده و x و y را برحسب u و v بدست آورید. سپس مقدار ژاکوبی $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ را بیابید.

(ب)- تصویر ناحیه مثلثی شکل با رئوس $(0,0)$، $(1,1)$

و $(1,-2)$ واقع در صفحه xy را تحت تبدیل $u=x-y$ و $v=2x+y$ بیابید. ناحیه تبدیل یافته را در صفحه uv رسم کنید.

۲- (الف)- دستگاه معادلات

$$v=x-y \quad \text{و} \quad u=x+2y$$

را حل کرده و x و y را برحسب u و v بدست آورید. سپس مقدار ژاکوبی $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ را بیابید.

(ب)- تصویر ناحیه مثلثی شکل واقع در صفحه xy و محدود به خطوط $y=0$، $y=x$ و $x+2y=2$ را تحت تبدیل $u=x+2y$ و $v=x-y$ بیابید. ناحیه تبدیل یافته را در صفحه uv رسم کنید.

۳- (الف)- دستگاه معادلات

$$v=x+4y \quad \text{و} \quad u=3x+2y$$

را حل کرده و x و y را برحسب u و v بدست آورید. سپس مقدار ژاکوبی $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ را بیابید.

(ب)- تصویر ناحیه مثلثی شکل واقع در صفحه xy و محدود به محور x، محور y و خط $x+y=1$ را تحت تبدیل $u=3x+2y$ و $v=x+4y$ بیابید. ناحیه تبدیل یافته را در صفحه uv رسم کنید.

۴- (الف)- دستگاه معادلات

$$v=-x+y \quad \text{و} \quad u=2x-3y$$

را حل کرده و x و y را برحسب u و v بدست آورید. سپس مقدار ژاکوبی $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ را بیابید.

(ب)- تصویر متوازی الاضلاع R واقع در صفحه xy با مرزهای $x=-3$، $x=0$، $y=x$ و $y=x+1$ را تحت تبدیل $u=2x-3y$ و $v=-x+y$ بیابید. ناحیه تبدیل یافته را در صفحه uv رسم کنید.

جانشانی در انتگرال های دوگانه

۵- انتگرال مثال ۱ یعنی

$$\int_0^4\int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1}\frac{2x-y}{2}dx\,dy$$

را با انتگرال گیری نسبت به x و y بطور مستقیم محاسبه کرده و نشان دهید که مقدار آن برابر ۲ است.

۶- با استفاده از تبدیل مذکور در تمرین ۱ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\iint_R\left(2x^2-xy-y^2\right)dx\,dy$$

ناحیه R را واقع در ربع اول و محدود به خطوط

$y=-2x+4$، $y=-2x+7$، $y=x-2$ و $y=x+1$

در نظر بگیرید.

۷- با استفاده از تبدیل مذکور در تمرین ۳ انتگرال زیر را در ناحیه R واقع در ربع اول و محدود به خطوط

$y=-(3/2)x+1$ ، $y=-(3/2)x+3$ ، $y=-(1/4)x$ و $y=-(1/4)x+1$

محاسبه کنید

$$\iint_R\left(3x^2+14xy+8y^2\right)dx\,dy$$

۸- با استفاده از تبدیل و متوازی الاضلاع R مذکور در تمرین ۴ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\iint_R 2(x-y)dx\,dy$$

۹- R را ناحیه ای واقع در ربع اول صفحه xy و محدود به هذلولی های $xy=1$ و $xy=9$ و خطوط $y=x$ و $y=4x$ در نظر بگیرید. با استفاده از تبدیل $x=u/v$ و $y=uv$ با شرط $u>0$ و $v>0$ انتگرال زیر را به صورت انتگرالی روی یک ناحیه چون G در صفحه uv بنویسید. سپس انتگرال uv را روی G محاسبه کنید

$$\iint_R\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dx\,dy$$

۱۰- (الف)- ژاکوبی تبدیل $x=u$ و $y=uv$ را بدست آورده و ناحیه $G: 1\le u\le 2$ و $1\le uv\le 2$ را در صفحه uv رسم کنید.

(ب)- سپس با استفاده از معادله (۱) انتگرال زیر را به انتگرالی روی G تبدیل کرده و هر دو انتگرال را محاسبه کنید

$$\int_1^2\int_1^2\frac{y}{x}dy\,dx$$

۱۱- گشتاور لختی قطبی یک ورقه بیضوی. ورقه نازکی با چگالی ثابت ناحیه محدود به بیضی

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1 ،\ a>0 \text{ و } b>0$$

واقع در صفحه xy را پوشانده است. گشتاور اول این ورقه را حول مبداء بدست آورید (راهنمایی: از تبدیل

$$x=ar\cos\theta ،\ y=br\sin\theta$$

استفاده کنید).

۱۲- مساحت بیضی. مساحت بیضی

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

، πab، را می توان با انتگرال گیری از تابع $f(x,y)=1$ روی ناحیه محصور شده توسط بیضی در صفحه xy بدست آورد. محاسبه این انتگرال بصورت مستقیم مستلزم یک جانشانی مثلثاتی است. یک راه آسان برای محاسبه این انتگرال استفاده از تبدیل $x=au$ ،$y=bv$ و محاسبه انتگرال تبدیل یافته روی قرص $G: u^2+v^2\le 1$ در صفحه uv است. مساحت بیضی را از این طریق بدست آورید.

۱۳- با استفاده از تبدیل مذکور در تمرین ۲ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^{2/3}\int_y^{2-2y}(x+2y)e^{(y-x)}dx\,dy$$

برای این کار ابتدا آن را به صورت انتگرالی روی ناحیه G در صفحه uv بنویسید.

۱۴- با استفاده از تبدیل $x=u+(1/2)v$ و $y=v$ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^2\int_{y/2}^{(y+4)/2}y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}dx\,dy$$

برای این کار ابتدا آن را به صورت انتگرالی روی ناحیه G در صفحه uv بنویسید.

۱۵- با استفاده از تبدیل $x=u/v$ ،$y=uv$ مجموع انتگرالی زیر را محاسبه کنید

$$\int_1^2\int_{1/y}^{y}(x^2+y^2)dx\,dy+\int_2^4\int_{y/4}^{4/y}(x^2+y^2)dx\,dy$$

۱۶- با استفاده از تبدیل $x=u^2-v^2$ ،$y=2uv$ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^1\int_0^{2\sqrt{1-x}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

(راهنمایی: نشان دهید که تصویر ناحیه مثلثی شکل G با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(1,1)$ در صفحه uv ناحیه انتگرال گیری R در صفحه xy است که با حدود انتگرال گیری تعریف می شود).

یافتن ژاکوبی

۱۷- مطلوب است ژاکوبی $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ تبدیل

(الف)- $x=u\cos v$ ،$y=u\sin v$

(ب)- $x=u\sin v$ ،$y=u\cos v$

۱۸- مطلوب است ژاکوبی $\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)$ تبدیل

(الف)- $x=u\cos v$ ، $y=u\sin v$ ، $z=w$

(ب)- $x=2u-1$ ، $y=3v-4$ ، $z=(1/2)(w-4)$

۱۹- با محاسبه دترمینان مناسب نشان دهید که ژاکوبی تبدیل از فضای $\rho\phi\theta$ دکارتی به فضای xyz دکارتی برابر است با $\rho^2\sin\phi$.

۲۰- جانشانی در انتگرال های یگانه. چگونه می توان جانشانی ها در انتگرال های معین یگانه را به صورت تبدیلات نواحی تجسم کرد؟ ژاکوبی در چنین مواردی چیست؟ با یک مثال توضیح دهید.

جانشانی در انتگرال های سه گانه

۲۱- انتگرال مذکور در مثال ۵ را با انتگرال گیری نسبت به x، y و z محاسبه کنید.

۲۲- حجم بیضیوار. حجم بیضیوار زیر را محاسبه کنید

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(راهنمایی: فرض کنید $x=au$ ،$y=bv$ و $z=cw$. سپس حجم ناحیه مناسبی را در صفحه uvw محاسبه کنید).

۲۳- انتگرال

$$\iiint|xyz|\,dx\,dy\,dz$$

را روی بیضیوار توپر زیر محاسبه کنید

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

(راهنمایی: فرض کنید $x=au$ ،$y=bv$ و $z=cw$. سپس روی ناحیه ای مناسب در فضای uvw انتگرال بگیرید).

۲۴- فرض کنید D ناحیه ای در فضای xyz است که با نابرابری های زیر تعریف می شود

$$1\leq x\leq 2 \quad \text{و} \quad 0\leq xy\leq 2 \quad \text{و} \quad 0\leq z\leq 1$$

انتگرال

$$\iiint_D \left(x^2y+3xyz\right)dx\,dy\,dz$$

را با کاربرد تبدیل

$$u=x \quad \text{و} \quad v=xy \quad \text{و} \quad w=3z$$

و انتگرال گیری روی ناحیه مناسب G در فضای uvw محاسبه کنید.

۲۵- **مرکزوار یک نیم بیضیوار توپر.** با فرض اینکه مرکزوار یک نیمکره توپر روی محور تقارن و در فاصله سه – هشتم از قاعده آن (به سمت بالا) قرار دارد، با تبدیل کردن انتگرال های مناسب نشان دهید که مرکز جرم نیم بیضیوار توپر $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\leq 1$، $z\geq 0$ روی محور z و در فاصله سه – هشتم از قاعده آن (به سمت بالا) قرار دارد. (می توانید این کار را بدون محاسبه هیچکدام از انتگرالها انجام دهید).

۲۶- **پوسته های استوانه ای.** در بخش ۶-۲ آموختیم که چگونه حجم یک جامد دوار را با استفاده از روش پوسته ای محاسبه کنیم، یعنی اگر ناحیه بین خم $y=f(x)$ و محور x از a تا b $(0<a<b)$ حول محور y چرخانده شود حجم جسم حاصل برابر است با $\int_a^b 2\pi x f(x)dx$. ثابت کنید که محاسبه حجم با استفاده از انتگرال های سه گانه همین نتیجه را بدست می دهد. (راهنمایی: از مختصات استوانه ای استفاده کنید که در آن نقش های y و z با هم عوض شده اند)

فصل ۱۵: پرسش های مروری

۱- انتگرال دوگانه یک تابع دو متغیره را روی یک ناحیه محصور واقع در صفحه مختصات تعریف کنید.

۲- انتگرال های دوگانه چگونه به صورت انتگرال های مکرر محاسبه می شوند؟ آیا ترتیب انتگرال گیری مهم است؟ حدود انتگرال گیری چگونه تعیین می شوند؟ مثال هایی ارائه کنید.

۳- چگونه از انتگرالهای دوگانه برای محاسبه مساحت ها و مقادیر متوسط استفاده می شود؟ مثال هایی ارائه کنید.

۴- چگونه یک انتگرال دوگانه در مختصات قائم به انتگرال دوگانه ای در مختصات قطبی تبدیل می شود؟ چرا انجام این کار ارزشمند است؟ مثالی بزنید.

۵- انتگرال سه گانه یک تابع $f(x,y,z)$ را روی یک ناحیه محصور در فضا تعریف کنید.

۶- چگونه انتگرالهای سه گانه در مختصات قائم محاسبه می شوند؟ حدود انتگرال گیری چگونه تعیین می شوند؟ مثالی بیاورید.

۷- چگونه از انتگرالهای دوگانه و سه گانه در مختصات قائم برای محاسبه حجم ها، مقادیر متوسط، جرم ها، گشتاورها و مراکز جرم استفاده می شود؟ مثالهایی بیاورید.

۸- انتگرالهای سه گانه در مختصات استوانه ای و کروی چگونه تعریف می شوند. چرا گاهی ترجیح می دهیم در یکی از این دستگاههای مختصات کار کنیم تا دستگاه مختصات قائم؟

۹- انتگرال های سه گانه در مختصات کروی و استوانه ای چگونه محاسبه می شوند؟ حدود انتگرال گیری چگونه تعیین می شوند؟ مثالهایی بیاورید.

۱۰- چگونه جانشانی ها در انتگرالهای دوگانه به صورت تبدیلات نواحی دو بعدی مجسم می شوند؟ یک مثال محاسباتی ارائه کنید.

۱۱- چگونه جانشانی ها در انتگرالهای سه گانه به صورت تبدیلات نواحی سه بعدی مجسم می شوند؟ یک مثال محاسباتی ارائه کنید.

فصل ۱۵: تمرین های عملی

محاسبه انتگرال های مکرر دوگانه

در تمرین های ۱-۴ ناحیه انتگرال گیری را رسم کرده و انتگرال دوگانه را محاسبه کنید.

۱- $\int_1^{10}\int_0^{1/y} ye^{xy}\,dx\,dy$

۲- $\int_0^1\int_0^{x^3} e^{y/x}\,dy\,dx$

۳- $\int_0^{3/2}\int_{-\sqrt{9-4t^2}}^{\sqrt{9-4t^2}} t\,ds\,dt$

۴- $\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy\,dx\,dy$

در تمرین های ۵-۸ ناحیه انتگرال گیری را رسم کرده و انتگرال معادلی با ترتیب انتگرال گیری معکوس بنویسید. سپس هر دو انتگرال را محاسبه کنید.

۵- $\int_0^4\int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx\,dy$

۶- $\int_0^1\int_{x^2}^{x} \sqrt{x}\,dy\,dx$

۷- $\int_0^{3/2}\int_{-\sqrt{9-4y^2}}^{\sqrt{9-4y^2}} y\,dx\,dy$

۸- $\int_0^2\int_0^{4-x^2} 2x\,dy\,dx$

در تمرین های ۹-۱۲ انتگرال ها را محاسبه کنید.

۹- $\int_0^1\int_{2y}^{2} 4\cos\left(x^2\right)dx\,dy$

۱۰- $\int_0^2\int_{y/2}^{1} e^{x^2}dx\,dy$

۱۱- $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{dy\,dx}{y^4+1}$

۱۲- $\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^{1} \frac{2\pi\sin\pi x^2}{x^2}dx\,dy$

محاسبه مساحت و حجم با استفاده از انتگرال های دوگانه

۱۳- مساحت بین خط و سهمی. مطلوب است مساحت ناحیه محصور شده بوسیله خط $y=2x+4$ و سهمی $y=4-x^2$ واقع در صفحه xy.

۱۴- مساحت محصور شده بوسیله خطوط و سهمی. مطلوب است مساحت ناحیه «مثلثی شکل» واقع در صفحه xy که از سمت راست به سهمی $y=x^2$، از سمت چپ به خط $x+y=2$ و از بالا به خط $y=4$ محدود است.

۱۵- حجم ناحیه زیر سهمیوار. مطلوب است حجم زیر سهمیوار $z=x^2+y^2$، بالای مثلثی که بوسیله خطوط $y=x$، $x=0$ و $x+y=2$ در صفحه xy محصور شده است.

۱۶- حجم ناحیه زیر استوانه سهموی. مطلوب است حجم زیر استوانه سهموی $z=x^2$ و بالای ناحیه محصور شده بوسیله سهمی $y=6-x^2$ و خط $y=x$ در صفحه xy.

مقادیر متوسط

در تمرین های ۱۷ و ۱۸ مقدار متوسط $f(x,y)=xy$ را روی نواحی مفروض بیابید.

۱۷- مربعی واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x=1$ و $y=1$.

۱۸- ربع دایره $x^2+y^2\le 1$ واقع در ربع اول.

مختصات قطبی

انتگرال های تمرین های ۱۹-۲۰ را با تبدیل آنها به مختصات قطبی محاسبه کنید.

۱۹- $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2dy\,dx}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$

۲۰- $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln\left(x^2+y^2+1\right)dx\,dy$

۲۱- انتگرال گیری روی پروانه. مطلوب است انتگرال تابع $f(x,y)=1/\left(1+x^2+y^2\right)^2$ روی ناحیه محصور شده بوسیله یک طوق از پروانه $\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)=0$.

۲۲- مطلوب است انتگرال $f(x,y)=1/\left(1+x^2+y^2\right)^2$ روی

(الف)- **ناحیه مثلثی شکل.** مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $\left(1,\sqrt{3}\right)$

(ب)- ربع اول. ربع اول صفحه xy.

محاسبه انتگرال های مکرر سه گانه

در تمرین های ۲۳- ۲۶ انتگرال ها را محاسبه کنید.

۲۳- $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$

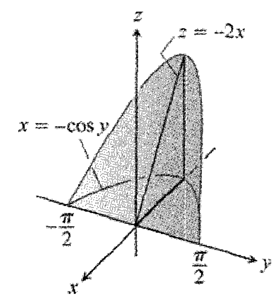
۲۴- $\int_{\ln 6}^{\ln 7}\int_0^{\ln 2}\int_{\ln 4}^{\ln 5} e^{(x+y+z)}\,dz\,dy\,dx$

۲۵- $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+y} (2x-y-z)\,dz\,dy\,dx$

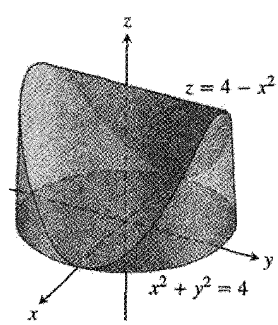
۲۶- $\int_1^e \int_1^x \int_0^z \frac{2y}{z^3}\,dy\,dz\,dx$

محاسبه حجم و مقدار متوسط و استفاده از انتگرال های سه گانه

۲۷- **حجم.** مطلوب است حجم ناحیه گوه ای شکل که از اطراف به استوانه $x=-\cos y$، $-\pi/2 \le y \le \pi/2$، از بالا به صفحه $z=-2x$ و از پایین به صفحه xy محدود است.



۲۸- **حجم.** مطلوب است حجم جسمی که از بالا به استوانه $z=4-x^2$، از اطراف به استوانه $x^2+y^2=4$ و از پایین به صفحه xy محدود است.



۲۹- **مقدار متوسط.** مطلوب است مقدار متوسط تابع $f(x,y,z)=30xz\sqrt{x^2+y}$ روی جسمی مکعب مستطیلی شکل واقع در یک هشتم اول که به صفحات مختصات و صفحات $x=1$، $y=3$ و $z=1$ محدود است.

۳۰- **مقدار متوسط.** مقدار متوسط ρ را روی کره توپر $\rho \le a$ (مختصات کروی) بیابید.

مختصات استوانه ای و کروی

۳۱- **مختصات استوانه ای به قائم.** انتگرال

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} 3dz\, r\,dr\,d\theta \quad \text{و} \quad r\ge 0$$

را به (الف)- مختصات دکارتی با ترتیب انتگرال گیری $dzdxdy$ و (ب)- مختصات کروی تبدیل کنید. (پ)- سپس یکی از انتگرال ها را محاسبه کنید.

۳۲- **مختصات قائم به استوانه ای.** (الف)- انتگرال زیر را به مختصات استوانه ای تبدیل کنید. (ب)- سپس انتگرال جدید را محاسبه کنید

$$\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-(x^2+y^2)}^{(x^2+y^2)} 21xy^2\,dz\,dy\,dx$$

۳۳- **مختصات قائم به کروی.** (الف)- انتگرال زیر را به مختصات کروی تبدیل کنید (ب)- سپس انتگرال جدید را محاسبه کنید

$$\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz\,dy\,dx$$

۳۴- **مختصات قائم، استوانه ای و کروی.** انتگرال سه گانه مکرری برای انتگرال $f(x,y,z)=6+4y$ روی ناحیه ای در یک هشتم اول و محدود به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$، استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحات مختصات در (الف)- مختصات قائم (ب)- مختصات استوانه ای و (پ)- مختصات کروی بنویسید. سپس (ت)- با محاسبه یکی از انتگرال های سه گانه انتگرال f را بیابید.

۳۵- **مختصات استوانه ای به قائم.** انتگرالی در مختصات قائم معادل با انتگرال زیر بنویسید

$$\int_0^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3(\sin\theta\cos\theta)z^2\,dz\,dr\,d\theta$$

ترتیب انتگرال گیری را چنان مرتب کنید که اول z، بعد y و بعد x باشد.

۳۶- **مختصات قائم به استوانه ای.** حجم جسمی از انتگرال زیر بدست می آید

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

(الف)- این جسم را با بیان معادلات رویه های تشکیل دهنده مرز آن توصیف کنید.

(ب)- این انتگرال را به مختصات استوانه ای تبدیل کنید. نیازی

به محاسبه انتگرال نیست.

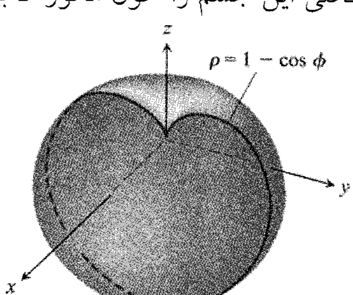
۳۷- مختصات کروی در مقابل استوانه ای. انتگرال های سه گانه مربوط به اشکال کروی همیشه برای محاسبه آسان نیاز به مختصات کروی ندارند. برخی محاسبات ممکن است در مختصات استوانه ای آسانتر انجام شوند. به عنوان موردی از این حالت، با استفاده از (الف)- مختصات استوانه ای و (ب)- مختصات کروی حجم ناحیه ای را بیابید که از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=8$ و از پایین به صفحه $z=2$ محدود است.

جرم و گشتاور

۳۸- یافتن I_z در مختصات کروی. جسمی با چگالی ثابت $\delta=1$ از بالا به کره $\rho=2$ و از پایین به مخروط $\phi=\pi/3$ (مختصات کروی) محدود است. گشتاور لختی این جسم را حول محور z بیابید.

۳۹- گشتاور لختی کره «ضخیم». جسمی با چگالی ثابت δ به دو کره هم مرکز به شعاع های a و b $(a<b)$ محدود است. گشتاور لختی آن را حول یکی از اقطارش بیابید.

۴۰- گشتاور لختی سیب. جسمی با چگالی $\delta=1$ بوسیله رویه $\rho=1-\cos\phi$ مختصات کروی محصور شده است. این جسم حاصل چرخش خم قرمز در شکل زیر حول محور z است. گشتاور لختی این جسم را حول محور z بیابید.



۴۱- مرکزوار. مطلوب است مرکز وار ناحیه «مثلثی شکل» محدود به خطوط $x=2$ و $y=2$ و هذلولی $xy=2$ در صفحه xy.

۴۲- مرکزوار. مطلوب است مرکزوار ناحیه بین سهمی

$$x^2+y^2-2y=0$$

و خط $x+2y=0$ در صفحه xy.

۴۳- گشتاور قطبی. ورقه مثلثی شکل نازکی با چگالی ثابت $\delta=3$ محدود است به محور y و خطوط $y=2x$ و $y=4$ در صفحه xy. مطلوب است گشتاور لختی قطبی این جسم حول مبداء.

۴۴- گشتاور قطبی. ورقه مستطیلی شکل نازکی با چگالی ثابت $\delta=1$ به خطوط زیر محدود است

(الف)- $x=\pm 2$ و $y=\pm 1$ در صفحه xy

(ب)- $x=\pm a$ و $y=\pm b$ در صفحه xy.

گشتاور لختی قطبی این جسم را در هر دو حالت حول مرکزش محاسبه کنید.

(راهنمایی: I_x را بیابید. سپس با استفاده از فرمول I_x، I_y را بیابید و دو نتیجه را با هم جمع کنید تا I_0 بدست آید).

۴۵- گشتاور لختی. ورقه نازکی با چگالی ثابت δ مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(3,0)$ و $(3,2)$ را در صفحه xy پوشانده است. گشتاور لختی این ورقه را حول محور x بیابید.

۴۶- ورقه با چگالی متغیر. ورقه نازکی با چگالی $\delta(x,y)=x+1$ به خط $y=x$ و سهمی $y=x^2$ در صفحه xy محدود است. مطلوب است مرکز جرم و گشتاورهای لختی این ورقه حول محورهای مختصات.

۴۷- ورقه با چگالی متغیر. ورقه مربعی شکل نازکی با چگالی $\delta(x,y)=x^2+y^2+1/3$ به خطوط $x=\pm 1$ و $y=\pm 1$ در صفحه xy محدود است. مطلوب است جرم و گشتاورهای لختی اول این ورقه حول محورهای مختصات.

۴۸- مثلث های با گشتاور لختی یکسان. ورقه مثلثی شکل نازکی با چگالی ثابت δ در نظر بگیرید که قاعده اش روی بازه $[0,b]$ بر محور x و رأسش روی خط $y=h$ و بالاتر از محور x قرار دارد. گشتاور لختی این ورقه را حول محور x بیابید. همانطور که خواهید دید اهمیتی ندارد که این رأس مثلث در کجای خط قرار داشته باشد. تمام چنین مثلث هایی گشتاور لختی یکسان حول محور x دارند.

۴۹- مرکزوار. مطلوب است مرکزوار ناحیه ای در صفحه مختصات قطبی که با نابرابری های

$$0 \le r \le 3 \text{ و } -\pi/3 \le \theta \le \pi/3$$

تعریف می شود.

۵۰- مرکزوار. مطلوب است مرکزوار ناحیه ای در ربع اول که به پرتوهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi/2$ و دایره های $r = 1$ و $r = 3$ محدود است.

۵۱- (الف)- **مرکزوار.** مطلوب است مرکزوار ناحیه ای در صفحه مختصات قطبی که درون دلوار $r = 1 + \cos\theta$ و بیرون دایره $r = 1$ قرار دارد.

(ب)- ناحیه مذکور را رسم کره و مرکزوار را روی آن نشان دهید.

۵۲- (الف)- **مرکزوار.** مطلوب است مرکزوار ناحیه مسطحی در مختصات قطبی که با نابرابریهای $0 \le r \le a$ و $-\alpha \le \theta \le \alpha$ $(0 < \alpha \le \pi)$ تعریف می شود. وقتی $\alpha \to \pi^-$ میل می کند مرکزوار چگونه حرکت می کند؟

(ب)- ناحیه مذکور را به ازای $\alpha = 5\pi/6$ رسم کرده و مرکزوار را روی آن نشان دهید.

جانشانی

۵۳- نشان دهید که اگر $u = x - y$ و $v = y$ باشد آنگاه

$$\int_0^\infty \int_0^x e^{-sx} f(x-y, y)\,dy\,dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u,v)\,du\,dv$$

۵۴- چه رابطه ای باید بین ثابت های a، b و c برقرار باشد تا داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy = 1$$

(راهنمایی: فرض کنید

$z = \alpha x + \beta y$ و $t = \gamma x + \delta y$،

که $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = ac - b^2$. سپس رابطه

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = s^2 + t^2$$

را نتیجه بگیرید).

فصل ۱۵: تمرین های اضافی و پیشرفته

حجم

۱- تپه شنی. قاعده یک تپه شنی ناحیه ای در صفحه xy، محدود به سهمی $x^2 + y = 6$ و خط $y = x$ است. ارتفاع شن در بالای نقطه (x, y) برابر با x^2 است. حجم شن را به صورت (الف)- یک انتگرال دوگانه و (ب)- یک انتگرال سه گانه بیان کنید. سپس (پ)- حجم تپه را محاسبه کنید.

۲- آب در کاسه نیمکروی. یک کاسه نیمکروی به شعاع $5cm$ تا ارتفاع $3cm$ از لبه اش از آب پر شده است. حجم آب داخل کاسه را بیابید.

۳- ناحیه استوانه ای توپر بین دو صفحه. حجم بخشی از استوانه توپر $x^2 + y^2 \le 1$ را بیابید که بین صفحات $z = 0$ و $x + y + z = 2$ قرار دارد.

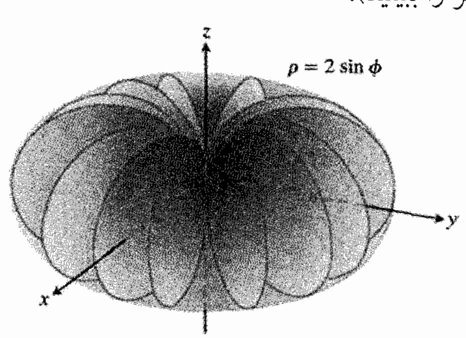
۴- کره و سهمیوار. مطلوب است حجم ناحیه ای که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و از پایین به سهمیوار $z = x^2 + y^2$ محدود است.

۵- دو سهمیوار. حجم ناحیه ای را بیابید که از بالا به سهمیوار

$$z = 3 - x^2 - y^2$$

و از پایین به سهمیوار $z = 2x^2 + 2y^2$ محدود است.

۶- مختصات کروی. مطلوب است حجم ناحیه ای که در رویه $\rho = 2\sin\phi$ در مختصات کروی محصور شده است (شکل زیر را ببینید).



۷- سوراخ در کره. در یک کره توپر سوراخ استوانه ای

مستدیری حفر شده است بطوریکه محور سوراخ یکی از اقطار کره است. حجم جسم باقیمانده عبارت است از

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta$$

(الف)- شعاع سوراخ و شعاع کره را بیابید.

(ب)- انتگرال فوق را محاسبه کنید.

۸- **کره و استوانه.** مطلوب است حجم ناحیه ای که بوسیله استوانه $r = 3\sin\theta$ از کره توپر $r^2 + z^2 \le 9$ جدا می شود.

۹- **دو سهمیوار.** مطلوب است حجم ناحیه ای که به رویه های $z = x^2 + y^2$ و $z = (x^2 + y^2 + 1)/2$ محدود است.

۱۰- **استوانه و رویه** $z = xy$. مطلوب است حجم ناحیه ای در یک هشتم اول که بین استوانه های $r = 1$ و $r = 2$ قرار داشته و از پایین به صفحه xy و از بالا به رویه $z = xy$ محدود است.

تغییر ترتیب انتگرال گیری

۱۱- انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx$$

(راهنمایی: از رابطه

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\,dy$$

استفاده کرده و یک انتگرال دوگانه تشکیل دهید و انتگرال را به کمک تغییر ترتیب انتگرال گیری محاسبه نمایید).

۱۲- **(الف)- مختصات قطبی.** با تبدیل انتگرال به مختصات قطبی نشان دهید که

$$\int_0^{a\sin\beta}\int_{y\cot\beta}^{\sqrt{a^2-y^2}} \ln\left(x^2 + y^2\right)dx\,dy = a^2\beta\left(\ln a - \frac{1}{2}\right)$$

که در آن $a > 0$، $0 < \beta < \pi/2$.

(ب)- انتگرال دکارتی فوق را با ترتیب انتگرال گیری معکوس بنویسید.

۱۳- **تبدیل انتگرال دوگانه به یگانه.** با تغییر ترتیب انتگرال گیری نشان دهید که انتگرال دوگانه زیر را می توان به یک انتگرال یگانه تبدیل کرد

$$\int_0^x\int_0^u e^{m(x-t)}f(t)\,dt\,du = \int_0^x (x-t)e^{m(x-t)}f(t)\,dt$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که

$$\int_0^x\int_0^v\int_0^u e^{m(x-t)}f(t)\,dt\,du\,dv$$
$$= \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^{m(x-t)}f(t)\,dt$$

۱۴- **تبدیل انتگرال دوگانه برای بدست آوردن حدود ثابت.** گاهی یک انتگرال چندگانه با حدود متغیر را می توان به انتگرالی با حدود ثابت تبدیل کرد. با تغییر ترتیب انتگرال گیری نشان دهید که

$$\int_0^1 f(x)\left(\int_0^x g(x-y)f(y)\,dy\right)dx$$
$$= \int_0^1 f(y)\left(\int_y^1 g(x-y)f(x)\,dx\right)dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 g(|x-y|)f(x)f(y)\,dx\,dy$$

جرم و گشتاور

۱۵- **مینیمم کردن لختی قطبی.** می خواهیم ورقه نازکی با چگالی ثابت ناحیه مثلثی شکل در ربع اول صفحه xy با رئوس $(0,0)$، $(a,0)$ و $(a,1/a)$ را اشغال کند. به ازای چه مقدار از a گشتاور لختی قطبی ورقه حول مبداء مینیمم خواهد شد؟

۱۶- **لختی قطبی ورقه مثلثی شکل.** ورقه مثلثی شکل نازکی با چگالی ثابت $\delta = 3$ به محور y و خطوط $y = 2x$ و $y = 4$ در صفحه xy محدود است. گشتاور لختی قطبی این ورقه را حول مبداء بدست آورید.

۱۷- **جرم و لختی قطبی وزنه تعادل.** وزنه تعادل (پارسنگ) یک چرخ لنگر (طیار) با چگالی ثابت ۱ به شکل قسمت کوچکی است که وتری به فاصله b از مرکز از دایره ای به شعاع a جدا می کند $(b < a)$. مطلوب است جرم وزنه تعادل و گشتاور لختی قطبی آن حول مرکز چرخ.

۱۸- **مرکزوار بومرنگ.** مطلوب است مرکزوار ناحیه بومرنگ- شکل (چوب خمیده ای که بعد از پرتاب به سوی پرتاب کننده برمی گردد) بین سهمی های

$$y^2 = -2(x-2) \text{ و } y^2 = -4(x-1)$$

در صفحه xy.

نظریه و مثال ها

۱۹- انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^a \int_0^b e^{\max(b^2x^2, a^2y^2)} dy\, dx$$

که a و b اعداد مثبت اند و

$$\max(b^2x^2, a^2y^2) = \begin{cases} b^2x^2 & if \;\; b^2x^2 \geq a^2y^2 \\ a^2y^2 & if \;\; b^2x^2 < a^2y^2 \end{cases}$$

۲۰- نشان دهید که حاصل

$$\iint \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} dx\, dy$$

روی مستطیل $y_0 \leq y \leq y_1$ و $x_0 \leq x \leq x_1$ برابر است با

$$F(x_1,y_1) - F(x_0,y_1) - F(x_1,y_0) + F(x_0,y_0)$$

۲۱- فرض کنید $f(x,y)$ را می توان به صورت

$$f(x,y) = F(x)G(y)$$

یعنی حاصلضرب تابعی از x در تابعی از y، نوشت. در این صورت انتگرال f روی مستطیل $c \leq y \leq d$ و $R: a \leq x \leq h$ را نیز می توان با فرمول زیر به صورت یک حاصلضرب محاسبه کرد

$$\iint_R f(x,y)dA = \left(\int_a^b F(x)dx\right)\left(\int_c^d G(y)dy\right) \quad (۱)$$

استدلال چنین است:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_a^b F(x)G(y)dx\right)dy \quad (i)$$

$$= \int_c^d \left(G(y)\int_a^b F(x)dx\right)dy \quad (ii)$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b F(x)dx\right)G(y)dy \quad (iii)$$

$$= \left(\int_a^b F(x)dx\right)\int_c^d G(y)dy. \quad (iv)$$

(الف)- برای مراحل (i) تا (iv) دلیل ارائه کنید.

وقتی از معادله (۱) استفاده کنیم صرفه جویی زیادی در زمان می کنیم. با استفاده از معادله (۱) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

(ب)- $\int_0^{\ln 2}\int_0^{\pi/2} e^x \cos y\, dy\, dx$ (پ)- $\int_1^2\int_{-1}^1 \frac{x}{y^2} dx\, dy$

۲۲- فرض کنید D_uf مشتق $f(x,y) = (x^2+y^2)/2$ را در جهت بردار واحد $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ نشان می دهد.

(الف)- **یافتن مقدار متوسط.** مقدار متوسط D_uf را روی ناحیه مثلثی شکلی که خط $x + y = 1$ از ربع اول جدا می کند محاسبه نمایید.

(ب)- مقدار متوسط و مرکزوار. در حالت کلی نشان دهید که مقدار متوسط D_uf روی ناحیه ای در صفحه xy برابر است با مقدار D_uf در مرکزوار ناحیه.

۲۳- **مقدار $\Gamma(1/2)$. تابع گاما**

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

تابع فاکتوریل را از اعداد صحیح نامنفی به سایر اعداد حقیقی تعمیم می دهد. عدد زیر در نظریه معادلات دیفرانسیل اهمیت ویژه ای دارد

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{(1/2)-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$$

(الف)- اگر هنوز تمرین **۴۱** بخش **۱۵-۴** را حل نکرده اید اکنون آنرا حل کرده و نشان دهید که

$$I = \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(ب)- $y = \sqrt{t}$ را در معادله (۲) جانشانی کرده و نشان دهید که $\Gamma(1/2) = 2I = \sqrt{\pi}$.

۲۴- **بار الکتریکی کل روی ورقه دایره ای.** توزیع بار الکتریکی بر روی یک ورقه دایره ای به شعاع R متر عبارت است از $\sigma(r,\theta) = kr(1-\sin\theta)$ (کولن بر متر مربع)، که k یک ثابت است. با انتگرال گیری از σ روی ورقه بار کل Q را بدست آورید.

۲۵- **پیمانه سهموی باران.** کاسه ای به شکل نمودار تابع $z = x^2 + y^2$ از $z = 0$ تا $z = 10\text{in.}$ است. می خواهیم این کاسه را درجه بندی کرده و به یک پیمانه باران تبدیل کنیم. چه ارتفاعی از کاسه با 1in. باران متناظر است؟ با 3in. باران؟

۲۶- **آب در بشقاب (دیش) ماهواره.** بشقاب سهموی

ماهواره $2m$ عرض و $1/2m$ عمق دارد. محور تقارن آن نسبت به راستای قائم 30 درجه کج شده است.

(الف)- انتگرال سه گانه ای در مختصات قائم بنویسید که مقدار آبی را بدست می دهد که بشقاب ماهواره می تواند در خود نگه دارد. انتگرال را محاسبه نکنید.(راهنمایی: دستگاه مختصات خود را طوری قرار دهید که بشقاب ماهواره در «وضعیت استاندارد» باشد و صفحه سطح آب کج شود).(هشدار: حدود انتگرال گیری «خوب» نیستند).

۲۷- نیم استوانه نامتناهی. فرض کنید D ناحیه درونی نیم استوانه مستدیر قائمی به شعاع ۱ است که تنها قاعده آن ۱ واحد بالاتر از مبداء قرار دارد و محور آن از $(0,0,1)$ تا ∞ امتداد دارد. با استفاده از مختصات استوانه ای انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\iiint_D z\left(r^2+z^2\right)^{-5/2}dV$$

۲۸- فوق حجم. تاکنون آموخته ایم که $\int_a^b 1dx$ طول بازه $[a,b]$ روی خط اعداد (فضای یک بعدی)، $\iint_R 1dA$ مساحت ناحیه R در صفحه xy (فضای دو بعدی) و $\iiint_D 1dV$ حجم ناحیه D در فضای سه بعدی (فضای xyz) است. می توانیم به همین صورت ادامه دهیم: اگر a ناحیه ای در فضای ۴ بعدی (فضای $xyzw$) باشد $\iiiint_a 1dV$ «فوق حجم» Q است. با بهره گیری از توان خود در تعمیم و یک دستگاه مختصات دکارتی چهار بعدی فوق حجم داخل کره سه بعدی واحد

$$x^2+y^2+z^2+w^2=1$$

را بیابید.

فصل ۱۵: پروژه های کاربرد فناوری

بخش متمتیکا/ میپل:

روش مونت کارلو را برای انتگرال گیری عددی در سه بعد امتحان کنید.

با استفاده از روش مونت کارلو در سه بعد به صورت عددی انتگرال بگیرید.

میانگین ها و گشتاورها و جستجوی روش های رسم جدید، قسمت II

از روش گشتاورها در شکلی که از تقارن هندسی و نیز انتگرال گیری سه گانه بهره می گیرد استفاده کنید.

فصل ۱۶

انتگرال گیری در میدان های برداری

چشم انداز: در این فصل نظریه انتگرال گیری را به خم ها و رویه های واقع در فضا تعمیم می دهیم. نظریه حاصل، یعنی نظریه انتگرالهای(خمیده) خطی و رویه ای، ابزارهای ریاضی قدرتمندی در اختیار علوم و مهندسی قرار می دهد. انتگرال های خطی در محاسبه کار انجام شده بوسیله یک نیرو در حرکت جسم در امتداد یک مسیر، محاسبه جرم یک سیم خمیده با چگالی متغیر و غیره کاربرد دارد. انتگرال های رویه ای در محاسبه آهنگ عبور یک سیال(شاره) از یک سطح کاربرد دارد. در این فصل قضایای اساسی حساب انتگرال برداری را ارائه کرده و در مورد پیامدهای ریاضی و کاربردهای فیزیکی آنها بحث می کنیم. در تحلیل نهایی، نشان می دهیم که قضایای اصلی تعابیر تعمیم یافته قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به شمار می آیند.

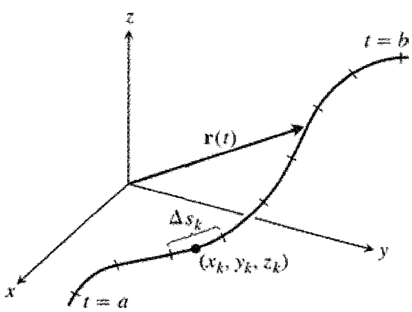
۱۶-۱- انتگرال های خطی

برای محاسبه جرم کل سیمی که روی خمی واقع در فضا قرار دارد یا برای محاسبه کار انجام شده توسط نیروی متغیری که در امتداد چنین خمی اثر می کند به مفهوم کلی تری از انتگرال، نسبت به آنچه که در فصل **۵** تعریف کردیم، نیاز داریم. در چنین وضعیتی لازم است به جای بازه ای چون $[a,b]$، روی خمی چون C انتگرال بگیریم. این انتگرال های کلی تر انتگرال های (خمیده) خطی نامیده می شوند (اگر چه انتگرال های مسیر ممکن است مناسب تر باشد). ما تعاریف خود را برای خم های فضایی ارائه می کنیم و خم های واقع در صفحه xy حالت خاصی هستند که در آن مختص z عیناً صفر است.

فرض کنید $f(x,y,z)$ تابعی حقیقی – مقدار است که می خواهیم از آن روی خم C واقع در داخل دامنه f و با معادله پارامتری $\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}$، $a\le t\le b$ انتگرال بگیریم. مقادیر f بر روی خم مذکور از تابع مرکب $f(g(t),h(t),k(t))$ بدست می آیند. می خواهیم از این تابع مرکب نسبت به طول قوس از $t=a$ تا $t=b$ انتگرال بگیریم.

برای آغاز، نخست خم C را به n قوس تقسیم می کنیم، که n عددی متناهی است (شکل۱۶-۱). طول یک قوس نمونه Δs_k است. در هر قوس نقطه ای چون (x_k,y_k,z_k) برمی گزینیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta s_k$$



شکل۱۶-۱: خم $\mathbf{r}(t)$ از $t=a$ تا $t=b$ به قوس های کوچک تقسیم شده است. طول یک قوس نمونه Δs_k است.

که شبیه یک جمع ریمان است. بسته به چگونگی تقسیم خم C و برگزیدن (x_k,y_k,z_k) در قوس k ام ممکن است به مقادیر مختلفی برای S_n دست یابیم. اگر f پیوسته باشد و

توابع g، h و k مشتقات اول پیوسته داشته باشند وقتی n افزایش یابد و طول های Δs_k به صفر میل کنند این مجموع ها به یک حد میل می کنند. این حد تعریف زیر را بدست می دهد که مشابه تعریفی است که در مورد انتگرال یگانه داشتیم. در این تعریف فرض می کنیم در تقسیم خم شرط $\Delta s_k \to 0$ وقتی $n \to \infty$ میل می کند برقرار است.

تعریف: اگر f روی خمی چون C تعریف شده باشد که معادله پارامتری آن عبارت است از

$$\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}, \quad a\le t\le b$$

آنگاه **انتگرال خطی** f روی C چنین تعریف می شود:

$$\int_C f(x,y,z)ds=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta s_k \qquad (۱)$$

به شرط آنکه این حد موجود باشد.

می توان نشان داد که اگر خم C در بازه $a\le t\le b$ هموار باشد (و در نتیجه $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ پیوسته بوده و هرگز برابر $\mathbf{0}$ نباشد) و تابع f روی C پیوسته باشد آنگاه حد معادله (۱) موجود است. در این صورت می توانیم با کاربرد قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال از معادله طول قوس

$$s(t)=\int_a^t |\mathbf{v}(\tau)|d\tau$$

(معادله (۳) بخش ۱۳-۳ به ازای $t_0=a$)

مشتق گرفته و ds در معادله (۱) را به صورت $ds=|\mathbf{v}(t)|dt$ بیان کرده و انتگرال f روی C را به صورت زیر محاسبه کنیم[1]

$$\int_C f(x,y,z)dx=\int_a^b f(g(t),h(t),k(t))|\mathbf{v}(t)|dt \quad (۲)$$

توجه کنید که انتگرال سمت راست معادله (۲) تنها یک انتگرال معین (یگانه) معمولی است که در فصل ۵ تعریف کردیم ر در آن نسبت به پارامتر t انتگرال می گیریم. فرمول فوق انتگرال سمت چپ را به درستی بدست می دهد و مادامی که صورت پارامتری خم، هموار است به اینکه از کدام صورت پارامتری استفاده می کنیم بستگی ندارد. توجه کنید که پارامتر t معرف جهتی در امتداد مسیر است. نقطه شروع بر روی C مکان $\mathbf{r}(a)$ و حرکت در امتداد مسیر در جهت افزایش t است (شکل ۱۶-۱ را ببینید).

چگونگی محاسبه انتگرال های خطی

برای محاسبه انتگرال تابع پیوسته ای چون $f(x,y,z)$ روی خمی چون C

۱- صورت پارامتری هموراری از خم C را بیابید

$$\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}, \quad a\le t\le b$$

۲- انتگرال را به صورت زیر محاسبه کنید

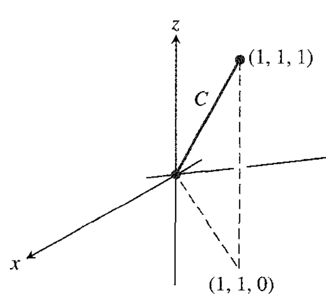
$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f(g(t),h(t),k(t))|\mathbf{v}(t)|dt$$

اگر f تابع ثابتی با مقدار ۱ باشد انتگرال f روی C طول C از $t=a$ تا $t=b$ را بدست می دهد.

مثال ۱: مطلوب است انتگرال

$$f(x,y,z)=x-3y^2+z$$

روی پاره خط C که مبداء را به نقطه $(1,1,1)$ وصل می کند (شکل ۱۶-۲).



شکل ۱۶-۲: مسیر انتگرال گیری در مثال ۱.

حل: ساده ترین صورت پارامتری ممکن را برای C برمی گزینیم:

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k}, \qquad 0\le t\le 1$$

مؤلفه های $\mathbf{r}(t)$ مشتقات اول پیوسته دارند و $|\mathbf{v}(t)|=|\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ هرگز صفر نیست، لذا این صورت پارامتری هموار است. انتگرال f روی C برابر است با

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_0^1 f(t,t,t)(\sqrt{3})dt$$
$$=\int_0^1 (t-3t^2+t)\sqrt{3}dt$$

۱- $ds/dt=|\mathbf{v}|=\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2+(dz/dt)^2}$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\left(2t-3t^2\right)dt=\sqrt{3}\left[t^2-t^3\right]_0^1=0$$

جمعپذیری

انتگرال های خطی این ویژگی مفید را دارند که اگر یک خم قطعه قطعه هموار چون C متشکل از تعدادی متناهی از خم های هموار چون C_1، C_2، $\cdots$ و C_n باشد که به صورت انتها به انتها به هم وصل شده اند (بخش۱۳-۱) آنگاه انتگرال یک تابع روی C برابر است با مجموع انتگرال ها روی خم های تشکیل دهنده C

$$\int_C f\,ds=\int_{C_1}f\,ds+\int_{C_2}f\,ds+\cdots+\int_{C_n}f\,ds \qquad (۳)$$

مثال۲: شکل۱۶-۳ مسیر دیگری از مبداء تا $(1,1,1)$ را نشان می دهد که از دو پاره خط C_1 و C_2 تشکیل شده است. مطلوب است انتگرال $f\,(x,y,z)=x-3y^2+z$ روی $C_1\cup C_2$.

حل: ساده ترین صورت پارامتری ممکن را برای C_1 و C_2 برمی گزینیم و با حرکت در امتداد آنها طول بردارهای سرعت هر کدام را محاسبه می کنیم

$$C_1:\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j} \quad و \quad 0\le t\le 1;\ |\mathbf{v}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$C_2:\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}+\mathbf{j}+t\mathbf{k} \quad و \quad 0\le t\le 1;$$

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$$

با این صورت های پارامتری داریم

$$\int_{C_1\cup C_2}f\,(x,y,z)ds$$

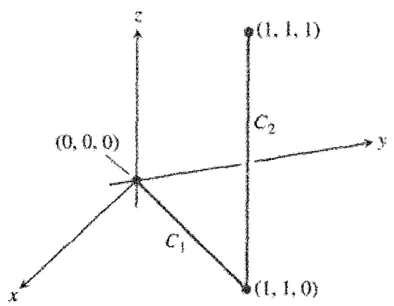
$$=\int_{C_1}f\,(x,y,z)ds+\int_{C_2}f\,(x,y,z)ds \qquad (معادله۳)$$

$$=\int_0^1 f\,(t,t,0)\sqrt{2}dt+\int_0^1 f\,(1,1,t)(1)dt \qquad (معادله۲)$$

$$=\int_0^1\left(t-3t^2+0\right)\sqrt{2}dt+\int_0^1(1-3+t)(1)dt$$

$$=\sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2}-t^3\right]_0^1+\left[\frac{t^2}{2}-2t\right]_0^1=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}$$

توجه به سه نکته در مورد انتگرال گیری در مثال های ۱ و ۲ ضروریست. نخست اینکه به محض اینکه مؤلفه های خم مربوط در فرمول f جانشانی می شوند انتگرال گیری، یک انتگرال گیری متعارف نسبت به t می شود. دوم اینکه انتگرال F روی $C_1\cup C_2$ با انتگرال گیری از f روی هر بخش از مسیر و جمع کردن نتایج بدست آمده است و سوم اینکه انتگرال های f روی C و $C_1\cup C_2$ مقادیر متفاوتی دارند.



شکل۱۶-۳: مسیر انتگرال گیری در مثال۲.

مقدار انتگرال خطی در امتداد مسیری که دو نقطه را به هم وصل می کند با تغییر مسیر بین دو نقطه ممکن است تغییر کند.

نتیجه سوم را در بخش۱۶-۳ بررسی می کنیم.

محاسبه جرم و گشتاور

فنرهای پیچه ای (پیچکی) و سیم ها را به عنوان جرم هایی در نظر می گیریم که روی خم های هموار در فضا توزیع شده اند. توزیع جرم به کمک یک تابع پیوسته چگالی چون $\delta(x,y,z)$ توصیف می شود که معرف جرم واحد طول است. وقتی خم C با $\mathbf{r}(t)=x\,(t)\mathbf{i}+y\,(t)\mathbf{j}+z\,(t)\mathbf{k},a\le t\le b$ پارامتری شود x و y و z توابعی از پارامتر t بوده و چگالی عبارت است از تابع $\delta(x\,(t),y\,(t),z\,(t))$ و جزء(دیفرانسیل) طول قوس از رابطه زیر بدست می آید (بخش۱۳-۳ را ببینید)

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

در این صورت جرم فنر یا سیم، مرکز جرم و گشتاورها با فرمول های جدول۱۶-۱ و انتگرال گیری برحسب پارامتر t روی بازه $[a,b]$ محاسبه می شوند. مثلاً فرمول جرم به صورت زیر درمی آید

$$M=\int_a^b\delta(x\,(t),y\,(t),z\,(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

این فرمول ها برای میله های نازک نیز کاربرد دارند و استنتاج آنها مشابه استنتاج های بخش ۶-۶ است. توجه کنید که این فرمول ها چقدر شبیه فرمول های جدول های ۱۵-۱ و ۱۵-۲

مربوط به انتگرال های دوگانه و سه گانه هستند. انتگرال های دوگانه برای نواحی مسطح و انتگرال های سه گانه برای اجسام توپر در مورد فنرهای پیچه ای، سیم هاو میله های نازک به انتگرال های خطی تبدیل می شوند.

جدول ۱۶-۱: فرمول های جرم و گشتاور برای فنرهای پیچه ای، سیم ها و میله های نازکی که روی خم هموار C در فضا قرار دارند.

جرم: $$M=\int_C \delta ds$$

($\delta=\delta(x,y,z)$ چگالی در نقطه (x,y,z) است)

گشتاورهای اول حول صفحات مختصات:

$$M_{xz}=\int_C y\ \delta ds \quad \text{و} \quad M_{xy}=\int_C z\ \delta ds$$

$$M_{yz}=\int_C x\ \delta ds$$

مختصات مرکز جرم:

$$\bar{y}=M_{xz}/M \quad \text{و} \quad \bar{z}=M_{xy}/M$$

$$\text{و} \quad \bar{x}=M_{yz}/M$$

گشتاورهای لختی حول محورها و سایر خطوط:

$$I_y=\int_C(x^2+z^2)\delta ds \quad \text{و} \quad I_x=\int_C(y^2+z^2)\delta ds$$

$$\text{و} \quad I_z=\int_C(x^2+y^2)\delta ds$$

$$I_L=\int_C r^2\delta ds$$

(فاصله نقطه (x,y,z) تا خط $L=r(x,y,z)$)

توجه کنید که جزء جرم dm در این جدول برابر δds است نه δdV که در جدول ۱۵-۱ داشتیم. همینطور توجه کنید که انتگرال ها روی خم C گرفته می شوند.

مثال ۳: یک کمان فلزی باریک در امتداد نیمدایره

$$z\geq 0 \text{،} y^2+z^2=1$$

در صفحه yz واقع است و قسمت پایینی آن نسبت به قسمت بالایی اش چگالی بیشتری دارد (شکل۱۶-۴). اگر چگالی در نقطه (x,y,z) از کمان برابر باشد با $\delta(x,y,z)=2-z$، مرکز جرم کمان را بیابید.

حل: می دانیم که $\bar{x}=0$ و $\bar{y}=0$، زیرا کمان در صفحه yz واقع است و جرم آن حول محور z به صورت متقارن توزیع شده است. برای یافتن $\bar{z}$ نیمدایره را به صورت پارامتری زیر درمی آوریم

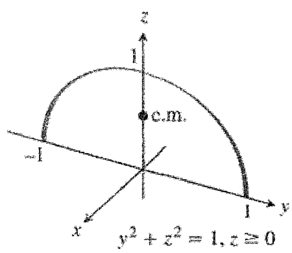
$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{j}+(\sin t)\mathbf{k},\quad 0\leq t\leq\pi$$

برای این صورت پارامتری داریم

$$|\mathbf{v}(t)|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(0)^2+(-\sin t)^2+(\cos t)^2}=1$$

لذا $ds=|\mathbf{v}|dt=dt$.



شکل۱۶-۴: مثال۳ نشان می دهد که مرکز جرم یک کمان نیمدایره ای با چگالی متغیر چگونه محاسبه می شود.

با استفاده از فرمول های جدول۱۶-۱داریم

$$M=\int_C \delta ds=\int_C(2-z)ds$$

$$=\int_0^{\pi}(2-\sin t)dt=2\pi-2$$

$$M_{xy}=\int_C z\,\delta ds=\int_C z\,(2-z)ds$$

$$=\int_0^{\pi}(\sin t)(2-\sin t)dt$$

$$=\int_0^{\pi}(2\sin t-\sin^2 t)dt=\frac{8-\pi}{2}$$

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{8-\pi}{2}.\frac{1}{2\pi-2}=\frac{8-\pi}{4\pi-4}\approx 0.57$$

مختصات مرکز جرم تا دو رقم اعشار است از $(0,0,0.57)$.

انتگرال های خطی در صفحه

انتگرال های خطی در صفحه تعبیر هندسی جالبی دارند. اگر C خم هموار در صفح xy با صورت پارامتری

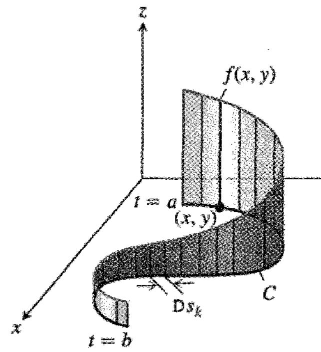
$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}, a\leq t\leq b$$

باشد همانند بخش۱۲-۶ خط راستی را در حالت عمود بر صفحه و در حالی که موازی با محور z نگه داشته ایم روی خم C حرکت داده و یک رویه استوانه ای تولید می کنیم.

اگر $z=f\left(x,y\right)$ روی ناحیه ای در صفحه که شامل خم C است تابعی پیوسته و نامنفی باشد آنگاه نمودار f رویه ای واقع در بالای صفحه است. استوانه سراسر این رویه را قطع کرده و خمی روی آن تشکیل می دهد که بالای خم Cقرار دارد و دارای همان ماهیت خمیدگی است. بخشی از رویه استوانه ای که زیر خم رویه و بالای صفحه xy قرار دارد شبیه یک «دیوار خمیده» یا «حصار» است که روی خم C قرار دارد و بر صفحه عمود است. در هر نقطه $\left(x,y\right)$ در امتداد خم، ارتفاع دیوار $f\left(x,y\right)$ است. این دیوار را در شکل **۱۶-۵** نشان داده ایم و در آن «بالای» دیوار خم واقع بر رویه $z=f\left(x,y\right)$ است (در این شکل رویه تشکیل شده بوسیله نمودار f را نشان نداده ایم بلکه فقط خم روی آن را نشان داده ایم که محل تقاطع استوانه و رویه است). طبق تعریف داریم

$$\int_C f\,ds=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k,y_k\right)\Delta s_k$$

که در آن وقتی $n\to\infty$، $\Delta s_k\to 0$. می بینیم که انتگرال خطی $\int_C fds$ مساحت دیوار نشان داده شده در شکل است.



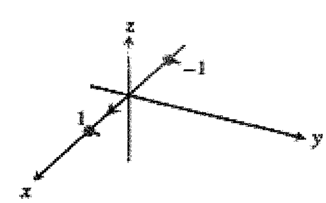
شکل۱۶-۵: انتگرال خطی $\int_C fds$ مساحت بخشی از رویه استوانه یا «دیوار» زیر $z=f\left(x,y\right)\geq 0$ را بدست می دهد.

تمرین های ۱۶-۱

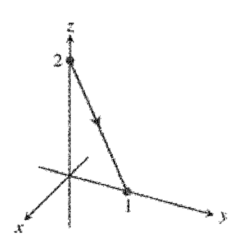
نمودار معادلات برداری

در تمرین های ۱-۸ مشخص کنید که هر معادله برداری مربوط به کدامیک از نمودارهای (الف) تا (ح) است.

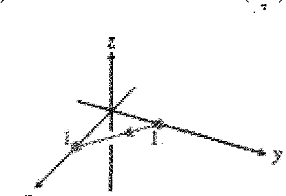
(الف)-



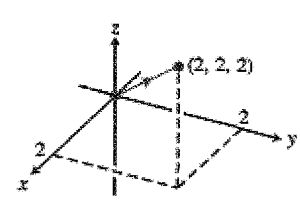
(ب)-



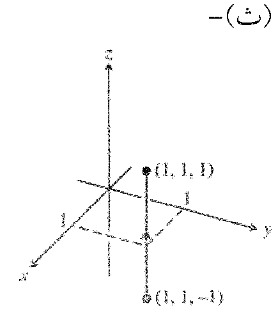
(پ)-



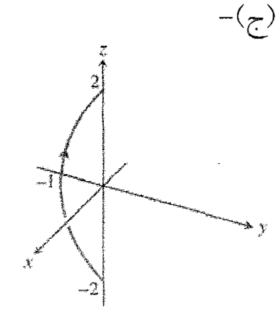
(ت)-



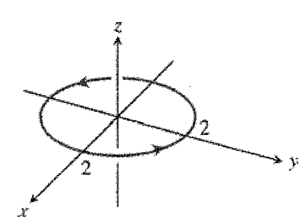
(ث)-



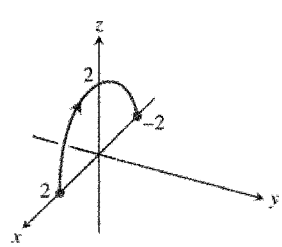
(ج)-



(چ)-



(ح)-



۱- $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j}$، $0\leq t\leq 1$

۲- $\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}+\mathbf{j}+t\mathbf{k}$، $-1\leq t\leq 1$

۳- $\mathbf{r}(t)=(2\cos t)\mathbf{i}+(2\sin t)\mathbf{j}$، $0\leq t\leq 2\pi$

۴- $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}$، $-1\leq t\leq 1$

۵- $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$، $0\leq t\leq 2$

۶- $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{j}+(2-2t)\mathbf{k}$، $0\leq t\leq 1$

۷- $\mathbf{r}(t)=\left(t^2-1\right)\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$، $-1\leq t\leq 1$

۸- $\mathbf{r}(t)=(2\cos t)\mathbf{i}+(2\sin t)\mathbf{k}$، $0\leq t\leq \pi$

محاسبه انتگرال های خطی روی خم های فضایی

۹- مطلوب است $\int_C (x+y)ds$، که در آن C پاره خط راست $x=t$، $y=(1-t)$، $z=0$ از $(0,1,0)$ تا $(1,0,0)$ است.

۱۰- مطلوب است $\int_C (x-y+z-2)ds$، که در آن C پاره خط راست $x=t$، $y=(1-t)$، $z=1$ از $(0,1,1)$ تا $(1,0,1)$ است.

۱۱- مطلوب است $\int_C (xy+y+z)ds$ روی خم

$\mathbf{r}(t)=2t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+(2-2t)\mathbf{k}$، $0\le t\le 1$

۱۲- مطلوب است $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$ روی خم

$\mathbf{r}(t)=(4\cos t)\mathbf{i}+(4\sin t)\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$، $-2\pi\le t\le 2\pi$

۱۳- انتگرال خطی $f(x,y,z)=x+y+z$ را روی پاره خط راست از $(1,2,3)$ تا $(0,-1,1)$ بیابید.

۱۴- انتگرال خطی

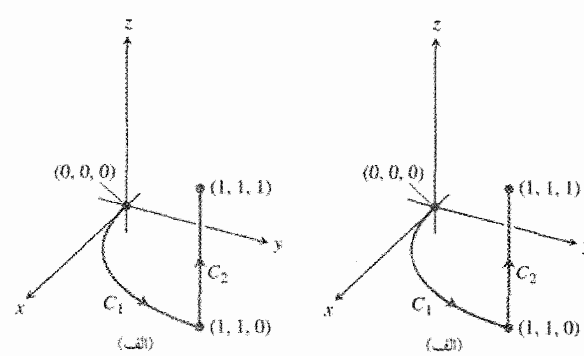
$$f(x,y,z)=\sqrt{3}/(x^2+y^2+z^2)$$

را روی خم $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$، $1\le t\le\infty$ بیابید.

۱۵- از $f(x,y,z)=x+\sqrt{y}-z^2$ روی مسیری که در قسمت (الف) شکل زیر دیده می شود و از $(0,0,1)$ تا $(1,1,1)$ امتداد دارد انتگرال بگیرید. این مسیر با خم های زیر مشخص می شود:

$$C_1:\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j},\ 0\le t\le 1$$

$$C_2:\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}+\mathbf{j}+t\mathbf{k},\quad 0\le t\le 1$$



مسیرهای انتگرال گیری برای تمرین های ۱۵ و ۱۶.

۱۶- از $f(x,y,z)=x+\sqrt{y}-z^2$ روی مسیری که در قسمت (ب) شکل فوق دیده می شود و از $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ امتداد دارد انتگرال بگیرید. این مسیر با خم های زیر مشخص می شود

$C_1:\mathbf{r}(t)=t\mathbf{k},\ 0\le t\le 1$، $C_2:\mathbf{r}(t)=t\mathbf{j}+\mathbf{k},\ 0\le t\le 1$

$$C_3:\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k},\ 0\le t\le 1$$

۱۷- از $f(x,y,z)=(x+y+z)/(x^2+y^2+z^2)$ روی مسیر $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$، $0<a\le t\le b$ انتگرال بگیرید.

۱۸- از $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+z^2}$ روی دایره زیر انتگرال بگیرید

$$\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{j}+(a\sin t)\mathbf{k},\quad 0\le t\le 2\pi$$

انتگرال های خطی روی خم های واقع در صفحه (مسطح)

۱۹- مطلوب است $\int_C x\,ds$، که در آن C عبارت است از

(الف)- پاره خط راست $x=t$، $y=t/2$ از $(0,0)$ تا $(4,2)$.

(ب)- خم سهموی $x=t$، $y=t^2$ از $(0,0)$ تا $(2,4)$.

۲۰- مطلوب است $\int_C \sqrt{x+2y}\,ds$، که در آن C عبارت است از

(الف)- پاره خط راست $x=t$، $y=4t$ از $(0,0)$ تا $(1,4)$.

(ب)- $C_1\cup C_2$، C_1 پاره خطی از $(0,0)$ تا $(1,0)$ و C_2 پاره خطی از $(1,0)$ تا $(1,2)$.

۲۱- انتگرال خطی $f(x,y)=ye^{x^2}$ را روی خم

$\mathbf{r}(t)=4t\mathbf{i}-3t\mathbf{j}$، $-1\le t\le 2$

بیابید.

۲۲- مطلوب است انتگرال خطی $f(x,y)=x-y+3$ روی خم $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}$، $0\le t\le 2\pi$.

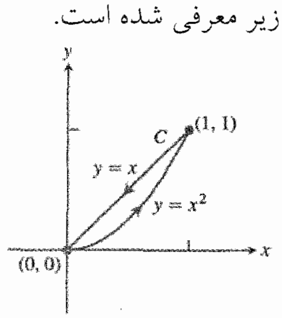
۲۳- مطلوب است $\int_C \frac{x^2}{y^{4/3}}ds$، که C عبارت است از خم $x=t^2$، $y=t^3$ به ازای $1\le t\le 2$.

۲۴- انتگرال خطی $f(x,y)=\sqrt{y}/x$ را روی خم

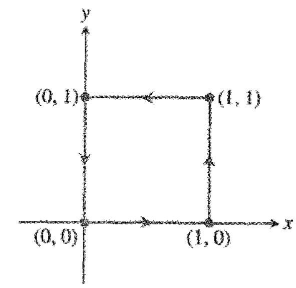
$\mathbf{r}(t)=t^3\mathbf{i}+t^4\mathbf{j}$ ، $1/2\le t\le 1$

بیابید.

۲۵- مطلوب است $\int_C (x+\sqrt{y})ds$، که در آن C مسیری است که در شکل زیر معرفی شده است.



۲۶- مطلوب است $\int_C \frac{1}{x^2+y^2+1}ds$، که C مسیری است که در شکل زیر نشان داده شده است.



در تمرین های ۲۷-۳۰، از f روی خم مفروض انتگرال بگیرید.

۲۷- $f(x,y)=x^3/y$ و $C: y=x^2/2,\ 0\le x\le 2$

۲۸- $f(x,y)=(x+y^2)/\sqrt{1+x^2}$، $C: y=x^2/2$ از $(1,1/2)$ تا $(0,0)$.

۲۹- $f(x,y)=x+y$، $C: x^2+y^2=4$ در ربع اول از $(2,0)$ تا $(0,2)$.

۳۰- $f(x,y)=x^2-y$، $C: x^2+y^2=4$ در ربع اول از $(0,2)$ تا $(\sqrt{2},\sqrt{2})$

۳۱- مطلوب است مساحت یک طرف «دیوار خمیده ای» که به صورت عمودی روی خم $y=x^2$، $0\le x\le 2$ ایستاده و زیر خم روی رویه $f(x,y)=x+\sqrt{y}$ قرار دارد.

۳۲- مطلوب است مساحت یک طرف «دیواری» که به صورت عمودی برروی خم $2x+3y=6$، $0\le x\le 6$ ایستاده و زیر خم روی رویه $f(x,y)=4+3x+2y$ قرار دارد.

جرم و گشتاورها

۳۳- **جرم سیم.** سیمی در امتداد خم زیر قرار دارد

$$\mathbf{r}(t)=(t^2-1)\mathbf{j}+2t\mathbf{k} \quad \text{و} \quad 0\le t\le 1$$

اگر چگالی سیم $\delta=(3/2)t$ باشد جرم آن را بیابید.

۳۴- **مرکز جرم و سیم خمیده.** سیمی با چگالی

$$\delta(x,y,z)=15\sqrt{y+2}$$

در امتداد خم زیر قرار دارد

$$\mathbf{r}(t)=(t^2-1)\mathbf{j}+2t\mathbf{k} \quad \text{و} \quad -1\le t\le 1$$

مرکز جرم سیم را یافته و بعد خم و مرکز جرم را توأماً رسم کنید.

۳۵- **جرم سیمی با چگالی متغیر.** سیم نازکی در امتداد خم زیر قرار دارد

$$\mathbf{r}(t)=\sqrt{2}t\mathbf{i}+\sqrt{2}t\mathbf{j}+(4-t^2)\mathbf{k} \quad \text{و} \quad 0\le t\le 1$$

اگر چگالی سیم (الف)- $\delta=3t$ و (ب)- $\delta=1$ باشد جرم آن را بیابید.

۳۶- **مرکز جرم سیمی با چگالی متغیر.** سیم نازکی در امتداد خم زیر قرار دارد

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\mathbf{k} \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2$$

اگر چگالی سیم $\delta=3\sqrt{5+t}$ باشد مرکز جرم آن را بیابید.

۳۷- **گشتاور لختی حلقه سیم.** یک حلقه سیم دایره ای با چگالی ثابت δ در امتداد دایره $x^2+y^2=a^2$ در صفحه xy قرار دارد. گشتاور لختی حلقه را حول محور z بیابید.

۳۸- **لختی میله باریک.** میل، باریکی با چگالی ثابت در امتداد پاره خط $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{j}+(2-2t)\mathbf{k}$، $0\le t\le 1$ در صفحه yz قرار دارد. گشتاورهای لختی میله را حول سه محور مختصات بیابید.

۳۹- **دو فنر با چگالی ثابت.** فنری با چگالی ثابت δ در امتداد پیچ زیر قرار دارد

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}, \quad 0\le t\le 2\pi$$

(الف)- I_z را بیابید.

(ب)- فرض کنید فنر دیگری با چگالی ثابت δ دارید که طولش دو برابر فنر قسمت (الف) است و در امتداد پیچ به ازای $0\le t\le 4\pi$ قرار دارد. انتظار دارید I_z فنر طویل تر با I_z فنر کوتاهتر یکی باشد یا باید متفاوت از آن باشد؟ با محاسبه I_z برای فنر طویل تر درستی پیش بینی خود را بررسی کنید.

۴۰- **سیم با چگالی ثابت.** سیمی با چگالی ثابت $\delta=1$ در امتداد خم زیر قرار دارد

$$\mathbf{r}(t)=(t\cos t)\mathbf{i}+(t\sin t)\mathbf{j}+(2\sqrt{2}/3)t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0\le t\le 1$$

$\bar{z}$ و I_z را بیابید.

۴۱- **کمان مثال ۳.** I_z را برای کمان مثال **۳** بیابید.

۴۲- مرکز جرم و گشتاورهای لختی سیمی با چگالی متغیر. سیم نازکی در امتداد خم زیر قرار دارد

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j}+\frac{t^2}{2}\mathbf{k},\ 0\le t\le 2$$

اگر چگالی سیم $\delta=1/(t+1)$ باشد مرکز جرم و گشتاورهای لختی آن را حول محورهای مختصات بدست آورید.

مسائل رایانه ای

در تمرین های **۴۳- ۴۶** با استفاده از یک نرم افزار ریاضی مراحل زیر را انجام داده و انتگرال های خطی را محاسبه کنید.

(الف)- $ds=|\mathbf{v}(t)|dt$ را برای مسیر

$$\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}$$

بیابید.

(ب)- انتگرالده $f(g(t),h(t),k(t))$ را به صورت تابعی از پارامتر t بیان کنید.

(پ)- با استفاده از معادله (۲) متن $\int_C f\,ds$ را محاسبه کنید.

۴۳- $f(x,y,z)=\sqrt{1+30x^2+10y}$ ،

$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$ و $0\le t\le 2$

۴۴- $f(x,y,z)=\sqrt{1+x^3+5y^3}$ ،

$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\frac{1}{3}t^2\mathbf{j}+\sqrt{t}\mathbf{k}$ و $0\le t\le 2$

۴۵- $f(x,y,z)=x\sqrt{y}-3z^2$ ،

$\mathbf{r}(t)=(\cos 2t)\mathbf{i}+(\sin 2t)\mathbf{j}+5t\mathbf{k}$ و $0\le t\le 2\pi$

۴۶- $f(x,y,z)=\left(1+\frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}$ ،

$\mathbf{r}(t)=(\cos 2t)\mathbf{i}+(\sin 2t)\mathbf{j}+t^{5/2}\mathbf{k}$ و $0\le t\le 2\pi$

۱۶-۲- میدان های برداری و انتگرال های خطی: کار، گردش و شار

نیروهای گرانشی و الکتریکی هر دو اندازه و جهت دارند. آنها در هر نقطه از دامنه خود با یک بردار نمایش داده می شوند و لذا یک میزان برداری ایجاد می کنند. در این بخش چگونگی محاسبه کار انجام شده در حرکت یک جسم در چنین میدانی با بهره گیری از یک انتگرال خطی شامل میدان برداری را نشان می دهیم. همچنین در مورد میدان های سرعت، نظیر میدان برداری نمایش دهنده یک سیال جاری در دامنه اش، بحث می کنیم. از انتگرال خطی می توان برای محاسبه آهنگ جریان سیالات روی خم ها یا از میان آنها در داخل دامنه نیز استفاده کرد.

میدان های برداری

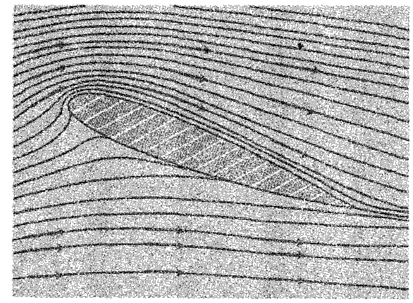
فرض کنید ناحیه ای در صفحه یا فضا بوسیله سیال متحرکی نظیر هوا یا آب اشغال شده است. سیال از تعداد زیادی ذره تشکیل شده است و در هر لحظه از زمان ذره سرعتی برابر با $\mathbf{v}$ دارد. در نقاط مختلف این ناحیه در زمانی معین (یکسان)، این سرعت ها می توانند تغییر کنند. می توان تصور کرد که به هر نقطه از سیال یک بردار سرعت متصل است که نشان دهنده سرعت ذره ای در آن نقطه است. چنین جریان سیالی مثالی از یک میدان برداری است. شکل۱۶-۶ یک میدان برداری سرعت را نشان می دهد که از جریان هوا در اطراف یک هواشکن در یک تونل باد بدست آمده است. شکل۱۶-۷ میدان برداری بردارهای سرعت را در امتداد خطوط جریان آب در حرکت آن از یک گذرگاه باریک شونده نشان می دهد. میدان های برداری به نیروهایی نظیر جاذبه گرانشی (شکل۱۶-۸)، میدان های مغناطیسی، میدان های الکتریکی و نیز میدان های ریاضی محض نیز وابسته اند.

بطور کلی یک **میدان برداری** تابعی است که به هر نقطه از دامنه اش یک بردار نسبت می دهد. یک میدان برداری روی یک دامنه سه بعدی در فضا می تواند فرمولی مثل فرمول زیر داشته باشد

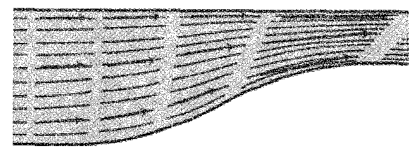
$$\mathbf{F}(x,y,z)=M(x,y,z)\mathbf{i}+N(x,y,z)\mathbf{j}+P(x,y,z)\mathbf{k}$$

اگر توابع مؤلفه M، N و P پیوسته باشند میدان **پیوسته** است و اگر هر یک از مولفه ها مشتق پذیر باشند میدان **مشتق پذیر** است. فرمول میدانی از برداری دوبعدی می تواند به صورت زیر باشد

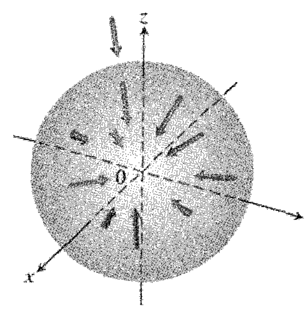
$$\mathbf{F}(x,y)=M(x,y)\mathbf{i}+N(x,y)\mathbf{j}$$



شکل۱۶-۶: بردارهای سرعت یک جریان در اطراف یک هواشکن در تونل باد.



شکل۱۶-۷: خطوط جریان در یک گذرگاه باریک شونده. با باریک تر شدن گذرگاه سرعت حرکت آب بیشتر شده و طول بردارهای سرعت افزایش می یابد.

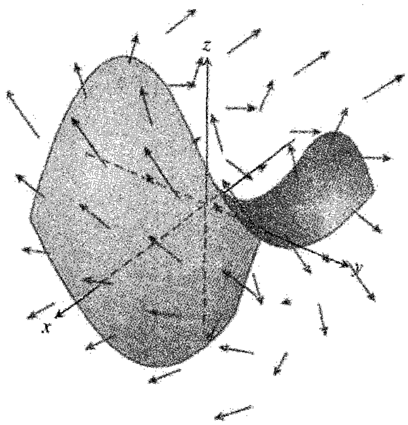


شکل۱۶-۸: بردارها در یک میدان گرانشی به سمت مرکز جرم متوجه اند که چشمه میدان محسوب می شود.

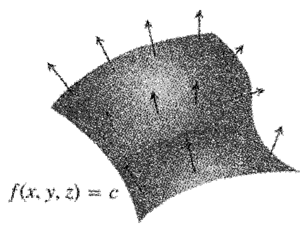
در فصل۱۳ با نوع دیگری از میدان های برداری مواجه شدیم. بردارهای مماس $\mathbf{T}$ و بردارهای قائم $\mathbf{N}$ مربوط به یک خم واقع در فضا هر دو میدان های برداری در امتداد خم تشکیل می دهند. در امتداد خمی چون $\mathbf{r}(t)$ آنها ممکن است فرمول مؤلفه ای شبیه عبارت میدان سرعت داشته باشند

$$\mathbf{v}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$$

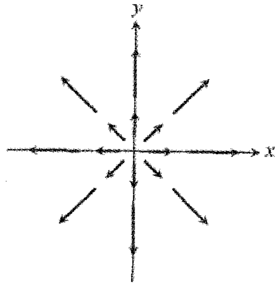
اگر به هر نقطه از یک رویه تراز یک تابع عددی چون $f(x,y,z)$، بردار گرادیان آن، ∇f، را متصل کنیم یک میدان سه بعدی برروی رویه بدست می آوریم. اگر به هر نقطه از یک سیال جاری بردار سرعت متصل کنیم یک میدان سه بعدی خواهیم داشت که روی ناحیه ای در فضا تعریف شده است. این میدان ها و نظایر آنها در شکل های ۱۶-۹ تا ۱۶-۱۵ نشان داده شده اند. برای رسم این میدان ها مجموعه نماینده ای از نقاط دامنه را در نظر گرفته و بردارهای متصل به آنها را رسم کرده ایم. پیکان ها طوری رسم می شوند که ابتدای آنها، نه نوکشان، به نقاطی که در آنها توابع برداری محاسبه می شوند متصل باشد.



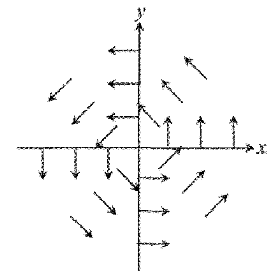
شکل۱۶-۹: یک رویه، مثل یک شبکه توری یا چتر نجات، در یک میدان برداری نشان دهنده بردارهای سرعت جریان آب یا باد. پیکان ها جهت جریان را و طولشان اندازه سرعت را نشان می دهند.



شکل۱۶-۱۰: میدان بردارهای گرادیان ∇f بر رویه $f(x,y,z)=c$.



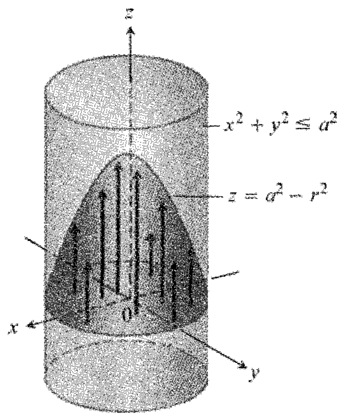
شکل۱۶-۱۱: میدان شعاعی $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ بردارهای مکان نقاط واقع در صفحه. به این قرارداد توجه کنید که هر پیکان طوری رسم می شود که ابتدایش، نه نوکش، در نقطه ای قرار گیرد که $\mathbf{F}$ محاسبه می شود.



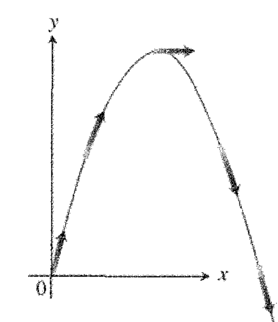
شکل۱۶-۱۲: میدان «چرخشی» بردارهای واحد چرخان

$$\mathbf{F} = \left(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}\right) / \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

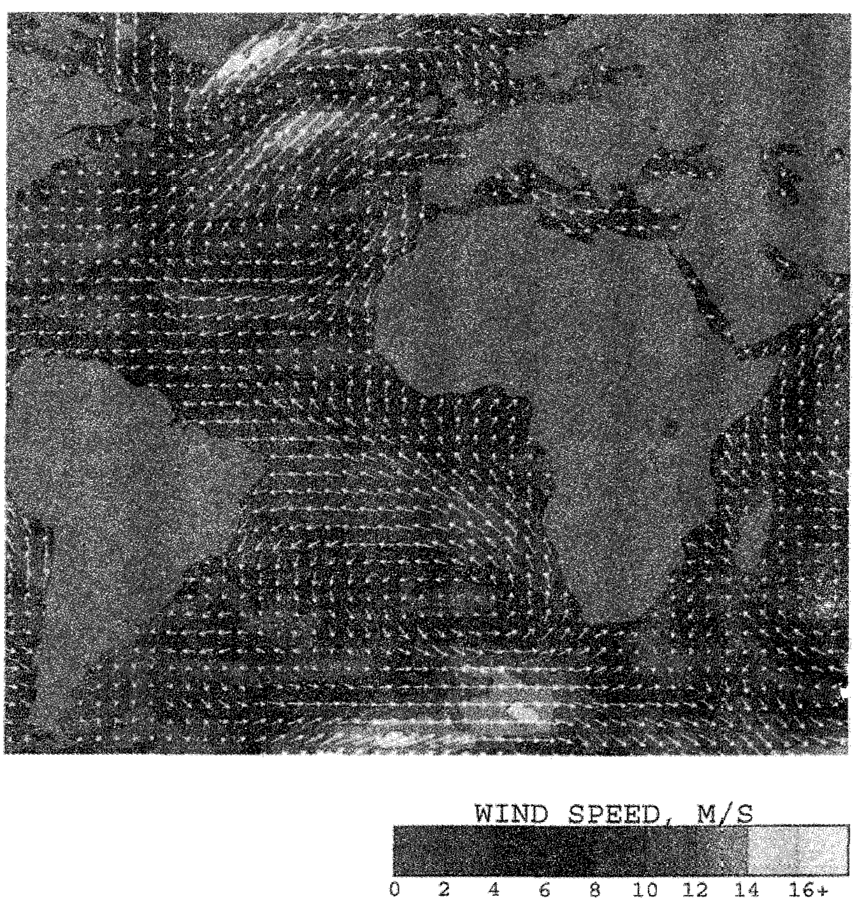
در صفحه. در مبداء میدان تعریف نمی شود.



شکل۱۶-۱۳: جریان سیال در یک لوله استوانه ای بلند. ابتدای بردارهای $\mathbf{v} = \left(a^2 - r^2\right)\mathbf{k}$ در داخل استوانه در صفحه xy و انتهایشان بر سهمیوار $z = a^2 - r^2$ قرار دارد.



شکل۱۶-۱۴: بردارهای سرعت $\mathbf{v}(t)$ یک پرتابه روی مسیر حرکت یک میدان برداری تشکیل می دهند.



شکل ۱۶-۱۵: ماهواره سی ست ناسا با کمک رادار ۳۵۰۰۰۰ اندازه گیری باد روی اقیانوس های جهان انجام می دهد. پیکان ها جهت باد را، طولشان و رنگشان اندازه سرعت را نشان می دهند. به طوفان سهمگین در جنوب گرینلند توجه کنید.

میدان های گرادیان

بردار گرادیان یک تابع عدد – مقدار (عددی) مشتق پذیر در یک نقطه جهت بیشترین افزایش تابع را مشخص می کند. تمام بردارهای گرادیان یک تابع یک نوع میدان برداری مهم تشکیل می دهند (بخش۱۴-۵ را ببینید). **میدان گرادیان** تابع مشتق پذیری چون $f\left(x,y,z\right)$ را میدان بردارهای گرادیان زیر تعریف می کنیم:

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

در هر نقطه $\left(x,y,z\right)$، میدان گرادیان برداری بدست می دهد که جهت آن در جهت بیشترین افزایش f و اندازه آن مقدار مشتق جهتی در آن جهت است. میدان گرادیان همواره یک میدان نیرو یا یک میدان سرعت نیست.

مثال ۱: فرض کنید دمای T در هر نقطه $\left(x,y,z\right)$ از یک ناحیه از فضا از رابطه زیر بدست می آید

$$T=100-x^2-y^2-z^2$$

و $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)$ گرادیان T تعریف می شود. میدان برداری $\mathbf{F}$ را بیابید.

حل: میدان گرادیان $\mathbf{F}$ عبارت است از میدان

$$\mathbf{F}=\nabla T=-2x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}-2z\mathbf{k}$$

در هر نقطه از فضا، میدان برداری $\mathbf{F}$ جهتی را مشخص می کند که افزایش دما در آن جهت بیشترین مقدارش را دارد.

انتگرال های خطی میدان های برداری

در بخش۱۶-۱ انتگرال خطی یک تابع عددی چون $f\left(x,y,z\right)$ روی مسیری چون C را تعریف کردیم. اکنون توجه خود را به مفهوم انتگرال خطی یک میدان برداری چون $\mathbf{F}$ در امتداد خم C معطوف می کنیم.

فرض کنید میدان برداری

$$\mathbf{F}=M\left(x,y,z\right)\mathbf{i}+N\left(x,y,z\right)\mathbf{j}+P\left(x,y,z\right)\mathbf{k}$$

مؤلفه های پیوسته و خم C صورت پارامتری همواری چون

$$\mathbf{r}\left(t\right)=g\left(t\right)\mathbf{i}+h\left(t\right)\mathbf{j}+k\left(t\right)\mathbf{k},\ a\le t\le b$$

دارد. همانطور که در بخش۱۶-۱ اشاره کردیم پارامتری سازی $\mathbf{r}\left(t\right)$ جهتی (یا سمتگیری) در امتداد C تعریف می کند که آن را **جهت رو به جلو** می نامیم. در هر نقطه در امتداد مسیر C، بردار مماس $\mathbf{T}=d\mathbf{r}/ds=\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ بردار واحدی مماس بر مسیر بوده و جهت آن در همین جهت رو به جلوست (بردار $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ بردار سرعت مماس بر C در هر نقطه است. در این مورد در بخش های ۱۳-۱ و ۱۳-۳ بحث کردیم). بطور شهودی، انتگرال خطی میدان برداری عبارت است از انتگرال خطی مؤلفه مماسی عددی $\mathbf{F}$ در امتداد C. این مؤلفه مماسی از ضرب نقطه ای زیر بدست می آید

$$\mathbf{F}.\mathbf{T}=\mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

لذا تعریف صوری زیر را داریم که همان معادله (۱) بخش ۱۶-۱ با $f=\mathbf{F}.\mathbf{T}$ است.

> **تعریف:** فرض کنید $\mathbf{F}$ یک میدان برداری با مؤلفه های پیوسته است که در امتداد خم هموار چون C با صورت پارامتری $\mathbf{r}\left(t\right)$، $a\le t\le b$، تعریف شده است. در این صورت **انتگرال خطی $\mathbf{F}$ در امتداد C** چنین است
>
> $$\int_C\mathbf{F}.\mathbf{T}ds=\int_C\left(\mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)ds=\int_C\mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

انتگرال های خطی میدان های برداری را به شیوه ای مشابه روش محاسبه انتگرال های خطی توابع عددی (بخش۱۶-۱) محاسبه می کنیم.

> **محاسبه انتگرال خطی $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}$ در امتداد $C:\mathbf{r}\left(t\right)=g\left(t\right)\mathbf{i}+h\left(t\right)\mathbf{j}+k\left(t\right)\mathbf{k}$**
>
> ۱- میدان برداری $\mathbf{F}$ را برحسب خم پارامتری شده $\mathbf{F}$ به صورت $\mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right)$ بیان کنید. برای این کار مؤلفه های $\mathbf{r}$ یعنی $x=g\left(t\right)$، $y=h\left(t\right)$ و $z=k\left(t\right)$ را در مؤلفه های عددی $\mathbf{F}$ یعنی $M\left(x,y,z\right)$، $N\left(x,y,z\right)$ و $P\left(x,y,z\right)$ جانشانی کنید.
>
> ۲- بردار مشتق (سرعت) $d\mathbf{r}/dt$ را بدست آورید.
>
> ۳- انتگرال را نسبت به پارامتر t، $a\le t\le b$، محاسبه کرده و انتگرال زیر را بدست آورید

$$\int_c \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt$$

مثال ۲: مطلوب است $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$، که در آن

$$\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$$

در امتداد خم C با معادله پارامتری

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1$$

حل: داریم

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{t}\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$$

و

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{k}$$

بنابراین

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt$$
$$= \int_0^1 \left(2t^{3/2} + t^3 - \frac{1}{2}t^{3/2}\right)dt$$
$$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{5}t^{5/2}\right) + \frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{17}{20}$$

انتگرال های خطی نسبت به مختصات xyz

گاهی نوشتن انتگرال خطی یک تابع عددی نسبت به یکی از مختصات، نظیر $\int_C Mdx$، مفید است. این انتگرال با انتگرال خطی نسبت به طول قوس $\int_C Mds$ که در بخش ۱۶-۱ تعریف کردیم یکی نیست. برای تعریف این انتگرال جدید برای تابع عددی $M(x,y,z)$، یک میدان برداری چون $\mathbf{F} = M(x,y,z)\mathbf{i}$ روی خم C با صورت پارامتری $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$، $a \le t \le b$، مشخص می کنیم. با این نمادگذاری داریم $x = g(t)$ و $dx = g'(t)dt$. در این صورت

$$\mathbf{F}.d\mathbf{r} = \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = M(x,y,z)g'(t)dt = M(x,y,z)dx$$

بنابراین انتگرال خطی M روی C نسبت به مختص x را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\int_C M(x,y,z)dx = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

که در آن

$$\mathbf{F} = M(x,y,z)\mathbf{i}$$

به همین ترتیب با تعریف

$$\mathbf{F} = N(x,y,z)\mathbf{j} \text{ یا } \mathbf{F} = P(x,y,z)\mathbf{k}$$

انتگرال های $\int_C Ndy$ و $\int_C Pdz$ را بدست می آوریم. اگر همه چیز را برحسب پارامتر t بیان کنیم فرمول های زیر را برای این انتگرال ها داریم

$$\int_C M(x,y,z)dx = \int_a^b M(g(t),h(t),k(t))g'(t)dt \quad (۱)$$

$$\int_C N(x,y,z)dy = \int_a^b N(g(t),h(t),k(t))h'(t)dt \quad (۲)$$

$$\int_C P(x,y,z)dz = \int_a^b P(g(t),h(t),k(t))k'(t)dt \quad (۳)$$

غالباً این انتگرال های خطی به صورت ترکیب ظاهر می شوند و با نوشتن آنها به صورت زیر نمادگذاری را خلاصه می کنیم

$$\int_C M(x,y,z)dx + \int_C N(x,y,z)dy$$
$$+ \int_C P(x,y,z)dz$$
$$= \int_C Mdx + Ndy + Pdz$$

مثال ۳: مطلوب است انتگرال خطی

$$\int_C -ydx + zdy + 2xdz$$

که C پیچی با معادله زیر است

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k} \text{ و } 0 \le t \le 2\pi$$

حل: همه چیز را برحسب پارامتر t بیان می کنیم لذا

$$z = t \text{ ،} y = \sin t \text{ ،} x = \cos t$$

$$dz = dt \text{ و } dy = \cos t\, dt \text{ ،} dx = -\sin t\, dt$$

در این صورت داریم

$$\int_C -ydx + zdy + 2x\,dz$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[(-\sin t)(-\sin t) + t\cos t + 2\cos t\right]dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[2\cos t + t\cos t + \sin^2 t\right]dt$$
$$= \left[2\sin t + (t\sin t + \cos t) + \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$=[0+(0+1)+(\pi-0)]-[0+(0+1)+(0-0)]=\pi$$

کار انجام شده بوسیله یک نیرو روی یک خم واقع در فضا

فرض کنید میدان برداری

$$\mathbf{F}=M(x,y,z)\mathbf{i}+N(x,y,z)\mathbf{j}+P(x,y,z)\mathbf{k}$$

نشان دهنده یک نیرو در سراسر یک ناحیه واقع در فضا (که ممکن است نیروی گرانش یا یک نیروی الکترومغناطیسی از یک نوع باشد) و

$$\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k} \quad \text{و} \quad a\le t\le b$$

خمی هموار در آن ناحیه باشد. فرمول محاسبه کار انجام شده بوسیله نیرو در حرکت یک جسم در امتداد خم با همان نوع استدلالی بدست می آید که در فصل ۶ بکار بردیم تا فرمول $W=\int_a^b F(x)dx$ را برای کار انجام شده توسط یک نیروی پیوسته با اندازه $F(x)$ و در جهت یک بازه از محور x بدست آوردیم. در مورد خمی چون C در فضا، کار انجام شده بوسیله یک میدان نیروی پیوسته چون $\mathbf{F}$ برای به حرکت در آوردن یک جسم در امتداد C از نقطه ای چون A به نقطه دیگری چون B را به صورت زیر تعریف می کنیم.

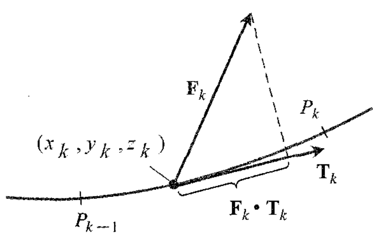
C را به n قوس $P_{k-1}P_k$ با طول های Δs_k تقسیم می کنیم. این کار را از A شروع کرده و در B خاتمه می دهیم. نقطه دلخواهی چون (x_k,y_k,z_k) در قوس $P_{k-1}P_k$ برمی گزینیم و فرض می کنیم $T(x_k,y_k,z_k)$ بردار مماس واحد در نقطه انتخابی باشد. کار W_k انجام شده برای حرکت دادن جسم در امتداد قوس $P_{k-1}P_k$ با مؤلفه مماسی نیروی $\mathbf{F}(x_k,y_k,z_k)$ ضربدر طول قوس Δs_k تقریب زده می شود که Δs_k فاصله تقریبی است که جسم در امتداد قوس حرکت می کند (شکل۱۶-۱۶ را ببینید). در این صورت کار کل انجام شده در حرکت جسم از نقطه A به نقطه B با جمع کردن کار انجام شده در امتداد تمام قوس ها تقریب زده می شود، لذا

$$W\approx\sum_{k=1}^{n}W_k\approx\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}(x_k,y_k,z_k).\mathbf{T}(x_k,y_k,z_k)\Delta s_k$$

برای هر تقسیم C به n قوس، و برای هر انتخاب نقاط (x_k,y_k,z_k) در درون هر قوس، وقتی $n\to\infty$ و $\Delta s_k\to 0$ میل می کند، این جمع ها به انتگرال خطی زیر میل می کنند

$$\int_C \mathbf{F}.\mathbf{T}ds$$

این همان انتگرال خطی $\mathbf{F}$ در امتداد C است که به عنوان کار کل انجام شده تعریف می شود.

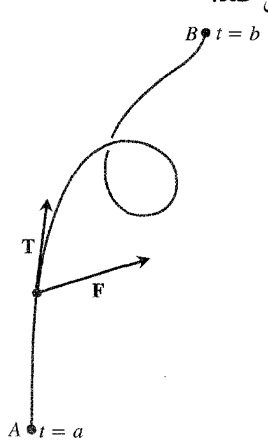


شکل۱۶-۱۶: کار انجام شده در امتداد قوس نشان داده شده در این شکل تقریباً برابر است با $\mathbf{F}_k.\mathbf{T}_k\Delta s_k$، که در آن $\mathbf{F}_k=\mathbf{F}(x_k,y_k,z_k)$ و $\mathbf{T}_k=\mathbf{T}(x_k,y_k,z_k)$.

تعریف. فرض کنید C خم همواری با صورت پارامتری $\mathbf{r}(t)$، $a\le t\le b$ و $\mathbf{F}$ میدان نیروی پیوسته ای روی یک ناحیه شامل C باشد. در این صورت کاری که در حرکت یک جسم از نقطه $A=\mathbf{r}(a)$ به نقطه $B=\mathbf{r}(b)$ در امتداد C انجام می شود برابر است با

$$W=\int_C\mathbf{F}.\mathbf{T}ds=\int_a^b\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt \qquad (۴)$$

علامت مقدار عددیی که از این انتگرال بدست می آوریم به جهت پیمودن خم بستگی دارد. اگر جهت حرکت را معکوس کنیم جهت $\mathbf{T}$ در شکل۱۶-۱۷ معکوس شده و علامت $\mathbf{F.T}$ و انتگرال آن تغییر می کند.



شکل۱۶- ۱۷: کاری که نیروی $\mathbf{F}$ انجام می دهد برابر است با انتگرال خطی مؤلفه عددی $\mathbf{F.T}$ روی خم هموار از A تا B.

با بهره گیری از نمادگذاریهایی که معرفی کرده ایم می توانیم انتگرال کار را به شیوه های مختلف بیان کنیم، بسته به اینکه در یک بحث خاص کدام نوع مناسب تر یا محاسبه آن آسانتر باشد. جدول ۱۶-۲ پنج روش نوشتن انتگرال کار معادله (۴) را نشان می دهد.

جدول۱۶-۲: روشهای مختلف نوشتن انتگرال کار برای

$$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

روی خم

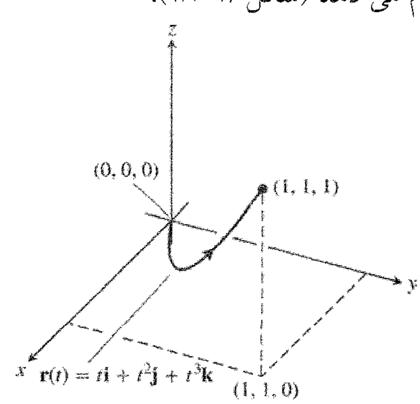
$$C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k} \text{ و } a \le t \le b$$

تعریف:	$\mathbf{W} = \int_C \mathbf{F}.\mathbf{T}\,ds$
شکل دیفرانسیلی برداری	$= \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$
محاسبه برداری پارامتری	$= \int_a^b \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt$
محاسبه عددی پارامتری	$= \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + P\frac{dz}{dt}\right)dt$
شکل دیفرانسیلی عددی	$= \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$

مثال ۴: مطلوب است کاری که میدان نیروی

$$\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$$

در امتداد خم $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$، $0 \le t \le 1$، از $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ انجام می دهد (شکل۱۶-۱۸).



شکل۱۶-۱۸ : خم مذکور در مثال ۴.

حل: ابتدا $\mathbf{F}$ را روی خم $\mathbf{r}(t)$ محاسبه می کنیم:

$$\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$$

(جانشانی $x = t$، $y = t^2$ و $z = t^3$)

$$= \underbrace{(t^2 - t^2)}_{0}\mathbf{i} + (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}$$

سپس $d\mathbf{r}/dt$ را بدست می آوریم:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

در پایان $\mathbf{F}.d\mathbf{r}/dt$ را بدست آورده و از $t = 0$ تا $t = 1$ انتگرال می گیریم

$$\mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[(t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}\right].(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})$$
$$= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2)$$
$$= 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8$$

بنابراین

$$\text{کار} = \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8)dt$$
$$= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9\right]_0^1 = \frac{29}{60}$$

مثال۵: مطلوب است کاری که میدان نیروی

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

در حرکت یک جسم در امتداد خم C زیر انجام می دهد

$$\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sin(\pi t)\mathbf{k} \text{ و } 0 \le t \le 1$$

حل: ابتدا $\mathbf{F}$ را در امتداد C به صورت تابعی از t می نویسیم

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sin(\pi t)\mathbf{k}$$

سپس $d\mathbf{r}/dt$ را محاسبه می کنیم

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\pi\sin(\pi t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \pi\cos(\pi t)\mathbf{k}$$

اکنون ضرب عددی زیر را محاسبه می کنیم

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\pi\sin(\pi t)\cos(\pi t) + 2t^3$$
$$+ \pi\sin(\pi t)\cos(\pi t) = 2t^3$$

کار انجام شده از انتگرال خطی زیر بدست می آید

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \int_0^1 2t^3 dt = \frac{t^4}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

انتگرال های شارش و گردش برای میدان های سرعت

فرض کنید $\mathbf{F}$ نشان دهنده میدان سرعت سیالی است که در ناحیه ای از فضا جریان دارد (این ناحیه می تواند مثلاً اتاقک توربین یک مولد برق آبی باشد). تحت این شرایط

انتگرال $\mathbf{F.T}$ در امتداد خمی واقع در ناحیه مذکور شارش(جریان) سیال در امتداد خم را بدست می دهد.

تعاریف: اگر $\mathbf{r}(t)$ صورت پارامتری خم هموار چون C در دامنه میدان پیوسته سرعت $\mathbf{F}$ باشد **شارش** در امتداد خم از $A=\mathbf{r}(a)$ تا $B=\mathbf{r}(b)$ عبارت است از

$$\text{شارش} = \int_C \mathbf{F.T}ds \qquad (5)$$

این انتگرال در این مورد **انتگرال شارش** نامیده می شود. اگر خم در یک نقطه شروع و پایان پذیرد (خم بسته) بطوریکه $A=B$ باشد مقدار انتگرال شارش را **گردش** در امتداد خم می نامند.

جهتی که در امتداد C می پیماییم حائز اهمیت است. اگر جهت پیمایش را معکوس کنیم $\mathbf{T}$ با $-\mathbf{T}$ جایگزین شده و علامت انتگرال عوض می شود. انتگرال های شارش را به همان شیوه انتگرال های کار محاسبه می کنیم.

مثال۶: میدان سرعت یک سیال عبارت است از

$$\mathbf{F}=x\mathbf{i}+z\mathbf{j}+y\mathbf{k}$$

شارش را در امتداد پیچ زیر بدست آورید

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k} \quad \text{و} \quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}$$

حل: $\mathbf{F}$ را روی خم محاسبه می کنیم

(جانشانی $x=\cos t$، $z=t$ و $y=\sin t$)

$$\mathbf{F}=x\mathbf{i}+z\mathbf{j}+y\mathbf{k}=(\cos t)\mathbf{i}+t\mathbf{j}+(\sin t)\mathbf{k}$$

و بعد $d\mathbf{r}/dt$ را بدست می آوریم

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=(-\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

سپس انتگرال $\mathbf{F}.(d\mathbf{r}/dt)$ را از $t=0$ تا $t=\pi/2$ محاسبه می کنیم

$$\mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}=(\cos t)(-\sin t)+(t)(\cos t)+(\sin t)(1)$$

$$=-\sin t\cos t+t\cos t+\sin t$$

بنابراین

$$\text{شارش}=\int_{t=a}^{t=b}\mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt$$

$$=\int_0^{\pi/2}(-\sin t\cos t+t\cos t+\sin t)dt$$

$$=\left[\frac{\cos^2 t}{2}+t\sin t\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\left(0+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+0\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

مثال ۷: گردش میدان $\mathbf{F}=(x-y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ را در امتداد دایره زیر بیابید (شکل۱۶-۱۹)

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j} \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2\pi$$

حل: روی دایره داریم

$$\mathbf{F}=(x-y)\mathbf{i}+x\mathbf{j}=(\cos t-\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}$$

و

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=(-\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}$$

در این صورت

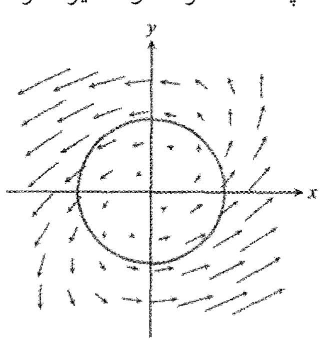
$$\mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-\sin t\cos t+\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1}$$

و از آنجا گردش چنین بدست می آید

$$\text{گردش}=\int_0^{2\pi}\mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_0^{2\pi}(1-\sin t\cos t)dt$$

$$=\left[t-\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi}=2\pi$$

همانطور که شکل۱۶-۱۹ نشان می دهد سیالی با این میدان سرعت به صورت پاد ساعتگرد حول دایره گردش می کند



شکل۱۶-۱۹: میدان برداری $\mathbf{F}$ و خم $\mathbf{r}(t)$ مذکور در مثال ۷.

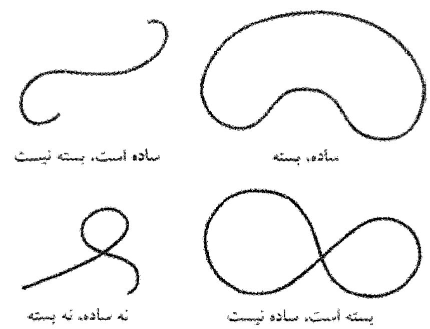
شار گذرنده از یک خم ساده واقع در صفحه

یک خم واقع در صفحه xy **ساده** است اگر خودش را قطع نکند (شکل۱۶-۲۰). وقتی خمی در یک نقطه شروع و پایان پذیرد **خم بسته** یا **حلقه** است. برای یافتن آهنگ ورود یا

خروج یک سیال به یک ناحیه که بوسیله خم بسته ساده و هموار C در صفحه xy محصور شده است انتگرال خطی $\mathbf{F.n}$، مؤلفه عددی میدان سرعت سیال در جهت بردار قائم برونسوی خم، را روی C محاسبه می کنیم. مقدار این انتگرال را شار $\mathbf{F}$ گذرنده از C می نامیم. شار معادل لاتینی جریان (شارش) است، اما بسیاری از محاسبات مربوط به شار اصلاً ربطی به حرکت ندارند. مثلاً اگر $\mathbf{F}$ یک میدان الکتریکی یا یک میدان مغناطیسی باشد انتگرال $\mathbf{F.n}$ باز هم شار میدان گذرنده از C نامیده می شود.

تعریف: اگر C یک خم بسته ساده و هموار در دامنه یک میدان برداری پیوسته چون $\mathbf{F}=M\left(x,y\right)\mathbf{i}+N\left(x,y\right)\mathbf{j}$ واقع در صفحه باشد و اگر $\mathbf{n}$ بردار قائم واحد برونسو برروی C باشد شار $\mathbf{F}$ که از C می گذرد عبارت است از

$$C \text{ گذرنده از } \mathbf{F} \text{ شار} = \int_C \mathbf{F.n}\,ds \qquad (۶)$$



شکل۱۶-۲۰: تفاوت خم هایی که ساده یا بسته اند. خم های بسته، حلقه نیز نامیده می شوند.

به تفاوت بین شار و گردش توجه کنید. شار $\mathbf{F}$ گذرنده از C انتگرال خطی $\mathbf{F.n}$، مؤلفه عددی $\mathbf{F}$ در جهت بردار قائم برونسو، نسبت به طول قوس است. گردش $\mathbf{F}$ در امتداد C انتگرال خطی $\mathbf{F.T}$، مؤلفه عددی $\mathbf{F}$ در جهت بردار مماس واحد، نسبت به طول قوس است. شار عبارت است از انتگرال مؤلفه قائم $\mathbf{F}$؛ گردش عبارت است از انتگرال مؤلفه مماسی $\mathbf{F}$.

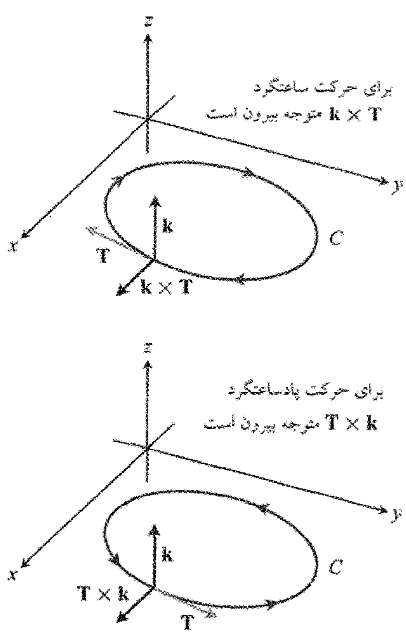
برای محاسبه انتگرال شار مذکور در معادله (۶) با صورت پارامتری هموار خم C شروع می کنیم

$$x=g\left(t\right),\ y=h\left(t\right),\quad a\le t\le b$$

که وقتی t از a تا b افزایش یابد خم را دقیقاً یک بار طی می کند. اگر بردار مماس واحد خم یعنی $\mathbf{T}$ را در بردار $\mathbf{k}$ ضرب برداری کنیم می توانیم بردار قائم واحد برونسوی $\mathbf{n}$ را بیابیم. اما کدام ترتیب را انتخاب کنیم $\mathbf{T}\times\mathbf{k}$ را یا $\mathbf{k}\times\mathbf{T}$ را؟ جهت کدام یک از اینها به سمت بیرون است؟ جواب این سؤال بستگی به این دارد که وقتی t افزایش می یابد C در کدام جهت طی شود. اگر حرکت ساعتگرد باشد جهت $\mathbf{k}\times\mathbf{T}$ به سمت بیرون است؛ اگر حرکت پاد ساعتگرد باشد جهت $\mathbf{T}\times\mathbf{k}$ به سمت بیرون است (شکل۱۶-۲۱). معمولاً $\mathbf{n}=\mathbf{T}\times\mathbf{k}$ انتخاب می شود که در این صورت فرض براین است که حرکت پادساعتگرد است. بنابراین با اینکه مقدار انتگرال معادله (۶) به جهت طی شدن C بستگی ندارد در فرمولهایی که می خواهیم برای محاسبه $\mathbf{n}$ و نیز محاسبه انتگرال بدست آوریم فرض براین است که حرکت پاد ساعتگرد است.

برحسب مؤلفه ها داریم

$$\mathbf{n}=\mathbf{T}\times\mathbf{k}=\left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right)\times\mathbf{k}=\frac{dy}{ds}\mathbf{i}-\frac{dx}{ds}\mathbf{j}$$



شکل۱۶-۲۱: برای یافتن بردار قائم واحد برونسوی یک خم ساده هموار چون C واقع در صفحه xy که با افزایش t در جهت پاد ساعتگرد طی می شود $\mathbf{n}=\mathbf{T}\times\mathbf{k}$ را اختیار می کنیم. برای حرکت ساعتگرد $\mathbf{n}=\mathbf{k}\times\mathbf{T}$ را اختیار می کنیم.

اگر $\mathbf{F}$ به صورت زیر باشد

$$\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$$

آنگاه

$$\mathbf{F}.\mathbf{n} = M(x,y)\frac{dy}{ds} - N(x,y)\frac{dx}{ds}$$

بنابراین

$$\int_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \int_C \left(M\frac{dy}{ds} - N\frac{dx}{ds}\right)ds = \oint_C M dy - N dx$$

روی آخرین انتگرال دایره جهتدار ○ را گذاشته ایم تا خاطرنشان کند که انتگرال گیری روی خم بسته C در جهت پاد ساعتگرد انجام می شود. برای محاسبه این انتگرال، M، dy، N و dx را برحسب پارامتر t بیان کرده و از $t=a$ تا $t=b$ انتگرال می گیریم. برای یافتن شار نیازی نیست $\mathbf{n}$ یا ds را صریحاً بدانیم.

فرمول محاسبه شار گذرنده از یک خم بسته هموار واقع در صفحه

$$(\text{شار } \mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \text{ گذرنده از } C) = \oint_C M dy - N dx \qquad (۷)$$

این انتگرال را می توان از روی هر صورت پارامتری هموار دلخواه $x=g(t)$، $y=h(t)$، $a \le t \le b$ که C را دقیقاً یک بار در جهت پاد ساعتگرد طی می کند محاسبه کرد.

مثال ۸: مطلوب است شار $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ که از دایره $x^2+y^2=1$ واقع در صفحه xy می گذرد (میدان برداری و خم قبلاً در شکل ۱۶-۱۹ نشان داده شده اند).

حل: صورت پارامتری $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$، $0 \le t \le 2\pi$ دقیقاً یک بار دایره را در جهت پاد ساعتگرد طی می کند. بنابراین می توانیم از این صورت پارامتری در معادله (۷) استفاده کنیم. برحسب t داریم

$$M = x - y = \cos t - \sin t \quad \text{و} \quad dy = d(\sin t) = \cos t\, dt$$

$$N = x = \cos t \quad \text{و} \quad dx = d(\cos t) = -\sin t\, dt$$

لذا شار برابر است با

$$\text{شار} = \int_C M dy - N dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

شار $\mathbf{F}$ گذرنده از دایره برابر با π است. چون پاسخ مثبت است شارش خالص گذرنده از خم به سمت بیرون است. شارش درونسوی خالص دارای مقدار شار منفی است.

تمرین های ۱۶-۲

میدان های برداری

در تمرین های ۱-۴ میدان گرادیان توابع مفروض را بیابید.

۱- $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$

۲- $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

۳- $g(x,y,z) = e^z - \ln\left(x^2+y^2\right)$

۴- $g(x,y,z) = xy + yz + xz$

۵- برای میدان برداری $\mathbf{F}$ در صفحه فرمولی به صورت $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ ارائه کنید که دارای این ویژگی باشد که جهت $\mathbf{F}$ به سمت مبداء و اندازه آن با مجذور فاصله مبداء تا نقطه (x,y) نسبت عکس داشته باشد(این میدان در $(0,0)$ تعریف نمی شود).

۶- برای میدان برداری $\mathbf{F}$ در صفحه فرمولی به صورت $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ بنویسید که این ویژگی را داشته باشد که در $(0,0)$، $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ و در هر نقطه دیگر (a,b)، $\mathbf{F}$ بر دایره $x^2+y^2=a^2+b^2$ مماس و جهت آن در جهت ساعتگرد و اندازه اش $|\mathbf{F}| = \sqrt{a^2+b^2}$ باشد.

انتگرال خطی میدان های برداری

در تمرین های ۷-۱۲ انتگرال خطی $\mathbf{F}$ را روی هر یک از

مسیرهای نشان داده شده در شکل زیر از $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ بیابید.

(الف)- مسیر راست – خط $C_1 : \mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t\mathbf{k},\ 0\le t\le 1$

(ب)- مسیر خمیده $C_2 : \mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^4\mathbf{k},\ 0\le t\le 1$

(پ)- مسیر $C_3 \cup C_4$ متشکل از پاره خطی که $(0,0,0)$ را به $(1,1,0)$ وصل می کند و به دنبال آن پاره خطی که $(1,1,0)$ را به $(1,1,1)$ وصل می کند.

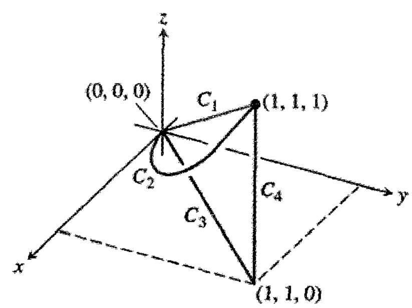
۷- $\mathbf{F}=3y\mathbf{i}+2x\mathbf{j}+4z\mathbf{k}$ ۸- $\mathbf{F}=\left[1/\left(x^2+1\right)\right]\mathbf{j}$

۹- $\mathbf{F}=\sqrt{z}\,\mathbf{i}-2x\mathbf{j}+\sqrt{y}\,\mathbf{k}$

۱۰- $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$

۱۱- $\mathbf{F}=\left(3x^2-3x\right)\mathbf{i}+3z\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۱۲- $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}+(z+x)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$



انتگرال خطی نسبت به x، y و z

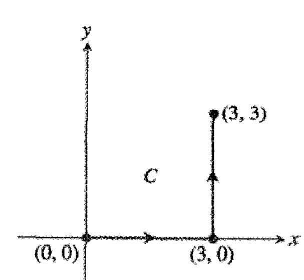
در تمرین های ۱۳- ۱۶ انتگرال های خطی را در امتداد مسیر C مفروض بیابید.

۱۳- $\int_C (x-y)dx$ که در آن

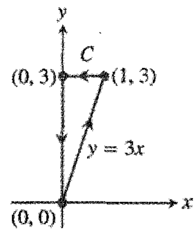
$$C: x=t, y=2t+1, 0\le t\le 3$$

۱۴- $\int_C \frac{x}{y}dy$ که در آن $C: x=t, y=t^2, 1\le t\le 2$

۱۵- $\int_C \left(x^2+y^2\right)dy$، که C در شکل زیر مشخص شده است.



۱۶- $\int_C \sqrt{x+y}\,dx$، که C در شکل زیر مشخص شده است.



۱۷- هر یک از انتگرال های زیر را در امتداد خم $0\le t\le 1$ و $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}-\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$ محاسبه کنید

(الف)- $\int_C (x+y-z)dx$

(ب)- $\int_C (x+y-z)dy$

(پ)- $\int_C (x+y-z)dz$

۱۸- هر یک از انتگرال های زیر را روی خم $0\le t\le \pi$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}-(\cos t)\mathbf{k}$ محاسبه کنید.

(الف)- $\int_C xz\,dx$ (ب)- $\int_C xz\,dy$ (پ)- $\int_C xyz\,dz$

کار

در تمرین های ۱۹-۲۲ مطلوب است کاری که $\mathbf{F}$ روی خم مفروض در جهت افزایش t انجام می دهد.

۱۹- $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+y\mathbf{j}-yz\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t\mathbf{k} \text{ و } 0\le t\le 1$$

۲۰- $\mathbf{F}=2y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+(t/6)\mathbf{k} \text{ و } 0\le t\le 2\pi$$

۲۱- $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t)=(\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}+t\mathbf{k} \text{ و } 0\le t\le 2\pi$$

۲۲- $\mathbf{F}=6z\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+12x\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t)=(\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}+(t/6)\mathbf{k} \text{ و } 0\le t\le 2\pi$$

انتگرال های خطی در صفحه

۲۳- مطلوب است

$$\int_C xy\,dx+(x+y)dy$$

روی خم $y=x^2$ از $(-1,1)$ تا $(2,4)$.

۲۴- مطلوب است

$$\int_C (x-y)dx+(x+y)dy$$

در جهت پاد ساعتگرد حول مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(1,0)$ و $(0,1)$

۲۵- مطلوب است $\int_C \mathbf{F}.\mathbf{T}ds$ برای میدان برداری $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}-y\mathbf{j}$ روی خم $x=y^2$ از $(4,2)$ تا $(1,-1)$.

۲۶- مطلوب است $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ برای میدان برداری $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$ در جهت پاد ساعتگرد برروی دایره واحد $x^2+y^2=1$ از $(1,0)$ تا $(0,1)$.

کار، گردش و شار در صفحه

۲۷- **کار.** کاری را که نیروی $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}$ روی خط راست از $(1,1)$ تا $(2,3)$ انجام می دهد بیابید.

۲۸- **کار.** مطلوب است کاری که گرادیان

$$f(x,y)=(x+y)^2$$

در جهت پاد ساعتگرد حول دایره $x^2+y^2=4$ از $(2,0)$ تا خود این نقطه انجام می دهد.

۲۹- **گردش و شار.** مطلوب است گردش میدان های

$$\mathbf{F}_1=x\mathbf{i}+y\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}_2=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$$

در امتداد هر یک از خم های زیر و نیز شار آنها که از خم های زیر می گذرند:

(الف)- دایره: $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}$ و $0\le t\le 2\pi$

(ب)- بیضی: $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(4\sin t)\mathbf{j}$ و $0\le t\le 2\pi$

۳۰- **شار گذرنده از دایره.** مطلوب است شار میدان های

$$\mathbf{F}_1=2x\mathbf{i}-3y\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}_2=2x\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$$

گذرنده از دایره

$$\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j} \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2\pi$$

در تمرین های ۳۱-۳۴ مطلوب است شار و گردش میدان $\mathbf{F}$ در امتداد (گذرنده از) مسیر نیمدایره ای بسته ای که متشکل است از کمان نیمدایره ای

$$\mathbf{r}_1(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j} \quad \text{و} \quad 0\le t\le \pi$$

و به دنبال آن پاره خط $-a\le t\le a$ و $\mathbf{r}_2(t)=t\mathbf{i}$.

۳۱- $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ ۳۲- $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}$

۳۳- $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ ۳۴- $\mathbf{F}=-y^2\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}$

۳۵- **انتگرال های شارش.** مطلوب است شارش میدان سرعت

$$\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}-(x^2+y^2)\mathbf{j}$$

روی هر یک از مسیرهای زیر از $(1,0)$ تا $(-1,0)$ در صفحه xy.

(الف)- نیمه بالایی دایره $x^2+y^2=1$.

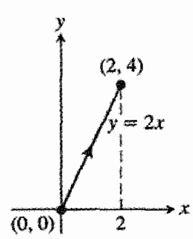
(ب)- پاره خط از $(1,0)$ تا $(-1,0)$

(پ)- دو پاره خط متوالی یکی از $(1,0)$ تا $(0,-1)$ و دیگری از $(0,-1)$ تا $(-1,0)$.

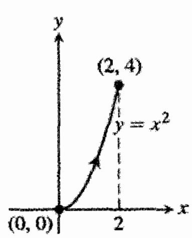
۳۶- **شار گذرنده از مثلث.** مطلوب است شار میدان $\mathbf{F}$ تمرین ۳۵ که به صورت برونسو از مثلثی با رئوس $(1,0)$، $(0,1)$ و $(-1,0)$ می گذرد.

۳۷- مطلوب است شارش میدان سرعت $\mathbf{F}=y^2\mathbf{i}+2xy\mathbf{j}$ در امتداد هر یک از مسیرهای زیر از $(0,0)$ تا $(2,4)$.

(الف)-



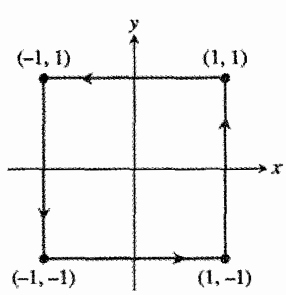
(ب)-



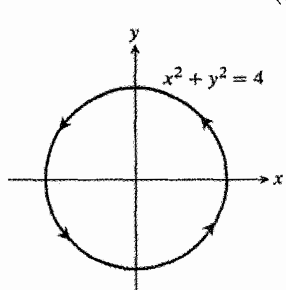
(پ)- هر مسیری از $(0,0)$ تا $(2,4)$ غیر از مسیرهای (الف) و (ب).

۳۸- مطلوب است گردش میدان $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+(x+2y)\mathbf{j}$ در امتداد هر یک از مسیرهای بسته زیر.

(الف)-



(ب)-



(پ)- هر مسیر بسته ای متفاوت از مسیرهای (الف) و (ب).

میدان های برداری واقع در صفحه

۳۹- میدان چرخشی. میدان چرخشی

$$\mathbf{F}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}$$

(شکل۱۶-۱۲ را ببینید) را همراه با مؤلفه های افقی و قائم آن در مجموعه مناسبی از نقاط روی دایره $x^2+y^2=4$ رسم کنید.

۴۰- میدان شعاعی. میدان شعاعی

$$\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$$

(شکل۱۶- ۱۱را ببینید) را به همراه مؤلفه های افقی و قائم آن در مجموعه مناسبی از نقاط روی دایره $x^2+y^2=1$ رسم کنید.

۴۱- میدانی از بردارهای مماس.

(الف)- مطلوب است میدانی چون

$$\mathbf{G}=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$$

در صفحه xy با این ویژگی که: در هر نقطه $(a,b)\neq(0,0)$، $\mathbf{G}$ برداری با اندازه $\sqrt{a^2+b^2}$ باشد که بر دایره $x^2+y^2=a^2+b^2$ مماس و جهت آن در جهت پاد ساعتگرد است (این میدان در $(0,0)$ تعریف نشده است).

(ب)- G با میدان چرخشی $\mathbf{F}$ شکل۱۶-۱۲ چه ارتباطی دارد؟

۴۲- میدانی از بردارهای مماس.

(الف)- میدانی چون $\mathbf{G}=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ در صفحه xy بیابید که این ویژگی ها را داشته باشد:

در هر نقطه $(a,b)\neq(0,0)$، $\mathbf{G}$ بردار واحدی مماس بر دایره $x^2+y^2=a^2+b^2$ باشد که در جهت ساعتگرد قرار دارد.

(ب)- $\mathbf{G}$ با میدان چرخشی $\mathbf{F}$ شکل۱۶-۱۲ چه ارتباطی دارد.

۴۳- بردارهای واحد با جهت رو به مبداء. میدانی چون

$$\mathbf{F}=M(x,y)\mathbf{i}+N(x,y)\mathbf{j}$$

در صفحه xy بیابید که این ویژگی را داشته باشد: در هر نقطه $(x,y)\neq(0,0)$، $\mathbf{F}$ بردار واحدی به سمت مبداء باشد (این میدان در $(0,0)$ تعریف نشده است).

۴۴- دو میدان «مرکزی». میدانی چون

$$\mathbf{F}=M(x,y)\mathbf{i}+N(x,y)\mathbf{j}$$

در صفحه xy بیابید که این ویژگی را داشته باشد که: در هر نقطه $(x,y)\neq(0,0)$ جهت $\mathbf{F}$ به سمت مبداء و $|\mathbf{F}|$ (الف)- با فاصله (x,y) تا مبداء برابر باشد و (ب)- با فاصله (x,y) تا مبداء نسبت عکس داشته باشد (این میدان در $(0,0)$ تعریف نشده است).

۴۵- کار و مساحت. فرض کنید f در بازه $a\leq t\leq b$ مشتق پذیر و مثبت است. همچنین فرض کنید C عبارت است از مسیر $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+f(t)\mathbf{j}, a\leq x\leq b$ و $\mathbf{F}=y\mathbf{i}$. آیا رابطه ای بین مقدار انتگرال کار یعنی

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

و مساحت ناحیه محصور شده بوسیله محور t، نمودار f و خطوط $t=a$ و $t=b$ وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۴۶- کار انجام شده بوسیله یک نیروی شعاعی با اندازه ثابت. ذره ای روی خم هموار $y=f(x)$ از $(a,f(a))$ به $(b,f(b))$ می رود. اندازه نیرویی که ذره را حرکت می دهد برابر k و جهت آن همواره در جهت دور شدن از مبداء است. نشان دهید که کاری که این نیرو انجام می دهد برابر است با

$$\int_C \mathbf{F}.\mathbf{T}ds=k\left[\left(b^2+(f(b))^2\right)^{1/2}-\left(a^2+(f(a))^2\right)^{1/2}\right]$$

انتگرال های شارش در فضا

در تمرین های۴۷- ۵۰، $\mathbf{F}$ میدان سرعت سیالی است که در ناحیه ای از فضا شارش می کند. مطلوب است شارش در امتداد خم مفروض در جهت افزایش t.

۴۷- $\mathbf{F}=-4xy\mathbf{i}+8y\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+\mathbf{k},\ 0\leq t\leq 2$$

۴۸- $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t)=3t\mathbf{j}+4t\mathbf{k}, 0\leq t\leq 1$$

۴۹- $\mathbf{F}=(x-z)\mathbf{i}+x\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{k}, 0\le t\le \pi$$

۵۰- $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t)=(-2\cos t)\mathbf{i}+(2\sin t)\mathbf{j}+(2t)\mathbf{k}, 0\le t\le 2\pi$$

۵۱- **گردش.** مطلوب است گردش میدان

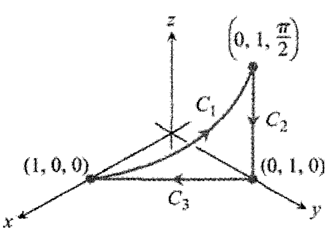
$$\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+2z\mathbf{j}+2y\mathbf{k}$$

در امتداد مسیر بسته ای که شامل سه خم زیر است و در جهت افزایش t طی می شود:

$$C_1:\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}, 0\le t\le \pi/2$$

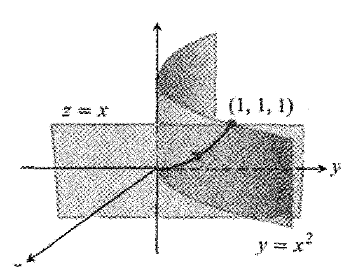
$$C_2:\mathbf{r}(t)=\mathbf{j}+(\pi/2)(1-t)\mathbf{k}, 0\le t\le 1$$

$$C_3:\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j}, 0\le t\le 1$$



۵۲- **گردش صفر.** فرض کنید C بیضی مقطع صفحه $2x+3y-z=0$ با استوانه $x^2+y^2=12$ است. بدون محاسبه مستقیم انتگرال خطی نشان دهید که گردش میدان $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ در امتداد C در هر دو جهت صفر است.

۵۳- **شارش بر روی یک خم.** میدان $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+y\mathbf{j}-yz\mathbf{k}$ میدان سرعت یک شارش در فضاست. مطلوب است مقدار شارش از $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ در امتداد خم تقاطع استوانه $y=x^2$ و صفحه $z=x$. (راهنمایی: از $t=x$ به عنوان پارامتر استفاده کنید).



۵۴- **شارش میدان گرادیان.** مطلوب است شارش میدان $\mathbf{F}=\nabla(xy^2z^3)$:

(الف)- بر روی خم C مذکور در تمرین ۵۲، جهت حرکت را طوری در نظر بگیرید که وقتی از بالا نگاه شود ساعتگرد باشد.

(ب)- روی پاره خطی از $(1,1,1)$ تا $(2,1,-1)$.

تمرینهای رایانه ای

در تمرین های ۵۵- ۶۰ با بهره گیری از یک نرم افزار ریاضی مراحل زیر را انجام داده و کاری را که نیروی $\mathbf{F}$ روی مسیر مفروض انجام می دهد محاسبه کنید.

(الف)- $d\mathbf{r}$ را برای مسیر $\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}$ بیابید.

(ب)- نیروی $\mathbf{F}$ را روی مسیر محاسبه کنید.

(پ)- انتگرال $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید.

۵۵- $\mathbf{F}=xy^6\mathbf{i}+3x(xy^5+2)\mathbf{j}$

$$\mathbf{r}(t)=(2\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}, 0\le t\le 2\pi$$

۵۶- $\mathbf{F}=\dfrac{3}{1+x^2}\mathbf{i}+\dfrac{2}{1+y^2}\mathbf{j}$

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}, 0\le t\le \pi$$

۵۷-

$$\mathbf{F}=(y+yz\cos xyz)\mathbf{i}+(x^2+xz\cos xyz)\mathbf{j}+(z+xy\cos xyz)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(t)=(2\cos t)\mathbf{i}+(3\sin t)\mathbf{j}+\mathbf{k}, 0\le t\le 2\pi$$

۵۸- $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}+ze^x\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t)=-t\mathbf{i}+\sqrt{t}\mathbf{j}+3t\mathbf{k}, 1\le t\le 4$$

۵۹- $\mathbf{F}=(2y+\sin x)\mathbf{i}+(z^2+(1/3)\cos y)\mathbf{j}+x^4\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t)=(\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}+(\sin 2t)\mathbf{k}, -\pi/2\le t\le \pi/2$$

۶۰- $\mathbf{F}=(x^2y)\mathbf{i}+\dfrac{1}{3}x^3\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+(2\sin^2 t-1)\mathbf{k}, 0\le t\le 2\pi$$

۱۶-۳- استقلال از مسیر، میدان های پایستار و توابع پتانسیل

هر **میدان گرانشی** $\mathbf{G}$ میدانی برداری است که اثر گرانش را در هر نقطه از فضا بواسطه حضور جسمی پر جرم نمایش می دهد. نیروی گرانشی وارد بر جسمی به جرم m واقع در چنین میدانی از رابطه $\mathbf{F}=m\mathbf{G}$ بدست می آید. به همین ترتیب، هر **میدان الکتریکی** $\mathbf{E}$ میدانی برداری در فضاست که اثر نیروهای الکتریکی وارد بر یک ذره باردار واقع در داخل آن را نمایش می دهد. نیروی وارد بر جسمی با بار q واقع در چنین میدانی از رابطه $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$ به دست می آید. در میدان های گرانشی و الکتریکی مقدار کاری که لازم است تا جسمی یا باری را از یک نقطه به نقطه دیگر منتقل کند به مکانهای اولیه و نهایی جسم بستگی دارد نه به مسیری که جسم بین این دو نقطه طی می کند. در این بخش میدان های برداری دارای این ویژگی را مورد مطالعه قرار داده و به محاسبه انتگرال های کار مربوط به آنها می پردازیم.

استقلال از مسیر

اگر A و B دو نقطه از یک ناحیه باز از فضا چون D باشند انتگرال خطی $\mathbf{F}$ روی C از A تا B برای میدان $\mathbf{F}$ی که روی D تعریف شده است معمولاً به مسیر C اتخاذ شده بستگی دارد. این مطلب را در بخش۱۶-۱ دیدیم. اما در مورد برخی میدان های خاص، مقدار این انتگرال برای تمام مسیرهایی که A را به B وصل می کنند یکسان است.

تعاریف: فرض کنید $\mathbf{F}$ یک میدان برداری باشد که روی ناحیه بازی از فضا چون D تعریف شده است. همینطور فرض کنید برای هر دو نقطه A و B واقع در D انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ روی مسیری چون C از A تا B واقع در D روی تمام مسیرهایی که از A به B منتهی می شوند یکسان باشد. در این صورت انتگرال $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ در D **مستقل از مسیر** و میدان $\mathbf{F}$ **برروی D پایستار** است.

واژه *پایستار* از فیزیک گرفته شده است و به میدان هایی اطلاق می شود که در آنها اصل پایستگی (بقای) انرژی برقرار است.

وقتی یک انتگرال خطی مستقل از مسیر C از نقطه A تا نقطه B باشد، گاهی انتگرال را به جای نماد متداول انتگرال خطی یعنی $\int_C$ با نماد $\int_A^B$ نمایش می دهیم. این جانشانی به ما کمک می کند تا ویژگی استقلال از مسیر را به خاطر داشته باشیم.

تحت شرایط مشتق پذیری که معمولاً در عمل برقرار است نشان خواهیم داد که یک میدان چون $\mathbf{F}$ پایستار است اگر و تنها اگر میدان گرادیان یک تابع عددی چون f باشد، یعنی $\mathbf{F}$ پایستار است اگر و تنهای اگر به ازای تابعی چون f، $\mathbf{F}=\nabla f$ باشد. در این صورت تابع f نام خاصی دارد.

تعریف: اگر $\mathbf{F}$ یک میدان برداری باشد که روی D تعریف شده است و به ازای یک تابع عددی f برروی D، $\mathbf{F}=\nabla f$ باشد آنگاه f را **تابع پتانسیل $\mathbf{F}$** می نامند.

پتانسیل گرانشی تابعی عددی است که میدان گرادیان آن میدان گرانشی است، پتانسیل الکتریکی تابعی عددی است که میدان گرادیان آن میدان الکتریکی است و به همین ترتیب الی آخر. همانطور که خواهیم دید به محض اینکه تابع پتانسیلی چون f برای میدان $\mathbf{F}$ بیابیم می توانیم تمام انتگرال های خطی واقع در دامنه $\mathbf{F}$ را روی هر مسیر بین A و B به صورت زیر محاسبه کنیم

$$\int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_A^B \nabla f.d\mathbf{r}=f(B)-f(A) \qquad (1)$$

اگر ∇f توابع چند متغیره را چیزی شبیه مشتق f' توابع یک متغیره تصور کنید آنگاه ملاحظه می کنید که معادله (۱) مشابه فرمول قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در حساب برداری است

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$$

میدان های پایستار ویژگی های قابل توجه دیگری هم دارند. مثلاً پایستار بودن $\mathbf{F}$ برروی D معادل با این است که انتگرال $\mathbf{F}$ روی هر مسیر بسته در D صفر است. برای اینکه

معادله (۱) معتبر باشد باید شرایط خاصی بر خم ها، میدان ها و دامنه ها حاکم باشد. در مورد این شرایط بعداً بحث می کنیم.

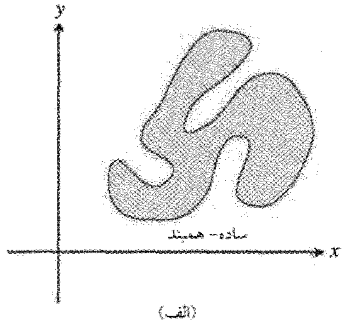
فرض های حاکم بر خم ها، میدان های برداری و دامنه ها

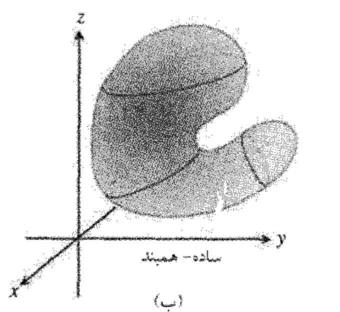
برای معتبر بودن محاسبات و نتایجی که در ادامه بدست می آوریم باید ویژگی های خاصی برای خم ها، رویه ها و میدان های برداری مورد نظر فرض کنیم. این فرضیات را در قالب قضایا بیان می کنیم و در مورد مثال ها و تمرین ها نیز کاربرد دارند مگر اینکه چیز دیگری بیان شده باشد.

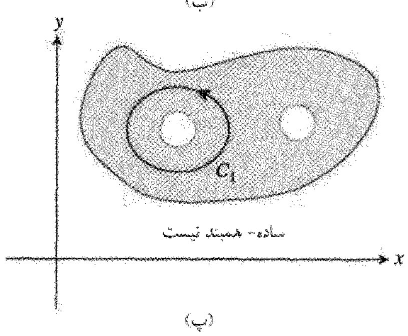
خم هایی که در نظر می گیریم **قطعه قطعه هموار** هستند. چنین خم هایی همانطور که در بخش**۱۳-۱** اشاره کردیم از تعدادی متناهی از قطعات هموار پیاپی تشکیل شده اند. ما آن میدان های برداری $\mathbf{F}$ را در نظر خواهیم گرفت که مؤلفه هایشان مشتقات جزئی اول پیوسته دارند.

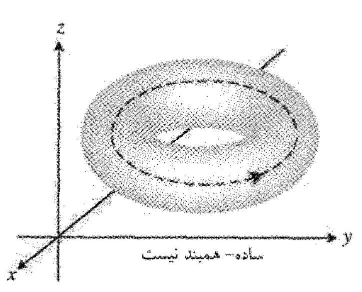
دامنه های D که در نظر می گیریم نواحی باز در فضا هستند لذا هر نقطه واقع در D مرکز یک گوی باز است که کاملاً در D قرار دارد (بخش**۱۳-۱** را ببینید). همینطور فرض می کنیم D **همبند** باشد. برای یک ناحیه باز این بدان معناست که هر دو نقطه واقع در D را بتوان با یک خم هموار واقع در ناحیه به هم وصل کرد. سرانجام فرض می کنیم D **ساده – همبند** باشد، یعنی هر حلقه ای در D را بتوان منقبض کرده و در یک نقطه در D جمع کرد بدون اینکه از D خارج شود. صفحه ای که قرصی از آن برداشته شده است یک ناحیه دو بعدی است که ساده- همبند نیست؛ حلقه ای در صفحه که حول قرص قرار دارد را نمی توان منقبض کرده و در یک نقطه جمع کرد بدون اینکه وارد «حفره» برجای مانده از قرص شد (شکل**۱۶-۲۲**- پ را ببینید). به همین ترتیب اگر خطی را از فضا حذف کنیم ناحیه باقیمانده D ساده – همبند نخواهد بود زیرا نمی توان خمی را که این خط را احاطه کرده است در یک نقطه جمع کرده و در عین حال داخل D باقی ماند.

همبند بودن و ساده- همبند بودن به یک معنا نیستند و هیچکدام از این دو ویژگی دیگری را ایجاب نمی کنند. می توانید تجسم کنید که نواحی همبند نواحی «تک قطعه» هستند و نواحی ساده – همبند آنهایی هستند که فاقد «حفره های حلقه ای» می باشند. کل فضا هم همبند و هم ساده – همبند است. در شکل**۱۶- ۲۲** برخی از این ویژگی ها را نمایش داده ایم.









شکل۱۶-۲۲: چهار ناحیه همبند. در(الف) و (ب) نواحی ساده – همبند هستند. در (پ) و (ت) نواحی ساده- همبند نیستند زیرا خم های C_1 و C_2 را نمی توان منقبض کرده و در یک نقطه در داخل نواحی شامل آنها جمع کرد.

انتگرال های خطی در میدان های پایستار

میدان های گرادیان $\mathbf{F}$ با مشتق گیری از توابع عددی چون f بدست می آیند. قضیه ای مشابه قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال راهی برای محاسبه انتگرال های خطی میدان های گرادیان پیش پای ما قرار می دهد.

قضیه ۱- قضیه اصلی انتگرال های خطی: فرض کنید C خم هموراری است که نقطه A را به نقطه B در صفحه یا فضا وصل می کند و صورت پارامتری آن $\mathbf{r}(t)$ است. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر با بردار گرادیان پیوسته $\mathbf{F}=\nabla f$ بر روی دامنه D، شامل C، است. در این صورت داریم

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=f(B)-f(A)$$

قضیه ۱، مثل قضیه اساسی حساب، راهی برای محاسبه انتگرال های خطی پیش پای ما قرار می دهد بدون اینکه مجبور باشیم از جمع های ریمان حد بگیریم یا انتگرال خطی را با روش بخش۱۶-۲ محاسبه کنیم. قبل از اثبات قضیه ۱ به یک مثال می پردازیم.

مثال ۱: فرض کنید میدان نیروی $\mathbf{F}=\nabla f$ گرادیان تابع زیر است

$$f(x,y,z)=-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

مطلوب است کار انجام شده توسط $\mathbf{F}$ در حرکت یک جسم برروی خم هموار C که $(1,0,0)$ و $(0,0,2)$ را به هم وصل می کند و از مبداء نمی گذرد.

حل: کاربرد قضیه ۱ نشان می دهد که کار انجام شده توسط $\mathbf{F}$ روی هر خم هموار C که دو نقطه مذکور را به هم وصل می کند و از مبداء نمی گذرد برابر است با

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=f(0,0,2)-f(1,0,0)=-\frac{1}{4}-(-1)=\frac{3}{4}$$

هم نیروی گرانشی مربوط به یک سیاره و هم نیروی الکتریکی مربوط به یک ذره باردار را می توان به کمک میدان $\mathbf{F}$ ارائه شده در مثال ۱ مدلسازی کرد، فقط باید ضریب ثابتی به آن اضافه کرد که به واحدهای اندازه گیری بستگی دارد.

اثبات قضیه ۱: فرض کنید A و B دو نقطه واقع در ناحیه D و $C:\mathbf{r}(t)=g(t)\mathbf{i}+h(t)\mathbf{j}+k(t)\mathbf{k}, a\le t\le b$ خم هموراری در D باشد که A و B را به هم وصل می کند. برای صورت پارامتری خم از شکل خلاصه شده $\mathbf{r}(t)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ استفاده می کنیم. روی خم، f تابعی مشتق پذیر از t است و

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

(قاعده زنجیری بخش۱۴-۴ به ازای $x=g(t)$، $y=h(t)$ و $z=k(t)$)

$$=\nabla f.\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right)=\nabla f.\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

(چون $\mathbf{F}=\nabla f$)

بنابراین

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_{t=a}^{t=b}\mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_a^b\frac{df}{dt}dt$$

($\mathbf{r}(a)=A$ و $\mathbf{r}(b)=B$)

$$=f(g(t),h(t),k(t))\Big]_a^b=f(B)-f(A)$$

بدین ترتیب قضیه ۱ نشان می دهد که همینکه تابع f را بدانیم محاسبه انتگرال خطی میدان گرادیان $\mathbf{F}=\nabla f$ سرراست است. بسیاری از میدان های برداری مهمی که در علوم کاربردی با آنها مواجه می شویم در واقع میدان های گرادیان هستند. نتیجه بعدی که پیامد قضیه ۱ است نشان می دهد که هر میدان پایستاری از این نوع است.

قضیه۲- میدان های پایستار میدان های گرادیان هستند.
فرض کنید $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}$ یک میدان برداری است که مؤلفه هایش در سراسر ناحیه همبند بازی چون D از فضا پیوسته اند. در این صورت $\mathbf{F}$ پایستار است اگر و تنها اگر $\mathbf{F}$ میدان گرادیان تابع مشتق پذیری چون f باشد یعنی $\mathbf{F}=\nabla f$.

قضیه ۲ بیان می کند که $\mathbf{F}=\nabla f$ اگر و تنها اگر برای هر دو نقطه A و B در ناحیه D، مقدار انتگرال خطی $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ مستقل از مسیر C باشد که A و B واقع در D را به هم وصل می کند.

اثبات قضیه۲: اگر $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان باشد آنگاه تابعی مشتق پذیر چون f وجود دارد به قسمی که $\mathbf{F}=\nabla f$، و قضیه ۱ نشان می دهد که $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=f(B)-f(A)$. مقدار این انتگرال خطی به C بستگی ندارد بلکه فقط به نقاط انتهایی آن بستگی دارد. بنابراین انتگرال خطی مستقل از مسیر است و $\mathbf{F}$ در تعریف میدان پایستار صدق می کند.

از سوی دیگر، فرض کنید $\mathbf{F}$ یک میدان برداری پایستار است. می خواهیم تابعی چون f بر D بیابیم که در رابطه $\nabla f=\mathbf{F}$ صدق کند. ابتدا نقطه ای چون A در D انتخاب کرده و $f(A)=0$ قرار می دهیم. برای هر نقطه دیگر B در D، $f(B)$ را برابر با $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ تعریف می کنیم که C هر خم هموار دلخواهی در D است که A را به B وصل می کند. مقدار $f(B)$ به انتخاب C بستگی ندارد چون $\mathbf{F}$ پایستار است. برای نشان دادن اینکه $\nabla f=\mathbf{F}$، لازم است نشان دهیم که $\partial f/\partial x=M$، $\partial f/\partial y=N$ و $\partial f/\partial z=P$.

فرض کنید مختصات B عبارت است از (x,y,z). بنابه تعریف، مقدار تابع f در نقطه مجاور B_0 واقع در (x_0,y,z) برابر است با $\int_{C_0} F.dr$، که C_0 هر مسیر دلخواه از A به B_0 است. ما مسیر $C=C_0\cup L$ را از A به B انتخاب می کنیم که متشکل از دو بخش است. بخش اول، C_0، که A را به B_0 وصل می کند و بخش دوم، پاره خط L، که B_0 را به B وصل می کند (شکل۱۶- ۲۳). وقتی B_0 نزدیک B باشد پاره خط L در D قرار می گیرد و چون مقدار $f(B)$ مستقل از مسیر از A تا B است

$$f(x,y,z)=\int_{C_0}\mathbf{F}.d\mathbf{r}+\int_L \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

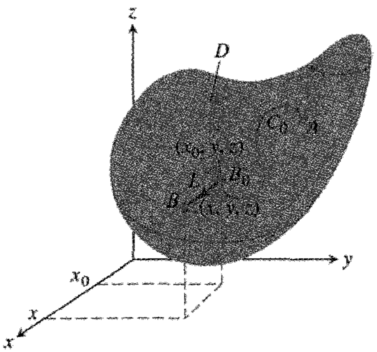
بعد از مشتق گیری داریم

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{C_0}\mathbf{F}.d\mathbf{r}+\int_L \mathbf{F}.d\mathbf{r}\right)$$

فقط جمله آخر در سمت راست به x بستگی دارد لذا

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}\int_L \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

اکنون L را به صورت زیر پارامتری می کنیم



شکل۱۶- ۲۳: تابع $f(x,y,z)$ در اثبات قضیه ۲ با انتگرال خطی $\int_{C_0}\mathbf{F}.d\mathbf{r}=f(B_0)$ از A تا B_0 بعلاوه انتگرال خطی $\int_L \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ برروی پاره خط L موازی با محور x که B_0 را به B واقع در (x,y,z) وصل می کند محاسبه می شود. مقدار f در A برابر است با $f(A)=0$.

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \quad و \quad x_0\le t\le x$$

در این صورت $d\mathbf{r}/dt=\mathbf{i}$، $\mathbf{F}.d\mathbf{r}/dt=M$ و

$$\int_L \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_{x_0}^{x} M(t,y,z)dt$$

بعد از جانشانی و با بهره گیری از قضیه اساسی حساب خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} M(t,y,z)dt=M(x,y,z)$$

مشتقات جزئی $\partial f/\partial y=N$ و $\partial f/\partial z=P$ هم به همین ترتیب بدست می آیند و در نهایت نتیجه می شود $\mathbf{F}=\nabla f$.

مثال ۲: مطلوب است کار انجام شده بوسیله میدان پایستار

$$\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}=\nabla f$$

که در آن

$$f(x,y,z)=xyz$$

روی هر خم هموار C که نقطه $A(-1,3,9)$ را به $B(1,6,-4)$ وصل می کند.

حل: به ازای $f(x,y,z)=xyz$ داریم

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_A^B \nabla f\ d\mathbf{r}$$

($\mathbf{F}=\nabla f$ و استقلال از مسیر)

$$=f(B)-f(A) \qquad (قضیه ۱)$$

$$= xyz\Big|_{(1,6,-4)} - xyz\Big|_{(-1,3,9)}$$

$$= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9)$$

$$= -24 + 27 = 3$$

وقتی مسیر انتگرال گیری یک خم بسته یا حلقه (طوق) باشد ویژگی بسیار مفیدی از انتگرال های خطی در میدان های پایستار ظاهر می شود. غالباً از نماد $\oint_C$ برای انتگرال گیری حول مسیرهای بسته (که در بخش بعدی بطور مفصل تر مورد بحث قرار می گیرد) استفاده می کنیم.

قضیه۳- ویژگی حلقه میدان های پایستار: احکام زیر با هم معادل اند:

۱- حول هر حلقه (یعنی خم بسته C) در D داریم:

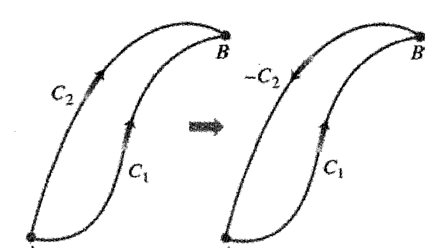
$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$$

۲- میدان $\mathbf{F}$ روی D پایستار است.

اثبات $(2) \to (1)$: می خواهیم نشان دهیم که برای هر دو نقطه A و B در D، انتگرال $\mathbf{F}.d\mathbf{r}$ روی هر دو مسیر C_1 و C_2 که A و B را به هم وصل می کنند مقدار یکسانی دارد. جهت روی C_2 را معکوس می کنیم تا مسیر $-C_2$ از B به A به دست آید(شکل۱۶-۲۴). دو مسیر C_1 و $-C_2$ روی هم یک حلقه بسته C تشکیل می دهند و طبق فرض داریم

$$\int_{C_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$$

بنابراین انتگرال های روی C_1 و C_2 مقدار یکسانی بدست می دهند. توجه کنید که تعریف $\mathbf{F}.d\mathbf{r}$ نشان می دهد که عوض کردن جهت روی یک خم باعث تغییر علامت انتگرال خطی می شود.



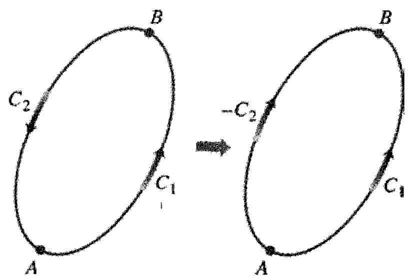
شکل۱۶-۲۴: اگر دو مسیر از A به B داشته باشیم می توانیم یکی از آنها را معکوس کرده و یک حلقه بسازیم.

اثبات $(2) \leftarrow (1)$: می خواهیم نشان دهیم که انتگرال $\mathbf{F}.d\mathbf{r}$ روی هر حلقه بسته C صفر است. دو نقطه A و B برروی C انتخاب کرده و با استفاده از آنها C را به دو قطعه تقسیم می کنیم: C_1 از A تا B و به دنبال آن C_2 از B تا A (شکل۱۶-۲۵). در این صورت

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$$

در نمودار زیر نتایج قضایای ۲ و ۳ خلاصه شده است.

$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ روی هر حلقه در D $\Leftrightarrow$ $\mathbf{F}$ روی D پایستار است $\Leftrightarrow$ $\mathbf{F} = \nabla f$ روی D



شکل۱۶-۲۵: اگر A و B روی حلقه واقع باشند می توانیم بخشی از حلقه را معکوس کرده و دو مسیر از A به B بسازیم.

در اینجا دو سؤال مطرح می شود:

۱- چگونه پی می بریم که یک میدان برداری مفروض چون $\mathbf{F}$ پایستار است؟

۲- اگر $\mathbf{F}$ واقعاً پایستار باشد چگونه تابع پتانسیل آن f را می یابیم (بطوریکه $\mathbf{F} = \nabla f$ باشد)؟

تعیین پتانسیل برای میدان های پایستار

آزمون پایستار بودن یک میدان برداری این است که برخی مشتقات جزئی مؤلفه های میدان با هم برابر باشند.

آزمون مؤلفه ها برای میدان های پایستار

فرض کنید

$$\mathbf{F} = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

میدانی بر روی یک دامنه همبند و ساده – همبند باشد که توابع مؤلفه آن مشتقات جزئی اول پیوسته دارند. در این صورت $\mathbf{F}$ پایستار است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial z} \text{ و } \frac{\partial M}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x} \text{ و } \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y} \qquad (۲)$$

اثبات اینکه اگر F پایستار باشد معادلات (۲) برقرارند: تابع پتانسیلی چون f وجود دارد به قسمی که

$$\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

بنابراین

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}$$ (قضیه مشتق آمیخته، بخش۱۴-۳)

$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial z}$$

بقیه روابط معادلات (۲) هم به نحو مشابه اثبات می شوند.

بخش دوم اثبات، یعنی اینکه معادلات (۲) ایجاب می کنند که **F** پایستار باشد، پیامدی از قضیه استوکس است که در بخش۱۶-۷ به آن می پردازیم و مستلزم این است که فرض کنیم دامنه **F** ساده – همبند است.

همینکه بدانیم **F** پایستار است معمولاً می خواهیم تابع پتانسیلی برای **F** بیابیم و این مستلزم حل معادله $\nabla f=\mathbf{F}$ است یا

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}$$

تا **F** بدست آید. برای این کار از سه معادله زیر انتگرال می گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M \ ،\ \frac{\partial f}{\partial y}=N \ ،\ \frac{\partial f}{\partial z}=P$$

مثال زیر چگونگی انجام این کار را نشان می دهد.

مثال ۳: نشان دهید که

$$\mathbf{F}=\left(e^x\cos y+yz\right)\mathbf{i}+\left(xz-e^x\sin y\right)\mathbf{j}+\left(xy+z\right)\mathbf{k}$$

روی دامنه طبیعی اش پایستار است و یک تابع پتانسیل برای آن بیابید.

حل: دامنه طبیعی **F** کل فضاست، که هم همبند و هم ساده – همبند است. آزمون مؤلفه ها(معادلات (۲)) را برای توابع مؤلفه زیر بکار می بریم

$$N=xz-e^x\sin y \ ،\ M=e^x\cos y+yz$$

$$P=xy+z$$

و بدست می آوریم

$$\frac{\partial M}{\partial z}=y=\frac{\partial P}{\partial x} \ ،\ \frac{\partial P}{\partial y}=x=\frac{\partial N}{\partial z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-e^x\sin y+z=\frac{\partial M}{\partial y}$$

مشتقات جزئی پیوسته اند، لذا این برابری ها بیان می کنند که **F** پایستار است و در نتیجه تابعی چون f وجود دارد به قسمی که $\nabla f=\mathbf{F}$ (قضیه۲).

f را با انتگرال گیری از معادلات زیر بدست می آوریم

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xz-e^x\sin y \ ،\ \frac{\partial f}{\partial z}=xy+z \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^x\cos y+yz$$

در معادله اول y و z را ثابت نگه داشته و نسبت به x انتگرال می گیریم

$$f(x,y,z)=e^x\cos y+xyz+g(y,z)$$

ثابت انتگرال گیری را به صورت تابعی از y و z می نویسیم چون مقدار آن ممکن است به y و z بستگی داشته باشد ولو اینکه به x بستگی ندارد. سپس $\partial f/\partial y$ را از این معادله محاسبه کرده و آن را با عبارت مربوط به $\partial f/\partial y$ در معادلات (۳) برابر قرار می دهیم. با این کار بدست می آوریم

$$-e^x\sin y+xz+\frac{\partial g}{\partial y}=xz-e^x\sin y$$

لذا $\partial g/\partial y=0$. بنابراین g فقط تابعی از z است و

$$f(x,y,z)=e^x\cos y+xyz+h(z)$$

اکنون $\partial f/\partial z$ را از این معادله محاسبه کرده و آن را با فرمول $\partial f/\partial z$ در معادلات (۳) برابر قرار می دهیم. با این کار بدست می آوریم

$$xy+\frac{dh}{dz}=xy+z \quad \text{یا} \quad \frac{dh}{dz}=z$$

بنابراین

$$h(z)=\frac{z^2}{2}+C$$

در نتیجه

$$f(x,y,z)=e^x\cos y+xyz+\frac{z^2}{2}+C$$

پس تعداد بیشماری تابع پتانسیل برای $\mathbf{F}$ وجود دارد، یکی به ازای هر مقدار C.

مثال ۴: نشان دهید که

$$\mathbf{F}=(2x-3)\mathbf{i}-z\mathbf{j}+(\cos z)\mathbf{k}$$

پایستار نیست.

حل: آزمون مؤلفه ها را که در معادلات (۲) بیان شده بکار برده و بلافاصله بدست می آوریم

$$\frac{\partial N}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(-z)=-1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\cos z)=0$$

دو مقدار با هم برابر نیستند، پس $\mathbf{F}$ پایستار نیست. نیازی به ادامه آزمون نیست.

مثال ۵: نشان دهید که میدان برداری زیر در معادلات آزمون مؤلفه ها صدق می کند اما روی دامنه طبیعی اش پایستار نیست. توضیح دهید که چطور چنین چیزی ممکن است.

$$\mathbf{F}=\frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}+0\mathbf{k}$$

حل: داریم

$$M=-y/(x^2+y^2) \text{ ، } N=x/(x^2+y^2) \text{ ، } P=0$$

اگر آزمون مؤلفه ها را بکار ببریم خواهیم داشت

$$\frac{\partial P}{\partial x}=0=\frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{،} \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial N}{\partial z}$$

بنابراین ممکن است به نظر برسد که میدان $\mathbf{F}$ از آزمون مؤلفه ها موفق بیرون می آید. اما فرض آزمون این است که دامنه $\mathbf{F}$ ساده – همبند است که در این مورد اینگونه نیست. چون x^2+y^2 نمی تواند برابر صفر باشد دامنه طبیعی مکمل محور z (همه جای فضا غیر از محور z) است و شامل حلقه هایی است که نمی توان آن را منقبض کرده و در یک نقطه جمع کرد. چنین حلقه ای، دایره واحد C در صفحه xy است. صورت پارامتری این دایره عبارت است از $0\le t\le 2\pi$ و $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}$. این حلقه حول محور z پیچیده است و نمی توان آن را منقبض کرده و در یک نقطه جمع کرد در حالیکه داخل ناحیه مکمل محور z باقی بماند.

برای نشان دادن اینکه $\mathbf{F}$ پایستار نیست انتگرال خطی $\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ را حول حلقه C محاسبه می کنیم. ابتدا میدان را برحسب پارامتر t می نویسیم

$$\begin{aligned}\mathbf{F}&=\frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}\\&=\frac{-\sin t}{\sin^2 t+\cos^2 t}\mathbf{i}+\frac{\cos t}{\sin^2 t+\cos^2 t}\mathbf{j}\\&=(-\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}\end{aligned}$$

سپس مشتق زیر را محاسبه می کنیم

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=(-\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\mathbf{j}$$

و بعد انتگرال خطی را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\oint_C \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)dt=2\pi$$

چون انتگرال خطی $\mathbf{F}$ حول حلقه C صفر نیست میدان $\mathbf{F}$ طبق قضیه ۳ پایستار نیست.

مثال ۵ نشان می دهد که وقتی دامنه میدان ساده – همبند نباشد آزمون مؤلفه ها کاربردی ندارد. اما اگر دامنه را در مثال فوق چنان تغییر دهیم که به گویی به شعاع ۱ و به مرکز نقطه $(2,2,2)$ محدود باشد یا به هر ناحیه گوی – شکلی که شامل هیچ قسمتی از محور z نباشد، آنگاه این دامنه جدید D ساده – همبند خواهد بود. در این صورت معادلات مشتقات جزئی(۲)، و نیز تمام فرض های آزمون مؤلفه ها، برآورده می شوند. در این وضعیت جدید، میدان $\mathbf{F}$ مثال ۵ برروی D پایستار است. درست همانطور که باید در مورد یک تابع هنگام تعیین اینکه آیا خاصیتی را در سراسر دامنه اش (مثل خاصیت پیوستگی یا مقدار میانی) برآورده می کند یا نه، احتیاط کنیم باید در مورد میدان های برداری هم هنگام تعیین اینکه خواصی را روی دامنه نسبت داده شده به آن دارد یا نه احتیاط کنیم.

صورت های دیفرانسیلی کامل

غالباً بهتر است انتگرال های کار و گردش را به صورت دیفرانسیلی زیر بنویسیم که در بخش ۱۶-۲ بحث شد

$$\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

اگر $Mdx + Ndy + Pdz$ دیفرانسیل کامل تابعی چون f و C هر مسیر دلخواهی باشد که دو نقطه A و B را به هم وصل می کند محاسبه چنین انتگرالهایی نسبتاً آسان خواهد بود. زیرا در این صورت داریم

$$\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$
$$= \int_C \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$
$$= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} \qquad (\text{پایستار است } \nabla f)$$
$$= f(B) - f(A) \qquad (\text{قضیه ۱})$$

بنابراین

$$\int_A^B df = f(B) - f(A)$$

که درست همان چیزی است که در مورد توابع مشتق پذیر یک متغیره داشتیم.

تعاریف: هر عبارت

$$M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz$$

یک **صورت دیفرانسیلی** است. یک صورت دیفرانسیلی روی دامنه ای چون D از فضا **کامل** است اگر به ازای یک تابع عددی چون f در سراسر D داشته باشیم:

$$Mdx + Ndy + Pdz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

توجه کنید که اگر روی D داشته باشیم

$$Mdx + Ndy + Pdz = df$$

آنگاه $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ میدان گرادیان f بر D است. بالعکس، اگر $\mathbf{F} = \nabla f$ باشد آنگاه صورت

$$Mdx + Ndy + Pdz$$

کامل است. بنابراین آزمون کامل بودن صورت دیفرانسیلی همان آزمون پایستار بودن $\mathbf{F}$ است.

آزمون مؤلفه ها برای کامل بودن صورت دیفرانسیلی

$$Mdx + Ndy + Pdz$$

صورت دیفرانسیلی $Mdx + Ndy + Pdz$ روی یک دامنه همبند و ساده – همبند کامل است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

این درست معادل این است که بگوییم میدان

$$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

پایستار باشد.

مثال ۶: نشان دهید که $ydx + xdy + 4dz$ کامل است و بعد انتگرال زیر را روی هر مسیری که $(1,1,1)$ را به $(2,3,-1)$ وصل می کند محاسبه کنید.

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx + x\,dy + 4dz$$

حل: فرض می کنیم $M = y$، $N = x$ و $P = 4$ و آزمون کامل بودن را بکار می بریم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}$$

این برابری ها حکایت از آن دارند که $ydx + xdy + 4dz$ کامل است، لذا به ازای تابعی چون f داریم

$$y\,dx + x\,dy + 4dz = df$$

و مقدار انتگرال برابر است با $f(2,3,-1) - f(1,1,1)$.

با انتگرال گیری از معادلات

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4 \qquad (۴)$$

f را با اختلاف یک مقدار ثابت می یابیم. از معادله اول بدست می آوریم

$$f(x,y,z) = xy + g(y,z)$$

و معادله دوم بیان می کند که

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x \quad \text{و} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

بنابراین g فقط تابعی از z است و

$$f(x,y,z) = xy + h(z)$$

معادله سوم از معادلات (۴) حاکی است که

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0+\frac{dh}{dz}=4 \quad \text{یا} \quad h(z)=4z+C$$

بنابراین

$$f(x,y,z)=xy+4z+C$$

مقدار انتگرال خطی مستقل از مسیری است که از $(1,1,1)$ به $(2,3,-1)$ انتخاب می شود و برابر است با

$$f(2,3,-1)-f(1,1,1)=2+C-(5+C)=-3$$

تمرین های۱۶-۳

آزمون میدان های پایستار

در مسائل ۱- ۶ تعیین کنید کدام میدان پایستار است و کدام پایستار نیست.

۱- $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$

۲- $\mathbf{F}=(y\sin z)\mathbf{i}+(x\sin z)\mathbf{j}+(xy\cos z)\mathbf{k}$

۳- $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}-y\mathbf{k}$

۴- $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$

۵- $\mathbf{F}=(z+y)\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(y+x)\mathbf{k}$

۶- $\mathbf{F}=(e^x\cos y)\mathbf{i}-(e^x\sin y)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

یافتن تابع پتانسیل

در تمرین های۷- ۱۲ یک تابع پتانسیل f برای میدان $\mathbf{F}$ بیابید.

۷- $\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+3y\mathbf{j}+4z\mathbf{k}$

۸- $\mathbf{F}=(y+z)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}-(x+y)\mathbf{k}$

۹- $\mathbf{F}=e^{y+2z}(\mathbf{i}+x\mathbf{j}+2x\mathbf{k})$

۱۰- $\mathbf{F}=(y\sin z)\mathbf{i}+(x\sin z)\mathbf{j}+(xy\cos z)\mathbf{k}$

۱۱- $\mathbf{F}=\left(\ln x+\sec^2(x+y)\right)\mathbf{i}+\left(\sec^2(x+y)+\frac{y}{y^2+z^2}\right)\mathbf{j}+\frac{z}{y^2+z^2}\mathbf{k}$

۱۲- $\mathbf{F}=\frac{y}{1+x^2y^2}\mathbf{i}+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}+\frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}}+\frac{1}{z}\right)\mathbf{k}$

صورت های دیفرانسیلی کامل

در تمرین های۱۳- ۱۷ نشان دهید که صورت های دیفرانسیلی موجود در انتگرال ها کامل اند. سپس انتگرال ها را محاسبه کنید.

۱۳- $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz$

۱۴- $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz$

۱۵- $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,dx+(x^2-z^2)dy-2yz\,dz$

۱۶- $\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x\,dx-y^2\,dy-\frac{4}{1+z^2}dz$

۱۷- $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y\cos x\,dx+\cos y\sin x\,dy+dz$

یافتن توابع پتانسیل برای محاسبه انتگرال های خطی

با اینکه میدان های وابسته به تمرین های۱۸- ۲۲ روی کل فضای R^3 تعریف نشده اند اما ساده – همبند هستند و می توان آزمون مؤلفه ها را در مورد آنها بکار برده و نشان داد که همگی پایستارند. برای هر میدان یک تابع پتانسیل یافته و انتگرال ها را همانند مثال ۶ محاسبه کنید.

۱۸- $\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2\cos y\,dx+\left(\frac{1}{y}-2x\sin y\right)dy+\frac{1}{z}dz$

۱۹- $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2\,dx+\frac{z^2}{y}dy+2z\ln y\,dz$

۲۰- $\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x\ln y-yz)dx+\left(\frac{x^2}{y}-xz\right)dy-xy\,dz$

۲۱- $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y}dx+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{y}{z^2}dz$

۲۲- $\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$

کاربردها و مثال ها

۲۳- بازبینی مثال ۶. انتگرال

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx+x\,dy+4\,dz$$

در مثال ۶ آمده بود. این انتگرال را به این صورت محاسبه کنید که معادلات پارامتری پاره خطی را که $(1,1,1)$ را به $(2,3,-1)$ وصل می کند بیابید و انتگرال خطی $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ را روی این پاره خط محاسبه کنید. چون $\mathbf{F}$ پایستار است، انتگرال مستقل از مسیر است.

۲۴- انتگرال زیر را روی پاره خط C که $(0,0,0)$ را به $(0,3,4)$ وصل می کند محاسبه کنید

$$\int_C x^2dx+yzdy+\left(y^2/2\right)dz$$

استقلال از مسیر: نشان دهید که مقادیر انتگرال های تمرین های ۲۵ و ۲۶ به مسیری که از A به B انتخاب می شود بستگی ندارند.

۲۵- $\int_A^B z^2dx+2ydy+2xz\,dz$

۲۶- $\int_A^B \dfrac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

در تمرین های ۲۷ و ۲۸ یک تابع پتانسیل برای $\mathbf{F}$ بیابید.

۲۷- $\{(x,y): y>0\}$ و $\mathbf{F}=\dfrac{2x}{y}\mathbf{i}+\left(\dfrac{1-x^2}{y^2}\right)\mathbf{j}$

۲۸- $\mathbf{F}=\left(e^x\ln y\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{e^x}{y}+\sin z\right)\mathbf{j}+\left(y\cos z\right)\mathbf{k}$

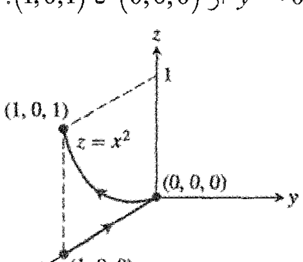
۲۹- **کار در امتداد مسیرهای مختلف.** مطلوب است کاری که نیروی $\mathbf{F}=\left(x^2+y\right)\mathbf{i}+\left(y^2+x\right)\mathbf{j}+ze^z\mathbf{k}$ روی مسیرهای زیر از $(1,0,0)$ تا $(1,0,1)$ انجام می دهد.

(الف)- پاره خط $x=1$، $y=0$، $0\le z\le 1$.

(ب)- پیچ

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+(t/2\pi)\mathbf{k} \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2\pi$$

(پ)- محور x از $(1,0,0)$ تا $(0,0,0)$ و به دنبال آن سهمی $z=x^2$، $y=0$ از $(0,0,0)$ تا $(1,0,1)$.



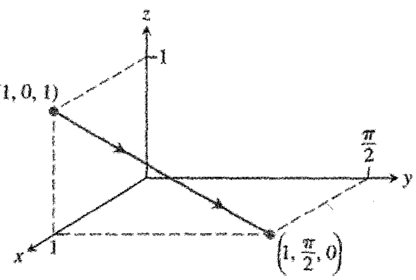
۳۰- **کار در امتداد مسیرهای مختلف.** کاری را که نیروی

$$\mathbf{F}=e^{yz}\mathbf{i}+\left(xze^{yz}+z\cos y\right)\mathbf{j}+\left(xye^{yz}+\sin y\right)\mathbf{k}$$

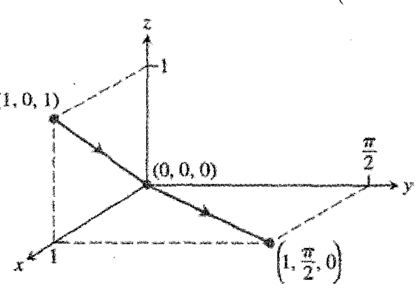
روی مسیرهای زیر از $(1,0,1)$ تا $(1,\pi/2,0)$ انجام می دهد بیابید.

(الف)- پاره خط:

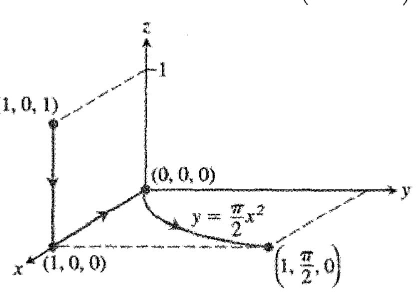
$$x=1 \ \text{و}\ y=\pi t/2 \ \text{و}\ z=1-t \ \text{و}\ 0\le t\le 1$$



(ب)- پاره خطی از $(1,0,1)$ تا مبداء و به دنبال آن پاره خطی از مبداء تا $(1,\pi/2,0)$.



(پ)- پاره خطی از $(1,0,1)$ تا $(1,0,0)$، به دنبال آن محور x از $(1,0,0)$ تا مبداء و به دنبال آن سهمی $y=\pi x^2/2$، $z=0$ از مبداء تا $(1,\pi/2,0)$.



۳۱- **محاسبه انتگرال کار به دو روش.** فرض کنید $\mathbf{F}=\nabla\left(x^3y^2\right)$ و C مسیری در صفحه xy از $(-1,1)$ تا $(1,1)$ است که شامل پاره خطی از $(-1,1)$ تا $(0,0)$ و به دنبال آن پاره خطی از $(0,0)$ تا $(1,1)$ می باشد. $\int_C \mathbf{F}d\mathbf{r}$ را به دو روش محاسبه کنید:

(الف)- صورت های پارامتری پاره خط های تشکیل دهنده C را یافته و انتگرال را محاسبه کنید.

(ب)- از $f(x,y)=x^3y^2$ به عنوان تابع پتانسیل برای $\mathbf{F}$ استفاده کنید.

۳۲- انتگرال روی مسیرهای مختلف. انتگرال خطی $\int_C 2x\cos y\,dx - x^2\sin y\,dy$ را روی مسیرهای C زیر در صفحه xy محاسبه کنید.

(الف)- سهمی $y=(x-1)^2$ از $(1,0)$ تا $(0,1)$.

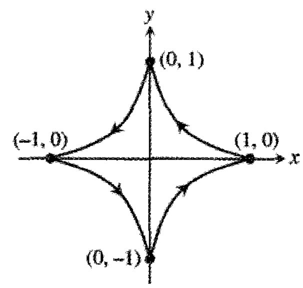
(ب)- پاره خطی از $(-1,\pi)$ تا $(1,0)$.

(پ)- محور x از $(-1,0)$ تا $(1,0)$.

(ت)- ستاره

$$\mathbf{r}(t)=(\cos^3 t)\mathbf{i}+(\sin^3 t)\mathbf{j}, 0\le t\le 2\pi$$

در جهت پاد ساعتگرد از $(1,0)$ تا خود $(1,0)$.



۳۳- (الف)- **صورت دیفرانسیلی کامل.** چه رابطه ای بین a، b و C برقرار باشد تا صورت دیفرانسیلی زیر کامل باشد؟

$$(ay^2+2czx)dx + y(bx+cz)dy + (ay^2+cx^2)dz$$

(ب)- میدان گرادیان. به ازای چه مقادیری از b و c میدان برداری زیر یک میدان گردیان است؟

$$\mathbf{F}=(y^2+2czx)\mathbf{i}+y(bx+cz)\mathbf{j}+(y^2+cx^2)\mathbf{k}$$

۳۴- گرادیان انتگرال خطی. فرض کنید $\mathbf{F}=\nabla f$ یک میدان برداری پایستار است و

$$g(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\mathbf{F}d\mathbf{r}$$

نشان دهید که $\nabla g=\mathbf{F}$.

۳۵- مسیر کمترین کار. از شما خواسته شده است تا مسیری را بیابید که روی آن میدان نیروی $\mathbf{F}$ در حرکت یک ذره بین دو مکان کمترین کار را انجام می دهد. محاسبه ای سریع نشان می دهد که $\mathbf{F}$ پایستار است. چه پاسخی می دهید؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۳۶- آزمایش تعیین کننده. براساس آزمایش پی می برید که کاری که میدان نیروی $\mathbf{F}$ در حرکت یک جسم روی مسیر C_1 از A تا B انجام می دهد نصف کاریست که همین نیرو در حرکت جسم روی مسیر C_2 از A به B انجام می دهد. در مورد $\mathbf{F}$ چه نتیجه ای می توان گرفت؟ دلیل بیاورید.

۳۷- کار یک نیروی ثابت. نشان دهید که کاری که میدان نیروی ثابت $\mathbf{F}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ در حرکت یک ذره روی هر مسیر دلخواه از A تا B انجام می دهد برابر است با $W=\mathbf{F}.\overrightarrow{AB}$.

۳۸- میدان گرانشی.

(الف)- یک تابع پتانسیل برای میدان گرانشی زیر بیابید

$$\mathbf{F}=-GmM\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

(G، m و M ثابت اند).

(ب)- فرض کنید P_1 و P_2 نقاطی در فاصله s_1 و s_2 از مبداء باشند. نشان دهید که کاری که میدان گرانشی قسمت (الف) در حرکت یک ذره از P_1 به P_2 انجام می دهد برابر است با

$$GmM\left(\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_1}\right)$$

۱۶-۴- قضیه گرین در صفحه

اگر $\mathbf{F}$ میدانی پایستار باشد می دانیم که تابع مشتق پذیری چون f وجود دارد که به ازای آن $\mathbf{F}=\nabla f$، و می توانیم انتگرال خطی $\mathbf{F}$ روی هر مسیر C، که نقطه A را به B وصل می کند، را به صورت $\int_C \mathbf{F}d\mathbf{r}=f(B)-f(A)$ محاسبه کنیم. در این بخش روشی برای محاسبه انتگرال کار یا شار روی یک خم بسته چون C واقع در صفحه در حالتی که

میدان $\mathbf{F}$ پایستار نیست بدست می آوریم. این روش که به قضیه گرین معروف است به ما امکان می دهد تا انتگرال خطی را به یک انتگرال دوگانه روی ناحیه محصور شده بوسیله C تبدیل کنیم.

بحث را به زبان میدان سرعت شارش سیال (منظور از سیال، مایعات یا گازهاست) ارائه می کنیم زیرا تجسم این نوع میدان ها آسانتر است. اما قضیه گرین برای هر میدان برداری که شرایط قضیه را برآورده کند کاربرد دارد و اعتبار آن به تعابیر فیزیکی خاص میدان بستگی ندارد. دو مفهوم جدید برای قضیه گرین معرفی می کنیم: یکی *دیورژانس* و دیگری *چگالی گردش* حول محوری عمود بر صفحه.

دیورژانس

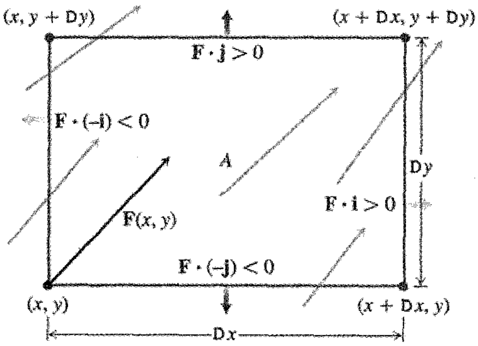
فرض کنید

$$\mathbf{F}(x,y)=M(x,y)\mathbf{i}+N(x,y)\mathbf{j}$$

میدان سرعت سیالی باشد که در صفحه شارش می کند و مشتقات جزئی اول M و N در هر نقطه از ناحیه ای چون R پیوسته باشند. همینطور فرض کنید (x,y) نقطه ای از R و A مستطیل کوچکی باشد که یک رأسش در (x,y) است و خودش و درونش تماماً در R واقع اند. اضلاع مستطیل که موازی با محورهای مختصات اند طول هایی برابر با Δx و Δy دارند. فرض کنید مؤلفه های M و N در سراسر ناحیه کوچکی شامل مستطیل A تغییر علامت ندهند. آهنگ خروج سیال از ضلع پایینی مستطیل تقریباً برابر است با (شکل ۱۶-۲۶)

$$\mathbf{F}(x,y).(-\mathbf{j})\Delta x=-N(x,y)\Delta x$$

این آهنگ برابر است با مؤلفه عددی سرعت در (x,y) در جهت قائم برونسو ضربدر طول پاره خط. اگر سرعت مثلاً برحسب متر بر ثانیه باشد آهنگ شارش برحسب متر بر ثانیه ضربدر متر یا متر مربع بر ثانیه خواهد بود. آهنگ خروج سیال از سه ضلع دیگر در جهت قائم های برونسوی آنها را می توان به شیوه مشابه برآورد کرد. آهنگ های شارش بسته به علامت های مؤلفه های $\mathbf{F}$ ممکن است مثبت یا منفی باشند. آهنگ شارش خالص از مرز مستطیلی A را با جمع کردن آهنگ های شارش از چهارضلع، که با حاصلضرب های عددی زیر تعریف می شوند، تقریب می زنیم.



شکل۱۶-۲۶: آهنگ خروج سیال از ضلع پایینی ناحیه مستطیلی شکل A در جهت قائم برونسوی $\mathbf{j}-$ تقریباً برابر است با $\mathbf{F}(x,y).(-\mathbf{j})\Delta x$، که برای میدان برداری $\mathbf{F}$ نشان داده شده در اینجا منفی است. برای تقریب زدن آهنگ شارش در نقطه (x,y)، آهنگ شارش (تقریبی) از هر ضلع را در جهت های پیکانهای قرمز نشان داده شده محاسبه کرده، این آهنگ ها را با هم جمع کرده و بعد مجموع بدست آمده را بر مساحت A تقسیم می کنیم. اگر وقتی $x\to 0$ و $y\to 0$ حد بگیریم آهنگ شارش بر واحد سطح (مساحت واحد) بدست می آید.

آهنگ های شارش سیال:

ضلع بالایی: $\mathbf{F}(x,y+\Delta y).\mathbf{j}\Delta x=N(x,y+\Delta y)\Delta x$

ضلع پایینی: $\mathbf{F}(x,y).(-\mathbf{j})\Delta x=-N(x,y)\Delta x$

ضلع سمت راست:

$$\mathbf{F}(x+\Delta x,y).\mathbf{i}\Delta y=M(x+\Delta x,y)\Delta y$$

ضلع سمت چپ: $\mathbf{F}(x,y).(-\mathbf{i})\Delta y=-M(x,y)\Delta y$

با جمع کردن آهنگهای نظیر اضلاع مقابل داریم

اضلاع بالایی و پایینی:

$$\left(N(x,y+\Delta y)-N(x,y)\right)\Delta x\approx\left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

اضلاع سمت راست و چپ:

$$\left(M(x+\Delta x,y)-M(x,y)\right)\Delta y\approx\left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y$$

با جمع کردن این دو معادله اثر خالص آهنگ های شارش به صورت زیر بدست می آید

$$\text{شار گذرنده از مرز مستطیل} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y$$

اکنون طرفین را بر $\Delta x\,\Delta y$ تقسیم می کنیم تا شار کل بر واحد سطح (مساحت واحد) یا چگالی شار مستطیل را بیابیم

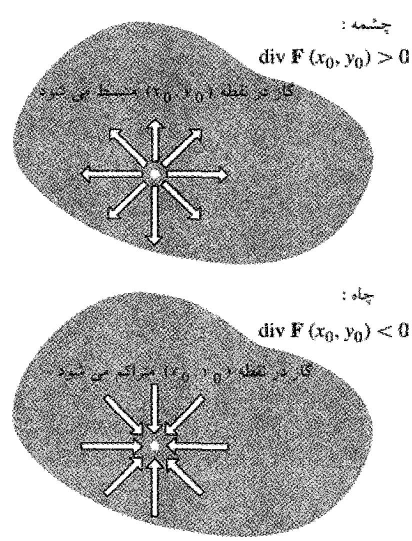
(شار گذرنده از مرز مستطیل)/(مساحت مستطیل)

$$\approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

سرانجام Δx و Δy را به صفر میل می دهیم تا چگالی شار **F** در نقطه (x,y) را تعریف کنیم. در ریاضیات چگالی شار را دیورژانس **F** می نامیم و نماد آن divF است که «دیورژانس **F**» یا (div**F**) خوانده می شود.

تعریف: دیورژانس (چگالی شار) میدان برداری $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$ در نقطه (x,y) عبارت است از

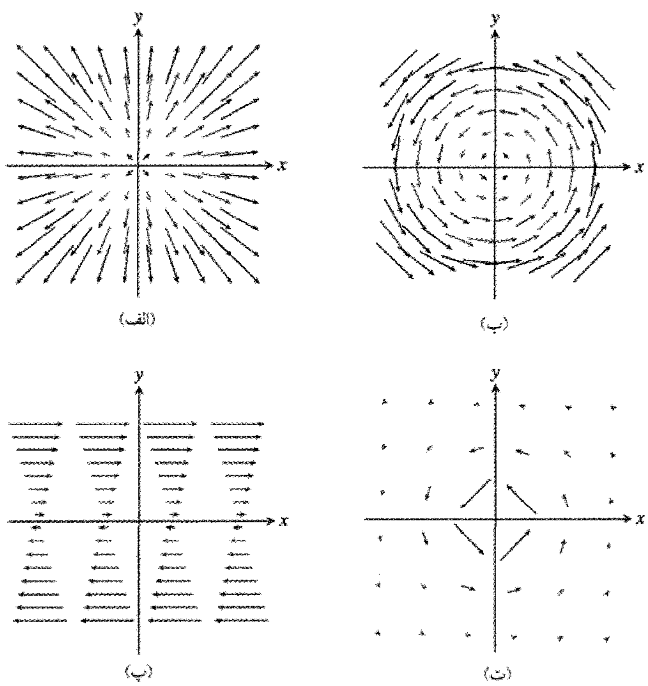
$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y} \qquad (1)$$



شکل۱۶- ۲۷: اگر گازی در نقطه ای چون (x_0,y_0) در حال انبساط باشد خطوط شارش دیورژانس مثبت دارند؟ اگر گاز در حال تراکم باشد دیورژانس منفی است.

گازها برخلاف مایعات تراکم پذیرند و دیورژانس میدان سرعت آنها معیاری از میزان منبسط شدن یا متراکم شدن آنها در هر نقطه است. به بیان شهودی، اگر گازی در نقطه (x_0,y_0) در حال انبساط باشد خطوط شارش در آنجا واگرا می شوند و چون گاز از یک مستطیل کوچک حول (x_0,y_0) به بیرون شارش می کند دیورژانس **F** در (x_0,y_0) مثبت است. اگر گاز به جای انبساط در حال تراکم باشد دیورژانس منفی خواهد بود(شکل ۱۶-۲۷).

مثال ۱: میدان های برداری زیر سرعت گازی را نمایش می دهند که در صفحه xy شارش می کند. دیورژانس هر میدان برداری را یافته و مفهوم فیزیکی آن را تفسیر کنید. شکل۱۶-۲۸ میدان های برداری را نمایش می دهد.



شکل۱۶- ۲۸: میدان های سرعت گازی که در صفحه شارش می کند (مثال ۱).

(الف)- انبساط یا تراکم یکنواخت: $\mathbf{F}(x,y)=cx\mathbf{i}+cy\mathbf{j}$

(ب)- چرخش یکنواخت: $\mathbf{F}(x,y)=-cy\mathbf{i}+cx\mathbf{j}$

(پ)- شارش برشی: $\mathbf{F}(x,y)=y\mathbf{i}$

(ت)- اثر گردابی: $\mathbf{F}(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$

حل:

(الف)- $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(cx)+\frac{\partial}{\partial y}(cy)=2c$: اگر $c>0$ باشد گاز دستخوش انبساط یکنواخت می شود؛ اگر $c<0$ باشد گاز دستخوش تراکم یکنواخت می شود.

(ب)- $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(-cy)+\frac{\partial}{\partial y}(cx)=0$: گاز نه منبسط می شود نه متراکم.

(پ)- $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(y)=0$: گاز نه منبسط می شود نه متراکم.

(ت)-
$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$
$$=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$

باز هم دیورژانس در تمام نقاط واقع در دامنه میدان سرعت صفر است.

موارد (ب)، (پ) و (ت) شکل۱۶- ۲۸ برای شارش دو بعدی یک مایع مدل های قابل قبولی هستند. در دینامیک سیالات، وقتی میدان سرعت یک مایع در حال شارش همواره دیورژانس صفر داشته باشد، مثل این موارد، گفته می شود مایع **تراکم ناپذیر** است.

چرخش حول یک محور: مؤلفه k ای تاو

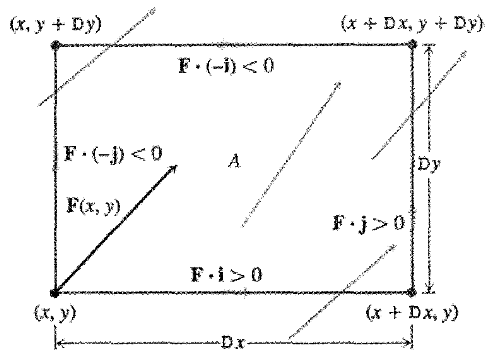
دومین مفهومی که برای قضیه گرین نیاز داریم مربوط است به اندازه گیری چرخش چرخ پره داری با محور عمود بر صفحه که در نقطه ای از یک سیال که در ناحیه ای مسطح شارش می کند، شناور است. این مفهوم در واقع چگونگی گردش سیال حول محورهای واقع در نقاط مختلف و عمود بر ناحیه را توصیف می کند. فیزیکدان ها گاهی این مفهوم را چگالی گردش میدان برداری $\mathbf{F}$ در یک نقطه می نامند. برای دستیابی به آن به میدان سرعت

$$\mathbf{F}(x,y)=M(x,y)\mathbf{i}+N(x,y)\mathbf{j}$$

برگشته و مستطیل A در شکل۱۶- ۲۹ را در نظر می گیریم (فرض می کنیم هر دو مؤلفه $\mathbf{F}$ مثبت اند).

آهنگ گردش $\mathbf{F}$ حول مرز A با مجموع آهنگ های شارش در امتداد اضلاع در جهت مماسی برابر است. برای ضلع پایینی، آهنگ شارش تقریباً برابر است با

$$\mathbf{F}(x,y).\mathbf{i}\Delta x=M(x,y)\Delta x$$



شکل۱۶- ۲۹: آهنگ شارش سیال در امتداد ضلع پایینی ناحیه مستطیلی شکل A در جهت i تقریباً برابر است با $\mathbf{F}(x,y).\mathbf{i}\Delta x$، که برای میدان برداری F نشان داده شده در اینجا مثبت است. برای تقریب زدن آهنگ گردش در نقطه (x,y)، آهنگ های شارش (تقریبی) در امتداد هر ضلع در جهت پیکانهای نشان داده شده را محاسبه کرده، این آهنگ ها را با هم جمع نموده و مجموع بدست آمده را بر مساحت A تقسیم می کنیم. اگر وقتی $\Delta x\to 0$ و $\Delta y\to 0$ حد بگیریم آهنگ گردش بر واحد سطح (مساحت واحد) بدست می آید.

این آهنگ مؤلفه عددی سرعت $\mathbf{F}(x,y)$ در جهت مماس $\mathbf{i}$ ضربدر طول پاره خط است. آهنگ های شارش بسته به مؤلفه های $\mathbf{F}$ ممکن است مثبت یا منفی باشند. آهنگ گردش خالص حول مرز مستطیلی A را با جمع زدن آهنگ های شارش در امتداد چهار ضلع، که با حاصلضرب های عددی زیر تعریف می شوند، تقریب می زنیم

ضلع بالایی:

$$\mathbf{F}(x,y+\Delta y).(-\mathbf{i})\Delta x=-M(x,y+\Delta y)\Delta x$$

ضلع پایینی:

$$\mathbf{F}(x,y).\mathbf{i}\Delta x=M(x,y)\Delta x$$

ضلع سمت راست:

$$\mathbf{F}(x+\Delta x,y).\mathbf{j}\Delta y=N(x+\Delta x,y)\Delta y$$

ضلع سمت چپ:

$$\mathbf{F}(x,y).(-\mathbf{j})\Delta y=-N(x,y)\Delta y$$

آهنگ های نظیر اضلاع مقابل را جمع می کنیم

اضلاع بالایی و پایینی:

$$-\big(M(x,y+\Delta y)-M(x,y)\big)\Delta x\approx-\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

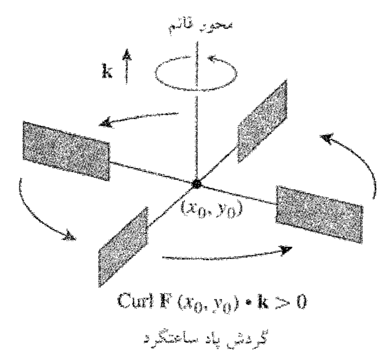
اضلاع سمت راست و چپ:

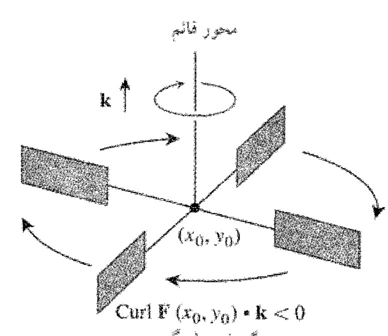
$$\big(N(x+\Delta x,y)-N(x,y)\big)\Delta y\approx\left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y$$

با جمع کردن این دو معادله گردش خالص نسبت به سمتگیری پاد ساعتگرد بدست می آید و اگر عبارت حاصل را بر $\Delta x\,\Delta y$ تقسیم کنیم به برآوردی از چگالی گردش برای مستطیل می رسیم:

$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\approx \text{(گردش حول مستطیل)/(مساحت مستطیل)}$$

برای تعریف *چگالی گردش* $\mathbf{F}$ در نقطه (x,y)، Δx و Δy را به سمت صفر میل می دهیم.





شکل۱۶– ۳۰: در شارش یک سیال تراکم ناپذیر روی ناحیه ای از صفحه، مؤلفه k تاو آهنگ چرخش سیال در یک نقطه را مشخص می کند. در نقاطی که چرخش پاد ساعتگرد است تاو مثبت و در نقاطی که چرخش ساعتگرد است تاو منفی است.

اگر از نوک بردار واحد $\mathbf{k}$ به سمت پایین و به صفحه xy نگاه کنیم و چرخشی پاد ساعتگرد مشاهده کنیم چگالی گردش مثبت است (شکل۱۶– ۳۰). مقدار این چگالی گردش عبارت است از مؤلفه $\mathbf{k}$ یک میدان برداری گردش عمومی تر که در بخش۱۶ –۷ آن را تعریف می کنیم و تاو میدان برداری $\mathbf{F}$ نامیده می شود. برای قضیه گرین فقط به این مؤلفه $\mathbf{k}$ نیاز داریم.

تعریف: چگالی گردش میدان برداری $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$ در نقطه (x,y) با عبارت عددی زیر برابر است

$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\tag{۲}$$

این عبارت **مؤلفه k تاو** نیز نامیده شده و با نماد $(\operatorname{curl}\mathbf{F}).\mathbf{k}$ نشان داده می شود.

اگر آب به صورت لایه ای نازک در ناحیه ای از صفحه xy در حرکت باشد محاسبه مؤلفه $\mathbf{k}$ تاو در نقطه ای چون (x_0,y_0) روشی است برای پی بردن به اینکه اگر چرخ پره دار کوچکی را در نقطه (x_0,y_0) از آب قرار دهیم بطوریکه محور آن عمود بر صفحه و موازی با $\mathbf{k}$ باشد چرخ با چه سرعتی و در چه جهتی می چرخد (شکل۱۶– ۳۰).

مثال۲: برای هر یک از میدان های برداری مثال ۱ چگالی گردش را یافته و مفهوم آن را تعبیر کنید.

حل: (الف)– انبساط یکنواخت:

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F}).\mathbf{k}=\frac{\partial}{\partial x}(cy)-\frac{\partial}{\partial y}(cx)=0$$

گاز در مقیاس های بسیار کوچک گردشی ندارد.

(ب)– چرخش: $(\operatorname{curl}\mathbf{F}).\mathbf{k}=\frac{\partial}{\partial x}(cx)-\frac{\partial}{\partial y}(-cy)=2c$.

چگالی گردش ثابت نشان دهنده چرخش در تمام نقاط است. اگر $c>0$ باشد چرخش پاد ساعتگرد و اگر $c<0$ باشد چرخش ساعتگرد است.

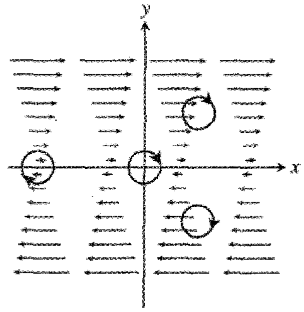
(پ)– برش: $(\operatorname{curl}\mathbf{F}).\mathbf{k}=-\frac{\partial}{\partial y}(y)=-1$. چگالی گردش ثابت و منفی است، لذا یک چرخ پره دار شناور در آبی با چنین

شارش برشی به صورت ساعتگرد می چرخد. آهنگ چرخش در تمام نقاط یکسان است. اثر متوسط شارش سیال این است که سیال را حول هر یک از دایره های کوچک نشان داده شده در شکل ۱۶- ۳۱ به صورت ساعتگرد می راند.

(ت)- گردابی:

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F}).\mathbf{k}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$
$$=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$$

چگالی گردش در هر نقطه دور از مبداء صفر است (در مبداء میدان برداری تعریف نشده است و اثر گردابی رخ می دهد)، و در هر نقطه ای که میدان برداری تعریف شده است گاز گردش ندارد.



شکل۱۶-۳۱: در شارش برشی، سیال حول هر نقطه به صورت ساعتگرد گردش می کند (مثال ۲ پ)

نماد $\oint_C$ را در بخش۱۶- ۳ برای انتگرال گیری حول یک خم بسته معرفی کردیم. در اینجا با این نماد بیشتر آشنا می شوید. یک خم بسته ساده چون C را می توان در دو جهت ممکن طی کرد. خم در جهت پاد ساعتگرد طی می شود و گفته می شود جهت آن مثبت(خم با جهت منفی) است در صورتیکه ناحیه ای که خم محصور می کند همواره در سمت چپ جسمی قرار گیرد که روی مسیر حرکت می کند. در غیر این صورت خم در جهت ساعتگرد طی می شود و گفته می شود جهت آن منفی(خم با جهت منفی) است. اگر جهت خم را معکوس کنیم انتگرال خطی یک میدان برداری چون $\mathbf{F}$ روی C تغییر علامت می دهد. وقتی خم بسته ساده C در جهت پاد ساعتگرد و در جهت مثبت خم طی شود از نماد زیر برای انتگرال خطی استفاده می کنیم

$$\oint_C \mathbf{F}(x,y).d\mathbf{r}$$

صورت دیگری از قضیه گرین بیان می کند که گردش پاد ساعتگرد یک میدان برداری در امتداد یک خم بسته ساده برابر است با انتگرال دوگانه مؤلفه $\mathbf{k}$ تاو میدان روی ناحیه ای که توسط خم محصور شده است. در اینجا لازم است تعریف گردش در معادله (۲) بخش۱۶-۲ را به خاطر بیاورید.

دو صورت قضیه گرین

صورتی از قضیه گرین بیان می کند که تحت شرایط مناسب شار برونسوی یک میدان برداری گذرنده از یک خم بسته ساده واقع در صفحه برابر است با انتگرال دوگانه دیورژانس میدان روی ناحیه ای که بوسیله خم محصور شده است. فرمول های شار در معادلات (۳) و (۴) بخش۱۶- ۲ را به خاطر آورده و به یاد داشته باشید که یک خم در صورتی ساده است که خودش را قطع نکند.

قضیه ۴- قضیه گرین (صورت شاری - دیورژانسی یا معمولی): فرض کنید C یک خم بسته ساده و قطعه قطعه هموار است که ناحیه ای چون R در صفحه را محصور کرده است. فرض کنید $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$ یک میدان برداری است که مؤلفه های M و N آن در ناحیه بازی شامل R مشتقات جزئی اول پیوسته دارند. در این صورت شار برونسوی $\mathbf{F}$ گذرنده از C برابر است با انتگرال دوگانه $\operatorname{div}\mathbf{F}$ روی ناحیه R که به C محدود است

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds=\oint_C M\,dy-N\,dx=\iint_R\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dx\,dy \quad (۳)$$

شار برونسو　　　انتگرال دیورژانس

قضیه۵- قضیه گرین (صورت گردشی - تاوی یا مماسی): فرض کنید C یک خم بسته ساده و قطعه قطعه هموار باشد که ناحیه ای چون R را در صفحه محصور کرده است. نیز فرض کنید $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$ یک میدان برداری باشد که مؤلفه های M و N آن در ناحیه بازی شامل R مشتقات جزئی اول پیوسته

دارند. در این صورت گردش پادساعتگرد $\mathbf{F}$ حول C برابر است با انتگرال دوگانه $(\text{curl}\mathbf{F}).\mathbf{k}$ روی R.

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{T}ds = \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\,dy$$

(۴) انتگرال تاو گردش پاد ساعتگرد

دو صورت قضیه گرین هم ارزند. با کاربرد معادله (۳) برای میدان $\mathbf{G}_1 = N\mathbf{i} - M\mathbf{j}$ معادله(۴) بدست می آید و با کاربرد معادله (۴) برای $\mathbf{G}_2 = -N\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ معادله (۳) بدست می آید.

هر دو صورت قضیه گرین را می توان به عنوان تعمیم های دو بعدی قضیه تغییر خالص بخش۵- ۴ دانست. شار برونسوی $\mathbf{F}$ گذرنده از C، که با انتگرال خطی سمت چپ معادله (۳) تعریف می شود، با انتگرال آهنگ تغییر آن (چگالی شار) روی ناحیه R محصور شده توسط C، یعنی همان انتگرال دوگانه سمت راست معادله (۳)، برابر است. به همین ترتیب، گردش پادساعتگرد $\mathbf{F}$ حول C، که با انتگرال خطی سمت چپ معادله (۴) تعریف می شود، با انتگرال آهنگ تغییر آن (چگالی گردش) روی ناحیه R محصور شده توسط C، یعنی همان انتگرال دوگانه سمت راست معادله (۴)، برابر است.

مثال۳: درستی هر دو صورت قضیه گرین را در مورد میدان برداری

$$\mathbf{F}(x,y) = (x-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

و ناحیه R محدود به دایره واحد زیر بررسی کنید

$$C: \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} \text{ و } 0 \le t \le 2\pi$$

حل: $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ را محاسبه کرده و از مؤلفه ها دیفرانسیل می گیریم

$$M = \cos t - \sin t \text{ و } dx = d(\cos t) = -\sin t\,dt$$

$$N = \cos t \text{ و } dy = d(\sin t) = \cos t\,dt$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = 0 \ ،\ \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \ ،\ \frac{\partial M}{\partial y} = -1 \ ،\ \frac{\partial M}{\partial x} = 1$$

دو طرف معادله (۳) عبارت اند از

$$\oint_C M\,dy - N\,dx$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t\,dt) - (\cos t)(-\sin t\,dt)$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)dxdy = \iint_R (1+0)dxdy$$

$$= \iint_R dxdy$$

$= \pi =$ مساحت داخل دایره واحد

دو طرف معادله (۴) عبارت ا ند از

$$\oint_C M\,dx + N\,dy$$

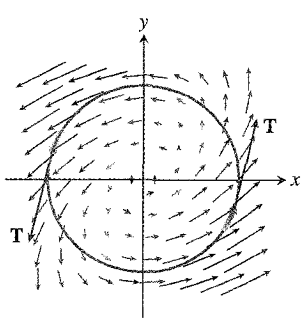
$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(-\sin t\,dt) + (\cos t)(\cos t\,dt)$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t\cos t + 1)dt = 2\pi$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_R (1-(-1))dxdy = 2\iint_R dxdy = 2\pi$$

شکل۱۶-۳۲ میدان برداری و گردش حول C را نمایش می دهد.



شکل۱۶-۳۲: میدان برداری مثال ۳ گردش پاد ساعتگردی برابر با 2π حول دایره واحد دارد.

کاربرد قضیه گرین در محاسبه انتگرال های خطی

اگر تعدادی خم متفاوت را به صورت پیاپی به هم وصل کرده و خم بسته ای چون C بسازیم فرایند محاسبه یک انتگرال خطی روی C طولانی خواهد بود زیرا تعداد زیادی انتگرال خطی خواهیم داشت که هر کدام باید جداگانه محاسبه شوند. اما اگر C ناحیه R را محدود کرده باشد که قضیه گرین در آن

قابل کاربرد است می توانیم با استفاده از قضیه گرین انتگرال خطی حول C را به یک انتگرال دوگانه روی R تبدیل کنیم.

مثال ۴: انتگرال خطی زیر را محاسبه کنید

$$\oint_C xydy - y^2dx$$

که در آن C مربعی است که بوسیله خطوط $x=1$ و $y=1$ از ربع اول جدا می شود.

حل: می توانیم از هر یک از دو صورت قضیه گرین استفاده کرده و انتگرال خطی را به یک انتگرال دوگانه روی مربع تبدیل کنیم.

۱- *با استفاده از صورت معمولی (معادله ۳)*: اگر قرار دهیم $M=xy$ و $N=y^2$ و C و R را به عنوان مرز مربع و درون آن در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$\oint_C xydy - y^2dx = \iint_R (y+2y)dxdy$$
$$= \int_0^1\int_0^1 3ydxdy$$
$$= \int_0^1 \left[3xy\right]_{x=0}^{x=1}dy$$
$$= \int_0^1 3ydy = \frac{3}{2}y^2\Big]_0^1 = \frac{3}{2}$$

۲- *با استفاده از صورت مماسی (معادله ۴)*: با در نظر گرفتن $M=-y^2$ و $N=xy$ همان نتیجه بدست می آید

$$\oint_C -y^2dx + xydy = \iint_R \left(y-(-2y)\right)dxdy = \frac{3}{2}$$

مثال ۵: مطلوب است شار برونسوی میدان برداری $\mathbf{F}(x,y)=x\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}$ گذرنده از مربع محدود به خطوط $x=\pm1$ و $y=\pm1$.

حل: برای محاسبه شار از طریق انتگرال خطی باید چهار بار انتگرال گیری کنیم، یک بار برای هر ضلع مربع. اما با بهره گیری از قضیه گرین می توانیم انتگرال خطی را به یک انتگرال دوگانه تبدیل کنیم. اگر $M=x$، $N=y^2$، C مربع و R درون مربع اختیار شود داریم

$$\text{شار} = \oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}ds = \oint_C Mdy - Ndx$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dxdy \qquad \text{(قضیه گرین)}$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+2y)dxdy = \int_{-1}^{1}\left[x+2xy\right]_{x=-1}^{x=1}dy$$
$$= \int_{-1}^{1}(2+4y)dy = \left[2y+2y^2\right]_{-1}^{1} = 4$$

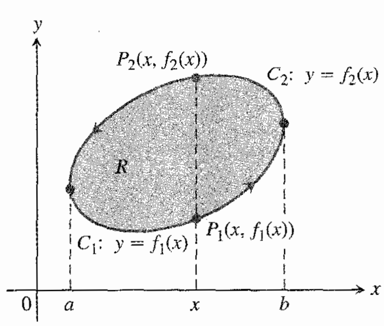
اثبات قضیه گرین برای نواحی خاص

فرض کنید C خم بسته ساده و هموار در صفحه xy با این ویژگی است که خطوط موازی با محورهای مختصات آن را در بیش از دو نقطه قطع نمی کنند. فرض کنید R ناحیه محصور شده توسط C بوده و ، N و مشتقات جزئی اول آنها در هر نقطه از یک ناحیه باز شامل C و R پیوسته باشند. می خواهیم صورت گردشی – تاوی قضیه گرین را ثابت کنیم یعنی

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy \qquad (۵)$$

شکل ۱۶-۳۳ حالتی را نشان می دهد که C از دو قسمت جهتدار تشکیل شده است

$$C_1: y=f_1(x),\ a\le x\le b$$
$$C_2: y=f_2(x),\ b\ge x\ge a$$



شکل ۱۶- ۳۳: خم مرزی C از دو قسمت C_1، نمودار $y=f_1(x)$، و C_2، نمودار $y=f_2(x)$، تشکیل شده است.

به ازای هر x بین a و b می توانیم از $\partial M/\partial y$ نسبت به y از $y=f_1(x)$ تا $y=f_2(x)$ انتگرال گرفته و نتیجه زیر را بدست آوریم

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}\frac{\partial M}{\partial y}dy = M(x,y)\Big]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)}$$
$$= M(x,f_2(x)) - M(x,f_1(x))$$

حال می توانیم از این نتیجه نسبت به x از a تا b انتگرال بگیریم

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx &= \int_a^b \left[M\left(x, f_2(x)\right) - M\left(x, f_1(x)\right)\right] dx \\ &= -\int_b^a M\left(x, f_2(x)\right) dx - \int_a^b M\left(x, f_1(x)\right) dx \\ &= -\int_{C_2} M\, dx - \int_{C_1} M\, dx \\ &= -\oint_C M\, dx\end{aligned}$$

بنابراین

$$\oint_C M\, dx = \iint_R \left(-\frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy \qquad (۶)$$

معادله (۶) نصف نتیجه ای است که برای معادله (۵) نیاز داریم. نصف دیگر نتیجه را مطابق شکل۱۶- ۳۴ با انتگرال گیری از $\partial N / \partial x$ ابتدا نسبت به x و بعد نسبت به y بدست می آوریم. در این شکل خم C شکل۱۶- ۳۳ به دو قسمت جهتدار

$$C_1' : x = g_1(y), d \ge y \ge c$$
و
$$C_2' : x = g_2(y), c \le y \le d$$

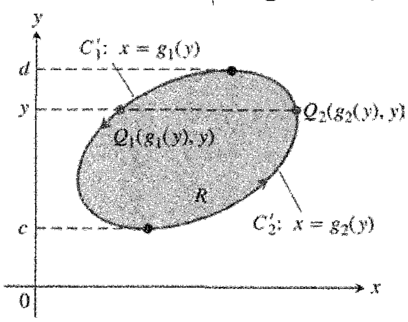
تقسیم شده است. نتیجه این انتگرال گیری دوگانه عبارت است از

$$\oint_C N\, dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy \qquad (۷)$$

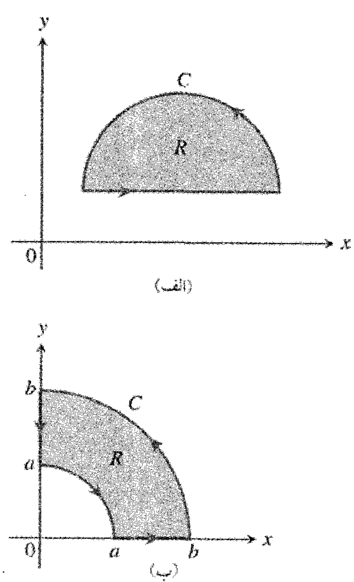
با جمع کردن معادلات (۶) و (۷) معادله (۵) بدست می آید و بدین ترتیب اثبات به پایان می رسد.

قضیه گرین برای نواحی عمومی تر، نظیر آنهایی که در شکل های۱۶- ۳۵ و۱۶- ۳۶ نشان داده شده اند، نیز برقرار است اما این مطلب را در اینجا اثبات نمی کنیم. توجه کنید که ناحیه شکل۱۶-۳۶ ساده – همبند نیست. جهت خم های C_1 و C_h روی مرز آن طوریست که وقتی خم ها در جهت های نشان داده شده طی شوند ناحیه R همواره در سمت چپ قرار می گیرد. با این قرارداد، قضیه گرین برای نواحیی که ساده – همبند نیستند معتبر است.

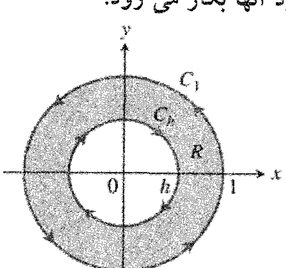
در حالیکه قضیه گرین را در صفحه xy بیان کرده ایم اما برای هر ناحیه R واقع در یک صفحه و محدود به خمی چون C در فضا هم بکار می رود. در بخش۱۶- ۷ خواهیم دید که برای این صورت کلی تر قضیه گرین انتگرال دوگانه روی R را چگونه بیان می کنیم.



شکل۱۶- ۳۴: خم مرزی C از دو قسمت C_1'، نمودار $x = g_1(y)$ و C_2'، نمودار $x = g_2(y)$ تشکیل شده است.



شکل۱۶- ۳۵: نواحی دیگری که قضیه گرین در مورد آنها بکار می رود.



شکل۱۶- ۳۶: قضیه گرین را می توان در مورد ناحیه طوقی شکل R بکار برد، به این ترتیب که انتگرال های خطی در امتداد مرزهای C_1 و C_h را در جهت های نشان داده شده جمع می کنیم.

تمرین های ۱۶-۴

تحقیق قضیه گرین

در تمرین های ۱- ۴ درستی قضیه گرین را با محاسبه دو طرف معادلات (۳) و (۴) به ازای میدان $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$ بیازمایید. در هر مورد دامنه انتگرال گیری را قرص $R: x^2+y^2\le a^2$ و مرزش را دایره زیر در نظر بگیرید.

$$C:\mathbf{r}=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j} \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2\pi$$

۱- $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ ۲- $\mathbf{F}=y\mathbf{i}$

۳- $\mathbf{F}=2x\mathbf{i}-3y\mathbf{j}$ ۴- $\mathbf{F}=-x^2y\mathbf{i}+xy^2\mathbf{j}$

گردش و شار

در تمرین های ۵- ۱۴ با بهره گیری از قضیه گرین گردش پاد ساعتگرد و شار برونسو را در مورد میدان $\mathbf{F}$ و خم C بدست آورید.

۵- $\mathbf{F}=(x-y)\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}$

C: مربع محدود به: $x=0$ و $x=1$ و $y=0$ و $y=1$

۶- $\mathbf{F}=(x^2+4y)\mathbf{i}+(x+y^2)\mathbf{j}$

C: مربع محدود به: $x=0$ و $x=1$ و $y=0$ و $y=1$

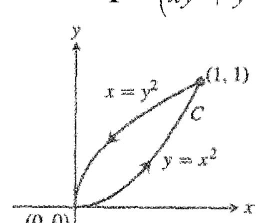
۷- $\mathbf{F}=(y^2-x^2)\mathbf{i}+(x^2+y^2)\mathbf{j}$

C: مثلث محدود به: $y=0$ و $x=3$ و $y=x$

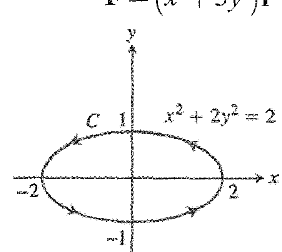
۸- $\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}-(x^2+y^2)\mathbf{j}$

C: مثلث محدود به: $y=0$ و $x=1$ و $y=x$

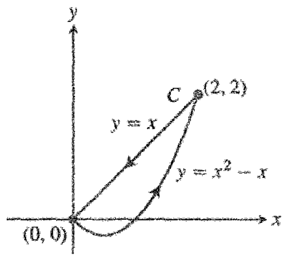
۹- $\mathbf{F}=(xy+y^2)\mathbf{i}+(x-y)\mathbf{j}$



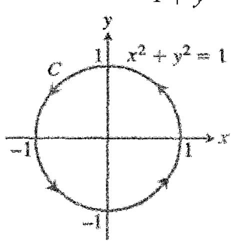
۱۰- $\mathbf{F}=(x+3y)\mathbf{i}+(2x-y)\mathbf{j}$



۱۱- $\mathbf{F}=x^3y^2\mathbf{i}+\frac{1}{2}x^4y\mathbf{j}$



۱۲- $\mathbf{F}=\frac{x}{1+y^2}\mathbf{i}+(\tan^{-1}y)\mathbf{j}$



۱۳- $\mathbf{F}=(x+e^x\sin y)\mathbf{i}+(x+e^x\cos y)\mathbf{j}$

C: حلقه (طوق) سمت راست پروانه $r^2=\cos 2\theta$.

۱۴- $\mathbf{F}=\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\mathbf{i}+\ln(x^2+y^2)\mathbf{j}$

C: مرز ناحیه ای که با نابرابری های مختصات قطبی $1\le r\le 2$ و $0\le\theta\le\pi$ تعریف می شود.

۱۵- مطلوب است گردش پاد ساعتگرد و شار برونسوی میدان $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}$ روی مرز ناحیه محدود به خم های $y=x^2$ و $y=x$ در ربع اول.

۱۶- مطلوب است گردش پاد ساعتگرد و شار برونسوی میدان $\mathbf{F}=(-\sin y)\mathbf{i}+(x\cos y)\mathbf{j}$ روی مربعی که بوسیله خطوط $x=\pi/2$ و $y=\pi/2$ از ربع اول جدا می شود.

۱۷- شار برونسوی میدان

$$\mathbf{F}=\left(3xy-\frac{x}{1+y^2}\right)\mathbf{i}+\left(e^x+\tan^{-1}y\right)\mathbf{j}$$

گذرنده از دلوار $r=a(1+\cos\theta)$، $a>0$ را بیابید.

۱۸- مطلوب است گردش پاد ساعتگرد میدان $\mathbf{F}=(y+e^x\ln y)\mathbf{i}+(e^x/y)\mathbf{j}$ روی مرز ناحیه ای که از بالا به خم $y=3-x^2$ و از پایین به خم $y=x^4+1$ محدود است.

کار

در تمرین های **۱۹** و **۲۰** کاری را که $\mathbf{F}$ در یک دور حرکت پاد ساعتگرد یک ذره روی خم مفروض انجام می دهد، بیابید.

۱۹- $\mathbf{F}=2xy^3\mathbf{i}+4x^2y^2\mathbf{j}$

C: مرز ناحیه «مثلثی شکل» در ربع اول که بوسیله محور x، خط $x=1$ و خم $y=x^3$ محصور شده است.

۲۰- $\mathbf{F}=(4x-2y)\mathbf{i}+(2x-4y)\mathbf{j}$

C: دایره: $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

کاربرد قضیه گرین

انتگرال های تمرین های **۲۱- ۲۴** را با کاربرد قضیه گرین محاسبه کنید.

۲۱- $\oint_C (y^2dx+x^2dy)$

C : مثلث محدود به: $x=0$، $x+y=1$ و $y=0$

۲۲- $\oint_C (3ydx+2xdy)$

C : مرز $0\le x\le\pi$ و $0\le y\le\sin x$

۲۳- $\oint_C (6y+x)dx+(y+2x)dy$

C: دایره $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

۲۴- $\oint_C (2x+y^2)dx+(2xy+3y)dy$

C: هر خم بسته ساده واقع در صفحه که قضیه گرین در مورد آن برقرار است.

محاسبه مساحت به کمک قضیه گرین: اگر خم بسته ساده ای چون C واقع در صفحه و ناحیه R ی که خم محصور می کند فرضیات قضیه گرین را برآورده سازند مساحت R از فرمول زیر بدست می آید

فرمول مساحت قضیه گرین

$$\text{مساحت } R=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$

برای اثبات این رابطه از رابطه (**۳**) در جهت عکس استفاده می کنیم،

$$\text{مساحت } R=\iint_R dydx=\iint_R\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dydx$$
$$=\oint_C \frac{1}{2}xdy-\frac{1}{2}ydx$$

با استفاده از فرمول مساحت قضیه گرین که در بالا ارائه شد در تمرین های**۲۵- ۲۸** مساحت نواحی محصور شده بوسیله خم ها را بیابید.

۲۵- دایره $\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(a\sin t)\mathbf{j}$ و $0\le t\le 2\pi$

۲۶- بیضی $\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{i}+(b\sin t)\mathbf{j}$ و $0\le t\le 2\pi$

۲۷- ستاره $\mathbf{r}(t)=(\cos^3 t)\mathbf{i}+(\sin^3 t)\mathbf{j}$ و $0\le t\le 2\pi$

۲۸- یک کمان از چرخزاد $x=t-\sin t$ و $y=1-\cos t$

۲۹- فرض کنید C مرز ناحیه ای است که قضیه گرین در مورد آن برقرار است. با استفاده از قضیه گرین انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

(الف)- $\oint_C f(x)dx+g(y)dy$

(ب)- $\oint_C ky\,dx+hx\,dy$ (k و h ثابت).

۳۰- انتگرال فقط به مساحت بستگی دارد. نشان دهید که مقدار

$$\oint_C xy^2dx+(x^2y+2x)dy$$

حول هر مربع فقط به مساحت مربع بستگی دارد و به مکان مربع در صفحه بستگی ندارد.

۳۱- در مورد مقدار انتگرال زیر چه می توان گفت؟

$$\oint_C 4x^3ydx+x^4dy$$

دلیل بیاورید.

۳۲- در مورد انتگرال زیر چه چیز خاصی می توان گفت؟

$$\oint_C -y^3dy+x^3dx$$

دلیل بیاورید.

۳۳- مساحت به صورت انتگرال خطی. نشان دهید که اگر ناحیه ای در صفحه باشد که بوسیله خم بسته ساده و قطعه قطعه هموار C محدود شده است آنگاه

$$R \text{ مساحت } = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx$$

۳۴- انتگرال معین به صورت انتگرال خطی. فرض کنید یک تابع نامنفی چون $y=f(x)$ روی $[a,b]$ مشتق اول پیوسته دارد. فرض کنید C مرز ناحیه در صفحه xy است که از پایین به محور x، از بالا به نمودار f و از اطراف به خطوط $x=a$ و $x=b$ محدود است. نشان دهید که

$$\int_a^b f(x)dx = -\oint_C y\,dx$$

۳۵- مساحت و مرکزوار. فرض کنید A مساحت و $\bar{x}$ مختص x مرکز وار ناحیه ای چون R است که بوسیله خم بسته ساده و قطعه قطعه هموار C در صفحه xy محدود شده است. نشان دهید که

$$\frac{1}{2}\oint_C x^3dy = -\oint_C xy\,dx = \frac{1}{3}\oint_C x^2dy - xy\,dx = A\bar{x}$$

۳۶- گشتاور لختی. ناحیه مذکور در تمرین **۳۵** را در نظر بگیرید. فرض کنید I_y گشتاور لختی این ناحیه حول محور y است. نشان دهید که

$$\frac{1}{3}\oint_C x^3dy = -\oint_C x^2y\,dx = \frac{1}{4}\oint_C x^3dy - x^2y\,dx = I_y$$

۳۷- قضیه گرین و معادله لاپلاس. با فرض اینکه تمام مشتقات لازم موجود و پیوسته اند نشان دهید که اگر $f(x,y)$ در معادله لاپلاس یعنی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

صدق کند آنگاه برای تمام خم های بسته C که در مورد آنها قضیه گرین قابل کاربرد است داریم

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy = 0$$

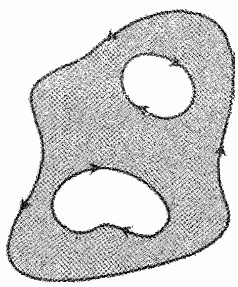
(عکس مطلب هم درست است: اگر انتگرال خطی فوق همواره صفر باشد آنگاه f در معادله لاپلاس صدق می کند)

۳۸- ماکسیمم کردن کار. از بین تمام خم های بسته ساده و همواره واقع در صفحه با جهت پاد ساعتگرد، خمی را بیابید که کار انجام شده بوسیله نیروی زیر روی آن بیشترین مقدار است

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

(راهنمایی: $(\text{curl}\mathbf{F}).\mathbf{k}$ در کجا مثبت است؟)

۳۹- نواحی دارای چندین حفره. قضیه گرین در مورد ناحیه ای چون R با هر تعداد متناهی حفره برقرار است مادامی که خم های محدود کننده، بسته، ساده و هموار باشند و روی هر جزء مرز در جهتی انتگرال بگیریم که وقتی روی مرز حرکت می کنیم R در سمت چپ ما قرار گیرد (شکل زیر را ببینید).



(الف)- فرض کنید $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ و C عبارت است از دایره $x^2+y^2=a^2$. انتگرال شار زیر را محاسبه کنید

$$\oint_C \nabla f\,.\mathbf{n}ds$$

(ب)- فرض کنید K یک خم بسته ساده و هموار دلخواه در صفحه باشد که از $(0,0)$ نمی گذرد. با استفاده از قضیه گرین نشان دهید که انتگرال

$$\oint_K \nabla f\,.\mathbf{n}ds$$

دو مقدار ممکن دارد، بسته به اینکه $(0,0)$ در داخل K یا در بیرون K قرار گیرد.

۴۰- معیار بندیکسون. خطوط جریان شارش های لایه ای (صفحه ای) سیالات خم های همواری هستند که تک تک ذرات سیال روی آنها حرکت می کنند. بردارهای $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ میدان سرعت شارش بردارهای مماس خطوط جریان هستند. نشان دهید که اگر روی ناحیه ساده- همبندی چون R (بدون حفره یا نقاط خالی) صورت گیرد و اگر در سراسر R، $M_x + N_y \neq 0$ باشد آنگاه هیچکدام از خطوط جریان واقع در R بسته نیستند. به عبارتی دیگر هیچکدام از ذرات سیال مسیر بسته ای را در R طی نمی

کنند. معیار $M_x + N_y \neq 0$ **معیار بندیکسون** برای عدم وجود مسیرهای بسته نامیده می شود.

۴۱- با اثبات معادله (۷) اثبات حالت خاص قضیه گرین را کامل کنید.

۴۲- مؤلفه تاو میدان های پایستار. آیا می توان در مورد مؤلفه تاو یک میدان برداری دو بعدی پایستار اظهار نظر کرد؟ دلیل بیاورید.

تمرین های رایانه ای

در تمرین های**۴۳- ۴۶** با استفاده از یک نرم افزار ریاضی و قضیه گرین گردش پاد ساعتگرد میدان $\mathbf{F}$ حول خم بسته ساده C را بیابید. به کمک نرم افزار مراحل زیر را انجام دهید:

(الف)- C را در صفحه xy رسم کنید.

(ب)- انتگرالده $(\partial N/\partial x)-(\partial M/\partial y)$ صورت تاوی قضیه گرین را تعیین کنید.

(پ)- از روی نمودار قسمت (الف) حدود انتگرال گیری (انتگرال دوگانه) را تعیین کرده و انتگرال تاو را برای گردش محاسبه کنید.

۴۳- $\mathbf{F}=(2x-y)\mathbf{i}+(x+3y)\mathbf{j}$،

بیضی $C: x^2+4y^2=4$

۴۴- $\mathbf{F}=(2x^3-y^3)\mathbf{i}+(x^3+y^3)\mathbf{j}$،

بیضی $C: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

۴۵- $\mathbf{F}=x^{-1}e^y\mathbf{i}+(e^y\ln x+2x)\mathbf{j}$، C: مرز ناحیه ای که با خم های $y=1+x^4$ (از پایین) و $y=2$ (از بالا) تعریف می شود.

۴۶- $\mathbf{F}=xe^y\mathbf{i}+(4x^2\ln y)\mathbf{j}$،

C: مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(2,0)$ و $(0,4)$

۱۶- ۵ — رویه و مساحت

خم های واقع در صفحه را به سه روش مختلف تعریف کرده ایم:

صورت صریح: $y=f(x)$

صورت ضمنی: $F(x,y)=0$

صورت برداری پارامتری: $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j},\ a\le t\le b$

تعاریف مشابهی برای رویه ها در فضا داریم:

صورت صریح: $z=f(x,y)$

صورت ضمنی: $F(x,y,z)=0$

هر رویه یک صورت پارامتری هم دارد که مکان هر نقطه از رویه را به صورت یک تابع برداری دو متغیره بیان می کند. در این بخش در مورد این صورت جدید بحث کرده و از آن برای بدست آوردن مساحت رویه به صورت یک انتگرال دوگانه استفاده می کنیم. سپس فرمولهای انتگرال دوگانه مساحت های رویه ها در صورت های صریح و ضمنی به عنوان حالت های خاصی از فرمول پارامتری کلی تر بدست می آیند.

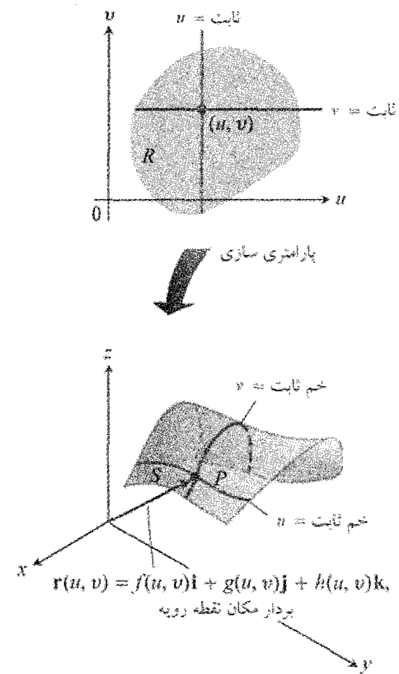
پارامتری سازی (صورت پارامتری) رویه ها

فرض کنید

$$\mathbf{r}(u,v)=f(u,v)\mathbf{i}+g(u,v)\mathbf{j}+h(u,v)\mathbf{k} \qquad (۱)$$

تابع برداری پیوسته ای است که روی ناحیه ای چون R در صفحه uv تعریف شده و در درون R یک به یک است (شکل۱۶- ۳۷). برد $\mathbf{r}$ را **رویه** S تعریف شده یا طی شده توسط $\mathbf{r}$ می نامیم. معادله (۱) همراه با دامنه R **صورت پارامتری** رویه را تشکیل می دهند. متغیرهای u و v **پارامتر** و R **دامنه پارامتر** است. برای ساده شدن بحثمان فرض می کنیم R یک ناحیه مستطیلی شکل است که با نابرابریهایی به صورت $a\le u\le b$ و $c\le v\le d$ تعریف می شود. شرط یک به یک بودن $\mathbf{r}$ در داخل R تضمین می کند که S خودش را قطع نمی کند. توجه کنید که معادله (۱) هم ارز برداری سه معادله پارامتری زیر است

$$x=f(u,v) \quad \text{و} \quad y=g(u,v) \quad \text{و} \quad z=h(u,v)$$



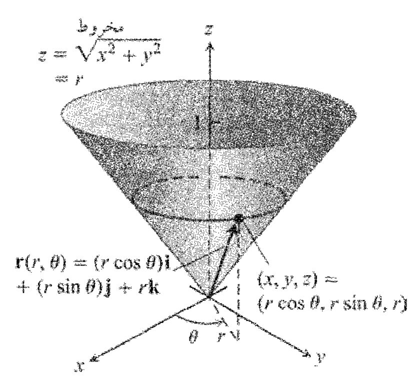
شکل۱۶– ۳۷ : هر رویه پارامتری S به صورت یک تابع برداری دو متغیره بیان می شود که روی ناحیه ای چون R تعریف شده است.

مثال۱: صورت پارامتری مخروط زیر را بیابید

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \le z \le 1$$

حل: در اینجا برای یافتن صورت پارامتری رویه از مختصات استوانه ای بهره می گیریم. برای یک نقطه نمونه چون (x, y, z) بر روی مخروط(شکل۱۶– ۳۸) داریم

$$x = r\cos\theta \quad \text{و} \quad r = r\sin\theta \quad \text{و} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$



شکل۱۶– ۳۸: مخروط مثال ۱ را می توان با بهره گیری از مختصات استوانه ای پارامتری کرد.

که $0 \le r \le 1$ و $0 \le \theta \le 2\pi$. اگر در معادله (۱)، $u = r$ و $v = \theta$ بگیریم صورت پارامتری زیر بدست می آید

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$$
$$0 \le r \le 1 \ \text{و}\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

پارامتری سازی در درون دامنه R یک به یک است، هر چند که در نوک مرزی مخروط آن یعنی در $r = 0$ یک به یک نیست.

مثال۲: مطلوب است صورت پارامتری کره

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

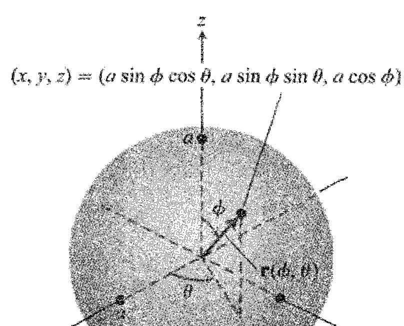
حل: برای این منظور از مختصات کروی بهره می گیریم. برای یک نقطه نمونه چون (x, y, z) بر روی کره داریم(شکل۱۶– ۳۹)

$$x = a\sin\phi\cos\theta \ \text{و}\ y = a\sin\phi\sin\theta \ \text{و}\ z = a\cos\phi$$
$$0 \le \theta \le 2\pi \ \text{و}\ 0 \le \phi \le \pi$$

اگر در معادله (۱) $u = \phi$ و $v = \theta$ در نظر بگیریم صورت پارامتری زیر بدست می آید

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k}$$
$$0 \le \phi \le \pi \quad \text{و} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

باز هم پارامتری سازی در درون دامنه R یک به یک است هر چند که روی «قطب های» مرزی آن یعنی جاهایی که $\phi = 0$ یا $\theta = \pi$ است یک به یک نیست.



شکل۱۶– ۳۹: کره مثال ۲ را می توان با بهره گیری از مختصات کروی پارامتری کرد.

مثال۳: صورت پارامتری استوانه زیر را بیابید

$$x^2 + (y-3)^2 = 9,\quad 0 \le z \le 5$$

حل: در مختصات استوانه ای برای نقطه ای چون (x, y, z) داریم

$$x = r\cos\theta \quad \text{و} \quad y = r\sin\theta \quad \text{و} \quad z = z$$

برای نقاط واقع بر روی استوانه $x^2+(y-3)^2=9$ (شکل ۱۶- ۴۰)، معادله با معادله قطبی قاعده استوانه در صفحه xy یکسان است:

$$x^2+\left(y^2-6y+9\right)=9 \quad (y = r\sin\theta \text{ و } x^2+y^2=r^2)$$

$$r^2-6r\sin\theta=0$$

یا

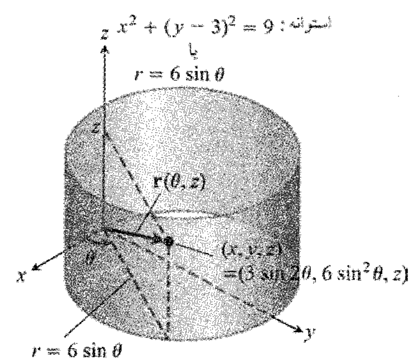
$$r=6\sin\theta, \quad 0\le\theta\le\pi$$

بنابراین یک نقطه نمونه واقع برروی استوانه مختصات زیر را دارد

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = 6\sin\theta\cos\theta = 3\sin 2\theta \\ y &= r\sin\theta = 6\sin^2\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

اگر در معادله (۱) $u=\theta$ و $v=z$ قرار دهیم صورت پارامتری یک به یک زیر بدست می آید

$$\mathbf{r}(\theta,z)=(3\sin 2\theta)\mathbf{i}+\left(6\sin^2\theta\right)\mathbf{j}+z\mathbf{k}, \quad 0\le z\le 5, 0\le\theta\le\pi$$



شکل۱۶-۴۰: استوانه مثال ۳ را می توان با بهره گیری از مختصات استوانه ای پارامتری کرد.

مساحت رویه

هدف ما یافتن یک انتگرال دوگانه برای محاسبه مساحت رویه خمیده ای چون S با صورت پارامتری زیر است

$$\mathbf{r}(u,v)=f(u,v)\mathbf{i}+g(u,v)\mathbf{j}+h(u,v)\mathbf{k}, \quad a\le u\le b, \quad c\le v\le d$$

برای هدفی که دنبال می کنیم لازم است S هموار باشد. تعریف هموار بودن با مشتقات جزئی $\mathbf{r}$ نسبت به u و v در ارتباط است:

$$\mathbf{r}_u=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i}+\frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{j}+\frac{\partial h}{\partial u}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_v=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{i}+\frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j}+\frac{\partial h}{\partial v}\mathbf{k}$$

> **تعریف:** رویه پارامتری
>
> $$\mathbf{r}(u,v)=f(u,v)\mathbf{i}+g(u,v)\mathbf{j}+h(u,v)\mathbf{k}$$
>
> **هموار** است اگر $\mathbf{r}_u$ و $\mathbf{r}_v$ پیوسته باشند و $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ در درون دامنه پارامتر هرگز صفر نباشد.

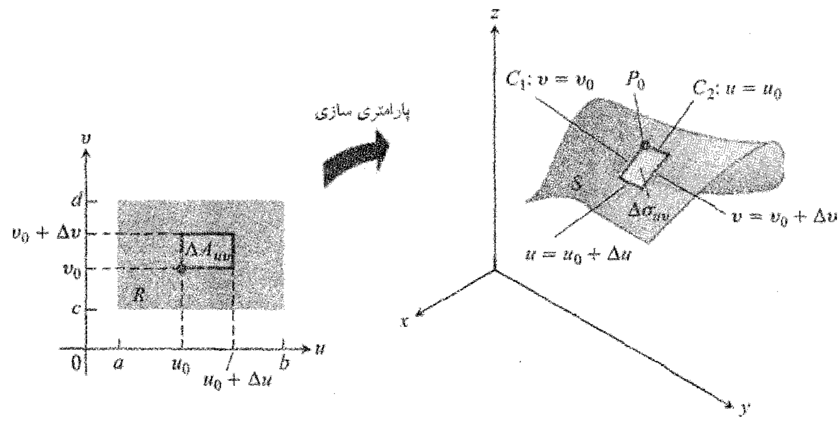
این شرط که $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ هرگز بردار صفر نباشد بدین معناست که دو بردار $\mathbf{r}_u$ و $\mathbf{r}_v$ ناصفر باشند و هرگز در امتداد یک خط قرار نگیرند، لذا این دو بردار همواره صفحه ای مماس بر رویه را مشخص می کنند. روی مرز دامنه این شرط را کنار می گذاریم اما این امر تأثیری بر محاسبه مساحت ندارد.

اکنون مستطیل کوچک ΔA_{uv} را در R در نظر بگیرید که اضلاعش روی خطوط $u=u_0$، $u=u_0+\Delta u$، $v=v_0$ و $v=v_0+\Delta v$ قرار دارند (شکل۱۶- ۴۱). هر ضلع ΔA_{uv} به خمی بر رویه S نگاشته می شود و این چهار خم روی هم یک «قطعه خمیده» چون $\Delta\sigma_{uv}$ را محدود می کنند. در نمادگذاری شکل، ضلع $v=v_0$ به خم C_1، ضلع $u=u_0$ به خم C_2 و رأس مشترک آنها (u_0,v_0) به P_0 نگاشته می شود.

شکل۱۶- ۴۲ نمای بزرگ شده ای از $\Delta\sigma_{uv}$ را نشان می دهد. بردار مشتق جزئی $\mathbf{r}_u(u_0,v_0)$ در P_0 بر C_1 مماس است. همینطور $\mathbf{r}_v(u_0,v_0)$ در P_0 بر C_2 مماس است. ضرب برداری $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ در P_0 بر رویه قائم است (این همان جایی است که شروع می کنیم از فرض هموار بودن S استفاده کنیم. می خواهیم مطمئن باشیم که $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\neq\mathbf{0}$).

اکنون قطعه $\Delta\sigma_{uv}$ از رویه را با متوازی الاضلاعی روی صفحه مماس که اضلاعش با بردارهای $\Delta u\mathbf{r}_u$ و $\Delta v\mathbf{r}_v$ مشخص می شوند تقریب می زنیم (شکل۱۶- ۴۳). مساحت این متوازی الاضلاع برابر است با

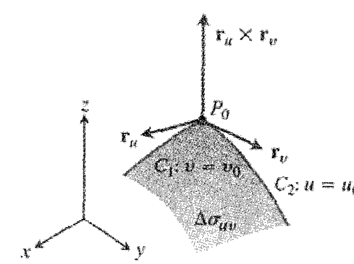
$$\left|\Delta u\mathbf{r}_u\times\Delta v\mathbf{r}_v\right|=\left|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right|\Delta u\Delta v \qquad (۲)$$



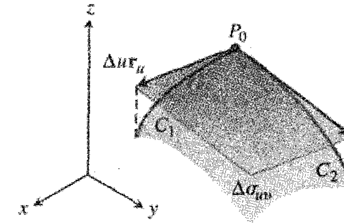
شکل۱۶- ۴۱: جزء مستطیلی شکل مساحت ΔA_{uv} در صفحه uv به یک قطعه (جزء) خمیده $\Delta\sigma_{uv}$ برروی S نگاشته می شود.

تقسیم بندی ناحیه R در صفحه xy بوسیله نواحی مستطیلی ΔA_{uv} باعث تقسیم بندی رویه S به قطعات رویه ای $\Delta\sigma_{uv}$ می شود. مساحت هر قطعه $\Delta\sigma_{uv}$ از رویه را مساحت متوازی الاضلاع مذکور در معادله (۲) تعریف کرده و این مساحت ها را با هم جمع می کنیم تا مساحت تقریبی رویه S را بدست آوریم

$$\sum_{n}\left|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right|\Delta u\,\Delta v \qquad (۳)$$



شکل۱۶- ۴۲: نمای بزرگ شده ای از قطعه $\Delta\sigma_{uv}$ از رویه.



شکل۱۶- ۴۳: مساحت متوازی الاضلاعی که با بردارهای $\Delta u\mathbf{r}_u$ و $\Delta v\mathbf{r}_v$ مشخص می شود برابر مساحت قطعه $\Delta\sigma_{uv}$ از رویه تعریف می شود.

وقتی Δu و Δv بطور مستقل به صفر میل کنند تعداد اجزاء مساحت n به ∞ میل کرده و پیوستگی $\mathbf{r}_u$ و $\mathbf{r}_v$ تضمین می کند که مجموع (۳) به انتگرال دوگانه $\int_c^d\int_a^b\left|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right|du\,dv$ میل می کند. این انتگرال دوگانه روی ناحیه R مساحت رویه S را تعریف می کند.

تعریف: مساحت رویه هموار

$$\mathbf{r}(u,v)=f(u,v)\mathbf{i}+g(u,v)\mathbf{j}+h(u,v)\mathbf{k},$$
$$a\le u\le b,\ c\le v\le d$$

از فرمول زیر بدست می آید

$$A=\iint_R\left|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right|dA=\int_c^d\int_a^b\left|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right|du\,dv \qquad (۴)$$

می توانیم در معادله θ به جای $\left|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right|du\,dv$، $d\sigma$ قرار داده و انتگرال را به صورت ساده تری درآوریم. دیفرانسیل مساحت رویه $d\sigma$ مشابه دیفرانسیل طول قوس ds بخش۱۳-۳ است.

دیفرانسیل مساحت رویه برای یک رویه پارامتری

$$d\sigma=\left|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right|du\,dv \qquad \iint_S d\sigma \qquad (۵)$$

دیفرانسیل مساحت رویه   فرمول دیفرانسیلی مساحت رویه

مثال۴: مساحت رویه مخروط مثال ۱ را بیابید (شکل۱۶- ۳۸).

حل: در مثال ۱ صورت پارامتری زیر را یافتیم

$$\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+r\mathbf{k},$$
$$0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

برای کاربرد معادله (۴) ابتدا $\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta$ را می یابیم

$$\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \cos\theta&\sin\theta&1\\ -r\sin\theta&r\cos\theta&0\end{vmatrix}$$
$$=-(r\cos\theta)\mathbf{i}-(r\sin\theta)\mathbf{j}+\underbrace{\left(r\cos^2\theta+r\sin^2\theta\right)}_{r}\mathbf{k}$$

بنابراین،

$$|\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta|=\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+r^2}=\sqrt{2r^2}=\sqrt{2}r$$

مساحت مخروط برابر است با

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^1|\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta|dr\,d\theta$$

(معادله (۴) به ازای $u=r$ و $v=\theta$)

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{2}r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}(2\pi)=\pi\sqrt{2}$$

مثال ۵: مساحت رویه کره ای به شعاع a را بیابید.

حل: از صورت پارامتری بدست آمده در مثال ۲ استفاده می کنیم

$$\mathbf{r}(\phi,\theta)=(a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(a\cos\phi)\mathbf{k},$$
$$0\le\phi\le\pi,\ 0\le\theta\le2\pi$$

برای $\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta$ داریم

$$\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a\cos\phi\cos\theta&a\cos\phi\sin\theta&-a\sin\phi\\ -a\sin\phi\sin\theta&a\sin\phi\cos\theta&0\end{vmatrix}$$
$$=\left(a^2\sin^2\phi\cos\theta\right)\mathbf{i}+\left(a^2\sin^2\phi\sin\theta\right)\mathbf{j}+\left(a^2\sin^2\phi\cos\phi\right)\mathbf{k}$$

بنابراین

$$|\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta|$$
$$=\sqrt{a^4\sin^4\phi\cos^2\theta+a^4\sin^4\phi\sin^2\theta+a^4\sin^2\phi\cos^2\phi}$$
$$=\sqrt{a^4\sin^4\phi+a^4\sin^2\phi\cos^2\phi}$$
$$=\sqrt{a^4\sin^4\phi\left(\sin^2\phi+\cos^2\phi\right)}$$
$$=a^2\sqrt{\sin^2\phi}=a^2\sin\phi$$

زیرا به ازای $0\le\phi\le2\pi$، $\sin\phi>0$. بنابراین مساحت کره برابر است با

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[-a^2\cos\phi\right]_0^{\pi}d\theta=\int_0^{2\pi}2a^2d\theta=4\pi a^2$$

این عبارت با فرمول معروف مساحت رویه کره توافق دارد.

مثال۶: فرض کنید S رویه نشان داده شده در شکل۱۶- ۴۴ (رویه "فوتبال")باشد که با چرخاندن خم $x=\cos z$، $y=0$، $-\pi/2\le z\le\pi/2$ حول محور z بدست می آید. صورت پارامتری S را یافته و مساحت رویه آن را محاسبه کنید.

حل: مثال۲ روشی برای یافتن صورت پارامتری S براساس چرخش آن حول محور z پیشنهاد می کند. اگر نقطه ای چون (x,y,z) از خم $x=\cos z$، $y=0$ را حول محور z بچرخانیم دایره ای در ارتفاع z بالای صفحه xy به مرکز محور z و شعاع $r=\cos z$ بدست می آوریم (شکل۱۶- ۴۴ را ببینید). این نقطه دایره را به اندازه زاویه چرخش θ، $0\le\theta\le2\pi$، جاروب می کند. فرض می کنیم (x,y,z) نقطه دلخواهی برروی این دایره است و پارامترهای $u=z$ و $v=\theta$ را تعریف می کنیم در این صورت داریم

$$x=r\cos\theta=\cos u\cos v,\ y=r\sin\theta=\cos u\sin v,$$
$$z=u$$

که صورت پارامتری زیر را برای S بدست می دهند

$$\mathbf{r}(u,v)=\cos u\cos v\mathbf{i}+\cos u\sin v\mathbf{j}+u\mathbf{k},$$
$$-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le v\le2\pi$$

حالا به کمک معادله (۵) مساحت رویه S را می یابیم. با مشتق گیری از صورت پارامتری داریم

$$\mathbf{r}_u=-\sin u\cos v\mathbf{i}-\sin u\sin v\mathbf{j}+\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_v=-\cos u\sin v\mathbf{i}+\cos u\cos v\mathbf{j}$$

ضرب برداری این دو بردار را محاسبه می کنیم

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ -\sin u\cos v&-\sin u\sin v&1\\ -\cos u\sin v&\cos u\cos v&0\end{vmatrix}$$

$$= -\cos u \cos v \mathbf{i} - \cos u \sin v \mathbf{j}$$
$$-\left(\sin u \cos u \cos^2 v + \cos u \sin u \sin^2 v\right)\mathbf{k}$$

اندازه حاصلضرب برداری فوق برابر است با

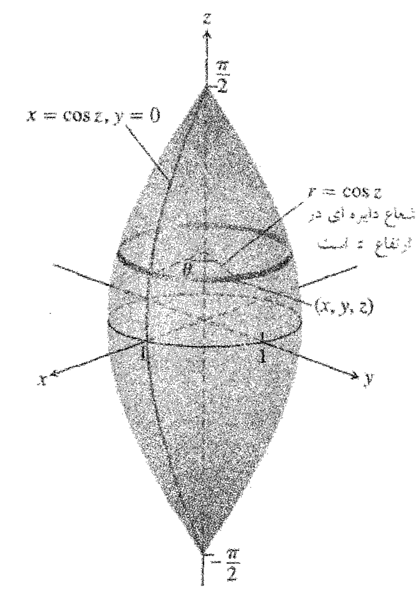
$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{\cos^2 u\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right) + \sin^2 u \cos^2 u}$$
$$= \sqrt{\cos^2 u\left(1 + \sin^2 u\right)}$$

(به ازای $\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}-$، $\cos u \ge 0$)

$$= \cos u \sqrt{1 + \sin^2 u}$$

با توجه به معادله (۴) مساحت رویه از انتگرال زیر بدست می آید

$$A = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u \sqrt{1 + \sin^2 u}\, du dv$$



شکل ۱۶-۴۴: رویه مذکور در مثال ۶ با چرخاندن خم $x = \cos z$ حول محور z بدست می آید.

برای محاسبه انتگرال از جانشانی زیر استفاده می کنیم

$$w = \sin u \quad \text{و} \quad dw = \cos u\, du \quad \text{و} \quad -1 \le w \le 1$$

چون رویه S روی صفحه xy متقارن است فقط لازم است نسبت به w از 0 تا 1 انتگرال بگیریم و نتیجه را در۲ ضرب کنیم. بطور خلاصه داریم

$$A = 2\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + w^2}\, dw dv$$

(جدول انتگرال ها، فرمول ۳۵)

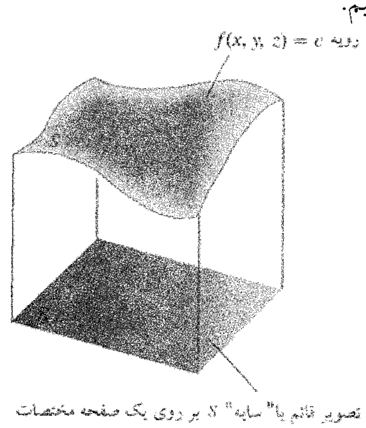
$$= 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{w}{2}\sqrt{1+w^2} + \frac{1}{2}\ln\left(w + \sqrt{1+w^2}\right)\right]_0^1 dv$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\left[\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] dv$$
$$= 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$$

رویه های ضمنی

رویه ها غالباً به صورت مجموعه ترازهای یک تابع ارائه شده و با معادله ای نظیر معادله زیر توصیف می شوند

$$F(x, y, z) = c$$

که c مقداری ثابت است. چنین رویه ترازی با صورت پارامتری صریحی همراه نیست و رویه ضمنی نامیده می شود. رویه های ضمنی مثلاً در میدان های الکتریکی یا گرانشی به عنوان رویه های (سطوح) هم پتانسیل ظاهر می شوند. شکل۱۶- ۴۵ قطعه ای از چنین رویه ای را نشان می دهد. یافتن فرمول های صریح برای توابع f، g و h که رویه را به صورت $\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\mathbf{i} + g(u,v)\mathbf{j} + h(u,v)\mathbf{k}$ توصیف می کنند ممکن است دشوار باشد. در اینجا نشان می دهیم که چگونه دیفرانسیل مساحت رویه $d\sigma$ را برای رویه های ضمنی محاسبه می کنیم.



شکل۱۶- ۴۵: همانطور که به زودی می بینیم، مساحت رویه ای چون S در فضا را می توان با محاسبه یک انتگرال دوگانه روی تصویر قائم یا «سایه» S برروی یک صفحه مختصات بدست آورد. بردار واحد $\mathbf{p}$ قائم بر صفحه است.

شکل ۱۶- ۴۵ قطعه ای از رویه ضمنی S را نشان می دهد که بالای ناحیه «سایه» خود R در صفحه زیرینش قرار دارد. این رویه با معادله $F(x,y,z)=c$ تعریف می شود و $\mathbf{p}$ بردار واحدی عمود بر ناحیه مسطح R است. فرض می کنیم رویه هموار است (F مشتق پذیر، ∇F ناصفر و روی S پیوسته است) و $\nabla F.\mathbf{p}\neq 0$، لذا رویه روی خودش تا نمی شود.

فرض کنید بردار قائم $\mathbf{p}$ بردار واحد $\mathbf{k}$ باشد و لذا ناحیه R در شکل ۱۶- ۴۵ در صفحه xy قرار داشته باشد. بنابه فرض در این صورت برروی S داریم $\nabla F.\mathbf{p}=\nabla F.\mathbf{k}=F_z\neq 0$. طبق قضیه ای در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته موسوم به قضیه تابع ضمنی در این صورت S نمودار یک تابع مشتق پذیر چون $z=h(x,y)$ است، هر چند که تابع $h(x,y)$ صریحاً معلوم نیست. پارامترهای u و v را به صورت $u=x$ و $v=y$ تعریف می کنیم. در این صورت $z=h(u,v)$ و صورت پارامتری رویه S با رابطه زیر مشخص می شود

$$\mathbf{r}(u,v)=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+h(u,v)\mathbf{k} \qquad (۶)$$

با استفاده از معادله (۴) مساحت S را بدست می آوریم.

اگر مشتقات جزئی $\mathbf{r}$ را حساب کنیم داریم

$$\mathbf{r}_u=\mathbf{i}+\frac{\partial h}{\partial u}\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{r}_v=\mathbf{j}+\frac{\partial h}{\partial v}\mathbf{k}$$

با کاربرد قاعده زنجیری برای مشتق گیری ضمنی (معادله (۲) بخش ۱۶- ۴ را ببینید) در مورد تابع $F(x,y,z)=c$، که در آن $x=u$، $y=v$ و $z=h(u,v)$، مشتقات جزئی زیر را بدست می آوریم

$$\frac{\partial h}{\partial u}=-\frac{F_x}{F_z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial h}{\partial v}=-\frac{F_y}{F_z}$$

با جانشانی این مشتقات در مشتقات $\mathbf{r}$ خواهیم داشت

$$\mathbf{r}_u=\mathbf{i}-\frac{F_x}{F_z}\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{r}_v=\mathbf{j}-\frac{F_y}{F_z}\mathbf{k}$$

با محاسبه مستقیم ضرب برداری داریم

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=\frac{F_x}{F_z}\mathbf{i}+\frac{F_y}{F_z}\mathbf{j}+\mathbf{k} \quad (F_z\neq 0)$$
$$=\frac{1}{F_z}\left(F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+F_z\mathbf{k}\right)$$
$$=\frac{\nabla F}{F_z}=\frac{\nabla F}{\nabla F.\mathbf{k}}$$
$$=\frac{\nabla F}{\nabla F.\mathbf{p}} \quad (\mathbf{p}=\mathbf{k})$$

بنابراین دیفرانسیل مساحت رویه چنین بدست می آید

$$d\sigma=\left|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right|dudv=\frac{|\nabla F|}{|\nabla F.\mathbf{p}|}dxdy \quad (u=x \text{ و } v=y)$$

اگر با فرض اینکه برروی S، $F_z\neq 0$ است از بردار $\mathbf{p}=\mathbf{j}$ به عنوان بردار قائم بر صفحه xz یا با فرض اینکه برروی S، $F_x\neq 0$ است از بردار $\mathbf{p}=\mathbf{i}$ به عنوان بردار قائم بر صفحه yz استفاده می کردیم به محاسبات مشابهی دست می یافتیم. اکنون با ترکیب این نتایج با معادله (۴) فرمول کلی زیر بدست می آید.

فرمول مساحت رویه برای رویه های ضمنی

مساحت رویه $F(x,y,z)=c$ واقع بر بالای یک ناحیه مسطح کراندار و بسته چون R برابر است با

$$\text{مساحت رویه}=\iint_R\frac{|\nabla F|}{|\nabla F.\mathbf{p}|}dA \qquad (۷)$$

که در آن $\mathbf{p}=\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ یا $\mathbf{k}$ بردار قائم بر R و $\nabla F.\mathbf{p}\neq 0$ است.

بدین ترتیب مساحت رویه برابر است با انتگرال دوگانه اندازه ∇F تقسیم بر اندازه مؤلفه عددی ∇F قائم بر روی R.

رابطه (۷) با این مفروضات بدست آمد که در سراسر R، $\nabla F.\mathbf{p}\neq 0$ و ∇F پیوسته است. اما هر وقت انتگرال فوق وجود داشته باشد مقدار آن را مساحت بخشی از رویه $F(x,y,z)=c$ که در بالای R قرار دارد تعریف می کنیم (به یاد داشته باشید که عمل تصویر کردن یک به یک فرض می شود).

مثال ۷: مطلوب است مساحت رویه ای که بوسیله صفحه $z=4$ از پایین سهمیوار $x^2+y^2-z=0$ جدا می شود.

حل: رویه S و ناحیه R زیر آن در صفحه xy را رسم می کنیم (شکل ۱۶- ۴۶). رویه S بخشی از رویه تراز

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$$

است و R عبارت است از قرص $x^2+y^2\le 4$ در صفحه xy. می توانیم $\mathbf{p}=\mathbf{k}$ را به عنوان بردار واحد قائم بر صفحه R اختیار کنیم.

در هر نقطه (x,y,z) از رویه داریم

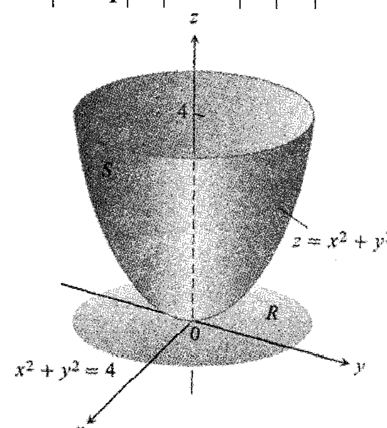
$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z$$

$$\nabla F=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

$$|\nabla F|=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-1)^2}$$

$$=\sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

$$|\nabla F.\mathbf{p}|=|\nabla F.\mathbf{k}|=|-1|=1$$



شکل۱۶- ۴۶: مساحت این رویه سهموی در مثال ۷ محاسبه شده است.

در ناحیه R، $dA=dx\,dy$. بنابراین

$$\text{مساحت رویه}=\iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F.\mathbf{p}|}dA \qquad (\text{معادله}۷)$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta \qquad (\text{مختصات قطبی})$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}\left(4r^2+1\right)^{3/2}\right]_0^2 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}\left(17^{3/2}-1\right)d\theta=\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

مثال ۷ چگونگی یافتن مساحت رویه را برای تابعی چون $z=f(x,y)$ واقع بر بالایی ناحیه R در صفحه xy نشان می دهد. در واقع دیفرانسیل مساحت رویه را می توان به دو روش بدست آورد و این موضوع را در مثال بعد نشان می دهیم.

مثال۸: دیفرانسیل مساحت رویه $d\sigma$ رویه $z=f(x,y)$ واقع بر بالای ناحیه R در صفحه xy را (الف)- به کمک معادله (۵) به صورت پارامتری و (ب)- به کمک معادله (۷) به صورت ضمنی بدست آورید.

حل:

(الف)- با در نظر گرفتن $x=u$، $y=v$ و $z=f(x,y)$ بر روی R صورت پارامتری رویه را بدست می آوریم. با این کار صورت پارامتری زیر بدست می آید

$$\mathbf{r}(u,v)=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+f(u,v)\mathbf{k}$$

با محاسبه مشتقات جزئی خواهیم داشت

$$\mathbf{r}_u=\mathbf{i}+f_u\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{r}_v=\mathbf{j}+f_v\mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=-f_u\mathbf{i}-f_v\mathbf{j}+\mathbf{k} \qquad \left(\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 0 & f_u\\ 0 & 1 & f_v\end{vmatrix}\right)$$

از اینجا داریم $|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|du\,dv=\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}\,du\,dv$. با جانشانی مقادیر u و v دیفرانسیل مساحت رویه به صورت زیر بدست می آید

$$d\sigma=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dx\,dy$$

(ب)- تابع ضمنی $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ را تعریف می کنیم. چون (x,y) متعلق به ناحیه R است بردار واحد قائم بر صفحه R عبارت است از $\mathbf{p}=\mathbf{k}$. در این صورت $\nabla F=f_x\mathbf{i}+f_y\mathbf{j}-\mathbf{k}$، بطوریکه

$$|\nabla F|=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1} \quad \text{و} \quad \frac{|\nabla F|}{|\nabla F.\mathbf{p}|}=|\nabla F|$$

$$|\nabla F.\mathbf{p}|=|-1|=1 \quad \text{و}$$

دیفرانسیل مساحت رویه باز هم به صورت زیر بدست می آید

$$d\sigma=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dx\,dy$$

دیفرانسیل مساحت رویه که در مثال ۸ بدست آمد فرمول زیر را برای محاسبه مساحت رویه نمودار تابعی که تعریف صریح

آن به صورت $z=f(x,y)$ است در اختیار ما قرار می دهد.

فرمول مساحت رویه نمودار $z=f(x,y)$

برای نمودار $z=f(x,y)$ واقع بر بالای ناحیه ای چون R در صفحه xy فرمول مساحت رویه به صورت زیر است

$$A=\iint_R \sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dx\,dy \qquad (8)$$

تمرین های ۱۶-۵

یافتن صورت پارامتری

در تمرین های ۱- ۱۶ یک صورت پارامتری برای رویه بیابید (بیش از یک جواب وجود دارد لذا پاسخ های شما ممکن است با پاسخ های ارائه شده در آخر کتاب یکسان نباشند).

۱- سهمیوار: $z=x^2+y^2$ و $z\le 4$

۲- سهمیوار: $z=9-x^2-y^2$ و $z\ge 0$

۳- **مخروط ناقص.** بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}/2$ واقع در یک هشتم اول و بین صفحات $z=0$ و $z=3$.

۴- مخروط ناقص. بخشی از مخروط $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ بین صفحات $z=2$ و $z=4$.

۵- **عرقچین کروی. عرقچینی** که بوسیله مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از کره $x^2+y^2+z^2=9$ جدا می شود.

۶- **عرقچین کروی**. بخشی از کره

$$x^2+y^2+z^2=4$$

واقع در یک هشتم اول و بین صفحه xy و مخروط

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

۷- **نوار کروی.** بخشی از کره

$$x^2+y^2+z^2=3$$

بین صفحات $z=\sqrt{3}/2$ و $z=-\sqrt{3}/2$.

۸- **عرقچین کروی.** قسمت بالایی کره $x^2+y^2+z^2=8$ که بوسیله صفحه $z=-2$ از آن جدا می شود.

۹- **استوانه سهموی بین صفحات.** رویه ای که بوسیله صفحات $x=0$، $x=2$ و $z=0$ از استوانه سهموی

$$z=4-y^2$$

جدا می شود.

۱۰- **استوانه سهموی بین صفحات.** رویه ای که بوسیله صفحات $z=0$، $z=3$ و $y=2$ از استوانه سهموی $y=x^2$ جدا می شود.

۱۱- **نواری از استوانه مستدیر.** بخشی از استوانه

$$y^2+z^2=9$$

بین صفحات $x=0$ و $x=3$.

۱۲- **نواری از استوانه مستدیر.** بخشی از استوانه

$$x^2+z^2=4$$

واقع در بالای صفحه xy بین صفحات $y=-2$ و $y=2$.

۱۳- **صفحه کج داخل استوانه.** بخشی از صفحه

$$x+y+z=1$$

(الف)- در داخل استوانه $x^2+y^2=9$

(ب)- در داخل استوانه $y^2+z^2=9$.

۱۵- **نواری از استوانه مستدیر.** بخشی از استوانه

$$(x-2)^2+z^2=4$$

بین صفحات $y=0$ و $y=3$.

۱۶- **نواری از استوانه مستدیر.** بخشی از استوانه

$$y^2+(z-5)^2=25$$

بین صفحات $x=0$ و $x=10$.

مساحت رویه های پارامتری

در تمرین های ۱۷ – ۲۶ با استفاده از یک صورت پارامتری مساحت رویه را به صورت یک انتگرال دوگانه بیان کنید. سپس انتگرال را محاسبه کنید (در هر مورد بیش از یک انتگرال

صحیح می توان نوشت، لذا انتگرال شما ممکن است با انتگرالهای داده شده در آخر کتاب یکسان نباشند. اما مقادیر آنها باید یکسان باشد).

۱۷- **صفحه کج داخل استوانه.** بخشی از صفحه $y+2z=2$ واقع در داخل استوانه $x^2+y^2=1$.

۱۸- **صفحه داخل استوانه.** بخشی از صفحه $z=-x$ واقع در داخل استوانه $x^2+y^2=4$.

۱۹- **مخروط ناقص.** بخشی از مخروط $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ بین صفحات $z=2$ و $z=6$.

۲۰- **مخروط ناقص.** بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}/3$ بین صفحات $z=1$ و $z=4/3$.

۲۱- **نواری از استوانه مستدیر.** بخشی از استوانه

$$x^2+y^2=1$$

بین صفحات $z=1$ و $z=4$.

۲۲- **نواری از استوانه مستدیر.** بخشی از استوانه

$$x^2+z^2=10$$

بین صفحات $y=-1$ و $y=1$.

۲۳- **عرقچین سهموی. عرقچینی** که بوسیله مخروط

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

از سهمیوار $z=x^2+y^2$ جدا می شود.

۲۴- **نوار سهموی.** بخشی از سهمیوار $z=x^2+y^2$ بین صفحات $z=1$ و $z=4$.

۲۵- **بخش پایینی** کره $x^2+y^2+z^2=2$ که بوسیله مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از آن جدا می شود.

۲۶- **نوار کروی.** بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=4$ بین صفحات $z=-1$ و $z=\sqrt{3}$.

صفحات مماس بر رویه های پارامتری

صفحه مماس در نقطه ای چون

$$P_0\left(f(u_0,v_0),g(u_0,v_0),h(u_0,v_0)\right)$$

از رویه پارامتری

$$\mathbf{r}(u,v)=f(u,v)\mathbf{i}+g(u,v)\mathbf{j}+h(u,v)\mathbf{k}$$

صفحه ای است که از P_0 می گذرد و بر بردار $\mathbf{r}_u(u_0,v_0)\times\mathbf{r}_v(u_0,v_0)$، حاصلضرب برداری بردارهای مماس $\mathbf{r}_u(u_0,v_0)$ و $\mathbf{r}_v(u_0,v_0)$ در P_0، قائم است. در تمرین های۲۷- ۳۰ معادله ای برای صفحه مماس بر رویه در P_0 بیابید. سپس معادله ای دکارتی برای رویه یافته و رویه را همراه با صفحه مماس رسم کنید.

۲۷- **مخروط.** مخروط

$$\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+r\mathbf{k},\ r\geq 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$$

در نقطه $P_0\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\right)$ متناظر با $(r,\theta)=(2,\pi/4)$.

۲۸- **نیمکره.** رویه نیمکروی

$$\mathbf{r}(\phi,\theta)=(4\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(4\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(4(\cos\phi))\mathbf{k},$$
$$0\leq\phi\leq\pi/2,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

در نقطه $P_0\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{3}\right)$ متناظر با $(\phi,\theta)=(\pi/6,\pi/4)$.

۲۹- **استوانه مستدیر.** استوانه مستدیر

$$\mathbf{r}(\theta,z)=(3\sin 2\theta)\mathbf{i}+\left(6\sin^2\theta\right)\mathbf{j}+z\mathbf{k},\ 0\leq\theta\leq\pi$$

در نقطه $P_0=\left(3\sqrt{3}/2,9/2,0\right)$ متناظر با $(\theta,z)=(\pi/3,0)$ (مثال ۳ را ببینید).

۳۰- **استوانه سهموی.** رویه استوانه سهموی

$$\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-x^2\mathbf{k},\ -\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty$$

در نقطه $P_0(1,2,-1)$ متناظر با $(x,y)=(1,2)$.

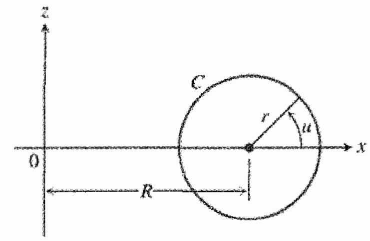
باز هم صورت های پارامتری رویه ها

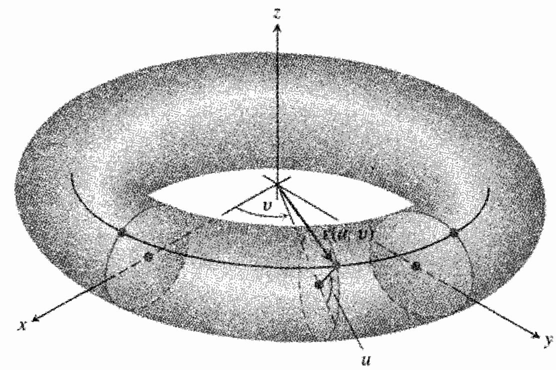
۳۱- (الف)- چنبره دوار (دونات) از چرخش دایره ای چون C واقع در صفحه xz حول محور z در فضا بدست می آید (شکل زیر را ببینید). اگر شعاع C، $r>0$ و مرکز آن $(R,0,0)$ باشد نشان دهید که یکی از صورت های پارامتری چنبره عبارت است از

$$\mathbf{r}(u,v)=((R+r\cos u)\cos v)\mathbf{i}+((R+r\cos u)\sin v)\mathbf{j}$$
$$+(r\sin u)\mathbf{k}$$

که در آن $0\leq u\leq 2\pi$ و $0\leq v\leq 2\pi$ زوایای نشان داده شده در شکل هستند.

(ب)- نشان دهید که مساحت رویه چنبره برابر است با $A=4\pi^2Rr$.



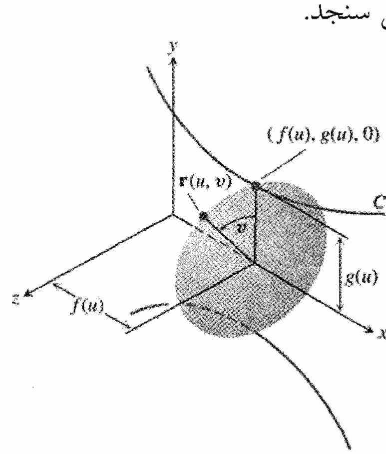


۳۲- صورت پارامتری یک رویه دوار. فرض کنید خم پارامتری $C:(f(u),g(u))$، که در آن به ازای $a\le u\le b$، $g(u)>0$، حول محور x چرخانده شود.

(الف)- نشان دهید که

$$\mathbf{r}(u,v)=f(u)\mathbf{i}+(g(u)\cos v)\mathbf{j}+(g(u)\sin v)\mathbf{k}$$

یک صورت پارامتری برای رویه دوار است. در اینجا $0\le v\le 2\pi$ زاویه بین صفحه xy و نقطه $r(u,v)$ بر روی رویه است (شکل زیر را ببینید). توجه کنید که $f(u)$ فاصله در امتداد محور چرخش و $g(u)$ فاصله از محور چرخش را می سنجد.



(ب)- یک صورت پارامتری برای رویه ای بیابید که از چرخش خم $x=y^2$، $y\ge 0$ حول محور x بدست می آید.

۳۳- (الف)- صورت پارامتری یک بیضیوار. به یاد بیاورید که صورت پارامتری بیضی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ عبارت بود از

$$x=a\cos\theta \quad و \quad y=b\sin\theta \quad و \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

(بخش۳- ۹، مثال۵). با استفاده از زوایای θ و ϕ در مختصات کروی نشان دهید که

$$\mathbf{r}(\theta,\phi)=(a\cos\theta\cos\phi)\mathbf{i}+(b\sin\theta\cos\phi)\mathbf{j}+(c\sin\phi)\mathbf{k}$$

یک صورت پارامتری برای بیضیوار

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$$

است.

(ب)- یک انتگرال برای مساحت رویه این بیضیوار نوشته اما انتگرال را محاسبه نکنید.

۳۴- هذلولیوار یکپارچه.

(الف)- یک صورت پارامتری برای هذلولیوار یکپارچه

$$x^2+y^2-z^2=1$$

برحسب زاویه θ وابسته به دایره $x^2+y^2=r^2$ و پارامتر هذلولوی u وابسته به تابع هذلولوی $r^2-z^2=1$ بیابید (راهنمایی: $\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$).

(ب)- نتیجه قسمت (الف) را به هذلولیوار زیر تعمیم دهید

$$\left(x^2/a^2\right)+\left(y^2/b^2\right)-\left(z^2/c^2\right)=1$$

۳۵- (ادامه تمرین۳۴). یک معادله دکارتی برای صفحه مماس بر هذلولیوار $x^2+y^2-z^2=25$ در نقطه $(x_0,y_0,0)$، جایی که $x_0^2+y_0^2=25$ است، بیابید.

۳۶- هذلولیوار دوپارچه، یک صورت پارامتری برای هذلولیوار دوپارچه زیر بیابید

$$\left(z^2/c^2\right)-\left(x^2/a^2\right)-\left(y^2/b^2\right)=1$$

مساحت رویه برای صورت های ضمنی و صریح

۳۷- مساحت رویه ای را بیابید که بوسیله صفحه $z=2$ از سهمیوار $x^2+y^2-z=0$ جدا می شود.

۳۸- مطلوب است مساحت نواری که بوسیله صفحات $z=2$ و $z=6$ از سهمیوار $x^2+y^2-z=0$ جدا می شود.

۳۹- مطلوب است مساحت ناحیه ای که بوسیله استوانه ای با دیواره های $x=y^2$ و $x=2-y^2$ از صفحه

$$x+2y+2z=5$$

جدا می شود.

۴۰- مطلوب است مساحت بخشی از رویه $x^2-2z=0$ که بالای مثلث محدود به خطوط $x=\sqrt{3}$، $y=0$ و $y=x$ واقع در صفحه xy قرار دارد.

۴۱- مطلوب است مساحت بخشی از رویه

$$x^2-2y-2z=0$$

که بالای مثلثی واقع در صفحه xy و محدود به خطوط $x=2$، $y=0$ و $y=3x$ قرار دارد.

۴۲- مطلوب است مساحت عرقچینی که مخروط

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

از کره $x^2+y^2+z^2=2$ جدا می کند.

۴۳- مطلوب است مساحت بیضی که استوانه $x^2+y^2=1$ از صفحه $z=cx$ (c ثابت) جدا می کند.

۴۴- مطلوب است مساحت بخش بالایی استوانه $x^2+z^2=1$ که بین صفحات $x=\pm 1/2$ و $y=\pm 1/2$ قرار دارد.

۴۵- مطلوب است مساحت بخشی از سهمیوار

$$x=4-y^2-z^2$$

که بالای طوق $1\le y^2+z^2\le 4$ واقع در صفحه yz قرار دارد.

۴۶- مطلوب است مساحت رویه ای که صفحه $y=0$ از سهمیوار $x^2+y+z^2=2$ جدا می کند.

۴۷- مطلوب است مساحت رویه

$$x^2-2\ln x+\sqrt{15}\,y-z=0$$

که بالای مربع $R{:}1\le x\le 2$ و $0\le y\le 1$ واقع در صفحه xy قرار دارد.

۴۸- مطلوب است مساحت رویه $2x^{3/2}+2y^{3/2}-3z=0$ که بالای مربع $R{:}0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ واقع در صفحه xy قرار دارد.

در تمرین های **۴۵- ۵۴** مساحت رویه ها را بیابید.

۴۹- رویه ای که صفحه $z=3$ از پایین سهمیوار

$$z=x^2+y^2$$

جدا می کند.

۵۰- رویه ای که صفحه yz از «دماغه» سهمیوار $x=1-y^2-z^2$ جدا می کند.

۵۱- بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که بالای ناحیه ای در صفحه xy بین دایره $x^2+y^2=1$ و بیضی $9x^2+4y^2=36$ قرار دارد (راهنمایی: با استفاده از فرمولهای هندسی مساحت ناحیه را بیابید).

۵۲- مثلثی که صفحات محدود کننده یک هشتم اول از صفحه $2x+6y+3z=6$ جدا می کنند. با استفاده از صورت های صریح مختلف مساحت را به سه روش محاسبه کنید.

۵۳- رویه ای در یک هشتم اول که صفحات $x=1$ و $y=16/3$ از استوانه $y=(2/3)z^{3/2}$ جدا می کنند.

۵۴- بخشی از صفحه $y+z=4$ که بالای ناحیه ای قرار دارد که سهمی $x=4-z^2$ از ربع اول صفحه xz جدا می کند.

۵۵- با استفاده از صورت پارامتری

$$\mathbf{r}(x,z)=x\mathbf{i}+f(x,z)\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

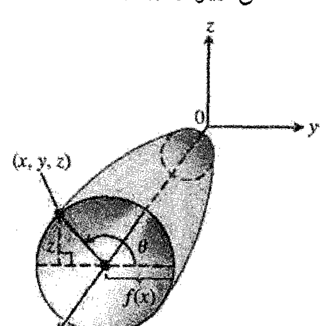
و رابطه (۵) فرمولی برای $d\sigma$ وابسته به صورت صریح $y=f(x,z)$ بدست آورید.

۵۶- فرض کنید S رویه ای است که از چرخش خم هموار $y=f(x)$، $a\le x\le b$ حول محور x بدست می آید و $f(x)\ge 0$.

(الف)- نشان دهید که تابع برداری

$$\mathbf{r}(x,\theta)=x\mathbf{i}+f(x)\cos\theta\mathbf{j}+f(x)\sin\theta\mathbf{k}$$

یک صورت پارامتری S است که θ زاویه چرخش حول محور x می باشد (شکل زیر را ببینید).



(ب)- با استفاده از معادله (۴) نشان دهید که مساحت رویه این رویه دوار از رابطه زیر بدست می آید

$$A=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

۱۶- ۶- انتگرال های رویه ای

برای محاسبه کمیت هایی نظیر شارش مایع از یک پوسته (غشاء) خمیده یا نیروی رو به بالای وارد بر یک چترباز در حال سقوط لازم است از یک تابع روی یک رویه خمیده واقع در فضا انتگرال بگیریم. این مفهوم انتگرال رویه ای تعمیم مفهوم انتگرال خطی مربوط به انتگرال گیری روی یک خم است.

انتگرال های رویه ای

فرض کنید بار الکتریکی روی رویه ای چون S توزیع شده است و تابع $G(x,y,z)$ چگالی بار (بار بر واحد سطح) در هر نقطه از S را مشخص می کند. در این صورت بار کل روی S را می توان به روش زیر به صورت یک انتگرال محاسبه کرد.

مانند بخش۱۶- ۵ فرض کنید رویه S بر ناحیه ای چون R در صفحه uv به صورت پارامتری تعریف شده است

$$\mathbf{r}(u,v)=f(u,v)\mathbf{i}+g(u,v)\mathbf{j}+h(u,v)\mathbf{k} \text{ و } (u,v)\in R$$

در شکل۱۶- ۴۷ می بینیم که تقسیم R (که در اینجا برای سادگی به نواحی مستطیلی تقسیم شده است) باعث تقسیم S به قطعات (اجزاء رویه) خمیده متناظر، یا عناصری، با مساحت $\Delta\sigma_{uv}$ می شود که برابر است با

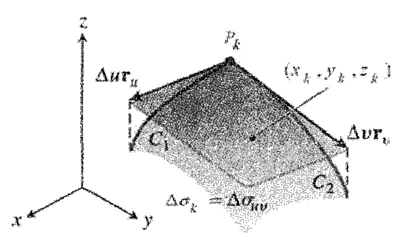
$$\Delta\sigma_{uv}\approx|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,dudv$$

همانطور که در بخش ۱۵- ۲ در تعریف انتگرال های دوگانه عمل کردیم، قطعات رویه را با یک ترتیبی نامگذاری می کنیم و مساحت های آنها را $\Delta\sigma_1$، $\Delta\sigma_2$ و ... و $\Delta\sigma_n$ در نظر می گیریم. برای تشکیل یک جمع ریمان روی S، نقطه ای چون (x_k,y_k,z_k) در قطعه kام برگزیده و مقدار تابع G در آن نقطه را در مساحت $\Delta\sigma_k$ ضرب کرده و حاصلضرب ها را با هم جمع می کنیم:

$$\sum_{k=1}^{n}G(x_k,y_k,z_k)\Delta\sigma_k$$

بسته به انتخاب (x_k,y_k,z_k) در قطعه kام، ممکن است به مقادیر متفاوتی برای این جمع ریمان دست یابیم. حال وقتی تعداد قطعات رویه زیاد شود، مساحت های آنها به صفر نزدیک می شود و Δu و Δv هر دو به صفر میل می کنند و از عبارت فوق حد می گیریم. هرگاه این حد، مستقل از تمام انتخاب هایی که صورت می گیرد، موجود باشد **انتگرال رویه ای G روی رویه S** را به صورت زیر تعریف می کند

$$\iint_S G(x,y,z)\,d\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}G(x_k,y_k,z_k)\Delta\sigma_k \qquad (۱)$$



شکل۱۶-۴۷: مساحت قطعه $\Delta\sigma_k$ برابر است با مساحت متوازی الاضلاع مماسی که با بردارهای $\Delta u\mathbf{r}_u$ و $\Delta v\mathbf{r}_v$ مشخص می شود. نقطه (x_k,y_k,z_k) روی قطعه رویه و زیر متوازی الاضلاع نشان داده شده در اینجا قرار دارد.

به تشابه بین تعریف انتگرال دوگانه (بخش۱۵- ۲) و انتگرال خطی (بخش۱۶-۱) توجه کنید. اگر S رویه ای قطعه قطعه هموار و G روی S پیوسته باشد آنگاه می توان نشان داد که انتگرال رویه ای که با رابطه (۱) تعریف می شود موجود است.

همانطور که در بخش ۱۶-۵ بحث کردیم فرمول محاسبه انتگرال رویه ای بستگی به این دارد که S به صورت پارامتری، ضمنی یا صریح توصیف شده باشد. این فرمول ها در جدول صفحه بعد ارائه شده اند.

انتگرال رویه ای معادله (۱) در کاربردهای مختلف معانی مختلفی دارد. اگر G مقدار ثابتی برابر با ۱ داشته باشد این انتگرال مساحت S را بدست می دهد. اگر G چگالی جرم پوسته نازکی از ماده باشد که با S مدلسازی شده است، این انتگرال جرم پوسته را بدست می دهد. اگر G چگالی بار یک پوسته نازک باشد این انتگرال بار کل پوسته را به دست می دهد.

فرمول های انتگرال رویه ای

۱- برای رویه همواری چون S که به صورت **پارامتری**

$$\mathbf{r}(u,v)=f(u,v)\mathbf{i}+g(u,v)\mathbf{j}+h(u,v)\mathbf{k},\ (u,v)\in R$$

تعریف شده است و تابع پیوسته ای چون $G(x,y,z)$ که روی S تعریف شده است انتگرال رویه ای G روی S با انتگرال دوگانه زیر روی R برابر است

$$\iint_S G(x,y,z)d\sigma=\iint_R G\big(f(u,v),g(u,v),h(u,v)\big)\left|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\right|du\,dv \qquad (۲)$$

۲- برای رویه ای چون S که به صورت **ضمنی** $F(x,y,z)=c$ مشخص شده است، که F تابعی پیوسته مشتق پذیر است و S بالای ناحیه سایه کراندار و بسته اش در صفحه مختصات زیرش، R، قرار دارد، انتگرال رویه ای تابع پیوسته G روی S با انتگرال دوگانه زیر روی R برابر است

$$\iint_S G(x,y,z)d\sigma=\iint_R G(x,y,z)\frac{|\nabla F|}{|\nabla F.\mathbf{p}|}dA \qquad (۳)$$

که در آن $\mathbf{p}$ بردار واحد قائم بر R است و $\nabla F.\mathbf{p}\neq 0$.

۳- برای رویه ای چون S که **صریحاً** به صورت نمودار $z=f(x,y)$ مشخص شده است، که f روی ناحیه ای چون R در صفحه xy تابعی پیوسته مشتق پذیر است، انتگرال رویه ای تابع پیوسته G روی S با انتگرال دوگانه زیر روی R برابر است

$$\iint_S G(x,y,z)d\sigma=\iint_R G\big(x,y,f(x,y)\big)\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dx\,dy \qquad (۴)$$

مثال ۱: از $G(x,y,z)=x^2$ روی مخروط

$$z=\sqrt{x^2+y^2},0\le z\le 1$$

انتگرال بگیرید.

حل: با استفاده از فرمول (۲) و محاسبات مثال ۴ بخش ۱۶- ۵ داریم

$$|\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta|=\sqrt{2}r$$

$$\iint_S x^2d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(r^2\cos^2\theta\right)\left(\sqrt{2}r\right)dr\,d\theta$$

$(x=r\cos\theta)$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta dr\,d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

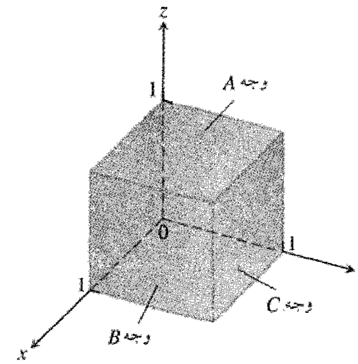
انتگرال های رویه ای شبیه سایر انتگرال های دوگانه رفتار می کنند، انتگرال مجموع دو تابع با مجموع انتگرال های آنها برابر است و الی آخر. ویژگی جمع پذیری دامنه به صورت زیر درمی آید

$$\iint_S G\,d\sigma=\iint_{S_1}G\,d\sigma+\iint_{S_2}G\,d\sigma+\cdots+\iint_{S_n}G\,d\sigma$$

وقتی S با خم های هموار به تعدادی متناهی از قطعات هموار تقسیم شده باشد که نواحی درونی آنها با هم همپوشانی ندارند (یعنی اگر S قطعه قطعه هموار باشد) آنگاه انتگرال روی S برابر است با مجموع انتگرال ها روی قطعات. بنابراین انتگرال یک تابع روی رویه یک مکعب برابر است با مجموع انتگرال ها روی وجوه مکعب. روی یک ورقه لاک پشتی متشکل از چندین ورقه به هم جوش خورده، روی تک تک ورقه ها انتگرال گرفته و نتایج را با هم جمع می کنیم.

مثال ۲: از $G(x,y,z)=xyz$ روی رویه مکعبی که صفحات

$x=1$، $y=1$ و $z=1$ از یک هشتم اول جدا می کنند انتگرال بگیرید (شکل۱۶- ۴۸).



شکل۱۶- ۴۸: مکعب مثال ۲.

حل: از xyz روی هر یک از شش وجه انتگرال گرفته و نتایج را با هم جمع می کنیم. از آنجا که روی وجوهی که در صفحات مختصات قرار دارند $xyz=0$ است انتگرال روی رویه مکعب به صورت زیر درمی آید

$$\iint_{\substack{\text{Cube}\\ \text{surface}}} xyz\, d\sigma = \iint_{\text{side } A} xyz\, d\sigma + \iint_{\text{side } B} xyz\, d\sigma$$

$$+\iint_{\text{side } C} xyz\, d\sigma$$

(وجه C وجه B وجه A رویه مکعب)

وجه A رویه $f(x,y,z)=z=1$ روی ناحیه مربعی R_{xy}: $0\le x\le 1$ و $0\le y\le 1$ در صفحه xy است. در مورد این رویه و ناحیه داریم

$$\mathbf{p}=\mathbf{k} \text{ و } \nabla f=\mathbf{k} \text{ و } |\nabla f|=1 \text{ و } |\nabla f.\mathbf{p}|=|\mathbf{k}.\mathbf{k}|=1$$

$$d\sigma=\left|\frac{|\nabla f|}{\nabla f.\mathbf{p}}\right|dA=\frac{1}{1}dx\, dy=dx\, dy$$

$$xyz=xy(1)=xy$$

و

$$\iint_{\text{side } A} xyz\, d\sigma=\iint_{R_{xy}} xy\, dx\, dy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 xy\, dxdy=\int_0^1\frac{y}{2}dy=\frac{1}{4}$$

بنابه تقارن انتگرال های xyz روی وجوه B و C هم برابر با $\frac{1}{4}$ هستند. در نتیجه

$$\iint_{\text{Cube surface}} xyz\, d\sigma=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

مثال۳: مطلوب است انتگرال $G(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ روی رویه «فوتبال» S که از چرخش خم $x=\cos z$، $y=0$، $-\pi/2\le z\le\pi/2$ حول محور z بدست می آید.

حل: این رویه در شکل۱۶- ۴۴ نشان داده شده است و در مثال۶ بخش۱۶-۵ صورت پارامتری زیر را برای آن بدست آوردیم

$$x=\cos u\cos v,\quad y=\cos u\sin v,\ z=u,$$

$$-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2} \text{ و } 0\le v\le 2\pi$$

که v نشان دهنده زاویه چرخش نسبت به صفحه xz حول محور z است. با جانشانی این صورت پارامتری در عبارت مربوط به G داریم

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-(\cos^2 u)(\cos^2 v+\sin^2 v)}$$

$$=\sqrt{1-\cos^2 u}=|\sin u|$$

دیفرانسیل مساحت رویه برای صورت پارامتری فوق چنین است (مثال۶ ، بخش۱۶-۵)

$$d\sigma=\cos u\sqrt{1+\sin^2 u}\, du\, dv$$

از این محاسبات انتگرال رویه ای به صورت زیر بدست می آید

$$\iint_S\sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\sin u|\cos u\sqrt{1+\sin^2 u}\,du\, dv$$

$$=2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin u\cos u\sqrt{1+\sin^2 u}\,du\, dv$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_1^2\sqrt{w}\,dw\, dv$$

$$=2\pi.\frac{2}{3}w^{3/2}\Big]_1^2=\frac{4\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

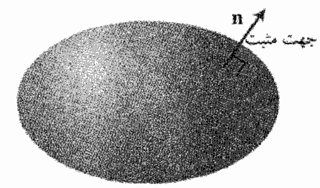
($w=1+\sin^2 u$ و $dw=2\sin u\cos u du$؛ وقتی $u=0$، $w=1$ و وقتی $u=\pi/2$، $w=2$)

جهت رویه

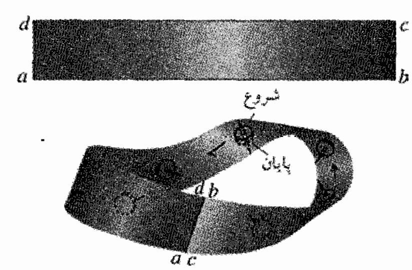
رویه هموراری چون S را **جهت پذیر** یا **دو طرفه** می نامیم در صورتیکه بتوان میدانی چون $\mathbf{n}$ از بردارهای قائم واحد روی S تعریف کرد که بطور پیوسته با مکان تغییر کند. هر قطعه یا زیر بخش از یک رویه جهتپذیر، خودش جهتپذیر است. کره ها و

سایر رویه های بسته هموار واقع در فضا (رویه های همواری که اجسام را محصور کرده اند) جهت پذیرند. بنابه قرارداد روی یک رویه بسته جهت **n** را رو به بیرون اختیار می کنیم.

به محض انتخاب **n** می گوییم رویه جهتدار شده است و رویه را همراه با میدان قائمش **رویه جهتدار** می نامیم. بردار **n** در هر نقطه را **جهت مثبت** در آن نقطه می نامیم (شکل ۱۶-۴۹).



شکل ۱۶-۴۹: رویه های بسته هموار واقع در فضا جهت پذیرند. بردار قائم واحد برونسو جهت مثبت در هر نقطه را مشخص می کند.



شکل ۱۶- ۵۰: برای ساختن نوار موبیوس یک نوار کاغذی به شکل مستطیل $abcd$ برداشته، سر bc نوار را یک بار بتابانید و دو سر نوار را به یکدیگر بچسبانید تا a بر c و b بر d منطبق شود. نوار موبیوس یک رویه جهت ناپذیر یا یک طرفه است.

نوار موبیوس در شکل ۱۶-۵۰ جهت ناپذیر است. قطع نظر از اینکه از چه نقطه ای شروع به ساختن میدان قائم واحد پیوسته (که در شکل به صورت پایه پونز نشان داده شده است) بکنید، حرکت دادن پیوسته این بردار روی رویه مطابق شکل آن را به نقطه شروع باز می گرداند در حالیکه جهتش نسبت به نقطه شروع کاملاً برعکس شده است. بردار قائم واحد نمی تواند در آن نقطه متوجه هر دو جهت باشد و در عین حال برای اینکه میدان پیوسته باشد باید در هر دو جهت باشد. بنابراین چنین میدانی نمی تواند وجود داشته باشد.

انتگرال رویه ای برای تعیین شار

فرض کنید **F** یک میدان برداری پیوسته باشد که روی رویه جهتدار S تعریف شده است و **n** میدان قائم واحد انتخابی بر رویه است. انتگرال **F.n** روی S را شار **F** گذرنده از S در جهت مثبت می نامیم. بنابراین شار عبارت است از انتگرال مؤلفه عددی **F** در جهت **n** روی S.

> **تعریف: شار** یک میدان برداری سه بعدی چون **F** گذرنده از رویه جهتداری چون S در جهت **n** برابر است با
>
> $$\text{شار} = \iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma \qquad (۵)$$

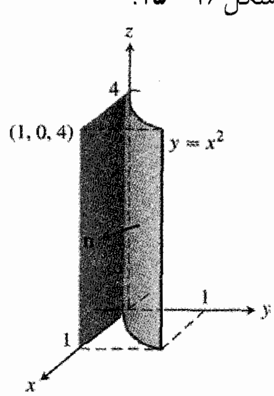
این تعریف مشابه تعریف شار میدان دو بعدی **F** گذرنده از خم مسطحی چون C است. در صفحه (بخش ۱۶ -۲) شار برابر است با

$$\int_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds$$

یعنی انتگرال مؤلفه عددی **F** در جهت قائم بر خم.

اگر **F** میدان سرعت شارش سه بعدی یک سیال باشد شار **F** گذرنده از S عبارت است از آهنگ خالص عبور سیال از S در جهت مثبت انتخابی. در مورد چنین شارش هایی در بخش ۱۶-۷ بطور مفصل بحث می کنیم.

مثال ۴: مطلوب است شار $\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$ گذرنده از استوانه سهموی $y=x^2$، $0\le x\le 1$، $0\le z\le 4$ در جهت **n** نشان داده شده در شکل ۱۶- ۱۵.



شکل ۱۶- ۵۱: طریقه محاسبه شار گذرنده از رویه یک استوانه سهموی (مثال ۴).

حل: روی رویه داریم $x=x$، $y=x^2$ و $z=z$، لذا بطور

خودکار صورت پارامتری زیر را داریم

$$\mathbf{r}(x,z)=x\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+z\mathbf{k} \quad \text{و} \quad 0\le x\le 1 \quad \text{و} \quad 0\le z\le 4$$

ضرب برداری بردارهای مماس برابر است با

$$\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_z=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2x\mathbf{i}-\mathbf{j}$$

بردارهای قائم واحد که مطابق شکل۱۶- ۵۱ جهتشان از رویه به سمت بیرون است عبارتند از

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_z}{|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_z|}=\frac{2x\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{4x^2+1}}$$

بر روی رویه داریم $y=x^2$، لذا میدان برداری در آنجا عبارت است از

$$\mathbf{F}=yz\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}=x^2z\mathbf{i}+x\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$$

بنابراین

$$\mathbf{F}.\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\left(\left(x^2z\right)(2x)+(x)(-1)+\left(-z^2\right)(0)\right)$$
$$=\frac{2x^3z-x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

شار برونسوی $\mathbf{F}$ گذرنده از رویه برابر است با

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma=\int_0^4\int_0^1\frac{2x^3z-x}{\sqrt{4x^2+1}}|\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_z|dx\,dz$$
$$=\int_0^4\int_0^1\frac{2x^3z-x}{\sqrt{4x^2+1}}\sqrt{4x^2+1}dx\,dz$$
$$=\int_0^4\int_0^1\left(2x^3z-x\right)dx\,dz$$
$$=\int_0^4\left[\frac{1}{2}x^4z-\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1}dz$$
$$=\int_0^4\frac{1}{2}(z-1)dz=\frac{1}{4}(z-1)^2\Big]_0^4$$
$$=\frac{1}{4}(9)-\frac{1}{4}(1)=2$$

اگر S بخشی از رویه تراز $g(x,y,z)=c$ باشد، می توان $\mathbf{n}$ را یکی از دو میدان زیر اختیار کرد

$$\mathbf{n}=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|} \qquad (۶)$$

بسته به اینکه کدامیک جهت مرجع را نشان می دهد. شار متناظر عبارت است از

$$\text{شار}=\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma$$
$$=\iint_R\left(\mathbf{F}.\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}\right)\frac{|\nabla g|}{|\nabla g.\mathbf{p}|}dA$$

(معادلات ۶ و ۳)

$$=\iint_R \mathbf{F}.\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g.\mathbf{p}|}dA \qquad (۷)$$

مثال۵: رویه S عبارت است از رویه ای که بوسیله صفحات $x=0$ و $x=1$ از استوانه $y^2+z^2=1$، $z\ge 0$ جدا می شود. مطلوب است شار برونسوی $\mathbf{F}=yz\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ گذرنده از رویه S.

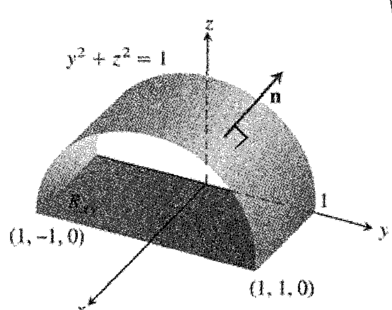
حل: میدان قائم برونسو بر روی S (شکل۱۶- ۵۳) را می توان از گرادیان $g(x,y,z)=y^2+z^2$ به صورت زیر محاسبه کرد

$$\mathbf{n}=+\frac{\nabla g}{|\nabla g|}=\frac{2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{\sqrt{4y^2+4z^2}}=\frac{2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{2\sqrt{1}}=y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

با انتخاب $\mathbf{p}=\mathbf{k}$ همچنین داریم

$$d\sigma=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g.\mathbf{k}|}dA=\frac{2}{|2z|}dA=\frac{1}{z}dA$$

چون روی S، $z\ge 0$ است می توانیم علامت های قدر مطلق را حذف کنیم.



شکل۱۶- ۵۲: محاسبه شار برونسوی یک میدان برداری گذرنده از رویه S. مساحت ناحیه سایه R_{xy} برابر ۲ است (مثال۵).

مقدار $\mathbf{F}.\mathbf{n}$ بر روی رویه برابر است با

$$\mathbf{F}.\mathbf{n}=\left(yz\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}\right).(y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$$
$$=y^2z+z^3=z\left(y^2+z^2\right)$$
$$=z \qquad (\text{روی } S\text{،} \ y^2+z^2=1)$$

رویه بر ناحیه سایه R_{xy} تصویر می شود که مطابق شکل۱۶-

۵۲ مستطیلی در صفحه xy است. بنابراین شار برونسوی $\mathbf{F}$ گذرنده از S برابر است با

$$\iint_S \mathbf{F.n}\,d\sigma = \iint_S (z)\left(\frac{1}{z}dA\right)$$
$$= \iint_{R_{xy}} dA = (R_{xy} \text{ مساحت}) = 2$$

گشتاورها و جرم های پوسته های نازک

پوسته های نازک اجسامی مثل کاسه ها، بشکه های فلزی و گنبدها با رویه ها مدل سازی می شوند. گشتاورها و جرم های آنها با فرمول های جدول۱۶-۳ محاسبه می شوند. بدست آوردن این فرمول ها مشابه بدست آوردن این فرمول ها در بخش۶-۶ است. این فرمولها شبیه فرمول های انتگرال های خطی در جدول۱۶-۱ بخش۱۶-۱ هستند.

جدول ۱۶-۳: فرمول های جرم و گشتاور برای پوسته های خیلی نازک

جرم: $M = \iint_S \delta d\sigma$

چگالی در (x,y,z) به عنوان جرم واحد سطح $= \delta = \delta(x,y,z)$

گشتاورهای اول حول صفحات مختصات:

$$M_{xz} = \iint_S y\,\delta d\sigma \quad \text{و} \quad M_{xy} = \iint_S z\,\delta d\sigma$$
$$\text{و} \quad M_{yz} = \iint_S x\,\delta d\sigma$$

مختصات مرکز جرم:

$$\bar{x} = M_{yz}/M \quad \text{و} \quad \bar{y} = M_{xz}/M \quad \text{و} \quad \bar{z} = M_{xy}/M$$

گشتاورهای لختی حول محورهای مختصات:

$$I_y = \iint_S (x^2+z^2)\delta d\sigma \quad \text{و} \quad I_z = \iint_S (x^2+y^2)\delta d\sigma$$
$$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\delta d\sigma$$
$$I_L = \iint_S r^2 \delta d\sigma$$

(فاصله نقطه (x,y,z) تا خط L $= r(x,y,z)$)

مثال۶: مطلوب است مرکز جرم یک پوسته نیمکروی نازک به شعاع a و با چگالی ثابت δ.

حل: پوسته را با نیمکره زیر مدلسازی می کنیم

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = a^2 \text{ و } z \ge 0$$

(شکل۱۶-۵۳). تقارن رویه حول محور z حاکی از آن است که $\bar{x} = \bar{y} = 0$. پس فقط کافیست $\bar{z}$ را از فرمول $\bar{z} = M_{xy}/M$ بدست آوریم.

جرم پوسته برابر است با

$$M = \iint_S \delta d\sigma = \delta \iint_S d\sigma = (\delta)(S \text{ مساحت}) = 2\pi a^2 \delta$$

(δ =ثابت)

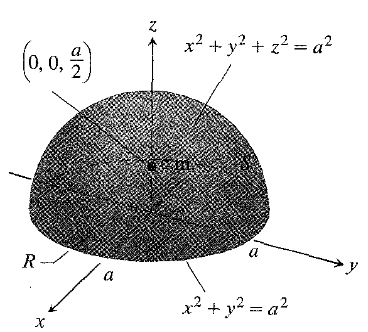
برای محاسبه انتگرال مربوط به M_{xy}، $\mathbf{p}=\mathbf{k}$ اختیار کرده و به صورت زیر عمل می کنیم

$$|\nabla f| = |2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2a$$
$$|\nabla f.\mathbf{p}| = |\nabla f.\mathbf{k}| = |2z| = 2z$$
$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.\mathbf{p}|}dA = \frac{a}{z}dA$$

بنابراین

$$M_{xy} = \iint_S z\,\delta d\sigma = \delta \iint_R z\,\frac{a}{z}dA$$
$$= \delta a \iint_R dA = \delta a(\pi a^2) = \delta \pi a^3$$
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}$$

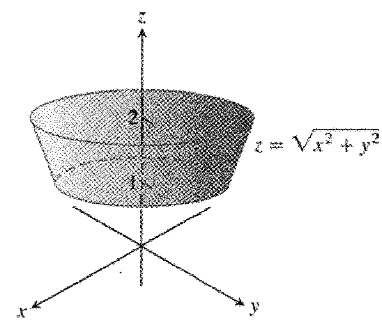
مرکز جرم پوسته نقطه $(0,0,a/2)$ است.



شکل۱۶-۵۳: مرکز جرم یک پوسته نیمکروی نازک با چگالی ثابت روی محور تقارن و در وسط فاصله بین قاعده تا بالای آن قرار دارد (مثال۶).

مثال۷: مطلوب است مرکز جرم یک پوسته نازک با

چگالی $\delta = 1/z^2$ که بوسیله صفحات $z = 1$ و $z = 2$ از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ جدا می شود (شکل۱۶-۵۴).



شکل۱۶-۵۴: وقتی مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ بوسیله صفحات $z = 1$ و $z = 2$ قطع شود مخروط ناقص فوق بدست می آید (مثال۷).

حل: با توجه به تقارن رویه حول محور z داریم $\bar{x} = \bar{y} = 0$. باید $\bar{z} = M_{xy} / M$ را بیابیم. اگر مطابق مثال۴ بخش۱۶- ۵ عمل کنیم داریم

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$$
$$1 \le r \le 2 \quad \text{و} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

و

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{2}r$$

بنابراین

$$M = \iint_S \delta\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{1}{r^2}\sqrt{2}r\,dr\,d\theta$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\Big[\ln r\Big]_1^2 d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\ln 2\,d\theta$$
$$= 2\pi\sqrt{2}\ln 2$$
$$M_{xy} = \iint_S \delta z\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{1}{r^2} r\sqrt{2}r\,dr\,d\theta$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 dr\,d\theta$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\sqrt{2}$$
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

مرکز جرم پوسته نقطه $(0,0,1/\ln 2)$ است.

تمرین های۱۶-۶

انتگرال های رویه ای

در تمرین های۱-۸ از تابع مفروض روی رویه مفروض انتگرال بگیرید.

۱- **استوانه سهموی.** $G(x,y,z) = x$، روی استوانه سهموی $y = x^2$ و $0 \le x \le 2$ و $0 \le z \le 3$

۲- **استوانه مستدیر.** $G(x,y,z) = z$، روی رویه استوانه ای $y^2 + z^2 = 4$ و $z \ge 0$ و $1 \le x \le 4$

۳- **کره.** $G(x,y,z) = x^2$ روی کره واحد

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

۴- **نیمکره.** $G(x,y,z) = z^2$ روی نیمکره

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{و} \quad z \ge 0$$

۵- **بخشی از صفحه.** $F(x,y,z) = z$ روی بخشی از صفحه

$$x + y + z = 4$$

که بالای مربع $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$ واقع در صفحه xy، قرار دارد.

۶- **مخروط.** $F(x,y,z) = z - x$ روی مخروط

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \le z \le 1$$

۷- **گنبد سهموی.** $H(x,y,z) = x^2\sqrt{5 - 4z}$ روی گنبد سهموی $z = 1 - x^2 - y^2$ و $z \ge 0$

۸- **عرقچین کروی.** $H(x,y,z) = yz$ روی قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ که بالای مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ قرار دارد.

۹- از $G(x,y,z) = x + y + z$ روی رویه مکعبی که صفحات $x = a$، $y = a$ و $z = a$ از یک هشتم اول جدا می کنند انتگرال بگیرید.

۱۰- از $G(x,y,z) = y + z$ روی رویه گوه ای واقع در یک هشتم اول و محدود به محورهای مختصات و صفحات $x = 2$ و $y + z = 1$ انتگرال بگیرید.

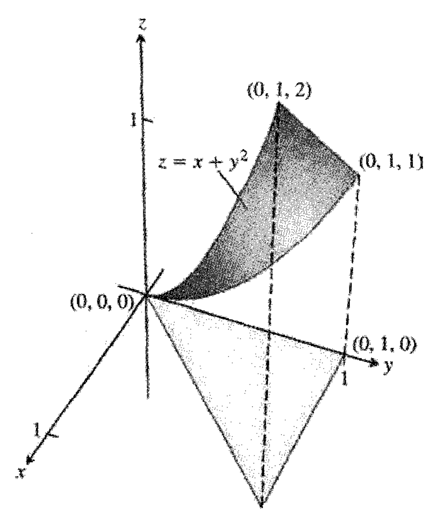
۱۱- از $G(x,y,z)=xyz$ روی رویه جسم مستطیلی شکلی که صفحات $x=a$، $y=b$ و $z=c$ از یک هشتم اول جدا می کنند انتگرال بگیرید.

۱۲- از $G(x,y,z)=xyz$ روی رویه جسم مستطیلی شکل محصور شده بوسیله صفحات $x=\pm a$، $y=\pm b$ و $z=\pm c$ انتگرال بگیرید.

۱۳- از $G(x,y,z)=x+y+z$ روی بخشی از صفحه $2x+2y+z=2$ که در یک هشتم اول واقع است انتگرال بگیرید.

۱۴- از $G(x,y,z)=x\sqrt{y^2+4}$ روی رویه ای که صفحات $x=0$، $x=1$ و $z=0$ از استوانه سهموی $y^2+4z=16$ جدا می کنند انتگرال بگیرید.

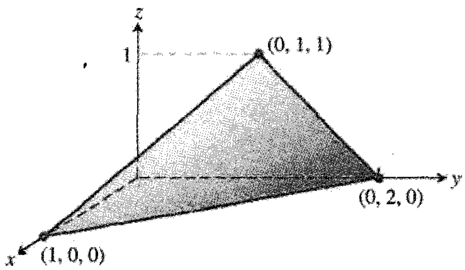
۱۵- مطلوب است انتگرال $G(x,y,z)=z-x$ روی بخشی از نمودار $z=x+y^2$ که بالای مثلثی در صفحه xy با رئوس $(0,0,0)$، $(1,1,0)$و $(0,1,0)$ قرار دارد. (شکل زیر را ببینید)



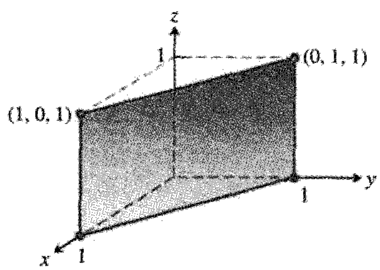
۱۶- از $G(x,y,z)=x$ روی رویه زیر انتگرال بگیرید.

به ازای $0\le x\le 1$ و $-1\le y\le 1$ ، $z=x^2+y$

۱۷- از $G(x,y,z)=xyz$ روی رویه مثلثی شکل زیر با رئوس $(1,0,0)$، $(0,2,0)$ و $(0,1,1)$ انتگرال بگیرید.



۱۸- از $G(x,y,z)=x-y-z$ روی بخشی از صفحه $x+y=1$ واقع در یک هشتم اول و بین صفحات $z=0$ و $z=1$ انتگرال بگیرید (شکل زیر را ببینید).



یافتن شار گذرنده از رویه

در تمرین های**۱۹-۲۸** با استفاده از یک صورت پارامتری شار $\iint_S \mathbf{F.n}d\delta$ گذرنده از رویه در جهت مفروض را بیابید.

۱۹- استوانه سهموی. شار برونسوی (قائم در جهت دور شدن از محور x) $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}+x\mathbf{j}-3z\mathbf{k}$ گذرنده از رویه ای که صفحات $x=0$، $x=1$ و $z=0$ از استوانه سهموی $z=4-y^2$ جدا می کنند.

۲۰- استوانه سهموی. شار برونسوی (قائم در جهت دور شدن از صفحه yz) $\mathbf{F}=x^2\mathbf{j}-xz\mathbf{k}$ گذرنده از رویه ای که صفحات $z=0$ و $z=2$ از استوانه سهموی

$$y=x^2, -1\le x\le 1$$

جدا می کنند.

۲۱- کره. شار $\mathbf{F}=z\mathbf{k}$ گذرنده از بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ واقع در یک هشتم اول در جهت دور شدن از مبداء.

۲۲- کره. شار $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ گذرنده از کره

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

در جهت دور شدن از مبداء.

۲۳- صفحه. شار بالاسوی $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+2yz\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$ گذرنده

از بخشی از صفحه $x+y+z=2a$ که بالای مربع $a \le x \le 0$، $a \le y \le 0$، واقع در صفحه xy قرار دارد.

۲۴- **استوانه.** شار برونسوی $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ گذرنده از بخشی از استوانه $x^2+y^2=1$ که صفحات $z=0$ و $z=a$ از آن جدا می کنند.

۲۵- **مخروط.** شار برونسوی (قائم در جهت دور شدن از محور z) $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}-z\mathbf{k}$ گذرنده از مخروط

$$z=\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le 1$$

۲۶- **مخروط.** شار برونسوی (قائم در جهت دور شدن از محور z) $\mathbf{F}=y^2\mathbf{i}+xz\mathbf{j}-\mathbf{k}$ گذرنده از مخروط

$$z=2\sqrt{x^2+y^2}, 0\le z\le 2$$

۲۷- **مخروط ناقص.** شار برونسوی (قائم در جهت دور شدن از محور z) $\mathbf{F}=-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ گذرنده از بخشی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بین صفحات $z=1$ و $z=2$.

۲۸- **سهمیوار.** شار برونسوی (قائم در جهت دور شدن از محور z) $\mathbf{F}=4x\mathbf{i}+4y\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ گذرنده از رویه ای که صفحه $z=1$ از پایین سهمیوار $z=x^2+y^2$ جدا می کند.

در تمرین های **۲۹** و **۳۰** شار میدان $\mathbf{F}$ گذرنده از بخشی از رویه مفروض در جهت مشخص شده را بیابید.

۲۹- $\mathbf{F}(x,y,z)=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

S: رویه مستطیلی $z=0$، $0\le x\le 2$، $0\le y\le 3$، جهت $\mathbf{k}$

۳۰- $\mathbf{F}(x,y,z)=yx^2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$

S: رویه مستطیلی $y=0$، $-1\le x\le 2$، $2\le z\le 7$، جهت $-\mathbf{j}$.

در تمرین های **۳۱- ۳۶** شار میدان $\mathbf{F}$ گذرنده از بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ واقع در یک هشتم اول را در جهت دور شدن از مبداء بیابید.

۳۱- $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{k}$

۳۲- $\mathbf{F}(x,y,z)=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$

۳۳- $\mathbf{F}(x,y,z)=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۳۴- $\mathbf{F}(x,y,z)=zx\mathbf{i}+zy\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$

۳۵- $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

۳۶- $\mathbf{F}(x,y,z)=\dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

۳۷- مطلوب است شار برونسوی میدان

$$\mathbf{F}(x,y,z)=z^2\mathbf{i}+x\mathbf{j}-3z\mathbf{k}$$

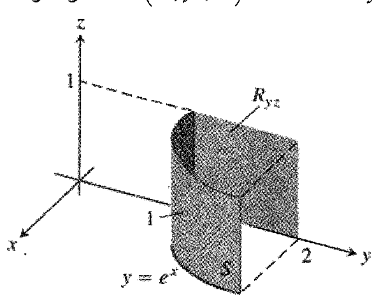
گذرنده از رویه ای که صفحات $x=0$، $x=1$ و $z=0$ از استوانه سهموی $z=4-y^2$ جدا می کنند.

۳۸- مطلوب است شار برونسوی (در جهت دور شدن از محور z) میدان $\mathbf{F}(x,y,z)=4x\mathbf{i}+4y\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ گذرنده از رویه ای که صفحه $z=1$ از پایین سهمیوار $z=x^2+y^2$ جدا می کند.

۳۹- فرض کنید S بخشی از استوانه $y=e^x$ واقع در یک هشتم اول است که تصویر قائمش بر صفحه yz مستطیل R_{yz} است.

$$R_{yz}: 1\le y\le 2 \quad \text{و} \quad 0\le z\le 1$$

(شکل زیر را ببینید). فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار واحد قائم بر S است که متوجه بیرون صفحه yz است. مطلوب است شار میدان $\mathbf{F}(x,y,z)=-2\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ گذره از S در جهت $\mathbf{n}$.



۴۰- فرض کنید S بخشی از استوانه $y=\ln x$ واقع در یک هشتم اول است که تصویر قائمش بر صفحه xz مستطیل $R_{xz}: 1\le x\le e$ و $0\le z\le 1$ است. فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار واحد قائم بر S است که متوجه بیرون صفحه xz است. مطلوب است شار میدان $\mathbf{F}=2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ گذرنده از S در جهت $\mathbf{n}$.

۴۱- مطلوب است شار برونسوی میدان

$$\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+2yz\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$$

گذرنده از رویه مکعبی که صفحات $x=a$، $y=a$ و $z=a$ از

یک هشتم اول جدا می کنند.

۴۲- مطلوب است شار برونسوی میدان $\mathbf{F}=xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+\mathbf{k}$ گذرنده از رویه عرقچین بالایی که صفحه $z=3$ از کره توپر $x^2+y^2+z^2\le 25$ جدا می کند.

گشتاور و جرم

۴۳- مرکزوار. مطلوب است مرکزوار بخشی از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ که در یک هشتم اول واقع است.

۴۴- مرکزوار. مطلوب است مرکزوار رویه ای که بوسیله صفحات $x=0$ و $x=3$ از استوانه $y^2+z^2=9$، $z\ge 0$ جدا می شود (شبیه رویه مثال**۵**).

۴۵- پوسته نازک با چگالی ثابت. پوسته نازکی با چگالی ثابت δ بوسیله صفحات $z=1$ و $z=2$ از مخروط

$$x^2-y^2-z^2=0$$

جدا شده است. مطلوب است مرکز جرم و گشتاور لختی این جسم حول محور z.

۴۶- رویه مخروطی با چگالی ثابت. پوسته نازکی با چگالی ثابت δ بوسیله استوانه مستدیر $x^2+y^2=2x$ از مخروط

$$4x^2+4y^2-z^2=0,\ z\ge 0$$

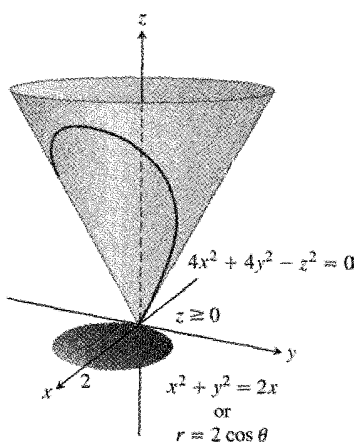
جدا شده است. مطلوب است گشتاور لختی این جسم حول محور z.

۴۷- پوسته های کروی.

(الف)- پوسته کروی نازکی به شعاع a و چگالی ثابت δ در نظر بگیرید. گشتاور لختی این جسم را حول یکی از اقطار بیابید (محاسبه را برای پوسته نیمکروی انجام داده و نتیجه را دو برابر کنید).

(ب)- با استفاده از قضیه محورهای موازی (تمرین**۱۵**-۶) و نتیجه قسمت (الف) گشتاور لختی را حول خطی مماس بر پوسته بدست آورید.

۴۸- رویه مخروطی. مطلوب است مرکزوار رویه جانبی مخروط توپری به شعاع قاعده a و ارتفاع h (رویه مخروط منهای قاعده).



۱۶-۷- قضیه استوکس

همانطور که در بخش۱۶-۴ دیدیم چگالی گردش یا مؤلفه تاو یک میدان دوبعدی چون $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}$ در نقطه ای چون (x,y) با کمیت عددی $(\partial N/\partial x-\partial M/\partial y)$ توصیف می شود. در سه بعد، گردش با یک بردار توصیف می شود.

فرض کنید $\mathbf{F}$ میدان سرعت سیالی باشد که در فضا شارش می کند. ذرات نزدیک نقطه (x,y,z) از سیال تمایل دارند حول محوری گذرنده از (x,y,z) و موازی با برداری معین، که درصدد تعریف آن هستیم، بچرخند. جهت این بردار طوریست که اگر از نوک آن به صفحه گردش نگاه کنیم چرخش، پاد ساعتگرد دیده می شود. وقتی انگشتان دست راست را در جهت حرکت چرخشی ذرات سیال حول محور چرخش بچرخانیم انگشت شست در جهت این بردار قرار می گیرد (شکل۱۶- **۵۵** را ببینید). طول این بردار، آهنگ چرخش سیال را مشخص می کند. این بردار را **بردار تاو(کرل)** می نامند و در مورد میدان برداری $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \quad (۱)$$

این اطلاعات پیامدی از قضیه استوکس است که تعمیم صورت

گردشی – تاوی قضیه گرین به فضا و موضوع این بخش است.

توجه کنید که $(\mathrm{curl}\mathbf{F}).\mathbf{k} = (\partial N / \partial x - \partial M / \partial y)$ با تعریف ما در بخش۱۶-۴ در حالتی که

$$\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$$

بود، سازگار است. فرمول $\mathrm{curl}\mathbf{F}$ مذکور در معادله (۱) غالباً با استفاده از عملگر نمادین زیر نوشته می شود

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (۲)$$

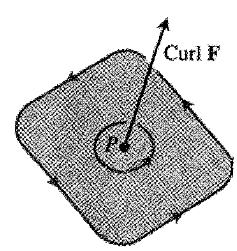
(نماد ∇ "دل" خوانده می شود). تاو $\mathbf{F}$ عبارت است از $\nabla \times \mathbf{F}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= \mathrm{curl}\mathbf{F}$$

$$\boxed{\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \qquad (۳)}$$



شکل۱۶-۵۵: بردار گردش در نقطه (x,y,z) از یک صفحه در شارش یک سیال در سه بعد. به رابطه راستگرد آن با ذرات چرخان در سیال توجه کنید.

مثال۱: تاو میدان $\mathbf{F} = (x^2 - z)\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ را بیابید.

حل: از معادله (۳) و صورت دترمینانی استفاده می کنیم، لذا

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - z & xe^z & xy \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(xe^z)\right)\mathbf{i}$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - z)\right)\mathbf{j}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(xe^z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - z)\right)\mathbf{k}$$

$$= (x - xe^z)\mathbf{i} - (y+1)\mathbf{j} + (e^z - 0)\mathbf{k}$$

$$= x(1 - e^z)\mathbf{i} - (y+1)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$$

خواهیم دید که عملگر ∇ چندین کاربرد دیگر هم دارد. مثلاً وقتی آن را به یک تابع عددی چون $f(x,y,z)$ اعمال کنیم گرادیان f را بدست می دهد:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

گرادیان f را گاهی «دل f» و نیز «$\mathrm{grad}f$» هم می خوانند.

قضیه استوکس

قضیه استوکس قضیه گرین را به فضای سه بعدی تعمیم می دهد. صورت گردشی – تاوی قضیه گرین گردش پاد ساعتگرد یک میدان برداری حول خم بسته ساده ای چون C واقع در صفحه xy را به یک انتگرال دوگانه روی ناحیه مسطح R محصور شده توسط C مربوط می کند. قضیه گرین گردش یک میدان برداری حول مرز C یک رویه جهتدار چون S واقع در فضا (شکل۱۶- ۵۶) را به یک انتگرال رویه ای روی رویه S مربوط می کند. شرط می کنیم که رویه، **قطعه قطعه هموار** باشد یعنی اجتماعی متناهی از رویه های هموار باشد که در امتداد خم های هموار به هم وصل شده اند.

قضیه ۶- قضیه استوکس: فرض کنید S یک رویه جهتدار قطعه قطعه هموار با خم مرزی قطعه قطعه هموار C باشد. فرض کنید $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ یک میدان برداری باشد که مؤلفه های آن روی ناحیه بازی شامل S مشتقات جزئی اول پیوسته دارند. در این صورت گردش $\mathbf{F}$ در امتداد C در جهتی که نسبت به بردار قائم واحد رویه، $\mathbf{n}$، پاد ساعتگرد است برابر است با انتگرال $\nabla \times \mathbf{F}.\mathbf{n}$ روی S.

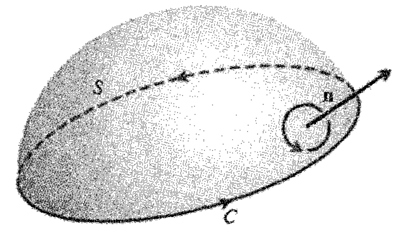
$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma \qquad (۴)$$

گردش پاد ساعتگرد   انتگرال تاو

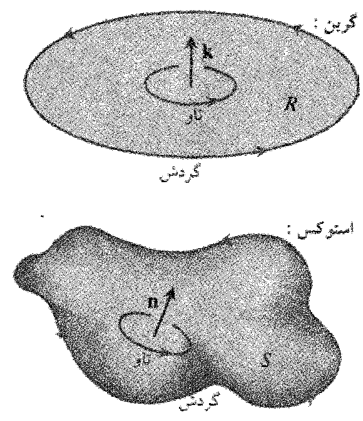
از معادله (۴) می توان متوجه شد که اگر دو رویه جهتدار

متفاوت S_1 و S_2 مرز یکسان C داشته باشند انتگرال هـای تـاو آنها با هم برابرند:

$$\iint_{S_1} \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}_1 d\sigma = \iint_{S_2} \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}_2\, d\sigma$$



شکل۱۶- ۵۶: جهت دار کـردن خـم محـدود کننـده C باعث می شود که رابطه ای راستگرد بـا میـدان قـائم $\mathbf{n}$ داشته باشد. اگر انگشت شست دست راست در امتداد $\mathbf{n}$ قرار گیرد انگشتان در جهت C بسته می شوند.



شکل۱۶-۵۷: مقایسه قضیه گرین و قضیه استوکس.

مادامی که بردارهای قائم واحد $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ به درستی رویـه هـا را جهتدار کنند هر دو انتگرال تاو با انتگرال گردش پـاد سـاعتگرد سمت چپ معادله (۴) برابرند.

اگر C خمی در صـفحه xy بـا جهـت پـاد سـاعتگرد و R ناحیه محدود به C در صفحه xy باشد آنگاه $d\sigma = dx\,dy$ و

$$(\nabla\times\mathbf{F}).\mathbf{n} = (\nabla\times\mathbf{F}).\mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

تحت این شرایط معادله استوکس به صورت زیر درمی آید

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

که همان صورت گردشی- تاوی معادله مربوط به قضیه گـرین است. برعکس، با معکوس کردن این مراحل می توانیم صورت گردشی- تاوی قضیه گرین در مورد میدان های دو بعدی را بـه صورت زیر برحسب نماد دل بنویسیم

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_R \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{k}\,dA \qquad (۵)$$

شکل۱۶-۵۷ را ببینید.

مثال۲: معادله (۴) را برای نیمکره

$$S : x^2+y^2+z^2=9 \text{ و } z\ge 0$$

دایـره محـدود کننـده آن، $C: x^2+y^2=9$ و $z=0$ و میـدان $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ محاسبه کنید.

حل: این نیمکره کاملاً شبیه رویه شـکل۱۶-۵۶ اسـت بـا ایـن تفاوت که دایره محدود کننده (مرزی) در اینجا در صـفحه xy قرار دارد (شـکل۱۶-۵۸ را ببینیـد). گـردش پـاد سـاعتگرد در امتداد C (چنانکه از بالا دیده می شود) را با استفاده از صورت پارامتری

$$\mathbf{r}(\theta) = (3\cos\theta)\mathbf{i} + (3\sin\theta)\mathbf{j},\ 0\le\theta\le 2\pi$$

محاسبه می کنیم:

$$d\mathbf{r} = (-3\sin\theta d\theta)\mathbf{i} + (3\cos\theta d\theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} = (3\sin\theta)\mathbf{i} - (3\cos\theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}.d\mathbf{r} = -9\sin^2\theta d\theta - 9\cos^2\theta d\theta = -9d\theta$$

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -9d\theta = -18\pi$$

در مورد انتگرال تاو $\mathbf{F}$ داریم

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= (0-0)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (-1-1)\mathbf{k} = -2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{3} \quad \text{(قائم واحد بیرونی)}$$

$$d\sigma = \frac{3}{z}dA \qquad \text{(بخش۱۶-۶ ، مثال۶، به ازای } a=3\text{)}$$

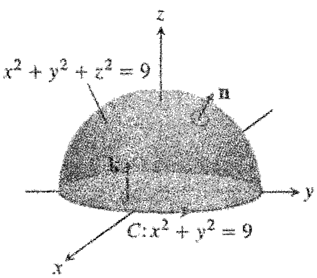
$$\nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma = -\frac{2z}{3}\frac{3}{z}dA = -2dA$$

و

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma = \iint_{x^2+y^2\le 9} -2dA = -18\pi$$

گردش در امتداد دایره با انتگرال تاو روی نیمکره برابـر اسـت،

که باید باشد.



شکل۱۶-۵۸: یک نیمکره و یک قرص، هر کدام با مرز C (مثال های۲ و۳).

انتگرال رویه ای قضیه استوکس را می توان با استفاده از هر رویه ای که خم مرزی اش C است محاسبه نمود به شرط اینکه رویه به درستی جهتدار شده باشد و داخل دامنه میدان $\mathbf{F}$ قرار داشته باشد. مثال بعدی این حقیقت را در مورد گردش در امتداد خم C مثال۲ نشان می دهد.

مثال۳: گردش در امتداد دایره مرزی C در مثال۲ را با استفاده از قرصی به شعاع ۳ و به مرکز مبداء واقع در صفحه xy به عنوان رویه S (به جای نیمکره) محاسبه کنید. شکل۱۶-۵۸ را ببینید.

حل: همانند مثال ۲ داریم: $\nabla\times\mathbf{F}=-2\mathbf{k}$. در مورد رویه مذکور که قرصی در صفحه xy است بردار قائم $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ است بطوریکه

$$\nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma=-2\mathbf{k}.\mathbf{k}dA=-2dA$$

و

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma=\iint_{x^2+y^2\le 9}-2dA=-18\pi$$

که نسبت به مثال قبل آسانتر بدست می آید.

مثال۴: مطلوب است گردش پاد ساعتگرد (چنانچه از بالا نگاه شود) میدان $\mathbf{F}=\left(x^2-y\right)\mathbf{i}+4z\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$ در امتداد خم C که محل تقاطع صفحه $z=2$ با مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است (شکل۱۶- ۵۹).

حل: قضیه استوکس این امکان را به ما می دهد که گردش را با انتگرال گیری روی رویه مخروط بدست آوریم. طی کردن C در جهت پاد ساعتگرد (چنانچه از بالا نگاه کنیم) متناظر با این است که بردار قائم مخروط، $\mathbf{n}$، را درونسو(در داخل آن) اختیار کنیم یعنی قائمی با مؤلفه $\mathbf{k}$ مثبت.

مخروط را به صورت زیر پارامتری می کنیم

$$\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+r\mathbf{k}$$
$$0\le r\le 2 \quad \text{و}\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

در این صورت داریم

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_r\times\mathbf{r}_\theta|}=\frac{-(r\cos\theta)\mathbf{i}-(r\sin\theta)\mathbf{j}+r\mathbf{k}}{r\sqrt{2}}$$

(مثال۴ بخش۱۶-۵)

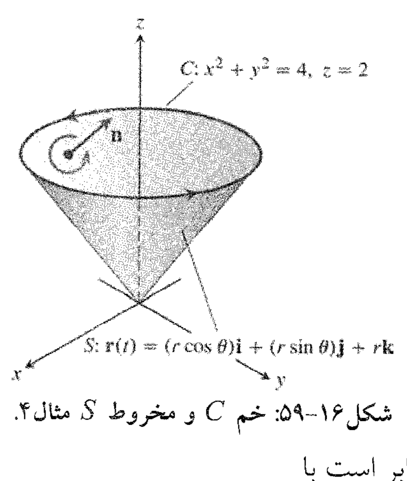
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-(\cos\theta)\mathbf{i}-(\sin\theta)\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)$$

$$d\sigma=r\sqrt{2}drd\theta \qquad \text{(مثال۴ بخش۱۶-۵)}$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=-4\mathbf{i}-2x\mathbf{j}+\mathbf{k} \qquad \text{(مثال ۱)}$$
$$=-4\mathbf{i}-2r\cos\theta\mathbf{j}+\mathbf{k} \qquad (x=r\cos\theta)$$

بنابراین

$$\nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\theta+2r\cos\theta\sin\theta+1\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\theta+r\sin 2\theta+1\right)$$



شکل۱۶-۵۹: خم C و مخروط S مثال۴.

و گردش برابر است با

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma \qquad \text{(قضیه استوکس، معادله ۴)}$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\theta+r\sin 2\theta+1\right)\left(r\sqrt{2}dr\,d\theta\right)=4\pi$$

مثال۵: مخروط بکار گرفته شده در مثال ۴ آسانترین رویه ای نیست که برای محاسبه گردش در امتداد دایره مرزی C واقع در صفحه $z=3$ بکار بردیم. اگر به جای آن از قرص تختی به

شعاع ۳ که مرکز آن روی محور z واقع است و در صفحه $z=3$ قرار دارد استفاده کنیم بردار قائم بررویه S، $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ خواهد بود. درست مثل مثال۴ باز هم داریم: $\nabla\times\mathbf{F}=-4\mathbf{i}-2x\mathbf{j}+\mathbf{k}$. اما اکنون داریم $\nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}=1$ بطوریکه

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma=\iint_{x^2+y^2\le 4} 1dA=4\pi$$

(سایه عبارت است از قرصی به شعاع ۲ در صفحه xy)

این نتیجه با مقدار گردش بدست آمده در مثال۴ سازگار است.

تعبیر $\nabla\times\mathbf{F}$ به چرخ پره دار

فرض کنید $\mathbf{F}$ میدان سرعت سیالی است که در ناحیه ای چون R از فضا شامل خم بسته C حرکت می کند. در این صورت

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

گردش سیال در امتداد C است. طبق قضیه استوکس، گردش برابر است با شار $\nabla\times\mathbf{F}$ گذرنده از هر رویه جهتدار مناسب با مرز C:

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma$$

در ناحیه R نقطه ای چون Q و جهتی چون $\mathbf{u}$ در Q را در نظر می گیریم. همینطور فرض کنید C دایره ای به شعاع ρ و به مرکز Q باشد که صفحه اش بر $\mathbf{u}$ عمود است. اگر $\nabla\times\mathbf{F}$ در Q پیوسته باشد آنگاه وقتی شعاع $\rho\to 0$، مقدار متوسط مؤلفه $\mathbf{u}$ ی $\nabla\times\mathbf{F}$ روی قرص مستدیر S محصور شده در C به مؤلفه $\mathbf{u}$ ی $\nabla\times\mathbf{F}$ در Q میل می کند:

$$\left(\nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{u}\right)_Q=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{u}\,d\sigma$$

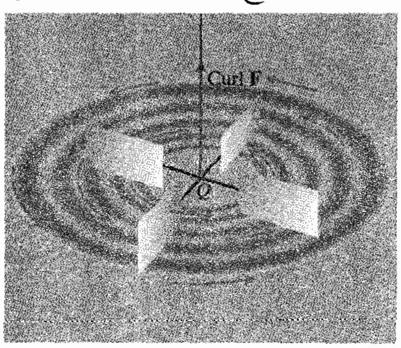
اگر قضیه استوکس را بکار برده و به جای انتگرال رویه ای یک انتگرال خطی روی C قرار دادیم به معادله زیر می رسیم

$$\left(\nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{u}\right)_Q=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} \qquad (۶)$$

سمت چپ معادله (۶) مقدار ماکسیمم خود را دارد هرگاه جهت $\mathbf{u}$ و جهت $\nabla\times\mathbf{F}$ یکی باشند. وقتی هم کوچک است حد سمت راست معادله (۶) تقریباً برابر است با

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

که عبارت است از خارج قسمت گردش در امتداد C بر مساحت قرص (چگالی گردش). فرض کنید چرخ پره دار کوچکی به شعاع ρ در نقطه Q در سیال قرار داده شود بطوریکه محور آن در امتداد $\mathbf{u}$ قرار گیرد (شکل۱۶-۶۰). گردش سیال در امتداد C بر آهنگ چرخش چرخ پره دار تأثیر می گذارد. وقتی انتگرال گردش ماکسیمم باشد سرعت چرخش چرخ بیشترین مقدار را دارد؛ بنابراین وقتی محور چرخ پره دار در جهت $\nabla\times\mathbf{F}$ باشد چرخ با بیشترین سرعت می چرخد.



شکل۱۶-۶۰: تعبیر $\nabla\times\mathbf{F}$ به چرخ پره دار

مثال۶: سیالی با چگالی ثابت با سرعت $\mathbf{F}=\omega(-y\mathbf{i}+x\mathbf{j})$ حول محور z می چرخد. در اینجا ω ثابتی مثبت است که سرعت زاویه ای چرخش نامیده می شود (شکل۱۶-۶۱). $\nabla\times\mathbf{F}$ را بدست آورده و رابطه آن با چگالی گردش را بیان کنید.

حل: به ازای $\mathbf{F}=-\omega y\mathbf{i}+\omega x\mathbf{j}$ داریم

$$\nabla\times\mathbf{F}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$=(0-0)\mathbf{i}+(0-0)\mathbf{j}+\left(\omega-(-\omega)\right)\mathbf{k}=2\omega\mathbf{k}$$

بنابه قضیه استوکس، گردش $\mathbf{F}$ در امتداد دایره ای چون C به شعاع ρ که قرصی چون S را در صفحه عمود بر $\nabla\times\mathbf{F}$، مثلاً صفحه xy، محصور کرده است، برابر است با

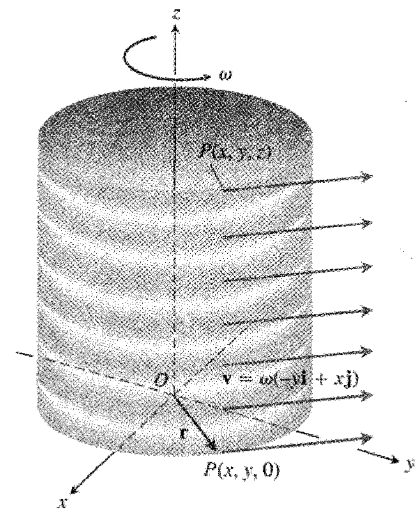
$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma$$

$$=\iint_S 2\omega\mathbf{k}.\mathbf{k}\,dx\,dy=(2\omega)\left(\pi\rho^2\right)$$

حال با حل این معادله برحسب 2ω داریم

$$(\nabla \times \mathbf{F}).\mathbf{k} = 2\omega = \frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

که با معادله (۶) به ازای $\mathbf{u} = \mathbf{k}$ سازگار است.



شکل۱۶-۶۱: یک شارش چرخشی پایا (ثابت) موازی با صفحه xy، با سرعت زاویه ثابت ω در جهت مثبت (پاد ساعتگرد) (مثال۶).

مثال۷: اگر $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$ و C مرز بخشی از صفحه $2x + y + z = 2$ واقع در یک هشتم اول باشد که چنانچه از بالا نگاه کنیم در جهت پاد ساعتگرد طی می شود با استفاده از قضیه استوکس $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ را محاسبه کنید (شکل۱۶-۶۲).

حل: صفحه مذکور رویه تراز $f(x,y,z) = 2$ تابع $f(x,y,z) = 2x + y + z$ است. بردار قائم واحد

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\frac{(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})}{|2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

با حرکت پاد ساعتگرد در امتداد C سازگار است. برای کاربرد قضیه استوکس تاو $\mathbf{F}$ را محاسبه می کنیم

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = (x - 3z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

برروی صفحه، z برابر است با $2 - 2x - y$، لذا

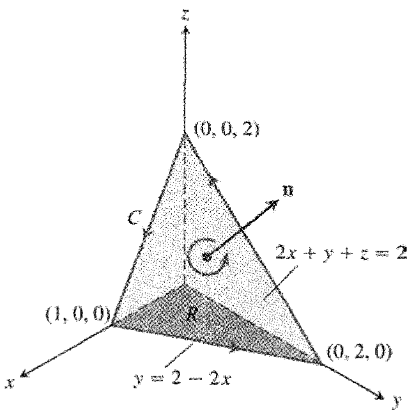
$$\nabla \times \mathbf{F} = (x - 3(2 - 2x - y))\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$
$$= (7x + 3y - 6)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

و

$$\nabla \times \mathbf{F}.\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x + 3y - 6 + y) = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x + 4y - 6)$$

جزء مساحت رویه عبارت است از

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.\mathbf{k}|}dA = \frac{\sqrt{6}}{1}dx\,dy$$



شکل۱۶-۶۲: رویه مسطح مذکور در مثال۷.

گردش برابر است با

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma \qquad \text{(قضیه استوکس، معادله۴)}$$
$$= \int_0^1\int_0^{2-2x} \frac{1}{\sqrt{6}}(7x + 4y - 6)\sqrt{6}dy\,dx$$
$$= \int_0^1\int_0^{2-2x} (7x + 4y - 6)dy\,dx = -1$$

مثال۸: فرض کنید رویه S سهمیوار بیضوی $z = x^2 + 4y^2$ باشد که زیر صفحه $z = 1$ قرار دارد (شکل۱۶-۶۳). جهت S را با در نظر گرفتن بردار قائم درونسوی (داخلی) $\mathbf{n}$ برای رویه، که قائمی با مؤلفه $\mathbf{k}$ مثبت است، تعریف می کنیم. مطلوب است شار تاو $\nabla \times \mathbf{F}$ گذرنده از S در جهت $\mathbf{n}$ در مورد میدان برداری $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$.

حل: برای محاسبه انتگرال تاو از قضیه استوکس بهره گرفته و معادل آن یعنی گردش پاد ساعتگرد $\mathbf{F}$ را در امتداد خم C، محل تقاطع سهمیوار $z = x^2 + 4y^2$ و صفحه $z = 1$ که در شکل۱۶-۶۳ نشان داده شده است، محاسبه می کنیم. توجه کنید که جهت S با طی کردن C در جهت پاد ساعتگرد حول محور z سازگار است. خم C عبارت است از بیضی $x^2 + 4y^2 = 1$ واقع در صفحه $z = 1$. این بیضی را می

توانیم با کمک روابط زیر پارامتری کنیم

$$x=\cos t \ \text{و}\ y=\frac{1}{2}\sin t \ \text{و}\ z=1 \ \text{و}\ 0\le t\le 2\pi$$

بنابراین صورت پارامتری C چنین است

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+\frac{1}{2}(\sin t)\mathbf{j}+\mathbf{k} \ \text{و}\ 0\le t\le 2\pi$$

برای محاسبه انتگرال گـردش $\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ ، $\mathbf{F}$ را روی C محاسـبه کرده و بردار سرعت $d\mathbf{r}/dt$ را می یابیم:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))=\frac{1}{2}(\sin t)\mathbf{i}-(\cos t)\mathbf{j}+(\cos t)\mathbf{k}$$

و

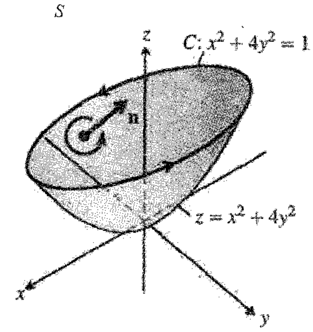
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=-(\sin t)\mathbf{i}+\frac{1}{2}(\cos t)\mathbf{j}$$

در این صورت داریم

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin^2 t-\frac{1}{2}\cos^2 t\right)dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}dt=-\pi$$

بنابراین شار تاو میدان $\mathbf{F}$ گذرنده از S در جهت $\mathbf{n}$ برابر اسـت با

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma=-\pi$$



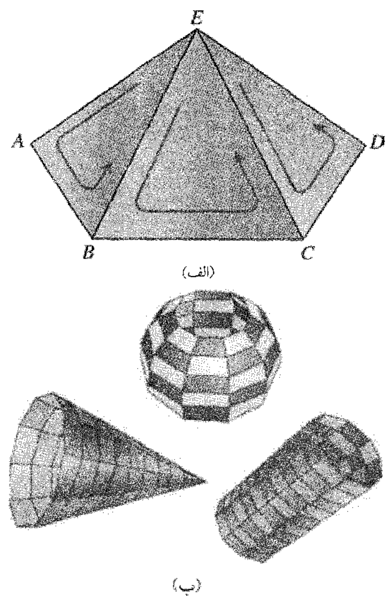
شکل۱۶-۶۳: بخشی از سهمیوار بیضوی مذکور در مثـال ۸، در این شکل خم تقاطع بیضیوار با صفحه z، C، و جهـت بردار قائم درونسوی (داخلی) $\mathbf{n}$ نشان داده شده است.

اثبات قضیه استوکس در مورد رویه های چند وجهی

فرض کنید S رویه ای چند وجهی باشد که از تعدادی متنـاهی ناحیه مسطح، یا وجه تشکیل شده است (برای مثال شـکل۱۶-۶۴ را ببینید). قضیه گرین را برای هـر یـک از وجـوه S بطـور جداگانه بکار می بریم. دو نوع وجه داریم:

۱- وجوهی که همه یالهای آنها با وجوه دیگر مشترک است.

۲- وجوهی که یک یا چند یال غیـر مـشترک بـا وجـوه دیگـر دارند.



شکل۱۶-۶۴: (الف)- بخشی از یک رویه چند وجهی.
(ب)- رویه های چند وجهی دیگر.

مرز Δ رویه S شامل یالهایی از وجـوه نـوع دوم اسـت کـه بـا وجوه دیگر مـشترک نیـستند. در شـکل۱۶-۶۴ – الـف مثلـث های EAB، BCE و CDE بخـشی از S را نـشان مـی دهنـد و $ABCD$ بخشی از مرز Δ است. صورت مماسی تعمیم یافتـه ای از قضیه گرین را برای هر یک از سه مثلـث شـکل۱۶-۶۴-الف بکار برده و با جمع کردن نتایج بدست می آوریم

$$\left(\oint_{EAB}+\oint_{BCE}+\oint_{CDE}\right)\mathbf{F}.d\mathbf{r}$$
$$=\left(\iint_{EAB}+\iint_{BCE}+\iint_{CDE}\right)\nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma \qquad (۷)$$

در صورت تعمیم یافته، انتگرال خطـی $\mathbf{F}$ حـول خـم محـصور کننده ناحیه مسطح R عمود بر $\mathbf{n}$ برابر است با انتگرال دوگانـه $(\text{curl}\mathbf{F}).\mathbf{n}$ روی R.

با ترکیب سه انتگرال خطـی سـمت چـپ معادلـه (۷) یـک انتگرال خطـی روی محیط $ABCDE$ بدسـت مـی آیـد زیـرا انتگرال هایی که روی پاره خط های داخلی گرفته می شوند دو

به دو همدیگر را حذف می کنند. مثلاً علامت انتگرال روی پاره خط BE از مثلث ABE مخالف علامت انتگرال روی همان پاره خط از مثلث EBC است. برای پاره خط CE هم همینطور. در نتیجه معادله (۷) به صورت زیر درمی آید

$$\oint_{ABCDE} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_{ABCDE} \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma$$

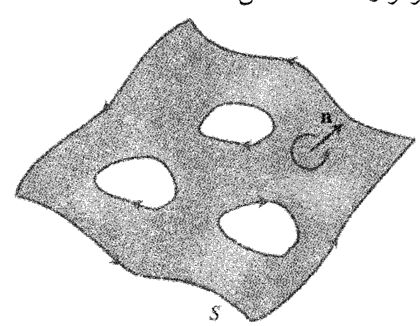
وقتی صورت تعمیم یافته قضیه گرین را در مورد تمام وجوه بکار برده و نتایج را با هم جمع کنیم خواهیم داشت

$$\oint_{\Delta} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_{S} \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma$$

این رابطه قضیه استوکس برای رویه چندوجهی S شکل۱۶-۶۴ – الف است. در شکل۱۶-۶۴-ب رویه های چندوجهی کلی تری نشان داده شده است و می توان این اثبات را به آنها هم تعمیم داد. رویه های هموار کلی تر را می توان به عنوان حد رویه های چندوجهی بدست آورد.

قضیه استوکس در مورد رویه های دارای حفره

قضیه استوکس در مورد رویه جهتداری چون S که یک یا چند حفره دارد برقرار است (شکل ۱۶-۶۵).



شکل۱۶-۶۵: قضیه استوکس در مورد رویه های جهتدار دارای حفره هم برقرار است.

انتگرال رویه ای مؤلفه قائم $\nabla\times\mathbf{F}$ روی S برابر است با مجموع انتگرال های خطی مؤلفه مماسی $\mathbf{F}$ در امتداد تمام خم های مرزی، که در آن خم های مرزی باید در جهتی که توسط جهت S تعیین می شود پیموده شوند. برای چنین رویه هایی قضیه استوکس بدون تغییر می ماند اما C به صورت اجتماعی از خم های بسته ساده در نظر گرفته می شود.

اتحادی مهم

اتحاد زیر غالباً در ریاضیات و علوم فیزیکی کاربرد دارد:

$$\nabla\times\nabla f = \mathbf{0} \quad \text{یا} \quad \operatorname{curl}\operatorname{grad} f = \mathbf{0} \qquad (۸)$$

این اتحاد در مورد هر تابعی چون $f(x,y,z)$ که مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد برقرار است. اثبات این مطلب ساده است:

$$\nabla\times f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= (f_{zy} - f_{yz})\mathbf{i} - (f_{zx} - f_{xz})\mathbf{j} + (f_{yx} - f_{xy})\mathbf{k}$$

اگر مشتقات جزئی دوم پیوسته باشند مشتقات جزئی آمیخته موجود در پرانتزها با هم برابر خواهند بود (قضیه۲ بخش۱۴-۳) و بردار فوق برابر صفر می شود.

میدان های پایستار و قضیه استوکس

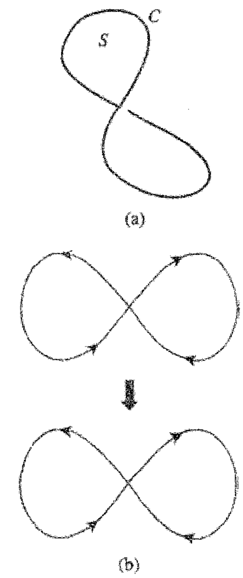
در بخش۱۶-۳ دیدیم که پایستار بودن میدانی چون $\mathbf{F}$ در ناحیه بازی چون D از فضا معادل است با صفر بودن انتگرال $\mathbf{F}$ در امتداد هر حلقه بسته واقع در D. این مطلب به نوبه خود معادل با این است که بگوییم در نواحی باز ساده – همبند $\nabla\times\mathbf{F}=0$ است (که آزمونی برای تعیین پایستار بودن یا نبودن $\mathbf{F}$ در چنین نواحیی است).

قضیه ۷- رابطه $\operatorname{curl}\mathbf{F}=\mathbf{0}$ با ویژگی حلقه بسته: اگر در هر نقطه از ناحیه باز ساده – همبندی چون D در فضا $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$ باشد آنگاه روی هر مسیر بسته قطعه قطعه هموار چون C واقع در D داریم

$$\oint_{C} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$$

طرح اثبات: قضیه ۷ را می توان در دو مرحله اثبات کرد. مرحله اول در مورد خم های بسته ساده (حلقه هایی که خودشان را قطع نمی کنند) مثل خم شکل۱۶-۶۶- الف است. قضیه ای از توپولوژی که شاخه ای از ریاضیات پیشرفته است بیان می کند که هر خم بسته ساده و هموار چون C در ناحیه باز ساده – همبندی چون D مرز یک رویه دوطرفه هموار

چون S است که آن هم در D قرار دارد. بنابراین طبق قضیه استوکس داریم

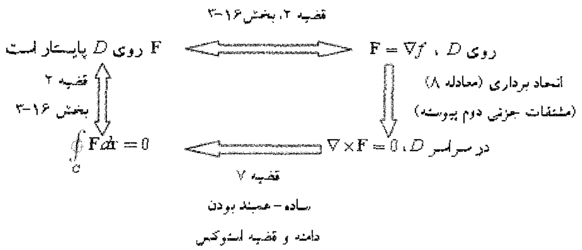


شکل۱۶-۶۶: (الف)- در یک ناحیه باز ساده – همبند در فضا، خم بسته ساده ای چون C مرز رویه هموار چون Sاست. (ب)- خم های هموار را که خودشان را قطع می کنند می توان به حلقه هایی تقسیم کرد که قضیه استوکس در مورد آنها قابل کاربرد است.

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma = 0$$

مرحله دوم در مورد خم هایی است که خودشان را قطع می کنند. نمونه ای از این نوع خم ها در شکل۱۶-۶۶- ب نشان داده شده است و روش کار به این صورت است که این خم ها را به حلقه های ساده ای تقسیم می کنند که محدود به رویه های جهتپذیرند و قضیه استوکس را برای تک تک حلقه ها بکار می برند و نتایج را با هم جمع می کنند.

در نمودار زیر نتایج مربوط به میدان های پایستاری که روی نواحی باز همبند یا ساده – همبند تعریف می شوند خلاصه شده است.



تمرین های۱۶-۷

کاربرد قضیه استوکس در محاسبه انتگرال های خطی

در تمرین های۱-۶ با استفاده از انتگرال رویه ای قضیه استوکس گردش میدان $\mathbf{F}$ را در امتداد خم C در جهت مشخص شده محاسبه کنید.

۱- $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+2x\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$

C: بیضی $4x^2+y^2=4$ واقع در صفحه xy در جهت پاد ساعتگرد هرگاه از بالا نگاه کنیم.

۲- $\mathbf{F}=2y\mathbf{i}+3x\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$

C: دایره $x^2+y^2=9$ واقع در صفحه xy در جهت پاد ساعتگرد هرگاه از بالا نگاه کنیم.

۳- $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$

C: مرز مثلثی که صفحه $x+y+z=1$ از یک هشتم اول جدا می کند، در جهت پاد ساعتگرد هرگاه از بالا نگاه کنیم.

۴- $\mathbf{F}=\left(y^2+z^2\right)\mathbf{i}+\left(x^2+z^2\right)\mathbf{j}+\left(x^2+y^2\right)\mathbf{k}$

C: مرز مثلثی که صفحه $x+y+z=1$ از یک هشتم اول جدا می کند، در جهت پاد ساعتگرد هرگاه از بالا نگاه کنیم.

۵- $\mathbf{F}=\left(y^2+z^2\right)\mathbf{i}+\left(x^2+y^2\right)\mathbf{j}+\left(x^2+y^2\right)\mathbf{k}$

C: مربع محدود به خطوط $x=\pm1$ و $y=\pm1$ واقع در صفحه xy، در جهت پاد ساعتگرد هرگاه از بالا نگاه کنیم.

۶- $\mathbf{F}=x^2y^3\mathbf{i}+\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

C: تقاطع استوانه $x^2+y^2=4$ و نیمکره

$$x^2+y^2+z^2=16,\ z\ge 0$$

در جهت پاد ساعتگرد هرگاه از بالا نگاه کنیم.

شار تاو

۷- فرض کنید $\mathbf{n}$ قائم واحد برونسوی پوسته بیضوی زیر باشد

$$S: 4x^2+9y^2+36z^2=36 \text{ و } z\ge 0$$

و فرض کنید

$$\mathbf{F}=y\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+\left(x^2+y^4\right)^{3/2}\sin e^{\sqrt{xyz}}\,\mathbf{k}$$

مطلوب است مقدار

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma$$

(راهنمایی: یکی از صورت های پارامتری بیضی واقع در قاعده پوسته عبارت است از $x=3\cos t$، $y=2\sin t$، $0\le t\le 2\pi$).

۸- فرض کنید $\mathbf{n}$ قائم واحد برونسوی (قائمی در جهت دور شدن از مبداء) پوسته سهموی زیر باشد

$$S: 4x^2+y+z^2=4 \text{ و } y\ge 0$$

و فرض کنید

$$\mathbf{F}=\left(-z+\frac{1}{2+x}\right)\mathbf{i}+\left(\tan^{-1}y\right)\mathbf{j}+\left(x+\frac{1}{4+z}\right)\mathbf{k}$$

مطلوب است مقدار

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma$$

۹- فرض S عبارت است از استوانه

$$x^2+y^2=a^2,\ 0\le z\le h$$

همراه با قاعده بالایی اش $x^2+y^2\le a^2$، $z=h$. نیز فرض کنید $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$. با استفاده از قضیه استوکس شار برونسوی $\nabla\times\mathbf{F}$ گذرنده از S را بیابید.

۱۰- مطلوب است

$$\iint_S \nabla\times(y\mathbf{i}).\mathbf{n}d\sigma$$

که در آن S عبارت است از نیمکره

$$x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0$$

۱۱- **شار تاو F.** نشان دهید که مقدار

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma$$

برای تمام رویه های جهتداری که محدود به C هستند و جهت مثبت یکسانی را روی C بوجود می آورند یکسان است.

۱۲- فرض کنید $\mathbf{F}$ یک میدان برداری مشتق پذیر است که روی ناحیه ای شامل رویه جهتدار بسته و هموار S و درون آن تعریف شده است. نیز فرض کنید $\mathbf{n}$ میدان برداری قائم واحد بر روی S است. فرض کنید S متشکل از دو رویه S_1 و S_2 است که در امتداد خم بسته ساده و هموار C به هم وصل شده اند. در مورد انتگرال زیر چه می توان گفت

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma?$$

در مورد پاسخ خود دلیل بیاورید.

قضیه استوکس در مورد رویه های پارامتری

در تمرین های۱۳-۱۸ با استفاده از انتگرال رویه ای قضیه استوکس شار تاو میدان $\mathbf{F}$ گذرنده از رویه S را در جهت قائم واحد برونسوی $\mathbf{n}$ محاسبه کنید.

۱۳- $\mathbf{F}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$

$$S: \mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+\left(4-r^2\right)\mathbf{k}$$
$$0\le r\le 2 \text{ و } 0\le\theta\le 2\pi$$

۱۴- $\mathbf{F}=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x+z)\mathbf{k}$

$$S: \mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+\left(9-r^2\right)\mathbf{k}$$
$$0\le\theta\le 2\pi \text{ و } 0\le r\le 3$$

۱۵- $\mathbf{F}=x^2y\mathbf{i}+2y^3z\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$

$$S: \mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+r\mathbf{k}$$
$$0\le\theta\le 2\pi \text{ و } 0\le r\le 1$$

۱۶- $\mathbf{F}=(x-y)\mathbf{i}+(y-z)\mathbf{j}+(z-x)\mathbf{k}$

$$S: \mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+(5-r)\mathbf{k}$$
$$0\le\theta\le 2\pi \text{ و } 0\le r\le 5$$

۱۷- $\mathbf{F}=3y\mathbf{i}+(5-2x)\mathbf{j}+\left(z^2-2\right)\mathbf{k}$

$$S: \mathbf{r}(\phi,\theta)=\left(\sqrt{3}\sin\phi\cos\theta\right)\mathbf{i}+\left(\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta\right)\mathbf{j}$$
$$+\left(\sqrt{3}\cos\phi\right)\mathbf{k},\ 0\le\phi\le\pi/2, 0\le\theta\le 2\pi$$

۱۸- $\mathbf{F}=y^2\mathbf{i}+z^2\mathbf{j}+x\mathbf{k}$

$$S: \mathbf{r}(\phi,\theta)=(2\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(2\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}$$
$$+(2\cos\phi)\mathbf{k},\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\phi\le\pi/2$$

نظریه و مثال ها

۱۹- **گردش صفر.** با کمک اتحاد $\nabla\times\nabla f=\mathbf{0}$ (معادله (۸) متن کتاب) و قضیه استوکس نشان دهید که گردش میدان های زیر در امتداد مرز هر رویه جهتدار هموار واقع در فضا صفر است.

(الف)- $\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$ (ب)- $\mathbf{F}=\nabla\left(xy^2z^3\right)$

(پ)- $\mathbf{F}=\nabla\times\left(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\right)$ (ت)- $\mathbf{F}=\nabla f$

۲۰- **گردش صفر.** فرض کنید

$$f\left(x,y,z\right)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$$

با دو روش زیر نشان دهید که گردش ساعتگرد میدان $\mathbf{F}=\nabla f$ در امتداد دایره $x^2+y^2=a^2$ واقع در صفحه xy صفر است.

(الف)- با در نظر گرفتن

$$\mathbf{r}=\left(a\cos t\right)\mathbf{i}+\left(a\sin t\right)\mathbf{j},\ 0\le t\le 2\pi$$

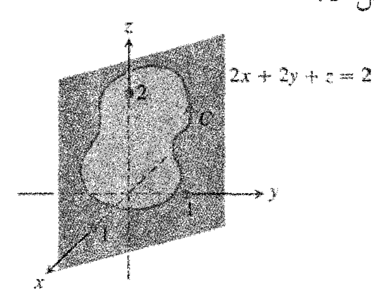
و انتگرال گیری از $\mathbf{F}.d\mathbf{r}$ روی دایره.

(ب)- با کاربرد قضیه استوکس.

۲۱- فرض کنید C خم هموار بسته و ساده ای در صفحه $2x+2y+z=2$ است که جهت آن مطابق شکل زیر است. نشان دهید که

$$\oint_C 2y\,dx+3z\,dy-x\,dz$$

فقط به مساحت ناحیه محصور شده توسط C بستگی دارد نه به مکان یا شکل C.



۲۲- نشان دهید که اگر $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ باشد آنگاه $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$.

۲۳- میدانی برداری بیابید که مؤلفه هایش دوبار مشتق پذیر باشند و تاو آن برابر $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ باشد یا ثابت کنید که چنین میدانی وجود ندارد.

۲۴- قضیه استوکس در مورد گردش میدانی با تاو صفر چه چیزی بیان می کند؟ دلیل بیاورید.

۲۵- فرض کنید R ناحیه ای در صفحه xy باشد که بوسیله خم بسته ساده و قطعه قطعه هموراری چون C محدود شده است و فرض کنید گشتاورهای لختی R حول محورهای x و y، I_x و I_y باشند. انتگرال زیر را بر حسب I_x و I_y محاسبه کنید

$$\oint_C \nabla\left(r^4\right).\mathbf{n}\,ds$$

که در آن $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

۲۶- **تاو صفر ولی میدان ناپایستار.** نشان دهید که تاو

$$\mathbf{F}=\frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

صفر است اما اگر C دایره $x^2+y^2=1$ در صفحه xy باشد مقدار انتگرال زیر صفر نیست

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

(در اینجا قضیه ۷ کاربرد ندارد زیرا دامنه $\mathbf{F}$ ساده – همبند نیست. میدان $\mathbf{F}$ روی محور z تعریف نشده است لذا راهی برای منقبض کردن C و جمع کردن آن در یک نقطه بدون خروج از دامنه $\mathbf{F}$ وجود ندارد)

۱۶-۸- قضیه دیورژانس و نظریه یکسان سازی

صورت دیورژانسی قضیه گرین در صفحه حاکی است که شار برونسوی خالص یک میدان برداری گذرنده از یک خم بسته ساده را می توان با انتگرال گیری از دیورژانس میدان روی ناحیه محصور شده توسط خم محاسبه کرد. قضیه متناظر این در سه بعد، موسوم به قضیه دیورژانس، حاکی است که شار برونسوی خالص یک میدان برداری گذرنده از یک رویه بسته واقع در فضا را می توان با انتگرال گیری از دیورژانس میدان روی ناحیه محصور شده توسط رویه محاسبه کرد. در این بخش قضیه دیورژانس را ثابت کرده و نشان می دهیم که این قضیه چقدر محاسبه شار را ساده می کند. قانون گاوس در مورد شار میدان الکتریکی و معادله پیوستگی هیدرودینامیک را هم بدست می آوریم. سرانجام قضایای انتگرال برداری این

فصل را در یک قضیه اساسی منفرد با هم ترکیب می کنیم.

دیورژانس در سه بعد

دیورژانس یک میدان برداری چون

$$\mathbf{F}=M(x,y,z)\mathbf{i}+N(x,y,z)\mathbf{j}+P(x,y,z)\mathbf{k}$$

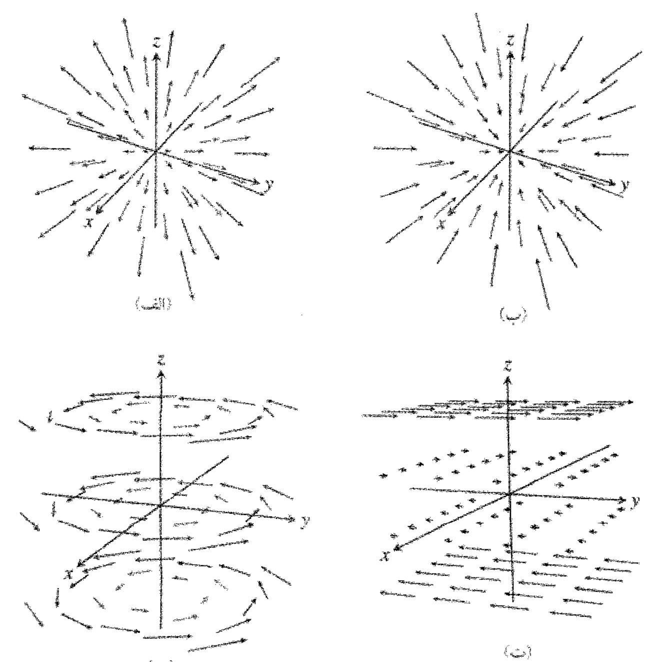
تابع عددی زیر است

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\nabla.\mathbf{F}=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z} \tag{۱}$$

نماد « $\operatorname{div}\mathbf{F}$» را «دیورژانس $\mathbf{F}$» می خوانیم. نماد $\nabla.\mathbf{F}$ هم به صورت «دل نقطه $\mathbf{F}$» خوانده می شود.

تعبیر فیزیکی $\operatorname{div}\mathbf{F}$ در سه بعد همان تعبیر فیزیکی دیورژانس میدان برداری دو بعدی است. اگر $\mathbf{F}$ میدان سرعت یک گاز در حال شارش باشد مقدار $\operatorname{div}\mathbf{F}$ در نقطه ای چون (x,y,z) برابر است با آهنگ متراکم شدن یا منبسط شدن گاز در (x,y,z). دیورژانس عبارت است از شار بر واحد حجم یا چگالی شار در آن نقطه.

مثال ۱: میدان های برداری زیر سرعت گازی را نشان می دهند که در فضا شارش می کند. دیورژانس هر میدان برداری را یافته و مفهوم فیزیکی آن را بیان کنید. شکل۱۶-۶۷ این میدان های برداری را نمایش می دهد.



شکل۱۶-۶۷: میدان های سرعت گازی که در فضا شارش می کند (مثال ۱).

(الف)- انبساط: $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

(ب)- تراکم: $\mathbf{F}(x,y,z)=-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}$

(پ)- چرخش حول محور z: $\mathbf{F}(x,y,z)=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$

(ت)- برش در امتداد صفحات افقی: $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{j}$

حل:

(الف)- $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=3$: گاز در تمام نقاط در حال انبساط یکنواخت است.

(ب)- $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(-x)+\frac{\partial}{\partial y}(-y)+\frac{\partial}{\partial z}(-z)=-3$: گاز در تمام نقاط در حال تراکم یکنواخت است.

(پ)- $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(-y)+\frac{\partial}{\partial y}(x)=0$: گاز در هیچ نقطه ای منبسط یا متراکم نمی شود.

(ت)- $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial y}(z)=0$: باز هم دیورژانس در تمام نقاط واقع در دامنه میدان سرعت صفر است، لذا گاز در هیچ نقطه ای منبسط یا متراکم نمی شود.

قضیه دیورژانس

قضیه دیورژانس حاکی است که تحت شرایط مناسب شار برونسوی یک میدان برداری گذرنده از یک رویه بسته برابر است با انتگرال سه گانه دیورژانس میدان روی ناحیه ای که توسط رویه محصور شده است.

قضیه ۸- قضیه دیورژانس: فرض کنید $\mathbf{F}$ میدانی برداری است که مؤلفه هایش مشتقات جزئی اول پیوسته دارند و فرض کنید S یک رویه بسته جهتدار و قطعه قطعه هموار است. شار $\mathbf{F}$ گذرنده از S در جهت میدان قائم واحد برونسوی رویه $\mathbf{n}$ برابر است با انتگرال $\nabla.\mathbf{F}$ روی ناحیه D محصور شده توسط رویه:

$$\underbrace{\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma}_{\text{شار برونسو}}=\underbrace{\iiint_D \nabla.\mathbf{F}\,dV}_{\text{انتگرال دیورژانس}} \tag{۲}$$

مثال ۲: هر دو طرف معادله (۲) را برای میدان برداری منبسط شونده $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ روی کره $x^2+y^2+z^2=a^2$

محاسبه کنید (شکل ۱۶- ۶۸).

حل: بردار قائم واحد برونسوی رویه S، که از گرادیان $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$ محاسبه می شود، عبارت است از

$$\mathbf{n}=\frac{2(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})}{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a}$$

(روی S داریم $x^2+y^2+z^2=a^2$)

از این رو

$$\mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma=\frac{x^2+y^2+z^2}{a}=d\sigma=\frac{a^2}{a}d\sigma=ad\sigma$$

بنابراین

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma=\iint_S ad\sigma=a\iint_S d\sigma=a(4\pi a^2)=4\pi a^3$$

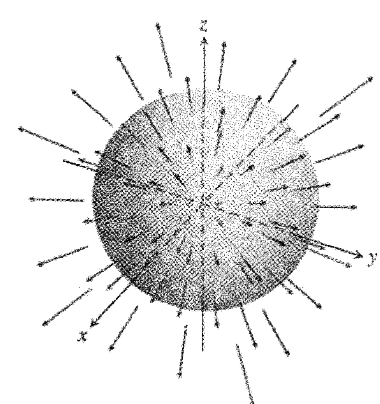
(مساحت S برابر $4\pi a^2$ است)

دیورژانس $\mathbf{F}$ برابر است با

$$\nabla.\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=3$$

بنابراین

$$\iiint_D \nabla.\mathbf{F}dV=\iiint_D 3dV=3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)=4\pi a^3$$



شکل ۱۶-۶۸: یک میدان برداری با انبساط یکنواخت و یک کره (مثال۲)

مثال۳: مطلوب است شار برونسوی $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$ گذرنده از رویه مکعبی که صفحات $x=1$، $y=1$ و $z=1$ از یک هشتم اول جدا می کنند.

حل: به جای محاسبه شار به صورت مجموع شش انتگرال جداگانه، یک انتگرال به ازای هر وجه مکعب، می توانیم شار را با انتگرال گیری از دیورژانس

$$\nabla.\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(xy)+\frac{\partial}{\partial y}(yz)+\frac{\partial}{\partial z}(xz)=y+z+x$$

روی ناحیه داخلی مکعب محاسبه کنیم:

$$\text{شار}=\underset{\substack{\text{Cube}\\\text{surface}}}{\iint}\mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma=\underset{\substack{\text{Cube}\\\text{interior}}}{\iiint}\nabla.\mathbf{F}dV \quad \text{(قضیه دیورژانس)}$$

رویه مکعب　　　داخل مکعب

$$=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(x+y+z)dx\,dy\,dz=\frac{3}{2}$$

(انتگرال گیری ساده)

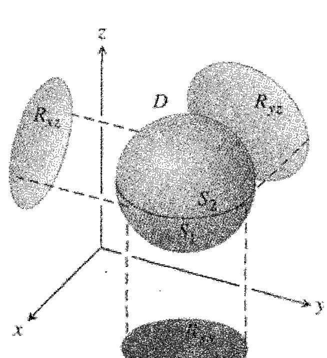
اثبات قضیه دیورژانس در مورد نواحی خاص

برای اثبات قضیه دیورژانس، فرض می کنیم مؤلفه های $\mathbf{F}$ مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشند. ابتدا فرض می کنیم که D ناحیه ای محدب و بدون حفره یا حباب مثل گوی توپر، مکعب یا بیضیوار و S رویه ای قطعه قطعه هموار است. بعلاوه، فرض می کنیم هر خط عمود بر صفحه xy در نقطه ای در درون ناحیه R_{xy}، که تصویر D بر صفحه xy است، رویه S را دقیقاً در دو نقطه قطع می کند و بدین ترتیب دو رویه زیر بوجود می آیند

$$S_1: z=f_1(x,y) \quad \text{و} \quad R_{xy} \text{ در } (x,y)$$

$$S_2: z=f_2(x,y) \quad \text{و} \quad R_{xy} \text{ در } (x,y)$$

با این شرط که $f_1\le f_2$. در مورد تصویر D بر دیگر صفحات مختصات هم فرض های مشابهی در نظر می گیریم. شکل۱۶-۶۹ را ببینید.



شکل۱۶-۶۹: قضیه دیورژانس را برای نوع ناحیه سه بعدی که در اینجا نشان داده شده است اثبات می کنیم.

مؤلفه های بردار قائم واحد $\mathbf{n}=n_1\mathbf{i}+n_2\mathbf{j}+n_3\mathbf{k}$ کسینوس های زوایای α، β و γ هستند که $\mathbf{n}$ با $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ می سازد (شکل ۱۶-۷۰) زیرا تمام بردارهایی که با آنها سروکار داریم بردارهای واحدند. داریم

$$n_1=\mathbf{n}.\mathbf{i}=|\mathbf{n}||\mathbf{i}|\cos\alpha=\cos\alpha$$
$$n_2=\mathbf{n}.\mathbf{j}=|\mathbf{n}||\mathbf{j}|\cos\beta=\cos\beta$$
$$n_3=\mathbf{n}.\mathbf{k}=|\mathbf{n}||\mathbf{k}|\cos\gamma=\cos\gamma$$

بنابراین

$$\mathbf{n}=(\cos\alpha)\mathbf{i}+(\cos\beta)\mathbf{j}+(\cos\gamma)\mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{F}.\mathbf{n}=M\cos\alpha+N\cos\beta+P\cos\gamma$$

صورت مؤلفه ای قضیه دیورژانس عبارت است از

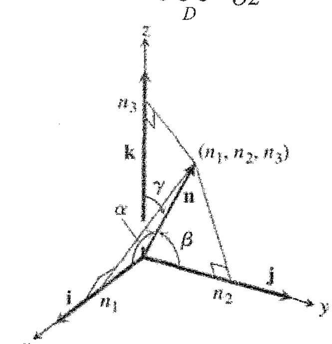
$$\iint_S \underbrace{(M\cos\alpha+N\cos\beta+P\cos\gamma)}_{\mathbf{F}.\mathbf{n}}d\sigma$$
$$=\iiint_D \underbrace{\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\right)}_{\mathrm{div}\,\mathbf{F}}dx\,dy\,dz$$

برای اثبات این قضیه سه برابری زیر را اثبات می کنیم:

$$\iint_S M\cos\alpha\,d\sigma=\iiint_D \frac{\partial M}{\partial x}dx\,dy\,dz \qquad (۳)$$

$$\iint_S N\cos\beta\,d\sigma=\iiint_D \frac{\partial N}{\partial y}dx\,dy\,dz \qquad (۴)$$

$$\iint_S P\cos\gamma\,d\sigma=\iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}dx\,dy\,dz \qquad (۵)$$



شکل ۱۶-۷۰: مؤلفه های $\mathbf{n}$ عبارتند از کسینوس های زوایای α، β و γ که $\mathbf{n}$ با $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ می سازد.

اثبات رابطه (۵): برای اثبات رابطه (۵) انتگرال رویه ای سمت چپ را به انتگرالی دوگانه روی تصویر D بر صفحه xy، یعنی R_{xy}، تبدیل می کنیم (شکل ۱۶-۷۱). رویه S متشکل است از یک بخش بالایی S_2، با معادله $z=f_2(x,y)$ و یک بخش پایینی S_1 با معادله $z=f_1(x,y)$. روی S_2 بردار قائم برونسوی $\mathbf{n}$ مؤلفه $\mathbf{k}$ مثبت دارد و داریم

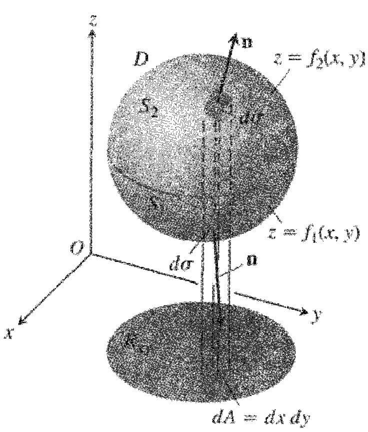
$$\cos\gamma\,d\sigma=dx\,dy$$

زیرا

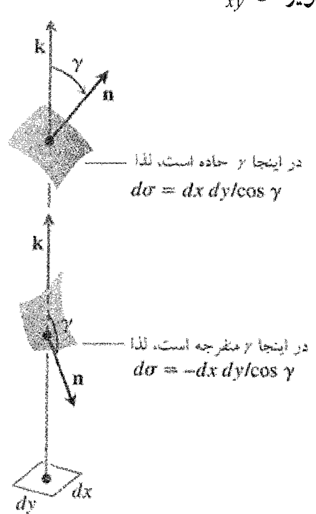
$$d\sigma=\frac{dA}{|\cos\gamma|}=\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}$$

شکل ۱۶-۷۲: را ببینید. روی S_2 مؤلفه $\mathbf{k}$ بردار قائم برونسوی $\mathbf{n}$ منفی است و داریم

$$\cos\gamma\,d\sigma=-dx\,dy$$



شکل ۱۶-۷۱: ناحیه D محصور شده بوسیله رویه های S_1 و S_2 به صورت قائم بر صفحه xy تصویر شده و تصویر آن R_{xy} است.



شکل ۱۶-۷۲: نمای بزرگ شده ای از قطعات مساحت مورد بحث در شکل ۱۶-۷۱. روابط $d\delta=\pm dxdy/\cos\gamma$ در بخش ۱۶-۵ (معادله ۷) بدست آمدند.

بنابراین

$$\iint_S P\cos\gamma d\sigma = \iint_{S_2} P\cos\gamma d\sigma + \iint_{S_1} P\cos\gamma d\sigma$$
$$= \iint_{R_{xy}} P\left(x,y,f_2(x,y)\right)dx\,dy$$
$$- \iint_{R_{xy}} P\left(x,y,f_1(x,y)\right)dx\,dy$$
$$= \iint_{R_{xy}} \left[P\left(x,y,f_2(x,y)\right) - P\left(x,y,f_1(x,y)\right)\right]dx\,dy$$
$$= \iint_{R_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}dz\right]dx\,dy = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}dz\,dx\,dy$$

بدین ترتیب رابطه (۵) اثبات می شود. برای اثبات روابط (۳) و (۴) به همین روش عمل کنید یا فقط x، y، z؛ M، N، P؛ α، β، γ را به ترتیب جابجا کنید و آن نتایج را از رابطه (۵) بدست آورید. بدین ترتیب قضیه دیورژانس در مورد این نواحی خاص به اثبات می رسد.

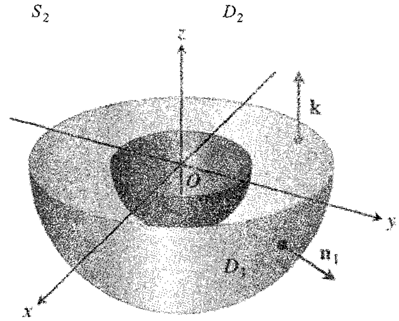
قضیه دیورژانس در مورد نواحی دیگر

قضیه دیورژانس را می توان به نواحی دیگری هم تعمیم داد به شرط اینکه بتوان آنها را به تعدادی متناهی از نواحی ساده از نوعی که بحث کردیم تقسیم کرد یا بتوان آن نواحی را به روشهای خاصی به صورت حد نواحی ساده تعریف کرد. به عنوان مثالی از روش تقسیم، فرض کنید D ناحیه بین دو کره هم مرکز باشد و $\mathbf{F}$ در سراسر D و روی رویه های محدود کننده آن مؤلفه های پیوسته مشتق پذیر داشته باشد. D را با یک صفحه استوایی به دو نیم تقسیم کرده و قضیه دیورژانس را برای هر نیمه بصورت جداگانه بکار می بریم. نیمه پایینی D_1 در شکل ۱۶-۷۳ نشان داده شده است. رویه S_1 که D_1 را محصور کرده است متشکل است از یک نیمکره خارجی، یک قاعده واشر - شکل مسطح و یک نیمکره داخلی. بنابه قضیه دیورژانس داریم

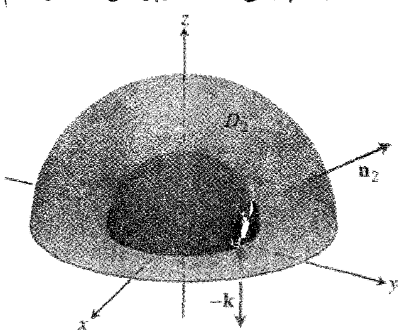
$$\iint_{S_1} \mathbf{F}.\mathbf{n}_1 d\sigma_1 = \iiint_{D_1} \nabla.\mathbf{F}dV_1 \qquad (۶)$$

جهت بردار قائم واحد $\mathbf{n}_1$ که از D_1 به سمت بیرون متوجه است روی رویه خارجی از مبداء به سمت بیرون، روی قاعده تخت برابر $\mathbf{k}$ و روی رویه داخلی به طرف مبداء است. حال قضیه دیورژانس را برای D_2 و رویه آن S_2 بکار می بریم (شکل ۱۶-۷۴):

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}.\mathbf{n}_2 d\sigma_2 = \iiint_{D_2} \nabla.\mathbf{F}dV_2 \qquad (۷)$$



شکل ۱۶-۷۳: نیمه پایینی ناحیه توپر بین دو کره هم مرکز.



شکل ۱۶-۷۴: نیمه بالایی ناحیه توپر بین دو کره هم مرکز.

وقتی روی S_2، $\mathbf{n}_2$ را که جهت آن از D_2 به سمت بیرون است، در نظر بگیریم می بینیم که روی قاعده واشر - شکل در صفحه xy برابر $\mathbf{k}$- است، روی کره خارجی جهت آن از مبداء به طرف بیرون و روی کره داخلی جهت آن به طرف مبداء است. وقتی معادلات (۶) و (۷) را با هم جمع کنیم انتگرال های روی قاعده تخت به دلیل علامت های مخالف $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ همدیگر را حذف می کنند. بنابراین نتیجه زیر بدست می آید

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma = \iiint_D \nabla.\mathbf{F}dV$$

که در آن D ناحیه بین کره ها، S مرز D متشکل از دو کره و $\mathbf{n}$ بردار واحد قائم بر S است که جهت آن از D به سمت بیرون است.

مثال ۴: مطلوب است شار برونسوی خالص میدان

$$F = \frac{xi + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3} \quad \text{و} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

گذرنـــده از مـــرز ناحیـــه $D: 0 \le a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2$ (شکل ۱۶-۷۵).

حل: شار را می توان با انتگرال گیری از $\nabla.\mathbf{F}$ روی D محاسـبه کرد. داریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}(2x)=\frac{x}{\rho}$$

و

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\rho^{-3}\right)=\rho^{-3}-3x\,\rho^{-4}\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{1}{\rho^3}-\frac{3x^2}{\rho^5}$$

به همین ترتیب

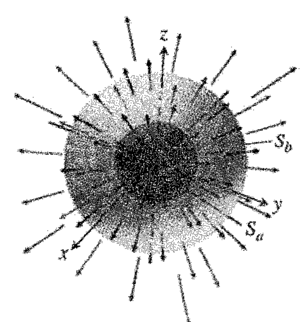
$$\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{1}{\rho^3}-\frac{3y^2}{\rho^5} \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{\rho^3}-\frac{3z^2}{\rho^5}$$

بنابراین

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{3}{\rho^3}-\frac{3}{\rho^5}\left(x^2+y^2+z^2\right)=\frac{3}{\rho^3}-\frac{3\rho^2}{\rho^5}=0$$

و

$$\iiint_D \nabla.\mathbf{F}dV=0 \qquad (\nabla.\mathbf{F}=div\mathbf{F})$$



شکل ۱۶-۷۵: دو کره هم مرکـز در میـدان بـرداری در حال انبساط.

بنابراین انتگرال $\nabla.\mathbf{F}$ روی D صفر و شار برونسوی خالص گذرنده از مرز D صفر است. اما از ایـن مثـال مـی تـوان چیـز دیگری هم آموخت. شاری که از طریـق کـره داخلـی S_a از D خارج می شود برابر است بـا منفـی شـاری کـه از طریـق کـره خارجی S_b از D خارج می شود (زیرا مجموع این شارها برابر صفر است). پس شار $\mathbf{F}$ گذرنده از S_a در جهت دور شـدن از مبداء برابر است با شار $\mathbf{F}$ گذرنده از S_b در جهت دور شدن از مبداء. بنابراین شار $\mathbf{F}$ گذرنده از یک کره به مرکز مبداء مستقل از شعاع کره است. مقدار این شار چقدر است؟

برای یافتن پاسخ، انتگرال شار را مستقیماً محاسبه می کنیم. بردار قائم واحد برونسو بر روی کره به شعاع a عبارت است از

$$\mathbf{n}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a}$$

پس برروی کره داریم

$$\mathbf{F.n}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a^3}.\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{a}$$
$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^4}=\frac{a^2}{a^4}=\frac{1}{a^2}$$

و

$$\iint_{S_a}\mathbf{F.n}d\sigma=\frac{1}{a^2}\iint_{S_a}d\sigma=\frac{1}{a^2}\left(4\pi a^2\right)=4\pi$$

شار برونسوی $\mathbf{F}$ گذرنده از هر کره به مرکز مبـداء برابـر اسـت با 4π.

قانون گاوس: یکی از چهار قانون بنیادی نظریه الکترومغناطیس

از مثال۴ چیزهای بیـشتری هـم مـی تـوان آموخـت. در نظریـه الکترومغناطیس، میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه ای q واقع در مبداء برابر است با

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{|\mathbf{r}|^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right)=\frac{q}{4\pi\in_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$
$$=\frac{q}{4\pi\in_0}\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\rho^3}$$

کـه $\in_0$ یـک ثابـت فیزیکـی، $\mathbf{r}$ بـردار مکـان نقطـه (x,y,z) و $\rho=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ اسـت. بـا نمادگـذاری مثـال۴ داریم

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\in_0}\mathbf{F}$$

محاسبات مثال ۴ نـشان مـی دهنـد کـه شـار برونـسوی $\mathbf{E}$ گذرنده از هر کره به مرکز مبداء برابر $q/\in_0$ است اما این نتیجه منحصر به کره ها نیست. شار برونسوی $\mathbf{E}$ گذرنده از هر رویـه بسته S که مبداء را محصور کرده باشـد (و قـضیه دیـورژانس برای آن قابل کابرد باشد) هم برابر $q/\in_0$ است. برای پی بـردن به علت این امر، فقط مجبوریم کره بزرگتری چون S_a به مرکـز

مبداء تصور کنیم که رویه S را محصور کرده است (شکل ۱۶-۷۶ را ببینید). از آنجا که

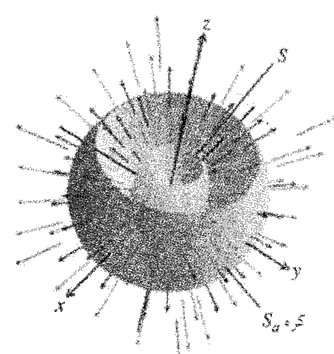
$$\nabla.\mathbf{E}=\nabla.\frac{q}{4\pi\in_0}\mathbf{F}=\frac{q}{4\pi\in_0}\nabla.\mathbf{F}=0$$

وقتی $\rho>0$ باشد انتگرال $\nabla.\mathbf{E}$ روی ناحیه D بین S و S_a برابر صفر است. بنابراین بنابه قضیه دیورژانس داریم

$$\iint\limits_{D\text{مرز}}\mathbf{E.n}\,d\sigma=0$$

و شار $\mathbf{E}$ گذرنده از S در جهت دور شدن از مبداء باید با شار $\mathbf{E}$ گذرنده از S_a در جهت دور شدن از مبداء، که برابر $q/\in_0$ است، یکسان باشد. این گزاره را قانون گاوس می نامند و در مورد توزیع های بار کلیتر از آنچه در اینجا در نظر گرفتیم (بار نقطه ای) نیز بکار می رود. این مطلب را به زودی در کتاب های درسی فیزیک خواهید دید.

قانون گاوس: $$\iint\limits_S\mathbf{E.n}\,d\sigma=\frac{q}{\in_0}$$



شکل ۱۶-۷۶: کره S_a رویه دیگر S را احاطه کرده است. قسمت بالایی رویه ها برداشته شده است تا تجسم مسئله آسانتر شود.

معادله پیوستگی هیدرودینامیک

فرض کنید D ناحیه ای در فضا باشد که بوسیله رویه جهتدار بسته S محدود شده است. اگر $\mathbf{v}(x,y,z)$ میدان سرعت یک سیال باشد که بطور یکنواخت از D شارش می کند، $\delta=\delta(t,x,y,z)$ چگالی سیال در (x,y,z) در لحظه t و $\mathbf{F}=\delta\mathbf{v}$، آنگاه **معادله پیوستگی** هیدرودینامیک حاکی است که

$$\nabla.\mathbf{F}+\frac{\partial\delta}{\partial t}=0$$

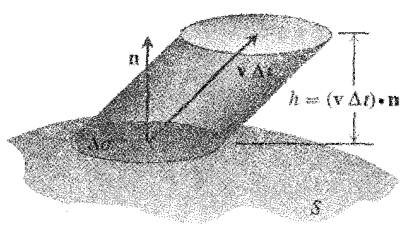
همانطور که اکنون نشان خواهیم داد اگر توابعی که با آنها سروکار داریم مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشند این معادله بطور طبیعی از قضیه دیورژانس بدست می آید.

قبل از هر چیز باید گفت که انتگرال

$$\iint\limits_S\mathbf{F.n}\,d\sigma$$

آهنگ خروج جرم از D از طریق S است (جرم خارج می شود چون $\mathbf{n}$ قائم برونسوست). برای پی بردن به علت این امر قطعه ای با مساحت $\Delta\sigma$ برروی رویه در نظر بگیرید (شکل ۱۶-۷۷). در بازه زمانی کوتاه Δt، حجم ΔV سیالی که از این قطعه شارش می کند تقریباً برابر است با حجم استوانه ای با مساحت قاعده $\Delta\sigma$ و ارتفاع $(\mathbf{v}\Delta t).\mathbf{n}$، که $\mathbf{v}$ بردار سرعتی است که مبداء آن نقطه ای از این قطعه است:

$$\Delta V\approx\mathbf{v.n}\,\Delta\sigma\,\Delta t$$



شکل ۱۶-۷۷: سیالی که از طریق قطعه $\Delta\sigma$ در مدت کوتاه Δt به طرف بالا شارش می کند «استوانه ای» با حجم تقریبی $\mathbf{v.n}\,\Delta\sigma\,\Delta t=$ ارتفاع × قاعده را پر می کند.

جرم این حجم از سیال تقریباً برابر است با

$$\Delta m\approx\delta\mathbf{v.n}\,\Delta\sigma\,\Delta t$$

لذا آهنگ شارش جرم از D به بیرون از طریق قطعه تقریباً برابر است با

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}\approx\delta\mathbf{v.n}\,\Delta\sigma$$

این رابطه به رابطه تقریبی زیر به عنوان برآوردی از آهنگ متوسط شارش جرم از S منجر می شود

$$\frac{\sum\Delta m}{\Delta t}\approx\sum\delta\mathbf{v.n}\,\Delta\sigma$$

سرانجام اگر $\Delta\sigma\to0$ و $\Delta t\to0$ میل کند آهنگ لحظه ای

خروج جرم از D از طریق S به صورت زیر بدست می آید

$$\frac{dm}{dt}=\iint_S \delta \mathbf{v}.\mathbf{n}\, d\sigma$$

که برای شارش خاص مورد بحث برابر است با

$$\frac{dm}{dt}=\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, d\sigma$$

حال فرض کنید B کره توپری به مرکز نقطه ای چون Q از شاره است. مقدار متوسط $\nabla.\mathbf{F}$ روی B برابر است با

$$\frac{1}{\text{حجم}\, B}\iiint_B \nabla.\mathbf{F}\, dV$$

اینکه $\nabla.\mathbf{F}$ عملاً این مقدار را در نقطه ای چون P واقع در B اختیار می کند پیامدی از پیوستگی دیورژانس است. بنابراین

$$(\nabla.\mathbf{F})_P=\frac{1}{volume\ of\ B}\iiint_B \nabla.\mathbf{F}\, dV$$

$$=\frac{\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, d\sigma}{\text{حجم}\, B}$$

$$=\frac{(\text{آهنگ خروج جرم از } B \text{ از طریق رویه اش } S)}{(\text{حجم } B)} \tag{8}$$

جمله آخر این معادله کاهش جرم در واحد حجم را توصیف می کند.

حال فرض کنید شعاع B را به صفر میل دهیم و مرکز Q را ثابت نگه داریم. طرف چپ معادله (۸) به $(\nabla.\mathbf{F})_Q$ همگرا می شود و سمت راست به $(-\partial\delta/\partial t)_Q$. برابری این دو حد، معادله پیوستگی است

$$\nabla.\mathbf{F}=-\frac{\partial\delta}{\partial t}$$

معادله پیوستگی، $\nabla.\mathbf{F}$ را «توضیح می دهد». دیورژانس $\mathbf{F}$ در یک نقطه آهنگ کاهش چگالی سیال در آن نقطه است. حال قضیه دیورژانس

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, d\sigma=\iiint_D \nabla.\mathbf{F}\, dV$$

بیان می کند که کاهش خالص چگالی سیال در ناحیه D به علت انتقال جرم از رویه S است. بنابراین این قضیه نوعی بیان اصل پایستگی (بقای) جرم است (تمرین ۳۱).

یکسان سازی قضایای انتگرالی

اگر یک میدان دو بعدی چون $\mathbf{F}=M(x,y)\mathbf{i}+N(x,y)\mathbf{j}$ را به عنوان میدانی سه بعدی بدانیم که مؤلفه $\mathbf{k}$ آن صفر است آنگاه $\nabla.\mathbf{F}=(\partial M/\partial x)+(\partial N/\partial y)$ و صورت معمولی قضیه گرین را می توان به صورت زیر نوشت

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds=\iint_R\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dx\, dy=\iint_R \nabla.\mathbf{F}\, dA$$

به همین ترتیب، $\nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{k}=(\partial N/\partial x)-(\partial M/\partial y)$، لذا صورت مماسی قضیه گرین را می توان به صورت زیر نوشت

$$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx\, dy=\iint_R \nabla\times.\mathbf{F}.\mathbf{k}\, dA$$

اکنون که معادلات قضیه گرین را با نمادگذاری دل در اختیار داریم می توانیم به روابط آنها با معادلات قضیه استوکس و قضیه دیورژانس پی ببریم.

قضیه گرین و تعمیم آن به سه بعد	
صورت معمولی قضیه گرین:	$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds=\iint_R \nabla.\mathbf{F}\, dA$
قضیه دیورژانس:	$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, d\sigma=\iiint_D \nabla.\mathbf{F}\, dV$
صورت مماسی قضیه گرین:	$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\iint_R \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{k}\, dA$
قضیه استوکس:	$\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}=\iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}\, d\sigma$

توجه کنید که چگونه قضیه استوکس صورت مماسی (تاوی) قضیه گرین را از یک رویه تخت در صفحه به رویه ای در فضای سه بعدی تعمیم می دهد. در هر مورد، انتگرال مؤلفه قائم تاو $\mathbf{F}$ روی ناحیه درونی رویه برابر است با گردش $\mathbf{F}$ در امتداد مرز.

همینطور قضیه دیورژانس صورت معمولی (شاری) قضیه گرین را از ناحیه ای دوبعدی واقع در صفحه به ناحیه ای سه بعدی واقع در فضا تعمیم می دهد. در هر مورد، انتگرال $\nabla.\mathbf{F}$ روی درون ناحیه برابر است با شار کل میدان که از مرز می گذرد.

در اینجا می توان چیزهای بیشتری آموخت. تمام این نتایج

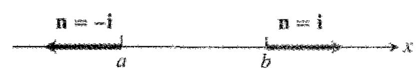
را می توان به عنوان صورتهای یک قضیه اساسی منفرد دانست. قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در بخش۵-۴ را به یاد بیاورید. این قضیه حاکی است که اگر $f(x)$ بر (a,b) مشتق پذیر و بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه داریم

$$\int_a^b \frac{\partial f}{dx}dx = f(b)-f(a)$$

اگر فرض کنیم در سراسر $[a,b]$، $\mathbf{F}=f(x)\mathbf{i}$، آنگاه $df/dx = \nabla.\mathbf{F}$. اگر میدان برداری واحد $\mathbf{n}$ قائم بر مرز $[a,b]$ را در b برابر $\mathbf{i}$ و در a برابر $\mathbf{-i}$ تعریف کنیم (شکل۱۶-۷۸)، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} f(b)-f(a) &= f(b)\mathbf{i}.(\mathbf{i})+f(a)\mathbf{i}.(-\mathbf{i}) \\ &= \mathbf{F}(b).\mathbf{n}+\mathbf{F}(a).\mathbf{n} \end{aligned}$$

$=[a,b]$ شار برونسوی کل $\mathbf{F}$ گذرنده از مرز



شکل۱۶-۷۸: قائم های واحد برونسو در مرز $[a,b]$ در فضای یک بعدی.

حال قضیه اساسی حاکی است که

$$\mathbf{F}(b).\mathbf{n}+\mathbf{F}(a).\mathbf{n} = \int_{[a,b]} \nabla.\mathbf{F}dx$$

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، صورت معمولی (عادی) قضیه گرین و قضیه دیورژانس همگی بیان می کنند که انتگرال اثر عملگر دیفرانسیلی $\nabla.$ بر میدانی چون $\mathbf{F}$ روی یک ناحیه برابر است با مجموع مؤلفه های قائم میدان روی مرز ناحیه. (در اینجا انتگرال خطی قضیه گرین و انتگرال رویه ای قضیه دیورژانس را به صورت «جمع هایی» روی مرز تعبیر می کنیم).

قضیه استوکس و صورت مماسی قضیه گرین حاکی اند که، وقتی جهت ها درست باشند، انتگرال اثر مؤلفه قائم تاو روی یک میدان برابر است با مجموع مؤلفه های مماسی میدان روی مرز رویه.

زیبایی این تعابیر در رعایت اصل وحدت بخش واحدی است که می توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

> **قضیه اساسی یکسان سازی**
> انتگرال اثر یک عملگر دیفرانسیلی بر یک میدان روی یک ناحیه برابر است با مجموع مؤلفه های میدان مناسب عملگر روی مرز ناحیه.

تمرین های ۱۶-۸

محاسبه دیورژانس

در تمرین های۱-۴ دیورژانس میدان را بیابید.

۱- میدان چرخشی شکل۱۶-۱۲.

۲- میدان شعاعی شکل۱۶-۱۱.

۳- میدان گرانشی شکل۱۶-۸ و تمرین ۳۸- الف بخش۱۶-۳.

۴- میدان سرعت شکل۱۶-۱۳.

محاسبه شار با استفاده از قضیه دیورژانس

در تمرین های۵-۱۶ با استفاده از قضیه دیورژانس شار برونسوی $\mathbf{F}$ گذرنده از مرز ناحیه D را بیابید.

۵- **مکعب.** $\mathbf{F}=(y-x)\mathbf{i}+(z-y)\mathbf{j}+(y-x)\mathbf{k}$.

D: مکعب محدود به صفحات $x=\pm1$، $y=\pm1$ و $z=\pm1$

۶- $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$

(الف)- **مکعب.** D: مکعبی که صفحات $x=1$، $y=1$ و $z=1$ از یک هشتم اول جدا می کنند.

(ب)- **مکعب.** D: مکعبی محدود به صفحات $x=\pm1$، $y=\pm1$ و $z=\pm1$.

(پ)- **قوطی استوانه ای.** D: ناحیه ای که صفحات $z=0$ و $z=1$ از استوانه توپر $x^2+y^2\le4$ جدا می کنند.

۷- **استوانه و سهمیوار.** $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+xy\mathbf{j}-z\mathbf{k}$

D: ناحیه ای داخل استوانه توپر $x^2+y^2\le4$ بین صفحه $z=0$ و سهمیوار $z=x^2+y^2$.

۸- **کره.** $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+3z\mathbf{k}$

D: کره توپر $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

۹- بخشی از کره. $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}-2xy\mathbf{j}+3xz\mathbf{k}$

D: ناحیه ای که کره $x^2+y^2+z^2=4$ از یک هشتم اول جدا می کند.

۱۰- قوطی استوانه ای.

$$\mathbf{F}=\left(6x^2+2xy\right)\mathbf{i}+\left(2y+x^2z\right)\mathbf{j}+4x^2y^3\mathbf{k}$$

D: ناحیه ای که استوانه $x^2+y^2=4$ و صفحه $z=3$ از یک هشتم اول جدا می کنند.

۱۱- گوه. $\mathbf{F}=2xz\mathbf{i}-xy\mathbf{j}-z^2\mathbf{k}$

D: گوه ای که صفحه $y+z=4$ و استوانه بیضوی $4x^2+y^2=16$ از یک هشتم اول جدا می کنند.

۱۲-کره. $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$

D: کره توپر $x^2+y^2+z^2 \le a^2$.

۱۳- کره ضخیم. $\mathbf{F}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$

D: ناحیه $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2$

۱۴- کره ضخیم. $\mathbf{F}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

D: ناحیه $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$

۱۵- کره ضخیم.

$$\mathbf{F}=\left(5x^3+12xy^2\right)\mathbf{i}+\left(y^3+e^y\sin z\right)\mathbf{j}+\left(5z^3+e^y\cos z\right)\mathbf{k}$$

D: ناحیه توپر بین کره های $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=2$.

۱۶- استوانه ضخیم.

$$\mathbf{F}=\ln\left(x^2+y^2\right)\mathbf{i}-\left(\frac{2z}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\mathbf{j}+z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{k}$$

D: استوانه دیواره ضخیم $1 \le x^2+y^2 \le 2$، $-1 \le z \le 2$.

ویژگی های تاو و دیورژانس

۱۷- $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{G})$ **صفر است.**

(الف)- نشان دهید که اگر مشتقات جزئی ضروری مؤلفه های میدان $\mathbf{G}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}$ پیوسته باشند آنگاه $\nabla.\nabla\times\mathbf{G}=0$.

(ب)- آیا می توان در مورد شار میدان $\nabla\times\mathbf{G}$ گذرنده از یک رویه بسته نتیجه ای گرفت؟ دلیل بیاورید.

۱۸- فرض کنید $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ میدان های برداری مشتق پذیر و a و b ثابت های حقیقی دلخواه باشند. درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید.

(الف)- $\nabla.\left(a\mathbf{F}_1+b\mathbf{F}_2\right)=a\nabla.\mathbf{F}_1+b\nabla.\mathbf{F}_2$

(ب)- $\nabla\times\left(a\mathbf{F}_1+b\mathbf{F}_2\right)=a\nabla\times\mathbf{F}_1+b\nabla\times\mathbf{F}_2$

(پ)- $\nabla.\left(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2\right)=\mathbf{F}_2.\nabla\times\mathbf{F}_1-\mathbf{F}_1.\nabla\times\mathbf{F}_2$

۱۹- فرض کنید $\mathbf{F}$ یک میدان برداری مشتق پذیر و $g(x,y,z)$ یک تابع عددی مشتق پذیر است. درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید.

(الف)- $\nabla.(g\mathbf{F})=g\nabla.\mathbf{F}+\nabla g.\mathbf{F}$

(ب)- $\nabla\times(g\mathbf{F})=g\nabla\times\mathbf{F}+\nabla g\times\mathbf{F}$

۲۰- اگر $\mathbf{F}=M\mathbf{i}+N\mathbf{j}+P\mathbf{k}$ یک میدان برداری مشتق پذیر باشد و نماد $\mathbf{F}.\nabla$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$M\frac{\partial}{\partial x}+N\frac{\partial}{\partial y}+P\frac{\partial}{\partial z}$$

در مورد میدان های برداری مشتق پذیر $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید.

(الف)- $\nabla\times\left(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2\right)=\left(\mathbf{F}_2.\nabla\right)\mathbf{F}_1-\left(\mathbf{F}_1.\nabla\right)\mathbf{F}_2+\left(\nabla.\mathbf{F}_2\right)\mathbf{F}_1-\left(\nabla.\mathbf{F}_1\right)\mathbf{F}_2$

(ب)- $\nabla\left(\mathbf{F}_1.\mathbf{F}_2\right)=\left(\mathbf{F}_1.\nabla\right)\mathbf{F}_2+\left(\mathbf{F}_2.\nabla\right)\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_1\times\left(\nabla\times\mathbf{F}_2\right)+\mathbf{F}_2\times\left(\nabla\times\mathbf{F}_1\right)$

نظریه و مثال ها

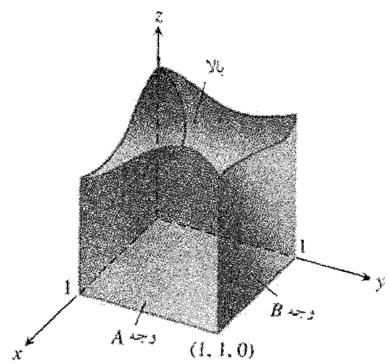
۲۱- فرض کنید $\mathbf{F}$ میدانی است که مؤلفه های آن در سراسر بخشی از فضا شامل ناحیه ای چون D که با رویه بسته هموار S محدود شده است مشتقات جزئی اول پیوسته داشته باشد. اگر $|\mathbf{F}| \le 1$ باشد آیا می توان برای اندازه انتگرال زیر کرانی تعیین کرد؟

$$\iiint_D \nabla.\mathbf{F}\,dV$$

برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲۲- قاعده رویه مکعب- مانند بسته ای که در شکل زیر نشان داده شده است مربع واحدی در صفحه xy است. چهار وجه رویه در صفحات $x=0$، $x=1$، $y=0$ و $y=1$ واقع اند.

وجه بالایی رویه هموار دلخواهی با هویت نامعلوم است. فرض کنید $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-2y\mathbf{j}+(z+3)\mathbf{k}$ و شار برونسوی $\mathbf{F}$ گذرنده از وجه A برابر۱ و گذرنده از وجه B برابر۳- است. آیا در مورد شار برونسوی گذرنده از رویه بالایی می توان اظهار نظر کرد؟ دلیل بیاورید.



۲۳- (الف)- نشان دهید که شار برونسوی میدان برداری مکان $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ گذرنده از رویه بسته همواری چون S سه برابر حجم ناحیه محصور شده توسط رویه است.

(ب)- فرض کنید $\mathbf{n}$ میدان برداری قائم واحد برونسو برروی S است. نشان دهید که امکان ندارد $\mathbf{F}$ در هر نقطه از S بر $\mathbf{n}$ عمود باشد.

۲۴- **شار ماکسیمم.** از بین تمام اجسام مکعب مستطیلی که با نابرابری های $0\le x\le a$، $0\le y\le b$ و $0\le z\le 1$ تعریف می شوند جسمی را بیابید که شار کل برونسوی میدان $\mathbf{F}=\left(-x^2-4xy\right)\mathbf{i}-6yz\mathbf{j}+12z\mathbf{k}$ گذرنده از شش وجه ماکسیمم باشد. مقدار این شار ماکسیمم چقدر است؟

۲۵- **حجم ناحیه توپر.** فرض کنید $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و نیز فرض کنید رویه S و ناحیه D تمام مفروضات قضیه دیورژانس را برآورده می کنند. نشان دهید که حجم D از فرمول زیر بدست می آید

$$D \text{ حجم} =\frac{1}{3}\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma$$

۲۶- **شار برونسوی میدان ثابت.** نشان دهید که شار برونسوی میدان برداری ثابتی چون $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ گذرنده از هر رویه بسته ای که قضیه دیورژانس در مورد آن کاربرد دارد. برابر صفر است.

۲۷- **توابع همساز.** تابعی چون $f(x,y,z)$ را در ناحیه D از فضا همساز می گوییم اگر در سراسر D در معادله لاپلاس صدق کند

$$\nabla^2 f=\nabla.\nabla f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

(الف)- فرض کنید f در سراسر ناحیه کراندار D محصور شده بوسیله رویه هموار S همساز است و $\mathbf{n}$ بردار قائم واحد انتخابی بر روی S است. نشان دهید که انتگرال $\nabla f.\mathbf{n}$، مشتق f در جهت $\mathbf{n}$، روی S صفر است.

(ب)- نشان دهید که اگر f روی D همساز باشد آنگاه داریم

$$\iint_S f\,\nabla f.\mathbf{n}\,d\sigma=\iiint_D |\nabla f|^2\,dV$$

۲۸- **شار برونسوی میدان گرادیان.** فرض کنید S رویه بخشی از کره توپر $x^2+y^2+z^2\le a^2$ است که در یک هشتم اول واقع است و فرض کنید $f(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. مطلوب است

$$\iint_S \nabla f.\mathbf{n}\,d\sigma$$

($\nabla f.\mathbf{n}$ مشتق f در جهت قائم برونسوی $\mathbf{n}$ است)

۲۹- **فرمول اول گرین.** فرض کنید f و g توابع عددی هستند که در سراسر ناحیه ای چون D مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته دارند و D با رویه قطعه قطعه هموار بسته S محصور شده است. نشان دهید که

$$\iint_S f\,\nabla g.\mathbf{n}\,d\sigma=\iiint_D \left(f\,\nabla^2 g+\nabla f.\nabla g\right)dV \qquad (۹)$$

رابطه (۹) را **فرمول اول گرین** می نامند. (راهنمایی: قضیه دیورژانس را برای میدان $\mathbf{F}=f\,\nabla g$ بکار ببرید).

۳۰- **فرمول دوم گرین.** (ادامه تمرین۲۹). در رابطه (۹) f و g را با هم عوض کرده و فرمولی جدید بدست آورید. سپس این فرمول را از رابطه (۹) کم کرده و نشان دهید که

$$\iint_S \left(f\,\nabla g-g\,\nabla f\right).\mathbf{n}\,d\sigma=\iiint_D \left(f\,\nabla^2 g-g\,\nabla^2 f\right)dV \qquad (۱۰)$$

این رابطه را **فرمول دوم گرین** می نامند.

۳۱- پایستگی (بقای) جرم. فرض کنید $\mathbf{v}(t,x,y,z)$ روی

ناحیه D از فضا میدان برداری پیوسته مشتق پذیری باشد. همینطور فرض کنید $p(t,x,y,z)$ یک تابع عددی پیوسته ـ مشتق پذیر باشد. متغیر t دامنه زمان را نشان می دهد. قانون پایستگی جرم ادعا می کند که

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t,x,y,z)dV = -\iint_S p\mathbf{v}.\mathbf{n}\,d\sigma$$

که S رویه محصور کننده D است.

(الف)- اگر $\mathbf{v}$ میدان شارش سرعت و p چگالی سیال در نقطه (x,y,z) در لحظه t باشد تعبیری فیزیکی برای قانون پایستگی جرم ارائه کنید.

(ب)- با استفاده از قضیه دیورژانس و قاعده لایبنیز، یعنی

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t,x,y,z)dV = \iint_S \frac{\partial p}{\partial t}dV$$

نشان دهید که قانون پایستگی جرم با معادله پیوستگی زیر هم ارز است

$$\nabla.p\mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

(در جمله اول $\nabla.p\mathbf{v}$، متغیر t ثابت نگه داشته می شود و در جمله دوم $\partial p/\partial t$ فرض می شود نقطه (x,y,z) در D ثابت نگه داشته می شود).

۳۲- معادله پخش گرما. فرض کنید $T(t,x,y,z)$ تابعی با مشتقات دوم پیوسته باشد که دمای نقطه ای چون (x,y,z) از جسمی را که ناحیه D از فضا را اشغال کرده است در لحظه t بدست می دهد. اگر ظرفیت گرمایی جسم و چگالی جرم را به ترتیب با ثابت های c و ρ نشان دهیم کمیت $c\rho T$ **انرژی گرمایی جسم بر واحد حجم** نامیده می شود.

(الف)- توضیح دهید که چرا $-\nabla T$ متوجه جهت شارش گرماست.

(ب)- فرض کنید $-k\nabla T$ نشان دهنده **بردار شار انرژی** باشد (در اینجا ثابت k را رسانندگی می نامند) با فرض قانون پایستگی جرم به ازای $\mathbf{v} = -k\nabla T$ و $c\rho T = p$ در تمرین **۳۱**، معادله پخش (گرما) یعنی

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T$$

را بدست آورید، که در آن $K = k/(c\rho) > 0$ ثابت پخش (ضریب پخش) است (توجه کنید که اگر $T(t,x)$ دما در لحظه t در مکان x از یک میله رسانای یکنواخت باشد که اطراف آن کاملاً عایق بندی شده است آنگاه $\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2$ و معادله پخش فوق به معادله گرمای یک بعدی تمرین های اضافی فصل ۱۴ تبدیل می شود).

فصل ۱۶: پرسش های مروری

۱- انتگرال خطی چیست؟ چگونه محاسبه می شود؟ مثال هایی بزنید.

۲- چگونه می توانید از انتگرال های خطی برای یافتن مرکز جرم فنرها استفاده کنید؟ توضیح دهید.

۳- میدان برداری چیست؟ میدان گرادیان چیست؟ مثال هایی بیاورید.

۴- کار انجام شده بوسیله یک نیرو در حرکت یک ذره برروی یک خم را چگونه محاسبه می کنید؟ مثالی ارائه کنید.

۵- شارش، گردش و شار چیست؟

۶- در مورد میدان های مستقل از مسیر چه نکات ویژه ای می توان گفت؟

۷- چگونه می توان گفت که یک میدان پایستار است؟

۸- تابع پتانسیل چیست؟ به کمک یک مثال نشان دهید که تابع پتانسیل یک میدان پایستار را چگونه بدست می آورید.

۹- صورت دیفرانسیلی چیست؟ منظور از کامل بودن صورت دیفرانسیلی چیست؟ کامل بودن صورت دیفرانسیلی را چگونه می آزمایید؟ مثالهایی بیاورید.

۱۰-دیورژانس میدان برداری چیست؟ چه تعبیری دارد؟

۱۱- تاو میدان برداری چیست؟ چه تعبیری دارد؟

۱۲-قضیه گرین چیست؟ چه تعبیری دارد؟

۱۳- مساحت یک رویه پارامتری واقع در فضا را چگونه

محاسبه می کنید؟ رویه ضمنی $F(x,y,z)=0$ را چطور؟ رویه صریح $z=f(x,y)$ را چطور؟ مثالهایی بیاورید.

۱۴- چگونه از یک تابع روی یک رویه پارامتری واقع در فضا انتگرال می گیرید؟ روی رویه های با صورت ضمنی یا صریح چطور؟ با انتگرال های رویه ای چه چیزهایی را می توان محاسبه کرد؟ مثالهایی بیاورید.

۱۵-رویه جهتدار چیست؟ شار یک میدان برداری سه بعدی گذرنده از یک رویه جهتدار را چگونه محاسبه می کنید؟ مثالی بیاورید.

۱۶- قضیه استوکس چیست؟ چه تعبیری دارد؟

۱۷- نتایج این فصل در مورد میدان های پایستار را بطور خلاصه بیان کنید.

۱۸- قضیه دیورژانس چیست؟ چه تعبیری دارد؟

۱۹- قضیه دیورژانس قضیه گرین را چگونه تعمیم می دهد؟

۲۰- قضیه استوکس قضیه گرین را چگونه تعمیم می دهد؟

۲۱- چگونه می توان قضیه گرین، قضیه استوکس و قضیه دیورژانس را صورتهایی از یک قضیه اساسی واحد دانست؟

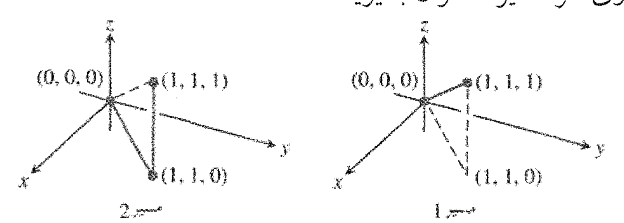
فصل۱۶: تمرین های عملی

محاسبه انتگرال های خطی

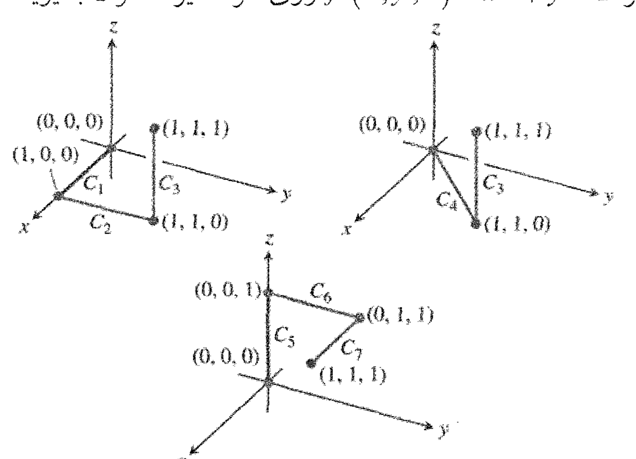
۱- شکل زیر دو مسیر را در فضا نشان می دهد که مبداء را به نقطه $(1,1,1)$ وصل کرده اند. از

$$f(x,y,z)=2x-3y^2-2z+3$$

روی هر مسیر انتگرال بگیرید.



۲- شکل زیر سه مسیر متشکل از چند پاره خط را نشان می دهد که مبداء را به نقطه $(1,1,1)$ وصل کرده اند. از $f(x,y,z)=x^2+y-z$ روی هر مسیر انتگرال بگیرید.



۳- از $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+z^2}$ روی دایره زیر انتگرال بگیرید

$$\mathbf{r}(t)=(a\cos t)\mathbf{j}+(a\sin t)\mathbf{k} \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2\pi$$

۴- از $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ روی خم گسترنده زیر انتگرال بگیرید:

$$\mathbf{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\mathbf{i}+(\sin t-t\cos t)\mathbf{j} \quad \text{و} \quad 0\le t\le\sqrt{3}$$

انتگرال های تمرین های ۵ و ۶ را محاسبه کنید.

۵- $$\int_{(-1,1,1)}^{(4,-3,0)}\frac{dx+dy+dz}{\sqrt{x+y+z}}$$

۶- $$\int_{(1,1,1)}^{(10,3,3)}dx-\sqrt{\frac{z}{y}}dy-\sqrt{\frac{y}{z}}dz$$

۷- مطلوب است انتگرال

$$\mathbf{F}=-(y\sin z)\mathbf{i}+(x\sin z)\mathbf{j}+(xy\cos z)\mathbf{k}$$

روی دایره ای که صفحه $z=-1$ از کره $x^2+y^2+z^2=5$ جدا می کند، در جهت ساعتگرد هرگاه از بالا نگاه کنیم.

۸- از $\mathbf{F}=3x^2y\mathbf{i}+(x^3+1)\mathbf{j}+9z^2\mathbf{k}$ روی دایره ای که صفحه $x=2$ از کره $x^2+y^2+z^2=9$ جدا می کند انتگرال بگیرید.

انتگرال های تمرین های ۹ و ۱۰ را محاسبه کنید.

۹- $$\int_C 8x\sin y\,dx-8y\cos x\,dy$$

C مربعی است که خطوط $x=\pi/2$ و $y=\pi/2$ از ربع اول جدا می کنند.

۱۰- $\int_C y^2 dx + x^2 dy$

C عبارت است از دایره $x^2 + y^2 = 4$.

یافتن انتگرال های رویه ای و محاسبه آنها

۱۱- مساحت ناحیه بیضوی. مطلوب است مساحت ناحیه بیضوی که استوانه $x^2 + y^2 = 1$ از صفحه $x + y + z = 1$ جدا می کند.

۱۲- مساحت عرقچین سهموی. مطلوب است مساحت عرقچینی که صفحه $x = 1$ از سهمیوار $y^2 + z^2 = 3x$ جدا می کند.

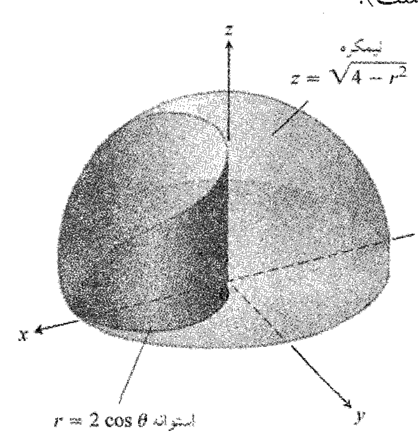
۱۳- مساحت عرقچین کروی. مطلوب است مساحت عرقچینی که صفحه $z = \sqrt{2}/2$ از بالای کره

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

جدا می کند.

۱۴- (الف)- نیمکره ای که توسط استوانه جدا می شود. مطلوب است مساحت رویه ای که استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ از نیمکره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$، $z \geq 0$ جدا می کند.

(ب)- مساحت بخشی از استوانه را که داخل نیمکره قرار دارد بیابید.(راهنمایی: روی صفحه xz تصویر کنید. یا انتگرال $\int h ds$ را محاسبه کنید، که در آن h ارتفاع استوانه و ds جزء طول قوس روی دایره $x^2 + y^2 = 2x$ در صفحه xy است).



۱۵- مساحت مثلث. مطلوب است مساحت مثلث محل تقاطع صفحه $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ $(a,b,c > 0)$ با یک هشتم اول. درستی پاسخ خود را با یک محاسبه برداری مناسب بررسی کنید.

۱۶- تقاطع استوانه سهموی و صفحات. از توابع

(الف)- $g(x,y,z) = \dfrac{yz}{\sqrt{4y^2 + 1}}$

(ب)- $g(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{4y^2 + 1}}$

روی رویه ای که بوسیله صفحات $x = 0$، $x = 3$ و $z = 0$ از استوانه سهموی $y^2 - z = 1$ جدا می شود، انتگرال بگیرید.

۱۷- تقاطع استوانه مستدیر و صفحات. از

$$g(x,y,z) = x^4 y (y^2 + z^2)$$

روی بخشی از استوانه $y^2 + z^2 = 25$ که در یک هشتم اول و بین صفحات $x = 0$ و $x = 1$ و بالای صفحه $z = 3$ واقع است انتگرال بگیرید.

۱۸- مساحت ویومینگ. ایالت ویومینگ بوسیله نصف النهارهای $111^\circ 3'$ و $104^\circ 3'$ طول جغرافیایی غربی و دایره های 41° و 45° عرض جغرافیایی شمالی محدود شده است. با فرض اینکه زمین کره ای به شعاع $R = 3959mi$ است مساحت ویومینگ را بیابید.

رویه های پارامتری

در تمرین های**۱۹-۲۴** یک صورت پارامتری برای رویه ها بیابید (بیش از یک جواب در هر مورد وجود دارد لذا ممکن است جواب هایتان با آنچه در آخر کتاب داده شده یکسان نباشند).

۱۹- نوار کروی. بخشی از کره

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

بین صفحات $z = -3$ و $z = 3\sqrt{3}$.

۲۰- عرقچین سهموی. بخشی از سهمیوار

$$z = -(x^2 + y^2)/2$$

واقع در بالای صفحه $z = -2$.

۲۱- مخروط. مخروط $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$، $z \leq 3$.

۲۲- صفحه بالای مربع. بخشی از صفحه

$$4x + 2y + 4z = 12$$

واقع در ربع اول که بالای مربع $0 \le x \le 2$، $0 \le y \le 2$ واقع است.

۲۳- بخشی از سهمیوار. بخشی از سهمیوار

$$y = 2\left(x^2 + z^2\right),\ y \le 2$$

که بالای صفحه xy قرار دارد.

۲۴- بخشی از نیمکره. بخشی از نیمکره

$$x^2 + y^2 + z^2 = 10,\ y \ge 0$$

واقع در یک هشتم اول.

۲۵- مساحت رویه. مساحت رویه زیر را بیابید:

$$\mathbf{r}(u,v) = (u+v)\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}$$

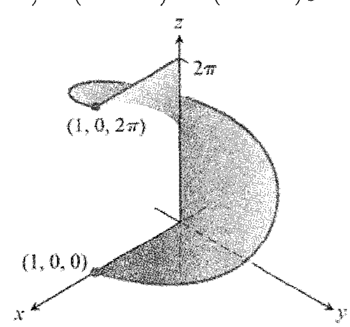
$$0 \le u \le 1 \quad \text{و} \quad 0 \le v \le 1$$

۲۶- انتگرال رویه ای. از $f(x,y,z) = xy - z^2$ روی رویه مذکور در تمرین **۲۵** انتگرال بگیرید.

۲۷- مساحت پیچ وار (مارپیچ وار). مطلوب است مساحت رویه مارپیچ وار زیر که در شکل زیر هم نشان داده شده است:

$$0 \le \theta \le 2\pi \quad \text{و} \quad 0 \le r \le 1$$

و $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}$



۲۸- انتگرال رویه ای. مطلوب است انتگرال

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, d\sigma$$

که در آن S مارپیچ وار مذکور در تمرین **۲۷** است.

میدانهای پایستار

کدامیک از میدان های مذکور در تمرین های **۲۹- ۲۲** پایستارند و کدام پایستار نیستند؟

۲۹- $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

۳۰- $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

۳۱- $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$

۳۲- $\mathbf{F} = (\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k})/(x + yz)$

در تمرین های **۳۳** و **۳۴** توابع پتانسیل میدان های مفروض را بیابید.

۳۳- $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (y + 1)\mathbf{k}$

۳۴- $\mathbf{F} = (z\cos xz)\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + (x\cos xz)\mathbf{k}$

کار و گردش

در تمرین های **۳۵** و **۳۶** مطلوب است کاری که هر میدان روی مسیرهای تمرین **۱** از $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ انجام می دهد.

۳۵- $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + \mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ **۳۶-** $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۳۷- محاسبه کار به دو روش. مطلوب است کاری که نیروی

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

روی خم مسطح $\mathbf{r}(t) = \left(e^t\cos t\right)\mathbf{i} + \left(e^t\sin t\right)\mathbf{j}$ از نقطه $(1,0)$ تا نقطه $\left(e^{2\pi},0\right)$ انجام می دهد. برای این منظور از دو روش زیر استفاده کنید.

(الف)- با استفاده از صورت پارامتری خم و محاسبه انتگرال کار.

(ب)- با محاسبه تابع پتانسیل مربوط به $\mathbf{F}$.

۳۸- شارش در امتداد مسیرهای مختلف. مطلوب است شارش میدان $\mathbf{F} = \nabla\left(x^2ze^y\right)$

(الف)- در امتداد بیضی C محل تقاطع صفحه $x + y + z = 1$ و استوانه $x^2 + z^2 = 25$، در جهت ساعتگرد هرگاه از روی قسمت مثبت محور y نگاه کنیم.

(ب)- در امتداد مرز خمیده مارپیچ وار مذکور در تمرین **۲۷** از $(1,0,0)$ تا $(1,0,2\pi)$.

در تمرین های **۳۹** و **۴۰** با استفاده از انتگرال رویه ای قضیه استوکس گردش میدان $\mathbf{F}$ در امتداد خم C را در جهت مشخص شده بیابید.

۳۹- گردش در امتداد بیضی. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$

C: بیضی محل تقاطع صفحه $2x + 6y - 3z = 6$ و استوانه

$$x^2 + y^2 = 1$$

در جهت پاد ساعتگرد هرگاه از بالا نگاه کنیم.

۴۰- **گردش در امتداد دایره.**

$$\mathbf{F}=(x^2+y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}+(4y^2-z)\mathbf{k}$$

C: دایره محل تقاطع صفحه $z=-y$ با کره $x^2+y^2+z^2=4$، در جهت پاد ساعتگرد هرگاه از بالا نگاه کنیم.

جرم و گشتاور

۴۱- **سیم با چگالی های مختلف.** مطلوب است جرم سیم نازکی که در امتداد خم

$$\mathbf{r}(t)=\sqrt{2t}\,\mathbf{i}+\sqrt{2t}\,\mathbf{j}+(4-t^2)\mathbf{k} \quad \text{و} \quad 0\le t\le 1$$

قرار دارد، در صورتیکه چگالی در t برابر باشد با (الف)- $\delta=3t$ و (ب)- $\delta=1$.

۴۲- **سیم با چگالی متغیر.** مرکز جرم سیم نازکی را بیابید که در امتداد خم $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+(2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$، $0\le t\le 2$ قرار دارد و چگالی آن در t برابر است با $\delta=3\sqrt{5+t}$.

۴۳- **سیم با چگالی متغیر.** سیم نازکی در امتداد خم زیر قرار دارد

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j}+\frac{t^2}{2}\mathbf{k} \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2$$

اگر چگالی سیم در t برابر باشد با $\delta=1/(t+1)$، مرکز جرم و گشتاورهای لختی آن حول محورهای مختصات را بیابید.

۴۴- **مرکز جرم کمان.** کمان فلزی باریکی در صفحه xy در امتداد نیمدایره $y=\sqrt{a^2-x^2}$ قرار دارد. چگالی در نقطه (x,y) از کمان $\delta(x,y)=2a-y$ است. مرکز جرم کمان را بیابید.

۴۵- **سیم با چگالی ثابت.** سیمی با چگالی ثابت $\delta=1$ روی خم $\mathbf{r}(t)=(e^t\cos t)\mathbf{i}+(e^t\sin t)\mathbf{j}+e^t\mathbf{k}$، $0\le t\le \ln 2$ قرار دارد. $\bar{z}$ و I_z را بیابید.

۴۶- **سیم مارپیچی با چگالی ثابت.** سیمی با چگالی ثابت δ در امتداد مارپیچ زیر قرار دارد

$$\mathbf{r}(t)=(2\sin t)\mathbf{i}+(2\cos t)\mathbf{j}+3t\mathbf{k} \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2\pi$$

جرم و مرکز جرم سیم را بیابید.

۴۷- **لختی و مرکز جرم پوسته.** پوسته نازکی با چگالی $\delta(x,y,z)=z$ بوسیله صفحه $z=3$ از بخش بالایی کره $x^2+y^2+z^2=25$ جدا شده است. I_z و مرکز جرم این جسم را بیابید.

۴۸- **گشتاور لختی مکعب.** مطلوب است گشتاور لختی حول محور z مربوط به رویه مکعبی که بوسیله صفحات $x=1$، $y=1$ و $z=1$ از یک هشتم اول جدا می شود. چگالی را $\delta=1$ فرض کنید.

شار گذرنده از رویه یا خم مسطح

در تمرین های ۴۹ و ۵۰ با استفاده از قضیه گرین گردش پاد ساعتگرد و شار برونسوی مربوط به میدان ها و خم ها را بیابید.

۴۹- **مربع.** $\mathbf{F}=(2xy+x)\mathbf{i}+(xy-y)\mathbf{j}$

C: مربع محدود به خطوط $x=0$، $x=1$، $y=0$ و $y=1$.

۵۰- **مثلث.** $\mathbf{F}=(y-6x^2)\mathbf{i}+(x+y^2)\mathbf{j}$

C: مثلث محدود به خطوط $y=0$ ، $y=x$ و $x=1$.

۵۱- **انتگرال خطی صفر.** نشان دهید که در مورد هر خم بسته C که قضیه گرین برای آن قابل کاربرد است داریم

$$\oint_C \ln x \sin y\,dy-\frac{\cos y}{x}dx=0$$

۵۲- (الف)- **شار برونسو و مساحت.** نشان دهید که شار برونسوی میدان برداری مکان $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ گذرنده از هر خم بسته ای که قضیه گرین در مورد آن قابل کاربرد است دو برابر مساحت ناحیه محصور شده توسط خم است.

(ب)- فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار قائم واحد برونسوی خم بسته ای باشد که قضیه گرین در مورد آن قابل کاربرد است. نشان دهید که امکان ندارد $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ در هر نقطه از C بر $\mathbf{n}$ عمود باشد.

در تمرین های ۵۳- ۵۶ شار برونسوی $\mathbf{F}$ گذرنده از مرز D را بیابید.

۵۳- **مکعب.** $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+2yz\mathbf{j}+2xz\mathbf{k}$

D: مکعبی که صفحات $x=1$، $y=1$ و $z=1$ از یک هشتم اول جدا می کنند.

۵۴- **عرقچین کروی.** $\mathbf{F}=xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+\mathbf{k}$

D: کل رویه عرقچین بالایی بریده شده از کره توپر $x^2+y^2+z^2\le 25$ توسط صفحه $z=3$.

۵۵- عرقچین کروی. $\mathbf{F}=-2x\mathbf{i}-3y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

D: ناحیه بالایی که سهمیوار $z=x^2+y^2$ از کره توپر

$$x^2+y^2+z^2\le 2$$

جدا می کند.

۵۶- مخروط و استوانه.

$$\mathbf{F}=(6x+y)\mathbf{i}-(x+z)\mathbf{j}+4yz\mathbf{k}$$

D: ناحیه ای واقع در یک هشتم اول، محدود به مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$، استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحات مختصات.

۵۷- نیمکره، استوانه و صفحه. فرض کنید S رویه ای باشد که از سمت چپ به نیمکره $x^2+y^2+z^2=a^2$، $y\le 0$، از وسط به استوانه $x^2+z^2=a^2$، $0\le y\le a$ و از سمت راست به صفحه $y=a$ محدود است. شار برونسوی

$$\mathbf{F}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$$

گذرنده از S را بیابید.

۵۸- استوانه و صفحات. مطلوب است شار برونسوی میدان $\mathbf{F}=3xz^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}-z^3\mathbf{k}$ گذرنده از رویه جسمی واقع در یک هشتم اول که به استوانه $x^2+4y^2=16$ و صفحات $y=2z$، $x=0$ و $z=0$ محدود است.

۵۹- قوطی استوانه ای. با استفاده از قضیه دیورژانس شار برونسوی $\mathbf{F}=xy^2\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ گذرنده از رویه ناحیه محصور شده بوسیله استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحات $z=1$ و $z=-1$ را بیابید.

۶۰- نیمکره. مطلوب است شار برونسوی $\mathbf{F}=(3z+1)\mathbf{k}$ گذرنده از نیمکره $x^2+y^2+z^2=a^2$، $z\ge 0$

(الف)- با بهره گیری از قضیه دیورژانس و (ب)- با محاسبه مستقیم انتگرال شار.

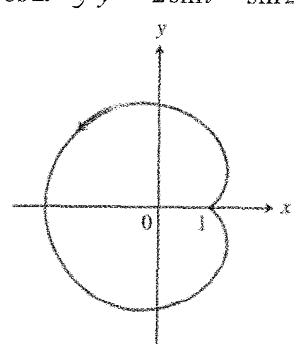
فصل ۱۶: تمرین های اضافی و پیشرفته

یافتن مساحت به کمک قضیه گرین

با استفاده از فرمول مساحت قضیه گرین در تمرین های بخش ۱۶-۴ مساحت نواحی محصور شده بوسیله خم های تمرین های ۱-۴ را بیابید.

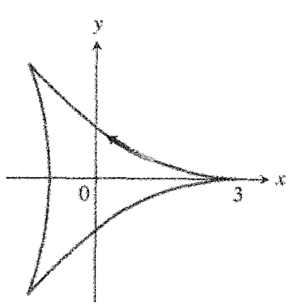
۱- خم (دلوار):

$$x=2\cos t-\cos 2t \quad \text{و} \quad y=2\sin t-\sin 2t \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2\pi$$

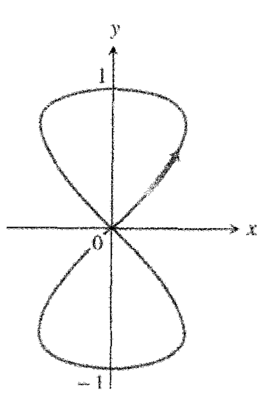


۲- دلتاوار:

$$x=2\cos t+\cos 2t \quad \text{و} \quad y=2\sin t-\sin 2t \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2\pi$$

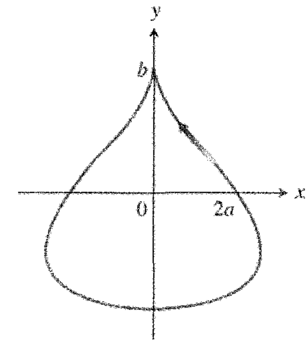


۳- خم هشت: $x=(1/2)\sin 2t$ و $y=\sin t$ و $0\le t\le \pi$ (یک حلقه)



۴- قطره اشک:

$$x=2a\cos t-a\sin 2t \quad \text{و} \quad y=b\sin t \quad \text{و} \quad 0\le t\le 2\pi$$



نظریه و کاربردها

۵- (الف)- مثالی از یک میدان برداری چون $\mathbf{F}(x,y,z)$ بزنید که فقط در یک نقطه مقدارش برابر 0 و در همه جا $\mathrm{curl}\mathbf{F}$ ناصفر است. برای اطمینان، نقطه مذکور را مشخص کرده و تاو را محاسبه کنید.

(ب)- مثالی از یک میدان برداری چون $\mathbf{F}(x,y,z)$ بزنید که دقیقاً روی یک خط مقدارش برابر 0 است و در همه جا تاو $\mathbf{F}$ ناصفر است. برای اطمینان، خط مذکور را مشخص کرده و تاو را محاسبه کنید.

(پ)- مثالی از یک میدان برداری چون $\mathbf{F}(x,y,z)$ بزنید که روی یک رویه مقدارش برابر 0 است و تاو $\mathbf{F}$ در همه جا ناصفر است. برای اطمینان، رویه مذکور را مشخص کرده و تاو میدان را محاسبه کنید.

۶- تمام نقاط (a,b,c) بر روی کره $x^2+y^2+z^2=R^2$ را بیابید که در آنها میدان برداری $\mathbf{F}=yz^2\mathbf{i}+xz^2\mathbf{j}+2xyz\mathbf{k}$ بررویه قائم است و $\mathbf{F}(a,b,c)\neq\mathbf{0}$.

۷- مطلوب است جرم پوسته ای کروی به شعاع R که در هر نقطه (x,y,z) از رویه اش چگالی جرم $\delta(x,y,z)$ برابر فاصله آن تا نقطه ثابتی چون (a,b,c) از رویه است.

۸- جرم مارپیچ وار زیر را بیابید

$$\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+\theta\mathbf{k}$$
$$0\le r\le 1 \quad \text{و} \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

تابع چگالی را $\delta(x,y,z)=2\sqrt{x^2+y^2}$ در نظر بگیرید. در مورد شکل مسئله به تمرین عملی **۲۷** مراجعه کنید.

۹- در بین تمام نواحی مستطیلی $0\le x\le a$، $0\le y\le b$ ناحیه ای را بیابید که در مورد آن شار برونسوی کل میدان $\mathbf{F}=(x^2+4xy)\mathbf{i}-6y\mathbf{j}$ گذرنده از چهار ضلع مینیمم است. مقدار شار مینیمم چقدر است؟

۱۰- معادله صفحه ای را بیابید که از مبداء می گذرد و گردش میدان شارش $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ در امتداد دایره تقاطع صفحه با کره $x^2+y^2+z^2=4$ ماکسیمم است.

۱۱- ریسمانی در ربع اول در امتداد دایره $x^2+y^2=4$ از $(2,0)$ تا $(0,2)$ قرار دارد. چگالی ریسمان عبارت است از $\rho(x,y)=xy$.

(الف)- ریسمان را به تعدادی متناهی کمان تقسیم کرده و نشان دهید که کاری که نیروی گرانش انجام می دهد تا ریسمان را بطور مستقیم روی محور x قرار دهد برابر است با

$$\text{کار}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g x_k y_k^2 \Delta s_k=\int_C gxy^2\,ds$$

که g ثابت گرانشی است.

(ب)- کار کل انجام شده را با محاسبه انتگرال خطی قسمت (الف) محاسبه کنید.

(پ)- نشان دهید که کار کل انجام شده برابر است با کاری که لازم است تا مرکز جرم ریسمان $(\bar{x},\bar{y})$ را مستقیماً به روی محور x ببرد.

۱۲- ورقه نازکی روی بخشی از صفحه $x+y+z=1$ واقع در یک هشتم اول قرار دارد. چگالی ورقه عبارت است از $\delta(x,y,z)=xy$.

(الف)- ورقه را به تعدادی متناهی از قطعات تقسیم کرده و نشان دهید که کاری که نیروی گرانش انجام می دهد تا ورقه را مستقیماً به صفحه xy منتقل کند برابر است با

$$\text{کار}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g x_k y_k z_k \Delta\sigma_k=\iint_S gxyz\,d\sigma$$

که g ثابت گرانشی است.

(ب)- کار کل انجام شده را با محاسبه انتگرال رویه ای قسمت (الف) محاسبه کنید.

(پ)- نشان دهید که کار کل انجام شده برابر است با کاری که لازم است تا مرکز جرم ورقه $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ را مستقیماً به صفحه xy ببرد.

۱۳- اصل ارشمیدس. اگر جسمی نظیر یک گوی در مایعی قرار داده شود یا به ته مایع فرو می رود یا در آن شناور می شود یعنی به اندازه معینی در مایع فرو رفته و در مایع معلق می ماند. فرض کنید سیالی دارای چگالی وزنی ثابت w است و سطح سیال بر صفحه $z=4$ منطبق است. گویی کروی در سیال معلق مانده و ناحیه $x^2+y^2+(z-2)^2\le 1$ را اشغال کرده است.

(الف)- نشان دهید که انتگرال رویه ای برای محاسبه اندازه نیروی کل وارد بر گوی بواسطه فشار سیال عبارت است از

$$\text{نیرو}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}w\,(4-z_k)\Delta\sigma_k=\iint_S w\,(4-z)\,d\sigma$$

(ب)- چون گوی حرکت نمی کند بوسیله نیروی بالابر سیال نگه داشته می شود. نشان دهید که اندازه نیروی بالابر وارد بر گوی برابر است با

$$\text{نیروی بالابر}=\iint_S w\,(z-4)\mathbf{k}.\mathbf{n}\,d\sigma$$

که $\mathbf{n}$ قائم واحد برونسو در (x,y,z) است. این رابطه اصل ارشمیدس را توصیف می کند که براساس آن اندازه نیروی بالابر وارد بر یک جسم فرورفته در سیال برابر است با وزن سیال جابجا شده.

(پ)- با استفاده از قضیه دیورژانس اندازه نیروی بالابر قسمت (ب) را بیابید.

۱۴- نیرویی که سیال بر رویه خمیده وارد می کند. مخروطی به شکل رویه $z=\sqrt{x^2+y^2}$، $0\le z\le 2$ با مایعی با چگالی وزنی ثابت w پر شده است. با فرض اینکه صفحه xy «سطح زمین» است نشان دهید که نیروی کل وارد بر بخشی از مخروط از $z=1$ تا $z=2$ بواسطه فشار مایع با انتگرال رویه ای زیر برابر است

$$F=\iint_S w\,(2-z)\,d\sigma$$

انتگرال را محاسبه کنید.

۱۵- قانون فاراده. اگر $\mathbf{E}(t,x,y,z)$ و $\mathbf{B}(t,x,y,z)$ میدان های الکتریکی و مغناطیسی در نقطه (x,y,z) در لحظه t باشند طبق اصل اساسی نظریه الکترومغناطیس داریم $\nabla\times\mathbf{E}=\dfrac{-\partial\mathbf{B}}{\partial t}$. در این عبارت $\nabla\times\mathbf{E}$ در حالت t ثابت و $\partial\mathbf{B}/\partial t$ در حالت (x,y,z) ثابت محاسبه می شود. با استفاده از قضیه استوکس قانون فاراده را بدست آورید یعنی

$$\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{r}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}.\mathbf{n}\,d\sigma$$

که C حلقه سیمی است که جریان نسبت به قائم واحد رویه $\mathbf{n}$ در جهت پاد ساعتگرد از آن شارش می کند و به ولتاژ زیر حول C منجر می شود

$$\oint_C \mathbf{E}.d\mathbf{r}$$

انتگرال رویه ای سمت راست معادله شار مغناطیسی نامیده می شود و S هر رویه جهتدار با مرز C است.

۱۶- فرض کنید

$$\mathbf{F}=-\frac{CmM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

میدان نیروی گرانشی است که برای $\mathbf{r}\neq 0$ تعریف شده است. با استفاده از قانون گاوس بخش۱۶-۸ نشان دهید که میدان برداری پیوسته – مشتقپذیری چون $\mathbf{H}$ وجود ندارد که در معادله $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{H}$ صدق کند.

۱۷- اگر $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ توابع عددی پیوسته – مشتقپذیری باشند که روی رویه جهتدار S با خم مرزی C تعریف شده اند ثابت کنید که

$$\iint_S(\nabla f\times\nabla g).\mathbf{n}\,d\sigma=\oint_C f\,\nabla g.d\mathbf{r}$$

۱۸-فرض کنید روی ناحیه D که بوسیله رویه جهتدار S با قائم واحد برونسوی $\mathbf{n}$ دربرگرفته شده است داریم $\nabla.\mathbf{F}_1=\nabla.\mathbf{F}_2$ و $\nabla\times\mathbf{F}_1=\nabla\times\mathbf{F}_2$. ثابت کنید که در سراسر D، $\mathbf{F}_1=\mathbf{F}_2$.

۱۹- اگر $\nabla.\mathbf{F}=0$ و $\nabla\times\mathbf{F}=0$ باشد آنگاه $\mathbf{F}=0$ است. درستی یا نادرستی این گزاره را ثابت کنید.

۲۰- فرض کنید S رویه جهتداری با صورت پارامتری $\mathbf{r}(u,v)$ است. نماد $d\boldsymbol{\sigma}$ را طوری تعریف می کنیم که $d\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{r}_u du\times\mathbf{r}_v$

بردار قائم بر رویه باشد. همچنین اندازه $d\sigma = |d\boldsymbol{\sigma}|$ جزء مساحت رویه است (طبق معادله ۵ بخش ۱۶-۵). اتحاد زیر را به دست آورید

$$d\sigma = \left(EG - F^2\right)^{1/2} du\, dv$$

که در آن

$$E = |\mathbf{r}_u|^2 \text{ و } F = \mathbf{r}_u . \mathbf{r}_v \text{ ، } G = |\mathbf{r}_v|^2$$

۲۱- نشان دهید که حجم V ناحیه ای چون D واقع در فضا که با رویه جهتدار S با قائم برونسوی $\mathbf{n}$ دربرگرفته شده است در اتحاد زیر صدق می کند

$$V = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r}.\mathbf{n}\, d\sigma$$

که $\mathbf{r}$ بردار مکان نقطه (x, y, z) واقع در D است.

فصل ۱۶: پروژه های کاربرد فناوری

بخش متمتیکا/ میپل:

کار در میدان های نیروی پایستار و ناپایستار

در مورد انتگرال گیری روی میدان های برداری تحقیق کرده و توابع نیروی پایستار و ناپایستار را در امتداد مسیرهای مختلف در میدان بیازمایید.

چگونه می توان قضیه گرین را تجسم کرد؟

در مورد انتگرال گیری روی میدان های برداری تحقیق کرده و از صورت های پارامتری برای محاسبه انتگرال های خطی استفاده کنید. هر دو صورت قضیه گرین را بررسی کنید.

تجسم و تعبیر قضیه دیورژانس

با فرمولبندی و محاسبه انتگرال های دیورژانس و رویه ای معین درستی قضیه گرین را بررسی کنید.

پاسخ تمرین های فرد

فصل ۱۲

بخش ۱۲-۱

۱- خطی که از نقطه $(2,3,0)$ موازی با محور z می گذرد.

۳- محور x

۵- دایره $x^2+y^2=4$ واقع در صفحه xy.

۷- دایره $x^2+z^2=4$ واقع در صفحه xz.

۹- دایره $y^2+z^2=1$ واقع در صفحه yz.

۱۱- دایره $x^2+y^2=16$ واقع در صفحه xy.

۱۳- بیضی حاصل از تقاطع استوانه $x^2+y^2=4$ و صفحه $z=y$.

۱۵- سهمی $y=x^2$ در صفحه xy.

۱۷- (الف)- ربع اول صفحه xy (ب)- ربع چهارم صفحه xy.

۱۹- (الف)- گویی به شعاع ۱ به مرکز مبداء (ب)- تمام نقاطی که بیشتر از ۱ واحد از مبداء فاصله دارند.

۲۱- (الف)- گویی به شعاع ۲ و به مرکز مبداء که از ناحیه درونی آن گویی به شعاع ۱ و به مرکز مبداء برداشته شده است. (ب)- نیمکره توپر بالایی به شعاع ۱ و به مرکز مبداء.

۲۳- (الف)- ناحیه روی و داخل سهمی $y=x^2$ در صفحه xy و تمام نقاط بالایی این ناحیه.

(ب)- ناحیه روی یا سمت چپ سهمی $x=y^2$ در صفحه xy و تمام نقاط بالای آن که به اندازه ۲ واحد یا کمتر از صفحه xy قرار دارند.

۲۵- (الف)- $x=3$ (ب)- $y=-1$

(پ)- $z=-2$

۲۷- (الف)- $z=1$ (ب)- $x=3$

(پ)- $y=-1$

۲۹- (الف)- $x^2+(y-2)^2=4$ و $z=0$

(ب)- $(y-2)^2+z^2=4$ و $x=0$

(پ)- $x^2+z^2=4$ و $y=2$

۳۱- (الف) - $y=3$ و $z=-1$

(ب)- $x=1$ و $z=-1$ (پ)- $x=1$ و $y=3$

۳۳- $x^2+y^2+z^2=25$ ، $z=3$

۳۵- $0\le z\le 1$

۳۷- $z\le 0$

۳۹- (الف)- $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2<1$

(ب) - $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2>1$

۴۱- 3 ۴۳- 7 ۴۵- $2\sqrt{3}$

۴۷- $C(-2,0,2)$ و $a=2\sqrt{2}$

۴۹- $C(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2})$ و $a=\sqrt{2}$

۵۱- $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

۵۳- $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{81}$

۵۵- $C(-2,0,2)$ و $a=\sqrt{8}$

۵۷- $C\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$ و $a=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

۵۹- (الف)- $\sqrt{y^2+z^2}$ (ب)- $\sqrt{x^2+z^2}$

(پ)- $\sqrt{x^2+y^2}$

۶۱- $\sqrt{17}+\sqrt{33}+6$ ۶۳- $y=1$

۶۵- (الف)- $(0,3,-3)$ (ب)- $(0,5,-5)$

بخش ۱۲-۲

۱- (الف)- $\langle 9,-6\rangle$ (ب)- $3\sqrt{13}$

۳- (الف)- $\langle 1,3\rangle$ (ب)- $\sqrt{10}$

۵- (الف)- $\langle 12,-19\rangle$ (ب)- $\sqrt{505}$

۷- (الف)- $\left\langle \frac{1}{5},\frac{14}{5}\right\rangle$ (ب)- $\frac{\sqrt{197}}{5}$

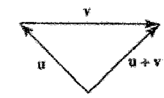
۹- $\langle 1,-4\rangle$ ۱۱- $\langle -2,-3\rangle$ ۱۳- $\left\langle -\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$

۱۵- $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ ۱۷- $-3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$

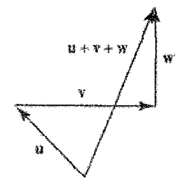
۱۹- $-3\mathbf{i}+16\mathbf{j}$ ۲۱- $3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}$

۲۳- بردار $\mathbf{v}$ افقی و طول آن ۱ اینچ است. طول بردارهای $\mathbf{u}$ و $\mathbf{w}$ ، $\frac{11}{16}in.$ است $\mathbf{w}$ بصورت قائم است و $\mathbf{u}$ با راستای افق زاویه 45° می سازد. تمام بردارها باید با مقیاس رسم شوند.

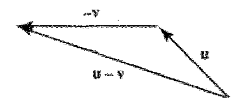
(الف)-



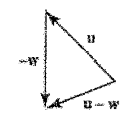
(ب)-



(پ)-



(ت)-



۲۵- $3\left(\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$ ۲۷- $5(\mathbf{k})$

۲۹- $\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$

۳۱- (الف)- $2\mathbf{i}$ (ب)- $-\sqrt{3}\mathbf{k}$

(پ)- $\frac{3}{10}\mathbf{j}+\frac{2}{5}\mathbf{k}$ (ت)- $6\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

۳۳- $\frac{7}{13}(12\mathbf{i}-5\mathbf{k})$

۳۵- (الف)- $\frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$

(ب)- $(1/2,3,5/2)$

۳۷- (الف)- $-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$ (ب)- $\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$

۳۹- $A(4,-3,5)$ ۴۱- $a=\frac{3}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$

۴۳- $\approx\langle -338.095,725.046\rangle$

۴۵-

$$|\mathbf{F}_1|=\frac{100\cos 45^\circ}{\sin 75^\circ}\approx 73.205N$$

$$|\mathbf{F}_2|=\frac{100\cos 30^\circ}{\sin 75^\circ}\approx 89.658N$$

$$\mathbf{F}_1=\left\langle -|\mathbf{F}_1|\cos 30^\circ,|\mathbf{F}_1|\sin 30^\circ\right\rangle\approx\langle -63.397,36.603\rangle$$

$$\mathbf{F}_2=\left\langle |\mathbf{F}_2|\cos 45^\circ,|\mathbf{F}_2|\sin 45^\circ\right\rangle\approx\langle 63.397,63.397\rangle$$

۴۷- $$w=\frac{100\sin 75^\circ}{\cos 40^\circ}\approx 126.093N$$

$$|\mathbf{F}_1|=\frac{w\cos 35^\circ}{\sin 75^\circ}\approx 106.933N$$

۴۹- (الف)- $\left(5\cos 60^\circ,5\sin 60^\circ\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

(ب)-

$$\left(5\cos 60^\circ+10\cos 315^\circ,5\sin 60^\circ+10\sin 315^\circ\right)$$

$$=\left(\frac{5+10\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{3}-10\sqrt{2}}{2}\right)$$

۵۱- (الف)- $\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ (ب)- $\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

(پ)- $(2,2,1)$

بخش ۱۲-۳

۱- (الف)- 5 و 5، -25 (ب)- -1

(پ)- -5 (ت)- $-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\sqrt{5}\mathbf{k}$

۳- (الف)- $25,15,5$ (ب)- $\frac{1}{3}$

(پ)- $\frac{5}{3}$ (ت)- $\frac{1}{9}(10\mathbf{i}+11\mathbf{j}-2\mathbf{k})$

۵- (الف)- $2,\sqrt{34},\sqrt{3}$ (ب)- $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{34}}$

(پ)- $\frac{2}{\sqrt{34}}$ (ت)- $\frac{1}{17}(5\mathbf{j}-3\mathbf{k})$

۷- (الف)- $10+\sqrt{17},\sqrt{26},\sqrt{21}$ (ب)- $\frac{10+\sqrt{17}}{\sqrt{546}}$

(پ)- $\frac{10+\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$ (ت)- $\frac{10+\sqrt{17}}{26}(5\mathbf{i}+\mathbf{j})$

۱۳- A زاویه در $=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx 63.435$ ،

B زاویه در $=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\approx 53.130$ ،

C زاویه در $=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx 63.435$

۲۳- مؤلفه افقی $\approx 1188\frac{ft}{sec}$، مؤلفه قائم $\approx 167\frac{ft}{sec}$

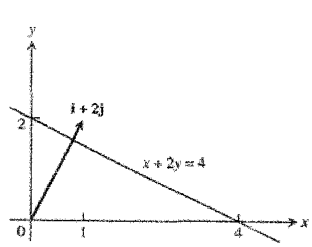
۲۵- (الف)- چون $|\cos\theta|\le 1$ داریم:

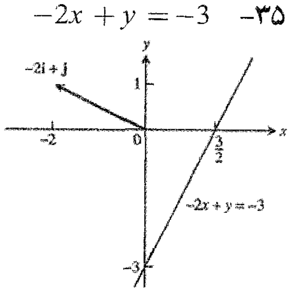
$$|\mathbf{u}.\mathbf{v}|=|\mathbf{u}||\mathbf{v}||\cos\theta|\le|\mathbf{u}||\mathbf{v}|(1)=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

(ب)- تساوی دقیقاً زمانی برقرار است که $|\cos\theta|=1$ یا وقتی یکی از بردارهای **u** و **v** یا هر دو 0 باشند. در حالتی که بردارها ناصفرند تساوی زمانی برقرار است که π یا $\theta=0$ باشد یعنی وقتی بردارها موازی باشند.

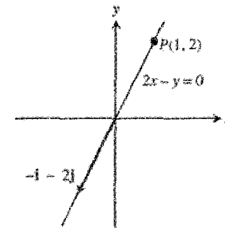
۲۷- a

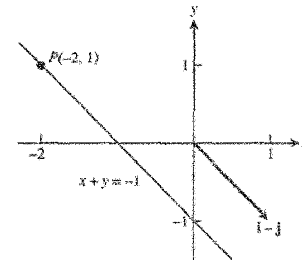
۳۳- $x+2y=4$ ۳۵- $-2x+y=-3$





۳۷- $x+y=-1$ ۳۹- $2x-y=0$





۴۱- $5J$ ۴۳- $3464J$ ۴۵- $\frac{\pi}{4}$

۴۷- $\frac{\pi}{6}$ ۴۹- 0.14

بخش ۱۲-۴

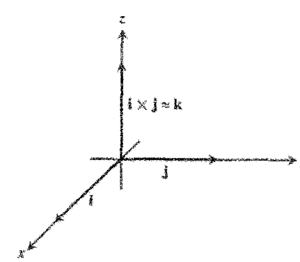
۱- $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=3$ ، جهت $\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$ ؛
$|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=3$ ، جهت $-\frac{2}{3}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}$.

۳- $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=0$ ، بدون جهت؛ $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=0$ ، بدون جهت.

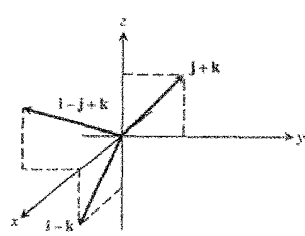
۵- $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=6$ در جهت $-\mathbf{k}$ ؛ $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=6$ در جهت $\mathbf{k}$.

۷- $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=6\sqrt{5}$ ، در جهت $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i}-\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$؛
$|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=6\sqrt{5}$ در جهت $-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$.

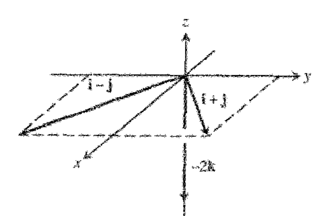
۹-



۱۱-



۱۳-



۱۵- (الف)- $2\sqrt{6}$ (ب)- $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

۱۷- (الف) - $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ب)- $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$

۱۹- 8 ۲۱- 7

۲۳- (الف)- هیچکدام (ب) - $\mathbf{u}$ و $\mathbf{w}$

۲۵- $10\sqrt{3}$ft-lb

۲۷- (الف)- درست (ب)- همیشه درست نیست
(پ)- درست (ت)- درست (ث)- همیشه درست نیست
(ج)- درست (چ)- درست (ح)- درست

۲۹- (الف)- $\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\mathbf{v}.\mathbf{v}}\mathbf{v}$ (ب)- $\pm\mathbf{u}\times\mathbf{v}$
(پ)- $\pm(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ (ت)- $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}|$
(ث)- $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times(\mathbf{u}\times\mathbf{w})$ (ج)- $|\mathbf{u}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

۳۱- (الف)- بله (ب)- خیر (پ)- بله (پ)- خیر

۳۳- خیر لازم نیست $\mathbf{v}$ با $\mathbf{w}$ برابر باشد، مثلاً $\mathbf{i}+\mathbf{j}\neq-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ اما

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{i}+\mathbf{i}\times\mathbf{j}=0+\mathbf{k}=\mathbf{k}$$
$$\mathbf{i}\times(-\mathbf{i}+\mathbf{j})=-\mathbf{i}\times\mathbf{i}+\mathbf{i}\times\mathbf{j}=0+\mathbf{k}=\mathbf{k}.$$

۳۵- 2 ۳۷- 13 ۳۹- $\sqrt{129}$ ۴۱- $\frac{11}{2}$ ۴۳- $\frac{25}{2}$

۴۵- $\frac{3}{2}$ ۴۷- $\frac{\sqrt{21}}{2}$

۴۹- اگر $\mathbf{A}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$ و $\mathbf{B}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$ ، آنگاه:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & 0\\ b_1 & b_2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

و مساحت مثلث برابر است با

$$\frac{1}{2}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$$

اگر زاویه حاده بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در صفحه xy پاد ساعتگرد باشد علامت $(+)$ بکار می رود و اگر ساعتگرد باشد علامت $(-)$ بکار می رود.

بخش ۱۲-۵

۱- $x=3+t$ ، $y=-4+t$ ، $z=-1+t$

۳- $x=-2+5t$ ، $y=5t$ ، $z=3-5t$

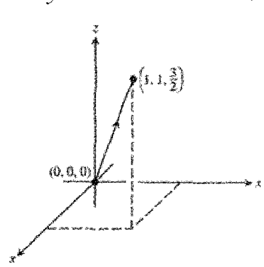
۵- $x=0$ ، $y=2t$ ، $z=t$

۷- $x=1$ ، $y=1$ ، $z=1+t$

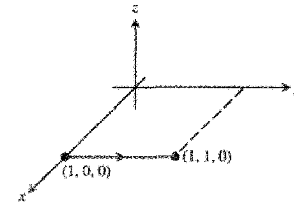
۹- $x=t$ ، $y=-7+2t$ ، $z=2t$

۱۱- $x=t$ ، $y=0$ ، $z=0$

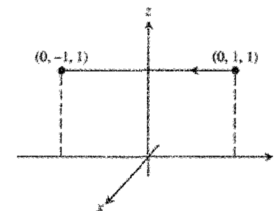
۱۳- $x=t$ ، $y=t$ ، $z=\frac{3}{2}t$ ، $0\leq t\leq1$



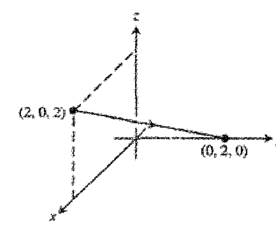
۱۵- $x = 1$، $y = 1+t$، $z = 0$، $-1 \le t \le 0$



۱۷- $x = 0$، $y = 1-2t$، $z = 1$، $0 \le t \le 1$



۱۹- $x = 2-2t$، $y = 2t$، $x = 2-2t$، $0 \le t \le 1$



۲۱- $3x-2y-z=-3$ ۲۳- $7x-5y-4z=6$

۲۵- $x+3y+4z=34$

۲۷- $(1,2,3)$، $-20x+12y+z=7$ ۲۹- $y+z=3$

۳۱- $x-y+z=0$

۳۳- $2\sqrt{30}$ ۳۵- 0 ۳۷- $\frac{9\sqrt{42}}{7}$ ۳۹- 3

۴۱- $19/5$ ۴۳- $5/3$ ۴۵- $9/\sqrt{41}$

۴۷- $\pi/4$ ۴۹- $1.38\,rad$ ۵۱- $0.82\,rad$

۵۳- $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

۵۵- $(1,1,0)$ ۵۷- $x=1-t$، $y=1+t$، $z=-1$

۵۹- $x=4$، $y=3+6t$، $z=1+3t$

۶۱- L_1 و L_2 همدیگر را قطع می کنند؛ L_2 موازی با L_3 است؛ L_1 و L_3 متنافرند.

۶۳- $x=2+2t$، $y=-4-t$، $z=7+3t$؛
$x=-2-t$، $y=-2+(1/2)t$، $z=1-(3/2)t$

۶۵- $\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$، $(-1,0,-3)$، $(1,-1,0)$

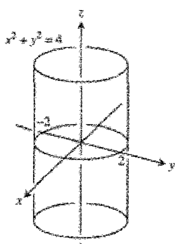
۶۹- پاسخ های ممکن زیادند، یکی از آنها عبارت است از: $x+y=3$ و $2y+z=7$.

۷۱- $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ تمام صفحات، به جز آنهایی که از مبداء می گذرند یا با محورهای مختصات موازی اند، را توصیف می کند.

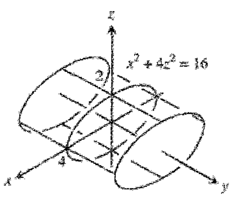
بخش ۱۲-۶

۱- (ت)، بیضیوار ۳- (الف)، استوانه (۵)- (۱)، سهمیوار هذلولوی ۷- (ب)، استوانه ۹- (د)، سهمیوار هذلولوی
۱۱- (ح)، مخروط

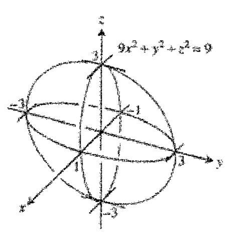
-۱۳



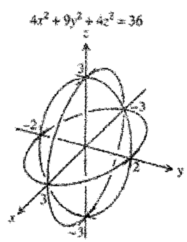
-۱۵



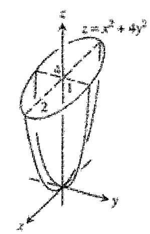
-۱۷



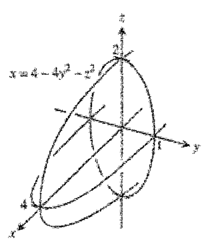
-۱۹



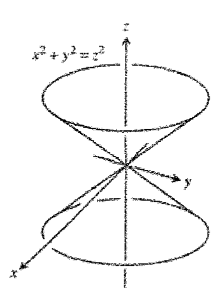
-۲۱



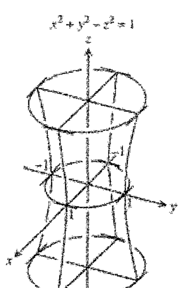
-۲۳



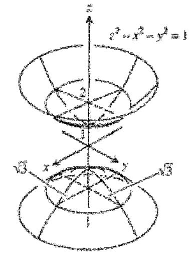
-۲۵



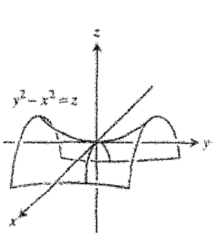
-۲۷



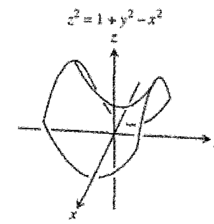
-۲۹



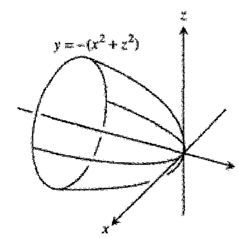
-۳۱



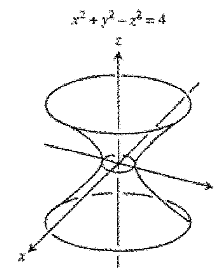
۳۳-



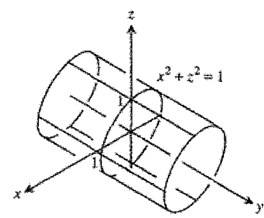
۳۵-



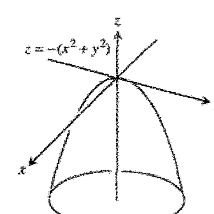
۳۷-



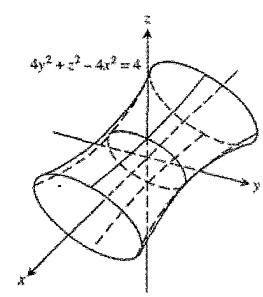
۳۹-



۴۱-



۴۳-



۴۵- (الف)- $\dfrac{2\pi\left(9-c^2\right)}{9}$ (ب)- 8π

(پ)- $\dfrac{4\pi abc}{3}$

تمرین های عملی

۱- (الف)- $\langle -17,32\rangle$ (ب)- $\sqrt{1313}$

۳- (الف)- $\langle 6,-8\rangle$ (ب)- 10

۵- $\left\langle -\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right\rangle$ [با فرض جهت پاد ساعتگرد]

۷- $\left\langle \dfrac{8}{\sqrt{17}},-\dfrac{2}{\sqrt{17}}\right\rangle$

۹- طول= ۲، در جهت $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$

۱۱- $\mathbf{v}(\pi/2)=2(-\mathbf{i})$

۱۳- ۷= طول، جهت $\dfrac{2}{7}\mathbf{i}-\dfrac{3}{7}\mathbf{j}+\dfrac{6}{7}\mathbf{k}$

۱۵- $\dfrac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{i}-\dfrac{2}{\sqrt{33}}\mathbf{j}+\dfrac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{k}$

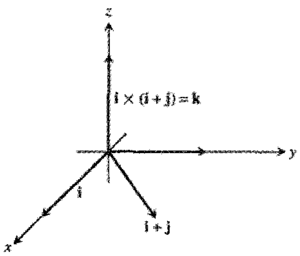
۱۷- $|\mathbf{v}|=\sqrt{2}$، $|\mathbf{u}|=3$ ، $\mathbf{v}.\mathbf{u}=\mathbf{u}.\mathbf{v}=3$ ،
$\mathbf{v}\times\mathbf{u}=-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ، $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ، $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=3$

$|\mathbf{u}|\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ، $\theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

$\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\dfrac{3}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$

۱۹- $\dfrac{4}{3}=(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$

۲۱- $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{k}$



۲۳- $2\sqrt{7}$ ۲۵- (الف)- $\sqrt{14}$ (ب)- 1 ۲۹- $\sqrt{78}/3$

۳۱- $x=1-3t$ ، $y=2$ ، $z=3+7t$

۳۳- $\sqrt{2}$ ۳۵- $2x+y+z=5$

۳۷- $-9x+y+7z=4$

۳۹- $\left(0,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$ ، $(-1,0,-3)$ ، $(1,-1,0)$ ۴۱- $\pi/3$

۴۳- $x=-5+5t$ ، $y=3-t$ ، $z=-3t$

۴۵- (ب)- $x=-12t$ ، $y=19/12+15t$ ، $z=1/6+6t$

۴۷- بله، $\mathbf{v}$ موازی با صفحه است.

۴۹- 3 ۵۱- $-3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ ۵۳- $\dfrac{2}{\sqrt{35}}(5\mathbf{i}-\mathbf{j}-3\mathbf{k})$

۵۵- $\left(\dfrac{11}{9},\dfrac{26}{9},-\dfrac{7}{9}\right)$

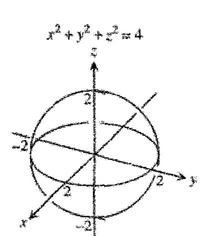
۵۷- $(1,-2,-1)$؛ $x=1-5t$ ، $y=-2+3t$ ، $z=-1+4t$

۵۹- $2x+7y+2z+10=0$

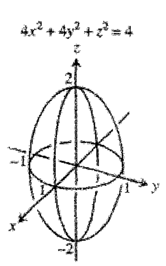
۶۱- (الف)- خیر (ب)- خیر (پ)- خیر (ت)- خیر (ث)- بله

۶۳- $11/\sqrt{107}$

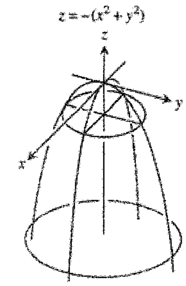
۶۵-



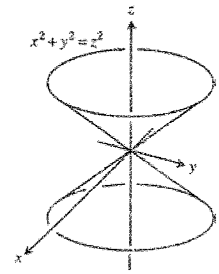
۶۷-



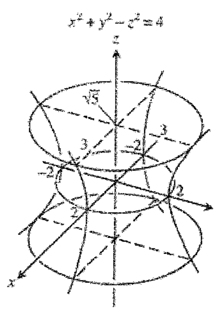
۶۹-



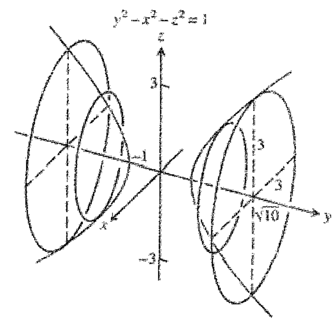
۷۱-



۷۳-



۷۵-



تمرین های اضافی و پیشرفته

۱- $(26, 23, -1/3)$ ۳- $|\mathbf{F}| = 20\text{lb}$

۵- (الف)- $|\mathbf{F}_1| = 80\text{lb}$، $|\mathbf{F}_2| = 60\text{lb}$، $\mathbf{F}_1 = \langle -48, 64\rangle$،
$\mathbf{F}_2 = \langle 48, 36\rangle$، $\alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3}$، $\beta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

(ب)- $|\mathbf{F}_1| = \dfrac{2400}{13} \approx 184.6151b$

$|\mathbf{F}_2| = \dfrac{1000}{13} \approx 76.9231b$

$\mathbf{F}_1 = \left\langle \dfrac{-12{,}000}{169}, \dfrac{28{,}800}{169} \right\rangle \approx \langle -71.006, 170.414\rangle$

$\mathbf{F}_2 = \left\langle \dfrac{12{,}000}{169}, \dfrac{5000}{169} \right\rangle \approx \langle 71.006, 29.586\rangle$

۹- (الف)- $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2} \approx 54.74^\circ$

(ب)- $\theta = \tan^{-1} 2\sqrt{2} \approx 70.53^\circ$

۱۳- (ب)- $\dfrac{6}{\sqrt{14}}$ (پ)- $2x - y + 2x = 8$

(ت)- $x - 2y + z = 3 - 5\sqrt{6}$ و $x - 2y + z = 3 + 5\sqrt{6}$

۱۵- $\dfrac{32}{41}\mathbf{i} + \dfrac{23}{41}\mathbf{j} - \dfrac{13}{41}\mathbf{k}$ ۱۷- (الف)- $0,0$

(ب)- $-10\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ و $-9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

(پ)- $-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

(ت)- $-10\mathbf{i} - 10\mathbf{k}$ و $-12\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

۱۹- این فرمول همواره درست است.

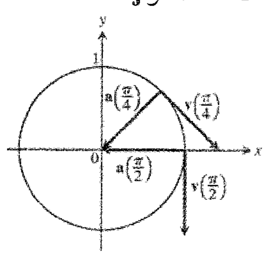
فصل ۱۳

بخش ۱۳-۱

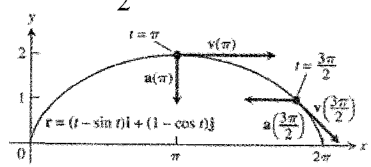
۱- $y = x^2 - 2x$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ و $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$

۳- $y = \dfrac{2}{9}x^2$ و $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

۵- $t = \dfrac{\pi}{4}: \mathbf{v} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ و $\mathbf{a} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ ؛
$t = \pi/2: \mathbf{v} = -\mathbf{j}$ و $\mathbf{a} = -\mathbf{i}$.



۷- $t = \pi: \mathbf{v} = 2\mathbf{i}$ و $\mathbf{a} = -\mathbf{j}$ ؛
$t = \dfrac{3\pi}{2}: \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ و $\mathbf{a} = -\mathbf{i}$.



۹- $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ؛ $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$

تندی: ۳ ؛

جهت: $\dfrac{1}{3}\mathbf{i} + \dfrac{2}{3}\mathbf{j} + \dfrac{2}{3}\mathbf{k}$ ؛ $\mathbf{v}(1) = 3\left(\dfrac{1}{3}\mathbf{i} + \dfrac{2}{3}\mathbf{j} + \dfrac{2}{3}\mathbf{k}\right)$

۱۱- $\mathbf{v} = (-2\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ؛

$\mathbf{a} = (-2\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j}$ ؛

تندی: $2\sqrt{5}$ ؛

جهت: $(-1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{k}$

$\mathbf{v}(\pi/2) = 2\sqrt{5}\left[(-1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{k}\right]$.

۱۳- $\mathbf{v} = \left(\dfrac{2}{t+1}\right)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ؛ $\mathbf{a} = \left(\dfrac{-2}{(t+1)^2}\right)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ؛

تندی: $\sqrt{6}$ ؛

جهت: $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \dfrac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$ ؛

$\mathbf{v}(1) = \sqrt{6}\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \dfrac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right)$

۱۵- $\pi/2$ ۱۷- $\pi/2$

۱۹- $x = t$ و $y = -1$ و $z = 1 + t$

۲۱- $x=t$ و $y=\frac{1}{3}t$ و $z=t$

۲۳- (الف)- (۱): تندی ثابتی برابر ۱ دارد (۲): بله

(۳): پاد ساعتگرد (۴): بله

(ب)- (۱): تندی ثابتی برابر با ۲ دارد (۲): بله

(۳): پاد ساعتگرد (۴): بله

(پ)- (۱): تندی ثابتی برابر با ۱ دارد (۲): بله

(۳): پادساعتگرد (۴): به جای $(1,0)$ از $(0,-1)$ شروع می کند.

(ت)- (۱): تندی ثابتی برابر با ۱ دارد. (۲): بله

(۳): ساعتگرد (۴): بله

(ث)- (۱): تندی متغیر دارد (۲): خیر

(۳): پاد ساعتگرد (۴): بله

۲۵- $\mathbf{v}=2\sqrt{5}\mathbf{i}+\sqrt{5}\mathbf{j}$

بخش ۱۳-۲

۱- $(1/4)\mathbf{i}+7\mathbf{j}+(3/2)\mathbf{k}$ ۳- $\left(\frac{\pi+2\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

۵- $(\ln 4)\mathbf{i}+(\ln 4)\mathbf{j}+(\ln 2)\mathbf{k}$

۷- $\frac{e-1}{2}\mathbf{i}+\frac{e-1}{e}\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ۹- $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\frac{\pi}{4}\mathbf{k}$

۱۱- $\mathbf{r}(t)=\left(\frac{-t^2}{2}+1\right)\mathbf{i}+\left(\frac{-t^2}{2}+2\right)\mathbf{j}+\left(\frac{-t^2}{2}+3\right)\mathbf{k}$

۱۳-

$$\mathbf{r}(t)=\left((t+1)^{3/2}-1\right)\mathbf{i}+\left(-e^{-t}+1\right)\mathbf{j}+\left(\ln(t+1)+1\right)\mathbf{k}$$

۱۵- $\mathbf{r}(t)=8t\mathbf{i}+8t\mathbf{j}+\left(-16t^2+100\right)\mathbf{k}$

۱۷- $\mathbf{r}(t)=\left(\frac{3}{2}t^2+\frac{6}{\sqrt{11}}t+1\right)\mathbf{i}-\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{\sqrt{11}}t-2\right)\mathbf{j}$

$$+\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{\sqrt{11}}t+3\right)\mathbf{k}=\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{2t}{\sqrt{11}}\right)(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$$
$$+(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})$$

۱۹- $50\sec$ ۲۱- (الف)- $72.2\sec$؛ $25{,}510m$

(ب)- $4020m$ (پ)- $6378m$

۲۳- (الف)- $v_0\approx 9.9m/\sec$

(ب)- $\alpha\approx 18.4^\circ or\ 71.6^\circ$ ۲۵- $39.3^\circ or\ 50.7^\circ$

۳۱- (ب)- وقتی v_0 زاویه $\angle AOR$ را نصف می کرد.

۳۳- (الف)- (با فرض اینکه « x» در نقطه برخورد صفر است) $\mathbf{r}(t)=(x(t))\mathbf{i}+(y(t))\mathbf{j}$ که در آن ، $x(t)=\left(35\cos 27^\circ\right)t$ و $y(t)=4+\left(35\sin 27^\circ\right)t-16t^2$

(ب)- در $t\approx 0.497\sec$ ، به ارتفاع ماکسیممش $7.945ft$ می رسد.

(پ)- $1.201\sec\approx$ زمان پرواز؛ $37.45ft\approx$ برد

(ت)- در $t\approx 0.254\sec$ و $t\approx 0.740\sec$ ، زمانیکه در فاصله $29.554ft\approx$ و $14.396ft\approx$ از محلی که فرود خواهد آمد قرار دارد.

(ث)- بله، همه چیز تغییر می کند زیرا توپ از بالای تور رد نمی شود.

۳۵- $4.00ft$ و $7.80ft/\sec$

۴۳- (الف)- $\mathbf{r}(t)=(x(t))\mathbf{i}+(y(t))\mathbf{j}$ ؛ که در آن:

$$x(t)=\left(\frac{1}{0.08}\right)\left(1-e^{-0.08t}\right)\left(152\cos 20^\circ-17.6\right)$$
$$y(t)=3+\left(\frac{152}{0.08}\right)\left(1-e^{-0.08t}\right)\left(\sin 20^\circ\right)$$
$$+\left(\frac{32}{0.08^2}\right)\left(1-0.08t-e^{-0.08t}\right)$$

(ب)- در $t\approx 1.527\sec$ به ارتفاع ماکسیممی در حدود $41.893ft$ می رسد

(پ)- $3.181\sec\approx$ زمان پرواز؛ $351.734ft\approx$ برد

(ت)- در $t\approx 0.877\sec$ و $t\approx 2.190\sec$ ، وقتی در فاصله حدود $106.028ft$ و $251.530ft$ از بیس خانه قرار دارد.

(ث)- خیر.

بخش ۱۳-۳

۱- $\mathbf{T}=\left(-\frac{2}{3}\sin t\right)\mathbf{i}+\left(\frac{2}{3}\cos t\right)\mathbf{j}+\frac{\sqrt{5}}{3}\mathbf{k}$ و 3π

۳- $\mathbf{T}=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\mathbf{k}$ ، $52/3$

۵- $\mathbf{T}=-\cos t\mathbf{j}+\sin t\mathbf{k}$ و $\frac{3}{2}$

۷- $\mathbf{T}=\left(\frac{\cos t-t\sin t}{t+1}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\sin t+t\cos t}{t+1}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\sqrt{2}t^{1/2}}{t+1}\right)\mathbf{k}$ ، $\frac{\pi^2}{2}+\pi$

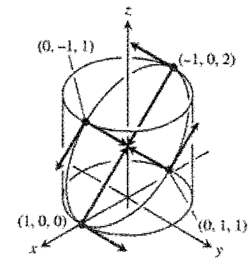
۹- $(0,5,24\pi)$ ۱۱- $s(t)=5t$ و $L=\frac{5\pi}{2}$

۱۳- $s(t)=\sqrt{3}e^t-\sqrt{3}$ و $L=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

۱۵- $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

۱۷- (الف)- استوانه عبارت است از $x^2+y^2=1$ و صفحه عبارت است از $x+z=1$

(ب) و (پ)-



(ت)- $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$ (ث)- $L\approx 7.64$

بخش ۱۳-۴

۱- $\mathbf{T}=(\cos t)\mathbf{i}-(\sin t)\mathbf{j}$ ، $\mathbf{N}=(-\sin t)\mathbf{i}-(\cos t)\mathbf{j}$

$\kappa=\cos t$

۳- $\mathbf{T}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i}-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}$ ،

$\mathbf{N}=\dfrac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i}-\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}$ و $\kappa=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}$

۵- (ب)- $\cos x$

۷- (ب)- $\mathbf{N}=\dfrac{-2e^{2t}}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\mathbf{i}+\dfrac{1}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\mathbf{j}$

(پ)- $\mathbf{N}=-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{4-t^2}\,\mathbf{i}+t\mathbf{j}\right)$

۹- $\mathbf{T}=\dfrac{3\cos t}{5}\mathbf{i}-\dfrac{3\sin t}{5}\mathbf{j}+\dfrac{4}{5}\mathbf{k}$ ،

$\mathbf{N}=(-\sin t)\mathbf{i}-(\cos t)\mathbf{j}$ و $\kappa=\dfrac{3}{25}$

۱۱- $\mathbf{T}=\left(\dfrac{\cos t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{\cos t+\sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$ ،

$\mathbf{N}=\left(\dfrac{-\cos t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i}+\left(\dfrac{-\sin t+\cos t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$ و

$\kappa=\dfrac{1}{e^t\sqrt{2}}$

۱۳- $\mathbf{T}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{i}+\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{j}$ ،

$\mathbf{N}=\dfrac{\mathbf{i}}{\sqrt{t^2+1}}-\dfrac{t\mathbf{j}}{\sqrt{t^2+1}}$ و $\kappa=\dfrac{1}{t\left(t^2+1\right)^{3/2}}$

۱۵- $\mathbf{T}=\left(\operatorname{sech}\dfrac{t}{a}\right)\mathbf{i}+\left(\tanh\dfrac{t}{a}\right)\mathbf{j}$ ،

$\mathbf{N}=\left(-\tanh\dfrac{t}{a}\right)\mathbf{i}+\left(\operatorname{sech}\dfrac{t}{a}\right)\mathbf{j}$ و $\kappa=\dfrac{1}{a}\operatorname{sech}^2\dfrac{t}{a}$

۱۹- $1/(2b)$ ۲۱- $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+y^2=1$

۲۳- $\kappa(x)=2/\left(1+4x^2\right)^{3/2}$

۲۵- $\kappa(x)=|\sin x|/\left(1+\cos^2 x\right)^{3/2}$

بخش ۱۳-۵

۱- $\mathbf{a}=|a|\mathbf{N}$ ۳- $\mathbf{a}(1)=\dfrac{4}{3}\mathbf{T}+\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\mathbf{N}$

۵- $\mathbf{a}(0)=2\mathbf{N}$

۷- $\mathbf{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}-\mathbf{k}$ و $\mathbf{T}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ و $\mathbf{N}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ و $\mathbf{B}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathbf{k}$؛ صفحه بوسان: $z=-1$ ؛ صفحه قائم: $-x+y=0$ ؛ صفحه راستگر: $x+y=\sqrt{2}$

۹- $\mathbf{B}=\left(\dfrac{4}{5}\cos t\right)\mathbf{i}-\left(\dfrac{4}{5}\sin t\right)\mathbf{j}-\dfrac{3}{5}\mathbf{k}$ و $\tau=-\dfrac{4}{25}$

۱۱- $\mathbf{B}=\mathbf{k}$ و $\tau=0$ ۱۳- $\mathbf{B}=-\mathbf{k}$ و $\tau=0$

۱۵- $\mathbf{B}=\mathbf{k}$ و $\tau=0$

۱۷- بله، اگر اتومبیل روی مسیر خمیده ای $(\kappa\neq 0)$ حرکت کند آنگاه $a_N=\kappa|\mathbf{v}|^2\neq 0$ و $\mathbf{a}\neq 0$.

۲۳- $\kappa=\dfrac{1}{t}$ و $\rho=t$

۲۹- مؤلفه های $\mathbf{v}$: -1.8701 ، 0.7089 ، 1.0000

مؤلفه های $\mathbf{a}$: -1.6960 ، -2.0307 ، 0

تندی: ۲/۲۳۶۱ ؛

مؤلفه های $\mathbf{T}$: -0.8364 ، 0.3170 ، 0.4472

مؤلفه های $\mathbf{N}$: -0.4143 ، -0.8998 ، -0.1369

مؤلفه های $\mathbf{B}$: 0.3590 ، -0.2998 ، 0.8839؛

خمیدگی: ۰/۵۰۶۰

تاب: ۰/۲۸۱۳ ؛ مؤلفه مماسی شتاب: ۰/۷۷۴۶

مؤلفه قائم شتاب: ۲/۵۲۹۸

۳۱- مؤلفه های $\mathbf{v}$: 2.0000 ، -0.1629

مؤلفه های $\mathbf{a}$: 0 ، -1.0000 ، -0.0086 تندی: 2.0066

مؤلفه های $\mathbf{T}$: 0.9967 ، 0 ، -0.0812

مؤلفه های $\mathbf{N}$: -0.0007 ، -1.0000 ، -0.0086

مؤلفه های $\mathbf{B}$: -0.0812 و 0.0086 و 0.9967

خمیدگی: 0.2484

تاب: ۰/۰۴۱۱؛ مؤلفه مماسی شتاب: ۰/۰۰۰۷

مؤلفه قائم شتاب: ۱/۰۰۰۰

بخش ۱۳-۶

۱- $\mathbf{v}=(3a\sin\theta)\mathbf{u}_r+3a(1-\cos\theta)\mathbf{u}_\theta$

$\mathbf{a}=9a(2\cos\theta-1)\mathbf{u}_r+(18a\sin\theta)\mathbf{u}_\theta$

۳- $\mathbf{v}=2ae^{a\theta}\mathbf{u}_r+2e^{a\theta}\mathbf{u}_\theta$

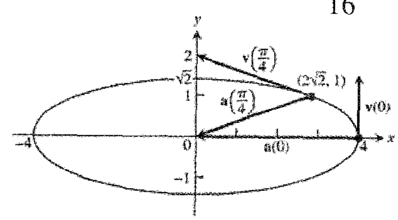
$\mathbf{a}=4e^{a\theta}(a^2-1)\mathbf{u}_r+8ae^{a\theta}\mathbf{u}_\theta$

۵- $\mathbf{v}=(-8\sin 4t)\mathbf{u}_r+(4\cos 4t)\mathbf{u}_\theta$

$\mathbf{a}=(-40\cos 4t)\mathbf{u}_r-(32\sin 4t)\mathbf{u}_\theta$

تمرین های عملی

۱- $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{2}=1$



در $t=0$: $a_T=0$ و $a_N=4$ و $\kappa=2$

در $t=\dfrac{\pi}{4}$: $a_T=\dfrac{7}{3}$ و $a_N=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ و $\kappa=\dfrac{4\sqrt{2}}{27}$

۳- $|\mathbf{v}|_{\max}=1$ ۵- $\kappa=1/5$

۷- $dy/dt=-x$ ؛ ساعتگرد.

۱۱- وزنه بر روی زمین و در فاصله حدود $66ft\ 3in$. از پرتابگر قرار دارد.

۱۵- $\text{طول}=\dfrac{\pi}{4}\sqrt{1+\dfrac{\pi^2}{16}}+\ln\left(\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{1+\dfrac{\pi^2}{16}}\right)$

۱۷- $\mathbf{T}(0)=\dfrac{2}{3}\mathbf{i}-\dfrac{2}{3}\mathbf{j}+\dfrac{1}{3}\mathbf{k}$ ؛ $\mathbf{N}(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ ؛

$\mathbf{B}(0)=-\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{i}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{j}+\dfrac{4}{3\sqrt{2}}\mathbf{k}$ ؛ $\kappa=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ؛ $\tau=\dfrac{1}{6}$

۱۹- $\mathbf{T}(\ln 2)=\dfrac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{i}+\dfrac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$ ؛

$\mathbf{N}(\ln 2)=-\dfrac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i}+\dfrac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$ ؛ $\mathbf{B}(\ln 2)=\mathbf{k}$ ؛ $\kappa=\dfrac{8}{17\sqrt{17}}$ ؛

$\tau=0$

۲۱- $\mathbf{a}(0)=10\mathbf{T}+6\mathbf{N}$

۲۳- $\mathbf{T}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathbf{i}-(\sin t)\mathbf{j}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathbf{k}$ ؛

$\mathbf{N}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\mathbf{i}-(\cos t)\mathbf{j}-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\mathbf{k}$

$\mathbf{B}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ ؛ $\kappa=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $\tau=0$

۲۵- $\pi/3$ ۳۷- $x=1+t$ و $y=t$ و $z=-t$

۳۱- $\kappa=1/a$

تمرین های اضافی و پیشرفته

۱- (الف)- $\dfrac{d\theta}{dt}\Big|_{\theta=2\pi}=2\sqrt{\dfrac{\pi gb}{a^2+b^2}}$

(ب)- $\theta=\dfrac{gbt^2}{2(a^2+b^2)}$ و $z=\dfrac{gb^2t^2}{2(a^2+b^2)}$

(پ)- $\mathbf{v}(t)=\dfrac{gbt}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{T}$ ؛

$\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\dfrac{bg}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{T}+a\left(\dfrac{bgt}{a^2+b^2}\right)^2\mathbf{N}$

مؤلفه ای در جهت $\mathbf{B}$ وجود ندارد.

۵- (الف)- $\dfrac{dx}{dt}=\dot r\cos\theta-r\dot\theta\sin\theta$

$\dfrac{dy}{dt}=\dot r\sin\theta+r\dot\theta\cos\theta$

(ب)- $\dfrac{dr}{dt}=\dot x\cos\theta+\dot y\sin\theta$

$r\dfrac{d\theta}{dt}=-\dot x\sin\theta+\dot y\cos\theta$

۷- (الف)- $\mathbf{a}(1)=-9\mathbf{u}_r-6\mathbf{u}_\theta$ و $\mathbf{v}(1)=-\mathbf{u}_r+3\mathbf{u}_\theta$

(ب)- $6.5in$

۹- (پ)- $\mathbf{v}=\dot r\mathbf{u}_r+r\dot\theta\mathbf{u}_\theta+\dot z\mathbf{k}$

$\mathbf{a}=(\ddot r-r\dot\theta^2)\mathbf{u}_r+(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)\mathbf{u}_\theta+\ddot z\mathbf{k}$

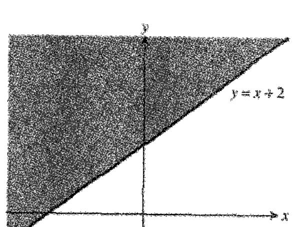
فصل ۱۴

بخش ۱۴-۱

۱- (الف) 0   (ب)- 0   (پ)- 58   (ت)- 33

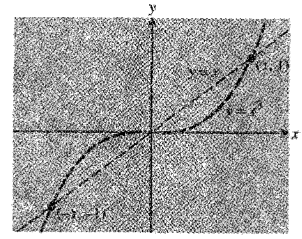
۳- (الف)- 4/5   (ب)- 8/5   (پ)- 3   (ت)- 0

۵- دامنه: تمام نقاط (x,y) واقع برروی خط $y=x+2$ و بالای آن

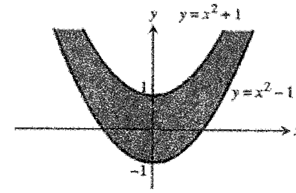


۷- دامنه: تمام نقاط (x,y) که روی نمودار $y=x$ یا

$y=x^3$ واقع نیستند.

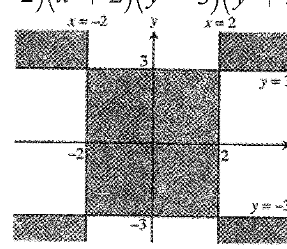


۹- دامنه: تمام نقاط (x,y) که در نامساوی $x^2-1\le y\le x^2+1$ صدق می کنند.

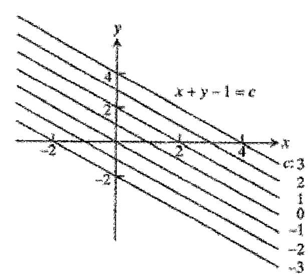


۱۱- دامنه: تمام نقاط (x,y) که در نابرابری زیر صدق می کنند:

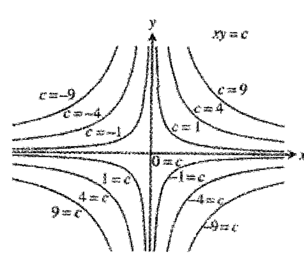
$$(x-2)(x+2)(y-3)(y+3)\ge 0$$



۱۳-



۱۵-



۱۷- (الف)- تمام نقاط واقع در صفحه xy

(ب)- تمام اعداد حقیقی

(پ)- خطوط $y-x=c$ (ت)- هیچکدام از نقاط مرزی

(ث)_ هم باز و هم بسته (ج)- بی کران

۱۹- (الف)- تمام نقاط واقع در صفحه xy (ب)- $z\ge 0$

(پ)- برای $f(x,y)=0$، مبداء؛ برای $f(x,y)\ne 0$ بیضی با مرکز $(0,0)$ و قطر بزرگ و کوچک به ترتیب در امتداد محورهای x و y.

(ت)- هیچکدام از نقاط مرزی (ث)- هم باز و هم بسته (ج)- بی کران

۲۱- (الف)- تمام نقاط واقع در صفحه xy. (ب)- تمام اعداد حقیقی

(پ)- برای $f(x,y)=0$، محورهای x و y؛ برای $f(x,y)\ne 0$ هذلولی هایی که محورهای x و y مجانب های آنها هستند.

(ت)- هیچکدام از نقاط مرزی (ث)- هم باز و هم بسته

(ج)- بی کران

۲۳- تمام (x,y) هایی که در $x^2+y^2<16$ صدق می کنند.

(ب)- $z\ge\frac{1}{4}$.

(پ)_ دایره هایی به مرکز مبداء و با شعاع $r<4$

(ت)- مرز عبارت است از دایره $x^2+y^2=16$

(ت)- باز (ج)- کراندار.

۲۵- (الف)- $(x,y)\ne(0,0)$ (ب)- تمام اعداد حقیقی

(پ)- دایره هایی به مرکز مبداء و شعاع $r>0$.

(ت)- مرز عبارت است از تک نقطه $(0,0)$. (ث)- باز

(ج)- بی کران

۲۷- (الف)- تمام (x,y)هایی که در رابطه $-1\le y-x\le 1$ صدق می کنند. (ب)- $-\pi/2\le z\le\pi/2$

(پ)- خطوط راستی به صورت $y-x=c$ با شرط $-1\le c\le 1$.

(ت)- مرز عبارت است از دو خط راست $y=1+x$ و $y=-1+x$

(ث)- بسته (ج)- بی کران

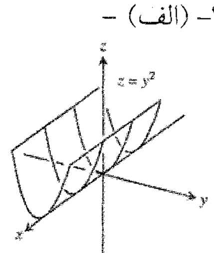
۲۹- (الف)- دامنه: تمام نقاط (x,y) واقع در خارج دایره $x^2+y^2=1$.

(ب)- برد: تمام اعداد حقیقی (پ)- دایره هایی به مرکز مبداء و شعاع $r>1$.

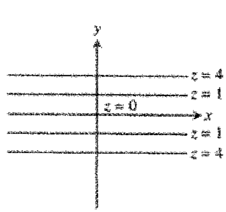
(ت)- مرز: $x^2+y^2=1$ (ث)- باز (ج)- بی کران

۳۱- (ج) ۳۳- (الف) ۳۵- (ت)

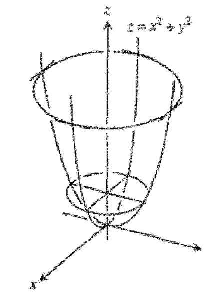
۳۷- (الف) -



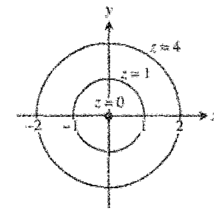
(ب)-



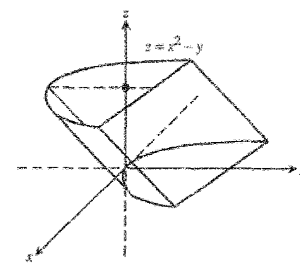
۳۹- (الف) -



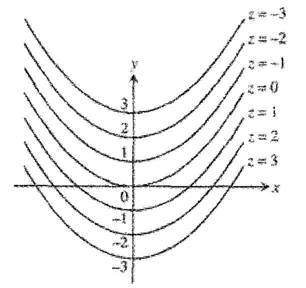
(ب)-



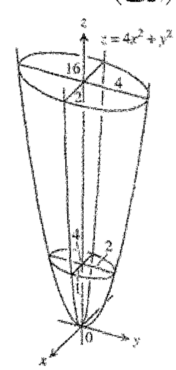
۴۱-(الف) -



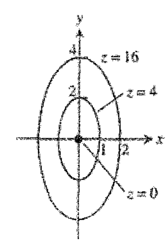
(ب)-



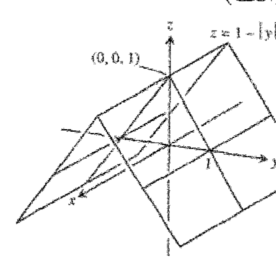
۴۳-(الف) -



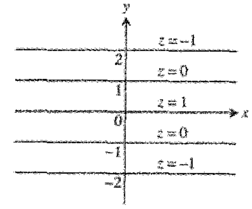
(ب)-



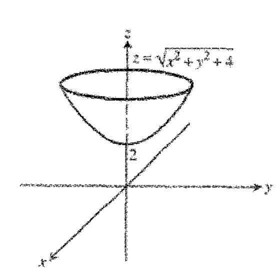
۴۵- (الف) -



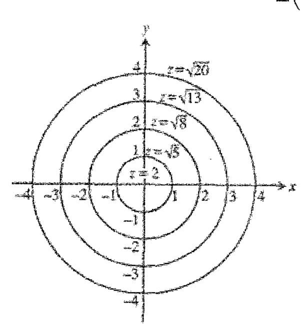
(ب)-



۴۷-(الف) -

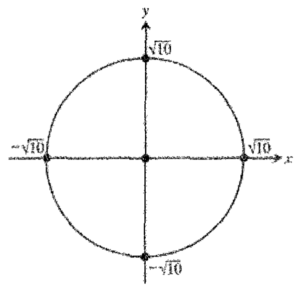


(ب)-

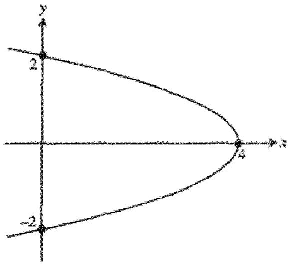


$x^2 + y^2 = 10$ -۴۹

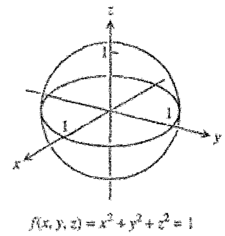
$x + y^2 = 4$ -۵۱



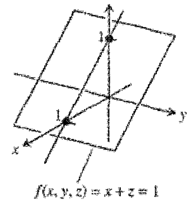
-۵۳



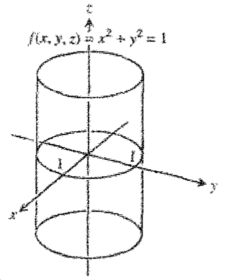
-۵۵

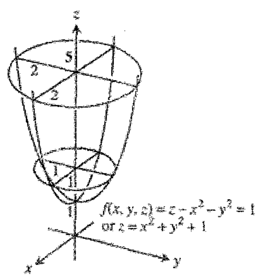


-۵۷



-۵۹

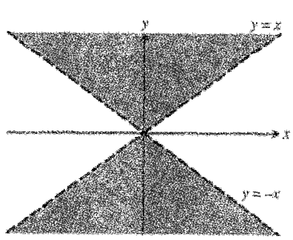




$\sqrt{x - y} - \ln z = 2$ -۶۱

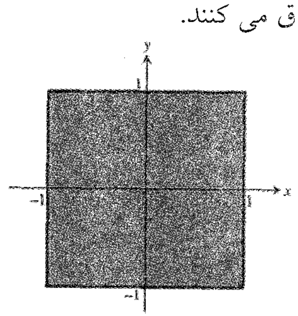
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ -۶۳

۶۵- دامنه: تمام نقاط (x, y) که در رابطه $|y| < |x|$ صدق می کنند.



خم تراز: $y = 2x$

۶۷- دامنه: تمام نقاط (x, y) که در روابط $-1 \le x \le 1$ و $-1 \le y \le 1$ صدق می کنند.



خم تراز: $\sin^{-1} y - \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

بخش ۱۴-۲

۱- $5/2$ ۳- $2\sqrt{6}$ ۵- 1 ۷- $1/2$

۹- 1 ۱۱- $1/4$ ۱۳- 0

۱۵- -1 ۱۷- 2 ۱۹- $1/4$ ۲۱- 1

۲۳- 3 ۲۵- $19/12$ ۲۷- 2 ۲۹- 3

۳۱- (الف)- تمام (x,y)ها (ب)- تمام (x,y)ها به جز $(0,0)$

۳۳- (الف)- تمام (x,y)ها به جز جاهایی که $x=0$ یا $y=0$ است. (ب)- تمام (x,y)ها

۳۵- (الف)- تمام (x,y,z)ها (ب)- تمام (x,y,z)ها به جز درون استوانه $x^2+y^2=1$.

۳۷- (الف)- تمام نقاط (x,y,z) با $z\neq 0$. (ب)- تمام نقاط (x,y,z) با شرط $x^2+z^2\neq 1$.

۳۹- (الف) تمام نقاط (x,y) که در نابرابری $z>x^2+y^2+1$ صدق می کنند.

۴۱- مسیرهای در امتداد $y=x$، $x>0$ و در امتداد $y=x$، $x<0$ را در نظر بگیرید.

۴۳- مسیرهای $y=kx^2$، k ثابت، را در نظر بگیرید.

۴۵- مسیرهای $y=mx$، m ثابت و $m\neq -1$ را در نظر بگیرید.

۴۷- مسیرهای $y=kx^2$، k ثابت و $k\neq 0$، را در نظر بگیرید.

۴۹- مسیرهای $x=1$ و $y=x$ را در نظر بگیرید.

۵۱- (الف)- ۱ (ب)- 0 (پ)- موجود نیست

۵۵- حد برابر ۱ است ۵۷- حد برابر 0 است.

۵۹- (الف)- $f(x,y)\big|_{y=mx}=\sin 2\theta$ که در آن $\tan\theta=m$

۶۱- 0 ۶۳- موجود نیست

۶۵- $\frac{\pi}{2}$ ۶۷- $f(0,0)=\ln 3$ ۶۹- $\delta=0.1$

۷۱- $\delta=0.005$ ۷۳- $\delta=0.04$

۷۵- $\delta=\sqrt{0.015}$ ۷۷- $\delta=0.005$

بخش ۱۴-۳

۱- $\frac{\partial f}{\partial x}=4x$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=-3$

۳- $\frac{\partial f}{\partial x}=2x(y+2)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-1$

۵- $\frac{\partial f}{\partial x}=2y(xy-1)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=2x(xy-1)$

۷- $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

۹- $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-1}{(x+y)^2}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-1}{(x+y)^2}$

۱۱- $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y^2-1}{(xy-1)^2}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-x^2-1}{(xy-1)^2}$

۱۳- $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y+1}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x+y+1}$

۱۵- $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x+y}$

۱۷- $\frac{\partial f}{\partial x}=2\sin(x-3y)\cos(x-3y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}=-6\sin(x-3y)\cos(x-3y)$

۱۹- $\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$

۲۱- $\frac{\partial f}{\partial x}=-g(x)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=g(y)$

۲۳- $f_x=y^2$ و $f_y=2xy$ و $f_z=-4z$

۲۵- $f_x=1$ و $f_y=-y\left(y^2+z^2\right)^{-1/2}$

$f_z=-z\left(y^2+z^2\right)^{-1/2}$

۲۷- $f_x=\frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$ و $f_y=\frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$

$f_z=\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$

۲۹- $f_x=\frac{1}{x+2y+3z}$ و $f_y=\frac{2}{x+2y+3z}$

$f_z=\frac{3}{x+2y+3z}$

۳۱- $f_x=-2xe^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$ و $f_y=-2ye^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$

$f_z=-2ze^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$

۳۳- $f_x=\operatorname{sech}^2(x+2y+3z)$

$f_y=2\operatorname{sech}^2(x+2y+3z)$

$f_z=3\operatorname{sech}^2(x+2y+3z)$

۳۵- $\frac{\partial f}{\partial t}=-2\pi\sin(2\pi t-\alpha)$ و $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=\sin(2\pi t-\alpha)$

۳۷- $\frac{\partial h}{\partial \rho}=\sin\phi\cos\theta$ و $\frac{\partial h}{\partial \phi}=\rho\cos\phi\cos\theta$

$\frac{\partial h}{\partial \theta}=-\rho\sin\phi\sin\theta$

۳۹- $W_P(P,V,\delta,v,g)=V$

$$W_V(P,V,\delta,v,g)=P+\frac{\delta v^2}{2g}$$

$$W_\delta(P,V,\delta,v,g)=\frac{Vv^2}{2g} \quad و \quad W_v(P,V,\delta,v,g)=\frac{V\,\delta v}{g}$$

و $W_g(P,V,\delta,v,g)=-\frac{V\,\delta v^2}{2g^2}$

۴۱- $\frac{\partial f}{\partial x}=1+y$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=1+x$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \quad و \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=1$$

۴۳- $\frac{\partial g}{\partial x}=2xy+y\cos x$ و $\frac{\partial g}{\partial y}=x^2-\sin y+\sin x$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=2y-y\sin x \quad و \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-\cos y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}=2x+\cos x$$

۴۵- $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{x+y}$ و $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{1}{x+y}$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{-1}{(x+y)^2} \quad و \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{-1}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}=\frac{-1}{(x+y)^2}$$

۴۷- $\frac{\partial w}{\partial x}=x^2y\sec^2(xy)+2x\tan(xy)$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=x^3\sec^2(xy)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

$$=2x^3y\sec^2(xy)\tan(xy)+3x^2\sec^2(xy)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=4xy\sec^2(xy)+2x^2y^2\sec^2(xy)\tan(xy)$$

$$+2\tan(xy)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=2x^4\sec^2(xy)\tan(xy)$$

۴۹- $\frac{\partial w}{\partial x}=\sin(x^2y)+2x^2y\cos(x^2y)$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=x^3\cos(x^2y)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=3x^2\cos(x^2y)-2x^4y\sin(x^2y)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=6xy\cos(x^2y)-4x^3y^2\sin(x^2y)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-x^5\sin(x^2y)$$

۵۱- $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{2}{2x+3y}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{3}{2x+3y}$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=\frac{-6}{(2x+3y)^2}$$

۵۳- $\frac{\partial w}{\partial x}=y^2+2xy^3+3x^2y^4$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=2xy+3x^2y^2+4x^3y^3$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=2y+6xy^2+12x^2y^3$$

۵۵- (الف)- اول x (ب)- اول y (پ)- اول x

(ت)- اول y (ث)- اول x (ج)- اول y

۵۷- $f_x(1,2)=-13$ و $f_y(1,2)=-2$

۵۹- $f_x(-2,3)=1/2$ و $f_y(-2,3)=3/4$

۶۱- (الف)- 3 (ب)- 2 ۶۳- 12 ۶۵- -2

۶۷- $\frac{\partial A}{\partial a}=\frac{a}{bc\sin A}$ و $\frac{\partial A}{\partial b}=\frac{c\cos A-b}{bc\sin A}$

۶۹- $v_x=\frac{\ln v}{(\ln u)(\ln v)-1}$

۷۱- به ازای تمام نقاط (x,y)، $f_x(x,y)=0$.

$$f_y(x,y)=\begin{cases}3y^2 & , \ y\ge 0\\ -2y & , \ y<0\end{cases}$$

به ازای تمام نقاط (x,y)، $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=0$

۸۹- بله

بخش ۱۴-۴

۱- (الف)- $\frac{dw}{dt}=0$ و (ب)- $\frac{dw}{dt}(\pi)=0$

۳- (الف)- $\frac{dw}{dt}=1$ و (ب)- $\frac{dw}{dt}(3)=1$

۵- (الف)- $\frac{dw}{dt}=4t\tan^{-1}t+1$

(ب)- $\frac{dw}{dt}(1)=\pi+1$

۷- (الف)- $\frac{\partial z}{\partial u}=4\cos v\ln(u\sin v)+4\cos v$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-4u\sin v\ln(u\sin v)+\frac{4u\cos^2 v}{\sin v}$$

(ب)- $\frac{\partial z}{\partial u}=\sqrt{2}(\ln 2+2)$ و $\frac{\partial z}{\partial v}=-2\sqrt{2}(\ln 2-2)$

۹- (الف)- $\frac{\partial w}{\partial u}=2u+4uv$ و $\frac{\partial w}{\partial v}=-2v+2u^2$

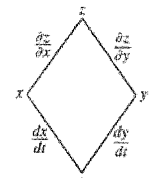
(ب)- $\frac{\partial w}{\partial u}=3$ و $\frac{\partial w}{\partial v}=-\frac{3}{2}$

۱۱- (الف)- $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ و $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z}{(z-y)^2}$،

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-y}{(z-y)^2}$$

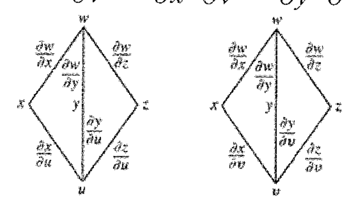
(ب)- $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ و $\frac{\partial u}{\partial y}=1$ و $\frac{\partial u}{\partial z}=-2$

۱۳- $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$



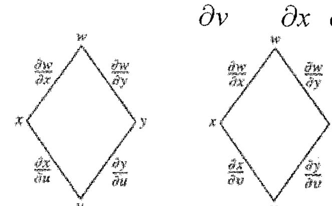
۱۵- $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$



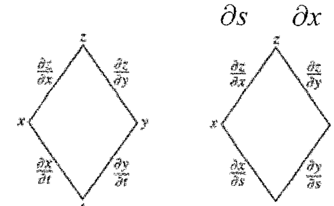
۱۷- $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

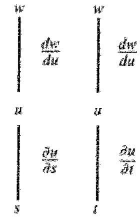


۱۹- $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

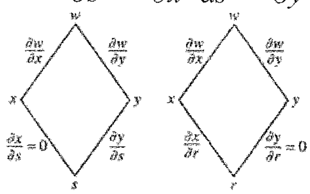


۲۱- $\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{dw}{du}\frac{\partial u}{\partial s}$ و $\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{dw}{du}\frac{\partial u}{\partial t}$



۲۳- $\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dr}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr}$، چون $\frac{dy}{dr}=0$

$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds}$، چون $\frac{dx}{ds}=0$



۲۵- $4/3$ ۲۷- $-4/5$

۲۹- $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{4}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3}{4}$

۳۱- $\frac{\partial z}{\partial x}=-1$ و $\frac{\partial z}{\partial y}=-1$

۳۳- 12 ۳۵- -7

۳۷- $\frac{\partial z}{\partial u}=2$ و $\frac{\partial z}{\partial v}=1$

۳۹- $\frac{\partial w}{\partial t}=2te^{s^3+t^2}$ و $\frac{\partial w}{\partial s}=3s^2e^{s^3+t^2}$

۴۱- $-0.00005 amps/\sec$

۴۷- $(\cos 1,\sin 1,1)$ و $(\cos(-2),\sin(-2),-2)$

۴۹- (الف)- ماکسیمم در $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$؛

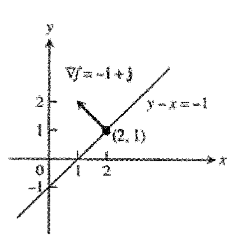
مینیمم در $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(ب)- $Max=6$ ، $\min=2$

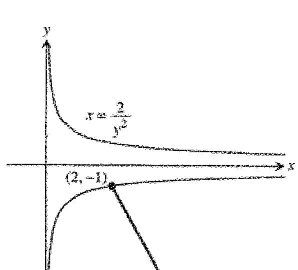
۵۱- $2x\sqrt{x^8+x^3}+\int_0^{x^2}\frac{3x^2}{2\sqrt{t^4+x^3}}dt$

بخش ۱۴-۵

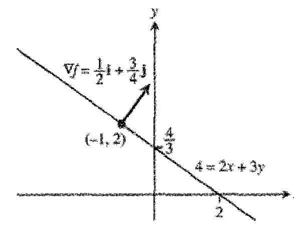
۱-



۳-



۵-



۷- $\nabla f = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

۹- $\nabla f = \frac{26}{27}\mathbf{i} + \frac{23}{54}\mathbf{j} - \frac{23}{54}\mathbf{k}$

۱۱- -4 ۱۳- $21/13$ ۱۵- 3 ۱۷- 2

۱۹- $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ و $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = \sqrt{2}$

$-\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ و $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -\sqrt{2}$

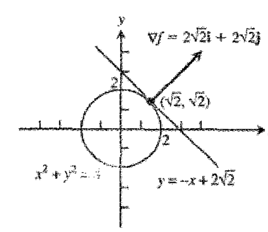
۲۱- $\mathbf{u} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$ و $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 3\sqrt{3}$

$-\mathbf{u} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$ و $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -3\sqrt{3}$

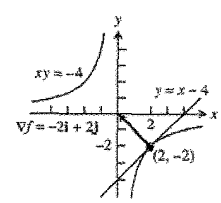
۲۳- $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ و $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 2\sqrt{3}$

$-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ و $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -2\sqrt{3}$

۲۵-



۲۷-



۲۹- (الف)- $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$ و $D_{\mathbf{u}}f(1,-1) = 5$

(ب)- $\mathbf{u} = -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$ و $D_{\mathbf{u}}f(1,-1) = -5$

(پ)- $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$ و $\mathbf{u} = -\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$

(ت)- $\mathbf{u} = -\mathbf{j}$ و $\mathbf{u} = \frac{24}{25}\mathbf{i} - \frac{7}{25}\mathbf{j}$

(ث)- $\mathbf{u} = -\mathbf{i}$ و $\mathbf{u} = \frac{7}{25}\mathbf{i} + \frac{24}{25}\mathbf{j}$

۳۱- $\mathbf{u} = \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$ و $-\mathbf{u} = -\frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$

۳۳- خیر، ماکسیمم آهنگ تغییر برابر است با $\sqrt{185} > 14$

۳۵- $-\frac{7}{\sqrt{5}}$

بخش ۱۴-۶

۱- (الف)- $x + y + z = 3$

(ب)- $x = 1 + 2t$ و $y = 1 + 2t$ و $z = 1 + 2t$

۳- (الف)- $2x - z - 2 = 0$

(ب)- $x = 2 - 4t$ و $y = 0$ و $z = 2 + 2t$

۵- (الف)- $2x + 2y + z - 4 = 0$

(ب)- $x = 2t$ و $y = 1 + 2t$ و $z = 2 + t$

۷- (الف)- $x + y + z - 1 = 0$

(ب)- $x = t$ و $y = 1 + t$ و $z = t$

۹- $2x - z - 2 = 0$ ۱۱- $x - y + 2z - 1 = 0$

۱۳- $x = 1$ و $y = 1 + 2t$ و $z = 1 - 2t$

۱۵- $x = 1 - 2t$ و $y = 1$ و $z = \frac{1}{2} + 2t$

۱۷- $x = 1 + 90t$ و $y = 1 - 90t$ و $z = 3$

۱۹- $df = \frac{9}{11,830} \approx 0.0008$ ۲۱- $dg = 0$

۲۳- (الف)- $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{3} \approx 0.935^\circ C/ft$

(ب)- $\sqrt{3}\sin\sqrt{3} - \cos\sqrt{3} \approx 1.87^\circ C/\sec$

۲۵- (الف)- $L(x,y) = 1$

(ب)- $L(x,y) = 2x + 2y - 1$

۲۷- (الف)- $L(x,y) = 3x - 4y + 5$

(ب)- $L(x,y) = 3x - 4y + 5$

۲۹- (الف)- $L(x,y) = 1 + x$

(ب)- $L(x,y) = -y + \frac{\pi}{2}$

۳۱- (الف)- $W(20,25) = 11^\circ F$

$W(30,-10) = -39^\circ F$ و $W(15,15) = 0^\circ F$

(ب)- $W(10,-40) \approx -65.5^\circ F$

$W(50,-40) = -88^\circ F$ و $W(60,30) = 10.2^\circ F$

(پ)-

$L(v,T) \approx -0.36(v - 25) + 1.337(T - 5) - 17.4088$

(ت)- ۱) $L(24,6) \approx -15.7^\circ F$

۲) $L(27,2) \approx -22.1^\circ F$ ۳) $L(5,-10) \approx -30.2^\circ F$

۳۳- $L(x,y) = 7 + x - 6y$ و 0.06

۳۵- $L(x,y) = x + y + 1$ و 0.08

۳۷- $L(x,y) = 1 + x$ و 0.0222

۳۹- (الف)- $L(x,y,z)=2x+2y+2z-3$

(ب)- $L(x,y,z)=y+z$ (پ)- $L(x,y,z)=0$

۴۱- (الف)- $L(x,y,z)=x$

(ب)- $L(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y$

(پ)- $L(x,y,z)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z$

۴۳- (الف)- $L(x,y,z)=2+x$

(ب)- $L(x,y,z)=x-y-z+\frac{\pi}{2}+1$

(پ)- $L(x,y,z)=x-y-z+\frac{\pi}{2}+1$

۴۵- $L(x,y,z)=2x-6y-2z+6$ و 0.0024

۴۷- $L(x,y,z)=x+y-z-1$ و 0.00135

۴۹- $0.31 \leq$ (برآورد) اندازه ماکسیمم خطا

۵۱- (الف)- $\pm 5\%$ (ب)- $\pm 7\%$

۵۳- $\approx \pm 4.83\%$

۵۵- از دو بعد، به بعد کوچکتر توجه کنید. این بعد مشتق جزئی بزرگتری بدست می دهد.

۵۷- (الف)- ۰/۳ ٪

۵۹- f به تغییر d حساستر است.

۶۱- Q به تغییر h حساستر ا ست.

۶۵- در $\frac{\pi}{4}$ ، $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$؛ در 0 ، 0 ؛ در $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

بخش ۱۴-۷

۱- $f(-3,3)=-5$ ، مینیمم موضعی

۳- $f(-2,1)$ ، نقطه زینی

۵- $f\left(3,\frac{3}{2}\right)=\frac{17}{2}$ ، ماکسیمم موضعی

۷- $f(2,-1)=-6$ ، مینیمم موضعی

۹- $f(1,2)$ ، نقطه زینی

۱۱- $f\left(\frac{16}{7},0\right)=-\frac{16}{7}$ ، ماکسیمم موضعی

۱۳- $f(0,0)$ ، نقطه زینی؛ $f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{170}{27}$ ماکسیمم موضعی

۱۵- $f(0,0)=0$ ، مینیمم موضعی؛ $f(1,-1)$ ، نقطه زینی

۱۷- $f(0,\pm\sqrt{5})$ ، نقاط زینی؛ $f(-2,-1)=30$ ماکسیمم موضعی، $f(2,1)=-30$، مینیمم موضعی

۱۹- $f(0,0)$ ، نقطه زینی ؛ $f(1,1)=2$ ، $f(-1,-1)=2$ ماکسیمم های موضعی

۲۱- $f(0,0)=-1$ ماکسیمم موضعی

۲۳- $f(n\pi,0)$ ، نقاط زینی، به ازای هر عدد صحیح n.

۲۵- $f(2,0)=e^{-4}$ ، مینیمم موضعی

۲۷- $f(0,0)=0$، مینیمم موضعی؛ $f(0,2)$، نقطه زینی

۲۹- $f\left(\frac{1}{2},1\right)=\ln\left(\frac{1}{4}\right)-3$ ، ماکسیمم موضعی

۳۱- ماکسیمم مطلق: ۱ در $(0,0)$ ؛ مینیمم مطلق: ۵- در $(1,2)$.

۳۳- ماکسیمم مطلق: ۴ در $(0,2)$ ؛ مینیمم مطلق: 0 در $(0,0)$.

۳۵- ماکسیمم مطلق: ۱۱ در $(0,-3)$ ؛ مینیمم مطلق: ۱۰- در $(4,-2)$.

۳۷- ماکسیمم مطلق: ۴ در $(2,0)$ ؛ مینیمم مطلق: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ در: $\left(3,-\frac{\pi}{4}\right)$، $\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ ، $\left(1,-\frac{\pi}{4}\right)$ و $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$

۳۹- $a=-3$ و $b=2$

۴۱- گرم ترین نقطه $2\frac{1}{4}^{\circ}$ در $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

سردترین نقطه $-\frac{1}{4}^{\circ}$ در $\left(\frac{1}{2},0\right)$ است.

۴۳- (الف)- $f(0,0)$، نقطه زینی (ب)- $f(1,2)$ ، مینیمم موضعی (پ)- $f(1,-2)$ ، مینیمم موضعی؛ $f(-1,-2)$ ، نقطه زینی

۴۹- $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{355}{36}\right)$ ۵۱- $\left(\frac{9}{7},\frac{6}{7},\frac{3}{7}\right)$ ۵۳- $3,3,3$

۵۵- 12

۵۷- $\frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{4}{\sqrt{3}}$ ۵۹- $2ft \times 2ft \times 1ft$

۶۱- (الف)- روی نیمدایره، $\max f=2\sqrt{2}$ در $t=\frac{\pi}{4}$ ، $\min f=-2$ در $t=\pi$.

روی ربع دایره، $\max f=2\sqrt{2}$ در $t=\frac{\pi}{4}$ ؛ $\min f=2$ در $\frac{\pi}{2}$ و $t=0$.

(ب)- روی نیمدایره، $\max g=2$ در $t=\frac{\pi}{4}$ ؛ $\min g=-2$ در $t=\frac{3\pi}{4}$ ،

روی ربع دایره، $\max g = 2$ در $t=\frac{\pi}{4}$ ؛ $\min g = 0$ در $\frac{\pi}{2}$ و $t=0$.

(پ)- روی نیمدایره، $\max h = 8$ در π و $t=0$ ،

$\min h = 4$ در $t=\frac{\pi}{2}$.

روی ربع دایره، $\max h=8$ در $t=0$ ، $\min h=4$ در $t=\frac{\pi}{2}$.

۶۳- (۱)- $\min f = -\frac{1}{2}$ در $t=-\frac{1}{2}$ ؛ بدون ماکسیمم

(۲)- $\max f = 0$ در 0 و $t=-1$ ؛

$\min f = -\frac{1}{2}$ در $t=-\frac{1}{2}$.

(۳)- $\max f = 4$ در $t=1$ ؛ $\min f = 0$ در $t=0$.

۶۷- $y=-\frac{20}{13}x+\frac{9}{13}$ و $y|_{x=4}=-\frac{71}{13}$

بخش ۱۴-۸

۱- $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$ و $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$ ۳- 39

۵- $\left(3,\pm3\sqrt{2}\right)$ ۷- (الف)- 8 (ب)- 64

۹- $r=2cm$ و $h=4cm$

۱۱- $4\sqrt{2}$ = طول ، $3\sqrt{2}$ = عرض

۱۳- $f(0,0)=0$ مینیمم است، $f(2,4)=20$ ماکسیمم است.

۱۵- 0°=پایین ترین و 125°=بالاترین

۱۷- $\left(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2}\right)$ ۱۹- 1 ۲۱- $(0,0,2)$ و $(0,0,-2)$

۲۳- $f(1,-2,5)=30$ ماکسیمم است،

$f(-1,2,-5)=-30$ مینیمم است.

۲۵- ۳ ، ۳، ۳

۲۷- $\frac{2}{\sqrt{3}}$ در $\frac{2}{\sqrt{3}}$ در $\frac{2}{\sqrt{3}}$ واحد.

۲۹- $(\pm4/3,-4/3,-4/3)$ ۳۱- $U(8,14)=\$128$

۳۳- $f(2/3,4/3,-4/3)=\frac{4}{3}$ ۳۵- $(2,4,4)$

۳۷- ماکسیمم برابر است با $1+6\sqrt{3}$ در $\left(\pm\sqrt{6},\sqrt{3},1\right)$ ، مینیمم برابر است با $1-6\sqrt{3}$ در $\left(\pm\sqrt{6},-\sqrt{3},1\right)$

۳۹- ماکسیمم ۴ در $(0,0,\pm2)$ ، مینیمم ۲ در $\left(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2},0\right)$.

بخش ۱۴-۹

۱- درجه دوم: $x+xy$ ، درجه سوم: $x+xy+\frac{1}{2}xy^2$

۳- درجه دوم: xy ؛ درجه سوم: xy.

۵- درجه دوم: $y+\frac{1}{2}\left(2xy-y^2\right)$ ؛

درجه سوم:

$$y+\frac{1}{2}\left(2xy-y^2\right)+\frac{1}{6}\left(3x^2y-3xy^2+2y^3\right)$$

۷- درجه دوم: $\frac{1}{2}\left(2x^2+2y^2\right)=x^2+y^2$؛

درجه سوم: x^2+y^2

۹- درجه دوم: $1+(x+y)+(x+y)^2$ ؛

درجه سوم: $1+(x+y)+(x+y)^2+(x+y)^3$

۱۱- درجه دوم: $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$ و $E(x,y)\le 0.00134$

بخش ۱۴-۱۰

۱- (الف)- 0 (ب)- $1+2z$ (پ)- $1+2z$

۳- (الف)- $\frac{\partial U}{\partial P}+\frac{\partial U}{\partial T}\left(\frac{V}{nR}\right)$

(ب)- $\frac{\partial U}{\partial P}\left(\frac{nR}{V}\right)+\frac{\partial U}{\partial T}$

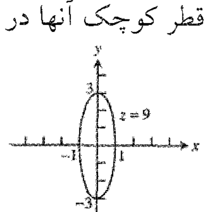
۵- (الف)- 5 (ب)- 5

۷- $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta=\cos\theta$

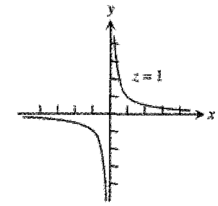
$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_y=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

تمرین های عملی

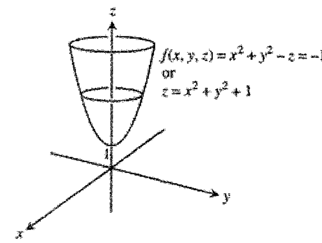
۱- دامنه: تمام نقاط صفحه xy؛ برد: $z\ge 0$. خم های تراز بیضی هایی هستند که قطر بزرگ آنها در امتداد محور y و قطر کوچک آنها در امتداد محور x قرار دارد.



۳- دامنه: تمام نقاط (x,y) به قسمتی که $x\ne 0$ و $y\ne 0$ ؛ برد: $z\ne 0$. خم های تراز هذلولی هایی هستند که محورهای x و y مجانب های آنها هستند.



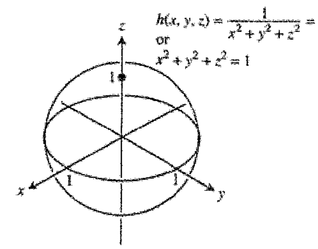
۵- دامنه: تمام نقاط فضای xyz؛ برد: تمام اعداد حقیقی. رویه های تراز سهمیوارهای دورانی هستند که محور z محور آنهاست.



۷- دامنه: تمام نقاط (x, y, z) به قسمتی که

$$(x, y, z) \neq (0,0,0)$$

برد: اعداد حقیقی مثبت . رویه های تراز کره هایی به مرکز $(0,0,0)$ و شعاع $r > 0$ هستند.



۹- -2 ۱۱- $1/2$ ۱۳- 1 ۱۵- $y = kx^2$ و $k \neq 1$

۱۷- خیر، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ موجود نیست.

۱۹- $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta + \sin\theta$ و $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta + r\cos\theta$

۲۱- $\frac{\partial f}{\partial R_1} = -\frac{1}{R_1^2}$ و $\frac{\partial f}{\partial R_2} = -\frac{1}{R_2^2}$ و $\frac{\partial f}{\partial R_3} = -\frac{1}{R_3^2}$

۲۳- $\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{RT}{V}$ و $\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{nT}{V}$ و $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$$

۲۵- $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$ و $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{y^2}$$

۲۷- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -30x + \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 1$$

۲۹- $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = -1$

۳۱- $\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2$ و $\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2 - \pi$

۳۳-

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=1} = -(\sin 1 + \cos 2)(\sin 1) + (\cos 1 + \cos 2)(\cos 1) - 2(\sin 1 + \cos 1)(\sin 2)$$

۳۵- $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(0,1)} = -1$

۳۷- سریع ترین افزایش را در جهت

$$\mathbf{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$$

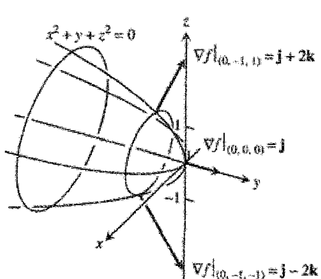
دارد. سریع ترین کاهش را در جهت $-\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ دارد؛ $D_{\mathbf{u}}f = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ $D_{-\mathbf{u}}f = -\frac{\sqrt{2}}{2}$؛ $D_{\mathbf{u}_1}f = -\frac{7}{10}$ که $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

۳۹- سریعترین افزایش در جهت $\mathbf{u} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$ ؛ سریع ترین کاهش در جهت $-\mathbf{u} = -\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}$ ؛ $D_{\mathbf{u}}f = 7$؛ $D_{-\mathbf{u}}f = -7$ ؛ $D_{\mathbf{u}_1}f = 7$ که در آن $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

۴۱- $\pi/\sqrt{2}$

۴۳- (الف)- $f_x(1,2) = f_y(1,2) = 2$ (ب)- $14/5$

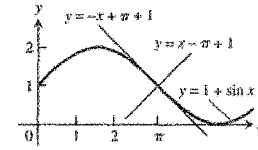
۴۵-



۴۷- مماس: $4x - y - 5z = 4$ ؛ خط قائم: $x = 2 + 4t$ و $y = -1 - t$ و $z = 1 - 5t$

۴۹- $2y - z - 2 = 0$

۵۱- مماس: $x + y = \pi + 1$ ؛ خط قائم: $y = x - \pi + 1$



۵۳- $x=1-2t$ و $y=1$ و $z=1/2+2t$

۵۵- پاسخ ها به کران بالایی بستگی خواهند داشت که برای $|f_{xx}|$ ، $|f_{xy}|$ و $|f_{yy}|$ بکار برده می شوند. به ازای $M=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $|E|\le 0.0142$. به ازای $M=1$ ، $E\le 0.02$.

۵۷- $L(x,y,z)=y-3z$

$L(x,y,z)=x+y-z-1$

۵۹- در مورد قطر باید بیشتر دقت کرد.

۶۱- $dI=0.038$ ، درصد تغییر $I=15/83\%$ ، به تغییر ولتاژ حساستر است.

۶۳- (الف)- ۵٪ ۶۵- مینیمم موضعی ۸- در $(-2,-2)$.

۶۷- نقطه زینی در $(0,0)$ ، $f(0,0)=0$ ؛

ماکسیمم موضعی $\frac{1}{4}$ در $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

۶۹- نقطه زینی در $(0,0)$ ، $f(0,0)=0$ ؛ مینیمم موضعی ۴- در $(0,2)$؛ ماکسیمم موضعی ۴ در $(-2,0)$؛ نقطه زینی در $(-2,2)$، $f(-2,2)=0$.

۷۱- ماکسیمم مطلق: ۲۸ در $(0,4)$؛

مینیمم مطلق: $-\frac{9}{4}$ در $\left(\frac{3}{2},0\right)$.

۷۳- ماکسیمم مطلق: ۱۸ در $(2,-2)$ ؛

مینیمم مطلق: $-\frac{17}{4}$ در $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$

۷۵- ماکسیمم مطلق: ۸ در $(-2,0)$ ؛

مینیمم مطلق: ۱- در $(1,0)$

۷۷- ماکسیمم مطلق: ۴ در $(1,0)$ ؛

مینیمم مطلق: ۴- در $(0,-1)$.

۷۹- ماکسیمم مطلق: ۱ در $(0,\pm1)$ و $(1,0)$؛ مینیمم مطلق: ۱- در $(-1,0)$.

۸۱- ماکسیمم: ۵ در $(0,1)$ ؛ مینیمم: $-\frac{1}{3}$ در $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$.

۸۳- ماکسیمم: $\sqrt{3}$ در $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ؛ مینیمم: $-\sqrt{3}$ در $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

۸۵- $\left(\frac{c^2V}{ab}\right)^{1/3}$= عرض، $\left(\frac{b^2V}{ac}\right)^{1/3}$= عمق ،

$\left(\frac{a^2V}{bc}\right)^{1/3}$ = ارتفاع

۸۷- ماکسیمم: $\frac{3}{2}$ در $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$ و $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$ ؛ مینیمم: $\frac{1}{2}$ در $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$

۸۹- (الف)- $(2y+x^2z)e^{yz}$

(ب)- $x^2e^{yz}\left(y-\frac{z}{2y}\right)$ (پ)- $(1+x^2y)e^{yz}$

۹۱- $\frac{\partial w}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}$

$\frac{\partial w}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}$

۹۷- $(t,-t\pm4,t)$ ، t عددی حقیقی.

تمرینهای اضافی و پیشرفته

۱- $f_{xy}(0,0)=-1$ و $f_{yx}(0,0)=1$

۷- (پ)- $\frac{r^2}{2}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$

۱۳- $V=\frac{\sqrt{3}abc}{2}$

۱۷- $f(x,y)=\frac{y}{2}+4$ و $g(x,y)=\frac{x}{2}+\frac{9}{2}$

۱۹- $y=2\ln|\sin x|+\ln 2$

۲۱- (الف)- $\frac{1}{\sqrt{53}}(2\mathbf{i}+7\mathbf{j})$

(ب)- $\frac{-1}{\sqrt{29,097}}(98\mathbf{i}-127\mathbf{j}+58\mathbf{k})$

۲۳- $w=e^{-c^2\pi^2t}\sin\pi x$

فصل ۱۵

بخش ۱۵-۱

۱- 24 ۳- 1 ۵- 16 ۷- $2\ln2-1$

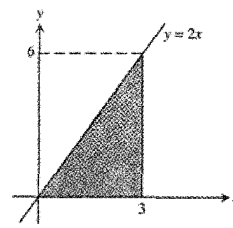
۹- $(3/2)(5-e)$ ۱۱- $3/2$ ۱۳- 14

۱۵- 0 ۱۷- $1/2$ ۱۹- $2\ln 2$ ۲۱- $(\ln 2)^2$

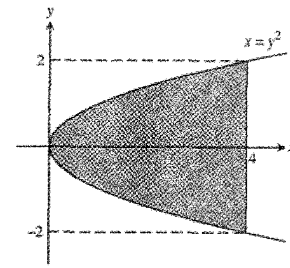
۲۳- $8/3$ ۲۵- 1 ۲۷- $\sqrt{2}$

بخش ۱۵-۲

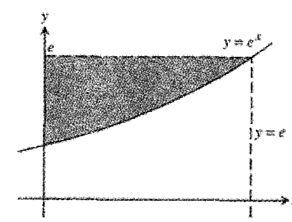
۱-



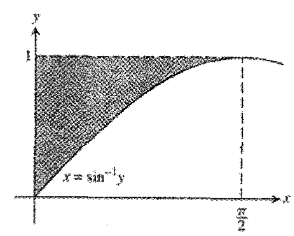
۳-



۵-



۷-



۹- (الف)- $0\le x\le 2$ و $x^3\le y\le 8$

(ب)- $0\le y\le 8$ و $0\le x\le y^{1/3}$

۱۱- (الف)- $0\le x\le 3$ و $x^2\le y\le 3x$

(ب)- $0\le y\le 9$ و $\frac{y}{3}\le x\le \sqrt{y}$

۱۳- (الف) - $0\le x\le 9$ و $0\le y\le \sqrt{x}$

(ب) - $0\le y\le 3$ و $y^2\le x\le 9$

۱۵- (الف) - $0\le x\le \ln 3$ و $e^{-x}\le y\le 1$

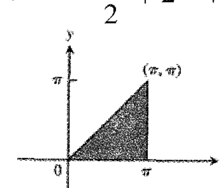
(ب) - $\frac{1}{3}\le y\le 1$ و $-\ln y\le x\le \ln 3$

۱۷- (الف) - $0\le x\le 1$ و $x\le y\le 3-2x$

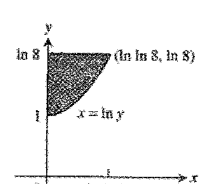
(ب) - $0\le y\le 1$ و $0\le x\le y \cup 1\le y\le 3$ و

$0\le x\le \frac{3-y}{2}$

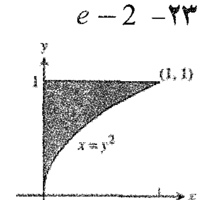
۱۹- $\frac{\pi^2}{2}+2$



۲۱- $8\ln 8-16+e$



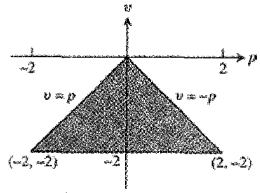
۲۳- $e-2$



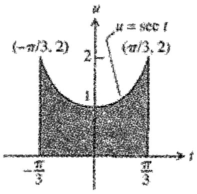
۲۵- $\frac{3}{2}\ln 2$

۲۷- $-1/10$

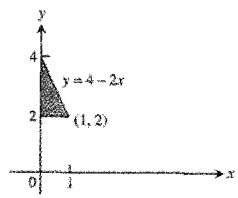
۲۹- 8



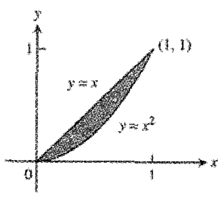
۳۱- 2π



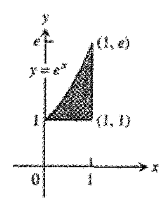
۳۳- $\int_2^4\int_0^{(4-y)/2} dxdy$



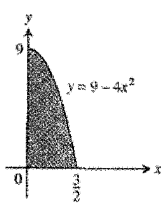
۳۵- $\int_0^1\int_{x^2}^{x} dydx$



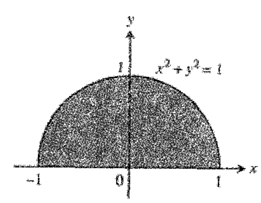
۳۷- $\int_1^e\int_{\ln y}^{1} dxdy$



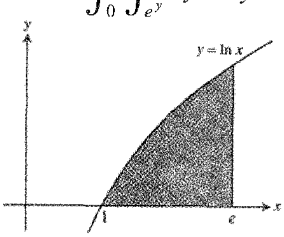
۳۹- $\int_0^9\int_0^{\left(\sqrt{9-y}\right)/2} 16xdxdy$



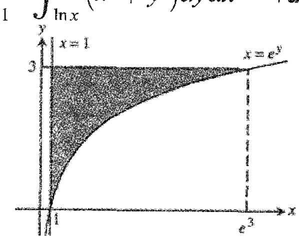
۴۱- $\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3ydydx$



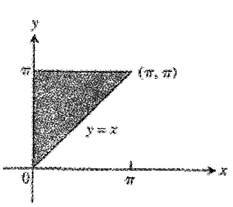
۴۳- $\int_0^1\int_{e^y}^{e} xydxdy$



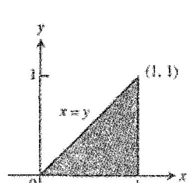
۴۵- $\int_1^{e^3}\int_{\ln x}^{3}(x+y)dydx$



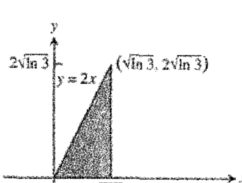
۴۷- 2



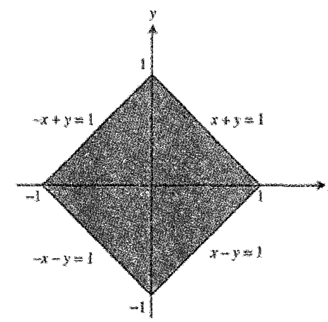
۴۹- $\frac{e-2}{2}$

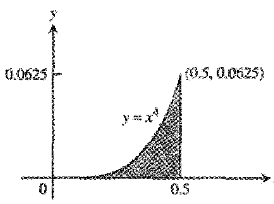


۵۱- 2



۵۳- $1/(80\pi)$ ۵۵- $-2/3$

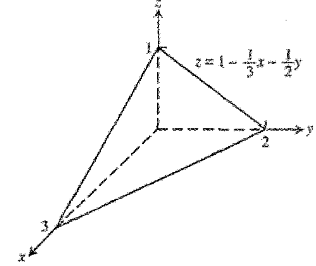


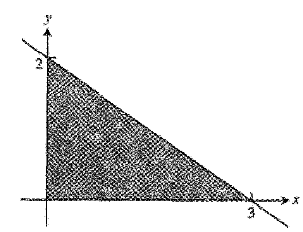


۵۷- $4/3$ ۵۹- $625/12$ ۶۱- 16

۶۳- 20 ۶۵- $2(1+\ln 2)$

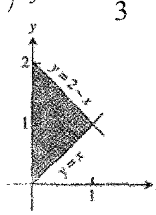
۶۷-





۶۹- 1 ۷۱- π^2 ۷۳- $-\dfrac{3}{32}$ ۷۵- $\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$

۷۷- $\displaystyle\int_0^1\int_x^{2-x}\left(x^2+y^2\right)dydx=\frac{4}{3}$



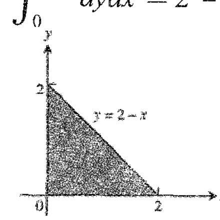
۷۹- R عبارت است از مجموعه نقاط (x,y) به قسمی که
$x^2+2y^2<4$

۸۱- خیر، بنابه قضیه فوبینی، دو ترتیب انتگرال گیری باید نتیجه یکسان بدست دهند.

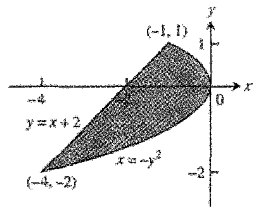
۸۵- 0.603 ۸۷- 0.233

بخش ۱۵-۳

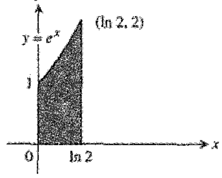
۱- $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2-x}dydx=2$ یا $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2-y}dxdy=2$



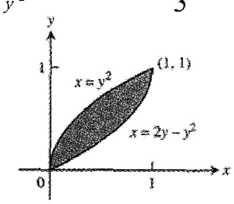
۳- $\displaystyle\int_{-2}^{1}\int_{y-2}^{-y^2}dxdy=\frac{9}{2}$



۵- $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\int_0^{e^x}dydx=1$

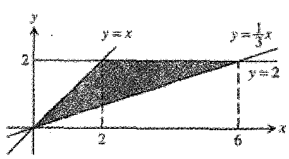


۷- $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{2y-y^2}dxdy=\frac{1}{3}$



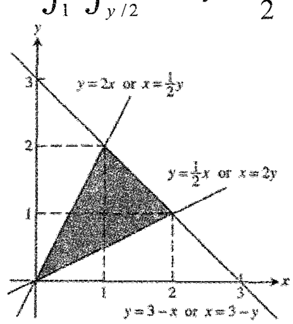
۹- $\displaystyle\int_0^2\int_y^{3y}1dxdy=4$ یا

$$\int_0^2\int_{x/3}^{x}1dydx+\int_2^6\int_{x/3}^{2}1dydx=4$$

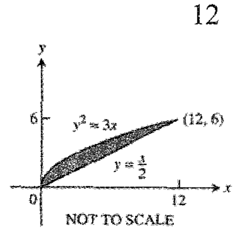


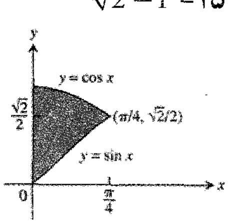
۱۱- $\displaystyle\int_0^1\int_{x/2}^{2x}1dydx+\int_1^2\int_{x/2}^{3-x}1dydx=\frac{3}{2}$ یا

$$\int_0^1\int_{y/2}^{2y}1dxdy+\int_1^2\int_{y/2}^{3-y}1dxdy=\frac{3}{2}$$

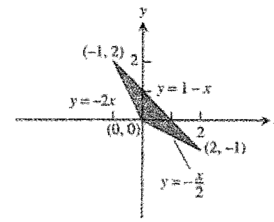


۱۳- 12 ۱۵- $\sqrt{2}-1$





۱۷- $\dfrac{3}{2}$



۱۹- (الف)- 0 (ب)- $4/\pi^2$ ۲۱- $8/3$

۲۳- $40,000\left(1-e^{-2}\right)\ln(7/2)\approx 43,329$

بخش ۱۵-۴

۱- $\frac{\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$ و $0\le r\le 9$

۳- $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$ و $0\le r\le\csc\theta$

۵- $0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$ و $0\le r\le 2\sqrt{3}\sec\theta$ ؛

$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $1\le r\le 2\csc\theta$

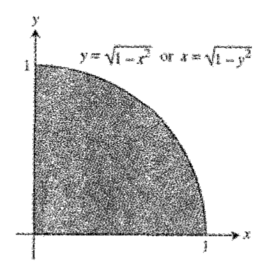
۷- $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و $0\le r\le 2\cos\theta$

۹- $\frac{\pi}{2}$ ۱۱- 2π ۱۳- 36 ۱۵- $2-\sqrt{3}$

۱۷- $(1-\ln 2)\pi$ ۱۹- $(2\ln 2-1)(\pi/2)$

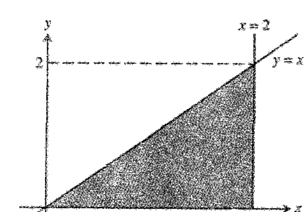
۲۱- $\frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{3}$

۲۳-



$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx$ یا $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\,dy$

۲۵-



$\int_0^2\int_0^x y^2\left(x^2+y^2\right)dy\,dx$ یا $\int_0^2\int_y^2 y^2\left(x^2+y^2\right)dx\,dy$

۲۷- $2(\pi-1)$ ۲۹- 12π ۳۱- $(3\pi/8)+1$

۳۳- $\frac{2a}{3}$ ۳۵- $\frac{2a}{3}$

۳۷- $2\pi\left(2-\sqrt{e}\right)$ ۳۹- $\frac{4}{3}+\frac{5\pi}{8}$

۴۱- (الف)- $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (ب)- 1

۴۳- $\pi\ln 4$، خیر ۴۵- $\frac{1}{2}\left(a^2+2h^2\right)$

بخش ۱۵-۵

۱- $\frac{1}{6}$

۳- $\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{3-3x-3y/2} dz\,dy\,dx$

$\int_0^2\int_0^{1-y/2}\int_0^{3-3x-3y/2} dz\,dx\,dy$

$\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{2-2x-2z/3} dy\,dz\,dx$

$\int_0^3\int_0^{1-z/3}\int_0^{2-2x-2z/3} dy\,dx\,dz$

$\int_0^2\int_0^{3-3y/2}\int_0^{1-y/2-z/3} dx\,dz\,dy$

$\int_0^3\int_0^{2-2z/3}\int_0^{1-y/2-z/3} dx\,dy\,dz$

مقدار هر شش انتگرال برابر ۱ است.

۵- $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,dz\,dx\,dy$

$\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,dz\,dx\,dy$

$\int_{-2}^2\int_4^{8-y^2}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,dx\,dz\,dy$

$+\int_{-2}^2\int_{y^2}^4\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,dx\,dz\,dy$

$\int_4^8\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz$

$+\int_0^4\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz$

$\int_{-2}^2\int_4^{8-x^2}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,dy\,dz\,dx$

$+\int_{-2}^2\int_{x^2}^4\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,dy\,dz\,dx$

$\int_4^8\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,dy\,dx\,dz$

$+\int_0^4\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,dy\,dx\,dz$

مقدار هر شش انتگرال برابر 16π است.

۷- 1 ۹- 6 ۱۱- $\frac{5\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}$ ۱۳- 18

۱۵- $7/6$ ۱۷- 0 ۱۹- $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$

۲۱- (الف)- $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-z} dydzdx$

(ب)- $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-z} dydxdz$

(پ)- $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdydz$

(ت)- $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdzdy$

(ث)- $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{1-y} dzdxdy$

۲۳- $2/3$ ۲۵- $20/3$ ۲۷- 1 ۲۹- $16/3$

۳۱- $8\pi-\frac{32}{3}$ ۳۳- 2 ۳۵- 4π

۳۷- $31/3$ ۳۹- 1 ۴۱- $2\sin 4$ ۴۳- 4

۴۵- $a=13/3$ یا $a=3$

۴۷- دامنه مجموعه تمام نقاط (x,y,z) است که در $4x^2+4y^2+z^2\le 4$ صدق می کنند.

بخش ۱۵-۶

۱- $\bar{x}=5/14$ و $\bar{y}=38/35$

۳- $\bar{x}=64/35$ و $\bar{y}=5/7$

۵- $\bar{x}=\bar{y}=4a/(3\pi)$

۷- $I_x=I_y=4\pi$ و $I_0=8\pi$

۹- $\bar{x}=-1$ و $\bar{y}=1/4$

۱۱- $I_x=64/105$

۱۳- $\bar{x}=3/8$ و $\bar{y}=17/16$

۱۵- $\bar{x}=11/3$ و $\bar{y}=14/27$ و $I_y=432$

۱۷- $\bar{x}=0$ و $\bar{y}=13/31$ و $I_y=7/5$

۱۹- $\bar{x}=0$ و $\bar{y}=7/10$ و $I_x=9/10$ و $I_y=3/10$ و $I_0=6/5$

۲۱- $I_x=\frac{M}{3}\left(b^2+c^2\right)$ و $I_y=\frac{M}{3}\left(a^2+c^2\right)$

$I_z=\frac{M}{3}\left(a^2+b^2\right)$

۲۳- $\bar{x}=\bar{y}=0$ و $\bar{z}=12/5$

$I_x=7904/105\approx 75.28$ و $I_y=4832/63\approx 76.70$

$I_z=256/45\approx 5.69$

۲۵- (الف)- $\bar{x}=\bar{y}=0$ و $\bar{z}=8/3$

(ب)- $c=2\sqrt{2}$ ۲۷- $I_L=1386$

۲۹- (الف)- $4/3$ (ب)- $\bar{x}=4/5$ و $\bar{y}=\bar{z}=2/5$

۳۱- (الف)- $5/2$ (ب)- $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=8/15$

(پ)- $I_x=I_y=I_z=11/6$ ۳۳- ۳

۳۷- (الف)- $I_{c.m.}=\frac{abc\left(a^2+b^2\right)}{12}$ و $R_{c.m.}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}$

(ب)- $I_L=\frac{abc\left(a^2+7b^2\right)}{3}$ و $R_L=\sqrt{\frac{a^2+7b^2}{3}}$

بخش ۱۵-۷

۱- $\frac{4\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$ ۳- $\frac{17\pi}{5}$ ۵- $\pi\left(6\sqrt{2}-8\right)$

۷- $\frac{3\pi}{10}$ ۹- $\pi/3$

۱۱- (الف)- $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta$

(ب)- $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{3}}\int_{0}^{1} rdrdzd\theta+\int_{0}^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-z^2}} rdrdzd\theta$

(پ)- $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{4-r^2}}\int_{0}^{2\pi} rd\theta dzdr$

۱۳- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos\theta}\int_{0}^{3r^2} f\left(r,\theta,z\right)dz\, r\,dr\,d\theta$

۱۵- $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\sin\theta}\int_{0}^{4-r\sin\theta} f\left(r,\theta,z\right)dz\, r\,dr\,d\theta$

۱۷- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{1+\cos\theta}\int_{0}^{4} f\left(r,\theta,z\right)dz\, r\,dr\,d\theta$

۱۹- $\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\sec\theta}\int_{0}^{2-r\sin\theta} f\left(r,\theta,z\right)dz\, r\,dr\,d\theta$

۲۱- π^2 ۲۳- $\pi/3$ ۲۵- 5π ۲۷- 2π

۲۹- $\left(\frac{8-5\sqrt{2}}{2}\right)\pi$

۳۱- (الف)-

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/6}\int_{0}^{2}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$
$$+\int_{0}^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{0}^{\csc\phi}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

(ب)-

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sin^{-1}(1/\rho)}\rho^2\sin\phi d\phi d\rho d\theta$$
$$+\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\pi/2}\rho^2\sin\phi d\phi d\rho d\theta$$

۳۳- $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/2}\int_{\cos\phi}^{2}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\frac{31\pi}{6}$

۳۵- $\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1-\cos\phi}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta=\frac{8\pi}{3}$

۳۷- $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi}\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta=\frac{\pi}{3}$

۳۹- (الف)- $8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

(ب)- $8\int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\, dr\, d\theta$

(پ)- $8\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$

۴۱- (الف)- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2}\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

(ب)- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\, dr\, d\theta$

(پ)- $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$

(ت)- $5\pi/3$

۴۳- $8\pi/3$ ۴۵- $9/4$ ۴۷- $\frac{3\pi-4}{18}$ ۴۹- $\frac{2\pi a^3}{3}$

۵۱- $5\pi/3$ ۵۳- $\pi/2$ ۵۵- $\frac{4(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$ ۵۷- 16π

۵۹- $5\pi/2$ ۶۱- $\frac{4\pi(8-3\sqrt{3})}{3}$ ۶۳- $2/3$ ۶۵- $3/4$

۶۷- $\bar{x}=\bar{y}=0$ و $\bar{z}=3/8$

۶۹- $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,3/8)$

۷۱- $\bar{x}=\bar{y}=0$ و $\bar{z}=5/6$ ۷۳- $I_x=\pi/4$

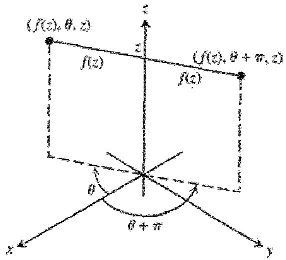
۷۵- $\frac{a^4h\pi}{10}$

۷۷- (الف)- $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\frac{4}{5}\right)$ و $I_z=\frac{\pi}{12}$

(ب)- $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\frac{5}{6}\right)$ و $I_z=\frac{\pi}{14}$

۸۱- $\frac{3M}{\pi R^3}$

۸۵- معادله رویه $r=f(z)$ گویای این مطلب است که نقطه $(r,\theta,z)=(f(z),\theta,z)$ به ازای تمام مقادیر θ روی رویه قرار خواهد گرفت. در حالت خاص، $(f(z),\theta+\pi,z)$ روی رویه قرار می گیرد هر وقت $(f(z),\theta,z)$ روی رویه قرار داشته باشد، لذا رویه نسبت به محور z متقارن است.



بخش ۱۵-۸

۱- (الف)- $x=\frac{u+v}{3}$ و $y=\frac{v-2u}{3}$ ؛ $\frac{1}{3}$

(ب)- ناحیه مثلثی شکل با مرزهای $u=0$ ، $v=0$ و

$$u+v=3$$

۳- (الف)- $x=\frac{1}{5}(2u-v)$ و $y=\frac{1}{10}(3v-u)$ ؛ $\frac{1}{10}$

(ب)- ناحیه مثلثی شکل با مرزهای $3v=u$ ، $v=2u$ و

$$3u+v=10$$

۷- $\frac{64}{5}$ ۹- $\int_1^2\int_1^3(u+v)\frac{2u}{v}du\, dv=8+\frac{52}{3}\ln 2$

۱۱- $\frac{\pi ab\left(a^2+b^2\right)}{4}$ ۱۳- $\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{e^2}\right)\approx 0.4687$

۱۵- $\frac{225}{16}$

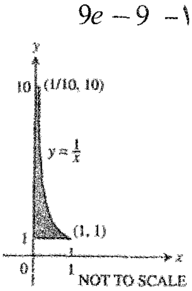
۱۷- (الف)- $\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u\cos^2 v+u\sin^2 v=u$

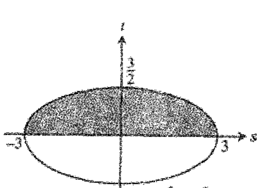
(ب)- $\begin{vmatrix}\sin v & u\cos v\\ \cos v & -u\sin v\end{vmatrix}=-u\sin^2 v-u\cos^2 v=-u$

۲۱- 12 ۲۳- $\frac{a^2b^2c^2}{6}$

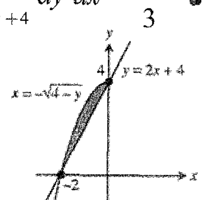
تمرین های عملی

۱- $9e-9$ ۳- $9/2$

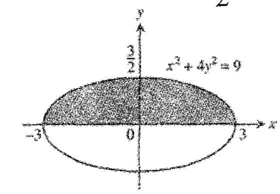




۵- $\int_{-2}^{0}\int_{2x+4}^{4-x^2}dy\, dx=\frac{4}{3}$



۷- $\int_{-3}^{3}\int_0^{(1/2)\sqrt{9-x^2}} y\,dy\,dx = \frac{9}{2}$



۹- $\sin 4$ ۱۱- $\frac{\ln 17}{4}$ ۱۳- $4/3$ ۱۵- $4/3$

۱۷- $1/4$ ۱۹- π ۲۱- $\frac{\pi-2}{4}$

۲۳- 0 ۲۵- $8/35$ ۲۷- $\pi/2$

۲۹- $\frac{2\left(31-3^{5/2}\right)}{3}$

۳۱- (الف)- $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 3dz\,dx\,dy$

(ب)- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 3\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

(پ)- $2\pi\left(8-4\sqrt{2}\right)$

۳۳- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{\pi}{3}$

۳۵-

$$\int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2xy\,dz\,dy\,dx$$

$$+\int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2xy\,dz\,dy\,dx$$

۳۷- (الف)- $\frac{8\pi\left(4\sqrt{2}-5\right)}{3}$ (ب)- $\frac{8\pi\left(4\sqrt{2}-5\right)}{3}$

۳۹- $I_z=\frac{8\pi\delta\left(b^5-a^5\right)}{15}$ ۴۱- $\bar{x}=\bar{y}=\frac{1}{2-\ln 4}$

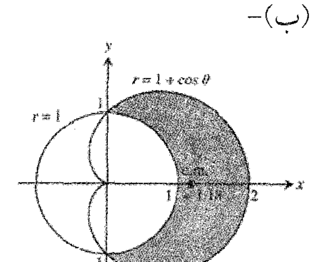
۴۳- $I_0=104$ ۴۵- $I_x=2\delta$

۴۷- $M=4$ و $M_x=0$ و $M_y=0$

۴۹- $\bar{x}=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ و $\bar{y}=0$

۵۱- (الف)- $\bar{x}=\frac{15\pi+32}{6\pi+48}$ و $\bar{y}=0$

(ب)-



تمرین های اضافی وپیشرفته

۱- (الف)- $\int_{-3}^{2}\int_x^{6-x^2} x^2dy\,dx$

(ب)- $\int_{-3}^{2}\int_x^{6-x^2}\int_0^{x^2} dz\,dy\,dx$ (پ)- $125/4$

۳- 2π ۵- $3\pi/2$

۷- (الف)- شعاع حفره = ۱ ، شعاع کره = ۲.

(ب)- $4\sqrt{3}\pi$ ۹- $\pi/4$ ۱۱- $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

۱۵- $1/\sqrt[4]{3}$ ۱۷- $Mass=a^2\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)-b\sqrt{a^2-b^2}$

و $I_0=\frac{a^4}{2}\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{b^3}{2}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{b^3}{6}\left(a^2-b^2\right)^{3/2}$

۱۹- $\frac{1}{ab}\left(e^{a^2b^2}-1\right)$ ۲۱-(ب)- 1 (پ)- 0

۲۵- $h=\sqrt{20}in$ و $h=\sqrt{60}in$ ۲۷- $2\pi\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

فصل ۱۶

بخش ۱۶-۱

۱- نمودار (پ) ۳- نمودار (چ) (۵)- نمودار (ت)

۷- نمودار (ج)

۹- $\sqrt{2}$ ۱۱- $\frac{13}{2}$ ۱۳- $3\sqrt{14}$ ۱۵- $\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}+9\right)$

۱۷- $\sqrt{3}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

۱۹- (الف)- $4\sqrt{5}$ (ب)- $\frac{1}{12}\left(17^{3/2}-1\right)$

۲۱- $\frac{15}{32}\left(e^{16}-e^{64}\right)$ ۲۳- $\frac{1}{27}\left(40^{3/2}-13^{3/2}\right)$

۲۵- $\frac{1}{6}\left(5^{3/2}-7\sqrt{2}-1\right)$ ۲۷- $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}$

۲۹- 8 ۳۱- $\frac{1}{6}\left(17^{3/2}-1\right)$ ۳۳- $2\sqrt{2}-1$

۳۵- (الف)- $4\sqrt{2}-2$ (ب)- $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

۳۷- $I_z=2\pi\delta a^3$

۳۹- (الف)- $I_z=2\pi\sqrt{2}\delta$

(ب)- $I_z=4\pi\sqrt{2}\delta$

۴۱- $I_x=2\pi-2$

بخش ۱۶-۲

۱- $\nabla f=-(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$

۳- $\nabla g=-\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\mathbf{i}-\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)\mathbf{j}+e^z\mathbf{k}$

۵- $\mathbf{F}=-\dfrac{kx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\mathbf{i}-\dfrac{ky}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\mathbf{j}$ ، هر $k>0$

۷- (الف)- $9/2$ (ب)- $13/3$ (پ)- $9/2$

۹- (الف)- $1/3$ (ب)- $-1/5$ (پ)- 0

۱۱- (الف)- 2 (ب)- $3/2$ (پ)- $1/2$

۱۳- $-15/2$ ۱۵- 36

۱۷- (الف)- $-5/6$ (ب)- 0 (پ)- $-7/12$

۱۹- $1/2$ ۲۱- $-\pi$ ۲۳- $69/4$ ۲۵- $-39/2$

۲۷- $25/6$

۲۹- (الف)- $Circ_1=0$ و $circ_2=2\pi$ و $flux_1=2\pi$ و $flux_2=0$

(ب)- $Circ_1=0$ و $circ_2=8\pi$ و $flux_1=8\pi$ و $flux_2=0$

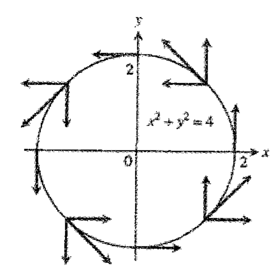
۳۱- $Circ=0$ $flux=a^2\pi$ ۳۳- $Circ=a^2\pi$

$flux=0$

۳۵- (الف)- $-\dfrac{\pi}{2}$ (ب)- 0 (پ)- 1

۳۷- (الف)- 32 (ب)- 32 (پ)- 32

۳۹-



۴۱- (الف)- $\mathbf{G}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ (ب)- $\mathbf{G}=\sqrt{x^2+y^2}\,\mathbf{F}$

۴۳- $\mathbf{F}=-\dfrac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ۴۷- 48 ۴۹- π

۵۱- 0 ۵۳- $\dfrac{1}{2}$

بخش ۱۶-۳

۱- پایستار ۲- ناپایستار ۵- ناپایستار

۷- $f(x,y,z)=x^2+\dfrac{3y^2}{2}+2z^2+C$

۹- $f(x,y,z)=xe^{y+2z}+C$

۱۱-

$$f(x,y,z)=x\ln x-x+\tan(x+y)+\frac{1}{2}\ln\left(y^2+z^2\right)+C$$

۱۳- 49 ۱۵- -16 ۱۷- 1 ۱۹- $9\ln 2$

۲۱- 0 ۲۳- -3 ۲۷- $\mathbf{F}=\nabla\left(\dfrac{x^2-1}{y}\right)$

۲۹- (الف)- 1 (ب)- 1 (پ)- 1

۳۱- (الف) 2 (ب)- 2

۳۳- (الف)- $c=b=2a$ (ب)- $c=b=2$

۳۵- مهم نیست از چه مسیری استفاده کنید. چون میدان پایستار است کار روی تمام مسیرها یکسان خواهد بود.

۳۷- نیروی $\mathbf{F}$ پایستار است چون تمام مشتقات جزئی M ، N و P صفراند.

$$f(x,y,z)=ax+by+cz+C$$
$$A=(xa,ya,za) \text{ و } B=(xb,yb,zb)$$

بنابراین

$$\int \mathbf{F.dr}=f(B)-f(A)$$
$$=a(xb-xa)+b(yb-ya)+c(zb-za)$$
$$=\mathbf{F}.\overrightarrow{AB}$$

بخش ۱۶-۴

۱- 0 = شار ، $2\pi a^2$ = گردش

۳- $-\pi a^2$ = شار ، 0 = گردش

۵- ۲ = شار ، 0 = گردش

۷- ۹- = شار، ۹= گردش

۹- $\dfrac{-11}{60}$ = شار ، $\dfrac{-7}{60}$ = گردش

۱۱- $\dfrac{64}{9}$ = شار ، 0 = گردش

۱۳- $\dfrac{1}{2}$ = شار، $\dfrac{1}{2}$ = گردش ۱۵- $\dfrac{1}{5}$ = شار، $-\dfrac{1}{12}$ = گردش

۱۷- 0 ۱۹- $2/33$ ۲۱- 0 ۲۳- -16π

۲۵- πa^2 ۲۷- $3\pi/8$

۲۹- (الف)- 0 اگر C در جهت پاد ساعتگرد پیموده شود.

(ب)- $(h-k)$ (مساحت ناحیه).

۳۹- (الف)- 0

بخش ۱۶-۵

۱- $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+r^2\mathbf{k}$

$0\le r\le 2$ و $0\le\theta\le 2\pi$

۳- $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+(r/2)\mathbf{k}$

$0<\theta\le\pi/2$ و $0\le r\le 6$

-۵ $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+\sqrt{9-r^2}\,\mathbf{k}$

$0\le r\le 3\sqrt{2}/2$ و $0\le\theta\le 2\pi$ همچنین

$\mathbf{r}(\phi,\theta)=(3\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(3\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(3\cos\phi)\mathbf{k}$

$0\le\phi\le\pi/4$ و $0\le\theta\le 2\pi$

-۷ $\mathbf{r}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(\sqrt{3}\cos\phi)\mathbf{k}$

$\pi/3\le\phi\le 2\pi/3$ و $0\le\theta\le 2\pi$

-۹ $\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(4-y^2)\mathbf{k}$

$0\le x\le 2$ و $-2\le y\le 2$

-۱۱ $\mathbf{r}(u,v)=u\mathbf{i}+(3\cos v)\mathbf{j}+(3\sin v)\mathbf{k}$

$0\le u\le 3$ و $0\le v\le 2\pi$

-۱۳ (الف)-

$\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+(1-r\cos\theta-r\sin\theta)\mathbf{k}$

$0\le r\le 3$ و $0\le\theta\le 2\pi$

(ب)-

$\mathbf{r}(u,v)=(1-u\cos v-u\sin v)\mathbf{i}+(u\cos v)\mathbf{j}+(u\sin v)\mathbf{k}$

$0\le u\le 3$ و $0\le v\le 2\pi$

-۱۵ $\mathbf{r}(u,v)=(4\cos^2 v)\mathbf{i}+u\mathbf{j}+(4\cos v\sin v)\mathbf{k}$

$0\le u\le 3$ و $-(\pi/2)\le v\le(\pi/2)$ یا

$\mathbf{r}(u,v)=(2+2\cos v)\mathbf{i}+u\mathbf{j}+(2\sin v)\mathbf{k}$

$0\le u\le 3$ و $0\le v\le 2\pi$

-۱۷ $\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{\sqrt{5}}{2}r\,dr\,d\theta=\frac{\pi\sqrt{5}}{2}$

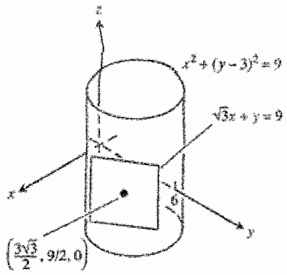
-۱۹ $\int_0^{2\pi}\int_1^3 r\sqrt{5}\,dr\,d\theta=8\pi\sqrt{5}$

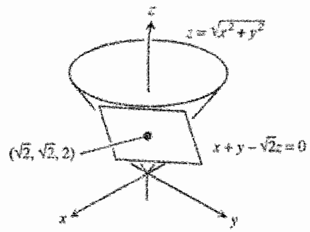
-۲۱ $\int_0^{2\pi}\int_1^4 1\,du\,dv=6\pi$

-۲۳ $\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{4u^2+1}\,du\,dv=\frac{(5\sqrt{5}-1)}{6}\pi$

-۲۵ $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi}2\sin\phi\,d\phi\,d\theta=(4+2\sqrt{2})\pi$

-۲۷ -۲۹





-۳۳ (ب)-

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[a^2b^2\sin^2\phi\cos^2\phi+b^2c^2\cos^4\phi\cos^2\theta+a^2c^2\cos^4\phi\sin^2\theta]^{1/2}d\phi\,d\theta$$

-۳۵ $x_0x+y_0y=25$ -۳۷ $13\pi/3$ -۳۹ 4

-۴۱ $6\sqrt{6}-2\sqrt{2}$ -۴۳ $\pi\sqrt{c^2+1}$

-۴۵ $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$ -۴۷ $3+2\ln 2$

-۴۹ $\frac{\pi}{6}(13\sqrt{13}-1)$ -۵۱ $5\pi\sqrt{2}$ -۵۳ $\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)$

بخش ۱۶-۶

-۱ $\iint_S x\,d\sigma=\int_0^3\int_0^2 u\sqrt{4u^2+1}\,du\,dv=\frac{17\sqrt{17}-1}{4}$

-۳ $\iint_S x^2\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\phi\cos^2\theta\,d\phi\,d\theta=\frac{4\pi}{3}$

-۵

$$\iint_S z\,d\sigma=\int_0^1\int_0^1(4-u-v)\sqrt{3}\,dv\,du=3\sqrt{3}\qquad(\text{for } x=u, y=v)$$

-۷

$$\iint_S x^2\sqrt{5-4z}\,d\sigma=\int_0^1\int_0^{2\pi}u^2\cos^2 v.\sqrt{4u^2+1}.\,u\sqrt{4u^2+1}\,dv\,du=\int_0^1\int_0^{2\pi}u^3(4u^2+1)\cos^2 v\,dv\,du=\frac{11\pi}{12}$$

-۹ $9a^3$ -۱۱ $\frac{abc}{4}(ab+ac+bc)$ -۱۳ 2

-۱۵ $\frac{1}{30}(\sqrt{2}+6\sqrt{6})$

-۱۷ $\sqrt{6}/30$ -۱۹ -32 -۲۱ $\frac{\pi a^3}{6}$

-۲۳ $13a^4/6$ -۲۵ $2\pi/3$ -۲۷ $-73\pi/6$

-۲۹ 18 -۳۱ $\frac{\pi a^3}{6}$ -۳۳ $\frac{\pi a^2}{4}$ -۳۵ $\frac{\pi a^3}{2}$

-۳۷ -32 -۳۹ -4 -۴۱ $3a^4$

۴۳- $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$

۴۵- $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$ و $I_z=\frac{15\pi\sqrt{2}}{2}\delta$

۴۷- (الف)- $\frac{8\pi}{3}a^4\delta$ (ب)- $\frac{20\pi}{3}a^4\delta$

بخش ۱۶-۷

۱- 4π ۳- $-5/6$ ۵- 0 ۷- -6π ۹- $2\pi a^2$

۱۳- 12π ۱۵- $-\pi/4$ ۱۷- -15π

۲۵- $16I_y+16I_x$

بخش ۱۶-۸

۱- 0 ۳- 0 ۵- -16 ۷- -8π ۹- 3π

۱۱- $-40/3$ ۱۳- 45π ۱۵- $12\pi\left(4\sqrt{2}-1\right)$

۲۱- مقدار انتگرال هرگز از مساحت رویه S بیشتر نمی شود.

تمرین های عملی

۱- مسیر ۱: $2\sqrt{3}$؛ مسیر ۲: $1+3\sqrt{2}$

۳- $4a^2$ ۵- 0 ۷- $8\pi\sin(1)$

۹- 0 ۱- $\pi\sqrt{3}$ ۱۳- $2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

۱۵- $\frac{abc}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}}$ ۱۷- 50

۱۹-

$\mathbf{r}(\phi,\theta)=(6\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(6\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(6\cos\phi)\mathbf{k}$

$\frac{\pi}{6}\le\phi\le\frac{2\pi}{3}$ و $0\le\theta\le2\pi$

۲۱- $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+(1+r)\mathbf{k}$

$0\le r\le2$ و $0\le\theta\le2\pi$

۲۳- $\mathbf{r}(r,\theta)=(u\cos v)\mathbf{i}+2u^2\mathbf{j}+(u\sin v)\mathbf{k}$

$0\le u\le1$ و $0\le v\le\pi$

۲۵- $\sqrt{6}$ ۲۷- $\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

۲۹- پایستار ۳۱- ناپایستار

۳۳- $f(x,y,z)=y^2+yz+2x+z$

۳۵- مسیر ۱: ۲؛ مسیر ۲: $\frac{8}{3}$

۳۷- (الف)- $1-e^{-2\pi}$ (ب)- $1-e^{-2\pi}$

۳۹- ۰

۴۱- (الف)- $4\sqrt{2}-2$ (ب)- $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

۴۳- $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(1,\frac{16}{15},\frac{2}{3}\right)$؛ $I_x=\frac{232}{45}$ و $I_y=\frac{64}{15}$

$I_z=\frac{56}{9}$

۴۵- $\bar{z}=\frac{3}{2}$ و $I_z=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

۴۷- $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,49/12)$ و $I_z=640\pi$

۴۹- شار: $3/2$: گردش: $-1/2$

۵۳- 3

۵۵- $\frac{2\pi}{3}\left(7-8\sqrt{2}\right)$

۵۷- 0 ۵۹- π

تمرین های اضافی و پیشرفته

۱- 6π ۳- $2/3$

۵- (الف)- $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$

(ب)- $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{i}+-y\mathbf{k}$

(پ)- $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{i}$

۷- $\frac{16\pi R^3}{3}$

۹- $a=2$ ، $b=1$. مینیمم شار برابر ۴- است.

۱۱- (ب)- $\frac{16}{3}g$

(پ)- کار$=\left(\int_C gxy\,ds\right)\bar{y}=g\int_C xy^2\,ds=\frac{16}{3}g$

۱۳- (پ)- $\frac{4}{3}\pi w$

۱۹- اگر $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ باشد غلط است.